

MOOC Statistique pour ingénieur

Thème 3 : tests d'hypothèses, analyse de la variance

Vidéo 3 : Tests de comparaison de deux populations

Thierry Verdel

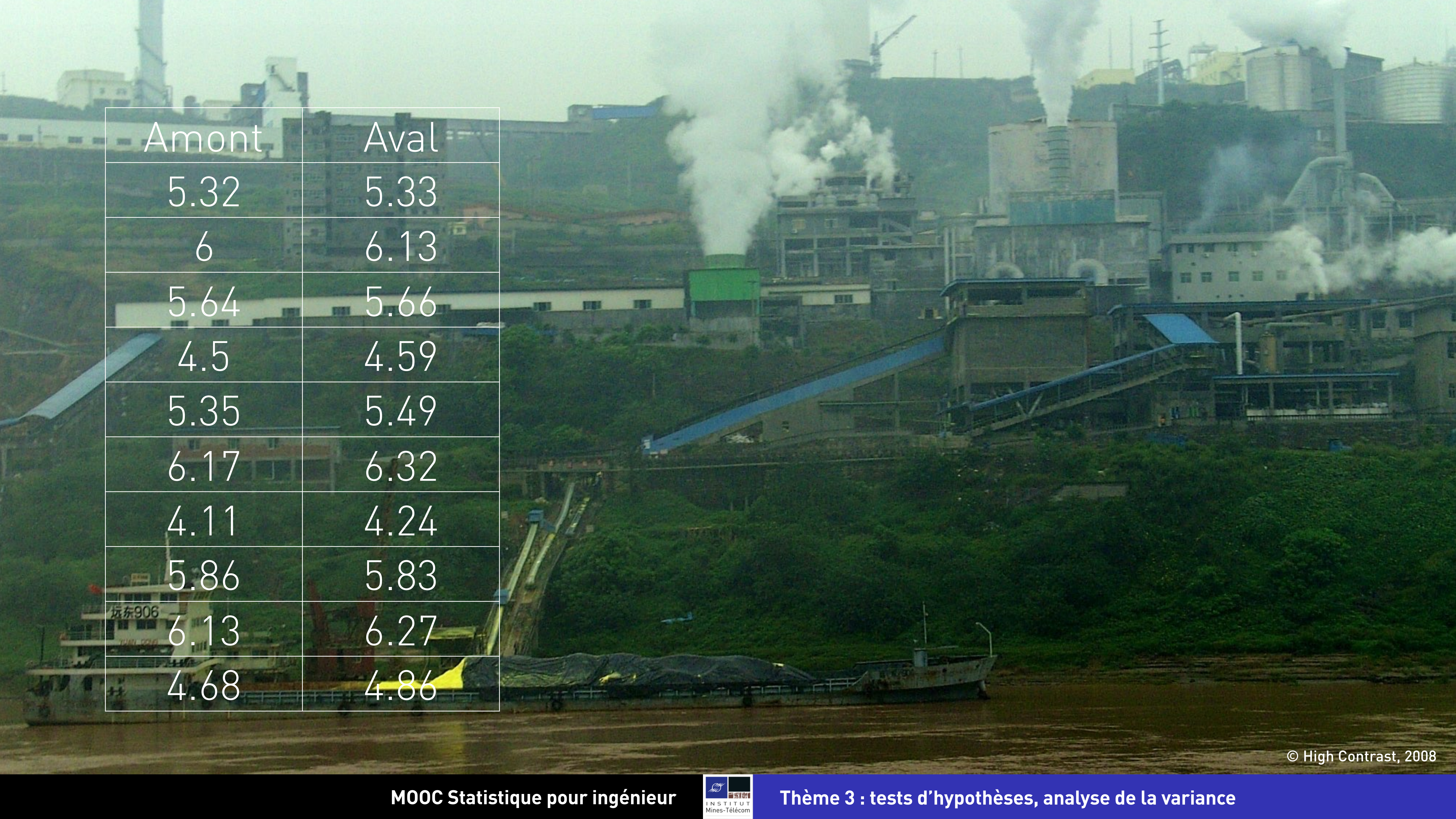
Mines Nancy

Tests de comparaison de 2 populations

Test de comparaison des variances

Test de comparaison des moyennes

Test des appariements



Amont	Aval
5.32	5.33
6	6.13
5.64	5.66
4.5	4.59
5.35	5.49
6.17	6.32
4.11	4.24
5.86	5.83
6.13	6.27
4.68	4.86

