Correction de l’examen national 2017

DSI-SRI-MCW

Présenté par: Mme. BENAZZOU Salma

6 points **Exercice 1 :**

On considère l'équation différentielle suivante : (E): $y'' + y' - 2y = -3e^{-2x}$,

où y est une fonction de la variable réelle x, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit (H): $y'' + y' - 2y = 0$ l'équation homogène associée à (E).

1 — 1. Résoudre l'équation différentielle (H).

1 — 2. Vérifier que la fonction g définie par : $g(x) = xe^{-2x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E)

1 — 3. En déduire la solution générale de (E).

1 — 4. Déterminer la solution f de (E) vérifiant les conditions suivantes :

$$f(0) = -1 \text{ et } f'(0) = 3.$$

5. Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)e^{-2x}$.

1 — a- Montrer que le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0 est :

$$f(x) = -1 + 3x - 4x^2 + o(x^2).$$

1 — b- En déduire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point $A(0,-1)$ et préciser sa position par rapport à (C_f).

National 2017:

1-Résoudre (H): y”+y’-2y=0

L’équation caractéristique associé est : $r^2+r-2=0$

Le discriminant est: $\Delta=1-4(-2)=9=3^2$

Les racines: $r1=\frac{-1-3}{2}=-2$ et $r2=\frac{-1+3}{2}=1$

Alors $yh=Ae^{-2x}+Be^{x}$

National 2017:

2-Verifier que la fonction g définie par g(x)= xe^{-2x} est solution de (E)

On a (E) y''+y'-2y=- 3 e^{-2x}

g(x)= xe^{-2x}

g'(x)= $x'e^{-2x}+x(e^{-2x})' = e^{-2x} - 2\,xe^{-2x}$

g''(x)= $-2e^{-2x} - 2(e^{-2x} - 2\,xe^{-2x}) = -2e^{-2x} - 2e^{-2x} + 4\,xe^{-2x} = -4e^{-2x} + 4\,xe^{-2x}$

g''+g'-2g= $-4e^{-2x} + 4\,xe^{-2x} + e^{-2x} - 2\,xe^{-2x} - 2\,xe^{-2x}$

$= -3e^{-2x}$

3-La solution générale :

yg=yh+yp =yh+ g(x)

$= Ae^{-2x} + Be^{x} + xe^{-2x}$

National 2017:

4-La solution f vérifiant des conditions initiales :

On a la solution générale de (E) est yg= A$e^{-2x}+Be^{x}+xe^{-2x}$

La fonction f est solution de (E) donc f(x)= A$e^{-2x}+Be^{x}+xe^{-2x}$ et f(0)=-1 et f'(0)=3

Et f'(x)= -2A$e^{-2x}+Be^{x}+e^{-2x}-2\,xe^{-2x}$

Alors $\begin{cases} f(0)=A+B=-1 \\ f'(0)=-2A+B+1=3 \end{cases}$ Donc $\begin{cases} A+B=-1 \\ -2A+B=2 \end{cases}$

Equation1 – Equation 2 donne $A+B$-($-2A+B$)=-3 donc 3A=-3 alors A= - 1

En remplaçant dans la première équation on obtient B=0

Donc f(x)= - $e^{-2x}+xe^{-2x}$

5- f(x)=(x-1)e^{-2x}

A- Le DL2(0) de la fonction f

On a DL2(0) : $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$

Donc $e^{-2x} = 1 + \frac{(-2x)}{1!} + \frac{(-2x)^2}{2!} + o(x^2)$

Alors $e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 + o(x^2)$

f(x)=(-1+x)$(1 - 2x + 2x^2)$+ $o(x^2)$

=-1+2x-2x²+x-2x²+ $o(x^2)$

= - 1+3x-4x²+ $o(x^2)$

B-L 'équation de la tangente

- **L 'équation de la tangente:**

On a f(x)= - 1+3x-4x²+ $o(x^2)$

Alors l'équation de la tangente est: y=-1+3x

- **La position de la courbe par rapport à la tangente:**

On a f(x)-y= -4x²+ $o(x^2)$<0 alors la courbe est au dessous de la tangente

4 points	**Exercice 2 :**
	Déterminer la nature des séries suivantes :
1	1. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$.
1	2. $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n+1}$ (On pourra utiliser le critère de D'Alembert).
1	3. $\sum_{n\geq 1} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ (On pourra utiliser le critère de Cauchy)
1	4. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

National 2017:

