

Skriftid ?–?. Tillåtna hjälpmedel: Endast skrivdon. Lösningarna ska vara försedda med motiveringar. Varje uppgift ger högst 5 poäng totalt. För betygen 3, 4 respektive 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng totalt. Ange din anonymitetskod på varje papper. Saknar du anonymitetskod skriver du namn och personnummer på varje blad.

1. Låt  $A$ ,  $B$  och  $C$  vara mängder. Visa, till exempel med hjälp av Venn-diagram, att  $(A \cup B \cup C)^* = A^* \cap B^* \cap C^*$ . (Här betecknar  $A^*$ ,  $B^*$  och  $C^*$  komplementen av  $A$ ,  $B$  respektive  $C$ ). (5)
2. Skriv talet  $(183)_{tio}$  i basen fyra. (5)
3. Bestäm den sista siffran i talet  $7^{38}$ . (5)
4. Bevisa med hjälp av induktion att likheten  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  gäller för alla  $n \geq 1$ . (5)
5. Låt  $a$  och  $b$  vara heltal och låt  $p$  vara ett primtal.
  - (a) Bevisa att  $a|b$  medför att  $a^2|b^2$ . (2)
  - (b) Bevisa att  $p|a^2$  medför att  $p^2|a^2$ . (3)
6. (a) Visa att mängden av primtal är en uppräkneligt oändlig mängd. (2)  
(b) Låt  $k$  vara ett reellt tal. Visa att mängden i planet  $L_k = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y = kx\}$  har samma kardinalitet som  $\mathbb{R}$ . (3)
7. (a) Betrakta mängden av alla punkter i planet, det vill säga alla  $(x, y)$  sådana att  $x \in \mathbb{R}$  och  $y \in \mathbb{R}$ . Visa att relationen *har samma avstånd till origo* är en ekvivalensrelation. (3)  
(b) Beskriv ekvivalensklasserna för denna ekvivalensrelation. (2)
8. Ekvationen  $6x^4 - x^3 + 23x^2 - 4x - 4 = 0$  har två rationella rötter. Lös ekvationen fullständigt. (5)