پاسخ مسئله‌ی ۱.

آ

این گزاره **نادرست** است. برای آن یک مثال نقض می‌زنیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}, B = I = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$C = AB = AI = A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix} \longrightarrow C_۳ = C_۱ + C_۴ - C_۲$$

اگر C_i را برابر سطرهای ماتریس C بگیریم، با توجه به رابطه فوق، سطرهای این ماتریس مستقل خطی نیستند.

ب

اگر در فضای برداری W بردارهای $w_۱, w_۲, w_۳, ..., w_{n+۱}$ فضای W را اسپن کنند، از آن‌جایی که این بردارها متمایز هستند و معادله‌ی $w_۱ + w_۲ + w_۳ + ... + w_{n+۱} = ۰$ برقرار است، پس بردارها وابسته خطی هستند.

پس می‌توان بردار $w_{n+۱}$ را با استفاده از بقیه‌ی بردارها ساخت. درنتیجه با حذف این بردار، باز هم می‌توان فضای W را اسپن کرد.

پس مجموعه‌ی بردارهای $w_۱, w_۲, ..., w_n$ یک پایه برای فضای بردار فوق هستند و این بردارها مستقل خطی هستند زیرا برای اسپن فضای $W \in R^n$ به n بردار نیاز داریم.

(می‌توان برای اثبات گزاره فوق از برهان خلف هم استفاده کرد و به تناقض رسید که برای اسپن فضای فوق از $n - ۱$ بردار استفاده کرد که این یک تناقض است.)

پاسخ مسئله‌ی ۲.

برای این که مجموعه S برای فضای برداری V پایه باشد، باید اعضایش مستقل خطی باشند و V را span کنند. دو شرط فوق را بررسی می‌کنیم:

مستقل خطی بودن

می‌دانیم که درجه‌ی چندجمله‌ای $q^{(i)}(x)$ برابر $n-i$ است. پس:

$$
\begin{aligned}
q(x) &= a_n x + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 \\
q^{'}(x) &= \qquad b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0 \quad , \quad b_i = \tfrac{a_i+1}{i+1} \\
q^{''}(x) &= \qquad\qquad c_{n-2}x^{n-2} + ... + c_1 x + c_0 \quad , \quad c_i = \tfrac{b_i+1}{i+1} \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
q^{n}(x) &= \qquad\qquad\qquad d_0 = 0
\end{aligned}
$$

فرض می‌کنیم که:

$$aq(x) + bq^{'}(x) + cq^{''}(x) + ... + dq^{n}(x) = 0$$

می‌دانیم طبق فرض سوال $a_n \neq 0$ ، پس $b_{n-1} = \frac{a_n}{n} \neq 0$ و $c_{n-2} = \frac{b_{n-1}}{n-1} \neq 0$ و ...

پس جمله‌ی اول هرکدام مخالف صفر است. حال ضرایب را می‌یابیم:

$$
\begin{aligned}
&aa_n = 0 \xrightarrow{a_n \neq 0} a = 0 \\
&aa_{n-1} + bb_{n-1} = 0 \xrightarrow[a=0]{b_{n-1}\neq 0} b = 0 \\
&aa_{n-2} + bb_{n-2} + cc_{n-2} = 0 \xrightarrow[a=0,b=0]{c_{n-2}\neq 0} c = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

به همین ترتیب ادامه می‌دهیم و همه ضرایب برابر صفر می‌شوند، پس $q(x)$ تا $q^{n}(x)$ مستقل خطی خواهند بود.

اسپن کردن

برای اینکه اعضای S فضای برداری V را اسپن کنند، باید به ازای هر $v(x) \in V$ ، ضرایب معادله‌ی زیر به طور یکتا مشخص شوند.

$$aq(x) + bq^{'}(x) + cq^{''}(x) + ... + dq^{n}(x) = v(x)$$

همانند قسمت قبل:

$$
\begin{aligned}
&aa_n = v_n \rightarrow a = \tfrac{v_n}{a_n} \\
&aa_n + bb_{n-1} = v_{n-1} \xrightarrow{aa_n = v_n} b = \tfrac{v_{n-1} - v_n}{b_{n-1}} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

با توجه به اثبات‌های بخش اول و دوم، مجموعه S برای فضای برداری W یک پایه است.

پاسخ مسئله‌ی ۳.

$$\forall 1 \leqslant a \leqslant n : [M_{ij}] = \begin{cases} 1 & ; i = j = a \\ 0 & ; O.W. \end{cases} \longrightarrow \text{n عضو}$$

$$\forall 1 \leqslant a < n, a < b \leqslant n : [N_{ij}] = \begin{cases} 1 & ; (i,j) = (a,b) \vee (b,a) \\ 0 & ; O.W. \end{cases} \longrightarrow \text{عضو } \frac{n^2-n}{2}$$

مجموعه ما اجتماع دو مجموعه‌ی M, N است.

بعد پایه

بعد پایه پیشنهادی برابر $n + \frac{n^2-n}{2}$ است.

