

Résolution numérique de l'équation de Helmholtz

Barème

Votre travail devra être présenté lors d'une soutenance orale en binome (**durée complète : 14 minutes**). Les 2 membres du binome doivent tout d'abord présenter les résultats pendant **une durée de 7 minutes**. Des transparents peuvent être utilisés pour présenter vos résultats mais il est surtout demandé de montrer et commenter votre code et de faire une ou plusieurs démos.

Lors de la séance de questions (**durée : 7 minutes**), vous devez prouver que vous maîtrisez toutes les méthodes et les algorithmes que vous avez utilisés.

Vous avez le droit d'utiliser tous les documents et les outils informatiques que vous voulez.

La prise d'initiative et la créativité seront largement récompensées.

- **6 points pour la partie 1, environ 2 minutes de présentation**
- **7 points pour la partie 2, environ 2 minutes de présentation**
- **7 points pour la partie 3, environ 3 minutes de présentation**

On s'intéresse dans ce TP à la propagation des ondes acoustiques en régime harmonique, modélisée par l'équation de Helmholtz avec des conditions aux limites (C. L.) variées. Ce problème présente de multiples difficultés que nous allons aborder progressivement. Dans le premier exercice nous verrons comment prendre en compte des coefficients variables ainsi que des C. L. de Dirichlet. Dans le deuxième exercice, les C. L. considérées sont des conditions de Fourier. Enfin, le dernier exercice propose des questions plus ouvertes et propose une application sur une géométrie plus "amusante" avec un mélange de ces deux types de C. L.

Exercice 1. Équation de Helmholtz avec coefficients variables et conditions de Dirichlet

Soit Ω un ouvert borné à frontière polygonale de \mathbb{R}^2 . On s'intéresse au calcul de la pression de l'onde acoustique $P \equiv P(x, y)$, solution de l'équation de Helmholtz, avec condition aux limites de Dirichlet :

Trouver $P \in H^1(\Omega)$ telle que

$$(1) \quad \begin{cases} -\rho\omega^2 P - \operatorname{div}(\mu \nabla P) = S & \text{dans } \Omega \\ P = P_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} .$$

où ρ est une constante et μ une fonction : $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ régulière par morceaux, supposée positive et vérifiant :

$$\exists \mu_{\min} > 0, \mu_{\max} > 0, \quad 0 < \mu_{\min} \leq \mu(x, y) \leq \mu_{\max}, \quad \text{presque pour tout } (x, y) \in \Omega.$$

Les données sont la source $S \in L^2(\Omega)$, la pression fixée au bord $P_\Gamma \in \mathbb{R}$, supposée constante et la fréquence de l'onde ω .

1.1 - Si on exprime la pression P sous la forme $P(x, y) = P_\Gamma + u(x, y)$, (x, y) parcourant $\bar{\Omega}$, montrer que la nouvelle inconnue u est solution du problème :

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$(2) \quad \begin{cases} -\rho\omega^2 u - \operatorname{div}(\mu \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases},$$

en précisant la valeur du second membre f .

1.2 - Rappeler la formule d'intégration par parties avec la divergence, et vérifier que la formulation variationnelle du problème (2) s'écrit :

Trouver $u \in V(\Omega)$ telle que

$$(3) \quad -\omega^2 \int_{\Omega} \rho u v \, d\Omega + \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in V(\Omega).$$

où on précisera l'espace $V(\Omega)$.

Le caractère bien posé de cette formulation n'est pas clair : voir Exercice 1 du TD3 et voir questions dans la partie 3 de ce TP. Dans ce qui suit, nous ferons l'hypothèse que ce problème (3) est bien posé.

Discrétisation : Soit \mathcal{T}_h une triangulation du domaine Ω , et V_h l'approximation de $H^1(\Omega)$ par des éléments finis P^1 associés à la triangulation \mathcal{T}_h . On note $(T_\ell)_{\ell=1,L}$ les triangles de \mathcal{T}_h , $(M_I)_{I=1,N}$ les sommets des triangles et $(w_I)_{I=1,N}$ la base de V_h définie par $w_I(M_J) = \delta_{IJ}$, $1 \leq I, J \leq N$. Pour définir une approximation interne de $H_0^1(\Omega)$, on procède de la façon suivante. On introduit le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions de base associées aux noeuds intérieurs :

$$V_h^0 = \operatorname{Vect} \{w_I, \text{ t. q. } M_I \notin \partial\Omega\}, \quad \dim V_h^0 = N_0$$

Par construction, $V_h^0 \subset H_0^1(\Omega)$.

