

---

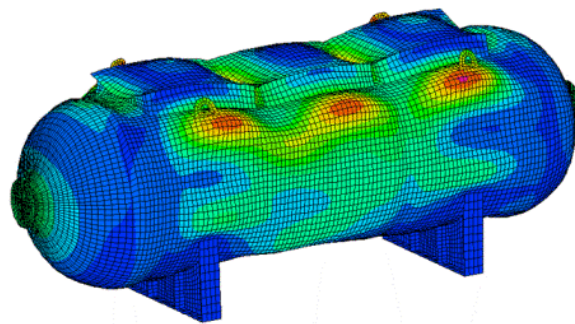
# Compte rendu : TP éléments finis

---

Réalisé par : Mohamed Issa

Classe : 2<sup>ème</sup> Année Techniques Avancées

Année universitaire : 2020/2021



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Position du problème</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Formulation variationnelle</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Discrétisation</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Calcul des matrices élémentaires</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Calcul du second membre</b>	<b>6</b>
<b>6</b>	<b>Validation</b>	<b>6</b>
6.1	erreur $L^2$ . . . . .	6
6.2	erreur en semi-norme $H^1$ . . . . .	7
6.3	Evolution des courbes . . . . .	7

## Table des figures

1	Maillage pour un pas de 0.2 . . . . .	4
2	Matrice de masse élémentaire pour l'élément de référence. . . . .	5
3	Matrice de rigidité élémentaire pour l'élément de référence. . . . .	5
4	instruction de f.m pour f=1. . . . .	6
5	valeur de f.m pour la solution u. . . . .	6
6	courbes des erreurs. . . . .	8
7	maillage pour h=0,8 . . . . .	8
8	maillage pour h=0,4 . . . . .	9
9	maillage pour h=0,1 . . . . .	9

## 1 Position du problème

Dans ce TP on s'intéresse à la résolution numérique du problème de Poisson avec condition aux limites de Neumann.

Étant donné un ouvert borné  $\Omega$  à frontière polygonale de  $\mathbf{R}^2$  et  $f \in L^2(\Omega)$ , la formulation forte du problème est :

chercher  $u \in H^1(\Omega)$  telle que

$$(1) : \begin{cases} u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

## 2 Formulation variationnelle

Pour obtenir la formulation variationnelle du problème, on part du système (1).

On multiplie par une fonction  $v \in H^1(\Omega)$ .

$$uv - \Delta uv = fv \quad \text{dans } \Omega \implies \int_{\Omega} (uv - \Delta uv) \, d\Omega = \int_{\Omega} fv \, d\Omega$$

On applique la formule de Green

$$\implies \int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \gamma_1 v \, d\Gamma = \int_{\Omega} fv \, d\Omega$$

Comme  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  sur  $\partial\Omega$

$$\implies \int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} fv \, d\Omega$$

Finalement la formulation variationnelle du système (1) est donnée par :  
chercher  $u \in H^1(\Omega)$  telle que pour tout  $v \in H^1(\Omega)$  :

$$(FV) : \int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} fv \, d\Omega$$

### 3 Discrétisation

On effectue une triangulation du domaine  $\Omega$  représentée par les triangles  $(T_l)_{l=1,L}$ .  $V_h$  est le sous-espace de dimension finie de  $H^1(\Omega)$  constitué des éléments finis  $P^1$ .

On note  $(S_i)_{i=1,N}$  les sommets des triangles et  $(w_i)_{i=1,N}$  la base de  $V_h$  définie par  $w_i(S_j) = \delta_{ij}$ .

La formulation variationnelle vérifiée par la solution approchée  $u_h$  est :

Chercher  $u_h \in V_h$  telle que pour tout  $v_h \in V_h$  :

$$\int_{\Omega} u_h v_h \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h \, d\Omega = \int_{\Omega} f v_h \, d\Omega$$

Cette formulation variationnelle est équivalente à :

$$\int_{\Omega} u_h w_i \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla w_i \, d\Omega = \int_{\Omega} f w_i \, d\Omega \quad i = 1, N$$

Par construction,  $u_h = \sum_{i=1}^N u_h(S_i) w_i$ . En reportant l'expression dans la dernière équation on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N u_h(S_i) \int_{\Omega} w_i w_j \, d\Omega + \sum_{i=1}^N u_h(S_i) \int_{\Omega} \nabla w_i \nabla w_j \, d\Omega &= \int_{\Omega} f w_j \, d\Omega \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^N u_h(S_i) \left( \int_{\Omega} w_i w_j \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla w_i \nabla w_j \, d\Omega \right) &= \int_{\Omega} f w_j \, d\Omega \end{aligned}$$

