Correction national 2021

DSI-SRI-MCW

Présenté par: Mme. BENAZZOU Salma

4 points	**Exercice 1 :**
	On considère la fonction numérique f définie sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par :
	$$f(x)= \ln(1+2x)+e^{-x}$$
	Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
1	1. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions : $t\mapsto \ln(1+t)$ et $t\mapsto e^t$
1	2. En déduire le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions : $x\mapsto \ln(1+2x)$ et $x\mapsto e^{-x}$
1	3. Montrer que le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de f est : $$f(x)=1+x-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$$
1	4. Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point $A(0,1)$ et préciser sa position par rapport à (C_f).

MATH

1-Donner le DL2(0) de t $\rightarrow e^t$ et de t $\rightarrow$ ln (1+t)

On sait que : $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

Alors $e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + o(t^2) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

Et on a : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . . + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Alors $\ln(1+t) = \mathrm{t} - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

On sait que $o(x^n) = x^n\varepsilon(x)$

Si t=-x on a : $o(t^2)=o((-x)^2)=o(x^2)$
Si t=2x on a $o(t^2)=o(4x^2)=4x^2\varepsilon(x)$
$=x^2\varepsilon'(x) = o(x^2)$

2-Déduire le DL2(0) de x $\rightarrow e^{-x}$ et de x $\rightarrow$ ln (1+2x)

On a $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ pour t=-x on a $e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2) = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Et on a $\ln(1+t) = \mathrm{t} - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, pour t=2x on a $\ln(1+2x) = 2\mathrm{x} - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) = 2x - 2x^2 + o(x^2)$

MATH

3-Montrer que le DL2(0) de f est f(x)= $1+x-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$

On a f(x)= $\ln(1+2x)+e^{-x} = (2x-2x^2)+(1-x+\frac{x^2}{2})+o(x^2) = 2x-2x^2+1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

Donc f(x)=$1+(2-1)x+\left(-2+\frac{1}{2}\right)x^2+o(x^2)=1+x+\left(\frac{-3}{2}\right)x^2+o(x^2)=)=1+x-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$

4)Equation de la tangente

On a : f(x)= $1+x-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$

Alors l'équation de la tangente au voisinage de 0 est y=1+x

- **La position de la courbe par rapport a la tangente:**

On a : f(x)-y= $-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)<0$ donc la courbe est au dessous de la tangente

4 points	**Exercice 2 :**
	Déterminer la nature de chacune des séries numériques suivantes :
1	a- $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{3e^n+1}{2e^n+3}\right)^n$. (On pourra utiliser la règle de Cauchy)
1	b- $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{(n+1)!}$. (On pourra utiliser la règle de D'Alembert)
2	c- $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+1}}$.

A-La nature de $\sum_{n\geq 0}(\frac{3e^n+1}{2e^n+3})^n$

Je pose Un=$(\frac{3e^n+1}{2e^n+3})^n$

$\sqrt[n]{Un}=\frac{3e^n+1}{2e^n+3}$

$\lim\limits_{+\infty}\sqrt[n]{Un}=\lim\limits_{+\infty}\frac{3e^n+1}{2e^n+3}=\lim\limits_{+\infty}\frac{3e^n}{2e^n}=\frac{3}{2}>1$

(Ou je pose X= e^n donc $\lim\limits_{+\infty}\frac{3e^n+1}{2e^n+3}==\lim\limits_{+\infty}\frac{3X+1}{2X+3}=\lim\limits_{+\infty}\frac{3X}{2X}=\frac{3}{2}>1$)

(Ou $\lim\limits_{+\infty}\frac{3e^n+1}{2e^n+3}=\lim\limits_{+\infty}\frac{e^n(3+\frac{1}{e^n})}{e^n(2+\frac{3}{e^n})}=\lim\limits_{+\infty}\frac{(3+\frac{1}{e^n})}{(2+\frac{3}{e^n})}=\frac{3}{2}$)

Alors d'après le critère de Cauchy la série de terme générale Un est divergente.

<u>Rappel du critére de Cauchy</u>

Soit $\sum_{n\geq 0}U_n$ une série à termes positives tel que $\lim\limits_{+\infty}\sqrt[n]{Un}$=a.

- Si a<1 alors $\sum_{n\geq 0}U_n$ est convergente
- Si a>1 alors $\sum_{n\geq 0}U_n$ est divergente
- Si a=1 on ne peut rien conclure

Rappel du critére de d'Alembert:

Soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ une série à termes positives tel que $\lim\limits_{+\infty} \frac{Un+1}{Un}$=a.

