Statistique pour ingénieur
Thème 1 : Notions de probabilités
Video 3 : Théorème central-limite et autres convergences

D. Pastor F.-X. Socheleau

Institut Mines-Télécom
Télécom Bretagne

Exemple introductif

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d.

$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \ldots = \mathbb{E}(X_n) = \mu$

$\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(X_2) = \ldots = \mathbb{V}(X_n) = \sigma^2$

Moyenne empirique : $\overline{X} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$

$\mathbb{E}\left(\overline{X}\right) = \mu$

$\mathbb{V}\left(\overline{X}\right) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

Exemple introductif

Selon quel critère $\overline{X}$ converge-t-il vers μ ?

Sommaire

Convergence en loi

Définition

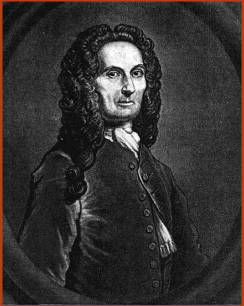
Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

en tout point x où F_X est continue.

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

Illustration



Abraham de Moivre
(1667-1754)

Pierre-Simon de Laplace
(1749-1827)

Illustration

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{B}(1, p)$$

$$\mathbb{P}\left(X_i = x\right) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1 \\ 1 - p & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

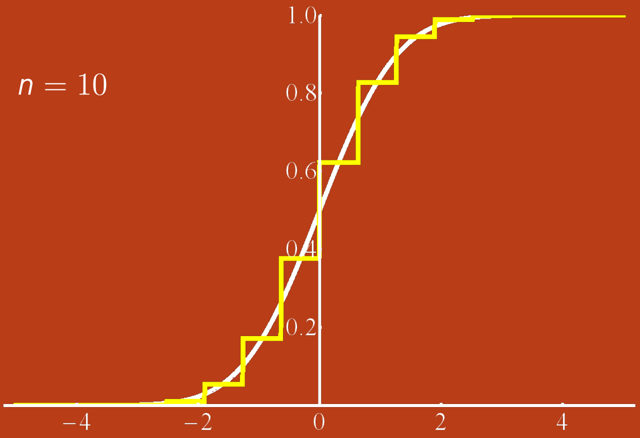
$$\mathbb{E}\left(\overline{X}\right) = p$$

$$\mathbb{V}\left(\overline{X}\right) = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$\frac{\overline{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

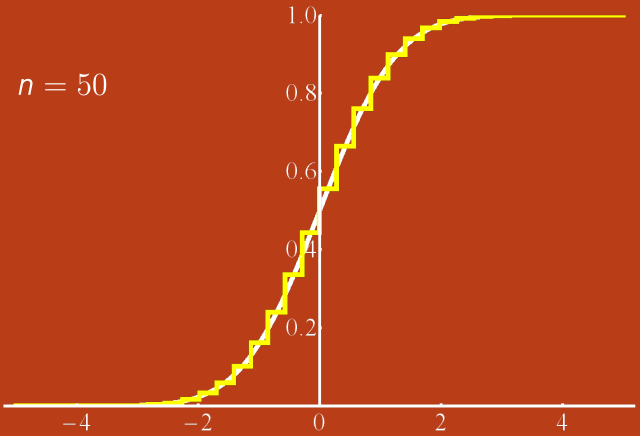
Illustration

- Fonction de répartition de $\overline{X}$
- Fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$



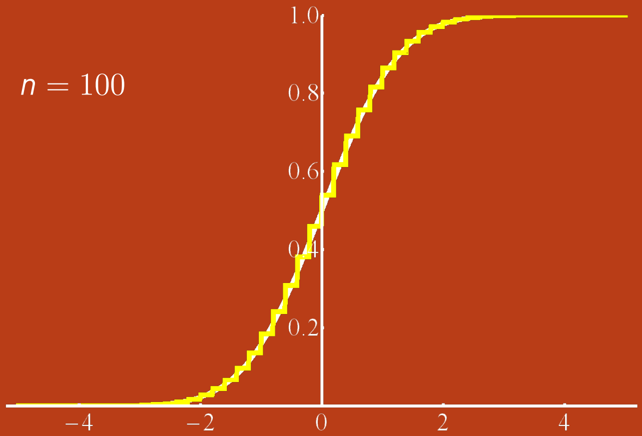
Illustration

- Fonction de répartition de $\overline{X}$
- Fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$



Illustration

- Fonction de répartition de $\overline{X}$
- Fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$



Théorème central-limite

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d.
$\mathbb{E}(X_i) = \mu$
$\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2$

Théorème

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

En pratique, pour n grand :