En notant  $K_{ji} = \int_{\Omega} \nabla w_i \nabla w_j \, d\Omega$ ,  $M_{ji} = \int_{\Omega} w_i w_j \, d\Omega$ ,  $U_i = u_h(S_i)$  et  $L_j = \int_{\Omega} f w_j \, d\Omega$ , on obtient l'écriture matricielle :

$$(M + K)U = L$$

Les matrices  $M$  et  $K$  sont symétriques. Leurs somme  $A = M + K$  est une matrice symétrique et définie positive qui est donc inversible. Ceci permet de résoudre l'équation matricielle  $AU = L$  en inversant  $A$ .

Pour une valeur du pas de maillage  $h = 0.2$ , on obtient le maillage de la figure 1 ci-dessous à l'aide de *Gmsh* et la routine *affichemaillage.m*.

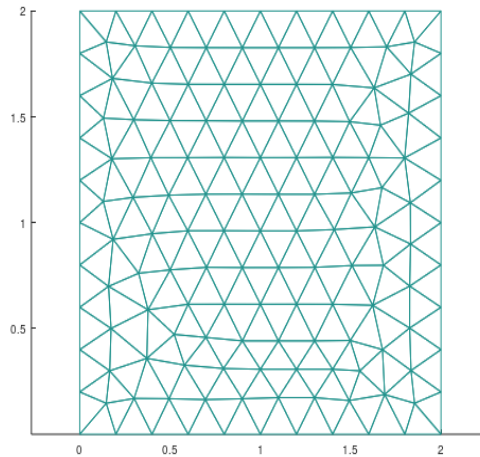


FIGURE 1 – Maillage pour un pas de 0.2

Les différentes structures de données ont les significations suivantes :

1. Nbpt : Nombre des points sommets  $(S_i)_{i=1,Nbpt}$ ,
2. Nbtri : Nombre des triangles de maillage  $(T_i)_{i=1,Nbtri}$ ,
3. Coorneu : Tableau de coordonnées des sommets.
4. Refneu : Tableau qui indique les sommets sur le bord avec 1 et ceux à l'intérieur avec 0,
5. Numtri : Tableau de composition des triangles,
6. Reftri : Tableau qui indique les triangles qui touchent le bord avec 1 et 0 ceux qui ont tous les sommets à l'intérieur.

## 4 Calcul des matrices élémentaires

Le code relatif au calcul des matrices élémentaires est implémenté dans les routines *matK\_elem.m* et *matM\_elem.m*.

Pour vérifier le code, j'ai calculé les matrices élémentaires pour l'élément de référence. Le code a donné les matrices des figures 2 et 3.

```
>> Mel=matM_elem([0,0], [1,0], [0,1])
Mel =

    0.083333    0.041667    0.041667
    0.041667    0.083333    0.041667
    0.041667    0.041667    0.083333
```

FIGURE 2 – Matrice de masse élémentaire pour l'élément de référence.

```
Ke =

    1.00000    -0.50000    -0.50000
   -0.50000     0.50000     0.00000
   -0.50000     0.00000     0.50000

~~
```

FIGURE 3 – Matrice de rigidité élémentaire pour l'élément de référence.

L'assemblage des matrices  $K$  et  $M$  a été fait dans la routine *principal\_neumann.m*.

## 5 Calcul du second membre

Dans le cas où  $f = 1$ , il suffit que la routine  $f.m$  retourne un vecteur constitué par des 1 comme l'indique l'instruction 4. Le second membre  $L$  serait tout simplement le produit matriciel  $L = MF$ .

```
val = ones(length(x),1);
```

FIGURE 4 – instruction de f.m pour f=1.

Dans le cas général où  $f \in C^0(\bar{\Omega})$ .  $f$  peut être approximée par son interpolé  $\pi_h f$ . En effet,  $f \simeq \pi_h f = \sum_{i=1}^N f(S_i)w_i$  et par suite,  $L_i = \int_{\Omega} f w_i d\Omega \simeq \int_{\Omega} \pi_h f w_i d\Omega = \sum_{j=1}^N f(S_j) \int_{\Omega} w_i w_j d\Omega = (MF)_i$ . On trouve ainsi que  $L = MF$ .

