به نام خدا.

$G=(V,E)$, $\overset{\text{ظرفیت}}{C(u,v)} \Leftarrow (u,v)\in E$

رأس s مبدا

رأس t مقصد.

$$|f| = \sum_{v\in V} f(s,v) - \sum_{v\in V} f(v,s)$$

f , جریان در G

f' جریان در G_f

$$\underset{\text{جریان}}{(f\uparrow f')}(u,v) = \begin{cases} f(u,v)+f'(u,v) & (u,v)\in E \\ -f'(v,u) & \\ f(v,u) & (v,u)\in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

مقدار

$$|f\uparrow f'| = |f| + |f'|$$

مسیر افزایشی (Augmenting path)

یک مسیر افزایشی p یک مسیر ساده از s به t در شبکه باقی مانده G_f است. با توجه به تعریف شبکه باقی مانده، جریان روی یال (u,v) از مسیر افزایشی می تواند حداکثر تا $c_f(u,v)$ بدون نقض قید ظرفیت افزایش یابد.

$$c_f(p) = \min\{c_f(u,v) : (u,v) \in p\}$$

لم: فرض کنیم p یک مسیر افزایشی در G_f باشد. تابع زیر را تعریف می کنیم

$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p) & (u,v) \in p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

آنگاه f_p یک جریان روی G_f است. و مقدار $|f_p| = c_f(p) > 0$

f، جریان در G

f' جریان در G_f

$$(f \uparrow f')(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) & (u,v) \in E \\ f(v,u) & (v,u) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

جریان

مقدار

$$|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$$

نتیجه: اگر f یک جریان روی G باشد

و p یک مسیر افزایشی در G_f، مقدار جریان روی

f را توسط کم‌ترین ظرفیت مسیر p افزایش دهیم آنگاه

$f \uparrow f_p$ یک

جریان روی G است به مقدار

$$|f \uparrow f_p| = |f| + |f_p| > |f|$$

نتیجه: اگر f یک جریان روی G باشد

و p یک مسیر افزایشی در G_f، مقدار جریان روی p را توسط کم‌ترین ظرفیت پر کرده باشیم آنگاه

