Deuxième année de Licence MIASHS

TD – Statistique mathématique 1[1]

Julien GREPAT[2]

Contents

[2]Contact : `julien.grepat@univ-grenoble-alpes.fr`

1 Éléments de probabilité pour les statistiques

Exercice 1.1 *Un ordinateur, en additionnant N nombres, arrondit chaque nombre à l'entier le plus proche. On note E_i l'erreur d'arrondi faite sur le i^{eme} nombre. Il est naturel de supposer que les E_i sont* **indépendantes** *et que chaque E_i est une variable aléatoire continue de densité de probabilité:*

$$f_{E_i}(x) = \begin{cases} 1 & si\ |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

(i) Calculer l'espérance et la variance de E_i.

(ii) On note $E = \sum_{i=1}^{N} E_i$ l'erreur totale. Calculer l'espérance et l'écart-type de E.

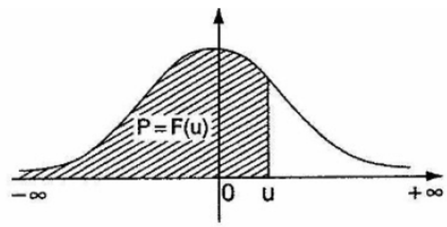
(iii) Justifier que la loi de E peut s'approcher par une loi normale. Quelle est la probabilité que l'erreur totale en valeur absolue soit supèrieure à 15 si on additionne 1500 nombres?

Exercice 1.2 *Une entreprise fabrique des ascenseurs pouvant supporter une charge de 600 kg. Le problème est de calculer le nombre maximum N de personnes que l'on peut autoriser à monter en même temps.*

(i) En consultant des rapports statistiques, on arrive à la conclusion que les utilisateurs éventuels constituent une population dont 97.72% ont un poids inférieur à 99 kg et 93.32% ont un poids supérieur à 43 kg. En supposant que le poids X d'un utilisateur suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$, en déduire les valeurs de m et σ.

(ii) Calculer N afin que le risque de surcharge ne dépasse pas 10^{-3}.

Fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
F(u)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

2 Introduction aux tests statistiques

Exercice 2.1 *Dans une usine de peinture, des machines produisent des pots de manière continue à la sortie d'une cuve alimentée en composants nécessaires.*

Une peinture est principalement composée de quatre éléments : le liant, le solvant, les pigments, la charge. Ce dernier élément donne l'opacité et donc le pouvoir couvrant de la peinture. On utilise ici de la craie mise en poudre conditionnée en sac de 50 kg.

Suite à un défaut de pureté, des agrégats calcaires se sont retrouvés dans un sac de craie. Ce sac a alimenté une machine. Une certaines quantité de pots défectueux se sont retrouvés dans le stock.

On souhaite évaluer la proportion de pots défectueux dans le stock (de grande taille) suite à l'incident. On note p la probabilité pour un pot d'être défectueux.

Afin de ne pas détruire une part trop importante du stock, on souhaite ne tester qu'un échantillon.

On se donne un échantillon de n pots.

(i) Donner, en justifiant, la loi X qui compte le nombre de pots défectueux dans le lot de n pots.

(ii) On pose $f = X/n$. Que représente f ?

(iii) Justifier que f peut être approchée par une loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Préciser m et σ.

(iv) Donner a tel que
$$P(m - a\sigma \leq f \leq m + a\sigma) = 0.95$$

(v) En déduire qu'il y a un risque de se tromper de probabilité 0.05 si on affirme que
$$f - a\sigma \leq p \leq f + a\sigma.$$

(vi) On effectue un test sur 100 pots. Il en résulte que 10 sont défectueux. Donner la fréquence f de pots défectueux dans les 100 pots prélevés. On considère qu'une bonne approximation de σ est
$$\sigma = \sqrt{f(1-f)}/\sqrt{n}.$$
Donner la valeur de σ.

(vii) Donner un intervalle de p avec un risque de 5%.

