

Skrivtid: 5 timmar. Tillåtna hjälpmedel: endast skrivdon. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 25, resp. 32 poängoäng. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. För full poäng krävs att du noggrant motiverar varje steg i ditt resonemang. Påbörja varje uppgift på ett nytt blad. Lycka till!

1. Låt A , B och C vara utsagor. Konstruera en utsaga med hjälp av utsagorna A , B och C som har samma sanningsvärden som utsagan P i nedanstående sanningsvärdestabell och bevisa att de har samma sanningsvärden. (5 poäng)

A	B	C	P
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	F

2. Lös den Diofantiska ekvationen $756x - 260y = 8$. (5 poäng)
3. (a) Talet $3B80EF$ är ett hexadecimalt tal, d.v.s. skrivet i bas 16 där $A = 10$, $B = 11$, $C = 12$, $D = 13$, $E = 14$ och $F = 15$. Skriv talet i bas 10. Som hjälp kan du använda att $16^2 = 256$, $16^3 = 4096$, $16^4 = 65536$ och $16^5 = 1048576$. (4 poäng)
- (b) Ett vanligt sätt att ange färger i en dator är som tre stycken tvåsiffriga hexadecimala tal. De tre talen anger hur mycket rött, grönt och blått som ingår i färgen, i den ordningen. Ju större tal desto mer av den färgen ingår. Talet ovan beskriver en färg genom att dela upp det som de tre talen $3B$, 80 och EF där $3B$ anger hur mycket rött som ingår, 80 anger hur mycket grönt som ingår och EF anger hur mycket blått som ingår. Vilken färg är starkast? (1 poäng)
4. Visa med induktion att talet $3^{2n+1} + 5^{2n}$ är delbart med 4 men inte med 8 för alla heltal $n \geq 0$. (5 poäng)
5. Låt relationen R på mängden \mathbb{C} ges av $z R w \Leftrightarrow |z| = |w|$. Visa att R är en ekvivalensrelation och beskriv en av dess ekvivalensklasser. (5 poäng)

6. Låt M vara mängden av alla oändliga följder av nollor och ettor, d.v.s. $M = \{(a_0, a_1, a_2, \dots) : a_i = 0, 1 \quad \forall i \geq 0\}$. Visa att mängden M är överuppräknelig. Tips: Antag att M istället är uppräknelig. Hur kan vi då hitta en motsägelse? (5 poäng)
7. Polynomet $f(x) = x^4 + (-4+i)x^3 + (7-4i)x^2 + (-8+5i)x + 10$ har minst ett nollställe på formen $x = bi$ där b är något reellt tal. Hitta samtliga nollställen till f . (5 poäng)
8. Ange för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Endast svar krävs
- (a) Varje polynom med heltalskoefficienter har rationella nollställen. (1 poäng)
 - (b) Varje polynom av grad minst 1 kan skrivas som en produkt av polynom av grad 1. (1 poäng)
 - (c) Om ett reellt polynom har ett nollställe $a + bi$ där $a, b \in \mathbb{R}$ så är även $a - bi$ ett nollställe till polynomet. (1 poäng)
 - (d) Varje reellt polynom av grad minst 1 har ett reellt nollställen. (1 poäng)
 - (e) Låt f vara ett irreducibelt polynom som delar produkten gh av polynomen g och h . Då måste f dela g eller h . (1 poäng)