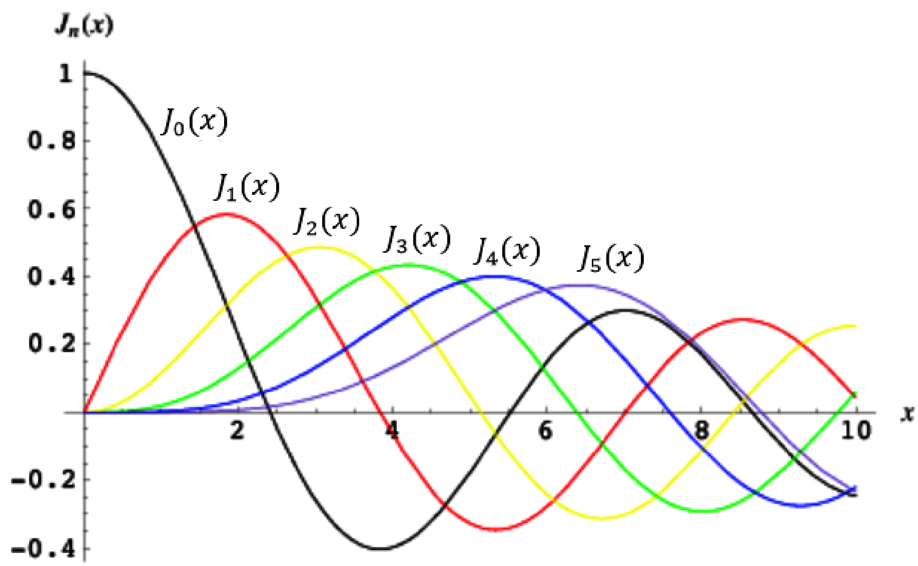
پردیس دانشکده‌های فنی

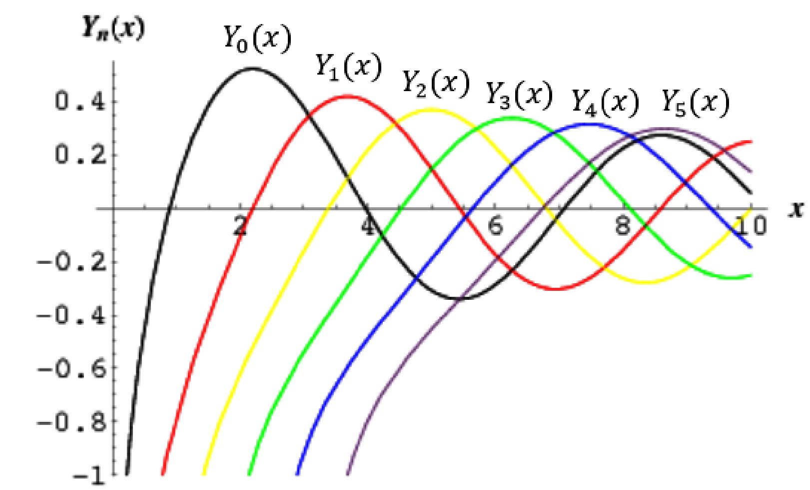
دانشگاه تهران

معادلات دیفرانسیل

Bessel Function of the First Kind



Bessel Function of the Second Kind



حسین رحامی

دانشکده علوم مهندسی

بهمن ماه ۱۴۰۰

بنام خدا

تعداد واحد :۳ , پیشنیاز: ریاضی ۱

مراجع:

- معادلات دیفرانسیل مقدماتی و مسئله‌های مقدار مرزی , تالیف: بویس و دیپریما , ترجمه: حمید رضا ظهوری زنگنه, انتشارات فاطمی
- William E. Boyce , Richard C. DiPrima , Douglas B. Meade , "Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems", 11th edition, WILEY, 2017.
- معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار مرزی, تالیف: دارا معظمی , انتشارات ناخدا
- معادلات دیفرانسیل, تالیف: بیژن طائری , انتشارات جهاد دانشگاهی صنعتی اصفهان
- معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها, تالیف: جورج سیمونز , ترجمه: علی اکبر بابائی و ابوالقاسم میامئی, انتشارات مرکز نشر دانشگاهی
- George F. Simmons, "Differential Equations with Applications and Historical Notes", 2nd edition, 1991.
- ریاضیات مهندسی پیشرفته (جلد ۱) , تالیف: مایکل د.گرینبرگ, ترجمه: علی خاکی صدیق و سایر همکاران, انتشارات امام رضا
- Michael Greenberg , "Advanced Engineering Mathematics", 2nd edition, 1998.
- Michael Greenberg , "Ordinary Differential Equations ", 2012, WILEY

مراجع زبان اصلی بهمراه چند مرجع دیگر در آدرس ftp://172.16.102.100 قرار داده شده است.

سرفصل مطالب:

۱- معادلات مرتبه اول

۲- معادلات خطی مرتبه دوم

۳- معادلات خطی مرتبه بالاتر

۴- حل معادلات خطی مرتبه دوم به کمک سریها

۵- تبدیل لاپلاس

۶- دستگاه معادلات دیفرانسیل

پیش‌نیاز:

- ریاضی ۱: روشهای انتگرال گیری, اعداد مختلط, سری‌های توانی و تیلور
- ریاضی ۲: مشتقات جزئی, ماتریسها

ارزشیابی:

- میان ترم, پایان ترم, کوئیز و تمرینات

۱- معادلات مرتبه اول

۱-۱- تعاریف اولیه

یک معادله دیفرانسیل رابطه‌ای است مابین یک تابع، متغیرها و مشتقات آن تابع نسبت به متغیرهای مختلف موجود در معادله. اگر تعداد متغیرها صرفا یک متغیر باشد, معادله معمولی (ODE) و اگر بیشتر باشد معادله با مشتقات جزئی نامیده میشود (PDE). در این درس صرفا معادلات دیفرانسیل معمولی بررسی شده و بحث معادلات با مشتقات جزئی در ریاضی مهندسی ارائه خواهد شد.

مرتبه معادله دیفرانسیل: بالاترین مشتق موجود در معادله را مرتبه آن میگوئیم.

درجه معادله دیفرانسیل: بیشترین توانِ بالاترین مشتق موجود در معادله را درجه آن میگوئیم.

معادله دیفرانسیل خطی: اگر درجه تمام جملات معادله نسبت به تابع و مشتقات آن برابر یک یا صفر باشد, آن معادله خطی است. مثلا معادله $(xsinx)y'' + x^3e^xy = 4coshx$ خطی است. همچنین معادله‌ای که در آن ترمهایی نظیر yy' , y^2 , $cosy$ و ... وجود داشته باشد, غیرخطی است. بنابراین فرم کلی معادلات خطی مرتبه n بصورت زیر است:

$$P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_0(x)y = G(x)$$

معادله دیفرانسیل خطی همگن: چنانچه تمام جملات یک معادله دیفرانسیل خطی, شامل تابع یا یکی از مشتقات آن باشد, معادله همگن نامیده میشود, به عبارتی در معادله خطی بالا $G(x) = 0$ باشد. با این تعریف واضح است که $y = 0$ جواب بدیهی هر معادله خطی همگن میباشد. بعنوان نمونه $x^3y'' + y'^4 - 4x = 0$ معادله‌ای مرتبه ۲, درجه ۱ , غیر خطی, ناهمگن است. همچنین $xy' + sin(y'') = 4y$ مرتبه ۲, فاقد درجه , غیر خطی و همگن میباشد.

جواب یک معادله دیفرانسیل: جواب یک معادله تابعی مانند $y = f(x)$ یا $x = g(y)$ یا $f(x,y) = 0$ میباشد که در معادله صدق میکند. از آنجا که هر معادله مرتبه n شامل $y^{(n)}$ میباشد, بصورت اجمالی برای تعیین جواب آن نیاز به n بار انتگرال گیری خواهیم داشت, لذا انتظار میرود جواب, حاوی n ثابت c_1 تا c_n باشد. بنا به تعریف جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل جوابی است که به اندازه مرتبه معادله, ثابت دلخواه دارد.

بعنوان مثال در ادامه خواهیم دید جواب عمومی معادله $y' = y$ بصورت $y = ce^x$ خواهد بود که در آن یک ثابت c وجود دارد. حال اگر در این معادله به دنبال جوابی باشیم که از نقطه $(0,5)$ بگذرد, در اینصورت $c = 5$ و لذا $y = 5e^x$ بدست می‌آید. به شرط $y(0) = 5$ و در حالت کلی $y(x_0) = y_0$ شرط اولیه $(I.C.)$ گفته می‌شود. همچنین یک معادله دیفرانسیل همراه با شرط اولیه را معمولا "مساله مقدار اولیه" می‌نامیم.

جواب غیرعادی(استثنائی) یک معادله دیفرانسیل, جوابی است که از جواب عمومی نتیجه نمی‌شود. مثلا در معادله $y' = 2\sqrt{y}$ خواهیم دید که جواب عمومی بصورت $y = (x + c)^2$ می‌باشد. اما $y = 0$ هم یک جواب معادله است, در حالی که به ازای هیچ ثابت c از جواب عمومی بدست نمی‌آید. پس $y = 0$ جواب غیر عادی (استثنائی) معادله میباشد.

۲-۱- معرفی معادلات مرتبه اول

این معادلات شامل x , y و y' یعنی به فرم $f(y', y, x) = 0$ میباشند. برای حل معادلات مرتبه اول, آنها را طبقه‌بندی کرده و روش هر یک را بیان میکنیم. در این فصل معادلات خطی و نیز دسته‌ای از معادلات غیرخطی بررسی میشود. این دسته بندی‌ها را در انتهای این بخش خواهیم دید, اما قبل از آن, برای مورد به بحث, چند معادله مرتبه اول ساده را حل می‌کنیم.

مثال ۱-۱ معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$1)\ \ y' = e^{-x} \to y = -\,e^{-x} + c$$

در واقع انتگرال e^{-x} را محاسبه کرده‌ایم. البته شکل درست برای رسیدن به این نتیجه آن است که آنرا بصورت زیر باز نویسی کنیم:

$$y' = e^{-x} \to \frac{dy}{dx} = e^{-x} \to dy = e^{-x}dx \to y = -\,e^{-x} + c$$

در واقع بیشمار جواب وجود دارد که همگی در معادله صدق می‌کنند. این جوابها اصطلاحا دسته منحنی‌های جواب نامیده می‌شوند.

حال فرض کنید این معادله دارای یک شرط بصورت $y(1) = 2$ باشد. این شرط, ثابت c را خواهد داد.

$$y(1) = 2 \to 2 = -e^{-1} + c \to c = e^{-1} + 2 \to y = -\,e^{-x} + e^{-1} + 2\ \ \blacksquare$$

توضیح: در حل بالا مساله با انتگرال‌گیری نامعین حل شد. یک راه دیگر با انتگرال‌گیری معین و بصورت زیر است:

$$y'(x) = f(x) \to \underbrace{\int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt}_{y(x)-y(x_0)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \to y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + y(x_0)$$

که در آن x_0 نقطه‌ای انتخاب میشودکه y آن در صورت مساله داده شده باشد. لذا برای مثال بالا خواهیم داشت:

$$y' = e^{-x} \to y(x) = \int_{1}^{x} e^{-t}dt + y(1) = -e^{-x} + e^{-1} + 2\ \ \blacksquare$$

$$2)\ \ (xy)' = e^{-x} \to xy = -\,e^{-x} + c \to y = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{c}{x}\ \ \blacksquare$$

توضیح: دیده می‌شود که حل این مساله فرقی با مثال قبل ندارد, چرا که سمت چپ بصورت مشتق یک عبارتِ مشخص است. اما ممکن است شکل ارائه مساله را کمی تغییر بدهند, مثلا آنرا بصورت $xy' + y = e^{-x}$ داده باشند. در اینصورت ابتدا باید سمت چپ را به شکل $(xy)'$ نوشت و ادامه مساله مشابه قبل است. همچنین ممکن است شکل ارائه کمی پیچیده‌تر نیز باشد. مثلا همین مساله را می‌توان بصورت $y' + \frac{1}{x}y = \frac{e^{-x}}{x}$ نیز بیان کرد. مشکل این است که در اینصورت سمت چپ را نمی‌توان مشتق یک عبارت مشخصی دانست. مگر آنکه ابتدا طرفین را در یک x ضرب کنیم که در اینصورت سمت چپ همان $(xy)'$ خواهد بود. سوال اصلی این است که این x از کجا بدست آمد؟ به عبارتی از کجا متوجه شویم باید طرفین در x ضرب شود تا سمت چپ را بتوان مشتق یک عبارت مشخص دانست. در بخش ۱-۳-۴ این موضوع بطور کامل بررسی خواهد شد. ■

$$3)\ \ y' = e^{-x^2} + x \quad ; \quad y(1) = 5$$

از آنجا که مساله مقدار اولیه میباشد, میتوان مشابه توضیح قسمت ۱ از انتگرال‌گیری معین استفاده کرد. خواهیم داشت:

$$y(x) = \int_{1}^{x} f(t)dt + \underbrace{y(1)}_{5} = \int_{1}^{x} \left(e^{-t^2} + t\right) dt + 5 \to y(x) = \int_{1}^{x} e^{-t^2}\,dt + \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$$

انتگرال فوق را نمی‌توان بر حسب توابع مقدماتی بدست آورد, اما می‌توان با نوشتن سری مک‌لوران e^{-t^2} , آنرا با هر مقدار دقت محاسبه کرد.

$$\int_{1}^{x} e^{-t^2}\,dt = \int_{1}^{x} \left(1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \cdots\right) dt$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3\times 1!} + \frac{x^5}{5\times 2!} - \frac{x^7}{7\times 3!} + \cdots\right) - \left(1 - \frac{1}{3\times 1!} + \frac{1}{5\times 2!} - \frac{1}{7\times 3!} + \cdots\right)$$

بنابراین طبیعی است که انتظار داشته باشیم در تعدادی از معادلات جواب را صرفا بر حسب سری ارائه نماییم. ■

4) $y' = -y \;\; ; \;\; y(0) = 1$

این مثال بر خلاف مثالهای قبل به فرم $(\cdots)' = f(x)$ نمی‌باشد. اما می‌توان آنرا با اطلاعات ریاضی ۱ بصورت زیر حل کرد.

$$\frac{dy}{dx} = -y \rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \rightarrow Ln|y| = -x + c_1 \rightarrow |y| = e^{-x+c_1} \rightarrow y = \underbrace{\pm e^{c_1}}_{c} e^{-x}$$

$$y = ce^{-x} \;\; ; \;\; y(0) = 1 \rightarrow c = 1 \rightarrow y = e^{-x} \;\; ■$$

توضیح ۱: در واقع دیده شد این مساله بگونه‌ای بود که توانستیم هر یک از متغیرهای x و y را به یک سمت منتقل کرده و با انتگرال گیری مساله را حل کنیم. در بخش ۱-۳-۱ این نوع مسائل بررسی خواهد شد.

توضیح ۲: در اینجا لازم است به یک روش کلی برای حل معادلات اشاره کرد که در نهایت منجر به ایجاد جواب به فرم سری خواهد شد. در این روش با مشتق گیری متوالی از معادله, با داشتن شرط اولیه در نقطه x_0 , مشتقات مراتب بالاتر آنرا در نقطه x_0 بدست می‌آوریم. به این ترتیب سری تیلور جواب حول نقطه مورد نظر بدست می‌آید. مثلا در معادله بالا, با داشتن$y(0)$, از خودِ معادله$y'(0)$, از مشتق اول آن $y''(0)$ و ... را بدست می‌آید. به عبارتی:

$$y'(x) = -y(x) \xrightarrow{y(0)=1} y'(0) = -1 \quad ; \quad y''(x) = -y'(x) \xrightarrow{y'(0)=-1} y''(0) = 1 \quad ; \quad \cdots$$

لذا بسط تیلورِ جواب معادله بصورت زیر خواهد بود:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \cdots = 1 - x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 - \cdots$$

در اینجا بدیهی است که این سری تیلور تابع e^{-x} میباشد, که همان جوابی است که در بالا بدست آوردیم. البته دلیلی ندارد که همواره پس از نوشتن سری تیلور بتوان حدس زد که این سری تیلور چه تابعی است. ممکن است مربوط به تابعی خاص باشد یا نباشد. مزیت این روش آن است که کلی بوده و برای هر معادله‌ای قابل استفاده است. فقط جواب را بصورت سری بدست میدهد. در فصل ۴ خواهیم دید برای دسته‌ای از معادلات مرتبه دوم که روش کلی برای حل آن وجود ندارد, به نوشتن جواب به‌فرم سری اکتفا می‌کنیم. ■

5) $sinx\, y' - (4sin^2x - y)cosx = 0 \quad ; \quad t = sinx$

هدف این مثال آشنایی با تغییر متغیر در حل معادلات دیفرانسیل است. گاهی اوقات با استفاده از یک تغییر متغیر مناسب, یک معادله به معادله ساده‌تری تبدیل می‌شود. به عنوان نمونه در مثال بالا با وجود ترمهای $sinx$ و sin^2x و نیز $cosx$ که مشتق $sinx$ است, اگر $t = sinx$ انتخاب شود, معادله ساده‌تر خواهد شد. هرچند انتخاب تغییر متغیر مناسب عموما کار ساده‌ای نبوده و معمولا فرم تغییر متغیر در صورت سوال (مشابه مثال بالا) ارائه می‌شود.

نکته بسیار مهم در اینجا آن است که وقتی قرار است متغیر از x به t تغییر یابد, بایستی y' که در واقع y'_x بوده و بیانگر مشتق y نسبت به x است, بر حسب y'_t یعنی مشتق y نسبت به t بیان شود که معمولا با y'_x برابر نیست. این موضوع در هر معادله‌ای که قرار است متغیری تغییر داده شود, بایستی مورد توجه قرار گیرد. به عبارتی می‌خواهیم از (x, y) به (t, y) برسیم. در اینصورت:

$$t = h(x) \to y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \to y' = h'(x)y'_t \quad ; \quad t = sinx \to y' = (cosx)y'_t$$

$$\to ty'_t + y = 4t^2 \to (ty)' = 4t^2 \to ty = \frac{4t^3}{3} + c \to y = \frac{4t^2}{3} + \frac{c}{t} \to y(x) = \frac{4sin^2x}{3} + \frac{c}{sinx}$$

که سطر آخر درست مشابه توضیح معادله ۲ , با جایگذاری $(ty)'$ بجای $ty'_t + y$ حل شده است. ■

توضیح: می‌توان بجای مشتق از دیفرانسیل استفاده کرده و از $t = sinx$ به $dt = (cosx)dx$ برسیم. حال با جایگذاری $y' = \frac{dy}{dx}$ در معادله اولیه خواهیم داشت:

$$sinx\, y' - (4sin^2x - y)cosx = 0 \xrightarrow{y'=\frac{dy}{dx}} tdy - (4t^2 - y)\underbrace{(cosx)dx}_{dt} = 0 \to ty'_t + y = 4t^2 \ ■$$

در ادامه بعنوان اولین کاربرد مهندسیِ معادلات دیفرانسیل, یک مثال ساده فیزیکی را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱–۲ بر طبق قانون سرد شدن نیوتن, دمای یک جسم با سرعتی متناسب با تفاضل دمای هر لحظه جسم(T) و دمای محیط (T_0) تغییر میکند. بنابراین میتوان گفت $\frac{dT}{dt} \propto (T - T_0)$ و لذا معادله حاکم بر آن بصورت $\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$ می‌باشد. حال بایستی این معادله را حل کرد. حل این معادله درست مشابه قسمت چهارم از مثال بالا میباشد. چرا که:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0) \to \frac{dT}{T - T_0} = kdt \to Ln|T - T_0| = kt + c_1$$

$$\to |T - T_0| = e^{kt+c_1} \to T - T_0 = \pm e^{c_1}e^{kt} = ce^{kt} \to T = T_0 + ce^{kt}$$

حال بایستی ثابتهای مجهول مساله را بدست آورد. طبیعتا تنها ثابت معادله دیفرانسیل همان c خواهد بود. اما ثابت دیگری نیز در معادله وجود دارد که ناشی از فیزیک مساله میباشد یعنی k . طبیعی است این معادله برای تغییر دمای یک اتاق (T) بر حسب دمای بیرون (T_0) نیز قابل استفاده است. فرض کنید سوالی به این صورت مطرح شود که دماسنجی دمای داخل اتاق را $70^{\circ C}$ و دمای خارج را $10^{\circ C}$ نشان می‌دهد. بنابراین تا اینجای کار:

$$T = T_0 + ce^{kt} = 10 + ce^{kt} \ ; \ t = 0 \ ; T = 70 \to 70 = 10 + ce^{k0} \to c = 60$$

که طبیعتا جواب ناقصی است, چرا که بایستی ثابت فیزیکی مساله نیز مشخص شود. برای این منظور اطلاعات اضافی دیگری نیز در مساله عنوان می‌شود. مثلا اینکه بدانیم دمای اتاق بعد از 3 دقیقه $25^{\circ C}$ شده است. بنابراین خواهیم داشت:

$$T = 10 + 60e^{kt} \ ; \ t = 3 \ ; \ T = 25 \to 25 = 10 + 60e^{3k} \to e^{3k} = \frac{1}{4} \to k = \frac{-1}{3}ln4$$

$$T = 10 + 60e^{\left(\frac{-1}{3}ln4\right)t} = 10 + 60(e^{ln4})^{\frac{-t}{3}} = 10 + 60 \times 4^{\frac{-t}{3}}$$

و یا می‌توان بدون محاسبه مستقیم k , از رابطه $e^{3k} = \frac{1}{4}$ بصورت زیر برای محاسبه T استفاده کرد:

$$T = 10 + 60e^{kt} = 10 + 60(e^{3k})^{\frac{t}{3}} = 10 + 60 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{t}{3}} = 10 + 60 \times 4^{\frac{-t}{3}}$$

بنابراین شرط اولیه (در زمان صفر) که به آن $(I.C.)$ می‌گوییم, c را نتیجه داد و شرط دیگر(در زمان ۳ دقیقه) ثابت k را. ■

حال به بحث کلی معادلات مرتبه اول می‌پردازیم. در مثال ۱–۱ چند مساله سادهِ قابل حل, از معادلات مرتبه اول را بررسی کردیم.

قبل از ورود به بحث کلی, فرم کلی این معادلات را ارائه می‌دهیم. اکثر معادلات مرتبه اول به یکی از دو شکل زیر نوشته میشوند:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad \text{یا} \qquad y'+p(x)y=g(x)$$

فرم دوم, حالت خاصی از فرم اول است. زیرا با جایگذاری y' با $\frac{dy}{dx}$ خواهیم داشت:

$$y'+p(x)y=g(x)\xrightarrow{y'=\frac{dy}{dx}}\underbrace{\left(p(x)y-g(x)\right)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{1}_{N(x,y)}dy=0$$

در واقع اهمیت فرم دوم صرفا به دلیل خطی بودن آن است. در تعدادی از معادلاتی که در مباحث مهندسی با آن سروکار داریم, معادله خطی بوده و در بخش ۱-۴ خواهیم دید که فرمول حل این معادلات بسیار ساده می‌باشد.

به طور کلی معادلات مرتبه اول در سه دسته مختلف بررسی میشود:

الف- در بخش ۱-۳ , به معادلات به فرم $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ می‌پردازیم. در این بخش معادلات جدایی پذیر, معادلات با توابع همگن, معادلات کامل و عامل انتگرال ساز مورد بررسی قرار می‌گیرد.

ب- در بخش ۱-۴ , روش حل معادلات به فرم $y'+p(x)y=g(x)$ را که معادله مرتبه اول خطی میباشد, خواهیم دید. در ادامه معادلات قابل تبدیل به معادله خطی از جمله معادله برنولی معرفی خواهد شد.

ج- در نهایت در بخش ۱-۵ سایر معادلات, از جمله معادلات ریکاتی و معادلاتی که بر حسب x یا y بیان شده‌اند, بررسی میشود.

