Correction de l'examen national 2016

DSI-SRI-MCW

Présenté par: Mme. BENAZZOU Salma

Cette exercice ressemble à celui du national 2019

6 points **Exercice 1 :**

On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\ ,\quad D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\ ,\quad P=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad Q=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

1 1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est : $P(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+3$.

En déduire les valeurs propres de A.

1,5 2. a- Calculer : $P\,Q$ et $Q\,P$ et en déduire que P est inversible puis calculer P^{-1}.

0,5 b- Vérifier que : $A = P\,D\,P^{-1}$.

3. On considère le système différentiel linéaire :

$$(E):\begin{cases}x'(t)=2x(t)+\ y(t)\\ y'(t)=\ x(t)+2y(t)\end{cases}$$

On pose : $X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$ et $Y(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ y_1(t)\end{pmatrix}=P^{-1}X(t)$.

1 a- Exprimer $X'(t)$ en fonction de A et de $X(t)$.

En déduire que : $(E)\ \Leftrightarrow\ Y'(t)=D\,Y(t)$.

1 b- Déterminer $x_1(t)$ et $y_1(t)$ en fonction de t.

1 c- En déduire $x(t)$ et $y(t)$ les solutions du système (E).

1-Montrer que $P(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+3$

On a $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$P(\lambda)=Det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)^2-1=4+\lambda^2-4\lambda-1$

$=\lambda^2-4\lambda+3$

Les valeurs propres:

Résoudre $P(\lambda)=0$

$\Delta=(-4)^2-4.3=4=2^2$

$\lambda 1=\frac{4-2}{2}=1$ et $\lambda 2=\frac{4+2}{2}=3$

Alors $P(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+2)$

Si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Alors Det A=ad-bc

$P(X)=aX^2+bX+c$

Si α et β deux racines de P alors

$P(X)=(X-\alpha)(X-\beta)$

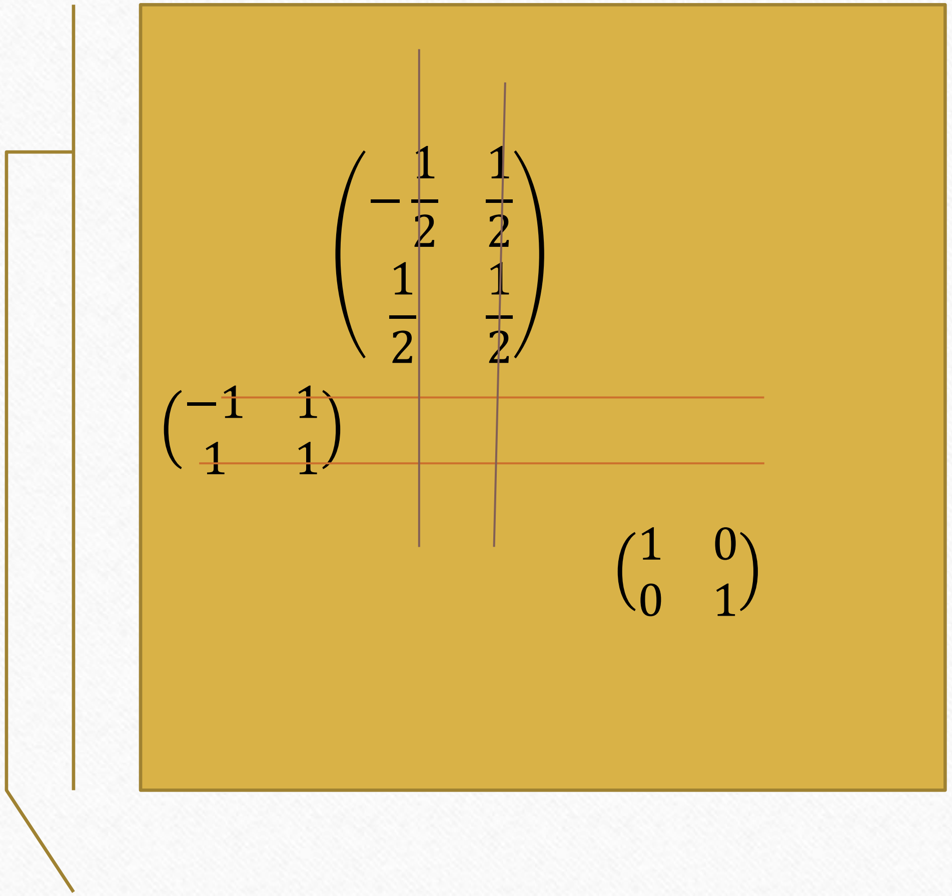
2-Calculer PQ et QP et déduire que P et inversible et calculer P^{-1}

