University M'Hamed Bougara of Boumerdes

Faculty of Sciences
Department of Mathematics
First-Year C S and C E

Academic year : 2023/2024
Date: 11 / 06 / 2024
Duration: 1h00

قسم الرياضيات
كلية العلوم

Examen de rattrapage-Analyse 1

Exercise 1 (7 points). *Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ définie par:*

$$\mathcal{A} = \{\, f(x) = (\alpha - 1)\, x,\ x \in]-1, 2],\ \alpha \in \mathbb{N} \,\}.$$

1. *Rappeller le théorème de caractérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure.*
2. *Calculer la dérivée de f et en déduire sa variation.*
3. *Trouver, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum de $\mathcal{A}$. Justifiez votre réponse.*

Exercise 2 (6 points). *On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par :*

$$\begin{cases} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n), \\ v_n = u_n - \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

1. *Montrer que:* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}.$
2. *Étudier la monotonie de $(u_n)_n$ et de $(v_n)_n$.*
3. *En déduire que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.*

Exercise 3 (7 points). *Soit f_n une fonction définie par:*

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \cos(\frac{\pi}{x}), & x \neq 0,\ n \in \mathbb{N}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

1. *Pour quelles valeurs de n la fonction f_n est-elle continue ? dérivable ?*
2. *Pour quelles valeurs de n la fonction f_n' est-elle continue ? dérivable ?*
3. *Citer le théorème de Rolle. Peut-on l'appliquer à la fonction f_4 sur l'intervalle $[1, 2]$?*

Bonne chance