Exercice 2.2 *On considère un stock de rouleaux de câbles de cuivre destiné à la livraison à une entreprise d'installation de lignes téléphoniques. On souhaite estimer la fréquence inconnue p des rouleaux de ce stock ayant une section inférieure à $0,4$ mm.*

On prélève un échantillon aléatoire de 100 rouleaux dans ce stock. Ce stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 rouleaux.

On constate que seuls 4 rouleaux de cet échantillon ont une section inférieure à $0,4$ mm.

(i) Donner une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue p des rouleaux de ce stock ayant une section inférieure à $0,4$ mm.

(ii) *Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de* 100 *rouleaux ainsi prélevé dans ce stock, associe la fréquence des rouleaux de cet échantillon ayant une section inférieure à* $0,4$ *mm.*

(a) Montrer que F suit la loi normale de moyenne inconnue p et d'écart type $\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}$.

(b) Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence p avec le coefficient de confiance $95\,\%$.

(c) On considère l'affirmation suivante : "la fréquence p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question 2. a. ".

Cette affirmation est-elle vraie ?

Exercice 2.3 *Le journal Le Monde titre le 4 mai 2012 : "François Hollande reste en tête dans les sondages, mais l'écart se resserre" après avoir relayé un sondage sur 1077 personnes qui crédite François Holande de* $52,5\%$ *d'intention de vote.*

Ce sondage permet-il de mettre en avant un gagnant pour l'élection ?

Exercice 2.4 *On se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral pour contrôler la moyenne μ de l'ensemble des diamètres, en millimètre, de billes constituant la prochaine livraison à effectuer.*

On note Z la variable aléatoire qui, à chaque bille prélevée au hasard dans la livraison, associe son diamètre en millimètre. La variable aléatoire Z suit une loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\sigma = 0,15$.

On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 *billes prélevé dans la livraison, associe la moyenne des diamètres de ces billes. La livraison est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.*

L'hypothèse nulle H_0 est : "$\mu = 55$" , dans ce cas la livraison est dite conforme pour le diamètre.

Le seuil de signification du test est fixé à 5 %.

(i) Formuler l'hypothèse alternative H_1.

(ii) Montrer que, sous l'hypothèse nulle H_0, la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 55 et d'écart type $\sigma = 0,015$.

(iii) On souhaite déterminer, sous l'hypothèse nulle H_0, le réel positif h tel que

$P\left(55 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 55 + h\right) = 0,95$.

Donner la valeur approchée de h arrondie au centième.

(iv) Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

(v) On prélève un échantillon aléatoire de 100 billes dans la livraison. La moyenne des diamètres des 100 billes de cet échantillon est $\overline{z} = 55,06$ mm.

Quelle est la conclusion du test ?

3 Régression linéaire

Exercice 3.1 *Dans ce problème, on s'intéresse au taux d'équipement des ménages en connexion internet.*

Le tableau suivant, où x_i désigne le rang de l'année mesuré à partir de l'année 2010, donne le taux d'équipement en connexion internet y_i (en pourcentage) des ménages pour chaque année entre 2011 et 2016.

Année	*2011*	*2012*	*2013*	*2014*	*2015*	*2016*
Rang x_i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Taux (en %) d'équipement en connexion internet y_i	*69,2*	*73*	*75,3*	*77,9*	*79,7*	*81,7*

Source: Insee

(i) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$.

Expliquer pourquoi le résultat obtenu permet d'envisager un ajustement affine.

