جبر خطی

نیم‌سال دوم ۰۳-۰۲

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

اساتید: حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

تمرین سوم

پاسخ‌دهنده: معین آعلی - ۴۰۱۱۰۵۵۶۱

پاسخ مسئله‌ی ۱.

الف

این گزاره **نادرست** است.

زیرا بردار O و هر بردار دیگری بر هم عمود هستند ولی مستقل خطی نیستند!

ب

این گزاره **درست** است.

$$\begin{cases} \|u-v\|^2 = (u-v)^T(u-v) = u^Tv - v^Tu + v^Tv = u^Tu - 2u^Tv + v^Tv = \|u\| - 2\langle u,v\rangle + \|v\| \\ \|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \end{cases}$$

پس درنتیجه $\|u\| + \|v\| = 0$ و دو بردار بر هم عمود هستند.

ج

این گزاره **درست** است.

$$\begin{cases} \langle u-v, u-v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u,v\rangle \\ \|v\| = \|v\| = 1 \\ \langle u,v\rangle = 1 \end{cases} \longrightarrow \langle u-v, u-v\rangle = 1^2 + 1^2 - 2(1) = 0 \rightarrow u-v = 0 \rightarrow u = v$$

پاسخ مسئله‌ی ۲.

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^1 f(x).g(x)\ dx$$

$$I = \int_0^1 \sqrt[n]{xe^{mx}}\ dx \ \ ; \ \ m, n \in \mathbb{N}$$

می‌دانیم که نامساوی مقابل همواره برقرار است:

$$\langle f(x), g(x)\rangle \leqslant \|f(x)\|\|g(x)\|$$

حال فرض می‌کنیم که $f(x) = \sqrt[n]{x}$ و $g(x) = \sqrt[n]{xe^{mx}}$ باشد، پس:

$$\int_0^1 \sqrt[n]{xe^{mx}}\ dx \leqslant \sqrt{\int_0^1 \sqrt[n]{x^2}dx \times \int_0^1 \sqrt[n]{xe^{2mx}}dx} \quad \longrightarrow I \leqslant \sqrt{(\frac{n}{n+2}x^{\frac{n+2}{n}})(\frac{n}{2m}e^{\frac{2mx}{n}})} = \sqrt{\frac{n}{n+2} \times (\frac{ne^{\frac{2m}{n}}}{2m} - \frac{n}{2m})}$$

$$\longrightarrow I \leqslant n\sqrt{\frac{e^{\frac{2m}{n}}-1}{2m(n+2)}}$$

۳. مسئله‌ی پاسخ

۴. مسئله‌ی پاسخ