Statistique pour ingénieur

Thème 2 : Éléments de correction des exercices

F. Delacroix & M. Lecomte, 4 octobre 2016

Exercices sur l'estimation

Exercice 1 : Estimateurs

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,a]$ où a est un paramètre réel strictement positif à estimer. On pose

$$A_n = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i \quad \text{et} \quad B_n = 2\,\overline{X}.$$

1. Déterminer la loi de probabilité de A_n (on pourra utiliser la fonction de répartition).

Solution:

Par définition, la fonction de répartition de A_n est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{F}_{A_n}(x) = \mathbb{P}\left(A_n \leqslant x\right).$$

Comme A_n est la borne supérieure des X_i, la condition que $A_n \leqslant x$ équivaut à dire que pour tout i, $X_i \leqslant x$. L'événement considéré s'écrit donc comme une intersection et, comme les variables X_i sont indépendantes, sa probabilité est le produit des probabilités. Comme de plus elles suivent toutes la même loi, on obtient

$$\mathbb{F}_{A_n}(x) = \mathbb{F}_{X_1}(x)^n.$$

Pour trouver la densité de A_n, on peut expliciter cette fonction puis dériver. On trouve

$$f_{A_n}(x) = \begin{cases} \frac{n\,x^{n-1}}{a^n} & \text{si } x \in [0,a] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Calculer l'espérance et la variance de A_n et en déduire que A_n est un estimateur de a.

Solution:

On obtient à l'aide des formules usuelles

$$\mathbb{E}\left(A_n\right) = \frac{n}{n+1} a$$
$$\mathbb{V}\left(A_n\right) = \frac{n\,a^2}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(A_n\right) = a$ et $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{V}\left(A_n\right) = 0$, on en déduit que A_n est un estimateur de a. Il est évidemment biaisé car son espérance n'est pas égale à a.

3. Montrer que B_n est un estimateur sans biais de a.

Solution:

Comme $B_n = 2\overline{X}$, on a

$$\mathbb{E}\left(B_n\right) = 2\mu \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\left(B_n\right) = 4\frac{\sigma^2}{n}$$

avec, d'après les propriétés de la loi uniforme,

$$\mu = \mathbb{E}\left(X_i\right) = \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \mathbb{V}\left(X_i\right) = \frac{a^2}{12}.$$

Ceci permet de montrer que B_n est un estimateur sans biais de a.

4. Comparer les variances de A_n et de B_n.

Solution:

$$\mathbb{V}\left(A_n\right) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \sim \frac{a^2}{n^2} \qquad \mathbb{V}\left(B_n\right) = \frac{a^2}{3n}.$$

On constate qu'asymptotiquement la variance de A_n converge vers 0 plus rapidement (quadratiquement) que celle de B_n. On peut également vérifier que quelle que soit la valeur de n, $\mathbb{V}\left(A_n\right) < \mathbb{V}\left(B_n\right)$.

L'estimateur A_n est donc préférable, et il serait possible de corriger son biais en posant $A_n^* = \frac{n+1}{n}A_n$ sans fortement augmenter sa variance.

Exercice 2 : Estimateur obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance

Déterminer un estimateur du paramètre λ d'une loi exponentielle. Celle-ci est définie par la densité de probabilité f suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Solution:

La fonction de vraisemblance vaut

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

À échantillon $(x_1, \dots, x_n)$ fixé, la fonction (de la variable λ) $\ln L$ admet un maximum en la valeur

$$\widehat{\lambda} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{-1}.$$

On en déduit que $\frac{1}{\overline{X}}$ est un estimateur de λ.

Exercice 3 : Paramètre d'une loi de Poisson

Dans une ville, on a étudié le nombre d'accidents de la circulation sur une période de 70 jours. En regroupant les jours selon le nombre d'accidents, on a obtenu le tableau suivant

nombre d'accidents	0	1	2	3	4	5
nombre de jours	34	22	11	2	0	1

Soit X la variable aléatoire désignant le nombre d'accidents quotidien. On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre λ, c'est-à-dire que

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\left(X = n\right) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

L'objet de cet exercice est de déterminer une estimation ponctuelle de λ par deux méthodes distinctes. Pour cela, on considère un échantillon statistique $(X_1, \dots, X_n)$ de X, c'est-à-dire n variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes la loi de Poisson de paramètre λ.

