دانشکده مهندسی برق

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

پروژه کنترل مدرن

کنترل کوادکوپتر

استاد درس: دکتر عطریان فر

سپهر جهانگیری ۹۹۲۳۰۱۶

محدثه رضایی ۹۹۲۳۰۳۴

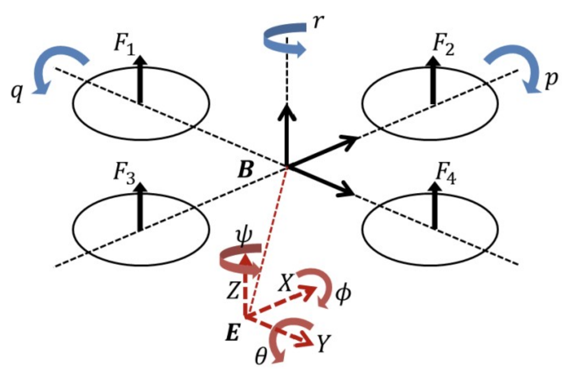
سینا فاضل ۹۹۲۳۰۵۸

درسا رحمتی ۹۹۲۳۱۱۰

فهرست مطالب

۱ مقدمه

۱.۱ معرفی سیستم



شکل ۱.۱: متغیرهای حالت کوادروتور

کوادکوپترها دارای چهار موتور، با پیکربندی صلیبی شکل هستند. با کنترل سرعت چرخشی هرکدام از این موتورها می‌توان position و orientation کوادروتور را کنترل کرد. برای توصیف موقعیت و جهت گیری از ۶ متغیر به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

متغیرهای حالت:

از ۹ متغیر توصیف کننده $position\ (X, Y, Z)$ ، $orientation\ (\phi, \theta, \psi)$و سرعت خطی (V) و ۳ متغیر p ، q و r استفاده می‌کنیم.

$$x^T = \begin{pmatrix} X & \dot{X} & Y & \dot{Y} & Z & \dot{Z} & \phi & \theta & \psi & p & q & r \end{pmatrix}$$

خروجی های سیستم:

همچنین متغییر های $position$ و ψ را به عنوان خروجی در نظر میگیریم.

ورودی های سیستم:

ورودی های u_1 تا u_4 را به شکل زیر، تابعی از سرعت چرخش موتورها، بدست می آوریم.(l: فاصله بین مرکز کوادروتور و مرکز موتورها، b : $thrustfactor$ ، d : $dragfactor$)

$$\begin{cases} u_1 = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ u_2 = l.b(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \\ u_3 = l.b(\Omega_2^2 - \Omega_4^2) \\ u_4 = d(\Omega_1^2 + \Omega_3^2 - \Omega_2^2 - \Omega_4^2) \end{cases}$$

ثابت های سیستم:

طبق مقاله ثابت های زیر رااستفاده خواهیم کرد:

$$I_{xx} = 2.3 \times 10^-3 [Kg.m^2] \quad I_{yy} = 2.3 \times 10^-3 [Kg.m^2] \quad I_{zz} = 5.09 \times 10^-3 [Kg.m^2]$$

$$m = 1[kg] \quad g = 9.806[m/s^2]$$

۲ خطی سازی و قطری سازی

۱.۲ مدل غیر خطی

مدل غیرخطی سیستم:

برای بدست آوردن مدل غیرخطی سیستم ابتدا مشتق متغیرهای حالت را بدست میاوریم:

$$\begin{cases} \ddot{X} = (\cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\psi))\frac{u_1}{m} \\ \ddot{Y} = (\cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) + \sin(\phi)\cos(\psi))\frac{u_1}{m} \\ \ddot{Z} = \cos(\theta)\cos(\phi)\frac{u_1}{m} - g \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\phi} = p + q\sin(\phi)\tan(\theta) + r\cos(\phi)\tan(\theta) \\ \dot{\theta} = q\cos(\phi) - r\sin(\phi) \\ \dot{\psi} = q\sin(\phi)\sec(\theta) - r\cos(\phi)\sec(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{u_2}{I_{xx}} + \frac{qr(I_{yy}-I_{zz})}{I_{xx}} \\ \dot{q} = \frac{u_3}{I_{yy}} + \frac{pr(I_{zz}-I_{xx})}{I_{yy}} \\ \dot{r} = \frac{u_4}{I_{zz}} + \frac{pq(I_{xx}-I_{yy})}{I_{zz}} \end{cases}$$

بنابرین معادله حالت به صورت زیر می شود:

$$F = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ u_1\left(\sin(\phi)\,\sin(\psi) + \cos(\phi)\,\cos(\psi)\,\sin(\theta)\right) \\ \dot{Y} \\ -u_1\left(\cos(\psi)\,\sin(\phi) - \cos(\phi)\,\sin(\psi)\,\sin(\theta)\right) \\ \dot{Z} \\ u_1\,\cos(\phi)\,\cos(\theta) - \frac{4903}{500} \\ p + r\,\cos(\phi)\,\tan(\theta) + q\,\sin(\phi)\,\tan(\theta) \\ q\,\cos(\phi) - r\,\sin(\phi) \\ \frac{r\,\cos(\phi)}{\cos(\theta)} + \frac{q\,\sin(\phi)}{\cos(\theta)} \\ \frac{10000\,u_2}{23} - \frac{279\,q\,r}{230} \\ \frac{10000\,u_3}{23} + \frac{279\,p\,r}{230} \\ \frac{100000\,u_4}{509} \end{pmatrix}$$

۲.۲ خطی سازی

نقطه تعادل:

برای پیدا کردن نقطه تعادل می گیریم $\dot{x} = 0$ ، بنابراین:

$$\dot{X} = \dot{Y} = \dot{Z} = \phi = \theta = \psi = p = q = r = 0$$

و همچنین ورودی به صورت زیر میباشد:

$$\begin{cases} u_1 = mg \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \\ u_4 = 0 \end{cases}$$

همچنین میدانیم در این نقطه تعادل، کوادروتور ثابت در هوا معلق می ماند.

خطی سازی:

سیستم خطی سازه شده حول نقطه تعادل ذکر شده به صورت زیر می شود.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4903}{500} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4903}{500} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10000}{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10000}{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{100000}{509} \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

۳.۲ فرم قطری بلوکی جردن

فرم قطری به صورت زیر میباشد:

$$\Lambda=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

در این تبدیل تشابهی متغییر های حالت جدید به فرم زیر میباشند:

$$\begin{pmatrix} \frac{500\,X}{4903} & \frac{500\,\dot{X}}{4903} & \theta & q & Z & \dot{Z} & -\frac{500\,Y}{4903} & -\frac{500\,\dot{Y}}{4903} & \phi & p & \psi & r \end{pmatrix}$$

