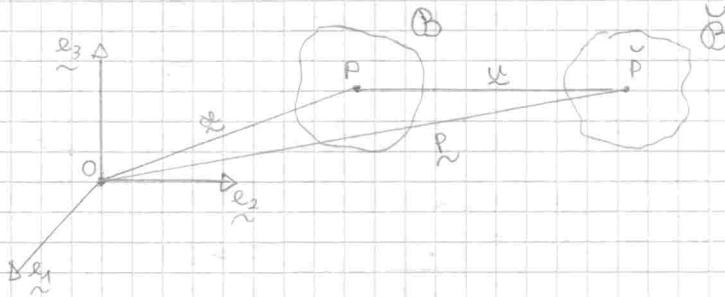


# FORMULARIO 1<sup>a</sup> SETTIMANA

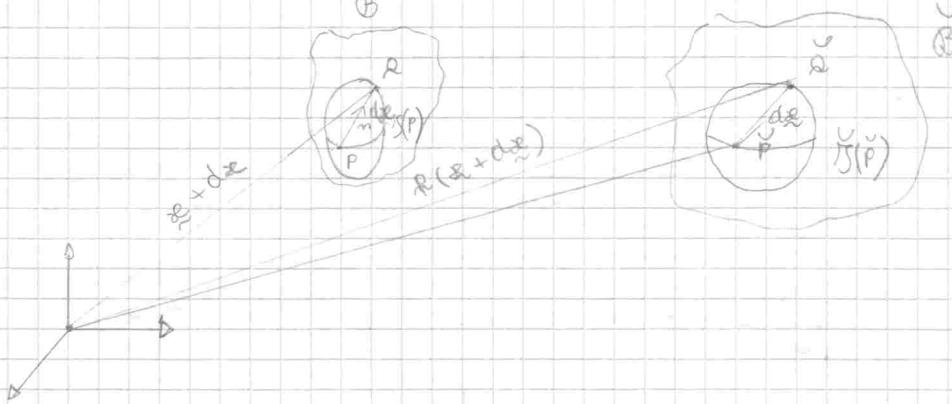
## PROBLEMA DEL SOLIDO DEFORMABILE



$$F = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \quad \text{GRADIENTE DI DEFORMAZIONE}$$

$$\left[ \det \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} > 0 \right] \frac{\text{volume deformato } P}{\text{volume riferimento}}$$

### ANALISI LOCALE DELLA DEFORMAZIONE



$$\tilde{PQ} = F \tilde{PQ} \quad \text{ELONGAZIONE} \rightarrow \varepsilon_m = \frac{|\tilde{PQ}| - |PQ|}{|PQ|} = \sqrt{m^T F^T F m} - 1$$

[definizione]

per elemento "neutro"

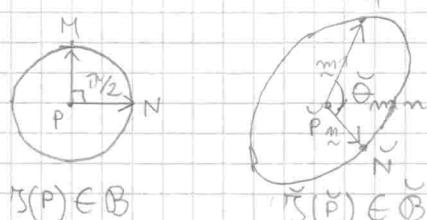
$$F = I + H \rightarrow \text{GRADIENTE DI SPOSTAMENTO}$$

$\hookrightarrow$  tensore identità

$$\tilde{E}_m = \tilde{x}^T E \tilde{x}$$

$$\text{dove } E = \frac{H + H^T}{2}$$

TENSORE DELLA DEFORMAZIONE INFINITESIMA



SCORRIMENTO ANGOLARE  
[definizione]

$$\gamma_{mn} = 2 \tilde{x}^T E \tilde{x}$$

$$\gamma_{mn} = \frac{\pi}{2} - \theta_{mn}$$

MEMO:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

# FORMULARIO 2° SETTIMANA

<sup>TENSORE DEFORMAZIONE</sup>  
 $E = \frac{H + H^T}{2}$  È SIMMETRICO  $\Rightarrow E^T = E$   
 PARTE SIMMETRICA  
 $\downarrow H$

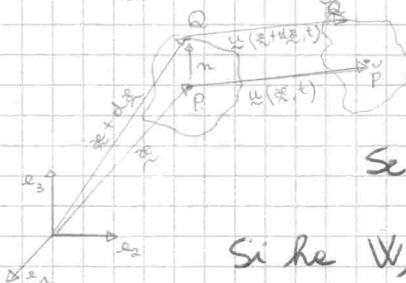
Affinché la deformazione in un intorno di un punto sia nulla dovrà essere  $E = 0$ .

In tal caso l'intorno compie un MOTO RIGIDO INFINITESIMO. Avremo:

$$E = \frac{H + H^T}{2} = 0 \Rightarrow H^T = -H \Rightarrow H = \frac{H + H^T}{2} + \frac{H - H^T}{2} = 0 \quad \text{SKW}(H) = W$$

PARTE ANTISIMMETRICA  
 $\downarrow H$

$W$  È TENSORE DEFORMAZIONE RIGIDA INFINITESIMA



Osservazioni su  $W$ :

PD DERIVATA DIREZIONALE (SPOSTO RELAT. DI UN PUNTO P FRATTO PR.)

$$\frac{\partial u}{\partial n} = E_n + W_n \rightarrow \begin{array}{l} \text{parte RIGIDA} \\ \downarrow \\ \text{parte DEFORMATIVA} \end{array}$$

VECTORE ASSALE ANTISIMMETRICO

$$\text{Se } E_n = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = W_n \Rightarrow W_n = \theta \times n$$

VECTORE ROTAZIONE RIGIDA INFINITESIMA

$$\text{Si ha } W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\text{inoltre } \theta = \frac{1}{2} \nabla \times u$$

## • ANALISI TENSORE DEFORMAZIONE INFINITESIMA ( $E$ )

Considerando in  $P$  3 fibre collineari con assi obliqui obriemo:

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & \frac{\gamma_{12}}{2} & \frac{\gamma_{13}}{2} \\ E_2 & \frac{\gamma_{23}}{2} & \\ E_3 & & \end{bmatrix}$$

$E_1$  elongazione fibra collineare esse 1

$E_2$  " " " " esse 2

$E_3$  " " " " esse 3

( $E_{12} = \frac{\gamma_{12}}{2}$  = mezzo scorciamento angolare fra fibre collineare degli assi 1 e 2)

## • ELONGAZIONE MAX/MIN [ricerca di tali fibre]

Bisogna risolvere  $E_m = m^T E m$  tenendo conto che  $m^T m = 1$ . Tale questione si pone in un PROBLEMA AGLI AUTOVALORI

$$\begin{cases} (E - \lambda I)m = 0 \\ m^T m = 1 \end{cases}$$

ove  $m$  è il vettore autoversore  
 con  $\det(E - \lambda I) = 0$

EQNE CARATTERISTICA

(Affinché soluzioni NON banali  $\det(E - \lambda I) = 0$ )

$$\text{Eqne caratteristica per esteso è } \lambda^3 - I_1^E \lambda^2 + I_2^E \lambda - I_3^E = 0$$

$I_{1,2,3}$  INVARIANTI DEL TENSORE DI DEFORMAZIONE

$$I_1^E = \text{Tr} E = E_{11} + E_{22} + E_{33}$$

$I_1$  INVAR. ORDINE 1

$$I_2^E = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{12} & E_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{11} & E_{13} \\ E_{13} & E_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{22} & E_{23} \\ E_{23} & E_{33} \end{vmatrix} = E_{11}E_{22} + E_{22}E_{33} + E_{33}E_{11} - (E_{12}^2 + E_{23}^2 + E_{31}^2)$$

INV. ORDINE 2

$$I_3^E = \det E = E_{11}E_{22}E_{33} + E_{12}E_{23}E_{31} + E_{13}E_{21}E_{32} - (E_{13}E_{22}E_{31} + E_{12}E_{21}E_{33} + E_{11}E_{23}E_{32})$$

$\Rightarrow$  da eqne caratteristica ricovo  $\lambda_I$   $\lambda_{II}$   $\lambda_{III}$  a cui corrispondono

3 autovettori

$m_I$   $m_{II}$   $m_{III}$  fra loro ortogonali

Considerando il generico  $\lambda_j$  ed il corrispondente  $n_j$  si ha  $\lambda_j = n_j^T E n_j$   
 $\Rightarrow \lambda_j = E_j$  quindi è vero che  $\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III}$  sono le 3 ELONGAZIONI PRINCIPALI e  $n_I, n_{II}, n_{III}$  le 3 DIREZIONI PRINCIPALI DI DEFORMAZIONE.

Analizzando le 3 fibre così individuate si ha che (per 2 di esse generiche nelle direzioni  $n_K, n_j$  con  $j \neq K$ )  $\gamma_{JK} = 2n_j^T E n_K = 0$  cioè le 3 fibre di max/min elongazione NON sono tra loro  $\Rightarrow$

$$=DE = \begin{bmatrix} E_I & 0 & 0 \\ 0 & E_{II} & 0 \\ 0 & 0 & E_{III} \end{bmatrix}$$

①  $E_I \neq E_{II} \neq E_{III}$  STATO DI DEFORMAZIONE TRIASSIALE  
 (stretto  $\rightarrow$  ellissoidale)

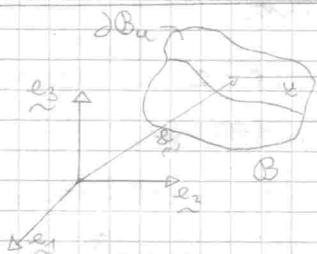
②  $E_I = E_{II} \neq E_{III}$  STATO DI DEFORMAZIONE CIUNDRICO

③  $E_I = E_{II} = E_{III}$  STATO DI DEFORMAZIONE SFERICO  
 (stretto  $\rightarrow$  sfere)

④  $E_I \neq E_{II}$  e  $E_{III}=0$  STATO DI DEFORMAZIONE PIANO

⑤  $E_I = E_{II} = 0$  e  $E_{III}=0$  STATO DI DEFORMAZIONE MONOASSIALE

#### • PROBLEMA CINEMATICO DIRETTO



$$\exists u(\underline{x}) / \left\{ \begin{array}{l} E = \frac{H+H^T}{2}, \quad \underline{x} \in \mathbb{B} \\ \text{SOTTOCHIEDIAMO} \\ \underline{x} = \bar{u}, \quad \underline{x} \in \partial \mathbb{B}_u \end{array} \right. \quad \text{EQ}^{N^1} \text{ DI CONGRUENZA}$$

IN FORMA IMPLICITA

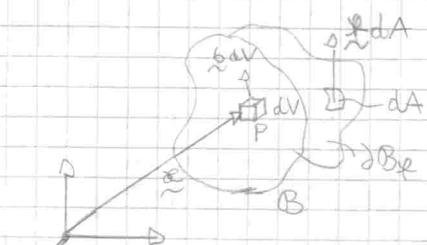
$$\frac{\partial^2 \epsilon_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_j}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x_K} + \frac{\partial \gamma_{jk}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{ki}}{\partial x_j} \right)$$

EQ<sup>N<sup>1</sup></sup> DI CONGRUENZA  
 IN FORMA  
 ESPlicita

# FORMULARIO 3<sup>°</sup> SETTIMANA

## EQUILIBRIO NEL SOLIDO DEFORMABILE



Forze a cui è soggetto un corpo:

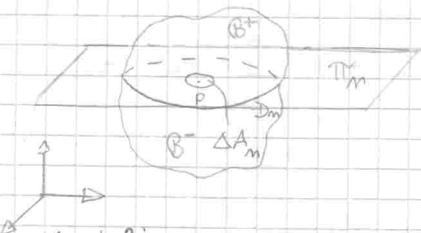
1) FORZE DI VOLUME  $\tilde{b}(\tilde{\alpha})$ ,  $\tilde{\alpha} \in \tilde{B}$

2) FORZE DI SUPERFICIE  $\tilde{x}(\tilde{\alpha})$ ,  $\tilde{\alpha} \in \partial\tilde{B}_x$

Analogamente a 1) e 2) studieremo EQUILIBRIO STATICO del CORPO

con l'ipotesi  $|H| = \Theta(\varepsilon)$  [gradiente spostamento infinitesimo  $\Rightarrow$  deformazioni infinitesime] e  $\max_{\tilde{\alpha} \in \tilde{B}} \frac{|u|}{d} = \Theta(\tilde{\varepsilon})$  dove  $d = \max |P_{ij}|$

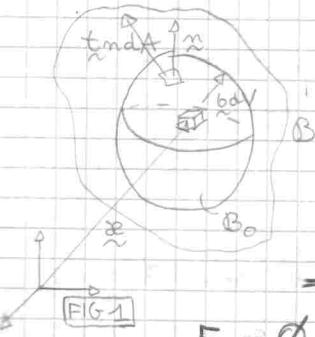
[il max del campo spostamenti è infinitesimo  $\Rightarrow$  deformazioni infinitesime]  $\Rightarrow$   $\Rightarrow$  TEORIA del 1<sup>o</sup> ORDINE



$$\lim_{\Delta A_m \rightarrow 0} \frac{\Delta t_m}{\Delta A_m} = \tilde{t}_m \quad \left. \begin{array}{l} \text{TENSIONE/SFORZO DI} \\ \text{CAUCHY} \end{array} \right\} \text{TEORIA} \quad \left[ \begin{array}{l} \Delta t_m = \text{risultante} \\ \text{d'ogni centetto} \end{array} \right]$$

$$\lim_{\Delta A_m \rightarrow 0} \frac{\Delta M_m}{\Delta A_m} = \tilde{\alpha} \quad \left. \begin{array}{l} \text{momento delle} \\ \text{azioni di contatto} \end{array} \right\} \text{DI} \quad \left[ \begin{array}{l} \Delta M_m = \text{risultante} \\ \text{momento delle} \\ \text{azioni di contatto} \end{array} \right]$$

Verifica POSTULAZIONE di CAUCHY:



$$\tilde{F}_0 = \int_{B_0} \tilde{b} dV + \int_{\partial B_0} \tilde{t}_n dA \quad \left[ \begin{array}{l} \text{FOR VOLUME} \\ \text{FOR SUPERF.} \end{array} \right]$$

$$\tilde{M}_0 = \int_{B_0} \tilde{x} \times \tilde{b} dV + \int_{\partial B_0} \tilde{x} \times \tilde{t}_n dA \quad [B_0 \subseteq B]$$

[Risultante forze ( $F_0$ )  
e momenti ( $M_0$ )]

$\Rightarrow$  EQUILIBRIO SOLIDO DEFORMABILE è garantito se (2 ASSIOMI di EULER):

$F_0 = \emptyset$  e  $M_0 = \emptyset$ . Se  $B_0 \equiv B$  abbiamo: [C.NEC. DI EQUILIBRIO CORPO DEFOR.]

$$\tilde{F}_0 = \int_B \tilde{b} dV + \int_{\partial B} \tilde{t} dA = \emptyset \quad \text{e} \quad \tilde{M}_0 = \int_B \tilde{x} \times \tilde{b} dV + \int_{\partial B} \tilde{x} \times \tilde{t} dA = \emptyset$$

Dividendo  $B$  in  $B^+$  e  $B^-$  si ottiene; imponendo equilibrio fra  $B^+$  e  $B^-$ , (attraverso le sole forze)

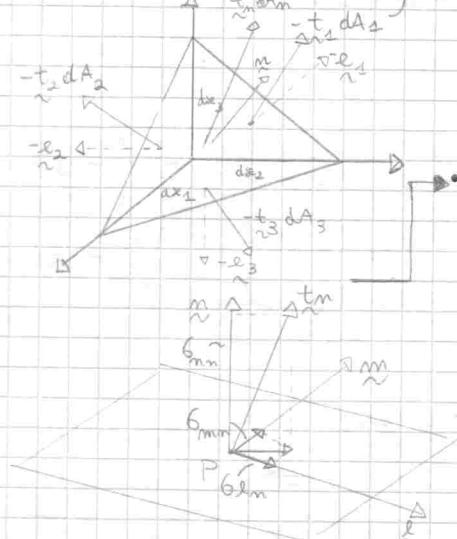
$$\tilde{t}^+ = -\tilde{t}^- \quad \text{LEMMA DI CAUCHY}$$

[vettori tensione fra 2 giaciture sono uguali ed opposti]

• Vediamo ora il TETRAEDRO DI CAUCHY:

Studiandone l'equilibrio si ha

$$\tilde{t}_m = \tilde{t}_1 m_1 + \tilde{t}_2 m_2 + \tilde{t}_3 m_3 \quad \text{FORMULA DI CAUCHY-POISSON}$$



• Per ogni giacitura e loro intumice rispetto a P

$$T_{en} = G_{en} = \tilde{l} \cdot \tilde{t}_m \quad \left. \begin{array}{l} \text{TENSIONI} \\ \text{ENORMALI} \end{array} \right\}$$

$$T_{mn} = G_{mn} = \tilde{m} \cdot \tilde{t}_m \quad \left. \begin{array}{l} \text{TANGENZIALI} \\ \text{MOMENTI} \end{array} \right\} \Rightarrow t_{ij} = G_{ij} \tilde{e}_i \Rightarrow$$

$$G_{mn} = \tilde{m} \cdot \tilde{t}_m \quad \left. \begin{array}{l} \text{TENSIONE} \\ \text{NORMALE} \end{array} \right\} \Rightarrow t_{mn} = n_j G_{ij} \tilde{e}_i$$

Considerando  $t_{in} = G_{ij} n_j$  si ha:

$$\begin{bmatrix} t_{1m} \\ t_{2m} \\ t_{3m} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6_{11} & 6_{12} & 6_{13} \\ 6_{21} & 6_{22} & 6_{23} \\ 6_{31} & 6_{32} & 6_{33} \end{bmatrix}}_T \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

$$t_m = T_m \Rightarrow t_m = T \cdot m$$

T = TENSORE DELLA TENSIONE (di 2° ordine)

### • EQUILIBRIO INTERNO AL CORPO [FIG. 1]

1) FORZE  $\int_{B_0} b \, dV + \int_{\partial B_0} t_m \, dA = 0 \xrightarrow[\text{RIUVA}]{\text{SI}} \frac{\partial t_m}{\partial x_i} + b = 0 \quad \text{EQ}^N \text{ INDEFINITA DI EQUILIBRIO (IN FORZA VETTORIALE)}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial 6_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial 6_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial 6_{13}}{\partial x_3} + b_1 = 0 \\ \frac{\partial 6_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial 6_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial 6_{23}}{\partial x_3} + b_2 = 0 \\ \frac{\partial 6_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial 6_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial 6_{33}}{\partial x_3} + b_3 = 0 \end{array} \right. \quad \text{EQ}^N \text{ INDEFINITA DI EQUILIBRIO (SCALARE)}$$

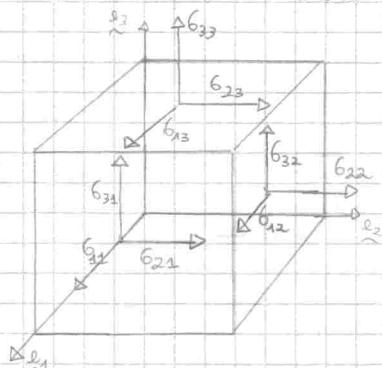
2) MOMENTI  $\int_{B_0} \alpha \times b + \int_{\partial B_0} \alpha \times t_m \, dA = 0 \xrightarrow[\text{RIUVA}]{\text{SI}} \int_{B_0} (\alpha_i \times t_j + \alpha \times \frac{\partial t_j}{\partial x_i}) \, dV = 0$

$$1) e 2) \Rightarrow \int_{B_0} \alpha \times (b + \frac{\partial t_j}{\partial x_i}) \, dV + \int_{B_0} \alpha_i \times t_j \, dV = 0$$

$\underset{\text{EQUILIBRIO}}{= 0 \text{ per EQ}^N \text{ INDEF.}}$   $\underset{\text{B}_0}{\text{Lo necessariamente}} = 0 \xrightarrow[\text{SE}]{\text{SOLO}} \alpha_i \times t_j = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_i \cdot 6_{ij} \cdot \alpha_i = 0 \Rightarrow 6_{ij} = 6_{ji} \Rightarrow T \text{ SIMMETRICO, STATI DI TENSIONE DI UN CORPO SONO COG.}$

### • ANALISI TENSORE DELLE TENSIONI (T)



$$\text{Si dimostra } 6_{ij} = 6_{ji} \Rightarrow T = T^T$$

→ OSS. Le eq<sup>m</sup> indef di eqbus (relati) sono 3 contenenti 6 incognite. Se niente è quindi indeterminato tali eq<sup>m</sup> valgono all'INTERNO del corpo. Ma cosa succede sulla FRONTIERA del corpo?  $\Rightarrow$

### • ANALISI FRONTIERA (SUPERFICIE DEL CONTINUO) DEL CORPO



$$\alpha = t_m n \Rightarrow T_m = \alpha$$

(in spaziano metriciale  $\Rightarrow$ )

$$\begin{bmatrix} 6_{11} & 6_{12} & 6_{13} \\ 6_{21} & 6_{22} & 6_{23} \\ 6_{31} & 6_{32} & 6_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6_{11} m_1 + 6_{12} m_2 + 6_{13} m_3 = \alpha_1 \\ 6_{21} m_1 + 6_{22} m_2 + 6_{23} m_3 = \alpha_2 \\ 6_{31} m_1 + 6_{32} m_2 + 6_{33} m_3 = \alpha_3 \end{cases} \quad \text{EQ}^N \text{ SCALARI DI EQUILIBRIO AL CONTORNO}$$

### • GIACITURE PRINCIPALI (dove vettore tensione ha solo normale)

$$\tilde{t}m = Gm \rightarrow Tm = Gm \Rightarrow (T - 6I)n = 0 \quad \text{PROBLEMA DI AUTOVALORI} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(T - 6I) = 0 \quad [\text{con } m^T m = 1] \quad \text{il det si svilupperà in } \text{eq}^N \text{ caratteristiche}$$

$$G^3 - I_1^T G^2 + I_2^T G - I_3^T = 0 \quad \text{dove } I_1 = \text{tr} I \quad I_2 = I_{11} I_{22} + I_{22} I_{33} + I_{33} I_{11} - (I_{12}^2 + I_{23}^2 + I_{31}^2)$$

+ i numeri delle metriche della tensione

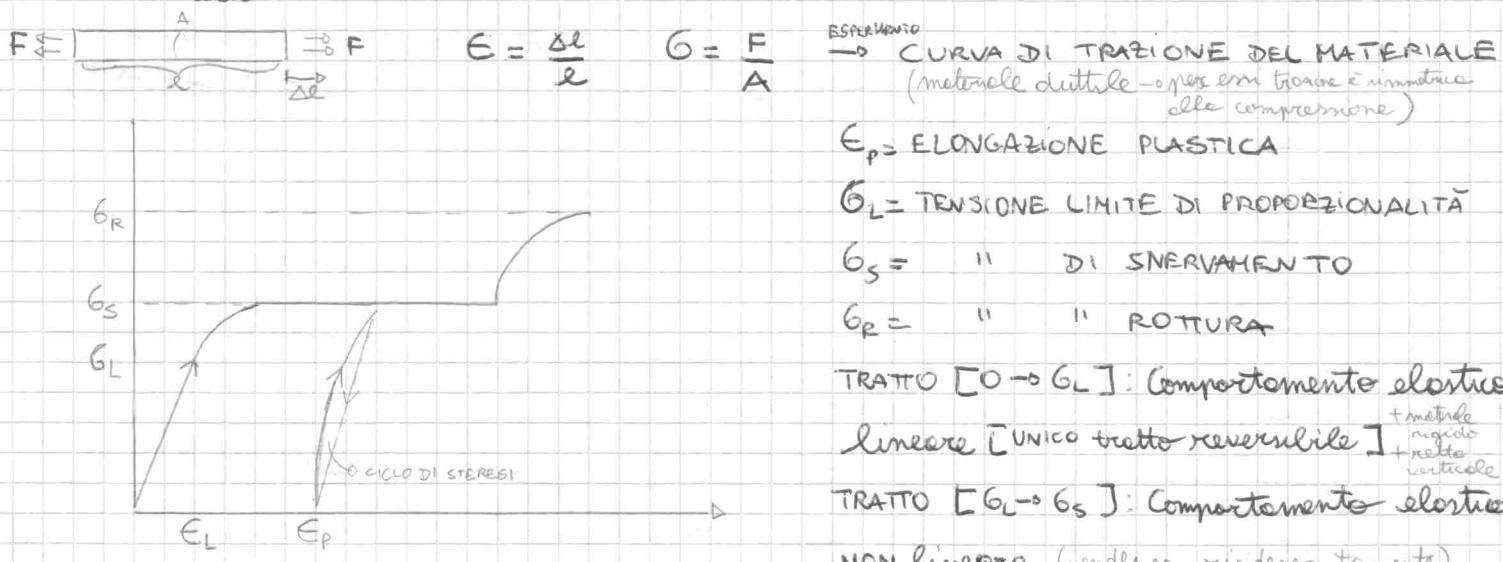
$$I_3 = I_{11} I_{22} I_{33} + I_{12} I_{23} I_{31} + I_{13} I_{24} I_{32} - (I_{13} I_{22} I_{31} + I_{12} I_{21} I_{33} + I_{11} I_{23} I_{32})$$

$\Rightarrow$  da eq<sup>ne</sup> caratteristica  $G_I, G_{II}, G_{III}$   $\rightarrow$   $n_I, n_{II}, n_{III}$  (mutamente  $\perp$ )  
 COSSORI PRINCIPALI CODIREZIONI PRINCIPALI DI SPORZO

- ①  $G_I \neq G_{II} \neq G_{III}$  STATO DI TENSIONE TRASSIALE (3 giaciture principali sono unache)
- ②  $G_I = G_{II} \neq G_{III}$  " " " CIUDRICO (Tutte direzioni  $\perp$  al piano di  $n_{III}$  sono principali)
- ③  $G_I = G_{II} = G_{III}$  " " " SFERICO (Tutte direzioni/giaciture sono principali)
- ④  $G_{II} = G_{III}, G_I = 0$  " " " PIANO (È piano di tensione qui individuato da  $n_{II}, n_{III}$ )
- ⑤  $G_I = G_{II} = 0, G_{III} \neq 0$  " " " MONOASSIALE (Qui vi è un'asse della tensione collineare con  $n_{III}$ )

### EQUAZIONI DI LEGAME COSTITUTIVO

• Periamo delle PROVA DI TRAZIONE MONOASSIALE

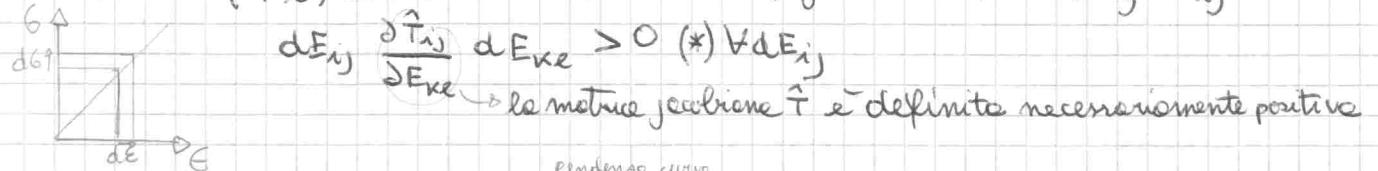


TRATTO  $[G_S \rightarrow G_R]$ : tratto di snervamento

$\rightarrow$  ANALISI TRATTO  $[0, G_L]$

$T(\xi) = \hat{T}(E(\xi), \xi)$  cioè vi è un legame  $\hat{T}$  fra tensore tensione e tensore deformazioni.

$\hat{T}$  t.c.  $\hat{T}(0, \xi) = 0$ . Vole  $dE dG > 0$ , generalizzando  $dE_{ij} d\hat{T}_{ij} > 0$  o meglio



(\*) NEL MONOASSIALE:  $dE = \frac{\partial \hat{T}}{\partial E} dE > 0$  se MATERIALE ELASTICO LINEARE  $\Rightarrow \hat{T} = \hat{T} = AE$

cioè  $\hat{T}_{ij} = A_{ijkl} E_{kl}$   $[A = OPERATORE ELASTICO]$  con

si che  $\underline{G} = A \underline{E}$  con  $A_{6x6} = 36$  COSTANTI ELASTICHE

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{23} \\ E_{31} \end{bmatrix}$$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} G_{11} \\ G_{22} \\ G_{33} \\ G_{12} \\ G_{23} \\ G_{31} \end{bmatrix}$$

$[E, G$  rappresentano componenti indipendenti di  $E$  e  $T$ ]

2) se MATERIALE IPERELASTICO, Assegno energia potenziale elastica  $W(E)$

$$W(E) = \frac{1}{2} dE_i A_{ij} dE_j \rightarrow EN.POT. ELASTICA deve essere CONVESSA$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_i \partial \epsilon_j} = A_{ij} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_i} = A_{ji} \stackrel{\text{Th Scherz}}{=} A_{ij} = A_{ji} \quad [\text{A SIMMETRICA } A^T = A]$$

A ha 21 COSTANTI ELASTICHE

3) se MATERIALE MONOCINICO (1 piano di simmetria elastica)  $\Rightarrow$  A ha 13 COSTANTI ELASTICHE

4) se " ORTOTROPO (3 " " " " )  $\Rightarrow$  A ha 9 "

5) se " IPERELASTICO - ISOTROPO  $\Rightarrow$  A ha 2 COSTANTI ELASTICHE

$$G = AE \quad (\text{LEGAME COSTITUTIVO}) \rightarrow T = \hat{T} = \lambda(\text{tr}E)I + 2\mu E \quad \lambda, \mu = \text{COSTANTI DI LAMÉ}$$

$$E = \frac{G}{1-\nu} \quad (" \quad " \quad \text{INVERSO}) \rightarrow E = \frac{1}{2\mu} \left( T - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} (\text{tr}T)I \right) \quad \text{o meglio}$$

introducendo  $E = \text{MODULO DI YOUNG}$ ,  $\nu = \text{COEFFICIENTE DI POISSON}$ ,  $G = \text{MODULO DI ELASTICITÀ TANGENZ.$

$$\rightarrow E_1 = \frac{1}{E} [G_{11} - \nu(G_{22} + G_{33})] \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{dove } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$E_2 = \frac{1}{E} [G_{22} - \nu(G_{33} + G_{11})]$$

$$E_3 = \frac{1}{E} [G_{33} - \nu(G_{11} + G_{22})]$$

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G}$$

$$\gamma_{23} = \frac{\tau_{23}}{G}$$

$$\gamma_{31} = \frac{\tau_{31}}{G}$$

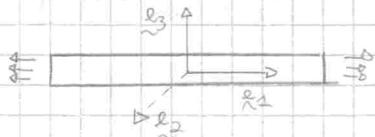
LEGGI DI

HOOKE

$G$  t.c. matrice elastica reale positiva

$$\Rightarrow E > 0, \quad -1 < \nu < 0,5 \quad \begin{matrix} \text{MATERIALI} \\ \text{REALI} \end{matrix}$$

• Tornando alla PROVA DI TRAZIONE MONOASSIALE



$$G_{22} = G_{33} = \tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0 \quad G_{11} \neq 0$$

$$E_1 = \frac{G_{11}}{E} \quad E_2 = E_3 = -\nu \frac{G_{11}}{E} = -\nu E_1 (*)$$

(\*)  $-\nu E_1 = \text{ELONGAZIONE TRASVERSALE}$  (fenomeno contrattivo)  $\rightarrow$  EFFETTO POISSON: la fibra si allunga ed arrotiglia

# FORMULARIO 4° SETTIMANA

## EQUAZIONI DEL PROBLEMA ELASTICO PER SOLIDI DEFORMABILI

### 1) EQ<sup>III</sup> CONGRUENZA

$$\begin{cases} E_{KE} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_L} + \frac{\partial u_L}{\partial x_k} \right), \quad \forall \in \Omega \\ u_i = \bar{u}_i, \quad \forall \in \partial \Omega_u \end{cases}$$

### 2) EQ<sup>III</sup> EQUILIBRIO

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0, \quad \forall \in \Omega \\ \sigma_{ij} n_j = f_i, \quad \forall \in \partial \Omega_f \end{cases}$$

### 3) EQ<sup>III</sup> LEGAME COSTITUTIVO

$\sigma_{ij} = A_{ijkl} E_{KL}$ ,  $\forall \in \Omega \Rightarrow$  Se deformazioni onelastiche  $\Rightarrow \sigma_{ij} = A_{ijkl} (E_{KL} - \bar{E}_{KL})$   
 ed es. defor. termica  $\theta$  (variazione temp.)  $\rightarrow \bar{E}_1 = \bar{E}_2 = \bar{E}_3 = \alpha \theta$  e  $\bar{\gamma}_{12} = \bar{\gamma}_{23} = \bar{\gamma}_{31} = 0$   
 [dove  $\alpha$  = COEF. DI DILATAZIONE TERMICA (1/C)]

DOVUTO A  
DEF ANAL.

