DATE / / SUBJECT: محمد امانلو - شماره دانشجویی : ۸۱۰۱۰۰۰۸۴

حد توابع زیر را بدست آورید:

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},0)} \dfrac{\cos y+1}{y-\sin x} = \dfrac{\cos 0+1}{0-\sin(\frac{\pi}{2})} = \dfrac{2}{-1} = \boxed{-2}$

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad y=mx \to \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{mx^3}{x\sqrt{1+m^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{mx^2}{\sqrt{1+m^2}} = \boxed{0}$

6) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,-1,2)} \dfrac{(x-1)(y+1)(z-2)}{\sin((x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2)}$

$X=x-1 \quad Y=y+1 \quad Z=z-2$

$\to \lim\limits_{(X,Y,Z)\to(0,0,0)} \dfrac{XYZ}{\sin(X^2+Y^2+Z^2)}$

روی محور x $\to Y=Z=0 \to \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{\sin(x^2)} = \boxed{0}$

8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y}{x-y}$ $\quad$ $\boxed{\text{حد وجود ندارد}}$ $\to$ نقض : روی محور y $\to x=0 \to \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{-y}{-y} = 1$

$\to x=-y \to \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y^2-y}{-2y} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$

$\to$ حد وجود ندارد

مقادیر max، min و نقاط زینی توابع زیر را بیابید.

2) $f_{(x,y)} = y^3+3x^2y-6x^2-6y^2+2$

$\to f_{(x)} = 6xy-12x \;,\; f_y = 3y^2+3x^2-12y \;,\; f_{xx} = 6y-12 \;,\; f_{yy} = 6y-12$

$f_{xy} = 6x$

$\to \nabla f = 0$ نقاط بحرانی : $(0,0) \,,\, (0,4) \,,\, (2,2) \,,\, (-2,2) \,,\, (-2,2)$ $\to$ $\boxed{\text{نقاط زینی} : (-2,2),(2,2)}$

$\boxed{\text{max نسبی} : (0,0)}$ $\quad$ $\boxed{\text{min نسبی} : (0,4)}$

f_x , f_y , f_z را بدست آورید:

$$2)\ f_{(x,y,z)} = \sin^{-1}(xyz) \rightarrow f_x = \frac{yz}{\sqrt{1-(xyz)^2}},\ f_y = \frac{xz}{\sqrt{1-(xyz)^2}},\ f_z = \frac{xy}{\sqrt{1-(xyz)^2}}$$

$$4)\ f_{(x,y,z)} = \ln(x+2y+3z) \rightarrow f_x = \frac{1}{x+2y+3z},\ f_y = \frac{2}{x+2y+3z},\ f_z = \frac{3}{x+2y+3z}$$

$$6)\ f(x,y,z) = yz\ln(xy) \rightarrow f_x = \frac{y^2z}{xy} = \frac{yz}{x},\ f_y = \frac{1}{xy}(xyz) + z\ln xy$$

$$\hookrightarrow f_z = y\ln(xy) \qquad \hookrightarrow f_y = z(1+\ln(xy))$$

تحقیق کنید $w_{xy} = w_{yx}$

$$2)\ w = x\sin y + y\sin x + xy \rightarrow w_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin y + y\cos x + y) = \cos y + \cos x + 1$$

$$\hookrightarrow w_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(x\cos y + \sin x + x) = \cos y + \cos x + 1 \rightarrow w_{xy} = w_{yx}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ را در نقطه $(0,0)$ بدست آورید:

$$2)\ f_{(x,y)} = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \cos(x^3+y^3)\cdot 3x^2(x^2+y^2) - 2x\sin(x^3+y^3) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{\cos(x^3+y^3)\cdot 3y^2(x^2+y^2) - 2y\sin(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\hookrightarrow f_x(0,0) = 0$$

$$\hookrightarrow f_y(0,0) = 0$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ را در نقطه‌ی (۰,۰) بدست آورید:

$$2)\quad f_{(x,y)} = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x-y} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases} \rightarrow f_{y(x,y)} = \frac{-y^2+2xy+x^2}{(x-y)^2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = f_{yx} \rightarrow f_{yx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f_y(\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x} = 0 \qquad f_{y(x,0)} = \begin{cases} 1 & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

$$f_x(x,y) = \frac{x^2-2xy-y^2}{(x-y)^2} \rightarrow f_x(0,y) = \begin{cases} -1 & y\neq 0 \\ -1 & y=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = f_{xy} \rightarrow f_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y} = 0$$

