به نام خدا.

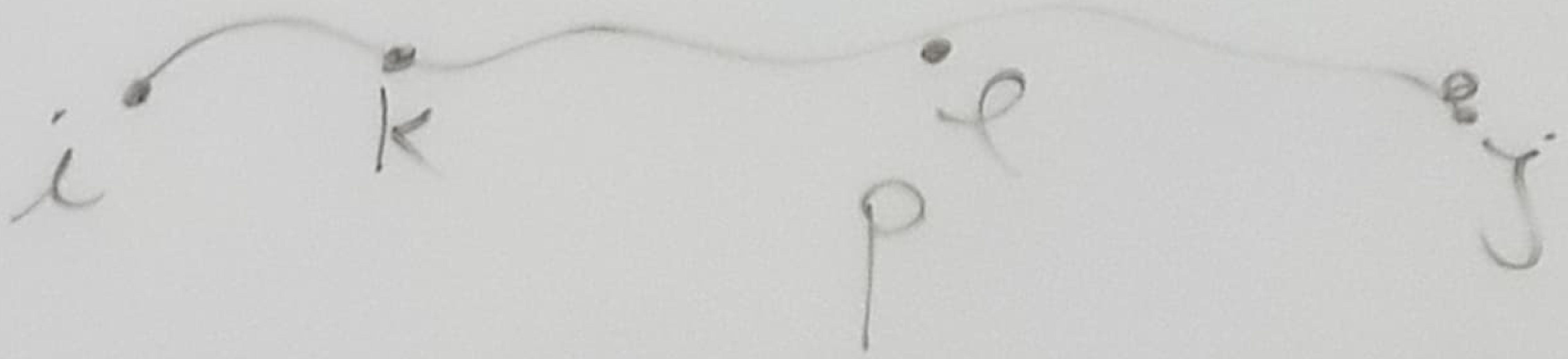
all pairs shortest path

$$G=(V,E)$$

$$\forall (u,v)\in E,\quad w(u,v)$$

هزینه عبور از یال (u,v)

لم: هر زیرمسیر یک مسیر کمینه، کمینه است.



$$w(i,j)=\begin{cases} 0 & i=j \\ w(i,j) & (i,j)\in E \\ \infty & (i,j)\notin E \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & i=j \\ \infty & i\neq j \end{cases}$$

$l_{ij}^{(r)}$ = از رأس i به رأس j

...اکثر از r یال استفاده کند.

$$l_{ij}^{(r)} = \min_{k \in V} \left\{ l_{ik}^{(r-1)} + w(k,j) \right\}$$

$$w(j,j) = 0$$

1 2 . . . .

1 [1 0

2 ماتر

3

4

1

$$l_{ij}^{(3)} = l_{ij}^{(2)} \text{ or } \min \left\{ l_{ik}^{(2)} + w(k,j) \right\}$$

$$L^{(2)} = \left[l_{ij}^{(2)} \right]$$

$$l_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & i=j \\ \infty & i \neq j \end{cases}$$

$$L^{(1)} = l_{ij}^{(2)} =$$

طول کوتاه‌ترین مسیر از رأس i به رأس j

که حداکثر از ۲ یال استفاده کند.

$$l_{ij}^{(2)} = \min_{k \in V} \left\{ l_{ik}^{(2-1)} + w(k,j) \right\}$$

$$w(j,j) = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & \cdots & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array}$$

ماتریس

$$l_{ij}^{(3)} = l_{ij}^{(2)} \text{ or } \min\left\{ l_{ik}^{(2)} + w(k,j) \right\}$$

بنام خدا

all pairs shortest path

$G=(V,E)$

$\forall (u,v)\in E,\ w(u,v)$

هزینه عبور از یال (u,v)

Extended-Shortestpath($l^{(r-1)}, w, l^{(r)}, n$)

for $i=1$ to n

  for $j=1$ to n

    for $k=1$ to n

$$l_{ij}^{(r)} = \min_{k\in V}\left\{ l_{ij}^{(r)},\ l_{ik}^{(r-1)} + w(k,j) \right\}$$

M, n)

```
slow_Alg (w, L^(0), n)

    L = L^(0)

    for r=1 to n-1
      {
        Extended_Shortestpath(L, w, M, n)
        L = M
      }
return L
```

