Statistique pour ingénieur
Thème 1 : Notions de probabilités

Video 1 : Expériences et variables aléatoires, fonctions de répartition, espérance et variance

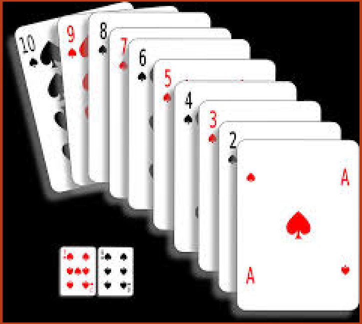
Dominique Pastor   François-Xavier Socheleau

Institut Mines-Télécom
Télécom Bretagne

Plan

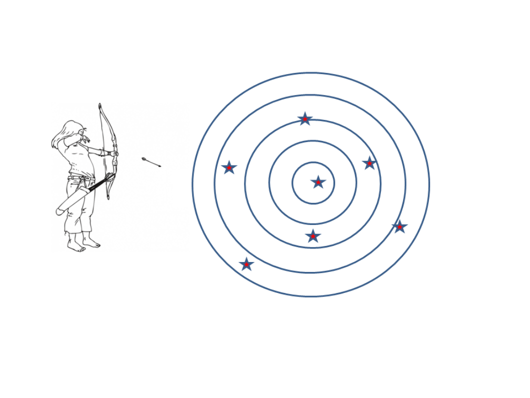
Expériences aléatoires

Expériences aléatoires



Expériences aléatoires

Expériences aléatoires

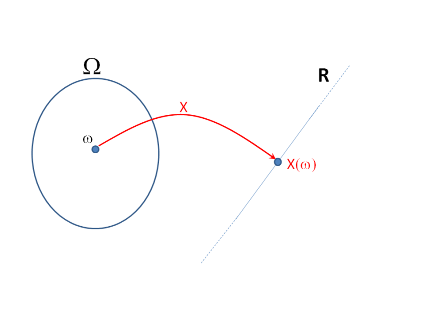


Ω : Univers, ensemble des résultats possibles de l'expérience

$\omega \in \Omega$: un résultat de l'expérience

Plan

Variable aléatoire réelle



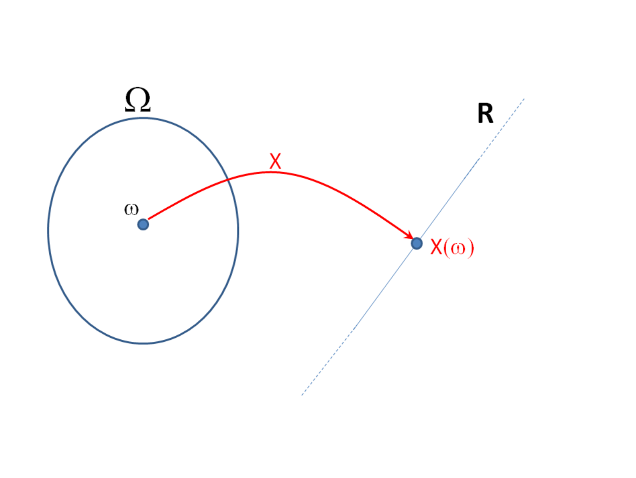
$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{array}$$

VA discrète : $X(\Omega) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$ est une partie finie ou dénombrable de $\mathbb{R}$

