

## سؤال (۳) :

**الف)** می دانیم که خط سوم یک بار کمتر از خط دوم اجرای شود و برای خط دوم داریم :

در هر بار loop اصلی با متغیر  $i = n$  ، حلقه خط دوم تا زمانی اجرای شود که  $ki = n$

می دانیم که  $ki$  جمله ای از دنباله حسابی  $ki + (k-1)i + (k-2)i + \dots + i$  با  $d = i$  است

$$ki = n = i + (k-1)i \quad \Leftarrow \quad a_n = i + (n-1)i \quad \text{پس داریم}$$

$$\Rightarrow n - i = (k-1)i \Rightarrow k = \frac{n-i}{i} + 1 \Rightarrow k = \frac{n}{i}$$

$$\text{حال برای تعداد کل اجرای خط (۲) داریم} \quad \text{تعداد} = \sum_{i=1}^n \frac{n}{i}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد} = n \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) = n \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

$$\text{در اساس سؤال ما} \quad \text{تعداد} = n \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) < n \log n$$

قبل

$$\Rightarrow \text{تعداد اجرا} = O(n \log n)$$

Subject : .....

Year : ..... Month : ..... Day : ..... ( )

ب. می دانیم  $\text{average case}$  مقداری که در هر بار می گیریم چرخه به  $n$  (افزایش می شود).

برابر (احتمال رخداد بیش از شرط  $\text{Cost} \times$ ) که در این سؤال احتمال رخداد بیش از

در هر چرخه برابر  $\frac{1}{i}$  و  $\text{Cost}$  نیز برابر 1 است.

$$n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \times 1 = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad \leftarrow \text{پس نهایت داریم}$$

که با توجه به سؤال طایقی می دانیم  $\log^n \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

$$n \leq \log^n \Rightarrow n = O(\log^n) \quad \leftarrow \text{پس}$$

ج ۱

۱) مورد اول را می توانیم پس از اثبات مورد ۲) نتیجه بگیریم چرا که  $n \log(\log n) = O(n \log n)$

اساسی اثبات مستقیم آن داریم:

برای بدست آوردن حد بالایی تعداد اجرای خط سوم، تعداد اجرای آن را  $i = 2$  که بیشترین

مقدار خواهد بود را بدست آورده و در  $n-1$  که تعداد اجرای جمله اول است ضرب کنیم،

$i = 2$  می داریم خط سوم تا زمانی اجرای شود که  $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots}_k = n$  که این  $k$  بار برابر است با:

$$\Rightarrow 2^k = n \rightarrow k = \log_2^n \rightarrow \text{تعداد اجرای خط سوم} = k(n-1) = \log_2^n (n-1)$$

Tina

$$\Rightarrow \text{تعداد اجرا} = O(n \log n)$$

Year : ..... Month : ..... Day : ..... ( )

(۲) حال آنکه دقیق تر رشد  $T$  را در خط ④ در نظر بگیریم می بینیم :

$$T \rightarrow T^2 \rightarrow T^4 \rightarrow T^8 \rightarrow \dots$$

پس  $T$  همیشه توانی برابر  $2^k$  دارد و توانیانی خط سوم اجزای فرد که  $T^{2^k} = n$

$$T^{2^k} = n \xrightarrow{\log} 2^k = \log n \rightarrow k = \log(\log n) \leftarrow \text{پس}$$

و از آن جایی که تعداد اجزای خط سوم برابر  $k \times (n-1)$  است  $\leftarrow$

$$\text{تعداد} = \log(\log n) (n-1) = O(n \log(\log n))$$

★ پایه های  $\log$  معکوس نیستند در محاسبه order ★