Correction de l’examen national 2020

DSI-SRI-MCW

Présenté par: Mme. BENAZZOU Salma

Presque le même exercice est proposé au national 2017

4 points **Exercice 1 :**

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E):\ y''-3y'+2y=e^x$$

$$(H):\ y''-3y'+2y=0$$

où y est une fonction de la variable réelle x deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1 — **1.** Résoudre l'équation différentielle (H).

1 — **2.** Vérifier que la fonction g définie par : $g(x)=-xe^x$ est une solution particulière de (E).

1 — **3.** En déduire la solution générale de (E).

1 — **4.** Déterminer la solution f de (E) vérifiant les conditions initiales suivantes :

$$f(0)=1 \text{ et } f'(0)=0$$

1-Résoudre (H): y”-3y’+2y=0

L’équation caractéristique associé est : $r^2-3r+2=0$
Le discriminant est: $\Delta=(-3)^2-4(2)=1$
Les racines: r1=$\frac{3-1}{2}=1$ et r2=$\frac{3+1}{2}=2$
Alors yh=A$e^{x}+Be^{2x}$

2-Verifier que la fonction g définie par g(x)= $-xe^{x}$ est solution de (E)

On a (E) y”-3y’+2y= e^{x}
g(x)= $-xe^{x}$
g’(x)= -($x'e^{x}$+ $x(e^{x})'$)= -($e^{x} + xe^{x}$) = - $e^{x} - xe^{x}$
g”(x)= -$e^{x} - (e^{x} +\ xe^{x}$)= -$e^{x} - e^{x} - xe^{x} = -2e^{x} - xe^{x}$
g”-3g’+2g= $-2e^{x} - xe^{x}$-3(- $e^{x} - xe^{x}$)+2($-xe^{x}$)
=$-2e^{x} - xe^{x}$ +3 $e^{x} + 3\ xe^{x}$ $-2xe^{x}$
= e^{x}

3-La solution générale :

yg=yh+yp =yh+ g(x)
= A$e^{x} + Be^{2x}$ $-xe^{x}$

4-La solution f vérifiant des conditions initiales :

On a la solution générale de (E) est yg= $Ae^x + Be^{2x} - xe^x$

La fonction f est solution de (E) donc f(x)= $Ae^x + Be^{2x} - xe^x$ et f(0)=1 et f'(0)=0

Et f'(x)= $Ae^x + 2Be^{2x}$ - $e^x - xe^x$

Alors $\begin{cases} f(0) = A + B = 1 \\ f'(0) = A + 2B - 1 = 0 \end{cases}$ Donc $\begin{cases} A + B = 1 \\ A + 2B = 1 \end{cases}$

Equation1 – Equation 2 donne $A + B$-($A + 2B$)=0 donc -B=0 alors B= 0

En remplaçant dans la première équation on obtient A=1

Donc f(x)= $e^x - xe^x$

4 points	<u>**Exercice 2 :**</u>
	Déterminer la nature des séries numériques suivantes :
1	1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{3^n}$. (On pourra utiliser la règle de D'Alembert)
1,5	2. $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{4n+5}{3n-1}\right)^n$. (On pourra utiliser la règle de Cauchy)
1,5	3. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

1-La nature de $\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{3^n}$

Je pose Un= $\frac{n+1}{3^n}$

$$\frac{Un+1}{Un}=\frac{\frac{n+2}{3^{n+1}}}{\frac{n+1}{3^n}}=\frac{n+2}{3^{n+1}}.\frac{3^n}{n+1}=\frac{n+2}{3^n\times 3}.\frac{3^n}{n+1}=\frac{1}{3}.\frac{n+2}{n+1}$$

$$\lim_{+\infty}\frac{Un+1}{Un}=\lim_{+\infty}\frac{1}{3}.\frac{n+2}{n+1}=\lim_{+\infty}\frac{1}{3}.\frac{n}{n}=\frac{1}{3}<1$$

Alors d'après le critère de D'Alembert la série de terme générale Un est convergente.

Rappel du critére de d'Alembert:

Soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ une série à termes positives tel que $\lim_{+\infty}\frac{Un+1}{Un}$=a.

- Si a<1 alors $\sum_{n\geq 0} U_n$ est convergente
- Si a>1 alors $\sum_{n\geq 0} U_n$ est divergente
- Si a=1 on ne peut rien conclure

Rappel du critére de Cauchy

Soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ une série à termes positives tel que $\lim\limits_{+\infty} \sqrt[n]{Un}$=a.

- Si a<1 alors $\sum_{n\geq 0} U_n$ est convergente
- Si a>1 alors $\sum_{n\geq 0} U_n$ est divergente
- Si a=1 on ne peut rien conclure

2-La nature de $\sum_{n\geq 0}(\frac{4n+5}{3n-1})^n$

Je pose Un=$(\frac{4n+5}{3n-1})^n$

$\sqrt[n]{Un}= \frac{4n+5}{3n-1}$

$\lim\limits_{+\infty} \sqrt[n]{Un}=\lim\limits_{+\infty} \frac{4n+5}{3n-1}= \lim\limits_{+\infty} \frac{4n}{3n}= \frac{4}{3} >1$

Alors d'après le critère de D'Alembert la série de terme générale Un est divergente.

