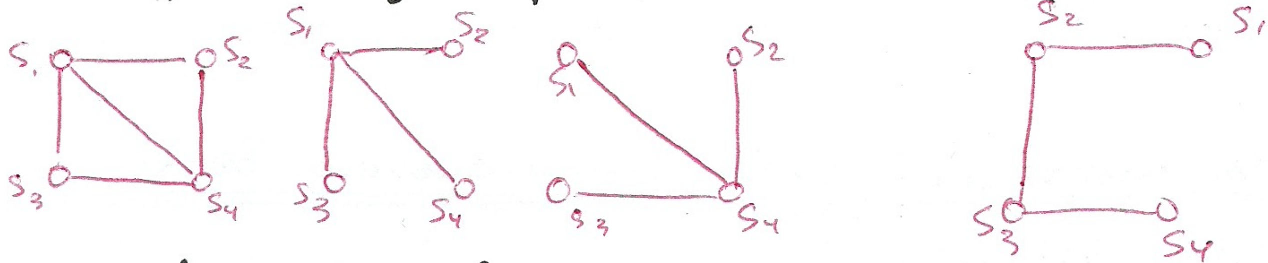
Лекция 11

24.04.2018

Остовы

$\forall$ остов – дерево (связный граф)

\# 

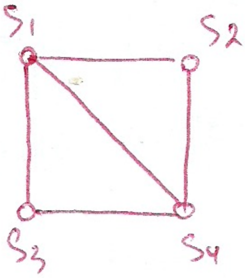
Из опр. дерева и остова $\Rightarrow$

Теорема

Число рёбер произвольного неографа $G(S, U)$, кот. необходимо удалить для получения остова не зависит от порядка их удаления и равно $m - n + k$, где m – число рёбер,

n – порядок графа

k – число компон. связности.

\# 

$m = 5$
$n = 4$
$k = 1$

Это число: $\nu(G) = m - n + k$ – цикломатическое число или цикломатический ранг графа G

$\nu^*(G) = n - k$ – коцикличеcкий ранг графа G.

Замечание:

$$\nu(G) + \nu^*(G) = m$$

$$m - \nu(G) = m - (m - n + k) = n - k = \nu^*(G)$$

~~Число необходимое для удаления~~

Число рёбер, кот. необх. удалить для получение остова: $\nu(G)$

Число рёбер, полученного остова: $\nu^*(G)$.

Задача нахождение остова экстримального веса

(Задача Штейнера)

На плоск. заданы n точек (вершин), нужно соединить их отрезками, так, чтобы сумма их была минимальна (длина / вес ребра).

В терминах Диск. Мат.

Дан неограф $G_0(S_0, \varnothing)$, найти неограф $G(S, U)$, облад. след. св-ми:

- каждому ребру графа G сопоставлено нек. неотриц. число (то есть граф G должен быть взвешен)
- G должен явл. деревом (неориент.)
- мн-во вершин дерева G $S_0 \subseteq S$ исх. графа G_0
- Сумма весов ребер G. должно быть экстримальн. (# наименьшей)

Объяснение: Дерево должно быть деревом неориентир., т.к. необходимо для выполнения экстремальности.

Задача Штейнера не решается обычно

Однако известно эффект. алг., кот. дают решение в нек. частных случаях, или дающие приближение

- Алгоритм Прима
- Алгоритм Краскала

Адаптируем задачу под алгоритмы:

Пусть дан неограф $G(S, U, \Omega)$, граф G связный, каждому ребру сопоставлено число ($\forall u_i \in U, \exists \omega_i \in \Omega$), из матрицы Ω - вес ребра.; $|U| = |\Omega|$

Требуется построить остов графа G минимального веса.

Отличие задачи от задачи Штейнера, в том, что речь идёт об остове.

Алгоритм Прима

В основе понятие пошагового расстояния.
Пусть мн-во вершин разбивается на два подмн-ва:
$S_1 \cup S_2 = S$, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$

Пошаговое расст. между S_1 и S_2 называется величина
$d(S_1, S_2) = \min\{\omega(s_i, s_j) : s_i \in S_1,\ s_j \in S_2\}$

Шаг 1: Присвоение нач. знач.

