Notions de logique

Introduction :

. Le but ici est d'exposer un langage (vocabulaire) rigoureuse et des propriétés utiliseables dans les domaines mathématiques, c'est la logique

. Les mathématiques tentent de distinguer le vrai du faux et pour être sûre, il faut suivre une démarche logique qui mène à la conclusion. Cette démarche doit être convaincante pour nous et pour les autres, c'est ce qu'on appelle un raisonnement.

Règles de logique

① Assertion ou proposition : est un enoncé (une expression) auquel, on peut attribuer la valeur vrai (V) ou faux (F) mais jamais les deux à la fois

(c'est le principe du tiers-exclu)

Exps ; "Alger est la capital de l'Algérie" (V)

q: "24 est multiple de 3" est (V)

R: "19 est pair" est (F)

② **prédicat** : un prédicat est un énoncé mathématique contenant des lettres appelées variables tel que quand on remplace chacune des variables, on obtient une proposition.

Exps 1) $p(n)$: "n est un multiple de 2"

$p(2)$ est une proposition vraie

$p(3)$ " " " fausse.

$p(n)$ est un prédicat qui devient une proposition à chaque fois qu'on donne une valeur à n.

2) $p(x, A)$: $x \in A$ est un prédicat à 2 vari

$P(1, \mathbb{R})$ est une prop. vraie

$P(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$ est une prop. fausse.

3) Négation :

Soit p une proposition la négation de p est la proposition notée « non p » ou « $\bar{p}$ » ou bien « $\neg p$ » et qui désigne le contraire de p.

d'où le résultat : $\overline{(\bar{p})}$ est p.

Exps : $\overline{(-2 \in \mathbb{R})}$ est $(-2 \notin \mathbb{R})$

$\overline{(x = y)}$ est $(x = y)$

4) Table de vérité :

On représente les deux possibilités de vérité d'une proposition p, par un tableau dit table de vérité, en notant par :

V ou 1 pour vrai et par F ou 0 pour faux

p
1
0

ou

p
V
F

donc :

p	$\bar{p}$
1	0
0	1

⑤ Les connecteurs logiques : (opérateurs logiques)

si p est une prop. et q une autre prop., nous allons définir de nouvelles prop., construites à partir de p et q en utilisant des liens, appelés connecteurs logiques et qui sont :

5.1 La Conjonction : (et , $\wedge$)

La conjonction des deux prop. p et q est la prop. « p et q » notée aussi par « $p \wedge q$ » et qui est vraie que si les deux sont vrais en même temps, représenté par :

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exps : « 3 est impair et 3 divise 8 » est faux

« 2<3 et 20 n'est pas un nombre premier » est vrai.

5.2 La disjonction : « ou , $\vee$ »

La disjonction de deux prop. p et q est la prop. « p ou q » notée aussi par « $p \vee q$ » qui n'est fausse que lorsque les 2 sont fausses en même temps, la table de vérité associée est :

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exps : « $3^2 = 10$ ou $3 > 4$ » est fausse

« $1+1=2$ ou $3>4$ » est vraie

Théorème « loi de Morgan »

Soient p et q deux prop. on a :

① $\overline{(p \wedge q)}$ et $\bar{p} \vee \bar{q}$

② $\overline{(p \vee q)}$ et $\bar{p} \wedge \bar{q}$

5.3 L'implication : ($\Rightarrow$)

Par définition mathématique, la prop. « $\bar{p}$ ou q » est notée « $p \Rightarrow q$ » et se lit en français : p implique q

« $p \Rightarrow q$ » st donc fausse que si q est fausse et p est vraie , c'est à dire :
$(V \Rightarrow F)$ st une prop. fausse

p	q	$\bar{p}$	$p \Rightarrow q$ ($\bar{p}$ ou q
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Exps : « $3^2 = 10 \Rightarrow 3$ impair » (V)

« $2^2 = 4 \Rightarrow 3$ impair » (V)

« $1+1=2 \Rightarrow$ le ciel est vert » (F)

. Appelations et définitions pour $p \Rightarrow q$

- Dans « $p \Rightarrow q$ », p s'appelle l'hypothèse et q la conclusion
- $p \Rightarrow q$ se lit : p entraine q

si p alors q
pour que p il faut que q
il suffit que p pour que q.

