

Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Informática

Asignatura:

Algebra Lineal y Numérica

Autor:

*Fernando José Mateos Gómez*

Ultima Modificacion: **2 de febrero de 2022**

၃။ နာဇာနည် ဂျော်ဇော မျှော်မျှော်စွာ ဂျော်ဇော ဂျော်ဇော  
 ၃။ ဂျော်ဇော ဂျော်ဇော ဂျော်ဇော ဂျော်ဇော ဂျော်ဇော

# Indice

<b>1. Tema 1: Sistemas de Ecuaciones Lineales, Métodos Directos</b>	<b>2</b>
1.1. Sistema de Ecuaciones Lineales . . . . .	2
1.1.1. Método de Eliminación de Gauss . . . . .	2
1.1.2. Discusión . . . . .	2
1.2. Matrices Elementales . . . . .	3
1.2.1. Propiedades . . . . .	3
1.3. Método de Gauss-Jordan . . . . .	3
1.3.1. Matriz Inversa . . . . .	3
1.4. Método LU . . . . .	3
1.4.1. Método de Cholesky . . . . .	4
<b>2. Tema 2: Sistemas de Ecuaciones Lineales y Métodos Iterativos</b>	<b>5</b>
2.1. Introducción . . . . .	5
2.2. Radio Espectral . . . . .	5
2.3. Descomposición . . . . .	5
2.3.1. Método de Jacobi . . . . .	6
2.3.2. Método de Gauss-Seidel . . . . .	6
<b>3. Tema 3: Condicionamiento de Sistemas de Ecuaciones Lineales</b>	<b>7</b>
3.1. Introducción . . . . .	7
3.2. Espacio Vectorial . . . . .	7
3.2.1. Ejemplos . . . . .	7
3.3. Normas Vectoriales y Matriciales . . . . .	7
3.3.1. Vectores . . . . .	7
3.3.2. Matrices . . . . .	8
3.4. Número de Condición de una Matriz . . . . .	8
3.5. Transformaciones y Condicionamiento . . . . .	8
3.6. Transformaciones Householder . . . . .	8
3.7. Método QR . . . . .	8
<b>4. Tema 4: Series Numéricas. Series de Potencias</b>	<b>9</b>
<b>5. Tema 5: Series de Fourier. Series Trigonométricas</b>	<b>10</b>
<b>6. Tema 6: Funciones de Varias Variables</b>	<b>11</b>

# 1. Tema 1: Sistemas de Ecuaciones Lineales, Métodos Directos

## 1.1. Sistema de Ecuaciones Lineales

Considerando que un sistema de ecuaciones lineales se puede representar como  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  podemos decir entonces que esta expresión equivale a:

$$\begin{cases} ax + by + cz + \dots = k \\ \dots + \dots + \dots + \dots = \dots \\ \dots + \dots + \dots + \dots = \dots \\ \dots + \dots + \dots + \dots = \dots \end{cases}$$

Que es lo mismo que:

$$\begin{pmatrix} ax & by & cz & \dots \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

### 1.1.1. Método de Eliminación de Gauss

Aplicando transformaciones elementales simplificamos la matriz  $(A|b)$  de forma que sea triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | 3 \\ -1 & 1 & | 3 \\ 1 & 1 & | 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}(1) \ F_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | 3 \\ 0 & 3 & | 6 \\ 0 & -1 & | 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{32}(\frac{1}{3}) \ F_2(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | 3 \\ 0 & 1 & | 2 \\ 0 & 0 & | 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3y = 6 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

En este caso no tiene solución.

### 1.1.2. Discusión

Existen 3 tipos de sistemas de ecuaciones:

- Incompatible: No tiene soluciones.
- Compatible:
  - Determinado: Tiene una sola solución.
  - Indeterminado: Tiene infinitas soluciones.

Para determinar cual es, sin resolverla, aplicamos el método de Rouché-Fröbenius:

Si el  $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(A|b)$  entonces es Incompatible.

Si el  $\text{Rango}(A)$  es igual al número de incógnitas, es Determinado.

Si el  $\text{Rango}(A)$  es menor al número de incógnitas es Indeterminado.

## 1.2. Matrices Elementales

Llamamos a estas a las matrices que surgen de operar con sus filas ( $F$ ) o columnas  $C$ .

- $F_{ij} \Rightarrow F_i \leftrightarrow F_j$
- $F_i(\lambda) \Rightarrow F_i \leftarrow \lambda F_i$
- $F_{ij}(\lambda) \Rightarrow F_i \leftarrow F_i + F_j \lambda$

### 1.2.1. Propiedades

1. Mover dos filas o columnas implica en multiplicar la matriz por  $(-1)$ .
2. Multiplicar una fila o columna por un número, implica multiplicar la matriz por ese valor.
3.  $F_{ij} = F_{ij}^{-1}$
4.  $F_i^{-1}(\lambda) = F_i(\frac{1}{\lambda})$
5.  $F_{ij}^{-1}(\lambda) = F_{ij}(-\lambda)$

## 1.3. Método de Gauss-Jordan

Se basa en el método de Gauss, partiendo de una matriz  $I$ , unitaria, debemos de encontrar otra tal que su producto nos devuelva la solución que buscamos.

