Troisième année de Licence MIASHS

TD – Statistique mathématique 3[1]

Julien GREPAT[2]

Contents

[2]Contact : `julien.grepat@univ-grenoble-alpes.fr`

1 Tests du χ^2

Exercice 1.1 *On interroge 1869 étudiants sur la catégorie socio-professionnelle de leur parents. Les étudiants suivent différents cursus : écoles d'ingénieurs, écoles de commerce, universités scientifiques, médecine. Les résultats sont les suivants :*

	Ouvriers	*employés*	*cadres*	*professions libérales*
Écoles d'ingénieurs	*50*	*280*	*120*	*20*
Écoles de commerce	*4*	*29*	*210*	*350*
Universités scientifiques	*150*	*230*	*100*	*40*
Médecine	*26*	*80*	*80*	*100*

(i) Quelles précautions prendre avant de faire le test du χ^2 ? Fusionner les catégoris socio-professionnelles proches.

(ii) Effectuer un test d'indépendance du χ^2 entre les deux variables.

Exercice 1.2 *On considère la distribution suivante de 300 accouchements selon les jours de la semaine :*

Jour	*L*	*M*	*M*	*J*	*V*	*S*	*D*
Effectif	*50*	*42*	*47*	*42*	*44*	*40*	*35*

Effectuer un test pour déterminer si les accouchements se répartissent uniformément.

Exercice 1.3 *On considère la série suivante relevant le nombre de clients d'un grand magasin spécialisé sur une tranche d'une heure. Le nombre de clients est x_i, le nombre de tranches horaires avec ce nombre de clients est O_i.*

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
O_i	*6*	*14*	*33*	*43*	*34*	*32*	*21*	*6*	*5*	*6*
T_i										

On note que la moyenne et la variance de cette distribution est proche de 4. On donne la fonction de masse de la loi de Poisson $\mathcal{P}(4)$.

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
O_i	*0.0183*	*0.0732*	*0.1465*	*0.1953*	*0.1953*	*0.1562*	*0.1042*	*0.0595*	*0.0297*	*0.0132*

(i) Compléter la ligne du tableau T_i des effectifs théoriques associé à la loi de Poisson.

(ii) Effectuer un test pour vérifier l'adéquation de la loi observée à la loi de Poisson.

2 Normalité

Exercice 2.1 *On considère la série de données suivante*

1,67	*3,44*	*4,56*	*3,11*	*3,06*	*3,12*	*3,07*	*4,44*	*4,11*	*2,25*

(i) Comparer la distribution de ces données à la loi $\mathcal{N}(3;1)$ à l'aide d'un QQ-plot.

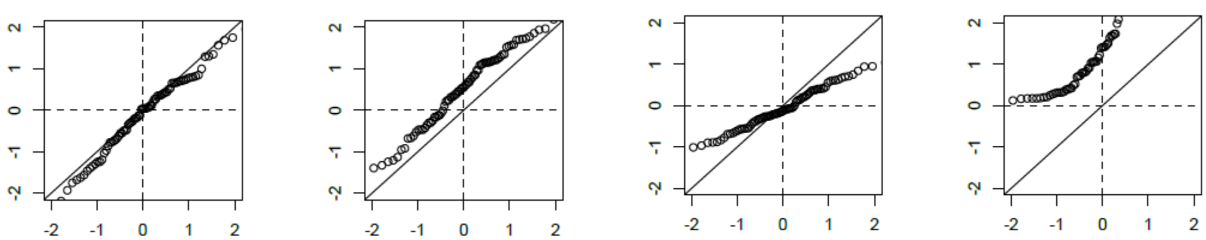
(ii) On a fait le test de Shapiro–Wilk.

```
        Shapiro-Wilk normality test

data:  sn
W = 0.9521, p-value = 0.6934
```

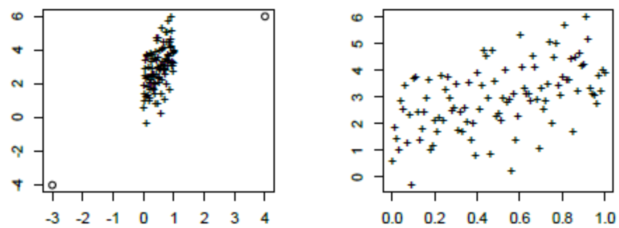
Commenter.

