Université M'Hamed Bougara-Boumerdes
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Ingénieur- Informatique
Année universitaire: 2023/2024
Matière: *Algèbre1*

Série 1: Logique et Ensembles

Logique

Exercice 1.

Soit P une proposition, on note V la proposition " toujours vraie" et F la proposition " toujours fausse".

Évaluer et simplifier les propositions suivantes :

$$1)\quad P \vee V \quad ; \quad 2)\quad P \veebar F \quad ; \quad 3)\quad \overline{P \wedge V}$$

$$4)\quad P \Rightarrow F \quad ; \quad 5)\quad P \Rightarrow V \quad ; \quad 6)\quad F \Rightarrow V$$

Exercice 2.

On considère une application f de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

1) Pour tout rèel x, $f(x) \leq 1$.

2) f est croissante et positive.

3) il existe au moins un réel x tel que quelque soit le réel y, si $x < y$ *alors* $f(x) > f(y)$.

Exercice 3. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses?

$$1)\quad \exists\, x, \forall\, y\ ;\ x + y > 0 \quad ; \quad 2)\quad \forall\, x, \exists\, y\ ;\ x + y > 0$$

$$3)\quad \forall\, x, \forall\, y\ ;\ x + y > 0 \quad ; \quad 4)\quad \exists\, x, \forall\, y\ ;\ y^2 > x$$

Exercice 4.

[*I*] Démontrer les propositions suivantes:

1) n^2 *pair* $\Rightarrow n$ *pair.* (par la contraposée)

2) $\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{n^2+1} \geq n$ (par l'absurde).

[*II*]Montrer par récurrence

$$1)\quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad 2)\quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$3)\quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad ; \quad 4)\quad \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{4n^2-1} = \frac{n}{2n+1}$$

Ensembles

Exercice 5.

Décrire les parties de $\mathbb{R}$ qui sont définies par les propositions suivantes:

1) 1) $(x > 0 \text{ et } x > 1)$ *ou* $x = 0$; 2) $x > 3$ *et* $x < 5$ *et* $x \neq 4$

3) $(x \leq 0 \text{ et } x > 1)$ *ou* $x = 4$; 4) $x \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

Exercice 6.

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1) En utilisant les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, formuler les assertions suivantes et leurs négations:

$$(i) \quad A = \emptyset \quad ; \quad (ii) \quad A \cap B = \emptyset \quad ; \quad (iii) \quad A \subset B$$

2) Déterminer :

$$P(\emptyset), \quad P(\{1,2\}), \quad P(\{\emptyset, A\}), \quad A \triangle \complement_E^A \quad \text{et} \quad A \triangle E$$

3) (facultatif) Exprimer les ensembles : $A \cup B$ et $A - B$ en utilisant l'intersection et le complémentaire.

4) Montrer que :

$$(i) \quad A \subset B \Leftrightarrow \complement_E^B \subset \complement_E^A$$

$$(ii) \quad [A \cup B \subset A \cup C \quad \text{et} \quad A \cap B \subset A \cap C] \quad \Rightarrow \quad B \subset C$$

Série 1 : Logique et Ensembles

Exo1 : Evaluer et simplifier les propositions suivantes :

1) $(p \vee V) \Leftrightarrow V$ 2) $(p \vee F) \Leftrightarrow p$

3) $(\overline{\bar{p} \wedge V}) \Leftrightarrow \overline{\bar{p}} \Leftrightarrow p$

4) $(p \Rightarrow F) \Leftrightarrow \bar{p}$ 5) $(F \Rightarrow V) \Leftrightarrow V$.

Exo2 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application

Donner la négation des propositions suivantes et les réecrire en utilisant les symboles :

1) « pour tout réel x, $f(x) \leq 1$ » : P_1

$\overline{P_1}$: « il existe au moins un réel x, $f(x) > 1$ »

P_1 : « $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 1$ »

$\overline{P_1}$: « $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 1$ »

2) P_2 : « f est croissante et positive »

$\overline{P_2}$: « f n'est pas croissante ou f n'est pas pas positive »

P_2 : « $(\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R} ; x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$ et $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0)$ »

$\overline{P_2}$: « $(\exists x_1 \in \mathbb{R}, \exists x_2 \in \mathbb{R} ; x_1 \leq x_2$ et $f(x_1) > f(x_2))$ ou $(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) < 0)$ »

On rappelle que $\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \wedge \bar{q})$

3) P_3 : « Il existe au moins un réel x tel que quelque soit le réel y, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$. »

P_3 : « $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} ; x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ »

~~$\overline{P_3}$: « Il existe~~

$\overline{P_3}$: « pour tout réel x, il existe au moins un réel y tel que : $x<y$ et $f(x) \leq f(y)$ »

$\overline{P_3}$: « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} ; x<y \wedge f(x) \leq f(y)$ »

<u>Exo3</u> : les assertions (propositions) suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1) P_1 : « $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} ; x+y>0$ »

P_1 st fausse

<u>preuve</u> : pour prouver que P_1 st fausse il suffit de prouver que $\overline{P_1}$ est vraie

$\overline{P_1}$: « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y \not> 0$ »

soit $x \in \mathbb{R}$, on cherche $y \in \mathbb{R}$ qui vérifie

$x+y \not> 0$, c.à.d : $y \not> -x$

on peut prendre par exemple :

$y=-x-1$, On vérifie :

$x+y=x-x-1=-1 \not> 0$. d'où

$\overline{P_1}$ st vraie et donc P_1 st fausse.

preuve$_2$: par l'absurde :
On suppose le contraire, c.à.d que P_1 st ~~fausse~~ vraie et on cherche la contradiction

P_1 vraie veut dire qu'on a un réel $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$;

$x+y > 0$ ... (H)

donc pour $y = -x - 1$, (H) ~~st vérifiée~~
on aura $x+y > 0$ c.à.d :

$x - x - 1 > 0 \Leftrightarrow -1 > 0$ (ce qui st « absurde ») d'où P_1 st fausse.

- P_2 : « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y > 0$ »

P_2 st vraie.
preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$, on cherche $y \in \mathbb{R}$

$x+y > 0$. c.à.d : $y > -x$.
il suffit de prendre par exemple
$y = -x + 1$ on obtient bien
$x+y = x - x + 1 = 1 > 0$. d'où P_2 st vraie

4

• P_3 : « $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y \geq 0$ »

P_3 est fausse.

preuve par un contre exemple :

$x = 1$ et $y = -3$, on a : $x+y = -2 < 0$

• P_4 : « $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$ »

On cherche un réel x qui soit inférieur (strictement) ~~à tous~~ au carré de tous les réels : On peut prendre x négatif par exemple : $x = -1$

On a : $\forall y \in \mathbb{R}, y^2 \geq 0 > -1$

donc $\forall y \in \mathbb{R}, y^2 > -1$. donc P_4 est vraie.

Exo4 I) Démontrer les propositions suivantes :

1) P_1 : « n^2 pair $\Rightarrow n$ pair » (~~parlabsurde~~)

par la contraposée : On se base sur l'équivalence suivante :

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$

donc P_1 est équivalente à sa contraposée « n impair $\Rightarrow$ n^2 impair », qu'on va démontrer :

par le résonnement direct :

On suppose n impair et on montre que n^2 est impair.

$(n \text{ impair}) \Leftrightarrow (n = 2k+1, \text{ avec } k \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2$

$\Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$\Rightarrow n^2 = 2\underbrace{(2k^2 + 2k)}_{k'} + 1$

$\Rightarrow n^2 = 2k' + 1$, avec $k' \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n^2$ est impair.

d'où P_1 est vraie.

