



پاسخ مسئله‌ی ۱.

آ

این گزاره نادرست است. برای آن یک مثال نقض می‌زنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, B = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = AB = AI = A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow C_3 = C_1 + C_4 - C_2$$

اگر C_i را برابر سطرهای ماتریس C بگیریم، با توجه به رابطه فوق، سطرهای این ماتریس مستقل خطی نیستند.

ب

اگر در فضای برداری W بردارهای $w_1, w_2, w_3, \dots, w_{n+1}$ فضای W را اسپن کنند، از آنجایی که این بردارها متمایز هستند و معادله‌ی $w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_{n+1} = 0$ برقرار است، پس بردارها وابسته خطی هستند.

پس می‌توان بردار w_{n+1} را با استفاده از بقیه‌ی بردارها ساخت. در نتیجه با حذف این بردار، باز هم می‌توان فضای W را اسپن کرد.

پس مجموعه‌ی بردارهای w_1, w_2, \dots, w_n یک پایه برای فضای بردار فوق هستند و این بردارها مستقل خطی هستند زیرا برای اسپن فضای $W \in R^n$ به n بردار نیاز داریم.

(می‌توان برای اثبات گزاره فوق از برهان خلف هم استفاده کرد و به تناقض رسید که برای اسپن فضای فوق از $n-1$ بردار استفاده کرد که این یک تناقض است.)

پاسخ مسئله‌ی ۲.

برای این که مجموعه S برای فضای برداری V پایه باشد، باید اعضایش مستقل خطی باشند و V را span کنند. دو شرط فوق را بررسی می‌کنیم:

مستقل خطی بودن

می‌دانیم که درجه‌ی چندجمله‌ای $q^{(i)}(x)$ برابر $n-i$ است. پس:

$$\begin{aligned} q(x) &= a_n x + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 \\ q'(x) &= b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0, \quad b_i = \frac{a_{i+1}}{i+1} \\ q''(x) &= c_{n-2} x^{n-2} + \dots + c_1 x + c_0, \quad c_i = \frac{b_{i+1}}{i+1} \\ &\vdots \\ q^n(x) &= d_0 = 0 \end{aligned}$$

فرض می‌کنیم که:

$$aq(x) + bq'(x) + cq''(x) + \dots + dq^n(x) = 0$$

می‌دانیم طبق فرض سوال $a_n \neq 0$ ، پس $b_{n-1} = \frac{a_n}{n} \neq 0$ و $c_{n-2} = \frac{b_{n-1}}{n-1} \neq 0$ و ...

پس جمله‌ی اول هرکدام مخالف صفر است. حال ضرایب را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} aa_n &= 0 \xrightarrow{a_n \neq 0} a = 0 \\ aa_{n-1} + bb_{n-1} &= 0 \xrightarrow[b=0]{b_{n-1} \neq 0} b = 0 \\ aa_{n-2} + bb_{n-2} + cc_{n-2} &= 0 \xrightarrow[a=0, b=0]{c_{n-2} \neq 0} c = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

به همین ترتیب ادامه می‌دهیم و همه ضرایب برابر صفر می‌شوند، پس $q(x)$ تا $q^n(x)$ مستقل خطی خواهند بود.

اسپن کردن

برای اینکه اعضای S فضای برداری V را اسپن کنند، باید به ازای هر $v(x) \in V$ ، ضرایب معادله‌ی زیر به طور یکتا مشخص شوند.

$$aq(x) + bq'(x) + cq''(x) + \dots + dq^n(x) = v(x)$$

همانند قسمت قبل:

$$\begin{aligned} aa_n &= v_n \rightarrow a = \frac{v_n}{a_n} \\ aa_n + bb_{n-1} &= v_{n-1} \xrightarrow{aa_n = v_n} b = \frac{v_{n-1} - v_n}{b_{n-1}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

با توجه به اثبات‌های بخش اول و دوم، مجموعه S برای فضای برداری W یک پایه است.