Cours de Graphes & Applications (G&A)

Chapitre 2 : Recherche du plus court chemin Correction de la série d'exercices 2

Nehla DEBBABI

Année Universitaire : 2020-2021

9 octobre 2020



Exercice 3

Exercice 4

Exercice 2

Plan

Exercice 1

- Exercice 1
- Exercice
- B Exercice
- Exercice
- Exercice

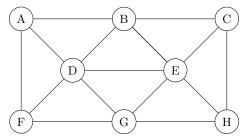


Exercice 5

9 octobre 2020

Énoncé de l'exercice 1

On considère le réseau social décrit ci-dessous :



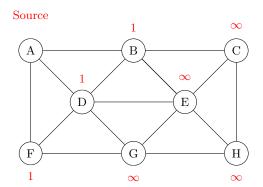
- Déterminer le parcours de A vers H composé d'un nombre minimal de liens.
- 2 Déterminer le parcours de A vers H composé d'un nombre minimal de sommets.



Pour répondre à la première question, il suffit de voir le graphe comme un graphe orienté valué dont la valeur de chaque arc est unité et ensuite appliqué l'algorithme de DIJKSTRA pour déterminer le plus court chemin de A à H.



Exercice 1





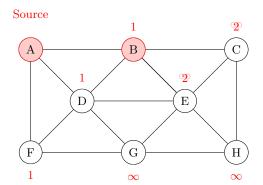
Exercice 1

		Itéra	tion 0	Itérat	ion 1	Itérat	ion 2	Itérat	ion 3	Itéra	tion 4	Itérat	tion 5	Itérat	ion 6	Itérat	ion 7
j	x_j	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$														
2	В	1	(A,B)														
3	С	- ∞	(A,C)														
4	D	1	(A,D)														
5	Е	∞	(A,E)														
6	F	1	(A,F)														
7	G	∞	(A,G)														
8	Н	- ∞	(A,H)														
P		{A}															
T	$\overline{}$	(DCDEI	CIII														





Exercice 1

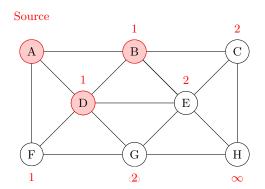




		Itéra	tion 0	Itéra	tion 1	Itérat	ion 2	Itérat	ion 3	Itérat	tion 4	Itérat	ion 5	Itérat	ion 6	Itérat	ion 7
j	x_j	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$														
2	В	1	(A,B)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	C	∞	(A,C)	2	(A,B,C)												
4	D	1	(A,D)	1	(A,D)												
5	E	∞	(A,E)	2	(A,B,E)												
6	F	1	(A,F)	1	(A,F)												
7	G	~	(A,G)	∞	(A,G)												
8	Н	∞	(A,H)	∞	(A,H)												
P		{A}		{A	,B}												
T		{B,C,D,E,F	',G,H}	{C,D,E	.F.G.H}												









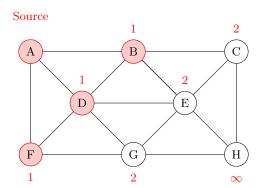
Corrigé de l'exercice 1

		Itérat	tion 0	Itéra	ion 1	Itérat	ion 2	Itérat	ion 3	Itérat	tion 4	Itérat	ion 5	Itérat	ion 6	Itérat	ion 7
j	x_j	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$														
2	В	1	(A,B)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	C		(A,C)	2	(A,B,C)	2	(A,B,C)										
4	D	1	(A,D)	1	(A,D)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	Е	~	(A,E)	2	(A,B,E)	2	(A,B,E)										
6	F	1	(A,F)	1	(A,F)	1	(A,F)										
7	G	~	(A,G)	∞	(A,G)	2	(A,D,G)										
8	Н	∞	(A,H)	∞	(A,H)	∞	(A,H)										
P		{A}		{A	,B}	{A,I	3,D}										
T		(DCDFE	CIII	(CDE	EC III	(CFI	C III										





