جبر خطی

نیم‌سال دوم ۰۳-۰۲

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

اساتید: حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

تمرین تئوری سوم

پاسخ‌دهنده: معین آعلی - ۴۰۱۱۰۵۵۶۱

پاسخ مسئله‌ی ۱.

الف

این گزاره **نادرست** است.

زیرا بردار O و هر بردار دیگری بر هم عمود هستند ولی مستقل خطی نیستند!

ب

این گزاره **درست** است.

$$\begin{cases} \|u-v\|^{۲} = (u-v)^T(u-v) = u^Tv - v^Tu + v^Tv = u^Tu - ۲u^Tv + v^Tv = \|u\| - ۲\langle u, v\rangle + \|v\| \\ \|u-v\|^{۲} = \|u\|^{۲} + \|v\|^{۲} \end{cases}$$

پس درنتیجه $\|u\| + \|v\| = ۰$ و دو بردار بر هم عمود هستند.

ج

این گزاره **درست** است.

$$\begin{cases} \langle u-v, u-v\rangle = \|u\|^{۲} + \|v\|^{۲} - ۲\langle u, v\rangle \\ \|v\| = \|v\| = ۱ \\ \langle u, v\rangle = ۱ \end{cases} \longrightarrow \langle u-v, u-v\rangle = ۱^{۲} + ۱^{۲} - ۲(۱) = ۰ \rightarrow u-v = ۰ \rightarrow u = v$$

پاسخ مسئله‌ی ۲.

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^1 f(x).g(x)\ dx$$

$$I = \int_0^1 \sqrt[n]{xe^{mx}}\ dx \ \ ; \ \ m,n \in \mathbb{N}$$

می‌دانیم که نامساوی مقابل همواره برقرار است:

$$\langle f(x), g(x)\rangle \leqslant \|f(x)\|\|g(x)\|$$

حال فرض می‌کنیم که $f(x) = \sqrt[n]{x}$ و $g(x) = \sqrt[n]{xe^{mx}}$ باشد، پس:

$$\int_0^1 \sqrt[n]{xe^{mx}}\ dx \leqslant \sqrt{\int_0^1 \sqrt[n]{x^2}dx \times \int_0^1 \sqrt[n]{xe^{2mx}}dx} \quad \longrightarrow I \leqslant \sqrt{(\frac{n}{n+2}x^{\frac{n+2}{n}})(\frac{n}{2m}e^{\frac{2mx}{n}})} = \sqrt{\frac{n}{n+2} \times (\frac{ne^{\frac{2m}{n}}}{2m} - \frac{n}{2m})}$$

$$\longrightarrow I \leqslant n\sqrt{\frac{e^{\frac{2m}{n}}-1}{2m(n+2)}}$$

پاسخ مسئله‌ی ۳.

در ابتدا یک مجموعه‌ی Basis برای C به نام $B_۱$ و یک مجموعه هم برای $C^{\perp}$ به نام $B_۲$ در نظر می‌گیریم. همچنین مجموعه‌ی $B_۱ \cup B_۲$ یک پایه برای فضای V است.

حال بردار $w \in V$ را به این صورت در نظر می‌گیریم:

$$w = w_۱ + w_۲ = (\alpha_۱ B_{۱۱} + \alpha_۲ B_{۱۲} + ... + \alpha_n B_{۱n}) + (\gamma_۱ B_{۲۱} + \gamma_۲ B_{۲۲} + ... + \gamma_m B_{۲m})$$

حال باید ثابت کنیم که بردار $c \in C$ نزدیک‌ترین بردار به w است:

$$\forall r \in C - \{c\} : \|w - c\| < \|w - r\| \longrightarrow c = w_۱ = \alpha_۱ B_{۱۱} + \alpha_۲ B_{۱۲} + ... + \alpha_n B_{۱n}$$

برای اثبات به این صورت عمل می‌کنیم:

$$\forall r \in C : \begin{cases} \|w - r\| = \|w_۱ + w_۲ - r\| = \|w_۲ + c - r\| = \sqrt{\|w_۲\|^۲ + \|c - r\|^۲} \\ \|w - c\| = \|w_۲\| = \sqrt{\|w_۲\|^۲} \end{cases} \quad \longrightarrow \|w - r\| > \|w - c\|$$

واضح است که فقط یک بردار که همان c است از همه به w نزدیک‌تر است و بردار دیگری وجود ندارد که بخواهد به w نزدیک‌ترین باشد، زیرا در غیر این صورت اثبات بخش بالا زیر سوال می‌روند.

پاسخ مسئله‌ی ۴.

