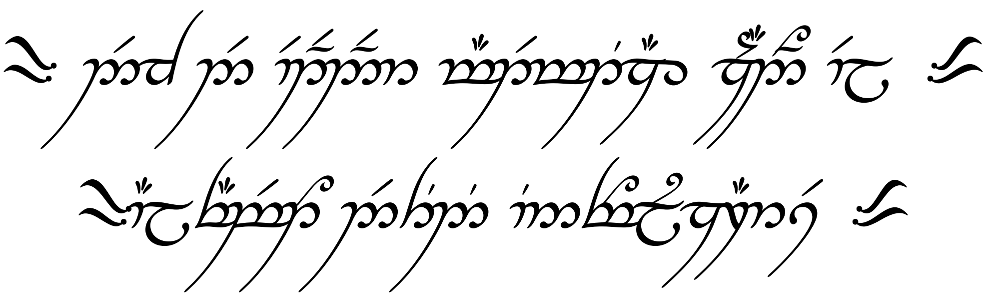
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

Asignatura:
Cálculo Infinitesimal y Numérico

Autor:
Fernando José Mateos Gómez

Ultima Modificacion: **5 de febrero de 2022**



Indice

1. Tema 1: Resolución Aproximada de Ecuaciones No Lineales

1.1. Introducción

Podemos definir dos tipos de ecuaciones:

- Ecuaciones Lineales $\mathbf{f(x) = ax + b}$
- Ecuaciones no lineales $\mathbf{f(x)}$ tal que tiene varias raices, o soluciones, y se representan como $\mathbf{\bar{x}}$

Solamente podemos obtener raices sin recurrir a métodos iterativos, siempre y cuando la ecuación sea de **grado inferior a 3**, ya que existen expresiones que calculan todas sus raices, y mediante Ruffini, solo en casos muy específicos, para cualquier función polinómica.

Definimos la multiplicidad de una función con el número de derivadas hasta que la derivada enésima de la función no sea cero con una de las raices la función:

$$f(\bar{x}) = 0 \quad f'(\bar{x}) = 0 \quad \cdots \quad f^n(\bar{x}) \neq 0$$

Decimos que una función tiene multiplicidad simple cuando la primera derivada cumple esta condición.

1.1.1. Teoremas a Usar

Aprovecharemos el Teorema de Bolzano y el Teorema de Rolle.

El primero dice lo siguiente "$f(x)$ ***es continua en un intervalo*** $[a, b]$ ***si existe un punto*** c ***tal que*** $f(c) = p \;\; p \neq 0$ ***encontrandose*** $a < c < b$ ***y siendo este punto una raiz de la función***". Para esto debe de cumplirse que $f(x)$ sea continua en el intervalo $[a, b]$ y $f'(x)$ sea derivable y no sea igual a cero en el intervalo (a, b).

El segundo dice que "$f'(x) \neq 0$ ***entonces*** x ***es raiz única de*** $f(x)$ ***en el intervalo*** $[a, b]$".

1.2. Método de Bisección

1.2.1. Cota de Error a priori

Aprovecharemos el Teorema de Bolzano para poder obtener el número de iteraciones necesarias para alcanzar la precisión deseada:

$$\boxed{\varepsilon_n \leq \frac{b-a}{2^n}}$$

Siendo $\boldsymbol{\varepsilon_n}$ un número que nos indica el número de decimales que queremos obtener, **b** y **a** los extremos del intervalo y **n** el número de iteraciones.
Podemos simplificarlo de esta forma, para obtener el número de iteraciones:

$$\boxed{n \geq \left\lceil \log_2 \left(\frac{b-a}{\varepsilon_n} \right) \right\rceil}$$

1.2.2. Cálculo

Sabemos que trabajamos en un intervalo $[a,b]$ por lo que calcularemos el punto medio y en función del signo del producto de uno de los extremos con el punto medio, crearemos un nuevo intervalo, como el siguiente:

$$\boxed{P_m = \overline{x_1} = \frac{a+b}{2} \begin{cases} \text{Si} \quad f(a)f(\overline{x_1}) < 0 \Rightarrow & [a, x_1] \\ \text{Si} \quad f(b)f(\overline{x_1}) < 0 \Rightarrow & [x_1, b] \end{cases}}$$

1.3. Método del Punto Fijo

1.3.1. Cota de Error a posteriori

La diferencia con el anterior metodo de calcular el error, es que no podemos calcularlo hasta que no obtengamos el valor en la iteración deseada. Se obtiene con la siguiente fórmula:

$$\boxed{\varepsilon_n \leq \frac{|f(x_n)|}{\text{mín}_{x\in[a,b]} |f'(x)|}}$$

El único detalle a tener en cuenta es que el denominador debe de ser el valor absoluto de la derivada de $f(x)$ con x que pertenezca al intervalo de actuación, y que de el menor valor entre los dos extremos.