Exercice 2.2 *Pour chaque diagramme quantile-quantile suivant, on a tracé les quantiles empiriques d'une série statistique en fonction des quantiles d'une loi gaussienne centrée réduite. Pour chaque diagramme, interpréter le résultat.*



3 Régression linéaire

Exercice 3.1 *On observe une série double à droite, à laquelle on ajoute deux points aberrants à gauche.*



(i) Pour le nuage de points á droite on a obtenu les valeurs suivantes :

$$\sum_{i=1}^{101} x_i = 50,5, \qquad \sum_{i=1}^{101} y_i = 301,$$

$$\sum_{i=1}^{101} x_i^2 = 33,8, \qquad \sum_{i=1}^{101} y_i^2 = 1049,9, \qquad \sum_{i=1}^{101} x_i y_1 = 168,9.$$

Calculer l'équation de la droite des moindres carrés et le coefficient de corrélation.

(ii) On ajoute au nuage de points précédent les deux points suivants :

$$(x_{102}, y_{102}) = (-3, -4), \qquad (x_{103}, y_{103}) = (4, 6).$$

Calculer à nouveau l'équation de la droite des moindres carrés et le coefficient de corrélation.

(iii) Tester l'effet de X sur Y dans les deux cas.

Exercice 3.2 **Notation.** *Nous avons introduit le mot "variation" pour désigner la quantité*

$$S_{YY} = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2.$$

Certains auteurs notent en effet S_{YY} *cette variation. En divisant cette variation par* $n-1$ *on obtient* s_Y^2 *la variance échantillonnale de la variable* Y*. Aussi la variation de la variable* X *est*

$$S_{XX} = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2.$$

La notion de covariation est définie par

$$S_{XY} = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})(Y - \bar{Y}).$$

En divisant cette quantité par $n-1$*, on estime la covariance entre* X *et* Y*. On a vu que*

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}}; \qquad \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}; \qquad r = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX} S_{YY}}}.$$

(i) Montrer que l'équation de la droite de régression peut aussi s'écrire sous la forme

$$\hat{Y} = \bar{Y} + \hat{\beta}_1(X - \bar{X}).$$

(ii) Dans ce cas, montrer que la distance entre la droite et le nuage de points devient

$$S(\beta_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(Y_i - \bar{Y}\right) - \beta_1\left(X_i - \bar{X}\right)\right]^2.$$

(iii) En quelle valeur de β_1 la fonction $S(\beta_1)$ atteint-elle son minimum ?

(iv) Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}) = 0,$$

$$S_{XY} = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X}) = \sum_{i=0}^{n}(X_i - \bar{X})Y_i,$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})Y_i}{S_{XX}}.$$

(v) Soit $a_i = \frac{X_i - \bar{X}}{S_{XX}}$, pour $i \in \{1, \cdots, n\}$. Montrer que

- $\hat{\beta}_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i Y_i$;
- $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$;
- $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i = 1$;
- $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1/S_{XX}$.

En déduire que $\hat{\beta}_1$ est une variable normale dont on précisera sa moyenne et sa variance.

Exercice 3.3 *Une usine fabrique des toiles métalliques pour des usines de pâtes à papier. Afin de mieux répartir son personnel, le gérant aimerait prévoir le temps, T, requis pour la finition des toiles. Ce temps pourrait être lié, entre autres variables, à la surface de la toile, S. On a obtenu les données suivantes.*

i	T	S	T^2	S^2	$T \times S$
1	5,5	9,3	30,25	86,49	51,15
2	5,9	13,5	34,81	182,25	79,65
3	5,8	11,1	33,64	123,21	64,38
4	6,3	14,9	39,69	222,01	93,87
5	7,0	16,7	49,00	278,89	116,9
6	7,5	23,2	56,25	538,24	174,0
7	5,5	11,1	30,25	123,21	61,05
8	7,2	20,4	51,84	416,16	146,88
9	6,5	15,8	42,25	249,64	102,7
10	6,5	14,9	42,25	222,01	96,85
11	7,1	18,6	50,41	345,96	132,06
12	7,0	15,8	49,00	249,64	110,60
13	6,9	16,7	47,61	278,89	115,23
14	6,8	15,8	46,24	249,64	107,44
15	6,6	16,7	43,56	278,89	110,22
Totaux	98,1	234,5	647,05	3845,13	1562,98

