

Projet Actuariat Vie

4 INFINI 2

<https://www.overleaf.com/project/60b645e3aa502f2bb4eb4e15>

Groupe 1

Sujet : Influence des taux de mortalité
sur un produit de rente viagère et de
capital décès

Réalisé par:

OUERFELLI Mohamed Amine

ELECHI Ichrak

YAAKOUBI Wassim

SAGHRAOUI Mohamed Ali

Année Universitaire : 2020/2021

Remerciements

Au terme de ce projet, nous tenons à offrir nos remerciements les plus sincères à nos deux professeurs **Mr. Anis MATOUSSI** et **Mr. Mohamed Anis BEN LASMAR** pour leurs énormes efforts fournis dans notre formation , leur dévouement et leur encadrement pédagogique bénéfique.

Contents

1	Introduction générale	5
2	Cadre général	6
2.1	Introduction	6
2.2	Actuariat Vie	6
2.2.1	Definition	6
2.2.2	Utilité	6
2.3	Les contrats	6
2.3.1	Contrat de rente viagère	7
2.3.2	Contrat de capital décès	7
2.4	Modèle de Lee-Carter	8
2.4.1	Estimations	9
2.5	Valeur actuelle probable	10
2.6	Conclusion	10
3	Présentation et traitements des données	11
3.1	Introduction	11
3.2	Présentation des données	11
3.3	Traitements	12
3.3.1	Table de mortalité	12
3.3.2	les taux de mortalité par maximum de vraisemblance . . .	12
3.3.3	calcul de la VAP de la rente viagère anticipée et du capital décès	13
3.3.4	Estimation d'un modèle Lee-Carter	13
3.3.5	Estimation de la projection centrale	17
3.3.6	Affichage des log taux de mortalités projetés	18
3.3.7	Comparaison des deux résultats de montant de la VAP .	18
3.4	Conclusion	19

4 Outils utilisés	19
4.1 R	19
4.2 Packages utilisés	19
4.2.1 Package StMoMo	19
4.2.2 Package Demography	20
4.2.3 Package Lifecontingencies	20
4.2.4 Package reliaR	20
5 Conclusion Générale	20
6 Références	21

1 Introduction générale

A l'aide des connaissances acquises lors de l'apprentissage du module Actuariat Vie, nous allons faire l'estimation et la projection de la mortalité d'une cohorte d'hommes canadiens assurés dans le but de calculer la valeur actuelle probable (VAP) de la rente viagère anticipée et du capital décès. On va supposer que l'assureur possède un portefeuille d'hommes assurés nés en 1960.

Nous allons alors mettre en évidence deux grandes parties dans notre travail ; la première s'agit de présenter les notions de base de l'actuariat vie, la deuxième sert à clarifier les étapes du traitement du problème et la troisième est réservée à la présentation des outils utilisés.

2 Cadre général

2.1 Introduction

Nous allons commencer par la présentations des connaissances de bases autour desquels tourne notre projet

2.2 Actuariat Vie

2.2.1 Definition

L'activité appelée actuariat, réalisée par des actuaires, s'agit de faire des calculs de probabilités à partir de statistiques. Ces calculs sont le plus souvent destinés à établir des taux de primes d'assurance en tenant compte de la fréquence des risques possibles comme la mortalité. La plupart des actuaires sont au service des compagnies d'assurance, mais il y a ceux qui travaillent pour des bureaux d'études privés ou des administrations et réalisent les calculs et les prévisions nécessaires dans beaucoup de domaines.

2.2.2 Utilité

L'actuaire calcule la probabilité de certains risques en s'appuyant sur les sciences mathématiques, économique et sur les statistiques. Il identifie et étudie l'ensemble des risques matériels et humains (maladie, habitation, entreprise..) et anticipe leur impact financier

2.3 Les contrats

Il est convenable de distinguer entre deux types de contrats à étudier : le contrat de rente viagère et le contrat de capital décès.