1.3.2. Cálculo

Este método, al contrario que el anterior, requiere que se cumplan ciertas condiciones:

- Dada una función $f(x) = 0$ debemos convertirla a una función del tipo $g(x) = x$, que a su vez debe de cumplir otras condiciones.
- $g(x)$ debe de ser continua y derivable en el intervalo $[a,b]$.
- $g'(x)$ debe de ser continua y derivable en el intervalo $[a,b]$.
- $|g'(x) \leq q < 1| \quad \forall x \; [a,b]$ tal que q es la denominada constante de Contractividad y el valor de x debe ser el menor en el intervalo $[a,b]$.
- $g([a,b]) \subseteq [a,b]$ los valores de $g(x)$ en el intervalo $[a,b]$ deben de estar en el intervalo $[a,b]$.

Si se cumplen todas estas condiciones, podemos calcular las soluciones tan simple como:

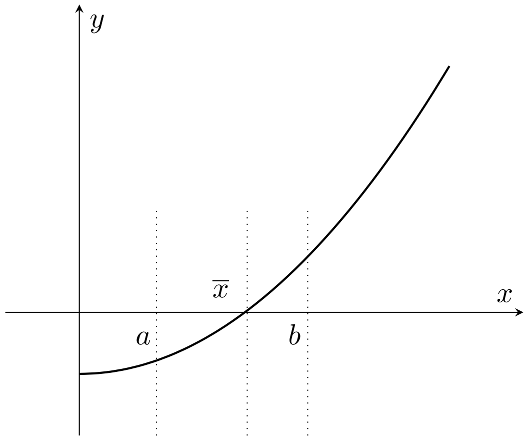
$$\boxed{\overline{x_{n+1}} = g(x_n)}$$

El intervalo de la solución podemos declararlo a partir de la Cota de las Raices Reales que solo sirve para polinomios, el cual indica que las raices de $f(x)$ se encuentran en un intervalo:

$$\boxed{|\psi| \in \left[-\left(1 + \frac{|A|}{|a_0|}\right), 1 + \frac{|A|}{|a_0|} \right]}$$

Tal que a_0 el coeficiente de del monomio de mayor grado y A es el coeficiente más grande, obviando a a_0.

1.4. Método de Newton



Dada una función $f(x)$ y un x_0 trazamos una recta tangente y la vamos "calibrando" hasta alcanzar el la iteración deseada. Cabe destacar que este es el método más rapido de entre los 3.

$$\boxed{\overline{x_{n+1}} = \overline{x_n} - \frac{f(\overline{x_n})}{f'(\overline{x_n})}}$$

El problema aquí radica en como calcular $\overline{x_0}$, y esto lo haremos con la Regla de Fourier, siempre y cuando $f(x)$ sea continua y derivable, al igual que $f'(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Además de que $f'(x) \neq 0$ y $f''(x) \neq 0$ para todo los valores del intervalo.

1.4.1. Regla de Fourier

Para calcular x_0, tomaremos "a" o "b" en función de una serie de condiciones.

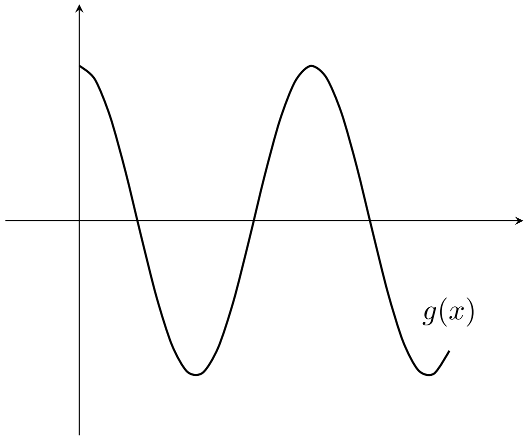
- El intervalo debe de ser de tamaño 1.
- Si $f(x)$ es creciente y concava, o decreciente y convexa $x_0 = a$.
- $f(x)$ es creciente y convexa, o decreciente y concava $x_0 = b$.

