بنام خدا.

$s \in V$ مبدأ

هزینه یال‌ها می‌توانند منفی باشند.

single shortest paths

Bellman - Ford.

یال ریلکس

(u, v)

$v.d > u.d + w(u, v)$

$v.d = u.d + w(u, v)$

$v.\pi = u$

predecessor

At most, $\underline{|V| - 1}$ edges in one of our paths.

$|V|$ = # of vertices

$|V|$ or more edges in a path

$\Downarrow$

repeated vertex

$\Downarrow$

cycle

مبدأ $s \in V$ هزینه یالها می‌توانند منفی باشند.

single shortest paths

بنام خدا.

Bellman - Ford.

Initialize - Single - Source (G, s)

for $i = 1$ to $n-1$

for each edge $(u, v) \in E$

Relax (u, v, w)

for each edge $(u, v) \in E$:

if $v.d > u.d + w(u, v)$

return False

return True

یال ریلکس (u, v)

$v.d > u.d + w(u, v)$

$v.d = u.d + w(u, v)$

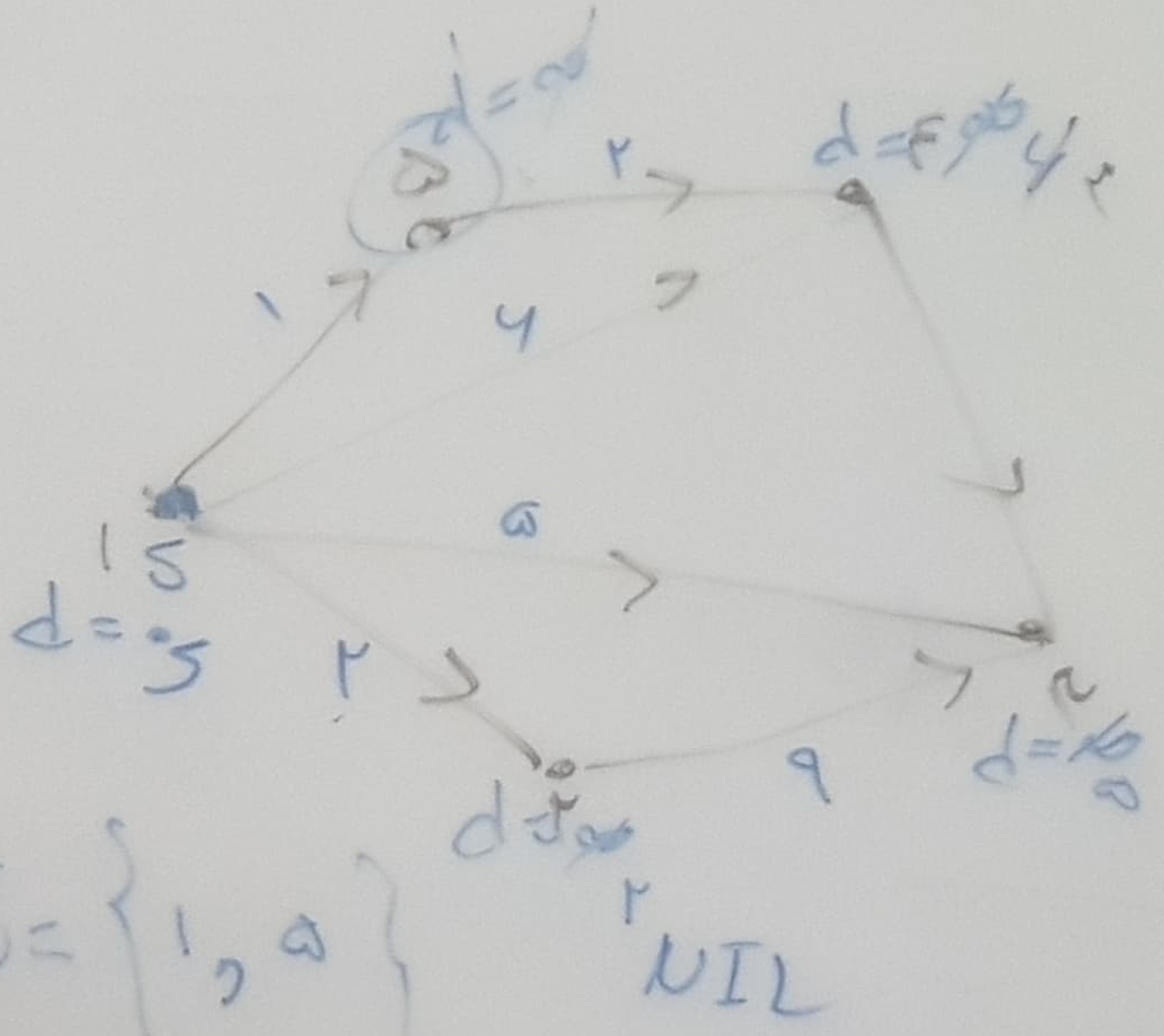
$v.\pi = u$

predecessor

d: مقدار کران بالای برای طول کوتاهترین مسیر از s به v

δ : طول کوتاه ترین مسیر

d = δ



S = {۱, ۵}

T = { }

بنام خدا.

هزینه یالها می‌توانند منفی باشند.

$s \in V$ مبدأ

single shortest paths

Bellman - Ford.

Initialize - Single - Source (G, s)

for $i = 1$ to $n - 1$

for each edge $(u, v) \in E$

Relax (u, v, w)

for each edge $(u, v) \in E$:

if $v.d > u.d + w(u, v)$

return False

return True

یال رلکس

(u, v)

$v.d > u.d + w(u, v)$

$v.d = u.d + w(u, v)$

$v.\pi = u$

predecessor

(برای تشخیص دور منفی نیز قابل استفاده است)

بنام خدا.

هزینه یالها و ترافیک منفی باشد.

$s \in V$ مبدأ

single shortest paths

Bellman - Ford.

Initialize - Single - Source (G, s)

for $i = 1$ to $n-1$

for each edge $(u, v) \in E$

Relax (u, v, w)

for each edge $(u, v) \in E$:

if $v.d > u.d + w(u, v)$

return False

return True

یال ریلکس (u, v)