تابع $f \uparrow f_p$ یک

جریان روی G است به مقدار

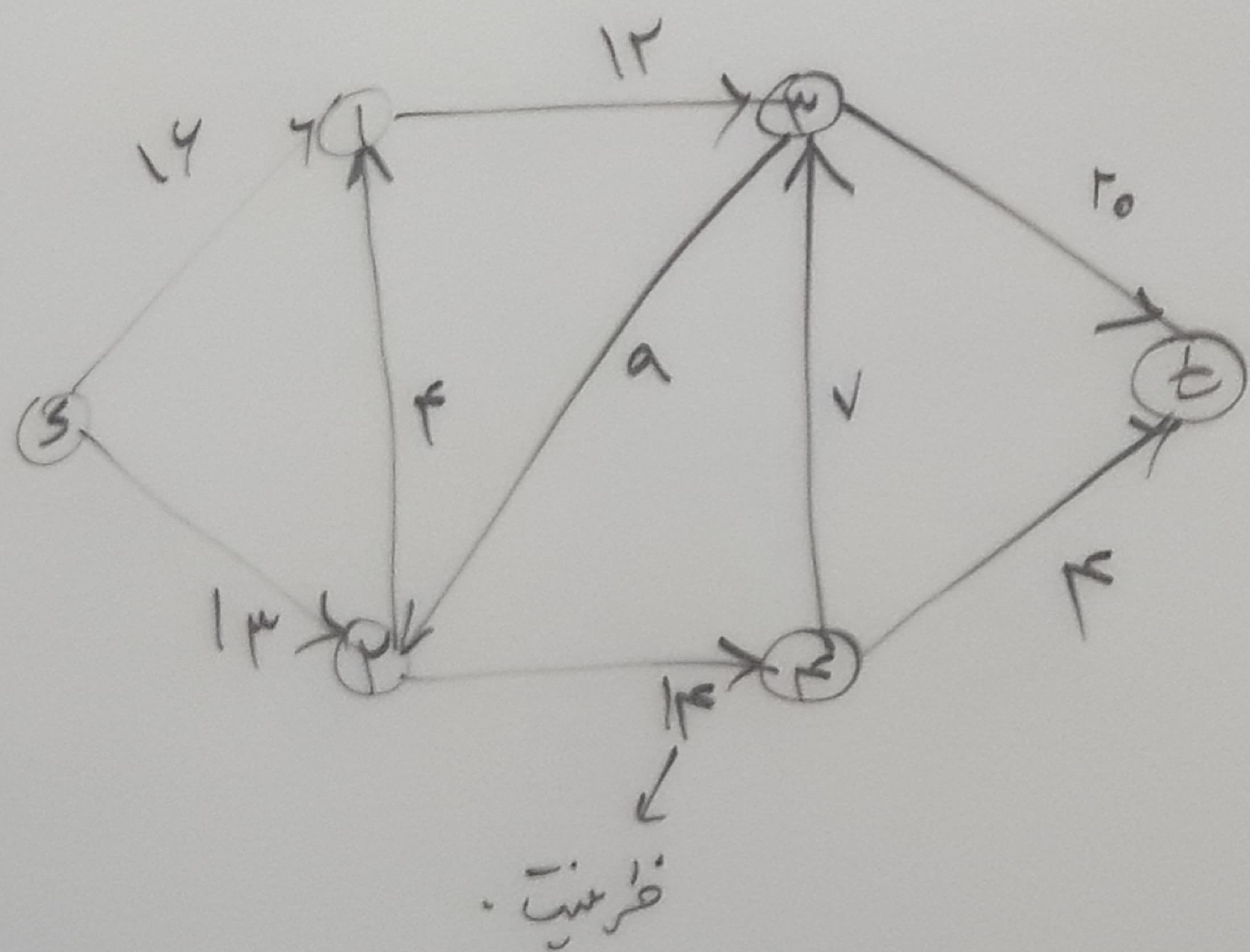
$$|f \uparrow f_p| = |f| + |f_p| > |f|$$

برش در شبکه جریان : (S, T)

