## Exercice 1 [id=616] L'équation différentielle $y''-4y=a|x|+b$

Pour tout couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on considère l'équation différentielle :

$$(E_{a,b}):\quad y''-4y=a|x|+b$$

et on considère les fonctions

$$K:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto K(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(tx)}{t^2}\mathrm{d}t$$

et

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; x\mapsto F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(tx)}{t^2(t^2+1)}\mathrm{d}t$$

et on note $\alpha=K(1)$ (On ne demande pas pour le moment de calculer $\alpha$.)

**1** Donner une expression simple de $K(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ en fonction de $\alpha$ et $x$ (on pourra commencer par le cas de $x>0$.)

**2** Démontrer que $F$ est une solution de l'équation différentielle $E_{a,b}$ pour des valeurs à préciser de $a$ et $b$.

**3** Démontrer que $\forall x\in\mathbb{R},\quad |K(x)-F(x)|\leq\frac{\pi}{2}$. En déduire un équivalent simple de $F(x)$, quand $x$ tend vers $\pm\infty$.

**4** Calculer explicitement $K(x)$ et $F(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

**Solution :**

**1** Soit $x\in\mathbb{R}$.

• Si $x>0$, le changement de variable $xt=u$ donne $K(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(u)}{\frac{u^2}{x^2}}\frac{1}{x}\mathrm{d}u$, donc $K(x)=x\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(u)}{u^2}\mathrm{d}u=xK(1)=x\int_0^{-\infty}\frac{\sin^2(u)}{u^2}\mathrm{d}u=xK(1)=|x|K(1)$.

• Si $x<0$, le même changement de variable donne $K(x)=\int_0^{-\infty}\frac{\sin^2(u)}{\frac{u^2}{x^2}}\frac{1}{x}\mathrm{d}u=-x\int_{-\infty}^0 frac\sin^2(u)u^2\mathrm{d}u$ et comme la fonction $u\mapsto\frac{\sin^2(u)}{u^2}$ est paire, on a finalement $K(x)=-x\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(u)}{u^2}\mathrm{d}u=-xK(1)=|x|K(1)$.

• Si $x=0$, il est aisé de voir qu'on a toujours $F(0)=0=|0|K(1)$, donc finalement, on a prouvé que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(tx)}{t^2(t^2+1)}\mathrm{d}t=|x|K(1),\text{ avec } K(1)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

**2** $F$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ car l'application $u:(x,t)\mapsto u(x,t)=\frac{\sin^2(tx)}{t^2(t^2+1)}$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}\times]0,i[$. On a $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=\frac{2\sin(tx)\cos(xt)}{t(t^2+1)}=\frac{\sin(2tx)}{t(t^2+1)}$, donc, compte tenu de l'inégalité $\forall\tau\in\mathbb{R},|\sin(\tau)|\leq|\tau|$, si $a\in]0,+\infty[$ alors

$$\forall(x,t)\in[-a,a]\times]0,+\infty[,\quad\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|\leq\frac{2t|x|}{t^2+1}=\frac{2|x|}{t^2+1}\leq\frac{2|a|}{t^2+1}=\psi_a(t).$$

La fonction $t\mapsto\psi_a(t)=\frac{2|a|}{t^2+1}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale et dire que $F$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a la formule de Leibnitz : $\forall x\in\mathbb{R},F'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2tx)}{t(t^2+1)}$. On a aussi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=\frac{2\cos(xt)}{t^2+1}$ et $\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right|\leq\frac{2}{t^2+1}=\psi(t)$ et $t\mapsto\psi(t)$ est continue intégrable sur $]0,+\infty[$, donc encore avec le théorème de dérivation on a $F$ de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ et la formule de Leibnitz $\forall x\in\mathbb{R},F''(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{t^2+1}\mathrm{d}t$. Il en découle que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $F''(x)-4F(x)=\int_0^{+\infty}\left(2\frac{\cos(2xt)}{t^2+1}-\frac{4\sin^2(xt)}{t^2(t^2+1)}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\left(2\frac{1-2\sin^2(xt)}{t^2+1}-\frac{4\sin^2(xt)}{t^2(t^2+1)}\right)\mathrm{d}t$, donc $F''(x)-4F(x)=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t-4\int_0^{+\infty}\sin^2(tx)\left(\frac{1}{t^2+1}+\frac{1}{t^2(t^2+1)}\right)\mathrm{d}t=\pi-4K(x)$ car

$\left(\frac{1}{t^2+1}+\frac{1}{t^2(t^2+1)}\right)=\frac{1}{t^2}\left(\frac{t^2}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}\right)=\frac{1}{t^2}$. On a compte tenu de la première question $F''(x)-4F(x)=\pi-4C|x|$ où $C=K(1)$. En posant $a=-4K(1)$ et $b=\pi$, on voit que $F$ est une solution de l'équation différentielle $y''-4y=a|x|+b$.

$\boxed{3}$ Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}|K(x)-F(x)| &= \left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(tx)}{t^2}\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(tx)}{t^2(t^2+1)}\mathrm{d}t\right|\\ &= \left|\int_0^{+\infty}\sin^2(tx)\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2(t^2+1)}\right)\mathrm{d}t\right|\\ &= \left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(tx)}{t^2+1}\mathrm{d}t\right|\end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire pour les intégrales, on a

$$|K(x)-F(x)|\leq\int_0^{+\infty}\frac{|\sin^2(tx)|}{1+t^2}\mathrm{d}t\leq\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}=[\arctan(t)]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

Il en découle que $\forall x\in]0,+\infty[,\quad\left|K(1)-\frac{F(x)}{x}\right|\leq\frac{\pi}{2x}$, donc que $K(1)-\frac{F(x)}{x}=o(K(1))$, donc $K(1)\sim\frac{F(x)}{x}$ quand $x$ tend vers $+\infty$, ce qui se traduit par $F(x)\sim K(1)x$.

$\boxed{4}$ Résolvons l'équation différentielle $y''-4y=a|x|+b$ sur $[0,+\infty[$ où elle s'écrit $y''-4y=ax+b$. On a aisément $y(x)=\lambda e^{-2x}+\mu e^{2x}$ la solution générale de l'équation homogène associée et on peut chercher une solution particulière de $(E)$ sous la forme $y(x)=\alpha x+\beta$, c'est une solution si et seulement si $\forall x\in\mathbb{R}_+,-4y(x)=ax+b$ si et seulement si $\alpha=-\frac{1}{4}a$ et $\beta=-\frac{1}{4}b$. Il en découle que la solution générale de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+$ est

$$y(x)=\lambda e^{-2x}+\mu e^{2x}-\frac{1}{4}(ax+b),(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

Comme $F$ est une solution pour $a=-4K(1)$ et $b=\pi$. D'après la question 3) ci-dessus on a $F(x)\sim K(1)x$ au voisinage de $+\infty$, donc $\mu=0$ et il reste :

$$F(x)=\lambda e^{-2x}-\frac{1}{4}(ax+b),(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

avec $\lambda\in\mathbb{R}$. Il est aisé de voir que $F(0)=F'(0)=0$, donc $\lambda=\frac{\pi}{4}$ et $a=-8\lambda=-2\pi$ et comme $a=-4K(1)$, on déduit que $K(1)=\frac{\pi}{2}$. Au final on obtient :

$$K(1)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t^2}=\frac{\pi}{2},\forall x\in\mathbb{R},F(x)=\frac{\pi}{4}e^{-2x}+\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}.$$

planche 54
Une ancienne épreuve des années 70