Université de Sétif 1
Faculté des sciences
Département MI

28 Janvier 2023
15h:15 - 16h:45

Examen d'Analyse 1

Exercice 1 :

I- Questions de cours (02 pts)

1) Rappeler l'énoncé du théorème des accroissements finis.

2) Donner la définition formelle de : * Une suite $(U_n)_{n\in N}$ est bornée.
 * La suite de réels $(U_n)_{n\in N}$ converge vers π. * La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tend vers π en 1.

II- (02 pts)

* Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$: $\quad 0 < \dfrac{mn}{(m+n)^2} \leq \dfrac{1}{4}$.

** En déduire que $A = \left\{ \dfrac{mn}{(m+n)^2} \quad ; n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$ Admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.

III- (03 pts)

On rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la partie entière $[t]$ est l'unique nombre entier qui vérifie

$$[t] \leq t < [t] + 1.$$

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t - 1 < [t] \leq t$.
2. On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x\left[\frac{1}{x}\right]$
 Déduire que pour tout $x > 0$, on a $\quad x > f(x) \geq 0$.
3. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, par quelle valeur ? Justifier.
4. Montrer que pour $x > 1$, on a $f(x) = 1$.
5. Calculer $f(1)$. La fonction f est-elle continue en 1 ?

Exercice 2 : (04.5 pts)

Soit la suite $(u_n)_{n\in N^*}$ définie par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{2} \end{cases}, \forall n \geq 1.$

1/ Montrer que $u_n < 2 \quad ,\forall n \geq 1$.

2/ Montrer que $(u_n)_{n\in N^*}$ est croissante.

3/ En déduire que $(u_n)_{n\in N^*}$ converge, et déterminer sa limite.

Exercice 3 :

I) (06.5 pts)

On considère la fonction : $f(x) = \begin{cases} x^2 \, arctg(\frac{1}{x}) & , si\ x \neq 0 \\ \alpha \quad , & si\ \ x = 0 \end{cases}$.

* Déterminer le réel α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

** On suppose que $\alpha = 0$:

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) Vérifier si la dérivée f' est continue sur $\mathbb{R}$.

II) (02 pts)

Soit deux réels a et b tels que $0 < a < b$. Montrer que :

$$a < \frac{b - a}{\ln b - \ln a} < b$$

Bon courage

Corrigé d'examen d'Analyse 1 : 1^{er} MI 2022/2023

Exercice 1 :

I- Questions de cours

* Théorème des accroissements finis : Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction (0.5pts) continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

* Une suite $(U_n)_{n\in N}$ est bornée $\Leftrightarrow$ $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$. (0.5pts)

* La suite de réels $(U_n)_{n\in N}$ converge vers π $\Leftrightarrow$

$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N$ alors $|u_n - \pi| < \epsilon$. (0.5pts)

* La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tend vers π en 1 $\Leftrightarrow$

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R} : |x-1| < \delta$ alors $|f(x) - \pi| < \epsilon$ (0.5pts)

II-

* m et n étant strictement positifs on a $0 < \dfrac{m\,n}{(m+n)^2}$. (0.25pts)

$$\frac{1}{4} - \frac{m\,n}{(m+n)^2} = \frac{(m+n)^2 - 4m\,n}{(m+n)^2} = \frac{m^2+n^2+2n\,m-4m\,n}{(m+n)^2} = \frac{m^2+n^2-2n\,m}{(m+n)^2} = \frac{(m-n)^2}{(m+n)^2} > 0$$ (0.5pts)

Donc $\dfrac{mn}{(m+n)^2} \leq \dfrac{1}{4}$. (0.25pts)

** $\dfrac{mn}{(m+n)^2}$ est borné donc A admet une borne inférieure a telle que $0 \leq a$ (car a est le plus grand des (0.25pts)

minorants) et une borne supérieure b telle que $b \leq \dfrac{1}{4}$ (car b le le plus petit des majorants). (0.25pts)

Comme pour tout $m > 0$ et $n > 0$, $a \leq \dfrac{mn}{(m+n)^2}$ en prenant $m = 1$ on a :

$a \leq \dfrac{mn}{(m+n)^2} \to 0$ ce qui implique que $0 \leq a$, on a donc $a = 0$. (0.25pts)

Comme pour tout $m > 0$ et $n > 0$, $\dfrac{mn}{(m+n)^2} \leq b$ n prenant $m = n$ on a :

$\dfrac{n^2}{(n+n)^2} \leq b$

puis $\dfrac{n^2}{(n+n)^2} = \dfrac{n^2}{4n^2} = \dfrac{1}{4}$. (0.25pts)

Montre que $\dfrac{1}{4} \leq b$ et finalement $b = \dfrac{1}{4}$.

III-

1.

Par définition on a $t \in \mathbb{R}$, $[t] \leq t < [t]+1$ donc en soustrayant 1 à la seconde inéquation on obtient $t - 1 < [t]$

et la première inéquation nous donne l'encadrement demandé : $t-1 < [t] \leq t$. (0.25pts)

2.

Pour tout $x > 0$, posons $t = \dfrac{1}{x}$ dans l'encadrement ci-dessus, ce qui nous donne :

$\dfrac{1}{x} - 1 < \left[\dfrac{1}{x}\right] \leq \dfrac{1}{x}$.

$1 - x < x\left[\dfrac{1}{x}\right] \leq 1$ en multipliant par x qui est supposé strictement positif.

$x - 1 > x\left[\dfrac{1}{x}\right] \geq -1$ en multipliant par -1.

$x > \quad 1 - x\left[\dfrac{1}{x}\right] = f(x) \quad \geq 0$ en ajoutant 1. (0.5pts)

donc pour tout $x > 0$, on a $x > f(x) \geq 0$.

3.

