# MOOC Statistique pour ingénieur
# Thème 2 : échantillonnage, estimation
## Vidéo 4 : Intervalles de confiance

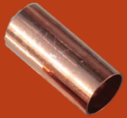
F. Delacroix     M. Lecomte

Institut Mines-Télécom
École Nationale Supérieure des Mines de Douai

# Sommaire

# Cas où l'écart-type est connu

masse=$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$ $\sigma_0 = 1g$ connu



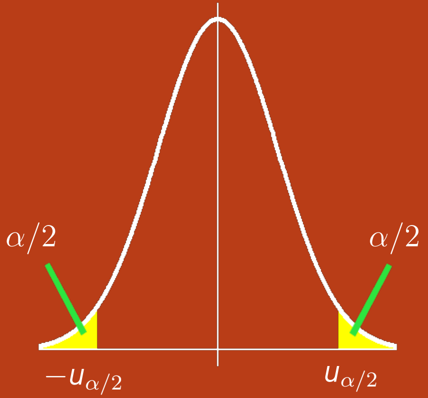
# Cas où l'écart-type est connu

$n = 15$

masse=$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$ $\quad \sigma_0 = 1g$ connu

$$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$$

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$



# Cas où l'écart-type est connu

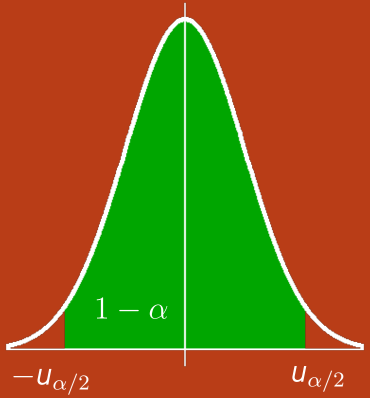
$$\mathbb{P}\left(-u_{\alpha/2} \leq U \leq u_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\overline{X} - u_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + u_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left[\overline{X} - u_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \overline{X} + u_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\bar{x} = 10,9\,g \quad \sigma_0 = 1\,g$$

$$Ic_{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{x} - u_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$$



# Cas où l'écart-type est connu

$$\mathbb{P}\left(-u_{\alpha/2} \leq U \leq u_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\overline{X} - u_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + u_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left[\overline{X} - u_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \overline{X} + u_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\bar{x} = 10,9\,g \quad \sigma_0 = 1\,g$$

$$Ic_{1-\alpha}(\mu) = \left[10,9 - 1,96 \times \frac{1}{\sqrt{15}}; 10 + 1,96 \times \frac{1}{\sqrt{15}}\right] = [10,39; 11,41]$$

# Cas où l'écart-type est inconnu

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu$ et $\sigma$ inconnus
$IC_{1-\alpha}(\mu)$ ?

Idée : estimer $\sigma^2$ par $S^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$

**Théorème**

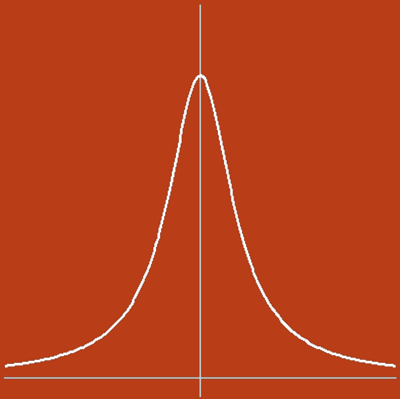
*La variable aléatoire*

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S^* / \sqrt{n}} \sim \mathcal{T}(n-1)$$

