# جبر خطی

**نیم‌سال دوم ۰۳-۰۲**

اساتید: حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

**دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر**

پاسخ‌دهنده: معین آعلی - ۴۰۱۱۰۵۵۶۱

تمرین تئوری سوم

## پاسخ مسئله‌ی ۱.

### الف

این گزاره **نادرست** است.

زیرا بردار $O$ و هر بردار دیگری بر هم عمود هستند ولی مستقل خطی نیستند!

### ب

این گزاره **درست** است.

$$\begin{cases} \|u-v\|^{2} = (u-v)^{T}(u-v) = u^{T}v - v^{T}u + v^{T}v = u^{T}u - 2u^{T}v + v^{T}v = \|u\| - 2\langle u, v\rangle + \|v\| \\ \|u-v\|^{2} = \|u\|^{2} + \|v\|^{2} \end{cases}$$

پس درنتیجه $\|u\| + \|v\| = 0$ و دو بردار بر هم عمود هستند.

### ج

این گزاره **درست** است.

$$\begin{cases} \langle u-v, u-v\rangle = \|u\|^{2} + \|v\|^{2} - 2\langle u, v\rangle \\ \|v\| = \|v\| = 1 \\ \langle u, v\rangle = 1 \end{cases} \longrightarrow \langle u-v, u-v\rangle = 1^{2} + 1^{2} - 2(1) = 0 \rightarrow u-v = 0 \rightarrow u = v$$

## پاسخ مسئله‌ی ۲.

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{0}^{1} f(x).g(x)\ dx$$

$$I = \int_{0}^{1} \sqrt[n]{xe^{mx}}\ dx \ \ ; \ \ m,n \in \mathbb{N}$$

می‌دانیم که نامساوی مقابل همواره برقرار است:

$$\langle f(x), g(x)\rangle \leqslant \|f(x)\|\|g(x)\|$$

حال فرض می‌کنیم که $f(x) = \sqrt[n]{x}$ و $g(x) = \sqrt[n]{xe^{mx}}$ باشد، پس:

$$\int_{0}^{1} \sqrt[n]{xe^{mx}}\ dx \leqslant \sqrt{\int_{0}^{1} \sqrt[n]{x^{2}}dx \times \int_{0}^{1} \sqrt[n]{xe^{2mx}}dx} \quad \longrightarrow I \leqslant \sqrt{(\frac{n}{n+2}x^{\frac{n+2}{n}})(\frac{n}{2m}e^{\frac{2mx}{n}})} = \sqrt{\frac{n}{n+2} \times (\frac{ne^{\frac{2m}{n}}}{2m} - \frac{n}{2m})}$$

$$\longrightarrow I \leqslant n\sqrt{\frac{e^{\frac{2m}{n}}-1}{2m(n+2)}}$$

## پاسخ مسئله‌ی ۳.

در ابتدا یک مجموعه‌ی Basis برای $C$ به نام $B_۱$ و یک مجموعه هم برای $C^{\perp}$ به نام $B_۲$ در نظر می‌گیریم. همچنین مجموعه‌ی $B_۱ \cup B_۲$ یک پایه برای فضای $V$ است.

حال بردار $w \in V$ را به این صورت در نظر می‌گیریم:

$$w = w_۱ + w_۲ = (\alpha_۱ B_{۱۱} + \alpha_۲ B_{۱۲} + ... + \alpha_n B_{۱n}) + (\gamma_۱ B_{۲۱} + \gamma_۲ B_{۲۲} + ... + \gamma_m B_{۲m})$$

حال باید ثابت کنیم که بردار $c \in C$ نزدیک‌ترین بردار به $w$ است:

$$\forall r \in C - \{c\} : \|w - c\| < \|w - r\| \longrightarrow c = w_۱ = \alpha_۱ B_{۱۱} + \alpha_۲ B_{۱۲} + ... + \alpha_n B_{۱n}$$

برای اثبات به این صورت عمل می‌کنیم:

$$\forall r \in C : \begin{cases} \|w - r\| = \|w_۱ + w_۲ - r\| = \|w_۲ + c - r\| = \sqrt{\|w_۲\|^۲ + \|c - r\|^۲} \\ \|w - c\| = \|w_۲\| = \sqrt{\|w_۲\|^۲} \end{cases} \quad \longrightarrow \|w - r\| > \|w - c\|$$

واضح است که فقط یک بردار که همان $c$ است از همه به $w$ نزدیک‌تر است و بردار دیگری وجود ندارد که بخواهد به $w$ نزدیک‌ترین باشد، زیرا در غیر این صورت اثبات بخش بالا زیر سوال می‌روند.

