Correction national 2014

DSI-SRI-MCW

Présenté par: Mme. BENAZZOU Salma

6 points	**<u>Exercice 1:</u>**
	On considère la matrice : $$A=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$
0,5	1.a- Calculer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A telles que $\lambda_1<\lambda_2$.
1	b- Déterminer la base $B=(u_1,u_2)$ de vecteurs propres de A ,avec : $u_1(1,\bullet)$ et $u_2(\bullet,1)$
1,5	2. En déduire qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A=PDP^{-1}$, calculer P^{-1} .
1,5	3. Exprimer, pour tout entier naturel n , A^n sous forme de tableau matriciel.
	4. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par : $$\begin{cases} u_0=1 \\ v_0=1 \end{cases} \text{ et pour tout entier naturel } n, \begin{cases} u_{n+1}= 7u_n+2v_n \\ v_{n+1}=-4u_n+v_n \end{cases}$$
0,5	a- On note $X_n=\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et de X_n .
1	b- En déduire l'expression, pour tout entier naturel n , de u_n et de v_n en fonction de n .

1-a-Calculer les valeurs propres de A

On a $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

$P(\lambda)=Det(A- \lambda I)=\begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(7-\lambda)(1-\lambda)-2\times(-4)$

$= 7-7\lambda-\lambda+\lambda^2+8=\lambda^2-8\lambda+15$

$\Delta=(-8)^2-4.(15)=4=2^2$

$\lambda 1=\frac{8-2}{2}=3$ et $\lambda 2=\frac{8+2}{2}=5$

Alors les valeurs propres sont 3 e et 5

Si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Alors Det A=ad-bc

$P(X)=aX^2+bX+c$

Si α et β deux racines de P alors

$P(X)=(X-\alpha)(X-\beta)$

b-Déterminer la base B=(u1,u2) de vecteurs propres tel que u1=(1, .) et u2=(. ,1)

u1=(1, x)	**u2=(y ,1)**
On a u1 est vecteur propre associé à la valeur propre λ1	On a u2 est vecteur propre associé à la valeur propre λ2
donc A u1 = λ1 u1	donc A u2 = λ2 u2
Alors $\begin{pmatrix}7 & 2\\ -4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\ x\end{pmatrix}$	Alors $\begin{pmatrix}7 & 2\\ -4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ 1\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}y\\ 1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1\\ x\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}y\\ 1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}7 & 2\\ -4 & 1\end{pmatrix}$ $=3\begin{pmatrix}1\\ x\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7 & 2\\ -4 & 1\end{pmatrix}$ $=5\begin{pmatrix}y\\ 1\end{pmatrix}$
Donc $\begin{pmatrix}7+2x\\ -4+x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 3x\end{pmatrix}$	Donc $\begin{pmatrix}7y+2\\ -4y+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5y\\ 5\end{pmatrix}$
Alors $\begin{cases}7+2x=3\\ -4+x=3x\end{cases}$ Donc $\begin{cases}2x=3-7=-4\\ -4+x=3x\end{cases}$	Alors $\begin{cases}7y+2=5y\\ -4y+1=5\end{cases}$ Donc $\begin{cases}7y+2=5y\\ -4y=4\end{cases}$
Alors $\begin{cases}x=-2\\ -4+(-2)=3(-2)(verifiée)\end{cases}$	Alors $\begin{cases}7(-1)+2=5(-1)(Vérifiée)\\ y=-1\end{cases}$
Alors *u1=(1, -2)*	Alors *u2=(-1, 1)*

2-En déduire qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D tel que A=PD P^{-1}. Calculer P^{-1}

L'application linéaire ou endomorphisme f

Bc

B={vecteurs propres}??

A=mat(f,Bc)

D=mat(f,B)

A=PD P^{-1}

$$D=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ ou } D=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

- On dit qu'un endomorphisme f de R^n ou une matrice A est diagonalisable s'il existe une base de R^n dans laquelle la matrice de f est diagonale.
- Les colonnes de la matrice de passage sont exactement les vecteurs propres
- Les éléments de la diagonale de D sont les valeurs propres

2-En déduire qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D tel que A=PD P^{-1}. CalculerP^{-1}

La matrice A admet 2 valeurs propres distincts dans R² donc A et diagonalisable et on a

P= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ D=$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Tel que A=PD P^{-1} ou D= P^{-1} AP

Si A=PD P^{-1}

Alors P^{-1} AP = P^{-1} PD P^{-1} P

P^{-1} AP = D (Car P^{-1} P=I)

