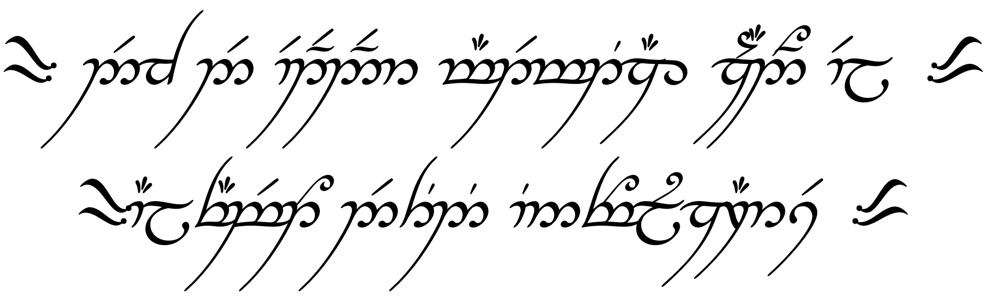
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

Asignatura:
Matemáticas Discretas

Autor:
Fernando José Mateos Gómez

Ultima Modificacion: **23 de Febrero del 2022**



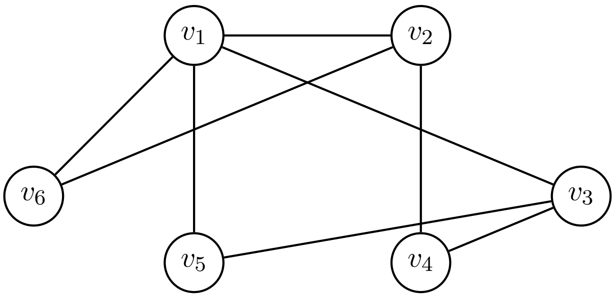
Indice

1. Tema 1: Introducción a la Teoría de Grafos

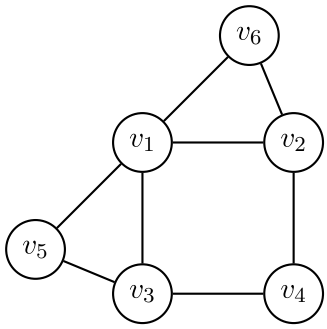
1.1. Nociones Básicas

Los *grafos* son estructuras compuestas por **vértices** y **aristas**, si el grafo es simple, tienen una propiedad respecto a las aristas, que están formadas por pares no ordenados de vértices.
Los podemos representar así:

$$\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{A}\} \begin{cases} \{1,2,3,4,5,6\} \\ \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,4\},\{2,6\},\{3,4\},\{3,5\}\} \end{cases}$$



Representación Gráfica

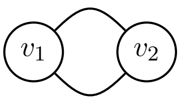


Grafo Plano

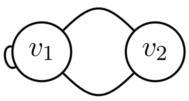
La figura de la derecha es su representación gráfica, de la fórmula, mientras que la figura contigua es un *grafo plano*, cuya representación gráfica no posee aristas que se crucen entre si.

1.1.1. Tipos de Grafos

Simple: Un grafo cuyos vertices están conectados por una única arista, y no se unen a si mismos.
Multigrafo: Grafos cuyos vértices pueden poseer una o más aristas que conecten al mismo vértice:

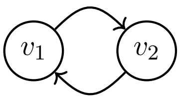


Pseudografo: Tipo de multigrafo, que posee aristas que conectan a un vértice consigo mismo:

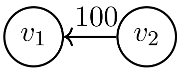


Digrafo o dirigido: Grafo cuyas aristas tienen un sentido, puede ser:

- Digrafo, refiriendose a un grafo simple.
- Digrafo Múltiple o multigrafo dirigido.
- Pseudo Digrafo o pseudografo dirigido.



Ponderado: Grafo cuyas aristas poseen un peso:



1.1.2. Adyacencia

Decimos que dos vértices son adyacentes cuando poseen una arista que los conecta directamente. Si miramos el grafo del principio del tema, podemos decir que, el vértice v_1 es adyacente al vértice v_5 pero no al vértice v_4:

$$v_i, v_j \in \mathcal{V} \Leftrightarrow e = \{v_i, v_j\} \in \mathcal{A}$$

Sabiendo esto, podemos también decir que las aristas que conectan con el mismo vértice, se llaman *incidentes*. Por ejemplo $\{1,3\}$ y $\{4,3\}$ son incidentes sobre el vértice v_3 pero no lo serán sobre el vértice v_6.