On a $P=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$PQ= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$PQ= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Donc $P^{-1} = Q=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$



2-b-Verifier que A=PDP^{-1}

On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

P.D=$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad\quad$ $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$PD\,P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad\quad$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$=A

3-a-Exprimer X'(t) en fonction de A et de X(t)

Le système est : $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}$ Avec X(t)=$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

La forme matricielle associé au système est :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Alors X'(t)=A. X(t)

Déduire que Y'(t)=DY(t)

On a Y(t)=P^{-1}X(t)

Alors Y'(t)=P^{-1}X'(t) et d'après la question précédente X'(t)=A. X(t)

Donc Y'(t)=P^{-1} A. X(t) et A=PD P^{-1} (d'aprés la questions 3)

Donc Y'(t)=P^{-1} PD P^{-1}. X(t)

Or P^{-1} P=I

Alors Y'(t)=D P^{-1}. X(t)

C'est-à-dire Y'(t)=D $Y(t)$

3-b-exprimer u(t) et v(t) en fonction de t

On a Y'(t)=DY(t) et Y(t)= $\begin{pmatrix} x1(t) \\ y1(t) \end{pmatrix}$

Alors $\begin{pmatrix} x1'(t) \\ y1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1(t) \\ y1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x1(t) \\ 3y1(t) \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x1'(t) = x1(t) \\ y1'(t) = 3y1(t) \end{cases}$ alors $\begin{cases} x1'(t) - x1(t) = 0 \\ y1'(t) - 3y1(t) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x1(t) = \alpha e^{-\int \frac{-1}{1} dt} = \alpha e^{t} \\ y1(t) = \beta e^{-\int \frac{-3}{1} dt} = \beta e^{3t} \end{cases}$$

3-c-En déduire x(t) et y(t) en fonction de t

On a Y(t)=P^{-1}X(t) alors

X(t)=P.Y(t)

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1(t) \\ y1(t) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \alpha e^{t} \\ \beta e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = -\alpha e^{t} + \beta e^{3t} \\ y(t) = \alpha e^{t} + \beta e^{3t} \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} -\alpha e^{t} + \beta e^{3t} \\ \alpha e^{t} + \beta e^{3t} \end{pmatrix}$$

National 2016

4 points	Exercice 2 :
	I. On considère l'intégrale suivante : $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$.
1	1. Montrer que : I est convergente
0,5	2. a- Vérifier que : $\forall\ x \geq 1$, $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}$.
1	b- On pose $I(\alpha) = \int_1^{\alpha} \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$.
	Calculer $I(\alpha)$, puis en déduire la valeur de I.
1,5	**II.** Etudier la convergence des intégrales suivantes :
	$A = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ et $B = \int_1^{4} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

1-

I=$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$ .On a :

x+1∼ x au voisinage de +∞

x+2∼ x au voisinage de +∞

Donc x(x+1)$(x+2)\sim x^3$ au voisinage de +∞ alors $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} \sim \frac{1}{x^3}$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ est convergente car c'est une integrale de Riemann α=3>1

Donc d'apres le **critére d'equivalence** $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$ est convergente

2-a- Soit x≥1

On a $\frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)} = \frac{(x+1)\times 2(x+2) - 2x\times 2(x+2) + 2x(x+1)}{2x\times(x+1)\times 2(x+2)} = \frac{2(x^2+2x+x+2) - 4(x^2+2x) + 2(x^2+x)}{4x(x+1)(x+2)} =$
$\frac{2x^2+6x+4-4x^2-8x+2x^2+2x}{4x(x+1)(x+2)} = \frac{4}{4x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$

b- On a $I(\alpha)=\int_1^{\alpha}\frac{dx}{x(x+1)(x+2)}=\int_1^{\alpha}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+2)}\right)dx=[\frac{1}{2}\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x+2|]_1^{\propto}$

$=[\ln\sqrt{x}-\ln(x+1)+\ln\sqrt{x+2}]_1^{\propto}=[\ln\frac{\sqrt{x(x+2)}}{x+1}]_1^{\propto}=\ln\frac{\sqrt{\propto(\propto+2)}}{\propto+1}-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$

a ln b=$\ln b^a$
Ln a – ln b=$\ln\frac{a}{b}$
Ln a + ln b = ln ab

Par définition d'une intégrale généralisée I= $\lim_{\propto\to+\infty} I(\propto)$ c'est-à-dire

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)(x+2)}=\lim_{\propto\to+\infty}\int_1^{\propto}\frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$

Donc I= $\lim_{\propto\to+\infty}\ln\frac{\sqrt{\propto(\propto+2)}}{\propto+1}-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}=-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$ (car $\lim_{\propto\to+\infty}\frac{\sqrt{\propto(\propto+2)}}{\propto+1}=\lim_{\propto\to+\infty}\frac{\sqrt{\propto^2}}{\propto}=1$ et ln 1 = 0)

II- A=$\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$

On sait que $\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=0$, α=2>1 alors d'après le **critère de Riemann** A est convergente

$\lim_{x\to-\infty} x^{\propto}e^{x}=0$

$B=\int_1^4 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

$\int f' f^n = \frac{1}{n+1} f^{n+1}$

Je pose f(x)= $\frac{1}{x\sqrt{x-1}} = \frac{1}{x}.\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

Je pose g(x)= $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

On a $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}.\frac{1}{\sqrt{x-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1$

Alors f(x)~g(x) au voisinage du point 1 .Etudions $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

Méthode 1 : Définition	**Méthode 2:Changement de variable**
$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}=\lim_{t\to 1}\int_t^4 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}=\lim_{t\to 1}\int_t^4 (x-1)^{-\frac{1}{2}}dx=$ $\lim_{t\to 1}[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(x-1)^{-\frac{1}{2}+1}]_t^4=$ $\lim_{t\to 1}[2\sqrt{x-1}]_t^4=\lim_{t\to 1}2\sqrt{3}-2\sqrt{t-1}=2\sqrt{3}$ Alors $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ est convergente donc B est convergente d'après le **critère d'équivalence**	Je pose t=x-1 alors dx=dt x=1→ $t=0$ et x=4→ $t=3$ $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}=\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{t}}=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt+\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ est convergente (Riemann α=1/2<1) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ est convergente (t→$\frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur [1,3]) Alors $\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{t}}=\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ est convergente donc B est convergente d'après le **critère d'équivalence**

6 points	**Exercice 3 :**
	I. Soit la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ de terme général u_n tel que pour tout $n \geq 1$: $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$
1,5	1- Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$. En déduire la nature de la série de $\sum_{n\geq 1} u_n$.
0,5	2- a- Vérifier que : $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$
1	b- Calculer S_n avec : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et en déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
	II. Etudier la nature des séries numériques suivantes :
3×1	$\sum_{n\geq 1} \dfrac{e^{-n}}{n^2}$, $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n^n}{n!}$ et $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

National 2016:

1-Montrons que Un$\sim\frac{1}{n^2}$ et déduire la nature de $\sum_{n\geq1} Un$

On a Un= $\frac{1}{n(n+1)}$

Au voisinage de l'infini on a : n+1~n donc n(n+1)~n^2 alors Un$\sim\frac{1}{n^2}$

Or $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ est convergente car c'est une série de Riemann α=2 >1

Donc d'après le critère d'équivalence la série $\sum_{n=1}^{+\infty} Un$ est convergente

MATH

National 2016:

2-a-Vérifier que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{\mathrm{n}} - \frac{1}{\mathrm{n+1}}$

$\frac{1}{\mathrm{n}} - \frac{1}{\mathrm{n+1}} = \frac{n+1-\mathrm{n}}{\mathrm{n(n+1)}} = \frac{1}{\mathrm{n(n+1)}} = U_n$