۳ تابع تبدیل , ماتریس انتقال حالت و حذف فرکانس خاص

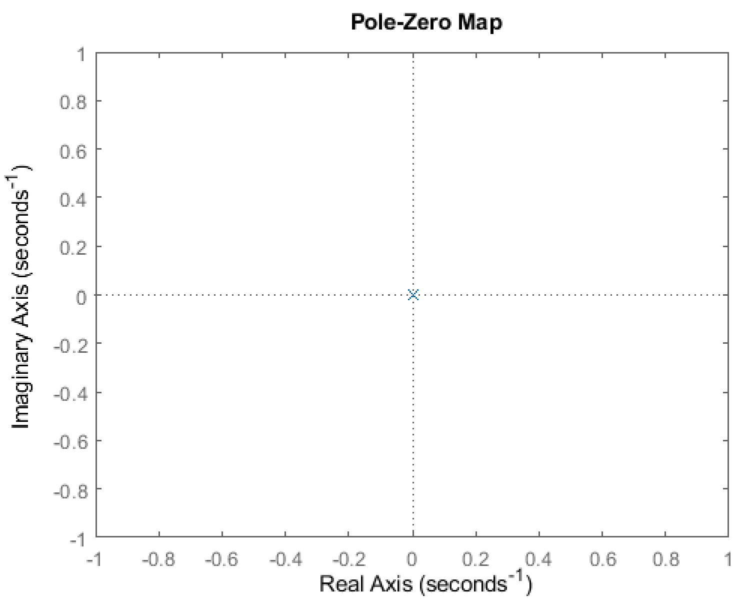
۱.۳ ماتریس تبدیل

ماتریس تبدیل به صورت زیر محاسبه میشود

$$G = C(SI-A)^{-1}B + D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{98060}{23\,s^4} & 0 \\ 0 & -\frac{98060}{23\,s^4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{s^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{100000}{509\,s^2} \end{pmatrix}$$

صفر و قطب های سیستم:

تمامی قطب ها روی مبدا میباشند



شکل ۱.۳: نمایش صفر و قطب های سیستم

۲.۳ ماتریس انتقال حالت

ماتریس انتقال حالت به صورت زیر محاسبه شده است

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}(SI - A)^{-1}$$

که نتیجه صورت زیر میشود:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1.0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_1 & 0 & 0 & -\sigma_3 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 & 0 & 0 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & t & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

$\sigma_1 = -4.903\, t^2$

$\sigma_2 = -9.806\, t$

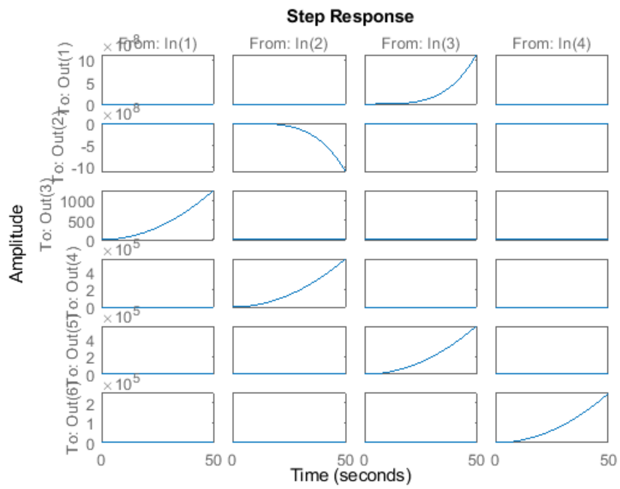
$\sigma_3 = -1.63433\, t^3$

۳.۳ حذف فرکانس به ازای حالت اولیه خاص

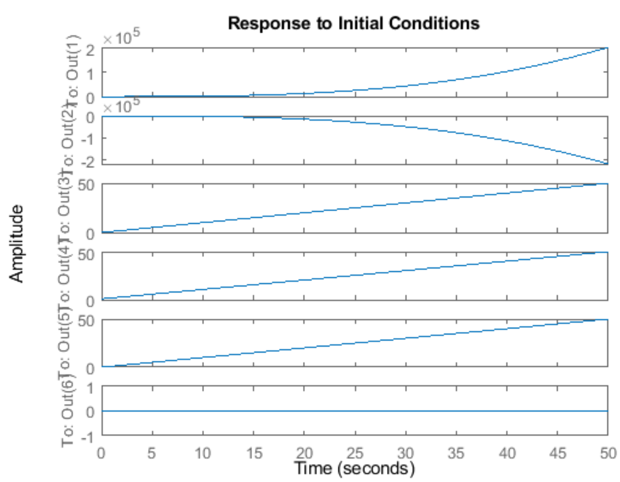
از آنجایی که سیستم تنها یک مقدار ویژه دارد حذف یک فرکانس خاص متناسب با حذف تمام فرکانس ها میباشد که این حالت به ازای حالت اولیه صفر اتفاق می افتد.

۴.۳ پاسخ ورودی های مختلف

شرایط اولیه را به صورت $x_0^T = [1, 0, 0.5, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0]$ می گیریم. پاسخ پله و پاسخ شرایط اولیه در شکل زیر آمده اند.



شکل ۲.۳: پاسخ پله



شکل ۳.۳: پاسخ ورودی اولیه

۴ بررسی پایداری کنترل پذیری و رویت پذیری

۱.۴ مقادیر ویژه و چندجمله ای مینیمال

تمامی مقادیر ویژه ماتریس حالت صفر میباشند و چندجمله ای مینیمال آن به صورت زیر میباشد:

$$mp(\lambda) = \lambda^4 \tag{۱.۴}$$

۲.۴ پایداری

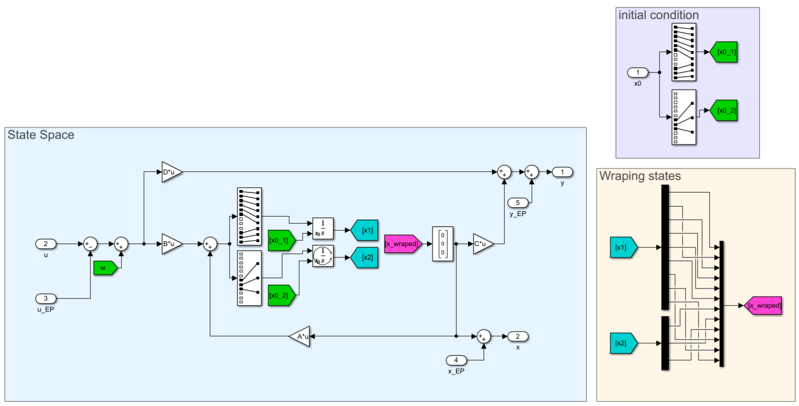
سیستم به دلیل قطب مکرر در صفر ناپایدار است و همچنین از آنجا که مقدار ویژه مکرر صفر در چندجمله ای مینیمال داریم سیستم ناپایدار درونی نیز میباشد.

۳.۴ کنترل پذیری و رویت پذیری

از آنجا که رنک ماتریس کنترل پذیری و رویت پذیری و کنترل پذیری خروجی کامل است میتوان نتیجه گرفت که سیستم کنترل پذیر و رویت پذیر و کنترل پذیر خروجی میباشد. ولی از انجا که تعداد ورودی ها از خروجی ها کمتر است سیستم کنترل پذیر تابعی نیست. همچنین از انجا که سیستم رویت پذیر و کنترل پذیر است نیازی به تجزیه کالمن نیست.