Полагаем $S_1 = \{s_1\}$, $S_2 = S \setminus S_1 = S \setminus \{s_1\}$.
$U' = \varnothing$ (число рёбер $= 0$)

(Наша задача наращивать U' до достиж. остова).
(Цель: придти к $S_1 = S$)

Шаг 2: Обновление данных

Находим ребро (s_i, s_j), т. что $s_i \in S_1$, $s_j \in S_2$.
и $\omega(s_i, s_j) =$ пошаговому расст. между S_1 и S_2.
Полагаем $S_1 = S_1 \cup \{s_j\}$, а $U' = U' \cup \{(s_i, s_j)\}$

Шаг 3: Проверка на завершение алг.

Если $S_1 = S$, то $G'(S, U')$ - найденный остов, иначе в шаг 2.

Конец. алгоритма

Шаг 4: Определение вес полученного остова
$\omega(G') = \sum \omega(s_i, s_j)$

Примечание: если потреб. строить остов макс. веса, алг. Прима не меняется, но в формуле d min меняется на max.

Оформление дз: как у всех дз с титулом, (стр. 1) с постановкой задачи и построить исх. граф. (стр. 2)

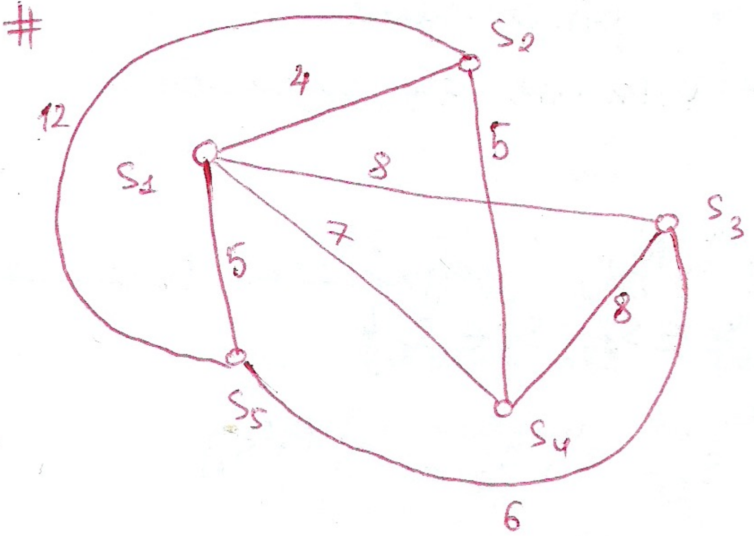
Дальше решаем по теоремам и на них ссылаемся

Вывод! (последн. стр.)

// Написать Туренко про большой пример.

Маленький пример.

#



	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1		4	8	7	5
s_2	4			5	12
s_3	8			8	6
s_4	7	5	8		
s_5	5	12	6		

Шаг 1:

$S_1 = \{s_1\}$, $S_2 = \{s_2 \dots s_5\}$

$V' = \varnothing$

(итерация 1)

Шаг 2:

$\cancel{s_2 = s_1}$ $d(S_1, S_2) = \min\{w(s_1,s_2), w(s_1,s_3), w(s_1,s_4), w(s_1,s_5)\}$

$= \min(4,8,7,5) = 4$ $(w(s_1,s_2))$

$V' = V' \cup \{(s_1,s_2)\} = \{(s_1,s_2)\}$

$S_1 = \{s_1, s_2\}$; $S_2 = \{s_3, s_4, s_5\}$

Шаг 3: $s_1 \neq S \rightarrow$ итерация 2

(итерация 2)

Шаг 2:

$$d(S_1, S_2) = \min\{w(s_1, s_3), w(s_2, s_4), w(s_1, s_5), w(s_1, s_4), w(s_2, s_5)\}$$

$$= \min(8, 7, 5, 5, 12) = 5, 5 = \{(s_1, s_5), (s_2, s_4)\}.$$

$$U' = U' \cup \{(s_1, s_5), (s_2, s_4)\} = \{(s_1, s_2), (s_1, s_5), (s_2, s_4)\}.$$

$$S_1 = \{s_1, s_2, s_4, s_5\}$$

$$S_2 = \{s_3\}$$

Шаг 3: $s_1 \neq S \rightarrow$ итерация 3.

(итерация 3)

Шаг 2: $d(s_1, s_2) = \min\{w(s_1, s_3), w(s_4, s_3), w(s_5, s_3)\} =$

$$= \min(8, 8, 6) = 6 \ \{w(s_5, s_3)\}$$

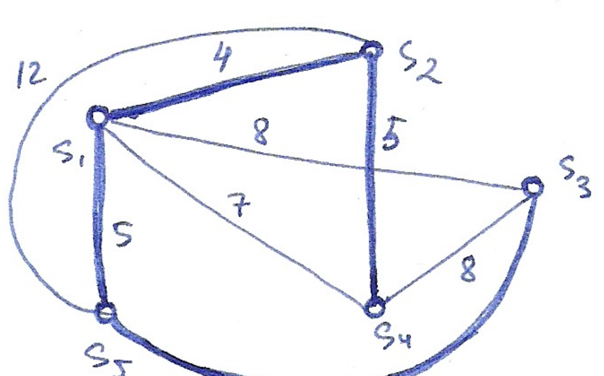
$$U' = U' \cup \{(s_5, s_3)\} = \{(s_1, s_2), (s_1, s_5), (s_2, s_4), (s_5, s_3)\}$$

$$S_1 = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$$

$$S_2 = \varnothing$$

Шаг 3: $s_1 = S \rightarrow$

Остановка алгоритма



G

G', $w(G') = 20$

$n = 5, \ m = 8, \ k = 1.$

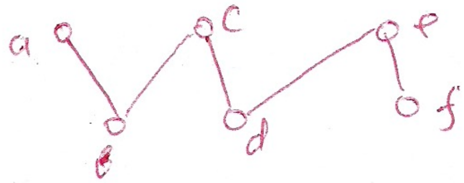
$\nu(G) = 8 - 5 + 1 = 4$

$\nu^* = 4$

Паросочетание в графах.

Θ Паросочетание в неографе – мн-во попарно не смежных рёбер.

#



{(a, b), (c, d), (e, f)} – макс.

{(b, c), (d, e)} – макс.

{(a, b), (e, f)}

↑ ещё и наиб. мощности

Θ Паросочетание наз. максимальн., если его размер нельзя увеличить добавлением ещё хотя бы одного ребра.

Θ (Паросочетание наиб. мощности – максимальное).

Θ Если максимальное паросочетание охватывает все вершины – совершенное

Лекция 08.05.2018

Булевы функции

$E = \{0,1\}$

Θ Алгебра, образованная мн-вом E, и всеми возможн. операциями на нём назыв. алгебра логики

Θ Функция n-переменных, задающее соответ. $f: E^n \to E$ назыв. функцией алгебры логики или булевой функцией

Θ $\forall$ эл-т мн-ва E^n – набор значений f булевых переменных или просто набором

Θ Общее число наборов 2^n

Наборы, на кот. функции принимают значение 1 – единичные
0 – нулевыми

$\Rightarrow$ Мн-во E как и обл. определ., так и обл. значений.

Задание:

- Аналитически (формулой)
- Таблицей истинности.

Если число наборов 2^n, а число функций 2^{2^n}, ~~перем~~

Θ Переменные вход. в n – x_i, бул. ф. f от n переменных бывают существенной и не

⊖ Существенной называется такая x_i, кот.

$f(x_1, x_2 \dots x_i \dots x_n)$: $f(x_1, x_2 \dots 0 \dots x_n) \neq f(x_1, x_2 \dots 1 \dots x_n)$

изменение x_i меняет f

$\exists$ двоичный набор $(a_1 \dots a_n)$: ~~что~~

$$f(a_1 \dots a_{i-1}, 0, a_{i+1} \dots a_n) \neq f(a_1 \dots a_{i-1}, 1, a_{i+1} \dots a_n)$$

То без неё обойтись нельзя и она существенная

⊖ Аналогично для несущественной просто сменить $\neq$ на $=$ (ф-я f не зависит от x_i)

Элементарные — булевы функции одной или двух переменных

См. док. Гуренко для двух.

