UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Ingrid Lindström

PROV I MATEMATIK
Diskret matematik
IT, DVK, MaK, Lärarprogrammet, Fristående kurs
2009-04-17

Skrivtid: 8-13. *Inga hjälpmedel*. Alla svar ska MOTIVERAS.
Varje uppgift är värd 5 poäng. Minst 18 poäng krävs för betyget 3, 25 för betyget 4 och 32 för betyget 5.
Vänligen påbörja varje uppgift på en ny sida och skriv enbart på papperets ena sida.

LYCKA TILL!

1. Förkorta följande bråk så långt som möjligt

$$\frac{5525}{1445}$$

2. Låt $f(x) = x^4 + 2x^2 - 8$ och låt $g(x) = 4x^4 - 4x^2 - 8$

a) Bestäm EN största gemensam delare till polynomen $f(x)$ och $g(x)$.

b) Bestäm ALLA största gemensamma delare till polynomen $f(x)$ och $g(x)$.

3. $\mathbf{K_5}$ betecknar den fullständiga grafen med 5 noder (hörn).

a) Ange två olika Hamiltoncykler $\mathbf{C}_1$ och $\mathbf{C}_2$ i $\mathbf{K_5}$ sådana att $\mathbf{C}_1$ och $\mathbf{C}_2$ inte har någon gemensam kant.

b) Avgör om $\mathbf{C}_1$ och $\mathbf{C}_2$ är isomorfa.

4. Konstruera en kodmängd av längd 6 som innehåller minst 8 kodord och som rättar minst ett fel.

5. Skriv polynomet $f(x) = x^5 + 6x^3 + 4x^2 + 5x + 4$ i $(\mathbf{Z}_{11}[x], +_{11}, \bullet_{11})$ som en produkt av irreducibla polynom.

6. Låt F vara den cartesiska produkten $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3$, dvs F består av alla ordnade par (a, b) av element från $\mathbf{Z}_3$. Definiera operationen $\otimes$ på F genom

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

där produkterna i högerledet är produkter av talen i $\mathbf{Z}_3$.

Visa att det finns en enhet med avseende på $\otimes$ samt att alla par utom $(0, 0)$ har en invers med avseende på $\otimes$.

7. Formulera Fermats sats. Bevisa satsen!

8. Betrakta polynomet $f(x) = x^2 + 3x + A$.

a) Bestäm de värden på A för vilka $f(x)$ är irreducibelt i $(\mathbf{Z}_5[x], +_5, \bullet_5)$.

b) För de värden på A som erhölls i **(a)**, bestäm antalet element i den kropp F_A som fås då man räknar i $(\mathbf{Z}_5[x], +_5, \bullet_5)$ modulo $f(x)$. Ange också ett element av ordning 2 i den multiplikativa gruppen $F_A - \{0\text{-polynomet}\}$.