2.3.1 Contrat de rente viagère

L'objectif général des contrats de rente viagère est d'apporter un revenu complémentaire à ceux des régimes de retraite "officiels" et obligatoires.

Une rente viagère à termes anticipés est une série de flux d'argent allant d'aujourd'hui du contrat jusqu'au décès. La valeur actuelle et la valeur actuelle probable se calculent à l'aide des formules suivantes:

$$VA(\text{rente}) = \sum_{k=1}^{\infty} v^k 1_{T_x > k}, \quad VAP(\text{rente}) = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_x = a_x.$$

Une rente viagère à termes anticipés est une série de flux d'argent allant de la première année du contrat jusqu'au décès. La valeur actuelle et la valeur actuelle probable se calculent à l'aide des formules suivantes:

$$VA(\text{rente}) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k 1_{T_x > k}, \quad VAP(\text{rente}) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x = \ddot{a}_x.$$

Une rente viagère différée et temporaire est une série annuelle de flux d'argent jusqu'au décès de l'individu dont les versements ne peuvent avoir lieu qu'entre $[s, s + t[$. On calcule la VA et la VAP à l'aide des formules suivantes :

$$VA(\text{diff temp}) = \sum_{k=s}^{s+t-1} v^k 1_{T_x > k}, \quad VAP(\text{diff temp}) = \sum_{k=s}^{s+t-1} v^k {}_k p_x = {}_s|t \ddot{a}_x.$$

2.3.2 Contrat de capital décès

c'est le versement d'un capital ou d'une rente en cas de décès de l'assuré survenant pendant la période de validité du contrat. on

distingue deux types :

Un capital au décès est le versement d'argent en fin d'année du décès. Ses valeurs actuelle et actuelle probable sont

$$VA(capdec) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} 1_{k+1 \geq T_x > k}, \quad VAP(capdec) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x \times q_{x+k} = A_x.$$

Un capital au décès différé et temporaire est le versement d'argent en fin d'année du décès si le décès a lieu entre $[s, s + t[$. Ses valeurs actuelle et actuelle probable sont

$$VA(capdec) = \sum_{k=s}^{s+t-1} v^{k+1} 1_{k+1 \geq T_x > k}, \quad VAP(capdec) = \sum_{k=s}^{s+t-1} v^{k+1} {}_k p_x \times q_{x+k} = {}_{s|t}A_x.$$

2.4 Modèle de Lee-Carter

Il s'agit d'un algorithme qu'on utilise pour prédire la mortalité et l'espérance de vie. Ce modèle a été conçu, à la base, pour extrapoler les tendances passées sur des données américaines, son utilisation est devenue après un standard. La modélisation du taux instantané de mortalité est comme suit :

$$\ln \mu_{xt} = \alpha x + \beta x_{kt} + \epsilon_{xt}$$

- μ_{xt} représente le taux instantané de mortalité à la date t pour l'âge x

- αx est la composante de l'âge x , c'est la la valeur moyenne des $\ln(\mu_{xt})$ au cours du temps

- kt décrit l'évolution générale de la mortalité

- βx traduit la sensibilité de la mortalité instantanée à l'âge x par rapport à l'évolution générale kt où $d(\ln(\mu_{xt})/dkt = \beta$

- ϵ_{xt} est une variable aléatoire iid distribuée selon une loi $N(0, \sigma^2)$.