$2)\ x = u\cos v\ ,\ y = u\sin v\ ,\ z = \tan^{-1}(x/y)\ ,\ u = 1.3\ ,\ v = \frac{\pi}{6}$: مشتقات زیر را بدست آورید

$$\rightarrow \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{y}{x^2+y^2}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos v} + \frac{-x}{x^2+y^2}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{\sin v} = \boxed{\frac{y\sqrt{3}-x}{2(x^2+y^2)}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{y}{x^2+y^2}\cdot(-1.3\sin v) + \frac{-x}{x^2+y^2}\cdot(1.3\cos v)$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1.3}{x^2+y^2}(-y\sin v - x\cos v)}$$

$4)\ q = \sqrt{v+3}\,\tan^{-1}(u)\ :\ z = \ln q\ ,\ u=1\ ,\ v=-2$

$$\rightarrow \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial u} = \frac{1}{q}\cdot\frac{\overbrace{1}^{\sqrt{-2+3}}}{u^2+1} = \boxed{\frac{1}{q(u^2+1)}}$$

$$\rightarrow \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial v} = \frac{1}{q}\cdot\frac{\overbrace{\pi/4}^{\tan^{-1}(1)}}{2\sqrt{v+3}}$$

DATE / / SUBJECT:

6) $\begin{cases} u = x^2 + y^3 \\ v = xy^2 + y \end{cases}$, $u = v = x = y = 1$ $\longrightarrow f = u - x^2 - y^3 = 0 \rightarrow$
(u, x, y)

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial f}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{0} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x = -\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = 0 \rightarrow 1 - 2x \frac{\partial x}{\partial u} - 3y^2 \cdot \frac{1}{3} (u - x^2)^{-\frac{2}{3}} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{-2x} \left(y^2 (u - x^2)^{-\frac{2}{3}} - 1 \right)}$$

مشتق تابع را در P_0 در جهت u بدست آورید:

2) $h(x,y,z) = \cos xy + e^{yz} + \ln zx$, $P(1,0,\frac{1}{2})$, $u = i+2j+2k$

$\hookrightarrow h_x = -y\sin xy + \frac{z}{zx} = \frac{1}{x} - y\sin xy$, $h_y = ze^{yz} - x\sin xy$

$\hookrightarrow h_z = ye^{yz} + \frac{1}{z} \to D_u f = [f_x, f_y, f_z]\cdot u \to D_u h = (\frac{1}{x} - y\sin xy , ze^{yz} - x\sin xy , ye^{yz} + \frac{1}{z})$

$\to D_u h = [\frac{1}{x} - y\sin xy + 2ze^{yz} - 2x\sin xy + 2ye^{yz} + \frac{2}{z}]\cdot\frac{1}{3}$

دات ← $\frac{(1,2,2)}{3}$ ← اندازه

$P_0 \to (D_u h)_{(P_0)} = \frac{[1-0+1-0+0+4]}{3} = \boxed{\frac{6}{3}} = \boxed{2}$

در تمرین ۵ دیدیم دو جهتی را یافتیم که در آن تابع در P_0 بیشترین افزایش و کاهش را دارند، سپس مشتق تابع را

در این جهت ها بدست آورید:

2) $f(x,y,z) = \frac{x}{y} - yz \to f_x = \frac{1}{y}$, $f_y = \frac{-x}{y^2} - z$, $f_z = -y$

