



تمرین‌های الگوریتم‌های گراف

۱. "علوم مهندسی آباد" شهریست شامل $10^5 \leq n$ میدان و m خیابان مستقیم میان بعضی از جفت-میدان‌ها (گراف ساده). بابک که به تازگی شهردار شده است قصد دارد تعدادی از میدان‌های شهر را گل‌کاری کند به طوری که هر میدان یا گل‌کاری شده باشد یا به میدانی که گل‌کاری شده است، خیابان داشته باشد. بنابر پاره‌ای از مشکلات، او حداکثر می‌تواند $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ تا از میدان‌ها را انتخاب کند. به او در این امر کمک کنید و الگوریتمی ارائه دهید که میدان‌های انتخابی را خروجی دهد. همچنین آن را از لحاظ زمانی تحلیل کنید.
۲. یک گراف n راسی و m یالی داریم. روی هر یال آن یک عدد اعشاری وجود دارد. الگوریتمی ارائه دهید که مشخص کند آیا در این گراف دوری وجود دارد که حاصل ضرب تمامی یال‌هایش از 1 بزرگتر باشد؟ ($nm \leq 10^6$)
۳. ماتریس D کوتاه‌ترین مسیر بین هر دو راس در گراف وزن‌دار G را نگهداری می‌کند به طوری که $D[u, v]$ کوتاه‌ترین مسیر از راس u به راس v است. فرض کنید وزن یک یال در گراف G از w_e به w'_e تغییر پیدا کند. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n^2)$ طراحی کنید که مقادیر ماتریس D را به‌روزرسانی کند.
۴. یک گراف وزن دار که در آن وزن هر یال ۱ یا ۲ است را در نظر بگیرید، کوتاه‌ترین مسیر را از یک راس منبع داده شده s تا راس مقصد t پیدا کنید به طوری که پیچیدگی زمانی آن از $O(V + E)$ باشد.
۵. فرض کنید T یک زیر درخت فراگیر کمینه از G و \hat{T} زیردرخت فراگیر دیگر از G باشد هر حرکت یک یال \hat{T} از T با یک یال از T جایگزین می‌کند. الگوریتمی ارائه دهید که با دنباله‌ای از حرکات، \hat{T} را به T تبدیل کند با این شرط که با هر تغییری که انجام می‌دهیم همچنان درخت، فراگیر باشد و مجموع وزن یال‌های آن هیچوقت بیشتر نشود.

تمرین‌های الگوریتم‌های پیشینه جریان

۶. فرض کنید M یک جدول $x * y$ باشد که در هر خانه‌ای جدول یک عدد حقیقی نامنفی وجود دارد. به طوری که مجموع اعداد هر سطر و ستون عددی صحیح است. ثابت کنید جدولی $x * y$ وجود دارد به طوری که در هر خانه از جدول یک عدد صحیح نامنفی وجود دارد و مجموع اعداد هر سطر و ستون آن همانند جدول M است.
۷. یک گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ (تصور کنید یک شبکه از جاده‌ها) به شما داده شده است. مجموعه‌ای از گره‌ها $X \subset V$ به عنوان گره‌های پر جمعیت و مجموعه دیگری $S \subset V$ به عنوان گره‌های امن مشخص شده‌اند (فرض کنید که X و S اشتراکی ندارند). در صورت وقوع شرایط اضطراری، می‌خواهیم مسیرهای تخلیه‌ای از گره‌های پر جمعیت به گره‌های امن طراحی کنیم.
 - هر گره در X نقطه شروع یک مسیر باشد.
 - آخرین گره در هر مسیر در S قرار داشته باشد.

- مسیرها هیچ یال مشترکی نداشته باشند.

چنین مجموعه‌ای از مسیرها به ساکنان گره‌های پر جمعیت اجازه می‌دهد که به S فرار کنند، بدون اینکه باعث ازدحام بیش از حد در هیچ یال G شوند.

(الف) با داشتن G ، X ، و S ، نشان دهید که چگونه می‌توان در زمان چندجمله‌ای تصمیم گرفت که آیا چنین مجموعه‌ای از مسیرهای تخلیه وجود دارد یا خیر.

(ب) فرض کنید دقیقاً همان مسئله‌ای که در بخش (الف) بیان شد را داریم، اما می‌خواهیم شرط سوم را قوی‌تر کنیم. بنابراین، شرط سوم تغییر می‌کند و می‌گوید: «مسیرها هیچ گره مشترکی نداشته باشند».

با این شرط جدید، نشان دهید که چگونه می‌توان در زمان چندجمله‌ای تصمیم گرفت که آیا چنین مجموعه‌ای از مسیرهای تخلیه وجود دارد یا خیر.

(ج) یک مثال ارائه دهید که در آن برای یک گراف G ، مجموعه X و S ، پاسخ بخش (الف) بله باشد اما پاسخ بخش (ب) خیر باشد.

۸. یک شرکت تولید نرم افزار می‌خواهد برای به‌کارگیری نیروهای خود در پروژه‌های سال آینده اش برنامه‌ریزی کند. این شرکت در سال آینده n پروژه در دست دارد که به ترتیب انجام خواهند شد. برای هر پروژه تعدادی نقش تعریف می‌شود. مثلاً برای پروژه i ام k_i نقش وجود دارد. این برنامه‌ریزی باید به گونه ای باشد که برای هر نقش در هر پروژه یک نفر مشغول به کار باشد. ممکن است افراد به هر دلیلی نتوانند در نقشی خاص از پروژه‌ای خاص کار کنند. با استفاده از شبکه جریان الگوریتمی طراحی کنید که این برنامه ریزی را با در نظر گرفتن محدودیت‌های زیر انجام دهد یا تشخیص دهد امکان برنامه ریزی وجود ندارد.

- هر یک از نیروها حداکثر در C پروژه حضور داشته باشند.
- در هر پروژه هر نفر حداکثر یک نقش داشته باشد.