Algorithmique avancée : introduction à la récursivité (partie 1)

Marin Bougeret
IUT Montpellier

Présentation du cours d'algorithmique avancée

Contenu

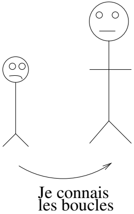
- récursivité ($\approx$ 80%)
- complexité ($\approx$ 20 %)

"To iterate is human, to recurse divine." L. Peter Deutsch

Présentation du cours d'algorithmique avancée

Contenu

- récursivité ($\approx$ 80%)
- complexité ($\approx$ 20 %)

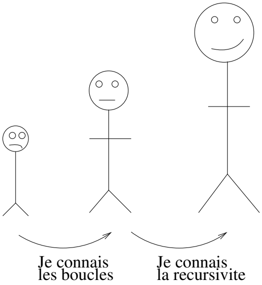


"To iterate is human, to recurse divine." L. Peter Deutsch

Présentation du cours d'algorithmique avancée

Contenu

- récursivité ($\approx$ 80%)
- complexité ($\approx$ 20 %)

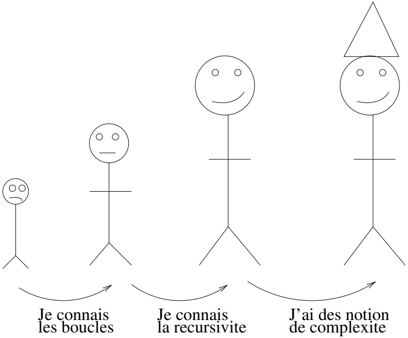


"To iterate is human, to recurse divine." L. Peter Deutsch

Présentation du cours d'algorithmique avancée

Contenu

- récursivité ($\approx$ 80%)
- complexité ($\approx$ 20 %)



"To iterate is human, to recurse divine." L. Peter Deutsch

Présentation du cours d'algorithmique avancée

Organisation

- langage en TP : java, langage en cours : pseudo java :)
  - 1 partiel final sur table (coeff 75%)
  - 1 note de TD (coeff 25%)
- slides/TP/TD disponibles après le cours sur moodle

Plan général

Partie I : algorithmes récursifs

- conception d'algorithmes récursifs (I) : exemples introductifs
- conception d'algorithmes récursifs (II) : tests, idée de preuve, exemples
- conception d'algorithmes récursifs (III) : diviser pour régner

Partie II : structures récursives (listes, arbres..)

- ..

Partie III : complexité

- ..

Motivation pour le récursivité

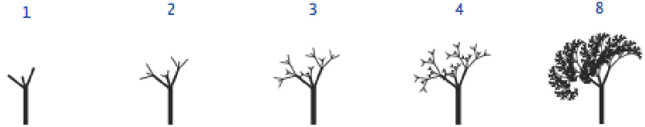
Dans quels cas a-t-on besoin de la récursivité ?

- pour définir et manipuler simplement des structures complexes
- pour écrire des algorithmes
  - dont la spécification est elle même récursive (calculer une suite)
  - mais bien plus : la récursivité permet d'écrire facilement des algorithmes qui seraient extrêmement complexes en itératif (Hanoï, Saut de Puce, ..)

Motivation pour le récursivité

Dans quels cas a-t-on besoin de la récursivité ?

- pour définir et manipuler simplement des structures complexes
- pour écrire des algorithmes
  - dont la spécification est elle même récursive (calculer une suite)
  - mais bien plus : la récursivité permet d'écrire facilement des algorithmes qui seraient extrêmement complexes en itératif (Hanoï, Saut de Puce, ..)

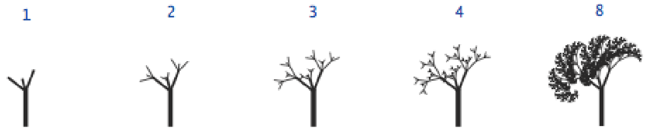


Introduction

Motivation pour le récursivité

Dans quels cas a-t-on besoin de la récursivité ?

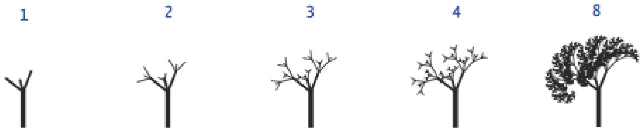
- pour définir et manipuler simplement des structures complexes
- pour écrire des algorithmes
    - dont la spécification est elle même récursive (calculer une suite)
    - mais bien plus : la récursivité permet d'écrire facilement des algorithmes qui seraient extrêmement complexes en itératif (Hanoï, Saut de Puce, ..)



Motivation pour le récursivité

Dans quels cas a-t-on besoin de la récursivité ?

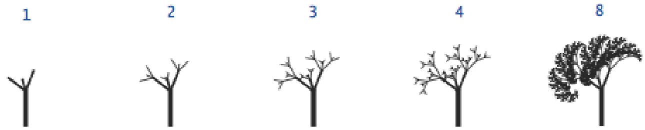
- pour définir et manipuler simplement des structures complexes
- pour écrire des algorithmes
  - dont la spécification est elle même récursive (calculer une suite)
  - mais bien plus : la récursivité permet d'écrire facilement des algorithmes qui seraient extrêmement complexes en itératif (Hanoï, Saut de Puce, ..)



