



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques  
Sèrie 1

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'estudiant

Ubicació del tribunal .....

Número del tribunal .....

Etiqueta de qualificació

Etiqueta de correcció

---

Responen a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

---

1. Considereu la funció  $f(x) = 2\frac{\ln x}{x}$ , definida per a  $x > 0$ .

a) Estudieu-ne els màxims i els mínims, i les zones de creixement i de decreixement.

[1 punt]

**b)** Aquesta funció té asímptotes? Feu un esbós de la seva gràfica.

[1 punt]

**c)** Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de  $y = f(x)$  en el punt d'abscissa  $x = 1$ .

[0,5 punts]

Espai per a la correcció		
Qüestió 1	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	<i>c</i>	
	Total	

2. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y + kz = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{array} \right\},$$

on  $k$  és un paràmetre real.

**a)** Discuti el sistema per als diferents valors del paràmetre  $k$ , i resoleu-lo per a  $k = 0$ .

[1 punt]

**b)** Resoleu el sistema per a  $k = -1$ .

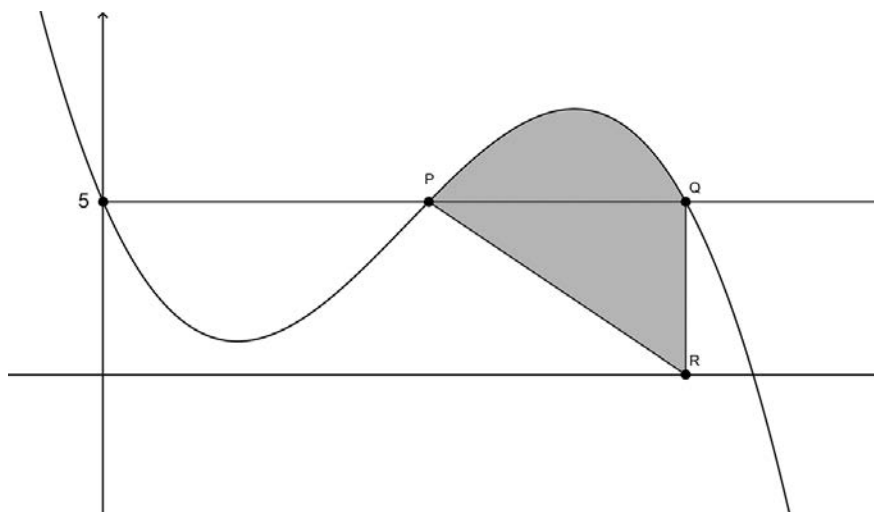
[0,75 punts]

- c) Per a  $k = -1$ , modifiqueu la tercera equació de manera que el sistema esdevingui incompatible. Justifiqueu la resposta.

[0,75 punts]

Espai per a la correcció		
Qüestió 2	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	<i>c</i>	
	Total	

3. En Joan troba entre els papers del seu avi un esbós com el de la figura adjunta, on es descriu un terreny de regadiu que ha deixat en herència al seu pare.



La corba de la gràfica és  $y = f(x)$ , amb  $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5$ .

- a)** A partir de l'expressió de  $f(x)$ , calculeu les coordenades dels punts  $P$ ,  $Q$  i  $R$  indicats a la figura. Calculeu també l'equació de la recta  $PR$ .

[1,25 punts]

**b)** Calculeu la superfície del terreny.

[1,25 punts]

Espai per a la correcció		
Qüestió 3	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

4. L'Andreu posa les nou boles que es mostren a continuació dins d'una bossa.



- a) A continuació, treu de la bossa dues boles a l'atzar, una darrere l'altra i sense reemplaçament (és a dir, no retorna a la bossa la primera bola abans de treure la segona).
- Calculeu la probabilitat que la primera bola sigui una A o una E.  
[0,5 punts]
  - Calculeu la probabilitat que les dues boles siguin diferents.  
[0,75 punts]



**b)** L'Andreu torna a posar totes les boles a la bossa i en treu cinc a l'atzar, una darrere l'altra, però ara amb reemplaçament (és a dir, ara sí que retorna a la bossa cada bola extreta abans d'agafar la següent).

— Calculeu la probabilitat que no hagi tret cap A.

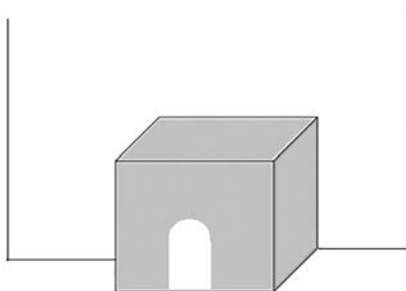
[0,5 punts]

— Calculeu la probabilitat que hagi tret almenys dues A.

[0,75 punts]

Espai per a la correcció		
Qüestió 4	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

5. Volem construir un petit cobert de fusta de  $6 \text{ m}^3$  de volum, en forma de prisma rectangular, adossat a la paret lateral d'una casa, per a guardar-hi llenya. Només cal construir, per tant, el sostre i tres parets (la paret del fons del cobert és la de la casa a la qual està adossat). A més, volem que el cobert mesuri el triple d'amplària que de fondària. Cada metre quadrat de paret té un cost de construcció de 30 € i el sostre costa 50 € per metre quadrat. Un cop construït el cobert, afegir-hi una porta té un cost fix de 35 €.



- a) Comproveu que el cost de construcció del cobert ve donat per la funció

$$C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35, \text{ on } x \text{ és la fondària del cobert en metres.}$$

[1,25 punts]

- b)** Calculeu quines han de ser les dimensions del cobert per tal que el cost de construcció sigui mínim i justifiqueu la resposta. Quin és aquest cost?  
[1,25 punts]

Espai per a la correcció		
Qüestió 5	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

6. Considereu els punts  $A = (1, 2, 3)$  i  $B = (-3, -2, 3)$ .
- a)** Calculeu l'equació del pla  $\pi$  que és perpendicular a la recta  $AB$  i que passa pel punt mitjà entre  $A$  i  $B$ . Justifiqueu que aquest pla està format, precisament, pels punts  $P = (x, y, z)$  que estan a igual distància de  $A$  que de  $B$ , és a dir,  $d(P, A) = d(P, B)$ .
- [1 punt]

- b)** Calculeu les distàncies de  $A$  i de  $B$  al pla  $\pi$  i comproveu que són iguals. És casualitat? Raoneu la resposta.

[0,75 punts]

- c)** Sigui  $C = (-7, 6, 3)$ . El triangle  $ABC$  és isòsceles? Calculeu la seva àrea.

[0,75 punts]

Espai per a la correcció		
Qüestió 6	$a$	
	$b$	
	$c$	
	Total	

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

--	--

--	--

Etiqueta de l'estudiant



Institut  
d'Estudis  
Catalans





Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques  
Sèrie 5

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'estudiant

Ubicació del tribunal .....

Número del tribunal .....

Etiqueta de qualificació

Etiqueta de correcció

---

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

---

1. Considereu la funció  $f(x) = -2 + 10(x - 1) \ln x$ , definida per a  $x > 0$ .
- a) Comproveu que  $f(x)$  té una arrel a l'interval  $[1, 1,5]$  i busqueu un interval d'una dècima de longitud que també contingui aquesta mateixa arrel.

[0,75 punts]

- b) Sense calcular els punts crítics, justifiqueu que  $f(x)$  és decreixent a l'interval  $(0, 1)$  i creixent a  $(1, +\infty)$ . Quins màxims i mínims té aquesta funció?

[1 punt]

- c) Calculeu  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  i  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , i feu un esbós de la gràfica d'aquesta funció.  
[0,75 punts]

Espai per a la correcció		
Qüestió 1	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	<i>c</i>	
	Total	

2. Considereu les matrius  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  i  $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

*a)* Decidiu si la matriu  $\mathbf{P}$  és invertible i, en cas de ser-ho, calculeu la seva inversa. Expliqueu detalladament el procediment seguit.