STATO<sup>+</sup> DEFOR E SFERICO

DA 1) 2) 3) ossequenti ( $\bar{u}_i, \bar{f}_i, \bar{E}_{KL}$ ),  $\Omega, \partial \Omega_f, \partial \Omega_u$  ri hanno 15 incognite

[ $\sigma(u_i): 3; E_{KL}: 6; \sigma_{ij}: 6 \Rightarrow$

= METODO DEGLI SPOSTAMENTI (INCognita PRIMARIA  $\underline{u}$ ). Si sostituiscono in ordine:

1)  $\rightarrow$  2)  $\rightarrow$  3) [IPOTIZZANDO  $A_{ijkl}$  UNIFORME] si ha:

$$\left. \begin{array}{l} A_{ijkl} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_L} + \frac{\partial^2 u_L}{\partial x_j \partial x_k} \right) - \frac{\partial \bar{E}_{KL}}{\partial x_j} \right] + b_i = 0, \quad \forall \in \Omega \\ A_{ijkl} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_L} + \frac{\partial u_L}{\partial x_k} \right) - \bar{E}_{KL} \right] n_j = f_i, \quad \forall \in \partial \Omega_u \\ u_i = \bar{u}_i, \quad \forall \in \partial \Omega_u \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{EQUAZIONI} \\ \text{DI} \\ \text{MAVIER} \end{array}$$

### • ANALISI CURVA DI RISPOSTA (MATERIALI FRAGILI)

Nei M. DUTTILI  $G_s^+ \approx |G_s^-|$  Nei M. FRAGILI  $G_R^+ \ll |G_R^-|$

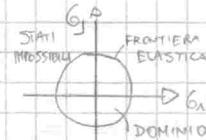
$G_0$  = TENSIONE LIMITE ELASTICO.

Se materiale è in condizione di elasticità  $\Leftrightarrow$

$\rightarrow$  Mat. DUTTILE  $|G| \leq G_0$   $G_0 \approx G_s$  cioè  $G \in [-G_0, G_0]$  (\*)

$\rightarrow$  Mat. FRAGILE  $G_0^- \leq G \leq G_0^+$   $G_0^+ \approx G_R^+$ ,  $|G_0^-| = |G_R^-|$  cioè  $G \in [G_0^-, G_0^+]$  (\*\*)

• Considerando (\*) e (\*\*) costruiamo un DOMINIO ELASTICO:



CRITERI DI RESISTENZA (introduciamo  $g(\underline{\sigma})$ )  $\rightarrow$

Condizione di elasticità:  $g(\underline{\sigma}) \leq g_0$  (+)

### • ANALISI MATERIALI DUTTILI (IPERELASTICO E ISOTROPO)

A)  $g(G_I, G_{II}, G_{III})$  B)  $T = H I + T'$

PARTE IDROSTATICA

DEVIATORE DI TENSIONE

$g$  dipende solo da  $T' \Rightarrow$

$$= \square g(I_2^{T'}, I_3^{T'})$$

C)

$$g(\underline{\sigma}) = g(-\underline{\sigma})$$

$$T = \begin{bmatrix} \Theta & 0 & 0 \\ 0 & \Theta & 0 \\ 0 & 0 & \Theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11}-\Theta & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22}-\Theta & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33}-\Theta \end{bmatrix}$$

dove  $\Theta = \frac{1}{3} \text{tr} T = \frac{1}{3} (G_{11} + G_{22} + G_{33})$

g stabilisce EQUIVALENZE fra STATI TENSIONALI, il più semplice è quello MONOASSIALE:

$g_0$  = VALORE DI SOGLIA. Si ha  $g(G_I, G_{II}, G_{III}) = g(G_{id}, 0, 0)$

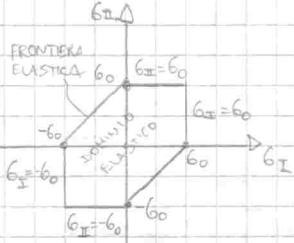
dove  $G_{id} = \hat{G}_{id}(G_I, G_{II}, G_{III})$ . (4) diviene  $G_{id} \leq G_0$  (5)

"NUOVA" CONDIZIONE DI ELASTICITÀ

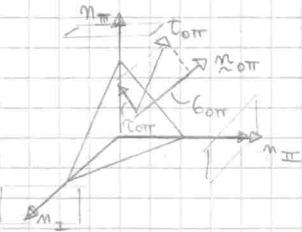
## Analissimo $G_{id}$ e (5):

### ① CRITERIO DELLA TENSIONE TANGENZIALE MASSIMA

$g = \frac{1}{2} \max(|G_I - G_{II}|, |G_{II} - G_{III}|, |G_{III} - G_I|)$  se  $G_I = G_0$  e  $G_{II} = G_{III} = 0$   
 ri ha  $(G_{id}) = \max(|G_I - G_{II}|, |G_{II} - G_{III}|, |G_{III} - G_I|) \leq G_0$  (6) (5) RISCRITTA  
 se lo STATO di TENSIONE È PIANO ( $G_{III} = 0$ ) le (6) da luogo:



### ② CRITERIO DELLA TENSIONE TANGENZIALE OTTOEDRICA (Huber - Hencky - Von Mises)



La normale  $n$  è la bisettrice del diedro

$$n_{\text{ott}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

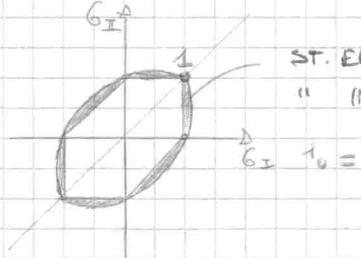
$$\tau_{\text{ott}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} G_I \\ G_{II} \\ G_{III} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{SCOMPAGNO}} G_{0\text{ott}} = \Theta = \frac{1}{3} (G_I + G_{II} + G_{III})$$

$$\tau_{\text{ott}} = \sqrt{t_{\text{ott}}^2 - G_{0\text{ott}}^2} = \frac{1}{3} \sqrt{(G_I - G_{II})^2 + (G_{II} - G_{III})^2 + (G_{III} - G_I)^2}$$

imporzare  $g = \tau_{\text{ott}}$  [se monassiale  $g^0 = \tau_{\text{ott}}^0 = 0 \Rightarrow g^0 = \frac{\sqrt{2}}{3} G_0$ ]

$$G_{id} = \sqrt{(G_I - G_{II})^2 + (G_{II} - G_{III})^2 + (G_{III} - G_I)^2} \leq \sqrt{2} G_0 \quad (7) \quad (5) \text{ RISCRITTA}$$

vedo (7) come un'ellisse  $\Rightarrow G_I^2 + G_{II}^2 - G_I G_{II} = G_0^2$  (dove in (7) vedo  $G_{III} = 0$ )



ST. ELASTICI SECONDO VON MISES  $\Rightarrow$  CRITERIO DI VON MISES È MENO CONSERVATIVO  
 " IMPOSSIBILI " TRESCA  $\Rightarrow$  DI AVELLO DI TRESCA

CONCLUDENDO, Arrengato CRITERIO di RESISTENZA:  $\bar{G}_{id} = \max_{\mathcal{B}} G_{id}$

e introducendo  $G_{AMM} = \frac{G_0}{M \circ \text{COEF. DI SICUREZZA DEL MATERIALE}}$  deve tenere  $= 0$   $\Rightarrow \bar{G}_{id} \leq G_{AMM}$

### PROBLEMA DEL CORPO RIGIDO (CINEMATICO)

VINCOLO CINEMATICO INTERNO DI RIGIDITÀ  $\Rightarrow$  fibre urcate da un punto NON subisce elongazione  
 $\Rightarrow$  coppie fibre urcate da un punto NON subisce  $\Rightarrow$  rotolamento

$$\Rightarrow \begin{cases} E_m = 0 \\ \gamma_{mn} = 0 \end{cases} \forall \underline{x} \in \mathcal{B} \quad \forall m, n \quad \Leftrightarrow \quad E = 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{B} \rightarrow e \quad \text{equivale} \quad E_1 = E_2 = E_3 = 0 \\ \gamma_{12} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = 0$$

EQUAZIONI CONGRUENZA SONO

$$\begin{cases} E_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \\ E_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \\ E_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \\ \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \\ \gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \\ \gamma_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = f_1(x_2, x_3) = c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_3 \\ u_2 = f_2(x_1, x_3) = c_3 + c_4 x_1 + c_5 x_3 \\ u_3 = f_3(x_1, x_2) = c_6 + c_7 x_1 + c_8 x_2 \end{cases} \begin{cases} = c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_3 \\ = c_3 - c_4 x_1 + c_5 x_3 \\ = c_6 - c_7 x_1 - c_8 x_2 \end{cases}$$

Ponendo  $u_1, u_2, u_3$  in (1) si ha

$c_4 = -c_1; c_5 = -c_3; c_7 = -c_2$  che sostituite in  $u_1, u_2, u_3$  danno

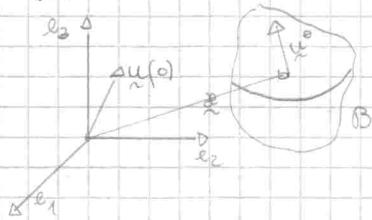
$u_1, u_2, u_3$  dipendono quindi da 6 COSTANTI INDEPENDENTI.

Scriviamo in forma matriciale  $\underline{u} = \underline{u}(0) + W \underline{x}$  (1)

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= \begin{bmatrix} c_0 \\ 0 & c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (\text{W è ANTISIMMETRICA cioè } W^T = -W) \\ \underline{u}_2 &= c_3 + -c_1 \cdot 0 & c_5 \cdot x_2 \quad \text{Se } x=0 \text{ si ha } \underline{u} = \underline{u}(0) \\ \underline{u}_3 &= \begin{bmatrix} c_6 \\ -c_2 & -c_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{Analizziamo (1):} \end{aligned}$$

$\underline{u}(0)$  = spostamento p<sup>to</sup> materiale che si trova all'origine del sistema di riferimento

$W \underline{x} = \underline{u}^\theta$  = rotazione rigida infinitesima che subisce ogni punto P del corpo



$W$  = MATRICE DI ROTAZIONE RIGIDA INFINITESIMA GLOBALE  
VETTORE ROTAZIONE RIGIDA INFINITESIMA

$$\text{Si ha } \underline{u}^\theta = W \underline{x} = \underline{\theta} \times \underline{x}$$

$$\text{Vale anche } \underline{\theta} = \frac{1}{2} \nabla \times \underline{u} \text{ che sviluppa parte a} \\ \theta_1 = -c_5; \theta_2 = c_2; \theta_3 = -c_1 \Rightarrow W = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(1) \text{ è } \underline{u} = \underline{u}(0) + \underline{\theta} \times \underline{x} \text{ dove } \underline{u}(0) \text{ e } \underline{\theta} \text{ rappresentano}$$

6 PARAMETRI INDEPENDENTI = 6 GRADI DI LIBERTÀ

$u_1(0), u_2(0), u_3(0), \theta_1, \theta_2, \theta_3$  sono 6 PARAMETRI LAGRANGIANI

$P^0$  = POLO DI RIDUZIONE (arbitrario)

Volutiamo lo spostamento di  $P^0$ :

$$\underline{u}(x^0) = \underline{u}(0) + \underline{\theta} \times \underline{x}^0 \quad \text{Noto } \underline{u}(x^0) \text{ si ha } \underline{u}(0) = \underline{u}(x^0) - \underline{\theta} \times \underline{x}^0 \text{ da cui } \Rightarrow \\ \underline{u}^0 \Rightarrow \underline{u} = \underline{u}^0 - \underline{\theta} \times \underline{x}^0 + \underline{\theta} \times \underline{x} = \underline{u} = \underline{u}^0 + \underline{\theta} \times (\underline{x} - \underline{x}^0) \quad (2)$$

$$\text{con } P^0 \quad \underline{u}^0 = u_1^0 e_1 + u_2^0 e_2 + u_3^0 e_3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\theta} = \theta_1 e_1 + \theta_2 e_2 + \theta_3 e_3 \end{array} \right.$$

\* es. SPOSTAMENTO RIGIDO PIANO [quando spostamento p<sup>to</sup> corpo // piano]

(ed es. cancellino sul bordo  $\rightarrow$  3 g.d.l.: 2 di direzione, 1 di rotazione  $\perp$  piano)

$$\underline{u}(x) // \pi, \pi // (e_1, e_2) \quad [\underline{u} \cdot e_3 = 0 \quad \forall e \in \pi] \quad \stackrel{\text{APPLICO (2)}}{\Rightarrow} \quad u_3 = u_3^0 - \theta_2(x_1 - x_1^0) + \theta_1(x_2 - x_2^0)$$

$$3 \text{ gradi di libertà} \leq u_3^0 = 0, \theta_2 = 0, \theta_1 = 0 \quad \stackrel{\text{VERA}}{\Leftrightarrow} \stackrel{\text{SE}}{\Rightarrow} \theta = 0$$

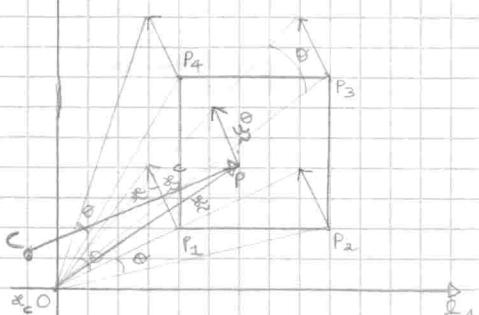
$$\stackrel{\text{ARROCO (2)}}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} u_1 = u_1^0 - \theta(x_2 - x_2^0) \\ u_2 = u_2^0 + \theta(x_1 - x_1^0) \end{array} \right. \quad \theta = \theta_3$$

$\Rightarrow \exists C$  che subisce spostamento NULLO

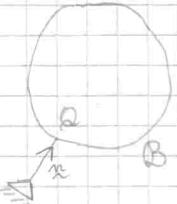
$$C(x_1^c, x_2^c) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1^c = \frac{u_1^0}{\theta} + x_2^0 \\ x_2^c = -\frac{u_2^0}{\theta} + x_1^0 \end{array} \right. \quad \text{Considerando } P^0 = C \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = -\theta(x_2 - x_2^c) \\ u_2 = \theta(x_1 - x_1^c) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{le componenti di spostamento di C} \\ \text{siano di PURA} \\ \text{ROTAZIONE} \end{array}$$

$$\text{Si ha } \underline{u}^0 = \underline{\theta} \times (\underline{x} - \underline{x}^c)$$

dove  $\underline{u}^0 \perp (\underline{x} - \underline{x}^c)$



## INTRODUZIONE AI VINCOLI



VINCOLI ESTERNI: dispositivi meccanici che esegnano componenti di spostamento assolute

$$Q, \text{ se } u(Q) \cdot \vec{m} = \bar{u}_m(Q) \stackrel{\text{GENERALI}}{\Rightarrow} [u^0 + \theta (\alpha_p - \alpha^0)] \cdot \vec{m} = \bar{u}_m(Q) \text{ cioè}$$

IL DISPOSITIVO ASSEGNA LO SPOSTAMENTO A Q NELLA DIREZIONE m

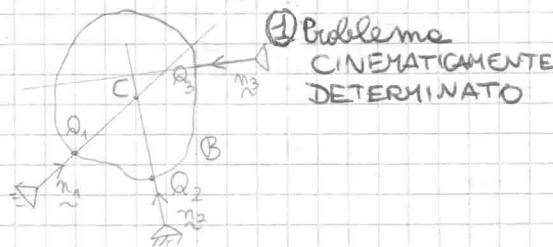
VI È UN CAMBIO DI CONFIGURAZIONE se eseguiamo 6 condizioni di vincolo fra loro lin. ind.

$\Rightarrow m = \text{EQUAZIONI (CONDIZIONI) DI VINCOLO}$ ;  $m = \text{GRADI DI LIBERTÀ}$

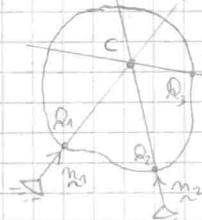
IL PROBLEMA È CINEMATICAMENTE DETERMINATO  $\Leftrightarrow 1) m = n$

2)  $n_{eq}$  di VINCULO DEVONO ESSERE LIN. INDEPENDENTI

es. SPOSTAMENTO RIGIDO PIANO ( $m = 3$ ) [MEMO  $A\bar{u} = \bar{u}$  FORM. ALGEBRICA PROBL. CINEM. CORPO RIGIDO]



① Problema CINEMATICAMENTE DETERMINATO



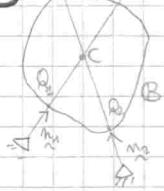
② Problema CINEMATICAMENTE DEGENERE  
(Asse  $m_3$  incarna intersezione osni  $m_1, m_2$ )

Le condizioni in  $Q_3$  è SUPERFLUA

$$\begin{cases} u_{m_1}(Q_1) = 0 & \det A = 0 \\ u_{m_2}(Q_2) = 0 & \operatorname{rg}(A) < m \\ u_{m_3}(Q_3) = 0 & \end{cases}$$

③

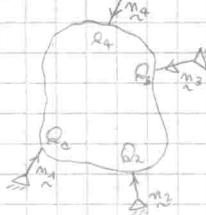
$m < n$  (ho 2 VINCOLI)



Problema CINEMATICAMENTE INDETERMINATO

$[l = m - n = \text{GRADO DI LIBERTÀ}]$

④ Problema CINEMATICAMENTE IMPOSSIBILE



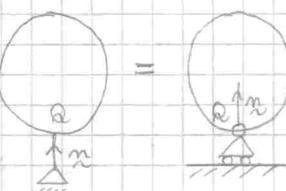
$m > n$  (VINCOLI sovraffondenti)

L'equilibrio è reso > poiché le condizioni imposte all'equilibrio sono > di quelle necessarie

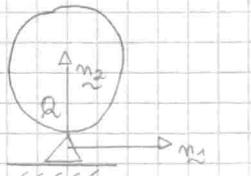
→ VEDI CIRCONFERENZA DI MOHR ↗

# FORMULARIO 5<sup>a</sup> SETTIMANA

## VINCOLI PIANI

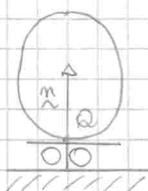
- ① PENDOLO O CARRELLO Il corpo scorre ma NON subisce spostamenti lungo  $\Sigma$ .  

 Il vincolo esige lo spostamento lungo le direz. effiche  
 CONDIZIONE DI VINCOLO:  $\dot{u}_{n_1}(Q) = \bar{u}_{n_1} \Leftrightarrow \dot{u}(Q) \cdot \vec{n}_1 = \bar{u}_{n_1}$   
 $m = (\text{MOLTEPLICITÀ del vincolo}) = 1$

- ② CERNIERA Lo spostamento di  $Q$  è ormaiato lungo 2 direz. effiche



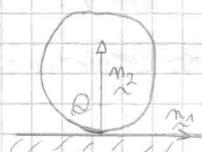
$$\begin{aligned} u_{n_1}(Q) &= \bar{u}_{n_1} & \text{CONDIZIONI} \\ u_{n_2}(Q) &= \bar{u}_{n_2} & \text{DI} \\ & & \text{VINCOLO: } \begin{cases} \dot{u}(Q) \cdot \vec{n}_1 = \bar{u}_{n_1} \\ \dot{u}(Q) \cdot \vec{n}_2 = \bar{u}_{n_2} \end{cases} & m = 2 \end{aligned}$$

- ③ GLIFO Il vincolo preserva uno spostamento lungo  $\Sigma$  (in  $Q$ ) ed una rotazione  $\Theta$  al corpo rigido



$$\begin{aligned} u_n(Q) &= \bar{u}_n & \text{CONDIZIONI} \\ \Theta &= \bar{\Theta} & \text{DI} \\ & & \text{VINCOLO: } \begin{cases} \dot{u}(Q) \cdot \vec{n} = \bar{u}_n \\ \Theta = \bar{\Theta} \end{cases} & m = 2 \end{aligned}$$

- ④ INCASTRO



$$\begin{aligned} u_{n_1}(Q) &= \bar{u}_{n_1} & \text{CONDIZIONI} \\ u_{n_2}(Q) &= \bar{u}_{n_2} & \text{DI} \\ \Theta &= \bar{\Theta} & \text{VINCOLO: } \begin{cases} \dot{u}(Q) \cdot \vec{n}_1 = \bar{u}_{n_1} \\ \dot{u}(Q) \cdot \vec{n}_2 = \bar{u}_{n_2} \\ \Theta = \bar{\Theta} \end{cases} & m = 3 \end{aligned}$$

Se tutte sono nulle il corpo NON può muoversi (g.d.l. sottratti)

## PROBLEMA CINEMATICO PER IL CORPO RIGIDO PIANO

$m$  = MOLTEPLICITÀ GLOBALE VINCOLI  $m$  = G.D.L. (3 nel piano)  $\dot{u}(Q_i) \cdot \vec{n}_j = \bar{u}_{n_j}$  IN FORMA  
 $\underline{A}\underline{u} = \bar{\underline{u}}$  FORMULAZIONE ALGEBRICA DEL PROBL. CINEM. PER IL CORPO RIGIDO (PIANO)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \underline{u}^0 \\ \vdots \\ \underline{u}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_m \end{bmatrix} \quad A = m \text{ eq } m \text{ in } n \text{ incognite, cioè tante colonne quante g.d.l. del corpo rigido [MATRICE CINEMATICA]}$$

Vogliamo determinare le CONFIGURAZIONI CONGRUENTI (definiamo  $p = \text{rg}[A]$ ). I veri casi sono:

- ①  $p = m = n$  CORPO CINEMATICAMENTE DETERMINATO [isocinetico; isotetico]

Arregnati gli spostamenti la configurazione possibile è UNICA

- ②  $p < m = n$  CORPO CINEMATICAMENTE DEGENERE

$\exists$  SOLUZIONI (config)  $\Leftrightarrow \text{rg}[A | \bar{\underline{u}}] = p$  ed esse sono  $oo^l$   $l = m - p$

- ③  $m < n$   $p = m$  CORPO CINEMATICAMENTE INDETERMINATO (labile)

Si ha un difetto delle condizioni di vincolo, NON vengono cioè sottratti i g.d.l.  $l = n - m$  [GRADO DI LABILITÀ]. Le soluzioni sono  $oo^l$ . Se gli spostamenti sono nulli si ha  $A\underline{u} = \underline{0}$  dove ciocuna AUTOSOLUZIONE è detta MODO CINETICO

④  $m > n$  CORPO CINEMATICAMENTE IMPOSSIBILE (corpo ipervincolato e iperstatico)

$\nexists$  soluzioni (dai dati le condizioni di vincolo sono troppe rispetto ai g.d.l.)

$\exists$  soluzioni  $\Leftrightarrow \text{rg}[A | \bar{u}] = \text{rg}[A]$  (cioè se i vincoli sono sovrapposti e degli spostamenti opportuni allora  $\exists$  config. congruenti)

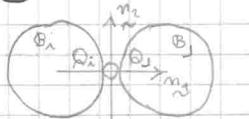
#### • VINCOLI PIANI INTERNI

① PENDOLO INTERNO  $\Delta u_m(\theta) = \Delta \bar{u}_m$  COND. DI VINCOLO  $\underline{u}(Q_i), \underline{u}(Q_j)$  Spostamenti ASSOLUTI  $\Rightarrow$



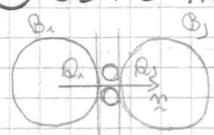
$$\Rightarrow [\underline{u}(Q_j) - \underline{u}(Q_i)] \cdot \underline{n} = \Delta \bar{u}_m \quad m=1 \quad (\text{Spost. RELATIVO Lungo})$$

② CERNIERA INTERNA  $u_{m1}(\theta) = \Delta \bar{u}_{m1}, u_{m2}(\theta) = \Delta \bar{u}_{m2}$



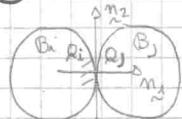
$$\begin{cases} [\underline{u}(Q_j) - \underline{u}(Q_i)] \cdot \underline{n}_1 = \Delta \bar{u}_{m1} \\ [\underline{u}(Q_j) - \underline{u}(Q_i)] \cdot \underline{n}_2 = \Delta \bar{u}_{m2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{CONDIZIONI} \\ \text{DI} \\ \text{VINCOLO} \end{array} \quad m=2$$

③ GLIFO INTERNO  $\Delta u_m(\theta) = \Delta \bar{u}_m, \Delta \theta = \Delta \bar{\theta}$  [Viene solo Q perché  $Q_i \equiv Q_j$ : VINCOLO PUNTUALE]



$$\begin{cases} [\underline{u}(Q_j) - \underline{u}(Q_i)] \cdot \underline{n} = \Delta \bar{u}_m \\ \theta_j - \theta_i = \Delta \bar{\theta} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{CONDIZIONI} \\ \text{DI} \\ \text{VINCOLO} \end{array} \quad m=2$$

④ INCASTRO INTERNO  $\Delta u_{m1}(\theta) = \Delta \bar{u}_{m1}, \Delta u_{m2}(\theta) = \Delta \bar{u}_{m2}, \Delta \theta = \Delta \bar{\theta}$



$$\begin{cases} [\underline{u}(Q_j) - \underline{u}(Q_i)] \cdot \underline{n}_1 = \Delta \bar{u}_{m1} \\ [\underline{u}(Q_j) - \underline{u}(Q_i)] \cdot \underline{n}_2 = \Delta \bar{u}_{m2} \\ \theta_j - \theta_i = \Delta \bar{\theta} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{CONDIZIONI} \\ \text{DI} \\ \text{VINCOLO} \end{array} \quad m=3$$

(Se  $\Delta \bar{u}_{m1} = \Delta \bar{u}_{m2} = \Delta \bar{\theta} = 0$  allora i 2 corpi divengono 1 solo corpo rigido)

#### • PROBLEMA CINEMATICO PER I SISTEMI DI CORPI RIGIDI

$n_c$  = NUMERO CORPI;  $m$  = MOLTEPLICITÀ GLOBALE. A  $\underline{u} = \bar{u}$  dove  $\underline{u}$  = vettori ognuno relativi ad 1 corpo. A = matrice cinematica. (Definiamo  $p = \text{rg}[A]$ )

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \vdots \\ \underline{u}_{n_c} \\ \underline{\theta}_1 \\ \vdots \\ \underline{\theta}_{n_c} \end{bmatrix}$$

$\bar{u}$  raccolge tutti gli spostamenti impressi ad ogni singolo corpo.  $\bar{u}$  è  $n \times 1$

$\underline{u}$  è  $n \times 1$ . A è  $m \times n$ . Dove  $M = 3n_c$  (g.d.l. del sistema di corpi rigidi)

Determiniamo le CONFIGURAZIONI CONGRUENTI:

①  $p = m = n$  SIST. CINEM. DETERMINATO.  $\exists$  un'unica config. congruente cioè ha senso  $\underline{u} = A^{-1} \bar{u}$  ( $A^{-1}$  è calcolabile) [SIST. ISOCINEMATICO, ISOSTATICO]

②  $p < m = n$  SIST. CINEM. DEGENERE.  $\exists$  soluzioni  $\Leftrightarrow \text{rg}[A | \bar{u}] = p$  e sono  $\infty^l$   $l = m - p$

③  $m < n$  SIST. CINEM. INDETERMINATO. Se  $p = m$ ,  $\exists$  soluzioni  $\infty^l$  dove  $l = n - m$

④  $m > n$  SIST. CINEM. IMPOSSIBILE (ipervincolato, iperstatico)  $\nexists$  soluzioni.

$\exists$  soluzioni  $\Leftrightarrow \text{rg}[A | \bar{u}] = \text{rg}[A]$

# FORMULARIO 6° SETTIMANA

## EQUILIBRIO DEL CORPO RIGIDO

$$\begin{cases} \int_B b dV + \int_{\partial B} f_i dA + \sum_k F_k = 0 \\ \int_B x_i \times b dV + \int_{\partial B} x_i \times f_i dA + \sum_k x_i \times F_k = 0 \end{cases}$$

SONO le C.N e S. DI EQ.BRIO per un CORPO RIGIDO.

