

Skrivtid: 15-20. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Poäng: varje uppgift ger maximalt 5 poäng. För Godkänd fordras minst 18 poäng, för betyget fyra minst 25 poäng och för betyget fem minst 32 poäng. Den som blev godkänd på duggan skall ej göra uppgift 1. Observera att helhetsintrycket påverkar bedömningen så skriv tydligt och motivera resonemangen.

1. a) Lös ekvationen $\sqrt{7-3x} = x+1$.
b) Ange för vilka $x \in \mathbf{R}$ olikheten $\frac{1}{x} < 1$ gäller.
c) Ange ekvationen för en cirkel i planet \mathbf{R}^2 med centrum i punkten $(-1, 2)$ och med radie 3.
2. Lös ekvationen

$$(\mathrm{e}^{2x} - 1)(\ln(2x+3) - 2\ln(x+1)) = 0.$$
3. Lös olikheten

$$\left| \frac{x+1}{2x-5} \right| < 1.$$
4. a) Bestäm skärningen mellan linjen $x+y=0$ och cirkeln $x^2+y^2=1$.
b) Lös ekvationen $\cos \theta + \sin \theta = 0$.
5. a) Låt $z = x+iy$ med $x, y \in \mathbf{R}$. Ange ett uttryck för $|z|$ i termer av x och y .
(Endast svar krävs på denna uppgift.)
b) Bestäm vilka komplexa tal z som uppfyller $|z-2| = |z|$ och rita ut dem i det komplexa planet.
6. Visa, t.ex. med induktion, att om n är ett positivt heltal så är $n^3 - n$ jämnt delbart med 3.
7. Nina Nåktergal går i en musik-klass med 23 andra elever. Klassen skall ha en idoltävling där alla tävlar och tre finalister skall utses. Dessa tävlar därefter med varandra i en final för att kora etta, tvåa och trea.
a) På hur många sätt kan slutresultatet av finalen se ut ?
b) Hur många möjliga finalgrupper finns det ?
c) I hur många av grupperna i b) finns Nina med ?
8. Ekvationen

$$z^5 + 9z^3 - 8z^2 - 72 = 0$$

har en rent imaginär rot. Lös ekvationen fullständigt.

LYCKA TILL!