Institut National de Statistique et d'Economie Appliquée

Optimisation Stochastique pour la Localisation d'Installations et l'Affectation des Clients

Réalisé par :

Mohamed Boutaghratine

Sous la supervision :

Mr.ILYAS HIMMICH

24 décembre 2024

Résumé

Ce rapport présente une étude approfondie d'un problème d'optimisation stochastique visant à déterminer l'emplacement optimal d'installations et l'affectation des clients afin de maximiser les profits ou minimiser les coûts. L'analyse commence par un modèle déterministe basé sur des données générées aléatoirement, permettant une compréhension initiale du problème. Elle est ensuite étendue à un modèle stochastique intégrant l'incertitude des demandes clients sous forme de scénarios probabilistes.

Dans la première partie, des données simulées ont été utilisées pour formuler et résoudre un programme déterministe, avant d'aborder un modèle stochastique avec recours. Plusieurs approches intuitives, telles que les solutions Wait See (WS) et de Valeur Estimée (EEV), ont été explorées pour évaluer la performance des modèles. Des mesures d'efficacité, incluant la Valeur Espérée de la Solution Parfaite (VSS) et la Valeur de la Solution Stochastique (VSSo), ont été calculées pour évaluer l'impact de l'incertitude.

La deuxième partie exploite des données réelles fournies par l'entreprise afin de valider les méthodologies développées. Les résultats obtenus ont permis de formuler des recommandations concrètes aux décideurs, mettant en évidence les gains potentiels liés à la gestion de l'incertitude dans les décisions stratégiques.

Ce rapport illustre l'efficacité des modèles stochastiques dans la résolution de problèmes complexes sous incertitude et propose des solutions optimales pour la localisation et l'affectation des ressources.

Table des matières

1 Présentation du projet **1**
- 1.1 Contexte et problématique . . . 1
- 1.2 Objectifs du travail . . . 2

2 Modélisation du problème **3**
- 2.1 Définition du problème . . . 3
  - 2.1.1 Description des installations, clients, capacités, coûts et revenus . . . 3
  - 2.1.2 Hypothèses et contraintes . . . 3
- 2.2 Modèle déterministe . . . 4
  - 2.2.1 Formulation mathématique sous forme d'un programme linéaire . . . 4
  - 2.2.2 Génération des données aléatoires . . . 4
- 2.3 Modèle stochastique avec recours . . . 5
  - 2.3.1 Vecteur des variables aléatoires (ξ) . . . 5
  - 2.3.2 Décisions de première et de deuxième étape . . . 5
  - 2.3.3 Représentation implicite du programme stochastique . . . 6
  - 2.3.4 Problème de recours (Scénario s) . . . 6
- 2.4 Équivalent déterministe (PDE) . . . 7
  - 2.4.1 Le nombre de scénarios possibles . . . 7
  - 2.4.2 Programme Déterministe Équivalent (PDE) . . . 7
- 2.5 Approches intuitives . . . 8
  - 2.5.1 L'approche Wait & See . . . 8
  - 2.5.2 Approche de la Valeur Estimée . . . 8
- 2.6 Mesures d'efficacité . . . 8

Chapitre 1

Présentation du projet

1.1 Contexte et problématique

Dans un environnement économique marqué par une concurrence accrue et des fluctuations de la demande, les entreprises cherchent à optimiser leurs processus logistiques pour réduire les coûts et maximiser leurs profits. L'un des défis majeurs réside dans la localisation optimale des installations (entrepôts, centres de distribution) et l'affectation efficace des clients à ces installations.

Ce problème devient encore plus complexe lorsque les demandes des clients sont incertaines, introduisant une variabilité qui peut compromettre la robustesse des solutions déterministes classiques. Une mauvaise estimation des besoins ou une affectation inefficace peut entraîner des pertes financières importantes ou un manque de capacité pour répondre à la demande.

L'objectif de ce travail est donc de développer et d'analyser des modèles d'optimisation capables d'intégrer ces incertitudes, en combinant : - Modèles déterministes : qui supposent des demandes fixes et connues. - Modèles stochastiques : qui intègrent des scénarios multiples pour modéliser l'incertitude.

