



دانشگاه تهران  
۸۰۰۱۰۰۰۰ سیدیانی مر سعیان  
۸۰۰۱۰۰۰۵۵ دانشکدگان فنی  
۸۰۰۱۰۰۰۷۴ دانشکده علوم مهندسی  
طراحی الگوریتم، پاییز ۱۴۰۳



### تمرین‌های الگوریتم‌های گراف

۱. "علوم مهندسی آباد" شهریست شامل  $n \leq 10^5$  میدان و  $m$  خیابان مستقیم میان بعضی از حفت‌میدان‌ها (گراف ساده). بابک که به تازگی شهردار شده است قصد دارد تعدادی از میدان‌های شهر را گل‌کاری کند به طوری که هر میدان یا گل‌کاری شده باشد یا به میدانی که گل‌کاری شده است، خیابان داشته باشد. بنابر پاره‌ای از مشکلات، او حداقل می‌تواند  $\left[\frac{n}{2}\right]$  تا از میدان‌ها را انتخاب کند. به او در این امر کمک کنید و الگوریتمی ارائه دهید که میدان‌های انتخابی را خروجی دهد. همچنین آن را از لحاظ زمانی تحلیل کنید.

۲. یک گراف  $n$  راسی و  $m$  یالی داریم. روی هر یال آن یک عدد اعشاری وجود دارد. الگوریتمی ارائه دهید که مشخص کند آیا در این گراف دوری وجود دارد که حاصل ضرب تمامی یال‌هایش از ۱ بزرگتر باشد؟ ( $nm \leq 10^6$ )

۳. ماتریس  $D$  کوتاه‌ترین مسیر بین هر دو راس در گراف وزن‌دار  $G$  را نگهداری می‌کند به طوری که  $[D[u, v]]$  کوتاه‌ترین مسیر از راس  $u$  به راس  $v$  است. فرض کنید وزن یک یال در گراف  $G$  از  $W_e$  به  $W'_e$  تغییر پیدا کند. الگوریتمی از مرتبه زمانی  $O(n^2)$  طراحی کنید که مقادیر ماتریس  $D$  را به روزرسانی کند.

۴. یک گراف وزن دار که که در آن وزن هر یال ۱ یا ۲ است را در نظر بگیرید، کوتاه‌ترین مسیر را از یک راس منبع داده شده تا راس مقصد  $t$  پیدا کنید به طوری که پیچیدگی زمانی آن از  $O(V + E)$  باشد.

۵. فرض کنید  $T$  یک زیر درخت فرآگیر کمینه از  $G$  و  $\tilde{T}$  زیردرخت فرآگیر دیگر از  $G$  باشد هر حرکت یک یال  $\tilde{T}$  از را با یک یال از  $T$  جایگزین می‌کند. الگوریتمی ارائه دهید که با دنباله‌ای از حرکات،  $\tilde{T}$  را به  $T$  تبدیل کند با این شرط که با هر تغییری که انجام میدهیم همچنان درخت، فرآگیر باشد و مجموع وزن یال‌های آن هیچوقت بیشتر نشود.

### تمرین‌های الگوریتم‌های بیشینه جریان

۶. فرض کنید  $M$  یک جدول  $y^*$  باشد که در هر خانه‌ای جدول یک عدد حقیقی نامنفی وجود دارد. به طوری که مجموع اعداد هر سطر و ستون عددی صحیح است. ثابت کنید جدولی  $y^*$  وجود دارد به طوری که در هر خانه از جدول یک عدد صحیح نامنفی وجود دارد و مجموع اعداد هر سطر و ستون آن همانند جدول  $M$  است.

۷. یک گراف جهت‌دار  $G = (V, E)$  (تصور کنید یک شبکه از جاده‌ها) به شما داده شده است. مجموعه‌ای از گره‌ها  $X \subset V$  به عنوان گره‌های پر جمعیت و مجموعه دیگری  $S \subset V$  به عنوان گره‌های امن مشخص شده‌اند (فرض کنید که  $X$  و  $S$  اشتراکی ندارند). در صورت وقوع شرایط اضطراری، می‌خواهیم مسیرهای تخلیه‌ای از گره‌های پر جمعیت به گره‌های امن طراحی کنیم.

