Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

Asignatura:
Fundamentos Físicos de la Informática

Autor:
Fernando José Mateos Gómez

Ultima Modificacion: **28 de Enero del 2022**

Indice

1. Introducción

1.1. Movimiento

En este apartado veremos un repaso de los movimientos más básicos.

1.1.1. MRU y MRUA

Partiendo de la 2^a *Ley de Newton*, sabemos que la fuerza es igual a la masa por su aceleración:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Podemos descomponer la fuerza en sus componentes horizontales y verticales:

$$\vec{F_x} = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t} m \to m\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t} = 0$$
$$\vec{F_y} = F_y \hat{\jmath} \to \vec{F_y} = m\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\vec{F_y}}{m} = \vec{a_y}$$

Es decir, cuando $\boldsymbol{\vec{F_x} = 0\mathrm{N} \to \vec{a} = 0\mathrm{m}/s^2}$, por lo que la velocidad es constante, $\vec{v} = cte$, solo si $\boldsymbol{\vec{F_y} \neq 0\mathrm{N}}$ y $\boldsymbol{\vec{a_y} = \vec{a} = \frac{\vec{F_y}}{m} = cte}$.

Sabiendo esto y las expresiones de la aceleración y la velocidad, podemos definir las expresiones del **MRU** y **MRUA**:

$$\vec{a} = \tfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} \text{ Y } \vec{v} = \tfrac{\partial \vec{x}}{\partial t}$$

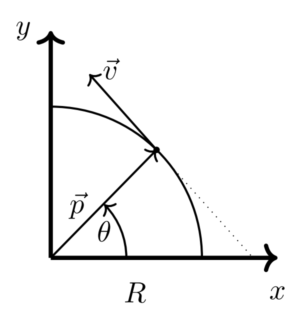
Obtenemos:

$$\int_0^t \vec{a}\,\partial t = \int_0 \partial t \to \boxed{\vec{v} = \vec{v_o} + \vec{a}t}$$
$$\int_0^t \vec{v}\,\partial t = \int_0 \partial \vec{x} \to \boxed{\vec{x} = \vec{x_o} + \vec{v_0}t}$$

$$\text{Si } \boldsymbol{\vec{v} = \vec{v_o} + \vec{a}t} \text{ y } \vec{a} = cte \to \boxed{\vec{x} = \vec{x_o} + \vec{v_0}t + \tfrac{\vec{a}t^2}{2}}$$

1.1.2. MCU y MCUA

El **MCU** o Movimiento Circular Uniforme, se genera en las rotaciones de un cuerpo respecto a un punto $\boldsymbol{p}$ en un radio $\boldsymbol{R}$. Podemos analizar la posición de un punto cualquiera, en función de las componentes horizontales y verticales:



$$\boxed{\vec{P}(t) = (\vec{x}(t), \vec{y}(t)) = R(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath})}$$

Sabemos que el módulo de $\boldsymbol{\vec{P}(t)}$ es lo mismo que: $\boldsymbol{\left|\vec{P}\right| = R}$ y que al derivar un ángulo cualquiera en función del tiempo, obtenemos la velocidad angular por unidad de tiempo:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{v}{R}t = wt}}$$

Por lo tanto, podemos concluir con lo siguiente:

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = R\ (w\cos\theta\,\vec{\jmath} - w\sin\theta\,\vec{\imath}\,) = \boxed{Rw\ (\cos\theta\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{\imath}\,)}$$

Y que el módulo de la velocidad es constante:

$$|\vec{v}| = wR = cte$$

Evidentemente podemos calcular a partir de la velocidad, el vector aceleración:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -Rw^2\ (\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}\,)\ = \boxed{-w^2\vec{P}}$$

De esta expresón podemos deducir que el vector $\boldsymbol{\vec{a}}$ es Antiparalelo a $\boldsymbol{\vec{P}(t)}$ y el módulo de la aceleración es $\boxed{\boldsymbol{|\vec{a}| = \frac{v^2}{R}}}$

1.2. Vectores

Un vector es un elemento matemático dotado de dirección, sentido y módulo, es decir, el vector se mueve de cierta forma a un punto, de una forma concreta a una distancia. Aquí aparecerán las operaciones y transformaciones más relevantes:

Considerando los vectores $\boldsymbol{\vec{u}, \vec{w}, \vec{u}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ tenemos:

- Producto escalar: $\boldsymbol{\vec{v} \cdot \vec{w}} = |v|\,|w|\cos\alpha = |u|$
- Producto vectorial: $\boldsymbol{\vec{v} \times \vec{w}} = |v|\,|w|\sin\alpha = \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} =$

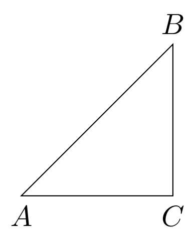
  $$= \vec{\imath}\begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}$$

  En el Tema 3, veremos algunas propiedades interesantes, sin embargo, con esto será suficiente.
- Vector unitario: Un vector, igual en todo sentido a $\vec{u}$ pero de longitud 1 $\Rightarrow \boldsymbol{\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}}$

1.3. Trigonometría

Veremos como calcular las funciones trigonométricas y posteriormente algunas de sus propiedades

- $\boldsymbol{\sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}}$
- $\boldsymbol{\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}}$
- $\boldsymbol{\tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}}$
- $\boldsymbol{\csc\alpha = \sin\alpha^{-1} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}}$
- $\boldsymbol{\sec\alpha = \cos\alpha^{-1} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}}$
- $\boldsymbol{\cot\alpha = \tan\alpha^{-1} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}}$



Al hablar en trigonometría usaremos los radianes $\boldsymbol{k\pi}$ **rad** y en función del ángulo que tengamos, lo podemos simplificar a otro que sea inferior a $\frac{\pi}{2}$ rad:

- $\boldsymbol{\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \cos\alpha}$
- $\boldsymbol{\cos(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp\sin\alpha}$
- $\boldsymbol{\sin(\pi \pm \alpha) = \mp\sin\alpha}$
- $\boldsymbol{\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha}$
- $\boldsymbol{\sin(3\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = -\cos\alpha}$
- $\boldsymbol{\cos(3\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp\sin\alpha}$

1.4. Números Complejos

Denominamos un número complejo aquel formado por una parte real $\Re(\mathbf{z})$ y una imaginaria $\Im(\mathbf{z})$.

$$\boxed{z = a \pm bj \quad \text{Siendo j} = \sqrt{-1}\text{, a veces se representa con } i}$$

Podemos denominar el complementario de un número complejo como aquel cuya parte imaginaria tiene el signo opuesto, se suele representar como, $\overline{\mathbf{z}}$

1.4.1. Operaciones

- Sumas y restas: Se suma la parte real y la imaginaria por separado.
- Multiplicación: Será más sencillo expresarlos como fasores, sumando los ángulos y multiplicando las amplitudes.
- División: Al igual que con la multiplicación, es más sencillo expresarlo como fasores, se restan los ángulos (numerador menos denominador) y se dividen las amplitudes,

