



پاسخ مسئله ۱.

الف

$$\begin{aligned} \text{Nullity}\{ABC\} &= \{x|x \in N(A)\} \cup \{x|x \in N(B)\} \cup \{x|x \in N(C)\} \\ \begin{cases} \{x|x \in N(A)\} \subseteq \text{Nullity}\{A\} \\ \{x|x \in N(B)\} \subseteq \text{Nullity}\{B\} \\ \{x|x \in N(C)\} \subseteq \text{Nullity}\{C\} \end{cases} \\ \xrightarrow{|X|=X_1 \cup X_2 \cup X_3 \rightarrow |X| \leq |X_1| + |X_2| + |X_3|} & \text{Nullity}\{ABC\} \leq \text{Nullity}\{A\} + \text{Nullity}\{B\} + \text{Nullity}\{C\} \end{aligned}$$

ب

طبق قضیه های از قبل ثابت شده می دانیم که:

- (i) $\text{Rank}\{A^T\} = \text{Rank} A$
- (ii) $\text{Rank}\{AB\} \leq \text{Rank} A$

حال نامساوی خواسته شده را اثبات می کنیم:

$$\begin{aligned} \text{Rank}\{AB\} &= \text{Rank}\{(AB)^T\} = \text{Rank}\{B^T A^T\} \leq \text{Rank}\{B^T\} = \text{Rank}\{B\} \\ \rightarrow \begin{cases} \text{Rank}\{AB\} \leq \text{Rank}\{A\} \\ \text{Rank}\{AB\} \leq \text{Rank}\{B\} \end{cases} & \rightarrow \text{Rank}\{AB\} \leq \min(\text{Rank}\{A\}, \text{Rank}\{B\}) \\ \text{Rank}\{ABC\} &\xrightarrow[\text{اثبات بالا}]{BC=D} \text{Rank}\{AD\} \leq \min(\text{Rank}\{A\}, \text{Rank}\{D\}) \\ \xrightarrow{\text{Rank}\{D\} \leq \min(\text{Rank}\{C\}, \text{Rank}\{B\})} & \text{Rank}\{ABC\} \leq \min(\text{Rank}\{A\}, \text{Rank}\{B\}, \text{Rank}\{C\}) \end{aligned}$$

پ

در ابتدا می دانیم که:

$$\begin{cases} ABC = \bullet \rightarrow \text{Nullity}\{ABC\} = n \\ \text{Nullity}\{ABC\} \leq \text{Nullity}\{A\} + \text{Nullity}\{B\} + \text{Nullity}\{C\} \end{cases}$$

همچنین:

$$\text{Rank}\{A\} + \text{Nullity}\{A\} = n$$

همینطور اگر فرض کنیم که $\text{Nullity}\{C\}, \text{Nullity}\{B\} \leq \text{Nullity}\{A\}$ است، پس داریم:

$$\begin{aligned} n \leq 3 \times \text{Nullity}\{A\} &\rightarrow \frac{n}{3} \leq \text{Nullity}\{A\} \rightarrow \text{Rank}(A) \leq \frac{2n}{3} \\ \text{Rank}\{CBA\} &\leq \min(\text{Rank}\{A\}, \text{Rank}\{B\}, \text{Rank}\{C\}) \leq \text{Rank}\{A\} \leq \frac{2n}{3} \end{aligned}$$

ت

این بخش رو باید بعدا بزنم

پاسخ مسئله‌ی ۲.

این بخش رو باید بعدا بزنم

پاسخ مسئله‌ی ۳.

الف

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \beta_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$P_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} [\alpha_1]_\beta & [\alpha_2]_\beta & [\alpha_3]_\beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \longrightarrow a = \frac{1}{3}, b = 0, c = -\frac{1}{3} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \longrightarrow a = 2, b = -3, c = -1 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \longrightarrow a = \frac{1}{3}, b = 0, c = \frac{2}{3} \end{cases} \longrightarrow P_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & -3 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

ب

$$P_\beta^\alpha = (P_\alpha^\beta)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

مراحل وارون کردن ماتریس را در تمرین ۱ و ۲ انجام داده‌ایم و در این تمرین داخل چرک‌نویس انجام شده است.

ج

$$P_\beta^\alpha \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

پاسخ مسئله‌ی ۴.

این بخش رو باید بعدا بزnm

پاسخ مسئله‌ی ۵.

$$A^{\vee} = AB + \vee I = A(A - B) = \vee I \longrightarrow \dim(\vee I) = 3 \longrightarrow \dim(A(A - B)) = 3$$

$$\dim(A(A - B)) = 3 \leq \dim(A), \dim(A - B) \leq 3 \longrightarrow \dim(A) = \dim(A - B) = 3$$

با توجه به این که سطرها و ستون‌های A ، B مستقل خطی هستند، پس دو ماتریس A و A-B وارون پذیر هستند. در نتیجه A^{-1} وجود دارد. پس دو طرف معادله فوق را در آن ضرب کرده و داریم:

$$A(A - B) = \vee I \xrightarrow{\times A^{-1}} A - B = \vee A^{-1} \longrightarrow A - \vee A^{-1} = B$$

معادله فوق ممکنه است جواب داشته باشد یا ممکن است جواب نداشته باشد!

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} \begin{bmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ce \\ fg-di & cg-ai & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A - \vee A^{-1} = \begin{bmatrix} a - \frac{\vee(ei-fh)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} & b - \frac{\vee(ch-bi)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} & c - \frac{\vee(bf-ce)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} \\ d - \frac{\vee(fg-di)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} & e - \frac{\vee(cg-ai)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} & f - \frac{\vee(cd-af)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} \\ g - \frac{\vee(dh-eg)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} & h - \frac{\vee(bg-ah)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} & i - \frac{\vee(ae-bd)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & \vee & -\vee \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a - \frac{\vee(ei-fh)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} = -1 \\ b - \frac{\vee(ch-bi)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} = 1 \\ c - \frac{\vee(bf-ce)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} = -1 \\ d - \frac{\vee(fg-di)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} = 0 \\ e - \frac{\vee(cg-ai)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} = -1 \\ f - \frac{\vee(cd-af)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} = 0 \\ g - \frac{\vee(dh-eg)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} = 1 \\ h - \frac{\vee(bg-ah)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} = \vee \\ i - \frac{\vee(ae-bd)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} = -\vee \end{array} \right.$$

حال معادلات فوق را حل می‌کنیم و مجهول‌ها را بدست می‌آوریم.