

Serie n° 2 :

Applications et Relations

Exercice 1 :

1) Soient f et g deux applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , définies par :

$$f(x) = 3x + 2 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 1$$

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

2) Soit E un ensemble $\neq \emptyset$ et \cup une partie de E , Soient f et g les applications de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définies par : $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

$$f(A) = A - \cup \quad \text{et} \quad g(A) = \cup - A$$

Exprimez les applications : $f^2, f \circ g, g \circ f$ et g^2 .

Exercice 2 :

Soit l'application : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

Soient : $A = \{-1, 2, 3\}$, $B = [0, 2)$, $C = [-1, 0]$

$$\text{et } D = [0, 1/2)$$

Déterminer : $f(A), f(B), f(C)$,

$$f^{-1}(1/4), \quad \text{et} \quad f^{-1}(1/5 - 1/7)$$

2) L'application f est-elle injective? surjective?

3) Donner un ensemble de départ et un autre d'arrivée pour obtenir une application bijective, puis déterminer f^{-1} .

Exercice 3 :

On considère l'application :

$$f: \mathbb{R} - 3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F} \quad (\text{avec } \mathbb{F} \subset \mathbb{R})$$

$$x \mapsto \frac{x+5}{x-2}$$

Comment choisir \mathbb{F} pour que f soit bijective? (On peut utiliser la variation de f)

Exercice 4 :

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$$

$$x \mapsto f(x) = x + \frac{1}{x}$$

1) L'application f est-elle injective? Surjective?

2) Déterminer l'image directe de \mathbb{R}^* .



exercice 5:

$f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$, sont deux app

l'on a:

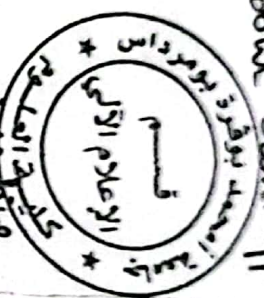
1) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective

2) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective

3) $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow g$ injective

4) $g \circ f$ surjective et f injective $\Rightarrow f$ surjective

(à faire 1) et 3)).



exercice 6:

1) Dans \mathbb{R}^2 , la relation R est définie par:

$$(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_2 \leq x_1$$

Montrer que R n'est pas une relation d'ordre

2) Dans \mathbb{R}^2 , la relation R est définie par:

$$(x, y) R (x', y') \Leftrightarrow x \geq x' \text{ et } y \geq y'$$

Montrer que R est une relation d'ordre.

3- il total?

exercice 7:

1) R est une relation définie dans \mathbb{N} par:

$$x R y \Leftrightarrow (x - y = 0 \text{ ou } x + y = 10)$$

i) Montrer que R est une relation d'équivalence

ii) Déterminer les classes d'équivalence

et l'ensemble quotient.

donner le card de $\mathcal{A}(R)$

2)

Dans \mathbb{R} , on définit la relation R par:

$$x R y \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 = (y^2 - 2)^2$$

i) Montrer que R est une relation d'équivalence

ii) Vérifier: $(x R y) \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 4)(x^2 - y^2) = 0$

iii) Déterminer $\mathcal{A}(R)$, puis $\mathcal{A}(\mathcal{A}(R))$

tout $x \in \mathbb{R}$.

exercice 8: (Facultatif)

Dans \mathbb{R} , la relation R est définie par:

$$(x R y) \Leftrightarrow (x^3 - y^3 \geq 0)$$

Vérifier que R est une relation d'ordre

tot. max et -il total?