1.5. Fasores

Dado un número complejo $\mathbf{z} = \mathbf{a} + \mathbf{bj}$, su expresión como fasor se basa usando el <u>número de Euler</u>, a la que podemos llegar utilizando la:

$$\boxed{z = |z|\, e^{\rho j}}$$

Siendo ρ el ángulo que entre el coeficiente de la parte imaginaria y el de la parte real, denominado <u>argumento</u> y $|\mathbf{z}|$ es el<u>módulo</u> entre la parte real y la imaginaria.

$$\boxed{\rho = \arctan(\frac{b}{a}) \quad \text{Siempre se expresará en radianes}}$$

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 - (bj)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Finalmente podemos decir que esta expresión se denomina forma polar, y podemos traspasarla a una forma usando razones trigonométricas, por lo que:

$$\boxed{z = a + bj \quad \Rightarrow \quad \tilde{z} = |z|\, e^{\rho j} \; = \; |z| \cos(wt + \rho)}$$

2. Tema 1: Campo Electrostático

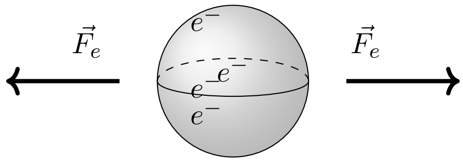
2.1. Cargas

La carga es una unidad cuantizable, a partir de la carga del electrón e^-, siendo posible la carga una unidad de magnitud positiva o negativa.
Esta unidad afecta a nivel de la Fuerza Electrostática, el Campo Electrostático y sus magnitudes, y podemos considerar que todas las cargas poseen masa.
Además, dado un sistema, siempre la suma de todas las cargas va a ser cero. De este enunciado podemos decir dos principios:

- Principio de Conservación de la Carga: La suma de todas las cargas del Universo vale cero, es decir, la carga total es ***cte***
- Principio de Conservación local de la Carga: La suma de todas las cargas en un sistema, es ***cte*** es decir, vale 0.

2.2. Ley de Coulumb

Esta es la ley fundamental que describe la interacción entre dos cargas puntuales en un medio, independientemente del tamaño del cuerpo. Consideramos la carga total del sistema, y no la unitaria por cada sección del cuerpo.



Cada cuerpo generará su propio campo y si consideramos las cargas puntuales, la fuerza entre ambas cargas será:

$$\boxed{\vec{F_{12}} = K\ \frac{q_1 q_2}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^2}\ \hat{r} = K\ \frac{q_1 q_2}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3}\ (\vec{r_2} - \vec{r_1})\quad N}$$

Siendo esta, el vector fuerza que ejerce la carga q_1 sobre la carga q_2.

$$\boxed{\vec{F_{12}} = -\vec{F_{21}}}$$

Y evidentemente, el vector fuerza que ejerce la carga q_2 sobre la carga q_1 es opuesta al vector fuerza que ejerce la carga q_1 sobre la carga q_2

De esta forma podemos concluir con lo siguiente.

- Las cargas de igual signo se repelen, mientras que las de signo diferente se atraen.
- Los vectores de posición son respecto a un punto de referencia. Siendo $\boldsymbol{\vec{r_2}}$ el vector del punto destino, y $\boldsymbol{\vec{r_1}}$ el vector del punto de partida.
- $\boldsymbol{K}$ es la constante de Couloumb en el vacío y es lo mismo que $\boldsymbol{K = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}}$, siendo $\boldsymbol{\epsilon_o}$ la permitividad en el vacío.

2.3. Campo Electrostático

El campo es la manifestación de la perturbación en el espacio generado por una carga puntual:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F_e}}{Q} = Kq\frac{\vec{r} - \vec{r'}}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|^3}\quad V/m}$$

Siendo $\vec{r'}$ el vector entre el punto de referencia y la carga y $\vec{r}$ es el vector entre el punto de estudio y el punto de referencia

Solo podemos calcular el campo cuando la carga $\boldsymbol{q}$ es muy pequeña, o lo que es lo mismo: $\mathbf{lím}_{q\to 0}\,\vec{\boldsymbol{E}} \approx \mathbf{0}$

Sabiendo como se expresa el campo electrostático, nos interesaría conocer algunos casos puntuales dignos de consideración:

- Dado un plano con dos cargas puntuales en el mismo eje de coordenadas, y queriendo calcular el campo en un punto cualquiera a una distancia equidistante respecto a las dos cargas es igual a:
  - $\vec{E}_x = \mathbf{2}\left|\vec{\boldsymbol{E}}\right| \cos\boldsymbol{\alpha}\ \hat{\boldsymbol{\imath}}$
  - $\vec{E}_y = \mathbf{2}\left|\vec{\boldsymbol{E}}\right| \sin\boldsymbol{\alpha}\ \hat{\boldsymbol{\jmath}}$
- Las cargas actúan como sumideros.
- El campo generado por una carga eléctrica se emite de forma radial y constante, y su número indica su intensidad.

2.4. Distribución de Cargas

Hemos considerado un cuerpo cualquiera con carga, como una carga puntual que genera un $\vec{\boldsymbol{E}}$, ya que la carga se distribuía de forma continua. Sin embargo en la realidad no es así, y dependiendo del cuerpo que tengamos, su forma y tamaño afectarán al cálculo del campo. Para esto, deberemos calcular sección por sección del cuerpo de estudio con el fin de obtener una aproximación del campo total. En esta parte veremos la distribución de cargas por unidad de longitud que la denotaremos por:

$$\boxed{\lambda = \frac{Q}{l}}$$

Siendo $\boldsymbol{Q}$ la carga y $\boldsymbol{l}$ la unidad de longitud.

Estudiaremos un caso muy particular, el campo generado por una barra metálica infinítamente larga.

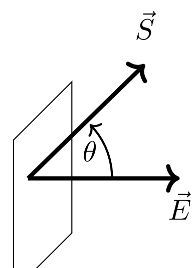
$$\boxed{\vec{E}(P) \ = \ \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_a^b \lambda\frac{\hat{r}}{r^2}\,\mathrm{d}l \ = K\lambda\int_a^b \frac{\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}l \ = K\lambda\int_a^b \frac{y}{h}\vec{\jmath} - \frac{x}{h}\vec{\imath}\ \mathrm{d}l}$$

Siendo $\boldsymbol{h} = \sqrt{\boldsymbol{x^2 + y^2}}$ y las incógnitas $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ como la distancia de un punto cualquiera en la barra para las coordenadas X e Y respectivamente. Los valores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ de la integral, no son más que dos extremos cualquiera de la barra cargada.

2.5. Ley de Gauss

La ley de Gauss define el flujo de $\vec{\boldsymbol{E}}$ a través de una superficie cerrada. Podemos considerar un caso general, donde dado un espacio cualquiera, con tamaño y forma indefinidos el flujo del campo eléctrico se denota por:

$$\phi = \lim_{\Delta S\to 0}\sum_{i=0}^{\infty}\vec{E}_i\,\Delta S = \int_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \boxed{\oint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_o}}$$



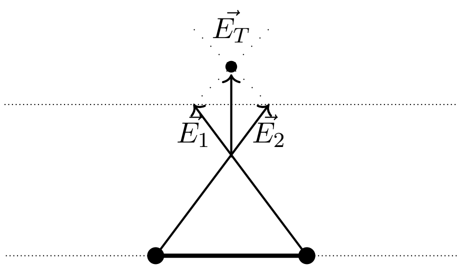
Dada esta expresión podemos deducir que el flujo total es la suma, infinitesimal de cada una de las secciones sobre la que ejerce el campo eléctrico sobre la superficie, y que el flujo $\boldsymbol{\phi}$ es proporcional a la carga interna $\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\phi} \propto \boldsymbol{q}}$

Por lo tanto podemos estudiar el valor del campo $\vec{\boldsymbol{E}}$ en casos de extrema simetría. Para esto consideraremos una nueva magnitud $\boldsymbol{\sigma}$ que denota la distribución superficial de carga.

