Polynômes : Cours pour l'agrégation interne

BibMath

1 Généralités

1.1 Définitions

— Un **polynôme** à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est une expression de la forme :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$$

— Le **degré** de P, noté $\deg(P)$, est le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$.

— L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

1.2 Opérations

Pour $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$:

— **Somme** : $(P+Q)(X) = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k$

— **Produit** : $(PQ)(X) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) X^k$

— **Composition** : $(P \circ Q)(X) = P(Q(X))$

2 Division euclidienne

[Division euclidienne] Pour tous $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :

$$A = BQ + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(B)$$

3 Racines et factorisation

3.1 Théorème fondamental

[Théorème de d'Alembert-Gauss] Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

3.2 Factorisation

- Dans $\mathbb{C}[X]$: Tout polynôme P de degré n se factorise en :

$$P(X) = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - z_k)$$

  où $z_1, \ldots, z_n$ sont les racines complexes (comptées avec multiplicité).
- Dans $\mathbb{R}[X]$: La factorisation fait apparaître des termes irréductibles de degré 2 :

$$P(X) = a_n \prod_{i=1}^{p} (X - x_i) \prod_{j=1}^{q} (X^2 + \alpha_j X + \beta_j)$$

  avec $\alpha_j^2 - 4\beta_j < 0$.

4 Relations coefficients-racines

Pour $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 = \prod_{k=1}^{n}(X - z_k)$:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= z_1 + \cdots + z_n = -a_{n-1} \\
\sigma_2 &= \sum_{i<j} z_i z_j = a_{n-2} \\
&\vdots \\
\sigma_n &= z_1 \ldots z_n = (-1)^n a_0
\end{aligned}$$

où σ_k sont les fonctions symétriques élémentaires.

5 Polynômes irréductibles

- Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est **irréductible** s'il n'est pas constant et si ses seuls diviseurs sont les constantes et ses associés.
- Dans $\mathbb{C}[X]$: Les irréductibles sont les polynômes de degré 1.
- Dans $\mathbb{R}[X]$: Les irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racine réelle.

6 Polynômes interpolateurs

[Interpolation de Lagrange] Pour $n+1$ points distincts $(x_i, y_i)_{0 \le i \le n}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que :

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}, P(x_i) = y_i$$

7 Exercices types

1. Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$ si $n \equiv 1$ ou $2 \mod 3$.
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que l'ensemble des racines de P' est inclus dans l'enveloppe convexe des racines de P.