



**ANALYSE DES SIGNAUX ALEATOIRES  
&  
IDENTIFICATION DES SYSTEMES LINEAIRES  
  
EN VIBRATIONS ET ACOUSTIQUE**

F. OLLIVIER  
2013-2014

## Table des Matières

<b><i>Introduction</i></b>	<b>3</b>
<b>1   Caractéristiques moyennes des signaux aléatoires</b>	<b>4</b>
1.1.   Définitions :	4
1.2.   Considérations pratiques, estimation et erreurs de mesure	5
1.3.   Grandeur moyennes	5
1.3.1.   Définition générale	5
1.3.2.   Estimation de la densité de probabilité	6
1.3.3.   Estimation pratique des grandeurs moyennes	7
1.3.4.   Cas particulier des signaux acoustiques et vibratoires	8
<b>2   Fonctions de Corrélation</b>	<b>9</b>
2.1.   Notion de corrélation	9
2.2.   Estimation du degré de corrélation	10
2.3.   Fonctions de corrélation	11
2.3.1.   Définitions	11
2.3.2.   Propriétés	11
2.3.3.   Estimation pratique de la fonction de corrélation	12
<b>3   Densités spectrales de puissance</b>	<b>13</b>
3.1.   Autospectre ou Densité autospectrale de puissance	13
3.1.1.   Définition et propriétés	13
3.1.2.   Autospectre des processus dérivés	14
3.1.3.   Processus à bande limitée	14
3.2.   Interspectre ou densité interspectrale de puissance	18
3.2.1.   Définition et propriétés	18
3.2.2.   Relations interspectres-autospectres	18
3.3.   Estimation pratique des densités spectrales.	19
3.3.1.   Corrélogramme et Périodogramme	20
3.3.2.   Procédure de Blackman-Tukey	21
3.3.3.   Procédure de Bartlett	23
3.3.4.   Procédure de Welch	23
<b>4   Identification des systèmes linéaires</b>	<b>26</b>
4.1.   Relations excitation/réponse pour les systèmes linéaires	26
4.1.1.   Méthode analytique	26
4.1.2.   Identification de la réponse en fréquence	26
4.1.3.   Identification de la réponse impulsionnelle	27
4.1.4.   Relation entre réponse en fréquence et réponse impulsionnelle	27
4.1.5.   Réponse à une excitation arbitraire	28
4.2.   Transmission par les systèmes S.I.S.O.	29
4.2.1.   Transmission des grandeurs statistiques	29
4.2.2.   Effets du bruit de mesure	32
4.2.3.   Estimation de la fonction de transfert	33
<b>Rappels pratiques sur l'analyse des signaux numériques.</b>	<b>36</b>
Paramètres de l'échantillonage	36
Transformée de Fourier Discrète	37

## Introduction

Les phénomènes dynamiques couramment rencontrés en ingénierie sont généralement mesurés sous forme d'amplitude d'une grandeur physique variant en fonction du temps.

Il y a donc deux échelles à considérer :

- **L'amplitude** instantanée du signal peut représenter toute quantité physique :
  - Vibrations : Accélération, Vitesse, (Déplacement), en translation ou rotation, Force
  - Acoustique : Pression, Vitesse.
  - Thermique : Pression, température
- **Le Temps** : l'axe des temps peut être affecté :
  - au temps absolu,
  - au temps relatif,
  - à la position le long d'une trajectoire
  - à une position angulaire (ex : degré vilebrequin sur les moteurs)

Pour certains phénomènes physiques, on peut prédire avec une certaine précision l'évolution temporelle des signaux mesurés. On parle alors de **signaux déterministes**

Il faut pour cela connaître avec une certaine précision la physique qui les régit, ou disposer d'observations antérieures.

Exemples en vibration et acoustique

- Réponse vibratoire d'une poutre à une excitation harmonique,
- Réponse impulsionnelle acoustique d'une salle

Mais les ingénieurs sont le plus souvent confrontés à des signaux dont rien ne peut être dit *a priori* et dont chaque nouvel enregistrement est différent du précédent. On parle alors de **signaux aléatoires**.

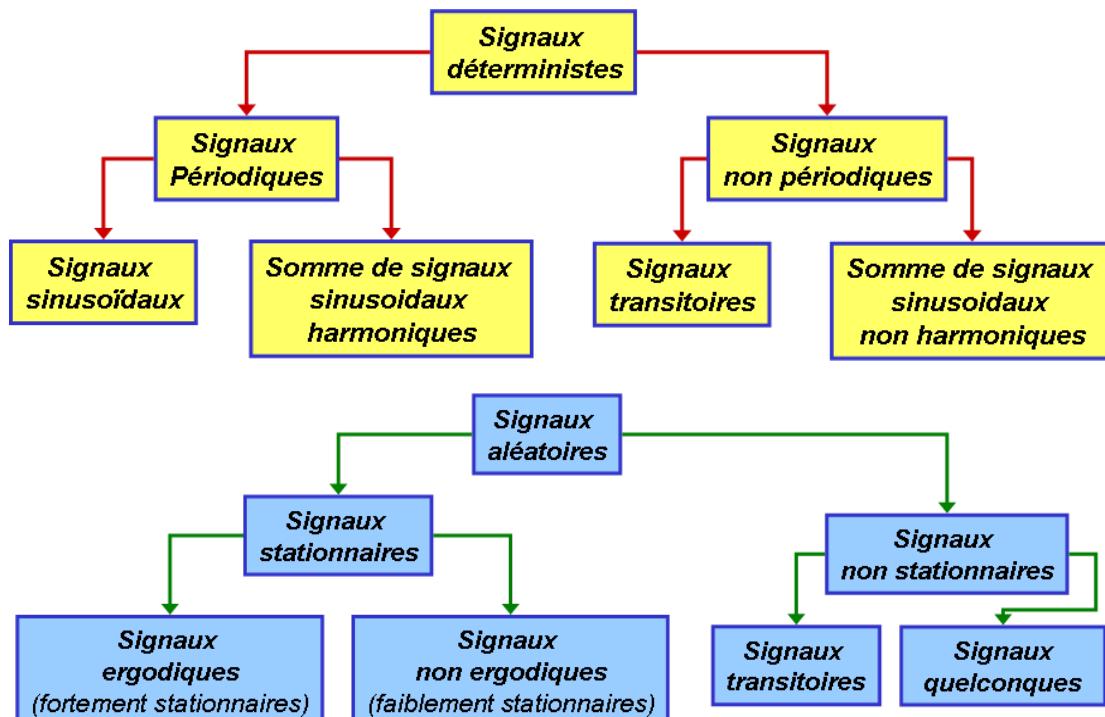


Figure 0-1 : Différentes classes de signaux

L'essentiel de ce cours concerne l'analyse et l'interprétation des signaux aléatoires rencontrés par les ingénieurs en vibration et acoustique.

# 1 Caractéristiques moyennes des signaux aléatoires

## 1.1 Définitions :

**Signal aléatoire :** Un phénomène physique ou processus ou encore le signal  $x(t)$  qui le représente est considéré comme **aléatoire** lorsqu'un enregistrement à venir ne peut pas être prévu, même avec une erreur raisonnable.

**Réalisation :** Pour ce type de signal, un enregistrement unique  $x_i(t)$  pour une expérience donnée représente une seule **réalisation** des développements possibles.

Pour avoir une connaissance complète du phénomène, il faudrait en théorie enregistrer toutes les réalisations possibles.

**Ensemble :** On dit que le processus aléatoire  $\{x(t)\}$  qui décrit le phénomène physique est défini par l'**ensemble** des enregistrements  $x_i(t)$ .

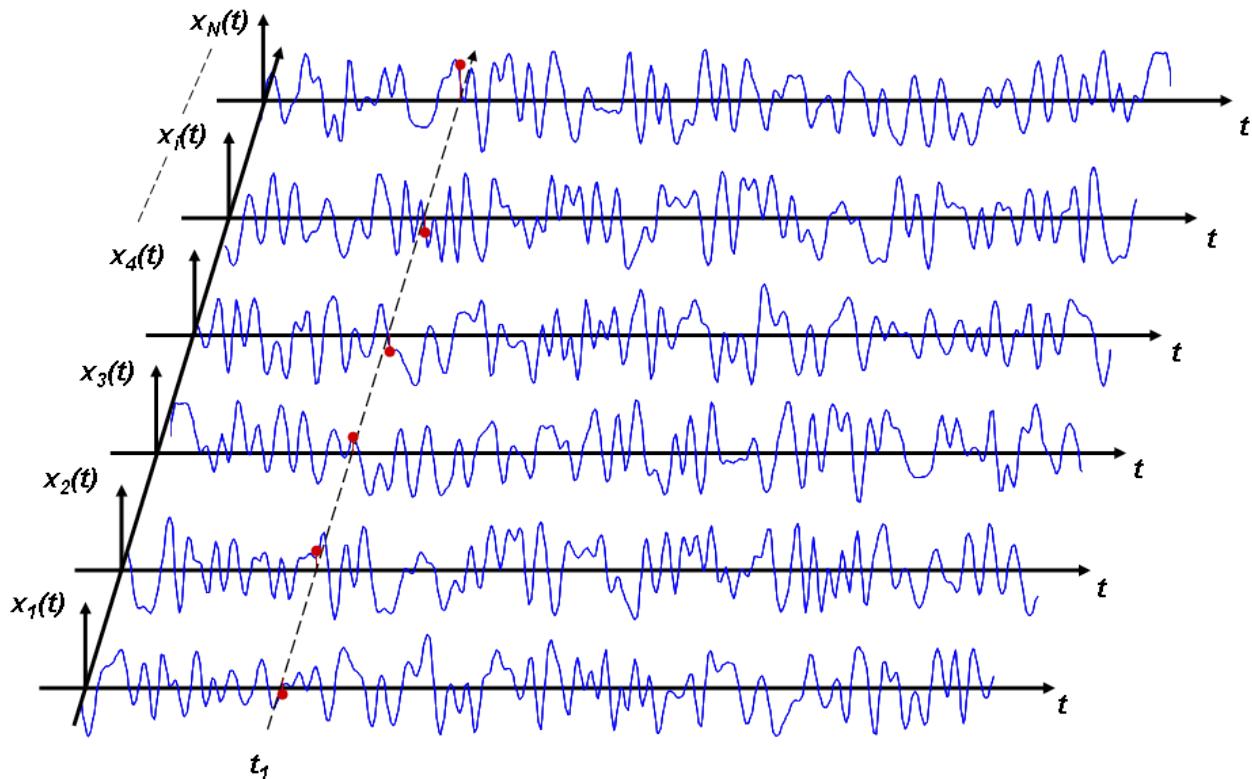


Figure 1-1 : Représentation d'un ensemble de réalisations

### Signaux stationnaires

Soit un ensemble d'enregistrements  $\{x(t)\}$  décrivant le phénomène étudié. Les propriétés moyennes du signal peuvent être évaluées à n'importe quel instant  $t_1$  du signal en faisant une moyenne sur l'ensemble des réalisations. On peut ainsi évaluer la valeur moyenne, la valeur quadratique moyenne (ou « carré moyen ») ou tout autre grandeur moyenne.

Si ces valeurs moyennes sont invariantes en fonction de l'instant  $t_1$  où elles sont calculées, alors on dit que le signal est stationnaire

### Signaux ergodiques

Pour la plupart des signaux stationnaires, les valeurs moyennes évaluées sur un ensemble à l'instant  $t_1$  sont égales aux valeurs moyennes correspondantes évaluées relativement au temps à partir d'une seule réalisation  $x(t)$ , où  $x(t)$  est choisie arbitrairement dans l'ensemble des réalisations et où la moyenne temporelle est évaluée sur une durée  $T$ .

Cette propriété est appelée **ergodicité**. Les signaux dotés de cette propriété sont dits **ergodiques**

Sauf mention explicite, les signaux considérés pendant ce cours seront considérés stationnaires et ergodiques.

*Signal ergodique  $\Leftrightarrow$  Signal stationnaire + (moyenne d'ensemble = moyenne temporelle)*

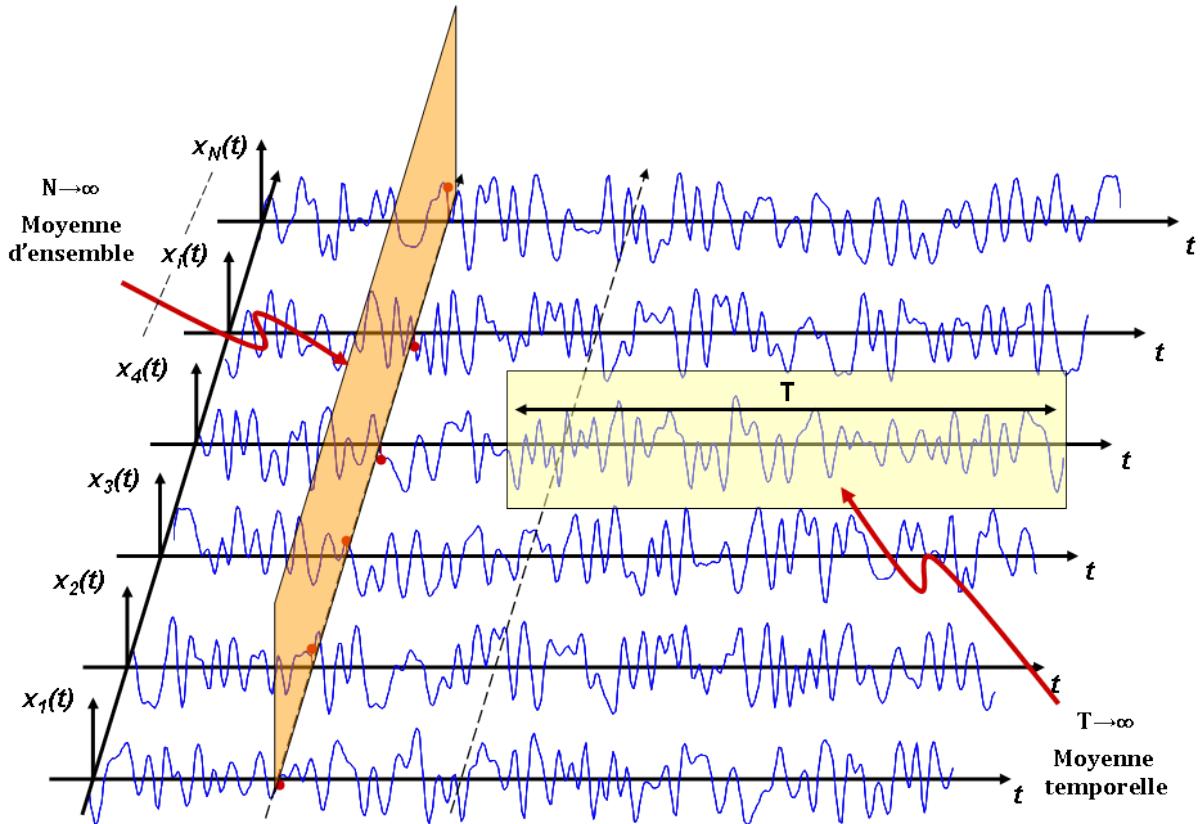


Figure 1-2 : Moyenne d'ensemble et moyenne temporelle

## 1.2. Considérations pratiques, estimation et erreurs de mesure

Généralement on fait en sorte que les expériences produisent des signaux stationnaires. Pour cela, on force la stationnarité en maintenant constantes les conditions expérimentales.