O lo que es lo mismo:

$$\boxed{\begin{cases} f(a) < 0, f(b) > 0 \begin{cases} f'(x) > 0 \begin{cases} f''(x) > 0 \Rightarrow x_0 = a \\ f''(x) < 0 \Rightarrow x_0 = b \end{cases} \\ f'(x) < 0 \begin{cases} f''(x) > 0 \Rightarrow \text{Imposible} \\ f''(x) < 0 \Rightarrow \text{Imposible} \end{cases} \end{cases} \\ f(a) > 0, f(b) < 0 \begin{cases} f'(x) > 0 \begin{cases} f''(x) > 0 \Rightarrow \text{Imposible} \\ f''(x) < 0 \Rightarrow \text{Imposible} \end{cases} \\ f'(x) < 0 \begin{cases} f''(x) > 0 \Rightarrow x_0 = b \\ f''(x) < 0 \Rightarrow x_0 = a \end{cases} \end{cases} \end{cases}}$$

2. Tema 2: Interpolación

2.1. Introducción



Un problema común es la aproximación de una función $g(x)$ tal que pasa por un conjunto de valores $\Upsilon = \{x_0, x_1, ... , x_n\}$. Para lograr obtener $g(x)$ debemos de obtener una función $f(x)$ tal que pase por el conjunto de valores establecido.

2.2. Resolución de forma matricial

Considerando un conjunto de puntos de tamaño N y un conjunto de soluciones de tamaño N también, podemos construir un sistema de ecuaciones tal que obtenemos un $P_{N-1}(x)$ tal que el resultado es un polinomio de grado $N-1$ como máximo. Por ejemplo:

$$\Upsilon = \{x_0, x_1,\ x_2\}$$

$$\Phi = \{y_0, y_1,\ y_2\}$$

Vemos que el conjunto de valores es de tamaño $N = 3$, por lo que el grado máximo posible del polinomio es de grado 2:

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Montamos un sistema de ecuaciones de 3 incógnitas:

$$\begin{cases} P_2(x_0) = y_0 \\ P_2(x_1) = y_1 \\ P_2(x_2) = y_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la matriz y obtenemos los valores de “a”, “b” y “c” y por lo tanto $P_2(x)$.

2.3. Resolución por Interpolación de Lagrange

Solo podremos usar este método, siempre y cuando la diferencia entre los soportes, los valores del conjunto Υ deben de ser regulares, y todos deben de tener la misma diferencia entre sus distancias. Para calcular el polinomio a partir de este método, debemos de considerar un conjunto de soluciones Φ y un conjunto de Polinomios Auxiliares de Lagrange $L_n(x)$, para obtener un $P_n(x)$:

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)}$$

Siendo $y_i \in \Phi$.

$$\boxed{L_n(x) = \prod_{j=0,\ i\neq j}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}}$$

Siendo $x_i \in \Upsilon$.

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0,\ i\neq j}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}}$$

2.4. Método de Newton

Este es el método más rapido de los 3 y se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$\boxed{N_n(x) = \sum_{i=0}^{n} C_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)}$$

De forma que $P_n(x)$ es:

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} N_k(x)}$$

Lo laborioso de este método es calcular los C_i, que son los soportes que se calculan como proposiciones. Por lo que la expresión de $P_n(x)$ quedaría algo así:

$$\boxed{P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + ... + f[x_0, ..., x_n](x - x_0)...(x - x_{n-1})}$$

Se denominan proposiciones y se calculan de la siguiente forma:

$$\boxed{f[x_0, ..., x_n] = \frac{f[x_1, ..., x_n] - f[x_0, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0}}$$

Siendo el caso base $f[x_n] = f(x_n)$

2.4.1. Cota de Error

Se calcula de la siguiente forma:

$$\boxed{\varepsilon(x) = \frac{\left|f^{n+1}(c)\right|}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} |x - x_j|}$$

3. Tema 3: Polinomio de Taylor

3.1. Observaciones

Dado un polinomio de grado n decimos que lo podemos descomponerlo en factores $(x-x_0)$ siendo x_0 un número real cualquiera:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^{n-j}$$

De forma que ahora obtenemos una función tal que:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k} b_j (x - x_0)^{n-j}$$

3.2. Condiciones

- $f(x)$ debe de ser lo suficientemente regular en x_0.
- $f^n(x_0) = T_n^n(x_0)$
- $T_n(x)$ se expresa en potencias de $(x - x_0)$

3.3. Polinomio de Taylor

$$\boxed{T_n(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!}}$$

3.4. Teorema de Existencia y Unidad

Sea $f(x)$ tenga dominio sobre todos los reales, y sea n veces derivable, decimos que existe entonces un **<u>único</u>** $T_n(x)$ de grado menor o igual que n.

