به نام خدا. شبکه جریان

$G = (V, E)$ هر یال $(u,v) \in E$ ، $c(u,v)$

راس مبدا s راس مقصد t

جریان $f : V \times V \to \mathbb{R}$

جریان یک تابع با ورودی یال و خروجی عدد حقیقیه

قید ظرفیت یال $0 \le f(u,v) \le c(u,v) \quad \forall (u,v) \in E$

قید تعادل راس $\sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{v \in V} f(v,u) = 0 \quad \forall u \in V - \{s,t\}$

$\delta^+(u) \quad \delta^-(u)$

$\forall u \quad \delta^+(u) = \{v \mid (u,v) \in E\}$

راس هایی که راس یو با یال خروجی بهشون وصله

$\delta^-(u) = \{v \mid (v,u) \in E\}$

راس هایی که راس یو با یال ورودی بهشون وصله

$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s)$

مقدار جریان f

شبکه باقی مانده

برای جریان f

$$G_f = (V, E_f)$$

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & (u,v) \in E \\ f(u,v) & (v,u) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

به حالت دوم برعکس فکر کنیم، یعنی به ازای هر یال در شبکه اصلی ما یک یال معکوس با ظرفیتی برابر با جریانی که ازش رد کردیم نسبت میدیم.

هر چی یال توی شبکه اصلی هست + برعکسش رو

$$E_f = \{ (u,v) \mid (u,v) \in E \ \text{یا} \ (v,u) \in E \}$$

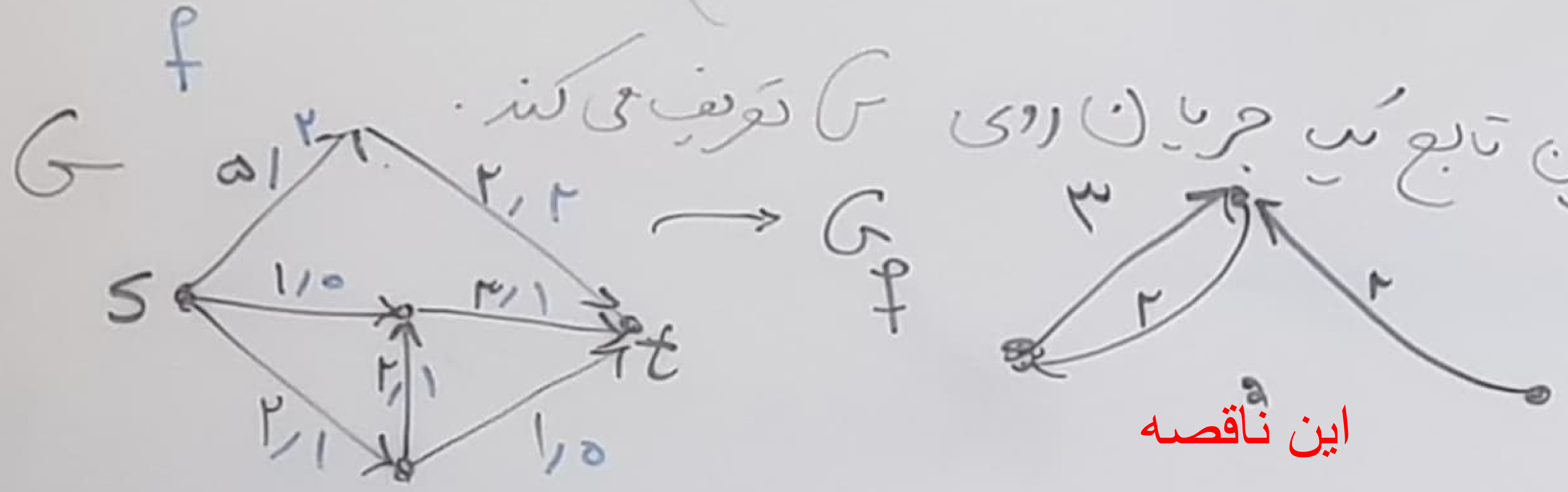
$$|E_f| \leq 2|E|$$

لم: اگر f یک جریان روی G باشد و G_f شبکه باقی مانده متناظر آن

و f' جریانی روی G_f باشد، تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(f \uparrow f')(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) & (u,v) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

این تابع یک جریان روی G تعریف می‌کند.



این ناقصه

برای جریان f

$$G_f = (V, E_f)$$

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & (u,v) \in E \\ f(u,v) & (v,u) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

