MOOC Statistique pour ingénieur
Thème 1 : Notions de probabilités
Vidéo 2 : Couples de variables aléatoires

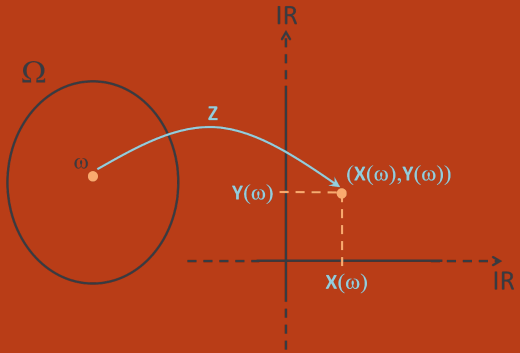
Christelle Garnier

Institut Mines-Télécom
Télécom Lille

Introduction

Sommaire

Couple de variables aléatoires



Définition

On appelle couple de variables aléatoires (v.a.) une application Z :

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

où X et Y sont des v.a. définies sur Ω. On note $Z = (X, Y)$.

- Couples de v.a. discrètes
- Couples de v.a. continues

Loi conjointe

- **Cas discret**

Définition

La loi conjointe d'un couple (X, Y) de v.a. discrètes est définie par :

- *l'ensemble des valeurs possibles du couple :* $\{(x_i, y_j), i \in I, j \in J\}$,
- *et les probabilités associées :*
  $p_{i,j} = \mathbb{P}_{X,Y}(x_i, y_j) = \mathbb{P}\left((X, Y) = (x_i, y_j)\right) = \mathbb{P}\left(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}\right)$.

X \ Y	y_1	...	y_j	...
x_1	$p_{1,1}$	...	$p_{1,j}$	...
...	...	...	...	...
x_i	$p_{i,1}$	...	$p_{i,j}$	...
...	...	...	...	...

$$\forall i \in I, \forall j \in J \quad p_{i,j} \geq 0$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_{i,j} = 1$$

Loi conjointe

- **Cas continu**

Définition

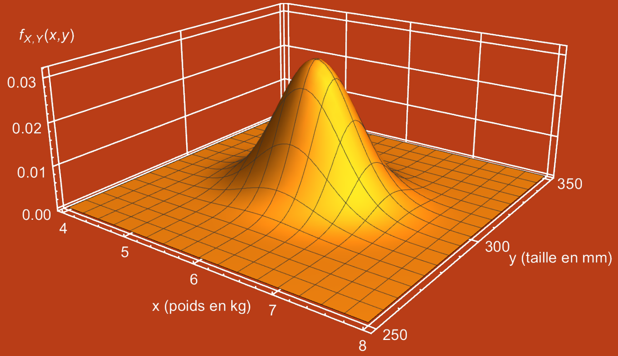
La loi conjointe d'un couple (X, Y) de v.a. conjointement continues est définie par une densité de probabilité $f_{X,Y}(x, y)$ telle que :

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f_{X,Y}(x, y) \geq 0$,
- $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy = 1$.

Loi conjointe

- **Cas continu**

Exemple : Densité conjointe d'un couple Gaussien (X, Y) formé par le poids et la longueur des pièces fabriquées sur une chaîne de production.



Lois marginales

- **Cas discret**

X \ Y	y_1	...	y_j	...
x_1	$p_{1,1}$	...	$p_{1,j}$	...
...	...	...	...	...
x_i	$p_{i,1}$	...	$p_{i,j}$	...
...	...	...	...	...

Définition

- *Loi de X :*

$$\forall i \in I, \quad \mathbb{P}_X(x_i) = \sum_{j \in J} p_{i,j}$$

Lois marginales

- **Cas discret**

X \ Y	y_1	...	y_j	...
x_1	$p_{1,1}$	...	$p_{1,j}$	...
...	...	...	...	...
x_i	$p_{i,1}$	...	$p_{i,j}$	...
...	...	...	...	...