© High Contrast, 2008

Tests de comparaison de 2 populations

Test de comparaison des variances

Test de comparaison des moyennes

Test des appariements

Test de comparaison des variances

$$\mathcal{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

X_1 X_2

n°	Amont	Aval
1	5.32	5.33
2	6	6.13
3	5.64	5.66
4	4.5	4.59
5	5.35	5.49
6	6.17	6.32
7	4.11	4.24
8	5.86	5.83
9	6.13	6.27
10	4.68	4.86
moy	5.376	5.472
var	0.475	0.464

$$Z_1 = \frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1 - 1)$$

$$Z_2 = \frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2 - 1)$$

$$F = \frac{\frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2} / (n_2 - 1)}{\frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2} / (n_1 - 1)} \sim \mathcal{F}(n_2 - 1, n_1 - 1)$$

Test de comparaison des variances

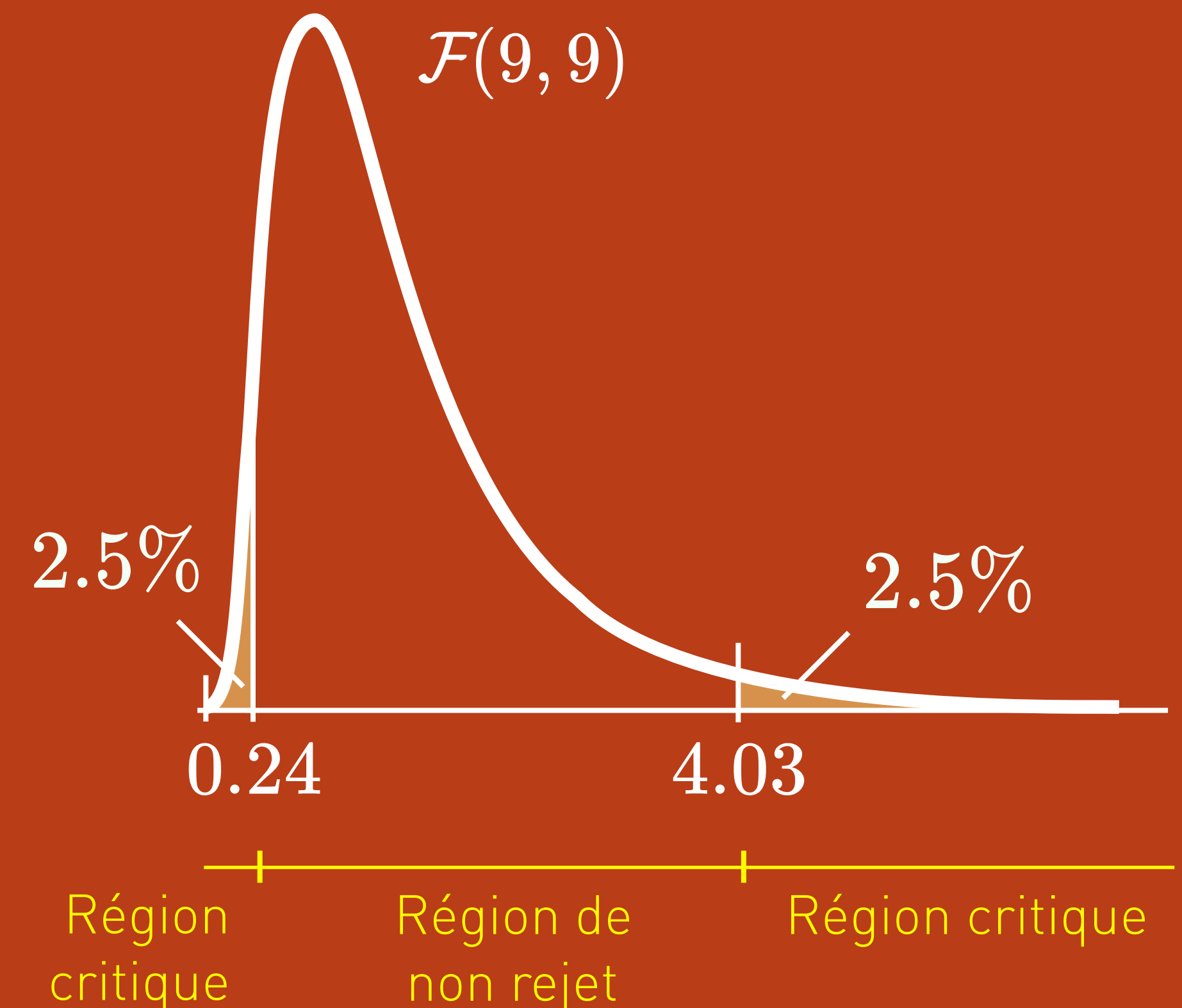
$$\mathcal{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