یک مجموعه از مسیرهای تخلیه به صورت مجموعه‌ای از مسیرها در  $G$  تعریف می‌شود به گونه‌ای که:

- هر گره در  $X$  نقطه شروع یک مسیر باشد.
- آخرین گره در هر مسیر در  $S$  قرار داشته باشد.

• مسیرها هیچ یال مشترکی نداشته باشند.

چنین مجموعه‌ای از مسیرها به ساکنان گره‌های پر جمعیت اجازه می‌دهد که به  $S$  فرار کنند، بدون اینکه باعث ازدحام بیش از حد در هیچ یال  $G$  شوند.

(الف) با داشتن  $G$ ,  $X$ , و  $S$ , نشان دهید که چگونه می‌توان در زمان چندجمله‌ای تصمیم گرفت که آیا چنین مجموعه‌ای از مسیرهای تخلیه وجود دارد یا خیر.

(ب) فرض کنید دقیقاً همان مسئله‌ای که در بخش (الف) بیان شد را داریم، اما می‌خواهیم شرط سوم را قوی‌تر کنیم. بنابراین، شرط سوم تغییر می‌کند و می‌گوید: «مسیرها هیچ گره مشترکی نداشته باشند».

با این شرط جدید، نشان دهید که چگونه می‌توان در زمان چندجمله‌ای تصمیم گرفت که آیا چنین مجموعه‌ای از مسیرهای تخلیه وجود دارد یا خیر.

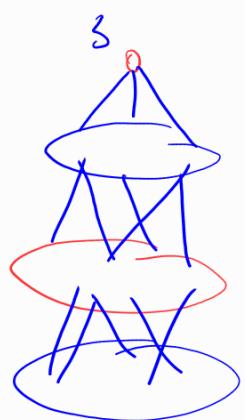
(ج) یک مثال ارائه دهید که در آن برای یک گراف  $G$ , مجموعه  $X$  و  $S$ , پاسخ بخش (الف) به باشد اما پاسخ بخش (ب) خیر باشد.

۸. یک شرکت تولید نرم افزار می‌خواهد برای به کارگیری نیروهای خود در پروژه‌های سال آینده اش برنامه‌ریزی کند. این شرکت در سال آینده  $n$  پروژه در دست دارد که به ترتیب انجام خواهند شد. برای هر پروژه تعدادی نقش تعریف می‌شود. مثلاً برای پروژه  $i$  ام  $k_i$  نقش وجود دارد. این برنامه‌ریزی باید به گونه‌ای باشد که برای هر نقش در هر پروژه یک نفر مشغول به کار باشد. ممکن است افراد به هر دلیلی نتوانند در نقشی خاص از پروژه‌ای خاص کار کنند. با استفاده از شبکه جریان الگوریتمی طراحی کنید که این برنامه ریزی را با در نظر گرفتن محدودیت‌های زیر انجام دهد یا تشخیص دهد امکان برنامه ریزی وجود ندارد.

• هر یک از نیروها حداکثر در  $C$  پروژه حضور داشته باشند.

• در هر پروژه هر نفر حداکثر یک نقش داشته باشد.

1. "علوم مهندسی آباد" شهریست شامل  $n \leq 10^5$  میدان و  $m$  خیابان مستقیم میان بعضی از جفت-میدان‌ها (گراف ساده). با این که به تازگی شهردار شده است قصد دارد تعدادی از میدان‌های شهر را گل کاری کند به طوری که هر میدان یا گل کاری شده باشد یا به میدانی که گل کاری شده است، خیابان داشته باشد. بنابر پاره‌ای از مشکلات، او حداقل می‌تواند  $\left[\frac{n}{2}\right]$  تا از میدان‌ها را انتخاب کند. به او در این امر کمک کنید و الگوریتمی ارائه دهید که میدان‌های انتخابی را خروجی دهد. همچنین آن را از لحاظ زمانی تحلیل کنید.



