

Skrivtid: 5 timmar. Tillåtna hjälpmedel: endast skrivdon. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 25, resp. 32 poäng, inklusive ev. bonuspoäng. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. För full poäng krävs att du noggrant motiverar varje steg i ditt resonemang. Påbörja varje uppgift på ett nytt blad. Lycka till!

1. (a) Låt A och B vara utsagor. Gör sanningsvärdestabell för utsagorna $A \wedge B$, $\neg A \vee B$ och $A \Leftrightarrow B$ (3 poäng)
(b) Låt M och N vara mängder i ett universum X . Rita Venndiagram för mängderna $M \cup N$ och $N \setminus M$. (2 poäng)
2. Lös den Diofantiska ekvationen $798x + 585y = 9$. (5 poäng)
3. (a) Skriv talet $(713)_{10}$ i bas 8. (2 poäng)
(b) Finn resten som fås då $4^{791} + 31$ delas med 13. (3 poäng)
4. Visa med induktion att
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
för alla naturliga tal $n \geq 1$. (5 poäng)
5. Låt M, N vara mängder, $f: M \rightarrow N$ en funktion och definiera relationen R på M genom $xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, d.v.s. två element $x, y \in M$ står i relation till varandra om f avbildar båda på ett och samma värde. Visa att R är en ekvivalensrelation. (5 poäng)
6. Låt M vara mängden av alla komplexa tal $z = a + bi$ där $a, b \in \mathbb{Z}$. Visa att mängden M är uppräknelig. (5 poäng)
7. Polynomet $3x^3 + 7x^2 + 11x + 3$ har ett rationellt nollställe. Hitta samtliga nollställen. (5 poäng)

8. Låt polynomet f ges av $f(x) = (x - 3)^4(x^2 + 2)(x - i)$.

- (a) Vilka nollställen har f och vilka är deras multipliciteter? (2 poäng)
- (b) Vilka nollställen har f och f' gemensamt och vilken multiplicitet har dessa i f' ? (2 poäng)
- (c) Ange en SGD för f och f' . (1 poäng)