non rejet

$$F = \frac{\frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2} / (n_2 - 1)}{\frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2} / (n_1 - 1)} \sim \mathcal{F}(n_2 - 1, n_1 - 1)$$

$$F = \frac{\frac{n_2 S_2^2}{n_2 - 1}}{\frac{n_1 S_1^2}{n_1 - 1}} = \frac{S_2^2}{S_1^2} \sim \mathcal{F}(9, 9)$$

$$f = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{0.464}{0.475} = 1.18537 = 0.977$$



Test de comparaison des variances

$$S^{*2} = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad \text{estimateur sans biais de } \sigma^2$$

$$s^{*2} = \frac{10 \times 0.475^2 + 10 \times 0.464^2}{10 + 10 - 2} = 0.5219$$

$$s^* = 0.7224$$

Tests de comparaison de 2 populations

Test de comparaison des variances

Test de comparaison des moyennes

Test des appariements

Test de comparaison des moyennes

	X_1	X_2
n°	Amont	Aval
1	5.32	5.33
2	6	6.13
3	5.64	5.66
4	4.5	4.59
5	5.35	5.49
6	6.17	6.32
7	4.11	4.24
8	5.86	5.83
9	6.13	6.27
10	4.68	4.86
moy	5.376	5.472
var	0.475	0.464

$$\mathbb{E}(\overline{X}_1) = \mu_1$$

$$\mathbb{V}(\overline{X}_1) = \frac{\sigma^2}{n_1}$$

$$\mathbb{E}(\overline{X}_2) = \mu_2$$

$$\mathbb{V}(\overline{X}_2) = \frac{\sigma^2}{n_2}$$

$$\mathbb{V}(\overline{X}_2 - \overline{X}_1) = \frac{\sigma^2}{n_2} + \frac{\sigma^2}{n_1} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1} \right)$$

$$U = \frac{(\overline{X}_2 - \overline{X}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Test de comparaison des moyennes