- donc on a dans $p \Rightarrow q$:

p est une condition suffisante (c.s) pour q
et q est une condition nécessaire (c.N) pour p

- la réciproque de "$p \Rightarrow q$" est la proposition "$q \Rightarrow p$"

- $\overline{(p \Rightarrow q)}$ ≡ "$p \wedge \bar{q}$" puisque :

$\overline{(p \Rightarrow q)}$ ≡ $\overline{(\bar{p} \vee q)}$ qui ≡ $(\bar{\bar{p}}) \wedge (\bar{q})$ qui ≡ $(p \wedge \bar{q})$

exp : $\overline{(x=3 \Rightarrow 5 \in \mathbb{R})}$ ≡ $(x=3$ et $5 \notin \mathbb{R})$

5.4 L'équivalence :

La prop. $(p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p)$ est notée $(p \Leftrightarrow q)$
et se lit : p est équivalente à q
ou ~~bien~~ : p si et seulement q
ou bien : p et q sont équivalents.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

De là, on conclut que deux prop. sont équivalentes si elles ont la même valeur de vérité, c'est-à-dire, si elles sont vraies en m̂ temps ou bien fausses en m̂ temps.

Exp $(9>4) \Leftrightarrow (\sqrt{9} > \sqrt{2})$

- <u>Dans « $p \Leftrightarrow q$ »</u>, p est une C.N.S pour q et q est une CNS pour p

On dit que p est une C.N.S pour q.

Exo : mettez « $\Rightarrow$ » ou bien « $\Leftrightarrow$ » dans :

1) « il y a des nuages » ...... « il pleut »

2) Soit $x \in \mathbb{R}$; $x = 1$ .... $x^2 = 1$

5.5) <u>Propriétés</u> :

- $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ (et $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$)
- $[p \wedge (q \vee R)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge R)]$ (et $[p \vee (q \wedge R)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee R)]$)
- $[p \wedge (q \wedge R)] \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge R)$ (et $[p \vee (q \vee R)] \Leftrightarrow ((p \vee q) \vee R)$)
- $(p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow R) \Rightarrow p \Rightarrow R$ (et $(p \Leftrightarrow q$ et $q \Leftrightarrow R) \Rightarrow p \Leftrightarrow R$)

- $((p \vee q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow ([p \Rightarrow R]$ et $[q \Rightarrow R])$
- $(p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow R)$

$\Updownarrow$

$p \Rightarrow q \Rightarrow R \Rightarrow p$

6) Les Quantificateurs

6.1) Le quantificateur universel "pour tout" ou bien "quel que soit" est noté "$\forall$".

. La proposition : "$\forall x \in E ; p(x)$" est vraie lorsque, pour tout $x \in E$, la prop. $p(x)$ est vraie

Exps : 1) "$\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 \geq 0$" est vraie

2) "$\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 > 0$" est fausse puisque $p(0)$: $0^2 > 0$ est fausse

6.2) Le quantificateur existentiel :

le quantificateur "il existe au moins un" est noté "$\exists$".

• La prop : "$\exists x \in E ; p(x)$" est vraie lorsqu'il existe au moins $x \in E$ telle que la proposition $p(x)$ soit vraie.

. Exp : "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0$" est vraie puisque : $1^2 - 1 = 0$

« $\exists x \in \mathbb{N}$; $x < 0$ » est fausse puisque tous les nombres naturels sont positifs.
ou nul

6.3 Le quantificateur $\exists!$:

le quantificateur « il existe un unique » est noté « $\exists!$ ».

. La prop : « $\exists! x \in E$, $P(x)$ » est vraie lorsqu'il existe un unique $x \in E$ telle que $P(x)$ soit vraie. $\exists! x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 1 = 0$

• Toute prop contenant des quantificateurs est dite phrase quantifiée

6.4 Négation des phrases quantifiées

« $\overline{\forall x \in E, P(x)}$ » est « $\exists x \in E$; $\overline{P(x)}$ »

« $\overline{\exists x \in E, P(x)}$ » est « $\forall x \in E$; $\overline{P(x)}$ »

Attention : L'ordre des quantificateurs est important si les quantificateurs sont différents

Exp : « $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x + y = 0$ » (est V), ici y recherché dépend de x : $y = -x$

« $\exists y \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + y = 0$ » (est F) ici y ne dépend pas de x.

