

Tentamen 2009–03–13

Skrivtid: 14.00 – 19.00. Tillåtna hjälpmittel: Skrivdon.

Lösningarna skall vara försedda med motiveringar.

Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng.

För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25, respektive 32 poäng (inklusive bonuspoäng).

1. Låt $L \subset \mathbb{R}[x]_3$ vara det linjära höljet av polynomen $f_1(x) = 1 + x$, $f_2(x) = -1 - x$, $f_3(x) = x + x^2 + x^3$, $f_4(x) = -1 + x^2 + x^3$ och $f_5(x) = 1 + x + x^2 + x^3$. Hitta en bas i L . Avgör även om polynomet $p(x) = x^2$ tillhör L och om så är fallet bestäm p :s koordinater med avseende på den bas i L som du hittade tidigare.

2. Låt $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som geometriskt betyder spegling i planet $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Bestäm G :s matris i standardbasen.

3. Låt N vara det delrum till \mathbb{E}^4 som spänns upp av vektorerna

$$v_1 = (1, 1, 0, 0)^t; \quad v_2 = (1, 1, 1, 1)^t; \quad v_3 = (0, 0, 1, 1)^t.$$

(a) Bestäm en ON bas i N .

(b) Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $x = (2, 4, 6, 8)^t$ på N .

(c) Bestäm avståndet från x till N samt avståndet från x till N^\perp .

4. Visa att den linjära avbildningen $G : \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$ som definieras genom $G(f(x)) = xf'(x) + f(x+1)$ är diagonaliseringbar. Bestäm alla egenvärden och motsvarande linjärt oberoende egenvektorer, G :s matris i en bas av egenvektorer samt transformationsmatrisen till denna bas.

Var god vänd

- 5.** Låt V vara det linjära rummet av alla 2×2 matriser. Den linjära avbildningen $F : V \rightarrow V$ definieras genom $F(X) = AX$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en bas i F :s värderum och en bas i F :s nollrum.

- 6.** Låt

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisera matrisen B i en ON bas och bestäm motsvarande diagonalmatris och transformationsmatris.

- 7.** Lös följande system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = 2x(t) + y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = x(t) + 2y(t); \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

8.

- (a) Ge definitionen av en linjär avbildning.
 (b) Avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definieras genom

$$F \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_3 - a_1 \end{pmatrix}.$$

Avgör om F är linjär.

- (c) Avbildningen $G : \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_3$ definieras genom $G(a + bx + cx^2) = a^2 + bx^3$. Avgör om G är linjär.

LYCKA TILL!

Lösning 1. Vi skriver koordinaterna av alla våra polynom i standardbasen som kolonner i en matris och använder Gauß-elimination för att reducera matrisen till trappstegsformen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\boxed{2}-\boxed{1}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\boxed{3}-\boxed{2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\boxed{4}-\boxed{2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\boxed{1}-\boxed{3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Det följer att polynom $f_1(x)$, $f_3(x)$ och $f_5(x)$ utgör en bas i L och att polynomet $p(x)$ inte tillhör L .

Lösning 2. Låt π vara planet $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Vektorerna $v_1 = (1, 0, 1)^t$ och $v_2 = (0, 1, 1)^t$ är linjärt oberoende och ligger i π . Därför har vi $G(v_1) = v_1$ och $G(v_2) = v_2$. Vektorn $v_3 = (1, 1, -1)^t$ är ortogonal mot planet och därför vi har $G(v_3) = -v_3$.

Uppsättningen $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ är en bas i \mathbb{R}^3 eftersom vi har tre vektorer i ett tredimensionellt rum, och dessa vektorer är linjärt oberoende eftersom determinanten för transformationsmatrisen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

från \mathbf{e} till \mathbf{v} är lika med $-3 \neq 0$. I basen \mathbf{v} vi har:

$$[G]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

För att använda basbyte formeln ska vi bestämma inversen till T :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\boxed{3}-\boxed{1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\boxed{3}-\boxed{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}\boxed{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{array} \right) \xrightarrow{\boxed{1}-\boxed{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{array} \right).$$

Nu kan vi använda basbyte formeln:

$$[G]_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}} = T[G]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}} T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösning 3. Vi har $v_2 = v_1 + v_3$ och således $N = \langle v_1, v_3 \rangle$. Vektorerna v_1 och v_3 är ortogonalala och därför linjärt oberoende. En ON-bas i N ges då av vektorerna $w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}v_1$ och $w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}v_2$.