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{S}}$$

No confundir la superficie del cuerpo de estudio con la superficie Gaussiana, esta es variable y depende de quien la estudie.

2.5.1. Plano Infinito



Dado el diagrama propuesto, todos los puntos situados en el mismo plano, poseen la misma Distribución Superficial de Carga, y por ende todos los puntos poseen el mismo $\vec{E}$.

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = 2\vec{E}$$

2.5.2. Cilindro en un plano infinito

Si situaramos un cilindro en un plano infinitamente largo, observamos que el flujo corresponde a la suma del flujo que pasa por cada una de las tapas y la cubierta lateral del cilindo. De esta forma, debido a que la cubierta lateral es paralela al vector normal al campo, el flujo que pasa por ahí es nulo. Por ende:

$$\oint \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \oint_{SL} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} + \oint_{S^+} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} + \oint_{S^-} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = 2\oint_{S^+} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} \Rightarrow \phi = 2\left|\vec{E}\right|\left|\vec{S}\right| = 2ES$$

$$2ES = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\epsilon_o} \Rightarrow E = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_o} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_o}\,\hat{n}}$$

Posteriormente veremos que si el cuerpo está cargado y analizamos el campo $\vec{\boldsymbol{E}}$, este valdrá 0, y por tanto su potencial es *cte* aunque no sepamos cuanto pueda valer. **El vector $\hat{\boldsymbol{n}}$ es el vector normal a la superficie**.

2.5.3. Esfera cargada

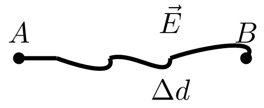
Aplicando la Ley de Gauss y considerando $\boldsymbol{R}$ el radio de la superficie Gaussiana, y $\boldsymbol{r}$ el radio de la esfera:

$$\oint \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} \Rightarrow \left|\vec{E}\right| 4\pi R^2 = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\epsilon_o}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\epsilon_o 4\pi R^2}\,\hat{n} = \frac{\sigma r^2}{\epsilon_o R^2}\,\hat{n}}$$

2.6. Balance de Energías

Debido a que la fuerza electrostática es una fuerza conservativa, no importa la ruta recorrida, sino las posiciones inicial y final para calcular el trabajo requerido para mover la carga de un punto **A** al **B**.



De esta forma podemos aplicar <u>El Teorema de las Fuerzas Vivas</u>

por lo que $\boxed{W_{A\to B} = \Delta E_c = \frac{1}{2}m(V_B - V_A) \ \ J}$

Por lo tanto el trabajo requerido para mover una carga de un punto A a otro B, es igual a $\Rightarrow \boxed{W_{A\to B} = -\Delta E_p = -q\Delta V}$

Por convenio diremos que $\boldsymbol{E_c}$ es la energía cinética, $\boldsymbol{E_p}$ es la energía potencial (ambas en Julios **J**) y $\boldsymbol{V}$ es el potencial eléctrico, en Vatios **V**

$$\text{En funcion del signo} \rightarrow \begin{cases} \text{Si } \boldsymbol{W > 0},\ \boldsymbol{q} \text{ se mueve a favor del campo} \\ \\ \text{Si } \boldsymbol{W < 0},\ q \text{ requiere de un } \boldsymbol{W}_{\text{ext}} \text{ para moverse.} \\ \text{Si la carga se queda quieta al recorrer ese trayecto, diremos que} \\ \boldsymbol{W}_{\text{ext}} = -\boldsymbol{W} \end{cases}$$

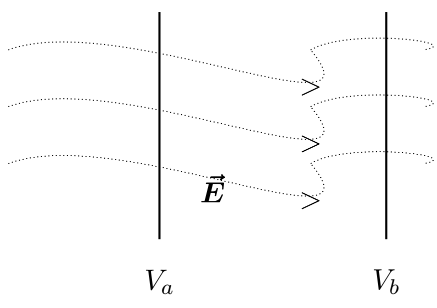
Gracias al conocimiento del trabajo, podemos decir que las unidades del Campo Eléctrico pueden ser tanto **N/C** como **V/m**

2.7. Superficies Equipotenciales

Estos son aquellos espacios donde la diferencia de potencial $\boldsymbol{\Delta V}$ vale siempre cero, es decir, tienen el mismo potencial en todos los puntos.
Los espacios que satisfacen esta situación son aquellos situados paralelamente, en sentido del campo eléctrico.
Es decir:

$$\boxed{\Delta V = E\mathrm{d}\cos\alpha \Rightarrow \mathrm{d}V = -\vec{E}\mathrm{d}\vec{r}}$$

Dada esta expresión, dos puntos son equipotenciales cuando $\boldsymbol{\cos\alpha = 0}$. Como se puede ver en el diagrama, todos los puntos paralelos, en función de las líneas de campo, son equipotenciales entre si.



2.8. Conductores

Las cargas en un conductor tenderán a moverse, mientras circula un campo $\vec{E}$, hasta que la carga neta del sistema se estabilice y quede en equilibrio, alrededor de unos 10^{-14} segundos.

Estos materiales poseen una serie de propiedades, estudiandolos internamente, estas son:

Propiedades:

1. $\vec{E}$ en el interior es nulo (sino, las cargas no tenderían a equilibrarse)

2. El potencial es *cte* en todo el conductor, interior y superficie, es decir, todo el conductor es una superficie equipotencial.

3. La carga neta tenderá a acumularse en la superficie del conductor, esto se puede demostrar con la Ley de Gauss:

$$\boxed{\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_{\text{o}}} \Rightarrow \vec{E} = 0 \Leftrightarrow Q_{\text{int}} = 0}$$

4. El campo $\vec{\boldsymbol{E}}$ en la superficie, hará que la carga se mueva a los bordes, por lo que $\vec{\boldsymbol{E}} \not\perp \vec{\boldsymbol{S}}$

5. $\vec{\boldsymbol{E}}$ en la superficie vale $\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\epsilon_o}}\hat{\boldsymbol{n}}$

En la realidad, un conductor no es completamente puro, no siempre, por lo que si este se encontrase en un campo eléctrico externo, $\vec{\boldsymbol{E}}$ interna tenderá a cero, mientras que las cargas internas se moverán a favor del campo externo.

2.8.1. Jaula de Faraday

Son estructuras que son cargadas con carga eléctrica hasta el punto del Campo de Ruptura, un estado en el cual el material servirá como aislante frente a campos eléctricos externos.