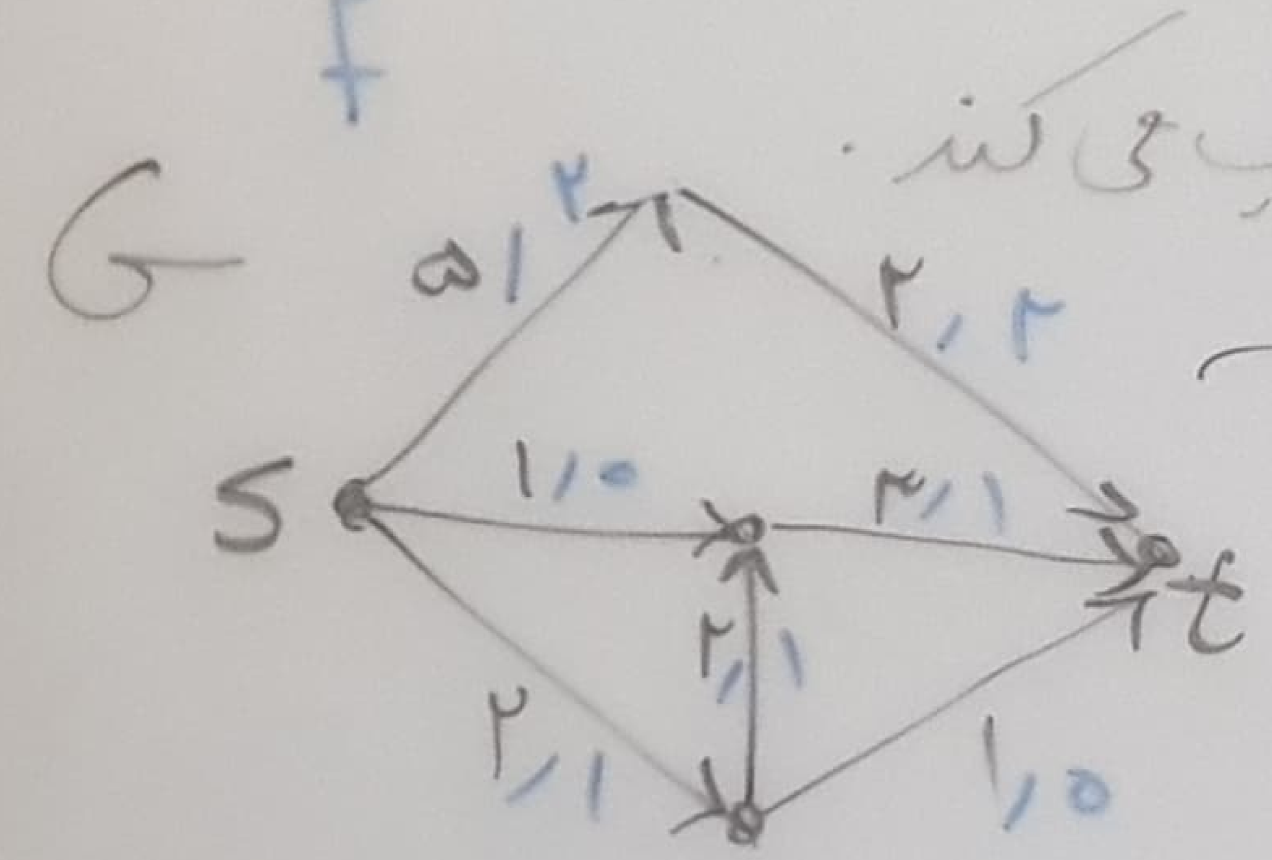
$$E_f = \{ (u,v) \mid (u,v) \in E \text{ یا } (v,u) \in E \}$$