۱-۳- معادلات به فرم $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

در این قسمت معادلات به فرم زیر را بررسی می‌کنیم:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

۱-۳-۱- معادلات جدایی پذیر(تفکیک پذیر)

در برخی از معادلات به فرم (1) , میتوان متغیر x را به یک سمت و تابع y را به سمت دیگر معادله انتقال داده و با انتگرال گیری مساله را حل کرد. در واقع در تعدادی از معادلات می‌توان آنها را به شکل $A(x)dx=B(y)dy$ درآورد که البته همیشه امکان پذیر نمیباشد. یک حالت خاص زمانی است که $M(x,y)$ فقط تابعی از x و $N(x,y)$ فقط تابعی از y باشد. در اینصورت:

$$\underbrace{M(x,y)}_{f(x)}dx+\underbrace{N(x,y)}_{g(y)}dy=0\to f(x)dx=-g(y)dy$$

مثال ۱-۳ معادلات زیر را حل کنید.

$$1)\ \ y'=-\frac{1+y^2}{1+x^2}\ \ ;\ \ y(0)=-1\ \ \to(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$$

$$\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{dy}{1+y^2}\to Arctg(x)+Arctg(y)=c\xrightarrow{y(0)=-1}c=-\frac{\pi}{4}$$

ممکن است بخواهیم با تانژانت گرفتن از طرفین جواب را به فرم $xy-x-y-1=0$ بنویسیم. دقت شود همواره اِعمال یک تابعِ غیر یک به یک بر رابطه, جواب اضافه وارد مساله میکند. مثلا در جبر دیده شد به توان ۲ رساندن یک رابطه, جواب اضافه وارد مساله خواهد کرد. در اینجا نیز اعمال تانژانت به رابطه همین‌گونه است, پس بهتر است جواب را به همان شکل اولیه بنویسیم. ■

$$2)\ \ y' = \sqrt{1+x+y+xy}$$
$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(1+x)(1+y)} \to \frac{dy}{\sqrt{1+y}} = \sqrt{1+x}dx \to 2\sqrt{1+y} = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + c \ \ \blacksquare$$

دیده میشود که جواب عمومی به سادگی بدست آمد. اما اگر توجه کنیم $y = -1$ نیز در معادله صدق می‌کند, اما از جواب عمومی بدست نمی‌آید, لذا همانگونه که عنوان شد به آن جواب غیرعادی می‌گوییم. در واقع بایستی زمانی که برای حل معادله دو طرف آنرا به $\sqrt{1+y}$ تقسیم کردیم, کنترل می‌کردیم که اگر $y \neq -1$ باشد این تقسیم امکان‌پذیر است. بنابراین ابتدا کنترل میکنیم که آیا $y = -1$ جواب معادله میباشد یا خیر, که در این مثال می‌بینیم در معادله صدق میکند, لذا این جواب را کنار گذاشته و سپس طرفین را به $y + 1$ تقسیم می‌کنیم. در بحث معادلات غیرخطی این موضوع پیچیده‌تر می‌شود, به گونه‌ای که ممکن است نتوان همه جوابهای غیرعادی در یک معادله غیرخطی را (در صورت وجود) بدست آورد. نتیجه کلی آنکه تعیین همه جوابهای غیرعادی یک معادله ممکن است همواره امکان‌پذیر نباشد. ■

$$3)\ \ y' = xy + x \to \frac{dy}{dx} = (y+1)x \to \frac{dy}{y+1} = xdx \to ln|y+1| - \frac{1}{2}x^2 = c$$

در اینجا نیز $y = -1$ در معادله صدق می‌کند, اما از جواب عمومی بدست نمی‌آید, لذا یک جواب غیرعادی است. ■

$$4)\ \ (1+y^2)(1+x)dy = y(3+y^2)dx \to \frac{1+y^2}{3y+y^3}dy = \frac{dx}{1+x}$$

$$\to \frac{1}{3}ln|3y+y^3| = ln|1+x| + c_1 \to ln|3y+y^3| = 3ln|1+x| + \overbrace{3c_1}^{ln|c|}$$
$$\to ln|3y+y^3| = ln|c(1+x)^3| \to 3y+y^3 = c(1+x)^3 \ \ \blacksquare$$

<u>چند توضیح:</u>

۱- معمولا انتخاب ثابتها بگونه‌ای صورت میگیرد که فرم جواب ساده شود. مثلا در آخرین مثال $c_1 = \frac{1}{3}ln|c|$ انتخاب گردید, چرا که در اینصورت فرم جواب بصورت ساده‌تری بیان میشود. بعنوان یک مثال دیگر اگر فرض کنیم جواب یک معادله بصورت $e^y = c_1e^x$ بدست آمده باشد, بهتر است ثابت مورد نظر را بصورت e^c در نظر بگیریم. در این صورت:

$$e^y = e^ce^x = e^{c+x} \to y = c + x$$

دقت شود در جایگذاری ثابتها به بردِ تابع توجه شود. از رابطه $e^y = c_1e^x$ بدیهی است که $c_1 > 0$, لذا میتوان c_1 را با تابع همواره مثبتِ e^c جایگزین کرد.

۲- در قسمت چهارم مثال بالا دیده شد که جواب صریحا بصورت $y = f(x)$ بدست نمی‌آید. در واقع همواره امکان رسیدن به چنین جوابی میسر نیست و جواب یک معادله ممکن است بصورت $x = f(y)$ یا $f(x,y) = 0$ (ضمنی) و یا پارامتری (بر حسب یک متغیر دیگری مانند t) بدست آید.

۳- به ذهن سپردن انتگرالهای زیر میتواند مفید باشد.

$$\int secx\,dx = ln|secx + tanx| + c \quad ; \quad \int cscx\,dx = ln|cscx - cotgx| + c \ \ \blacksquare$$

در بخش ۱-۴ معادلات مرتبه اول خطی بررسی خواهد شد. فرم کلی این معادلات بصورت $y'+p(x)y=g(x)$ است. در حالت همگن, یعنی $g(x)=0$, معادله تفکیک پذیر بوده و بنابراین بصورت زیر قابل حل است:

$$y'+p(x)y=0\rightarrow\frac{dy}{dx}=-p(x)y\rightarrow\frac{dy}{y}=-p(x)dx\rightarrow ln|y|=\int-p(x)dx+c_1$$

$$\rightarrow y=\pm e^{c_1}e^{-\int p(x)dx}=ce^{-\int p(x)dx}$$

بعنوان مثال حل معادله $y'=-y$ که در قسمت ۴ از مثال ۱-۱ بررسی شد, با استفاده از این رابطه بصورت زیر است:

$$y'+y=0\rightarrow p(x)=1\rightarrow y=ce^{-\int p(x)dx}=ce^{-\int dx}=ce^{-x}$$

در تعداد زیادی از مسائل فیزیکی و مهندسی با کمیاتی روبرو هستیم که میزان تغییرات آن با گذشت زمان, با مقدار آن کمیت در هر لحظه متناسب است. مثلا سرعت سرد شدن یک جسم, میزان سود سرمایه, تجزیه عنصر رادیو اکتیو , رشد جمعیت و .... در اینصورت معادله حاکم بر آن به فرم بالا بوده و لذا جوابی به شکل نمایی دارد. زیرا:

$$y'\propto y\rightarrow y'-ky=0\rightarrow y=ce^{-\int-kdt}=ce^{kt}$$

اگر میزان کمیتِ y , در زمان $t=0$ برابر y_0 باشد, میتوان ثابت c را نیز بدست آورد که همان y_0 میشود.

$$y(0)=y_0\rightarrow y_0=ce^{k\times 0}\rightarrow c=y_0\rightarrow\boxed{y=y_0e^{kt}}$$

حال بایستی مقدار y در یک زمان دیگر نیز داده شده باشد تا ثابت k نیز محاسبه شود.

بعنوان یک مثال ساده, فرض کنید بدانیم رادیوم در هر لحظه با سرعتی متناسب با مقدار موجود در آن لحظه تجزیه می‌شود. اگر نیمه عمر رادیوم T سال و مقدار اولیه آن m_0 باشد, مقدار رادیوم موجود پس از t سال عبارت است از:

$$\frac{dm}{dt}=km\rightarrow m=m_0e^{kt}$$

$$\frac{m_0}{2}=m_0e^{kT}\rightarrow e^{kT}=\frac{1}{2}\rightarrow k=-\frac{Ln2}{T}\rightarrow m=m_0e^{-\frac{t}{T}Ln2}=m_02^{-\frac{t}{T}}$$

$$\underline{or}:\ m=m_0e^{kt}=m_0(e^{kT})^{\frac{t}{T}}=m_02^{-\frac{t}{T}}$$

استفاده از تغییر متغیر یا تغییر تابع

در اینجا نیز گاهی اوقات با استفاده از یک تغییر متغیر و یا تغییر تابع مناسب, معادله تفکیک پذیر میشود.

الف: در معادلاتی به فرم $y'=f(ax+by+c)$ با تغییر تابع $u=ax+by+c$ به معادله جدایی پذیر میرسیم. یعنی: $(x,y)\rightarrow(x,u)$. بطور کلی هرجا تابعی(خطی یا غیرخطی) روی $ax+by+c$ اعمال شده باشد و یا این عبارت در چند قسمت معادله تکرار شده باشد, این تغییر تابع مناسب است. بعنوان مثال برای حل معادله $y'-x^2-y^2=2xy$ بصورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y'=(x+y)^2\xrightarrow{u=x+y\rightarrow u'=1+y'}u'-1=u^2\rightarrow\frac{du}{u^2+1}=dx\rightarrow tan^{-1}u=x+c$$

ب: اگر یک عبارت به همراه مشتق آن در معادله دیده شود نیز تغییر متغیر یا تغییر تابع میتواند مساله را ساده‌تر کند. مثلا معادله $\frac{dT}{dt}=k(T-T_0)$ که در مثال ۱-۲ بررسی شد را می‌توان با تغییر تابع زیر راحت‌تر حل کرد, یعنی $(t,T)\rightarrow(t,y)$.

$$\frac{dT}{dt}=k(T-T_0)\ ;\ y=T-T_0\to\frac{dy}{dt}=\frac{dT}{dt}\to\frac{dy}{dt}=ky\to y=ce^{kt}\xrightarrow{y=T-T_0}T=T_0+ce^{kt}$$

بعنوان مثال دیگر, معادله زیر بصورتی که داده شده است, تفکیک پذیر نمی‌باشد. اما با تغییر تابع $u=y+sinx$, به یک معادله تفکیک پذیر تبدیل خواهد شد, یعنی $(x,y)\to(x,u)$.

$$y'=\sqrt{y+sinx}-cosx\ \ ;\ u=y+sinx\xrightarrow{u'=y'+cosx}u'=\sqrt{u}\to\frac{du}{\sqrt{u}}=dx$$

همچنین ممکن است بصورت زیر تغییر تابع را اعمال کنیم که به همان نتیجه خواهیم رسید:

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{y+sinx}-cosx\ \ ;\ \ u=y+sinx\xrightarrow{du=dy+cosxdx}\frac{du-cosxdx}{dx}=\sqrt{u}-cosx$$

در بخش ۱-۳-۲ معادله دیگری ارائه خواهد شد که به کمک این روش به معادله تفکیک‌پذیر تبدیل میشود.

مثال ۱-۴ معادله زیر را حل کنید.

$$y'=(2x+3y+1)^2\ \ ;\ \ y(-0.5)=0$$

حل مشابه توضیح ارائه شده در بالا با تغییر تابع $u=2x+3y+1$ خواهیم داشت:

$$u=2x+3y+1\to u'=2+3y'\to\frac{du}{2+3u^2}=dx\to x+c=\int\frac{du}{2+3u^2}$$

$$\to x+c=\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+1.5u^2}\xrightarrow{z=\sqrt{1.5}u}x+c=\frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{du}{1+z^2}=\frac{1}{\sqrt{6}}tan^{-1}(\sqrt{1.5}u)$$

که با جایگذاری u به یک جواب ضمنی می‌رسیم. ■

توضیح ۱: در این مثال خاص می‌توان فرم صریحی برای جواب نیز ارائه داد.

$$y=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}tan\left(\sqrt{6}(x+c)\right)-\frac{2x+1}{3}$$

با توجه به شرط اولیه $y(-0.5)=0$ خواهیم داشت $c=\frac{1}{2}+\frac{k\pi}{\sqrt{6}}$ که در آن $k\in\mathbb{Z}$. این یعنی بیشمار جواب! اما اگر دقت شود که $-\frac{\pi}{2}<tan^{-1}\sqrt{1.5}u<\frac{\pi}{2}$ در اینصورت صرفا یک جواب $c=\frac{1}{2}$ برای مساله بدست می‌آید. ■

بررسی دو حالت خاص

الف: معادلات فاقد x

$$1)\ y'=f(y)\to\frac{dy}{f(y)}=dx\to x=\int\frac{dy}{f(y)}$$

$$2)\ y=f(y')\xrightarrow{\frac{d}{dx}}y'=y''f'(y')\xrightarrow{y'=p}p=p'f'(p)\to\frac{f'(p)}{p}dp=dx$$

$$3)\ \begin{cases}y=f(t)\xrightarrow{d}dy=f'(t)dt\\ y'=g(t)\to dy=g(t)dx\end{cases}\to f'(t)dt=g(t)dx\to\frac{f'(t)}{g(t)}dt=dx$$

بعنوان یک مثال ساده معادله $yy' = 4$ را که به هر سه شکل قابل بیان شدن میباشد, حل می‌کنیم.

$$1)\ yy' = 4 \rightarrow y' = \frac{4}{y} \rightarrow ydy = 4dx \rightarrow \frac{1}{2}y^2 = 4x + c_1 \rightarrow y^2 = 8x + c$$

$$2)\ yy' = 4 \rightarrow y = \frac{4}{y'} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} y' = \frac{-4y''}{y'^2} \xrightarrow{y'=p} p^3 = -4p' \rightarrow -4\frac{dp}{p^3} = dx \rightarrow \frac{2}{p^2} = x + c_2$$

$$\rightarrow y'^2 = \frac{2}{x + c_2} \rightarrow y' = \sqrt{\frac{2}{x + c_2}} \rightarrow y = 2^{\frac{3}{2}}\sqrt{x + c_2} \rightarrow y^2 = 8x + c$$

$$3)\ yy' = 4 \rightarrow \begin{cases} y = t \\ y' = 4/t \end{cases} \rightarrow \frac{1}{\frac{4}{t}}dt = dx \rightarrow t^2 = 8x + c \rightarrow y^2 = 8x + c \quad \blacksquare$$

ب: معادلات فاقد y

$$1)\ y' = f(x) \rightarrow dy = f(x)dx \rightarrow y = \int f(x)dx$$

$$2)\ x = f(y') \xrightarrow{d} dx = f'(y')dy' \xrightarrow{y'=p} dx = f'(p)dp$$

$$3)\ \begin{cases} x = f(t) \xrightarrow{d} dx = f'(t)dt \\ y' = g(t) \rightarrow dy = g(t)dx \end{cases} \rightarrow dy = g(t)f'(t)dt$$

تمرینات بخش ۱-۳-۱

❄ برای کلیه تمرینهای ارائه شده در این جزوه صرفا تمرینهایی که زیر آنها خط کشیده شده است را تحویل دهید.

۱- معادله زیر را یکبار به روش حل معادلات تفکیک‌پذیر و سپس با استفاده از مشتق‌گیری متوالی (توضیح ۲ در قسمت چهارم مثال ۱-۱) حل کرده, جوابها را مقایسه کنید. آیا جوابِ به فرم سری همه جا معتبر است؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$y' = 2xy^2 \quad ; \quad y(0) = 1$$

۲- معادلات زیر را حل کنید.

$$1)\quad y' + 3y = 8 \quad ; \quad \begin{cases} y(0) = 2 \\ y(0) = 4 \end{cases} \quad ; \quad \underline{Ans}: \begin{cases} y = 2(4 - e^{-3x})/3 \\ y = 4(2 + e^{-3x})/3 \end{cases}$$

$$2)\quad x^2yy' = e^y \quad ; \quad \underline{Ans}: x(1 + y) = (1 + cx)e^y$$

$$3)\quad y' = 1 + 6xe^{x-y} \quad ; \quad \underline{Ans}: 3x^2 - e^{y-x} = c$$

۱-۳-۲- معادلات با توابع همگن

متفاوت از تعریف معادله همگن, در ریاضی۲ تابع دو متغیره $g(x,y)$ را تابع همگن از مرتبه α میگوییم هرگاه:

$$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha g(x,y)$$

$$\underline{Ex}: g(x,y) = \frac{x^3 + xy^2}{2y} \rightarrow g(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^3 + \lambda x(\lambda y)^2}{2\lambda y} = \lambda^2 g(x,y) \rightarrow \alpha = 2$$

فرض کنید هدف حل معادله $y' = f(x,y)$ باشد, که میتوان آنرا به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

چنانچه در معادله دیفرانسیل به فرم بالا هر دو تابع M و N همگن از مرتبه یکسان باشند, معادله دیفرانسیل, با تابع همگن نامیده میشود.به عبارت دیگر اگر معادله به فرم $y' = f(x,y)$ نوشته شود, f همگن از مرتبه صفر خواهد شد زیرا $f = y' = \frac{-M}{N}$.

اگر f همگن از مرتبه صفر باشد, یعنی می‌توان آنرا بر حسب تابعی از $\frac{y}{x}$ نوشت. به این ترتیب برای حل معادله, ابتدا تغییر تابع زیر را انجام می‌دهیم:

$$u = \frac{y}{x} \to y = ux \to \begin{cases} y' = xu' + u \\ dy = xdu + udx \end{cases} \qquad (x,y) \to (x,u)$$

حال معادله تفکیک‌پذیر خواهد شد. زیرا:

$$y' = f(x,y) = F\left(\frac{y}{x}\right) \to xu' + u = F(u) \to \frac{du}{F(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

توضیح ۱: در معادله $y' = f(x,y)$ اگر بتوان $f(x,y)$ را بر حسب تابعی از $\frac{y}{x}$ نوشت, با این روش قابل حل است.

توضیح ۲: چنانچه جملات ضریب dx به لحاظ تعداد کمتر از ضریب dy باشد, ساده تر است که $u = \frac{x}{y}$ منظور شود. به عبارتی در اینحالت: $(x,y) \to (u,y)$

توضیح ۳: گاهی اوقات یک تغییر متغیر یا تغییر تابع مناسب, مساله را همگن می‌کند. بعنوان مثال:

$$(y^4 - 3x^2)dy + xydx = 0 \quad ; \quad y = u^\alpha \to dy = \alpha u^{\alpha-1}du \quad ; \quad (x,y) \to (x,u)$$

$$\alpha(u^{5\alpha-1} - 3x^2u^{\alpha-1})du + xu^\alpha dx = 0$$

بایستی $\alpha + 1 = 1 - \alpha + 2 = 1 - 5\alpha$ باشد که نتیجه می‌دهد $\alpha = 0.5$. لذا با این α , معادله اخیر, همگن شده و قابل حل است که رابطه‌ای بین u و x بدست می‌دهد و در نهایت $y = u^\alpha$ جایگذاری خواهد شد. توجه شود که در حالت کلی ممکن است جوابی برای α که در این تساویها صدق کند بدست نیاید که در اینصورت این روش جوابگو نیست.

مثال ۱-۵ معادلات زیر را حل کنید.

$$1)\ \ (2x^3 + y^3)dx - 3xy^2dy = 0 \ \ ; \ \ y(1) = 2$$

هر دو تابع M و N همگن از مرتبه ۳ بوده و لذا $f(x,y)$ همگن از مرتبه صفر خواهد بود, پس می‌توان آنرا بر حسب $\frac{y}{x}$ بیان کرد.

$$\left(2 + \frac{y^3}{x^3}\right)dx - 3\frac{y^2}{x^2}dy = 0 \quad ; \quad u = \frac{y}{x} \to y = ux \to dy = xdu + udx$$

$$(2 + u^3)dx - 3u^2(xdu + udx) = 0 \to \frac{3u^2}{u^3 - 1}du = \frac{-2}{x}dx$$

$$\to ln|u^3 - 1| = -2ln|x| + \underbrace{c_1}_{lnc} = ln\left(\frac{c}{x^2}\right) \to |u^3 - 1|x^2 = c$$

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} \to u(1) = \frac{y(1)}{1} = 2 \to c = 7 \xrightarrow{u=\frac{y}{x}} \left|\frac{y^3}{x^3} - 1\right|x^2 = 7 \ \blacksquare$$

توضیح ۱: بدون نوشتن معادله بر حسب $\frac{y}{x}$ می‌توان بصورت زیر نیز عمل کرد:

$$(2x^3+y^3)dx-3xy^2dy=0 \;\;;\;\; y=ux \to (2+u^3)x^3dx-3x^3u^2(xdu+udx)=0$$

توضیح ۲: می‌توان مساله را بصورت زیر نیز با نوشتن آن به فرم y' و سپس تبدیل به u' حل کرد:

$$\to y'=\frac{2x^3+y^3}{3xy^2}\xrightarrow{\alpha=0} y'=\frac{2+\left(\frac{y}{x}\right)^3}{3\left(\frac{y}{x}\right)^2}\to xu'+u=\frac{2+u^3}{3u^2}\to\frac{3u^2}{u^3-1}du=\frac{-2}{x}dx \;\blacksquare$$

$$2)\;\; y'-\frac{y}{x}=cos^2\left(\frac{y}{x}\right)\to y'=F\left(\frac{y}{x}\right)\xrightarrow{\alpha=0\to y=ux} xu'+u=cos^2u+u$$

$$\to x\frac{du}{dx}=cos^2u\to\frac{dx}{x}=sec^2u\,du\to tanu=lnx+c\to tan\left(\frac{y}{x}\right)=lnx+c \;\blacksquare$$

$$3)\;\; (x+y)dx-(x-y)dy=0\to y'=\frac{x+y}{x-y}\xrightarrow{\alpha=0\;;\;u=\frac{y}{x}} xu'+u=\frac{1+u}{1-u}$$

$$\to\frac{dx}{x}=\frac{1-u}{1+u^2}du\to tan^{-1}u-\frac{1}{2}ln(1+u^2)=lnx+c$$

$$\to tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)-ln\sqrt{x^2+y^2}=c \;\blacksquare$$

حال فرض کنید هدف حل معادله به فرم زیر باشد:

$$y'=f\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+g}\right)$$

از آنجا که صورت و مخرج کسر موجود در آرگومان, به فرم معادله دو خط میباشد, لذا مساله را در سه حالت بررسی می‌کنیم:

الف: اگر $c=g=0$ باشد, معادله با تابع همگن بوده و قابل حل است.

ب: اگر دترمینان ضرایب یعنی $ae-bd$ صفر باشد, قرار میدهیم $u=ax+by$ و مساله حل میشود. در واقع در این حالت معادله, در دسته معادلات با توابع همگن قرار نگرفته و با این تغییر تابع, تفکیک پذیر میشود.

ج: در غیر اینصورت, این دو معادله خط در نقطه (x_0,y_0) متقاطعند. با تغییر مختصات زیر به حالت الف میرسیم:

$$x=X+x_0 \;\;;\;\; y=Y+y_0$$

مثال ۱-۶ معادله‌های زیر را حل کنید.

$$1)\;\; y'=\frac{-(x-2y+3)}{2x-4y-3}\;\to\; u=x-2y\to u'=1-2y'\to y'=\frac{1-u'}{2}$$

$$\xrightarrow{Sub.}\frac{1-u'}{2}=\frac{-(u+3)}{2u-3}\to u'=\frac{4u+3}{2u-3}\xrightarrow{u'=du/dx} dx=\frac{2u-3}{4u+3}du$$

$$\to x=\int\frac{2u-3}{4u+3}du=\frac{1}{2}\int\frac{4u+3-9}{4u+3}du=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{9}{4u+3}\right)du=\frac{1}{2}u-\frac{9}{8}ln|4u+3|+c$$

که با جایگذاری $u=x-2y$ خواهیم داشت:

$$x=\frac{1}{2}(x-2y)-\frac{9}{8}ln|4x-8y+3|+c \;\blacksquare$$

$$2)\;\; y'=\frac{x+y+1}{x-y+3}\to (x_0,y_0)=(-2,1)\to\begin{cases}x=X-2\\ y=Y+1\to y'=Y'\end{cases}$$

$$\xrightarrow{Sub.} Y'=\frac{(X-2)+(Y+1)+1}{(X-2)-(Y+1)+3}=\frac{X+Y}{X-Y}\to\frac{dY}{dX}=\frac{X+Y}{X-Y}$$

که این معادله در قسمت ۳ از مثال قبل حل شده است. با استفاده از جواب بدست امده خواهیم داشت:

$$tg^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)-ln\sqrt{X^2+Y^2}=c\to tg^{-1}\left(\frac{y-1}{x+2}\right)-ln\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=c \;\blacksquare$$

تمرینات بخش ۱-۳-۲

۱- معادلات زیر را حل کنید.

$$\underline{1})\;\; ydx-\left(x+\sqrt{xy}\right)dy=0 \quad ; \quad \underline{Ans}:\; 2\sqrt{x/y}=ln|cy|$$

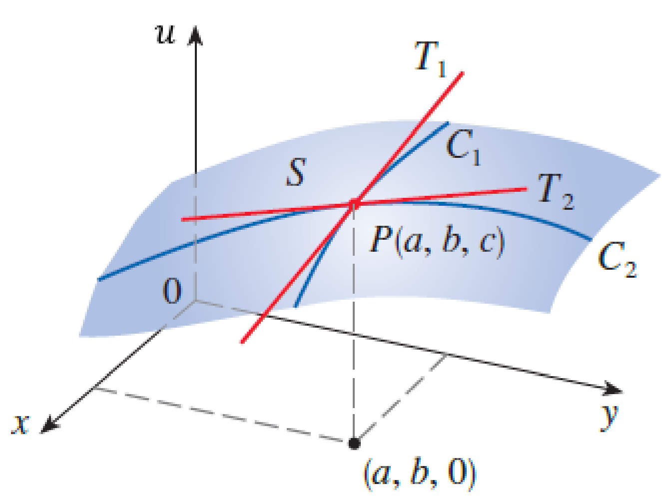
$$\underline{2})\;\; y'=-\frac{4x+3y+15}{2x+y+7} \quad ; \quad \underline{Ans}:\; (4x+y+13)^2|x+y+4|=c$$

$$\underline{3})\;\; xsin\left(\frac{y}{x}\right)y'=ysin\left(\frac{y}{x}\right)+x \quad ; \quad \underline{Ans}:\; -cos\left(\frac{y}{x}\right)=ln|x|+c$$

۲- معادله زیر را با تغییر تابع داده شده به معادله با تابع همگن تبدیل کرده, سپس آنرا حل کنید.

$$(x^2y^2-1)dy+2xy^3dx=0 \;\; ; \;\; y=u^\alpha \;\; ; \;\; (x,y)\to(x,u)$$

۱-۳-۳- معادلات کامل



قبل از شروع بهتر است مفهوم کامل بودن مشخص شود. فرض کنید $u=f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد که رویه آن در شکل روبرو ترسیم شده است. می‌خواهیم مشتق تابع را در نقطه (a,b) بدست آوریم. برای این منظور بایستی شیب خط مماس محاسبه شود. از آنجا که با یک رویه روبرو هستیم, در جهات مختلف شیبهای متفاوتی خواهیم داشت.

فرض کنید در نقطه $P(a,b,c)$ که در آن $c=f(a,b)$ میباشد, یک صفحه عمود بر محور y رسم کنیم تا این رویه را در منحنی C_1 قطع کند. در اینصورت میتوان در صفحه فوق منحنی C_1 را مشابه یک تابع یک متغیره بر حسب متغیر x دانست که در آن y ثابت است. لذا می‌توان خط مماس بر منحنی C_1 را که معرف مشتق در جهت x میباشد تعیین کرد (مماس T_1). در ریاضی ۲ این مشتق را با $\frac{\partial u}{\partial x}$ یا u_x نمایش داده و همانگونه که دیده شد برای محاسبه آن کافی است با y مشابه یک ضریب ثابت رفتار شود. به همین ترتیب می‌توان u_y را نیز بدست آورد.