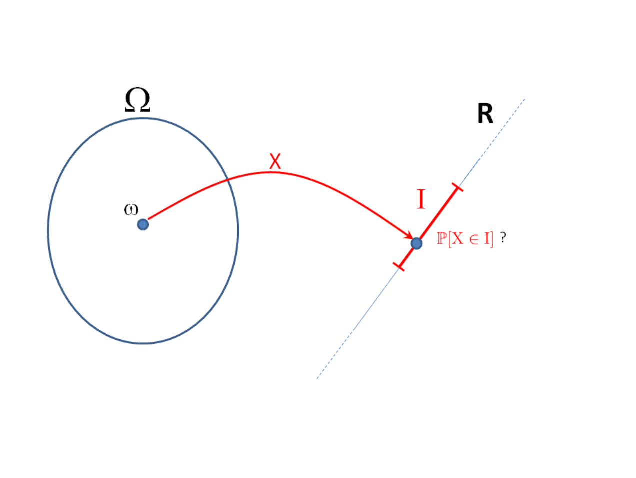
VA continue $\longrightarrow$ densité

Plan

Fonction de répartition



Fonction de répartition

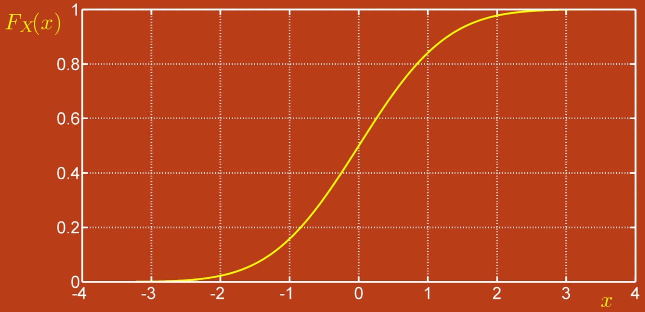


Fonction de répartition

Définition

Pour tout réel x, $F_X(x) = \mathbb{P}[X \leqslant x]$.

- Pour $I =]a, b]$, $\mathbb{P}[X \in I] = \mathbb{P}[a < X \leqslant b] = F_X(b) - F_X(a)$

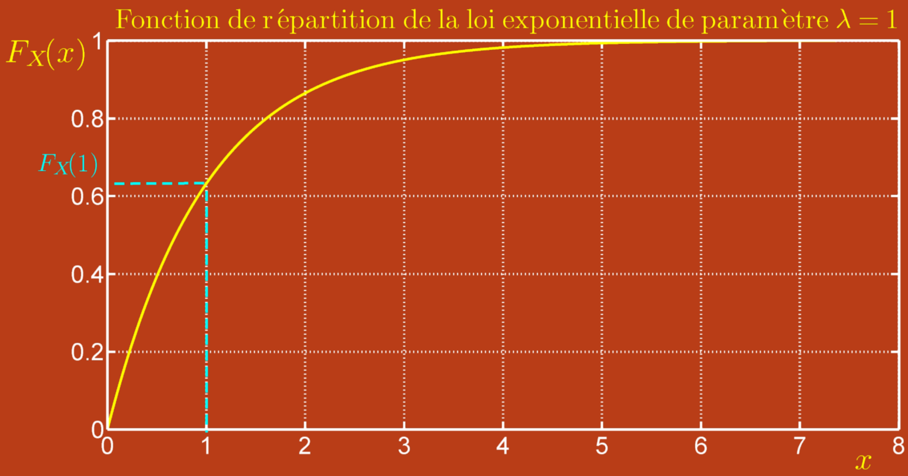


Exemple : la loi exponentielle en fiabilité

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Durée moyenne de vie du système : $1/\lambda$

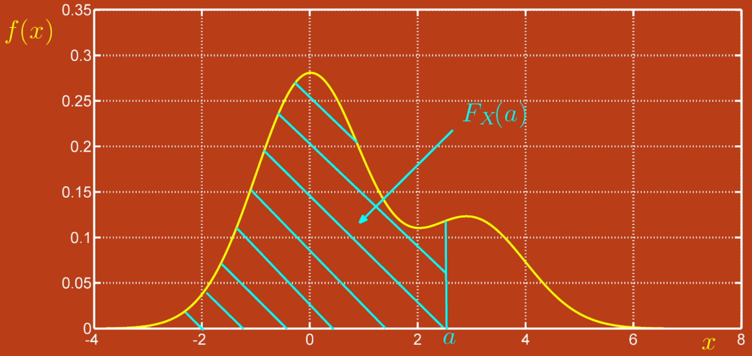
Exemple : la loi exponentielle en fiabilité



Plan

Densité de probabilité

$$F_X(a) = \mathbb{P}[X \leqslant a]$$
$$= \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$
$$f(a) = F'_X(a)$$