1$^{\text{ère}}$ méthode : maximum de vraisemblance.

1. Construire un estimateur de λ par la méthode du maximum de vraisemblance. Est-il sans biais ? En déduire, en utilisant les données du tableau, une estimation ponctuelle de λ.

Solution:

La fonction de vraisemblance s'écrit, pour $\lambda > 0$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$:

$$L(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = e^{-n\lambda} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}.$$

En prenant le logarithme et en dérivant par rapport à λ, on trouve un maximum, à $x_1, \dots, x_n$ fixés, égal à

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}.$$

On en déduit que $\overline{X}$ est un estimateur de λ. Il est sans biais étant donné que $\mathbb{E}\left(\overline{X}\right) = \mathbb{E}\left(X\right) = \lambda$.

Une estimation ponctuelle de λ est donc $\overline{x} = 0{,}73$.

2$^{\text{ème}}$ méthode : on pose $\Sigma_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

2. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Σ_n ?

Solution:

Si deux variables aléatoires X_1 et X_2 suivant des lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$ sont indépendantes, leur somme $X_1 + X_2$ suit encore une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$. Par récurrence immédiate on en déduit ici que Σ_n suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n\lambda)$.

3. Montrer que, pour tout entier naturel j,

$$\mathbb{P}\left(\{X_1 = 0\} | \{\Sigma_n = j\}\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^j.$$

Solution:

$$\mathbb{P}\left(\{X_1 = 0\} | \{\Sigma_n = j\}\right)) = \frac{\mathbb{P}\left(\{X_1 = 0\} \cap \{\Sigma_n = j\}\right)}{\mathbb{P}\left(\Sigma_n = j\right)}.$$

On peut réécrire l'événement

$$\{X_1 = 0\} \cap \{\Sigma_n = j\} = \{X_1 = 0\} \cap \{X_2 + \dots + X_n = j\}.$$

La variable $X_2 + \cdots + X_n$ suit, comme précédemment, une loi de Poisson de paramètre $(n-1)\lambda$ et est indépendante de X_1. En reportant ces éléments dans la formule de la probabilité conditionnelle, on obtient le résultat annoncé :

$$\mathbb{P}\left(\{X_1 = 0\}|\{\Sigma_n = j\}\right) = \frac{e^{-\lambda} \times e^{-(n-1)\lambda} \frac{[(n-1)\lambda]^j}{j!}}{e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^j}{j!}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^j.$$

4. En déduire que la variable aléatoire

$$T_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\Sigma_n}$$

est un estimateur sans biais de $e^{-\lambda}$.

Solution:

La variable aléatoire T_n étant une fonction de Σ_n, on peut écrire (on vérifie la convergence de la série) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(T_n\right) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^j \mathbb{P}\left(\Sigma_n = j\right) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}\left(\{X_1 = 0\}|\{\Sigma_n = j\}\right) \mathbb{P}\left(\Sigma_n = j\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = 0\right) \\ &= e^{-\lambda}.\end{aligned}$$

En procédant de même pour $\mathbb{E}\left(T_n^2\right)$, on trouve

$$\mathbb{V}\left(T_n\right) = e^{-2\lambda}\left(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, T_n est un estimateur sans biais de $e^{-\lambda}$.

5. Déduire des questions précédentes un nouvel estimateur de λ et une nouvelle estimation ponctuelle de λ.

Solution:

Le fait que T_n soit un estimateur de $e^{-\lambda}$ incite à penser que la variable aléatoire $\Lambda_n = -\ln(T_n) = \Sigma_n \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$ est un estimateur de λ.

