~~Лекция 8~~ Семинар 8 03.04.2018

$R_1 \subseteq A^2$, $R_2 \subseteq A^2$

$R_1 \circ R_2 \subseteq A^2$

$R \subseteq A^2$

$R \circ R \subseteq A^2 = R^2$

квадрат бинарного отнош. R.

$A = \{1, 2, 3\} \subset N$

$R_1 = \{(x,y) : x^2 < 2y \ ; \ x, y \in A\}$

$R_2 = \{(x,y) : x+y < 4 \ ; \ x, y \in A\}$

$R_1 \circ R_2 = ?$

$R_1(1) = \{1, 2, 3\}$ $R_1(2) = \{3\}$ $R_1(3) = \{\varnothing\}$.

$R_2(1) = \{1, 2\}$

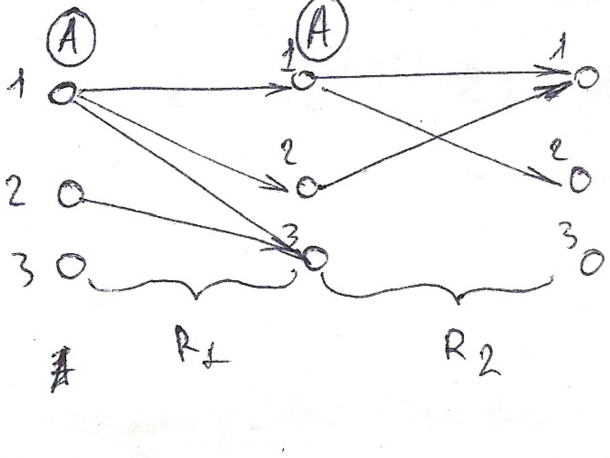
$R_2(2) = \{1\}$.

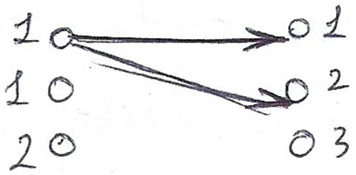
$R_2(3) = \{\varnothing\}$.

$\underline{R_2(1) \cup R_2(2) \cup R_1(3) = \{1, 2\}}$. $\underline{R_2(3) = \{\varnothing\}}$

$R_1 \circ R_2(1) = \{1, 2\}$. $R_1 \circ R_2(2) = \varnothing$

$R_1 \circ R_2(1) \cup R_1 \circ R_2(2) \cup R_1 \circ R_2(3) = R_1 \circ R_2 = \{(1,1), (1,2)\}$.





$R_1 \circ R_2$

Теория графов

Компоненты связности графов

$G(S, U)$ – орграф.

зададим прямые отображения для кажд. вершины.

Γ_{S_i} ; $\forall s_i \in S : \Gamma_{S_i}$ (гамма)

Это мн-во вершин, в кот. из S_i приходим путем длины 1. тогда можно задать отображение второго порядка.

$\Gamma_{S_i}^2 = \Gamma(\Gamma_{S_i})$ –//– длины 2 ...,

$\Gamma_{S_i}^n = \Gamma(\Gamma_{S_i}^{n-1})$ –//– длины n.

Аналогично обратные отображение.

$\Gamma_{S_i}^{-n}$ обратное отображение порядка n

$= \Gamma(\Gamma_{S_i}^{n-1})$.

О Транзитивное замыкание S_i – многозначное отображение вида $\hat{\Gamma}_{s_i} = \{s_i\} \cup \Gamma_{s_i} \cup \Gamma_{s_i}^2 \cup \ldots \cup \Gamma_{S_i}^n \cup$ $\cup \ldots$ (до насыщения) (пока возможно).

$\hat{\Gamma}_{S_i} = \{S_i\} \cup \Gamma_{S_i}^{1} \cup \Gamma_{S_i}^{2} \ldots \cup \Gamma_{S_i}^{n} \cup \ldots$

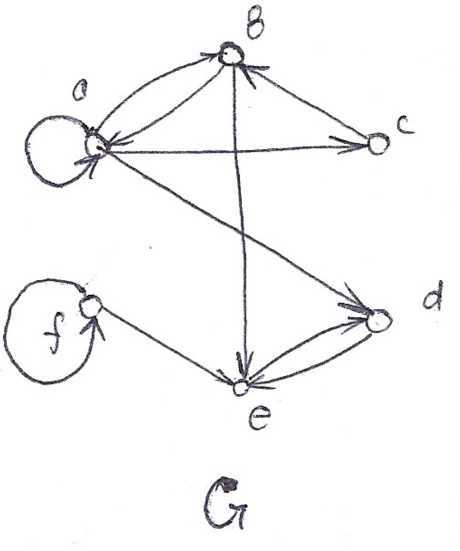
Θ Орграф — сильно связный, если для $\forall$ вершины S_i мн-ва S выполняется: транзитивное замыкание совпадает с мн-вом S

Θ Подграф G_1 графа G ($G_1 \in G$) называется максимальным сильно-связным, если ~~не ст~~ $\nexists$ $\neg\exists$ $G_2 \subset G$ также сильно-связного, такого что $G_1 \subset G_2$.

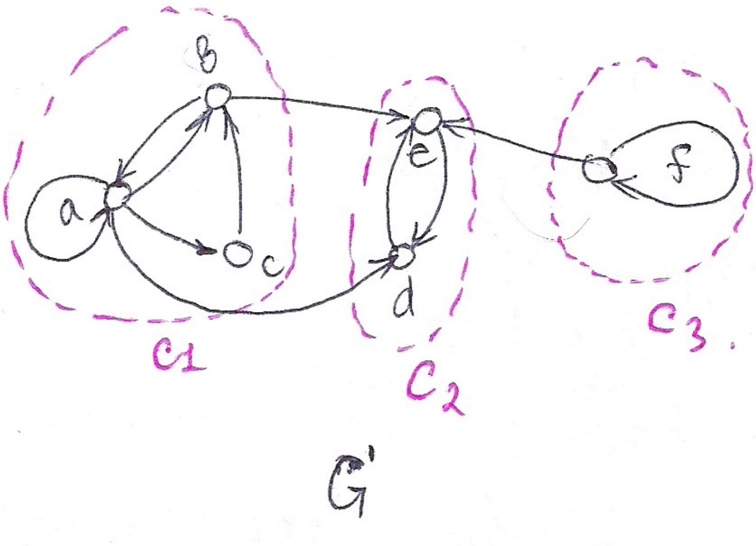
(То есть добавление хоть одной вершины к G_1 нарушит сильно-связность).

Таким образом макс. сильно-связн. подграфы образуют классы эквивалентности $C_1 \dots C_l$, на кот. разбив. G.

В пределах каждого класса C_i из $\forall$ вершины можно прийти в $\forall$ вершину, т.е. по отнош. достижимости вершины каждого класса неразличимы.



G



G'

Классы $C_1 \dots$ явл. компонентами связности в графе.

Примечание: В неографе мы говорим просто о связность (простая связность).

~~Опр~~ Примечание: Связность (простая связность) в орграфе устанавл. при игнорировании направления дуг.

Для разложения графа на компоненты связность сущ. алгоритм Мальгранжа. В основе след. идея: $\forall$ вершина может $\exists$ только ! классу эквивалентности.

Теорема

Каждый граф может быть представлен в виде объединения не пересекающихся по вершинам компонент связности. Разложение графа на компоненты связности является !.

Осн. формула алгоритма Мальгранжа.

$$C_{S_i} = \hat{\Gamma}_{S_i} \cap \hat{\Gamma}_{S_i}^{-1} \quad (*)$$

Проверим (*) на C_1:

$\hat{\Gamma}_a = \{a, b, c, d, e\} \ldots$

$\hat{\Gamma}_a^{-1} = \{a, b, c\} \ldots$ достижимость

$C_{S_i} = \hat{\Gamma}_a \cap \hat{\Gamma}_a^{-1} = \{a, b, c, d, e\} \cap \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$. ∎

Формулируем шаги алг. Мальгранжа, применить.

Семинар 9

10.04.2018

$\forall s_i \in S \quad \hat{\Gamma}_{s_i} = S$

$\left(\hat{\Gamma}^{-1}_{s_i} = S\right)$

$C_{s_i} = \hat{\Gamma}_{s_i} \wedge \hat{\Gamma}^{-1}_{s_i}$ (*)

Алгоритм Мальгранжа

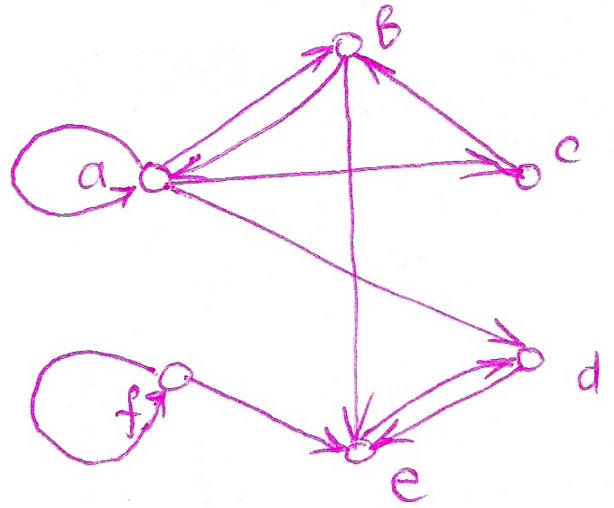
Шаги:

1. Выбираем произвольную $s_i \in S$
2. По ф-ле (*) строим класс экв. для этой вершины (C_{s_i})
2. Вершины вошедшие в C_{s_i} удаляем из графа
3. Выбираем другую $s_j \notin C_{s_i}$
   Выполняем 1, 2 для неё
4. Алгоритм продолжаем, пока это возможно, пока не будут исчерпаны все вершины графа.

