Correction de l’examen national 2022

DSI-SRI-MCW

Présenté par: Mme. BENAZZOU Salma

6 points	**Exercice 1 :**

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E):\ y''-3y'-10y=-14e^{-2x} \quad \text{et} \quad (H):\ y''-3y'-10y=0 .$$

où y est une fonction de la variable réelle x deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1 — 1. Résoudre l'équation différentielle (H).

1 — 2. Vérifier que la fonction g définie par : $g(x)=2xe^{-2x}$ est une solution particulière de (E).

0,5 — 3. Déduire la solution générale de (E).

1 — 4. Déterminer la solution f de (E) vérifiant: $f(0)=3$ et $f'(0)=-4$.

5. On suppose que $f(x)=(2x+3)e^{-2x}$ et on considère l'intégrale généralisée : $I=\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

1 — a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(x)$ et en déduire la nature de I .

1,5 — b- En utilisant une intégration par parties , montrer que :

$$I(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = 2-(\alpha+2)e^{-2\alpha} \quad \text{où } \alpha > 0$$

puis donner la valeur de l'intégrale I .

- **Q1,Q2,Q3,Q4** : Presque le même exercice est proposé au national , **2020 , 2017** (exercice 1)
- **Q5**: Presque la même en national **2014 et 2013,** (exercice 3)

1-Résoudre (H): y''-3y'-10y=0

L'équation caractéristique associé est : $r^2-3r-10=0$

Le discriminant est: $\Delta=(-3)^2-4(-10)=49=7^2$

Les racines: $r1=\frac{3-7}{2}=-2$ et $r2=\frac{3+7}{2}=5$

Alors $yh=Ae^{-2x}+Be^{5x}$

2-Verifier que la fonction g définie par g(x)= $2xe^{-2x}$ est solution particulière de (E)

On a (E) y''-3y'-10y= -14e^{-2x}

$(e^{ax})' = ae^{ax}$

(u.v)'=u'v+uv'

g(x)= $2xe^{-2x}$

g'(x)= 2$(x'e^{-2x} + x(e^{-2x})')$= 2($e^{-2x} - 2\,xe^{-2x}$) $=2\,e^{-2x} - 4\,xe^{-2x}$

g''(x)= -4$e^{-2x} - 4(e^{-2x} - 2\,xe^{-2x})$= - 4$e^{-2x} - 4e^{-2x} + 8\,xe^{-2x}$= -8$e^{-2x} + 8\,xe^{-2x}$

g''-3g'-10g= -8$e^{-2x} + 8\,xe^{-2x}$-3(2 $e^{-2x} - 4\,xe^{-2x}$)-10($2xe^{-2x}$)

= -8$e^{-2x} + 8\,xe^{-2x} - 6\,e^{-2x} + 12\,xe^{-2x} - 20xe^{-2x}$

= -14 e^{-2x}

3-La solution générale :

yg=yh+yp =yh+ g(x) = A$e^{-2x} + Be^{5x}$ $+2xe^{-2x}$

4-La solution f vérifiant des conditions initiales :

On a la solution générale de (E) est yg= A$e^{-2x} + Be^{5x}$ $+2xe^{-2x}$

La fonction f est solution de (E) donc f(x)= A$e^{-2x} + Be^{5x}$ $+2xe^{-2x}$ et f(0)=3 et f'(0)=-4

Et f'(x)= -2A$e^{-2x} + 5Be^{5x} + 2\, e^{-2x} - 4\, xe^{-2x}$

Alors $\begin{cases} f(0) = A + B = 3 \\ f'(0) = -2A + 5B + 2 = -4 \end{cases}$ Donc $\begin{cases} A + B = 3 \\ -2A + 5B = -6 \end{cases}$ Donc $\begin{cases} A + B = 3 \\ -A + \frac{5}{2}B = -3 \end{cases}$

Equation1 + Equation 2 donne $A + B + (-A + \frac{5}{2}B)$=0 donc $\frac{7}{2}$ B=0 alors B= 0

En remplaçant dans la première équation on obtient A=3

Donc f(x)= 3e^{-2x} $+2xe^{-2x}$ = $(3 + 2x)e^{-2x}$

5-A calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(x)$ et en déduire la nature de I= $\int_0^{+\infty} f(x)dx$

$$\lim_{t\to-\infty} t^{\propto} e^{t} = 0$$

On a f(x)=$(2x+3)e^{-2x}$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2x+3)\mathrm{x}^2 e^{-2x}, = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 e^{-2x} + 3\mathrm{x}^2 e^{-2x} = 0$ (il faut justifier)

Alors d'après le **critère de Riemann** α=2>1 donc I est convergente

$\lim\limits_{+\infty} t^{\propto} f(t)$

=0,α>1

alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge*

=±∞, α≤1

alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *diverge*

Justification

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{x}^2 e^{-2x} = 0$??

