Correction national 2018

DSI-SRI-MCW

Présenté par: Mme. BENAZZOU Salma

National 2018

4 points	**Exercice 1 :**
	Soit I l'intégrale généralisée définie par : $I=\int_1^{+\infty}\frac{2}{t(t+2)}\,dt$
1	1. a- Donner la nature de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty}\frac{2}{t^2}\,dt$.
	b- Montrer que $\frac{2}{t(t+1)}\underset{+\infty}{\sim}\frac{2}{t^2}$, et en déduire que I est convergente .
1	2. Vérifier que $\forall t\geq 1$, $\frac{2}{t(t+2)}=\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}$.
	3. On pose : $I(x)=\int_1^{x}\frac{2}{t(t+2)}\,dt$ pour tout $x\geq 1$.
1	a- Montrer que $I(x)=\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)+\ln(3)$.
1	b- En déduire la valeur de l'intégrale généralisée I .

1-a-Donner la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2} dt$

On a $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2} dt = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ et

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente car c'est une integrale de Riemann α=2>1 donc $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2} dt$ *est convergente*

b-Montrer que $\frac{2}{t(t+1)} \sim \frac{2}{t^2}$ et déduire que I est convergente

Méthode 1	**Méthode 2**
On a t+1∼ t au voisinage de +∞ Donc t(t+1)∼ t^2 alors $\frac{1}{t(t+1)} \sim \frac{1}{t^2}$, Alors $\frac{2}{t(t+1)} \sim \frac{2}{t^2}$	$\lim\limits_{+\infty} \frac{\frac{2}{t(t+1)}}{\frac{2}{t^2}} = \lim\limits_{+\infty} \frac{2}{t(t+1)} \times \frac{t^2}{2} = \lim\limits_{+\infty} \frac{t^2}{t(t+1)} = \lim\limits_{+\infty} \frac{t^2}{t^2} = 1$ Donc $\frac{2}{t(t+1)} \sim \frac{2}{t^2}$

$\frac{2}{t(t+1)} \sim \frac{2}{t^2}$, or $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2} dt$ est convergente (d'après la question précédente) donc d'après **le critère d'équivalence**

I=$\int_1^{+\infty} \frac{2}{t(t+1)} dt$ est convergente

Ln a –ln b= ln(a/b)

Ln (1/a)= - ln a

$\int \frac{1}{t+a}$=ln |t+a|

2- Soit t≥1, vérifier que $\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}=\frac{2}{t(t+2)}$

On a $\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}=\frac{(t+2)-t}{t(t+2)}=\frac{2}{t(t+2)}$

3-a- Soit x≥1,Montrer que I(x)= $\boldsymbol{ln\frac{x}{x+2}+ln\,3}$

I(x)=$\int_1^x \frac{2}{t(t+1)}dt=\int_1^x(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2})dt=[\ln|t|-\ln|t+2|]_1^x=[\ln|\frac{t}{t+2}|]_1^x=[\ln\frac{t}{t+2}]_1^x=\ln\frac{x}{x+2}-\ln\frac{1}{3}$

$=\ln\frac{x}{x+2}+\ln 3$

3-b-Déduire la valeur de l'intégrale I

Par définition d'une intégrale généralisée I= $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)$ c'est-à-dire $\int_1^{+\infty}\frac{2}{t(t+1)}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{2}{t(t+1)}dt$

Donc I= $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x}{x+2}+\ln 3$ = ln 3 (car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}$ =1 et ln 1 = 0)

<u>Rappel de la méthode de définition pour calculer une intégrale généralisée</u>

- ❑ Si f est définie sur un intervalle [a, b[on écrit: $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{t\to b}\int_a^t f(x)dx$ avec t∈ $[a,b[$
- ❑ Si f est définie sur un intervalle] a, b] on écrit: $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{t\to a}\int_t^b f(x)dx$ avec t∈ $]a,b]$

6 points	**Exercice 2 :**
	Déterminer la nature des séries numériques suivantes :
1	1. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^n}$
1	2. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$
2	3. $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!}$ (On pourra utiliser le critère de D'Alembert)
2	4. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$

National 2018:

1-La nature de $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n}$

Je pose Un= $\frac{1}{3^n}=(\frac{1}{3})^n$ .C'est une série géométrique avec $|\frac{1}{3}|$<1 alors elle est convergente

2-La nature de $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

C'est une série de Riemann avec $\alpha=\frac{3}{2}$ >1 alors elle est convergente

3-La nature de $\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{n!}$

Je pose Un=$\frac{2^n}{n!}$

$\frac{Un+1}{Un}=\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{2^n}=\frac{2.2^n}{(n+1)\times n!}\times\frac{n!}{2^n}=\frac{2}{n+1}$

$\lim\limits_{+\infty}\frac{Un+1}{Un}=\lim\limits_{+\infty}\frac{2}{n+1}=0<1$

Alors d'après le critère de D'Alembert la série de terme générale Un est convergente.

$n!=1\times 2\times 3\times\cdots\ldots.\times n$

$(n+1)!=1\times 2\times 3\times\cdots\ldots.\times n\times(n+1)$

(n+1)!=(n+1).n!

National 2018:

4-La nature de $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}$

Je pose Un= $\frac{(-1)^n}{n+1}$=$(-1)^n\times\frac{1}{n+1}$ et Vn= $\frac{1}{n+1}$

- On a $\lim\limits_{+\infty} Vn$=$\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{n+1}$=0
- On a Vn+1= $\frac{1}{n+2}$ or n+2>n+1

Donc $\frac{1}{n+2}<\frac{1}{n+1}$ c'est-à-dire Vn+1<Vn donc (Vn) est décroissante

Alors d'après le critère spécial des séries alternées $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente

6 points	**Exercice 3 :**

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $B_c = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1 — 1. Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice A est : $P_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6$ et en déduire les valeurs propres de la matrice A.

