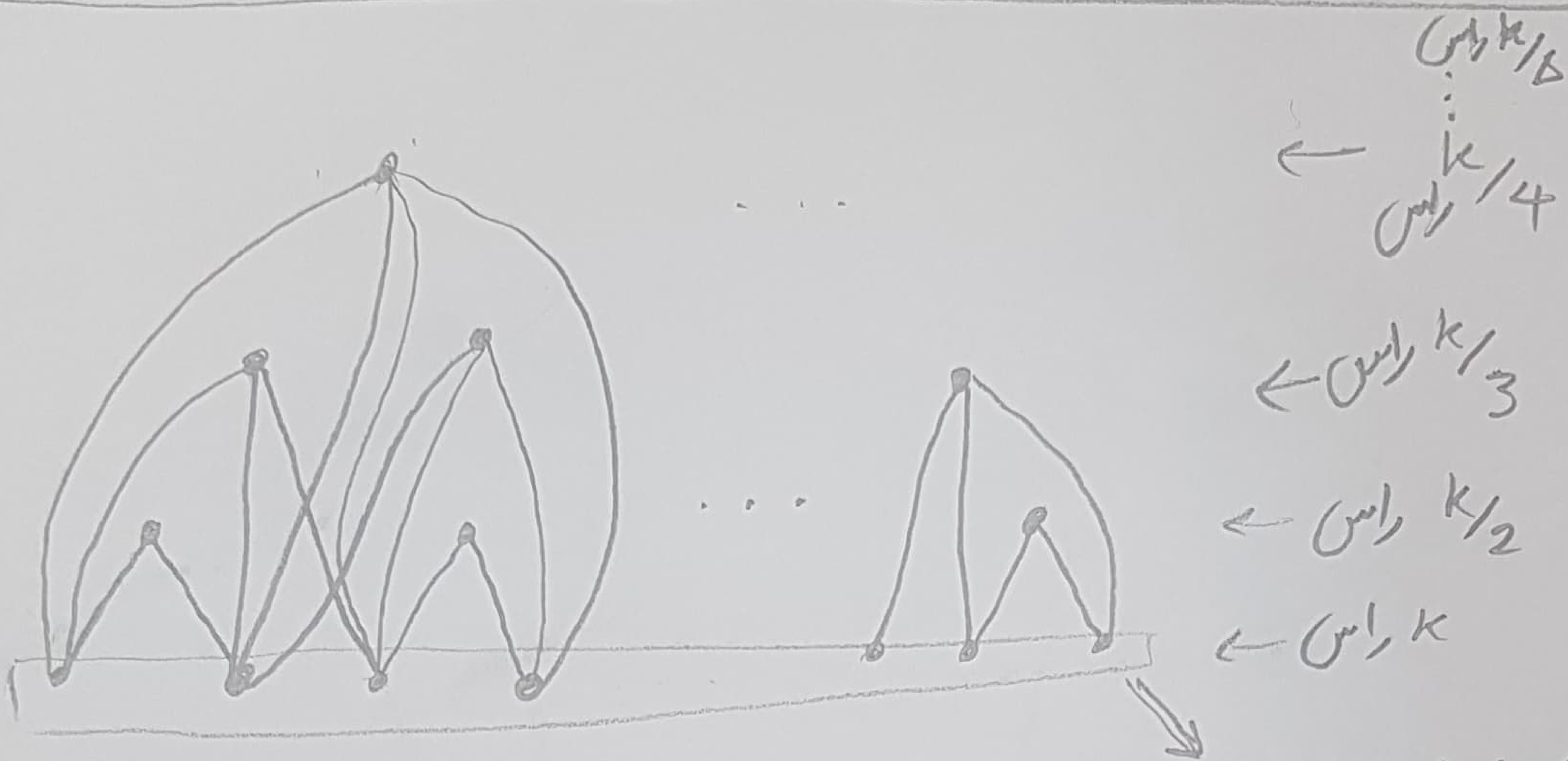
HW4 (LP_AA)
طراحی الگوریتم

مهسا کرمیان ۸۱۰۸۰۱۰۷۴

سلمان میرشعبانی ۸۱۰ ۸۰۱ ۰۸۰

معین اکبری شهپر ۸۱۰۸۰۱۰۵۵

۹



پاسخ بهینه این است که k راس پایین انتخاب شوند در حالی که الگوریتم راس با درجه بالاتر را انتخاب کرده و حذف می‌کند و این فرآیند را تکرار می‌کند.