1-La nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$

C'est une série de Riemann avec $\alpha = 3 >$1 alors elle est convergente

2-La nature de $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n+1}$

Je pose Un=$\frac{2^n}{n+1}$

$$\frac{Un+1}{Un}=\frac{\frac{2^{n+1}}{n+2}}{\frac{2^n}{n+1}}=\frac{2^{n+1}}{n+2}\times\frac{n+1}{2^n}=\frac{2.2^n}{n+2}\times\frac{n+1}{2^n}=2\,\frac{n+1}{n+2}$$

$$\lim_{+\infty}\frac{Un+1}{Un}=\lim_{+\infty} 2\,\frac{n+1}{n+2}=2>1$$

Alors d'après le critère de D'Alembert la série de terme générale Un est divergente

National 2017:

3-La nature de $\sum_{n\geq 1}(1-\frac{1}{n})^{n^2}$

Je pose Un=$(1-\frac{1}{n})^{n^2}$

$$\lim_{+\infty}\sqrt[n]{Un}=\lim_{+\infty}\sqrt[n]{(1-\frac{1}{n})^{n^2}}=\lim_{+\infty}(1-\frac{1}{n})^{n}=\lim_{+\infty}e^{n.ln(1-\frac{1}{n})}=\lim_{+\infty}e^{n.\frac{ln(1-\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n}}\times(-\frac{1}{n})}=e^{-1}<1$$

Donc d'après le critère de Cauchy ,la série de terme générale Un est convergente

$$a^n=e^{\ln a^n}=e^{n.\ln a}$$

$$\lim_{0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\frac{ln(1-\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n}}=\frac{\ln(1+x)}{x}\text{ si x=-1/n}$$

National 2017:

4-La nature de $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$

Je pose Un= $\frac{(-1)^n}{n^2+1}$=$(-1)^n \times \frac{1}{n^2+1}$ et Vn= $\frac{1}{n^2+1}$

- On a $\lim\limits_{+\infty} Vn$=$\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$=0
- On a Vn+1= $\frac{1}{(n+1)^2+1}$ or n+1>n donc $(n+1)^2>n^2$ (car $x\longrightarrow x^2$ est croissante)

Donc $\frac{1}{(n+1)^2+1} < \frac{1}{n^2+1}$ c'est-à-dire Vn+1<Vn donc (Vn) est décroissante

Alors d'après le critère spécial des séries alternées $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ est convergente

6 points **Exercice 2 :**

Soit la matrice suivante : $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ -3 & 0 & 2\end{pmatrix}$

1 1. a- Montrer que le polynôme caractéristique de A est :

$$P_A(\lambda)=-(1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$$

0,5 b- Donner les valeurs propres de A.

0,5 c- En déduire que A est diagonalisable.

2. On considère les matrices suivantes :

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ et } D=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

1,5 a- Calculer PQ , puis en déduire que P est inversible et donner son inverse P^{-1}.

1 b- Vérifier que : $P^{-1}AP=D$.

0,5+1 c- Soit $n\in\mathbb{N}$, calculer D^n en fonction de n, puis en déduire A^n en fonction de n.

1-a Montrer que le polynôme caractéristique de A est :P(λ)= - (1+ λ)(1- λ)(2- λ)

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(A-\lambda I)=\left|\begin{matrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{matrix}\right|\begin{matrix} -1-\lambda & 0 \\ -1 & 1-\lambda \\ -3 & 0 \end{matrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)= -(1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$$

b-Déterminer les valeurs propres :

$P(\lambda) = -(1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$

$P(\lambda)=0$ alors $-(1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$ donc $(1+\lambda=0$ ou $1-\lambda=0$ ou $2-\lambda=0)$ alors $(\lambda=-1$ ou $\lambda=1$ ou $\lambda=2)$

Alors les valeurs propres de A sont:

$\lambda1 = -1$

$\lambda2 = 1$

$\lambda3 = 2$

C- en déduire que A est diagonalisable

A admet 3 valeurs propres distincts dans R^3 alors A est diagonalisable

2-a-Calculer PQ puis déduire que P est inversible et donner son inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P.Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q.P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

Rappel de la méthode de définition pour calculer l'inverse d'une matrice:

Si $\begin{cases} A.B = I \\ B.A = I \end{cases}$ Alors A est inversible et son inverse $A^{-1} = B$

On a $\begin{cases} P.Q = I \\ Q.P = I \end{cases}$ Alors P est inversible et son inverse $P^{-1} = Q$

2-b-Vérifier que P^{-1}AP=D :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}.A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q.P=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=D$$

2-c D^n *en fonction de n*

D= $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

d- En déduire A^n *en fonction de n*

A^n = P D^n P^{-1}

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 1-2^n & 1 & -1+2^n \\ (-1)^n-2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$