
補習授業部と学ぶ
数学
場合の数・確率・統計
R18
新課程
チート式

Section 2.2

独立試行の確率

#ガチャ　#最低保証　#天井

■試行の独立

10連ガチャに最低保証（少なくとも1枚は★2以上を排出する仕組み）をかけるとき，以下の2つの方法を考えてみます。

(1)　10連目だけは常に★2以上から抽選する
(2)　1～9連目に1回も★2以上が出なかったら，10連目は★2以上から抽選する

(1)の場合，1～9連目の結果は10連目の結果に影響しませんが，(2)の場合影響します。このように，一方が他方に影響しない試行は互いに**「独立」**，影響する試行は**「従属」**といいます。独立試行の確率は，各々の掛け算で計算できます。

●例題1

とあるゲームのガチャで★3，★2，★1の排出率は，1～9連目「3.0%，18.5%，78.5%」　10連目「3.0%，97.0%，0%」です。10連ガチャを1回引いたとき，最低保証を引く確率を求めなさい。

$0.785^9 \times 0.97 = 0.109799\cdots$　　　　答　11.0%

↑ガチャ1回ごとの試行は独立なので，1連目，2連目，3連目…　で特定のレアリティを引く確率を掛け算すれば計算できます。

■反復試行

1～9連目のように，同じ条件の独立試行を繰り返すことを**「反復試行」**といいます。反復試行は「○回中△回引く確率」等を計算できます。

例えば，9回中2回★3を引く確率を考えてみましょう。★3を引くことを○　★2以下を引くことを×に対応させせると，9回のガチャの結果は○2個と×7個の「同じものを含む順列」と考えることができます。（${}_9C_2=36$通り）
特定の回（例えば1，2連目）で★3が出て3～9連目に★3が出ない確率は，例題1と同様　$0.03^2 \times 0.97^7 = 0.000727\cdots$
他の回で出る確率も同じなので，順列の36通りをかけて　$0.026178\cdots$　つまり　2.6%　となります。

●例題2

例題1のゲームで200回ガチャを回して，★3が6回出る確率を求めなさい。

${}_{200}C_6 \times 0.03^6 \times 0.97^{194} = 0.163085\cdots$　　　　答　16.3%

↑★3の出現率は1～9連目と10連目で条件が同じなので，200回の反復試行で　★3が6回、★2以下が194回　と考えることができます。

練習問題

【1】ピックアップキャラの排出率が0.7%であるとき，200回ガチャを回してピックアップを引けない確率（%）を小数点第2位で四捨五入して求めなさい。

【2】例題1および練習1のゲームで200回ガチャを回して，すり抜け（ピックアップ以外の★3）が6回出る確率（%）を小数点第2位で四捨五入して求めなさい。

■重複組合せ

指名手配チケットや学園交流会チケット6枚をどのロケーションに割り振るかを考えると，順番を変えても得られるアイテムは同じなので「3つのロケーションから重複を許して6回選ぶ場合の数」として考えることになります．
これを重複組合せと呼び，「 ${}_3H_6$ 」という記号で表します．

順番が関係ないので，順番を固定して考えてみましょう．
指名手配のチケット使用順序をハイウェイ→砂漠の線路→校舎で固定します．

チケット6枚を「●」，その区切りを「｜」とすると，チケット使用のパターンは　●｜●●｜●●●　のような6つの●と2つの｜の順列と考えることができます．（｜が先頭や末尾に来るのはハイウェイ・校舎に行っていないパターンで，｜が2つ並ぶのが砂漠の線路に行っていないパターンです．）つまり ${}_3H_6={}_8C_6=28$通り となります．

