Correction de l’examen national 2015

DSI-SRI-MCW

Présenté par: Mme. BENAZZOU Salma

4 points	Exercice 1 :
	On se propose d'étudier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,dt$.
1 pt	1. Soit $x \in]0,1]$, exprimer , en fonction de x , l'intégrale suivante $\int_x^1 \ln(t)dt$. *On pourra utiliser une intégration par parties.* En déduire la valeur de $\int_0^1 \ln(t)dt$.
1 pt	2. Vérifier que : $\frac{\ln(t)}{t^2+1} \underset{0^+}{\sim} \ln(\mathrm{t})$. Puis donner la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,dt$.
1 pt	3. Calculer : $\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{3}{2}} \frac{\ln(t)}{t^2+1}$. En déduire que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,dt$ est convergente.
1 pt	4. Quelle est alors la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,dt$?

1-Calculer $\int_x^1 \ln t \, dt$ puis $\int_0^1 \ln t \, dt$

Soit x∈]0,1]

Calculons $\int_x^1 \ln t \, dt$ (Intégration par parties ALPES)

U=ln t U'= $\frac{1}{t}$

V'= 1 V=t

$\int_x^1 \ln t \, dt = [t \ ln \ t]_x^1 - \int_x^1 \frac{1}{t} \, .t \ dt = [tln \ t - t]_x^1 = -1 - x \ ln \ x + x$

$\int_0^1 \ln t \, dt = \lim_{x \to 0} \int_x^1 \ln t \, dt = \lim_{x \to 0} -1 - x \ ln \ x + x = -1$

2-Verifier que $\frac{\ln t}{t^2+1} \sim \ln t$ au voisinage de 0

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\ln t}{t^2+1}}{\ln t} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln t}{t^2+1}\times\frac{1}{\ln t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2+1} = 1$$

Alors $\frac{\ln t}{t^2+1} \sim \ln t$ au voisinage de 0

- Nature de $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$

On a $\left|\frac{\ln t}{t^2+1}\right| \sim |\ln t|$ et $|\ln t| = -\ln t$

Or $\int_0^1 |\ln t|\,dt = -\int_0^1 \ln t\,dt = 1$ donc $\int_0^1 |\ln t|\,dt$ est convergente alors d'après le **critère d'équivalence** $\int_0^1 \left|\frac{\ln t}{t^2+1}\right| dt$ est convergente c'est-à-dire $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$ est absolument convergente donc elle est convergente

- **Attention: Les critères de convergence sont utilisés si et seulement si la fonction est positive.**
- **A retenir: La fonction ln est définie sur]0,+∞[, elle est négative sur]0,1] et positive sur [1,+∞[**
- **|x|=x si x positif**
- **|x|= - x si x négatif**

3-Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{3/2}\frac{\ln t}{t^2+1}$ puis déduire que $\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ est convergente

$$\lim_{t\to+\infty} t^{3/2}\frac{\ln t}{t^2+1} = \lim_{t\to+\infty} t^{3/2}\frac{\ln t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} t^{\frac{3}{2}-2}\ln t = \lim_{t\to+\infty} t^{-\frac{1}{2}}\ln t = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{\sqrt{t}} = 0$$

Or $\alpha=3/2>1$ donc d'après le critère de Riemann $\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ est convergente

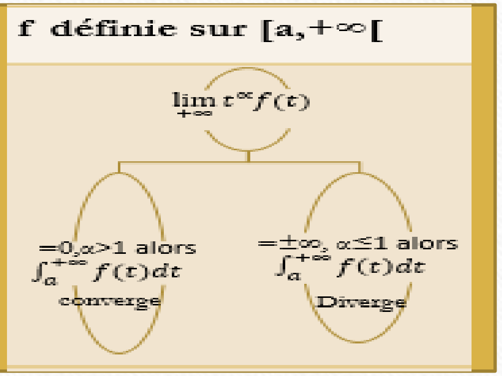
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t^{\alpha}} = 0$$

<u>Rappel du critère de Riemann au voisinage de + ∞:</u>

L'objectif est de savoir la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$



4-Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$

$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt = \int_0^{1} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$

Or $\int_0^{1} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$ est convergente (d'après la question 2)

Et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$ est convergente (d'après la question 3)

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$ est convergente

6 points	Exercice 2 :
1 pt	1. Etudier la nature de la série : $\sum_{n\geq 1}\frac{n^2+n}{2^n}$. *On pourra utiliser La règle de D'Alembert.*
1 pt	2. Etudier la nature de la série : $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2n}{3n+\ln(n)}\right)^n$ *On pourra utiliser le critère de Cauchy*
1 pt	3. a- Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction : $t\to\ln(1+t)$.
0,5 pt	b- Montrer que $\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est équivalent à $\frac{1}{2n^2}$ au voisinage de $+\infty$.
0,5 pt	c- En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.
0,5 pt	4. a- Vérifier que $\frac{\ln n}{n}\geq\frac{1}{n}$ pour tout $n\geq 3$. en déduire la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 3}\frac{\ln(n)}{n}$.