Орграф может быть представлен матрицей смежностей.

Применим алг. Мальгранжа

#



	a	b	c	d	e	f
a	1	1	1	1		
b	1				1	
c		1				
d					1	
e				1		
f					1	1

$\hat{\Gamma}_a$	$\hat{\Gamma}_d$	$\hat{\Gamma}_f$
0		
1		
1		
1	0	
2	1	
X	X	0

$\hat{\Gamma}_a^{-1}$	0	1	2	×	×	×
$\hat{\Gamma}_d^{-1}$				0	1	2
$\hat{\Gamma}_f^{-1}$						0

1) $\Gamma a = \{b, c, d\}$

$\Gamma_a^2 = \Gamma(\Gamma a)$

$\Gamma_a^3 = \Gamma(\Gamma^2 a)$

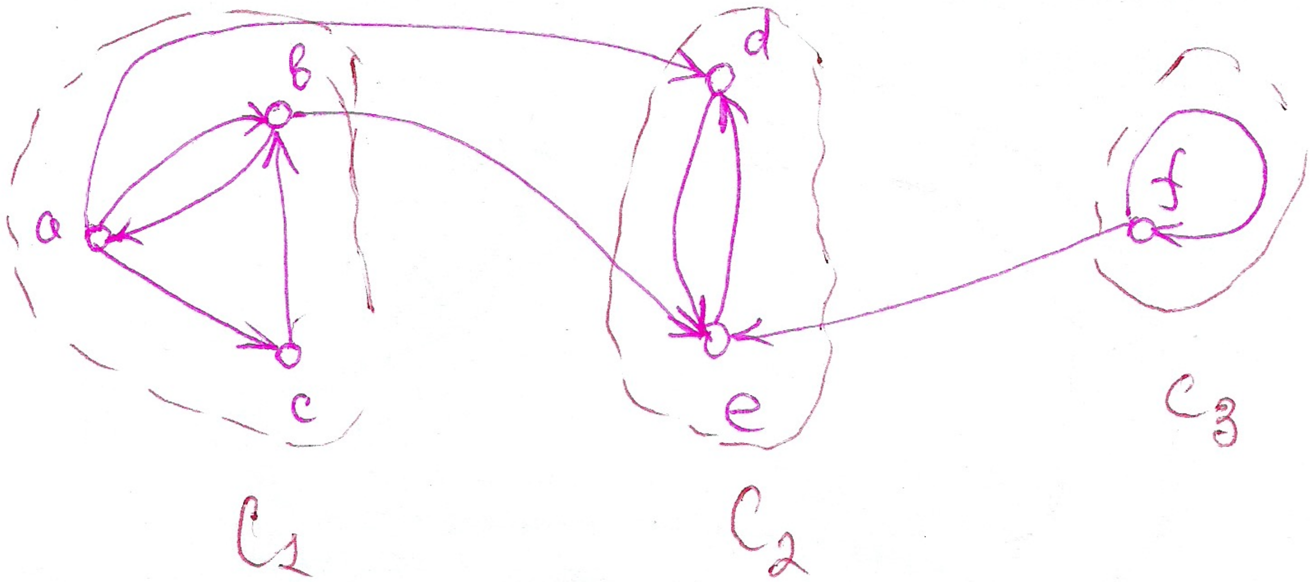
$\hat{\Gamma}_a = \{a, b, c, d, e)$

$\hat{\Gamma}_a^{-1} = \ldots$

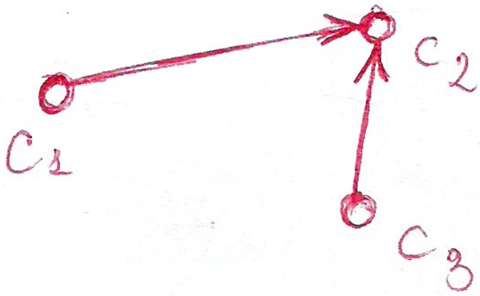
$C_a = \hat{\Gamma} a \cap \hat{\Gamma}_a^{-1} = a, b, c.$

2) — " — 3) — " —

Конец алгоритма



Закончим построение графа класса.



* Любовь – совокупность совершенств. *

Задача на сам.

\# $\Gamma_a = \{m\}$.

$\Gamma_b = \{a, d\}$.

$\Gamma_c = \{b, e\}$

$\Gamma_d = \{e\}$

$\Gamma_e = \{d\}$

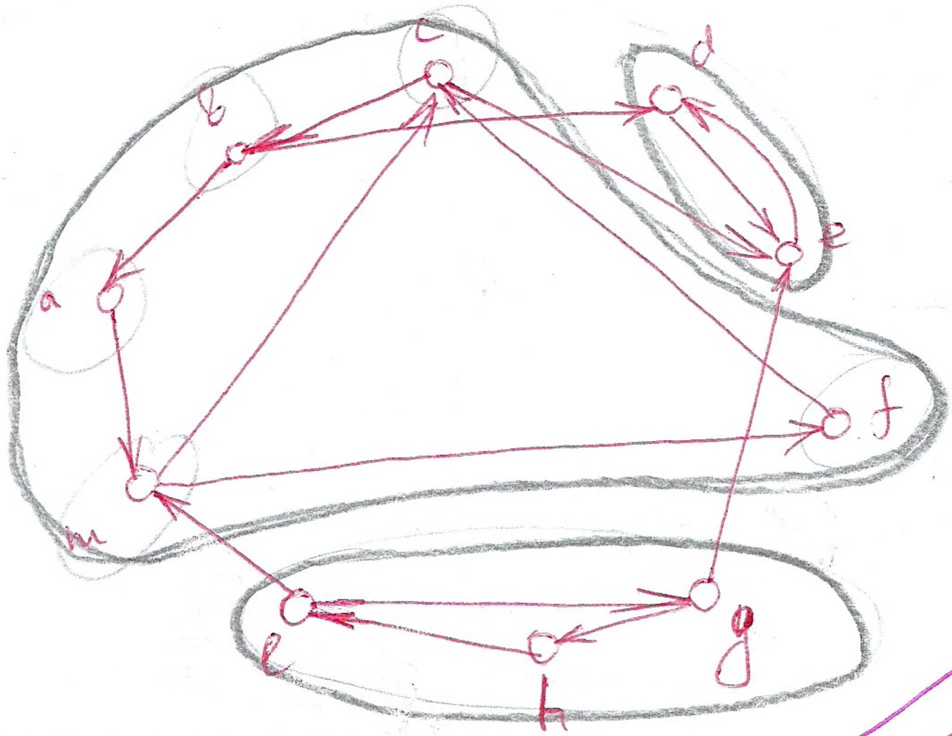
$\Gamma_f = \{c\}$

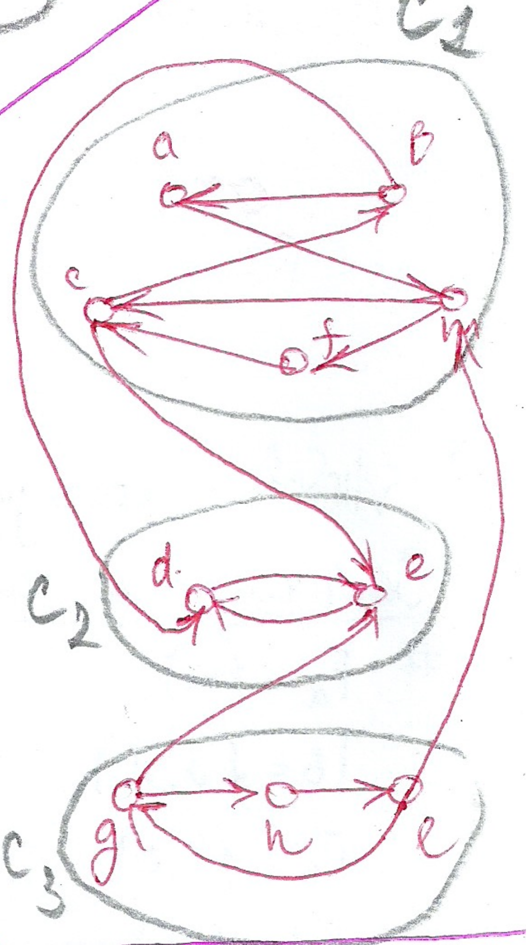
$\Gamma_g = \{e, h\}$

$\Gamma_h = \{l\}$

$\Gamma_l = \{g, m\}$

$\Gamma_m = \{c, f\}$





	a	b	c	d	e	f	g	h	l	m		$\hat{\Gamma}_a$	$\hat{\Gamma}_d$	$\hat{\Gamma}_g$
a										1		0		
b	1			1								3		
c		1			1							2		
d					1							4	0	
e				1								3	1	
f			1									2		
g					1			1				X	X	0
h									1			X	X	1
l							1			1		X	X	2
m			1			1						1		
$\hat{\Gamma}_a^{-1}$	0	1	2	X	X	3	X	X	X	3				
$\hat{\Gamma}_d^{-1}$				0	1		2	4	3					
$\hat{\Gamma}_g^{-1}$							0	2	1					

$\hat{\Gamma}_a = \{a, b, c, d, e, f, m\}$

$\hat{\Gamma}_a^{-1} = \{a, b, c, f, m\}$.