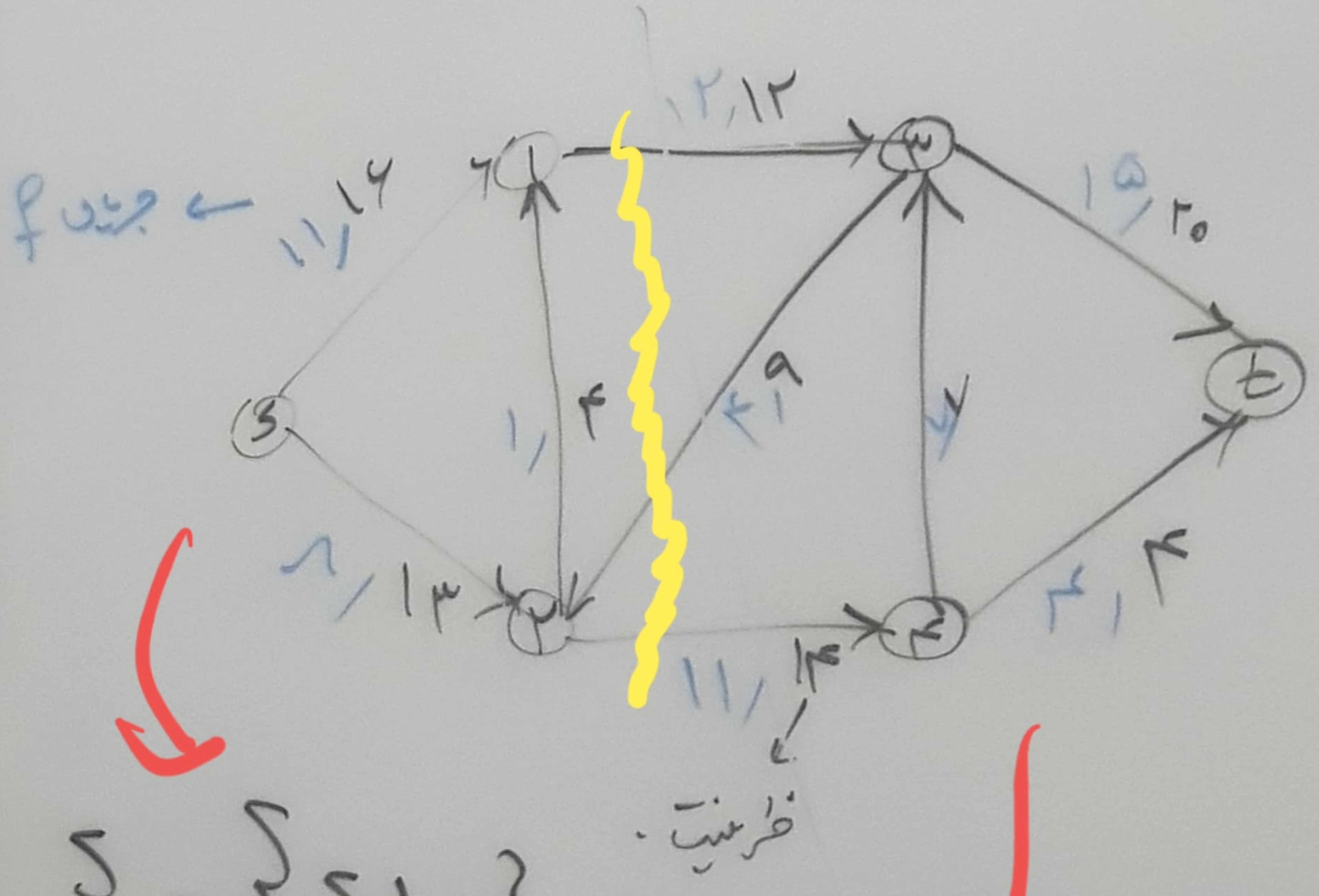
V

$s \in S \qquad t \in T = V - S$

برش در شبکه جریان : (S , T)



