

UPPSALA UNIVERSITET  
Matematiska institutionen  
Thomas Kragh  
Ryszard Rubinsztejn

Prov i matematik

Civilingenjörsprogrammen  
K1, STS1, W1, X1, Frist,  
KemiKand1, Lärarna1

LINJÄR ALGEBRA  
och GEOMETRI I  
2013-04-02

*Skrivtid: 14.00 – 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.*

1. Betrakta det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = c + 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 6 - c. \end{cases}$$

(a) Bestäm för vilka värden på den reella konstanten  $c$  som ekvationssystemet har någon lösning.

(b) Lös ekvationssystemet för dessa värden på  $c$ .

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lös matrisekvationen

$$(A + XB)^{-1} = C.$$

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x & 2 \\ 1 & 2x & 2 & x \\ 2x & 2 & x & -1 \\ 2 & 4x & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

4. Bestäm avståndet från punkten  $P = (-2, 4, 3)$  till linjen

$$l: \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + 5z = 4 \end{cases}.$$

Finn även den punkt på linjen  $l$  som ligger närmast punkten  $P$ .

Var god vänd!

5. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + (a+1)y + 2z = a+1 \\ ax + (2a+1)y + z = 1 \end{cases}$$

för alla värden på den reella konstanten  $a$ .

6. Avgör för vilka värden på konstanten  $a \in \mathbb{R}$  de fyra punkterna  $A = (-3, 2, -2)$ ,  $B = (a-2, 3, -1)$ ,  $C = (-1, 3, a-2)$  och  $D = (a+1, 5, a+3)$  ligger i samma plan.

7. Låt  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vara den ortogonala projektionen på planet  $\pi: x - y - z = 0$ .

(a) Finn  $T$ 's standardmatris  $[T]$ .

(b) Finn även standardmatrisen för den sammansatta avbildningen  $T \circ T$ .

8. Den linjära avbildningen  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  har standardmatrisen

$$[T] = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix}.$$

(a) Finn alla egenvärden och egenvektorer till avbildningen  $T$ .

(b) Visa att  $T$  är en spegling i en linje genom origo i  $\mathbb{R}^2$ . Ange ekvationen för denna linje.

**LYCKA TILL!**