*suit la loi de Student à $\nu = n - 1$ degrés de liberté.*

# Cas où l'écart-type est inconnu : loi de Student

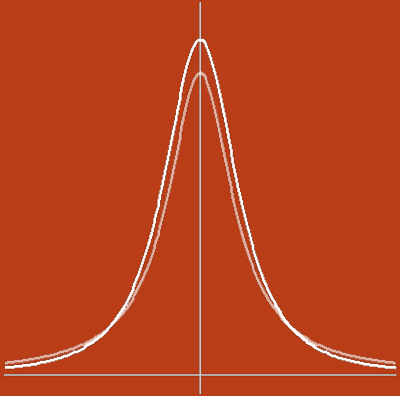
William Sealy Gosset, 1876–1937



$\nu = 1$

# Cas où l'écart-type est inconnu : loi de Student

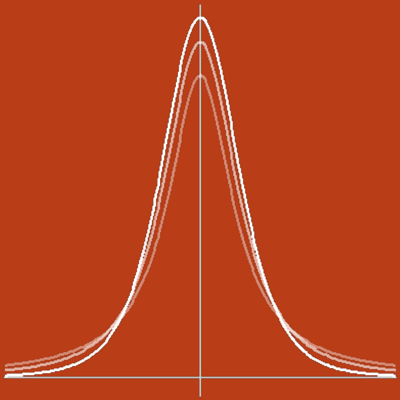
William Sealy Gosset, 1876–1937



$\nu = 2$

# Cas où l’écart-type est inconnu : loi de Student

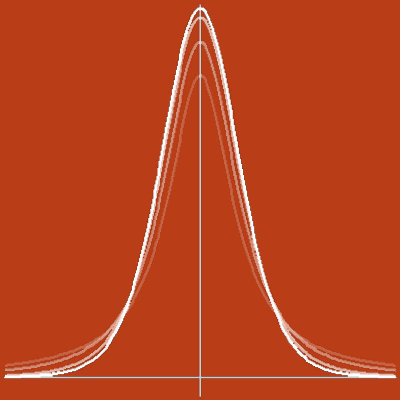
William Sealy Gosset, 1876–1937



$\nu = 5$

# Cas où l'écart-type est inconnu : loi de Student

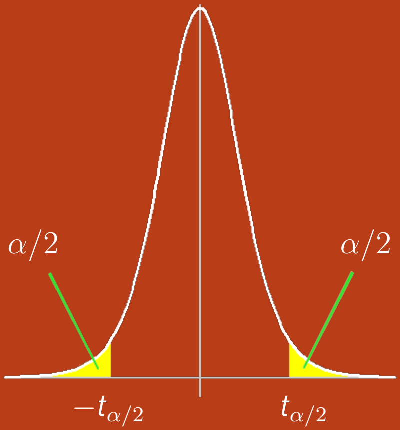
William Sealy Gosset, 1876–1937



$\nu = 10$

# Cas où l'écart-type est inconnu

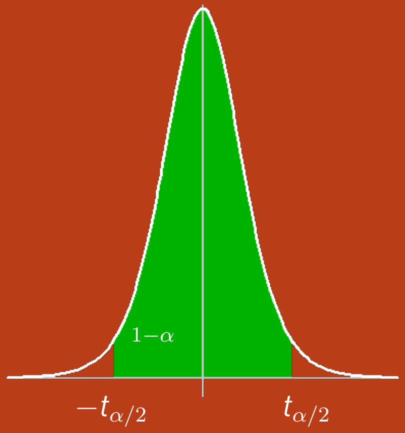
$$\left.\begin{array}{r} \nu = n - 1 = 14 \\ \alpha = 0,05 \end{array}\right\} t_{\alpha/2} = 2,145$$



# Cas où l'écart-type est inconnu

$$\left.\begin{array}{r}\nu = n - 1 = 14\\ \alpha = 0,05\end{array}\right\} t_{\alpha/2} = 2,145$$

$$\mathbb{P}\left(-t_{\alpha/2} \leq T \leq t_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

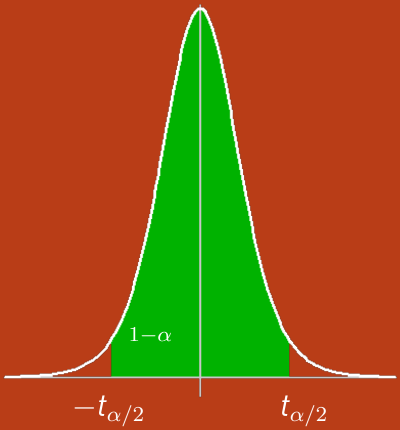


# Cas où l'écart-type est inconnu

$$\left.\begin{array}{r}\nu = n-1 = 14\\ \alpha = 0,05\end{array}\right\} t_{\alpha/2} = 2,145$$

$$\mathbb{P}\left(-t_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{S^*/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left[\overline{X} - t_{\alpha/2}\frac{S^*}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{\alpha/2}\frac{S^*}{\sqrt{n}}\right]$$



# Cas où l'écart-type est inconnu

$$\left.\begin{array}{r}\nu = n-1 = 14\\ \alpha = 0,05\end{array}\right\} t_{\alpha/2} = 2,145$$

$$\mathbb{P}\left(-t_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{S^*/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{S^*}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{S^*}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\bar{x} = 10,9\,g \quad s* = 1,16\,g:$$

$$Ic_{0,95}(\mu) = \left[10,9 - 2,145 \times \frac{1,16}{\sqrt{15}}; 10,9 + 2,145 \times \frac{1,16}{\sqrt{15}}\right] = [10,25; 11,55]$$

# Sommaire

# Intervalle de confiance pour une variance

Viscosité $= X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu$ et $\sigma$ inconnus

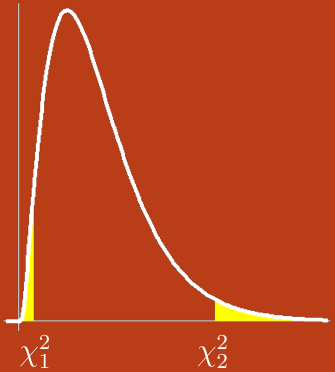
$IC_{1-\alpha}(\sigma^2)$ ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 78 | 85 | 91 | 76 |