Plutôt que de faire appel à un résultat général, cherchons à le démontrer à la main en calculant son espérance et sa variance. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}\left(\Lambda_n\right) = -\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\mathbb{E}\left(\Sigma_n\right) = -n\lambda \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\lambda\left(-\frac{1}{n}\right) = \lambda.$$

De même, la variance est quadratique :

$$\mathbb{V}\left(\Lambda_n\right) = \left[\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]^2 \mathbb{V}\left(\Sigma_n\right) = n\lambda\left[\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]^2.$$

On obtient à nouveau un équivalent à l'aide des développements limités de référence :

$$\mathbb{V}\left(\lambda_n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\lambda\frac{1}{n^2} = \frac{\lambda}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On a bien $\mathbb{E}\left(\Lambda_n\right) \to \lambda$ et $\mathbb{V}\left(\Lambda_n\right) \to 0$ donc Λ_n est un estimateur de λ. Il est cette fois biaisé.

6. Comparer les estimateurs obtenus à la question 1 et à la question 5. Conclure.

Solution:

On a deux estimateurs de λ : la moyenne empirique $\overline{X}$ et $\Lambda_n = \Sigma_n \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = n\,\overline{X}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

Une première comparaison entre ces deux estimateurs concerne le biais : $\overline{X}$ est sans biais alors que Λ_n est biaisé. Avantage $\overline{X}$.

Le second volet de la comparaison concerne les variances : or d'après la relation entre Λ_n et $\overline{X}$, on a

$$\mathbb{V}\left(\Lambda_n\right) = n^2\left[\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]^2 \mathbb{V}\left(\overline{X}\right).$$

Or, l'étude de la fonction $x \longmapsto x^2\left[\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]^2$ sur $]1,+\infty[$ montre qu'elle est toujours supérieure à 1. Avantage $\overline{X}$ à nouveau.

On en conclut que $\overline{X}$ est un meilleur estimateur que Λ_n.

Exercices sur les intervalles de confiance

Exercice 4 : Intervalle de confiance pour une moyenne et une variance

Une société fabrique des billes pour roulements à billes. On admet que la masse d'une bille est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ où μ et σ sont inconnus.

Un échantillon de 30 billes de masses x_i a donné les résultats suivants :

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 69\,g \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 163{,}1862\,g^2.$$

1. Déterminer un intervalle de confiance pour μ au niveau de confiance de 95 %.

Solution:

La variable aléatoire $T = \frac{\overline{X}-\mu}{S^*/\sqrt{n}}$ suit la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté. Soit $t_{1-\alpha/2}$ tel que $\mathbb{P}\left(T \leqslant t_{1-\alpha/2}\right) = 1-\frac{\alpha}{2}$. Alors on obtient l'intervalle de confiance aléatoire

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left[\overline{X} - t_{1-\alpha/2}\frac{S^*}{\sqrt{n}}; \overline{X} + t_{1-\alpha/2}\frac{S^*}{\sqrt{n}}\right].$$

Avec les données de l'énoncé, $\overline{x} = 2{,}3$, $s^* = 0{,}39$ et $n = 30$, $\alpha = 5\%$. On lit dans la table de la loi $\mathcal{T}(29)$ la valeur $t_{0{,}975} = 2.045$ et on obtient alors l'intervalle de confiance réel

$$Ic_{1-\alpha}(\mu) = [2{,}15; 2{,}45].$$

2. Déterminer un intervalle de confiance pour σ au niveau de confiance de 95 %.

Solution:

La variable aléatoire $Z = \frac{nS^2}{\sigma^2}$ suit la loi du χ^2 à $n-1$ degrés de liberté. Soient les fractiles $\chi^2_{\alpha/2}$ et $\chi^2_{1-\alpha/2}$ tels que

$$\mathbb{P}\left(Z \leqslant \chi^2_{\alpha/2}\right) = \frac{\alpha}{2} \quad \textit{et} \quad \mathbb{P}\left(Z \leqslant 1-\frac{\alpha}{2}\right) = 1-\frac{\alpha}{2}.$$

On obtient l'intervalle de confiance réel

$$IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{n\,S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}, \frac{n\,S^2}{\chi^2_{\alpha/2}}\right] \quad \textit{donc} \quad IC_{1-\alpha}(\sigma) = \left[S\sqrt{\frac{n}{\chi^2_{1-\alpha/2}}}, S\sqrt{\frac{n}{\chi^2_{\alpha/2}}}\right]$$

et, compte tenu des données numériques, l'intervalle de confiance réel :

$$Ic(\sigma) = [0{,}31; 0{,}53].$$

Exercice 5 : Intervalle de confiance pour une proportion

On appelle p la proportion de billes défectueuses dans une production de billes. Déterminer un intervalle de confiance pour p au seuil 5 % dans les deux cas suivants.

