Table des matières

Chapitre 1

Différents types de raisonnement en mathématiques

1.1 Introduction

Il est important de trouver un moyen ou une méthode pour répondre à un certain problème, pour cela on s'inspire de quelques techniques ou raisonnements.

1.2 Raisonnement direct

Il consiste à utiliser les informations (hypothèses) de l'énoncé ainsi que des résultats connus (théorèmes ou définitions), afin de construire une démonstration qui nous permet d'obtenir le résultat voulu.

Exemple 1.1 *Pour* $a, b \in \mathbb{R}$. *On montre que :*

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0,$$

d'où

$$a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

ce qui implique
$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

1.3 Raisonnement direct par une implication

Le résultat à démontrer est de la forme :
$$P \Rightarrow Q.$$

Pour montrer ce résultat, on suppose que la proposition P est vraie et on montre alors la proposition Q est vraie.

Exemple 1.2 *Montrons que :*
$$\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1-\sqrt{x} \Rightarrow x = 0.$$

On a :
$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1-\sqrt{x} &\Rightarrow 1 = (1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}),\\ &\Rightarrow 1 = 1-x,\\ &\Rightarrow x = 0,\end{aligned}$$

ce qui établit le résultat.

1.4 Raisonnement par contraposée

Ce type de raisonnement est utilisé lorsque la démonstration directe est difficile $P \Rightarrow Q$. Il s'agit dans ce cas de montrer que :
$$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}.$$

Exemple 1.3 *Montrons que :*
$$x \neq 1 \ \wedge \ y \neq 1 \Rightarrow x+y-xy-1 \neq 0$$

La contraposée de cette propriété est donnée par :
$$x+y-xy-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \ \vee \ y = 1.$$

On a :

$$
\begin{aligned}
x+y-xy-1=0 &\Rightarrow x(1-y)+y-1=0\\
&\Rightarrow x(1-y)-(1-y)=0\\
&\Rightarrow (1-x)(1-y)\\
&\Rightarrow 1-x=0 \;\vee\; 1-y=0\\
&\Rightarrow x=1 \;\vee\; y=1.
\end{aligned}
$$

Exemple 1.4 *Montrons que si l'entier naturel n^2 est pair, alors n est pair. Au lieu d'utiliser un raisonnement direct il est plus facile d'effectuer une démonstration par contraposée, c'est à dire montrons que si n est impair, alors n^2 est impair, on a*

$$\forall n \quad \textit{entier impair} \quad \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k+1.$$

Alors

$$
\begin{aligned}
n^2 &= (2k+1)^2\\
&= 4k^2+4k+1\\
&= 2(2k^2+2k)+1.
\end{aligned}
$$

1.5 Raisonnement par l'absurde

Il consiste à supposer que la proposition que l'on veut démontrer est faussse et puis on essaye de trouver une contradiction.

Exemple 1.5 . *Montrons que :* $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sqrt{n^2+1} \geq n$. *Supposons que*

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \sqrt{n^2+1} < n,$$

alors

$$
\begin{aligned}
\sqrt{n^2+1} < n &\Rightarrow n^2+1 < n^2\\
&\Rightarrow 1 < 0, \textbf{\textit{contradiction}}.
\end{aligned}
$$

1.6 Raisonnement par contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type $\forall x \in E \quad P(x)$ est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à l'assertion $\forall x \in E \quad P(x)$.

Exemple 1.6 *L'assertion tout entier positif est somme de trois carrés est-elle vraie ? fausse ?*
Démonstration. *L'énoncé se traduit ainsi* $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a, b, c) \in \mathbb{N}^3, n = a^2 + b^2 + c^2$. *On a*

$$\begin{aligned}
0 &= 0^2 + 0^2 + 0^2, \\
1 &= 1^2 + 0^2 + 0^2, \\
2 &= 1^2 + 1^2 + 0^2, \\
3 &= 1^2 + 1^2 + 1^2, \\
4 &= 2^2 + 0^2 + 0^2, \\
5 &= 2^2 + 1^2 + 0^2, \\
6 &= 2^2 + 1^2 + 1^2.
\end{aligned}$$

le nombre 7 n'est pas somme de trois carrés. Cela prouve que l'assertion est fausse. □

1.7 Raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes : lors de l'initialisation on prouve $P(0)$. Pour l'étape d'hérédité, on suppose $n \geq 0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n+1)$ au rang suivant est vraie. Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.7 *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.
Démonstration. *Pour* $n \geq 0$, *notons* $P(n)$ *l'assertion suivante :*

$$2^n > n.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \geq 0$.
Initialisation. *Pour* $n = 0$ *nous avons* $2^0 = 1 > 0$. *Donc* $P(0)$ *est vraie.*

Hérédité. *Fixons* $n \geq 0$. *Supposons que* $P(n)$ *soit vraie. Nous allons montrer que* $P(n+1)$ *est vraie.*

$$\begin{aligned} 2^{n+1} = 2^n + 2^n > n + 2^n & \qquad \textit{car par } P(n) \textit{ nous savons } 2^n > n, \\ > n + 1 & \qquad \textit{car } 2^n \geq 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ *est vraie.*

Conclusion. *Par le principe de récurrence* $P(n)$ *est vrai pour tout* $n \geq 0$*, c'est-à-dire* $2^n > n$ *pour tout* $n \geq 0$. $\square$

Chapitre 2

Nombres réels

2.1 Introduction

La résolution de certaines équations algébriques donnent différents types de nombres dont :

Ensemble des entiers naturels : l'ensemble des entiers naturels noté $\mathbb{N}$, est donné par :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots n, \ldots\}.$$

Ensemble des entiers relatifs : Les entiers naturels ne peuvent pas résoudre certaines équation comme : $x + 5 = 0$. On doit alors construire un ensemble plus grand que $\mathbb{N}$. Cet ensemble noté $\mathbb{Z}$, est appelé l'ensemble des entiers relatifs :

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Ensemble des nombres rationnels : La solution de l'équation $2x - 5 = 0$, dans $\mathbb{Z}$ montre que l'ensemble des entiers relatifs est insuffisant $(x = 2,5 \notin \mathbb{Z})$. Il faut alors introduire un ensemble agrandi du précédent. Cet ensemble noté $\mathbb{Q}$ est appelé ensemble des nombres rationnels.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Signalons que le nombre rationnel $\frac{a}{b}$, peut s'écrire en plus de sa forme fractionnaire comme un développement décimal limité : $\frac{5}{2} = 2.5$ ou illimité périodique : $\frac{1}{3} = 0.333333...$

Ensemble des nombres réels : L'équation $x^2 - 2 = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{Q}$ car

($x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). D'où la nécessite de la construction d'un ensemble de nombres plus vaste que $\mathbb{Q}$. Cet ensemble noté $\mathbb{R}$ est appelé l'ensemble des nombres réels formé des nombres rationnels et irrationnels.

Définition 2.1 *Le nombre irrationnel ce qui signifie qu'on peut pas écrire $\frac{a}{b}$ (tout développement décimal illimité non périodique), qui appartient à $\mathbb{R}$ et n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. On note par :* $\mathbb{R} \mid \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \text{ et } x \notin \mathbb{Q}\}$*, l'ensemble des nombres irrationnels.*

Exemple 2.2

- $\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766 8\cdots$
- $\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494\cdots$

Dans ce chapitre, nous rappelons d'abord les principales règles de calcul dans l'ensemble des nombres réels. Nous précisons ensuite la propriété de la borne supérieure et la borne inférieure. À la fin de ce chapitre, nous étudions la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

2.2 Principales règles de calcul

2.2.1 Propriétés calculatoires

L'objet de cette partie est de rappeler les principales propriétés et formules calculatoires concernant les nombres réels.

1. $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x \leq y \\ u \leq v \end{cases} \Rightarrow x + u \leq y + v.$
2. $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x \leq y \\ u < v \end{cases} \Rightarrow x + u < y + v.$
3. $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq u \leq v \end{cases} \Rightarrow xu < yv.$
4. $\forall x, y, u \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x \leq y \\ u \geq 0 \end{cases} \Rightarrow xu \leq yu.$
5. $\forall x, y, u \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x \leq y \\ u \leq 0 \end{cases} \Rightarrow xu \geq yu.$
6. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \quad 0 < x \leq y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}.$

7. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*,\ x \leq y < 0 \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} < 0.$
8. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \ x < 0 < y \Rightarrow \frac{1}{x} < 0 < \frac{1}{y}.$
9. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, \quad x \leq y \Leftrightarrow x^n \leq y^n.$
10. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N},\ \ x \leq 1 \text{ et } n \leq m \Rightarrow x^n \geq x^m.$
11. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N},\ \ x \geq 1 \text{ et } n \leq m \Rightarrow x^n \leq x^m.$

2.2.2 Formule du binôme de Newton

Proposition 2.3 *Soient x et y deux réels et n un entier non nul. On a*

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k \\ &= C_n^0 x^{n-0} y^0 + C_n^1 x^{n-1} y^1 + \cdots + C_n^n x^0 y^n,\end{aligned}$$

où

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)\,!}$$ *(coefficient binomial, lu : "k parmi n" ou "combinaison de k parmi n").*

Propriétés 2.4 *Pour tous entiers naturels n et k :*

1. *Pour $n \geq 0$, on a*
$$C_n^0 = C_n^n = 1. \tag{2.1}$$
2. *Pour $k > n$, on a*
$$C_n^k = 0. \tag{2.2}$$
3. *Pour $n \geq k$, on a*
$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}. \tag{2.3}$$

Démonstration. On montre la propriété (2.3), on a

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)\,!} + \frac{n!}{(k+1)\,!\,(n-(k+1))\,!}$$

comme $(k+1)\,! = k!\,(k+1)$ et $(n-k)\,! = (n-k-1)\,!\,(n-k)$, on obtient

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k+1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)\,!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)\,!}\left(\frac{n+1}{(n-k)\,(k+1)}\right) \\ &= \frac{(n+1)\,!}{(k+1)\,!\,(n-k)\,!} \\ &= C_{n+1}^{k+1}. \end{aligned}$$

□

Triangle de Pascal

Voici le triangle de Pascal qui donne les premières valeurs des coefficients binomiaux, obtenue à l'aide de la relation (2.3) pour $0 \leq k \leq 5$.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

On va montrer maintenant la formule du binôme du Newton, par récurrence sur n. **Démonstration.** Hypothèse de récurrence :

$$P\,(n): \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}.$$

Initialisation : Pour $n = 0$, $(x+y)^0 = 1 = C_0^0 x^0 y^{0-0}$ donc $P\,(0)$ est vraie

Hérédité : Supposons l'hypothèse de récurrence vraie au rang n. Montrons que

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k y^{n+1-k}$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} \\
&= x\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} + y\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n+1-k} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} x^k y^{n+1-k} + C_n^n x^{n+1} y^{n+1-(n+1)}\right) + \left(C_n^0 x^0 y^{n+1-0} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k y^{n+1-k}\right) \\
&= y^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} x^k y^{n+1-k}\left(C_n^k + C_n^{k-1}\right)\right) + x^{n+1},
\end{aligned}$$

par la relation de pascal on déduit

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= C_{n+1}^0 x^0 y^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k x^k y^{n+1-k}\right) + C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} y^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k y^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.5 *Pour tous réels x et y et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\begin{aligned}
x^n - y^n &= (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k \\
&= (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Démonstration. La formule se démontre par le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
(x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k &= x\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k - y\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} y^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^{k+1}
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}(x-y)\sum_{k=0}^{n-1}x^{n-1-k}y^k &= \sum_{k=0}^{n-1}x^{n-k}y^k - \sum_{i=0}^{n}x^{n-1-(i-1)}y^{(i-1)+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}x^{n-k}y^k - \sum_{i=1}^{n}x^{n-i}y^i\\ &= \left(x^n + \sum_{k=1}^{n-1}x^{n-k}y^k\right) - \left(\sum_{i=1}^{n-1}x^{n-i}y^i + y^n\right)\\ &= x^n - y^n,\end{aligned}$$

puisque les termes des deux sommes s'annulent. □

Exemple 2.6 *Pour tout entier* $n \geq 1$*, on a*

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1),$$

cette factorisation souvent utilisée mérite d'être retenue.

Remarque 2.7 $x^n + y^n$ *se factorise seulement si* n *est impair. Par exemple :*

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2).$$

2.2.3 Valeur absolue

Définition 2.8 *On appelle valeur absolue du réel x le réel positif noté* $|x|$ *défini par*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Propriétés 2.9 *On a*

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \max\{x, -x\}$ *et* $|-x| = |x|$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |xy| = |x|\,|y|$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ -|x| \leq x \leq |x|$
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(\sqrt{x^2} = |x|\right) \wedge \left(|x|^2 = x^2\right)$

6. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+, \ |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
7. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+, \ |x| \geq a \Leftrightarrow ((x \geq a) \vee (x \leq -a))$
8. $\forall x \in \mathbb{R}, \ |x^n| = |x|^n$.
9. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ |x+y| \leq |x| + |y|$ *(1re inégalité triangulaire)*
10. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, ||x| - |y|| \leq |x-y|$ *(2^{e} inégalité triangulaire)*

Démonstration.

1. Montrons la propriété 9. On a par définition de la valeur absolue :

$$-\mid x \mid \leq x \leq \mid x \mid \quad \text{et} \quad -\mid y \mid \leq y \leq \mid y \mid .$$

En additionnant membre à membre, on obtient

$$-(\mid x \mid + \mid y \mid) \leq x + y \leq \mid x \mid + \mid x \mid,$$

donc

$$|x+y| \leq |x| + |y| .$$

2. Montrons la propriété 10. On a

$$\begin{cases} \mid x \mid = \mid x - y + y \mid \leq \mid x - y \mid + \mid y \mid \\ \mid y \mid = \mid y - x + x \mid \leq \mid y - x \mid + \mid x \mid \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mid x \mid - \mid y \mid \leq \mid x - y \mid & (a) \\ \mid x \mid - \mid y \mid \geq - \mid x - y \mid & (b) \end{cases}$$

(a) et (b) $\Leftrightarrow - \mid x-y \mid \leq \mid x \mid - \mid y \mid \leq \mid x-y \mid \Leftrightarrow \parallel x \mid - \mid y \parallel \leq \mid x - y \mid$.

□

2.2.4 Partie entière

Théorème 2.10 (Partie entière) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha \leq x < \alpha + 1$. L'entier relatif α est appelé* ***partie entière*** *du réel x et est noté $E(x)$ ou $[x]$.*

Exemple 2.11 *On a*

$$E(\pi) = 3, \qquad E(2,99999) = 2,$$
$$E(-\pi) = -4, \qquad E(-4) = -4.$$

Définition 2.12 *On appelle fonction de la partie entière l'application*

$$\begin{aligned} E :& \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \\ & x \mapsto E(x) \end{aligned}$$

La fonction de la partie entière possède les propriétés suivantes :

Propriétés 2.13 *Soit x un nombre réel. On*

1. $E(x) \leq x < E(x) + 1$ *et* $x - 1 < E(x) \leq x$.
2. $E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.
3. $\forall n \in \mathbb{Z}\ \ E(x+n) = E(x) + n$.
4. *La fonction* $x \mapsto E(x)$ *est croissante sur* $\mathbb{R}$.
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}\quad E(x+y) - E(x) - E(y) \in \{0, 1\}$.

Démonstration. On montre la propriété 5, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a les inégalités :

$$\begin{cases} x - 1 < E(x) \leq x \\ y - 1 < E(y) \leq y \\ x + y - 1 < E(x+y) \leq x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x \leq -E(x) < -x + 1, \\ -y \leq -E(y) < -y + 1, \\ x + y - 1 < E(x+y) \leq x + y. \end{cases}$$

En sommant membre à membre, on obtient

$$-1 < E(x+y) - E(x) - E(y) < +2,$$

comme $E(x+y) - E(x) - E(y) \in \mathbb{Z}$, alors

$$E(x+y) - E(x) - E(y) \in \{0, 1\}.$$

□

2.2.5 Intervalles

Définition 2.14 *Un intervalle de* $\mathbb{R}$ *est un sous-ensemble* I *de* $\mathbb{R}$ *vérifiant la propriété :*

$$\forall a, b \in I\ \ \forall x \in \mathbb{R}\quad (a \leq x \leq b \implies x \in I).$$

Autrement dit, un intervalle est défini comme un ensemble où tout réel compris entre deux réels de l'ensemble appartient à cet ensemble.

Les types d'intervalles

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. On définit les intervalles d'extrémités a et b suivants,

1. Un intervalle fermé : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \text{ et } x \leq b\}$
2. Un intervalle ouvert borné : $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \text{ et } x < b\}$
3. Un intervalle semi-ouvert borné :
$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \text{ et } x < b\} \text{ ou }]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \text{ et } x \leq b\}$$
4. Un intervalle minoré non majoré :
$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \text{ ou }]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\ \}$$
5. Un intervalle majoré non minoré : $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ ou $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
6. Un intervalle ni majoré ni minoré : $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Exemple 2.15
- $I = [1, 2]$, *est un intervalle.*
- $J = [4, 5]$, *est un intervalle.*
- *Par contre :* $D = I \cup J = [1, 2] \cup [4, 5]$ *n'est pas un intervalle, car : pour* $x \in I \subset D$ *et* $y \in J \subset D$ $\exists z = 3,\ \ x < z = 3 < y$ *mais* $3 \notin D$.

