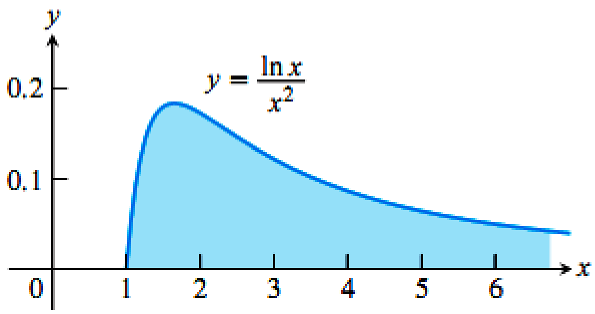
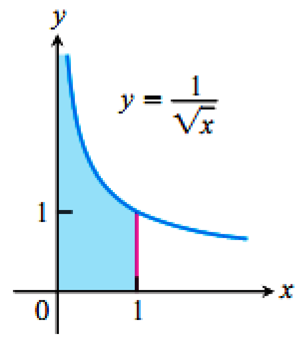
۹- انتگرال‌های غیرعادی

۹-۱- مقدمه (بخش ۷-۸ کتاب)

در بررسی حد یک تابع دیده شد, ممکن است هدف بررسی حد تابع باشد وقتی حد در بینهایت سوال شده باشد و یا خودِ حد بینهایت شود. در مورد انتگرالها نیز چنین تشابهی وجود دارد. در بحث انتگرال معین عنوان شد که تابع f بایستی بر بازه مشخص $[a,b]$ تکه‌ای پیوسته و در نتیجه کراندار باشد. زیرا اگر کراندار نباشد, نمی‌توان Sup یا Inf تابع را حداقل در یک زیر بازه بدست آورد. در این فصل قرار است انتگرالهایی را بررسی کنیم که یا بازه آن در یک یا دو سمت به بینهایت برود و یا آنکه تابع f بربازه مورد نظر کراندار نبوده و به بینهایت برود. مثلا سوال این است که آیا سطوح زیر محدودند؟ نحوه محاسبه انتگرالها شبیه قبل است؟ آیا اگر نتوان انتگرالها را محاسبه کرد لااقل میتوان گفت انتگرال به عدد خاصی میل میکند یا خیر.





با دو مثال ساده دو نوع انتگرال غیرعادی را معرفی می‌کنیم:

نوع اول: فرض کنید هدف محاسبه انتگرال $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ باشد. بنا به آنچه بعدا خواهیم دید, این انتگرال بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{A\to+\infty}\int_1^{A}\frac{dx}{x^2} = \lim_{A\to+\infty}\frac{-1}{x}\Big|_1^A = 1$$

اصطلاحا می‌گوییم این انتگرال به 1 همگراست. حال فرض کنید بخواهیم $\int_{-\infty}^{\infty}x\,dx$ را محاسبه کنیم. ممکن است مشابه آنچه در بالا دیده شد, بخواهیم آنرا بصورت زیر بدست آوریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}x\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}x\,dx = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}x^2\Big|_{-A}^{A} = 0$$

اما اگر به آنچه نوشته شده است توجه کنیم, خواهیم دید که ما در واقع بجای $\infty - \infty$ عدد صفر را قرار داده‌ایم, که قطعا نادرست است. در واقع $-\infty$ در کران پایین می‌تواند هر عدد دلخواه کوچک و ∞ در کران بالا می‌تواند هر عدد دلخواه بزرگی باشد. به عبارتی $-\infty$ کران پایین هیچ ارتباطی با ∞ کران بالا ندارد و نمی‌توان گفت اینها قرینه‌اند. موضوع رفع ابهام هم به کل منتفی است, چرا که این دو حد بالا و پایین کاملا مستقل از یکدیگرند. بنابراین حاصل این انتگرال میتواند هر عدد دلخواهی باشد که البته مشخص هم نیست. به همین دلیل این انتگرال را اصطلاحا واگرا می‌گوییم. ممکن است کسی با این استدلال که تابع x تابعی فرد است, حاصل $\int_{-\infty}^{\infty}x\,dx$ را صفر بداند که آنهم نادرست است, چرا که در واقع ∞ و $-\infty$ قرینه یکدیگر نمی‌باشند.

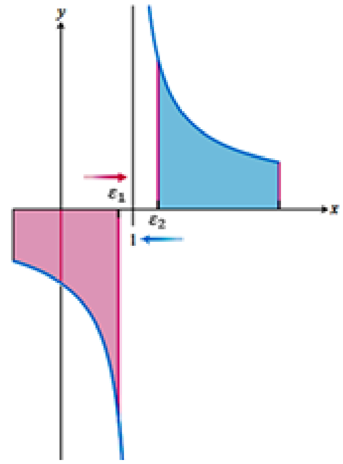
بنا به تعریف آنچه در بالا محاسبه شد را اصطلاحا CPV انتگرال (مقدار اصلی کوشی) می‌نامند که معادل آن است که حد بالا را قرینه حد پایین بدانیم.

