

f جریان در G

f' جریان در G

$$(f \uparrow f')_{(u,v)} = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) \\ - f'(v,u) \\ f(v,u) \end{cases}$$

$$(u,v) \in E$$

$$(v,u) \in E \\ \text{otherwise}$$

مقدار

$$|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$$

به نام خدا.

$$(u,v) \in E \Rightarrow \overset{\text{ظرفیت}}{C(u,v)}, G = (V, E)$$

رأس s مبدأ
رأس t مقصد

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s)$$

مسیر افزایشی (Augmenting path)

یک مسیر افزایشی P یک مسیر ساده از s به t

در شبکه باقی مانده P است. با توجه به تعریف

شبهه باقی مانده، جریان روی یال (u, v) از

مسیر افزایشی می تواند حداکثر تا $C_P(u, v)$

بدون نقض مقید ظرفیت افزایش یابد.

$$C_P(p) = \min \{ C_P(u, v) : (u, v) \in P \}$$

لم : ظرفیت بیشینه P یک مسیر افزایشی در G باشد. تابع زیر تعریف می کنیم

$$f_P(u, v) = \begin{cases} C_P(p) & (u, v) \in P \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

آنگاه f_P یک جریان روی G است. مقدار $|f_P| = C_P(p) > 0$

$$(f \uparrow f')(u, v) = \begin{cases} f(u, v) + f'(u, v) - f'(v, u) & \text{if } (u, v) \in E, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (24.4)$$

f جریان در G

f' جریان در G

$$(f \uparrow f')(u, v) = \begin{cases} f(u, v) + f'(u, v) & (u, v) \in E \\ -f'(v, u) & (v, u) \in E \\ f(v, u) & \text{otherwise} \end{cases}$$