同様の考え方で ${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$ となります．

●例題2

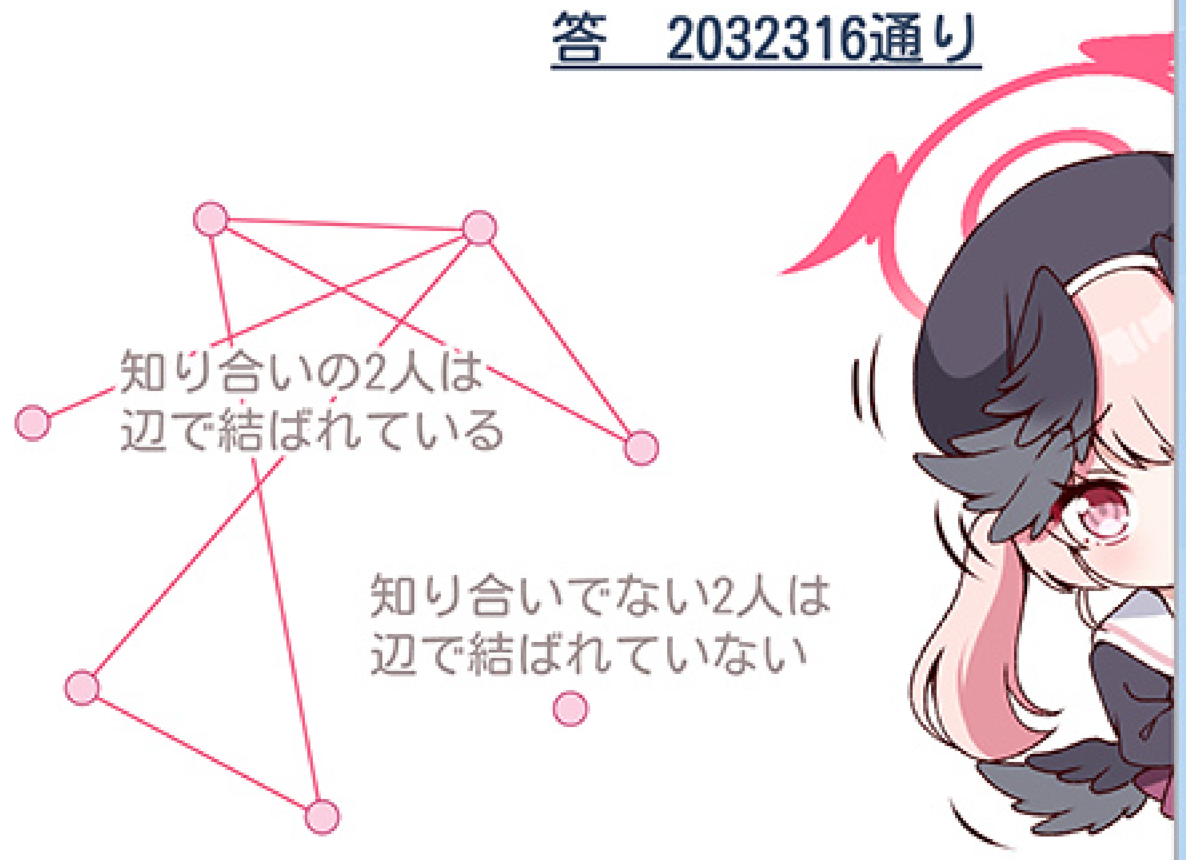
★2以下の生徒が全員シャーレ加入済みの状態で10回募集を行って最低保証になったとき，手に入る神名文字の組合せは何通りありますか？

$${}_{11}H_9\times22={}_{19}C_9\times22=92378\times22=2032316$$

答　2032316通り

■グラフ

シャーレに加入している生徒が7人のとき，生徒同士が知り合いであるかどうかという関係性のパターンは ${}_7C_2$ 通りの生徒の組に対して各々2通りあるので 2^{21} 通りになります．
生徒とその知人関係を，点とそれらを結ぶ辺として表現すると，右図のような図形ができます．これを「グラフ」といいます．



