Chapitre 1: Les intégrales généralisées

Résumé du cours

Présenté par: Mme BENAZZOU Salma

Les objectifs du chapitre

1- Savoir calculer une intégrale généralisée en utilisant la définition ;

2- Connaissance de la nature des intégrales de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ et $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$, avec $\alpha \in R$;

3- Détermination de la nature d'une intégrale généralisée d'une fonction continue et positive en appliquant les critères de convergences :

- Critère de comparaison ;
- Critère d'équivalence ;
- Critère de négligence ;
- Critère de Riemann.

4- Etude de la convergence absolue d'une intégrale généralisée.

Le plan

- Les intégrales généralisées ou impropres
  - Définition
  - Intégrales de Riemann
  - Les critères de la convergence
  - La convergence absolue

- Pour les intégrales simples, on a considéré des fonctions définies sur des intervalles I=[a, b].On peut définir des extensions de ces intégrales pour des fonctions définies sur les intervalles: [a, b[,] a,b] ,] a, b [avec a $\in R \cup \{+\infty, -\infty\} et\ b \in R \cup \{+\infty, -\infty\}$

- Si f est définie sur un intervalle [a, b[on écrit:$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b} \int_a^t f(x)dx$ avec t$\in [\, a, b\, [$
- Si f est définie sur un intervalle] a, b] on écrit:$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a} \int_t^b f(x)dx$ avec t$\in]\, a, b\,]$
- Si la limite est un réel, on dit que l'intégrale **converge** sinon on dit qu'elle **diverge**
- Si f est définie sur un intervalle] a, b [et c un élément quelconque de cet intervalle. On dit que l'intégrale de f sur] a, b [est convergente si chacune des intégrales sur] a, c] et [c ,b [convergent

Exemple:

On veut étudier la convergence de l'intégrale suivante en utilisant la méthode de définition: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$

- La fonction définie par f(x)=1/x est définie sur [1,+∞[
- Soit tϵ[1,+∞[
- On va calculer $\int_1^t \frac{1}{x}$dx

$\int_1^t \frac{1}{x}$dx=$[\ln x]_1^t$ =ln t – ln 1 = ln t

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim\limits_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\mathrm{dx} = \lim\limits_{t\to+\infty} \ln \mathrm{t} = +\infty$
- On dit alors que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ est divergente.

Définition

Intégrales de Riemann

Critères de convergence

Convergence absolue

$\int_a^b f(x)dx$ converge

+

$\int_a^b g(x)dx$ converge

$\int_a^b (\propto f(x) + \beta g(x))dx$ converge

$\int_a^b f(x)dx$ converge

+

$\int_a^b g(x)dx$ diverge

$\int_a^b (\propto f(x) + \beta g(x))dx$ diverge

$\int_a^b f(x)dx$ diverge

+

$\int_a^b g(x)dx$ diverge

On ne peut rien conclure

Soit $\alpha \in R$;

-L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si $\alpha \succ 1$ et diverge sinon.

-L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si $\alpha \prec 1$ et diverge sinon.

Exemples:

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ est convergente car α=3>1
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est divergente car α=1/2≤1
- $\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est convergente car α=1/2<1
- $\int_0^{1} \frac{1}{x^2} dx$ est divergente car α=2≥ 1
- $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx = \int_0^{1} \frac{1}{x^4} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$
  - $\int_0^{1} \frac{1}{x^4} dx$ est divergente car α=4≥ 1
  - $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$ est convergente car α=4>1

Alors $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$ est divergente

ATTENTION: Cette partie ne concerne que les fonctions positives

- Critère de comparaison
- Critère d'équivalence
- Critère de négligence
- Critère de Riemann

Critère de comparaison

Enoncé	**Exemple**
Soit f et g deux fonctions à **valeurs positives** définies sur un intervalle [a, b[tel que $f(x) \leq g(x)$ ✓ Si $\int_a^b g(x)dx$ converge alors $\int_a^b f(x)dx$ converge ✓ Si $\int_a^b f(x)dx$ Diverge alors $\int_a^b g(x)dx$ Diverge	• On veut montrer que $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ est convergente. $\boxed{\int e^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0}$ On a $x \geq 1$ donc $x^2 \geq x$ Alors $-x^2 \leq -x$ Donc $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ (Car $x \longrightarrow e^x$ est croissante) • Etudions maintenant la nature de $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ Par définition on a : $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t e^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty} [-e^{-x}]_1^t = \lim_{t\to+\infty} -e^{-t} + e^{-1} = e^{-1}$ Donc $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ est convergente et d'après le critère de comparaison $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ est convergente.

