UMBB
F.S
ING.INF

2023 - 2024
B

Test 2 Algèbre 1

1] Soit l'application définie par :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f((x,y)) = (x \cdot y,\, x+y)$$

i) Calculer : $f((4,5))$ et $f((5,4))$

ii) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation : $f((x,y)) = (5,3)$. puis déterminer l'image réciproque $f^{-1}(\{(5,3)\})$

iii) En déduire si f est injective et si f est surjective.

2] Soit l'application <u>bijective</u> définie par :

$$g : \mathbb{R} - \{-3\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\}$$
$$x \longmapsto g(x) = \frac{2x-1}{x+3}$$

• Déterminer alors son application réciproque :

$$g^{-1} : ? \longrightarrow ?$$
$$x \longmapsto g^{-1}(x) = ?\ y,$$

3] $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mathcal{R} y \iff e^{2x} - e^{2y} = 3(e^{x} - e^{y})$$

• Déterminer $cl(\ln(1/2))$

4) On définit sur $\mathbb{R}$, la relation $\mathcal{R}$ par :

$$x \mathcal{R} y \iff x^4 - y^4 \geq 0 .$$

• $\mathcal{R}$ est elle antisymétrique ?

Remarque : Les questions sont indépendantes

Corrigé du TD 2 (B)

1) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (x \cdot y , x+y)$

i) calcul de : $f((4,5)) = (20,9)$

et $f((5,4)) = (20,9)$.

ii) • Résoudre l'éq dans $\mathbb{R}^2$: $f((x,y)) = (5,3)$

$\Leftrightarrow (x \cdot y , x+y) = (5,3)$

$\Rightarrow \begin{cases} x \cdot y = 5 \\ \text{et} \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y+3 \\ y^2 - 3y + 5 = 0 \end{cases}$, $\Delta = -11 < 0$

l'équation n'a pas de solutions ds $\mathbb{R}^2$

• $f^{-1}(\{(5,3)\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = (5,3)\}$
$= \emptyset$

iii) En déduire si f est injective et si elle est surjective

• On a ~~trouvé~~ que : $f((4,5)) = f((5,4))$ et
$(4,5) \neq (5,4)$ alors f n'est pas injective.

• Comme $f^{-1}(\{(5,3)\}) = \emptyset$ alors :
$(5,3)$ n'admet pas d'antécédents par f.
d'où f n'est pas surjective.

2) $g : \mathbb{R} - \{-3\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\}$ est bijective

$x \longmapsto g(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$

- On détermine son application réciproque.

$g^{-1} : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-3\}$

$x \longmapsto g^{-1}(x) = ?$

On a : $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = g(y)$, $x \neq 2$ et $y \neq -3$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2y-1}{y+3} \Rightarrow x(y+3) = 2y-1$

$\Rightarrow y = \dfrac{3x+1}{2-x}$ (existe puisque $x \neq -2$ et est unique)

$\Rightarrow g^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{2-x}$ est l'expression de g^{-1}.

3) R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$

$x R y \Leftrightarrow e^{2x} - e^{2y} = 3(e^{x} - e^{y})$

- Déterminer $cl(\ln(1/2))$

$cl(\ln(1/2)) = \{x \in \mathbb{R} / x R \ln(1/2)\}$

donc $x \in cl(\ln(1/2)) \Leftrightarrow x R \ln(1/2) \Leftrightarrow$

$e^{2x} - e^{2\ln 1/2} = 3(e^{x} - e^{\ln 1/2}) \Rightarrow$

$e^{2x} - (1/2)^2 = 3(e^{x} - 1/2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(e^{x} - 1/2\right)\left[e^{x} + 1/2 - 3\right] = 0$

$\Rightarrow \left(e^{x} - 1/2\right)\left(e^{x} - 5/2\right) = 0$

$\Rightarrow \left(e^{x} = 1/2 \text{ ou } e^{x} = 5/2\right)$

$\Rightarrow x = \ln 1/2 \text{ ou } x = \ln 5/2$

$\Rightarrow cl(\ln(1/2)) = \{\ln 1/2, \ln 5/2\}$

4) Sur $\mathbb{R}$, la relation R est définie par :

$(x R y) \Leftrightarrow x^4 - y^4 \geq 0$

• R est-elle antisymétrique ?

(R est antisymétrique) $\Leftrightarrow$

$(\forall x, y \in \mathbb{R},\ x R y \text{ et } y R x \Rightarrow x = y)$

Supposons que $x R y$ et $y R x$ alors

$(x^4 - y^4 \geq 0 \text{ et } y^4 - x^4 \geq 0) \Rightarrow x^4 = y^4$

$\Rightarrow x = y$ ou $x = -y$

R n'est pas antisymétrique puisque on a par exemple $1 R -1$ et $-1 R 1$ et $1 \neq -1$