2) P_2 : « $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n^2+1} \geq n$ » (par l'absurde)

On suppose $\overline{P_2}$ est vraie

$\overline{P_2}$: « $\exists n \in \mathbb{N}, \sqrt{n^2+1} < n$ »

soit $n_0 \in \mathbb{N}$ qui vérifie $\sqrt{n_0^2+1} < n_0$

$\Rightarrow n_0^2+1 < n_0^2$ (ce sont des quantités positives)

$\Rightarrow 1 < 0$ (ce qui est absurde ou contradictoire).

d'où P_2 est vraie.

II) Montrer par récurrence :

1) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

On désigne par $p(n)$ la propriété ci-dessous et on démontre par récurrence que $p(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

i) $P(1)$: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

$P(1)$: $1 = 1$ est vraie

ii) On suppose que

$$p(n) : 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

iii) On démontre que $p(n+1)$ est vraie

$$p(n+1) : \underbrace{1+2+\cdots+n+(n+1)}_{(I)} = \underbrace{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}_{(II)}$$

On a : $(I) = \underbrace{1+2+\cdots+n}+(n+1)$

$$= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

$$=(n+1)\left[\frac{n}{2}+1\right)$$

$$=(n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right) = (II)$$

d'où $p(n+1)$ est vraie

conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(n)$ est vraie.

2) $p(n) : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$, $n \geq 1$

i) $p(1) : 1^2 = \frac{1(2)(3)}{2}$

$p(1) : 1^2 = 1$ (vraie)

ii) on suppose que $p(n)$ est vraie pour un certain $n \geq 1$

8

$P(n): 1^2+2^2+\dots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$ (H)

(iii) On montre la véracité de :

$$P(n+1): \underbrace{1^2+2^2+\dots+(n+1)^2}_{(I)} = \underbrace{\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{2}}_{(II)}$$

On a : $(I) = \underbrace{1^2+2^2+\dots+n^2}+(n+1)^2$

$$\underset{(H)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + (n+1)^2$$

$$= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)+2(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{(n+1)[2n^2+3n+2]}{2}$$

$$= \frac{(n+1)[n+2](2n+3)}{2} = (II)$$

d'où $P(n+1)$ est vraie.

On conclut que $P(n)$ est vraie $\forall n \geq 1$

9

3) on montre que :

$P(n) : \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ st vraie $\forall n \geq 1$.

$P(n) : 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

i) On verifie pour $P(1)$:

$P(1) : 1^3 = \left(\frac{1(2)}{2}\right)^2$

$P(1) : 1 = 1$ st vraie

ii) on suppose la veracité de :

$P(n) : 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \dots (H)$

iii) On montre la veracité de :

$P(n+1) : \underbrace{1^3 + 2^3 + \dots + (n+1)^3}_{(I)} = \underbrace{\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2}_{II}$

On a : $(I) = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3$

$\underset{(H)}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$

$= (n+1)^2 \left[\frac{n^2 + 4(n+1)}{4}\right]$

10

$$=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{2^2}$$

$$=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2=(\text{II})$$

d'où $p(n+1)$ est vraie et

$\forall n\geq 1$, $p(n)$ est vraie.

3) $p(n): \frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\dots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$

On montre que $p(n)$ est vraie $\forall n\geq 1$

i) On vérifie pour $p(1)$.

$p(1): \frac{1}{3}=\frac{1}{2.1+1}$

$p(1): \frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ (vraie)

ii) On suppose vraie pour un certain n:

$p(n): \frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\dots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$ --- (H)

iii) On montre la véracité de $p(n+1)$:

$$p(n+1): \underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\dots+\frac{1}{4(n+1)^2-1}}_{(\text{I})}=\underbrace{\frac{n+1}{2n+3}}_{(\text{II})}$$

$$(I) = \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2-1}} + \frac{1}{4(n+1)^2-1}$$

$$\underset{(H)}{=} \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{4(n+1)^2-1}$$

$$= \frac{n}{(2n+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}$$

$$= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{\cancel{(2n+1)}(n+1)}{\cancel{(2n+1)}(2n+3)}$$

$$= \frac{n+1}{2n+3} = \overline{II}$$

d'où $p(n+1)$ est vraie et :

$\forall n \geq 1$, $p(n)$ est vraie.

~~4) On pose $p(n) : \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2-1} = \frac{n}{2n+1}$~~

~~i) On a : $p(1) : \frac{1}{3} = \frac{1}{2.1+1}$~~

~~$p(1) : \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (vraie)~~

~~ii) Supposons la veracité de :~~

Ensembles

Exercice 5 Décrire les parties E_i de $\mathbb{R}$ définies par les propositions $P_i(x)$:

1) $P_1(x) : (x > 0 \text{ et } x > 1) \text{ ou } x = 0$

$x \in E_1 \iff P_1(x)$

$\iff (x \in]0,+\infty[\text{ et } x \in]1,+\infty[) \text{ ou } x = 0$

$\iff x \in (]0,+\infty[\cap]1,+\infty[) \text{ ou } x \in \{0\}$

$\iff x \in]1,+\infty[\text{ ou } x \in \{0\}$

$\iff x \in \{0\} \cup]1,+\infty[$.

ainsi $E_1 = \{0\} \cup]1,+\infty[$

2) $P_2(x) : x > 3 \text{ et } x < 5 \text{ et } x \neq 4$

$E_2 = \{x \in \mathbb{R} / P_2(x)\}$

$x \in E_2 \iff P_2(x)$

$\iff x \in]3,+\infty[\text{ et } x \in]-\infty, 5[\text{ et } x \notin \{4\}$

$\iff x \in]3,+\infty[\cap]-\infty,5[\text{ et } x \notin \{4\}$

$\iff x \in]3,5[\text{ et } x \notin \{4\}$

$\iff x \in]3,5[- \{4\}$

ainsi : $E_2 =]3,5[- \{4\} =]3,4[\cup]4,5[$

3) $P_3(x) : (x \leq 0 \text{ et } x > 1) \text{ ou } x = 4$

$E_3 = \{x \in \mathbb{R} \,/\, P_3(x)\}$

$x \in E_3 \Leftrightarrow P_3(x)$

$\Leftrightarrow (x \in]-\infty, 0] \text{ et } x \in]1, +\infty[) \text{ ou } x \in \{4\}$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \cap]1, +\infty[\text{ ou } x \in \{4\}$

$\Leftrightarrow x \in \emptyset \text{ ou } x \in \{4\}$

$\Leftrightarrow x \in \emptyset \cup \{4\} \Leftrightarrow x \in \{4\}$

ainsi $E_3 = \{4\}$

4) $P_4(x) : x \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

$E_4 = \{x \in \mathbb{R} \,/\, P_4(x)\}$

$x \in E_4 \Leftrightarrow P_4(x)$

$\Leftrightarrow x \in [0, +\infty[\Rightarrow x \in [2, +\infty[$

$\underset{(*)}{\Leftrightarrow} x \in [0, +\infty[\text{ et } x \notin [2, +\infty[$

$\Leftrightarrow x \in [0, +\infty[- [2, +\infty[$

$\Leftrightarrow x \in [0, 2[$

$E_4 = [0, 2[$

Exercice 06 : A, B et C sont des parties de l'ensemble E

1) En utilisant les symboles $\forall, \exists$, formuler les propositions suivantes et leur négation.