نوع دوم: فرض کنید هدف محاسبه $\int_{-1}^{5}\frac{dx}{(x-1)^3}$ باشد. دیده میشود که انتگرالده درنقطه $x=1$ که در بازه $[-1,5]$ قرار دارد (و تکین نامیده میشود) به بینهایت میرود. آیا سطح زیر آن محدود است؟ برای محاسبه این انتگرال آنرا در نقطه تکین شکسته و برای تکین از حالت حدی آن استفاده می‌کنیم. لازم بذکر است اینکه چرا برای تکین از حالت حدی آن استفاده میشود بدلیل تعریفی است که بعدا خواهد آمد. لذا:

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_{-1}^{1-\varepsilon_1}\frac{dx}{(x-1)^3} + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{1+\varepsilon_2}^{5}\frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2\varepsilon_1^2}\right) + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\left(\frac{1}{2\varepsilon_2^2}-\frac{1}{32}\right)$$

$$\int_{-1}^{5}\frac{dx}{(x-1)^3} \to Diverge$$



از آنجا که هر دو انتگرال به بینهایت میرود پس هر دو واگرا بوده لذا حاصل, واگرا خواهد شد. در اینجا نیز مشابه مثال قبل نباید این سوال در ذهن ایجاد نشود که ممکن است $\infty-\infty$ رفع ابهام شده و به عددی خاص میل کند. زیرا اینها دو انتگرالند و هیچ دلیلی ندارد ε_1 و ε_2 با هم ارتباطی داشته باشند و هر دو مستقل از هم میباشند. بنابراین با هر انتخاب دلخواه ε_1 و ε_2 کوچک, میتوان هر عدد دلخواهی را برای جواب بدست آورد. به عبارتی می‌توان گفت در تفکیک انتگرالها, اگر یکی از انتگرالها واگرا شد, کل انتگرال واگرا خواهد بود.

اما اگر از ابتدا توجه به نقطه تکین نشود, مساله را بصورت زیر حل خواهیم کرد:

$$\int_{-1}^{5}\frac{dx}{(x-1)^3} = \frac{-1}{2(x-1)^2}\Big|_{-1}^{5} = -\frac{1}{32}+\frac{1}{8}=\frac{3}{32} \quad \boxed{\times}$$

اشکال این محاسبه چیست؟ بدیهی است انجام این کار معادل آن است که بجای $\infty-\infty$ مقدار صفر قرار داده باشیم. به بیان دیگر علت ریاضی اشتباه این محاسبه آن است که نوشتن $\frac{-1}{2(x-1)^2}$ نادرست است زیرا تابع $\frac{1}{(x-1)^3}$ در بازه مورد نظر پیوسته نیست. در اینجا نیز مقدار $\frac{3}{32}$ را CPV انتگرال می‌نامیم که درست معادل آن است که $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ منظور شده باشد. درست مشابه قسمت قبل که CPV معادل آن بود که حدود بینهایت در بالا و پایین را مساوی یکدیگر (به لحاظ قدرمطلق) در نظر بگیریم.

بدیهی است اگر انتگرالی همگرا باشند, یعنی به انتخاب ε_1 و ε_2 بستگی ندارد, از جمله اینکه $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ باشد, که همان CPV را خواهد داد. به عبارتی اگر بطریقی ثابت شود که انتگرالی همگراست, حاصل انتگرال با CPV آن یکی است. دقت شود در انتگرال نوع دوم نیز به دلیل فرد بودن تابع $\frac{1}{x^3}$ نمی‌توان گفت $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3}=0$, چرا که $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^3}$ و $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^3}$ هر دو بینهایت و لذا واگرا هستند.

بطور کلی می‌توان گفت انتگرالهای غیرعادی سه نوع دارند. در نوع اول, یک یا دو کران بینهایت است. در نوع دوم, در یک یا چند نقطه (که داخل بازه انتگرال‌گیری است) انتگرالده بینهایت میشود که به آن نقاط, تکین یا منفرد می‌گوییم. در نوع سوم نیز ترکیب این دو را خواهیم داشت. برای سادگی, می‌توان بینهایت را نیز در انتگرال نوع اول, تکین نامید. در کل این انتگرالها را غیرعادی, تکین, ناویژه, ناسَره, منفرد یا مجازی نیز مینامند.

توجه به بینهایت بودن کران در انتگرال نوع اول و بینهایت بودن انتگرالده در نوع دوم حائز اهمیت است. بعنوان نمونه انتگرال $\int_0^{3000} \sqrt{x}e^x dx$, یک انتگرال عادی است. همچنین انتگرال $\int_0^1 \frac{1-cosx}{x^2} dx$, نیز غیرعادی نیست, زیرا حد آن در صفر کراندار و برابر $\frac{1}{2}$ است.

