UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Vera Koponen, Inger Sigstam

PROV I MATEMATIK
Algebra I
2009-08-21

Skrivtid: 8-13. *Tillåtna hjälpmedel:* Inga, annat än pennor, radergum och papper (det sista tillhandahålles). *Poängsättning:* Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.
Betygsgränser: betyg 3, minst 18p; betyg 4, minst 25p; betyg 5, minst 32p.
Lösningarna måste innehålla relevanta förklaringar och uträkningar, och vara tydligt skrivna.

1. (a) Avgör med sanningsvärdestabell, som skall ingå i lösningen, vilka av följande tre påståenden som är ekvivalenta:

$$A \to (B \to (\neg A)) \qquad\qquad A \leftrightarrow (\neg B) \qquad\qquad A \to (\neg B)$$

(b) Bevisa att $\log_5 3$ *inte* är ett rationellt tal.
Ledning: antag att $\log_5 3$ är rationellt och härled en motsägelse.

2. (a) Låt $A = (0, 4) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 4\}$, $B = [2, 6] = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 6\}$ och $C = (5, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : 5 < x\}$. Markera på en tallinje, som representerar de reella talen, mängden $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$. Det skall framgå om eventuella ändpunkter är med i $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$ eller inte.
(b) Konstruera en bijektiv funktion från $(0, 1)$ till $\mathbb{R}$.

3. Bestäm den bas B för vilken gäller att $(224)_B \cdot (10)_B = (40)_B \cdot (45)_B$.

4. (a) Finn, med hjälp av Euklides algoritm och återsubstitution, en heltalslösning till ekvationen $23x + 13y = 1$ om sådan finns.
(b) Beskriv alla lösningar till $230x + 130y = 100$ om sådana finns.

5. Antag att a är ett reellt tal sådant att $a \geq -1$. Bevisa med induktion att $(1 + a)^n \geq 1 + na$ för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

6. Bevisa att för varje $n \in \mathbb{N}$ så är $3^{2n+1} + 5^{2n}$ delbart med 4 men *inte* med 8.
Ledning: använd kongruensräkning.

7. Ekvationerna $3x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = 0$ och $3x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$ har minst en gemensam rot. Finn alla lösningar till var och en av ekvationerna.

8. Låt A vara mängden av alla reella polynom (i en variabel x). Definiera en relation R på A enligt:

$$f(x)\ R\ g(x) \Longleftrightarrow f(x) - g(x) \text{ är ett konstantpolynom (dvs. beror inte på } x).$$

Visa att R är en ekvivalensrelation och ge exempel på två andra polynom i ekvivalensklassen till $x^3 - x + 4$ och två andra polynom i ekvivalensklassen till (konstantpolynomet) π.
(Ekvivalensklassen till $f(x)$ är mängden av alla $g(x)$ sådana att $f(x)\ R\ g(x)$.)

Lycka till!