Correction national 2013

DSI-SRI-MCW

Présenté par: Mme. BENAZZOU Salma

5 points	**Exercice 1 :**

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x\,e^{\frac{1}{x}}+\sqrt{x^2+x}$

Considérons $(\mathscr{C}_g)$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1,5 1. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction :

$$h: t \mapsto e^t+\sqrt{1+t}$$

0,5 2. Vérifier que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$g(x)=x\left(e^{\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$$

1,5 3. Donner le développement limité généralisé en $\frac{1}{x}$ de la fonction g au voisinage de $+\infty$ de la forme : $g(x)=ax+b+\frac{c}{x}+\frac{1}{x}\,\varepsilon(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$ avec a, b et c des nombres réels à déterminer.

(on peut poser $t=\frac{1}{x}$ et utiliser les résultats des questions 1. et 2.)

1 4. a- Donner l'équation de l'asymptote (Δ) à la courbe $(\mathscr{C}_g)$ au voisinage de $+\infty$.

0,5 b- Déterminer la position relative de la courbe $(\mathscr{C}_g)$ par rapport à son asymptote (Δ) au voisinage de $+\infty$.

National 2013:

1-Donner le DL2(0) de h(t)=$e^t + \sqrt{1+t}$

On a $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$(1+x)^\alpha = 1 + \propto x + \frac{\propto(\propto-1)}{2!} x^2 + \cdots \ldots \ldots \ldots + \frac{\propto(\propto-1)\ldots\ldots(\propto-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

$(1+x)^\alpha = 1 + \propto x + \frac{\propto(\propto-1)}{2!} x^2 + o(x^2)$

$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2} t + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2} t^2 + o(t^2) = 1 + \frac{1}{2} t - \frac{1}{8} t^2 + o(t^2)$

Donc h(t)=$e^t + \sqrt{1+t} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + 1 + \frac{1}{2} t - \frac{1}{8} t^2 + o(t^2)$

$=2+(1+\frac{1}{2})\, t + (\frac{1}{2} - \frac{1}{8})\, t^2 + o(t^2) = 2 + \frac{3}{2} t + \frac{3}{8} t^2 + o(t^2)$

National 2013:

2-Vérifier que g(x)=$x(e^{\frac{1}{x}}+\sqrt{(1+\frac{1}{x})})$

$$\sqrt{x^2}=|x|$$

Soit x>0

On a g(x)=$xe^{\frac{1}{x}}+\sqrt{x^2+x}$

$= xe^{\frac{1}{x}}+\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}$

$= xe^{\frac{1}{x}}+|x|\sqrt{(1+\frac{1}{x})}$

$= xe^{\frac{1}{x}}+x\sqrt{(1+\frac{1}{x})}$

$= x(e^{\frac{1}{x}}+\sqrt{(1+\frac{1}{x})})$

National 2013:

3-Donner le développement limité de la fonction g au voisinage de $+\infty$

On a g(x)= $x(e^{\frac{1}{x}}+\sqrt{(1+\frac{1}{x})})$

Je pose t= $\frac{1}{x}$

Donc g(t)=$\frac{1}{t}(e^{t}+\sqrt{(1+t)})$

Et on sait que $e^{t}+\sqrt{1+t}=2+\frac{3}{2}t+\frac{3}{8}t^{2}+o(t^{2})$

Donc g(t)=$\frac{1}{t}(2+\frac{3}{2}t+\frac{3}{8}t^{2}+o(t^{2}))=\frac{2}{t}+\frac{3}{2}+\frac{3}{8}t+o(t)$

Alors g(x)= 2x+$\frac{3}{2}+\frac{3}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$= 2x+$\frac{3}{2}+\frac{3}{8x}+\frac{1}{x}\varepsilon(x)$

Donc a=2

b= $\frac{3}{2}$

c= $\frac{3}{8}$

MATH

National 2013:

4-a- l'équation de l'asymptote

On a $g(x)= 2x+\frac{3}{2}+\frac{3}{8x}+ o\left(\frac{1}{x}\right)$

Alors l'équation de l'asymptote est $y= 2x+\frac{3}{2}$

b-

$g(x)-y=\frac{3}{8x}+ o\left(\frac{1}{x}\right)>0$ alors la courbe de g est au dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$

National 2013:

3 points	Exercice 2 :
	Étudier la nature de chacune des séries suivantes
1	1. $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n\,(n+1)}}$
1	2. $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{n^2}{n!}$
1	3. $\sum\limits_{n\geq 1} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

National 2013:

1-La nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

Je pose Un= $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

Au voisinage de l'infini on a : n+1~n donc n(n+1)~n² alors $\sqrt{n(n+1)}$~n c à d Un~$\frac{1}{n}$

Or $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est divergente car c'est une série de Riemann α=1

