set cover

$U = \{e_1, e_2, e_3, \dots e_n\}$

$F = \{S_1, S_2, \dots S_k\}$

مجموعه
از عناصر U

هزینه انتخاب S_i : $w(S_i)$

الگوریتم (حریصانه)

1- $C = \emptyset$

2- تا وقتی که $U = \emptyset$

یک مجموعه $S \in F$ را که مقدار $\frac{w(S)}{|S \cap U|}$

کمینه می‌کند را انتخاب کن

$C = C \cup S$

$U = U \setminus S$

3- C را به عنوان جواب برگردان

$(x_{۱} \vee \bar{x}_{۲}) \wedge (x_{۳} \vee x_{۴})$

$C = \{ \{\triangle, \circ\}, \{\square, \times\} \}$

$U = \{ \phi, \times, \square, \triangle \}$

$\{ \times, \circ, \square \} \quad \{ \triangle, \circ \}, \{ \square, \times, \phi \}, \{ \times \}$

۵ ۱ ۴ ۲ ۸

۵

$\frac{۵}{۲} \quad \frac{۱}{۲} \quad \frac{۴}{۲}$

الگوریتم (حریصانه)

۱- $C = \emptyset$

۲- تا وقتی که $U \neq \emptyset$

یک مجموعه $S \in F$ را که مقدار $\frac{w(S)}{|S \cap U|}$ کمینه کند را انتخاب کن

$C = C \cup S$

$U = U \setminus S$

۳- C را به عنوان جواب برگردان

ضریب تقریب

$\log n$

2

اثبات تمرین

set cover

$U = \{e_1, e_2, e_3, \ldots e_n\}$

$F = \{S_1, S_2, \ldots S_k\}$

مجموعه از عناصر

$w(S_i)$ هزینه انتخاب S_i

IP

$$\min \sum_{s \in F} w(s)\, x_s$$

s.t

$$\sum_{e \in S} x_s \geqslant 1 \qquad \forall e \in U$$

$$x_S \in \{0,1\}$$

الگوریتم ۳.

$$x_s = \begin{cases} 1 & \text{اگر } S\in F \text{ در جواب انتخاب بشود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

الگوریتم (حریصانه)

۱- $C = \emptyset$

۲- تا وقتی که $U \neq \emptyset$

یک مجموعه $S \in F$ را که مقدار $\frac{w(S)}{|S \cap U|}$

کمینه می‌کند را انتخاب کن

$C = C \cup S$

$U = U \setminus S$

۳- C را به عنوان جواب برگردان

ضریب تقریب

$\log n$

α

ثابت

ترین

set cover

$U = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$

$F = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$

مجموعه

از عناصر U

S_i هزینه انتخاب $w(S_i)$

$x_{S_1} + x_{S_2} + x_{S_3} \geq 1$

$\underset{S_1}{\{*, o\}}$ $\quad \underset{S_2}{\{*\}}$ $\quad \underset{S_3}{\{*, o, \square\}}$

~~IP~~ LP-relaxation

$$\min \sum_{S\in F} w(S)\, x_S$$

s.t

$$\sum_{e\in S} x_S \geqslant 1 \qquad \forall e \in U$$

$$\cancel{x_S \in \{0,1\}}$$

$$0 \leq x_S \leq 1$$

الگوریتم ۲.

$$x_S = \begin{cases} 1 & \text{اگر } S\in F \text{ در جواب نهایی بخورد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

Example:

- Universe $U = \{1, 2, 3\}$
- Collection of sets $S = \{S_1, S_2, S_3\}$ where:
  - $S_1 = \{1, 2\}$ with cost c_1
  - $S_2 = \{2, 3\}$ with cost c_2
  - $S_3 = \{1, 3\}$ with cost c_3

Decision Variables:

- x_1: Whether to select S_1 (1 if selected, 0 otherwise).
- x_2: Whether to select S_2 (1 if selected, 0 otherwise).
- x_3: Whether to select S_3 (1 if selected, 0 otherwise).

