Tentan: Fourier Analysis 1MA211
Polacksbacken skrivsalen
2016-12-21, 8:00-13:00

Material tillåtet: Mathematics Handbook, Physics Handbook, utskrivna blad av formler
Vanligen får man godkänd med 40% procent.

Problem (10) • Bestäm om funktionsserien $\{f_n\}$ med

$$f_n(x) = \frac{2nx}{n^2x^2+1}$$

är punktvist konvergent, (1) eller likformigt konvergent. (2)

• Lösning: den är punktvist konvergent men inte likformigt konvergent. T.ex, man kan se att på $f_n(1/n) = 1$ för alla n, så finns det inte ett ϵ så att $|f_n(x)| < \epsilon$ för alla $n > N$ och x.

• Bestäm om funktionserie

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin nx$$

är konvergent och likformigt konvergent (ange vilken test har du kan använt). (4)

• Lösning: den är likformigt konvergent. T.ex Dirichlets M-test: $|((-1)^n/n^2)\sin nx| \leq 1/n^2$ och $\sum_n 1/n^2 < \infty$.

• För en talföljd $\{a_n\} = \{1, 0, 0, -1, 1, 0, 0, -1, 1, 0, 0, -1, \cdots\}$, beräkna dess Cesarosumma. (3)

• Lösning: Delsumman $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$ är $1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, \cdots$, och man ser att för trefjärde del av tid, är $s_n = 1$, därför Cesaros summan är $3/4$.

Problem (10)

Betrakta våg ekvationen

$$(\diamondsuit) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} h(t,x) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} h(t,x), \quad x \in [0, L], \quad c^2 > 0$$

med randvillkoret

$$h_x(t, 0) = h(t, L) = 0$$

och begynnelsesvillkoret

$$h(0,x) = 2\cos\frac{3\pi x}{2L}, \quad \dot{h}(0,x) = 7\cos\frac{5\pi x}{2L}.$$

Lös problemet med Fourierserien. Först, enligt randvillkoret, bestäm med vilken bas ska ni uteckla $h(t,x)$. (2)

• Lösning: Vi har ND typ randvilkor, så är basen

$$\{\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}, k = 0, 1, 2, \cdots\}.$$

Nu sätt in Fourierserien i $(\diamondsuit)$ och ni skall få en serie av differentiella ekvationer i t, lös dem och ger gen mest generalla lösningen. (3)

• Lösning: Skriv

$$h(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(t)\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}$$

och man får

$$\ddot{a}_k(t)=-\omega_k^2 a_k(t),\quad \omega_k^2=c^2\big(\frac{(2k+1)\pi}{2L}\big)^2,$$
$$a_k(t)=\alpha_k\cos\omega_k t+\beta_k\sin\omega_k t.$$

Nu matcha lösningen med begynnelsvillkoret och bestäm lösningen helt. (5)

• Lösning:

$$h(t,x)=2\cos(\omega_3 t)\cdot\cos\frac{3\pi x}{2L}+\frac{7}{\omega_5}\sin(\omega_5 t)\cdot\cos\frac{5\pi x}{2L}.$$

Problem (10)

• Definiera en periodisk funktion $f(x)$ med period 2, och inom $[-1,1]$ den är

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x\in[-1,0)\\ 1 & x\in[0,1)\end{cases},$$
$$f(x+2)=f(x).$$

Bestäm dess Fourierserie. (4)

• Lösning: För att beräkna Fourier serie, gör man integralen

$$b_n=\frac{2}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\sin(n\pi x)dx=-\int_{-1}^{0}\sin(n\pi x)dx+\int_{0}^{1}\sin(n\pi x)dx=\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi},$$

Därför

$$f(x)=\sum_{n>0}\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}\sin n\pi x=\sum_{k\geq 0}\frac{4}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)\pi x.$$

• Är Fourierserien ni fick konvergent punktvist, och i så fall vad konvergerar den till? Varför kan inte serien vara likformigt konvergent? (2)

• Lösning: Eftersom $f(x)$ är styckvist C^1, serien konvergerar punkvist (man ser den också från den satsen som är anpassad för summan av typ $\sum_n a_n b_n$, om $a_n>0$ och $a_n\to 0$ monotont, och $|\sum_1^N b_n|<M$ för alla N.). Serien konvergerar till ± 1 förutom $x\in\mathbb{Z}$, där konvergerar serien till 0. Eftersom serien konvergerar till en dikontinuerlig funktion, konvergensen kan inte vara likformigt.

Problem (10) Ni kommer att lösa följande pde

$$h_t(t,x)=(1-x^2)h_{xx}(t,x)-2xh_x(t,x),\quad x\in[-1,1]\tag{1}$$
$$h(0,x)=x-x^2\tag{2}$$

i några steg.

Låt V vara ett vektorrum som består av alla polynom definierade på $[-1,1]$, med L_2-norm

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$$

• Ni ska utveckla $h(t,x)$ som

$$h(t,x) = \sum_{n\geq 0} a_n(t) P_n(x), \tag{3}$$

där $P_n(x)$ löser följande egenvärde problem

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' = -n(n+1)P_n \tag{4}$$

och är ortogonala mot varandra. Stoppa Eq.3 i Eq.1 och skriv ner den ordinarie ekvaionen ni får (3 pt).