Motivation pour le récursivité

Dans quels cas a-t-on besoin de la récursivité ?

- pour définir et manipuler simplement des structures complexes
- pour écrire des algorithmes
  - dont la spécification est elle même récursive (calculer une suite)
  - mais bien plus : la récursivité permet d'écrire facilement des algorithmes qui seraient extrêmement complexes en itératif (Hanoï, Saut de Puce, ..)



Définition

Un algorithme récursif est un algorihme qui s'appelle lui même :

```
 ...  A(...){


        A(...) //"appel recursif"


 }
```

Définition

Un algorithme récursif est un algorihme qui s'appelle lui même :

```
...  A(...){


       A(...) //"appel recursif"


}
```

Rmq : un algorithme récursif peut contenir plusieurs appels récursifs

Définition

Un algorithme récursif est un algorihme qui s'appelle lui même :

```
...  A(...){


        A(...) //"appel recursif"

        A(...) //"appel recursif"
}
```

Rmq : un algorithme récursif peut contenir plusieurs appels récursifs

Introduction

Définition/Notation

- on notera E l'ensembles des entrées vérifiant les prérequis
- on partionne $E = E_r \cup E_b$ avec
  - E_b l'ensemble des entrées (de E) traitées sans appel récursif
  - E_r l'ensemble des entrées (de E) traitées avec un appel récursif
- un $x \in E_b$ s'appelle un cas de base (E_b est donc l'ensemble des cas de base)

- $E = \{2, 4, 6, \dots\}$ (et pas $E =$ "les ints")
- $E_b = \{2, 4\}$, $E_r = \{6, \dots\}$

```
int  A(int x){ //prerequis : x pair et x > 0
    if(x==2) {return 4;}
    else if(x==4){return 6;}
    else {
      int z = A(x-2); //"appel recursif"
      return z+2;
    }
 }
```

Exemple 1 : int somme(int x)

But : `somme(int x)` qui calcule $1 + 2 + .. + x$, prérequis $x \geq 1$

```
int somme(int x){

    ...

  int temp = somme(x-1);// temp = 1+2+..+x-1
  return temp+x;

}
```

- $E = \{1, 2, \ldots\}$ avec
  - $E_b = \{1\}$
  - $E_r = \{2, 3, \ldots\}$

Exemple 1 : int somme(int x)

But : `somme(int x)` qui calcule $1 + 2 + .. + x$, prérequis $x \geq 1$

```
int somme(int x){
  if(x==1) // cas de base
    return 1;
  else{
    int temp = somme(x-1);// temp = 1+2+..+x-1
    return temp+x;
  }
}
```

- $E = \{1, 2, \dots\}$ avec
  - $E_b = \{1\}$
  - $E_r = \{2, 3, \dots\}$

Exemple 1 : int somme(int x)

But : `somme(int x)` qui calcule $1 + 2 + .. + x$, prérequis $x \geq 1$

```
int somme(int x){
  if(x==1) // cas de base
    return 1;
  else{
    int temp = somme(x-1);// temp = 1+2+..+x-1
    return temp+x;
  }
}
```

- $E = \{1, 2, \ldots\}$ avec
  - $E_b = \{1\}$
  - $E_r = \{2, 3, \ldots\}$

Exemple 1 : int somme(int x)

```
int somme(int x){
  if(x==1) // cas de base
    return 1;
  else{
    int temp = somme(x-1);// temp = 1+2+..+x-1
    return temp+x;
  }
}
```

Pourquoi cela fonctionne ?

Se convaincre en testant à la main : bof :

- difficile en partant de x (cf amphi suivant, mieux vaut partir de 0)
- même quand on y arrive, n'aide pas à comprendre pourquoi l'algo est correct

Exemple 1 : int somme(int x)

```
int somme(int x){
  if(x==1) // cas de base
    return 1;
  else{
    int temp = somme(x-1);// temp = 1+2+..+x-1
    return temp+x;
  }
}
```

Pourquoi cela fonctionne ?

Plutôt voir les choses ainsi :

- l'algo est correct pour $x = 0$
- (P) j'ai écrit mon algo pour x en me disant "je suppose que ça marche pour $x - 1$", et j'écris un code qui marche pour x

Et donc

- comme il est correct pour $x = 0$, par (P) il est correct pour 1
- comme il est correct pour $x = 1$, par (P) il est correct pour 2
- ..

