جبر خطی

نیم‌سال دوم ۰۳-۰۲

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

اساتید: حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

تمرین تئوری هفتم

پاسخ‌دهنده: معین آعلی - ۴۰۱۱۰۵۵۶۱

پاسخ مسئله‌ی ۱.

با توجه به این که ماتریس‌های ما $Orthonormal$ نیستند، کمی ماتریس‌ها را تغییر می‌دهیم:

$$A = U\Sigma V^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ x & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & y \end{bmatrix}$$

الف

باتوجه به این که U و V دارای ستون‌های $Orthogonal$ هستند، داریم:

$$\begin{cases} u_1.u_2 = (2, x, 2).(2, 2, -1) = 2x + 2 = 0 \longrightarrow x = -1 \\ v_1.v_2 = (4, -3).(3, y) = 12 - 3y = 0 \longrightarrow y = 4 \end{cases}$$

ب

با توجه به این که ماتریس σ در قطر اصلی خود دارای ۲ مقدار ناصفر متمایز است، پس دارای رنک ۲ است.
همچنین مقدار ویژه‌ها برابر با مربع اعداد روی قطر اصلی هستند، پس مقادیر ویژه برابر هستند با ۲۵ و $\frac{25}{9}$.
برای بردار ویژه‌ی AA^T نیز می‌توان یکی از ستون‌های ناصفر U را مثال زد. به عنوان مثال: $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3})$

پ

$$Av_i = \sigma_u U_i \longrightarrow A(cv_i) = c\sigma_i v_i \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = 5v_1$$

$$Av_1 = \sigma_1 U_1 \longrightarrow A(5v_1) = 5Av_1 = 5\sigma_1 U_1 = 5 \times 5 \times \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{50}{3} \\ \frac{-25}{3} \\ \frac{50}{3} \end{bmatrix}$$

ت

ماتریس را SVD کرده و سپس مقدار بیشینه را محاسبه می‌کنیم:

$$A = U\Sigma V^T \rightarrow \|Av\| = \|U\Sigma V^T v\| = \sqrt{v^T V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T v} = \sqrt{(V^T v)^T \Sigma^T \Sigma V^T v}$$
$$\longrightarrow \sqrt{\sum_{i=n}^{n}((V^T v)^T \Sigma^T \Sigma)_{1i}(V^T v)_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(V^T v)_i^T \lambda_i (V^T v)_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v^T V V^T v} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i^T v_i}$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\lambda_{max} v_i^2} == \sqrt{\lambda_{max}\sum_{i=1}^{n} v_i^2} = \sqrt{\lambda_{max}}\|v\|$$
$$\longrightarrow \frac{\|Av\|}{\|v\|} \leqslant \frac{\sqrt{\lambda_{max}}\|v\|}{\|v\|} = \sqrt{\lambda_{max}} = \sigma_{max}$$

پس اگر vما برابر با e_i باشد:

$$\frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i v_i^۲} = \sqrt{\lambda_i} = \sigma_i$$

پس این مقدار فقط به ازای ke_i و σ_{max} برابر با σ_i رخ می‌دهد.

$$\sigma_{max} = ۵\ ,\ v = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

ج

$$A = U\Sigma V^T \longrightarrow A^+ = V\Sigma^+ U^T$$

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۳}{۵} & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A^+ = \frac{۱}{۵} \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix} \times \frac{۱}{۵} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \end{bmatrix} \times \frac{۱}{۳} \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ & ۲ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۷۵} \begin{bmatrix} ۲۶ & ۱۴ & -۱ \\ ۱۸ & ۲۷ & -۱۸ \end{bmatrix}$$

پاسخ مسئله‌ی ۲.

می‌دانیم که AB و BA یک $OrthogonalProjection$ هستند و چون بردار v صفر نیست، پس:

$$(A)\perp(v-ABv) \longrightarrow < A, v-ABv >= ۰ \longrightarrow A^*(v-ABv) = ۰ \longrightarrow A^*v = A^*ABv \longrightarrow (A^*A)^+A^*v = Bv$$
$$\longrightarrow A^+(A^*)^+A^*v = Bv \longrightarrow A^+ = B$$

همانند اثبات بالا و با استفاده از BA می‌توان نشان داد که:

$$\longrightarrow A = B^+$$

پاسخ مسئله‌ی ۳.

$$Q = U\Lambda U^T \to u^T U\Lambda U^T u = \sum_{i=1}^{n} (U^T u)_i^T \lambda_i (U^T u)_i$$
$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{n} (U^T u)_i^T \lambda_i (U^T u)_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (U^T u)_i^T (U^T u)_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (u^T U U^T u)_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i^2$$

$$\lambda_{min} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{min} u_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_{max} u_i^2 = \lambda_{max} \sum_{i=1}^{n} u_i^2$$
$$\longrightarrow \lambda_{min} \|u\|^2 \leqslant u^T Q U \leqslant \lambda_{max} \|u\|^2$$

$$\lambda \|u\|^2 \leqslant \lambda_{min} \|u\|^2 \leqslant u^T Q u \leqslant \lambda_{max} \|u\|^2 \leqslant \overline{\lambda} \|u\|^2 \longrightarrow \lambda \|u\|^2 \leqslant \lambda_{min} \|u\|^2 \leqslant \lambda_{max} \|u\|^2 \leqslant \overline{\lambda} \|u\|^2$$
$$\longrightarrow \lambda \leqslant \lambda_i \leqslant \overline{\lambda}$$

پاسخ مسئله‌ی ۴.

الف

می‌دانیم که ضرب بردارهای U,V در یک بردار دیگر مقدار $norm2$ را تغییر نمی‌دهد. پس:

$$\|Tv\| = \|U\Sigma V^T v\| = \|\Sigma V^T v\| \xrightarrow{V^T v=X} \| \begin{bmatrix} \sigma_1 x_1 \\ \sigma_2 x_2 \\ \vdots \\ \sigma_n x_n \end{bmatrix} \| = \sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + ... + \sigma_n^2 x_n^2}$$

$$\longrightarrow \|v\| = \|V^T v\| = \|X\| = \| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

$$\forall i : \sigma_i = \sigma_{min} = \hat{s} \longrightarrow \|Tv\| = \sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + ... + \sigma_n^2 x_n^2} \geqslant \sqrt{\hat{s}^2 x_1^2 + ... + \hat{s}^2 x_n^2} = \hat{s}\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} = \hat{s}\|v\|$$

$$\forall i : \sigma_i = \sigma_{max} = s \longrightarrow \|Tv\| = \sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + ... + \sigma_n^2 x_n^2} \leqslant \sqrt{s^2 x_1^2 + ... + s^2 x_n^2} = \hat{s}\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} = s\|v\|$$

$$\longrightarrow \hat{s}\|v\| \leqslant \|Tv\| \leqslant s\|v\|$$

ب

فرض می‌کنیم که بردار ویژه‌ی متناظر با λ برابر است با v:

$$Tv = \lambda v \longrightarrow \|Tv\| = \|\lambda v\| = \|\lambda\|\|v\|$$

با توجه به قسمت قبل داریم:

$$\hat{s}\|v\| \leqslant \|Tv\| \leqslant s\|v\| \longrightarrow \hat{s}\|v\| \leqslant \|\lambda\|\|v\| \leqslant s\|v\| \longrightarrow \hat{s} \ \leqslant |\lambda| \leqslant s$$