On a calculé

	T	S
Moyenne	$6,54$	$15,6333$
Écart type	$0,625414$	$3,57684$
Corrélation	$0,937157$	

T	S
$\sum T_i = 98,1$	$\sum S_i = 234,5$
$\sum T_i^2 = 647,05$	$\sum S_i^2 = 3845,13$
$\sum T_i S_i = 1562,98$	

(i) Quelle variable doit-on utiliser comme variable dépendante ? (Justifier ce choix).

(ii) Déterminer l'équation de régression correspondante.

(iii) Quel est le temps moyen de finition pour une toile de $20m^2$?

(iv) Quel est le pourcentage de variation expliquée par la droite de régression ?

(v) La régression est-elle utilisable pour des fins de prévision ?

(vi) Faire le tableau de l'analyse de la variance.

(vii) Faire un graphique des données. Tracer la droite de régression. Le modèle est-il raisonnable ?

(viii) Donner un intervalle de confiance à 95% pour le temps moyen nécessaire au traitement d'une toile de 20 m^2.

4 ANOVA à un facteur

Exercice 4.1 *Quatre types de compléments protéinés ont chacun été donnés en nourriture à un lot de 5 poussins. Les gains de poids sont*

cpt 1	*55*	*49*	*42*	*21*	*52*
cpt 2	*61*	*112*	*30*	*89*	*63*
cpt 3	*42*	*97*	*81*	*95*	*92*
cpt 4	*169*	*137*	*169*	*85*	*154*

(i) Analysez la variance et testez l'égalité des moyennes.

(ii) Les trois premiers compléments sont d'origine terrestre, le quatrième est à base de poisson. Le quatrième complément est-il plus efficace que les trois autres ?

Exercice 4.2 *En 2006, les résultats d'une enquête relative à la santé mentale des prisonniers de sexe masculin ont été publiés. Plusieurs variables ont été relevées. Entre autres, l'âge et l'indice de la recherche de nouveauté (IRN)*[3] *ont été observés. Nous avons formé trois groupes, un premier où l'IRN est faible (1), un second où il est moyen (2) et un troisième où il est élevé. On a les statistiques suivantes :*

Groupe	*Moyenne*	*Variance(corrigé)*	*Taille*
Groupe 1	*42.667*	*199.804*	*249*
Groupe 2	*38.361*	*151.162*	*158*
Groupe 3	*35.844*	*156.007*	*289*
Tous	*38.856*	*179.122*	*696*

(i) Quelles conclusions peut-on tirer de cet ensemble de données ?

(ii) Est-il possible que la moyenne du second groupe soit égale à la moyenne des moyennes des deux autre groupes ?

Exercice 4.3

(i) Montrer la formule de calcul

$$SCM = \sum_{i=1}^{a} n_i \bar{X}_i^2 - n\bar{X}^2$$

(ii) Montrer la formule de calcul

$$SCT = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2 - n\bar{X}^2$$

(iii) Donner une formule analogue pour SCE et établir l'équation de la variance.

(iv) Montrer que le test t pour comparer deux moyennes est équivalent à une analyse de variance.

[3]En psychologie, la recherche de nouveauté est un trait de personnalité lié à l'activité d'exploration en réponse à de nouvelles stimulations, aux décisions impulsives, à la perte rapide de l'humeur et à l'évitement de la frustration.