1,5 pt	b-Vérifier que la fonction $t\mapsto\frac{\ln(t)}{t}$ est décroissante sur l'intervalle $[3,+\infty[$. En déduire la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 3}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$.

National 2015:

1-La nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+n}{2^n}$

Je pose Un= $\frac{n^2+n}{2^n}$

$$\frac{Un+1}{Un} = \frac{\frac{(n+1)^2+n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n^2+n}{2^n}} = \frac{(n+1)^2+n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2+n} = \frac{(n+1)^2+n+1}{2^n\times 2} \cdot \frac{2^n}{n^2+n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)^2+n+1}{n^2+n}$$

$$\lim_{+\infty} \frac{Un+1}{Un} = \lim_{+\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)^2+n+1}{n^2+n} = \lim_{+\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2}{n^2} = \frac{1}{2} < 1$$

Alors d'après le critère de D'Alembert la série de terme générale Un est convergente.

2-La nature de $\sum_{n\geq 1}(\frac{2n}{3n+\ln n})^n$

Je pose Un= $(\frac{2n}{3n+\ln n})^n$

$$\lim_{+\infty} \sqrt[n]{Un}=\lim_{+\infty} \sqrt[n]{(\frac{2n}{3n+\ln n})^n}=\lim_{+\infty} \frac{2n}{3n+\ln n}= \lim_{+\infty} \frac{2n}{n(3+\frac{\ln n}{n})}= \lim_{+\infty} \frac{2}{(3+\frac{\ln n}{n})} = \frac{2}{3} <1$$

Donc d'après le critère de Cauchy ,la série de terme générale Un est convergente

3-a DL2(0) de ln (1+x):

On a : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

B-Montrons que $\frac{1}{n} - ln\ (1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{2n^2}$ au voisinage de $+\infty$

Je pose x= $\frac{1}{n}$

On a : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Alors On a : $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{\frac{1}{n^2}}{2} + o(x^2) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Donc $\frac{1}{n} - ln\ (1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Alors $\frac{1}{n} - ln\ (1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Par la suite $\frac{1}{n} - ln\ (1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{2n^2}$

National 2015:

3-c-La nature de $\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{n} - ln\ (1+\frac{1}{n}))$

On a d'apés la question $3 - b$: $\frac{1}{n} - ln\ (1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{2n^2}$

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann $\alpha=2>1$) alors $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n^2}$ est convergente

Donc d'après le critère d'équivalence $\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{n} - ln\ (1+\frac{1}{n}))$ est convergente

4-a-vérifier que $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ *pour tout* $n \geq 3$. *En déduire la nature de* $\sum_{n\geq 3} \frac{\ln n}{n}$

- On a $n \geq 3$ donc $\ln n \geq \ln 3 \geq 1$ (car x⟶ ln x est croissante)

Donc $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ c'est-à-dire $\frac{1}{n} \leq \frac{\ln n}{n}$

- Or $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est divergente car c'est une série de Riemann α=1 ≤1

Donc d'après le critère de comparaison $\sum_{n\geq 3} \frac{\ln n}{n}$ est divergente

b-vérifier que t⟶ $\frac{\ln t}{t}$ *est decroissante pour tout* $t \geq 3$. *En déduire la nature de* $\sum_{n\geq 3} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

- Je pose f(t)= $\frac{\ln t}{t}$ alors f'(t)= $\frac{(\ln t)'t - \ln t . t'}{t^2} = \frac{\frac{1}{t} t - \ln t}{t^2} = \frac{1 - \ln t}{t^2}$

On a t≥ 3 donc $\ln t \geq \ln 3 \geq 1$ (car x⟶ ln x est croissante) donc $\ln t - 1 \geq 0$ c à d 1-ln t ≤ 0

Alors f'(t) est négatif donc la fonction f est décroissante

- Je pose Un= $(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ et Vn= $\frac{\ln n}{n}$=f(n)

On a $\lim\limits_{+\infty} Vn = \lim\limits_{+\infty} \frac{\ln n}{n}$=0 et la suite (Vn) est décroissante

Alors d'après le critère spéciale des séries alternées , la série de terme général Un est convergente.