En conclusion , il s'agit d'ajuster à la série (doublement indicée par x et t) des logarithmes des taux instantanés de décès une structure paramétrique (déterministe) avec un phénomène aléatoire qui est le critère d'optimisation retenu qui consiste à maximiser la variance expliquée , ce qui revient à minimiser celle des erreurs.

$$\text{on a : } \sum_{t=1}^n (k_t) = 0 ; \text{bx} = 1$$

on a $2m + n - 2$ paramètres avec $m = x_{max}x_{min} + 1$

A l'aide de la méthode des moindres carrés on a :

$$(\alpha_x, \beta_x, k_t) = \text{argmin} \sum_{x,t} ((\ln \mu_{xt} - \alpha_x - \beta_x k_t)^2)$$

2.4.1 Estimations

les paramètres à estimer sont α_x , β_x et k_t qui se fait en trois étapes:

1ère étape : On commence à estimer les taux bruts ensuite on trouve en tenant compte des conditions d'identifiabilité sur les k_t la valeur de α_x . cette dernière sera estimée tout en prenant en compte toutes les contraintes. En conclusion , on a α_x est la moyenne temporelle à l'âge x des taux instantanés de décès.

2ème étape : Pour estimer les paramètres k_t et β_x , on réalise la matrice $Z = (z_{xt})$ définie par $z_{xt} = \ln_{xt} - \alpha_x$. On aura en déterminant les valeurs propres les estimations de k_t et β_x .

3ème étape : Cette étape est secondaire. On peut en effet ajuster les k_t pour que le nombre total de décès enregistrés chaque année corresponde à celui prédit par le modèle, étant donnés les β_x et α_x .

2.5 Valeur actuelle probable

La valeur actuelle est en fait la valeur actuelle des flux futurs espérés, qui est actualisée en dépendant du taux d'actualisation. Elle repose sur la relation entre le temps et l'argent.

$$VAP = E(VA) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k V^k P(C_k)$$

Avec F_0, F_1, \dots une série flux connus, C_0, C_1, \dots une série de conditions de paiements aléatoires et un facteur d'actualisation $0 < V < 1$

2.6 Conclusion

Dans la première partie on a souligné les notions de bases nécessaires à la compréhension du travail réalisé dans ce projet. Dans la partie d'après on va présenter la partie du traitement du sujet.

3 Présentation et traitements des données

3.1 Introduction

Dans cette partie on va gérer l'exemple d'hommes canadiens en 1960. On va citer les différents traitements réalisés tout au long du travail du sujet.

3.2 Présentation des données

on a fait l'extraction des données d'une base de données qui s'appelle Human Mortality Database (HMD) qui contient des données sur la mortalité et les populations. on a choisi de travailler sur une des assurés canadiens.

ci dessous figure un extrait des données téléchargés:

```
PopName,Area,Year,YearReg,YearInterval,Sex,Age  
CAN,02,1921,1921,1,f,0,1,RR,1,0,11226.47,,,,1  
CAN,02,1921,1921,1,f,1,1,RR,1,0,1651.52,,,,1  
CAN,02,1921,1921,1,f,2,1,RR,1,0,795.55,,,,1  
CAN,02,1921,1921,1,f,3,1,RR,1,0,587.99,,,,1  
CAN,02,1921,1921,1,f,4,1,RR,1,0,492.24,,,,1  
CAN,02,1921,1921,1,f,5,1,RR,1,0,367.39,,,,1  
CAN,02,1921,1921,1,f,6,1,RR,1,0,301.04,,,,1  
CAN,02,1921,1921,1,f,7,1,RR,1,0,293.27,,,,1  
CAN,02,1921,1921,1,f,8,1,RR,1,0,249.87,,,,1  
CAN,02,1921,1921,1,f,9,1,RR,1,0,212.61,,,,1  
CAN,02,1921,1921,1,f,10,1,RR,1,0,183.26,,,,1
```

Figure1 : extrait de données

Cette base présente des cohortes canadiens de 1921 à 2018 dont l'âge varie entre 0 et 100 ans.

