UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Dan Lilja

Tentamen i matematik
Algebra I
2018-08-21

Skrivtid: 5 timmar. Tillåtna hjälpmedel: endast skrivdon. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 25, resp. 32 poäng. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. För full poäng krävs att du noggrant motiverar varje steg i ditt resonemang. Påbörja varje uppgift på ett nytt blad. Lycka till!

1. (a) Använd sanningsvärdestabeller för att bevisa De Morgans lagar, d.v.s. $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ samt $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ där P och Q är utsagor. (2 poäng)

   (b) Bevisa De Morgans lagar för mängder, d.v.s. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ samt $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ där A och B är mängder i något universum X. Tips: De Morgan's lagar för utsagor kan vara till hjälp. (3 poäng)

Lösning. (a)

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$
S	S	F	F
S	F	S	S
F	S	S	S
F	F	S	S

Vi ser att $\neg(P \wedge Q)$ och $\neg P \vee \neg Q$ alltid har samma sanningsvärden, alltså gäller $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$.

P	Q	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$
S	S	F	F
S	F	F	F
F	S	F	F
F	F	S	S

Vi ser att $\neg(P \vee Q)$ och $\neg P \wedge \neg Q$ alltid har samma sanningsvärden, alltså gäller $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$. Vi har därmed bevisat De Morgans lagar.

(b) Om vi använder definitionerna av mängdoperationerna $M \cap N = \{x \colon x \in M \wedge x \in N\}$, $M \cup N = \{x \colon x \in M \vee x \in N\}$ och $M^c = \{x \colon \neg(x \in M)\}$ kan vi med hjälp av De Morgans lagar för utsagor skriva följande:

$$\begin{aligned}(A \cap B)^c &= \{x \colon \neg(x \in A \wedge x \in B)\}\\ &= \{x \colon \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\}\\ &= \{x \colon \neg(x \in A)\} \cup \{x \colon \neg(x \in B)\}\\ &= A^c \cup B^c\end{aligned}$$

vilket bevisar den första likheten. För den andra skriver vi

$$\begin{aligned}(A \cup B)^c &= \{x\colon \neg(x \in A \vee x \in B)\}\\ &= \{x\colon \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)\}\\ &= A^c \cap B^c\end{aligned}$$

vilket bevisar den andra likheten.

$\square$

2. Lös den Diofantiska ekvationen $572x + 252y = 8$. (5 poäng)

Lösning. Vi använder oss först av Euklides algoritm för att hitta $\mathrm{SGD}(572, 252)$:

$$\begin{aligned}572 &= 2 \cdot 252 + 68,\\ 252 &= 3 \cdot 68 + 48,\\ 68 &= 48 + 20,\\ 48 &= 2 \cdot 20 + 8,\\ 20 &= 2 \cdot 8 + 4,\\ 8 &= 2 \cdot 4.\end{aligned}$$

Eftersom den sista nollskilda resten är 4 så är $\mathrm{SGD}(572, 252) = 4$. Vi använder oss nu av Euklides algoritm baklänges för att hitta en partikulärlösning till den Diofantiska ekvationen:

$$\begin{aligned}4 &= 20 - 2 \cdot 8\\ &= 20 - 2(48 - 2 \cdot 20)\\ &= 5 \cdot 20 - 2 \cdot 48\\ &= 5(68 - 48) - 2 \cdot 48\\ &= 5 \cdot 68 - 7 \cdot 48\\ &= 5 \cdot 68 - 7(252 - 3 \cdot 68)\\ &= 26 \cdot 68 - 7 \cdot 252\\ &= 26(572 - 2 \cdot 252) - 7 \cdot 252\\ &= 26 \cdot 572 - 59 \cdot 252\\ &= 572 \cdot 26 + 252 \cdot (-59)\end{aligned}$$

så vi ser att $x = 26$, $y = -59$ löser ekvationen $572x + 252y = 4$ och därför löser $x = 2 \cdot 26 = 52$, $y = 2 \cdot (-59) = -118$ ekvationen $572x + 252y = 8$. För att hitta den allmänna lösningen måste vi först förkorta ekvationen med $\mathrm{SGD}(572, 252) = 4$. Eftersom $572 = 4 \cdot 143$ och $252 = 4 \cdot 63$ så får vi $572x + 252y = 8 \iff 143x + 63y = 2$. Från detta kan vi nu se att den allmänna lösningen ges av $x = 52 + 63n$, $y = -118 - 143n$ där $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