In forme "lavoro" divergenti  $\left\{ \begin{array}{l} F_0 = 0 \\ M_0 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow 6$  parametri

HOMENTO RISULTANTE

DA DIREZIONE E VERSO DELLA F<sub>0</sub>

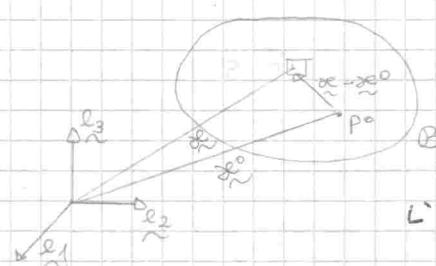
$F_0 = VERSORE LINEA AZIONE F_0$

$\ell =$  " ASSE MOMENTO RISULTANTE

$$\begin{pmatrix} F_{01} \ell_1 + F_{02} \ell_2 + F_{03} \ell_3 \\ M_{01} \ell_1 + M_{02} \ell_2 + M_{03} \ell_3 \end{pmatrix}$$

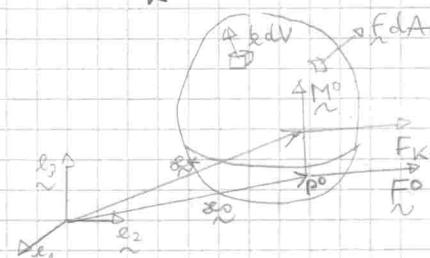
$M_0 = M_0$  e

→ RIDUCENDO INVECE PER UN POLO P<sup>o</sup> ≠ O SI HA:



$$\begin{cases} F^o = F_0 \\ M^o = \int_B (\alpha - \alpha^o) \times b dV + \int_{\partial B} (\alpha - \alpha^o) \times f_i dA + \sum_k (\alpha_k - \alpha^o) \times F_k \end{cases}$$

L'EQ.BRIO SI HA  $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F^o = 0 \\ M^o = 0 \end{array} \right.$

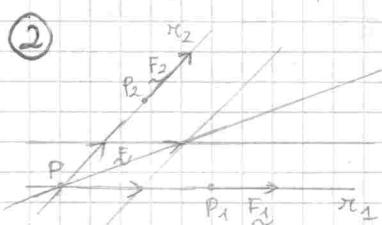


L'equilibrio si può raggiungere con più sistemi di forze distinti.

(cioè che hanno  $F^o = M^o = 0$ ) Possiamo quindi pensare alle vere sistemi di forze cercando di studiare il più semplice (cioè dato un sistema di forze si cerca di studiare quello staticamente equivalente)

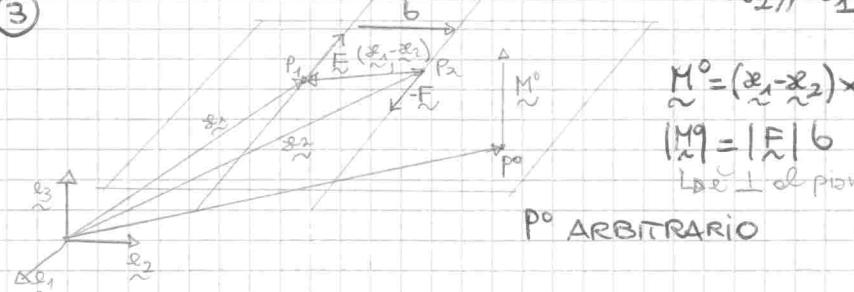
## EQUIVALENZE STATICHE

### 1 TRASLAZIONE DELLA FORZA RISULTANTE LUNGO UNA LINEA D'AZIONE



(Regola del parallelogramma)

③



$r_2 // r_1$

$$M^o = (r_1 - r_2) \times F$$

$$|M^o| = |F| b$$

La  $\perp$  al piano

P<sup>o</sup> ARBITRARIO

$$\begin{cases} F^o = +F - F = 0 \\ M^o = |F| b \end{cases}$$

e il SIST. STATICAMENTE EQUIVALENTE

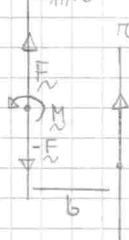
Lo  $\perp$  piano contenente  $r_1, r_2$

Se  $b = 0$  il sistema è nullo

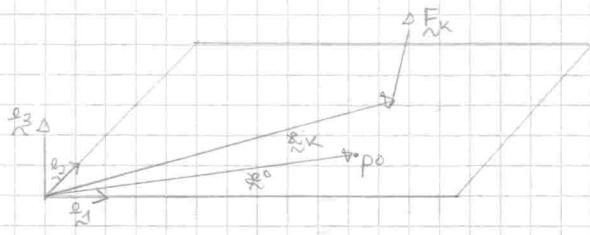
④

$r_1 // r$

Trasferiamo F da r a  $r_1$ . Facendo ciò si introduce su  $r_1$  F e, affinché i 2 sistemi siano equivalenti,  $M$  [ $M = |F| b$ ]. In pratica F è stato trasferito considerando il momento delle coppie ( $F \times r_1 - F \times r$ )



## SISTEMA DI FORZE PIANO (tutte le forze sono // ad un piano)



SIST DI FORZE

$$\{b, f, F_K\} \parallel (e_1, e_2)$$

$$b = b_1 e_1 + b_2 e_2$$

$$f = f_1 e_1 + f_2 e_2$$

$$F_K = X_K e_1 + Y_K e_2$$

SCELGO P° Arbitrario

Si ha

$$e_K = x_K e_1 + y_K e_2 + z_K e_3$$

Si dimostra che: [PARTENDO dalle  $\square$ ]

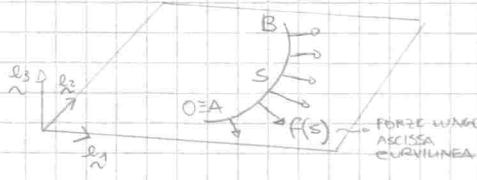
$$F^o = \left( \int_B b_1 dV + \int_B f_1 dA + \sum_k X_k \right) e_1 + \left( \int_B b_2 dV + \int_B f_2 dA + \sum_k Y_k \right) e_2$$

$$M^o = \left\{ \int_B [(x - x^o) b_2 - (y - y^o) b_1] dV + \int_B [(x - x^o) f_2 - (y - y^o) f_1] dA + \right. \\ \left. + \sum_k [(x_k - x^o) Y_k - (y_k - y^o) X_k] \right\} e_3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow F^o$  ha componenti in  $e_1, e_2$ ,  $M^o$  ha 1 componente lungo  $e_3 \Rightarrow$  3 parametri totali

## SISTEMA DI FORZE LINEICO

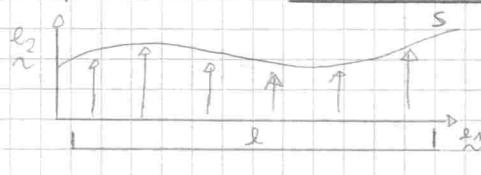
$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta F(s)}{\Delta s} = f(s) \quad F(s) = f_1(s) e_1 + f_2(s) e_2$$



$$F^o = \left( \int_0^B f_1(s) ds \right) e_1 + \left( \int_0^B f_2(s) ds \right) e_2$$

$$M^o = \left( \int_0^B [(x(s) - x^o) f_2(s) - (y(s) - y^o) f_1(s)] ds \right) e_3$$

Ripartendo nel DIAGRAMMA di STATO:



$$F(s) = f(s) e_2 \quad F^o = \int_0^l f(s) ds \quad \text{L'AREA SOTTESSA ALLA LINEA}$$

$\downarrow$  LA FORZA E SOLO LUNGO  $e_2$

$$M^o = \int_0^l s f(s) ds \quad \text{L'OE LUNGO } e_3$$

$F^o$  su A. Trasferendo su rette // passante in C

$$M^c = M^o - F^o s_c \quad [\text{In C si hanno } (F^c, M^c)]$$

$\exists c / M^c = 0$  ? si quando  $s_c = \frac{M^o}{F^o}$ . In tal caso

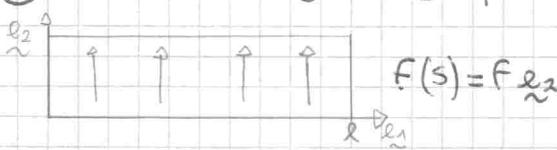
$\downarrow$   $s_c$  = valore orasse

C = BARICENTRO del DIAGRAMMA di CARICO

In C vi è quindi il SIST. STAT. EQUIV. più semplice

## CASI di SISTEMI EQUIVALENTI SEMPLIFICATI

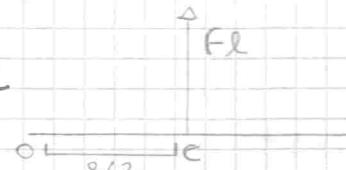
① Forze uniformemente ripartite con intensità costante



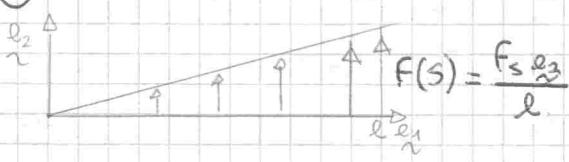
$$F(s) = F e_2$$

$$F_0 = Fl$$

$$M_0 = \frac{1}{2} Fl^2 \Rightarrow S_c = \frac{1}{2} l$$



② Variazione lineare di forze (CARICO TRIANGOLARE)

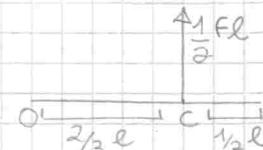


$$F(s) = \frac{F_s e_3}{l}$$

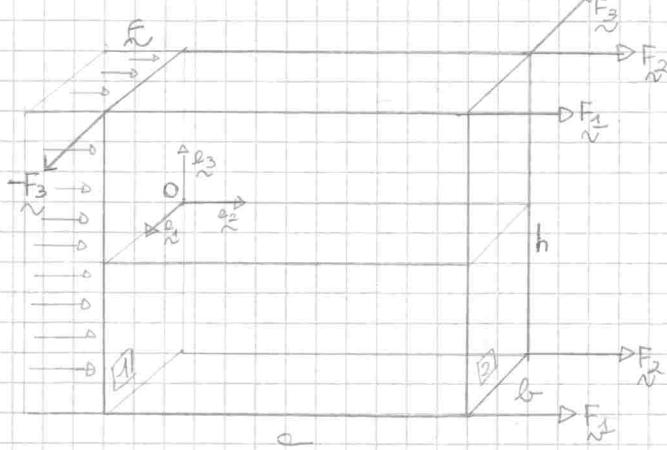
$$M_0 = \frac{Fl^2}{3} \Rightarrow S_c = \frac{2}{3} l$$

$$F_0 = \frac{1}{2} Fl$$

(AREA TRIANGOLO)



• (2) SISTEMA DI FORZE SPAZIALI che può essere un SISTEMA PIANO



a, b, h DIMENSIONI PARALLELEPIPEDO

Sulle FACCIA **[1]** vi sono FORZE SUPERFICIALI  $\vec{F}_1$   
 $\vec{F}_2$  su 2 VERTICI di FACCE OPPoste  
 $\vec{F}_3$  sui VERTICI delle FACCIA **[2]**

$$M^o = \int_B (\vec{x} - \vec{x}^o) \times \vec{b} dV = \left( \int_B (z - z^o) b_2 dV \right) \vec{e}_1 + \left( \int_B (z - z^o) b_1 dV \right) \vec{e}_2 + \left( \int_B [(x - x^o) b_2 - (y - y^o) b_1] dV \right) \vec{e}_3$$

Li ELIMINO  $\vec{e}_3$

(A)  $z^o = 0$  con  $\vec{b}$  SIMMETRICO RISPETTO AL PIANO  $e_1, e_2$   
 Lo IL POLO È NEL PIANO  
 DI SIMMETRIA

(B)  $\vec{x} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2$  [vett. posizione] e il polo in  $e_1, e_2$  cioè  $\vec{x}^o = x^o \vec{e}_1 + y^o \vec{e}_2$

VERIFICATE (A) e (B) si ha:

$$\begin{cases} F_o = F_1 \vec{e}_1 + F_2 \vec{e}_2 \\ M_o = M_1 \vec{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \text{è proprio un SIST. di FORZE PIANO, Nell'es. del parallelepipedo esse valgono, poiché (A), (B) sono verificate}$$

Brendo come polo O. Avremo che nelle figure:

$$F = F \vec{e}_2 \quad F = \beta \frac{F}{bh} \vec{e}_2$$

$$F_1 = F \vec{e}_2$$

$$F_2 = \alpha F \vec{e}_2$$

$$F_3 = -F \vec{e}_1$$

dove  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

→ Calcolando  $F_o$  e  $M_o$  si ha

$$F_o = F [2(1+\alpha) + \beta] \vec{e}_2$$

$$M_o = \left( \beta F \frac{b}{2} + 2Fb + Fc \right) \vec{e}_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = b \Rightarrow M_o = Fb \left( \frac{\beta}{2} + 3 \right) \vec{e}_3$$

Abbiamo ottenuto un sistema di FORZE PIANE.

Per quegli valori  $\alpha, \beta$  si ha  $F_o = 0$  e  $M_o = 0$  [tali valori danno luogo ad un SISTEMA EQUILIBRATO che se si che il CORPO RIGIDO SIA IN EQUILIBRIO]

$$\begin{cases} F[2(1+\alpha) + \beta] = 0 \\ Fb\left(\frac{\beta}{2} + 3\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2 \quad \beta = -6 \quad \text{cioè}$$



• REAZIONI VINCOLARI (forze applicate dai vincoli sul corpo rigido)

VINCOLI → BILATERALI (esplicano reazioni in entrambi i versi dell'asse del vincolo)

→ LISCI (Nessuna componente attrattiva)

→ INDIPENDENTI DAL TEMPO

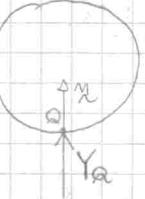
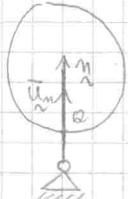
$\delta \vec{u}$  = VETTORE SPOSTAMENTO nello DIREZIONE CONSENTITA DAL VINCOLO

$\vec{F}'$  = COMPONENTE REATIVA.

Se  $SL' = F' \cdot \delta \vec{u} = 0$  allora il vincolo è LISCI [forza/compon. reattiva solo lungo direz. consentite]

# VINCOLI PIANI ESTERNI: [ I VINCOLI EXT INIBISCONO GLI SPOSTAMENTI ASSOLUTI ]

## ① Pendolo / Cerniere



PRESTAZIONE CINEMATICA

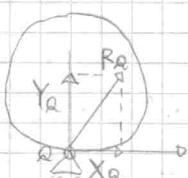
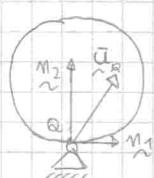
$$\underline{u}(\underline{\Omega}) \cdot \underline{n} = \underline{\bar{u}}_n \\ = (0)$$

SE VINCOLO E BLOCCATO

PRESTAZIONE STATICA

$$Y_Q \neq 0$$

## ② Cerniera



PRESTAZIONE CINEMATICA

$$\underline{x}(\underline{\Omega}) = \underline{\bar{x}}_Q$$

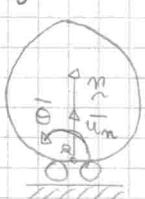
$$\begin{cases} \underline{u}(\underline{\Omega}) \underline{n}_1 = \underline{\bar{u}}_{m_1} \\ \underline{u}(\underline{\Omega}) \underline{n}_2 = \underline{\bar{u}}_{m_2} \end{cases}$$

PRESTAZIONE STATICA

$$R_Q$$

$$\begin{cases} X_Q \\ Y_Q \end{cases}$$

## ③ Gli Fo



PRESTAZIONE CINEMATICA

$$\underline{u}(\underline{\Omega}) \underline{n} = \underline{\bar{u}}_n (=0)$$

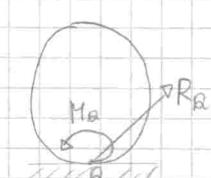
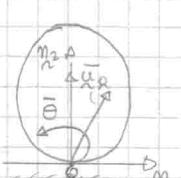
$$\Theta = \bar{\Theta} (=0)$$

PRESTAZIONE STATICA

$$Y_Q \neq 0$$

$$M_Q \neq 0$$

## ④ Incastro



PRESTAZIONE CINEMATICA

$$\underline{u}(\underline{\Omega}) = \underline{\bar{u}}_Q$$

$$\Theta = \bar{\Theta}$$

PRESTAZIONE STATICA

$$R_Q$$

$$M_Q$$

OPPURE

$$\underline{u}(\underline{\Omega}) \underline{n}_1 = \underline{\bar{u}}_{m_1}$$

$$\underline{u}(\underline{\Omega}) \underline{n}_2 = \underline{\bar{u}}_{m_2}$$

$$\Theta = \bar{\Theta}$$

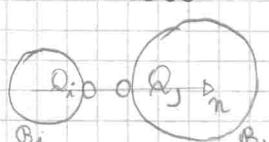
$$X_Q$$

$$Y_Q$$

$$M_Q$$

# VINCOLI INTERNI: [ I VINCOLI INT INIBISCONO GLI SPOST. RELATIVI (SIST. RIF. SOLIDALE A UN CORPO) ]

## ① Pendolo



PRESTAZIONE CINEMATICA

$$[\underline{u}(\underline{\Omega}) - \underline{u}(\underline{\Omega}_i)] n = \Delta \bar{u}_n$$

SE  
INIBISCE  
SPOSTAMENTO

PRESTAZIONE STATICA

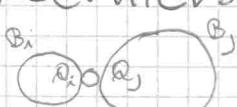
$$X \neq 0$$

1 COMPONENTE REATTIVA

IMPOSENDO  
EQ. BRIO

$$X_i = X_j \quad (\text{Coppie di forze con braccio nullo})$$

## ② Cerniera



IMPOSENDO  
EQ. BRIO

PRESTAZIONE CINEMATICA

$$\underline{u}(\underline{\Omega}_j) - \underline{u}(\underline{\Omega}_i) = \Delta \bar{u}_n \quad (=0)$$

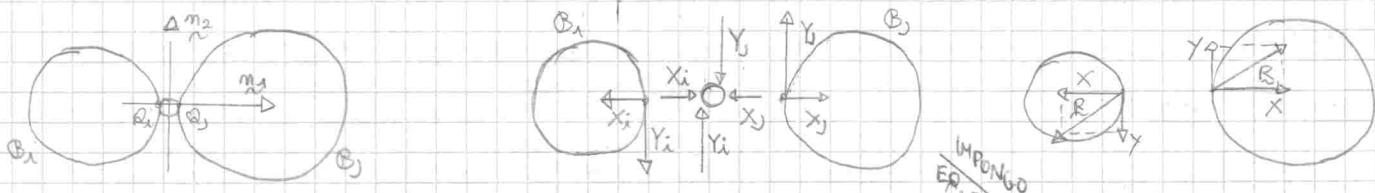
PRESTAZIONE STATICA

$$R \neq 0$$



$$R_i = -R_j \quad (\text{Considerando la cerniere puntiforme})$$

Analogamente:



### PRESTAZIONE CINEMATICA

$$[\underline{u}(Q_j) - \underline{u}(Q_i)] \underline{n}_1 = \Delta \bar{u}_{m_1}$$

$$[\underline{u}(Q_j) - \underline{u}(Q_i)] \underline{n}_2 = \Delta \bar{u}_{m_2}$$

### PRESTAZIONE STATICHE

$$X \neq 0$$

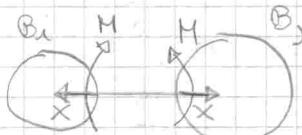
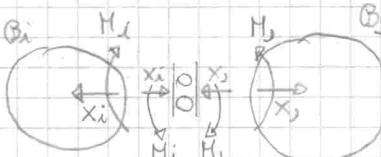
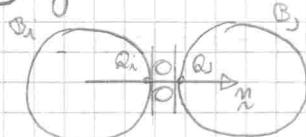
2 COMPONENTI REATTIVE

$$Y \neq 0$$

IMPONGO  
EQ. BRIO

$$X_i = X_j ; Y_i = Y_j$$

### ③ Glico



### PRESTAZIONE CINEMATICA

$$[\underline{x}(Q_j) - \underline{x}(Q_i)] \underline{n} = \Delta \bar{u}_m$$

$$\theta_j - \theta_i = \Delta \bar{\theta}$$

2 COMPONENTI REATTIVE

### PRESTAZIONE STATICHE

$$X \neq 0$$

2 COMPONENTI REATTIVE

$$M \neq 0$$

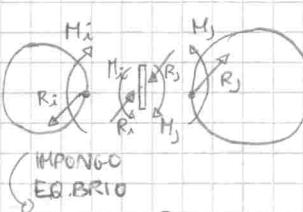
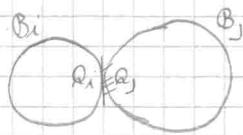
IMPONGO  
EQ. BRIO

$$X_i = X_j = X$$

$$M_i = M_j = M$$

(Considerando il glio  
puntiforme)

### ④ Incastro



$$R_i = -R_j = \underline{R} ; M_i = M_j = M$$

### PREST. CINEMATICHE

$$\underline{u}(Q_j) - \underline{u}(Q_i) = \Delta \bar{u}$$

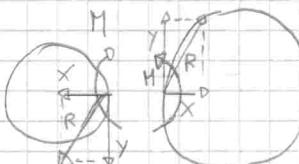
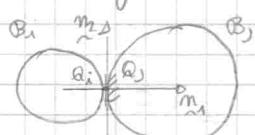
$$\theta_j - \theta_i = \Delta \bar{\theta}$$

### PREST. STATICHE

$$R \neq 0$$

$$M \neq 0$$

Analogamente



### PREST. CINEMATICHE

$$[\underline{x}(Q_j) - \underline{x}(Q_i)] \underline{n}_1 = \Delta \bar{u}_{m_1}$$

$$[\underline{u}(Q_j) - \underline{u}(Q_i)] \underline{n}_2 = \Delta \bar{u}_{m_2}$$

$$\theta_j - \theta_i = \Delta \bar{\theta}$$

### PREST. STATICHE

$$X \neq 0 \quad 3 \text{ COMPONENTI/}$$

FORZE  
REATTIVE

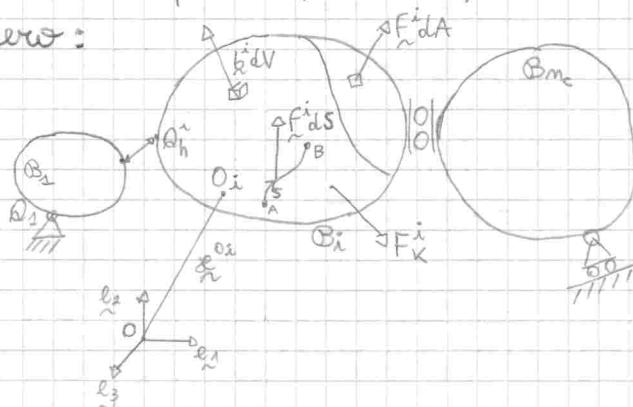
$$Y \neq 0$$

$$M \neq 0$$

### • CORPI RIGIDI [ $m_c$ ] VINCOLATI INTERNAMENTE ED ESTERNAMENTE

Abbiamo un sistema di corpi con otto di moto nullo. Applichiamo su di esso un sistema di forze e cerchiamo di determinare tutte le (componenti) / forze reattive nei vincoli affinché il sistema di corpi sia in eq. brio. Lo stesso risultato di eq. brio può: 1)  $\#$  VINCOLI INSUF. CONTRO FORZE ATTIVE 2)  $\exists !$  3)  $\#$  TROPPE COMPONENTI/FORZE REATTIVE

Ovvero:



$m_c$  = NUMERO CORPI RIGIDI

SU GENERICO  $B_i$  SI HANNO FORZE

VOLUMICHE, SUPERFICIALI E LINEICHE ( $dV, dA, ds$ )

Scegliamo  $O$  con relativi essi

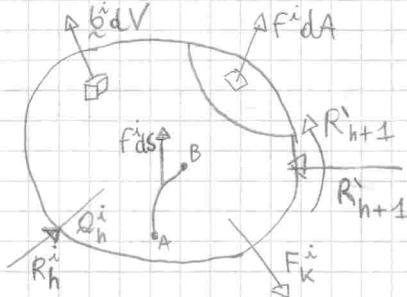
Scegliamo  $O_i$  ARBITRARIO come POLO DI RIDUZIONE delle FORZE.

RISOLVIMENTO:

Per impostare EQ. BRIOSU  $B_i$  consideriamolo isolato rispetto

ogni altro corpo rigido e sostituiamo ai vincoli, le componenti reattive esplicate

dai vincoli stessi:



$$\xrightarrow{\substack{\text{IMPOGO} \\ \text{EQ. B.RIO}}} \left\{ \begin{array}{l} \substack{\text{RISULTANTE FORZE} \\ \text{REATTIVE RISPETTO O}_i} + F_{roi}^{O_i} = 0 \\ M_{roi}^{O_i} + M_{oi}^{O_i} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum R_h^i + \int b^i dV + \int F_d^i dA + \int F_s^i dS + \sum F_k^i \quad \text{CHE RISPETTO AL POLO } O_i \text{ DIVIENE:}$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\sum R_h^i}_{\substack{\text{RISULTANTE} \\ \text{FORZE REATTIVE}}} + \underbrace{\int b^i dV}_{\substack{\text{COPPIE REATTIVE} \\ \text{B}_i}} + \underbrace{\sum M_j^i}_{\substack{\text{FORZE ATTIVE}}} + \int (x - x^0) \times b^i dV + \int (x - x^0) \times F_d^i dA + \int (x - x^0) \times F_s^i dS + \\ & + \sum F_k^i \quad \substack{\text{FORZE ATTIVE}} \end{aligned}$$

Ogni corpo dovrà rispettare tali eqn per essere in equilibrio quindi  $i: 1 \rightarrow m_c$ .

Si avranno quindi  $6m_c$  eq<sup>m</sup> nel PROBL. SPAZIALE e

$3m_c$  " " PROBL PIANO

Quindi tali eq<sup>m</sup> secondo una base estrinseca: introduciamo

$$\underline{\pi} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} \quad \text{ci contiene COMPONENTI} \\ \text{REATTIVE}$$

$m = \text{MOLTEPLICITA' GLOBALE dei}$   
 $\text{vincoli relativi al sistema}$   
 $\text{[somma delle moltepi' singoli vincoli]}$

$$\text{VETTORE FORZE} \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} F_1^{O_1} \\ F_2^{O_1} \\ \vdots \\ F_m^{O_1} \\ M_1^{O_1} \\ M_2^{O_1} \\ M_3^{O_1} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{e } n \times 1 \\ [m = 6m_c (3m)] \\ \text{SPAZIO PIANO} \end{array}$$

Risolvere problema eq<sup>m</sup> significa determinare le soluzioni di  $B\underline{\pi} + \underline{F} = \underline{0}$

dove

$$\begin{bmatrix} m \\ \text{GRADI LIBERTA'} \\ \hline B \\ m \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{B = MATRICE DI} \\ \text{EQUILIBRIO} \end{array}$$

Risolviamo il prob. d'equilibrio  $\Rightarrow$   
 $[p = \text{rg}(B)]$

①

$$\begin{bmatrix} m \\ B \\ m \end{bmatrix}$$

$$p = m = m$$

SISTEMA STATICAMENTE DETERMINATO (ISOSTATICO)

$$\exists! \text{ soluzione } [\underline{\pi} = -B^{-1}\underline{F}]$$

②

$$\begin{bmatrix} m \\ B \\ m \end{bmatrix}$$

$$p < m = m$$

SISTEMA STATICAMENTE DEGENERE

$\# \underline{\pi}$  che soddisfano l'equilibrio

③

$$\begin{bmatrix} m \\ B \\ m \end{bmatrix}$$

$$p = m < m$$

SISTEMA STATICAMENTE INDETERMINATO (IPERSTATICO)

$\exists \infty^r$  soluzioni [con  $r = m - p$ ]

④

$$\begin{bmatrix} m \\ B \\ m \end{bmatrix}$$

$$p = m < m$$

SISTEMA STATICAMENTE IMPOSSIBILE (LABILE)

$\# \underline{\pi}$  [troppe eq<sup>m</sup> eq<sup>m</sup> rispetto alle reazioni vincolari.]

Equilibrio si riceve  $\rightarrow$  Eq<sup>m</sup> (STANDARD) CARDINALI

$\hookrightarrow B_R + F = 0$  Se B DIAGONALE si semplifica il sistema [Eq<sup>me</sup> in 1 incognita]

Bisogna a semplificare B (cioè scrivere eq<sup>brutto</sup> in modo alternativo)

Riduciamo FORZE ATTIVE al polo O [dove vi seranno  $F_0$ ,  $M_0$ ]

Eq<sup>brutto</sup> per il PROBLEMA PIANO è  $\begin{cases} F_0^r + F_0 = 0 \\ M_0^r + M_0 = 0 \end{cases}$  che

PROIETTATE IN  $e_1$ ,  $e_2$  danno luogo:

$$\begin{cases} F_0^r e_1 + F_0 e_1 = 0 & X + F_1 = 0 \quad 2^{\text{eq}} \text{ eq}^{\text{brutto}} \text{ traslazione} \\ F_0^r e_2 + F_0 e_2 = 0 & Y + F_2 = 0 \quad \text{EQUIVALENTE} \\ M_0^r + M_0 = 0 & M_0^r + M_0 = 0 \quad 1^{\text{eq}} \text{ eq}^{\text{brutto}} \text{ momenti} \end{cases}$$

Oppure

$$\begin{cases} X + F_1 = 0 \quad (A) \quad 1^{\text{eq}} \text{ eq}^{\text{brutto}} \text{ traslazione} \\ M^{r01} + M^{01} = 0 \quad (B) \quad 2^{\text{eq}} \text{ eq}^{\text{brutto}} \text{ momenti} \\ M^{r02} + M^{02} = 0 \quad (C) \end{cases}$$

Dove le rette di  $O_1$  e  $O_2$  NON è del tutto arbitrerie;

Se (A) è lungo  $e_1$  le forze devono avere risultante su  $e_1 = 0$  [tale risultante è // ad  $e_2$ ] OCIOSE IL MOMENTO

Quindi  $O_1, O_2 \notin$  rette //  $e_2$ : [ALTRIMENTI (B) = (C)]

$$\begin{cases} Y + F_2 = 0 & O_1, O_2 \notin$$
 rette //  $e_1$  [cioè dobbiamo preso ora che le forze devono avere risultante su  $e_2 = 0$ ] \\ M<sup>r01</sup> + M<sup>01</sup> = 0 & \\ M<sup>r02</sup> + M<sup>02</sup> = 0 & 

Oppure 3 eq<sup>m</sup> dei momenti in 3 poli distinti  $\square$   $\begin{cases} M^{r01} + M^{01} = 0 & \text{CON} \\ M^{r02} + M^{02} = 0 & O_1, O_2, O_3 \\ M^{r03} + M^{03} = 0 & \text{NON ALLINEATI} \end{cases}$

Sta a noi scegliere fra (A), (B), (C) quale è più semplice per studiare l'equilibrio.