? $L^{(1)} = W$ OR +

$L^{(2)} = W^2 \qquad W^4 = W^2 \cdot W^2$

$L^{(r)} = W^r \qquad W^{2r} = W^r \cdot W^r$

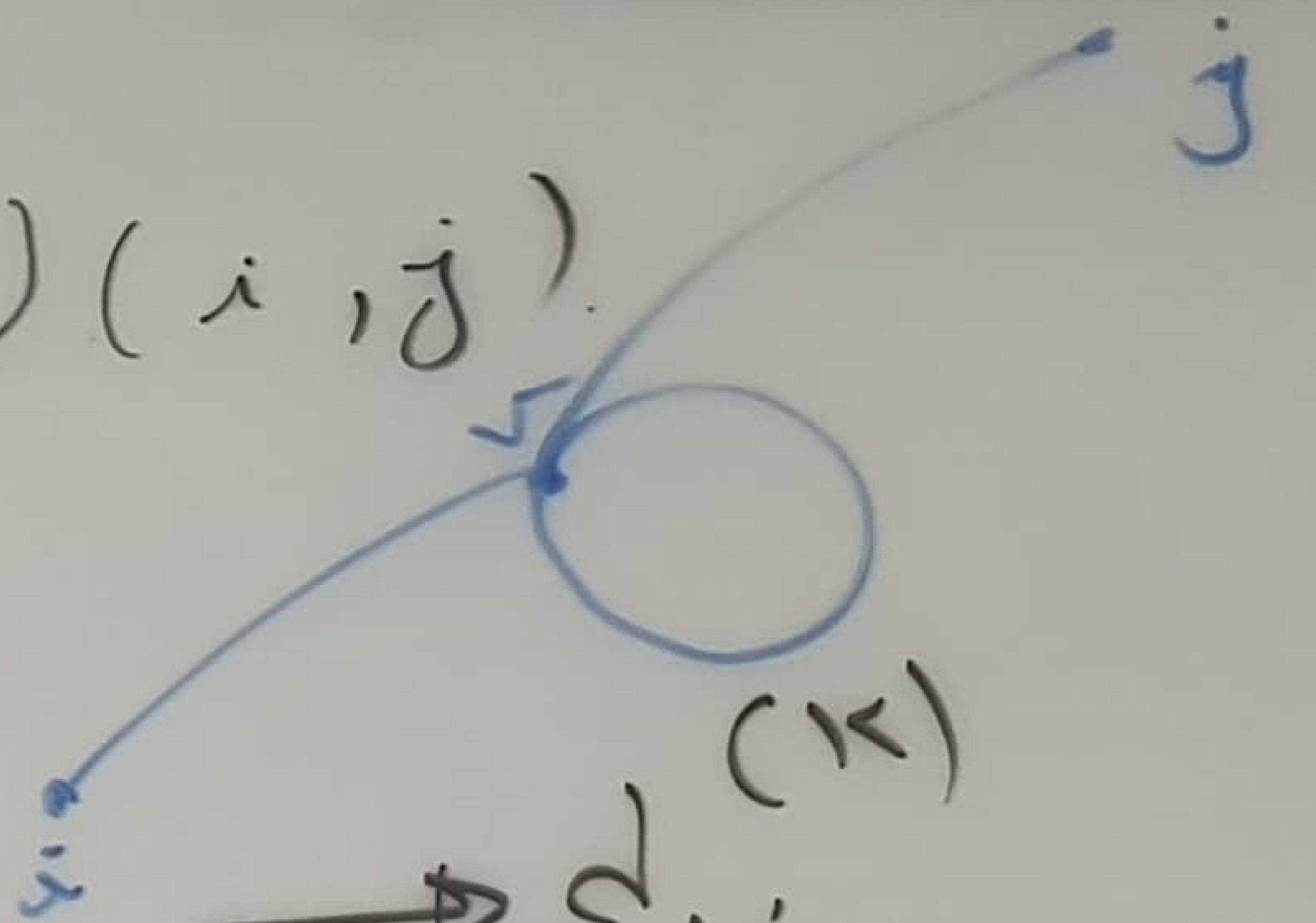
$$\begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & \ddots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix}$$

```
Slow_Alg (W, L^(0), n)

L = L^(0)

for r = 1 to n-1
{
   Extended_Shortestpath(L, W, M, n)
   L = M
}
return L
```