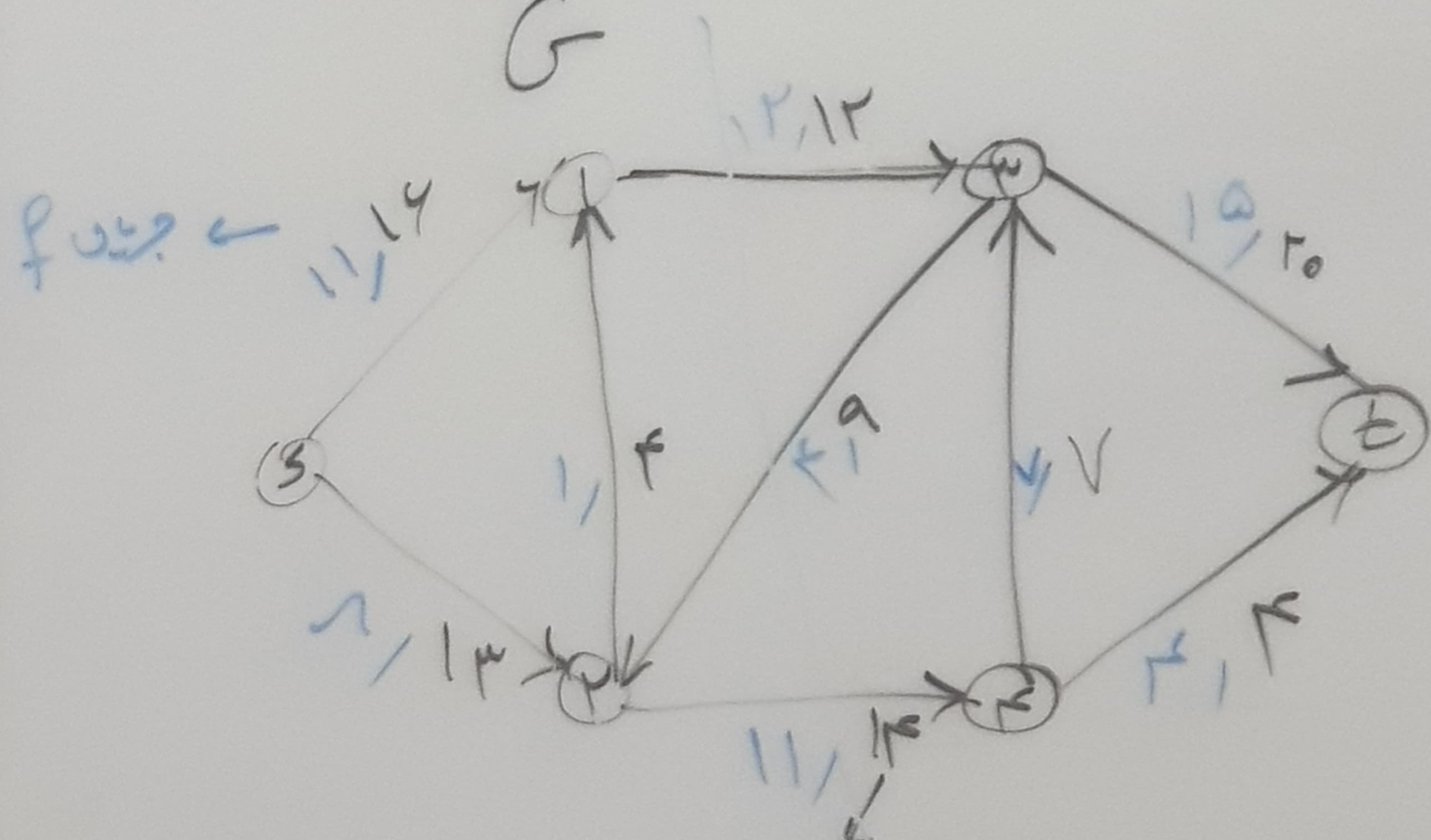
برش در شبکه جریان : (S , T)



S = {s, ۱, ۲}

T = {۳, ۴, t}

برش در شبکه جریان : (S , T)



ظرفیت.

$f(S, T) = 19$

$S = \{s, 1, 2\}$

$c(S, T) = ۲۶$

$T = \{۳, ۴, t\}$

تعریف:

اگر f یک جریان روی G باشد ظرفیت برش (S,T) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C(S,T)=\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} C(u,v)$$

خالص جریان عبوری از برش (S,T) را با نماد $f(S,T)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(S,T)=\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u)$$

خروجی از دید T

ورودی

تعریف:

اگر f یک جریان روی G باشد

خالص جریان عبوری از برش (S,T)

را با نماد $f(S,T)$ نشان می‌دهیم

و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(S,T)=\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u)$$

ظرفیت برش (S,T) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C(S,T)=\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} C(u,v)$$

برش کمینه (min cut) برشی در شبکه G

با کمترین ظرفیت است.

نتیجه: اگر f یک جریان روی G باشد

و p یک مسیر افزایشی در G_f، و مقدار جریان روی p را توسط f_p که قبلا تعریف کرده بودیم آنگاه