3.3 Traitements

3.3.1 Table de mortalité

Pour commencer , on a fait l'extraction des données de la cohorte en 1960 , puis , on a construit la table de mortalité

Life table CANADA

	x	l_x	p_x	e_x
1	0	100000	0.9687500	67.738000
2	1	96875	0.9979871	68.923097
3	2	96680	0.9988312	68.062112
4	3	96567	0.9989955	67.141757
5	4	96470	0.9990049	66.209267
6	5	96374	0.9991491	65.275219
7	6	96292	0.9993250	64.330806
8	7	96227	0.9993141	63.374261
9	8	96161	0.9993968	62.417758
10	9	96103	0.9994901	61.455428

Figure2 : extrait de table de mortalité

x est l'âge et l_x le nombre d'individus d'âge au moins x

la durée de servie peut être finie à l'arrivée d'un imprevis ou en d'autres termes un évènement terminal comme la mort ou la maladie

3.3.2 les taux de mortalité par maximum de vraisemblance

Le taux de mortalité est noté μ_x . A partir de ce paramètre on peut calculer la probabilité qu'un individu ayant l'âge x meurt avec la formule qui suit :

$$\mu_x(0)d\chi \simeq P(T_0x + d\chi \mid T_0 > x)$$

on cherche à maximiser la formule ci dessus. Pour ce faire on utilise un algorithme itératif unidimensionnel.

3.3.3 calcul de la VAP de la rente viagère anticipée et du capital décès

En utilisant la commande `axn` on a réussi à calculer la VAP de la rente viagère qui est égale à 13.64

En utilisant la commande `Axn` on a réussi à calculer la VAP du capital de décès qui est égale à 0.59

3.3.4 Estimation d'un modèle Lee-Carter

En utilisant la fonction `plot()`, on a pu récupérer le graphe des log de taux de mortalité en fonction de l'âge

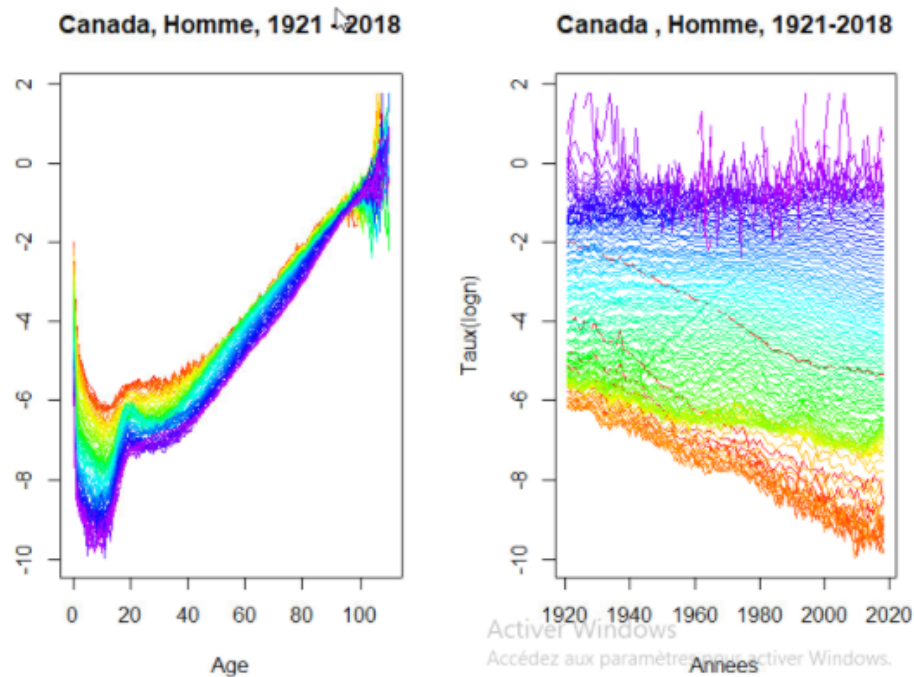


Figure 3: Graphes des log de taux de mortalité

On peut remarquer dans le graphe en fonction de l'âge une grande chute causée par des événements sociaux. Il est alors commode de choisir la tranche entre l'âge 20 et 100 pour faire ses études.