Calcul de P^{-1} : méthode de déterminant

$P^{-1} = \frac{1}{\det p}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et det P= 1-2 = -1

$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Soit A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée de taille 2×2. Si det(A)=ad-bc≠0 alors A est inversible et

on a : $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

- On dit qu'un endomorphisme f de R^n ou une matrice A est diagonalisable s'il existe une base de R^n dans laquelle la matrice de f est diagonale.
- Les colonnes de la matrice de passage sont exactement les vecteurs propres
- Les éléments de la diagonale de D sont les valeurs propres

3 –Calculer A^n

On a A=PD P^{-1}

A^n = P D^n P^{-1}

$D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

P $D^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 3^n & -5^n \\ -2.3^n & 5^n \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

P D^n $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3^n & -5^n \\ -2.3^n & 5^n \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} -3^n + 2.5^n & -3^n + 5^n \\ 2.3^n - 2.5^n & 2.3^n - 5^n \end{pmatrix}$

4 –a-Exprimer X_{n+1} en fonction de A et de X_n

Le système est : $\begin{cases} U_{n+1} = 7Un + 2Vn \\ V_{n+1} = -4Un + Vn \end{cases}$

Avec Xn=$\begin{pmatrix} Un \\ Vn \end{pmatrix}$ et X0=$\begin{pmatrix} U0 \\ V0 \end{pmatrix}$ =$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

La forme matricielle associé au système est :

$$\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Un \\ Vn \end{pmatrix}$$

Alors Xn+1 =A. Xn

$$\begin{pmatrix} Un \\ Vn \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

b- Déduire l'expression de Un et Vn en fonction de n

Tout d'abord montrer que Xn=A^nXo (Démonstration par récurrence)

- Pour n=0 on a X0= A^0Xo (c'est vrai par A^0=I)
- Supposons que Xn=A^nXo et montrons que Xn+1=A^{n+1}Xo

D'après la question précédente on a X_{n+1}=A. Xn
Et d'après l'hypothèse de récurrence, on a Xn=A^nXo
Alors X_{n+1}=A. A^nXo = A^{n+1}Xo
Alors pour tout entier n on a Xn=A^nXo

Donc $\begin{pmatrix} Un \\ Vn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3^n + 2.5^n & -3^n + 5^n \\ 2.3^n - 2.5^n & 2.3^n - 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3^n + 2.5^n + (-3^n) + 5^n \\ 2.3^n - 2.5^n + 2.3^n - 5^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.3^n + 3.5^n \\ 4.3^n - 3.5^n \end{pmatrix}$

Donc Un = $-2.3^n + 3.5^n$ et Vn= $4.3^n - 3.5^n$

-Montrer que Xn+1 =A. Xn
-Montrer que Xn=A^nXo
-Trouver Xn

National 2014:

6 points	**Exercice 2 :**
	Considérons la série numérique $\sum_{n\geq 2} u_n$ avec, pour tout entier naturel n : $$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \text{ et } \alpha > 0$$
1	1. a- Donner un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
0,5	b- Montrer que $\sum_{n\geq 2} u_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 2$.
	2. Supposons que $\alpha = 1$.
1,5	a- Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a : $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.
0,5	b- Établir que $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}}$ est une série convergente. (justifier votre réponse)
0,5	c- Quelle est la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ (justifier votre réponse).
0,5	d- En déduire la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 2} u_n$.
1,5	3. Étudier la convergence de la série numérique : $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + (-1)^n}}$.

National 2014:

1-a-Donner un équivalent simple de Un au voisinage de $+\infty$

On a $U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\propto+(-1)^n}}$

Au voisinage de $+\infty$ on a : $n^\propto + (-1)^n \sim n^\propto$ donc $\sqrt{n^\propto + (-1)^n} \sim \sqrt{n^\propto}$

C'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt{n^\propto+(-1)^n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n^\propto}}$ par la suite $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\propto+(-1)^n}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\propto}}$

b-Montrons que $\sum_{n\geq 2} Un\ absolument\ convergente \Leftrightarrow \alpha > 2$

On a $Un \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\propto}}$

En passant à la valeur absolue $|Un| \sim \frac{1}{\sqrt{n^\propto}}$

$$\sum_{n\geq 2} Un\ absolument\ convergente \Leftrightarrow \sum_{n\geq 2} |Un|\ convergente$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n^\propto}}\ \ convergente\ (D'aprés\ le\ critére\ d'equivalence)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\frac{\propto}{2}}}\ \ convergente$$