Con todo esto, podemos definir entonces que el **grado** o **valencia** de un vértice es el número de aristas que inciden sobre este:

$$\delta(v_k) = n$$

En función del valor de la valencia podemos catalogar al vértice como:

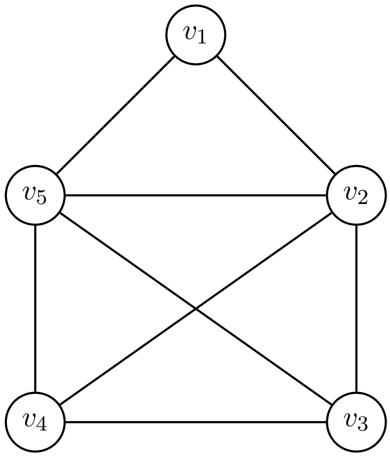
- Vértice Par, valencia par.
- Vértice Impar, valencia impar.
- Vértice Aislado, no tiene valencias.

Poseen ciertas características, pero estas pertenecen a los grafos simples, para esto usaremos la siguiente nomenclatura: $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{A}\}$ será el grafo y $n = |\mathcal{V}|$ será la cardinalidad del conjunto de vértices.

- Un vértice puede poseer un grado entre 0 y $n-1$
- Un grafo $\mathcal{G}$ no puede poseer simultaneamente un vértice de valencia 0 y otro de valencia $n-1$
- $\sum_{v\in\mathcal{V}} \delta(v) = 2\,|A|$ es decir, la suma de todas las valencias debe de ser el doble del número de aristas, y por tanto no puede tener un número impar de vértices con una valencia total impar.

1.1.3. Secuencia Gráfica

Llamaremos a una secuencia gráfica a la lista decreciente de las valencias de todos los vértices del grafo, por ejemplo:



$$SG = \{4,4,3,3,2\}$$

Con una secuencia gráfica, podemos ser capaces de definir si con esas valencias podemos construir un gráfo, a partir del teorema de Havel-Hakimi.

1.1.4. Havel-Hakimi

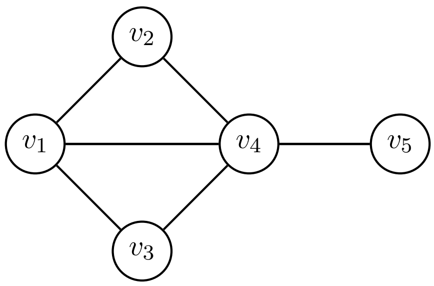
Este teorema dice dada una secuengia gráfica, con el primer término mayor que cero, es equivalente a:

1. Eliminar el primer término, a_1.
2. Restarle 1 a los a_1 primeros elementos.
3. Ordenarla decrecientemente
4. Continuar hasta que a_1 sea menor que 1.

Por ejemplo, dada la SG= $\{1,2,2,3,4\}$:

1. SG= $\{4,3,2,2,1\}$
2. SG= $\{3,2,2,1\}$
3. SG= $\{2,1,1,0\}$
4. SG= $\{1,1,0\}$
5. SG= $\{0,0,0\}$

Sabiendo que esta combinación es posible, podemos construir un grafo, llendo de la última a la primera operación, creando tantos vértices como valores vayan apareciendo, cada vértice tendrá un número de aristas que se determinará por el valor que hemos ido decrementando:



Si a_1 es menor que cero en algún momento, esa estructura nunca será posible. Tampoco si el **número de vértices impar es impar** y **existe un número impar de valencia impar**, o si a_1 **es mayor que el número total de vértices**.

1.1.5. Adyacencia en Digrafos

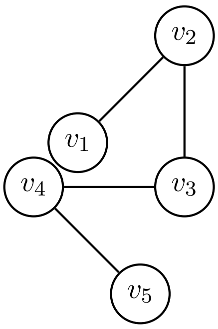
Simplemente tenemos que tener en cuenta, que en este tipo de grafos, debemos de separar las valencias de las aristas que **entran** y de las que **salen**.

