



دانشگاه تهران
دانشکده فنی

دانشکده علوم مهندسی
طراحی الگوریتم، پاییز ۱۴۰۳



تمرین‌های الگوریتم‌های پیشینه جریان

۱. فرض کنید M یک جدول $X * Y$ باشد که در هر خانه ای جدول یک عدد حقیقی نامنفی وجود دارد. به طوری که مجموع اعداد هر سطر و ستون عددی صحیح است. ثابت کنید جدولی $X * Y$ وجود دارد به طوری که در هر خانه از جدول یک عدد صحیح نامنفی وجود دارد و مجموع اعداد هر سطر و ستون آن همانند جدول M است.

فرض کنید a_1, a_2, \dots, a_x به ترتیب جمع ردیف‌های 1 تا x و همچنین b_1, b_2, \dots, b_y به ترتیب جمع ستون‌های 1 تا y جدول M باشند. یک گراف دو بخشی شامل دسته راس‌های p_1, p_2, \dots, p_x متناظر با ردیف‌ها و دسته راس‌های q_1, q_2, \dots, q_y متناظر با ستون‌ها تشکیل می‌دهیم. از هر راس دسته اول یک یال جهت‌دار به تمام راس‌های دسته دوم با ظرفیت بی‌نهایت وصل می‌کنیم. راس s و t را به عنوان منبع و مقصد در نظر می‌گیریم که s به راس p_i با ظرفیت a_i متصل می‌شود. همچنین هر راس q_i با ظرفیت b_i به راس t وصل می‌شود.

الگوریتم فورد-فالکرسون را روی این شبکه اجرا می‌کنیم. واضح است که اندازه minimum cut یا همان جریان پیشینه برابر $a_1 + a_2 + \dots + a_x = b_1 + b_2 + \dots + b_y$ است. از آنجا که ظرفیت تمام یال‌ها عدد صحیح است، جریان پیشینه شبکه نیز در یال‌ها صحیح خواهد بود. برای به دست آوردن عدد صحیح خانه (i, j) جدول جدید کافی است جریان گذرنده از یال (p_i, q_j) را در نظر بگیریم.

۲. یک گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ (تصور کنید یک شبکه از جاده‌ها) به شما داده شده است. مجموعه‌ای از گره‌ها $X \subset V$ به عنوان گره‌های پر جمعیت و مجموعه دیگری $S \subset V$ به عنوان گره‌های امن مشخص شده‌اند (فرض کنید که X و S اشتراکی ندارند). در صورت وقوع شرایط اضطراری، می‌خواهیم مسیرهای تخلیه‌ای از گره‌های پر جمعیت به گره‌های امن طراحی کنیم.

یک مجموعه از مسیرهای تخلیه به صورت مجموعه‌ای از مسیرها در G تعریف می‌شود به گونه‌ای که:

- هر گره در X ، نقطه شروع یک مسیر باشد.
- آخرین گره در هر مسیر در S قرار داشته باشد.
- مسیرها هیچ یال مشترکی نداشته باشند.

چنین مجموعه‌ای از مسیرها به ساکنان گره‌های پر جمعیت اجازه می‌دهد که به S فرار کنند، بدون اینکه باعث ازدحام بیش از حد در هیچ یال G شوند.

(الف) با داشتن G, X ، و S ، نشان دهید که چگونه می‌توان در زمان چندجمله‌ای تصمیم گرفت که آیا چنین مجموعه‌ای از مسیرهای تخلیه وجود دارد یا خیر.

تمامی یال‌های گراف G را با ظرفیت ۱ در نظر بگیرید. راس s و t را به عنوان گره‌های مبدا و مقصد به G اضافه کنید. برای هر گره $x_i \in X$ یک یال از s به x_i با ظرفیت ۱، و برای هر گره $y_i \in S$ یک یال از y_i به t با ظرفیت ۱ اضافه کنید. جریان بیشینه را از s به t محاسبه کنید. در صورتی که مقدار جریان بیشینه با تعداد گره‌های X برابر باشد به این معناست که یک مجموعه از مسیرهای تخلیه بدون اشتراک یال وجود دارد که تمامی گره‌های پرجمعیت را به گره‌های امن متصل می‌کند. اگر مقدار جریان کمتر از تعداد گره‌های X باشد، به این معناست که چنین مجموعه‌ای از مسیرهای تخلیه وجود ندارد.

افزودن گره‌ها و یال‌ها به شبکه جریان در زمان $O(|V|+|E|)$ انجام می‌شود (با احتساب G). با استفاده از الگوریتم‌هایی مانند الگوریتم Edmonds-Karp که پیچیدگی زمانی $O(|V||E|^2)$ دارد، می‌توان ماکسیمم جریان را در زمان چندجمله‌ای محاسبه کرد.