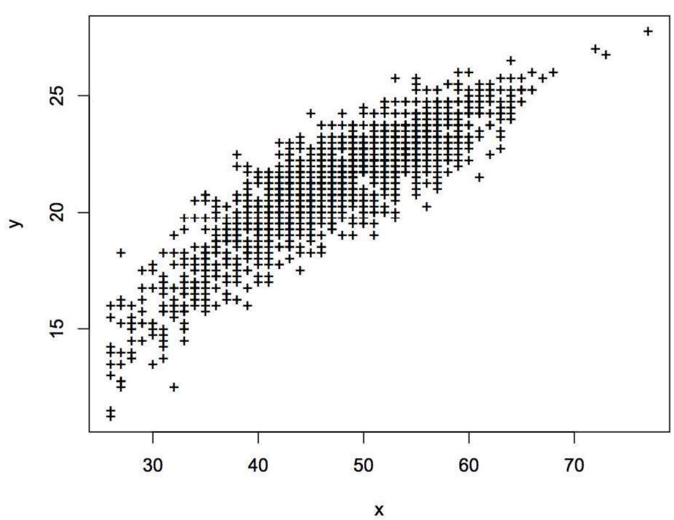
(ii) Donner l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés sous la forme $y = \beta_1 x + \beta_0$.

(iii) On décide d'ajuster ce nuage de points par la droite D d'équation $y = 2,4x + 67,6$.

(a) à l'aide de ce modèle, calculer une estimation du taux d'équipement en connexion internet des ménages en 2020.

(b) Selon ce modèle, en quelle année, pour la première fois, le taux d'équipement en connexion internet des ménages dépassera-t-il 100 % ? Qu'en penser ?

Exercice 3.2 *Pour $n = 1429$ eucalyptus, on a mesuré la circonférence X en centimètres à 1m30 du sol et sa hauteur Y. On souhaite expliquer Y par X. Les données sont représentées sur le nuage de points ci-dessous.*



On donne les données suivantes :

$$\begin{array}{lclclclcl} \sum_{i=1}^{1429} x_i & = & 67660 & \sum_{i=1}^{1429} y_i & = & 30312.5 & & & \\ \sum_{i=1}^{1429} x_i^2 & = & 3306476 & \sum_{i=1}^{1429} y_i^2 & = & 651857.9 & \sum_{i=1}^{1429} x_i y_i & = & 1461696 \end{array}$$

(i) Calculer l'équation de la droite des moindres carrés.

(ii) Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

(iii) La régression linéaire vous parraît-elle légitime ?

(iv) Tester l'effet de X sur Y.

Exercice 3.3 Notation. *Nous avons introduit le mot "variation" pour désigner la quantité*

$$S_{YY} = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2.$$

Certains auteurs notent en effet S_{YY} cette variation. En divisant cette variation par $n-1$ on obtient s_Y^2 la variance échantillonnale de la variable Y. Aussi la variation de la variable X est

$$S_{XX} = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2.$$

La notion de covariation est définie par

$$S_{XY} = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})(Y - \bar{Y}).$$

En divisant cette quantité par $n-1$, on estime la covariance entre X et Y. On a vu que

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}}; \qquad \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}; \qquad r = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX} S_{YY}}}.$$

(i) Rappeler les quantités SCE, SCM, et SCT.

(ii) Lier les quantités SCE, SCM, et SCT pour obtenir l'équation de la variance dans le cas d'une régression linéaire simple.

(iii) Exprimer SCT en fonction des quantités de l'énoncé.

(iv) Montrer que l'équation de la droite de régression peut aussi s'écrire sous la forme

$$\hat{Y} = \bar{Y} + \hat{\beta}_1 (X - \bar{X}).$$

(v) Exprimer SCM en fonction de $\hat{\beta}_1$ et des quantités de l'énoncé.

(vi) Exprimer R^2, le carré de r en fonction de SCT, SCM, SCE.

(vii) On considère deux séries X et Y. Après traitement, on obtient les données suivantes :

$$\begin{aligned} SCT &= 3500, \\ SCM &= 3000, \\ S_{XX} &= 40 \\ n &= 32. \end{aligned}$$

(a) Donner la valeur de SCE

(b) Calculer R^2 et commenter.

(c) Calculer la valeur de $\hat{\beta}_1$ et de S_{XY}.

(d) Faire le test de Fisher au seuil 5% pour conclure sur l'effet de X sur Y. (On donnera le détail des calculs : statistique du test, quantile théorique.)