Mais il est des situations où cela n'est pas possible. Que la source du phénomène étudié dépende du temps ou qu'elle ne puisse être contrôlée par l'expérimentateur. Il est alors impossible de répéter les expériences. Et les analyses doivent se limiter à des portions de signal exploitables.

Par ailleurs, en pratique, le nombre  $N$  de mesures réalisables, i.e. la taille de l'ensemble des réalisations accessibles ainsi que la durée  $T$  des signaux mesurés sont toujours finis.

Les valeurs moyennes mesurées ne sont par conséquent que des estimations. Il n'est pas possible d'en obtenir la valeur exacte. Il faut garder à l'esprit ces erreurs d'évaluation.

A ces erreurs statistiques, il faut ajouter celles liées à la mesure et issues des capteurs, du conditionnement des signaux, de la numérisation, etc.

## 1.3. Grandeur moyennes

### 1.3.1. Définition générale

Les valeurs moyennes d'une grandeur physique  $x(t)$  sont appelées moments. Elles sont caractérisées par leur ordre noté  $k$ . Elles font intervenir la densité de probabilité  $p(x)$ .

Le moment d'ordre  $k$  de  $x(t)$  s'écrit : 
$$\mu_x^k = E[x^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x) dx$$

Où  $E[ ]$  désigne l'espérance mathématique

### 1.3.2. Estimation de la densité de probabilité

La fonction densité de probabilité  $p(x)$  d'un signal  $x(t)$  évalue la probabilité pour les échantillons de  $x(t)$  de prendre une valeur d'amplitude  $x$ .

Pour un signal temporel continu, on mesure sur une durée  $T$ , la plus grande possible, la proportion de temps pendant laquelle le signal prend une valeur comprise entre  $x$  et  $x+dx$

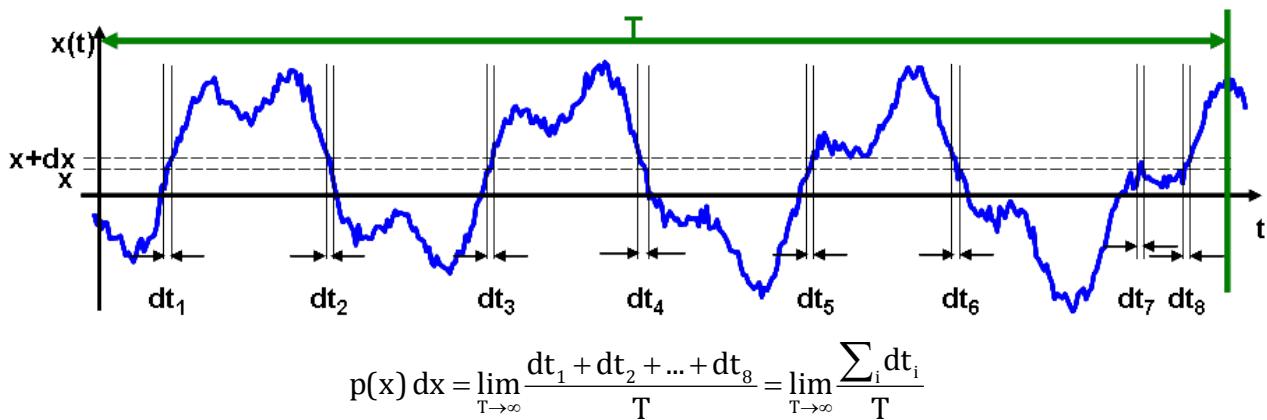


Figure 1-3 : Estimation de la densité de probabilité d'un signal continu

Pour un signal numérique de  $N$  échantillons, on compte la proportion d'échantillons dont la valeur est comprise entre  $x$  et  $x+dx$

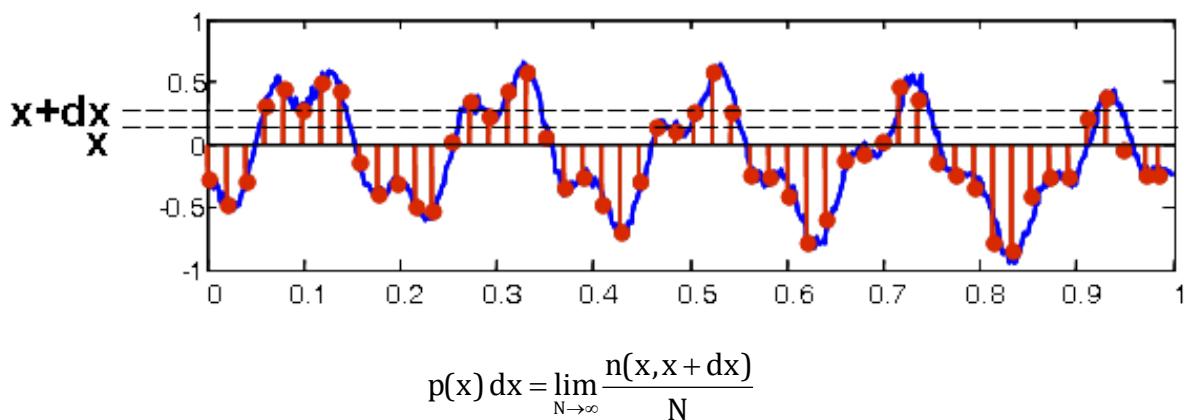


Figure 1-4 : Estimation de la densité de probabilité d'un signal discret

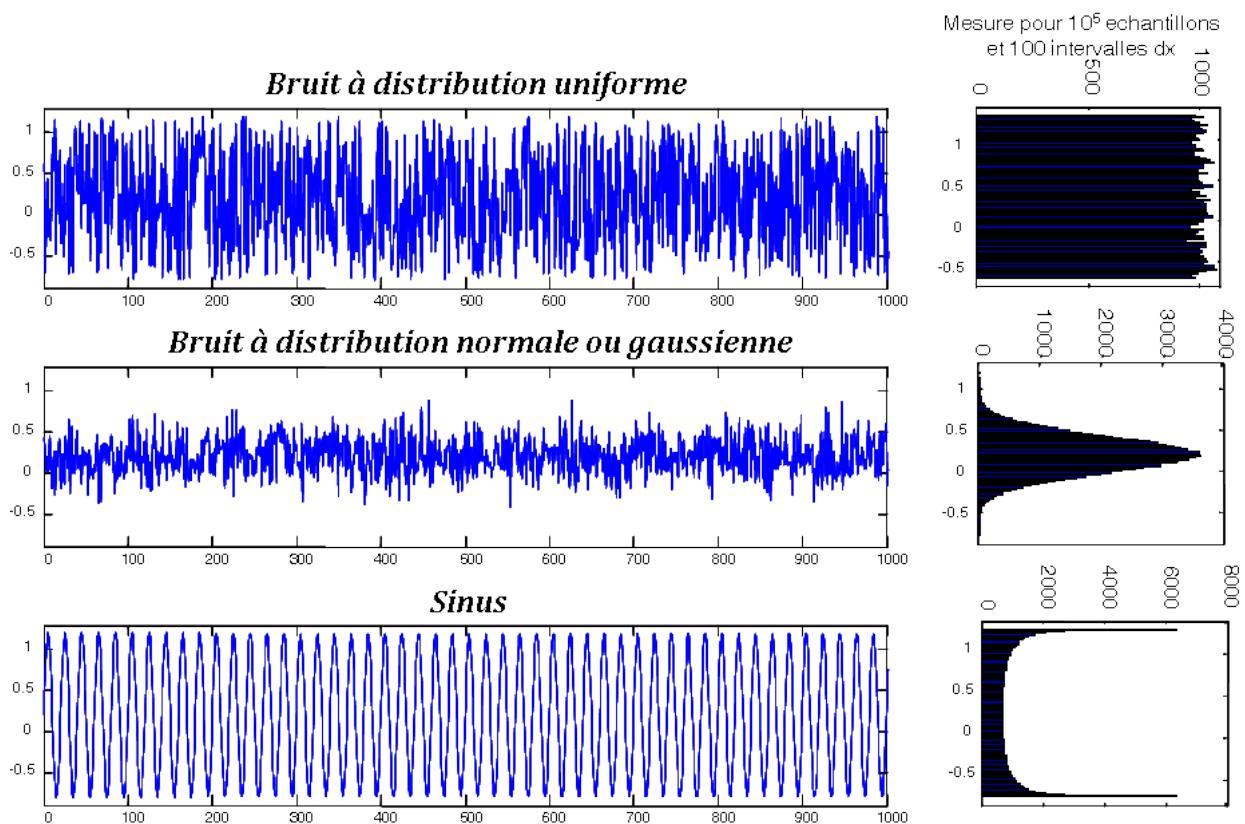


Figure 1-5 : Densités de probabilité usuelles

### 1.3.3. Estimation pratique des grandeurs moyennes

Dans la pratique on évalue les grandeurs moyennes par des moyennes temporelles :

$$\mu_x^k = E[x^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x) dx \approx \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k(t) dt$$

Et on définit les grandeurs suivantes :

- **Moyenne** (moment d'ordre 1) :  $\mu_x = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx \approx \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$

La moyenne définit la tendance centrale du processus.

- **Carré moyen** (mt d'ordre 2) :  $\mu_x^2 = E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx \approx \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$

On l'appelle aussi valeur quadratique moyenne.

On lui associe la valeur efficace :

- **Valeur efficace** (Root Mean Square) :  $RMS(x(t)) = \sqrt{E[x^2]}$
- **Variance** (mt d'ordre 2) :  $\sigma_x^2 = E[(x - E[x])^2]$

C'est la moyenne du carré des écarts à la moyenne. On montre que

$$\sigma_x^2 = E[(x - E[x])^2] = E[x^2] - E[x]^2$$

La variance définit la dispersion du processus. On en tire l'écart type.

- **Ecart type** :  $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$

#### **1.3.4. Cas particulier des signaux acoustiques et vibratoires**

S'agissant des signaux acoustiques ou vibratoires, la valeur moyenne, aussi appelée composante continue, est nulle. Si elle existe, il s'agit d'un artéfact de la chaîne d'acquisition (offset électronique, tension de polarisation du capteur, ...). Elle doit donc être systématiquement soustraite.

Il en résulte que, pour ces signaux, la valeur efficace ou RMS s'identifie à l'écart-type, et la valeur quadratique moyenne à la variance.

## 2 Fonctions de Corrélation

Les applications d'ingénierie qui nous concernent cherchent fréquemment à établir les relations, linéaires ou non, qui existent entre deux ou plusieurs processus aléatoires. Ces relations sont exprimées via les **fonctions de corrélation** ou leur transformée de Fourier qui définit la **densité spectrale** et porte la même information.

La corrélation est issue des statistiques. La densité spectrale a été développée par les ingénieurs pour identifier les corrélations non pas en fonction du temps, mais en fonction de la fréquence.

### 2.1. Notion de corrélation

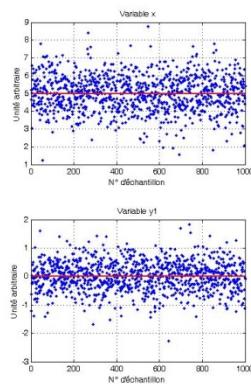


Figure 2-1 : Variables décorrélées

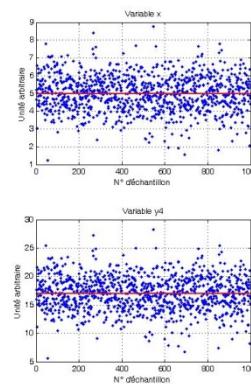
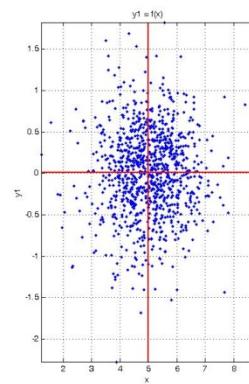


Figure 2-2 : Variables à corrélation linéaire forte  
 $y4 = 3x + 2$

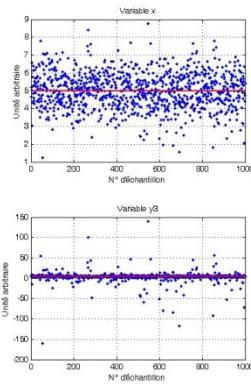


Figure 2-3 : Variables à corrélation non linéaire  
 $y3 = 3(x-5)^3 - x^2 + 7x - 5$

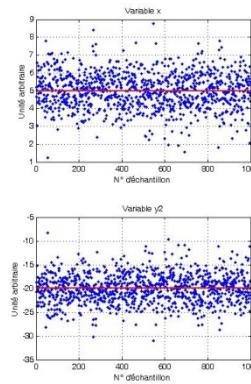
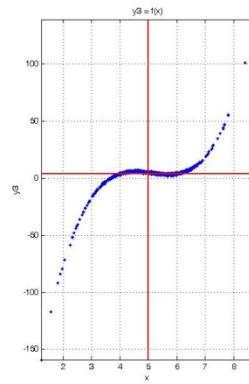


Figure 2-4 : Variables à corrélation linéaire modérée  
 $y2 = -3x - 5$

Lorsqu'on considère deux processus aléatoires  $x$  et  $y$  mesurés simultanément, on peut identifier grossièrement leur degré de ressemblance en représentant l'un en fonction de l'autre, c'est-à-dire en traçant  $y = f(x)$  ou  $x = g(y)$ .

Ces graphes sont appelés graphes de corrélation.

Les Figures 2-1 à 2-4 représentent une même variable  $x$  comparée successivement à 4 variables qui lui sont semblables à des degrés et ordres différents. Les relations données en légendes peuvent être obtenues par régression linéaire ou polynomiale.