باید دو طرف قضیه را ثابت کنیم:

۱. اگر وابسته خطی باشند $\longrightarrow$ بردار صفر تولید می‌شود.
برای این اثبات از برهان خلف کمک می‌میگیریم:

فرض می‌کنیم بردار صفر تولید نشده است و آخرین بردار در الگوریتم گرام‌اشمیت بردار q_m بوده است، پس:
$\widetilde{q_m} = r_k - (q_۱.r_k)q_۱ - ... - (q_{k-۱}.r_k)q_{k-۱} = \frac{\widetilde{q_m}}{\|\widetilde{q_m}\|}$

طبق فرض خلف q_i ها مخالف صفر هستند و می‌دانیم که این الگوریتم بردارهای عمود تولید می‌کند، پس q_i ها مستقل خطی هستند. همچنین:

$q_۱ = \frac{v_۱}{\|v_۱\|}$
$q_۲ = \frac{v_۲ - (q_۱.v_۲)q_۱}{\|v_۲ - (q_۱ v_۲)q_۱\|} = cv_۲ - \frac{c(q_۱ v_۲)}{\|v_۱\|}v_۱$

پس درنتیجه هر ترکیب خطی از q_i ها را می‌توان از ترکیب خطی از r_i ها نوشت. اما می‌دانیم که q_iها m بردار مستقل خطی هستند و فضای mبعدی را span می‌کنند، پس r_iها هم فضای mبعدی را span می‌کنند. اما می‌دانیم که r_iها وابسته خطی هستند و نمی‌توانند فضای mبعدی را span کنند. پس به تناقض می‌سیم و حکم اثبات می‌شود.

۲. اگر بردار صفر تولید شود$\longrightarrow$ r_i ها وابسته خطی هستند.
فرض می‌کنیم که q_i برابر صفر است:

$r_i - \sum_{j=۱}^{i-۱}(q_j.r_i)q_j = ۰$

همینطور می‌دانیم که:

$r_i = \sum_{j=۱}^{i-۱}(q_j.r_i)q_j$ // // $r_i = \sum_{j=۱}^{mi-۱} c_j r_j \longrightarrow r_i - c_{i-۱}r_{i-۱} - ... - c_۱ r_۱ = ۰$

که نشان میدهیم:

$r_i - \sum_{j=۱}^{i-۱}(q_j.r_i)q_j = ۰$

پس r_iها وابسته خطی هستند.

پس در نهایت هر دو طرف قضیه اثبات می‌شود.

پاسخ مسئله‌ی ۵.

ابتدا باید ثابت کنیم که اگر $b=c=\text{۰}$ باشد، آنگاه T یک تبدیل خطی است. پس:

$T(p(x)) = (\text{۳}p(\text{۴}) + \text{۵}p'(\text{۶}), \int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} x^{\text{۳}} p(x)dx)$

پس باید دو ویژگی زیر را ثابت کنیم:

۱. $T((p+q)(x)) = (\text{۳}p(\text{۴})+\text{۳}q(\text{۴})+\text{۵}p'(\text{۶})+\text{۵}q'(\text{۶}), \int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} x^{\text{۳}}p(x)dx+\int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} x^{\text{۳}}q(x)dx) = T(p(x))+T(q(x))$

۲. $T(\alpha P(x)) = (\text{۳}\alpha P(\text{۴})+\text{۵}\alpha P'(\text{۶}), \int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} \alpha x^{\text{۳}}P(x)dx) = \alpha(\text{۳}P(\text{۴})+\text{۵}P'(\text{۶}), \int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} x^{\text{۳}}P(x)dx) = \alpha T(P(x))$

حال ثابت می‌کنیم که اگر T تبدیل خطی باشد، آنگاه باید $b=c=\text{۰}$ باشد. پس:

- $\text{۳}\alpha p(\text{۴}) + \text{۵}\alpha p'(\text{۶}) + \beta\alpha^{\text{۲}}p(\text{۱})p(\text{۲}) = \alpha(\text{۳}p(\text{۴}) + \text{۵}p'(\text{۶}) + \beta p(\text{۱})p(\text{۲}))$
  $\longrightarrow \beta\alpha^{\text{۲}}p(\text{۱})p(\text{۲}) = \beta\alpha p(\text{۱})p(\text{۲}) \longrightarrow \beta\alpha = \beta \longrightarrow \beta = \text{۰}$
- $\int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} x^{\text{۳}}\alpha p(x)dx + c\sin(\alpha p(\text{۰})) = \alpha(\int_{-\text{۱}}^{\text{۲}} x^{\text{۳}}p(x)dx + c\sin(p(\text{۰})))$
  $\longrightarrow c\sin(\alpha p(\text{۰})) = \alpha c\sin(p(\text{۰})) \longrightarrow c = \text{۰}$

عبارات فوق به ازای هر α و p همواره برقرار است و حکم ثابت می‌شود.