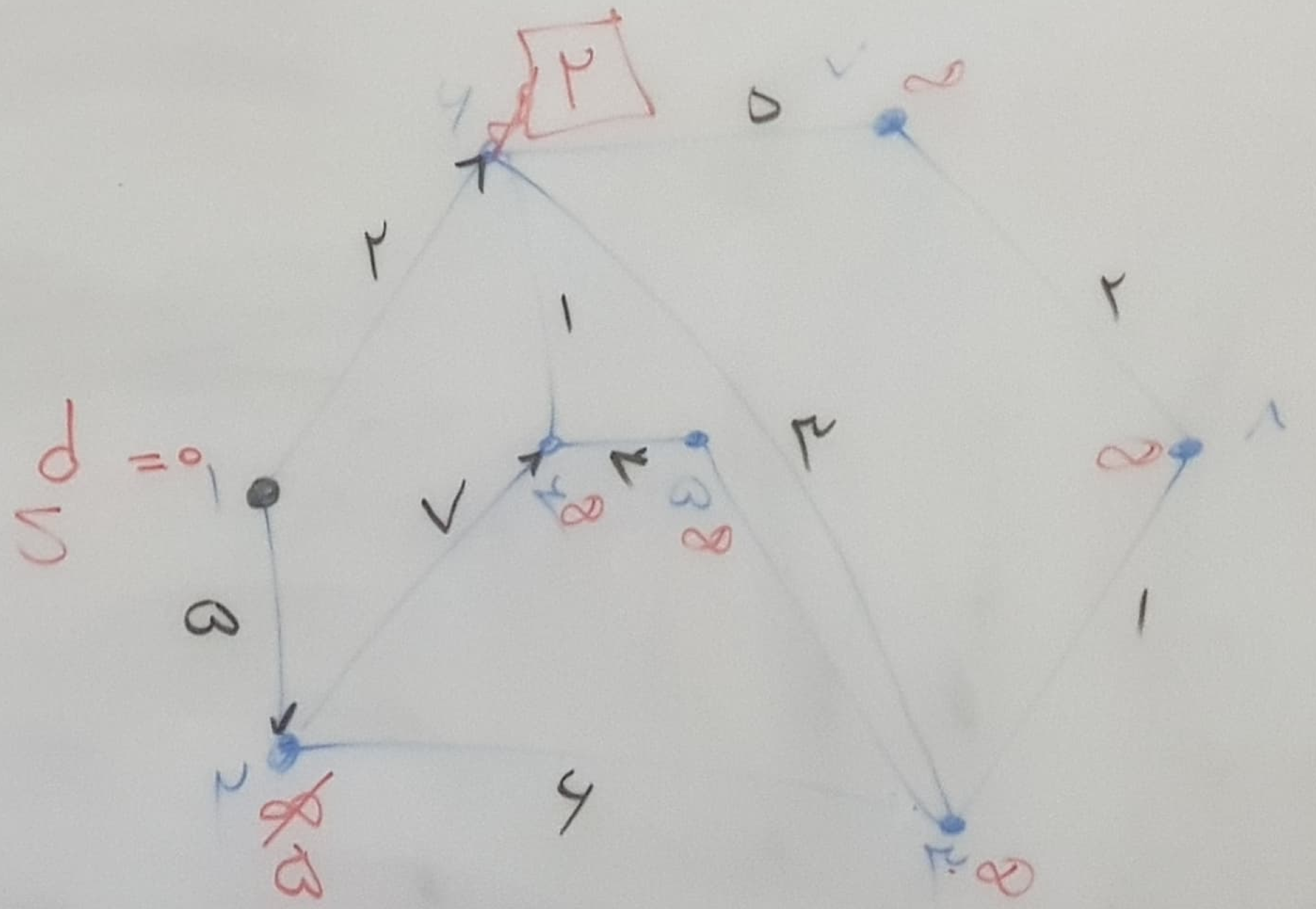
shortest path

بنام خدا.

