UNIVERSITÉ
ABDELMALEK ESSAÂDI

FACULTÉ DES SCIENCES ET
TECHNIQUES DE TANGER

ANALYSE DES SYSTEMES

A. BEL FEKIH
(*Département de Mathématiques*)

INGENIERIE GEO-INFORMATION

avril 2020

Sommaire

I - Rappels mathématiques

Sommaire

1 - PRODUIT SCALAIRE - MATRICE ADJOINTE

Les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$ sont représentés en lignes

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

mais quand il s'agit de faire des calculs, ils sont représentés en colonnes

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

1.1 Le produit scalaire

Sur $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire est défini par

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

et sur $\mathbb{C}^n$ il est défini par

$$\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y}_1 + \ldots + x_n \overline{y}_n \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Dans les deux cas la norme est définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

1.2 Matrice transposées et matrice adjointe

Soit une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

à m lignes et n colonnes. Sa matrice transposée est définie par

$$M^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{à } n \text{ lignes et } m \text{ colonnes}$$

et sa matrice conjuguée est définie par

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \vdots & & & \vdots \\ \overline{a_{m1}} & \cdots & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix} \quad \text{à } m \text{ lignes et } n \text{ colonnes}$$

La matrice adjointe de M est définie par

$$M^* = \overline{\left(M^{\mathrm{T}}\right)} = \left(\overline{M}\right)^{\mathrm{T}}$$

Exemple 1

Nous avons

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 1+i & 3i \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1+i \\ 2 & 5 & 3i \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 1+i & 3i \end{pmatrix}^{*} = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 1+i & 3i \end{pmatrix}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1-i \\ 2 & 5 & -3i \end{pmatrix}$$

□

Avec la notation matricielle et la disposition des vecteurs en matrices à n lignes et une colonne nous avons :

Sur $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire peut être calculé par

$$\langle x, y\rangle = y^{\mathrm{T}} x \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m$$

et sur $\mathbb{C}^n$ le produit scalaire peut être calculé par

$$\langle x, y\rangle = y^* x \qquad x \in \mathbb{C}^n,\ \mathbb{C} \in \mathbb{R}^m$$

Proposition 1 :

Si $M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C})$ alors

$$\langle Mx, y\rangle = \langle x, M^* y\rangle \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n \quad \forall y \in \mathbb{C}^m$$

Remarque 1

Si $M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ alors $\langle x, M^* y\rangle$ devient $\langle x, M^{\mathrm{T}} y\rangle$ et donc

$$\langle Mx, y\rangle = \langle x, M^{\mathrm{T}} y\rangle \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n \quad \forall y \in \mathbb{C}^m$$

$\langle x, M^* y\rangle$ généralise donc $\langle x, M^{\mathrm{T}} y\rangle$ à $\mathbb{C}$.

2 - EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET PROBLÈME DE CAUCHY

Une équation différentielle du premier ordre est de la forme

$$z'(t) = f(t, z(t)) \quad , \quad t > t_0$$

dont la solution est une fonction dérivable $z :]t_0, +\infty[\to \mathbb{R}^n$.
On appelle "problème de Cauchy" la donnée d'une équation différentielle et d'une donnée initiale vérifiée par la fonction inconnue :

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & t > t_0 \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

Un problème de Cauchy se résout en 2 étapes :

1. On détermine la solution générale l'équation différentielle $z'(t) = f(t, z(t))$; Cette solution contient toujours une constante.

2. On fixe la valeur de la constante par la condition initiale $z(t_0) = z_0$, ce qui nous donne une fonction sans inconnue qui est la solution du problème de Cauchy.

Un exemple : Pour le problème suivant

$$\begin{cases} z'(t) + z(t)^2 = 0 & t > 1 \\ z(1) = 2 \end{cases}$$

l'équation différentielle $z' + z^2 = 0$ admet pour solution générale $z(t) = \frac{1}{C+t}$. La condition initiale $z(1) = 2$ devient $\frac{1}{C+1} = 2$ ce qui donne $C = -\frac{1}{2}$. La solution du problème est donc

$$z(t) = \frac{2}{2t-1} \quad , \quad t > 1$$

3 - EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Définition 1 :

Une équation différentielle est dite linéaire sans second membre sur $\mathbb{R}^n$ si toute combinaison linéaire de deux ou plusieurs solutions est aussi une solution.

Dans $\mathbb{R}$: une équation différentielle du premier ordre est de la forme

$$z'(t) = az(t) \quad , \quad t \geqslant t_0 \quad , \quad (a \in \mathbb{R})$$

la fonction inconnue est $z :]t_0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

Dans $\mathbb{R}^n$: une équation différentielle du premier ordre est de la forme

$$z'(t) = Az(t) \quad , \quad t \geqslant t_0 \quad , \quad A \text{ matrice carrée d'ordre } n$$

la fonction inconnue est $z :]t_0, +\infty[\to \mathbb{R}^n$. Si on pose

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

alors l'équation vectorielle donne n équations scalaires

$$\begin{cases} z_1'(t) = a_{11}z_1(t) + \cdots + a_{1n}z_n(t) \\ \vdots \\ z_n'(t) = a_{n1}z_1(t) + \cdots + a_{nn}z_n(t) \end{cases}$$

Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre p est de la forme :

$$\theta^{(p)}(t) = \beta_0\theta(t) + \beta_1\theta'(t) + \ldots + \beta_{p-1}\theta^{(p-1)}(t)$$

avec $\theta :]t_0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $\theta^{(p)}$ étant la dérivée d'ordre p. Si on pose

$$z(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \\ \vdots \\ \theta^{(p-1)}(t) \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & 1 \\ \beta_0 & \cdots & \cdots & \beta_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \\ \vdots \\ \theta^{(p-1)}(t) \end{pmatrix}$$

alors $z(t) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $z'(t) = Az(t)$. Donc toute équation différentielle linéaire d'ordre $\geqslant 2$ peut être ramenée à une autre équation d'ordre 1.

L'équation différentielle

$$z'(t) = az(t) + f(t) \quad , \quad t \geqslant t_0 \quad , \quad (a \in \mathbb{R})$$

est appelée *équation différentielle linéaire avec second membre* ($f(t)$ étant ce second membre). En dimension n équation différentielle

$$z'(t) = Az(t) + F(t) \quad , \quad t \geqslant t_0 \quad , \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } F :]t_0, +\infty[\to \mathbb{R}^n$$

est appelée *équation différentielle linéaire avec second membre* ($F(t)$ fonction donnée).

3.1 Exponentielle d'une matrice

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ carrée. la somme infinie suivante

$$\exp(A) = \mathbf{e}^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k = I_n + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \ldots + \frac{1}{k!}A^k + \ldots$$

admet toujours une somme finie. C'est une matrice carrée d'ordre n notée $\mathbf{e}^A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Voici quelques exemples de telles matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{e}^A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^2+1 & e^2-1 \\ e^2-1 & e^2+1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{e}^A = e^2\begin{pmatrix} \cos(1) & \sin(1) \\ -\sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{e}^A = \begin{pmatrix} \cos(2) & \frac{1}{2}\sin(2) \\ -2\sin(2) & \cos(2) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{e}^A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.2 Propriétés

1. $\mathbf{e}^{\mathrm{O}_n} = \mathrm{I}_n$
2. $$\exp\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\alpha_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\alpha_n} \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha_j \in \mathbb{R}$$
3. Si $AB = BA$ alors $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B\mathrm{e}^A$ (il existe des matrices A, B telles que $\mathrm{e}^{A+B} \neq \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B$).
4. $\det\left(\mathrm{e}^A\right) = \mathrm{e}^{\det(A)}$ (donc e^A est toujours inversible).
5. $\left(\mathrm{e}^A\right)^k = \mathrm{e}^{kA}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.
6. $\left(\mathrm{e}^A\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}$

Proposition 2 :

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ les matrices A et e^{tA} commutent

$$A\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA}A$$

2. La fonction $t \in \mathbb{R} \to \mathrm{e}^{tA} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dérivable et sa dérivée vaut

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{tA}\right] = A\mathrm{e}^{tA} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Remarque 2

L'ensemble de matrices

$$\left\{\mathrm{e}^{tA} \,/\, t \in \mathbb{R}\right\}$$

est un groupe pour le produit matricielle (sous groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$).

Remarque 3

Le calcul manuel de l'exponentielle d'une matricielle n'est faisable que pour des matrices très simples. Pour les autres cas ils existe des logiciels de calcul formel qui permettent de la calculer pour des dimensions faibles. Des méthodes numériques itératives ont été développées s'appuyant sur les approximations de Padé.

3.3 Solution d'une équation différentielle linéaire

• Soit l'équation différentielle linéaire sans second membre

$$(\mathrm{E}) \quad \begin{cases} z'(t) = Az(t) & , \quad t > t_0 \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

avec

$$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \quad , \quad z_0 \in \mathbb{R}^n$$

Proposition 3 :
Le problème (E) *admet pour solution unique donnée par*

$$z(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A} z_0 \quad , \quad t > t_0$$

Exemple 2

Soit l'équation différentielle de dimension 2

$$\begin{cases} z_1'(t) = 2z_1(t) + z_2(t) \\ z_2'(t) = z_1(t) + 2z_2(t) \end{cases} \quad , \quad t > 1$$

avec les conditions initiales

$$z_1(1) = 3 \quad , \quad z_2(1) = -2$$

Ceci s'écrit de manière vectorielle

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \qquad t > 1 \\ \begin{pmatrix} z_1(1) \\ z_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

ce qui correspond à

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad z_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Nous avons

$$\exp(tA) = \exp\left(t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} & \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^t \\ \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^t & \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \exp\left((t-1)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t-3} + \frac{1}{2}e^{t-1} & \frac{1}{2}e^{3t-3} - \frac{1}{2}e^{t-1} \\ \frac{1}{2}e^{3t-3} - \frac{1}{2}e^{t-1} & \frac{1}{2}e^{3t-3} + \frac{1}{2}e^{t-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t-3} + \frac{5}{2}e^{t-1} \\ \frac{1}{2}e^{3t-3} - \frac{5}{2}e^{t-1} \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} z_1(t) = \frac{1}{2}e^{3t-3} + \frac{5}{2}e^{t-1} \\ z_2(t) = \frac{1}{2}e^{3t-3} - \frac{5}{2}e^{t-1} \end{cases}$$

□

Voici quelques exemples de la matrice $\exp(tA)$ associée à une matrice A donnée

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{e}^{tA} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2t}+1 & e^{2t}-1 \\ e^{2t}-1 & e^{2t}+1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{e}^{tA} = e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{e}^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 5 \\ -8 & 2 & -5 \\ -16 & 4 & -10 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{e}^{tA} = \begin{pmatrix} 8t+1 & -2t & 5t \\ -8t & 2t+1 & -5t \\ -16t & 4t & 1-10t \end{pmatrix}$$

• Soit maintenant la même équation différentielle linéaire mais avec un second membre

$$(\mathrm{E}) \quad \begin{cases} z(t) = Az(t) + F(t) \quad , \quad t > t_0 \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $z_0 \in \mathbb{R}^n$ et $F :]t_0, +\infty[\to \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

Proposition 4 :
Le problème (E) *admet pour solution unique donnée par*

$$z(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A} z_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t-s)A} F(s)\, ds \quad , \quad t \geqslant t_0$$

Exemple 3
Pour l'équation évoluant dans $\mathbb{R}$

$$z'(t) = -z(t) + \sin t \quad , \quad z(\pi) = 5$$

nous obtenons

$$z(t) = 5\mathrm{e}^{-(t-\pi)} + \int_{\pi}^{t} \mathrm{e}^{-(t-s)} \sin(s)\, \mathrm{d}s = 5e^{\pi - t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2} e^{\pi} e^{-t}$$

□

Exemple 4
Pour l'équation évoluant dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} z_1'(t) = 2z_1(t) + z_2(t) + e^{2t} \\ z_2'(t) = 2z_2(t) \end{cases} \quad , \quad t > 2$$

avec les conditions initiales

$$z_1(1) = 2 \quad , \quad z_2(1) = -3$$

l'écriture vectorielle est

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t > 0 \\ \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

ce qui correspond dans la forme générale à

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad z_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad , \quad F(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad t_0 = 2$$

Nous avons

$$\mathrm{e}^{tA} = \exp\left(t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} z(t) &= \mathrm{e}^{(t-t_0)A} z_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t-s)A} F(s)\, ds \\ &= \begin{pmatrix} e^{2(t-2)} & (t-2)\, e^{2(t-2)} \\ 0 & e^{2(t-2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \int_{2}^{t} \begin{pmatrix} e^{2(t-s)} & (t-s)\, e^{2(t-s)} \\ 0 & e^{2(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2s} \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{2(t-2)} - 3e^{2(t-2)}(t-2) \\ -3e^{2t-4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t}(t-2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (8-3t)\, e^{2(t-2)} + (t-2)\, e^{2t} \\ -3e^{2t-4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} z_1(t) = (8-3t)\, e^{2(t-2)} + (t-2)\, e^{2t} \\ z_2(t) = -3e^{2(t-2)} \end{cases} \quad , \quad t \geqslant 2$$

□

4 - SYSTÈMES PHYSIQUES

La plupart des phénomènes physiques vérifient des équations différentielles et pour déterminer "l'état" de ce système il faut résoudre cette équation différentielle. Certaines équations différentielles sont linéaires et d'autres non linéaires; certaines sont en dimension finie d'autres en dimension infinie. t représente le temps.
Ces phénomènes physiques sont appelés des *systèmes physiques*. Nous allons dans ce qui suit définir la notion mathématique d'un système qui diffère de la notion physique de ce même système.

II - Notion de systèmes

Sommaire

1 - DÉFINITION

Définition 2 :
Un système (physique) est un réseau, plus ou moins important et autonome, dont les éléments présentent la particularité de répondre en tout ou en partie à un même objectif.

Exemples 1

1. Une plaque qui vibre - Un four qui brûle, ... (industrie).
2. Une nappe phréatique sujette à des pollutions (hydrogéologie).
3. Des cellules cancérigènes dans un corps (médecine).
4. un terrain à surface de différents niveaux (géophysique).
5. ...

Définition 3 :
Le ***modèle mathématique*** *d'un système est un ensemble d'équations qui modélisent le comportement du système :*

$$\Phi(z) = 0$$

z est appelé l'état du système.

Dans tout ce qui suit ([1]) on parle de *système* pour désigner le modèle mathématique qui modélise le système physique. Donc :

- le système physique désigne l'entité matérielle (la corde qui vibre, la plaque qui chauffe, ...) ;
- En mathématique le système désigne le modèle mathématique dont les équations gèrent le système physique.

2 - SYSTÈMES DYNAMIQUES

1. et c'est le cas dans toute l'analyse des systèmes.

Définition 4 :

1. *Un système dynamique est un système dont l'état évolue dans le temps. Le modèle mathématique est de la forme*

$$\Phi(t, z(t)) = 0 \quad , \quad t > t_0 \qquad \text{(S)}$$

2. *La solution $z(t)$ des équations du modèle est appelée état du système à l'instant t.*

Le système dynamique linéaire en dimension n est modélisé par les équations.

Définition 5 : (notation)

Dans ce qui suit on désigne par (S) aussi bien le système physique que le modèle mathématique.

Exemple 5

Considérons le pendule pesant (un poids suspendu par un fil de masse négligeable). L'angle θ entre le fil et l'axe vertical Oz varie avec le temps (lorsque le pendule n'est pas au repos) et vérifie

$$(1) \quad \begin{cases} \theta''(t) + \omega^2 \sin(\theta(t)) = 0 & , t > t_0 \\ \theta(t_0) = \theta_0, \quad \theta'(t_0) = \theta_1 \end{cases}$$

où θ_0 est la position à un instant t_0 et θ_1 est la vitesse angulaire à cet instant. θ_0 et θ_1 sont supposées connues. Pour de faibles oscillations, $\theta(t) \approx 0$, le modèle est linéaire

$$(2) \quad \begin{cases} \theta''(t) + \omega^2 \theta(t) = 0 & , t > t_0 \\ \theta(t_0) = \theta_0, \quad \theta'(t_0) = \theta_1 \end{cases}$$

en posant

$$z(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad z_0 = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

nous retrouvons l'équation générale $z'(t) = Az(t)$ et $z(t_0) = z_0$. (2) est donc l'équation du système dynamique modélisant le pendule pesant. □

Remarque 4

Les modèles mathématiques ne sont pas toujours simples. Voici un exemple de modèle mathématiques assez complexe qui modélise le mouvement d'une structure flexible de domaine $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ de frontière Γ :

$$\text{(S)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \Delta^2 z - 2\alpha\Delta\left(\dfrac{\partial z}{\partial t}\right) = 0 & & x \in \Omega,\ t > 0 \\ z(x,0) = z_0(x) & \dfrac{\partial z}{\partial t}(x,0) = z_1(x) & x \in \Omega \\ z = \Delta z = 0 & & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

III - Systèmes linéaires

Sommaire

Ce sont des systèmes dynamiques régis par une équation différentielle linéaire et dont la solution est localisée dans $\mathbb{R}^n$.

1 - EQUATION D'ÉTAT

On appelle *équation d'état* l'ensemble des équations (linéaires) qui modélise le système avec les données initiales

$$\left\{\begin{array}{lll} z_1'(t) = a_{11}z_1(t) + \ldots + a_{1n}z_n(t) & , & z_1(t_0) = z_{0,1} \\ \quad\vdots & & \\ z_n'(t) = a_{n1}z_1(t) + \ldots + a_{nn}z_n(t) & , & z_n(t_0) = z_{0,n} \end{array}\right. \qquad \left(a_{ij}, z_{0,k} \in \mathbb{R}\right)$$

et elle s'écrit sous forme matricielle

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ \vdots \\ z_n'(t) \end{pmatrix}}_{z'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}}_{z(t)} \quad , \quad \underbrace{\begin{pmatrix} z_1(t_0) \\ \vdots \\ z_n(t_0) \end{pmatrix}}_{z(t_0)} = \underbrace{\begin{pmatrix} z_{0,1} \\ \vdots \\ z_{0,n} \end{pmatrix}}_{z_0}$$

soit

$$(\mathrm{S}) \left\{\begin{array}{l} z'(t) = Az(t) \qquad , \quad t > t_0 \\ z(t_0) = z_0 \in \mathbb{R}^n \end{array}\right. \qquad A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ z_0 \in \mathbb{R}^n$$

Le vecteur $z(t)$ (d'ordre n) est appelé *état du système*. L'état admet pour expression

$$z(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A} z_0 \quad , \quad t \geqslant t_0$$

Cette expression nous mène à introduire la définition suivante :

Définition 6 :

Soit une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle semi-groupe engendré par A la famille $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ de matrices définies par

$$S(t) = \mathrm{e}^{tA} \quad , \quad t \geqslant 0$$

Par exemple le semi-groupe associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ admet pour expression

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \quad , \quad t \geqslant 0$$

Remarquons que si $n = 1$ alors $A = a \in \mathbb{R}$ et donc $S(t) = e^{ta}$ qui l'exponentielle classique.