Nous abordons également des approches intuitives basées sur des simplifications pour évaluer leur performance par rapport aux modèles optimaux. Ces approches permettent d'examiner des concepts tels que la **solution attendue (EEV) et la solution parfaite (EVPI) afin de mieux comprendre les gains potentiels d'une modélisation plus sophistiquée.

Ce projet vise enfin à appliquer ces techniques sur des données réelles fournies par une entreprise, afin d'obtenir des résultats exploitables et de formuler des recommandations concrètes aux décideurs.

1.2 Objectifs du travail

L'objectif principal de ce travail est de concevoir et d'évaluer des modèles d'optimisation pour résoudre un problème de localisation d'installations et d'affectation des clients, en tenant compte de l'incertitude liée à la demande.

De manière spécifique, ce projet vise à :

Développer un modèle déterministe :
- Formuler un modèle d'optimisation classique basé sur des demandes fixes.
- Résoudre ce modèle pour identifier une solution initiale réalisable.

Construire un modèle stochastique :
- Intégrer l'incertitude de la demande en utilisant une discrétisation en scénarios équiprobables.
- Analyser la robustesse et la performance des solutions obtenues face aux variations de la demande.

Évaluer les approches intuitives :
- Examiner la performance des méthodes simplifiées comme la solution attendue (EEV) et la solution parfaite (EVPI).
- Comparer ces approches avec la solution stochastique optimale.

Exploiter des données réelles :
- Appliquer les modèles sur des données concrètes fournies par l'entreprise.
- Réaliser des simulations pour valider la pertinence des résultats et proposer des recommandations pratiques.

Interpréter et conseiller :
- Analyser les solutions obtenues pour en déduire des mesures d'efficacité.
- Proposer des recommandations aux décideurs pour guider la prise de décision stratégique.

Ce travail combine donc des approches théoriques et applications pratiques pour fournir des outils décisionnels robustes, adaptés aux contraintes réelles de l'entreprise.

Chapitre 2

Modélisation du problème

2.1 Définition du problème

L'objectif du problème étudié est de concevoir un plan optimal de construction d'installations et d'affectation des clients afin de maximiser les profits ou de minimiser les coûts d'exploitation. L'entreprise doit décider quelles installations ouvrir, où les localiser, et comment assigner les clients à ces installations tout en prenant en compte :

— Les capacités des installations,
— Les coûts de construction,
— Les revenus générés par la distribution des produits,
— La demande aléatoire des clients.

Le problème est modélisé comme un programme d'optimisation mixte intégrant des contraintes capacitaires et des données incertaines. Il est d'abord traité dans sa forme déterministe, puis étendu à un modèle stochastique pour mieux refléter les incertitudes liées aux demandes des clients.

2.1.1 Description des installations, clients, capacités, coûts et revenus

Installations : L'entreprise dispose de **N** sites potentiels (indexés par $j = 1, 2, ..., N$) pouvant accueillir des installations. Chaque site est caractérisé par :

— Une capacité maximale q_j en termes d'unités de produit pouvant être fournies.
— Un coût de construction c_j associé à son ouverture.

Clients : L'entreprise doit desservir **M** clients (indexés par $i = 1, 2, ..., M$) ayant des demandes variables. Chaque client est caractérisé par :

— Une demande mensuelle d_i qui peut être déterministe ou aléatoire.

Revenus et coûts d'approvisionnement : Lorsqu'un client i est approvisionné à partir d'une installation ouverte au site j, un revenu unitaire r_{ij} est généré. Ce revenu reflète la rentabilité de la distribution des produits dans une zone donnée.

2.1.2 Hypothèses et contraintes

Hypothèses du modèle :

— Chaque client est approvisionné par une seule installation.
— Les demandes peuvent être modélisées avec trois scénarios possibles pour capter l'incertitude.
— Les capacités des installations sont fixes et ne peuvent être dépassées.
— Les coûts et revenus sont supposés constants et connus à l'avance.

Objectif du modèle : Ce modèle sert de base initiale pour la formulation d'un programme d'optimisation en vue d'atteindre des solutions optimales et robustes face aux incertitudes.