### ESEMPIO

Procedimento: 1) Ponete le lettere nei vincoli

2) Rappresento il FREE BODY DIAGRAM [cioè sostituisco ai vincoli le corrispondenti forze reattive; semplifico le forze attive] LOADS. STRUCTURE NOTE CENNIO LIVELLO

Eq<sup>m</sup> di eq<sup>brutto</sup> in forme STANDARD (CARDINALE) [CON POLO IN Q1]

$$\begin{cases} X_1 = 0 \\ Y_1 - Y_2 + \frac{FL}{2} = 0 \\ -Y_2 l + \frac{FL}{2} \frac{2}{3} l = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{1^eq}} \\ \xrightarrow{\text{2^eq}} \\ \xrightarrow{\text{3^eq}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{IN FORMA MATRICIALE}} \\ \xrightarrow{\text{1^eq}} \\ \xrightarrow{\text{2^eq}} \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & X_1 & | & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & Y_1 & + & \frac{FL}{2} & = & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & Y_2 & & \frac{FL^2}{3} & | & 0 \end{bmatrix}$$

Risolvo il sistema:  $Y_1 = Y_2 - \frac{FL}{2} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \frac{FL}{2} = -\frac{FL}{6}$   $Y_1 = -\frac{FL}{6}$  ( $X_1 = 0$ )

$$Y_2 = \frac{FL}{3}$$

Scegliendo come poli  $Q_1$  e  $Q_2$  il sistema sarebbe stato:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = 0 \\ -Y_1 l - \frac{F l}{2} \cdot \frac{1}{3} l = 0 \quad (= \sum M_{O^2}) \\ -Y_2 l + \frac{F l}{2} \cdot \frac{2}{3} l = 0 \quad (= \sum M_{O^1}) \end{array} \right.$$

MOMENTO RISPETTO  
POLO  $O^2$

MOMENTO RISPETTO  
POLO  $O^1$

[cioè ogni eq<sup>re</sup> ha 1 sola incognita].

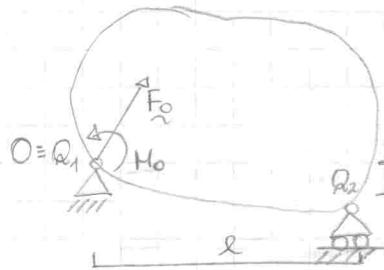
Se il sistema è DISACCOPPIATO  
(B DIAGONALE) quindi le  
3 eq <sup>ri</sup> si risolvono  
indipendentemente

$$\Rightarrow Y_1 = -\frac{F l}{6}$$

$$\Rightarrow Y_2 = \frac{F l}{3}$$

# FORMULARIO 7<sup>°</sup> SETTIMANA

## • GENERALIZZIAMO IL CORPO RIGIDO



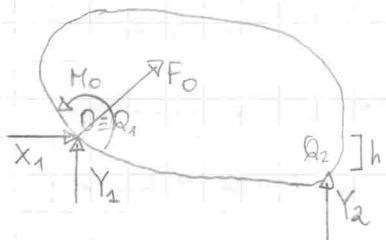
$l = \text{DISTANZA CERNIERA CARTELLO}$  (lungo  $x$ )

$h = " " " \text{ (lungo } y\text{)}$

Riduciamo le forze attive che agiscono su tale corpo rispetto  $Q_1$  ( $\equiv 0$  polo riduzione). Tali forze si riducono in  $O$  in

$F_0$  = RISULTANTE SISTEMA FORZE ATTIVE ;  $M_0$  = MOMENTO RISULTANTE DEL SISTEMA DI FORZE ATTIVE

Studiamo l'EQUILIBRIO del CORPO RIGIDO  $[F_0, M_0 \text{ NOTI}; X_1, Y_1, Y_2 \text{ INCognite}]$   
[L'equazione di vincolo]



EQUAZIONI CARDINALI

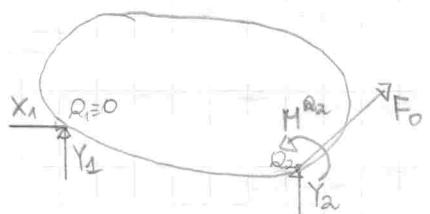
$$\begin{cases} \sum X_h + F_0 \frac{l}{2} = 0 \\ \sum Y_h + F_0 \frac{l}{2} = 0 \\ \sum M_h + M_0 = 0 \end{cases}$$

NEL NOSTRO  
CASO

$$\begin{cases} X_1 + F_0 \frac{l}{2} = 0 \\ Y_1 + Y_2 + F_0 \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow \\ Y_2 l + M_0 = 0 \end{cases}$$

RICAVO  $X_1 = -F_0 \frac{l}{2}$   $Y_2 = -M_0 \frac{l}{2}$   $Y_1 = -F_0 \frac{l}{2} + \frac{M_0}{l}$  IL SISTEMA NON ERA IN FORMA DIAGONALE MA SI POTEVA RISOLVERE

Avevi potuto scrivere l'eq<sup>BRIO</sup> attraverso 2 POLI ( $Q_1 \equiv 0$  e  $Q_2$ )

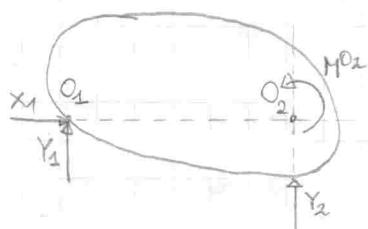


$$\begin{cases} X_1 + F_0 \frac{l}{2} = 0 \\ Y_2 l + M_0 = 0 \\ -Y_1 l - X_1 h + M^Q_2 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema si risolve e corretto (e conduce ovviamente ai risultati ottenuti precedentemente)

→ Se  $h=0$  il CORPO RIGIDO È SEMPLICEMENTE APPOGGIATO

Studiamo di nuovo l'eq<sup>BRIO</sup> con 2 POLI (uno  $Q_1 \equiv Q_1$  e l'altro preso come si vede in figura)



$$\begin{cases} X_1 + F_0 \frac{l}{2} = 0 \\ -Y_1 l + M^Q_2 = 0 \\ Y_2 l + M^Q_1 = 0 \end{cases}$$

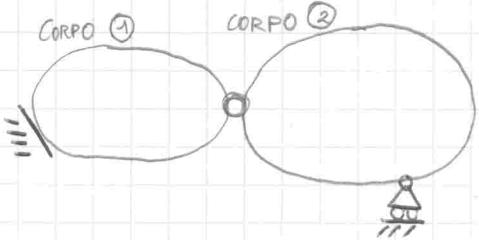
$$\begin{matrix} \text{MATRICE EQ BRIO REA. VINC.} & \text{T. NOTI} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -l & 0 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_0 \frac{l}{2} \\ M^Q_2 \\ M^Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Come si vede il sistema è DIAGONALE

## EQUAZIONI D'EQUILIBRIO PER SISTEMI DI CORPI RIGIDI

Consideriamo dei sistemi elementari di vincolo fra corpi rigidi. [ad es. 2 corpi rigidi legati e fermare (tale sistema è labile difetti g.d.l=6, labilità=4)]

I sistemi di corpi rigidi possono essere STATICI, LABILI, IPERSTATICI. Affinché vi sia l'eq<sup>BRIO</sup> bisogna enunciare se i vincoli presenti sono sufficienti o se è necessario applicare anche delle FORZE DI CONTROLLO



Per rendere STATICO un sistema di 2 corpi rigidi vincolati fra loro con una cerniere, bisogna introdurre 4 vincoli esterni LINEARI INDEPENDENTI

(ad. es con un INCASTRO ed un CARRELLO).

CORPO 1 è ISOSTATICO [INCASTRO IMPONE 3gall]

GERARCHIA  
→

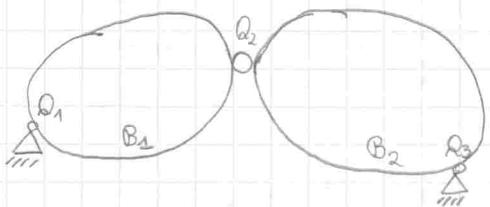
CORPO 1 è il corpo PORTANTE

CORPO 2 è SIMPLY SUPPORTED [CARRELLO IMPONE 1gall]

STRUTTURALE

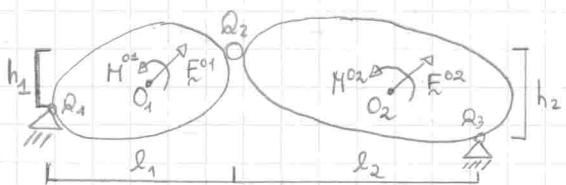
CORPO 2 è il corpo PORTATO

Se muove blocciamo il sistema di corpi rigidi con 2 CERNIERE ESTERNE:

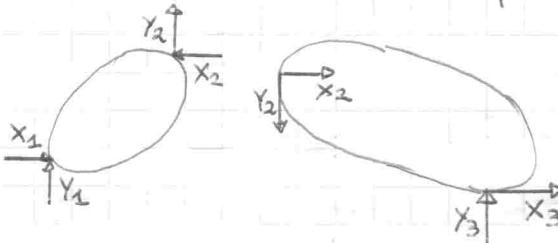


① e ② NON possono raggiungere l'eq<sup>brio</sup> senza l'altro corpo

In tale caso i corpi sformano un SISTEMA DI CORPO ELEMENTARE (cioè NON vi sono gerarchie strutturali). Tale struttura è ISOSTATICA. Studiamone l'equilibrio:



FREE BODY  
DIAGRAM



con  $O_1, O_2$  poli di CONVENIENZA

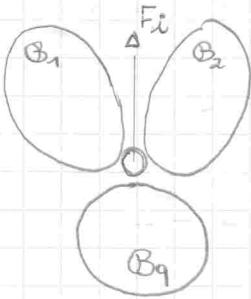
hanno  $6 (X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3)$  INCognite

Le strategie risolutive (per calcolare l'eq<sup>brio</sup>) dipende dalle geometrie del sistema

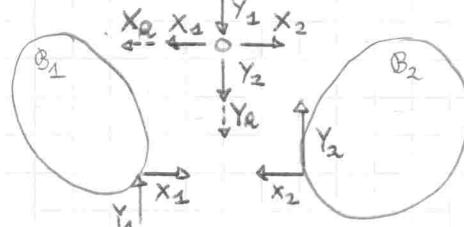
→ Un corpo a cui si applicano 2 cerniere è SCARICO  $\Leftrightarrow$   $R_i = -R_i$



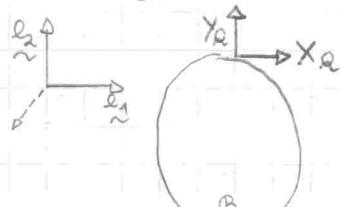
Pensiamo ora che la CERNIERA vincoli q CORPI RIGIDI: [ GENERALIZZAZIONE VINCOLO ]



FREE BODY  
DIAGRAM



Sulle cerniere si hanno  
 $X_1 \dots X_q; Y_1 \dots Y_q;$



$F_i$  = FORZE CONCENTRATE SUL VINCULO

Basta IMPORRE L'EQUILIBRIO

SULLA CERNIERA:

$$\begin{cases} -X_1 + X_2 \dots + X_q + F_{eq} = 0 \\ -Y_1 - Y_2 \dots - Y_q + F_{eq} = 0 \end{cases}$$

Generalizzando

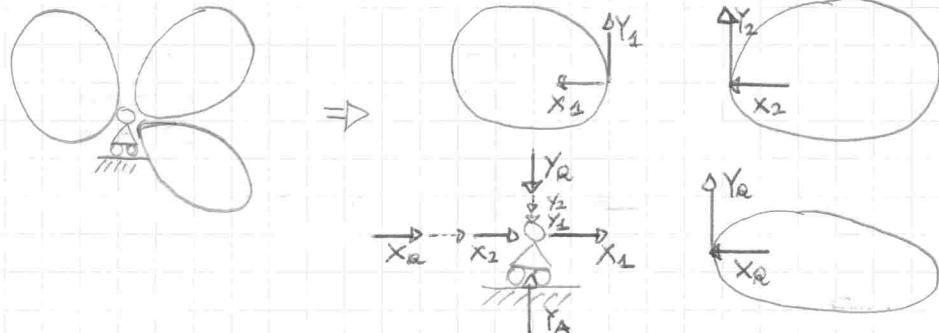
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^q X_j + F_{eq} = 0 \\ \sum_{j=1}^q Y_j + F_{eq} = 0 \end{cases}$$

$2q$  = NUMERO INCognITE REATTIVE

MOLTEPLICITÀ TOTALE =  $2(q-1)$

↳ NUM INCognITE REATTIVE - NUM ERGNI

→ es. VINCOLO CARRELLO (Vi è un carrello applicato alla cerniera)



dove  $Y_A$  è applicata sulla cerniera ed è causata dal carrello

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO:

$$\{ X_1 + X_2 + \dots + X_q = 0$$

$$\text{NUERO INCognITE REATTIVE: } 2q+1$$

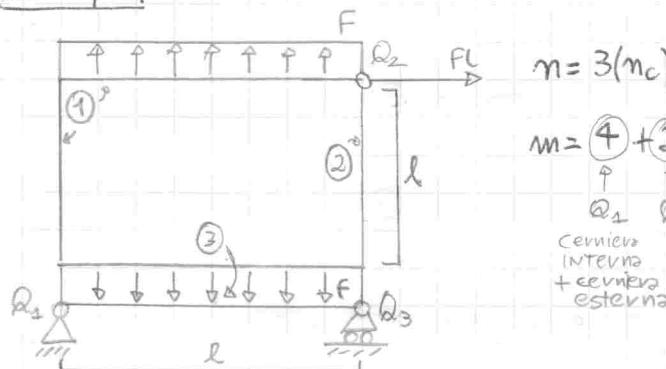
$$\{ -Y_1 - Y_2 - \dots - Y_A = 0$$

$$\text{MOLTEPLICITÀ TOTALE: } 2(q-1)+1$$

= 0 IN GENERALE SE VI È UN VINCOLO ESTERNO DI MOLTEPLICITÀ  $m_A$  APPLICATO ALLA CERNIERA,

LA MOLTEPLICITÀ TOTALE DEL SISTEMA SARÀ:  $m = 2(q-1) + m_A$

esempio



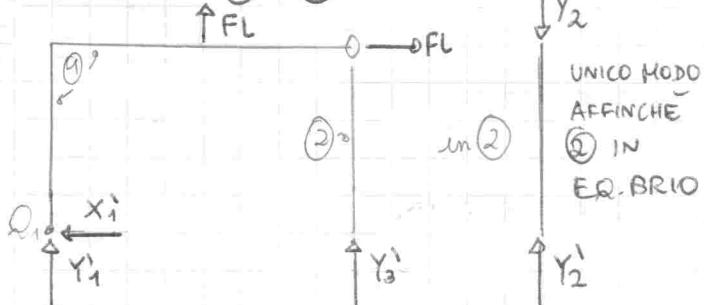
$$m = 3(m_c) = 9$$

$\Rightarrow$  IL SISTEMA DI CORPI È ISOSTATICO

$$m = 4 + 2 + 3 = 9$$

Cerniere  
INTERNA  
+ cerniera  
esterna

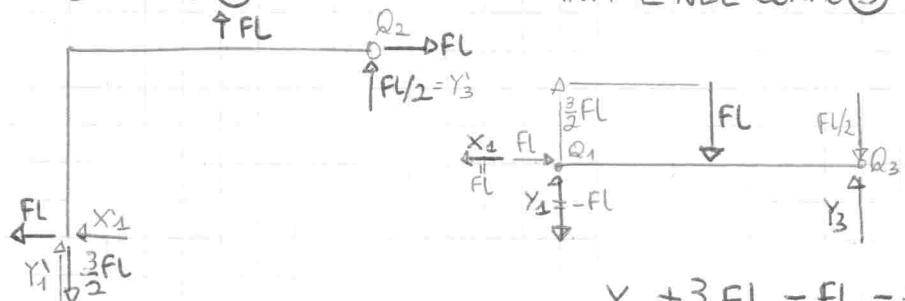
ANALISI CORPO ① e ②



EQUILIBRIO RISPETTO AL POLO  $Q_1$ :

$$\sum M_{Q_1}^R = Y_3' l - FLL + FLL \frac{l}{2} \Rightarrow Y_3' = \frac{FL}{2}$$

NEL CORPO ①



EQUILIBRIO MOMENTI IN  $Q_1$  (Eq. CARDINALI)

$$\sum M_{Q_1}^R = \frac{Y_3' l}{2} - \frac{FL l}{2} - \frac{FL l}{2} = 0 \Rightarrow Y_3' = FL$$

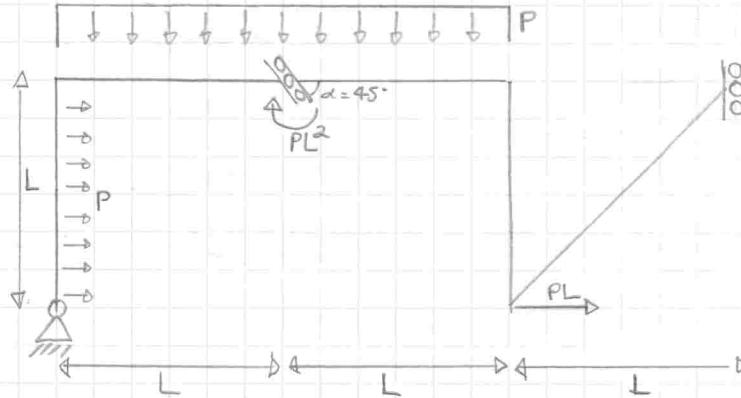
$$-X_1 + FL = 0 \Rightarrow X_1 = FL$$

$$Y_1' + \frac{3}{2} FL - FL - \frac{FL}{2} + Y_3' = 0 \Rightarrow Y_1' = -\frac{3}{2} FL$$

$$\begin{cases} -X_1' + FL = 0 \\ Y_1' + FL + \frac{FL}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1' = FL \\ Y_1' = -\frac{3}{2} FL \end{cases}$$

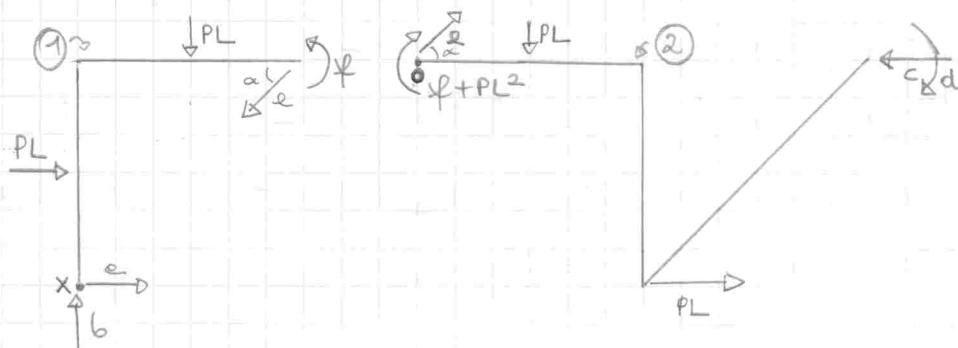
FORZE ORIZ.                    FORZE VERT.

## Esempio 2



N.B. LA FORZA ESTERNA APPLICATA SU DI UN VINCOLO INTERNO (come  $PL^2$  sul glio) VA APPLICATA SU UNO SOLO DEI DUE CORPI VINCOLATI

FREE BODY  
DIAGRAM



Eq M1 di EQUILIBRIO: [CORPO ②, CORPO ①]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - PL = 0 \Rightarrow \alpha = \sqrt{2} PL \quad \text{FOR. VERT. IN } ② \\ \frac{c}{\sqrt{2}} + PL = c \Rightarrow c = 2PL \quad \text{FOR. ORIZ. IN } ② \end{array} \right.$$

$$-PL \frac{L}{2} + PLL - d - \cancel{x} + PL^2 \Rightarrow d = -\frac{3}{2} PL^2 \quad \text{EQUILIBRIO MOM. IN O in } ②$$

$$-PLL \frac{L}{2} - PLL \frac{L}{2} + \cancel{x} = 0 \Rightarrow \cancel{x} = PL^2 \quad \text{EQUILIBRIO MOM. IN X in } ①$$

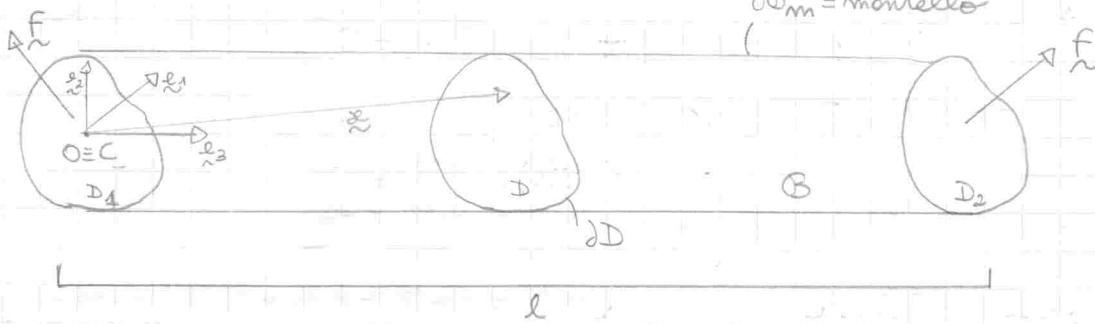
$\cancel{x}$  NON DA MOMENTO POICHÉ LA SUA RETA D'AZIONE PASSA PER X

$$\alpha + PL - \frac{c}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \quad \text{FOR. ORIZ. IN } ①$$

$$b - PL - \frac{c}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow b = 2PL \quad \text{FOR. VERT. IN } ①$$

## FORMULARIO 8<sup>°</sup> SETTIMANA

## IL PROBLEMA DI SAINT-VENANT



$$\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2, \tilde{\ell}_3 \text{ RIFERIMENTO} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S_1 = S_2 = 0 & \text{MOMENTO D'INERZIA STATICO} \\ I_{12} = 0 & \text{CENTRIFUGO} \end{cases}$$

## DATI MECCANICI

→ Sui VINCOLI:  $\partial B_u = \emptyset$  (NO VINCOLI) → SUL MATERIALE: ELOI → Sulle FORZE:

$b=0$ ,  $\tilde{x} \in \mathbb{B}$ ; (NO F. VOLUME)  $F=\emptyset$  su  $\partial \mathbb{B}_m$ ; (NO F. SUP. SUMANTELLO)  $\tilde{x}$  su  $D_H$   $H=1,2$  (SOLA F. SUP. SU BASI)

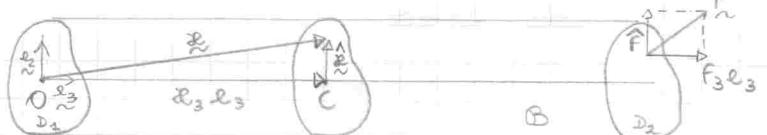
**INCOGNITE:**  $\tilde{u}(\xi)$  [concorri Spostamenti]  $E(\xi)$  [c. deformazioni]  $T(\xi)$  [c. Tensioni]

- C. NEC. per EQUILIBRIO CILINDRO sono le EQ.NI DI ER.BRIO del SOLIDO DEFORMABILE

$$\int_{D_1} f_z dA + \int_{D_2} f_z dA = 0 \quad \text{e} \quad \int_{D_1} \underline{x} \times f_z dA + \int_{D_2} \underline{x} \times f_z dA = 0$$

RIDOTTE  
RISPETTO AL  
POLO O=C

### • Decomposizione ed F.



$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \dot{\ddot{x}} + \ddot{x} e_3 \\ f &= \dot{\ddot{f}} + F_3 e_3\end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{De } \boxed{1} \text{ si ha } \begin{aligned} F(0) &= \int_{D_1} f dA \\ F(l) &= \int_{D_2} f dA \\ M(0) &= \int_{D_1} \mathbf{x} \times f dA \end{aligned}$$

$$M(l) = \int_{D_2} \underline{x} \times \underline{F} dA = 0 \quad \text{e le } \boxed{1} \text{ divergono} \quad \begin{cases} F(0) + F(l) = 0 & \textcircled{A} \\ M(0) + M(l) = 0 & \textcircled{B} \end{cases}$$

$$\text{Analisi A: } F(0) = \int_{D_1} (\hat{F} + f_3 e_3) dA = \int_{D_1} \hat{F} dA + \int_{D_1} f_3 e_3 dA = Q(0) + N(0)$$

$$\text{Idem } F(l) = Q(l) + N(l) \Rightarrow Q(0) + Q(l) = 0$$

$\Rightarrow$  A diverse  $\Rightarrow N(0) + N(l) = 0$

## Analisi B

$$M(0) = \int_{D_1} \hat{\alpha} \times (\hat{F} + f_3 \hat{e}_3) dA = \int_{D_1} \hat{\alpha} \times \hat{F} dA \hat{e}_3 + \int_{D_1} \hat{\alpha} \times \hat{f} dA = T(0) \hat{e}_3 + m(0)$$

$$\text{mentre } \mathbf{H}(\ell) = \int_{\mathcal{D}_2} \hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{F}} + F_3 e_3) dA + \ell e_3 \times \tilde{\mathbf{F}}(\ell) = T(\ell) e_3 + m(\ell) + \ell e_3 \times Q(\ell)$$

$$\Rightarrow T(0) + T(\ell) = 0 \quad \tilde{Q}(0) + N(\ell) e_3$$

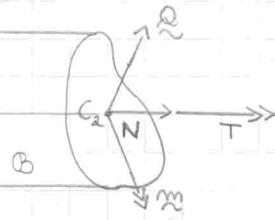
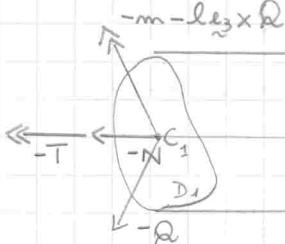
$$\Rightarrow m(0) + m(\ell) + \ell e_3 \times Q(\ell) = 0$$

$\Rightarrow$  EQ. NI DI EQ. BRIO IN  $\boxed{1}$  Divengono:

$$\begin{cases} N(0) + N(\ell) = 0 \\ Q(0) + Q(\ell) = 0 \\ T(0) + T(\ell) = 0 \\ m(0) + m(\ell) + \ell e_3 \times Q(\ell) = 0 \end{cases}$$

ed es.

$$\begin{cases} N(0) = -N(\ell) = -N \\ Q(0) = -Q(\ell) = -Q \\ T(0) = -T(\ell) = -T \\ m(0) = -m(\ell) - \ell e_3 \times Q(\ell) = -m - \ell e_3 \times Q \end{cases}$$



(Abbiamo ridotto le forze superficiali al bocicentro)

### • Analisi EQUAZIONI DI EQUILIBRIO AL CONTORNO

[IN GENERALE IL VETTORE DI TENSIONE DI CAUCHY DEVE ANNULLARSI]

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{t} = \tilde{Q} \text{ su } \partial D_m \rightarrow \textcircled{E} \text{ Eqne di eqbrio al contorno SUL MANTELLO} \\ \tilde{t} = \tilde{F} \text{ su } D_h \rightarrow \textcircled{C} \text{ Eqne di eqbrio PUNTUALE al contorno SULLE BASI} \end{array} \right.$$

trasformiammo  $\textcircled{C}$  in un eqbrio INTEGRALE

$\textcircled{C}$  diviene [nel caso di  $D_2$  dove  $\tilde{t}_3 = \tilde{F}$ ]

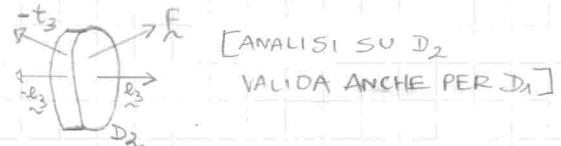
$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{D_2} \tilde{t}_3 dA = \int_{D_2} \tilde{F} dA \\ \tilde{F} = \tilde{Q} + N e_3 \end{array} \right.$$

TALE EQNE RAPPRESENTA ER. BRIO DEI MOMENTI

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{D_2} \hat{\mathbf{x}} \times \tilde{t}_3 dA = \int_{D_2} \hat{\mathbf{x}} \times \tilde{F} dA \\ \tilde{F} = T e_3 + m \end{array} \right.$$

$\boxed{2}$

EQ.NI DI EQ.BRID  
INTEGRALE ALLA BASE



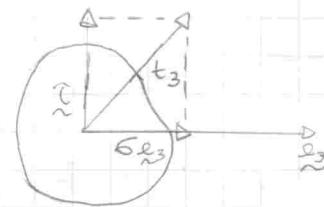
INTEGRALE PONTUALE  
 $\boxed{2} = \textcircled{C}$

• Decomposizione  $t_3$

$$t_3 = G_{13} e_1 + G_{23} e_2 + G_{33} e_3 = \tilde{t} + G e_3$$

GIACCIONO NEL PIANO DELLA SEZIONE ( $= \mathbb{X}$ )

NORMALE ALLA SEZIONE



$\Rightarrow$  Sostituendo  $\textcircled{D}$  in  $\boxed{2}$  quest'ultimo diviene:

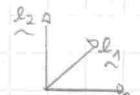
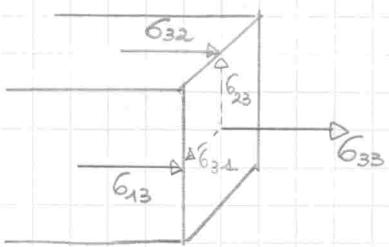
$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{D_2} (\tilde{t} + G e_3) dA = \tilde{Q} + N e_3 \\ \int_{D_2} \hat{\mathbf{x}} \times (\tilde{t} + G e_3) dA = T e_3 + m \end{array} \right. \Rightarrow \int_{D_2} \tilde{t} dA = \tilde{Q} \quad \int_{D_2} G dA = N$$

$$\int_{D_2} \hat{\mathbf{x}} \times \tilde{t} dA e_3 = T \quad \int_{D_2} \hat{\mathbf{x}} \times G e_3 dA = m$$

4 eq<sup>ni</sup> INTEGRALI di EQ.BRID al CONTORNO [equivalenti a 6 condizioni scalari]

• METODO SEMI-INVERSO: Si eseguono a priori una parte dei dati e delle incognite e si cerca di determinare i restanti dati e le restanti incognite soddisfacen-

de TUTTE le equazioni del problema elastico. Saint-Venant implementò tale metodo con la seguente CONGETTURA: lo STATO DI TENSIONE è ATTIVO SOLO in direzione LONGITUDINALE delle fibre



QUINDI  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0 \Rightarrow T$  diviene