1.3 - Quelle est la formulation variationnelle discrète vérifiée par la solution approchée u_h ? Exprimer la pression approchée P_h en fonction de u_h .

1.4 - La solution approchée u_h s'écrit sous la forme

$$u_h(x, y) = \sum_{I \text{ t.q. } M_I \notin \partial\Omega} u_h(M_I) w_I(x, y), \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}.$$

Exprimer la formulation variationnelle discrète sous la forme d'un système linéaire équivalent :

$$(4) \quad \mathbb{A}^0(\omega) \vec{U}^0 = \vec{L}^0,$$

où la $I^{\text{ème}}$ composante du vecteur \vec{U}^0 vaut $u_h(M_I)$ et où on écrira $\mathbb{A}^0(\omega) = -\rho\omega^2 \mathbb{M}^0 + \mathbb{K}_\mu^0$, avec \mathbb{M}^0 la matrice de masse, et \mathbb{K}_μ^0 la matrice de rigidité. Quelles sont les tailles de $\vec{U}^0, \mathbb{M}^0, \mathbb{K}_\mu^0$ et $\mathbb{A}^0(\omega)$? Quelles sont les propriétés fondamentales des matrices \mathbb{M}^0 et \mathbb{K}_μ^0 ?

1.5 - Dans la pratique, plutôt que de résoudre le système linéaire (4), on préfère résoudre :

$$(5) \quad \tilde{\mathbb{A}}(\omega) \vec{U} = \vec{\tilde{L}},$$

obtenu à l'aide de la technique de **pseudo-élimination**. Nous noterons dans la suite

$$\mathbb{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \mathbb{K}_\mu \in \mathbb{R}^{N \times N}, \mathbb{A}(\omega) = -\rho\omega^2 \mathbb{M} + \mathbb{K}_\mu \in \mathbb{R}^{N \times N} \text{ et } \vec{L} \in \mathbb{R}^N,$$

les matrices et vecteurs construits avec **toutes les fonctions de base** (comme on fait au TP1).

a) Notons $\vec{V} \in \mathbb{R}^N$ la solution du système

$$(6) \quad \mathbb{A}(\omega) \vec{V} = \vec{L},$$

Donner le problème aux limites dont \vec{V} approche la solution.

b) Rappeler comment sont obtenus $\tilde{\mathbb{A}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ et $\vec{\tilde{L}} \in \mathbb{R}^N$ à partir des matrices $\mathbb{A}(\omega) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ et $\vec{L} \in \mathbb{R}^N$. On donnera les expressions de $\tilde{\mathbb{A}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\vec{U} \in \mathbb{R}^N$ et $\vec{\tilde{L}} \in \mathbb{R}^N$ en fonction de $\mathbb{A}^0 \in \mathbb{R}^{N_0 \times N_0}$, $\vec{U}^0 \in \mathbb{R}^{N_0}$ et $\vec{L}^0 \in \mathbb{R}^{N_0}$. On pourra se placer dans le cas simplifié où les noeuds intérieurs sont numérotés de 1 à N_0 et les noeuds de la frontière de $N_0 + 1$ à N .

Avant d'effectuer la pseudo-élimination, nous allons donc calculer les matrices élémentaires et assembler les matrices \mathbb{A} et \vec{L} .

Géométrie et maillages : On veut résoudre le problème dans un ouvert Ω composé de deux zones Ω_1 et Ω_2 . On appelle $\mu_1 = \mu|_{\Omega_1}$ et $\mu_2 = \mu|_{\Omega_2}$ les restrictions de μ à chacun des sous-domaines. C'est lors du calcul des matrices élémentaires qu'il faudra distinguer si un triangle est dans le domaine Ω_1 (dans ce cas, on prendra $\mu = \mu_1$) ou dans le domaine Ω_2 (dans ce cas, on prendra $\mu = \mu_2$).

Calcul des matrices élémentaires par passage à l'élément fini de référence : On se place sur un triangle T_ℓ . Pour calculer les matrices élémentaires associées à ce triangle, nous allons utiliser une méthode de calcul, plus générale que les coordonnées barycentriques. Pour calculer les intégrales volumiques sur le triangle T_ℓ (composé des points M_1 , M_2 et M_3), on se ramène tout d'abord au triangle de référence \hat{T} (composé des points $\hat{M}_1 = (0, 0)$, $\hat{M}_2 = (1, 0)$ et $\hat{M}_3 = (0, 1)$).

