UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Bo Styf, 471 3192, 0707-253107

Prov i matematik
Civilingenjörsprogrammen
ES, F, Q
Endimensionell analys
2006–12–11

Skrivtid: 15.00 – 20.00. Tillåtna hjälpmedel: Manuella skrivdon och bifogade formler. Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng. Påbörja varje uppgift på nytt papper och skriv endast på papperets ena sida. Lös ej problem 1 (2, 3) om du klarat dugga 1 (2, 3).

1. För funktionen f gäller att $f(x) = x - 1$ då $|x| > 2$, medan $f(x) = ax^2 + bx + c$ då $|x| \leq 2$. Bestäm a, b, c så att f blir kontinuerlig och $f(0) = \dfrac{5}{3}$.

2. (i) Låt $f(x) = \sqrt{x}$. Beräkna, utgående från derivatans definition, derivatan $f'(x)$ av denna funktion. (INGA deriveringsregler får alltså användas).
(ii) Bevisa att $\ln x < x - 1$, då $x > 1$.

3. (i) Visa att funktionen $f(x) = x - e^{1-x}$, $-\infty < x < \infty$, är inverterbar.
(ii) Beräkna $(f^{-1})'(0)$.

4. Beräkna integralerna

$$\text{(a)} \quad \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,(\cos x + \sin x)\,dx$$

5. Lös differentialekvationen $2x\,y' + y = \sqrt{x}\,e^x$, $x > 0$. Bestäm särskilt den lösning för vilken $y(1) = e$.

6. Skissera kurvan $y = \dfrac{x^3 + 9x^2}{x^2 - 1}$ i dess huvuddrag, med angivande av eventuella asymptoter och lokala extrempunkter.

7. Avgör, med tydliga motiveringar, om serien konvergerar eller divergerar:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$$

8. Kurvan $y = f(x)$, $x > 0$, ligger i första kvadranten och har egenskapen att normalen till kurvan i en godtycklig punkt $(a, f(a))$ skär y-axeln i punkten $(0, 2f(a))$. Dessutom gäller att $f(1) = 2$. Bestäm $f(x)$.

(Formelblad på baksidan)

Svar till tentamen i Endimensionell analys 2006–12–11

1. $a = -\frac{2}{3}$, $b = 1$, $c = \frac{5}{3}$.

3. (i) Då $f'(x) = 1 + e^{1-x} > 0$, $-\infty < x < \infty$, följer att $f(x)$ är strängt växande och därmed inverterbar.

(ii) Då $f(1) = 0$ får vi

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}$$

4. (a) $4 - 2\ln 3$, (b) $\sqrt{2} - 1$.

5. $y = \frac{C + e^x}{2\sqrt{x}}$ respektive $y = \frac{e + e^x}{2\sqrt{x}}$.

6. Lodräta asymptoter $x = \pm 1$. $y = x + 9$ är (sned) asymptot i både $+\infty$ och $-\infty$. Strikt lokalt maximum ($y = 0$) i $x = 0$. Strikt lokalt minimum ($y = 27/2$) i $x = 3$.

7. (a) Divergent. (b) Konvergent.

8. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$.