Для одной:

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0
об.	0	1	x	$\bar{x}$
назв.	$f(x)=0$	$f(x)=1$	$f(x)=x$	$f(x)=\bar{x}$

Θ Пусть $F = \{f_1, f_2 \dots f_n\}$ – мн-во булевых ф-ий, ~~тогда~~ ф-ия f, полученная подстановкой функций мн-ва F друг в друга с учётом переименования переменных назыв. суперпозицией $f_1, f_2 \dots f_n$

Θ F – назыв. базис

Θ тогда выражение описывающее суперпозицию называется формулой над базисом F.

Если $\varphi(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ – формула, тогда кажд. φ_i – подформула, так же полученная суперпозицией функций базиса $F \Rightarrow$ обычно имеют дело не с функцией а с формулой

\# $\varphi = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \oplus x_1)$

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_2 \oplus x_1$	φ
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

$\Rightarrow \varphi$ – дизъюнкция

$\varphi = x_1 \vee x_2$

Θ Формулы, базис кот. составляют функции:
- конъюнкция
- дизъюнкция
- отрицание

называют булевыми формулами.

$F = \{ \wedge, \vee, \oplus$

Θ Алгебра $\langle E, \wedge, \vee, \neg \rangle$ называется булевой алгеброй.

F – булевы операции.

Выразим нек. элемент. функции булевой алгебр.

$x_1 \oplus x_2 = x_1 \wedge \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \wedge x_2$

$x_1 \rightarrow x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$

$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$ ст. Пирса

$x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2}$ штр. Шеффера

$x_1 \equiv x_2 = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \vee x_1 \wedge x_2$

Свойства булевых ф-ий.

Свойства:

Бонус

- Ассоциативность
  - $(xy)z = x(yz)$
  - $(x \vee y) \vee z \quad x \vee (y \vee z)$
- Коммутативность
  - $xy = yx$
  - $x \vee y = y \vee x$
- Дистрибутивность конъюнкции отн. дизъюнкции и обр.

$x(y \vee z) = xy \vee xz$

$x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$

- Идемпотентность (повторяемость)

$xxx \ldots x = x$

$x \vee x \vee x \ldots \vee x = x$

- Двойное отрицание (закон) (кратного отриц.)

$\bar{\bar{x}} = x$

$\bar{\bar{\bar{x}}} = \bar{x}$

- Св-во констант
  - $x \wedge 1 = x$
  - $x \wedge 0 = 0$
  - $x \vee 1 = 1$
  - $x \vee 0 = x$
  - $\bar{1} = 0$
  - $\bar{0} = 1$

- Закон де Моргана

$\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$

$\overline{x \vee y} = \overline{x}\,\overline{y}$

- Закон противоречия

• $x \wedge \overline{x} = 0$

- Закон искл. третьего.

• $x \vee \overline{x} = 1$

- Закон поглащения

• $(xy)x = xy$ конъюнкцией

$(x \vee y) \vee x = x \vee y$ дизъюнкцией

Всё сформулировано для булевого базиса.

Правило подстановки и замены.

обозначение

$\varphi(\ldots x \ldots)$ – x входит в φ

$\varphi(\ldots \varphi_i \ldots)$ – подформ. φ_i вх. в φ

если подформула φ_k вводится в φ вместо

всех вх. перемен. x : $\varphi(\ldots x \ldots)\{\varphi_k // x\}$

$\varphi(\ldots x \ldots)\{\varphi_k / x\}$ – вместо некоторых.

<u>Теорема 1</u>

Если в эквив. ф-лах вместо всех вх. перемен. x подставить одну и туже φ_k, то полученные формулы ост. эквив.

\# $\varphi_1(\ldots x \ldots) = \varphi_2(\ldots x \ldots)$

$\varphi_1(\ldots x \ldots)\{\varphi_k // x\} = \varphi_2(\ldots x \ldots)\{\varphi_k // x\}$.

