Лекция 19

- Каждая вершина связана сама с собой по опр. (рефлексивность) => очевидно

- Симметричность.
  Для кажд. маршрута из одной вершины в другую имеется маршрут противополож.

- Если вершина S_i соед. с S_j соед. с S_k значит есть маршрут из S_i в S_k => очевидно (транзитивность)

О Вершина графа — точка сочленения, если её удаление из графа приводит к увеличению компонент связности графа.
Если в графе есть хоть одна точка сочленен. => он разделимый. (удаление ведет к разбиению на компоненты связности)
Обратно — неразделимый
(дано для орграфа)

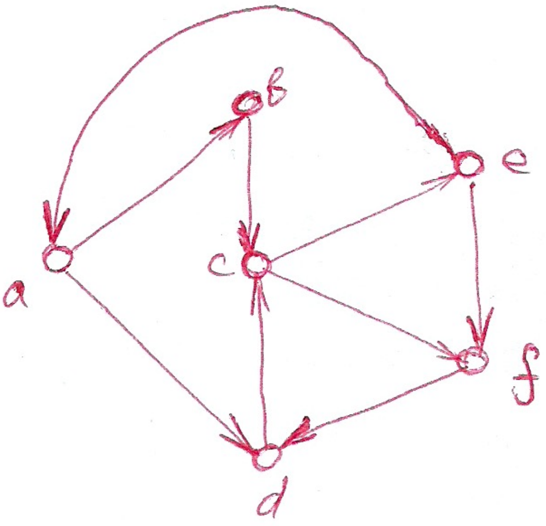
Теорема

Вершина S_k явл. точкой сочленения графа (связного графа!) если, и только если $\exists$ две такие S_i и S_j, причём они разные ($S_i \neq S_j \neq S_k$) и отличные от S_k, что любой путь между S_i и S_j проходит через S_k (и наоборот тоже)
(дано для орграфа)

Θ Граф с одной точкой сочленен. - односвязный

Граф с i точкой сочленен. - i-связный.

\#

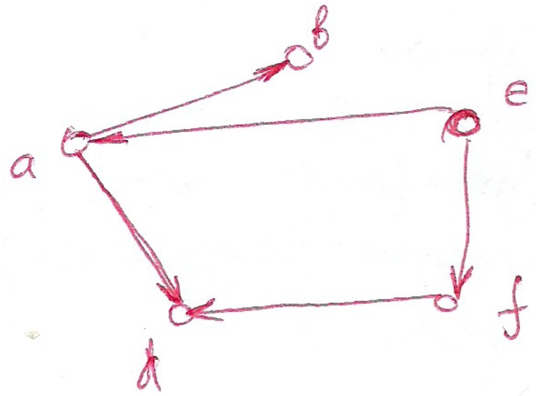


$S_K = c$ - точка сочл.

$S_i = a$

$S_j = f$

Уберем c



- граф распадется на компоненты связности

Θ Граф i-связный, если для нарушения его связности необходимо удалить не менее i вершин

Число i - число связности графа. (характер. надёжность).

Обход

Эйлеровы (они циклы) | Гамильтоновы

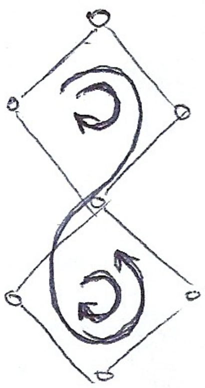
Θ Эйлеровым циклом (эйлеровым обходом) в неографе называется цикл вкл. все ребра графа и проход. по кажд. ребру в точности один раз.

Граф содерж. эйлеров цикл сам называют эйлеровым (вполне возможно что сам граф и явл. эйлеровым циклом)

Теорема (об эйлеровых циклах)

Граф связный неориентированный явл. эйлеров. $\Leftrightarrow$ кг. все его вершины имеют чётную степень.

