



دانشگاه تهران

دانشکده فنی

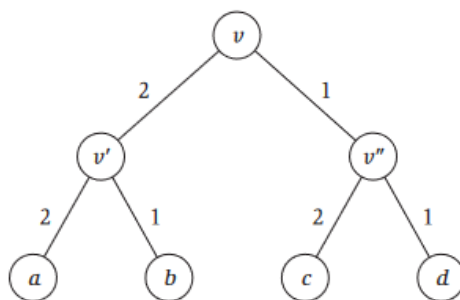
دانشکده علوم مهندسی

طراحی الگوریتم، پاییز ۱۴۰۳



تمرین‌های الگوریتم‌های Greedy

۱. یک الگوریتم کارا ارائه کنید که با دریافت یک مجموعه $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ از نقاط بر روی خط حقیقی، کوچکترین مجموعه از بازه‌های بسته واحد را تعیین می‌کند که شامل تمام نقاط داده شده در مجموعه باشد. اثبات کنید که الگوریتم شما صحیح است.
۲. مدارات زمان‌بندی یک جزء حیاتی از تراشه‌های $VLSI$ هستند. در اینجا یک مدل ساده از چنین مداری ارائه شده است. یک درخت دودویی متوازن کامل با n برگ در نظر بگیرید، که n یک توان از دو است. هر یال e از درخت دارای طول l_e است که یک عدد مثبت است. فاصله از ریشه تا یک برگ خاص برابر است با مجموع طول تمامی یال‌های موجود در مسیر از ریشه تا آن برگ. ریشه یک سیگنال ساعت تولید می‌کند که در طول یال‌ها به برگ‌ها منتقل می‌شود. فرض می‌کنیم زمانی که طول می‌کشد تا سیگنال به یک برگ خاص برسد، متناسب با فاصله از ریشه تا آن برگ است. حال اگر تمامی برگ‌ها فاصله یکسانی از ریشه نداشته باشند، سیگنال به طور همزمان به برگ‌ها نمی‌رسد، و این یک مشکل بزرگ است. ما می‌خواهیم که برگ‌ها کاملاً همزمان شوند و همگی در یک زمان سیگنال را دریافت کنند. برای رسیدن به این هدف، باید طول برخی از یال‌ها را افزایش دهیم، به طوری که همه مسیرهای از ریشه به برگ‌ها دارای طول یکسان شوند (ما نمی‌توانیم طول یال‌ها را کاهش دهیم). اگر به این هدف برسیم، گفته می‌شود که درخت (با طول‌های جدید یال‌ها) دارای «صفر شیفت» است. هدف ما رسیدن به «صفر شیفت» به گونه‌ای است که مجموع طول تمام یال‌ها تا حد ممکن کوچک بماند. یک الگوریتم ارائه دهید که طول برخی از یال‌ها را افزایش دهد تا درخت حاصل دارای صفر شیفت باشد و مجموع طول یال‌ها تا حد ممکن کوچک باشد.

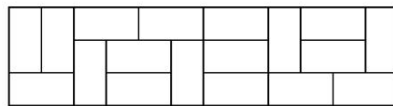


۳. اخیراً بابک به جمع‌آوری کارت‌های فوتبالی علاقه‌مند شده است. هر نوع کارت یک امتیاز مشخص (از اعداد طبیعی) دارد که آن‌ها را از انواع دیگر متمایز می‌کند. او n کارت از فروشگاه خریداری کرد ولی متوجه شد که متأسفانه در بین آن‌ها کارت‌های مشابه وجود دارد (کمترین امتیاز کارت‌های در دست او برابر ۲ است). او علاقه دارد بیشترین تعداد کارت‌های ناهمسان را داشته باشد پس تصمیم گرفت که تعدادی از کارت‌هایش را با کارت‌های دوستانش معاوضه کند. در این معاوضه هیچ محدودیتی وجود ندارد جز اینکه فقط کارت‌هایی می‌توانند معاوضه شوند که اختلاف امتیاز آن‌ها ۱ باشد و همچنین نمی‌تواند کارت‌هایی که در معاوضه به دست آورده را مجدداً معاوضه کند. با یک الگوریتم از مرتبه زمانی $O(n \log n)$ به بابک کمک کنید حداکثر تعداد کارت‌های ناهمسانی که می‌تواند داشته باشد را محاسبه کند.

۴. فرض کنید مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 1000000\}$ را داریم و می‌دانیم که یک زیرمجموعه 101 عضوی از آن به نام A وجود دارد. آیا می‌توان 100 عضو متمایز از S مانند x_1, x_2, \dots, x_{100} پیدا کرد به‌طوری‌که تمامی مجموعه‌های $A + x_i$ دوه‌دو مجزا باشند (هیچ دوتایی اشتراک نداشته باشند)؟ در هر دو صورت برای کسب نمره پاسخ خود را همراه با دلیل منطقی و اثبات‌محور ارائه دهید.

تمرین‌های الگوریتم‌های DP

۵. بابک که از کاشی‌کاران خوب کشور است به‌دلیل علاقه شخصی‌اش به ماهیت علوم مهندسی، به فکر انجام یک تحقیق بین رشته‌ای در حوزه بهینه‌سازی و کاشی‌کاری افتاده است! او که از کاشی‌کاری‌های یکنواخت بازار خسته شده است، می‌خواهد بداند هر زمینی که به فرم $3 * n$ است را به چند روش میتوان با کاشی‌های به فرم $1 * 2$ یا $2 * 1$ پر کرد؟ به او الگوریتمی ارائه دهید که بتواند این مسئله را حل کند، همچنین الگوریتم خود را تحلیل زمانی کنید.

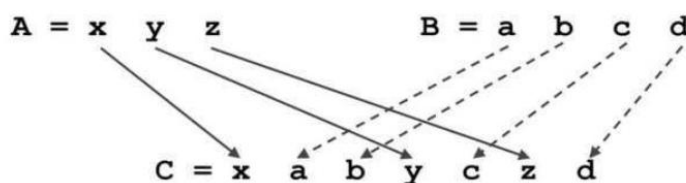


۶. فرض کنید ما یک دایره از N عدد داشته باشیم. یک الگوریتم از $O(N)$ بنویسید که یک بلاک پیوسته روی دایره پیدا کند که بیشترین جمع ممکن را داشته باشد.

۷. گفته می‌شود رشته C درهم‌تنیده‌ی رشته‌های A و B است اگر شامل تمام کاراکترهای A و B باشد و ترتیب نسبی کاراکترهای هر دو رشته در C حفظ شود. به عنوان مثال، اگر مقادیر A ، B و C به شرح زیر باشند

$$\begin{aligned} A &= xyz \\ B &= abcd \\ C &= xabcyzd \end{aligned}$$

رشته C درهم‌تنیده‌ی رشته‌های A و B است همان‌طور که در تصویر نشان داده شده است:



با داشتن سه رشته A ، B و C ، الگوریتمی بنویسید که بررسی کند آیا رشته سوم درهم‌تنیده‌ی دو رشته اول و دوم است یا خیر.

۸. قصد داریم از سرزمینی مستطیلی شکل با m ایالت در هر سطر و n ایالت در هر ستون گذر کنیم. برای عبور از هر خانه باید مقدار مشخصی عوارض بپردازیم. قصد داریم از گوشه بالای سمت راست سرزمین وارد و از گوشه پایین سمت چپ سرزمین خارج شویم و در این حرکت فقط می‌توانیم به چپ، راست و پایین حرکت کنیم و مجاز به حرکت به سمت بالا نیستیم. شبه کدی ارائه کنید که با الگوریتمی بهینه، حداقل پولی که باید برای گذر از این سرزمین همراه داشته باشیم را محاسبه کند.