

Série 1: Logique et Ensembles

Logique

Exercice 1.

Soit P une proposition, on note V la proposition "toujours vraie" et F la proposition "toujours fausse".

Évaluer et simplifier les propositions suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1) & P \vee V & ; \quad 2) \quad P \vee F & ; \quad 3) \quad \overline{P \wedge V} \\ & & & \\ 4) & P \Rightarrow F & ; \quad 5) \quad P \Rightarrow V & ; \quad 6) \quad F \Rightarrow V \end{array}$$

Exercice 2.

On considère une application f de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

- 1) Pour tout réel x , $f(x) \leq 1$.
- 2) f est croissante et positive.
- 3) il existe au moins un réel x tel que quelque soit le réel y , si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

Exercice 3. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses?

$$\begin{array}{ll} 1) \quad \exists x, \forall y ; x + y > 0 & ; \quad 2) \quad \forall x, \exists y ; x + y > 0 \\ 3) \quad \forall x, \forall y ; x + y > 0 & ; \quad 4) \quad \exists x, \forall y ; y^2 > x \end{array}$$

Exercice 4.

[I] Démontrer les propositions suivantes:

- 1) n^2 pair $\Rightarrow n$ pair. (par la contraposée)
- 2) $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n^2 + 1} \geq n$ (par l'absurde).

[II] Montrer par récurrence

$$\begin{array}{ll} 1) \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} & ; \quad 2) \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ 3) \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 & ; \quad 4) \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{n}{2n+1} \end{array}$$

Ensembles

Exercice 5.

Décrire les parties de \mathbb{R} qui sont définies par les propositions suivantes:

- 1) 1) $(x > 0 \text{ et } x > 1)$ ou $x = 0$; 2) $x > 3 \text{ et } x < 5 \text{ et } x \neq 4$
- 3) $(x \leq 0 \text{ et } x > 1)$ ou $x = 4$; 4) $x \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

Exercice 6.

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E .

- 1) En utilisant les quantificateurs \forall et \exists , formuler les assertions suivantes et leurs négations:

$$(i) \quad A = \emptyset \quad ; \quad (ii) \quad A \cap B = \emptyset \quad ; \quad (iii) \quad A \subset B$$

- 2) Déterminer :

$$P(\emptyset), \quad P(\{1, 2\}), \quad P(\{\emptyset, A\}), \quad A \Delta C_E^A \quad \cancel{P} \quad A \Delta E$$

$$C_E^A = \emptyset$$

- 3) (facultatif) Exprimer les ensembles : $A \cup B$ et $A + B$ en utilisant l'intersection et le complémentaire.

- 4) Montrer que :

$$(i) \quad A \subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A$$

$$(ii) \quad [A \cup B \subset A \cup C \quad \text{et} \quad A \cap B \subset A \cap C] \Rightarrow B \subset C$$