Les polynomes

Définition : On appelle polynôme à une indéterminée X sur le corps K ($K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) toute expression de la forme

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$$

où les $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont des élements de K appelés coefficients du polynôme P :

- L'ensemble des polynômes à une indéterminée sur le corps K est noté $\mathbb{K}[X]$.

- Un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ peut être noté par $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$ avec $a_k = 0$, $\forall k > n$

- Un polynome nul dans $\mathbb{K}[X]$ est le polynome $P = \sum a_k X^k$, $a_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Scanné avec CamScanner

Lois de Composition dans $\mathbb{K}[X]$

Soient $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$

et soit α de $\mathbb{K}$ (un scalaire).

- Addition interne : le polynome $P+Q$ est défini par : $P+Q = \sum_{k\in\mathbb{N}} (a_k + b_k) X^k$
- Multiplication externe par un scalaire :

le polynôme αP est défini par :

$\alpha P = \sum_{k\in\mathbb{N}} (\alpha a_k) X^k$.

- Multiplication interne : Le polynome

$P \cdot Q$ est défini par :

$P \cdot Q = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) X^k$

Remarque : $\forall i,j \in \mathbb{N}$, $X^i \cdot X^j = X^{i+j}$.

Le produit de deux polynômes s'obtient donc de manière naturelle en utilisant cette propriété et les règles usuelles de calcul.

Dégré et Valuation :

Définition : Soit $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$ un poly non nul l'ensemble $\{k \in \mathbb{N},\ a_k \neq 0\}$ est donc fini et non vide. Il admet donc un plus grand élement n et un plus petit élement μ

. μ est la valuation de P, notée $\mu = v(P)$

. n est le degré de P, noté $n = d(P)$

Exemple : 1) $P = 2 - 4X^2 + 5X^3$, $d(P) = 3$, $V(P) = 0$

2) $P = 4X - X^5$, $v(P) = 1$ et $d(P) = 5$

3) $P = 1$, $d(P) = v(P) = 0$

. Ainsi par définition :

$n = d(P) \iff (a_n \neq 0 \text{ et } \forall k > n,\ a_k = 0)$

$\mu = v(P) \iff (a_\mu \neq 0 \text{ et } \forall k < n,\ a_k = 0)$

Propriétés : Soient P et Q deux polys $\neq 0$

. $d(P \cdot Q) = d(P) + d(Q)$ et $v(P \cdot Q) = v(P) + v(Q)$

. Si $P + Q \neq 0$ alors $\begin{cases} d(P+Q) \leq \sup(d(P), d(Q)) \\ v(P+Q) \geq \inf(v(P), v(Q)) \end{cases}$

et Si en plus : $d(P) \neq d(Q)$ alors $d(P+Q) = \sup(d(P), d(Q))$

- Si en plus :

$d(p) \neq d(q)$ alors $d(p+q) = \sup(d(p), d(q))$

$v(p) \neq v(q)$ alors $v(p+q) = \inf(v(p), v(q))$

- pour le polynome nul ; par convention :

$d(0) = -\infty$ et $v(0) = +\infty$

Vocabulaire : Soit p un poly $\neq 0$, $d(p) = n$

- Le terme $a_n x^n$ s'appelle monome de plus haut degré de p, ou bien monome (ou terme) dominant.
- Le coefficient a_n s'appelle, coefficient dominant de p.
- Si $a_n = 1$, On dit que p est un polynome Unitaire ou normalisé.

1) Division Euclidienne :

Soient A et B $\in K[X]$, tel que $d°(A) \geq d(B)$. Il existe un couple unique $(Q, R) \in (K[X])^2$ tel que :

$A = BQ + R$ avec $d(R) < d(B)$

Q s'appelle le quotient et R s'appelle le reste de la division Euclidienne de A par B

Si $R = 0$, On dit que B divise A $(B \mid A)$

2) Division suivant les puissances croissantes

Soit $n \in \mathbb{N}$, et soient A et B $\in K[X]$ tel que $\mathrm{val}(B) = 0$ (c-à-d : $B(0) \neq 0$)

Il existe un couple unique (Q, R) de $(K[X])^2$ tel que : $\begin{cases} A = B \cdot Q + X^{n+1} R \\ d(Q) \leq n. \end{cases}$

Q s'appelle le quotient et R s'appelle le reste de la division de A par B suivant les puissances croissante à l'ordre n

