

ریاضیات گسسته

کوئیز چهارم - استقرا

علی زیلوچی

تاریخ برگزاری ۰/۰/۰

زمان پاسخگویی: ۱۵ دقیقه

نام و نام خانوادگی:

شماره دانشجویی:

سؤال ۱.

به ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید:

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1$$

پاسخ:

حکم را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم:

پایه استقرا: برای $n = 1$ خواهیم داشت:

$$1 \times 1! = 2! - 1 = 1$$

فرض استقرا: شرط برای $n - 1$ برقرار است؛ یعنی:

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + (n-1) \times (n-1)! = n! - 1$$

اثبات حکم استقرا: دو طرف فرض را با $n \times n!$ جمع می‌کنیم:

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = n! - 1 + n \times n!$$

با مقایسه این عبارت با حکم سوال درمی‌یابیم، حکم معادل این است که ثابت کنیم:

$$n \times n! + n! - 1 = (n+1)! - 1$$

حال از $n!$ فاکتور می‌گیریم:

$$(n+1) \times n! - 1 = (n+1)! - 1$$

مشاهده می‌شود که تساوی برقرار است و چون حکم برای n برقرار است، پس برای همه اعداد طبیعی برقرار خواهد بود و حکم ثابت می‌شود.