2.2.6 Radicaux

Définition 2.16 *Pour* $x \in \mathbb{R}^+$, *on appelle* ***racine carrée*** *de* x *et on note* $\sqrt{x}$ *l'unique élément* y *de* $\mathbb{R}^+$ *tel que* $y^2 = x$. *Plus généralement*
- *si* n *est un entier naturel pair* $(n \geq 2)$ *et si* $x \in \mathbb{R}^+$, *on appelle* ***racine*** n***-ième*** *de* x *et on note* $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ *l'unique élément* y *de* $\mathbb{R}^+$ *tel que* $y^n = x$;
- *si* n *est impair, la racine* n*-ième de* x *est définie pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *: c'est l'unique réel* y *tel que* $y^n = x$.

Ainsi, par définition,
$$\textit{si } n \textit{ est pair } \forall x \in \mathbb{R}^+ \ \ y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow y^n = x \ \textit{ et } y \geq 0$$
$$\textit{si } n \textit{ est impair } \forall x \in \mathbb{R} \ \ y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow y^n = x$$

Exemple 2.17 $\sqrt[3]{-8} = -2$ *et* $\sqrt[3]{8} = 2$.

Remarque 2.18 *On appelle* ***quantité conjuguée*** *de* $\sqrt{a}+\epsilon\sqrt{b}$ $(\epsilon = \pm 1)$ *l'expression* $\sqrt{a}-\epsilon\sqrt{b}$; *les égalités suivantes :*

$$\sqrt{a} + \epsilon\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} - \epsilon\sqrt{b}}$$
$$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}},$$

sont très utiles pour étudier les expressions irrationnelles.

2.3 Borne supérieure, borne inférieure dans $\mathbb{R}$

L'ensemble des nombres rationnels possède de nombreuses propriétés qui se prêtent bien aux calculs courants, mais il s'avère vite insuffisant pour les besoins de l'analyse et de la géométrie. L'ensemble des réels possède une propriété supplémentaire qui joue un rôle fondamental : c'est la propriété de la borne supérieure et la borne inférieure. Elle aura des conséquences dans tous les domaines de l'analyse : convergence des suites, continuité des fonctions, limites, etc.

2.3.1 Majorants, minorants

Définition 2.19 *Soit* A *une partie non vide de* $\mathbb{R}$.

1. *On dit que* A *est majorée si et seulement si* $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A \;\; x \leq M$.
2. *On dit que* A *est minorée si et seulement si* $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A \;\; x \geq m$.
3. *On dit que* A *est bornée si et seulement si* A *est majorée et minorée :*

$$\exists (M, m) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in A \;\; m \leq x \leq M.$$

Exemple 2.20 *On a*

1. 5 *est un majorant de* $]0, 1[$.
2. $-7, -\pi, 0$ *sont des minorants de* $]0, +\infty[$ *mais il n'y a pas de majorant.*
3. *Soit* $A = [0, 1[$.

- *les majorants de* A *sont exactement les éléments de* $[1, +\infty[$,
- *les minorants de* A *sont exactement les éléments de* $]-\infty, 0]$.

Remarque 2.21 *Les majorants et les minorants n'existent pas toujours quand ils existent ne sont pas uniques.*

2.3.2 Maximum, minimum

Définition 2.22 *Soit* A *une partie non vide de* $\mathbb{R}$.

1. *Un réel* α *est un plus grand élément de* A *si :* $\alpha \in A, \ \forall x \in A \ x \leq \alpha$, *on le note alors :* $\alpha = \max A$.
2. *Un réel* β *est un plus petit élément de* A *si :* $\beta \in A, \ \forall x \in A \ x \geq \beta$, *on le note alors :* $\beta = \min A$.

Le plus grand élément s'appelle aussi le maximum et le plus petit élément, le minimum.

Exemple 2.23

1. $\max[a, b] = b$, $\min[a, b] = a$.
2. *L'intervalle* $]a, b[$ *n'a pas de plus grand élément ni de plus petit élément.*
3. *Soit* $[0, 1[$, *on a*
   - $\min[0, 1[= 0$.
   - $\max[0, 1[$ *n'existe pas.*

Remarque 2.24 *Le plus grand élément ou le plus petit élément n'existent pas toujours et quand ils existent sont uniques.*

2.3.3 Borne supérieure, borne inférieure

Définition 2.25 *Soit* A *une partie non vide de* $\mathbb{R}$.

1. *Si* A *est majorée et si l'ensemble des majorants de* A *contient un plus petit élément* M, *on dit que* M *est la borne supérieure de* A. *On note :* $M = \sup A$.
2. *Si* A *est minorée et si l'ensemble des minorants de* A *contient un plus grand élément* m, *on dit que* m *est la borne inférieure de* A. *On note :* $m = \inf A$.

Exemple 2.26
- $\sup[a,b]=b$,
- $\inf[a,b]=a$,
- $\sup]a,b[=b$,
- $]0,+\infty[$ *n'admet pas de borne supérieure,*
- $\inf\,]0,+\infty[=0$.

2.3.4 Propriétés de la borne supérieure (ou inférieure)

Théorème 2.27 (Théorème fondamental de l'ensemble des nombres réels)

1. *Tout sous-ensemble* A ***non vide*** *et* ***majoré*** *de* $\mathbb{R}$ *admet une* ***borne supérieure*** M *qui vérifie*
$$M=\sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x\in A \;\; x\leq M, \\ \forall \varepsilon>0, \exists x_\varepsilon \in A \;\; M-\varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$$
2. *Tout sous-ensemble* A ***non vide*** *et* ***minoré*** *de* $\mathbb{R}$ *admet une* ***borne inférieure*** m *qui vérifie*
$$m=\inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x\in A \;\; x\geq m, \\ \forall \varepsilon>0, \exists x_\varepsilon \in A \;\; m+\varepsilon > x_\varepsilon. \end{cases}$$

Exemple 2.28 *Montrons que* $\mathrm{Sup}\,([0,2[)=2$. *En utilisant la propriété de la borne supérieure :*
$$\mathrm{Sup}\,([0,2[)=2 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x\in E; x\leq 2, \\ \forall \varepsilon>0 \; \exists x_\varepsilon\in A;\; 2-\varepsilon<x_\varepsilon. \end{cases}$$
Soit $\varepsilon>0$, *trouvons* $x_\varepsilon\in E$ *tel que :* $2-\varepsilon<x_\varepsilon$, x_ε *existe dans* E, *il suffit de prendre* $x_\varepsilon=\frac{2-\varepsilon+2}{2}=\frac{4-\varepsilon}{2}=2-\frac{\varepsilon}{2}\in E$, *(car* E *est un intervalle), d'où* $\mathrm{Sup}(E)=2$.

Exemple 2.29 *Déterminons (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne sup, la borne inf, le plus grand élément et le plus petit élément de l'ensemble* a *dans* $\mathbb{R}$.
$$A=\left\{x=3-\frac{6}{n-2},\;\; n\in\mathbb{N},\;\; n\geq 3\right\}.$$

1. Montrons d'abord que A est non vide et borné ?
   - $A\neq\varnothing$, car (pour $n=4\in\mathbb{N}-\{0,1,2\}$, on trouve $0=3-\dfrac{6}{4-2}\in A$).

- Aest borné $\Leftrightarrow \exists M, m \in \mathbb{R}\ \forall x \in A;\ \ m \leq x \leq M$, on a

$$\begin{aligned} n \geq 3 \Rightarrow n-2 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n-2} \leq 1 \\ \Rightarrow 0 < \frac{6}{n-2} \leq 6 \Rightarrow -6 \leq -\frac{6}{n-2} < 0 \\ \Rightarrow -3 \leq 3 - \frac{6}{n-2} < 3 \Rightarrow -3 \leq x < 3, \end{aligned}$$

  donc, 3 est un majorant de A et -3 est un minorant de A

2. Déterminons : $Min(A),\ Inf(A),\ Sup(A),\ $ et $\ Max(A)$ s'ils existent?
   - $\forall x \in A\ -3 \leq x$, on remarque que $-3 \in A$ car : (pour n = 3 , on a : $-3 = 3 - \dfrac{6}{3-2} \in A$, donc $Min(A) = -3$).

     Comme $Min(A)$ existe, alors $Inf(A)$ existe, donc $Min(A) = Inf(A) = -3$.
   - Montrons que $Sup(A) = 3$. En utilisant la caractérisation de la borne supérieure

$$Sup(A) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A; x \leq 3, \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in A;\ 3 - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} - \{0,1,2\};\ 3 - \dfrac{6}{n_\varepsilon - 2} \leq 3, & (1) \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} - \{0,1,2\};\ 3 - \varepsilon < 3 - \dfrac{6}{n_\varepsilon - 2}. & (2) \end{cases}$$

La première inégalité est déjà démontrée

Examinons la seconde

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $n_\varepsilon \in \mathbb{N} - \{0,1,2\};$ tel que :

$$3 - \frac{6}{n_\varepsilon - 2} > 3 - \varepsilon \Leftrightarrow -\frac{6}{n_\varepsilon - 2} > -\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{6}{n_\varepsilon - 2} \Leftrightarrow n_\varepsilon > \frac{6}{\varepsilon} + 2.$$

Il suffit de prendre $n_\varepsilon = E\left(\dfrac{6}{\varepsilon} + 2\right) + 1 \in \mathbb{N} - \{0,1,2\}$.

Ainsi, $Sup(A) = 3$

Par exemple : Si on prend $\varepsilon = 0,3 > 0$, on trouve :

$$\begin{aligned} n_\varepsilon &= E\left(\frac{6}{\varepsilon} + 2\right) + 1 = E\left(\frac{6}{0,3} + 2\right) + 1, \\ &= E(22) + 1 = 23 \in \mathbb{N} - \{0,1,2\}. \end{aligned}$$

Donc :

$$x_\varepsilon = 3 - \frac{6}{n_\varepsilon - 2} = 3 - \frac{6}{23 - 2} = 2,71 \in A.$$

Ce qui vérifie l'inégalité (2).
Donc $\mathrm{Sup}(A) = 3 \notin A$, car : $3 = 3 - \dfrac{6}{n-2} \Leftrightarrow -\dfrac{6}{n-2} = 0 \Leftrightarrow -6 = 0$, ce qui impossible, on déduit alors que $Max(A)$ n'existe pas.

2.4 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.30 *L'ensemble des nombres rationnels est* ***dense*** *dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x < y), \quad \exists r \in \mathbb{Q} \quad \textit{tel que} \quad x < r < y.$$

Remarque 2.31 *Dire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ signifie qu'entre deux réels distincts il y a toujours (au moins) un élément de $\mathbb{Q}$.*

Exemple 2.32 *Soient $x = 2,77$ et $y = \sqrt{17}$, alors :*

$$2,77 < r_1 = 3 \in \mathbb{Q} < \sqrt{17},$$
$$2,77 < r_2 = \frac{7}{2} \in \mathbb{Q} < \sqrt{17}.$$

Proposition 2.33

L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$.

Chapitre 3

Suites Numériques

3.1 Introduction

Les suites sont un outil mathématique très utile dans l'étude de modéliser le comportement des phénomènes scientifiques discrets, en particulier par des suites récurrentes (évolution d'une population, ...).

Dans ce chapitre, après quelques généralités sur les suites, nous donnons les définitions et les principaux théorèmes des suites convergentes et des suites divergentes. Ensuite nous étudions le critère de Cauchy qui nous permet de dire s'il y a une limite sans connaitre cette limite. Ce chapitre se termine par la notion des suites récurrentes.

3.2 Généralités

3.2.1 Définition

Définition 3.1 *Une **suite réelle** est une application d'un sous-ensemble infini* $\widetilde{\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Au lieu de la noter*

$$u: \begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$$

on la note $u = (u_n)_{n\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ *où* $u_n = u(n)$. *Pour* $k \in \widetilde{\mathbb{N}}$, *le terme* u_k *est appelé **terme de rang*** k *de la suite numérique* $(u_n)_n$. *On dit encore que* $(u_n)_n$ *est la suite de **terme général*** u_n.

Exemple 3.2

1. *La suite de terme général* $u_n = \dfrac{1}{n}$ *est une suite réelle définie sur* $\widetilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N}^*$.
2. *La suite* $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite réelle définie sur* $\mathbb{N}$ *dont les termes de rang pair valent* 1 *et ceux de rang impair* -1.
3. *La suite de terme général* $u_n = \sqrt{2n-5}$ *est une suite réelle définie sur l'ensemble*

$$\widetilde{\mathbb{N}} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 3\}.$$

Définition 3.3 *On dit qu'une suite réelle* $(u_n)_n$ *est à* ***termes positifs*** *(resp.* ***négatifs****) si pour tout* $n \in \widetilde{\mathbb{N}}$ *on a* $u_n \geq 0$ *(resp.* $u_n \leq 0$*).*

3.2.2 Suites stationnaires

Définition 3.4 *On appelle* ***suite stationnaire*** *une suite dont les termes sont constants à partir d'un certain rang. Soit encore :*

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \widetilde{\mathbb{N}},\ \forall n \geq n_0 \quad u_n = a.$$

Exemple 3.5 *La suite de terme général* $u_n = \mathrm{E}\left(\dfrac{5}{n}\right)$ *est une suite définie sur* $\mathbb{N}^*$. *On a* $\forall n \geq 6$ $u_n = 0$ *d'où*

$$(u_n)_n : (5, 2, 1, 1, 1, 0, 0, \cdots)$$

est une suite stationnaire.

3.2.3 Suites périodiques

Définition 3.6 *Une suite réelle est* ***périodique*** *s'il existe un entier* $k \geq 1$ *tel que, pour tout entier* n *, on ait* $u_{n+k} = u_n$. *Soit encore*

$$\exists k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \widetilde{\mathbb{N}} \quad u_{n+k} = u_n$$

Exemple 3.7 *La suite de terme général* $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$ *est périodique puisque* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+6} = u_n$. *On a*

$$(u_n)_{n\geq 0} : \left(\underleftrightarrow{1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}, \underleftrightarrow{1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}, 1 \cdots\right)$$

3.2.4 Suites bornées

Définition 3.8

1. *Une suite réelle* $(u_n)_n$ *est dite* ***majorée*** *s'il existe un réel* A *tel que pour tout* $n \in \widetilde{\mathbb{N}}$ *on ait* $u_n \leq A$. *Ce réel* A *est appelé un* ***majorant*** *de la suite* $(u_n)_n$.
2. *Une suite réelle* $(u_n)_n$ *est dite* ***minorée*** *s'il existe un réel* B *tel que pour tout* $n \in \widetilde{\mathbb{N}}$ *on ait* $u_n \geq B$. *Ce réel* B *est appelé un* ***minorant*** *de la suite* $(u_n)_n$.
3. *Une suite réelle* $(u_n)_n$ *est dite* ***bornée*** *s'il existe un réel positif* M *tel que pour tout* $n \in \widetilde{\mathbb{N}}$ *on ait* $|u_n| \leq M$.