1. Dans un échantillon de 100 billes, on a observé 11 billes défectueuses.

Solution:

Par lecture de l'abaque de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ (cf. tables statistiques, abaque n°7.2) avec $n = 100$ on trouve, pour une proportion $f = 11\%$, un intervalle de confiance réel bilatéral pour p au risque 5% :

$$Ic_{95\%}(p) = [5\%, 17\%].$$

2. Dans un échantillon de 500 billes, on a observé 48 billes défectueuses.

Solution:

On a $n\,f(1-f) \simeq 43 > 18$ donc l'approximation fournie par le théorème de De Moivre-Laplace est considérée comme légitime. Par cette méthode, l'intervalle de confiance réel obtenu est

$$Ic_{1-\alpha}(p) = \left[f - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}, f + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$

où $u_{1-\alpha/2}$ est le fractile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Numériquement, on trouve

$$Ic_{95\%}(p) = [7\%, 12{,}2\%].$$

Exercice 6 : Publicité mensongère ?

Un fabricant de piles électriques indique sur ses produits que la durée de vie moyenne de ses piles est de 200 heures. Une association de consommateurs prélève un échantillon de 25 piles et observe une durée de vie moyenne de 185 heures avec un écart-type (calculé à partir de l'estimateur biaisé de la variance) de 30 heures.

1. S'agit-il de publicité mensongère ? On précisera la démarche utilisée (hypothèses, raisonnements, calculs, *etc.*).

Solution:

Supposons que la durée de vie d'une pile donnée soit une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2. Alors, comme à l'exercice 4, on peut déterminer un intervalle de confiance réel bilatéral pour μ :

$$Ic_{95\%}(\mu) = [172{,}36; 197{,}63].$$

Cet intervalle ne contenant pas la valeur annoncée par le fabricant, on peut conclure avec un risque 5% à la publicité mensongère.

À noter que le choix d'un intervalle unilatéral pourrait paraître plus pertinent compte tenu de l'objectif du calcul ; avec ce même niveau de confiance la conclusion serait identique.

2. Que faudrait-il faire pour répondre négativement à la question posée ?

Solution:

En supposant que les valeurs de $\overline{x}$ et s restent inchangés, répondre négativement nécessite que l'intervalle de confiance obtenu contienne la valeur 200 donc soit plus large. Cela nécessiterait un niveau de confiance $1-\alpha$ plus élevé, de l'ordre de 99% pour un intervalle bilatéral, 99,5% pour un intervalle unilatéral.

Exercice 7 : Paramètre d'une loi continue

Pour $\theta > 0$, on définit la fonction

$$f_\theta : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{\theta - x} & \text{si } x \geqslant \theta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

L'objet de ce problème est de construire des estimations de θ.

1. Démontrer que f_θ est une densité de probabilité.

Solution:

Il suffit de vérifier qu'il s'agit d'une fonction positive, intégrable sur $\mathbb{R}$ et dont l'intégrale vaut 1.

2. Soit X une variable aléatoire admettant f_θ pour densité de probabilité. Démontrer que la variable X admet une espérance et une variance et que

$$E[X] = \theta + 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Var}(X) = 1.$$

Solution:

Il suffit de calculer les intégrales définissant $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$ à l'aide d'intégrations par parties.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes admettant f_θ pour densité de probabilité.

3. On pose $U_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - 1)$.

3.1 Calculer l'espérance et la variance de U_n.

3.2 Que peut-on en déduire ?

Solution:

À l'aide des propriétés de l'espérance et de la variance, on trouve

$$\mathbb{E}\left(U_n\right) = \theta \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\left(U_n\right) = \frac{1}{n}.$$

On peut en déduire que U_n est un estimateur sans biais de θ.

4. Justifier que, si n est assez grand, la variable aléatoire

$$T_n = \sqrt{n}\left(U_n - \theta\right)$$

suit approximativement la loi normale centrée réduite.

