Structures algébriques.

Loi de composition interne (L.C.I).

Définition : Soit E un ensemble non vide. $*$ (ou $\Delta, T, \perp, +, \times, ..$) est dite de composition interne sur E si et seulement si :

$\forall x, y \in E$, $x*y \in E$ et $x*y$ est unique.

c.à.d : $\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ x, y & \longmapsto & x*y \end{array}$ est une application.

exemples 1 : « $+$ », « $.$ » sont des (L.C.I) sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$.

« $-$ » est une (L.C.I) sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}$ et ne l'est pas sur $\mathbb{N}$. ($1-2=-1 \notin \mathbb{N}$)

propriétés d'une (L.C.I) : Soit $*$ une (L.C.I) sur E.

1) $*$ est dite commutative ssi $\forall x, y \in E$, $x*y = y*x$

2) $*$ est dite associative ssi $\forall x, y, z \in E, (x*y)*z = x*(y*z)$

3) $(E,*)$ admet un élément neutre ssi :

$\exists e \in E$, $\forall x \in E$, $x*e = e*x = x$.

• S'il existe e est alors unique et est appelé l'élément neutre de $(E,*)$

4) Si $(E,*)$ possède un élément neutre e, on dit qu'un élément x de E est symétrisable (ou admet un symétrique) ssi :

$\exists y \in E$, $x*y = y*x = e$, (on note $y = sym_*(x)$)

• Si la loi $*$ est associative et si $sym_*(x)$ existe pour un élément x de E alors il est unique.

Structure de groupe.

Définition : Soit G un ensemble non vide muni d'une (L.C.I) $*$.

$(G,*)$ est dit un groupe ssi :

1) $*$ est associative , 2) $(G,*)$ admet un élément neutre noté e

et 3) tout élément de E admet un symétrique pour $*$:

$\forall x \in E, \exists y \in E$, $x*y = y*x = e$.

• Si en plus $*$ est commutative, $(G,*)$ est alors un groupe commutatif (ou groupe abelien).

exemple 2 : groupes de références :

pour la loi $+$: $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{Z},+)$. L'élément neutre est 0 et $sym_+(x) = -x$

pour la loi $\times$: $(\mathbb{C}^*,\times)$, $(\mathbb{R}^*,+)$. L'élément neutre est 1 et $sym_\times(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

proposition : soit $(G,*)$ un groupe. On a alors :

$\forall a, b \in G$, $sym_*(a*b) = sym_*(b) * sym_*(a)$

mais si $*$ est commutative alors : $sym_*(a*b) = sym_*(a) * sym_*(b)$

4) Sous groupes :

Définition : Une partie H d'un groupe $(G,*)$ est appelé sous-groupe de G si :

1) H contient l'élément neutre de G.

2) H est stable par $*$ et par le passage au symétrique :

$\forall x, y \in H$, $x*y \in H$ et $x^{-1} \in H$.

exemple 3 : 1) l'ensemble $5\mathbb{Z}$ des multiples de 5 est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$

2) l'ensemble $H = \{\pm 1, \pm i\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$

5) Notion de morphisme :

Définition : Soient $(G,*)$ et (H,Δ) deux groupes.

Une application : $f : G \longrightarrow H$ est un homomorphisme ou morphisme de groupes si : $\forall x, y \in G$, $f(x*y) = f(x) \Delta f(y)$.

On a alors : $f(e_G) = e_H$ et $f(sym_*(x)) = sym_\Delta(f(x))$.

Si en plus le morphisme f est bijectif, on dit que f est un isomorphisme de G sur H et les groupes G et H sont dits isomorphes.

exemple 4 : $f:(\mathbb{R},+)\longrightarrow(\mathbb{R}^*,\times)$, $x\longmapsto e^x$ est un isomorphisme :

f est une bijection et $f(x+y)=e^{x+y}=e^x\cdot e^y=f(x)\cdot f(y)$.

- Si f est un morphisme de G sur G, on dit que f est un endomorphisme de G.
- Si f est un endomorphisme de G bijectif alors f est dit automorphisme de G.

) Structure d'anneau : Soit A un ensemble muni de deux (L.C.I) $*$ et T. On dit que $(A,*,\Delta)$ est un anneau si :

1) $(A,*)$ est un groupe commutatif
2) Δ est associative.
3) Δ est distributive par rapport à $*$: $\forall x,y,z\in A$,

$x\Delta(y*z)=(x\Delta y)*(x\Delta z)$ et $(x*y)\Delta z=(x\Delta z)*(y\Delta z)$.

- Si en plus Δ est commutative, l'anneau $(A,*,\Delta)$ est dit commutatif
- Si A admet un élément neutre pour la loi Δ, alors l'anneau $(A,*,\Delta)$ est dit anneau unitaire.

exemple 5 : Anneaux de référence : $(\mathbb{C},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$, $(\mathbb{Z},+,\times)$

Attention : les éléments d'un anneau $(A,*,\Delta)$ ne sont pas forcément inversibles pour la 2ème loi Δ.

exemple : dans l'anneau $(\mathbb{Z},+,\times)$ 2 n'est pas inversible pour la loi produit "$\times$" puisque $\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$.

) Structure de corps : Soit $(K,*,\Delta)$ un anneau commutatif unitaire. $(K,*,\Delta)$ est un corps tout élément de $K-\{e_*\}$ est inversible par la 2ème loi Δ.

exemple 6 : corps de référence : $(\mathbb{C},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$, $(\mathbb{Q},+,\times)$.

Exercices :

Exo 1) Sur $\mathbb{R}$, on définit une l.c. par : $x*y=xy-2x-2y+6$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

1) $*$ est-elle interne dans $\mathbb{R}$ 2) étudier les propriétés de $*$.

Exo 2) Soient $k,k'\in\mathbb{R}$, on pose $xTy=kxy+k'(x+y)$, pour $x,y\in$

- Déterminer k et k' pour que la loi T soit associative.

Exo 3) E muni de la (L.C.I) $*$, d'élément neutre e.

$*$ vérifie : $\forall a,b,c\in E$, $a*(b*c)=(a*c)*b$.

- Montrer que $*$ est commutative et associative.

Exo 4) Soient $a,b\in\mathbb{R}_+$. on pose $aTb=\dfrac{a+b+2ab}{(1+a)(1+b)}$

- T est-elle une (L.C.I)
- Etudier les propriété de T.

Exo 5) Dans $\mathcal{P}(E)$, $\forall A,B\in\mathcal{P}(E)$: $A*B=\bar{A}\cap\bar{B}$ (avec $\bar{A}=C_E^A$).

- $*$ est-elle une (L.C.I) dans $\mathcal{P}(E)$
- Etudier les propriétés de $*$
- Montrer que $\bar{A}$, $A\cup B$ et $A\cap B$ peuvent s'écrire avec le seul symbole $*$

Exo 6) On considère les applications de $\mathbb{R}-\{0,1\}$ dans lui-même définies :

pour $\begin{cases} f_1(x)=x, & f_2(x)=\dfrac{1}{1-x}, & f_3(x)=\dfrac{x-1}{x} \\ f_4(x)=\dfrac{1}{x}, & f_5(x)=1-x, & f_6(x)=\dfrac{x}{x-1}\end{cases}$

1) Montrer que les 6 applications forment un groupe pour la loi $\circ$ (loi de composition des applications)