الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

دورة: 2024

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 11 كريّة متماثلة لا نفرّق بينها باللمس موزعة كما يلي: كريّتان بيضاوان مرقمتان بـ: 1 ، 3 وأربع كريّات حمراء مرقمة بـ: 0 ، 1 ، 1 ، 3 وخمس كريّات خضراء مرقمة بـ: 0 ، 1 ، 1 ، 3 ، 4

I) نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريّات من الكيس ونعتبر الحوادث الآتية:

A : " الحصول على 3 كريّات من نفس اللون " ، B : " الحصول على 3 كريّات جُداء أرقامها عدد فردي "

C : " الحصول على 3 كريّات جُداء أرقامها عدد زوجي "

1) أ) احسب $P(A)$ احتمال الحادثة A و بيّن أنّ: $P(B)=\frac{56}{165}$ ثمّ استنتج $P(C)$

ب) احسب الاحتمال الشرطي $P_A(B)$

2) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ عملية سحب لثلاث كريّات، عدد الكريّات التي تحمل رقما زوجيا.

أ) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ثمّ احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

ب) احسب احتمال الحادثة $(X>1)$

II) نسحب الآن من الكيس عشوائيا 3 كريّات على التوالي وبدون إرجاع.

– احسب احتمال الحادثة D : " الحصول على 3 كريّات جُداء أرقامها معدوم "

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية:

$$\left(z-1+2\sqrt{3}\right)\left[z^2-2\left(1-\sqrt{3}\right)z+5-2\sqrt{3}\right]=0$$

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A=1-\sqrt{3}+i$ ، $z_B=1-2\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_A}$

1) اكتب كلّا من z_A-1 ، z_C-1 و z_B على الشكل المثلثي.

2) جِد لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$

3) بيّن أنّ الرباعي $ABCD$ معيّن.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=0$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{4-u_n}{2+u_n}$

1) احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثمّ برهن بالتراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $0\leq u_n\leq 2$

2) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+4}$

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $-\dfrac{2}{3}$ ثمّ اكتب عبارة v_n بدلالة n

ب) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n=\dfrac{5}{1-v_n}-4$ ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، نضع:

$$S_n=v_n+v_{n+1}+\cdots+v_{n+2024} \quad \text{و} \quad T_n=\frac{1}{4+u_n}+\frac{1}{4+u_{n+1}}+\cdots+\frac{1}{4+u_{n+2024}}$$

– احسب S_n بدلالة n ثمّ استنتج T_n بدلالة n

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) يُمثّل الجدول المقابل تغيّرات الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x\,e^{-x+1}-2$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	-2

– احسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$

II) f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-2x+3-x\,e^{-x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، (وحدة الطول $2cm$).

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-2x+3$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$

ثمّ ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (Δ)

2) أ) بيّن أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)-e^{-x+1}$

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) ، يُطلب تعيين معادلة له.

4) أ) ارسم (Δ) ، (T) و (C_f)

ب) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x)=-2x+m$ حلّين مختلفين.

5) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة، بيّن أنّ: $\int_0^1 x\,e^{-x+1}\,dx=e-2$

ب) استنتج بالسنتيمتر المربع $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بـ (C_f) و (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=0$ و $x=1$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 5 قطع كهربائية غير متمايزة ولا نفرق بينها باللمس، منها 3 قطع سليمة وقطعتان غير سليمتين.

نرمز إلى القطعة السليمة بالرّمز S وإلى القطعة غير السليمة بالرّمز $\overline{S}$

نسحب عشوائيا من الكيس 3 قطع على التوالي مع الإرجاع ، ونعتبر الحوادث:

A : " القطعة الأولى المسحوبة سليمة " ، B : " سحب قطعة واحدة فقط سليمة "

C : " القطعة الثالثة المسحوبة سليمة "

1) شكّل شجرة الاحتمالات التي تُنمذج هذه التجربة.

2) احسب $P(A)$ ، $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B ثمّ بيّن أنّ: $P(C)=\frac{3}{5}$

3) احسب الاحتمال الشرطي $P_C(A)$ ، هل الحادثتان A و C مستقلتان ؟

4) نُرفق بكل قطعة سليمة العدد 10 وبكل قطعة غير سليمة العدد -10 ، ونعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب من الكيس لثلاث قطع مجموع الأعداد المرفقة بها.