Je pose t= $-2x$

Alors x=- $\frac{t}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (-\frac{t}{2})^2 e^{t} =$

$\lim\limits_{t\to-\infty} \frac{1}{4} t^2 e^{t}$

=0

5-b Montrer que $I(\propto) = \int_0^{\propto} f(x)dx = 2 - (\propto +2)e^{-2\propto}$ puis donner la valeur de I

- Calculons $\int_0^{\propto}(2x+3)e^{-2x}dx$ (intégration par partie: technique ALPES)

U=2x+3 U'=2

V'= e^{-2x} V=$\frac{e^{-2x}}{-2}$= - $\frac{1}{2}e^{-2x}$

$\int_0^{\propto}(2x+3)e^{-2x}dx = [-\frac{1}{2}(2x+3)e^{-2x}]_0^{\propto} + \int_0^{\propto} e^{-2x} = [-\frac{1}{2}(2x+3)e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}]_0^{\propto}$

$=(-\frac{1}{2}(2\propto+3)e^{-2\propto} - \frac{1}{2}e^{-2\propto})$-$(-\frac{1}{2}(2.0+3)e^{-2.0} - \frac{1}{2}e^{-2.0})$

$=(-e^{-2\propto}(\frac{(2\propto+3)}{2} + \frac{1}{2})$-$(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}) = -e^{-2\propto}(\frac{(2\propto+4)}{2})+2 = 2-(\propto+2)e^{-2\propto}$

$I=\int_0^{+\infty}(2x+3)e^{-2x}dx = \lim_{\propto\to+\infty} \int_0^{\propto}(2x+3)e^{-2x}dx = \lim_{\propto\to+\infty} 2-\propto e^{-2\propto} - 2e^{-2\propto} = 2$

$\int e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a}$

$\lim_{x\to-\infty} x^{\propto}e^{x} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$

$\lim_{\propto\to+\infty} -\propto e^{-2\propto} = 0$??

Je pose t= $-2\propto$

Alors $\propto$=- $\frac{t}{2}$

$\lim_{x\to+\infty} (-\frac{t}{2})e^{t} =$

$\lim_{t\to-\infty} -\frac{1}{2}te^{t}$

=0

3 points	**Exercice 2 :**
	Soit la série numérique $\sum_{n\geq 1} u_n$ où $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.
1	1. Montrer que $\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^3}$ et en déduire la nature de $\sum_{n\geq 1} u_n$.
0,5	2. Vérifier que pour tout entier $k \geq 1$, $\dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}$.
1,5	3. On pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que $S_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$ et en déduire $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

Presque le même exercice est proposé au national **2016 (exercice 3)**

1-Montrons que Un$\sim\frac{2}{n^3}$ et déduire la nature de $\sum_{n\geq 1} Un$

On a Un= $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

Au voisinage de l'infini on a : n+1~n donc $(n+1)^2 \sim n^2$

alors $n^2(n+1)^2 \sim n^4$ et 2n+1~2n alors $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \sim \frac{2n}{n^4}$

Donc Un $\sim\frac{2}{n^3}$

On a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$=2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$

Or$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$est convergente car c'est une série de Riemann α=3 >1 donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$ est convergente

Donc d'après le critère d'équivalence la série $\sum_{n=1}^{+\infty} Un$ est convergente

2-a-Vérifier que $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$

On a $\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2}$

$= \frac{k^2+2k+1-k^2}{k^2(k+1)^2}$

$= \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

3-Montrer que Sn= $\sum_{k=1}^{n} U_k = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ et en déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$

$\sum_{k=1}^{n} U_k = U_1 + U_2 + \dots\dots\dots + U_n$

$U_k = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$

$U_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2^2}$

$U_2 = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}$

…….