Exercice 3.4 *Dans le cadre de l'exercice 3.1, on a fait les tests courants sur la régression linéaire.*

```
> summary(lm(taux~rang))

Call:
lm(formula = taux ~ rang)

Residuals:
       1        2        3        4        5        6 
-0.84762  0.51810  0.38381  0.54952 -0.08476 -0.51905 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)  67.6133     0.6092  110.99 3.95e-08 ***
rang          2.4343     0.1564   15.56 9.95e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.6544 on 4 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9838,    Adjusted R-squared:  0.9797 
F-statistic: 242.2 on 1 and 4 DF,  p-value: 9.954e-05
```

Commenter.

4 Anova

Exercice 4.1 *Les effets de 3 niveaux de vitamines B12 ont été comparés en incorporant chaque niveau à l'alimentation de trois porcs. Les gains moyens journaliers des porcs (jusqu'à 75 livres de poids vif) sont les suivants.*

Doses de B12 en mg par 500g de ration

5	10	20
1,52	1,63	1,44
1,56	1,57	1,52
1,54	1,54	1,62

(i) Calculer la moyenne de chacun des groupes.

(ii) Calculer la variation de chacun des groupes.

(iii) Tester l'hypothèse que les doses ont le même effet sur l'augmentation de poids.

Exercice 4.2 *On a fait figurer le nombre de chenilles arpenteuses (larves d'insectes) trouv 'ees par parcelle de 50 plants de choux après application de 5 traitements répétés chacun sur 5 parcelles.*

Traitements	1	2	3	4	5
	11	6	8	14	7
	4	4	6	27	4
	4	3	4	8	9
	5	6	11	18	14
	8	7	10	36	12
Moyenne	6,4	5,2	7,8	20,6	9,2
Variance corrigée	9,3	2,7	8,2	121,8	15,7

Quelles sont les conclusions ?

Exercice 4.3 *Supposons que M. Martin peut se rendre chez lui le soir par trois routes différentes. Il essaye chacune d'elles 5 fois en prenant note du temps à chaque fois. Voici les résultats, en minutes.*

Route 1	22,	26,	25,	25,	31
Route 2	25,	27,	28,	26,	29
Route 3	26,	29,	33,	30,	33

On a demandé la table d'ANOVA sur R :

```
Analysis of Variance Table

Response: temps
          Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
route      1 48.400  48.400  6.9194 0.02077 *
Residuals 13 90.933   6.995
---
```

Testez l'hypothèse que les trois routes sont comparables et *chercher l'erreur !*

Exercice 4.4 *Dans un cabinet de courtage, un associé principal souhaite déterminer s'il y a vraiment des différences entre les performances à long terme des différentes catégories de personnes embauchées comme représentants auprès des clients. Les associés juniors de la société sont classés en quatre groupes : les professionnels (qui ont changé de carrière), (Groupe 1) ; les diplômés récents des écoles de commerce, (Groupe 2) ; d'anciens vendeurs, (Groupe 3) et les courtiers engagés d'entreprises concurrentes, (Groupe 4). Un échantillon aléatoire de six personnes dans chacune de ces quatre catégories est sélectionné et un score de performance (un nombre plus élevé indique de meilleures performances) est obtenu. Les données figurent dans la table suivante.*

Professionnels	*Diplômes en administration*	*Vendeurs*	*Courtiers*
88	65	61	83
85	73	67	87
95	54	74	90
96	72	65	84
91	81	68	92
88	69	77	94

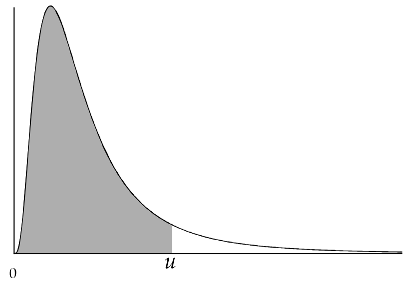
Pour l'ensemble des 24 individus, on a une moyenne de 79,12 et une variance de 144,8098. On a calculé

```
> anova(lm(perf~groupe))
Analysis of Variance Table

Response: perf
          Df  Sum Sq Mean Sq F value
groupe     3 2556.46  852.15  22.015
Residuals 20  774.17   38.71
---
```

Y a-t-il des différences significatives au niveau des moyennes du score de performance pour les différentes catégories ?