La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

De la question précédente on déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, en effet si $\epsilon > 0$, on choisit $\alpha = \epsilon$ de façon que si

$0 < x < \alpha$ on a $|f(x)| = f(x)$ car $f(x) \geq 0$ d'où $|f(x)| < x < \alpha = \epsilon$. (0.5pts)

(0.25pts)

Comme f admet une limite finie en 0, elle est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction

$\tilde{f} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par : $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x > 0$ et $\tilde{f}(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0.$ (0.5pts)

4.

Montrer que pour $x > 1$, on a $f(x) = 1$.

Si $x > 1$ alors $0 \leq \frac{1}{x} < 1$, donc $\left[\frac{1}{x}\right] = 0$ par définition de la partie entière, et par (0.25pts) conséquent $f(x) = 1 - x\left[\frac{1}{x}\right] = 1.$ (0.25pts)

5.

Calculer $f(1)$. La fonction f est-elle continue en 1 ?

$f(1) = 1 - 1 \times \left[\frac{1}{1}\right] = 0$ (car $\left[\frac{1}{1}\right] = [1] = 1$). (0.25pts) Or $f(x) = 1$ dès que $x > 1$, donc lim $x \to 1^+$, $f(x) = 1 \neq f(x)$

la fonction f n'est donc pas continue en 1 (sa limite à droite est différente de sa valeur). (0.25pts)

Exercice 2 :

1.

Soient $u_1 = 1,\ u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2}$, $\forall n \geq 1$. Montrer que $u_n < 2$. par récurrence :

* $u_1 = 1 < 2$ (0.25pts)

* On suppose que $u_n < 2$ et montrons que $u_{n+1} < 2$? (0.25pts)

$u_n < 2$ donc $\frac{u_n}{2} < 1 \Rightarrow \frac{u_n}{2} + 1 < 2$ alors $u_{n+1} < 2.$ (01 pts)

2.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{u_n}{2} - u_n = 1 + \frac{u_n - 2u_n}{2} = 1 - \frac{u_n}{2} > 0$ (01 pts) d'où la suite (u_n) est croissante.

3.

(0.5 pts)

(u_n) croissante et majorée par 2 $\Rightarrow (u_n)$ convergente vers une limite l (0.5 pts)

$l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{u_n}{2}\right) = 1 + \frac{l}{2}$ d'où $l = 2.$ (0.5pts)

(0.5pts)

Exercice 3 :

I)

* On a : $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f(x) = x^2\, arctg(\frac{1}{x})$.

f est continue sur $\mathbb{R} - \{0\}$ comme composée des deux fonctions (0.5pts) $x \mapsto arctg(x)$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui sont continues sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

le seul problème est en $x = 0$.

(0.5pts)

Pour que f soit continue en $x = 0$ il faut que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = \alpha$, or $\lim\limits_{x\to 0} x^2\, arctg(\frac{1}{x}) = 0.$ (0.5pts)

car $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left|x^2\, arctg(\frac{1}{x})\right| \leq \frac{\pi}{2}x^2$ *tel que* $-\frac{\pi}{2} \leq arctg(t) \leq \frac{\pi}{2}$ (0.5pts) $,\forall t \in \mathbb{R}.$

et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\pi}{2}x^2 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x^2\, arctg(\frac{1}{x}) = 0.$

alors f est continue en 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0.$ (0.5pts)

donc si $\alpha = 0$ alors f sera continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. (0.25pts)

** supposons que $\alpha = 0$.

1) f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

(0.25pts)

pour $x = 0$, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} x\, arctg(\frac{1}{x}) = 0.$ (0.5pts)

$|x.arctg(\frac{1}{x})| \leq \frac{\pi}{2}x \overset{x\to 0}{\to} 0$ donc f dérivable en 0 et $f'(0) = 0.$ (0.25pts)

finalement f dérivable sur $\mathbb{R}$ (0.25pts)

2) $\forall x \in \mathbb{R}-\{0\} : f^{'}(x) = 2x.arctg(\frac{1}{x}) + x^2.\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

$= 2x.arctg(\frac{1}{x}) - \left(\frac{x^2}{x^2}\right).\frac{x^2}{1+x^2}$ (01 pts)

$= 2x.arctg(\frac{1}{x}) - \frac{x^2}{1+x^2}.$

<u>$f^{'}$ continue en 0 ?</u> $f^{'}(0) = 0$ et $f^{'}(x) = 2x.arctg(\frac{1}{x}) - \frac{x^2}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$

$\lim_{x\to 0} f^{'}(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x.arctg(\frac{1}{x}) - \frac{x^2}{1+x^2}\right) = (2\times 0 - 0) = 0 = f^{'}(0) = 0.$ (0.5pts)

$\Rightarrow f^{'}$ est continue en 0. (0.25pts)

<u>$f^{'}$ continue sur $\mathbb{R}-\{0\}$?</u>

$\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$, $x \mapsto 2x$, $x \mapsto arctg(x)$

sont des fonctions continues.

D'où $f^{'}(x) = 2x.arctg(\frac{1}{x}) - \frac{x^2}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}-\{0\}$ (0.25pts) comme somme , produit et composée des ces fonctions.

Finalement $f^{'}$ continue sur $\mathbb{R}$. (0.25pts)

II)

La fonction $\ln(x)$ étant (0.25pts) continue sur $[a,b]$ et (0.25pts) dérivable sur $]a,b[$, d'après le (0.25pts) théorème des accroissements finis,

il existe $c \in]a,b[$ (0.25pts) tel que $f^{'}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \ln^{'}(c) = \frac{1}{c}$. (0.25pts) On obtient $c = \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$ (0.25pts)

et comme $c \in]a,b[$ on en déduit que $a < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < b$. (0.5pts)