$U_{n-1} = \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}$

$U_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$

$\sum_{k=1}^{n} U_k = U_1 + U_2 + \dots\dots\dots + U_n$

Sn=1- $\frac{1}{(n+1)^2}$

- Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$: $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = 1$

points **Exercice 3 :**

Soient f la fonction numérique définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=2x-2+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 — 1. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction : $t\mapsto \ln(1+t)$

1 — 2. Déduire le développement limité généralisé de f au voisinage de $+\infty$ sous la forme :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$ où a,b et c sont des nombres réels à déterminer.

1 — 3. Donner l'équation de l'asymptote (Δ) à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ et préciser sa position relative par rapport à (C_f).

Presque le même exercice est proposé au national **2013**

(exercice 3)

1-Donner le DL2(0) de $t \longrightarrow \ln(1+t)$

On a $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + o(t^n)$

Donc $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

2-Déduire le développement limité de la fonction f au voisinage de $+\infty$

On a f(x)= $2x-2+x\ln(1+\frac{1}{x})$ Je pose t= $\frac{1}{x}$

On a ln (1+t)= $t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$

Donc ln (1+ $\frac{1}{x}$)= $\frac{1}{x}-\frac{(\frac{1}{x})^2}{2}+o((\frac{1}{x})^2)$ = $\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})$

Alors $x\ln(1+\frac{1}{x})$ = 1$-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})$

Donc f(x)= $2x-2+x\ln(1+\frac{1}{x})$ = f(x)= $2x-2$ +1$-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})$

Alors f(x)= 2x -1 $-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})$

Donc a=2 , b= -1 , c= $-\frac{1}{2}$

3 - l'équation de l'asymptote

On a $f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})$

Alors l'équation de l'asymptote est $y = 2x - 1$

$f(x) - y = -\frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x}) < 0$ alors la courbe de f est au dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$

s points **Exercice 4 :**

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique

$\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est : $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1 **1.** Montrer que le polynôme caractéristique de A est : $P_A(\lambda)=-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)$.

0,5 **2.** En déduire les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de A où $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

3. Soit $\mathscr{B}'=(u_1,u_2,u_3)$ où $u_1=(1,1,0)$, $u_2=(0,1,1)$ et $u_3=(1,-1,0)$.

0,5 **a.** Etablir que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1,5 **b.** Vérifier que u_1, u_2 et u_3 sont des vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3.

1 **4.** Donner la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et vérifier que $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1 **5.** Déterminer la matrice diagonale D vérifiant $A=PDP^{-1}$.

6. On considère le système différentiel (S) suivant :

$$(S)\ \begin{cases} x_1'(t)=x_1(t)-x_2(t)+x_3(t) \\ x_2'(t)=-x_1(t)+x_2(t) \\ x_3'(t)=x_3(t) \end{cases}$$ où t est une variable réelle.

On pose : $X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ et $Y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}=P^{-1}X(t)$.

a- Vérifier que $X'(t)=AX(t)$ et en déduire que : $(S) \Leftrightarrow Y'(t)=DY(t)$.

b- Déterminer $y_1(t)$, $y_2(t)$ et $y_3(t)$ en fonction de t.

c- Déduire $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ en fonction de t.

1 Le polynôme caractéristique: $P(\lambda)= -\lambda\,(1-\lambda)(2-\lambda)$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} -\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(A-\lambda I)=\left|\begin{matrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 \end{matrix} \quad = (1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)-(1-\lambda) = (1-\lambda)^3-(1-\lambda)$$

$$P(\lambda)= (1-\lambda)\,[(1-\lambda)^2-1\,] = (1-\lambda)\,[(1+\lambda^2-2\lambda-1\,]$$

$$= (1-\lambda)\,[\,\lambda^2-2\lambda\,] = \lambda(1-\lambda)\,(\lambda-2\,))= -\lambda\,(1-\lambda)\,(2-\lambda)$$

2-Déduire les valeurs propres

$P(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)$

$P(\lambda)=0$ alors $-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)=0$ donc ($\lambda=0$ ou $1-\lambda=0$ ou $2-\lambda=0$) alors ($\lambda=0$ ou $\lambda=1$ ou $\lambda=2$)

Alors les valeurs propres de A sont:

$\lambda 1 = 0$

$\lambda 2 = 1$

$\lambda 3 = 2$

3-a-Etablir que B'=(U1,U2,U3) est une base :

On a Card B'=dim R^3 =3; donc montrer que B' est base reviens a montrer que B est libre.