$$\mathcal{H}_0 : \mu_2 \leq \mu_1$$

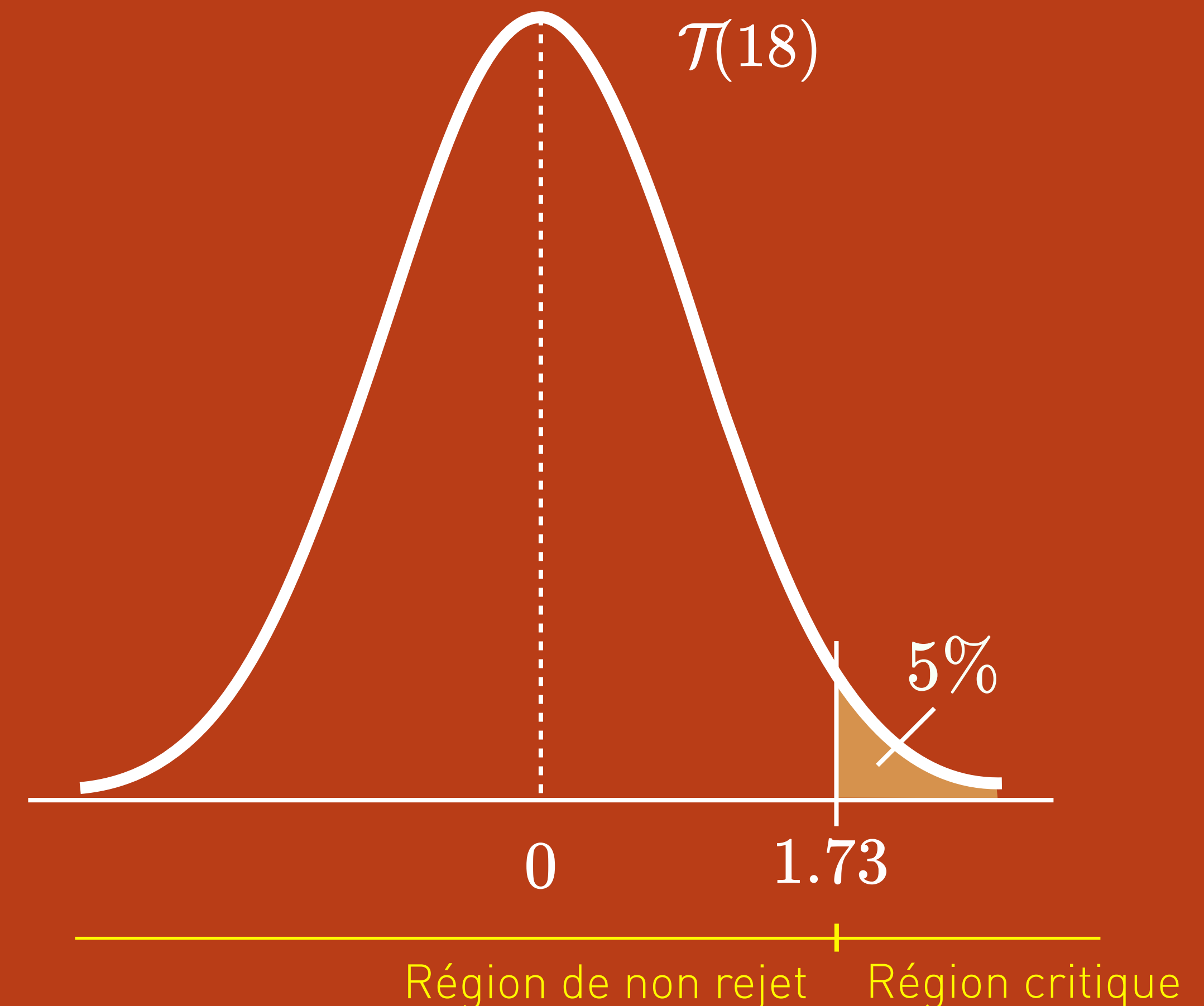
$$\mathcal{H}_1 : \mu_2 > \mu_1$$

$$U = \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$T = \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{s^* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim \mathcal{T}(n_1 + n_2 - 2)$$

$$T = \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1)}{s^* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim \mathcal{T}(18)$$

$$t = \frac{5.472 - 5.276}{0.7224 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = 0.137$$



Tests de comparaison de 2 populations

Test de comparaison des variances

Test de comparaison des moyennes

Test des appariements

Test des appariements

X_1 X_2

n°	Amont	Aval
1	5.32	5.33
2	6	6.13
3	5.64	5.66
4	4.5	4.59
5	5.35	5.49
6	6.17	6.32
7	4.11	4.24
8	5.86	5.83
9	6.13	6.27
10	4.68	4.86

moy	5.376	5.472
var	0.475	0.464

Test des appariements

X_1 X_2

Jour	Amont	Aval	D
1	5.32	5.33	0.01
2	6	6.13	0.13
3	5.64	5.66	0.02
4	4.5	4.59	0.09
5	5.35	5.49	0.14
6	6.17	6.32	0.15
7	4.11	4.24	0.13
8	5.86	5.83	-0.03
9	6.13	6.27	0.14
10	4.68	4.86	0.18
moy	5.376	5.472	0.096
var	0.475	0.464	0.0045