1.1.6. Grafos Especiales

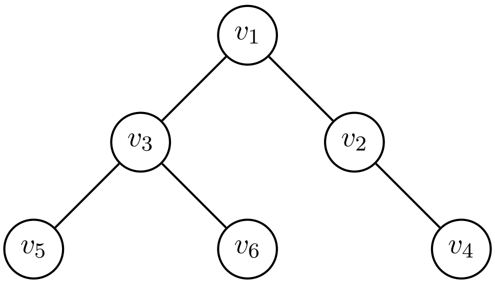
Grafos Triviales: No poseen aristas.

Sin ciclos: Grafos que no están cerrados, no puedes llegar a un vértice desde si mismo. Pueden ser:

Árbol:



Bosque de Árboles:



Con ciclos:

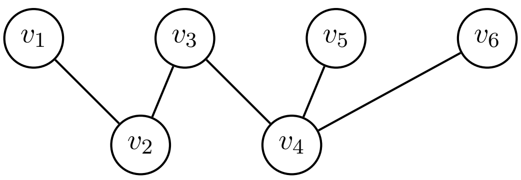
Grafo Ciclo C_n.

Grafo Completo K_n, todos los vértices tienen la máxima valencia posible.

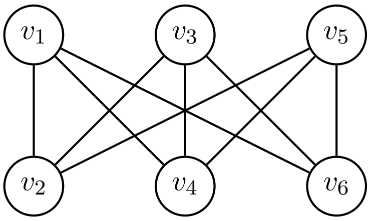
Grafo Regular: Todos los vértices tienen el mismo número de valencia.

Grafo Bipartito: Por definición, son aquellos grafos que pueden formarse a partir de dos conjuntos de vértices, que no comparten ningún vértice en común (es decir, son grafos **disjuntos**):

$$\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{A}\} \begin{cases} \mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset \\ \forall_e \in \mathcal{A} : e = \{v_i, v_j\}, v_1 \in \mathcal{V}_1, v_2 \in \mathcal{V}_2 \end{cases}$$



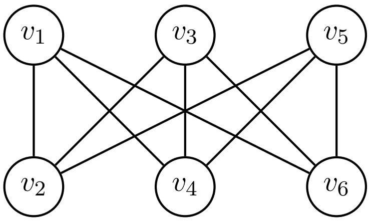
Grafo Bipartito Completo $K_{n,m}$: Son grafos que cumplen la condición de ser bipartito, y además todos sus vértices tienen valencia máxima.



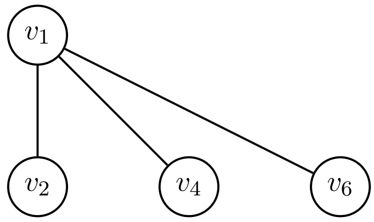
1.2. Sugrafos

No es más que un subconjunto de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{A}$ que nos permite obtener otro nuevo grafo:

$$\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V} \\ \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A} \end{cases}$$



$\mathcal{G}$



$\mathcal{G}'$

Podemos obtener un subgrafo a partir de un conjunto de vértices, o aristas, u ambas (en cualquier caso, también deberemos de obtener los vértices y aristas que pertenezcan a esa arísta u vertice).

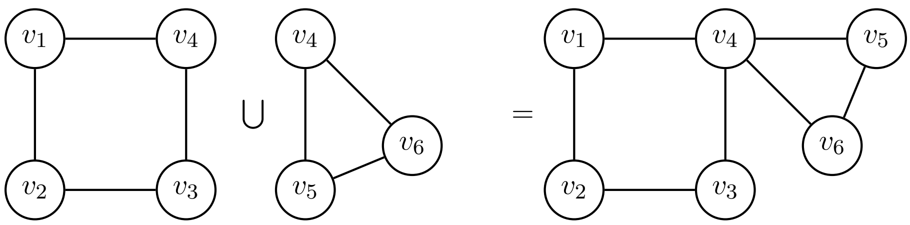
1.2.1. Subgrafo especial

Un subgrafo especial es el *subgrafo recubrido*, el cual se genera cuando solo generamos un subgrafo con **todos** los vértices del grafo original, obteniendo la menor cantidad de aristas

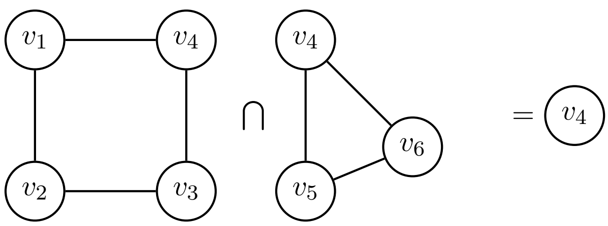
1.3. Operaciones con Grafos

Solo podemos hacer 5 operaciones con grafos:

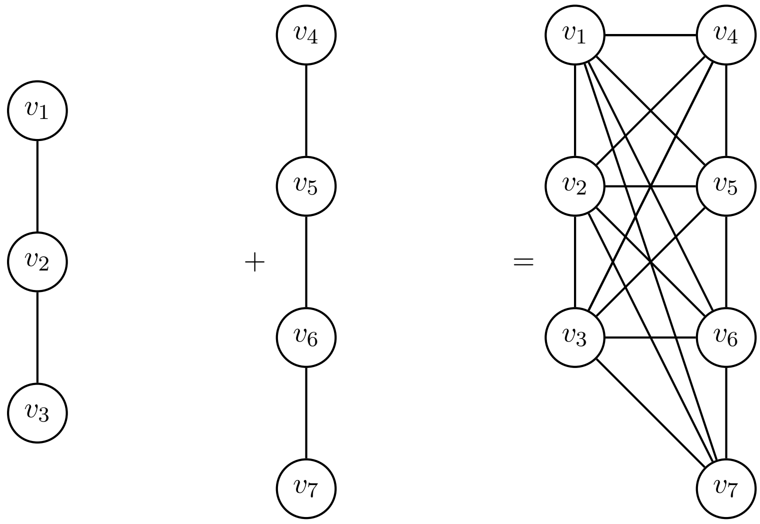
- **Eliminación de Aristas**: Eliminar una arista, no implica borrar sus vértices.
- **Eliminación de Vértices**: Si eliminamos un vértice, borramos cualquier arista que se conecte a este.
- **Unión de Grafos**:



- **Intersección de Grafos**:



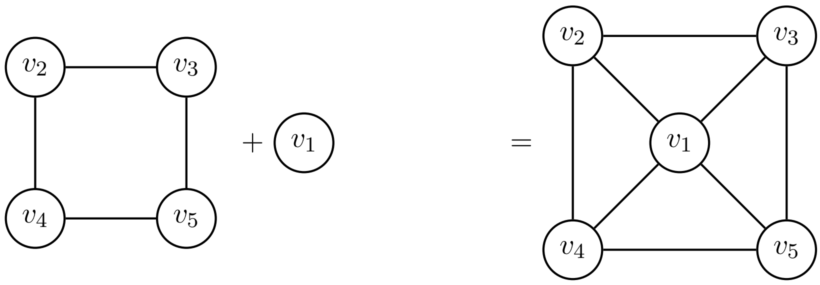
- **Suma de Grafos** (cuando son Disjuntos): Hacemos todas las posibles combinaciones de aristas entre los vértices de los dos grafos, un producto cartesiano:



1.3.1. Grafo Rueda

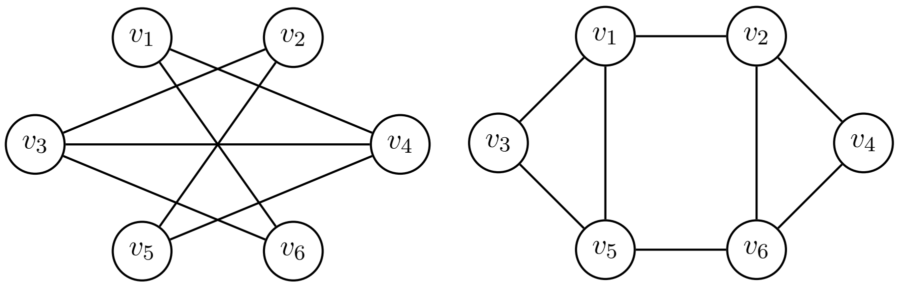
$$W_n = K_1 + C_n$$

Este tipo de grafo se obtiene de la suma de un grafo con un solo vértice, y un circular (tendrémos $n+1$ vértices) pero lo llamaremos W_n, un ejemplo es el siguiente



1.3.2. Grafo Complementario

Es el grafo resultante de las aristas que no se han creado.