Donc d'après le critère d'équivalence la série $\sum_{n=1}^{+\infty} Un$ est divergente

2-La nature de $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{n!}$

Je pose Un= $\frac{n^2}{n!}$

$$\frac{Un+1}{Un}=\frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}.\frac{n!}{n^2}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)n!}.\frac{n!}{n^2}=\frac{1}{n+1}.\frac{(n+1)^2}{n^2}$$

$$\lim_{+\infty}\frac{Un+1}{Un}=\lim_{+\infty}\frac{1}{n+1}.\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim_{+\infty}\frac{1}{n+1}.\frac{n^2}{n^2}=0<1$$

Alors d'après le critère de D'Alembert la série de terme générale Un est convergente.

National 2013:

3-La nature de $\sum_{n\geq 1}(1-\frac{1}{n})^{n^2}$ (Proposé aussi au national 2017)

Je pose Un=$(1-\frac{1}{n})^{n^2}$

$$\lim_{+\infty} \sqrt[n]{Un}=\lim_{+\infty} \sqrt[n]{(1-\frac{1}{n})^{n^2}}=\lim_{+\infty}(1-\frac{1}{n})^{n}=\lim_{+\infty} e^{n.ln(1-\frac{1}{n})}=\lim_{+\infty} e^{n.\frac{ln(1-\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n}}\times(-\frac{1}{n})}=e^{-1}<1$$

Donc d'après le critère de Cauchy ,la série de terme générale Un est convergente

$$a^n=e^{\ln a^n}=e^{n.\ln a}$$

$$\lim_{0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\frac{ln(1-\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n}}=\frac{\ln(1+x)}{x} \text{ si x=-1/n}$$

National 2013

3 points	Exercice 3 :
0,5	1. a- Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ est convergente et calculer sa valeur.
0,5	b- En déduire que $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ est convergente
	2. Montrer que chacune des deux intégrales suivantes est convergente et calculer sa valeur :
1	a- $I = \int_0^1 \ln x \, dx$.
1	b- $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; (On peut poser $x = \sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).

1-a-Monter que $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ est convergente

<u>Méthode 1</u>:Par définition on a :

$\int_1^{+\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{t\to+\infty} \int_1^{t} e^{-x}dx = \lim\limits_{t\to+\infty} [-e^{-x}]_1^t = \lim\limits_{t\to+\infty} -e^{-t} + e^{-1} = e^{-1}$

Donc $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ est convergente .

<u>Méthode 2</u>:Application du critère de Riemann

Je pose f(x)= e^{-x}

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-x}$ =0 Alors d'après le **critère de Riemann** α=2>1 donc $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ est convergente

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = 0$??

Je pose t= $-x$

Alors x=- t

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} =$

$\lim\limits_{t\to-\infty} t^2 e^{t}$

=0

b-Déduire que $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente

On a $x \geq 1$ donc $x^2 \geq x$

Alors $-x^2 \leq -x$

Donc $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ (Car $x \rightarrow e^x$ est croissante)

Or $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ est convergente donc d'après le **critère de comparaison** $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente.

2-

I=$\int_0^1 \ln x \, dx$

On a x⟶ ln x est définie sur]0,1]

Soit t∈]0,1]

- Calculons $\int_t^1 \ln x \, dx$ (Intégration par parties ALPES)

U=ln x U'= $\frac{1}{x}$

V'= 1 V=x

$\int_t^1 \ln x \, dx$= $[x ln\ x]_t^1$ - $\int_t^1 \frac{1}{x} \, .x \;\, dx$ = $[x ln\ x - x]_t^1$= -1- t $ln\ t + t$

$\int_0^1 \ln x \, dx$=$\lim_{t \to 0} \int_t^1 \ln x \, dx$= $\lim_{t \to 0} -1 -$ t $ln\ t + t$ = - 1

Alors I est convergente

$\lim_{t \to 0} t^{\propto}\ ln\ t$ =0

$J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

La fonction $x \to \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ est définie sur $[0,1[$

Soit $a \in [0,1[$

- Calculons $J=\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (Changement de variable)

x= sin t alors t=arcsin x et dx=cos t dt

x=0 alors t=0

x=a alors t=arcsin a

$J=\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = J=\int_0^{\arcsin a} \frac{(\sin t)^2}{\sqrt{1-(\sin t)^2}}\cos t\, dt = \int_0^{\arcsin a} \frac{(\sin t)^2}{\sqrt{(\cos t)^2}}\cos t\, dt = \int_0^{\arcsin a} \frac{(\sin t)^2}{\cos t}\cos t\, dt$

$= \int_0^{\arcsin a}(\sin t)^2\, dt = \int_0^{\arcsin a}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}[t-\frac{\sin 2t}{2}]_0^{\arcsin a} = \frac{1}{2}(\arcsin a - \frac{\sin(2\arcsin a)}{2})$