Exercice 4.4 *Dans un cabinet de courtage, un associé principal souhaite déterminer s'il y a vraiment des différences entre les performances à long terme des différentes catégories de personnes embauchées comme représentants auprès des clients. Les associés juniors de la société sont classés en quatre groupes : les professionnels (qui ont changé de carrière), (Groupe 1) ; les diplômés récents des écoles de commerce, (Groupe 2) ; d'anciens vendeurs, (Groupe 3) et les courtiers engagés d'entreprises concurrentes, (Groupe 4). Un échantillon aléatoire de six personnes dans chacune de ces quatre catégories est sélectionné et un score de performance (un nombre plus élevé indique de meilleures performances) est obtenu. Les données figurent dans la table suivante.*

Professionnels	*Diplômes en administration*	*Vendeurs*	*Courtiers*
88	65	61	83
85	73	67	87
95	54	74	90
96	72	65	84
91	81	68	92
88	69	77	94

Pour l'ensemble des 24 individus, on a une moyenne de 79,12 et une variance de 144,8098. On a calculé

Groupe : k	n_k	$\overline{X}_k$	$Q_k = (n_k - 1)s_k^2$
1	6	90,50	93,5000
2	6	69,00	410,0000
3	6	68,67	173,3333
4	6	88,33	97,3333
Total			774,1666

(i) Y a-t-il des différences significatives au niveau des moyennes du score de performance pour les différentes catégories ?

(ii) Dès le départ, l'associé principal avait l'impression que la moyenne du score moyen des Professionnels et du score moyen des Courtiers serait supérieure à la moyenne du score moyen des Diplômés en administration et du score moyen des Vendeurs. Tester cette hypothèse. (Prendre $\alpha = 0,05$).

5 Anova à 2 facteurs

Exercice 5.1 *Un photographe désire optimiser l'indice de contraste de ses photos en fonction des dosages dans la solution de développement du négatif de métol et d'hydroquinone. Deux dosages sont possibles pour le métol (1,5 et 2,5 grammes) et deux aussi pour l'hydroquinone (4 et 6 grammes). Pour chaque couple de dosages, il effectue deux répétitions. Les mesures de l'indice de contraste obtenues sont données dans le tableau suivant :*

Hydroquinone

	4 gr	*6 gr*
Méthol 1,5 gr	*28*	*33*
	30	*33*
Méthol 2,5 gr	*42*	*40*
	38	*41*

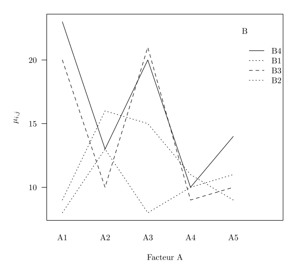
Appliquer l'analyse de la variance à ces données selon le plan à deux facteurs. Tracer le graphe des interactions pour conclure qu'on ne testera pas l'effet l'interaction des facteurs.

Exercice 5.2 *Les tableaux suivants donnent les moyennes théoriques μ_{ij} des différents cellules de plans à 2 facteurs.*

(i) Pour le premier cas,

Cas 1 :

	Facteur B				
Facteur A	**B 1**	**B 2**	**B 3**	**B 4**	$\overline{\mu}_{i.}$
A 1	8	9	20	23	15
A 2	13	16	10	13	13
A 3	8	15	21	20	16
A 4	10	11	9	10	10
A 5	11	9	10	14	11
$\overline{\mu}_{.j}$	10	12	14	16	13



(a) Donner les paramètres de la représentation du modèle sous la forme

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \epsilon_{ijk}.$$

(b) Sur un même graphique, pour chacune des valeurs de i, tracer le graphique de μ_{ij} en fonction de j. Rappeler le nom de ce graphe.

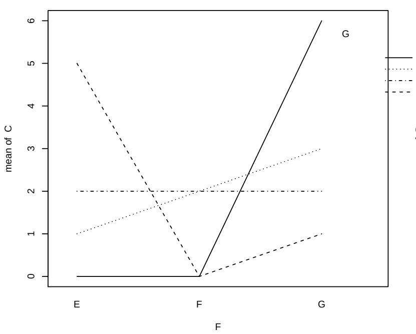
(c) Commenter l'effet de l'interaction des facteurs.