3. (a) Visa att för alla udda heltal a, b gäller att $8 \mid a^2 - b^2$. (3 poäng)
   (b) Bestäm resten som fås då 5^{83} delas med 9. (2 poäng)

Lösning. (a) Vi behöver visa att för alla udda heltal a, b så kan $a^2 - b^2$ skrivas som en multipel av 8, d.v.s. vi kan alltid bryta ut en 8 från $a^2 - b^2$. Eftersom a och b ska vara udda kan vi alltid skriva $a = 2n + 1$ och $b = 2k + 1$ för några heltal n, k. Vi får då

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (2n+1)^2 - (2k+1)^2 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 - 4k^2 - 4k - 1 \\ &= 4(n^2 + n - k^2 - k) \\ &= 4(n(n+1) - k(k+1)). \end{aligned}$$

Vi har alltså brutit ut 4. Kvar återstår alltså att bryta ut en faktor 2 ur $n(n+1) - k(k+1)$. För detta observerar vi att både $n(n+1)$ och $k(k+1)$ är produkter av två på varandra följande heltal. Alltså måste båda vara jämna och därför är även $n(n+1) - k(k+1)$ ett jämnt tal så vi kan skriva $n(n+1) - k(k+1) = 2m$ för något heltal m. Med detta får vi nu

$$a^2 - b^2 = 4(n(n+1) - k(k+1)) = 4 \cdot 2 \cdot m = 8m$$

så $a^2 - b^2$ är delbart med 8.

(b) För att beräkna resten kan vi använda oss av kongruens modulo 9. Vi observerar först att $5^3 = 125 = 126 - 1 = 14 \cdot 9 - 1$ så $5^3 \equiv -1 \mod 9$. Vi får då

$$\begin{aligned} 5^{83} &= 5^2 \cdot 5^{81} \\ &= 25 \cdot \left(5^3\right)^{27} \\ &\equiv (-2) \cdot (-1)^{27} \mod 9 \\ &\equiv 2 \mod 9 \end{aligned}$$

så resten som fås då 5^{83} delas med 9 är 2.

□

4. Visa med induktion att

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

för alla heltal $n \geq 1$. (5 poäng)

Lösning. Låt $VL_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ och $HL_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Basfall: För $n = 1$ får vi $VL_1 = \sum_{k=1}^{1} k^2 = 1$ och $HL_1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$ så $VL_1 = HL_1$.

Induktionsantagande: Antag att $VL_P = HL_p$ för något heltal $p \geq 1$.

Induktionssteg:

$$
\begin{aligned}
VL_{p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1} k^2 \\
&= \sum_{k=1}^{p} k^2 + (p+1)^2 \\
&\overset{IA}{=} \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2 \\
&= \frac{p(p+1)(2p+1) + 6(p+1)^2}{6} \\
&= \frac{(p+1)(p(2p+1) + 6(p+1))}{6} \\
&= \frac{(p+1)(p(2p+3) + 4p + 6)}{6} \\
&= \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6} \\
&= \frac{(p+1)((p+1)+1)(2(p+1)+1)}{6} \\
&= HL_{p+1}
\end{aligned}
$$

Enligt induktionsprincipen gäller därför att $VL_n = HL_n$ för alla heltal $n \geq 1$. $\square$

5. Låt relationen R på de komplexa talen $\mathbb{C}$ ges av

$$z \, R \, w \iff |z - w| < 4.$$

Avgör, med bevis eller motexempel, vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk och transitiv som relationen R uppfyller. (5 poäng)

Lösning. **Reflexiv:** För varje komplext tal z gäller $|z - z| = 0 < 4$ så $z \, R \, z$ för alla komplexa tal z och relationen är därför reflexiv.

Symmetrisk: Låt z, w vara komplexa tal sådana att $z \, R \, w$, d.v.s. $|z - w| < 4$. Eftersom $|w - z| = |-(z - w)| = |z - w|$ så gäller därför också $|w - z| < 4$ och därför $w \, R \, z$. Alltså är relationen symmetrisk.

Transitiv: Observera att $|0 - 3| = 3 < 4$ och $|3 - 6| = 3 < 4$ så både $0 \, R \, 3$ och $3 \, R \, 6$ gäller men $|0 - 6| = 6 > 4$ så $0 \, R \, 6$ gäller inte. Alltså är relationen inte transitiv.