On a utilisé le modèle de Lee Carter pour faire une estimation des paramètres. à savoir la formule qu'on a déjà expliquée:

$$\ln(\mu_{xt}) = \alpha_x + \beta_x * k_t + \epsilon_{xt}$$

α_x : Il s'agit de la valeur moyenne des logs de la mortalité. elle fluctue entre -7 et -3 en fonction de l'âge. Dans le graphe ci dessous on remarque une augmentation légère entre l'âge 20 et l'âge 40 suivie par une augmentation progressive de l'âge 40 jusqu'à l'âge 100 ans.

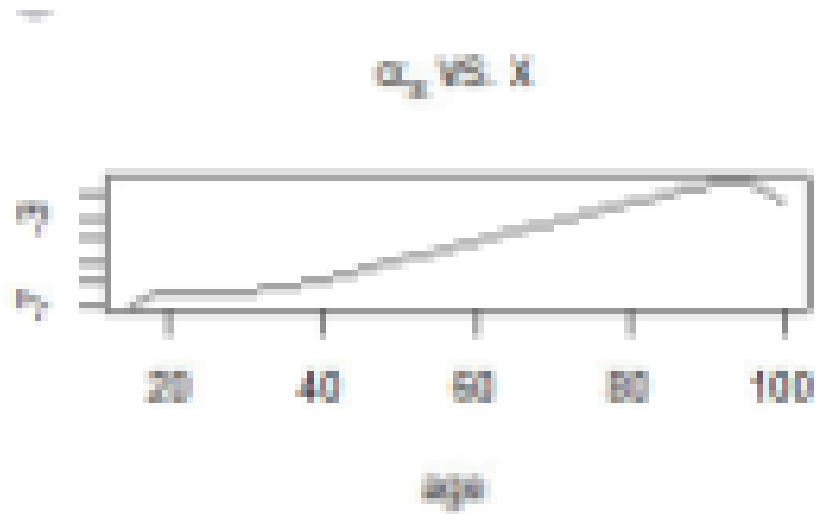


Figure 4 : Estimation de α_x

β_x : C'est la sensibilité de la mortalité instantanée. Sa valeur subit une chute entre l'âge 0 et 20 suivie par une diminution progressive de l'âge 20 jusqu'à l'âge de 100.

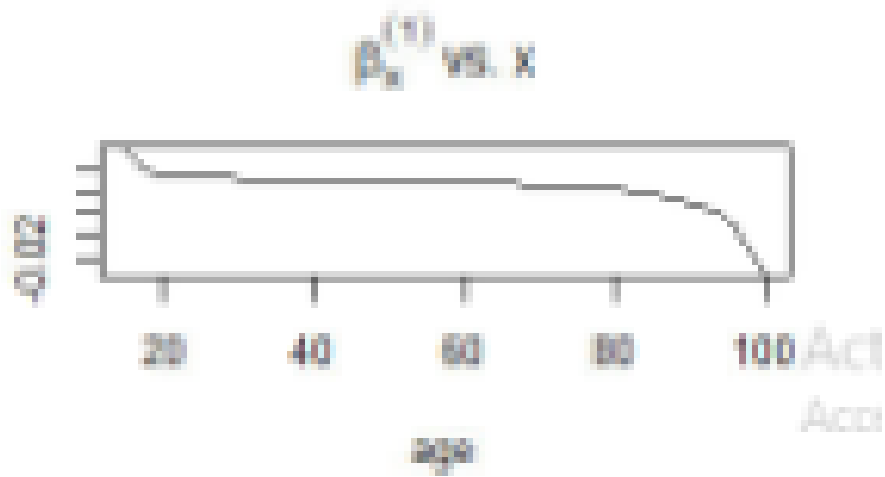


Figure 5: Estimation de β_x

Pour k_t qui représente l'évolution générale de la mortalité dans

le temps , on remarque une diminution progressive de l'année 1920 jusqu'à l'année 2019 environ. On conclut alors qu'il y a une augmentation du taux de survie au cours du temps.



Figure 6: Estimation de k_t

ci dessous figurent les résidus des paramètres qui représentent l'erreur de chaque estimation

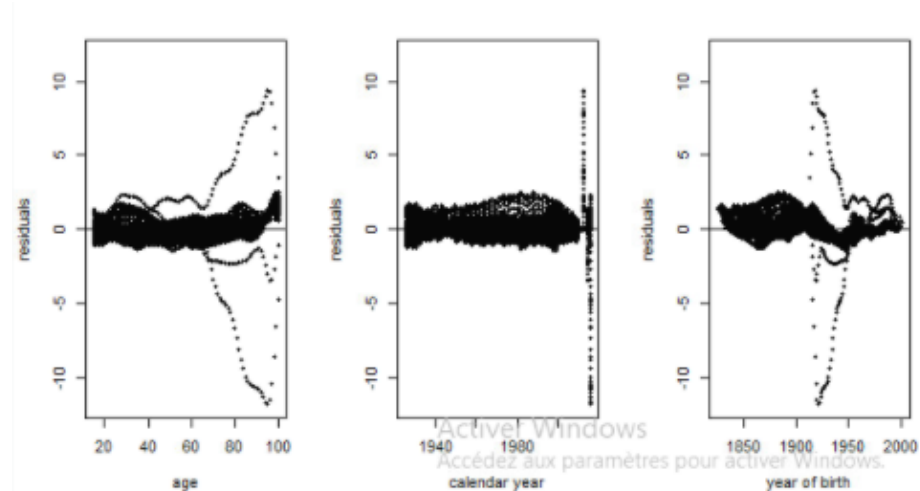


Figure 7: les résidus du modèle

3.3.5 Estimation de la projection centrale

On a réalisé la projection de la mortalité future sur 25 ans, on a trouvé à l'aide de library(forecast) une prédiction qui figure sur le tracé ci dessous

