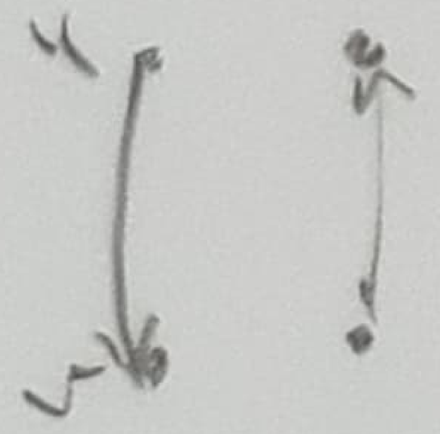


به نام خدا. شبکه جریان

$G=(V,E)$ هر یال $(u,v)\in E$ ، $c(u,v)$

رأس مبدا s رأس مقصد t

جریان $f: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$0 \le f(u,v) \le c(u,v) \quad \forall (u,v)\in E$ قید ظرفیت یال

قید تعادل رأس

$$\underbrace{\sum_{v\in V} f(u,v)}_{\delta^+(u)} - \underbrace{\sum_{v\in V} f(v,u)}_{\delta^-(u)} = 0 \quad \forall u \in V-\{s,t\}$$

$$\forall u \quad \delta^+(u)=\{v \mid (u,v)\in E\}$$

$$\delta^-(u)=\{v \mid (v,u)\in E\}$$

$$|f| = \sum_{v\in V} f(s,v) - \sum_{v\in V} f(v,s)$$

مقدار جریان f

برای جریان f

$$G_f = (V, E_f)$$

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & (u,v) \in E \\ f(u,v) & (v,u) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E_f = \{ (u,v) \mid (u,v) \in E \ \text{یا} \ (v,u) \in E \}$$

$$|E_f| \leq 2|E|$$

برای جریان f

$$G_f = (V, E_f)$$

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & (u,v) \in E \\ f(u,v) & (v,u) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E_f = \{ (u,v) \mid (u,v) \in E \ \text{یا} \ (v,u) \in E \}$$

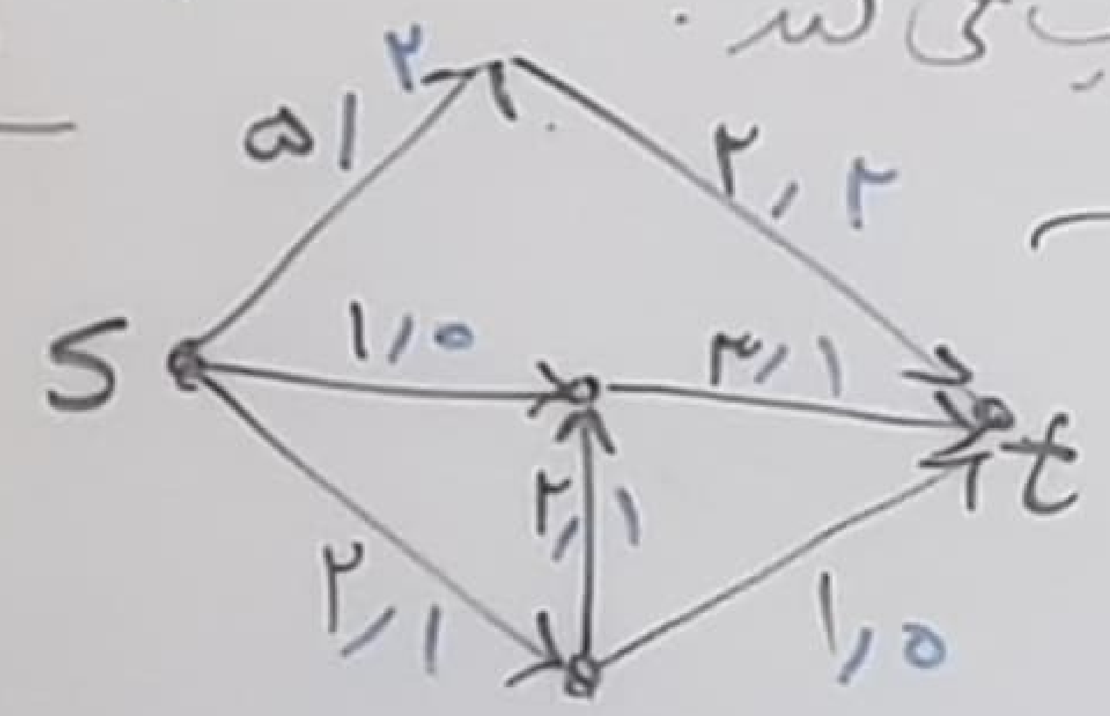
$$|E_f| \le 2|E|$$

لم ۱: اگر f یک جریان روی G باشد و G_f شبکه باقی مانده متناظر آن، و f' جریانی روی G_f باشد، تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(f \uparrow f')(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) & (u,v) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

این تابع یک جریان روی G تعریف می‌کند.