правило подстановки.

Теорема 2

Если в ф-ле φ нек. φ_i заменить на лог. экв-ую ей φ_k, то получен. ф-ла будет экв-на исходн.

\# $\varphi(\ldots\varphi_i\ldots)$, $\varphi_k = \varphi_i \Rightarrow$

$$\varphi(\ldots\varphi_i\ldots)\{\varphi_i // \varphi_k\} = \varphi(\varphi_i\ldots)$$

кол-во кот. можно

и использ. правило замены, можно не теряя лог. эквивал. переходить от одной ф-лы к другой (эквив. преобр.)

\# Склеивание

1. $xy \vee x\bar{y} = x$

$x(y \vee \bar{y}) = x \wedge 1 = x$

Расщепление переменной z.

2. $xz \vee y\bar{z} \vee xy = xz \vee y\bar{z} \vee \underbrace{xyz \vee xy\bar{z}}_{xy} =$

$= xz(1 \vee y) \vee y\bar{z}(1 \vee x) =$

$= xz \wedge 1 \vee y\bar{z} \wedge 1 = xz \vee y\bar{z}$

3. $x \vee \bar{x}y = xy \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y = xy \vee xy \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y =$

$= x(y \vee \bar{y}) \vee y(x \vee \bar{x}) = x \wedge 1 \vee y \wedge 1 = x \vee y$

! См. материал. Алг. и полином Жегалкина !

Классы булевых фун-ий

Классы – выделенные подмножества,

$\underset{n\ \text{переменных}}{f(x)}$ сохр. константу 0, если $f(\underbrace{0,\dots,0}_{n})=0$.

$\Rightarrow$ класс булевых ф-ий сохр. конст. 0, обозначим K_0.

__Теорема 1__ (мощность)

Число всех булевых ф-ий сост. класс $K_0 = 2^{2^n-1}$

$\square$ Только на одном наборе $(\underbrace{0,0\dots0}_{n})$ функция принимает иск. значение 0, на всех ост. наборах значение фун-ии произвольное из мн-ва E. Т.к. всех наборов 2^n, то произв. значение на кол-ве наборов 2^n-1, таких ф-ий 2^{2^n-1} приним. произв. значение.

Т.к. всех булевых ф-ий 2^{2^n} $\Rightarrow$ кол-во всех наборов дающих $(0,\dots)$

$$2^{2^n}-2^{2^n-1}=2^{2^n-1}$$

$\blacksquare$

Лекция

15.05.2018.

Θ ф-ция $f\underbrace{(1, 1, 1 \ldots 1)}_{n} = 1$ – функция сохр. константу единицы

Обозн. ф-ию: K_1

Θ Число всех булевых ф-ий сохр. конст. 1 = $2^{2^n - 1}$

$\square$ см. прошлое док-во :) $\blacksquare$

3. Пусть $f(x_1 \ldots x_n)$ – булева ф-ия, тогда ф-ия $f^*(x_1 \ldots x_n)$ – двойственная ф-ия f, если $f^*(x_1 \ldots x_n) = \overline{f}(\overline{x_1} \ldots \overline{x_n})$

Она обл. св-вом инволюции:

$\overline{f^*}(\overline{x_1} \ldots \overline{x_n}) = f(x_1 \ldots x_n)$ или

$(f^*)^* = f$

Θ Если получить двойств. ф-ию заданной, $\varphi = f^*$, то посчитав получим $\varphi^* = f$

$\Rightarrow$ бинарное отн. быть двойственной обл. св-вом симметричности

Отсюда ⇒ способ получения:

1. Постр. табл. истинности для заданной ф-ии
2. Проинвертировать все значения → будет получена табл. истинности для двойственной ф-ии

#

x_1	x_2	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

→

x_1	x_2	f^*
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

для наглядности:

x_1	x_2	f^*
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$f = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} = \overline{x_1 x_2}$$

$$f^* = \overline{x_1}\,\overline{x_2} = \overline{x_1 \vee x_2}$$

Бул. ф-ия — самодвойственная, если она совпадает с двойств. себе ф-цей

$f = f^*$

Ф-ия самодвойственна $\Leftrightarrow$ на взаимно противопол. наборах она принимает взаимно противопол. значения.