B-Calculer Sn= $\sum_{k=1}^{n} U_k$

$\sum_{k=1}^{n} U_k = U_1 + U_2 + \ldots\ldots\ldots + U_n$

$U_n = \frac{1}{\mathrm{n}} - \frac{1}{\mathrm{n+1}}$

$U_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

$U_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$\ldots\ldots\ldots$

$U_{n-1} = \frac{1}{\mathrm{n-1}} - \frac{1}{\mathrm{n}}$

$U_n = \frac{1}{\mathrm{n}} - \frac{1}{\mathrm{n+1}}$

$\sum_{k=1}^{n} U_k = U_1 + U_2 + \ldots\ldots\ldots + U_n$

Sn=1- $\frac{1}{\mathrm{n+1}}$

- Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$: $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{\mathrm{n+1}} = 1$

National 2016:

II-

1-La nature de $\sum_{n\geq 1}\frac{e^{-n}}{n^2}$

- Méthode 1

Je pose Un=$\frac{e^{-n}}{n^2}$

On sait que $\lim\limits_{-\infty} x^{\propto}e^{x}$=0

On a $\lim\limits_{+\infty} n^2.\frac{e^{-n}}{n^2}$=$\lim\limits_{+\infty} e^{-n}$=0

On a $\propto$=2>1 Donc d'après la règle $n^{\propto}U_n$ la série de terme générale Un est convergente.

- Méthode 2

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{e^{-n}}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}$ =0)

Or $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$est convergente car c'est une série de Riemann α=2>1

Donc d'après le critère de négligence$\sum_{n\geq 1}\frac{e^{-n}}{n^2}$est convergente.

National 2016:

2-La nature de $\sum_{n\geq 1}\frac{n^n}{n!}$

Je pose Un=$\frac{n^n}{n!}$

$$\frac{Un+1}{Un}=\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{n^n}=\frac{(n+1).(n+1)^n}{(n+1)\times n!}\times\frac{n!}{n^n}=\frac{(n+1)^n}{n^n}=(\frac{n+1}{n})^n=(1+\frac{1}{n})^n$$

$$\lim_{+\infty}\frac{Un+1}{Un}=\lim_{+\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\lim_{+\infty}e^{n.ln(1+\frac{1}{n})}=\lim_{+\infty}e^{n.\frac{ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\times(\frac{1}{n})}=e^1>1$$

Alors d'après le critère de D'Alembert la série de terme générale Un est divergente.

National 2016:

3-La nature de $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$

Je pose Un=$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$=$(-1)^n\times\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$et Vn= $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

On a $\lim\limits_{+\infty} Vn$=$\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ =0

- On a Vn+1=$\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}}$

or n+1>n donc $(n+1)^2>n^2$ (car $x\to x^2$ est croissante) donc $(n+1)^2+1>n^2+1$

Alors $\sqrt{(n+1)^2+1}>\sqrt{n^2+1}$ ((car x→ $\sqrt{x}$ est croissante)

Donc Vn+1<Vn donc (Vn) est décroissante

Alors d'après le critère spécial des séries alternées $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ est convergente

National 2016

4 points	**Exercice 4 :**
	Soit X la variable aléatoire réelle qui prend pour valeur le nombre de défauts sur le verre d'une ampoule.
	On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.
	1. Calculer la probabilité des événements suivants :
1	a- Il n'y a aucun défaut sur l'ampoule.
1	b- Il y'a au moins deux défauts sur l'ampoule.
1	c- Le nombre de défauts est compris entre deux et cinq (bornes comprises).
1	2. Calculer l'espérance et l'écart-type de X .

National 2016

1-a Il n'y a aucun défaut sur l'ampoule

$P(X = 0) = e^{-5}\frac{5^0}{0!} = e^{-5}$=0,0067

1-b-il y a au moins deux défauts sur l'ampoule

On a $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) =$1-($P(X = 0)$+ $P(X = 1)$)

=1- $e^{-5}\frac{5^0}{0!} - e^{-5}\frac{5^1}{1!}$ = 0,95

1-c-Le nombre de défaut est compris entre 2 et 5

On a : $P(2 \leq X \leq 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

$= e^{-5}\frac{5^2}{2!}+e^{-5}\frac{5^3}{3!}+e^{-5}\frac{5^4}{4!}+ e^{-5}\frac{5^5}{5!} = e^{-5}(\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!}+\frac{5^4}{4!}+\frac{5^5}{5!})$

= 0,57

2-Calculer l'espérance et l'écart type

E(X)=5

σ=$\sqrt{V(X)}$ =$\sqrt{5}$ =2,23