Solution:

Compte tenu de l'espérance et la variance précédemment calculées, il suffit d'appliquer le théorème central limite.

5. On suppose que $n = 100$ et $\overline{x} = 2{,}0706$. À l'aide de la question précédente, déterminer un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance 95%.

Solution:

Soit $t_{1-\alpha/2} = 1{,}96$ le fractile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$ de la loi $\mathcal{N}(0{,}1)$. Alors (pour n assez grand)

$$\mathbb{P}\left(\left|T_n\right| \leqslant t_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

et on en tire un intervalle de confiance aléatoire pour θ au niveau de confiance $1-\alpha = 95\%$:

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[U_n - \frac{t_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}, U_n + \frac{t_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right]$$

et, avec les données numériques, l'intervalle de confiance réel

$$Ic_{95\%}(\theta) = [0{,}8746; 1{,}2666].$$

6. On admet le résultat suivant :

Théorème (***Inégalité de Bienaymé-Tchebychev***)

Si Y est une variable aléatoire admettant une espérance μ et une variance σ^2, alors

$$\forall k > 0, \qquad P\left(|Y - \mu| \geqslant k\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{k^2}.$$

6.1 En appliquant ce théorème à la variable aléatoire $\overline{X}$, déterminer un intervalle de confiance aléatoire pour θ avec un niveau de confiance supérieur ou égal à $1 - \alpha = 95\%$.

Solution:

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à $\overline{X}$ (dont l'espérance et la variance sont respectivement égales à $\mu = \theta + 1$ et $\sigma^2 = \frac{1}{n}$) donne

$$\forall k > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X} - \theta - 1\right| \geqslant k\right) \leqslant \frac{1}{n\,k^2}.$$

Pour que cette probabilité soit inférieure à 5%, il suffit que le majorant soit lui même inférieur à 5%, c'est-à-dire

$$\frac{1}{n\,k^2} \leqslant \frac{5}{100} \iff k \geqslant \sqrt{\frac{20}{n}}.$$

Avec cette valeur de k,

$$0{,}95 = \mathbb{P}\left(-\sqrt{\frac{20}{n}} \leqslant \overline{X} - \theta - 1 \leqslant \sqrt{\frac{20}{n}}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{X} - 1 - \sqrt{\frac{20}{n}} \leqslant \theta \leqslant \overline{X} - 1 + \sqrt{\frac{20}{n}}\right)$$

qui donne pour intervalle de confiance aléatoire

$$IC_{95\%}(\theta) = \left[\overline{X} - 1 - \sqrt{\frac{20}{n}}, \overline{X} - 1 + \sqrt{\frac{20}{n}}\right].$$

6.2 Donner l'intervalle réel ainsi obtenu lorsque $n = 100$ et $\overline{x} = 2{,}0706$.

Solution:

$$Ic_{95\%}(\theta) = [0{,}6233; 1{,}5178]\,.$$

7. Comparer les intervalles de confiance obtenus aux questions 6.2 et 5. Quel serait le niveau de confiance permettant d'obtenir l'intervalle de confiance de la question 6.2 avec la méthode de la question 5 ?

Solution:

Pour un même niveau de confiance, l'intervalle de confiance obtenu à partir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est bien plus grand que celui obtenu à partir du théorème central limite, donc bien moins intéressant.

Celui de la question 6.2 est de longueur $0{,}8945$. Celui de la question 5 pour un niveau de confiance $1-\alpha$ et $n = 100$ a pour longueur $\frac{t_{1-\alpha/2}}{5}$. Pour qu'elles soient égales, il faudrait

$$t_{1-\alpha/2} = 5 \times 0{,}8945 = 4{,}4725 \quad \textit{soit} \quad 1 - \frac{\alpha}{2} = \Phi(4{,}4725) \simeq 0{,}999997$$

ce qui nécessiterait un niveau de confiance parfaitement déraisonnable de

$$1 - \alpha = 2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 0{,}999994 \quad \textit{soit} \quad \alpha = 6 \times 10^{-6}.$$

La conclusion est que le majorant fourni par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, s'il peut être utile sur le plan théorique (démonstration de la loi faible des grands nombres), est bien trop grossier pour être utilisé en pratique.