7 Méthodes (types) de raisonnement

On peut définir un raisonnement comme étant un ensemble de propositions organisées pour aboutir à une conclusion

7.1 Raisonnement déductif (direct)

est utilisé pour montrer une implication.

$p \Rightarrow q$ est vraie.

- On suppose que p est vrai et on montre que q est vraie

- Il est basé sur le fait que

Si P est vraie et que si $P \Rightarrow R$ est vraie alors R est vraie

et sur la transitivité de l'implication

Si $R_1 \Rightarrow R_2$ et $R_2 \Rightarrow R_3$ alors $R_1 \Rightarrow R_3$

. C'est le raisonnement le plus utilisé et qui consiste à déduire un résultat à partir d'axiomes ou de prop. déjà demontrées, ou supposées vrais et par une suite d'implications de la forme

$p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow q$.

exp : $n \in \mathbb{N}$; on montre que

. n impair $\Rightarrow n^2$ impair

exp : x réel, $x^2 \leq x \Rightarrow |x| \leq x$

7.2 Raisonnement par la contraposé

. est utilisé pour montrer une implication.

- il se base sur l'équivalence des implications

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$

($\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ est appelée contraposée de l'implication $p \Rightarrow q$)

. donc au lieu de montrer $p \Rightarrow q$, on montre $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$, qui doit être plus

Donc pour montrer que $(p \Rightarrow q)$ est vraie, il est parfois plus facile de montrer que sa réciproque $(\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ est vraie.

exp : montrer que « $x^2+y^2=0 \Rightarrow x=y=0$ ».

il suffit de montrer que :

$$(x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0) \Rightarrow (x^2+y^2 \neq 0).$$

exp : n^2 pair $\Rightarrow$ n pair

7.3 Raisonnement par l'absurde

- il consiste pour demontrer que p est vraie, à supposer qu'elle est fausse, c.à.d que $\bar{p}$ est vraie, alors par un raisonnement logique, on aboutit à une contradiction avec l'hypothèse ou à une absurdité. Dans ce cas $\bar{p}$ est fausse d'où p est vraie
- pour montrer que $p \Rightarrow q$ est vraie par l'absurde on suppose que p est vraie et q est fausse ($p \Rightarrow q$ est fausse) on arrive à une absurdité d'où $p \Rightarrow q$ est vraie.

Exo ① montrer que 0 n'est pas racine de $A(x) = x^4 + 12x - 1$.

② $\sqrt{2}$ est irrationnel.

③ $a, b > 0$ rationnels $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$

7.4 Le raisonnement par récurrence

Celui ci permet de démontrer qu'une prop, $p(n)$ dépendant de l'entier naturel n, soit vraie ~~à partir de n~~. Il est basé sur le principe suivant :

① On vérifie que $p(0)$ est vraie.

② On suppose que $p(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n.

③ On montre que $p(n+1)$ est vraie.

④ On conclut que $p(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$

<u>Remarque</u> : dans ① 0 peut être remplacé par n_0 alors ④ devient $p(n)$ est vraie $\forall n \geq$

Exo : $\forall n \in \mathbb{N}$: $2^n > n$

Absurde à mettre ds page 14 →

Le raisonnement par l'absurde pour montrer « $p \Rightarrow q$ » repose sur le principe ~~suivant~~ suivant : On suppose à la fois p est vraie et Q est fausse et on cherche ~~la~~ une contradiction. Ainsi si p est vraie alors Q doit être vraie et donc « $p \Rightarrow Q$ » est vraie.

Ex : Soient $a, b > 0$, montrer que

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b.$$

On suppose $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$, cela nous conduit à : $(a+b)(a-b) = -(a-b)$

Comme $a \neq b$ alors, en divisant par $a-b$) on obtient $a+b=-1$. Comme la somme de deux nombres positifs ne peut être négatif. Nous obtenons ~~a+b~~ une contradiction. Conclusion.

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b.$$