2.2 Modèle déterministe

2.2.1 Formulation mathématique sous forme d'un programme linéaire

Variables de décision :
— $\mathbf{x}ij$: Variable binaire, vaut 1 si le client **i** est assigné au site **j**, 0 sinon.
— $\mathbf{y}j$: Variable binaire, vaut 1 si le site **j** est ouvert, 0 sinon.

Paramètres :
— $\mathbf{d}i$: Demande du client **i**.
— $\mathbf{q}j$: Capacité du site **j**.
— $\mathbf{c}j$: Coût de construction du site **j**.
— $\mathbf{r}ij$: Revenu unitaire pour fournir une unité de produit du site **j** au client **i**.

Objectif : Maximiser le profit total :

$$\max \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{3} (r_{ij} \cdot d_i \cdot x_{ij}) - \sum_{j=1}^{3} (c_j \cdot y_j)$$

Contraintes :
— Un client ne peut être desservi que par un seul site :

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1, \forall i = 1, 2, ..., 6$$

— Respect des capacités des sites :

$$\sum_{i=1}^{6} d_i \cdot x_{ij} \leq q_j \cdot y_j, \forall j = 1, 2, 3$$

— Une installation doit être ouverte pour desservir un client :

$$x_{ij} \leq y_j, \forall i = 1, 2, ..., 6, j = 1, 2, 3$$

— Variables binaires :

$$x_{ij}, y_j \in 0, 1$$

2.2.2 Génération des données aléatoires

Capacités des sites ($\mathbf{q_j}$) :

— Chaque site doit avoir une capacité suffisante pour desservir plusieurs clients.
— On génère les capacités comme suit :

$$q_j \sim \text{Uniform}(20, 50)$$

— Cela garantit des capacités variables mais réalistes pour couvrir plusieurs demandes.

Demandes des clients ($\mathbf{\bar{d}_i}$) :

— Les demandes sont choisies de manière aléatoire avec un total inférieur ou égal à la somme des capacités, afin d'assurer la faisabilité.
— Génération :

$$\bar{d}_i \sim \text{Uniform}(5, 15)$$

On ajuste si la somme dépasse les capacités totales.

Coût de construction ($\mathbf{c_j}$) :
— Plus un site a une capacité élevée, plus son coût peut être important.
— Génération :

$$c_j \sim \text{Uniform}(100, 200)$$

Cela reflète un coût réaliste, évitant des solutions où un site est toujours préféré en raison d'un coût trop bas.

Revenus unitaires ($\mathbf{r_{ij}}$) :
— Les revenus sont définis pour encourager la couverture de clients par des sites proches ou rentables.
— Génération :

$$r_{ij} \sim \text{Uniform}(10, 30)$$

Cela garantit une variabilité tout en favorisant la rentabilité.

2.3 Modèle stochastique avec recours

Le modèle stochastique intègre des décisions anticipées pour l'ouverture des sites et des décisions adaptatives après observation des demandes. Cela permet de minimiser les coûts ou maximiser les profits tout en gérant l'incertitude liée aux demandes aléatoires.

2.3.1 Vecteur des variables aléatoires (ξ)

Le vecteur ξ représente l'incertitude dans les demandes des clients :

$$\xi = (\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \ldots, \tilde{d}_6)$$

où $\tilde{d}_i$ est la demande aléatoire du client i.

2.3.2 Décisions de première et de deuxième étape

Première étape (avant de connaître la demande) :

$$y_j : Variablebinaireindiquantsilesitejestouvert.$$

Deuxième étape (après la réalisation des demandes) :

$$x_{ij}^s : \text{Variable binaire indiquant si le client } i \text{ est desservi par le site } j \text{ dans le scénario } s.$$

$$z_{ij}^s : \text{Quantité de produit envoyée au client } i \text{ par le site } j \text{ dans le scénario } s.$$

2.3.3 Représentation implicite du programme stochastique

Objectif : Maximiser l'espérance des profits sur tous les scénarios S :

$$\text{Max } E\left[\sum_{s\in S} p_s \left(\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{3}(r_{ij}\cdot z_{ij}^s) - \sum_{j=1}^{3}(c_j\cdot y_j)\right)\right]$$

où p_s est la probabilité du scénario s.

