

Notions sur les ensembles

- Un ensemble est une collection d'objets rassemblés d'après une propriété commune.

Ex : l'ensemble des points d'un plan
l'ensemble des nombres réels ...

!!! Δ une collection n'est pas toujours un ensemble.

- Un ensemble est constitué d'éléments; l'élément x appartient à E se note : $x \in E$; la négation s'écrit $x \notin E$

Ex 1 On note par \emptyset l'ensemble vide, qui ne contient aucun élément

- Un ensemble ayant un seul élément est appelé singleton. Ex : $\{x\}$.

- le nombre de éléments d'un ensemble fini A est appelé cardinal de A noté : $\text{card}(A)$.
par définition $\text{card}(\emptyset) = 0$.

Ex : $\text{card}(\{1, 2, 0\}) = 3$

L'inclusion

- Définition : Etant données 2 ensembles E et F , on dit que E est inclus dans F (ou E est une partie de F , ou F contient E), on note : $E \subset F$ ou F contient E ($F \supset E$).
Si $E \subset F$ et $F \subset E$ on dit que $E = F$.

Ex $\{1, 2\} \subset \{0, 1, 4, 2, 5\}$.

• $E \subset F \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in F)$

• On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E

ex: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

• On a : ① $(A \in \mathcal{P}(E)) \Leftrightarrow A \subset E$

② $(\{x\} \in \mathcal{P}(E)) \Leftrightarrow (x \in E)$

• On note $E \subsetneq F$ pour $(E \subset F \wedge E \neq F)$

• On note $E \not\subset F$ la négation de $E \subset F$

c.à.d: $\exists x \in E, x \notin F$.

• On a : $(E = F) \Leftrightarrow (E \subset F \text{ et } F \subset E) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \forall x, x \in E \Leftrightarrow x \in F \\ \forall x \in E, x \in F \text{ et } \forall x \in F, x \in E \end{array} \right)$

• On a donc : $E \neq F \Leftrightarrow (E \not\subset F \text{ ou } F \not\subset E) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \exists x \in E, x \notin F \\ \text{ou} \\ \exists x \in F, x \notin E \end{array} \right)$

• les propriétés suivantes pour tout ensemble E, F, G sont

immédiates:

$\emptyset \subset E$, $E \subset E$, $\left(\begin{array}{l} E \subset F \\ \text{et} \\ F \subset G \end{array} \right) \Rightarrow E \subset G$. (transitivité de l'inclusion).

Opération dans $\mathcal{P}(E)$

Définition: Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on définit les parties suivantes de E :

• $C_E^A = \{x \in E, x \notin A\}$ complémentaire de A dans E

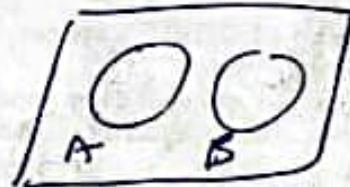
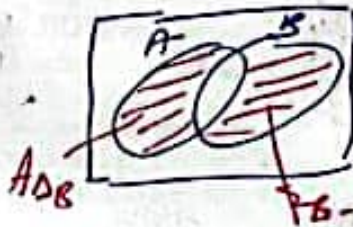
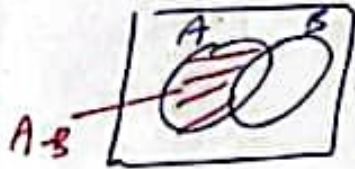
• $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$ Réunion de A et B [2, 5] \cup [1, 2] = [1, 5]

• $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$ Intersection de A et B [2, 5] \cap [1, 2] = [2, 2]

• $A - B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$ différence de A moins B. (3)

• $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ différence symétrique de A et B.

• Deux parties sont dites disjointes si leur intersection est vide.



A et B sont disjointes

• La réunion et l'intersection satisfont les propriétés suivantes :

$$C_E^\emptyset = E, \quad C_E^E = \emptyset, \quad C_E^{C_E^A} = A.$$

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A \quad (\emptyset \text{ est neutre pour } \cup)$$

$$A \cup A = A, \quad E \cup A = E, \quad A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$$

$$A \cup B = B \cup A \quad (\text{commutativité de } \cup),$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C \quad (\text{associativité de } \cup)$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset \quad (\emptyset \text{ est absorbant pour } \cap)$$

$$A \cap A = A, \quad A \cap E = A$$

$$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B.$$

$$A \cap B = B \cap A \quad (\text{commutativité de } \cap).$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C.$$

$$C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$$

$$C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$$

