جبر خطی

نیم‌سال دوم ۰۳-۰۲

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

اساتید: حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

تمرین دوم

پاسخ‌دهنده: معین آعلی - ۴۰۱۱۰۵۵۶۱

پاسخ مسئله‌ی ۱.

آ

این گزاره **نادرست** است. برای آن یک مثال نقض می‌زنیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}, B = I = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$C = AB = AI = A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix} \longrightarrow C_۳ = C_۱ + C_۴ - C_۲$$

اگر C_i را برابر سطرهای ماتریس C بگیریم، با توجه به رابطه فوق، سطرهای این ماتریس مستقل خطی نیستند.

ب

اگر در فضای برداری W بردارهای $w_۱, w_۲, w_۳, ..., w_{n+۱}$ فضای W را اسپن کنند، از آن‌جایی که این بردارها متمایز هستند و معادله‌ی $w_۱ + w_۲ + w_۳ + ... + w_{n+۱} = ۰$ برقرار است، پس بردارها وابسته خطی هستند.

پس می‌توان بردار $w_{n+۱}$ را با استفاده از بقیه‌ی بردارها ساخت. درنتیجه با حذف این بردار، باز هم می‌توان فضای W را اسپن کرد.

پس مجموعه‌ی بردارهای $w_۱, w_۲, ..., w_n$ یک پایه برای فضای بردار فوق هستند و این بردارها مستقل خطی هستند زیرا برای اسپن فضای $W \in R^n$ به n بردار نیاز داریم.

(می‌توان برای اثبات گزاره فوق از برهان خلف هم استفاده کرد و به تناقض رسید که برای اسپن فضای فوق از $n - ۱$ بردار استفاده کرد که این یک تناقض است.)

پاسخ مسئله‌ی ۲.

برای این که مجموعه S برای فضای برداری V پایه باشد، باید اعضایش مستقل خطی باشند و V را span کنند. دو شرط فوق را بررسی می‌کنیم:

مستقل خطی بودن

می‌دانیم که درجه‌ی چندجمله‌ای $q^{(i)}(x)$ برابر $n - i$ است. پس:

$$
\begin{aligned}
q(x) &= a_n x + a_{n-۱}x^{n-۱} + a_{n-۲}x^{n-۲} + ... + a_۱ x + a_۰ \\
q^{'}(x) &= \qquad b_{n-۱}x^{n-۱} + b_{n-۲}x^{n-۲} + ... + b_۱ x + b_۰ \quad , \quad b_i = \tfrac{a_i+۱}{i+۱} \\
q^{''}(x) &= \qquad\qquad c_{n-۲}x^{n-۲} + ... + c_۱ x + c_۰ \quad , \quad c_i = \tfrac{b_i+۱}{i+۱} \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
q^{n}(x) &= \qquad\qquad\qquad d_۰ = ۰
\end{aligned}
$$

فرض می‌کنیم که:

$$aq(x) + bq^{'}(x) + cq^{''}(x) + ... + dq^{n}(x) = ۰$$

می‌دانیم طبق فرض سوال $a_n \neq ۰$ ، پس $b_{n-۱} = \frac{a_n}{n} \neq ۰$ و $c_{n-۲} = \frac{b_{n-۱}}{n-۱} \neq ۰$ و ...

پس جمله‌ی اول هرکدام مخالف صفر است. حال ضرایب را می‌یابیم:

$$
\begin{aligned}
&aa_n = ۰ \xrightarrow{a_n \neq ۰} a = ۰ \\
&aa_{n-۱} + bb_{n-۱} = ۰ \xrightarrow[a=۰]{b_{n-۱} \neq ۰} b = ۰ \\
&aa_{n-۲} + bb_{n-۲} + cc_{n-۲} = ۰ \xrightarrow[a=۰,b=۰]{c_{n-۲} \neq ۰} c = ۰ \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

به همین ترتیب ادامه می‌دهیم و همه ضرایب برابر صفر می‌شوند، پس $q(x)$ تا $q^{n}(x)$ مستقل خطی خواهند بود.

اسپن کردن

برای اینکه اعضای S فضای برداری V را اسپن کنند، باید به ازای هر $v(x) \in V$ ، ضرایب معادله‌ی زیر به طور یکتا مشخص شوند.

$$aq(x) + bq^{'}(x) + cq^{''}(x) + ... + dq^{n}(x) = v(x)$$

همانند قسمت قبل:

$$
\begin{aligned}
&aa_n = v_n \to a = \tfrac{v_n}{a_n} \\
&aa_n + bb_{n-۱} = v_{n-۱} \xrightarrow{aa_n = v_n} b = \tfrac{v_{n-۱} - v_n}{b_{n-۱}} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

با توجه به اثبات‌های بخش اول و دوم، مجموعه S برای فضای برداری W یک پایه است.

پاسخ مسئله‌ی ۳.

$$\forall 1 \leqslant a \leqslant n : [M_{ij}] = \begin{cases} 1 & ; i = j = a \\ 0 & ; O.W. \end{cases} \longrightarrow \text{n عضو}$$

$$\forall 1 \leqslant a < n, a < b \leqslant n : [N_{ij}] = \begin{cases} 1 & ; (i,j) = (a,b) \vee (b,a) \\ 0 & ; O.W. \end{cases} \longrightarrow \frac{n^2-n}{2}\text{عضو}$$

مجموعه ما اجتماع دو مجموعه‌ی M, N است.

بعد پایه

بعد پایه پیشنهادی برابر $n + \frac{n^2-n}{2}$ است.

مستقل خطی بودن

این ماتریس‌ها حتماً مستقل خطی هستند، زیرا در هر ماتریس تنها یک ij یکتا برابر ۱ است، پس نمی‌توان با با جمع بقیه‌ی آن را صفر کرد، مگر این‌که ضرایب برابر ۰ باشند که غیرقابل‌قبول است. درنتیجه اعضای این مجموعه مستقل خطی هستند.

اسپن کردن $M_{n\times n}^{sym}(\mathbb{R})$

از آن‌جایی که این مجموعه ترکیب خطی از ماتریس‌های متقارن است، پس اسپن $M_{n\times n}^{sym}(\mathbb{R})$ هستند.

برای اثبات کافی است ضریب را برابر با خانه‌ی متناظر آن یک در ماتریس دلخواه خود بگذاریم. درنتیجه ضرایب ما یکتا هستند و ماتریس ما $M_{n\times n}^{sym}(\mathbb{R})$ را اسپن می‌کند.

پاسخ مسئله‌ی ۴.