$O(m \rightsquigarrow n^5)$

$G = (V, E)$

s, t

$c \geq 0$

اگر مقادیر ظرفیت ها عدد صحیح باشد، با هر بار

ارسال جریان حداقل یک واحد مقدار کل جریان

افزایش پیدا کند.

شبه چندجمله ای

$f = 0 \rightsquigarrow G_f \to s, t$

مسیر افزایشی P

$O(n^{\text{چند جمله ای}})$ برحسب n

$O($ تعداد اعمال $)$ برحسب اندازه $=$ ورودی

n تعداد راس ها

m تعداد یال ها

$c(P) = \min\{c_f(u,v), (u,v) \in P\}$

$f = \dots$

$\to f \uparrow f_P$

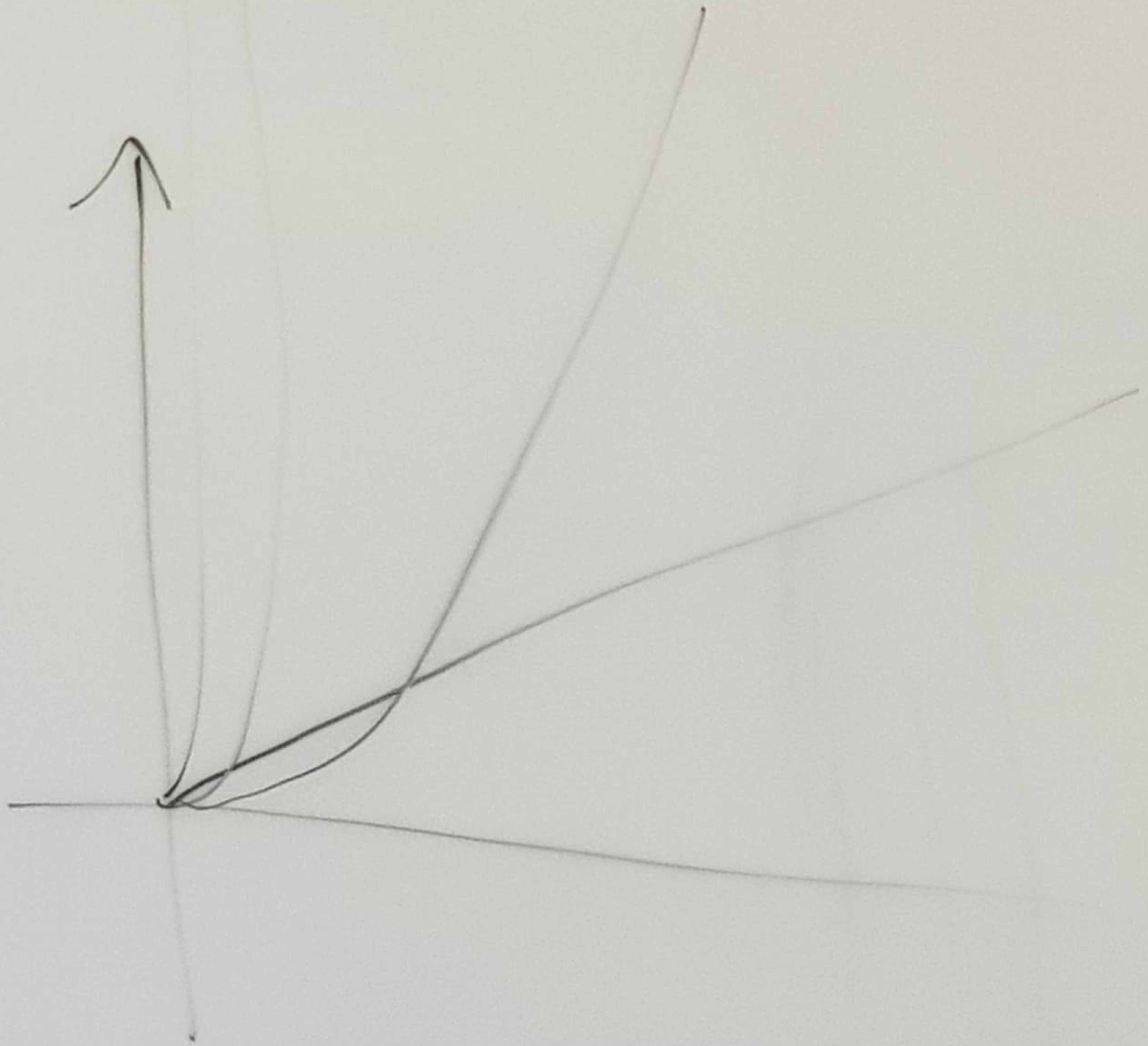
$\log n$

n

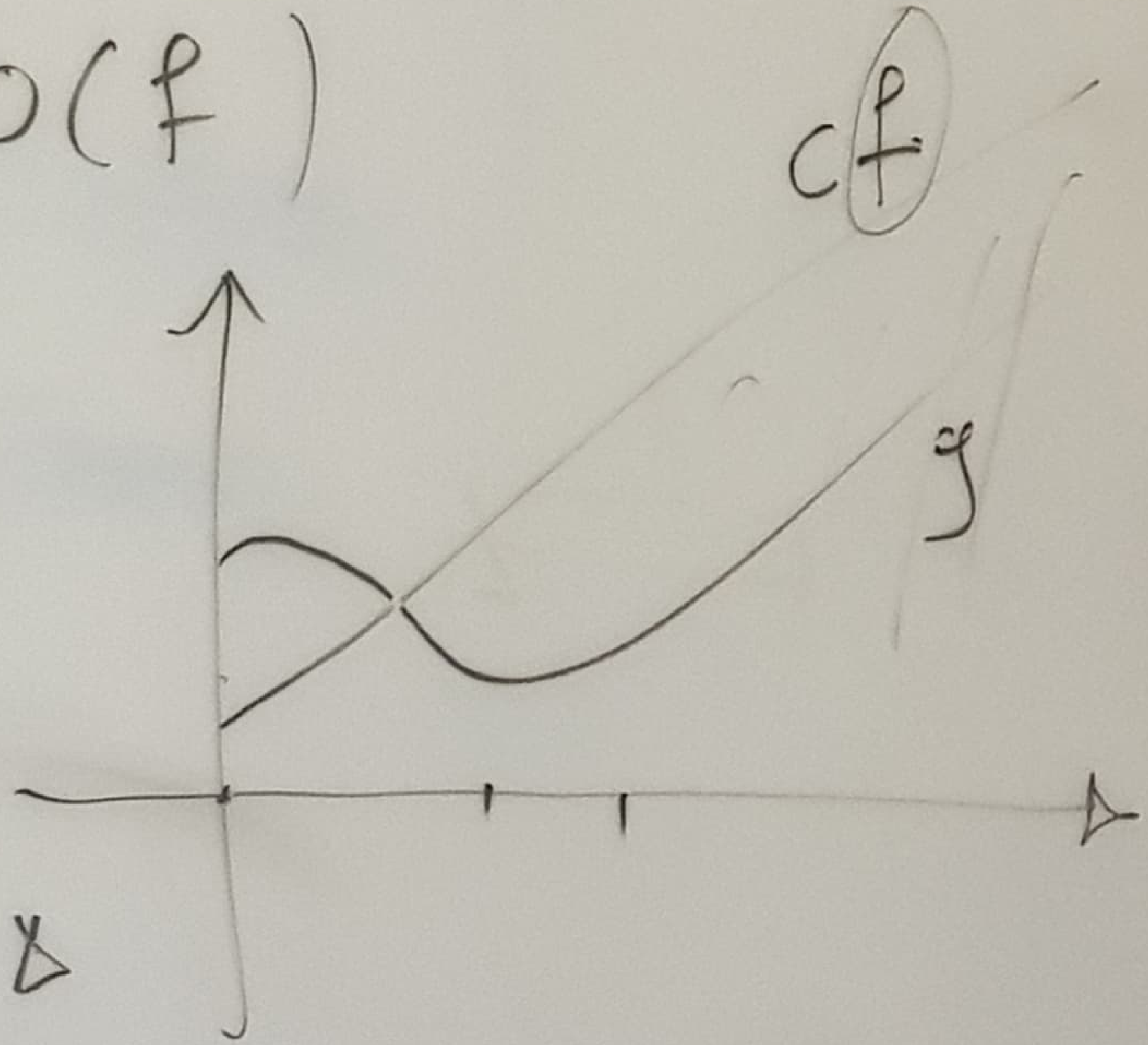
n^2

2^n

$n!$



$g \in O(f)$



$O\,m \rightsquigarrow n^2$

$G = (V, E)$

s, t

$c \geq 0$

$f = 0 \rightsquigarrow G_f \rightarrow s, t$

اگر مقادیر ظرفیت ها عدد صحیح باشد، هر بار

ارسال جریان حداقل یک واحد مقدار کل جریان

افزایش پیدا می کند.