$C_a = \{a, b, c, f, m\}$

$\hat{\Gamma}_d = \{d, e\}$

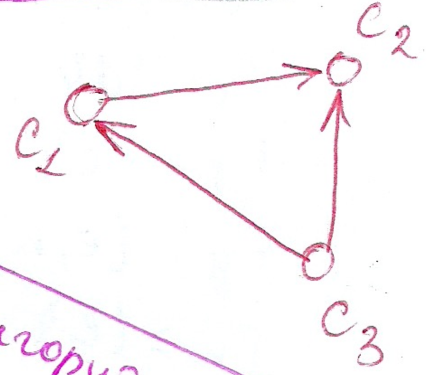
$\hat{\Gamma}_d^{-1} = \{d, e, g, h, l\}$

$C_d = \{d, e\}$

$\hat{\Gamma}_g = \{g, h, l\}$

$\hat{\Gamma}_g^{-1} = \{g, h, l\}$

$C_g = \{g, h, l\}$.



алгоритм завершён.

Дополнительный семинар

24.04.2018

Внутренние и внешние устойчивые подмн-ва вершин

Орграф $G(S, V)$

Пусть нек. подмн-во $E \subset S$ задано.

⊖ Подмн-во E — внутренне устойч. подмн-ва вершин графа G, если никакие две вершины в E не смежны (разобщенные вершины)

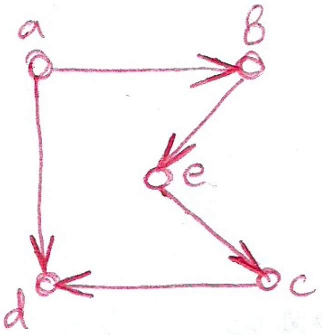
Очевидное условие внутр. устойчивости:

$E \cap \Gamma_E = \varnothing$

⊖ Подмн-во E — максимальное внутренне устойчив. если в данном графе не существует $\nexists$ такого подмн-ва E', что $E \subset E'$

$(\nexists E' : E \subset E')$

\# (квадратный наказ)



$E = \{b, d\}$

проверим:

$\Gamma_E = \Gamma_b \cup \Gamma_d = \{e\} \cup \{\varnothing\} = \{e\}$

$E \cap \Gamma_E = \{b, d\} \cap \{e\} = \varnothing$ (верно)

$S \setminus E = \{a, c, e\}$

Аналогично: $E_1 = \{b, c\}$; $E_2 = \{a, c\}$

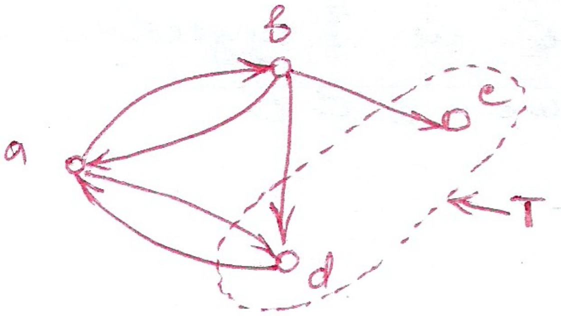
Подмн-во вершин T орграфа $G(S,V)$

Θ T – внешне устойчивое, если для $\forall\, x_i$ вне подмн-ва T ($s_i \in S,\ s_i \notin T$; или $s_i \in S \setminus T$) верно, что $T \cap \Gamma_{s_i} \neq \varnothing$

<u>Замеч:</u> внешн. устойч. озн., что любая вершина не входящая в подмн-во T связана дугой (по крайней мере одной) с ост. частью графа, причём начало этой дуги лежит вне подмн-ва T

Θ T – минимальное внешне устойчивое, если в нём не содержится никакого другого внешне устойчивого подмн-ва вершин графа G.

#



$T = \{c, d\}$

$S \setminus T = \{a, b\}$

a) $\Gamma a = \{b, d\}$

$\Gamma a \cap T = \{c,d\} \cap \{b,d\} = \{d\}$ (верно)

b) $\Gamma b = \{c, d\}$

$\Gamma b \cap T = \{c,d\} \cap \{c,d\} = \{c,d\}$ (верно)

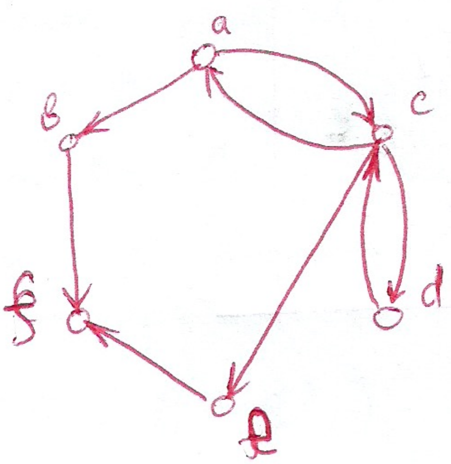
<u>Замечание:</u> Висячие вершины орграфа ($\bar{p}_{s_i} = 0$) гарантированно входят в внешне устойч. подмн-ва.

Для нахождение внутр. уст. можно пользоваться ф-ией Гранди.

Θ Функцией Гранди на орграфе G, назыв. ф-ия $g(s_i)$, $s_i \in S$, сопоставл. каждой вершине целое неотрицательное число наименьшее из всех несопоставленных значений никакой вершине из Γs_i

<u>Дополнение</u>: для s_K, $\Gamma s_K = \varnothing$, то значение ф-ии Гранди для этой вершины берётся $= 0$.

#



	s_i	Γs_i	$g(s_i)$	$g(s_i)$: $s_j \in \Gamma s_i$
3	a	$\{b, c\}$	0	$g(b)=1$, —
2	b	$\{f\}$	1	$g(f)=0$
4	c	$\{a, d, e\}$	2	$g(a)=0$, $g(e)=1$, —
5	d	$\{c\}$	0	$g(c)=2$
2	e	$\{f\}$	1	$g(f)=0$
1	f	$\varnothing$	0	—

$\varepsilon = \{a, d, f\}$

$\varepsilon = \{b, e\}$

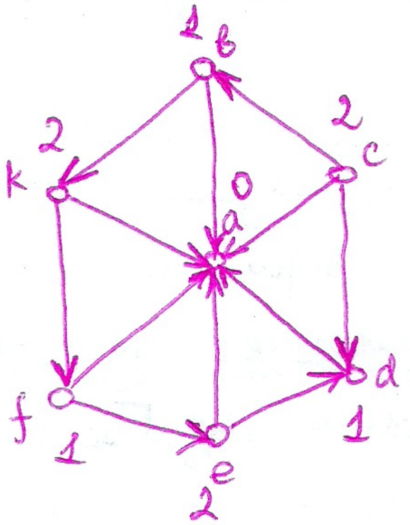
Внутр. уст. подмн-во орграфа G образуют вершины, с равными значениями функции Гранди

<u>Замеч</u>: Всегда даёт макс. внутр. уст. хотя бы одно.

<u>Замеч</u>: Функция Гранди неоднозначна

<u>Замеч</u>: —"— не находит всех внутр. уст. подмн-в.

#



s_i	Γs_i	$g(s_i)$	$g(s_i): s_j \in \Gamma s_i$
a	$\varnothing$	0	—
b	{a, k}	1	0, 2
c	{a, b, d}	2	0, 1, 1
d	{a}	1	0
e	{a, d}	2	0, 1
f	{a, e}	1	0, 2
k	{a, f}	2	0, 1

$\mathcal{E}_1 = \{b, d, f\}$

$\mathcal{E}_2 = \{c, e, k\}$.

Нужно для раскраски графов,
для определения о клике.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
национальный исследовательский университет

Экзаменационный лист

« ____ » ____________ 20 ___ г. по дисциплине ____________

начало ______ : ______ билет № ______ группа ______

окончание ______ : ______ студент ______

оценка ______ экзаменатор ______ подпись

Семинар 10 17.04.18

Потоки в сети

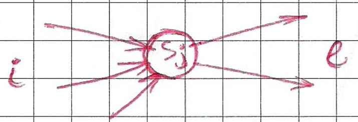
$\forall$ сеть - граф (ж/д. сеть, автомобильная сеть,

Постановка задачи

Сеть считается заданной, если ① дан орграф $G(S, U, \Omega)$,
② граф считается связным и взвешенным. (Ω - матрица весов)
→ есть ровно одна вершина $s \in S$, $p^+(s) = 0$, s - источник.
→ —"— $t \in S$, $p^-(t) = 0$, t - сток.
② Каждой дуге $s_i, s_j \in S$ сопоставлено неотрицательное число из матрицы Ω. Число - $c(s_i, s_j)$ - пропускная способность дуги s_i, s_j.
③ На мн-ве дуг графа (сети) опр. ф-ия $\varphi(s_i, s_j)$ - поток, удовл. условиям: ⓐ для каждой дуги сети $(\forall (s_i, s_j) \in U : 0 \le \varphi(s_i, s_j) \le c(s_i, s_j))$
ⓑ Закон Кирхгофа: условие баланса потока в сети.
$\sum \varphi(s_i, s_j) = \sum \varphi(s_j, s_e)$, где

$$s_i \in \Gamma_{s_j}^{-1} \quad ; \quad s_e \in \Gamma_{s_j}$$

#



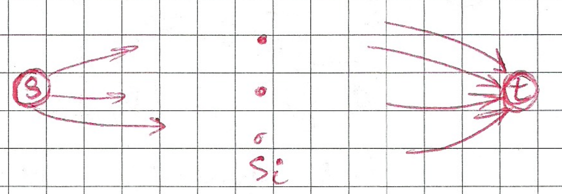
Замечание: не распостр. на источник и сток.