1.6 - Calculer la transformation $\mathcal{F}_\ell : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\forall \hat{M} \in \mathbb{R}^2, \mathcal{F}_\ell(\hat{M}) = \mathcal{B}_\ell \hat{M} + S_\ell, \mathcal{B}_\ell \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), S_\ell \in \mathbb{R}^2$$

qui permet de passer du triangle de référence au triangle T_ℓ :

$$\forall i, \mathcal{F}_\ell(\hat{M}_i) = M_i.$$

Les intégrales de masse sur T_ℓ peuvent alors s'écrire

$$\int_{T_\ell} w_I(M) w_J(M) d\Omega = \int_{\hat{T}} \hat{w}_I(\hat{M}) \hat{w}_J(\hat{M}) |\det \mathcal{B}_\ell| d\hat{\Omega}$$

et de rigidité

$$\begin{aligned} \int_{T_\ell} \mu(M) \nabla w_I(M) \cdot \nabla w_J(M) d\Omega = \\ \int_{\hat{T}} \mu(\mathcal{F}_\ell(\hat{M})) \left[(\mathcal{B}_\ell^T)^{-1} \hat{\nabla} \hat{w}_I(\hat{M}) \right] \cdot \left[(\mathcal{B}_\ell^T)^{-1} \hat{\nabla} \hat{w}_J(\hat{M}) \right] |\det \mathcal{B}_\ell| d\hat{\Omega}. \end{aligned}$$

1.7 - Rappeler les expressions de \hat{w}_1 , \hat{w}_2 et \hat{w}_3 . En déduire le calcul de la matrice de masse élémentaire.

Quand les coefficients sont variables, il n'est pas toujours possible de calculer ces intégrales exactement. On les approche alors à l'aide de formules de quadratures dites à N_q points : pour G une fonction continue par morceaux de T_ℓ

$$\int_{\hat{T}} G d\Omega \simeq \sum_{q=1}^{N_q} \omega^q G(\hat{S}^q).$$

où \hat{S}^q sont des points de quadrature dans \hat{T} et ω^q les poids positifs associés aux points de quadrature. Il existe de nombreux points de quadrature (Gauss-Legendre, Gauss-Lobatto,...) qui fournissent des approximations des intégrales. Ces méthodes se différencient par le fait qu'elles intègrent exactement les polynômes d'un ordre donné, ce qui caractérise leur précision. On utilisera ici la formule de quadrature à 3 points de Gauss Legendre qui est d'ordre 2 et qui est définie sur le triangle de référence \hat{T} par

$$\begin{array}{c} \hat{S}^q \\ \hat{\omega}^q \end{array} \left| \begin{array}{c} (s_0, s_0) \\ \omega_0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} (s_1, s_0) \\ \omega_0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} (s_0, s_1) \\ \omega_0 \end{array} \right|$$

avec

$$s_0 = \frac{1}{6}, \quad s_1 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{6}.$$

1.8 - À l'aide de ces éléments, modifier le calcul des matrices de rigidité élémentaires. Il faudra modifier la routine `matK_mu_elem.m`, en prenant comme argument supplémentaire le tableau `Reftri` pour déterminer à quelle zone chaque triangle appartient (`Reftri=1` pour un triangle dans Ω_1 et `Reftri=2` pour un triangle dans Ω_2). En fonction de la zone, on utilisera les fonctions `mu_1.m` et `mu_2.m`, que vous pouvez modifier.

1.9 - Valider le calcul pour un triangle quelconque dans le cas $\rho = \mu = 1$ en comparant au calcul de la matrice élémentaire du TP précédent.

Assemblage des matrices et vecteur second membre :

La routine `principal_helmholtz.m` est le programme principal pour résoudre le problème (5), ce qui permet de calculer la pression approchée P_h .

1.10 - Reprendre la partie assemblage du TP précédent, permettant de construire la matrice $\mathbb{A}(\omega) = -\rho\omega^2 \mathbb{M} + \mathbb{K}_\mu$ et le vecteur \vec{L} , **avant la pseudo-élimination**. Comme au TP précédent, pour une donnée $f \in C^0(\overline{\Omega})$, le vecteur \vec{L} sera construit à l'aide d'une technique d'interpolation.

1.11 - Écrire une routine `matlab` dont la syntaxe est

$$[\text{tilde_AA}, \text{tilde_LL}] = \text{elimine}(\text{AA}, \text{LL}, \text{Refneu})$$

qui réalise la **pseudo-élimination** des nœuds i correspondant à $\text{Refneu}(i)=1$ (c'est à dire les nœuds sur la frontière, les nœuds intérieurs sont eux référencés à 0). Insérer un appel à cette routine à un endroit approprié dans `principal_helmholtz.m`.