2.8.2. Capacidad de un Conductor

La expresión de la capacidad $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ que se mide en **Faradios**, $\boldsymbol{F}$, no es más que el cociente entre la carga del sistema entre su potencial:

$$\boxed{\mathcal{C} = \frac{Q}{V}}$$

Esta expresión se consigue a partir de la integración del potencial en un punto de la superficie del conductor, considerando que la distribución superficial de carga $\boldsymbol{\sigma}$ es igual al cociente entre la derivada de la carga y la superficie. Es decir:

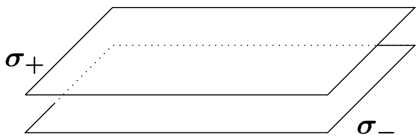
$$\sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$$

$$V(p) = \int \frac{\sigma K}{r}\mathrm{d}S \approx Q = V\mathcal{C}$$

2.9. Condensador

Un condensador es un elemento formado por dos conductores de influencia total, es decir, poseen la misma carga pero de signos distintos. Un caso particular es el condensador de placas planas y paralelas.

2.9.1. Condensador de Placas Planas y Paralelas



Asumiendo que $\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\epsilon}_o}$ es el valor dentro de las dos placas, y $\boldsymbol{d}$ la distancia entre ambas placas, siendo muy pequeña:

$$\mathcal{C} = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Ed} = \boxed{\frac{\epsilon_o S}{d}}$$

Posteriormente veremos como, dado un ambiente diferente al vacío, $\boldsymbol{\epsilon}_o$ puede valer otra cosa en función de otra variable.

2.10. Energía Almacenada en un Condensador

Partiendo de que tenemos dos condensadores, uno cargado y otro vacío, ambos con la misma carga pero signos opuestos, las cargas se moverán en función del campo eléctrico que afecta al sistema, redistribuyendo las cargas de forma que cuanta más carga eléctrica se mueva, el potencial eléctrico aumenta proporcionalmente. De esta forma podemos calcular el trabajo, o energía, que se almacena entre las placas:

$$\mathrm{d}W = V(q)\mathrm{d}q$$

$$W = \int_0^Q V(q)\mathrm{d}q = \int_0^Q \frac{q}{\mathcal{C}}\mathrm{d}q = \left.\frac{q^2}{2\mathcal{C}}\right|_0^Q = \frac{Q^2}{2\mathcal{C}}$$

A veces se denota por la letra $\boldsymbol{\mu}$, y evidentemente se mide en Julios.

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} = \frac{Q^2}{2\mathcal{C}} = \mathcal{C}\frac{\Delta V^2}{2}}$$

Analizandolo de una forma espacial, la energía almacenada no es más que una expresión que relaciona la permitividad del medio y el volumen del campo entre ambas placas:

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} = E^2\frac{\epsilon_o}{2}Sd}$$

Siendo $\boldsymbol{Sd}$ el volumen entre ambas placas, y $\boldsymbol{\epsilon}_o$ la permitividad en el vacío, la cual podemos ajustar a cualquier medio.

2.10.1. Aislantes

Al introducir un aislante entre dos placas cualesquiera, $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ aumenta, ya que los aislantes se polarizan cuando se someten a un campo eléctrico.

$\vec{E}$ separa las cargas, agrupándolas por su signo y en función de la orientación del propio $\vec{E}$.

Es decir, las cargas se polarizan, en la superficie, y estas tenderán a ser la misma que la polarizada cuanto más cerca estén de la superficie. Pasado un tiempo, la variación de la polarización se invertirá:

$$E = \frac{\boldsymbol{\sigma}_+ - \boldsymbol{\sigma}_-}{\epsilon_o}$$

2.10.2. Permitivad relativa

La permitivad relativa $\boldsymbol{\kappa}$ indica la facilidad con la que la corriente fluye a través de un medio:

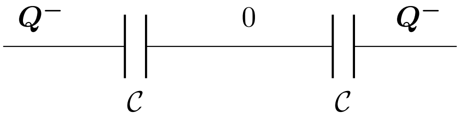
$$\boxed{\epsilon_R = \kappa\epsilon_o}$$

Siendo $\boldsymbol{\epsilon}_R$ la permitividad en un medio $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{\kappa}$ la permitividad relativa

2.11. Asociación de condensadores

2.11.1. En serie

Por cada uno de los condensadores hay una caída de tensión, pero la intensidad es la misma en todo, por lo que la carga es *cte*



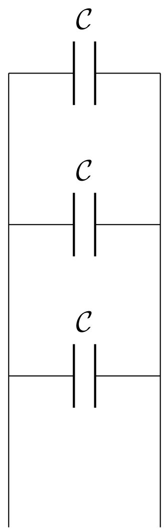
$$\boxed{\mathcal{C}_T = \mathcal{C}_{\text{eq}} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\mathcal{C}_n}}}$$

$$\boxed{V_T = \sum_{i=1}^{n} V_n}$$

$$\boxed{Q_n = Q_1 = ... = Q_k = cte}$$

2.11.2. En paralelo

Por cada uno de los condensadores la tensión es la misma, es *cte*, pero la carga no, por lo que la intensidad depende de cada capacitor:



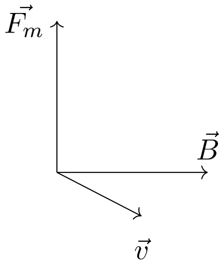
$$\boxed{\mathcal{C}_T = \mathcal{C}_{\text{eq}} = \sum_{n=1}^{k} \mathcal{C}_n}$$

$$\boxed{V_n = V_1 = ... = V_k = cte}$$

$$\boxed{Q_T = \sum_{n=1}^{k} Q_n}$$

3. Tema 2: Campo Magnetostático

3.1. Fuerza Magnética



La fuerza magnética actua sobre las cargas en movimiento y se define, para una carga en movimiento como:

$$\boxed{\vec{F_m} = q\ \ \vec{v} \times \vec{B}}$$

$\boldsymbol{\vec{F_m}}$ es perpendicular $\perp$ a $\boldsymbol{\vec{B}}$ y a $\boldsymbol{\vec{v}}$ y siempre irá en el sentido que indique la carga, la velocidad y el campo, por lo que la Fuerza magnética es proporcional a la carga, el campo y a la velocidad.
Algunas propiedades que nos vendrán bien a la hora de calcular son las siguientes, respecto al producto vectorial:

1. $\boldsymbol{\hat{\imath} \times \hat{\imath} = 0}$ Y lo mismo ocurre para cualquier otra combinación.
2. $\boldsymbol{\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}}$, $\boldsymbol{\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}}$,$\boldsymbol{\hat{\imath} \times \hat{k} = \hat{\jmath}}$.
3. $\boldsymbol{\vec{v} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{v}}$
4. El modulo es $\boldsymbol{|\vec{v}| \left|\vec{B}\right| \sin}$.
5. La dirección, es la perpendicular entre $\vec{v}$ y$\vec{B}$.
6. El sentido viene indicado por la regla de la mano derecha.

Además consideraremos $\otimes$ para cuando el campo vaya hacia dentro del papel y $\odot$ cuando sea hacia fuera.

3.1.1. Conservación de la Energía, Trabajo y Movimiento

La Fuerza Magnética no es una fuerza conservativa por lo que la energía requerida para mover un cuerpo, en un caso inicial, una carga entre dos puntos, depende de su trayectoria.

