

Notions sur les ensembles

- Un ensemble est une collection d'objets rassemblés d'après une propriété commune.

Ex : l'ensemble des points du plan
l'ensemble des nombres réels . . .

Propriété : une collection n'est pas toujours un ensemble.

- Un ensemble est constitué d'éléments ; l'élément x appartient à E se note : $x \in E$; la négation s'écrit $x \notin E$

Ex : On note par \emptyset l'ensemble vide, qui ne contient aucun élément.

- Un ensemble ayant un seul élément est appelé singleton : Ex : $\{x\}$.

- le nombre d'éléments d'un ensemble fini A est appelé cardinal de A noté $\text{card}(A)$.
par définition $\text{card}(\emptyset) = 0$.

Ex : $\text{card}(\{1, 2, 04\}) = 3$

L'inclusion:

- Définition : Etant donnés 2 ensembles E et F , on dit que E est inclus dans F (ou E est une partie de F , ou F contient E) , on note : $E \subset F$ ou F contient E ($F \supset E$).
Si l'autre élément de F n'est pas dans E

$$\underline{\underline{E}} = \{1, 2\} \subset \{0, 1, 4, 2, 5\}$$

Opérations

- $E \subset F \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in F)$

- On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de parties de E

Ex: $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $P(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

- On a : ① $(A \in \mathcal{P}(E)) \Leftrightarrow A \subseteq E$

- ② $(\{x\} \in \mathcal{P}(E)) \Leftrightarrow (x \in E)$

- On note $E \not\subset F$ / pour $(E \subset F \text{ et } E \neq F)$

- On note $E \neq F$ la négation de $E \subset F$

c.à.d: $\exists x \in E, x \notin F$.

- On a : $(E = F) \Leftrightarrow (E \subset F \text{ et } F \subset E) \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in F \text{ et } \forall x \in F, x \in E)$

- On a donc: $E \neq F \Leftrightarrow (E \not\subset F \text{ ou } F \not\subset E) \Leftrightarrow (\exists x \in E, x \notin F \text{ ou } \exists x \in F, x \notin E)$

- les propriétés suivantes pour tout ensemble E, F, G sont immédiates:

$$\emptyset \subset E, E \subset E, \left(\begin{array}{l} E \subset F \\ \text{et} \\ F \subset G \end{array} \right) \Rightarrow E \subset G. \quad (\text{transitivité de l'inclusion}).$$

Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Définition: Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on

définit les parties suivantes de E :

- $C_E^A = \{x \in E, x \notin A\}$ complémentaire de A dans E

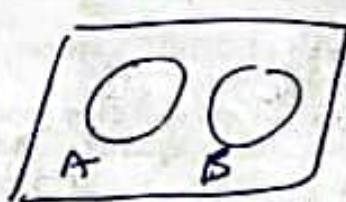
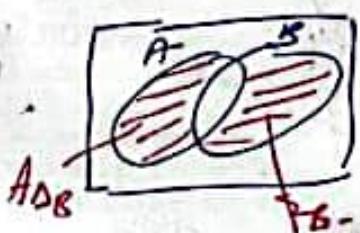
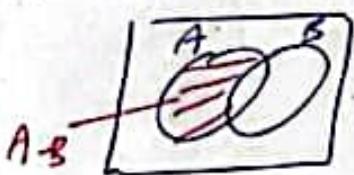
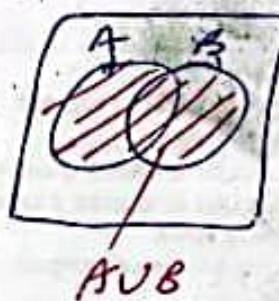
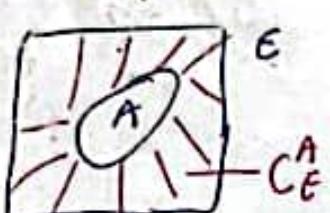
- $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$ Réunion de A et B

- $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$ intersection de A et B

$\therefore A - B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$ différence de A moins B . (3)

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ différence symétrique de A et B .

Deux parties sont dites disjointes si leur intersection est nulle.



A et B sont disjoint

La réunion et l'intersection satisfont les propriétés suivantes :

$$C_E^\phi = E, C_E^E = \emptyset, C_E^{C_E^A} = A.$$

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A \quad (\emptyset \text{ est neutre pour } \cup).$$

$$A \cup A = A, E \cup A = E; A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$$

$$A \cup B = B \cup A \quad (\text{commutativité de } \cup),$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C \quad (\text{associativité de } \cup)$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset \quad (\emptyset \text{ est absorbant pour } \cap)$$

$$A \cap A = A, A \cap E = A$$

$$A \cap B = B \cap A \Leftrightarrow A \subset B,$$

$$A \cap B = B \cap A \quad (\text{commut de } \cap).$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C.$$

$$C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$$

$$C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$$

(4)

Ensemble produit: (produit cartésien de plusieurs ensembles)

On appelle produit de deux ensembles E et F , l'ensemble noté $E \times F$ de tous les couples ordonnés (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

$$E \times F = \{(x, y) / x \in E, y \in F\}$$

Par définition $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \text{ et } y_1 = y_2)$

autre $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \quad (x, y) \neq (y, x) \text{ si } x \neq y$.

La définition se généralise au produit de 3 ensembles E, F, G , pour avoir des triplets (x, y, z) où $x \in E, y \in F, z \in G$

et plus généralement n ensembles $(E_k)_{k=1, \dots, n}$,

on note $\prod_{k=1}^n E_k$ qui est l'ensemble des systèmes ordonnés (x_1, \dots, x_n) , où $x_k \in E_k, k=1, \dots, n$.

Exercice

Les ensembles $E \times E, E \times E \times E, \dots$ sont notés E^2, E^3, \dots

On a: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$$

A.A.

les ensembles de nombres, ou en distinguant plusieurs milieux.

1) A l'est des murs, entiers naturels : 0, 1, 2, 3, ...

2) " " " " " entiers relatifs : -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...

3) "

Q) l'ensemble des nombres rationnels : x sont tels que $x = \frac{p}{q}$ pour p et q entiers