Université de Sétif 1 — 04 Juillet 2023
Faculté des sciences, Tronc commun Mi — 13h15 - 14h45.
$1^{ère}$ Informatique, Mathématiques, Ing Info

Rattrapage d'Analyse 1

Les exercices sont indépendants. **Justifiez toutes vos réponses.**

Exercice 1 : $(05.5\ pts)$

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite récurrente définie par $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \ ; \quad n \geq 1 \end{cases}$.

1/ Montrer que $u_n \leq 2 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
2/ Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
3/ Etudier la nature de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$,
et déterminer sa limite dans le cas où elle est convergente.

Exercice 2 : $(06.5 pts)$
a) En utilisant la définition de la limite d'une fonction, montrer que :

$$\lim_{x\to 4} (2x - 1) = 7 \qquad , \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

b) Calculer les limites suivantes en utilisant les fontions équivalentes :

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{(1-\cos x)\sin x}{x^3}} \qquad , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos 2x}$$

Exercice 3 : $(08\ pts)$
I)
Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^\alpha \sin(\frac{1}{x})}{1 - \cos x} \quad (\alpha \in \mathbb{R} \ ; \ \alpha \geq 2 \ ; \ x \in [-\pi, \pi] \ )$$

Etudier suivant les valeurs de α le prolongement par continuité de f.

II)
Soient x et y deux réels avec $0 < x < y$:

Montrer que

$$x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y$$

Bon courage

Corrigé d'examen Rattrapage d'Analyse 1 - 2022/2023

__Exercice 1__ $(05.5\ pts)$

On a $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}\ ;\ \ n \geq 1 \end{cases}$. 1/ Montrons que $u_n \leq 2$ (par récurrence)

Pour n=1 : $u_1 = \sqrt{2} \leq 2$ est vraie...................**(0.5pts)**

Supposons que $u_n \leq 2$ et on montre que $u_{n+1} \leq 2$?

On a $u_n \leq 2 \Rightarrow u_n + 2 \leq 4 \Rightarrow \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{4} \Rightarrow u_{n+1} \leq 2.$......................**(0.5pts)**

2/ La monotonie: $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} = f(u_n)$ où $f(x) = \sqrt{x+2}$: On a

$\forall x > -2 : f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0$

donc f est croissante. D'où (u_n) est croissante.......................**(01.5pts)**

3/ D'aprés 1/ : $u_n \leq 2$ donc la suite (u_n) est majorée

et (u_n) croissante alors elle est convergente......................**(01.5pts)**

La limite : (u_n) convergente alors il existe $l \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Comme $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} = f(u_n)$ alors $f(l) = l \Leftrightarrow \sqrt{l+2} = l$

$l^2 - l - 2 = 0 \Rightarrow l = 2$ ou $l = -1$. $u_1 = \sqrt{2}$ et $u_n \geq 0$ alors

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l = 2$.....................**(01.5pts)**

__Exercice 2__ : $\left(06.5\ pts\right)$

I)

1) $\lim\limits_{x\to4}(2x-1) = 7 \Leftrightarrow$

$(\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ |x-4| < \delta \Rightarrow |2x-8| < \epsilon)$ **(0.5pts)**

$|2x-8| < \epsilon \Leftrightarrow 2|x-4| < \epsilon \Leftrightarrow |x-4| < \frac{\epsilon}{2}$ **(0.5pts)**

Alors il suffit de prendre $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. **(0.5pts)**

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \Leftrightarrow$

$(\forall A > 0, \exists B > 0 : \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ x > B \Rightarrow \ln x > A)$ **(0.5pts)**

$\ln x > A \Leftrightarrow x > e^A$ **(0.5pts)**

Alors il suffit de prendre $B = e^A$. **(0.5pts)**

II)

Calcul des limites

1) $\lim\limits_{x\to0} e^{\frac{(1-\cos x)\sin x}{x^3}}$,

$$ona\ \frac{(1-\cos x)\sin x}{x^3} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}x}{x^3} = \frac{1}{2},$$ **(01 pts)**

donc

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{(1-\cos x)\sin x}{x^3}} \underset{0}{\sim} e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}. \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{1-\cos(2x)}$

on a

$$* \ \ln(\cos x) = \ln(1+u(x)) \quad (u(x) = \cos x - 1 \text{ et } \lim_{x\to 0} u(x) = 0\ ) \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

$$\underset{0}{\sim} u(x) = \cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}. \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

$$* \ 1-\cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \Rightarrow 1-\cos 2x \underset{0}{\sim} \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2 \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

Donc

$$\frac{\ln(\cos x)}{1-\cos(2x)} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{2x^2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{1-\cos(2x)} = -\frac{1}{4}. \qquad \textbf{(01 pts)}$$

Exercice 3 (08 *pts*)

$$f(x) = \frac{x^\alpha \sin\frac{1}{x}}{1-\cos x}, \qquad \left(\alpha \in \mathbb{R};\ \alpha \geq 2;\ x \in [-\pi, \pi]\right).$$

▹ f est définie si

$$1-\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (0.5pts)$$

Donc

$$D_f = [-\pi, \pi] - \{0\}. \qquad (0.5pts)$$

▹ Pour étudier le prolongement par continuité de f sur D_f on calcule :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha \sin\frac{1}{x}}{1-\cos x} \qquad (0.5pts)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha \sin\frac{1}{x}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha \sin\frac{1}{x}}{2\sin^2\frac{x}{2}} \ (\text{car } \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}) \qquad (0.5pts)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha \sin\frac{1}{x}}{2\frac{x^2}{4}} \ (\text{car } \sin x \underset{0}{\sim} x) \qquad (0.5pts)$$

$$= \lim_{x\to 0} 2x^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x}. \qquad (0.5pts)$$

$$* \text{ Si } \alpha = 2 : \lim_{x\to 0} f(x) = 2\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \nexists. \qquad (0.5pts)$$

$$* \text{ Si } \alpha > 2 : \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2x^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x} = 0. \qquad (0.5pts)$$

Alors on peut prolonger f par continuité dans le cas où $\alpha > 2$ et son prolongement g défini par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha} \sin \frac{1}{x}}{1 - \cos x}, & \text{si } x \in [-\pi, \pi] - \{0\}, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases} \qquad \left(01\, pts\right)$$

II)

Soit $g(t) = \ln t$. Appliquons le théorème des accroissement finis sur $[x, y]$. $(0.5pts)$

il existe

$$c \in \left]x, y\right[, \qquad g(y) - g(x) = g'(c)\ (y - x) \qquad (0.5pts)$$

Soit

$$\ln y - \ln x = \frac{1}{c}(y - x) \qquad (0.5pts)$$

Donc

$$\frac{y - x}{\ln y - \ln x} = \frac{1}{c} \qquad (0.5pts)$$

Or $x < c < y$ donc $\frac{1}{y} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ $(0.5pts)$

ce qui donne les inégalités recherchées :

$$x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y \qquad (0.5pts)$$