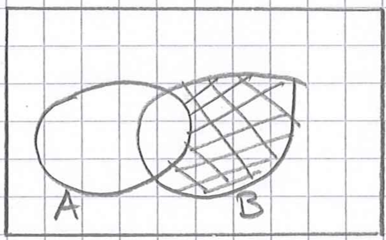
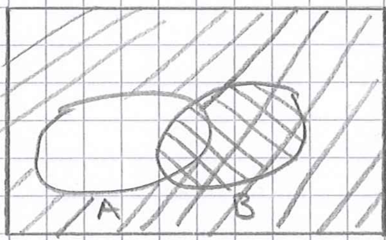
1 a) Vi sätter in utsagorna $p \to q$ och $(\neg p) \to (\neg q)$ i en tabell

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$(\neg p) \to (\neg q)$
S	S	F	F	S	S
S	F	F	S	F	S
F	S	S	F	S	F
F	F	S	S	S	S

Olika kolumner innebär att utsagorna inte är ekvivalenta

b) Diagrammet blir som följer:





$\#\# = B \setminus A$

$/// = A^*$, $\backslash\backslash\backslash = B$ $\Big\} \to \#\# = A^* \cap B$

Mängderna sammanfaller!

c) "Varje heltal större än eller lika med 2 kan skrivas som en produkt av primtal på precis ett sätt, bortsett från faktorernas ordning.

d) Ja, $\mathbb{N} \cup \{-1\}$ är uppräknelig.

Motivering: Funktionen $f: \mathbb{N} \cup \{-1\} \to \mathbb{N}$;
$$\begin{array}{l} -1 \mapsto 0 \\ 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ \quad \dots \end{array}$$
är bijektiv, varmed $\mathbb{N} \cup \{-1\}$ kan numreras på detta sätt.

Alternativ motivering: $\mathbb{N} \cup \{-1\}$ är en oändlig delmängd av den uppräkneliga mängden $\mathbb{Z}$, så den är uppräknelig.

2. $\nmid$ är *inte* reflexiv. Motexempel: $2 \nmid 2$ är falskt, ty $2 \mid 2$. (Detta gäller för övrigt för alla $n \in \mathbb{Z}$.)

$\nmid$ är *inte* symmetrisk. Motexempel: $4 \nmid 2$ men $2 \mid 4$ (så $x \nmid y \not\Rightarrow y \nmid x$).

$\nmid$ är *inte* transitiv. Motexempel: $2 \nmid 3$ och $3 \nmid 4$ men $2 \mid 4$. (så $((x \nmid y \wedge y \nmid z) \not\Rightarrow x \nmid z)$).

Svar: Nej. Nej. Nej.

---

3. Basfall $n=1$: $\left.\begin{array}{l} n! = 1 \\ n^n = 1^1 = 1 \end{array}\right\} 1 \leq 1$. Basfallet stämmer.

Induktionsantagande (IA): Antag att $p! \leq p^p$ för något $p \geq 1$.

Induktionssteg: Visa att då gäller $(p+1)! \leq (p+1)^{p+1}$.

__Bevis__: $(p+1)! = (p+1)\,p! \overset{IA}{\leq} (p+1)\,p^p \underset{(\text{ty } p \leq p+1)}{\leq} (p+1)(p+1)^p = (p+1)^{p+1}$.

Induktionsprincipen och ovanstående visar att $n! \leq n^n$ $\forall n \in \mathbb{Z}, n > 0$.

4a) Antag att hon köpt x burkar och y flaskor, vilka tillsammans alltså kostar $28x + 18y$. Men $28x + 18y \neq 83$ ty $2 \mid (28x + 18y)$ men $2 \nmid 83$.

b) Vi har att lösa den diofantiska ekvationen

$$28x + 18y = 82$$

1) $SGD(18, 28) = 2$, $2 \mid 82$, så lösningar finns.