$\Leftrightarrow \frac{\propto}{2} > 1$ (Serie de Riemann) $\Leftrightarrow \propto > 2$

MATH

2-a Pour α=1 on a :$U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$

Montrons qu'au voisinage de +∞ on a : $U_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$

On a $U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(1+\frac{(-1)^n}{n})}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}}$

On pose x= $\frac{(-1)^n}{n}$ (lorsque n tend vers +∞ alors x tend vers 0)

$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

On a $(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha\, x + o(x)$ et pour α=1/2 on a $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$

$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}x+ o(x)} = \frac{1}{1+U}$ avec U= $\frac{1}{2}x + o(x)$

Or $\frac{1}{1+U}$ $=1 - U + o(U)$ donc $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}x+ o(x)} = 1 - \frac{1}{2}x + o(x)$

Donc $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}} = 1 - \frac{(-1)^n}{2n} + o\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ alors $U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{2n} + o\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\right)$

D'où le résultat: $U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$

$n\sqrt{n}$=n. $n^{\frac{1}{2}} = n^{1+\frac{1}{2}} = n^{\frac{3}{2}}$

$(-1)^n . (-1)^n = (-1)^{2n} = 1$

$(-1)^n$=1 si n est pair
$(-1)^n$= -1 si n est impair

Montrons qu'au voisinage de $+\infty$ on a : $U_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$

Si n est pair	Si n est impair
$U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$	$U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \frac{-1}{\sqrt{n-1}}$
Je pose $x=\frac{1}{n}$(lorsque n tend vers $+\infty$,x tend vers 0)	Je pose $x=\frac{1}{n}$(lorsque n tend vers $+\infty$,x tend vers 0)
$U_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{x}\times\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$U_n=\frac{-1}{\sqrt{n-1}}=\frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{x}-1}}=\frac{-1}{\sqrt{\frac{1-x}{x}}}=\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}=-\sqrt{x}\times\frac{1}{\sqrt{1-x}}$
$\sqrt{1+x}= 1+\frac{1}{2}x+o(x)$	$\sqrt{1-x}= 1-\frac{1}{2}x+o(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}x+\ o(x)}=\frac{1}{1+U}$ avec U= $\frac{1}{2}x+\ o(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}x+\ o(x)}=\frac{1}{1+U}$ avec U= $-\frac{1}{2}x+\ o(x)$
Or $\frac{1}{1+U}$ $=1-U+o(U)$	Or $\frac{1}{1+U}$ $=1-U+o(U)$
donc $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}x+\ o(x)}= 1-\frac{1}{2}x+o(x)$	donc $\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}x+\ o(x)}= 1+\frac{1}{2}x+o(x)$
$\sqrt{x}\times\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{x}\times(1-\frac{1}{2}x+o(x))=\sqrt{x}-\frac{1}{2}x\sqrt{x}+o(x\sqrt{x})$	$-\sqrt{x}\times\frac{1}{\sqrt{1-x}}=-\sqrt{x}\times(1+\frac{1}{2}x+o(x))=-\sqrt{x}-\frac{1}{2}x\sqrt{x}+o(x\sqrt{x})$
Donc $U_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$	Donc $U_n = \frac{-1}{n^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$

National 2014:

2-b-La nature de $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}}$

Je pose Un= $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=(-1)^n\times\frac{1}{\sqrt{n}}$et Vn= $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .On a $\lim\limits_{+\infty} Vn=\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$

- On a Vn+1= $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ or n+1>n donc $\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$ (car x⟶ $\sqrt{x}$ est croissante)
- Donc $\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$ c'est-à-dire Vn+1<Vn donc (Vn) est décroissante

Alors d'après le critère spécial des séries alternées $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente

c-La nature de $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

C'est une série de Riemann avec $\alpha=\frac{3}{2}$ >1 alors elle est convergente d- La nature de $\sum_{n\geq 2} Un$

On a :$U_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$

$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente

$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente

$o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ est une suite négligeable devant $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ donc elle converge (Vn= $o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ donc lim $\frac{Vn}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}$=0)

alors $\sum_{n\geq 2} Un$ est convergente

4- La convergence de la série $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+(-1)^n}}$

