جبر خطی

نیم‌سال دوم ۰۳-۰۲

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

اساتید: حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

تمرین تئوری ششم

پاسخ‌دهنده: معین آعلی - ۴۰۱۱۰۵۵۶۱

پاسخ مسئله‌ی ۱.

الف

از آن‌جایی که مجموع درایه‌های هرستون ماتریس A برابر با c است، پس مجموع درایه‌های هر ستون ماتریس $A - cI$ برابر صفر است.

حال یک سطر از ماتریس را در نظر گرفته و باقی سطرها را به آن اضافه می‌کنیم بی‌آنکه دترمینان تغییر کند، می‌بینیم که این سطر صفر شده و مقدار دترمینان ماتریس $A - cI$ برابر صفر است. پس عدد c مقدار ویژه است.

ب

برای اثبات این جکم، فرض می‌کنیم به ازای $n - ۱$ مستقل‌خطی هستند و با اضافه کردن nامین عدد همچنان مستقل‌خطی هستند. همچنین پایه ما $n = ۱$ است که بدیهتا مستقل‌خطی است.

برای اثبات استقرای فوق از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم که با اضافه کردن آخرین عدد دیگر مستقل خطی نیستند! پس داریم:

$\sum_{i=۱}^{n-۱} c_i e^{\lambda_i x} = e^{\lambda_n x} \xrightarrow{'} \sum_{i=۱}^{n-۱} c_i \lambda_i e^{\lambda_i x} = \lambda_n e^{\lambda_n x}$

$\sum_{i=۱}^{n-۱} c_i \lambda_n e^{\lambda_i x} = \lambda_n \sum_{i=۱}^{n-۱} c_i e^{\lambda_i x} = \lambda_n e^{\lambda_n x}$

حال دو رابطه فوق را از هم کم کرده:

$\sum_{i=۱}^{n-۱} c_i \lambda_i e^{\lambda_i x} - \sum_{i=۱}^{n-۱} c_i e^{\lambda_i x} = ۰ \longrightarrow \sum_{i=۱}^{n-۱} c_i (\lambda_i - \lambda_n) e^{\lambda_i x} = ۰$

حال می‌دانیم که به دلیل مستقل‌خطی بودن باید ضرایب صفر شوند تا رابطه فوق برقرار باشد. همچنین می‌دانیم که λ_n با بقیه برابر نیست و آن پرانتز صفر نمی‌شود. پس باید $e^{\lambda_n x}$ برابر صفر شود که تناقض است و حکم مسئله اثبات می‌شود.

پاسخ مسئله‌ی ۲.

طبق تعاریف، رابطه فوق را ساده می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&\|W_1(Ax-b)\|_2^2 + \|W_2(x-c)\|_2^2 \xrightarrow{\|u\|_2^2=u^Tu} (W_1(Ax-b))^T(W_1(Ax-b)) + (W_2(x-c))^T(W_2(x-c)) \\
&\xrightarrow{(AB)^T=B^TA^T} (Ax-b)^TW_1^TW_1(Ax-b) + (x-c)^TW_2^TW_2(x-c) = h(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\nabla h(x) = 2A^TW_1^TW_1(Ax-b) + 2W_2^TW_2(x-c) = 0 \\
&\longrightarrow (A^TW_1^TW_1A + W_2^TW_2)x - A^TW_1^TW_1b + W_2^TW_2c \\
&\longrightarrow x = (A^TW_1^TW_1A + W_2^TW_2)^{-1}(A^TW_1^TW_1b + W_2^TW_2c)
\end{aligned}
$$

پاسخ مسئله‌ی ۳.

الف

با توجه به قاعده زنجیری داریم:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial y^T A x}{\partial y} = (Ax)^T = x^T A^T \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial y^T A x}{\partial x} = y^T A \end{cases} \qquad \longrightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial z} = x^T A^T \frac{\partial y}{\partial z} + y^T A \frac{\partial x}{\partial z}$$

ب

می‌دانیم که $tr(AB) = tr(BA)$، پس:

$$\frac{\partial tr[AXBXC^T]}{\partial X} = \frac{tr[\partial(AXBXC^T)]}{\partial X} = \frac{tr[\partial(AX)BXC^T]}{\partial X} + \frac{tr[AX\partial(BXC^T)]}{\partial X} = \frac{tr[BXC^T A\partial(X)]}{\partial X} + \frac{tr[C^T AXB\partial(X)]}{\partial X}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial tr[AXBXC^T]}{\partial X} = BXC^T A + C^T AXB$$

پاسخ مسئله‌ی ۴.

$$p = \frac{vv^T}{v^Tv} \longrightarrow \begin{cases} p^T = p \\ p^۲ = p \end{cases}$$

$$I - \frac{vv^T}{v^Tv} = I - p \xrightarrow{\|A\|_F = \sqrt{tr(AA^T)}} \|E(I-p)\|_F^۲ = tr(E(I-p)(E(I-p))^T)$$

$$\|E(I-p)\|_F^۲ = tr((E - E\frac{vv^T}{v^Tv})(E - E\frac{vv^T}{v^Tv})^T) = tr((E - E\frac{vv^T}{v^Tv})(E^T - \frac{vv^T}{v^Tv}E^T))$$

$$\longrightarrow tr(EE^T - E\frac{vv^T}{v^Tv}E^T - E\frac{vv^T}{v^Tv}E^T + EE^T(\frac{vv^T}{v^Tv})^۲) = tr(EE^T - ۲EPE^T + EPE^T)$$

$$\longrightarrow tr(EE^T - EpE^T) = tr(EE^T) - tr(EPE^T)$$

$$\xrightarrow{tr(EpE^T) = tr(pE^TE) = \frac{۱}{v^Tv}v^TE^TEv = \frac{۱}{v^Tv}\|Ev\|^۲} = tr(EE^T) - \frac{\|Ev\|^۲}{v^Tv}$$

$$\longrightarrow \|E(I-p)\|_F^۲ = \|E\|_F^۲ - \frac{\|Ev\|^۲}{v^Tv}$$