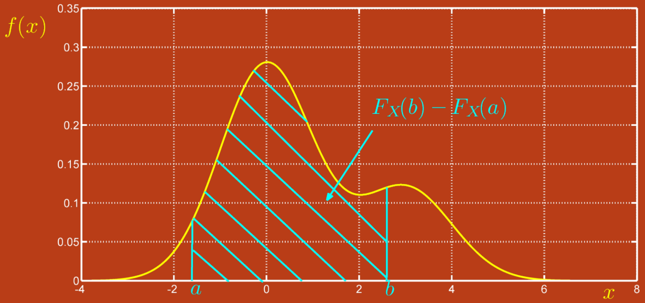


Densité de probabilité

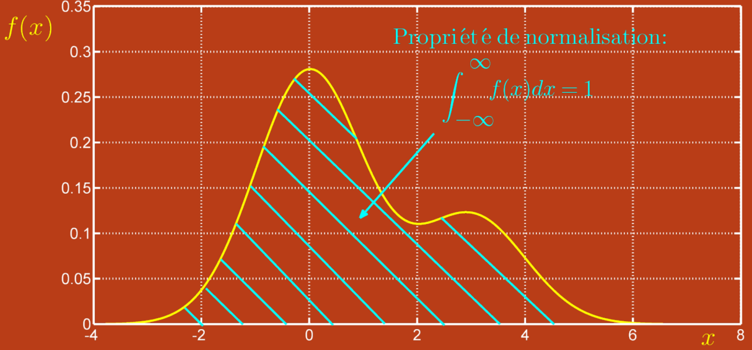
$$F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}[a \leqslant X \leqslant b]$$

$$= \mathbb{P}[a < X \leqslant b]$$

$$\mathbb{P}[X = a] = 0$$



Densité de probabilité



Exemple : la loi exponentielle en fiabilité

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a pour dérivée :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La variable aléatoire X admet donc f comme densité.

Plan

1. Expériences aléatoires
2. Variable aléatoire réelle
3. Fonction de répartition
4. Densité de probabilité
5. **Espérance, variance et écart-type**

Espérance

Définition

1. *Pour une variable aléatoire discrète X prenant les valeurs $\{x_1, \ldots, x_n\}$:*

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}[X = x_i]$$

2. *Pour une variable aléatoire continue X admettant une densité f :*

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Variance et écart-type

Définition

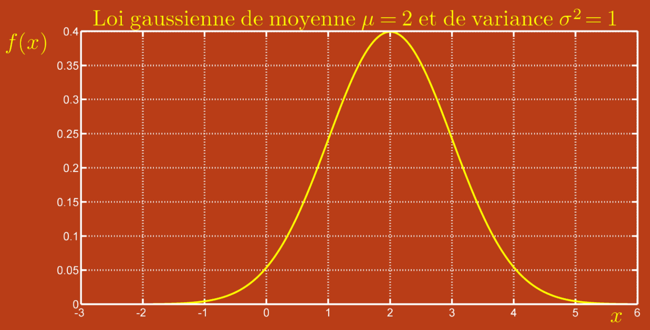
1. *Variance* : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$
2. *Ecart-type* : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$

Exemple : mesure d'une tension aux bornes d'une résistance

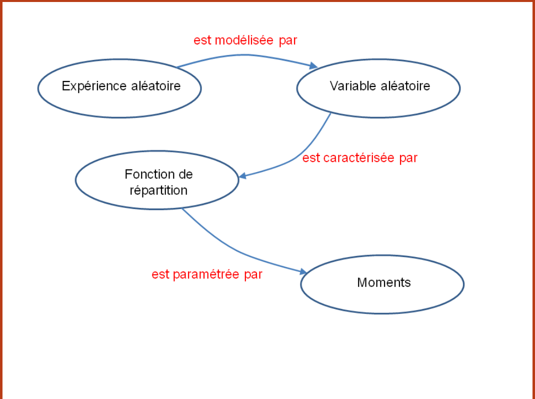
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$(\sigma > 0)$$

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) & = & \mu & \text{[Volts]} \\ \sigma(X) & = & \sigma & \text{[Volts]} \end{cases}$$



En résumé :



est modélisée par
Expérience aléatoire
Variable aléatoire
est caractérisée par
Fonction de répartition
est paramétrée par
Moments

Merci de votre attention

INSTITUT
Mines-Télécom