Чтобы опровергнуть самодвойст. надо взять два взаимно противополож. наборах σ_1 и σ_2 $f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$

Чтобы Д надо пройти по всем. (задано построить двойств. заданной и убедит., что они равны.

#

x_1	x_2	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x_1	x_2	f^*
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$f \neq f^* \Rightarrow$

f не самодвойственна.

Эквив:

x_1	f
0	0
1	1

x_1	f^*
1	1
0	0

$f = f^* \Rightarrow f$ - самодвойств.

аналогично с отрицанием!

K_S — обозн. класса самодв. ф-ий.

Две теоремы о дв-сти.

Теорема 1

Если б.ф-ия $f(x_1 .. x_n)$ реализ. ф-лой $\varphi(\varphi_1(x_1 ... x_n) ... \varphi_2(x_1 ... x_n) ... \varphi_n(x_1 .. x_n))$, то ф-ла φ^* а

$$\varphi^*(\varphi_1^*(x_1 ... x_n)) ... \varphi_n(x_1 ... x_n))$$

реализует ф-цию двойств. к исходной $f^*(x_1 ... x_n)$

\# $\varphi = x_1 x_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}$

$\varphi_1 = x_1 x_2$; $\varphi_2 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}$

$\varphi_1^* = \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}}$; $\varphi_2^* = \overline{x_1 x_2}$

$\varphi^* \cancel{(\varphi_1^*, \varphi_2^*)} = \overline{\overline{\varphi_1} \vee \overline{\varphi_2}} =$

$\varphi^*(\varphi_1^*, \varphi_2^*) = \overline{\overline{\varphi_1^*} \vee \overline{\varphi_2^*}}$

Что???

Теорема 2

Пусть базису F сост. из n б.ф-ий пост. в соотв. базис двойств. ф-ии. Если ф-ла φ над базисом F $(\varphi : F)$ реализ. ф-цию f, то ф-ла φ^* над базисом F^* $(\varphi^* : F^*)$ реализу. ф-цию двойств. заданной, при том, что ф-ии $f_i \in F \underset{\text{замещение}}{\rightarrow} f_i^* \in F^*$

Функционально-полные системы б. ф-ий.

Θ Σ (мн-во б. ф-ий) – замкнутым, если $\forall$ суперпозиция ф-ий из Σ даёт б. ф-ию из Σ

Θ $\forall$ система б.ф-ий обр. класс, сост. из всех ф-ул, кот. представлены ф-ии из этой системы. Такой класс – замыкание, и если мн. б.ф-ий – Σ, то замыкание – $[\Sigma]$. Если считать, что Σ – базис б.ф-ий, то $[\Sigma]$ - мн-во всех ф-ий, реализ. ф-ами над базисом Σ.

#
$[\vee]$: $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_i \vee \ldots$

Все классы:

K_0, K_1, K_S, K_L, K_M – замкнутые, обр. замыкание.

Очевидно, что мн-во всех б.ф-ий также обр. замкн. класс.

$F = \{f_1, f_2\}$, $f_1 = x_1 x_2$, $f_2 = x_1 \oplus x_2$. $F = \{\wedge, \oplus\}$

$F^* = ?$

$f_1^* = \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2}$; $f_2^* = \overline{\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2}$

$f_1^* = x_1 \vee x_2$; $f_2 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \equiv x_1 \equiv x_2$

$F^* = \{\vee, \equiv\}$

Пусть $\varphi = (x_1 \oplus x_2)(\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2)$

4. Линейный класс

$f(x_1 \dots x_n)$ - линейная, если она представима

в виде: $c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \dots \oplus c_n x_n$

$c_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{0, n}$

Обозн: K_L

$\exists$ теорема о том, что $\forall$ б. ф-ия линейна, если представима полиномом Жегалкина 1-ого порядка

\# $f(x_1, x_2, x_3)$

$f = x_1 x_2 \oplus x_3 \oplus x_1$ II пор.

