# جبر خطی

**دانشکده مهندسی کامپیوتر دانشگاه صنعتی شریف**

**زمستان ۱۴۰۲**

**معین آعلی - ۴۰۱۱۰۵۵۶۱**

# فهرست عناوین

## ۱. سوال شماره ۱:

(آ) (۱۵ نمره) معادله زیر را به فرم ماتریس افزایش یافته[1] بنویسید و سپس با استفاده از عملیات سطری مقدماتی[2] و تشکیل فرم کاهش یافته سطری پلکانی[3] دستگاه معادله را حل کنید. (حل معادلات بدون استفاده از روش یاد شده نمره‌ای نخواهد داشت.)

$$\begin{aligned} ۳x - ۶y + z + ۲t &= -۴ \\ ۴x - ۲y - z - ۲t &= -۳ \\ ۹x + ۶y - z - ۸t &= ۵ \\ ۶x + ۳y + z + ۳t &= ۸ \end{aligned}$$

(ب) (۱۵ نمره) معکوس ماتریس زیر را با کمک ماتریس افزایش یافته $[\,A \mid I\,]$ بدست آورده و ماتریس‌های سطری مقدماتی[4] استفاده شده را بنویسید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۸ & ۹ & ۴ \\ ۷ & ۶ & ۵ \end{bmatrix}$$

**پاسخ بخش الف)**

$$AX = B \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -6 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -1 & -2 \\ 9 & 6 & -1 & -8 \\ 6 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 1 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & -1 & -2 & -3 \\ 9 & 6 & -1 & -8 & 5 \\ 6 & 3 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{3}R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-4}{3} \\ 4 & -2 & -1 & -2 & -3 \\ 9 & 6 & -1 & -8 & 5 \\ 6 & 3 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1, R_3 \to R_3 - 9R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-4}{3} \\ 0 & 6 & \frac{-7}{3} & \frac{-14}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 24 & -4 & -14 & 17 \\ 6 & 3 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 - 6R_1, R_2 \to R_2/6} \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-7}{18} & \frac{-7}{9} & \frac{7}{18} \\ 0 & 24 & -4 & -14 & 17 \\ 0 & 15 & -1 & -1 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 24R_2, R_4 \to R_4 - 15R_2, R_1 \to R_1 + 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-4}{9} & \frac{-8}{9} & \frac{-5}{9} \\ 0 & 1 & \frac{-7}{18} & \frac{-7}{9} & \frac{7}{18} \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} & \frac{14}{3} & \frac{23}{3} \\ 0 & 0 & \frac{29}{6} & \frac{32}{3} & \frac{61}{6} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \to \frac{3}{16}R_3 \\ R_1 \to R_1 + \frac{4}{9}R_3 \\ R_2 \to R_2 + \frac{7}{18}R_3 \\ R_4 \to R_4 - \frac{29}{6}R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-7}{16} & \frac{91}{96} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{8} & \frac{23}{16} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{103}{16} & \frac{103}{32} \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_4 \to \frac{16}{103}R_4 \\ R_1 \to R_1 + \frac{1}{2}R_4 \\ R_2 \to R_2 + \frac{7}{16}R_4 \\ R_3 \to R_3 - \frac{7}{8}R_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{7}{6} \\ z = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

**پاسخ بخش ب)**

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\8&9&4\\7&6&5\end{bmatrix}\rightarrow[A|I]=\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\8&9&4&0&1&0\\9&6&5&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2\rightarrow\frac{-1}{7}(R_2-8R_1)]{R_3\rightarrow R_3-7R_1}\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&1&\frac{20}{7}&\frac{8}{7}&\frac{-1}{7}&0\\0&-8&-16&-7&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\rightarrow R_3+8R_2,R_2=R_2-\frac{20}{7}R_3]{R_1\rightarrow R_1-2R_2+\frac{19}{7}R_3}\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{-7}{16}&\frac{-1}{6}&\frac{19}{48}\\0&1&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{3}&\frac{-5}{12}\\0&0&1&\frac{5}{16}&\frac{-1}{6}&\frac{7}{48}\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{-7}{16}&\frac{-1}{6}&\frac{19}{48}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{3}&\frac{-5}{12}\\\frac{5}{16}&\frac{-1}{6}&\frac{7}{48}\end{bmatrix}$$