$J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{a\to 1}\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{a\to 1}\frac{1}{2}(\arcsin a - \frac{\sin(2\arcsin a)}{2}) = \frac{\pi}{4}$

Alors J est convergente

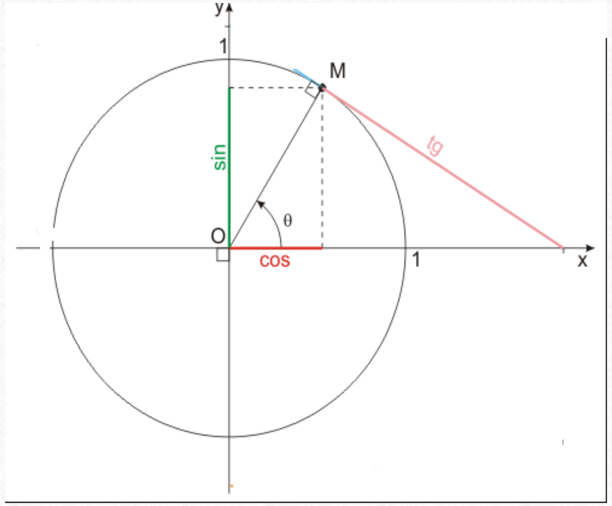
$\cos^2 x+\sin^2 x=1$

$\cos 2x=1-2\sin^2 x$

$\int \cos ax = \frac{\sin ax}{a}$

$\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$

$\sin \pi=0$



9 points	**Exercice 4 :**
	L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $B=(e_1,e_2,e_3)$ avec :
	$e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$
	Considérons l'application :
	$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $(x,y,z) \to (x+y\ ,\ 2y\ ,\ -2x+2y+3z)$
0,5	1. Montrer que f est une application linéaire.
0,5	2. Justifier que la matrice A de l'application linéaire f relativement à la base

	canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est : $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
0,5	3 .a- Vérifier que le polynôme caractéristique de la matrice A est donné par : $P(\lambda)=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$.
0,5	b- Déterminer les valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 de la matrice A telles que $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ et en déduire que la matrice A est diagonalisable.
1,5	c- Déterminer les vecteurs propres u_1, u_2 et u_3 associés respectivement aux valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 tels que : $u_1=(1\ ,\ .\ ,\ .)$, $u_2=(\ .\ ,\ 1\ ,\ .)$ et $u_3=(\ .\ ,\ .\ ,\ 1)$
0,5	d- Établir que $\mathscr{B}'=(u_1,u_2,u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
1	4. a- Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que : $P^{-1}AP=D$.
0,5	

1-Montrer que f est une application linéaire

Montrer que $f: \begin{array}{c} R^3 \to \qquad\qquad R^3 \\ (x,y,z) \to (x+y, 2y, -2x+2y+3z) \end{array}$ est application linéaire

Soit X et Y deux éléments de R^3

Je pose X(x,y,z) et Y(x',y',z') deux éléments de R^3 et λ de R

X+ λY= (x,y,z)+ λ(x',y',z')= (x+λx',y+λy',z+λz')

f(X+ λY)=f(x+λx',y+λy',z+λz')

=((x+λx')+(y+λy'),2(y+λy'),-2(x+λx')+2(y+λy')+3(z+λz'))

=(x+**λx**'+y+**λy**',**2**y+2**λy**',**-2**x-2**λx**'+2y+2**λy'+3**z+3λz')

=(x+y,**2**y,**-2**x+2y+3z) +(λx'+λy', 2λy',**-2**λx'+2λy'+3λz')

=(x+y,**2**y,**-2**x+2y+3z) + λ =(x'+y',**2**y',**-2**x'+2y'+3z')

=f(x,y,z)+ λf(x',y',z')=f(X)+ λf(Y) Donc f est application linéaire.

2-Justifier que A=(f,Bc) est A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$l'application\ f: \begin{matrix} R^3 \to & R^3 \\ (x,y,z) \to (x+y, 2y, -2x+2y+3z) \end{matrix}$

f(e1)=f(1,0,0)=$(2 \times 1 + 0 + 0{,}0 - 0{,}1 + 0)$=$(1,0,-2)$
f(e2)=f(0,1,0)=$(2 \times 0 + 1 + 0{,}1 - 0{,}0 + 1)$ =$(1,2,2)$
f(e3)=f(0,0,1)=$(2 \times 0 + 0 + 1{,}0 - 1{,}0 + 0)$ =$(0,0,3)$

A=mat(f, Bc)=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3-a Le polynôme caractéristique:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(A-\lambda I)=\left|\begin{matrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 3-\lambda \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \\ -2 & 2 \end{matrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

b-Déterminer les valeurs propres et en déduire que A est diagonalisable:

$P(\lambda)=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$

$P(\lambda)=0$ alors $(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)=0$ donc ($1-\lambda=0$ ou $2-\lambda=0$ ou $3-\lambda=0$) alors ($\lambda=1$ ou $\lambda=2$ ou $\lambda=3$)

Alors les valeurs propres de A sont:

$\lambda 1=1$

$\lambda 2=2$

$\lambda 3=3$

A admet 3 valeurs propres distincts dans R^3 alors A est diagonalisable

c-Déterminer les vecteurs propres:

U1=(1, . , .)	**U2=(. , 1 , .)**	**U3=(. , . , 1)**
U1 est le vecteur propre associé à la valeur propre λ1 Donc A.U1=λ1.U1 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1+a \\ 2a \\ -2+2a+3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{cases} 1+a=1 \\ 2a=a \\ -2+2a+3b=b \end{cases}$ $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$ U1=(1, 0 , 1)	U2 est le vecteur propre associé à la valeur propre λ2 Donc A.U2=λ2.U2 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1+a \\ 2 \\ -2a+2+3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2 \\ 2b \end{pmatrix}$ $\begin{cases} 1+a=2a \\ 2=2 \\ -2a+2+3b=2b \end{cases}$ $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$ U2=(1, 1 , 0)	U3 est le vecteur propre associé à la valeur propre λ3 Donc A.U3=λ3.U3 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a+b \\ 2b \\ -2a+2b+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 3b \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} a+b=3a \\ 2b=3b \\ -2a+2b+3=3 \end{cases}$ $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ U3=(0, 0 , 1)

d-Etablir que B'=(U1,U2,U3) est une base :

On a Card B'=dim $\mathbb{R}^3$ =3; donc montrer que B' est base reviens a montrer que B est libre.

$$\text{Det}\,(U1,U2,U3)=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\0&1\\1&0\end{matrix}$$

$=1\neq 0$ alors B' est base

4-a- La matrice diagonale et la matrice de passage

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\qquad \text{et } P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

0,5 b- En déduire A en fonction de P, D et P^{-1}.

0,5 c- Exprimer D^n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

1 d- En déduire A^n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

5. On considère les suites numériques $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout, $n\in\mathbb{N}$, par : les formules récurrentes :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = 2y_n \\ z_{n+1} = -2x_n + 2y_n + 3z_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \\ z_0 = 2 \end{cases}$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

0,5 a- Vérifier que : $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

0,5 b- Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

(Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^{n+1} = A^n \times A$ et par convention $A^0 = I$)

c- Donner x_n, y_n et z_n en fonction de n, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

4-b Déduire A en fonction de P,D et P^{-1}

On a P^{-1}AP=D

PP^{-1}AP P^{-1} =PD P^{-1}

Donc A= PDP^{-1}

c- D^n $en\ fonction\ de\ n$

D=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ alors $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

d- En déduire A^n $en\ fonction\ de\ n$

A^n = P D^n P^{-1}

Calcul de A^n

- Calcul de P^{-1} *par la méthode de gauss*

On a : $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ L3-L1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ L3+L2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ L1-L2

Alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^n = \mathrm{P}\ D^n\ P^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1+2^n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 1-3^n & 3^n-1 & 3^n \end{pmatrix}$$

5-a-Verifier que Xn+1=A. Xn

Le système est : $\begin{cases} x_{n+1} = xn + yn \\ y_{n+1} = 2yn \\ z_{n+1} = -2xn + 2yn + 3zn \end{cases}$

Avec Xn= $\begin{pmatrix} xn \\ yn \\ zn \end{pmatrix}$ et X0= $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

La forme matricielle associé au système est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xn \\ yn \\ zn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$$

Alors A. Xn=Xn+1

5-b- Montrer que Xn=A^nXo (Démonstration par récurrence)

- Pour n=0 on a X0= A^0Xo (c'est vrai par A^0=I)
- Supposons que Xn=A^nXo et montrons que Xn+1=A^{n+1}Xo

D'après la question précédente on a X_{n+1}=A. Xn
Et d'après l'hypothèse de récurrence, on a Xn=A^nXo
Alors X_{n+1}=A. A^nXo = A^{n+1}Xo
Alors pour tout entier n on a
Xn=A^nXo

c- Donner xn , yn , et zn en fonction de n

On a Xn=A^nXo

$$\begin{pmatrix} xn \\ yn \\ zn \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1+2^n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 1-3^n & 3^n-1 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} xn \\ yn \\ zn \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+1-2^n \\ -2^n \\ (1-3^n)-(3^n-1)+2.3^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-2^n \\ -2^n \\ 2 \end{pmatrix}$$

xn=$2-2^n$

yn=-2^n

zn= 2