Université de Sétif 1
Faculté des sciences
Département MI

01 Février 2022
8h:30 -10h.

Examen d'Analyse 1

Les Calculatrices et les Téléphones portables sont strictement interdits

Exercice 1 : (**03 pts**)

On considère l'ensemble $A = \left\{ x + \frac{1}{x} \ : \ x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$

1) Montrer que $x + \frac{1}{x} \geq 2$ pour tout $x > 0$.
2) Montrer que A admet une borne inférieure, et déterminer $\inf A$.
3) Montrer que A n'est pas majorée.

Exercice 2 : (**08.5 pts**)

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite récurrente définie par $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \ ; \ n \geq 1 \end{cases}$.

1/ Montrer que $u_n \leq 2 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
2/ Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
3/ Etudier la nature de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$,
et déterminer sa limite dans le cas où elle est convergente.
4/ Montrer que $u_n = 2\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
(Vérifier que $\forall t \in \mathbb{R} \ : \ \cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$).
5/ En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et de $\cos(\frac{\pi}{16})$.

Exercice 3 : (**08.5 pts**)

On donne la fonction suivante : $f(x) = \begin{cases} 1 + x\sqrt{x} & : \ x \geq 0 \\ 1 + \ln(1 + x^2) & : \ x < 0 \end{cases}$.

1) Déterminer son domaine de définition D_f.
2) Montrer que f est continue sur D_f.
3) Montrer que f est dérivable sur D_f, et f' est continue.
La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$? Justifier.
4) Peut-On appliquer à f le Théorème des accroissements finis dans l'intervalle $[-1, \ 1]$?
Si oui, trouver tous les réels c tels que $f(1) - f(-1) = 2f'(c)$.
(**On rappelle que** : $e \simeq 2.72$ et $\ln 2 \simeq 0.69$.)

Bon courage **A. Ghanem**

Corrigé d'examen d'Analyse 1 : 1er MI 2021/2022

Exercice 1 (03pts)

1) Soit $x > 0$, alors $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2+1+2x}{x} = \frac{(x+1)^2}{x} \geq 0$ car $x > 0$
donc $\forall x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.....................**(01pts)**
autre Méthode : $\forall x > 0$, $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0$, d'où $x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$.

2) On a $2=1+\frac{1}{1}$ et $1\in \mathbb{R}_+^*$, d'où $2\in A$, alors $A \neq \emptyset$. Et d'après la première question A est minorée par 2, donc A admet une borne inférieure ....**(0.5pts)**

$\inf A$: Comme 2 est un minorant de A et $2\in A$, alors $\inf A = 2$...................**(0.5pts)**

3) Par l'absurde, supposons que A est majorée, alors :
$\exists M > 0 : \forall a \in A, \quad a \leq M$.
D'où $\exists M > 0, \ \forall x > 0 : x + \frac{1}{x} \leq M$, en particulier pour $x = M$, on a : $M + \frac{1}{M} \leq M$
d'où $\frac{1}{M} < 0$ ou encore $1 < 0$ ce qui est absurde......................**(01pts)**

Exercice 2 (8.5pts)

On a $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \ ; \quad n \geq 1 \end{cases}$. 1/ Montrons que $u_n \leq 2$ (par récurrence)

Pour n=1 : $u_1 = \sqrt{2} \leq 2$ est vraie...................**(0.5pts)**
Supposons que $u_n \leq 2$ et on montre que $u_{n+1} \leq 2$?
On a $u_n \leq 2 \Rightarrow u_n + 2 \leq 4 \Rightarrow \sqrt{u_n+2} \leq \sqrt{4} \Rightarrow u_{n+1} \leq 2$.......................**(01pts)**

2/ La monotonie: $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} = f(u_n)$ où $f(x) = \sqrt{x+2}$: On a
$\forall x > -2 : f^{'}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0$
donc f est croissante. D'où (u_n) est croissante.......................**(01.5pts)**

3/ D'aprés 1/ : $u_n \leq 2$ donc la suite (u_n) est majorée
et (u_n) croissante alors elle est convergente......................**(01pts)**
La limite : (u_n) convergente alors il existe $l \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
Comme $u_{n+1} = \sqrt{u_n+2} = f(u_n)$ alors $f(l) = l \Leftrightarrow \sqrt{l+2} = l$
$l^2 - l - 2 = 0 \Rightarrow l = 2$ ou $l = -1$. $u_1 = \sqrt{2}$ et $u_n \geq 0$ alors
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l = 2$......................**(01.5pts)**