أ) برّر أنّ قيم المتغير العشوائي X هي: -30 ، -10 ، 10 ، 30

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ثمّ احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة مما يلي:

1) z عدد مركب مرافقه $\overline{z}$ ، مرافق العدد المركب $z+i$ هو:

أ) $\overline{z}-i$ ب) $\overline{z}+i$ ج) $z-i$

2) العدد المركب $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2024}$ يساوي: أ) 1 ب) i ج) -1

3) z عدد مركب حيث $z=2\left(1+i\sqrt{3}\right)$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نضع: $S_n=\ln|z|+\ln|z|^2+\dots+\ln|z|^n$ ، لدينا:

أ) $S_n=(n+1)^2\ln 2$ ب) $S_n=n(n+1)\ln 2$ ج) $S_n=2\left(\frac{1-(2\ln 2)^n}{1-2\ln 2}\right)\ln 2$

4) z عدد مركب حيث: $z=\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}$ ، الشّكل المثلثي للعدد المركب z هو:

أ) $-\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$ ب) $\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$ ج) $\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) f الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]2;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{x+1}{2x}$

– شكّل جدول تغيرات الدّالة f ثمّ استنتج أنّه من أجل كلّ x من $]2;+\infty[$ فإنّ $\frac{1}{2}<f(x)\leq\frac{3}{4}$

2) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $n \geq 2$ بـ : $u_n = \frac{n}{2^n}$

أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $n \geq 2$ فإنّ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{3}{4}$

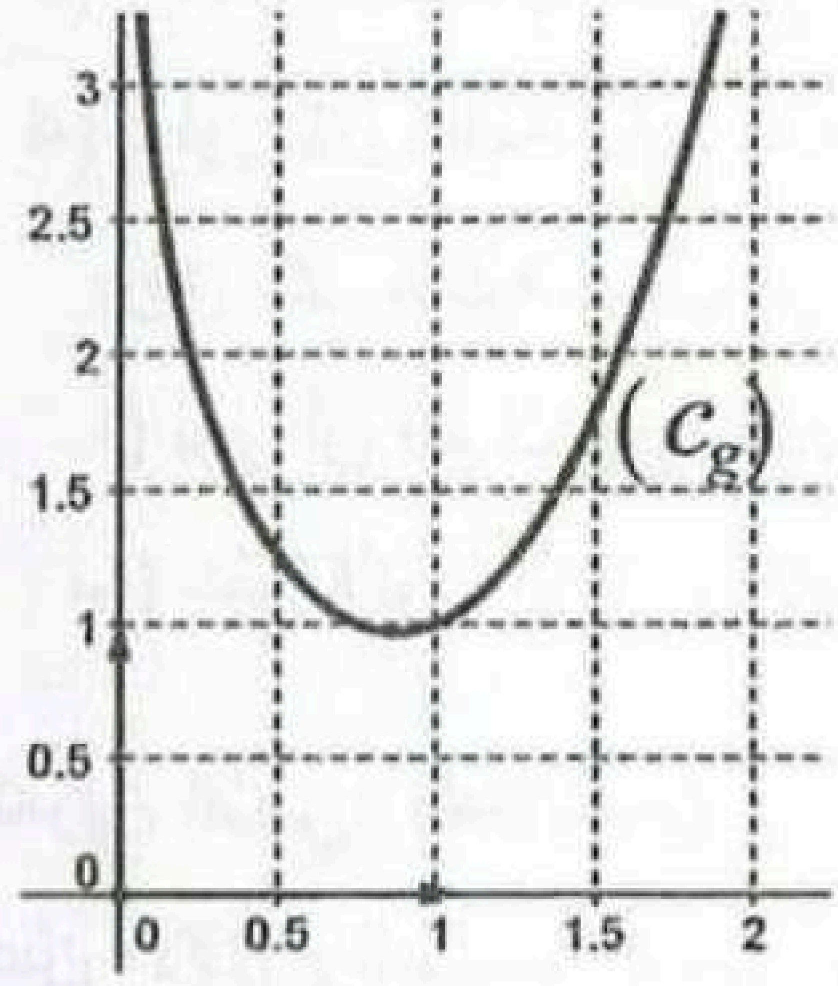
ب) أثبت أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $n \geq 2$ فإنّ $u_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

جـ) نضع من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $n \geq 2$: $S_n = \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \ldots + \frac{u_n}{n}$

– بيّن أنّ: $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$ ثمّ عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = \frac{511}{1024}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدّالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2} - \ln x$ ، (C_g) تمثيلها البياني كما في الشّكل.



– بقراءة بيانية ، عيّن إشارة $g(x)$

II) f الدّالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = -x - \frac{\ln x}{x^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، (وحدة الطول $2cm$).

1) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$

2) أ) بيّن أنّه من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ فإنّ $f'(x) = \frac{-2g(x)}{x^3}$

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

جـ) أثبت أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7 < \alpha < 0,71$

3) أ) بيّن أنّ المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) ، يطلب تعيين معادلة له.

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (Δ)

4) بيّن أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه -1 ، يطلب تعيين معادلة له.

5) أ) ارسم كلّا من (Δ) ، (T) و (C_f)

ب) m وسيط حقيقي، عيّن بيانيا قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة: $\frac{\ln x}{x^2} = m$ حلّين مختلفين.

6) أ) أثبت أنّ الدّالة $H : x \mapsto \frac{-1-\ln x}{x}$ هي دالة أصلية للدّالة $h : x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ على $]0;+\infty[$

ب) $\mathcal{A}(\alpha)$ المساحة بالسنتيمتر المربع للحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = -x$ ، $x = \alpha$ ، $x = 1$

– بيّن أنّ: $\mathcal{A}(\alpha) = 4\left(\alpha^2 - \frac{1}{\alpha} + 1\right)$

انتهى الموضوع الثاني