④ Σ потоков по всем дугам исходящим из s и распространяющ. дальше по сети должна быть равна Σ потоков приходящих в t.

$$\sum_{s_i \in S/s} \varphi(s, s_i) = \sum_{s_i \in S/t} \varphi(s_i, t) = \varphi$$

φ - поток в сети, $\varphi \to \varphi_{max}$

#



Введём ряд понятий для решения

1) $\delta(s_i, s_j) = c(s_i, s_j) - \varphi(s_i, s_j) \Rightarrow$ остаточная пропускн. способность (s_i, s_j).

2) $\varphi(s_i, s_j) = c(s_i, s_j) \Rightarrow (s_i, s_j)$ - насыщенная

3) Разрез - (связного графа) - мн-во ребер (дуг) графа, удаление кот. из графа приводит к ↑ числа компонент связности (делает граф несвязным, вплоть до расщепления графа на части). (Очень важно)

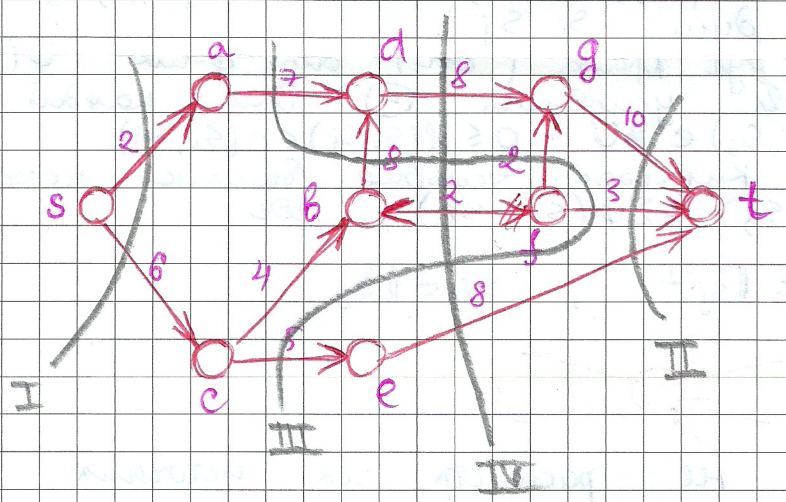
4) Ориентированный разрез в том случае: пусть мн-во вершин орграфа $S = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, $S_1 \subset S$, $S_2 \subset S$. тогда ориентир. разрез составят дуги, начальные вершины, кот $\in S_1$, а конечные $\in S_2$.

$(S_1 \to S_2) = \{(s_i, s_j) : s_i \in S_1, s_j \in S_2, S_1 \in S, S_2 \in S\}$.

5) Пропускная способность разреза: $c(s_i, s_j)$

$c(S_1 \to S_2) = \sum c(s_i, s_j)$; $(s_i, s_j) \in (S_1 \to S_2)$

#



I

$S_1 = \{s\}$
$S_2 = \{t, \dots\}$

$c(S_1, S_2) = 2 + 6 = 8$

II

$S_1 = \{s, \dots\}$
$S_2 = \{t\}$

$c(S_1, S_2) = 10 + 3 + 8 = 21$.

III

$S_1 = \{s, a, b, c, f\}$
$S_2 = \{d, g, e, t\}$.

$c(S_1, S_2) = 7 + 8 + 2 + 3 + 5 = 25$.

IV

$S_1 = \{s, a, b, c, d, e\}$
$S_2 = \{g, f, t\}$

$\overrightarrow{(d, g)}$; $\overleftarrow{(b, f)}$

(не ориент. разрез)

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
национальный исследовательский университет

Экзаменационный лист

« ____ » ____________ 20 ____ г. по дисциплине ____________

начало ______ : ______ билет № ______ группа ______

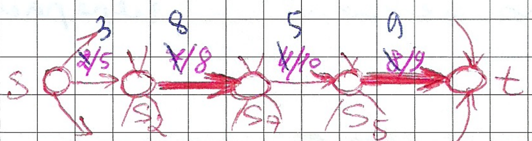
окончание ______ : ______ студент ____________

оценка ____________ экзаменатор ____________ ______ подпись

Теорема

Если $(s, \ldots, s_i, \ldots t)$ - путь из s в t и все дуги этого пути ненасыщенные, то величину потока φ на этом пути можно увеличить на величину $\delta^* = \min(\delta(s_i, s_j))$ по всем дугам пути. $\Rightarrow$ во всей сети поток увеличится на величину δ^*

#



$$\left.\begin{aligned} \delta(s, s_2) &= 5-2 = 3 \\ \delta(s_2, s_7) &= 8-7 = 1 \\ \delta(s_7, s_5) &= 10-4 = 6 \\ \delta(t, s_5) &= 9-8 = 1 \end{aligned}\right\} \delta^* = 1$$

В рез-те примен. теоремы 1 хотя бы 1 дуга станет насыщенной.

Перебирая все возможные пути из s в t, приходим к тому, что невозможно увеличить.

Ситуация полного потока, $\varphi_п$

$\varphi_п \neq \varphi_{max}$, $\varphi_п \leq \varphi_{max}$.

Рассмотрим произвольный маршрут из s в t.

Очевидно дуги будут двух видов: (направлены от s к t / в противоположную) прямые и обратные.

Пусть прямые дуги ненасыщенные, а поток на обратных дуга $x > 0$, тогда $\delta^* = \min((\delta(s_i, s_j))$ по всем прямым дугам маршрута; для обратных вводится $\varphi^* = \min(\varphi(s_i, s_j))$, по всем обратным дугам маршрута. $\varepsilon^* = \min(\delta^*, \varphi^*)$.

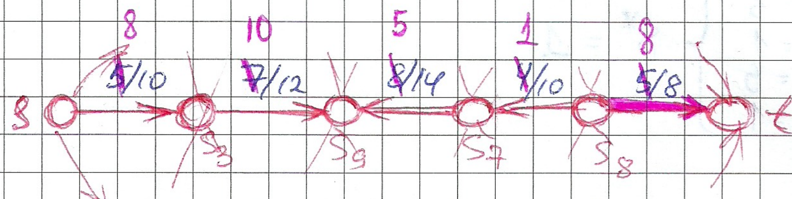
Теорема 2

Если $(s \ldots s_i \ldots t)$ - маршрут из s в t, все прямые дуги ненасыщенные, а потоки на обратных > 0, то величину потока можно скорректировать на ε^*, а именно, на прямых дугах $\uparrow$ на ε^*, на обратных $\downarrow$ на ε^*, при этом поток во всей сети $\uparrow$ на ε^*.

Маршрут - увеличивающая цепь (если соотв. усл. Теор. 2)

Замечание: никакого физического генерирования ед. потока не происходит, а происходит перераспредел. (балансирование)!

#



прямые дуги: $(s, s_3), (s_3, s_9), (s_8, t)$

обр. дуги: $(s_7, s_9), (s_8, s_7)$

$\left.\begin{array}{l}\delta^* = 3 \\ \varphi^* = 4\end{array}\right\} \varepsilon^* = 3$

В рез. прим. теор. 2 на данном маршруте
Или хотя бы одна пр. дуга $\to$ насыщенная
Или поток на хотя бы одной обр. дуге $\to$ обнуляется.
Или и то и другое.

! сохр. баланс

! алгоритм поиска увеличивающей цепи см. в больш. задаче (большом примере).

Экзаменационный лист

« ___ » ________ 20 ___ г. по дисциплине ________

начало ____ : ____ билет № ____ группа ________

окончание ____ : ____ студент ________

оценка ________ экзаменатор ________ ________ подпись

Теорема 3

Поток φ_{max}

Алгоритм Форда – Фалкерсона.

① Задать начальный поток в сети, как правило $= 0$.
$\varphi(s_i, s_j) = 0, \ \forall s_i \in S; \ \forall s_j \in S$

② Руков. Теоремой 1 итерационно получить полный поток φ_n. (Если тек. поток в сети $\varphi \neq \varphi_n$, то $\exists$ по крайней мере один путь из S в t, все дуги кот. ненасыщенны)

③ Рук. теоремой 2 —"— выполнить построение увелич. цепей, кажд. раз увеличивая поток в сети на ε^*.
Если увеличив. цепей больше нет, то на осн. Теоремы 3 имеем φ_{max}.

④ Опр. разрез по кот. проходит φ_{max}.

Теорема 4 (Форда - Фалкерсона)

Для $\forall$ сети с одним источником и одним стоком величина макс. потока дост. от источник. к стоку = пропускной способности минимального разреза.

p.d.s koustanay

Семинар 11

24.04.2018.