1 — 2. On considère les vecteurs $\vec{u} = (1, -2)$ et $\vec{v} = (2, 1)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$

a- Montrer que $B = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$

b- Donner P la matrice de passage de B_c à B.

3. Soient les matrices P et D telles que : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

1 — a- Calculer $\det(P)$ puis déterminer P^{-1}.

1 — b- Vérifier que $P\,D\,P^{-1} = A$.

1 — 4. a- Montrer que $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1 — b- Calculer A^n en fonction de n.

1-Montrer que $P(\lambda)=\lambda^2-\lambda-6$ et en déduire les valeurs propres de A

On a $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$P(\lambda)=\mathrm{Det}(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(-1-\lambda)-2\times 2$

$= -2-2\lambda+\lambda+\lambda^2-4=\lambda^2-\lambda-6$

$\Delta=(-1)^2-4.(-6)=25=5^2$

$\lambda 1=\frac{1-5}{2}=-2$ et $\lambda 2=\frac{1+5}{2}=3$

Alors les valeurs propres sont -2 e et 3

Si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Alors Det A=ad-bc

$P(X)=aX^2+bX+c$

Si α et β deux racines de P alors

$P(X)=(X-\alpha)(X-\beta)$

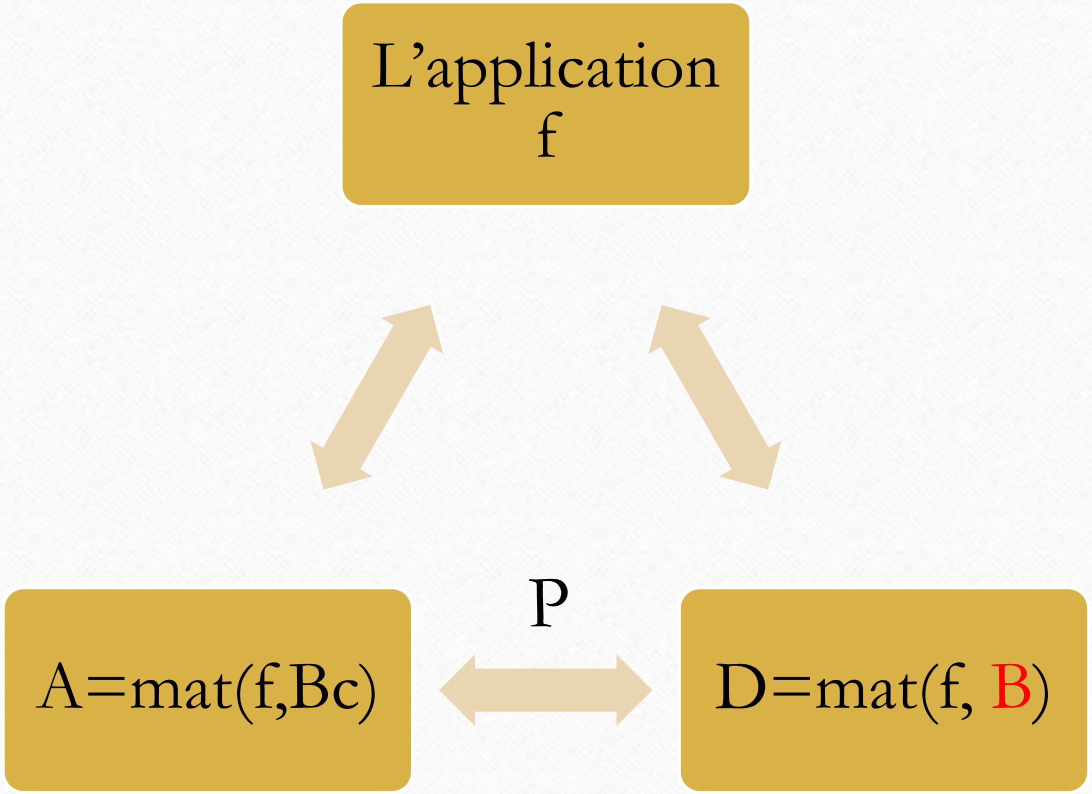
2-a-Montrer que $B=(u,v)$ est une base de R^2 avec $u=(1,-2)$ et $v=(2,1)$

On a card $B=\dim R^2=2$ donc pour montrer que B est base il suffit de montrer qu'elle est libre

On a Det $(u,v)=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1-(-4)=5\neq 0$ alors B est libre donc elle est base

b-la matrice de passage de Bc à B

$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$



3-a-Calculer Det (P) puis déterminer P^{-1}

$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

On a Det (P)=$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$=1-(-4)=5 alors $P^{-1} = \frac{1}{\det P}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

b-Vérifier que A=PDP^{-1}

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P.D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = A$$

4-a-Montrer que A^n = P D^n P^{-1}

On a A=PD P^{-1}

Alors A^n =A.A. ………………………………………..A (n fois)

= PD P^{-1}. PD P^{-1}. PD P^{-1}……………………………… PD P^{-1} (n fois) et P $P^{-1} = I$

Donc A^n = PD.D.D…………………………………………D P^{-1}

A^n = P D^n P^{-1}

b-Calculer A^n

A^n = P D^n P^{-1} et $D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

P $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} (-2)^n & 2.3^n \\ (-2)^{n+1} & 3^n \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

P D^n $P^{-1} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 2.3^n \\ (-2)^{n+1} & 3^n \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{(-2)^n+4.3^n}{5} & \frac{(-2)^{n+1}+2.3^n}{5} \\ \frac{(-2)^{n+1}+2.3^n}{5} & \frac{(-2)^{n+2}+.3^n}{5} \end{pmatrix}$