KTH Engineering Sciences

Ekvationslösning och minstakvadratmetoden

Målsättningen med denna laboration är att du ska få förståelse för olika metoder för ekvationslösning och kurvanpassning. Metoder som behandlas är

- Fixpunktsmetoden
- Newtons metod för olinjära skalära ekvationer och system
- Minstakvadratmetoden

Viktiga koncept som behandlas i laborationen är

- Konvergensordning

Innan ni börjar med uppgifterna:

- **Anmäl er (bägge i gruppen)** till en av labbgrupperna SF1546 - **Lab 1** 1–100.
- Egen anmälan till grupp **stänger onsdag den 3 februari**.
- Gör de obligatoriska förberedelsuppgifterna i Matlab Grader.
- Redovisning av laborationen sker i form av en skriftlig quiz den 17 februari kl 15.15. Quizen görs individuellt. Mer information om quizen på nästa sida.
- Ni ska skicka in de Matlab-program (och eventuella egenskrivna funktioner som programmen använder) som efterfrågas nedan. Egenskrivna funktioner lägger ni längst ner i huvudprogrammet.
- Deadline för **inlämning av filer är måndag 15 februari**. Se till att ni har skickat in allt som efterfrågas.

För quizen gäller följande

- Quizen kommer du att hitta du under Uppgifter i Canvas. Den släpps kl 15.15 den 17 februari 2021. Du har en timma på dig att göra uppgifterna.
- Quizen består av 4 frågor. Du behöver ha 3 av fyra rätt på quizen.
- För att kunna svara på vissa av frågorna i quizen behöver du ha Matlab och de Matlab-program som löser uppgifterna i Laboration 1 tillhands under quizen. Du kommer att behöva köra Matlab-programmen, men med andra ekvationer än de som är givna i Laboration 1, för att kunna svara på frågorna.
- Om du inte har Matlab installerat på din dator kan du använda Matlab Online (https://www.mathworks.com/pr online.html). Se till att du vet hur det fungerar innan du börjar med quizen.
- Om du har jobbat i grupp med någon, tänk på att du måste ha din egen kopia av gruppens Matlab-program som löser uppgifterna.
- Du kan bara göra quizen en gång.
- Quizen rättas först efter att alla har lämnat in.
- Det är inte tillåtet med samarbete under quizen.
- Om du inte blir godkänd på quizen får du en ny chans i P4.
- Vissa av frågorna kommer att vara av typen:

  Vi vill bestämma en av rötterna till följande ekvation $x^2 - 9x - 12\sin(3x+1) + 20 = 0$ med Newtons metod. Låt $x_0 = 2$. Vad blir värdet på roten? Ange värdet med 3 korrekta decimaler.

  Notera: I quizen kommer ekvationerna inte att vara desamma som i laborationen vilket betyder att du kommer att behöva modifiera och köra dina program i Matlab för att få fram svaren.
- Det kan även komma frågor på den bakomliggande teorin för de metoder som har gåtts igenom på labben.
- Det kommer inte frågor som är direkt kopplade till explicita resultat i laborationen, som exempelvis 2 a), 2d) 2e) eller 3 c).

1. Olinjär skalär ekvation

Vi vill bestämma samtliga rötter till följande skalära ekvation,

$$x^2 - 9x - 12\sin(3x+1) + 20 = 0. \tag{1}$$

med fixpunktsmetoden och med Newtons metod.

Plotta $f(x) = x^2 - 9x - 12\sin(3x+1) + 20$. Samtliga nollställen till f skall vara med. Notera ungefärliga värden på nollställena och använd dem som startgissningar i metoderna nedan. Hur många nollställen finns det?

UPPGIFT 1. FIXPUNKTSMETODEN

Använd följande fixpunktsiteration för att lösa och besvara nedanstående uppgifter

$$x_{n+1} = \frac{1}{20}x_n^2 + \frac{11}{20}x_n - \frac{3}{5}\sin(3x_n+1) + 1. \tag{2}$$

a) Motivera varför (2) är en fixpunktiteration för (1).

b) Använd teorin för att förklara vilka nollställen fixpunktiterationen kan hitta.

c) Skriv ett MATLAB-program `Fixpunkt.m` som beräknar de nollställen som fixpunktsiterationen ovan kan hitta till (1).