Если из сети удалить прямые дуги насыщенные, и обратные, поток по кот. равен нулю, то сеть распадается на две компоненты связности. Ту часть, в кот. оказалась вершина сток, образ. вершины задающие мин. разрез.

Поток, в сток (в вершину t):

$$\varphi_t = \sum_{u_i \in U_A^+} \varphi(u_i) - \sum_{u_i \in U_A^-} \varphi(u_i)$$

$$U_A^+ \in U \qquad U_A^- \subset U$$

Через A обозначено мн-во вершин, оказавш. в одной компоненте связности со стоком, тогда дуги U_A^+ – дуги заходящие в вершины подмн-ва A, а U_A^- – дуги исходящие.

$$\varphi_{max} = \sum_{u_i \in U_A^+} \varphi(u_i) - 0$$

- Тогда, все дуги U_A^+ насыщенные, и $\varphi = C$ и это даёт φ_{max}, и именно эти/такие дуги сост. min. разрез по т. Форда-Фалкерсона.
- Вершины обр. A на практике не помеченные, при последней попытке постр. увелич. цепи.
- Тогда насыщенные обр. мин. разрез обл. свойством начало кажд. такой дуги $\in S \setminus A$, а конец $\in A$.

см. рис. 2.

Этап 1 – Задаём нач. усл.:

$\varphi = 0$.

Этап 2. – Получить полный поток. $\varphi_n = ?$

– рассмотреть все пути (все дуги прям. напр.)

1. $(x_0, x_3, x_5, x_2, x_4, x_7, x_9)$

$\delta^* = \min(4-0, 7-0, 5-0, 9-0, 4-0, 12-0) = 4$

Дуги (x_0, x_3) и (x_4, x_7) стали насыщ. → выдел.

$\varphi = 4$

2. $(x_0, x_2, x_4, x_6, x_5, x_9)$

$\delta^* = \min(17-0, 9-4, 2-0, 5-0) = 2$

дуга (x_4, x_6) стала насыщ. → выдел.

$\varphi = \varphi + \delta^* = 4 + 2 = 6$.

3. (x_0, x_1, x_8, x_9)

$\delta^* = (3-0, 3-0, 8-0,) = 3$

дуги (x_0, x_2), (x_1, x_8) стали насыщ.

Путей больше нет, на осн. теоремы 1 имеем, что $\varphi_n = 9$.

Этап 3. – Этап оптимизации или постр. увелич. цепи.

//* алг. постр. увелич. цепи

1. Источник помечаем „+"
2. Символом „$+i$", где i – помеч. вершина, $S_j \in \Gamma S_i$, если S_j верш. непомеченная и дуга (S_i, S_j) ненасыщенная.
3. Символом „$-i$", где i – номер помеч. верш. помечаем все вершины $S_j \in \Gamma S_i^{-1}$, если S_j – верш. не помеченая и поток $(S_j, S_i) > 0$

4. Итерационно повторяем 2,3.

5. Если удалось пометить сток (вершину t), то в сети $\exists$ увелич. цепь $\Rightarrow$ можно расcчитать δ^* для прямых дуг вход. в неё, φ^* для обр. дуг входящих в нее и ε^*, как мин. из этих двух величин.

На ε^* коррект. поток в цепи по осн. теоремы 2, во всей сети поток возрастает на ε^*.

*/

Удалось пометить вершины:

x_0 $\boxed{+}$

x_2 $\boxed{+_0}$

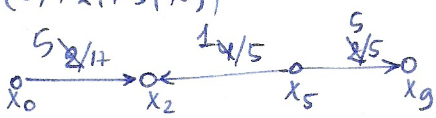
x_3 $\boxed{-_5}$

⋮

x_9 $\left[\boxed{+_5}\boxed{+_6}\boxed{+_8}\right]$

Выбираем увеличит. цепь:

(x_0, x_2, x_5, x_9)



пр. дуги: (x_0, x_2), (x_5, x_9)

обр. дуги: (x_5, x_2). !

$\delta^* = \min(17-2,\ 5-2) = 3$

$\varphi^* = \min(4) = 4$

$\varepsilon^* = 3.$

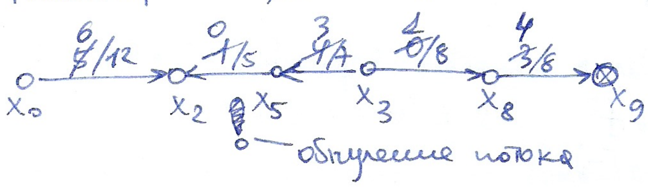
$\varphi = \varphi + \varepsilon^* = 9 + 3 = 12.$

(x_5, x_9) стала насыщенной

Стираем пометки, и снова пытаемся достигнуть t.

x_0 $+$
x_2 $+_0$
x_3 -5
x_5 -2
x_6 -5
x_8 $+3$
x_9 $+6$
$+8$

Рассмотрим увелич. цепь:



—// скучная штука //—

(x_5, x_2) обнулился

$\varphi = \varphi + \varepsilon^* = 12 + 1 = 13.$

Стираем пометки и снова пытаемся достигнуть t

x_0 $+$
x_2 $+_0$
x_4 $+_2$

! Сток x_9 пометить не удалось $\Rightarrow$ увелич. цепи больше нет, по осн. теоремы 3 утв., что $\varphi_{max} = \varphi \Rightarrow$ $\varphi_{max} = 13$.

Этап 4 — Построение мин. разреза:

A – все непомеченные вершины:

$A = \{x_3, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$.

$S \setminus A = \{x_0, x_1, x_2, x_4\}$.

Все насыщенные, выходящие:

(x_0, x_1), (x_4, x_7), (x_4, x_6), (x_0, x_3)

На осн. теор. Форда-Фалкерсона φ_{max} = пропускн. способ. min разреза.

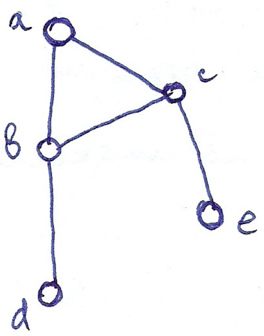
$\varphi_{max} = c(x_0, x_1) + \dots \quad c(x_0, x_3) = 3+4+2+4 = 13.$

Вывод: бла бла бла совпадает бла бла. Всё верно.

Доп. Семинар

Клики

#



$\varphi(G) = 3$

1. Построить граф, дополнительный заданному $\overline{G}(S,U)$

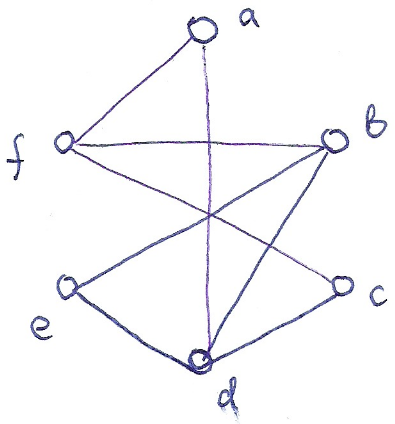
2. Построить из этого графа произв. ориент. граф. (ориентировать рёбра)

3. В полученном орграфе опр. макс. внутренне устойчивые подмножества вершин

4. Отобразить полученные подмножества на граф G.

5. Вершины вход. в подмн.-ва S_i и соед. их ребра исх. графа G образуют i-ую макс. клику

#



$G(S,U)$

<u>Задание:</u>
Опр. наиб. клику графа и его кликовое число.

Кротчайшие пути в графе

Пусть задан орграф взвешенный, то есть в каждой дуге орграфе G сопоставлено число /вес дуги. Интерпритируем как длину дуги.
Пусть заданы две вершины :

s - начало пути.
t - конец пути

Задача:
Найти в графе пути из s в t и достав. наибольш. или наименьшее значение некот. аддитивн. функцией опр. на дугах графа.
Чаще под аддитивной ф-ией понимают длину пути и трактуют задачу, как задачу о нахожд. Кротчайшего пути. Под длиной пути понимается сумма весов (длин) дуг его составляющих.

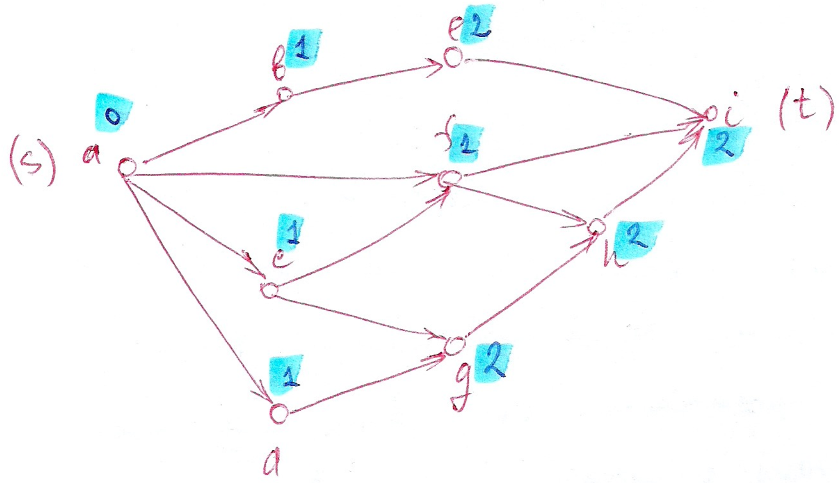
Возможные варианты постановки задач:
1. Найти кротчайш. путь из s в t
2. Найти крот.. пути из s во все ост. верш. графа
3. Найти крот. пути между всеми упоряд. парами вершин графа.