$f = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 x_3$ III пор.

Число всех булевых ф-ий $= 2^{n+1}$ $(|K_L|)$

Лекция 22.05.2018

Θ Система б. ф-ий — полная, (иногда функц. полной) если её замыкание совпадает со всем мн-вом б. ф-ий.

Замечание. $\forall$ из рассмотр. классов (см. табл.) не совпадает с мн-вом всех б-ф-ий.

Система, обр. такую полноту должна давать $\forall$ б. ф-ию

Θ Таким обр. суперпозиция ф-ий сост. такую полную систему по зв. получить $\forall$ б. ф-ию вообще, т.е. $\forall$ ф-ия может быть представлена ф-ей над функц. полной системой, как над базисом

$\exists$ теорема, кот. говорит, что $\forall$ ф-ия может быть задана КНФ или ДНФ.

Θ Базис булевой алгебры — функц. полная система ф-ий.

Рассмотренные 5 классов — классы Поста.

Теорема Е. Поста (центральная теорема б. ф-ий.

$\boxed{\text{коротко}}$ Мн-во F б. ф-ий обр. полную систему $\Longleftrightarrow$ это мн-во не содержится целиком ни в одном из классов Поста

(развернуто)

Для того, чтобы система б. ф-ций была полной (обладала функционал. полнотой) необходимо и достаточно, чтобы она содержала хотя бы одну ф-цию:

1) Не сохраняющую константу 0; $\notin K_0$

2) Не сохр. константу 1; $\notin K_1$

3) Не самодвойственную; $\notin K_S$

4.) Не линейную; $\notin K_L$

5.) Не монотонную; $\notin K_M$.

$F = \{f_1, f_2\}$

$\left.\begin{matrix} f_1 \in K_0 \\ f_2 \in K_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ система F б. ф-ций не полная.

☐ Доказательство: (мно)

Необходимость следует из замкнутости каждого класса

Достаточность док-ся очень долго и громоздко ■

$F_1 = \{\neg, \wedge\}$. - полной

$F_2 = \{\neg, \vee\}$ —"—

$F_3 = \{\neg, \wedge, \vee\}$ —"—

$F_4 = \{\oplus, \wedge\}$

$\forall$ система сводимая к полной — также обладает полнотой.

\# $F=\{\downarrow\} \to \{\neg, \vee\}$

$\bar{x} = x \downarrow x$ 1

$x_1 \vee x_2 = \overline{x_1 \downarrow x_2} = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$

$F=\{\,|\,\} \to \{\neg, \wedge\}$

$\bar{x} = x \,|\, x$

$x_1 x_2 = \overline{x_1 | x_2} = (x_1 | x_2) \,|\, (x_1 | x_2)$

Базисы: Стрелка Пирса, Штрих Шеффера, состоят из одной ф-ии, но ни та, ни друг. не принадлежит ни одному ~~кл~~ классу → для них выполняется теорема Поста.

¬ - линейно и самодвойственно ⇒ не может быть функц. полной ~~т.к.~~ явл. ф-ией одной переменной ⇒ реализ. функцию для большего кол-ва переменных нельзя с помощью ¬.

Решается не отв. вопрос:

Как обесп. принадлежность / не нек. б. ф-ции тому или иному классу Поста.

Не монотонность отрицания

Пусть $f(x_1, \ldots x_n) \in K_M$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_1 = (a_1, a_2 \ldots a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots a_n) \\ \sigma_2 = (a_1 \ldots a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots a_n). \end{array}\right\} \begin{array}{c} \sigma_1 \leq \sigma_2 \\ \text{„не больше"} \end{array}$$

Если монотонна

$f(\sigma_1) = 1$, $f(\sigma_2) = 0$: $f(\sigma_1) \leq f(\sigma_2)$ не выполнится

тогда для нек. переменной x нем. немонот. ф-ции f можно записать:

$\bar{x} = f(x_1 \ldots x_{i-1}, x, x_{i+1} \ldots x_n)$ при $x_1 = a_1 \ldots$

$x_{i-1} = a_{i-1}$, $x_{i+1} = a_{i+1} \ldots x_n = a_n$

Иными словами: фиксируем все арг. в константы.