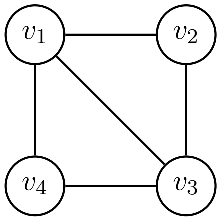


Grafo Original $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{A}\}$

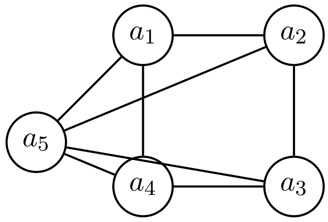
Grafo Complementario $\overline{\mathcal{G}} = \{\mathcal{V}, \overline{\mathcal{A}}\}$

1.3.3. Grafo de Línea

Dado un grafo con n vértices y m aristas, podemos crear un grafo a partir de las aristas adyacentes, las cuales son aquellas conectadas por un vértice:



Grafo Original



Grafo de Línea

1.4. Definir un Grafo

Existen distintas formas, hasta ahora se ha visto la forma gráfica, sin embargo si el grafo es extremadamente grande es mejor utilizar *listas de adyacencias* o *matrices de adyacencias*:

- **Listas de adyacencias**: Creamos un conjunto de listas, que guardan la información relativa a los vértices que está unido el vértice de esa posición:

$$\{\{2,3,5,6\},\{1,4,6\},\{1,4,5\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2\}\}$$

- **Matrices de Adyacencias**: Matriz de nXm que, dependiendo del tipo de grafo, guardará unos valores u otros:
  - Si es simple, guardará un 1 por cada posición correspondiente en la que el vértice de esa fila, tenga una arista con el vértice de esa columna.
    - La suma de las columnas es la valencia.
    - La diagonal es nula.
    - Es cuadrada y simétrica.
  - Si es simple, podemos crear una matriz tal que guarde qué vértice con que otro guarda relación
    - La suma de cada columna es 2.
    - La suma de cada fila es la valencia de ese vértice.
  - Si es un digrafo, se hace igual que el simple.
    - La suma de cada fila es la valencia saliente.
    - La suma de cada columna es la valencia de entrada.
  - En un pseudografo, en vez de guardar un 1, guardamos el valor de aristas que conectan con ese vértice. Si es circular, sumas le sumas 2.
  - Si es ponderado, guardas el peso de la arista en la posición que le corresponde a la relación de los vértices.

1.5. Isomorfismo de Grafos

Un grafo es isomorfo, cuando cumple la propiedad de ser biyectivo, es decir, es inyectiva (por un vértice del grafo existe una imágen en el adyacente) y es sobreyectiva (para cada vértice del grafo, existe una imágen en el adyacente).

Debemos de tener en cuenta ciertos detalles, si queremos comprobar que no hay isomorfismo:

1. El número de vértices debe ser el mismo.
2. El número de aristas debe de ser el mismo.
3. Los grados de los vértices, deben de ser los mismos.

4. El número de ciclos, de igual longitud, deben de ser los mismos.
5. El número de componentes conexas debe ser igual.
6. Los grafos complementarios deben de ser Isomorfos
7. Cada vértice debe de tener una imágen, que cumpla sus propiedades.
8. ...

Si son isomorfos, debemos de encontrar una aplicación, por la cual podemos decir que un vértice de un grafo, equivale a otro vértice del otro gráfo.

1.5.1. Grafo Autocomplementario

Un grafo es autocomplementario, cuando su complementario sufre de Isomorfismo.

2. Tema 2: Conectividad en Grafos

2.1. Caminos

Conjunto de vértices y aristas adyacentes, pueden ser varios, que indican la ruta a seguir de un punto a otro del grafo. Pueden ser:

- Simple: No se repiten vértices
- Cerrado: El camino vuelve al vertice de origen.
- Recorrido: No se repiten aristas.
- Circuito: Es cerrado y recorrido.
- Ciclo: Es cerrado y simple.