طبیعی است در این نقطه در جهات مختلف, مشتقهای متفاوتی (شیبهای متفاوتی) خواهیم داشت که دو مشتق u_x و u_y از اهمیت بیشتری برخوردارند. به همین دلیل در بحث توابع دو متغیره به جای یک مشتق, با مشتقات جهتی (سوئی) روبرو خواهیم بود.

به عنوان مثال برای $u = f(x,y) = xy^2$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x = y^2 \qquad ; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y = 2xy$$

می‌توان کنترل کرد که $(u_x)_y = (u_y)_x$. در ریاضی ۲ ثابت میشود این رابطه برای زمانیکه u , u_x و u_y پیوسته باشند درست است. همچنین در آن درس خواهیم دید که برای یک تابع دو متغیره به صورت $u = f(x,y)$, دیفرانسیل u بصورت زیر است:

$$u = f(x,y) \to du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad ; \qquad \underline{Ex} \ : \ u = xy^2 \to d(xy^2) = y^2dx + 2xydy$$

در انتهای این بخش یک اثبات شهودی برای درستی این رابطه ارائه خواهد شد.

حال فرض کنید بخواهیم معادله $y^2dx + 2xydy = 0$ را حل کنیم. با توجه به مثال بالا روش حل ساده است, چرا که:

$$y^2dx + 2xydy = 0 \to d(xy^2) = 0 \to xy^2 = c$$

در اینصورت میگوییم عبارت $y^2dx + 2xydy$ دیفرانسیل کامل است, چرا که دیفرانسیل xy^2 میباشد.

حال ببینیم چه شرایطی لازم است تا در معادله (1) , سمت چپ دیفرانسیل کامل باشد:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

برای این منظور مطابق آنچه دیده شد برای آنکه این عبارت دیفرانسیل تابعی مانند u باشد بایستی:

$$\begin{cases} M(x,y) = u_x \\ N(x,y) = u_y \end{cases} \xrightarrow{(u_x)_y = (u_y)_x} M_y = N_x \qquad (2)$$

همچنین ثابت میشود اگر (2) برقرار باشد آنگاه معادله (1) دیفرانسیل کامل است (پس شرط لازم و کافی است). بعنوان مثال فرض کنید بخواهیم تابعی بیابیم که دیفرانسیل آن بصورت زیر باشد:

$$y^2dx + 2xydy = d(?)$$

چون شرط $M_y = N_x$ برقرار است, پس تابعی مانند u وجود دارد که این عبارت دیفرانسیل آن باشد. یعنی باید u ای بیابیم که $u_x = y^2$ و $u_y = 2xy$ باشد. برای این منظور از $u_x = y^2$ خواهیم داشت $u = xy^2 + A(y)$. دقت شود از آنجا که u دو متغیره است, در انتگرال‌گیری نسبت به x بجای ثابت c , از $A(y)$ استفاده شده است, چرا که هر تابعی از y در مشتق‌گیری نسبت به x برابر صفر خواهد بود. در نتیجه $u_y = 2xy + A'(y)$ خواهد شد. از طرف دیگر دیده شد بایستی $u_y = 2xy$ باشد, لذا از مساوی قرار دادن ایندو به $A'(y) = 0$ و یا $A(y) = c_1$ خواهیم رسید. خلاصه این محاسبات بصورت زیر است:

$$\left.\begin{array}{ccc} u_x = y^2 & ; & u_y = 2xy \\ \downarrow & & \\ u = xy^2 + A(y) & \to & u_y = 2xy + A'(y) \end{array}\right\} A'(y) = 0 \to A(y) = c_1$$

حال با جایگذاری $A(y) = c_1$ خواهیم داشت $u = xy^2 + c_1$. لذا:

$$y^2dx + 2xydy = 0 \to d(xy^2 + c_1) = 0 \to xy^2 + c_1 = c_2 \to xy^2 = c$$

بنابراین اگر معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ دیفرانسیل کامل باشد, به این معنی است که میتوان آنرا بصورت $d(u)=0$ نوشت. در نتیجه $u=c$ جواب معادله است. (به این ترتیب لازم نیست در محاسبه u , ثابت آنرا نیز بیاوریم)

مثال ۱-۷ معادله زیر را حل کنید.

$$\underbrace{(3x^2+ycosx)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{(sinx-4y^3)}_{N(x,y)}dy=0$$

حل چون شرط $M_y=N_x$ برقرار است, پس دیفرانسیل کامل است. لذا با انتخاب $u_x=M(x,y)$ و $u_y=N(x,y)$ خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{lcl} u_x=3x^2+ycosx & ; & u_y=sinx-4y^3 \\ \downarrow & & \\ u=x^3+ysinx+A(y) & \rightarrow & u_y=sinx+A'(y) \end{array}\right\} A'(y)=-4y^3\rightarrow A(y)=-y^4$$

بنابراین, جواب مساله $u=c$ یعنی $x^3+ysinx-y^4=c$ میباشد. میتوان بجای انتگرال گیری از u_x نسبت به x , با انتگرال گیری از u_y نسبت به y شروع کرد. معمولا انتگرال گیری از هر کدام ساده‌تر باشد با همان شروع می‌کنیم. دراینصورت:

$$\left.\begin{array}{lcl} u_y=sinx-4y^3 & ; & u_x=3x^2+ycosx \\ \downarrow & & \\ u=ysinx-y^4+A(x) & \rightarrow & u_x=ycosx+A'(x) \end{array}\right\} A'(x)=3x^2\rightarrow A(x)=x^3$$

که بازهم جواب مساله $u=c$ یعنی $ysinx-y^4+x^3=c$ خواهد شد. ■

<u>توضیح:</u> در اینجا مساله را به دو روش دیگر نیز حل می‌کنیم.

<u>روش دوم:</u> با استفاده از بحث انتگرال منحنی الخط در ریاضی ۲ و بکارگیری روشی مشابه حل بالا, می‌توان فرمول زیر را برای محاسبه u ارائه داد:

$$u=c\rightarrow\int M(x,y)\,dx+\int N^*(x,y)\,dy=c$$

که در آن $N^*(x,y)$ از حذف جملات شامل x از $N(x,y)$ بدست می‌آید. بنابراین در مثال فوق:

$$N(x,y)=sinx-4y^3\rightarrow\int(3x^2+ycosx)\,dx+\int -4y^3\,dy=c\rightarrow x^3+ysinx-y^4=c$$

و یا معادل رابطه بالا, میتوان با حذف جملات y از $M(x,y)$ از رابطه زیر نیز استفاده کرد:

$$\int\underbrace{M^*(x,y)}_{3x^2}dx+\int\underbrace{N(x,y)}_{sinx-4y^3}dy=c\rightarrow x^3+ysinx-y^4=c$$

در ادامه برای مشخص کردن M^* یا N^* دو مثال دیگر ارائه می‌شود. مثلا اگر N بصورت زیر باشد, از آنجا که دیده میشود N شامل ۳ جمله بوده و در تمام ۳ جمله x دیده می‌شود لذا $N^*=0$ خواهد بود:

$$N(x,y)=\frac{x+ycosx+lny}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{ycosx}{x^2+y^2}+\frac{lny}{x^2+y^2}\rightarrow N^*(x,y)=0$$

یا در مثال زیر از آنجا که مخرج قابلیت تجزیه دارد, پس از تجزیه کسر خواهیم داشت:

$$N(x,y)=\frac{x+y}{2xy+y^2}=\frac{x+y}{y(2x+y)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{2x+y}\right)\to N^*(x,y)=\frac{1}{2y}$$

به تعبیر دیگر N^* صرفا شامل جملاتی از N خواهد بود که مشتق آن نسبت به x برابر صفر است و به همین ترتیب M^* صرفا شامل جملاتی از M خواهد بود که مشتق آن نسبت به y برابر صفر است. دیده می‌شود در حالاتی که M و N به فرم کسری بوده و مخرج قابلیت تجزیه دارد, این روش ممکن است قدری طولانی باشد.

روش سوم:

$$\left.\begin{cases}u_x=3x^2+ycosx\to u=x^3+ysinx+A(y)\\ u_y=sinx-4y^3\quad\to u=ysinx-y^4+B(x)\end{cases}\right\}\to x^3+A(y)=-y^4+B(x)$$

$$\to A(y)=-y^4\quad;\quad B(x)=x^3\to u=x^3+ysinx-y^4$$

به طریق دیگر در این روش اگر مشخص شده باشد که معادله کامل است, نیازی به وارد کردن $A(y)$ و $B(x)$ نبوده و فقط کافی است اجتماع جوابها را بدست آوریم. به عبارتی:

$$\left.\begin{cases}u_x=3x^2+ycosx\to u=x^3+ysinx\\ u_y=sinx-4y^3\quad\to u=ysinx-y^4\end{cases}\right\}\xrightarrow{\text{اجتماع جوابها}}u=x^3+ysinx-y^4\ \blacksquare$$

به عنوان یک مثال دیگر معادله مطرح شده در قسمت ۲ از مثال ۱-۱ را در نظر می‌گیریم. این معادله ابتدا به فرم $(xy)'=e^{-x}$ داده شد که حل آن ساده است. عنوان شد می‌توان آنرا بصورت $xy'+y=e^{-x}$ نیز طرح کرد که بایستی تشخیص دهیم سمت چپ همان $(xy)'$ میباشد. به عبارتی مشتق کاملِ یک عبارت است که اگر بجای مشتق آنرا بر حسب دیفرانسیل بنویسیم, بایستی به یک عبارت دیفرانسیلِ کامل برسیم (چرا که این دو یک مفهوم می‌باشند). لذا خواهیم داشت:

$$xy'+y=e^{-x}\to(y-e^{-x})dx+xdy=0\to M_y=N_x$$

$$N(x,y)=x\to\int(y-e^{-x})\,dx+\int 0\,dy=c\to yx+e^{-x}=c\to y=-\frac{e^{-x}}{x}+\frac{c}{x}$$

یک کاربرد فیزیکی

در انتهای این بخش به یک کاربرد فیزیکی از معادلات دیفرانسیل کامل اشاره می‌کنیم.

فرض کنیم بخواهیم کار ناشی از نیروی $\vec{F}=M(x,y)\vec{\imath}+N(x,y)\vec{\jmath}$ را روی مسیر c بیابیم. اگر معادله مسیر در حالت کلی بصورت $\vec{r}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$ درنظر گرفته شود, خواهیم داشت:

$$\vec{r}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}\to d\vec{r}=dx\vec{\imath}+dy\vec{\jmath}\ ;\ W=\int_c\vec{F}.d\vec{r}=\int_c M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

مثلا برای $\vec{F}=y^2\vec{\imath}+2xy\vec{\jmath}$ کار انجام شده بر روی مسیر مستقیم از نقطه $A(0,0)$ تا $B(1,2)$ برابر است با:

$$y=2x\to W=\int_c y^2dx+2xydy=\int_0^1(2x)^2dx+2x(2x)\underbrace{(2dx)}_{dy}=4$$

اگر مسیر را عوض کنیم و مثلا بر روی مسیر $y = x^2 + x$ (که از دو نقطه فوق میگذرد) کار را محاسبه کنیم باز به همین جواب میرسیم. چرا که:

$$y = x^2 + x \to W = \int_0^1 (x^2+x)^2 dx + 2x(x^2+x)\underbrace{(2x+1)dx}_{dy} = 4$$

چنانچه انتگرال را بر روی هر مسیر دیگری که از دو نقطه فوق می‌گذرد حساب کنیم, باز هم جواب همین مقدار خواهد شد. به چنین نیرویی در فیزیک نیروی پایستار میگوییم, یعنی کار ناشی از آن مستقل از مسیر است. حال ببینیم علت این موضوع چیست.

اگر دقت کنیم $\vec{F}.d\vec{r}$ یک دیفرانسیل کامل است, لذا میتوان انتگرال را ساده‌تر و به طریق زیر محاسبه کرد:

$$W = \int_c y^2dx + 2xydy = \int_c d(xy^2 + c) = (xy^2 + c)|_{(0,0)}^{(1,2)} = 4 - 0 = 4$$

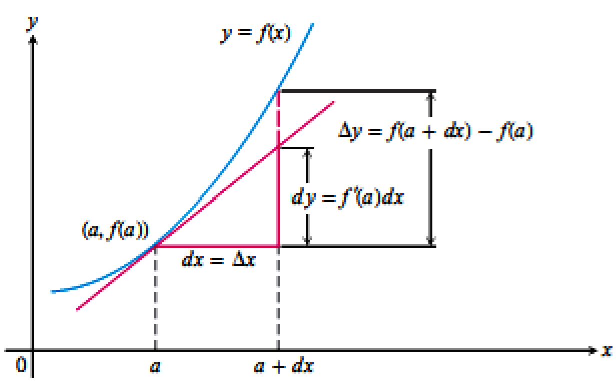
دیده میشود در اینصورت نیازی به داشتن معادله منحنی c نبوده و انتگرال فقط با داشتن اول و آخر منحنی, بدست می‌آید. به تابع $u = xy^2 + c$ تابع پتانسیل میگوییم.

بطور خلاصه برای محاسبه انتگرال منحنی‌الخط $\int_c M(x,y)dx + N(x,y)dy$ بر روی منحنی ساده c , با داشتن معادله منحنی, میتوان تمام انتگرال را بر حسب یک متغیر x یا y بیان کرده و آنرا محاسبه کرد.

اما اگر شرط $M_y = N_x$ برقرار باشد, یعنی داخل انتگرال, دیفرانسیل کامل است. پس میتوان یک تابع اولیه مانند u یافت که دیفرانسیل آن $Mdx + Ndy$ باشد. پس با داشتن نقاط اولیه و انتهایی منحنی, انتگرال قابل محاسبه است. به عبارتی در این شرایط انتگرال مستقل از مسیر است. حال اگر c بسته بوده و شرط $M_y = N_x$ در داخل ناحیه شامل c نیز برقرار باشد, از آنجا که اول و آخر منحنی بر هم منطبق است, لذا حاصل انتگرال صفر خواهد شد.

❋ <u>یک اثبات شهودی برای دیفرانسیل تابع دو متغیره</u>

در این بخش می‌خواهیم یک اثبات شهودی (و نه دقیقِ ریاضی) برای رابطه $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ ارائه دهیم. ابتدا مفهوم دیفرانسیل در توابع یک متغیره را یادآوری می‌کنیم. برای تابع یک متغیره $y = f(x)$ خواهیم داشت:



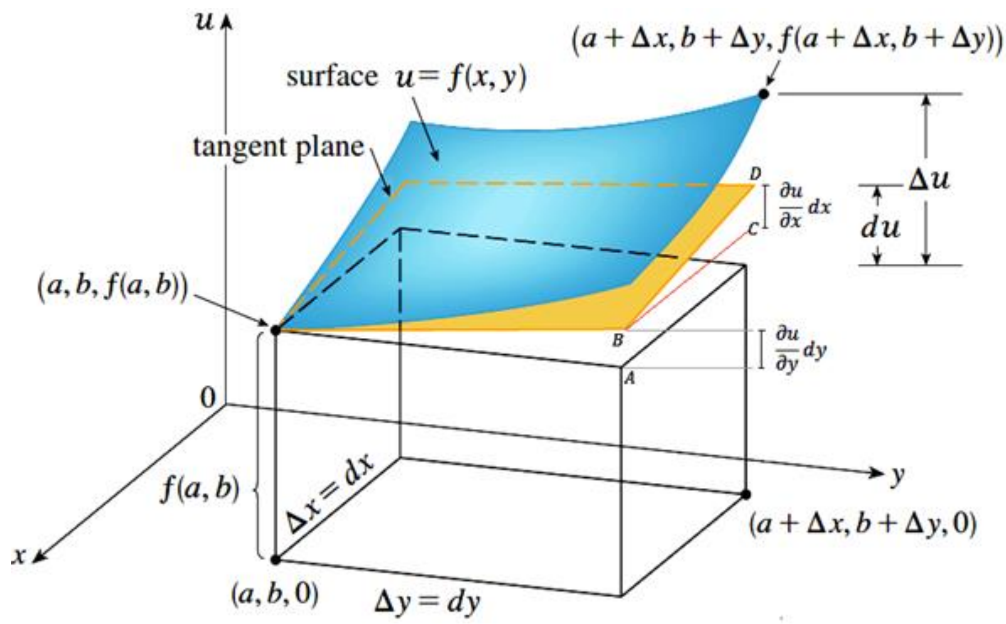
$$y = f(x) \to \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$$

$$\to dy = \frac{df}{dx}dx$$

به همین ترتیب برای تابع دو متغیره $u = f(x,y)$ میتوان شکل صفحه بعد را در نظر گرفت.

ابتدا بر روی رویه $u = f(x,y)$ در نقطه $(a,b,f(a,b))$ یک صفحه مماس رسم می‌کنیم. حال چون هدف محاسبه du میباشد, از B خطی موازی محور xها رسم میکنیم. بدیهی است:

$$du = CD + AB = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$



به عنوان مثال فرض کنید برای تابع $u = f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$ مقدار x از 2 به 2.05 و مقدار y از 3 به 2.96 تغییر کند. در اینصورت مقدار تغییرات واقعی تابع یعنی Δu برابر است با:

$$\Delta u = f(2.05,2.96) - f(2,3) = (2.05^2 + 3 \times 2.05 \times 2.96 - 2.96^2) - (2^2 + 3 \times 2 \times 3 - 3^2)$$

که به $\Delta u = 0.6449$ خواهیم رسید. اما از آنجا که $\Delta x = 0.05$ و $\Delta y = -0.04$ مقادیر کوچکی هستند ساده‌تر است از du استفاده کنیم. با انتخاب $dx = \Delta x$ و $dy = \Delta y$ خواهیم داشت:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = (2x+3y)dx + (3x-2y)dy$$

$$\rightarrow du = (2 \times 2 + 3 \times 3)(0.05) + (3 \times 2 - 2 \times 3)(-0.04) = 0.65$$

دیده می‌شود که $\Delta u \approx du$ و بدیهی است که محاسبه du ساده‌تر از Δu خواهد بود.

تمرینات بخش ۱-۳-۳

۱- معادلات زیر را حل کنید.

1) $(2xy - tany)dx + (x^2 - xsec^2y)dy = 0$; Ans : $x^2y - xtany = c$

2) $(ye^{xy} - 2y^3)dx + (xe^{xy} - 6xy^2 - 2y)dy = 0$; Ans : $e^{xy} - 2xy^3 - y^2 = c$

3) $\big(sin(xy) + xycos(xy)\big)dx + \big(x^2cos(xy)\big)dy = 0$; Ans : $xsin(xy) = c$

4) $\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x}\right)dx + \left(\sqrt{1+x^2} + x^2 - Lnx\right)dy = 0$

Ans : $y\sqrt{1+x^2} + x^2y - yLnx = c$

۲- معادله زیر را یکبار با توجه به کامل بودن معادله و بار دیگر به کمک روش ارائه شده در بحث معادلات با توابع همگن حل کرده, جوابها را مقایسه کنید.

$$y' = \frac{x+3y-1}{-3x+2y+4} \qquad \text{Ans : } \frac{1}{2}x^2 + 3xy - x - y^2 - 4y = c$$

۱-۳-۴- عامل انتگرال ساز(تبدیل به معادله کامل)

معادله زیر را در نظر می‌گیریم. این معادله کامل نیست, اما اگر طرفین در y^{-2} ضرب شود کامل خواهد شد. زیرا:

$$\underbrace{2xy}_{M(x,y)}\ dx+\underbrace{(3y^2-x^2+3)}_{N(x,y)}dy=0\rightarrow M_y\neq N_x$$

$$\xrightarrow{\times y^{-2}}\underbrace{(2xy^{-1})}_{M(x,y)}dx+\underbrace{(3-x^2y^{-2}+3y^{-2})}_{N(x,y)}dy=0\rightarrow M_y=N_x$$

سوال این است که این عبارتِ y^{-2} چگونه بدست آمد. بنابراین در اینجا بدنبال عبارتی هستیم که سمت چپ را دیفرانسیل کامل کند. به این عبارت اصطلاحا عامل انتگرال‌ساز (فاکتور انتگرال‌ساز) گفته و معمولا با μ نمایش می‌دهیم.

حال ببینیم چگونه این عامل (فاکتور) انتگرال ساز را بیابیم. برای اینکار طرفین رابطه (1) را در μ ضرب می‌کنیم:

$$\mu Mdx+\mu Ndy\xrightarrow{(2)}(\mu M)_y=(\mu N)_x\rightarrow\left(M_y-N_x\right)\mu=N\mu_x-M\mu_y\qquad(3)$$

بنابراین بایستی معادله (3) را حل کنیم تا عامل انتگرال ساز را بدست آوریم که بدیهی است حل این معادله سخت‌تر از معادله اولیه است$(!)$, چرا که در واقع یک معادله با مشتقات جزئی است. بنابراین در ادامه صرفا به بررسی چند حالت خاص می‌پردازیم.

بررسی حالات خاص:

۱- اگر μ فقط تابعی از x باشد, در اینصورت:

$$\mu=h(x)\xrightarrow{(3)}\left(M_y-N_x\right)\mu=N\mu_x\rightarrow\frac{\mu_x}{\mu}=\frac{M_y-N_x}{N}$$

پس اگر قرار است μ فقط تابعی از x باشد, از آنجا که سمت چپ رابطه بالا تابعی از x می‌شود, لذا بایستی سمت راست رابطه نیز تابعی از x مثلا $f(x)$ باشد. اگر اینگونه شد عاملی انتگرالی بر حسب x داشته و بصورت زیر خواهد بود:

$$if\ \ \frac{M_y-N_x}{N}=f(x)\rightarrow\frac{\mu_x}{\mu}=f(x)\rightarrow\frac{d\mu}{\mu}=f(x)dx\rightarrow ln(\mu(x))=\int f(x)dx\rightarrow\mu(x)=e^{\int f(x)dx}$$

توضیح: ممکن است تصور شود در محاسبه بالا دقت کافی صورت نگرفته است و بایستی به طریق زیر عمل کرد:

$$ln(|\mu(x)|)=\int f(x)dx+c_1\rightarrow\mu(x)=\underbrace{\pm e^{c_1}}_{c_2}e^{\int f(x)dx}$$

از آنجا که یافتن فقط یک عامل انتگرال ساز کافی است, بهتر است $c_2=1$ انتخاب شود. لذا از اینجا به بعد عامل انتگرال ساز را مثبت انتخاب میکنیم.

به عنوان یک مثال ساده, معادله مطرح شده در قسمت ۲ از مثال ۱-۱ را در نظر می‌گیریم. این معادله ابتدا به فرم $(xy)'=e^{-x}$ داده شد که حل آن ساده است. عنوان شد می‌توان آنرا بصورت $xy'+y=e^{-x}$ نیز طرح کرد که بایستی تشخیص دهیم سمت چپ همان $(xy)'$ میباشد که در بخش ۱-۳-۳ آنرا با دیدگاه معادله کامل نیز حل کردیم. اما اگر آنرا بصورت $y'+\frac{1}{x}y=\frac{e^{-x}}{x}$ داده باشند, سمت چپ مشتق عبارت خاصی نخواهد بود (به عبارتی اگر به فرم دیفرانسیل بیان شود, دیفرانسیل کامل نیست). زیرا:

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{e^{-x}}{x}\rightarrow\left(\frac{y}{x}-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx+dy=0\rightarrow M_y\neq N_x$$

حال کنترل می‌کنیم که آیا فاکتور انتگرالی بر حسب x دارد یا خیر.

$$\underbrace{\left(\frac{y}{x}-\frac{e^{-x}}{x}\right)}_{M}dx+\underbrace{(1)}_{N}dy=0\rightarrow\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{\frac{1}{x}-0}{1}=\frac{1}{x}=f(x)\ \boxed{\surd}\ \rightarrow\mu(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$$

لذا اگر طرفین معادله را در $\mu(x)=x$ ضرب کنیم به یک معادله کامل خواهیم رسید که حل آن در بخش ۱-۳-۳ دیده شد.

به عنوان مثال دیگر برای معادله‌ای که در شروع درس بیان شد, کنترل می‌کنیم که آیا فاکتور انتگرالی بر حسب x دارد یا خیر.

$$\underbrace{2xy}_{M}\,dx+\underbrace{(3y^2-x^2+3)}_{N}\,dy=0\rightarrow\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{4x}{3y^2-x^2+3}\neq f(x)\ \boxed{\times}$$

از آنجا که $\frac{M_y-N_x}{N}$ تابعی از x نمی‌باشد, یعنی این معادله عامل انتگرال سازی که صرفا تابع x باشد ندارد, لذا به بررسی حالات دیگر می‌پردازیم.