Den ortogonala projektionen av x på N beräknas på följande sätt:

$$\text{pr}_N(x) = (x, w_1)w_1 + (x, w_2)w_2 = \frac{6}{2}(1, 1, 0, 0) + \frac{14}{2}(0, 0, 1, 1) = (3, 3, 7, 7).$$

Avståndet från x till N är:

$$|x - \text{pr}_N(x)| = |(-1, 1, -1, 1)| = \sqrt{1+1+1+1} = 2.$$

Avståndet från x till N^\perp är:

$$|\text{pr}_{N^\perp}(x)| = |(3, 3, 7, 7)| = \sqrt{9+9+49+49} = \sqrt{116}.$$

Lösning 4. Eftersom $G(1) = 1$, $G(x) = 2x + 1$ och $G(x^2) = 3x^2 + 2x + 1$, avbildningen G har följande matris i standardbasen:

$$A = [G]_{\text{std}}^{\text{std}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vi börjar med sekularpolynomet:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Alltså, egenvärden av A är $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ och $\lambda_3 = 3$. Eftersom alla egenvärden är olika, är avbildningen diagonaliseringbar och motsvarande diagonala matrisen är:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(egenvärden i tur och ordning på huvuddiagonalen).

Nu kan vi bestämma transformationsmatrisen.

För $\lambda_1 = 1$ måste vi lösa det homogena linjära ekvationssystemet med matrisen

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Systemet har en linjärt oberoende lösning, t.ex. $v_1 = (1, 0, 0)^t$ som motsvarar egenvektorn $f_1(x) = 1$.

För $\lambda_2 = 2$ har homogena linjära ekvationssystemet med matrisen

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en linjärt oberoende lösning, t.ex. $v_2 = (1, 1, 0)^t$. Detta motsvarar egenvektorn $f_2(x) = 1 + x$.

För $\lambda_3 = 3$ har homogena linjära ekvationssystemet med matrisen

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en linjärt oberoende lösning, t.ex. $v_3 = (3, 4, 2)^t$. Detta motsvarar egenvektorn $f_3(x) = 3 + 4x + 2x^2$.

Alltså, transformationsmatrisen är t.ex:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösning 5. Vi väljer förlande bas i V : $\mathbf{e} = (e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$, där

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi har

$$F(e_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(e_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad F(e_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(e_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Således får vi följande matris för F i basen \mathbf{e} :

$$[F]_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi reducerar denna matris till trappstegsformen med hjälp av Gaußelimination:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Det följer att matriserna

$$F(e_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad F(e_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

utgör en bas i F :s värdерum.

Lösningarna till ovanstående systemet på parameterformen ser ut så här:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} t, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Detta medför att matriserna

$$e_{11} - e_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad e_{22} - e_{44} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

utgör en bas i F :s nollrum.

Lösning 6. Vi börjar med sekularpolynomet:

$$\left| \begin{array}{cccc} 2-\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \hline \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} 1+4 \\ 2+4 \\ 3+4 \\ \hline \end{array} \right. = \left| \begin{array}{cccc} 1-\lambda & 0 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ -1 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{array} \right| =$$

$$(1-\lambda)^3 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 4 \\ 4 \\ 4 \\ \hline \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} 4+1 \\ 4+2 \\ 4+3 \\ \hline \end{array} \right. = (1-\lambda)^3 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5-\lambda \end{array} \right| = (\lambda-5)(\lambda-1)^3.$$

Vi har egenvärden $\lambda_1 = 5$ av multipicitet 1 och $\lambda_2 = 1$ av multipicitet 3.

För att bestäma en egenvektor med egenvärdet $\lambda_1 = 5$ ska vi lösa det homogena linjära ekvationssystemet med matrisen

$$B - 5E = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Detta system har en linjärt oberoende lösning, t.ex. $v_1 = (1, 1, 1, -1)^t$. Vi normerar denna vektor och får $w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{2}(1, 1, 1, -1)^t$.

