Les Applications

Définitions : Soient E et F deux ensembles non vides.

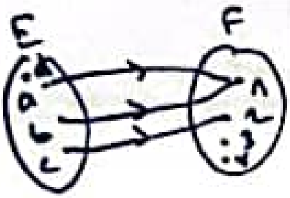
(*) Une correspondance f (ou relation) de E vers F est dite fonction si à tout élément $x \in E$ correspond au plus un élément $y \in F$ noté $f(x)$.

- $y = f(x)$ est appelée image de x par f
- x est appelé antécédent de y par f
- f est représentée par : $f : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$
- E est appelé ensemble de départ et F ensemble d'arrivé.

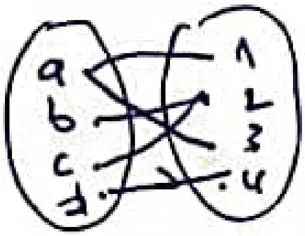
(*) la fonction $f : E \to F$ est une application si à tout élément $x \in E$ correspond un et un unique élément $y \in F$

Exp (1) $Id : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto Id_E(x) = x \end{array}$ est une application appelée application identité de E

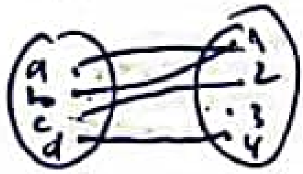
② soit $a \in F$, $f : E \longrightarrow F$ $\quad x \longmapsto f(x) = a$ est une application dite <u>constante</u>.

③ 

(n'est pas une appl puisque d n'a pas d'image ds F)

④ 

(ce n'est même pas une fonction appl. puisque a ā deux images)

⑤ 

(est une appl. tout élément a exactement une et une seule image malgré que 3 n'a pas d'antécédent).

⊛ On dit que deux applications f et g sont égales si elles ont même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et même correspondance ; c.ā.d :

$f : E \to F$ et $g : E \longrightarrow F$ et

$\forall x \in E \; ; \; f(x) = g(x)$.

On considère les appl. suiv :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$ $\quad h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

$k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$, on a :

- $f \neq g$ arrivées $\neq$ • $f \neq h$ départs $\neq$
- $f \neq k$ arrivées $\neq$ et départs $\neq$.

(*) On appelle graphe d'une appl $f : E \to F$ l'ensemble : $\Gamma_f \{(x, f(x)) / x \in E\}$

(*) l'~~ensemble~~ Domaine de définition d'une fonction $f : E \to F$ st ~~l'ensemble~~ noté D_f :

$D_f = \{x \in E / f(x) \text{ existe}\}$

Exp : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2+x}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2 + x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-2\}$

- On a $\forall x \in D_f$, $f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$
- (f st une application) $\Leftrightarrow$ (Départ de $f \subseteq D_f$)

Scanné avec CamScanner

⑥ Image et Image réciproque :

Soient : $f : E \to F$ une application, $A \subset E$ et $B \subset F$

- $f(A) = \{ f(x) , x \in A \}$ est appelé : l'image directe de A c'est l'ensemble des images des éléments de A

$f(A) \subset F$ et $f(A) = \{ y \in F \,/\, \exists x \in A ; \ y = f(x) \}$

- $f^{-1}(B) = \{ x \in E \,/\, f(x) \in B \}$ est appelé : l'image réciproque de B.

$f^{-1}(B) \subset E$.

. Formellement on a :

$$\begin{pmatrix} y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A , \ y = f(A) \\ x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B \end{pmatrix}$$

exp $\begin{array}{rcl}]0,1] & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$, calculer :

$f(\{1, \frac{1}{2}\})$, $f(]0,1])$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{0\})$

$f^{-1}(\{\frac{1}{2}, 2\})$

Proposition $f : E \to F$, $A, B \subset E$ et $M, N \subset F$

alors :

① $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

② $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

③ $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$

④ $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$

⑤ $f^{-1}(C_F^M) = C_E^{f^{-1}(M)}$

(*) Applications injectives, surjectives, bijectives

Soit $f : E \to F$ une application :

Définitions :

① f est injective si tout élt de F possède au plus un antécédent

② f est surjective si tout élt de F possède au moins un antécédent

③ f est bijective si tout élément de F possède exactement un et un seul antécédent

③ c.à.d : (f est bijective) $\Leftrightarrow$ (f est injective et f est surjective)

① On obtient donc :

(f injective) $\Leftrightarrow$ ($\forall x, x' \in E$; $[f(x) = f(x') \Rightarrow x = x']$)

de sa contraposée donc :

(f injective) $\Leftrightarrow$ ($\forall x, x' \in E$, $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$)

ce qui veut dire que dans une injection deux éléments distincts ne peuvent pas avoir la même image

② (f surjective) $\Leftrightarrow$ [$\forall y \in F$, $\exists x \in E$; $y = f(x)$]

③ (f bijective) $\Leftrightarrow$ ($\forall y \in F$, $\exists! x \in E$; $y = f(x)$]

⊛ Application réciproque

Définition : Soit $f : E \to F$ une appl bijective, on définit l'application réciproque de f notée et définie par :

$f^{-1} : F \to E$ et $\forall x \in F$, $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$

- f^{-1} est aussi une appl. bijective

  $(f^{-1})^{-1} = f$.

- $f^{-1} \circ f = Id_E$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$

  (où I_F et I_E sont les appl. identité)

Exp $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto e^x$ est-elle bijective ?

Si oui donner sa réciproque.

Proposition : soient les appl. $f : E \to F$ et $g : F \to E$ telles que :

$g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. alors f et g sont bijectives et $g = f^{-1}$, $f = g^{-1}$