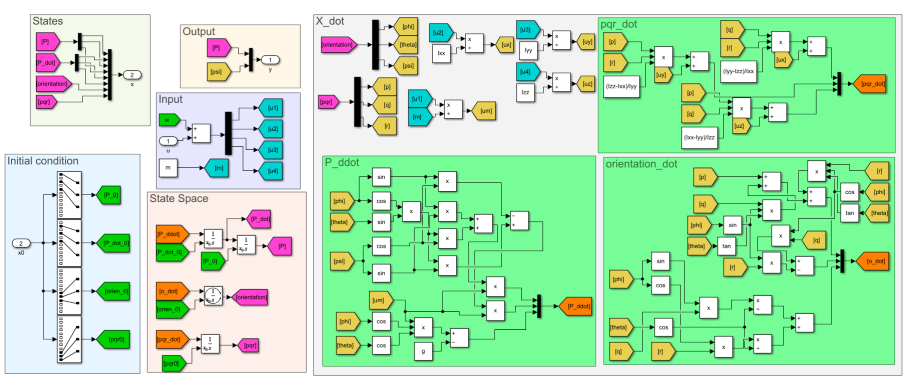
۵ پیاده سازی , مدل خطی و غیرخطی در $simulink$

۱.۵ مدل خطی



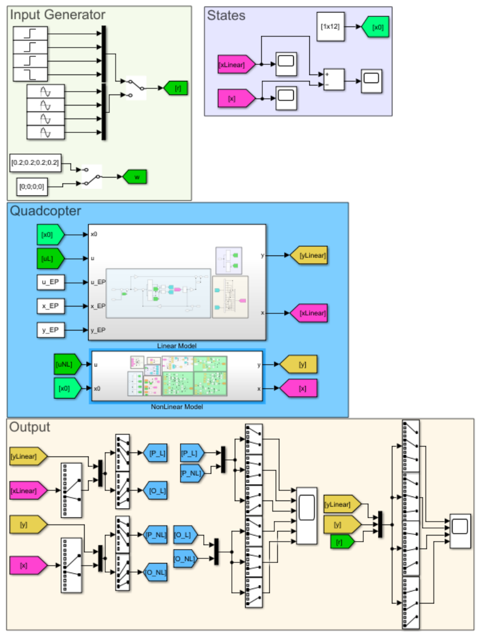
شکل ۱.۵: مدل خطی

۲.۵ مدل غیرخطی



شکل ۲.۵: مدل غیرخطی

۳.۵ $simulink$



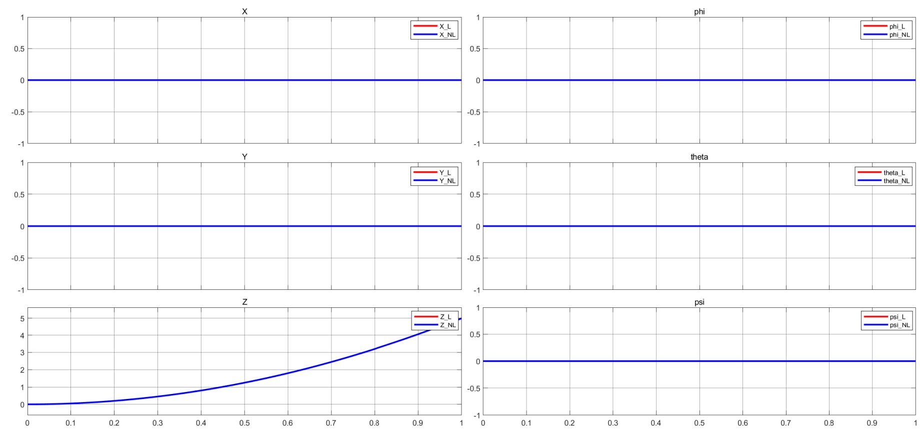
شکل ۳.۵: سیمولینک

۴.۵ بررسی دقت مدل خطی

حال Δu های مختلف کوچک را تست میکنیم تا دقت مدل خطی شده را بسنجیم. تمام شبیه سازی ها به ازای ورودی اولیه صفر انجام شده اند.

ورودی اول:

شکل زیر پاسخ سیستم غیر خطی و خطی را به ازای $\Delta u_1 = 10$ نشان میدهد.

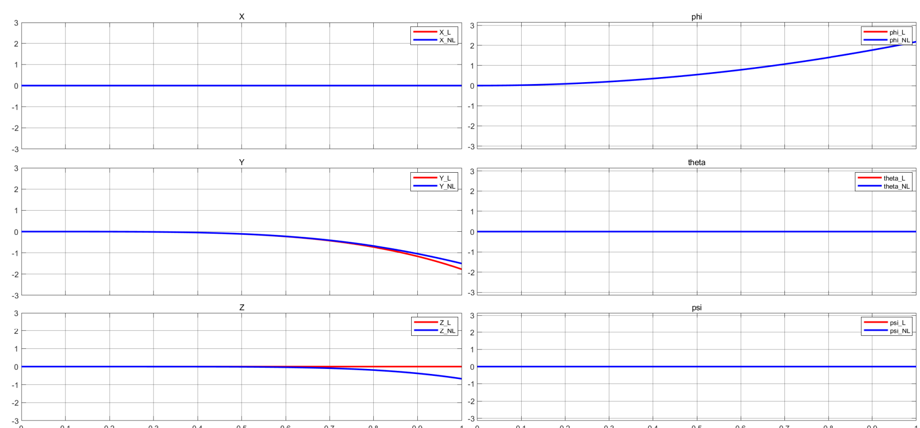


شکل ۴.۵: خروجی به ازای $\Delta u_1 = 10$

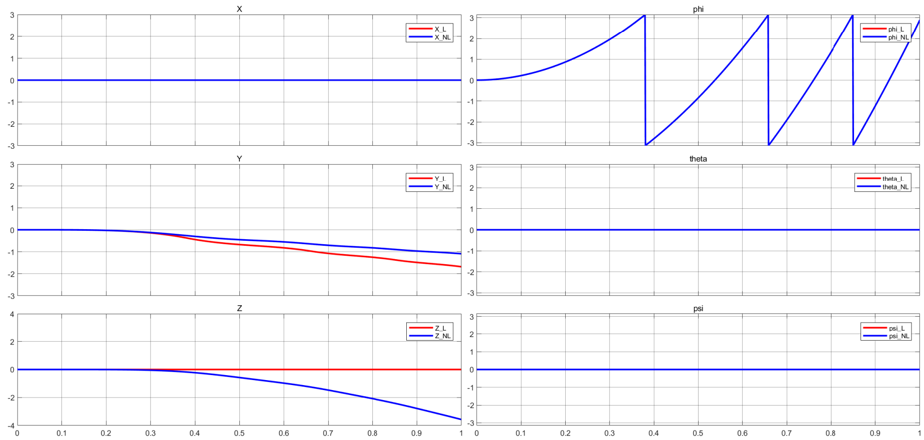
همانطور که مشاهده میشود سیستم غیرخطی و خطی کاملا منطبق بر هم رفتار میکنند که نشان میدهد دامنه اطمینان مدل خطی برای ورودی اول بینهایت میباشد.

ورودی دوم:

شکل زیر پاسخ سیستم غیر خطی و خطی را به ازای $\Delta u_2 = 0.01, 0.1$ نشان میدهد.



