

Skriptid: 9-14. Tillåtna hjälpmedel: Inga, annat än pennor, radergum och papper (det sista tillhandahålles). *Poängsättning:* Varje (a)-del ger maximalt 3 poäng; varje (b)-del ger maximalt 2 poäng. *Betygsgränser:* För betyg 3 krävs minst 2 poäng på *varje* (a)-del *samt sammanlagt* minst 18 poäng; för betyg 4, skall man ha uppnått kravet för betyg 3 och fått sammanlagt minst 25 poäng; för betyg 5 skall man ha uppnått kravet för betyg 3 och fått sammanlagt minst 32 poäng. *Anmärkning:* Lösningarna skall innehålla relevanta förklaringar och uträkningar.

1. (a) Formulera induktionsaxiomet.

(b) Bevisa med induktion att

$$2 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}.$$

2. Vi tänker oss att bokstäverna A, B, C, D, E skrivs på varsin kvadratisk papperslapp.

(a) Hur många "ord" kan bildas genom att ordna papperslapparna på rad om vi kräver att ett B skall stå längst till vänster?

(b) Antag nu att också siffrorna 1, 2, 3 skrivs på varsin kvadratisk papperslapp. På hur många sätt kan alla papperslapparna ordnas på rad om vi kräver att alla lappar med siffror skall komma i en följd (dvs. intill varandra)? Ett exempel på en sådan ordning är CA231EBD.

3. (a) Beskriv mängden av reella tal x som löser olikheten $|2x - 8| \geq 4$.

(b) Beskriv mängden av reella tal x som löser olikheten

$$x + 3 \leq \frac{5}{x - 1}.$$

(Mängderna kan beskrivas med olikheter eller med intervall.)

4. (a) Förenkla följande uttryck till ett heltal:

$$2^{(\log_3(9)+2+\log_2(3))}$$

(b) Lös ekvationen

$$2^{x+2} - 8^{\frac{1}{x}} = 0.$$

5. (a) Beräkna kvoten och resten då $p(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 8x$ divideras med $x^2 - x$.

(b) Ekvationen $x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 8x = 0$ har en rot på formen bi , där b är reellt. Finn alla rötter till ekvationen. (Ledning: Divisionen i del (a) kan användas.)

6. (a) Beräkna avståndet mellan punkterna $(-1, 1)$ och $(1, 4)$ samt ange ekvationen för linjen som passerar genom dessa punkter.

(b) Beräkna alla skärningspunkter till kurvorna $x^2 + y^2 = 2$ och $y = x^2 - 2$.

7. (a) Lös ekvationen $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) Lös ekvationen $\sin(6x) + \cos(3x) = 0$. (Ledning: formeln för dubbla vinkeln kan användas: $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.)

8. (a) Låt $z = 6(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$ och $w = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$. Beräkna $\frac{z}{w}$ och w^3 och ange $\frac{z}{w}$ och w^3 på formen $a + bi$ där a och b är reella tal.

(b) Lös ekvationen $z^3 = 8i$.

Lycka till!