Définition

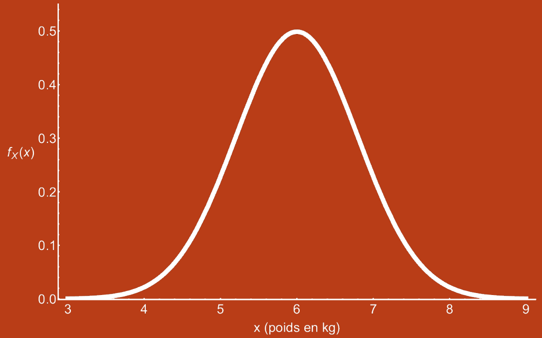
- *Loi de X :*
  $$\forall i \in I, \quad \mathbb{P}_X(x_i) = \sum_{j \in J} p_{i,j}$$
- *Loi de Y :*
  $$\forall j \in J, \quad \mathbb{P}_Y(y_j) = \sum_{i \in I} p_{i,j}$$

Lois marginales

- **Cas continu**

Définition

- *Densité de X :*
  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy$



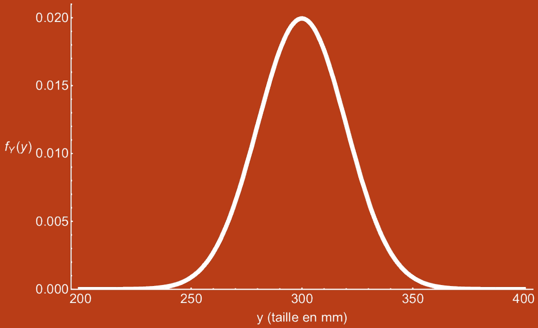
Lois marginales

- **Cas continu**

Définition

- *Densité de X :*
  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy$

- *Densité de Y :*
  $\forall y \in \mathbb{R} \quad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx$



Sommaire

Indépendance

Définition

- *Deux v.a. discrètes X et Y sont indépendantes ssi :*

$$\forall i \in I, \forall j \in J \qquad \mathbb{P}_{X,Y}(x_i, y_j) = \mathbb{P}_X(x_i)\mathbb{P}_Y(y_j)$$

- *Deux v.a. conjointement continues X et Y sont indépendantes ssi :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

Covariance et corrélation

Définition (Covariance)

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}\,(X,Y) = \mathbb{E}\,((X-\mathbb{E}\,(X))\,(Y-\mathbb{E}\,(Y))) = \mathbb{E}\,(XY) - \mathbb{E}\,(X)\,\mathbb{E}\,(Y)$$

Définition (Coefficient de corrélation)

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}\,(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}$$ *où $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ sont les écarts-types (non nuls) de X et Y.*

- $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$.
- X et Y sont presque sûrement liées par une relation affine : $Y = aX + b$ ssi $|\,\rho(X,Y)\,| = 1$.
- X et Y sont dites non corrélées ssi $\rho(X,Y) = 0$ ou $\mathbb{C}\mathrm{ov}\,(X,Y) = 0$.

Vecteur moyenne et matrice de covariance

Soit $Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ la représentation vectorielle d'un couple de v.a.

Définition (Vecteur moyenne)

$$\mu = \mathbb{E}(Z) = \begin{bmatrix} \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(Y) \end{bmatrix}$$

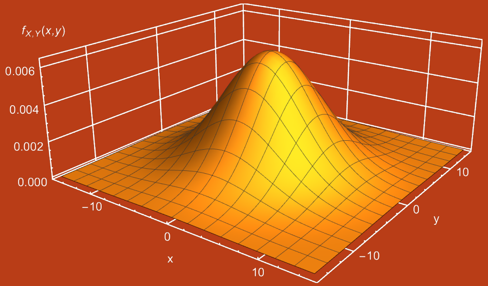
Définition (Matrice de covariance)

$$\Lambda = \mathbb{E}\left((Z - \mathbb{E}(Z))(Z - \mathbb{E}(Z))^T\right) = \begin{bmatrix} \mathbb{V}(X) & \mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) \\ \mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) & \mathbb{V}(Y) \end{bmatrix}$$

