:S

NG.INF

Structures Algèbriques

Exercice 01 : Sur l'ensemble $G = \{1 + \frac{1}{3^n} / n \in \mathbb{Z}\}$

On définit une l.c.I Δ par :

$$\left(1+\frac{1}{3^n}\right) \Delta \left(1+\frac{1}{3^m}\right) = 1 + \frac{1}{3^{n+m}}$$

(G, Δ) étant un groupe abélien, trouver alors :

1) L'élement neutre e de G.

2) Le symétrique d'un élement x de G.

Exercice 02 : On définit sur $\mathbb{R}^2$, une l.c.I

par : $\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$,

$(x,y) * (x',y') = (x+x', y+y')$

i) Montrer que $(\mathbb{R}^2, *)$ est un groupe abélien.

ii) Soit $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ le groupe multiplicatif.

On considère l'application :

$$f : (\mathbb{R}^2, *) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$$
$$(x,y) \longmapsto e^{x+y}$$

iii) Montrer que f est un morphisme de groupes

Exercice 03 : Soit $(\mathbb{R}^3, +)$ le groupe abélien telque : $(x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$

$H_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - z = 0\}$

$H_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y = 1\}$

$H_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

1) Montrer que H_1 est un sous groupe de $\mathbb{R}^3$

2) H_2, et H_3 sont-ils des sous-groupes de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 04 : On définit sur $\mathbb{Z}$, deux l.c.I $*$ et Δ par : $\forall a, b \in \mathbb{Z}$:

$a * b = a + b + 1$ et $a \Delta b = a + b + ab$

i) Montrer que $(\mathbb{Z}, *, \Delta)$ est un anneau commutatif et unitaire.

ii) Déterminer les éléments inversibles par rapport à Δ.

iii) $(\mathbb{Z}, *, \Delta)$ est-il un corps.

Exercice 05 : $(\mathbb{Z}, *)$ est-il un groupe abelien sachant que $x * y = xy + 2(x+y+1)$

. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation :

$x^{(3)} = 7x + 6$, $(x^{(n)} = x * x * \dots * x$ n fois