Contraintes : 1. Capacité des sites (première étape) :

$$\sum_{i=1}^{6} z_{ij}^s \leq q_j \cdot y_j, \quad \forall j, \forall s$$

2. Satisfaction de la demande (deuxième étape) :

$$\sum_{j=1}^{3} z_{ij}^s \geq \tilde{d}_i^s, \quad \forall i, \forall s$$

3. Un client est affecté à un seul site (deuxième étape) :

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij}^s = 1, \quad \forall i, \forall s$$

4. Relation entre affectation et livraison :

$$z_{ij}^s \leq \tilde{d}_i^s \cdot x_{ij}^s, \quad \forall i, j, s$$

5. Variables binaires :

$$y_j, x_{ij}^s \in \{0,1\}, \quad z_{ij}^s \geq 0$$

2.3.4 Problème de recours (Scénario s)

Pour un scénario donné s, où $\tilde{d}_i^s$ est connu : **Objectif (recours) :** Maximiser les profits sur la base des décisions de première étape :

$$\text{Max } \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{3}(r_{ij}\cdot z_{ij}^s)$$

Contraintes (recours) : 1. Respect des capacités des sites :

$$\sum_{i=1}^{6} z_{ij}^s \leq q_j \cdot y_j$$

2. Satisfaction de la demande :

$$\sum_{j=1}^{3} z_{ij}^s \geq \tilde{d}_i^s$$

2.4 Équivalent déterministe (PDE)

2.4.1 Le nombre de scénarios possibles

Pour déterminer le **nombre de scénarios possibles**, analysons les informations données :
1. **Nombre de clients (M)** $= 6$ 2. Chaque client a **3 réalisations possibles** pour sa demande :
- $\bar{d}_i$
- $(1+20\%)\bar{d}_i$
- $(1-20\%)\bar{d}_i$

3. Les réalisations sont indépendantes pour chaque client.
4. Le nombre total de scénarios possibles est donné par :

$$3^M$$

Calculons :

$$3^6 = 729$$

Il y a **729 scénarios possibles**.

2.4.2 Programme Déterministe Équivalent (PDE)

Objectif : Maximiser l'espérance des profits :

$$\max \left[\sum_{s=1}^{S} p_s \left(\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} r_{ij} z_{ijs} - \sum_{j=1}^{N} c_j y_j \right) \right]$$

Contraintes :

1. **Capacité des sites pour chaque scénario :**

$$\sum_{i=1}^{M} z_{ijs} \leq q_j y_j, \quad \forall j, \forall s$$

2. **Satisfaction de la demande pour chaque scénario :**

$$\sum_{j=1}^{N} z_{ijs} \geq d_{is}, \quad \forall i, \forall s$$

3. **Affectation unique pour chaque client :**

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ijs} = 1, \quad \forall i, \forall s$$

4. **Relation entre affectation et quantité livrée :**

$$z_{ijs} \leq d_{is} x_{ijs}, \quad \forall i, \forall j, \forall s$$

5. **Contraintes de décision binaire :**

$$y_j \in \{0,1\}, \quad x_{ijs} \in \{0,1\}, \quad z_{ijs} \geq 0$$

AVEC :
— **Première étape :** Décision d'ouvrir ou non les installations (y_j).
— **Deuxième étape :** Allocation des clients (x_{ijs}) et gestion des quantités livrées (z_{ijs}) en fonction des scénarios.
— **Probabilités :** Intégrées pour pondérer les profits espérés sur tous les scénarios possibles.

2.5 Approches intuitives

2.5.1 L'approche Wait & See

— **WS Solution** : La solution optimale est obtenue en prenant les décisions après avoir observé les demandes exactes. L'objectif est de maximiser les profits pour chaque scénario, tout en respectant les capacités des sites et les demandes des clients.
— **Valeur Optimale** : Elle est calculée pour chaque scénario, en maximisant les profits. Puis, la moyenne pondérée de ces valeurs optimales (en fonction des probabilités des scénarios) est utilisée pour évaluer la solution.