## 6 Validation

Dans cette partie on veut s'assurer que notre code fonctionne bien et que la méthode des éléments finis approxime bien la solution de la formulation variationnelle. On se donne la fonction  $u$  solution du problème (1) qui est définie par  $u(x, y) = \cos(\pi x)\cos(2\pi y)$  pour  $(x, y) \in \bar{\Omega}$ .

calculant le second membre  $f$  :

$$\begin{aligned} f &= u - \Delta u \\ &= (1 + 5\pi^2)\cos(\pi x)\cos(2\pi y) \end{aligned}$$

On fait modifier la valeur retournée par la routine  $f.m$  comme indiqué dans la fig 5.

```
val=(1+5*pi^2)*cos(pi*x).*cos(2*pi*y);
```

FIGURE 5 – valeur de f.m pour la solution u.

### 6.1 erreur $L^2$

On assimile  $u$  à son interpolé  $\pi_h u$ .

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2}^2 &\simeq \|\pi_h u - u_h\|_{L^2}^2 \\ &= \langle \pi_h u - u_h, \pi_h u - u_h \rangle_{L^2} \\ &= \langle \sum_{i=1}^N (u(S_i) - u_h(S_i))w_i, \sum_{j=1}^N (u(S_j) - u_h(S_j))w_j \rangle_{L^2} \\ &= \sum_{i=1}^N (u(S_i) - u_h(S_i)) \sum_{j=1}^N (u(S_j) - u_h(S_j)) \langle w_i, w_j \rangle_{L^2} \\ &= \sum_{i=1}^N (u(S_i) - u_h(S_i)) \sum_{j=1}^N (u(S_j) - u_h(S_j)) \int_{\Omega} w_i w_j d\Omega \\ &= (U_{ex} - U)^T M (U_{ex} - U) \end{aligned}$$

avec  $(U_{ex})_i = u(S_i)$  et  $U_i = u_h(S_i)$ .

On conclut alors que :

$$\|u - u_h\|_{L^2} = \sqrt{(U_{ex} - U)^T M (U_{ex} - U)}$$

## 6.2 erreur en semi-norme $H^1$

De la même façon avec laquelle on a calculé l'erreur  $L^2$  :

$$\begin{aligned} \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2}^2 &\simeq \|\nabla \pi_h u - \nabla u_h\|_{L^2}^2 \\ &= \langle \nabla \pi_h u - \nabla u_h, \nabla \pi_h u - \nabla u_h \rangle_{L^2} \\ &= \langle \sum_{i=1}^N (u(S_i) - u_h(S_i)) \nabla w_i, \sum_{j=1}^N (u(S_j) - u_h(S_j)) \nabla w_j \rangle_{L^2} \\ &= \sum_{i=1}^N (u(S_i) - u_h(S_i)) \sum_{j=1}^N (u(S_j) - u_h(S_j)) \int_{\Omega} \nabla w_i \nabla w_j d\Omega \\ &= (U_{ex} - U)^T K (U_{ex} - U) \end{aligned}$$

On conclut alors que :

$$\|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2} = \sqrt{(U_{ex} - U)^T K (U_{ex} - U)}$$

## 6.3 Evolution des courbes

Pour visualiser la variation de l'erreur en fonction de la variation du pas de maillage  $h$ , j'ai pris différentes valeurs de  $h$  et j'ai calculé les erreurs  $L^2$  et en semi-norme  $H^1$ .

Les valeurs de  $h$  prises sont :

$$H = [0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1, 0.08, 0.06, 0.04]$$

J'ai constaté les quotients respectives de  $\frac{\|u - u_h\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}}$  qui sont :

$$E1 = [6.1389, 0.60057, 0.60626, 0.20739, 0.037070, 0.019335, 0.010511, 0.0048088]$$

et les quotients respectives de  $\frac{\|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2}}{\|\nabla u\|_{L^2}}$  qui sont :

$$E2 = [0.71611, 0.30913, 0.31129, 0.11348, 0.032779, 0.022054, 0.011837, 0.0058170]$$

La figure 6 montre les courbes correspondantes aux erreurs  $L^2$  en bleu et  $H^1$  en rouge. Le code correspondant se trouve dans la routine *courbes.m*.

On peut remarquer que la décroissance de l'erreur  $L^2$  est plus rapide en la variable  $1/h$  que l'erreur  $H^1$ . Ceci est dû au fait que l'erreur  $L^2$  varie en  $h^2$  alors que l'erreur  $H^1$  varie en  $h$ . On peut remarquer ça lorsque on divise la valeur de  $h$  par 2 on trouve que l'erreur  $L^2$  se divise par 4 alors que l'erreur  $H^1$  se divise par 2.