$$\bar{X} \simeq \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

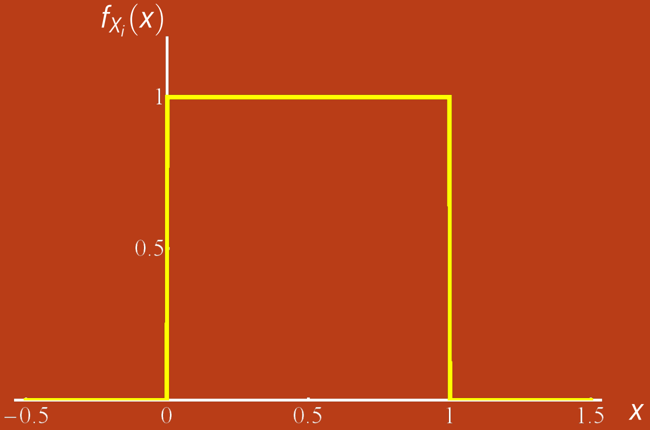
Illustration

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{U}([0,1])$$

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

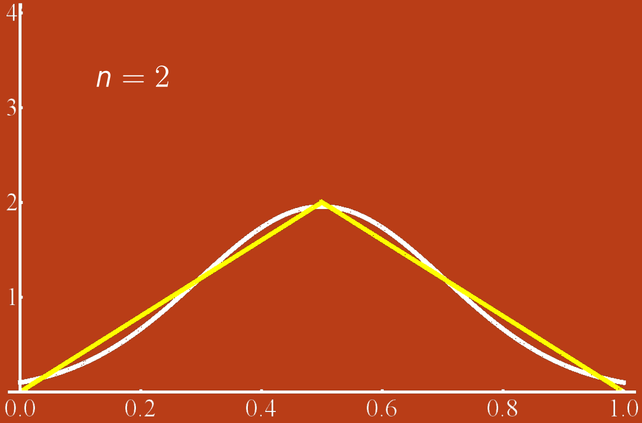
$$\mathbb{E}\left(\bar{X}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{V}\left(\bar{X}\right) = \frac{1}{12n}$$



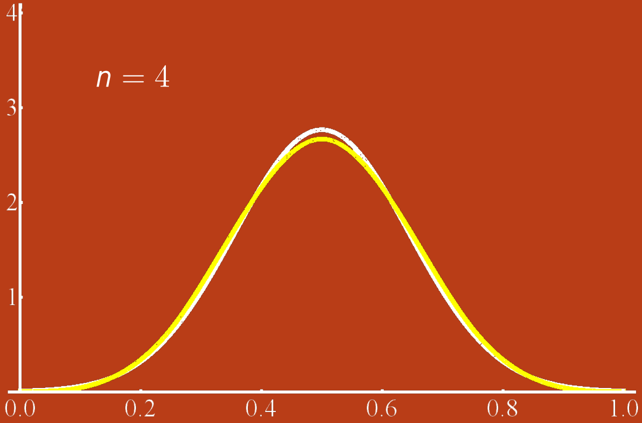
Illustration

- Densité de $\overline{X}$
- Densité de $\mathcal{N}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{24}\right)$



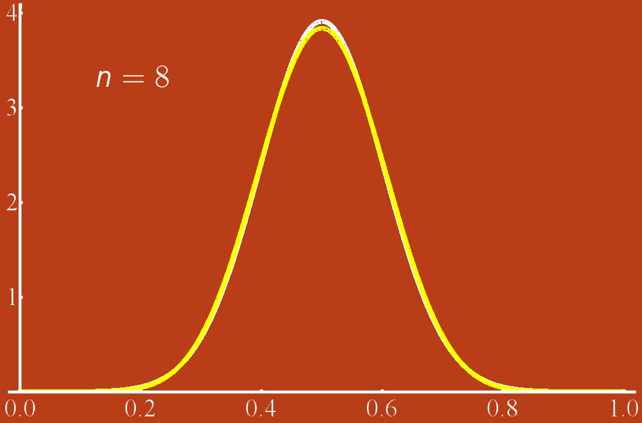
Illustration

- Densité de $\overline{X}$
- Densité de $\mathcal{N}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{48}\right)$



Illustration

- Densité de $\overline{X}$
- Densité de $\mathcal{N}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{96}\right)$



Limitations de la convergence en loi

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

$$(X_n - X) \rightarrow ?$$

Sommaire

Convergence en probabilité

Définition

Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en probabilité vers* X *si pour tout réel* $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$$

Relation entre modes de convergence

Proposition

$$\left(X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X\right) \Rightarrow \left(X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X\right)$$

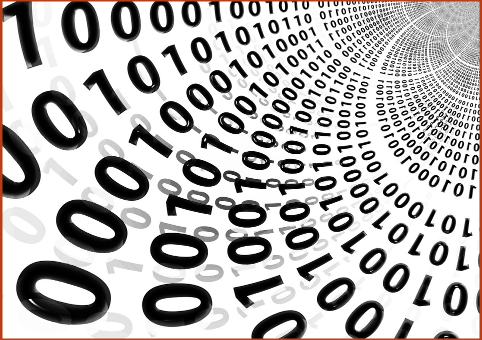
Loi faible des grands nombres

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d.
$\mathbb{E}(X_i) = \mu$
$\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2$
$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

Théorème

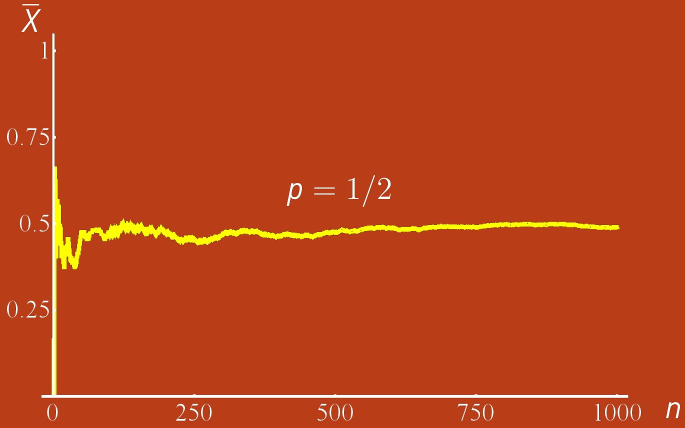
$$\overline{X} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$$

Illustration



$$X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{B}(1, p)$$

Illustration



INSTITUT
Mines-Télécom