Exercice 1





Exercice 1 Exercice 2 Exercice 3 Exercice 4 Exercice 5

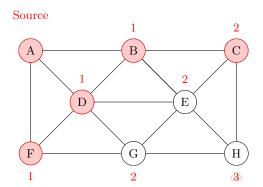
Corrigé de l'exercice 1

		Itérat	ion 0	Itérat	tion 1	Itéra	tion 2	Itéra	tion 3	Itérat	ion 4	Itérat	ion 5	Itérat	ion 6	Itérat	tion 7
j	x_j	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$														
2	В	1	(A,B)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	С	∞	(A,C)	2	(A,B,C)	2	(A,B,C)	2	(A,B,C)								
4	D	1	(A,D)	1	(A,D)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	E	~	(A,E)	2	(A,B,E)	2	(A,B,E)	2	(A,B,E)								
6	F	1	(A,F)	1	(A,F)	1	(A,F)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	G	~	(A,G)	∞	(A,G)	2	(A,D,G)	2	(A,D,G)								
8	Н	∞	(A,H)	∞	(A,H)	∞	(A,H)	∞	(A,H)								
P		{A}			,B}		3,D}		,D,F}								
T		BCDEE	CHI	(CDE	ECHI	(CE)	CHI	1C E	CHI								





Exercice 1





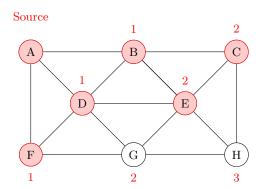
Corrigé de l'exercice 1

		Itérat	tion 0	Itérat	ion 1	Itéra	tion 2	Itéra	ion 3	Itéra	ation 4	Itérat	ion 5	Itérat	ion 6	Itérat	ion 7
j	x_j	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$														
2	В	- 1	(A,B)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	С	∞	(A,C)	2	(A,B,C)	2	(A,B,C)	2	(A,B,C)	-	-	-	-	-	-	-	-
4	D	1	(A,D)	1	(A,D)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	E	∞	(A,E)	2	(A,B,E)	2	(A,B,E)	2	(A,B,E)	2	(A,B,E)						
6	F	1	(A,F)	1	(A,F)	1	(A,F)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	G	∞	(A,G)	∞	(A,G)	2	(A,D,G)	2	(A,D,G)	2	(A,D,G)						
8	Н	∞	(A,H)	∞	(A,H)	∞	(A,H)	∞	(A,H)	3	(A,B,C,H)						
P		{A}			B}	{A,l	B,D}	{A,B	,D,F}		,D,F,C}						
T		B.C.D.E.F	.G.H}	{C.D.E	F.G.H}	{C.E.I	F.G.H3	{C.E	G.H}	{E	.G.H}						



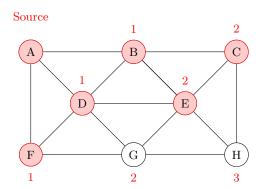


Exercice 1





Exercice 1





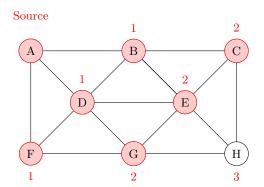
Corrigé de l'exercice 1

		Itéra	tion 0	Itérat	tion 1	Itéra	tion 2	Itéra	tion 3	Itér	ation 4	Itér	ation 5	Itéra	tion 6	Itéra	tion 7
j	x_j	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$														
2	В	1	(A,B)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	C	∞	(A,C)	2	(A,B,C)	2	(A,B,C)	2	(A,B,C)	-	-	-	-	-	-	-	-
4	D	1	(A,D)	1	(A,D)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	E	∞	(A,E)	2	(A,B,E)	2	(A,B,E)	2	(A,B,E)	2	(A,B,E)	-	-	-	-	-	
6	F	1	(A,F)	1	(A,F)	1	(A,F)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	G	∞	(A,G)	∞	(A,G)	2	(A,D,G)	2	(A,D,G)	2	(A,D,G)	2	(A,D,G)				
8	H	∞	(A,H)	∞	(A,H)	∞	(A,H)	∞	(A,H)	3	(A,B,C,H)	3	(A,B,C,H)				
P		{A}			,B}		B,D}		,D,F}		,D,F,C}		D,F,C,E}				
T		BCDEE	CG H3	{CDE	FGH3	{CEI	F.G.H3	{C.E	GH3	{E	G H3	{(; H3				