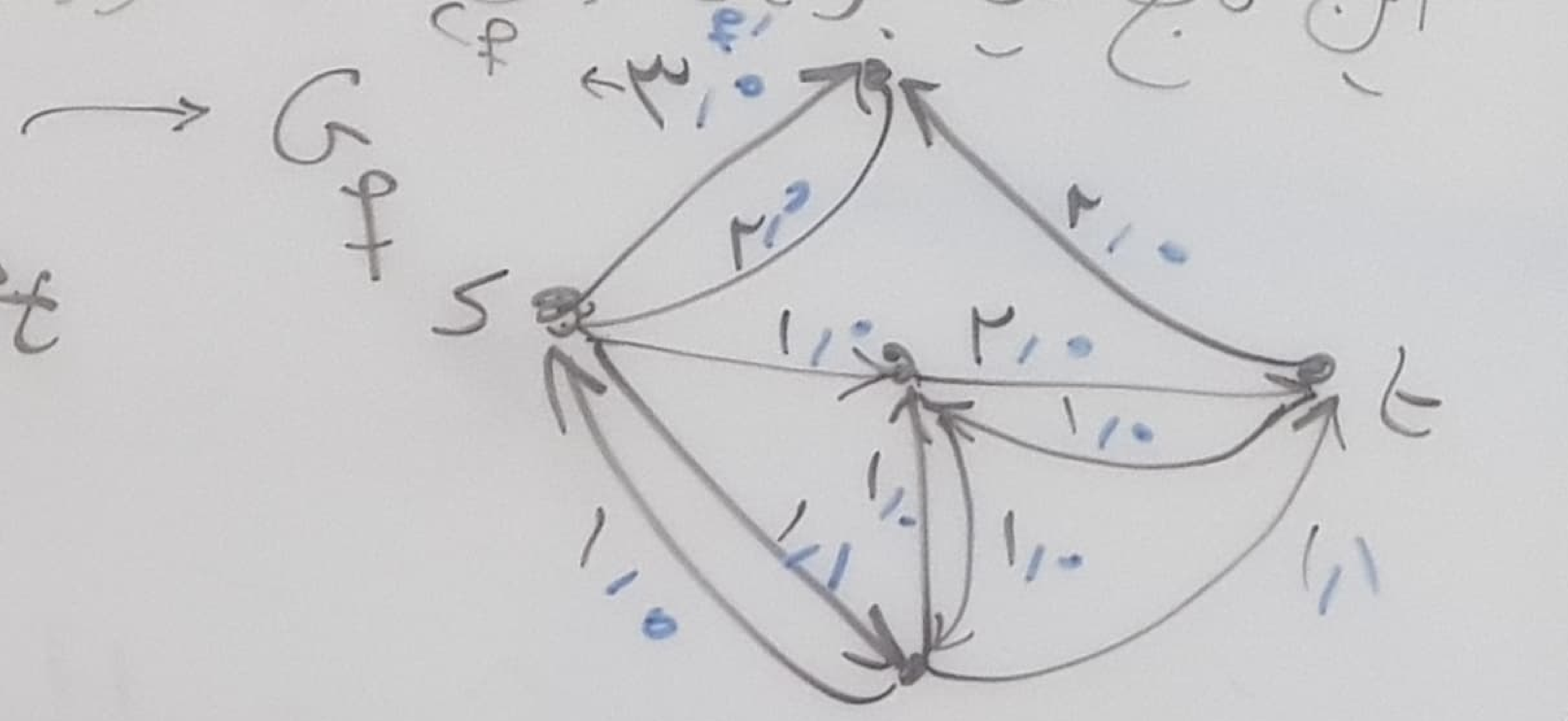
$$|E_f| \le 2|E|$$

لم ۱: اگر f یک جریان روی G باشد و G_f شبکه باقی مانده متناظر آن ، f' جریانی روی G_f باشد، تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(f \uparrow f')(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) & (u,v) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

این تابع یک جریان روی G تعریف می‌کند.





برای جریان f

$$G_f = (V, E_f)$$

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & (u,v) \in E \\ f(u,v) & (v,u) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E_f = \{ (u,v) \mid (u,v) \in E \text{ یا } (v,u) \in E \}$$

