Filière:	DSI - MCW – SRI	Durée:	2 Heures
Épreuve:	MATHEMATIQUES	Coefficient:	15

5 points **Exercice 1 :**

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x\,e^{\frac{1}{x}}+\sqrt{x^2+x}$

Considérons $\left(\mathscr{C}_g\right)$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $\left(O\,,\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

1,5 — 1. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction :

$$h:\ t\longmapsto e^t+\sqrt{1+t}$$

0,5 — 2. Vérifier que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, on a :

$$g(x)=x\left(e^{\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$$

1,5 — 3. Donner le développement limité généralisé en $\frac{1}{x}$ de la fonction g au voisinage de $+\infty$ de la forme : $g(x)=ax+b+\frac{c}{x}+\frac{1}{x}\,\varepsilon(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$ avec a, b et c des nombres réels à déterminer.

(on peut poser $t=\frac{1}{x}$ et utiliser les résultats des questions 1. et 2.)

1 — 4. a- Donner l'équation de l'asymptote (Δ) à la courbe $\left(\mathscr{C}_g\right)$ au voisinage de $+\infty$.

0,5 — b- Déterminer la position relative de la courbe $\left(\mathscr{C}_g\right)$ par rapport à son asymptote (Δ) au voisinage de $+\infty$.

3 points **Exercice 2 :**

Étudier la nature de chacune des séries suivantes

1 **1.** $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n\,(n+1)}}$

1 **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{n!}$

1 **3.** $\sum_{n\geq 1} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

3 points **Exercice 3 :**

0,5 **1. a-** Montrer que lôintégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x}\, dx$ est convergente et calculer sa valeur.

0,5 **b-** En déduire que $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ est convergente

2. Montrer que chacune des deux intégrales suivantes est convergente et calculer sa valeur

1 **a-** $I = \int_0^1 \ln x\, dx$.

1 **b-** $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$; (On peut poser $x = \sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).

9 points **Exercice 4 :**

Lôespace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ avec :

$$e_1 = (1,0,0) \quad , \quad e_2 = (0,1,0) \quad \text{et} \quad e_3 = (0,0,1)$$

Considérons lôapplication :

$$f : \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \to (x+y\ ,\ 2y\ ,\ -2x+2y+3z)$$

0,5 1. Montrer que f est une application linéaire.

0,5 2. Justifier que la matrice A de lôapplication linéaire f relativement à la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est : $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

0,5 — 3 .a- Vérifier que le polynôme caractéristique de la matrice A est donné par : $P(\lambda)=(2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$.

0,5 — b- Déterminer les valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 de la matrice A telles que $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ et en déduire que la matrice A est diagonalisable.

1,5 — c- Déterminer les vecteurs propres u_1, u_2 et u_3 associés respectivement aux valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 tels que :

$$u_1=(\ 1\ ,\ .\ ,\ .\ )\quad,\quad u_2=(\ .\ ,\ 1\ ,\ .\ )\quad \text{et}\quad u_3=(\ .\ ,\ .\ ,\ 1\ )$$

0,5 — d- Établir que $\mathscr{B}'=(u_1,u_2,u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1 — 4. a- Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que : $P^{-1}AP=D$.

0,5 — b- En déduire A en fonction de P , D et P^{-1}.

0,5 — c- Exprimer D^n en fonction de n , pour tout entier naturel n .

1 — d- En déduire A^n en fonction de n , pour tout entier naturel n .

5. On considère les suites numériques $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout , $n\in\mathbb{N}$, par : les formules récurrentes :

$$\begin{cases} x_{n+1}= x_n + y_n \\ y_{n+1}= 2y_n \\ z_{n+1}= -2x_n+2y_n+3\,z_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=-1 \\ z_0=2 \end{cases}$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $X_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

0,5 — a- Vérifier que : $X_{n+1}=AX_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

0,5 — b- Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_n=A^nX_0$.

(Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^{n+1}=A^n\times A$ et par convention $A^0=I$)

1 — c- Donner x_n , y_n et z_n en fonction de n , pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Fin de l'épreuve