شکل ۵.۵: خروجی به ازای $\Delta u_2 = 0.01$

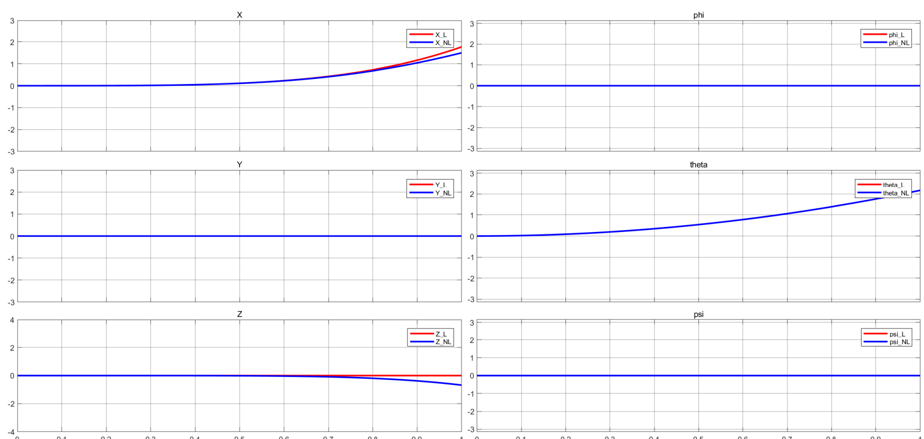


شکل ۶.۵: خروجی به ازای $\Delta u_2 = 0.1$

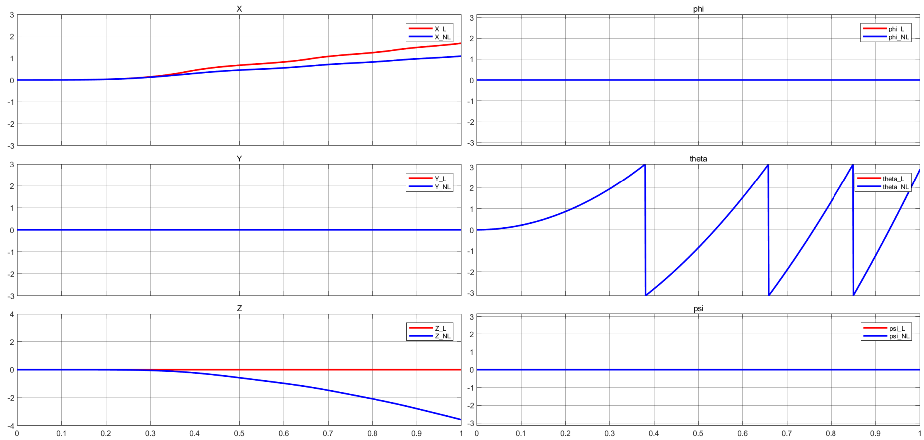
همانطور که مشاهده میشود مدل خطی زاویه ϕ را به خوبی محاسبه میکند و اندازه Y هم با خطای کمی محاسبه میشود. اما با بزرگ شدن ورودی و زمان تقریب سیستم خطی از خروجی Z بسیار با مدل غیرخطی اختلاف دارد.

ورودی سوم:

شکل زیر پاسخ سیستم غیر خطی و خطی را به ازای $\Delta u_3 = 0.01, 0.1$ نشان میدهد.



شکل ۷.۵: خروجی به ازای $\Delta u_3 = 0.01$

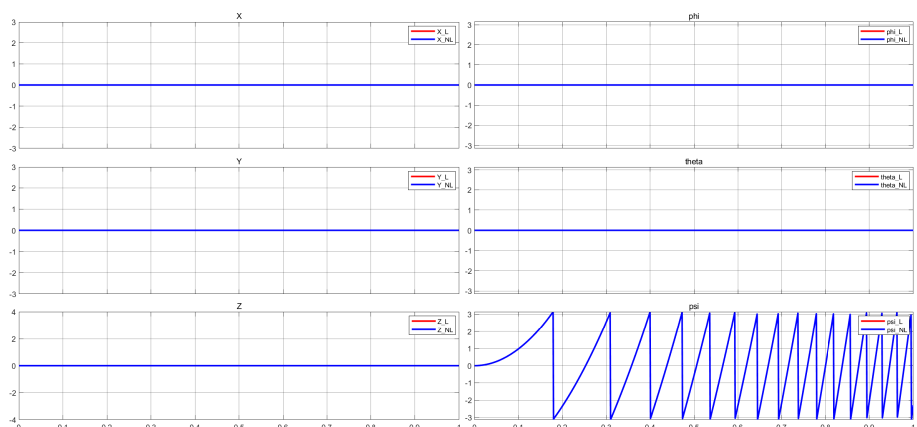


شکل ۸.۵: خروجی به ازای $\Delta u_3 = 0.1$

همانطور که مشاهده میشود مدل خطی زاویه θ را به خوبی اندازه X هم با خطای کمی محاسبه میشود. اما با بزرگ شدن ورودی تقریب سیستم خطی از خروجی Z بسیار با مدل غیرخطی اختلاف دارد.

ورودی چهارم:

شکل زیر پاسخ سیستم غیر خطی و خطی را به ازای $\Delta u_4 = 1$ نشان میدهد.



شکل ۹.۵: خروجی به ازای $\Delta u_4 = 1$

همانطور که مشاهده میشود سیستم غیرخطی و خطی کاملا منطبق بر هم رفتار میکنند که نشان میدهد دامنه اطمینان مدل خطی برای ورودی اول بینهایت میباشد.

۶ طراحی کنترلر به روش جایابی قطب

۱.۶ تنظیم

در این قسمت معیار عملکردی خود را به صورت زیر قرار می دهیم:

$$T_s = 10s$$

$$P.O = 5\%$$

زمان نشست سیستم را زیاد می گیریم که سیستم تا حدودی کند باشد. در این صورت ورودی بزرگ نمی شود و سیستم از همسایگی خطی بودن خارج نمی شود.

باتوجه به معیارهای ذکر شده، قطب های مطلوب در $-0.4 + j0.4$ و $-0.4 - j0.4$ قرار می گیرند و سایر قطب ها را نیز روی محور حقیقی و چند برابر این قطب ها قرار می دهیم. سپس با استفاده از دستور $palce$ در متلب K را بدست می آوریم و $u = -Kx$ می گیریم.