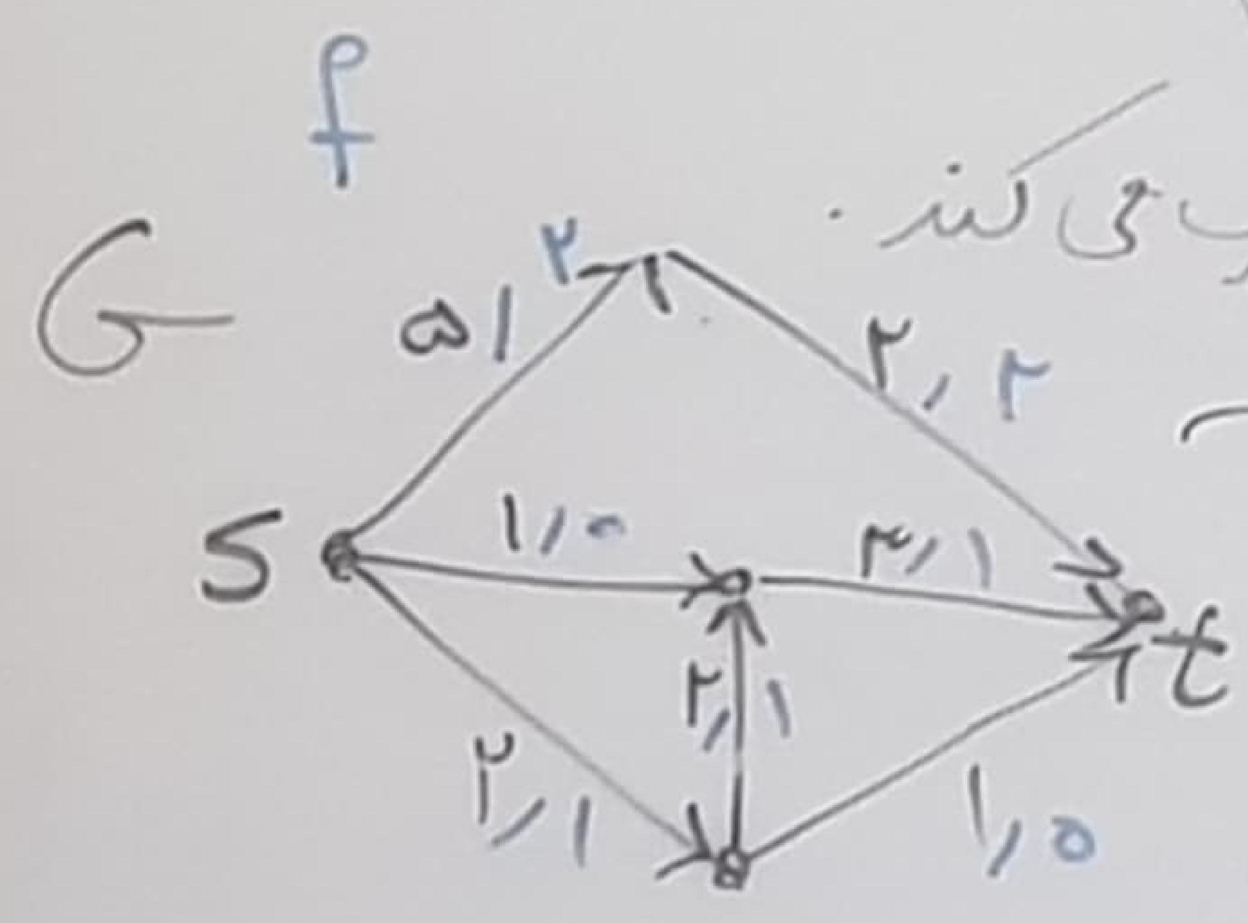
$$|E_f| \le 2|E|$$

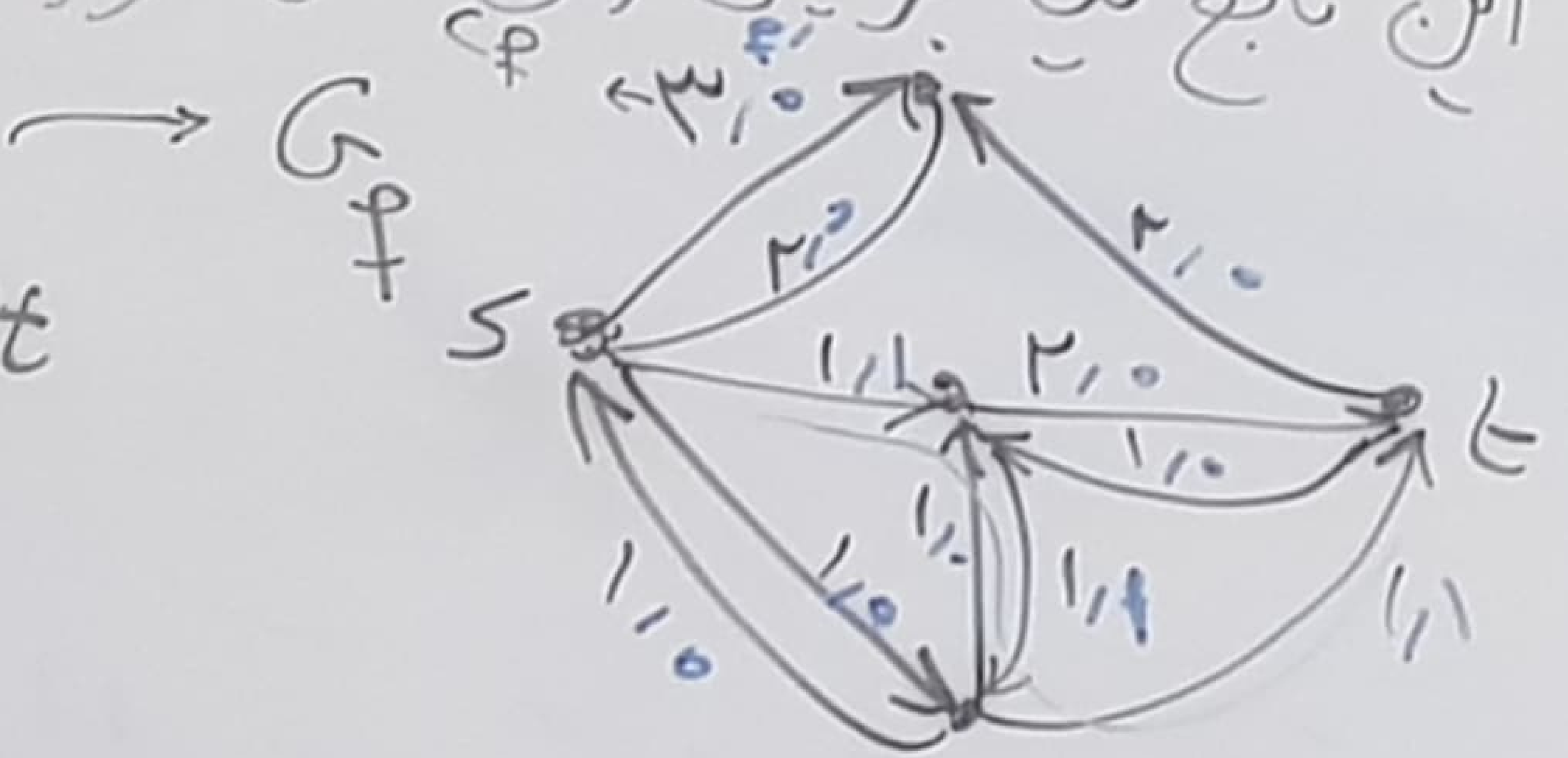
لم ۱: اگر f یک جریان روی G باشد و G_f شبکه باقی‌مانده متناظر آن