$v.d > u.d + w(u, v)$

$v.d = u.d + w(u, v)$

$v.\Pi = u$

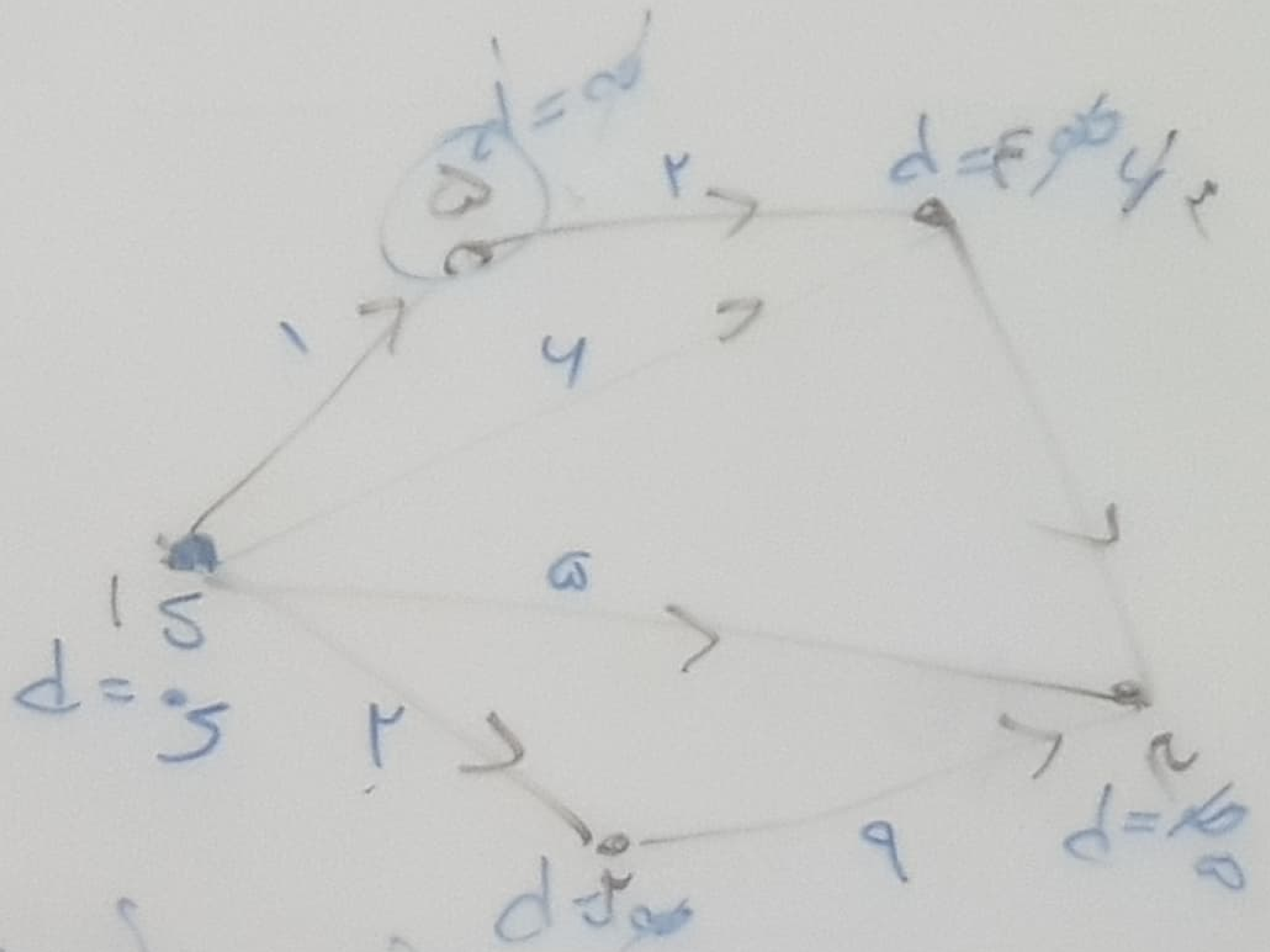
predecessor

یادآوری مثالی از Dij

d: کران بالای برای طول کوتاهترین مسیر از s به v / مقدار

δ: طول کوتاه ترین مسیر

d = δ



۲ NIL

S = {۱, ۵}

T = { }

اثبات:

لم ۱: اگر گراف G دور منفی (با هزینه) که از s قابل دسترسی باشد، نداشته باشد، آنگاه الگوریتم بعد از n − 1 تکرار جواب بهینه را می‌دهد یعنی

$$v.d = \delta(s, v)$$

طول کوتاه‌ترین مسیر از s به v برحسب با هزینه

رأس v را در نظر بگیرید. که $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ یک کوتاه‌ترین مسیر از s به v باشد. $v_k = v$، $v_0 = s$

چون p مسیر ساده است پس حداکثر n − 1 یال دارد.

یعنی $k \le n-1$. در هر n − 1 تکرار حلقه for تمام m یال ریلکس می‌شوند و در میان یال‌های ریلکس شده در تکرار i‌ام حتماً یال (v_{i-1}, v_i) وجود دارد که $i = 1, \dots, k$ درنتیجه حکم برقرار است.

بنام خدا.

...llman ford.

Initialize_Single_Source(G, s)