i) $(A = \emptyset) \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \notin A)$

négation : $(A \neq \emptyset) \Leftrightarrow (\exists x \in E ; x \in A)$

ii) $(A \cap B = \emptyset) \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \notin A \cap B)$

$\Leftrightarrow (\forall x \in E ; \overline{x \in A \cap B})$

$\Leftrightarrow (\forall x \in E ; \overline{x \in A \text{ et } x \in B})$

$\Leftrightarrow (\forall x \in E ; x \notin A \text{ ou } x \notin B)$

négation :

$(A \cap B \neq \emptyset) \Longleftrightarrow (\exists x \in E ; x \in A \text{ et } x \in B)$

iii) $(A \subset B) \Longleftrightarrow (\forall x \in E ; x \in A \Rightarrow x \in B)$

négation : $(A \not\subset B) \Longleftrightarrow (\exists x \in E ; x \in A \text{ et } x \notin B)$

autre formulation :

$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x \in A ; x \in B)$

$(A \not\subset B) \Longleftrightarrow (\exists x \in A ; x \notin B)$

2) Déterminer :

1) $P(\phi) = \{\phi\}$

2) $P(\{1,2\}) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

3) $P(\{\phi, A\}) = \{\phi, \{\phi\}, \{A\}, \{\phi, A\}\}$

4) $A \Delta C_E^A = (A - C_E^A) \cup (C_E^A - A)$

$= A \cup C_E^A = E$

5) $A \Delta E = (A - E) \cup (E - A)$

$= \phi \cup C_E^A = C_E^A$

3) Exprimer

Serie N°2 :

Applications et Relations

Exercice 1 :

1) Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies par :

$f(x) = 3x+1$ et $g(x) = x^2 - 1$

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

2) Soit E un ensemble $\neq \emptyset$ et U une partie de E, soient f et g les applications de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définies par : $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

$f(A) = A - U$ et $g(A) = U - A$

- Expliciter les applications : f^2, $f \circ g$, $g \circ f$ et g^2

Exercice 2 :

Soit l'application : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/(1+x^2)$

et Soient : $A = \{-1, 2, 3\}$, $B = [0, 1]$, $C = [-1, 0]$

et $D = [0, 1/2]$

1) Déterminer : $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$,

$f^{-1}([0, 1/2])$ et $f^{-1}([-2, 0])$

2) L'application f est-elle injective ? Surjective ?

3) Donner un ensemble de départ et un autre d'arrivée pour obtenir une application bijective, puis déterminer f^{-1}.

Exercice 3 :

On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow F \quad (\text{avec } F \subset \mathbb{R})$$
$$x \longmapsto \frac{x+5}{x-2}$$

Comment choisir F pour que f soit bijective ?

(On peut utiliser les variations de f)

Exercice 4 :

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$$
$$x \longmapsto f(x) = x + \frac{1}{x}$$

1) L'application f est-elle injective ? Surjective ?

2) Déterminer l'image directe de $\mathbb{R}^*$.

Exercice 5 :

$f : E \to F$ et $g : F \to G$, sont deux app

Montrer :

1) $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective

2) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective

3) $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow$ g injective

4) $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow$ f surjective

(à faire 1) et 3)).

Exercice 6 :

1) Dans $\mathbb{R}^2$, la relation $\mathcal{R}$ est définie par :

$$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2$$

Montrer que $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre

2) Dans $\mathbb{R}^2$, la relation $\mathcal{R}$ est définie par

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \iff x \geq x' \text{ et } y \geq y'$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

Est-il total ?

Exercice 7 :

1) $\mathcal{R}$ est une relation définie dans $\mathbb{N}$ par :

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow (x - y = 0 \text{ ou } x + y = 10)$$

i) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

ii) Déterminer les classes d'équivalence et l'ensemble quotient.

2) Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \mathcal{R} y \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 = (y^2 - 2)^2$$

i) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

ii) Vérifier : $(x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 4)(x^2 - y^2) = 0$

iii) Déterminer $cl(0)$, puis $cl(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 : (Facultatif)

Dans $\mathbb{R}$, la relation $\mathcal{R}$ est définie par

$$(x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow (x^3 - y^3 \geq 0)$$

Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. cet ordre est-il total ?

Serie 2

Applications et Relations

Exo 1 1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 3x+1 \qquad x \longmapsto x^2-1$

$f \circ g$ et $g \circ f$ existent puisque :
pour $f \circ g$ l'arrivée de g = départ de f
et pour $g \circ f$ l'arrivée de f = départ de g

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+1) = (3x+1)^2 - 1$$
$$= 9x^2 + 6x$$

donc : $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto (g \circ f)(x) = 9x^2 + 6x$

puis :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1)$$
$$= 3(x^2-1) + 1 = 3x^2 - 2$$

donc : $f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto (f \circ g)(x) = 3x^2 - 2$

2) E un ensemble $\neq \phi$ et $U \subset E$

$f, g : P(E) \longrightarrow P(E)$

avec : $f(A) = A - U$ et $g(A) = U - A$

On détermine les applications f^2, $f \circ g$,

$g \circ f$ et g^2 :

toutes ces applications existent puisque le départ et l'arrivée des deux applications f et g sont les même $(= P(E))$

Soit $A \in P(E)$:

1) $f^2(A) = f(f(A)) = f(A - U) = (A - U) - U = A - U$

Puisque : $x \in (A - U) - U \Leftrightarrow x \in (A - U)$ et $x \notin U$

$\Leftrightarrow (x \in A$ et $x \notin U)$ et $x \notin U$

$\Leftrightarrow x \in A$ et $x \notin U$ et $x \notin U$

$\Leftrightarrow x \in A$ et $x \notin U \Leftrightarrow x \in A - U$.

2) $(f \circ g)(A) = f(g(A)) = f(U - A)$

$= (U - A) - U = \phi$

Puisque :

3

$x \in (U - A) - U \Leftrightarrow x \in (U - A)$ et $x \notin U$

$\Leftrightarrow (x \in U$ et $x \notin A)$ et $x \notin U$

$\Leftrightarrow (x \in U$ et $x \notin U)$ et $x \notin A$

$\Leftrightarrow x \in U - U$ et $x \notin A$

$\Leftrightarrow x \in \phi$ et $C_E^A \Leftrightarrow x \in \phi \cap C_E^A$

$\Leftrightarrow x \in \phi$

3) $(g \circ f)(A) = g(f(A)) = g(A - U)$

$= U - (A - U) = U$

Puisque : $x \in U - (A - U) \Leftrightarrow x \in U$ et $x \notin (A - U)$

$\Leftrightarrow x \in U$ et $\overline{x \in A - U}$

$\Leftrightarrow x \in U$ et $\overline{x \in A \text{ et } x \notin U}$

$\Leftrightarrow x \in U$ et $(x \notin A$ ou $x \in U)$

$\Leftrightarrow (x \in U$ et $x \notin A)$ ou $(x \in U$ et $x \in U)$

$\Leftrightarrow x \in U - A$ ou $x \in U$

$\Leftrightarrow x \in (U - A) \cup U \Leftrightarrow x \in U$ (car $U - A \subset U$)