تابع $f \uparrow f_p$

جریان روی G است به مقدار

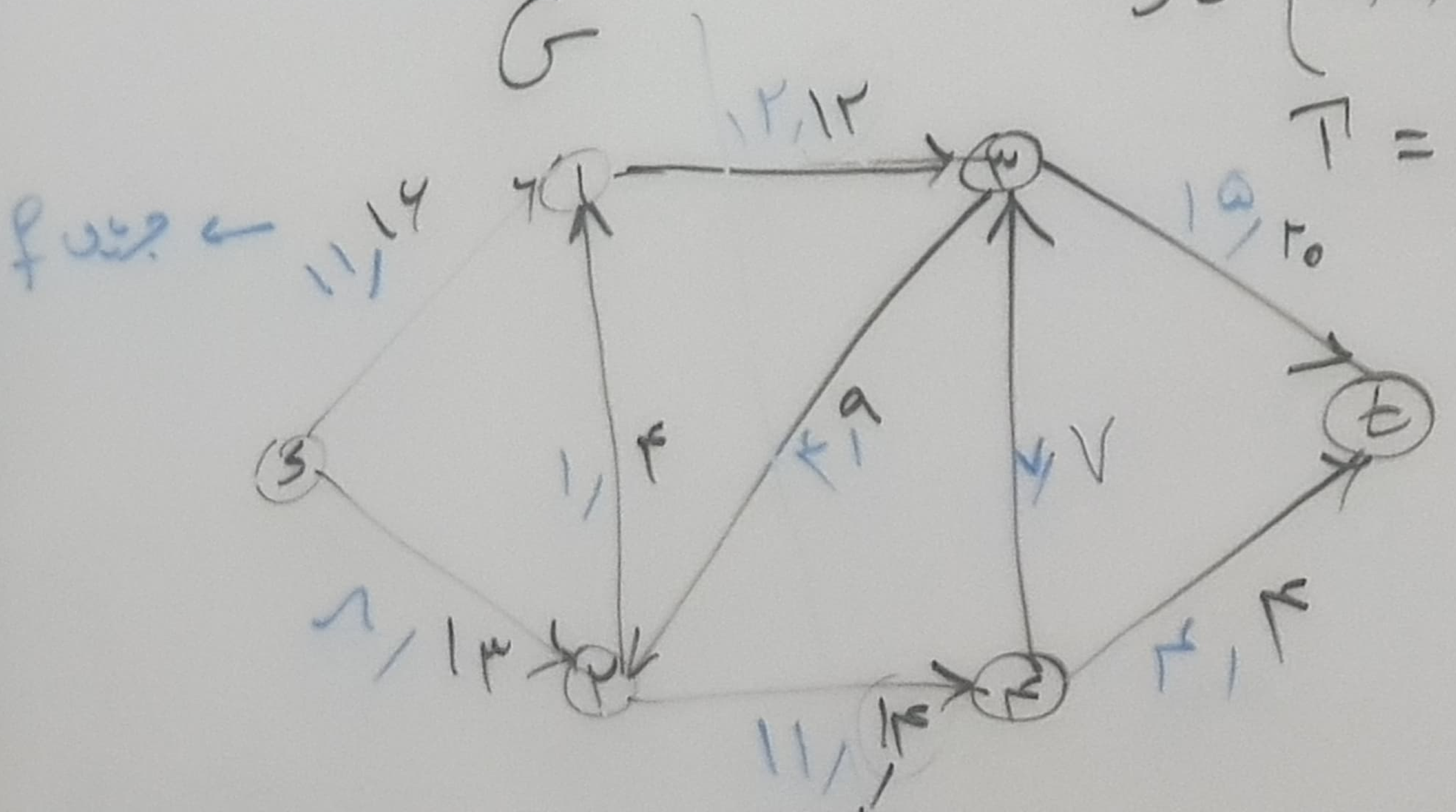
$$|f \uparrow f_p| = |f| + |f_p| > |f|$$

برش در شبکه جریان: (S, T)

$S = \{s, 1, 2, 4\}$

$T = \{3, t\}$

$12 + 7 + 4$



$S = \{s, 1, 2\}$

$T = \{3, 4, t\}$

$f(S, T) = 19$

$c(S, T) = 26$

لم: فرض کنید f جریانی در شبکه G باشد، (S, T) یک برش روی شبکه G تعریف کرده باشد آنگاه

$$f(S, T) = |f|$$

اثبات:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s) + \sum_{u \in S-\{s\}} \left(\sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{v \in V} f(v,u) \right)$$

$$\sum_{u \in S} f(u,v)$$

$$= \sum_{v \in V} \left(f(s,v) + \sum_{u \in S-\{s\}} f(u,v) \right) - \sum_{v \in V} \left(f(v,s) + \sum_{u \in S-\{s\}} f(v,u) \right)$$

داریم $S \cap T = \emptyset, \; V = S \cup T$

$$|f| = \sum_{v \in S} \sum_{u \in S} f(u,v) + \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(u,v) - \sum_{v \in S} \sum_{u \in S} f(v,u) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(v,u)$$

(S , T) : برش در شبکه جریان

S = {s, ۱, ۲, ۴}

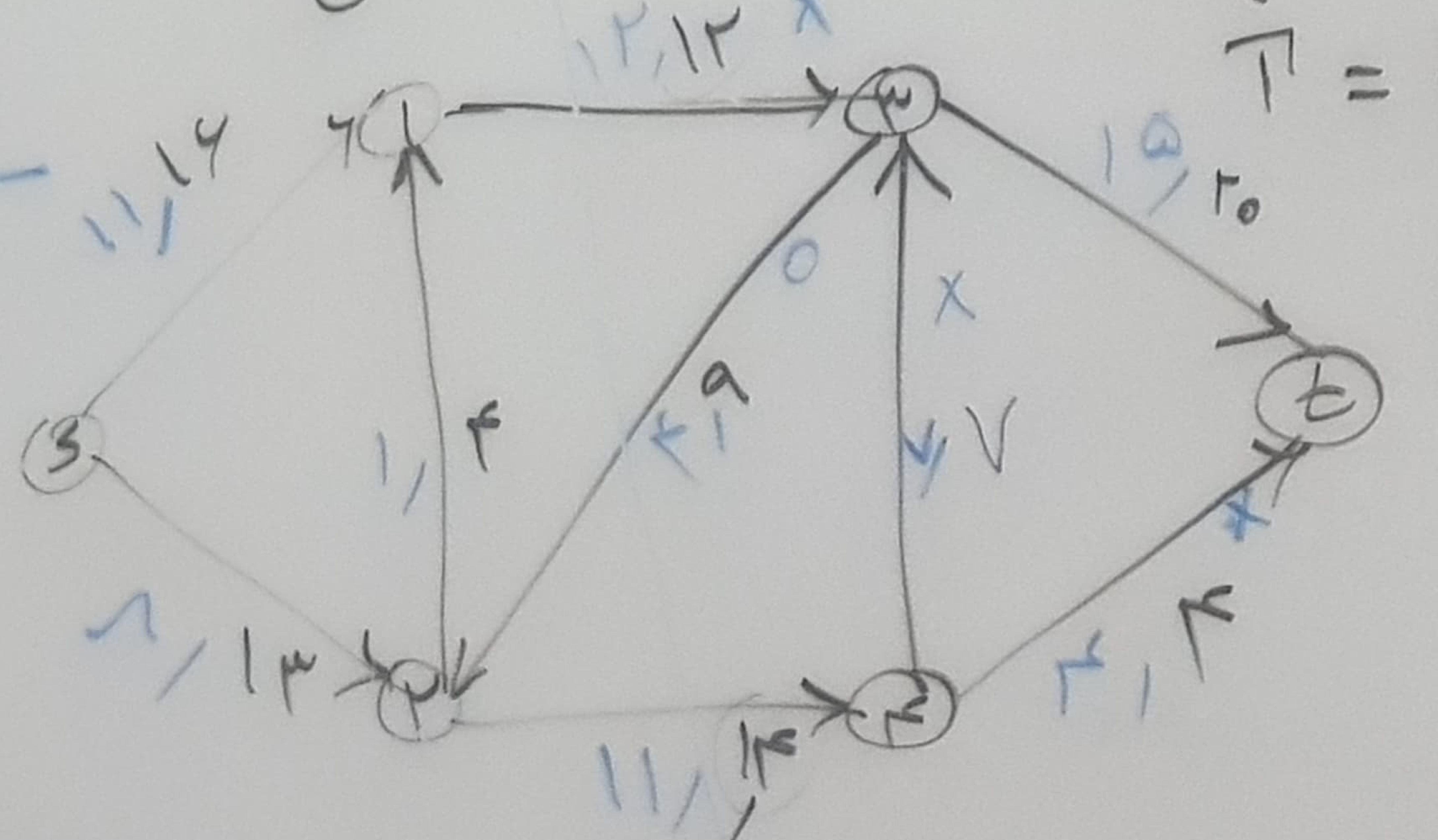
T = {۳, t}

۱۲+۷+۴

۴

G

جریان f ←



ظرفیت

$f(S,T) = 19$

$c(S,T) = ۲۶$

S = {s, 1, ۲}

T = {۳, ۴, t}

ادامه:

$$\sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(u,v) - \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(v,u)$$

$$+\left(\sum_{v\in S}\sum_{u\in S} f(u,v) - \sum_{v\in S}\sum_{u\in S} f(v,u)\right)$$

مقدار پرانتز صفر است ⇐

$$\Rightarrow |f| = \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u)$$

$$= f(S,T)$$

نتیجه ۱: مقدار هر جریان f در شبکه G با ظرفیت هر برش دلخواه در شبکه G از بالا محدود شده است.