$P_0 = (4,1,1)$

بیشترین افزایش تابع در جهت $\vec{\nabla} f$ است * $\to \vec{u} = (1,-5,-1) \to (D_u f)_{(P_0)} = \frac{u^2}{\|u\|^2} = \boxed{\frac{27}{27}}$

بیشترین کاهش تابع در جهت $-\vec{\nabla} f$ است * $\to \vec{v} = (-1,5,1) \to (D_v f)_{(P_0)} = \frac{v^2}{\|v\|^2} = \boxed{\frac{27}{27}}$

$\boxed{D_u f = [\frac{1}{y} + \frac{5x}{y^2} + 5z + y]}$, $\|u\| \leftarrow 3\sqrt{3}$

$D_v f = [\frac{-1}{y} - \frac{5x}{y^2} - 5z - y]$, $\|v\| \leftarrow 3\sqrt{3}$

صفحه‌ی مماس و خط قائم در نقطه‌ی P_0 بر رویه‌ی مفروض را بدست آورید:

2) $x^2-xy-y^2-z=0$, $P_0(1,1,-1)$ $\rightarrow$ $\nabla f=[2x-y, -x-2y, -1]$

$\rightarrow \nabla f_{(P_0)}=[1,-3,-1] \rightarrow$ صفحه‌ی مماس : $(x-1)-3(y-1)-(z+1)=0$

$\rightarrow \boxed{x-3y-z=-1}$

خط قائم : $\boxed{x=1+t \ , y=1-3t \ , z=-1-t}$

ماکسیمم و مینیمم‌های مطلق توابع مفروض را روی دامنه‌های داده شده بیابید:

2) $f_{(x,y)}=48xy-32x^3-24y^2$, $0\leq y\leq 1$, $0\leq x\leq 1$

$\rightarrow f_x=48y-96x^2$

$\rightarrow f_y=48x-48y$ $\rightarrow$ نقاط درونی $\nabla f=0 \rightarrow (0,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

نقاط مرزی $\rightarrow (1,0)$, $(0,1)$

$\rightarrow f_{(0,0)}=0$, $\boxed{f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=12-4-6=2}$, $\boxed{f(1,0)=-32}$, $f(0,1)=-24$

Max مطلق　　　Min مطلق

تمام max های موضعی، min های موضعی، نقاط زینی مفروض را بیابید:

2) $f_{(x,y)}=x^3+3xy^2-15x+y^3-15y \rightarrow f_x=3x^2+3y^2-15$, $f_y=6xy+3y^2-15$

$\rightarrow \nabla f=0$ نقاط درونی $\rightarrow (0,\sqrt{5})$, $(0,-\sqrt{5})$, $(2,1)$, $(-2,-1)$

$f_{xx}=6x$, $f_{yy}=6x+6y$, $f_{xy}=6y$ $\rightarrow (0,\sqrt{5}) \rightarrow$ نقطه زینی

$(0,-\sqrt{5}) \rightarrow$ نقطه زینی

$(2,1) \rightarrow$ min نسبی

$(-2,-1) \rightarrow$ max نسبی

DATE / / SUBJECT:

موارد زیر را بدست آورید :

2) کمترین فاصله نقطه $(2,-1,1)$ از صفحه ی $x+y-z=2$ چقدر است

نقطه A

نقطه B را در صفحه ی مورد نظر فرض کنیم $\longrightarrow AB = \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2} \longrightarrow$ برای کمترین فاصله باید min باشد

$z = x+y-2 \longrightarrow f_{(x,y)} = (x-2)^2+(y+1)^2+\underbrace{(x+y-3)^2}_{z-1}$ باید min شود

$\longrightarrow f_x = 2(x-2)+2(x+y-3) = 4x+2y-10$

$\longrightarrow f_y = 2(y+1)+2(x+y-3) = 4y+2x-4$

$\longrightarrow f_x = f_y = 0 \longrightarrow x = \frac{8}{3},\ y = \frac{-1}{3}$

$z = \frac{1}{3}$

$\longrightarrow AB = \sqrt{(\frac{8}{3}-2)^2+(-\frac{1}{3}+1)^2+(\frac{1}{3}-1)^2} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

4) مقدار max و min تابع $f_{(x,y,z)} = x-2y+5z$ را با شرط کره $x^2+y^2+z^2=30$ بیابید.

