

Skriftid: 9-14. *Tillåtna hjälpmedel:* Inga, annat än pennor, radergum och papper (det sista tillhandahålls). *Poängsättning:* Varje (a)-del ger maximalt 3 poäng; varje (b)-del ger maximalt 2 poäng. *Betygsgränser:* För betyg 3 krävs minst 2 poäng på varje (a)-del samt sammanlagt minst 18 poäng; för betyg 4, skall man ha uppnått kravet för betyg 3 och fått sammanlagt minst 25 poäng; för betyg 5 skall man ha uppnått kravet för betyg 3 och fått sammanlagt minst 32 poäng. *Anmärkningar:* Lösningarna skall innehålla relevanta förklaringar och uträkningar.

1. (a) Formulera vad som skall bevisas i basfallet samt i induktionssteget i ett induktionsbevis för att olikheten

$$\frac{n!}{2} > 2^n \text{ stämmer för alla } n = 5, 6, 7, 8, \dots$$

- (b) Bevisa med induktion att ovanstående olikhet gäller för alla $n = 5, 6, 7, 8, \dots$

2. (a) På en hylla skall 3 matematikböcker, 4 fysikböcker och 2 kemiböcker ställas så att böcker i samma ämne kommer intill varandra. På hur många sätt kan detta göras?

- (b) Tio kronor skall delas mellan fyra personer. På hur många sätt kan detta göras om vi antar att varje person får $0, 1, 2, \dots$, eller 10 kronor (dvs. heltalsbelopp)?

3. (a) Beskriv mängden av reella tal x som löser olikheten $|2x - 5| < 3x$.

- (b) Beskriv mängden av reella tal x som löser olikheten

$$\frac{x(x+1)}{6} > 1.$$

(Mängderna kan beskrivas med olikheter eller med intervall.)

4. (a) Förenkla följande uttryck till ett heltal:

$$2^{(\log_2(3)+\log_3(18)-\log_3(2))}$$

- (b) Lös ekvationen

$$\log_{10}(10x^2) - \log_{10}(4 - 3x) = 1.$$

5. (a) Beräkna kvoten och resten då $x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 16x + 20$ divideras med $x^2 - 4$.

- (b) Skriv $x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 16x + 20$ som en produkt av faktorer som har grad 1.

(Ledning: Gör först divisionen i del (a).)

6. (a) En ellips beskrivs av följande information. Dess centrum är $(0, 0)$. De punkter på ellipsen som är längst från $(0, 0)$ är $(-4, 0)$ och $(4, 0)$. De punkter på ellipsen som är närmast $(0, 0)$ är $(0, -2)$ och $(0, 2)$. Beskriv ellipsens ekvation, samt ekvationen för linjen som passerar igenom punkterna $(4, 0)$ och $(0, 2)$.

- (b) Gör en skiss av kurvan $y = x^2 - 4x + 1$. Det skall framgå var i xy-planet som kurvan når sin nedersta punkt och skissen skall motiveras med hjälp av kvadratkomplettering och resonemang om förskjutningar. Det räcker inte att bara räkna ut några punkter på kurvan.

7. (a) Lös ekvationen $\cos(2x) = -\frac{1}{2}$.

- (b) Lös ekvationen $\sin^2 x + 3 \cos^2 x = 2$.

8. (a) Beräkna följande produkt och kvot och ange resultaten på polär form:

$$(-3\sqrt{3} + 3i)(\sqrt{2} + \sqrt{2}i) \quad \frac{-3\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$$

- (b) Lös ekvationen $x^4 + 16 = 0$.

Lycka till!