2) Förkorta med 2: $28x + 18y = 82 \Leftrightarrow 14x + 9y = 41$. $\rightarrow$

4b), forts.: 3) Lös hjälpekvation $14x+9y=1$:

Euklides algoritm ger

$$14 = 1\cdot 9 + 5 \quad (i)$$
$$9 = 1\cdot 5 + 4 \quad (ii)$$
$$5 = 1\cdot 4 + 1 \quad (iii)$$
$$4 = 4\cdot 1 + 0$$

Uttryck 1 i term av 14 och 9:

$$1 \overset{(iii)}{=} 5-4 \overset{(ii)}{=} 5-(9-5) = 2\cdot 5 - 9 \overset{(i)}{=} 2(14-9)-9 = 2\cdot 14 - 3\cdot 9$$

En lösning till hjälpekvationen är $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$

4) En lösning till $14x+9y=41$ är $\begin{cases} x = 2\cdot 41 = 82 \\ y = -3\cdot 41 = -123 \end{cases}$

5) Allmän lösning ges av

$$\boxed{\begin{cases} x = 82 - 9n \\ y = -123 + 14n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}}$$

6) x och y är <u>antal</u>, så vi måste ha $x \geq 0$ och $y \geq 0$:

$$x \geq 0 \iff 82 - 9n \geq 0 \iff 82 \geq 9n \iff \boxed{n \leq \frac{82}{9}}$$

$$y \geq 0 \iff -123 + 14n \geq 0 \iff 14n \geq 123 \iff \boxed{n \geq \frac{123}{14}}$$

Så $n \leq \frac{82}{9}$ (som är (strax) större än $9 = \frac{81}{9}$, men mindre än $10 = \frac{90}{9}$), och $n \geq \frac{123}{14}$ (som är större än $8 = \frac{112}{14}$ men mindre än $9 = \frac{126}{14}$). Det enda tal som uppfyller detta är $n = 9$. Detta ger

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 82 - 9\cdot 9 = 1 \\ y &= -123 + 14\cdot 9 = 3 \end{aligned}}$$

Svar: Hon har köpt $\underline{\underline{1}}$ bunk och $\underline{\underline{3}}$ flaskor.

5. * f är <u>injektiv</u>, ty

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \longrightarrow x_1 = \pm x_2$, men $x_1, x_2 \geq 0$ ty $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, så då är $x_1 \neq -x_2$, dvs x_1 måste vara lika med x_2.

Så $f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow x_1 = x_2$, och f är injektiv.

* f är <u>inte surjektiv</u>, ty t ex 2 kan ej vara i värdemängden, eftersom $f(x) = x^2$ och 2 är inte en kvadrat av ett naturligt tal: $x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.

Svar: f är <u>injektiv</u> men <u>inte surjektiv</u>.

---

6. Jag presenterar två möjliga lösningar:

1) Omvandla till bas 10:

$(1101)_2 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 8+4+1 = 13$

$(10111)_2 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 16+4+2+1 = 23$

$13 + 23 = 36$. I basen 2 är 36 som följer:

$2^5 = 32$ är den högsta 2-potens mindre än eller lika med 36,

$36 = 1\cdot 2^5 + 4$

$4 = 1\cdot 2^2 + 0$

$\longrightarrow 36 = 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^2 = (100100)_2$.

Svar: $(100100)_2$.

2) Alternativ metod: addera i bas 2. Kom ihåg $1+1 = (10)_2$; $1+1+1 = (11)_2$:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle (1)(1)(1)(1)\;\;(1)} \\ 1101 \\ +\,10111 \\ \hline 100100 \end{array}$$

Svar: $(100100)_2$.

7. Om $3z^3+z^2+z+35=0$ har en rationell rot $\frac{p}{q}$ som är maximalt förkortad, gäller $p|35$ och $q|3$, dvs

$$p \in \{\pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 35\} \quad \text{och} \quad q \in \{\pm 1, \pm 3\}$$

$\frac{p}{q}$ är därför något av $\pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 35, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{7}{3}, \pm\frac{35}{3}$

Det enda av dessa som ligger mellan -2 och -3 är $-\frac{7}{3}$, och

$$3\left(-\frac{7}{3}\right)^3+\left(-\frac{7}{3}\right)^2+\left(-\frac{7}{3}\right)+35=3\left(-\frac{343}{27}\right)+\frac{49}{9}-\frac{7}{3}+35=$$

$$=-\frac{343}{9}+\frac{49}{9}-\frac{7}{3}+35=-\frac{\cancel{294}^{98}}{\cancel{9}_{3}}-\frac{7}{3}+35=-\frac{98}{3}-\frac{7}{3}+35=-\frac{105}{3}+35=$$

$$=-35+35=0.$$

Faktorsatsen ger då $(z+7/3)\,|\,(3z^3+z^2+z+35)$.

