

Skrivtid ?-?. Tillåtna hjälpmedel: Endast skrivdon. Lösningarna ska vara försedda med motiveringar. Varje uppgift ger högst 5 poäng totalt. För betygen 3, 4 respektive 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng totalt. Ange din anonymitetskod på varje papper. Saknar du anonymitetskod skriver du namn och personnummer på varje blad.

1. Låt A , B och C vara mängder. Visa, till exempel med hjälp av Venn-diagram, att $(A \cup B \cup C)^* = A^* \cap B^* \cap C^*$. (Här betecknar A^* , B^* och C^* komplementen av A , B respektive C .) (5)

2. Skriv talet $(183)_{tio}$ i basen *fyra*. (5)

3. Bestäm den sista siffran i talet 7^{38} . (5)

4. Bevisa med hjälp av induktion att likheten $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ gäller för alla $n \geq 1$. (5)

5. Låt a och b vara heltal och låt p vara ett primtal.

(a) Bevisa att $a|b$ medför att $a^2|b^2$. (2)

(b) Bevisa att $p|a^2$ medför att $p^2|a^2$. (3)

6. (a) Visa att mängden av primtal är en uppräkneligt oändlig mängd. (2)

(b) Låt k vara ett reellt tal. Visa att mängden i planet $L_k = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y = kx\}$ har samma kardinalitet som \mathbb{R} . (3)

7. (a) Betrakta mängden av alla punkter i planet, det vill säga alla (x, y) sådana att $x \in \mathbb{R}$ och $y \in \mathbb{R}$. Visa att relationen *har samma avstånd till origo* är en ekvivalensrelation. (3)

(b) Beskriv ekvivalensklasserna för denna ekvivalensrelation. (2)

8. Ekvationen $6x^4 - x^3 + 23x^2 - 4x - 4 = 0$ har två rationella rötter. Lös ekvationen fullständigt. (5)