4) $g^2(A) = g(g(A)) = g(U-A)$

$= U-(U-A) = U \cap A$

puisque : $x \in U-(U-A) \Leftrightarrow x \in U$ et $x \notin (U-A)$

$\Leftrightarrow x \in U$ et $\overline{x \in U-A}$

$\Leftrightarrow x \in U$ et $\overline{x \in U \text{ et } x \notin A}$

$\Leftrightarrow x \in U$ et $(x \notin U$ ou $x \in A)$

$\Leftrightarrow (x \in U$ et $x \notin U)$ ou $(x \in U$ et $x \in A)$

$\Leftrightarrow x \in (U-U)$ ou $x \in U \cap A$

$\Leftrightarrow x \in \phi$ ou $x \in U \cap A$

$\Leftrightarrow x \in \phi \cup (U \cap A)$

$\Leftrightarrow x \in U \cap A$

<u>conclusion</u> : f^2, $f \circ g$, $g \circ f$ et g^2 sont des applications de $P(E)$ dans $P(E)$ définies

1) par : $f^2(A) = A - U = f(A)$

2) $(f \circ g)(A) = \phi$, ($f \circ g$ est une application constante)

3) $(g \circ f)(A) = U$, ($g \circ f$ est une application constante)

5

4) $g^2(A) = U \cap A$

<u>Exercice 2 :</u> $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$$

$A = \{-1, 2, 3\}$, $B = [0,1]$, $C = [-1, 0]$
$D = [0, 1/2]$

1) Déterminons les parties suivantes :

- $f(A) = \{f(x) \,/\, x \in A\}$ (l'image directe de A)

$f(A) = \{f(-1), f(2), f(3)\} = \{1/2, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}\}$

- $f(B) = \{f(x) \,/\, x \in B\} = \{f(x) \,/\, x \in [0,1]\}$

On a : $x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1^2 \Rightarrow 1 \leq x^2+1 \leq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow 1/2 \leq f(x) \leq 1$

$\Rightarrow f(B) = [1/2, 1]$

- $f(C) = \{ f(x) \,/\, x \in C \}$
$= \{ f(x) \,/\, x \in [-1, 0] \}$

On a : $x \in [-1, 0] \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0$

$\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq (-1)^2 \Rightarrow 0 \leq x^2+1 \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq \dfrac{1}{x^2+1} \Rightarrow f(x) \in [1, +\infty[$

$f(C) = [1, +\infty[$

- $f^{-1}([-2, 0]) = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \in [-2, 0] \}$
(l'image réciproque de $[-2, 0]$)

$f(x) \in [-2, 0] \Leftrightarrow -2 \leq f(x) \leq 0$

$\Leftrightarrow -2 \leq \dfrac{1}{1+x^2} \leq 0$ (n'a pas de solutions puisque $\dfrac{1}{1+x^2} > 0$)

donc $f^{-1}([-2, 0]) = \emptyset$.

7

- $f^{-1}([0,1/2]) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in [0,1/2]\}$

$f(x) \in [0,1/2] \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x^2+1 \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 1$

$\Rightarrow x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$

$f^{-1}([0,1/2]) =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$

2) f est-elle injective? surjective?

- $f^{-1}([-2,0]) = \phi \Rightarrow f$ est non surjective puisque les élements de $[-2,0]$ n'ont pas d'antécédent par f.

- On a $f(-x) = \frac{1}{1+(-x)^2} = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (f est paire), donc $-x$ et x ont la même image, exemple :

$f(1) = f(-1)$ et $1 \neq -1$

on en conclut que f n'est pas injective.

pour avoir f bijective il faudrait changer le départ (pour l'injection) et l'arrivée (pour la surjection).

- Comme f est paire il suffit de prendre le départ $[0,+\infty[$ ou $]-\infty,0]$, pour que f devienne injective.

- f devient surjective si son arrivée est $f(\mathbb{R})$.

$f(\mathbb{R}) = \{f(x) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$

$x^2 \geq 0 \Rightarrow 1+x^2 \geq 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$

$\Rightarrow f(\mathbb{R}) =]0,1]$.

$\Rightarrow f : \mathbb{R} \rightarrow]0,1]$ est surjective

<u>conclusion</u> : deux choix pour que f soit bijective :

<u>cas 1</u> : $[0,+\infty[\xrightarrow{f}]0,1]$, cas 2 : $]-\infty,0] \xrightarrow{f}]0,1]$

Déterminer f^{-1} (si f est bijective)

<u>cas 1</u> :

$f :]-\infty, 0] \longrightarrow]0,1]$ est bijective,

donc admet une application réciproque

$f^{-1} :]0,1] \longrightarrow]-\infty,0]$

soit $x \in]0,1]$; on détermine

$f^{-1}(x) = t \quad (\in]-\infty,0]) \; \ldots \; (*)$

on a : $\left(f^{-1}(x) = t\right) \iff \left(x = f(t)\right)$

$$(x=f(t)) \iff x = \frac{1}{1+t^2} \iff \frac{1}{x} = 1+t^2$$

$$\iff t^2 = \frac{1}{x} - 1 \underset{(*)}{\Longrightarrow} t = -\sqrt{\frac{1}{x} - 1}$$

$$f^{-1} :]0,1] \longrightarrow]-\infty,0]$$
$$x \longmapsto -\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

de même pour le

<u>cas 2</u> : $f : [0,+\infty[\longrightarrow]0,1]$ est bijective,

donc admet une application réciproque ;

$f^{-1}:]0,1] \longrightarrow [0,+\infty[$

pour $x \in]0,1]$, on détermine $f^{-1}(x)$

$$\begin{pmatrix} f^{-1}(x) = t \\ t \in [0,+\infty[\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(x = f(t) \right)$$

$$x = f(t) \Leftrightarrow x = \frac{1}{1+t^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1+t^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \quad (\text{car } t \geq 0)$$

d'où $f^{-1}:]0,1] \longrightarrow [0,+\infty[$

$$x \longmapsto f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

<u>Exercice 03</u> $f: \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow F \qquad (F \subset \mathbb{R})$

$$x \longmapsto \frac{x+5}{x-2}$$

Comment choisir F pour que f soit bijective?

(On peut utiliser les variations de f)

$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$, $f'(x) = \dfrac{-7}{(x-2)^2} < 0$

f est donc décroissante sur $\mathbb{R} - \{2\}$

et dont la variation est comme suit :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

il en résulte : ① $f(]-\infty,2[\cup]2,+\infty[) =$

$=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ ... ①

qui sera l'ensemble d'arrivée de f

pour qu'elle soit <u>surjective</u>

② $y\in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[\Leftrightarrow$

$y\in]-\infty,1[$ ou $y\in]1,+\infty[$.

on a :
$y\in]-\infty,1[$ admet un seul antécédent

ds $]-\infty,2[$ (f st décroissante)

et $y\in]1,+\infty[$ admet un unique antécédent

dans $]2,+\infty[$

donc tout $y\in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ admet

un seul antécédent, donc

f est injective et dans ce cas On garde le départ de f.

Conclusion $f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ est bijective.

Exercice 04 : $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$

$x \longmapsto f(x) = x + \frac{1}{x}$

1) f est-elle injective ?

- Réponse 1 : (par un contre exemple)

On a 2 et $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}^*$:

$2 \neq \frac{1}{2}$ et $f(2) = f(\frac{1}{2}) = 5/2$

donc f n'est pas injective

- Réponse 2 : (par la définition)

soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$, tels que $f(x_1) = f(x_2)$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + \frac{1}{x_1} = x_2 + \frac{1}{x_2}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2) + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)\left[1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \text{ou} \\ \frac{1}{x_1 x_2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \text{ou} \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \text{ou} \\ x_1 = \frac{1}{x_2} \end{cases}$$, on en déduit qu'en général

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

c.à.d x et son inverse ont la même image.

exemple : $2 \neq \frac{1}{2}$ et $f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right)$

donc f n'est pas injective.

c) f est-elle surjective ?