Whiteboard

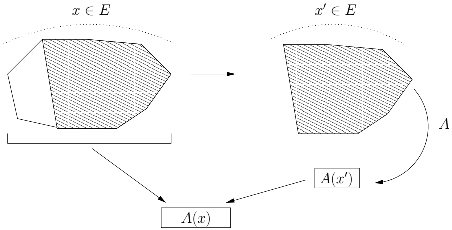
Méthode de conception

Méthode pour concevoir un algorithme récursif A

I) écrire A en supposant que A fonctionne déjà pour des entrées plus petites :

- penser à une grande entrée x
- supposer que pour tout $x' \in E$ plus petite que x, $A(x')$ donnera la bonne réponse
- en s'autorisant à faire de tel(s) appel(s) récursif(s), déduire la bonne réponse pour x

II) pour les cas restants à traiter (où le code précédent n'a pas de sens): on ajoute un/des cas de base(s)



Exemple 2 : double sommeBiz(int x)

But

- prérequis : $x \geq 0$
- action:
  - sommeBiz(0)=0
  - sommeBiz(1)=0
  - sommeBiz(2)=1
  - sommeBiz(3)=$\frac{1}{2} + 1$
  - sommeBiz(4)=$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1$
  - sommeBiz(x)=$\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{x-2} + \cdots + 1$

Exemple 2 : double sommeBiz(int x)

But : `sommeBiz(int x)` $= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + .. + 1$ si $x \geq 2$, 0 sinon (prérequis $x \geq 0$)

```
double sommeBiz(int x){

    ...

    int tmp = sommeBiz(x-1);
        // tmp = 1/(x-2)+1/(x-3)+..+1
    return tmp+1/(x-1);

}
```

- $E = \mathbb{N}$
  - $E_b = \{0\}$
  - $E_r = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Exemple 2 : double sommeBiz(int x)

But : `sommeBiz(int x)` $= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + .. + 1$ si $x \geq 2$, 0 sinon (prérequis $x \geq 0$)

```
double sommeBiz(int x){
  if(x==0) // cas de base
    return 0;
  else{
    int tmp = sommeBiz(x-1);
       // tmp = 1/(x-2)+1/(x-3)+..+1
    return tmp+1/(x-1);
  }
}
```

- $E = \mathbb{N}$
  - $E_b = \{0\}$
  - $E_r = \{1, 2, 3, \dots\}$

Exemple 2 : double sommeBiz(int x)

But : `sommeBiz(int x)` $= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + .. + 1$ si $x \geq 2$, 0 sinon (prérequis $x \geq 0$)

```
double sommeBiz(int x){
  if(x==0) // cas de base
    return 0;
  else{
    int tmp = sommeBiz(x-1);
       // tmp = 1/(x-2)+1/(x-3)+..+1
    return tmp+1/(x-1);
  }
}
```

- $E = \mathbb{N}$
  - $E_b = \{0\}$
  - $E_r = \{1, 2, 3, \dots\}$

Exemple 2 : double sommeBiz(int x)

L'arnaque

- c'est faux!!
- que se passe-t-il avec $x = 1$?

Une correction:

Exemple 2 : double sommeBiz(int x)

But : `sommeBiz(int x)` $= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + .. + 1$ si $x \geq 2$, 0 sinon (prérequis $x \geq 0$)

```
double sommeBiz(int x){
  if(x == 0) return 0; // cas de base
  if(x == 1) return 0; // cas de base
  else{
    int tmp = sommeBiz(x-1);
       // tmp = 1/(x-2)+1/(x-3)+..+1
    return tmp+1/(x-1);
  }
}
```

- $E = \mathbb{N}$
  - $E_b = \{0, 1\}$
  - $E_r = \{2, 3, \dots\}$

Exemple 2 : double sommeBiz(int x)

But : `sommeBiz(int x)` $= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + .. + 1$ si $x \geq 2$, 0 sinon (prérequis $x \geq 0$)

```
double sommeBiz(int x){
  if(x == 0) return 0; // cas de base
  if(x == 1) return 0; // cas de base
  else{
    int tmp = sommeBiz(x-1);
       // tmp = 1/(x-2)+1/(x-3)+..+1
    return tmp+1/(x-1);
  }
}
```

- $E = \mathbb{N}$
  - $E_b = \{0, 1\}$
  - $E_r = \{2, 3, \dots\}$

Exemple 2 : double sommeBiz(int x)

- comment déterminer rigoureusement les cas de base à ajouter à E_b?

Méthode de conception

Méthode pour concevoir un algorithme récursif A

I) écrire A en supposant que A fonctionne déjà pour des entrées plus petites :

- penser à une grande entrée x
- supposer que pour tout $x' \in E$ plus petite que x, $A(x')$ donnera la bonne réponse
- en s'autorisant à faire de tel(s) appel(s) récursif(s), déduire la bonne réponse pour x

On dit que $x \in E$ provoque une erreur dans le code I) si au moins une des conditions suivantes est vraie

1. il y a une instruction incorrecte (division par 0, sortie de tableau, ..)
2. il y a un appel recursif $A(x')$ incorrect (x' ne vérifie pas les prérequis ($x' \notin E$), ou x' n'est pas plus petite que x)
3. tous les appels récursifs sont corrects, mais le calcul pour en déduire le résultat pour x est faux

Quelles entrées de E provoquent une erreur ?

```
double sommeBiz(int x){
  //prerequis: x >= 0


    int tmp = sommeBiz(x-1);
       // tmp = 1/(x-2)+1/(x-3)+..+1
    return tmp+1/(x-1);

}
```

- $x = 0$ (sommeBiz(x-1): $(x-1) \notin E$)
- $x = 1$ (1/(x-1) est une instruction incorrecte)
- $x \geq 2$ ok