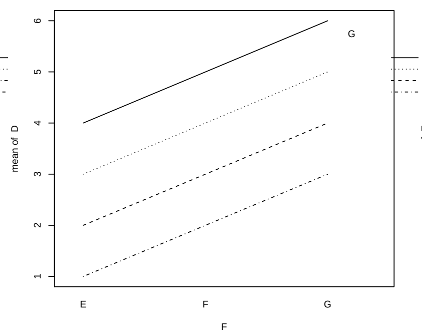
(ii) Associer les graphes d'interactions et commenter l'effet de l'interaction des facteurs.

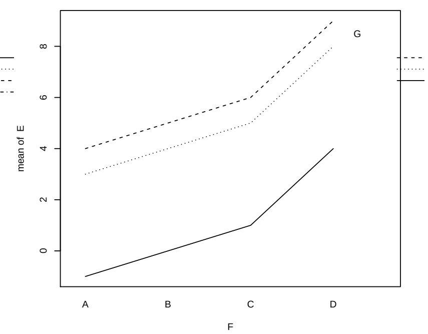
	Facteur B			
A	**B 1**	**B 2**	**B 3**	$\overline{\mu}_{i.}$
A 1	3	4	-1	2
A 2	4	5	0	3
A 3	5	6	1	4
A 4	8	9	4	7
$\overline{\mu}_{.j}$	5	6	1	4

	Facteur B				
r A	**B 1**	**B 2**	**B 3**	**B 4**	$\overline{\mu}_{i.}$
A 1	1	3	2	4	2.5
A 2	2	4	3	5	3.5
A 3	3	5	4	6	4.5
$\overline{\mu}_{.j}$	2	4	3	5	3.5

	Facteur B				
r A	**B 1**	**B 2**	**B 3**	**B 4**	$\overline{\mu}_{i.}$
A 1	2	1	5	0	2
A 2	2	2	0	0	1
A 3	2	3	1	6	3
$\overline{\mu}_{.j}$	2	2	2	2	2







6 Tests non paramétriques

Exercice 6.1 *Soit X une variable aléatoire de type continu dont la densité est $f(x)$ et dont la fonction de répartition est $F(x)$. Soit p une proportion strictement enre 0 et 1. Supposons que $F(x) = p$ admette une unique solution en x. Cette solution est dite : "quantile d'ordre p". Cette racine (ou solution) est notée ξ_p. Ainsi,*

$$P(X \leq \xi_p) = F(\xi_p) = p.$$

(i) *Soit Y_n, la nème statistique d'ordre d'un échantillon de taille N d'une distribution de type continue.* Trouver la plus petite valeur de n pour laquelle $P(\xi_{0,9} < Y_n) > 0,75$.

(ii) *Soit $Y_1 < \cdots < Y_5$, les statistiques d'ordre d'un échantillon de taille 5 d'une distribution de type continue.* Calculer

- $P(Y_1 < \xi_{0,5} < Y_5)$,
- $P(Y_1 < \xi_{0,25} < Y_3)$,
- $P(Y_4 < \xi_{0.8} < Y_5)$.

(iii) Trouver le plus petit n pour lequel $P(Y_1 < \xi_{0,5} < Y_n) > 0,99$, où $Y_1 < \cdots < Y_n$, les statistiques d'ordre d'un échantillon de taille n d'une distribution de type continue.

Exercice 6.2 *Des chercheurs en sciences de l'éducation veulent introduire une nouvelle méthode d'enseignement de certains concepts de mathématiques élémentaires. D'un groupe de 21 écoliers on en choisira 10 au hasard et ils seront soumis à cette nouvelle méthode tandis que les autres suivront la méthode habituelle.*

Quelle est la probabilité que dans le groupe de traitement on retrouve :

(i) les 10 plus intelligents ?

(ii) les 10 moins intelligents ?

(iii) les trois plus intelligents ?

Exercice 6.3 *Un professeur demande à ses étudiants de faire une demande de code d'accès à son site WEB, lequel est à accès restreint. Il y a 37 étudiants dans son cours : 23 filles et 14 garçons.*

Pour chacune des requêtes, il note le temps écoulé, en heures ouvrables, depuis le moment où il a demandé à ses étudiants de faire une telle demande. Il fait ce relevé car son expérience passée lui donne l'impression que les garçons ont plutôt tendance à ne pas se presser pour faire la demande. Il veut donc vérifier cette hypothèse.