- Si a<1 alors $\sum_{n\geq 0} U_n$ est convergente
- Si a>1 alors $\sum_{n\geq 0} U_n$ est divergente
- Si a=1 on ne peut rien conclure

b-La nature de $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{(n+1)!}$

Je pose Un=$\frac{n^2}{(n+1)!}$

$$\frac{Un+1}{Un}=\frac{\frac{(n+1)^2}{(n+2)!}}{\frac{n^2}{(n+1)!}}=\frac{(n+1)^2}{(n+2)!}.\frac{(n+1)!}{n^2}=\frac{(n+1)^2}{(n+2)(n+1)!}.\frac{(n+1)!}{n^2}=\frac{(n+1)^2}{(n+2)n^2}$$

$$\lim_{+\infty}\frac{Un+1}{Un}=\lim_{+\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+2)n^2}=\lim_{+\infty}\frac{n^2}{n.n^2}=\lim_{+\infty}\frac{1}{n}=0<1$$

Alors d'après le critère de D'Alembert la série de terme générale Un est convergente.

MATH

c-La nature de $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+1}}$

Je pose Un= $\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+1}}$=$(-1)^n\times \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$et Vn=$\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

On a $\lim\limits_{+\infty} Vn$=$\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$=0

- On a Vn+1=$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}}$or n+2>n+1 donc $\sqrt{n+2}$> $\sqrt{n+1}$ (car x⟶ $\sqrt{x}$ est croissante)

Et n+1>n

Alors (n+1)$\sqrt{n+2}$ > n$\sqrt{n+1}$

Donc Vn+1<Vn donc (Vn) est décroissante

Alors d'après le critère spécial des séries alternées $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ est convergente

<u>Rappel du critère spécial des séries alternées:</u>

Soit Un=$(-1)^n Vn$

Si:

- (Vn) est décroissante
- $\lim\limits_{+\infty} Vn$=0

Alors la série de terme générale Un est convergente

Soit a , b , c et d des réels **positifs**

Si a <b et c <d

Alors ac <bd

4 points	**Exercice 3 :**
	On considère l'intégrale généralisée suivante : $I = \int_2^{+\infty} \frac{3}{x^2+x-2}dx$.
1	1. Montrer que I est convergente .
1	2. Vérifier que $\forall x \geq 2$, $\frac{3}{x^2+x-2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$.
	3. On pose : $I(\alpha) = \int_2^{\alpha} \frac{3}{x^2+x-2}\,dx$ pour tout $\alpha \geq 2$.
1	a . Montrer que $I(\alpha) = \ln(\alpha-1) - \ln(\alpha+2) + 2\ln(2)$.
1	b. En déduire la valeur de I .

1-Montrer que I est convergente

I= $\int_2^{+\infty} \frac{3}{x^2+x-2} dx$

On sait que $x^2+x-2 \sim x^2$ au voisinage de $+\infty$

Donc $\frac{1}{x^2+x-2} \sim \frac{1}{x^2}$,

Alors $\frac{3}{x^2+x-2} \sim \frac{3}{x^2}$

On a $\int_2^{+\infty} \frac{3}{x^2} dx = 3 \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

Or $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est convergente car c'est une integrale de Riemann $\alpha=2>1$ donc $\int_2^{+\infty} \frac{3}{x^2} dx$ *est convergente*

Et d'après **le critère d'équivalence** I=$\int_2^{+\infty} \frac{3}{x^2+x-2} dx$ est convergente

2-Verifier que $\frac{3}{x^2+x-2} = \frac{\mathbf{1}}{x-\mathbf{1}} - \frac{\mathbf{1}}{x+2}$

On a : $\frac{\mathbf{1}}{x-\mathbf{1}} - \frac{\mathbf{1}}{x+2} = \frac{(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)}$

$=\frac{x+2-x+1}{x^2+2x-x-2}$

$=\frac{3}{x^2+x-2}$

3-a-Montrer que I(α)= ln (α-1)-ln (α+2)+2ln 2

$$I(\alpha)=\int_2^{\alpha}\frac{3}{x^2+x-2}dx=\int_2^{\alpha}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=[\ln|x-1|-\ln|x+2|]_2^{\alpha}=\left[ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right]_2^{\alpha}=\left[ln\frac{x-1}{x+2}\right]_2^{\alpha}=ln\frac{\alpha-1}{\alpha+2}-ln\frac{1}{4}$$

=ln (α-1)- ln (α+2) + ln 4 = ln (α-1)- ln (α+2) + ln 2^2 = ln (α-1)- ln (α+2) +2 ln 2

3-b-

Par définition d'une intégrale généralisée I= $\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$ c'est-à-dire $\int_2^{+\infty}\frac{3}{x^2+x-2}dx=\lim_{\alpha\to+\infty}\int_2^{\alpha}\frac{3}{x^2+x-2}dx$

Donc I= $\lim_{\alpha\to+\infty} ln\frac{\alpha-1}{\alpha+2}-ln\frac{1}{4}$= - $ln\frac{1}{4}$ = 2 ln 2 (car $\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\alpha-1}{\alpha+2}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\alpha}{\alpha}$ =1 et ln 1 = 0)

Ln a –ln b= ln(a/b)
Ln (1/a)= - ln a
Ln $(a^n)=n\ lna$
$\int\frac{1}{x+a}$=ln |x+a|

