الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2013

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأوّل: (04.5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط:

$A(-1;1;3)$ ، $B(1;0;-1)$ ، $C(2;-1;1)$ ، $D(2;0;-1)$ و المستوي (P) ذا المعادلة: $2y+z+1=0$.

ليكن (Δ) المستقيم الذي تمثيل وسيطي له: $\begin{cases} x=-1 \\ y=2+\beta \\ z=1-2\beta \end{cases}$ حيث β وسيط حقيقي.

1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC)، ثمّ تحقّق أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P).

2) بيّن أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.

3) أ) احسب المسافة بين النقطة A و المستوي (P).

ب) بيّن أن D نقطة من (P)، و أن المثلث BCD قائم.

4) بيّن أن $ABCD$ رباعي وجوه، ثمّ احسب حجمه.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I) المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{5^{n+1}}{6^n}$

1) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول.

2) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) معرّفة بـ: $u_0=1$، و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\sqrt{5u_n+6}$

1) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le 6$.

2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) أ) برهن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $6-u_{n+1}\le \dfrac{5}{6}\left(6-u_n\right)$.

ب) بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le 6-u_n\le v_n$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية:

$z^2-(4\cos\alpha)z+4=0 \ldots\ldots\ldots(\text{I})$ حيث α وسيط حقيقي.

2) من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$؛ نرمز إلى حلي المعادلة (I) بِـ z_1 و z_2. بيّن أن: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$.

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها: $z_A=1+i\sqrt{3}$ ؛ $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=4+i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ) أنشئ النقط A ، B و C.

ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$، ثمّ استنتج أنّ C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته و زاويته.

جـ) عيّن لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$، ثم أنشئ G.

د) احسب z_D لاحقة النقطة D، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

التمرين الرابع: (06.5 نقاط)

x	f(x)
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	−0,005
0,23	−0,026
0,24	−0,048
0,25	−0,070

I) f الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بِـ: $f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$،

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\overset{<}{\to}1}f(x)$، ثمّ استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C).

2) احسب $f'(x)$. بيّن أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α. باستعمال جدول القيم أعلاه جِد حصرا للعدد α.

4) ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C)، ثمّ ارسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

5) عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقة m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II) g الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بِـ: $g(x)=f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

1) ادرس تغيرات الدالة g على $]-\infty;1[$، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

2) أ) تحقّق من أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$، ثمّ بيّن أن: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

ب) استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

ج) تحقّق من أن: $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$، معادلة للمستقيم (T).

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية: (E) ...... $z^2+4z+13=0$

1) تحقّق أن العدد المركب $-2-3i$ حل للمعادلة (E)، ثمّ جد الحل الآخر.

2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتاهما $z_A=-2-3i$ و $z_B=i$ على الترتيب. S التشابه المباشر الذي مركزه A، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ والذي يحوّل كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

أ) بيّن أن: $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$.

ب) احسب z_C لاحقة النقطة C، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

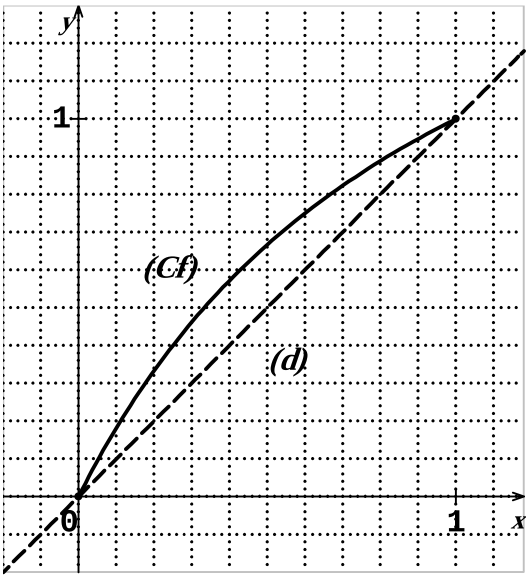
3) لتكن النقطة D، حيث: $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

أ) بيّن أن D هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

ب) احسب z_D لاحقة النقطة D.

ج) بيّن أن: $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ACD.

التمرين الثاني: (04 نقاط)



في الشكل المقابل، (C_f) هو التمثيل البياني للدّالة f المعرّفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ ،

و (d) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

1) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأوّل، $u_0=\frac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة، ثمّ مثّل الحدود u_0، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزا خطوط التمثيل.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) أ) أثبت أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

ب) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n<1$.

ج) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدّها الأول v_0.

ب) احسب نهاية (u_n).

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $A(2;1;-1)$، $B(1;-1;3)$، $C\left(-\frac{3}{2};-2;1\right)$ و $D\left(\frac{7}{2};-3;0\right)$. ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$.

1) أ) احسب إحداثيات النقطة I.

ب) بيّن أنّ: $2x+4y-8z+5=0$ معادلة ديكارتية لـ(P)؛ المستوي المحوري لـ $[AB]$.

2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه له.

3) أ) جد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) و المستقيم (Δ).

ب) بيّن أنّ (Δ) و (AB) من نفس المستوى، ثمّ استنتج أن المثلث IEC قائم.

4) أ) بيّن أنّ المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) و المستقيم (IE).

ب) أُحسب حجم رباعي الوجوه $DIEC$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$

1) ادرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) استنتج أنه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$، $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.(وحدة الطول $2cm$)

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$. فسّر النتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هي مشتقة الدالة f.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

ج) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$، ثمّ تحقق أن $0<\alpha<0{,}5$.

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة : $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0.

أ) احسب x_0.

ب) ارسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f).

ج) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين متمايزين.