



Statistique pour ingénieur

Thème 2 : Exercices

F. Delacroix & M. Lecomte, 4 octobre 2016

Exercices sur l'estimation

Exercice 1 : Estimateurs

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, a]$ où a est un paramètre réel strictement positif à estimer. On pose

$$A_n = \sup_{1 \leq i \leq n} X_i \quad \text{et} \quad B_n = 2 \bar{X}.$$

1. Déterminer la loi de probabilité de A_n (on pourra utiliser la fonction de répartition).
2. Calculer l'espérance et la variance de A_n et en déduire que A_n est un estimateur de a .
3. Montrer que B_n est un estimateur sans biais de a .
4. Comparer les variances de A_n et de B_n .

Exercice 2 : Estimateur obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance

Déterminer un estimateur du paramètre λ d'une loi exponentielle. Celle-ci est définie par la densité de probabilité f suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 3 : Paramètre d'une loi de Poisson

Dans une ville, on a étudié le nombre d'accidents de la circulation sur une période de 70 jours. En regroupant les jours selon le nombre d'accidents, on a obtenu le tableau suivant

nombre d'accidents	0	1	2	3	4	5
nombre de jours	34	22	11	2	0	1

Soit X la variable aléatoire désignant le nombre d'accidents quotidien. On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre λ , c'est-à-dire que

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

L'objet de cet exercice est de déterminer une estimation ponctuelle de λ par deux méthodes distinctes. Pour cela, on considère un échantillon statistique (X_1, \dots, X_n) de X , c'est-à-dire n variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes la loi de Poisson de paramètre λ .

1^{ère} méthode : maximum de vraisemblance.

1. Construire un estimateur de λ par la méthode du maximum de vraisemblance. Est-il sans biais ? En déduire, en utilisant les données du tableau, une estimation ponctuelle de λ .

2^{ème} méthode : on pose $\Sigma_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

2. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Σ_n ?

3. Montrer que, pour tout entier naturel j ,

$$\mathbb{P}(\{X_1 = 0\} | \{\Sigma_n = j\}) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^j.$$

4. En déduire que la variable aléatoire

$$T_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\Sigma_n}$$

est un estimateur sans biais de $e^{-\lambda}$.

5. Déduire des questions précédentes un nouvel estimateur de λ et une nouvelle estimation ponctuelle de λ .

6. Comparer les estimateurs obtenus à la **question 1** et à la **question 5**. Conclure.

Exercices sur les intervalles de confiance

Exercice 4 : Intervalle de confiance pour une moyenne et une variance

Une société fabrique des billes pour roulements à billes. On admet que la masse d'une bille est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ où μ et σ sont inconnus.

Un échantillon de 30 billes de masses x_i a donné les résultats suivants :

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 69 \text{ g} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 163,1862 \text{ g}^2.$$

1. Déterminer un intervalle de confiance pour μ au niveau de confiance de 95 %.

2. Déterminer un intervalle de confiance pour σ au niveau de confiance de 95 %.

Exercice 5 : Intervalle de confiance pour une proportion

On appelle p la proportion de billes défectueuses dans une production de billes. Déterminer un intervalle de confiance pour p au seuil 5 % dans les deux cas suivants.

1. Dans un échantillon de 100 billes, on a observé 11 billes défectueuses.

2. Dans un échantillon de 500 billes, on a observé 48 billes défectueuses.

Exercice 6 : Publicité mensongère ?

Un fabricant de piles électriques indique sur ses produits que la durée de vie moyenne de ses piles est de 200 heures. Une association de consommateurs prélève un échantillon de 25 piles et observe une durée de vie moyenne de 185 heures avec un écart-type (calculé à partir de l'estimateur biaisé de la variance) de 30 heures.

1. S'agit-il de publicité mensongère ? On précisera la démarche utilisée (hypothèses, raisonnements, calculs, *etc.*).
2. Que faudrait-il faire pour répondre négativement à la question posée ?

Exercice 7 : Paramètre d'une loi continue

Pour $\theta > 0$, on définit la fonction

$$f_\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} e^{\theta-x} & \text{si } x \geq \theta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'objet de ce problème est de construire des estimations de θ .

1. Démontrer que f_θ est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire admettant f_θ pour densité de probabilité. Démontrer que la variable X admet une espérance et une variance et que

$$E[X] = \theta + 1 \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = 1.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère des variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes admettant f_θ pour densité de probabilité.

3. On pose $U_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - 1)$.

3.1 Calculer l'espérance et la variance de U_n .

3.2 Que peut-on en déduire ?

4. Justifier que, si n est assez grand, la variable aléatoire

$$T_n = \sqrt{n} (U_n - \theta)$$

suit approximativement la loi normale centrée réduite.

5. On suppose que $n = 100$ et $\bar{x} = 2,0706$. À l'aide de la question précédente, déterminer un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance 95%.

6. On admet le résultat suivant :

Théorème (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Si Y est une variable aléatoire admettant une espérance μ et une variance σ^2 , alors

$$\forall k > 0, \quad P(|Y - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}.$$

6.1 En appliquant ce théorème à la variable aléatoire \bar{X} , déterminer un intervalle de confiance aléatoire pour θ avec un niveau de confiance supérieur ou égal à $1 - \alpha = 95\%$.

6.2 Donner l'intervalle réel ainsi obtenu lorsque $n = 100$ et $\bar{x} = 2,0706$.

7. Comparer les intervalles de confiance obtenus aux questions **6.2** et **5**. Quel serait le niveau de confiance permettant d'obtenir l'intervalle de confiance de la **question 6.2** avec la méthode de la **question 5** ?