Validation du code : On veut vérifier que le code calcule une solution approchée u_h correcte. Pour cela, on résout le problème (2) dans un carré $\Omega =]0, 1[^2$ avec les paramètres

$$\rho = 1, \mu = 1,$$

et une solution u égale à $u(x, y) = \sin(3\pi x) \sin(4\pi y)$, pour $(x, y) \in \overline{\Omega}$.

1.12 - Calculer la donnée f correspondante et modifier la routine `f.m`.

1.13 - Générer le(s) maillage(s) à l'aide du fichier `geomCarre.geo`

Note : Tous les fichiers “.geo” pour construire les maillages se trouvent dans le dossier “maillages”

1.14 - Représenter la solution exacte et la solution approchée pour différents maillages, pour $\omega = 4$.

1.15 - Convergence L^2 . En assimilant u à son interpolée $\pi_h u$, donner une estimation de la norme L^2 de l'erreur, relative $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} / \|u\|_{L^2(\Omega)}$, faisant intervenir la matrice de masse \mathbb{M}^0 . Comment évolue cette erreur en fonction de h ? On tracera le log cette erreur en fonction du $\log(1/h)$

1.16 - Convergence H^1 . Même question pour l'erreur relative en semi-norme H^1 : $|u - u_h|_1 = \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)^2}$, faisant intervenir la matrice de rigidité \mathbb{K}^0 .

Résolution numérique : On s'intéresse à la propagation d'ondes dans le sous-sol, pour des applications en géophysique ou en sismique. Nous supposons que le domaine est rectangulaire et défini par deux couches Ω_1 (en bas, en vert) et Ω_2 (en haut, en rouge) (voir figure 1). Dans cette partie, **nous choisissons** $\omega = 4$ et $\rho = 1$.

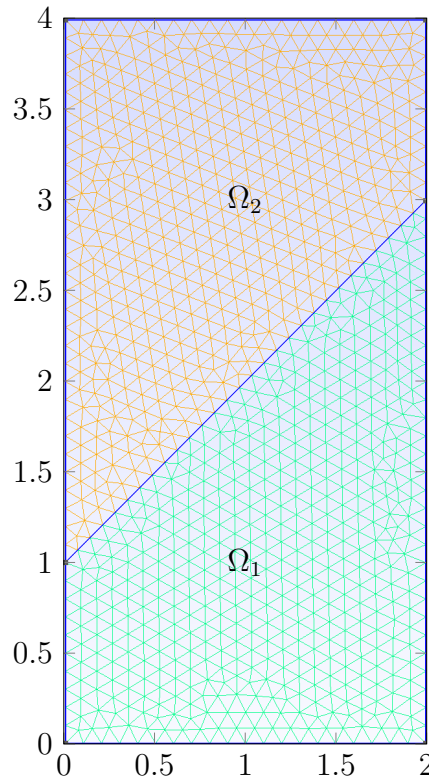


FIGURE 1 – Domaine Ω bi-couche

1.17 - Générer le(s) maillage(s) à l'aide du fichier `geom-2-couches.geo` .

1.18 - Dans cette question, nous supposons que μ_1 et μ_2 sont constantes respectivement dans Ω_1 et Ω_2 . Nous choisissons une source radiale centrée au point $S = (0.6, 2.5) \in \Omega_2$:

$$(7) \quad f(x, y) = A \sin(\omega r), \quad r = \sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2}.$$

Pour cela, il faudra changer le choix de la source dans le fichier `f.m`. Calculer et représenter la solution approchée pour les différents couples de valeurs de μ suivants :

$$(\mu_1, \mu_2) = (1, 1), (2, 1), (1, 2), (10, 1), (1, 10)$$

Commenter vos résultats.