جریان

مقدار

$$|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$$

نتیجه: اگر f یک جریان روی G باشد

و f' یک غیرافزایشی در f ، مقدار جریان روی G را توسط کم قبل عنوان کرده ایم. آنگاه

$$f \uparrow f' \geq f$$

تجمع

جریان روی G است که مقدار آن

$$|f \uparrow f'| = |f| + |f'| > |f|$$

تقیه: اگر یک جریان روی یک ماده

و یک عنصر این در یک مقدار جریان روی
 و را توسط یک مثلثی که در یک آند

نوع
 $p \quad p \quad p$
 $p \quad p \quad p$

جریان روی یک ماده به مقدار آن

$$|p \quad p \quad p| = |p| + |p| + |p|$$

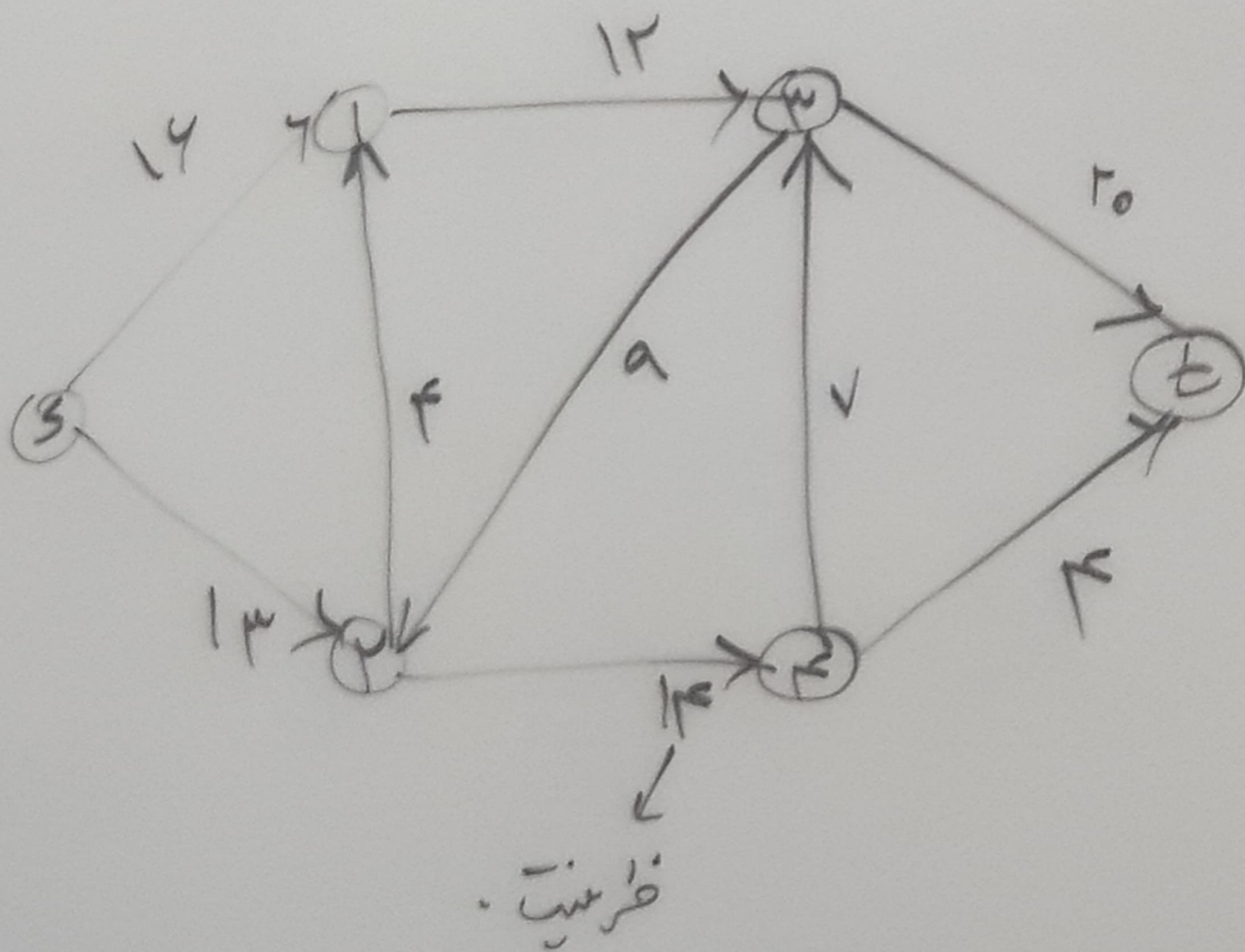
برش در سطح جریان: (S, T)

