

2018

B S C V 211

211 211



**B.Sc. V SEMESTER [MAIN / A.T.K.T.] EXAMINATION**  
**DECEMBER - 2018**  
**MATHEMATICS**

[Linear Algebra, Numerical Analysis]

[Max. Marks : 125]

[Time : 3:00 Hrs.]

[Min. Marks : 42]

**Note : All THREE Sections are compulsory. Student should not write any thing on question paper.**  
नोट : सभी तीन खण्ड अनिवार्य हैं। विद्यार्थी प्रश्न-पत्र पर कुछ न लिखें।

[Section - A]

This Section contains **Multiple Choice Questions**. Each question carries **2 Mark**.  
इस खण्ड में बहुविकल्पीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न 2 अंक का है।

**Q. 01** If  $V(F)$  is a vector space,  $W$  is a sub space of  $V$ ,  $\alpha, \beta \in W$ ,  $a \in F$ , then which of the following statements is true -  
यदि  $V(F)$  एक सदिश समष्टि हो  $W$ ,  $V$  की उपसमष्टि हो  $\alpha, \beta \in W$ ,  $a \in F$ , तो निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है -

- a)  $a\alpha + \beta \in W$                       b)  $a\alpha - \beta \notin W$   
c)  $a\alpha + \beta \in V$  परन्तु  $a\alpha + \beta \notin W$                       d) None of the above is true  
उपरोक्त में से कोई भी सत्य नहीं है

**Q. 02** If  $V(F)$  and  $W(F)$  are vector spaces,  $T : V \rightarrow W$  is a linear transformation,  $\alpha, \beta \in V$ ,  $a \in F$  then which of the following statements is not true -  
यदि  $V(F)$  एवं  $W(F)$  सदिश समष्टियाँ हो,  $T : V \rightarrow W$  एक रैखिक रूपांतरण हो,  $\alpha, \beta \in V$ ,  $a \in F$  तो निम्न कथनों में से कौन सा असत्य है -

- a)  $T(a\alpha + \beta) = aT(\alpha) + T(\beta)$                       b)  $T(\alpha - a\beta) = T(\alpha) - aT(\beta)$   
c)  $T(\alpha + \beta) = T(\beta) + T(\alpha)$                       d)  $T(\alpha + a\beta) = aT(\alpha) + T(\beta)$

**Q. 03** The rate of convergence of Newton Raphson method for solving the equation  $f(x) = 0$  is -

समीकरण  $f(x) = 0$  को हल करने हेतु न्युटन रॉप्सन विधि की अभिसरण दर है -

- a) 1.618                      b) 1  
c) 2                      d) None of these  
उपरोक्त में से कोई नहीं

**Q. 04** Which of the following methods is not for solving linear equations -

- a) Gauss-Jordan elimination method                      b) Choleski's decomposition method  
c) Newton Raphson method                      d) Jacobi method

निम्न में से कौन सी विधि रैखिक समीकरणों को हल करने हेतु नहीं है -

- a) गॉस जार्डन विलोपन विधि                      b) चोलेस्की वियोजन विधि  
c) न्युटन रॉप्सन विधि                      d) जेकोबी विधि



**Q. 05** Which of the following methods is not used to solve ordinary differential equation -

- a) Jacobi method  
b) Runge - Kutta method  
c) Milne method  
d) Euler's modified method

निम्न विधियों में से कौन सी साधारण अवकल समीकरण को हल करने हेतु प्रयुक्त नहीं होती है -

- a) जेकोबी विधि  
b) रूंग कुट्टा की विधि  
c) मिलने विधि  
d) यूलर की संशोधित विधि

**[Section - B]**

This section contains **Short Answer Type Questions**. Each question carries **7 Marks**.  
इस खण्ड में लघुउत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न 7 अंकों का है।

**Q. 1** If  $V(F)$  is a vector space,  $W_1, W_2$  are subspaces  $V$ , then prove that  $W_1 \cup W_2$  is a subspace of  $V$  if and only if  $W_1 \subseteq W_2$  or  $W_2 \subseteq W_1$   
यदि  $V(F)$  एक सदिश समष्टि हो  $W_1, W_2$   $V$  की उपसमष्टियाँ हो, तो सिद्ध कीजिये कि  $W_1 \cup W_2, V$  की उपसमष्टि होगी यदि और केवल यदि  $W_1 \subseteq W_2$  या  $W_2 \subseteq W_1$

**OR**

Is the set  $S = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$  a basis for  $R^3(R)$ ? Prove your answer.  
क्या समुच्चय  $S = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$   $R^3(R)$  का आधार है? अपने उत्तर को प्रमाण दीजिये।

**Q. 2** Prove that  $T : R^3 \rightarrow R^2$  defined by  $T(a, b, c) = (c, a + b)$ , where  $a, b, c \in R$ , is a linear transformation.  
सिद्ध कीजिये कि  $T : R^3 \rightarrow R^2$  जो  $T(a, b, c) = (c, a + b)$ , जहाँ  $a, b, c \in R$ , एक रैखिक रूपांतरण है।

**OR**

If  $T_1, T_2$  are linear transformations from a vector space  $V(F)$  to a vector space  $W(F)$ , then define  $(T_1 + T_2) : V \rightarrow W$  and prove that  $T_1 + T_2$  is also linear.  
यदि  $T_1, T_2$  सदिश समष्टि  $V(F)$  से सदिश समष्टि  $W(F)$  तक रैखिक रूपांतरण हो तो  $(T_1 + T_2) : V \rightarrow W$  को परिभाषित कीजिये एवं सिद्ध कीजिये कि  $T_1 + T_2$  भी रैखिक है।

**Q. 3** Using bisection method find the root of the equation  $x^3 - x - 1 = 0$  between 1 and 2 (Three iterations only)

द्विभाजन विधि का उपयोग करते हुए समीकरण  $x^3 - x - 1 = 0$  का 1 व 2 के बीच का मूल ज्ञात कीजिये (केवल तीन पुनरावृत्तियाँ)

**OR**

Cont....



