MOOC Statistique pour ingénieur
Thème 2 : échantillonnage, estimation
Vidéo 5 : Contrôle statistique

F. Delacroix M. Lecomte

Institut Mines-Télécom
École Nationale Supérieure des Mines de Douai

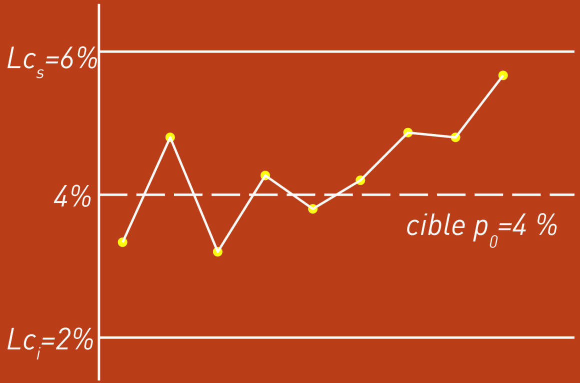
Sommaire

Principe des cartes de contrôle

Walter Shewhart (1891 – 1967)

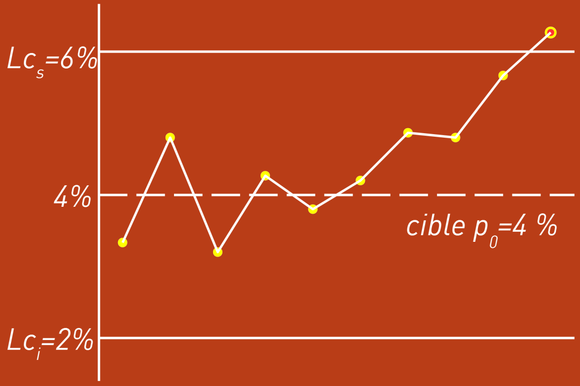
Principe des cartes de contrôle

- Limites de contrôle inférieure et supérieure Lc_i et Lc_s
- Report des estimations du paramètre sur différents échantillons successifs



Principe des cartes de contrôle

- Limites de contrôle inférieure et supérieure Lc_i et Lc_s
- Report des estimations du paramètre sur différents échantillons successifs
- Détection des points «hors contrôle»



Exemple : fabrication d'un médicament

X=masse d'un comprimé

Exemple : fabrication d'un médicament

X=masse d'un comprimé

Si le processus est maîtrisé, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où $\begin{cases} \mu &= \quad 63\, mg \\ \sigma &= \quad 0,1\, mg \end{cases}$

Mise en place de deux cartes de contrôle aux objectifs différents :

- sur la moyenne : détection d'un décentrage
- sur l'écart-type : recherche de l'origine d'une dispersion anormale

Sommaire

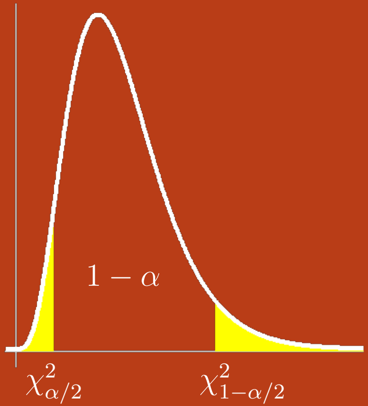
Limites de contrôle de la carte de l'écart-type

Rappels:

- S^2=variance empirique de l'échantillon
- $Z = \dfrac{n\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

Intervalle de probabilité : soient $\chi^2_{\alpha/2}$ et $\chi^2_{1-\alpha/2}$ tels que

$$\mathbb{P}\left(\chi^2_{\alpha/2} \leq Z \leq \chi^2_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$



Limites de contrôle de la carte de l'écart-type

Rappels:

- S^2=variance empirique de l'échantillon
- $Z = \dfrac{n\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

Intervalle de probabilité : soient $\chi^2_{\alpha/2}$ et $\chi^2_{1-\alpha/2}$ tels que

$$\mathbb{P}\left(\chi^2_{\alpha/2} \leq Z \leq \chi^2_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\sigma\sqrt{\frac{\chi^2_{\alpha/2}}{n}} \leq S \leq \sigma\sqrt{\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}}{n}}\right) = 1-\alpha$$

Définition

Limites inférieure et supérieure de contrôle de σ:

$$Lc_i(\sigma) = \sigma\sqrt{\frac{\chi^2_{\alpha/2}}{n}} \quad Lc_s(\sigma) = \sigma\sqrt{\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}}{n}}$$

Exemple : fabrication d'un médicament

$$Lc_i(\sigma) = \sigma\sqrt{\frac{\chi^2_{\alpha/2}}{n}}$$

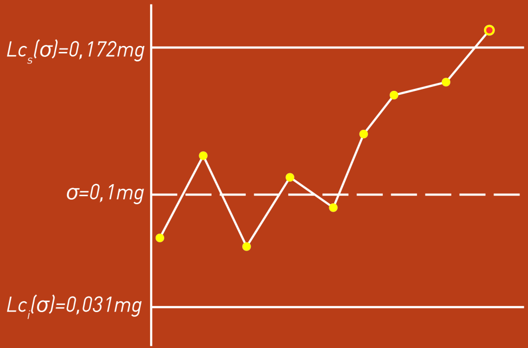
$$Lc_s(\sigma) = \sigma\sqrt{\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}}{n}}$$

Avec $\sigma = 0,1\,mg$ et $n = 10$,

$\chi^2_{\alpha/2} = 0,972$ et $\chi^2_{1-\alpha/2} = 29,666$

on obtient

$Lc_i(\sigma) = 0,031\,mg$ $\quad$ $Lc_s(\sigma) = 0,172\,mg$



Sommaire

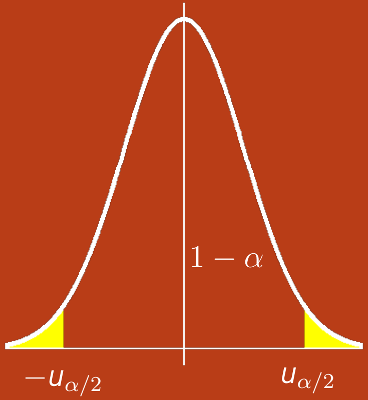
Limites de contrôle de la carte de la moyenne

Rappels :

- $\overline{X}$ =moyenne empirique
- $U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

Soit $u_{\alpha/2}$ tel que

$$\mathbb{P}\left(-u_{\alpha/2} \leq U \leq u_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$



Limites de contrôle de la carte de la moyenne

Rappels :

- $\overline{X}$ =moyenne empirique
- $U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

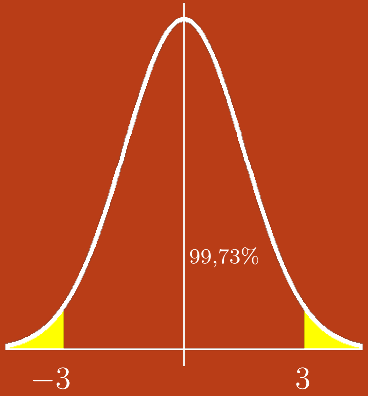
Soit $u_{\alpha/2}$ tel que

$$\mathbb{P}\left(-u_{\alpha/2} \leq U \leq u_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Pour $\alpha = 0,27\%$ on a $u_{\alpha/2} = 3$.

Intervalle de probabilité pour $\overline{X}$ à $1 - \alpha = 99,73\%$:

$$\mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} \leq \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



Limites de contrôle de la carte de la moyenne

Rappels :

- $\overline{X}$ =moyenne empirique
- $U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

Soit $u_{\alpha/2}$ tel que

$$\mathbb{P}\left(-u_{\alpha/2} \leq U \leq u_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Pour $\alpha = 0,27\%$ on a $u_{\alpha/2} = 3$.
Intervalle de probabilité pour $\overline{X}$ à $1 - \alpha = 99,73\%$:

$$\mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} \leq \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Définition

Limites inférieure et supérieure de contrôle de μ :

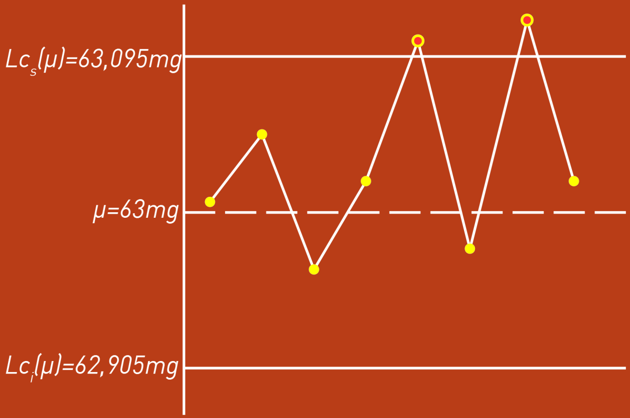
$$Lc_i(\mu) = \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$Lc_s(\mu) = \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Exemple : fabrication d'un médicament

$$Lc_i(\mu) = \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$Lc_s(\mu) = \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Avec $\mu = 63\,mg$, $\sigma = 0,1\,mg$ et $n = 10$, on obtient

$$Lc_i(\mu) = 62,905\,mg$$
$$Lc_s(\mu) = 63,095\,mg$$



Sommaire

Efficacité des cartes de contrôle

2 risques d'erreur :

α	risque de conclure à un déréglage alors que le processus est bien réglé, fixé lors du calcul des limites de contrôle
β	risque de ne pas déceler de déréglage alors que celui-ci existe

$1-\beta$=probabilité de déceler un déréglage existant

Cas de la carte de contrôle de la moyenne

On suppose que (μ et σ étant connus):

- si le processus est bien maîtrisé, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- si le processus est décentré d'une quantité $k\sigma$, $X \sim \mathcal{N}(\mu + k\sigma, \sigma^2)$

On a

$$\begin{aligned}\beta &= \mathbb{P}\left(Lc_i(\mu) \leq \overline{X} \leq Lc_s(\mu)\right) \\ &= \Phi\left(3 - k\sqrt{n}\right) - \Phi\left(-3 - k\sqrt{n}\right)\end{aligned}$$

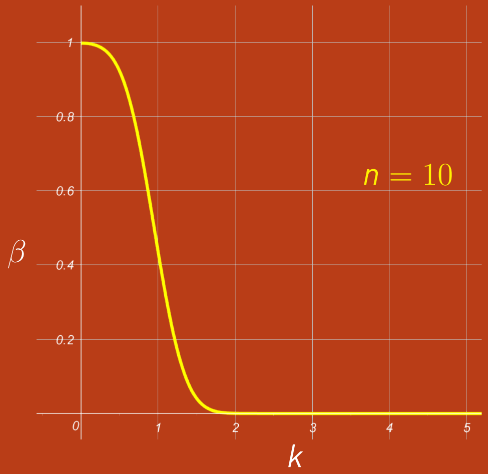
La courbe $k \longmapsto \beta(k)$ est la courbe d'efficacité à n fixé.

Quelques courbes d'efficacité

$$\beta = \Phi(3 - k\sqrt{n}) - \Phi(-3 - k\sqrt{n})$$

Pour $n = 10$:

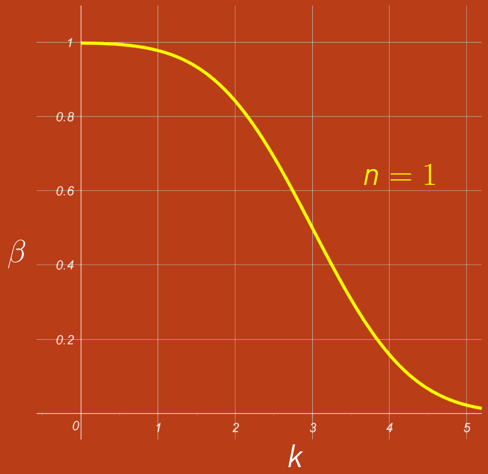
k	β
0	1
0,5	0,9220
0,75	0,7351
1	0,4355
1,25	0,1703
1,5	0,0406
1,75	0,0056
2	0,0004
3	0,0000



Quelques courbes d'efficacité

$$\beta = \Phi(3 - k\sqrt{n}) - \Phi(-3 - k\sqrt{n})$$

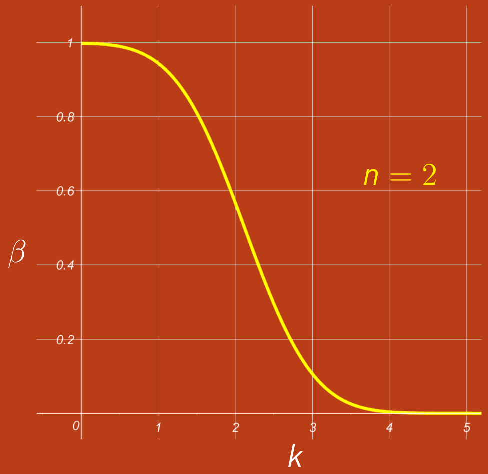
En faisant varier *n* on obtient plusieurs courbes.



Quelques courbes d'efficacité

$$\beta = \Phi(3 - k\sqrt{n}) - \Phi(-3 - k\sqrt{n})$$

En faisant varier *n* on obtient plusieurs courbes.

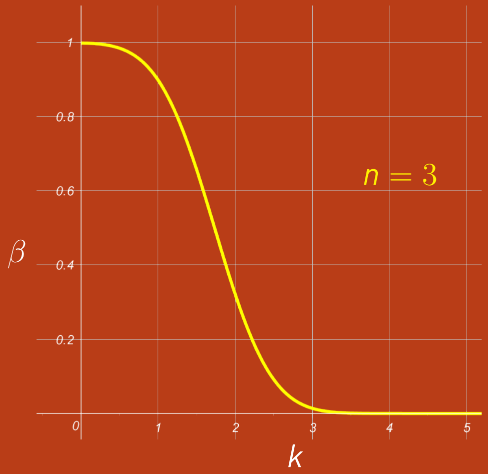


Quelques courbes d'efficacité

$$\beta = \Phi(3 - k\sqrt{n}) - \Phi(-3 - k\sqrt{n})$$

En faisant varier n on obtient plusieurs courbes.

Valeurs acceptables de β : entre 5 et 20%.

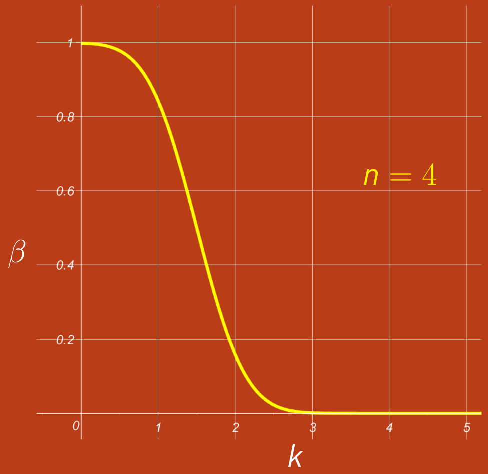


Quelques courbes d'efficacité

$$\beta = \Phi(3 - k\sqrt{n}) - \Phi(-3 - k\sqrt{n})$$

En faisant varier n on obtient plusieurs courbes.

Valeurs acceptables de β : entre 5 et 20%.

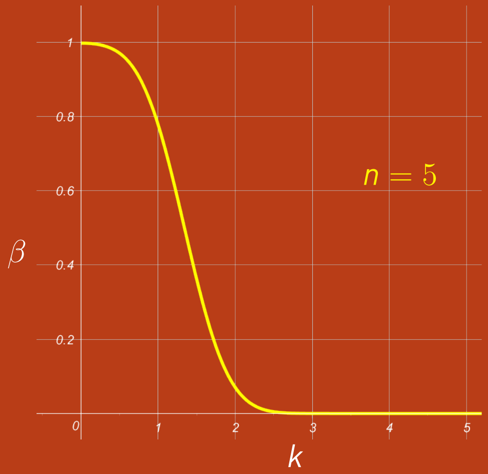


Quelques courbes d'efficacité

$$\beta = \Phi(3 - k\sqrt{n}) - \Phi(-3 - k\sqrt{n})$$

En faisant varier n on obtient plusieurs courbes.

Valeurs acceptables de β :
entre 5 et 20%.
À décentrage k fixé, plus β est faible, plus la détection est efficace.

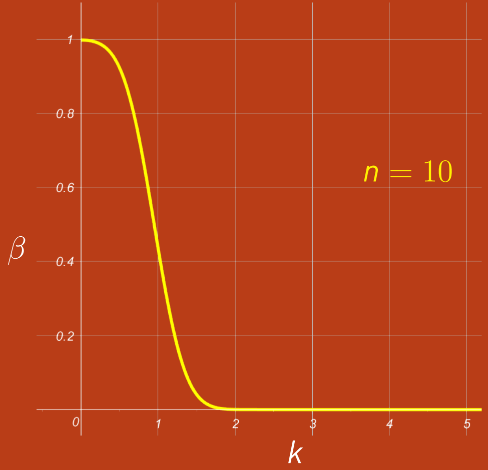


Quelques courbes d'efficacité

$$\beta = \Phi(3 - k\sqrt{n}) - \Phi(-3 - k\sqrt{n})$$

En faisant varier n on obtient plusieurs courbes.

Valeurs acceptables de β : entre 5 et 20%.
À décentrage k fixé, plus β est faible, plus la détection est efficace.

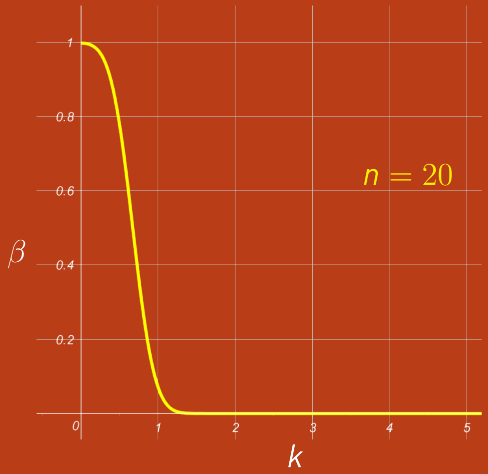


Quelques courbes d'efficacité

$$\beta = \Phi(3 - k\sqrt{n}) - \Phi(-3 - k\sqrt{n})$$

En faisant varier n on obtient plusieurs courbes.

Valeurs acceptables de β : entre 5 et 20%.
À décentrage k fixé, plus β est faible, plus la détection est efficace.

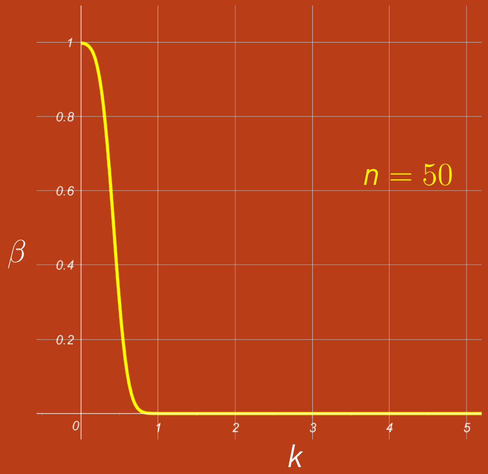


Quelques courbes d'efficacité

$$\beta = \Phi(3 - k\sqrt{n}) - \Phi(-3 - k\sqrt{n})$$

En faisant varier n on obtient plusieurs courbes.

Valeurs acceptables de β : entre 5 et 20%.
À décentrage k fixé, plus β est faible, plus la détection est efficace.

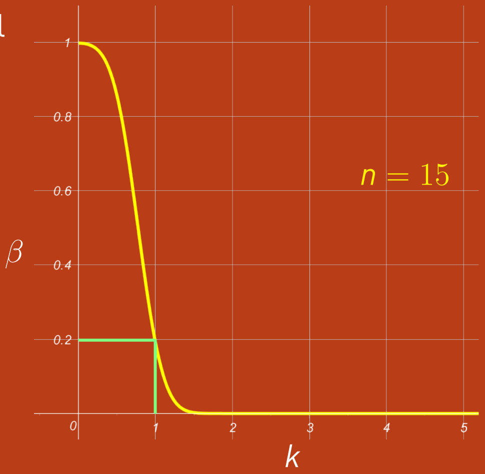


Quelques courbes d'efficacité

Détermination d'un échantillon optimal

Exemple

Pour $k = 1$ et $\beta = 0,20$, on peut choisir $n = 15$.



INSTITUT
Mines-Télécom