2-La nature de $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

Je pose Un= $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}=(-1)^n\times \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$et Vn= $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

On a $\lim\limits_{+\infty} Vn=\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

- On a Vn+1=$\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$or n+2>n donc $\sqrt{n+2}> \sqrt{n}$ (car x$\longrightarrow \sqrt{x}$ est croissante)

Alors $\sqrt{n+2}+ \sqrt{n+1} > \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$

Donc Vn+1<Vn donc (Vn) est décroissante

Alors d'après le critère spécial des séries alternées $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ est convergente

Rappel du critére spécial des séries alternées:

Soit Un=$(-1)^n Vn$

Si:

- (Vn) est décroissante
- $\lim\limits_{+\infty} Vn=0$

Alors la série de terme générale Un est convergente

4 points	**<u>Exercice 3 :</u>**
	On considère l'intégrale généralisée : $I = \int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$
1	1. Donner la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.
1	**2.** Montrer que : $\frac{1}{x+\sqrt{x}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ et en déduire la nature de I .
1	**3.** En utilisant le changement de variable $t=\sqrt{x}$; montrer que : $I = 2\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt$.
1	**4.** Déduire la valeur de I .

1-La nature de $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ est une intégrale de Riemann $\alpha=1/2<1$ donc elle converge

2-Montrer que $\frac{1}{x+\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 et déduire la nature de I

On a $\lim_{0}\frac{\frac{1}{x+\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{0}\frac{1}{x+\sqrt{x}} \times \sqrt{x} = \lim_{0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \lim_{0}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = 1$

Donc $\frac{1}{x+\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0

Or $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ est convergente donc d'après le critére d'équivalence I est convergente

3-Montrer que I=2 $\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt$

On a I= $\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$

On pose t= $\sqrt{x}$ alors $x=t^2$

Pour x=0 on a t=0

Pour x=1 on a t=1

On a $x=t^2$ alors dx=2t dt

Donc $I=\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{1}{t^2+t}2tdt = \int_0^1 \frac{1}{t(t+1)}2tdt = \int_0^1 \frac{2}{t+1}dt = 2\int_0^1 \frac{1}{t+1}dt$

4-Déduire la valeur de I

On a $I=2\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,dt = 2[\ln(t+1)]_0^1$

$=2\ (\ln(2)-\ln(1))$

$=2\ln(2)$

$=\ln(2^2)$

$=\ln(4)$

8 points	**Exercice 4 :**
	Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B=(e_1\ ,e_2\ ,e_3\ )$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base B est A et les matrices P , Q et D telles que :
	$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
1	**1. a-** Montrer que le polynôme caractéristique P_A de A est : $P_A(\lambda)=-(1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$
0,5	**b-** En déduire les valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 de A avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
0,5	**c-** En déduire que A est diagonalisable.
	2. Soient les vecteurs $u_1=(0\ ,1\ ,-1)$, $u_2=(-1\ ,1\ ,0)$ et $u_3=(1\ ,-1\ ,1)$
1	**a-** Montrer que les vecteurs u_1 , u_2 et u_3 sont des vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3.
0,5	**b-** Établir que $B'=(u_1\ ,u_2\ ,u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
0,5	**c-** Vérifier que P est la matrice de passage de B à B'.
1	**d-** Calculer $P.Q$ et en déduire que Q est la matrice inverse de P.
1	**3. a-** Vérifier que D est la matrice de f relativement à la base B'
1	**b-** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $A^n=PD^nP^{-1}$.
1	**c-** Calculer A^n en fonction de n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1-a Le polynôme caractéristique: $P(\lambda)= - (2-\lambda)(1- \lambda)(\lambda+1)$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A- \lambda I=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} -\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -3 & -2-\lambda & -1 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$Det(A-\lambda I)=\left|\begin{matrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -3 & -2-\lambda & -1 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2-\lambda & 1 \\ -3 & -2-\lambda \\ 3 & 3 \end{matrix} =(2-\lambda)(-2-\lambda)(2-\lambda)+(-3)+(-9)-(-3)(2-\lambda)-(-3)(2-\lambda)-3(-2-\lambda)$$

$P(\lambda)= (2-\lambda)^2(-2-\lambda)-3-9+3(2-\lambda)+3(2-\lambda)+3(2+\lambda)= (2-\lambda)^2(-2-\lambda)-12+6(2-\lambda)+3(2+\lambda)$

$= - (2-\lambda)^2(2+\lambda)-12+12-6\lambda+6+3\lambda= -(2-\lambda)^2(2+\lambda) +6-3\lambda= -(2-\lambda)^2(2+\lambda) +3(2-\lambda)= (2-\lambda)(-(2-\lambda)(2+\lambda) +3)$

