Examen d'obtention du Brevet de Technicien Supérieur
Session Mai 2014

Filières:	**DSI – SRI - MCW**	**Durée:**	**2** Heures
Épreuve:	**MATHÉMATIQUES**	**Coefficient:**	**15**

6 points **Exercice 1:**

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

0,5 1.a- Calculer les valeurs propres de A .

1 b- Déterminer une base de vecteurs propres de A .

1,5 2. En déduire qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$, calculer P^{-1} .

1,5 3. Exprimer, pour tout entier naturel n , A^n sous forme de tableau matriciel.

4. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 7\,u_n + 2\,v_n \\ v_{n+1} = -4\,u_n + v_n \end{cases}$$

0,5 a- On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et de X_n .

1 b- En déduire l'expression, pour tout entier naturel n , de u_n et de v_n en fonction de n .

6 points **Exercice 2 :**

Considérons la série numérique $\sum_{n\geq 2} u_n$ avec, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \quad \text{et } \alpha > 0$$

1 — 1. a- Donner un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

0,5 — b- Montrer que $\sum_{n\geq 2} u_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 2$.

2. Supposons que $\alpha = 1$.

1,5 — a- Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

0,5 — b- Établir que $\sum_{n\geq 2} \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}}$ est une série convergente. (justifier votre réponse)

0,5 — c- Quelle est la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$? (justifier votre réponse)

0,5 — d- En déduire la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 2} u_n$.

1,5 — 3. Étudier la convergence de la série numérique : $\sum_{n\geq 2} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + (-1)^n}}$.

3 points **Exercice 3 :**

1+1 — 1. Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes, calculer leurs valeurs :

$$A = \int_0^{+\infty} x\, e^{-\frac{x}{2}}\, dx$$

$$B = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\, dx \qquad \text{(On peut poser : } t = \sqrt{x} \text{)}$$

1 — 2. Déterminer la nature de l'intégrale suivante : $C = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(x+1)}\, dx$.

5 points **Exercice 4 :**

On admet que la probabilité qu'un voyageur oublie ses bagages dans le train est $0,005$.

Un train transporte 850 voyageurs.

On admettra que ces voyageurs se sont regroupés au hasard et que leurs comportements, par rapport à leurs bagages, sont **indépendants** les uns des autres.

On désigne par X la variable aléatoire réelle qui prend pour valeur **le nombre de voyageurs** ayant oublié leurs bagages dans le train.

1 1. a- Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?

1 b- Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .

1 2. Montrer que la loi de probabilité de X peut être approchée par une loi de Poisson . dont on déterminera son paramètre λ .

3. En utilisant cette loi approchée, calculer la probabilité des événements suivants :

1 a- Aucun voyageur n'a oublié ses bagages.

1 b- Cinq voyageurs au moins ont oublié leurs bagages.

Fin de l'épreuve