

*Skrivtid 8–13. Tillåtna hjälpmedel: Endast skrivdon. Lösningarna ska vara försedda med motiveringar. Varje uppgift ger högst 5 poäng totalt. För betygen 3, 4 respektive 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng totalt. Lösningarna skannas in och laddas upp (i en och samma pdf-fil) på Studium på därför ämnad plats. Skrivtiden förlängs med 20 minuter för att ge tid åt inlämningsmomentet. Ange din anonymitetskod på varje papper. På första bladet anges totalt antal sidor, och på varje blad anges sidnumrering. Saknar du anonymitetskod skriver du namn och personnummer på varje blad. Spara för säkerhets skull originalet till alla dina lösningar.*

1. Visa, till exempel med hjälp av Venn-diagram, att  $(A^* \cap B)^* = A \cup B^*$ . (Här betecknar  $A^*$  och  $B^*$  komplementen av  $A$  respektive  $B$ .) (5)
2. Skriv talet  $(300)_{tio}$  i basen  $sex$ . (5)
3. Bestäm den sista siffran i talet  $7^{22}$ . (5)
4. Bevisa med hjälp av induktion att likheten  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$  gäller för alla  $n \geq 1$ . (5)
5. Visa att  $4|(a-1)$  medför att  $4|(a^2+3)$  då  $a$  är ett heltal. (5)
6. Låt  $f$  vara ett polynom.
  - (a) Definiera vad som menas med *graden* av polynomet  $f$ , dvs  $\deg(f)$ . (1)
  - (b) Låt även  $g$  vara ett polynom. Visa att  $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$  då  $\deg(f) \geq 0$  och  $\deg(g) \geq 0$  (4)
7. Ekvationen  $4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 16x - 12 = 0$  har två rationella rötter. Lös ekvationen fullständigt. (5)
8. (a) Definiera vad relationen att mängden  $A$  har samma kardinalitet som mängden  $B$  betyder. (1)
  - (b) Visa att mängden av decimaltal, dvs mängden av tal med en ändlig decimalutveckling, är uppräkneligt oändlig. (4)