$\bar{x} = f(a_1 \ldots a_{i-1}, x, a_{i+1} \ldots a_n)$

Исп. аналог. выкладки можно доказывать $\in$ и $\notin$ ко кл. Поста.

Если есть $F = \{f_1, \dots f_n\}$, где f_i, $i = \overline{1,n}$ произвол. б. ф-ии, то возник. вопр., как на практике опр. полноту F большое.

Рассмотрим большой пример

\# $f_1(x_1, x_2, x_3)$; $f_2(x_1, x_2, x_3)$; $F = \{f_1, f_2\}$

$f_1 = V_1(1,2,3,4,5,6)$; $f_2 = V_1(1,2,4,7)$

V_1 – на этих значениях f_i принимает 1.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

Задача: иссл. ф-ии на принадлежность кл. Поста и опр. явл. ли F – полной сист. (обр. ли F базис).

Решение на след. стр.

1. K_0

$f_1(0,0,0)=0$

$f_2(0,0,0)=0$

$\Rightarrow f_1 \in K_0$; $f_2 \in K_0$.

2. K_1

$f_1(1,1,1)=0$

$f_2(1,1,1)=1$

$\Rightarrow f_1 \notin K_1$; $f_2 \in K_1$

3. K_S

рассмотрим табл. от центра и $\updownarrow$

а) $f_1 \notin K_S$, т.к. на взаимно противополож. наборах

$f(0,1,1)=1$
$f(1,0,0)=1$ значение f одн.

б) $f_2^* \cancel{\in} \Rightarrow f_2 \in K_S$

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	f_2	f_2^*
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0

4. K_M

на $\sigma_1 \le \sigma_2$ проверить выполн. неравенств:

$f_1(\sigma_1) \le f_1(\sigma_2)$

$f_2(\sigma_1) \le f_2(\sigma_2)$

Если для ∀ сравнимых наборов выполняется, то монотонна

$\sigma_1 \le \sigma_2$

сравнимые по аргументам

а) $110 \le 111$

$f_1(1,1,0)=1$
$f_1(1,1,1)=0$ $\Rightarrow f_1 \notin K_M$

б) $010 \le 011$

$f_2(0,1,0)=1$
$f_2(0,1,1)=0$ $\Rightarrow f_2 \notin K_M$

5. K_L Надо найти для f_1 и f_2 линейн. полином Жегалкина, если он $\exists$, то ф-ция линейна.

- Воспольз. методом неопр. коэф.
- Запишем для $f_1(x_1, x_2, x_3)$ полином Жегалкина третьей степени в общем виде.
- Попробуем опр. сводится ли он для f_1 к линейному полиному.

1). $P^3_{f_1} = a_{123}x_1x_2x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus$

$\oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0$.

где a_i - неопр. коэф.

2). $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. тогда $P^3_{f_1} = a_0$.

т.к. $f_1(0,0,0) = 0$, то $a_0 = 0$

3) Найдем $a_1 .. a_3$

Рассмотрим $\underset{1}{\underset{\shortparallel}{f_1(0,0,1)}}$, $\underset{1}{\underset{\shortparallel}{f_1(0,1,0)}}$, $\underset{1}{\underset{\shortparallel}{f_1(1,0,0)}}$

Подставим $x_1x_2x_3 = 001$ в $P^3_{f_1} = a_3x_3 \oplus a_0 =$
$= a_3$.

$f_1(0,0,1) = 1 \Rightarrow a_3 = 1$

Рассуждая аналогично получим.

$a_0 = 0$
$a_1 = 1$
$a_2 = 1$
$a_3 = 1$
$a_{12} = 1$, т.к. $1 \oplus 1 = 0$
$a_{13} = 1$ — " —
$a_{23} = 1$ — " —
$a_{123} = 0$ т.к. $\underbrace{\underbrace{1 \oplus 1}_{0} \oplus \underbrace{1 \oplus 1}_{0} \oplus \underbrace{1 \oplus 1}_{0}}_{1} = 1$