انتگرالهای نوع اول و دوم همواره با تغییر متغیر به هم تبدیل میشوند, اما گاهی ممکن است به انتگرال عادی هم تبدیل شوند. به عنوان مثال انتگرال نوع دوم زیر را میتوان با تغییر متغیر, هم به نوع اول و هم به عادی تبدیل کرد.

$$I=\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}} \to \begin{cases} 2-x=\dfrac{1}{u} \to I=\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{du}{u\sqrt{2u-1}} & \text{نوع اول} \\ 2-x=t^2 \to I=2\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}} & \text{عادی} \end{cases}$$

۹-۲- نحوه محاسبه انتگرالهای غیرعادی

انتگرال غیرعادی نوع اول: بنا به تعریف اگر $f(x)$ در بازه $[a,A]$ انتگرال پذیر باشد, در اینصورت:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx$$

و چنانچه هر دو کران بینهایت باشند, با تفکیک انتگرالها خواهیم داشت:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\int_B^c f(x)dx + \lim_{A\to+\infty}\int_c^A f(x)dx \neq \underbrace{\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^A f(x)dx}_{CPV(I)}$$

انتگرال غیرعادی نوع دوم: بنا به تعریف اگر $f(x)$ در بازه $[a+\varepsilon,b]$ انتگرال پذیر بوده و در $x=a$ نامتناهی باشد:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

و اگر $f(x)$ در نقطهای داخل بازه مانند $x=c$ نامتناهی باشد:

$$I=\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx \quad ; \quad if\ \varepsilon_1=\varepsilon_2 \to CPV(I)$$

بطور کلی اگر تکین در داخل بازه نباشد, میتوان مشابه انتگرال معین معمولی آنرا محاسبه کرد و نیازی به نوشتن انتگرال بر حسب حد نمیباشد.

چند نکته:

۱- وقتی انتگرالی واگرا (Diverge) است که یا به بینهایت برود و یا به عدد مشخصی میل نکند (مانند حد $sinx$ در بینهایت) در غیر اینصورت همگرا (Converge) میباشد. معمولا برای نمایش واگرایی از (D) و برای همگرایی از (C) استفاده میشود.

۲- مقدار اصلی یک انتگرال الزاما با خود آن برابر نیست مگر آنکه ابتدا نشان داده شود که انتگرال همگراست.

۳- همواره انتگرال را بگونهای میشکنیم که هر انتگرال فقط یک ناسرگی داشته باشد. مثلا $\int_{-5}^{\infty} \frac{dx}{x}$ را بصورت زیر تفکیک میکنیم:

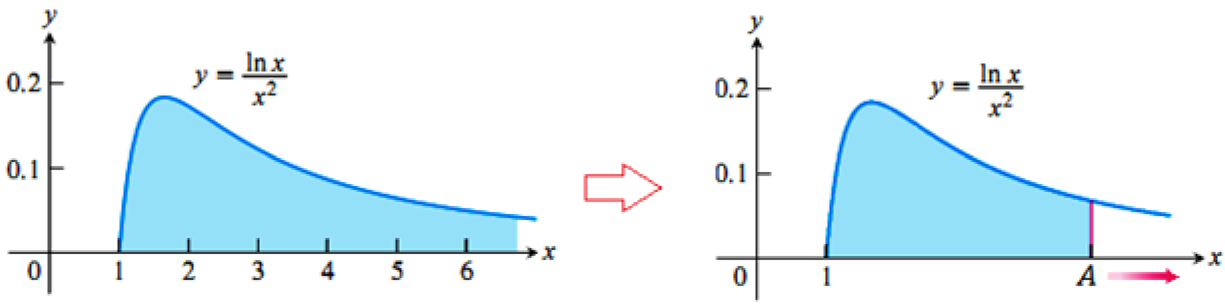
$$\int_{-5}^{\infty}\frac{dx}{x} = \int_{-5}^{0}\frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} + \int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$$

۴- پس از شکستن یک انتگرال فقط وقتی همه انتگرالهای ظاهر شده همگرا باشند, انتگرال مورد نظر همگراست. پس اگر یکی از انتگرالها واگرا باشد, انتگرال اصلی واگرا خواهد شد.

۵- ممکن است انتگرال جمع دو تابع متفاوت همگرا بوده, اما انتگرال هر تابع واگرا باشد. مثلا انتگرال $\int_0^\infty \frac{dx}{x+1}$ و $\int_0^\infty \frac{-dx}{x+2}$ هر دو واگرا هستند, اما $\int_0^\infty \left(\frac{1}{x+1}+\frac{-1}{x+2}\right)dx$ انتگرالی همگرا است.

مثال ۹-۱ حاصل انتگرالهای زیر را بدست آورید.

$$1)\ \int_1^{+\infty}\frac{Lnx}{x^2}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \underbrace{Lnx}_{u}\underbrace{\frac{dx}{x^2}}_{dv}=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{LnA}{A}-\frac{1}{A}+1\right)=0-0+1=1\ \blacksquare$$

