

Skrivtid 5 timmar. **Inga hjälpmmedel** utom skrivdon tillåtna! Provet består av 8 uppgifter, om vardera 5 poäng, totalt 40 poäng. För betyget 3, 4 och 5 krävs minst 18, 25 resp. 32 poäng inklusive bonuspoäng. Skriv tydligt, **motivera väl** om inget annat anges och påbörja varje uppgift på ett nytt blad. Lycka till!

1.
  - a) Ge, utan motivering, ett exempel på en överuppräknelig mängd.
  - b) Motivera med högst två rader varför  $x = 3/4$  inte kan vara en rot till ekvationen  $2x^{35} - 4x^{13} + 3 = 0$ .
  - c) Formulera faktorsatsen (utan bevis).
  - d) Ge, utan motivering, ett exempel på en relation på  $\mathbf{Z}$  som är reflexiv och transitiv, men inte symmetrisk.
  - e) Visa, med sanningsvärdestabell, att  $p \wedge \neg p$  inte kan gälla för en utsaga  $p$ .
2. Visa med induktion att  $3|(4^n - 1)$  för alla positiva heltal  $n$ .
3. Efter att algebratentan rättats träffas några vänner och jämför sina resultat. Det visar sig att var och en av dem antingen fått 40 eller 28 poäng.
  - a) Motivera varför deras totala poängsumma inte kan vara 94.
  - b) Om deras totala poängsumma är 96; hur många personer hade fått 40 poäng och hur många hade fått 28 poäng? *Gissning av svar godtas inte!*
4. Skriv om  $(138)_{nio}$  i basen två.
5. Visa att  $\sqrt{15}$  är irrationellt.
6. Definiera funktionen  $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$  enligt  $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ , där  $\mathbf{R}_+$  är mängden av alla positiva reella tal.
  - a) Visa att  $f$  är injektiv.
  - b) Visa, med ett motexempel, att  $f$  inte är surjektiv.
7. Ekvationen  $g(x) = x^4 + 7x^3 + 19x^2 + 24x + 14 = 0$  och  $h(x) = x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 8x + 2 = 0$  har (minst) en gemensam rot. Finn alla rötter till den första ekvationen.
8. Polynomet  $f(x) = x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 6x + 24$  har (minst) ett imaginärt nollställe. Finn alla nollställen till  $f(x)$ .