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4.8 & 4.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0009 & -0.0012 & 0 & -0.0032 \\ 0 & 0 & 0.0396 & -0.0049 \\ 0 & 0.0166 & -0.0007 & 0 \\ 0.0025 & 0.0063 & -0.0033 & -0.0042 \\ 0 & 0 & 0.0173 & 0.0524 \\ 0 & 0.0024 & 0.0184 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0244 & 0 & 0 & 0.0224 \end{pmatrix}$$

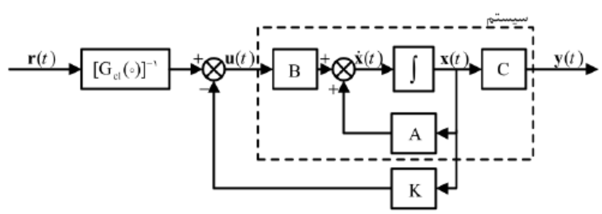
۲.۶ تعقیب با پیش جبران ساز استاتیکی

در این قسمت قصد طراحی پیش جبران ساز استاتیکی را داریم که ضمن پایدارسازی سیستم حلقه بسته، ورودی مرجع ثابت را تعقیب کند. در ابتدا مانند قسمت قبل K را محاسبه کرده و در مرحله بعد نیازمند محاسبه $G_{CL}^{-1}(0)$ می باشیم که از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$G_{CL}(0) = -C(A - BK)^{-1}B$$

در آخر با محاسبه معکوس ماتریش بدست آمده u را به صورت زیر قرار می دهیم:

$$u(t) = -Kx(t) + G_{CL}^{-1}(0)r$$

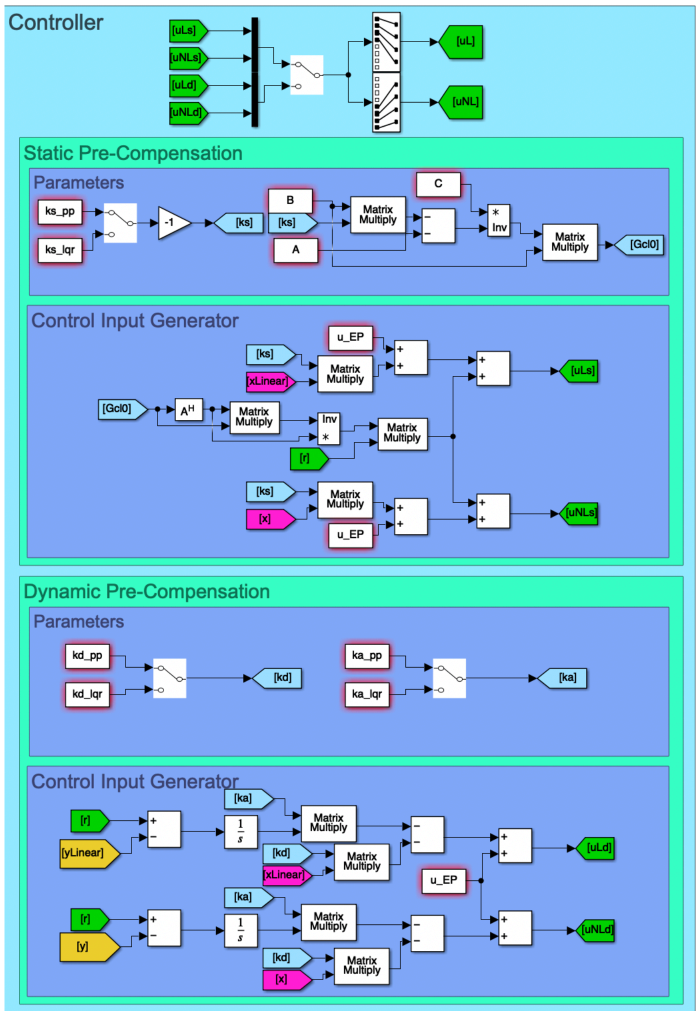


شکل ۱.۶: سیستم ردیاب با پیش جبرانساز ورودی مرجع

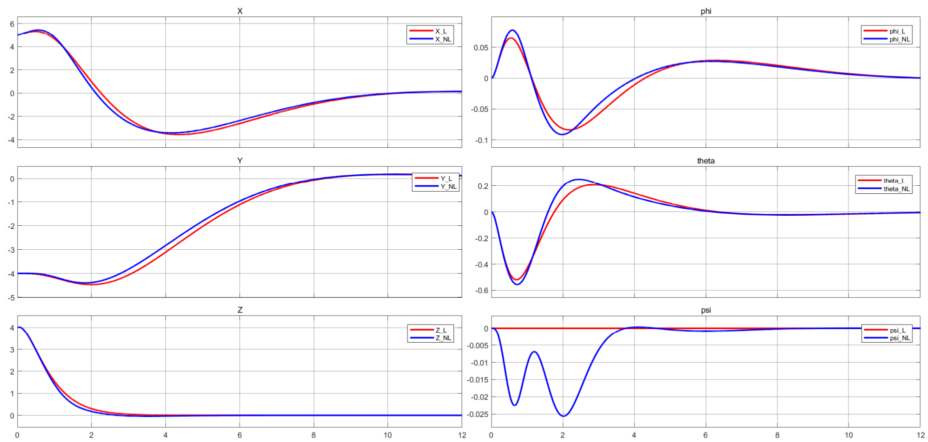
۳.۶ تعقیب با پیش جبران ساز دینامیکی

در این بخش به منظور طراحی پیش جبران ساز دینامیکی، یک انتگرال‌گیر قرار می‌دهیم و ماتریس A و B سیستم را به روز رسانی می‌کنیم. سپس با استفاده از دستور Place متلب، عملیات Placement Pole را انجام می‌دهیم.

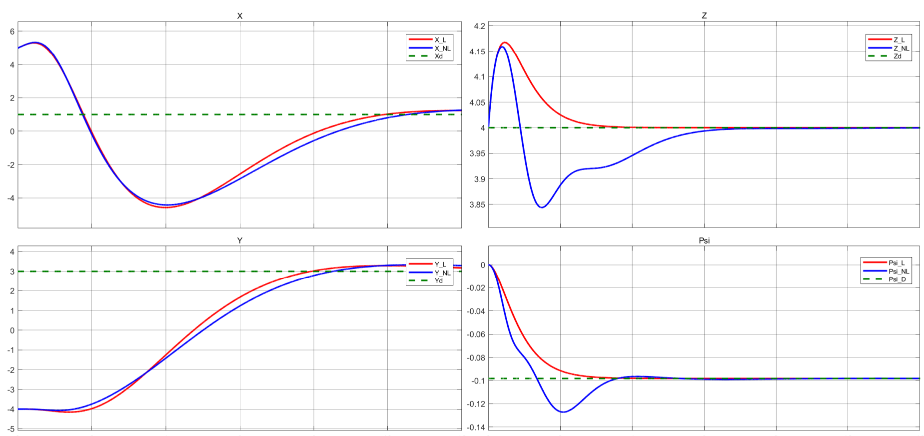
۴.۶ شبیه سازی در $Simulink$



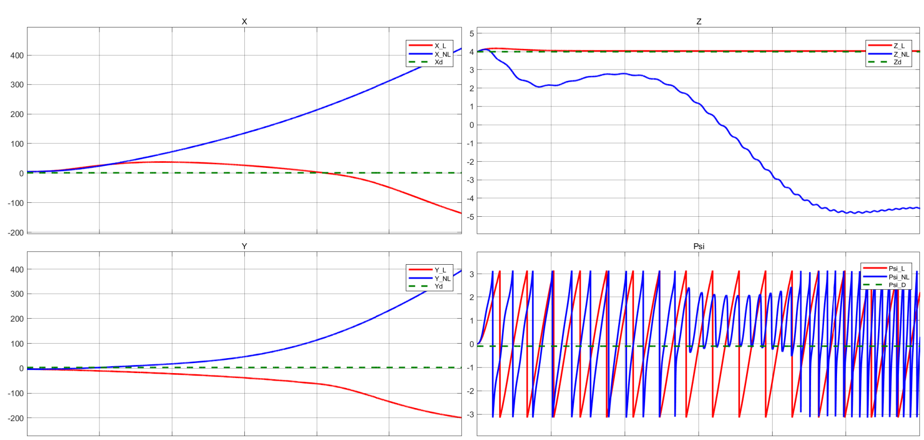
شکل ۲.۶: شماتیک کنترلر سیستم در سیمولینک