*La corrélation mesure le similitude entre deux processus*

## 2.2. Estimation du degré de corrélation

Les estimateurs suivant mesurent le degré de corrélation supposant des relations linéaires entre les processus. Ils ne mesurent pas des corrélations d'ordre supérieur.

Pour estimer le degré de corrélation de deux processus aléatoires  $x$  et  $y$ , on commence par calculer leur covariance. C'est la moyenne du produit des écarts à la moyenne de chaque processus :

$$\text{Covariance : } \sigma_{xy}^2 = E[(x - E[x])(y - E[y])] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)$$

Deux cas extrêmes sont à considérer :

- Lorsque les processus sont **décorrélés** les produits  $(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)$  se compensent :

$$\sigma_{xy}^2 = 0$$

- Lorsque les processus sont **parfaitement corrélés** la covariance est égale au produit des écarts types on a :

$$\sigma_{xy}^2 = \sigma_x \sigma_y$$

A partir de ces deux cas extrêmes, on définit les situations intermédiaires en calculant le coefficient de corrélation :

$$\text{Coefficient de Corrélation : } \rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x \sigma_y} \quad -1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

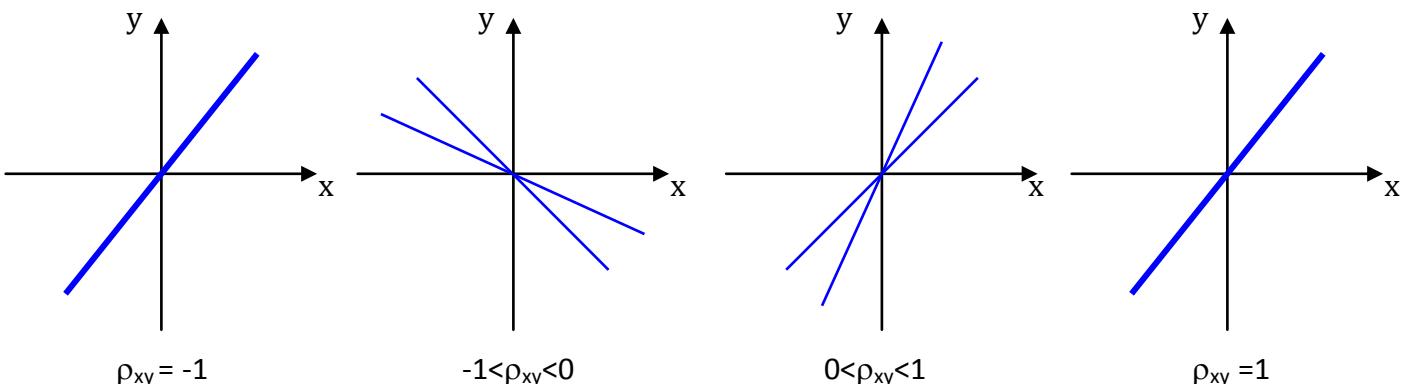


Figure 2-5 : Differents coefficients de corrélation

### 2.3. Fonctions de corrélation

Dans le cas des signaux enregistrés au cours du temps, on met en œuvre des outils d'évaluation plus complexes qui permettent de mesurer la ressemblance en fonction du temps. Il s'agit de comparer les échantillons non pas seulement aux mêmes instants mais aussi avec un décalage temporel, nouvelle variable notée  $\tau$ .

Typiquement dans l'expérience présentée par la Figure 2-6, deux accéléromètres mesurent la vibration d'une structure en deux endroits différents. Une impulsion appliquée par un pot vibrant se propage dans la structure. En l'absence de tout phénomène de dispersion, on peut supposer que les signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  se ressembleront si on les compare avec un décalage temporel correspondant au temps de propagation de la vibration d'un point à l'autre. Ils auront alors pour ce décalage une corrélation maximum.

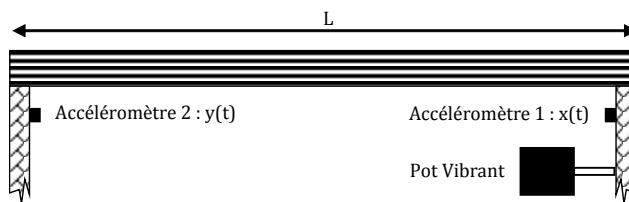


Figure 2-6 : Mesure vibratoire par intercorrélation

#### 2.3.1. Définitions

Ceci nous amène à définir la fonction de covariance :

$$\text{Fonction de Covariance} : C_{xy}(\tau) = E[(x(t) - \mu_x)(y(t + \tau) - \mu_y)]$$

On a :

$$\begin{aligned} C_{xy}(\tau) &= E[x(t)y(t + \tau)] - E[y(t + \tau)]\mu_x - E[x(t)]\mu_y + \mu_x\mu_y \\ &= E[x(t)y(t + \tau)] - \mu_y\mu_x - \mu_x\mu_y + \mu_x\mu_y \\ &= E[x(t)y(t + \tau)] - \mu_x\mu_y \end{aligned}$$

On note  $C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - \mu_x\mu_y$

et on définit la fonction de corrélation qui sera plus couramment utilisé.

$$\text{Fonction d'Intercorrélation} : R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t + \tau)]$$

En pratique, si  $T$  est le temps de mesure des signaux, l'estimation de  $R_{xy}$  est donnée par :

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau)dt$$

On peut étudier des phénomènes qui présentent des motifs répétés. Dans ce cas il est intéressant de mesurer fonction de corrélation du signal avec lui-même. On parle de la fonction d'autocorrélation :

$$\text{Fonction d'Autocorrélation} : R_x(\tau) = E[x(t)x(t + \tau)]$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau)dt$$

#### 2.3.2. Propriétés

- $R_x(-\tau) = R_x(\tau)$ , la fonction d'autocorrélation est paire

- $R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau)$
- $R_x(0) = E[x(t)^2] = \sigma_x^2 + \mu_x^2$
- $R_x(\pm\infty) = \mu_x^2$

### 2.3.3. Estimation pratique de la fonction de corrélation

La mesure étant toujours limitée à une durée notée  $T$ , le calcul de la fonction de corrélation doit prendre en compte le recouvrement effectif des signaux pour le décalage  $\tau$  considéré.

Pour avoir une fonction d'auto ou d'intercorrélation non biaisée, on mettra donc en œuvre les opérations suivantes :

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau)dt \quad \text{et} \quad R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t)y(t+\tau)dt$$

On reviendra sur ce point plus tard.

### 3 Densités spectrales de puissance

Les ingénieurs ont inventé l'analyse statistique des signaux aléatoires dans le domaine fréquentiel en introduisant les densités spectrales de puissance (DSP). Assez naturellement ils les ont définies comme les transformées de Fourier (TF) des fonctions de corrélation. Et les définitions et démonstrations suivantes sont fondées sur cette relation.

Alors que les fonctions de corrélation indiquent les ressemblances des processus en fonction du temps, les densités spectrales les trouvent en fonction de la fréquence. Ainsi, considérant deux processus aléatoires  $x(t)$  et  $y(t)$ , les DSP cherchent à répondre aux questions suivantes : « Quelles fréquences les processus  $x$  et  $y$  ont-ils en commun ? » ou encore « A quelles fréquences communes les processus  $x$  et  $y$  expriment-ils le plus d'énergie »

Il faut savoir cependant que les procédures misent en œuvre pour le calcul des DSP sont fondées sur des algorithmes de transformée de Fourier rapide ('fft' pour fast fourier transform). Elles sont numériquement beaucoup plus rapides que les opérations de corrélation telles que décrites plus haut. C'est pourquoi les systèmes modernes d'analyse des signaux en temps réel évaluent directement les DSP.

#### 3.1. Autospectre ou Densité autospectrale de puissance

##### 3.1.1. Définition et propriétés

Pour caractériser en fréquence un processus aléatoire  $x(t)$  on calcule son autospectre défini par la TF de la fonction d'autocorrélation :

$$\text{Autospectre : } S_x(\omega) = \text{TF}[R_x(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad \text{où } \omega = 2\pi f = \text{pulsation (rad/s)}$$

$$\text{Et on a inversement : } R_x(\tau) = \text{TF}^{-1}[S_x(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

##### 3.1.1.a. Relation entre autospectre et valeur quadratique moyenne :

$$\text{On a : } R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$$

$$\text{Et aussi } R_x(0) = E[x(t)x(t+0)] = E[x(t)^2], \quad \text{donc : } \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = E[x^2]$$

On en déduit la relation importante pour mesurer le niveau efficace d'un signal aléatoire à partir de sa DSP :

$$\boxed{\text{RMS}(x(t)) = \sqrt{E[x^2]} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df}}$$

C'est à dire que le niveau efficace d'un phénomène aléatoire est la racine de la somme des composantes de son autospectre.

**L'autospectre est une fonction réelle :**

On sait que la TF peut se décomposer en partie réelle et imaginaire :

$$S_x(\omega) = A(\omega) - iB(\omega) \quad \text{avec} \quad A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad \text{et} \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau$$

Or  $R_x(\tau)$  est paire, le sinus est impair donc  $B(\omega) = 0$ .

Donc  $S_x(\omega) = A(\omega)$  qui est une fonction réelle, paire et positive

$$S_x(\omega) \in \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad S_x(-\omega) = S_x(\omega)$$

### 3.1.2. Autospectre des processus dérivés

Connaissant l'autospectre  $S_x(\omega)$  d'un phénomène aléatoire  $x(t)$  on souhaite connaître ceux de ces dérivées  $\dot{x}(t)$  et  $\ddot{x}(t)$ , ou réciproquement. En vibration typiquement, on mesure l'accélération, par quelle opération sur l'autospectre peut-on déterminer ceux de la vitesse et du déplacement ?

On part de la définition statistique de la fonction de corrélation écrite comme une moyenne d'ensemble :

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$$

$$\text{Dont la dérivée temporelle est : } \frac{d}{d\tau} R_x(\tau) = E\left[x(t)\frac{d}{d\tau}x(t+\tau)\right] = E[x(t)\dot{x}(t+\tau)]$$

Comme  $x(t)$  est supposé stationnaire, son espérance mathématique est indépendante du temps :

$$\frac{d}{d\tau} R_x(\tau) = E[x(t)\dot{x}(t+\tau)] = E[x(t-\tau)\dot{x}(t)]$$

En suivant un raisonnement identique on calcule :

$$\frac{d^2}{d\tau^2} R_x(\tau) = -E[\dot{x}(t-\tau)\dot{x}(t)] = -R_{\dot{x}}(\tau) \quad (1)$$

$$\text{D'autre part on a : } R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

$$\text{et } \frac{d}{d\tau} R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \Rightarrow \frac{d^2}{d\tau^2} R_x(\tau) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2)$$

$$\text{En combinant (1) et (2) on obtient : } R_{\dot{x}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

et il vient :

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega)$$

$$\text{De la même manière on a : } S_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^2 S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^4 S_x(\omega)$$

A partir de là, on peut notamment évaluer les niveaux RMS :

$$\text{RMS}(\dot{x}) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(\omega) d\omega} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega) d\omega} \quad \text{et} \quad \text{RMS}(\ddot{x}) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} S_{\ddot{x}}(\omega) d\omega} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_x(\omega) d\omega}$$

### 3.1.3. Processus à bande limitée

Les processus naturels couvrent dès bandes de fréquence toujours limitée et d'étendue plus ou moins grande. On va ici illustrer la relation entre largeur de bande et forme de la fonction de corrélation. Pour cela on considère le modèle simple d'un phénomène  $x(t)$  dont l'autospectre  $S_x(\omega)$  est constant et égal à  $S_0$  sur une bande comprise entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , (Figure 3-1)

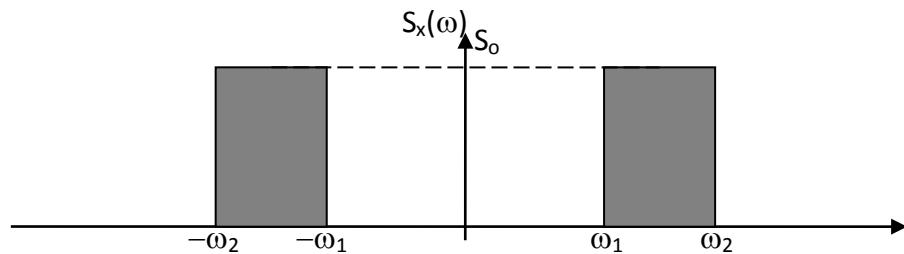


Figure 3-1 : Spectre schématique d'un processus à bande limitée

$$\text{La valeur quadratique moyenne est : } E[x^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{S_o}{\pi} (\omega_2 - \omega_1)$$

$$\text{Et la fonction d'autocorrélation : } R_x(\tau) = \frac{S_o}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{i\omega\tau} d\omega$$

soit

$$R_x(\tau) = \frac{2S_o}{\pi\tau} \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\tau\right) \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\tau\right)$$

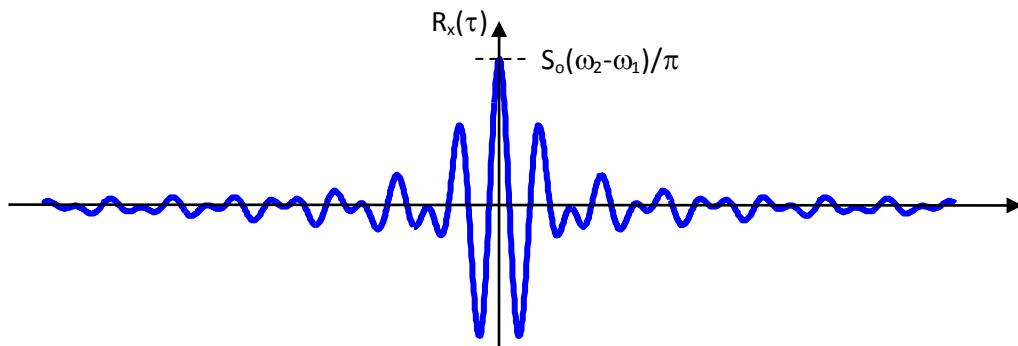


Figure 3-2 : Allure de l'autocorrélation d'un processus à bande limitée

### Bande étroite et large bande

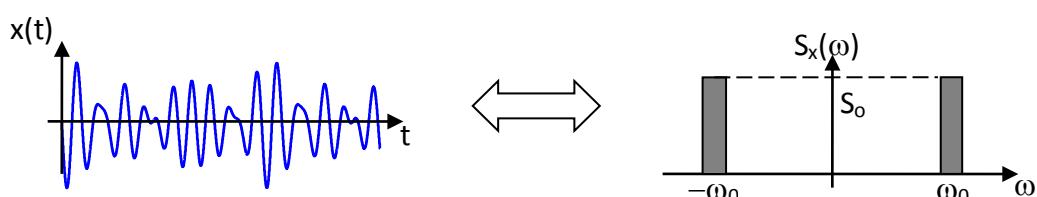


Figure 3-3 : Allure temporelle et spectrale d'un processus à bande étroite

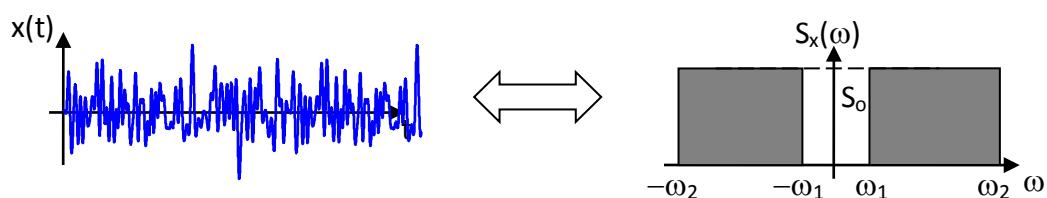


Figure 3-4 : Allure temporelle et spectrale d'un processus à large bande

C'est la largeur de bande relative  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$  qui indique la caractéristique bande large ou étroite.

