Exercice

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on pose $\text{Vect}(u, v)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u et v.

1. On pose $f_1 = (1, 1, 1)$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 0\}$.
   (a) Determiner deux vecteurs f_2 et f_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que $F = \text{Vect}(f_2, f_3)$, avec $f_2 = (a, 0, b)$ et $f_3 = (0, c, d)$, où a, b, c, et d sont à determiner.
   (b) Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Vérifier que $A^2 - 3A + 2I = O$ avec $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice nulle.
   (b) Montrer que A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.
3. (a) Déterminer les deux réels α et β tels que : $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix}$, où a, b, c et d sont les réels trouvés dans la question 1.a).
   (b) Qu'est ce qu'elles représentent α et β pour la matrice A ? Justifier votre réponse.
4. (a) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice P inversible, qui sont à determiner, telles que $A = PDP^{-1}$.
   (b) Montrer par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Problème

On désigne par n un entier naturel non nul et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{M}_{n,1}\mathbb{K})$ l'espace vectoriel réel des matrices colonnes à n lignes. Pour une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on désigne par $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$ le polynôme caractéristique de M. On note ${}^tM$ la matrice transposée de la matrice M et $\text{Tr}(M)$ la trace de la matrice carrée M. On rappelle que pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$.
On note $\text{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans cet ordre.
On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), {}^t S = S$.
On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t XSX \geq 0$.
$\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels positifs et $\mathbb{R}^{*+}$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs.
Le problème traite des propriétés et des applications qui sont autour de la notion de trace.

Partie 1 : Préliminaires

1. Montrer que l'application $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M \mapsto \text{Tr}(M)$, est linéaire.
2. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\operatorname{Tr}(MN)=\sum\limits_{\ell=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} m_{\ell,k}n_{k,\ell}$.

(b) Montrer que $\operatorname{Tr}(MN)=\operatorname{Tr}(NM)$.

(c) Montrer que si M et N sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\operatorname{Tr}(M)=\operatorname{Tr}(N)$.

3. On considère l'ensemble $F=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}); M \text{ et diagonale et } \operatorname{Tr}(M)=0\}$.

   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Determiner la dimension de F.

   (c) En déduire, pour toute matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la dimension du $\mathbb{R}-$espace vectoriel $G=PFP^{-1}=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}); M=PDP^{-1} \text{ et } D\in F\}$

4. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application,

$$\phi_A:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad X\mapsto X+(\operatorname{Tr}(X))A$$

   (a) Vérifier que ϕ_A est une application linéaire.

   Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation matricielle :

$$(\star)\quad \phi_A(X)=B$$

   (b) On suppose dans cette question que $\operatorname{Tr}(A)\neq -1$.

      i. On suppose que M est une solution de l'équation matricielle $(\star)$. Déterminer $\operatorname{Tr}(M)$ en fonction de $\operatorname{Tr}(A)$ et de $\operatorname{Tr}(B)$.

      ii. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation matricielle $(\star)$.

      iii. En déduire que ϕ_A est un automorphisme d'espaces vectoriels.

   (c) On suppose maintenant que $\operatorname{Tr}(A)=-1$.

      i. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, selon les valeurs de $\operatorname{Tr}(B)$, l'équation matricielle $(\star)$.

      ii. Montrer que ϕ_A est un projecteur sur un sous-espace vectoriel F_1 parllélement à un sous-espace vectoriel F_2. Determiner F_1 et F_2.

Partie 2 : La valeur absolue de la trace comme étant une fonction génératrice

On prend dans cette partie $\mathcal{E}=\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel rapporté à la base canonique $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, où pour tous entiers i et j tels que $1\leq i,j\leq n$, $E_{i,j}$ désigne la matrice de $\mathcal{E}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne qui est égal à 1. Pour tous entiers h et k tel que $1\leq h,k\leq n$, on désigne par $\delta_{h,k}$ le symbole de Kronnecker qui est défini par $\delta_{h,k}=\begin{cases}1 & \text{si}\quad h=k\\ 0 & \text{si}\quad h\neq k\end{cases}$. On rappelle que pour tous entiers naturels i,j,k,ℓ tel que $1\leq i,j,k,\ell\leq n$, $E_{i,j}E_{k,\ell}=\delta_{j,k}E_{i,\ell}$.
Une application q de $\mathcal{E}$ vers $\mathbb{R}^+$ est dite semi-norme si elle vérifie :

- $\forall M\in\mathcal{E},\forall\lambda\in\mathbb{K}, q(\lambda M)=|\lambda|q(M)$.
- $\forall(M,N)\in\mathcal{E}^2, q(M+N)\leq q(M)+q(N)$.

On dit qu'une semi-norme q sur $\mathcal{E}$ vérifie la propriété $(\mathscr{P})$ si $\forall(M,N)\in\mathcal{E}^2, q(MN)=q(NM)$.

1. **Soit q une semi-norme sur $\mathcal{E}$.**

(a) Montrer que $q(O) = 0$, où O est la matrice nulle, et que pour tout $M \in \mathcal{E}$, $q(-M) = q(M)$.
(b) Montrer que pour tout (M, N) de $\mathcal{E}^2$, $|q(M) - q(N)| \leq q(M + N)$.
(c) Montrer que pour tout (M, N) de $\mathcal{E}^2$, si $q(N) = 0$ alors $q(M + N) = q(M)$.

2. On considère l'application f définie de $\mathcal{E}$ vers $\mathbb{R}^+$ par $f(M) = |\operatorname{Tr}(M)|$. Montrer que f est une semi-norme qui vérifie la propriété $(\mathscr{P})$.