### 1.3.1. Matriz Inversa

Para calcularla debemos de hacer transformaciones elementales de la matriz  $A|I$  tal que  $A$  se convierta en  $I$ , haciendo transformaciones elementales para obtener una matriz triangular superior y luego diagonal. Es decir:

$$A^{-1} = FI$$

## 1.4. Método LU

Para poder aplicar este algoritmo, y sus derivados, debemos de cerciorarnos que  $A$  es una matriz definida positiva, cada una de sus submatrices, partiendo desde el elemento en la primera columna, primera fila, y de ahí expandiendo, es positiva.

$$Ax = b \quad A = LU$$

Considerando  $A$  como la matriz con la que partimos, las matrices  $L$  y  $U$  son matrices diagonales inferior y superior, respectivamente. Considerando esto, podemos usar el método de Gauss para obtener la matriz  $U$  y para  $L$ , aplicamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y_0 \end{cases}$$

Siendo  $x$  la solución del sistema. ¿Cómo hayar  $L$ ? A partir de las transformaciones elementales que hemos hecho, le hacemos la inversa, y se las aplicamos a una matriz unitaria,

veamos este ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}(-1) \ F_{31}(1) \ F_{41}(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{32}(-1) \ F_{42}(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos la siguiente ecuación:

$$F_{42}\left(\frac{1}{2}\right) F_{32}(-1) F_{41}\left(\frac{1}{2}\right) F_{31}(1) F_{21}(-1) A = U$$

$$L = (F_{42}\left(\frac{1}{2}\right) F_{32}(-1) F_{41}\left(\frac{1}{2}\right) F_{31}(1) F_{21}(-1))^{-1}$$

$$L = F_{21}(1) F_{31}(-1) F_{41}\left(\frac{-1}{2}\right) F_{32}(1) F_{42}\left(\frac{-1}{2}\right) I$$

Con todo esto, ya seríamos capaces de plantear los sistemas de ecuaciones.

#### 1.4.1. Método de Cholesky

Es una derivación del método LU, solo se puede usar cuando la matriz es simétrica  $A = A^t$ , en cuyo caso  $A = K K^t$

De esta forma, ahora la ecuación que tendremos que resolver es la siguiente:

$$\begin{cases} Ky = b \\ K^t x = y_0 \end{cases}$$

Para obtener  $K$  debemos de obtener  $L$  y multiplicarla por una matriz formada por los elementos de la diagonal de  $U$ , con su raíz cuadrada:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}(\frac{-1}{2}) \ F_{32}(1)} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

## 2. Tema 2: Sistemas de Ecuaciones Lineales y Métodos Iterativos

### 2.1. Introducción

Dado un sistema  $Ax = b$ , si  $A$  es invertible, es decir, el sistema es compatible determinado, por lo que podemos calcular la solución como  $\hat{x} = A^{-1}b$ , siendo  $\hat{x}$  la única solución posible. Usamos este método cuando el sistema es pequeño, pero si la matriz  $A$  es extremadamente grande, podemos usar métodos de aproximación que nos ayuden a acercarnos a la solución, con un error muy cercano a 0.

Para lograr esto usaremos el radio espectral y el autovalor.

### 2.2. Radio Espectral

Consideramos  $Q$  como una matriz cuadrada, por lo que un **autovalor** es un escalar  $\lambda$  para el que existe un vector  $x$  no nulo tal que:

$$Qx = \lambda x$$

Tras esto podemos calcular los autovalores como:

$$\boxed{|Q - \lambda I| = 0}$$

De esta forma solo tendremos que calcular un determinante para esta matriz resultante tal que sus raíces son sus autovalores:

$$\boxed{p_Q(\lambda) = |Q - \lambda I|}$$

Así obtendremos el radio espectral, que será el autovalor de mayor valor, absoluto:

$$\boxed{\rho(\lambda) = \{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } Q\}}$$

### 2.3. Descomposición

¿Cómo calculamos la matriz  $Q$ ?, simple, cualquier matriz cuadrada se puede descomponer en la suma de dos matrices (una de ellas es invertible):

$$\begin{aligned} A &= M + N & Ax &= b \\ (M + N)x &= b \\ Mx &= b - Nx \\ x &= M^{-1}b + M^{-1}Nx = C + Qx \end{aligned}$$

De esta forma, de forma general podemos obtener la solución en la iteración enésima:

$$\boxed{\hat{x}_n = Qx_{n-1} + C}$$

Podemos calcular el error con  $Q^n$ , cuanto más cercana a cero sea esa matriz, entonces más precisa es la solución.