On considère le cas limite  $\omega_1 \rightarrow 0$ , on a :

$$R_x(\tau) = \frac{2S_0}{\pi\tau} \cos\left(\frac{\omega_2}{2}\tau\right) \sin\left(\frac{\omega_2}{2}\tau\right) = \frac{2S_0}{\pi} \frac{\sin(\omega_2\tau)}{\tau}$$

Et lorsqu'on fait tendre  $\omega_2 \rightarrow \infty$  on arrive à :  $R_x(\tau) = S_0\delta(\tau)$

Et par conséquent :  $S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0\delta(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = S_0$

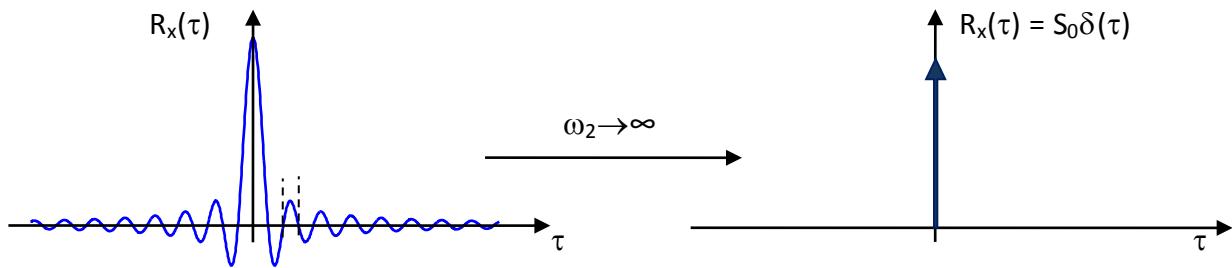


Figure 3-5 : Autocorrélation d'un processus à bande illimitée

*Spectre à Bande étroite  $\Leftrightarrow$  Autocorrélation large*

*Spectre à Bande large  $\Leftrightarrow$  Autocorrélation étroite*

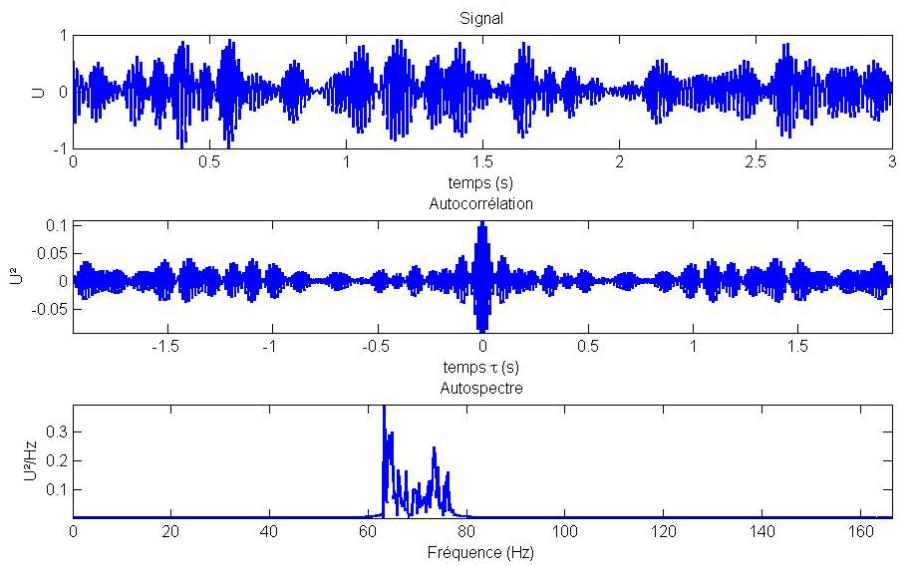


Figure 3-6 : Exemple de processus stationnaire à bande étroite --  $f_0 = 70 \text{ Hz}$  - Bande =  $0.2 f_0$

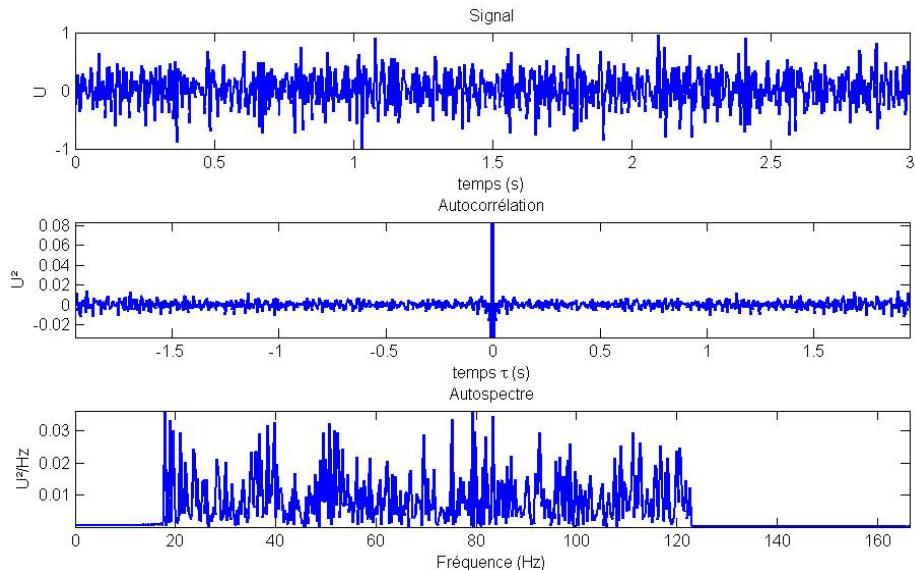


Figure 3-7 : Exemple de processus stationnaire large bande-  $f_0 = 70 \text{ Hz}$  - Bande =  $1.5 f_0$

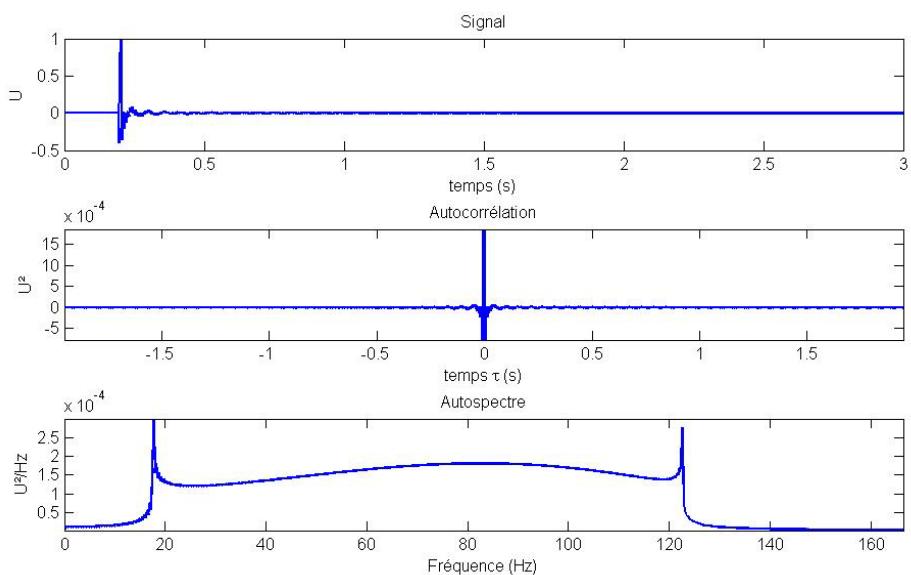


Figure 3-8 : Exemple de processus transitoire large bande -  $f_0 = 70 \text{ Hz}$  - Bande =  $1.5 f_0$

### 3.2. Interspectre ou densité interspectrale de puissance

#### 3.2.1. Définition et propriétés

Soient deux processus  $x(t)$  et  $y(t)$  aléatoires et stationnaires, on a défini plus haut leur fonction d'intercorrélation. Elle détermine leur similitude en fonction du décalage temporel  $\tau$ . A cette fonction on peut associer sa transformée de Fourier appelée interspectre ou densité interspectrale de puissance :

$$\text{Interspectre : } S_{xy}(\omega) = \text{TF}\left[R_{xy}(\tau)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad \text{où } \omega = 2\pi f = \text{pulsation (rad/s)}$$

$$\text{et réciproquement : } R_{xy}(\tau) = \text{TF}^{-1}\left[S_{xy}(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

*Remarque : On doit vérifier la condition*  $\int_{-\infty}^{\infty} |R_{xy}(\tau)| d\tau < \infty \Rightarrow \mu_x \text{ ou } \mu_y = 0$

#### Relation entre $S_{xy}$ et $S_{yx}$

On a  $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$

$$\text{Donc } S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(-\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau') e^{i\omega\tau'} d\tau' = S_{yx}^*(\omega)$$

$$\boxed{S_{xy}(\omega) = S_{yx}^*(\omega)}$$

Les densités interspectrales sont des fonctions complexes :

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = C_{xy}(\omega) - iQ_{xy}(\omega)$$

avec  $C_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau$  Densité spectrale coïncidente ou cospectre

et  $Q_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau$  Densité spectrale en quadrature

Mais on utilise plutôt la représentation en amplitude et phase :

$$\boxed{S_{xy}(\omega) = |S_{xy}(\omega)| e^{-i\theta_{xy}(\omega)}}$$

*Interprétation de la phase :*

A la fréquence  $\omega$ ,  $y(t)$  suit  $x(t)$  si  $\theta_{xy}(\omega) > 0$ , il le précède si  $\theta_{xy}(\omega) < 0$ .

#### 3.2.2. Relations interspectres-autospectres

On peut montrer l'inégalité suivante :

$$\boxed{|S_{xy}(\omega)|^2 \leq S_x(\omega)S_y(\omega)}$$

A partir de cette inégalité on définit une nouvelle fonction très utile notamment pour s'assurer de la qualité d'une mesure. Il s'agit de la fonction de cohérence :

$$\boxed{\text{Cohérence : } \gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)} \quad 0 \leq \gamma_{xy}^2(\omega) \leq 1}$$

On reviendra plus loin sur l'utilisation de cette fonction.

### 3.3. **Estimation pratique des densités spectrales.**

Les définitions énoncées jusqu'ici présentent les densités spectrales de puissance comme les transformées de Fourier des fonctions de corrélation. En pratique elles sont obtenues par application de la transformée de Fourier directement au signal. L'analyse statistique est alors réalisée dans le domaine spectral.

On trouvera en annexe un rappel sur le calcul numérique de la transformée de Fourier discrète (TFD) qui fait l'objet du cours de traitement numérique du signal.

Question : Pourquoi est-il nécessaire d'évaluer la densité spectrale de puissance plutôt que de simplement calculer la transformée de Fourier d'une portion du signal aléatoire ?

Pour illustrer la réponse à cette question, on peut considérer l'analyse d'un bruit blanc.

Soit  $x(t)$  un bruit blanc dont on extrait 3 portions de 1024 échantillons. La Figure 3-9 présente ces trois réalisations de  $x(t)$  ainsi que leur TFD. Ces TFD n'indiquent individuellement rien de pertinent. En revanche, si l'on calcule la moyenne de ces spectres sur un grand nombre de réalisations comme présenté par la Figure 3-10, on approche d'un spectre constant comme on l'attend pour un signal de cette nature.

L'opération de base d'évaluation de la DSP vient directement de la définition de la densité spectrale. Elle consiste à estimer la fonction d'autocorrélation (Corrélogramme) du processus et ensuite à calculer sa transformée de Fourier discrète (Périodogramme). Cependant, des traitements plus complexes permettent d'obtenir des estimations meilleures des DSP. Il s'agit des méthodes de Blackman-Tukey, de Bartlett et de Welch qui mettent en œuvre le moyennage et la pondération d'un nombre limité de réalisations du processus.