Om ni inte kan känner igen lösning till Eq.4, ni kan följa stegen nedan.

Gör $\{1, x, x^2\}$ till ett ON system med Gram-Schmidt process. (3 pt) Visa att varje vektor i ert ON system löser Eq.4, bestäm egenvärde. (2 pt)

Nu Matcha begynnelsesvilkor Eq.2 och bestäm er lösning hellt. (2 pt)

• Lösning: Srkiv

$$h(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) P_n(x),$$

och stoppa i anstasen

$$\begin{aligned} &\dot{a}_n(t) = -n(n+1)a_n(t), \\ &a_0(0) = -\frac{1}{3}, \quad a_1(0) = 1, \quad a_2(0) = -\frac{1}{3}, \quad a_{\geq 3}(0) = 0. \end{aligned}$$

Den sista raden kommer ifrån utveckling $x - x^2 = -1/3P_0 + P_1 - 1/3P_2$. Därför

$$h(t,x) = -\frac{1}{3} + xe^{-2t} - \frac{1}{3}(3x^2-1)e^{-6t}.$$

Problem (10)

• Beräkna först Fouriertransformen av funktionen $e^{-|x|}$, vilket vi betcknar som $\hat{f}(k)$ (2)

• Använd Plancherals formel för att beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+k^2)^2} dk.$$

(3)

• Betrakta värmeledningsproblemet på x-axeln

$$\frac{\partial}{\partial t} h(t,x) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} h(t,x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad a^2 > 0$$

där $h(t,x)$ är temperaturen i punkten x vid tiden t. Vid $t=0$, $h(0,x) = f(x)$ där

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Lös problemet med Fouriertransform. (5)

• Lösning:

$$\hat{f}(k) = \frac{2}{1+k^2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+k^2)^2} dk = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2} e^{-|x|})^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

Efter FT $h(t,x) \to \hat{h}(t,k)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{h}(t,k) = -a^2k^2\hat{h}(t,k),$$
$$\hat{h}(t,k) = c(k)e^{-a^2k^2t},$$

där $c(k)$ är en okänd funktion av k som bestäms av begynnelses vilkor.

Vi Frourier transformerar också $f(x)$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \sqrt{\pi}e^{-\frac{k^2}{4}}, \\
c(k) &= \hat{f}(k), \\
h(t,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\pi}e^{-\frac{k^2}{4}}e^{-a^2k^2t}e^{ikx}dk \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{1/4+a^2t}}e^{-\frac{x^2}{1+4a^2t}} = \sqrt{\frac{1}{1+4a^2t}}e^{-\frac{x^2}{1+4a^2t}}.
\end{aligned}$$

Problem (10) Beräkna Laplacetransformerna av $f(t) = \sin t$ och $g(t) = t^2$. (3)

Tillämpa Laplacetransformen för att lösa integral ekvation

$$y''(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2\int_0^t y(u)\sin(t-u), \quad t \geq 0$$

med begynnelsesvilkor $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$. Ni kan tillämpa Laplacetransformen på ekvationen ovan och därmed konvertera den till en algebraisk ekvation. Kom ihåg att $\widehat{y'}(s) = -y(0) + s\hat{y}(s)$, $\widehat{y''}(s) = -y'(0) - sy(0) + s^2\widehat{y}(s)$. Och den andra termen på HL kan anses som en faltning (7)

Lösning:

$$\begin{aligned}
&\widehat{\sin t} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i}\right) = \frac{1}{1+s^2}, \\
&\widehat{t^2} = \frac{2}{s^3}.
\end{aligned}$$

Tillämpa LT till ekvationen

$$\begin{aligned}
&-y'(0) - sy(0) + s^2\widehat{y}(s) = \frac{2}{s^3} + 2\frac{\hat{y}}{1+s^2} \\
&-1 + s^2\widehat{y}(s) = -\frac{1}{s^3} + \frac{2\hat{y}}{1+s^2} \\
&-1 + \frac{1}{s^3} = \hat{y}\left(\frac{2}{1+s^2} - s^2\right) \\
&\frac{1-s^3}{s^3} = -\hat{y}\frac{(s^2+2)(s^2-1)}{1+s^2} \\
&\frac{(1-s)(1+s+s^2)}{s^3} = -\hat{y}\frac{(s^2+2)(s+1)(s-1)}{1+s^2} \\
&\hat{y} = \frac{(1+s+s^2)(1+s^2)}{s^3(s^2+2)(s+1)} \\
&\hat{y} = \frac{1}{2s^3} + \frac{3}{4s} - \frac{2}{3(s+1)} + \frac{(4-\sqrt{2}i)}{24\sqrt{2}i(s-\sqrt{2}i)} - \frac{(4+\sqrt{2}i)}{24\sqrt{2}i(s+\sqrt{2}i)} \\
&y = \frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{4} - \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{(4-\sqrt{2}i)}{24\sqrt{2}i}e^{\sqrt{2}it} - \frac{(4+\sqrt{2}i)}{24\sqrt{2}i}e^{-\sqrt{2}i}.
\end{aligned}$$