G f



$\longrightarrow G_f$

برای جریان f

$$G_f=(V,E_f)$$

$$c_f(u,v)=\begin{cases} c(u,v)-f(u,v) & (u,v)\in E \\ f(u,v) & (v,u)\in E \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

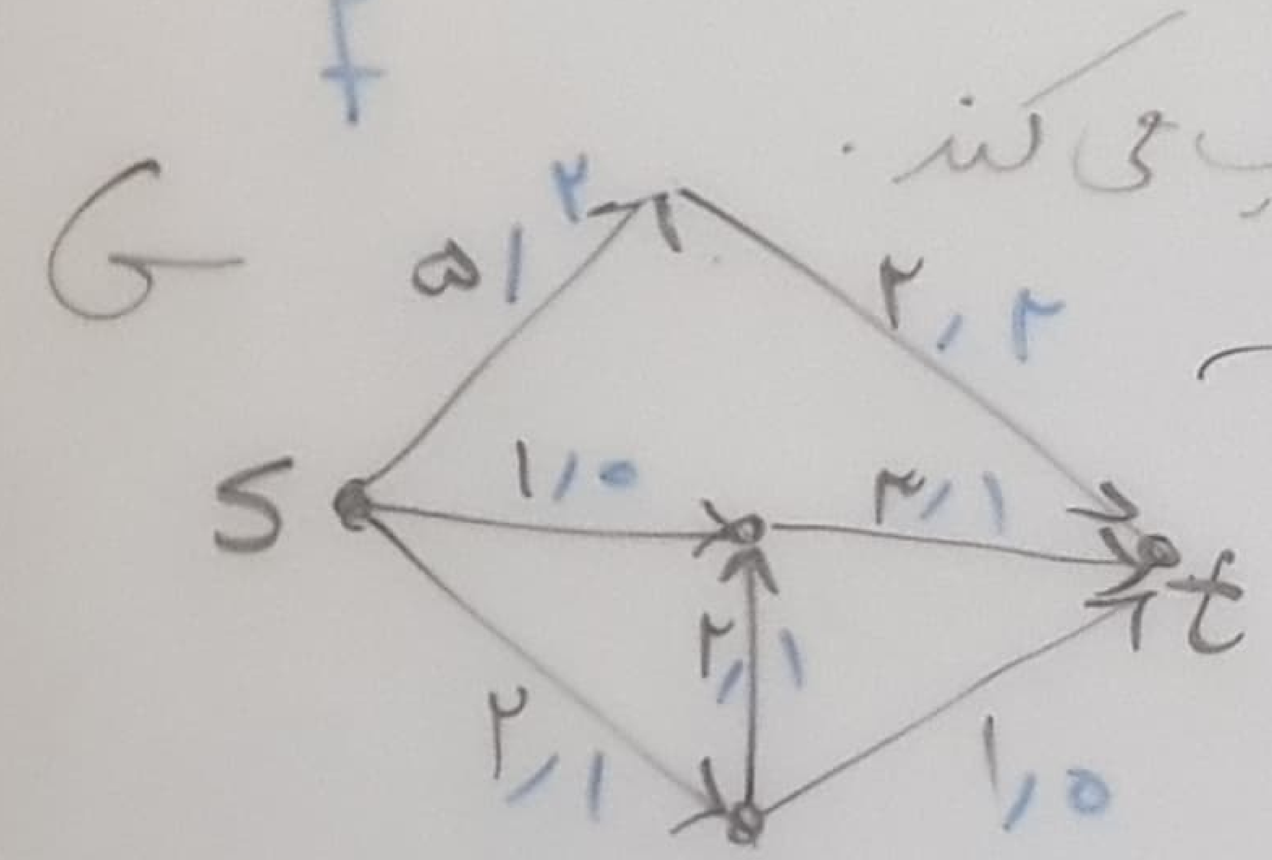
$$E_f=\{(u,v) \mid (u,v)\in E \ \text{یا}\ (v,u)\in E\}$$