$G=(V,E)$

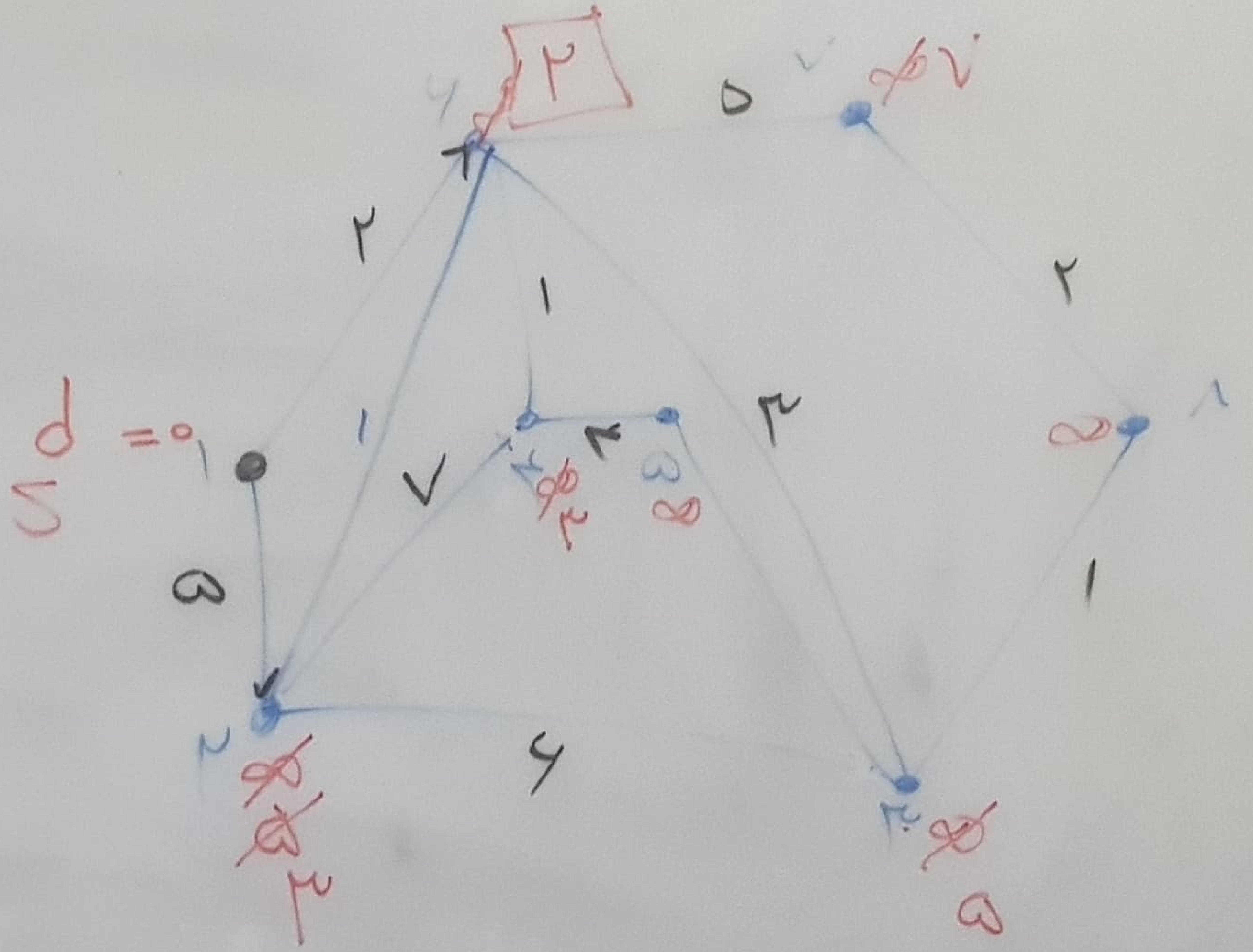
$\forall e, w_e$ طول هر یال (هزینه هر یال)

$s \in V$ مبدا.