شروع کنیم، ابتدا رأس‌های با فاصله ۱ بعد رأس‌ها با فاصله ۲ و... را بینم  
(دوفاصله است که رأس‌های فاصله ۱-به رأسی با فاصله ۱-به یک گل دارد)  
بنابراین اگر ما از روی یک رأس دلخواه (هر سین را یک رأس)  
و هر خطاب را یک یال (یک گل) می‌نامیم، BFS بینم و فاصله‌ها

ردیف از ک را حساب کنم و سین (نفع) با فاصله فرد از ک (آی) در ردیف با فاصله زوج از ک (فرز) را در نظر بگیرم، طبق اصل لازم بتوانیم که (از ک) (ردیفها)  
[ $\frac{k}{2}$ ] رأس (ردیف طبق فرمula) که بال هر رأس در یک دسته به حداقل یک رأس (از دسته دیگر) پایل دارد هست با این دسته [ $\frac{k}{2}$ ] رأس (سین) داریم که با گل کاری در آن تأثیر ندارد

مسند برقراری شود

$$O(n+m) \leftarrow \text{جفن}(\text{نا یک} \text{ BFS داریم})$$

یک گراف  $n$  راسی و  $m$  یالی داریم. روی هر یال آن یک عدد اعشاری وجود دارد. الگوریتمی ارائه دهید که مشخص کند آیا در این گراف دوری وجود دارد که حاصل ضرب تمامی یال هایش از 1 بزرگتر باشد؟ ( $nm \leq 10^6$ )

فرض کنید گراف  $G(V, E)$  داشته باشد که متن  $\text{Bellman Ford}$  (یا  $C(V, E)$ ) را با همان معنی دوست و یال های سازم مولی متن ها را فرازی دهم کنیم.

$$C(u, v) = \log\left(\frac{1}{C(v, u)}\right) = -\log(C(v, u)) \text{ دهم کنیم}$$

\* هدف از این کار این است که ضرب را با  $\log$  کنیم. جمع تبدیل کنیم و جمل نهاد کنیم که در زیر از 1 بین متن ها را تنقیح  $\left(\frac{1}{C(v, u)}\right)$  کنیم!

حال ادعایی کنیم که وجود درستی در  $C$ ، عامل دجود در  $C$  با خالص فرستنی از 1 در  $G$

(یعنی این ای ای دست باشد، برای) دجود درستی در  $C$  قویاید الگوریتم Bellman Ford

$O(nm)$  کملن (است) و تبدیل  $6^{nm}$  ممکن است باشیم در  $O(m)$  انجام می شود (مثلاً اردر نهایی  $O(nm)$  است که مطلقاً می باشد).

ابتدا: این نشان می دهم درستی در  $C$  عامل دجود با من بزرگتر از 1 است

\* واضح است که باختصار گراف تغیریز (یعنی ای ای دست باشد) در  $C$  دجود باشد و فقط متن های معنی شده!

فرض کنید یک درستی  $C$  در  $G$  داشت که شامل یال  $e_1, e_2, \dots, e_k$  باشد

$C, C_1, C_2, \dots, C_k$  (یعنی ای ای دست باشد) گراف  $G$  باشد که در  $C$  داشت و در  $C_i$  داشت که  $C_i = -\log C_i$  دجود باشد.

$$\sum_{i=1}^k C'_i < 0$$

$$\sum_{i=1}^k C'_i = \sum_{i=1}^k -\log C_i = \sum_{i=1}^k \log\left(\frac{1}{C_i}\right) = \log\left(\prod_{i=1}^k \frac{1}{C_i}\right) \Rightarrow \log\left(\prod_{i=1}^k \frac{1}{C_i}\right) < 0$$

$$*\log a + \log b = \log ab$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^k \frac{1}{C_i} < 1 \Rightarrow \frac{1}{C_1 C_2 \dots C_k} < 1 \Rightarrow C_1 C_2 \dots C_k > 1$$

پس اگر  $\sum c_i$  مثبت باشد،  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i$  دارد!

