جبر خطی

نیم‌سال دوم ۰۲-۰۳

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

اساتید: حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

پاسخ‌دهنده: معین آعلی - ۴۰۱۱۰۵۵۶۱

تمرین تئوری چهارم

پاسخ مسئله‌ی ۱.

الف

$$Nullity\{ABC\} = \{x|x \in N(A)\} \cup \{x|x \in N(B)\} \cup \{x|x \in N(C)\}$$

$$\begin{cases} \{x|x \in N(A)\} \subseteq Nullity\{A\} \\ \{x|x \in N(B)\} \subseteq Nullity\{B\} \\ \{x|x \in N(C)\} \subseteq Nullity\{C\} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{|X|=X_۱\cup X_۲\cup X_۳ \rightarrow |X|\leqslant|X_۱|+|X_۲|+|X_۳|} Nullity\{ABC\} \leqslant Nullity\{A\} + Nullity\{B\} + Nullity\{C\}$$

ب

طبق قضیه‌های از قبل ثابت شده می‌دانیم که:

(i) $Rank\{A^T\} = RankA$

(ii) $Rank\{AB\} \leqslant RankA$

حال نامساوی خواسته شده را اثبات می‌کنیم:

$$Rank\{AB\} = Rank\{(AB)^T\} = Rank\{B^T A^T\} \leqslant Rank\{B^T\} = Rank\{B\}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} Rank\{AB\} \leqslant Rank\{A\} \\ Rank\{AB\} \leqslant Rank\{B\} \end{cases} \longrightarrow Rank\{AB\} \leqslant min(Rank\{A\}, Rank\{B\})$$

$$Rank\{ABC\} \xrightarrow[\text{اثبات بالا}]{BC=D} Rank\{AD\} \leqslant min(Rank\{A\}, Rank\{D\})$$

$$\xrightarrow{Rank\{D\}\leqslant min(Rank\{C\},Rank\{B\})} Rank\{ABC\} \leqslant min(Rank\{A\}, Rank\{B\}, Rank\{C\})$$

پ

در ابتدا می‌دانیم که:

$$\begin{cases} ABC = ۰ \rightarrow Nullity\{ABC\} = n \\ Nullity\{ABC\} \leqslant Nullity\{A\} + Nullity\{B\} + Nullity\{C\} \end{cases}$$

همچنین:

$$Rank\{A\} + Nullity\{A\} = n$$

همینطور اگر فرض کنیم که $Nullity\{C\}, Nullity\{B\} \leqslant Nullity\{A\}$ است، پس داریم:

$$n \leqslant ۳ \times Nullity\{A\} \rightarrow \frac{n}{۳} \leqslant Nullity\{A\} \rightarrow Rank(A) \leqslant \frac{۲n}{۳}$$

$$Rank\{CBA\} \leqslant min(Rank\{A\}, Rank\{B\}, Rank\{C\}) \leqslant Rank\{A\} \leqslant \frac{۲n}{۳}$$

ت

این بخش رو باید بعدا بزنم

پاسخ مسئله‌ی ۲.

این بخش رو باید بعدا بزنم

پاسخ مسئله‌ی ۳.

الف

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \beta_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$P_\alpha^\beta = \Big[[\alpha_1]_\beta \quad [\alpha_2]_\beta \quad [\alpha_3]_\beta \Big]$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \longrightarrow a = \frac{1}{3}, b = 0, c = \frac{-1}{3} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \longrightarrow a = 2, b = -3, c = -1 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \longrightarrow a = \frac{1}{3}, b = 0, c = \frac{2}{3} \end{cases} \longrightarrow P_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & -3 & 0 \\ \frac{-1}{3} & -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

ب

$$P_\beta^\alpha = (P_\alpha^\beta)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

مراحل وارون کردن ماتریس را در تمارین ۱ و ۲ انجام داده‌ایم و در این تمرین داخل چرک‌نویس انجام شده است.

ج

$$P_\beta^\alpha \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

پاسخ مسئله‌ی ۴.

باید ثابت کنیم که:

$\exists\ S \in \mathcal{L}(V,W) \longleftrightarrow Range(T_۱) = Range(T_۲)$

ابتدا طرف اول را ثابت می‌کنیم. اگر S وجود داشته باشد، چون $T_۱ = T_۲S$ است، پس هر عضو از $Range(T_۱)$ عضو $Range(T_۲)$ هم است. چون که به ازای هر u دلخواه که به $T_۱$ داده می میشود، یک $v = Su$ هم وجود دارد که به ازای آن خروجی $T_۲$ با خروجی $T_۱$ برابر خواهد شد. پس:

$Range(T_۱) \subseteq Range(T_۲)$

از آن‌جایی که S معکوس‌پذیر است، پس:

$T_۱ = T_۲S \longrightarrow T_۱S^{-۱} = T_۲SS^{-۱} \longrightarrow T_۱S^{-۱} = T_۲$