1)

Exo 5 $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

On montre que :

1) $g \circ f$ injective $\Longrightarrow$ f injective

On suppose $g \circ f$ injective et on montre que f injective.

pour cela on prend $x_1, x_2 \in E$, tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et on montre que $x_1 = x_2$. (1)

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f \text{ inj ?}"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f \text{ inj}"'] & F \arrow[r, "g"] & G
\end{tikzcd}
$$

x_1, x_2 $\quad f(x_1) = f(x_2)$

$$f(x_1) = f(x_2) \underset{g \text{ appl.}}{\Longrightarrow} g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

$$\Longrightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$\underset{g \circ f \text{ inj}}{\Longrightarrow} x_1 = x_2 \quad (\text{c.q.f.d})$$

$\Longrightarrow$ f injective.

(2

2) $g \circ f$ surjective $\longrightarrow$ g surjective

On suppose que $g\circ f$ est surjective et
On montre que g est surjective, pour cela
On prend $y \in G$, on lui cherche un
antécédent x dans F par g $(y = g(x))$ ... (1)

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f \text{ surje}"'] & F_{x?} \arrow[r, "g \text{ surj?}"] & G \ni y \end{tikzcd}$$

$\forall y \in G \underset{g\circ f \text{ surje}}{\longrightarrow} \exists\, z \in E \,/\, y = (g\circ f)(z)$

$\Rightarrow y = g(f(z))$

d'après (1), on peut prendre $x = f(z)$

d'où $f(z)$ est l'antécédent de y par g

d'où g est surjective.

16

3) $g\circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow$ g injective

On suppose que $\begin{cases} g\circ f \text{ injective} \ldots & ① \\ \text{et } f \text{ surjective} \ldots & ② \end{cases}$

On montre que g est injective, pour cela on prend $x_1, x_2 \in F$ tels que $g(x_1)=g(x_2)$ et on montre que $\boxed{x_1 = x_2}$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f \text{ surje}"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f \text{ inje}"'] & F \ni x_1, x_2 \arrow[r, "g \text{ inje ?}"] & G \ni g(x_1)=g(x_2) \end{tikzcd}$$

On a : $x_1 \in F \underset{f \text{ surje}}{\Longrightarrow} \exists z_1 \in E \,/\, f(z_1) = x_1$

et $x_2 \in F \underset{f \text{ surje}}{\Longrightarrow} \exists z_2 \in E \,/\, f(z_2) = x_2$

alors : $g(f(z_1)) = g(x_1)$ et
$g(f(z_2)) = g(x_2)$

Comme $g(x_1) = g(x_2)$ alors $(g\circ f)(z_1) = (g\circ f)(z_2)$

$$\underset{g\circ f \text{ inj}}{\Longrightarrow} z_1 = z_2$$

$$\underset{f \text{ app}}{\Longrightarrow} \underbrace{f(z_1)}_{= x_1} = \underbrace{f(z_2)}_{= x_2} \Longrightarrow \boxed{x_1 = x_2} \quad \text{c.q.f.d.}$$

$\Rightarrow$ g ~~st~~ injective.

4) $g\circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow$ f surje

Supposons que : $\begin{cases} g\circ f \text{ surjective} \quad \ldots (1) \\ \text{et} \\ g \text{ st injective} \quad \ldots (2) \end{cases}$

On montre que f st surjective, pour cela on prend $y \in F$, on lui cherche un antécédent $\underset{?}{x} \in E$ ($y = f(x)$)

$$\begin{tikzcd} \underset{?}{x}\; E \arrow[r, "f \text{ surje?}"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"', "\text{surje}"] & F \ni y \arrow[r, "g \text{ inje}"] & G \end{tikzcd}$$

$$y \in F \underset{g \text{ appl}}{\Longrightarrow} g(y) \in G \underset{g\circ f \text{ surje}}{\Longrightarrow} \exists z \in E / (g\circ f)(z) = g(y)$$

$$\Rightarrow g(f(z)) = g(y) \underset{g \text{ inje}}{\Longrightarrow} f(z) = y \quad (17)$$

On a trouvé $z \in E$ tel que $f(z) = y$
On peut prendre $x = z$, ~~...~~ antécédent
de y par f recherché.
d'où f est surjective.

Relations

Ex 06

1) Dans $\mathbb{R}^2$, la relation R est défini par

$(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$ ou $y_1 \leq y_2$

On montre que n'est pas une rel. d'ordre.

(R est d'ordre) $\Leftrightarrow$ (R est réflexive, anti symetrique et transitive)

. (R n'est pas antisymetrique) $\Leftrightarrow$

$[\exists (x_1, y_1), \exists (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 /$

$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ et $(x_1, y_1) R (x_2, y_2)$ et

$(x_2, y_2) R (x_1, y_1)]$

. On a : $(1,3) R (2,0)$ (car $1 \leq 2$)

et $(2,0) R (1,3)$ (car $0 \leq 3$)

et $(2,0) \neq (1,3)$

on en déduit que R n'est pas antisymetrique

d'où R n'est pas rel. d'ordre. 20

2) Dans $\mathbb{R}^2$, la rel. R est définie par :

$(x,y) R (x',y') \Leftrightarrow x \geq x'$ et $y \geq y'$.

On montre que R est relation ~~d'équivalence~~ d'ordre :

i) R réflexive : soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$x \geq x$ et $y \geq y \Rightarrow (x,y) R (x,y)$

donc R est réflexive ... ①

ii) R antisymétrique : soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$

tels que $(x,y) R (x',y')$ et $(x',y') R (x,y)$

$\Rightarrow (x \geq x'$ et $y \geq y'$ et $x' \geq x$ et $y' \geq y)$

$\Rightarrow (x \geq x'$ et $x' \geq x)$ et $(y \geq y'$ et $y' \geq y)$

$\Rightarrow x = x'$ et $y = y'$

$\Rightarrow (x,y) = (x',y') \Rightarrow R$ est antisymétrique ②

iii) R transitive : Soient $(x,y), (a,b), (c,d)$

trois éléments de $\mathbb{R}^2$, avec :

$[(x,y)\,R\,(a,b)$ et $(a,b)\,R\,(c,d)] \Rightarrow$

$(x \geq a$ et $y \geq b$ et $a \geq c$ et $b \geq d) \Rightarrow$

$(x \geq a$ et $a \geq c)$ et $(y \geq b$ et $b \geq d) \Rightarrow$

$(x \geq c$ et $y \geq d)$ (puisque $\geq$ est transitive ds $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow (x,y)\,R\,(c,d) \Rightarrow R$ est transitive ... ③

①, ② et ③ $\Rightarrow R$ est rel. d'ordre.

- L'ordre R est-il total?

(R est d'ordre total) $\Leftrightarrow (\forall (x,y), (a,b) \in \mathbb{R}^2$;

$[(x,y)\,R\,(a,b)$ ou $(a,b)\,R\,(x,y)]$

On a : $(1,2) \not{R} (0,3)$ et $(0,3) \not{R} (1,2)$

d'où l'ordre est partiel.