V

$S \in S$ $S - V \leq 1$

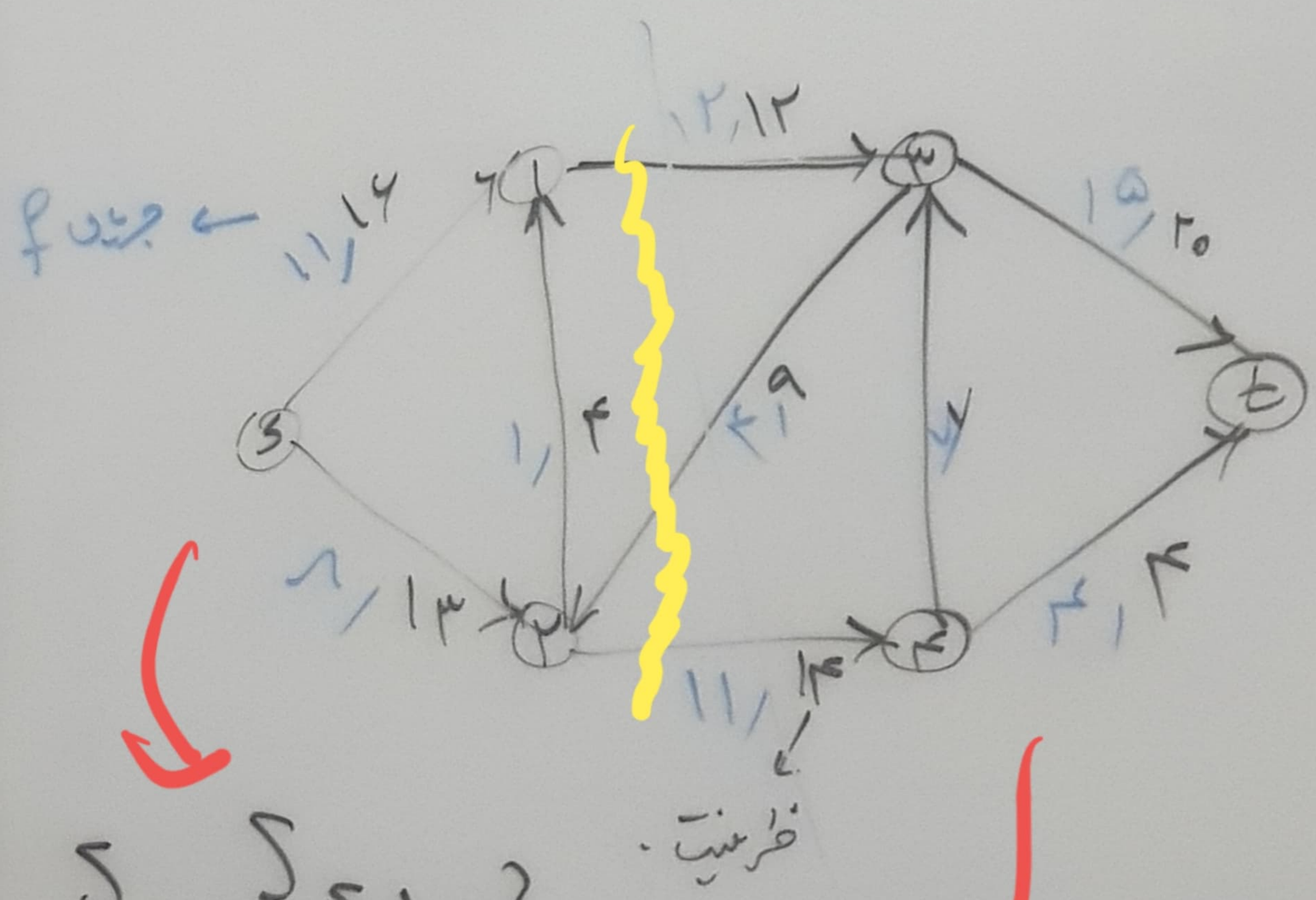
—
 —
 —
 —

برش در شبکه جریان : (S, T)



(S, T)

برش در شبکه جریان :



