Les Relations

Rappelons qu'intuitivement, une relation sur un ensemble E est la description de liens entre certains éléments de E. Donnons des exemples avant même la définition.

Exemple 1.

1) La relation « est inférieur ou égal à » sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels : pour deux réels x et y, on peut avoir $x \leq y$ ou non.

2) La relation « est inclus dans » sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E : pour deux parties A et B de E, on peut avoir $A \subset B$ ou $B \subset A$ ou aucun des deux.

3) La relation « a le même cardinal que » sur l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Définition 1. Le graphe d'une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est l'ensemble des couples (a, b) de E × E tels que a $\mathcal{R}$ b.

Définition 2. Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur E.

1) La relation $\mathcal{R}$ est réflexive lorsque pour tout élément a de E, a $\mathcal{R}$ a.

2) La relation $\mathcal{R}$ est symétrique lorsque pour tous éléments a et b de E, si a $\mathcal{R}$ b, alors b $\mathcal{R}$ a.

3) La relation $\mathcal{R}$ est transitive lorsque pour tous éléments a, b et c de E, si a $\mathcal{R}$ b et si b $\mathcal{R}$ c, alors a $\mathcal{R}$ c.

C.à.d : La symétrie exige que quand deux éléments sont liés dans un sens, ils le sont aussi dans l'autre.

4) La relation $\mathcal{R}$ est anti-symétrique lorsque pour tous éléments a et b de E, si a $\mathcal{R}$ b et si b $\mathcal{R}$ a, alors a = b.

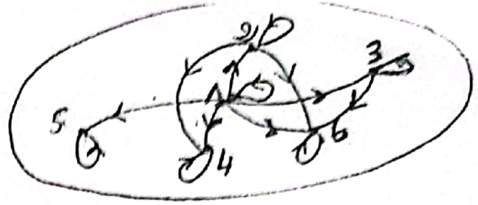
C.à.d : pour tous éléments a et b <u>distincts</u> de E, on ne peut avoir simultanément a $\mathcal{R}$ b et b $\mathcal{R}$ a .

C.à.d : pour tous éléments a et b <u>distincts</u> de E, a $\mathcal{R}$b est faux ou b $\mathcal{R}$ a est faux.

En pratique, les relations qui pourront nous intéresser dans ce cours sont deux ypes très particuliers de relations : les relations d'ordre et les relations l'équivalence.

éfinition 3. Une relation est une relation <u>d'ordre</u> lorsqu'elle est simultanément éflexive, transitive et anti-symétrique.

onsidérons par exemple la relation « divise » sur l'ensemble E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. est une relation d'ordre ;son graphe est visualisé par des flèches sur la figure1.



Exemple 2. La relation « ≤ » sur E = $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre.

Pour tout ensemble A fixé, la relation « ⊂ » sur E = P(A) est une relation d'ordre.

La seconde est sans doute plus compliquée à maîtriser que la première dans la mesure où deux parties de A ne sont pas forcément comparables l'une à l'autre.

Définition 4. Une relation est une relation <u>d'équivalence</u> lorsqu'elle est simultanément réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 3. Ces trois relations sont des relations d'équivalence :

L'égalité sur n'importe quel ensemble E fixé.

La relation « a même parité que » sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

La relation « est confondue avec ou parallèle à » sur l'ensemble des droites d'un plan affine.

Définition 5. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E, et soit a un élément de E. On appelle classe d'équivalence de a modulo $\mathcal{R}$ l'ensemble $\{x \in E / \, a \mathcal{R} \, x\}$

C.à.d : la classe d'équivalence de a est l'ensemble formé des éléments liés à a.

Notation 1. On note $cl_{\mathcal{R}}(a)$ la classe d'équivalence d'un élément a de E pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}$.

On abrège souvent $cl_{\mathcal{R}}(a)$ en cl(a). Voici d'autres notations pour la classe d'équivalence de a : $\dot{a}$ ou $\overline{a}$.

Souvent les relations d'équivalence sont désignées par le signe ~.

Définition 6. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. On appelle ensemble-quotient de E par la relation $\mathcal{R}$ l'ensemble : { cl(a) | a $\mathcal{R}$ E }.

Attention tout de même ! Comme cl(a) est une partie (et non un élément) de E, l'ensemble-quotient est un ensemble de parties de E. Ce n'est pas une partie de E mais une partie de P(E).

