Structure machine
Chapitre VI
(Définitions sur l'Algèbre de Boole)

Mokrani Hocine
mokrani.hocine@univ-boumerdes.dz

Algèbre de Boole (Définition)

- Origine & définition:
  Mathématicien anglais Georges Boole, 1815 – 1864

  Algèbre de Boole traite des opérations et des règles applicables à un ensemble réduit a deux valeur {0,1}. 0 pour faux et 1 pour vrai.

- Variable booléenne: variable qui prend une valeur 0 ou 1.

- Trois opérateurs de base:
  - NON / NOT ( ) :
    Inverse/complémente la valeur de la variable a.
  - ET / AND (a.b ou ab)
    Retourne 1 si a et b sont à 1, sinon retourne 0.
  - OU / OR (a + b):
    Retourne 1 si a ou b est à 1, sinon retourne 0.

Tables de vérité des opérations de base

Table de vérité: Table qui définit la valeur de l'opération ou la fonction pour chaque combinaison de valeurs possibles en entrée.

NON logique

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

OU logique

a	b	$a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ET logique

a	b	$a.b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Algèbre de Boole
(Propriétés de base)

- Involution:
  - $\overline{\overline{a}}=a$
- Idempotence:
  - $a+a=a$
  - $a.a=a$
- Complémentarité:
  - $a+\overline{a}=1$
  - $a.\overline{a}=0$
- Éléments neutres:
  - $a=a+0=0+a$
  - $a=a.1=1.a$
- Absorbants:
  - $a+1=1$
  - $a.0=0$

Algèbre de Boole
(Propriétés de base)

- Associativité :
  - $(a.b).c=a.(b.c)$
  - $(a+b)+c=a+(b+c)$
- Distributivité :
  - $a.(b+c)=a.b+a.c$
  - $a+(b.c)=(a+b).(a+c)$
- Règles de De Morgan :
  - $\overline{a+b}=\bar{a}.\bar{b}$
  - $\overline{a.b}=\bar{a}+\bar{b}$
- Optimisations :
  - $a+\bar{a}b=a+b$
  - $a+bc=(a+b)(a+c)$

Fonction logique

- Fonction logique:
  - Prend en entrée **une ou plusieurs** variables booléennes.
  - Retourne **une valeur** booléenne en fonction des variables d'entrée.

- Deux méthodes de définition:
  - Par son expression logique (Fonction logique): Combinaison des variables de la fonction via les opérateurs de base de l'algèbre de Boole.

$$f(a,b,c)=ab+\bar{b}c+a\bar{c}$$

  - Par sa table de vérité: Table qui définit la valeur de la fonction pour chaque combinaison de valeurs possibles en entrée.

Table de vérité de la fonction

$$f(a,b,c)=ab+\bar{b}c+a\bar{c}$$

a	b	c	$\bar{b}$	$\bar{c}$	ab	$\bar{b}$c	a$\bar{c}$	f(a,b,c)
0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1

Equivalence entre les fonctions logiques

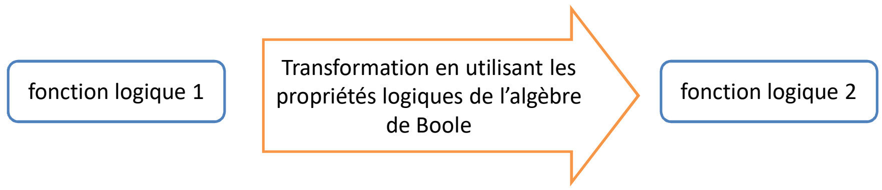
Deux fonctions logiques sont équivalentes (identiques)
si et seulement si

pour les mêmes valeurs des entrées, les deux fonctions produisent la même valeur de sortie.

Comment vérifier cette équivalence ?

Par deux méthodes

- On peut monter en utilisant les propriétés de algèbre de Boole que les fonctions (expressions) logiques sont Identiques.



- Leurs tables de vérité sont identiques : pour les mêmes combinaisons des valeurs, la sortie des deux tables de vérité est la même.

Exemples

Soient

- $f1(a,b,c)=a.b+a.\overline{b}+c$
- $f2(a,c)=a+c$

Montrer que les formules f1 et f2 sont équivalentes? Par les règles d'algèbre de Boole et par la comparaison des tables de vérité.

$$\begin{aligned} f1(a,b,c) &= a.b+a.\overline{b}+c \\ &= (a.(b+\overline{b}))+c \\ &= (a.1)+c \\ &= a+c \\ &= f2(a,c) \end{aligned}$$

La vérification de l'équivalence entre les deux formules en utilisant la table de vérité est proposé comme devoir à domicile.

Conclusion

- Notions de bases sur l’algèbre de Boole.

- Dans le cours suivant:
  - Formes canoniques.
  - Passage de l’expression algébrique vers la table de vérité.
  - Passage de la table de vérité vers l’expression algébrique.