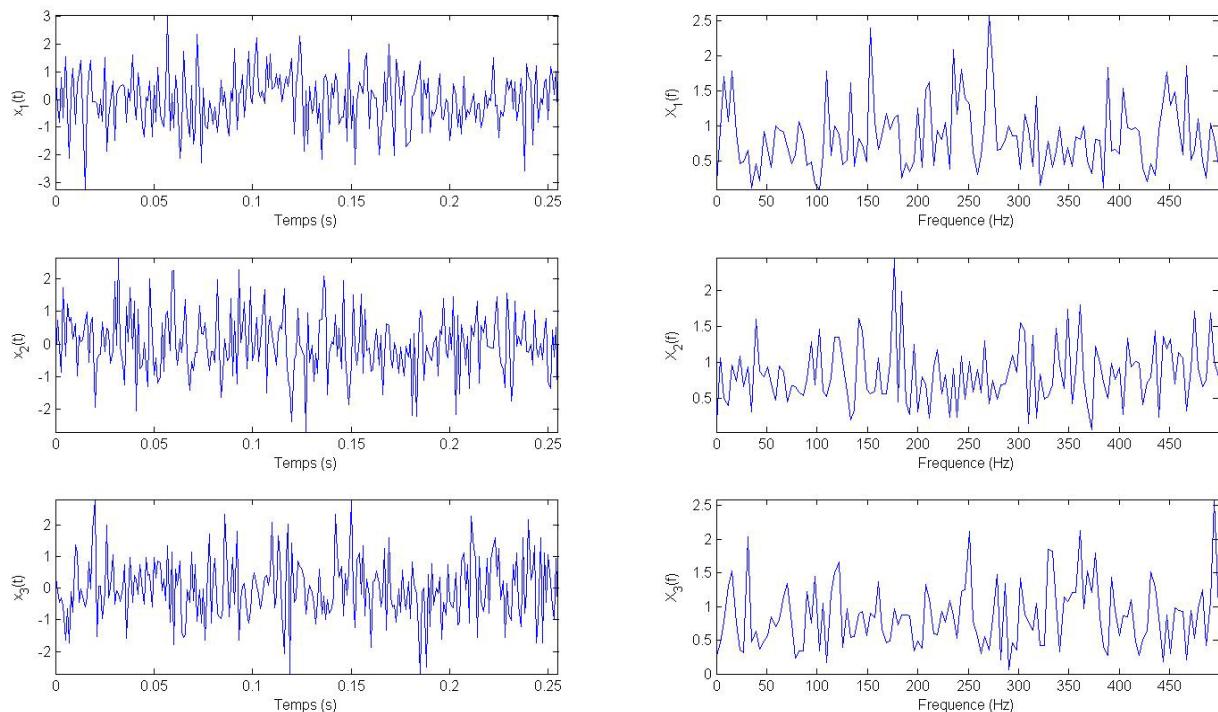


Figure 3-9 : Trois réalisations (ou portions) d'un même bruit blanc et leur TFD.

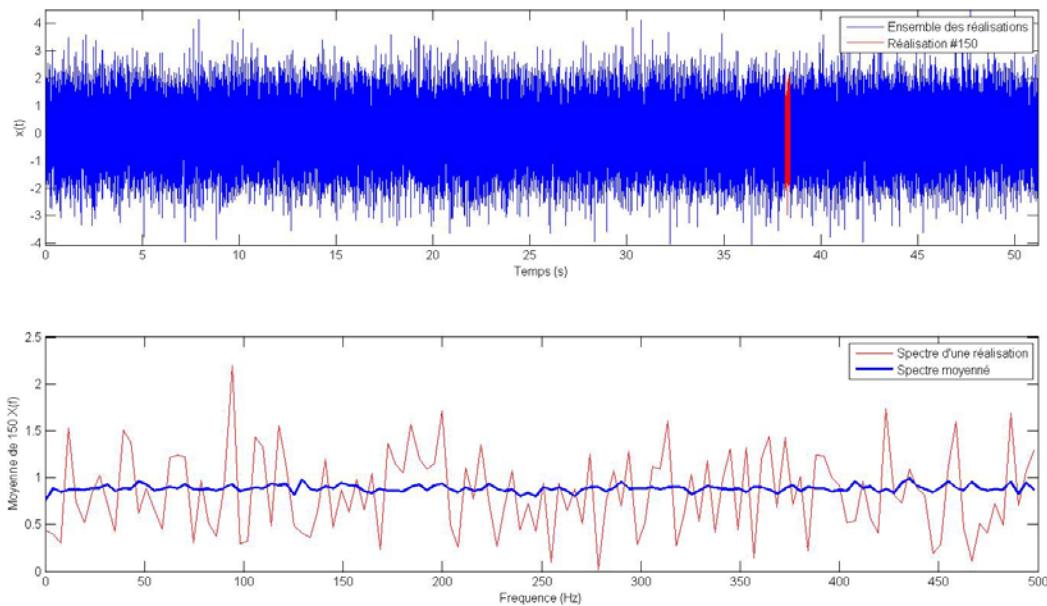


Figure 3-10 : Le bruit blanc dans sa totalité et la moyenne des spectres de 150 réalisations

### 3.3.1. Corrélogramme et Périodogramme

Supposons qu'on dispose d'une séquence de  $N$  points  $x_n$  issus de la numérisation au pas d'échantillonnage  $\Delta t$  d'un processus aléatoire  $x(t)$  stationnaire et ergodique.

D'après les définitions données au paragraphe 2.3, on a alors deux estimateurs possibles de la fonction d'autocorrélation :

- L'estimateur biaisé :  $\hat{R}_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-m} x_n x_{n+m}$   $0 \leq m \leq N$
- L'estimateur non biaisé :  $\hat{R}_x(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-1-m} x_n x_{n+m}$   $0 \leq m \leq N$

La première expression est biaisée parce qu'on divise la somme par  $N$  plutôt que par  $N-m$  qui est le nombre de termes de la somme.

Noter que la limite supérieure de la somme assure que ne sont pris en compte que les échantillons  $x_n$  disponibles ( $0 \leq n \leq N-1$ ).

On peut vérifier la parité de l'estimateur :  $\hat{R}_x(-m) = \hat{R}_x(m)$

On verra par la suite que l'estimateur biaisé a des propriétés plus intéressantes et est généralement utilisé pour l'estimation spectrale.

Supposons maintenant qu'on limite l'analyse de  $R_x$  aux  $|m| < L$  où  $L < N$ . Alors le corrélogramme est l'estimateur de la densité spectrale obtenu en prenant la TFD de la fonction d'autocorrélation ainsi limitée :

$$\text{Corrélogramme : } \hat{S}_x(\omega) = \sum_{m=-L}^L \hat{R}_x(m\Delta t) e^{-i\omega m\Delta t} \quad L < N$$

Cependant, si l'étendue considérée de la corrélation est maximum ( $L = N-1$ ), alors l'estimateur devient :

$$\hat{S}_x(\omega) = \sum_{m=-N+1}^{N-1} \hat{R}_x(m\Delta t) e^{-i\omega m\Delta t}$$

Et lorsque l'on prend la forme biaisée de l'estimateur de corrélation,  
en posant :  $v_n = x_n \cdot \text{Rect}(N)$ ,  $n' = -n$  et  $u_n = v_{-n}$

On a :  $\hat{R}_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-m} x_n x_{n+m} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n v_{n+m}$

Ou encore :  $\hat{R}_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_{-n} v_{-n+m} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n v_{m-n} = \frac{1}{N} u_m * v_m$

Soit en prenant la TF des deux cotés :  $\hat{S}_x(\omega) = \frac{1}{N} U(\omega) V(\omega)$

Or 
$$\begin{cases} V(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n e^{-in\omega\Delta t} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-in\omega\Delta t} = X(\omega, N) \\ U(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n e^{-in\omega\Delta t} = \sum_{n=0}^{-N+1} x_{-n} e^{-in\omega\Delta t} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{in\omega\Delta t} = X^*(\omega, N) \end{cases}$$

On arrive ainsi à l'expression de l'estimateur appelé le périodogramme :

**Périodogramme :**  $\hat{S}_x(\omega) = \frac{1}{N} |X(\omega, N)|^2$

$X(\omega, N)$  est la transformée de Fourier à temps discret (TFTD) sur  $N$  points, qui sera généralement évaluée par la TFD :

$$X_k = X(k\Delta\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi k n / N} \quad \text{et} \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{N\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

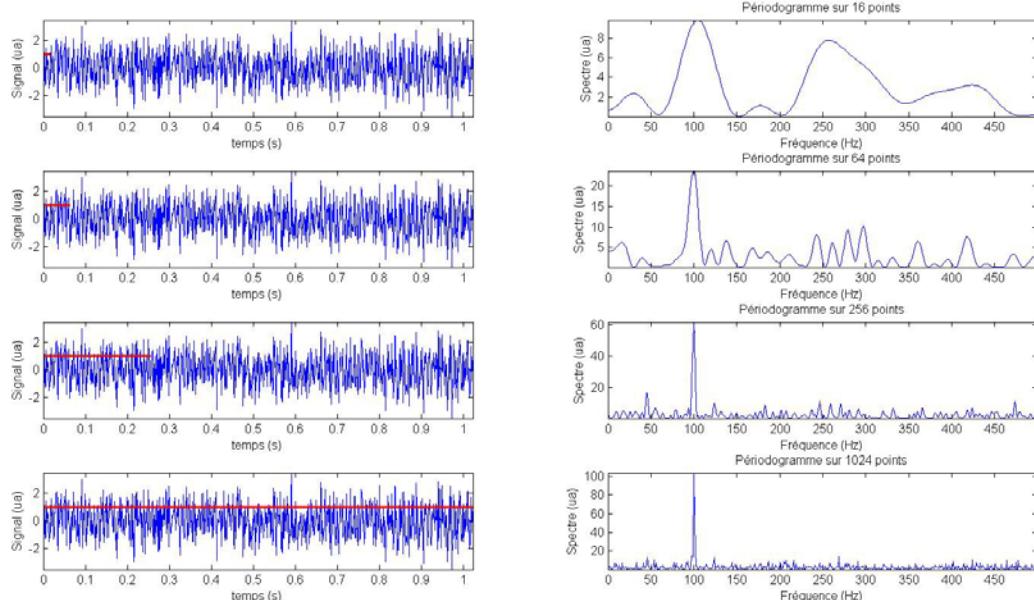


Figure 3-11 : Périodogramme d'un sinus avec bruit de phase et d'amplitude sur un nombre de points croissant  
 $x_n = \sin(2\pi 100.n\Delta t + \pi \text{rand}) + \text{randn}$

### 3.3.2. Procédure de Blackman-Tukey

La procédure de Blackman-Tuckey consiste à appliquer une fenêtre de pondération de longueur  $2L$  à la fonction de corrélation estimée de longueur  $2N$  ( $L < N$ ), et de calculer la TFD du produit.

Estimateur de Blackman-Tukey :

$$\hat{S}_x^{\text{BT}}(\omega) = \sum_{m=-L}^L w_L(m) \hat{R}_L(m) e^{-i\omega m \Delta t}$$

$w_L$  peut être n'importe quelle fenêtre adaptée : Hamming, Hanning, Bartlett, ...

Noter que l'estimateur ainsi obtenu peut s'écrire comme un produit de convolution dans le domaine spectral :

$$\hat{S}_x^{\text{BT}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} W(\omega)^* \hat{S}_x(\omega)$$

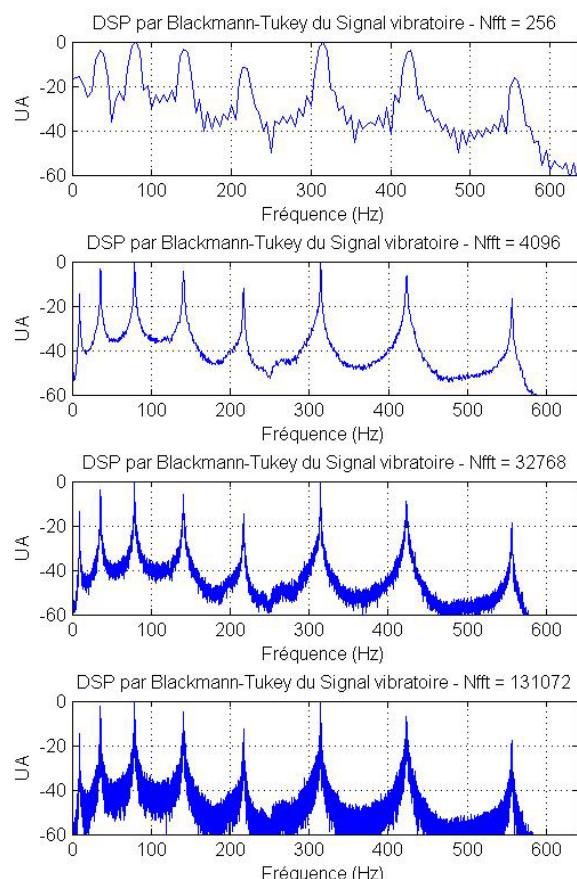
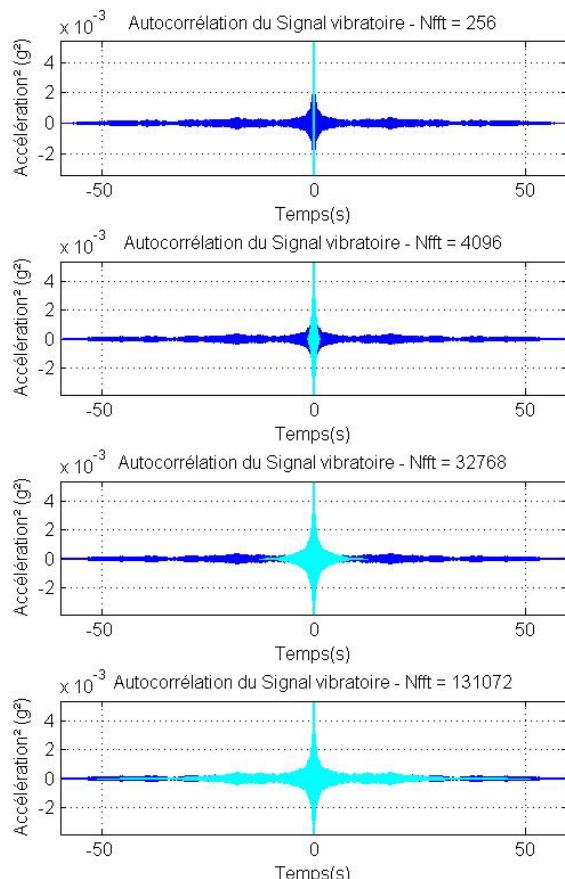
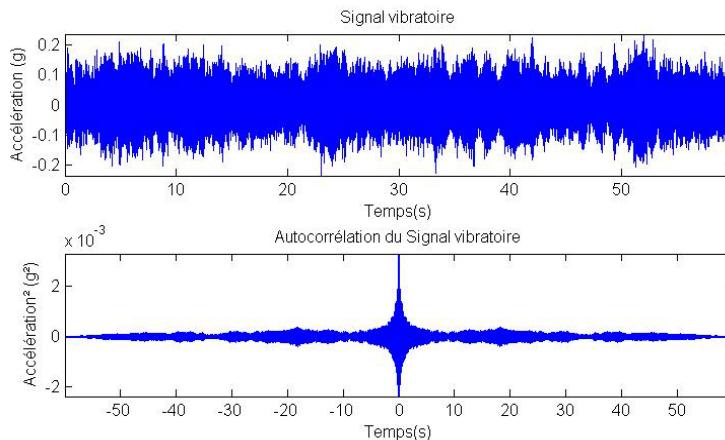


Figure 3-12 : DSP par la procédure de Blacmann-Tukey appliquée à un signal de vibration de poutre  
Résultats pour différentes longueur de fenêtre, pondérée par une fenêtre de Hanning

### 3.3.3. Procédure de Bartlett

On peut montrer que l'espérance mathématique du périodogramme tend vers la DSP vraie lorsque le nombre de réalisations observées tend vers l'infini :

$$S_x(\omega) = E[\hat{S}_x(\omega)] = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{S}_x^{(k)}(\omega) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{N} X^{(k)*}(\omega, N) X^{(k)}(\omega, N) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{KN} \sum_{k=1}^K |X^{(k)}(\omega, N)|^2$$

On va donc tenter d'améliorer l'estimation de la DSP en réalisant une moyenne sur un nombre fini de périodogrammes.