$|f^*|$

الگوریتم ادموندز کارپ

Edmonds karp

$O(nm^2)$

مسیر با بیشترین ظرفیت؟

f

مسیر افزایشی p ، BFS → طول هر یال یک (مسیر با کمترین تعداد یال)

$c(p) = \min\{c_f(u,v), (u,v) \in p\}$

$f =$

الگوریتم Edmons-karp

همان الگوریتم فورد فالکرسون است که برای پیدا کردن مسیر افزایشی در شبکه باقی مانده از BFS استفاده می کند.

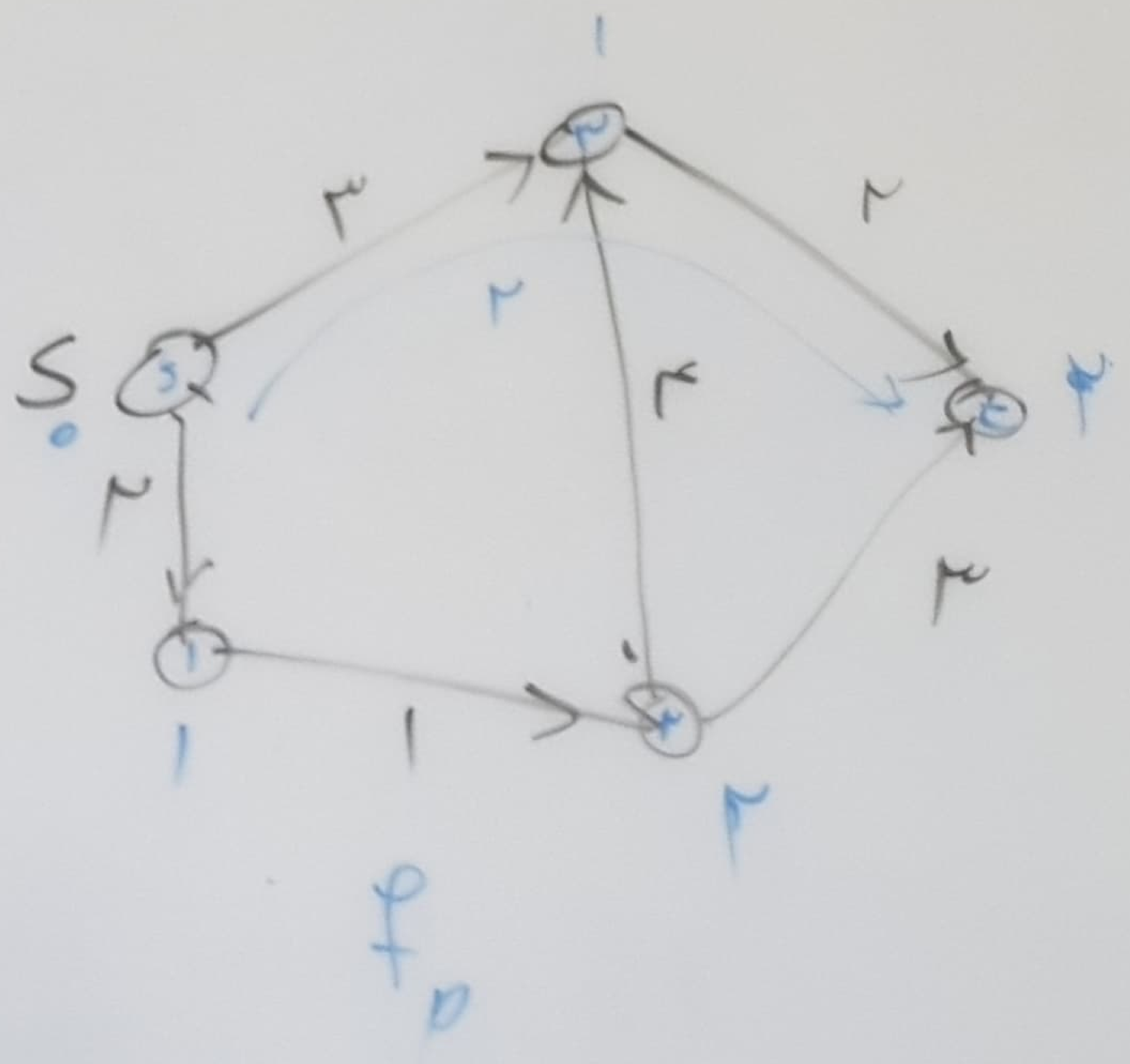
طول کوتاهترین مسیر از u به v $= \delta(u, v)$