Sur les figures 7,8 et 9, on peut remarquer plus  $h$  est petit, plus la figure devient de plus en plus lisse.



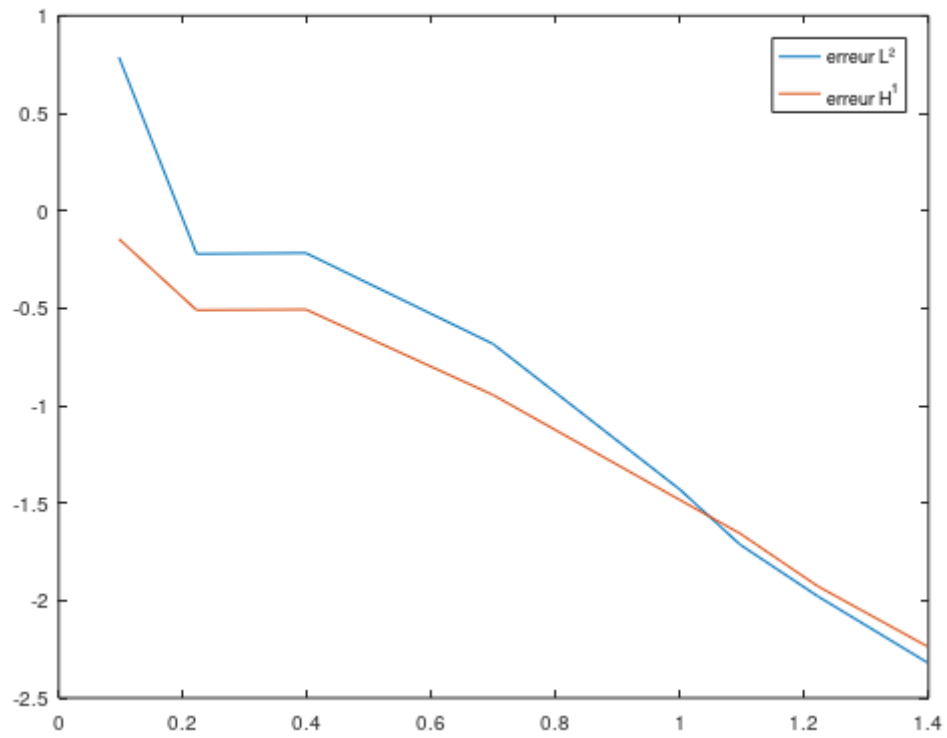


FIGURE 6 – courbes des erreurs.