□ Док-во см. в листке Гуренко ■



Для эйлеровых графов ∃ алгоритм Флёри ~~представления~~ построения эйлерового цикла.

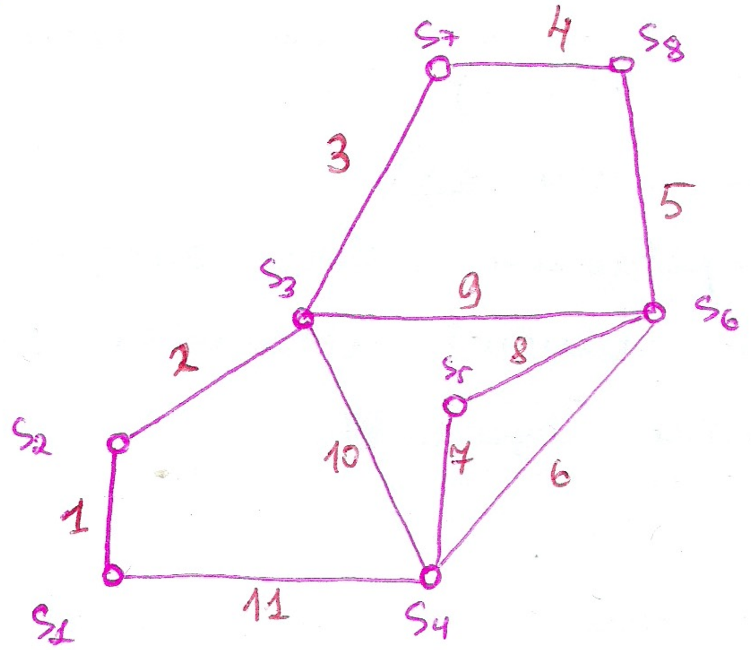
1. Выбираем вер. S_1 и инцидент. ей ребро u_1
   Помечаем u_1 номером (1).
   По ребру u_1 переходим в S_2

2. Для S_2 повторяем то, что ук. в п.1. номер кажд. раз увеличиваем

3. Алгоритм (1, 2) продолж. до тех пор, пока не будут помечены все ребра графа

При этом находясь в S_i не следует
- выбирать ребро инцидентное S_i и S_1, если есть другие варианты..
- выбирать ребро перешеек. (ребро, удаление кот. приводит разделению графа на две комп. связности).

#



есть несколько вариантов обхода.

Наш обход:

$\rightarrow S_1, S_2, S_3, S_7, S_8, S_6, S_4, S_5, S_6, S_3, S_4, S_1 \rightarrow$

Любая вершина имеет чётное

Теорема (след из т. Эйлера)

Связный неограф эйлеров $\Leftrightarrow$ когда может быть представлен во виде объедин. циклов не пересек. по рёбрам.

(В этом примере таких 3 шт.)

\# 1) S_1, S_2, S_3, S_4, S_1
2) S_4, S_5, S_6, S_4
3) S_3, S_7, S_8, S_6, S_3.

Гамильтоновость графа

Θ Неграф назыв. гамильтоновым, если он связный и содержит гамильтонов цикл.

Θ Гамильтонов обход (цикл) – цикл, содерж. все вершины графа, проходящ. по каждой вершине = 1 раз.

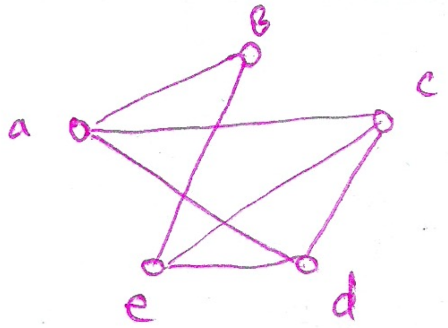
Столь же понятных критериев гамильтоновости, как эйлеровость ∄.

Кажд. раз. поиск гамильт. реш. не тривиально с исп. нек. теорем (док.) о гамильтон. (Как правило эти теоремы явл. достаточ., но не явл. необходим.)