Critère d'équivalence

Enoncé	Exemple
Soit f et g deux fonctions à **valeurs positives** définies sur un intervalle [a, b[tel que f~g au voisinage de b c'est-à-dire $\lim_{b} \frac{f(x)}{g(x)}=1$, alors $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ sont de même nature.	On veut montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} dt$ est convergente. On sait qu' au voisinage de + ∞ on a : $1+t^2 \sim t^2$ Alors $\sqrt{1+t^2} \sim \sqrt{t^2}$ c'est-à-dire $\sqrt{1+t^2} \sim t$ Donc $t\sqrt{1+t^2} \sim t^2$ Alors $\frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} \sim \frac{1}{t^2}$ Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente car c'est une intégrale de Riemann $\alpha=2>1$ Donc d'après le critère d'équivalence $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} dt$ est convergente

Critère de négligence

Enoncé	Exemple
Soit f et g deux fonctions à **valeurs positives** définies sur un intervalle [a, b[tel que f est négligeable devant g au voisinage de b c'est-à-dire $\lim\limits_{b} \frac{f(x)}{g(x)}=0$. ✓ Si $\int_a^b g(x)dx$ converge alors $\int_a^b f(x)dx$ converge ✓ Si $\int_a^b f(x)dx$ Diverge alors $\int_a^b g(x)dx$ Diverge	On veut montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2 \ln t} dt$ est convergente. On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{t^2 \ln t}}{\frac{1}{t^2}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{\ln t} = 0$ (car $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln t =+\infty$) Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente car c'est une intégrale de Riemann $\alpha=2>1$ Donc d'après le critère de négligence $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2 \ln t} dt$ est convergente.

Critère de Riemann

Enoncé

f définie sur [a,+∞[	f définie sur]a ,b]
$\lim\limits_{+\infty} t^{\propto} f(t)$	$\lim\limits_{a} (t-a)^{\propto} f(t)$
$=0, \alpha>1$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge	$=0, \alpha<1$ alors $\int_a^{b} f(t)dt$ Converge
$=\pm\infty$, $\alpha\leq 1$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ Diverge	$=\pm\infty$, $\alpha\geq 1$ alors $\int_a^{b} f(t)dt$ Diverge

Exemple

f définie sur [a,+∞[	f définie sur]a ,b]
$\int_1^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$ On sait que $\lim\limits_{t\to-\infty} t^{\propto} e^{t} = 0$ Je prend $\propto=2>1$ On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\, x^2 e^{-x} = 0$ Donc $\int_1^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$ est convergente (D'après le critère de Riemann)	$\int_0^{2} \ln x\, dx$ On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x^{\propto} \ln x = 0$ Je prend $\propto=1/2<1$ On a : $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} \ln x = 0$ Et donc $\int_0^{2} \ln x\, dx$ est convergente (D'après le critère de Riemann)

<u>Définition:</u> Soit f une fonction définie sur un intervalle [a, b[. On dit que $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(x)|$ dx est convergente

<u>Critère de convergence absolue</u>: Soit f une fonction définie sur un intervalle [a, b[, s'il existe une fonction g à valeurs positives et définie sur [a ,b[telle que :

- $|f(t)| \leq g(t)$
- $\int_a^b g(t)dt$ converge

Alors $\int_a^b f(t)dt$ converge

Exemple:

On veut montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ est convergente.

On sait que $|\sin t| \leq 1$

Alors $\left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente car c'est une intégrale de Riemann $\alpha=2>1$

Alors d'après le critère de la convergence absolue $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ est convergente

Les intégrales généralisées ou impropres

Définition

Soit f définit sur [a,b[,

-soit $t \in [a,b[$

-je calcule $\int_a^t f(x)\,dx$

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b} \int_a^t f(x)\,dx$

-l'intégrale est convergente si la limite égale à un réel elle est divergente si la limite égale à ∞

-Toute fonction continue est localement intégrable.

Intégrales de Riemann

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$

Converge si $\alpha \succ 1$ et diverge sinon.

$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx$

Converge si $\alpha \prec 1$ et diverge sinon.

Les critères de convergence

Comparaison

$f(x) \leq g(x)$

- $\int_a^b g(t)dt$ converge donc $\int_a^b f(t)dt$ converge

- $\int_a^b f(t)dt$ diverge donc $\int_a^b g(t)dt$ diverge

Equivalence

$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

On a donc $\int_a^b g(t)dt$ et $\int_a^b f(t)dt$ sont de même nature.

Négligence

$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

- $\int_a^b g(t)dt$ Converge donc $\int_a^b f(t)dt$ converge

- $\int_a^b f(t)dt$ diverge donc $\int_a^b g(t)dt$ diverge

Riemann

Appliquer le théorème soit au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage d'un réel a

La convergence absolue

$\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente.

-Le critère de la convergence absolue :

Si $|f(t)| \leq g(t), \forall t \in [a,b[$

et $\int_a^b g(t)dt$ **converge**

Alors $\int_a^b f(t)dt$ **converge**

$\int f$ Converge absolument $\Rightarrow \int f$ convergente. La réciproque est **FAUSSE**