   Programmet ska skriva ut x_n och skillnaden $|x_{n+1} - x_n|$ efter varje iteration, samt returnera ett svar med ett fel som är mindre än en given tolerans $\tau = 10^{-10}$. Använd lämpligt avbrottsvillkor för att säkerställa detta.

   Använd `format long` för att se alla decimaler.

d) Hur ska skillnaderna $|x_{n+1} - x_n|$ avta enligt teorin? Verifiera att det stämmer i praktiken.

Skicka in programmet `Fixpunkt.m`

UPPGIFT 1. NEWTONS METOD

e) Skriv ett MATLAB-program `Newton.m` som beräknar samtliga nollställen till (1) med hjälp av Newtons metod. Programmet ska skriva ut x_n och skillnaden $|x_{n+1} - x_n|$ efter varje iteration, samt returnera ett svar med ett fel som är mindre än en given tolerans $\tau = 10^{-10}$. Använd lämpligt avbrottsvillkor för att säkerställa detta.

f) Stämmer tumregeln för Newtons metod att antalet korrekta siffror dubblas i varje iteration?

g) Jämför konvergensen för fixpunktiteration och Newtons metod. Vilken metod konvergerar snabbast? Hur hänger det ihop med metodernas konvergensordningar?

Skicka in programmet `Newton.m`.

2. Temperaturen i Stockholm

Du har fått en fil `STHLMARN.mat` (finns att ladda ner från Canvas) med uppmätta temperaturer (i grader) varje timma från 1 januari 2009 till 31 december 2020. Temperaturerna ligger lagrade i en vektor `Tm`. Data kommer från SMHIs mätstation Stockholm-Arlanda. Du har fått i uppdrag av Stockholms bönder att med hjälp av denna data ta reda på när på året den kallaste och den varmaste dagen inträder och om man kan se någon långsiktig ökning av temperaturen under åren 2009-2020.

För att kunna ta reda på detta ska du anpassa den givna temperaturdatan med hjälp av minstakvadratmetoden till modellen

$$T(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \sin(\omega(t - t_s)) \tag{3}$$

där T är temperaturen i grader och t är tiden i timmar. I modellen representerar c_1 en ungefärlig medeltemperatur över tiden och c_2 representerar en långsiktigt minskning eller ökning av temperaturen. Den sista termen i modellen representerar den periodiska variationen av temperaturen över ett år där c_3 är amplituden, $\omega = 2\pi/(365 \cdot 24)$ ger periodtiden ett år och t_s är fasförskjutningen (i timmar).

Uppgift 2. Minstakvadratmetoden

Skriv ett Matlab-program `MKV.m` som löser uppgifterna nedan.

a) Sätt $t_s = 10 \cdot 24$ och anpassa modellen till data. Plotta data och den anpassade modellen i samma plott. Ger detta värde på t_s en bra anpassning?

b) Beräkna normen av residualen, $\|T_d - T_{mod}\|_2$ och skriv ut värdet. T_d är givna temperaturdata som finns i filen `STHLMARN.mat` och T_{mod} är motsvarande temperaturvärden beräknat med modellen (3).

c) För att få en bättre anpassning till data ska nu t_s väljas sådan att $\|T_d - T_{mod}\|_2$ minimeras. Låt t_s variera mellan 0 och $182 \cdot 24 = 4368$ (med steget 1). För varje nytt värde på t_s gör en anpassning av data till modellen och beräkna $\|T_d - T_{mod}\|_2$. Välj sedan det värde på t_s som minimerar $\|T_d - T_{mod}\|_2$. Vad blir fasförskjutningen i dagar?