Propriétés

① $\forall p \in K[X]$, $\forall a \in K$, $\exists (Q, R) \in (K[X])^2$

tel que : $P = (X-a)Q + R$ avec $d(R) < 1$

② a est dite racine du polynome P

ssi $(X-a) / P$

③ Conséquence de ① et ② :

$\forall p \in K[X], \forall a \in K, \left[(X-a) \backslash P \Leftrightarrow P(a) = 0 \right]$

Ordre de multiplicité d'1 racine

Df Soit $m \in \mathbb{N}$, On dit que a est une racine d'ordre m du polynome P

ssi il existe $Q \in K[X]$ tel que

$P = (X-a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$

- m s'appelle l'ordre de multiplicité de la racine a de P.
- On a alors : $(X-a)^m / P$ et $(X-a)^{m+1} \not/ P$

$\Leftrightarrow P^{(k)}(a) = 0, \forall k < m$ et $P^{(m)}(a) = 0$

- Une racine d'ordre 0 de P, n'est pas racine de P

• Remarque page (13)

Factorisation d'1 polynome :

théorème : Soit $p \in K[X]$ et $a_1, a_2, \dots, a_k$ k racines déffèrentes de p, d'ordre de multiplicité $m_1, m_2, \dots, m_k$ (respectivement) alors : p est divisible par :

$$(X-a_1)^{m_1}(X-a_2)^{m_2} \cdots (X-a_k)^{m_k} = \prod_{i=1}^{k}(X-a_i)^{m_i}$$

Conséquence : $m_1 + \dots + m_k = \sum_{i}^{k} m_i \leq d(p)$

c.à.d : L'ensemble de racines d'1 poly p non nul est fini et la somme de leur degré de multiplicité est $\leq$ à $d(p)$

Dérivation

Déf : Soit $p = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K[X]$, le polynome $p' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ s'appelle polynome dérivé de p.

- En notant $p^{(2)} = (p')'$ et $p^{(3)} = (p^{(2)})'$ ..... $p^{(k)} = (p^{(k-1)})'$ s'appelle dérivé $k$ième de p.

• remarque : $p^{(0)} = p$

Propriétés : Soient $P, Q \in K[X]$ et $a \in K$

On a alors :

- $(P+Q)' = P' + Q'$
- $(aP)' = aP'$
- $(P \cdot Q)' = P \cdot Q' + P'Q$
- si $k \leq n$: $[(X-a)^n]^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}(X-a)^{n-k}$

  si $k > n$: $[(X-a)^n]^{(k)} = 0$.

Formule de Taylor :

Soit $P \in K[X]$ non nul, n son degré et $a \in K$.

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(a)(X-a)^k.$$

Conséquence : ~~Une racine a dep~~ ~~d'ordre~~ Un scalaire a est racine d'ordre m ($m \in \mathbb{N}^*$) du poly P ssi.

$P^{(m)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$

$P^{(k)}(a) = 0$.

PGCD (Algorithme d'Euclide)

$\forall (P,Q) \in (K[X]-\{0\})^2$,

PGCD(P,Q) est le dernier reste non nul normalisé dans la suite des divisions Euclidiennes (D.E) successives :

Exemple :

$P = X^5+X+1$ et $Q = X^4-2X^3-X+2$ ds $\mathbb{R}[X]$

	$X+2$	$\frac{1}{4}X-\frac{9}{16}$	$4X-3$
$P=X^5+X+1$	$Q=X^4-2X^3-X+2$	$R_1=4X^3+X^2+X-3$	X^2+X+1 $\nearrow R_2$
$R_1=4X^3+X^2+X-3$	$R_2=\frac{5}{16}X^2+\frac{5}{16}X+\frac{5}{16}$	0	

$P = Q(X+2)+R_1$

$Q = \underbrace{(4X^3+X^2+X-3)}_{R_1}\left(\frac{1}{4}X-\frac{9}{16}\right)+R_2$

$R_1 = \underbrace{(X^2+X+1)}_{\text{à la place de } R_2}(4X-3)+0$

Dans une phase de calcul, on a remplacé R_2 par X^2+X+1

PGCD(P,Q) = Normalisé de R_2 $= (X^2+X+1)$

pgcd$(0,0)=0$ et pgcd$(A,0) = \frac{1}{\text{coef. domin}} \cdot A$

Définition : p, q sont dits premiers entre eux ssi $pgcd(p,q) = 1$

proposition : $\forall A, B, C \in K[X] - \{0\}$, on a

$$\begin{cases} pgcd(A,B) = 1 \\ \text{et } C \mid B \end{cases} \Rightarrow pgcd(A,C) = 1$$

c.à.d si A est 1ier avec B alors il sera 1ier avec tout diviseur de B.