Remarque 5

L'expression de l'état du système (S) est donc

$$z(t) = S(t)\, z_0 \quad , \quad t \geqslant t_0$$

où $S(t)$ est le semi-groupe associé à la matrice A.

Les propriétés de l'exponentielle d'une matrice donne sur le semi-groupe les propriétés suivantes :

$$S\left(t + t'\right) = S(t)\, S\left(t'\right) = S\left(t'\right) S(t) \quad , \quad t, t' \geqslant 0$$

et

$$S(0) = \mathrm{I}_n \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(t) = AS(t),\ t > 0$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(t)$ étant la matrice $S(t)$ dont on a dérivé chaque coefficient. Par exemple

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} t + \sin t & \frac{1}{t} \\ \cos t & \ln(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \cos t & -\frac{1}{t^2} \\ -\sin t & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

2 - EQUATION D'ÉTAT EN PRÉSENCE DE CONTRÔLES

Un contrôle est une fonction $u :]t_0, +\infty[\to \mathbb{R}^p$ présente dans le modèle mathématique qu'on a le droit de choisir. Elle apparait dans le second membre et l'équation différentielle linéaire sans second membre devient une équation différentielle linéaire avec second membre.

• Dans $\mathbb{R}$: Avec un contrôle $u(.)$ l'équation d'état est de la forme

$$z'(t) = az(t) + bu(t) \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

où $u(.)$ est une fonction que nous pouvons choisir. Elle est appelée fonction contrôle ou la commande. L'état admet dans ce cas pour expression

$$z(t) = e^{(t-t_0)a} z_0 b e^{(t-s)a} u(s)\, \mathrm{d}s \quad , \quad t \geqslant t_0$$

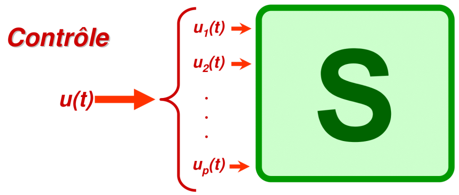
Si on dispose de plusieurs fonctions contrôles $u_1(.), \ldots, u_p(.)$ alors l'équation d'état est

$$z'(t) = az(t) + \sum_{k=1}^{p} b_k u_k(t) \quad , \quad a, b_k \in \mathbb{R}$$

et l'état vaut alors

$$z(t) = e^{(t-t_0)a} z_0 + \sum_{k=1}^{p} b_k \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)a} u_k(s)\, \mathrm{d}s \quad , \quad t \geqslant t_0$$

• Dans $\mathbb{R}^n$: Avec p fonctions contrôles $u_1(.), \ldots, u_p(.)$ les équations modélisant le système linéaire d'ordre n sont



$$\begin{cases} z_1'(t) = a_{11}z_1(t) + \ldots + a_{1n}z_n(t) + b_{11}u_1(t) + \ldots + b_{1p}u_p(t) \\ \quad \vdots \\ z_n'(t) = a_{n1}z_1(t) + \ldots + a_{nn}z_n(t) + b_{n1}u_1(t) + \ldots + b_{np}u_p(t) \end{cases}$$

avec $u_k :]t_0, +\infty[\to \mathbb{R}$.
Ces équations s'écrivent

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ \vdots \\ z_n'(t) \end{pmatrix}}_{z'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}}_{z(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{pmatrix}}_{u(t)}$$

où B est une matrice d'ordre $n \times p$ et $u :]t_0, +\infty[\to \mathbb{R}^p$ est une fonction contrôle (vectorielle). L'équation d'état s'écrit donc

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{ll} z'(t) = Az(t) + Bu(t) & A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ z(t_0) = z_0 \in \mathbb{R}^n \quad , \quad t_0 < t < T & B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \end{array} \right.$$

L'expression de l'état dans ce cas est donnée en fonction du semi-groupe par (en appliquant la proposition 4)

$$z(t) = S(t - t_0)\, z_0 + \int_{t_0}^{t} S(t - s)\, Bu(s)\, \mathrm{d}s \quad , \quad t \geqslant t_0$$

Exemple 6

Le système

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_1'(t) = 4z_1(t) - z_2(t) & , \quad z_1(0) = -1 \\ z_2'(t) = z_1(t) + 4z_2(t) & , \quad z_2(0) = 1 \end{array} \right.$$

s'écrit

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}}_{z(t)} \quad , \quad \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{z_0}$$

avec $z(t) \in \mathbb{R}^2$, et devient donc

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{ll} z'(t) = Az(t) & t > 0 \\ z(0) = z_0 \in \mathbb{R}^2 & \end{array} \right. \qquad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } z_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et l'état admet pour expression

$$z(t) = \exp\left(t \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^4 \cos t & -e^4 \sin t \\ e^4 \sin t & e^4 \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^4 \cos t - e^4 \sin t \\ e^4 \cos t - e^4 \sin t \end{pmatrix}$$

$\square$

Exemple 7

Le système

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_1'(t) = 4z_1(t) - z_2(t) + u_1(t) - u_3(t) & , \quad z_1(0) = -1 \\ z_2'(t) = z_1(t) + 4z_2(t) - u_2(t) + u_3(t) & , \quad z_2(0) = 1 \end{array} \right.$$

s'écrit

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}}_{z(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}}_{u(t)}$$

avec $z(t) \in \mathbb{R}^2$ et $u(t) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant alors

$$z'(t) = Az(t) + Bu(t) \quad , \quad z(0) = z_0$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad z_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'expression de l'état est alors

$$z(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A} z_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t-s)A} F(s)\, ds = \begin{pmatrix} e^4 \cos t & -e^4 \sin t \\ e^4 \sin t & e^4 \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} e^4 \cos(t-s) & -e^4 \sin(t-s) \\ e^4 \sin(t-s) & e^4 \cos(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ u_3(s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s$$

$$= e^4 \begin{pmatrix} -\cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$
$$+ e^4 \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-s)\, u_1(s) + \sin(t-s)\, u_2(s) - (\cos(t-s) + \sin(t-s))\, u_3(s) \\ \sin(t-s)\, u_1(s) - \cos(t-s)\, u_2(s) + (\cos(t-s) - \sin(t-s))\, u_3(s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s$$

donc

$$z_1(t) = -e^4(\cos t + \sin t) + e^4 \int_0^t \cos(t-s)\, u_1(s)\, \mathrm{d}t$$
$$+ e^4 \int_0^t \sin(t-s)\, u_2(s)\, \mathrm{d}t - e^4 \int_0^t (\cos(t-s) + \sin(t-s))\, u_3(s)\, \mathrm{d}t$$

et

$$z_2(t) = -e^4(\cos t + \sin t) + e^4 \int_0^t \sin(t-s)\, u_1(s)\, \mathrm{d}t$$
$$- e^4 \int_0^t \cos(t-s)\, u_2(s)\, \mathrm{d}t + e^4 \int_0^t (\cos(t-s) - \sin(t-s))\, u_3(s)\, \mathrm{d}t$$

□

3 - EQUATION DE SORTIE

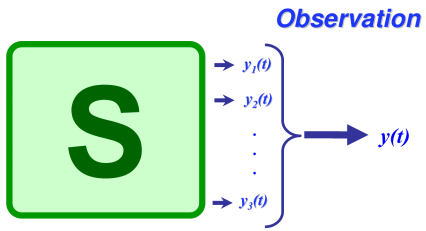
Pour connaitre l'état du système $z(t)$ nous disposons du modèle mathématique (l'équation différentielle) mais on ne dispose pas, en général, de la condition initiale (z_0). Nous avons donc seulement

$$z'(t) = Az(t) \quad \text{ou} \quad z'(t) = Az(t) + Bu(t) \quad , \quad t > t_0$$

La solution est de prendre un certain nombre de mesures sur le système et essayer d'en déduire la condition initiale. Nous supposons donc que dans le modèle mathématiques, en plus des équations différentielles vérifiées par les composantes de l'état, nous avons des équations qui modélise la dépendance de chaque observation par rapport à l'état à travers ses composantes :

$$\begin{cases} y_1(t) = c_{11} z_1(t) + \ldots + c_{1n} z_n(t) \\ \qquad \vdots \\ y_q(t) = c_{q1} z_1(t) + \ldots + c_{qn} z_n(t) \end{cases} \qquad (c_{ij} \in \mathbb{R})$$

avec les c_{ij} donnés.



Ces équations s'écrivent, de manière vectorielle

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & \cdots & c_{qn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}$$

soit encore

$$\text{(E)} \qquad y(t) = Cz(t) \qquad t_0 < t < T$$

où $C \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R})$ est la matrice définie par

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & \cdots & c_{qn} \end{pmatrix}$$

(E) est appelée *équation de sortie* du système.

Exemple 8

Avec un système dont l'état admet 3 composantes, si les mesures prise se modélisent en fonction de ces composantes par

$$\left| \begin{array}{l} y_1(t) = z_1(t) - z_2(t) \\ y_2(t) = z_1(t) + z_3(t) \end{array} \right.$$

alors

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix}$$

La matrice C de l'équation de sortie est donc

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

4 - SYSTÈME CONTRÔLÉ ET OBSERVÉ

Considérons le cas général où le système est à la fois contrôlé par p contrôles et observé par q observations. Nous disposons alors des équations

$$(\text{S}) \qquad z'(t) = Az(t) + Bu(t) \quad , \quad t > t_0$$

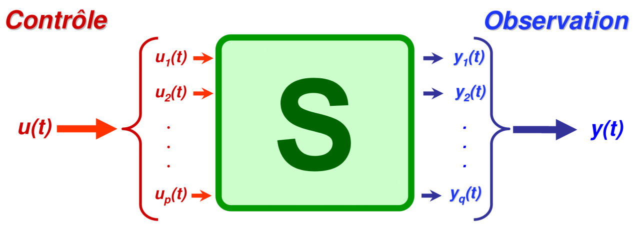
et

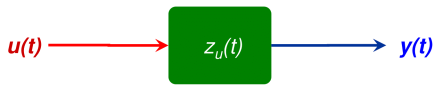
$$(\text{E}) \qquad y(t) = Cz(t) \quad , \quad t_0 < t < T$$

avec

$$u(t) \in \mathbb{R}^p \quad , \quad y(t) \in \mathbb{R}^q$$

u étant les p fonctions qu'on peut choisir, et donc avec lesquelles on fait varier l'état du système, et y les fonctions représentant les mesures prise pendant l'intervalle de temps de mesure $]t_0, T[$.





La notation $z_u(t)$ est parfois écrite pour montrer la dépendance de l'état par rapport au contrôle u. Cette notation n'est pas nécessaire; la dépendance étant évidente.

Remarque 6

Un système qui n'est pas contrôlé ($u = 0$ ou $B = 0$) est appelé *un système autonome* (pas d'action externe).

Exemple 9

- Reprenons l'équation du pendule pesant (page 5)

$$\begin{cases} \theta''(t) + \omega^2\theta(t) = 0 & , \quad t > t_0 \\ \theta(t_0) = \theta_0, \quad \theta'(t_0) = \theta_1 \end{cases}$$

qui modélise le pendule qui oscille et qui n'est soumis à aucune force. Nous avons

$$\begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \theta(t_0) \\ \theta'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

En posant

$$z(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad z_0 = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

nous retrouvons l'équation générale d'un système *autonome* (non soumis à aucun contrôle)

$$z'(t) = Az(t) \quad , \quad z(t_0) = z_0$$

- Lorsque ce pendule est soumis à une force $F(t)$ son équation devient

$$\begin{cases} \theta''(t) + \omega^2\theta(t) = f(t) & , \quad t > t_0 \\ \theta(t_0) = \theta_0, \quad \theta'(t_0) = \theta_1 \end{cases}$$

avec $f(t)$ une fonction qui ne dépend que de $F(t)$ (f différente de F). Nous avons alors

$$\begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} f(t) \quad , \quad \begin{pmatrix} \theta(t_0) \\ \theta'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

en posant avec

$$z(t)=\begin{pmatrix}\theta(t)\\ \theta'(t)\end{pmatrix}\quad,\quad A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & 0\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\quad,\quad z_0=\begin{pmatrix}\theta_0\\ \theta_1\end{pmatrix}$$

nous retrouvons l'équation générale d'un système *contrôlé*

$$z'(t)=Az(t)+Bf(t)\quad,\quad z(t_0)=z_0$$

• Dans tous les cas et si nous ne disposons pas de θ_0 et θ_1 alors nous n'avons pas les conditions initiales. On décide d'observer $\theta(t)$ pendant $3''$; (Remarquons que connaitre $\theta(t)$ ne donne que la première composante de $z(t)$ ce qui ne suffit pas). Nous modélisons cette observation par l'équation

$$y(t)=\theta(t)\quad,\quad 0<t<T=3''$$

Cette équation s'écrit

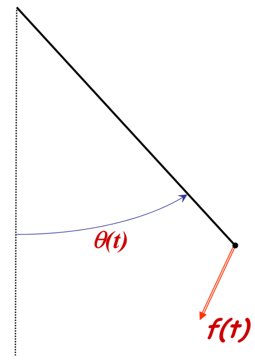
$$y(t)=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta(t)\\ \theta'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}z(t)\quad,\quad 0<t<T$$

donc $y(t)=Cz(t)$ avec $C=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$. Nous disposons donc des 3 matrices qui permettent de connaitre l'équation d'état et l'équation de sortie

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & 0\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\quad,\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$$

Le semi-groupe associé à cette matrice A est donné par

$$S(t)=\exp\left(t\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t\\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}\quad,\quad t\geqslant 0$$



□

5 - ESPACE D'ÉTATS, ESPACE DE CONTRÔLES ET ESPACE D'OBSERVATIONS

5.1 Espace d'états

On appelle *espace d'états* l'espace vectoriel Z où le système prend ses états :

$$z(t)\in Z\quad,\quad \forall t\geqslant t_0$$

Dans notre cas nous avons toujours

$$Z=\mathbb{R}^n$$

On dit alors que le système est de dimension.
On se limite dans ce cours aux systèmes linéaires de dimensions finies.

5.2 Espaces des fonctions de carré intégrable

Définition 7 : (et notation)

Soient $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. On note par $\mathrm{L}^2\left[a,b;\mathbb{R}^n\right]$ l'ensemble des fonctions f : $]a,b[\to\mathbb{R}^n$ pour lesquelles l'intégrale de la fonction réelle $t\to\|f(t)\|^2$ est

finie :

$$\mathrm{L}^2\left[a,b;\mathbb{R}^n\right] = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R}^n \;/\; \int_a^b \|f(t)\|^2 \,\mathrm{d}t \text{ existe} \right\}$$

$\mathrm{L}^2\left[a,b;\mathbb{R}^n\right]$ est un espace vectoriel (pour l'addition des fonctions et la multiplication d'une fonction par un scalaire). On munit cet espace vectoriel du produit scalaire

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_a^b \langle f_1(t), f_2(t)\rangle \,\mathrm{d}t \quad , \quad f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2\left[a,b;\mathbb{R}^n\right]$$

et de la norme correspondante

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b \|f(t)\|^2 \,\mathrm{d}t} \quad , \quad f \in \mathrm{L}^2\left[a,b;\mathbb{R}^n\right]$$

Par exemple l'ensemble $\mathrm{L}^2\left[0,\pi;\mathbb{R}^2\right]$ vaut

$$\left\{ f :]0,\pi[\to \mathbb{R}^2 \;/\; \int_0^\pi \left[f_1(t)^2 + f_2(t)^2\right] \mathrm{d}t \text{ existe} \right\} \quad \text{où on a posé } f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

On vérifie alors que la fonction suivante

$$f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ 1 + \cos t \end{pmatrix}$$

est dans $\mathrm{L}^2\left[0,\pi;\mathbb{R}^2\right]$ puisque

$$\|f(t)\|^2 = \langle f(t), f(t)\rangle = f(t)^{\mathrm{T}} f(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 1 + \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t \\ 1 + \cos t \end{pmatrix} = 2(1 + \cos t)$$

et donc l'intégrale

$$\int_0^\pi \|f(t)\|^2 \,\mathrm{d}t = 2\int_0^\pi (1 + \cos t)\,\mathrm{d}t = 2\pi$$

est finie.