Constraints:

1. For element 1 (which is in S_1 and S_3):
   - $x_1 + x_3 \geq 1$
2. For element 2 (which is in S_1 and S_2):
   - $x_1 + x_2 \geq 1$
3. For element 3 (which is in S_2 and S_3):
   - $x_2 + x_3 \geq 1$

الگوریتم (حریصانه)

۱- $C = \emptyset$

۲- تا وقتی که $U \neq \emptyset$

یک مجموعه $S \in F$ را که مقدار $\dfrac{w(S)}{|S \cap U|}$ کمینه می‌کند را انتخاب کن

$C = C \cup S$

$U = U \setminus S$

۳- برگردان جواب (C)

ضریب تقریب

log n

α

اثبات

تمرین

set cover

$U = \{e_1, e_2, e_3, \ldots e_n\}$

$F = \{S_1, S_2, \ldots S_k\}$

مجموعه از عناصر

$w(S_i)$ هزینه انتخاب S_i

$x_{S_1} + x_{S_2} + x_{S_3} = 1$

$\{*, o\}$ $S_1 = \frac{1}{3}$

$\{*\}$ $S_2 = \frac{1}{5}$

$\{*, o, \square\}$ $S_3 = \frac{2}{3}$

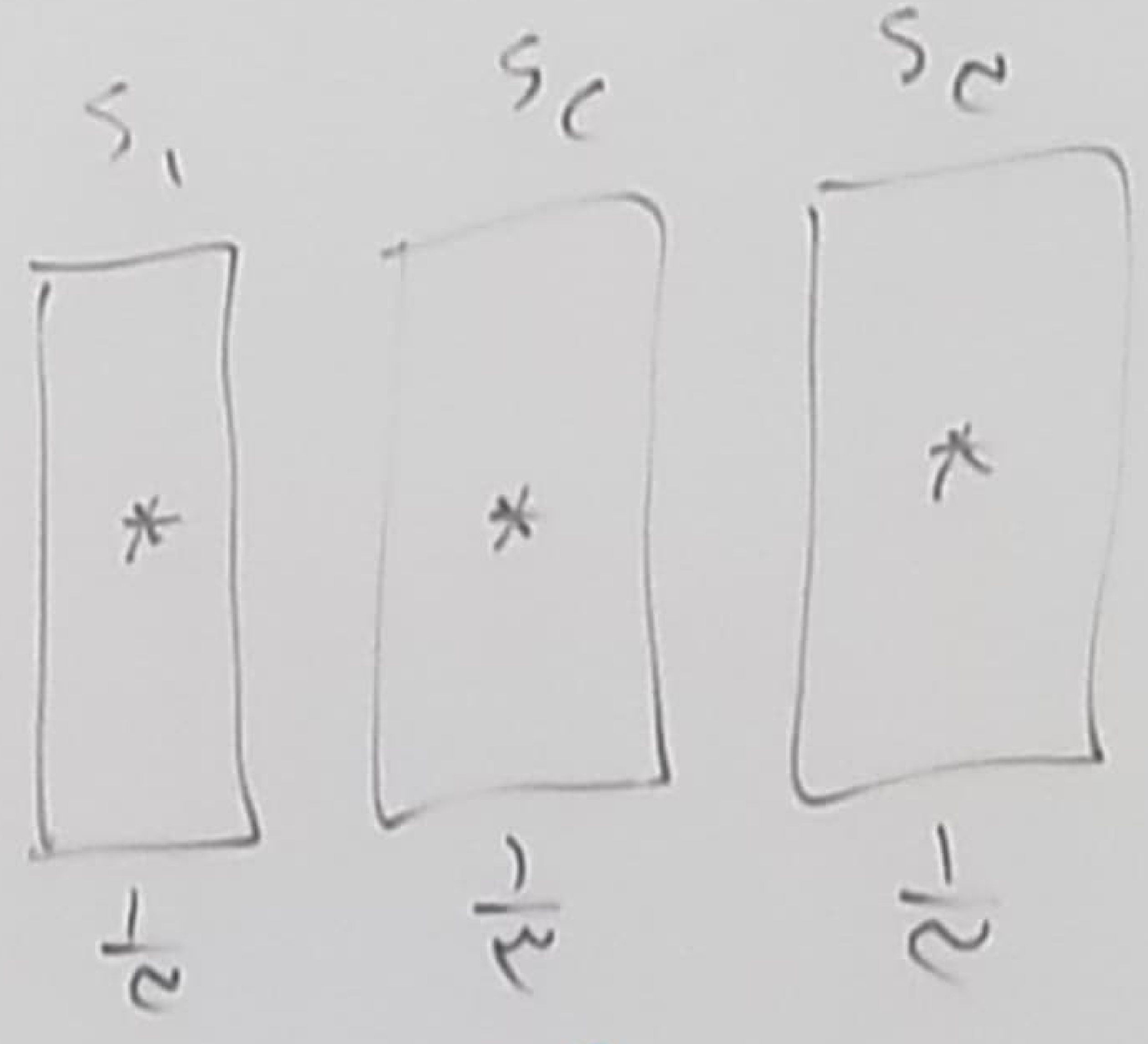
set cover

$U = \{e_1, e_2, e_3, \dots e_n\}$

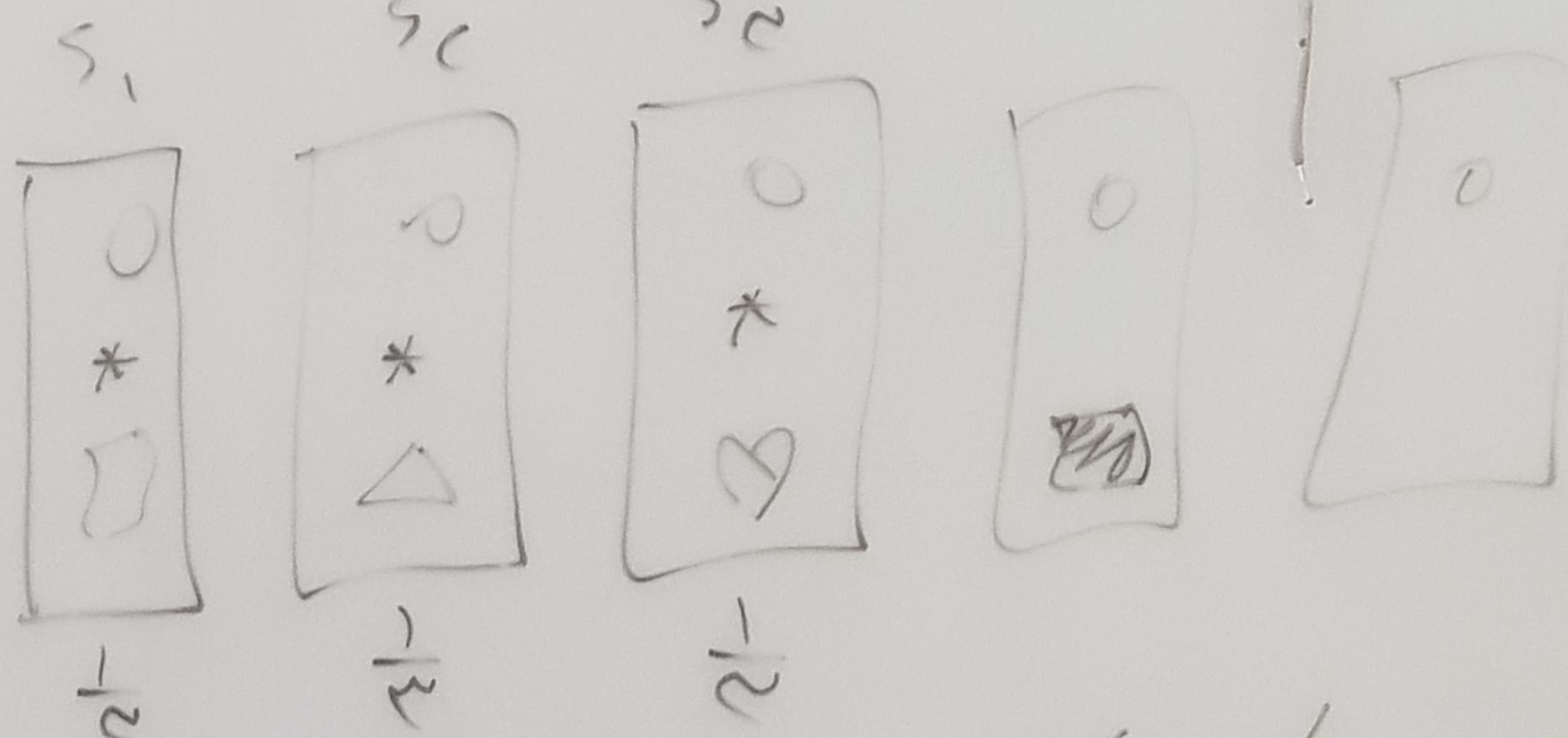
$F = \{S_1, S_2, \dots S_k\}$

مجموعه
از عناصر

$W(S_i)$ هزینه انتخاب S_i



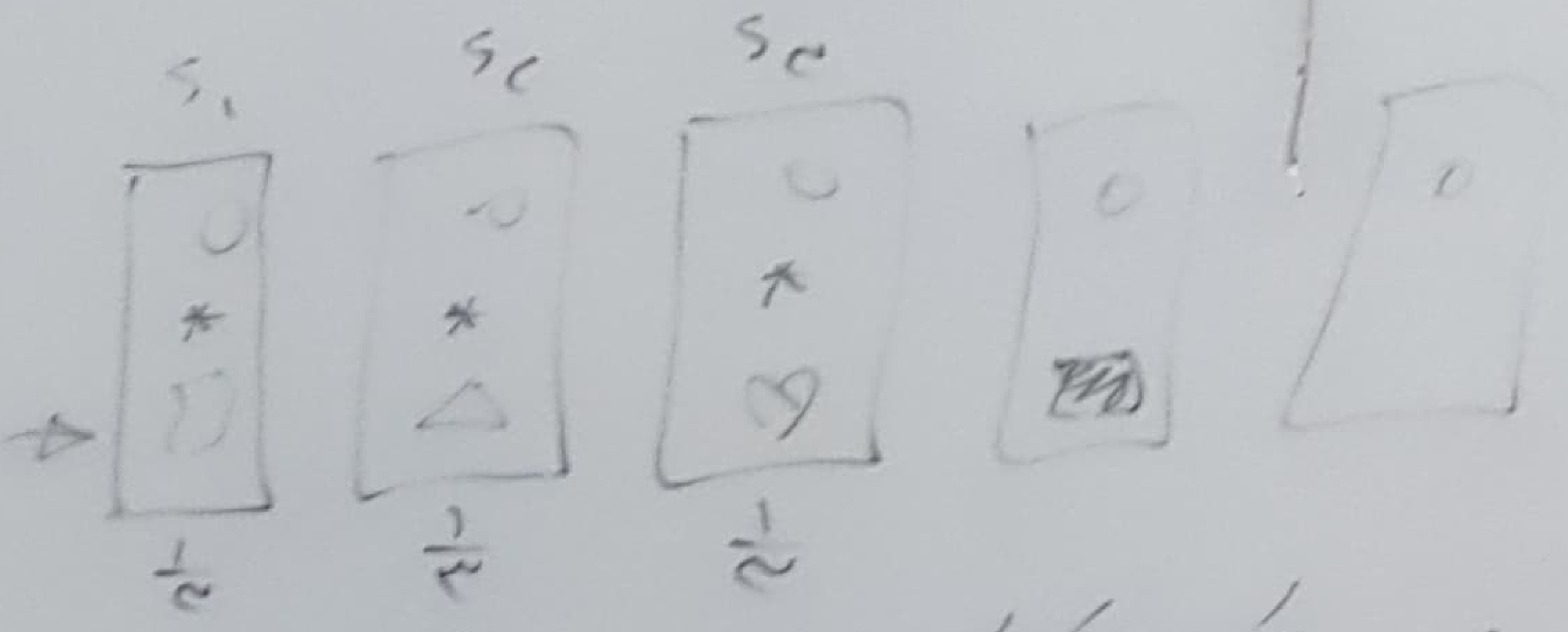
نمی توانیم بالای 0.5 ها رو برداریم!



F : بیشترین تکراری که یک عنصر در مجموعه ها آمده است.

$f = ۵$

$$Z = \begin{cases} 1 & x_j^* \geq \frac{1}{f} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$



f : بیشترین تکراری که یک عنصر در مجموعه ها کرده است.

$f = ۵$

$$Z_s = \begin{cases} 1 & x^*_s \geq \frac{1}{f} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \forall s \in F$$

$$C = \{ s \mid Z_s = 1 \}$$ جواب

~~IP~~ LP-relaxation

$$\min \sum_{s \in F} w(s) x_s$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{e \in S} x_s \geq 1 \quad \forall e \in U$$

$$\cancel{x_s \in \{0,1\}}$$

$$0 \leq x_s \leq 1$$

الگوریتم ۳.

$$x_s = \begin{cases} 1 & \text{اگر } s \in F \text{ در جواب باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

* جواب شدنی است.