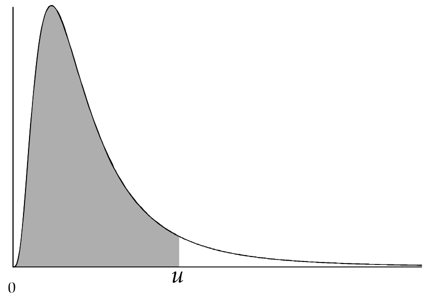
5 Fractiles de Fisher



$$u = \Pr(F \leqslant u) = 0{,}95$$

	ν_1												
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14
1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,71
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,87
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68	4,64
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,96
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,53
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,24
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,03
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,86
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,74
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,64
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,55
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,48
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,42
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,37
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,33
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,29
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,26
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,22
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25	2,20
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,17
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20	2,15
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18	2,13
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16	2,11
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,09
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17	2,13	2,08
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,06
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10	2,05
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,04
32	4,15	3,29	2,90	2,67	2,51	2,40	2,31	2,24	2,19	2,14	2,10	2,07	2,01
34	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,29	2,23	2,17	2,12	2,08	2,05	1,99
36	4,11	3,26	2,87	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,11	2,07	2,03	1,98
38	4,10	3,24	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09	2,05	2,02	1,96
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,95
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99	1,95	1,89
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,86
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97	1,93	1,89	1,84
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,91	1,88	1,82
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,11	2,04	1,99	1,94	1,90	1,86	1,80
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,89	1,85	1,79
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75	1,69

N.B. : le quantile d'ordre 0,05 de la loi $\mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$ est l'inverse du quantile d'ordre 0,95 de la loi $\mathcal{F}(\nu_2, \nu_1)$