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

$T$  = TENSORE DELLE TENSIONI

### • Analisi STATO DI TENSIONE $T$ [dimostrazione che è piano]

$m$  = GENERICA  
GIACITURA  
NEL CILINDRO

vale  $\tilde{t}_m = Tm = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \sigma_{13} \\ m_2 \sigma_{23} \\ m_1 \sigma_{13} + m_2 \sigma_{23} + m_3 0 \end{bmatrix}$

$$\tilde{t}_m = m_3 (\sigma_{13} \tilde{e}_1 + \sigma_{23} \tilde{e}_2) + (m_1 \sigma_{13} + m_2 \sigma_{23} + m_3 0) \tilde{e}_3 = 0$$

$$\tilde{t}_m = m_3 \tilde{e}_1 + (m_1 \sigma_{13} + m_2 \sigma_{23} + m_3 0) \tilde{e}_3$$

ovvero  $\forall m$  il VETTORE TENSIONE  $t_m$  ha 1 COMPONENTE LUNGO  $\tilde{e}_1$  ed 1 LUNGO  $\tilde{e}_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  (vers( $\tilde{e}_1$ ),  $e_3$ ) che individua un PIANO DELLA TENSIONE

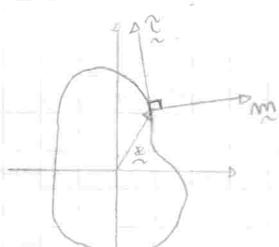
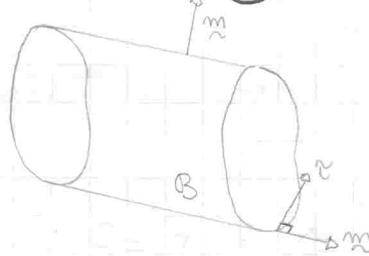
(ST. TENSIONE È PIANO)



### • EQUAZIONI DI EQUILIBRIO INDEFINITE [attraverso l'applicazione delle CONGETTURA]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{EQUIVALENTI}} \frac{\partial \tilde{e}_1}{\partial x_3} = 0 \xrightarrow{\text{cioè}} \tilde{e}_1 = 0 \quad \nabla \tilde{e}_1 + \hat{G}' = 0$$

Analizziamo (E)



$m \perp$  mentello  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow m = m_1 \tilde{e}_1 + m_2 \tilde{e}_2$$

Per valere (E) dovrà essere

$$\tilde{t}_m = 0 \xrightarrow{\text{cioè}} \tilde{t}_m = Tm = 0$$

meticolosamente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6_{13} \\ 0 & 0 & 6_{23} \\ 6_{13} & 6_{23} & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 0 = 0$$

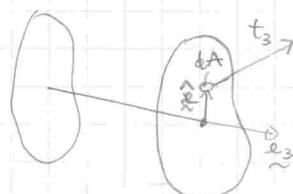
$$m_1 6_{13} + m_2 6_{23} = 0 \Rightarrow \hat{m} \tilde{\tau} = 0$$

quindi  $\tilde{\tau} \perp \hat{m}$ . Il sistema  $E-C$  è, in sintesi,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\tau}' = 0 \quad H \\ \hat{\tilde{\tau}} + G' = 0 \quad I \\ \tilde{\tau} \hat{m} = 0 \quad L \end{array} \right. \begin{array}{l} \alpha \in B \\ \alpha \in \partial B_m \end{array}$$

[EQ.NI DI EQUILIBRIO DEL PROB DI SANT VENANT]

- Decomposizione  $T$  (rispetto al bivettore) relativo ad una sezione generica del cilindro



$$\tilde{n}(x) := \int_D t_3 dA \quad F \text{ AZIONE DI CONTATTO}$$

FORZA CHE RICEVE L'INTERA SEZIONE DALLA PARTE PROSPICIENTE DEL SOLIDO

$$\tilde{M}(x) := \int_D \hat{x} \times t_3 dA \quad G \text{ COPPIA DI CONTATTO}$$

MOMENTO RELATIVO AD  $F$

Sostituendo  $D$  in  $F$  si ha:

$$\tilde{n}(x) = \int_D \tilde{\tau} dA + \int_D 6 dA e_3 = Q(x) + N(x) e_3$$

dove  $Q(x) = \int_D \tilde{\tau}(x, \hat{x}) dA$   $N(x) = \int_D 6(x, \hat{x}) dA$   
 $\downarrow$  SFORZO DI TAGLIO  $\downarrow$  SFORZO NORMALE

e ancora  $Q(x) = \int_D 6_{13} dA e_1 + \int_D 6_{23} dA e_2 = Q_1(x) e_1 + Q_2(x) e_2$

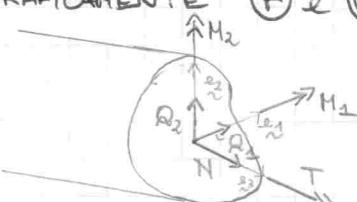
Sostituendo  $D$  in  $G$  si ha:

$$\tilde{M}(x) = \int_D \hat{x} \times \tilde{\tau} dA + \int_D \hat{x} \times 6 e_3 dA = T(x) e_3 + m(x)$$

dove  $T(x) = \int_D \hat{x} \times \tilde{\tau} dA e_3$   $m(x) = \int_D \hat{x} \times 6 e_3 dA$   
 $\downarrow$  COPPIA TORCENTE  $\downarrow$  COPPIA FLETTENTE

e ancora  $m(x) = - \underbrace{\int_D x_1 6 dA e_2}_{M_2(x)} + \underbrace{\int_D x_2 6 dA e_1}_{M_1(x)} = M_2(x) e_2 + M_1(x) e_1$

GRAFICAMENTE  $F$  e  $G$ :



- Analisi  $3$  (Eqni di equilibrio del problema) per capire come variano le caratteristiche di sollecitazione lungo l'asse del cilindro

$$\int_D \tilde{\tau} dA = Q \Rightarrow \int_D \tilde{\tau}(x, \hat{x}) dA = \left( \int_D \tilde{\tau}(x, \hat{x}) dA \right)' = Q'(x) = 0$$

$\downarrow$   $Q_1(x) = 0$   $\downarrow$   $Q_2(x) = 0$

$$\int \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{H}} = \int_D (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{r}}) dA = \left( \int_D \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{r}} dA \right)' \Rightarrow T'(\mathbf{x}) e_3 = 0$$

Scevendo ① come  $\mathbf{6}' = -\nabla \hat{\mathbf{r}}$

$$\int \textcircled{1} \Rightarrow \int_D \mathbf{6}' dA = - \int_D \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dA \Rightarrow \left( \int_D \mathbf{6} dA \right)' = - \int_D \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dA = 0 \quad \text{cioè FLUSSO USCLENTE DI T' E' = 0}$$

$$\int \textcircled{1} \cdot \mathbf{x}_1 \Rightarrow \int_D \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{6}' dA = - \int_D \mathbf{x}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dA \stackrel{\substack{\text{SI} \\ \text{DI MOSTRA}}}{=} -M'_2 = Q_1 \Rightarrow M'_2 + Q_1 = 0$$

$$\int \textcircled{1} \cdot \mathbf{x}_2 \Rightarrow \int_D \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{6}' dA = - \int_D \mathbf{x}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dA \stackrel{\substack{\text{SI} \\ \text{DI MOSTRA}}}{=} M'_1 = Q_2 \Rightarrow M'_1 - Q_2 = 0$$

3) è quindi diventato un sistema di 6 eq<sup>ni</sup> differenziali del 1° ordine in 6 grandezze statiche incognite

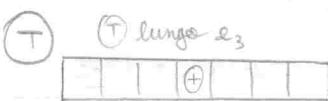
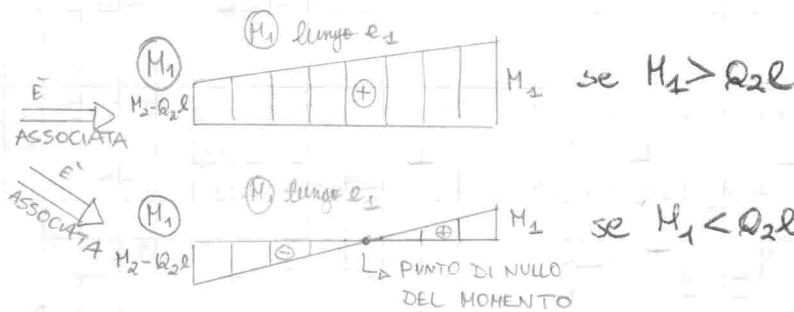
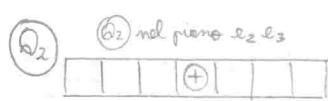
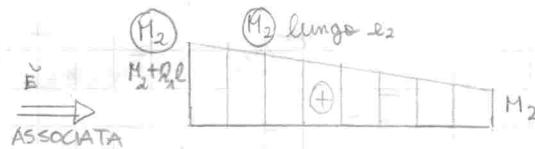
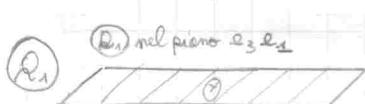
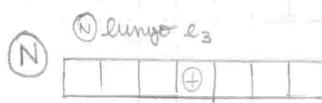
$$\begin{cases} N'(\mathbf{x}) = 0 \\ Q'_1(\mathbf{x}) = 0 \\ Q'_2(\mathbf{x}) = 0 \\ M'_1 + Q_1 = 0 \\ M'_1 - Q_2 = 0 \\ T'(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{INTEGRANDO CIASCUNA} \\ \text{EQUAZIONE OTTENGO} \\ \text{LE LEGGI DI} \\ \text{VARIAZIONE DELLE} \\ \text{CORZE INTERNE} \\ \left[ \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}+l} \text{LUNGHEZZA GENERICA} \right] \end{array}$$

$$\stackrel{\mathbf{x}}{\Rightarrow}$$

$$\begin{cases} N(\mathbf{x}) = N(l) = N \\ Q_1(\mathbf{x}) = Q_1(l) = Q_1 \\ Q_2(\mathbf{x}) = Q_2(l) = Q_2 \\ M_2(\mathbf{x}) = M_2 - Q_1(\mathbf{x}-l) = M_2 + Q_1(l-\mathbf{x}) \\ M_1(\mathbf{x}) = M_1 + Q_2(\mathbf{x}-l) = M_1 - Q_2(l-\mathbf{x}) \\ T(\mathbf{x}) = T(l) = T \end{cases}$$

4)

Ciascuna delle 4 è rappresentabile in un DIAGRAMMA DI SFORZO/SOLLECITAZIONE dove sulle ascisse vi è l'asse del cilindro, e sull'ordinata le grandezze considerate (solitamente archiate)



- Il più generico problema di SV può essere visto come la sovrapposizione dei seguenti 4 sottoproblemi

UNICA CARATTERISTICA  $\neq 0$

### SOTTO PROBLEMA

$N \neq 0$

ESTENSIONE UNIFORME

$m \neq 0$

FLESSIONE UNIFORME

$T \neq 0$

TORSIONE UNIFORME

$Q \neq 0$

FLESSIONE NON UNIFORME

(o FLESSIONE E TAGLIO)

### GEOMETRIA DELLE AREE

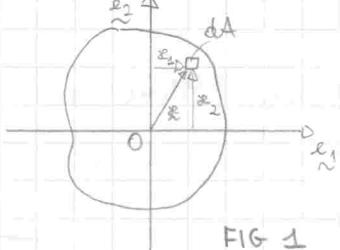


FIG 1

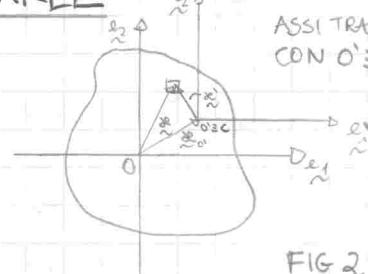
$$A = \int_D dA$$

AREA RACCHIUSA  
DALLA SEZIONE

$$\underline{i} = \int_D \underline{x} dA$$

VETTORE  
MOMENTO  
STATICO

$$= \int_D x_1 dA \underline{e}_1 + \int_D x_2 dA \underline{e}_2 = S_2 \underline{e}_1 + S_1 \underline{e}_2$$



ASSI TRASLATI  
CON  $O' \in C$  (baricentro)  $\Rightarrow$  cioè IL NUOVO SISTEMA  
DI ASSI È CENTRALE  
[DA  $O' \in C$ ]

FIG 2

→ Consideriamo un nuovo sistema di assi come in FIG. 2. Avremo che:

$$\underline{x}' = \underline{x} - \underline{x}_0$$

TRASLAZIONE  
ASSI

$$\underline{i}' = \underline{i} - A\underline{x}_0$$

POLICE  $C \in O'$

$$\underline{i}' = \underline{i} - A\underline{x}_0 = \underline{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{c1} = \frac{S_2}{A} \\ x_{c2} = \frac{S_1}{A} \end{array} \right.$$

COORDINATE  
BARICENTRO

### MOMENTI DI INERZIA

$$I_{x_1} = \int_D (x_2)^2 dA$$

$$I_{x_2} = \int_D (x_1)^2 dA$$

$$I_{x_1 x_2} = \int_D x_1 x_2 dA$$

MOMENTO  
MISTO  
(o CENTRIFUGO)

che

raccolte nel TENSORE DI EULERO

$$I = \begin{bmatrix} I_{x_2} & I_{x_1 x_2} \\ I_{x_1 x_2} & I_{x_1} \end{bmatrix}$$

E' SIMMETRICO

→ Immaginiamo ora di RUOTARE gli assi  $\underline{x}_1$   $\underline{x}_2$

$$I' = I - \underline{x}_0 \cdot \underline{i}^T - \underline{i} \cdot \underline{x}_0^T + A \underline{x}_0 \cdot \underline{x}_0^T \quad \text{SE } O' \in C \text{ SI} \Rightarrow \text{HA } \nu = 0 \Rightarrow$$

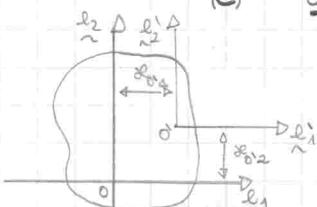
$$= I' = I_C + A \underline{x}_0 \cdot \underline{x}_0^T \quad \text{CUI}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I'_{x_1} = I_{x_1 C} + A(\underline{x}_{02})^2 \\ I'_{x_2} = I_{x_2 C} + A(\underline{x}_{01})^2 \\ I'_{x_1 x_2} = I_{x_1 C} \underline{x}_{02} + A \underline{x}_{01} \underline{x}_{02} \end{array} \right.$$

FORMULE

DI

HUYGENS

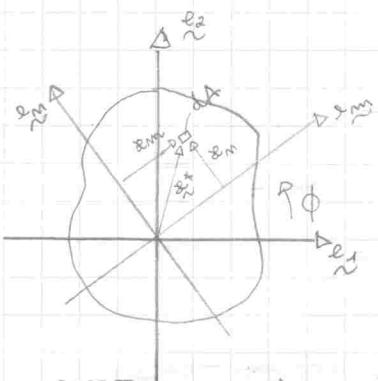


→ Cerchiamo gli ASSI PRINCIPALI D'INERZIA ( $I_{x_1 C} = I_{x_2 C} = 0$ ) dove il tensore

d'Eulero sarà

$$I_C = \begin{bmatrix} I_{x_2}^* & 0 \\ 0 & I_{x_1}^* \end{bmatrix}$$

Bisognerà quindi ruotare gli assi  $\underline{x}_1$   $\underline{x}_2$  finché il momento misto sia nullo.



$$I_{x_m} = \int_D x_m^2 dA \quad I_{x_m} = \int_D x_m^2 dA \quad I_{x_m x_m} = \int_D x_m x_m dA$$

$$\underline{x}_m = \underline{e}_m^T \underline{x} \quad \underline{x}_m = \underline{e}_m^T \underline{x} \quad \underline{e}_m = \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} \quad \underline{e}_m = \begin{bmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix}$$

RISPESSO (NUOVI ASSI)

$$I^* = \int_D \underline{x}^* \underline{x}^{*T} dA = \begin{bmatrix} \underline{e}_m^T I \underline{e}_m & \underline{e}_m^T I \underline{e}_m \\ \underline{e}_m^T I \underline{e}_m & \underline{e}_m^T I \underline{e}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{x_m}^* & I_{x_m x_m}^* \\ I_{x_m x_m}^* & I_{x_m}^* \end{bmatrix}$$

$$I_{x_m}^* = I_{x_2} \cos^2 \phi + 2 I_{x_1 x_2} \cos \phi \sin \phi + I_{x_1} \sin^2 \phi$$

$$I_{x_m}^* = I_{x_2} \sin^2 \phi - 2 I_{x_1 x_2} \cos \phi \sin \phi + I_{x_1} \cos^2 \phi \rightarrow \text{IMPOSSO} = 0$$

$$I_{x_m x_m}^* = I_{x_1 x_2} \cos 2\phi + \frac{\sin 2\phi}{2} (I_{x_1} - I_{x_2}) \stackrel{\rightarrow}{=} 0 \Rightarrow D$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{1}{2} \arctan \frac{2 I_{x_1 x_2}}{I_{x_2} - I_{x_1}}$$

Abbiamo quindi ottenuto

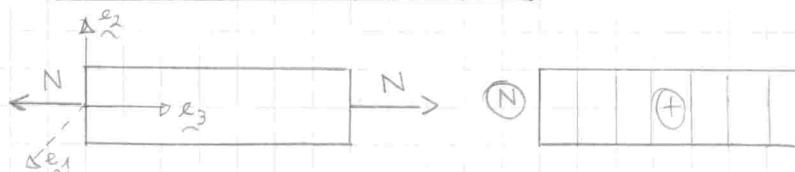
$$I_C = \begin{bmatrix} I_{1,2} & 0 \\ 0 & I_{1,2} \end{bmatrix}$$

dove

$$I_{1,2} = \frac{I_{x_1} + I_{x_2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_2} - I_{x_1}}{2}\right)^2 + I_{x_1 x_2}^2} \Rightarrow I_{\max}, I_{\min} \rightarrow$$

$\rightarrow$  se  $I_{1,2}$  si mantiene la stessa relazione d'ordine che vi era fra  $I_{x_2}, I_{x_1}$

### • ESTENSIONE UNIFORME $N \neq 0 [m=0 \quad Q=0 \quad T=0]$



CONGETTURA SAINT-VENANT: le fibre longitudinali subiscono le stesse elongazioni

IPOTESI DI LAVORO

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{33} = E = E_c = \text{cost} \\ \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0 \end{array} \right. \quad \text{NUOVA CONGETTURA}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{12} = 0 \\ \gamma_{13} = 0 \end{array} \right. \quad " \quad " \quad \Rightarrow \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$$

$$\text{DA CONG. DI S.V.} \Rightarrow \gamma_{12} = 0$$

$\rightarrow$  Dalle equi del LEGAME COSTITUTIVO si ha:

$$\sigma_{33} = E = E_c \quad \text{(*)}$$

$\rightarrow$  Richiamo le equi di EQUILIBRIO INTEGRALE alla BASE:

$$\int_D \sigma_{33} dA = N \quad \text{(A)}$$

$$\int_D \hat{x} \times \hat{t} dA \cdot e_3 = T \quad \text{(B)}$$

$$\int_D \hat{t} dA = Q \quad \text{(C)}$$

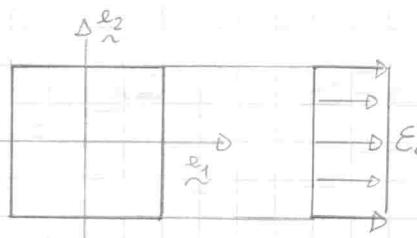
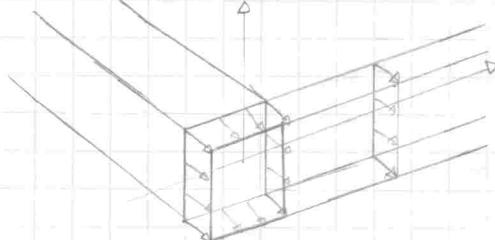
$$\int_D \hat{x} \times \hat{t} dA \cdot e_3 = 0 \quad \text{(D)}$$

Dalle A applicando B si ha  $E_c = \frac{N}{EA} \quad \sigma \quad G = \frac{N}{A}$

Le B, C, D si verificano tutte = 0 [de cui  $T = Q = m = 0$ ]

↪ il problema è quindi di ESTENSIONE UNIFORME.

GRAFICAMENTE:



LE SEZIONI TRASLANO LUNGO L'ASSE DEL CILINDRO E SI MANTENGONO DUNQUE PIANE  
[CONSERVAZIONE SEZIONI PIANE]  
C'è NUOVA CONGETTURA?

→ Analisi CINEMATICA della Soluzione [per determinare  $\tilde{u}(x)$ ]

Dalle EQ.NI DI CONGRUENZA (IN FORMA IMPLICITA) si ottiene:

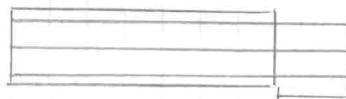
$$\begin{cases} u_1 = u_1(0) - \sim \frac{N}{EA} x_1 \\ u_2 = u_2(0) - \sim \frac{N}{EA} x_2 \\ u_3 = u_3(0) + \frac{N}{EA} x_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{u} &= u_1 \hat{x}_1 + u_2 \hat{x}_2 = -\sim \frac{N}{EA} \hat{x} & \text{SPOSTAMENTO DI 1 PUNTO} \\ & \text{NEL PIANO DELLA SEZIONE} \\ & \text{ALLA SEZIONE} \\ & \text{Lo Spostamento SECONDARIO} \\ & \text{TOTALE} & \text{SPOST. PRIMARIO} = u_3 \\ \tilde{u} &= \tilde{u}(0) + \hat{u} + \frac{N}{EA} \hat{x} & \sim \end{aligned}$$

$u_3$  è lo Spostamento PRIMARIO



Graficamente:

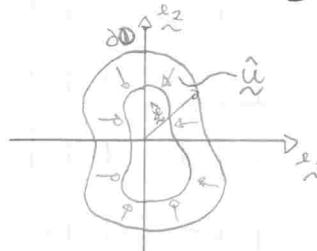


$$= \frac{Nl}{EA} = \frac{N}{(EA/l)} = \text{RIGIDEZZA ASSIALE DEL CILINDRO DI D.S.V.}$$

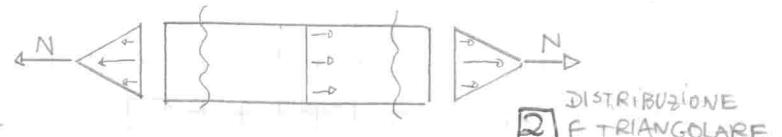
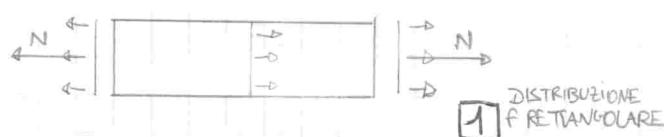
Moltre la trasformazione è

OMOTETICA:

[cioè la sezione mantiene la sua forma]



→ OSSERVAZIONE



1 è completamente risolto dalla soluzione  $G = \frac{N}{A}$  [di DSV]

2 la soluzione è valida solo se n è a SUFFICIENTE DISTANZA dalle basi: infatti in prossimità di esse è ≠ la distribuzione dei  $G$  e divergeranno rilevanti gli effetti di bordo

## FLESSIONE UNIFORME $m \neq 0 [N = T = Q = 0]$

CONGETTURA: Le sezioni subiscono SOLO una ROTAZIONE RIGIDA conservando le forme piene. Tale congettura implica una legge LINEARE:

$$\epsilon_{33} = \epsilon = \epsilon_c - \mu_2 \alpha_1 + \mu_1 \alpha_2 \quad \epsilon_c, \mu_2, \mu_1 \text{ INCognite}$$

→ DEDUCIAMO lo STATO DI TENSIONE

$$\begin{cases} \sigma_{33} = \sigma = E \epsilon = E (\epsilon_c - \mu_2 \alpha_1 + \mu_1 \alpha_2) \quad (*) \\ \sigma_{11} = \sigma_{22} = -\nu \sigma \end{cases} \quad [\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0 \text{ PER CONGETTURA DI DSV}]$$

→ Richiamo le eq<sup>W</sup> di EQUILIBRIO INTEGRALE alla BASE:

$$\int_{D_2} \sigma dA = N \quad (A) \quad \int_{D_2} \hat{x}_2 \times \sigma_{23} dA = m \quad (B) \quad \int_{D_2} \hat{x}_2 \sigma_{12} dA = Q \quad (C) \quad \int_{D_2} \hat{x}_2 \times \hat{x}_2 \sigma_{23} dA = T \quad (D)$$

$$(C) \text{ e } (D) = 0 \quad [\text{poiché } \hat{x}_2 = 0]$$

Dalle (A) applicando (\*) e ricordando che gli assi sono rifatti al bocentro (dove i momenti statici sono = 0) si riceve  $\epsilon_c = 0$

$$\rightarrow \text{Divido la (B) in } \int_{D_2} \alpha_2 \sigma dA = M_1 \quad (E) \quad - \int_{D_2} \alpha_1 \sigma dA = M_2 \quad (F)$$

Dalle (E) applicando (\*) e ricordando che gli assi sono bocentrici [e collineari con quelli centri principali d'inerzia dove  $I_{\alpha_1 \alpha_2} = 0$ ] si ha

$$\mu_1 = \frac{M_1}{EI_1} \quad . \quad \text{Con lo stesso procedimento per la (F) si ha}$$

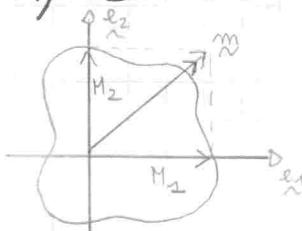
$$M_2 = \frac{M_2}{EI_2}$$

La SOLUZIONE è quindi [da (\*) sostituendo  $\epsilon_c, \mu_1, \mu_2$  oppure calcolate]:

$$\epsilon = -\frac{M_2}{EI_2} \alpha_1 + \frac{M_1}{EI_1} \alpha_2 \quad \& \quad \sigma = \frac{M_1}{I_1} \alpha_2 - \frac{M_2}{I_2} \alpha_1 \quad \text{FORMULA BINOMIA DI NAVIER}$$

→ La FLESSIONE può essere:

1) FLES. DEVIATA



Caso più generale

2) FLES. RETTA

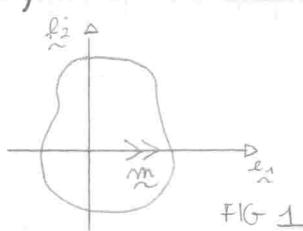
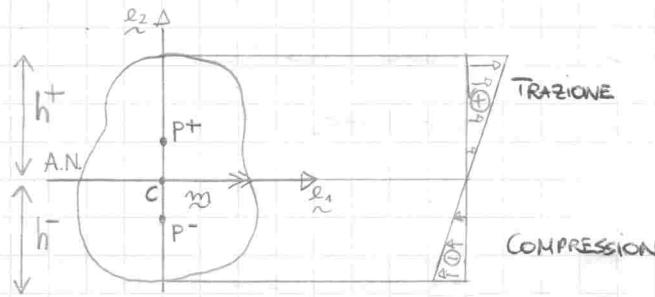


FIG 1

$m$  è COLLINEARE con 1 dei 2 assi [ $m = M_1 \alpha_1 \oplus m = M_2 \alpha_2$ ]

→ Analisi FLESSIONE RETTA [con  $M_1 \neq 0, M_2 = 0$ ] VEDI FIG. 1

La FORMULA BINOMIA di NAVIER diviene MONOMIA:  $\sigma = \frac{M_1}{I_1} \epsilon_2$



$\epsilon_2$  è l'ASSE NEUTRO [dove  $\epsilon = \sigma = 0$ ]

A.N. È collineare con l'A. MOMENTO

A.N. È ⊥ con l'A. SOLLECITAZIONE

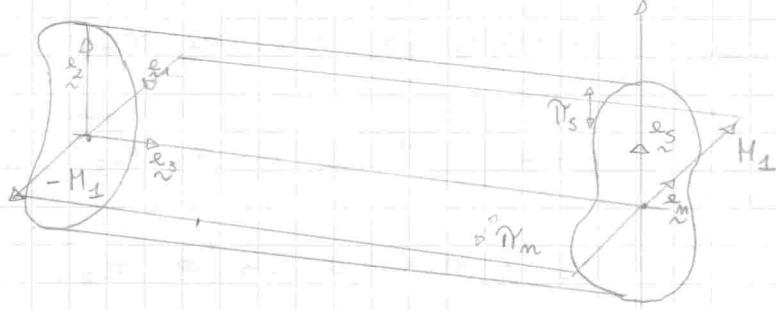
2 punti alle STESSA distanza dall'A.NEUTRO sono, in | | UGUALMENTE sollecitati:  $\sigma(P^+) = |\sigma(P^-)|$ , in generale  $\Rightarrow$

$$\sigma^+ = \frac{M_1}{I_1} h^+ \quad \sigma^- = \frac{M_1}{I_1} h^- \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\text{MAX}}^+ = \frac{M_1}{I_1/h^+} = \frac{M_1}{W_1^+} = \text{MODULO DI RESISTENZA A FLESSIONE SUPERIORE}$$

$$\sigma_{\text{MAX}}^- = \frac{M_1}{I_1/h^-} = \frac{M_1}{W_1^-} = \text{MODULO DI RESISTENZA A FLESSIONE INFERIORE}$$

La sezione IDEALE è quella SIMMETRICA rispetto all'A.NEUTRO [poiché in tal caso le sollecitazioni agli estremi è la stessa]

# FORMULARIO 9° SETTIMANA

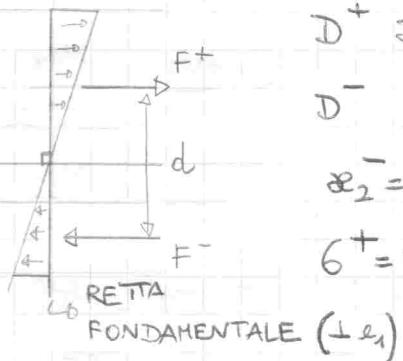
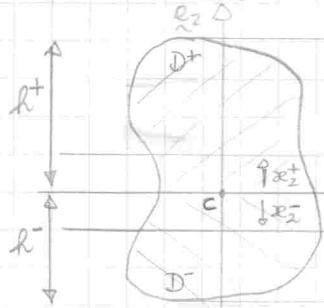


$\Pi_m$  PIANO NEUTRO  $\alpha_2 = 0$  ASSE NEUTRO  
VERSORE  $e_m$  ASSE NEUTRO (dove  $G=0$ )  
( $e_m \equiv e_1$ )

$\Pi_s$  PIANO DI SOLLECITAZIONE

VERSORE  $e_s$  ASSE SOLLECITAZIONE ( $e_s \equiv e_2$ ) ( $e_s \perp e_m$ )

In sezione:



$D^+$  DOMINIO TRAZIONE

$D^-$  " COMPRESSIONE

$$\alpha_2^- = \alpha_2^+ = 6(x_2) = 6(\alpha_2)$$

$$G^+ = \frac{M_1}{I_1/h^+} = \frac{M_1}{W_1^+} \quad G^- = \frac{M_1}{I_1/h^-} = \frac{M_1}{W_1^-}$$

$$\text{In } D^+ \text{ definisco } F^+ \quad F^+ = \int_{D^+} 6dA = \frac{M_1}{I_1} S_1^+ \quad \Rightarrow \quad F^+ + F^- = 0$$

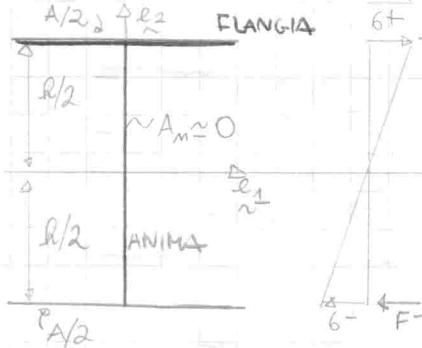
$$\text{Analogamente in } D^- \text{ si ha} \quad F^- = \int_{D^-} 6dA = \frac{M_1}{I_1} S_1^- \quad |F^-| = F^+ = F \text{ BRACCIO } d$$

Tale coppia genera un MOMENTO in OPPOSIZIONE allo  $M_1$  applicato:

$$Fd = M_1 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{I_1}{S_1^+} \quad d = \text{BRACCIO DELLE FORZE INTERNE}$$

COPPIA RESISTENTE      COPPIA ESTERNA

→ Sezione OTTIMALE rispetto alla FLESSIONE RETTA [SEZ. A DOPPIA T]



$$I_1 = \frac{A}{2} \left( \frac{h}{2} \right)^2 2 \quad (\text{l'ANIMA NON CONTRIBUISCE}$$

SOPRA E SOTTO

$$S_1^+ = \frac{A}{2} \frac{h}{2}$$

ed  $I_1$  e  $S_1^+$  poiché le sue  
 $A_m \approx 0$ )

$$\Rightarrow d = \frac{I_1}{S_1^+} = h$$

→ Aspetto CINEMATICO della FLESSIONE RETTA

DEFORMAZIONE PRIMARIA:  $E = \mu_1 \alpha_2$  relative alle fibre longitudinali.