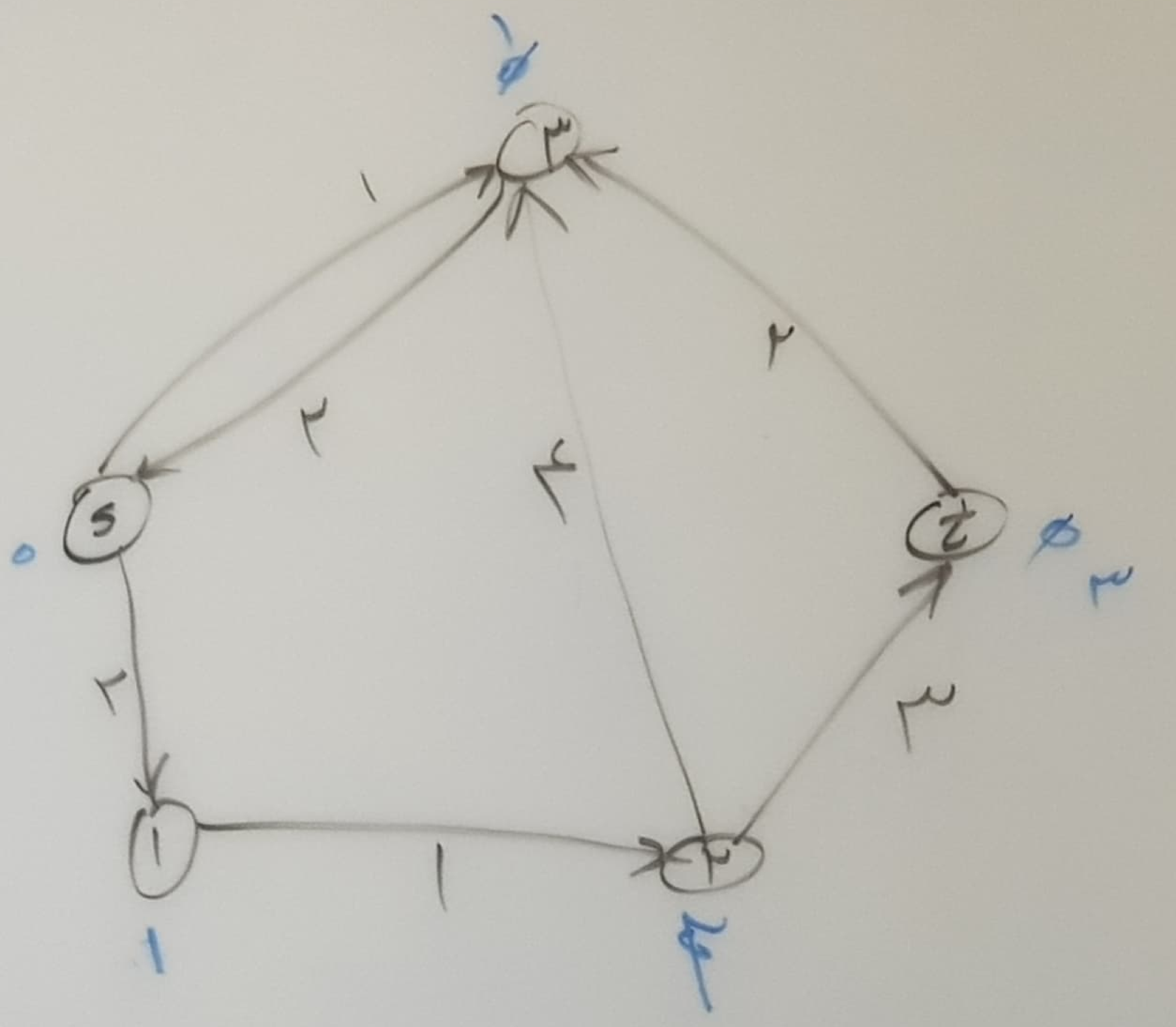
$\delta(s, u) = 0$

لم: با اجرای الگوریتم ادموندز کارپ روی شبکه $G=(V,E)$ با رأس مبدأ s و رأس مقصد t، برحسب های $\delta_f(s, v)$ (طول کوتاهترین مسیر از s به v در شبکه باقی مانده G_f) با افزایش جریان به طور صعودی است.

منظور از کوتاه ترین مسیر -دلتا- در این لم، بدون در نظر گرفتن وزنه
عمق در BFS

نکته ای که باید بهش توجه بشه اینه که ما توی ب.ف.س. اگر مسیری ظرفیتش تکمیل شده رو در نظر نمیگیریم





لم: عمق BFS رئوس بعد از هر اجرا بیشتر یا مساوی می‌شود

الگوریتم Edmonds-Karp

همان الگوریتم فورد فالکرسون است که برای پیدا کردن مسیر افزایشی در شبکه باقی مانده از BFS استفاده می‌کند.