(9)

Exo 7 Dans $\mathbb{N}$, la rel. R est définie

$x R y \Leftrightarrow (x-y=0$ ou $x+y=10)$

1) On montre que R est rel. d'équivalence :

i) <u>R reflexive</u> : Soit $x \in \mathbb{N}$, on a : $x-x=0$

d'où $x R x$, R est donc reflexive

ii) <u>R symetrique</u> : ~~Soient (x,y) et $($~~

soient $x, y \in \mathbb{N}$, On suppose que $x R y$

$x R y \Rightarrow (x-y=0$ ou $x+y=10)$

$\Rightarrow (y-x=0$ ou $y+x=10)$

$\Rightarrow y R x \Rightarrow R$ est symétrique.

iii) <u>R est transitive</u> : Soient $x, y, z \in \mathbb{N}$;

tels que : $(x R y)$ et $(y R z)$, On montre que

$(x R z)$. On a :

$(x R y)$ et $(y R z) \Rightarrow$ ~~$(x-y=0,$~~

23

$(x-y=0$ ou $x+y=10)$ et $(y-z=0$ ou $y+z=10)$

$\Rightarrow [(x-y=0$ et $y-z=0)$ ou $(x-y=0$ et $y+z=10)$

ou $(x+y=10$ et $y-z=0)$ ou $(x+y=10$ et $y+z=10)$

$\Rightarrow (x - z = 0)$ ou $(x + z = 10)$ ou $(x + z = 10)$ ou $(x - z = 0)$

$\Rightarrow (x - z = 0)$ ou $(x + z = 10)$

$\Rightarrow (x \mathcal{R} z) \Rightarrow \mathcal{R}$ est transitive.

i), ii) et iii) $\Rightarrow \mathcal{R}$ est rel. d'équivalence

2) On détermine les classes d'équivalence :

Soit $x \in \mathbb{N}$, $cl(x) = \{y \in \mathbb{N} / x \mathcal{R} y\}$

$x \mathcal{R} y \Rightarrow (x - y = 0$ ou $x + y = 10)$

$\Rightarrow (y = x$ ou $y = 10 - x)$

On a : $y = x \in \mathbb{N}$ mais $y = 10 - x \in \mathbb{N}$ si $x \leq 10$

d'où $\begin{cases} cl(x) = \{x, 10 - x\} & \text{si } x \leq 10 \\ \text{et } cl(x) = \{x\} & \text{si } x > 10 \end{cases}$

Comme $cl(5) = \{5\}$ alors on a : 24

$\begin{cases} cl(x) = \{x, 10 - x\} & \text{si } x \leq 10 \text{ et } x \neq 5 \\ \text{et } cl(x) = \{x\} & \text{si } x > 10 \text{ ou } x = 5 \end{cases}$

$Card(cl(x)) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 10 \text{ et } x \neq 5 \\ 1 & \text{si } x > 1 \text{ ou } x = 5 \end{cases}$

• L'ensemble quotient modulo la ~~relation~~ relation d'équivalence $\mathcal{R}$:

$$\mathbb{N}/\mathcal{R} = \{ cl(n) \ / n \in \mathbb{N} \}$$

$$= \left\{ \{0,10\}, \{1,9\}, \{2,8\}, \{3,7\}, \{4,6\}, \{n\} / n > 10 \text{ ou } n = 5 \right\}$$

puisque : $cl(0) = \{0, 10\} = cl(10)$

$cl(1) = \{1, 9\} = cl(9)$

$cl(2) = \{2, 8\} = cl(8)$

$cl(3) = \{3, 7\} = cl(7)$

$cl(4) = \{4, 6\} = cl(6)$

$cl(5) = \{5\}$ et $cl(n) = \{n\}$ $\forall n > 10$

Ex 08

Dans $\mathbb{R}$, la rel. $\mathcal{R}$ est définie par :

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow (x^3 - y^3 \geq 0)$$

• On vérifie que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

1) $\mathcal{R}$ réflexive : Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x^3 - x^3 = 0 \geq 0 \Rightarrow x \mathcal{R} x \Rightarrow \mathcal{R} \text{ est réflexive}$$

ii) $\mathcal{R}$ est antisymétrique : soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $(x \mathcal{R} y)$ et $(y \mathcal{R} x)$ alors

$(x^3 - y^3 \geq 0$ et $y^3 - x^3 \geq 0) \Rightarrow$

$(x^3 \geq y^3$ et $y^3 \geq x^3) \Rightarrow$

$(x^3 = y^3) \Rightarrow \boxed{x = y}$ (puisque 3 est impair)

$\Rightarrow \mathcal{R}$ est antisymétrique.

iii) $\mathcal{R}$ est transitive : soient $x, y, z \in \mathbb{R}$

avec $(x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z) \Rightarrow$

$(x^3 - y^3 \geq 0$ et $y^3 - z^3 \geq 0) \Rightarrow$

$(x^3 - z^3 \geq 0)$ (en sommant)

$\Rightarrow x \mathcal{R} z \Rightarrow \mathcal{R}$ est transitive.

i), ii) et iii) $\Rightarrow \mathcal{R}$ est rel. d'ordre

- cet ordre $\mathcal{R}$ est-il total ?

~~Oui~~ : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$(x \geq y$ ou $y \geq x)$ ($\geq$ est rel d'ordre total ds $\mathbb{R}$)

~~$\Rightarrow (x \mathcal{R} y)$ ou $(y$~~

$(x \geq y$ ou $y \geq x) \Rightarrow (x^3 \geq y^3$ ou $y^3 \geq x^3)$

$\Rightarrow (x^3 - y^3 \geq 0$ ou $y^3 - x^3 \geq 0)$

$\Rightarrow x \mathcal{R} y$ ou $y \mathcal{R} x$

$\Rightarrow \mathcal{R}$ est rel. d'ordre total.

27

.S
NG.INF

Séries

Structures Algébriques

Exercice 01 : Sur l'ensemble $G = \{1 + \frac{1}{3^n} / n \in \mathbb{Z}\}$

On définit une l.c.I Δ par :

$$\left(1 + \frac{1}{3^n}\right) \Delta \left(1 + \frac{1}{3^m}\right) = 1 + \frac{1}{3^{n+m}}$$

(G, Δ) étant un groupe abélien, trouver alors :

1) L'élement neutre e de G.
2) Le symétrique d'un élement x de G.

Exercice 02 : On définit sur $\mathbb{R}^2$, une l.c.I par : $\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$,

$$(x,y) * (x',y') = (x+x', y+y')$$

i) Montrer que $(\mathbb{R}^2, *)$ est un groupe abélien.

ii) Soit $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ le groupe multiplicatif.

On considère l'application :

$$f : (\mathbb{R}^2, *) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$$
$$(x,y) \longmapsto e^{x+y}$$

iii) Montrer que f est un morphisme de group

Exercice 03 : Soit $(\mathbb{R}^3,+)$ le groupe abélien

tel que : $(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$

$H_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x+2y-z=0\}$

$H_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x-2y=1\}$

$H_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2=1\}$

1) Montrer que H_1 est un sous groupe de $\mathbb{R}^3$

2) H_2, et H_3 sont-ils des sous-groupes de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 04 : On définit sur $\mathbb{Z}$, deux l.c.I

$*$ et Δ par : $\forall a,b\in\mathbb{Z}$:

$a*b=a+b+1$ et $a\Delta b=a+b+ab$

i) Montrer que $(\mathbb{Z},*,\Delta)$ est un anneau commutatif et unitaire.

ii) Déterminer les éléments inversibles par rapport à Δ.

iii) $(\mathbb{Z},*,\Delta)$ est-il un corps.