I. случай не взвешенного графа.
(длина кажд. = 1)

алгоритм

1. Присваиваем s метку 0.
все ост. метки будут по ходу пол. чисел.
2. Рассмотрим. вершину помеч. меткой i всем вершинам вх. в прямое отобр. для этой с меткой i присваиваем $i+1$. $\exists$ метки не меняем.
3. Если тр. найти $\xrightarrow{k}$ до t, то алг. ост. при помечании t при цикл. выполн. шага 2.
Если тр. найти $\xrightarrow{k}$ до всех ост. вершин. то алг. ост. при помечании каждой вершины, при цикл. выполн. шага 2.
4. Метка каждой вершины и есть длина из s в эту вершину.

#.



Алгоритм Бержа

Семинар 7.05.2018

Порядковая ф-ция графа без контуров.

Орграф, не имеющий контуров $G(S, U)$

Определим подмножество мн-ва вершин.

$N_0 = \{s_i : s_i \in S, \Gamma_{s_i}^{-1} = \varnothing\}$ || $p^+(s_i) = 0$ недостижимые

$N_1 = \{s_i : s_i \in S / N_0, \Gamma_{s_i}^{-1} \subset N_0\}$.

$N_2 = \{s_i : s_i \in S / (N_0 \cup N_1), \Gamma_{s_i}^{-1} \subset (N_0 \cup N_1)\}$

$\vdots$

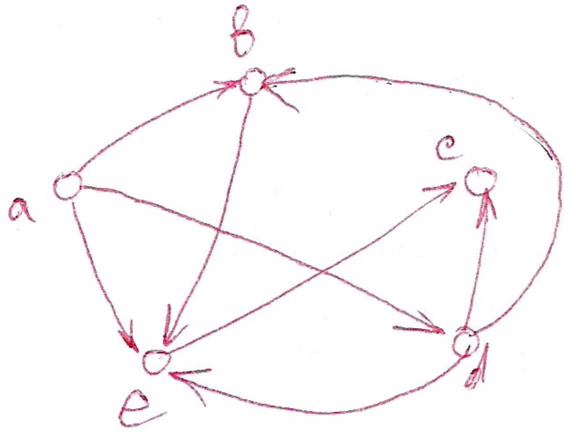
$N_m = \{s_i : s_i \in S / (N_0 \cup \ldots \cup N_{m-1}), \Gamma_{s_i}^{-1} \subset (N_0 \cup \ldots \cup N_{m-1})\}$

↑ уровни

Θ порядковой ф-ей O (О большое) орграфа без контуров функция задающ. отн. порядка на мн-ве его вершин, областью значений кот. явл. мн-во $\{0, 1, 2 \ldots m\}$, причём если $s_i \in N_j$ то $O(x_i) = j$

Уточнение:

- уровни не пересекающиеся
- упоряд. мн-во вершин лексико-граф., а именно если $s_i \in N_j$, то уровень $= j$, то след. за ней попути вершина войдёт в уровень N_{j+1}., то её ур. $j+1$



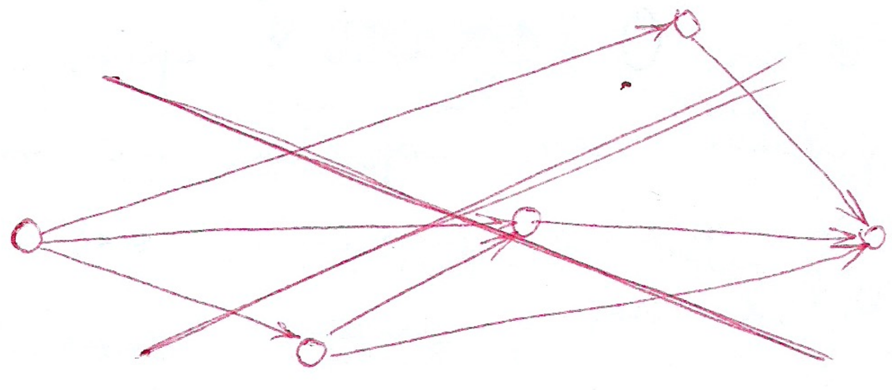
$N_0 = \{a\}$

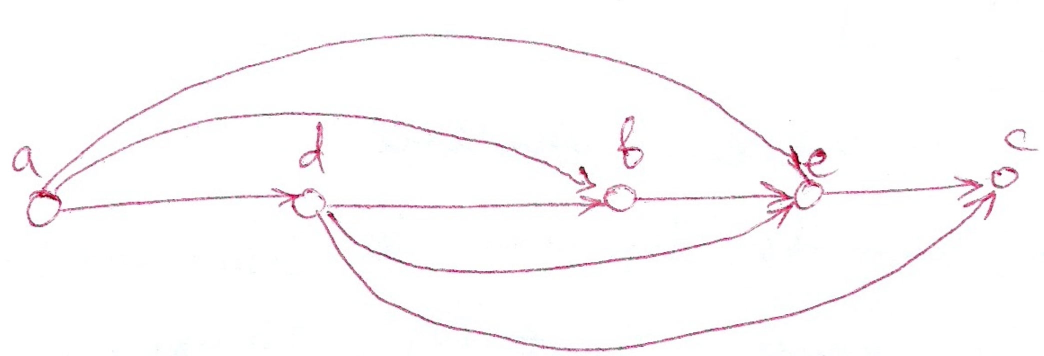
$N_1 = \{d\}$

$N_2 = \{b\}$

$N_3 = \{e\}$

$N_4 = \{c\}$



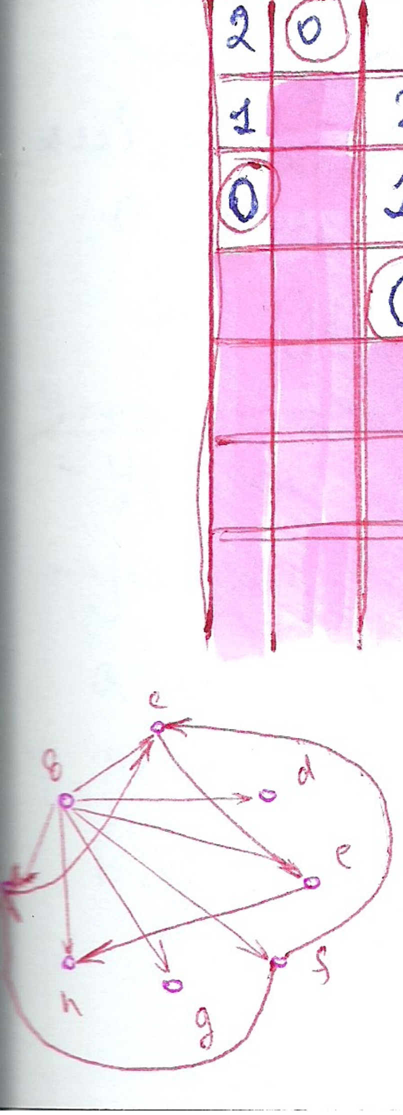


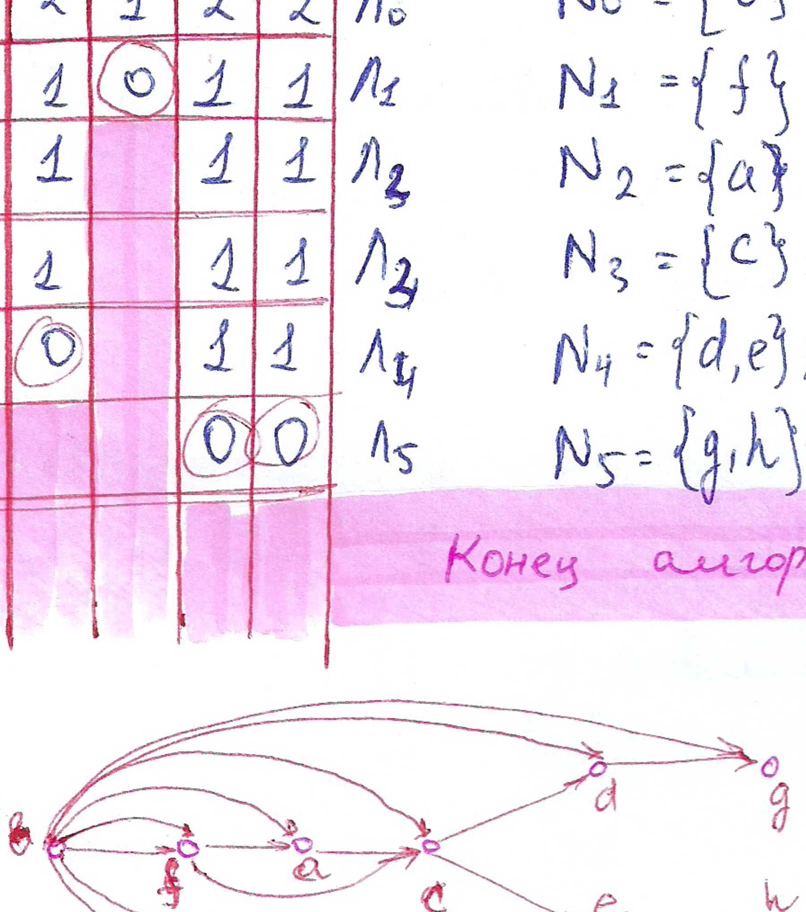
∃ метод Де Мукрона (Demoucron), кот. позвол. строить порядк. функц. (работает с матрицей смежности).

