

UPPSALA UNIVERSITET

Matematiska institutionen

Seidon Alsaody

018-471 32 81

073-990 96 58

Prov i matematik

KandData, KandMat, IT

Lärare, Fristående

Algebra I

12/4-2012

Skrivtid 5 timmar. Hjälpmittel: skrivdon. Provet består av 8 uppgifter, om vardera 5 poäng, totalt 40 poäng. För betyg 3, 4 och 5 krävs minst 18, 25 resp. 32 poäng. **Inga bonuspoäng räknas.** Skriv tydligt, **motivera väl** och påbörja varje uppgift på nytt blad. Lycka till!

1. a) Vilken av symbolerna  $\vee, \rightarrow, \leftarrow$  ska ersätta  $*$  så att sanningsvärdestabellen blir korrekt?

P	Q	$P * Q$
S	S	S
S	F	S
F	S	F
F	F	S

- b) Vilken rest lämnar  $2^{2012}$  vid division med 3?  
c) Är mängden  $\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}$  uppräknelig? Motivera med 2–3 rader!

2. Finn den allmänna lösningen till den diofantiska ekvationen  $94x + 42y = 6$ .
3. Seidon tycker inte om analys. Han skriver provet i en analyskurs och får totalt 1 poäng första gången, och skriver om provet flera gånger. Han upptäcker ett mönster: för varje  $n \geq 1$  gäller att på prov nummer  $n + 1$  får han precis  $2^n$  poäng mer än på prov nummer  $n$ .
- Skriv ned en rekursionsformel för Seidons resultat.
  - Räkna ut vad Seidon får på de 5 första försöken.
  - Gissa en sluten formel utifrån mönstret i b), och visa den med induktion. *Ledning: Mönstret i b) är ett väldigt mönster minus ett!*
4. Funktionen  $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \{q \in \mathbb{Q} | 0 < q \leq 1\}$  ges av  $f(n) = 1/n$ . Avgör, med bevis eller motexempel, om funktionen är injektiv resp. surjektiv.
5. Relationen  $R$  på  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$  ges av  $mRn \iff (m|n \wedge n|m)$ . Visa att  $R$  är en ekvivalensrelation.
6. Visa med motsägelsebevis att  $\log_{10} 11$  inte är ett rationellt tal.
7. Polynomen  $f(x) = 3x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 2x + 4$  och  $g(x) = x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 6x + 12$  har minst ett gemensamt nollställe. Finn samtliga nollställen till båda polynomen.
8. Ekvationen  $4x^3 - 7x^2 + 10x + 3 = 0$  har en rot med realdel 1. Lös ekvationen fullständigt.