۲- اگر μ فقط تابعی از y باشد, در اینصورت:

$$\mu=h(y)\xrightarrow{(3)}\left(M_y-N_x\right)\mu=-M\mu_y\rightarrow\frac{\mu_y}{\mu}=\frac{M_y-N_x}{-M}$$

پس اگر قرار است μ فقط تابعی از y باشد, بایستی سمت راست رابطه بالا نیز تابعی از y مثلا $f(y)$ باشد, که اگر اینگونه شد:

$$if\quad\frac{M_y-N_x}{-M}=f(y)\rightarrow\frac{\mu_y}{\mu}=f(y)\rightarrow\frac{d\mu}{\mu}=f(y)dy\rightarrow ln(\mu(y))=\int f(y)dy\rightarrow\mu(y)=e^{\int f(y)dy}$$

مثلا برای معادله بالا دیده شد که معادله عامل انتگرال‌سازی بر حسب x ندارد. حال کنترل میکنیم که شاید عامل انتگرال سازی بر حسب y داشته باشد.

$$\frac{M_y-N_x}{-M}=\frac{-2}{y}=f(y)\ \boxed{\surd}\ \rightarrow\mu(y)=e^{\int\frac{-2}{y}dy}=y^{-2}$$

$$2xydx+(3y^2-x^2+3)dy=0\xrightarrow{\times y^{-2}}(2xy^{-1})dx+(3-x^2y^{-2}+3y^{-2})dy=0$$

حال که معادله کامل شده است, مشابه آنچه در بخش ۱-۳-۳ عنوان شد جواب را بدست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{ll}u_x=2xy^{-1} & ;\quad u_y=3-x^2y^{-2}+3y^{-2}\\ \downarrow & \\ u=x^2y^{-1}+A(y)\ \rightarrow & \quad u_y=-x^2y^{-2}+A'(y)\end{array}\right\}\rightarrow A'(y)=3+3y^{-2}$$

$$\rightarrow A(y)=3y-3y^{-1}\qquad;\qquad u=c\rightarrow x^2y^{-1}+3y-3y^{-1}=c\rightarrow x^2+3y^2-3=cy$$

$$\underline{or}:\ N(x,y)=3-x^2y^{-2}+3y^{-2}\rightarrow\int 2xy^{-1}\,dx+\int(3+3y^{-2})\,dy=\frac{x^2}{y}+3y-\frac{3}{y}=c$$

<u>توضیح</u>: ممکن است معادله‌ای هیچ فاکتور انتگرالی نداشته باشد. اما اگر داشته باشد, منحصر به فرد نیست. مثلا برای معادله زیر هم عامل انتگرال سازی بر حسب x و هم بر حسب y وجود دارد.

$$\underbrace{y^2sinx}_{M(x,y)}\,dx\underbrace{-ycosx}_{N(x,y)}\,dy=0\xrightarrow{\cdots}\ \mu(x)=cosx\ ;\ \mu(y)=1/y$$

۳- در حالت کلی ممکن است μ تابعی صرفا از x و یا صرفا از y نبوده و تابعی بر حسب هم x و هم y باشد. اما گاهی اوقات می‌توان آنرا تابعی از صرفا یک متغیر دانست. مثلا فرض کنید $\mu(x,y)$ بصورت زیر باشد:

$$\mu(x,y) = cos(x^2 + ye^x) + \frac{2}{(x^2 + ye^x)^2} + e^{(x^2+ye^x)}$$

اگر چه μ تابعی از هم x و y است, اما دیده میشود اگر $z(x,y) = x^2 + ye^x$ انتخاب شود, μ صرفا تابع یک متغیرِ z است.

همچنین μ ممکن است تابعی از $z(x,y) = xy^2$ یا $z(x,y) = x^2 + 3y$ و غیره باشد. در این‌حالت $\mu(x,y)$ در واقع یک تابع دو متغیره است. اما اگر فرض کنیم فرم z را می‌دانیم, می‌توان μ را بصورت تک متغیره به فرم $\mu(z)$ بیان کرد. در اینصورت با استفاده از مشتق زنجیری:

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} \to \mu_x = \mu_z z_x \quad ; \quad \mu_y = \mu_z z_y \xrightarrow{(3)} \frac{\mu_z}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{Nz_x - Mz_y}$$

پس بایستی سمت راست رابطه بالا, تابعی از z مانند $f(z)$ باشد که اگر اینگونه شد, عامل انتگرال‌ساز بصورت زیر بدست می‌آید:

$$if \quad \frac{M_y - N_x}{Nz_x - Mz_y} = f(z) \to \frac{d\mu}{\mu} = f(z)dz \to ln(\mu(z)) = \int f(z)dz \to \mu(z) = e^{\int f(z)dz} \qquad (4)$$

اما مشکل اصلی این است که از ابتدا مشخص نیست که فرم z بر حسب x و y چگونه است. در اینصورت معمولا فرم z در صورت مساله داده میشود, یعنی تضمین آن است که $\frac{M_y - N_x}{Nz_x - Mz_y}$ تابعی از z می‌گردد.

توضیح: حالت ۳ تعمیم دو حالت قبل است. چرا که اگر مثلا μ فقط تابعی از $z = x$ باشد, در اینصورت کسر زیر بایستی تابعی از $z = x$ باشد که همان نتیجه‌ای است که در اولین حالت دیده شد.

$$\frac{M_y - N_x}{Nz_x - Mz_y} = \frac{M_y - N_x}{N}$$

حالت خاص: برای معادلاتی به صورت زیر, فرم عامل انتگرال ساز به صورت $\mu(x,y) = x^\alpha y^\beta$ می‌باشد که با جایگذاری در شرط کامل بودن, ضرایب α و β (مشروط بر آنکه دستگاه حاصله دارای جواب باشد) بدست می‌آید.

$$\underbrace{y(k_1x^{a_1}y^{b_1} + k_2x^{a_2}y^{b_2})}_{M(x,y)}dx + \underbrace{x(k_3x^{a_3}y^{b_3} + k_4x^{a_4}y^{b_4})}_{N(x,y)}dy = 0 \qquad (5)$$

لازم بذکر است که شرط داشتن جواب آن است که $k_1k_4 - k_2k_3 \neq 0$ باشد. به عنوان مثال در معادله $y(2x^2 + y^3)dx - x(2x^2 - y^3)dy = 0$ پس از ضرب طرفین در $x^\alpha y^\beta$ و جایگذاری در شرط $M_y = N_x$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2x^{\alpha+2}y^{\beta+1} + x^\alpha y^{\beta+4}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2x^{\alpha+3}y^\beta + x^{\alpha+1}y^{\beta+3}\right)$$

$$\to 2(\beta+1)x^{\alpha+2}y^\beta + (\beta+4)x^\alpha y^{\beta+3} = -2(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^\beta + (\alpha+1)x^\alpha y^{\beta+3}$$

$$\to \begin{cases} 2(\beta+1) = -2(\alpha+3) \\ \beta + 4 = \alpha + 1 \end{cases} \to \begin{cases} \beta + \alpha = -4 \\ \beta - \alpha = -3 \end{cases} \to \begin{cases} \alpha = -1/2 \\ \beta = -7/2 \end{cases}$$

بنابراین با ضرب طرفین معادله در $x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{7}{2}}$ معادله کامل شده و مشابه بخش ۱-۳-۳ قابل حل است.

خلاصه:

۱- کنترل اینکه معادله دارای فاکتور انتگرال ساز بر حسب x یا y باشد.(دو حالت اول و دوم)

۲- ممکن است معادله به فرم ارائه شده در (5) باشد.

۳- در غیر اینصورت معمولا در صورت مساله فرم فاکتور انتگرال داده شده است که از فرمول (4) استفاده میکنیم.

مثال ۱-۸ معادله زیر را حل کنید.

$$\underbrace{(x^4Lnx-2xy^3)}_{M(x,y)}\,dx+\underbrace{3x^2y^2}_{N(x,y)}\,dy=0\quad;\quad x>0\;;\quad y(2)=1$$

حل چون شرط $M_y=N_x$ برقرار نمیباشد, پس معادله دیفرانسیل کامل نیست. اما:

$$\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{-6xy^2-6xy^2}{3x^2y^2}=\frac{-4}{x}=f(x)\ \boxed{\surd}\rightarrow\mu(x)=e^{\int\frac{-4}{x}dx}=x^{-4}$$

$$\xrightarrow{\times x^{-4}}(Lnx-2x^{-3}y^3)dx+3x^{-2}y^2dy=0$$

$$\left.\begin{array}{lcl} u_x=Lnx-2x^{-3}y^3 & ; & u_y=3x^{-2}y^2 \\ \quad\downarrow & & \\ u=x(Lnx-1)+x^{-2}y^3+A(y) & \rightarrow & u_y=3x^{-2}y^2+A'(y)\end{array}\right\}\rightarrow A'(y)=0$$

$$u=c\rightarrow x(Lnx-1)+x^{-2}y^3=c\xrightarrow{y(2)=1}4x^3(Lnx-1)+4y^3-8x^2Ln2+7x^2=0\ \blacksquare$$

توضیح: پس از کامل شدن معادله, ساده‌تر است که به یکی از دو طریق زیر عمل کنیم:

$$1)\ \int M(x,y)\,dx+\int\underbrace{N^*(x,y)}_{0}\,dy=c\rightarrow x(Lnx-1)+x^{-2}y^3=c$$

$$\left(N(x,y)=3x^{-2}y^2\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل } x}N^*(x,y)=0\right)$$

$$2)\ \int\underbrace{M^*(x,y)}_{Lnx}\,dx+\int\underbrace{N(x,y)}_{3x^{-2}y^2}\,dy=c\rightarrow x(Lnx-1)+x^{-2}y^3=c$$

$$\left(M(x,y)=Lnx-2x^{-3}y^3\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل } y}M^*(x,y)=Lnx\right)\ \blacksquare$$

مثال ۱-۹ اگر بدانیم معادلات زیر دارای فاکتور انتگرال‌سازی بر حسب z های داده شده می‌باشد, آنها را بیابید.

$$1)\ \underbrace{(3x^4-y)}_{N(x,y)}\,dy+\underbrace{(4x^7-12x^3y-8x^3)}_{M(x,y)}\,dx=0\qquad;\qquad z=x^4+y$$

$$2)\ \underbrace{y}_{M(x,y)}\,dx+\underbrace{x(x^2y-1)}_{N(x,y)}\,dy=0\qquad;\qquad z=\frac{y}{x^3}$$

حل الف: با توجه به فاکتور انتگرال ساز داده شده, خواهیم داشت:

$$z = x^4 + y \xrightarrow{(4)} \frac{M_y - N_x}{Nz_x - Mz_y} = \frac{-24x^3}{8x^3(x^4 + y + 1)} = \frac{-3}{z+1} = f(z) \quad \boxed{\surd}$$

$$\to \mu(z) = e^{\int f(z)dz} = \frac{1}{(z+1)^3} \to \mu(x,y) = \frac{1}{(x^4 + y + 1)^3} \quad \blacksquare$$

توضیح: بدون حفظ کردن رابطه (4) نیز می‌توان با ضرب طرفین معادله در این عامل انتگرال ساز, آنرا بدست آورد. یعنی:

$$\left(\mu(4x^7 - 12x^3y - 8x^3)\right)_y = \left(\mu(3x^4 - y)\right)_x \quad ; \quad \mu_x = z_x\mu_z = 4x^3\mu_z \quad ; \quad \mu_y = z_y\mu_z = \mu_z$$

$$\to \underbrace{\mu_y}_{\mu_z}(4x^7 - 12x^3y - 8x^3) - 12x^3\mu = \underbrace{\mu_x}_{4x^3\mu_z}(3x^4 - y) + 12x^3\mu$$

$$\to \mu_z(8x^7 + 8x^3y + 8x^3) = -24x^3\mu \to \frac{\mu_z}{\mu} = \frac{-24x^3}{8x^3(x^4 + y + 1)} = \frac{-3}{z+1} \quad \blacksquare$$

ب: مشابه قسمت قبل در اینجا نیز به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$$z = \frac{y}{x^3} \xrightarrow{(4)} \frac{M_y - N_x}{Nz_x - Mz_y} = \frac{1 - (3x^2y - 1)}{-3x(x^2y - 1)\frac{y}{x^4} - y\frac{1}{x^3}} = \frac{x^3(2 - 3x^2y)}{y(2 - 3x^2y)} = \frac{1}{z} = f(z) \quad \boxed{\surd}$$

$$\to \mu(z) = e^{\int f(z)dz} = z \to \mu(x,y) = \frac{y}{x^3} \quad \blacksquare$$

مثال ۱-۱۰ معادله $(x + y)dx - (x - y)dy = 0$ را حل کنید. $(z = x^2 + y^2)$

حل با توجه به فاکتور انتگرال ساز داده شده, خواهیم داشت:

$$z = x^2 + y^2 \xrightarrow{(4)} \frac{M_y - N_x}{Nz_x - Mz_y} = \frac{-1}{x^2 + y^2} = \frac{-1}{z} = f(z) \quad \boxed{\surd}$$

$$\to \mu(z) = e^{\int \frac{-1}{z}dz} = e^{-lnz} = \frac{1}{z} \to \mu(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

با ضرب طرفین معادله در این عامل انتگرال ساز, معادله دیفرانسیل کامل می‌شود. لذا:

$$\frac{x + y}{x^2 + y^2}dx - \frac{x - y}{x^2 + y^2}dy = 0 \quad ; \quad N(x,y) = \frac{-x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2} \to N^*(x,y) = 0$$

$$\int M(x,y)\,dx + \int N^*(x,y)\,dy = c \to \int \frac{x + y}{x^2 + y^2}dx + \int 0\,dy = c$$

توجه شود که N بصورت دو جمله بوده و هر دو جمله شامل x میباشند. لذا با حذف جملات شامل x , $N^* = 0$ خواهد بود.

$$\int \frac{x}{x^2 + y^2}dx + \int \frac{y}{x^2 + y^2}dx = c \to \frac{1}{2}ln(x^2 + y^2) + Arctg\left(\frac{x}{y}\right) = c \quad \blacksquare$$

توضیح: معادله بالا قبلا در بخش معادلات با توابع همگن نیز حل شده است. در واقع با استفاده از بحث توابع همگن در ریاضی ۲ میتوان ثابت کرد که اگر یک معادله با تابع همگن باشد, دارای عامل انتگرال‌ساز $\mu = \frac{1}{xM + yN}$ است. مثلا در معادله بالا اگر فرم z نیز ارائه نشده باشد, با توجه به همگن بودن توابع خواهیم داشت:

$$\underbrace{(x+y)}_{M(x,y)}dx\underbrace{-(x-y)}_{N(x,y)}dy=0\rightarrow\mu=\frac{1}{xM+yN}=\frac{1}{x^2+y^2}$$

لازم بذکر است که در حالت خاص اگر $xM+yN=0$ آنگاه بدیهی است $y=cx$ جواب است. زیرا:

$$\begin{cases}xM+yN=0\\Mdx+Ndy=0\end{cases}\rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}\rightarrow ln|y|=ln|x|+c_1\rightarrow|y|=|x|e^{c_1}\rightarrow y=cx\ \blacksquare$$

مشکل‌ترین حالت ممکن آن است که فاکتور انتگرال ساز بر حسب x یا y نبوده، به فرم (5) نیز نباشد و در صورت مساله نیز z را نداده باشند. اولا در اینصورت ممکن است معادله با روش ساده‌تری به غیر از فاکتور انتگرال حل شود. اما اگر بخواهیم آنرا با این روش حل کنیم کار طولانی است, چرا که بایستی برای فرمهای مختلفِ z , کسر $\frac{M_y-N_x}{Nz_x-Mz_y}$ را بدست آورده و کنترل کنیم که آیا این کسر, تابع z انتخاب شده میشود یا خیر. در ادامه برخی از فرمهای z ارائه می‌شود.

مثلا میخواهیم بدانیم در چه صورت معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ دارای عامل انتگرال سازی بر حسب $z=\frac{y}{x}$ میباشد. در اینصورت با استفاده از رابطه (4) خواهیم داشت:

$$\frac{M_y-N_x}{Nz_x-Mz_y}=\frac{M_y-N_x}{N\frac{-y}{x^2}-M\frac{1}{x}}=\frac{-x^2(M_y-N_x)}{yN+xM}$$

یعنی بایستی عبارت سمت راست تابعی از $\frac{y}{x}$ گردد تا معادله دارای عامل انتگرال سازی بر حسب $\frac{y}{x}$ باشد.

به همین ترتیب میتوان نشان داد, اگر هر یک از عبارات زیر تابعی از z ارائه شده در هر قسمت گردد, در اینصورت معادله دارای عامل انتگرال ساز بصورت $\mu(z)=e^{\int f(z)dz}$ میباشد.

$$\frac{M_y-N_x}{yN-xM}=f(\underbrace{xy}_{z})\quad;\quad\frac{y^2(M_y-N_x)}{yN+xM}=f(\underbrace{x/y}_{z})\quad;\quad\frac{-x^2(M_y-N_x)}{yN+xM}=f(\underbrace{y/x}_{z})$$

$$\frac{M_y-N_x}{2(xN-yM)}=f(\underbrace{x^2+y^2}_{z})\quad;\quad\frac{M_y-N_x}{N-M}=f(\underbrace{x+y}_{z})\quad;\quad\frac{M_y-N_x}{2(xN+yM)}=f(\underbrace{x^2-y^2}_{z})$$

مهمتر از همه آن است که این ۶ حالت و نیز دو حالت اولیه (تابعی از x یا y) همه حالات انتخابی z نیستند. یعنی ممکن است همه حالات بالا را نیز کنترل کنیم و جوابی بدست نیاوریم, چرا که ممکن است معادله دارای فاکتور انتگرالی مثلا بر حسب $z=x^4+2y$ باشد!

* روش دسته بندی

یک روش دیگر برای حل معادلات کامل و غیرکامل (که قابلیت کامل شدن را دارا میباشند) دسته بندی میباشد. در این روش جملات را طوری دسته‌بندی و فاکتور گیری میکنیم که هر دسته یک دیفرانسیل کامل شود. در استفاده از این روش دانستن دیفرانسیل کامل‌های زیر می‌تواند مفید باشد.

$$xdy+ydx=d(xy)\qquad;\qquad xdy-ydx=x^2d\left(\frac{y}{x}\right)=-y^2d\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=d\left(Arctg\left(\frac{y}{x}\right)\right)\ ;\ \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}d\left(Ln(x^2+y^2)\right)$$

$$\frac{xdy - ydx}{xy} = d\left(Ln\left|\frac{y}{x}\right|\right) \quad ; \quad \frac{ydx + xdy}{xy} = d(Ln|xy|)$$

مثال ۱–۱۱ معادلات زیر را با روش دسته بندی حل کنید. (دو معادله اول در بخش قبل حل شده است)

1) $(3x^2 + ycosx)dx + (sinx - 4y^3)dy = 0$

$3x^2dx + (ycosxdx + sinxdy) - 4y^3dy = 0$

$d(x^3) + d(ysinx) - d(y^4) = 0 \rightarrow d(x^3 + ysinx - y^4) = 0 \rightarrow x^3 + ysinx - y^4 = c$

2) $(x + y)dx - (x - y)dy = 0 \rightarrow \ xdy - ydx = xdx + ydy$

$$\xrightarrow{\times 1/(x^2+y^2)} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} \rightarrow Arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}ln(x^2 + y^2) + c$$

3) $xy' = e^{-xy} - y \rightarrow \underbrace{xdy + ydx}_{d(xy)} = e^{-xy}dx \rightarrow \underbrace{e^{xy}d(xy)}_{d(e^{xy})} = dx \rightarrow e^{xy} = x + c$

4) $y(x^2y^2 + 2xy + 1)dx + x(x^2y^2 - 2xy + 1)dy = 0$

$x^2y^2\underbrace{(ydx + xdy)}_{d(xy)} + 2xy\underbrace{(ydx - xdy)}_{y^2d(x/y)} + \underbrace{ydx + xdy}_{d(xy)} = 0$

$$\xrightarrow{\times 1/(x^2y^2)} d(xy) + 2\frac{y}{x}d\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{d(xy)}{x^2y^2} \rightarrow xy + 2ln\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{xy} = c$$

5) $(x^2 + y^2 - x)dx - ydy = 0$

$$(x^2 + y^2)dx - (xdx + ydy) = 0 \rightarrow (x^2 + y^2)dx - \frac{1}{2}d(x^2 + y^2) = 0$$

$$\rightarrow 2dx - \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 0 \rightarrow 2x - ln(x^2 + y^2) = c_1 \rightarrow x^2 + y^2 = ce^{2x} \ \blacksquare$$

تمرینات بخش ۱–۳–۴

۱- نشان دهید اگر معادله‌ای دارای عامل انتگرال ساز به صورت $x^\alpha y^\beta$ باشد, ضرایب α, β از متحد قرار دادن دو طرف عبارت $M_y - N_x = \frac{\alpha}{x}N - \frac{\beta}{y}M$ بدست می‌آید. سپس یک عامل انتگرال ساز برای معادله زیر بیابید.

$y^2(1 - x^2)dx + (x^3y + 2x^2 + xy)dy = 0 \quad ; \quad \underline{Ans}: \ \mu = x^{-2}y^{-3}$

۲- معادلات زیر را حل کنید. ممکن است در تعدادی از معادلات, عامل انتگرال ساز بر حسب x یا y و در تعداد دیگری به یکی از ۶ فرم ارائه شده در انتهای بخش ۱–۳–۴ باشد.

1) $dx + 2xydy = ye^{-y^2}dy \quad ; \quad$ 2) $ydx - (x^2 + y^2 + x)dy = 0$

3) $\left(e^{-2\sqrt{x}} - y\right)dx = \sqrt{x}dy \quad ; \quad y(0) = 1 \quad ; \quad \underline{Ans}: \ ye^{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} = 1$

4) $y^2dx + (x^2 - xy - y^2)dy = 0 \quad ; \quad \underline{Ans}: \ y^2\left(\frac{x - y}{x + y}\right) = c$

5) $(4y^3 - 2x)y' + y = 0 \quad ; \quad y(1) = 1 \quad ; \quad \underline{Ans}: \ x = y^2(5 - 4y)$

6) $y(1+x^4y)dx+xdy=0 \quad (z=xy)$; <u>Ans</u>: $y=3/(x^4-cx)$

7) $(2xyLny)dx+\left(x^2+y^2\sqrt{1+y^2}\right)dy=0$; <u>Ans</u>: $x^2Lny+\frac{1}{3}(1+y^2)^{\frac{3}{2}}=c$

8) $(x-e^y)y'+cosy=0$

9) $(3xy+y^2)+(x^2+xy)y'=0$; <u>Ans</u> : $x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2=c$

۳- اگر بدانیم معادله زیر دارای فاکتور انتگرال سازی بر حسب $z=2lnx-y^2$ می‌باشد, معادله را حل کنید.

$2xy(1+xy^2)y'=1$; <u>Ans</u> : $x=\frac{1}{1-y^2-ce^{-y^2}}$

۴- قسمت ۹ از تمرین ۲ را یکبار دیگر با استفاده از فاکتور انتگرال‌ساز $\mu(x,y)=\frac{1}{xy(2x+y)}$ حل کرده نشان دهید جوابهای نهایی یکسان می‌باشند.

❋ ۵- سه معادله ۳ تا ۵ از مثال ۱-۱۱را با استفاده از یافتن عامل انتگرال ساز حل کنید.

۱-۴- معادلات خطی به فرم $y'+p(x)y=g(x)$

فرم کلی این معادلات بصورت زیر است:

$$y'+p(x)y=g(x) \qquad (6)$$

حال نشان میدهیم این معادله, دارای عامل انتگرال سازی بر حسب x می‌باشد:

$$y'+p(x)y=g(x)\rightarrow \underbrace{(p(x)y-g(x))}_{M(x,y)}dx+\underbrace{1}_{N(x,y)}dy=0$$

$$\frac{M_y-N_x}{N}=p(x) \quad \boxed{\surd} \quad \rightarrow \mu(x)=e^{\int p(x)dx}$$

با ضرب طرفین معادله در این عامل انتگرال ساز معادله کامل شده و خواهیم داشت:

$$\underbrace{(p(x)y-g(x))\mu(x)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{\mu(x)}_{N(x,y)}dy=0 \quad ; \quad u=c\rightarrow \int \underbrace{-g(x)\mu(x)}_{M^*(x,y)}dx+\int \underbrace{\mu(x)}_{N(x,y)}dy=c$$

$$-\int g(x)\mu(x)\,dx+y\mu(x)=c\rightarrow y=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)g(x)dx+c\right] \qquad (7)$$

در بخش ۱-۳-۱ معادله (6) در حالت همگن یعنی $g(x)=0$ حل شد و جواب آن بصورت $y=ce^{-\int p(x)dx}$ بدست آمد, که با توجه به تعریف $\mu(x)$ میتوان آنرا بصورت $y=\frac{c}{\mu(x)}$ نوشت. از رابطه (7) نیز دیده میشود که در حالت همگن به همین جواب میرسیم. به عبارتی معکوس عامل انتگرال ساز, جواب معادله همگن شده (6) میباشد.

به عنوان مثال معادله $y'+\frac{1}{x}y=\frac{e^{-x}}{x}$ را در نظر می‌گیریم (قسمت ۲ از مثال ۱-۱) . از آنجا که این معادله خطی است خواهیم داشت $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int dx/x}=x$, لذا:

$$y=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)g(x)dx+c\right]=\frac{1}{x}\left[\int x\frac{e^{-x}}{x}dx+c\right]=-\frac{e^{-x}}{x}+\frac{c}{x}$$

توضیح ۱: در استفاده از رابطه (7) توجه شود که همواره معادله خطی را بگونه‌ای بنویسیم که ضریب y' برابر 1 شده باشد.

توضیح ۲: در اینجا به روش عامل انتگرال ساز, به دنبال عاملی بودیم که عبارتی به فرم $d(?)$ ایجاد شود. در برخی کتابها به طریق دیگری معادله خطی حل شده است. در این روش به دنبال عاملی میگردیم که فرم $(?)'$ ایجاد شود. بدیهی است هر دو یک بحث میباشند و آن ساختن ترمی است که بتوان از آن انتگرال گرفت که در اولی این دیدگاه دیفرانسیلی است و در دومی دیدگاهِ مشتق. برای این منظور با ضرب کردن طرفین معادله خطی در $\mu(x)$ خواهیم داشت:

$$y' + p(x)y = g(x) \to \mu y' + p\mu y = \mu g$$

از مقایسه سمت چپ این عبارت با رابطه $\mu y' + \mu' y = (\mu y)'$ میتوان گفت در صورتی این عبارت مشتق کامل خواهد بود که $\mu' = p\mu$ باشد. بدیهی است این معادله اخیر, یک معادله جدایی‌پذیر بوده و حل آن بصورت $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ می‌باشد. لذا:

$$y' + p(x)y = g(x) \xrightarrow{\times e^{\int p(x)dx}} \underbrace{y' e^{\int p(x)dx} + p(x)e^{\int p(x)dx} y}_{\left(e^{\int p(x)dx} y\right)'} = g(x)e^{\int p(x)dx}$$

که با انتگرال گیری از دو طرف به همان جواب بالا میرسیم.