Exercice 05 : $(\mathbb{Z},*)$ est-il un groupe abélien ? sachant que $x*y=xy+2(x+y+1)$

. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation :

$x^{(3)}=7x+6$, ($x^{(n)}=x*x*\dots*x$ (n fois))

Structures algébriques

Exo 1 : $G = \left\{ 1 + \frac{1}{3^n} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$

Δ est une l.c.I sur G, définie par :

$$\left(1 + \frac{1}{3^n}\right) \Delta \left(1 + \frac{1}{3^m}\right) = 1 + \frac{1}{3^{n+m}}$$

(G, Δ) étant un groupe abélien, trouver :

1) L'élément neutre e de G :

$e = 1 + \frac{1}{3^p}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, et vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \left(1 + \frac{1}{3^n}\right) \Delta \left(1 + \frac{1}{3^p}\right) = \left(1 + \frac{1}{3^n}\right)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z} \, ; \, 1 + \frac{1}{3^{n+p}} = 1 + \frac{1}{3^n}$$

$$\Rightarrow 3^{n+p} = 3^n \, , \, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 3^p = 1$$

$$\Rightarrow p = 0 \Rightarrow e = 1 + \frac{1}{3^0} = 2$$

$\boxed{e = 2}$ est donc l'élément neutre

2) Le symétrique d'un élement x de G

$x \in G \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{3^n}$ avec $n \in \mathbb{Z}$

$Sym(1+\frac{1}{3^n}) \in G$ donc :

$Sym(1+\frac{1}{3^m}) = 1 + \frac{1}{3^m}$ avec $m \in \mathbb{Z}$

et verifie : $(1+\frac{1}{3^m}) \Delta (1+\frac{1}{3^n}) = e$

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{3^{m+n}} = 2$

$\Rightarrow 3^{m+n} = 1 \Rightarrow m+n = 0 \Rightarrow m = -n$

donc : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $Sym(1+\frac{1}{3^n}) = 1 + \frac{1}{3^{-n}}$

Exercice 02 : Sur $\mathbb{R}^2$, la l.c.I $*$ st définie par :

$(x,y) * (x',y') = (x+x', y+y')$

i) On montre que $(\mathbb{R}^2, *)$ st un groupe abelien : C.à.d que :

1) $*$ st associative
2) $\mathbb{R}^2$ admet un élement neutre
3) tout élt de $\mathbb{R}^2$ admet un symetrique
4) $*$ st commutative

il est préférable de montrer en premier que $*$ est commutative :

4) ($*$ est commutative) $\Leftrightarrow$ $\Big(\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2,$

$$\underbrace{(x,y) * (x',y')}_{(I)} = \underbrace{(x',y') * (x,y)}_{(II)}$$

On a : $(I) = (x,y) * (x',y') = (x+x', y+y')$

$= (x'+x, y'+y)$ (car $+$ est commutative dans $\mathbb{R}$)

$= (x',y') * (x,y). = II$

d'où $*$ est commutative.

1) ($*$ est associative) $\Leftrightarrow$ $\Big(\forall (x,y), (x',y'), (x'',y'') \in \mathbb{R}^2 ; (x,y) * [(x',y') * (x'',y'')]$

$= [(x,y) * (x',y')] * (x'',y'')$

On a : $I = (x,y) * ((x',y') * (x'',y''))$

$= (x,y) * (x'+x'', y'+y'')$

$= (x+(x'+x''), y+(y'+y''))$

$= ((x+x')+x'', (y+y')+y'')$ (car $+$ est associative) il est préférable de montrer en premier que $*$ est commutative :

4) ($*$ est commutative) $\Leftrightarrow$ $\left(\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2,\right.$

$$\underbrace{(x,y) * (x',y')}_{(I)} = \underbrace{(x',y') * (x,y)}_{(II)}$$

On a : $(I) = (x,y) * (x',y') = (x+x', y+y')$

$= (x'+x, y'+y)$ (car $+$ est commutative dans $\mathbb{R}$)

$= (x',y') * (x,y). = II$

d'où $*$ est commutative.

1) ($*$ est associative) $\Leftrightarrow$ $\left(\forall (x,y), (x',y'),\right.$
$(x'',y'') \in \mathbb{R}^2$; $(x,y) * [(x',y') * (x'',y'')]$

$= [(x,y) * (x',y')] * (x'',y'')$

On a : $I = (x,y) * ((x',y') * (x'',y''))$

$= (x,y) * (x'+x'', y'+y'')$

$= (x+(x'+x''), y+(y'+y''))$

$= ((x+x')+x'', (y+y')+y'')$ (car $+$ est associative

30

$= (x+x', y+y') * (x'', y'')$

$= [(x,y)*(x',y')] * (x'', y'') = \text{II}$

$\text{I} = \text{II} \Rightarrow *$ est associative.

2) On démontre l'existence de l'élément neutre $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$ pour $*$. On a :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ (x,y) * (e_1, e_2) = (x,y)$

$\Rightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ (x+e_1, y+e_2) = (x,y)$

$\Rightarrow \begin{cases} x + e_1 = x, & \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{et} \\ y + e_2 = y, & \forall y \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = 0 \\ \text{et} \\ e_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$ est l'élément neutre

3) L'existence de l'élément symétrique pour tout élément de $\mathbb{R}^2$?

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, supposons que $\text{Sym}_*(x,y) = (x', y') \in \mathbb{R}^2$, il vérifie donc

$(x,y) * (x',y') = (0,0)$

$\Rightarrow (x+x', y+y') = (0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+x' = 0 \\ \text{et} \\ y+y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ \text{et} \\ y' = -y \end{cases}$$

donc $\underset{*}{\mathrm{Sym}}((x,y)) = (-x,-y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

<u>conclusion</u> de 1) à 4) On en déduit que $(\mathbb{R}^2, *)$ est un groupe commutatif.

ii) $f : (\mathbb{R}^2, *) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$

$(x,y) \longmapsto e^{x+y}$

On montre que f est un morphisme de groupes. Cela est vrai ssi

$\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$:

$$\underbrace{f((x,y) * (x',y'))}_{(I)} = \underbrace{f((x,y)) \cdot f((x',y'))}_{(II)}$$

$(I) = f((x,y) * (x',y')) = f((x+x', y+y'))$
$= e^{x+x'+y+y'}$

$II = f((x,y)) \cdot f((x',y'))$
$= e^{x+y} \cdot e^{x'+y'} = e^{x+y+x'+y'}$

On a : $I = II$ puisque "+" st commutative dans $\mathbb{R}$. il en resulte que ~~f~~ f st un morphisme de groupe.

Exercice 03 : Soit le groupe abelien $(\mathbb{R}^3, +)$ tel que :
$(x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$

1) On montre que ~~$H_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$~~
$H_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+2y-z=0\}$
st un sous groupe de $(\mathbb{R}^3,+)$:
i) On verifie que l'element neutre

$(0,0,0)$ de $(\mathbb{R}^3,+)$ appartient à H_1

$(0,0,0) \in H_1 \Leftrightarrow (0+2\times0-0=0)$ (ce qui est vrai)

ii) On vérifie que la loi "+" est stable dans H_1 :

$\forall (x,y,z), (x',y',z') \in H_1$:

$\underbrace{(x,y,z)+(x',y',z')}_{(I)} \in H_1$?