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F}\ \mathrm{d}\vec{r}\ =\ q\int_1^2 \vec{v} \times \vec{B}\ \mathrm{d}\vec{r}\ =\ 0\mathrm{J}$$

De esta expresión podemos sacar varias conclusiones:

- Al ser el trabajo nulo, $\boldsymbol{\Delta E_c = 0\ \Rightarrow\ \vec{v} = cte}$ & $\boldsymbol{\vec{v} \times \vec{B} \perp \mathrm{d}\vec{r}}$
- Por esta misma razón la fuerza no puede ser nula, por lo que la aceleración tampoco y por ende, la velocidad tampoco $\boldsymbol{\vec{F} \neq 0 \Rightarrow \vec{a} \neq 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \neq 0}$.
- $\boldsymbol{\vec{F_m} = \vec{F_\tau} + \vec{F_n}}$ La fuerza magnética es la suma de sus componentes normal $\boldsymbol{\vec{F_n}}$ y tangencial $\boldsymbol{\vec{F_\tau}}$.

- El movimiento de un cuerpo afectado por el $\vec{\boldsymbol{B}}$ es variable y complejo, por eso solo estudiamos casos específicos, por ejemplo en el caso de un Helicoidal, el campo tiene una forma de cuello de botella y no lo estudiaremos, pero el resto, en casi todos los casos que veremos, se moverán a favor de $\vec{\boldsymbol{B}}$.

Si consideramos solamente la fuerza tangencial $\vec{\boldsymbol{F_\tau}} = \boldsymbol{0}$ podemos obtener una expresión con la cual calcular la velocidad con la que gira la particula y el radio de la circunferencia con la que gira:

$$\vec{F_m} = \vec{F_n}$$

$$q \ \vec{v} \times \vec{B} \ = \ m\vec{a}$$

$$q \, |\vec{v}| \left|\vec{B}\right| \sin\alpha \ = \ m\frac{|\vec{v}|^2}{R}$$

$$\boxed{v = \frac{qBR}{m} \sin\alpha}$$

Siendo $\boldsymbol{R}$ el radio de la circunferencia y $\vec{\boldsymbol{v}}$ la velocidad normal.

3.2. Ley de Lorentz

Esta es una expresión bastante simple que relaciona la fuerza magnética y la electrostática:

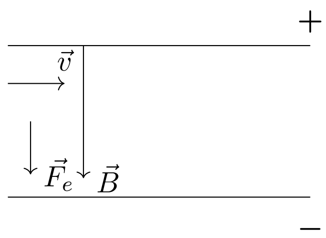
$$\boxed{\vec{\boldsymbol{F_T}} = \vec{\boldsymbol{F_m}} + \vec{\boldsymbol{F_e}} = \boldsymbol{q}(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}})}$$

3.2.1. Selector de Velocidades

Este es un caso muy particular para aplicar la Ley de Lorentz. Al tener un espacio donde actúan la fuerza magnética y la eléctrica, e introducimos una carga con cierta velocidad podemos concluir en lo siguiente:

$$\vec{F_\tau} = 0$$

$$\boxed{\vec{F_m} = -\vec{F_e}}$$



Son la misma fuerza, pero en sentidos opuestos

3.3. Fuerza Magnética en un hilo conductor

$$\boxed{\vec{F_m} = I \ \vec{l} \times \vec{B}}$$

No nos interesa saber como llegar a esta expresión, ya que hay que trabajar con la Densidad de Carga y la definición de Intensidad, por lo que no se explicará, en un principio en este documento.

3.4. Espira

Si consideramos una espira rectangular, con un $\vec{\boldsymbol{B}} \perp \vec{\boldsymbol{S}}$ de la espira, y hacia dentro $\otimes$ la Fuerza magnética será la misma en aquellos lados con la misma longitud.
Con esta premisa, podemos ser capaces de calcular el momento magnético que nos indica la fuerza necesaria para mantener en equilibrio, o desplazar la espira de un punto en equilibrio a uno inestable.

$$\vec{M} \ = \ \vec{m} \times \vec{B} \ = \ \boxed{IN \ \vec{S} \times \vec{B}}$$

Esta expresión nos dice dos cosas, la primera y más importante es que el momento está afectado por la orientación del campo y el de la superficie de la espira. Para que estén en equilibrio, el campo y la superficie deben de ser **paralelos** entre si, no **antiparalelos**, es decir, que aunque el ángulo entre ambos sea cero, tienen sentidos opuestos.
La segunda, es que el sentido de la corriente, y por ende la dirección del vector superficie $\vec{S}$ va en función de la corriente, aplicando la regla de la mano derecha.

3.5. Ley de Biot y Savart

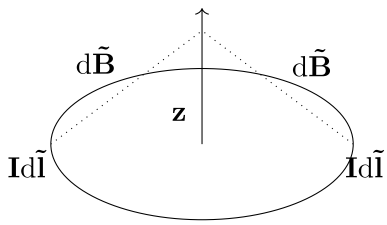
Si consideramos un conductor, indefinidamente largo y sin una forma definida, por el que circula corriente, definitivamente podemos calcular el campo magnético de la figura en cualquier punto de esta:

$$\boxed{\vec{B}(P) \;=\; \int_S I\,\frac{\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\;\frac{\mu_\mathrm{o}}{4\pi} \qquad [\mathbf{T}]}$$

Podemos observar que esta integral, puede llegar a ser muy complicada de calcular, y solo se recurrirá a ella en casos de extrema simetría.
El campo magnétostático se mide en Teslas **T**, que equivalen a $\mathbf{10^4}$ Gauss, **G**.

3.5.1. Espira Circular

Este es un caso muy específico donde veremos el cálculo del campo magnetostático usando la Ley de Biot y Savart



$$\mathrm{d}\vec{B}_z \;=\; |\mathrm{d}B|\cos\alpha\,\hat{k} \;=\; I\,\sin\frac{\pi}{2}\;\frac{\mu_\mathrm{o}}{4\pi}\frac{|R|\,r}{R^{3/2}R} \;=\; \frac{\mu_\mathrm{o} r I \mathrm{d}l}{4\pi(r^2+z^2)^{3/2}}$$

Siendo **R** el diametro de la espira, **r** el radio de la espira y **z** la altura del punto a calcular.

$$\boxed{B_z \;=\; \int \mathrm{d}B_z = \frac{I r^2 \mu_\mathrm{o}}{2(r^2+z^2)^{3/2}}}$$

3.6. Ley de Ampere

Esta ley es otra de las formas para calcular el campo magnetostático de un cuerpo, sabiendo que el campo es siempre circular, y está encerrado en líneas cerradas, podemos deducir que:

$$\boxed{\oint \vec{B}\mathrm{d}\vec{l} = I\mu_\mathrm{o}} \qquad \propto \qquad \oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_\mathrm{int}}{\epsilon_o}$$

Podemos observar que la Ley de Gauss es la "equivalente" a la Ley de Ampere.

3.6.1. Solenoide

El campo entra y sale del solenoide, por lo que habrá unos puntos con un campo magnético entrante y otro saliente, el resto se anularan:

$$\boxed{B \;=\; \frac{\mu_\mathrm{o} I N}{l} \;\;\Rightarrow\;\; \vec{B} \;=\; \mu_\mathrm{o} I n\;\hat{n}}$$

Siendo **l** la longitud del solenoide. y **n** el cociente entre el número de espiras y la longitud **N/l**.

