

Skrivtid: 5 timmar. Tillåtna hjälpmmedel: endast skrivdon. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 25, resp. 32 poängsättning. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. För full poäng krävs att du noggrant motiverar varje steg i ditt resonemang. Påbörja varje uppgift på ett nytt blad. Lycka till!

1. Låt  $A$ ,  $B$  och  $C$  vara utsagor. Konstruera en utsaga med hjälp av utsagorna  $A$ ,  $B$  och  $C$  som har samma sanningsvärdet som utsagan  $P$  i nedanstående sanningsvärdstabell och bevisa att de har samma sanningsvärdet. (5 poäng)

$A$	$B$	$C$	$P$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	F

2. Lös den Diofantiska ekvationen  $756x - 260y = 8$ . (5 poäng)
3. (a) Talet  $3B80EF$  är ett hexadecimalt tal, d.v.s. skrivet i bas 16 där  $A = 10$ ,  $B = 11$ ,  $C = 12$ ,  $D = 13$ ,  $E = 14$  och  $F = 15$ . Skriv talet i bas 10. Som hjälp kan du använda att  $16^2 = 256$ ,  $16^3 = 4096$ ,  $16^4 = 65536$  och  $16^5 = 1048576$ . (4 poäng)
- (b) Ett vanligt sätt att ange färger i en dator är som tre stycken tvåsiffriga hexadecimala tal. De tre talen anger hur mycket rött, grönt och blått som ingår i färgen, i den ordningen. Ju större tal desto mer av den färgen ingår. Talet ovan beskriver en färg genom att dela upp det som de tre talen  $3B$ ,  $80$  och  $EF$  där  $3B$  anger hur mycket rött som ingår,  $80$  anger hur mycket grönt som ingår och  $EF$  anger hur mycket blått som ingår. Vilken färg är starkast? (1 poäng)
4. Visa med induktion att talet  $3^{2n+1} + 5^{2n}$  är delbart med 4 men inte med 8 för alla heltal  $n \geq 0$ . (5 poäng)
5. Låt relationen  $R$  på mängden  $\mathbb{C}$  ges av  $z R w \Leftrightarrow |z| = |w|$ . Visa att  $R$  är en ekvivalensrelation och beskriv en av dess ekvivalensklasser. (5 poäng)

6. Låt  $M$  vara mängden av alla oändliga följder av nollor och ettor, d.v.s.  $M = \{(a_0, a_1, a_2, \dots) : a_i = 0, 1 \quad \forall i \geq 0\}$ . Visa att mängden  $M$  är överuppräknelig. Tips: Antag att  $M$  istället är uppräknelig. Hur kan vi då hitta en motsägelse? (5 poäng)
7. Polynomet  $f(x) = x^4 + (-4+i)x^3 + (7-4i)x^2 + (-8+5i)x + 10$  har minst ett nollställe på formen  $x = bi$  där  $b$  är något reellt tal. Hitta samtliga nollställen till  $f$ . (5 poäng)
8. Ange för var och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Endast svar krävs
- (a) Varje polynom med heltalskoefficienter har rationella nollställen. (1 poäng)
  - (b) Varje polynom av grad minst 1 kan skrivas som en produkt av polynom av grad 1. (1 poäng)
  - (c) Om ett reellt polynom har ett nollställe  $a + bi$  där  $a, b \in \mathbb{R}$  så är även  $a - bi$  ett nollställe till polynomet. (1 poäng)
  - (d) Varje reellt polynom av grad minst 1 har ett reellt nollställe. (1 poäng)
  - (e) Låt  $f$  vara ett irreducibelt polynom som delar produkten  $gh$  av polynomen  $g$  och  $h$ . Då måste  $f$  dela  $g$  eller  $h$ . (1 poäng)