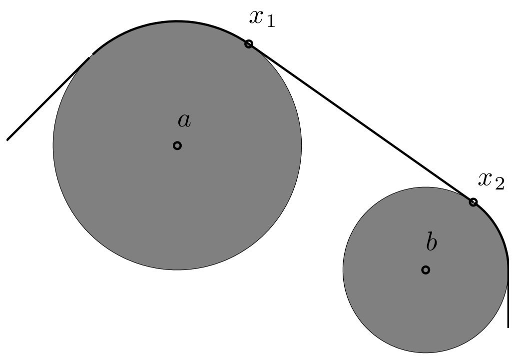
d) Plotta data och den anpassade modellen med det värde på t_s du fick fram i uppgift c) i samma plott. Stämmer modellen bättre med data än i uppgift a)?

e) Kan man se någon långsiktig ökning eller minskning av temperaturen? Vad säger t_s om vilken dag på året som är varmast/kallast.

Skicka in programmet `MKV.m`

3. Snöre runt cirklar

Ett snöre spänns runt två cirkelskivor enligt figuren. Cirklarna har radierna r_a respektive r_b och är centrerade i punkterna $\mathbf{a}$ respektive $\mathbf{b}$. Låt $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ vara de punkter (markerade i figuren) där snöret släpper från cirkeln. Dessa punkter kommer att satisfiera ekvationssystemet



$$
\begin{aligned}
|\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}|^2 &= r_a^2, \\
|\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}|^2 &= r_b^2, \\
(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}) &= 0, \\
(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}) &= 0.
\end{aligned}
$$

(Med $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ menas här skalärprodukten mellan vektorerna $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$.) De två första ekvationerna kommer från kravet att $\mathbf{x_1}$ och $\mathbf{x_2}$ ligger på respektive cirkelrand. De två sista ekvationerna ges av att snöret är tangentiellt med cirkelranden vid punkterna, så att vektorn $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ är vinkelrät mot både $\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}$ och $\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}$.

UPPGIFT 3. NEWTONS METOD FÖR OLINJÄRA SYSTSEM

a) Förberedande arbete (tas även upp på Övning 2, 3/2)

- Låt $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$ och $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)$. Skriv om ekvationssystemet på formen $\mathbf{F}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \mathbf{0}$ där $\mathbf{F}$ är en vektorvärd funktion med fyra komponenter. Radierna r_a, r_b och cirklarnas medelpunkter $\mathbf{a} = (x_a, y_a)$, $\mathbf{b} = (x_b, y_b)$ kommer in som parametrar i ekvationerna.
- Beräkna jakobian-matrisen till $\mathbf{F}$.

b) Låt $r_a = 1.5$, $r_b = 0.8$, $\mathbf{a} = (-1.5,\ 0.5)^T$ och $\mathbf{b} = (2,\ 0)^T$.

Skriv ett MATLAB-program `Punkter.m` som löser ekvationssystemet $\mathbf{F}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \mathbf{0}$ med Newtons metod. Programmet ska beräkna och skriva ut lösningen (punkterna koordinater) med ett fel mindre än 10^{-10}. Programmet ska också skriva ut mellanresultat (tex skillnaden mellan successiva iterationer) som visar att implementationen har kvadratisk konvergensordning.

Det är viktigt att Jacobian-matrisen beräknas korrekt för att Newtons metod ska fungera och ge kvadratisk konvergens. Som hjälp kan ni kolla att

$$
J(0,0,0,0) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1.5 & -0.5 & -1.5 & 0.5 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad J(1,2,3,4) = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0.5 & -0.5 & -2.5 & -1.5 \\ 1 & 4 & -3 & -6 \end{bmatrix}
$$

när cirklarnas medelpunkter och radier är valda som i 3b).

c) Hur många olika lösningar finns det? Hur ser de ut?

d) Utvidga programmet så att det även plottar cirklarna och snöret i en figur för en av lösningarna.

Skicka in programmet `Punkter.m`

4. Numerisk integration - denna uppgift är flyttad till Laboration 2.