، f' جریانی روی G_f باشد، تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

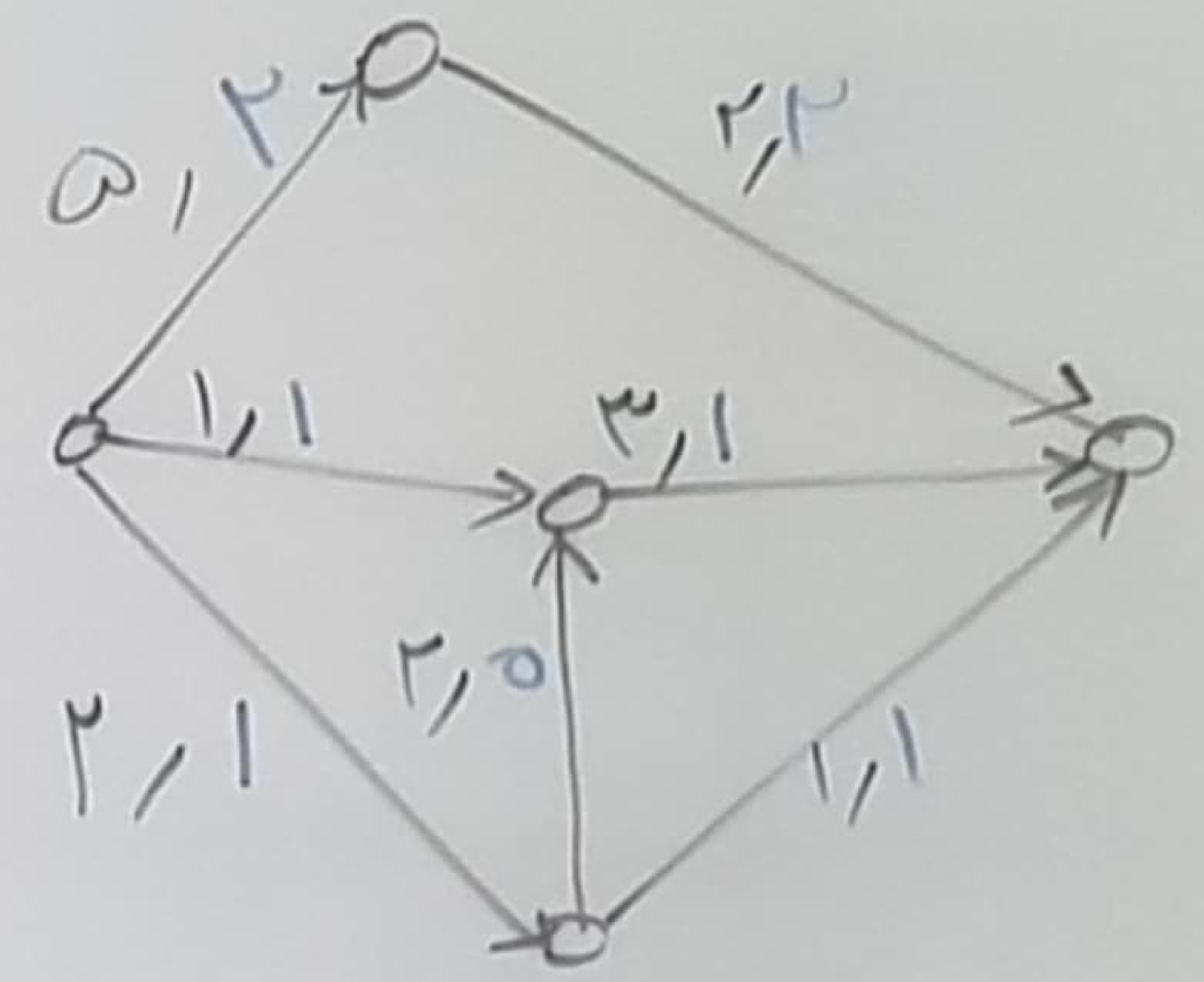
$$(f \uparrow f')(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) & (u,v)\in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

این تابع یک جریان روی G تعریف می‌کند.