$f_{(x)} = 1,\ f_y = -2,\ f_z = 5,\ g_x = 2x,\ g_y = 2y,\ g_z = 2z$

$\nabla f = \lambda \nabla g \rightarrow [1,-2,5] = \lambda[2x,2y,2z] \longrightarrow x = \frac{1}{2\lambda},\ y = \frac{-1}{\lambda},\ z = \frac{5}{2\lambda}$

$g_{(x,y,z)} = 0 \longrightarrow \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{25}{4\lambda^2} = 30 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$

$\lambda = \frac{1}{2} : \boxed{(x,y,z) = (1,-2,5)} \longrightarrow f(1,-2,5) = \boxed{30} \longrightarrow max$

$\lambda = \frac{-1}{2} : \boxed{(x,y,z) = (-1,2,-5)} \longrightarrow f(-1,2,-5) = \boxed{-30} \longrightarrow min$

DATE / / SUBJECT:

مقادیر زیر را بدست آورید:

6) مقادیر اکسترمم‌های تابع $f_{(x,y,z)}=xy+z^2$ را در روی دایره‌ی تقاطع صفحه $y-x=0$ و کره $x^2+y^2+z^2=4$ بیابید

$g_1 = y-x=0$, $g_2 = x^2+y^2+z^2-4=0$, $\nabla f = [y, x, 2z]$

$\to \nabla g_1 = [-1, 1]$, $\nabla g_2 = [2x, 2y, 2z] \to \nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$

$\to y = -\lambda + 2x\mu$, $x = \lambda + 2y\mu$, $2z = 2z\mu \to z=0$ یا $\mu=1$

اگر $z=0 \to x^2+y^2=4 \xrightarrow[x=y]{} 2x^2=4 \to x=\pm\sqrt{2}$, $y=\pm\sqrt{2} \to (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, 0)$ نقاط

اگر $\mu=1 \to y=-\lambda+2x$, $x=\lambda+2y \to (x+y)=2(x+y) \xrightarrow[x=y]{} x=0, y=0$

$\to z^2-4=0 \to z=\pm 2 \to$ نقاط: $(0,0,\pm 2)$

$\to f(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, 0) = \boxed{2} \to min$, $f(0,0,\pm 2) = \boxed{4} \to max$

- تابع f تعریف شده است. پیوستگی را در نقطه‌ی $(0,0)$ بررسی کنید

2) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{-x^3y^2}{x^5+y^4} & (x,y)\neq 0 \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ $\to f_{x(x,y)} = \dfrac{-y^2(3x^2y^4-2x^7)}{(x^5+y^4)^2}$

$y=mx \to f_{x(x,mx)} = m^2\dfrac{(2x-3m^4)}{(x+m^4)^2}$

$f_{(x)}$ در صفر مساوی

$(0,0)$ ندارد

نیست

$\boxed{f_x \text{ در } (0,0) \text{ پیوسته نیست}}$

مقادیر max و min و نقاط زینی توابع زیر را بیابید.

2) $f_{(x,y)} = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$

$\to f_{(x)} = 6xy - 12x \ , \ f_y = 3y^2 + 3x^2 - 12y \ , \ f_{xx} = 6y - 12 \ , \ f_{yy} = 6y - 12$

$f_{xy} = 6x$

$\to \nabla f = 0$ نقاط بحرانی: $(0,0)$ و $(0,4)$ و $(2,2)$ و $(-2,2)$ و $(-2,2)$

$\to$ نقاط زینی: $(-2,2)$ و $(2,2)$

max نسبی: $(0,0)$

min نسبی: $(0,4)$