On a : $(I) = (x+x', y+y', z+z') \in H_1$

ssi $x+x'+2(y+y')-(z+z')=0$ ... ①

comme (x,y,z) et $(x',y',z') \in H$ alors

$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ \text{et} \\ x'+2y'-z'=0 \end{cases}$, (On obtient par la somme :

$(x+x')+2(y+y')-(z+z')=0$ ... ①

d'où $I \in H_1$

iii) Soit $(x, y, z) \in H_1$ ... (2)

On montre que $sym(x, y, z) = (-x, -y, -z)$

$\in H_1$. Il suffit de vérifier que

$-x - 2y + z = 0$ ... (3)

d'après (2) on a : $x + 2y - z = 0$

$\Rightarrow -(x + 2y - z) = 0 \Rightarrow -x + 2(-y) + z = 0$

$\Rightarrow sym(x, y, z) \in H_1$

il en découle de i), ii) et iii) que

H_1 est un sous groupe de $(\mathbb{R}^3, +)$

2) • $H_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y = 1\}$ est-il

un sous groupe de G ?

On a : $(0, 0, 0) \notin H_2$ (puisque :

$0 - 2 \cdot 0 = 0 \neq 1$)

d'où H_2 n'est pas un sous groupe.

• $H_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$

de même pour H_3 ; il n'est pas un sous groupe puisque $(0,0,0) \notin H_3$

en effet : $0^2+0^2+0^2=0 \neq 1$)

<u>Exercice 04</u> : $*$ et Δ deux l.c.I sur $\mathbb{Z}$, définies comme suit :

$a * b = a+b+1$ et $a \Delta b = a+b+ab$

i) On montre que $(\mathbb{Z}, *, \Delta)$ est un anneau. Pour cela on vérifie que :

• 1) $(\mathbb{Z}, *)$ est un groupe abélien :

$*$ <u>commutative</u> : On a : $\forall a,b \in \mathbb{Z}$;

$a * b = a+b+1 = b+a+1 = b * a$

• <u>associative</u> : $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$

$$\underbrace{(a*b)*c}_{(I)} = \underbrace{a*(b*c)}_{(II)}$$

$I = (a+b+1) * c = a+b+1+c+1$

$II = a * (b+c+1) = a+b+c+1+1$

$I = II \Rightarrow *$ est associative

- Soit $e \in \mathbb{Z}$ l'élément neutre à déterminer. Il vérifie $\forall a \in \mathbb{Z}$:

$a * e = a$.

$\Rightarrow a+e+1 = a, \quad \forall a \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \boxed{e = -1}$ $(\in \mathbb{Z})$ est donc cet elt neutre

- Soit $a \in \mathbb{Z}$, et soit b son symétrique

alors $a * b = -1$

$a * b = -1 \Rightarrow a+b+1 = -1$

$\Rightarrow b = (-a-2)$

$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{Z}, \ \mathrm{sym}_*(a) = -a-2$

Par suite $(\mathbb{Z}, *)$ est un groupe abélien

- associativité de Δ à faire
- distributivité de Δ sur $*$:

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$, on vérifie que

$$\underbrace{a \Delta (b * c)}_{(I)} = \underbrace{(a \Delta b) * (a \Delta c)}_{(II)}.$$

$$I = a \Delta (b + c + 1) = a + b + c + 1 + a(b + c + 1)$$

$$= a + b + c + ab + ac + a$$

$$II = (a + b + ab) * (a + c + ac)$$

$$= a + b + ab + a + c + ac + 1$$

$$= 2a + b + c + ab + ac$$

On a bien $I = II$

- Δ est commutative puisque

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$, on a : $a \Delta b = a + b + ab$

$$= b + a + ba = b \Delta a$$

- Soit e' l'élément neutre de $\mathbb{Z}$ pour Δ : $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a \Delta e' = a$

$\forall a \in \mathbb{Z}$, $a + e' + ae' = a$

$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{Z}$, $e'(1 + a) = 0$

Comme $e'(1+a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$

alors $\boxed{e' = 0}$ c'est l'élément

neutre pour la loi Δ.

<u>Conclusion</u> : $(\mathbb{Z}, *, \Delta)$ est un anneau

commutatif, unitaire.

ii) les éléments inversibles p

suivant Δ :

Soit $a \in \mathbb{Z}$, supposons que

$a' = \underset{\Delta}{sym}(a)$, alors :

$$a \Delta a' = 0$$

$$\Rightarrow a + a' + aa' = 0$$

$$\Rightarrow a'(1+a) = -a$$

$$\Rightarrow a' = \frac{-a}{1+a}$$

$\frac{-a}{1+a} \in \mathbb{Z}$ ssi $a \neq -1$ d'où

les éléments inversibles pour Δ sont $\{0\}$ $\neq \mathbb{Z} - \{e_*\}$ donc $(\mathbb{Z}, *, \Delta)$ n'est pas un corps.

Exercice 05 $(\mathbb{Z}, *)$ est-il un groupe abélien

avec $x * y = xy + 2(x+y+1)$

- $x * y = xy + 2(x+y+1)$

$= yx + 2(y+x+1) = y * x$

$\Rightarrow *$ est commutative.

- $x * (y * z) = x * (yz + 2(y+z+1))$

$= x\left[yz + 2(y+z+1)\right] + 2(x + yz$

$+ 2(y+z+1) + 1]$

$= xyz + 2xy + 2xz + 2x + 2x$

$+ 2yz + 4y + 4z + 4 + 2$

$= xyz + 2xy + 2xz + 2yz + 4x$

$+ 4y + 4z + 6 \quad = \mathrm{I}$

$\mathrm{II} = (x * y) * z = (xy + 2(x+y+1)) * z$

$= (xy + 2x + 2y + 2)z + 2[xy + 2x$

$+ 2y + 2 + z + 1)$

$= xyz + 2xz + 2yz + 2z + 2xy + 4x +$

$+ 4y + 4 + 2z + 2$

$= xyz + 2xz + 2yz + 2xy + 4x + 4y$

$+ 4z + 6$

On a I = II ⇒ * associative.

- Soit e l'elt neutre alors : $\forall a \in \mathbb{Z}$

$e * a = a$

$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{Z} : e.a + 2(e + a + 1) = a$

$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{Z} : ea + 2e + 2a + 2 = a$

$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{Z} : e(a+2) + a + 2 = 0$

$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{Z} : (a+2)(e+1) = 0$

$\Rightarrow e + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{e = -1}$

- Soit $a \in \mathbb{Z}$, on cherche son symétrique $a' = \underset{*}{\text{sym}}(a) \in \mathbb{Z}$, il vérifie :

$a' * a = -1 \Rightarrow a'a + 2(a' + a + 1) = 1$

$\Rightarrow a'a + 2a' + 2a = -3$

$\Rightarrow a'[a+2] = -2a - 3$

$$\Rightarrow a' = \frac{-2a-3}{a+2}$$

, pour $a = -2$ par exemple n'admet pas de symétrique (ce n'est pas le seul, il y a la condition $\frac{-2a-3}{a+2} \in \mathbb{Z}$)

$\text{sym}(-2)$ n'existe pas, donc $(\mathbb{Z}, *)$ n'est pas un groupe.

- Résoudre l'équation :

$x^{(3)} = 7x + 6 \Leftrightarrow (x * x) * x = 7x + 6$

$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 2) * x = 7x + 6$

$\Rightarrow x^3 + 4x^2 + 2x + 2(x^2 + 5x + 3) = 7x + 6$

$\Rightarrow x^3+6x^2+12x+\cancel{6}=7x+\cancel{6}$

$\Rightarrow x^3+6x^2+5x=0$

$\Rightarrow x[x^2+6x+5)=0$

$\Rightarrow x=0$ ou $x^2+6x+5=0$

$\Delta=36-20=16$.

$x^2+6x+5=0$ admet les solutions :

$x=-5$ ou $x=-1$

donc les solution de l'equation

$x^{(3)}=7x+6$ sont : $0, -1, -5$.