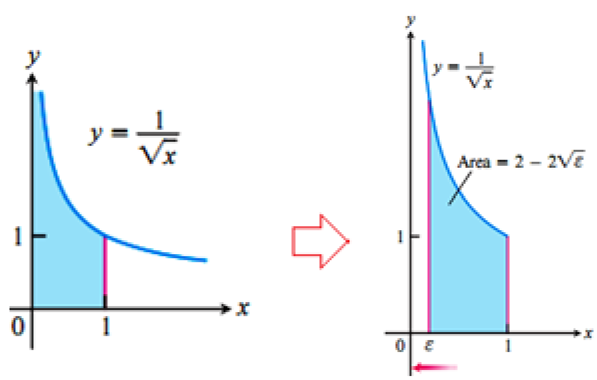


$$2)\ \int_2^{+\infty}\frac{(x+3)dx}{(x-1)(x^2+1)}=\lim_{A\to+\infty}\left(2Ln(x-1)-Ln(x^2+1)-\tan^{-1}x\right)\Big|_2^A$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(Ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}-\tan^{-1}x\right)\Big|_2^A=\left(0-\frac{\pi}{2}\right)-\left(Ln\frac{1}{5}-\tan^{-1}2\right)\approx 1.1458\ \blacksquare$$

$$3)\ \int_0^{+\infty}x\sin x dx=\lim_{A\to+\infty}(-A\cos A+\sin A)\to \text{واگرا}\ (D)\ \blacksquare$$

$$4)\ \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}(2-2\sqrt{\varepsilon})=2$$



$$5)\ I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\cos\theta+3}\xrightarrow{u=\tan\frac{\theta}{2}}I=\int_0^0\frac{du}{2+u^2}=0\qquad\boxed{\times}$$

که جواب نادرستی است. در واقع این تغییرمتغیر مجاز نیست, زیرا برای $\theta=\pi$ نقطه $u=\tan\frac{\theta}{2}$ ناپیوستگی خواهد بود. لذا انتگرال را به دو بازه شکسته و سپس تغییرمتغیر را بکار می‌گیریم:

$$I=\int_0^\pi\frac{d\theta}{\cos\theta+3}+\int_\pi^{2\pi}\frac{d\theta}{\cos\theta+3}=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{du}{2+u^2}+\lim_{B\to-\infty}\int_B^0\frac{du}{2+u^2}$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{A\to+\infty}tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^A+\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{B\to-\infty}tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_B^0=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\quad\blacksquare$$

مثال ۹-۲ نشان دهید اگر تابع $f(x)$ زوج باشد, مقدار اصلی انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ با مقدار واقعی آن یکی است.

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)dx+\lim_{B\to+\infty}\int_{-B}^0 f(x)dx$$

$$\int_0^A f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-A}^A f(x)dx\quad ;\quad \int_{-B}^0 f(x)dx=\int_0^B f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-B}^B f(x)dx$$

پس اگر وقتی$A\to+\infty$ و$B\to+\infty$ هر دو حد بالا موجود و برابر با $\frac{1}{2}CPV$ خواهند شد و لذا $I=CPV(I)$. $\blacksquare$

مثال ۹-۳ عدد c را بگونه‌ای بیابید که انتگرال $I=\int_2^{+\infty}\left(\frac{c}{x+1}-\frac{x}{x^2+4}\right)dx$ همگرا شود.

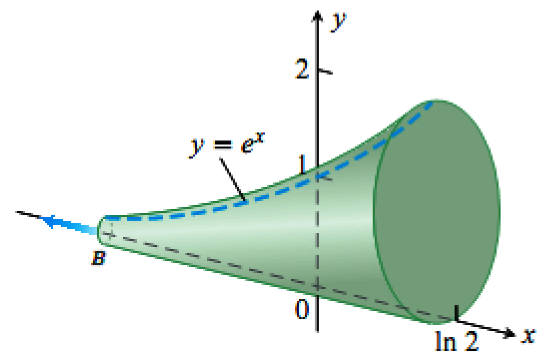
$$I=\lim_{A\to+\infty}Ln\left[\frac{(x+1)^c}{(x^2+4)^{\frac{1}{2}}}\right]\Big|_2^A\quad ;\quad \lim_{A\to+\infty}\frac{(A+1)^c}{(A^2+4)^{\frac{1}{2}}}\neq\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}\to c=1\quad\blacksquare$$

مثال ۹-۴ حجم شکل زیر را بدست آورید. مقاطع همه دایره بوده و از پایین به محور افق و از بالا به منحنی e^x محدود شده‌اند.

$$A(x)=\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}e^{2x}\to dV=A(x)dx$$

$$\to V=\int_{-\infty}^{Ln2}\frac{\pi}{4}e^{2x}\,dx=\frac{\pi}{4}\lim_{B\to-\infty}\int_B^{Ln2}e^{2x}dx$$

$$=\frac{\pi}{8}\lim_{B\to-\infty}e^{2x}\Big|_B^{Ln2}=\frac{\pi}{8}\lim_{B\to-\infty}(e^{2Ln2}-e^{2B})=\frac{\pi}{2}$$



مثال ۹-۵ حاصل حد زیر را بدست آورید.