Entrées de E provoquant une erreur : $\{0, 1\}$

Quelles entrées de E provoquent une erreur ?

```
int somme(int x){
  //prerequis: x >= 0


    int temp = somme(x-1);// temp = 1+2+..+x-1
    return temp+x;

}
```

- $x = 0$ (somme(x-1): $(x-1) \notin E$)
- $x \geq 1$ ok

Entrées de E provoquant une erreur : $\{0\}$

Quelles entrées de E provoquent une erreur ?

```
int  A(int x){
  //prerequis: x >= 0, x pair

      int z = A(x-2); //"appel recursif"
      return z+2;

 }
```

- $x = 0$ (A(x-2): $(x-2) \notin E$)
- $x = 1$ non! pas dans E!
- $x \geq 2$, ok

Entrées de E provoquant une erreur : $\{0\}$

Méthode de conception

Méthode pour concevoir un algorithme récursif A

I) écrire A en supposant que A fonctionne déjà pour des entrées plus petites :

- penser à une grande entrée x
- supposer que pour tout $x' \in E$ plus petite que x, $A(x')$ donnera la bonne réponse
- en s'autorisant à faire de tel(s) appel(s) récursif(s), déduire la bonne réponse pour x

II) ajouter des cas de base:

- ajouter des cas de base pour traiter les entrées de E provoquant une erreur dans le code I)

Whiteboard

Plan de la fin du cours

conception d'algorithmes récursifs (I) : exemples introductifs

- exemple 2 : recherche
- exemple 3 : saut de puce
- exemple 4 : tri

Exemple 2 : boolean recherche(int[] t, int x)

But : `recherche(t,x)` qui retourne vrai ssi x est dans t (prérequis t non vide)

Méthode pour concevoir un algorithme récursif A

I) écrire A en supposant que A fonctionne déjà pour des entrées plus petites :

- penser à une grande entrée x
- supposer que pour tout $x' \in E$ plus petite que x, $A(x')$ donnera la bonne réponse
- en s'autorisant à faire de tel(s) appel(s) récursif(s), déduire la bonne réponse pour x

"A fonctionne déjà pour des entrées plus petites" $\Leftrightarrow$ $recherche(t2, x)$ sait chercher x dans un tableau $t2$ plus petit

- que choisir pour x'? $x' = t2$ où $t2 =$ les $n-1$ dernières cases

Exemple 2 : boolean recherche(int[] t, int x)

But : `recherche(t,x)` qui retourne vrai ssi x est dans t (prérequis t non vide)

```
boolean recherche(int[] t, int x){
    ...

    int[] t2 = .. //t2 = t[1..(t.length-1)];
    boolean temp = recherche(t2,x);
       //vrai ssi x dans t[1..(t.length-1)];
    if(temp)
      return true
    else
      return (t[0]==x);
}
```

Exemple 2 : boolean recherche(int[] t, int x)

But : `recherche(t,x)` qui retourne vrai ssi x est dans t (prérequis t non vide)

Méthode pour concevoir un algorithme récursif A

II) ajouter les cas de base :

- ajouter des cas de base pour traiter les entrées de E provoquant une erreur dans le code I)

Exemple 2 : boolean recherche(int[] t, int x)

But : `recherche(t,x)` qui retourne vrai ssi x est dans t (prérequis t non vide)

```
boolean recherche(int[] t, int x){
    ...

    int[] t2 = .. //t2 = t[1..(t.length-1)];
    boolean temp = recherche(t2,x);
       //vrai ssi x dans t[1..(t.length-1)];
    if(temp)
      return true
    else
      return (t[0]==x);
}
```

Quelles entrées de E provoquent une erreur dans I?

les tableaux de longueur 1

Exemple 2 : boolean recherche(int[] t, int x)

But : `recherche(t,x)` qui retourne vrai ssi x est dans t (t non vide)

```
boolean recherche(int[] t, int x){
  if(t.length==1){return t[0]==x;}
  else{
    int[] t2 = .. //t2 = t[1..(t.length-1)];
    boolean temp = recherche(t2,x);
       //vrai ssi x dans t[1..(t.length-1)];
    if(temp)
      return true
    else
      return (t[0]==x);
  }
}
```

Rmq : parcours partiel ou total ?

Une astuce pour la récursivité sur les tableaux

- pour faire un appel récursif sur un tableau plus petit..
- .. on peut éviter de recopier le sous tableau correspondant !
- (cela a des conséquences sur le temps d'execution de l'algorithme)

Pour cela, on va changer les spécifications de recherche, et résoudre un problème plus général.

rechercheAux(int []t, int x, int i):

- prérequis : $0 \leq i < t.length$, t non vide
- action : retourne vrai ssi x est dans t[i..(t.length-1)]

Exemple 2 : boolean rechercheAux(int[] t, int x, int i)

But : `rechercheAux(t,x,i)` qui retourne vrai ssi x dans t[i..(t.length-1)]

Méthode pour concevoir un algorithme récursif A

I) écrire A en supposant que A fonctionne déjà pour des entrées plus petites :

- penser à une grande entrée x
- supposer que pour tout $x' \in E$ plus petite que x, $A(x')$ donnera la bonne réponse
- en s'autorisant à faire de tel(s) appel(s) récursif(s), déduire la bonne réponse pour x