ب) فرض کنید دقیقاً همان مسئله‌ای که در بخش (الف) بیان شد را داریم، اما می‌خواهیم شرط سوم را قوی‌تر کنیم. بنابراین، شرط سوم تغییر می‌کند و می‌گویید: «مسیرها هیچ گره مشترکی نداشته باشند».
با این شرط جدید، نشان دهید که چگونه می‌توان در زمان چندجمله‌ای تصمیم گرفت که آیا چنین مجموعه‌ای از مسیرهای تخلیه وجود دارد یا خیر.

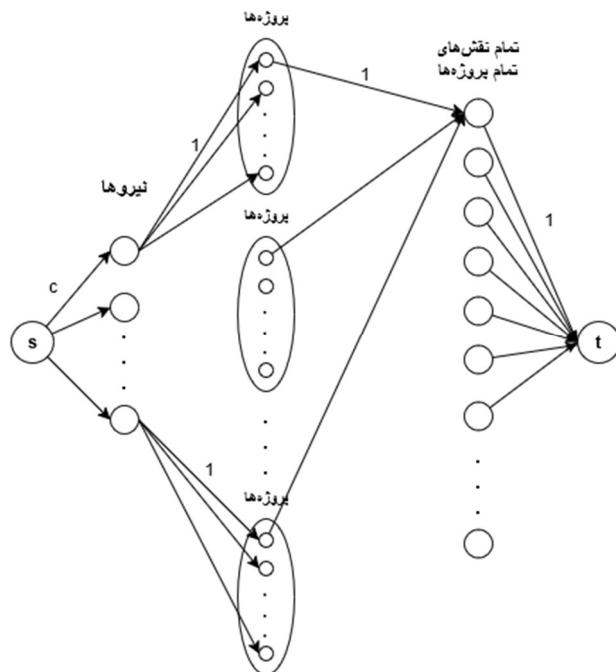
تمامی یال‌های گراف G را با ظرفیت ۱ در نظر بگیرید. هر گره $v_i \in G$ را به دو گره v_{i_in} و v_{i_out} بشکنید و یک یال از v_{i_in} به v_{i_out} با ظرفیت ۱ اضافه کنید. یال‌هایی که به v_i وارد می‌شدند را به v_{i_in} و یال‌هایی که از v_i خارج می‌شدند را به v_{i_out} متصل کنید. راس s و t را به عنوان گره‌های مبدا و مقصد به G اضافه کنید. برای هر گره $x_{i_in} \in X$ یک یال از s به x_{i_in} با ظرفیت ۱، و برای هر گره $y_{i_out} \in S$ یک یال از y_{i_out} به t با ظرفیت ۱ اضافه کنید. ادامه روند مشابه بخش (الف) است.

ج) یک مثال ارائه دهید که در آن برای یک گراف G ، مجموعه X و S ، پاسخ بخش (الف) بله باشد اما پاسخ بخش (ب) خیر باشد.

هر مثال صحیحی مورد قبول است.

۳. یک شرکت تولید نرم افزار می‌خواهد برای به‌کارگیری نیروهای خود در پروژه‌های سال آینده اش برنامه‌ریزی کند. این شرکت در سال آینده n پروژه در دست دارد که به ترتیب انجام خواهند شد. برای هر پروژه تعدادی نقش تعریف می‌شود. مثلاً برای پروژه i ام k_i نقش وجود دارد. این برنامه‌ریزی باید به گونه ای باشد که برای هر نقش در هر پروژه یک نفر مشغول به کار باشد. ممکن است افراد به هر دلیلی نتوانند در نقشی خاص از پروژه‌ای خاص کار کنند. با استفاده از شبکه جریان الگوریتمی طراحی کنید که این برنامه ریزی را با در نظر گرفتن محدودیت‌های زیر انجام دهد یا تشخیص دهد امکان برنامه ریزی وجود ندارد.

- هر یک از نیروها حداکثر در C پروژه حضور داشته باشند.
- در هر پروژه هر نفر حداکثر یک نقش داشته باشد.



از راس s به هر نیرو یالی با ظرفیت c قرار می‌دهیم. در بخش دوم گراف به ازای هر نیرو یک بخش n راسی قرار می‌دهیم که هر راس نشان دهنده یک پروژه می‌باشد؛ که به راس‌هایی از بخش سوم گراف (تمام نقش‌های تمام پروژه‌ها) متصل است که اولاً نقش، مربوط به همان پروژه باشد و دوماً نیرو بتواند در آن نقش کار کند. در نهایت از هر نقش یالی با ظرفیت 1 ، به t وصل می‌کنیم. الگوریتم شار بیشینه را روی این شبکه اجرا کرده و در صورتی که شار بیشینه برابر مجموع تعداد نقش‌ها شود این برنامه ریزی امکان پذیر است و شرایط مسئله برقرار شده است چون جریانی که از هر نقش می‌گذرد از دقیقاً 1 نیرو گذشته است. راس نیرو نمی‌تواند در بیشتر از c جریان حضور داشته باشد. همچنین به دلیل وجود یال با ظرفیت 1 بین نیرو و هر پروژه، هر نیرو حداکثر در یک نقش از پروژه حضور دارد.