Structure machine
Chapitre VI
(Forme Canonique d'une fonction)

Mokrani Hocine

Minterme & Maxterme

Soit f une fonction logique de n variables.

- Minterme: Toute conjonction (liée par des ET) de n variables (pouvant être complémentées).

  Exemple des mintermes d'une fonction à trois variables a, b, c :
  $abc, a\overline{b}c, a\overline{b}\overline{c}, \overline{a}b\overline{c}, ...$

- Maxterme: Toute disjonction (liée par des OU) de n variables (pouvant être complémentées).

  Exemple des maxtermes d'une fonction à trois variables
  $a+b+c, a+\overline{b}+c, a+\overline{b}+\overline{c}, \overline{a}+b+\overline{c}, ...$

Formes canoniques d'une fonction

Il existe deux formes canoniques d'une fonction logique

- **Première forme**

  Union (OU logique) des mintermes. Les mintermes ne doivent pas être répétés.

  $$f(a,b,c)=abc+a\overline{b}c+a\overline{b}\overline{c}+\overline{a}b\overline{c}$$

- **Deuxième forme**

  intersection (ET logique) de maxtermes. Les maxtermes ne doivent pas être répétés.

  $$g(a,b,c)=(a+b+c).(a+\overline{b}+c).(a+\overline{b}+\overline{c}).(\overline{a}+b+\overline{c})$$

Passage a la première forme canonique

4

Première Méthode

Passage algébrique a la première forme canonique

Transformer la fonction pour faire apparaître des mintermes (resp. maxtermes) complets.

$$x.\overline{x} = 0 \text{ et } x + \overline{x} = 1$$

Pour la transformation on s'appuie sur les propriétés de l'algèbre de Boole (Notamment des invariants).

Exemple de passage à la première forme canonique

Soit

$$f(a,b,c)=ab+\overline{b}c+a\overline{c}$$

- Il manque la variable b.
- Transforme $a\overline{c}$ en $a\overline{c}(b+\overline{b})$ car $(b+\overline{b})=1$
- Même chose pour les 2 autres termes

$$=ab(c+\overline{c})+\overline{b}c(a+\overline{a})+a\overline{c}(b+\overline{b})$$
$$=abc+ab\overline{c}+a\overline{b}c+\overline{a}\overline{b}c+a\overline{b}\overline{c}$$

Seconde Méthode

Passage à la première forme canonique a partir de table de vérité

Utiliser la table de vérité pour trouver les formes canoniques.

Pour chaque valeur de f(X) égale à 1 On définit un minterme en se basant de la combinaison de toutes les variables tel que:

- Si une variable $X_i = 1$ on note X_i sinon on note $\overline{X}_i$.
- La première forme canonique de f(X) est la disjonction (OU logique) de ces mintermes.

Exemple de passage à la première forme canonique a partir de table de vérité

	a b c	$\bar{b}$	$\bar{c}$	ab	$\bar{b}c$	$a\bar{c}$	f(a,b,c)
	0 0 0	1	1	0	0	0	0
$\bar{a}bc$	0 0 1	1	0	0	1	0	$\boxed{1}$
	0 1 0	0	1	0	0	0	0
	0 1 1	0	0	0	0	0	0
$a\bar{b}\bar{c}$	1 0 0	1	1	0	0	1	$\boxed{1}$
$a\bar{b}c$	1 0 1	1	0	0	1	0	$\boxed{1}$
$ab\bar{c}$	1 1 0	0	1	1	0	1	$\boxed{1}$
abc	1 1 1	0	0	1	0	0	$\boxed{1}$

$$f(a,b,c) = abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c}$$

Passage a la deuxième forme canonique

9

Première Méthode

passage algébrique à la deuxième forme canonique

L'idée est d'utiliser la règle : $\bar{\bar{x}} = x$

Soit : $f(a, b, c) = ab + \bar{b}c + a\bar{c}$

- On construit la négation de f. Après distribution, on trouve :

$$\overline{f(a,b,c)} = \bar{a}b + \bar{a}bc + \bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$$

- Transformation des mintermes à deux variables.

$$\bar{a}b + \bar{a}\bar{c} = \bar{a}b(c + \bar{c}) + \bar{a}\bar{c}(b + \bar{b})$$

- Donc la première forme canonique de l'inverse de f est:

$$\overline{f(a,b,c)} = \bar{a}bc + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c}$$

- Et donc la deuxième forme canonique de la fonction f est:

$$f(a, b, c) = (a + \bar{b} + \bar{c})(a + b + c)(a + \bar{b} + c)$$

Seconde Méthode

Passage à la deuxième forme canonique a partir de table de vérité

Pour chaque valeur de $f(X)$ égale à 0 On définit un minterme de toutes les variables tel que:

- Si une variable $X_i = 1$ on note X_i sinon on note $\overline{X}_i$.
- La première forme canonique de $\overline{f(X_i)}$ est le OU de ces mintermes.
- Après le calcul de $\overline{\overline{f(X_i)}}$, on obtient la seconde forme canonique.

Exemple de passage à la deuxième forme canonique a partir de table de vérité

	a b c	$\overline{b}$	$\overline{c}$	ab	$\overline{b}c$	$a\overline{c}$	f(a,b,c)
$\boxed{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}}$	0 0 0	1	1	0	0	0	$\boxed{0}$
	0 0 1	1	0	0	1	0	1
$\boxed{\overline{a}b\overline{c}}$	0 1 0	0	1	0	0	0	$\boxed{0}$
$\boxed{\overline{a}bc}$	0 1 1	0	0	0	0	0	$\boxed{0}$
	1 0 0	1	1	0	0	1	1
	1 0 1	1	0	0	1	0	1
	1 1 0	0	1	1	0	1	1
	1 1 1	0	0	1	0	0	1

$$\overline{f(a,b,c)} = \overline{a}bc + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}b\overline{c}$$

$$f(a,b,c) = (a+\overline{b}+\overline{c})(a+b+c)(a+\overline{b}+c)$$

Conclusion

- Existence de deux formes canoniques
- Existence de deux méthodes pour trouver une forme canonique.

Future chapitres du module:

- Simplification des formules?
- Passage de la théorie au circuit électronique?
- Architecture d’un ordinateur?