Zahmoul Khalil
2022-2023

Probabilité

Partie I.

Exercice 1. Un dé cubique a trois faces portant le numéro 1, deux faces portant le numéro 2 et une face portant le numéro 3. On lance le dé deux fois de suites et on désigne par X la variable aléatoire qui donne la somme des nombres marqués sur les faces supérieures des deux dés.

(1) Déterminer la loi de X.

(2) Calculer $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$.

Exercice 2. Un test sanguin est positif avec une probabilité $0,95$ quand la personne est malade. Ce test est négatif avec une probabilité $0,9$ quand la personne n'est pas malade. la probabilité qu'une personne pris au hasard soit malade vaut $0,2$. Posons les événements :
M : "la personne est malade",
T : "le test est positif".

(1) Calculer $p(M \cap T)$, $p(T)$ and $p(M|T)$.

(2) Calculer la probabilité que le test se trompe (c-à-d test positif sur une personne non malade ou test négatif sur une personne malade).

Exercice 3. Un individu est choisi au hasard dans une population ayant une proportion p de tricheurs ($p \in]0,1[$). On lui fait tirer une carte dans un jeu de 52 cartes et on admet que : Si cet individu est un tricheur alors il est sûr de retourne un as. Quelle est la probabilité pour qu'une personne choisi au hasard retourne un as ?

Exercice 4. On considère un dé usuel truqué, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k (c-à-d $p(X = k) = \alpha k$, $\alpha \in \mathbb{R}$). Soit X la variable aléatoire associée au lancer de ce dé.

(1) Déterminer la loi de X et calculer son espérance et sa variance.

(2) Déterminer la fonction de répartition de X et la représenter.

(3) On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y, et son espérance.

Exercice 5. Montrer que si X est une variable aléatoire qui suit la loi géométrique, alors elle vérifie la propriété d'absence de mémoire suivante :

$$P(X > n + k|X > n) = P(X > k),\ \forall k, n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 6. Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

(1) Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins. quelle est la probabilité des événements :
A : "Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent".
B : "Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent".

(2) Soit X la variable aléatoire "nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres". Quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

Exercice 7. L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets. Les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100.

(1) Quelle est la probabilité pour que :
A : "le candidat ait révisé les trois sujets tirés",
B : "le candidat ait révisé exactement deux sujets sur les trois sujets",
C : "le candidat ait révisé aucun des trois sujets".

(2) Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Exercice 8. On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $\frac{2}{3}$, et donc celle d'obtenir face est $\frac{1}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, 5 piles. Quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

Exercice 9. Une population comporte en moyenne une personne mesurant plus de 1,90m sur 80 personnes. En utilisant la loi de Poisson calculer la probabilité pour que :
A : "il y ait au moins une personne sur 100 personnes mesurant plus de $1,90m$",
B : "il y ait au moins une personne sur 300 personnes mesurant plus de $1,90m$".

Partie II.

Exercice 10. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{a}{x\sqrt{x}}$ si $x \geqslant 1$ et 0 sinon.

(1) Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X.

(2) Déterminer la fonction de répartition associée à X.

Exercice 11. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}$ si $x > 0$ et 0 sinon.

(1) Montrer que f est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire, que l'on notera X.

(2) Déterminer la fonction de répartition de X.

(3) Calculer l'espérance de X.

(4) On pose $Y = 2X + 1$.

   (a) Déterminer la fonction de répartition de Y.

   (b) Démontrer que Y est une variable aléatoire à densité, et déterminer la densité de Y.

   (c) Reprendre les mêmes questions avec $Y = X^2$.

Exercice 12. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme $U([0,1])$. Démontrer que la variable aléatoire $T = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - X)$, où $\lambda > 0$ suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 13. La durée de vie des atomes de radon suit une loi exponentielle. La probabilité qu'un atome de radon ne soit pas désintégré en $40s$ sachant qu'il ne l'est pas en $12s$ vaut $\frac{2}{\sqrt{2}}$. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas désintégré avant $76s$ sachant qu'il ne l'est pas en $20s$?

Exercice 14. La taille d'un homme âgé de 25 ans suit une loi normale de moyenne $175cm$ et d'écart-type $6cm$.

(1) Quel est le pourcentage d'hommes ayant une taille supérieure à $185cm$?

(2) Parmi les hommes mesurant plus de $180cm$, quelle proportion mesure plus de $192cm$?

Exercice 15. Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $N(0,1)$,

(1) Calculer $p(X < -2)$, $p(-1 < X < 0,5)$ et $p(4X > -3)$.

(2) Déterminer les réels u_0 et v_0 tels que $p(|X| < u_0) = 0,82$ et $p(X < -v_0) = 0,7$.

Exercice 16. On suppose que la distance en mètres parcourues par un javelot lancé par un athlète A suit une loi normale. Au cours d'un entraînement, on constate que :

Exactement 10% des javelots atteignent plus de $75m$.

Exactement 25% des javelots atteignent moint de $50m$.

Calculer la longueur moyenne parcourue par un javelot ainsi que l'écart-type de cette longueur.

Exercice 17. On jette un dé 180 fois. Soit X la variable aléatoire : "nombre de sorties du 4".

(1) Quelle est la loi de X ?

(2) Calculez la probabilité pour que X soit compris entre 29 et 32.

Exercice 18. On effectue un contrôle sur des pièces de un euro dont une proportion $p = 0,05$ est fausse et sur des pièces de 2 euros dont une proportion $p' = 0,02$ est fausse. Il y a dans un lot 500 pièces dont 150 pièces de un euro et 350 pièces de 2 euros.

(1) On prend une pièce au hasard dans ce lot, quelle est la probabilité qu'elle soit fausse ?

(2) Sachant que cette pièce est fausse, qu'elle est la probabilité qu'elle soit de un euro ?

(3) On contrôle à présent un lot de 1000 pièces de un euro. Soit X la variable aléatoire : "nombre de pièces fausses parmi 1000". Quelle est la vraie loi de X ? (on ne donnera que la forme générale) ; quelle est son espérance, son écart-type ?

(4) En approchant cette loi par celle d'une loi normale adaptée, calculez la probabilité pour que X soit compris entre 48 et 52.