$\mathcal{H}_0 : \mu_D \leq 0$

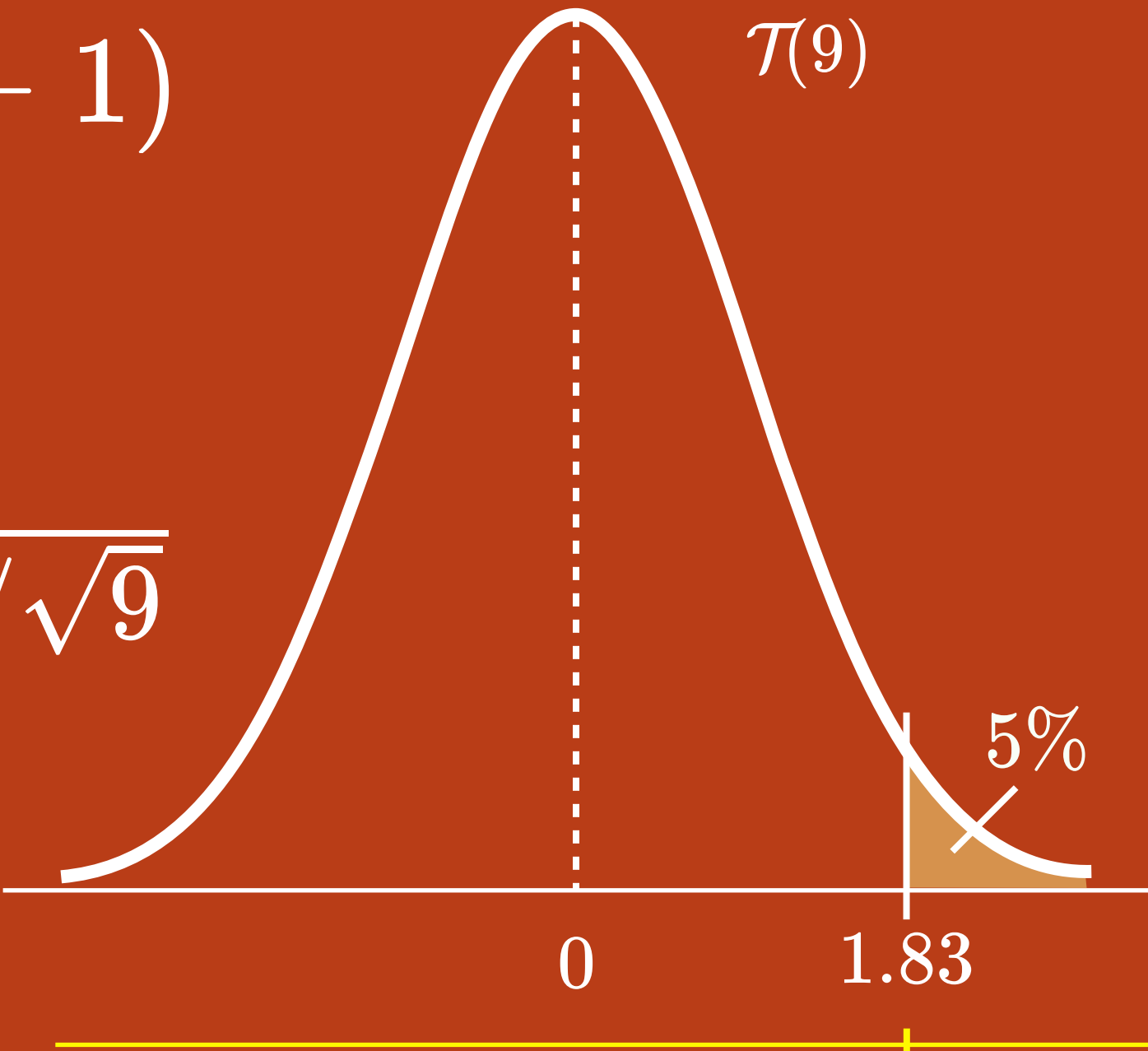
$\mathcal{H}_1 : \mu_D > 0$

$$U = \frac{\overline{D} - \mu_D}{\sigma_D / \sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$T = \frac{\overline{D} - \mu_D}{s_D / \sqrt{n - 1}} \sim \mathcal{T}(n - 1)$$

$$t = \frac{\overline{d} - \mu_D}{s_D / \sqrt{n - 1}} = \frac{0.096}{\sqrt{0.0045} / \sqrt{9}}$$

$t = 4.29$ p-valeur = 1‰



Région de non rejet Région critique



I N S T I T U T
Mines-Télécom