2.5.2 Approche de la Valeur Estimée

L'approche de la valeur estimée consiste à résoudre le problème en calculant l'espérance de la solution stochastique, c'est-à-dire en prenant en compte les différentes réalisations de la demande et leurs probabilités respectives. Mathématiquement, l'idée est de maximiser la somme des profits, tout en intégrant les probabilités des différents scénarios, pour obtenir une estimation de la solution optimale dans un cadre stochastique. L'approche peut être formulée comme suit :

— **Estimation de la solution stochastique** : On résout le problème pour chaque scénario s, en maximisant les profits pour les décisions prises dans ce scénario :

$$\text{Max} \quad \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} r_{ij} z_{ijs} - \sum_{j=1}^{N} c_j y_j$$

— **Espérance de la solution** : Ensuite, on calcule l'espérance de la solution en prenant la moyenne pondérée des résultats obtenus pour chaque scénario, en utilisant les probabilités p_s associées à chaque scénario :

$$E[\text{Profit}] = \sum_{s=1}^{S} p_s \left(\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} r_{ij} z_{ijs} - \sum_{j=1}^{N} c_j y_j \right)$$

— **Optimisation** : La solution optimale dans cette approche consiste à maximiser l'espérance des profits, en respectant les contraintes pour chaque scénario. Cela revient à résoudre un programme d'optimisation où l'objectif est de maximiser l'espérance des profits sous les contraintes de capacité et de satisfaction des demandes pour chaque scénario.

La valeur estimée est l'optimisation des profits pondérée par la probabilité de chaque scénario.

2.6 Mesures d'efficacité

1. **La Valeur de la Solution Stochastique (VSS)** Elle représente la performance attendue d'une solution obtenue en optimisant directement sous incertitude, en tenant compte des différents scénarios possibles avec leurs probabilités associées.
2. **La Valeur Espérée de la Solution Parfaite (EPI)** Elle correspond à la performance maximale qui serait atteinte si l'on connaissait à l'avance la réalisation exacte des scénarios d'incertitude.

Formules Mathématiques

1. **Fonction Objectif (Valeur Stochastique)** La solution stochastique maximise le profit attendu pondéré par les probabilités des scénarios :

$$Z_{stoch} = \max \sum_{s=1}^{S} p_s \left[\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} r_{ij} z_{ijs} - \sum_{j=1}^{N} c_j y_j \right]$$

où : - z_{ijs} : Quantité allouée du client i au site j sous le scénario s. - y_j : Variable binaire indiquant si le site j est construit. - p_s : Probabilité associée au scénario s. - r_{ij} : Revenu unitaire. - c_j : Coût de construction.

Contraintes :

(a) Capacité :

$$\sum_{i=1}^{M} z_{ijs} \leq q_j \cdot y_j, \quad \forall j, s$$

(b) Satisfaction de la demande :

$$\sum_{j=1}^{N} z_{ijs} \geq d_{is}, \quad \forall i, s$$

(c) Affectation unique :

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ijs} = 1, \quad \forall i, s$$

(d) Liens entre z et x :

$$z_{ijs} \leq d_{is} \cdot x_{ijs}, \quad \forall i, j, s$$

2. **Valeur Espérée de la Solution Parfaite (EPI)** Pour chaque scénario s, on résout un problème déterministe :

$$Z_{epi}(s) = \max \left[\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} r_{ij} z_{ij} - \sum_{j=1}^{N} c_j y_j \right]$$

sous les mêmes contraintes, mais avec des demandes fixes d_i^s.

L'espérance de la solution parfaite est ensuite calculée :

$$EPI = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^{S} Z_{epi}(s)$$

3. **Efficacité (%)** Le code mesure l'efficacité relative entre la solution stochastique et la solution parfaite :

$$\text{Efficacité} = \frac{Z_{stoch} - EPI}{EPI} \times 100$$

Cette mesure indique à quel point la solution obtenue sous incertitude se rapproche de la solution optimale parfaite.