پاسخ مسئله‌ی ۱.

الف

این گزاره **نادرست** است.

زیرا بردار O و هر بردار دیگری بر هم عمود هستند ولی مستقل خطی نیستند!

ب

این گزاره **درست** است.

$$\begin{cases} \|u-v\|^2 = (u-v)^T(u-v) = u^Tv - v^Tu + v^Tv = u^Tu - 2u^Tv + v^Tv = \|u\| - 2\langle u,v\rangle + \|v\| \\ \|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \end{cases}$$

پس درنتیجه $0 = \|v\| + \|u\|$ و دو بردار بر هم عمود هستند.

ج

این گزاره **درست** است.

$$\begin{cases} \langle u-v, u-v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u,v\rangle \\ \|v\| = \|v\| = 1 \\ \langle u,v\rangle = 1 \end{cases} \longrightarrow \langle u-v, u-v\rangle = 1^2 + 1^2 - 2(1) = 0 \rightarrow u-v = 0 \rightarrow u = v$$

پاسخ مسئله‌ی ۲.

$$\langle f(x),g(x)\rangle = \int_{0}^{1} f(x).g(x)\;dx$$

$$I=\int_{0}^{1} \sqrt[n]{xe^{mx}}\;dx \quad ; \quad m,n\in\mathbb{N}$$

می‌دانیم که نامساوی مقابل همواره برقرار است:

$$\langle f(x),g(x)\rangle \leqslant \|f(x)\|\|g(x)\|$$

حال فرض می‌کنیم که $f(x)=\sqrt[n]{x}$ و $g(x)=\sqrt[n]{xe^{mx}}$ باشد، پس:

$$\int_{0}^{1} \sqrt[n]{xe^{mx}}\;dx \leqslant \sqrt{\int_{0}^{1} \sqrt[n]{x^{2}}dx \times \int_{0}^{1} \sqrt[n]{xe^{2mx}}dx} \quad \longrightarrow I \leqslant \sqrt{(\frac{n}{n+2}x^{\frac{n+2}{n}})(\frac{n}{2m}e^{\frac{2mx}{n}})} = \sqrt{\frac{n}{n+2} \times (\frac{ne^{\frac{2m}{n}}}{2m} - \frac{n}{2m})}$$

$$\longrightarrow I \leqslant n\sqrt{\frac{e^{\frac{2m}{n}}-1}{2m(n+2)}}$$

پاسخ مسئله‌ی ۳.

در ابتدا یک مجموعه‌ی Basis برای C به نام B_1 و یک مجموعه هم برای $C^{\perp}$ به نام B_2 در نظر می‌گیریم. همچنین مجموعه‌ی $B_1 \cup B_2$ یک پایه برای فضای V است.

حال بردار $w \in V$ را به این صورت در نظر می‌گیریم:

$$w = w_1 + w_2 = (\alpha_1 B_{11} + \alpha_2 B_{12} + ... + \alpha_n B_{1n}) + (\gamma_1 B_{21} + \gamma_2 B_{22} + ... + \gamma_m B_{2m})$$

حال باید ثابت کنیم که بردار $c \in C$ نزدیک‌ترین بردار به w است:

$$\forall r \in C - \{c\} : \|w - c\| < \|w - r\| \longrightarrow c = w_1 = \alpha_1 B_{11} + \alpha_2 B_{12} + ... + \alpha_n B_{1n}$$

برای اثبات به این صورت عمل می‌کنیم:

$$\forall r \in C : \begin{cases} \|w - r\| = \|w_1 + w_2 - r\| = \|w_2 + c - r\| = \sqrt{\|w_2\|^2 + \|c - r\|^2} \\ \|w - c\| = \|w_2\| = \sqrt{\|w_2\|^2} \end{cases} \longrightarrow \|w - r\| > \|w - c\|$$

واضح است که فقط یک بردار که همان c است از همه به w نزدیک‌تر است و بردار دیگری وجود ندارد که بخواهد به w نزدیک‌ترین باشد، زیرا در غیر این صورت اثبات بخش بالا زیر سوال می‌روند.

پاسخ مسئله‌ی ۴.