3.7. Fuerza entre dos hilos infinitamente largos y paralelos

El sentido del campo va en función de como circule la corriente, si la corriente se mueve hacia arriba, el sentido será antihorario, y viceversa.

$$\boxed{F_{1\to 2} \;=\; I_2\vec{l_2} \times \vec{B_1}}$$

Aquí calculamos la fuerza magnética que se genera en el conductor 2 por el conductor 1.

$$\boxed{F_{2\to 1} \;=\; I_1\vec{l_1} \times \vec{B_2}}$$

Aquí calculamos la fuerza magnética que se genera en el conductor 1 por el conductor 2.

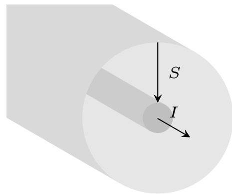
$$\boxed{B_n \;=\; \hat{l_n} \times \hat{R}\; \frac{\mu_o I_n}{2\pi d}}$$

Podemos ver que $\hat{\mathbf{R}}$ es la distancia al punto, como un vector unitario y $\hat{\mathbf{l_n}}$ será el sentido del cable.

4. Tema 3: Circuitos de Corriente Continua

4.1. Intensidad de Corriente

Definimos la Intensidad como la cantidad de corriente que circula por una sección de un conductor:



$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

De esta fórmula podemos también obtener los valores de $\mathbf{d}\boldsymbol{q}$ y por ende $\mathbf{I}$:

$$\boxed{\mathrm{d}q = n\,|q|\,v_d\,S\,\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{I = n\,|q|\,v_d\,S}$$

Siendo las incógnitas:

- $\boldsymbol{n}$: Es el número de cargas que fluyen por unidad de volumen $\mathbf{C/V}$.
- $\boldsymbol{v_d}$: Es la velocidad de deriva con que se mueven las cargas $\mathbf{m/s}$.
- $\boldsymbol{S}$: Es la sección transversal, su superficie.
- $\boldsymbol{q}$: Es el valor de la carga que circula, tomaremos en un principio valores positivos, es decir en valor absoluto.

4.2. Vector Densidad de Corriente

Esta es una magnitud vectorial con la cual podemos medir la intensidad que atraviesa una superficie:

$$I = \int_S \vec{J}\ \mathrm{d}\vec{S} \quad \Rightarrow \boxed{J = \left|\frac{I}{S}\right|}$$

4.2.1. Campo Electrostático y Densidad de Corriente

Entre $\vec{\boldsymbol{J}}$ y $\vec{\boldsymbol{E}}$ existe una relación muy estrecha, y es que cuanto $\vec{\boldsymbol{E}}$ aumenta, debido a que $\boldsymbol{v_d}$ se incrementa, $\vec{\boldsymbol{J}}$ crece proporcionalmente:

$$\vec{\boldsymbol{J}} \propto \vec{\boldsymbol{E}}$$

4.3. Conductores Ohmicos

Conocemos ya dos conceptos que nos permitirán deducir la resistividad que posee un material, el <u>Campo Eléctrostático</u> y la <u>Densidad de Corriente</u>, además de la Ley de Ohm $\boldsymbol{V = IR}$, que relaciona la Tensión con la Resistencia y la Intensidad:

$$\boxed{\vec{J} = \sigma\vec{E}}$$

$$\boxed{\vec{E} = \rho\vec{J}}$$

Siendo $\boldsymbol{\sigma}$ la <u>Conductividad Eléctrica</u> en <u>Siemens</u> entre metros $\mathbf{S/m}$ y $\boldsymbol{\rho}$ la <u>Resistividad Eléctrica</u> en ohmios por metro $\boldsymbol{\omega}\mathbf{m}$

4.3.1. Resistencia

Considerando que la caída de tensión entre los extremos de una resistencia vale $\boldsymbol{\Delta V}_{\text{ba}} = \boldsymbol{V}_{\text{b}} - \boldsymbol{V}_{\text{a}} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta V}_{\text{ba}} = \boldsymbol{E}\mathbf{d}\boldsymbol{l}$ y teniendo en cuenta la definición de $\vec{\boldsymbol{J}}$ podemos concluir en lo siguiente:

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}} = \frac{\boldsymbol{E}\mathbf{d}\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{\sigma E S}} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{\sigma S}} = \frac{\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{R} = \boldsymbol{cte}}$$

4.4. Joule

Este es un efecto, que se produce en una resistencia, que define que hay una disipación de la energía en forma de calor, ya que al pasar por una resistencia, la tensión que sale $\boldsymbol{V_b}$ es menor que la que entra $\boldsymbol{V_a}$:

$$\mathrm{d}Q = cte = I$$

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}Q\Delta V_{\text{ba}}$$

$$-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\Delta V_{\text{ab}} = \boxed{P_{\text{disipada}} = VI[\mathbf{W}]}$$

4.5. Baterías

Las baterías están formadas por un generador interno y una resistencia en serie, este generador produce una f.e.m ($\boldsymbol{\varepsilon}$). Idealmente:

$$W = \Delta U = \Delta Q V$$

$$\varepsilon = \frac{W}{\Delta Q} = V$$

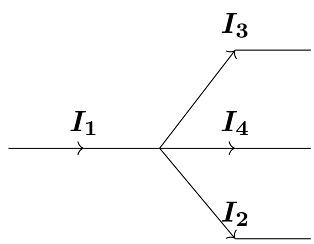
Es decir: $\boxed{\boldsymbol{P}_{\text{suministrada}} = \boldsymbol{\varepsilon I} - \boldsymbol{I^2 r}}$ en una situación ideal $\boldsymbol{r}$ =0$\boldsymbol{\Omega}$

4.6. Leyes de Kirchoff

Se aplica a circuitos que no se pueden resolver aplicando las leyes de Ohm solamente, se basa en el uso de mallas que dividen la corriente y su sentido, en función de la orientación de las pilas

4.6.1. Leyes de los Nudos

También conocida como **LCK**, define, como aparece en el esquema, que la intensidad que circula por un circuito, es igual a la suma de todas aquellas intensidades que se generan al pasar por un nodo y bifurcarse. Se define como:



$$\boxed{I_T = \sum_{n=1} I_n}$$

4.6.2. Leyes de las Mayas

También conocida como **LTK** define que la suma de todas las tensiones de cada malla debe ser igual a cero:

$$\boxed{\sum_{n=1} V_n = 0\mathbf{V}}$$

Por defecto consideraremos que si la corriente va del polo positivo al negativo de la pila, tiene sentido negativo, y positivo en el contrario. Esta misma regla se aplicará a las resistencias. Las resistencias de una misma corriente se sumarán, y en función del sentido de la corriente con la que puedan coincidir, se sumarán si van en el mismo sentido.

4.6.3. Circuitos simples y Paralelos

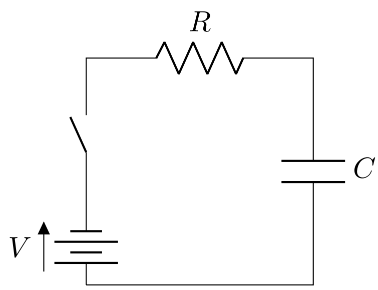
4.6.4. Simples

- Tensión: La tensión total es la suma de todas las tensiones.
- Intensidad: es **cte**.
- Resistencia: La resistencia total es la suma de todas las resistencias.