بنام خدا

shortest path



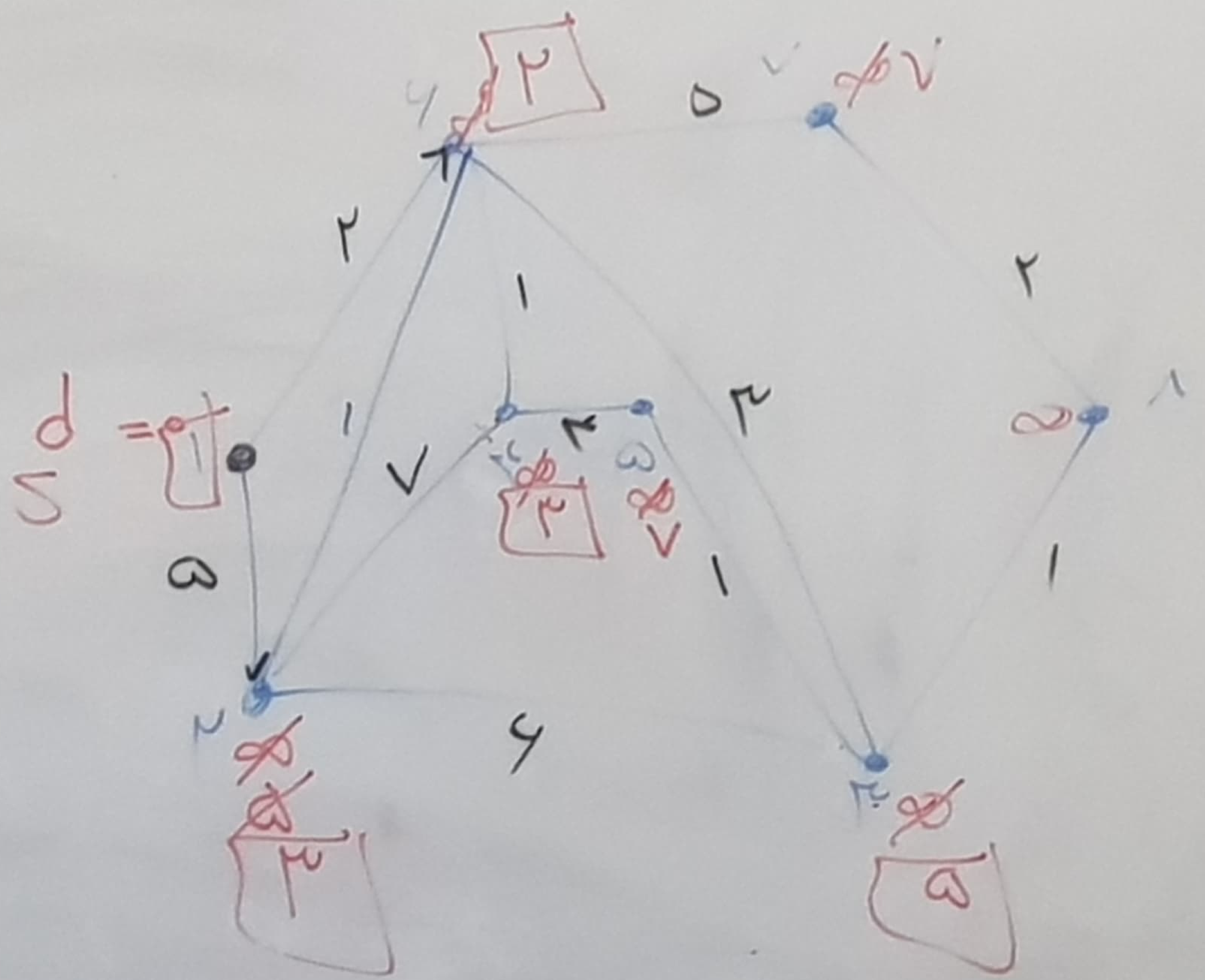
$G=(V,E)$

$\forall e,\ w_e$ طول هر یال (هزینه هر یال)

$s \in V$ مبدا

بنام خدا.

shortest path



$G=(V,E)$

$\forall e,\ w_e$ طول هریال (هزینه هریال)

$s \in V$ مبدا.