$f \uparrow f'$
جریان

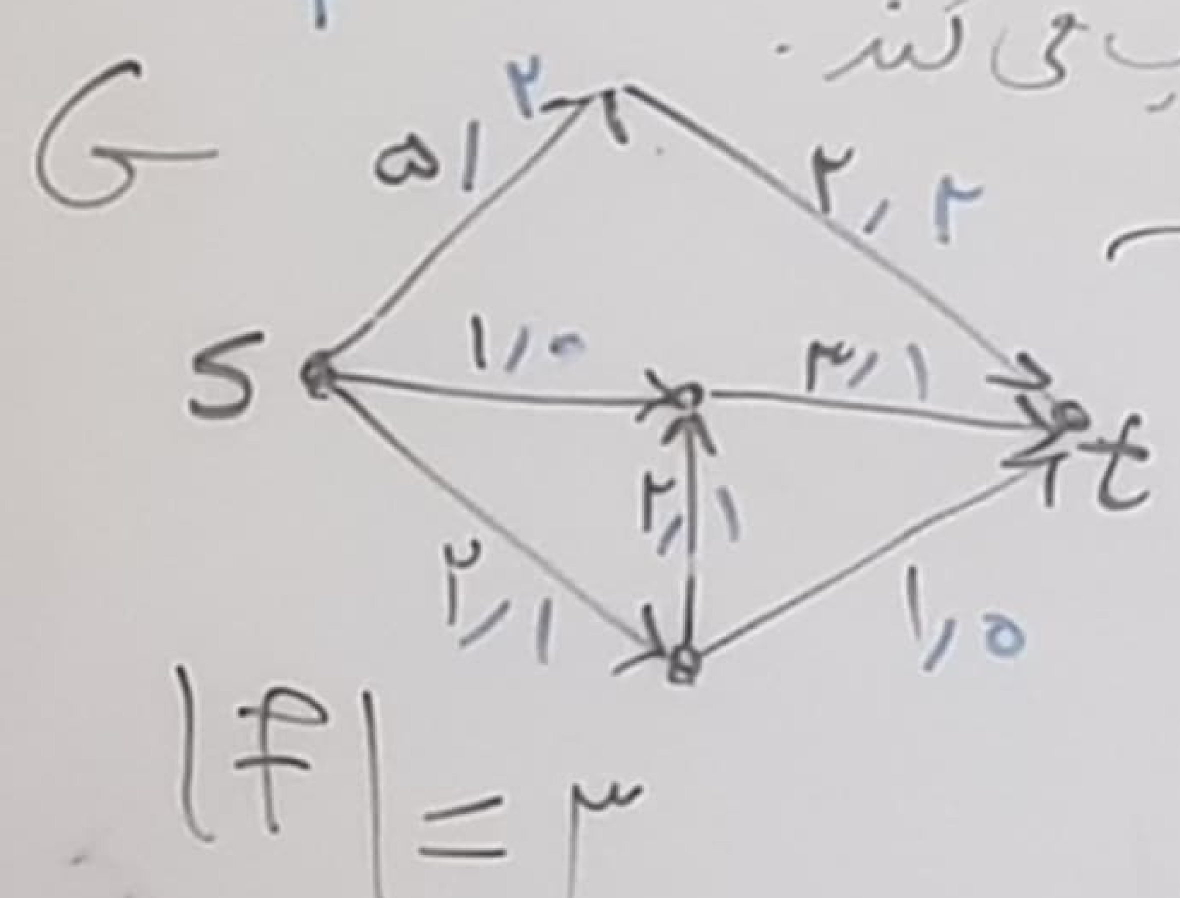


لم ۱: اگر f یک جریان روی G باشد و G_f گراف باقی‌مانده متناظر آن

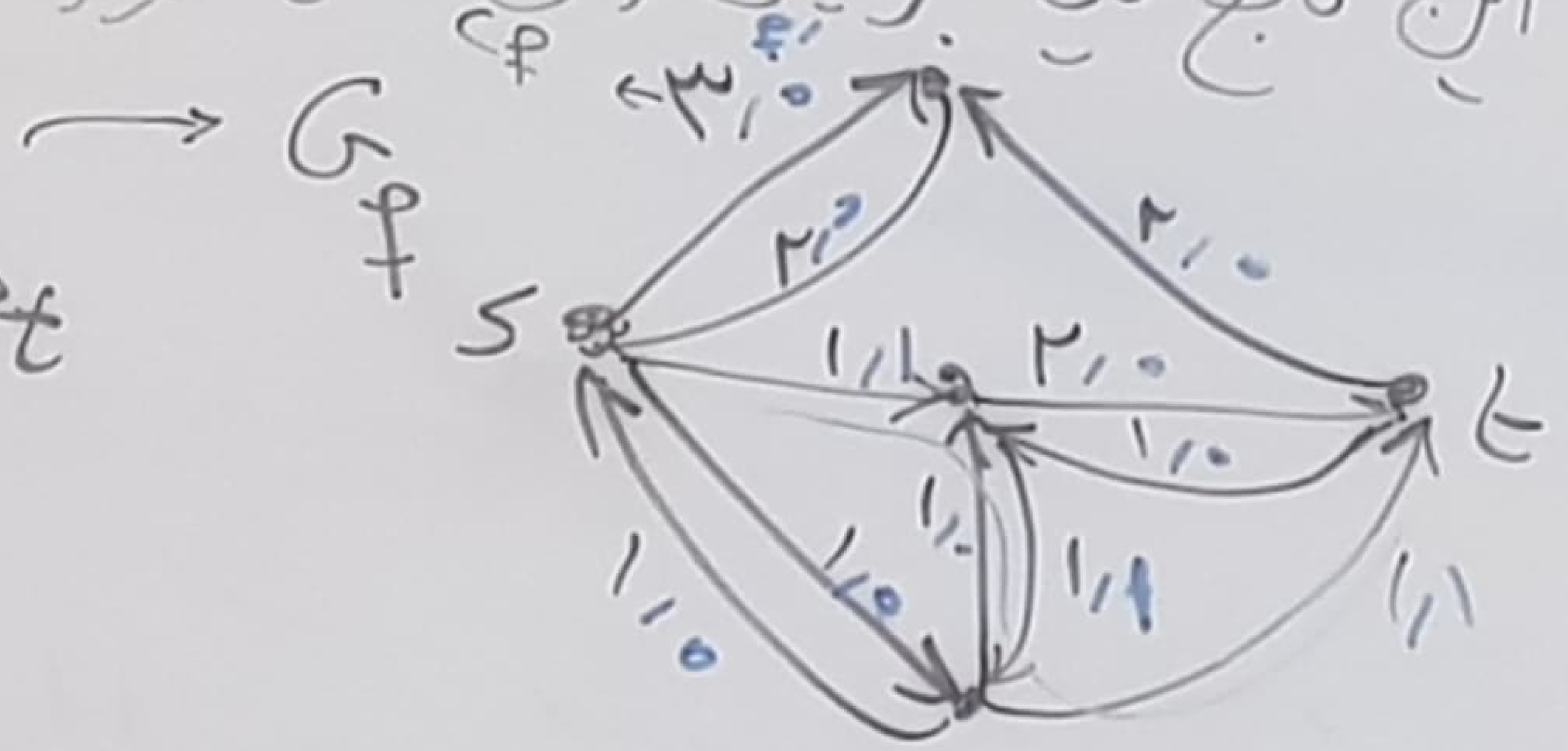
و f' جریانی روی G_f باشد، تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(f\uparrow f')(u,v)=\begin{cases} f(u,v)+f'(u,v)-f'(v,u) & (u,v)\in E \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

این تابع یک جریان روی G تعریف می‌کند.