"A fonctionne déjà pour des entrées plus petites" $\Leftrightarrow$ *rechercheAux*(..) sait chercher x dans une zone plus petite

- que choisir pour x'? $x' = (t, x, i + 1)$

Exemple 2 : boolean rechercheAux(int[] t, int x,int i)

But : `rechercheAux(t,x,i)` qui retourne vrai ssi x dans t[i..(t.length-1)]

```
boolean rechercheAux(int[] t, int x, int i){
    ...

    boolean temp = rechercheAux(t,x,i+1);
       //vrai ssi x dans t[(i+1)..(t.length-1)];
    if(temp)
      return true
    else
      return (t[i]==x);
}
```

Exemple 2 : boolean rechercheAux(int[] t, int x, int i)

But : `rechercheAux(t,x,i)` qui retourne vrai ssi x dans t[i..(t.length-1)]

Méthode pour concevoir un algorithme récursif A

II) ajouter les cas de base :

- ajouter des cas de base pour traiter les entrées de E provoquant une erreur dans le code *I*)

Exemple 2 : boolean rechercheAux(int[] t, int x, int i)

But : `rechercheAux(t,x,i)` qui retourne vrai ssi x dans t[i..(t.length-1)]

```
boolean rechercheAux(int[] t, int x, int i){
      ..

      boolean temp = rechercheAux(t,x,i+1);
        //vrai ssi x dans t[(i+1)..(t.length-1)
            ];
      if(temp)
        return true
      else
        return (t[i]==x);
}
```

Quelles entrées de E provoquent une erreur dans I?

les entrées où $i = t.length - 1$

Exemple 2 : boolean rechercheAux(int[] t, int x, int i)

But : `rechercheAux(t,x,i)` qui retourne vrai ssi *x* dans t[i..(t.length-1)]

```
boolean rechercheAux(int[] t, int x, int i){
    if(i==t.length-1)
      return t[i]==x;
    else{
     boolean temp = rechercheAux(t,x,i+1);
        //vrai ssi x dans t[(i+1)..(t.length-1)
           ];
     if(temp)
       return true
     else
       return (t[i]==x);
     }
}
```

Exemple 2 : boolean rechercheAux(int[] t, int x, int i)

Fin de l'histoire

- il ne faut pas oublier de fournir ce qui nous intéressait au début:
- `recherche(t,x)` qui retourne vrai ssi x est dans t (t non vide)

```
boolean recherche(int[] t, int x){
  return rechercheAux(t,x,0);
}
```

Remarque

recherche n'est plus récursif.

Utilisation des prérequis du type $i \leq t.length$

Remarque

- on veut maintenant écrire recherche2(t,x) qui traite aussi les tableaux vide (et retourne faux)
- le code précédent ne fonctionne plus : l'appel à rechercheAux est impossible avec t vide
- deux solutions pour adapter:

Solution 1 (bof)

```
boolean recherche2(int[] t, int x){
  if(t.length==0)
    return false;
  else
    return rechercheAux(t,x,0);
}
```

Utilisation des prérequis du type $i \leq t.length$

Remarque

- on veut maintenant écrire recherche2(t,x) qui traite aussi les tableaux vide (et retourne faux)
- le code précédent ne fonctionne plus : l'appel à rechercheAux est impossible avec t vide
- deux solutions pour adapter:

Solution 2 (bien)

```java
boolean recherche2(int[] t, int x){
    return rechercheAux2(t,x,0);
}
```

Il faut donc écrire rechercheAux2 qui traite les tableaux vides

Utilisation des prérequis du type $i \leq t.length$

rechercheAux2(int []t, int x, int i):

- prérequis : $0 \leq i < t.length$, ~~t non vide~~
- action : retourne vrai ssi x est dans t[i..(t.length-1)]

Ce prérequis est équivalent au précédent : ne supporte toujours pas les tableaux vides

Utilisation des prérequis du type $i \leq t.length$

rechercheAux2(int []t, int x, int i):

- prérequis : $0 \leq i < t.length$, ~~t non vide~~
- action : retourne vrai ssi x est dans t[i..(t.length-1)]

Ce prérequis est équivalent au précédent : ne supporte toujours pas les tableaux vides

rechercheAux2(int []t, int x, int i):

- prérequis : $0 \leq i <= t.length$
- action : retourne vrai ssi x est dans t[i..(t.length-1)]

Bizarre à priori mais ..