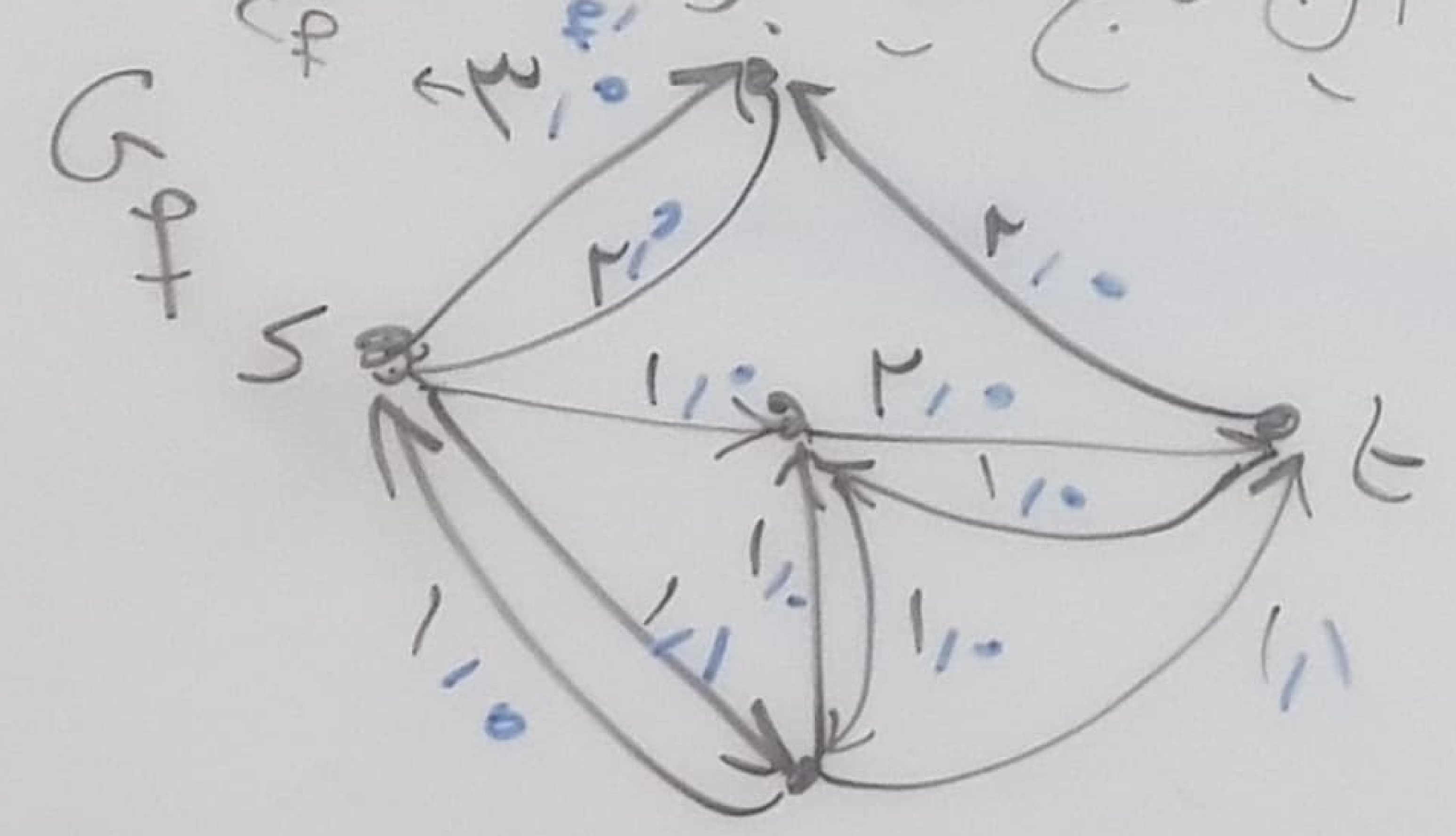
$$|E_f|\le 2|E|$$

لم ۱: اگر f یک جریان روی G باشد و G_f شبکه باقی مانده متناظر آن، و f' جریانی روی G_f باشد، تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(f\uparrow f')(u,v)=\begin{cases} f(u,v)+f'(u,v)-f'(v,u) & (u,v)\in E \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

این تابع یک جریان روی G تعریف می‌کند.



