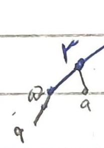
تکلیف گسسته ۱۱ ۸۱۰۱۰۰۰۸۴ محمد شاملو

(۱) الف) (۱) پیش ترتیب : ۱ ۳ ۵ ۴ ۹ ۷ ۶ ۲ ۸ ۱۰ ۱۱ ۱۳ ۱۲ ۱۴

(۲) میان ترتیب : ۵ ۳ ۹ ۴ ۶ ۷ ۱ ۸ ۲ ۱۲ ۱۳ ۱۱ ۱۴ ۱۰

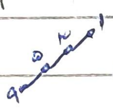
(۳) پس ترتیب : ۵ ۹ ۶ ۷ ۴ ۳ ۸ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۱ ۱۰ ۲ ۱

ب) ریشه ۱ است چون در پیش ترتیب اول ذکر شده است !



۹، ۵ و ۳ در یک زیردرخت T از (۱) قرار دارند پس بعد

نمایش پیش ترتیب پس از ۱، ۳ را داریم پس ۳ در محل خاص و یکتا است

برای رسم ۵ و ۹ : اولاً طبق خط اول ۲ یا در زیردرخت از ۱ می کنند و زیر ۳ قرار دارند دو حالت داریم (۱)  (۲) 

در حالت اول نمایش میان ترتیب صادق نیست پس تنها حالت  است !

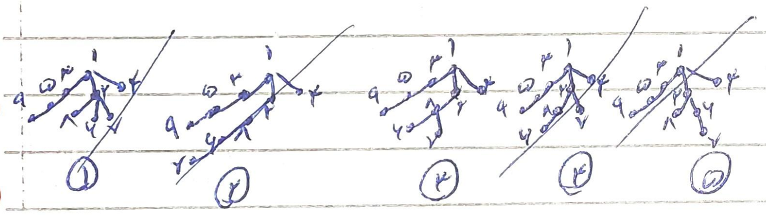
از آنجا که در نمایش میان ترتیب پس از ۹، ۱ نوشته شده است منظور ۴ جای بعدی از ۱ خارج می شود

که مطابق نمایش پیش ترتیب تنها می تواند حداکثر ۲ باشد پس در حال حاضر نمایش  را داریم

در نمایش میان ترتیب آنچه بین ۱ و ۲ است یعنی ۶، ۸ و ۷ زیر درخت ۲ هستند و ۴ بیگمان از (۱) جدا شده است

برای مطالعه خوب هر حالت یکتا وجود ندارد !

طبق نمایش پیش ترتیب حالات زیر ممکن است

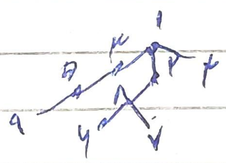


طبق نمایش میان ترتیب ۶ بعد از ۱ آمده پس

۶ فرزند است پس حالت ۵، ۲ حذف است

بین ۳ حالت باقی مانده چون ۷ زودتر از ۲ در نمایش میان ترتیب آمده پس نمی تواند فرزند ۲ باشد پس حالت

۱، ۴ هم حذف است ! همچنین ۴ نمی تواند در جایگاه دیگری قرار بگیرد پس



تنها حالت، حالت روبرو است !

۲

۱

۳) درخت T را از یک رأس دلخواه به عنوان ریشه آویزان می‌کنیم. پایین‌ترین برگ را u می‌نامیم که پدر او رأس w است
در این صورت همه بچه‌های w برگ هستند. اگر w همان ریشه باشد که حکم بدیهی می‌شود چون تنها یک رأس غیر برگ داریم
در غیر این صورت با حذف تمام فرزندان w، به درخت T' با تعداد برگ کمتری می‌رسیم که حداقل ۲ رأس داشته و رأس
درجه ۲ ندارد. پس فرض استقرا برای آن برقرار است! فرض کنیم تعداد برگ‌ها در این حالت A' باشد
و تعداد غیر برگ‌ها B' باشد. چون فرض استقرا بود که در این حالت $A'>B'$ است! حال تنها تغییری که
از این حالت برای رسیدن به $n+1$ رأس دادیم افزودن برگ‌های w است که به حداقل A' اضافه می‌کند
و به B' هم یکی اضافه می‌شود (چون تعداد برگ‌های w یا صفر است (استقرا نیست) یا ۲ به بالا است) پس باز هم $A>B$
است. پس $\Leftarrow$ حکم ثابت شد!

☆ استقرا: پایه: $n=2$ بدیهی است
فرض برای همه‌ی درخت‌ها با n رأس یا کمتر از آن حکم برقرار است (استقرای قوی) حال برای $n+1$ رأس
ثابت می‌کنیم!

۴) برهان خلف: رشته‌ای که دارای رئوس بیشتری است را N_2 و رشته‌ی با رئوس کمتر را N_1 می‌نامیم!
فرض خلف: در رشته‌ی N_1 تعداد برگ بیشتری داریم
طبق فرض مسئله تمامی N_2 رأس N_2 پدر هستند و برگ نیستند که یعنی هر یک لااقل یک برگ را دارا هستند
پس یعنی لااقل یک رأس متناظر در N_1 دارا هستند یعنی $N_1 \geq N_2$ می‌شود که خلاف فرض مسئله است ✗
پس رشته‌ی بزرگتر لااقل یک برگ جلو است!

