

Skrivtid: 14.00 – 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. (Obs: denna uppgift lösas inte om man har klarat duggan!)

Visa att utsagorna  $(p \wedge (\neg q)) \vee ((\neg p) \wedge q)$  och  $(p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q))$  är ekvivalenta.

2. Föorkorta bråket

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3}{x^4 + 2x^3 + 3x^2}$$

så långt som möjligt.

3. Bestäm alla heltalslösningar till den diofantiska ekvationen

$$34x + 700y = 6.$$

4. Bestäm den rest som fås då  $10^{10} + 100^{100}$  divideras med 7.

5. Visa med induktion att

$$\sum_{k=2}^n \frac{k-1}{2^k} = 1 - \frac{n+1}{2^n}$$

för alla heltal  $n \geq 2$ .

6. Polynomet  $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 10x + 3$  har ett rationellt nollställe.

- (a) Bestäm alla nollställen till  $f(x)$ .  
(b) Skriv  $f(x)$  som en produkt av irreducibla rationella polynom.

7. Polynomet  $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 8x - 8$  har ett rent imaginärt nollställe (det vill säga ett nollställe med realdel 0). Bestäm alla nollställen till  $f(x)$ .

8. Låt  $A$  vara mängden av reella tal  $x$  som uppfyller att  $x^2$  är ett rationellt tal, det vill säga

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in \mathbb{Q}\}.$$

Visa att  $A$  är en uppräknelig mängd.

**Lycka till!**

## Lösningar till duggan i Algebra I 2014–06–03

**1.** Båda utsagorna är sanna om och endast om precis en av  $p$  och  $q$  är sann. Därmed är utsagorna ekvivalenta.

**2.** Med hjälp av Euklides algoritm finner vi att  $x^2 + 2x + 3$  är en största gemensam delare till  $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3$  och  $x^4 + 2x^3 + 3x^2$ . Genom att faktorisera får vi

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3}{x^4 + 2x^3 + 3x^2} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)}{x^2(x^2 + 2x + 3)} = \frac{x^2 + 1}{x^2}.$$

**3.** Vi förenklar först till

$$17x + 350y = 3.$$

Sedan bestämmer vi SGD(350, 17) med hjälp av Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 350 &= 20 \cdot 17 + 10 \\ 17 &= 10 + 7 \\ 10 &= 7 + 3 \\ 7 &= 2 \cdot 3 + 1. \end{aligned}$$

Alltså är SGD(350, 17) = 1. Dessutom är

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 2 \cdot 3 = 7 - 2(10 - 7), \\ &= -2 \cdot 10 + 3 \cdot 7 = -2 \cdot 10 + 3(17 - 10) = \\ &= 3 \cdot 17 - 5 \cdot 10 = 3 \cdot 17 - 5(350 - 20 \cdot 17) = \\ &= -5 \cdot 350 + 103 \cdot 17. \end{aligned}$$

och därmed är  $(x, y) = (103, -5)$  en lösning till  $17x + 350y = 1$ . Alltså är  $(x, y) = (309, -15)$  en lösning till  $17x + 350y = 3$ . Eftersom SGD(350, 17) = 1 är lösningarna till  $17x + 350y = 3$  precis

$$\begin{cases} x = 309 - 350n, \\ y = -15 + 17n, \end{cases} \quad \text{där } n \in \mathbb{Z}.$$

**4.** Modulo 7 gäller att

$$10^{10} + 100^{100} \equiv 3^{10} + 2^{100} = (3^3)^3 \cdot 3 + (2^3)^{33} \cdot 2 = 27^3 \cdot 3 + 8^{33} \cdot 2 \equiv (-1)^3 \cdot 3 + 1^{33} \cdot 2 = -3 + 2 = -1 \equiv 6$$

Alltså är resten 6.

**5.** Om  $n = 2$  så är vänsterledet  $\frac{2-1}{2^2} = \frac{1}{4}$  och högerledet  $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ . Alltså stämmer utsagan i detta fall.

