

Skrivtid: 9-14. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Poäng: varje uppgift ger maximalt 5 poäng. För Godkänd fordras minst 18 poäng, för betyget fyra minst 25 poäng och för betyget fem minst 32 poäng. Ev. bonuspoäng från duggan i höstas medräknas inte. Observera att helhetsintrycket påverkar bedömningen så skriv tydligt och motivera resonemangen.

1. a) Lös ekvationen $\sqrt{x+8} = x+2$.
b) Ange för vilka $x \in \mathbf{R}$ olikheten $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{x}$ gäller.
c) Visa att $x^2 + 2x + 2y^2 - 4y = 1$ definierar en ellips och bestäm dess medelpunkt och halvaxlar.

2. Lös ekvationen

$$\log_{16}(x+6) = \log_4 x.$$

3. Lös olikheten

$$|2x^2 - 13| < 5.$$

4. Lös ekvationen $\cos^2 2\theta = \sin^2 2\theta$.

5. Bestäm och illustrera i det komplexa talplanet lösningarna till

$$|\bar{z} - 2i| = 2|z|.$$

6. Visa, t.ex. med induktion, att för alla positiva heltal n gäller

$$\sum_{k=1}^n (k^2 - 1) = \frac{n(2n+5)(n-1)}{6}.$$

7. Ett utskott består av 8 republikaner och 6 demokrater. Man skall utse en arbetsgrupp med fyra personer i vilken båda partierna finns representerade. På grund av samarbetsvärigheter får dock inte både demokraten Bill och republikanen Ronald utses. På hur många sätt kan en sådan arbetsgrupp väljas?

8. Ekvationen

$$z^3 + az + 6 = 0,$$

där a är reellt, har en icke-reell rot med realdel 1. Lös ekvationen fullständigt.

LYCKA TILL!