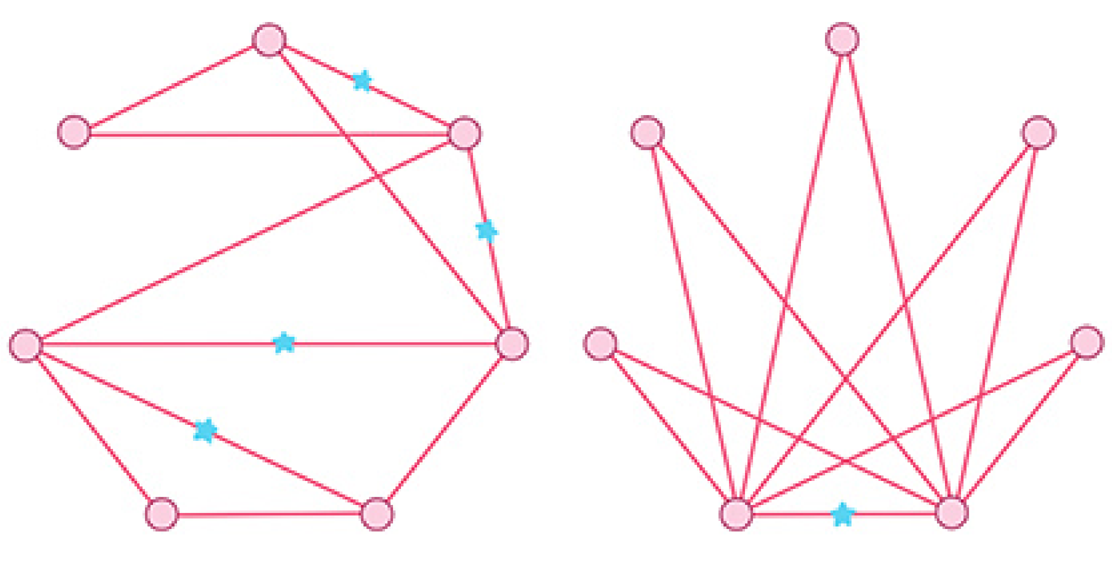
グラフを使うことで，人やものの「関係」に関する問題が解きやすくなります．

●例題3

↑の7人で，どの2人も知り合いであるような3人組が5組存在するとき，知り合いでない2人のペアは最大何組存在しますか？

どの2人も知り合いである3人が作る三角形は，2辺を共有するともう1辺も自動的に共有になるため，2つの組が共有する辺は最大1つ　つまり5組でつながる辺の最小値は　15−4＝11，従って知り合いでないペアは最大で　${}_7C_2-11=10$組存在する．

答　10組



★：共有する辺

練習問題

【3】サミュエラ「ザ・ビヨンド」4つを効果特大の生徒に贈る方法は何通りありますか？（※効果特大の生徒は7人）

【4】シャーレに加入している生徒が15人の場合，全員がその中の7人と知り合いであるという状況はありえますか？

Column 「誕生日のパラドックス」

ハナコ
問題です　シャーレには24人のトリニティ生徒が所属していますが
24人の中に同じ誕生日のペアがいる確率はどのくらいでしょう？

アズサ
1年は365日だから7%くらいか？

みんなちがうから0%！

コハル
先生は全員覚えてるだけでしょ！

ヒフミ
私もそのくらいかと思ったんですが　計算してみたら53.8%もありますね

全員バラバラの確率は

$$\underset{1人目}{\frac{365}{365}}\times\underset{\substack{2人目\\1人目と\\ちがう日}}{\frac{364}{365}}\times\underset{\substack{3人目\\1\sim2人目と\\ちがう日}}{\frac{363}{365}}\times\underset{\substack{4人目\\1\sim3人目と\\ちがう日}}{\frac{362}{365}}\times\cdots\times\underset{\substack{24人目\\1\sim23人目と\\ちがう日}}{\frac{342}{365}}=\frac{{}_{365}P_{24}}{365^{24}}$$ なので

$$1-\frac{{}_{365}P_{24}}{365^{24}}=0.5383442\cdots$$

53.8%

アズサ
かなり直感に反する値が出たな

ハナコ
そうですよー　これは「誕生日のパラドックス」という有名な問題ですね

コハル
つまりシャーレ全体だともっとたくさん同じ誕生日のペアがいるってこと？

双子を除くとハナコと山海經のサヤだけだね※

ハナコ
あら？それってかなり珍しいのでは……

ヒフミ
なんと　400万分の1みたいです

1組のペアの選び方が，$365\times{}_{110}C_2$ 通り.
それ以外の108人が全員バラバラになるのが ${}_{364}P_{108}$ 通り.
したがって

$$\frac{365\times{}_{110}C_2\times{}_{364}P_{108}}{365^{110}}\fallingdotseq 2.5\times10^{-7}$$

※キヴォトス外の生徒を含めるとスズミとミクが同じ，シャーレ外の生徒を含めるとサオリとモモカが同じです.

■データのばらつき

たとえば，4人の試験の結果が｛40, 45, 55, 60｝だった場合と，｛10, 30, 70, 90｝だった場合，平均値・中央値はどちらも50点になります．しかし，平均値と中央値では測れない何かが違う気がしますよね？
それはデータの「ばらつき具合」であり，**「分散」**という名前がついています．

分散は，文字通りデータがどのくらい散らばっているかを示す値で，計算方法は「(値ー平均) の平均」になります．

データを $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$，平均値を μ とすると，分散は $\{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+(x_3-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2\}/n$ です．

分散を使うと，**「偏差値」**を計算することができます．

偏差値は $(得点-平均)\div\sqrt{分散}\times10+50$ であり，平均との差が同じなら分散が小さいほど偏差値の変動が大きくなります．(分母にある，分散の正の平方根を**「標準偏差」**と呼びます．3.2で再登場しますが，標準偏差は色々便利な概念です．