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\to Ln(A)=\lim_{n\to\infty}Ln\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}Ln\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(Ln\frac{1}{n}+Ln\frac{2}{n}+\cdots+Ln\frac{n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Ln\frac{i}{n}=\int_0^1 Lnx\,dx$$

$$Ln(A)=\int_0^1 Lnx\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 Lnx\,dx=-1\to A=\frac{1}{e}\to n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^n\ (n\to+\infty)\quad\blacksquare$$

توضیح: یک تقریب بهتر توسط استرلینگ با رابطه زیر داده شده است: (این رابطه در بحث سریها ثابت می‌شود)

$$\boxed{n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\quad as\quad n\to+\infty}\quad (\text{Stirling's formula})\quad\blacksquare$$

مثال ۹-۶ حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{sin^3x + cos^3x} dx$$

حل با توجه به نکته اشاره شده در بخش ۴-۹ خواهیم داشت:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(cosx)dx \to I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{sin^3x + cos^3x} dx$$

$$\xrightarrow{+} 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx + cosx}{(sinx + cosx)(sin^2x - sinx\, cosx + cos^2x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\, dx}{2 - sin2x}$$

$$f(-sinx, -cosx) = f(sinx, cosx) \to u = tanx \to dx = \frac{du}{1+u^2} \quad ; \quad sin2x = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\, dx}{2 - sin2x} = 2\int_0^{\infty} \frac{du}{(1+u^2)\left(2 - \frac{2u}{1+u^2}\right)} = \int_0^{\infty} \frac{du}{u^2 - u + 1} = \int_0^{\infty} \frac{du}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}} tan^{-1}\left(\frac{u - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\Bigg|_0^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}} tan^{-1}\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \quad \blacksquare$$

❄ **مثال ۹-۷** حاصل انتگرال I را بدست آورید.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{sin^3x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{3sinx - sin3x}{4x^2} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{3sinx}{4x^2} dx - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{sin3x}{4x^2} dx\right]$$

حال در انتگرال دوم تغییر متغیر $t = 3x$ را بکار میگیریم.

$$t = 3x \to dt = 3dx \to I = \frac{3}{4} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{sinx}{x^2} dx - \int_{3\varepsilon}^{+\infty} \frac{sint}{t^2} dt\right] = \frac{3}{4} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{sinx}{x^2} dx$$

که در دومین انتگرال داخل کروشه, متغیر t را به x تبدیل کرده‌ایم. با استفاده از مثال ۸-۲۷ خواهیم داشت:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{sinx}{x^2} dx = Ln3 \to I = \int_0^{+\infty} \frac{sin^3x}{x^2} dx = \frac{3}{4} Ln3 \quad \blacksquare$$

توضیح: ممکن است بخواهیم انتگرال را بصورت زیر حل کنیم:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{3sinx - sin3x}{4x^2} dx = \frac{3}{4}\int_0^{+\infty} \frac{sinx}{x^2} dx - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{sin3x}{x^2} dx$$

حال اگر در اینجا نیز در انتگرال دوم تغییر متغیر $t = 3x$ را بکار بگیریم, خواهیم داشت:

$$I = \frac{3}{4}\int_0^{+\infty} \frac{sinx}{x^2} dx - \frac{3}{4}\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t^2} dt = 0 \quad \boxed{?}$$

که جوابی نادرست است, چرا که می‌توان نشان داد $\int_0^{+\infty} \frac{sinx}{x^2} dx$ واگرا بوده و لذا این نتیجه‌گیری غلط است. ■

تمرینات بخش ۹-۲ تمرینات ۲۴ , ۳۰ و ۳۸ از بخش ۷-۸ کتاب

۱- انتگرال $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$ و نیز CPV آنرا محاسبه کنید.

۲- سطح زیر نمودار منحنی $y = e^{-x}$ در ربع اول را بیابید. با محاسبه حجم حاصل از دوران آن حول محورyها با استفاده از قضیه پاپوس-گلدینوس, نشان دهید $\overline{x} = 1$ میباشد.

۳- عدد c را بگونه‌ای بیابید که انتگرال زیر همگرا شود. سپس مقدار آنرا بیابید.

$$I = \int_2^{+\infty} \left(\frac{cx}{x^2+1} - \frac{1}{1+2x}\right) dx \quad ; \quad \underline{Ans}: \ c = \frac{1}{2} \to I = \frac{1}{4} Ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

۴- انتگرال B را بر حسب A بدست آورید. (راهنمایی: می‌توانید از تغییر متغیر $x^2 = tan\theta$ استفاده کنید)

$$A = \int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx \quad ; \quad B = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} \quad ; \quad \underline{Ans}: \ B = A$$

۵- اگر انتگرال زیر به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ همگرا باشد, مقدار آنرا بدست آورید.

$$I = \int_0^\pi \frac{dx}{1 - 2acosx + a^2} \quad ; \quad \underline{Ans}: \ I = \frac{\pi}{a^2 - 1}$$

۶- با تغییر متغیر $u = tan\frac{x}{2}$ درستی انتگرالهای زیر را نشان دهید. (a یک عدد ثابت است)

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + acosx} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \quad ; \quad J = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1 + cosa\, cosx} = \frac{2\pi}{sin\alpha}$$

راهنمایی: روش حل انتگرال J تقریبا مشابه مثال ۴-۳۵ می‌باشد.