Remarque 3.9

1. *Dire que la suite* $(u_n)_n$ *est majorée (resp. minorée) revient à dire que l'ensemble* $S = \{u_n \mid n \in \widetilde{\mathbb{N}}\}$ *des valeurs prises par la suite est un ensemble majoré (resp. minoré).*
2. *Une suite non bornée se caractérise en écrivant la négation d'une suite bornée :*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \ \exists n_0 \in \widetilde{\mathbb{N}} \quad |u_n| > M.$$

Exemple 3.10

1. *La suite* $(u_n)_n$ *de terme général* $u_n = \sin(n)$ *est bornée car* $\forall n \geq 0 \ \ |u_n| \leq 1$.
2. *La suite* $(u_n)_n$ *de terme général* $u_n = e^n$ *n'est pas bornée.*

Théorème 3.11 *Une suite réelle est bornée si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.*

3.2.5 Suites monotone

Définition 3.12

1. *On dit que la suite réelle* $(u_n)_n$ *est* ***croissante*** *si :* $\forall n \in \widetilde{\mathbb{N}} \ \ u_{n+1} \geq u_n$.
2. *On dit que la suite réelle* $(u_n)_n$ *est* ***strictement croissante*** *si :* $\forall n \in \widetilde{\mathbb{N}} \ \ u_{n+1} > u_n$.
3. *On dit que la suite réelle* $(u_n)_n$ *est* ***décroissante*** *si :* $\forall n \in \widetilde{\mathbb{N}} \ \ u_{n+1} \leq u_n$.
4. *On dit que la suite réelle* $(u_n)_n$ *est* ***strictement décroissante*** *si :* $\forall n \in \widetilde{\mathbb{N}} \ \ u_{n+1} < u_n$.
5. *On dit qu'une suite réelle est* ***monotone*** *si elle est croissante ou décroissante.*
6. *On dit qu'une suite réelle est* ***strictement monotone*** *si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Remarque 3.13

1. *Une suite peut n'être ni croissante, ni décroissante. C'est le cas de la suite de terme général* $(-1)^n$. *La négation de l'assertion "la suite est croissante" n'est donc pas " la suite est décroissante" mais " il existe un entier naturel* n *pour lequel* $u_{n+1} < u_n$*".*
2. *Il résulte de manière directe de la définition que si la suite* $(u_n)_n$ *est croissante (resp. décroissante) alors la suite de terme général* $-u_n$ *est une suite décroissante (resp. croissante).*
3. *Pour montrer qu'une suite réelle* $(u_n)_n$ *est croissante, on peut montrer que pour tout* $n \in \widetilde{\mathbb{N}}$ *on a* $u_{n+1} - u_n \geq 0$*. Pour montrer qu'une suite réelle* $(u_n)_n$ *est décroissante, on peut montrer que pour tout* $n \in \widetilde{\mathbb{N}}$ *on a* $u_{n+1} - u_n \leq 0$ *.*
4. *Si tous les termes de la suite* $(u_n)_n$ *sont* strictement positifs*, alors pour montrer que la suite est croissante on peut montrer que pour tout* $n \in \widetilde{\mathbb{N}}$ *on a* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \geq 0$*. Pour montrer qu'elle est décroissante, on peut montrer que pour tout* $n \in \widetilde{\mathbb{N}}$ *on a* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \leq 0$.
5. *Si tous les termes de la suite* $(u_n)_n$ *sont* strictement négatifs*, alors pour montrer que la suite est croissante on peut montrer que pour tout* $n \in \widetilde{\mathbb{N}}$ *on a* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$*. Pour montrer qu'elle est décroissante, on peut montrer que pour tout* $n \in \widetilde{\mathbb{N}}$ *on a* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

Exemple 3.14

1. *La suite* $(u_n)_n$*de terme général* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$ *où* $p \in \mathbb{N}^*$*est strictement croissante puisque pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^p} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} + \frac{1}{(n+1)^p} \right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \\ &= \frac{1}{(n+1)^p} > 0. \end{aligned}$$

2. *Montrons que la suite* $(u_n)_n$ *de terme général* $u_n = \exp\left(2n + \dfrac{1}{n}\right)$ *est strictement croissante. Il s'agit d'une suite à termes strictement positifs. Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on a*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{\left(2(n+1) + \frac{1}{n+1}\right)}}{e^{\left(2n + \frac{1}{n}\right)}} = e^{2 - \frac{1}{n(n+1)}}$$

Comme $0 < \frac{1}{n(n+1)} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 < 2 - \frac{1}{n(n+1)} < 2$. La fonction exponentielle étant croissante, on obtient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > e^1 > 1.$$

3.2.6 Sous suites

Définition 3.15 (Suite extraite) *La suite numérique $(v_n)_n$ est une* ***suite extraite*** *ou une* ***sous-suite*** *de la suite $(u_n)_n$ s'il existe une application h de $\widetilde{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante, appelée extractrice, telle que*

$$\forall n \in \widetilde{\mathbb{N}} \quad v_n = u_{h(n)}.$$

Exemple 3.16

1. *L'application $h : n \in \mathbb{N} \mapsto 2n$ est strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$. La suite de terme général $v_n = u_{2n}$ est appelée suite des termes pairs extraite de la suite $(u_n)_n$.*
2. *L'application $h : n \in \mathbb{N} \mapsto 2n + 1$ est strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$. La suite de terme général $w_n = u_{2n+1}$ est appelée suite des termes impairs extraite de la suite $(u_n)_n$.*
3. *La suite de terme général $v_n = u_{|n^2-3n|}$ n'est pas une suite extraite de la suite $(u_n)_n$ car l'application $h : n \in \mathbb{N} \mapsto \left|n^2 - 3n\right|$ n'est pas strictement croissante.*
4. *L'application $h : n \in \mathbb{N} \mapsto n^3$ est strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$. La suite de terme général $v_n = u_{n^3}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_n$.*
5. *La suite de terme général $v_n = u_{\cos(\frac{n\pi}{3})}$ n'est pas une suite extraite de la suite $(u_n)_n$ puisque $h : n \in \mathbb{N} \mapsto \cos(\frac{n\pi}{3})$ n'est pas à valeurs dans $\mathbb{N}$.*

3.3 Suites convergentes

Définition 3.17 *On dit que la suite numérique $(u_n)_n$* ***converge*** *vers le réel l (ou qu'elle tend vers $l \in \mathbb{R}$) si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \widetilde{\mathbb{N}}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$$

Le réel l est appelé ***limite de la suite****.*

Exemple 3.18 *Soit la suite $(u_n)_n$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.*

Il nous faut démontrer $\forall \varepsilon > 0, \boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}^*}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \left(n \geq n_0 \Rightarrow \left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon\right).$

Soit ε trouvons n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, alors

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Il suffit donc de prendre $n_0 = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$ ou tout autre nombre entier supérieur à celui-ci.
Si on prend $\varepsilon = 10^{-2}$, on a $n_0 = 101$.

Théorème 3.19 *Si la suite numérique $(u_n)_n$ converge, **la limite de la suite est unique**. On la note*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l.$$

3.3.1 Théorèmes de convergence

On ne revient pratiquement rarement à la définition pour montrer une convergence, mais on utilise des théorèmes généraux qui l'assurent sous certaines hypothèses.

Théorème 3.20 *On a l'équivalence fort utile*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} |u_n| = 0$$

Exemple 3.21 *Soit la suite $(u_n)_n$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, alors*

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Théorème 3.22 *Si la suite réelle $(u_n)_n$ converge vers le réel l alors la suite réelle de terme général $|u_n|$ converge vers le réel positif $|l|$.*

Exemple 3.23 *En général, on ne peut rien conclure sur la nature de la suite de terme général u_n à partir de la nature de la suite de terme général $|u_n|$ Considérons la suite de terme général $u_n = (-1)^n$. La suite de terme général $|u_n|$ converge vers 1 mais la suite $(u_n)_n$ diverge.*

Théorème 3.24 *Si la suite réelles $(u_n)_n$ converge vers l alors toute sous-suite de la suite $(u_n)_n$ converge également vers l.*

Exemple 3.25 *La suite de terme général* $w_n = \dfrac{1}{n^3}$ *converge vers* 0 *car il s'agit d'une suite extraite de la suite de terme général* $u_n = \dfrac{1}{n}$ *dont on a montré la convergence vers* 0.

Théorème 3.26 *Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite numérique* $(u_n)_n$ *converge est que la sous-suite des termes d'indice pair et la sous-suite des termes d'indice impair admettent la même limite. Dans ce cas, cette limite commune est la limite de la suite* $(u_n)_n$.

Théorème 3.27 *Toute suite réelle convergente est bornée.*

Remarque 3.28 *La réciproque est fausse.*

Exemple 3.29 *La suite* $u_n = (-1)^n$ *est bornée mais elle n'a pas de limite, donc elle n'est pas convergente.*

Théorème 3.30 *Soient* $(u_n)_n$ *une suite bornée et* $(v_n)_n$ *une suite convergente de limite nulle, alors* $(u_n v_n)_n$ *est convergente de limite nulle.*

Exemple 3.31 *Considérons la suite* $(u_n)_n$ *de terme général* $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n^2}$. *Compte tenu du fait que la fonction sinus est bornée et la suite* $\left(\frac{1}{n^2}\right)_n$ *tend vers* 0, *le théorème précédent permet de conclure que la suite* $(u_n)_n$ *converge vers* 0.

Théorème 3.32 *Soient* $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ *et* $(w_n)_n$ *trois suites telles que, à partir d'un certain rang, on ait* $u_n \leq v_n \leq w_n$. *Alors, si* $(u_n)_n$ *et* $(w_n)_n$ *sont convergentes de même limite* l, *la suite* $(v_n)_n$ *est convergente de limite* l.

On dit dans ce cas que la convergence et la limite de la suite $(v_n)_n$ *sont obtenues par encadrement.*

Exemple 3.33 *Considérons la suite* $(u_n)_n$ *de terme général* $u_n = \dfrac{E(n\alpha)}{n}$. *Montrons que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$. *En effet , par définition de la fonction partie entière on a* $n\alpha - 1 \leq E(n\alpha) \leq n\alpha$ *alors*

$$\alpha - \frac{1}{n} \leq \frac{E(n\alpha)}{n} \leq \alpha$$

Comme les suites $\left(\alpha - \dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ *et* $(\alpha)_{n\geq 1}$*sont convergentes de même limite* α, *alors la suite* $(u_n)_n$ *converge vers* α *par le théorème d'encadrement.*

Théorème 3.34 (Suites adjacentes) *Deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites **adjacentes** si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *l'une des deux suites est croissante et l'autre est décroissante ;*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Exemple 3.35 *La suite $(u_n)_{n\geq 1}$de terme général $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est croissante puisque pour tout* $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \\ \frac{1}{k^2} &= \frac{1}{(n+1)^2} > 0. \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ est décroissante puisque pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont donc adjacentes.

Théorème 3.36 *Si deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes alors*

1. *elles sont toutes les deux convergentes.*
2. *elle ont la même limite.*

Théorème 3.37 (Convergence de suites monotones) *Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.*

1. *Si $(u_n)_n$ est **croissante**, alors $(u_n)_n$ est convergente si et seulement si elle est **majorée***
2. *Si $(u_n)_n$ est **décroissante**, alors $(u_n)_n$ est convergente si et seulement si elle est **minorée.***

Exemple 3.38 *Considérons la suite $(u_n)_n$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$.*

Pour tout $n > 0$ on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \\ &= -\frac{(3n+1)}{n\,(2n+1)\,(2n+2)} < 0 \end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante. Cette suite étant minoré par 0 ($\forall n > 0, u_n > 0$), on en déduit qu'elle est convergente.

Théorème 3.39 (Bolzano-Weierstrass) *De toute suite bornée de nombres réels on peut extraire une suite convergente.*

Exemple 3.40 *La suite $(\sin(n))_n$ est divergente, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass on sait qu'on peut toutefois extraire de cette suite une sous-suite qui converge. Le théorème de Bolzano-Weierstrass ne nous indique malheureusement pas comment obtenir une telle sous-suite.*

3.4 Suites divergentes

Définition 3.41 *Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On dit que cette suite tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si l'on a :*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq n_0,\ \ u_n > A$$

$$(\ \text{resp.}\ \ \forall B \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq n_0,\ \ u_n < B\ )$$

*On écrit alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$) et on dit que la suite $(u_n)_n$ est **divergente**.*

Exemple 3.42 *Soit la suite $(u_n)_n$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.*

Il nous faut démontrer

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq n_0,\ \ u_n > A.$$

Soit $A > 0$. Trouvons n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow n^2 > A$ pour que

$$n > \sqrt{A}.$$

Il suffit donc de prendre $n_0 = E\left(\sqrt{A}\right) + 1$.
Si on prend $\varepsilon = 10^{10}$, on a $n_0 = 10^5 + 1$,
d'où

$$U_{n_0} = n_0^2 = (10^5 + 1)^2 > 10^{10}.$$

3.4.1 Théorèmes de divergence

Théorème 3.43 (de comparaison) *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que, à partir d'un certain rang, on ait $u_n \leq v_n$.*

1. *Si la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ alors la suite $(v_n)_n$ tend vers $+\infty$.*
2. *Si la suite $(v_n)_n$ tend vers $-\infty$ alors la suite $(u_n)_n$ tend vers $-\infty$.*

Exemple 3.44 *Considérons la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = n + \cos(n)$. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. En effet , on a : $n - 1 \leq u_n \leq n + 1$, alors pour $n \geq 1$, on obtient*

$$v_n = n - 1 \leq u_n$$

Comme la suite $(v_n)_n$ tend vers $+\infty$ alors la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ par le théorème de comparaison.

Théorème 3.45 *Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.*

1. *Si $(u_n)_n$ est* ***croissante*** *et non majorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*
2. *Si $(u_n)_n$ est* ***décroissante*** *et non minorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

Exemple 3.46 *On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = C_{2n}^n = \binom{2n}{n}$. Les termes u_n sont > 0. Compte tenu de $u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ on va examiner le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ pour déterminer le sense de variation de $(u_n)_n$. On a*

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} &= \frac{(2n+2)\,!}{((n+1)\,!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)\,!} \\
&= \frac{(2n+1)\,(2n+2)\,(2n)\,!}{(n+1)^2\,(n!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)\,!} \\
&= \frac{2\,(2n+1)}{n+1} \geq 2 > 1
\end{aligned}$$

Don la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante. De plus, on a pour tout $n \geq 0$: $u_{n+1} \geq 2u_n$ et donc par récurrence on obtient

$$u_n \geq 2u_{n-1} \geq 2^2 u_{n-2} \geq \cdots \geq 2^n u_0 = 2^n.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, on en déduit que la suite $(u_n)_n$ n'est pas majorée d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque 3.47 *En prenant la contraposée de l'assertion énoncée dans la proposition précédente 3.24, on obtient une condition suffisante pour qu'une suite n'admette pas de limite dans $\mathbb{R}$: il suffit que deux suites extraites aient deux limites distinctes.*

Exemple 3.48 *La suite de terme général $(-1)^n + \frac{1}{n+2}$ diverge car la suite des termes pairs converge vers 1 et la suite des termes impairs converge vers -1.*

3.5 Suites de Cauchy

Définition 3.49 *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. On dit que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy si l'on a :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \widetilde{\mathbb{N}}, \forall p, q \in \mathbb{N}, \quad (p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0) \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$$

i.e. (u_n) est une suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ les distances entre termes $|u_p - u_q|$ sont inférieures à ε à partir d'un certain rang.

Exemple 3.50 *Montrons que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ est une suite de Cauchy. Pour $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \geq q$, on a*

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &= \left| \frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2} \right| \\ &= \left| \frac{p^2 - q^2}{p^2 q^2} \right| \\ &= \frac{(p+q)(p-q)}{p^2 q^2}, \end{aligned}$$

comme $0 \leq p - q \leq p$ et $0 \leq p + q \leq 2p$ on a $|u_p - u_q| \leq \dfrac{2}{q^2}$. Soit ε un réel strictement positif et $n_0 = E\left(\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}\right) + 1$.Quels que soient les entiers p et q vérifiant $p \geq q \geq n_0$ on a, $\dfrac{2}{q^2} < \varepsilon$ et par conséquent $|u_p - u_q| < \varepsilon$. D'après la définition, la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ est une suite de Cauchy.

Remarque 3.51 *Notons la différence fondamentale entre suite convergente et suite de Cauchy : une suite est convergente si , ses termes finissent par devenir aussi proches que l'on veut d'un nombre l, tandis qu'une suite de Cauchy si, dans les mêmes conditions, ses termes finissent par être aussi proches que l'on veut les uns des autres.*

Théorème 3.52

1. *Toute suite de Cauchy est bornée.*
2. *Toute suite réelle convergente est une suite de Cauchy.*
3. *Toute suite réelle de Cauchy est convergente. On dit aussi que $\mathbb{R}$ est complet*

3.6 Suites récurrentes réelles

Soit $\mathbb{I}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et f une application de $\mathbb{I}$ dans $\mathbb{I}$, on peut définir une suite $(u_n)_n$ par :

1. la donnée de son terme initial u_0 où $u_0 \in \mathbb{I}$;
2. la donnée d'une relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$;

On dit alors que la suite $(u_n)_n$ est définie par récurrence. Nos préoccupations majeures sont :

1. Une telle suite est-elle convergente ou divergente ?
2. Si elle converge, peut on trouver sa limite ?

La première chose à faire est de vérifier que cette suite est bien définie. La condition $f(\mathbb{I}) \subset \mathbb{I}$ assure que cette suite est bien définie.

Exemple 3.53 *Soit la suite définie par* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *La fonction* f *correspondante est* $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$, *son domaine de définition est* $\mathbb{R}$ *et la suite est donc bien définie. De plus tous les termes* u_n *sont strictement positifs, dans ce cas* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+; u_0 = 1 \in \mathbb{R}_+$ *et* $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$.