Le fibre si ALLUNGANO SOPRA L'ASSE NEUTRO

" " " COMPRIMONO SOTTO " "

DEFORMAZIONE SECONDARIA:  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -2\mu_1 \alpha_2$  relative alle fibre trasversali

Le fibre si COMPRIMONO SOPRA L'ASSE NEUTRO (dove  $E > 0$ )  
" " " DILATANO SOTTO " " (dove  $E < 0$ ) } PER EFFETTO POISSON

# EQUAZIONI DI CONGRUENZA:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = E_1 = -\nu \mu_1 x_2 \quad (A)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x_2} = E_2 = -\nu \mu_1 x_1 \quad (B)$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial x_3} = E = \mu_1 x_2 \quad (C)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} = \gamma_{12} = 0 \quad (D)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} = \gamma_{23} = 0 \quad (E)$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} = \gamma_{31} = 0 \quad (F)$$

$$\xrightarrow{A, B, C} u_1 = -\nu \mu_1 x_2 x_1 + U_1(x_2, x_3)$$

$$u_2 = -\nu \mu_1 \frac{x_2^2}{2} + U_2(x_1, x_3)$$

$$u_3 = \mu_1 x_2 x_3 + U_3(x_1, x_2) \quad \text{LE INSERISCO IN D, E, F}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} = \nu \mu_1 x_1 \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} = -\mu_1 x_3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} = 0 \end{array} \right.$$

1

La soluzione di 1 è somma dell'integrale del problema omogeneo e di un integrale particolare [  $U = U^h + U^p$  ]

SOLUZIONE OMOGENEA  $U^h = u_0 + \sum_i x_i e_i$

Integrale PARTICOLARE  $U^p = \sum_{i=0}^3 U_i^p e_i$

$$U_2^p = \nu \mu_1 \frac{x_1^2}{2} - \mu_1 \frac{x_3^2}{2} \Rightarrow U^p = \left( \nu \mu_1 \frac{x_1^2}{2} - \mu_1 \frac{x_3^2}{2} \right) e_2$$

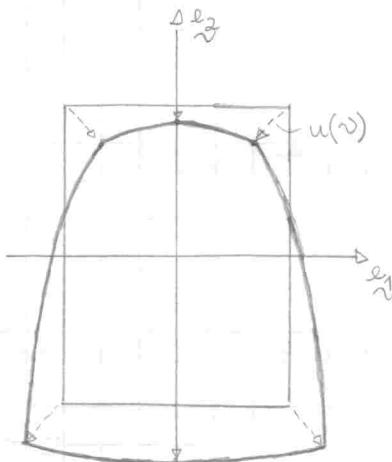
$u$ , A MENO DELLA SOL. OMOGENEA, vale: [  $u$  = campo delle spostamenti ]

$$u = (-\nu \mu_1 x_1 x_2) e_1 + \left( -\nu \mu_1 \frac{x_2^2}{2} + \nu \mu_1 \frac{x_1^2}{2} - \mu_1 \frac{x_3^2}{2} \right) e_2 + (\mu_1 x_2 x_3) e_3$$

$$u = \tilde{u}^{(N)} + \tilde{u}^{(F)} \quad \text{dove} \quad \tilde{u}^{(N)} = -\nu \mu_1 \left[ x_1 x_2 e_1 + \frac{1}{2} (x_2^2 - x_1^2) e_2 \right]$$

$$\tilde{u}^{(F)} = -\mu_1 \frac{x_3^2}{2} e_2 + \mu_1 x_2 x_3 e_3$$

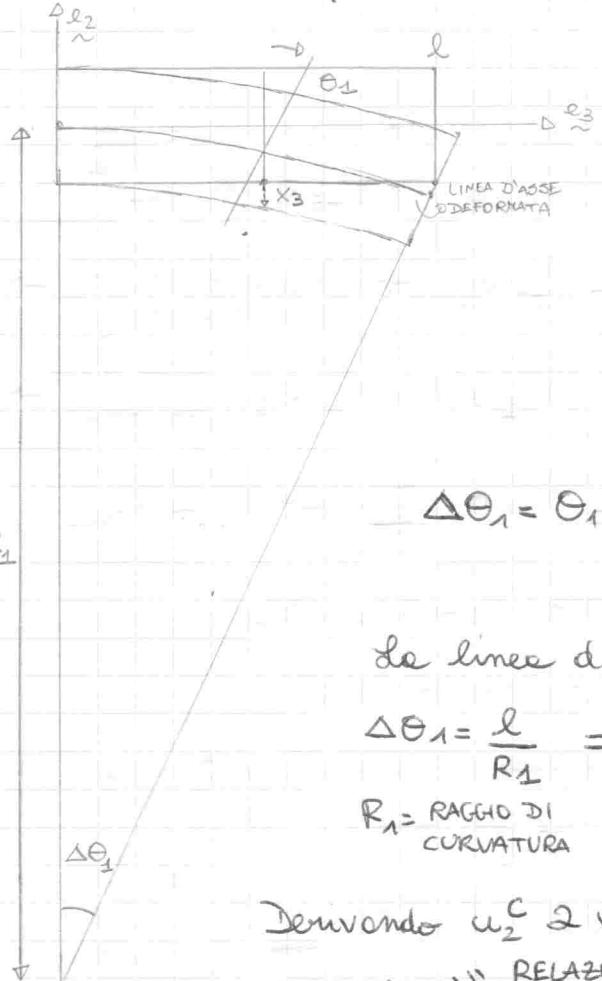
Analisi  $\tilde{u}^{(N)}$



$u(N)$

è un campo degli spostamenti  
SECONDARIO  
(perché governato dall'effetto Poisson)

Analisi  $\underline{u}^{(F)}$ : (considerando una base vincolata)



$$\underline{u}^{(F)} = \underline{u}_2^c + \underline{u}_3$$

$$u_2^c = -M_1 \frac{x_3^2}{2}$$

TRASLACIONE SECONDO  $e_2$  DELLA SEZIONE

$$u_3 = \mu_1 x_2 x_3$$

ROTAZIONE RISPETTO ALL'ASSE  $e_1$

$$\text{dove } \Theta_1 = \frac{1}{2} \nabla \times \underline{u}^{(F)} = \mu_1 x_3 e_1$$

Le sezioni ruotano mantenendosi  $\perp$  linee d'asse deformate

$$\Delta\Theta_1 = \Theta_1(x_3) - \Theta_1(0) = \mu_1 l$$

$$\text{con } x_3 = l \text{ DOVE } \Theta_1(x_3) \text{ E MAX}$$

Se linee d'asse NON si deformano  $\Rightarrow$

$$\Delta\Theta_1 = \frac{l}{R_1} \Rightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{\Delta\Theta_1}{l} = \mu_1 \quad \text{QUINDI } \mu_1 = \text{CURVATURA FLESSIONALE}$$

$(\mu_1 = \frac{M_1}{EI_1})$

Dovendo  $u_2^c$  2 volte rispetto  $x_3$   $\Rightarrow u_2'' = -\mu_1$  ovvero

$$\mu_1 = -(u_2^c)'' \quad \text{RELAZIONE CURVATURA-SPOSTAMENTO}$$

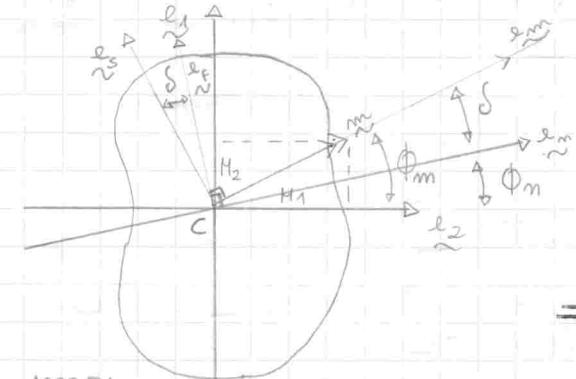
Per piccoli gradienti di spostamento

si ha  $|u_2^c| \ll 1$  e le linee d'asse si può confondere invece che arco di circonferenza come arco di parabola

PIANO ( $e_2, e_3$ ): PIANO DI INFLESSIONE,  $e_F = e_2$ : ASSE DI INFLESSIONE

# FORMULARIO 10° SETTIMANA

## → Analisi FLESSIONE DEVIATA



$\tilde{l}_F$  = ASSE DI INFLESSIONE  
 $\tilde{l}_S$  = ASSE SOLLECITAZIONE  
 $\tilde{l}_m$  = ASSE NEUTRO

[eccetto se  $I_1/I_2 = 1$ ] ANGOLO DI DEVIAZIONE  $S := \phi_m - \phi_n$

Si ha  $\tilde{l}_F \perp \tilde{l}_n$ ;  $\tilde{l}_S \perp \tilde{l}_m$  ⇒  $\tilde{l}_F$ ,  $\tilde{l}_S$  deviati di  $S$

La flessione è tanto più deviata tanto più la sezione è inerzialmente disuniforme. (cioè tanto più è  $\neq 0$  il rapporto  $I_1/I_2$ )

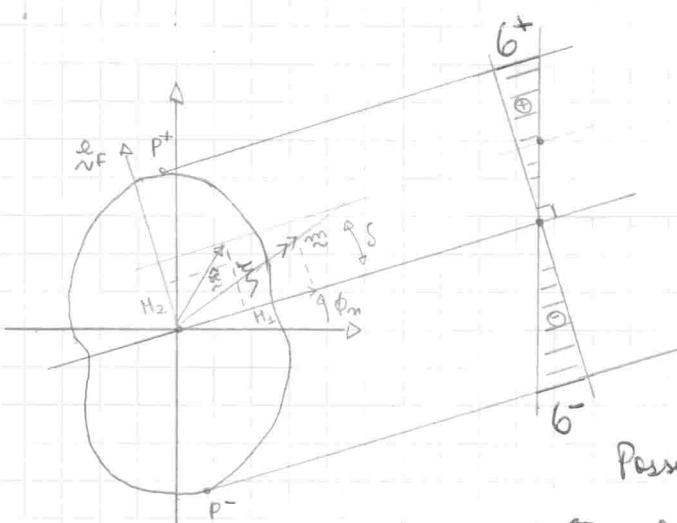
OSS. Se  $S = 0$ ? ⇒  $\phi_m = \phi_n$  ⇒  $\begin{cases} \phi_m = 0, \frac{\pi}{2} & \phi_n = 0, \frac{\pi}{2} \\ \frac{I_1}{I_2} = 1 & \tilde{l}_n \text{ COLLINEARE} \\ \tilde{l}_m \end{cases}$

$\tilde{l}_m$  COLLINEARE  
 con ASSE PRINCIPALE D'INERZIA

dal tensore di Cauchy si riceve in questo caso la sezione gode di una ISOTROPIA INERZIALE [cioè tutte le direzioni sono principali di inerzia]

Per tali sezioni la flessione è sempre e solo retta [de  $\boxed{1}$ ]

### DIAGRAMMA DELLE TENSIONI



in  $P^+$ ,  $P^-$  MAX/MIN Tensione;

$$\sigma^+ = \frac{M_1 \alpha_2^+ - M_2 \alpha_1^+}{I_1} \quad P^+(\alpha_1^+, \alpha_2^+)$$

$$\sigma^- = \frac{M_1 \alpha_2^- - M_2 \alpha_1^-}{I_2} \quad P^-(\alpha_1^-, \alpha_2^-)$$

$$\xi = \hat{x} \cdot \tilde{l}_F \quad [\text{distanza verticale di un generico punto da A.NEU.}]$$

Converso  $\sigma$  dell'asse neutro, e  $\sigma$  di  $\xi$ .  
 Codice PUNTO

Potrei quindi tracciare il diagramma delle tensioni. [poiché esso ha andamento lineare]

Le fibre che si trovano su una generica retta // A.NEUTRO hanno il medesimo stato di tensione ⇒  $\sigma = c \xi$  [dove  $\xi$  = distanza generica retta da A.NEU.]

Determiniamo c:  $M_n = \text{MOMENTO delle TENSIONI (G) RISPECTO ALL'ASSE NEUTRO}$

$$M_n = \int_D G \xi \, dA = c \int_D \xi^2 \, dA = c I_n \quad \text{A}$$

↑ MOMENTO D'INERZIA DELLA SEZIONE RISPECTO L'ASSE NEUTRO

$M_n$  deve uguagliare la COPPIA FLETTENTE in direzione dell'ASSE NEUTRO:

$$M_n = \tilde{m} \cdot e_m = M \cos \delta \quad \text{B} \quad [\text{dove } M = |m| = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}]$$

$$\text{A} = \text{B} \Rightarrow M \cos \delta = c I_n \Rightarrow c = \frac{M \cos \delta}{I_n} \quad \text{C}$$

$\rightarrow$  inserendo C in  $G = c \xi$  si ha  $G = \frac{M \cos \delta}{I_n} \xi$  FORMULA MONOMIA DELLA FLESSIONE DEVIATA  
 PER  $\delta = 0$   
 TORNA LA FLESSIONE RETTA

### • ESTENSOFLESSIONE [ESTENSIONE E FLESSIONE UNIFORME]



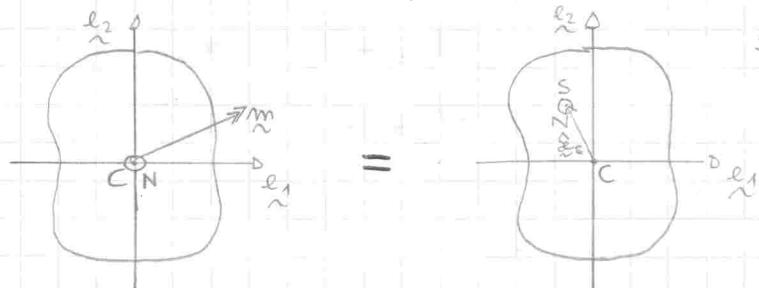
$$\text{Per } N \rightarrow G = N/A$$

$$\text{Per } \tilde{m} \rightarrow G = (M_1/I_1)\alpha_2 - (M_2/I_2)\alpha_1$$

PRINCIPIO  
SOPRAFFIGIONE  $\Rightarrow$  FORMULA TRINOMIA

$$G = \frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_1} \alpha_2 - \frac{M_2}{I_2} \alpha_1 \quad \text{D}$$

Lo stato di sollecitazione può essere visto in 2 modi staticamente equivalenti:



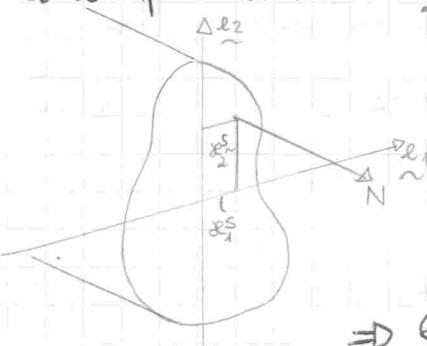
Tale equivalenza implica

$$\alpha_1^s \times N e_3 = \tilde{m} \Rightarrow \text{Sviluppo PROD VETTORIALE ED ESPlicito } \tilde{m}$$

$$\Rightarrow N \alpha_2^s = M_1 \quad \text{RICAVO} \\ -N \alpha_1^s = M_2 \quad \Rightarrow \text{COORDINATE DI } S$$

$$\alpha_1^s = -\frac{M_2}{N} \quad \alpha_2^s = \frac{M_1}{N} \quad [S(\alpha_1^s, \alpha_2^s)]$$

Il problema  $N e_3$  applicato in  $S$  è detto di TRAZIONE ECCENTRICA ed è equivalente a  $N e_3$  e  $\tilde{m} = M_1 e_2 + M_2 e_3$  applicati in C [dove  $M_1 = N \alpha_2^s$ ,  $M_2 = -N \alpha_1^s$ ]



DATI: N, coordinate di S.

Poniamo  $M_1 = N \alpha_2^s$  e  $M_2 = -N \alpha_1^s$  le D in S vale:

$$G = \frac{N}{A} + \frac{N \alpha_2^s}{I_1} \alpha_2 + \frac{N \alpha_1^s}{I_2} \alpha_1 \Rightarrow$$

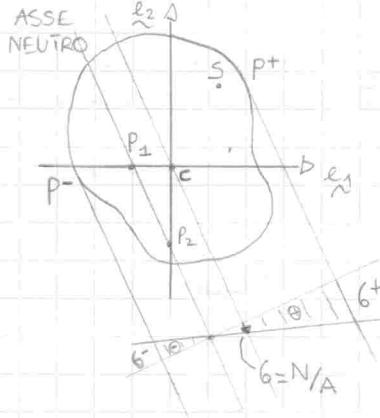
$$\Rightarrow G = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{\alpha_1^s}{I_2/A} \alpha_1 + \frac{\alpha_2^s}{I_1/A} \alpha_2 \right) \Rightarrow \text{CALCOLO ASSE NEUTRO } (G=0)$$

$$\Rightarrow \frac{-\alpha_1^s}{I_2/A} \alpha_1 - \frac{\alpha_2^s}{I_1/A} \alpha_2 = 1 \Rightarrow \text{PONGO } P_1 = -\frac{I_2/A}{\alpha_1^s} \quad P_2 = -\frac{I_1/A}{\alpha_2^s} \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha_1}{P_1} + \frac{\alpha_2}{P_2} = 1 \quad [\text{FORMA SEGMENTARIA DELLA RETTA}] \quad \text{EQUAZIONE ASSE NEUTRO}$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} \quad r_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} \quad \text{RAGGI GIRATORI D'INERZIA} \quad \begin{aligned} &\text{SOSTITUITI} \\ &\text{IN } P_1, P_2 \end{aligned} \quad P_1 = -\frac{r_2^2}{\alpha_1^s} \quad P_2 = -\frac{r_1^2}{\alpha_2^s}$$

In sezione si ha:

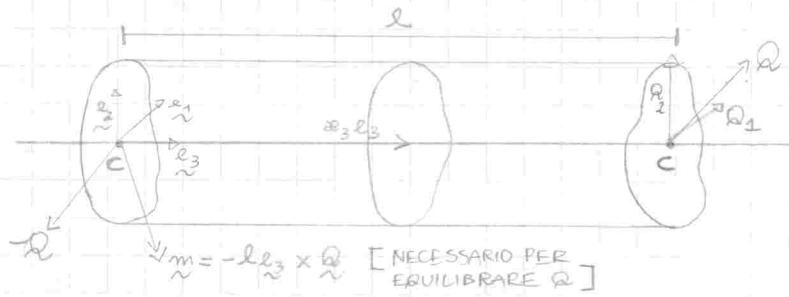


Conoscendo  $G$  dell'asse neutro ( $G=0$ ) e  $G$  per  $C$  (dove  $G=N/A$  dalla ④) posso quindi tracciare il diagramma delle tensioni.

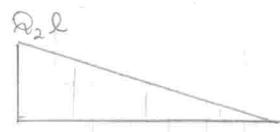
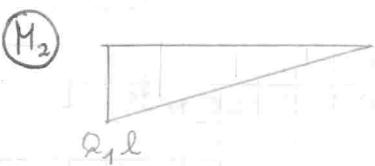
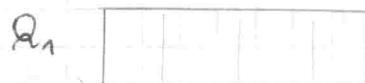
OSS: Per come sono stati definiti  $P_1$  e  $P_2$  l'asse neutro si troverà SEMPRE nel QUADRANTE OPPOSTO rispetto ad  $S$ . [Proprietà di antipolarità]

$$P^+ (\alpha_1^+, \alpha_2^+) \quad P^- (\alpha_1^-, \alpha_2^-) \quad G^\pm = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{\alpha_1^s}{r_2^2} \alpha_1^\pm + \frac{\alpha_2^s}{r_1^2} \alpha_2^\pm \right) \quad [G \text{ MAX/MIN}]$$

### FLESSIONE NON UNIFORME $Q \neq 0$



Diagrammi di sollecitazione:



$$[Q = Q_1 e_1 + Q_2 e_2]$$

$$\tilde{m}(x_3) = (l - x_3) e_3 \times Q$$

$$M_1 = -Q_2(l - x_3)$$

$$M_2 = Q_1(l - x_3)$$

Poiché la coppia flettente ( $\tilde{m}(x_3)$ ) è diretta in modo generico rispetto agli assi di riferimento si ha una FLESSIONE DEVIATA [cioè agiscono  $M_1, M_2$ ]:

$$G = \frac{M_1}{I_1} \alpha_2 - \frac{M_2}{I_2} \alpha_1 \stackrel{\textcircled{A}}{=} \frac{-Q_2(l - x_3)}{I_1} \alpha_2 - \frac{Q_1(l - x_3)}{I_2} \alpha_1 \stackrel{\text{GIN FUNZIONE}}{=} G(\alpha_3, \hat{x})$$

Vale inoltre  $E = \frac{G}{E}$  ed inoltre  $E = -\mu_2 \alpha_1 + \mu_1 \alpha_2$  quindi

$\textcircled{B}$

$\textcircled{C}$

SOSTITUENDO  
① IN ② ED  
EQUIVALENDO.  
A ③ :

$$\mu_1 = \frac{-Q_2(l-\alpha_3)}{EI_1}$$

$$\mu_2 = \frac{Q_1(l-\alpha_3)}{EI_2}$$

LA CURVATURA NON È COSTANTE (dipende da  $\alpha_3$ ). IL CILINDRO SI INFLETTA QUINDI CON CURVATURA VARIABILE

Dalle eq<sup>ni</sup> di eq<sup>brio</sup> indefinito si ha:

$$\begin{cases} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\tau} = -G' \\ \tilde{\tau} \in D \\ \tilde{\tau} \cdot \hat{m} = 0 \\ \tilde{\tau} \in \partial D \end{cases}$$

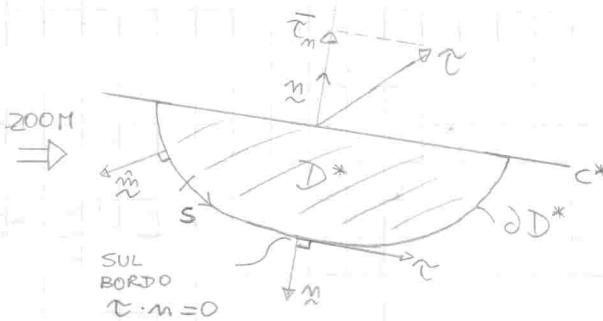
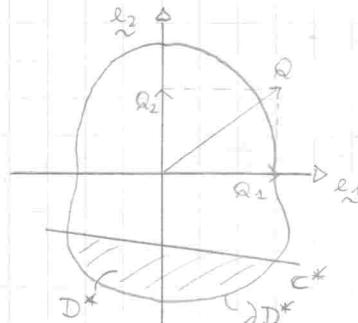
G' IMPLICA QUINDI UNO STATO DI TENSIONE TANGENZIALE  $\tau(\tilde{x})$  (cioè variabile all'interno DELLA SEZIONE E NON SEZIONE PER SEZIONE)

$$\begin{cases} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\tau} = -\frac{Q_1}{I_2} \alpha_1 - \frac{Q_2}{I_1} \alpha_2 \\ \tilde{\tau} \cdot \hat{m} = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{SIE DERIVATO G'} \\ \text{RISPETTO } \alpha_3 \end{matrix}$$

$$\exists \tilde{\tau} \text{ IMPLICA } \gamma_{13} = \frac{\tau_{13}}{G}, \quad \gamma_{23} = \frac{\tau_{23}}{G}$$

Per determinare  $\tau$  bisogna ricevere l'eq<sup>ne</sup> di congruenza in forma esplicita. che mette in relazione  $\gamma_{13}, \gamma_{23}, E, E_{11}, E_{22}$ . Ma ricevere tale eq<sup>ne</sup> è complicato perciò si RINUNCIA e soddisfare le CONGRUENZA e ai ri occupa di SODDISFARE L'EQUILIBRIO. Le ricerche della soluzione equilibrata si basa:

### → TEORIA DI JOURAWSKY



- Q ASSEGNATA.
- Cerchiamo il VALORE MEDIO delle TENSIONI TANGENZIALI.
- c\* CORDA che TAGLIA la SEZIONE

$$\int_{D^*} \hat{\nabla} \cdot \tilde{\tau} dA = - \int_{D^*} \frac{Q_2}{I_1} \alpha_2 dA - \int_{D^*} \frac{Q_1}{I_2} \alpha_1 dA = - \frac{Q_2}{I_1} S_1^* - \frac{Q_1}{I_2} S_2^* \quad (E)$$

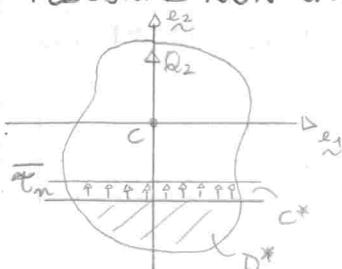
$$\text{Per il th. divergenza di G. Green si ha: } \int_{D^*} \hat{\nabla} \cdot \tilde{\tau} dA = \oint_{\partial D^* + c^*} \tilde{\tau} \cdot \hat{n} ds = 0 \text{ da (D)}$$

$$= \int_{\partial D^*} \tilde{\tau} \cdot \hat{n} ds + \int_{c^*} \tilde{\tau} \cdot \hat{n} ds = \bar{\tau}_m b \quad (F)$$

AVENDO QUI CONSIDERATO  $\bar{\tau}_m$  VALORE MEDIO PER LA LUNGHEZZA DELLA CORDA.  
 $\bar{\tau}_m$  è una ragionevole approssimazione se  $\tau$  non varia in modo significativo

$$(E) = (F) \Rightarrow \bar{\tau}_m = - \frac{Q_2}{I_1} \frac{S_1^*}{b} - \frac{Q_1}{I_2} \frac{S_2^*}{b} \quad (G) \text{ FORMULA DI JOURAWSKY}$$

→ FLESSIONE NON UNIFORME RETTA [ad es.  $Q_1 = 0$ ] → [asse momento || e<sub>1</sub>] COLLINEARE

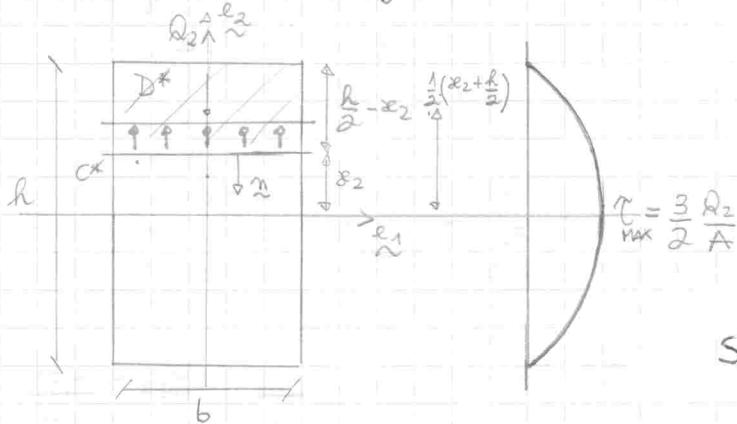


$$(G) = \bar{\tau}_m = - \frac{Q_2}{I_1} \frac{S_1^*}{b}$$

$Q_2$  = taglio lungo l'asse di inflessione

$I_1, S_1^*$  = momento d'inerzia e momento statico rispetto all'asse neutro

→ Sezione Rettangolare ( $b \times h$ ) [ $Q_1=0$ ]



$c^*$  in generico  $x_2$ .