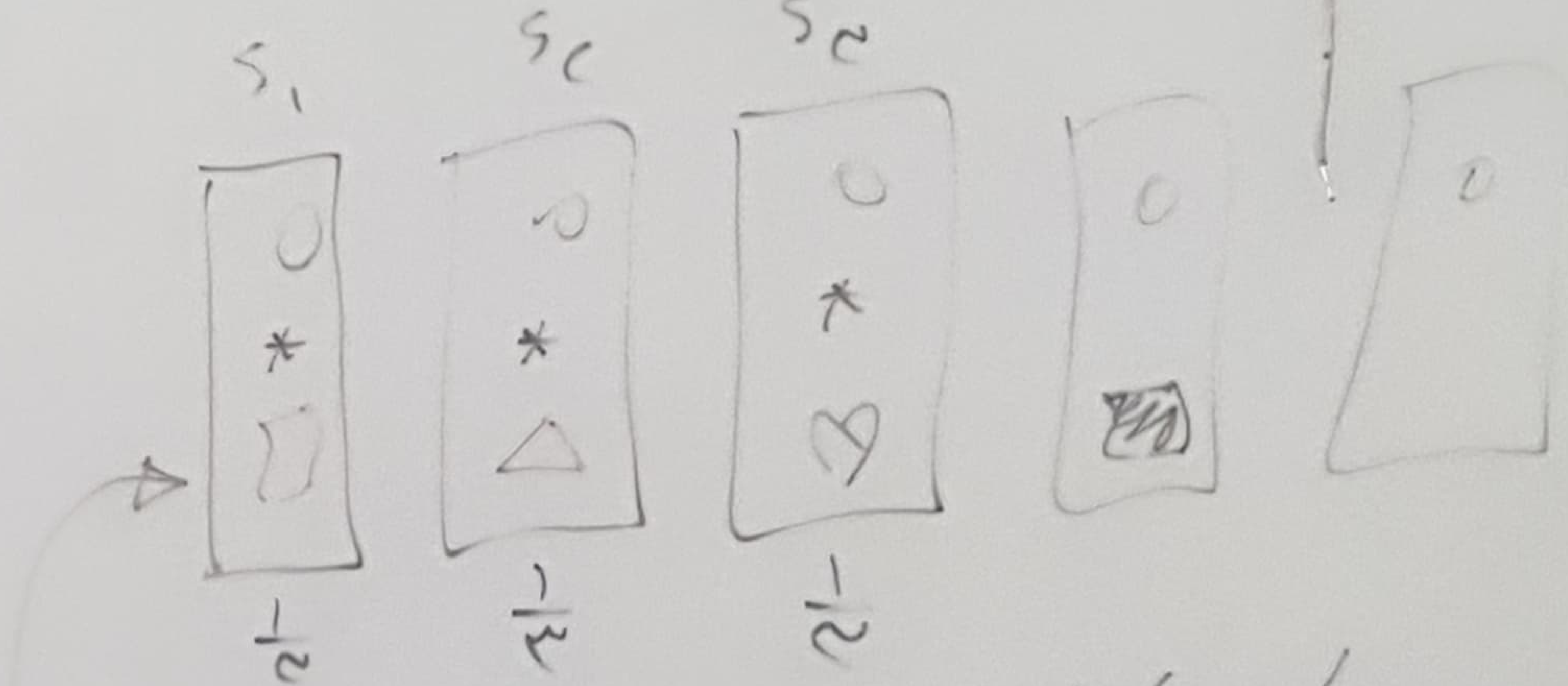
اثبات برهان خلف: اگر عنصر $e \in U$ وجود داشته باشد
که در مجموعه جواب نباشد، یعنی برای e
هیچ یک از $S \in F$ ، $e \in S$ انتخاب نشده‌اند

یعنی $Z_s = 0$ ، $\forall s, e \in S$

یعنی $x^*_s < \frac{1}{f}$ و با جمع اعضا داریم

$$\sum_{e \in S} x^*_s < 1$$

که با قید مسئله LP تناقض دارد.



f: بیشترین تکراری که یک عنصر در مجموعه‌ها آمده است.

$f = 5$

$$Z_s = \begin{cases} 1 & x^*_s \geq \frac{1}{f} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

جواب: $C = \{ S \mid Z_s = 1 \}$ $\forall s \in F$

الگوریتم ۲.

اثبات ضریب ضریب تقریب

می‌دانیم $\forall s: \quad z_s \le f x_s^*$

$$\overset{\text{هزینه}}{Alg} = \sum_{s \in F} w_s z_s \le f \underbrace{\sum_{s \in F} w(s) x_s^*}_{\text{مقدار بهینه } LP}$$

که می‌دانیم از مقدار بهینه IP (OPT) کمتر است.

$$Alg \le f\, OPT$$