Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Seidon Alsaody, Martin Herschend, Julian Külshammer

Tentamen 2021–08–27
Linjär algebra II

Skrivtid: 14:00-19:00. Tillåtna hjälpmedel: Kursboken och egna anteckningar. Tentan består av 8 uppgifter och varje uppgift är värd 5 poäng. Totalt krävs 18 poäng för betyget 3, 25 poäng för betyget 4 och 32 poäng för betyget 5. Alla lösningar ska innehålla fullständiga resonemang och inte bara svar. ***An English version of the exam can be found below.***

Uppgift 1. Ge ett exempel på vart och ett av följande, eller motivera kort varför det inte finns något sådant.

(a) En linjärt oberoende mängd i $\mathbb{P}_3$ (vektorrumet av alla polynom av grad högst 3) som innehåller 5 polynom.

(b) En 3×3-matris som inte är inverterbar och som har egenvärdena 2, 3 och 5.

(c) En skalärprodukt på $\mathbb{R}^2$ med avseende på vilken vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ har längd 2.

Uppgift 2. I vekorrummet $\mathbb{V}$ av alla kontinuerliga funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betraktar vi följande tre delmängder:

(a) $\mathbb{U}_1 = \{f \in \mathbb{V} \mid f(2) = f(1)\}$,

(b) $\mathbb{U}_2 = \{f \in \mathbb{V} \mid f(2) = 3\}$,

(c) $\mathbb{U}_3 = \{f \in \mathbb{V} \mid f(2) \geq 0\}$.

För var och en av dessa delmängder, avgör om den är ett underrum. Motivera väl.

Uppgift 3. Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestäm en bas till A:s kolonnrum.

(b) Bestäm en bas till A:s radrum.

(b) Finns det en 3×3-matris med samma rang som A? Ge i så fall exempel på en sådan.

Uppgift 4. Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Är A diagonaliserbar? Om den är det, bestäm en bas av $\mathbb{R}^3$ av egenvektorer till A, om inte är, motivera ditt svar.

(b) Är A ortogonalt diagonaliserbar? Om den är det, bestäm en ortonormalbas av $\mathbb{R}^3$ av egenvektorer till A, om inte, motivera ditt svar.

Var god vänd!

Uppgift 5.

(a) Bestäm basbytesmatrisen från basen $\underline{\mathbf{v}} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ till basen $\underline{\mathbf{w}} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ av $\mathbb{R}^3$.

(b) Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ vara basbytesmatrisen från basen $\underline{\mathbf{u}} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ till en bas $\underline{\mathbf{t}}$ av $\mathbb{R}^2$. Bestäm $\underline{\mathbf{t}}$.

(c) Låt $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vara linjär avbildningen, som med avseende på baserna $\underline{\mathbf{w}}$ av $\mathbb{R}^3$ och $\underline{\mathbf{u}}$ av $\mathbb{R}^2$ har matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vad är f:s matris med avseende på baserna $\underline{\mathbf{v}}$ och $\underline{\mathbf{t}}$?

Uppgift 6. Visa att ytan som ges av ekvationen

$$9x_1^2 + 10x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_3 = 20,$$

är en ellipsoid. Bestäm de punkter på ellipsoiden som ligger längst från orgio. Punkternas koordinater ska anges i det ursprungliga koordinatsystemet.

Uppgift 7. Bestäm den lösning till följande system av linjära differentialekvationer

$$\begin{cases} y_1' &= -2y_1, \\ y_2' &= 5y_1 + 3y_2, \\ y_3' &= 11y_1 + 2y_2 + y_3. \end{cases}$$

som uppfyller $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 1$.

Uppgift 8. Låt $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ eller } y = 0 \right\}$. Definiera en addition på V genom

- $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ 0 \end{pmatrix}$,
- $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y + y' \end{pmatrix}$,
- $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 0 \end{pmatrix}$ för $x \neq 0$ och $y \neq 0$.

Vilka av vektorrumdaxiomen uppfyller V med denna addition och den vanliga skalarmultiplikationen?

Uppsala University
Department of Mathematics
Seidon Alsaody, Martin Herschend, Julian Kľshammer

Exam 2021–08–27
Linear algebra II

Writing time: 14:00-19:00. Permitted aids: the course book and your own notes. The exam consists of 8 problems, each problem worth 5 points. A sum of 18 points is required for the grade 3, 25 points for the grade 4, and 32 points for the grade 5. All solutions must contain complete reasoning and not only answers. ***En svensk version av tentamen finns ovan.***

Problem 1. Give an example of each of the following, or explain why it does not exist.

(a) A linearly independent subset of $\mathbb{P}_3$ (the vector space of all polynomials of degree at most three) containing 5 polynomials.

(b) A 3×3-matrix that is not invertible and that has the eigenvalues 2, 3 and 5.

(c) An inner product on $\mathbb{R}^2$ with respect to which the vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ has length 2.

Problem 2. In the vector space $\mathbb{V}$ of all continuous functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ we consider the following three subsets:

(a) $\mathbb{U}_1 = \{f \in \mathbb{V} \mid f(2) = f(1)\}$,

(b) $\mathbb{U}_2 = \{f \in \mathbb{V} \mid f(2) = 3\}$,

(c) $\mathbb{U}_3 = \{f \in \mathbb{V} \mid f(2) \geq 0\}$.

For each of these subsets, determine whether it is a subspace. Give proper explanation.

Problem 3. Consider the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Find a basis for the column space of A.

(b) Find a basis for the row space of A.

(b) Does there exist a 3×3-matrix with the same rank as A? If so, give an example.

Problem 4. Consider the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Is A diagonalisable? If it is, determine a basis of $\mathbb{R}^3$ consisting av eigenvectors of A, if it is not, justify your answer.

(b) Is A orthogonally diagonalisable? If it is, determine an orthonormal basis of $\mathbb{R}^3$ consisting av eigenvectors of A, if it is not, justify your answer.

Please turn over!

Problem 5.

(a) Determine the base change matrix from the basis $\underline{\mathbf{v}} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ to the basis $\underline{\mathbf{w}} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ of $\mathbb{R}^3$.

(b) Let $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ be the base change matrix from the basis $\underline{\mathbf{u}} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ to a basis $\underline{\mathbf{t}}$ of $\mathbb{R}^2$. Determine $\underline{\mathbf{t}}$.

(c) Let $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ be the linear map, which with respect to the bases $\underline{\mathbf{w}}$ of $\mathbb{R}^3$ and $\underline{\mathbf{u}}$ of $\mathbb{R}^2$ has the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. What is the matrix of f with respect to the bases $\underline{\mathbf{v}}$ and $\underline{\mathbf{t}}$?

Problem 6. Show that the surface given by the equation

$$9x_1^2 + 10x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_3 = 20,$$

is an ellipsoid. Determine the points on the ellipsoid which are furthest away from the origin. The coordinates of these points should be given in the original coordinate system.

Problem 7. Determine the solution to the following system of linear differential equations

$$\begin{cases} y_1' &= -2y_1, \\ y_2' &= 5y_1 + 3y_2, \\ y_3' &= 11y_1 + 2y_2 + y_3. \end{cases}$$

which satisfies $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 1$.

Problem 8. Let $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ or } y = 0 \right\}$. Define an addition on V via

- $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ 0 \end{pmatrix}$,
- $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y + y' \end{pmatrix}$,
- $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 0 \end{pmatrix}$ for $x \neq 0$ and $y \neq 0$.

Which of the vector space axioms are satisfied for V with this addition and the normal scalar multiplication?