۷- ابتدا با استفاده از تغییر متغیر, درستی انتگرال سمت چپ را نشان داده و به کمک آن انتگرال سمت راست را نتیجه بگیرید.

$$\int_0^{+\infty} f\left((x^2+1)^{\frac{1}{2}} + x\right) dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} f(t)(1 + t^{-2})\, dt \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \left((x^2+1)^{\frac{1}{2}} + x\right)^{-3} dx = \frac{3}{8}$$

۸- ابتدا یک دستور بازگشتی برای محاسبه I_n بدست آورده و سپس مقدار آنرا برای هر $n \in \mathbb{N}$ محاسبه کنید.

$$I_n = \int_0^\infty x^n a^{-x}\, dx \quad (a > 1) \ ; \ \underline{Ans}: \ I_n = \frac{n}{Lna} I_{n-1} \quad (n \geq 1) \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \to I_n = \frac{n!}{(Lna)^{n+1}}$$

۹- ابتدا درستی رابطه بازگشتی داده شده را برای $I_{n,m}$ بررسی کرده و سپس برای $n \in \mathbb{N}$ انتگرال سمت راست را نتیجه بگیرید.

$$I_{n,m} = \int_0^1 x^n (Lnx)^m\, dx \to I_{n,m} = -\frac{m}{n+1} I_{n,m-1} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \to \int_0^1 x^n (Lnx)^n\, dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

۱۰- الف: ابتدا یک دستور بازگشتی برای محاسبه I_n برای $n \geq 1$ بدست آورده و سپس مقدار آنرا برای هر $n \in \mathbb{N}$ محاسبه کنید. (به عنوان نمونه منظور از $(8)!!$ مقدار $2 \times 4 \times 6 \times 8 = (8)!!$ می‌باشد)

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} \quad ; \quad \underline{Ans}: \ I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \to I_{n+1} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$$

ب: به کمک قسمت قبل نشان دهید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3x} dx}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{\pi}{4}$$

۹-۳- انتگرال p

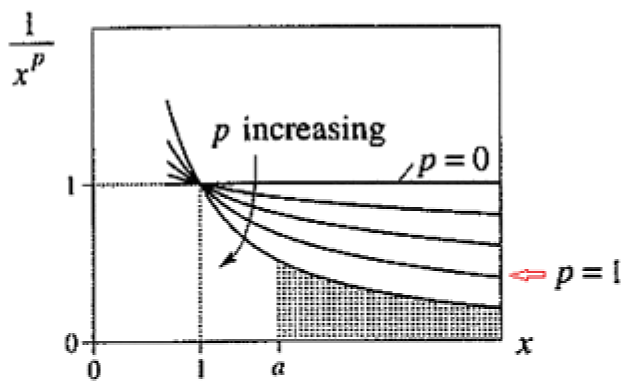
در اینجا همگرایی و واگرایی انتگرال p (نوع اول و دوم) را بررسی می‌کنیم. این انتگرالها به ترتیب بصورت زیر میباشند:

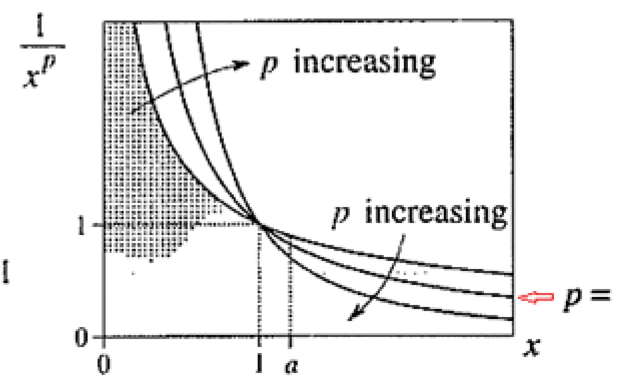
$$1)\ \int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}\ ;\ a>0 \quad ; \qquad 2)\ \int_0^a\frac{dx}{x^p}\ ;\ a>0$$

حال بررسی میکنیم این انتگرالها به ازای چه مقادیری از p همگرا میباشند.

$$1)\ \int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\lim\limits_{A\to+\infty}\left.\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right|_a^A & (p\neq 1)\\ \lim\limits_{A\to+\infty}\left. Lnx\right|_a^A & (p=1)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}p>1 & \text{همگرا}(C)\\ p\leq 1 & \text{واگرا}(D)\end{cases}$$

$$2)\ \int_0^a\frac{dx}{x^p}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^a\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left.\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right|_\varepsilon^a & (p\neq 1)\\ \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left. Lnx\right|_\varepsilon^a & (p=1)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}p<1 & \text{همگرا}(C)\\ p\geq 1 & \text{واگرا}(D)\end{cases}$$





در حالت کلی برای انتگرال p نوع دوم:

$$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p}\ ;\ \int_a^b\frac{dx}{(b-x)^p}\ ;\ b>a\ ;\ \begin{cases}p<1 & \text{همگرا}\\ p\geq 1 & \text{واگرا}\end{cases}$$

از آنجا که در بسط تیلور دیده شد, می‌توان اکثر توابع را بر حسب توانهای x و یا در حالت کلی $(x-a)$ بیان نمود, لذا انتگرال p می‌تواند تکلیف همگرایی یا واگرایی تعداد زیادی از انتگرالها را مشخص کند.