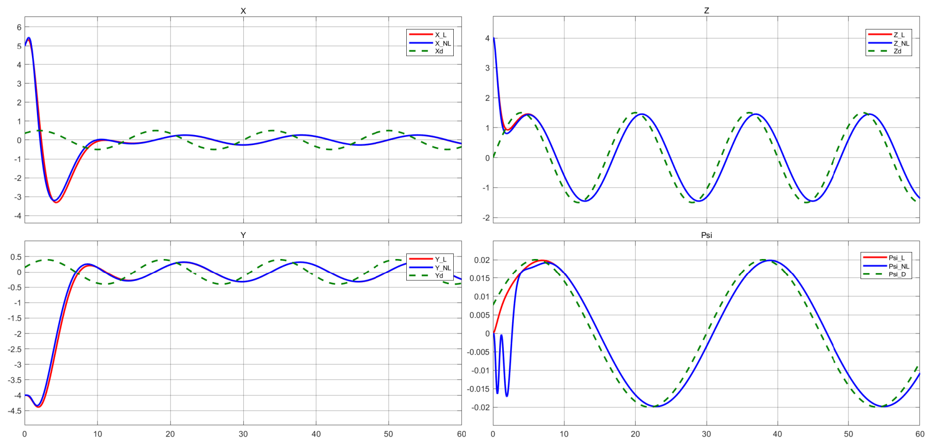
شکل ۳.۶: رگرسیون



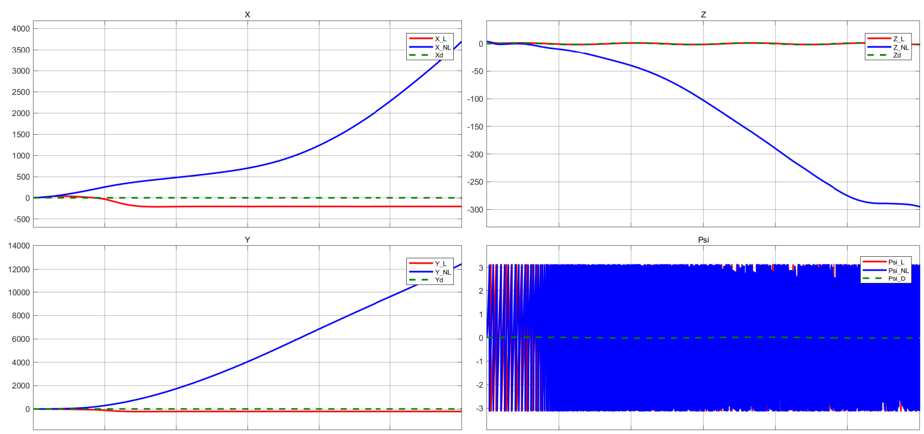
شکل ۴.۶: پاسخ پله استاتیکی بدون اغتشاش



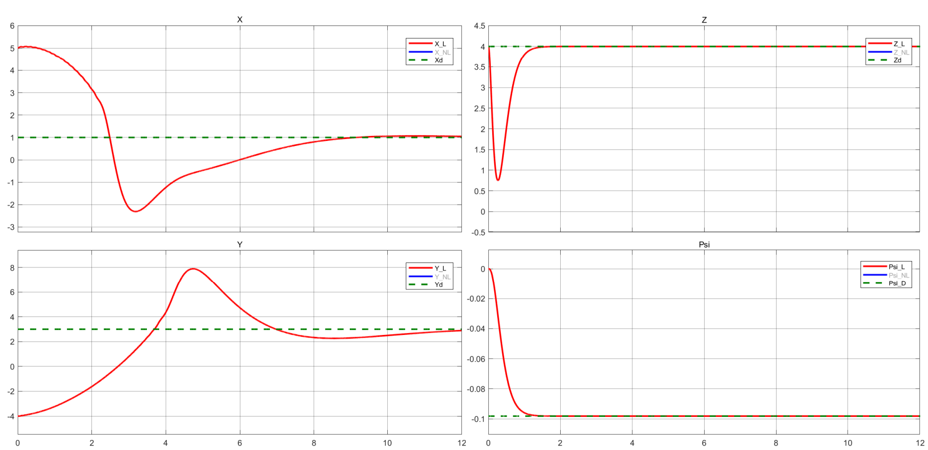
شکل ۵.۶: پاسخ پله استاتیکی با اغتشاش



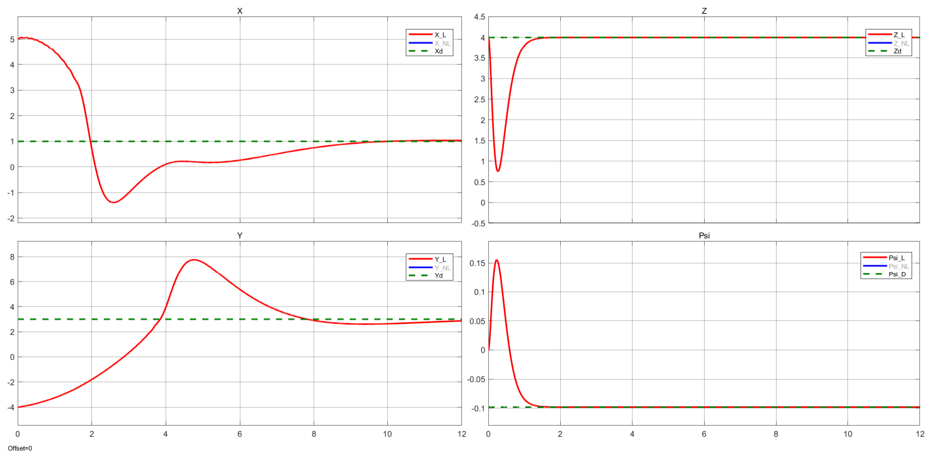
شکل ۶.۶: پاسخ سینوسی استاتیکی بدون اغتشاش