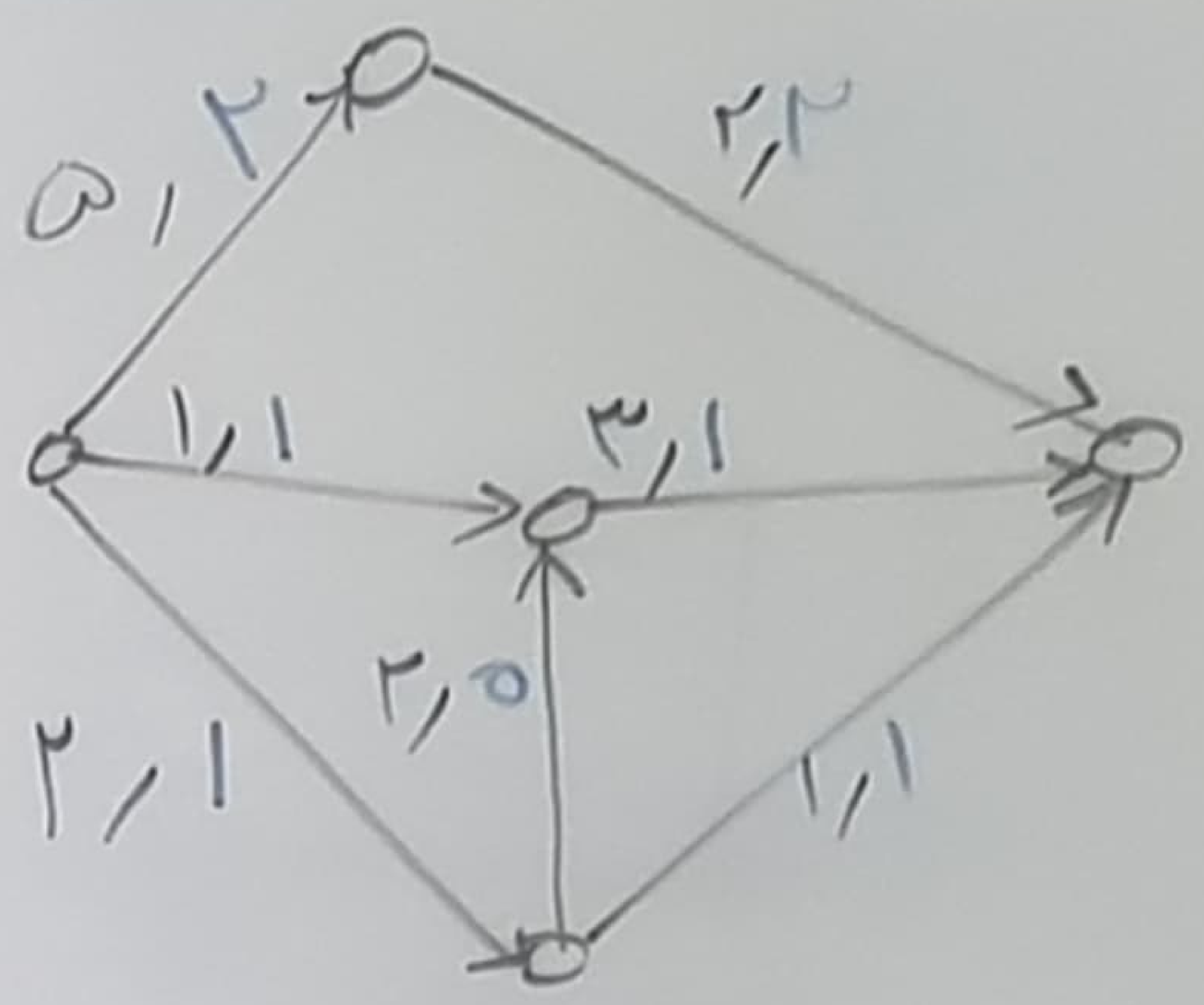


$|f| = ۳$



$f\uparrow f'$

جریان



?

$|f| < |f\uparrow f'| = ۴$

$|f^*|$

لم ۱: اگر f یک جریان روی G باشد و G_f شبکه باقی مانده متناظر آن

، f' جریانی روی G_f باشد، تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

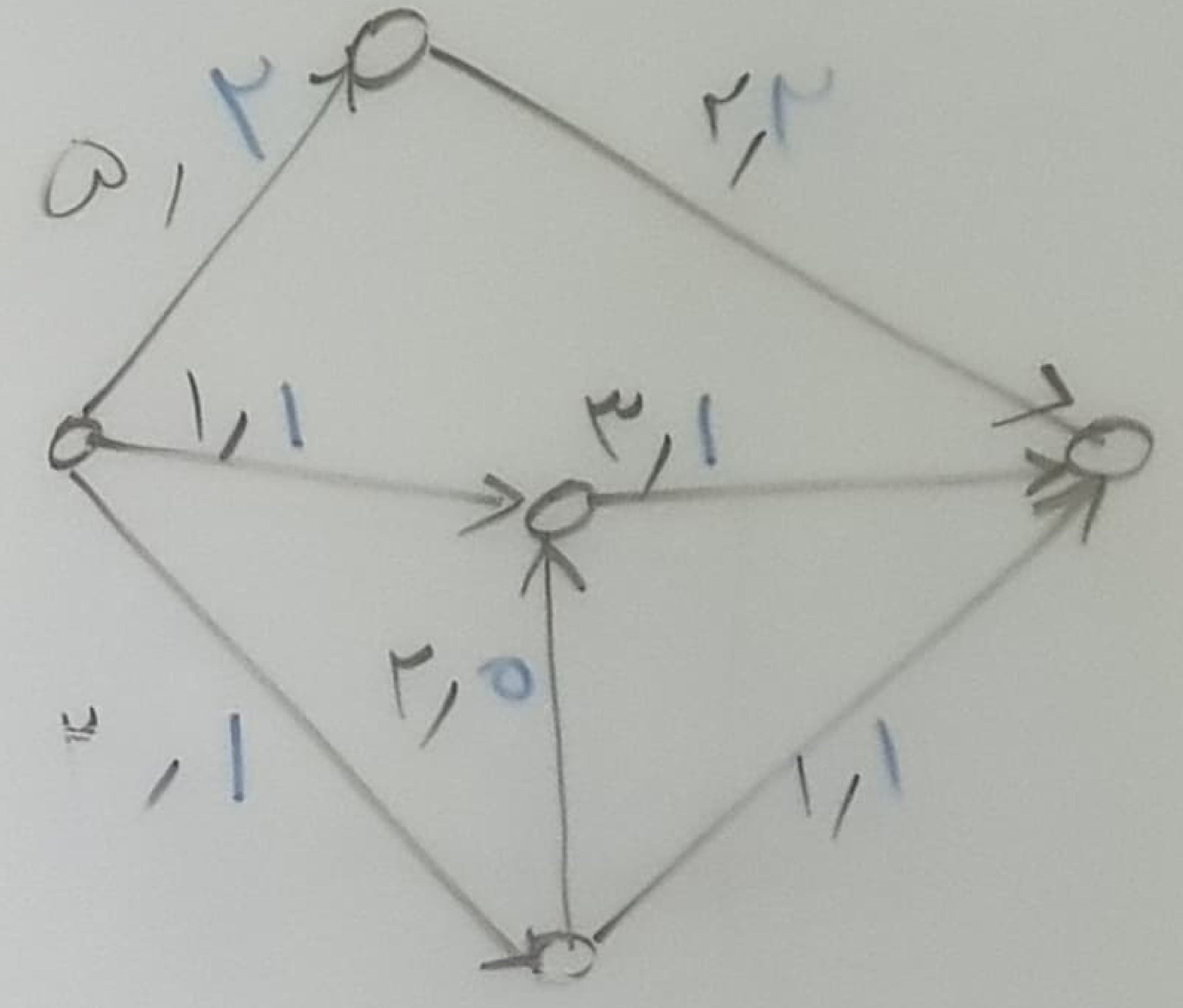
$$(f \uparrow f')(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) & (u,v) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