Exercice 1





 Exercice 1
 Exercice 2
 Exercice 3
 Exercice 4
 Exercice 5

 000000000000000000
 0000000000000
 00000000000
 00000000000
 000000000000000

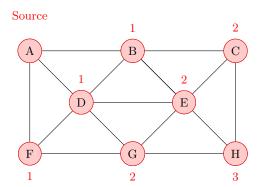
Corrigé de l'exercice 1

		Itérat	tion 0	Itérat	tion 1	Itéra	tion 2	Itéra	tion 3	Itér	ation 4	Itéra	ation 5	Itéra	ation 6	Itérat	tion 7
j	x_j	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$
2	В	1	(A,B)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	С	∞	(A,C)	2	(A,B,C)	2	(A,B,C)	2	(A,B,C)	-	-	-	-	-	-	-	
4	D	1	(A,D)	1	(A,D)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	Е	∞	(A,E)	2	(A,B,E)	2	(A,B,E)	2	(A,B,E)	2	(A,B,E)	-	-	-	-	-	
6	F	1	(A,F)	1	(A,F)	1	(A,F)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
7	G	∞	(A,G)	∞	(A,G)	2	(A,D,G)	2	(A,D,G)	2	(A,D,G)	2	(A,D,G)	-	-	-	
- 8	H	∞	(A,H)	∞	(A,H)	∞	(A,H)	∞	(A,H)	3	(A,B,C,H)	3	(A,B,C,H)	3	(A,B,C,H)		
P		{A}			,B}		B,D}	{A,B	,D,F}	{A,B	,D,F,C}	{A,B,l	D,F,C,E}	{A,B,D	,F,C,E,G}		
T	-	${B,C,D,E,F}$,G,H}	{C,D,E	,F,G,H}	{C,E,l	F,G,H}	{C,E	,G,H}	{E	,G,H}	{(G,H}		H}		





Exercice 1





Application de l'algorithme de DIJKSTRA : Itération 7

		Itérat	ion 0	Itérat	tion 1	Itéra	tion 2	Itéra	tion 3	Itéra	ation 4	Itéra	tion 5	Itéra	ation 6	Itéra	tion 7
j	x_j	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$														
2	В	1	(A,B)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	С	∞	(A,C)	2	(A,B,C)	2	(A,B,C)	2	(A,B,C)		-		-	-	-	-	-
4	D	1	(A,D)	1	(A,D)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	E	∞	(A,E)	2	(A,B,E)	2	(A,B,E)	2	(A,B,E)	2	(A,B,E)	-	-	-	-	-	-
6	F	1	(A,F)	1	(A,F)	1	(A,F)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	G	~	(A,G)	∞	(A,G)	2	(A,D,G)	2	(A,D,G)	2	(A,D,G)	2	(A,D,G)	-	-	-	-
- 8	Н	~	(A,H)	∞	(A,H)	~	(A,H)	∞	(A,H)	3	(A,B,C,H)	3	(A,B,C,H)	3	(A,B,C,H)	-	-
\overline{P}		{A}		{A		{A,l	B,D}		,D,F}	{A,B	,D,F,C}	{A,B,I	O,F,C,E}	{A,B,D	,F,C,E,G}	{A,B,D,F	,C,E,G,H}
T		{B,C,D,E,F	,G,H}	{C,D,E	,F,G,H}	{C,E,I	7,G,H}	{C,E	,G,H}	{E,	,G,H}	{(G,H}	- {	H}		0

Le plus court chemin pour aller de A vers H est composé de 3 arêtes : 4 sommets (pour répondre à la question 2).



