UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Walter Mazorchuk
Örjan Stenflo

LINJÄR ALGEBRA II
Samtliga program
VT2017

Tentamen 2017–06–08

Skrivtid: 08.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.

Alla lösningar skall vara försedda med motiveringar.
Varken bonuspoäng eller dugga kan tillgodoräknas till denna tenta.
Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng.
För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25, respektive 32 poäng.

1. Låt V vara det linjära delrum till $\mathrm{Mat}_{2\times3}(\mathbb{R})$ som spänns upp av matriserna

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$
$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, M_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, M_6 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm en bas i V som består av några av dessa matriser.

(b) Bestäm koordinaterna för alla dessa matriser i den bas som du har valt ovan.

(c) Avgör om matrisen $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ tillhör V och om så är fallet, bestäm N:s koordinater i den bas som du har valt ovan.

2. Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som geometriskt betyder projektionen på planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ längs vektorn $v = (1, 2, -2)^t$. Bestäm F:s matris i standardbasen.

3. Låt N vara det delrum till $\mathbb{E}^4$ som spänns upp av vektorerna

$$v_1 = (0, 1, 1, 1)^t; \quad v_2 = (-1, 1, 1, 1)^t; \quad v_3 = (2, 2, 2, 2)^t.$$

(a) Bestäm en ON-bas i $N^{\perp}$.

(b) Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $x = (2, 1, 3, -1)^t$ på N.

(c) Bestäm avståndet från x till N samt avståndet från x till $N^{\perp}$.

Var god vänd

4. Låt G vara den linjära avbildning från $\mathbb{R}^4$ till $\mathbb{R}^4$ vars matris i standardbasen ges av

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Visa, utan att räkna ut det karakteristiska polynomet (sekularpolynomet), att både 0 och -3 är egenvärden till G . Bestäm också motsvarande geometriska multipliciteter samt tillhörande linjärt oberoende egenvektorer.

5.

(a) Formulera definitionen för en diagonaliserbar linjär avbildning.

(b) Den linjära avbildningen $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Avgör om G är diagonaliserbar.

(c) Ge ett exempel på en linjär avbildning som inte är diagonaliserbar och bevisa detta.

6. För $a \in \mathbb{R}$, definiera en kvadratisk form i $\mathbb{R}^3$ enligt

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2ax_2x_3.$$

Bestäm, för varje värde på a, den kvadratiska formen q:s signatur.

7. Lös följande system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = 2x(t) + y(t) + z(t), \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = x(t) + 2y(t) + z(t), \\ \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = x(t) + y(t) + 2z(t); \end{cases} \qquad x(0) = 3,\ y(0) = 2,\ z(0) = 1.$$

8. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ har i standardbasen matrisen $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Låt B vara en godtycklig inverterbar $n \times n$-matris och $C = B^{-1}AB$. Visa att det existerar en bas $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ sådan att F:s matris i basen $\mathbf{v}$ är C.

LYCKA TILL!