پاسخ مسئله‌ی ۱.

الف

اگر A یک ماتریس nدرm و B یک ماتریس mدرk باشد، بنابراین AB یک ماتریس nدرk خواهد بود، پس:

$$\begin{cases} Nullity(A) + Rank(A) = m Nullity(B) + Rank(B) = k \\ Nullity(AB) + Rank(AB) = k \end{cases}$$

با توجه به معادلات بالا:

$$Nullity(B) + Rank(B) = Nullity(AB) + Rank(AB)$$
$$\longrightarrow Nullity(B) + Rank(B) + Nullity(A) + Rank(A) = Nullity(AB) + Rank(AB) + m$$

همچنین می‌دانیم که:

$$Rank(AB) \leqslant Rank(B)$$

پس درنتیجه:

$$\begin{cases} Nullity(B) + Nullity(A) + Rank(A) \geqslant Nullity(AB) + m \\ Rank(A) \leqslant m \end{cases} \longrightarrow Nullity(A) + Nullity(B) \geqslant Nullity(AB)$$

درنهایت خواسته اصلی سوال را اثبات می‌کنیم:

$$Nullity(B) + Nullity(C) \geqslant Nullity(BC)$$
$$\longrightarrow Nullity(A) + Nullity(BC) \leqslant Nullity(A) + Nullity(B) + Nullity(C)$$
$$\longrightarrow Nullity(A(BC)) \leqslant Nullity(A) + Nullity(B) + Nullity(C)$$
$$\longrightarrow Nullity(ABC) \leqslant Nullity(A) + Nullity(B) + Nullity(C)$$

ب

طبق قضیه‌های از قبل ثابت شده می‌دانیم که:

(i) $Rank\{A^T\} = Rank A$

(ii) $Rank\{AB\} \leqslant Rank A$

حال نامساوی خواسته شده را اثبات می‌کنیم:

$$Rank\{AB\} = Rank\{(AB)^T\} = Rank\{B^T A^T\} \leqslant Rank\{B^T\} = Rank\{B\}$$
$$\longrightarrow \begin{cases} Rank\{AB\} \leqslant Rank\{A\} \\ Rank\{AB\} \leqslant Rank\{B\} \end{cases} \longrightarrow Rank\{AB\} \leqslant min(Rank\{A\}, Rank\{B\})$$

$$Rank\{ABC\} \xrightarrow[\text{اثبات بالا}]{BC=D} Rank\{AD\} \leqslant min(Rank\{A\}, Rank\{D\})$$
$$\xrightarrow{Rank\{D\} \leqslant min(Rank\{C\}, Rank\{B\})} Rank\{ABC\} \leqslant min(Rank\{A\}, Rank\{B\}, Rank\{C\})$$

پ

در ابتدا می‌دانیم که:

$$\begin{cases} ABC = ۰ \to Nullity\{ABC\} = n \\ Nullity\{ABC\} \leqslant Nullity\{A\} + Nullity\{B\} + Nullity\{C\} \end{cases}$$

همچنین:

$$Rank\{A\} + Nullity\{A\} = n$$

همینطور اگر فرض کنیم که $Nullity\{C\}, Nullity\{B\} \leqslant Nullity\{A\}$ است، پس داریم:

$$n \leqslant ۳ \times Nullity\{A\} \to \frac{n}{۳} \leqslant Nullity\{A\} \to Rank(A) \leqslant \frac{۲n}{۳}$$
$$Rank\{CBA\} \leqslant min(Rank\{A\}, Rank\{B\}, Rank\{C\}) \leqslant Rank\{A\} \leqslant \frac{۲n}{۳}$$

ت

برای اثبات حکم مسئله ما باید این ۳ رابطه را اثبات کنیم:

- $N(A) = N(A^۲) \longrightarrow Range(A) = Range(A^۲)$
- $Range(A) = Range(A^۲) \longrightarrow Range(A) \cap N(A) = \{۰\}$
- $Range(A) \cap N(A) = \{۰\} \longrightarrow N(A) = N(A^۲)$

برای اثبات **حکم اول** داریم:

$$N(A) = N(A^۲) \longrightarrow Nullity(A) = Nullity(A^۲) \longrightarrow n - Nullity(A) = n - Nullity(A^۲) \longrightarrow$$
$$Rank(A) = Rank(A^۲) ColumnSpace(AB) \subseteq ColumnSpace(A) \longrightarrow ColumnSpace(A^۲) \subseteq ColumnSpace(A)$$