5.3 Espace de contrôles

Quand on contrôle un système pendant un temps $]t_0, T[$ par p fonctions $u_k(t)$, le contrôle u global est une fonction vectorielle

$$\begin{array}{rccc} u : & [t_0, T] & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ & t & \longrightarrow & u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

On suppose au minimum que l'intégrale $\displaystyle\int_{t_0}^T \|u(t)\|^2 \,\mathrm{d}t$ est un nombre fini ce qui revient à avoir $u \in \mathrm{L}^2\left[t_0, T;\mathbb{R}^p\right]$. On appelle donc, et dans ce qui suit, *espace des contrôles* l'espace

$$\mathcal{U} = \mathrm{L}^2\left[t_0, T;\mathbb{R}^p\right]$$

où p est le nombre de contrôles appliqués au systèmes, soit encore

$$\mathcal{U} = \left\{ u :]t_0, T[\to \mathbb{R}^p \;/\; \int_{t_0}^T \left[u_1(t)^2 + \ldots + u_p(t)^2\right] \mathrm{d}t < +\infty \right\} \quad \text{où} \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{pmatrix}$$

Remarquons que le contrôle n'est pas un nombre mais une fonction. Par exemple quand on chauffe un four par un bruleur à gaz pendant une heure, on peut maintenir le réglage du bruleur constant, ce qui correspond à une fonction u constante. Mais on peut aussi régler le bruleur au niveau N_1 pendant 10 min, ensuite au niveau N_2 pendant 40 min et enfin revenir au niveau N_1 pendant 10 min. Nous voyons de là que le contrôle qu'on a appliqué n'est pas la quantité de gaz utilisée pour chauffer le four, puisque cette quantité est variable mais bien la fonction qui à chaque instant t indique la quantité de gaz injectée :

$$u(t) = \begin{cases} N_1 & \text{si} \quad 0 < t \leqslant 10\,\text{min} \\ N_2 & \text{si} \quad 10\,\text{min} < t \leqslant 40\,\text{min} \\ N_1 & \text{si} \quad 40\,\text{min} < t \leqslant 60\,\text{min} \end{cases}$$

5.4 Espace des observations

L'observation, comme le contrôle, est une fonction dont la variable est le temps t.
On appelle donc, et dans ce qui suit, *espace des observations* l'espace

$$\mathscr{Y} = \mathrm{L}^2\left[t_0, T; \mathbb{R}^q\right]$$

où q est le nombre de mesures prises sur le système, soit encore

$$\mathscr{Y} = \left\{ y :]t_0, T[\to \mathbb{R}^q \,/\, \int_{t_0}^{T} \left[y_1(t)^2 + \ldots + y_q(t)^2\right] \mathrm{d}t < +\infty \right\} \quad \text{où} \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{pmatrix}$$

IV - Observabilité

Sommaire

1 - FORMULATION DU PROBLÈME

Le modèle mathématique nous permet d'avoir les équations suivantes

$$\begin{cases} (S) & z'(t) = Az(t) & , & t > t_0 & \text{Equation d'état} \\ (E) & y(t) = Cz(t) & , & t > t_0 & \text{Equation de sortie} \end{cases}$$

Ceci ne nous permet pas de connaitre l'état $z(t)$ puisque pour résoudre l'équation différentielle nous avons besoin de connaitre la solution $z(.)$ au point t_0 ce qui n'est souvent pas le cas. Donc

$$z(.) \text{ est inconnu}$$

L'existence dans le modèle d'une équation de sortie montre que nous pouvons prendre des mesures sur ce système. Fixons alors un temps de mesure, soit l'intervalle $]t_0, T[$. Nous commençons les mesures en $t = t_0$ et nous les arrêtons en $t = T$. Nous disposons donc d'une fonction

$$y^{\mathrm{m}}(t) \in \mathbb{R}^q \qquad , \qquad t \in [t_0, T]$$

Les questions suivantes se posent alors :

Question 1 *Existe-il un état $z(.)$ qui donne ces mesures ?*
Dans la pratique, la réponse à cette question est évidemment affirmative; le système physique admet bien un état qui a donné ces mesures! On considérera pas cette question en théorie et donc :

$$\text{On suppose qu'il existe un état } z(.) \text{ qui a engendré ces mesures} \tag{H}$$

Question 2 *Si oui, cet état $z(.)$ est-il le seul état à donner ces mesures ?*
Pas toujours : Pour certains systèmes des états différents peuvent donner une même mesure. Cette question est étudiée à la section ci-dessous.

Question 3 *Si c'est encore oui, comment peut-on déterminer cet $z(.)$ à partir des mesures $y^{\mathrm{m}}(.)$?*
La réponse à cette question est le but cherché lorsqu'on décide de prendre des mesures sur un système : déterminer l'état $z(.)$ à partir de la mesure $y(.)$. Cette question fait l'objet du chapitre V.

2 - DÉFINITION

Reprenons l'équation d'état (S) et l'équation de sortie (E)

$$\begin{aligned} z'(t) &= Az(t) \quad , \quad t > t_0 & \text{(S)} \\ y(t) &= Cz(t) \quad , \quad t \in [t_0, T] & \text{(E)} \end{aligned}$$

L'observation d'un système pose problème si avec la prise d'une mesure nous ne pouvons pas connaitre l'état qui a donné cette mesure, non pas par manque de technique mais par ce que deux ou plusieurs états différents peuvent donner cette même observation.
Considérons par exemple le système de dimension 2

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

avec une observation de la forme

$$y(t) = z_1(t) + z_2(t) \quad , \quad t > 0$$

Nous remarquons que la mesure

$$y^m(t) = e^{2t} \quad , \quad t > 0$$

peut être obtenue par les deux états

$$z(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2t}+3 \\ e^{2t}-3 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{z}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2t}-1 \\ e^{2t}+1 \end{pmatrix} \quad , \quad t > 0$$

et donc toute technique pour déterminer l'état ne peut être fiable car, elle peut déterminer le premier état alors qu'en réalité c'est le deuxième qui a donné la mesure, ou encore donner le deuxième état alors que c'est le premier qui l'état du système quand la mesure a été prise!
Il est clair qu'une propriété manque pour des systèmes de ce genre et l'identification des systèmes qui ne posent pas ce genre de problème est importante. C'est l'objet de la définition suivante :

Définition 8 :

*On dit que le système (S) est dit **observable** sur $[t_0, T]$ si deux états distincts donnent nécessairement des mesures distinctes :*

$$z(.) \neq \tilde{z}(.) \implies y(.) \neq \tilde{y}(.) \tag{1}$$

3 - CARACTÉRISATION

Reprenons l'équation d'état (S) et l'équation de sortie (E)

$$\begin{aligned} z'(t) &= Az(t) \quad , \quad t > t_0 & \text{(S)} \\ y(t) &= Cz(t) \quad , \quad t \in [t_0, T] & \text{(E)} \end{aligned}$$

Définition 9 :

*On appelle **matrice d'observabilité** la matrice*

$$\mathrm{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{$\mathscr{O}$}$$

Cette matrice est construite par blocs; chaque bloc étant à q lignes et à n colonnes. La matrice O est donc à nq lignes et à n colonnes.

Théorème 1 :

Le système (S) est observable par (E) sur $[t_0, T]$ si, et seulement si,

$$\mathrm{rg}(\mathrm{O}) = n$$

On dit alors que le couple (A, C) est observable sur $[t_0, T]$.

L'observabilité, ou non, d'un système dépend de la matrice A donnée par l'équation d'état (S) et de la matrice C donnée par l'équation de sortie (E). Son étude se fait par les étapes suivantes :

1. Détermination des matrices A et C ;
2. Calcul des matrices blocs CA, CA^2, CA^3, ..., CA^{n-1} ;
3. Formation de la matrice bloc O définie par $(\mathscr{O})$;
4. Calcul du rang de O ;
5. Si $\mathrm{rg}(\mathrm{O}) = n$ alors le système (S) est observable ; et si $\mathrm{rg}(\mathrm{O}) < n$ alors le système (S) n'est pas observable.

Dans ce qui suit nous donnerons une version simplifiée de ces étapes

Exemple 10

Considérons le système (S) avec l'observation (E)

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{l} z_1'(t) = 2z_1(t) - z_2(t) \\ z_2'(t) = 4z_1(t) - 2z_2(t) \end{array}\right. \qquad (\mathrm{E})\left\{\begin{array}{l} y(t) = z_1(t) \\ t \in [0, T] \end{array}\right.$$

Alors

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \quad , \quad y(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

On calcul la matrice d'observabilité O en calculant d'abord ses blocs

$$\mathrm{O} = \left[\begin{array}{c} C \\ CA \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hdashline \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \end{array}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 2 qui est exactement la dimension n de l'espace d'états. Donc le système (S) observé par (E) est observable. □

Remarque 7

CA^k nécessite le calcul de la puissance k de la matrice A qui est équivalent au produit de $(k-1)$ de la matrice A, ce qui nécessite au total $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Pour n grand ceci donne des temps de calcul énormes. Pour remédier à cela il suffit de remarquer que l'égalité $CA^k = \left(CA^{k-1}\right)A$ permet, si on dispose de CA^{k-1}, de calculer CA^k par une seule multiplication. Ceci permet alors, en faisant seulement $n-1$ produits suivants (à partir de A) :

$$A \to CA \to (CA)A = CA^2 \to \left(CA^2\right)A = CA^3 \to \cdots \to \left(CA^{k-1}\right)A = CA^k \to \cdots \to CA^{n-1}$$

dans le sens gauche-droite, d'obtenir tous les blocs de la matrice O.

Nous rappelons dans ce qui suit les techniques de calcul matriciel qui permettent de

4 - MÉTHODE DE CALCUL DU RANG

Définition 10 :

On appelle ***mineur d'ordre*** *p* ***extrait d'une matrice*** *M un déterminant obtenu en choisissant dans M, p lignes et p colonnes. Un mineur est un scalaire ($\in \mathbb{R}$ ou $\in \mathbb{C}$).*

Remarquons que le nombre de mineurs qu'on peut extraire d'une matrice M à m lignes et n colonnes est donné par

$$Nm(p) = C_n^p C_m^p = \frac{n!m!}{(n-p)!(m-p)!}$$

puisque pour former un mineur on choisit p lignes parmi m et on choisit p colonnes parmi n.

Exemple 11
Dans

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ \alpha & \beta & \gamma & \lambda & \theta \\ u & v & w & x & y \end{pmatrix}$$

1. On extrait le mineur d'ordre 2 défini par les lignes 2 et 3 et les colonnes 1 et 4 : on obtient δ_1

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ \boldsymbol{\alpha} & \beta & \gamma & \boldsymbol{\lambda} & \theta \\ \boldsymbol{u} & v & w & \boldsymbol{x} & y \end{pmatrix} \to \delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha & \lambda \\ u & x \end{vmatrix} = x\alpha - u\lambda$$

2. On extrait le mineur d'ordre 3 défini par les lignes 1, 2 et 3 et les colonnes 3, 4 et 5 : on obtient δ_2

$$\begin{pmatrix} a & b & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} \\ \alpha & \beta & \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{\lambda} & \boldsymbol{\theta} \\ u & v & \boldsymbol{w} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \to \delta_2 = \begin{vmatrix} c & d & e \\ \gamma & \lambda & \theta \\ w & x & y \end{vmatrix} = \left(x\gamma e + dw\theta + cy\lambda\right) - \left(w\lambda e + cx\theta + dy\gamma\right)$$

□

4.1 Algorithme pour déterminer le rang

Soit M une matrice d'ordre (m, n).

Algorithme

1. Déterminer $p = \min(m, n)$. On a alors $\operatorname{rg}(M) \leqslant p$.
2. Calculer les mineurs d'ordre p l'un après l'autre :
   (a) Si on trouve un mineur non nul alors $\operatorname{rg}(M) = p$. STOP.
   (b) Si tous les mineurs d'ordre p sont nuls alors $\operatorname{rg}(M) < p$. On reprend en 2) en faisant $p \leftarrow p - 1$
   (c) Si $p = 1$ et tous les mineurs sont nuls alors $M = 0$ et donc $\operatorname{rg}(M) = 0$.

Remarquons que la seule matrice qui admet un rang nul est la matrice nulle :

$$\operatorname{rg}(M) = 0 \iff M = 0$$

4.2 Algorithme pour étudier l'observabilité d'un système

Pour étudier l'observabilité d'un système nous n'avons pas besoin de connaitre le rang de la matrice O mais seulement si $\operatorname{rg} O = n$ ou $\operatorname{rg} O < n$.
Remarquons aussi, que puisque le rang ne dépasse jamais le nombre de lignes ou de colonnes, alors pour notre matrice O on a toujours

$$\operatorname{rg}(O) \leqslant \min\left(nq, n\right) = n \quad \text{puisque } q \geqslant 1$$

Nous avons alors revu l'algorithme précédent pour l'adapter à notre problème :

Algorithme

1. Calcul des matrices blocs CA, CA^2, CA^3, ..., CA^{n-1} ;
2. Formation de la matrice bloc O définie par $(\mathscr{O})$; nous avons $\operatorname{rg}(O) \leqslant n$.
3. On calcule les mineurs d'ordre n l'un après l'autre :
   (a) Si on trouve un mineur d'ordre n non nul alors $\operatorname{rg} O = n$: le système est observable.
   (b) Si tous les mineurs d'ordre n sont nuls alors $\operatorname{rg} O < n$ et le système n'est pas observable.

Exemple 12

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 11 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rg}(M) \leqslant \min(3,5) = 3 = p.$$

1. Tous les mineurs d'ordre 3 sont nuls $\Longrightarrow$ $\operatorname{rg}(M) \leqslant 2$.

2. Le mineur δ est non nul

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 11 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{rg}(M) = 2$$

□

Exemple 13

Pour le système observé à trois dimensions et deux observations

$$(S) \begin{cases} z_1' = z_1 + 2z_2 + z_3 \\ z_2' = 2z_1 - z_2 \\ z_3' = z_2 + z_3 \end{cases} \quad , \quad (E) \begin{cases} y_1(t) = z_2(t) + z_3(t) \\ y_2(t) = z_1(t) - z_2(t) \end{cases}$$

on a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$\mathrm{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} \text{ de type } (6,3)$$

qui est de rang 3 car le mineur

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Donc le système est observable. □

Remarquons que si la matrice O est carrée nous avons un seul mineur d'ordre n; c'est le déterminant de O. Ceci arrive seulement lorsque $q = 1$. D'où

1. (a) Si $p = 1$ et tous les mineurs sont nuls alors $M = 0$ et donc $\operatorname{rg}(M) = 0$.

Corollaire 1 :

Si $q = 1$, le système (S) (E) est observable sur $[t_0, T]$ si, et seulement si,

$$\det(\mathrm{O}) \neq 0$$

Exemple 14

Soit un système avec une observation

$$\begin{cases} z_1' = z_1 - z_2 \\ z_2' = 2z_2 \end{cases} \quad , \quad y(t) = z_2(t)$$

Alors

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad , \quad y(t) = \underbrace{(0,1)}_{C} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

et donc

$$\mathscr{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 1. Donc le système n'est pas observable. □

Remarque 8

Avec MATLAB la matrice d'observabilité se calcule par

$$\mathrm{O} = \mathrm{obsv}(A, C)$$

et son rang par

$$r = \mathrm{rank}(\mathrm{O})$$

La commande length(A) désignant dans MATLAB la dimension de A (n dans notre cours), le nombre

$$\text{length}(A) - r$$

renseigne sur l'observabilité système. En effet

$$\text{length}(A) - r \begin{cases} = 0 & \text{si } r = \text{length}(A) & \Leftrightarrow & (S) \text{ observable} \\ \neq 0 & \text{sinon} & \Leftrightarrow & (S) \text{ non observable} \end{cases}$$

5 - CAS D'UN SYSTÈME CONTRÔLÉ

Si le système est contrôlé par un contrôle u

$$\begin{array}{lll} (S) & z'(t) = Az(t) + Bu(t) & , \quad t_0 < t < T \\ (E) & y(t) = Cz(t) & , \quad t_0 < t < T \end{array}$$

on montre que la caractérisation l'observabilité reste la même

$$\text{rg}(\mathrm{O}) = n$$

V - Estimation de l'état initial

Sommaire

1 - EXPRESSION DE L'ÉTAT INITIAL

Soit le système linéaire

$$(\mathrm{S}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} z'(t) = Az(t) \quad , & t > t_0 \\ z(0) = z_0 \in Z & \text{inconnu} \end{array} \right.$$

L'état initial z_0 est inconnu. Sa connaissance est nécessaire pour résoudre l'équation d'état et donc de connaitre l'état du système $z(t)$.
On suppose alors que nous pouvons observer ce système; ce qui correspond à la donnée de l'équation de sortie

$$(\mathrm{E}) \qquad y(t) = Cz(t) \quad , \quad t > t_0$$

Après une prise de mesure sur un intervalle de temps $[t_0, T]$ nous obtenons des mesures

$$\left\{ y^{\mathrm{m}}(t) \;/\; t_0 < t < T \right\}$$

Le problème est alors de déterminer z_0 à partir des mesures $\left\{ y^{\mathrm{m}}(t) \;/\; t_0 < t < T \right\}$.
Rappelons que

1. En pratique z_0 existe $\in Z = \mathbb{R}^n$;
2. Si le système est observable alors z_0 est unique.

Puisque l'observabilité dépend de A et de C on appellera système observé, et on notera (S) + (E) le couple équation d'état - équation de sortie.
Nous avons alors l'équivalence suivante :

Proposition 5 :
Le système (S) + (E) *est observable si, et seulement si, la matrice carrée d'ordre n*

$$G = \int_{t_0}^{T} S(t-t_0)^* \, C^* \, CS(t-t_0) \, \mathrm{d}t$$

est inversible.