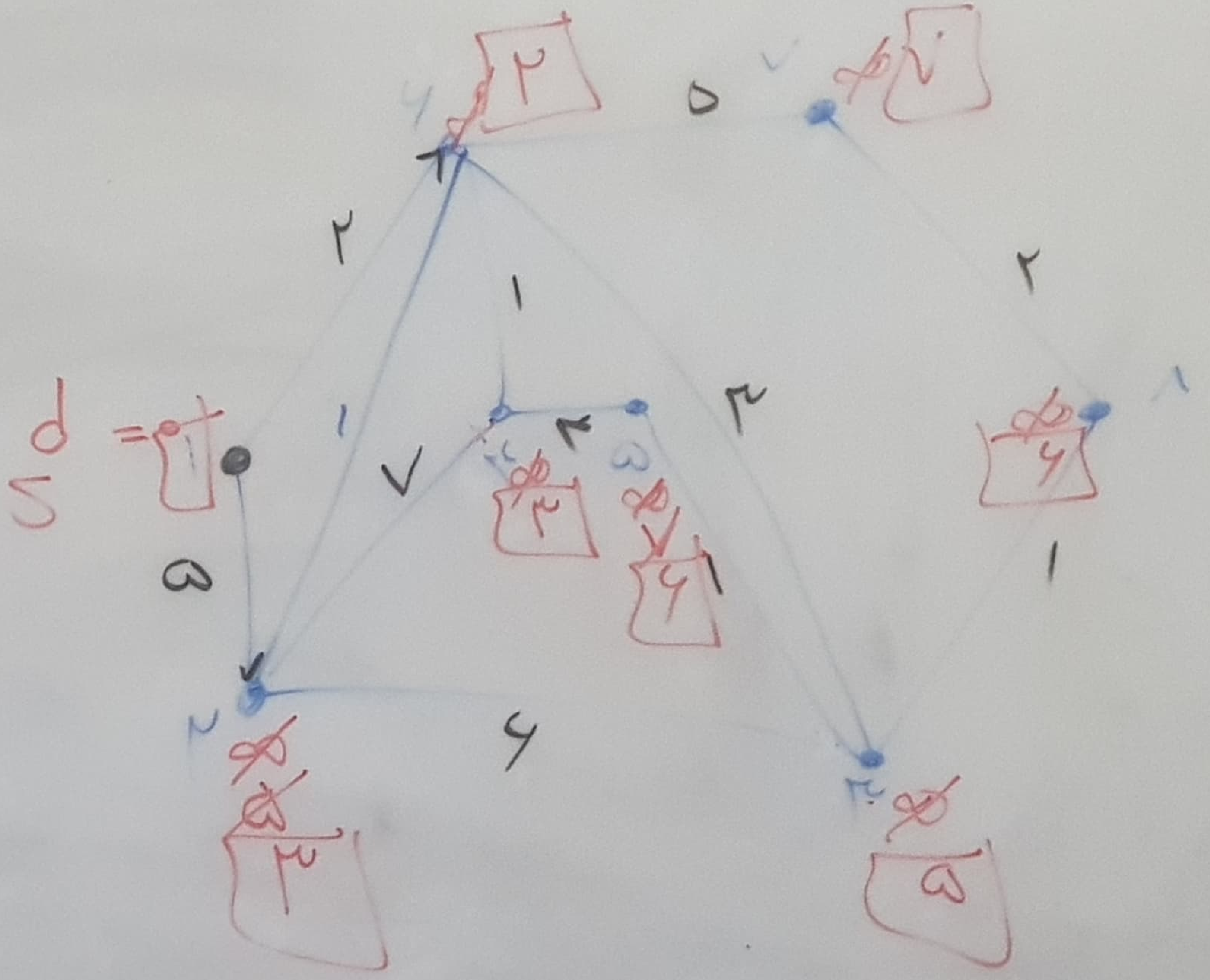
به نام خدا

shortest path

$G = (V, E)$

$\forall e,\ w_e$ طول هر یال (هزینه هر یال)

$s \in V$ مبدا.



S = {۱، ۶، ۲، ۴، ۳، ۵، ۸، ۷

مجموعه نهایی شده که در هر گام با راسی با حداقل فاصله به روز می‌شود

$S = \{$ ۱,۴ ; ۲ ; ۴ , ۳ , ۵ , ۸۷ $\}$

d

	1	2	3	4	5
d	0	∞	∞	∞	∞

	1	2	3	4	5
Mark	✓	-	-	-	-

Alg Dikjestra:

while $S \neq V$:

$d(s) = 0$

$d(v) = \infty \quad \forall v \in V - \{s\}$

$S = \{\}$

قضیه: تمام برچسب های $d(v)$ در انتهای الگوریتم دایجسترا طول کوتاه‌ترین مسیر را به گره v از s نشان می دهد.

اثبات: استقرا. در تکرار kام الگوریتم، برچسب هایی که قطعی شده اند، طول کوتاه‌ترین مسیر را می دهند.

به عبارت دیگر، اگر S_k، مجموعه گره هایی باشند که تا تکرار kام در مجموعه S قرار گرفته اند، برچسب آنها طول کوتاه‌ترین مسیر را از s به آنها نشان می دهد.

$S_1=\{s\}$ و بدیهی است.

حال فرض کنیم در تکرار $k-1$، تمام گره هایی که در S_{k-1} هستند، برچسب بهینه دارند.

می خواهیم نشان دهیم برچسب گره ها در S_k نیز بهینه است.

فرض کنیم w رأسی باشد که در تکرار kام به S اضافه شده است یعنی

$$S_k = S_{k-1} \cup \{w\}$$

قضیه: تمام برچسب های $d(v)$ در انتهای الگوریتم دایجسترا طول کوتاه‌ترین مسیر را به گره v از s نشان می دهد.

اثبات: استقرا. در تکرار kام الگوریتم، برچسب هایی که قطعی شده اند، طول کوتاه‌ترین مسیر را می دهند.

به عبارت دیگر، اگر S_k، مجموعه گره هایی باشند که تا تکرار kام در مجموعه S قرار گرفته اند، برچسب آنها طول کوتاه‌ترین مسیر را از s به آنها نشان می دهد.

$S_1=\{s\}$ و بدیهی است.

حال فرض کنیم در تکرار $k-1$، تمام گره هایی که در S_{k-1} هستند، برچسب بهینه دارند.

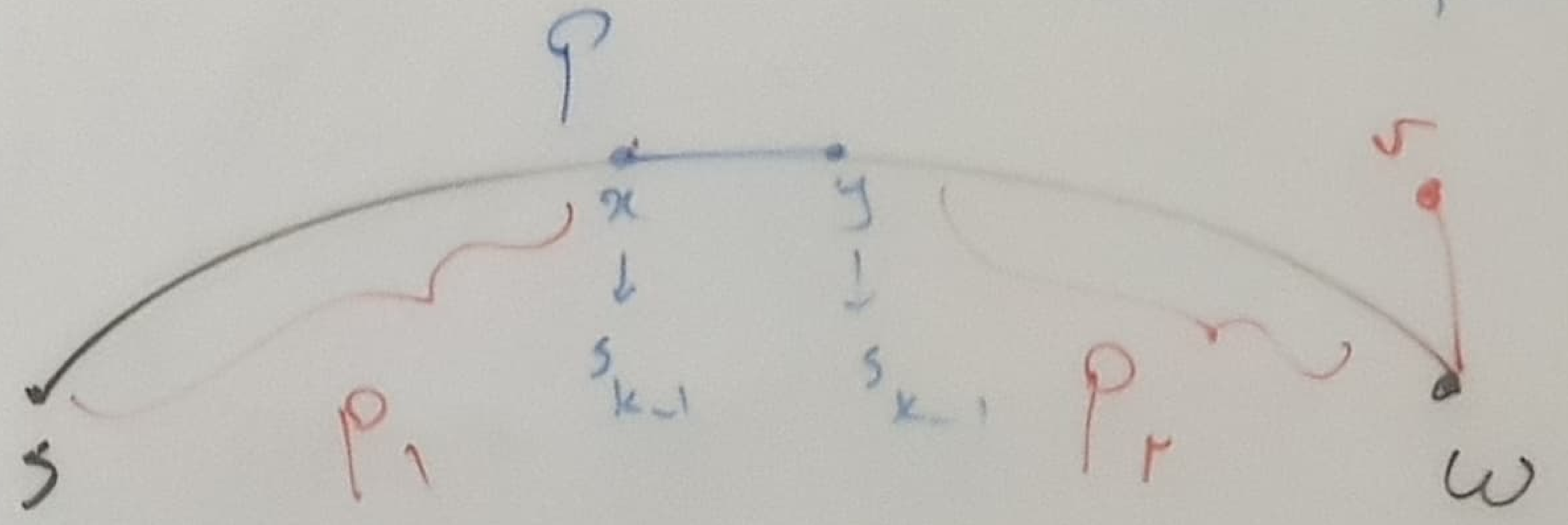
می خواهیم نشان دهیم برچسب گره ها در S_k نیز بهینه است.

فرض کنیم w گره‌ای باشد که در تکرار kام به S و از طریق یال vw اضافه شده است یعنی

$$S_k = S_{k-1} \cup \{w\}$$

به نام خدا

1



P مسیری از s به w باشد که برابر با مسیر الگوریتم برای رسیدن به w از s نیست. اولین گره از P که در S_{k-1} است را x و گره مجاور آن را که در S_{k-1} نیست را y می‌نامیم.

$$\underbrace{w_P}_{\text{هزینه}} = w_{P_1} + w_{xy} + w_{P_2}$$

$$w_P \geq w_{P_1} + w_{xy}$$

با توجه به فرض استقرا $w_{P_1} \geq d(x)$

(*) $$w_P \geq d(x) + w_{xy}$$

$S_1=\{s\}$ بدیهی است.

حال فرض کنیم در تکرار $k-1$، تمام گره‌هایی که در S_{k-1} هستند، برچسب بهینه دارند.

می‌خواهیم نشان دهیم برچسب گره‌ها در S_k نیز بهینه است.

فرض کنیم ω گره‌ای باشد که در تکرار k ام به S و از طریق یال $v\omega$ اضافه شده است یعنی