بطوری ممکن است و با طبقه علیاً  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i$  دارد با این پس از این دارد!

$$\prod c_i > 1 \Rightarrow \prod \frac{1}{c_i} < 1 \Rightarrow \log\left(\prod \frac{1}{c_i}\right) < 0$$

$$\Rightarrow \sum \log\left(\frac{1}{c_i}\right) < 0 \Rightarrow \sum c_i^{-1} < 0 \quad \checkmark$$

پس اگر  $\sum c_i^{-1}$  مثبت باشد،  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i^{-1}$  دارد!

۳. ماتریس  $D$  کوتاه‌ترین مسیر بین هر دو راس در گراف وزن دار  $G$  را نگهداری می‌کند به طوری که  $D[u, v]$  کوتاه‌ترین مسیر از راس  $u$  به راس  $v$  است. فرض کنید وزن یک یال در گراف  $G$  از  $w_e$  به  $w_e'$  تغییر پیدا کند. الگوریتمی از مرتبه زمانی  $(n^2)$  طراحی کنید که مقادیر ماتریس  $D$  را به روزرسانی کند.

کامپیوچر نیز نگیرد! بزرگ هر دو رأس فرو دو حالت داریم.

۱- پاصلہ از  $\mathcal{W}_1$  (u, v) دو کو ترسی میں نہیں (ستفادہ شدہ کو دریں) صورت واضح (اسکے لئے جوں ورنہ این طال کر شدہ کو ترسی میں ہمہ اندازہ کا لئے  $\mathcal{W}_1 - \mathcal{W}_0$  میں مذکورہ و مذکونہ

$$D(i,j) = D(i,u) + w_e + D(v,j) \quad \text{with } (e) \in (u,v) \quad \bigcup_{j \in J} (i,j)$$

۲- با اینکه قبل از این مال در کتابهای مسیحی از (مسناده نئوند که باید عیوب کم کرد آیا با (مسناده از آن

$$D[i,j] = \min(D[i,j], D[i,u] + w_e + D[v,j]) \quad \text{if } \{u,v\} \in E$$

الآن  $D[i,j] = \min(D[i,j], D[i,u] + w_e + D[v,j])$  في حالة هر دو حالت

هم بزرگترین رأس  $n^{O(n^2)}$  قابل انجام است

\* فهمي ابراهيم رفعت (أمينة) كاردينال بالـ (زنقة) (داليا) (داليا)

تقریب نهاده و نکار درستی مینماید کفرن دلستی است هر کجا باشد تقریب باشد

مهم و ملحوظاتی که در اینجا آورده شده اند می توانند برای حل مسائل دیگر نیز مفید باشند.

نحوی قواعد از طریق مثال (استفاده کرد)

for  $i: 0 \rightarrow n-1$ :

for  $j: 0 \rightarrow n-1$

$$D[i, j] = \min(D[i, j], D[i, u] + w_e + D[v, j])$$

۴. یک گراف وزن دار که در آن وزن هر یال ۱ یا ۲ است را در نظر بگیرید، کوتاه ترین مسیر را از یک راس منبع داده شده  $S$  تا راس مقصد  $t$  پیدا کنید به طوری که پیچیدگی زمانی آن از  $O(V + E)$  باشد.

که می خواهیم اضافه کنیم! با این صفت که نئون فرنگی کند یال  $(u, v)$  وزن  $\frac{1}{2}$  دارد:

راستی مثل علاوه بر کم و از مابه آن یالی با وزن  $\frac{1}{2}$  دارد

آن  $(v, u)$  هم یالی با وزن  $\frac{1}{2}$  قراری داشتم بین ترتیب عملی یا کل راف جدید ساخته شده که بین وزن  $\frac{1}{2}$  است (وزن) بین های این کلام را کی نامم و در آن با انجام

که  $\text{BFS}$  مساده فاصله همچوی رفتن لزد که (سأ) را پیدا کیم  $\boxed{O(V+E)}$  حال نهادخواهی

است نئون داشتم اگر  $6, 7, 6, 7, 6, 7$  باشد  $\leftarrow (V, E) = \leftarrow (u, v)$  (فاصله رفتنی که از ابتدا در بعده اند از دیگر