Exemple 15
Prenons le système observé à deux dimensions et une observation

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{l} z_1' = z_1 + 2z_2 \\ z_2' = 2z_1 + z_2 \end{array} \right. \qquad (\mathrm{E}) \;\; y(t) = z_1(t) + z_2(t)$$

alors

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & \beta \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathrm{O} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 2\beta+1 & 2+\beta \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathrm{rg}\,(\mathrm{O}) = \begin{cases} 2 & \text{si } \beta \neq \pm 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc le système est observable si et seulement si β est différent de 1 et -1. D'autre part le semi-groupe associé à A vaut

$$S(t) = \exp\left(t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t}+e^{-t} & e^{3t}-e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+e^{-t} \end{pmatrix}$$

donc

$$CS(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\beta+1)e^{3t} + \frac{1}{2}(1-\beta)e^{-t} & \frac{1}{2}(1+\beta)e^{3t} \end{pmatrix}$$

ce qui donne pour matrice G

$$\begin{aligned} G &= \int_0^T S(t)^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} CS(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T [CS(t)]^{\mathrm{T}} CS(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\beta+1)e^{3t} + \frac{1}{2}(1-\beta)e^{-t} \\ \frac{1}{2}(1+\beta)e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\beta+1)e^{3t} + \frac{1}{2}(1-\beta)e^{-t} & \frac{1}{2}(1+\beta)e^{3t} \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \begin{pmatrix} \begin{array}{r} \frac{1}{24}(\beta+1)^2 e^{6T} + \frac{1}{4}(1-\beta^2)e^{2T} \\ -\frac{1}{8}e^{-2T}(\beta-1)^2 + \frac{1}{3}\beta^2 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\beta \end{array} & \begin{array}{r} \frac{1}{24}(\beta+1)^2 e^{6T} + \frac{1}{8}(1-\beta^2)e^{2T} \\ +\frac{1}{12}\beta^2 - \frac{1}{12}\beta - \frac{1}{6} \end{array} \\ \begin{array}{r} \frac{1}{24}e^{6T}(\beta+1)^2 + \frac{1}{8}(1-\beta^2)e^{2T} \\ +\frac{1}{12}\beta^2 - \frac{1}{12}\beta - \frac{1}{6} \end{array} & \begin{array}{r} \frac{1}{24}(\beta+1)^2 e^{6T} - \frac{1}{24}\beta^2 \\ -\frac{1}{12}\beta - \frac{1}{24} \end{array} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Son déterminant est

$$\det(G) = \frac{1}{48e^{2T}} \left(e^{2T}-1\right)^4 \left(\beta^2-1\right)^2$$

qui est non nul si et seulement β est différent de 1 et -1. □

Théorème 2 :
Lorsque le système $(\mathrm{S})+(\mathrm{E})$ *est observable, l'état initial pour lequel l'observation sur* $[t_0, T]$ *a donné la mesure*

$$\{y^{\mathrm{m}}(t)\ /\ t_0 < t < T\}$$

est donné par

$$z_0 = \left[\int_{t_0}^T S(t-t_0)^* C^* CS(t-t_0)\,\mathrm{d}t\right]^{-1} \int_{t_0}^T S(t-t_0)^* C^* y^{\mathrm{m}}(t)\,\mathrm{d}t$$

Le calcul de z_0 peut être réparti en les étapes suivantes :

1. Calcul des matrices

$$M(t) = CS(t-t_0) \quad \text{et} \quad G = \int_{t_0}^T M(t)^* M(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Inversion de la matrice G;
3. Calcul de du vecteur

$$v = \int_{t_0}^T M(t)^* y^{\mathrm{m}}(t)\,\mathrm{d}t$$

4. Calcul de de l'état initial

$$z_0 = G^{-1} v$$

2 - EXEMPLE D'APPLICATION

Soit le système observé

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad , \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

1) La matrice d'observabilité est

$$\mathrm{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Puisque det (O) = 4 ≠ 0 alors rg (O) = 2 et le système est observable.
2) Supposons alors que la prise de mesures pendant une unité de temps a donné l'observation

$$y^{\mathrm{m}}(t) = 1 - 2t, \quad 0 < t < T = 1$$

Le semi-groupe est

$$S(t) = \begin{pmatrix} 2t+1 & 4t \\ -t & 1-2t \end{pmatrix} \quad , \quad t \geqslant 0$$

donc

$$M(t) = CS(t) = \begin{pmatrix} 2t+1 & 4t \end{pmatrix}$$

et

$$M(t)^{\mathrm{T}} M(t) = \begin{pmatrix} (2t+1)^2 & 4t(2t+1) \\ 4t(2t+1) & 16t^2 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$G = \int_0^1 M(t)^{\mathrm{T}} M(t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}$$

et

$$G^{-1} = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 16 & -14 \\ -14 & 13 \end{pmatrix}$$

D'autre part

$$M(t)^{\mathrm{T}} y^{\mathrm{m}}(t) = \begin{pmatrix} 1-4t^2 \\ 4t-8t^2 \end{pmatrix}$$

donc

$$v = \int_0^1 M(t)^{\mathrm{T}} y^{\mathrm{m}}(t)\,\mathrm{d}t = -\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Finalement

$$z_0 = G^{-1}v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ceci nous permet de calculer l'état du système

$$z(t) = S(t)\,z_0 = \begin{pmatrix} 2t+1 & 4t \\ -t & 1-2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2t \\ t-1 \end{pmatrix}$$

Remarque 9

Si le système observable est excité par un contrôle $u(t)$

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} z'(t) = Az(t) + Bu(t) & t \in [t_0, T] \\ z(t_0) = z_0 \\ y(t) = Cz(t) \end{cases}$$

alors l'état initial peut être calculé par

$$z_0 = \left[\int_{t_0}^{T} S(t-t_0)^* \, C^* CS(t-t_0)\,\mathrm{d}t\right]^{-1} \int_{t_0}^{T} S(t-t_0)^* \, C^* \mathrm{w}(t)\,\mathrm{d}t$$

où

$$\mathrm{w}(t) = y^{\mathrm{m}}(t) - \int_{t_0}^{t} CS(t-s)\,Bu(s)\,\mathrm{d}s \quad , \quad t_0 < t < T$$

VI - Stabilité

Sommaire

La stabilité est une notion au départ définie en mécanique pour des systèmes physique. Elle fût ensuite généralisée aux équations différentielles et donc à tout modèle de système dynamique.
Considérons un système régi par l'équation d'état

$$(S) \quad \begin{cases} z'(t) = Az(t) \quad , \quad t > t_0 \\ z(t_0) = z_0 \in Z \end{cases} \qquad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

On a supposé le système non contrôlé; mais tout ce qu'on verra, définitions et résultats, reste valable lorsqu'on a un contrôle qui commande le système.

Définition 11 :

On dit que le système (S) *est exponentiellement stable si*

$$\exists C > 0 \quad \exists \omega > 0 \text{ tel que } \|z(t)\| \leqslant Ce^{-\omega t}, \quad \forall z_0 \in Z, \quad \forall t > t_0$$

Définition 12 :

On dit que le système (S) *est asymptotiquement stable si*

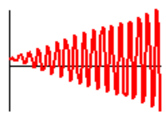
$$\forall z_0 \in Z \quad , \quad \lim_{t \to +\infty} z(t) = 0$$

Définition 13 :

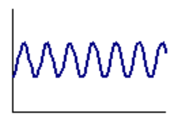
On dit que le système (S) *est stable si*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \text{ tel que } \|z_0\| < \eta \implies \|z(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t > t_0$$

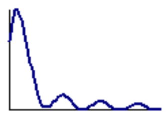
Voici quelques exemples illustrant ces différentes situations :



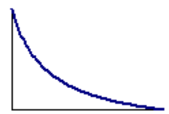
Instable



Stable

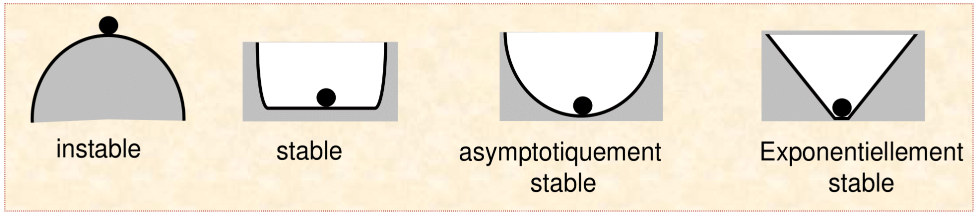


Asymptotiquement stable



Exponentiellement stable

Nous pouvons schématiser ces notions par les figures suivantes :



Nous avons d'abord l'équivalence suivante :

Proposition 6 :
Le système (S) *est asymptotiquement stable si, et seulement si, il est exponentiellement stable.*

1 - CARACTÉRISATION

Notons $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ les valeurs propres de la matrice A. Nous avons $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Remarquons qu'on peut avoir dan certains cas $\lambda_j \notin \mathbb{R}$ même si A est à coefficients réels.

Théorème 3 :
Le système

$$(S)\quad \begin{cases} z'(t) = Az(t) & t \in [t_0, T] \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

est stable si, et seulement si, :

1. $\mathscr{R}\mathrm{e}(\lambda) \leq 0, \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$;
2. *Pour toute* $\lambda \in \sigma(A)$ *vérifiant* $\mathscr{R}\mathrm{e}(\lambda) = 0$ *on a* $\dim\ker(A - \lambda I_n) =$ *ordre de multiplicité de* λ.

Exemple 16
Pour le système

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

nous avons $P_A(\lambda) = \lambda(\lambda+1)$ et $\sigma(A) = \{-1, 0\}$. Les valeurs propres sont distinctes 2 à 2 dont toutes simples et alors les espaces propres sont tous de dimension 1. Ceci montre que (S) est stable. $\square$

Exemple 17
Le système

$$\begin{cases} \theta'' + \omega^2\theta = 0 \quad , \quad \omega > 0 \\ \theta(0) = \theta_0 \, , \quad \theta'(0) = \theta_1 \end{cases}$$

admet pour équation d'état

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix} \quad \to \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons alors $P_A(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$ et $\sigma(A) = \{-i\omega, +i\omega\}$. Donc (S) est stable. $\square$

Exemple 18
Le système régi par

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t) \\ z_2'(t) = 0 \end{cases}$$

s'écrit $z'(t) = Az(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons $P_A(\lambda) = \lambda^2$ donc $\sigma(A) = \{0\}$; Et puisque

$$\ker(A - 0.I_2) = \ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, x_2 = 0 \right\}$$

alors $\dim\ker(A) = 1$ donc (S) est instable. □

Alors nous avons la caractérisation des systèmes asymptotiquement stables.

Théorème 4 :

1. (S) *est asymptotiquement stable si, et seulement si,*

$$\mathcal{R}e(\lambda_j) < 0 \quad , \quad j = 1, \cdots, n$$

2. (S) *est asymptotiquement stable si, et seulement si,*

$$\lim_{t \to +\infty} S(t) = 0$$

Exemples 2

1. Considérons le système d'ordre 2

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{0,1} \\ z_{0,2} \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A vaut

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 10$$

la résolution de $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$ donnent les valeurs propres

$$\lambda^2 + 6\lambda + 10\lambda_1 = -3 - i \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -3 + i$$

Puisque

$$\mathcal{R}e(\lambda_1) = \mathcal{R}e(\lambda_2) = -\frac{1}{2} < 0$$

alors le système (S) est asymptotiquement stable. Nous avons donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \|z(t)\| = 0$ ou encore

$$\lim_{t \to +\infty} z_1(t) = \lim_{t \to +\infty} z_2(t) = 0$$

Une autre manière de le prouver est de vérifier que le semi-groupe $S(t)$ qui admet pour expression

$$S(t) = \exp\left(t \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (\cos t)\, e^{-3t} & -(\sin t)\, e^{-3t} \\ (\sin t)\, e^{-3t} & (\cos t)\, e^{-3t} \end{pmatrix}$$

tend vers la matrice nulle. En effet chaque coefficient tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

2. Pour le système

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

on a

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda + 1) \quad \text{donc} \quad \sigma(A) = \{-1, 0\}$$

et (S) n'est pas asymptotiquement stable puisque $\mathcal{R}e(\lambda_2) = 0$.

Nous remarquons que les matrices dont les valeurs propres admettent toutes des parties réelles négatives présentent une importance. Elles portent un nom.

Définition 14 :

On dit qu'une matrice A est de une matrice de Hurwitz si

$$\forall \lambda \in \sigma(A) \quad : \quad \mathcal{R}e(\lambda) < 0$$

2 - VITESSE DE CONVERGENCE

Lorsque le système est asymptotiquement stable nous avons $\lim\limits_{t \to +\infty} \|z(t)\| = 0$, ou encore

$$\lim_{t \to +\infty} z_k(t) = 0 \quad , \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

En pratique la convergence vers 0 peut être rapide ou lente ; ceci dépend de la nature des fonctions $z_k(t)$. Puisque ces composantes de l'états dépendent des valeurs propres de la matrice A alors ces valeurs propres "décident" de la vitesse de convergence vers 0 de ces composantes. En effet considérons l'exemple suivant

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{0,1} \\ z_{0,2} \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ admettant la solution

$$z(t) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} z_{0,1} \\ e^{t\lambda_2} z_{0,2} \end{pmatrix}$$

et supposons que $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Des essais numériques montrent que $e^{t\lambda_1} z_{0,1}$ convergent vers 0 plus vite que $e^{t\lambda_2} z_{0,2}$ pour différentes valeurs de $z_{0,1}$ et $z_{0,2}$. La raison est que λ_1 est plus de 0 que λ_2.
Ceci montre aussi que si λ_1 est très loin de 0 mais que λ_2 est proche de 0 alors la convergence de $z_2(t)$ est lente et donc celle du vecteur $z(t)$ aussi. Pour que la vitesse de convergence de $z(t)$ soit rapide il faut que la vitesse de chaque $z_k(t)$ soit rapide ce qui nécessite que λ_1 et λ_2 soient loin de 0. La vitesse de convergence dépend donc de la plus petite des distances de λ_1 et de λ_2 à 0 ; cette distance vaut

$$\max(\lambda_1, \lambda_2)$$

et ce nombre doit être minimum pour avoir une meilleure convergence.
Ceci reste vrai si les valeurs propres sont complexes, la distance vaut dans ce cas

$$\max\left[\mathscr{Re}(\lambda_1), \mathscr{Re}(\lambda_2)\right]$$

En effet avec $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ et l'hypothèse $\beta_1 < \beta_2 < 0$ nous avons

$$\left|z_k(t)\right| = \left|e^{t\lambda_k}\right| \left|z_{0,k}\right| = \left|e^{t\alpha_k + it\beta_k}\right| \left|z_{0,k}\right| = e^{t\alpha_k}\left|e^{it\beta_k}\right| \left|z_{0,k}\right| = e^{t\alpha_k}\left|z_{0,k}\right|$$

car $e^{t\alpha_k}$ est réel et $\left|e^{it\beta_k}\right| = 1$; donc la vitesse de convergence vers 0 de $z_k(t)$ ne dépend que de la partie réelle $\mathscr{Re}(\lambda_k)$ de λ_k et la vitesse de convergence dépend de la distance de cette partie réelle à 0.
Ce résultat est en encore vrai pour une matrice quelconque et fait l'objet de la proposition suivante :

Proposition 7 :

Pour un système asymptotiquement stable, et lorsque $z_0 \neq 0$, la vitesse de convergence de $\|z(t)\|$ vers 0 dépend du nombre (négatif)

$$\max_{1\leq k\leq n} \mathscr{Re}(\lambda_k)$$

Cette vitesse est d'autant grand que ce nombre est loin de 0.

Avec la condition $\max\limits_{1\leq k\leq n} \mathscr{Re}(\lambda_k) < 0$, nous avons donc 2 situations extrêmes :

- $\max\limits_{1\leq k\leq n} \mathscr{Re}(\lambda_k) \ll 0$ (nombre très loin de 0) : vitesse de convergence rapide ;
- $\max\limits_{1\leq k\leq n} \mathscr{Re}(\lambda_k) \approx 0$ (nombre très proche de 0) : vitesse de convergence très lente.

Exemples 3

1. Avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 1 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$$

nous obtenons les valeurs propres $\lambda_1 = -7$ et $\lambda_2 = -11$ ce qui donne pour vecteur d'état

$$\begin{aligned} z(t) = S(t) z_0 &= \exp\left(t\begin{pmatrix} -9 & -1 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} z_{0,1} \\ z_{0,2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(2z_{0,1} + z_{0,2}\right)e^{-7t} + \frac{1}{4}\left(2z_{0,1} - z_{0,2}\right)e^{-11t} \\ \frac{1}{2}\left(2z_{0,1} + z_{0,2}\right)e^{-7t} - \frac{1}{2}\left(2z_{0,1} - z_{0,2}\right)e^{-11t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui donne pour $z_{0,1} = z_{0.2} = 1$ et $t = 1$

$$z(1) = \begin{pmatrix} 6.8809 \times 10^{-4} \\ 1.3595 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La convergence est donc très rapide. Ceci est confirmé par la valeur de $\max\limits_{1\leq k\leq n} \mathscr{Re}(\lambda_k)$ qui vaut dans ce cas

$$\max_{1\leq k\leq n} \mathscr{Re}(\lambda_k) = -7 \ll 0$$

2. Avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 2 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

nous obtenons les valeurs propres $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{4}$; ce qui donne pour vecteur d'état

$$z(t) = S(t)\,z_0 = \exp\left(t\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 2 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} z_{0,1} \\ z_{0,2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{4}t} & 0 \\ 2te^{-\frac{1}{4}t} & e^{-\frac{1}{4}t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_{0,1} \\ z_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{0,1}e^{-\frac{1}{4}t} \\ \left(2tz_{0,1} + z_{0,2}\right)e^{-\frac{1}{4}t} \end{pmatrix}$$

qui donne pour $z_{0,1} = z_{0.2} = 1$ et $t = 1$

$$z(1) = \begin{pmatrix} 0.7788 \\ 2.3364 \end{pmatrix} \quad \text{qui est loin de} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La convergence est donc très lente. Ceci est confirmé par la valeur de $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \mathscr{R}e\left(\lambda_k\right)$ qui vaut dans ce cas

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathscr{R}e\left(\lambda_k\right) = -\frac{1}{4} \approx 0$$

3 - RÉCAPITULATIF

Exponentiellement stable	$\mathscr{R}e\left(\lambda_j\right) < 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$
------$\Updownarrow$------	------------
Asymptotique stable	$\mathscr{R}e\left(\lambda_j\right) < 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$
------$\Downarrow$------	------------
Stable	1) $\mathscr{R}e\left(\lambda_j\right) \leqslant 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$ 2) $\left\vert \begin{array}{c} \lambda_j \in \sigma(A) \text{ et } \mathscr{R}e\left(\lambda_j\right) = 0 \\ \Downarrow \\ \dim\ker\left(A - \lambda_j I_n\right) = \text{ordre de } \left(\lambda_j\right) \end{array}\right.$
------------	------------
Instable	

Nous nous limitons dans ce qui suit à la notion de la stabilité asymptotique.

VII - Détectabilité

Sommaire

1 - SYSTÈME DÉTECTABLE

Considérons le système régi par l'équation d'état

$$(S)\quad \begin{cases} z'(t) = Az(t) & t > t_0 \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

augmenté de l'observation

$$(E)\qquad y(t) = Cz(t) \qquad t > t_0$$

Définition 15 :

On dit que le système (S) *avec l'observation* (E) *est détectable si lorsque nous avons*

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$$

alors nous avons nécessairement

$$\lim_{t\to+\infty} z(t) = 0$$

On dit dans ce cas que le couple (A, C) *est détectable.*

Exemple 19

Soit le système

$$(S)\quad \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

avec la sortie

$$(E)\quad y(t) = z_1(t) + z_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} z(t)$$

Nous avons

$$z(t) = \exp\left(t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} z_{0,1} \\ z_{0,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(z_{0,1}+z_{0,2}\right)e^{3t} + \left(z_{0,1}-z_{0,2}\right)e^{-t} \\ \left(z_{0,1}+z_{0,2}\right)e^{3t} + \left(z_{0,2}-z_{0,1}\right)e^{-t} \end{pmatrix}$$

donc

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} z(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(z_{0,1}+z_{0,2}\right)e^{3t} + \left(z_{0,1}-z_{0,2}\right)e^{-t} \\ \left(z_{0,1}+z_{0,2}\right)e^{3t} + \left(z_{0,2}-z_{0,1}\right)e^{-t} \end{pmatrix} = \left(z_{0,1}+z_{0,2}\right)e^{3t}$$

et $y(t)$ ne peut tendre vers 0 quand tend vers $+\infty$ que sous la condition

$$z_{0,1} + z_{0,2} = 0$$

Supposons que cette condition est vérifiée; alors l'état $z(t)$ se réduit à

$$z(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(z_{0,1} - z_{0,2}\right) e^{-t} \\ \left(z_{0,2} - z_{0,1}\right) e^{-t} \end{pmatrix}$$

qui tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Ce système, avec l'observation donnée, est donc détectable. □

Nous avons alors les résultats suivants :

Proposition 8 :

1. *Tout système observable est détectable.*
2. *Tout système asymptotiquement stable est détectable.*

Remarque 10

Ces conditions ne sont pas nécessaires pour qu'un système soit détectable. On peut trouver des systèmes détectables non observables ou non asymptotiquement stables. C'est le cas pour le système de l'exemple précédent.