Using Newton's divided difference interpolation formula find  $f(0)$  from the following data -

न्युटन के विभाजित अंतरवेशन सूत्र का उपयोग करते हुए निम्न समकों से  $f(0)$  का मान ज्ञात कीजिये -

$x :$	-1	1	2	3
$f(x) :$	-21	15	12	3

**Q. 4** Solve by Gauss elimination method -

गाउस विलोपन विधि द्वारा हल कीजिये -

$$2x - y + 3z = 9$$

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

**OR**

Solve by Choleski decomposition method -

चोलेस्की वियोजन विधि से हल कीजिये -

$$4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4$$

$$2x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 14$$

$$-2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$

**Q. 5** Given that  $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$ ,  $y = 1$  at  $x = 0$ . Find  $y$  for  $x = 0.1$  by Euler's method

by taking  $h = 0.02$

दिया है कि  $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$ ,  $x = 0$  पर  $y = 1$  आयलर विधि से  $x = 0.1$  के लिये  $y$  का

मान  $h = 0.02$  लेकर ज्ञात कीजिये।

**OR**

Evaluate  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$  by using Simpson's one third rule by dividing the interval into ten equal parts.

सिमसन के एक तिहाई नियम का उपयोग करते हुए अंतराल को दस समान भागों में

विभाजित करते हुए  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$  का मान ज्ञात कीजिये।

**[Section - C]**

This section contains **Essay Type Questions**. Each question carries **16 marks**.

इस खण्ड में दीर्घउत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न 16 अंकों का है।

**Q. 6** If  $W_1, W_2$  are subspaces of a vector space  $V(F)$ , then prove that

$V = W_1 \oplus W_2$  if and only if

i)  $V = W_1 + W_2$

and ii)  $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

**P.T.O.**



यदि  $W_1, W_2$  सदिश समष्टि  $V(F)$  की उपसमष्टियाँ हो तो सिद्ध कीजिये कि  $V = W_1 \oplus W_2$  यदि और केवल यदि

i)  $V = W_1 + W_2$

एवं ii)  $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

OR

If  $S$  is a linearly independent subset of a finitely generated vector space  $V(F)$ , then prove that there exists a basis  $B$  of  $V(F)$  such that  $S \subseteq B$

यदि  $S$  परिमिततः जनित सदिश समष्टि  $V(F)$  का रैखिकतः स्वतंत्र उपसमुच्चय हो, तो सिद्ध कीजिये कि  $V(F)$  के एक ऐसे आधार का अस्तित्व है कि,  $S \subseteq B$

**Q. 7** If  $V(F), W(F)$  are vector spaces over the same field  $F$ ,  $T : V \rightarrow W$  is a linear transformation,  $V$  is finite dimensional, then prove that  $\text{rank}(T) + \text{nullity}(T) = \dim(V)$

यदि  $V(F), W(F)$  एक ही क्षेत्र  $F$  पर सदिश समष्टियाँ हो,  $T : V \rightarrow W$  एक रैखिक रूपांतरण हो,  $V$  परिमित विमीय हो, तो सिद्ध कीजिये कि  $\text{जाति}(T) + \text{शून्यता}(T) = \text{विमा}(V)$

OR

Diagonalize विकर्णीत कीजिये

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

**Q. 8** Using Regula falsi method find the root of  $xe^x = 2$  between 0 and 1. (Find upto fifth approximation).

रेगुला फॉल्सी विधि का उपयोग कर  $xe^x = 2$  का 0 एवं 1 के बीच का मूल ज्ञात कीजिये (पाँचवे सन्निकटन तक ज्ञात कीजिये)

OR

Using Lagrange's interpolation formula find  $f(10)$  from the following data -

लेग्रांजे अंतरवेशन सूत्र का प्रयोग कर निम्न समकों से  $f(10)$  का मान ज्ञात कीजिये -

$x :$	5	6	9	11
$f(x) :$	12	13	14	16

**Q. 9** Solve by LU decomposition method -

एल यू विखण्डन विधि से हल कीजिये -

$$3x + 2y + 7z = 4$$

$$2x + 3y + z = 5$$

$$3x + 4y + z = 7$$

Cont...



OR

Solve by Gauss - Seidel iterative method (upto fourth iteration).

गाउस सिडल पुनरावृत्ति विधि से हल कीजिये (चतुर्थ पुनरावृत्ति तक)

$$2x_1 - x_2 + 0x_3 = 7$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$$

$$0x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$

Q. 10 Solve  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$  for  $x = 0.5$  by using Runge - Kutta method of order four.

Given that  $y_0 = 1$  for  $x_0 = 0$  and  $h = 0.5$

चतुर्थ कोटि की रूंग-कुट्टा विधि का प्रयोग कर  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$  को  $x = 0.5$  के लिये हल कीजिये। दिया है कि  $x_0 = 0$  हेतु  $y_0 = 1$  है एवं  $h = 0.5$

OR

Given that  $\frac{dy}{dx} = (x^2 + y)$ ,  $y = 0.94$  at  $x = 0$ . Find  $y$  for  $x = 0.1$  by Euler's modified method by taking  $h = 0.1$

दिया है कि  $\frac{dy}{dx} = (x^2 + y)$ ,  $x = 0$  पर  $y = 0.94$  आयलर संशोधित विधि से  $x = 0.1$  के लिये  $y$  का मान  $h = 0.1$  लेकर ज्ञात कीजिये।

○