Exemple 3.54 *Soit la suite définie par* $u_0 > 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n^2}$. *La suite* $(u_n)_n$ *est bien définie et à valeurs* ≥ 2 *à partir du rang* 1. *On ne restreint pas donc la généralité en supposant* $u_0 \geq 2$ *et on peut alors écrire la relation de récurrence sous la forme* $u_{n+1} = f(u_n)$ *où*

$$\begin{aligned} f : [2, +\infty[&\to [2, +\infty[\\ x &\mapsto f(x) = 2 + \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Le cas où f est croissante

Théorème 3.55 *Soit* $(u_n)_n$ *une suite définie par la relation de récurrence* $u_{n+1} = f(u_n)$ *. Si* f *est croissante, alors la suite est monotone. Plus précisément :*

1. *Si* $u_1 - u_0 \geq 0$, *la suite* $(u_n)_n$ *est croissante.*
2. *Si* $u_1 - u_0 \leq 0$, *la suite* $(u_n)_n$ *est décroissante.*

Et donc, le cas (1), *la suite* $(u_n)_n$ *converge si et seulement si elle est majorée, sinon elle tend vers* $+\infty$. *De même, dans le cas* (2) *la suite* $(u_n)_n$ *diverge si et seulement si elle est minorée, sinon elle tend vers* $-\infty$.

Exercice 3.56 *Soit* (u_n) *la suite numérique définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 3}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

1. *Montrer que,* $\forall\, n \in \mathbb{N} : \quad 0 < u_n \leqslant 1.$
2. *Montrer que la suite* (u_n) *est monotone.*
   - *En déduire qu'elle converge et calculer sa limite.*
3. *Soit l'ensemble :* $A = \{u_n, \quad n \in \mathbb{N}\}$
   - *Déterminer sup A, inf A, minA, maxA s'ils existent ?*

Solution 3.57 *On considère la suite numérique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 3}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. *Montrons que,* $\forall\, n \in \mathbb{N} : \quad 0 < u_n \leq 1$, *par récurrence.*
   – *Pour* $n = 0$, *on a :* $u_0 = 1$, *ce qui donne* $0 < 1 \leq 1$ *est vraie.*
   – *On suppose* $0 < u_n \leq 1$ *et on montre* $0 < u_{n+1} \leq 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
   D'une part, on a : $u_n > 0$ *ce qui implique que* $\dfrac{u_n + 1}{u_n + 3} > 0$.
   D'autre part, on montre que : $u_{n+1} - 1 \leq 0$, *alors :*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{u_n + 1}{u_n + 3} - 1 \\ &= \frac{-2}{u_n + 3}, \end{aligned}$$

comme $u_n > 0$, *alors* $\frac{-2}{u_n+3} < 0$, *donc* $u_{n+1} - 1 \leq 0$.
D'où : $\forall\, n \in \mathbb{N} : \;\; 0 < u_n \leq 1$.

2. *Étudions la monotonie de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a :* $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n+1}{u_n+3}$, *donc* $f(x) = \frac{x+1}{x+3}$ *(*f *fonction continue et dérivable sur* $\mathbb{R} - \{-3\}$ *), alors ;*
   $f'(x) = \frac{2}{(x+3)^2}$, *d'où* f *est strictement croissante.*
   Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ *est strictement croissante, ce qui implique que le signe de* $u_{n+1} - u_n$ *est le signe de* $f(u_0) - u_0$, *alors :*
   $$f(u_0) - u_0 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$
   D'où $u_{n+1} - u_n < 0$, *alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement décroissante sur* $]0,1]$.
3. *La suite* $(u_n)_n$ *est strictement décroissante et minorée par, alors* $(u_n)_n$ *converge vers* l. *D'autre part, on a* $u_{n+1} = f(u_n)$, $\;\; f : x \mapsto \frac{x+1}{x+3}$ *et continue, alors* l *vérifie la relation :*
   $$\begin{aligned} f(l) = l \Rightarrow \frac{l+1}{l+3} = l \Rightarrow l^2 + 2l - l = 0 \\ \Rightarrow l_1 = -1 - \sqrt{2}, l_1 = -1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$
   comme $0 < u_n \leq 1$, *alors* $l = -1 + \sqrt{2}$.
4. *Soit* $E = \{u_n,\;\; n \in \mathbb{N}\}$. *La suite* (u_n) *est strictement décroissante, alors* $(u_n < \cdots < u_1 < u_0)$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, A *est majoré par* u_0 *et* $u_0 \in A$, *donc :*
   $\max E = u_0 = 1$, *alors* $\max E = \sup E = 1$.
   On a aussi la suite (u_n) *convergente vers* $l_1 = -1 + \sqrt{2}$, *d'où :*
   $\inf E = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l_1$, *or* $l_1 \notin E$, *donc* $\min E$ *n'existe pas.*

Le cas où f est décroissante

On se ramène au cas précédent de la façon suivante : on remarque que les deux suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ vérifient une relation de récurrence similaire à celle qui définit $(u_n)_n$ dans laquelle la fonction f est remplacée par $g = f \circ f$. Cette dernière fonction est croissante, donc, par ce qui précède, les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones. Et comme f est décroissante, elles ont des sens de variation opposés. Pour compléter leur étude, il faut étudier le signe de $g(x) - x$. On regarde ensuite s'il est possible d'appliquer le théorème de recollement.

Théorème 3.58 *Soit* $(u_n)_n$ *une suite définie par la relation de récurrence* $u_{n+1} = f(u_n)$. *Si* f *est décroissante sur* $\mathbb{I}$*, alors les deux suites extraites* $(u_{2n})_n$ *et* $(u_{2n+1})_n$ *sont monotones. La suite* $(u_n)_n$ *est donc convergente si et seulement si ces deux suites extraites sont convergentes et de même limite.*

Exercice 3.59 *On considère la suite* $(u_n)_n$ *définie par :*

$$u_0 = 2 \quad u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{1}{2} \leq u_n \leq 2$.
2. *La suite* $(u_n)_n$ *est-elle monotone ?*
3. *Etudier la nature des sous-suites* $(u_{2n})_n$ *et* $(u_{2n+1})_n$.
4. *La suite* $(u_n)_n$ *est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.*
5. *Soit l'ensemble* $A = \{u_n, \quad n \in \mathbb{N}\}$. *Déterminer* $\sup A, \inf A, \min A, \ \max A$ *s'ils existent.*

Solution 3.60

1. *Soit la proposition* $P(n) : \ \frac{1}{2} \leq u_n \leq 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. *Montrons que* $P(n)$ *est vraie*
   - *Pour* $n = 0$*, on a* $\frac{1}{2} \leq u_0 = 2 \leq 2$*, donc* $P(0)$ *est vraie.*
   - *On suppose que* $P(n)$ *est vraie et on démontre* $P(n+1)$. *On a, pour* $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 2$ *donc*

   $$\begin{aligned} \frac{3}{2} \leq u_n + 1 \leq 3 &\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{u_n+1} \leq \frac{2}{3}, \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{3} \leq \frac{2}{u_n+1} \leq \frac{4}{3} \leq 2. \end{aligned}$$

   D'où $P(n+1)$.
2. *La suite* $(u_n)_n$ *est une suite récurrente définie par* $u_0 = 2$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$*, avec* $f(x) = \frac{2}{1+x}$*,* $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 2$*, on a*

   $$f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^2} < 0,$$

   donc f *est décroissante, par conséquent la suite* $(u_n)_n$ *n'est pas monotone.*
3. *Puisque* f *est décroissante, les deux sous-suites* $(u_{2n})_n$ *et* $(u_{2n+1})_n$ *sont monotones et varient en sens inverse. Par ailleurs, comme* $(u_n)_n$ *est bornée donc toutes les sous-suites de* $(u_n)_n$ *sont bornées donc* $(u_{2n})_n$ *et* $(u_{2n+1})_n$ *sont bornées. On en déduit que les deux sous-suites*

$(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes vers un point fixe de la fonction $f \circ f$.
Calculons les points fixes de $f \circ f$: Pour tout x dans $[1/2, 2]$, on a

$$g(x) = f \circ f(x) = \frac{2+2x}{3+x}.$$

Donc

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{2+2x}{3+x} = x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \;\; ou \;\; x = -2.$$

Compte tenu de la question 1), les deux sous-suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont positives, par conséquent la seule limite possible est égale à 1. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 1.$$

4. *Puisque les deux sous-suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite, alors la suite $(u_n)_n$ converge vers cette limite. Ainsi*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

5. *On sait que les deux sous-suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones et définies à l'aide de la fonction croissante g. De plus,*

$$u_2 - u_0 = \frac{6}{5} - 2 = -\frac{4}{5} < 0,$$

donc $(u_{2n})_n$ est décroissante, d'où $(u_{2n+1})_n$ est croissante et puisque

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} - \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 1 - 1 = 0,$$

elles sont adjacentes. Par conséquent, on a la configuration suivante :

$$u_1 \le u_3 \le u_5 \le \cdots \le u_{2n+1} \le \cdots \le u_{2n} \le \cdots \le u_4 \le u_2 \le u_0.$$

Il en découle que l'ensemble $A = \{u_n, \quad n \in \mathbb{N}\}$ admet un maximum et un minimum. De plus,

$$\max A = \sup A = u_0 = 2,$$
$$\min A = \inf A = u_1 = \frac{2}{3}.$$

Chapitre 4

Fonctions, limites et continuité

4.1 Introduction

Les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont utilisées dans toutes les applications des mathématiques pour représenter l'évolution d'un phénomène au cours du temps.

Définition 4.1 *On appelle fonction réelle sur un ensemble* E *tout procédé qui, à tout élément* x *de* E*, permet d'associer au plus un élément de l'ensemble* $\mathbb{R}$*, appelé alors image de* x *et noté* $f(x)$*. Les éléments de* E *qui ont une image par* f *forment l'ensemble de définition de* f*, noté* $\mathcal{D}_f$*, dans ce cas la fonction est aussi appelée application.*
On désigne une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles (une application d'un ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*), par :*

$$f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto f(x).$$

Exemple 4.2 *La fonction* $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ *est définie pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $x^2 - 1 \geq 0$*. Donc* $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[= \mathcal{D}_f$*. L'image du réel* 4 *par* f *est* $\sqrt{15}$*, on dit que* 4 *est un antécédent de* 15.
La fonction $f : x \mapsto \sqrt{-\sqrt{x}}$ *n'est définie qu'en* 0*, car le symbole* $\sqrt{\ }$ *désigne la racine carrée d'un nombre réel positif ou nul. Tandis que* $g : x \mapsto \sqrt[3]{-\sqrt{x}}$ *est définie sur* $\mathbb{R}_+$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}_-$*.*

Dans ce chapitre, nous commençons par un rappel sur les fonctions d'une variable réelle vues en troisième année au lycée, puis nous étudions la notion de la limite qui est la base de l'analyse et nous terminons ce chapitre par les notions de continuité et de continuité uniforme et énoncer ensuite quelques théorèmes fondamentaux.

4.2 Généralités sur les fonctions

4.2.1 Graphe d'une fonction réelle d'une variable réelle

Définition 4.3 *On appelle graphe ou courbe représentative de la fonction* f *l'ensemble des couples* $(x, f(x))$ *tels que :* $x \in \mathcal{D}_f$*, et* $y = f(x)$. *En notant le graphe de* f *par* $\mathcal{C}_f$*, on a*

$$\mathcal{C}_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \in \mathcal{D}, \; y = f(x)\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Exemple 4.4 *On peut tracer facilement le graphe de la fonction* $f : x \mapsto f(x) = x^2 + 1$*, par contre, on ne peut pas tracer le graphe de la fonction* f *définie par :*

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) &= \begin{cases} 1, & si \; x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & si \; x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

4.2.2 Egalité des fonctions

Définition 4.5 *Soient* f *et* g *deux fonctions numériques définies respectivement sur* $\mathcal{D}_f$ *et* $\mathcal{D}_g$.

$$f = g \quad si \quad \begin{cases} \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g, \\ f(x) = g(x) \;\; \textit{quel que soit}\; x \in \mathcal{D}_f. \end{cases}$$

Exemple 4.6 *La fonction* $f(x) = x^2$ *et la fonction* $g(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x + 2}$ *sont égales sur* $\mathbb{R} - \{2\}$.

4.2.3 Restriction, prolongement

Définition 4.7 *Soit* A *un sous ensemble de* $\mathcal{D}_f$. *La* ***restriction*** *de* f *à l'ensemble* A *est la fonction* $f_A = \tilde{f}$ *définie par :*

$$\tilde{f} = f(x) \; \textit{quel que soit} \; x \in A.$$

f *est alors un* ***prolongement*** *de* f_A.

Exemple 4.8 *La restriction de* $f(x) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$ *à l'intervalle* $[0, \pi[$, *est donnée par :*

$$\tilde{f} : [0, \pi[\to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \cos x.$$

4.2.4 Fonctions Paire et impaire

Définition 4.9 *Soit* $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, *une fonction définie sur un intervalle* $\mathcal{D}_f$ *symétrique par rapport à l'origine*

1. f *est* ***paire*** *si, quel que soit* $x \in \mathcal{D}_f : f(-x) = f(x)$.
2. f *est* ***impaire*** *si, quel que soit* $x \in \mathcal{D}_f : f(-x) = -f(x)$.

Exemple 4.10

1. $f(x) = x^n$, *où* $n \in \mathbb{N}$, *alors* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ *et* $f(-x) = (-1)^n f(x)$, *donc si* n *pair* f *est paire et* n *impair alors* f *est impaire.*
2. *La fonction* $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+1}$ *ni paire, ni impaire.*

4.2.5 Fonctions périodiques

Définition 4.11 *Une fonction est* ***périodique****, de période* T, *si* T *est le plus petit réel positif tel que* $f(x+T) = f(x)$ *quel que soit* $x \in D_f$.

Exemple 4.12 *Soit* $f(x) = x - E(x), x \in \mathbb{R}$. *f est périodique, de période* $T = 1$, *car :*

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x+1) - E\,(x+1) \\ &= x + 1 - [E\,(x) + 1] \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Remarque 4.13 *Dans le cas particulier où* f *est de plus paire ou impaire on se limite à l'intervalle* $\left[0, \dfrac{T}{2}\right[$.

4.2.6 Fonctions bornées

Définition 4.14 *Soit* $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, *on dit que* f *est* ***majorée*** *(resp.* ***minorée, bornée****) si* $f(\mathcal{D}) = \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}\}$ *est une partie majorée (resp. minorée, bornée) de* $\mathbb{R}$*, i.e.*

- f *majorée sur* $\mathcal{D} \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \leq M.$
- f *minorée sur* $\mathcal{D} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \geq m.$
- f *bornée sur* $\mathcal{D} \Leftrightarrow f$ *majorée et minorée sur* $\mathcal{D}$.

Théorème 4.15 *Soit* $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, f *est bornée sur* $\mathcal{D}$ *si et seulement si* $|f|$ *est majorée sur* $\mathcal{D}$ *i.e.* $\exists B \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathcal{D},\ |f(x)| \leq B.$

Exemple 4.16 *Soit* $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+x^2}$*, alors* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$*. D'un coté* $0 \leq |\cos x| \leq 1$ *et d'un autre coté :*

$$1 + x^2 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq 1,$$

et comme $\dfrac{1}{1+x^2} \geq 0$*, alors :* $|f(x)| = \dfrac{|\cos x|}{1+x^2} \leq 1$*, et par suite* f *est bornée.*

4.2.7 Composition.

Définition 4.17 *Soit* f *une fonction numérique définie sur* $\mathcal{D}_f$ *et si* g *est une autre fonction définie sur* $\mathcal{D}_g$ *tel que* $f(D_f) \subset D_g$*. On définit la fonction* h*, "****composée de*** f ***par*** g*" , par*

$$h(x) = g[f(x)], \quad x \in D_f$$

On note : $h = g \circ f$*. On a donc le schéma*

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{f} y = f(x) \xrightarrow{g} z = & g(y) \\ \searrow & & \swarrow \\ & \longrightarrow g \circ f \longleftarrow & \end{array}$$

4.2.8 Fonctions monotones

$\mathbb{R}$ étant un corps ordonné, il est possible de définir la monotonie d'une fonction.

Définition 4.18 *Soit* f *une fonction numérique définie sur* $\mathcal{D}$*. On dit que* f *est :*

1. ***croissante*** *(resp.* ***décroissante****) sur $\mathcal{D}$ si :*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}, \;\; x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \qquad (\textit{resp. } x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$$

2. ***strictement croissante*** *(resp.* ***strictement décroissante****) sur $\mathcal{D}$ si :*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}, \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \qquad (\textit{resp. } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$$

3. ***monotone*** *(resp. strictement monotone) sur $\mathcal{D}$ si f est croissante sur $\mathcal{D}$ ou décroissante sur $\mathcal{D}$ (resp. strictement croissante ou strictement décroissante sur $\mathcal{D}$)*

4.2.9 Voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Définition 4.19 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on dit que $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie au voisinage de x_0 sauf peut être en x_0, s'il existe $\alpha > 0$ tel que :*

$$]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset D_f \;\; \textit{ou éventuellement} \;\;]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\} \subset D_f.$$

Exemple 4.20 *Soit la fonction suivante :*

$$f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{3x}{x-2}.$$

1. *La fonction f est définie au voisinage de $x_0 = 4$ car : $\exists \alpha = 1 > 0$ tel que $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[=]4-1, 4+1[=]3, 5[$ un intervalle contenant 4 et $]3, 5[\subset D_f$.*
2. *La fonction f est définie au voisinage de $x_0 = 2$ sauf en 2 car : $\exists \alpha = 2 > 0$ tel que $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[=]2-2, 2+2[=]0, 4[$ un intervalle contenant 2 et $]0, 4[\setminus \{2\} \subset D_f$.*

Définition 4.21 *Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, on dit que $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie au voisinage de $x_0 = +\infty$, s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $]\alpha, +\infty[\subset D_f$.*

Exemple 4.22 *Soit la fonction suivante :*

$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln x.$$

La fonction f est définie au voisinage de $+\infty$ car : $\exists \alpha = 2 \in \mathbb{R}$ tel que : $]2, +\infty[\subset D_f$.

