سوال ۲ :

الف)

$$T(n) = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \dots + \frac{n}{2^{\log n}}$$

$$T(n) = n\left(1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + \dots + 2^{\log n}\left(\frac{1}{2^{\log n}}\right)\right) = n \times k \times 1$$

k برابر تعداد توان های از ۲ است که n کوچک تر باشد (یا مساوی) پس برای بدست آوردن k باید $\log_2^n$ را حساب کنیم یعنی ← $k = \log_2^n$

$$\Rightarrow T(n) = O(n \log n)$$

ب)

$$T(n) = n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

راه یک (استفاده از الف) ←

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}\ \ll\ \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{\text{تعداد} = \log_2^n}$$

با مقایسه این عبارت با $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$

می دانیم که کوچک تر مساوی ۲ است.

و $2 \ll \underbrace{1 + 1 + \dots 1}_{\times \log_2^n}$

$$\xRightarrow{\times n} n\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \ll n\left(\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{\log_2^n \text{ تعداد}}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{براساس الف}} n\left(\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{\text{تعداد} = \log_2^n}\right) = O(n \log n)$$

$$\Rightarrow T'(n) = O(n \log n)$$

ج)

$$T(n) = 1 + 2 + \cdots + n$$

$$\rightarrow T(n) = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

$$\Longrightarrow T(n) \in \Theta(n^2)$$

د)

از این شروط می فهمیم که دنباله $a_1+\dots+a_m$ یک دنباله حسابی با d حداقل ① است.

$$\left.\begin{array}{l} a_1+\dots+a_m = n \\ 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_m \end{array}\right\}$$

حال برای این که m بزرگ‌ترین مقدار فرض شود داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \;,\; d = 1 \\ a_m = m \end{array}\right\} \Longrightarrow a_1+\dots+a_m = 1+\dots+m = \frac{m(m-1)}{2}$$

بر اساس «ج» می دانیم $T(n) = 1+\dots+n = \Theta(n^2)$ پس:

$$1+\dots+m = n = \Theta(m^2)$$

بر اساس تعریف داریم:

$$c_1 m^2 \leq n \leq c_2 m^2 \quad , n \geq n_0$$

$$\longrightarrow c_1 m^2 \leq n \xrightarrow{n, m \geq 1} \sqrt{c_1}\, m \leq \sqrt{n}$$

$$\Longrightarrow m \leq \frac{1}{\sqrt{c_1}} \sqrt{n} \Longrightarrow m \leq c_2 \sqrt{n} \quad n \geq n_0$$

$$\Longrightarrow m \in O(\sqrt{n})$$