Soit une séquence  $x_n$  de longueur  $N = KL$  échantillons.

Découpons cette séquence en  $K$  sous séquences de  $L$  échantillons :

$$x_n^{(k)} = x_{n+kL} \quad 0 \leq n \leq L-1, \quad 1 \leq k \leq K$$

Pour chaque séquence on calcule le périodogramme :

$$\hat{S}_x^{(k)}(\omega) = \frac{1}{L} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x_n^{(k)} e^{-i\omega n \Delta t} \right|^2, \quad k = 1, \dots, K$$

L'estimateur de Bartlett est alors donné par :

**Estimateur de Bartlett :**

$$\hat{S}_x^B(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{S}_x^{(k)}(\omega)$$

Si les différentes séquences de signal prises en compte sont décorrélées, la procédure de Bartlett réduit la variance d'un facteur  $K$ , d'un facteur moindre si elles sont corrélées.

Cette procédure permet un compromis entre la résolution fréquentielle qui dépend du nombre de points  $L$  pris pour calculer la TFD, et la variance de l'estimateur qui dépend du nombre  $K$  de séquence pris en compte.

### 3.3.4. Procédure de Welch

Cette procédure, comme la procédure de Bartlett, met en œuvre un moyennage d'observations successives. L'apport de cette méthode est de calculer un périodogramme modifié par l'ajout d'une fenêtre de pondération sur les séquences de  $L$  échantillons :

$$\hat{S}'_x^{(k)}(\omega) = \frac{1}{L} \left| \sum_{n=0}^{L-1} w_n x_n^{(k)} e^{-i\omega n \Delta t} \right|^2$$

On prend soin d'utiliser une fenêtre  $w$  normalisée pour qu'elle ne modifie pas l'énergie du signal :

$$\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} w_n^2 = 1$$

On effectue alors, comme pour Bartlett, une moyenne sur  $K$  observations :

**Estimateur de Welch simple :**

$$\hat{S}_x^W(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{S}'_x^{(k)}(\omega)$$

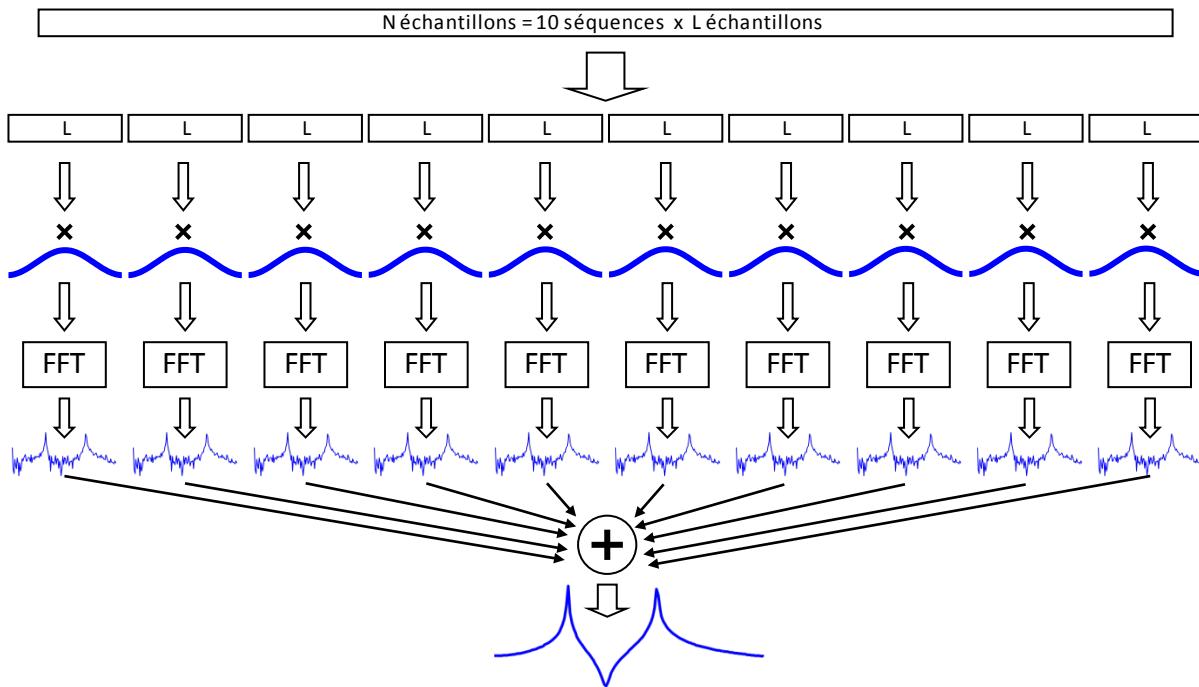


Figure 3-13 : Schéma de la procédure de Welch simple

Lorsque la longueur de l'enregistrement disponible est réduite, on peut augmenter artificiellement le nombre d'observations en considérant des séquences successives avec recouvrement.

Si on suppose que les séquences successives de  $L$  échantillons présentent un recouvrement de  $D$  points, alors la  $i^{\text{ème}}$  est donnée par :

$$x_i(n) = x(n+iD); \quad n = 0, 1, \dots, L-1$$

Alors l'étendue du recouvrement entre  $x_i$  et  $x_{i+1}$  est de  $L-D$  échantillons. Et si  $K$  séquences couvrent la totalité des  $N$  points, alors :

$$N = L+D(K-1)$$

Par exemple, sans recouvrement ( $D = L$ ) on a  $K = N/L$  séquences de longueur  $L$  comme pour l'estimateur simple. D'autre part, si les séquences se recouvrent à hauteur de 50% ( $D = L/2$ ) alors on peut constituer :

$$K = 2\frac{N}{L} - 1$$

séquences de longueur  $L$ . On conserve ainsi la même résolution spectrale tout en doublant le nombre de périodogrammes dont on fait la moyenne, ce qui réduit la variance du résultat.

On peut aussi avec le même taux de recouvrement, former :

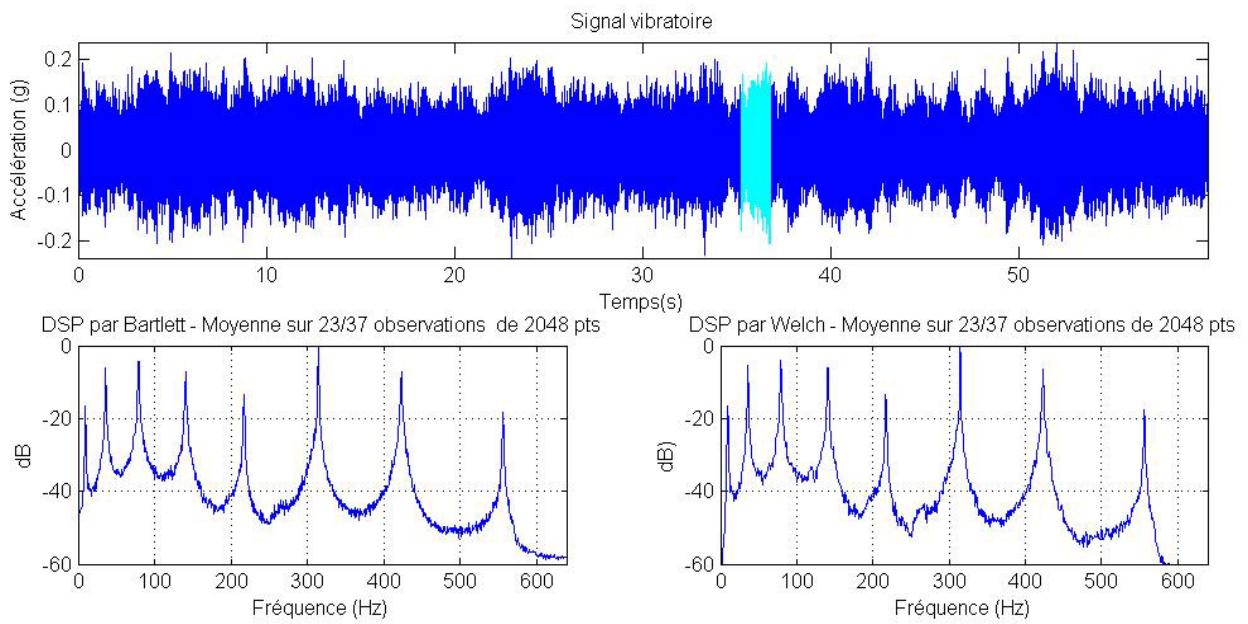
$$K = \frac{N}{L} - 1$$

séquences de longueur  $2L$  et augmenter la résolution en conservant la variance

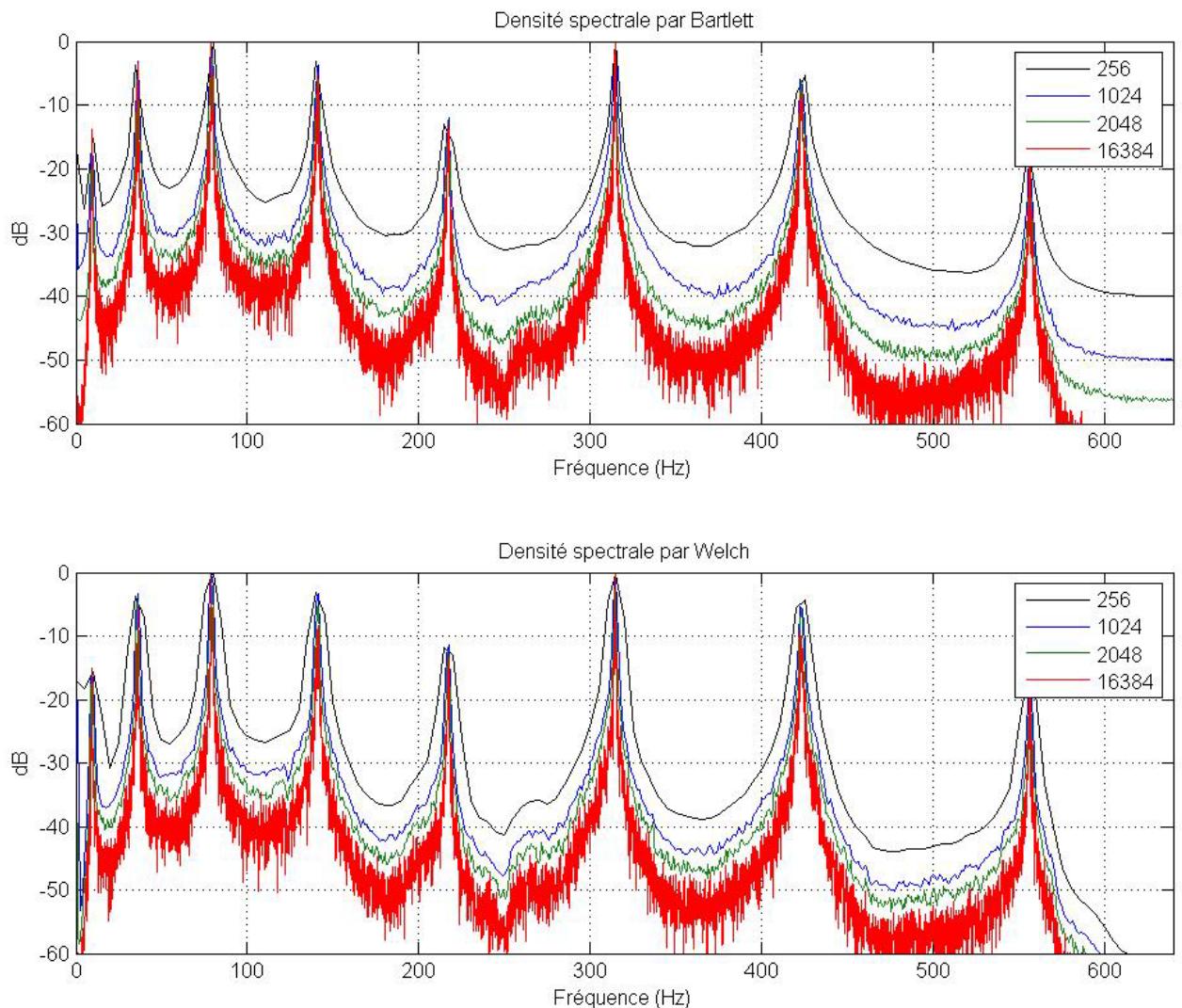
Finalement on peut écrire explicitement ce nouvel estimateur :

**Estimateur de Welch avec recouvrement :**

$$\hat{S}_x^W(\omega) = \frac{1}{KL} \sum_{i=0}^{K-1} \left| \sum_{n=0}^{L-1} w_n x_{n+iD}^{(k)} e^{-i\omega n \Delta t} \right|^2$$



*Figure 3-14 : DSP par les procédures de Bartlett et Welch appliquée à un signal de vibration de poutre  
Résultat de moyennage sur un nombre limité d'observations*



*Figure 3-15 : DSP du signal de la Figure 3-14 par les procédure de Bartlett et Welch  
pour des longueurs de fenêtre variables*

## 4 Identification des systèmes linéaires

Les outils d'analyse des signaux aléatoires sont désormais définis, il s'agit maintenant de les mettre en œuvre pour étudier les systèmes physiques qu'ils excitent ou qui les produisent. On s'intéressera plus particulièrement aux systèmes rencontrés en dynamique des structures et en acoustique.

### 4.1. Relations excitation/réponse pour les systèmes linéaires

On peut décrire les systèmes physiques en étudiant les réponses qu'ils produisent à des excitations. Dans le cadre de ce cours, on se limitera aux systèmes linéaires.