Définition 4.23 *Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, on dit que $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie au voisinage de $x_0 = -\infty$, s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$: tel que $]-\infty, \lambda] \subset D_f$.*

Exemple 4.24 *Soit la fonction suivante :*

$$f :]-\infty, 1] \to \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto \sqrt{1-x}.$$

La fonction f est définie au voisinage de $-\infty$ car : $\exists \alpha = -3 \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, -3[\subset D_f$.

4.3 Limite des fonctions réelles

4.3.1 Limites finies en x_0

Soit f est une fonction définie sur $I =]x_0 - x, x_0 + x[$ sauf peut être au point x_0.

Définition 4.25 *Le réel l est la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 si, à tout ε strictement positif on peut associer α strictement positif tel que $x \in \mathcal{D}$ et $|x - x_0| < \alpha$, implique $|f(x) - l| < \varepsilon$, c'est à dire :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}, (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

On note : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l.$

Exemple 4.26 *Montrer que* $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x+1} = 2.$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On va chercher un réel $\alpha > 0$ vérifiant :

$$|x - 3| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon.$$

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ est définie en $x = 3$. On a

$$f(x) - 2 = \sqrt{x+1} - 2 = \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2},$$

donc

$$|f(x) - 2| = \frac{|x-3|}{\sqrt{x+1}+2} < \frac{1}{2}|x-3|,$$

car $\sqrt{x+1} > 0$, pour tout $x \in \mathcal{D}$

$$|x - 3| < 2\varepsilon \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon.$$

Il suffit donc de choisir $\alpha = 2\varepsilon$. On a démontré que $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x+1} = 2.$ □

Exemple 4.27 *Montrons que* $\lim_{x\to 1}\left(x^3+x\right)=2$.

Démonstration. Soit $\varepsilon>0$. On va chercher un réel $\alpha>0$ vérifiant :

$$|x-1|<\alpha \Rightarrow |f(x)-2|<\varepsilon.$$

On a $f(x)-2=x^3+x-2=(x-1)\left(x^2+x+2\right)$. Intuitivement on raisonne ainsi : pour rendre cette quantité $<\varepsilon$, on va jouer sur le facteur $(x-1)$. On cherche donc dans un premier temps à se débarrasser de $\left(x^2+x+2\right)$ par une majoration "grossière", en se plaçant dans un voisinage arbitraire de 1, par exmple $x\in]0,2[$.
Supposons $|x-1|<\alpha\leq 1$. En particulier $|x|<2$, et donc

$$\begin{aligned}|f(x)-2| &\leq |x-1|.\left|x^2+x+2\right|\leq |x-1|\left(\left|x^2\right|+|x|+2\right)\\ &\leq \left(2^2+2+2\right)|x-1|=8|x-1|.\end{aligned}$$

Et donc pour avoir $|f(x)-2|<\varepsilon$, il suffit d'avoir $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{8}$. Finalement, on pose $\alpha=\min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{8}\right)$ et on obtient le résultat souhaité. □

Remarque 4.28

1. *Le nombre réel* $\alpha>0$*, s'il existe n'est pas unique.*
2. $\alpha=\alpha(\epsilon)$*, c'est-à-dire* α *dépend de* ϵ*.*

Théorème 4.29 *Si* f *admet une limite, celle ci est unique.*

4.3.2 Limite à droite, limite à gauche

Définition 4.30

1. *Si* x *tend vers* x_0 *par valeurs supérieures, on définit la limite à droite de* x_0 *que l'on note* $\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}x_0}f(x)$ *ou bien* $\lim_{x\to 0^+}f(x)$*, par :*

$$\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}x_0}f(x)=l_1\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x:\underbrace{x_0<x<x_0+\alpha}_{0<x-x_0<\alpha}\Rightarrow |f(x)-l_1|<\varepsilon.$$

2. *Si* x *tend vers* x_0 *par valeurs inférieures, on définit la limite à gauche de* x_0 *que l'on note* $\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}x_0}f(x)$ *ou bien* $\lim_{x\to 0^-}f(x)$*, par :*

$$\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}x_0}f(x)=l_2\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x:\underbrace{x_0-\alpha<x<x_0}_{0<x_0-x<\alpha}\Rightarrow |f(x)-l_2|<\varepsilon.$$

Exemple 4.31 *Soit*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x^2, & si \;\; x \geq 2, \\ \sin \pi x, & si \;\; x < 2. \end{cases}$$

Montrer, en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 2} f(x) = 4$ *et* $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 2} f(x) = 0$.

Démonstration.

1. Montrons que : $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 2} f(x) = 0$, on a

$$\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 2} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 2} \sin(\pi x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x : 0 < 2 - x < \alpha \Rightarrow |\sin \pi x| < \varepsilon.$$

Alors

$$|\sin(\pi x)| = \underbrace{|\sin(\pi(x-2))|}_{|\sin(\pi x - 2\pi)|} \leq \pi |x-2| = \pi |2-x| .$$

Donc

$$|\sin(\pi x)| < \epsilon, \;\; \text{dès que} \;\; \pi |2-x| < \epsilon \Leftrightarrow |2-x| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Il suffit de prendre $\alpha = \frac{\epsilon}{2}$.

2. Montrons maintenant que : $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 2} f(x) = 4$, on a

$$\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 2} x^2 = 4 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x : 0 < x - 2 < \alpha \Rightarrow \left| x^2 - 4 \right| < \varepsilon.$$

Alors

$$\left| x^2 - 4 \right| = |(x-2)(x+2)| = |x-2| \, |x+2| .$$

D'autre part, on choisit l'intervalle $]2, 3[$ (par exemple) un voisinage à droite de $x_0 = 2$, alors :

– si $x \in \,]2, 3[$, on trouve :

$$2 < x < 3 \Leftrightarrow 4 < x + 2 < 5 \Rightarrow |x+2| < 5.$$

– si on a aussi $x \in \,]2, 3[$, on a trouve :

$$2 < x < 3 \Leftrightarrow 0 < x - 2 < 1 \Rightarrow |x-2| < 1.$$

Donc pour avoir

$$\left|x^2-4\right| < \epsilon, \text{ il suffit d'avoir } \left|x^2-4\right| < 5\,|x-2| < \epsilon, \text{c'est-à-dire : } |x-2| < \frac{\epsilon}{5}.$$

Finalement, on pose $\alpha = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{5}\right)$ et on obtient le résultat souhaité. □

Remarque 4.32 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ *si et seulement si* $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} x_0} f(x) = l$ *et* $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} f(x) = l$

Exemple 4.33 *Soit*

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & si \quad x \leq 0, \\ 1-x, & si \quad x > 0. \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \cos x = 1,$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (1-x) = 1.$

d'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1.$

Exemple 4.34 $E(x)$ *n'a pas de limite lorsque* x *tend vers* $n \in \mathbb{Z}$.

- $\lim_{x\to n^-} E(x) = n-1,$
- $\lim_{x\to n^+} E(x) = n.$

4.3.3 Limites infinies

Définition 4.35 *Soit* $x_0 \in \mathbb{R}$. *On pose par définition :*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x : 0 < |x-x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A,$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x : 0 < |x-x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A,$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x : x > B \Rightarrow f(x) < -A.$$

Exemple 4.36 *Soit* $f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Montrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Démonstration. Soit $A > 0$, alors

$$f(x) > A \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > A \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{A} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{A}},$$

on prend $\alpha = \frac{1}{\sqrt{A}}$ car $\forall x : |x-0| < \alpha = \frac{1}{\sqrt{A}} \Rightarrow f(x) > A.$ □

4.3.4 Relation avec les limites de suites

Le théorème suivant fait le lien entre les notions de limite pour une suite et pour une fonction.

Théorème 4.37 *La fonction* f *définie de* $\mathcal{D}$ *dans* $\mathbb{R}$ *admet pour limite* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *en* x_0 ***si et seulement si*** *pour toute suite réelle* $(u_n)_n$ *d'éléments de* $\mathcal{D}$ *convergeant vers* x_0 *la suite de terme général* $f(u_n)$ *tend vers* l.

Corollaire 4.38 *Si on trouve une suite* $(u_n)_n$ *qui tend vers* x_0 *et pour laquelle la suite de terme général* $f(u_n)$ *diverge alors la fonction* f *n'a pas de limite en* x_0.

Remarque 4.39 *On peut également prouver que la fonction* f *n'a pas de limite en* x_0 *en exhibant deux suites* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *convergeant toutes les deux vers* x_0 *mais pour lesquelles les suites de terme général* $f(u_n)$ *et* $f(v_n)$ *tendent vers deux réels distincts.*

Exemple 4.40 *La fonction* $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ *n'a pas de limite en* 0. *En effet, on considère les deux suites :*

$$u_n = \frac{1}{2n\pi} \text{ et } v_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$$

On a bien :

$$\lim_{x\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} v_n = 0.$$

Mais :

- $f(u_n) = \cos\left(\frac{1}{u_n}\right) = \cos(2n\pi) = 1$, *donc* $\lim_{x\to+\infty} f(u_n) = 1$, *c'est-à-dire* $(f(u_n))_n$ *converge vers* $+1$.
- $f(v_n) = \cos\left(\frac{1}{v_n}\right) = \cos((2n+1)\pi) = -1$, *donc* $\lim_{x\to+\infty} f(v_n) = -1$, *c'est-à-dire* $(f(u_n))_n$ *converge vers* -1.

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(u_n) \neq \lim_{x\to+\infty} f(v_n).$$

Par conséquent :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ n'existe pas.}$$

4.3.5 Formes indéterminées

Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, alors on ne peut à priori rien dire sur la limite de $f+g$ (cela dépend vraiment de f et de g). On raccourci cela en $(+\infty - \infty)$ est une forme indéterminée. Voici une liste de formes indéterminées :

$$-\infty + \infty; \;\; 0 \times \infty; \;\; \frac{\infty}{\infty}; \;\; \frac{0}{0}; \;\; 1^{\infty}; \;\; \infty^{0}; \;\; \infty^{\infty}.$$

Exemple 4.41 *On a*

1. *Pour déterminer la limite du rapport de deux polynômes en x pour $x \to \infty$ il avantageux de diviser le numérateur et le dénominateur par x^n, n étant le plus grand des degrés de ces deux polynômes*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^3}{x^2 - 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x} - 1\right)}{x^2\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)} = -\infty.$$

On peut l'appliquer aux fractions contenant des quantités irrationnelles

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1 + x\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^{3/2}(\frac{1}{x^{3/2}} + 1)} = +\infty$$

2. *Si $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes et $P(a) = Q(a) = 0$, il est recommandé de simplifier la fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ par $x - a$ autant de fois qu'il le faudra*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)^2} = \infty$$

3. *Les expressions qui contiennent des irrationnalités peuvent être ramenées dans de nombreux cas à des expressions rationnelles par l'introduction d'une nouvelle variable*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{m=2}} - 1}{(1+x)^{\frac{1}{n=3}} - 1}$$

posons $1 + x = y^{6=\mathrm{ppcm}(2,3)}$, alors $y = (1+x)^{\frac{1}{6=\mathrm{ppcm}(2,3)}}$ lorsque $x \to 0$, $y \to 1$ donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/2} - 1}{(1+x)^{1/3} - 1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^3 - 1}{y^2 - 1} = \lim_{y\to 1} \frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)} = \frac{3}{2}$$

4. ***Forme indéterminée de la forme*** 1^{∞} ***:***
   Soient f *et* g *deux fonctions définies au voisinage* $\nu(x_0)$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 1^{\infty}$. *On écrit dans ce cas,* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ *sous la forme :*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\times(f(x)-1)},$$

   où x_0 *fini ou infini. Par exemple*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{x+1} = 1^{\infty}.$$

   Posons $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x+1}$ *et* $g(x) = x+1$, *alors*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x)^{g(x)} &= e^{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\times(f(x)-1)}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\times(1+\frac{2}{x+1}-1)}\\ &= e^2.\end{aligned}$$

4.4 Continuité

4.4.1 Continuité en un point

Continuité à droite, continuité à gauche

Définition 4.42 f *est dite* ***continue à droite*** *en* x_0 *si et seulement si*

1. f *est définie en* x_0,
2. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

On définit de même la ***continuité à gauche*** *en* x_0 *si et seulement si*

1. f *est définie en* x_0,
2. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Remarque 4.43 f *est dite continue en* x_0 *si et seulement si* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Exemple 4.44 *Étudions la continuité de* f *en* $x_0 = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & si \quad x \leq 1, \\ 3 - x^2 & si \quad x > 1. \end{cases}$$

On a

- $f(1) = 1$,
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x + 1 = 2$,
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (3 - x^2) = 1$.

Donc f *est continue en* $x_0 = 1$.

Cas de discontinuité

1. La fonction f n'est pas définie en x_0.

   Exemple 4.45 *La fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ *n'est pas définie donc n'est pas continue en* $x = 0$.

2. La fonction f possède en x_0 une limite à droite et une limite à gauche distinctes.

   Exemple 4.46 *La fonction de la partie entière* $x \mapsto E(x)$, *elle est continue à droite en tout point entier* $n \in \mathbb{Z}$, *mais elle ne l'est pas continue à gauche en ces points car :*

   $$\lim_{x \to n^-} E(x) = n - 1 \quad et \quad \lim_{x \to n^+} E(x) = E(n) = n$$

   Les limites à gauche et à droite sont différentes, donc la fonction E *n'est pas continue à gauche de* $n \in \mathbb{Z}$.

4.4.2 Opérations algébriques sur les fonctions continues

Continuité d'une somme, du produit et d'un quotient

Théorème 4.47 *Soient* λ *un réel et* f *et* g *deux fonctions définies sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$. *Si* f *et* g *sont continues en* $x_0 \in I$ *alors on a les propriétés suivantes :*

1. $|f|$ *est continue en* x_0 ;
2. $f + g$ *est continue en* x_0 ;
3. $f \times g$ *est continue en* x_0 ;
4. λf *est continue en* x_0 ;
5. *si de plus* $g(x_0) \neq 0$ *alors* $\dfrac{f}{g}$ *est continue en* x_0.

Continuité des fonctions compositions

Théorème 4.48 *Soient* f *une fonction définie au voisinage de* x_0 *et* g *une fonction définie au voisinage de* $y_0 = f(x_0)$. *Si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ *et si* g *est continue en* y_0 *alors* $\lim_{x \to x_0} g(f(x_0)) = g(y_0)$.

Exemple 4.49 *Puisque* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$*et que la fonction exponentielle est continue en* 1, *on en déduit que*

$$\lim_{x \to 0} e^{\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = e.$$

4.4.3 Continuité sur un intervalle

Définition 4.50 *On dit que* f *est continue sur l'intervalle* I *si* f *est continue en* x_0 *pour tout* $x_0 \in I$.

Continuité des fonctions usuelles

Théorème 4.51

1. *Toute fonction polynômiale est continue en tout point.*
2. *Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.*
3. *Les fonctions* $\sin$ *et* $\cos$ *sont continues en tout point.*
4. *Les fonctions* $\tan$ *et* $\cot$ *sont continues en tout point où elle sont définies.*

Remarque 4.52 *Les fonctions construites à partir des fonctions usuelles par opérations algébriques et composition sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.*

Exemple 4.53 *On considère la fonction réelle* f *donnée par :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + \sqrt{x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{x}} & x > 0, \\ 1 + \sin x & x \leq 0. \end{cases}$$

1. *Déterminons* D_f, *le domaine de définition de* f.

$$\begin{aligned} D_f &=]-\infty, 0] \cup]0, +\infty[\\ &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. *Etudions la continuité de* f *sur* D_f.
   - *Sur* $]-\infty, 0[$, *on a :* $x \mapsto \dfrac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}$ *continue (car : quotient et somme de fonctions continues).*
   - *Sur* $]0, +\infty[$, *on a :* $x \mapsto 1+\sin x$ *continue (car :* $x \mapsto \sin x$, *continue sur* $\mathbb{R}$ *en particulier sur* $]0, +\infty[$*)*
   - *Au point* $x_0 = 0$

$$f \textit{ est continue en } 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}} = \text{F.I.} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}} \frac{(1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x})}{(1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x})} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

alors $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, *donc* f *est continue à droite en* 0.
D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= 1+\sin x \\
&= 1,
\end{aligned}$$

alors $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 1+\sin(0) = 1$, *donc* f *est continue à gauche en* 0.