## ۲. سوال شماره ۲:

**پرسش ۲** (۲۰ نمره) مجموعه تمام توابع $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ را با $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ نشان می‌دهیم. تابعی متناوب با دوره تناوب T است که $f(x)=f(x+T)$ برقرار باشد. مجموعه تمام توابع فرد را با $f_o$ نشان می‌دهیم که داریم $(f_o(x)=-f_o(-x))$ و مجموعه تمام توابع زوج را با $f_e$ نشان می‌دهیم که داریم $(f_e(x)=f_e(-x))$. موارد زیر را ثابت یا رد کنید:

(آ) (۵ نمره) مجموعه توابع با دوره تناوب T زیرفضایی از $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ است.

(ب) (۵ نمره) مجموعه تمامی توابع متناوب زیرفضایی از $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ است.

(ج) (۱۰ نمره) $f_o\oplus f_e=\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$

**پاسخ بخش الف)**

این حکم نیازمند ۳ شرط است:

۱. تابع $f(x)=0$ با هر دوره تناوب دلخواه متناوب است. درنتیجه این زیرفضا شامل صفر است. ✅

۲.

$$\left.\begin{aligned}f(x)&=f(x+T)\\g(x)&=g(x+T)\end{aligned}\right\}\rightarrow h(x)=g(x)+f(x)=f(x+T)+g(x+T)=h(x+T)$$

پس مجموع دو تابع متناوب با دوره تناوب T، تابعی متناوب با دوره تناوب T است. ✅

۳.

$$f(x)=f(x+T)\rightarrow h(x)=c.f(x)=c.f(x+T)=h(x+T)$$

با توجه به روابط فوق، حاصل‌ضرب اسکالر c و تابع متناوب f با دوره تناوب T، یک تابع متناوب با دوره تناوب T است. ✅

**پاسخ بخش ب)**

این حکم نیازمند ۳ شرط است:

۱. تابع $f(x)=0$ با هر دوره تناوب دلخواه متناوب است. درنتیجه این زیرفضا شامل صفر است. ✅

۲. اگر تابع $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب $T_1$ و تابع $g(x)$ نیز تابعی متناوب با دوره تناوب $T_2$ باشد، درنتیجه تابع $h(x)$ که برابر است با $f(x)+g(x)$، متناوب است به شرطی که نسبت $T_1$ به $T_2$ عددی گویا باشد. پس توابعی همانند $f(x)=\lfloor x\rfloor-x$ و $g(x)=\sin(x)$ که دارای دوره تناوب‌های ۱ و $2\pi$ هستند، مجموعشان متناوب نیست و این شرط نقض می‌شود. ❌

در نتیجه مجموعهٔ توابع متناوب، زیرفضایی از $R^R$ نیست!

**پاسخ بخش ج)**

برای اینکه $f_0\oplus f_e=R^R$ را اثبات کنیم، باید در ابتدا ثابت کنیم که جمع دو تابع زوج، یک تابع زوج است. همچنین جمع دو تابع فرد، یک تابع فرد است.

$$\begin{cases} f(x)=f(-x) \\ g(x)=g(-x)\end{cases} \to f(x)+g(x)=f(-x)+g(-x)\to (f+g)_{(x)}=(f+g)_{(-x)}$$

$$\begin{cases} f(-x)=-f(x) \\ g(-x)=-g(x)\end{cases} \xrightarrow{h(x)=f(x)+g(x)} h(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-(f(x)+g(x))=-h(x)$$

همچنین می‌دانیم که ضرب یک اسکالر در تابع زوج، باز هم تابع زوج می‌سازد. (برای تابع فرد هم همینطور.)

