UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska Institutionen

Tenta
Envariabelanalys M 1MA210
2023-Januari
Jordi-Lluís Figueras

Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Tenta består av åtta uppgifter värda 5 poäng vardera, d.v.s. maximalt kan man få 40 poäng på tentan. Alla svar ska motiveras med lämpliga beräkningar eller med en hänvisning till lämplig teori. Skrivtid: 5 timmar.

1. Bestäm gränsvärdet
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log|x|}{\tan(x-\frac{\pi}{2})}.$$

2. Beräkna följande generaliserade integraler om de konvergerar
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}},$$
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\tan(x)}.$$

3. Beräkna
$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^5 \frac{nx}{n+x}dx$$
och
$$\int_1^5 \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{n+x}\right) dx.$$

4. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$
$$\log\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right) = \frac{s}{n} + \frac{A_n}{n^3}$$
där $s \in \mathbb{R}$ och A_n är begränsad. Sedan bestäm a så att serien
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n\log\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right) - a\right)$$
konvergerar.

Var god vänd!

5. $P(x)$ är ett polynom och det gäller

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{x^5 - x} dx = 1.$$

Bestäm $P(x)$!

6. Skriv derivatan av funktionen

$$f(x) = x^{\log(x)}.$$

7. Låt a_n vara följden som ges av $a_1 = \frac{e}{\pi}$ och

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + a_n^3}{2023!}, \text{ för } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Avgör om följden är konvergent och bestäm i så fall dess gränsvärde.

8. Beräkna arean det område i planet som begränsas av kurvorna $y = \sqrt{x}$ och $y = x^2$.

May the Math be with you.
Formler på baksidan, var god vänd!

Trigonometriska formler

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1.$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

Taylors utveckling

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{N+1}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}, \ \xi \in [x, a].$$

Konstanter

$$\pi \in [3.141592, 3.141593]$$

$$e \in [2.718281, 2.718282]$$