[1,25 punts]

- b)** Calculeu una matriu  $X$  de 3 files i 3 columnes que compleixi  $PX + Q = 2R$ .  
[1,25 punts]

Espai per a la correcció		
Qüestió 2	$a$	
	$b$	
	Total	

3. Considereu les paràboles  $y = f_a(x)$ , amb  $f_a(x) = ax^2 + 2x + 5 - a$ , on  $a$  és un paràmetre real.
- a)** Determineu el valor del paràmetre  $a$  per al qual la recta tangent a  $y = f_a(x)$  en el punt d'abscissa  $x = 1$  passa pel punt  $(2, 13)$ .
- [1 punt]

- b)** Calculeu els punts de tall de les paràboles  $y = f_1(x)$  i  $y = f_3(x)$ .
- [0,5 punts]

- c) Calculeu l'àrea de la regió situada entre les dues paràboles  $y = f_1(x)$  i  $y = f_3(x)$ .  
[1 punt]

Espai per a la correcció		
Qüestió 3	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	<i>c</i>	
	Total	

4. La Rut fa servir el mètode següent per a fer els problemes de matemàtiques: tira un dau equilibrat i, si el resultat és com a màxim 4, pensa i resol el problema ella mateixa; si el resultat és 5 o 6, busca la solució del problema per Internet i la copia. Quan és ella qui ha pensat la solució, la resposta és correcta en el 75 % dels casos; quan copia la solució d'Internet, la resposta és correcta només en el 40 % dels casos.

**a)** Quina és la probabilitat que la solució d'un problema respost seguint aquest mètode sigui correcta?

[0,75 punts]

**b)** Quina és la probabilitat que un problema l'hagi resolt la Rut si sabem que la solució és correcta?

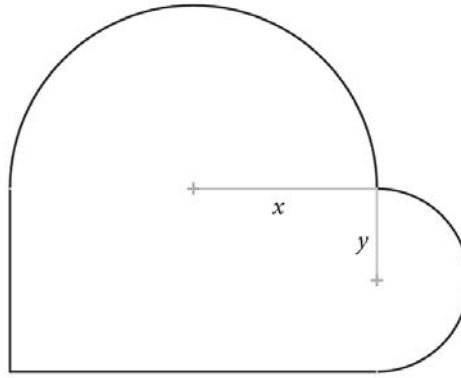
[0,75 punts]



- c) Demà la Rut ha d'entregar 5 problemes de matemàtiques. Quina és la probabilitat que n'hi hagi almenys 4 de correctes?  
[1 punt]

Espai per a la correcció		
Qüestió 4	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	<i>c</i>	
	Total	

5. En Carles vol construir un decorat per a l'obra de teatre de final de curs en forma d'un rectangle i dos semicercles, tal com es mostra a la figura següent:



- a)** Determineu el perímetre i l'àrea del decorat que s'ha de construir en funció de  $x$  i de  $y$ .  
[1 punt]

- b)** Per a revestir el perímetre del decorat, en Carles té material per a cobrir fins a 10 m. Si el vol gastar tot, quines seran les mides del decorat d'àrea màxima que podrà construir? Quin és el valor d'aquesta àrea?

[1,5 punts]

Espai per a la correcció		
Qüestió 5	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

6. Considereu les rectes  $r: \frac{x-5}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{-1}$  i  $s: \begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = 3 + k \\ z = -1 \end{cases}$ .

- a)** Quina és la seva posició relativa? Calculeu l'equació implícita d'un pla  $\pi$  que sigui paral·lel a les dues rectes i que passi per l'origen de coordenades.

[1,25 punts]

- b)** Calculeu l'equació de la recta  $t$  que talla les dues rectes  $r$  i  $s$  perpendicularment.

[1,25 punts]

Espai per a la correcció		
Qüestió 6	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

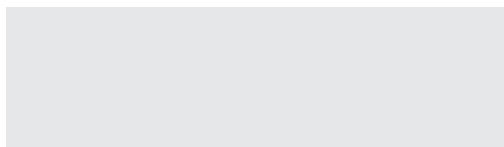
[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

--	--

--	--

Etiqueta de l'estudiant



Institut  
d'Estudis  
Catalans