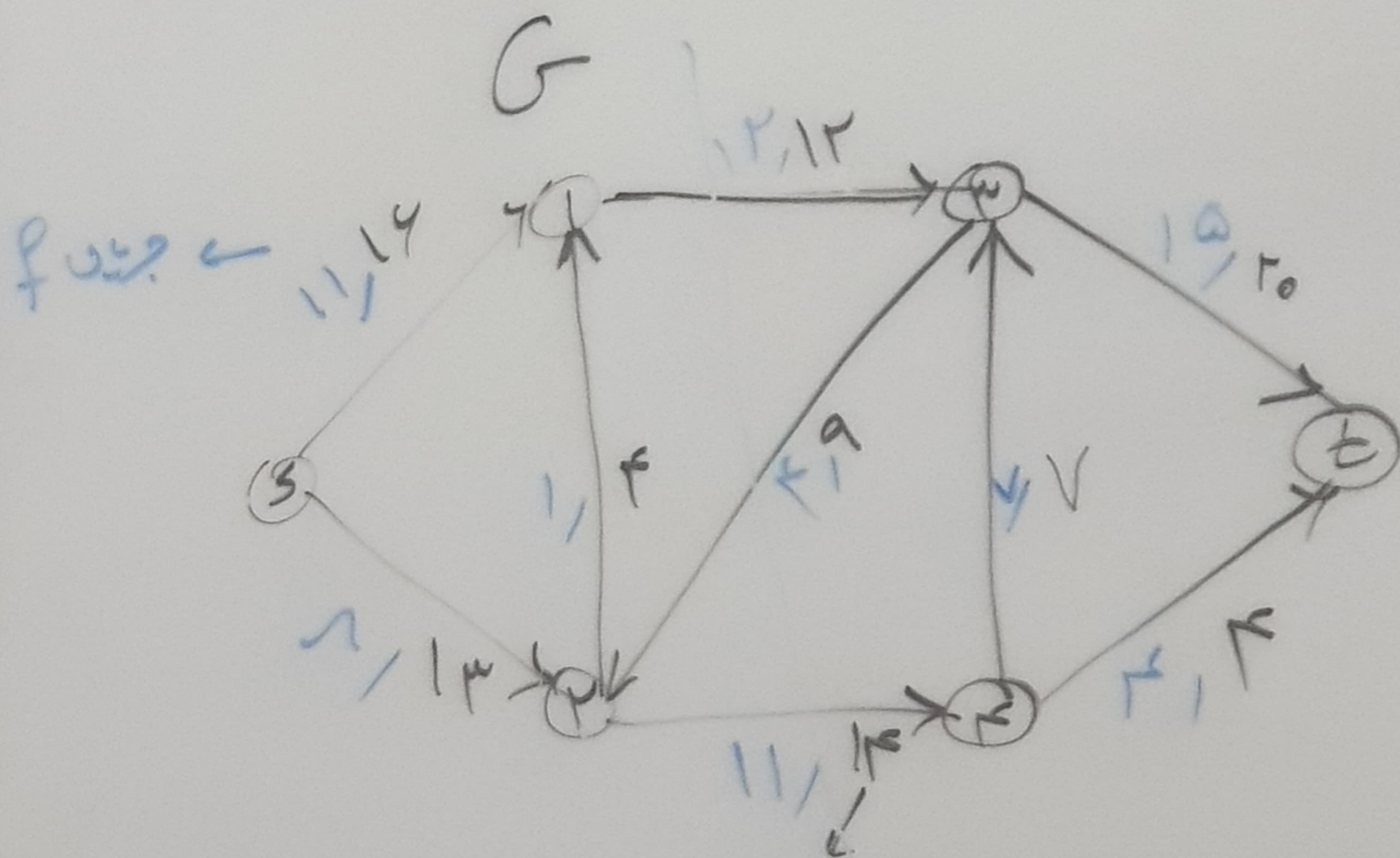
ظرفیت

$$S = \{s, 1, 2\}$$

$$T = \{3, 4, t\}$$

(S, T)

برش در شبکه جریان :



$$S = \{s, 1, 2\}$$

$$T = \{3, t\}$$

فرضیه $f(S, T) = 19$

$C(S, T) = 26$

تعریف:
آندر f

یک جریان u می باشد

خرمیت u به صورت زیر تعریف شود:

$$C(s, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} C(u, v)$$

خالص جریان عبوری از u به v $C(u, v)$

را با $f(s, T)$ نشان می دهیم

و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$f(s, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v)$$

$$= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v, u)$$

فروچی از T

←

تعریف:
آلر f یک جریان رای می باشد

خالص جریان عبوری از برش (S, T)

را با علامت $f(S, T)$ نشان می دهیم

و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$f(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v)$$

$$- \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v, u)$$

ظرفیت برش (S, T) به صورت زیر تعریف می شود

$$C(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} C(u, v)$$

برش C (min cut) برشی در شبکه G به کمترین ظرفیت است.