4.6.5. Paralelos

- Tensión: Es **cte** porque la carga es la misma en cada rama.
- Intensidad: La intensidad total es la suma de todas las intensidades.
- Resistencia: La resistencia total es la suma de todas las resistencias, inversas, y nuevamente inversa: $\boldsymbol{\frac{1}{R_T} = \sum_{n=1} \frac{1}{R_n}}$

4.7. Transistores



El circuito de la figura es un circuito RC, es decir, posee una resistencia y un condensador. Vamos a estudiar este circuito para dos momentos concretos en el tiempo, en el instante inicial y cuando ha transcurrido mucho tiempo, indefinido.

Cuando el circuito se enciende por primera vez, $\boldsymbol{t = 0}$ en el instante en el que se pulsa el interruptor, la intensidad que circula por el circuito es la misma en todo momento, ya que el condensador está vacío y actúa como un cable.

Cuando ha pasado un tiempo indefinido $\boldsymbol{t \to \infty}$, deja de circular corriente porque el condensador se ha cargado y ahora funciona como un cable roto, hay cortocircuito.

Ecuaciones:

- $\boldsymbol{Q(t) = Q_f(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}$
- $\boldsymbol{I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}}$
- $\boldsymbol{V_R(t) = \varepsilon e^{-\frac{t}{RC}}}$
- $\boldsymbol{V_C(t) = \varepsilon(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}$

5. Tema 4: Inducción Electromagnética

5.1. Introducción

En el Tema 2 se vio brevemente el concepto de Flujo con la Ley de Gauss, que no es más que el número de líneas que atraviesa una superficie en movimiento. La variación de este número de líneas generan una tensión.

$$\boxed{\Phi \ = \ \oint \vec{B}\, \mathrm{d}\vec{S}}$$

Vemos que cuando la superficie es paralela al campo magnético el flujo es nulo.
El flujo se mueve en Webers **Wb**.

5.2. Ley de Lenz y Faraday

5.2.1. Ley de Faraday

El voltaje inducido es opuesto en dirección y sentido al que se genera dentro del cuerpo:

$$\boxed{\varepsilon_{\text{ind}} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = IR}$$

Por defecto **N** vale 1, e indica el número de líneas de la espira o cuerpo inducido.

5.2.2. Ley de Lenz

La intensidad inducida posee dirección y sentido opuesto al generado por el flujo.

- Si el campo o la superficie aumenta, **el flujo es creciente**.
- Si el campo o la superficie disminuye, **el flujo es decreciente**.
- El sentido del flujo es el mismo que el del campo magnético.
- Si el flujo **aumenta**, el sentido de la corriente inducida debe ser opuesto al del flujo.
- Si el flujo **disminuye**, el sentido de la corriente inducida debe ser complementario al del flujo, y tiene que tener el mismo sentido, por ende.

5.3. Inductancia

Se denomina inductancia al proceso por el cual un cuerpo genera un flujo que atraviesa a otro cuerpo, puede ser ese mismo.
Normalmente viene dado por una expresión del tipo $\mathbf{\Phi} = \mathbf{I}\kappa$, siendo κ una **cte** que se mide en Henrios **H**.

5.3.1. AutoInducción

Se refiere al proceso por el cual atraviesa un flujo producido por el mismo cuerpo.

$$\boxed{\kappa = \frac{\Phi}{I} = L \quad \text{[Coeficiente de Autoinducción]}}$$

$$\Phi \ = \ \oint \left|\vec{B}\right| \left|\vec{S}\right| \cos\alpha \ = \ IL \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{BS\cos\alpha}{I}}$$

5.3.2. Inductancia Mutua

Este efecto se produce entre dos cuerpos, de forma recíproca.
Consideraremos Φ_{11} el **autoflujo** y Φ_{12} el **flujo mutuo entre 1 y 2** pero el generado por el cuerpo 2 en el cuerpo 1.

$$\Phi_{12} = \oint_{S_1} \vec{B}_2 \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\boxed{M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = M_{21}}$$

5.3.3. En general

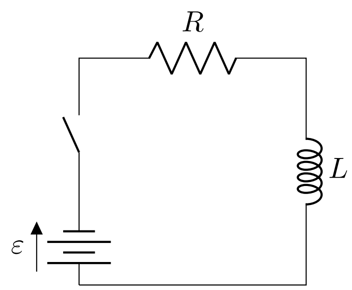
$$\Phi_n = \Phi_{nn} + \Phi_{nm} + \Phi_{\text{ext}} \Rightarrow \boxed{-[L\frac{\mathrm{d}I_n}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}I_m}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t}]} = \varepsilon_k$$

- $\mathbf{\Phi_{nn}}$ es la Autoinducción.
- $\mathbf{\Phi_{nm}}$ es ela inducción mutua.
- $\mathbf{\Phi}_{\text{ext}}$ son anomalías externas, por lo general es 0.

La autoinducción depende de la geometría y la mutua de la geometría y la orientación.

5.4. Bobina

En un estado estacionario, $\mathbf{t \to 0}$, el voltaje de la bobina valdrá 0, como un cortocircuito, pero cuando ha transcurrido un tiempo indefinido $\mathbf{t} \to \infty$ el voltaje no es más que $V_L = L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = \varepsilon e^{-Rt/L}$



5.4.1. Energía Almacenada

Podemos concluir con que la energía almacenada en una bobina es:

$$\boxed{\mathrm{U}_L = \frac{1}{2}LI^2 \quad [\mathbf{J}]}$$

6. Tema 5: Circuitos de Corriente Alterna

6.1. Uso de fasores

Debido a que los cálculos con números complejos pueden llegar a ser complicados, es más propicio usar fasores en este tema. El fasor más simple que podemos calcular, de temas anteriores, se puede obtener para calcular la tensión inducida de una espira.

$$\varepsilon(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\left|\vec{B}\right|\left|\vec{S}\right|\frac{\mathrm{d}\cos(wt+\rho)}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_{\mathrm{o}}\sin(wt+\rho)$$

Normalmente, la amplitud se refleja con valores eficaces $\mathbf{X}_{\mathrm{e}} = \frac{\mathbf{X}_{\mathrm{o}}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$.

6.2. Impedancia

La impedancia es la forma de representar la "resistencia" que oponen los elementos de un circuito de corriente continua al paso de la corriente.
Dependiendo del elemento, resistencia; bobina o capacitor, la señal estará en fase o desfase. Se miden en ohmios.

- Resistencias: $\boxed{\mathbf{R} = \frac{\tilde{\mathbf{V}}}{\tilde{\mathbf{I}}}}$ Se encuentra en resonancia, misma fase.

- Condensadores: $\boxed{\mathrm{C} = \frac{\tilde{\mathbf{I}}}{\mathbf{w}\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{j}} \Rightarrow -\mathbf{j}\mathbf{X}_{\mathrm{C}} = \frac{-\mathbf{j}}{\mathbf{w}\mathrm{C}}}$ Se encuentra en desfase, de $-\frac{\pi}{\mathbf{2}}$.

