جبر خطی

نیم‌سال دوم ۰۳-۰۲

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

اساتید: حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

تمرین تئوری پنجم

پاسخ‌دهنده: معین آعلی - ۴۰۱۱۰۵۵۶۱

پاسخ مسئله‌ی ۱.

می‌دانیم که ماتریس‌های مربعی برای وارون‌پذیر بودن باید دارای ستون‌های مستقل خطی باشند. با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم این ستون‌ها مستقل خطی نیستند. یعنی $\lambda_1 ... \lambda_n$ وجود دارند به طوری که $\lambda_1 A_1 + ... + \lambda_n A_n = 0$

می‌دانیم که:

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i A_{ji} = (1 + .. + n)(\lambda_1 + ... + \lambda_n) = 0 \longrightarrow \lambda_1 + ... + \lambda_n = 0$

فرض می‌کنیم که λ_i مخالف صفر باشد و $i \neq n$ است.

حال با توجه به عبارت مقابل:

$$\lambda_1 A_1 + ... + \lambda_{i-1} A_{i-1} + \lambda_i A_i + ... \lambda_n A_n = \lambda_i \begin{bmatrix} i \\ i-1 \\ \vdots \\ n \\ n-1 \\ \vdots \\ i+1 \end{bmatrix} + ... + \lambda_n \begin{bmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow{i,i+1} \begin{cases} \lambda_i \times 1 + \lambda_{i+1} \times 2 + ... + + \lambda_n \times (n-i+1) = 0 \\ \lambda_i \times n + ... + \lambda_n \times (n-i) = 0 \end{cases} \xrightarrow{-} -n\lambda_i + \sum_{k=i}^{n} \lambda_k = 0 \rightarrow -n\lambda_i = 0$$
$$\longrightarrow \lambda_i = 0$$

به تناقض رسیدیم که $\lambda_i = 0$ پس حکم اثبات می‌شود.

پاسخ مسئله‌ی ۲.

در سطر آخر شروع کرده و از هر سطر مقدار x_1 برابر سطر قبل را از آن کم کرده و ماتریس جدیدی را بدست می‌آوریم.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1)\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

همانطور که مشخص است این دترمینان یک ماتریس وندرموند $n-1$ است، پس اگر این مراحل را تکرار کنیم به عبارت مقابل می‌رسیم:

$$\left(\prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1)\right)\left(\prod_{1<i<j\leqslant n}(x_j - x_i)\right) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)$$

پاسخ مسئله‌ی ۳.

پاسخ مسئله‌ی ۴.

الف

در ابتدا می‌دانیم که:

$\frac{\partial det(X^n)}{\partial X} = \frac{\partial det(X^n)}{\partial det(X)} \times \frac{\partial det(X)}{\partial X}$

پس:

$\frac{\partial det(X^n)}{\partial det(X^{n-1})} \times \frac{\partial det(X)}{\partial X} = \frac{\partial det(X)^n}{\partial det(X)} \times \frac{\partial det(X)}{\partial X} = n \times det(X)^{n-1} \frac{\partial det(X)}{\partial X}$

همچنین می‌دانیم که:

$$\frac{\partial y}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_{11}} & \frac{\partial y}{\partial x_{21}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{n1}} \\ \frac{\partial y}{\partial x_{12}} & \frac{\partial y}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_{1q}} & \frac{\partial y}{\partial x_{2q}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{nm}} \end{bmatrix}$$

حال با توجه به رابطه بالا $\frac{\partial det(X)}{\partial X_{ij}}$ را حساب می‌کنیم:

$\frac{\partial det(X)}{\partial X_{ij}} = \frac{\partial \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} X_{ik} det(X_{\backslash i \backslash j})}{\partial X_{ij}} = (-1)^{i+j} det(X_{\backslash i \backslash j}) = C_{ij}$

در تمامی ستون‌ها به جز j سطر مقدار i حذف می‌شود. پس این مقدار به A_{ij} وابسته نیست. پس درنتیجه:

$\frac{\partial det(X)}{\partial X} = C^T$

از طرفی می دانیم که:

$|A|A^{-1} = C^T$

بنابراین داریم:

$\frac{\partial det(X^n)}{\partial X} = n \times det(X^{n-1}) \frac{\partial det(X)}{\partial X} = n \times det(X^{n-1}) C^T = n \times det(X^n) X^{-1}$

ب

$\frac{\partial det(A(t))}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial det(A(t))}{\partial A_{ij}} \times \frac{\partial A_{ij}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \frac{\partial A_{ij}}{\partial t} = tr(C^T \frac{\partial A(t)}{\partial t})$ از طرفی می دانیم که:

$|A|A^{-1} = C^T$

پس:

$tr(C^T \frac{\partial A(t)}{\partial t}) = tr(|A(t)|A(t)^{-1} \frac{\partial A(t)}{\partial t}) = |A(t)| tr(A(t)^{-1} \frac{\partial A(t)}{\partial t}) = det(A(t)) \times tr(A(t)^{-1} \frac{\partial A(t)}{\partial t})$