Dans les questions 3) et 4) de cette partie, on suppose que $n \geq 2$.

3. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et soient A et B deux matrices de E telles que,
$$A = \sum_{j=1}^{n} E_{1,j} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i} \quad \text{et} \quad B = \sum_{h=1}^{n} \alpha_h E_{h,1}$$
(a) Montrer que $AB = (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j) E_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i E_{i,1}$.
(b) Montrer que $BA = \sum_{h=1}^{n} \left(\alpha_h \sum_{j=1}^{n} E_{h,j} \right)$.

4. **Soit q une semi-norme sur $\mathcal{E}$ qui vérifie la propriété $(\mathscr{P})$.**
Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ un élément de $\mathcal{E}$.
(a) Montrer que pour tous entiers distincts i et j tel que $1 \leq i, j \leq n$, $q(E_{i,j}) = 0$, (on pourra utiliser le fait que $E_{i,j} = E_{i,i} E_{i,j}$).
(b) Par l'axiome de l'inégalité triangulaire vérifié par q et qu'on peut étendre facilement (par récurrence) à plus de deux vecteurs, on a $q\left(\sum_{i=2}^{n} m_{i,1} E_{i,1}\right) \leq \sum_{i=2}^{n} m_{i,1} q(E_{i,1})$, or $q(E_{i,1}) = 0$ en vertu de la question précédente, donc $q\left(\sum_{i=2}^{n} m_{i,1} E_{i,1}\right) = 0$.
(c) En déduire que $q\left(\sum_{i=2}^{n} m_{i,1} E_{i,i}\right) = 0$
(d) Verifier que $q(M) = q\left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,i} E_{i,i}\right)$.
(e) Montrer en prenant des valeurs précises pour $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$ qui définissent la matrice B, que $q(M) = q(BA)$.
(f) Montrer qu'il existe un réel positif α tel que $q = \alpha f$.

5. Dans le cas $n = 1$, le résultat démontré ci-dessus reste -t- il valable ? justifier votre réponse.

Partie 3 : Caractérisation d'une matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ par la notion de trace

$\mathcal{O}(n)$ désigne l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tMM = I_n$.

1. On considère une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
(a) Soit la matrice $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ telle que pour tout entier k, $1 \leq k \leq n$, λ_k sont des réels positifs. Soit $U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{O}(n)$.
i. Montrer que pour tous entiers k et i , $1 \leq k, i \leq n$, $|u_{k,i}| \leq 1$.
ii. Vérifier que $DU = (\lambda_i u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

iii. En déduire que $\mathrm{Tr}(DU) \leq \mathrm{Tr}(D)$.

(b) Soit U une matrice de $\mathcal{O}(n)$.

i. Montrer qu'il existe une matrice P de $\mathcal{O}(n)$ et une matrice $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, avec pour tout i, $1 \leq i \leq n$, α_i sont des réels positifs et $S = PD({}^tP)$.

ii. Montrer, en posant $V =^t PUP$, que $SU = P(DV)({}^tP)$.

iii. En déduire que $\mathrm{Tr}(SU) \leq \mathrm{Tr}(S)$

2. Réciproquement, soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que,

$$\forall U \in \mathcal{O}(n), \quad \mathrm{Tr}(AU) \leq \mathrm{Tr}(A)$$

(a) i. Montrer que, pour tous réels a, b, α, il existe un réel φ tel que

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$$

ii. En déduire que, si pour tout réel α, $a\cos\alpha + b\sin\alpha \leq a$ alors $b = 0$.

(b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de l'epace euclidien $\mathbb{R}^n$ pour son produit scalaire usuel. On note, pour tous entiers p et q tels que $1 \leq p < q \leq n$, $\pi_{p,q}$ le plan engendré par la famille (e_p, e_q). On considère $u_{p,q}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que la restriction de $u_{p,q}$ sur $\pi_{p,q}$ est la rotation de l'angle α et la restriction de $u_{p,q}$ sur l'orthogonal de $\pi_{p,q}$ est l'identité.

i. Écrire la matrice $U_{1,2}$ de $u_{1,2}$ relativement à la base $\mathcal{B}$. Montrer que $U_{1,2}$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

ii. Calculer $\mathrm{Tr}(AU_{1,2})$ en fonction de $a_{1,2}$, $a_{2,1}$, $(a_{i,i})_{1\leq i\leq n}$ et de α.

iii. En déduire que $a_{1,2} = a_{2,1}$.

iv. Écrire, dans le cas général, la matrice $U_{p,q}$ de $u_{p,q}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

v. Calculer, dans le cas général, $\mathrm{Tr}(AU_{p,q})$ en fonction de $a_{p,q}, a_{q,p}$, $(a_{i,i})_{1\leq i\leq n}$ et de α.

vi. En déduire que A est une matrice symétrique.

(c) i. Justifier qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A.

Pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, on note γ_i la valeur propre de A associée à v_i,

ii. Soit j un entier tel que $1 \leq j \leq n$. On considère l'endomorphisme w_j de $\mathbb{R}^n$ défini par $w_j(v_j) = -v_j$ et pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$ et $k \neq j$, $w_j(v_k) = v_k$. Soit W_j la matrice de w_j relativement à la base $\mathcal{B}$.

Vérifier que W_j est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et determiner $\mathrm{Tr}(AW_j)$ en fonction de $\mathrm{Tr}(A)$ et de γ_j. En déduire que $\gamma_j \geq 0$.

(d) En déduire que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.