8 points	**Exercice 4 :**
	On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par :
	$f(x,y)=(4x-2y,x+y)$
	Soit $\mathscr{B}=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
	(on rappelle que $e_1=(1,0)$ et $e_2=(0,1)$).
1	1. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
1	2. Montrer que le polynôme caractéristique de A est : $P_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3)$.
0.5	3. En déduire les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A où $\lambda_1 < \lambda_2$.
	4. Soit $\mathscr{B}'=(u,v)$ où $u=(1,1)$ et $v=(2,1)$.
0.5	a. Etablir que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
1	b. Vérifier que u et v sont des vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2 .
1	5. Donner la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et vérifier que $P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
1	6. Déterminer la matrice diagonale D vérifiant $A=PDP^{-1}$.
1	7. a. Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $A^n=PD^nP^{-1}$.
1	b. Calculer A^n en fonction de n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1-Montrer que la matrice de f dans la base B est A=(f,Bc) $=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$l'application\ f : \begin{matrix} R^2 \rightarrow & R^2 \\ (x,y) \rightarrow (4x-2y, x+y) \end{matrix}$$

f(e1)=f(1,0)= $(4\times 1-2\times 0\,,1+0)$ =(4,1)

f(e2)=f(0,1)= $(4\times 0-2\times 1\,,0+1)$ =$(-2,1)$

A=mat(f, Bc)=$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2-Montrer que le polynôme caractéristique de A est $P(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3)$

On a $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$P(\lambda)=\mathrm{Det}(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)(1-\lambda)-1\times(-2)$

$= 4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6$

$\Delta=(-5)^2-4.(6)=1=1^2$

$\lambda 1=\frac{5-1}{2}=2$ et $\lambda 2=\frac{5+1}{2}=3$

Donc $P(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3)$

Si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Alors Det A=ad-bc

$P(X)=aX^2+bX+c$

Si α et β deux racines de P alors

$P(X)=(X-\alpha)(X-\beta)$

3-En déduire les valeurs propres

$P(\lambda)=0$ donc $(\lambda-2)(\lambda-3)=0$ alors $\lambda-2=0$ ou $\lambda-3=0$

Donc $\lambda=2$ ou $\lambda=3$ Alors les valeurs propres sont $\lambda 1=2$ et $\lambda 2=3$

4-a Etablir que B’=(u,v) est une base tel que u=(1,1) et v=(2,1):

On a Card B’=dim R^2 =2; donc montrer que B’ est base reviens a montrer que B est libre.

Det (u,v)= $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 1 – 2

= - 1≠ 0 alors B’ est libre alors elle est base

4-b-Verifier que u et v sont les vecteurs propres de f

u=(1, 1)	**v=(2 ,1)**
Pour vérifier que u est vecteur propre associé à la valeur propre λ1=2 il suffit de vérifier que A u = λ1 u On a A.u= $\begin{pmatrix}4 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \lambda 1\ u$ Donc u est vecteur propre associé à la valeur propre λ1	Pour vérifier que v est vecteur propre associé à la valeur propre λ2=3 il suffit de vérifier que A v = λ2 v On a A.u= $\begin{pmatrix}4 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \lambda 2\ v$ Donc v est vecteur propre associé à la valeur propre λ2

5-Donner la matrice de passage de B à B' et montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

On a la matrice A admet 2 vecteurs propres u=(1,1) et v=(2,1) Donc la matrice de passage est

P= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcul de P^{-1} : méthode de déterminant

$P^{-1} = \frac{1}{\det p}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et det P= 1-2 = -1

$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Soit A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée de taille 2×2. Si det(A)=ad-bc≠0 alors A est inversible et

on a : $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

6 –Déterminer la matrice diagonal D tel que A=PD P^{-1}

On a A est diagobalisable et admet 2 valeurs propres 2 et 3 donc D= $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

7-a –Montrer par récurrence que A^n = P D^n P^{-1}

Pour n=0 on a A^0 = P D^0 P^{-1} , vrai car D^0 =I et P P^{-1}=I
Supposons que A^{n} = P D^{n} P^{-1} et montrons que $A^{\mathrm{n+1}}$ = P $D^{\mathrm{n+1}}$ P^{-1}

On a $A^{\mathrm{n+1}} = A^{\mathrm{n}} \times A$ et on a d'après l'hypothèse de récurrence que A^{n} = P D^{n} P^{-1}
Donc $A^{\mathrm{n+1}}$ = P D^{n} P^{-1} $\times A$ avec A=P D P^{-1}

Alors $A^{\mathrm{n+1}}$ = P D^{n} P^{-1} P D P^{-1} or $P^{-1}P$=I

Donc $A^{\mathrm{n+1}}$ = P D^{n} D P^{-1} = P $D^{\mathrm{n+1}}$ P^{-1}

Donc pour tout entier naturel n on a A^{n} = P D^{n} P^{-1}

7-b-Calculer A^n

$$A^n = \mathrm{P}\, D^n\, P^{-1}$$

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{P}\, D^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2^n & 2.3^n \\ 2^n & 3^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{P}\, D^n\, P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 2.3^n \\ 2^n & 3^n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2^n + 2.3^n & 2^{n+1} - 2.3^n \\ -2^n + 3^n & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}$$