Теорема (Теорема Óре).

Неограф (связный) порядка $n \geq 3$.
Если для ∀ пары несмежных верш. S_i, S_j выполнено условие $\{\forall s_i, s_j : s_i \neq s_j, s_i, s_j \in S)$
$p(S_i) + p(S_j) \geq n$, то данный
степень S_i
граф явл. гамильтонов.

#



$n = 5$

несмежн. верш:

a, e $\quad p(a) + p(e) = 3 + 3 = 6, \geq 5$ (верно)

$в, c$ $\quad p(в) + p(c) = 2 + 3 = 5, \geq 5$ (верно)

$в, d$ $\quad p(в) + p(d) = 2 + 3 = 5, \geq 5$ (верно)

гамильтонова цикла:

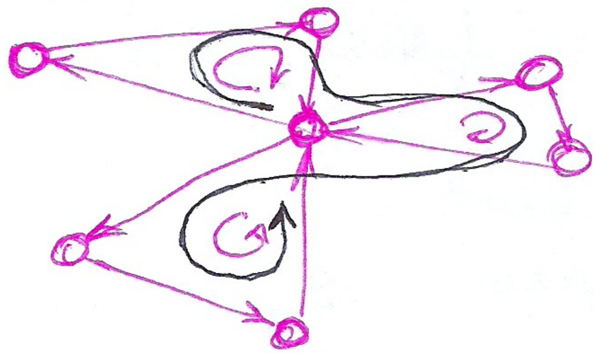
$\to a, в, e, c, d, a \to$

<u>Эйлеровость и гамильтоновость орграфа</u>

1) $G(S,V)$ – эйлеров орграф, что для $\forall$ вершины S_i ($\forall s_i \in S$) верно, что полустепень захода = полустепени исходов. ($p^+(S_i) = p^-(S_i)$)

2) $G(S,V)$ – эйлеров орграф – что он явл. объед. контуров попарно не имеющих общих дуг.

#



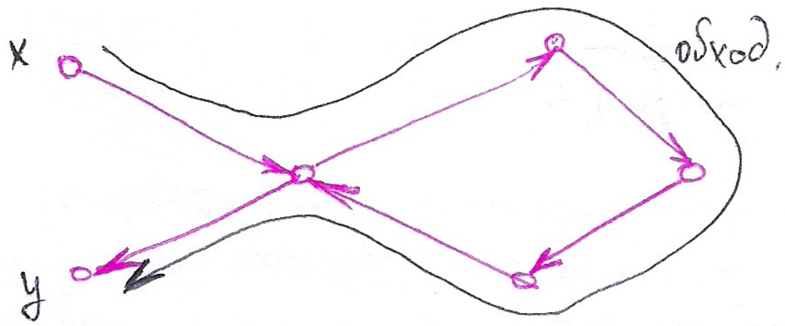
Теорема

Связный орграф содержит открытую эйлерову цепь (путь) $\Longleftrightarrow$ когда в нём есть 2 такие вершины $x, y \in S$, что полустепень исхода x есть её полустепень захода $+1$ $\left(p^-(x) = p^+(x) + 1\right)$

—//— $\left(p^-(y) = p^+(y) - 1\right)$,

и для всякой z $\left(\forall z \in S : z \neq x \neq y \quad p^+(z) = p^-(z)\right)$ (лень писать словами).