1.19 - Nous supposons ici que $\mu_2 = 1$ et que le domaine Ω_1 est composé de couches parallèles à l'interface de sorte que $\mu_1(x, y)$ est variable. Cette fonction est déterminée dans le fichier `mu1.m`. *Calculer et représenter la solution approchée. Commenter vos résultats.*

1.20 - Dans ce qui précède, nous avons calculé la solution du problème (2). *Si on suppose que la condition au bord du problème (1) est $P_\Gamma = 1$, comment calculer la pression P ?*

Exercice 2. Équation de Helmholtz avec conditions aux limites transparentes

On veut résoudre le problème pour $f \in L^2(\Omega)$ et $\beta \in \mathbb{C}$

$$(\mathcal{P}^F) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que} \\ -\operatorname{div}(\mu \nabla u) - \omega^2 u = f, & \text{dans } \Omega, \\ \mu \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

où μ vérifie les mêmes hypothèses que dans l'exercice 1. La différence par rapport au système d'équations (2) est la condition aux limites sur la frontière $\partial\Omega$ qui devient une condition de type Fourier. Remarquons que lorsque $\beta = 0$, on retrouve la condition de Neumann homogène dont on a montré le caractère bien posé en cours. En outre, dès lors que $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (donc en particulier $\beta \neq 0$) **on doit résoudre le problème dans \mathbb{C}** . Lorsque $\beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$, le caractère bien posé n'est pas clair. Par contre, on admettra par la suite que pour $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, le problème est toujours bien posé.

2.1 - *Écrire la formulation variationnelle du problème (\mathcal{P}^F) : multiplier par \bar{v} et intégrer sur Ω . On précisera l'espace fonctionnel sur lequel elle est posée.*

On souhaite discrétiser (\mathcal{P}^F) en utilisant des éléments finis de Lagrange P^1 .

2.2 - *Après avoir introduit l'espace d'approximation V_h , écrire la formulation discrète dans V_h et prouver que le problème discret se met sous la forme*

$$(\mathcal{P}_h^F) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \vec{U}^F \in \mathbb{C}^N \text{ telle que} \\ \mathbb{K}^F \vec{U}^F - \omega^2 \mathbb{M}^F \vec{U}^F + \beta \mathbb{S} \vec{U}^F = \vec{L} \end{cases}$$

où on précisera les définitions des différentes matrices et vecteurs, en particulier \mathbb{S} , ainsi que leurs tailles.

2.3 - Écrire le code permettant de calculer la solution discrète. On complètera la routine `matS_elem.m` qui à partir des coordonnées de 2 sommets donne la matrice élémentaire de masse surfacique et on assemblera la matrice \mathbb{S} en faisant une boucle sur les arêtes.

Validation dans $\Omega =]0, 1]^2$.

2.4 - Modifier le fichier `geomCarre.geo` afin de générer le(s) maillage(s) prenant en compte cette nouvelle condition aux limites. On notera que les noeuds ainsi que les arêtes de la frontière “de Fourier” sont référencés à 2.

2.5 - Valider votre code et expliquer vos différentes validations :

- a) On se placera dans un premier temps dans le cas où $\beta = 0$. Trouver dans ce cas une solution exacte avec laquelle comparer la solution approchée.
- b) On considère ensuite le cas $\beta \neq 0$. Vous pourrez dans ce cas vérifier si la solution approchée semble converger numériquement vers une solution pour le choix de données suivantes :

$$\omega = 4, \quad f(x, y) = \sin(3\pi x) \sin(4\pi y) \text{ et } \beta = -i\omega,$$

On représentera les parties réelle et imaginaire de la solution.

Résolution numérique : nous reprenons le milieu bicouche défini dans l'exercice 1 avec un coefficient μ variable et la source radiale définie par (7).

2.6 - Faire les mêmes simulations que celles proposées aux questions 1.19 et 1.20 (mais ici avec des CL de Fourier) pour $\beta = -i\omega$ et $\omega = 4$. On prendra soin de modifier le fichier `geom-2-couches.geo` afin de générer un maillage adapté aux conditions aux limites.

Exercice 3. Questions plus ouvertes. Conditions aux limites mixtes

3.1 - Nous revenons dans un premier temps au problème avec CL de Dirichlet. Que pensez-vous du caractère bien posé de la formulation variationnelle (3) ? On pourra distinguer les cas $\rho > 0$ et $\rho < 0$.

3.2 - Dans cette question, nous nous plaçons dans le cas particulier où le domaine est un carré $\Omega =]0, 1]^2$ et les coefficients sont constants $\rho = \mu = 1$, le problème (2) devient alors

$$(8) \quad \begin{cases} -\omega^2 u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases},$$

On s'intéresse au caractère bien posé de ce problème.