for i = 1 to n - 1

    for each edge(u, v) ∈ E

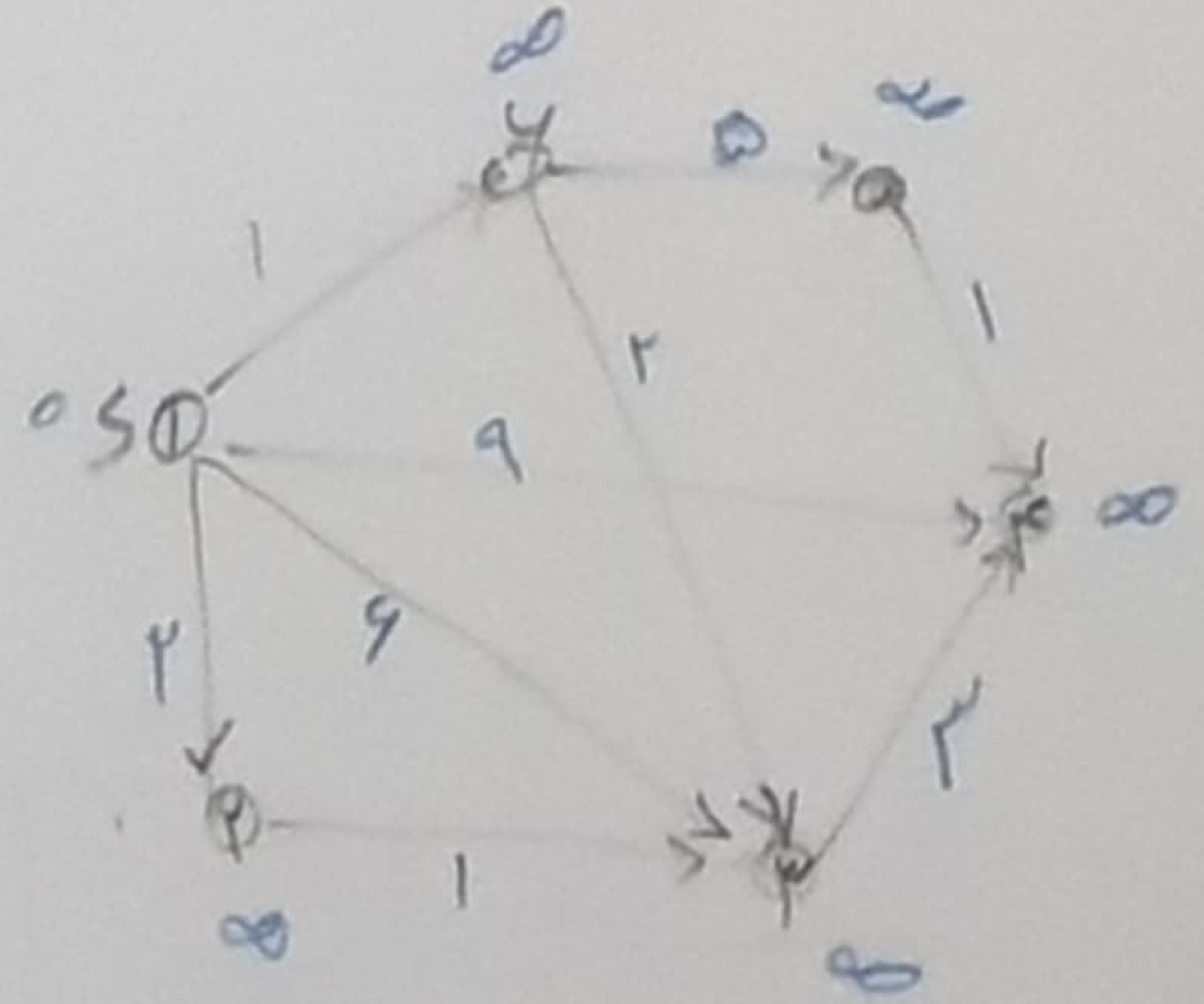
        Relax(u, v, w)

for each edge(u, v) ∈ E:

    if v.d > u.d + w(u, v)