Exemple

Un couple de vecteur moyenne μ et de matrice de covariance Λ est dit Gaussien ssi sa densité conjointe s'écrit :

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{det\left(\Lambda\right)}} \exp -\frac{1}{2}(z-\mu)^T\Lambda^{-1}(z-\mu)$$



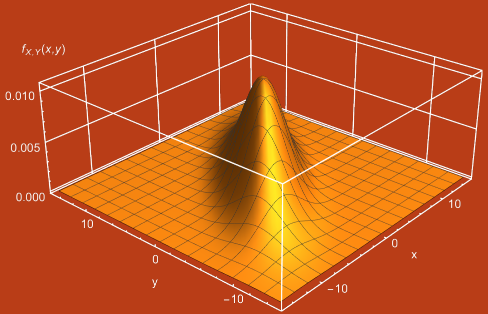
$$\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

Exemple

Un couple de vecteur moyenne μ et de matrice de covariance Λ est dit Gaussien ssi sa densité conjointe s'écrit :

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{det\left(\Lambda\right)}} \exp -\frac{1}{2}(z-\mu)^T\Lambda^{-1}(z-\mu)$$



$$\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 25 \end{bmatrix}$$

Liens entre indépendance et corrélation

$$\text{Indépendance} \Rightarrow \text{Non corrélation}$$
$$\not\Leftarrow$$

$$\text{Corrélation} \Rightarrow \text{Dépendance}$$
$$\not\Leftarrow$$

Cas Gaussien :

$$\text{Indépendance} \Leftrightarrow \text{Non corrélation}$$

Sommaire

Moments de la somme de 2 v.a.

- Espérance :

  $$\mathbb{E}\left(X+Y\right)=\mathbb{E}\left(X\right)+\mathbb{E}\left(Y\right)$$

- Variance :

  $$\mathbb{V}\left(X+Y\right)=\mathbb{V}\left(X\right)+\mathbb{V}\left(Y\right)+2\,\mathbb{C}\mathrm{ov}\left(X,Y\right)$$

  Si X et Y sont non corrélées ou indépendantes :

  $$\mathbb{V}\left(X+Y\right)=\mathbb{V}\left(X\right)+\mathbb{V}\left(Y\right)$$

Loi de la somme de 2 v.a. indépendantes

- **Cas discret**

Théorème

Soient X et Y deux v.a. discrètes indépendantes de lois $\mathbb{P}_X(x_i)$ et $\mathbb{P}_Y(y_j)$.
La loi de la somme S=X+Y est donnée par :

- *l'ensemble des valeurs possibles de S : $\{s_k = x_i + y_j, i \in I, j \in J\}$,*
- *et les probabilités associées, égales au produit de convolution discret des lois de X et Y :*

$$\mathbb{P}_S(s_k) = (\mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y)(s_k) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}_X(x_i)\mathbb{P}_Y(s_k - x_i)$$

Loi de la somme de 2 v.a. indépendantes

- **Cas continu**

Théorème

Soient X et Y deux v.a. continues indépendantes de densités $f_X(x)$ et $f_Y(y)$. La densité de la somme $S=X+Y$ est donnée par le produit de convolution de ces 2 densités :

$$f_S(s) = (f_X * f_Y)(s) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(s-x) dx$$

Quelques lois usuelles stables

- La somme de 2 v.a. binomiales indépendantes de paramètres respectifs (n, p) et (m, p) est une v.a. binomiale de paramètres $(n+m, p)$.

- La somme de 2 v.a. de Poisson indépendantes de paramètres respectifs λ et μ est une v.a. de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

- La somme de 2 v.a. Gaussiennes indépendantes de paramètres respectifs $(\mu_1, {\sigma_1}^2)$ et $(\mu_2, {\sigma_2}^2)$ est une v.a. Gaussienne de paramètres $(\mu_1 + \mu_2, {\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2)$.

INSTITUT
Mines-Télécom