Je pose $Un=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+(-1)^n}}=(-1)^n\times\frac{1}{\sqrt{n^2+(-1)^n}}$ et $Vn=\frac{1}{\sqrt{n^2+(-1)^n}}$. On a $\lim_{+\infty} Vn=\lim_{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+(-1)^n}}\ =0$

n pair	n impair
$Vn=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ et $Vn+1=\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}}$ • or n+1>n donc $(n+1)^2>n^2$ (car $x\to x^2$ est croissante) • $(n+1)^2+1>n^2+1$ • donc $\sqrt{(n+1)^2+1}>\sqrt{n^2+1}$ (car $x\to\sqrt{x}$ est croissante) Donc Vn+1<Vn donc (Vn) est décroissante Alors d'après le critère spécial des séries alternées $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ est convergente	$Vn=\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ et $Vn+1=\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2-1}}$ • or n+1>n donc $(n+1)^2>n^2$ (car $x\to x^2$ est croissante) • $(n+1)^2-1>n^2-1$ • donc $\sqrt{(n+1)^2-1}>\sqrt{n^2-1}$ (car $x\to\sqrt{x}$ est croissante) Donc Vn+1<Vn donc (Vn) est décroissante Alors d'après le critère spécial des séries alternées $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-1}}$ est convergente

MATH

National 2014

3 points	**<u>Exercice 3 :</u>**
1+1	1. Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes, calculer leurs valeurs :
	$A = \int_0^{+\infty} x\, e^{-\frac{x}{2}}\, dx$
	$B = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\, dx$ (On peut poser : $t = \sqrt{x}$)
1	2. Déterminer la nature de l'intégrale suivante : $C = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(x+1)}\, dx$.

1- A=$\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x}{2}}$

Méthode 1: définition

- La fonction x⟶ $xe^{-\frac{x}{2}}$ est définie sur [0, + ∞ [
- Soit t∈ [0, + ∞ [
- Calculons $\int_0^t xe^{-\frac{x}{2}}$ (intégration par partie: technique ALPES)

U=x U'=1

V'= $e^{-\frac{x}{2}}$ V=$\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{1}{2}}$= -2 $e^{-\frac{x}{2}}$

$\int_0^t xe^{-\frac{x}{2}}=[-2xe^{-\frac{x}{2}}]_0^t +2\int_0^t e^{-\frac{x}{2}} = [-2xe^{-\frac{x}{2}} - 4e^{-\frac{x}{2}}]_0^t = -2te^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}}+4$

A=$\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x}{2}} = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t xe^{-\frac{x}{2}} = \lim_{t\to+\infty} -2te^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}}+4 = 4$

Alors A est convergente

Méthode 2:Critére de convergence

Je pose f(x)= $xe^{-\frac{x}{2}}$, On sait que $\lim_{x\to+\infty} x^2f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2xe^{-\frac{x}{2}} = \lim_{x\to+\infty} x^3e^{-\frac{x}{2}} = 0$

Alors d'après le **critère de Riemann** α=2>1 donc A est convergente

$$\int e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^{\propto}e^{x} = 0$$

$\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-\frac{x}{2}} = 0$??

Je pose t= $-\frac{x}{2}$

Alors x=- 2t

$\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-\frac{x}{2}} =$

$\lim_{t\to-\infty} -8t^3e^{t}$

=0

B=$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx$

je pose t=$\sqrt{x}$ donc x=t²

dx = 2t dt

x =0 alors t=0

x = $+\infty$ alors t = $+\infty$

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx$ =$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)t}$ 2t dt =2$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)}$ dt

Calculons $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)}$ dt

On a $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)}$ dt = $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_0^{a} \frac{1}{(t^2+1)}$ dt

$\int_0^{a} \frac{1}{(t^2+1)}$ dt =$[\arctan t]_0^a$=($\arctan a$ $-$arctan 0)= arctan a

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)}$ dt $=$ $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_0^{a} \frac{1}{(t^2+1)}$ dt= $\lim\limits_{a\to+\infty}$ $\arctan a = \frac{\pi}{2}$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx$ =2$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)}$ dt =2. $\frac{\pi}{2} = \pi$

2- La nature de C=$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)}dx$

On a x⟶ $\frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$ est définie sur]0,1]

On sait qu'au voisinage de 0 on a ln(1+x) ~x

Alors $\frac{1}{\ln(1+x)} \sim \frac{1}{x}$ donc $\frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \sim \frac{\sqrt{x}}{x}$ c'est-à-dire $\frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$

Or $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ est convergente (car c'est une intégrale de Riemann α=1/2<1

Donc d'après le **critère d'équivalence** l'intégrale C est convergente