## پاسخ مسئله‌ی ۴.

باید دو طرف قضیه را ثابت کنیم:

۱. اگر وابسته خطی باشند $\longrightarrow$ بردار صفر تولید می‌شود.
برای این اثبات از برهان خلف کمک می‌میگیریم:

فرض می‌کنیم بردار صفر تولید نشده است و آخرین بردار در الگوریتم گرام‌اشمیت بردار $q_m$ بوده است، پس:
$\widetilde{q_m} = r_k - (q_1.r_k)q_1 - ... - (q_{k-1}.r_k)q_{k-1} = \frac{\widetilde{q_m}}{\|\widetilde{q_m}\|}$
طبق فرض خلف $q_i$ ها مخالف صفر هستند و می‌دانیم که این الگوریتم بردارهای عمود تولید می‌کند، پس $q_i$ ها مستقل خطی هستند. همچنین:

$q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$
$q_2 = \frac{v_2-(q_1.v_2)q_1}{\|v_2-(q_1v_2)q_1\|} = cv_2 - \frac{c(q_1v_2)}{\|v_1\|}v_1$
پس درنتیجه هر ترکیب خطی از $q_i$ ها را می‌توان از ترکیب خطی از $r_i$ ها نوشت. اما می‌دانیم که $q_i$ها m بردار مستقل خطی هستند و فضای $m$بعدی را span می‌کنند، پس $r_i$ها هم فضای $m$بعدی را span می‌کنند. اما می‌دانیم که $r_i$ها وابسته خطی هستند و نمی‌توانند فضای $m$بعدی را span کنند. پس به تناقض می‌سیم و حکم اثبات می‌شود.

۲. اگر بردار صفر تولید شود$\longleftarrow$ $r_i$ ها وابسته خطی هستند.
فرض می‌کنیم که $q_i$ برابر صفر است:

$r_i - \sum_{j=1}^{i-1}(q_j.r_i)q_j = 0$

همینطور می‌دانیم که:

$r_i = \sum_{j=1}^{i-1}(q_j.r_i)q_j \;//\;//\; r_i = \sum_{j=1}^{mi-1} c_jr_j \longrightarrow r_i - c_{i-1}r_{i-1} - ... - c_1r_1 = 0$

که نشان می

$r_i - \sum_{j=1}^{i-1}(q_j.r_i)q_j = 0$

پس $r_i$ها وابسته خطی هستند.

پس در نهایت هر دو طرف قضیه اثبات می‌شود.

## پاسخ مسئله‌ی ۵.

ابتدا باید ثابت کنیم که اگر $b = c = ۰$ باشد، آنگاه $T$ یک تبدیل خطی است. پس:

$T(p(x)) = (۳p(۴) + ۵p'(۶), \int_{-۱}^{۲} x^۳ p(x)dx)$

پس باید دو ویژگی زیر را ثابت کنیم:

۱. $T((p+q)(x)) = (۳p(۴)+۳q(۴)+۵p'(۶)+۵q'(۶), \int_{-۱}^{۲} x^۳ p(x)dx+\int_{-۱}^{۲} x^۳ q(x)dx) = T(p(x))+T(q(x))$

۲. $T(\alpha P(x)) = (۳\alpha P(۴)+۵\alpha P'(۶), \int_{-۱}^{۲} \alpha x^۳ P(x)dx) = \alpha(۳P(۴)+۵P'(۶), \int_{-۱}^{۲} x^۳ P(x)dx) = \alpha T(P(x))$

حال ثابت می‌کنیم که اگر T تبدیل خطی باشد، آنگاه باید $b = c = ۰$ باشد. پس:

- $۳\alpha p(۴) + ۵\alpha p'(۶) + \beta\alpha^۲ p(۱)p(۲) = \alpha(۳p(۴) + ۵p'(۶) + \beta p(۱)p(۲))$
  $\longrightarrow \beta\alpha^۲ p(۱)p(۲) = \beta\alpha p(۱)p(۲) \longrightarrow \beta\alpha = \beta \longrightarrow \beta = ۰$
- $\int_{-۱}^{۲} x^۳ \alpha p(x)dx + c\sin(\alpha p(۰)) = \alpha(\int_{-۱}^{۲} x^۳ p(x)dx + c\sin(p(۰)))$
  $\longrightarrow c\sin(\alpha p(۰)) = \alpha c\sin(p(۰)) \longrightarrow c = ۰$

عبارات فوق به ازای هر $\alpha$ و $p$ همواره برقرار است و حکم ثابت می‌شود.