مثال ۱-۱۲ معادلات زیر را حل کنید.

$$1)\quad y' + 2y = e^{-3x} \quad ; \quad \int p(x)dx = \int 2dx = 2x \to \mu(x) = e^{2x}$$

$$\to y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)g(x)dx + c\right] = \frac{1}{e^{2x}}\left[\int e^{2x}e^{-3x}\,dx + c\right] = e^{-2x}(c - e^{-x}) \quad \blacksquare$$

$$2)\quad y' + ytanx = cos^3x \quad ; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad 0 \le x < \pi/2$$

$$\int p(x)dx = \int tanx\,dx = -\,ln(cosx) \to \mu(x) = e^{-\,ln(cosx)} = \frac{1}{cosx}$$

دقت شود که در واقع بایستی جواب انتگرال را بصورت $-\,ln|cosx|$ می‌نوشتیم که در اینصورت $\mu(x) = \frac{1}{|cosx|}$ بدست می‌آید. اما از آنجا که صرفا داشتن یک عامل انتگرال‌ساز برای حل معادله کافی است, لذا نیازی به منظور کردن قدرمطلق نمی‌باشد.

$$\to y = cosx\left[\int \frac{cos^3x}{cosx}dx + c\right] = cosx\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sin2x + c\right) \xrightarrow{I.C.} c = 0$$

و یا بدون استفاده از فرمول نهایی, مطابق توضیح ارائه شده در بالا طرفین معادله را در عامل انتگرال‌ساز ضرب کرده و ادامه میدهیم:

$$\xrightarrow{\times 1/cosx} \frac{1}{cosx}y' + y\frac{sinx}{cos^2x} = cos^2x \to \left[\frac{1}{cosx}y\right]' = cos^2x$$

$$\to \frac{1}{cosx}y = \int cos^2x\,dx + c \quad \blacksquare$$

راه دوم: برای این مساله خاص, میتوان به روش زیر نیز عمل کرد:

$$y'cosx + ysinx = cos^4x \to \frac{y'cosx + ysinx}{cos^2x} = cos^2x$$

$$\to \left(\frac{y}{cosx}\right)' = cos^2x \to \frac{y}{cosx} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sin2x + c \quad \blacksquare$$

3) $x^2dy - xydx = (x-2)e^x dx \quad ; \quad x > 0$

$$\rightarrow y' - \frac{1}{x}y = \frac{x-2}{x^2}e^x \;\; ; \;\; \int p(x)dx = \int -\frac{dx}{x} = -\,ln(x) \rightarrow \mu(x) = e^{-\,ln(x)} = \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)g(x)dx + c\right] = x\left[\int \frac{x-2}{x^3}e^x\,dx + c\right] = \frac{e^x}{x} + cx \quad \blacksquare$$

<u>توضیح</u>: انتگرال $\int \frac{x-2}{x^3}e^x\,dx$ با استفاده از روش جزء به جزء و بصورت زیر بدست آمده است:

$$\int \frac{x-2}{x^3}e^x\,dx = \int \frac{e^x}{x^2}dx + \int \underbrace{e^x}_{u}\underbrace{\frac{-2}{x^3}dx}_{dv} = \int \frac{e^x}{x^2}dx + \frac{e^x}{x^2} - \int \frac{e^x}{x^2}dx = \frac{e^x}{x^2} + c$$

$$\underline{or}:\;\; \int \frac{x-2}{x^3}e^x\,dx = \int \left(e^x\frac{1}{x^2} + e^x\frac{-2}{x^3}\right)\,dx = \int d\left(e^x\frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^x}{x^2} + c \quad \blacksquare$$

4) $y' + (tanx + cotgx)y = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n tan^{2n-1}x \quad ; \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}$

$$\int p(x)dx = ln(tanx) \rightarrow \mu(x) = e^{ln(tanx)} = tanx$$

$$\rightarrow y = \frac{1}{tanx}\left[\int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n tan^{2n}x\,dx + c\right] = \frac{1}{2tanx}\left(x + \frac{1}{2}sin2x\right) + \frac{c}{tanx} \quad \blacksquare$$

<u>توضیح</u>: انتگرال مورد نظر بصورت زیر بدست آمده است:

$$\int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n tan^{2n}x\,dx = \int (1 - tan^2x + tan^4x - \cdots)\,dx = \int \frac{dx}{1+tan^2x} = \int cos^2x\,dx \quad \blacksquare$$

5) $y' + y = g(x) = \begin{cases} 5 & 0 \le x < 10 \\ 1 & x \ge 10 \end{cases} \quad ; \quad y(0) = 6$

در اینگونه مسائل که طرف راست تساوی به صورت چند ضابطه‌ای می‌باشد, بایستی برای هر ضابطه به طور مستقل مساله حل شده, سپس ثابت c بگونه‌ای بدست آید که جواب <u>پیوسته</u> باشد. (زیرا در معادله y' وجود دارد و این یعنی y پیوسته بوده است)

$$\begin{cases} 0 \le x < 10 \rightarrow y' + y = 5 \rightarrow y = 5 + c_1e^{-x} \xrightarrow{y(0)=6} y = 5 + e^{-x} \\ x \ge 10 \rightarrow y' + y = 1 \rightarrow y = 1 + c_2e^{-x} \end{cases}$$

حال اگر حد چپ و راست در نقطه $x = 10$ را مساوی قرار دهیم , $c_2 = 1 + 4e^{10}$ بدست می‌آید. $\blacksquare$

<u>توضیح</u>: به طریق دیگر, می‌توان در جواب بدست آمده برای بازه اول یعنی $y = 5 + e^{-x}$ با جایگذاری $x = 10$ مقدار $y(10)$ را بدست آورده و آنرا بعنوان شرط اولیه در جواب بازه دوم بکار گرفت که عملا همان راه حل بالاست. در اینصورت:

$$y = 5 + e^{-x} \rightarrow y(10) = 5 + e^{-10} \quad ; \quad y = 1 + c_2e^{-x} \xrightarrow{y(10)=5+e^{-10}} c_2 = 1 + 4e^{10} \quad \blacksquare$$

6) $sinx\,y' - (4sin^2x - y)cosx = 0 \quad ; \quad 0 < x < \pi$

این معادله قبلا در قسمت ۵ از مثال ۱-۱ به کمک تغییر متغیر $t = sinx$ حل شد. در این مثال از آنجا که هیچ اپراتور غیرخطی بر روی y و y' اعمال نشده است, می‌توان آنرا بصورت یک معادله خطی بیان کرد. در اینصورت:

$$y'sinx + y\,cosx = 4sin^2xcosx \rightarrow y' + y\,cotgx = 4sinxcosx$$

$$\int p(x)dx = \int cotgx\, dx = ln(sinx) \to \mu(x) = e^{ln(sinx)} = sinx$$

$$\to y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)g(x)dx + c\right] = \frac{1}{sinx}\left[\int 4sin^2xcosxdx + c\right] = \frac{4sin^2x}{3} + \frac{c}{sinx} \quad \blacksquare$$

۱-۴-۱- معادلات قابل تبدیل به معادله خطی

الف- گاهی اوقات ممکن است معادله‌ای مانند $(x - e^y)y' + cosy = 0$ نسبت به متغیر y خطی نبوده اما نسبت به x خطی باشد, زیرا عملگری غیر خطی مانند توان, نسبت مثلثاتی, لگاریتمی و .. روی x اعمال نشده است. در این حالت با تعویض نقش x و y و تبدیل y' به $\frac{1}{x'}$, به معادله خطی $x' + p(y)x = g(y)$ میرسیم. در واقع به نوعی تبدیل $(x, y) \to (y, x)$ را انجام داده‌ایم. به معادلات زیر توجه شود:

$$1)\ \ (4y^3 - 2x)y' + y = 0 \quad ; \quad y(1) = 1$$

$$(4y^3 - 2x)dy = -ydx \xrightarrow{or:\, y' \to \frac{1}{x'}} yx' + 4y^3 = 2x \to x' - \frac{2}{y}x = -4y^2$$

$$\to x = y^2(-4y + c) \xrightarrow{I.C.} c = 5 \to x = y^2(5 - 4y)$$

توضیح ۱: تعبیر دیگر آنچه انجام شد آن است که اگر قرار بود بدون توجه به معادلات خطی و صرفا با استفاده از عامل انتگرال ساز مساله را حل کنیم, در این نوع معادلات به عامل انتگرال سازی بر حسب y می‌رسیم. این معادله قبلا بعنوان تمرین در بحث عامل انتگرال ساز مطرح شده بود.

توضیح ۲: توجه شود که دراین حالت ممکن است جوابهای به فرم $y = k$ را از دست بدهیم. علت هم آن است که از آنجا که $x' = \frac{1}{y'}$ لذا اگر معادله جوابی به فرم $y = k$ داشته باشد, آنگاه x' بدست نیامده و لذا بایستی این جواب در انتها بصورت مستقل کنترل شود. مثلا در اینجا اگر $y = k$ بخواهد جواب معادله باشد, با جایگذاری در معادله $k = 0$ بدست می‌آید. بنابراین $y = 0$ نیز جواب غیرعادی معادله خواهد بود. به بیان دیگر, زمانی مجاز به این روش حل هستیم که تابع $y(x)$ معکوس پذیر باشد. برای این منظور اگر برای هر x_0 متعلق به بازه مورد نظر, مشتق تابع پیوسته بوده و $y'(x_0) \neq 0$ باشد, آنگاه $y(x)$ در فاصله فوق معکوس پذیر است.

$$2)\ \ 1 - y^2 = y'\left(xy + \sqrt{1 - y^2}siny\right)$$

$$(1 - y^2)dx = dy\left(xy + \sqrt{1 - y^2}siny\right) \xrightarrow{or:\, y' \to \frac{1}{x'}} x' - \frac{y}{1 - y^2}x = \frac{sin\, y}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$\mu(y) = e^{\int p(y)dy} = \sqrt{1 - y^2} \to x = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\left[\int \sqrt{1 - y^2}\frac{sin\, y}{\sqrt{1 - y^2}}dy + c\right]$$

$$x = \frac{-cosy + c}{\sqrt{1 - y^2}} \quad ; \quad y = k \to k = \pm 1 \to y = \pm 1$$

ب- قبلا بیان شد که گاهی اوقات یک تغییر متغیر و یا تغییر تابع مناسب, مساله را به فرمهای استاندارد تبدیل مینماید. بعنوان مثال معادله زیر در واقع غیر خطی است, اما با تغییر تابع بکار گرفته شده, خطی میشود.

$$(1+siny)y'+\frac{y-cosy}{x}=3x \quad ; \quad y(1)=0$$

$$u=y-cosy\xrightarrow{u'=y'+y'siny}u'+\frac{1}{x}u=3x\rightarrow u=x^2+\frac{c}{x}\xrightarrow{I.C.}y-cosy=x^2-\frac{2}{x}$$

در واقع در اینجا تغییر تابع داده شده است, یعنی $(x,y)\rightarrow(x,u)$. علت بکارگیری این تغییر تابع نیز آن است که مشتق عبارت $y-cosy$ در کنار آن (در جمله اول) دیده میشود. همچنین ممکن است بصورت زیر تغییر تابع را اعمال کنیم:

$$(1+siny)\frac{dy}{dx}+\frac{y-cosy}{x}=3x\ ;\ u=y-cosy\xrightarrow{du=(1+siny)dy}\frac{du}{dx}+\frac{1}{x}u=3x$$

توضیح: این موضوع در تبدیل تعداد زیادی از معادلات به فرم استاندارد کاربرد دارند. مثلا در قسمت بعد ابتدا معادله برنولی و سپس معادله ریکاتی را با استفاده از تغییر تابع مناسب به معادله خطی تبدیل می‌کنیم.

ج- گاهی اوقات می‌توان یک معادله درجه دلخواه n را به عاملهای خطی تجزیه کرد. در اینصورت جواب مساله حاصل ضرب همه جوابها خواهد بود. بعنوان مثال معادله درجه ۲ زیر را با تجزیه به دو معادله خطی حل می‌کنیم.

$$y'^2-(3y^2+cosx)y'+3y^2cosx=0\rightarrow(y'-cosx)(y'-3y^2)=0$$

$$\begin{cases}y'-cosx=0\rightarrow y=sinx+c_1\\ y'-3y^2=0\xrightarrow{\text{فاقد } x}\dfrac{-1}{y}=3x+c_2\end{cases}\rightarrow(y-sinx-c_1)\left(3x+\frac{1}{y}+c_2\right)=0$$

از اینجا به بعد معادلات غیرخطی را بررسی میکنیم. یکی از معادلات مهمی که مشابه بحث بالا قابل تبدیل به معادله خطی میباشد معادله برنولی است که در بخش بعد بررسی می‌شود.

۱-۴-۲- معادله برنولی

فرم این معادله بصورت زیر است که یک معادله غیرخطی است:

$$y'+p(x)y=g(x)y^n \quad ; \quad n\neq 0,1 \qquad (8)$$

در ابتدا با ضرب طرفین در y^{-n} , سمت راست را به $g(x)$ تبدیل میکنیم. در نتیجه در سمت چپ با تغییرتابع $u=y^{1-n}$ مشتقِ u در جمله اول دیده میشود. بنابراین خواهیم داشت:

$$y'y^{-n}+p(x)y^{1-n}=g(x)\rightarrow\frac{u'}{1-n}+p(x)u=g(x) \qquad (x,y)\rightarrow(x,u)$$

که با ضرب طرفین در $1-n$ به معادله خطی خواهیم رسید. تشخیص معادله برنولی ساده است چرا که در فرم معادله, y' , y و y^n دیده میشود.

مثال ۱-۱۳ معادله $xy'+y=xy^4$ را حل کنید.

$$xy'+y=xy^4\rightarrow y'+\frac{1}{x}y=y^4 \qquad ; \qquad u=y^{1-4}\rightarrow u'=-3y'y^{-4}\rightarrow y'y^{-4}=\frac{u'}{-3}$$

$$y'+\frac{1}{x}y=y^4\xrightarrow{\times y^{-4}}y'y^{-4}+\frac{1}{x}y^{-3}=1\rightarrow\frac{u'}{-3}+\frac{1}{x}u=1\rightarrow u'-\frac{3}{x}u=-3$$

$$\rightarrow u(x)=\frac{3}{2}x+cx^3\xrightarrow{u=y^{-3}}y(x)=\left(\frac{3}{2}x+cx^3\right)^{-\frac{1}{3}} \quad ■$$

توضیح ۱: هر معادله برنولی را می‌توان با استفاده از عامل انتگرال ساز نیز حل کرد. به عبارتی چنانچه طرفین معادله برنولی را در y^{-n} ضرب کنیم, آنگاه عامل انتگرال سازی بر حسب x خواهد داشت, زیرا به یک معادله خطی تبدیل می‌شود. در واقع:

$$y'+p(x)y=g(x)y^n \rightarrow y'y^{-n}+p(x)y^{1-n}=g(x) \rightarrow \underbrace{\left(p(x)y^{1-n}-g(x)\right)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{y^{-n}}_{N(x,y)}dy=0$$

$$\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{(1-n)p(x)y^{-n}}{y^{-n}}=(1-n)p(x) \quad \boxed{\surd}$$

توضیح ۲: ممکن است معادله‌ای نسبت به y برنولی نبوده اما بر حسب x برنولی باشد. یعنی با تعویض نقش x و y و تبدیل y' به $\frac{1}{x'}$, به معادله $x'+p(y)x=g(y)x^n$ برسیم. بعنوان مثال معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$2xydx+(3y^2-x^2+3)dy=0 \rightarrow y'=\frac{-2xy}{3y^2-x^2+3}\ \ (?) \rightarrow x'-\frac{1}{2y}x=-\frac{3y^2+3}{2y}x^{-1}$$

که یک معادله برنولی برحسب تابع x میباشد. با جایگذاری $u=x^{1-(-1)}=x^2$ خواهیم داشت:

$$u'-\frac{1}{y}u=-\frac{3y^2+3}{y} \rightarrow \mu(y)=e^{\int\frac{-dy}{y}}=\frac{1}{y} \rightarrow u=y\left[\int-\frac{3y^2+3}{y}\times\frac{1}{y}dy+c\right]$$

$$u=-3y^2+3+cy \rightarrow x^2+3y^2-3=cy$$

در اینجا نیز مشابه توضیح ۱ میتوان گفت هر معادله برنولی به فرم $x'+p(y)x=g(y)x^n$ پس از ضرب طرفین در x^{-n}, دارای عامل انتگرال ساز بر حسب y میباشد. مثلا همین معادله بالا, در شروع بحث عامل انتگرال‌ساز, با استفاده از یک عامل انتگرال ساز بر حسب y حل شده است. ■

تمرینات بخش ۱-۴

۱- معادلات زیر را حل کنید.

$$\underline{1})\quad y'+3y=8\ ;\ \begin{cases}y(0)=2\\y(0)=4\end{cases}\ ;\ \underline{Ans}:\ \begin{cases}y=2(4-e^{-3x})/3\\y=4(2+e^{-3x})/3\end{cases}$$

این معادله قبلا در تمرینات بخش ۱-۳-۱ نیز مطرح شد که در آنجا هدف حل معادله با روش معادلات جدایی‌پذیر بود.

$$2)\quad (xlnx)y'+y=6x^3\ ;\ \ x>1\quad ;\quad \underline{Ans}:\ y=\frac{2x^3+c}{lnx}$$

$$\underline{3})\quad (tanx)y'+y=3xsecx\quad ;\quad \underline{Ans}:\ y=\frac{1}{sinx}\left(\frac{3}{2}x^2+c\right)$$

۲- فرض کنید $y(x)=x+\frac{x^3}{1\times3}+\frac{x^5}{1\times3\times5}+\cdots$, ابتدا نشان دهید $y'(x)=1+xy(x)$. سپس از حل این معادله دیفرانسیل نشان دهید سری توانی $y(x)$ به تابع زیر همگرا میشود.

$$y(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

۳- معادلات زیر را با روش ارائه شده در قسمت ب از بخش ۱-۴-۱ حل کنید.

1) $(3tanx - 2cosy)sec^2x\,dx + tanx(siny)dy = 0$

$(t = tanx \rightarrow dt = sec^2x\,dx \quad ; \quad u = cosy \rightarrow du = -sinydy)$

Ans : $tan^2x(cosy) = tan^3x + c \qquad (x,y) \rightarrow (t,u)$

2) $y' - \dfrac{tany}{1+x} = (1+x)e^x secy \quad ; \quad$ Ans : $\dfrac{siny}{1+x} = e^x + c$

3) $2xe^{2y}y' = 3x^4 + e^{2y} \quad ; \quad$ Ans : $y = ln\sqrt{x^4 + cx}$

۴- معادلات زیر را حل کنید.

1) $ydx + x(x^2y - 1)dy = 0 \quad ; \quad$ Ans : $\dfrac{y^3}{3} + \dfrac{y^2}{2x^2} = c$

2) $xy'(x - 1 + xe^y) = 1 \quad ; \quad$ Ans : $\dfrac{1}{x}e^{-y} = e^{-y} - y + c$

3) $y' = \dfrac{xy^2 - sinxcosx}{y(1-x^2)} \quad ; \quad y(0) = 2 \quad ; \quad$ Ans : $y^2(1-x^2) + sin^2x = 4$

4) $(x^4Lnx - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0 \quad ; \quad x > 0 \quad ; \quad y(2) = 1$

Ans : $4x^3(Lnx - 1) + 4y^3 - 8x^2Ln2 + 7x^2 = 0$

5) $y' = \dfrac{1}{x + cosy} \quad ; \quad$ Ans : $x = \dfrac{siny - cosy}{2} + ce^y$

۵- نشان دهید جواب یک معادله خطی مرتبه اول که بایستی از (x_0, y_0) عبور کند را می‌توان مستقیما از رابطه زیر بدست آورد:

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}\left[\int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{u} p(u)du} g(u)\,du + y_0\right]$$

۶- تمرین ۳ از مجموعه تمرینات بخش ۱-۳-۴ را با تبدیل معادله به یک معادله برنولی مجددا حل کنید.

۱-۵- سایر انواع معادلات مرتبه اول

۱-۵-۱- معادله ریکاتی

فرم این معادله بصورت زیر است. اگر بتوانیم بطریقی یک جواب معادله را حدس بزنیم, جواب کلی معادله بدست می‌آید.

$$y' = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2 \qquad (9)$$

توجه شود که اگر $q_3(x) = 0$ این معادله به معادله خطی و اگر $q_1(x) = 0$ به معادله برنولی تبدیل خواهد شد.

نکته مهم در حل معادله ریکاتی آن است که در ابتدا بایستی یک جواب را بدانیم. مثلا فرض کنیم $y_1(x)$ یک جواب معادله باشد. حال قرار می‌دهیم $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}$. با جایگذاری این جواب در معادله مطابق آنچه خواهیم دید, در نهایت به یک معادله خطی می‌رسیم. به عبارتی معادله از (x,y) به (x,u) تبدیل می‌شود.

$$y' = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2$$

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \rightarrow y_1' - \frac{u'}{u^2} = q_1 + q_2\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) + q_3\left(y_1 + \frac{1}{u}\right)^2$$

$$y_1' - \frac{u'}{u^2} = \underbrace{q_1 + q_2y_1 + q_3y_1^2}_{y_1'} + \frac{q_2}{u} + \frac{2q_3}{u}y_1 + \frac{q_3}{u^2}$$

$$\rightarrow u' + (q_2 + 2q_3y_1)u + q_3 = 0$$

دراینجا به یکی از کاربردهای مهم معادله ریکاتی اشاره می‌شود. در بخش ۳-۴-۱ خواهیم دید یکی از روشهای حل معادله مرتبه دو, روش تجزیه عملگرهاست. در این روش در حالتی که ضرایب ثابت نباشد, در نحوه تجزیه عملگر, به حل معادله ریکاتی نیاز خواهیم داشت. در تمرین ۲ این بخش, بصورت برعکس, نحوه تبدیل یک معادله ریکاتی به معادله مرتبه دو ارائه شده است.

مثال ۱-۱۴ معادله زیر را حل کنید.

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2 \quad ; \quad y_1(x) = x$$

حل جواب را به شکل $y = y_1 + \frac{1}{u}$ در نظر گرفته و در معادله جایگذاری می‌کنیم. بهتر است ابتدا جواب y_1 را در این رابطه جایگذاری نکنیم تا ظاهر شدن فرم $q_1 + q_2y_1 + q_3y_1^2$ را ببینیم. خواهیم داشت:

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \rightarrow y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}$$

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2 \rightarrow y_1' - \frac{u'}{u^2} = 1 + x^2 - 2x\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) + \left(y_1 + \frac{1}{u}\right)^2$$

$$y_1' - \frac{u'}{u^2} = \underbrace{1 + x^2 - 2xy_1 + y_1^2}_{y_1'} + \frac{-2x}{u} + \frac{2}{u}y_1 + \frac{1}{u^2}$$

$$y_1 = x \rightarrow 1 - \frac{u'}{u^2} = 1 - \frac{2x}{u} + \frac{2}{u}x + \frac{1}{u^2} \rightarrow u' + 1 = 0$$

$$\rightarrow u' = -1 \rightarrow u = -x + c \rightarrow y = x + \frac{1}{c - x}$$

دیده میشود که جواب اولیه داده شده در واقع یک جواب غیرعادی معادله است, چرا که نمی‌توان آنرا از جواب عمومی, به ازای هیچ مقدار c بدست آورد. ■

توضیح: می‌توان مساله را بدون جایگذاری جواب $y = y_1 + \frac{1}{u}$ و صرفا با استفاده از فرمول نهایی بصورت زیر نیز حل کرد:

$$q_1 = 1 + x^2 \quad ; \quad q_2 = -2x \quad ; \quad q_3 = 1$$

$$u' + (q_2 + 2q_3y_1)u + q_3 = 0 \rightarrow u' + (-2x + 2x)u + 1 = 0 \rightarrow u' + 1 = 0$$

$$\rightarrow u' = -1 \rightarrow u = -x + c \rightarrow y = x + \frac{1}{c - x} \quad ■$$

۱-۵-۲- معادلاتی که بر حسب x یا y بیان شده‌اند

عنوان شد که فرم کلی معادلات مرتبه اول $f(x,y,y')=0$ می‌باشد که گاهی ممکن است بتوان آنرا بصورت $y'=F(x,y)$ بیان کرد. در ادامه به بررسی دو حالتی که معادله را می‌توان به فرم $x=F(y,y')$ و یا $y=F(x,y')$ بیان کرد می‌پردازیم.

الف: معادلاتی به فرم $x=F(y,y')$

فرض میکنیم $y'=p$, سپس با دیفرانسیل گیری از معادله اصلی خواهیم داشت:

$$dx=\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial p}dp\rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{dp}{dy}\xrightarrow{dy/dx=p}\frac{1}{p}=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{dp}{dy}$$

معادله فوق در واقع معادله جدیدی بوده و درست معادل آن است که از معادله اصلی نسبت به y مشتق بگیریم. در واقع معادله از (x,y) به (y,p) تبدیل میشود. حل این معادله در نهایت بصورت $f(y,p)=0$ خواهد شد. همچنین معادله اصلی بصورت $x=F(y,p)$ می‌باشد. بنابراین این دو, یک دستگاه بصورت زیر تشکیل می‌دهند:

$$\begin{cases}x=F(y,p)\\ \dfrac{1}{p}=\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial p}\dfrac{dp}{dy}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=F(y,p)\\ f(y,p)=0\end{cases}$$

اگر از رابطه $f(y,p)=0$ بتوان p را بر حسب y بدست آورد مثلا $p=h(y)$, آنگاه با جایگذاری در رابطه اول به رابطه $x=F(y,h(y))$ می‌رسیم, یعنی x بر حسب y بدست می‌آید, اما اگر از رابطه $f(y,p)=0$ تابع y بر حسب p بدست آید مثلا $y=h(p)$, آنگاه با جایگذاری در رابطه اول به $x=F(h(p),p)$ می‌رسیم. یعنی هم x و هم y هر دو بصورت پارامتری بر حسب p بیان شده‌اند.

بطور خلاصه این دستگاه x و y را بصورت پارامتری بر حسب p بدست می‌دهد که اگر امکان پذیر باشد p را مابین آنها حذف می‌کنیم, در غیر اینصورت, جواب به همان صورت پارامتری باقی می‌ماند.