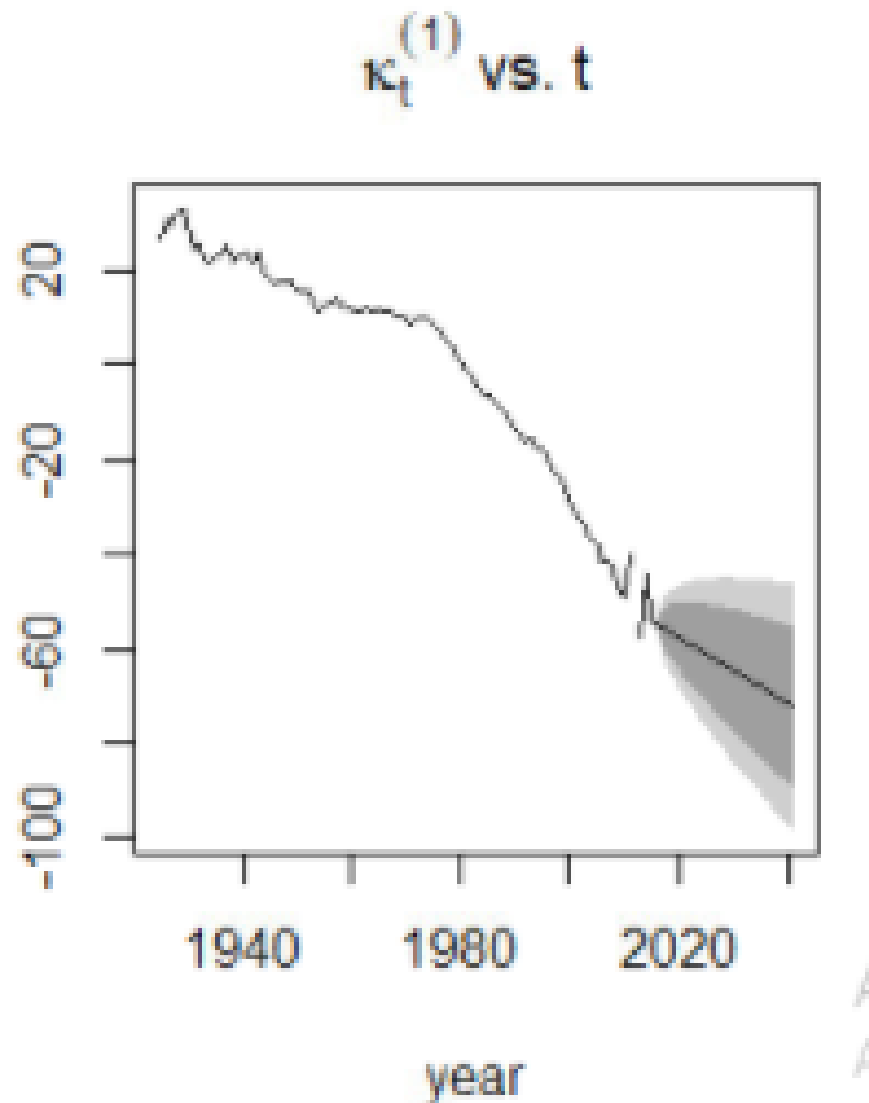


Figure 8: Estimation de la projection centrale

3.3.6 Affichage des log taux de mortalités projetés

On remarque dans le tracé ci dessous des hauts et des bas entre l'âge 0 et 20 ensuite une augmentation progressive atteignant l'âge 80 et plus.