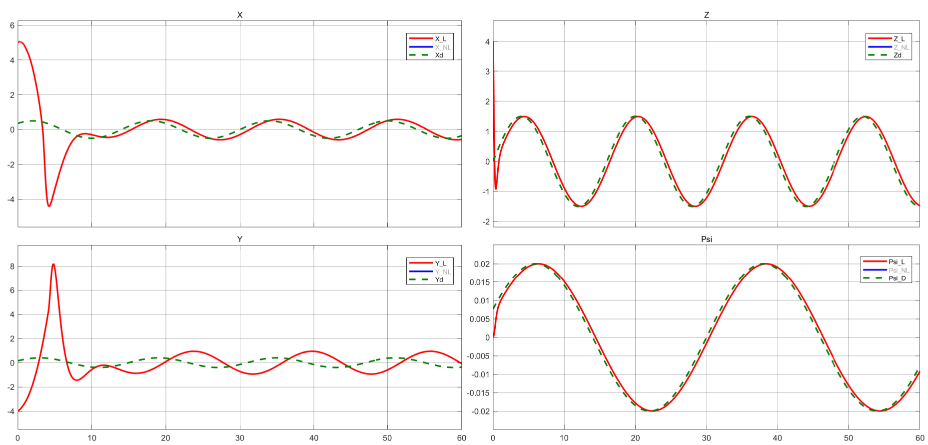
شکل ۷.۶: پاسخ سینوسی استاتیکی با اغتشاش



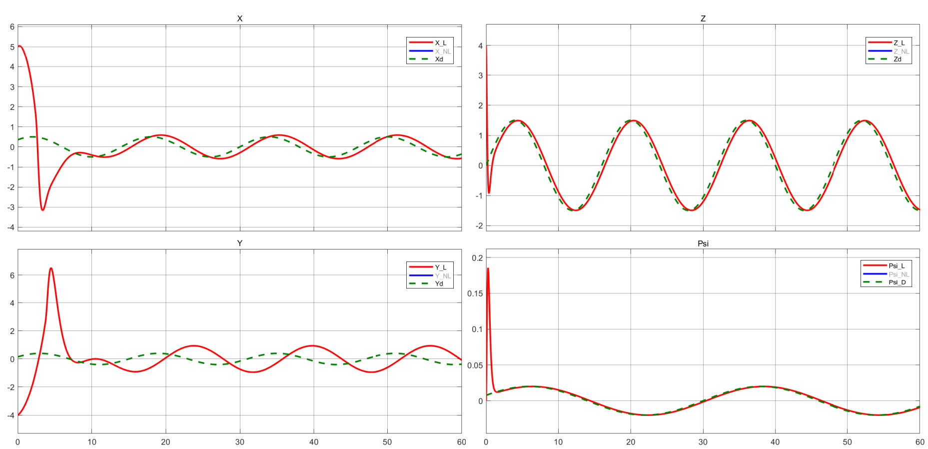
شکل ۸.۶: پاسخ پله دینامیکی بدون اغتشاش



شکل ۹.۶: پاسخ پله دینامیکی با اغتشاش



شکل ۱۰.۶: پاسخ سینوسی دینامیکی بدون اغتشاش

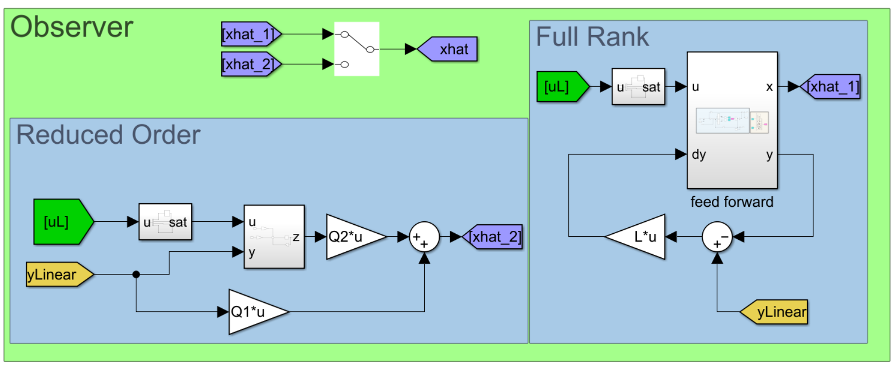


شکل ۱۱.۶: پاسخ سینوسی دینامیکی با اغتشاش

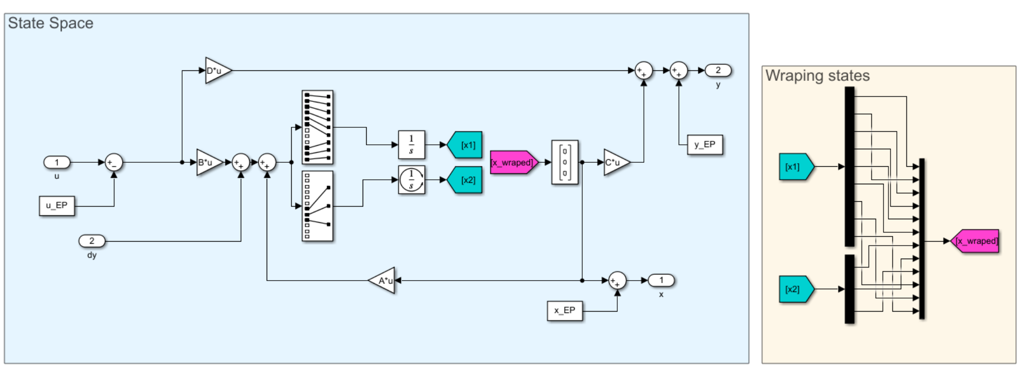
۷ طراحی رویتگر

۱.۷ رویتگر مرتبه کامل

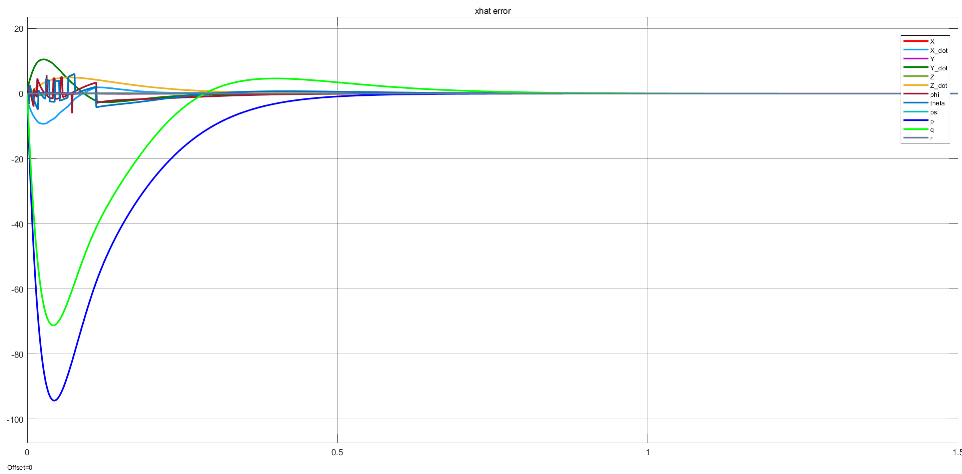
برای طراحی رویتگر کامل از دستور $place$ استفاده کردیم و قطب های مطلوب را در ۵ الی ۱۰ برابر قطب های کنترلر قرار دادیم. نکته این رویتگر این میباشد که از آنجا که سیستم خطی ما دارای $wraping$ بود قسمت حلقه باز رویتگر نیز باید همانگونه باشد. شماتیک رویتگر و نتایج آن در اشکال زیر قابل مشاهده میباشد.