ب: معادلاتی به فرم $y=F(x,y')$

در اینحالت نیز فرض میکنیم $y'=p$, مشابه بالا در نهایت خواهیم داشت:

$$dy=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial p}dp\rightarrow\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{p}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{dp}{dx}\rightarrow\begin{cases}y=F(x,p)\\ p=\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial p}\dfrac{dp}{dx}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=F(x,p)\\ f(x,p)=0\end{cases}$$

خط دوم دستگاه بالا در واقع معادل مشتق گیری از معادله اصلی نسبت به x میباشد. یعنی معادله از (x,y) به (x,p) تبدیل شده است. لذا جواب آن بصورت $f(x,p)=0$ خواهد بود که با $y=F(x,p)$ تشکیل یک دستگاه خواهد داد.

در اینجا نیز مشابه قسمت قبل x و y بصورت پارامتری بر حسب p می‌باشند که اگر امکان پذیر باشد p را مابین آنها حذف می‌کنیم, در غیر اینصورت, جواب به همان صورت پارامتری باقی می‌ماند.

توضیح: معادلات زیر در واقع حالت خاصی از فرم $y=F(x,y')$ میباشند, که در دو قسمت بعد بررسی می‌شوند.

$$\begin{cases}y=xf(y')+g(y')\rightarrow \text{معادله لاگرانژ}\\ y=xy'+g(y')\rightarrow \text{معادله کِلِرو}\end{cases}$$

مثال ۱-۱۵ معادله $xy'^2+2xy'-y=0$ را حل کنید.

حل میتوان این معادله را هم به صورت $y=F(x,y')$ و هم $x=F(y,y')$ بیان کرد که هر دو ساده‌تر از فرم معمول یعنی $y'=F(x,y)$ میباشند. در ادامه مساله را با در نظر گرفتن فرم $y=F(x,y')$ بررسی کرده و فرم $x=F(y,y')$ را به تمرینات واگذار می‌کنیم (تمرین ۳). در نتیجه:

$$y=xy'^2+2xy' \xrightarrow{y'=p} y=xp^2+2px \xrightarrow{\frac{d}{dx}} p=2px\frac{dp}{dx}+p^2+2p+2x\frac{dp}{dx}$$

$$\rightarrow p(p+1)+2x(p+1)\frac{dp}{dx}=0 \rightarrow (p+1)\left(p+2x\frac{dp}{dx}\right)=0$$

بنابراین دو حالت زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y=xp^2+2px \\ p+2x\dfrac{dp}{dx}=0 \rightarrow xp^2=c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=c+\dfrac{2c}{p} \\ x=\dfrac{c}{p^2} \end{cases} \rightarrow (y-c)^2=4cx$$

$$\begin{cases} y=xp^2+2px \\ p+1=0 \rightarrow p=-1 \end{cases} \rightarrow y=x-2x=-x \rightarrow y+x=0$$

دیده می‌شود که جواب دوم, جواب غیر عادی معادله است, چرا که این جواب از جواب عمومی بدست نمی‌آید. ■

توضیح ۱: ممکن است در جواب دوم پس از یافتن $p=-1$ با توجه به اینکه $y'=p$ می‌باشد, انتگرال بگیریم. از آنجا که این جواب بایستی در معادله $y=xp^2+2px$ نیز صدق کند در نهایت به همین جواب $y+x=0$ می‌رسیم.

توضیح ۲: میتوانستیم به جای مشتق گرفتن نسبت به x , از رابطه بدست آمده در متن درس استفاده کنیم. در اینصورت:

$$p=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{dp}{dx}=p^2+2p+\frac{dp}{dx}(2px+2x)$$

که همان رابطه بدست آمده در بالاست.

توضیح ۳: ممکن است در حل معادله حالت اول بصورت زیر عمل شود:

$$p+2x\frac{dp}{dx}=0 \rightarrow y'+2xy''=0 \rightarrow \frac{y''}{y'}=\frac{-1}{2x} \rightarrow ln|y'|=\frac{-1}{2}ln|x| \rightarrow xy'^2=c$$

که همان نتیجه بالاست. اما فعلا این‌کار را نمی‌کنیم, چراکه با این روش, به حل معادلات مرتبه ۲ نیاز خواهیم داشت. ■

۱-۵-۳- معادله لاگرانژ

این معادله بصورت زیر است که حالت خاصی از $y=F(x,y')$ میباشد.

$$y=xf(y')+g(y')$$

با انتخاب $y'=p$ و مشتق گیری نسبت به x خواهیم داشت:

$$y = xf(p) + g(p) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} p = f(p) + x\frac{dp}{dx}f'(p) + \frac{dp}{dx}g'(p)$$

$$\rightarrow p - f(p) = \frac{dp}{dx}\big(xf'(p) + g'(p)\big)$$

عنوان شد که بایستی این معادله جدید را حل کنیم. بدیهی است این معادله بر حسب x خطی نمی‌باشد, اما از آنجا که هیچ عملگر غیرخطی روی x اعمال نشده است, می‌توان بصورت برعکس, مشابه آنچه در قسمت الف بخش ۱-۴-۱ دیده شد, x را بعنوان تابع و p را متغیر در نظر گرفت. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\big(p - f(p)\big)\frac{dx}{dp} - xf'(p) = g'(p)$$

که یک معادله خطی است که در آن x بصورت تابعی از p بیان شده است. از آنجا که برای حل این معادله خطی بایستی ضریب $\frac{dx}{dp}$ برابر یک گردد, بسته به اینکه این ضریب یعنی $p - f(p)$ صفر باشد یا نباشد, دو حالت زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y = xf(p) + g(p) \\ \dfrac{dx}{dp} - x\left(\dfrac{f'(p)}{p - f(p)}\right) = \dfrac{g'(p)}{p - f(p)} \rightarrow x = h(p) \end{cases} \qquad ; \qquad \begin{cases} y = xf(p) + g(p) \\ p = f(p) \end{cases}$$

ممکن است سوال شود اگر قرار باشد $p - f(p) = 0$ گردد, معادله $\big(p - f(p)\big)\frac{dx}{dp} - xf'(p) = g'(p)$ به معادله $-xf'(p) = g'(p)$ تبدیل می‌شود و بایستی اینرا حل کرد. در واقع دستگاه سمت راست هم همین معادله است اما ساده‌تر. چرا که:

$$y = xf(p) + g(p) \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = f(p) + xp'f'(p) + p'g'(p) \xrightarrow{y'=p} -xf'(p) = g'(p)$$

بنابراین بصورت خلاصه از سطر دومِ دستگاه اول با انتخاب x بصورت تابعی از p جواب عمومی بدست می‌آید. اگر بتوانیم p را در این دستگاه حذف میکنیم, در غیر اینصورت, به همان صورت باقی می‌ماند.

دستگاه دوم نیز جواب غیرعادی را از حل معادله $p = f(p)$ و جایگذاری در معادله $y = xf(p) + g(p)$ بدست می‌دهد.

بعنوان نمونه می‌توان دید معادله‌ای که در مثال ۱-۱۵ مطرح شد در واقع به فرم لاگرانژ است, چرا که:

$$xy'^2 + 2xy' - y = 0 \rightarrow y = x\underbrace{\left(y'^2 + 2y'\right)}_{f(y')} + \underbrace{0}_{g(y')}$$

بنابراین می‌توان مستقیما از رابطه بدست آمده در اینجا نیز استفاده کرد:

$$\big(p - f(p)\big)\frac{dx}{dp} - xf'(p) = g'(p) \rightarrow \big(p - (p^2 + 2p)\big)\frac{dx}{dp} - x(2p + 2) = 0$$

$$\rightarrow -p(p+1)\frac{dx}{dp} - 2x(p+1) = 0 \rightarrow (p+1)\left(p\frac{dx}{dp} + 2x\right) = 0$$

که همان رابطه‌ای است که در مثال ۱-۱۵ بدست آوردیم. بقیه مراحل مشابه قبل است.

مثال ۱-۱۶ معادله $y = 2xy' - y'^2$ را حل کنید.

حل برای حل معادله یا از دستگاه بالا استفاده میکنیم و یا با انتخاب $y' = p$ و مشتق گیری نسبت به x خواهیم داشت:

$$y = 2xp - p^2 \xrightarrow{\frac{d}{dx}} p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx} \to p\frac{dx}{dp} + 2x = 2p$$

که یک معادله خطی از x بر حسب p میباشد. برای حل این معادله خطی بایستی ضریب $\frac{dx}{dp}$ برابر یک گردد. بنابراین بسته به اینکه ضریب $\frac{dx}{dp}$ یعنی p صفر باشد یا نباشد, دو حالت زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y = 2xp - p^2 \\ \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = 2 \to 3x = 2p + \frac{c}{p^2} \end{cases} \to \begin{cases} y = 2\left(\frac{2}{3}p + \frac{c}{3p^2}\right)p - p^2 = \frac{1}{3}p^2 + \frac{2c}{3p} \\ x = \frac{2}{3}p + \frac{c}{3p^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2xp - p^2 \\ p = 0 \end{cases} \to y = 2x \times 0 - 0^2 = 0 \to y = 0$$

بنابراین جواب عمومی بصورت پارامتری بر حسب p بدست آمد. ■

<u>توضیح ۱</u>: می‌توان با توجه به آنچه در متن درس دیده شد, جواب غیرعادی را از حل معادله $p = f(p)$ و جایگذاری در معادله $y = xf(p) + g(p)$ بصورت زیر نیز بدست آورد.

$$\begin{cases} y = 2xp - p^2 \\ p = f(p) = 2p \to p = 0 \end{cases} \to y = 2x \times 0 - 0^2 = 0 \to y = 0$$

<u>توضیح ۲</u>: می‌توان بدون توجه به اینکه معادله داده شده لاگرانژ میباشد, آنرا به فرم $x = F(y, y')$ بیان کرده و مطابق آنچه در قسمت الف از بخش ۱-۵-۲ عنوان شد, با انتخاب $y' = p$ و این بار با مشتق‌گیری از طرفین نسبت به y آنرا حل کرد:

$$x = \frac{y + y'^2}{2y'} \quad ; \quad y' = p \to x = \frac{y + p^2}{2p} \xrightarrow{\frac{d}{dy}} \frac{1}{p} = \frac{\left(1 + 2p\frac{dp}{dy}\right)2p - 2\frac{dp}{dy}(y + p^2)}{4p^2}$$

$$\to p^2\frac{dp}{dy} - y\frac{dp}{dy} = p \to p\frac{dy}{dp} + y = p^2$$

دیده میشود که با تغییر نقش تابع و متغیر به یک معادله خطی رسیدیم. برای حل این معادله خطی بایستی ضریب $\frac{dy}{dp}$ برابر یک گردد. بنابراین بسته به اینکه ضریب $\frac{dy}{dp}$ یعنی p صفر باشد یا نباشد, دو حالت زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = \frac{y + p^2}{2p} \\ p = 0 \end{cases} \to y = 0 \qquad ; \qquad \begin{cases} x = \frac{y + p^2}{2p} = \frac{\frac{1}{3}p^2 + \frac{c_1}{p} + p^2}{2p} = \frac{2}{3}p + \frac{c_1}{2p^2} \\ \frac{dy}{dp} + \frac{1}{p}y = p \to y = \frac{1}{3}p^2 + \frac{c_1}{p} \end{cases}$$

که همان نتیجه قبل است با این تفاوت که c_1 در اینجا معادل $\frac{2c}{3}$ روش قبل خواهد بود. ■

۱-۵-۴- معادله کلرو

معادله کِلِرو حالت خاصی از معادله لاگرانژ است که در آن $f(x) = x$ میباشد. به عبارتی:

$$y = xy' + g(y')$$

با انتخاب $y' = p$ و مشتق گیری نسبت به x خواهیم داشت:

$$y = xp + g(p) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}g'(p) \rightarrow \frac{dp}{dx}\big(x + g'(p)\big) = 0$$

بنابراین دو حالت زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y = xp + g(p) \\ \dfrac{dp}{dx} = 0 \rightarrow p = c \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y = xp + g(p) \\ x + g'(p) = 0 \end{cases}$$

از دستگاه اول دیده میشود که در معادله کلرو, جواب عمومی $y = cx + g(c)$ میباشد. دستگاه دوم نیز جواب غیرعادی را می‌دهد.

توضیح: از آنجا که معادله کلرو حالت خاصی از معادله لاگرانژ است, می‌توان از فرمول لاگرانژ برای $f(x) = x$ نیز استفاده کرد:

$$p - f(p) = \frac{dp}{dx}\big(xf'(p) + g'(p)\big) \rightarrow p - p = \frac{dp}{dx}\big(x + g'(p)\big) \rightarrow \frac{dp}{dx}\big(x + g'(p)\big) = 0$$

مثال ۱-۱۷ معادله $y = xy' - 2y'^2$ را حل کنید.

حل با انتخاب $y' = p$ و مشتق گیری نسبت به x خواهیم داشت:

$$y = xp - 2p^2 \xrightarrow{\frac{d}{dx}} p = p + x\frac{dp}{dx} - 4p\frac{dp}{dx} \rightarrow \frac{dp}{dx}(x - 4p) = 0$$

بنابراین دو حالت زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y = xp - 2p^2 \\ \dfrac{dp}{dx} = 0 \rightarrow p = c \end{cases} \rightarrow y = cx - 2c^2$$

$$\begin{cases} y = xp - 2p^2 \\ x - 4p = 0 \rightarrow p = \dfrac{x}{4} \end{cases} \rightarrow y = x\left(\frac{x}{4}\right) - 2\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{8} \quad \blacksquare$$

توضیح: می‌توان بدون مشتق‌گیری از معادله, از دستگاه ارائه شده در متن درس نیز جواب را بصورت زیر بدست آورد:

$$\begin{cases} y = xp - 2p^2 \\ p = c \end{cases} \rightarrow y = cx - 2c^2 \quad ; \quad \begin{cases} y = xp - 2p^2 \\ x + g'(p) = 0 \rightarrow x - 4p = 0 \end{cases} \rightarrow y = \frac{x^2}{8} \quad \blacksquare$$

تمرینات بخش ۱-۵

۱- معادله زیر را حل کنید.

$$y' = 2tanx(secx) - y^2 sinx \quad ; \quad y_1(x) = secx \quad ; \quad \underline{Ans}: y = secx + \frac{3cos^2x}{c - cos^3x}$$

۲- نشان دهید با تغییرتابع $y = \frac{-u'}{q_3(x)u}$, معادله ریکاتی به یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم بصورت زیر تبدیل می‌شود.

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0$$

۳- با نوشتن معادلات مثالهای ۱-۱۵ و ۱-۱۷ به فرم $x = F(y, y')$ مجددا آنها را حل کنید.

۴- معادلات زیر را حل کنید.

$$\underline{1})\ {y'}^2 - yy' + e^x = 0 \quad ; \quad \underline{Ans}:\ y = ce^x + \frac{1}{c}\ ,\ y^2 = 4e^x$$

$$2)\ \frac{2y'}{1 - {y'}^2} = \frac{y}{x} \quad ; \quad \underline{Ans}:\ y^2 = 2cx + c^2$$

$$\underline{3})\ y = 2xy' + y^2{y'}^3 \quad ; \quad \underline{Ans}:\ y^2 = 2cx + c^3$$

۵- معادله زیر را حل کنید.

$$y = x{y'}^2 + {y'}^3 \quad ; \quad \underline{Ans}: \begin{cases} y = xp^2 + p^3 \\ x = \dfrac{-p^3 + \frac{3}{2}p^2 + c}{(p-1)^2} \end{cases} ; \quad y = 0 \quad ; \quad y = x + 1$$

۶- دسته منحنیهای جواب عمومی معادله مثال ۱-۱۷ یعنی $y = cx - 2c^2$ را به‌ازای c های مختلف رسم کنید. سپس بررسی کنید جواب غیرعادی $y = \frac{x^2}{8}$ چه ارتباطی با این دسته منحنی‌ها دارد.

۷- معادله زیر را حل کنید.

$$y = xy' \pm \frac{ay'}{\sqrt{1 + {y'}^2}} \quad a > 0 \quad ; \quad \underline{Ans}:\ y = cx \pm \frac{ac}{\sqrt{1 + c^2}} \quad ,\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

۸- جواب معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

$$x(y' + 1) + e^{(y')} = 2x + y + 2 \quad ; \quad \underline{Ans}: \quad \begin{cases} y = e^p(p + c)(p - 1) + e^p - 2 \\ x = e^p(p + c) \end{cases}$$

۱-۶- خلاصه

۱- ممکن است معادله فاقد x یا y باشد. (دو حالت خاص بخش انتهایی ۱-۳-۱)

۲- ممکن است از درجه دلخواه n بوده و قابل تجزیه به عوامل خطی باشد. (بخش انتهایی ۱-۴-۱ قسمت ج)

۳- ممکن است معادله بر حسب x یا y بیان شده باشد. (بخش ۱-۵-۲)

۴- اگر به فرم $y' = f(x,y)$ باشد, حالات زیر بررسی میشود:

$$y' = f(x,y)$$

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

الف: کنترل همگن بودن تابع

ب: کنترل دیفرانسیل کامل بودن و عامل انتگرال‌ساز بر حسب x یا y و نیز رابطه (5)

ج: کنترل تفکیک پذیری معادله

د: یافتن سایر عامل‌های انتگرال‌ساز

$$y' + p(x)y = \begin{cases} g(x) \\ g(x)y^n \\ q_3(x)y^2 + q_1(x) \end{cases}$$

ممکن است با جابجایی نقش x و y به یکی از این فرمها تبدیل شود.

توضیح: دقت شود ممکن است معادله با تغییر متغیر و یا تغییر تابع به یکی از صورتهای فوق تبدیل شود.

نکته پایانی: اگر چه بحث معادلات مرتبه اول به پایان رسید, اما نمی‌توان ادعا کرد اکنون می‌توانیم هر معادله مرتبه اولی را حل کنیم, چرا که ممکن است معادله در هیچ کدام از حالات عنوان شده صدق نکند. حتی برای معادله‌ای مانند ریکاتی نیز نتوانستیم بدون یک جواب اولیه مساله را حل کنیم. به هر حال بایستی به دنبال روشهای حل دیگری برای سایر معادلات بود.

یکی از اهداف درس "محاسبات عددی" همین مورد است. یعنی در آن درس به کمک روشهایی که مبتنی بر محاسبات می‌باشند (و نه تحلیلی) به دنبال یافتن پاسخ مساله خواهیم بود. این روشها عموما می‌توانند جواب مساله را با دقت مورد نظر بدست آورند, با این تفاوت که بجای حلِ تحلیلی و یافتن پاسخی به فرم $y = f(x)$, جواب معادله را در نقاط x مشخصی ارائه می‌دهند. این روشها اغلب یک روند تکراری دارند, از مفاهیم اولیه برای محاسبات استفاده میکنند و نیز محاسبات عددی متعددی نیاز خواهند داشت. مثلا اگر بخواهیم مشتق تابعی را بصورت عددی در یک نقطه مشخص تعیین کنیم بجای تعیین مشتق به روش تحلیلی, یک نمو کوچکِ Δx به متغیر اعمال کرده و حاصل $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را بدست می‌آوریم. علاوه بر حل معادلات دیفرانسیل, این روشها معادلات جبری, انتگرالهای معین و ... را نیز با همین الگوی عددی حل میکنند. مثلا در تعیین جواب یک انتگرال معین, بجای یافتن تابع اولیه (که یک حل تحلیلی است) از مفهوم انتگرال به معنی سطح زیر منحنی استفاده شده و با افراز دامنه به زیر بازه‌های بسیار کوچک (مشابه مجموع ریمان) مقدار عددی انتگرال با جمع مساحت مستطیلها (یا ذوزنقه‌ها) ی باریک با تقریب مورد نظر تعیین می‌شود.

تمرینات دوره‌ای

۱- معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

1) $y' = \dfrac{y}{x^3y^2 lny - x}$; $\underline{Ans}$: $x^2y^2 = \dfrac{1}{c-(lny)^2}$

2) $dy + (ycotg(x) - e^{cosx})dx = 0$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$; $\underline{Ans}$: $y = \dfrac{2-e^{cosx}}{sinx}$

3) $sinx\, y' - 2(4sin^2x - y)cosx = 0$; $\underline{Ans}$: $ysin^2x - 2sin^4x = c$

4) $y' + xsin2y = 2xe^{-x^2}cos^2y$ $(u = tany)$; $\underline{Ans}$: $tany = (x^2+c)e^{-x^2}$

5) $(2xcosy + 3x^2y)dx + (x^3 - x^2siny - y)dy = 0$; $y(0) = 2$

$\underline{Ans}$: $2x^2cosy + 2x^3y - y^2 + 4 = 0$

6) $(x - 2siny + 3)dx + (2x - 4siny - 3)cosydy = 0$

7) $y' + 1 = xe^{-y}$ $(y = lnu)$; $\underline{Ans}$: $y = ln(x - 1 + ce^{-x})$

8) $y' + 2x = 2(x^2 + y - 1)^{\frac{2}{3}}$; $\underline{Ans}$: $3(x^2 + y - 1)^{\frac{1}{3}} = 2x + c$

9) $\left(\dfrac{lnx}{lny} + x^2y^3\right)y' + \left(\dfrac{y}{x}ln(lny) + \dfrac{2}{3}xy^4\right) = 0$; $\underline{Ans}$: $(3lnx)ln(lny) + x^2y^3 = c$

10) $y' = e^{-x}y^2 + y - e^x$; $y_1(x) = e^x$; $\underline{Ans}$: $\dfrac{1}{y-e^x} = -\dfrac{1}{2}e^{-x} + ce^{-3x}$

11) $y'^2(x+1) - y = 0$; $\underline{Ans}$: $\left(1 - \sqrt{\dfrac{y}{x+1}}\right)^2(x+1) = c, y = x+1, y = 0$

12) $y = \dfrac{-1}{x^2y'} - xy'$; $\underline{Ans}$: $y = \dfrac{1}{c} + \dfrac{c}{x}$, $y = \pm\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

13) $\left(2x\sqrt{x} + x^2 + y^2\right)dx + 2y\sqrt{x}dy = 0$; $\underline{Ans}$: $(x^2+y^2)e^{2\sqrt{x}} = c$

14) $xy^2(xy' + y) = 2$; $\underline{Ans}$: $x^3y^3 - 3x^2 = c$

15) $\big(cos(x-y) + sin(x-y)\big)dx + \big(sin(x-y) - cos(x-y)\big)dy = 0$

$\underline{Ans}$: $\big(cos(x-y) + sin(x-y)\big)e^x = c$

16) $xdy - 2ydx = (x-2)e^x$; $\underline{Ans}$: $y = cx^2 + e^x$

۱-۷- قضیه وجود و یکتایی

اگر تابع f در یک مستطیل به مرکز (x_0, y_0) پیوسته باشد, در اینصورت معادله $y' = f(x,y)$ به شرط $y(x_0) = y_0$, در یک فاصله باز شامل نقطه x_0 که در مستطیل قرار گرفته باشد, حداقل یک جواب دارد. علاوه بر آن اگر $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ در مستطیل مورد نظر پیوسته باشد, جواب یکتا نیز خواهد بود. به عنوان مثال:

$$y' = 2\sqrt{y} \quad y \geq 0 \quad ; \quad y(0) = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} y_1 = x^2 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

که منحصر به فرد نیست, زیرا اگر چه $f(x,y) = 2\sqrt{y}$ در $(0,0)$ پیوسته میباشد, اما $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$ در این نقطه پیوسته نیست.

لازم به ذکر است که این قضیه یک شرط کافی برای وجود و یکتایی جواب است.

علت بررسی یکتایی جواب آن است که ممکن است معادله بصورت تحلیلی قابل حل نباشد و برای حل آن به روش عددی نیازمند دانستن یکتایی جواب میباشیم.

حالت خاص: قضیه وجود و یکتایی در حالتی که معادله به فرم خطی $y' + p(x)y = g(x)$ میباشد, بصورت زیر ساده میشود:

$$y' = \underbrace{-p(x)y + g(x)}_{f(x,y)} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -p(x) \qquad ; \qquad y(x_0) = y_0$$

بنابراین اگر برای این معادله $p(x)$ و $g(x)$ در بازه $I = [a,b]$ که شامل نقطه (x_0, y_0) میباشد پیوسته باشند, حتما معادله جواب داشته و نیز یکتا است. راه دیگر اثبات یکتایی جواب , مشتق گرفتن متوالی از رابطه و یکتا بودن بسط تیلور $y(x)$ میباشد.

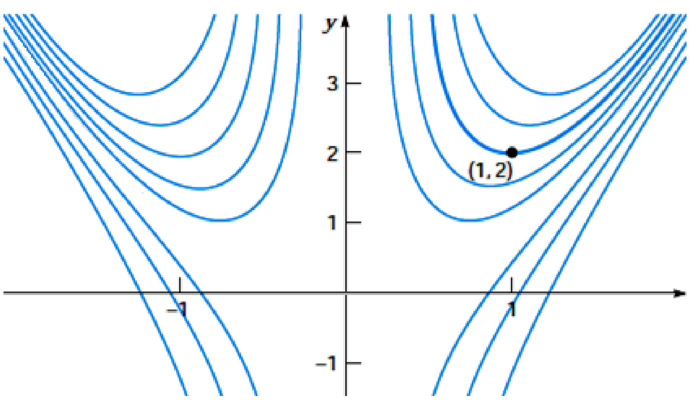
نتیجه دیگر این قضیه آن است که در نقاطی که $p(x)$ یا $g(x)$ ناپیوسته باشد, جواب فقط در این نقاط ممکن است معتبر نباشد(پس در سایرنقاط حتما اعتبار دارد). برای این منظور به مثال زیر توجه شود که در آن $p(x)$ در صفر ناپیوسته است.