	Temps écoulé	Sexe		Temps écoulé	Sexe
1	1,98	F	20	24,71	F
2	4,03	G	21	25,11	F
3	7,23	G	22	25,77	G
4	8,23	F	23	28,10	F
5	8,92	F	24	29,87	F
6	9,76	F	25	31,02	G
7	10,81	G	26	35,06	G
8	12,53	F	27	36,38	F
9	14,94	F	28	37,09	F
10	16,01	F	29	37,18	F
11	18,21	F	30	40,21	G
12	19,16	F	31	40,27	F
13	20,37	F	32	46,05	G
14	20,41	G	33	53,10	G
15	20,62	F	34	60,63	G
16	21,32	F	35	65,25	G
17	21,94	F	36	68,48	G
18	22,08	F	37	75,42	G
19	23,66	F			

On voudrait tester l'hypothèse que la distribution du temps écoulé pour les filles est la même que celle des garçons. Faire un test de Wilcoxon.

Exercice 6.4 *On considr̀e la série double d'observations*

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

(i) Pouvez-vous observer une relation entre x et y ?

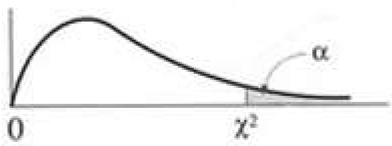
(ii) Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Y a-t-il besoin d'un test pour affirmer qu'il est nul ?

(iii) Faire le test de Spearman et conclure sur la liaison des deux séries.

Part I

Tables statistiques

7 Fractiles du χ^2



dl	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.10	0.45	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	0.58	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	1.21	2.37	4.11	6.25	7.82	9.35	11.35	12.84
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.54	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.66	23.59
10	2.15	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.34	13.70	17.28	19.68	21.92	24.72	26.75
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.03	23.34	26.21	28.30
13	3.56	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.17	13.34	17.12	21.06	23.69	26.12	29.14	31.31
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.04	14.34	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.79	16.34	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	13.68	17.34	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.15
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	14.56	18.34	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	15.45	19.34	23.83	28.41	31.41	34.17	37.56	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	16.34	20.34	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	17.24	21.34	26.04	30.81	33.93	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.19	11.69	13.09	14.85	18.14	22.34	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.88	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.34	28.24	33.20	36.42	39.37	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.34	29.34	34.38	37.65	40.65	44.32	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.84	25.34	30.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.80	12.88	14.57	16.15	18.11	21.75	26.34	31.53	36.74	40.11	43.20	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.66	27.34	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.57	28.34	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.78	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	29.34	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.67	22.14	24.42	26.51	29.06	33.67	39.34	45.61	51.80	55.75	59.34	63.71	66.80
50	27.96	29.68	32.35	34.76	37.69	42.95	49.34	56.33	63.16	67.50	71.42	76.17	79.52
60	35.50	37.46	40.47	43.19	46.46	52.30	59.34	66.98	74.39	79.08	83.30	88.40	91.98
70	43.25	45.42	48.75	51.74	55.33	61.70	69.34	77.57	85.52	90.53	95.03	100.44	104.24
80	51.14	53.52	57.15	60.39	64.28	71.15	79.34	88.13	96.57	101.88	106.63	112.34	116.35
90	59.17	61.74	65.64	69.13	73.29	80.63	89.33	98.65	107.56	113.14	118.14	124.13	128.32
100	67.30	70.05	74.22	77.93	82.36	90.14	99.33	109.14	118.49	124.34	129.56	135.82	140.19

8 Fractiles de Student

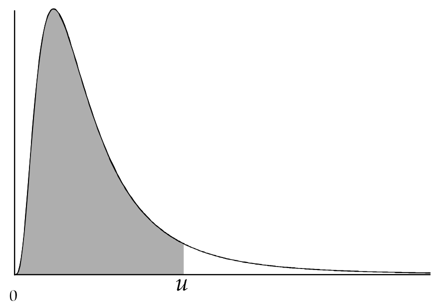
Valeurs des fractiles $t_P(\nu)$ pour $P \geq 60$
Pour les valeurs de $P \leq 0{,}40$, on a : $t_P(\nu) = t_{1-P}(\nu)$