3.5. Polinomio de Maclaurin

Solo cuando $x_0 = 0$ podemos decir que es un polinomio de Maclaurin

$$\boxed{M_n(x) = T_n(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^n(0)(x)^n}{n!}}$$

3.6. Resto de Lagrange

Considerando que $c \in < x, x_0 >$ podemos obtener el error de la función respecto a la original:

$$\boxed{|R_n(x)| = \left| \frac{f^{n+1}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right|}$$

4. Tema 4: Series Numéricas. Series de Potencias

4.1. Introducción

Dada una función $f(x)$, podríamos aproximar el valor de una función usando el polinomio de Taylor:

$$f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Como podemos observar, esta función la podemos represntar como una serie de n elementos, existen varios tipos, pero nosotros trabajaremos con las más simples:

- Series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
- Series geométricas $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

4.2. Convergencia

Una serie infiníta de términos converge en un valor concreto $x = c$. Una función puede converger o no. Para calcular la convergencia de una serie utilizamos distintos criterios y a la vez podemos calcular el valor concreto en el que converge:

$$\boxed{S_n(x) = A_0 \frac{a_0}{1 - a_n}}$$

Siendo A_0 el coeficiente del sumatorio, a_0 el primer término de la sucesión y a_n el término general.

4.2.1. Criterio del Cociente

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n + 1}{a_n}\right| \begin{cases} \text{Si es Mayor que 1, es convergente} \\ \text{Si es Menor que 1, es divergente} \\ \text{Si es Igual a 1, no hay información} \end{cases}}$$

4.2.2. Criterio de la Raiz

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|a_n\right|} \begin{cases} \text{Si es Mayor que 1, es divergente} \\ \text{Si es Menor que 1, es convergente} \\ \text{Si es Igual a 1, no hay información} \end{cases}}$$

4.2.3. Criterio de Leibniz

Solo es aplicable en series alternadas y diremos que la serie es convergente, siempre y cuando:

- $0 \leq a_n + 1 \leq a_n$ con a_n decreciente.
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

4.3. Intervalo y Radio de Convergencia

Aplicaremos el Teorema de Cauchy-Hadamard que dice:

Dada una serie del tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ *diremos que converge en un intervalo* I_c *cuando* $I_c \in (x_0 - r, x_0 + r)$ *siendo* r *el radio de convergencia, que se calcula como* $r > \frac{x}{|x-x_0|}$

5. Tema 5: Series de Fourier. Series Trigonométricas

5.1. Introducción

La combinación lineal de funciones $\sin x$ y $\cos x$ genera funciones periódicas y series trigonométricas.
Diremos que una función es periódica cuando $y = f(x + \kappa) = f(x)$ siendo κ el periodo de la función, o sea, el valor mínimo que verifica la periodicidad.

5.2. Suma Parcial

Esta es la expresión general para las funciones que representan a las series de Fourier:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cos(\kappa wx) + b_k \sin(kwx))}$$

El periodo lo podemos definir como $T = 2\pi$ y $w = 1$, lo que nos generará una función T-periódica, o en este caso, "pi-Periódica", lo que generará una serie Trigonométrica:

$$\boxed{S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nwx) + b_n \sin(nwx))}$$

Denominaremos a a_0, b_n y a_n como los coeficientes de Fourier y se podrán calcular.
En caso de que $f(x)$ sea una función no periódica, la converirémos a "pi-periódica"

5.3. Los coeficientes de Fourier

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(xnw)\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(xnw)\mathrm{d}x}$$

5.3.1. Paridad

Para agilizar los cálculos podemos utilizar la simetría de las funciones:

$$\begin{cases} f(x) \text{ es par} \Rightarrow f(x) = f(-x) & S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nxw) \\ f(x) \text{ es impar} \Rightarrow -f(x) = f(-x) & S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nxw) \end{cases}$$

5.4. Teorema de Dirichlet

Mediante este problema comprobamos, solo en convergencia puntual, el valor en el que converge la serie en un punto concreto siempre y cuando se cumplan dos condiciones:

- $f(x)$ es continua o tiene un número finito de discontinuidades.

- $f(x)$ tiene un número finito de extremos extrictos.

Con todo esto, concluimos que:

$$\begin{cases} f(x) & \text{Si } x \text{ está en un punto continuo} \\ \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} & \text{Si } x \text{ se encuentra en una discontinuidad} \end{cases}$$

6. Tema 6: Funciones de Varias Variables

6.1. Introducción

Debemos considerar que derivabilidad no es lo mismo que la diferenciabilidad, y que trabajaremos con funciones reales, de dos variables, aunque se puede trabajar con n variables.