D'où f *est continue en* 0, *ce qui implique que* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.

4.4.4 Prolongement par continuité en un point

Définition 4.54 *Si la fonction* f *n'est pas définie au point* $x_0 \in I$ *et qu'elle admet en ce point une limite finie notée* ℓ, *la fonction définie par*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{si } x \in I\backslash\{x_0\} \\ \ell & \textit{si } x = x_0 \end{cases}$$

est dite prolongement par continuité de f au point x_0.

Exemple 4.55 *La fonction à valeurs réelles, définie, pour* $x_0 \neq 0$ *par* $f(x) = \frac{\sin(ax)}{x}$*, peut se prolonger par continuité en* 0*, car :*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x} = \lim_{x\to 0} a\frac{\sin(ax)}{ax} = a.$$

Donc

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ a & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Remarque 4.56 *Pour que* f *soit prolongeable par continuité au point* x_0*, il suffit que :*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l.$$

Exemple 4.57 *Soit*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - \sin(x)}{x - \frac{\pi}{4}} & x > \frac{\pi}{4}, \\ -\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} & x < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Peut-on prolonger la fonction f *par continuité au point* $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Solution 4.58 f *est prolongeable par continuité au point* $x_0 = \frac{\pi}{4}$ *si et seulement si* $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x) = l$*. Dans ce cas le prolongement par continuité de* f *au point* $x_0 = \frac{\pi}{4}$*, définie par :*

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - \sin(x)}{x - \frac{\pi}{4}} & x > \frac{\pi}{4}, \\ -\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} - x & x < \frac{\pi}{4}, \\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) & x = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Calculons les limites de f *à gauche et à droite, on a*

- $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \left(-\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} - x\right) = -\sqrt{2}$
- $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \dfrac{\cos x - \sin(x)}{x - \frac{\pi}{4}} = \dfrac{0}{0}$ *FI.*

  On pose :

$$\begin{cases} y = x - \frac{\pi}{4}, \\ x \to \frac{\pi}{4}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + \frac{\pi}{4}, \\ y \to 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0}\frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)}{y} &= \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin y-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin y-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y}{y}\\ &= \lim_{y\to 0}-\sqrt{2}\frac{\sin y}{y}\\ &= -\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Par conséquent f *est prolongeable par continuité au point* $x_0=\frac{\pi}{4}$ *et on a :*

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\sin(x)}{x-\frac{\pi}{4}} & x>\frac{\pi}{4},\\ -\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-x & x<\frac{\pi}{4},\\ -\sqrt{2} & x=\frac{\pi}{4}.\end{cases}$$

4.4.5 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4.59 *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* I, *alors l'image* $f(I)$ *est également un intervalle* (I *n'est supposé ni fermé ni borné à priori) .*

Corollaire 4.60 *Si* f *prend au moins une valeur négative et au moins une valeur positive, alors* f *prend la valeur* 0. *Autrement dit : si* f *une fonction continue sur un intervalle* $[a,b]$. *Si* $f(a)\times f(b)<0$ *alors il existe* $c\in\,]a,b[$ *tel que* $f(c)=0$.

Exemple 4.61 *Considérons l'application* $f: x\in[0,2\pi]\mapsto\sin(x)+(x-1)\cos(x)$. *Cette application est continue car les fonctions sinus et cosinus ainsi que la fonction polynomiale* $x\mapsto x-1$ *sont continues sur* $[0,2\pi]$. *Puisque* $f(0)=-1<0$ *et* $f(2\pi)=2\pi-1>0$, *d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe (au moins) un réel* $c\in\,]0,2\pi[$ *tel que* $f(c)=0$.

Remarque 4.62 *Le réel* $c\in\,]a,b[$ *pour lequel* $f(c)=0$ *n'est pas nécessairement unique.*

Exercice 4.63 *On considère la fonction*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi\sin(x)}{x(x+\pi)} & x\neq-\pi,\\ 1 & x=-\pi.\end{cases}$$

1. *Déterminer le domaine de définition* D_f.
2. *Etudier la continuité de* f *sur* D_f.

3. f *admet-elle un prolongement par continuité en* 0 *? Si oui, donner le.*
4. *Montrer que :*

$$\exists c \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad f(c) = c.$$

Solution 4.64

1. *Soit*

$$f_1(x) = \frac{\pi \sin(x)}{x(x+\pi)}, \qquad D_{f_1} = \mathbb{R} - \{-\pi, 0\}.$$
$$f_2(x) = 1, \qquad D_{f_2} = \mathbb{R}.$$

D'où

$$\begin{aligned} D_f &= (D_{f_1} \cap \mathbb{R} - \{-\pi\}) \cup (D_{f_2} \cap \{-\pi\}) \\ &= \mathbb{R} - \{0\} \\ &= \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

2. – *Sur* $\mathbb{R} - \{-\pi, 0\}$, f *est un rapport de produit de fonctions continues, donc* f *est continue.*

   – *Au point* $x_0 = -\pi$.
   * *On a :* $f(-\pi) = 1$.
   * $\lim\limits_{x \to -\pi} f(x) = \lim\limits_{x \to -\pi} \frac{\pi \sin(x)}{x(x+\pi)} = \frac{0}{0}$*FI.*
   On pose :

$$\begin{cases} y = x + \pi, \\ x \to -\pi. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - \pi, \\ y \to 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\pi} \frac{\pi \sin(x)}{x(x+\pi)} = \lim_{y \to 0} \frac{\pi \sin(y-\pi)}{y(y-\pi)}$$

On sait que :

$$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \times \cos\beta \pm \cos\alpha \times \sin\beta, \\ \sin(-x) = -\sin(x), \\ \sin(\pi - x) = \sin(x), \\ \sin(\pi + x) = -\sin(x). \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0}\frac{\pi\sin(y-\pi)}{y(y-\pi)} &= \lim_{y\to 0}\frac{-\pi\sin(y)}{y(y-\pi)}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{-\pi}{(y-\pi)}\frac{\sin(y)}{y}\\ &= 1\\ &= f(-\pi).\end{aligned}$$

donc f *est continue en* $-\pi$ *et alors* f *est continue sur* D_f*.*

3. f *n'est pas définit en* 0 *mais définit au voisinage de* 0 *et on a :*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\pi\sin(x)}{x(x+\pi)} = \lim_{x\to 0}\frac{\pi}{(x+\pi)}\frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

donc f *admet un prolongement par continuité donnée par :*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0,\\ 1 & x = 0.\end{cases}$$

4. *Posons :*

$$h(x) = g(x) - x, \;\; x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

La fonction h *est continue sur* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ *car* g *est continue sur* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $h(0) = g(0) - 0 = 1 > 0$ *et* $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = \frac{8-3\pi^2}{6\pi} < 0$*, par le théorème des valeurs intermédiaires*

$$\exists c \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \;\; h(c) = g(c) - c = 0,$$

mais comme $c \neq 0$*, alors* $g(c) = f(c)$*, c'est-à-dire :*

$$\exists c \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \;\; f(c) = c.$$

Chapitre 5

Dérivabilité

5.1 Introduction

La notion de dérivée permet d'étudier finement les propriétés locales (approximation affine, tan-gente) et globales (sens de variation, convexité) d'une fonction. Dans ce chapitre, nous donnons certains résultats théoriques généraux qui découlent de la notion de dérivée. Ensuite, nous énonçons quelques théorèmes fondamentaux.

5.2 Dérivabilité en x_0

Définition 5.1 *Soient* I *un intervalle ouvert,* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$*, une fonction et* x_0 *un point de* I*. On dit que* f *est dérivable en* x_0 *si la fonction* $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *admet une limite finie quand* x *tend vers* x_0*. Cette limite est alors appelée dérivée de* f *en* x_0*, et notée* $f'(x_0)$*.*

$$f'(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Il est souvent pratique de se ramener à une limite en 0 *:*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Exemple 5.2 *Calculons la dérivabilité de la fonction suivante au point* $x_0 = 1$*.*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(\pi x)}{x - 1} & x \neq 1, \\ 0 & x = 1. \end{cases}$$

On a
$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi x)}{(x-1)^2}=\frac{0}{0}\ \text{FI}\,.$$
En faisant un changement de variable afin de faire apparaitre des limites usuelles :
$$\begin{cases} y = x-1, \\ x\to 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y+1, \\ y\to 0. \end{cases}$$
Alors :
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi x)}{(x-1)^2}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin^2(\pi(y+1))}{(y)^2}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin(\pi y+\pi)}{y}\right)^2.$$
Comme $\sin(\pi y+\pi)=-\sin\pi y$, *donc*
$$\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin(\pi y+\pi)}{y}\right)^2=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin\pi y}{\pi y}\right)^2\pi^2=\pi^2.$$
D'où f *est dérivable en* $x_0=1$ *et* $f'(1)=\pi^2$

Proposition 5.3 *Toute fonction dérivable en* x_0 *est continue en* x_0.
La réciproque est fausse : les fonctions $(x\mapsto\mid x\mid)$ *ou* $(x\mapsto\sqrt{x})$, *par exemple, sont continues, mais non dérivables en* 0.

5.2.1 Dérivée à droite, dérivée à gauche

Définition 5.4 *Soient* I *un intervalle ouvert,* $f : I \to \mathbb{R}$, *une fonction et* x_0 *un point de* I *ou bien une extrémité de* I. *On dit que* f *est dérivable en* x_0 *à droite si* $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *admet une limite finie quand* x *tend vers* x_0^+. *La limite* $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *est notée* $f'_d(x_0)$. *De même si* $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *a une limite à gauche quand* x *tend vers* x_0^-, *on dit que* f *est dérivable en* x_0 *à gauche et la limite* $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *se notée* $f'_g(x_0)$.

Proposition 5.5 f *est dérivable au point* x_0 *si et seulement si* $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)=f'(x_0)$.

5.2.2 Cas de non dérivabilité

1. Si $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$ la fonction n'est pas dérivable en x_0. La courbe $\mathcal{C}_f$ possède alors en x_0 une tangente parallèle à Oy.

Exemple 5.6 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *n'est pas dérivable en* $x_0 = 0$.

En effet,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \infty.$$

La tangente en O *est l'axe* Oy.

2. Si le rapport $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ possède une limite à droite et une limite à gauche distinctes la fonction f n'est pas dérivable en x_0. La courbe $\mathcal{C}_f$ possède en x_0 une demi tangente à droite et une demi tangente à gauche : $M(x_0, f(x_0))$ est un point **anguleux**.

   Exemple 5.7 *Si* $f(x) = |\sin x|$

   On a $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ *et* $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1.$

3. Si le rapport $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ne possède pas une limite en x_0, f n'est pas dérivable en x_0.

   Exemple 5.8 *Soit*

   $$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & si \;\; x \neq 0 \\ 0 & si \;\; x = 0 \end{cases}$$

   Etudions la dérivabilité de f *en* 0

   f *est dérivable en* $0 \Leftrightarrow \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = l, \;\; l \in \mathbb{R}$. *Alors :*

   $$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

   d'où f *n'est pas dérivable au point* $x_0 = 0$.

5.3 Dérivabilité sur un intervalle

Définition 5.9 *Une fonction* f *définie sur un intervalle* I *est dite dérivable sur* I *si elle est dérivable en tout point de* I. *Dans ce cas l'application :*

$$\begin{aligned} f' : I &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x), \end{aligned}$$

est appelée fonction dérivée (ou dérivée) de f.

Exemple 5.10 *La fonction* $x \mapsto \cos x$ *admet un nombre dérivé en tout point* x_0 *de* $\mathbb{R}$*, en effet,*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{-2\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{-2\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{2\left(\frac{x-x_0}{2}\right)} = -\sin x_0 \\
&= f'(x_0).
\end{aligned}$$

Exemple 5.11 *La fonction* $x \mapsto x^n$ *admet un nombre dérivé en tout point* x_0 *de* $\mathbb{R}$*, en effet,*

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k}h^k - x_0^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k}h^k}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k}h^{k-1} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\binom{n}{1} x_0^{n-1} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k}h^{k-1}}_{\textit{tend vers } 0} \right) \\
&= n x_0^{n-1} \\
&= f'(x_0).
\end{aligned}$$

Exemple 5.12 *Soit* f *la fonction définie sur* $[0, +\infty[$ *par :*

$$f(x) = x\sqrt{x}.$$

1. *Montrons que* f *est dérivable sur* $]0, +\infty[$.
   Sur $[0, +\infty[$*, f est le produit de deux fonctions* $u :\mapsto x$ *et* $v :\mapsto \sqrt{x}$*. Or* u *est dérivable sur* $[0, +\infty[$ *mais v n'est dérivable que* $]0, +\infty[$*, donc* f *est dérivable sur* $]0, +\infty[$.
2. *calculons* $f'(x)$
   $$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$
3. *Démontrons, à l'aide de la définition du nombre dérivée, que* f *est dérivable en* 0.
   $\forall x, \quad x > 0, \quad \frac{f(x)-f(0)}{x} = \sqrt{x}$*. Or* $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$*, donc* f *est dérivable en* 0 *et* $f'(0) = 0$.

5.4 Opérations sur les fonctions dérivables

Dès que l'on connaît quelques dérivées des fonctions, on peut en construire de (nombreuses) autres en utilisant les procédés suivants :

5.4.1 Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient

Si les fonctions f et g sont dérivables sur I, alors les fonctions $f+g$, λf $(\lambda \in \mathbb{R})$, fg et $\frac{f}{g}$ sont dérivables et :

$$\begin{aligned}
&1).\ (f+g)' = f' + g' \\
&2).\ (\lambda f)' = \lambda f' \\
&3).\ (fg)' = f'g + g'f \\
&4).\ \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \qquad \text{si } g(x) \neq 0
\end{aligned}$$

Exemple 5.13 *Calculons la dérivée de* $\tan x$, *on a*

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x \, (\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.
\end{aligned}$$

5.4.2 Dérivée d'une fonction composée

Théorème 5.14 *Si* f *est dérivable en* x_0 *et* g *dérivable en* $y_0 = f(x_0)$ *alors la fonction composée* $g \circ f$ *est dérivable en* x_0 *et*

$$(g \circ f)' (x_0) = g' [f(x_0)] \times f' (x_0)$$

Exemple 5.15 *On considère la fonction* $f(x) = \cos(x^2)$. f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et, pour tout réel* x *:*

$$f'(x) = -2x \sin(x^2).$$

Exemples importants

Si f est une fonction dérivable :

1. $\left(\sqrt{f}\right)' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$ (si $f > 0$ ne s'annule pas) ;
2. $(f^n)' = nf^{n-1}f'$, (si $f > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$) ;
3. $(\ln|f|)' = \dfrac{f'}{f}$ (si f ne s'annule pas) ;
4. $(e^f)' = f'e^f$.

5.5 Dérivées successives

Définition 5.16 *On définit les dérivées successives d'une fonction* f *qui est dérivable dans* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *par :* $f^{(n)} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifiant :*

$$\begin{cases} f^{(0)} = f, \\ f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)', \qquad \textit{pour tout } \ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Exemple 5.17 *Calculons les dérivées successives de la fonction :*

$$f(x) = \frac{1}{x+1},$$

la fonction f *est définie et dérivable sur* $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ *(car c'est une fonction rationnelle)*
Tout d'abord

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{(x+1)^1},$$

ensuite

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2},$$

puis

$$f^{(2)}(x) = +\frac{1 \times 2}{(x+1)^3},$$

ensuite

$$f^{(3)}(x) = -\frac{1 \times 2 \times 3}{(x+1)^4}.$$

Le calcul des premières dérivées successives nous permet d'établir la formule suivante : $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$. *Utilisons un raisonnement par récurrence pour montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}. \tag{5.1}$$

Pour $n = 0$, *la relation (5.1) est évidente car :*

$$\begin{cases} f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^1}, \\ \dfrac{(-1)^0 0!}{(x+1)^{0+1}} = \dfrac{1}{(x+1)^1}. \end{cases}$$

Supposons la relation (5.1) vraie pour un entier naturel n *donné et montrons qu'elle est vraie pour l'entier suivant* $n+1$, *c'est-à-dire supposons que :*

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}},$$

et montrons que

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}.$$

On a

$$\begin{aligned} \left(f^{(n)}(x)\right)' &= \left(\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}\right)' = (-1)^n n! \left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)' \\ &= (-1)^n n! \times \frac{-1 \times (n+1)(x+1)^n}{(x+1)^{2n+2}} = \frac{-1 \times (-1)^n \times n! \times (n+1)}{(x+1)^{n+2}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} \times (n+1)!}{(x+1)^{n+2}} = f^{(n+1)}(x). \end{aligned}$$

La relation (5.1) est démontrée.

