



Statistique pour ingénieur

Thème 1 : Exercices de probabilités

D. Pastor, F.-X. Socheleau & C. Garnier, 14 octobre 2016

Exercice 1 : Spams

Dans une entreprise, 40% des courriers électroniques reçus sont des spams. Parmi tous les spams reçus, 50% contiennent le mot «order» et, parmi tous les courriels légitimes, 30% contiennent le mot «order».

1. Quelle est la probabilité qu'un mail arrivant contienne le mot «order» ?
2. Un mail arrivant contient le mot «order», quelle est la probabilité que ce soit un spam ?

Exercice 2 : Durée de vie

La durée de vie d'un certain type de lampes de vidéoprojecteur suit une loi exponentielle de densité de probabilité

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Une variable aléatoire X est dite « sans mémoire », ou « sans vieillissement », si elle vérifie la propriété suivante :

$$\mathbb{P}(X > x + x_0 | X > x_0) = \mathbb{P}(X > x),$$

pour tout x, x_0 positifs.

Montrer que la durée de vie de ces lampes de vidéoprojecteur est sans mémoire.

2. Déterminer la durée de vie moyenne d'une lampe en fonction de λ ?
3. Un fabricant de lampes annonce à son client que la durée de vie moyenne des lampes qu'il produit est d'au moins 10000 heures alors que, dans les faits, lampe sur deux a une durée de vie de moins de 7000 heures. Est-il honnête ? Justifier.

Exercice 3 : Consommation énergétique

Pour effectuer un comparatif entre deux modèles de smartphones, une association de consommateurs s'intéresse à leurs consommations électriques respectives. Pour cette étude, elle dispose de données constructeur qui fournissent des informations sur la variabilité de consommation en fonction de l'usage qui est fait du téléphone.

Pour le modèle 1, le fabricant indique que sa consommation est une variable aléatoire X_1 de fonction de répartition \mathbb{F}_{X_1} et de densité f_{X_1} . Pour le modèle 2, la consommation est une variable aléatoire X_2 de fonction de répartition \mathbb{F}_{X_2} et de densité f_{X_2} . On suppose que les consommations des deux modèles sont indépendantes. L'association de consommateur ne dispose que d'un exemplaire de chaque modèle.

1. Pour un même usage, exprimer la probabilité que l'exemplaire du modèle 1 consomme plus que l'exemplaire du modèle 2 à l'aide de \mathbb{F}_{X_1} et de f_{X_2} .
2. Dans le cas où $\mathbb{F}_{X_1} = \mathbb{F}_{X_2}$, quelle est la valeur de cette probabilité ?

Exercice 4 : Transformation linéaire d'un vecteur gaussien

Soit $X = (X_1, X_2)^T$, un vecteur aléatoire¹ réel centré, à deux dimensions, de loi gaussienne et de matrice de covariance

$$\Gamma_X = \begin{pmatrix} 3 & \rho\sqrt{3} \\ \rho\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},$$

avec $|\rho| < 1$. On définit un nouveau vecteur aléatoire $(Y_1, Y_2)^T$ avec :

$$\begin{cases} Y_1 &= \frac{X_1}{\sqrt{3}} - X_2, \\ Y_2 &= \frac{X_1}{\sqrt{3}} + X_2. \end{cases}$$

- 1.** Calculer la variance $\mathbb{V}(X_1)$ de X_1 et la covariance $\mathbb{Cov}(X_1, X_2)$ de (X_1, X_2) ?
- 2.** Dans quel cas, les deux variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
- 3.** Calculer la covariance $\mathbb{Cov}(Y_1, Y_2)$ du couple (Y_1, Y_2) . Calculer les variances des variables aléatoires Y_1 et Y_2 .
- 4.** Déterminer les densités de probabilités marginales de Y_1 et Y_2 .
- 5.** Les deux variables Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ? Justifier clairement votre réponse.

Exercice 5 : Application non probabiliste du théorème central-limite

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, qui suivent des lois de Poisson de paramètre unité : pour tout $n = 1, 2, \dots$, $X_n \sim \mathcal{P}(1)$. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Pour l'exercice, on admettra que la somme de deux variables aléatoires de Poisson indépendantes X_1 et X_2 , telles que $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ suit une loi de Poisson : $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

- 1.** Quelle est la loi de S_n ? Soit \mathbb{F}_n la fonction de répartition de la variable aléatoire S_n . Montrer que $\mathbb{F}_n(n) = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$.
- 2.** Montrer que $Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.
- 3.** Dédurre des questions précédentes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = 1/2$.

1. Reportez-vous à la vidéo 2 du thème 1 de ce MOOC pour la représentation d'un couple de variables aléatoires sous forme vectorielle.