6 points	Exercice 3 :
	Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est donnée par : $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$.
1pt	1. Donner le polynôme caractéristique de la matrice A. En déduire les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de la matrice A telles que $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$.
1 pt	2. a- Vérifier que $u_1=(1,0,0)$, $u_2=(1,1,0)$ et $u_3=(3,4,2)$ sont des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3.
0,5 pt	b- Etablir que $\mathscr{B}'=(u_1,u_2,u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
0,5 pt	c- Donner P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
1 pt	d- Montrer que $P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-2&1\\0&2&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$ est la matrice inverse de P.
0,5 pt	3. a- Donner la matrice D de f relativement à la base $\mathscr{B}'$.
0,5 pt	b- Vérifier que $A=PDP^{-1}$
1 pt	c- Calculer A^n en fonction de n.

1- Donner le polynôme caractéristique de A et déduire les valeurs propres

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 2\\ 0 & 0 & 3-\lambda\end{pmatrix}.$$

Soit A une matrice carrée de taille n×n. On distingue deux types des matrices triangulaires :

-Matrices triangulaires supérieurs :

$$A=(a_{i,j})=\begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n}\\ 0 & a_{2,2} & & & a_{2,n}\\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n}\end{pmatrix}$$

A est triangulaire supérieure si et seulement si :

$$\forall i>j,\quad a_{i,j}=0$$

-Matrices triangulaires inférieurs :

$$A=(a_{i,j})=\begin{pmatrix}a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & 0\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}$$

A est triangulaire inférieure si et seulement si :

$$\forall i<j,\quad a_{i,j}=0.$$

$$\begin{pmatrix}5 & 0\\ 3 & 11\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 3 & 0\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

C’est une matrice triangulaire , son déterminant est le produit des éléments diagonaux

Det(A-λI)=(1-λ)(2-λ)(3-λ)

-Déterminer les valeurs propres :

$P(\lambda)=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$

$P(\lambda)=0$ alors $(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$

donc ($1- \lambda =0$ ou $2- \lambda =0$ ou $3- \lambda =0$)

alors ($\lambda = 1$ ou $\lambda =2$ ou $\lambda =3$)

Alors les valeurs propres de A sont:

$\lambda 1=1$

$\lambda 2=2$

$\lambda 3=3$

2-a-Les vecteurs propres

U1=(1,0 , 0)	**U2=(1 , 1 , 0)**	**U3=(3 , 4 , 2)**
Montrons que A.U1=λ1.U1 $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=1.\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $=\lambda1.U1$ Donc U1 est le vecteur propre associé à la valeur propre λ1	Montrons que A.U2=λ2.U2 $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}=2.\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $=\lambda2.U2$ Donc U2 est le vecteur propre associé à la valeur propre λ2	Montrons que A.U3=λ3.U3 $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}9\\12\\6\end{pmatrix}=3.\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$ $=\lambda3.U3$ Donc U3 est le vecteur propre associé à la valeur propre λ3

2-b-Etablir que B’=(U1,U2,U3) est une base :

On a Card B’=dim $\mathbb{R}^3$ =3; donc montrer que B’ est base reviens a montrer que B est libre.

Det (U1,U2,U3)= $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ = 1.1.2 =2 $\neq$ 0 alors B’ est libre alors elle est base

2-c- Donner la matrice de passage

On a

U1=(1,0 , 0)

U2=(1 , 1 , 0)

U3=(3 , 4 , 2)

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2-d--Montrer que $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcul de P^{-1} *par la méthode de gauss*

On a : $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$ (1/2)L3

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$ L1-3L3 L2-4L3

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$ L1-L2

Alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3-a-Donner la matrice D

D=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b- Verifier que $A \quad = \text{P } D \quad P^{-1}$

P $D \quad P^{-1} =$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A$$

3-c<u>En déduire A^n *en fonction de n*</u>

On a D=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ alors $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

A^n = P D^n P^{-1}

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^{n+1} \\ 0 & 2^n & 4.3^n \\ 0 & 0 & 2.3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 & \frac{1}{2} - 2^{n+1} + \frac{1}{2}3^{n+1} \\ 0 & 2^n & -2^{n+1} + 2.3^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$