سیاره فاصله (سأ) در  $\frac{1}{2}$  است که این امر هم بسادگی اثبات نمیشود است

نتایج را که پیشتر معرفه کردیم در  $\frac{1}{2}$  بفراری کنیم که نتیجه  $\text{BFS}$  که نمیشود است

و فاصله اینجا همین کار داده است

فرموده کنید سی ده در ۶ را که میتوانیم با افزایش بازیم یا از بین  $\frac{1}{2}$  با وزن  $\frac{1}{2}$  (استفاده نکرده له نتیجه نمیشود در  $\frac{1}{2}$ )

هم و بعد دارد یا اینکه مال  $(u, v)$  را در داده وزن  $\frac{1}{2}$  دارد، این یال را با مال  $(u, v), (v, w), (w, v)$  جایگزین کنیم ( واضح است که مطالعه سرعت بزرگی آن) بین ترتیب و با اثمار این عمل بسیار کمتر میگیریم!

بسیار سرها داده به سرها در ۶ هم بسیاری و انجام عمل برعکس بالا به طور متناقض

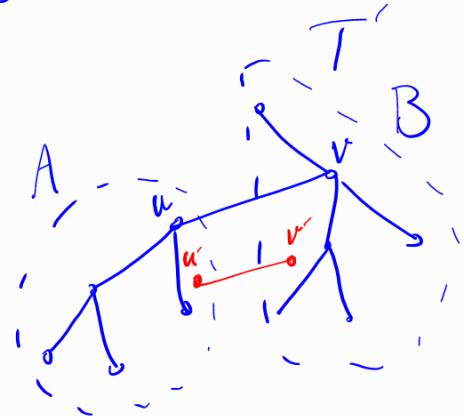
نتیجه است!

این نتایج را که در آنکه الگوریتم درست بوده و پیدا کرده، مختلف سرعت داشتند

نمایند!

۵. فرض کنید  $T$  یک زیر درخت فرآگیر کمینه از  $G$  و  $\hat{T}$  زیردرخت فرآگیر دیگر از  $G$  باشد هر حرکت یک یال  $\hat{T}$  از را یک یال از  $T$  جایگزین میکند. الگوریتمی ارائه دهید که با دنباله ای از حرکات،  $\hat{T}$  را به  $T$  تبدیل کند با این شرط که با هر تغییری که انجام میدهیم همچنان درخت، فرآگیر باشد و مجموع وزن یالهای آن هیچوقت بیشتر نشود.

گراف  $G$  در مجموعه  $S$  بجز مجموعه  $T$  نشود، هر که در لخت  $S \setminus T$  هر دو رأس  $(u, v)$  با  $v \in S \setminus T$  و  $u \notin S \setminus T$  با خونف باشد.



از درخت ت در رسم این دلگاف  
خواهیم داشت که به هم سیری نداشته باشیم (رسم ۱۰)

نیز درست فرازک در گات بارس باشد (رنگی)

$(u, v) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \text{dom}(A_k)$  if and only if  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n u = v$ .

فرآنهای خود را بعد از دریافت تراکمی تاریخی می‌برند و در آن پس از اینجا از آنها استفاده نمی‌شوند.

حال کردنی کار دارم و زن  $(u, v)$  بسته مساوی است می توان آن را از  $\Delta$  حذف کرد و با  $(u, v)$  جایگزین کرد، واضح است با اینکار،  $\Delta$  همچنان یک زیراخت فرآنش خواهد بود که وزنی کس مساوی با  $\Delta$  دارد که در شرایط مسئله متوافق باشد.

نحوی مسماعی باشد، در مرحله پایه کار محدود نشسته انتخاب کنیم  $O(V)$   
 زمان آنچه (لوردم): در هر مرحله پایه کار محدود نشسته انتخاب کنیم  $O(V)$   
 اگر از ساختار مناسب استفاده کنیم (نیاگار Set) باشد  $O(1)$  باشد مولفه های مینیموم را بعداز حذف  
 از  $E$  می بینیم  $O(V+E)$

$(M, T) = O(v)$  تا دیگر عالم مسند بانه که  $O(v^2 \lg v) = O(\lg v)(v^2)$  می باشد. این امر را کم لکچر می