جبر خطی

نیم‌سال دوم ۰۳-۰۲

اساتید: حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

پاسخ‌دهنده: معین آعلی - ۴۰۱۱۰۵۵۶۱

تمرین تئوری چهارم

پاسخ مسئله‌ی ۱.

الف

$$Nullity\{ABC\} = \{x|x\in N(A)\}\cup\{x|x\in N(B)\}\cup\{x|x\in N(C)\}$$

$$\begin{cases}\{x|x\in N(A)\}\subseteq Nullity\{A\}\\ \{x|x\in N(B)\}\subseteq Nullity\{B\}\\ \{x|x\in N(C)\}\subseteq Nullity\{C\}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{|X|=X_۱\cup X_۲\cup X_۳\to|X|\leqslant|X_۱|+|X_۲|+|X_۳|} Nullity\{ABC\}\leqslant Nullity\{A\}+Nullity\{B\}+Nullity\{C\}$$

ب

طبق قضیه‌های از قبل ثابت شده می‌دانیم که:

(i) $Rank\{A^T\} = RankA$

(ii) $Rank\{AB\}\leqslant RankA$

حال نامساوی خواسته شده را اثبات می‌کنیم:

$$Rank\{AB\} = Rank\{(AB)^T\} = Rank\{B^TA^T\}\leqslant Rank\{B^T\} = Rank\{B\}$$

$$\longrightarrow\begin{cases}Rank\{AB\}\leqslant Rank\{A\}\\ Rank\{AB\}\leqslant Rank\{B\}\end{cases}\longrightarrow Rank\{AB\}\leqslant min(Rank\{A\},Rank\{B\})$$

$$Rank\{ABC\}\xrightarrow[\text{اثبات بالا}]{BC=D} Rank\{AD\}\leqslant min(Rank\{A\},Rank\{D\})$$

$$\xrightarrow{Rank\{D\}\leqslant min(Rank\{C\},Rank\{B\})} Rank\{ABC\}\leqslant min(Rank\{A\},Rank\{B\},Rank\{C\})$$

پ

در ابتدا می‌دانیم که:

$$\begin{cases}ABC = ۰\to Nullity\{ABC\} = n\\ Nullity\{ABC\}\leqslant Nullity\{A\}+Nullity\{B\}+Nullity\{C\}\end{cases}$$

همچنین:

$$Rank\{A\}+Nullity\{A\} = n$$

همینطور اگر فرض کنیم که $Nullity\{C\},Nullity\{B\}\leqslant Nullity\{A\}$ است، پس داریم:

$$n\leqslant ۳\times Nullity\{A\}\to\frac{n}{۳}\leqslant Nullity\{A\}\to Rank(A)\leqslant\frac{۲n}{۳}$$

$$Rank\{CBA\}\leqslant min(Rank\{A\},Rank\{B\},Rank\{C\})\leqslant Rank\{A\}\leqslant\frac{۲n}{۳}$$

ت

این بخش رو باید بعدا بزنم

پاسخ مسئله‌ی ۲.

پاسخ مسئله‌ی ۳.