# QUESTION

Soit $n$ un entier naturel tel que $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $V = \{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) / \operatorname{rg}(M) \neq n\}$.

1. Montrer que $V$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire qu'il existe $B \in V$ tel que $d(A, V) = \|A - B\|$.
3. Montrer que si $B \in V$ et $d(A, V) = \|A - B\|$ alors $AB - BA$ est symétrique.

# RÉPONSE

1. On remarque que $V = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \backslash \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}))$. Il en découle que $V$ est une intersection de deux fermés : le premier c'est $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ car c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (de dimension finie) et le deuxième est le complémentaire de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ qui est ouvert, donc son complémentaire est fermé.
2. Par définition de la borne inférieure, pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $B_k \in V$ tel que
$$(\star) \quad d(A, V) + 2^{-k} \geq d(A, B_k) = \|A - B_k\|.$$
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\|B_k\| \leq \|B_k - A\| + \|A\| \leq d(A, V) + 2^{-k} + \|A\| \leq \|A\| + d(A, V) + 1$, donc la suite $(B_k)$ est bornée. Comme on est en dimension finie, d'après le théoréme de Bolzano Weierstarss, il existe une application $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tel que $\lim\limits_{k \to +\infty} B_{\chi(k)} = B$ avec $B \in V$ par fermeture de $V$. Par $(\star)$ ci dessus on a
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad d(A, V) + 2^{-\chi(k)} \geq d(A, B_{\chi(k)})$$
et comme $d(A, B_{\chi(k)}) \geq d(A, V)$, on peut dire que
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad d(A, V) + 2^{-\chi(k)} \geq d(A, B_{\chi(k)}) \geq d(A, V).$$
Il en découle que $\lim\limits_{k \to +\infty} d(A, B_{\chi(k)}) = d(A, V)$ et par continuité de $X \mapsto d(A, X) = \|A - X\|$ et ke fait que $B_{\chi(k)} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} B$, on déduit par passage à la limite que $d(A, V) \geq \|A - B\| \geq d(A, V)$, donc $d(A, V) = \|A - B\|$.
3. Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors pour tout nombre réel $t$ la matrice $e^{tM}$ est une matrice de $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$. On suppose donc que $B \in V$ et $\|A - B\| = \mathrm{d}(A, V)$. Considérons l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); t \mapsto \|A - e^{tM} B e^{-tM}\|^2$. On remarque d'une part que si on note $\Phi(t) = e^{tM} B e^{-tM}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors $\Phi(\mathbb{R}) \subset V$ et d'autre part que $\varphi(0) = \|A - B\|$. Il en découle que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(0) \leq \varphi(t)$$

et que par suite $\varphi(0)$ est un minimum globale de $\varphi$ sur $\mathbb{R}$. Il est aisé de voir que la fonction $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Remarquons que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(t) = \|A\|^2 + \|\Phi(t)\|^2 - 2\langle A, \Phi(t)\rangle$. Par ailleurs on a $\|\Phi(t)\|^2 = \|B\|^2$ car d'une part $e^{tM} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ et d'autre part, en général si $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}
\|\Omega B \Omega^\top\|^2 &= \mathrm{Tr}((\Omega B \Omega^\top)^\top \Omega B \Omega^\top\| \\
&= \mathrm{Tr}(\Omega B \Omega^\top \Omega B \Omega^\top) \\
&= \mathrm{Tr}(\Omega B^2 \Omega^\top) = \mathrm{Tr}(\Omega^\top \Omega B^2) \\
&= \mathrm{Tr}(B^2) = \mathrm{Tr}(B^\top B) = \|B\|^2
\end{aligned}$$

On a donc l'expression définitive de $\varphi(t)$, à savoir

$$\varphi(t) = \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2\langle A, \Phi(t)\rangle$$

et par suite $\varphi' t) = -2\langle A, \Phi'(t)\rangle$.

- On a $\Phi(t) = e^{tM} B e^{-tM}$, donc $\Phi'(t) = M e^{tM} B e^{-tM} + e^{tM} B(-M) e^{-tM}$, et en particulier $\Phi'(0) = MB - BM$, donc $\varphi'(0) = 2\langle A, BM - MB\rangle$. Il en découle que $\varphi'(0) = 2(\langle BM, A\rangle - \langle MB, A\rangle)$. Or on peut remarquer que :
- On a $\langle BM, A\rangle = \mathrm{Tr}((BM)^\top A) = \mathrm{tr}(M^\top BA) = \langle M, BA\rangle$.
- On a $\langle MB, A\rangle = \mathrm{Tr}((MB)^\top A) = \mathrm{Tr}(BM^\top A) = \mathrm{Tr}(ABM^\top) = \langle AB, M\rangle = \langle M, AB\rangle$
- Il en découle que

$$\varphi'(0) = 2\langle M, BA\rangle - \langle M, AB\rangle = 2\langle M, BA - AB\rangle = 0$$

On a ainsi prouvé que

$$\forall M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), \quad \langle AB - BA, M\rangle = 0.$$

Cela veut dire que $AB - BA \in \mathcal{A}(\mathbb{R})^\top$, donc $AB - BA \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.