$n = 4$

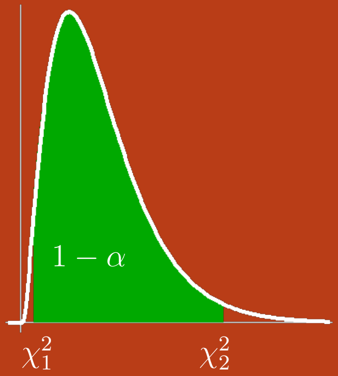
$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2. \quad \text{Ici } s^2 = 35,25$$

$$Z = \frac{n\, S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$



# Intervalle de confiance pour une variance

$$\mathbb{P}\left(\chi_1^2 \leq Z \leq \chi_2^2\right) = 1 - \alpha$$



# Intervalle de confiance pour une variance

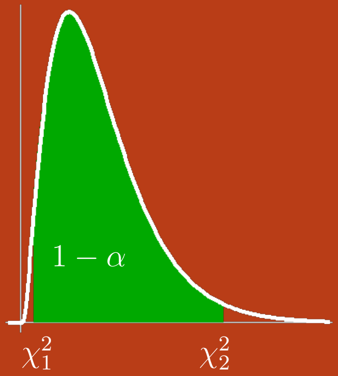
$$\mathbb{P}\left(\chi_1^2 \leq \frac{n\,S^2}{\sigma^2} \leq \chi_2^2\right) = 1-\alpha$$

$$IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{n\,S^2}{\chi_2^2}, \frac{n\,S^2}{\chi_1^2}\right]$$

$$n = 4 \qquad s^2 = 35,25$$

$$\left.\begin{array}{r}\nu = 3\\ \alpha = 0,05\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\chi_1^2 = 0,22\\ \chi_2^2 = 9,35\end{array}\right.$$

$$Ic_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{4\times 35,25}{9,35}; \frac{4\times 35,25}{0,22}\right]$$



# Intervalle de confiance pour une variance

$$\mathbb{P}\left(\chi_1^2 \leq \frac{n\,S^2}{\sigma^2} \leq \chi_2^2\right) = 1 - \alpha$$

$$IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{n\,S^2}{\chi_2^2}, \frac{n\,S^2}{\chi_1^2}\right]$$

$$n = 4 \qquad s^2 = 35,25$$

$$\left.\begin{array}{r}\nu = 3\\ \alpha = 0,05\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\chi_1^2 = 0,22\\ \chi_2^2 = 9,35\end{array}\right.$$

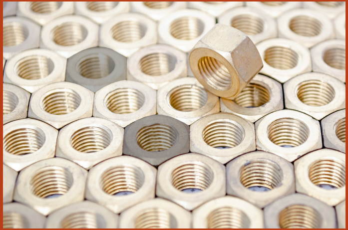
$$Ic_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{4\times 35,25}{9,35}; \frac{4\times 35,25}{0,22}\right] = [15; 641]$$

# Sommaire

# Intervalle de confiance pour une proportion

$$\begin{aligned} p &= \text{proportion de pièces défectueuses dans la production} \\ &= \text{probabilité qu'a une pièce d'être défectueuse} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= \text{nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon} \\ &\sim \mathcal{B}(n, p) \end{aligned}$$



$F = \dfrac{K}{n}$ est un estimateur de $p$

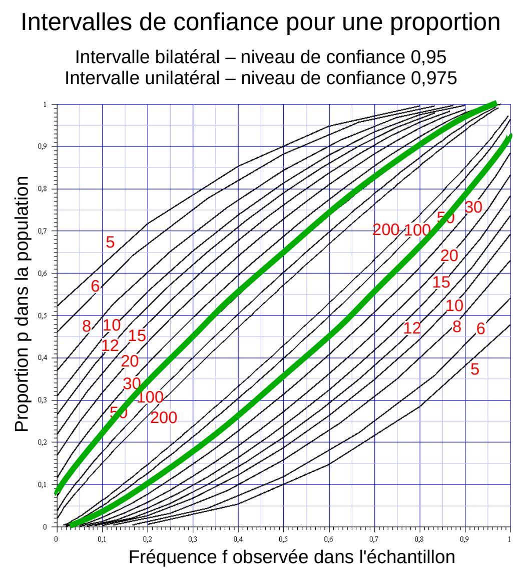
# Si $n$ est petit

- Abaques de la loi binomiale

$$1 - \alpha = 0,95$$

- Courbes correspondant à la taille de l'échantillon

$$n = 50$$



# Si *n* est petit

- Abaques de la loi binomiale

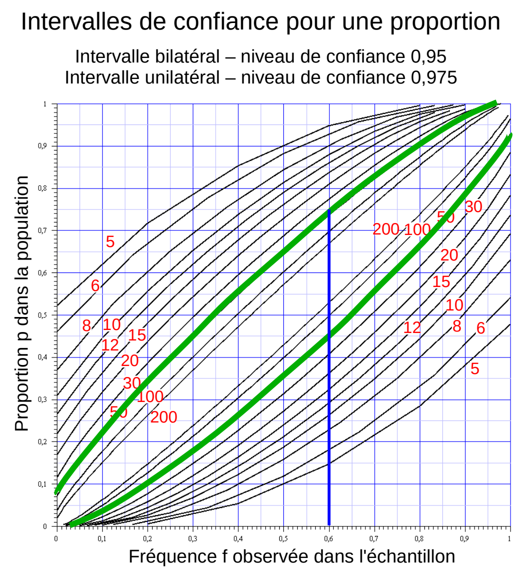
$$1 - \alpha = 0,95$$

- Courbes correspondant à la taille de l'échantillon

$$n = 50$$

- Report de la fréquence observée

$$f = 0,6$$



# Si $n$ est petit

- Abaques de la loi binomiale

$$1 - \alpha = 0,95$$

- Courbes correspondant à la taille de l'échantillon

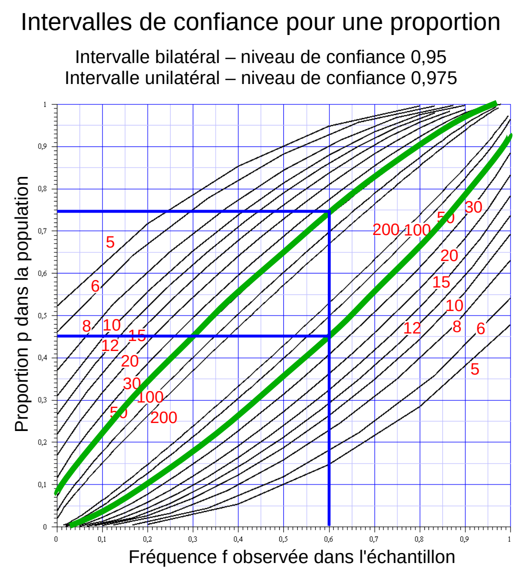
$$n = 50$$

- Report de la fréquence observée

$$f = 0,6$$

- Lecture graphique de l'IC

$$Ic_{0,95}(p) = [0,45; 0,75]$$



# Si $n$ est grand...

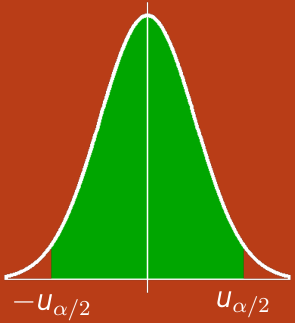
**Théorème (Moivre-Laplace)**

*Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires suivant la loi $\mathcal{B}(n,p)$, alors la suite $\left(\dfrac{X_n - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.*

Ici $U = \dfrac{K - n\,p}{\sqrt{n\,p(1-p)}} = \dfrac{F-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \simeq \mathcal{N}(0,1)$

...lorsque $n$ est grand et $p$ «pas trop petit»

$$\mathbb{P}\left(-u_{\alpha/2} \leq U \leq u_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$



# Si $n$ est grand...

$$-u_{\alpha/2} \leq U \leq u_{\alpha/2} \iff \frac{(F-p)^2}{p(1-p)/n} \leq u^2_{\alpha/2}$$

Intervalle réel :

$$Ic_{1-\alpha}(p) = [p_1, p_2]$$

où $p_1$ et $p_2$ vérifient

$$f^2 + p^2\left(1 + \frac{u^2_{\alpha/2}}{n}\right) - 2\,p\,f - \frac{u^2_{\alpha/2}}{n}\,p = 0$$

**Proposition**

*On a les valeurs approchées*

$$p_1 \simeq f - u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

$$p_2 \simeq f + u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

# Si $n$ est grand...

**Exemple**

*10% de pièces défectueuses dans un échantillon de 400 pièces*

$$n = 400$$
$$f = 0,1$$
$$1 - \alpha = 0,95$$
$$u_{\alpha/2} = 1,96$$

$$Ic_{0,95}(p) = \left[0,1 - 1,96\sqrt{\frac{0,1 \times 0,9}{400}} ; 0,1 + 1,96\sqrt{\frac{0,1 \times 0,9}{400}}\right] = [0,07 ; 0,13]$$

Pour $n = 1000, \quad Ic_{0,95}(p) = [0,09 ; 0,11]$

INSTITUT
Mines-Télécom