Analyse de stabilité, commandabilité et observabilité
Contrôleur SMC pour un véhicule maritime (WAM-V)

1 Modèle dynamique (3 DOF simplifié)

On considère le modèle de la dynamique en plan horizontal d'un WAM-V :

$$\begin{aligned} m\dot{u} &= X - d_u u + d_u^{ext}, & (1)\\ m\dot{v} &= Y - d_v v + d_v^{ext}, & (2)\\ I_z\dot{r} &= N - d_r r + d_r^{ext}, & (3)\\ \dot{\psi} &= r, & (4) \end{aligned}$$

où :

- u : vitesse longitudinale (surge),
- v : vitesse latérale (sway),
- r : vitesse de lacet (yaw rate),
- ψ : angle de cap,
- X, Y, N : force longitudinale, latérale et moment de lacet.

Les actions de commande proviennent des deux propulseurs T_L, T_R :

$$\begin{aligned} X &= T_L + T_R, & (5)\\ N &= d\,(T_R - T_L). & (6) \end{aligned}$$

Dans la pratique, la commande en Y est limitée (pas de propulseur latéral), on se concentre donc sur la dynamique (u, r, ψ).

2 Modèle espace d'état

On définit l'état :

$$x = \begin{bmatrix} u & r & \psi \end{bmatrix}^T, \quad u_c = \begin{bmatrix} T_L & T_R \end{bmatrix}^T.$$

Le modèle linéarisé autour d'un point d'équilibre s'écrit :

$$\dot{x} = Ax + Bu_c, \quad y = Cx,$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{d_u}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d_r}{I_z} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ -\frac{d}{I_z} & \frac{d}{I_z} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3 Stabilité libre

Les valeurs propres de A sont :

$$\lambda_1 = -\tfrac{d_u}{m}, \quad \lambda_2 = -\tfrac{d_r}{I_z}, \quad \lambda_3 = 0.$$

- Si $d_u, d_r > 0$, les modes associés à u et r sont stables.
- Le mode ψ est un intégrateur pur (neutre), ce qui est attendu car le cap ne se stabilise pas sans contrôle.

4 Commandabilité

La matrice de commandabilité est :

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}.$$

On vérifie que $\text{rang}(\mathcal{C}) = 3$ pour $d \neq 0$, $m \neq 0$, $I_z \neq 0$. Donc le système (A, B) est **complètement commandable** en (u, r, ψ).

5 Observabilité

La matrice d'observabilité est :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}.$$

Avec des capteurs typiques :

- GPS : donne (x, y) donc permet de reconstruire u par dérivation,
- IMU : donne r, ψ,
- Odométrie : donne u,

$\Rightarrow \text{rang}(\mathcal{O}) = 3$. Le système est donc **observable**.

6 Surfaces de glissement SMC

On définit les erreurs :

$$e_u = u - u_d, \quad e_\psi = \psi - \psi_d.$$

- Pour le surge (ordre relatif 1) :
$$s_u = e_u.$$
- Pour le cap (ordre relatif 2) :
$$r_d = \dot{\psi}_d - \lambda_\psi e_\psi, \quad s_\psi = r - r_d.$$

7 Lois de commande

$$X = m\left(\dot{u}_d - k_u \,\text{sat}\Big(\tfrac{s_u}{\phi_u}\Big)\right) + d_u u, \tag{7}$$

$$N = I_z\left(\dot{r}_d - k_\psi \,\text{sat}\Big(\tfrac{s_\psi}{\phi_\psi}\Big)\right) + d_r r. \tag{8}$$

Puis répartition sur les propulseurs :

$$T_L = \tfrac{1}{2}\left(X - \tfrac{N}{d}\right), \quad T_R = \tfrac{1}{2}\left(X + \tfrac{N}{d}\right).$$

8 Stabilité par Lyapunov

Considérons la fonction candidate :

$$V = \frac{1}{2}(s_u^2 + s_\psi^2).$$

Sa dérivée est :

$$\dot{V} = -\left(k_u - \frac{\Delta_u}{m}\right)|s_u| - \left(k_\psi - \frac{\Delta_r}{I_z}\right)|s_\psi|.$$

Si

$$k_u > \frac{\Delta_u}{m}, \quad k_\psi > \frac{\Delta_r}{I_z},$$

alors $\dot{V} < 0$, donc $s_u \to 0$, $s_\psi \to 0$. Par construction, cela implique $u \to u_d$, $\psi \to \psi_d$.

9 Conclusion

- Le système est **stabilisé passivement** (surge et yaw damping) sauf pour ψ (intégrateur).
- Le modèle est **commandable** et **observable** avec les capteurs disponibles.
- Le contrôleur **SMC** assure la robustesse face à des perturbations bornées.
- La stabilité globale est garantie par une fonction de Lyapunov.