

# سؤال ① :

الف) من خواص ثابت کنیم که  $n^{\log n} \in O((\log n)^n)$

$$n^{\log n} < (\log n)^n \quad \text{یا} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\log n}}{(\log n)^n} = 0$$

برای این کار باید ثابت کنیم  $n > 1$  است پس  $\sqrt[n]{n}$  گشتن تا شش در نیمی هشتاد

$$n^{\log n} \rightarrow n^{\frac{\log n}{n}} \quad , \quad (\log n)^n \rightarrow \log n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{\log n}{n}}}{\log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^0}{\log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} = 0 \Rightarrow n^{\log n} = O((\log n)^n)$$

الف ب)

فرض کنیم که  $f(n) = o(g(n))$  برای اثبات این رابطه باید ثابت کنیم  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

پس داریم :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^r}{\log n}}{n(\log n)^r} = \frac{n}{(\log n)^r} \xrightarrow{\text{هرشال}} \frac{n}{r(\log n)^r}$$

$$\xrightarrow{\text{هرشال}} \frac{n}{r \log n} \xrightarrow{\text{هرشال}} \frac{n}{r} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{r} = \infty \Rightarrow f(n) = o(g(n))$$

Tina

بـ

۱)  $f(n) + g(n) = \Theta(\max(f(n), g(n)))$

فرض کنیم  $f(n) > g(n) \Rightarrow \exists c_1, c_2 \Rightarrow c_1 f(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 f(n)$   
 $\max(f(n), g(n)) = f(n)$

$\Rightarrow f(n) > g(n) \Rightarrow 2f(n) > f(n) + g(n)$

$\Rightarrow \exists c_1, c_2, n_0 \Rightarrow \forall n > n_0, c_1 f(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 f(n)$  ————— گزاره درست

۲) if  $f(n) = O(g(n))$ , then  $h(f(n)) = O(h(g(n)))$

غلط است، مثال نقض :

$$\left. \begin{array}{l} g(n) = n^3 \\ f(n) = n^2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(n) = O(g(n)), h(n) = \frac{1}{n} \Rightarrow h(n^2) \neq O(h(n^3))$$

۳)

بر اساس آنچه در کتاب داد ذکر شد، اگر در معادله‌ای از order ها استفاده شود، مثلاً  $O(f(n))$

می‌توانیم به جای آن تابعی از همان order را جایگزین کنیم از آنجایی که  $f(n) = O(f(n))$  پس می‌توانیم

$f(n) + O(f(n)) = \Theta(f(n)) \rightarrow 2f(n) = \Theta(f(n))$

تبدیلیم ←

$f(n) = \Theta(f(n)) \xrightarrow{\text{یک ضرب ثابت است}} 2f(n) = \Theta(f(n)) \checkmark$

Tina

Subject : .....

Year : ..... Month : ..... Day : ..... ( )

۴)  $f(n) = \Theta\left(f\left(\frac{n}{r}\right)\right)$

غلط است، مثال نقض،

$$f(n) = r^n \rightarrow f(n) = \Theta(r^n)$$

$$f\left(\frac{n}{r}\right) = r^{\frac{n}{r}} = \sqrt[r]{r^n} \rightarrow f\left(\frac{n}{r}\right) = \Theta(\sqrt[r]{r^n})$$

$$\left. \begin{array}{l} f(n) = \Theta(r^n) \\ f\left(\frac{n}{r}\right) = \Theta(\sqrt[r]{r^n}) \end{array} \right\} \Rightarrow f(n) \neq \Theta\left(f\left(\frac{n}{r}\right)\right)$$