$$S_k = S_{k-1} \cup \{\omega\}$$

$x \in S_{k-1}$, $v \in S_{k-1}$

y ω

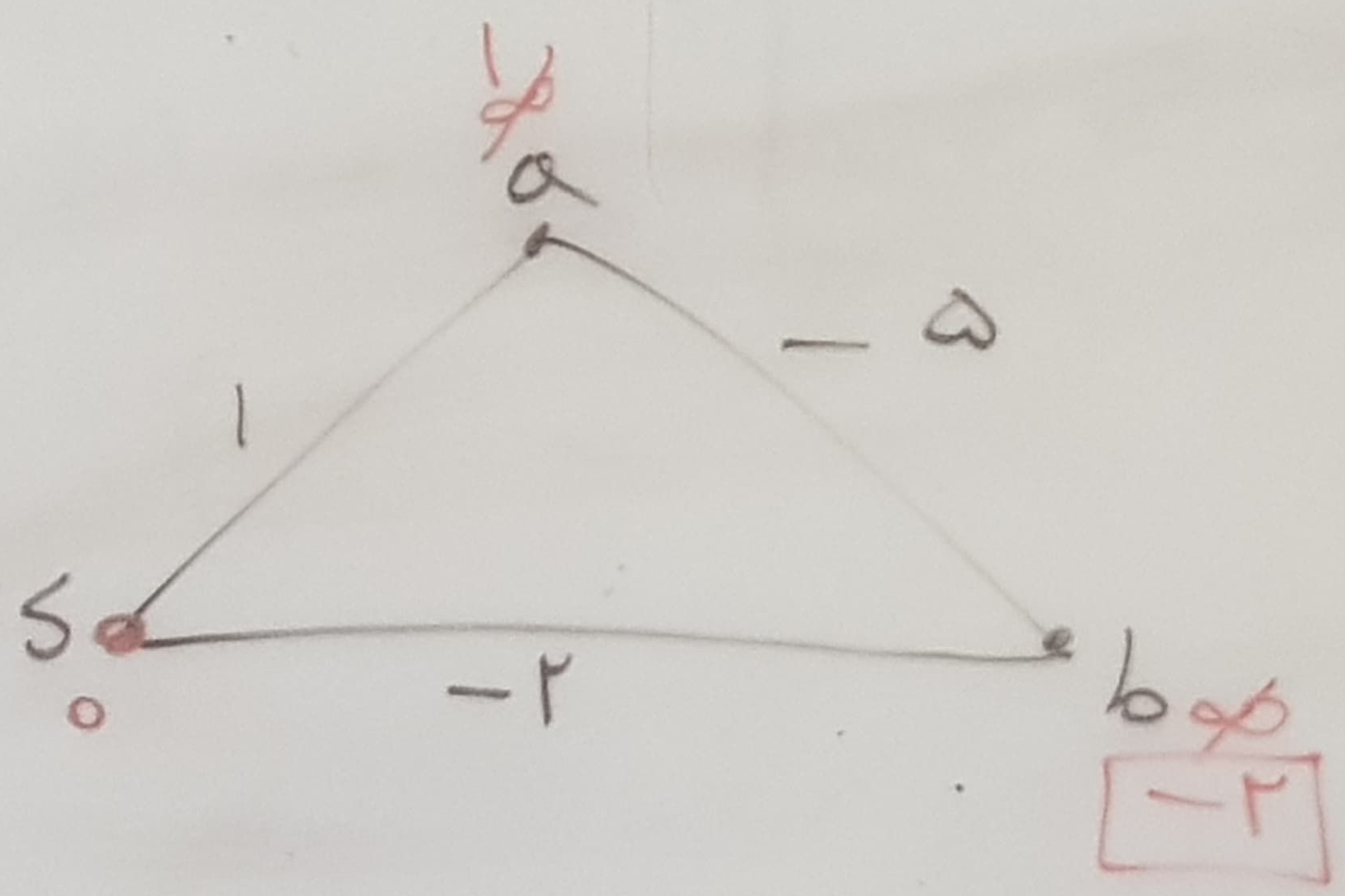
با توجه به اینکه در تکرار k ام ω انتخاب شده است و نه y یعنی

$d(x)+w_{xy} \geq d(v)+w_{v\omega}$

در نتیجه

$$w_p \geq d(v)+w_{v\omega}$$

$$w_p \geq d(\omega)$$



مشکل در یال با وزن منفی

به نام خدا

All pairs shortest path

گراف جهت‌دار $G=(V, E)$ که هر یال uv دارای هزینه (طول) w_{uv} و دور با طول منفی ندارد (صفر و مثبت است. (هزینه‌ها ممکن است منفی باشند)

هدف یافتن طول کم‌هزینه‌ترین مسیر بین هر جفت از گره‌های گراف است.