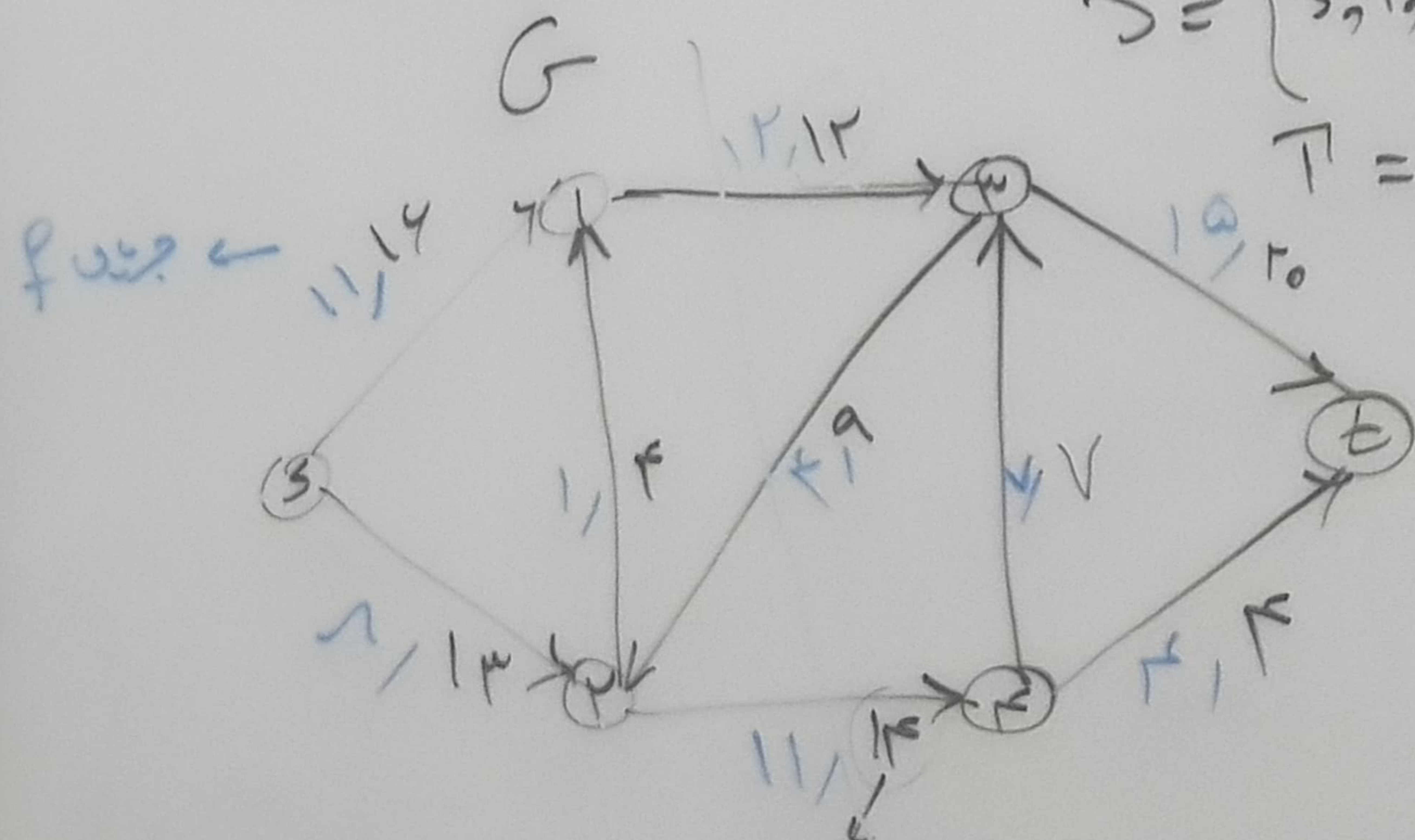
(S, T)

برش در شبکه جریان :

$$S = \{s, 1, 2, 4\}$$

$$T = \{3, t\}$$

$$12 + 7 + 3$$



$$S = \{s, 1, 2\}$$

$$T = \{3, 4, t\}$$

$$f(S, T) = 19 \text{ تقریباً}$$

$$C(S, T) = 26$$

نتیجه: اگر یک جریان روی شبکه

و یک حیدر افزایی در f مقدار جریان روی
 f را توسط کم قبل تعریف کرده باشیم آنگاه

$$f \uparrow f \uparrow f$$

تابع

جریان روی شبکه که مقدار آن

$$|f \uparrow f \uparrow f| = |f| + |f| > |f|$$

$$\sum_{u \in S} f(u, v)$$

$$= \sum_{v \in V} \left(f(s, v) + \sum_{u \in S - \{s\}} f(u, v) \right)$$

$$- \sum_{v \in V} \left(f(v, s) + \sum_{u \in S - \{s\}} f(v, u) \right)$$

می‌دانیم $s \cap T = \emptyset$, $V = S \cup T$

$$|f| = \sum_{v \in S} \sum_{u \in S} f(u, v) + \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(u, v)$$

$$- \sum_{v \in S} \sum_{u \in S} f(v, u) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(v, u)$$

لم: فرض کنید f جریان در شبکه (S, T) می‌باشد.