می‌دانیم که Rank این دو با هم برابر است، پس می‌توان گفت که اندازه پایه هردوی آن‌ها برابر است، پس پایه‌ی فضای ستونی A برابر با پایه‌ی فضای ستونی $A^۲$ است. پس:

$$ColumnSpace(A) = ColumnSpace(A^۲) \longrightarrow Range(A) = Range(A^۲)$$

حال برای اثبات **حکم دومی** از برهان خلف استفاده کرده و فرض می‌کنیم که بردار غیر صفری مثل u وجود دارد که در هر دو وجود دارد و چون u عضوی از فضای ستونی A است، پس برداری همانند v هم وجود دارد که $Av = u$ باشد. پس:

$$u \in N(A) \cap Range(A) \to u \in N(A) \to Au = ۰ \to AAv = ۰ \to A^۲v = ۰$$

پس v عضوی از NullSpace فضای A است و نه فضای $A^۲$. همچنین می‌دانیم که:

$$NullSpace(A) \subseteq NullSpace(A^۲)$$

پس:

$$Nullity(A^۲) > Nullity(A) \to n - Nullity(A^۲) < n - Nullity(A) \to Rank(A^۲) < Rank(A)$$

پس در نتیجه $Range(A) \neq Range(A^۲)$ است، پس این تناقض است و قطعا اشتراک این دو برابر با $\{۰\}$ است.

در نهایت باید **حکم سوم** را اثبات کنیم. می‌دانیم که $N(A) \subseteq N(A^۲)$ است، پس طبق برهان خلف فرض می‌کنیم که برداری مانند u وجود دارد که در $N(A^۲)$ باشد اما در $N(A)$ نباشد. پس:

$$AAu = ۰ \longrightarrow A(Au) = ۰$$

پس بردار Au عضو $N(A)$ است و همچنین عضو $ColumnSpace(A)$ نیز هست. در نتیجه عضو $N(A) \cap R(A)$ هم هست. و چون طبق بخش قبل اشتراک این دو فقط شامل بردار صفر است:

$$Au = ۰ \longrightarrow u \in N(A)$$

پس با توجه به تناقض به وجود آمده، حکم به کمک برهان خلف اثبات شد.

پاسخ مسئله‌ی ۲.

الف

ابتدا می‌دانیم که:

$u \notin Null(\varphi) \xrightarrow{\alpha \neq 0} \alpha u \notin Null(\varphi) \longrightarrow Null(\varphi) \cap \{\alpha u : \alpha \in F\} = \{0\}$

حال با توجه به این که $\varphi : V \to F$ ، باید اثبات کنیم که کل فضای V را پوشش می‌دهد.

$$\begin{cases} dim(V) = n \\ dim(im(\varphi)) = 1 \\ dim(V) = dim(Null(\varphi)) + dim(im(\varphi)) \end{cases} \longrightarrow dim(Null(\varphi)) = n - 1$$

پس ما فقط یک u داریم که به F می‌رود و بقیه عضو $Null(\varphi)$ هستند. پس:

$V = Null(\varphi) \oplus \{\alpha u : \alpha \in F\}$

ب

ابتدا طرف اول حکم را ثابت می‌کنیم، می‌دانیم که $A_{j,k} = c_j d_k$ است، پس هر سطر از ماتریس زیر، مضربی از یک سطر دیگر است. پس در نتیجه:

$$A = \begin{bmatrix} c_1 d_1 & c_1 d_2 & \dots & c_1 d_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_n d_1 & c_n d_2 & \dots & c_n d_n \end{bmatrix} \longrightarrow Rank(A) = 1$$

حال اگر $Rank(A) = 1$ باشد، باید ثابت کنیم که $A_{j,k} = c_j d_k$ است. چون $Rank(A) = 1$ برابر ۱ است، پس با انجام عملیات rref باید فقط یک سطر باقی بماند، این یعنی که سطرها مضرب یکدیگر هستند و حکم ثابت می‌شود.

پاسخ مسئله‌ی ۳.

الف

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \beta_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$P_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} [\alpha_1]_\beta & [\alpha_2]_\beta & [\alpha_3]_\beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \longrightarrow a = \frac{1}{3}, b = 0, c = \frac{-1}{3} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \longrightarrow a = \frac{-2}{3}, b = 1, c = \frac{-1}{3} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \longrightarrow a = \frac{1}{3}, b = 0, c = \frac{2}{3} \end{cases} \longrightarrow P_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

ب

$$P_\beta^\alpha = (P_\alpha^\beta)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

مراحل وارون کردن ماتریس را در تمارین ۱ و ۲ انجام داده‌ایم و در این تمرین داخل چرک‌نویس انجام شده است.

ج

$$P_\beta^\alpha \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

پاسخ مسئله‌ی ۴.