        return False

return True

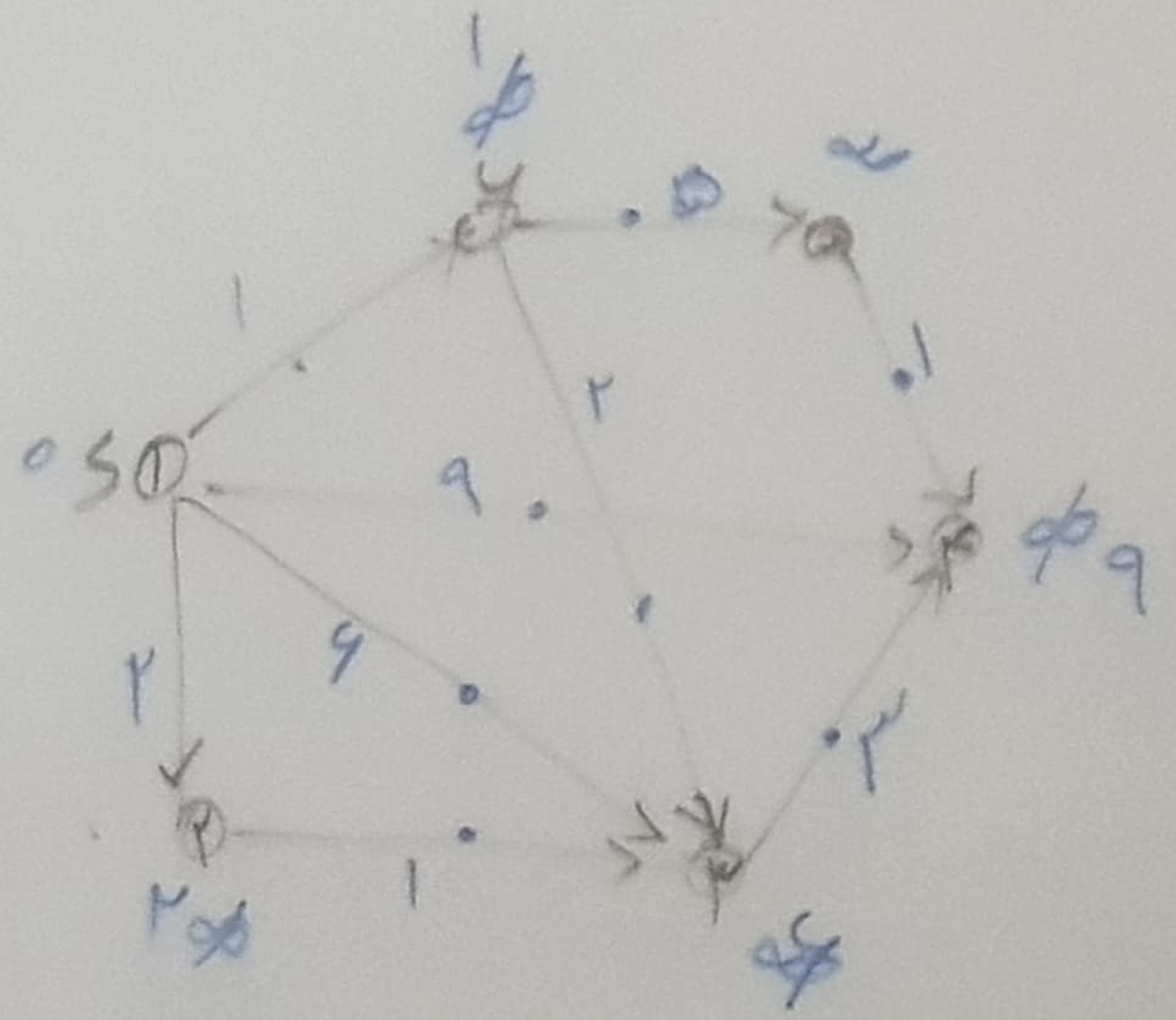


تکرار ۱

بنام خدا

Bellman - Ford.

```
Initialize - Single - Source (G, s)
for i = 1 to n - 1
    for each edge (u, v) ∈ E
        Relax (u, v, w)
for each edge (u, v) ∈ E:
    if v.d > u.d + w(u, v)
        return False
return True
```

