بعض تطبيقات المصفوفات

د. أسمهان خضور

استخدام المصفوفات في التشفير:

تعتبر الرسائل المشفرة وسيلة أكثر أمانًا في الحروب لتبادل المعلومات الخطيرة، ومع ذلك فهي سلاح ذو حدّين تكمن خطورته عند وقوعه في أيدي الأعداء وتمكنهم من فك رموزه، حيث قطعت الكثير من الدول أشواطًا كبيرة في تطوير عمليات التشفير بالتوازي مع محاولة حل شيفرات دول أُخرى كما حدث في بريطانيا أثناء الحرب العالمية الثانية عندما أُستدعي كبار الرياضيين الإنجليز من قبل المخابرات البريطانية لفك رموز الشيفرة الأرمانية المسماة "Ultra" ونجاحه الباهر في فك رموز الشيفرة.

والآن سنوضح كيفية صياغة الرسائل المشفرة باستخدام المصفوفات ومعكوسها:

الشيفرات المصفوفية:

قبل البدء بتشفير رسالة نصية سنرفق الأحرف الأبجدية من A إلى Z بالأرقام المرتبة من $1 \leftarrow 26$ (مع المحافظة على الترتيب) كما نرفق المسافة بين كلمات الرسالة بالعدد (5) وكما هو موضح بالجدول الآتي: (أما ما يتعلق بعلاقات الترقيم والوقت فيمكن فهمها من سياق الكلام ويمكن كتابة الأعداد بشكل منفصل إن لزم الأمر)

(مسافة) : 0	E : 5	J : 10	O : 15	T : 20	Y : 25
A : 1	F : 6	K : 11	P : 16	U : 21	Z : 26
B : 2	G : 7	L : 12	Q : 17	V : 22	
C : 3	H : 8	M : 13	R : 18	W : 23	
D : 4	I : 9	N : 14	S : 19	X : 24	

ملاحظة:

يمكن بدء الأرقام بغير الرقم الواحد فمثلًا يمكن البدء بالرقم (65) وانتهاءً بالرقم (90) كالشيفرة " $ASCII$ " وهي المعيار المستخدم في الشيفرة الأمريكية لتبادل المعلومات.

مثال:

لنقم بتشفير الرسالة الآتية:

$"attack\ at\ down"$

وتعني " الهجوم عند بزوغ الفجر "

الحل:

نتبع الخطوات الآتية

1. نقوم بالتشفير الأولي للرسالة بتحويل حروفها إلى صف من الأعداد المقابلة لها ووضع العدد (0) مكان الفراغ (المسافة) بين كلمتين.
2. نقسم كل ثلاثة أعداد إلى مجموعات وإذا بقي عناصر نكمل المجموعة بالأصفار كما الآتي:

$"attack\ at\ down"$

0	14	23	1	4	0	20	1	0	11	3	1	20	20	1

هذا الصفر تم إضافته لإتمام المجموعة لثلاثة أعداد

3. نشكل من كل مجموعة متجهات:

$$\begin{bmatrix}1\\20\\20\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\3\\11\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\20\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\4\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}23\\14\\0\end{bmatrix}$$

4. والآن نختار مصفوفة مربعة من **البعد (3×3)** ولتكن A (بحيث تكون **عناصرها أعداد صحيحة**).

$$A=\begin{bmatrix}-3&5&6\\-1&2&2\\1&-1&-1\end{bmatrix}\longrightarrow \det(A)=-1$$

- ويجب أن يكون محددها يساوي إما (1) أو (-1) وذلك لنضمن أن عناصر مصفوفة المقلوب أعداد صحيحة.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&3&0\\1&-2&1\end{bmatrix}$$

- وتدعى المصفوفة A مصفوفة التشفير التي يجب أن تكون سرية.

5. نضرب المتجهات السابقة بمصفوفة التشفير A من اليسار ← فنحصل على متجهات جديدة تدعى المتجهات المشوشة.

المتجه الأول:

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 217 \\ 79 \\ -39 \end{bmatrix}$$

المتجه الثاني:

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 78 \\ 27 \\ -13 \end{bmatrix}$$

المتجه الثالث:

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 42 \\ -21 \end{bmatrix}$$

المتجه الرابع:

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

المتجه الخامس:

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 23 \\ 14 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

6. نضع المتجهات المشوشة بالترتيب ذاته على شكل صف من الأعداد بالشكل الآتي:

217
79
−39
78
27
−13
125
42
−21
26
10
−5
1
5
9

يتم فك رموز الشيفرة هذه من قبل المستعلم باستخدام معكوس المصفوفة A (أي A^{-1}) ومن ثم مقارنة الأعداد الناتجة بجدول الأحرف.