- Bobinas: $\boxed{\mathbf{L} = \frac{\tilde{\mathbf{V}}}{\mathbf{w}\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{j}} \Rightarrow \mathbf{j}\mathbf{X}_{\mathbf{L}} = \mathbf{jwL}}$ Se encuentra en fase, de $\frac{\pi}{\mathbf{2}}$

La suma de impedancias sigue la misma regla que la suma de resistencias

$$\boxed{Z_T = \underbrace{\sum_{n=1}^{k} Z_n}_{\text{serie}} = \underbrace{\frac{1}{\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{Z_n}}}_{\text{paralelo}}}$$

6.3. Potencia

Aquí solo veremos las fórmulas correspondientes:

- $\boxed{P(t) = \tilde{V}\tilde{I} = V_{\mathrm{o}}\cos(wt+\rho) \quad I_{\mathrm{o}}\cos(wt)}$ Esta es la expresión general para calcular la potencia que consume, o el calor que se pierde en el circuito.

- $\boxed{P_m = \frac{V_{\mathrm{o}}I_{\mathrm{o}}\cos\rho}{2}}$ De aquí podemos deducir la potencia que consume el circuito en total, siendo $\rho = \rho_{\mathbf{V}} - \rho_{\mathbf{I}}$.

- $\boxed{P_R = \frac{V_{\mathrm{o}}I_{\mathrm{o}}}{2}}$ Aquí vemos que la potencia consumida por <u>las resistencias</u> es igual que en un circuito de corriente continua.

- $\boxed{P_z = \frac{I_{\mathrm{o}}^2}{2}\;\Re(z) = O}$ Todo lo que no sea una resistencia, no consumirá energía, por lo que su potencia es siempre 0.

6.4. Ondas en un circuito

Este es un caso especial, que aparece en las telecomunicaciones, veremos las ecuaciones más relevantes, unicamente:

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{I} Z$$

$$\boxed{I_{\text{o}} = \frac{\varepsilon_{\text{o}}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}}$$

Cuando $\mathbf{X_L} = \mathbf{X_C}$ entonces decimos que están en resonancia y podremos calcular la frecuencia:

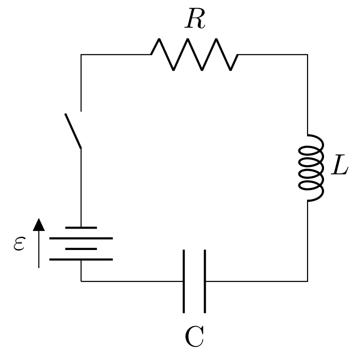
$$\boxed{Lw_{\text{o}} = \frac{1}{\mathrm{C}w_{\text{o}}}}$$

$$f_{\text{o}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\mathrm{C}}}$$

Y por ende:

$$\boxed{\tilde{V_L} = -\tilde{V_C}}$$

Aquí vemos un dibujo del circuito que estamos analizando:



7. Tema 6: Ondas Electromagnéticas

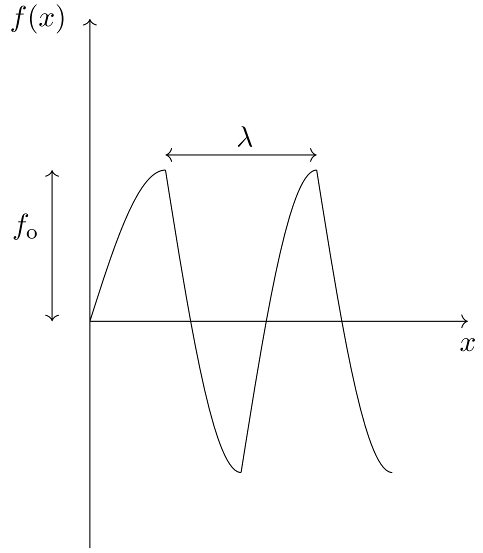
7.1. Funciones onda

Este tema será el más corto de los 6.

7.2. Características de las ondas

La función de onda se puede representar de la siguiente forma:

$$f(x) = f_o \ \cos(\kappa x + \rho) \ \Rightarrow \ \boxed{f(x,t) = f_o \ \cos(\kappa x \pm wt + \rho)}$$



De esta expresión podemos ver ciertas cosas:

- λ es la longitud de onda, la distancia entre dos puntos iguales, se mide en metros.
- κ es el número de ondas, se mide en radiantes entre metros, se obtiene como $\boxed{\kappa = \frac{\mathbf{2}\pi}{\lambda}}$
- Existe un $\pm$ que indica el desplazamiento en el tiempo de la función, si es $+$ indica que se desplaza a la izquierda, sino, a la derecha.
- La velocidad $\boxed{\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w}}{\mathbf{k}}}$ e indica la velocidad a la que se mueve la onda.
- Podemos calcular el desfase de una onda como la variación de las fases iniciales, que equivale al número de ondas por la distancia entre ondas $\boxed{\boldsymbol{\Delta}\rho = \kappa\boldsymbol{\Delta}\mathbf{X}}$. Se mide en radianes.
- La velocidad angular **w** y la frecuencia también las podemos calcular $\boxed{\mathbf{f} = \frac{\mathbf{w}}{\mathbf{2}\pi}}$ y se mide la frecuencia en Hercios **Hz** y la velocidad angular en **m/sec**.
- El periodo indica el tiempo que tiene que pasar para que la función vuelva a pasar por ese punto, se calcula como la inversa de la frecuencia $\boxed{\mathbf{T} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f}}}$ y se mide en **segundos**.

7.3. Ondas electromagnéticas

Este es un caso particular de las ondas, ya que se forman por la intersección entre una onda magnética y una eléctrica.

$$\boxed{\vec{B}(x,t) = B_{\text{o}} \cos{(\kappa x \pm wt + \rho)}\hat{B}}$$

$$\boxed{\vec{E}(y,t) = E_{\text{o}} \cos{(\kappa y \pm wt + \rho)}\hat{E}}$$

Sabemos además que los vectores normales de ambas ondas son perpendiculares entre si, por lo que:

$$\boxed{\hat{E} \times \hat{B} = \hat{n_{\text{dir}}}}$$

Como datos a tener en cuenta para saber su orientación y calcular sus variables:

- Estas ondas se mueven a la velocidad de la luz $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{\text{o}}\mu_{\text{o}}}}} \approx \mathbf{3{,}10^8}$ m/sec Esto también es igual a $\boxed{c = \frac{E_{\text{o}}}{B_{\text{o}}}} = \frac{\mathbf{w}}{\kappa}$.
- Si el signo de $\boxed{\kappa \mathbf{x} = \mathbf{wt}}$ entonces la onda electromagnética se mueve en sentido del eje negativo, sino, en el positivo.

7.3.1. Vector de Poynting

$$\boxed{\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}}$$

Siendo $\vec{E}$ y $\vec{B}$ los vectores con amplitudes **no eficaces**.

7.3.2. Intensidad

Considerando el vector de Poynting podemos calcular la intensidad como la amplitud de este vector entre 2.

$$\boxed{I = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} = \frac{P}{S}}$$

Siendo **P** y **S** la potencia de la onda y la superficie a la que afecta.
Por separado podemos calcular la energía de cada onda:

$$\boxed{\mu_E = \frac{E^2 \epsilon_0}{2}}$$

$$\boxed{\mu_B = \frac{B^2}{\epsilon_0 2}}$$