#



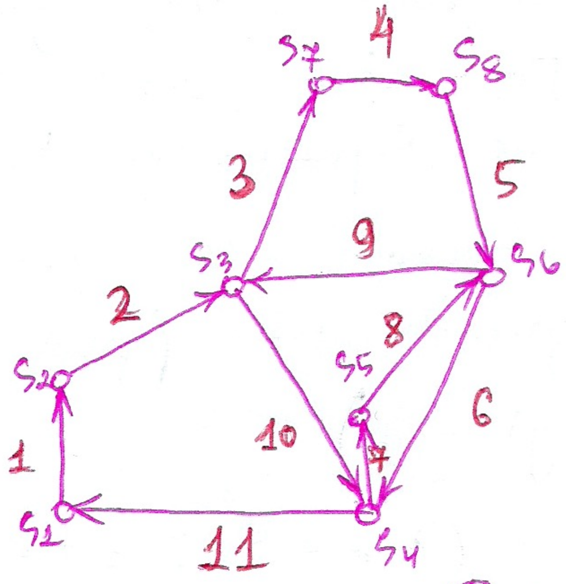
$p^-(x) = 1$

$p^+(x) = 0$

$p^-(y) = 0$

$p^+(y) = 1$

#



Применим алг. Флёри и посм. возм. ли получить такое же, что и в неографе

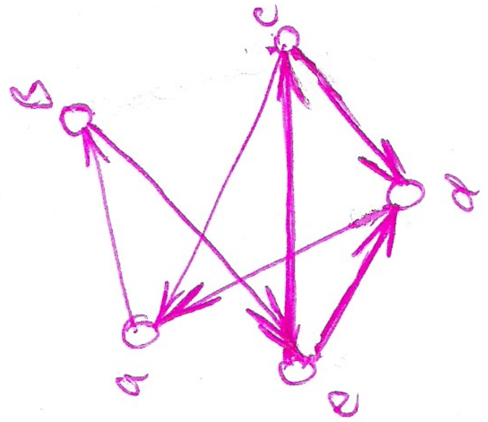
Алг. Флёри позв. получить Эйлеров обход и в случ. орграфа.

Распозн. гамильтоновости в орграфах столь же трудно, так же есть достаточные условия, но не необходимые, кот. мы будем исп. один из крит:

Теорема

Дан. сильносвязный граф G без контуров и петель, $n \geq 2$.
Если для $\forall$ пары вершин. s_i, s_j: (таких что) s_i и s_j различны ($s_i \neq s_j$) и s_i, s_j не смежны, и выпол. усл.
$p(s_i) + p(s_j) \geq 2n - 1$, то граф G содержит гамильтонов контур.

#



$a, e = p(a) + p(e) = 3+3 \not\geq 2n-1 = 9$
$b, c = p(b) + p(c) = 3+2 \not\geq 2n-1 = 9$
$b, d = p(b) + p(d) = 3+2 \not\geq 2n-1 = 9$

Однако $\exists$ гамильтонов контур, например:

$\to a, b, e, c, d, a \to$

Условие только достаточное $\Rightarrow$

Если условие теоремы выполн., то гамильт. контур точно $\exists$, а если не выполняется то гамильтонов конт. может как быть, так и не быть.

- Самим придумать пример, где теорема не срабатывала бы
- Самим придумать пример графа с 2-мя точками сочленения

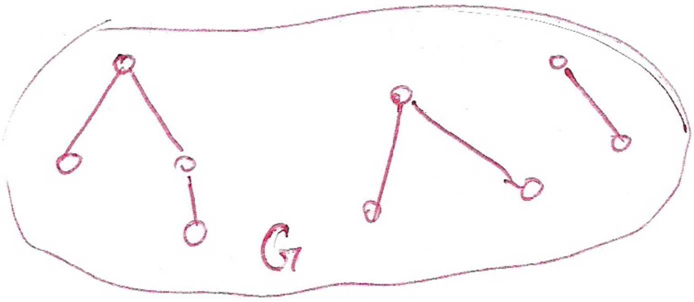
Деревья и остовы

⊖ Связный граф без циклов назыв. не ориентиров. деревом.

Замечание: Произв. неограф без циклов назыв. лесом

Деревья – компонента связности леса.

#



G – лес из 3-ёх деревьев.

Свойства деревьев (неориентированных)

1. Пусть нек. $G(S, U)$ – дерево.

$|S| = n$, $|U| = m$, тогда

1. $m = n - 1$.