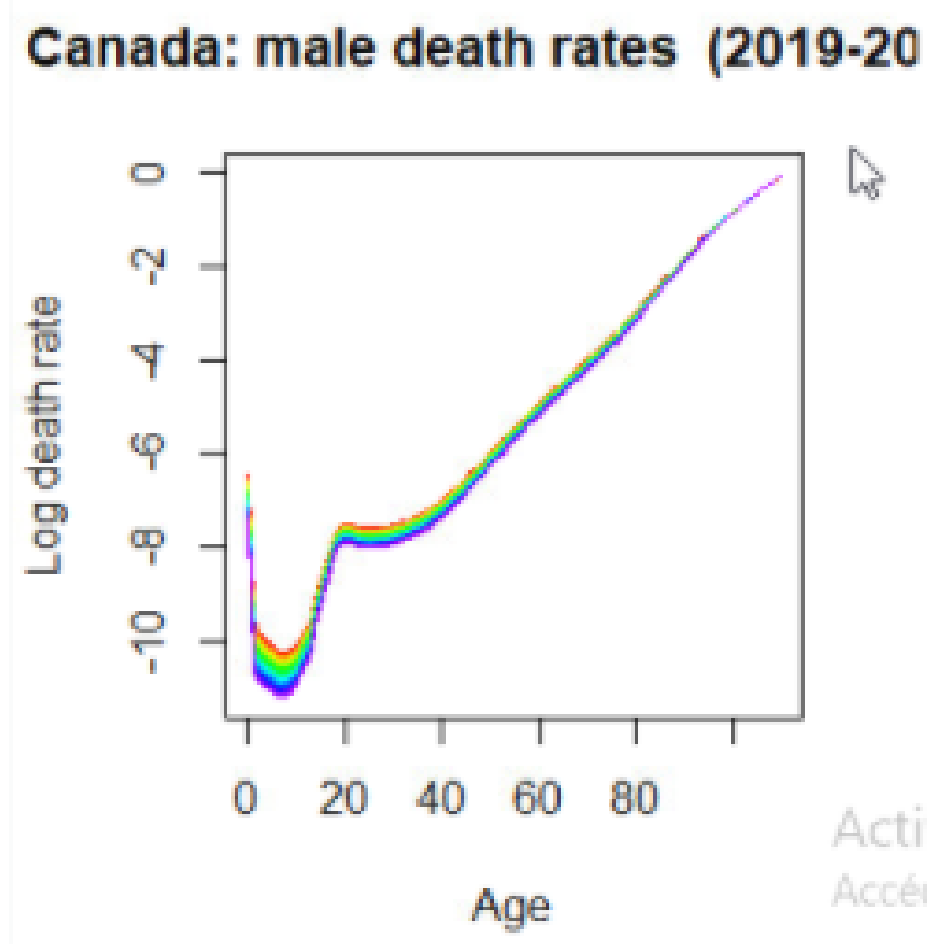


Figure 9: Taux de mortalité projetés

3.3.7 Comparaison des deux résultats de montant de la VAP

En calculant la VAP de la rente viagère anticipée et la VAP du

capital décès par rapport au taux de mortalité de référence des taux projetés on a constaté que :

La VAP de la rente viagère anticipée a diminué en comparant 2018 aux taux projetés de 13.64 jusqu'à 12.7 d'un écart de 0.68 pourcent

La VAP ddu capital décès a diminué en comparant 2018 aux taux projetés de 0.59 jusqu'à 0.75 d'un écart de 27 pourcent.

ces constatations clarifie l'effet des taux de mortalité sur les valeurs de la VAP.

3.4 Conclusion

A travers le travail accompli dans ce projet , nous avons pu souligner l'influence de taux de mortalité sur les changement de la valeur actuelle probable.

4 Outils utilisés

4.1 R

R est un langage de programmation et un logiciel libre utilisé pour réaliser des statistiques et à la manipulations relatives aux sciences des données soutenu par la R Foundation for Statistical Computing. Il fait partie de la liste des paquets GNU3 et est écrit en C (langage), Fortran et R. Le langage R est largement utilisé par les statisticiens, les data miners, data scientists pour développer des logiciels statistiques et faire l'analyse des données.

4.2 Packages utilisés

4.2.1 Package StMoMo

StMoMo (Modélisation de la mortalité stochastique) est un package R contenant des fonctions spécifiées à l'ajustement des modèles

de mortalité stochastiques, notamment les modèles de Lee-Carter, le modèle CBD, le modèle APC et d'autres modèles. Le package comprend aussi des outils qui analysent la qualité de l'ajustement des modèles et effectuent des projections et des simulations de mortalité.

4.2.2 Package Demography

Le package R demography contient des fonctions d'analyse démographique, citons par exemple : des calculs de table de survie ; modélisation du modèle Lee-Carter; analyse des données fonctionnelles des taux de mortalité, des taux de fécondité..etc.

4.2.3 Package Lifecontingencies

Ce package contient des classes et des méthodes spécifiques à la gestion des tables de mortalité (à décréments simples et multiples) et des tables actuarielles. Il présente également des fonctions qui effectuent facilement des mathématiques démographiques, financières et actuarielles sur les calculs d'assurance vie qui y sont contenues.

4.2.4 Package reliaR

C'est un package spécifique à la distribution de probabilités.

5 Conclusion Générale

Durant ce travail , en utilisant le modèle de Lee Carter, on a pu étudier les tables de mortalité en tenant compte des risques.Ces tables ont été construites de façon à projeter l'évolution des taux dans le futur.

6 Références

<https://www.universalis.fr/encyclopedie/actuariat-et-actuaire/>
<https://www.meteojob.com/fiches-metiers/metier-actuaire.html>
<https://espaceclient.allianz.fr/pmt/guide/Retraites.STANDARD>
<https://www.ffa-assurance.fr/>
<https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1001/1001.1916.pdf>
<http://www.ressources-actuarielles.net>
<https://www.journaldunet.fr>
[https://fr.wikipedia.org/wiki/R_\(langage\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/R_(langage))
<https://www.rdocumentation.org/packages/StMoMo/versions/0.4.1>
<https://www.rdocumentation.org/packages/demography/versions/1.22>
<https://www.rdocumentation.org/packages/lifecontingencies/versions/1.3.7>
<https://www.rdocumentation.org/packages/reliaR/versions/0.01>