برش روی شبکه (S, T) را تعریف کرده‌ایم.

$$f(S, T) = |f|$$

اثبات:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s)$$

$$+ \sum_{u \in S - \{s\}} \left(\sum_{v \in V} f(u, v) - \sum_{v \in V} f(v, u) \right)$$

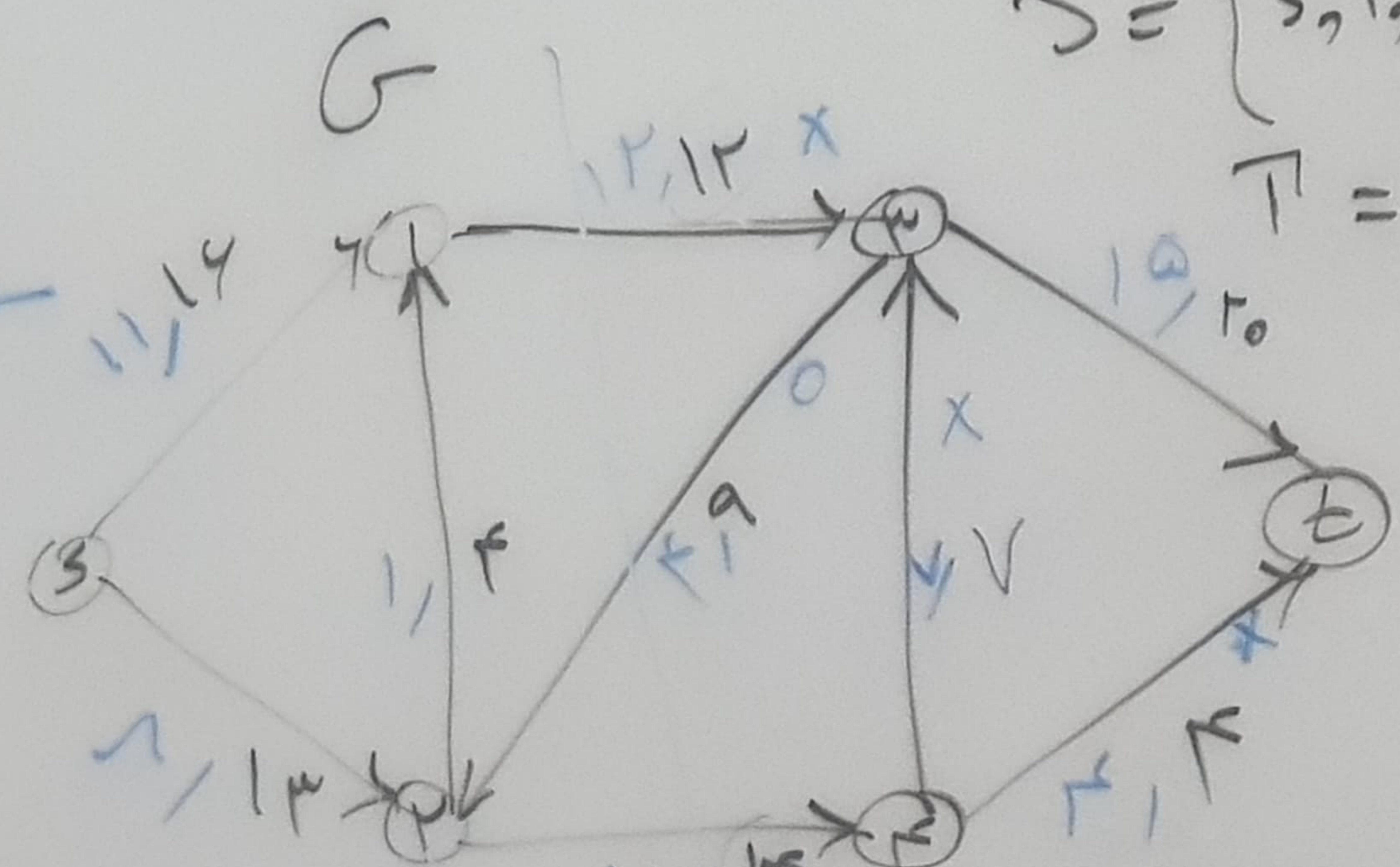
(S, T)