Notation 2. L'ensemble-quotient de E par $\mathcal{R}$ est noté E/ $\mathcal{R}$.

On remarquera qu'en général, chaque élément C de l'ensemble quotient E/ $\mathcal{R}$ peut s'écrire comme C = cl(a) pour de nombreux éléments a différents de E : très précisément, C s'écrit C = cl(b) pour un élément b de E tel que a $\mathcal{R}$ b.

Définition 7. Une partition d'un ensemble E est un ensemble Q de parties de E vérifiant les trois propriétés suivantes :
(i) L'ensemble vide n'est pas un élément de Q.
(ii) Deux éléments distincts de Q sont disjoints.
(iii) Tout élément de E appartient à un élément de Q.
Les éléments de Q sont des parties de E et doivent donc être pensés comme des groupes d'éléments de E vérifiant une condition commune. Et $Q \subset P(E)$: une partition de E est une partie de l'ensemble des parties de E !).

Exemple 4. En notant $I \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des entiers impairs et $P \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des entiers pairs, $\{I, P\}$ est une partition de $\mathbb{N}$.

Autre formulation de la définition d'une partition Une partition d'un ensemble E est un ensemble Q de parties de E vérifiant les deux propriétés (i) et (iv) ci-dessous :
(i) L'ensemble vide n'est pas un élément de Q.
(iv) Tout élément de E appartient à un et un seul élément de Q.

Proposition 1. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. L'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ est une partition de E.

Exemple 5. Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :
$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2-1 = y^2-1$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et donner l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathcal{R}$.

i) $\mathcal{R}$ est une relation Réflexive, car d'après la Réflexivité de l'égalité on a :
$\forall x \in \mathbb{R}, x^2-1 = x^2-1$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}x$ ce qui montre que $\mathcal{R}$ est une relation Réflexive.

ii) $\mathcal{R}$ est une relation Symétrique, car d'après la Symétrie de l'égalité on a :
$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2-1 = y^2-1$
$\Leftrightarrow y^2-1 = x^2-1$, car l'égalité est symétrique
$\Leftrightarrow y\mathcal{R}x$

Donc : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$, ce qui montre que $\mathcal{R}$ est une relation Symétrique.

iii) $\mathcal{R}$ est une relation Transitive, car d'après la Transitivité de l'égalité on a :

$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Leftrightarrow (x^2-1 = y^2-1) \wedge (y^2-1 = z^2-1)$
$\Rightarrow (x^2-1 = z^2-1)$ car l'égalité est transitive.
$\Rightarrow (x\mathcal{R}z)$.

Donc $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$.
Ce qui montre que $\mathcal{R}$ est une relation Transitive.
De i), ii) et iii), on déduit que $\mathcal{R}$ est une relation déquivalence.
Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathcal{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, alors :
$\forall y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2-1 = y^2-1$
$\Longleftrightarrow x^2 - y^2 = 0$
$\Longleftrightarrow (x-y)(x+y) = 0$
$\Longleftrightarrow (y = x) \vee (y = -x)$
donc : $cl(x) = \{x, -x\}$, par suite $\mathbb{R}/\mathcal{R} = \{\{x, -x\}/x \in \mathbb{R}\}$.

Exercice :
Soit E un ensemble et A une partie de E.
On définit une relation $\mathcal{R}$ sur P(E) l'ensemble des parties de E par :
$X\mathcal{R}Y \Longleftrightarrow X \cup A = Y \cup A$
a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
b) Décrire la classe d'équivalence de $X \in P(E)$

Corrigé :
a) La relation étudiée est évidemment réflexive, symétrique et transitive.
b) $Y \in cl(X) \Longleftrightarrow Y \cup A = X \cup A$
Soit $Y \in cl(X)$. On a $Y \cup A = X \cup A$
$\forall x \in Y/A$ on a $x \in Y \cup A = X \cup A$ et $x \notin A$ donc $x \in X/A$. Ainsi $Y/A \subset X/A$ et inversement $X/A \subset Y/A$ donc $/A = Y/A$.
Puisque $Y = (Y/A) \cup (Y \cap A)$ on a $Y = (X/A) \cup B$ avec $B \in P(E)$.
Inversement soit $Y = (X/A) \cup B$ avec $B \in P(E)$.
On a $Y \cup A = (X/A) \cup (B \cup A) = (X \cap \bar{A}) \cup A = X \cup A$.
Finalement $cl(X) = \{(X/A) \cup B \ / B \in P(E)\}$.