2 - CARACTÉRISATION

La détectabilité est une propriété pratique qui est liée à la nature du système et son observation. Nous donnons ci-dessous une technique algébrique (calculatoire) pour tester si un système est détectable ou pas.

Théorème 5 :

Le système (S) *avec l'observation* (E) *est détectable si, et seulement si, il existe une matrice* $H \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ *telle que* $A - HC$ *soit une matrice de Hurwitz :*

$$\mathcal{Re}(\lambda) < 0 \quad , \quad \forall \lambda \in \sigma(A - HC)$$

Dans la pratique nous n'utilisons pas la définition mais cette caractérisation algébrique.

Exemple 20

Reprenons le système de l'exemple précédent avec la même sortie

$$(S) \quad \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \quad , \quad (E) \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

ce qui correspond à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisque $n = 2$ et $q = 1$, la matrice H doit être de type $(n,q) = (2,1)$. Posons alors

$$H = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Nous obtenons

$$A - HC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 2-\alpha \\ 2-\beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Cette matrice admet pour valeurs propres $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 3-\beta-\alpha$. Nous avons déjà $\lambda_1 < 0$, et il y a un choix infini des α, β qui donnent $\lambda_2 < 0$. Prenons $\alpha = 4$ et $\beta = 0$ ce qui donne $H = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A - HC = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ce système est donc détectable. Remarquons qu'il n'est pas observable car la matrice d'observabilité

$$\mathrm{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

est de rang 1; il n'est pas asymptotiquement stable non plus puisque les valeurs propres de A sont 3 et -1. □

Remarque 11

Dans la recherche de la matrice on doit pas trouver toutes les matrices H qui vérifient la propriété du théorème mais trouver seulement une matrice qui marche.

3 - SYSTÈMES NON OBSERVABLES

Reprenons le système

$$\begin{array}{llcll} (\mathrm{S}) & z'(t) & = & Az(t) & t \geqslant t_0 \\ (\mathrm{E}) & y(t) & = & Cz(t) & t \geqslant t_0 \end{array}$$

et considérons un changement d'état de la forme

$$x(t) = Pz(t) \qquad \text{avec } P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ inversible}$$

Alors $x(t)$ est l'état du système équivalent régi par

$$\begin{array}{llcll} (\mathrm{S}') & x'(t) & = & A'x(t) & t \geqslant t_0 \\ (\mathrm{E}') & y(t) & = & C'x(t) & t \geqslant t_0 \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} A' = PAP^{-1} \\ C' = CP^{-1} \end{array}$$

On dit alors que les systèmes $(\mathrm{S})+(\mathrm{E})$ et $(\mathrm{S}')+(\mathrm{E}')$ sont équivalents.

Proposition 9 :

1. *Le système $(\mathrm{S})+(\mathrm{E})$ est asymptotiquement stable si et seulement si le système $(\mathrm{S}')+(\mathrm{E}')$ est asymptotiquement stable.*
2. *Le système $(\mathrm{S})+(\mathrm{E})$ est observable si et seulement si le système $(\mathrm{S}')+(\mathrm{E}')$ est observable.*
3. *Le système $(\mathrm{S})+(\mathrm{E})$ est détectable si et seulement si le système $(\mathrm{S}')+(\mathrm{E}')$ est détectable.*

En effet la première équivalence résulte de $\mathrm{Sp}\left(PAP^{-1}\right) = \mathrm{Sp}(A)$. La deuxième résulte des égalités

$$\mathrm{O}' = \begin{bmatrix} C' \\ C'A' \\ \vdots \\ C'(A')^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CP^{-1} \\ CP^{-1}\left(PAP^{-1}\right) \\ \vdots \\ CP^{-1}\left(PAP^{-1}\right)^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CP^{-1} \\ CP^{-1}PAP^{-1} \\ \vdots \\ CP^{-1}P(A)^{n-1}P^{-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} CP^{-1} \\ CAP^{-1} \\ \vdots \\ C(A)^{n-1}P^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ C(A)^{n-1} \end{bmatrix} P^{-1} = \mathrm{O}P^{-1}$$

qui donnent $\mathrm{rg}\left(\mathrm{O}'\right) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{O}P^{-1}\right) = \mathrm{rg}(\mathrm{O})$. Enfin la troisième équivalence résulte des égalités

$$A' - H'C' = PAP^{-1} - H'\left(CP^{-1}\right) = P\left(A - P^{-1}H'C\right)P^{-1} = P(A-HC)P^{-1}$$

avec $H = P^{-1}H'$, qui donnent $\mathrm{Sp}\left(A' - H'C'\right) = \mathrm{Sp}\left(P(A-HC)P^{-1}\right) = \mathrm{Sp}(A-HC)$ (matrices semblables). Ce qui permet de voir que si H est valable pour (S) (pour avoir la détectabilité) alors H' est valable pour (S') et inversement.

Proposition 10 :

Soit $r = \mathrm{rg}(\mathrm{O})$. Il existe une matrice (non unique) P inversible d'ordre n telle que A' et C' soient de la forme

$$A' = \begin{bmatrix} A_1' & \mathrm{O} \\ E & F \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} C_1' & \mathrm{O} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} A_1' \in \mathscr{M}_r(\mathbb{R}) \\ C_1' \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{R}) \end{array}$$

et le couple $\left(A_1', C_1'\right)$ est observable.

Remarques 1

1. Pour certaines matrices P on obtient la forme de A' et C' mais pas la détectabilité de $\left(A_1', C_1'\right)$. Ces matrices ne sont pas concernées par la proposition.
2. Il se peut que les matrices A et C soient déjà de la forme voulue A' et C' ; ce cas correspond au choix $P = \mathrm{I}_n$.

Décomposons alors le vecteur $x(t) \in \mathbb{R}^n$ de la manière suivante

$$x(t) = \begin{bmatrix} \sigma(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} \quad , \quad x(t_0) = \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \xi_0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \sigma(t), \sigma_0 \in \mathbb{R}^r \text{ et } \xi(t), \xi_0 \in \mathbb{R}^{n-r}$$

Alors

$$(\mathrm{S}'') \; \left\{ \begin{array}{lcl} \sigma'(t) & = & A_1'\sigma(t) \\ \sigma(t_0) & = & \sigma_0 \end{array} \right. \quad , \quad (\mathrm{E}'') \quad y(t) = C_1'\sigma(t)$$

et

$$(\mathrm{S}''') \; \left\{ \begin{array}{lcl} \xi'(t) & = & F'\xi(t) + E\sigma(t) \\ \xi(t_0) & = & \xi_0 \end{array} \right.$$

Théorème 6 :
Avec P vérifiant la proposition 10, le système $(\mathrm{S})+(\mathrm{E})$ *est détectable si, et seulement si, le système* $\left(\mathrm{S}'''\right)$ *est asymptotiquement stable.*

On résume ceci par la phrase suivantes : *Un système est détectable si et seulement si les modes non observables sont asymptotiquement stables.*

VIII - Observateurs et estimateurs asymptotiques

Sommaire

1 - INTRODUCTION

Considérons le système régi par l'équation d'état

$$(S) \quad \begin{cases} z'(t) = Az(t) & t > t_0 \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

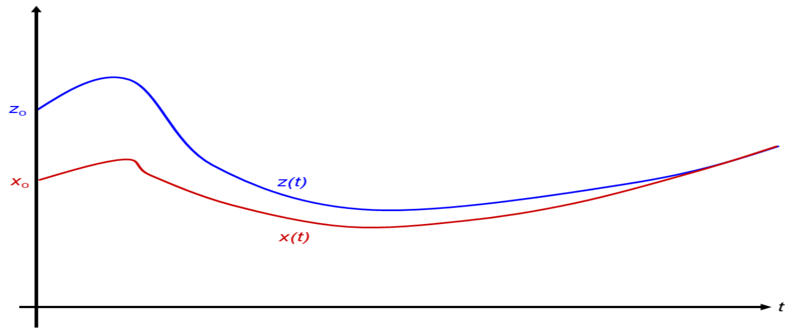
augmenté de l'observation

$$(E) \quad y(t) = Cz(t) \qquad t > t_0$$

et on suppose que l'état n'est pas connu.

Objectif : Construire un vecteur variable $x(t)$ qui permet d'approximer asymptotiquement l'état du système. Il doit donc vérifier :

1. $x(t) \approx z(t)$ pour t assez grand si nécessaire ;
2. la précision augmente avec le temps (l'erreur diminue avec t).



De telles conditions sont vérifiées si on a

$$\lim_{t \to +\infty} \|z(t) - x(t)\| = 0$$

et $x(t)$ sera une estimation asymptotique de l'état $z(t)$; c'est à dire $x(t)$ une approximation de $z(t)$ quand t est très grand.

Les choix du vecteur $x(t)$ sont multiples. Nous étudions dans ce cours 3 choix :

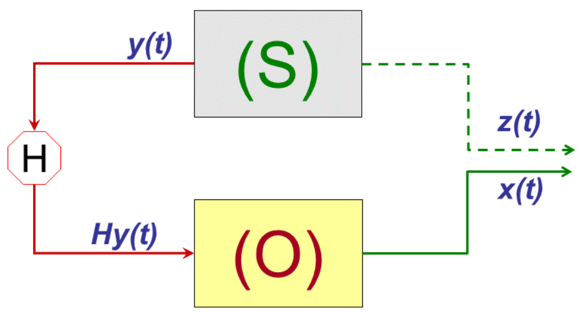
- $x(t)$ état d'un certain système appelé *observateur* ;
- $x(t)$ état d'un *K-observateurs*. Les *K-observateurs* généralisent les observateurs ;
- $x(t)$ un *estimateur asymptotique*.

2 - OBSERVATEUR DE LUENBERGER

Soit un système observé

$$\begin{array}{lrcl} (S) & z'(t) & = & Az(t) \\ (E) & y(t) & = & Cz(t) \end{array}$$

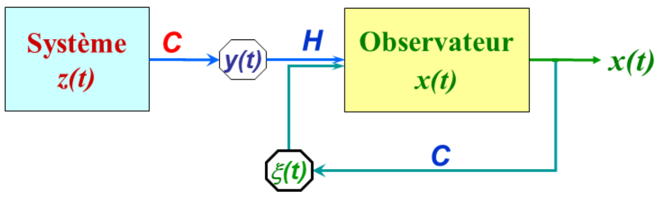
Un observateur est un système théorique qui, une fois "alimenté" par la sortie $y(t)$ du système (S) prend un état qui s'approche de l'état du système et avec le temps se confond presque avec lui. Il est schématisé par la figure ci-dessous :



L'idée des observateurs a été introduite par Luenberger en 1964.
Soit une matrice H d'ordre (n,q) donnée. On considère un système régi par les équations

$$\begin{array}{lrcl} (\mathscr{O}) & x'(t) & = & Ax(t) + H\left[y(t) - \xi(t)\right] \\ (\mathscr{E}) & \xi(t) & = & Cx(t) \end{array}$$

de solution $x(t) \in Z = \mathbb{R}^n$. L'équation $(\mathscr{O})$ utilise la sortie du système (S) ce qui est schématisé par la figure suivante :



Définition 16 :

- *Le système $(\mathscr{O}) + (\mathscr{E})$ est appelé un observateur de Luenberger ;*
- *La matrice $H \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ est appelée matrice gain de cet observateur.*

Nous avons aussi

Définition 17 :

On dit que le système $(\mathscr{O}) + (\mathscr{E})$ est un observateur pour le système observé (S) + (E) si son état $x(t)$ constitue une estimation pour l'état $z(t)$ du système (S) ou encore si

$$\lim_{t\to+\infty} \|z(t) - x(t)\| = 0 \tag{2.1}$$

Reprenons les équations qui définissent l'observateur de Luenberger ; elles peuvent être présentées différemment. En effet l'expression de $\xi(t)$, par l'équation $(\mathscr{E})$, injectée dans l'équation $(\mathscr{O})$ donne

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + H\left[y(t) - Cx(t)\right] = Ax(t) + Hy(t) - HCx(t) \\ &= (A - HC)\,x(t) + Hy(t) \end{aligned}$$

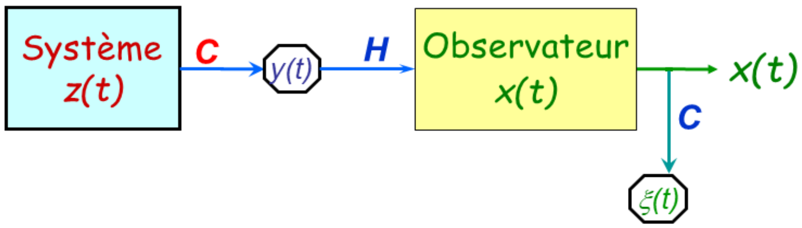
et devient alors indépendante de l'observation $\xi(t)$:

$$(\mathscr{O}) \quad x'(t) = (A - HC)\,x(t) + Hy(t)$$

Elle dépend seulement de l'observation de notre système observé (S) + (E) et d'une donnée initiale arbitraire $x(t_0) = x_0$ qu'on lui donne. Elle s'écrit alors comme une équation d'état

$$(\mathscr{O}) \quad \begin{cases} x'(t) = (A - HC)\,x(t) + Hy(t) & , \quad t > t_0 \\ x(t_0) = x_0 & x_0 \in Z = \mathbb{R}^n \end{cases}$$

dont la solution $x(t)$ est appelé état de l'observateur. On en déduit que l'observateur $(\mathscr{O})$ est un système dynamique contrôlé qui admet pour matrice modélisant sa dynamique $(A-HC)$ et pour contrôle la sortie $y(t)$ de notre système (avec H devant) :



Exemple 21

Soit le système observé

$$(S)\quad \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \qquad (E)\quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

Alors la matrice $H = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ permet de construire un observateur de Luenberger. En effet

$$A - HC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donc l'observateur de Luenberger admet pour équation d'état $x'(t) = (A-HC)\,x(t) + Hy(t)$, soit

$$(\mathscr{O})\quad \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} y(t)$$

Pour montrer que c'est un observateur pour notre système il suffit de montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} \|z(t) - x(t)\| = 0$. Considérons le vecteur

$$e(t) = \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Il vérifie

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e_1'(t) \\ e_2'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{cases} e_1'(t) = -e_1(t) \\ e_2'(t) = -e_2(t) \end{cases}$$

de solutions, en fonction des données en $t_0 = 0$

$$e_1(t) = e^{-t} e_1(0) \quad , \quad e_2(t) = e^{-t} e_2(0)$$

Quand t tend vers $+\infty$, $e_1(t)$ et $e_2(t)$ tendent vers 0 ; ce qui montre que $(\mathscr{O})$ est un observateur pour le système donné. □

Reprenons l'observateur de Luenberger

$$(\mathscr{O})\quad \begin{cases} x'(t) = (A-HC)\,x(t) + Hy(t) & , \quad t > t_0 \\ x(t_0) = x_0 & x_0 \in Z = \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Pour que $(\mathscr{O})$ soit un observateur de Luenberger pour (S) il suffit de choisir H de telle sorte que la propriété (2.1) soit vraie. Introduisons l'erreur d'estimation

$$e(t) = z(t) - x(t) \quad , \quad t \geqslant t_0$$

(2.1) équivaut à

$$\lim_{t\to+\infty} \|e(t)\| = 0 \tag{2.2}$$

Or la dérivation de $e(t)$ donne

$$\begin{aligned} e'(t) = z'(t) - x'(t) &= Az(t) - (A-HC)\,x(t) - Hy(t) \\ &= Az(t) - (A-HC)\,x(t) - HCz(t) \\ &= (A-HC)\,z(t) - (A-HC)\,x(t) \\ &= (A-HC)\,[z(t) - x(t)] = (A-HC)\,e(t) \end{aligned}$$

soit encore

$$e'(t) = (A-HC)\,e(t) \quad , \quad t \geqslant t_0 \tag{2.3}$$

Cette équation montre que si $e(t)$ est l'état d'un système asymptotiquement stable alors $\lim\limits_{t\to+\infty} \|e(t)\| = 0$ pour tout donnée initiale $e(t_0)$. Or la stabilité asymptotique de (2.3) se caractérise par

$$\mathscr{R}e(\lambda) < 0 \quad , \quad \forall \lambda \in \sigma(A-HC)$$

Nous retrouvons la condition donnée au théorème 5 et qui caractérise la détectabilité du système (S). D'où :

Proposition 11 :
Si le système observé (S) + (E) *est détectable alors on peut construire un observateur de Luenberger et la matrice H assurant la détectabilité est la matrice de gain pour l'observateur de Luenberger.*

La matrice H construite pour prouver qu'un système est détectable peut donc être utilisée pour construire un observateur de Luenberger. Voyons cela sur un exemple.

Exemple 22
Reprenons le système observé de l'exemple précédent

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{E}) \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

Ce système est détectable. En effet en prenant

$$H = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

nous obtenons

$$A - HC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & -\beta \end{pmatrix}$$

de valeurs propres $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1-\beta-\alpha$. Pour $\alpha = \beta = 1$ nous obtenons $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$; donc $\mathscr{R}e(\lambda_1) = \mathscr{R}e(\lambda_2) < 0$ et

$$A - HC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons que (S) admet un observateur de *Luenberger* qui admet cette matrice H pour matrice de gain. Il admet donc pour équation ($A-HC$ étant déjà calculée)

$$(\mathscr{O}) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} y(t) \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

□

3 - OBSERVATEUR IDENTITÉ

Supposons que le système (S) est à la fois observé et contrôlé

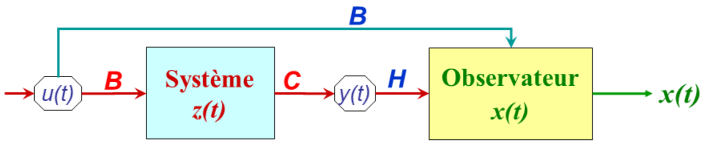
$$\begin{array}{lll} (\mathrm{S}) & z'(t) & = & Az(t) + Bu(t) \\ (\mathrm{E}) & y(t) & = & Cz(t) \end{array}$$

alors l'observateur de Luenberger peut être défini dans ce cas par

$$\begin{array}{llll} (\mathscr{O}) & x'(t) & = & Ax(t) + H\big(y(t) - \xi(t)\big) + Bu(t) \\ (\mathscr{E}) & \xi(t) & = & Cx(t) \end{array}$$

C'est la forme de la section précédente à laquelle on a ajouté le terme de contrôle $Bu(t)$. Elle peut donc être mise, comme on l'a fait auparavant, sous la forme suivante :

$$(\mathscr{O}) \quad \begin{cases} x'(t) = (A - HC)\,x(t) + Hy(t) + Bu(t) \quad , \quad t > t_0 \\ x(t_0) = x_0 \qquad x_0 \in Z = \mathbb{R}^n \end{cases}$$



Définition 18 :

Le système $(\mathscr{O})$ est appelé un observateur identité et H sa matrice de gain. On dit aussi aussi que c'est un observateur asymptotique.