#	a 1	b 2	c 3	d 4	e 5	f 6	g 7	h 8
a 1			1					
b 2	1		1	1	1	1	1	1
c 3				1	1			
d 4							1	
e 5								1
f 6	1		1					
g 7								
h 8								

2	0	3	2	2	1	2	2	λ_0	$N_0 = \{b\}$, уд. b.
1		2	1	1	0	1	1	λ_1	$N_1 = \{f\}$, уд. f.
0		1	1	1		1	1	λ_2	$N_2 = \{a\}$, уд. a
		0	1	1		1	1	λ_3	$N_3 = \{c\}$, уд. c.
			0	0		1	1	λ_4	$N_4 = \{d, e\}$, уд d, e.
						0	0	λ_5	$N_5 = \{g, h\}$

Конец алгоритма



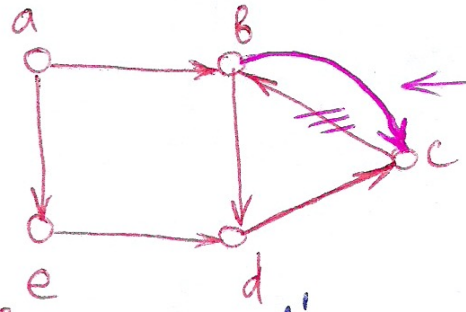


Замечание:

Если

1. Порядковая функция вносит отнош. порядка по отобр. на мн-ве вершин графа
2. ~~Может~~ строиться как по прямым, так и по обратным.
3. Позволяет в случае её отсутствия, как по прямым и по обратным позволяет констатировать факт наличия в графе контура, однако сам контур не обнаруживает
4. Если ∃ и по прямым и по обр. отобр., то её сл. стр. даёт графы уровней взаимно противополож. направ.
5. Может ∃ только по прямым или только по обр. отобр., а может и по обоим отобр. сразу, во всех 3-х случ. поряд. функц. существ. ⇒ контура нет.

#



пункт 2, меняем ориентацию

①

	a	b	c	d	e
a		1			1
b				1	
c		1			
d			1		
e				1	

Λ_0'
2
1
1
1
1

0	2	1	2	1	Λ_0
	1	1	2	0	Λ_1
	1	1	1		Λ_2
	1	1	1		

⇒ граф содержит контур!

②

	a	b	c	d	e
a		1			1
b			1	1	
c					
d			1		
e				1	

Λ_0'	Λ_1'	Λ_2'	Λ_3'
2	2	2	0
2	1	0	
0			
1	0		
1	1	0	

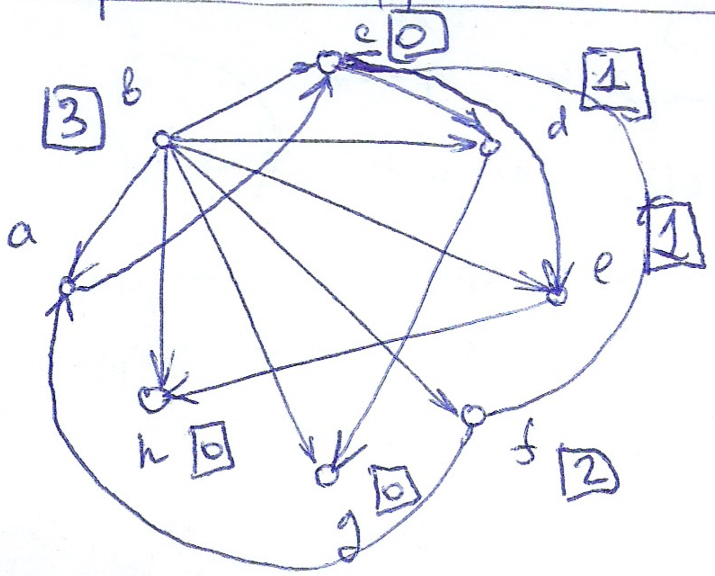
⇒ порядок строится.

0	1	2	2	1	Λ_0
	0	2	2	0	Λ_1
		1	0		Λ_2
		0			Λ_3

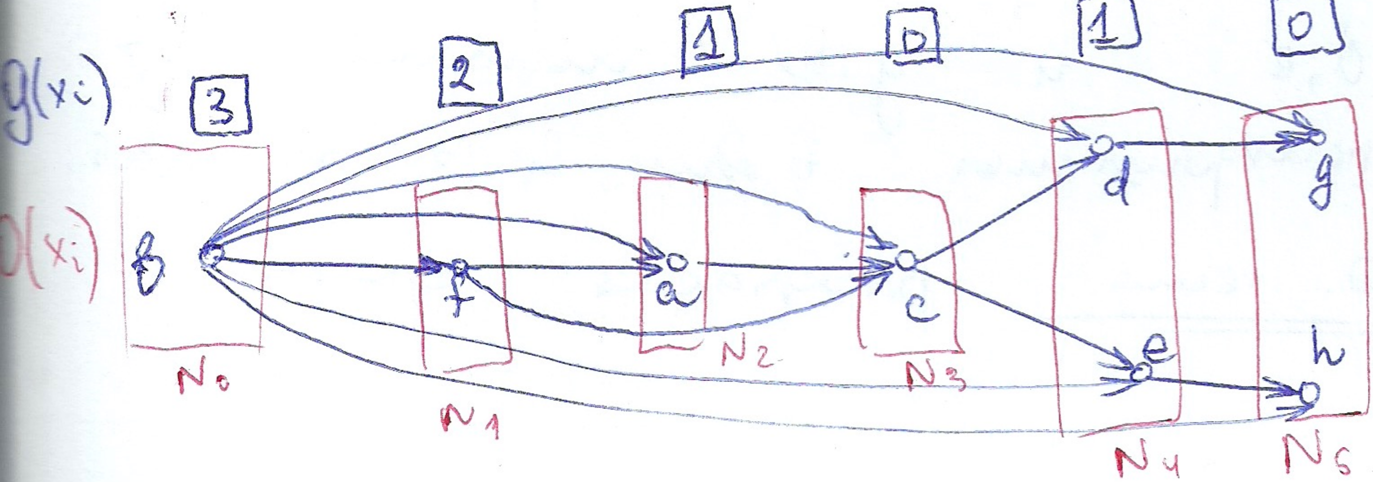
Домашнее задание

1. Построить граф
2. Алг. Демукрона опр. пор. ф-ию
3. если ∃ постр. граф ур.
4. если ∃ и так и так, то постр. 2 графа

Связь порядковой функции и ф-ии Гранди



x_i	Γx_i	$g(x_i)$	$g(x_j): x_j \in \Gamma x$
a	$\{c\}$	1	0
b	$S \setminus \{b\}$	3	0, 1, 2 ...
c	$\{d, e\}$	0	1, 1
d	$\{g\}$	1	0
e	$\{h\}$	1	0
f	$\{a, c\}$	2	0, 1
h	$\varnothing$	0	
g	$\varnothing$	0	



1. Для графа без контуров и петель
- всегда ∃ порядк. ф-ия
- ей соответств. ф-ия Гранди.

2. Для произвольного орграфа порядк. фун-ций может не быть, а ф-ия Гранди может ∃ и построена

3. Ф-ия Гранди ∃ не всегда и не всегда однозначно опр. для данного графа.

4. (Вершины, для кот. $O(x_i)$ одинакова одинаков и ~~g(x_i)~~ по Гранди не обяз.)

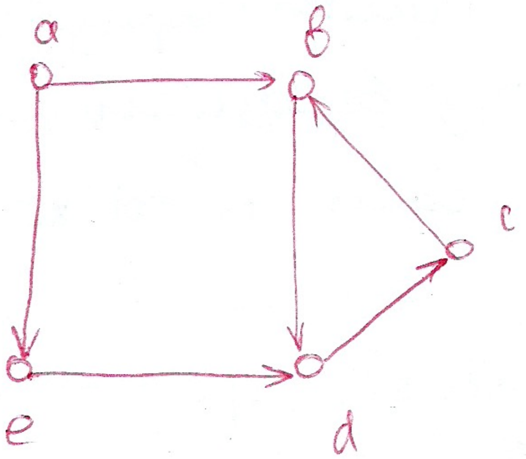
Ситуация когда вершины имеющих одинаковое значение порядковой фун-ии и одинаковые значения ф-ии Гранди не явл. правилом, однако может давать закономерности при решении ряда задач, напр. для раскраски графов

Так в приведённом примере верш. d, e и g, h попарно будут раскрашены в один и тот же цвет.

След. тема: раскраска графа.

Покажем, что ∄ порожд. ф-ии говорит о ∃ в графе контура.

#



Контур: (в, c, d, в)

	a	в	c	d	e
a		1			1
в			1	1	
c		1		1	
d			1		
e				1	

2
1
1
1
1

Λ_0	0	2	1	2	1
		1	1	2	0
		1	1	1	

Контур есть!, верно.

Раскраска графов.

Задан неограф $G(S,U)$

⊖ Раскраска графа – присваивание цветов его вершинам, ребрам, таким образом, что никакие две смежн. вершины (ребра) не окраш. в один и тот же цвет.