این تابع یک جریان روی G تعریف می‌کند. و مقدار آن برابر است با

$$|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$$

$f \uparrow f'$

جریان



$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & \text{if } (u,v) \in E , \\ f(v,u) & \text{if } (v,u) \in E , \\ 0 & \text{otherwise .} \end{cases} \tag{24.2}$$

به نام خدا.

اول قید ظرفیت را نشان می‌دهیم.

اگر $(u,v) \in E$ پس $c_f(v,u) = f(u,v)$

از طرفی $f'(v,u) \leq c_f(v,u)$ یعنی

$f'(v,u) \leq f(u,v)$

$(u,v) \in E$

$$(f \uparrow f')(u,v) = f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u)$$
$$\geq f(u,v) + f'(u,v) - f(u,v)$$
$$\geq 0$$

از طرف دیگر

$$(f \uparrow f')(u,v) = f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u)$$
$$\leq f(u,v) + f'(u,v)$$
$$\leq f(u,v) + c_f(u,v)$$
$$\leq f(u,v) + c(u,v) - f(u,v) = c(u,v)$$

$$(f \uparrow f')(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) & \text{if } (u,v) \in E , \\ 0 & \text{otherwise .} \end{cases} \tag{24.4}$$

$$\sum_{v\in \delta^{+}(u)} f(u,v) + \sum_{v\in \delta^{-}(u)} f(u,v)$$

$$+ \sum_{v\in \delta^{+}(u)} f'(u,v) + \sum_{v\in \delta^{-}(u)} f'(u,v)$$

$$- \sum_{v\in \delta^{+}(u)} f'(v,u) - \sum_{v\in \delta^{-}(u)} f'(v,u)$$

خواهیم داشت:

$\forall u \in V - \{s, t\}$ $\quad$ $(f \uparrow f' = f''$

$$\sum_{v\in V} f''(u,v) - \sum_{v\in V} f''(v,u)$$

$$= \sum_{v\in \delta^{+}(u)} f''(u,v) + \sum_{v\in \delta^{-}(u)} f''(u,v)$$

$$- \sum_{v\in \delta^{+}(u)} f''(v,u) - \sum_{v\in \delta^{-}(u)} f''(v,u)$$

$$f''(u,v) = f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u)$$

به نام خدا.

$$\sum_{v\in\delta^+(u)} f(u,v) - \sum_{v\in\delta^-(u)} f(v,u)$$

$$+ \sum_{v\in\delta^+(u)} f'(u,v) + \sum_{v\in\delta^-(u)} f'(u,v)$$

$$- \sum_{v\in\delta^+(u)} f'(v,u) - \sum_{v\in\delta^-(u)} f'(v,u)$$

$$\sum_{v\in\delta^+(u)} f(u,v) - \sum_{v\in\delta^-(u)} f(v,u)$$

$$+ \sum_{v\in\delta^+(u)\cup\delta^-(u)} f'(u,v) - \sum_{v\in\delta^+(u)\cup\delta^-(u)} f'(v,u)$$

این ۴ حاصل جمع را می‌توان روی v در نظر گرفت

زیرا جریان یال‌های غیرموجود صفر است.

اگر $u=s$ باشد.

$$|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$$

$$\sum_{v \in V} f''(u,v) - \sum_{v \in V} f''(v,u) = \sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{v \in V} f(v,u)$$

$$+ \sum_{v \in V} f'(u,v) - \sum_{v \in V} f'(v,u)$$

پس با توجه به اینکه قید تعادل روی f و f' برقرار است یعنی

$$\forall u \in V - \{s\}$$

$$\sum_{v \in V} f''(u,v) - \sum_{v \in V} f''(v,u) = 0$$