- (a) Dans un premier temps, on pourra mettre en évidence numériquement la non solvabilité du problème pour $\omega_1 = \sqrt{2}\pi$, par exemple en essayant de calculer certaines quantités liées à la matrice $\tilde{\mathbb{A}}(\omega)$ pour des ω très proches de ω_1 .
- (b) Dans un deuxième temps, donnez des arguments théoriques sur la non-unicité pour $\omega = \omega_1$ (on pourra par exemple utiliser l'analyse spectrale du Laplacien sur un carré en se référant à de la biblio sur le sujet, ou encore chercher des solutions à variables séparées du problème homogène).

3.3 - Revenons maintenant au problème (\mathcal{P}^F) avec CL de Robin. Pour $\beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$ le problème n'est pas toujours bien posé. Pouvez-vous trouver des illustrations ?

Grâce aux deux exercices précédents, nous avons tous les outils pour résoudre un problème avec conditions aux limites mixtes. Nous supposons que la frontière de Ω se décompose en deux parties $\overline{\partial\Omega} = \overline{\Gamma^D} \cup \overline{\Gamma^F}$ sur chacune desquelles on pose une condition aux limites différente :

$$(\mathcal{P}^m) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que} \\ -\Delta u - \omega^2 u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma^D. \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = 0, & \text{sur } \Gamma^F. \end{array} \right.$$

Comme pour les exercices précédents, **les arêtes se trouvant sur Γ^D doivent avoir la référence 1 dans le fichier de maillage et celles de Γ^F la référence 2.** Dans cet exercice, nous vous proposons une nouvelle géométrie, le Pacman ! (voir Figure 2).

3.4 - Écrire la nouvelle formulation variationnelle du problème (\mathcal{P}^m) . On précisera l'espace fonctionnel qu'on pourra noter V_m .

3.5 - Expliquer précisément comment modifier votre code pour résoudre (\mathcal{P}^m) de manière à prendre en compte la condition aux limites de Dirichlet sur Γ^D ?

Le maillage de la figure (2) a été généré à l'aide du fichier `geomPacman.geo`. Le bord de cette géométrie est constitué d'un arc de cercle (tête), de deux segments (bouche) et d'un cercle intérieur (oeil). L'ouverture de la bouche est caractérisée par un angle θ qui peut être modifié. La frontière de Dirichlet Γ^D est constituée du bord de l'oeil du Pacman ainsi que du bord de sa bouche. La frontière de la tête correspond au bord de Fourier Γ^F .

3.6 - Testez votre code pour cette géométrie. Amusez vous avec cette géométrie en faisant varier θ et en analysant les résultats obtenus. Faire varier également β . Vous pouvez également modifier les frontières où sont posées les C.L. : cela demande de modifier le fichier `geomPacman.geo` en conséquence.

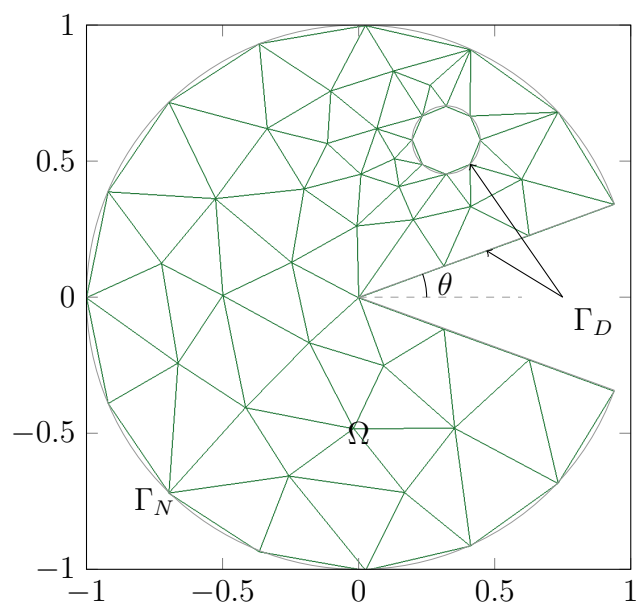


FIGURE 2 – Géométrie du Pacman

3.7 - Pour ce problème, nous ne disposons pas de la solution exacte. Comment proposeriez-vous de tester la convergence ? comment construire une solution de référence ? Appliquez votre méthode pour tester la convergence de votre code.

Indication : Il y a une fonction projection qui “projette” une solution UU_{fin} , définie sur un maillage fin, sur un deuxième maillage plus grossier :

```
function UU_grossier = projection(UU_fin, nom_maillage_fin, nom_maillage_grossier)
```

3.8 - Comment pourriez vous procéder pour traiter un problème avec 3 types de CL : Dirichlet non homogène, Fourier et Neumann non homogène ? Modifier le code en conséquence.