برش در شبکه جریان

$$S = \{s, 1, 2, 4\}$$

$$T = \{3, t\}$$

$$12 + 7 + 5$$



ظرفیت $f(S, T) = 19$

$$C(S, T) = 24$$

$$S = \{s, 1, 2\}$$

$$T = \{3, 4, t\}$$

ادامه:

$$\sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(u, v) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(v, u)$$

$$+ \left(\sum_{v \in S} \sum_{u \in S} f(u, v) - \sum_{v \in S} \sum_{u \in S} f(v, u) \right)$$

مقدار پتانسیل صفراست

$$\Rightarrow |f| = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v, u)$$

$$= f(S, T)$$

تفسیر: مقدار هر جریان f در شبکه G با ظرفیت هر پخش دگوا

در شبکه G از بالا محدود شده است.

اثبات: فرض کنیم f یک جریان دگوا و (S, T) یک پخش دگوا باشد.

$$|f| = f(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v, u)$$

$$\leq \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v)$$

$$\leq \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v) = C(S, T)$$

عصه جریان بسته برش کینه.

آنگاه f یک جریان روی شبکه G باشد که اندازه زیر
معادل هم هستند.

۱- f یک جریان بسته روی G است.

۲- شبکه باقی مانده G_f میز افزایش ندارد.

۳- برای یک پخش (S, T) مقدار $|f| = C(S, T)$

قضیه جریان بسته برداشته.

آند ϕ یک جریان روی S باشد که انداز زیر
معادل هم هستند.

۱- ϕ یک جریان بسته روی S است.

۲- S به باقی ماند ϕ میزبانی ندارد.

۳- برای یک پرش (S, T) مقدار $|\phi| = C(S, T)$

اثبات از ۱ به ۲ \Leftarrow فرض ϕ جریان بسته باشد و یک میزبانی در بسته باقی ماند ϕ
وجود داشته باشد. این میز را با m غایش میسیم. بهنق نم آن غلی ϕ یک مقدار
صفت دارد که $|\phi| \geq |m|$ خواهد بود که تناقض است.

اثبات ۲ به ۳ \Leftarrow کرا مجموعه رئوس در ϕ در تقاطع سیریم که از S به آن میز
وجود دارد $T = V - S$. روشن است که $s \in S$ و $t \in T$ و $(s, t) \in \phi$
یک صفت دخواه رئوس $u \in S$ و $v \in T$ را در نظر بگیریم.

آند $(u, v) \in E$ آنگاه $f(u, v) = C(u, v)$ زیرا در غیر این صورت $(u, v) \notin E$
از S در T و v در T بود و تناقض دارد.

ادامه:

$$f(s, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v, u)$$

$$= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} C(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} 0$$

$$= C(s, T)$$

از طرفی طبق تعریف داریم: $|f| = f(s, T)$ یعنی

$$|f| = C(s, T)$$

آمر $(v, u) \in E$ آنگاه باید $f(v, u) = 0$ زیرا

زیرا در غیر این صورت $f(u, v) = f(v, u)$ مقدار مثبت داشت و

?

u

v

به این مفهوم است که

$(u, v) \in E$ که با $v \in T$

تأیید است.

قضیه جریان بسته برداشته.

آنگاه یک جریان روی سطح باشد که از آن
معادل هم هست.

۱- یک جریان بسته روی سطح است.

۲- سطح باقی مانده \oint_C میدانهای ندارد.

۳- برای یک برداش (S, T) مقدار $|f| = C(S, T)$

دنباله $(3) \leq (4)$: طبق نتیجه اثبات شده:

$$C(S, T) \leq |f| \text{ برای هر}$$

برش دایره (S, T) پس شرایط داده ای ابراب می کنند که

\oint_C جریان بسته باشد.