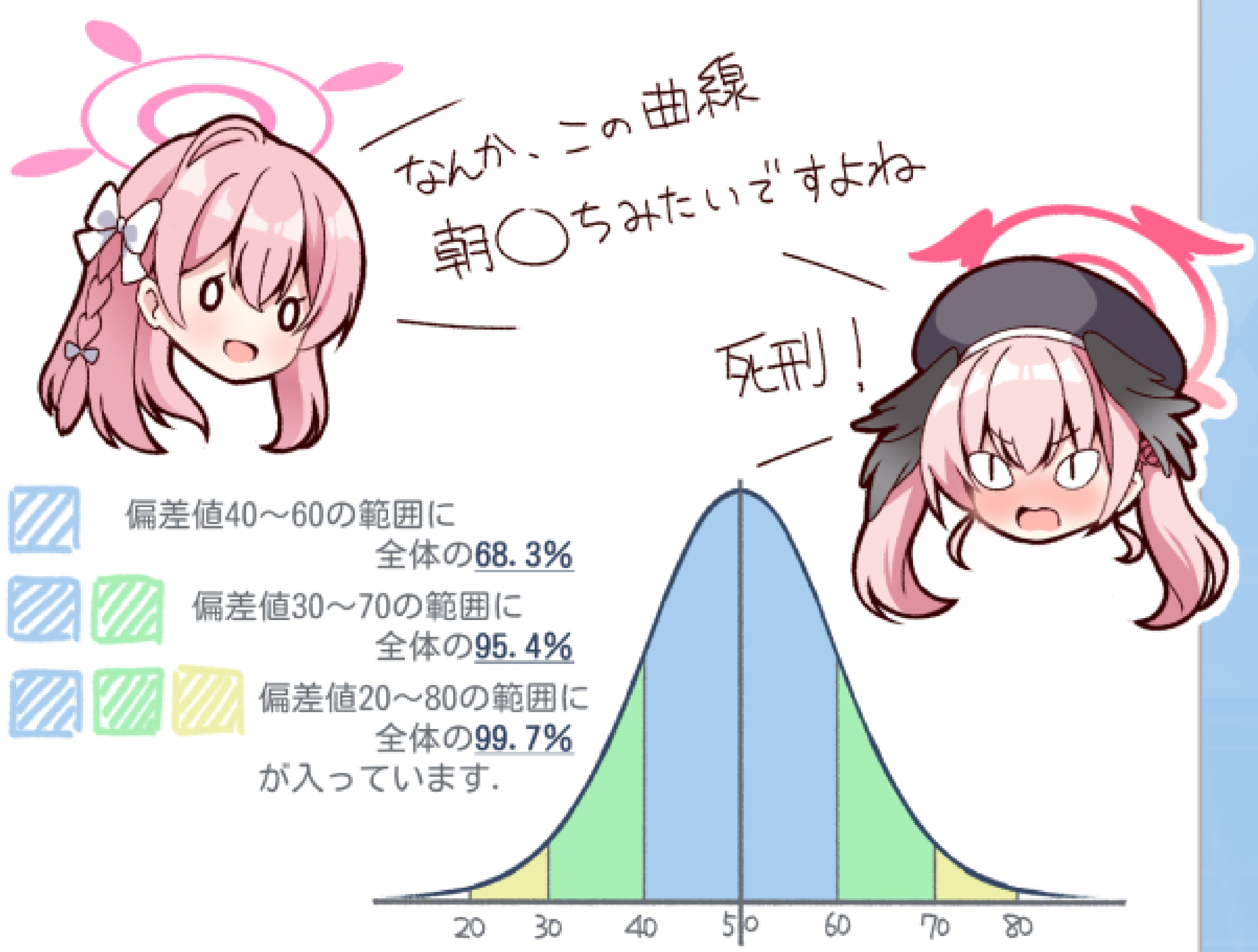
●例題2

上記の2つの試験結果に100点を取った人を1人追加して，5人の平均と分散を求めなさい．また，そのとき100点を取った人の偏差値はいくつですか？小数点第2位を四捨五入して求めなさい．

平均　＝　$(50\times4+100)/5$　＝　**60**　（両方同じ）

1つ目の分散　＝　$(20^2+15^2+5^2+0^2+40^2)/5$　＝　**450**
偏差値　$40/\sqrt{450}\times10+50$　＝　68.8561…　≒　**68.8**

2つ目の分散　＝　$(50^2+30^2+10^2+30^2+40^2)/5$　＝　**1200**
偏差値　$40/\sqrt{1200}\times10+50$　＝　61.5470…　≒　**61.5**



練習問題

【2】練習問題1の身長分布に対して，分散と標準偏差を求めなさい．また，身長128cmの生徒と180cmの生徒の偏差値を求めなさい．