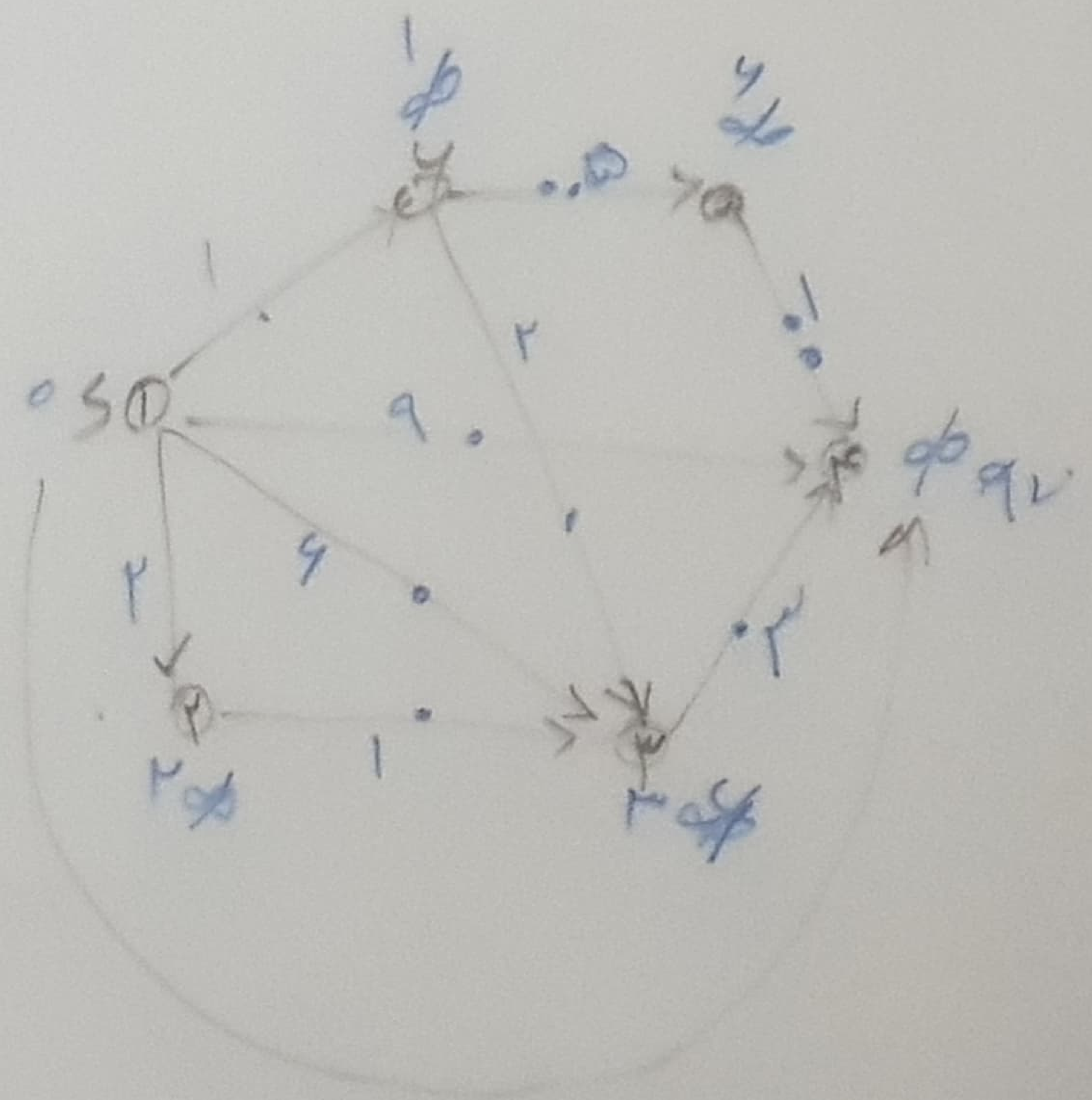


تمرار !

بنام خدا

Bellman - Ford.

```
Initialize_Single_Source (G, s)
for i = 1 to n-1
    for each edge (u, v) ∈ E
        Relax (u, v, w)
for each edge (u, v) ∈ E :
    if v.d > u.d + w(u, v)
        return False
return True
```



اثبات :

$$v_i.d \le v_{i-1}.d + w(v_{i-1}, v_i)$$

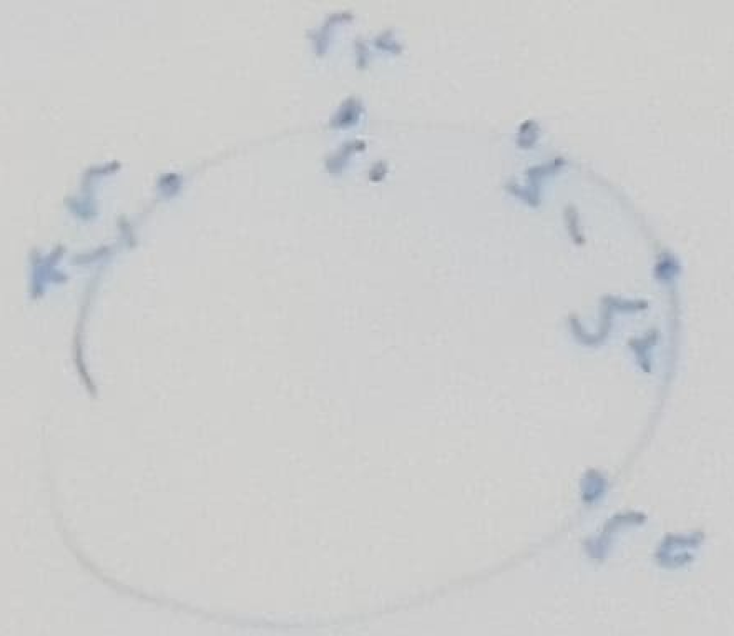
⇐ : اگر در گراف G دور منفی با هزینه که از s قابل دسترسی باشد، وجود داشته باشد.

الگوریتم، مقدار False را بر می‌گرداند،

فرض کنیم $C = <v_0, v_1, \dots, v_k>$ دوری باشد که هزینه آن منفی است

$$\boxed{v_0 = v_k} \;,\; \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) < 0$$

اثبات از برهان خلف. فرض کنیم الگوریتم True برگردانده باشد یعنی برای همه یال‌ها



(u,v)

$$v.d \le u.d + w(u,v)$$

برای تمام رئوس روی دور C این نامساوی را جمع بزنیم

$$\sum_{i=1}^{k} v_i.d \le \sum_{i=1}^{k} v_{i-1}.d + w(v_{i-1}, v_i)$$

$$\sum_{i=1}^{k} v_i.d \le \sum_{i=1}^{k} v_{i-1}.d + \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$

ولی $\sum_{i=1}^{k} v_i.d = \sum_{i=1}^{k} v_{i-1}.d$ یعنی

$$\sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) \ge 0$$

که تناقض است