$$A = \frac{k}{\Delta} + \cdots + \frac{k}{3} + \frac{k}{2} = k\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\Delta}\right)$$

$$\le k\int_{2}^{\Delta} \frac{1}{x}\,dx = k\left[\ln \Delta\right] \Rightarrow \alpha \le \ln \Delta \qquad A_{opt} = k$$

که $\ln\Delta$ می‌تواند از 2 بیشتر باشد.

برای اینکه $\sum_{i=2}^{\Delta} \frac{1}{i} \geq 2$ باشد، $\underline{\Delta \geq 11}$ باید باشد. اگر گراف فوق را با $\Delta \geq 11$ (یعنی راس‌های پایین با بیش از 10 درجه) به عنوان ورودی الگوریتم بالا بدهیم، پاسخ بالا بیش از 2 برابر بدتر از پاسخ بهینه خواهد بود.

```
>>> for d in range(8, 15):
...     t = 0
...     for i in range(2, d + 1):
...         t += 1/i
...     print(d, t)
...
...

8 1.7178571428571427
9 1.828968253968254
10 1.928968253968254
11 2.019877344877345
12 2.1032106782106785
13 2.1801337551337556
14 2.2515623265623272
```

تعداد کامیون ها : m

تعداد جعبه‌ها : n

. W را مرتب می کنیم به طوری که $W_1 \geq W_2 \geq \dots \geq W_n$.

یک آرایه L در نظر می گیریم که سایز آن m است و میزان بار موجود در هر کامیون را نشان می دهد

در ابتدا $L_i = 0$ است . [از ۱ تا n]

بر روی W پیمایش کرده و W_j را به $\underbrace{\text{کامیون با کمترین بار}}_{k}$ نسبت می دهیم و L آن را به روز می کنیم

$L_k += W_j$

پاسخ نهایی، مقدار بیشینه آرایه L خواهد بود.

✓ الگوریتم تمامی جعبه‌ها را به کامیون ها نسبت می دهد. پس به ما یک پاسخ می دهد. ☒

✓ الگوریتم در مرتبه زمانی چند جمله ای انجام می شود.

$$O(\underbrace{n\log n}_{\text{مرتب کردن } W} + \underbrace{nm}_{n \text{ بار پیدا کردن کمینه در } T})$$

← با MinHeap قابل بهبود است.

ضریب تقریب : اگر $n \leq m$ باشد، الگوریتم به هر کامیون بیش از یک جعبه نسبت نمی دهد و $A = A_{opt}$

اگر $m < n$:

پاسخ الگوریتم ← A

پاسخ بهینه ← A_{opt}

$$A_{opt} \geq \max\left(\max\{W_i\}, \frac{\sum W_i}{m}\right)$$

فرض کنیم W_k آخرین مقداری باشد که به A افزوده شده است. بار کامیون حامل A پیش از این برابر با $A - W_k$ بوده است. چون الگوریتم سبکترین کامیون را انتخاب می کند، $m-1$ کامیون دیگر، هر کدام حداقل $A - W_k$ بار داشته اند. پس :

$$\sum_{i=1}^{n} W_i \geq (m-1)(A - W_k) + A$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{\sum W_i}{m} + \left(1 - \frac{1}{m}\right) W_k \quad \text{I}$$

[$W_{m+1} \leq W_1, \dots, W_{m+1}$] و چون m کامیون داریم، حداقل یک کامیون دارای دو جعبه است [اصل لانه کبوتری]

پس بار آن کامیون حداقل $2W_{m+1}$ است $\Leftarrow 2W_{m+1} \leq A_{opt}$

واضح است که $m+1 \leq k \Rightarrow W_k \leq \frac{1}{2} A_{opt}$ II

$$\text{I و II} \Rightarrow A \leq A_{opt} + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\frac{1}{2} A_{opt} \leq \frac{3}{2} A_{opt}$$ ☒