اثبات: فرض کنیم f یک جریان دلخواه و (S,T) یک برش دلخواه باشد.

$$|f| = f(S,T) = \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u)$$

$$\leq \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v)$$

$$\leq \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} c(u,v) = C(S,T)$$

قضیه جریان بیشینه برش کمینه.

اگر f یک جریان روی شبکه G باشد ۳ گزاره زیر معادل هم هستند.

۱- f یک جریان بیشینه روی G است.

۲- شبکه باقی مانده G_f مسیر افزایشی ندارد.

۳- برای یک برش (S,T) مقدار $|f| = c(S,T)$

قضیه جریان بیشینه برش کمینه.

اگر f یک جریان روی شبکه G باشد ۳ گزاره زیر معادل هم هستند.

۱- f یک جریان بیشینه روی G است.

۲- شبکه باقی‌مانده G_f مسیر افزایشی ندارد.

۳- برای یک برش (S,T) مقدار $|f| = c(S,T)$

اثبات از ۱ به ۲ ⇐ فرض f جریان بیشینه باشد و یک مسیر افزایشی در شبکه باقی‌مانده G_f وجود داشته باشد. این مسیر را با p نمایش می‌دهیم. جمع آن با قبلی f_p یک مقدار مثبت دارد که $|f \uparrow f_p| > |f|$ خواهد بود که تناقض است.

