Correction de l’examen national 2019

DSI-SRI-MCW

Présenté par: Mme. BENAZZOU Salma

National 2019

4 points	**Exercice 1 :**
1	1. a/ Montrer que $\dfrac{\ln t}{t^3} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.
1	b/ En déduire la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^3}\,dt$.
1	2. a/ Vérifier que $\dfrac{t\ln t}{(t^2+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln t}{t^3}$.
1	b/ En déduire la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}\,dt$.

1-a-Montrez que $\frac{\ln t}{t^3}=o(\frac{1}{t^2})$ au voisinage de $+\infty$

On a:

$$\lim_{+\infty}\frac{\frac{\ln t}{t^3}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{+\infty}\frac{\ln t}{t^3}\times t^2 = \lim_{+\infty}\frac{\ln t}{t}=0 \text{ donc } \frac{\ln t}{t^3}=o(\frac{1}{t^2})$$

b-En déduire la nature de $\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^3}dt$

On a $\frac{\ln t}{t^3}=o(\frac{1}{t^2})$ et $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ est convergente car c'est une integrale de Riemann $\alpha=2>1$

Donc d'après le **critère de négligence** $\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^3}dt$ est convergente

Rappel :Si f=o(g) au voisinage d'un point a alors $\lim_a\frac{f}{g}=0$

- $\lim_{+\infty}\frac{\ln t}{t^\alpha}=0$

Rappel du critére de negligence :

f=o(g) (ou bien $\lim_a\frac{f}{g}=0$) au voisinage d'un point a

- Si $\int g$ converge alors $\int f$ converge
- Si $\int f$ diverge alors $\int g$ diverge

2-a-Verifier que $\frac{t\ln t}{(t^2+1)^2} \sim \frac{\ln t}{t^3}$ au voisinage de $+\infty$

Méthode 1	**Méthode 2**
On a $t^2+1 \sim t^2$ au voisinage de $+\infty$ Donc $(t^2+1)^2 \sim t^4$ alors $\frac{1}{(t^2+1)^2} \sim \frac{1}{t^4}$ Donc $\frac{t\ln t}{(t^2+1)^2} \sim \frac{t\ln t}{t^4}$ c'est-à-dire $\frac{t\ln t}{(t^2+1)^2} \sim \frac{\ln t}{t^3}$	$\lim\limits_{+\infty} \frac{\frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}}{\frac{\ln t}{t^3}} = \lim\limits_{+\infty} \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2} \times \frac{t^3}{\ln t} = \lim\limits_{+\infty} \frac{t^4}{(t^2+1)^2} = \lim\limits_{+\infty} \frac{t^4}{t^4} = 1$ Donc $\frac{t\ln t}{(t^2+1)^2} \sim \frac{\ln t}{t^3}$

b- En déduire la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2} dt$

On a d'après la question 2-a : $\frac{t\ln t}{(t^2+1)^2} \sim \frac{\ln t}{t^3}$ et d'après la question 1-b $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^3} dt$ est convergente alors d'après le **critére equivalence** $\int_1^{+\infty} \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2} dt$ est convergente

<u>Rappel du critére d'equivalence:</u>

$f \sim g$ (ou bien $\lim\limits_{a} \frac{f}{g} = 1$) au voisinage d'un point a

$\int g$ et $\int f$ sont de meme nature

6 points	**Exercice 2 :**

$\boxed{\text{I}}$. Soient f la fonction numérique définie sur l'intervalle $\left]-1,+\infty\right[$ par :

$$f(x)=e^x\ln(1+x)-1$$

et $\left(\mathscr{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 — 1. a/ Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions :

$$x\longmapsto e^x \qquad \text{et} \qquad x\longmapsto \ln(1+x)$$

1 — b/ Etablir que le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de f est :

$$f(x)=-1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$$

~~1,5~~ 2 — 2. Donner l'équation de la tangente (T) à $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au point $I(0,-1)$ et préciser la position relative de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ par rapport à (T) au voisinage de 0.

$\boxed{\text{II}}$. Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

1 — 1/ $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{2^n}$ (On pourra utiliser le critère de D'Alembert)

1,5 — 2/ $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

National 2019:

1-a-DL2(0) de $x \to e^x$ et x $\to \ln(1+x)$

On sait que : $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

Alors $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Et on a : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots \dots \dots \dots \dots \dots .. + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Alors $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

b- Déterminer le DL2(0) de la fonction f

f(x)= $e^x \ln(1+x) - 1$

$e^x \ln(1+x) = (1 + x + \frac{x^2}{2})(x - \frac{x^2}{2}) + o(x^2) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 + o(x^2) = x + (-\frac{1}{2} + 1)x^2 + o(x^2) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Donc f(x)= $e^x \ln(1+x) - 1 = -1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

National 2019:

2)Equation de la tangente

On a : f(x)= $-1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

Alors l'équation de la tangente au voisinage de 0 est y=-1+x

- **La position de la courbe par rapport a la tangente:**

On a : f(x)-y= $\frac{x^2}{2}+o(x^2)>0$ donc la courbe est au dessus de la tangente

National 2019:

1-La nature de $\sum_{n\geq0}\frac{n^2}{2^n}$

Je pose Un= $\frac{n^2}{2^n}$

$\frac{Un+1}{Un}=\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}.\frac{2^n}{n^2}=\frac{(n+1)^2}{2^n\times2}.\frac{2^n}{n^2}=\frac{1}{2}.\frac{(n+1)^2}{n^2}$

$\lim\limits_{+\infty}\frac{Un+1}{Un}=\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{2}.\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{2}.\frac{n^2}{n^2}=\frac{1}{2}<1$

Alors d'après le critère de D'Alembert la série de terme générale Un est convergente.