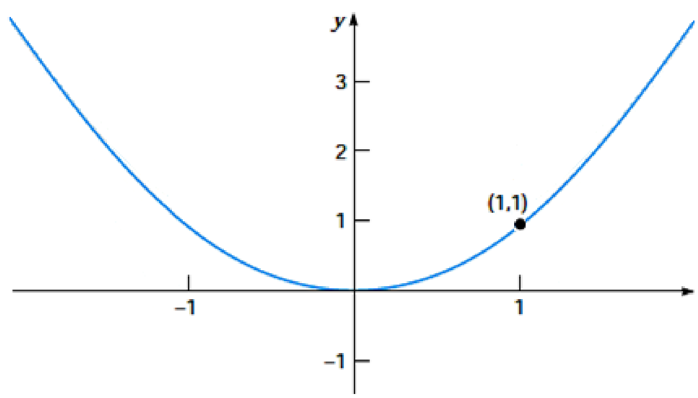
$$xy' + 2y = 4x^2 \rightarrow p(x) = \frac{2}{x} \quad , \quad g(x) = 4x \quad \rightarrow \quad y = x^2 + \frac{c}{x^2}$$

دسته منحنیهای جواب در شکل سمت چپ ترسیم شده است. حال اگر فرض کنیم $y(1) = 2$ در اینصورت:

$$if\ y(1) = 2 \rightarrow y = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad ; \quad if\ x \rightarrow 0\ \ then\ y \rightarrow \infty$$

دیده می‌شود که در این حالت, جواب به ازای نقطه ناپیوستگی $p(x)$ یعنی $x = 0$ وجود ندارد. از آنجا که $p(x)$ فقط در صفر مشکل دارد, پس اگر بازه $I = (0, \infty)$ انتخاب شود, چون $x_0 = 1 \in I$, جواب وجود داشته و منحصر به فرد نیز خواهد بود.





حال فرض کنید در همین معادله شرط اولیه بصورت $y(1) = 1$ باشد. در اینصورت:

$$if\ y(1) = 1 \rightarrow y = x^2 \quad ; \quad if\ x \rightarrow 0\ \ then\ \ y \rightarrow 0 \quad (?)$$

دیده می‌شود که اگرچه $p(x)$ در $x = 0$ ناپیوسته است اما در اینجا بر خلاف حالت قبل جواب در این نقطه نیز وجود دارد (شکل سمت راست). در واقع قضیه نمی‌گوید حتما در نقاط ناپیوستگی, جواب وجود ندارد و یا الزاما ناپیوسته است.

مثال ۱–۱۸ در معادله زیر بدون حل آن, بزرگترین ناحیه‌ای را تعیین کنید که معادله در آن ناحیه دارای جواب یکتا باشد.

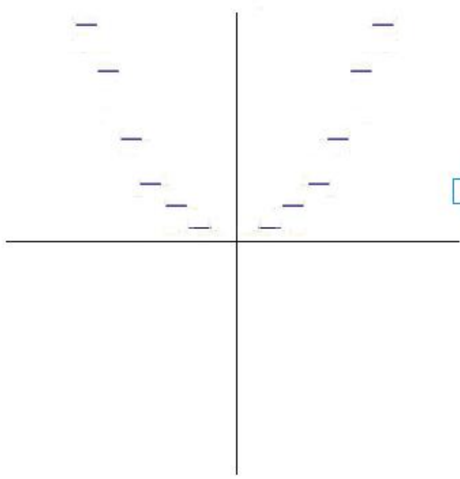
$$y' = \frac{3ylny}{x-2} \quad ; \quad y(6) = 3 \quad \rightarrow f(x,y) = \frac{3ylny}{x-2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3(lny+1)}{x-2}$$

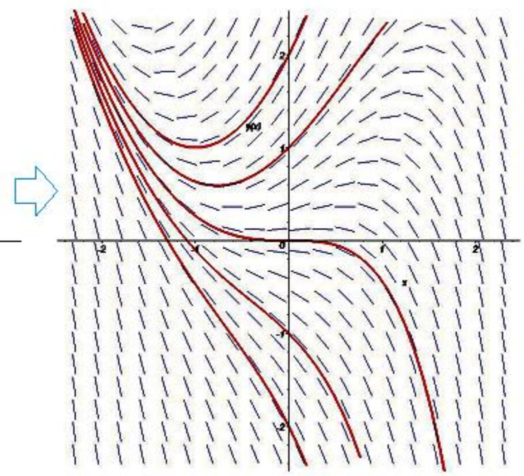
حل برای پیوسته بودن f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ بایستی $x = 2$ و $y \leq 0$ جزو ناحیه نباشد. لذا مستطیل مورد نظر شامل ناحیه $|x-6| < 4$ و $|y-3| < 3$ میباشد. ■

توضیح: اگر شرط اولیه بصورت $y(2) = 1$ داده شده باشد, این قضیه جوابگو نیست. با حل معادله به جواب $lny = c(x-2)^3$ می‌رسیم که به‌ازای تمام مقادیر c از نقطه $(2,1)$ میگذرد, پس معادله بیشمار جواب دارد. اما اگر شرط بصورت $y(2) = 3$ داده شده باشد, جواب $lny = c(x-2)^3$ به‌ازای هیچ مقداری برای c از $(2,3)$ نمیگذرد. پس معادله جواب ندارد. ■

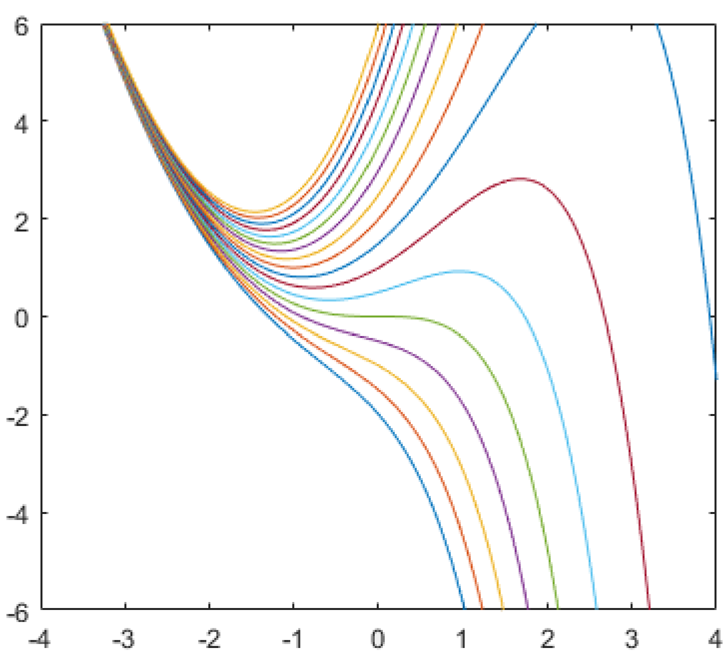
۱-۸- حل به روش ترسیمی(هم شیبها)

در تعدادی از معادلات که فرم آنها به صورت $y' = f(x,y)$ میباشد, میتوان با استفاده از ترسیم منحنی های $f(x,y) = c$ و ترسیم شیبهای به میزان $y' = c$ بر روی آن , فرم کلی جواب را بدست آورد.
بعنوان مثال برای معادله $y' = y - x^2$, بر روی منحنی $y - x^2 = 0$ شیبهایی به میزان $y' = 0$ قرار میدهیم. بر روی منحنی $y - x^2 = 1$ شیبهایی به میزان $y' = 1$ قرار میدهیم. و الی آخر. در نهایت:





در ادامه برای کنترل جواب بدست آمده, از آنجا که معادله خطی است, آنرا حل کرده و جواب را با جواب بالا مقایسه می‌کنیم.



$$y' - y = -x^2$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -dx} = e^{-x}$$

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)g(x)dx + c\right]$$

$$= e^x\left[\int e^{-x}(-x^2)dx + c\right]$$

$$= ce^x + x^2 + 2x + 2$$

در شکل روبرو جوابهای این معادله برای c های مختلف ترسیم شده است که با آنچه در بالا رسم شده است, مطابقت دارد.

۱-۹- تشکیل معادله دیفرانسیل با داشتن جواب

سوال در اینجا این است که معادله دیفرانسیلی را بیابیم که جواب آنرا داشته باشیم. یعنی عکس کاری که تا بحال انجام دادیم.

برای اینکار بایستی به تعداد پارامترهای ثابت(یعنی c ها) از معادله نسبت به x مشتق گرفته و در نهایت این ثابتها را حذف کنیم. بدیهی است توابعی به فرم $f(x,y,c)=0$ جواب یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. مثلا میخواهیم معادله ای بیابیم که جواب آن دسته منحنیهای $4x^2-y^2=c$ باشد. با مشتق گیری نسبت به x خواهیم داشت $8x-2yy'=0$. در اینجا ثابت خودبه خود حذف, و معادله دیفرانسیل مربوط بدست آمد. مثال دیگر بصورت زیر است:

$$(y-c)^2+x^2=1 \xrightarrow{\frac{d}{dx}} 2y'(y-c)+2x=0 \to y-c=\frac{-x}{y'}$$

بین این رابطه و رابطه اصلی c را حذف میکنیم تا معادله دیفرانسیل متناظر این جواب بدست آید:

$$\left(\frac{-x}{y'}\right)^2+x^2=1 \to x^2=(1-x)^2y'^2$$

اگر تعداد ثابتها بیشتر باشد بدیهی است معادله حاکم مرتبه اول نبوده است. لذا به تعداد ثابتها مشتق لازم است, تا ثابتها حذف شود. به مثال بعد توجه شود.

مثال ۱-۱۹ معادله دیفرانسیلی بیابید که دسته منحنیهای $y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$ جواب آن باشد.

حل با محاسبه مشتقات اول و دوم دسته منحنی, خواهیم داشت:

$$y'=-c_1e^{-x}+2c_2e^{2x} \to y''=c_1e^{-x}+4c_2e^{2x}$$

از این دو رابطه c_1 و c_2 بدست آمده و با جایگذاری در رابطه اصلی, معادله حاکم بدست می آید.

راه بهتر آن است که این سه معادله را با هم بنویسیم:

$$\begin{cases} y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x} \\ y'=-c_1e^{-x}+2c_2e^{2x} \\ y''=c_1e^{-x}+4c_2e^{2x} \end{cases} \to \begin{bmatrix} y & e^{-x} & e^{2x} \\ y' & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ y'' & e^{-x} & 4e^{2x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -c_1 \\ -c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

از آنجا که این دستگاه باید جواب غیر صفر داشته باشد لذا دترمینان ضرایب را صفر قرار می‌دهیم. با مساوی صفر قرار دادن این دترمینان به معادله $y''-y'-2y=0$ خواهیم رسید. ■

توضیح: بطور کلی برای دسته منحنیهای به فرم زیر, معادله دیفرانسیل حاکم از حذف ثابتها عبارت است از:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i\, y_i(x)+g(x) \to \begin{vmatrix} y-g & y_1 & \cdots & y_n \\ y'-g' & y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(n)}-g^{(n)} & y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}=0 \ ■$$

تمرین بخش ۱-۹

۱- معادله دیفرانسیلی بیابید که دسته منحنیهای زیر جواب آن باشد.

1) $y=\dfrac{secx}{c_1+c_2tanx}$; Ans: $yy''-2y'^2-y^2=0$

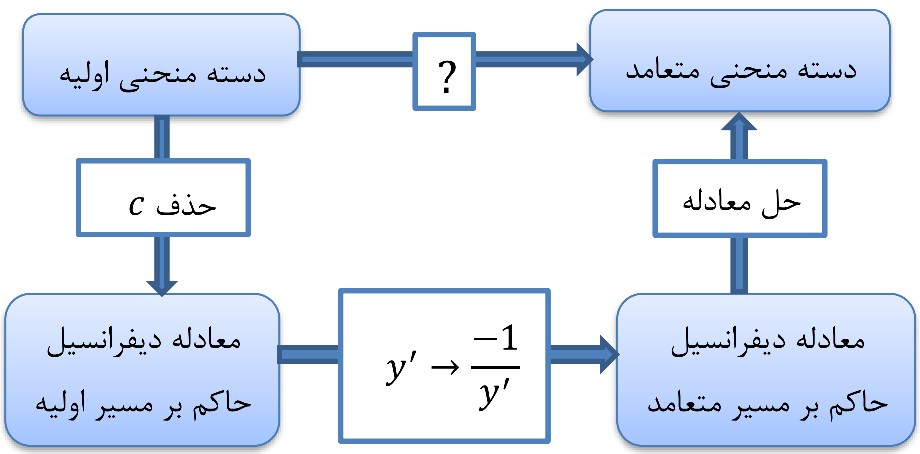
2) $y=c_1x+c_2sinx+x^2$

۱-۱۰- کاربردها

سه کاربرد در اینجا ذکر میشود. تعیین مسیرهای قائم, تعیین پوش دسته منحنیها و چند نمونه کاربرد هندسی و فیزیکی.

۱-۱۰-۱- تعیین مسیرهای قائم بر یک دسته منحنی

هدف تعیین دسته منحنیهایی است که بر یک دسته منحنی اولیه عمود باشد. برای این منظور ابتدا برای دسته منحنی داده شده پارامتر c را حذف کرده تا معادله دیفرانسیل حاکم بر آن بدست آید. سپس از آنجا که برای یک منحنی و منحنی عمود بر آن حاصل ضرب y' ها برابر -1 میباشد, با تبدیل y' به $\frac{-1}{y'}$ معادله دیفرانسیل حاکم بر مسیر متعامد را بدست می‌آوریم. از حل این معادله, جواب مورد نظر بدست می‌آید. به عبارتی:

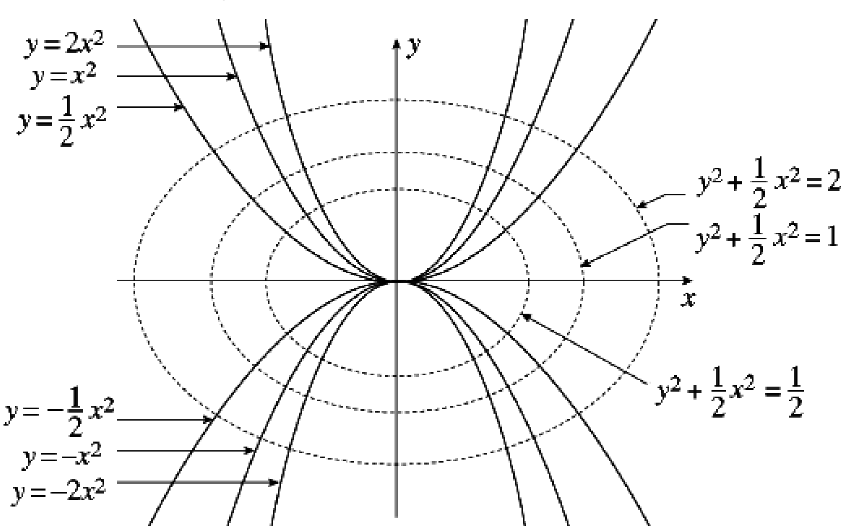


چنانچه دسته منحنی در فرم قطبی بصورت $f(r,\theta,c)=0$ داده شده باشد, ابتدا با مشتق گیری نسبت به θ , ثابت c را حذف میکنیم. سپس $\frac{dr}{d\theta}$ را با $-r^2\frac{d\theta}{dr}$ جایگزین کرده و معادله جدید را حل میکنیم.

مثال ۱-۲۰ مسیرهای قائم بر دسته منحنیهای $y=cx^2$ را بیابید.

$$y'=2cx \to c=\frac{y'}{2x} \xrightarrow{y=cx^2} y=\frac{y'}{2}x \quad ; \quad \underline{or:}\ \frac{y}{x^2}=c \to \frac{y'x^2-2xy}{x^4}=0 \to y=\frac{y'}{2}x$$

$$\xrightarrow{y' \to \frac{-1}{y'}} y'=\frac{-x}{2y} \to 2ydy=-xdx \to \frac{1}{2}x^2+y^2=k$$



در شکل روبرو دسته سهمی‌های $y=cx^2$ و دسته بیضی‌های $\frac{1}{2}x^2+y^2=k$ (که عمود بر آنهاست) ترسیم شده است. ■

مثال ۱–۲۱ مسیرهای قائم بر دسته منحنیهای $y^2 = cx^3 + x^2 - 1$ را بیابید.

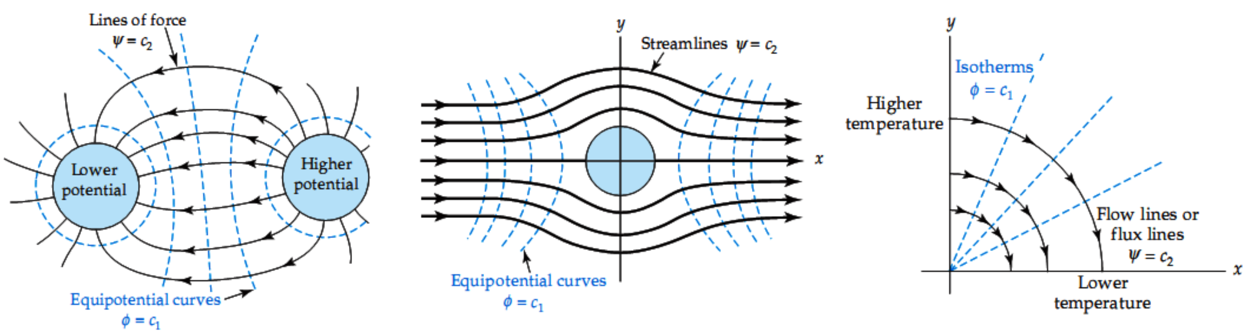
$$y^2 = cx^3 + x^2 - 1 \to 2yy' = 3cx^2 + 2x \to 2yy' = 3\frac{y^2 - x^2 + 1}{x} + 2x$$

$$\xrightarrow{y'=\frac{-1}{y'}} 2xy\frac{-1}{y'} = 3y^2 - x^2 + 3 \to y' = \frac{-2xy}{3y^2 - x^2 + 3} \xrightarrow{\cdots} x^2 + 3y^2 - 3 = ky$$

این معادله قبلا هم در بحث عامل انتگرال ساز و هم با روش برنولی حل شده است. ■

مثالهای فیزیکی

خطوط هم پتانسیل و خطوط نیرو در الکتریسیته بر هم عمودند. خطوط هم پتانسیل و خطوط جریان در مکانیک سیالات بر هم عمودند. خطوط هم دما و خطوط انتقال دما در ترمودینامیک بر هم عمودند.



Electric field — Fluid flow — Flow of heat

۱–۱۰–۲- پوش دسته منحنیها و تعیین جوابهای غیرعادی

الف: پوش دسته منحنیها

پوش یک دسته منحنی (در صورت وجود) منحنی است که به تمام منحنیهای آن و بر هر کدام تنها در یک نقطه مماس است. می‌توان ثابت کرد برای دسته منحنیهایی به فرم $g(x, y, c) = 0$ پوش آنها (در صورت وجود) با حذف ثابت c از دستگاه زیر بدست می آید.

$$\begin{cases} g(x,y,c) = 0 \\ \dfrac{\partial g(x,y,c)}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

همچنین ثابت میشود که برای یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول, پوش دسته منحنی های جواب عمومی نیز یک جواب معادله خواهد بود. از آنجا که این جواب از روی جواب عمومی بدست نمی‌آید, لذا آنرا جواب غیر عادی مساله می‌نامیم.

به عنوان مثال برای دسته منحنیهای به فرم $(y-c)^2 + x^2 = 1$, پوش جواب عبارت است از:

$$(y-c)^2 + x^2 = 1 \quad ; \quad \begin{cases} (y-c)^2 + x^2 - 1 = 0 \\ -2(y-c) = 0 \to y = c \end{cases} \to x^2 - 1 = 0 \to x = \pm 1$$

همچنین دیده شد که جواب عمومی معادله کلرو بصورت $y = xc + g(c)$ میباشد. برای یافتن پوش جواب خواهیم داشت:

$$\underbrace{y - xc - g(c)}_{h(x,y,c)} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial c} = 0 \to x + g'(c) = 0 \to \begin{cases} y = xc + g(c) \\ x + g'(c) = 0 \end{cases}$$

که بایستی بین این دو معادله c را حذف کرد. دیده میشود که معادله بدست آمده دقیقا همان معادله‌ای است که برای یافتن جواب غیرعادی معادله کلرو بدست آمده بود. لذا در اینجا نشان داده شد که جواب غیرعادی معادله کلرو, همان پوش جواب عمومی است.

ب: تعیین جوابهای غیرعادی

در قسمت قبل جوابهای غیرعادی را با استفاده از جواب عمومی و تعیین پوش آن بدست آوردیم. در قضیه زیر خواهیم دید میتوان جواب غیرعادی را صرفا با توجه به خودِ معادله دیفرانسیل و بدون محاسبه جواب عمومی آن نیز بدست آورد.

قضیه: برای تعیین جوابهای غیرعادی معادله $F(x,y,y') = 0$ (البته در صورت وجود) مشروط به اینکه $\frac{\partial F}{\partial y}$ و $\frac{\partial F}{\partial y'}$ در همه نقاط پیوسته باشند, کافی است دستگاه زیر را تشکیل داده و مابین آنها y' را حذف کرد.

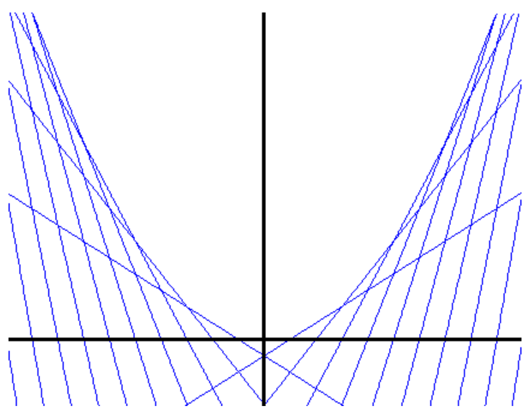
$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0 \\ \dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = 0 \end{cases}$$

مثال ۱-۲۲ پوش خانواده خمهای $y = cx - 2c^2$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} g(x,y,c) = 0 \\ \dfrac{\partial g(x,y,c)}{\partial c} = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y - cx + 2c^2 = 0 \\ -x + 4c = 0 \to c = \dfrac{x}{4} \end{cases} \quad ; \quad y - cx + 2c^2 = 0 \xrightarrow{c=\frac{x}{4}} y = \frac{x^2}{8}$$

در مثال ۱-۱۷ دیده شد که اینها جواب عمومی و غیرعادی معادله $y = xy' - 2y'^2$ میباشند.

خانواده خطوط $y = cx - 2c^2$ در شکل زیر ترسیم شده است و دیده می‌شود که $y = \frac{x^2}{8}$ پوش این خطوط خواهد بود. ■



توضیح: در اینجا می‌خواهیم جواب غیرعادی معادله $y = xy' - 2y'^2$ را صرفا با استفاده از خودِ معادله (و نه جواب عمومی آن) بدست آوریم. با استفاده از قضیه ارائه شده در قسمت ب, خواهیم داشت:

$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0 \\ \dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y - xy' + 2y'^2 = 0 \\ -x + 4y' = 0 \to y' = \dfrac{x}{4} \end{cases} \quad ; \quad y - xy' + 2y'^2 = 0 \xrightarrow{y'=\frac{x}{4}} y = \frac{x^2}{8} \ ■$$

مثال ۱-۲۳ پوش خانواده خمهای $(y-c)^2 = 4cx$ را بدست آورید.

$$\underbrace{(y-c)^2 - 4cx}_{g(x,y,c)} = 0 \;\; ; \;\; \frac{\partial g}{\partial c} = 0 \to -2(y-c) - 4x = 0 \to c = y + 2x$$

$$(y-c)^2 - 4cx = 0 \xrightarrow{c=y+2x} 4x^2 - 4x(y+2x) = 0 \to y + x = 0$$

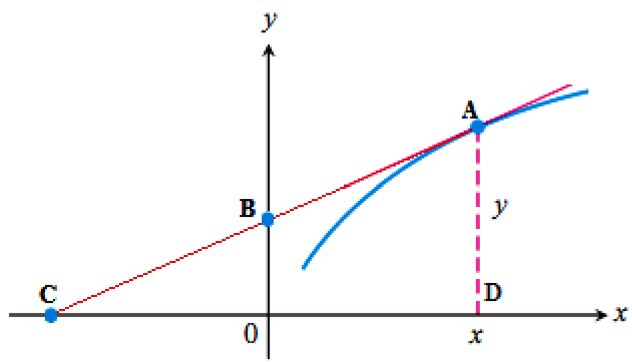
در مثال ۱-۱۵ دیده شد که اینها جواب عمومی و غیرعادی معادله $xy'^2 + 2xy' - y = 0$ میباشند. ■

توضیح: در اینجا نیز بدون داشتن جواب عمومی، می‌توان جواب غیرعادی معادله $xy'^2 + 2xy' - y = 0$ را با استفاده از قضیه ارائه شده در قسمت ب , بصورت زیر بدست آورد:

$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0 \\ \dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = 0 \end{cases} \to \begin{cases} xy'^2 + 2xy' - y = 0 \\ 2xy' + 2x = 0 \to y' = -1 \end{cases} \; ; \;\; xy'^2 + 2xy' - y = 0 \xrightarrow{y'=-1} y = -x \;\; \blacksquare$$

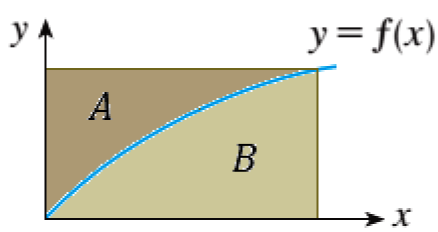
۱-۱۰-۳- چند نمونه کاربرد هندسی و فیزیکی

مثال ۱-۲۴ همه منحنی‌هایی را بیابید که اگر از هر نقطه A روی آن، بر منحنی مماس رسم شود، $AB = BC$ گردد.



$$tan\hat{C} = \frac{AD}{CD} \to y' = \frac{y}{2x} \to 2\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \to 2ln|y| = ln|x| + \underbrace{c_1}_{lnc} \to y^2 = cx \;\; \blacksquare$$

مثال ۱-۲۵ منحنی به معادله $y = f(x)$ که از مبدا مختصات میگذرد در ربع اول مفروض است. خطوط موازی محورهای مختصات که از یک نقطه دلخواه روی منحنی رسم میشوند، دو ناحیه A و B را ایجاد میکنند. اگر مساحت ناحیه B , سه برابر ناحیه A باشد، معادله منحنی را بیابید.



$$B = 3A \to B = \frac{3}{4}xy \to \int ydx = \frac{3}{4}xy \xrightarrow{d} ydx = \frac{3}{4}ydx + \frac{3}{4}xdy \to ydx = 3xdy$$

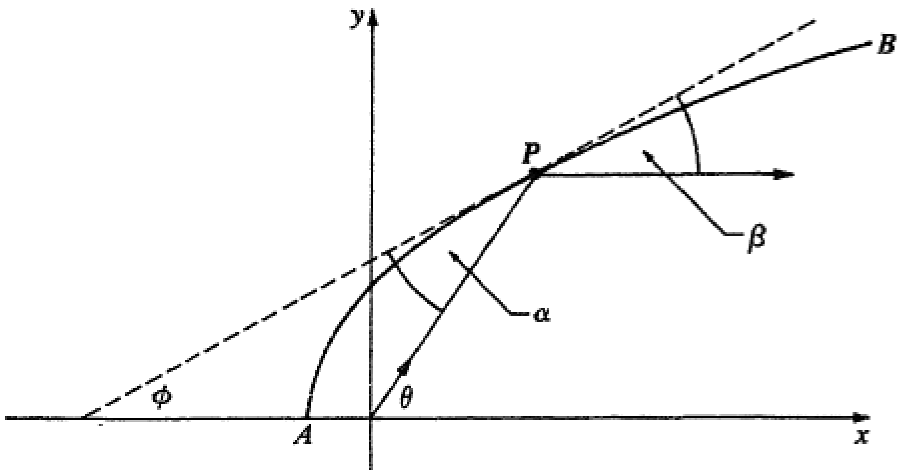
$$\to \frac{dx}{x} = 3\frac{dy}{y} \to lnx = 3lny + c_1 \to \frac{x}{y^3} = e^{c_1} = c_2 \to x = c_2 y^3 \;\; \blacksquare$$

مثال ۱-۲۶ شکل آیینه مقعر دواری را چنان تعیین کنید که نوری که از منبع, واقع در مبدا مختصات بر آن می‌تابد, به موازات محور xها منعکس شود.