در تمرین ۱ از شما خواسته شده است نشان دهید $\int_0^{+\infty}e^{-tx}dx$ (انتگرال نمایی یا هندسی) برای $t>0$ همگرا و برای $t\leq 0$ واگراست. از انتگرال p و انتگرال نمایی در بخش بعد که به آزمونهای همگرایی می‌پردازد, استفاده خواهد شد.

مثال ۹-۸ به ازای چه مقادیری از a انتگرال غیرعادی $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-cosx}}{x^a}dx$ همگراست.

$$1-cosx=\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+o(x^5)\quad(x\to0)\qquad\rightarrow\quad(1-cosx)^{\frac{1}{2}}=\frac{x}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{x^2}{12}+o(x^3)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(1+t)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o(t^2)\quad(t\to0)\ \rightarrow\left(1-\frac{x^2}{12}+o(x^3)\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{12}+o(x^3)\right)$$

دقت شود اگر قرار بود در انتها o دیگری اضافه کنیم از آنجاکه جمله بعدی سری $-\frac{1}{8}t^2$ است لذا همگی در $o(x^3)$ قرار میگیرد.

$$\frac{\sqrt{1-cosx}}{x^a}=\frac{1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{12}+o(x^3)\right)}{\sqrt{2}x^{a-1}}\quad (x\to 0)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\frac{x^2}{24}+o(x^3)}{\sqrt{2}x^{a-1}}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{x^{a-1}}-\frac{1}{24\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{x^{a-3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{o(x^3)}{x^{a-1}}dx$$

انتگرال اول به ازای $a-1<1$ یعنی $a<2$ و انتگرال دوم به ازای $a-3<1$ یعنی $a<4$ همگراست. در نتیجه اشتراک ایندو $a<2$ خواهد بود که انتگرال سوم را نیز همگرا خواهد کرد. در واقع انتگرال سوم حداقل معادل $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{x^{a-5}}$ خواهد بود. ■

توضیح: می‌توان با استفاده از هم‌ارزیها مساله را به شیوه ساده‌تری نیز بررسی کرد. تکین این مساله $x=0$ میباشد, لذا در مجاور تکین, $\sqrt{1-cosx}\approx\frac{\sqrt{2}}{2}x$ و لذا انتگرالده هم ارز با $\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{x^{a-1}}$ خواهد بود. بنابراین با توجه به شرط همگرایی انتگرال p , برای همگرا بودن بایستی $a-1<1$ یعنی $a<2$ باشد. ■

تمرین بخش ۹-۳

۱- نشان دهید انتگرال نمایی(یا هندسی) یعنی $\int_0^{+\infty}e^{-tx}dx$ به ازای $t>0$ همگرا و برای $t\leq 0$ واگراست.

۹-۴- آزمونهای همگرایی و واگرایی

همواره نمی‌توان با محاسبات انتگرال, به همگرایی یا واگرایی آن پی برد, چرا که ممکن است نتوانیم برای انتگرالده یک تابع اولیه بدست آوریم. حال سوال این است که آیا میتوان مشابه مثال ۹-۸ , بدون محاسبه تابع اولیه, تکلیف همگرا بودن یا نبودن انتگرال غیرعادی را مشخص کرد؟ در واقع این کار با استفاده از آزمونها صورت می‌پذیرد. ایده کلی یک نوع قیاس با یک انتگرال واگرا یا همگرای معلوم است. در آزمونهای زیر چه تابع مورد نظر (f) و چه تابع قیاس شونده (g) در بازه $[a,A]$ (در نوع اول) ودر بازه $[a+\varepsilon,b]$ (در نوع دوم) انتگرال پذیر و مثبت میباشند. اگر مثبت نبود یا بایستی با یک تغییر متغیر مناسب آنرا مثبت کرد و یا یک منفی داخل و بیرون انتگرال وارد کرد. اکثر اوقات انتگرال قیاس شونده (g), انتگرال p یا انتگرال نمایی می‌باشد.

۹-۴-۱- آزمون مقایسه

فرض کنید برای همه $x\geq M$ بدانیم $0\leq f(x)\leq kg(x)$ که در آن k یک عدد مثبت است. همگرایی $g(x)$, همگرایی $f(x)$ را نتیجه میدهد و واگرایی $f(x)$, واگرایی $g(x)$ را . (M عددی دلخواه است)

اثبات شبیه اثباتی است که برای انتگرالهای عادی وجود دارد فقط کافی است از حد دو طرف استفاده شود.

از آنجا که کافی است این نامساوی به ازای $x\geq M$ برقرار باشد (چرا که ما قبل آن, انتگرال, عادی است), لذا در بررسی نامساویها در انتگرال نوع اول, ممکن است ساده‌تر باشد آنها را در بینهایت مقایسه کنیم.

