הרצאה 1

אינדוקציה על $\mathbb{N}$.

הגדרה 1 (הוכחה באינדוקציה). כדי להוכיח שטענה P נכונה עבור כל $n \in \mathbb{N}$ צריך לעבור על שני שלבים הבאים:

- **בסיס האינדוקציה:** נוכיח כי הטענה P נכונה עבור 1.
- **צעד האינדוקציה:** נוכיח כי אם הטענה P נכונה עבור מספר טבעי $n \geqslant 1$, אזי היא נכונה גם עבור $n+1$.

דוגמא 1. נוכיח ש- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

הוכחה:

הגדרה 2 (הגדרת פונקציה באינדוקציה). כדי להגדיר פונקציה f באינדוקציה צריך לעבור על שני שלבים הבאים:

- **בסיס האינדוקציה:** להגדיר $f(1)$.
- **צעד האינדוקציה:** להגדיר $f(n+1)$ ע"י $f(n)$.

דוגמא 2. נגדיר $f(m,n)=m+n$.

הגדרה:

דוגמא 3. נגדיר $g(m,n)=m\cdot n$.

הגדרה:

דוגמא 4. נגדיר $h(n)=n!$.

הגדרה:

אינדוקציה על Σ^+.

הגדרה 3 (אלפבית). אלפבית (א"ב) – קבוצה סופית Σ לא ריקה של סימנים (אותיות).

דוגמא 5.

- $\Sigma = \{0,1\}$
- $\Sigma = \{\mathrm{a}, \ldots, \mathrm{z}\}$
- $\Sigma = \{\text{א}, \ldots, \text{ת}\}$

הגדרה 4 (מילה). מילה (או מחרוזת) מעל א"ב Σ היא סדרה סופית ולא ריקה של אותיות ב-Σ.

דוגמא 6.

- cat היא מילה מעל $\{\mathrm{a}, \ldots, \mathrm{z}\}$
- 1101 היא מילה מעל $\{0,1\}$

הגדרה 5 (הגדרת פונקציה באינדוקציה). כדי להגדיר פונקציה f באינדוקציה צריך לעבור על שני שלבים הבאים:

- **בסיס האינדוקציה:** להגדיר $f(\sigma)$ לכל $\sigma \in \Sigma$.
- **צעד האינדוקציה:** להגדיר $f(w\sigma)$ ע"י $f(w)$.

דוגמא 7. נגדיר פונקצית שישור מילים $s(w_1, w_2) = w_1w_2$.

הגדרה:

דוגמא 8. נגדיר פונקצית היפוך מילה $r(w)$.

הגדרה:

הגדרה 6 (הוכחה באינדוקציה). כדי להוכיח שטענה P נכונה עבור כל $w \in \Sigma^+$ צריך לעבור על שני שלבים הבאים:

- **בסיס האינדוקציה:** נוכיח כי הטענה P נכונה עבור Σ.
- **צעד האינדוקציה:** נוכיח כי אם הטענה P נכונה עבור w, אזי היא נכונה גם עבור $w\sigma$ לכל $\sigma \in \Sigma$.

דוגמא 9. נוכיח חוק הקיבוץ עבור שירשור: $s(w_1, s(w_2, w_3)) = s(s(w_1, w_2), w_3)$.

הוכחה:

דוגמא 10. נוכיח ש- $r(s(w_1, w_2)) = s(r(w_2), r(w_1))$.

הוכחה:

דוגמא 11. נגדיר אורך המילה $l(w)$.

הגדרה:

דוגמא 12. נוכיח ש- $l(s(w_1, w_2)) = l(w_1) + l(w_2)$.

הוכחה: