Serie N°2 :

Applications et Relations

Exercice 1 :

1) Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies par :

$f(x) = 3x+1$ et $g(x) = x^2-1$

Déterminer $f\circ g$ et $g\circ f$.

2) Soit E un ensemble $\neq \emptyset$ et U une partie de E, Soient f et g les applications de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définies par : $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

$f(A) = A - U$ et $g(A) = U - A$

Expliciter les applications : f^2, $f\circ g$, $g\circ f$ et g^2

Exercice 2 :

Soit l'application : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1/(1+x^2)$

Soient : $A = \{-1, 2, 3\}$, $B = [0, 1]$, $C = [-1, 0]$ et $D = [0, 1/2]$

Déterminer : $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, $f^{-1}([0,1])$ et $f^{-1}([0,1/2])$

2) L'application f est-elle injective ? Surjective ?

3) Donner un ensemble de départ et un autre d'arrivée pour obtenir une application bijective, puis Déterminer f^{-1}.

Exercice 3 :

On considère l'application :

$f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow F$, $x \longmapsto \frac{x+5}{x-2}$ (avec $F \subset \mathbb{R}$)

Comment choisir F pour que f soit bijective ?

(On peut utiliser les variations de f)

Exercice 4 : $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $x \longmapsto f(x) = x + \frac{1}{x}$

1) L'application f est-elle injective ? Surjective ?

2) Déterminer l'image directe de $\mathbb{R}^*$.

Exercice 5:

$f : E \to F$ et $g : F \to G$, sont deux app

Montrer :

1) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective
2) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective
3) $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow g$ injective
4) $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow f$ surjective

(et faire 1) et 3)).

Exercice 6:

1) Dans $\mathbb{R}^2$, la relation $\mathcal{R}$ est définie par :

$(x_1, y_1)\, \mathcal{R}\, (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$

Montrer que $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre

2) Dans $\mathbb{R}^2$, la relation $\mathcal{R}$ est définie par

$(x, y)\, \mathcal{R}\, (x', y') \Leftrightarrow x \geq x'$ et $y \geq y'$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

Est-il total ?

Exercice 7 :

1) $\mathcal{R}$ est une relation définie dans $\mathbb{N}$ par :

$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow (x - y =$ ou $x + y = 10)$

i) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

ii) Déterminer les classes d'équivalence et l'ensemble Quotient.

donner le card de $cl(x)$

2) Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 = (y^2 - 2)^2$

i) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

ii) Vérifier : $(x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 4)(x^2 - y^2) =$

iii) Déterminer $cl(0)$, puis $cl(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 : (Facultatif)

Dans $\mathbb{R}$, la relation $\mathcal{R}$ est définie p

$(x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow (x^3 - y^3 \geq 0)$

Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre

cet ordre est-il total ?