

Série 1: Logique et Ensembles

Logique

Exercice 1.

Soit P une proposition, on note V la proposition " toujours vraie " et F la proposition " toujours fausse ".

Évaluer et simplifier les propositions suivantes :

- 1) $P \vee V$; 2) $P \vee F$; 3) $\overline{P \wedge V}$
4) $P \Rightarrow F$; 5) $P \Rightarrow V$; 6) $F \Rightarrow V$

Exercice 2.

On considère une application f de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

- 1) Pour tout réel x , $f(x) \leq 1$.
2) f est croissante et positive.
3) il existe au moins un réel x tel que quelque soit le réel y , si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

Exercice 3. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses?

- 1) $\exists x, \forall y ; x + y > 0$; 2) $\forall x, \exists y ; x + y > 0$
3) $\forall x, \forall y ; x + y > 0$; 4) $\exists x, \forall y ; y^2 > x$

Exercice 4.

[I] Démontrer les propositions suivantes:

- 1) n^2 pair $\Rightarrow n$ pair. (par la contraposée)
2) $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n^2 + 1} \geq n$ (par l'absurde).

[II] Montrer par récurrence

- 1) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$; 2) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3) $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$; 4) $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}$

Ensembles

Exercice 5.

Décrire les parties de \mathbb{R} qui sont définies par les propositions suivantes:

- 1) 1) $(x > 0 \text{ et } x > 1) \text{ ou } x = 0$; 2) $x > 3 \text{ et } x < 5 \text{ et } x \neq 4$
3) $(x \leq 0 \text{ et } x > 1) \text{ ou } x = 4$; 4) $x \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

Exercice 6.

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E .

1) En utilisant les quantificateurs \forall et \exists , formuler les assertions suivantes et leurs négations:

$$(i) A = \emptyset ; (ii) A \cap B = \emptyset ; (iii) A \subset B$$

2) Déterminer :

$$P(\emptyset), P(\{1, 2\}), P(\{\emptyset, A\}), A \Delta C_E^A \quad \text{?} \quad A \Delta E$$

$$C_E^A = \bar{A}$$

3) (facultatif) Exprimer les ensembles : $A \cup B$ et $A - B$ en utilisant l'intersection et le complémentaire.

4) Montrer que :

$$(i) A \subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A$$

$$(ii) [A \cup B \subset A \cup C \quad \text{et} \quad A \cap B \subset A \cap C] \Rightarrow B \subset C$$