Perspectives et contributions - Local-Envy-Free Allocations

Nassim Lattab, Mohamed Azzaoui

Université Paris Cité

Professeur : Anaëlle Wilczynski

Introduction

L'objectif principal de cette recherche est de proposer une méthode permettant de construire une allocation sans envie locale (Local-Envy-Free, LEF) tout en minimisant le nombre d'agents devant être retirés du graphe. En effet, dans certains cas, le graphe de départ ne permet pas d'obtenir directement une allocation LEF, souvent à cause de la présence d'agents qui perturbent les équilibres nécessaires pour atteindre cet objectif. Dans ce contexte, notre approche vise à identifier ces agents dits "parasites" et à les retirer du graphe afin de rendre l'allocation LEF possible, tout en limitant au maximum le nombre d'agents éliminés. Cela permet d'optimiser la répartition des ressources tout en respectant les contraintes d'équité locale entre les agents.

Modèle d'Allocation d'Objets et d'Agents

Nous définissons les variables de décision suivantes :

- $x_{i,o}$: l'agent i possède l'objet o.
- $l_{i,p}$: l'agent i est situé sur le nœud p.
- $s_{i,j,o}$: l'agent i observe que l'agent j possède l'objet o.
- a_i : l'agent i est retiré du graphe.
- n_i : le nœud i est retiré du graphe.

Ces variables permettent de décrire les interactions entre les agents et les objets, ainsi que la structure du graphe d'allocation, ce qui est essentiel pour formuler les contraintes et objectifs de l'allocation LEF.

Contraintes

Les contraintes suivantes sont imposées pour garantir une allocation valide, respectant à la fois l'équité dans la distribution des objets et la géométrie des nœuds :

1. Chaque agent doit recevoir exactement un objet :
$$\forall i \in N : \sum_{o \in O} x_{i,o} = 1 - a_i$$
Cette contrainte assure que chaque agent reçoit un objet, sauf si cet agent est retiré du graphe.
2. Chaque objet doit être attribué à exactement un agent :
$$\forall o \in O : \sum_{i \in N} x_{i,o} = 1 - a_i$$
Cela garantit que chaque objet est distribué à un agent unique.
3. Chaque agent doit être assigné à un seul nœud :
$$\forall i \in N : \sum_{p \in V} l_{i,p} = 1 - n_i$$
Cette contrainte impose que chaque agent doit occuper exactement un nœud, sauf s'il est retiré du graphe.
4. Chaque nœud doit avoir exactement un agent assigné :
$$\forall p \in V : \sum_{i \in N} l_{i,p} = 1 - n_i$$
Cette règle garantit que tous les nœuds sont occupés par un agent, sauf si ce nœud est supprimé du graphe.

Relation entre la Position des Agents et les Objets Observés

Pour assurer que les agents respectent les interactions possibles entre eux et les objets, la relation suivante est imposée :

$$\forall i, j \in N, \forall \{p, q\} \in E : l_{i,p} + l_{j,q} + x_{j,o} - 2 \leq s_{i,j,o}$$

Cette contrainte permet de relier les positions des agents et les objets qu'ils observent, garantissant ainsi la cohérence des interactions entre agents et objets.

Minimisation de l'Envie

Nous cherchons à minimiser l'envie des agents en s'assurant que la différence entre les objets qu'ils observent et ceux qu'ils possèdent soit aussi faible que possible. Cela peut être formulé par l'inégalité suivante :

$$\forall i, j \in N : \sum_{o \in O} r_{i,o} \cdot s_{i,j,o} - \sum_{o \in O} r_{i,o} \cdot x_{i,o} \leq e$$

Cette contrainte veille à limiter l'envie entre agents, en minimisant la disparité entre leurs observations et leurs attributions d'objets.

Minimisation des Agents à Retirer

Afin de rendre l'allocation LEF possible, il est parfois nécessaire de retirer certains agents. Nous cherchons à minimiser le nombre d'agents à retirer, ce qui peut être formulé comme suit :

$$\sum_{i \in N} a_i \leq e$$

Cette contrainte vise à limiter au maximum le nombre d'agents retirés du graphe pour atteindre l'allocation sans envie.

Relation de Retrait d'un Agent

Si un agent est retiré du graphe, cela doit affecter également son nœud, garantissant la cohérence de la structure du graphe. Cela est exprimé par la relation suivante :

$$\sum_{i \in N} a_i = \sum_{i \in G} n_i$$

Cette contrainte lie le retrait des agents à celui de leurs nœuds respectifs.

Valeur d'une Allocation Sans Envie

Enfin, une allocation sans envie est définie comme étant une allocation où aucun agent ne ressent d'inégalité par rapport à la répartition des objets :

$$\forall i, j \in N : \sum_{o \in O} r_{i,o} \cdot s_{i,j,o} - \sum_{o \in O} r_{i,o} \cdot x_{i,o} = 0$$

Cette condition garantit que l'envie entre tous les agents est nulle, assurant ainsi l'équité de l'allocation.