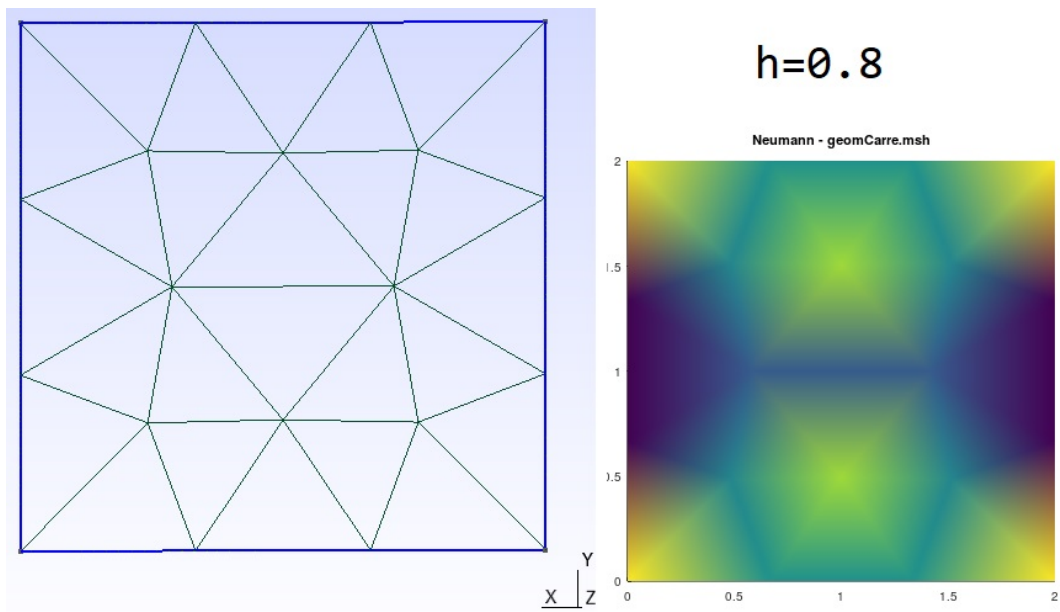


FIGURE 7 – maillage pour  $h=0,8$

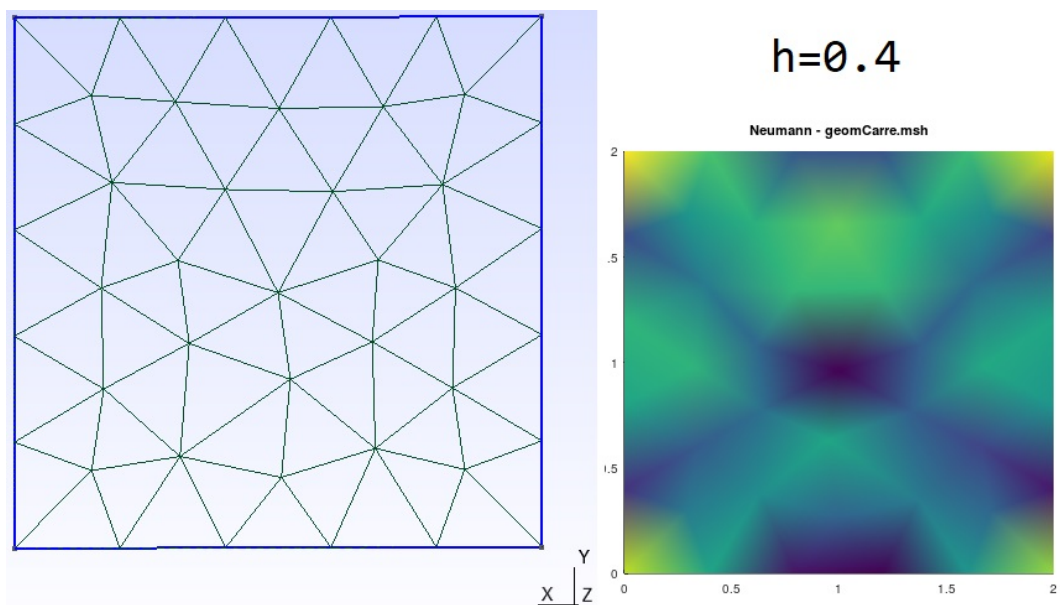


FIGURE 8 – maillage pour  $h=0,4$

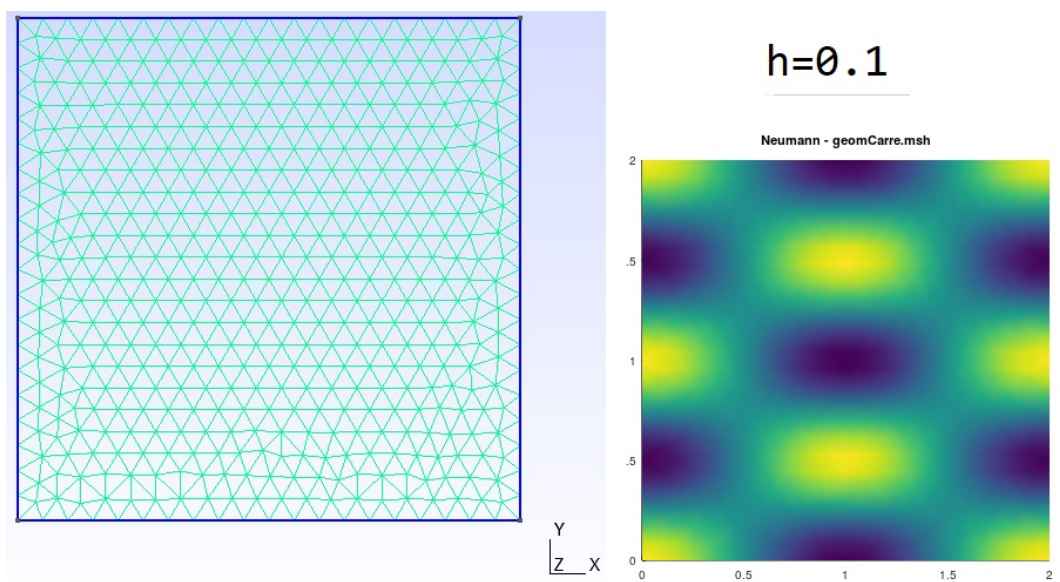


FIGURE 9 – maillage pour  $h=0,1$