Filières:	**DSI – SRI - MCW**	**Durée:**	**2** Heures
Épreuve:	**MATHÉMATIQUES**	**Coefficient:**	**15**

4 points **Exercice 1 :**

On se propose d'étudier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,dt$:

1 pt 1. Pour $x \in \left]0,1\right]$, calculer l'intégrale $\int_x^1 \ln(t)dt$.

On pourra utiliser une intégration par parties.

En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^1 \ln(t)dt$.

1 pt 2. Vérifier que : $\frac{\ln(t)}{t^2+1} \underset{0^+}{\sim} \ln(\mathrm{t})$.

En déduire la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,dt$.

1 pt 3. Calculer : $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\frac{3}{2}} \frac{\ln(t)}{t^2+1}$.

En déduire la nature de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,dt$.

1 pt 4. En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,dt$ est convergente.

6 points **Exercice 2 :**

1 pt 1. Etudier la nature de la série : $\sum_{n\geq1} \frac{n^2+n}{2^n}$. On pourra utiliser La règle de D'Alembert.

1 pt 2. Etudier la nature de la série : $\sum_{n\geq1} \left(\frac{n}{2n+\ln(n)}\right)^n$. On pourra utiliser le critère de Cauchy .

1 pt 3. a- Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction : $t \to \ln(1+t)$.

0,5 pt b- Montrer que $\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est équivalent en 0 à $\frac{1}{2n^2}$.

0,5 pt c- En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq1}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

0,5 pt 4. a- Vérifier que $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 3$. en déduire la nature de la série numérique $\sum_{n\geq3} \frac{\ln(n)}{n}$.

1,5 pt b-Vérifier que la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ est décroissante sur $[3,+\infty[$.

En déduire la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 3}(-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$.

6 points **Exercice 3 :**

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B=(e_1,e_2,e_3)$ on considère l'endomorphisme f

dont la matrice dans la base B est donnée par : $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$.

1pt 1. Donner le polynôme caractéristique de la matrice A.
En déduire les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de la matrice A telles que $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$.

1 pt 2. a- Vérifier que $u_1=(1,0,0)$, $u_2=(1,1,0)$ et $u_3=(3,4,2)$ sont des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 .

0,5 pt b- Etablir que $B'=(u_1,u_2,u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

0,5 pt c- Donner P la matrice de passage de B à B'.

1 pt d- Montrer que $P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-2&1\\0&2&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$ est la matrice inverse de P .

0,5 pt 3. a- Donner la matrice D de f relativement à la base B'.

0,5 pt b- Vérifier que $A=PDP^{-1}$

1 pt c- Calculer A^n en fonction de n .

4 points **Exercice 4 :** On cherche s'il existe une relation entre la température et le nombre de glaces vendues. Les informations sont données par le tableau suivant :

Température (en Celsius) : x_i	21	17	24	25	13
Nombre de Glaces vendues : y_i	25	20	30	35	10

1 pt 1. Calculer les coordonnées du point moyen G et calculer le coefficient de corrélation linéaire. Peut-on envisager une relation linéaire entre les deux variables x et y .

1 pt 2. Déterminer l'équation de la droite de régression linéaire au sens des moindres carrées de y en x .

1 pt 3. Quel serait alors le nombre de glaces vendues s'il faisait 30 degrés ?

1 pt 4.Pour quelle température vendrait-on 62 glaces ?

Fin de l'épreuve