$$u = \Pr(F \leqslant u) = 0{,}95$$

	ν_1												
ν_2	16	18	20	22	24	26	28	30	40	60	80	100	∞
1	246	247	248	249	249	249	250	250	251	252	253	253	254
2	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	8,69	8,67	8,66	8,65	8,64	8,63	8,62	8,62	8,59	8,57	8,56	8,55	8,53
4	5,84	5,82	5,80	5,79	5,77	5,76	5,75	5,75	5,72	5,69	5,67	5,66	5,63
5	4,60	4,58	4,56	4,54	4,53	4,52	4,50	4,50	4,46	4,43	4,41	4,41	4,36
6	3,92	3,90	3,87	3,86	3,84	3,83	3,82	3,81	3,77	3,74	3,72	3,71	3,67
7	3,49	3,47	3,44	3,43	3,41	3,40	3,39	3,38	3,34	3,30	3,29	3,27	3,23
8	3,20	3,17	3,15	3,13	3,12	3,10	3,09	3,08	3,04	3,01	2,99	2,97	2,93
9	2,99	2,96	2,94	2,92	2,90	2,89	2,87	2,86	2,83	2,79	2,77	2,76	2,71
10	2,83	2,80	2,77	2,75	2,74	2,72	2,71	2,70	2,66	2,62	2,60	2,59	2,54
11	2,70	2,67	2,65	2,63	2,61	2,59	2,58	2,57	2,53	2,49	2,47	2,46	2,40
12	2,60	2,57	2,54	2,52	2,51	2,49	2,48	2,47	2,43	2,38	2,36	2,35	2,30
13	2,51	2,48	2,46	2,44	2,42	2,41	2,39	2,38	2,34	2,30	2,27	2,26	2,21
14	2,44	2,41	2,39	2,37	2,35	2,33	2,32	2,31	2,27	2,22	2,20	2,19	2,13
15	2,38	2,35	2,33	2,31	2,29	2,27	2,26	2,25	2,20	2,16	2,14	2,12	2,07
16	2,33	2,30	2,28	2,25	2,24	2,22	2,21	2,19	2,15	2,11	2,08	2,07	2,01
17	2,29	2,26	2,23	2,21	2,19	2,17	2,16	2,15	2,10	2,06	2,03	2,02	1,96
18	2,25	2,22	2,19	2,17	2,15	2,13	2,12	2,11	2,06	2,02	1,99	1,98	1,92
19	2,21	2,18	2,16	2,13	2,11	2,10	2,08	2,07	2,03	1,98	1,96	1,94	1,88
20	2,18	2,15	2,12	2,10	2,08	2,07	2,05	2,04	1,99	1,95	1,92	1,91	1,84
21	2,16	2,12	2,10	2,07	2,05	2,04	2,02	2,01	1,96	1,92	1,89	1,88	1,81
22	2,13	2,10	2,07	2,05	2,03	2,01	2,00	1,98	1,94	1,89	1,86	1,85	1,78
23	2,11	2,08	2,05	2,02	2,01	1,99	1,97	1,96	1,91	1,86	1,84	1,82	1,76
24	2,09	2,05	2,03	2,00	1,98	1,97	1,95	1,94	1,89	1,84	1,82	1,80	1,73
25	2,07	2,04	2,01	1,98	1,96	1,95	1,93	1,92	1,87	1,82	1,80	1,78	1,71
26	2,05	2,02	1,99	1,97	1,95	1,93	1,91	1,90	1,85	1,80	1,78	1,76	1,69
27	2,04	2,00	1,97	1,95	1,93	1,91	1,90	1,88	1,84	1,79	1,76	1,74	1,67
28	2,02	1,99	1,96	1,93	1,91	1,90	1,88	1,87	1,82	1,77	1,74	1,73	1,65
29	2,01	1,97	1,94	1,92	1,90	1,88	1,87	1,85	1,81	1,75	1,73	1,71	1,64
30	1,99	1,96	1,93	1,91	1,89	1,87	1,85	1,84	1,79	1,74	1,71	1,70	1,62
32	1,97	1,94	1,91	1,88	1,86	1,85	1,83	1,82	1,77	1,71	1,69	1,67	1,59
34	1,95	1,92	1,89	1,86	1,84	1,82	1,81	1,80	1,75	1,69	1,66	1,65	1,57
36	1,93	1,90	1,87	1,85	1,82	1,81	1,79	1,78	1,73	1,67	1,64	1,62	1,55
38	1,92	1,88	1,85	1,83	1,81	1,79	1,77	1,76	1,71	1,65	1,62	1,61	1,53
40	1,90	1,87	1,84	1,81	1,79	1,77	1,76	1,74	1,69	1,64	1,61	1,59	1,51
50	1,85	1,81	1,78	1,76	1,74	1,72	1,70	1,69	1,63	1,58	1,54	1,52	1,44
60	1,82	1,78	1,75	1,72	1,70	1,68	1,66	1,65	1,59	1,53	1,50	1,48	1,39
70	1,79	1,75	1,72	1,70	1,67	1,65	1,64	1,62	1,57	1,50	1,47	1,45	1,35
80	1,77	1,73	1,70	1,68	1,65	1,63	1,62	1,60	1,54	1,48	1,45	1,43	1,32
90	1,76	1,72	1,69	1,66	1,64	1,62	1,60	1,59	1,53	1,46	1,43	1,41	1,30
100	1,75	1,71	1,68	1,65	1,63	1,61	1,59	1,57	1,52	1,45	1,41	1,39	1,28
∞	1,64	1,60	1,57	1,54	1,52	1,50	1,48	1,46	1,39	1,32	1,27	1,24	1,00