طول کوتاه‌ترین مسیر از u به v = $\delta(u,v)$

$\delta(s,u)=0$

لم: با اجرای الگوریتم ادموندز کارپ روی شبکه $G=(V,E)$ با رأس مبدأ s و رأس مقصد t، برحسب های $\delta_f(s,v)$ (طول کوتاه‌ترین مسیر از s به v در شبکه باقی مانده G_f) با افزایش جریان به طور صعودی است.

اثبات

$$f \rightarrow G_f \rightarrow f'$$

گیرا رأس v که $\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$

و از میان تمام رئوس این چنینی، v رأس با کمترین δ باشد.

$$P: s \rightsquigarrow u \to v$$

کوتاه‌ترین مسیر از s به v در $G_{f'}$ باشد.

$$(u,v) \in E_{f'}$$

$$\delta_{f'}(s,u) = \delta_{f'}(s,v) - 1$$

پس u رأسی نیست که به موجب آن کاهش پیدا کرده باشد و داریم

$$\delta_{f'}(s,u) \geq \delta_f(s,u)$$

ادعا می‌کنیم $(u,v) \notin E_f$ زیرا در غیر این صورت

$$\delta_f(s,v) \leq \delta_f(s,u) + 1$$

$$\leq \delta_{f'}(s,u) + 1$$

$$= \delta_{f'}(s,v)$$

که با فرض ما تناقض دارد.

پس یعنی در G_f از v به u جریان ارسال شده و به عبارت دیگر یال $(v,u) \in E_f$ بوده است

یعنی یال (v,u) در G_f در کوتاه‌ترین مسیر از s به u قرار گرفته است.

و با توجه به اینکه هر زیر مسیر، مسیر بهینه، بهینه است داریم

$$\delta_f(s,v) = \delta_f(s,u) - 1$$

$$< \delta_{f'}(s,u) - 1$$

$$= \delta_{f'}(s,v)$$

که تناقض است و رأسی مانند v وجود ندارد که به موجب آن کاهش پیدا کند.

الگوریتم Edmons-karp

قضیه: تعداد کل مسیرهای افزایشی در اجرای الگوریتم ادموندز-کارپ $O(nm)$ است.

تعریف می‌کنیم. یال (u,v) در شبکه باقی‌مانده G_f را بحرانی می‌گوییم اگر

برای مسیر افزایشی p $\quad c_f(p)=c_f(u,v)$

پس با ارسال جریان روی p، یال (u,v) حذف می‌شود.

* دقت کنید در هر بار ارسال جریان حداقل یک یال بحرانی می‌شود.

* نشان می‌دهیم هر یال حداکثر $n/2$ بار می‌تواند بحرانی شود.

فرض کنید یال $(u,v)\in E$ باشد. از آنجایی که مسیرهای افزایشی، کوتاه‌ترین مسیرها هستند، اولین بار که یال (u,v) بحرانی شود داریم

$$\delta_f(s,v)=\delta_f(s,u)+1$$

با ارسال جریان یال (u,v) حذف می‌شود. و تا زمانی که جریان از v به u برنگردد مجدداً یال (u,v) ظاهر نمی‌شود.

اگر f' جریانی باشد که در شبکه باقی‌مانده آن یال (v,u) در مسیر افزایشی قرار گرفته باشد خواهیم داشت

یعنی یال (v, u) از کوتاه‌ترین مسیر است و داریم

$$\delta_{f'}(s,u) = \delta_{f'}(s,v) + 1$$

و از آنجایی که $\delta_f(s,v) \le \delta_{f'}(s,v)$ داریم

$$\delta_{f'}(s,u) \geq \delta_f(s,v) + 1$$

$$= \delta_f(s,u) + 2$$

پس از آن زمانی که (u,v) بحرانی شود تا بار بعدی که بحرانی شود برچسب u حداقل ۲ واحد زیاد می‌شود.

از آنجایی که $u \neq t$ طول کوتاه‌ترین مسیر از s به u حداکثر $n-2$ است یعنی حداکثر $\frac{n-2}{2}$ بار یال (u,v) می‌تواند بحرانی شود با احتساب اولین مرتبه بحرانی شدن $\frac{n}{2}-1+1$ یا همان $\frac{n}{2}$.

پس تعداد کل مسیرهای افزایشی از مرتبه $O(nm)$ است.

اجرای BFS، از مرتبه $O(m)$ است که نتیجه می‌دهد زمان اجرای کل الگوریتم $O(nm^2)$ خواهد بود.