Nous avons aussi :

Définition 19 :

On dit que le système $(\mathscr{O})$ est un observateur identité pour le système (S) (ou un observateur asymptotique) si

$$\lim_{t \to +\infty} \|z(t) - x(t)\| = 0 \tag{3.1}$$

$(\mathscr{O})$ est donc un observateur pour le système (S) si la matrice $A - HC$ est une matrice de Hurwitz, ce qui peut être garanti si notre système est détectable. La matrice obtenue lors de la vérification de la détectabilité de (S) peut être utilisée, comme avant, pour matrice de gain de $(\mathscr{O})$.

Proposition 12 :

Si le système observé et contrôlé (S) + (E) *est détectable alors on peut construire un observateur identité; sa matrice de gain étant la matrice H assurant la détectabilité du système.*

4 - APPLICATIONS

Nous allons montrer comment utiliser un observateur pour estimer l'état du système, pour t assez grand, et ensuite comment choisir l'observateur pour que l'erreur de l'estimation soit plus faible.

4.1 Estimation asymptotique

Supposons que :

- Nous disposons d'un observateur identité pour le système (S)

$$(\mathscr{O}) \quad \begin{cases} x'(t) = (A - HC)\,x(t) + Hy(t) + Bu(t) \quad , \quad t > t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

- Nous disposons des mesures

$$y^{\mathrm{m}}(t) \quad , \quad t_0 \leqslant t \leqslant T$$

  prise sur le système pendant l'intervalle de temps $[t_0, T]$.

Alors, en injectant ces mesures dans l'équation de l'observateur, en fixant une valeur quelconque de la donnée initiale x_0 et en résolvant cette équation nous obtenons l'état de l'observateur

$$x(t) = S_{A-HC}(t)\,x_0 + \int_{t_0}^{t} S_{A-HC}(t-s)\,H y^{\mathrm{m}}(s)\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} S_{A-HC}(t-s)\,Bu(s)\,\mathrm{d}s$$

où $S_{A-HC}(t)$ désigne le semi-groupe engendré par $A - HC$. $x(t)$ constitue alors une approximation asymptotique de l'état inconnu $z(t)$, dans le sens que l'erreur $x(t) - z(t)$ diminue lorsque t augmente pour atteindre 0 pour t infini. Ceci est vrai pour toute donnée initiale x_0. En général on prend $x_0 = 0$ ce qui donne pour équation de l'observateur

$$(\mathscr{O}) \quad \begin{cases} x'(t) = (A - HC)\,x(t) + H y^{\mathrm{m}}(t) + Bu(t) \quad , \quad t > t_0 \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

Nous faisons donc les étapes suivantes pour déterminer une valeur approchée de l'état du système $z(t)$, pour assez grand :

Algorithme

1. Choisir T assez grand.
2. Prendre des mesures sur $[t_0, T]$ ce qui donne la mesure $y^{\mathrm{m}}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$.
3. Calculer l'état de l'observateur $(\mathcal{O})$ par l'expression

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} S_{A-HC}(t-s)\, H y^{\mathrm{m}}(s)\, \mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} S_{A-HC}(t-s)\, Bu(s)\, \mathrm{d}s$$

4. Pour t assez grand utiliser $x(t)$ au lieu de $z(t)$.

Exemple 23

Considérons le système observé

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad y(t) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Ce système est détectable. En effet pour déterminer H de type $(2,1)$ telle que $A-HC$ soit de Hurwitz, on pose $H = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ ce qui donne

$$A - HC = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+1 & -4\alpha-8 \\ \beta-1 & 2-4\beta \end{pmatrix}$$

pour $\beta = 1$ cette matrice est triangulaire et vaut

$$A - HC = \begin{pmatrix} \alpha+1 & -4\alpha-8 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

donc $\sigma(A-HC) = \{\alpha+1, -2\}$. Pour que $A-HC$ soit de Hurwitz on doit avoir $\alpha < -1$; prenons $\alpha = -3$ Ceci donne $H = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A - HC = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. L'équation $x'(t) = (A-HC)\,x(t) + Hy(t)$ devient

$$(\mathcal{O}) \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} y(t) \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le semi-groupe associé à $A-HC$ vaut

$$S_{A-HC}(t) = \exp\left(t \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 4te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

d'où l'expression de l'observateur

$$x(t) = \int_0^t S_{A-HC}(t-s)\, Hy(s)\, \mathrm{d}s = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2(t-s)} & 4te^{-2(t-s)} \\ 0 & e^{-2(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} y(s)\, \mathrm{d}s$$

En prenant des mesures et avec la mesure obtenue suivante

$$y^{\mathrm{m}}(t) = e^t \quad , \quad 0 < t < T$$

nous obtenons

$$x(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2(t-s)} & 4te^{-2(t-s)} \\ 0 & e^{-2(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} y^{\mathrm{m}}(s)\, \mathrm{d}s$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2(t-s)} & 4te^{-2(t-s)} \\ 0 & e^{-2(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^s \mathrm{d}s = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}te^t - \frac{4}{3}te^{-2t} - e^t + e^{-2t} \\ \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t} \end{pmatrix}$$

et de là les composantes de l'observateur

$$x_1(t) = \frac{4}{3}te^t - \frac{4}{3}te^{-2t} - e^t + e^{-2t} \quad , \quad x_2(t) = \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t}$$

Nous obtenons donc des approximations des composantes de l'état par

$$z_1(t) \approx \frac{4}{3}te^t - \frac{4}{3}te^{-2t} - e^t + e^{-2t} \quad , \quad z_2(t) \approx \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t}$$

Approximations à utiliser seulement pour t assez grand (et donc un temps de mesures $T - t_0$ assez grand).$\square$

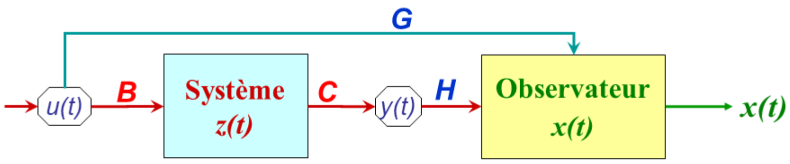
Forme plus générale : L'équation de tout observateur peut être vue comme un cas particulier de la forme suivante

$$(\mathscr{A}) \quad \begin{cases} x'(t) = Fx(t) + Hy(t) + Gu(t) \quad , \quad t \geqslant t_0 \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où F, H et G sont des matrices données avec

$$F \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \quad , \quad H \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{R}) \quad , \quad G \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

Si on arrive à construire un triplet de matrices (F, H, G) tel que la propriété (3.1) soit vraie pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ alors $(\mathscr{A})$ est un observateur ; cette forme peut s'avérer utile pour des systèmes non détectables. Cette nouvelle forme d'observateur pour notre système est schématisée par la figure suivante :



Remarque 12

L'observateur $(\mathscr{A})$ est de dimension n ($x(t) \in \mathbb{R}^n$) ; on verra dans le chapitre qui suit des systèmes de ce genre mais de dimensions différentes de n (avec des matrices de dimensions correspondantes).

4.2 Choix de l'observateur

L'approximation $z(t) \approx x(t)$ est d'autant plus bonne que le temps t est grand. Voyons le comportement de la norme de l'erreur

$$e(t) = z(t) - x(t)$$

entre l'état du système et l'état de l'observateur. Avec $z(t)$ et $x(t)$ solutions de

$$z'(t) = Az(t) + Bu(t) \quad , \quad x'(t) = (A - HC)x(t) + Hy(t) + Bu(t)$$

l'erreur $e = z - x$ vérifie $e'(t) = (A - HC)e(t)$ donc

$$e(t) = e^{t(A-HC)} e(t_0)$$

Puisque $A - HC$ est Hurwitz alors $e(t)$ tend vers 0. Or nous avons vu au chapitre de la stabilité (page 28) que la vitesse de convergence vers 0 est d'autant plus grande que les valeurs propres sont loin de 0 et que la vitesse de convergence dépend du nombre

$$\max_{\lambda \in \sigma(A-HC)} \mathscr{R}e(\lambda)$$

Si pour une matrice H construite ce nombre est proche de 0, on serait tenté de la choisir différemment pour qu'il se déplace plus à gauche.

Proposition 13 :

Soit H telle que $A - HC$ est de Hurwitz de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Alors le taux de convergence de $\|z(t) - x(t)\|$ vers 0 dépend de

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant n} \operatorname{Re}(\lambda_k) \qquad \text{(qui est à gauche de 0)}$$

- *Si $\max_{0 \leqslant k \leqslant n} \operatorname{Re}(\lambda_k) \approx 0$ alors $\|z(t) - x(t)\|$ tend vers 0 lentement ;*
- *Si $\max_{0 \leqslant k \leqslant n} \operatorname{Re}(\lambda_k) \ll 0$ alors $\|z(t) - x(t)\|$ tend vers 0 rapidement.*

L'idéal serait, en se donnant des valeurs arbitraires $v_1, \ldots, v_n$ de réels loin de 0, de pouvoir trouver une matrice H pour laquelle les valeurs propres de $A - HC$ sont exactement $\lambda_1 = v_1, \ldots, \lambda_n = v_n$. Pour que ceci soit possible il faudrait, sans que ceci soit suffisant, que toutes les valeurs propres de $A - HC$ changent quand on change H. Si une seule valeur propre ne varie pas avec H alors le nombre $\max_{\lambda \in \sigma(A-HC)} \mathscr{R}e(\lambda)$ ne peut être déplacé à gauche. C'est le cas pour le système observé défini par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui donne pour $H = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$$A - HC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 2-\alpha \\ 2-\beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

$A - HC$ est de Hurwitz si $\alpha + \beta > 3$ puisque ses valeurs propres sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 3 - \beta - \alpha$. Nous remarquons alors que la valeur propre $\lambda_1 = -1$ ne dépend ni de α ni de β ; le nombre $\max\limits_{\lambda \in \sigma(A-HC)} \mathscr{Re}(\lambda)$ est donc toujours $\geqslant -1$ puisque

$$\max_{\lambda \in \sigma(A-HC)} \mathscr{Re}(\lambda) = \max(\lambda_1, \lambda_2) = \max\left(-1, 3 - \beta - \alpha\right) \geqslant -1 \quad , \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

La vitesse de convergence ne peut donc être dans ce cas améliorée au delà d'une certaine valeur.
Le théorème suivant spécifie la classe de systèmes pour lesquels on peut atteindre des valeurs propres qu'on désire et donc la valeur qu'on désire pour le nombre $\max\limits_{\lambda \in \sigma(A-HC)} \mathscr{Re}(\lambda)$.

Théorème 7 :
Les valeurs propres de $A - HC$ peuvent être fixées arbitrairement si et seulement si la paire (A, C) est observable.

Exemple 24

Considérons un système observé pour lequel on a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ et soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ 2 nombres fixés vérifiant

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \lambda_1 \notin \mathbb{R} \text{ et } \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$$

(condition logique pour qu'ils puissent être des valeurs propres d'une matrice d'ordre 2). Alors il est possible de trouver H telle que $\sigma(A - HC) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$. En effet en prenant

$$H = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 2 \\ -2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 - 1 \end{pmatrix}$$

H est réelle et on obtient

$$A - HC = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_2 - 2 & -2\lambda_1 - 2\lambda_2 - 4\lambda_1\lambda_2 - 1 \\ (\lambda_1 + 2)(\lambda_2 + 2) & 4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 2 \end{pmatrix}$$

qui admet pour polynôme caractéristique $P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ donc de valeurs propres λ_1 et λ_2.
Remarquons que ce système est observable car sa matrice d'observabilité $\mathscr{O} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 2 ; l'hypothèse du théorème est vérifiée. $\square$

Usage du théorème : Si le système est observable (et non seulement détectable) alors

1. On choisit des nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ loin de 0 : $\lambda_j \ll 0$. En général on les prend tous égaux : $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \lambda \ll 0$.
2. Déterminer H tel que $\sigma(A - HC) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.
3. Construire l'observateur identité

$$(\mathscr{O}) \quad \begin{cases} x'(t) = (A - HC)\,x(t) + H y^{\mathrm{m}}(t) + Bu(t) & , \quad t > t_0 \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

L'approximation de $z(t)$ par $x(t)$ est alors assez bonne pour t pas très grand et parfois même faible.

Remarque 13

Tout ceci est parti de la propriété de la fonction réelle $f(t) = e^{\beta t}$ $(\beta < 0)$ qui tend 0 quand $t \to +\infty$ et qui, pour $\beta \ll 0$ (loin de 0), devient presque nulle pour des valeurs faibles de t. C'est le cas pour $\beta = -11 \ll 0$ et $t = 0.5'$ qui donne

$$f(2) = 4.0868 \times 10^{-3}$$

alors que pour $\beta = -\frac{1}{4} \approx 0$ la valeur de $f(t)$ n'est faible que pour t grand. Pour atteindre la même valeur 4.0868×10^{-3} du cas précédent il faut prendre $t \geqslant 22$!

Cette propriété se généralise aux exponentielles des matrices et apparait sur les parties réelles de leurs valeurs propres.

5 - LES K-OBSERVATEURS

Parfois en pratique on peut n'avoir besoin que des valeurs de quelques composantes de l'état. Si le système est de grande dimension ou de s'il n'est pas détectable, la manipulation de l'observateur s'il existe, peut s'avérer lourd ou impossible. La question est : peut-on adapte ce qu'on a vu précédemment pour estimer certaines composantes de l'état et non toutes les composantes à travers l'estimation de l'état ? La réponse est donnée par les K-observateurs.
Soit le système observé

$$(\mathrm{S})\quad \begin{cases} z'(t) = Az(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cz(t) \end{cases}$$

supposé de dimension $n \geqslant 3$ et supposons qu'on désire estimer les composantes $z_1(t), z_2(t)$. Ceci revient à déterminer le vecteur $\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$. Or ce vecteur est image de l'état par ne certaines matrice K

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} = Kz(t)$$

avec K de dimension $(2,n)$. Notre problème est donc d'estimer le vecteur $Kz(t)$. Généralisons cette forme ; le problème est alors pour K une matrice de type (r,n) (r entier $< n$) d'estimer $Kz(t)$. Tous ce qui a été développé aux sections précédentes correspond au choix $r = n$ et $K = \mathrm{I}_n$. C'est donc une généralisation de l'estimation de l'état à l'estimation d'une image de l'état.
Remarquons que si $r = n$ et K est inversible alors l'estimation de $w(t) = Kz(t)$ équivaut à celle de $z(t)$ puisque $z(t) = K^{-1}w(t)$. Donc dans les applications nous avons presque toujours $r < n$ ou $r = n$ et K non inversible.

Considérons un système de dimension r et régi par l'équation

$$(\mathscr{O})\quad \begin{cases} x'(t) = Fx(t) + Hy(t) + Gu(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^r \end{cases}$$

avec F, H, G données aux dimensions adéquates.

Définition 20 :
Soit K une matrice de type (r,n). On dit que le système $(\mathscr{O})$ est un K–observateur asymptotique pour (S) *si*

$$\lim_{t\to+\infty} \|x(t) - Kz(t)\| = 0$$

Lorsque $K = I_n$ (et donc $r = n$) $(\mathscr{O})$ est un observateur identité ou un observateur asymptotique.
Lorsque $K = I_n$ et $u = 0$, $(\mathscr{O})$ est un observateur de Luenberger.

Exemple 25
Soit le système observé évoluant dans $\mathbb{R}^2$ $(n = 2)$ régi par

$$(\mathrm{S})\ \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (\mathrm{E})\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

Avec $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ le système suivant, de dimension $r = 1$,

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 3y(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

est un K–observateur pour (S). Il permet d'estimer la première composante de l'état. En effet d'une part

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \exp\left(t\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} z_{0,1} \\ z_{0,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (z_{0,1} - z_{0,2})\, e^{-t} + (z_{0,1} + z_{0,2})\, e^{5t} \\ (z_{0,2} - z_{0,1})\, e^{-t} + (z_{0,1} + z_{0,2})\, e^{5t} \end{pmatrix}, \quad t \geqslant 0$$

et d'autre part

$$x(t) = x_0 e^{-t} + \frac{1}{2}\left(e^{5t} - e^{-t}\right)\left(z_{0,1} + z_{0,2}\right) \quad , \quad t \geqslant 0$$

donc

$$x(t) - Kz(t) = x(t) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = x(t) - z_1(t) = \left(x_0 - z_{0,1}\right) e^{-t}$$

et alors $\lim\limits_{t \to +\infty} |x(t) - Kz(t)| = 0$.
Dans ce K–observateur nous avons $F = -1$, $H = 3$ et $G = 0$. □

Nous donnons des conditions suffisantes concernant les matrice F, H et G pour que le système $(\mathscr{O})$ soit un K–observateur pour le système (S).

Théorème 8 :

Sous les hypothèses

1. $FK = KA - HC$
2. $G = KB$
3. $\forall \lambda \in \sigma(F) : \mathscr{R}e(\lambda) < 0$

le système

$$(\mathscr{O}) \quad \begin{cases} x'(t) = Fx(t) + Hy(t) + Gu(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^r \end{cases}$$

est un K–observateur asymptotique de (S).