För att bestäma alla egenvektorer med egenvärdet $\lambda_1 = 1$ ska vi lösa det homogena linjära ekvationssystemet med matrisen

$$B - 1E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vektorerna $v_2 = (1, 0, 0, 1)^t$, $v_3 = (0, 1, 0, 1)^t$ och $v_4 = (0, 0, 1, 1)^t$ är linjärt oberoende lösningar till systemet. Vi ortonormerar dem med hjälp av Gram-Schmidts metod: $w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)^t$; $\bar{w}_3 = v_3 - \frac{(v_3, v_2)}{(v_2, v_2)}v_2 = (-1/2, 1, 0, 1/2)$ och $w_3 = \frac{\bar{w}_3}{\|\bar{w}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 0, 1)^t$. Vidare $\bar{w}_4 = v_4 - (v_4, w_2)w_2 - (v_4, w_3)w_3 = (-1/3, -1/3, 1, 1/3)$ och $w_4 = \frac{\bar{w}_4}{\|\bar{w}_4\|} = \frac{1}{\sqrt{12}}(-1, -1, 3, 1)^t$. Detta ger oss följande diagonalformen och transformationsmatris:

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1/2 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ 1/2 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ 1/2 & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} \\ -1/2 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}.$$

Lösning 7. Vi skriver systemet på följande formen:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

och försöker att diagonalisera systemets matris

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A :s sekularpolynom är:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda - 3).$$

Vi har två olika egenvärden $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 3$ som innebär att A är diagonalisbar med diagonalformen

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Egenvektorer till $\lambda_1 = 1$ är lösningar till det homogena systemet med matrisen

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En linjärt oberoende lösning är t.ex. $v_1 = (1, -1)$.

Egenvektorer till $\lambda_1 = 1$ är lösningar till det homogena systemet med matrisen

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En linjärt oberoende lösning är t.ex. $v_2 = (1, 1)$.

Vi får därmed transformationsmatrisen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

och identiteter $D = T^{-1}AT$, $A = TDT^{-1}$, där

$$T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Om vi nu byter $x(t)$ och $y(t)$ mot respektive $u(t)$ och $v(t)$ sådant att

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

vi får systemet

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = u(t), & u(0) = 0, v(0) = 1. \\ \frac{dv(t)}{dt} = 3v(t); \end{cases}$$

Ekvationen $\frac{du(t)}{dt} = u(t)$ har allmän lösning $u(t) = C \exp(t)$. Från $0 = u(0) = C \exp(0)$ vi får $C = 0$ och därmed $u(t) = 0$.

Ekvationen $\frac{dv(t)}{dt} = 3v(t)$ har allmän lösning $v(t) = C \exp(3t)$. Från $1 = v(0) = C \exp(0)$ vi får $C = 1$ och därmed $v(t) = \exp(3t)$. Nu använder vi att

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

och får svaret $x(t) = y(t) = \exp(3t)$.

Lösning 8. Låt V och W vara två linjära rum. En avbildning $F : V \rightarrow W$ säges att vara linjär om $F(x + y) = F(x) + F(y)$ för alla $x, y \in V$ och $F(\lambda x) = \lambda F(x)$ för alla $x \in V$ och $\lambda \in \mathbb{R}$.

För alla $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gäller

$$\begin{aligned} F \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) &= F \left(\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \\ (a_3 + b_3) - (a_1 + b_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \\ a_3 - a_1 + b_3 - b_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_3 - a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 + b_2 \\ b_3 - b_1 \end{pmatrix} = F \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right) + F \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

För alla $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ och $\lambda \in \mathbb{R}$ gäller

$$\begin{aligned} F\left(\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right) &= F\left(\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \lambda a_2 \\ \lambda a_3 - \lambda a_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(a_1 + a_2) \\ \lambda(a_3 - a_1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_3 - a_1 \end{pmatrix} = \lambda F\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Detta medför att F är linjär.

Vi har $G(1) = 1$ och $G(2 \cdot 1) = G(2) = 2^2 = 4 \neq 2 \cdot G(1) = 2$. Detta medför att G inte är linjär.