شکل ۱.۷: شماتیک رویتگر در سیمولینک



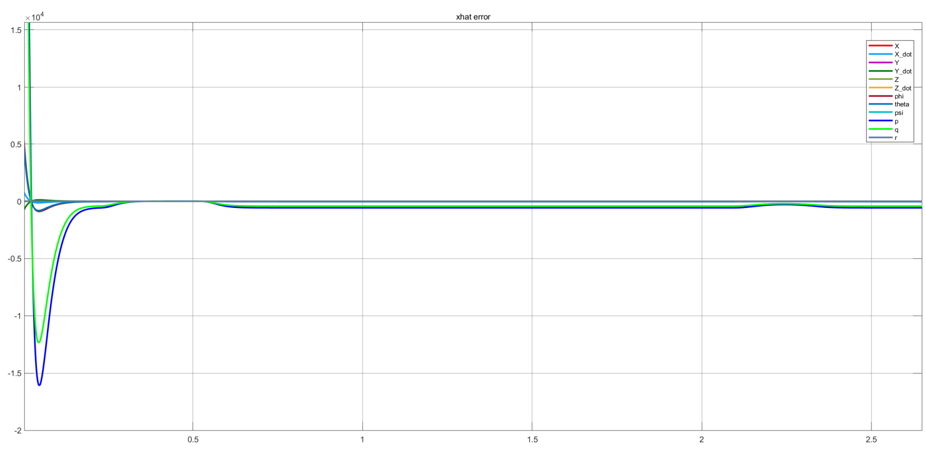
شکل ۲.۷: شماتیک حلقه باز رویتگر در سیمولینک



شکل ۳.۷: خطا تخمین رویتگر کامل

۲.۷ رویتگر کاهش یافته

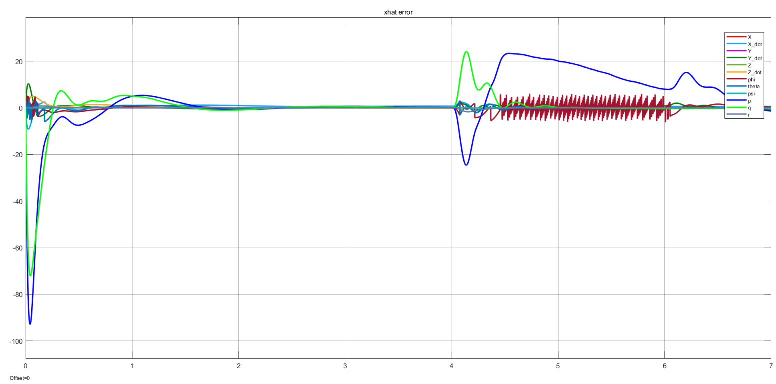
از آنجا که سیستم کاملا خطی نیست رویتگر کاهش یافته دارای خطا دائم میباشد.



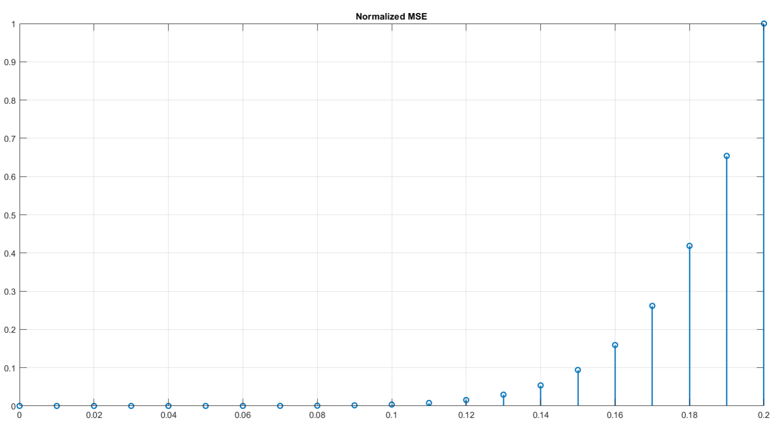
شکل ۴.۷: خطا تخمین رویتگر کامل

۳.۷ اثر عدم قطعیت

درشکل زیر میتوانید اثرات عدم قطعیت را به ازای درصد عدم قطعیت های مختلف مشاهده کنید.



شکل ۵.۷: خطای تقریب به ازای عدم قطعیت ۲۰ درصد



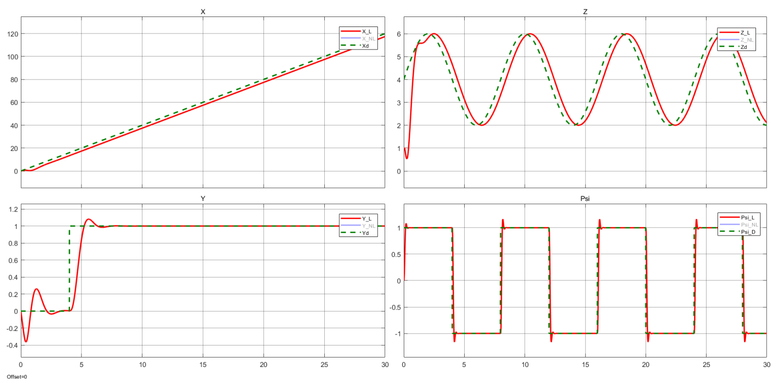
شکل ۶.۷: خطا تخمین به ازای عدم قطعیت های مختلف

۸ طراحی کنترلر به روش LQR

۱.۸ طراحی LQR

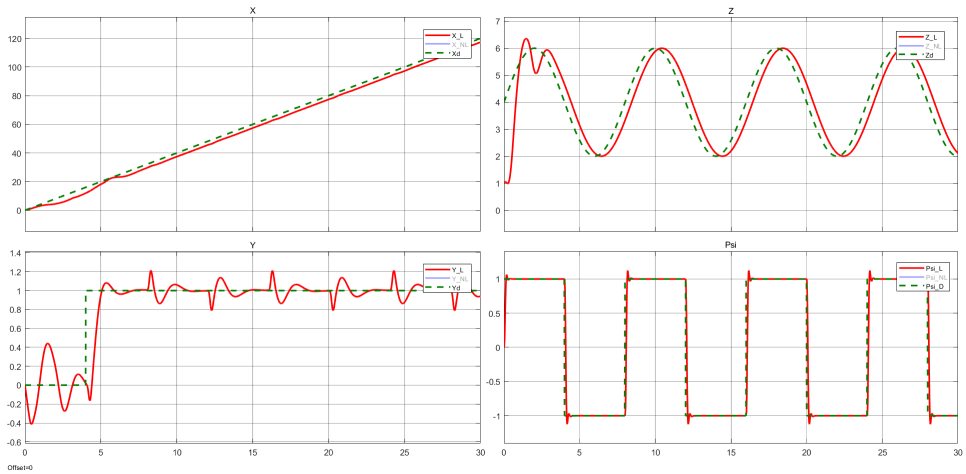
در طراحی LQR وزن ها به گونه ای انتخاب شدند که بیشترین هزینه بر روی زوایا ϕ و θ باشد که در خطی ماندن مدل کمک میکنند و همچنین هزینه z زیاد در نظر گرفته شده بود که مانع سقوط شود

۲.۸ نتایج بدون عدم قطعیت با اشباع



شکل ۱.۸ : نتیجه کنترلر دینامیکی با اشباع و بدون عدم قطعیت

۳.۸ نتایج با عدم قطعیت و اشباع



شکل ۲.۸: نتیجه کنترلر دینامیکی با اشباع و ۵ درصد عدم قطعیت