Recall:

Min , Max

$\boxed{\text{استاندارد}}$

سیمپلکس   متغیرهای مثبت   سمت مثبت   =

=

=

=

نرمال

Min   max

$\ge$ $\ge$

$\le$ $\le$

$\ge$

جمع

$S_1 = 20$

$(\quad) + S_1 \cancel{\le} \; =$ ۴۸

$\le$ ۱۰ + مثبت

$\le$ مثبت

$\le$ مثبت

خارج از سرفصل :

روش دو فازی

$Min\ a_1 + a_2 =$ صفر

M بزرگ یا دو فازی :

روش M بزرگ

$-e_1 + a_1 = 20$

$Min\ \_\_\_\_ + 0e_1 + Ma_1$

x_1

x_2

ط

تابع ... ای

ط $= \frac{1}{ق}$

ق $= ۰,۱$

به دست می‌آوریم. یک مسألهٔ ماکسیمم‌سازی نرمال، عبارت است از:

$$\begin{aligned} Max\ z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ s.t.\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ & \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\ & x_j \ge 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{۱۶}$$

دوگان یک مسألهٔ نرمال مانند (۱۶)، عبارت است از:

$$\begin{aligned} Min\ w &= b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\ & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\ & \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ & a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \ge c_n \\ & y_i \ge 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned} \tag{۱۷}$$

بنام خدا

مسئله اولیه Primal

$$\min \quad 5x_1 + 6x_2 + 8x_3$$

$$\begin{aligned} s.t \quad & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 5 \quad (\times y_1) \\ & x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 3 \quad (\times y_2) \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\max \quad 5y_1 + 3y_2$$

$$\begin{aligned} s.t \quad & 3y_1 + y_2 \leq 5 \\ & 2y_1 - y_2 \leq 6 \\ & 2y_1 + 3y_2 \leq 8 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

مسئله دوگان

$$z^* \geq 0$$

$$z^* \geq 5$$

$$z^* \geq 8$$

$$z^* \geq 11$$

دوگان $\longleftrightarrow$ اولیه

$$\max \; b y \qquad\qquad \min \; C^T x$$

$$\text{s.t} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{s.t}$$

$$A^T y \leq C \qquad\qquad A x \geq b$$

$$y \geq 0 \qquad\qquad x \geq 0$$

نیاز به حفظ نسبت $x \geq x$

min

قید	متغیر در حالت متناظر
$\geq$	مثبت
$\leq$	منفی
$=$	آزاد

min

متغیر	قید در حالت متناظر
$\geq$	$\leq$
$\leq$	$\geq$
آزاد	$=$

$$\min \quad 5x_1 + 4x_2 + 8x_3$$

$$6x_1 + 5x_2 + 9x_3 \geq 1000$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$

این مثال حالتیه که $y_2 < 0$ ؛ TODO : بیشتر بررسی شود.

$$\max \quad 1000 y_1 + y_2$$

s.t.

$$4 y_1 + y_2 \le 5$$

$$5 y_1 + y_2 \le 4$$

$$9 y_1 + y_2 \le 8$$

$$y_1 , y_2 \ge 0$$

$$y_2 < 0$$

$$\min \quad 5x_1 + 4x_2 + 8x_3$$

$$4x_1 + 5x_2 + 9x_3 \ge 1000$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \ge 1$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \ge 0$$

مسئله اولیه

$$\text{Max } Z = c^T x$$

$$\text{s.t } \quad Ax \le b$$

$$x \ge 0$$

مسئله دوگان

$$\text{Min } w = b^T y$$

$$\text{s.t } \quad A^T y \ge c$$

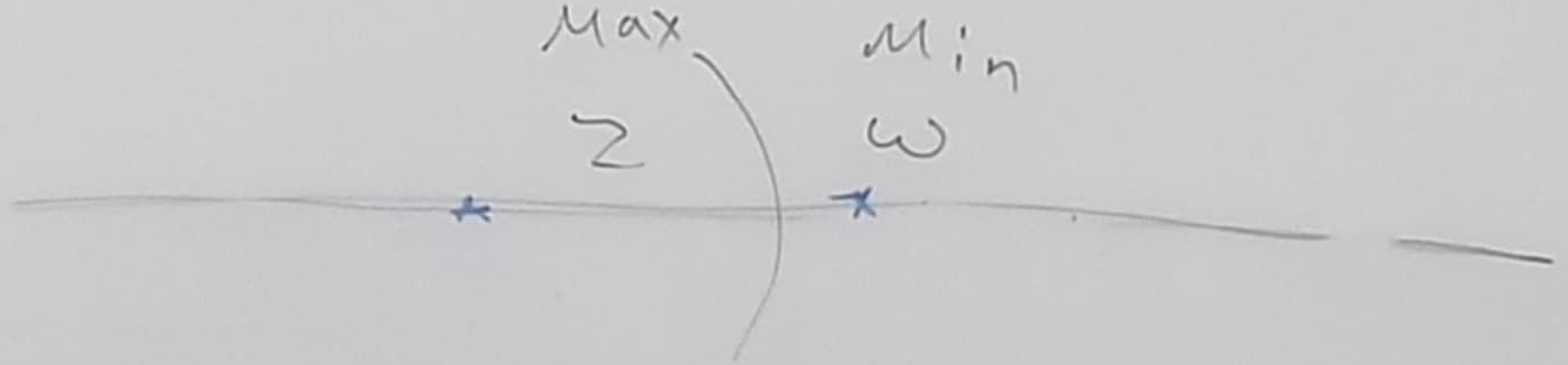
$$y \ge 0$$

قضیه ضعیف دوگان : <تمرین در صفحه بعد>

$z \le w$ هرگز کمتر نیست.