2-La nature de $\sum_{n\geq0}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

Je pose Un= $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}=(-1)^n\times\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ et Vn= $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

- On a $\lim\limits_{+\infty}Vn=\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0$
- On a Vn+1= $\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ or n+2>n+1 donc $\sqrt{n+2}>\sqrt{n+1}$ (car x⟶ $\sqrt{x}$ est croissante)

Donc $\frac{1}{\sqrt{n+2}}<\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ c'est-à-dire Vn+1<Vn donc (Vn) est décroissante

Alors d'après le critère spécial des séries alternées $\sum_{n\geq0}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ est convergente

Rappel du critére de d'Alembert:

Soit $\sum_{n\geq0}U_n$ une série à termes positives tel que $\lim\limits_{+\infty}\frac{Un+1}{Un}$=a.

- Si a<1 alors $\sum_{n\geq0}U_n$ est convergente
- Si a>1 alors $\sum_{n\geq0}U_n$ est divergente
- Si a=1 on ne peut rien conclure

Rappel du critère spécial des séries alternées:

Soit Un=$(-1)^nVn$

Si:

- (Vn) est décroissante
- $\lim\limits_{+\infty}Vn$=0

Alors la série de terme générale Un est convergente

6 points **Exercice 3 :**

On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -3 & 4\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

1 1/ Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice A est $P_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+2)$.

1 2/ Montrer que P est inversible et que $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

1 3/ Vérifier que $A=PDP^{-1}$.

4/ On considère le système différentiel suivant : $(S)\quad \begin{cases} x'(t)=-5x(t)+6y(t)\\ y'(t)=-3x(t)+4y(t)\end{cases}$

On pose $X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$ et $Y(t)=\begin{pmatrix}u(t)\\ v(t)\end{pmatrix}=P^{-1}\ X(t)$.

1 a/ Vérifier que $X'(t)=A\ X(t)$, puis en déduire que $(S)\Leftrightarrow\ Y'(t)=DY(t)$.

1 b/ Exprimer $u(t)$ et $v(t)$ en fonction de t.

1 c/ En déduire $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de t.

1-Montrer que $P(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+2)$

On a $A=\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

$P(\lambda)=\mathrm{Det}(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} -5-\lambda & 6 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix}=(-5-\lambda)(4-\lambda)-6\times(-3)$

$= -20+5\lambda-4\lambda+\lambda^2+18=\lambda^2+\lambda-2$

$\Delta=1^2-4.(-2)=9=3^2$

$\lambda 1=\frac{-1-3}{2}=-2$ et $\lambda 2=\frac{-1+3}{2}=1$

Alors $P(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+2)$

Si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Alors $\mathrm{Det}\,A=ad-bc$

$P(X)=aX^2+bX+c$

Si α et β deux racines de P alors

$P(X)=(X-\alpha)(X-\beta)$

2-Montrer que P et inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

On a P=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Det(P)=$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$=1-2=-1

Donc $P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

On dit que A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si Det A≠0 et on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{detA}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3-Verifier que A=PDP^{-1}

On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P.D=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$PD\,P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}=A$$

4-a-Verifier que X’(t)=A.X(t)

Le système est : $\begin{cases} x'(t) = -5x(t) + 6y(t) \\ y'(t) = -3x(t) + 4y(t) \end{cases}$ Avec X(t)=$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

La forme matricielle associé au système est :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Alors X’(t)=A. X(t)

Déduire que Y’(t)=DY(t)

On a Y(t)=P^{-1}X(t)

Alors Y’(t)=P^{-1}X’(t) et d’après la question précédente X’(t)=A. X(t)

Donc Y’(t)=P^{-1} A. X(t) et A=PD P^{-1} (d’aprés la questions 3)

Donc Y’(t)=P^{-1} PD P^{-1}. X(t)

Or P^{-1} P=I

Alors Y’(t)=D P^{-1}. X(t)

C’est-à-dire Y’(t)=D $Y(t)$

4-b-exprimer u(t) et v(t) en fonction de t

On a Y'(t)=DY(t) et Y(t)=$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$

Alors $\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} u(t) \\ -2v(t) \end{pmatrix}$

$\begin{cases} u'(t) = u(t) \\ v'(t) = -2v(t) \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) - u(t) = 0 \\ v'(t) + 2v(t) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} u(t) = \alpha e^{-\int \frac{-1}{1} dt} = \alpha e^{t} \\ v(t) = \beta e^{-\int \frac{2}{1} dt} = \beta e^{-2t} \end{cases}$$

4-c-En déduire x(t) et y(t) en fonction de t

On a Y(t)=P^{-1}X(t) alors

X(t)=P.Y(t)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha e^{t} \\ \beta e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^{t} + 2\beta e^{-2t} \\ y(t) = \alpha e^{t} + \beta e^{-2t} \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha e^{t} + 2\beta e^{-2t} \\ \alpha e^{t} + \beta e^{-2t} \end{pmatrix}$$