$\square$

6. Visa att mängden av alla komplexa tal på formen $a \pm ai$ där $a \in \mathbb{Z}$ är en uppräknelig mängd. (5 poäng)

Lösning. Vi utnyttjar att vi $\mathbb{Q}$ är en uppräknelig mängd och försöker hitta en surjektion $f\colon \mathbb{Q} \to M$ där M är mängden av komplexa tal på formen $a \pm ai$ där $a \in \mathbb{Z}$. Detta skulle ge oss $M \leq_c \mathbb{Q}$ och därför måste även M vara uppräknelig.

Vi konstruerar denna funktion f i flera steg. Till att börja med utnyttjar vi att heltalen kan ses som en delmängd av de rationella talen och sätter $f(a) = a + ai$ för alla heltal a. För att f ska bli surjektiv måste vi nu definiera f på resten av alla rationella tal på ett sådant vis att alla komplexa tal $a - ai$ för $a \in \mathbb{Z}$ och $a \neq 0$ träffas. För heltal a sådana att $|a| \geq 2$ kan vi sätta $f\left(\frac{1}{a}\right) = a - ai$ och träffar då alla sådana tal utom $1 - i$ och $-1 + i$.[1] För att få med $1 - i$ och $-1 + i$ låter vi $f\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - i$ och $f\left(\frac{-3}{2}\right) = -1 + i$. Detta gör att f är surjektiv och vi kan definiera f som vi vill på resten av alla rationella tal, t.ex. $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ för alla andra rationella tal. □

7. Polynomet $x^4 - 5x^2 + 14x - 12$ har ett nollställe på formen $1 + bi$ för något reellt tal b. Hitta samtliga nollställen. (5 poäng)

Lösning. Vi observerar att polynomet är reellt och eftersom komplexxa nollställen till reella polynom alltid kommer i konjugerade par betyder det att både $1 + bi$ och $1 - bi$ måste vara nollställen till polynomet för något reellt tal b. Alltså måste polynomet $(x-(1+bi))(x-(1-bi)) = x^2-2x+1+b^2$ dela polynomet $x^4-5x^2+14x-12$ enligt faktorsatsen. Detta ger oss:

$$
\begin{array}{l}
x^2 + 2x + (-2 - b^2) \\
\hline
x^4 - 5x^2 + 14x - 12 \;\big|\; x^2 - 2x + 1 + b^2 \\
-(x^4 - 2x^3 + (1 + b^2)x^2) \\
\hline
2x^3 + (-6 - b^2)x^2 + 14x - 12 \\
-(2x^3 - 4x^2 + 2(1 + b^2)x) \\
\hline
(-2 - b^2)x^2 + (12 - 2b^2)x - 12 \\
-((-2 - b^2)x^2 - 2(-2 - b^2)x + (-2 - b^2)(1 + b^2)) \\
\hline
(8 - 4b^2)x + (2 + b^2)(1 + b^2) - 12
\end{array}
$$

För att divisionen ska gå jämnt ut måste alltså $8 - 4b^2 = 0$ och $(2 + b^2)(1^2) - 12 = 0$. Ekvationen $8-4b^2 = 0$ har lösningarna $b = \pm\sqrt{2}$, som också löser $(2+b^2)(1^2)-12 = 0$. Nollställena på formen $x = 1+bi$ är alltså $x = 1\pm i\sqrt{2}$ och polynomet $x^4-5x^2+14x-12$ kan faktoriseras som $(x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x - 4)$. Polynomet $x^2 + 2x - 4$ har nollställen

[1] Vi kan inte göra detta för $a = \pm 1$ eller $a = 0$ eftersom dessa tal redan använts.

$x = -1 \pm \sqrt{5}$ enligt p-q-formeln. Polynomet $x^4 - 5x + 14x - 12$ har alltså nollställen $x = -1 \pm \sqrt{5}, 1 \pm i\sqrt{2}$. $\square$

8. (a) Återge faktorsatsen för polynom. (2 poäng)
   (b) Återge algebrans fundamentalsats. (2 poäng)
   (c) Vilka polynom är inverterbara, d.v.s. för vilka polynom f finns det ett polynom g sådant att $fg = 1$? (1 poäng)

Lösning. (a) Polynomet $x - \alpha$ är en delare till polynomet f om och endast om α är ett nollställe till f.

(b) Varje polynom av grad minst 1 har minst ett komplext nollställe.

(c) De konstanta, nollskilda polynomen, d.v.s. alla polynom f på formen $f(x) = c$ där $c \neq 0$ är ett komplext tal.

$\square$