Det (U1,U2,U3)= $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$

=1-(-1)=2≠ 0 alors B' est base

3-b-Vérifier que U1,U2,et U3 sont des vecteurs propres:

U1=(1,1 , 0)	**U2=(0 , 1 , 1)**	**U3=(1 , -1 , 0)**
Montrons que A.U1=λ1.U1 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda 1.U1$ Donc U1 est le vecteur propre associé à la valeur propre λ1	Montrons que A.U2=λ2.U2 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda 2.U2$ Donc U2 est le vecteur propre associé à la valeur propre λ2	Montrons que A.U3=λ3.U3 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2. \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda 3.U3$ Donc U3 est le vecteur propre associé à la valeur propre λ3

4 - Donner la matrice de passage et vérifier que $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

On sait que A est diagonalisable et les vecteurs propres sont

U1=(1,1 , 0)

U2=(0 , 1 , 1)

U3=(1 , -1 , 0)

Donc P=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

-Vérifier que $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ L2-L1

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ L3-L2

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$ ½ L3

$$:\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} L1\text{-}L3 \\ L2+2L3 \\ \ \end{array}$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

5- Déterminer la matrice diagonal D Vérifiant A= P DP^{-1}

On a la matrice A est diagonalisable de valeurs propre 0 ,1,et 2 donc la matrice D définie par :

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

MATH BTS

6-a-Vérifier que X'(t)=A.X(t)

On a : $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + x_2(t) \\ x_3'(t) = x_3(t) \end{cases}$

Avec X(t)= $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$

La forme matricielle associé au système est :

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

Alors X'(t)=A. X(t)

A. X(t)= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ -x_1(t) + x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{pmatrix}$ = X'(t)

-Déduire que Y’(t)=DY(t)

On a Y(t)=P^{-1}X(t)

Alors Y’(t)=P^{-1}X’(t) et d’après la question précédente X’(t)=A. X(t)

Donc Y’(t)=P^{-1} A. X(t) et A=PD P^{-1}

Donc Y’(t)=P^{-1} PD P^{-1}. X(t)

Or P^{-1} P=I

Alors Y’(t)=D P^{-1}. X(t)

C’est-à-dire Y’(t)=D $Y(t)$

b- Déterminer $y_1(t)$, $y_2(t)$et $y_3(t)$ en fonction de t

On a Y'(t)=DY(t) et Y(t)=$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$

Alors $\begin{pmatrix} y'_1(t) \\ y'_2(t) \\ y'_3(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ y_2(t) \\ 2y_3(t) \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} y'_1(t) = 0 \\ y'_2(t) = y_2(t) \\ y'_3(t) = 2y_3(t) \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} y'_1(t) = 0 \\ y'_2(t) - y_2(t) = 0 \\ y'_3(t) - 2y_3(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = \alpha e^{-\int \frac{0}{1} dt} = \alpha e^{0.t} = \alpha \\ y_2(t) = \beta e^{-\int \frac{-1}{1} dt} = \beta e^{t} \\ y_3(t) = \gamma e^{-\int \frac{-2}{1} dt} = \gamma e^{2t} \end{cases}$$

Si : ay'(t)+by(t)=0

Alors : y(t) $= \alpha e^{-\int \frac{b}{a} dt}$

$= \alpha e^{-\frac{b}{a} t}$

c-Déduire $x_1(t)$, $x_2(t)$et $x_3(t)$ en fonction de t

On a Y(t)=P^{-1}X(t) alors P.Y(t)=$P.P^{-1}$X(t)

Donc X(t)=P.Y(t)

Donc $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta e^t \\ \gamma e^{2t} \end{pmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma e^{2t} \\ \alpha + \beta e^t - \gamma e^{2t} \\ \beta e^t \end{pmatrix}$

Donc $x_1(t)= \alpha + \gamma e^{2t}$, $x_2(t)= \alpha + \beta e^t - \gamma e^{2t}$ et $x_3(t)= \beta e^t$