Es decir, calculamos el radio espectral de:

$$\boxed{\rho(-M^{-1}N) = 0}$$

Ahora, considerando que las matrices  $M$  y  $N$ , las podemos seguir descomponiendo, podemos descomponer  $A$  en 3 matrices (triangular superior e inferior y la diagonal)

$$A = D + U + L$$

### 2.3.1. Método de Jacobi

$$\boxed{\hat{x}_n = Jx_{n-1} + C} \quad J = -D^{-1}(L + U) \quad C = D^{-1}b$$

### 2.3.2. Método de Gauss-Seidel

$$\boxed{\hat{x}_n = \text{GS}x_{n-1} + C} \quad \text{GS} = -(D + L)^{-1}U \quad C = (D + L)^{-1}b$$

### 3. Tema 3: Condicionamiento de Sistemas de Ecuaciones Lineales

#### 3.1. Introducción

En la realidad, los valores de nuestro sistema no son conocidos o exactos, lo que afecta a nuestro sistema, para esto condicionaremos el sistema (para obtener un error muy bajo). Cuando peor condicionado esté el sistema, más grande será el error.

#### 3.2. Espacio Vectorial

Sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ), es un cuerpo  $\mathcal{V}$  que tiene dos operaciones (suma y producto). Siendo  $(u, v \in \mathcal{V})$ , podemos usar estas propiedades:

- Suma:
  - Propiedad Conmutativa
  - Propiedad Asociativa
- Producto:
  - $(\alpha, \beta)(v + u) = \alpha v + \alpha u + \beta v + \beta u$
  - $(\alpha\beta)u = u(\alpha\beta)$

##### 3.2.1. Ejemplos

Por parte de los vectores, se pueden escribir así:

$$\mathbb{R}^n = \{n(u_1, \dots, u_n) : u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}\}$$

Por parte de las matrices:

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \{A_{(aij)} \text{ matrices cuadradas de orden } n \text{ con } a_{ij} \in \mathbb{R}\}$$

#### 3.3. Normas Vectoriales y Matriciales

##### 3.3.1. Vectores

Es un **espacio vectorial**  $\mathcal{V}$  sobre  $\mathbb{R}$  tal que  $\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty)$  cumple:

- $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- Propiedad homogénea:  $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

De esta forma podemos calcular también la distancia entre dos vectores:

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

Es un **espacio normado**, un espacio vectorial  $\mathcal{V}$  dotado de una forma:

- $\|u\|_\infty = \max\{|u_1|, \dots, |u_n|\}$
- $\|u\|_k = \sqrt[k]{\sum_{n=1}^k u_n^k}$
- Norma euclídea:  $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^2 u_n^2}$



### 3.3.2. Matrices

Una **norma matricial**, se define en un espacio de matrices, normas sobre  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  que cumplen:

- $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$
- Norma matricial con la vectorial:  $\|Au\| \leq \|A\| \|u\|$

Ejemplos de normas son:

- $\|A\| = \max_{u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$
- La máxima suma de las **columnas**  $\|A\|_\infty = \max \sum_{j=1} |a_{ij}|$
- La máxima suma de las **filas**  $\|A\|_1 = \max \sum_{i=1} |a_{ij}|$
- **Norma espectral**:  $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$
- **Norma de Frobenius**, es la suma de todos los elementos de la matriz, al cuadrado:  
 $\sqrt{\sum_{i=1} \sum_{j=1} a_{ij}^2}$ .

O la suma de los elementos de la matriz traspuesta por si misma:  $\sqrt{\delta(A^t, A)}$

Es similar a la norma espectral.

### 3.4. Número de Condición de una Matriz

Dado un sistema  $Ax = b$ , con  $A$  invertible y  $b \neq 0$ ,  $b$  se modificará por  $b_p$ :

$$\begin{cases} Ax = b & x_0 = A^{-1}b \\ Ax_p = b_p & x_p = A^{-1}b_p \end{cases}$$

La solución de  $x_p$  tendrá un error,  $\varepsilon = \|b - b_p\|$ , que llamaremos **cota de error relativo**.

Si:

$$\xi \simeq 0 \Rightarrow \|x_0 - x_p\| = \|A^{-1}(b - b_p)\| \leq \|A^{-1}\| \|b - b_p\|$$

Esto significa que nos interesa que  $\|A^{-1}\|$  sea lo más pequeño posible, ya que  $\|b - b_p\|$  será muy pequeño

---

### 3.5. Transformaciones y Condicionamiento

### 3.6. Transformaciones Householder

### 3.7. Método QR

#### 4. Tema 4: Series Numéricas. Series de Potencias

## 5. Tema 5: Series de Fourier. Series Trigonométricas

## 6. Tema 6: Funciones de Varias Variables