ν \ P	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,999	0,9995
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
32	0,256	0,530	0,853	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365	3,622
34	0,255	0,529	0,852	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,348	3,601
36	0,255	0,529	0,852	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719	3,333	3,582
38	0,255	0,529	0,851	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	3,319	3,566
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
70	0,254	0,527	0,847	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211	3,435
80	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
90	0,254	0,526	0,846	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183	3,402
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

N.B. Pour $\nu > 40$, on pourra utiliser l'approximation suivante : $t_P(\nu) = u_P + \dfrac{\left(u_P^3 + u_P\right)}{4\nu}$

où u_P est le fractile d'ordre P de la loi normale réduite

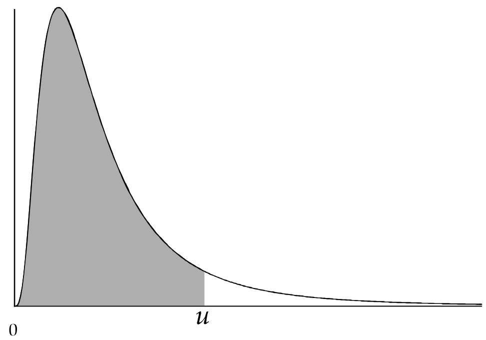
9 Fractiles de Fisher



$$u = \Pr(F \leqslant u) = 0{,}95$$

	ν_1												
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14
1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,71
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,87
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68	4,64
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,96
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,53
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,24
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,03
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,86
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,74
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,64
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,55
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,48
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,42
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,37
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,33
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,29
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,26
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,22
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25	2,20
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,17
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20	2,15
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18	2,13
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16	2,11
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,09
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17	2,13	2,08
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,06
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10	2,05
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,04
32	4,15	3,29	2,90	2,67	2,51	2,40	2,31	2,24	2,19	2,14	2,10	2,07	2,01
34	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,29	2,23	2,17	2,12	2,08	2,05	1,99
36	4,11	3,26	2,87	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,11	2,07	2,03	1,98
38	4,10	3,24	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09	2,05	2,02	1,96
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,95
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99	1,95	1,89
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,86
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97	1,93	1,89	1,84
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,91	1,88	1,82
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,11	2,04	1,99	1,94	1,90	1,86	1,80
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,89	1,85	1,79
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75	1,69

N.B. : le quantile d'ordre 0,05 de la loi $\mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$ est l'inverse du quantile d'ordre 0,95 de la loi $\mathcal{F}(\nu_2, \nu_1)$



