Université de Sétif 1
Faculté des sciences
Département MI

21 Mars 2021
Durée 1h30.

Examen d'Analyse 1

Exercice 1 : (4pts)
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ avec $B \subset A$.
Montrer que si A est bornée, Alors B est bornée et de plus $SupB \leq SupA$ et $\inf A \leq \inf B$.

Exercice 2 : (4pts)
Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$).
1/ Enoncer la formule des accroissements finis pour une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
2/ Montrer que si x et y sont deux nombres réels tels que $0 \leq x < y < \pi/2$,
on a

$$|\tan(y) - \tan(x)| \leq \frac{|y - x|}{(\cos(y))^2}.$$

Exercice 3 : (6pts)
a) Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^\alpha \sin(\frac{1}{x})}{1 - \cos x} \quad (\alpha \in \mathbb{R} ; \alpha \geq 2 ; x \in [-\pi, \pi])$$

Etudier suivant les valeurs de α le prolongement par continuité de f.

b) Calculer les limites suivantes en utilisant les fontions équivalentes :

$$1) \lim_{x \to 0} e^{\left(\frac{(1 - \cos x) \sin x}{x^3}\right)}, \qquad 2) \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos 2x}$$

Exercice 4 : (6pts)

Soit f la fontion définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

1/ Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[\pi/2, \pi[$ possède une fonction réciproque f^{-1}.
2/ Donner l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f^{-1}.
3/ Calculer f^{-1}.

Bon courage

A. Ghanem