UMBB/FS/INF-ING — Juin 2024

Rattrapage du module Algèbre 2

(1h)

3pts 1. Soit R une relation d'équivalence définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$x\,R\,y \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}$$

- Déterminer $cl(1)$ (Classe d'équivalence de 1).

0,5) $cl(1) = \{y \in \mathbb{R}^* \,/\, 1\,R\,y\}$

0,5) $1\,R\,y \Leftrightarrow 1 - 1/1 = y - 1/y$

0,5) $\Leftrightarrow 0 = (y^2 - 1)/y$

0,5) $\Leftrightarrow y^2 - 1 = 0$

0,5) $\Leftrightarrow y = 1$ ou $y = -1$

0,5) $\Rightarrow cl(1) = \{1, -1\}$

7,5pts 2. Soit S une relation définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$x\,S\,y \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2+1} \leq \frac{y^2}{y^2+1}$$

- Montrer que S est une relation d'ordre.

0,5) S est une relation d'ordre ssi [S est réfléxive et antisymétrique et transitive]

0,5) i) S est réflexive $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^+, x\,S\,x)$

0,5) On a : $\forall x \in \mathbb{R}^+, x^2/1+x^2 \leq x^2/1+x^2$

0,5) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+, x\,S\,x \Rightarrow$ S est réflexive

0,5) ii) S est antisymétrique ssi $(\forall x, y \in \mathbb{R}^+ ; x\,S\,y$ et $y\,S\,x \Rightarrow x = y)$

supposons que $x\,S\,y$ et $y\,S\,x$, on a donc :

0,5) $x^2/1+x^2 \leq y^2/1+y^2$ et $y^2/1+y^2 \leq x^2/1+x^2$

0,5) $\Rightarrow x^2/1+x^2 = y^2/1+y^2$

0,5) $\Rightarrow x^2(1+y^2) = y^2(1+x^2)$

$\Rightarrow x^2 + x^2y^2 = y^2 + y^2x^2$

0,1) $\Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow$ 0,1) $x = y$ ou $x = -y$ (rejeté puisque $x, y \in \mathbb{R}^+$) 0,

$\Rightarrow$ S est antisymétrique

0,5 iii) (s est transitive) $\Leftrightarrow (\forall x,y,z \in \mathbb{R}^+ ;\ x s y$ et $y s z \Rightarrow x s z)$

0,5 $\begin{cases} x s y \\ \text{et } y s z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2/_{1+x^2} \leq y^2/_{1+y^2} \\ \text{et} \\ y^2/_{1+y^2} \leq z^2/_{1+z^2} \end{cases}$

0,5 $\Rightarrow x^2/_{1+x^2} \leq z^2/_{1+z^2}$

0,5 $\Rightarrow x s z \Rightarrow s$ est transitive.

de i), ii) et iii) on en déduit que la relation s est une relation d'ordre.

3,5 **3.** Soit Δ une loi de composition interne, commutative et est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$a \Delta b = ln(e^a + e^b).$$

- Est-ce que $\mathbb{R}$ admet un élément neutre pour Δ ?

0,5 b est un élément neutre ssi $\forall a \in \mathbb{R},\ a \Delta b = a$

0,5 $a \Delta b = a \Leftrightarrow \ln(e^a + e^b) = a$

1 $\Rightarrow e^a + e^b = e^a$

1 $\Rightarrow e^b = 0$ (cette équation n'a pas de solution)

0,5 $\Rightarrow \mathbb{R}$ n'admet pas d'élément neutre pour Δ.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est un groupe, muni de la loi de composition interne $*$ définie par : $a * b = a + b + \frac{1}{6}$

- Montrer que l'application $f : (\mathbb{R}, *) \to (\mathbb{R}, +)$ est un isomorphisme de groupe.

$$x \mapsto f(x) = 3x + \frac{1}{2}. \ . \ .$$

0,5 f est un isomorphisme de groupes ssi f est un morphisme de groupes et f est bijective.

1,5 i) (f est un morphisme) $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}$; $f(x*y) = f(x) + f(y)$

0,5 On a : $f(x*y) = f(x + y + 1/6)$

0,5 $= 3(x + y + 1/6) + 1/2$

$= 3x + 3y + 1/2 + 1/2$

0,5 $= 3x + 1/2 + 3y + 1/2$

0,5 $= f(x) + f(y) \rightarrow$ f morphisme

1,5 ii) f est bijective $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}$; $\exists! x \in \mathbb{R} / y = f(x)$

0,5 Soit $y \in \mathbb{R}$, $y = f(x) \Leftrightarrow y = 3x + 1/2$

0,5 $\Rightarrow x = 1/3\, y - 1/6$ (existe et unique)

0,5 tout $y \in \mathbb{R}$ admet un unique antécédent $\frac{1}{3}y - 1/6$ par f

d'où f est bijective.

de i) et ii) on en déduit que f est un isomorphisme de groupes.

remarque : on peut montrer f bijective par f injective et surject

- Déterminer l'application réciproque f^{-1}.

Comme f est bijective, alors elle admet une application

0,5 réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto$ l'antécédent de x par f

0,5 d'où $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f^{-1}(x) = 1/3\, x - 1/6$