6.2. Limite con dos variables

Existen infinitas direcciones para una función de n variables, solo en el caso de que exista el limite de esa función en un punto $P(x_0, y_0)$, considerando dos variables. Vamos a estudiar 3 casos, en caso de comprobar que la función no es continua o no tiene limite, diremos que la función f no tiene dirección en ese sentido, pero se podría analizar usando la definición de límite.

- $y = mx$
- $y = mx^2$
- $y = \sqrt{x}$

Sustituiremos el valor de y en el límite por estas suposiciones.

6.2.1. Continuidad

Al igual que con las funciones de una variable, para que sea continua en un punto, esta debe existir en un punto concreto y su límite existir también, valiendo lo mismo.

$$\boxed{\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)}$$

6.3. Diferenciabilidad

Denominamos a las derivadas en funciones de más de una variable, a diferenciabilidad, y se basan en el mismo principio que las derivadas:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = D_1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{h\to k} \frac{f(x_0+h, y) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = D_2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{h\to k} \frac{f(x, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

6.3.1. Primer Orden

Las denominamos así a las diferenciales que se calculan por cada variable, con la función inicial

6.3.2. Segundo Orden

Las denominamos así a las diferenciales que se calculan por cada variable, con las funciones generadas por la derivada de Primer Orden.

Y así hasta el infinito.

6.3.3. Diferenciales Cruzadas

Las denominamos así cuando las derivadas de segundo orden son las mismas, debido a la indiferenciabilidad de la variable.

6.4. Diferenciabilidad en un punto

Para que sea diferenciable en un punto, la función debe de poderse "derivar" por cada una de sus variables y se debe de poder calcular por definición, si no, no es diferenciable.

6.5. Vector Gradiente

$$\boxed{\nabla f(x,y)_{(x=x_0,y=y_0)} = \Big(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Big)}$$

Define la dirección de mayor crecimiento de la pendiente en un punto concreto.

6.6. Derivada Direccional

Diremos que por cada vector unitario $\hat{u} = (u_x, u_y)$ y una constante λ

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda \hat{u_x}, y_0 + \lambda \hat{u_y}) - f(x_0,y_0)}{\lambda}$$

$$Df_{\hat{u}} = \nabla f \vec{u}$$

Estudiar la variacion que experimenta una función cuando modificamos una variables en un proporción, es decir, la pendiente de la curva de la función en un punto con la dirección del vector, nos indicará si la recta corta en $z = 0$ al plano.

6.7. Condición Suficiente de Diferenciabilidad

Si consideramos una esfera de actuación y un punto en el plano de los números reales, podemos afirmar:

- $f(x,y)$ es diferenciable para x e y
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ es continua en un punto cualquiera.

6.8. Condición Necesaria de Diferenciabilidad

Asumiendo que la función es diferenciable en un punto, entonces todo vector unitario provoca que exista:

$$\boxed{D_u f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \frac{\vec{u}}{\hat{u}}}$$

6.9. Plano Tangente

Dada una función como $z = f(x,y)$, podemos calcular el plano tangente a un punto $P(x_0,y_0)$ usando la misma expresión que al calcular la recta tangente en un punto:

$$z - f(x_0,y_0) = \Big(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Big) + (x - x_0, y - y_0)$$

$$\boxed{z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)}$$

El plano tangente a la superficie $f(x, y)$ en ese punto generará un plano de vector normal:

$$\boxed{\vec{u} = \Big(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, -1\Big)}$$

6.10. Extremos Relativos

Calculamos las derivadas parciales de primer orden de la función y obtenemos con que valores ambas se anulan:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \qquad , \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

De aquí obtendremos un conjunto $\phi = \{x_0, y_0, ...x_n, y_n\}$
Tras esto construiremos una matriz Hessiana, formada por las derivadas parciales de segundo orden, y calcularemos su determinante:

$$\boxed{HF(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial^2 y} \end{pmatrix}}$$

$$|HF(x, y)| = \frac{\partial f(x, y)}{\partial^2 x}\frac{\partial f(x, y)}{\partial^2 y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x \partial y}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y \partial x} = \Delta$$

Tras obtener este determinante, sustituye x e y por los valores obtenidos previamente. De esta forma llegaremos a 4 conclusiones:

$$\Delta \begin{cases} \Delta = 0 & \text{No hay información suficiente para indicar si es un Punto Crítico} \\ \Delta \neq 0 \begin{cases} \Delta < 0 & \text{Punto de Silla} \\ \Delta > 0 \begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial^2 x} < 0 & \text{Es un máximo relativo} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial^2 x} > 0 & \text{Es un mínimo relativo} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$