Dividera med det associerade polynomet $3z+7$:

$$\begin{array}{rl}
z^2-2z+5 & \\
\hline
3z^3+z^2+z+35 & \big|\, 3z+7 \\
-(3z^3+7z^2) & \\
\hline
-6z^2+z+35 & \\
-(-6z^2-14z) & \\
\hline
15z+35 & \\
-(15z+35) & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$\longrightarrow 3z^3+z^2+z+35=(3z+7)(z^2-2z+5)$

Så $3z^3+z^2+z+35=0 \iff (3z+7)=0$ eller $z^2-2z+5=0$

$\iff z=-\frac{7}{3}$ eller $z=1\pm\sqrt{1-5}$

$\iff z=-\frac{7}{3}$ eller $z=1\pm\sqrt{-4}$

Svar: $z=-\frac{7}{3}$ eller $z=1\pm 2i$

8. Vi vet från sats att $f(x)$ och $f'(x)$ har ett gemensamt nollställe:

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8x - 8 \longrightarrow f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 4x - 8 =$$
$$= 4(x^3 + 3x^2 + x - 2)$$

Euklides algoritm tillämpas för att bestämma en SGD till f och f':

1) Dividera $f(x)$ med $\frac{f'(x)}{4}$ (dvs förkorta bort 4 och använd associerat polynom för enklare räkningar):

$$\begin{array}{l|l}
 & x + 1 \\
x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8x - 8 & x^3 + 3x^2 + x - 2 \\
-(x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x) & \\
\quad x^3 + x^2 - 6x - 8 & \\
-(x^3 + 3x^2 + x - 2) & \\
\quad -2x^2 - 7x - 6 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8x - 8 = (x+1)(x^3 + 3x^2 + x - 2) - 2\left(x^2 + \frac{7}{2}x + 3\right)$$

2) Dividera $x^3 + 3x^2 + x - 2$ med resten $-2x - 7x - 6 = -2\left(x^2 + \frac{7}{2}x + 3\right)$, eller, för enklare räkningar, med det associerade $x^2 + \frac{7}{2}x + 3$

$$\begin{array}{l|l}
 & x - 1/2 \\
x^3 + 3x^2 + x - 2 & x^2 + \frac{7}{2}x + 3 \\
-(x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 3x) & \\
\quad -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2 & \\
-\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{3}{2}\right) & \\
\quad -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} &
\end{array}$$

$$\Rightarrow x^3 + 3x^2 + x - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{7}{2}x + 3\right) - \frac{1}{4}(x+2)$$

3) Dividera $x^2 + \frac{7}{2}x + 3$ med $x + 2$ (associerat till $-\frac{1}{4}(x+2)$):

$$\begin{array}{l|l}
 & x + 3/2 \\
x^2 + 7/2\,x + 3 & x + 2 \\
-(x^2 + 2x) & \\
\quad \frac{3}{2}x + 3 & \\
-\left(\frac{3}{2}x + 3\right) & \\
\quad 0 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{7}{2}x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)(x + 2) + 0$$

$\longrightarrow$

8, forts. Detta ger att $x+2$ är en SGD till f och f', dvs

-2 är ett nollställe till $f(x)$ och $f'(x)$. Detta måste vara det dubbla nollstället till f (eftersom detta är det enda gemensamma nollstället). Alltså gäller $(x+2)^2 \mid f(x)$.

Dividera $f(x)$ med $(x+2)^2 = x^2+4x+4$

$$
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{c}{x^2-2} & \\
\hline
x^4+4x^3+2x^2-8x-8 & x^2+4x+4 \\
-(x^4+4x^3+4x^2) & \\
\hline
\quad -2x^2-8x-8 & \\
\quad -(-2x^2-8x-8) & \\
\hline
\qquad 0 &
\end{array}
$$

Dvs $f(x) = x^4+4x^3+2x^2-8x-8 = (x^2-2)(x^2+4x+4)$

Så $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2=0$ eller $x^2+4x+4=0$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ eller $x=-2$

Svar: $\underbrace{x=-2}_{\text{dubbelt nollställe}}$ eller $x=\pm\sqrt{2}$