باید ثابت کنیم که:

$$\exists\ S \in \mathcal{L}(V,W) \longleftrightarrow Range(T_۱) = Range(T_۲)$$

ابتدا طرف اول را ثابت می‌کنیم. اگر S وجود داشته باشد، چون $T_۱ = T_۲ S$ است، پس هر عضو از $Range(T_۱)$ عضو $Range(T_۲)$ هم است. چون که به ازای هر u دلخواه که به $T_۱$ داده می میشود، یک $v = Su$ هم وجود دارد که به ازای آن خروجی $T_۲$ با خروجی $T_۱$ برابر خواهد شد. پس:

$$Range(T_۱) \subseteq Range(T_۲)$$

از آن‌جایی که S معکوس‌پذیر است، پس:

$$T_۱ = T_۲ S \longrightarrow T_۱ S^{-۱} = T_۲ S S^{-۱} \longrightarrow T_۱ S^{-۱} = T_۲$$

پس مشابه بالا می‌توان گفت:

$$Range(T_۲) \subseteq Range(T_۱)$$

در نهایت طرف اول حکم اثبات می‌شود:

$$\begin{cases} Range(T_۲) \subseteq Range(T_۱) \\ Range(T_۱) \subseteq Range(T_۲) \end{cases} \longrightarrow Range(T_۱) = Range(T_۲)$$

حال طرف دیگر حکم را ثابت می‌کنیم. ما S را این‌گونه تعریف می‌کنیم که اگر $e_۱, e_۲, e_۳, ..., e_n$ پایه در $T_۱$ باشد، آن‌گاه $e'_۱, e'_۲, e'_۳, ..., e'_n$ پایه در $T_۲$ باشند، به طوری که: $Se_i = e'_i$
پس در نتیجه تمامی عناصر موجود در $T_۲$ ساخته می‌شوند.

$$\alpha \in T_۲ \longrightarrow \alpha = \alpha_۱ e'_۱ + \alpha_۲ e'_۲ + ... + \alpha_n e'_n \longrightarrow$$
$$\alpha_۱ S e_۱ + ... + \alpha_n S e_n = S\alpha_۱ e_۱ + ... + S\alpha_n e_n = S(\alpha_۱ e_۱ + ... + \alpha_n e_n)$$

یک ترکیب خطی ساخته شد که به α می‌رود. تبدیل S وارون‌پذیر است، چون یک‌به‌یک است. یک‌به‌یک بودن را با برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم $u \neq v, S(u) = S(v)$ باشد، پس داریم:

$$S(u-v) = ۰$$
$$S(۰) = ۰$$

حال باید نشان دهیم که $u = v$ تا به تناقض بخوریم.

$$\begin{cases} S(u) = \alpha_۱ e'_۱, \alpha_۲ e'_۲, e_۳, ..., \alpha_n e'_n = S(\alpha_۱ e_۱ + ... + \alpha_n e_n) \\ S(v) = \beta_۱ e'_۱, \beta_۲ e'_۲, e_۳, ..., \beta_n e'_n = S(\beta_۱ e_۱ + ... + \beta_n e_n) \end{cases} \rightarrow (\alpha_۱ - \beta_۱)e'_۱ + ... + (\alpha_n - \beta_n)e'_n = ۰$$

طبق تعریف پایه بودن $e'_۱, ..., e'_n$ ، پس ضرایب برابر صفر هستند و در نتیجه:

$$\alpha_i - \beta_i = ۰ \longrightarrow \alpha_i = \beta_i \longrightarrow u = v$$

پاسخ مسئله‌ی ۵.

$A^۲ = AB + ۲I = A(A - B) = ۲I \longrightarrow A(\frac{A-B}{۲}) = I$

باید ماتریس A وارون‌پذیر باشد، پس:

$A^۲ = AB + ۲I \longrightarrow A = B + ۲A^{-۱} \longrightarrow B = A - ۲A^{-۱}$
$\longrightarrow BA = (A - ۲A^{-۱})A = A^۲ - ۲I \longrightarrow A^۲ = BA + ۲I$

$$\begin{cases} A^۲ = AB + ۲I \\ A^۲ = BA + ۲I \end{cases} \longrightarrow \mathrm{AB = BA}$$

حال فرض می‌کنیم که $Y = ۲A - B$ است، پس:

$Y^۲ = (۲A - B)^۲ = ۴A^۲ - ۴AB + B^۲ = ۴(A^۲ - AB) + B^۲ \xrightarrow{A^۲=AB+۲I} Y^۲ = ۸I + B^۲$

$$Y^۲ = \begin{bmatrix} ۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۸ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۸ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & -۴ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۳ & -۵ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & -۴ & ۳ \\ ۰ & ۹ & ۰ \\ -۳ & -۵ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

$|Y|^۲ = |Y^۲| = ۸۷۲$

$|۲A - B| = |Y| = \sqrt{۸۷۲} \simeq ۲۹/۵$

طبق فرض سوال می‌دانیم که درایه‌های ماتریس A صحیح هستند، پس درایه‌های ماتریس $۲A - B$ هم صحیح هستند، در نتیجه دترمینان Y هم باید صحیح باشد، اما نیست !

پس ماتریس A وجود ندارد.