مثال:

ترجم الرسالة المشفرة الآتية باستخدام الشيفرة المصفوفية A السابقة:

144
55
−18
66
26
−5
80
33
−14
177
~~67~~ 64
-26

الحل:

1. لنرتب الرسالة العددية المشفرة المعطاة إلى مصفوفات الأعمدة من البعد (3×1) فنحصل على المتجهات المشوشة الآتية:

$$\begin{bmatrix}144\\55\\-18\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}66\\26\\-5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}80\\33\\-14\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}177\\6\cancel{7}4\\-26\end{bmatrix}$$

2. لإزالة التشويش نضرب كل المتجهات السابقة ب A^{-1} من اليسار فنجد:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\-1 & 3 & 0\\1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

المتجه الأول:

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\-1 & 3 & 0\\1 & -2 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}144\\55\\-18\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19\\21\\16\end{bmatrix}$$

المتجه الثاني:

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\-1 & 3 & 0\\1 & -2 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}66\\26\\-5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16\\12\\9\end{bmatrix}$$

المتجه الثالث:

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\-1 & 3 & 0\\1 & -2 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}80\\33\\-14\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\19\\0\end{bmatrix}$$

المتجه الرابع:

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\-1 & 3 & 0\\1 & -2 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}177\\6\cancel{7}4\\-26\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\15\\23\end{bmatrix}$$

ومنه نحصل على صف الأعداد الآتية:

19
21
16
16
12
9
5
19
0
12
15
23

بمقابلة هذه الأعداد بالأحرف المجدولة نستنتج الرسالة المطلوبة:

" *Supplies Low* "

وتعني المعدات منخفضة (وهي رد على الرسالة السابقة:

"*Attack at Down* "

" *You can see people's hiding scars*
With their favorite songs.."

حل وظيفة المحاضرة السابقة:

تمرين (1):

لتكن المصفوفة A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

1. أوجد الحدود المميزة لـ A.
2. أوجد القيم الذاتية لـ A والمتجهات الذاتية المقابلة لها
3. أوجد قاعدة وبعد الفضاء الذاتي $E(\lambda_1)$.
4. بالاعتماد على الطلبات السابقة أوجد $\det(A)$ و $trace(A)$ "أثر المصفوفة".
5. أوجد A^{-1} بالاعتماد على كايلي هاملتون.
6. حوِّل A إلى الشكل القطري (أو قد يرد السؤال هل A قابلة للتقطير؟ علل إجابتك. وفي حال الإيجاد، أوجد المصفوفة القطرية D المشابهة لها).

الحل:

1 **إيجاد المعادلة المميزة لـ A وهي:**

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0$$

بالنشر وفق ساروس نجد: (تم تفصيل كيفية الحل بالمثال في المحاضرة 11)

$$P_A(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$$

نقسم على $(\lambda - 1)$ فنجد:

$$(\lambda - 1)\,(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = 0$$

$$(\lambda - 1)^2\,((\lambda - 5) = 0$$

$\lambda_1 = 5$ " **قيمة ذاتية بسيطة** "

$\lambda_{2,3} = 1$ " **قيمة ذاتية مضاعفة** "

2 القيم الذاتية هي $\lambda_1 = 5$ ، $\lambda_{2,3} = 1$

❖ **إيجاد المتجهات الذاتية:**

إن المتجهات الذاتية لـ A هي الحلول غير الصفرية X للجملة الآتية:

$$\begin{bmatrix} \lambda-2 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda-2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نسمي هذه الجملة بـ $(*)$

من أجل $\lambda_1 = 5$ تصبح الجملة $(*)$ بالشكل الآتي:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}}_{B} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & +1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & +1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow r(B) = 2 < n = 3$$

إذن للجملة عدد لا نهائي من الحلول بمجهول اختياري واحد

وهو $x_3 = t$

<u>**والجملة المقابلة هي:**</u>

<u>**بما أن:**</u>

$$x_3 = t$$

$$\left.\begin{aligned} 4x_2 - 4x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right] \quad \begin{aligned} x_2 &= t \\ x_1 &= t \end{aligned}$$

ومنه فإن:

$$X(\lambda_1 = 5) = t \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{p_1}$$

<u>**من أجل $\lambda_{2\,,3} = 1$ تصبح الجملة $(*)$ بالشكل الآتي:**</u>

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}}_{B} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow r(B) = 1 < n = 3$$