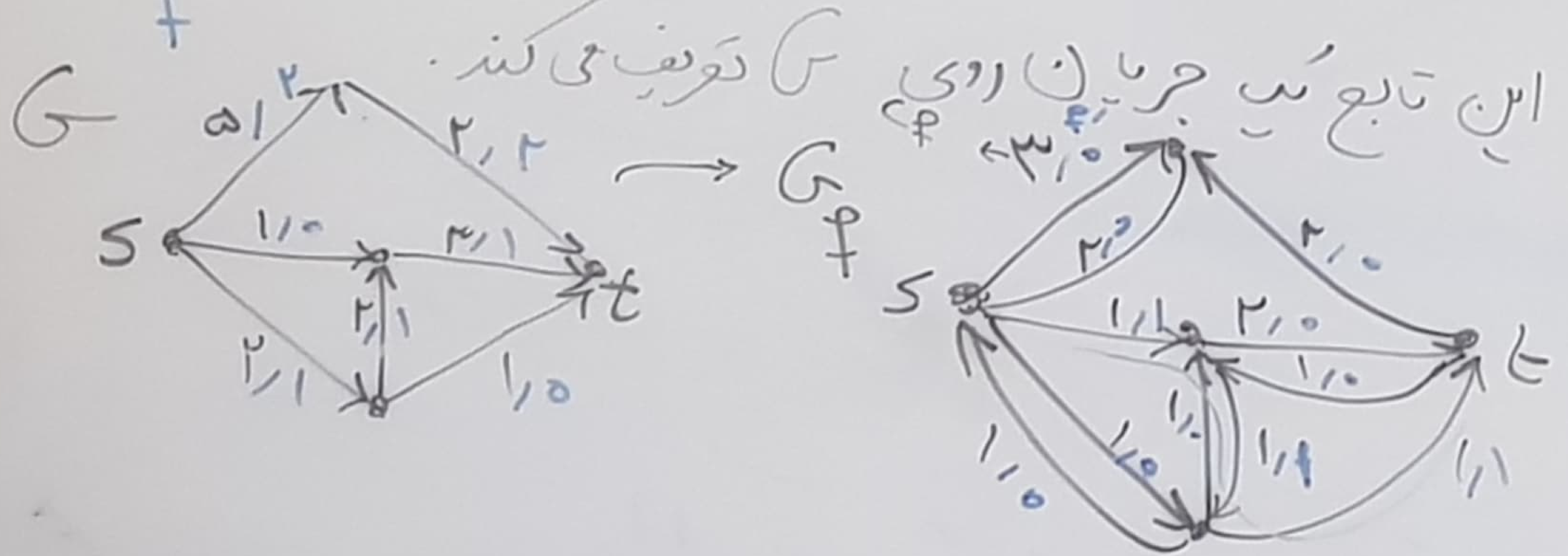


لم ۱: اگر f یک جریان روی G باشد و G_f شبکه باقی مانده متناظر آن، f' جریانی روی G_f باشد، تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(f \uparrow f')(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) & (u,v) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

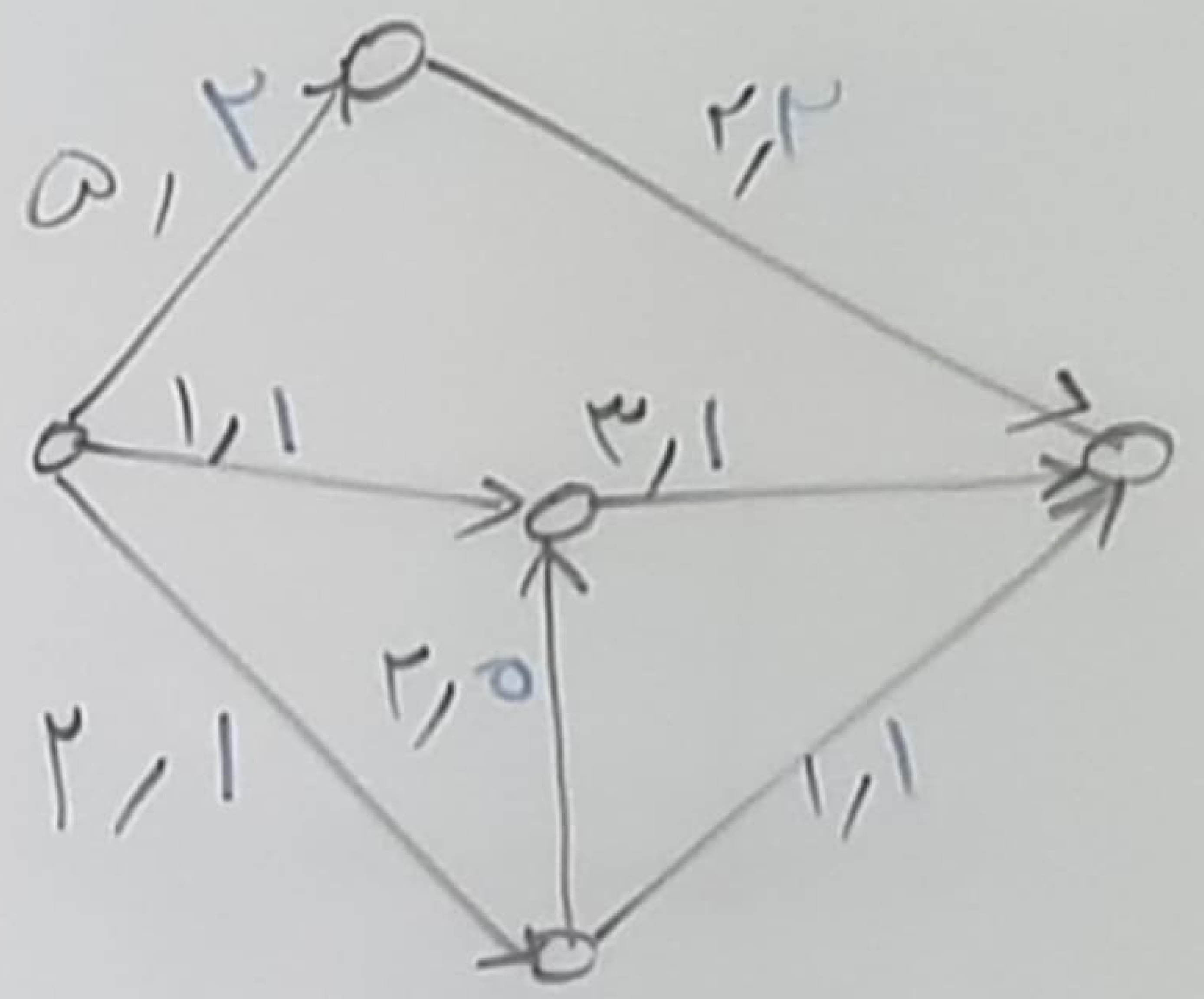
۱ ۰ ۱

این تابع یک جریان روی G تعریف می‌کند.