$=(2-\lambda)(-(4-\lambda^2)+3) =(2-\lambda)(-4+\lambda^2+3) =(2-\lambda)(\lambda^2-1) =(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) = - (2-\lambda)(1- \lambda)(\lambda+1)$

1-a Le polynôme caractéristique: $P(\lambda) = -(2-\lambda)(1-\lambda)(\lambda+1)$

$$\mathrm{Det}(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -3 & -2-\lambda & -1 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}\begin{matrix} 2-\lambda & 1 \\ -3 & -2-\lambda \\ 3 & 3 \end{matrix} =(2-\lambda)(-2-\lambda)(2-\lambda)+(-3)+(-9)-(-3)(2-\lambda)-(-3)(2-\lambda)-3(-2-\lambda)$$

$P(\lambda) = (-4-2\lambda+2\lambda+\lambda^2)(2-\lambda)-3-9+6-3\lambda+6-3\lambda+6+3\lambda = (-4+\lambda^2)(2-\lambda)-3-9+6-3\lambda+6-3\lambda+6+3\lambda$

$= -8+4\lambda+2\lambda^2-\lambda^3-3-9+6-3\lambda+6-3\lambda+6+3\lambda = -\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2$

D’autre part on a

$P(\lambda) = -(2-\lambda)(1-\lambda)(\lambda+1)$

$= -(2-\lambda)(\lambda+1-\lambda^2-\lambda) = -(2-\lambda)(1-\lambda^2) = -(2-2\lambda^2-\lambda+\lambda^3) = -2+2\lambda^2+\lambda-\lambda^3$

D’où le résultat.

b-Déterminer les valeurs propres

P(λ)= - (2- λ)(1- λ)(1+ λ)

P(λ)=0 alors - (2- λ)(1- λ)(1+ λ)=0 donc (1- λ =0 ou 2- λ =0 ou 1+ λ =0) alors (λ =1 ou λ =2 ou λ = -1)

Alors les valeurs propres de A sont:

$\lambda 1= -1$

$\lambda 2= 1$

$\lambda 3=2$

C- En déduire que A est diagonalisable:

A admet 3 valeurs propres distincts dans R^3 alors A est diagonalisable

2-a-Montrer que U1,U2,et U3 sont des vecteurs propres:

U1=(0,1 , -1)	U2=(-1 , 1 , 0)	U3=(1 , -1 , 1)
Montrons que A.U1=λ1.U1 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ =λ1.U1 Donc U1 est le vecteur propre associé à la valeur propre λ1	Montrons que A.U2=λ2.U2 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1. \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ =λ2.U2 Donc U2 est le vecteur propre associé à la valeur propre λ2	Montrons que A.U3=λ3.U3 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2. \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ =λ3.U3 Donc U3 est le vecteur propre associé à la valeur propre λ3

b-Etablir que B’=(U1,U2,U3) est une base :

On a Card B’=dim R^3 =3; donc montrer que B’ est base reviens a montrer que B est libre.

Det (U1,U2,U3)=$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$

=-1-(-1)-(-1)=1$\neq$ 0 alors B’ est base

c- la matrice de passage

On a B=(e1,e2,e3) et B’ =(U1,U2,U3)

U1=(0,1 , -1)=0.e1+1.e2-1.e3

U2=(-1 , 1 , 0)=-1.e1+1.e2+0.e3

U3=(1 , -1 , 1)=1.e1-1.e2+1.e3

P=$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D-Calculer PQ puis déduire que P est inversible et donner son inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P.Q=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q.P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

Rappel de la méthode de définition pour calculer l'inverse d'une matrice:

Si $\begin{cases} A.B = I \\ B.A = I \end{cases}$ Alors A est inversible et son inverse $A^{-1} = B$

On a $\begin{cases} P.Q = I \\ Q.P = I \end{cases}$ Alors P est inversible et son inverse $P^{-1} = Q$

3-a- Vérifier que D=mat(f,B')

On a la matrice A=mat(f,B) est diagonalisable de valeurs propre -1,1,et 2 donc la matrice D définie

par : D=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice de l'application f dans la base B'

3-b-Montrer que A^n = P D^n P^{-1}

On a A=PD P^{-1}

Alors A^n =A.A. ……………………………………..A (n fois)

= PD P^{-1}. PD P^{-1}. PD P^{-1}……………………………. PD P^{-1} (n fois) et P $P^{-1} = I$

Donc A^n = PD.D.D…………………………………….D P^{-1}

A^n = P D^n P^{-1}

3-c$\underline{\text{En déduire } A^n \textit{ en fonction de } n}$

On a D=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

A^n = P D^n P^{-1}

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2^n \\ (-1)^n & 1 & -2^n \\ -(-1)^n & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^n + 1 - 2^n & 1 - 2^n \\ -(-1)^n + 2^n & 2^n - (-1)^n & 2^n \end{pmatrix}$$