4/ Soit $\forall t \in \mathbb{R}$: $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos^2(t) - (1 - \cos^2(t)) = 2\cos^2(t) - 1$.
......................**(0.5pts)**
Montrons que $u_n = 2\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$? $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Par récurrence pour $n = 1$, $2\cos(\frac{\pi}{2^{1+1}}) = 2\cos(\frac{\pi}{4}) = 2.\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} = u_1$
......................**(0.5pts)**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $u_n = 2\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$ et montrons $u_{n+1} = 2\cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})$?
$u_{n+1} = \sqrt{u_n+2} = \sqrt{2\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) + 2} = \sqrt{2(\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) + 1)} = \sqrt{2.\cos^2(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2^{n+1}})}$
$= \sqrt{2}.\left|\cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})\right| = \sqrt{2}.\cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})$. (car $0 < \frac{\pi}{2^{n+2}} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2^{n+2}}) \geq 0$)
$\sqrt{2}.\cos(\frac{\pi}{2^{(n+1)+1}}) = u_{n+1}$......................**(01pts)**

3/ $\cos(\frac{\pi}{8}) = \cos(\frac{\pi}{2^{2+1}}) = \frac{1}{2}u_2$ (d'après la question précédente)
$= \frac{1}{2}\sqrt{u_1+2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2}$.......................**(0.5pts)**

$\cos(\frac{\pi}{16}) = \cos(\frac{\pi}{2^{3+1}}) = \frac{1}{2}u_3 = \frac{1}{2}\sqrt{u_2+2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+2}+2}$......................**(0.5pts)**

A. Ghanem

Exercice 3 (8.5pts)

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x\sqrt{x} & si\ x \geq 0 \\ 1 + \ln(1 + x^2) & si\ x < 0 \end{cases}$$

1) Le domaine de définition : l'expression $1 + x\sqrt{x}$ est bien définie si $x \geq 0$.

Pour $x < 0$ on a $x^2 > 0$ et $x^2 + 1 > 1$ et donc le logarithme est bien définie. Ainsi $D_f = \mathbb{R}$. ....**(01pts)**

2) Continuité : * Sur $\mathbb{R} - \{0\}$, f est continue car définie à partir de fonctions continue $x \to x$, $x \to \sqrt{x}$, $x \to \ln(1 + x^2)$. ....**(0.5pts)**

* Reste la continuité en "0": On a $f(0) = 1 + 0\sqrt{0} = 1$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} 1 + \ln(1 + x^2) = 1 = f(0)$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} 1 + x\sqrt{x} = 1 = f(0)$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$........................**(01pts)**

3) Dérivabilité : * Pour des raisons analogues à ceux de la continuité, f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$. ....**(0.5pts)**

* Dérivabilité en "0": $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} x. \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 0 = f'_g(0)$. (car $\lim\limits_{t \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$).

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt{x} = 0 = f'_d(0)$.

Comme $f'_g(0) = f'_d(0)$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$. ....**(01pts)**

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} & , si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ \frac{2x}{1+x^2} & si\ x < 0 \end{cases}$$ ....**(01pts)**

* f' est manifestement continue sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

*$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f'(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{2x}{1+x^2} = 0 = f'(0)$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f'(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{3}{2}\sqrt{x} = 0 = f'(0)$. Donc f' est continue en 0.

D'où f' continue sur $\mathbb{R}$. ....**(01pts)**

La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, car les fonctions f et f' sont définies et continues sur $\mathbb{R}$. ....**(0.5pts)**

4) **Oui** on peut appliquer à f le Théorème des accroissements finis, car f est continue sur $[-1, 1]$ (continue sur $\mathbb{R}$), et dérivable sur $[-1, 1]$ (dérivable sur $\mathbb{R}$). Ainsi $\exists c \in]-1, 1[$ tel que

$f(1) - f(-1) = 2f'(c) \Rightarrow 2 - (1 + \ln 2) = 2f'(c) \Rightarrow f'(c) = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$......................**(01pts**

Remarquons que $1 - \ln 2 \simeq 1 - 0.69 \simeq 0.31 > 0$, donc il faut chercher c parmi les "x" tels que $f'(x) > 0$. Or pour $x < 0$, $f'(x) < 0$.

Donc $f'(c) = \frac{1}{2}(1 - \ln 2) \Rightarrow \frac{3}{2}\sqrt{c} = \frac{1}{2}(1 - \ln 2) \Rightarrow \sqrt{c} = \frac{1}{3}(1 - \ln 2)$

et $c = (\frac{1}{3}(1 - \ln 2))^2$. ....**(01pts)**

▲▲▲▲▲▲▲▲

A. Ghanem