2.2. Conexión de Grafos

Si dos vértices están conectados, entonces existe un camino simple entre ellos. Podemos distinguir, dos tipos:

- Conexo: Todos los vértices están conectados entre si, existe un camino para ir de un vértice a otro.
- No Conexo: Poseen varias componentes conexas, independientes.

2.2.1. Distancia

Definimos la distancia como el número de aristas entre dos vértices que recorren el camino más corto.

$$d(v_0, v) = N|\infty$$

Si no hay un camino, se indica con el símbolo de infinito. Usamos el algoritmo de BFS para calcular este valor.

2.2.2. Excentricidad

Es la mayor distancia que existe partiendo de un vértice.

$$e(v) = \max d(v, u) : u \in \mathcal{V}$$

Podemos determinar que el conjunto de vértices con la menor excentricidad se denomina Centro, y su valor se denomina radio de un grafo, $\mathrm{rad}(G)$. Al conjunto de vértices con la mayor excentricidad, se denomina periferia, y su valor se denomina diámetro, $\mathrm{diam}(G)$.

2.3. Conexión en Digrafos

Las definiciones que hemos usado sirven solo para grafos no dirigidos o no ponderados, aquí afecta el hecho de que una arista solo puede recorrerse en un sentido.
Podemos distinguir nuevos conceptos:

- Semicamino: Es el camino que se obtiene al suprimir la orientación de las aristas
- Grafo Debilmente Conexo: Si consideramos el grafo sin orientación, podemos decir que es conexo si satisface su definición.

- Unilateralmente Conexo: No se encuentra un camino dirigido de un vértice a otro (con que exista un vértice que lo cumpla, sirve).
- Fuertemente Conexo: A partir de un vértice cualquiera, puedes llegar a cualquier otro vértice del grafo.

2.3.1. Componentes

Podemos analizar un grafo por componentes, es decir, si somos capaces de generar dos grafos que al unirlos nos proporcionen el grafo original, y una de sus componentes posea la cualidad de ser un grafo Fuertemente Conexo; Unilateralmente Conexo o Debil, entonces podemos decir que ese grafo posee una componente de ese tipo.
En el caso de las componentes fuertemente conexas, podemos usar el algoritmo de Tarjan.

2.4. K-Conexión

Estudiaremos la fragilidad de una red, a la hora de eliminar un vértice o arista. Si eliminar algo del grafo, impide que se puedan hacer caminos entre todos los vértices, entonces se dice que es fragil.

- Si el grafo es de tipo rueda, se volverá fragil, al eliminar 3 vértices.
- Si el grafo es ciclo, se vuelve fragil, eliminando dos vértices.

2.4.1. Cortes

Hay distintos tipos:

- Se dice que es un vértice de corte, si es el único vértice que al eliminar, rompe el grafo.
- Pareja de corte: formado por dos vértices corte, si no se eliminan los dos, no se rompe.

Indicamos la conectividad de un grafo con $k(G)$, de forma que indica el número de vértices que se necesitan eliminar.
Si eliminamos las aristas:

- Llamamos arista puente a la arista que al eliminarla, rompe el grafo.
- Si existe un conjunto de aristas puente, lo denominamos aristas de corte.

Lo representamos con $\lambda(G)$, y su valor es el número de aristas mínimas a eliminar para romperlo. Se llama conectividad lineal

2.4.2. Whitney

Dado un grafo conexo, decimos que la conectividad será menor o igual que la conectividad lineal y menor que la valencia más pequeña del grafo:

$$k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

2.4.3. Teorema de Menger

La conectividad de un grafo coincide con el número de caminos disjuntos que hay en un grafo, entre dos vértices, que están conectados por el menor número de caminos disjuntos. El par de vértices con el menor número de caminos, que no repitan vértices, indicará la conectividad.

La conectividad lineal de un grafo coincide con el número de caminos disjuntos entre aristas, no se repiten aristas, que separan dos vértices por el menor número de caminos disjuntos.

3. Tema 3: Árboles

4. Tema 4: Planaridad

5. Tema 5: Transversalidad en Grafos

6. Tema 6: Coloración en Grafos