پس مشابه بالا می‌توان گفت:

$Range(T_۲) \subseteq Range(T_۱)$

در نهایت طرف اول حکم اثبات می‌شود:

$$\begin{cases} Range(T_۲) \subseteq Range(T_۱) \\ Range(T_۱) \subseteq Range(T_۲) \end{cases} \longrightarrow Range(T_۱) = Range(T_۲)$$

حال طرف دیگر حکم را ثابت می‌کنیم. ما S را این‌گونه تعریف می‌کنیم که اگر $e_۱, e_۲, e_۳, ..., e_n$ پایه در $T_۱$ باشد، آن‌گاه $e'_۱, e'_۲, e'_۳, ..., e'_n$ پایه در $T_۲$ باشند، به طوری که: $Se_i = e'_i$
پس در نتیجه تمامی عناصر موجود در $T_۲$ ساخته می‌شوند.

$\alpha \in T_۲ \longrightarrow \alpha = \alpha_۱e'_۱ + \alpha_۲e'_۲ + ... + \alpha_ne'_n \longrightarrow$
$\alpha_۱Se_۱ + ... + \alpha_nSe_n = S\alpha_۱e_۱ + ... + S\alpha_ne_n = S(\alpha_۱e_۱ + ... + \alpha_ne_n)$

یک ترکیب خطی ساخته شد که به α می‌رود. تبدیل S وارون‌پذیر است، چون یک‌به‌یک است. یک‌به‌یک بودن را با برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم $u \neq v, S(u) = S(v)$ باشد، پس داریم:

$S(u-v) = ۰$
$S(۰) = ۰$

حال باید نشان دهیم که $u = v$ تا به تناقض بخوریم.

$$\begin{cases} S(u) = \alpha_۱e'_۱, \alpha_۲e'_۲, e_۳, ..., \alpha_ne'_n = S(\alpha_۱e_۱ + ... + \alpha_ne_n) \\ S(v) = \beta_۱e'_۱, \beta_۲e'_۲, e_۳, ..., \beta_ne'_n = S(\beta_۱e_۱ + ... + \beta_ne_n) \end{cases} \to (\alpha_۱ - \beta_۱)e'_۱ + ... + (\alpha_n - \beta_n)e'_n = ۰$$

طبق تعریف پایه بودن $e'_۱, ..., e'_n$ ، پس ضرایب برابر صفر هستند و در نتیجه:

$\alpha_i - \beta_i = ۰ \longrightarrow \alpha_i = \beta_i \longrightarrow u = v$

پاسخ مسئله‌ی ۵.

$$A^{۲}=AB+۲I=A(A-B)=۲I \longrightarrow Dim(۲I)=۳ \longrightarrow Dim(A(A-B))=۳$$
$$Dim(A(A-B))=۳ \leqslant Dim(A), Dim(A-B) \leqslant ۳ \longrightarrow Dim(A)=Dim(A-B)=۳$$

با توجه به این که سطرها و ستون‌های A ، B مستقل خطی هستند، پس دو ماتریس A و A-B وارون پذیر هستند. درنتیجه $A^{-۱}$ وجود دارد. پس دو طرف معادله فوق را در آن ضرب کرده و داریم:

$$A(A-B)=۲I \xrightarrow{\times A^{-۱}} A-B=۲A^{-۱} \longrightarrow A-۲A^{-۱}=B$$

معادله فوق ممکنه است جواب داشته باشد یا ممکن است جواب نداشته باشد!

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)}\begin{bmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ce \\ fg-di & cg-ai & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} A-۲A^{-۱}=\begin{bmatrix} a-\frac{۲(ei-fh)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} & b-\frac{۲(ch-bi)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} & c-\frac{۲(bf-ce)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} \\ d-\frac{۲(fg-di)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} & e-\frac{۲(cg-ai)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} & f-\frac{۲(cd-af)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} \\ g-\frac{۲(dh-eg)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} & h-\frac{۲(bg-ah)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} & i-\frac{۲(ae-bd)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)} \end{bmatrix} \\ B=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-\frac{۲(ei-fh)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)}=-۱ \\ b-\frac{۲(ch-bi)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)}=۱ \\ c-\frac{۲(bf-ce)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)}=-۱ \\ d-\frac{۲(fg-di)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)}=۰ \\ e-\frac{۲(cg-ai)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)}=-۱ \\ f-\frac{۲(cd-af)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)}=۰ \\ g-\frac{۲(dh-eg)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)}=۱ \\ h-\frac{۲(bg-ah)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)}=۲ \\ i-\frac{۲(ae-bd)}{a(ei-fh)-b(di-fg)+(dh-eg)}=-۲ \end{cases}$$

حال معادلات فوق را حل می‌کنیم و مجهول‌ها را بدست می‌آوریم.