

Wissenschaftliche Simulation

Projekt 1: Lineare Ausgleichsprobleme

Wir möchten lineare Ausgleichsprobleme der Form

$$\min \|b - Ax\| \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, \quad m \geq n$$

lösen.

Aufgabe 1

Lesen Sie Bärwolff: Numerik f. Ingenieure, Physiker und Informatiker, Kapitel 3-3.3 und 4.5 und schreiben Sie eine kurze Zusammenfassung.

Aufgabe 2

Zunächst versuchen wir, das Ausgleichsproblem über die Gaußschen Normalgleichungen zu lösen.

- i) Schreiben Sie ein Programm, welches für eine gegebene symmetrische, positiv definite Matrix A ihre Cholesky-Zerlegung $A = LL^T$ bestimmt. Überprüfen Sie jeweils, ob die Eingabematrix A die Voraussetzungen erfüllt.
- ii) Schreiben Sie ein Programm, welches das lineare Ausgleichsproblem durch Lösen der Gaußschen Normalgleichungen löst. Verwenden Sie Ihr Programm aus (i), um zunächst die Cholesky-Zerlegung der Matrix $A^T A$ zu bestimmen.

Aufgabe 3

Nun möchten wir das Ausgleichsproblem mit einem Orthogonalisierungsverfahren lösen. Dazu transformieren wir das Gleichungssystem $Ax = b$ auf das System $Q^T Ax = Q^T b$ mit

$$Q^T A = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \quad Q^T b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Dann lösen wir das System $Rx = b_1$.

- i) Schreiben Sie ein Programm, welches das Gleichungssystem transformiert
 - a) über Householder-Orthogonalisierung,
 - b) mittels Givens-Rotation.
- ii) Schreiben Sie ein Programm, welches das reduzierte Gleichungssystem $Rx = b_1$ löst.

Aufgabe 4

Schreiben Sie ein Skript, welches Ihre Implementierung aus Aufgabe 2 und 3 anhand mehrerer Beispiele testet. Geben Sie zusätzlich jeweils das Residuum aus und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse.