**Examen National du Brevet de Technicien Supérieur**
**Session de Mai 2016**

**- Sujet -**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Filière:** | **DSI – SRI - MCW** | **Durée:** | **2 Heures** |
| **Épreuve:** | **MATHÉMATIQUES** | **Coefficient:** | **15** |

## 6 points — Exercice 1 :

On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\ ,\quad D=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}\ ,\quad P=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad Q=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

1 — 1. Montrer que le polynôme caractéristique de $A$ est : $P(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+3$ .

En déduire les valeurs propres de $A$ .

1 ,5 — 2. a- Calculer : $P\,Q$ et $Q\,P$ et en déduire que $P$ est inversible puis calculer $P^{-1}$.

0 ,5 — b- Vérifier que : $A = P\,D\,P^{-1}$ .

3. On considère le système différentiel linéaire :

$$(E):\ \begin{cases}x'(t)=2x(t)+\ y(t)\\ y'(t)=\ x(t)+2y(t)\end{cases}$$

On pose : $X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ et $Y(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\y_1(t)\end{pmatrix}=P^{-1}X(t)$.

1 — a- Exprimer $X'(t)$ en fonction de $A$ et de $X(t)$.

En déduire que : $(E)\ \Leftrightarrow\ Y'(t)=D\,Y(t)$.

1 — b- Déterminer $x_1(t)$ et $y_1(t)$ en fonction de $t$ .

1 — c- En déduire $x(t)$ et $y(t)$ les solutions du système $(E)$.

## 4 points — Exercice 2 :

**I.** On considère l'intégrale suivante : $I\ =\ \int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x(x+1)(x+2)}$ .

1 — 1. Montrer que : $I$ est convergente

0 ,5 — 2. a- Vérifier que : $\forall\ x\ \geq 1$ , $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2(x+2)}$ .

1 — b- On pose $I(\alpha)\ =\ \int_1^{\alpha}\dfrac{dx}{x(x+1)(x+2)}$ .

Calculer $I(\alpha)$ , puis en déduire la valeur de $I$ .

1 ,5 — **II.** Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$A\ =\ \int_0^{+\infty}e^{-x}\,dx\qquad \text{et}\qquad B\ =\ \int_1^{4}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}\ .$$

**6 points** **Exercice 3 :**

**I.** Soit la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ de terme général $u_n$ tel que pour tout $n \geq 1$ : $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ .

1,5 1- Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ .

En déduire la nature de la série de $\sum_{n\geq 1} u_n$ .

0,5 2. a- Vérifier que : $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$

1 b- Calculer $S_n$ avec : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et en déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ .

**II.** Etudier la nature des séries numériques suivantes :

3× 1 $$\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-n}}{n^2} \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n\,!} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}} .$$

**4 points** **Exercice 4 :**

Soit $X$ la variable aléatoire réelle qui prend pour valeur le nombre de défauts sur le verre d'une ampoule.

On admet que $X$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :

1 a- Il n'y a aucun défaut sur l'ampoule.

1 b- Il y'a au moins deux défauts sur l'ampoule.

1 c- Le nombre de défauts est compris entre deux et cinq (bornes comprises).

1 2. Calculer l'espérance et l'écart-type de $X$ .

*Fin de l'épreuve*