En effet $e(t) = x(t) - Kz(t)$ vérifie $e'(t) = Fe(t)$ système asymptotiquement stable donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \|e(t)\| = 0$ ou encore

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t) - Kz(t)\| = 0$$

Exemple 26

Pour le système

$$(\mathrm{S}) \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} z(t)$$

on considère le système

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} y(t)$$

C'est un K–observateur asymptotique de (S) avec $K = \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$ car

1. $F = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ vérifie $\mathscr{R}e(\lambda) < 0 \; : \; \forall \lambda \in \sigma(F)$;
2. les matrices A, C, F, H et K vérifient $KA - FK = HC$.
   ce qui donne, d'après le théorème, $\lim\limits_{t \to +\infty} \|x(t) - Kz(t)\| = 0$. Remarquons que, grâce à
   $$Kz(t) = \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ 12 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(3z_1(t) - 2z_2(t)) \\ 4(3z_1(t) - 2z_2(t)) \end{pmatrix}$$
   que la connaissance de $Kz(t)$ équivaut à celle de la quantité scalaire $3z_1(t) - 2z_2(t)$.
   $$\begin{pmatrix} 5(3z_1(t) - 2z_2(t)) \\ 4(3z_1(t) - 2z_2(t)) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$
   équivaut à
   $$3z_1(t) - 2z_2(t) \approx \frac{1}{5} x_1(t) \quad \text{et} \quad 3z_1(t) - 2z_2(t) \approx \frac{1}{4} x_2(t) \quad \text{pour } t \text{ assez grand}$$

□

6 - ESTIMATEUR ASYMPTOTIQUE

Supposons qu'on ne peut construire un observateur identité pour estimer l'état $z(t)$ mais que, revanche, on dispose d'un K–observateur de dimension $r < n$ qui estime $Kz(t)$. Alors il est possible, dans certain cas, d'utiliser ce K–observateur pour construire une fonction vectorielle $w(t)$ qui estime l'état $z(t)$ du système.

Reprenons le système observé

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} z'(t) = Az(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cz(t) \end{cases}$$

Définition 21 :

*Une fonction vectorielle $w(t) \in \mathbb{R}^n$ est appelée un **estimateur asymptotique** de l'état du système si*

$$\lim_{t\to+\infty} \|w(t) - z(t)\| = 0$$

En général, on prend des estimateurs asymptotiques de la forme

$$w(t) = Sx(t) + Ry(t)$$

où $x(t)$ est l'état du K–observateur

$$(\mathscr{O}) \quad \begin{cases} x'(t) = Fx(t) + Hy(t) + Gu(t) & t \geqslant t_0 \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^r \end{cases}$$

et S et R des matrices données de dimensions

$$S \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{R}) \qquad , \qquad R \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{R})$$

le théorème suivant donne les conditions suffisantes pour que $w(t)$ soit un estimateur asymptotique de l'état de (S).

Théorème 9 :

Sous les hypothèses suivantes

1. $FK = KA - HC$
2. $G = KB$
3. $\forall \lambda \in \sigma(F) \quad : \quad \mathscr{R}e(\lambda) < 0$
4. $r + q \geqslant n, \quad \mathrm{rg}\begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix} = n \quad et \quad RC + SK = \mathrm{I}_n$

la fonction

$$w(t) = Sx(t) + Ry(t) \qquad t \geqslant t_0$$

est un estimateur asymptotique de l'état de (S).

Démonstration : En effet d'après le théorème précédent $(\mathscr{O})$ est un K–observateur pour (S) et donc

$$\lim_{t\to+\infty} \|Kz(t) - x(t)\| = 0$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} z(t) - w(t) &= z - Sx(t) - Ry(t) \\ &= z - Sx(t) - RCz(t) = [\mathrm{I}_n - RC]\, z(t) - Sx(t) \\ &= SKz(t) - Sx(t) = S[Kz(t) - x(t)] \end{aligned}$$

ou encore $z(t) - w(t) = S[Kz(t) - x(t)]$. Donc

$$\|z(t) - w(t)\| = \|S(Kz(t) - x(t))\| \leqslant \|S\|\,\|Kz(t) - x(t)\|$$

ce qui, puisque $\lim_{t\to+\infty} \|Kz(t) - x(t)\| = 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} \|z(t) - w(t)\| = 0$$

■

Remarque 14

- Remarquons que l'égalité $RC + SK = \mathrm{I}_n$ donne nécessairement $\mathrm{rg}\begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix} = n$ qui a son tour donne nécessairement $r + q \geqslant n$.

- La fonction $w(t)$ ne peut être un estimateur de l'état $z(t)$ si $r+q<n$. La condition $r+q \geqslant n$ montre que l'information apportée par la sortie $y(t)$ ajoutée à la construction $x(t)$ par le K–observateur doit couvrir tout l'état pour espérer que l'estimation soit valable.

IX - Systèmes stationnaires

Sommaire

Reprenons les équations d'état et de sortie

$$(\text{S+E}) \quad \begin{cases} z'(t) = Az & t > 0 \\ z(0) = z_0 \\ y(t) = Cz(t) \end{cases}$$

Nous avons supposer, pour simplifier que le système n'est pas contrôlé $(B = 0)$. Une classe importante en pratique est la classe des systèmes stationnaires. Ce sont les systèmes dont l'état est est invariants dans le temps

$$z(t) = z_0 \quad , \quad \forall t \geqslant t_0$$

Ceci peut se produire

- si $A = 0$ et dans ce cas le système est de nature stationnaire ; ceci fait l'objet la section 2.
- Si $z_0 \in \ker(A)$ que le système soit de nature stationnaire ou pas ; ceci fait l'objet la section 1.

1 - SYSTÈMES STATIONNAIRES (I)

Le premier cas est lorsque A n'est pas inversible et l'état initial est dans son noyau $\ker(A)$:

$$z_0 \in \ker(A)$$

alors (et pour cet état initial seulement) nous obtenons

$$\begin{aligned} S(t)z_0 &= \mathrm{I}_n z_0 + tAz_0 + \frac{t^2}{2}A^2 z_0 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^k z_0 + \cdots \\ &= \mathrm{I}_n z_0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots \\ &= z_0 \end{aligned}$$

puisque $A^2 z_0 = A(Az_0) = 0$, $A^3 z_0 = A\left(A^2 z_0\right) = 0$, ... L'état associé à cet état initial vaut donc

$$z(t) = S(t)z_0 = z_0$$

et l'observation correspondante

$$y(t) = CS(t)z_0 = Cz_0$$

Il seront notés z et y :

$$z(t) = z_0 = \mathrm{Ct} \quad \text{et} \quad y(t) = Cz_0 = \mathrm{Ct} \qquad \text{quand } z_0 \in \ker(A)$$

1.1 Estimation de l'état initial

La matrice d'observabilité est la même et ne prend pas de forme particulière. La condition de l'observabilité reste la même. Dans ce cas l'expression de l'état initial en fonction d'une mesure y^{m} donnée devient, puisque y^{m} est constante,

$$\begin{aligned} z_0 &= \left[\int_{t_0}^{T} S(t-t_0)^* C^* C S(t-t_0)\,\mathrm{d}t\right]^{-1} \int_{t_0}^{T} S(t-t_0)^* C^* y^{\mathrm{m}}\mathrm{d}t \\ &= \left[\int_{t_0}^{T} S(t-t_0)^* C^* C S(t-t_0)\,\mathrm{d}t\right]^{-1} \left(\int_{t_0}^{T} S(t-t_0)^* C^*\mathrm{d}t\right) y^{\mathrm{m}} \end{aligned}$$

D'où le théorème.

Théorème 10 :
Si le système est observable alors l'état du système vaut

$$z = z_0 = R y^{\mathrm{m}}$$

où R est la matrice de type (n,q) donnée par

$$R = \left[\int_{t_0}^{T} S(t-t_0)^* C^* C S(t-t_0)\,\mathrm{d}t\right]^{-1} \left(\int_{t_0}^{T} S(t-t_0)^* C^*\mathrm{d}t\right)$$

Le calcul de l'état z se fait donc par :

1. Calcul de $M(t) = CS(t-t_0)$;
2. Calcul de $Q = \int_{t_0}^{T} M(t)^*\,\mathrm{d}t$
3. Calcul de $M(t)^* M(t)$
4. Calcul de $P = \int_{t_0}^{T} S(t-t_0)^* C^* C S(t-t_0)\,\mathrm{d}t$
5. Inversion de P
6. Calcul de $R = P^{-1}Q$
7. Calcul de $z = R y^{\mathrm{m}}$.

Exemple 27

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} z_1' = z_1 + 2z_2 \\ z_2' = -2z_1 - 4z_2 \end{cases} \quad , \quad (\mathrm{E})\ \ y(t) = z_1(t) + z_2(t)$$

- L'équation d'état et l'équation de sortie sont

$$z'(t) = Az(t) \quad , \quad y(t) = Cz(t)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Le système est observable puisque

$$\mathscr{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 ($\det(\mathscr{O}) = -1$).

- Le semi-groupe associé à A est

$$S(t) = \exp(tA) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4-e^{-3t} & 2-2e^{-3t} \\ 2e^{-3t}-2 & 4e^{-3t}-1 \end{pmatrix}$$

- Avec la mesure constante $y^{\mathrm{m}} = -1$ et avec l'information $z_0 \in \ker(A)$ nous avons

$$M(t) = CS(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{-3t}+2 & 2e^{-3t}+1 \end{pmatrix}$$

donc

$$P = \int_0^T M(t)^{\mathrm{T}} M(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{9}T - \frac{4}{27}e^{-3T} - \frac{1}{54}e^{-6T} + \frac{1}{6} & \frac{2}{9}T - \frac{5}{27}e^{-3T} - \frac{1}{27}e^{-6T} + \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9}T - \frac{5}{27}e^{-3T} - \frac{1}{27}e^{-6T} + \frac{2}{9} & \frac{1}{9}T - \frac{4}{27}e^{-3T} - \frac{2}{27}e^{-6T} + \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

et

$$Q=\int_0^T M(t)^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}t=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}T-\frac{1}{9}e^{-3T}+\frac{1}{9}\\ \frac{1}{3}T-\frac{2}{9}e^{-3T}+\frac{2}{9}\end{pmatrix}$$

donc

$$z=P^{-1}Qy^{\mathrm{m}}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

Vérification

$$Cz(t)=CS(t)z_0=\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4-e^{-3t}&2-2e^{-3t}\\2e^{-3t}-2&4e^{-3t}-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=-1$$

□

1.2 Détectabilité et observateurs

L'étude de la détectabilité reste la même; avec la matrice H qui a donné la détectabilité du système on construit l'observateur de Luenberger

$$\begin{cases}x'(t)=(A-HC)x(t)+Hy^{\mathrm{m}} & t>0\\ x(0)=0\end{cases}$$

dont l'état varie avec le temps. Nous avons alors

$$\lim_{t\to+\infty}\|z-x(t)\|=0$$

ce qui montre que $x(t)$ tend vers l'état constant z

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=z$$

et que pour t assez grand

$$z\approx x(t)$$

L'approche reste la même : Pour une observation y^{m} obtenue :

1. On déterminer $H\in\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ tel que $A-HC$ soit de Hurwitz;
2. On résout
$$\begin{cases}x'(t)=(A-HC)x(t)+Hy^{\mathrm{m}} & t>0\\ x(t_0)=0\end{cases}$$
de solution
$$x(t)=\left(\int_{t_0}^t S_{A-HC}(t-s)H\,\mathrm{d}s\right)y^{\mathrm{m}}$$
3. Pour t assez grand : $z(t)\approx x(t)$.
4. Si $z_0\in\ker(A)$: $z(t)=z=z_0\approx x(t)$ pour t assez grand et donc $z=\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)$:

Exemple 28

Considérons le système observé

$$\begin{pmatrix}z_1'(t)\\z_2'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1(t)\\z_2(t)\end{pmatrix}\quad,\quad y(t)=\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$$

Avec le choix $H=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ nous obtenons

$$A-HC=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-2\end{pmatrix}$$

qui est une matrice de Hurwitz; donc le système est détectable et le système

$$(\mathscr{O})\begin{cases}\begin{pmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}y(t)\\ \begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{cases}$$

est un observateur de Luenberger pour notre système. Cette équation donne

$$(\mathscr{O})\quad\begin{cases}x_1'(t)=-x_1(t)+2y & x_1(0)=0\\ x_2'(t)=-2x_2(t)-2y & x_2(0)=0\end{cases}$$

de solution

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\int_0^t e^{-(t-s)}\mathrm{d}s \\ 2\int_0^t e^{-2(t-s)}\mathrm{d}s \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 2e^{-t}-2 \\ 1-e^{-2t} \end{pmatrix} y$$

Avec la mesure prise $y^{\mathrm{m}}(t) = -1$, $t > 0$, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t}-2 \\ 1-e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Donc

$$z = \lim_{t\to+\infty} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \lim_{t\to+\infty} \begin{pmatrix} 2e^{-t}-2 \\ 1-e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

2 - SYSTÈMES STATIONNAIRES (II)

C'est une sous classe particulière de la classe précédente, ses systèmes sont caractérisés par

$$A = 0 \tag{2.1}$$

(donc $z_0 \in \ker(A)$, $\forall z_0 \in \mathbb{R}^n$) l'équation d'état devient

$$\begin{array}{l} (\mathrm{S}) \\ \\ (\mathrm{E}) \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} z'(t) = 0 & t > 0 \\ z(0) = z_0 & \\ y(t) = Cz(t) & \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} z = z_0 \\ y = Cz \end{array} \right.$$

Nous obtenons alors plus de résultats qu'à la section précédente.

2.1 Observabilité

Avec $A = 0$ la matrice d'observabilité devient

$$\mathrm{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ \mathrm{O}_{q,n} \\ \vdots \\ \mathrm{O}_{q,n} \end{bmatrix}$$

Au dessous de la matrice C il n'y a que des lignes nulles. Le rang de O ne change pas si on supprime ces lignes nulles ce qui donne $\mathrm{rg}(\mathrm{O}) = \mathrm{rg}(C)$.

D'autre part nous savons que $\mathrm{rg}(C) \leqslant \min(n,q)$. Si le système est observable alors $n \leqslant \mathrm{rg}(C)$ ce qui donne $n \leqslant \min(n,q)$ ou encore $n \leqslant q$. On en déduit que le système ne peut être observable si $q < n$.

Théorème 11 :

1. *Le système est observable si, et seulement si,*

$$\mathrm{rg}(C) = n$$

2. *Le système n'est pas observable si $q < n$.*
3. *Le système est observable si, et seulement si, la matrice C^*C est inversible.*

Ce dernier point résulte de la proposition 5 avec dans ce cas

$$G = \int_{t_0}^{T} S(t-t_0)^* C^* C S(t-t_0)\,\mathrm{d}t$$

Or $A = 0$ donc son semi-groupe est $S(t) = \mathrm{I}_n$ ce qui donne

$$G = \int_{t_0}^{T} C^* C\mathrm{d}t = (T-t_0)\, C^* C \tag{2.2}$$

et le 3ème point du théorème en suit.

2.2 Estimation de l'état initial

Lorsque le système est observable l'état vaut

$$z = z_0 = \left[\int_{t_0}^{T} S(t-t_0)^* C^* C S(t-t_0)\,\mathrm{d}t\right]^{-1} \int_{t_0}^{T} S(t-t_0)^* C^* y^{\mathrm{m}}\mathrm{d}t$$

qui devient, en utilisant (2.2),

$$z = \frac{1}{T-t_0}\left[C^* C\right]^{-1} \int_{t_0}^{T} C^* y^{\mathrm{m}}\mathrm{d}t = \left[C^* C\right]^{-1} C^* y^{\mathrm{m}}$$

D'où

Théorème 12 :
Si le système est observable et si on dispose d'une mesure constante y^{m} alors l'état du système est donné par

$$z = \left[C^* C\right]^{-1} C^* y^{\mathrm{m}}$$

Exemple 29
Considérons le système stationnaire observé suivant

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{l} z_1' = 0 \\ z_2' = 0 \end{array} \right. \quad , \quad (\mathrm{E}) \left\{ \begin{array}{l} y = z_1 + z_2 \\ y_2 = z_1 - z_2 \\ y_3 = 2z_1 - 3z_2 \end{array} \right.$$

ce qui correspond à

$$A = \mathrm{O}_2 \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Puisque $\mathrm{rg}(C) = 2$ Le système est donc observable.
Avec la mesure obtenue

$$\left| \begin{array}{l} y_1^{\mathrm{m}} = 1 \\ y_2^{\mathrm{m}} = 9 \\ y_3^{\mathrm{m}} = 22 \end{array} \right.$$

l'état vaut

$$\begin{aligned} z = \begin{pmatrix} z_{0,1} \\ z_{0,2} \end{pmatrix} &= \left[C^{\mathrm{T}} C\right]^{-1} C^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} y_1^{\mathrm{m}} \\ y_2^{\mathrm{m}} \\ y_3^{\mathrm{m}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{17}{30} & \frac{1}{6} & \frac{2}{15} \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On vérifie que cet état donne bien la mesure donnée :

$$C \begin{pmatrix} z_{0,1} \\ z_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 22 \end{pmatrix}$$

□

2.3 Détectabilité et observateurs

La condition de la détectabilité

$$\exists H \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R}) \quad / \quad \forall \lambda \in \sigma(A - HC) \quad : \quad \mathcal{R}e(\lambda) < 0$$

devient, puisque $A = 0$,

$$\exists H \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R}) \quad / \quad \forall \lambda \in \sigma(-HC) \quad : \quad \mathcal{R}e(\lambda) < 0$$

Or $\sigma(-HC) = \{-\lambda \ / \ \lambda \in \sigma(HC)\}$ donc cette condition équivaut à la suivante :

Proposition 14 :
Si $A = \mathrm{O}_n$ le système est détectable si, et seulement si,

$$\exists H \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R}) \quad / \quad \forall \lambda \in \sigma(HC) \quad : \quad \mathcal{R}e(\lambda) > 0 \qquad (\mathrm{D})$$

Pour H vérifiant (D) la matrice HC est inversible et donc $\mathrm{rg}(HC) = n$. Or on sait que

$$\mathrm{rg}(HC) \leqslant \min\left(\mathrm{rg}(H), \mathrm{rg}(C)\right)$$

ce qui donne nécessairement $\mathrm{rg}(C) \geqslant n$ et le système est observable. D'où :

Proposition 15 :
Si $A = \mathrm{O}_n$ alors le système (S) est détectable si, et seulement si, il est observable.