Vogliamo calcolare

$$\bar{T}_m = -\frac{Q_2}{I_1} \frac{S_1^*}{b}$$

$S_1^*$ : si ha  $A = b\left(\frac{h}{2} - x_2\right)$  ed

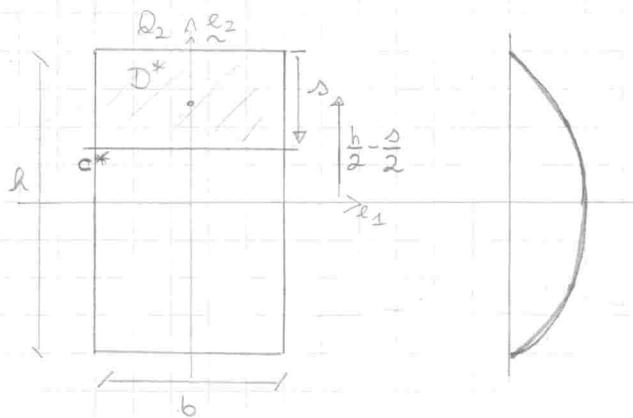
$$\text{il bocentro } D^* \text{ si trova a } \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + x_2\right) \Rightarrow S_1^* = b\left(\frac{h}{2} - x_2\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + x_2\right) = \\ = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - x_2^2\right).$$

$\bar{T}_m$  quindi vale:  $\bar{T}_m = -\frac{Q_2}{2I_1}\left(\frac{h^2}{4} - x_2^2\right)$

$\bar{T}_m$  segue una legge PARABOLICA [è MAX per  $x_2=0$  e MIN per  $x_2=\pm h/2$ ]

OSS: Scelte  $c^*$ ,  $\underline{x}$  è ESTERNA a  $D^*$ .  $\bar{T}_m$  delle legge QUADRATICA risulta sempre NEGATIVA, quindi il flusso è OPPOSTO ad  $\underline{x}$  cioè ENTRANTE

Alternativamente considerando la COORDINATA LOCALE  $s$ :



$A = b s$  il bocentro si trova

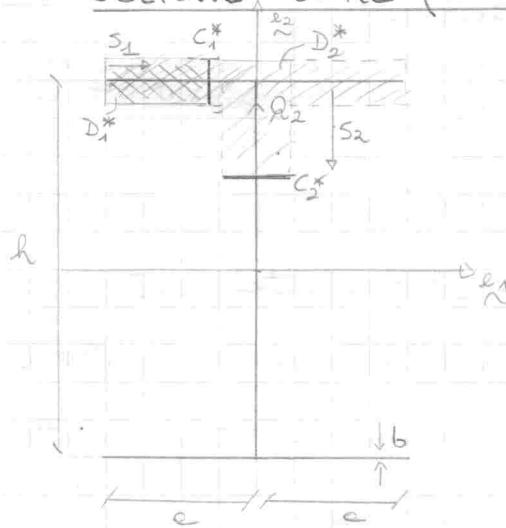
$$- \frac{h}{2} - \frac{s}{2} = 0$$

$$\Rightarrow S_1^* = b s \left(\frac{h}{2} - \frac{s}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{T}_m = -\frac{Q_2}{2I_1} s (h-s)$$

Si ritorna alla LEGGE PARABOLICA  
(con flusso entrante)

→ Sezione Sottile (a doppio t) [ $Q_1=0$ ]



$b$ : spessore linea media

$$\text{Calcoliamo } \bar{T}_m = -\frac{Q_2}{I_1} \frac{S_1^*}{b}$$

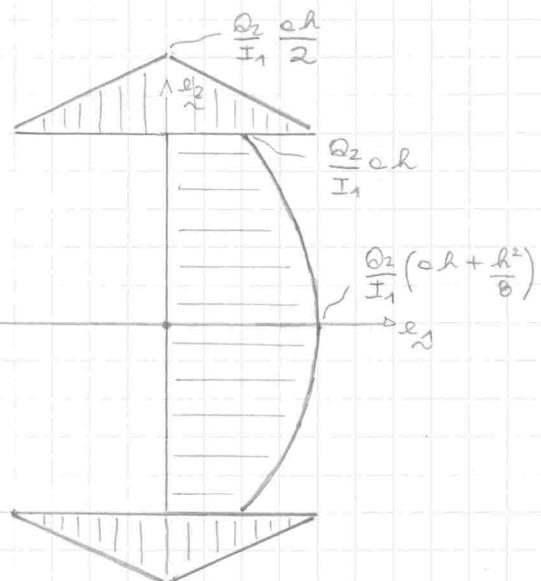
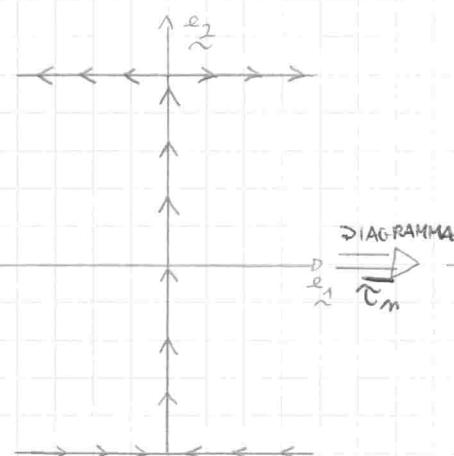
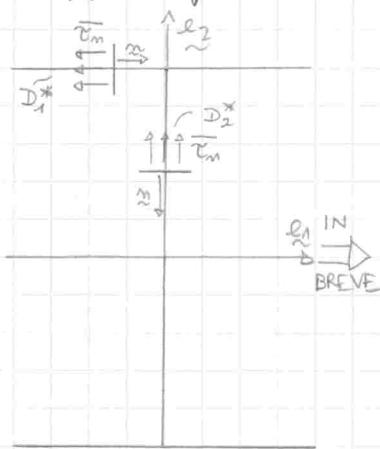
Considero le corde  $C_1^*$  e  $C_2^*$  e introduco le escuse  $s_1, s_2$  per individuarne le posizioni.

Si avrà che  $S_1^*$  sarà

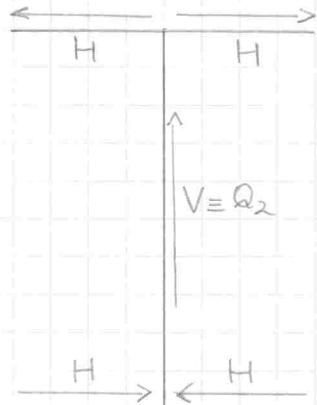
$$S_1^* \begin{cases} b s_1 \frac{h}{2} & 0 \leq s_1 < e \\ b h + b s_2 \left( \frac{h}{2} - \frac{s_2}{2} \right) & 0 \leq s_2 < h \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{MOMENTO STATICO RISPETTO } e_1 \\ \text{DELL'AREA } D_1^* \text{ INDIVIDUATA DA } c_1^* \end{array}$$

$$\Rightarrow \bar{\tau}_m = -\frac{Q_2}{I_1} \begin{cases} s_1 \frac{h}{2} & 0 \leq s_1 < e \\ e h + \frac{s_2}{2} (h - s_2) & 0 \leq s_2 < h \end{cases}$$

$\bar{\tau}_m$  risulta sempre NEGATIVA, quindi il flusso è ENTRANTE [opposto ed  $\vec{n}$ ]. Graficamente:



Calcoliamo le FORZE RISULTANTI date dalle  $\bar{\tau}_m$ : esse sono  $V$  ed  $H$  <sup>SU FLANGIA</sup> <sub>SU ANIMA</sub>



Le  $H$ , a due a due, formano sistemi di forze e brevi nulla e non contribuiscono dunque alla sollecitazione

$$V = \int_0^h \bar{\tau}_m b ds_2 = \int_0^h \frac{Q_2}{I_1} \left[ e h + \frac{s_2}{2} \left( \frac{h}{2} - \frac{s_2}{2} \right) \right] b ds_2 = Q_2$$

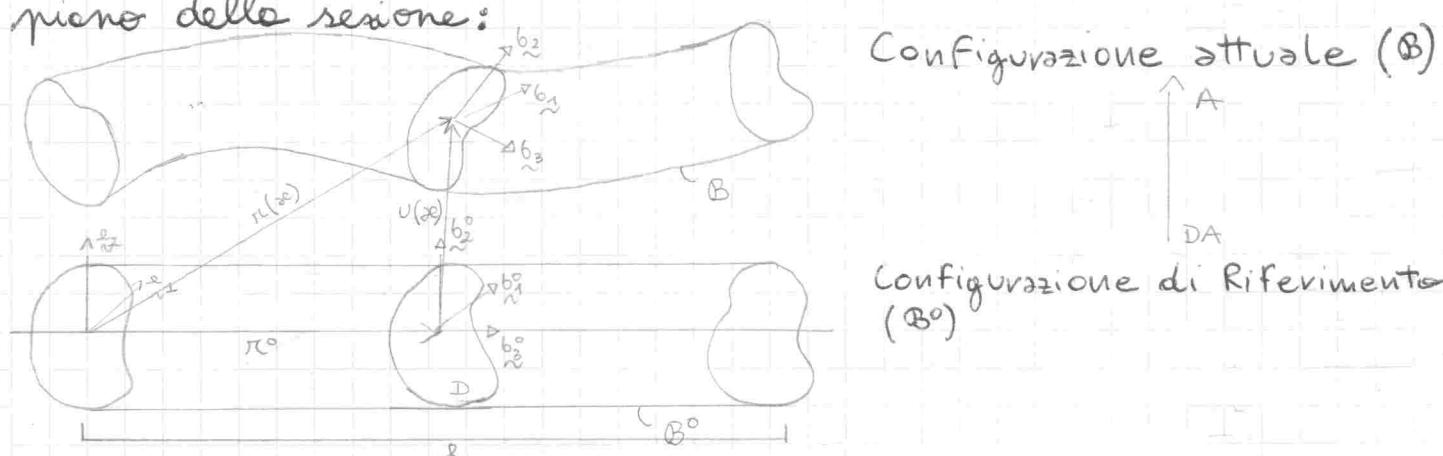
$$H = \int_0^e \bar{\tau}_m b ds_1 = \int_0^e \frac{Q_2}{I_1} s_1 \frac{h}{2} b ds_1 = \frac{Q_2}{I_1} \frac{b h e^2}{4}$$

SI DIMOSTRA

# FORMULARIO 11° SETTIMANA

## • MECCANICA DELLA TRAVE

Basandoci sul modello di DSV si può pensare il solido come una collezione di sezioni rigide trascurando le deformazioni nel piano delle sezioni:



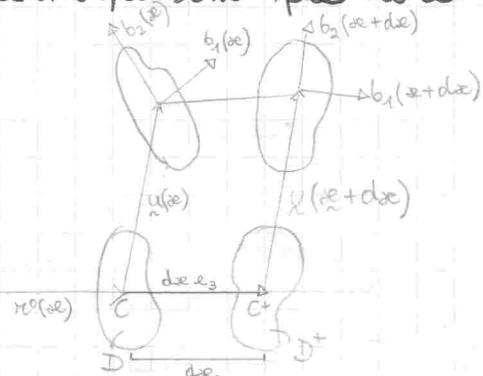
$$B^0 = \{ \tilde{x}^0 = \alpha e_3, (b_1^0, b_2^0), b_3^0 = b_1^0 \times b_2^0, \alpha \in [0, l] \}$$

$$B = \{ \tilde{x}(x) = \tilde{x}^0 + u(x), (b_1(x), b_2(x)), b_3(x) = b_1(x) \times b_2(x), \alpha \in [0, l] \}$$

DESCRITORI CINEMATICI:  $\begin{matrix} u(x) & \text{VETTORE SPOSTAMENTO} \\ \theta(x) & \text{VETT. ROTAZIONE} \\ \text{BARICENTRO} & \text{RIGA INFINITESIMA} \end{matrix}$  [ognuno ha 3 componenti]

## → ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

2 sezioni possono fare loro



$$u(x), \theta(x) \quad D$$

$$u(x+dx), \theta(x+dx) \quad D^+$$

D e D<sup>+</sup> subiscono uno spostamento puramente rigido. Deve essere

$$du^R = \theta \times d\alpha e_3 \quad A$$

IL TRONCO DI CILINDRO SUBISCE  
NOTO ROTOTRASATORIO

$$\epsilon = \frac{du - du^R}{dx} \stackrel{A}{=} \dot{u} - \theta \times e_3 \quad \text{SOSTITUISCO} \quad \text{roderivata}$$

↓ IN COMPONENTI LUNGO  $e_1, e_2, e_3$

$$\epsilon = \epsilon_1 e_1 + \epsilon_2 e_2 + \epsilon_3 e_3 \quad \Rightarrow \quad \text{VETTORE DELLA DEFORMAZIONE} \quad \text{IN COMPONENTI}$$

$$\epsilon_1 = (u_1 - \theta_2) e_1 + (u_2 + \theta_1) e_2 + u_3 e_3$$

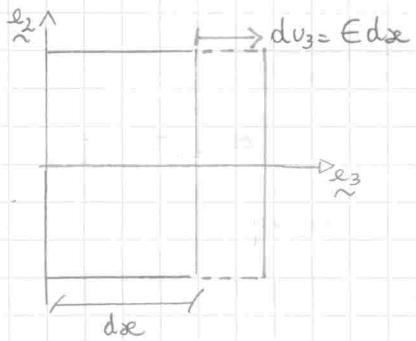
DA CUI EQUAGLIANDO LE COMPONENTI

$$\begin{cases} \epsilon = \epsilon \cdot e_3 \\ \epsilon_1 = \epsilon \cdot e_1 \\ \epsilon_2 = \epsilon \cdot e_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{ELONGAZIONE} \\ \text{SCORRIMENTO ANGOLARE SECONDO } e_1 \\ \text{SCOR. ANG. SECONDO } e_2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \epsilon = u_3 \\ \epsilon_1 = u_1 - \theta_2 \\ \epsilon_2 = u_2 + \theta_1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{DA CUI EQUAGLIANDO LE COMPONENTI} \\ \rightarrow \end{matrix}$$

Studiamo

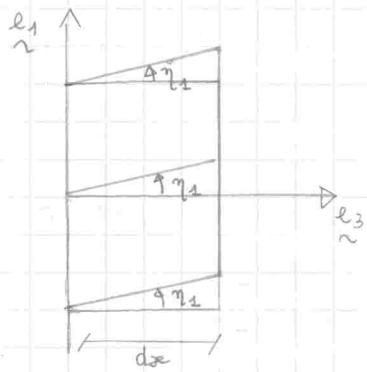
$$A) \epsilon \neq 0, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 0 \quad (\theta_1 = \theta_2 = 0) \quad \text{modo di elongazione}$$



VISTA LATERALE del cencio di trave

$$\epsilon = u_3' \Rightarrow \epsilon = \frac{du_3}{dx} \Rightarrow du_3 = \epsilon dx$$

B)  $\eta_1 \neq 0, \epsilon = \eta_2 = 0 \quad (\theta_1 = \theta_2 = 0)$  Modo di scorrimento angolare secondo  $e_1$



VISTA DALL'ALTO del cencio di trave

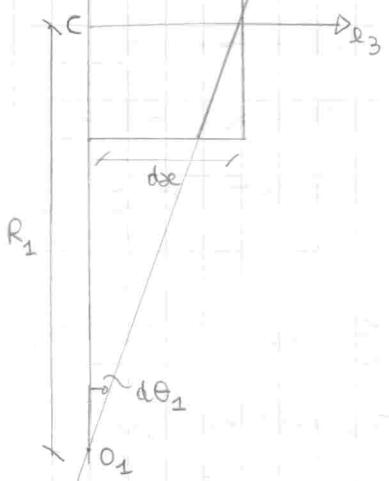
$$\eta_1 = \frac{du_1}{dx} - \theta_2 \Rightarrow du_1 = \eta_1 dx$$

(Simile al caso B) sarà il caso C) dove

$\eta_2 \neq 0, \epsilon = \eta_1 = 0 \quad (\theta_1 = \theta_2 = 0)$  ed il Modo è di scorrimento angolare secondo  $e_2$ )

Introduciamo ora le rotazioni (su una sezione)  $d\theta_1$ :

$$dx = R_1 d\theta_1 \Rightarrow \text{FLESSIONALE INTORNO AD } e_1 \quad \begin{matrix} \text{CURVATURA} \\ \text{DEFINIZIONE CURVATURA} \\ \text{DA RELAZIONE PRECEDENTE} \end{matrix}$$



Analogamente se considerarsi una rotazione  $d\theta_2$ :

$$\mu_2 = \frac{d\theta_2}{dx} = \theta_2' \quad \textcircled{C}$$

Ed ancora se considerarsi una rotazione  $d\theta_3$ :

$$\mu_3 = \frac{d\theta_3}{dx} = \theta_3' \quad \textcircled{D}$$

Si evince da B, C, D che  $\mu = \frac{d\theta}{dx} = \theta'$ , in componenti:

$$\mu = \mu_1 \tilde{e}_1 + \mu_2 \tilde{e}_2 + \mu_3 \tilde{e}_3 = \theta' = \theta_1' \tilde{e}_1 + \theta_2' \tilde{e}_2 + \theta_3' \tilde{e}_3$$

CURVATURA ELASTICA DELLA TRAVE

→ Equazioni di congruenza in forma implicita

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon = u_3 \\ \eta_1 = u_1 - \theta_2 \\ \eta_2 = u_2 + \theta_1 \\ \mu_1 = \theta_1' \\ \mu_2 = \theta_2' \\ \mu_3 = \theta_3' \end{array} \right\} \text{ode B}$$

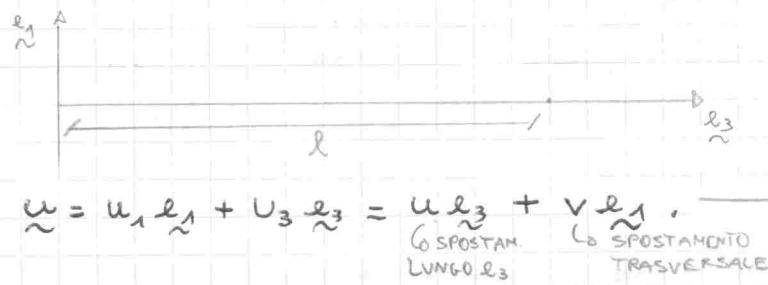
Rappresentano  $6^6$  modi di deformazione delle trave e legano le deformazioni agli spostamenti.

CONDIZIONI AL CONTORNO DI TIPO GEOMETRICO:

CON NASCOSTO DAL FATO CHE SULLE BASI È POSSIBILE, CON VINCOLI, DESCRIVERE L'ASSETTO DELLE SEZIONI.

$\tilde{u} = \bar{u}$	$x = 0, l$
$\tilde{\theta} = \bar{\theta}$	$x = 0, l$

Consideriamo il PROBLEMA PIANO: (in  $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1$ ) → SPOSTAMENTI LUNGO  $\mathbf{e}_3$ , ROTAZIONI ATTORNO  $\mathbf{e}_2$ .



Ipotizzando  $u_2 = 0, \theta_1 = \theta_3 = 0,$

$\theta_2 \neq 0 = \Theta$  si avrà:

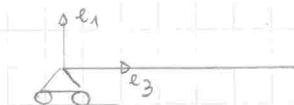
→ 3 PARAMETRI CINEMATICI (IN 2D:  $u, v, \Theta$ )  
 - IN 3D I PARAM. CINEM. SONO 6 -

[2] diviene: 
$$\begin{cases} E = u \\ \eta = v' - \Theta \\ \mu = \Theta' \end{cases}$$

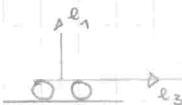
mentre le CONDIZIONI AL CONTORNO (di tipo geometrico) o CONDIZIONI DI VINCOLO

saranno:

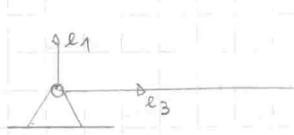
(DOVE I VINCOLI SONO APPLICATI AD UNA SEZIONE DESTREMITÀ DELLA TRAVE)



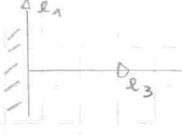
$$v(0) = 0$$



$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ \theta(0) = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ v(0) = 0 \\ \theta(0) = 0 \end{cases}$$

PER SOLIDI MONODIMENSIONALI

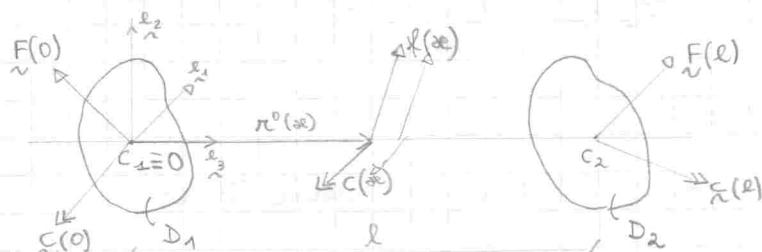
→ Il modello riportato di sopra è detto MODELLO DI TRAVE DI TIMOSHENKO.

Se consideriamo travi obbiezioni SNELLE, proprio per queste peculiarità, si possono trascurare gli scorrimenti angolari. In tal modo si annullano le deformazioni di taglio e le sezioni potranno solo ruotare e traslare ⇒ con tale ipotesi si introduce il MODELLO DI EULERO-BERNOULLI: (nel problema piano)

$\eta = 0$  (per ipotesi) e da (E) si ha  $\Theta = v'$  che in (F) dà:

$\mu = v''$  cioè la già nota RELAZIONE CURVATURA-SPOSTAMENTO ottenuta dall'analisi cinematica della flessione retta.

### EQUILIBRIO DELLA TRAVE



IPOTESI:

1) Sono NOTE le risultanti delle forze applicate alle BASI

2) Il solido sopporta forze che, ridotte alle linee d'asse, si traducono in densità lineare di forze e coppie.

CONDIZIONE NECESSARIA per l'equilibrio:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(0) + \int_0^l \mathbf{f}(x) dx + F(l) = 0 \\ C(0) + \int_0^l \pi^o(x) \times \mathbf{f}(x) dx + \int_0^l c(x) dx + l e_3 \times F(l) + c(l) = 0 \end{array} \right.$$

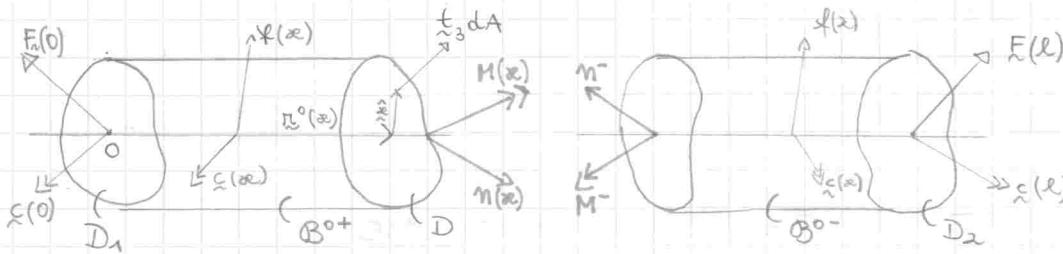
FORZA RISULTANTE  
NULLA

B

MOMENTO  
RISPETTO O

HOMENTO  
RISULTANTE  
NULLO

→ Consideriamo una generica sezione del cilindro che divide il cilindro stesso in 2 tronchi:



Si ha:  $n(x) = \int_D t_3 dA$  AZIONE DI CONTATTO e  $M(x) = \int_D \hat{x} \times t_3 dA$  COPPIA DI CONTATTO

ANALOGAMENTE SI TROVANO  $n^-, m^-$

C.N. per l'equilibrio  $\Rightarrow$

SU  $D^{0+}$   $\left\{ \begin{array}{l} F(0) + \int_0^x \mathbf{f}(s) ds + n(x) = 0 \\ C(0) + \int_0^x \pi^o(s) \times \mathbf{f}(s) ds + \int_0^x c(s) ds + \hat{x} e_3 \times n(x) + M(x) = 0 \end{array} \right.$

FORZA RISULT

4

SU  $D^{0-}$   $\left\{ \begin{array}{l} n^- + \int_x^l \mathbf{f}(s) ds + F(l) = 0 \\ \hat{x} e_3 \times n^- + M^- + \int_x^l \pi^o(s) \times \mathbf{f}(s) ds + \int_x^l c(s) ds + l e_3 \times F(l) + c(l) = 0 \end{array} \right.$

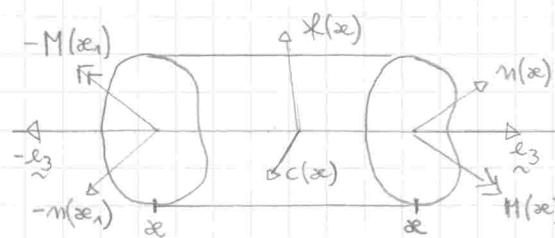
FORZA RISULT

5

Sommendo  $4 + 5$  e tenendo conto di  $3$  si ha  $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{n}(x) = -n(x) \\ \tilde{M}(x) = -M(x) \end{array} \right.$

MOM RISULT.  
RISPETTO O

→ Consideriamo ora un generico concio della trave:



Studiomone l'equilibrio: (in  $[x_1, x]$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} -M(x_1) + M(x) + \int_{x_1}^x \mathbf{f}(s) ds = 0 \\ -M(x_1) + M(x) + \int_{x_1}^x \pi^o(s) \times \mathbf{f}(s) ds + \int_{x_1}^x c(s) ds - \pi^o(x_1) \times n(x_1) + \pi^o(x) \times n(x) = 0 \end{array} \right.$$

6

$6$  è verificato  $\Leftrightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} n + \mathbf{f} = 0 \\ M + \hat{x}_3 \times n + c = 0 \end{array} \right.$

(utilizzando  $n = -\tilde{n}$ ;  $M = -\tilde{M}$ )

1° EQNE EQ. BRIO INDEFINITO  $\Rightarrow$   
2° EQNE EQ. BRIO INDEFINITO

$\Rightarrow$  scritte in FORMA SCALARE: (con  $n = N \tilde{e}_3 + Q_1 \tilde{e}_1 + Q_2 \tilde{e}_2$ ,  $\pi_{\infty}^0 = (\tilde{x} \tilde{e}_3) \dot{\tilde{e}}_3 = \tilde{e}_3$ ,  $M = T \tilde{e}_3 + M_1 \tilde{e}_1 + M_2 \tilde{e}_2$ ,  $f = f_1 \tilde{e}_1 + f_2 \tilde{e}_2 + f_3 \tilde{e}_3$ ,  $c = c_1 \tilde{e}_1 + c_2 \tilde{e}_2 + c_3 \tilde{e}_3$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} N' + f_3 = 0 \\ Q_1' + f_1 = 0 \\ Q_2' + f_2 = 0 \\ M_1' - Q_2 + c_1 = 0 \\ M_2 + Q_1 + c_2 = 0 \\ T' + c_3 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} PN \\ PF \\ PT \end{array}$$

PN = PROBLEMA LONGITUDINALE

PF = PROBLEMA FLESSIONALE (o trasversale)

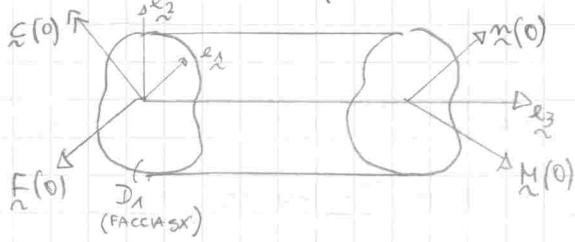
PT = PROBLEMA TORSIONALE

6 equazioni di equilibrio indefinite

Affinché queste 6 equazioni siano C. NECESSARIA e SUFFICIENTE per l'equilibrio bisogna corredarle con 6 condizioni al contorno.

## FORMULARIO 12<sup>e</sup> SETTIMANA

→ Analisi dell'equilibrio al contorno (per le basi SX e DX)

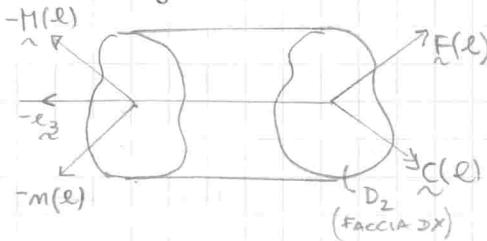


$$\begin{cases} \underline{n}(0) + \underline{F}(0) = 0 & \text{Equazioni di equilibrio} \\ \underline{M}(0) + \underline{C}(0) = 0 & \text{al contorno} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  scritte SCARLAMENTE (con  $\underline{n}(0) = N(0)\underline{e}_3 + Q_1(0)\underline{e}_1 + Q_2(0)\underline{e}_2$ ,  $\underline{M}(0) = T(0)\underline{e}_3 + M_1(0)\underline{e}_1 + M_2(0)\underline{e}_2$ ,  $\underline{F}(0) = F_1(0)\underline{e}_1 + F_2(0)\underline{e}_2 + F_3(0)\underline{e}_3$ ,  $\underline{C}(0) = C_1(0)\underline{e}_1 + C_2(0)\underline{e}_2 + C_3(0)\underline{e}_3$ )

$$\begin{cases} N(0) = -F_3(0) & \text{EQUAZIONI} \\ Q_1(0) = -F_1(0) & \text{di} \\ Q_2(0) = -F_2(0) & \text{equilibrio} \\ T(0) = -C_3(0) & \text{al} \\ M_1(0) = -C_1(0) & \text{contorno} \\ M_2(0) = -C_2(0) & \end{cases}$$

• Analogamente se considerassi



$$\text{avrei } \begin{cases} -n(l) + F(l) = 0 & \text{Equazioni di} \\ -M(l) + C(l) = 0 & \text{equilibrio} \end{cases} \Rightarrow \text{al contorno}$$

$\Rightarrow$  che scritte SCARLAMENTE:

$$\begin{cases} N(l) = F_3(l) & \text{EQUAZIONI} \\ Q_1(l) = F_1(l) & \text{di} \\ Q_2(l) = F_2(l) & \text{equilibrio} \\ T(l) = C_3(l) & \text{al} \\ M_1(l) = C_1(l) & \text{contorno} \\ M_2(l) = C_2(l) & \end{cases}$$

→ Abbiamo finalmente corredato le 6 eq<sup>ni</sup> di eq<sup>brio</sup> indefinite con le 6 condizioni al contorno.

