TENTAMEN - LINEAR ALGEBRA II 2018/01/09

JULIAN KÜLSHAMMER

English version

Time: 8:00–13:00. No aids allowed except a pen. All solutions should be accompanied with justifications.
Each of the following 8 exercises is worth 5 points, i.e. the total score of the tenta is 40 points.
If you achieve 18, 25, or 32 points, respectively, you will receive grade 3,4, or 5.
Up to 4 bonus points from the dugga on 2018/11/21 can be used for this tentamen.

1. (i) For which values of $a \in \mathbb{R}$ do the following polynomials form a basis $B = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ of $P_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 2 + x^2 \\ p_2(x) &= (7 + a)x - 3x^2 \\ p_3(x) &= 4x + ax^2 \end{aligned}$$

Justify your answer.

(ii) Let $B' = \{1, x, x^2\}$. In case that B is a basis provide the transition matrix $P_{B' \leftarrow B}$ from B to B'.

2. (i) Which of the following functions are linear? Justify your answer.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$$

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x + z \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

$$h\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}), \quad h(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 x^2$$

(ii) Choose one of the functions in (i) which is linear and determine a basis of its kernel, and a basis of its image.

3. Let

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 & 4 \\ -1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & -9 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Show that the eigenvalues of A are 0 and -1.

(ii) For each eigenvalue, determine a basis of the corresponding eigenspace.

(iii) Is A diagonalisable? Justify your answer.

4. Let $B = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ be a basis of $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(i) Determine the coordinate vector of $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ with respect to the basis B.

(ii) Let $f\colon M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ be the linear function given by $f(A) = \begin{pmatrix}8 & 3\\5 & 6\end{pmatrix}A$. Determine the matrix $[f]_{B\leftarrow B}$ with respect to the basis B of $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

5. Let V be a vector space. Let $\{b_1, b_2, b_3\}$ be a basis of V.

(i) Let $f\colon V \to \mathbb{R}^2$ be a function such that $f(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3) = \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}$. Prove that f is linear.

(ii) Determine the matrix $[f]_{E\leftarrow B}$ of f with respect to the basis B of V and the standard basis E of $\mathbb{R}^2$.

6. Let $U = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$.

(i) Give the definition of when a basis of an inner product space V is called orthonormal.

(ii) Find an orthonormal basis of U.

7. Solve the following system of differential equations

$$y_1'(t) = 4y_1(t) + 2y_2(t)$$
$$y_2'(t) = -y_1(t) + y_2(t)$$

with the initial condition $y_1(0) = 2, y_2(0) = 3$.

8. (i) On $V = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R}, x + y = 2\right\}$ define an addition $\boxplus$ and a scalar multiplication $\boxdot$ via

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x + x' - 1\\y + y' - 1\end{pmatrix}$$
$$\lambda \boxdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x - \lambda + 1\\\lambda y - \lambda + 1\end{pmatrix}$$

(We checked in the lecture that this defines a vector space.)

Let W be the subspace of $\mathbb{R}^2$ given by $W = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + y = 0\right\}$.

Let $g\colon V \to W$ be the function defined by $g\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x - 1\\y - 1\end{pmatrix}$. Show that g is an isomorphism.

(ii) What is $\dim V$? Justify your answer.

Good luck!

Svenska versionen

Skrivtid: 8:00–13:00 Inga hjälpmedel förtuom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklaranda text.
Tentamen består av åtta uppgifter värda 5 poäng vardera, d.v.s. maximalt kan man få 40 poäng på tentamen. Ett resultat om minst 18, 25, resp. 32 poäng ger betyg 3,4, resp. 5. Upp till 4 bonus poäng från duggan på 2018/11/21 kan användas för denna tentamen.

1. (i) För vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ utgör följanda polynom en bas $B = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ i $P_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 2 + x^2 \\ p_2(x) &= (7+a)x - 3x^2 \\ p_3(x) &= 4x + ax^2 \end{aligned}$$

Motivera ditt svar.

(ii) Låt $B' = \{1, x, x^2\}$. I de fall då B är en bas, ange basbytesmatrisen $P_{B' \leftarrow B}$ från B till B'.

2. (i) Vilka av följande funktioner är linjära? Motivera ditt svar.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$$

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x + z \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

$$h\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}), \quad h(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 x^2$$

(ii) Välj en av funktionerna i (i) som är linjär och bestäm en bas i dess kärna och en bas i dess bildrum.

3. Låt

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 & 4 \\ -1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & -9 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Visa att egenvärdena till matrisen A är 0 och -1.
(ii) För varje egenvärde, bestäm en bas i motsvaranda egenrum.
(iii) Är A diagonaliserbar? Motivera ditt svar.

4. Låt $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ vara en bas av $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(i) Bestäm koordinatvektorn av $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ med avseende på basen B.

(ii) Låt $f\colon M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ vara den linjär funktionen så att $f(A) = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} A$. Bestäm f:s matris med avseende på basen B i $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

5. Låt V vara ett vektorrum. Låt $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ vara en bas i V.

(i) Låt $f\colon V \to \mathbb{R}^2$ vara en funktion så att $f(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$. Bevisa att f är linjär.

(ii) Bestäm f:s matris $[f]_{E\leftarrow B}$ med avseende på basen B i V och standardbasen E i $\mathbb{R}^2$.

6. Låt $U = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$.

(i) Ange definitionen för när en bas i ett inre produktrum V kallas ortonormal.

(ii) Bestäm en ortonormal bas i U.

7. Lösa följande system av differentialekvationer

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 4y_1(t) + 2y_2(t) \\ y_2'(t) &= -y_1(t) + y_2(t) \end{aligned}$$

med begynnelsevärden $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 3$.

8. (i) På $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R}, x + y = 2 \right\}$ definieras en addition $\boxplus$ och en skalarmultiplikation $\boxdot$ via

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' - 1 \\ y + y' - 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \boxdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x - \lambda + 1 \\ \lambda y - \lambda + 1 \end{pmatrix}$$

(Vi bevisade på föreläsningen att detta definierar ett vektorrum.)

Låt W vara underrummet av $\mathbb{R}^2$ som ges av $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + y = 0 \right\}$.

Låt $g\colon V \to W$ vara funktionen som definieras av $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix}$. Visa att g är en isomorfism.

(ii) Vad är $\dim V$? Motivera ditt svar.

Lycka till!