$$\begin{cases} f(x)=f(-x) \\ g(-x)=-g(x)\end{cases} \to \begin{cases} (c.f)(x)=c.f(x)=c.f(-x)=(c.f)(-x) \\ (c.g)(-x)=c.g(-x)=c.(-g(x))=-c.g(x)=-(c.g)(x)\end{cases}$$

حال به سراغ اثبات $f_0\oplus f_e=R^R$ می‌رویم:

اگر فرض کنیم تابع $T:R\to R$ را تعریف کرده‌ایم که شامل توابع زوج و فرد است:

$$T(x)=g(x)+h(x)\to T(-x)=g(x)-h(x)$$

تابع زوج:

$$g(x)=g(-x)\in f_e \to T(x)+T(-x)=g(x)+h(x)+g(x)-h(x)=2g(x)\to g(x)=\frac{T(x)+T(-x)}{2}$$

تابع فرد:

$$h(-x)=-h(x)\in f_o \to T(x)-T(-x)=g(x)+h(x)-g(x)+h(x)=2h(x)\to h(x)=\frac{T(x)-T(-x)}{2}$$

حال در آخر جون می‌دانیم که توابع زوج و فرد اشتراکی ندارند، پس این توابع خاص هستند و می‌توان آن‌ها با جمع دو تابع زوج و فرد نوشت.

پس درنتیجه:

$$f_0\oplus f_e=R^R$$

## ۳. سوال شماره ۳:

**پرسش ۳** (۲۵ نمره) اثبات کنید اجتماع سه زیرفضا با مجموعه اعضای نامتناهی از $V$ یک زیرفضا از $V$ است اگر و تنها اگر یکی از زیرفضاها شامل دوتای دیگر باشد.

۱) یکی از زیرفضاها شامل دو زیرفضا دیگر باشد.

فرض می‌کنیم:

$$u, z \subseteq w \longrightarrow u \cup z \cup w = w \xrightarrow{w \subseteq V} z \cup w \cup u \cup V = V$$

۲) اجتماع ۳ زیرفضا با مجموعه اعضای نامتناهی از $V$ یک زیرفضا از $V$ است.

باید اثبات کنیم که زیرفضایی شامل زیرفضای دیگری نمی‌شود.

با استفاده از برهان خلف داریم:

فرض خلف:

1) $u \not\subseteq z$ , $w \not\subseteq z$ ، 2) $u \not\subseteq z$ , $w \subseteq z$ ، 3) $u \subseteq z$ , $w \not\subseteq z$

می‌دانیم که: $u \in u$ , $u \in z$ ، $w \in w$ , $w \notin z$ ، $z \in z$ , $z \in V$

زیرفضایی ساخته می‌شود که با جمع دو زیرفضای $u$ و $z$ عضو زیرفضای $u-z$ باشد ولی $((u+z)-u) = z \in u$

پس فرض خلف غلط است. یا؛ عضو $u+z$ است که $((u+z)-z) = u \in z$ است و باز هم خلاف فرض خلف است. (با کم کردن دو زیرفضا از هم، نباید اشتراک آن‌ها باشد.)

باقی موارد هم به‌طور مشابه قابل اثبات از سه فرض خلف باطل و حکم درست است.

## ۴. سوال شماره ۴:

**پرسش ۴** (۲۵ نمره) اگر $V$ را بصورت تمامی دنباله‌های نامتناهی $a = (a_۰, a_۱, a_۲, \dots)$ تعریف کنیم که همه‌ی مقادیر $a_i$ اعداد حقیقی هستند و $a_۰ \neq ۰$.
با توجه به تعاریف زیر از جمع برداری و ضرب اسکالر موارد زیر را بررسی کنید:

(آ) (۱۵ نمره) خواص جمع برداری برای اینکه $V$ فضای برداری باشد را بررسی کنید.

(ب) (۱۰ نمره) خواص ضرب اسکالر برای اینکه $V$ فضای برداری باشد را بررسی کنید.