Låt  $m \geq 2$  och antag att

$$\sum_{k=2}^m \frac{k-1}{2^k} = 1 - \frac{m+1}{2^m}$$

Då gäller

$$\sum_{k=2}^{m+1} \frac{k-1}{2^k} = \sum_{k=2}^m \frac{k-1}{2^k} + \frac{m+1-1}{2^{m+1}} = 1 - \frac{m+1}{2^m} + \frac{m}{2^{m+1}} = 1 - \frac{2m+2-m}{2^{m+1}} = 1 - \frac{m+1+1}{2^{m+1}}.$$

Det vill säga, om utsagan gäller för  $n = m$  så gäller den även för  $n = m + 1$ . Alltså följer med induktion att

$$\sum_{k=2}^n \frac{k-1}{2^k} = 1 - \frac{n+1}{2^n}$$

gäller för alla heltalet  $n \geq 2$ .

- 6.** Eftersom  $f$  har heltalskoefficienter är varje rationellt nollställe på formen  $p/q$  där  $p|3$  och  $q|3$ , vilket motsvarar  $p/q \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 1/3\}$ . Eftersom alla koefficienter är positiva måste dessutom  $p/q < 0$ . Alltså är  $p/q \in \{-1, -3, -1/3\}$ . Genom att beräkna  $f(p/q)$  i de tre fallen ser vi att det enda rationella nollstället till  $f$  är  $-\frac{1}{3}$ . Alltså delar  $3x + 1$  polynomet  $f(x)$ . Divisionsalgoritmen ger

$$f(x) = (x^2 + x + 3)(3x + 1).$$

Ekvationen  $x^2 + x + 3 = 0$  har lösningarna  $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{11}i}{2}$ . Nollställena till  $f$  är alltså  $x_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}i}{2}$  och  $x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}i}{2}$ .

Eftersom  $x_2$  och  $x_3$  har nollskild imaginärdel är de inte reella tal och därmed inte heller rationella tal. Därmed är  $x^2 + x + 3$  irreducibelt över  $\mathbb{Q}$ . Polynomet  $3x + 1$  har grad 1 och är därför också irreducibelt över  $\mathbb{Q}$ . Faktoriseringen

$$f(x) = (x^2 + x + 3)(3x + 1).$$

ger därmed  $f$  skrivet som en produkt av irreducibla rationella polynom.

- 7.** Polynomet  $f$  har ett nollställe på formen  $bi$  där  $b \in \mathbb{R}$ . Alltså är  $f(bi) = 0$ , vilket betyder att

$$b^4 - 2b^3i - 2b^2 + 8bi - 8 = 0$$

Genom att jämföra real- och imaginärdel får vi

$$\begin{cases} b^4 - 2b^2 - 8 = 0 \\ -2b^3 + 8b = 0 \end{cases}$$

Den andra ekvationen är ekvivalent med  $b \in \{0, 2, -2\}$ . Insättning i den första ekvationen ger lösningarna  $b = \pm 2$ . Vi har alltså två nollställen  $x_1 = 2i$  och  $x_2 = -2i$ . Därmed delar  $(x - 2i)(x + 2i) = (x^2 + 4)$  polynomet  $f(x)$ . Divisionsalgoritmen ger

$$x^4 - x^3 + x^2 + 2 = (x^2 + 2x - 2)(x^2 + 4).$$

Vilket ger ytterligare två nollställen  $x_3 = -1 + \sqrt{3}$  och  $x_4 = -1 - \sqrt{3}$

- 8.** Låt  $y \in \mathbb{Q}$ . Då har ekvationen  $x^2 = y$  två reella lösningar  $x = \pm\sqrt{y}$  om  $y > 0$ , en reell lösning om  $y = 0$  och inga reella lösningar om  $y < 0$ . Det följer att funktionen  $f : \mathbb{Q} \rightarrow A$ , som ges av

$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{om } y \geq 0 \\ -\sqrt{-y} & \text{om } y < 0 \end{cases}$$

är bijektiv. Alltså finns en bijektion mellan  $A$  och  $\mathbb{Q}$  (det vill säga  $A$  har samma kardinalitet som  $\mathbb{Q}$ ). Eftersom  $\mathbb{Q}$  är uppräknelig är därmed  $A$  uppräknelig.