<u>**إذن للجملة عدد لا نهائي من الحلول بمجهولين**</u>

<u>**اختياريين هما:**</u>

$$x_{\cancel{1}\,2} = \alpha$$
$$x_{\cancel{2}\,3} = \beta$$

<u>**والجملة المقابلة هي:**</u>

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$X(\lambda_{2\,,3} = 1) = \begin{bmatrix} -2\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \,. \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{p_2} + \beta \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{p_3}$$

3 إيجاد قاعدة وبعد الفضاء الذاتي:

إن المجموعة S المكونة من المتجه p_1 هي:

$$S = \left\{ \; p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \; \right\}$$

تشكل أساس للفضاء الذاتي $E(\lambda_1 = 5)$ لأنها مجموعة مولدة للفضاء ومستقلة خطياً $P_1 \neq 0$

إذن:

$$\dim E(\lambda_1 = 5) = card(S) = 1$$

كما أن:

$$S = \left\{ p_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad p_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

تشكل أساس للفضاء الذاتي $E\ (\lambda_{2\ ,3} = 1)$ ومستقلة خطيًا حيث:

$$\alpha p_1 + \beta p_2 = 0$$

$$\longrightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$

إذن:

$$\dim E\left(\lambda_{2\ ,3} = 1\right) = card(S) = 2$$

4 إيجاد $\det(A)$ و $trace(A)$:

بالاعتماد على تعريف أثر المصفوفة (في نهاية المحاضرة 11) نجد أن:

مجموع القيم الذاتية في المصفوفة A يساوي مجموع عناصر قطرها الرئيسي (وهو أثر المصفوفة A) ويساوي أيضًا حسب معادلتها المميزة:

$$p(A) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots\cdots\cdots + c_n = 0$$

ومنه:

$$Trace(A) = -c_1 = 7$$

وأيضًا يساوي مجموع عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة A: $\quad 2 + 3 + 2 = 7$

❖ **إيجاد $\det(A)$ وهو جداء القيم الذاتية للمصفوفة A:**

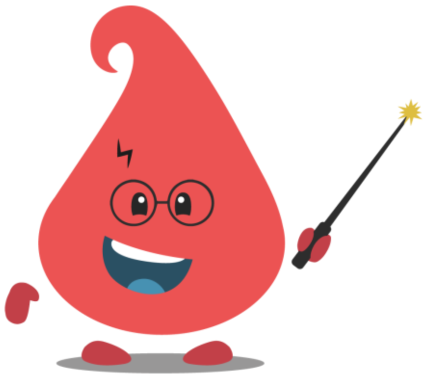
$$\det(A) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3$$
$$= 1 \times 1 \times 5 = 5$$

ويساوي أيضًا

$$(-1)^n - c_n = (-1)^3\ (-5) = 5$$

وللتأكد يمكن حساب $\det(A)$ بالطرق المعتادة فنجد أن:

$$\det(A) = 5$$



5 إيجاد A^{-1} بالاعتماد على كايلي-هاملتون:

وجدنا أن المعادلة المميزة لـ A هي:

$$P_A(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$$

وبالاعتماد على كايلي-هاملتون فإن A تحقق معادلتها المميزة أي أن:

$$A^3 - 7A^2 + 11A - 5 = 0$$

نضرب طرفي المعادلة ب A^{-1} فنجد:

$$A^2 - 7A + 11I_3 - 5A^{-1} = 0$$

بعزل A^{-1} والقسمة على أمثالها نجد:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\{\ A^2 - 7A + 11I_3\ \}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\left\{\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^2 - 7\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}\ \right\}$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\ \begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -14 & -14 & -7 \\ -7 & -21 & -7 \\ -7 & -14 & -14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}\ \right\}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = A^{-1}$$

وللتحقق نضرب $A.A^{-1}$ ويجب أن يكون الناتج هو المصفوفة الواحدية I_3.

6 إيجاد فيما إذا كانت A قابلة للتقطير:

بما أن A من البعد (3×3) فهي تملك ثلاث متجهات مستقلة خطيًا

إذًا A قابلة للتقطير:

أو:

$$\dim E(\lambda_{2,3} = 1) = 2 = ord(\lambda_{2,3} = 1)$$

$$\dim E(\lambda_1 = 5) = 1 = ord(\lambda_1 = 5)$$

إذًا A قطورة والمصفوفة القطرية D المشابهة لها هي:

$$D = p^{-1}.A.p$$

حيث المصفوفة p هي المتجهات السابقة التي نتجت معنا ونأخذها بنفس الترتيب.

عملية ضرب المصفوفات ليست تبديلية

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن القيم الذاتية تتوضع على القطر الرئيسي.

SEE YOU GUYS..❤