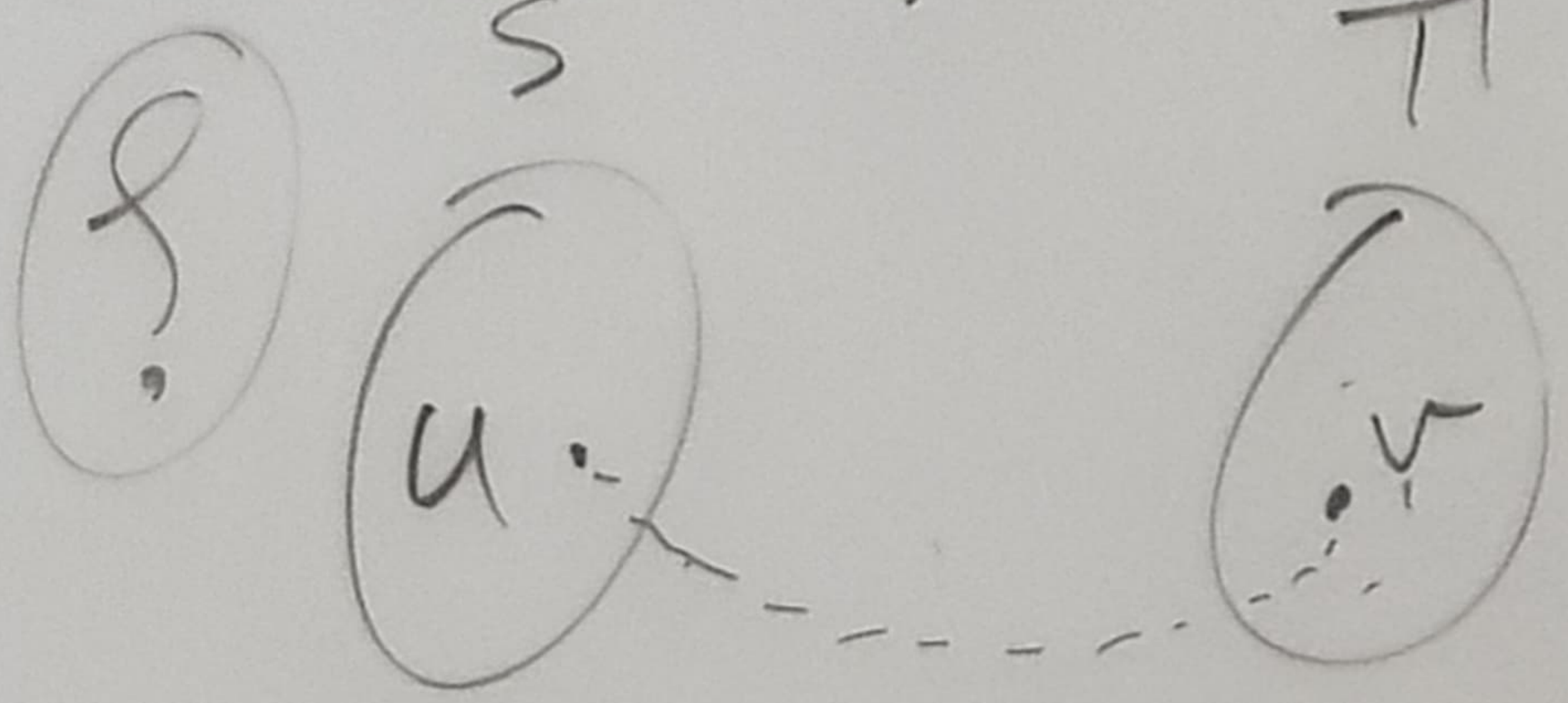
اثبات ۲ به ۳ ⇐ S را مجموعه رئوسی در G_f در نظر می‌گیریم که از s به آنها مسیر وجود دارد در G_f. $T = V - S$. روشن است که $s \in S$ و $t \in T$ پس (S,T) یک برش است. یک جفت دلخواه رئوس $u \in S, v \in T$ را در نظر بگیرید.

اگر $(u,v) \in E$ آنگاه $f(u,v) = c(u,v)$ زیرا در غیر این صورت $(u,v) \in E_f$، v از s دسترس‌پذیر است که با $v \in T$ بودن تناقض دارد.

ادامه:

اگر $(v,u)\in E$ آنگاه باید $f(v,u)=0$ زیرا

زیرا در غیر این صورت $c_f(u,v)=f(v,u)$ مقدار مثبت داشت و



به این مفهوم است که $v\in T$ که با $(u,v)\in E_f$

تناقض است.

$$f(S,T)=\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v)-\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u)$$

$$=\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} c(u,v)-\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} 0$$

$$=c(S,T)$$

از طرفی طبق لم می‌دانیم: $|f|=f(S,T)$ یعنی

$$|f|=c(S,T)$$

اثبات ۳ $\Rightarrow$ ۱ : طبق نتیجه اثبات شده: $|f| \le C(S,T)$ برای هر برش دلخواه (S,T) پس شرط ۳ ایجاب می‌کند که f جریان بیشینه باشد.

قضیه جریان بیشینه برش کمینه.

اگر f یک جریان روی شبکه G باشد ۳ گزاره زیر معادل هم هستند.

۱- f یک جریان بیشینه روی G است.

۲- شبکه باقی مانده G_f مسیر افزایشی ندارد.

۳- برای یک برش (S,T) مقدار $|f| = C(S,T)$