$f \uparrow f'$

جریان

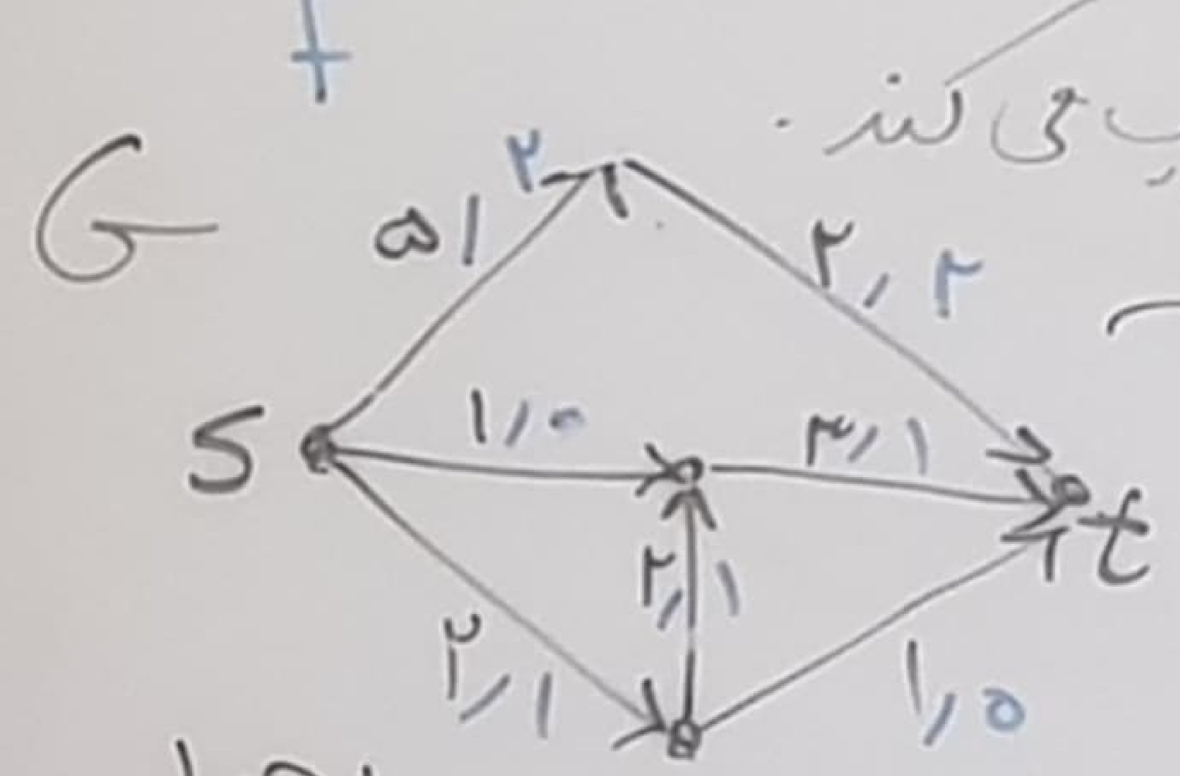


لم ۱: اگر f یک جریان روی G باشد و G_f گراف باقی مانده متناظر آن

، f' جریانی روی G_f باشد، تابع زیر را تعریف می کنیم:

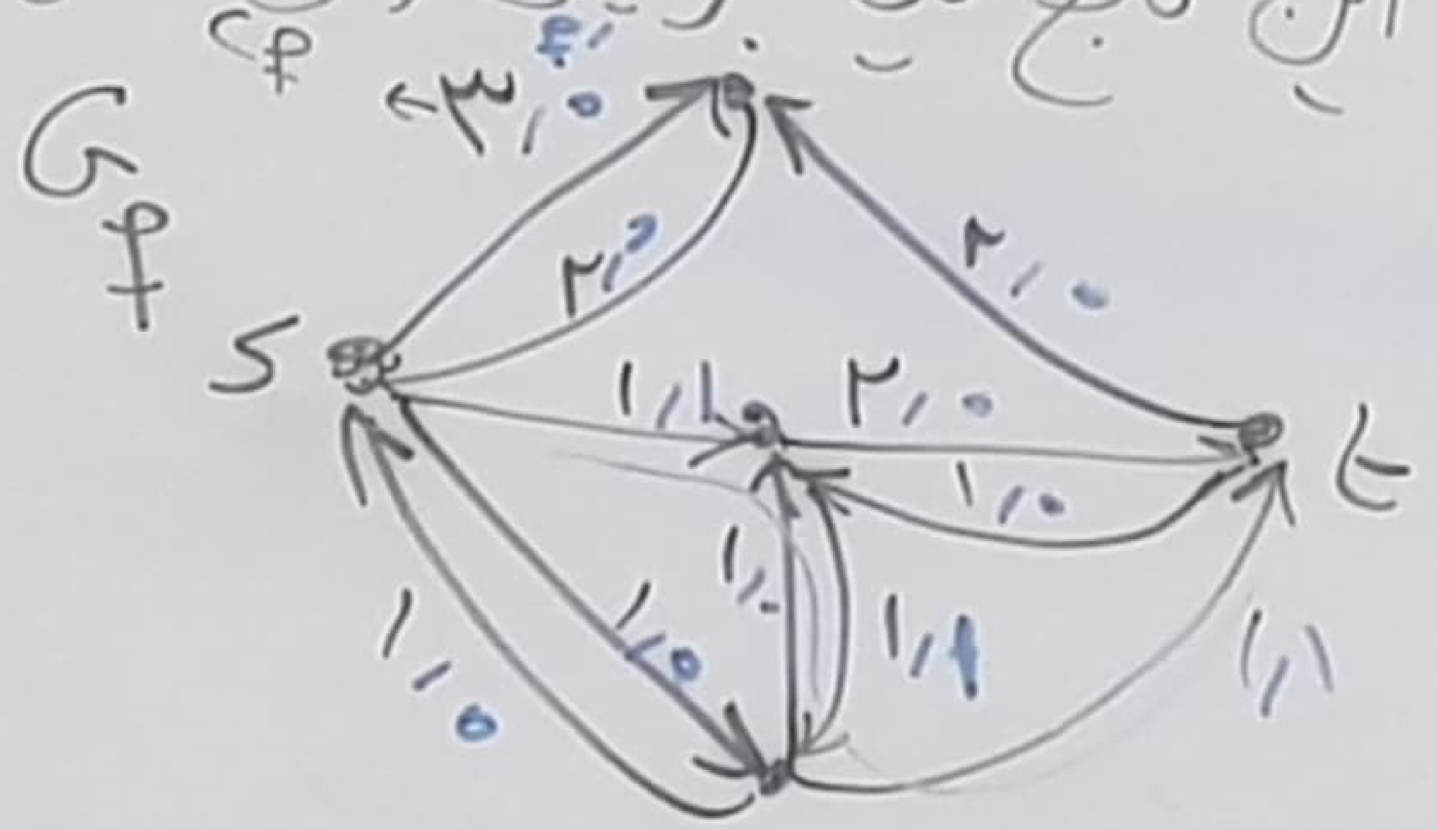
$$(f \uparrow f')(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) & (u,v) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

این تابع یک جریان روی G تعریف می کند.

