Université de Sétif1
Faculté des sciences
Département de Tronc Commun MI
Mars 2021

Corrigé type d'Examen Analyse-1-.

Exercice 1 :(4pts)

a : $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$, comme A est borné on a :

$$\inf A \leq x \leq \sup A; \quad \forall x \in A \qquad \text{(01pts)}$$

en particulier :

$$\inf A \leq x \leq \sup A; \quad \forall x \in B \qquad \text{(01pts)}$$

donc B est bornée.

b :

1) $\inf A$ est un minorant de $B \Rightarrow \inf A \leq \inf B$ (01pts)
2) $\sup A$ est un majorant de $B \Rightarrow \sup B \leq \sup A$. (01pts)

Exercice 2 :(4pts)

$a)$ Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c). \qquad \text{(0.5pts)}$$

$b)$ La fonction $t \to \tan(t)$ est continue sur (0.5pts) $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc sur le segment $[x,y] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, dérivable sur $]x,y[$ (puisque elle l'est sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$) de (0.5pts)
(0.5pts) dérivée $\frac{1}{\cos^2 t}$.

D'aprés la formule des accroissements finis (en posant $a = x$ et $b = y$); on aura

$$\tan(y) - \tan(x) = (y-x)\frac{1}{\cos^2 c}. \qquad \text{(0.5pts)}$$

ou $c \in]x,y[$.

Comme la fonction cos est décroissante sur$[0, \frac{\pi}{2}]$ et que (0.5pts)

$$0 \leq x < c < y < \frac{\pi}{2},$$

on a

$$\cos^2 c \geq \cos^2 y \qquad \text{(0.5pts)}$$

alors

$$\tan(y) - \tan(x) = |y-x|\frac{1}{\cos^2 c} \leq \frac{|y-x|}{\cos^2 y}. \qquad \text{(0.5pts)}$$

Exercice 3 :(6pts)

$a)$ $$f(x) = \frac{x^\alpha \sin\frac{1}{x}}{1-\cos x} \left(\alpha \in \mathbb{R};\ \alpha \geq 2;\ x \in [-\pi,\pi]\right).$$

$\triangleright$ f est définie si

$$1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}). \qquad \text{(0.5pts)}$$

Donc

A. Ghanem

$$Df = [-\pi, \pi] - \{0\}. \qquad \text{(0.5pts)}$$

▹ Pour étudier le prolongement par continuité de f sur Df on calcule : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^\alpha \sin \frac{1}{x}}{1 - \cos x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^\alpha \sin \frac{1}{x}}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^\alpha \sin \frac{1}{x}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \ (\text{car } \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}) \qquad \text{(0.5pts)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^\alpha \sin \frac{1}{x}}{2 \frac{x^2}{4}} \ (\text{car } \sin x \underset{0}{\sim} x) \qquad \text{(0.5pts)}$$

$$= \lim_{x \to 0} 2x^{\alpha - 2} \sin \frac{1}{x}. \qquad \text{(0.5pts)}$$

* Si $\alpha = 2$: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2 \lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} \nexists.$ (0.5pts)

* Si $\alpha > 2$: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 2x^{\alpha - 2} \sin \frac{1}{x} = 0.$ (0.5pts)

Alors on peut prolonger f par continuité dans le cas où $\alpha > 2$ et son prolongement g défini par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha \sin \frac{1}{x}}{1 - \cos x}, & \text{si } x \in [-\pi, \pi] - \{0\}, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases} \qquad \text{(0.5pts)}$$

b) Calcul des limites

1) $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{(1 - \cos x) \sin x}{x^3}}$,

on a

$$\frac{(1 - \cos x) \sin x}{x^3} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2} x}{x^3} = \frac{1}{2},$$

donc (01pts)

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{(1 - \cos x) \sin x}{x^3}} \underset{0}{\sim} e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{1 - \cos(2x)}$

on a

$$* \ \ln(\cos x) = \ln(1 + u(x)) \ \ (u(x) = \cos x - 1 \text{ et } \lim_{x \to 0} u(x) = 0\ )$$

$$\underset{0}{\sim} u(x) = \cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

$$* \ 1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \Rightarrow 1 - \cos 2x \underset{0}{\sim} \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2 \qquad \text{(01pts)}$$

Donc

$$\frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos(2x)} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{2x^2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos(2x)} = -\frac{1}{4}.$$

Exercice 4 :(6pts)

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}$$ (0.5pts) (0.5pts)

1. La fonction sin étant positive, strictement croissante et continue sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ $\Rightarrow f$ est strictement croissante et continue sur cet intervalle; c'est donc une bijection de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ sur $[1, +\infty[$ et par conséquence elle admet une fonction réciproque f^{-1}. (01pts)
2. * f^{-1} est définie de $[1, +\infty[$ sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. (01.5 pts)
3. * $\forall y \in]1, +\infty[;\ y = f(x) = \frac{1}{\sin x}$ donc $\sin x = 1/y$, alors $x = \arcsin(1/y)$.

(02.5pts)

$$\forall y \in]1, +\infty[\ : \quad f^{-1}(y) = \arcsin(1/y).$$

A. Ghanem