

**Variable aléatoire** : la variable aléatoire  $X$  est une application qui permet de passer de l'espace  $\Omega$  théorique à un espace  $E$  de valeurs observables :

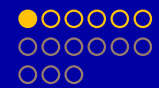
$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow E \\ \omega &\mapsto X(\omega) = x. \end{aligned}$$

**Loi de probabilité** : pour toute partie  $A$  de  $E$ ,

$$P_X(X \in A) = P(\{\omega; X(\omega) \in A\}).$$

**Variables aléatoires indépendantes** : Deux Variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  à valeurs dans  $E_1$  et  $E_2$  sont indépendantes si pour tout événement  $A_1 \subset E_1$  et  $A_2 \subset E_2$ , les événements  $\{X_1 \in A_1\}$  et  $\{X_2 \in A_2\}$  sont indépendants, c-à-d

$$P(X_1 \in A_1 \text{ et } X_2 \in A_2) = P(X_1 \in A_1)P(X_2 \in A_2).$$



**variable aléatoire discrète** : On appelle variable aléatoire discrète une variable aléatoire qui prend

- i. un nombre fini de valeurs :  $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,
- ii. ou un nombre infini dénombrables de valeurs  
 $E = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ .

La loi d'une variable aléatoire discrète est entièrement décrite par la donnée de  $p_i = P(X = x_i)$  pour tout  $i = 1, 2, \dots$

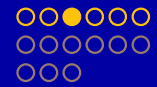
**variable aléatoire entière** : Une variable aléatoire  $X$  est dite entière si elle prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}$  ou une partie de  $\mathbb{N}$ . Sa loi de probabilité est donnée par les quantités  $p_k = P(X = k)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

## Lois discrètes usuelles :

nom de la loi	notation	espace $E$	probabilité $P(X = k)$
Loi Uniforme sur $\{1, \dots, n\}$	$\mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$	$\{1, \dots, n\}$	$\frac{1}{n}$
Loi de Bernouilli de paramètre $p$	$\mathcal{B}(p)$	$\{0, 1\}$	$p_0 = 1 - p, p_1 = p$
Loi Binomiale de paramètres $n$ et $p$	$\mathcal{B}(n, p)$	$\{0, \dots, n\}$	$C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$
Loi de Poisson de paramètre $\lambda$	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$
Loi Géométrique de paramètre $p$	$\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$p(1 - p)^{k-1}$

## Propriétés :

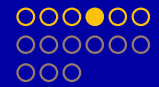
1. La somme  $X_1 + \dots + X_n$  de  $n$  lois de Bernouilli  $\mathcal{B}(p)$  indépendantes suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ .
2. Le rang du premier succès  $T = \inf\{j \geq 1, X_j = 1\}$  à des tirages  $X_1, X_2, \dots$  indépendants de loi  $\mathcal{B}(p)$  suit la loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$ .



3. Si  $X$  suit la loi  $\mathcal{P}(\lambda)$  et  $Y$  suit la loi  $\mathcal{P}(\eta)$  sont des variables aléatoires indépendantes, alors  $X + Y$  suit la loi  $\mathcal{P}(\lambda + \eta)$ .
4. Si  $X_n$  suit la loi binomiale  $B(n, \frac{\lambda}{n})$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquence, pour  $n$  grand et  $p$  petit,  $\mathcal{B}(n, p) \approx \mathcal{P}(pn)$ .



**Espérance d'une variable aléatoire discrète :** Soit  $X$  une variable aléatoire discrète. La moyenne (ou espérance) de  $X$  est définie par

$$E(X) = \sum_{k \geq 0} x_k P(X = x_k).$$

De plus, pour toute fonction  $h(X)$ , on peut également calculer une moyenne

$$E(h(X)) = \sum_{k \geq 0} h(x_k) P(X = x_k).$$

**Propriétés :** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes, alors :

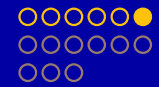
1.  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ .
2.  $E(\alpha X) = \alpha E(X)$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .
3. si de plus  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, on a  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .

Variance d'une variable aléatoire discrète : Soit  $X$  une variable aléatoire discrète. La variance de  $X$  est définie par

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

### Propriétés :

1.  $V(X) = 0 \Leftrightarrow X$  est constante.
2.  $V(\alpha X) = \alpha^2 V(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}.$
3. Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors  $V(X + Y) = V(X) + V(Y).$



## Caractéristiques des lois discrètes usuelles :

nom de la loi	espérance	variance
Loi Uniforme $\mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Loi de Bernouilli $\mathcal{B}(p)$	$p$	$p(1-p)$
Loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$np$	$np(1-p)$
Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda$	$\lambda$
Loi Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

**Fonction de répartition :** Pour toute variable aléatoire  $X$ , on définit la fonction de répartition par

$$F(x) = P(X \leq x).$$