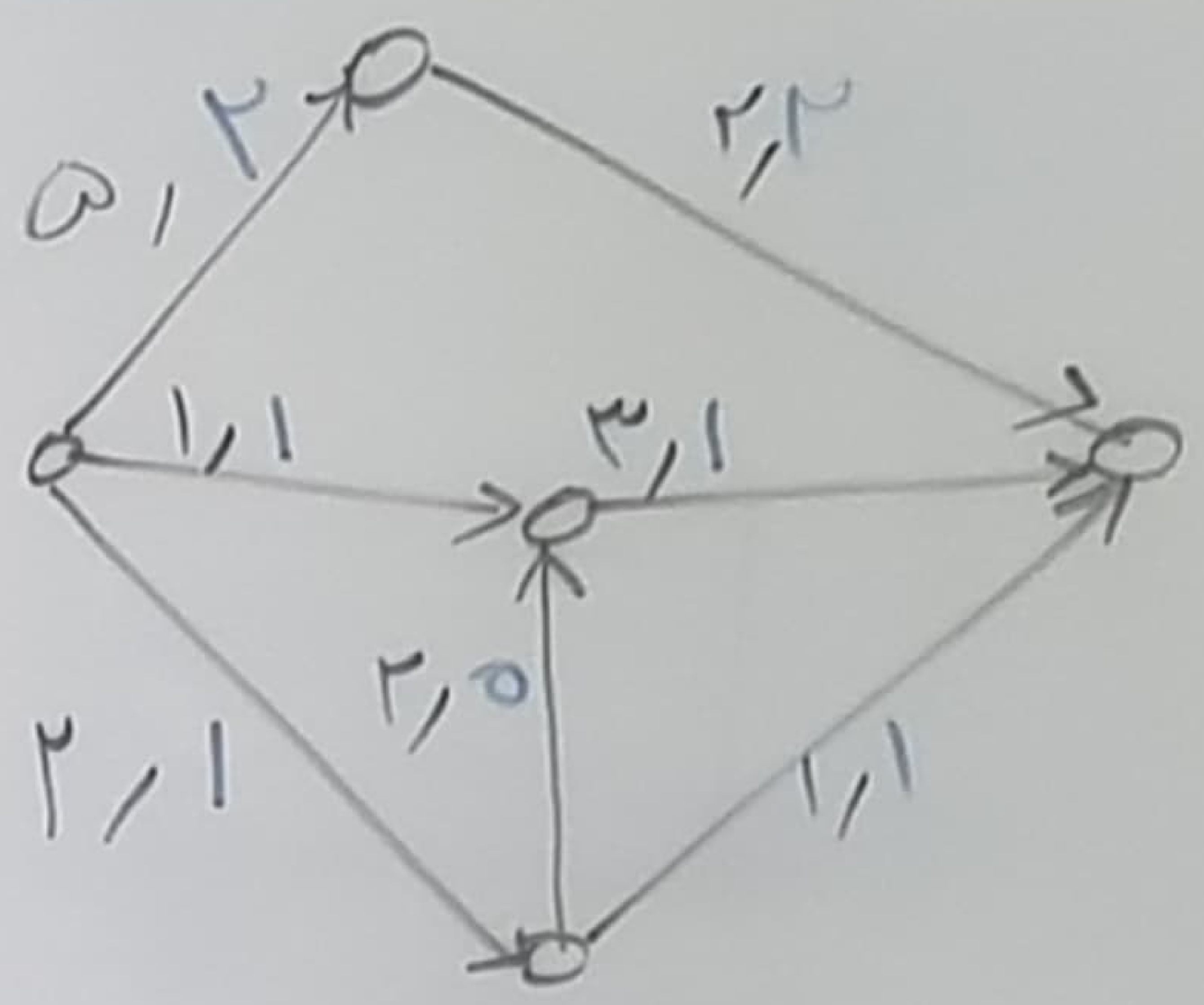


$|f| = ۳$

$\longrightarrow$



$f \uparrow f'$
جریان



?

$|f| < |f \uparrow f'| = ۴$

$|f^*|$

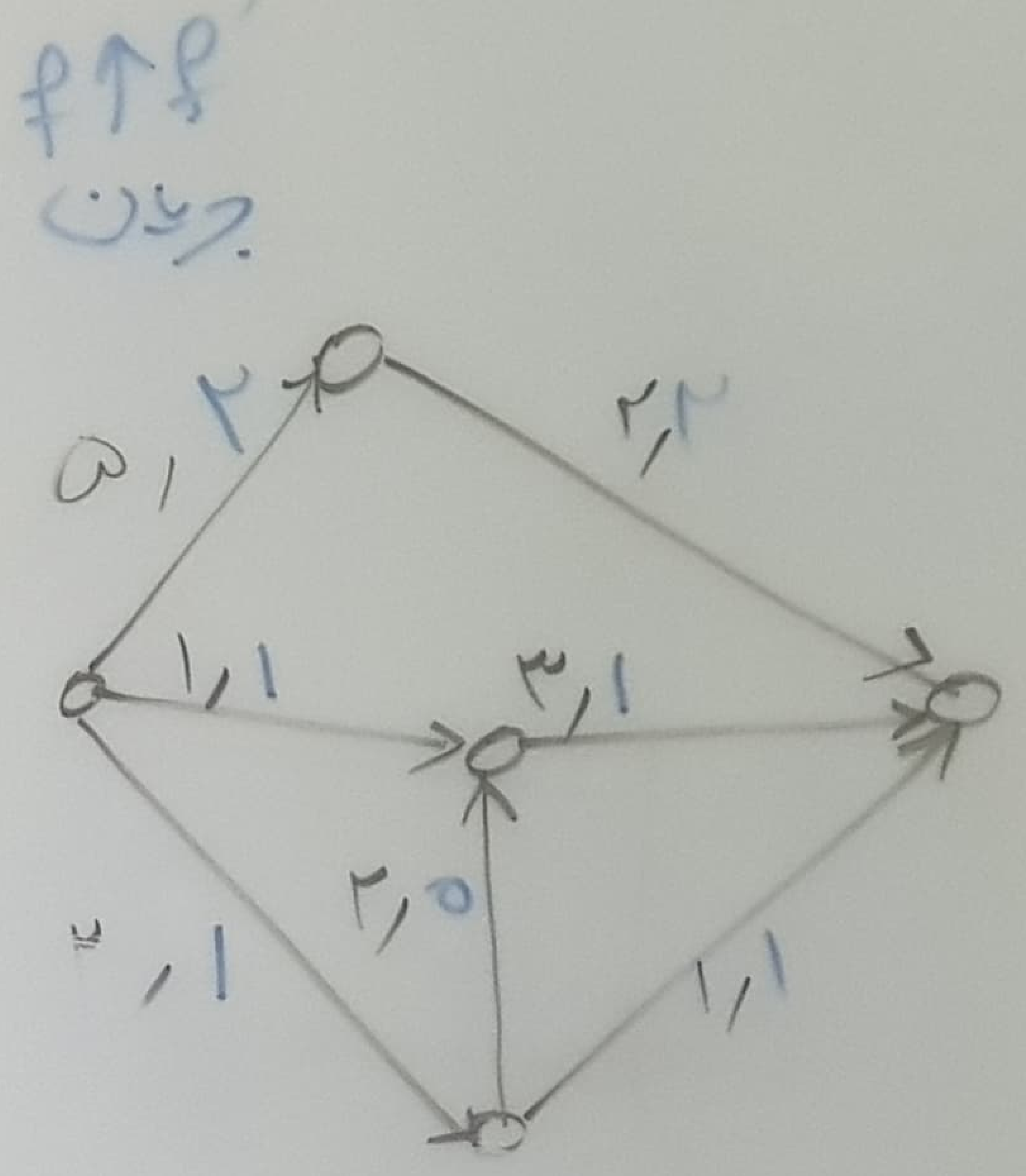
لم ۱: اگر f یک جریان روی G باشد و G_f شبکه باقی مانده متناظر آن