(۴)

استقراء ، $n=2$  مجموع فواصل ۱ است که $1 \geq \binom{2}{2}$

$n=3$  $2 \geq \binom{3}{2}$

$3 \geq \binom{3}{2}$

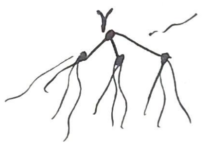
فرض استقرای قوی ، برای همه‌ی درخت ها با تعداد رئوس ۲ تا $k=n$ حکم برقرار است !

حکم ، برای $n=k+1$ نیز حکم برقرار است ! $\left(d(u,v) \geq \frac{k+1}{2} \right)$

(۱) اگر ریشه تنها یک فرزند داشته باشد (یک خط P_n باشد) $\checkmark \binom{k+1}{2} \geq \frac{k \times (k+1)}{2}$

$\mathrm{Max}(\deg(v_i)) = 2$

(۲) اگر ریشه چند فرزند داشته باشد (یا کلاً رئوسی با بیش از ۲ فرزند داشته باشیم)



درخت شبیه شکل مقابل خواهد بود ، طبق فرض استقراء می دانیم حکم برای هریک از زیردرخت های ۲ برقرار است !

اگر زیردرخت های ۲ را به ترتیب $T_1, \ldots, T_n$ بنامیم

$$\sum d(u,v) = n + \sum_{T_1}^{T_n} \sum \text{فواصل}$$

یعنی مجموع فواصل کل گراف برابر است با n + مجموع فواصل هریک از زیرگراف ها !

$$\sum_{T_1}^{T_n} \sum_T \text{فواصل} \geq \binom{T_{n_1}}{2} + \binom{T_{n_2}}{2} \cdots \binom{T_{n_n}}{2} =$$

مجموع فواصل T_1 تا T_n

سطر

$$(n_1-1)+(n_2-1)+\cdots(n_n-1) \geq \frac{n_1 \times (n_1-1)}{2} + \frac{n_2 \times (n_2-1)}{2} + \cdots \frac{n_n \times (n_n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow n + 2\big((n_1-1)+(n_2-1)+\cdots(n_n-1)\big) \geq n_1(n_1-1) \cdots n_n(n_n-1)$$

$$\Rightarrow n \geq (n_1-2)(n_1-1) + \cdots (n_n-2)(n_n-1)$$

همه‌ی حاصلضرب ها مثبت است و تعداد آنها n تاست در بدترین حالت که همه‌ی اعداد ۲ باشد

مساوی و در غیر این صورت عبارت سمت راست بزرگتر است ✓

(5) یک درخت داریم چون با حذف یا اضافه کردن یک یال درخت نمی‌شود! پایین‌ترین یال در T را در نظر می‌گیریم که در T وجود ندارد و آن را حذف می‌کنیم. گراف ۲ مؤلفه می‌شود که یکی از مؤلفه‌ها گراف دیگر هست!

همچنین اگر گرافی دارای ۲ دور باشد با حذف ۲ یال می‌توان دورها را حذف کرد! چون تکرار دورها ثابت است پس تعداد یال‌هایی که باید حذف شوند نیز ثابت و ناوردا است! همان طور که گفته شد پایین‌ترین یال در T را در نظر می‌گیریم که در T وجود ندارد و آن را حذف می‌کنیم گراف به ۲ مؤلفه تقسیم شده که یکی از آنها در گراف دیگر است که در درخت دیگر این دو مؤلفه با یک یال به هم متصل هستند این ۲ مؤلفه را به هم متصل کرده (با یک یال) و یال دیگری را حذف می‌کنیم که در این حالت تعداد مراحل متعدد نامحدود می‌شود که این تناقض است X. حکم ثابت شد!

(6) در هر مرحله از برگ‌های یک برگ سفید و یک برگ سیاه را حذف می‌کنیم این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم تا هیچ برگ سیاهی باقی نماند. اکنون یک مؤلفه را در نظر می‌گیریم که تعداد رئوس سفید آن از سیاه بیشتر است. در این مؤلفه یک رأس سفید را انتخاب کرده و به جای آن ۱+ می‌گذاریم و فرزندان سیاه آن را بر می‌گردانیم و یکی از فرزندان را ۱- می‌گذاریم تا ۱ خنثی شود و این کار را این بار برای رأس‌هایی که ۱- نوشته اند انجام می‌دهیم تا جایی ادامه می‌دهیم که به برگ برسیم و سپس تمام رأس‌های سفید باقی مانده را در نظر می‌گیریم در این حالت چون ابتدا سفیدها از سیاه‌ها بیشتر است و تعداد مساوی حذف شده باز هم تعداد سفید از سیاه بیشتر است و شرط سؤال برقرار است! حال باید رئوس حذف شده باز گردد. به ازای هر یال سیاهی که به برگ سفید اضافه می‌کنیم با توجه به تعداد برگ سفید یک یال سفید حذف شده را نیز با تعداد مربوط به زیر یال سیاه اضافه می‌کنیم ۳۰ حالت ... که با این روش می‌توان با حفظ شرایط یال‌ها را باز گرداند! ✓