حل منحنی AB را در نظر میگیریم (در واقع آیینه سطح دواری است که از دوران این منحنی حول x بوجود می‌آید).

$$\alpha=\beta\ ;\ \ \phi=\beta\rightarrow\theta=\alpha+\phi=2\beta\ ;\ \ \tan\underbrace{\theta}_{2\beta}=\frac{y}{x}\rightarrow\frac{2tan\beta}{1-tan^2\beta}=\frac{y}{x}$$

$$\frac{2y'}{1-y'^2}=\frac{y}{x}\rightarrow y'=\frac{-x\pm\sqrt{x^2+y^2}}{y}\xrightarrow{\text{معادله با تابع همگن}}\pm\sqrt{x^2+y^2}=x+c\rightarrow y^2=2cx+c^2\ \blacksquare$$



توضیح ۱: لازم بذکر است معادله دیفرانسیل ایجاد شده یک معادله با تابع همگن بوده و قابل حل است. یک روش دیگر تبدیل آن به معادله به فرم $x=F(y,y')$ و یا $y=F(x,y')$ می‌باشد که در تمرین ۴ از شما خواسته شده است به این روش مساله را حل کنید. روش دیگری نیز میتوان برای این معادله مطرح کرد که بر مبنای دسته‌بندی بوده و بصورت زیر است:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x\pm\sqrt{x^2+y^2}}{y}\rightarrow\underbrace{xdx+ydy}_{\frac{1}{2}d(x^2+y^2)}=\pm\sqrt{x^2+y^2}dx\rightarrow\pm\frac{d(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}}=dx$$

$$\xrightarrow{\int}\pm\sqrt{x^2+y^2}=x+c\rightarrow y^2=2cx+c^2$$

توضیح ۲: نتیجه آنکه جواب مساله, دسته سهمی‌هایی است که کانونشان مبدا و محور تقارنشان محور xها است. به این ویژگی, اصطلاحا خاصیت کانونی سهمی‌ها میگویند. این مساله نشان میدهد که سهمی‌ها تنها منحنی‌هایی هستند که این خاصیت را دارا می‌باشند. ■

مثال ۱-۲۷ در لحظه $t=0$ شیئی 192 پوندی از حال سکون در محیطی که مقاومت آن بر حسب پوند برابر با $3v^2$ است سقوط میکند (v بر حسب ft/sec میباشد).

الف: سرعت و مسافت طی شده در لحظه دلخواه $t>0$ را بیابید. ب: سرعت حدی آنرا بدست آورید. $\left(g=32\frac{ft}{s^2}\right)$

حل با نوشتن معادله تعادل در راستای قائم خواهیم داشت:

$$a)\ \sum F_y=ma\rightarrow 192-3v^2=\frac{192}{g}\frac{dv}{dt}\xrightarrow{g=32\frac{ft}{s^2}}2\frac{dv}{dt}=64-v^2$$

$$\frac{dv}{64-v^2}=\frac{dt}{2}\xrightarrow{\int}\frac{1}{8}tanh^{-1}\left(\frac{v}{8}\right)=\frac{t}{2}+c\xrightarrow{v(0)=0\to c=0}v(t)=8tanh(4t)$$

$$v=\frac{dx}{dt}\to\frac{dx}{dt}=8tanh(4t)\to x(t)=2ln\big(cosh(4t)\big)=2ln\left(\frac{e^{4t}+e^{-4t}}{2}\right)\ \blacksquare$$

$$b)\ \lim_{t\to\infty}v(t)=\lim_{t\to\infty}8tanh(4t)=\lim_{t\to\infty}8\left(\frac{e^{4t}-e^{-4t}}{e^{4t}+e^{-4t}}\right)=\lim_{t\to\infty}8\left(\frac{1-e^{-8t}}{1+e^{-8t}}\right)=8\,ft/s$$

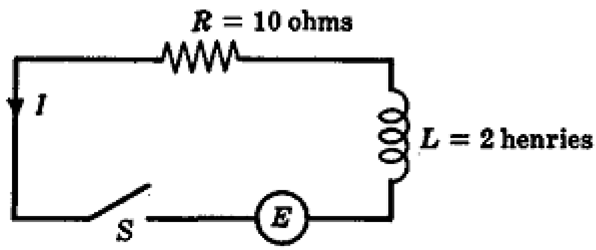
همچنین با توجه به رابطه $2\frac{dv}{dt}=64-v^2$ میتوان گفت برای سرعت حدی بایستی $\frac{dv}{dt}=0$ باشد که به $v=8$ منجر می‌شود. ■

مثال ۱-۲۸ یک مقاومت الکتریکی $R=10$ اهمی, یک القاگر (سلف) با ضریب خودالقایی $L=2$ هانری و یک باطری E ولتی به وسیله کلید S به طور متوالی به هم وصل شده اند (مدار RL). در لحظه $t=0$ کلید بسته است و $I=0$. اگر بدانیم که اختلاف پتانسیل دو سر سلف از رابطه $L\frac{dI}{dt}$ بدست می‌آید, مطلوب است تعیین I در لحظه $t>0$ در حالتی‌که $E(t)$ به یکی از سه صورت زیر باشد:

$a)\ E(t)=40$

$b)\ E(t)=20e^{-3t}$

$c)\ E(t)=50sin5t$



حل با نوشتن معادله پتانسیل و در نظر گرفتن اینکه همواره در جهت جریان با افت پتانسیل روبرو هستیم خواهیم داشت:

$$E(t)-L\frac{dI}{dt}-RI=0\to\frac{dI}{dt}+5I=\frac{E(t)}{2}\to I(t)=\frac{1}{e^{5t}}\left(\int\frac{E(t)}{2}e^{5t}\,dt+c\right)$$

$$a)\ E(t)=40\to I(t)=\frac{1}{e^{5t}}\left(\int 20e^{5t}\,dt+c\right)=\frac{c}{e^{5t}}+4\xrightarrow{I(0)=0\to c=-4}I(t)=4(1-e^{-5t})\ \blacksquare$$

$$b)\ E(t)=20e^{-3t}\to I(t)=\frac{1}{e^{5t}}\left(\int 10e^{2t}\,dt+c\right)=\frac{c}{e^{5t}}+5e^{-3t}$$

$$I(0)=0\to c=-5\to I(t)=5(e^{-3t}-e^{-5t})\ \blacksquare$$

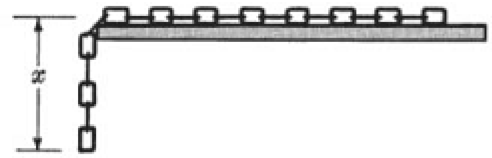
$$c)\ E(t)=50sin(5t)\to I(t)=\frac{1}{e^{5t}}\left(\int 25sin(5t)e^{5t}dt+c\right)=\frac{c}{e^{5t}}+\frac{5}{2}\big(sin(5t)-cos(5t)\big)$$

$$I(0)=0\to c=\frac{5}{2}\to I(t)=\frac{5}{2}e^{-5t}+\frac{5}{2}\big(sin(5t)-cos(5t)\big)\ \blacksquare$$

توضیح: حال ببینیم با گذشت زمان, جریان به چه عددی میل میکند. در حالت اول دیده میشود که اگر $t\to\infty$ آنگاه $I(t)=4$ خواهد شد. در حالت دوم بدیهی است $I(t)=0$ خواهد بود. توجه شود که ولتاژ ورودی یعنی $E(t)=20e^{-3t}$ نیز کاهنده است, لذا توقع چنین جوابی را خواهیم داشت. اما در حالت سوم, دیده میشود که با گذشت زمان, صرفا ترم $\frac{5}{2}e^{-5t}$ به سمت صفر میل میکند. به همین جهت به آن جواب گذرا (Transient) می‌گوییم. در قیاس با آن, ترم $\frac{5}{2}\big(sin(5t)-cos(5t)\big)$, جواب پایدار (Steady State) نامیده میشود. در بخش ۲-۹ مطالب کامل‌تری در این ارتباط خواهیم دید. ■

مثال ۱-۲۹ زنجیر یکنواختی به طول l را روی یک میز افقی بدون اصطکاک بگونه‌ای قرار داده‌ایم که قسمتی از آن به طول b از یک طرف میز آویزان است. الف: طول قسمت آویزان را در لحظه t بیابید. ب: چه مدت طول میکشد تا کل زنجیر از روی میز بلغزد.

حل فرض کنید در لحظه t , قسمتی از زنجیر به طول x از همان سمت میز آویزان باشد. اگر چگالیِ جرمی زنجیر σ فرض شود:



$$\sum F_y = ma \to \sigma g x = \sigma l \frac{dv}{dt} \to \frac{dv}{dt} = \frac{gx}{l}$$

دیده می‌شود در این رابطه هم x وجود دارد هم v و هم t . بایستی ارتباطی بین آنها برقرار کرد تا صرفا یک متغیر و یک تابع باقی بماند. این ارتباط همواره از فیزیک مساله می‌آید. اگر قرار دهیم $v = \frac{dx}{dt}$ به یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو خواهیم رسید که در مثال ۲-۶ در فصل بعد مساله را با این روش حل خواهیم کرد. به عبارتی:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{gx}{l} \to \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{gx}{l} \to \ddot{x} - \frac{g}{l}x = 0 \qquad (x,t)$$

از آنجا که حل معادله مرتبه دو را نمی‌دانیم در اینجا به طریق دیگری عمل می‌کنیم تا به یک معادله مرتبه اول برسیم.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \to vdv = \frac{g}{l}xdx \xrightarrow{\int} \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2l}gx^2 + c \xrightarrow{v|_{x=b}=0} v = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{x^2 - b^2}$$

که با این روش v بر حسب x بدست آمده است. اما از آنجا که معمولا سرعت بر حسب زمان مورد نظر است می‌توان نوشت:

$$v = \frac{dx}{dt} \to \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{x^2 - b^2} \to \frac{dx}{\sqrt{x^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}dt \to cosh^{-1}\left(\frac{x}{b}\right) = \sqrt{\frac{g}{l}}t + c$$

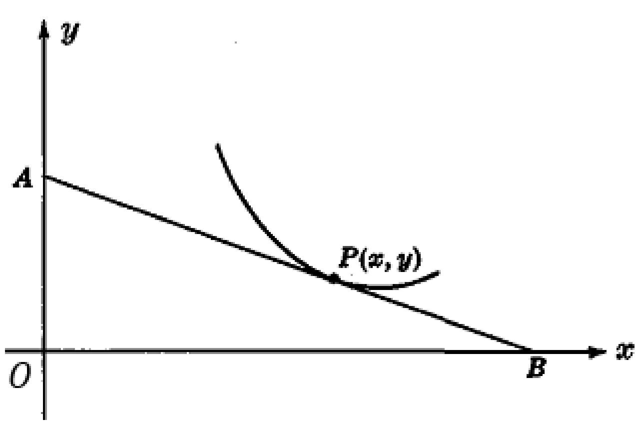
$$x(0) = b \to c = 0 \to x(t) = b\,cosh(kt) \quad ; \quad \left(k = \sqrt{g/l}\right)$$

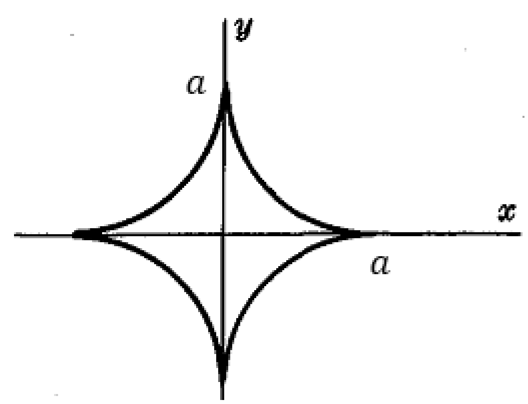
برای محاسبه زمان لازم (T) برای آنکه کل زنجیر به طول l از روی میز بلغزد, کافی است $x(T) = l$ قرار داده شود:

$$x(T) = l \to l = b\,cosh(kT) \to T = \sqrt{l/g}\,cosh^{-1}(l/b)$$

$$cosh^{-1} x = ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \to T = \sqrt{l/g}\; ln\left(\frac{l + \sqrt{l^2 - b^2}}{b}\right) \quad ■$$

مثال ۱-۳۰ معادله منحنی را تعیین کنید که طول بخشی از خط مماس بر هر نقطه از آن, که بین محورهای x و y قرار می‌گیرد, برابر با عدد ثابت $a > 0$ باشد. یعنی در شکل سمت چپ $\overline{AB} = a$ باشد.





حل فرض کنید $P(x,y)$ نقطه دلخواهی روی منحنی باشد. معادله خط مماس بصورت $Y-y=y'(X-x)$ میباشد. برای تعیین محل تلاقی این خط با محورهای مختصات, کافی است یکبار $X=0$ و بار دیگر $Y=0$ قرار داده شود. در نتیجه:

$$X=0\to\overline{OA}=y-xy'\quad;\quad Y=0\to\overline{OB}=x-\frac{y}{y'}=-\frac{(y-xy')}{y'}$$

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2}=\frac{|y-xy'|}{y'}\sqrt{1+y'^2}=a\to y=xy'\pm\frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}\quad(a>0)$$

دیده میشود معادله بدست آمده در واقع یک معادله کلرو است که در تمرین ۷ بخش ۱-۵ از شما خواسته شده است که آنرا حل کنید. حل این معادله مطابق روشی که برای حل معادله کلرو عنوان شد, بصورت زیر است:

با انتخاب $y'=p$ و مشتق گیری نسبت به x خواهیم داشت:

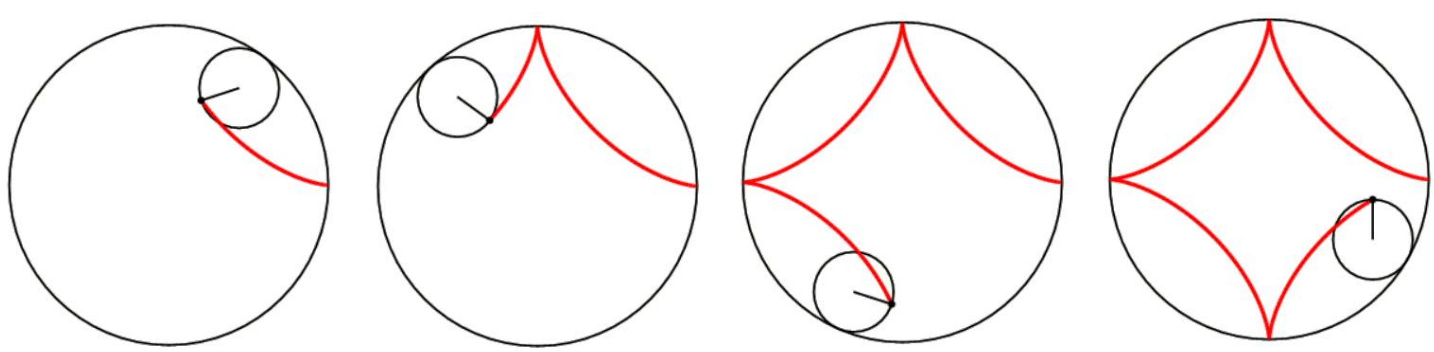
$$y=xp\pm\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}\xrightarrow{\frac{d}{dx}}p=p+x\frac{dp}{dx}\pm\frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{dp}{dx}\to\frac{dp}{dx}\left(x\pm\frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\right)=0$$

$$\frac{dp}{dx}=0\to p=c\to y=cx\pm\frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}\quad;\quad\frac{dp}{dx}\neq0\to x=\mp\frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\to y=\pm\frac{ap^3}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\to x^{\frac{2}{3}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{1+p^2}\quad;\quad y^{\frac{2}{3}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}p^2}{1+p^2}\to x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\quad(Hypocycloid)\quad\blacksquare$$

توضیح ۱: منحنی $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ که جواب غیرعادی معادله میباشد, اصطلاحا چرخزاد نامیده میشود و در واقع پوش جواب عمومی معادله یعنی خطوط راست $y=cx\pm\frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}$ می‌باشد. در شکل سمت راست, این چرخزاد ترسیم شده است.

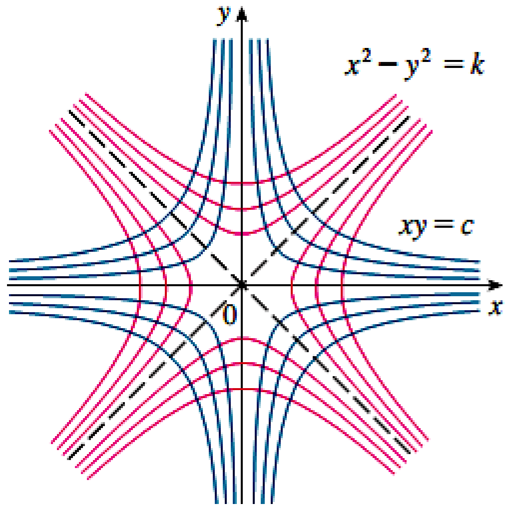
توضیح ۲: علت نامگذاری این منحنی تحت عنوان چرخزاد را می‌توان در شکل زیر دنبال کرد. برای این منظور یک نقطه روی دایره کوچکتر در نظر می‌گیریم. وقتی دایره کوچکتر بر روی محیط دایره بزرگتر می‌چرخد, نقطه هم با آن می‌چرخد. حال اگر حرکت نقطه روی دایره را دنبال کرده, آنرا ترسیم کنیم, به منحنی ایجاد شده چرخزاد می‌گوییم. ■



تمرینات بخش ۱-۱۰

۱- مسیرهای قائم بر دسته منحنیهای $xy = c$ را بیابید.

$\underline{Ans}$: $x^2 - y^2 = k$



۲- مسیرهای قائم بر دسته منحنیهای $y = ln(tanx + c)$ را بیابید.

$\underline{Ans}$: $e^{-y} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}sin2x + k$

۳- نشان دهید دسته منحنیهای عمود بر $r = c(1 + cos\theta)$, بصورت $r = a(1 - cos\theta)$ میباشد.

۴- معادله دیفرانسیل بدست آمده در مثال ۱-۲۶ را با تبدیل آن به معادله $x = F(y, y')$ و $y = F(x, y')$ مجددا حل کنید.

۵- ماده شیمیایی A در هر لحظه با آهنگی متناسب با مقدار ماده حل نشده تا آن لحظه (x) و تفاضل غلظت محلول فعلی (C_a) و محلول اشباع شده (C_s) حل می‌شود. یک تکه متخلخل 10 پوندی از A را وارد ظرفی حاوی 100 گالون آب کرده آنرا به هم می‌زنیم. پس از یک ساعت 4 پوند از A حل میشود. اگر غلظت محلول اشباع شده A برابر 0.2 پوند در گالون باشد, مطلوب است:

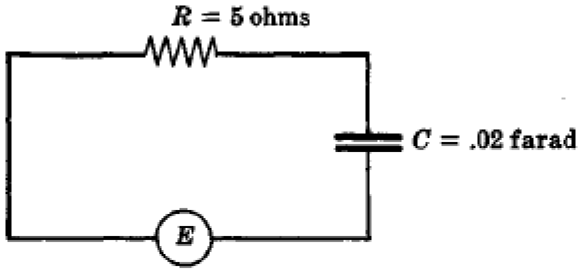
الف: مقداری از A که پس از 2 ساعت هنوز حل نشده است. ب: زمان لازم برای اینکه 80 درصد از A حل شود.

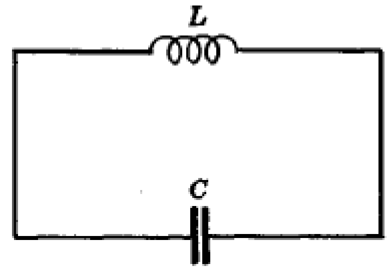
$\underline{Hint}$: $\frac{dx}{dt} = kx\left(0.2 - \frac{10 - x}{100}\right)$; $x(0) = 10$; $x(1) = 6$

$\underline{Ans}$: $x(t) = \frac{5(3/4)^t}{1 - 0.5(3/4)^t}$; $a)$ $x = 3.91\ lb$; $b)$ $t = 3.82\ h$

۶- یک مقاومت الکتریکی $R = 5$ اهمی و یک خازن با ظرفیت $C = 0.02$ فارادی و یک باطری $E = 100$ ولتی به طور متوالی مطابق شکل سمت چپ به هم وصل شده اند (مدار RC). اگر در لحظه $t = 0$ بار خازن برابر $Q = 5$ کولن باشد و بدانیم جریان از رابطه $I = \frac{dQ}{dt}$ بدست می‌آید, مطلوب است تعیین بار Q و جریان I در هر لحظه t .

$\underline{Hint}$: $E = RI + \frac{Q}{C} \rightarrow 5\frac{dQ}{dt} + 50Q = E$; $\underline{Ans}$: $Q(t) = 2 + 3e^{-10t}$; $I(t) = -30e^{-10t}$



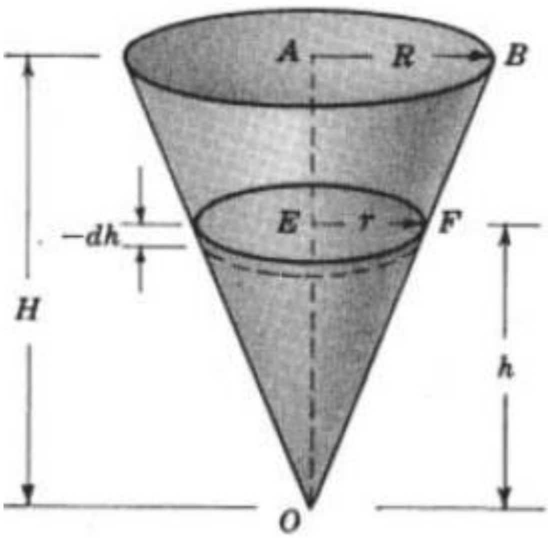


۷- یک القاگر (سلف) با ضریب خودالقایی L هانری و یک خازن با ظرفیت C فاراد مطابق شکل سمت راست به هم متصل شده‌اند. اگر در لحظه $t=0$ داشته باشیم $Q=Q_0$ و $I=0$, مطلوب است محاسبه Q و I در هر لحظه t .

راهنمایی: بدیهی است معادله حاکم بر مساله بصورت $L\frac{dI}{dt}+\frac{Q}{C}=0$ می‌باشد که اگر $I=\frac{dQ}{dt}$ منظور شود به $L\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{Q}{C}=0$ خواهیم رسید که یک معادله مرتبه دو بوده و فعلا حل آنرا نمی‌دانیم. در اینجا نیز مشابه مثال ۱-۲۹ به طریق زیر عمل کنید:

$$\frac{dI}{dt}=\frac{dI}{dQ}\frac{dQ}{dt}=I\frac{dI}{dQ} \quad ; \quad L\frac{dI}{dt}+\frac{Q}{C}=0 \rightarrow LI\frac{dI}{dQ}+\frac{Q}{C}=0$$

$$\underline{Ans}:\ I(Q)=\pm\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{Q_0^2-Q^2} \quad ; \quad Q(t)=Q_0 cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \ ; \ I(t)=-\frac{Q_0}{\sqrt{LC}}sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$



۸- یک مخروط قائم معکوس مطابق شکل روبرو مورد نظر است. در ابتدا مخروط پر از آب است. چه مدت (T) طول میکشد تا همه آب از سوراخ O با سطح مقطع a که در راس مخروط قرار دارد خارج شود. فرض کنید سرعت خروج برابر $v=k\sqrt{2gh}$ باشد که در آن h ارتفاع لحظه‌ای آب در بالای O و k یک ثابت (ضریب تخلیه) است.

راهنمایی: حجم آب جابجا شده در واحد زمان (دِبی) برابر است با حاصلضرب سرعت در مساحت یعنی $Q=av$. لذا حجم آب خارج شده در مدت زمان dt عبارت است از $avdt$. همچنین تغییر در حجم آب پس از زمان dt بر حسب dh نیز برابر است با $-\pi r^2 dh$.

$$\underline{Hint}:\ -\pi r^2 dh=avdt \ ; \ r=\frac{Rh}{H} \ ; \ h(0)=H \quad ; \quad \underline{Ans}:\ T=\frac{\pi R^2}{5ak}\sqrt{\frac{2H}{g}}$$