و f' جریانی روی G_f باشد، تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(f\uparrow f')(u,v) = \begin{cases} f(u,v)+f'(u,v)-f'(v,u) & (u,v)\in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

این تابع یک جریان روی G تعریف می‌کند و مقدار آن برابر است با

$$|f\uparrow f'| = |f| + |f'|$$



به نام خدا.

اول قید ظرفیت را نشان می‌دهیم.

اگر $(u,v) \in E$ پس $c_f(v,u) = f(u,v)$

از طرفی $f'(v,u) \leq c_f(v,u)$ یعنی

$$f'(v,u) \leq f(u,v)$$

$(u,v) \in E$

$$(f \uparrow f')(u,v) = f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u)$$

$$\geq f(u,v) + f'(u,v) - f(u,v)$$

$$\geq 0$$

از طرف دیگر

$$(f \uparrow f')(u,v) = f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u)$$

$$\leq f(u,v) + f'(u,v)$$

$$\leq f(u,v) + c_f(u,v)$$

$$\leq f(u,v) + c(u,v) - f(u,v) = c(u,v)$$

$(f \uparrow f' = f''$

خواهیم داشت:

$\forall u \in V - \{s\}$

$$\sum_{v \in V} f''(u,v) - \sum_{v \in V} f''(v,u)$$

$$= \sum_{v \in \delta^+(u)} f''(u,v) + \sum_{v \in \delta^-(u)} f''(u,v)$$

$$- \sum_{v \in \delta^+(u)} f''(v,u) - \sum_{v \in \delta^-(u)} f''(v,u)$$

$$f''(u,v) = f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u)$$

$$\sum_{v \in \delta^+(u)} f(u,v) + \sum_{v \in \delta^-(u)} f(u,v)$$

$$+ \sum_{v \in \delta^+(u)} f'(u,v) + \sum_{v \in \delta^-(u)} f'(u,v)$$

$$- \sum_{v \in \delta^+(u)} f'(v,u) - \sum_{v \in \delta^-(u)} f'(v,u)$$

به نام خدا.

$$\sum_{v\in\delta^+(u)} f(u,v) - \sum_{v\in\delta^-(u)} f(v,u)$$

$$+\sum_{v\in\delta^+(u)} f'(u,v) + \sum_{v\in\delta^-(u)} f'(u,v)$$

$$-\sum_{v\in\delta^+(u)} f'(v,u) - \sum_{v\in\delta^-(u)} f'(v,u)$$

$$\sum_{v\in\delta^+(u)} f(u,v) - \sum_{v\in\delta^-(u)} f(v,u)$$

$$+\sum_{v\in\delta^+(u)\cup\delta^-(u)} f'(u,v) - \sum_{v\in\delta^+(u)\cup\delta^-(u)} f'(v,u)$$

این ۴ حاصل جمع را می‌توان روی V در نظر گرفت

زیرا جریان یال‌های غیرموجود صفر است.

$$\sum_{v\in V} f''(u,v) - \sum_{v\in V} f''(v,u) = \sum_{v\in V} f(u,v) - \sum_{v\in V} f(v,u)$$

$$+ \sum_{v\in V} f'(u,v) - \sum_{v\in V} f'(v,u)$$

پس با توجه به اینکه قید تعادل روی f و f' برقرار است یعنی

$\forall u \in V-\{s\}$

$$\sum_{v\in V} f''(u,v) - \sum_{v\in V} f''(v,u) = 0$$

اگر $u=s$ باشد.

$$|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$$