Utilisation des prérequis du type $i \leq t.length$

But : `rechercheAux2(t,x,i)` qui retourne vrai ssi x dans t[i..(t.length-1)]

Méthode pour concevoir un algorithme récursif A

I) écrire A en supposant que A fonctionne déjà pour des entrées plus petites :

- penser à une grande entrée x
- supposer que pour tout $x' \in E$ plus petite que x, $A(x')$ donnera la bonne réponse
- en s'autorisant à faire de tel(s) appel(s) récursif(s), déduire la bonne réponse pour x

"A fonctionne déjà pour des entrées plus petites" $\Leftrightarrow$ $rechercheAux2(..)$ sait chercher x dans une zone plus petite

- que choisir pour x'? $x' = (t, x, i+1)$

Utilisation des prérequis du type $i \leq t.length$

But : `rechercheAux2(t,x,i)` qui retourne vrai ssi x dans t[i..(t.length-1)]

```
boolean rechercheAux2(int[] t, int x, int i){
    ...

    boolean temp = rechercheAux2(t,x,i+1);
       //vrai ssi x dans t[(i+1)..(t.length-1)];
    if(temp)
      return true
    else
      return (t[i]==x);
}
```

Utilisation des prérequis du type $i \leq t.length$

But : `rechercheAux2(t,x,i)` qui retourne vrai ssi x dans t[i..(t.length-1)]

Méthode pour concevoir un algorithme récursif A

II) ajouter les cas de base :

- ajouter des cas de base pour traiter les entrées de E provoquant une erreur dans le code *I*)

Utilisation des prérequis du type $i \leq t.length$

But : `rechercheAux2(t,x,i)` qui retourne vrai ssi x dans t[i..(t.length-1)]

```
boolean rechercheAux2(int[] t, int x, int i){
      ..

      boolean temp = rechercheAux2(t2,x,i+1);
        //vrai ssi x dans t[(i+1)..(t.length-1)
           ];
      if(temp)
        return true
      else
        return (t[i]==x);
}
```

Quelles entrées de E provoquent une erreur dans I?

les entrées où $i = t.length$

Utilisation des prérequis du type $i \leq t.length$

But : `rechercheAux2(t,x,i)` qui retourne vrai ssi x dans t[i..(t.length-1)]

```
boolean rechercheAux2(int[] t, int x, int i){
    if(i==t.length)
      return false;
    else{
     boolean temp = rechercheAux2(t2,x,i+1);
        //vrai ssi x dans t[(i+1)..(t.length-1)
           ];
     if(temp)
       return true
     else
       return (t[i]==x);
     }
}
```

Remarque : si t vide, alors forcément $i = 0$, et tout va bien.

Utilisation des prérequis du type $i \leq t.length$

Fin de l'histoire

- il ne faut pas oublier de fournir ce qui nous intéressait au début:
- `recherche2(t,x)` qui retourne vrai ssi x est dans t (pas de prérequis)

```
boolean recherche2(int[] t, int x){
  return rechercheAux2(t,x,0);
}
```

Conclusion

Des prérequis du type $i \leq t.length$ mènent à des algorithmes plus facile à écrire, et qui traitent plus de cas!

Exemple 3 : int sautPuce (int n)

- On considère une puce située à une altitude $n \geq 0$ cm
- A chaque étape, la puce peut faire un saut (vers le bas) de 2 cm, ou de 1 cm
- Question : étant donné une altitude de départ $n \geq 0$, combien de trajectoires possibles amènent la puce à l'altitude 0?

Par exemple, pour $n = 5$, on compte 8 trajectoires

- 5-> 3-> 1-> 0
- 5-> 3-> 2-> 0
- 5-> 3-> 2-> 1-> 0
- 5-> 4-> 2-> 0
- 5-> 4-> 2-> 1-> 0
- 5-> 4-> 3-> 1-> 0
- 5-> 4-> 3-> 2-> 0
- 5-> 4-> 3-> 2-> 1-> 0

Exemple 3 : int sautPuce (int n)

But : `sautPuce(n)` qui calcule le nb de trajectoires en partant de n

Méthode pour concevoir un algorithme récursif A

I) écrire A en supposant que A fonctionne déjà pour des entrées plus petites :

- penser à une grande entrée x
- supposer que pour tout $x' \in E$ plus petite que x, $A(x')$ donnera la bonne réponse
- en s'autorisant à faire de tel(s) appel(s) récursif(s), déduire la bonne réponse pour x

"A fonctionne déjà pour des entrées plus petites" $\Leftrightarrow$ $sautPuce(n')$ sait calculer le nombre de trajectoires en partant de n', pour tout $n' < n$

- que choisir pour x'? $x' =$?
- quel(s) appel(s) récursif(s) faire ?

Exemple 3 : int sautPuce (int n)

Reprenons le cas $n = 5$.

Supposons que l'on nous dise qu'il y a

- 3 trajectoires en partant de $n' = 3$
- 5 trajectoires en partant de $n' = 4$

Comment utiliser ces informations pour en déduire la réponse pour $n = 5$?

- 5-> 3-> ..
- 5-> 3-> ..
- 5-> 3-> ..

- 5-> 4-> ..
- 5-> 4-> ..
- 5-> 4-> ..
- 5-> 4-> ..
- 5-> 4-> ..

D'où sautPuce(5) = sautPuce(3)+sautPuce(4)

Exemple 3 : int sautPuce (int n)

Reprenons le cas $n = 5$.
Supposons que l'on nous dise qu'il y a

- 3 trajectoires en partant de $n' = 3$
- 5 trajectoires en partant de $n' = 4$

Comment utiliser ces informations pour en déduire la réponse pour $n = 5$?

- 5-> 3-> ..
- 5-> 3-> ..
- 5-> 3-> ..

- 5-> 4-> ..
- 5-> 4-> ..
- 5-> 4-> ..
- 5-> 4-> ..
- 5-> 4-> ..

