Royaume du Maroc

Ministère de l'Education Nationale et de la Formation Professionnelle

Centre National de l'Évaluation, des Examens et de l'Orientation

**Examen National de Brevet de Technicien Supérieur**

**Session de Mai 2017**

**- Sujet-**



| | | | |
|---|---|---|---|
| **Filières:** | **DSI – SRI -MCW** | **Durée:** | **2** Heures |
| **Épreuve:** | **MATHEMATIQUES** | **Coefficient** | **15** |

**6 points** **Exercice 1 :**

On considère l'équation différentielle suivante : $(E)$: $y''+y'-2y=-3e^{-2x}$ ,

où $y$ est une fonction de la variable réelle $x$ , deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ .

Soit $(H)$: $y''+y'-2y=0$ l'équation homogène associée à $(E)$.

1 — 1. Résoudre l'équation différentielle $(H)$.

1 — 2. Vérifier que la fonction $g$ définie par : $g(x)=xe^{-2x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E)$

1 — 3. Déterminer la solution générale de $(E)$.

1 — 4. Déterminer la solution $f$ de $(E)$ vérifiant les conditions suivantes :

$$f(0)=-1 \text{ et } f'(0)=3.$$

5. Soit $f$ la fonction de la variable réelle $x$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x-1)e^{-2x}$ .

1 — a- Montrer que le développement limité de $f$ à l'ordre 2 au voisinage de $0$ est :

$$f(x)=-1+3x-4x^2+o(x^2) .$$

1 — b- En déduire l'équation de la tangente $(T)$ à la courbe $(C_f)$ au point $A(0,-1)$ et préciser sa position par rapport à $(C_f)$ .

**4 points** **Exercice 2 :**

Déterminer la nature des séries suivantes :

1 — 1. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$.

1 — 2. $\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{n+1}$ ( On pourra utiliser le critère de D'Alembert).

1 — 3. $\sum_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ ( On pourra utiliser le critère de Cauchy)

1 — 4. $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

| 6 points | **Exercice 3 :** |
|---|---|

Soit la matrice suivante: $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&1&1\\-3&0&2\end{pmatrix}$

1 — 1. a- Montrer que le polynôme caractéristique de $A$ est :

$$P_A(\lambda)=-(1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$$

0,5 — b- Donner les valeurs propres de $A$ .

0,5 — c- En déduire que $A$ est diagonalisable.

2. On considère les matrices suivantes :

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\ \text{et}\ D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

1,5 — a- Calculer $PQ$ , puis en déduire que $P$ est inversible et donner son inverse $P^{-1}$ .

1 — b- Vérifier que : $P^{-1}AP=D$ .

0,5+1 — c- Soit $n\in\mathbb{N}$, Calculer $D^n$ en fonction de $n$, puis en déduire $A^n$ en fonction de $n$.

| 4 points | **Exercice 4 :** |
|---|---|

On admet que le nombre de fautes d'impression par page dans un livre obéit à la loi de Poisson de paramètre $\lambda=2$.

Calculer les probabilités des événements suivants :

1 — 1. N' avoir aucune faute.

1 — 2. Avoir au moins deux fautes.

2 — 3. Avoir entre 3 et 6 fautes (Bornes comprises).

***Fin de l'épreuve***