Figure 4-1 : Représentation générale d'un système linéaire

#### 4.1.1. Méthode analytique

Pour un système linéaire une réponse  $y(t)$  est liée à une excitation  $x(t)$  par une équation différentielle linéaire de la forme :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m x^{(m)} + b_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + b_1 x' + b_0 x$$

Une telle équation est linéaire parce que si  $y_1$  est la réponse à l'excitation  $x_1$  et  $y_2$  celle à  $x_2$ , alors la réponse à l'excitation combinée ( $\alpha x_1 + \beta x_2$ ) est la combinaison linéaire ( $\alpha y_1 + \beta y_2$ ). On dit aussi que le système obéit au principe de superposition.

Les **systèmes linéaires** étudiés ici sont **invariants**, c'est-à-dire que les coefficients  $a_i$  et  $b_j$  de l'équation différentielle décrivant le comportement du système sont indépendants du temps.

Pour une excitation donnée  $x(t)$  et des conditions initiales données, on peut résoudre cette équation par des méthodes analytiques ou numériques pour obtenir  $y(t)$ .

Mais ce type de résolution peut s'avérer impossible pour deux raisons :

- Les lois de comportement du système sont inconnues et les coefficients  $a_i$  et  $b_j$  sont inaccessibles
- Si l'équation différentielle est connue, la réponse  $y(t)$  complète ne peut être calculée que si l'excitation  $x(t)$  est connue complètement. Or cela n'est pas possible dans le cas des signaux aléatoires.

#### 4.1.2. Identification de la réponse en fréquence

Pour obtenir les caractéristiques dynamiques d'un système linéaire on étudie sa réponse à une entrée sinusoïdale de fréquence  $\omega$  :

$$x(t) = X \sin(\omega t)$$

Si le système est linéaire, la réponse permanente est elle aussi sinusoïdale de même fréquence  $\omega$  et présente éventuellement un déphasage  $\phi$  :

$$y(t) = Y \sin(\omega t - \phi)$$

On suppose en outre qu'en l'absence d'excitation le système est au repos et  $y(t) = 0$ , ce qui exclut les systèmes instables ou siège d'auto-oscillation.

Le rapport des amplitudes  $Y/X$  et le déphasage  $\phi$  définissent les caractéristiques de transmission, ou fonction de transfert du système à la fréquence  $\omega$  considérée.

En réalisant des mesures du rapport  $Y/X$  et du déphasage  $\phi$  pour un ensemble de fréquences  $\omega$  entre 0 et l'infini, on peut déterminer deux fonctions de la fréquence qui décrivent complètement les caractéristiques dynamiques du système linéaire.

Plutôt que de considérer deux fonctions distinctes, on utilise un seul nombre complexe appelé la fonction de réponse en fréquence :

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} e^{-i\phi(\omega)} = |H(\omega)| e^{-i\phi(\omega)}$$

Module :  $H(\omega)$

Phase :  $\phi(\omega)$

Ainsi pour une excitation harmonique d'amplitude constante  $x(t) = X(\omega) e^{i\omega t}$ , la réponse s'écrit :

$$y(t) = Y(\omega) e^{i\omega t} = H(\omega)X(\omega) e^{i\omega t},$$

où  $H(\omega)$  est la réponse en fréquence complexe évaluée à la pulsation  $\omega$ .

On retiendra la relation :

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

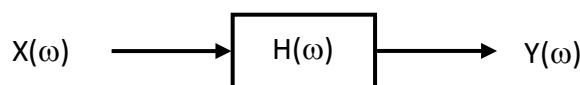


Figure 4-2 : Réponse en fréquence d'un système linéaire

Finalement pour identifier complètement un système linéaire, il suffit de mesurer le rapport d'amplitude et le déphasage de l'excitation et de la réponse pour toute les fréquences auxquelles il peut répondre.

En pratique pour identifier le système sur une bande de fréquence intéressante on soumettra le système à une excitation dont le spectre couvre la bande voulue. En travaillant dans le domaine spectral (DSP, ...), on obtiendra directement la réponse en fréquence recherchée.

#### 4.1.3. Identification de la réponse impulsionale

Une autre méthode pour déterminer les paramètres dynamiques d'un système linéaire consiste à mesurer la réponse à une excitation transitoire judicieusement choisie, du début de l'excitation jusqu'au retour à l'état d'équilibre du système.

On utilisera généralement une impulsion très courte et très intense que l'on peut modéliser par la distribution de Dirac  $\delta(t)$



Figure 4-3 : Réponse impulsionale d'un système linéaire

La réponse produite par le système linéaire s'appelle réponse impulsionale.

Comme l'impulsion de Dirac a un spectre constant pour toutes les fréquences, on peut envisager que la réponse impulsionale  $h(t)$  décrive complètement le système linéaire à toutes les fréquences qui lui sont accessibles.

#### 4.1.4. Relation entre réponse en fréquence et réponse impulsionale

Si les deux réponses définissent chacune complètement les caractéristiques dynamiques d'un système linéaire, il doit exister une relation entre elles.

On fait l'hypothèse d'un système stable, c'est-à-dire dont la réponse impulsionale est à support borné.

On a d'une part :



Qui devient dans le domaine spectral :

$$X_\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

$$Y_\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

D'autre part, quels que soient  $x(t)$  et  $y(t)$ , ils peuvent être décomposés suivant leurs composantes sinusoïdales

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt$$

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{j\omega t} dt$$



On a donc aussi :

$$Y_\delta(\omega) = H(\omega)X_\delta(\omega)$$

Soit :

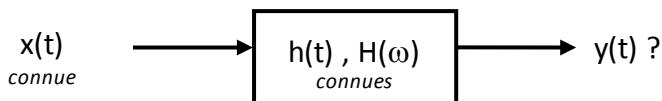
$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \text{TF}[h(t)]$$

$$\text{et inversement } h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \text{TF}^{-1}[H(\omega)]$$

La réponse en fréquence est la transformée de Fourier de la réponse impulsionale

#### 4.1.5. Réponse à une excitation arbitraire

Dès lors qu'on connaît la réponse impulsionale ou la réponse en fréquence d'un système linéaire, on est en mesure de connaître sa réponse à une excitation quelconque. On peut pour cela procéder de deux manières



##### 4.1.5.a. Méthode de la réponse en fréquence

En passant dans le domaine spectral et revenir finalement au domaine temporel.

$$\text{On a : } y(t) = \text{TF}^{-1}[Y(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\text{avec : } X(\omega) = \text{TF}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{donc : } y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega$$

ou de façon plus synthétique :

$$y(t) = \text{TF}^{-1}[H(\omega) \text{TF}[x(t)]]$$

#### 4.1.5.b. Méthode de la réponse impulsionnelle

Si  $h(t)$  est la réponse à l'instant  $t$  à une impulsion appliquée à  $t = 0$ ,  
 alors  $h(t-\tau)$  sera la réponse à l'instant  $t$  à une impulsion appliquée à  $t = \tau$   
 On peut décomposer  $x(t)$  en une série continue d'impulsions

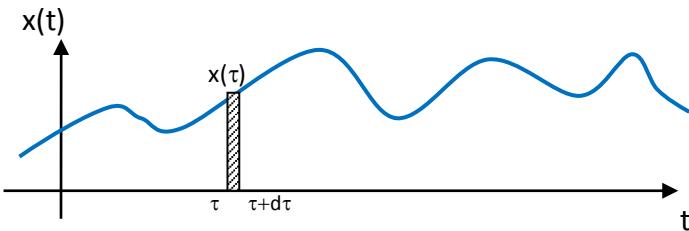
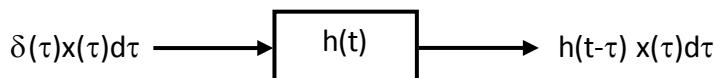


Figure 4-4 : Décomposition d'un signal en une série d'impulsions

L'impulsion à l'instant  $\tau$  a pour intensité  $x(\tau)d\tau$ . Elle produit la réponse :  $h(t-\tau)x(\tau)d\tau$



Pour obtenir la réponse  $y(t)$  complète, il faut sommer les contributions de toutes les impulsions depuis  $-\infty$  jusqu'à  $t$  :

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

On peut montrer que l'intégrale ci-dessus dite **intégrale de convolution** s'écrit aussi :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

On écrit de façon plus synthétique :

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

#### 4.2. Transmission par les systèmes S.I.S.O.

On appelle les systèmes à une seul entrée et une seule sortie les SISO pour *Single Input-Single Output*.

L'objet des paragraphes qui suivent est d'établir les relations entre les grandeurs statistiques des en entrée et en sortie des systèmes linéaires SISO.

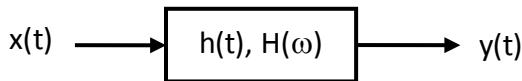


Figure 4-5 : Système linéaire SISO

Noter que la réponse impulsionnelle  $h(t)$  et la fonction de transfert  $H(\omega)$  sont des fonctions déterministes, c'est-à-dire invariante et que leur espérance est égale à elles-mêmes :

$$E[h(t)] = h(t) \quad \text{et} \quad E[H(\omega)] = H(\omega)$$

Cette précision sera utile dans les développements suivants

##### 4.2.1. Transmission des grandeurs statistiques

On cherche à déterminer les valeurs moyennes du signal de sortie  $y(t)$  en fonction de celle du signal d'entrée  $x(t)$  stationnaire.

#### 4.2.1.a. Niveau moyen

On à la relation intégrale fondamentale :  $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$

Donc l'espérance de  $y(t)$  s'écrit :

$$E[y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)E[x(t-\tau)]d\tau$$

Comme  $x(t)$  est stationnaire son espérance est indépendante du temps :

$$E[x(t-\tau)] = E[x(t)] = \mu_x$$

et  $E[y(t)] = \mu_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau$

En introduisant la fonction de transfert :  $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$       soit       $H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt$

On arrive à :

$$\mu_y = E[y(t)] = \mu_x H(0)$$

La valeur moyenne est transmise comme un signal constant

#### 4.2.1.b. Fonction d'autocorrélation en sortie

La fonction d'autocorrélation du signal de sortie est :  $R_y = E[y(t)y(t+\tau)]$

Avec

$$\begin{aligned} y(t)y(t+\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1)x(t-t_1)dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2)x(t+\tau-t_2)dt_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1)x(t-t_1)h(t_2)x(t+\tau-t_2)dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} R_y &= E[y(t)y(t+\tau)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1)h(t_2)E[x(t-t_1)x(t+\tau-t_2)]dt_1 dt_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1)h(t_2)E[x(t)x(t+\tau+t_1-t_2)]dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

Finalement :

$$R_y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1)h(t_2)R_x(\tau+t_1-t_2)dt_1 dt_2$$

#### 4.2.1.c. Fonction d'intercorrélation entré-sortie

La fonction d'intercorrélation du signal de sortie et du signal d'entrée est :

$$R_{xy} = E[x(t)y(t+\tau)]$$

Avec  $x(t)y(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1)x(t)x(t+\tau-t_1)dt_1$

Donc

$$\begin{aligned} R_y &= E[x(t)y(t+\tau)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1)E[x(t)x(t+\tau-t_1)]dt_1 \end{aligned}$$

Finalement :

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1)R_x(\tau-t_1)dt_1 = h(\tau)*R_x(\tau)$$

#### 4.2.1.d. Autospectre en sortie

L'autospectre est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation :

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \text{TF}[R_y(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1)h(t_2)R_x(\tau+t_1-t_2)dt_1dt_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 h(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 h(t_2) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega\tau} R_x(\tau+t_1-t_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 h(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 h(t_2) S_x(\omega) e^{-i\omega(t_2-t_1)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1) e^{i\omega t_1} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2) e^{-i\omega t_2} dt_2 S_x(\omega) = H^*(\omega)H(\omega)S_x(\omega) \end{aligned}$$

Finalement :

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$$

Par suite on pourra déterminer l'écart quadratique moyen et le niveau efficace en sortie :

$$E[y^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega$$

Soit :

$$E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_x(f) df$$

Et :

$$\text{RMS}(y(t)) = \sqrt{E[y^2]} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_x(f) df}$$

#### 4.2.1.e. Interspectre entrée-sortie

L'interspectre est la transformée de Fourier de la fonction d'intercorrélation :

$$\begin{aligned} S_{xy}(\omega) &= \text{TF}[R_{xy}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1)R_x(\tau-t_1)dt_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 h(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega\tau} R_x(\tau-t_1) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 h(t_1) e^{-i\omega t_1} S_x(\omega) \end{aligned}$$

Finalement :

$$S_{xy}(\omega) = H(\omega)S_x(\omega)$$

De même on aura :

$$S_{yx}(\omega) = H^*(\omega)S_x(\omega)$$

#### 4.2.1.f. Fonction de cohérence ordinaire

On peut évaluer la cohérence entre l'entrée  $x(t)$  et la sortie  $y(t)$  :  $\gamma_{xy}^2 = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)}$

En introduisant les résultats des paragraphes précédents, on a :

$$\gamma_{xy}^2 = \frac{|H(\omega)S_x(\omega)|^2}{S_x(\omega)|H(\omega)|^2S_x(\omega)} = \frac{|H(\omega)|^2 S_x^2(\omega)}{|H(\omega)|^2 S_x^2(\omega)} = 1$$

Donc dans le cas d'un système idéal, la cohérence est parfaite et égale à 1.

En pratique c'est rarement le cas. La cohérence est généralement inférieure à 1 parce que :

- Il peut exister du bruit dans la mesure de  $x(t)$  et/ou  $y(t)$
- Les estimations des densités spectrales comportent des erreurs
- Le système n'est pas linéaire entre  $x$  et  $y$
- $y$  n'est pas issu de  $x$

#### 4.2.2. Effets du bruit de mesure

En pratique, les mesures en entrée et en sortie du système linéaire étudié ne sont pas parfaites et sont souvent entachées de bruit.

On note :

- $u(t)$  le signal excitant directement le SISO
- $v(t)$  le signal directement à la sortie du SISO
- $x(t) = u(t) + m(t)$ , le signal mesuré à l'entrée, perturbé par un bruit  $m(t)$
- $y(t) = v(t) + n(t)$ , le signal mesuré à la sortie, perturbé par un bruit  $n(t)$
- $H(\omega)$  la fonction de transfert vraie du système étudié

La Figure 4-6 représente cette situation réelle.