- Integrando le 6 equazioni di equilibrio indefinito ottengo gli andamenti di  $N, Q_1, Q_2, M_1, M_2, T$  ognuno c' meno di una costante, per un totale di 6 costanti. Tali costanti si determinano per mezzo delle condizioni al contorno. [PN → 1 COST; PF → 4 COST; PT → 1 COST] Le condizioni al contorno devono comunque essere riportate in modo opportuno:

1 imposta su N

4 imposte su  $Q_1, M_1, M_2, Q_2$

1 imposta su T

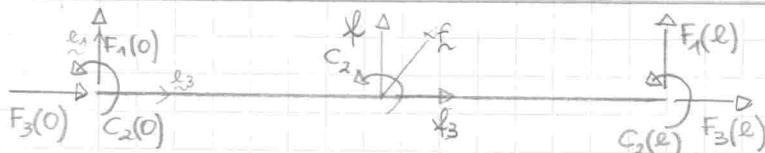
A)  $m=6$  [<sup>m ripartita come in</sup> schema ]  $\Rightarrow$  TRAVE STATICAMENTE DETERMINATA (ISOSTATICA)

B)  $m=6$  [<sup>m NON ripartita come in</sup> schema ]  $\Rightarrow$  TRAVE STATICAMENTE DEGENERE (NON ISOSTATICA)

C)  $m > 6 \Rightarrow$  TRAVE STATICAMENTE INDETERMINATA (IPERSTATICA)

D)  $m < 6 \Rightarrow$  TRAVE STATICAMENTE IMPOSSIBILE (LABILE)

### • PROBLEMA STATICO DELLA TRAVE [prod. piano in $e_3, e_1$ ]



DO REACTIONS (dei vincoli) O APPLICATE

• Sono NOTE le forze ai bordi

• Lungo la trave si hanno  $f$  distribuite

Le equazioni di equilibrio indefinito sono: CON  $Q_1 = Q$ ,  $M_2 = M$ ,  $C_2 = C$  delle 6 delle 6  
equilibrio  
indefinite

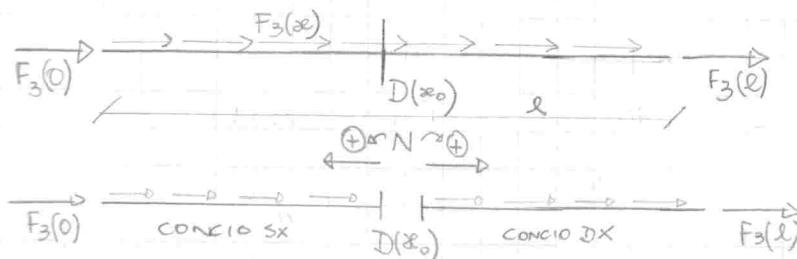
$$\begin{cases} N' + f_3 = 0 & \text{P.N.} \\ Q' + f = 0 & \text{P.F.} \\ M' + Q + C = 0 & \text{C} \end{cases}$$

a cui  
essociamo  
le 6 condizioni  
al contorno:-

$$\begin{aligned} N(0) &= -F_3(0) & Q(l) &= F_1(l) \\ N(l) &= F_3(l) & M(0) &= -C_2(0) \\ Q(0) &= -F_1(l) & M(l) &= C_2(l) \end{aligned}$$

L'obiettivo è determinare l'ANDAMENTO DI  $N, Q, M$ .

→ Studiamo P.N.



Considerando i due sotto-  
mini  $[0, x_0], [x_0, l]$   
delle trave

In  $[0, x_0]$  si ha, sì con l'opportuna condizione al contorno:

$$N(x_0) = N(0) - \int_0^{x_0} f_3 dx = -F_3(0) - \int_0^{x_0} f_3 dx \quad \text{D}$$

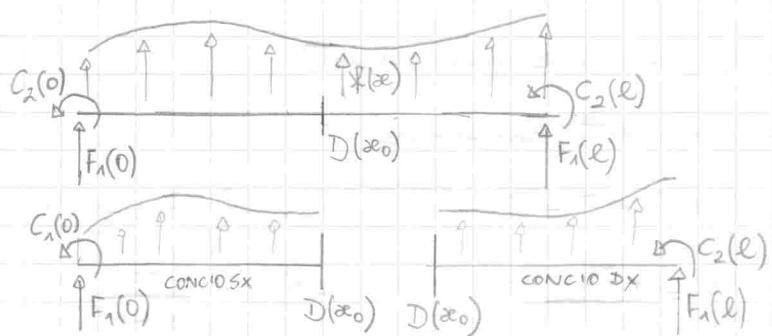
Analogamente in  $[x_0, l]$ :  $N(x_0) = F_3(l) + \int_{x_0}^l f_3 dx \quad \text{E}$

Dal D si ha che nel concio di trave SX  $N(x_0)$  è POSITIVO se  $\leftarrow$

Dal E si ha che nel concio di trave DX  $N(x_0)$  è POSITIVO se  $\rightarrow$

⇒ in breve  $\leftarrow \boxed{\phantom{0}} \rightarrow$

→ Studiamo P.F.



Separando le trave in due sottodomini  $[0, x_0], [x_0, l]$

In  $[0, x_0]$ ,  $\textcircled{B}$  e con l'opportuna condizione al contorno:

$$Q(x_0) = Q(0) - \int_0^{x_0} f dx = -F_1(0) - \int_0^{x_0} f dx \quad \textcircled{F}$$

Analogamente in  $[x_0, l]$ :  $Q(x_0) = Q(l) + \int_{x_0}^l f dx = F_1(l) + \int_{x_0}^l f dx \quad \textcircled{G}$

Da  $\textcircled{F}$  si ha che nel concio di trave SX le forze trasversali sono  $+$  re

Da  $\textcircled{G}$  si ha che nel concio di trave DX le forze trasversali sono  $+$  re

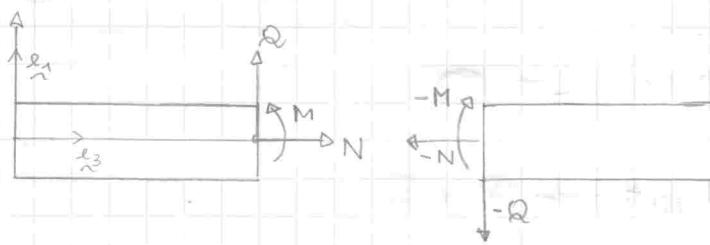
In  $[0, x_0]$   $\textcircled{C}$  e con le opportune condizioni al contorno:

$$M(x_0) = -C_2(0) + x_0 F_1(0) + \int_0^{x_0} (x_0 - x) f dx - \int_0^{x_0} c dx \quad \textcircled{H}$$

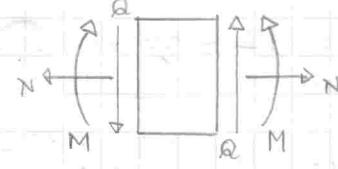
Da  $\textcircled{H}$  si ha che  $M(x_0)$  è POSITIVO se le forze  $\uparrow$  e le coppie  $\curvearrowleft$  orarie

In  $[x_0, l]$  per analogie si prova che  $M(x_0)$  è POSITIVO se le forze  $\uparrow$  e le coppie  $\curvearrowright$  antiorarie.

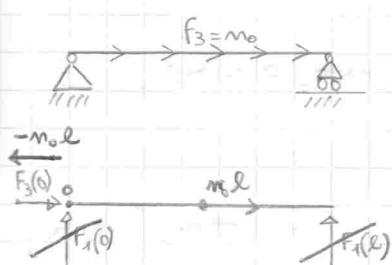
→ Riassumendo, lo STATO POSITIVO di sollecitazione sulla sezione  $D(x_0)$  è:



per un  
trancio  
infinitesimo

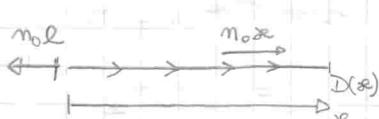


esempio P.N.

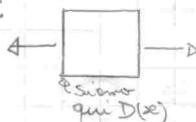


- Le trave è globalmente isostatica ( $m=3$ , corallo + cerniere)
- Studio equilibrio globale delle trave:

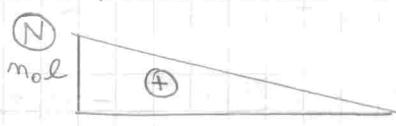
$$\begin{aligned} & F_3(0) + m_0 l = 0 \quad \text{e } F_1(0) + F_1(l) = 0 \\ & \text{momenti rispetto } \textcircled{o}: F_1(l) \cdot l = 0 \end{aligned}$$



MEMO:

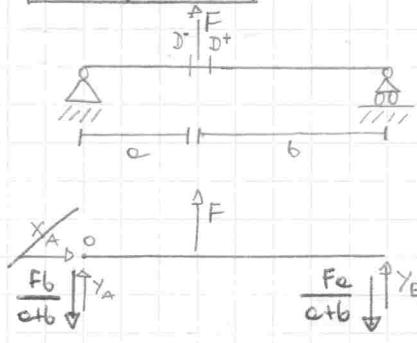


- Studio N in un tratto di trave (SX o DX)
- $$N(x) = m_0 l - m_0 x \quad \text{da cui il diagramma:}$$



[Si perviene allo stesso risultato  
chiudendo il tratto di DX]

### esempio P.F.

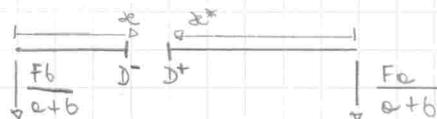


Procedimento come esempio precedente

1) Se trova è globalmente ISOSTATICA

$$2) \quad \text{e} X_A = 0 \quad \text{e} Y_A + Y_B + F = 0 \quad \text{HOM RISPEZIO} \quad Y_B(a+b) + F_b = 0 \\ Y_A = \frac{-Fb}{a+b} \quad (\text{sottrattando } \sim) \quad Y_B = \frac{-Fa}{a+b}$$

3) Studia Q, M in D^- e D^+

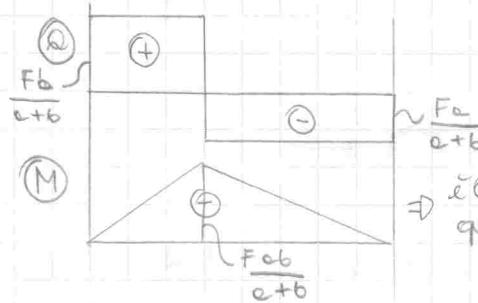


MEMO: in DX:  $\rightarrow Q(x) = \frac{Fb}{a+b}$   
 $M(x) = \frac{-Fb}{a+b} x$

in SX:  $\rightarrow Q(x^*) = \frac{-Fa}{a+b}$

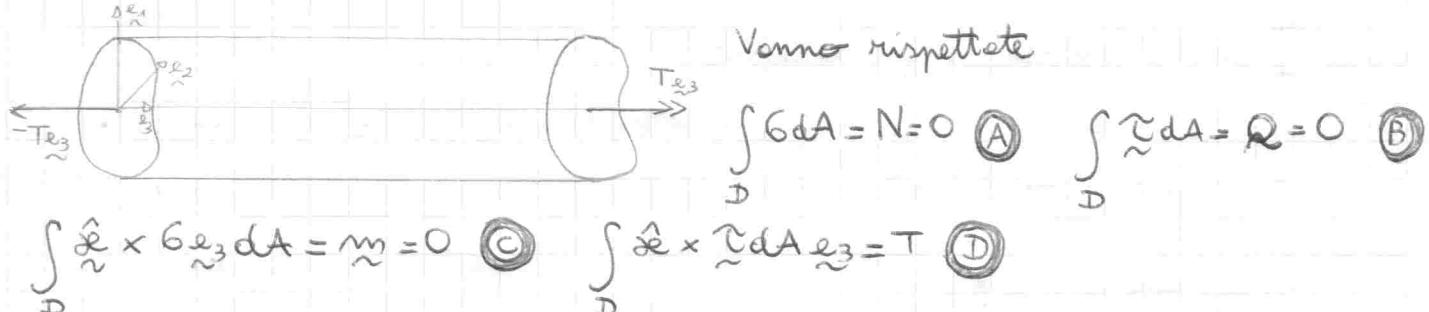
$\rightarrow M(x^*) = \frac{-Fa}{a+b} x^*$

de  $Q(x)$ ,  $Q(x^*)$ ,  $M(x)$ ,  $M(x^*)$  si hanno i diagrammi:



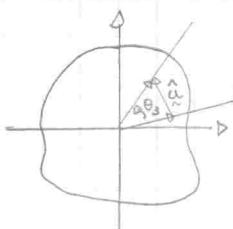
$\Rightarrow$  le fibre terne sono quelle superiori

• TORSIONE UNIFORME  $T \neq 0$  [ $m=0$ ,  $\alpha=0$ ,  $N=0$ ]



IPOTESI DI LAVORO  $\begin{cases} G = 0 & \rightarrow \text{Rispettiamo } \textcircled{A} \text{ e } \textcircled{C} \\ \tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\hat{\tau}) \end{cases}$

Inoltre si ha:



- Le sezioni subiscono SOLO una ROTAZIONE RIGIDA; cioè

$$\mu_3 = \theta_3 \stackrel{\text{S' INBENDO ROTAZIONE}}{\Rightarrow} \theta_3 = \mu_3 \hat{\tau}_3 \quad \textcircled{E}$$

- Le sezioni si INGOBBANO subendo uno spostamento fuori del piano seguendo la funzione di ingombro  $u_3(\hat{\tau})$

$$\rightarrow \hat{u} = \tilde{\tau} \times \hat{\tau} = \theta_3 \hat{\tau}_1 \hat{\tau}_2 - \theta_3 \hat{\tau}_2 \hat{\tau}_1 \stackrel{\textcircled{E}}{\Rightarrow} u_1 = -\mu_3 \hat{\tau}_3 \hat{\tau}_2; u_2 = \mu_3 \hat{\tau}_3 \hat{\tau}_1$$

Da  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3(\hat{\tau})$  si hanno i seguenti movimenti angolari:

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial \hat{\tau}_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \hat{\tau}_3} = -\mu_3 \hat{\tau}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial \hat{\tau}_1} \quad \textcircled{F} \quad \gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial \hat{\tau}_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \hat{\tau}_2} = \mu_3 \hat{\tau}_1 + \frac{\partial u_3}{\partial \hat{\tau}_2} \quad \textcircled{G}$$

$\textcircled{F}$  e  $\textcircled{G}$  ri legano attraverso le equazioni di congruenza in forma esplicita:

$$\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} = -2\mu_3 \Rightarrow \text{tenendo conto } \gamma_{13} = \frac{\tau_{13}}{G} \quad \gamma_{23} = \frac{\tau_{23}}{G} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_1} = -2G\mu_3 \\ \nabla^2 \tau = -6 = 0 \end{array} \right. \text{ } \textcircled{G}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \tau = -6 = 0 \rightsquigarrow \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} = 0 \text{ } \textcircled{H} \text{ } \text{eqne di eq brie indefinito} \\ \tau \hat{w} = 0 \text{ su } \partial D \text{ } \textcircled{I} \text{ } \text{eqne eq brie al centro} \end{array} \right.$$

EQUAZIONI  
DEL  
CAMPO  
 $\tau$

1

$\textcircled{G}$  è soddisfatta se  $\nabla^2 \psi = -2$

$\textcircled{H}$  " " " "  $\tau_{13} = G\mu_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$  e  $\tau_{23} = G\mu_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_1}$

$\textcircled{I}$  " " " "  $\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0$   $\underset{s}{\textcircled{S}}$

dove  $\psi$  funzione  
che deve rispettare  
tali condizioni  
( $\psi$  è incognita detta  
funzione di Prandtl)

e quindi  $\boxed{1}$  si trasforma nel problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \psi = -2 \text{ su } D \text{ } \text{EQNE DI POSSON} \\ \psi = 0 \text{ su } \partial D \text{ } \rightsquigarrow \text{CONDIZIONE DI DIRICHLET} \end{array} \right. \rightsquigarrow \text{proviene da } \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0 \text{ se } \psi \text{ è monotonica}$$

$\rightarrow$  Da  $\textcircled{D}$  ricaviamo  $\mu$  (dove in  $\textcircled{D}$  sostituiamo  $\tau_{13}/\tau_{23}$  ottenuti rispettando  $\textcircled{H}$ )

$$G\mu_3 2 \int_D \psi dA = T \Rightarrow \mu_3 = \frac{T}{GJ} \underset{\substack{\text{IND J} \\ \text{INERZIA} \\ \text{TORSIONALE}}}{\sim} \text{RIGIDEZZA} \underset{\substack{\text{TORSIONALE}}}{\sim}$$

ed ora sostituendo  $\mu_3$  in  $\tau_{13}/\tau_{23}$  si ha  $\tau_{13} = \frac{T}{J} \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$ ;  $\tau_{23} = -\frac{T}{J} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}$

### Problema Sezione Rettangolare



$$\frac{a}{b} \gg 1 \quad \text{Se soddisfatta: } \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \psi = -2 \text{ } D \\ \psi = 0 \text{ } \partial D \end{array} \right.$$

$\psi$  sarà necessariamente quadratica in  $x_2$ :  $\psi = c \left( \frac{b^2}{4} - x_2^2 \right)$ . Deve volere

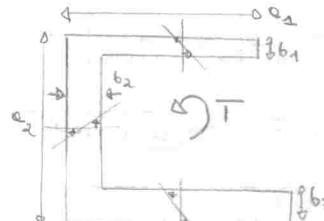
$$\nabla^2 \psi = -2c = -2 \Rightarrow c = 1 \text{ per cui } \psi = \frac{b^2}{4} - x_2^2 \text{ FUNZIONE DI PRANDTL}$$

Note  $\psi$ , calcoliamo  $J = 2 \int_D \psi dA = \frac{ab^3}{3}$ . Note  $\psi$  e  $J$  calcoliamo  $\tau_{13}$  e  $\tau_{23}$

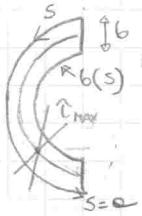
$$\tau_{13} = -2 \frac{T}{J} x_2; \quad \tau_{23} = -\frac{T}{J} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0. \quad \text{Inoltre } \tau_{\max} = \frac{Tb}{J} = \frac{3T}{ab^2}$$

$\rightarrow$  Composizione di sezioni rettangolari

$$\tau_{\max}^{(k)} = \frac{T}{J} b_k \underset{\substack{\text{SPESSEZZO} \\ \text{MAX}}}{\sim} \text{dove } J = \sum_k \frac{1}{3} a_k b_k^3$$



## Problema Sezione Curvilinea

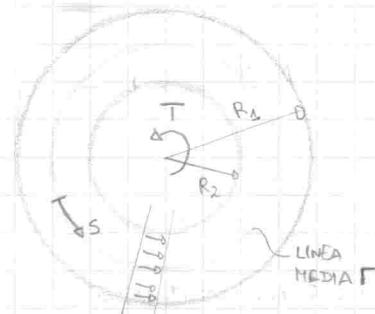


$$\bar{t}_{\max} = \frac{T}{J}$$

$$J = \frac{1}{3} \int_0^e b^3(s) ds$$

CI SI È BASATI SUL  
PROBLEMA SEZIONE  
RETTOANGOLARE

## Problema Parete Sottile Chiusa



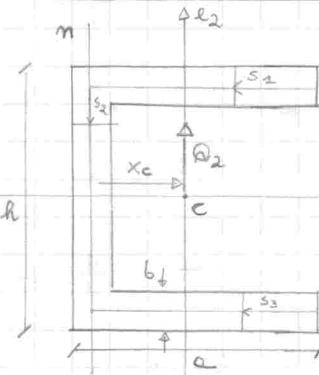
$$\bar{t} = \frac{T}{2\Omega b(s)}$$

FORMULA DI  
BREDT

$\Omega$  = AREA RACCHIUSA  
DALLA LINEA MEDIA  $\Gamma$

N.B. Le sezioni CHIUSE sopportano coppie torcenti più elevate rispetto alle corrispondenti sezioni aperte

## Problema di TAGLIO ( $Q_2 \neq 0, Q_1 = 0$ )



• Vale la formula di JOURAWSKY:  $\bar{t}_n = -\frac{Q_2}{I_1} \frac{s_1^*}{b}$

• Considerare l'asse n:

DONATO  
ALLE  
FLANGE

$$S_m = ab \cdot \frac{e}{2} \cdot 2 = a^2 b$$

$$A = 2ab + hb$$

$$\Rightarrow e_c = \frac{S_m}{A} = \frac{a^2}{2e + h}$$

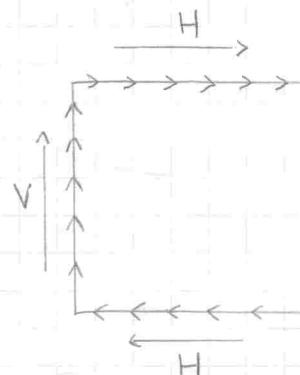
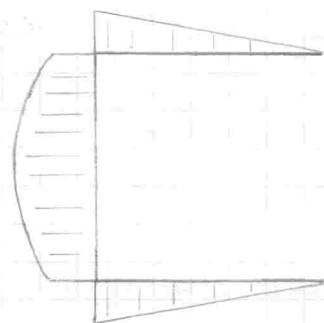
• Calcoliamo ora  $s_1^*$  ed in seguito  $\bar{t}_n$

$$s_1^* \begin{cases} \frac{b s_1 h}{2} & 0 \leq s_1 < e \\ \frac{ab h}{2} + b s_2 \left( \frac{h}{2} - \frac{s_2}{2} \right) & 0 \leq s_2 \leq h \\ -\frac{b s_3 h}{2} & 0 \leq s_3 < e \end{cases}$$

SOTTO ASSE

$$\begin{cases} \frac{b s_1 h}{2} \\ \frac{ab h}{2} + \frac{b s_2 (h - s_2)}{2} \\ -\frac{b s_3 h}{2} \end{cases}$$

• Possiamo ora graficare l'andamento ed il verso (del flusso) di  $\bar{t}_n$



$$\text{con } H = \int_0^e \bar{t}_n b ds_1 = \frac{Q_2}{I_1} \frac{1}{4} b h e^2$$

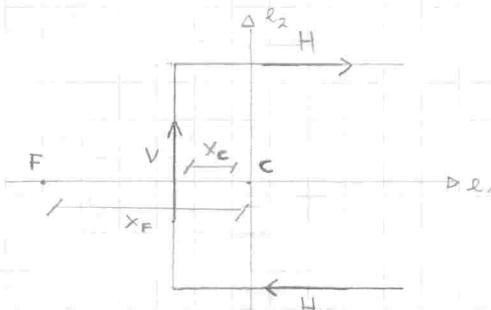
$$H = \int_0^e \bar{t}_n b ds_3 = \frac{Q_2}{I_1} \frac{1}{4} b h e^2$$

$$V = \int_0^h \bar{t}_n b ds_2 = Q_2 \quad \text{SI DIMOSTA} \quad V = Q_2 \text{ Sempre}$$

• Calcoliamo la risultante di  $V, H, H$

Tale risultante è diretta verticalmente e perciò per F. Cerchiamo

F (CENTRO DI TAGLIO)



(F si trova IMPOSANDO che la SOMMA DEI MOMENTI calcolati rispetto F sia nulla:

$$\sum M_F = 0 \text{ ) Alternativamente vale } \alpha_F = \frac{M_c}{F \cdot l_2} \xrightarrow{\substack{\text{MOMENTO RISULTANTE} \\ \text{SISTEMA FORZE RISPETTO C}}} \xrightarrow{\substack{\text{COMPONENTE FORZA RISULTANTE} \\ \text{SECONDO } l_2}}$$

$$M_c = -\frac{Hl}{2} - \frac{Hl}{2} - Q_2 \alpha_c; \quad F \cdot l_2 = Q_2 \Rightarrow \alpha_F = -\left(\frac{1}{4} \frac{6l^2 \alpha^2}{I_1} + \alpha_c\right) = -\left(\frac{Hl}{Q_2} + \alpha_c\right)$$

Si ha che il sistema iniziale è staticamente equivalente



### METODO DEGLI SPOSTAMENTI (per il problema piano)

E.Q.NI EQUILIBRIO

$$N' + F_3 = 0$$

P.N.

$$Q' + F = 0$$

P.F.

$$M' + Q + C = 0$$

E.Q.NI CONGRUENZA

$$\epsilon = \omega$$

P.N.

E.Q.NI LEGAME COSTITUTIVO

$$N = EA\epsilon \quad P.N.$$

$$\gamma = v' - \theta$$

P.F.

$$Q = GA^*$$

P.F.

$$\mu = \theta'$$

$$M = EI\mu$$

$$\boxed{2} \text{ in } \boxed{3} \Rightarrow \begin{cases} N = EA\omega \\ Q = GA^*(v' - \theta) \\ M = EI\theta' \end{cases}$$

$$\text{in } \boxed{1} \Rightarrow \begin{cases} (EA\omega)' + F_3 = 0 \\ [GA^*(v' - \theta)]' + F = 0 \\ (EI\theta')' + GA^*(v' - \theta) + C = 0 \end{cases}$$

NEL  
MODELLO  
DI TRAVE  
DI  
TIMOSHENKO

Banche nel  
MODELLO DI  
EULER  
BERNOULLI

$$\begin{cases} N' + F_3 = 0 \\ Q' + F = 0 \\ M' + Q + C = 0 \end{cases}$$

DERIVAZIONE  
VOLTE E  
SFRUITO Q'+F=0

$$\begin{cases} N' + F_3 = 0 \\ \text{GIA' USATA} \\ M'' = F - c' \end{cases}$$

SOSTITUENDOCI  
E CON LE  
(IPOTESI DEL  
MODELLO DI E.BER)

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \theta = v' \\ \mu = v'' \end{cases}$$

NEL MOD. DI EULER-BER.

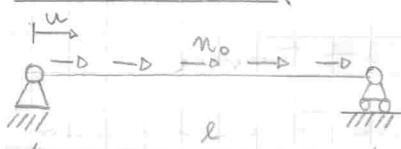
$$\begin{cases} (EA\omega)' + F_3 = 0 \\ P.H. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (EIv'')'' = F - c' \\ P.F. \end{cases}$$

Equazione della linea  
elastica  
(NECESSITA 4 COST DI INTEGRAZIONE)

→ Analisi P.N. e P.F. nel modello di Euler-Bernoulli

Esempio P.N. (Problema longitudinale)



• Si parte da  $(EA\omega)' + F_3 = 0$ . Poiché  $F_3 = m_0$  e  $EA = \text{cost}$   
si ha  $EA\omega'' = m_0$ . Ci servono dunque 2 CONDIZIONI AL CONTORNO

• Le condizioni al contorno sono: in  $\omega = 0$   $u(0) = 0$  (CONDIZIONE AL CONTORNO GEOMETRICA) ed in  $\omega = l$   $EA\omega(l) = 0$

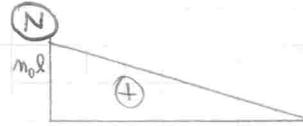
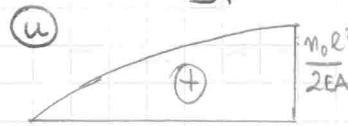
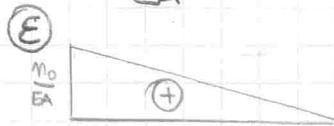
• Da  $EA\omega'' = m_0$  si ha:  $u = -\frac{m_0}{EA} \omega^2 + c_1 \omega + c_2$

Ma le condizioni al contorno ci dicono che  $v(0) = c_2 = 0$  ed

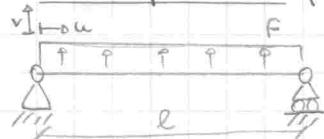
$$EAw(l) = -\frac{m_0}{EA} l + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = m_0 \frac{l}{EA}. \quad \text{Se il campo } u \text{ sarà quindi:}$$

EQ. NE CONGRUENZA  
 $E=u$

$$u = \frac{m_0}{EA} \left( l\alpha - \frac{\alpha^2}{2} \right) \Rightarrow \epsilon = \frac{m_0}{EA} (l-\alpha) \Rightarrow N = m_0 (l-\alpha) \quad \text{grafico del:}$$



### Esempio P.F. (Problema flessionale)



- Si parte da  $(EIv'') = F - c$ . Poiché  $EI = \text{cost}$ ,  $c=0$ ,  $F=F$  si ha  $EI v'' = F$ . Ci servono dunque 4 <sup>CONDIZIONI AL</sup> <sub>CONTORNO</sub>

- Le condizioni al contorno sono: in  $\alpha=0$   $\begin{cases} v(0)=0 \\ M(0)=EIv''(0)=0 \end{cases}$  ed in  $\alpha=l$   $\begin{cases} v(l)=0 \\ M(l)=EIv''(l)=0 \end{cases}$

- Da  $EIv'' = F$  si ha  $v'' = \frac{F}{EI}\alpha + c_1$ ;  $v' = \frac{F}{2EI}\alpha^2 + c_1\alpha + c_2$ ;

$$v' = \frac{F}{6EI}\alpha^3 + c_1\frac{\alpha^2}{2} + c_2\alpha + c_3; \quad v = \frac{F}{24EI}\alpha^4 + c_1\frac{\alpha^3}{6} + c_2\frac{\alpha^2}{2} + c_3\alpha + c_4$$

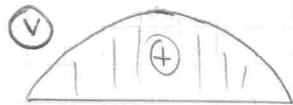
da cui  $v(0)=0 \Rightarrow c_4=0$   $v'(0)=0 \Rightarrow c_2=0$

$$\begin{aligned} v(l)=0 &\Rightarrow \frac{Fl^4}{24EI} + c_1\frac{l^3}{6} + c_3l = 0 \quad \left. \begin{array}{l} c_1 = -\frac{Fl}{2EI}l \\ c_3 = -\frac{Fl^3}{24EI} \end{array} \right\} \quad \text{In definitiva} \\ v'(l)=0 &\Rightarrow \frac{Fl^2}{2EI} + c_1l = 0 \quad \text{la soluzione } v \text{ è:} \end{aligned}$$

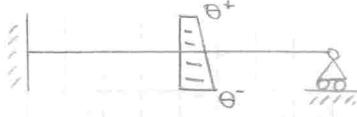
$$v = \frac{Fl}{24EI}\alpha^4 - \frac{Fl}{12EI}\alpha^3 + \frac{Fl}{24EI}\alpha \quad \text{de cui posso ricavare } \Theta, \mu, M_t$$

HOMOGENE  
TORCENTE

dalle relazioni  $\Theta = v'$   $\mu = v''$   $M_t = EI\mu$ . Grafichiamo  $v$ :



### Introduzione del gradiente di temperatura

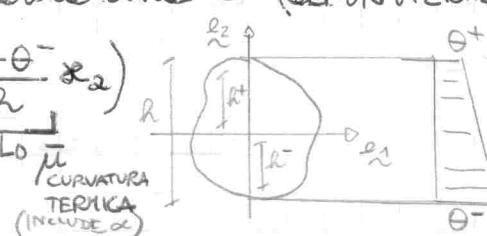


- Le trave è iperstatica quindi gli effetti termici deformereanno flessionalmente la trave e genereranno

uno stato di COAZIONE TERMICA. Si avrà una  $\bar{\epsilon}$  (DEFORMAZIONE TERMICA)

$$\bar{\epsilon} = \alpha_{\text{COEF. DI VARIAZIONE TERMICA}} \theta = \alpha \left( \frac{\theta^+ h^+ + \theta^- h^-}{h} + \frac{\theta^+ - \theta^-}{h} \alpha_x \right)$$

$\theta$  COSTANTE  
 $\alpha$  (INCLUDE  $\alpha$ )



$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_c + \bar{\mu} \alpha_2$$

INTRODUCE IN  
ESERCIZI DI  
LEGAME COSTITUTIVO

$M = EI(\mu - \bar{\mu})$  e quindi il MODELLO DI  
 $N = EA(\epsilon - \bar{\epsilon}_c)$  EULER-BERNOULLI si modifica:

$$\begin{cases} [EA(\omega - \bar{\epsilon}_c)]' + F_3 = 0 \\ [EI(v'' - \bar{\mu})]'' = F - c \end{cases}$$