Plan

- 2 Exercice 2



Énoncé de l'exercice 2

Une société offshore a besoin d'une voiture pour ses 5 années d'activités. Au début de sa première année (t=0), la société achète une voiture neuve et au début de chaque année t, elle a la possibilité soit de la garder durant l'année [t, t+1] ou de la vendre au prix v(i), où i est l'âge de la voiture au moment de la vente, et acheter une nouvelle au prix p(t). À la fin de sa dernière année d'activités, la société revendra sa voiture sans en racheter d'autre. Le coût annuel de maintenance d'une voiture dépend de son âge i au début de chaque année t, et il est désigné par m(i). Les valeurs p(t), v(i) et m(i) étant supposées actualisées à la date t. L'objectif est de déterminer une politique qui permet à la société de bénéficier d'une voiture durant les 5 années de ses activités avec un coût global minimal.

- Montrer que l'objectif revient à déterminer un plus court chemin entre deux sommets particuliers dans un graphe qu'on précisera.
- Résoudre ce problème avec les données suivantes :

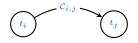
Age de la voiture i (ans) /Année t	0	1	2	3	4	5
Prix d'achat $p(t)$	22000	24000	25000	25000	26000	-
Prix de vente $v(i)$	-	19000	16000	12000	9000	5000
Coût annuel de maintenance $m(i)$	2000	3000	5000	6000	8000	200
						\sim

Objectif : Minimiser les charges durant les 5 années d'activités de l'entreprise Modélisation du problème :

Sommets: les années $(t_0 \to t_5)$

Arcs : les charges : coût de passage d'une année à une autre

Déterminons le coût $C_{i,j}$ de l'arc (t_i, t_j) , $0 \le t_i, t_j \le 5$.



En t_i : achat d'une voiture au prix $p(t_i)$

De t_i à t_j : maintenance de la voiture

$$\sum_{k=0}^{t_j-t_i-1} m(k)$$

En t_j : vente de la voiture au prix $v(t_j - t_i)$

$$\Longrightarrow \mathcal{C}_{i,j} = p(t_i) + \sum_{k=0}^{t_j - t_i - 1} m(k) - v(t_j - t_i)$$



Le problème se ramène à la recherche d'un plus court chemin de $t_0 = 0$ à $t_5 = 5$. Pour ce faire, nous déterminons d'abord les coûts $C_{i,j}$, $0 \le i, j \le 5$.

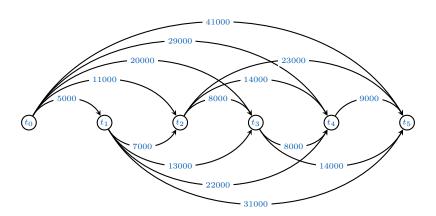
Les coûts sont donnés ci-dessous :

Nous pouvons ainsi donner le graphe décrivant le problème en question.



Corrigé de l'exercice 2

Représentation graphique du problème :



Nous appliquons l'algorithme de DIJKSTRA sur ce graphe pour déterminer le se touver autounent chemin le plus courts de t_0 à t_5 .

Nehla DEBBABI (ESPRIT)

nehla debbabi@esprit.tn

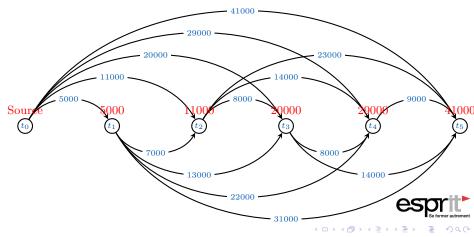
9 octobre 2020

26/80

 Exercice 1
 Exercice 2
 Exercice 3
 Exercice 4
 Exercice 5

 000000000000000000
 000000000000
 00000000000
 0000000000000000
 00000000000000000

Corrigé de l'exercice 2



Exercice 1 Exercice 2 Exercice 3 Exercice 4 Exercice 5

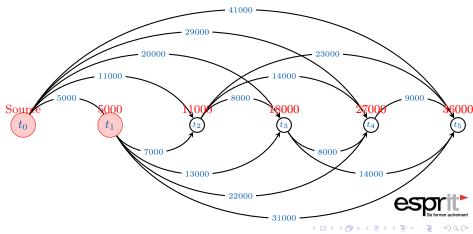
Corrigé de l'exercice 2

		Itéra	tion 0	Itérat	ion 1	Itérat	tion 2	Itérat	ion 3	Itérat	ion 4	Itérat	ion 5
j	x_j	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$
2	t_1	5000	(t_0, t_1)										
3	t_2	11000	(t_0, t_2)										
4	t_3	20000	(t_0, t_3)										
5	t_4	29000	(t_0, t_4)										
6	t_5	41000	(t_0, t_5)										
P		$\{t_{0}\}$											
T		$\{t_0\}$ $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$											