5.6 Fonction de classe C^n

Définition 5.18 *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on dit que* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction de classe* C^n *sur* I *si elle est* n *fois dérivable sur* I *et si la fonction* $f^{(n)}$ *est continue sur* I.

- *Si* $n = 0$, *on dit fonction de classe* $C(I)$ *ce sont les fonctions continues dans un intervalle* I.
- *Si* $n = 1$ *une fonction de classe* $C^1(I)$ *est une fonction dérivable et sa première dérivée est continue en tout point de* I.

On dit que f *est de classe* C^∞ *sur* I *si* f *est de classe* C^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 5.19 *On a :*

1. *La fonction exponentielle* $f(x) = e^x$ *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$, *car :* $\forall n \in \mathbb{N}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = e^x$.
2. *La fonction* $f(x) = x^n$ *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$, *car :*
   Tout d'abord :
   $$f(x) = x^n,$$
   puis :
   $$f'(x) = nx^{n-1},$$
   ensuite :
   $$f^{(2)}(x) = n(n-1)x^{n-2}.$$
   Alors :
   $$\begin{cases} f^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}, & \text{si } k < n, \\ f^{(k)}(x) = n!, & \text{si } k = n, \\ f^{(k+1)}(x) = 0, & \text{si } k > n. \end{cases}$$

5.7 Dérivée n-ième d'un produit

Théorème 5.20 (formule de Leibniz) *Si* f *et* g *sont des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, n *fois dérivables sur un intervalle* I, *la fonction* fg *est* n *fois dérivable sur* I *et :*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Exemple 5.21 *Calculons la dérivée* n*-ième de la fonction*

$$g(x) = x^2(1+x)^n, \quad n \geq 2.$$

La fonction g *est de classe* C^n *sur* $\mathbb{R}$, *car c'est une fonction polynômiale. On écrira la fonction à dériver sous forme de produit de deux fonctions dérivables. Posons* $\alpha(x) = x^2$ *et* $\beta(x) = (1+x)^n$. *D'après la formule de Leibniz, on a*

$$\begin{aligned} g^{(n)} = (\alpha \times \beta)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \times \beta^{(n-k)} \\ &= \binom{n}{0} \alpha \times \beta^{(n)} + \binom{n}{1} \alpha^{(1)} \times \beta^{(n-1)} + \binom{n}{2} \alpha^{(2)} \times \beta^{(n-2)} + \cdots + \binom{n}{0} \alpha^{(n)} \times \beta. \end{aligned}$$

- *La fonction* α *est une fonction polynôme de degré* 2. *Elle est donc indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}$, *on a* $\alpha(x) = x^2$, $\alpha^{(1)}(x) = 2x$, $\alpha^{(2)}(x) = 2$ *et* $\alpha^{(3)}(x) = 0$. *Alors* $\forall n \geq 3 \quad \alpha^{(n)}(x) = 0$.
- *La fonction* β *est une fonction polynôme de degré* n. *Elle est donc indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}$. *Pour* $k > n$, *on a* $\beta^{(k)}(x) = 0$ *et pour* $k \leq n$, *au vu du premier résultat (question 1), on peut conjecturer que :* $\beta^k(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(1+x)^{(n-k)}$ *et le vérifier par récurrence. Alors :*

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= \binom{n}{0}x^2 \times n! + \binom{n}{1}2x \times n!(1+x) + \binom{n}{2}2 \times \frac{n!}{2!}(1+x)^2 \\ &= \frac{(n+2)!}{2}x^2 + n \times (n+1)!x + \frac{(n-1)! \times n \times n!}{2}. \end{aligned}$$

5.8 Théorème de Rolle

Théorème 5.22 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

Si :

- f *est continue sur* $[a, b]$
- f *est dérivable sur* $]a, b[$
- *f(a) = f(b).*

Alors :

$$\exists c \in]a, b[\ \text{ tel que : } \ f'(c) = 0.$$

Exemple 5.23 *Appliquons le théorème de Rolle à la fonction* $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}$, *sur* $[0, 8]$. *Les hypothèses du théorème sont vérifiées puisque la fonction* f *est continue sur* $[0, 8]$, *dérivable sur* $]0, 8[$ *et* $f(0) = f(8)$, *alors* $\exists c \in]0, 8[$ *tel que* $f'(c) = 0$. *Dans ce cas, on a*

$$\forall x \in]0, 8[\quad f_2'(x) = \frac{1}{3}\left(8x - x^2\right)^{-\frac{2}{3}}(8 - 2x) = \frac{8 - 2x}{(8x - x^2)^{\frac{2}{3}}}, \quad \text{et} \quad f'(c) = 0 \Rightarrow c = 4.$$

5.9 Théorème des accroissements finis

Théorème 5.24 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

Si :

- f *est continue sur* $[a, b]$
- f *est dérivable sur* $]a, b[$

Alors :

$$\exists c \in]a, b[\ \ \textit{tel que :} \ \ f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Exemple 5.25 *Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} & \textit{si} \ \ x \in]-\infty, 1[\,, \\ \dfrac{1}{x} & \textit{si} \ \ [1, +\infty[\,, \end{cases}$$

sur $[0, 2]$.

Les hypothèses du théorème des accroissements finis sont vérifiées puisque :

– *La fonction* f *est continue sur la réunion* $[0, 1[\cup]1, 2]$.

  Au point $x = 1$*, on a*

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{3 - x^2}{2} = 1, \ \ \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = 1 \ \ \textit{et} \ \ f(1) = 1,$$

  d'où f *est continue en* 1*. Alors la fonction* f *est continue sur* $[0, 2]$.

– *La fonction* f *est dérivable sur la réunion* $]0, 1[\cup]1, 2[$.

  Au point $x = 1$*, on a*

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-1}{x} = -1$$
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-(x + 1)}{x} = -1,$$

  d'où f *est dérivable en* 1 *et* $f'(1) = -1$*. Alors la fonction* f *est dérivable sur* $]0, 2[$

La fonction f *satisfait aux hypothèses des accroissements finis sur* $[0, 2]$*, il existe* $c \in]0, 2[$ *tel que* $f(2) - f(0) = 2f'(c)$ *donc* $f'(c) = -\frac{1}{2}$.

Exemple 5.26 *Utilisons le théorème des accroissement finis pour montrer l'inégalité suivante :*

$$\forall x \geq 0 : \quad \frac{x}{x + 1} \leq \ln(x + 1) \leq x.$$

Considérons l'application $f : t \in [0, +\infty[\mapsto \ln(t+1)$ *et appliquons le théorème des accroissements finis entre* 0 *et* x*, où* x *désigne un réel strictement positif. La fonction* f *est continue sur* $[0, +\infty[$ *en particulier* $[0, +x]$ *et dérivable sur* $]0, +\infty[$ *en particulier* $]0, x[$ *avec pour tout* $t \in]0, +\infty[$*, on a* $f'(t) = \frac{1}{1+t}$*. D'après le théorème des accroissements finis, il existe* $c \in]0, x[$*, tel que :*

$$f(x) - f(0) = xf'(c) \ \ \textit{c'est-à-dire} \ \ \ln(x + 1) = \frac{x}{1 + c}.$$

D'autre part : $0 < c < x \Rightarrow 1 < 1 + c < 1 + x \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1$ *et puisque* $x > 0$ *on en déduit que* $\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+c} < x$. *On en conclut que pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, *on a*

$$\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x, \tag{5.2}$$

et donc pour tout $x \geq 0$, *on a*

$$\forall x \geq 0 : \quad \frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x.$$

5.10 Règle de L'Hospital

Théorème 5.27 (La Règle de L'Hospital) *Soient* f, g *deux fonctions définies sur un voisinage I de a. On suppose que f et g sont continues sur I et dérivable sur* $I \setminus \{a\}$. *On suppose en outre que* $f(a) = g(a) = 0$ *et que* $\forall x \in I \setminus \{a\}, g'(x) \neq 0$. *Alors*

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Longrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l}$$

Exemple 5.28 *En appliquant la règle de l'Hospital, calculons la limite :*

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\cos(x) - 2 + x^2}{x \sin x - x^2}.$$

La limite de la forme $\frac{0}{0}$. *Posons* $f : x \mapsto 2\cos x - 2 + x^2$ *et* $g : x \mapsto x \sin x - x^2$, *ces deux fonctions sont continues et dérivables sur* $\mathbb{R}$. *La fonction* g' *ne s'annule pas au voisinage de* 0. *D'après la règle de l'Hôpital, on en déduit que*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin x + 2x}{\sin x + x\cos x - 2x} = \text{ FI de type } \frac{0}{0},$$

et de même

$$\lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-2\cos x + 2}{-x\sin x + 2\cos x - 2} = \text{ FI de type } \frac{0}{0},$$

et de même

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin x}{-3\sin x - x\cos x} = \text{ FI de type } \frac{0}{0},$$

donc

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^4 = \lim_{x \to 0} \frac{2\cos x}{-4\cos x + x\sin x} = -\frac{1}{2}.$$

Exemple 5.29 *En appliquant la règle de l'Hospital, calculons la limite :*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2+2x}.$$

En appliquant la règle de l'Hôpital, calculons la limite : La limite de la forme $\frac{0}{0}$. *Posons* $f : x \mapsto e^{x^2}$ *et* $g : x \mapsto x^2+2x$, *ces deux fonctions sont continues et dérivables sur* $\mathbb{R}$ *avec* $f' : x \mapsto 2xe^{x^2}$ *et* $g' : x \mapsto 2x+2$. *La fonction* g' *ne s'annule pas au voisinage de* 0 *et*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{2x+2} = 0.$$

D'après la règle de l'Hôpital, on en déduit que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2+2x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

Remarque 5.30 *La réciproque de la règle de l'Hospital est fausse comme on peut le constater si l'on prend*

$$g(x) = x, \quad \textit{et} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, *mais* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *n'a pas de limite.*

5.11 Formules de Taylor

Nous présentons, dans ce qui suit, les formules de Taylor, qui généralisent la formule des accroissements finis pour les fonctions plusieurs fois dérivables.

5.11.1 Formule de Taylor avec reste de Lagrange.

Théorème 5.31 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$, *une fonction définie et dérivable jusqu'à l'ordre* $n+1$ *et soit* $x_0 \in I$, *alors on a les formules suivantes :*

1). *Pour tout* $x \in I$, *il existe un réel* c *entre* x_0 *et* x *tel que :*

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\textit{Partie régulière : } P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\textit{Le reste : } R_n(x)}. \tag{5.3}$$

2). $\forall x \in I$, $\exists \theta$, $0 < \theta < 1$ *tel que :*

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{\text{Le polynôme : } P_n(x)} + $$
$$+ \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{\text{Le reste : } R_n(x)}, \tag{5.4}$$

le reste $R_n(x)$ *est dit reste de Lagrange.*

Exemple 5.32 *Soit la fonction :*

$$f(x) = \sin^3(x).$$

On applique la formule de Taylor avec reste de Lagrange à f *en* $x_0 = \frac{\pi}{4}$ *à l'ordre* $n + 1 = 3$. *La fonction* f *est de classe* C^∞ *en tout point de* $\mathbb{R}$ *et donc elle admet un développement de Taylor avec reste de Lagrange sur tout intervalle de* $\mathbb{R}$ *et de tout ordre. Donc on peut choisir n'importe quel intervalle qui contient* $x_0 = \frac{\pi}{4}$ *(on prend* $I = [-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}]$ *).*
Pour tout $x \in I$*, il existe* c *entre* x_0 *et* x *tel que :*

$$f(x) = f(\pi/4) + \frac{f'(\pi/4)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''(\pi/4)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3.$$

On a :

$f(x) = \sin^3(x)$, *d'où* $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$,

$f'(x) = 3\cos(x)\sin^2(x)$, *d'où* $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$,

$f''(x) = -3\sin^3(x) + 6\cos^2(x)\sin(x)$, *d'où* $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$,

$f^{(3)}(x) = -21\cos(x)\sin^2(x) + 6\cos^3(x)$, *d'où* $f^{(3)}(c) = -21\cos(c)\sin^2(c) + 6\cos^3(c)$.

D'où :

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{4\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\left(7\cos(c)\sin^2(c) - 2\cos^3(c)\right)}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3.$$

5.11.2 Formule de Taylor Mac-Laurin

Si $x_0 = 0$, les formules de Taylor avec reste de Lagrange (5.3) et (5.4) s'appellent formules de Taylor Mac Laurin avec reste de Lagrange et prennent alors les formes suivantes :
1). $\forall x \in I, \exists c, \ \ 0 < c < x$, tel que :

$$f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n}_{\text{Le polynôme : } P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{\text{Le reste : } R_n(x)}.$$

2). $\forall x \in I, \exists \theta, \ \ 0 < \theta < 1$, tel que :

$$f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{\text{Le polynôme : } P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{\text{Le reste : } R_n(x)}.$$

Exemple 5.33 *Montrer que :*

$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq \sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} \leq \frac{5x^3}{81}. \tag{5.5}$$

Corrigé : On considère la fonction : $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$.
Si $x = 0$, on a : $0 \leq 0 \leq 0$, c'est évident. Si $x > 0$, la fonction f est indéfiniment dérivable sur $]-1; +\infty]$, donc $f \in C^2([0; x])$ et f est dérivable sur $]0; x[$, alors on applique la formule de Mac-Laurin-Lagrange à f à l'ordre 2, donc il existe $c \in]0; x[$ tel que :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x^1}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(c)\frac{x^3}{3!}.$$

$$\begin{array}{lll}
f(x) = \sqrt[3]{1+x}, & \text{d'où} & f(0) = 1, \\
f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}, & \text{d'où} & f'(0) = \frac{1}{3}, \\
f''(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{-\frac{5}{3}}, & \text{d'où} & f''(0) = -\frac{2}{9}, \\
f'''(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{-\frac{8}{3}}, & \text{d'où} & f'''(c) = \frac{10}{27}(1+c)^{-\frac{8}{3}}.
\end{array}$$

Donc :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5x^3}{81(1+c)^{\frac{8}{3}}}.$$

On peut écrire :

$$f(x) - 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x^2 = \frac{5x^3}{81(1+c)^{\frac{8}{3}}}, \quad \text{et} \quad \frac{5x^3}{81(1+c)^{\frac{8}{3}}} > 0.$$

Ce qui implique :

$$0 < \sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9}. \tag{5.6}$$

D'autre part :

$$c > 0 \Rightarrow 1 + c > 1 \Rightarrow (1+c)^{\frac{8}{3}} > 1 \Rightarrow \frac{1}{(1+c)^{\frac{8}{3}}} < 1 \Rightarrow \frac{5x^3}{81(1+c)^{\frac{8}{3}}} < \frac{5x^3}{81}$$

Ce qui implique :

$$f(x) - 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x^2 < \frac{5x^3}{81}. \tag{5.7}$$

De (5.6) et (5.7), la relation (5.5) est démontrée.

5.11.3 Formule de Taylor-Young

Théorème 5.34 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction définie et dérivable jusqu'à l'ordre n et soit $x_0 \in I$. Alors pour $x \in I$, on a :*

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)^1}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!}}_{\textit{Le polynôme : } P_n(x)} + \underbrace{(x-x_0)^n\varepsilon(x)}_{\textit{Le reste : } R_n(x)},$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$

Notation 5.35 *Le terme $(x - x_0)^n\varepsilon(x)$ où $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ est souvent abrégé en **«petit o»** de $(x - x_0)^n$ et est noté $o((x - x_0)^n)$. Donc $o((x - x_0)^n)$ est une fonction telle que :*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Il faut s'habituer à cette notation qui simplifie les écritures, mais il faut toujours garder à l'esprit ce qu'elle signifie.

Exemple 5.36 *Soit la fonction :*

$$f(x) = e^{\tan x}.$$

Faisons une application de la formule de Taylor-Young pour la fonction f, en posant $x_0 = \frac{\pi}{4}$, pour $n = 2$, on a :

$x \mapsto \tan x$ *est de classe* C^∞ *sur* $]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}[$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *et* $x \mapsto e^x$ *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$*, donc* *la fonction* $f(x) = e^{\tan x}$ *est de classe* C^{∞} *sur* $]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}[$. *Elle admet par conséquence à tout ordre en* $\frac{\pi}{4}$, *pour* $x \in]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}[$, *un développement de Taylor-Young de la forme :*

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{f'(\pi/4)}{1!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^1 + \frac{f''(\pi/4)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + o\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2.$$

Il suffit de calculer les dérivées successives de f.