$$u = \Pr(F \leqslant u) = 0{,}95$$

	ν_1												
ν_2	16	18	20	22	24	26	28	30	40	60	80	100	∞
1	246	247	248	249	249	249	250	250	251	252	253	253	254
2	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	8,69	8,67	8,66	8,65	8,64	8,63	8,62	8,62	8,59	8,57	8,56	8,55	8,53
4	5,84	5,82	5,80	5,79	5,77	5,76	5,75	5,75	5,72	5,69	5,67	5,66	5,63
5	4,60	4,58	4,56	4,54	4,53	4,52	4,50	4,50	4,46	4,43	4,41	4,41	4,36
6	3,92	3,90	3,87	3,86	3,84	3,83	3,82	3,81	3,77	3,74	3,72	3,71	3,67
7	3,49	3,47	3,44	3,43	3,41	3,40	3,39	3,38	3,34	3,30	3,29	3,27	3,23
8	3,20	3,17	3,15	3,13	3,12	3,10	3,09	3,08	3,04	3,01	2,99	2,97	2,93
9	2,99	2,96	2,94	2,92	2,90	2,89	2,87	2,86	2,83	2,79	2,77	2,76	2,71
10	2,83	2,80	2,77	2,75	2,74	2,72	2,71	2,70	2,66	2,62	2,60	2,59	2,54
11	2,70	2,67	2,65	2,63	2,61	2,59	2,58	2,57	2,53	2,49	2,47	2,46	2,40
12	2,60	2,57	2,54	2,52	2,51	2,49	2,48	2,47	2,43	2,38	2,36	2,35	2,30
13	2,51	2,48	2,46	2,44	2,42	2,41	2,39	2,38	2,34	2,30	2,27	2,26	2,21
14	2,44	2,41	2,39	2,37	2,35	2,33	2,32	2,31	2,27	2,22	2,20	2,19	2,13
15	2,38	2,35	2,33	2,31	2,29	2,27	2,26	2,25	2,20	2,16	2,14	2,12	2,07
16	2,33	2,30	2,28	2,25	2,24	2,22	2,21	2,19	2,15	2,11	2,08	2,07	2,01
17	2,29	2,26	2,23	2,21	2,19	2,17	2,16	2,15	2,10	2,06	2,03	2,02	1,96
18	2,25	2,22	2,19	2,17	2,15	2,13	2,12	2,11	2,06	2,02	1,99	1,98	1,92
19	2,21	2,18	2,16	2,13	2,11	2,10	2,08	2,07	2,03	1,98	1,96	1,94	1,88
20	2,18	2,15	2,12	2,10	2,08	2,07	2,05	2,04	1,99	1,95	1,92	1,91	1,84
21	2,16	2,12	2,10	2,07	2,05	2,04	2,02	2,01	1,96	1,92	1,89	1,88	1,81
22	2,13	2,10	2,07	2,05	2,03	2,01	2,00	1,98	1,94	1,89	1,86	1,85	1,78
23	2,11	2,08	2,05	2,02	2,01	1,99	1,97	1,96	1,91	1,86	1,84	1,82	1,76
24	2,09	2,05	2,03	2,00	1,98	1,97	1,95	1,94	1,89	1,84	1,82	1,80	1,73
25	2,07	2,04	2,01	1,98	1,96	1,95	1,93	1,92	1,87	1,82	1,80	1,78	1,71
26	2,05	2,02	1,99	1,97	1,95	1,93	1,91	1,90	1,85	1,80	1,78	1,76	1,69
27	2,04	2,00	1,97	1,95	1,93	1,91	1,90	1,88	1,84	1,79	1,76	1,74	1,67
28	2,02	1,99	1,96	1,93	1,91	1,90	1,88	1,87	1,82	1,77	1,74	1,73	1,65
29	2,01	1,97	1,94	1,92	1,90	1,88	1,87	1,85	1,81	1,75	1,73	1,71	1,64
30	1,99	1,96	1,93	1,91	1,89	1,87	1,85	1,84	1,79	1,74	1,71	1,70	1,62
32	1,97	1,94	1,91	1,88	1,86	1,85	1,83	1,82	1,77	1,71	1,69	1,67	1,59
34	1,95	1,92	1,89	1,86	1,84	1,82	1,81	1,80	1,75	1,69	1,66	1,65	1,57
36	1,93	1,90	1,87	1,85	1,82	1,81	1,79	1,78	1,73	1,67	1,64	1,62	1,55
38	1,92	1,88	1,85	1,83	1,81	1,79	1,77	1,76	1,71	1,65	1,62	1,61	1,53
40	1,90	1,87	1,84	1,81	1,79	1,77	1,76	1,74	1,69	1,64	1,61	1,59	1,51
50	1,85	1,81	1,78	1,76	1,74	1,72	1,70	1,69	1,63	1,58	1,54	1,52	1,44
60	1,82	1,78	1,75	1,72	1,70	1,68	1,66	1,65	1,59	1,53	1,50	1,48	1,39
70	1,79	1,75	1,72	1,70	1,67	1,65	1,64	1,62	1,57	1,50	1,47	1,45	1,35
80	1,77	1,73	1,70	1,68	1,65	1,63	1,62	1,60	1,54	1,48	1,45	1,43	1,32
90	1,76	1,72	1,69	1,66	1,64	1,62	1,60	1,59	1,53	1,46	1,43	1,41	1,30
100	1,75	1,71	1,68	1,65	1,63	1,61	1,59	1,57	1,52	1,45	1,41	1,39	1,28
∞	1,64	1,60	1,57	1,54	1,52	1,50	1,48	1,46	1,39	1,32	1,27	1,24	1,00