L'équation de l'observateur prend la forme

$$\begin{cases} x'(t) = -HCx(t) + Hy & t > 0 \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

et nous avons, lorsque H vérifie (D),

$$\lim_{t\to+\infty} \|z - x(t)\| = 0 \quad \text{soit encore} \quad z = \lim_{t\to+\infty} x(t)$$

Notons par $S_H(t)$ le semi-groupe engendré par la matrice $-HC$

$$S_H(t) = e^{-t(HC)} \quad , \quad t \geqslant 0$$

alors l'état de l'observateur admet pour expression

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} S_H(t-s)\, Hy \mathrm{d}s = \left(\int_{t_0}^{t} S_H(t-s)\,\mathrm{d}s\right) Hy$$

Puisque Hy est un vecteur constant. Or on sait que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_H(t) = [-HC]\, S_H(t) \quad , \quad \forall t > 0$$

donc, pour t fixé et en dérivant par rapport à s,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} S_H(t-s) = [HC]\, S_H(t-s) \quad , \quad \forall \in\,]t_0, t[$$

qui donne, puisque HC est inversible,

$$S_H(t-s) = [HC]^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} S_H(t-s) \quad , \quad \forall \in\,]t_0, t[$$

Intégrons par rapport à entre 0 et t ; il vient

$$\int_{t_0}^{t} S_H(t-s)\,\mathrm{d}s = [HC]^{-1} \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} S_H(t-s)\,\mathrm{d}s$$

et puisque

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} S_H(t-s)\,\mathrm{d}s = [-S_H(t-s)]_{s=t_0}^{s=t} = S_H(t-s)_{|s=t} - S_H(t-s)_{|s=t_0} = \mathrm{I}_n - S_H(t-t_0)$$

alors

$$\int_{t_0}^{t} S_H(t-s)\,\mathrm{d}s = [HC]^{-1} [\mathrm{I}_n - S_H(t-t_0)]$$

et donc

$$x(t) = [HC]^{-1} [\mathrm{I}_n - S_H(t-t_0)]\, Hy$$

Proposition 16 :

Pour H vérifiant (D) et $S_H(t)$ le semi-groupe engendré par $-HC$, l'état de l'observateur vaut

$$x(t) = [HC]^{-1} [\mathrm{I}_n - S_H(t-t_0)]\, Hy$$

D'un autre côté, la matrice $-HC$ étant de Hurwitz, le système

$$\begin{cases} \theta'(t) = -HC\theta(t) & t > t_0 \\ \theta(t_0) = \theta_0 \end{cases}$$

est asymptotiquement stable donc $\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = 0$, $\forall \theta_0 \in \mathbb{R}^n$. En prenant $\theta_0 = Hy$ nous obtenons

$$\begin{aligned} x(t) = [HC]^{-1} Hy - [HC]^{-1} S_H(t-t_0)\, Hy &= [HC]^{-1} Hy - [HC]^{-1} S_H(t-t_0)\, \theta_0 \\ &= [HC]^{-1} Hy - [HC]^{-1} \theta(t) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = [HC]^{-1} Hy - [HC]^{-1} \lim_{t\to+\infty} \theta(t) = [HC]^{-1} Hy$$

et alors $z = [HC]^{-1} Hy$. Nous obtenons l'expression exacte de l'état et non pas une valeur approximative. D'où :

Théorème 13 :

Lorsque $A = \mathrm{O}_n$ et si le système est observable, l'état du système vaut

$$z = [HC]^{-1} Hy$$

pour toute matrice $H \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\mathrm{Re}(\lambda) > 0 \quad , \quad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(HC) \qquad \text{(D)}$$

Exemple 30

Soit le système stationnaire

$$\begin{cases} z_1' = 0 \\ z_2' = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} y_1 = z_1 + z_2 \\ y_2 = z_1 - z_2 \end{cases} \quad \text{avec les mesures} \begin{cases} y_1^{\mathrm{m}} = 3 \\ y_2^{\mathrm{m}} = 1 \end{cases}$$

ce qui correspond à

$$A = \mathrm{O} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour $H = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ nous obtenons $HC = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ qui de Hurwitz et donc

$$z = [HC]^{-1} Hy^{\mathrm{m}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

Remarque 15

Le choix $H = C^*$ est valable. En effet si λ est une valeur propre de $HC = C^* C$ et w un vecteur associé alors $C^* Cw = \lambda w$ et donc $\langle C^* Cw, w \rangle = \langle \lambda w, w \rangle$ ou encore

$$\langle Cw, Cw \rangle = \lambda \langle w, w \rangle \quad , \quad \lambda = \frac{\langle Cw, Cw \rangle}{\langle w, w \rangle} = \frac{\| Cw \|^2}{\| w \|^2} \geqslant 0$$

et $\lambda \neq 0$ puisque $C^* C$ est inversible (grâce à l'observabilité du système).
Nous retrouvons alors l'expression

$$z = \left[C^* C \right]^{-1} C^* y^{\mathrm{m}}$$

du théorème 12. Ce dernier théorème donne donc un plus large choix pour H tant qu'elle vérifie la condition (D). On pourra alors choisir H pour avoir HC des valeurs propres facilement calculables (par exemple HC diagonale ou triangulaire).

X - Exercices et problèmes

Sommaire

1 - EQUATION D'ÉTAT - EQUATION DE SORTIE

Exercice 1 Pour les cas suivants définir le vecteur d'état, le vecteur contrôle, le vecteur observation, l'équation d'état, l'équation de sortie et les espaces d'états, de contrôles et d'observations :

1.
$$\begin{cases} \alpha_1' = 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + \beta & \lambda_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_2' = -\alpha_2 - \beta & \lambda_2 = \alpha_1 - \alpha_2 \end{cases}$$

On peut choisir β et on dispose de λ_1 et λ_2 en tout instant.

2.
$$\theta'' + \omega^2\theta = \rho \qquad , \qquad \xi = \theta$$

On peut choisir ρ et on dispose de ξ en tout instant.

3.
$$\begin{cases} \theta'' = \theta + \eta & \xi_1 = \theta - \eta \\ \eta'' = \theta' - v & \xi_2 = \theta + \eta \end{cases}$$

On peut choisir v et on dispose de ξ_1 et ξ_2 en tout instant.

Exercice 2 On considère un système modélisé par les équations linéaires suivantes :

$$(S_1) \quad \begin{cases} f + g + v - f' = 0 \\ f + g + v + g' - w - g'' = 0 \\ \sigma - g - f = 0 \\ \psi + g - f = 0 \\ f(0) = f_0 \qquad g(0) = g_0 \qquad g'(0) = g_1 \end{cases} \qquad f_0, g_0, g_1 \in \mathbb{R}$$

où, à chaque instant t, $v(t)$ et $w(t)$ sont des paramètres que nous pouvons choisir alors que $\sigma(t)$ et $\psi(t)$ sont des paramètres que nous pouvons connaître à tout moment.

Ecrire pour ce système l'équation d'état et l'équation de sortie. On précisera l'état, le contrôle et l'observation.

2 - OBSERVABILITÉ - ESTIMATION DE L'ÉTAT INITIAL

Exercice 1 Etudier l'observabilité du système

$$\begin{cases} z_1' = z_1 + \beta z_2 \\ z_2' = 2z_1 \end{cases} \quad , \quad \left| \begin{array}{l} y(t) = (1-\alpha) z_1(t) + \alpha z_2(t) \\ \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in [0,1] \end{array} \right.$$

Exercice 2 Soit le système

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad , \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

1. Calculer le semi-groupe associé à la matrice A de ce système.
2. Etudier si ce système est observable ou pas.
3. Calculer l'état initial donnant la mesure
$$y^{\mathrm{m}}(t) = 1 - 2t, \quad 0 < t < T = 1$$
et en déduire l'état du système $z(t)$.

Exercice 3 On considère le système stationnaire

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} z_1' = 0 \\ z_2' = 0 \end{cases} \quad , \quad (\mathrm{E}) \begin{cases} y = z_1 + z_2 \\ y_2 = z_1 - z_2 \\ y_3 = 2z_1 - 3z_2 \end{cases}$$

Calculer l'état du système sachant qu'on a obtenu les mesures suivantes

$$y_1^{\mathrm{m}} = 1 \quad , \quad y_2^{\mathrm{m}} = 9 \quad , \quad y_3^{\mathrm{m}} = 22$$

Exercice 4 Soit un objet dans l'espace ayant la forme d'un **parallélépipède droit**. Déterminer sa longueur, sa largeur et sa hauteur sachant que :

- La somme de sa longueur et de sa largeur est $3m$;
- La somme de sa longueur et de sa hauteur est $5m$;
- La somme de sa largeur et de sa hauteur est $4m$.

Note : Faire une modélisation par un système dynamique.

3 - STABILITÉ

Exercice 1 Pour A prenant les matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Etudier la stabilité asymptotique du système $z'(t) = Az(t)$.

4 - DÉTECTABILITÉ

Exercice 1 Etude de l'observabilité puis la détectabilité de

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_1(t) + 2z_2(t) \\ z_2'(t) = 2z_1(t) + z_2(t) \end{cases} \quad , \quad y(t) = z_1(t) + z_2(t)$$

Exercice 2 Soit le système

$$z'(t) = Az(t) \quad , \quad y(t) = Cz(t)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} \beta & 3 \end{pmatrix} \quad \beta \in \mathbb{R}$$

1. Etudier l'observabilité de ce système pour cette sortie.
2. Etudier la détectabilité de ce système pour cette sortie.

5 - OBSERVATEURS

Exercice 1 Soit le système

$$(\mathrm{S}_3) \quad z'(t) = Az(t) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} c & 3 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R})$$

1. Déterminer les conditions sur c qui caractérisent l'observabilité de ce système.
On prend dans tout ce qui suit $c = 3$.

2. Etudier la détectabilité de ce système.
   On suppose que l'observation du système donne la mesure
   $$y(t) = e^{2t} \qquad t > 0$$
3. Construire un observateur de Luenberger pour ce système. On choisira une matrice de gain H pour que la matrice F soit diagonale.
4. Utiliser l'observateur construit pour avoir une estimation des composantes de l'état $z(t)$ du système (prendre, pour simplifier, l'état initial de l'observateur nul).

Exercice 2 On considère le système augmenté de l'équation de sortie

$$(\mathrm{S}_2) \quad \begin{cases} z'(t) = Az(t) & t > 0 \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \beta+1 & 1 & \beta+1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\beta \in \mathbb{R})$$

1. Etudier la stabilité de ce système en fonction du paramètre β.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur β pour que le système soit observable.
   On prend dans tout ce qui suit $\beta = -1$.
3. Justifier l'existence d'un observateur identité; ensuite le construire. On choisira une matrice de gain H qui donne la matrice F diagonale où F est la matrice modélisant la dynamique de l'observateur.
4. Calculer l'état de l'observateur $x(t)$ en prenant $x(0) = 0$ lorsque la sortie est $y_1(t) = e^t$ et $y_2(t) = e^{-t}$.

Exercice 3 Soit le système de dimension 2 avec l'observation particulière

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} z'(t) = Az(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad , \quad (\mathrm{E}) \quad y(t) = z_1(t)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \sigma \end{pmatrix}$$

On cherche un observateur qui permet l'estimation asymptotique de $z_2(t)$.
Soit $p \in \mathbb{R}$ on considère le système de dimension 1

$$(\mathscr{O}) \quad \begin{cases} x'(t) = (\sigma + p\beta)\, x(t) + \left(\gamma + \alpha p - \beta p^2 - \sigma p\right) y(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Donner une condition sur p pour que, avec $K = \begin{pmatrix} p & 1 \end{pmatrix}$, $(\mathscr{O})$ soit un K–observateur asymptotique de (S). Il permet d'estimer quelle partie de l'état ?

6 - PROBLÈMES

Probleme 6.1 On considère le système augmenté de l'équation de sortie

$$(S_2) \quad \begin{cases} z'(t) = Az(t) & t > 0 \\ z(0) = z_0 \end{cases} \qquad y(t) = Cz(t) \qquad 0 < t < T$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \end{pmatrix} \qquad (\alpha, p \in \mathbb{R})$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que le système soit observable.
   On prend dans tout ce qui suit $\alpha = p$ et on suppose que $p > 0$.
2. Montrer que le système est détectable.
3. Justifier l'existence d'un observateur de Luenberger; Ensuite le construire. On choisira une matrice de gain H qui donne la matrice F diagonale où F est la matrice modélisant la dynamique de l'observateur.
4. Déterminer le semi-groupe $S(t)$ associé à F.
5. Calculer l'état de l'observateur $x(t)$ en prenant $x(0) = 0$ lorsque la sortie est $y^{\mathrm{m}}(t) = 2pe^{pt}$.

Probleme 6.2 Soit le système observé

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 3 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

1. Etudier la stabilité de (S).
2. Etudier son observabilité.
3. On prend $\beta = 3$. Donner une condition suffisante sur α assurant la détectabilité de ce système.
4. On prend $\beta = 3$ et $\alpha = 0$. Construire un observateur identité lorsqu'il existe.
5. En déduire une estimation asymptotique de l'état lorsque la sortie est $y(t) = 6e^t$.

Probleme 6.3 Soit le système modélisé par les équations

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} z_1' = z_2 + 5z_3 \\ z_2' = z_1 - z_2 + 3z_3 \\ z_3' = -z_3 \\ y_1 = z_1 + z_2 \\ y_2 = z_2 \end{cases}$$

où y_1 et y_2 sont des observations.

1. Montrer que le système constitué de $(z_1, z_2)^{\mathrm{T}}$ avec z_3 comme entrée est observable pour l'observation $(y_1, y_2)^{\mathrm{T}}$.
2. En déduire que le système global (S) est détectable. et construire un observateur pour ce système (S).

Exercice 4 On considère le système de dimension 3

$$(\mathrm{S}) \quad z'(t) = Az(t) \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier si ce système est asymptotiquement stable.

Exercice 5 Soit le système

$$\begin{matrix} (\mathrm{S}) & z'(t) = Az(t) \\ (\mathrm{E}) & y(t) = Cz(t) \end{matrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} c & 3 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R})$$

1. Déterminer les conditions sur c qui caractérisent l'observabilité de ce système.
2. Déterminer les conditions sur c qui caractérisent sa détectabilité.
3. Pour $c = 3$ construire un observateur identité (de Luenberger) pour ce système. On choisira une matrice de gain H pour que la matrice F soit diagonale.
4. L'observation du système donne la mesure

$$y^{\mathrm{m}}(t) = e^{2t} \qquad t > 0$$

Utiliser l'observateur construit pour avoir une estimation des composantes de l'état $z(t)$ du système (prendre, pour simplifier, l'état initial de l'observateur nul).

Exercice 6 Soit le système évoluant dans $\mathbb{R}^2$ $(n = 2)$

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} z_1'(t) = 2z_1(t) + 3z_2(t) \\ z_2'(t) = 3z_1(t) + 2z_2(t) \end{cases} \quad , \quad (\mathrm{E}) \quad y(t) = z_1(t) + z_2(t)$$

Vérifier que le système de dimension 1

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 3y(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

permet d'estimer la première composante de l'état du système et constitue donc un K–observateur.

Exercice 7 Pour le système $z' = Az$ et $y = Cz$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

construire un K–observateur avec

$$K = \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$$

Choisir une matrice de gain pour que la matrice F de cet observateur soit diagonale.

On considère un système (S) dont le modèle mathématique est donné par

$$(\mathscr{M}) \quad \begin{cases} z_1'(t) = z_2'(t) = \alpha z_2(t) \\ y_1(t) = (\alpha - 1) z_1(t) + z_2(t) \\ y_2(t) = z_1(t) + (\alpha + 1) z_2(t) \end{cases} \quad , \quad t > 0 \quad , \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

1. Donner l'équation d'état et l'équation de sortie.
2. Etudier l'observabilité de ce système.
3. On prend $\alpha = 1$ et on considère le système

$$(\mathscr{O}) \quad \begin{cases} x'(t) = Fx(t) + Hy(t) \quad , \quad t > 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

   où $y(t)$ est la sortie du système (S) à l'instant t.

   (a) Déterminer la matrice H pour que $(\mathscr{O})$ soit un observateur de Luenberger pour (S) avec F diagonale de valeur propre double -2.

   (b) Donner les équations vérifiées par les composantes $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de cet observateur.

   (c) En déduire les expressions de ces composantes en supposant connues les mesures $y_1(t)$ et $y_2(t)$.

4. On prend $\alpha = 0$. Calculer l'état du système lorsque les mesures obtenues sont $y_1 = 0$ et $y_2 = 2$.

Exercice 8 On considère le système régi par le modèle

$$\begin{cases} \theta'' + \theta = 0 \\ \eta = \theta \end{cases}$$

où on dispose de la fonction $\eta(t)$ sur $]0, T[$.

1. Donner l'équation d'état et l'équation de sortie.
2. Déterminer le semi-groupe $(S_t)_{t\geqslant 0}$ associé à la matrice A obtenue.
3. Etudier l'observabilité.
4. Calculer l'expression de l'état initial sachant que $\eta(t) = \sin(t)$, $0 < t < \pi$.
5. Etudier la détectabilité en précisant la matrice H.
6. Déterminer H pour que $F = A - HC$ prenne l'expression $F = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.
7. Le semi-groupe engendré par F étant

$$S_F(t) = \exp(tF) = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} - e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{pmatrix}$$

   construire l'observateur associé à la matrice H trouvée.

8. En déduire une approximation de l'état du système sachant que $\eta(t) = \sin(t)$, $t > 0$. On admettra le résultat

$$\int_0^t e^{as} \sin(s)\, \mathrm{d}s = \frac{1 + [a \sin t - \cos t]\, e^{at}}{1 + a^2} \quad , \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

   Rép. : $\theta(t) \approx \sin t - e^{-t} + e^{-2t}$ pour t assez grand.

Probleme 6.9 Soit le système observé

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \quad , \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

1. Construire un K–observateur qui permet d'estimer asymptotiquement $z_1(t)$.
2. Montrer que cet observateur permet d'estimer l'état du système par un estimateur

$$w(t) = Sx(t) + Ry(t) \quad , \quad t \geqslant t_0$$

   Vérifier d'abord les conditions théoriques qui garantissent l'existence de cet estimateur asymptotique.

3. Pour $y(t) = -2\sin(t)$ calculer l'expression de l'observateur $x(t)$ et de l'estimateur asymptotique $w(t)$.

Exercice 10 On considère le système stationnaire observé

$$\left\{\begin{array}{l} z_1' = 0 \\ z_2' = 0 \end{array}\right. \quad , \quad \left\{\begin{array}{l} y_1 = z_1 + az_2 \\ y_2 = az_1 - z_2 \\ y_3 = 3az_1 + z_2 \end{array}\right. \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

1. Etudier l'observabilité de ce système.

2. Calculer l'expression de l'état z lorsque les mesures obtenues sont

$$y^{\mathrm{m}} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a-1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Table des matières