D'où sautPuce(5) = sautPuce(3)+sautPuce(4)

Exemple 3 : int sautPuce (int n)

Reprenons le cas $n = 5$.
Supposons que l'on nous dise qu'il y a

- 3 trajectoires en partant de $n' = 3$
- 5 trajectoires en partant de $n' = 4$

Comment utiliser ces informations pour en déduire la réponse pour $n = 5$?

- 5-> 3-> ..
- 5-> 3-> ..
- 5-> 3-> ..

- 5-> 4-> ..
- 5-> 4-> ..
- 5-> 4-> ..
- 5-> 4-> ..
- 5-> 4-> ..

D'où sautPuce(5) = sautPuce(3)+sautPuce(4)

Exemple 3 : int sautPuce (int n)

Reprenons le cas $n = 5$.
Supposons que l'on nous dise qu'il y a

- 3 trajectoires en partant de $n' = 3$
- 5 trajectoires en partant de $n' = 4$

Comment utiliser ces informations pour en déduire la réponse pour $n = 5$?

- 5-> 3-> ..
- 5-> 3-> ..
- 5-> 3-> ..

- 5-> 4-> ..
- 5-> 4-> ..
- 5-> 4-> ..
- 5-> 4-> ..
- 5-> 4-> ..

D'où sautPuce(5) = sautPuce(3)+sautPuce(4)

Exemple 3 : int sautPuce (int n)

On en déduit le code suivant

```
int sautPuce(int n){
  //n >= 0
  //calcule le nb de traj. en partant de n



    int temp1 = sautPuce(n-2);
    int temp2 = sautPuce(n-1);
    return temp1+temp2;

}
```

Exemple 3 : int sautPuce (int n)

Méthode pour concevoir un algorithme récursif A

II) ajouter les cas de base :

- ajouter des cas de base pour traiter les entrées de E provoquant une erreur dans le code I)

Exemple 3 : int sautPuce (int n)

```
int sautPuce(int n){
  //n >= 0
  //calcule le nb de traj. en partant de n



    int temp1 = sautPuce(n-2);
    int temp2 = sautPuce(n-1);
    return temp1+temp2;

}
```

Quelles entrées de E provoquent une erreur dans I?

$n = 0$ et $n = 1$

Exemple 3 : int sautPuce (int n)

On en déduit le code suivant

```
int sautPuce(int n){
  //n >= 0
  //calcule le nb de traj. en partant de n
  if(n==0)
    return 1;
  if(n==1)
    return 1;
  else{
    int temp1 = sautPuce(n-2);
    int temp2 = sautPuce(n-1);
    return temp1+temp2;
  }
}
```

Que se passe-t-il si l'on oublie le cas de base $n == 1$?

Exemple 4 : void triInser (int []t)

But : `triInser(t)` qui trie t par ordre croissant

Méthode pour concevoir un algorithme récursif A

I) écrire A en supposant que A fonctionne déjà pour des entrées plus petites :

- penser à une grande entrée x
- supposer que pour tout $x' \in E$ plus petite que x, $A(x')$ donnera la bonne réponse
- en s'autorisant à faire de tel(s) appel(s) récursif(s), déduire la bonne réponse pour x

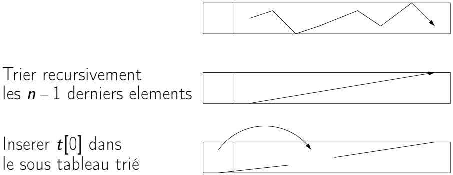
"A fonctionne déjà pour des entrées plus petites" $\Leftrightarrow$ $triInser(t2)$ sait trier un tableau $t2$ plus petit

- que choisir pour x'? $x' =$?
- quel(s) appel(s) récursif(s) faire ?

Exemple 4 : void triInser (int []t)

But : `triInser(t)` qui trie t par ordre croissant

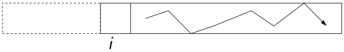
Idée:



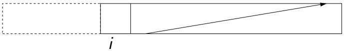
Astuce de l'ajout d'indice

Nous allons donc écrire `void triInserAux(int[] t, int i)` qui pour $0 \leq i \leq t.length$ trie le sous tab. $t[i..(t.length-1)]$ par ordre croissant. On se fiche des éléments avant i!

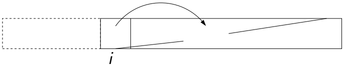
Attention, le dessin précédent devient :



Trier recursivement
le sous tableau t[i+1]..t[t.length-1]



Inserer $t[i]$ dans
le sous tableau trié



Exemple 4 : void triInser (int []t)

On en déduit le code suivant

```
void triInserAux(int[] t, int i){
  // 0 <= i <= t.length
  // trie le sous tableau t[i..(t.length-1)] par
      ordre croissant


    triInserAux(t,i+1);
    insere(t,i); //TODO

}
```

Exemple 4 : void triInser (int []t)

Méthode pour concevoir un algorithme récursif A

II) ajouter les cas de base :

- ajouter des cas de base pour traiter les entrées de E provoquant une erreur dans le code I)