مثال ۹-۹ همگرایی یا واگرایی انتگرالهای زیر را بررسی کنید.

$$1)\ \int_2^{+\infty}\frac{dx}{Lnx}\ ;\ if\ x\geq 2\xrightarrow{x>Lnx}\frac{1}{Lnx}>\frac{1}{x}\xrightarrow{p=1}(D)\text{واگرا}\qquad\left(\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}\ ;\ p\leq 1\ \ (D)\right)\ ■$$

$$2)\ \int_{-\infty}^{-1}\frac{e^x}{x}dx\xrightarrow{y=-x}-\int_1^{+\infty}\frac{dy}{e^y y}\ ;\ if\ y\to+\infty\xrightarrow{e^y>y}\frac{1}{e^y y}<\frac{1}{y^2}\xrightarrow{p=2}(C)\text{همگرا}\ ■$$

از آنجا که $\frac{e^x}{x}$ در بازه مورد نظر مثبت نیست, ابتدا با تغییر متغیر $y=-x$, انتگرالده را مثبت کرده‌ایم. می‌توانستیم انتگرال را بصورت $-\int_{-\infty}^{-1}\frac{-e^x}{x}dx$ نیز بنویسیم و همگرایی $\frac{-e^x}{x}$ را بررسی کنیم. روش دوم بصورت زیر است:

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{e^x}{x}dx \xrightarrow{y=-x} -\int_{1}^{+\infty}\frac{e^{-y}}{y}dy \;\; ; \;\; if\ y\geq 1 \rightarrow \frac{e^{-y}}{y}\leq e^{-y} \xrightarrow{t=1>0} (C)\text{همگرا}$$

چرا که $\int_0^{+\infty}e^{-tx}dx$ به ازای $t>0$ همگرا است. ■

$$3)\;\; \int_1^5\frac{dx}{\sqrt{x^4-1}} \; ; if\ x>1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}<\frac{1}{\sqrt{x-1}} \xrightarrow{p=\frac{1}{2}} (C)\text{همگرا}$$

چرا که $\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p}$ به ازای $p<1$ همگرا است. ■

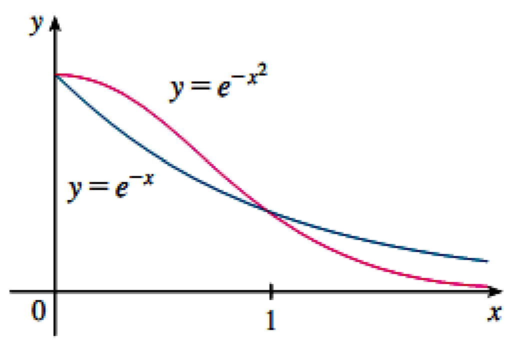
$$4)\;\; \int_1^{+\infty}\frac{e^{2x}(x+1)}{sin^2x+x^{\frac{3}{2}}}dx \;\; ; \;\; e^{2x}>1 \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{e^{2x}(x+1)}{sin^2x+x^{\frac{3}{2}}}>\frac{x+1}{x^{\frac{3}{2}}}>\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{p=\frac{1}{2}} (D)\text{واگرا} \;\; ■$$

توضیح: بدیهی است نامساوی $\frac{e^{2x}(x+1)}{sin^2x+x^{\frac{3}{2}}}>\frac{x+1}{x^{\frac{3}{2}}}$ در حالت کلی ممکن است درست نباشد, اما برای مقادیر بزرگ x صحیح است. همچنین دقت شود ممکن است نامساویهای درست دیگری نیز وجود داشته باشد, اما ما را به نتیجه نرساند, مثلا میتوان گفت $\frac{e^{2x}(x+1)}{sin^2x+x^{\frac{3}{2}}}>\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. اما از آنجا که $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$ همگراست, لذا این نامساوی هیچ نتیجه‌ای برای همگرایی یا واگرایی تابع داده شده نخواهد داد. ■

$$5)\;\; \int_0^{\infty}e^{-x^2}dx \;\;\; ; \;\; if\ x\to+\infty \xrightarrow{e^{x^2}>x^2} \frac{1}{e^{x^2}}<\frac{1}{x^2} \xrightarrow{p=2} (C)\text{همگرا} \;\; ■$$

مثال ۹-۱۰ با آزمون مقایسه نشان دهید که $\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$ همگراست. یک کران بالا برای آن بیابید.

$$\begin{cases} e^{-x^2}\leq 1 & 0\leq x\leq 1 \\ e^{-x^2}\leq e^{-x} & 1\leq x<\infty \end{cases}$$



t	$\int_0^t e^{-x^2}dx$
1	0.7468241328
2	0.8820813908
3	0.8862073483
4	0.8862269118
5	0.8862269255
6	0.8862269255

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\underbrace{\int_0^1 e^{-x^2}dx}_{\text{عادی}}+\int_1^{\infty}e^{-x^2}dx\leq\int_0^1 1\,dx+\int_1^{\infty}e^{-x}dx=1+\frac{1}{e} \;\; ■$$

توضیح: در ریاضی ۲ و با استفاده از انتگرال دوگانه خواهیم دید:

$$\int_0^{\infty}e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad ; \qquad \underline{\text{مثال}} \; : \; \int_0^{\infty}3^{-4x^2}dx=\int_0^{\infty}e^{-(4Ln3)x^2}dx=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{Ln3}} \;\; ■$$

تمرینات ۵۴ , ۵۶ و ۷۶ از بخش ۷-۸ کتاب