جبر خطی

نیم‌سال دوم ۰۳-۰۲

اساتید: حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین تئوری چهارم

پاسخ‌دهنده: معین آعلی - ۴۰۱۱۰۵۵۶۱

پاسخ مسئله‌ی ۱.

الف

$$Nullity\{ABC\} = \{x|x \in N(A)\} \cup \{x|x \in N(B)\} \cup \{x|x \in N(C)\}$$

$$\begin{cases} \{x|x \in N(A)\} \subseteq Nullity\{A\} \\ \{x|x \in N(B)\} \subseteq Nullity\{B\} \\ \{x|x \in N(C)\} \subseteq Nullity\{C\} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{|X|=X_۱ \cup X_۲ \cup X_۳ \to |X| \leqslant |X_۱|+|X_۲|+|X_۳|} Nullity\{ABC\} \leqslant Nullity\{A\} + Nullity\{B\} + Nullity\{C\}$$

ب

طبق قضیه‌های از قبل ثابت شده می‌دانیم که:

(i) $Rank\{A^T\} = RankA$

(ii) $Rank\{AB\} \leqslant RankA$

حال نامساوی خواسته شده را اثبات می‌کنیم:

$$Rank\{AB\} = Rank\{(AB)^T\} = Rank\{B^T A^T\} \leqslant Rank\{B^T\} = Rank\{B\}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} Rank\{AB\} \leqslant Rank\{A\} \\ Rank\{AB\} \leqslant Rank\{B\} \end{cases} \longrightarrow Rank\{AB\} \leqslant min(Rank\{A\}, Rank\{B\})$$

$$Rank\{ABC\} \xrightarrow[\text{اثبات بالا}]{BC=D} Rank\{AD\} \leqslant min(Rank\{A\}, Rank\{D\})$$

$$\xrightarrow{Rank\{D\} \leqslant min(Rank\{C\}, Rank\{B\})} Rank\{ABC\} \leqslant min(Rank\{A\}, Rank\{B\}, Rank\{C\})$$

پ

در ابتدا می‌دانیم که:

$$\begin{cases} ABC = ۰ \to Nullity\{ABC\} = n \\ Nullity\{ABC\} \leqslant Nullity\{A\} + Nullity\{B\} + Nullity\{C\} \end{cases}$$

همچنین:

$$Rank\{A\} + Nullity\{A\} = n$$

همینطور اگر فرض کنیم که $Nullity\{C\}, Nullity\{B\} \leqslant Nullity\{A\}$ است، پس داریم:

$$n \leqslant ۳ \times Nullity\{A\} \to \frac{n}{۳} \leqslant Nullity\{A\} \to Rank(A) \leqslant \frac{۲n}{۳}$$

$$Rank\{CBA\} \leqslant min(Rank\{A\}, Rank\{B\}, Rank\{C\}) \leqslant Rank\{A\} \leqslant \frac{۲n}{۳}$$

ت

این بخش رو باید بعدا بزنم

پاسخ مسئله‌ی ۲.

برای این که مجموعه S برای فضای برداری V پایه باشد، باید اعضایش مستقل خطی باشند و V را span کنند. دو شرط فوق را بررسی می‌کنیم:

مستقل خطی بودن

می‌دانیم که درجه‌ی چندجمله‌ای $q^{(i)}(x)$ برابر $n-i$ است. پس:

$$
\begin{aligned}
q(x) &= a_n x + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 \\
q'(x) &= \quad b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0 \quad , \quad b_i = \tfrac{a_i+1}{i+1} \\
q''(x) &= \quad c_{n-2}x^{n-2} + \dots + c_1 x + c_0 \quad , \quad c_i = \tfrac{b_i+1}{i+1} \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
q^n(x) &= \quad d_0 = 0
\end{aligned}
$$

فرض می‌کنیم که:

$$aq(x) + bq'(x) + cq''(x) + \dots + dq^n(x) = 0$$

می‌دانیم طبق فرض سوال $a_n \neq 0$ ، پس $b_{n-1} = \frac{a_n}{n} \neq 0$ و $c_{n-2} = \frac{b_{n-1}}{n-1} \neq 0$ و ...

پس جمله‌ی اول هرکدام مخالف صفر است. حال ضرایب را می‌یابیم:

$$
\begin{aligned}
&aa_n = 0 \xrightarrow{a_n \neq 0} a = 0 \\
&aa_{n-1} + bb_{n-1} = 0 \xrightarrow[a=0]{b_{n-1}\neq 0} b = 0 \\
&aa_{n-2} + bb_{n-2} + cc_{n-2} = 0 \xrightarrow[a=0,b=0]{c_{n-2}\neq 0} c = 0 \\
&\quad\vdots
\end{aligned}
$$

به همین ترتیب ادامه می‌دهیم و همه ضرایب برابر صفر می‌شوند، پس $q(x)$ تا $q^n(x)$ مستقل خطی خواهند بود.

اسپن کردن

برای اینکه اعضای S فضای برداری V را اسپن کنند، باید به ازای هر $v(x) \in V$ ، ضرایب معادله‌ی زیر به طور یکتا مشخص شوند.

$$aq(x) + bq'(x) + cq''(x) + \dots + dq^n(x) = v(x)$$

همانند قسمت قبل:

$$
\begin{aligned}
&aa_n = v_n \to a = \tfrac{v_n}{a_n} \\
&aa_n + bb_{n-1} = v_{n-1} \xrightarrow{aa_n = v_n} b = \tfrac{v_{n-1}-v_n}{b_{n-1}} \\
&\quad\vdots
\end{aligned}
$$

با توجه به اثبات‌های بخش اول و دوم، مجموعه S برای فضای برداری W یک پایه است.