Corrigé de l'exercice 2



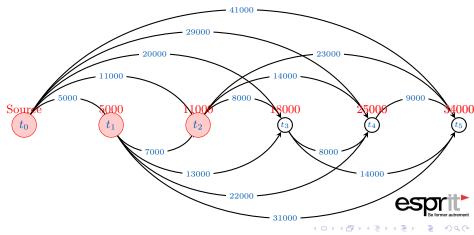
Corrigé de l'exercice 2

		Itérat	ion 0	Itéra	tion 1	Itérat	ion 2	Itérat	ion 3	Itérat	ion 4	Itérat	ion 5
j	x_j	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$
2	t_1	5000	(t_0, t_1)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	t_2	11000	(t_0, t_2)	11000	(t_0, t_2)								
4	t_3	20000	(t_0, t_3)	18000	(t_0, t_1, t_3)								
5	t_4	29000	(t_0, t_4)	27000	(t_0, t_1, t_4)								
6	t_5	41000	(t_0, t_5)	36000	(t_0, t_1, t_5)								
P		$\{t_{0}\}$		t_0	t_{1}, t_{1}								
T		$\{t_1, t_2, t_3, t$	$\{4, t_5\}$	t_{2}, t_{3}	t_1, t_4, t_5								





Corrigé de l'exercice 2

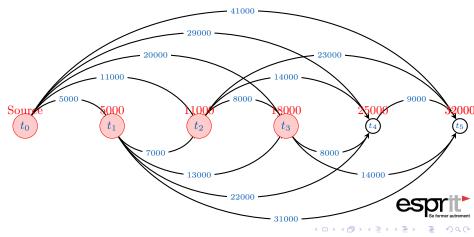


		Itérat	tion 0	Itéra	tion 1	Itéra	tion 2	Itérat	ion 3	Itérat	ion 4	Itérat	ion 5
j	x_j	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$
2	t_1	5000	(t_0, t_1)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	t_2	11000	(t_0, t_2)	11000	(t_0, t_2)	-	-	-	-	-	-	-	-
4	t_3	20000	(t_0, t_3)	18000	(t_0, t_1, t_3)	18000	(t_0, t_1, t_3)						
5	t_4	29000	(t_0, t_4)	27000	(t_0, t_1, t_4)	25000	(t_0, t_2, t_4)						
6	t_5	41000	(t_0, t_5)	36000	(t_0, t_1, t_5)	34000	(t_0, t_2, t_5)						
P		$\{t_0\}$		t_0	$,t_1$	t_0 ,	t_1, t_2						
T		$\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{14}, t_{15}, t_{15},$	$\{4, t_5\}$	t_{2}, t_{3}	t_{4}, t_{4}, t_{5}	t_3 ,	t_4, t_5						