⊖ Если применено χ цветов, граф – χ-хроматический.

Наим. возможн. χ – хроматическое число графа. $\chi(G)$ (хи от джи).

⊖ Мн-во вершин одного цвета – одноцветный класс.

Если понятие применить на орграф то он будет ~~...~~ внутренне уст. подмн. вершин.

Если граф раскрашен в соотв. с хромат. числом, то в орграфе внутр. уст. подмн. будет много.

Можно исп. ф-ию Гранди.

Теорема

Чтобы псевдограф G имел $\chi(G)$ необходимо и дост. чтобы $\exists$ соотв. ему ~~симм~~ симметрический граф без петель, кот. допускал бы такую ф-цию Гранди, в кот. макс. её значений $\max g(x_i)$, $x_i \in S$.

$\max (g(x_i)) \leq \chi(G) - 1$.

Симметрический:

НО мы так делать не будем.

\# Не обычная ф-ция Гранди

Теорема Кёнига.

Граф двухцветен $\Leftrightarrow$, когда он не содержит циклов нечётной длины

Формула:

$$-\left[\frac{-n}{\left[\frac{n^2-2m}{n}\right]}\left(\frac{1-\left\{\frac{n^2-2m}{n}\right\}}{1+\left\{\frac{n^2-2m}{n}\right\}}\right)\right] \leq \chi(G) \leq \left[\frac{3+\sqrt{9+8(m-n)}}{2}\right]$$

[ ] - целая часть от деления

{ } - дробная часть от деления

Семинар 15

29.05.2018

Мин. б. ф-ий.
Метод диаграмм Вейча (карты Карно)

Это аналог д. Эйлера-Венна в т. мн-в.

Пусть $f(x_1 .. x_n)$ – б. ф-ия от n перемен., заданная как СДНФ.

Θ 1. Вейча (к. Карно) – таблица (не матрица) с 2^n ячейками, где n – число перемен. Кажд. ячейке соотв. единств. элемент. наложенные из всех возможн. ⇒ кажд. переменной фун-ции соотв. ровно половина всех ячеек диаграммы (карты). Другая половина диаграммы соотв. инверсному знач. этой же переменной.

\#

$n = 1$

$f(x)$

	x	$\bar{x}$
$f(x) = x$	1	

	x	$\bar{x}$
$f(x) = \bar{x}$		1

СДНФ

$f(x) = x \vee \bar{x}$

x	$\bar{x}$
1	1

склеивание обознач. овальчиком.

→ склеивание.

$\Rightarrow f = 1$

$n=2$

$f(x_1, x_2)$

	x_1	x_2
x_2	11	01
$\bar{x}_2$	10	00

x_1	x_2	f
0	0	m
0	1	m
1	0	m
1	1	m

ячейки ≡ мест. в табл

x_1	x_2	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\rightarrow$

	x_1	$\bar{x}_1$
x_2	1	0
$\bar{x}_2$	0	1

Поглощение:

$$f = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 = x_2(\bar{x}_1 \vee x_1) = x_2$$

	x_1	x_2
x_2	1	1

$\rightarrow f(x) = x_2$

#

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

	x_1	$\bar{x}_1$
x_2	1	1
$\bar{x}_2$	1	0

$f = x_2$

$f = x_1$

$\rightarrow f = x_1 \vee x_2$

$$f = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2$$

идемпотент.:

$$f = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_2 = x_1 \vee x_2$$

(дв. поглащение)

3.

$f(x_1, x_2, x_3)$

	x_1		$\bar{x}_1$	
x_2	1	1	0	0
$\bar{x}_2$	1	1	1	0
	$\bar{x}_3$	x_3	x_3	$\bar{x}_3$

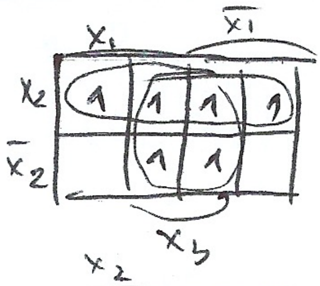
$$f(x_1, x_2, x_3) = V_1(1, 4, 5, 6, 7)$$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

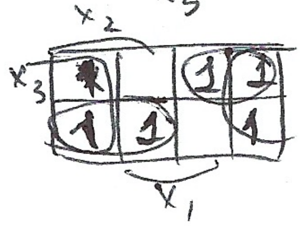
сужаем
пр-во.

1	1		
1	1	1	

склеив. примен. к 1, кол-во кот. = степени 2, они должны быть подряд располож.



$x_3 \vee x_2$



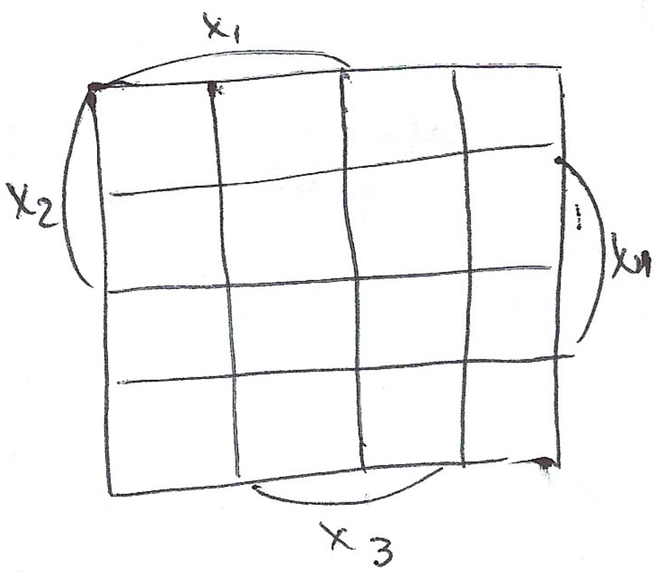
$\overline{x}_1 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3$.

$\overline{x}_1 \vee x_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_2 x_3$.

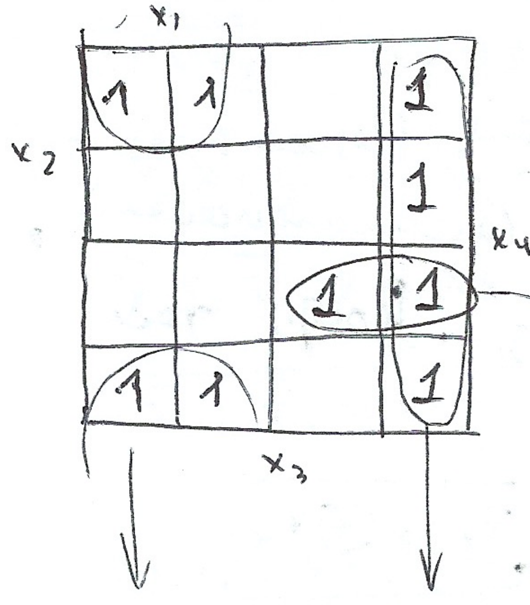
---

n=4

$f = (x_1, x_2, x_3, x_4)$



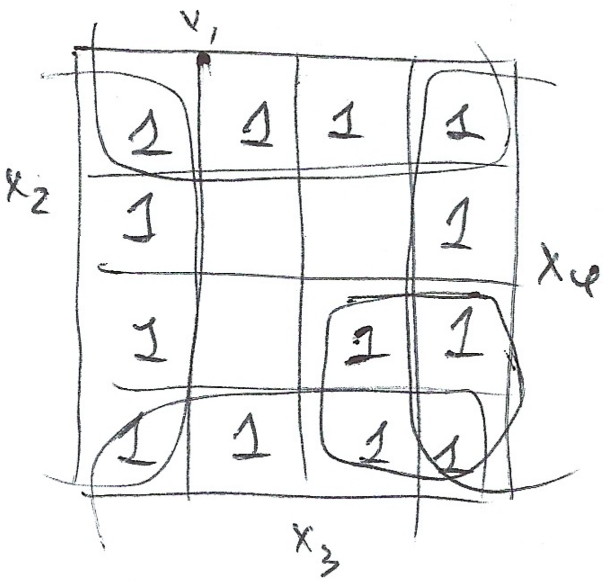
#



$x_1\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4$

уменьш. на $\log_2 m$

m - колич-во



$\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$

Задача:

Дана б. ф-ция (задан ф-лой) Перейти к ДНФ, а затем к СДНФ (аналитически), получен. СДНФ минимиз.. Постр. табл. ист. справа.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \underbrace{\overline{x_1 \downarrow x_2}}_{A} \vee \underbrace{\overline{\bar{x}_2 x_3 \oplus x_4}}_{B}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	
0	0	0	0	
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	
0	1	0	1	
0	1	1	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	

$A = \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} = x_1 \vee x_2$

$\overline{B} = \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \overline{\bar{x}_2 x_3}\, x_4 = \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee (x_2 \vee \bar{x}_3)\, x_4 =$

$= \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_3 x_4$

$B = \overline{\bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_3 x_4} = \overline{\bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4}\ \overline{x_2 x_4}\ \overline{\bar{x}_3 x_4} =$

В в КНФ

$= (x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)(x_3 \vee \bar{x}_4) =$

$= (x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_4)$

$(0 \vee 0 \vee x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_2 \bar{x}_4 \vee 0 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee 0 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee$

$\vee \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee 0 \vee 0 \vee 0) =$

$x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 x_3 x_4$