اولیه / دوگان

(در صورتی که هر دو شدنی باشند.) همیشه مقدار تابع هدف ماکزیمم سازی کران پایین مقدار تابع هدف مسئله مینیمم سازی است)



$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$

Max $1000 y_1 +$ [illegible] y_2

s.t.

$۴ y_1 + y_2 \leq ۵$

$۵ y_1 + y_2 \leq ۴$

$۹ y_1 + y_2 \leq ۸$

y_1, y_2 [illegible]

$y_2 \leq 0$

★ قضیه ضعیف دوگان:

مسئله اولیه:

$$\begin{aligned} \text{Max } & Z = c^T x \\ \text{s.t. } & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

مسئله دوگان

$$\begin{aligned} \min\ & w = b^T y \\ \text{s.t. } & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

★ برای هر جواب اولیه و دوگان معتبر، مقدار تابع هدف دوگان هرگز از مقدار تابع هدف اولیه کمتر نیست $Z \leq W$

و درحالتی که اولیه min باشد برعکس است $Z \geq W$

★ همیشه مقدار تابع هدف ماکزیمم سازی کران پایین مقدار تابع هدف مسئله مینیمم سازی است

پس به راحتی می توان نتیجه گرفت که

اگر یکی از مسئله ها جواب داشته باشد، دیگری هم جوا. دار

قضیه قوی دوگان: اگر مسئله اولیه دارای جواب بهینه باشد، آنگاه مسئله دوگان نیز دارای جواب بهینه است و مقدار بهینه تابع هدف دو مسئله برابر است

$$z^* = w^*$$

قضیه مکمل زائد: اگر یک محدودیت (قید) در مسئله اولیه فعال (tight) (نافعال) باشد متغیر دوگان مربوط به آن باید صفر باشد و اگر محدودیت غیرفعال باشد، متغیر دوگان متناظر مقدار مثبت دارد. و اگر متغیر اولیه مثبت باشد، محدودیت دوگان متناظر فعال است و متغیر اولیه صفر باشد آنگاه محدودیت دوگان متناظر غیرفعال ممکن است باشد.

مسئله اولیه

$$\text{Max } Z = c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax \le b \qquad a_{11}x_1 + \dots \le b_1 \quad y_1$$

$$x \ge 0$$

مسئله دوگان

$$\text{Min } W = b^T y$$

$$\text{s.t. } A^T y \ge c \qquad a_{11}y_1 + \dots + \ge c_1 \quad x_1$$

$$y \ge 0$$

به نام خدا

فرضیه : $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ یک جواب شدنی اولیه و

$y = [y_1 , \dots , y_m]$ یک جواب شدنی دوگان باشد.

آنگاه x جواب بهینه اولیه و y جواب بهینه دوگان است اگر و تنها اگر

$$s_i \, y_i = 0 \qquad i = 1, \dots, m$$

$$e_j \, x_j = 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

مصرف چوب

$+ s_1 = 48$ ، $\overset{\text{چوب}}{y_1} = 0$

$s_1^* = 20$

$s_2 = 0 \xrightarrow[\text{نقض}]{} y_2 = 10$

* اندیس ها خطا دارند

میز — صندلی — میز تحریر

$$\text{Max} \quad 60x_1 + 30x_1 + 20x_3$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \le 48 \qquad \text{چوب}$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \le 20 \qquad \text{نقاشی}$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \le 8 \qquad \text{نجاری}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

$x_1 = 2$

$x_2 = 0$

$x_3 = 8$

$s_1 = 24$

$s_2 = 0$

$z = 280$

$$\text{Min} \quad w = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$$

$$8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \ge 60$$

$$6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \ge 30$$

$$y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \ge 20$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

$y_1 = 0$

$y_2 = 10$

$y_3 = 10$

$w = 280$

۱ دی

<TRANSCRIPT>

اشاره‌ای به M بزرگ و دوفازی

مثال: پیدا کردن کران پایین (شهودی)

Primal ⟺ Dual

قضیه ضعیف

<P 58>

TODO

قضیه قوی

قضیه مکمل زائد

---

recall: تعریف متغیرها

تعریف تابع هدف

نوشتن محدودیت ها

استاندارد سازی

terminology: پایه / غیرپایه

آزمون بهینگی: وجود سطر صفر / آزمون نسبت

مفهوم پاسخ و وجود S_i

اضافه بودن معادله مربوطه ✓

Comments to add:

توجیه Min ≥

Max ≤

Qs چرا ضرب در (-1) نمی‌کنیم؟!

قضیه مکمل زائد.