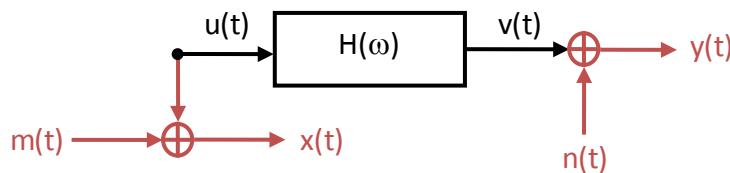


Figure 4-6 : Système linéaire avec bruit de mesure en entrée et en sortie  
(en rouge : les processus de mesure)

On suppose que les bruits  $m(t)$  et  $n(t)$  sont décorrélés des signaux réels  $u(t)$  et  $v(t)$  et indépendant l'un de l'autre. Ce qui permet d'écrire d'emblée :

$$S_{mn}(\omega) = S_{mu}(\omega) = S_{mv}(\omega) = S_{nu}(\omega) = S_{nv}(\omega) = 0$$

D'après les relations établies plus haut, on a :

$$S_{uv}(\omega) = H(\omega)S_u(\omega) \quad \text{et} \quad S_v(\omega) = |H(\omega)|^2 S_u(\omega)$$

Cependant on mesure :

$$S_x(\omega) = S_u(\omega) + S_m(\omega) \geq S_u(\omega)$$

$$S_y(\omega) = S_v(\omega) + S_n(\omega) \geq S_v(\omega)$$

$$S_{xy}(\omega) = S_{uv}(\omega) + S_{nu}(\omega) + S_{mv}(\omega) + S_{mn}(\omega) = S_{uv}(\omega)$$

La cohérence entre les mesures  $x(t)$  et  $y(t)$  vaut donc :

$$\gamma_{xy}^2 = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)} = \frac{|S_{uv}|^2}{(S_u + S_m)(S_v + S_n)}$$

avec :  $|S_{xy}|^2 = |S_{uv}|^2 = |H|^2 S_u^2 = S_v S_u$

d'où :  $\gamma_{xy}^2 = \frac{S_u S_v}{(S_u + S_m)(S_v + S_n)} \leq 1$

La cohérence est donc d'autant plus éloignée de 1 que le bruit est important en entrée ou à la sortie.

On voit ainsi comment elle indique la qualité de la mesure.

Elle sera systématiquement évaluée avant de valider la mesure.

On pourra aussi l'exploiter pour avoir, par exemple, une mesure "propre" à la sortie, en calculant le spectre de sortie cohérent (*Coherent Output Power*) :

$$COP = \gamma_{xy}^2 S_y(\omega) = \frac{|S_{uv}|^2}{(S_u + S_m)(S_v + S_n)} \cancel{(S_v + S_n)} = \frac{|S_{uv}|^2}{(S_u + S_m)}$$

On voit ici que lorsque le bruit est absent de la mesure en entrée, le COP donne une mesure exacte de la DSP du signal de sortie quel que soit le niveau de bruit à la sortie.

#### 4.2.3. Estimation de la fonction de transfert

Pour identifier un système linéaire on peut partir des densités spectrales et interspectrales en entrée et en sortie.

On a montré d'une part :

$$S_{xy}(\omega) = H(\omega)S_x(\omega)$$

dont on peut tirer un premier estimateur de la fonction de transfert :

$$H^a(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{S_x(\omega)}$$

D'autre part on a aussi :

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) = H^*(\omega)H(\omega)S_x(\omega) = H^*(\omega)S_{xy}(\omega)$$

On a donc :  $H^*(\omega) = \frac{S_y(\omega)}{S_{xy}(\omega)}$

On obtient ainsi un second estimateur de  $H$  impliquant des fonctions différentes du précédent :

$$H^b(\omega) = \frac{S_y(\omega)}{S_{yx}(\omega)}$$

#### 4.2.3.a. Etude comparative des estimateurs de $H(\omega)$

Si on considère à nouveau du bruit en entrée et en sortie, comme indiqué par la Figure 4-6, on peut développer les estimateurs précédents.

D'une part :

$$H^a(\omega) = \frac{S_{xy}}{S_x} = \frac{S_{uv}}{S_u + S_m} = \frac{S_{uv}}{S_u} \frac{1}{1 + \frac{S_m}{S_u}} = H(\omega) \frac{1}{1 + \frac{S_m}{S_u}}$$

Donc **si le rapport signal à bruit est bon en entrée ( $S_u/S_m \gg 1$ )** indépendamment du niveau de bruit en sortie,  $H^a(\omega)$  est un bon estimateur de  $H(\underline{\omega})$  :

$$H^a(\omega) = \frac{S_{xy}}{S_x} \approx H(\omega) \quad \text{si} \quad \frac{S_m}{S_u} \ll 1$$

D'autre part :

$$H^b(\omega) = \frac{S_y}{S_{yx}} = \frac{S_v + S_n}{S_{vu}} = \frac{S_v}{S_{vu}} \left( 1 + \frac{S_n}{S_v} \right) = H(\omega) \left( 1 + \frac{S_n}{S_v} \right)$$

Donc **si le rapport signal à bruit est bon en sortie ( $S_u/S_m \gg 1$ )** indépendamment du niveau de bruit en entrée,  $H^b(\omega)$  est un bon estimateur de  $H(\underline{\omega})$  :

$$H^b(\omega) = \frac{S_y}{S_{yx}} \approx H(\omega) \quad \text{si} \quad \frac{S_n}{S_v} \ll 1$$



## Rappels pratiques sur l'analyse des signaux numériques.

Les paragraphes qui suivent résument les connaissances nécessaires à l'utilisation des fonctions de bases de l'analyse spectrale numérique. Ils ne peuvent se substituer l'exposé plus fondamental qui fait l'objet du cours de traitement numérique du signal.

### **Paramètres de l'échantillonage**

On considère un signal continu  $x(t)$  dont on traite une portion de durée  $T$

$T$  est appelé la **durée d'analyse**.

La numérisation de  $x(t)$  sur la portion de durée  $T$  produit une séquence de  $N$  valeurs numériques notée  $x_n$ , ( $n = 0, \dots, N-1$ ).

Si  $f_e$  est la **fréquence d'échantillonnage**,

$t_e = 1/f_e$  est la **période d'échantillonnage**.

Les échantillons numériques successifs  $x_n$  correspondent aux valeurs du signal  $x(t)$  aux instants  $nt_e$  :

$$x_n = x(nt_e).$$

On a :  $T = (N-1)t_e \approx Nt_e$ .

On supposera dans la suite que la numérisation respecte le **théorème d'échantillonnage** :

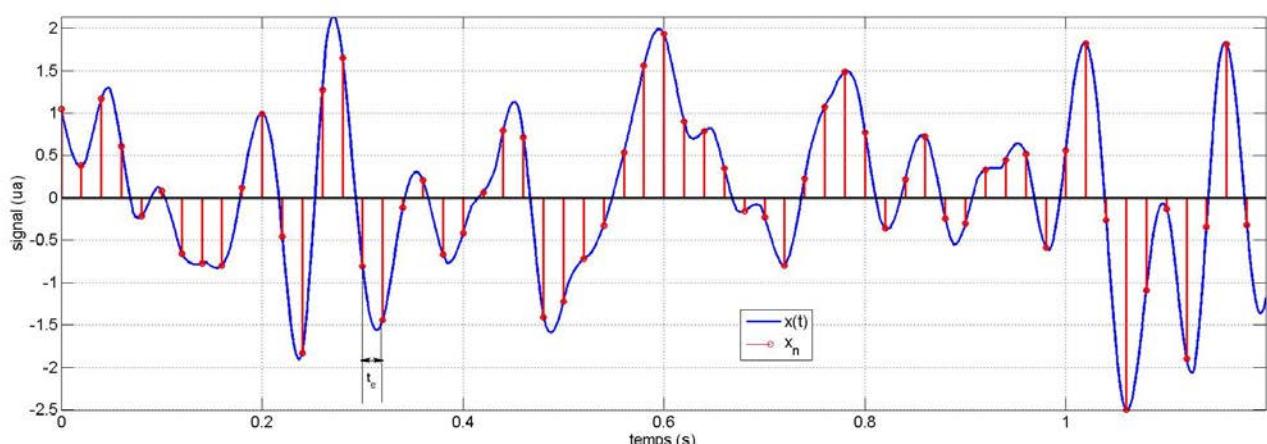
$$f_e > 2f_{\max}$$

où  $f_{\max}$  est la composante fréquentielle maximale composant le signal analysé.

En pratique la fréquence d'échantillonnage est imposée par le convertisseur analogique/numérique du système d'acquisition. Elle est généralement prise dans un ensemble de valeurs fixées (en audio typiquement 44100 Hz).

Aussi pour éviter le repliement spectral, les signaux subissent préalablement à la numérisation un filtrage passe-bas de fréquence de coupure  $f_c = f_e/2$ . Ce filtre est appelé filtre anti-repliement. La composante fréquentielle la plus haute accessible du signal est donc :

$$f_{\max} = f_e/2$$



Processus d'échantillonnage

## Transformée de Fourier Discrète

Pour évaluer le spectre de la séquence  $x_n$  on calcule la transformée de Fourier discrète (TFD). Ce calcul est mis en œuvre par des algorithmes de transformée de Fourier rapide (fft = fast fourier transform). L'algorithme utilisé par Matlab est la FFTW (Fastest Fourier Transform in the West). On trouve tout sur la FFTW à l'adresse suivante : <http://www.fftw.org/>

A partir de la séquence de N échantillons temporels, la TFD produit N échantillons spectraux notés  $X_k$  et définis par :

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i \frac{nk}{N}}$$

Ces échantillons sont des nombres complexes :

$$X_k = |X_k| e^{i\phi(X_k)}$$

$|X_k|$  est le **spectre d'amplitude**.

$\phi(X_k)$  est le **spectre de phase**

Dans le domaine spectral les échantillons calculés sont séparés par un intervalle  $\Delta f$ .

Pour déterminer  $\Delta f$ , on peut réécrire l'opération de TFD en faisant intervenir explicitement les valeurs de temps et fréquence par analogie avec la TF continue :

$$X_k = X(k\Delta f) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i \frac{nk}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nt_e) e^{-2\pi i (nt_e)(k\Delta f)} \Leftrightarrow X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(t) e^{-2\pi i ft}$$

On a donc :  $t_e = \frac{\Delta f}{N}$  soit  $\boxed{\Delta f = \frac{1}{Nt_e} = \frac{1}{T}}$  et  $\boxed{\Delta\omega = \frac{2\pi}{Nt_e} = \frac{2\pi}{T}}$

*La résolution spectrale  $\Delta f$  est égale à l'inverse de la durée d'analyse  $T$*

La séquence  $X_k$  produite par la TFD est périodique de période N

$$X_{N+k} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i \frac{nk}{N}} e^{-2\pi i n} = X_k$$

Il s'en suit que les échantillons  $X_{N/2}$  à  $X_{N-1}$  peuvent être associés aux fréquences négatives et remplacer les échantillons  $X_{-N/2}$  à  $X_{-1}$ .

On vérifie donc bien que la fréquence maximale du spectre calculé est :

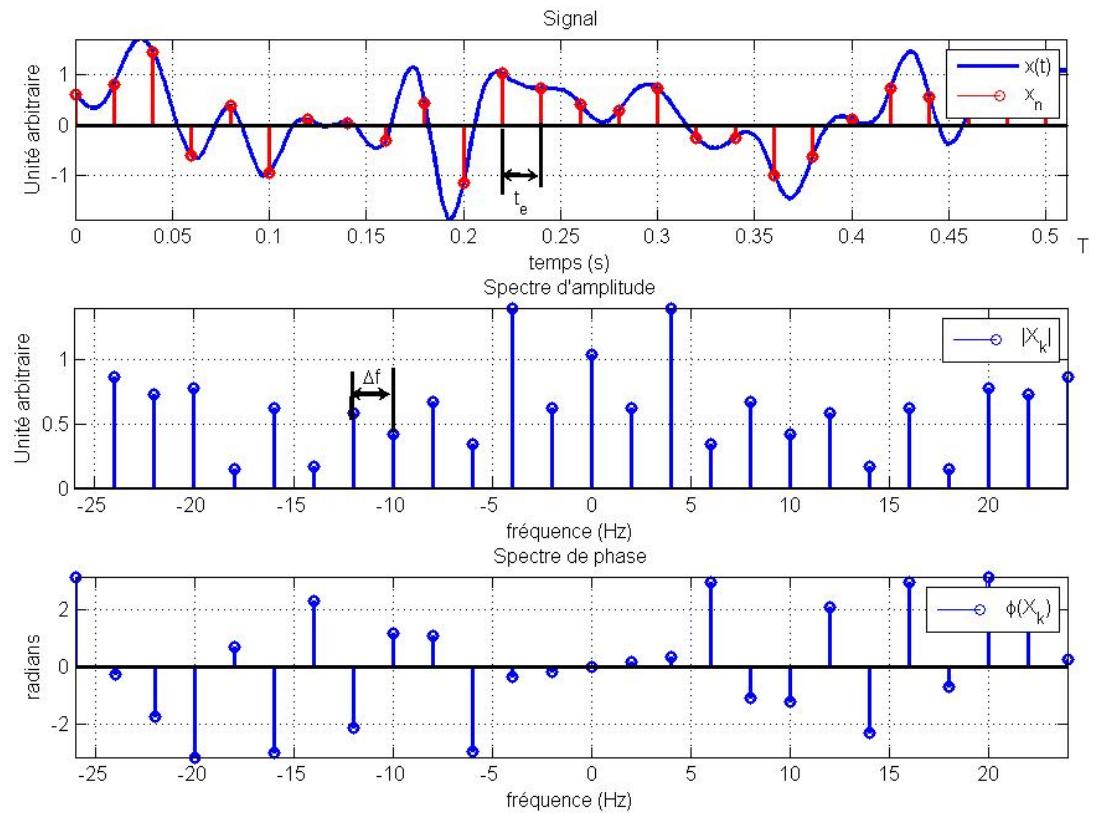
$$f_{\max} = \frac{N}{2} \Delta f = \frac{1}{2t_e} = \frac{f_e}{2}$$

La bande spectrale accessible par l'analyse par TFD est donc  $[-f_e/2 ; f_e/2]$

Enfin il faut noter que les échantillons associés aux fréquences négatives sont les conjugués de ceux associés aux fréquences positives :

$$X_{-k} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{2\pi i \frac{nk}{N}} = X_k^*$$

Noter que pour une **efficacité maximale** des algorithmes fft, il faut que le nombre N d'échantillons de la séquence  $x_n$  soit une **puissance de 2** ( $N = 2^p$ , p entier soit  $N = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, \dots$ ).



Exemple d'analyse spectrale numérique par TFD