Tout d'abord :

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e.$$

Ensuite :

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(1+\tan^2 x\right)e^{\tan x},$$

donc : $$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2e.$$

Puis :

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)e^{\tan x} + \left(1+\tan^2 x\right)^2 e^{\tan x},$$

donc : $$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8e.$$

Donc la formule de Taylor-Young de f *en* $\frac{\pi}{4}$ *à l'ordre* 2, *est donnée par :*

$$f(x) = e + 2e\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + 4e\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + o\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2$$

5.11.4 Formule de Mac-Laurin-Young

Si $x_0 = 0$, la formule de Taylor-Young s'appelle formule de Maclaurin-Young et prend alors la forme suivante :

$$f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{\text{Le polynôme : } P_n(x)} + \underbrace{x^n\varepsilon(x)}_{\text{Le reste : } R_n(x)}$$

avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Exemple 5.37 *Soit la fonction :*

$$f(x) = \ln(x+1).$$

Faisons une application de la formule de Maclaurin-Young à la fonction f, *pour* n *quelconque. Alors :*

$x \mapsto f(x) = \ln(x+1)$ *est de classe* C^∞ *sur* $]-1;+\infty[$, *(*f *est indéfiniment dérivable sur* $]-1;+\infty[$*). Elle admet un développement de Maclaurin-Young à tout ordre en* 0*, pour* $x \in]-1;+\infty[$*, est donc de la forme :*

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x^1}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Il suffit de calculer les dérivées successives de f*.*

Tout d'abord :

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}, \qquad \textit{donc } f'(0) = +1.$$

Ensuite :

$$f''(x) = -1 \times \frac{1}{(x+1)^2}, \quad \textit{donc } f''(0) = -1.$$

Puis :

$$f'''(x) = +2 \times \frac{1}{(x+1)^3}, \quad \textit{donc } f'''(0) = +2.$$

$$\vdots$$

Le calcul des premières dérivées successives permet d'établir la formule suivante :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)! \times \frac{1}{(x+1)^n}.$$

Par récurrence on montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)! \times \frac{1}{(x+1)^n}.$$

et donc :

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Par conséquence :

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

Exercice 5.38

1. *Enoncer la formule de Mac-Laurin-Lagrange à l'ordre n.*
2. *Soit la fonction :*

$$f(x) = \ln(1+x).$$

- *Calculer la dérivée n-ième de f.*
- *Donner la formule de Mac-Laurin-Lagrange de f à l'ordre $2, 3$ et n.*

3. ***Applications :***
   - *Montrer :*
   $$\forall x > 0,\ \ x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(x+1) < x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$
   - *Soit la suite de terme générale :*
   $$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n}.$$
   Calculer la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Solution 5.39

1. *Formule de Mac-Laurin-Lagrange c'est la formule de Taylor Lagrange sur $[0, x]$, $x > 0$. Si f est de classe C^n sur $[0, x]$ et la dérivée d'ordre $n+1$ existe sur $]0, x[$, alors :*
   $\exists c \in\,]0, x[$ *tel que :*
   $$f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f(0)}{1!}x^1 + \frac{f(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f(0)}{n!}x^n}_{\textit{Le polynôme : } P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{\textit{Le reste : } R_n(x)}. \tag{5.8}$$

2. $*$ *La fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est de classe C^∞ sur $]-1; +\infty[$ (f est indéfiniment dérivable sur $]-1; +\infty[$). On peut conjecturer l'expression $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)! \times \frac{1}{(x+1)^n}$ et la vérifier par récurrence.*

   $*$ *On applique (5.8) à f à l'ordre 2, on trouve*
   $$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3(1+c)^3}x^3. \tag{5.9}$$
   On applique (5.8) à f à l'ordre 3, on trouve
   $$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{4(1+c)^4}x^4. \tag{5.10}$$
   On applique (5.8) à f à l'ordre n, on trouve
   $$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}}x^{n+1}. \tag{5.11}$$

3. $*$ *D'après (5.9), (5.10) et Comme* $\frac{1}{3(1+c)^3}x^3 > 0$, $\frac{1}{4(1+c)^4}x^4 > 0$, *on obtient*

$$\forall x > 0, \quad x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(x+1) < x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

$*$ *En remplaçant* $x = 1$, *dans (5.11), on a*

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}}; \quad 0 < c < 1$$

Par suite

$$\left| \underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}}_{u_n} - \ln 2 \right| = \frac{1}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \to 0.$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2.$$

Chapitre 6

Fonctions élémentaires

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons découvrir de nouvelles fonctions : fonctions circulaires réciproques ($\cos^{-1}, \sin^{-1}, \tan^{-1}$). Ces fonctions seront utilisées couramment dans les calculs de primitives.

6.2 Existence de la fonction réciproque

Théorème 6.1 (Fondamental) *Si f est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ l'image par f de $[a, b]$ est un intervalle fermé $[m, M]$.*

Corollaire 6.2 *Si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$ alors f établit une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ si f est croissante, sur $[f(b), f(a)]$ si f est décroissante.*

Plus généralement, si I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$: **Toute fonction continue est strictement monotone sur** I **définit une bijection de** I **sur** $f(I)$ Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On a vu que f établit une bijection de I sur $f(I)$:

$$\forall y \in f(I), \exists! x \in I : y = f(x)$$

On peut donc définir une bijection de $f(I)$ vers I, notée f^{-1}, telle que :

$$\begin{matrix} y = f(x) \\ x \in I \end{matrix} \iff \begin{matrix} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(I) \end{matrix}$$

f^{-1}est appelée " **fonction réciproque** " de f.

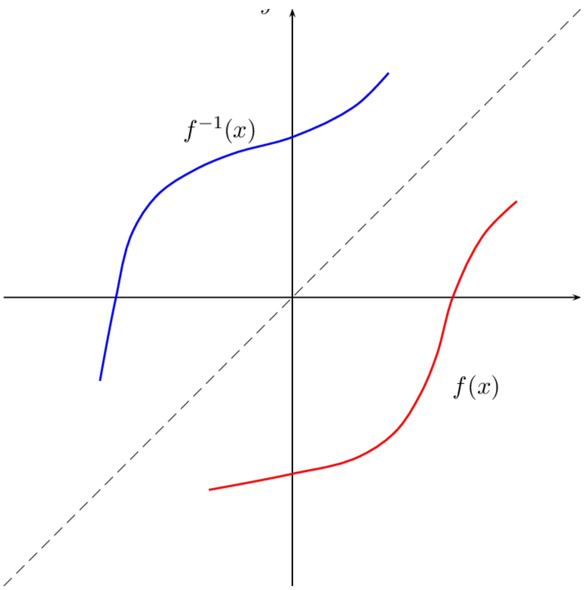

FIGURE 6.1 – Fonctions Arc sinus.

Exemple 6.3 *Soit* $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}_+$

Sur $\mathbb{R}_+$, f *est continue et strictement croissante, à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$. *On peut donc définir* f^{-1}, *notée* $\sqrt{\,}$, *par l'équivalence :*

$$\begin{matrix} y = x^2 \\ x \in \mathbb{R}_+ \end{matrix} \iff \begin{matrix} x = \sqrt{y} \\ y \in \mathbb{R}_+ \end{matrix}$$

Propriétés 6.4

1. f^{-1} *est monotone, de même sens de variation que* f.
2. f^{-1} *est continue.*
3. *si* $f'(x) \neq 0$, f^{-1} *est dérivable en* $y = f(x)$ *et* $\left[f^{-1}\right]'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.
4. *Représentation graphique de* f^{-1} : *Soit* $\mathcal{C}_f$ *la courbe représentative de* f *dans le repère orthonormée* $\left(O, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}\right)$ *Par suite de l'équivalence* $\begin{matrix} y = f(x) \\ x \in I \end{matrix} \iff \begin{matrix} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(I) \end{matrix}$ $\mathcal{C}_f$ *est aussi la courbe représentative de* f^{-1}, *mais dans le repère* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. *L'échange de* x *et* y *conduit*

à la courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la première bissectrice dont l'équation cartésienne dans le repère $\left(O, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}\right)$ est

$$\begin{array}{c} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{array}$$

6.3 Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques

6.3.1 Fonction réciproque de la fonction sinus

La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas monotone . Sa restriction à l'intervalle fermé $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est continue et croissante et définit donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, +1]$. La bijection réciproque est noté **arcsin** :

$$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \underset{\text{arcsin}}{\overset{\text{sin}}{\rightleftarrows}} [-1, +1]$$

On a donc l'équivalence :

$$\begin{array}{c} y = \arcsin x \\ x \in [-1, +1] \end{array} \iff \begin{array}{c} x = \sin y \\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{array}$$

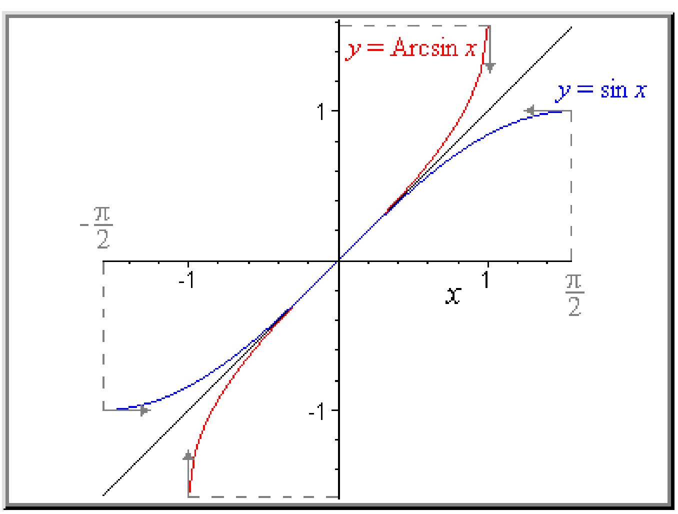

FIGURE 6.2 – Fonctions Arc sinus.

Propriétés 6.5 *La fonction **arcsin** est :*

1. *Continue, croissante sur* $[-1,+1]$ *à valeurs dans* $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.
2. *Impaire :* $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = 1$ *; donc* $\arcsin x \underset{0}{\sim} x$.
4. $\boxed{\forall x \in]-1,+1[: (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

   En effet, par définition $\begin{array}{c} y = f(x) = \arcsin x \\ x \in [-1,+1] \end{array} \iff \begin{array}{c} x = f^{-1}(y) = \sin y \\ y \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \end{array}$ *or*

   $$\left(f^{-1}\right)'(y) = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} \text{ \textit{puisque} } \cos y \geq 0 \text{ \textit{car} } y \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$

   Pour $|y| \neq \frac{\pi}{2}$ *on en déduit :*

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(f^{-1})'(y)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

5. $\forall x \in [-1,+1] : \sin(\arcsin x) = x$.
6. *La fonction* $x \longmapsto \arcsin(\sin x)$ *est* 2π*—périodique, impaire, et*

   $$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x & \text{\textit{si} } x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x & \text{\textit{si} } x \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right] \end{cases}$$

7. *La courbe d'équation*

   $$\begin{array}{c} y = \arcsin x \\ x \in [-1,+1] \end{array}$$

   est obtenue par symétrie par rapport à la première bissectrice de l'arc de sinusoïde définie par

   $$\begin{array}{c} y = \sin x \\ x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \end{array}$$

6.3.2 Fonction réciproque de la fonction cosinus

La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas monotone . Sa restriction à l'intervalle fermé $[0, \pi]$ est continue et décroissante et définit donc une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, +1]$. La bijection réciproque est noté **arccos** :

$$[0, \pi] \underset{\text{arccos}}{\overset{\cos}{\rightleftarrows}} [-1, +1]$$

On a donc l'équivalence :

$$\begin{matrix} y = \arccos x \\ x \in [-1, +1] \end{matrix} \iff \begin{matrix} x = \cos y \\ y \in [0, \pi] \end{matrix}$$

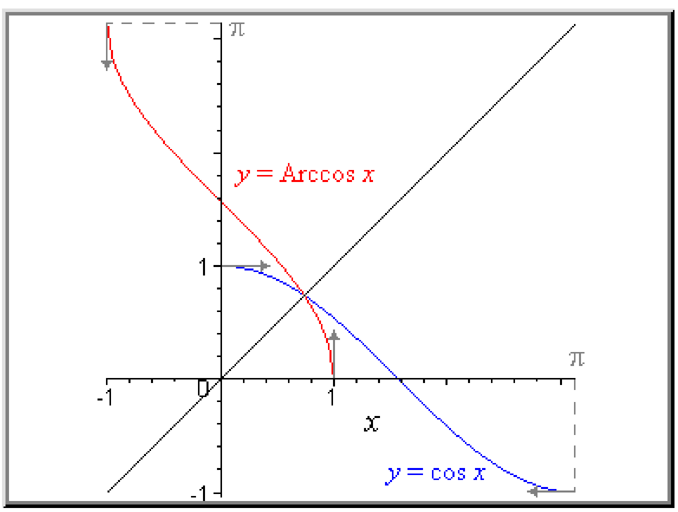

FIGURE 6.3 – Fonction Arc cosinus.

Propriétés 6.6 *La fonction **arccos** est :*

1. *Continue, décroissante sur* $[-1, +1]$ *à valeurs dans* $[0, \pi]$.
2. $\arccos(-x) = \pi - \arcsin(x)$ *car* $\cos(\pi - y) = -\cos y$
3. $\forall x \in]-1, +1[: (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

   En effet, par définition

$$\begin{matrix} y = f(x) = \arccos x \\ x \in [-1, +1] \end{matrix} \iff \begin{matrix} x = f^{-1}(y) = \cos y \\ y \in [0, \pi] \end{matrix}$$

or

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(y) &= -\sin y \\ &= -\sqrt{1-\cos^2 y} \ \textit{ puisque } \sin y > 0.\end{aligned}$$

Pour $y \in]0, \pi[$ *on en déduit :*

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{(f^{-1})'(y)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

4. $\forall x \in [-1, +1]$ *:*

$$\cos(\arccos x) = x.$$

5. $\forall x \in [-1, +1]$ *:*

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x),$$

   car $\frac{\pi}{2} - \arcsin(x) \in [0, \pi]$ *et* $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) = \sin(\arcsin x) = x.$
6. *La fonction* $x \longmapsto \arccos(\cos x)$ *est* 2π*—périodique, paire, et* $\forall x \in [0, \pi] : \arccos(\cos x) = x$ *.*
7. *La courbe d'équation*

$$\begin{aligned}y &= \arccos x \\ x &\in [-1, +1]\end{aligned}$$

   est obtenue par symétrie par rapport à la première bissectrice de l'arc de sinusoïde définie par

$$\begin{aligned}y &= \cos x \\ x &\in [0, \pi]\end{aligned}$$

6.3.3 Fonction réciproque de la fonction tangente.

La fonction tangente n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Sa restriction à l'intervalle ouvert $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ est continue et strictement croissante et définit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. La bijection réciproque est noté **arctan** :

$$]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\ \underset{\text{arctan}}{\overset{\tan}{\rightleftarrows}} \ \mathbb{R}$$

On a donc l'équivalence :

$$\begin{matrix} y = \arctan x \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix} \iff \begin{matrix} x = \tan y \\ y \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\end{matrix}$$

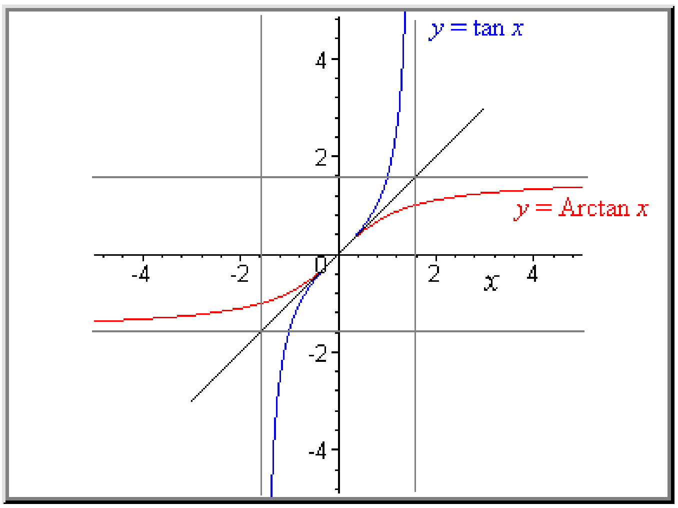

FIGURE 6.4 – Fonction Arc tangente.

Propriétés 6.7 *La fonction* ***arctan*** *est :*

1. *Continue, croissante sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$.
2. *Impaire :* $\arctan(-x) = -\arctan x$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{\tan y} = 1$; *donc* $\arctan x \underset{0}{\sim} x$.
4. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}}$

   En effet, par définition $\begin{matrix} y = f(x) = \arctan x \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix} \iff \begin{matrix} x = f^{-1}(y) = \tan y \\ y \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[. \end{matrix}$ *or*

   $$\left(f^{-1}\right)'(y) = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

   d'où :

   $$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)} = \frac{1}{1+x^2}$$
5. $\forall x \in \mathbb{R} : \tan(\arctan x) = x$.

6. *La fonction* $x \longmapsto \arctan(\tan x)$ *est définie* $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\pi-$*périodique, impaire, et*
   $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[: \arctan(\tan x) = x$.
7. *La courbe d'équation* $\begin{matrix} y = \arctan x \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix}$ *est obtenue par symétrie par rapport à la première bissectrice de l'arc d'équation* $\begin{matrix} y = \tan x \\ x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\end{matrix}$.