Théorème de Bezout : $A, B \neq 0$

$$pgcd(A,B) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists U, V \in K[X] / \\ AU + BV = 1 \end{cases}$$

De même pour $pgcd(A,B) = D$

Théorème de Gauss :

$\forall A, B \in K[X] - \{0\}$:

$$\begin{cases} A \mid B.C \\ pgcd(A,B) = 1 \end{cases} \Rightarrow A \mid C$$

Corollaire

$$\begin{pmatrix} pgcd(A_1, A_2) = 1 \\ A_1 \mid C \text{ et } A_2 \mid C \end{pmatrix} \Rightarrow A_1 A_2 \mid C$$

Polynômes irréductibles :

Définition : Un polynôme p de $K[x]$ est dit irréductible (ou premier) ssi $d(p) \geq 1$ et p n'admet aucun diviseur dans $K[x]$ à part les scalaires $\alpha \in K-\{0\}$ et les $\beta P \in K[x]$ $(\beta \in K-\{0\})$

Théorèmes :

① Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[x]$ sont les polynômes de degré 1

② Les polynômes irréductible de $\mathbb{R}[x]$ sont les polynômes de :
degré 1 et degré 2 $(\Delta < 0)$.

Remarque : ⚠ Irréductible ne signifie pas "sans racines" exemple :

① $p = x-1$ est irréductible ($d°1$) et pourtant $+1$ est sa racine

② $p = x^4+x^2+1$ n'a pas de racines réelles mais se décompose en $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

Théorème de décomposition :

- Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ (resp de $\mathbb{R}[X]$) se décompose en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ (resp. $\mathbb{R}[X]$)

En particulier : Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n, (non nul) se décompose en produit de n polys irréductibles (de d° 1)

Autrement dit :

Théorème de d'Alembert

- Tout poly de $\mathbb{C}[X]$ de degré n (non nul) admet n racines complexes.

Relation entre racines et coefficients d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$

Proposition : Soit $P \in K[X]$,

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k),$$

où les α_k sont des racines dans $\mathbb{C}$ pas nécessairement toutes distinctes. On a :

On a : $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \alpha_i\alpha_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\sum_{1\leq i<j<k\leq n} \alpha_i\alpha_j\alpha_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{1\leq i_1<i_2<\dots<i_k\leq n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

la mettre page 06

Remarque : On définit la parité d'1 polynôme $P\in K[X]$ comme suit :

P est pair ssi $\forall x\in K$, $P(-x)=P(x)$

P est impair ssi $\forall x\in K$; $P(-x)=-P(x)$.

- Si P est pair ou impair et α est racine d'ordre m de P alors $-\alpha$ est aussi racine d'ordre m de P $\Rightarrow P=(X-\alpha)^m(X+\alpha)^m Q$.

Exemples :

① D.E : $X^4+5X^3+12X^2+19X-7$ par X^2+3X-1

② D.sp.c à l'ordre 3 de

$2X^5-4X^4+X^2-2X+1$ par X^2+1

③ l'ordre d's racine : montrer que 1 est une racine ~~d'ordre~~ triple de

$P(X) = X^5-2X^4+X^3-X^2+2X-1$

④ Factorisation de

dans $\mathbb{R}[X]$ de : $P(X)=(X-1)^3(X^2+X+1)$ puis Dans $\mathbb{C}[X]$

. dans $\mathbb{R}[X]$ de : $P(X) = X^4-4$, X^2+X+1

X^3-4X^2+3X ,

③ X^3-X^2-X+1 , l'ordre de 1 ?

⑤ PGCD (A, B) Lorsque :

1) $A = X^5-2X^4+X^2-X-2$, $B = X^3-X^2-X-2$

2) $A = X^5+5X^4+9X^3+7X^2+5X+3$

$B = X^4+2X^3+2X^2+X+1$

- Si $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ est une racine d'ordre m alors $\bar{\alpha}$ (conjugué de α) est aussi racine d'ordre m de P $\Rightarrow P = (X-\alpha)^m (X-\bar{\alpha})^m Q$.