Exemple 4 : void triInser (int []t)

```
void triInserAux(int[] t, int i){
  // 0 <= i <= t.length
  // trie le sous tableau t[i..(t.length-1)] par
     ordre croissant


    triInserAux(t,i+1);
    insere(t,i); //TODO

}
```

Quelles entrées de E provoquent une erreur dans I?

les entrées où $i = t.length$

Exemple 4 : void triInser (int []t)

```
void triInserAux(int[] t, int i){
  // 0 <= i <= t.length
  // trie le sous tableau t[i..(t.length-1)] par
      ordre croissant
  if( i >= t.length ){rien!}
  else{
    triInserAux(t,i+1);
    insere(t,i); //TODO
  }
}
```

- bien écrire les spécifications de `insere(t,i)` :
  - étant donné $0 \leq i \leq t.length - 1$, et t tel que $t[(i+1)..(t.length-1)]$ est trié par ordre croissant
  - insere(t,i) modifie $t[i..(t.length-1)]$ tel que $t[i..(t.length-1)]$ soit trié par ordre croissant

Exemple 4 : void triInser (int []t)

```
void triInserAux(int[] t, int i){
  // 0 <= i <= t.length
  // trie le sous tableau t[i..(t.length-1)] par
       ordre croissant
  if( i >= t.length ){rien!}
  else{
    triInserAux(t,i+1);
    insere(t,i); //TODO
  }
}
```

- bien écrire les spécifications de `insere(t,i)` :
  - étant donné $0 \leq i \leq t.length - 1$, et t tel que $t[(i+1)..(t.length-1)]$ est trié par ordre croissant
  - insere(t,i) modifie $t[i..(t.length-1)]$ tel que $t[i..(t.length-1)]$ soit trié par ordre croissant

Exemple 4 : void triInser (int []t)

```
void triInserAux(int[] t, int i){
  // 0 <= i <= t.length
  // trie le sous tableau t[i..(t.length-1)] par
       ordre croissant
  if( i >= t.length ){rien!}
  else{
    triInserAux(t,i+1);
    insere(t,i); //TODO
  }
}
```

- bien écrire les spécifications de `insere(t,i)` :
  - étant donné $0 \leq i \leq t.length - 1$, et t tel que $t[(i+1)..(t.length-1)]$ est trié par ordre croissant
  - insere(t,i) modifie $t[i..(t.length-1)]$ tel que $t[i..(t.length-1)]$ soit trié par ordre croissant

Exemple 4 : void triInser (int []t)

```
void insere(t,i){
  // 0 <= i <= t.length-1, t tel que
  // t[(i+1)..(t.length-1)] est trie croissant
  // modifie t[i..(t.length-1)] tel que
  // t[i..(t.length-1)] soit trie croissant
  int x = t[i];
  int j=i+1;
  boolean trouve = false;
  while(!trouve && (j < t.length)){
    if(t[j]<x){
      t[j-1]=t[j];
      j++;
    }
    else{
      trouve = true;
  }
  //2 cas possibles, soit t[j]>=x,
  //soit j=t.length. Dans les 2 cas :
  t[j-1]=x;
}
```

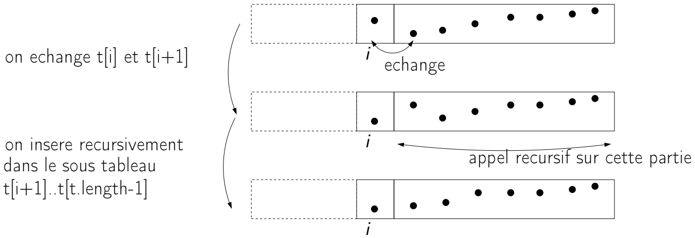
C'est fini ! Le code final est

```
void triInser(int[] t){
  // trie t par ordre croissant
  triInserAux(t,0);
}
```

Pour s'amuser, on pourrait aussi écrire `void insere(t,i)` récursivement!

void insere(t,i) en récursif !

- si $t[i] \leq t[i+1]$, on ne fait rien
- sinon :



Pour la prochaine fois : implémentez triInsert avec insere en récursif.

Bilan : une remarque

- on parle partout de "x' plus petit que x" ..
- dans chaque cas, on a réussi à définir ce que veut dire "plus petit" ..
- .. de telle sorte qu'il n'y ait pas de "descente infinie" (on retombe toujours sur les cas de base après un nombre fini d'étapes)
    - (ici on arrive toujours à définir une taille qui associe à une entrée $x \in E$ un entier $t(x) \in \mathbb{N}$, on définit alors "plus petit" grâce à t)

Mais sur certains exemples il peut être compliqué de trouver une bonne définition de "plus petit" (discussion TD: ordre lexicographique, syracuse, pb avec les réels ..)

Mais ce n'est pas l'objet de ce cours : dans tous nos exemples on trouvera facilement un sens à "plus petit" qui empêche les descentes infinies

Bilan

A retenir

- la méthode de conception : points I) et II)
- ne pas trouver les cas de base "par tâtonnement"
- astuce de l'ajout d'indice i pour les tableaux
  - utilisation prérequis $i \leq t.length$ souvent mieux

Whiteboard

Whiteboard