Corrigé de l'exercice 2



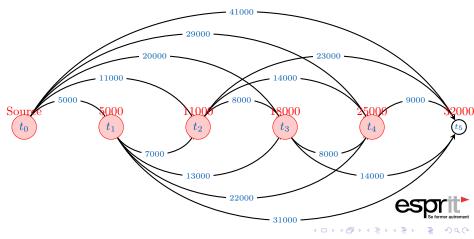
Corrigé de l'exercice 2

		Itération 0		Itération 1		Itération 2		Itération 3		Itération 4		Itération 5	
j	x_j	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$
2	t_1	5000	(t_0, t_1)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	t_2	11000	(t_0, t_2)	11000	(t_0, t_2)	-	-	-	-	-	-	-	-
4	t_3	20000	(t_0, t_3)	18000	(t_0, t_1, t_3)	18000	(t_0, t_1, t_3)	-	-	-	-	-	-
5	t_4	29000	(t_0, t_4)	27000	(t_0, t_1, t_4)	25000	(t_0, t_2, t_4)	25000	(t_0, t_2, t_4)				
6	t_5	41000	(t_0, t_5)	36000	(t_0, t_1, t_5)	34000	(t_0, t_2, t_5)	32000	(t_0, t_1, t_3, t_5)				
P	$\{t_{0}\}$		t_0, t_1		t_0, t_1, t_2		t_0, t_1, t_2, t_3						
T	$\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$		t_2, t_3, t_4, t_5		t_3, t_4, t_5		t_4, t_5						





Corrigé de l'exercice 2



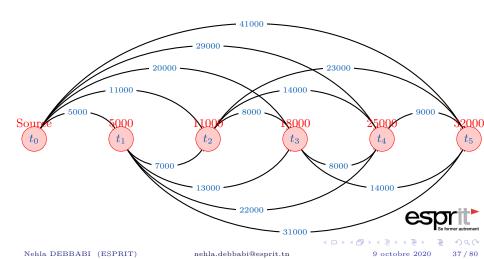
Corrigé de l'exercice 2

		Itération 0		Itération 1		Itération 2		Itération 3		Itération 4		Itération 5	
j	x_j	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$
2	t_1	5000	(t_0, t_1)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	t_2	11000	(t_0, t_2)	11000	(t_0, t_2)	-	-	-	-	-	-	-	-
4	t_3	20000	(t_0, t_3)	18000	(t_0, t_1, t_3)	18000	(t_0, t_1, t_3)	-	-	-	-	-	-
5	t_4	29000	(t_0, t_4)	27000	(t_0, t_1, t_4)	25000	(t_0, t_2, t_4)	25000	(t_0, t_2, t_4)	-	-	-	-
6	t_5	41000	(t_0, t_5)	36000	(t_0, t_1, t_5)	34000	(t_0, t_2, t_5)	32000	(t_0, t_1, t_3, t_5)	32000	(t_0, t_1, t_3, t_5)		
P		$\{t_0\}$		t_0, t_1		t_0, t_1, t_2		t_0, t_1, t_2, t_3		t_0, t_1, t_2, t_3, t_4			
T	$\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$		t_2, t_3, t_4, t_5		t_3, t_4, t_5		t_4, t_5		t_5				





Corrigé de l'exercice 2



Application de l'algorithme de DIJKSTRA : Itération 5

		Itération 0		Itération 1		Itération 2		Itération 3		Itération 4		Itération 5	
j	x_j	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$	$dist(x_j)$	$Pcc(x_j)$
2	t_1	5000	(t_0, t_1)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	t_2	11000	(t_0, t_2)	11000	(t_0, t_2)	-	-	-	-	-	-	-	-
4	t_3	20000	(t_0, t_3)	18000	(t_0, t_1, t_3)	18000	(t_0, t_1, t_3)	-	-	-	-	-	-
5	t_4	29000	(t_0, t_4)	27000	(t_0, t_1, t_4)	25000	(t_0, t_2, t_4)	25000	(t_0, t_2, t_4)	-	-	-	-
6	t_5	41000	(t_0, t_5)	36000	(t_0, t_1, t_5)	34000	(t_0, t_2, t_5)	32000	(t_0, t_1, t_3, t_5)	32000	(t_0, t_1, t_3, t_5)	-	-
P	$\{t_0\}$		t_0, t_1		t_0, t_1, t_2		t_0, t_1, t_2, t_3		t_0, t_1, t_2, t_3, t_4		$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$		
T	$\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$		t_2, t_3, t_4, t_5		t_3, t_4, t_5		t_4, t_5		t_5		Ø		

Le plus court chemin de t_0 à t_5 est donné par : t_0, t_1, t_3, t_5 . Cela implique que l'entreprise bénéficiera d'une voiture de service pour 5 ans avec un coût global minimal si elle achète 3 voitures en t_0 , t_1 , et t_3 .