(جمع برداری) $$a + b = (a_۰b_۰,\ a_۰b_۱ + a_۱b_۰,\ a_۲b_۰ + a_۱b_۱ + a_۰b_۲,\ \dots) \quad \text{or} \quad (a+b)_j = \sum_{i=۰}^{j} a_i b_{j-i}$$

(ضرب اسکالر) $$ka = (ka_۰, ka_۱, ka_۲, \dots)$$

الف)

خواص جمع برداری:

Commutative: $(a+b)_j = \sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i} = \sum_{i=0}^{j} b_i a_{j-i} = (b+a)_j$

associative: $(a+(b+c))_j = \sum_{i=0}^{j} a_i \left(\sum_{k=0}^{j-i} b_k c_{j-i-k}\right) = \sum_{m+n=0}^{j} a_m b_n c_{j-m-n}$

$((a+b)+c)_j = \sum_{i=0}^{j} \left(\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}\right) \cdot c_{j-i} = \sum_{m+n=0}^{j} a_m b_n c_{j-m-n}$ برابر ✓

Identity: $(a+e)_j = a_j \xrightarrow{j>0} a_j \cancel{e_0}^{\,1} + \sum_{i=0}^{j-1} a_i e_{j-i} = a_j \rightarrow \sum_{i=0}^{j-1} a_i e_{j-i} = 0 \xrightarrow{i\neq 0} e_i = 0$ ✓

$\rightarrow e = (1, 0, 0, \dots)$

Inverse: $a+b = b+a = e \rightarrow (a_0b_0,\ a_0b_1 + a_1b_0, \dots) = (1, 0, 0, \dots)$

$\rightarrow a_0 b_0 = 1 \rightarrow b_0 = \frac{1}{a_0} \xrightarrow{a_0 \neq 0} b_0$ ✓

$j>0:\ b_j = \frac{-\sum_{i=1}^{j} a_i b_{j-1}}{a_0} \xrightarrow{a_0 \neq 0} b_j$ ✓

$\rightarrow$ Inverse ✓

(وجود $b_{j-1}, \dots, b_0$ ← استقراء

ب) خواص ضرب اسکالر:

associative: $\alpha(\beta a_0, \beta a_1, \dots) = \alpha \cdot \beta(a_0, a_1, \dots)$

$= (\alpha\beta)(a_0, a_1, \dots) = (\alpha\beta a_0, \alpha\beta a_1, \dots)$

distributive (scaler addition):

$(\alpha+\beta)(a_0, a_1, \dots) = ((\alpha+\beta)a_0, (\alpha+\beta)a_1, \dots) = (\alpha a_0 + \beta a_0, \dots)$

$\alpha(a_0, a_1 \dots) + \beta(a_0, a_1, \dots) = (\alpha a_0, \alpha a_1, \dots) + (\beta a_0, \beta a_1, \dots)$

$= (\alpha\beta a_0^2, 2\alpha\beta a_0 a_1, \dots)$ ✗

distributive (vector addition):

$\alpha((a_0, a_1 \dots) + (b_0, b_1, \dots)) = \alpha(a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, \dots)$

$= (\alpha a_0 b_0, \alpha a_0 b_1 + \alpha a_1 b_0, \dots)$

$\alpha(a_0, a_1, \dots) + \alpha(b_0, b_1, \dots) = (\alpha a_0, \alpha a_1, \dots) + (\alpha b_0, \alpha b_1, \dots)$

$= (\alpha^2 a_0 b_0, \alpha^2 a_0 b_1 + \alpha^2 a_1 b_0, \dots)$ ✗

scaler Identity: $k = 1$

$1 \times (a_0, a_1, a_2 \dots) = (a_0, a_1, \dots)$ ✓

در حل سوالات فوق با آقایان امیرحسین شهیدی، امیرحسین صوری، امیرحسین محمدپور و خانم ملیکا علیزاده هم‌فکری شده است.