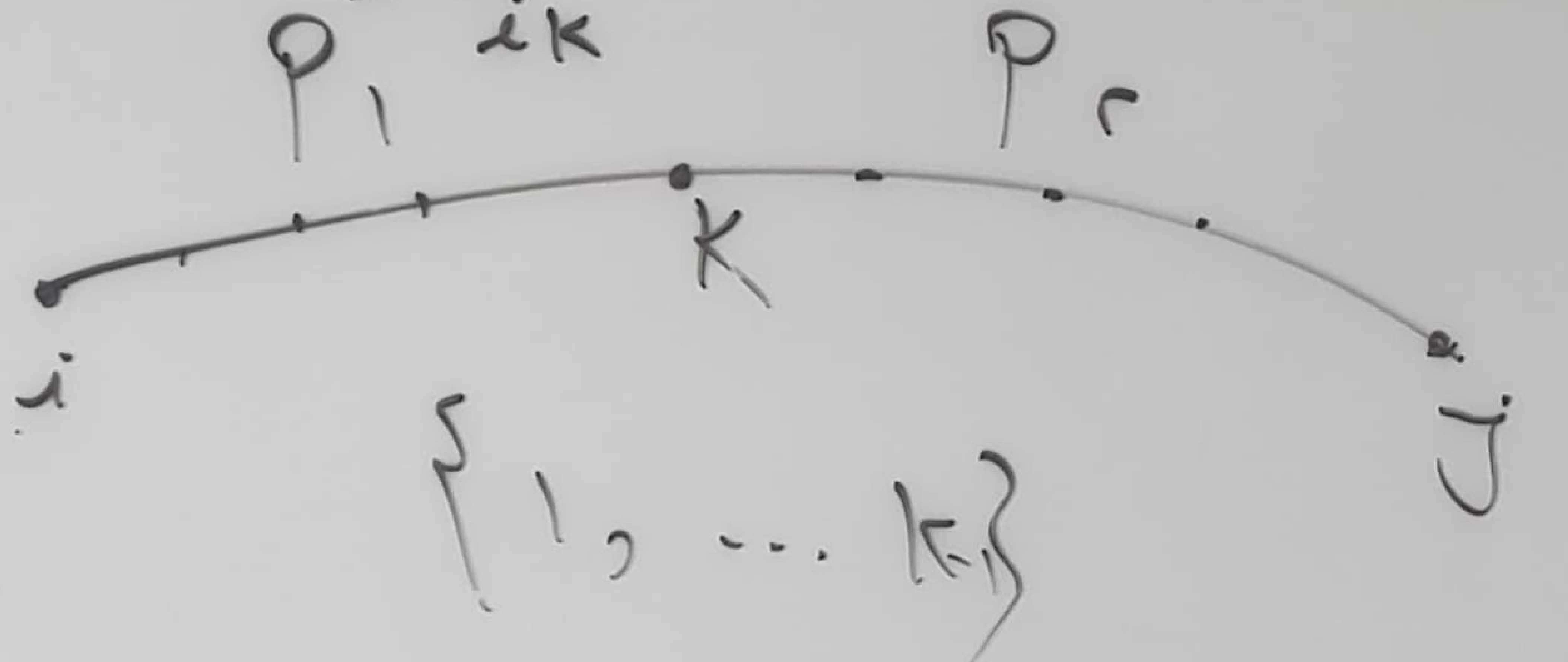
$d_{ij}^{(0)} = w(i,j)$: هزینه کوتاه‌ترین مسیر از i به j به طوری که این مسیر هیچ گره میانی نداشته باشد.



$d_{ij}^{(k-1)} \longrightarrow d_{ij}^{(k)}$

$$= \min\left\{ d_{ij}^{(k-1)},\ d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \right\}$$

$p_1 = d_{ik}^{(k-1)}$



$d_{ij}^{(k)} =$ هزینه (طول) کوتاه‌ترین مسیر از رأس i به رأس j که تمام رأس‌های میانی آن به مجموعه $\{1,2,\ldots,k\}$ تعلق دارد.

به این ترتیب $D^n = \left[d_{ij}^{(n)} \right]$ جواب مسئله است.

بنام خدا

Floyd-Warshall Alg

$D^{(0)} = W$

for $k = 1$ to n

$\quad D^{k} = [d_{ij}^{(k)}]$

$\quad$ for $i = 1$ to n

$\quad\quad$ for $j = 1$ to n

$$d_{ij}^{(k)} = \min \{ d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \}$$

return $D^{(n)}$.

بنام خدا

Floyd-Warshall Alg

$D^{(0)} = W$

```
for k = 1 to n
    D^k = [d_ij^(k)]
    for i = 1 to n
        for j = 1 to n
            d_ij^(k) = min{ d_ij^(k-1), d_ik^(k-1) + d_kj^(k-1) }
return D^(n).
```

$$D^{k} = [d_{ij}^{(k)}]$$

$$d_{ij}^{(k)} = \min\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\}$$

$\Theta(n^3)$