مستقل خطی بودن

این ماتریس‌ها حتماً مستقل خطی هستند، زیرا در هر ماتریس تنها یک ij یکتا برابر ۱ است، پس نمی‌توان با با جمع بقیه‌ی آن را صفر کرد، مگر این‌که ضرایب برابر ۰ باشند که غیرقابل‌قبول است. درنتیجه اعضای این مجموعه مستقل خطی هستند.

اسپن کردن $M_{n\times n}^{sym}(\mathbb{R})$

از آن‌جایی که این مجموعه ترکیب خطی از ماتریس‌های متقارن است، پس اسپن $M_{n\times n}^{sym}(\mathbb{R})$ هستند.

برای اثبات کافی است ضریب را برابر با خانه‌ی متناظر آن یک در ماتریس دلخواه خود بگذاریم. درنتیجه ضرایب ما یکتا هستند و ماتریس ما $M_{n\times n}^{sym}(\mathbb{R})$ را اسپن می‌کند.

پاسخ مسئله‌ی ۴.

برای این‌که یک تابع ضرب داخلی در فضای R^n باشد، باید دارای ویژگی‌هایی باشد که در موارد زیر می‌بینیم:

الف

این گزاره **نادرست** است. برای آن یک مثال نقض می‌زنیم که ویژگی $< u+v, w >=< u, w > + < v, w >$ را نقض کند:

$$\begin{cases} u = (-1, 1), v = (2, 2) \rightarrow u + v = (1, 3) \\ w = (3, 3) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} < u + v, w >= |3| + |9| = 12 \\ < u, w > + < v, w >= |-3| + |3| + |6| + |6| = 18 \end{cases}$$

ب

این گزاره **نادرست** است. برای آن یک مثال نقض می‌زنیم که ویژگی $< v, v >= 0 \Longleftrightarrow v = 0$ را نقض کند:

$$\begin{cases} u = (0, 1, 0) \\ v = (0, 1, 0) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u \neq 0 \\ v \neq 0 \\ < u, v >= 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

ج

این گزاره **درست** است. برای اثبات آن، هر ۵ ویژگی ضرب داخلی بودن را اثبات می‌کنیم:

1. $< v, v >= 0 \Longleftrightarrow v = 0$
   - $v = (v_1, v_2) \rightarrow < v, v >= v_1^2 + v_2^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} v_1^2 = 0 \rightarrow v_1 = 0 \\ v_2^2 = 0 \rightarrow v_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow v = (0, 0) = \overrightarrow{O}$
   - $v = (0, 0) \rightarrow < v, v >= 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0$
2. $< u, v >=< v, u >$
   - $< u, v >= u_1 v_1 + u_2 v_2 = v_1 u_1 + v_2 u_2 =< v, u >$
3. $< u + v, w >=< u, w > + < v, w >$
   - $< u + v, w >= (u_1 + v_1) w_1 + (u_2 + v_2) w_2 = u_1 w_1 + v_1 w_1 + u_2 w_2 + v_2 w_2$
   - $< u, w > + < v, w >= u_1 w_1 + u_2 w_2 + v_1 w_1 + v_2 w_2 = u_1 w_1 + v_1 w_1 + u_2 w_2 + v_2 w_2$
4. $< cu, w >= c < u, w >$
   - $u = (u_1, u_2) \rightarrow cu = c(u_1, u_2) = (cu_1, cu_2)$
   - $< cu, w >= cu_1 w_1 + cu_2 w_2 = c(u_1 w_1 + u_2 w_2) = c < u, w >$
5. $< v, v > \geqslant 0$
   - $v = (v_1, v_2)$
   - $< v, v >= v_1^2 + v_2^2 \xrightarrow[v_2^2 \geqslant 0]{v_1^2 \geqslant 0} < v, v > \geqslant 0$

د

این گزاره <u>**درست**</u> است. برای اثبات آن، هر ۵ ویژگی ضرب داخلی بودن را اثبات می‌کنیم:

۱. $< A, A >= ۰ \iff A = ۰$

- $A = ۰ \to A^T A = ۰ \to tr(۰) = ۰$
- $< A, A >= tr(A^T A) = \sum_{i=۱}^{n} a_{ii}^{۲} + \sum_{i \neq j} a_{ij}^{۲} = ۰ \to$ مجذور همه درایه برابر صفر $\to A = ۰$

۲. $< A, B >=< B, A >$

- $< A, B >= tr(B^T A) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} = \sum_{i,j} b_{ij} a_{ij} = tr(A^T B) =< B, A >$

۳. $< A + B, C >=< A, C > + < B, C >$

- $$\begin{aligned} < A + B, C > &= tr(C^T(A + B)) = tr(C^T A + C^T B) \\ &= tr(C^T A) + tr(C^T B) = (< A, c > + < B, C >) \end{aligned}$$

۴. $< cA, B >= c < A, B >$

- $< cA, B >= tr(B^T (cA)) = tr(cB^T A) = c \times tr(B^T A) = c < A, B >$

۵. $< A, A > \geqslant ۰$

- $< A, A >= tr(A^T A) = \sum_{i \neq j} a_{ij}^{۲} + \sum_{i=۱}^{n} a_{ii}^{۲} \geqslant ۰$