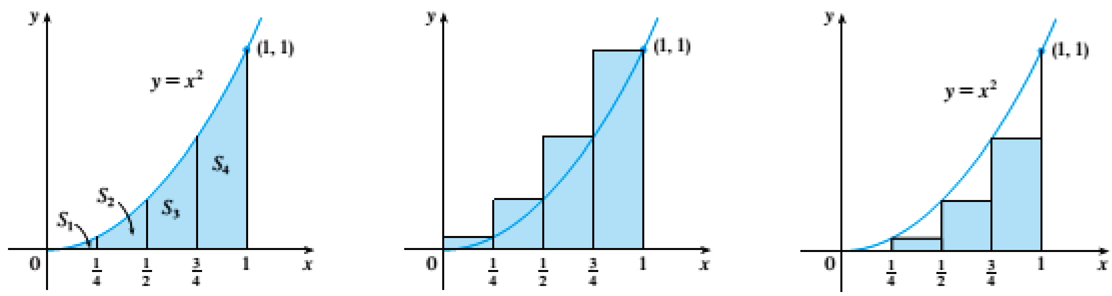
۳- انتگرال معین و نامعین

۳-۱- مقدمه (بخش ۴-۱ کتاب)

فرض کنید هدف آن باشد که مساحت زیر منحنی $y = x^2$ را در بازه $[0,1]$ بدست آوریم. از آنجا که شکل مورد نظر به یکی از فرمهای هندسی ساده مانند مثلث, مستطیل یا ذوزنقه نیست, ممکن است تصمیم بگیریم آنرا به اشکالی این چنین تفکیک کنیم.

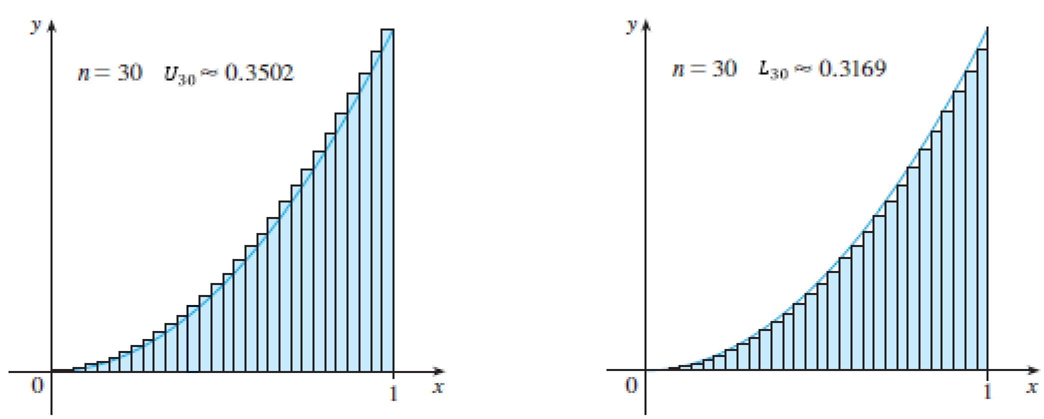
مثلا می‌توان آنرا به ۴ قطعه مساوی مطابق شکل زیر تقسیم کرده و هر قطعه را با مستطیل جایگزین کنیم. به دو روش می‌توان این مستطیل‌ها را ایجاد کرد. به عبارتی ارتفاع آنرا یا برابر ارتفاع سمت راست یا ارتفاع سمت چپ قطعات در نظر بگیریم.



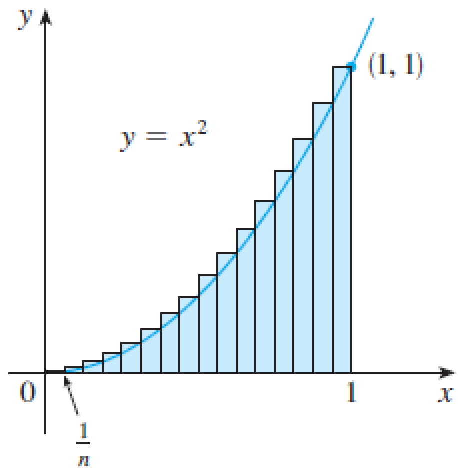
بنابراین می‌توان مساحت هر یک اشکال ساخته شده را بدست آورد. بدیهی است مساحت شکل اصلی کمتر از مساحت ۴ مستطیل شکل وسط یعنی U_4 و بیشتر از مساحت ۳ مستطیل شکل سمت راست یعنی L_4 خواهد بود. یعنی:

$$\begin{cases} U_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}(1)^2 = \frac{15}{32} = 0.46875 \\ L_4 = \frac{1}{4}(0)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0.21875 \end{cases} \rightarrow 0.21875 < S < 0.46875$$

بدیهی است با تفکیک بیشتر بازه می‌توان کرانهای بالا و پایین مناسبتری را بدست آورد. به عنوان نمونه:



با ادامه این روش این انگیزه ایجاد می‌شود که شاید بتوان همین شیوه را برای n قطعه بصورت پارامتری انجام داده و در نهایت n را به بینهایت میل دهیم. به عبارتی بازه را به جای ۴ قطعه به n قطعه مساوی تقسیم کرده و همین شیوه بالا را برای U_n یا L_n دنبال کنیم. در اینصورت مثلا برای U_n خواهیم داشت:



$$U_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$U_n = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

که در آن از فرمول $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ استفاده شده است. اگر همین شیوه را برای L_n نیز دنبال کنیم به جواب $\frac{1}{3}$ خواهیم رسید که توقع آنرا نیز داریم. چرا که با زیاد شدن n عملا U_n و L_n به هم نزدیک شده و در واقع به مساحت واقعی S نزدیک می‌شوند. بنابراین می‌توان گفت:

$$S = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{3}$$

دیده می‌شود که روش کار ساده بوده و شاید بتوان گفت تنها مشکل محاسبه $\sum_{i=1}^{n} i^2$ می‌باشد که معمولا این نوع مجموعها در کتب مختلف ریاضی بصورت جداولی ارائه شده است. یکی از روشهای اثبات این مجموعها استفاده از استقرای ریاضی است. نقطه ضعف اساسی روش استقراء نیز این است که بایستی فرمول را بدانیم و استقراء صرفا درستی آنرا نشان می‌دهد.

هر چند نحوه یافتن این مجموعها در اینجا مهم نبوده و می‌توان از جداول استفاده کرد اما برای آشنایی با روش کار در ادامه یک روش ساده برای محاسبه این مجموع ارائه می‌شود. فرض کنید این مجموع برابر M باشد. ابتدا زیگمای زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(1+i)^3 - i^3\right] = \left(2^3 \underline{-1^3}\right) + \left(3^3 - 2^3\right) + \left(4^3 - 3^3\right) + \cdots + \left(\underline{(n+1)^3} - n^3\right)$$
$$= (n+1)^3 - 1^3 = n^3 + 3n^2 + 3n$$

دیده شد که از این زیگما صرفا دو جمله باقی می‌ماند که زیر آنها خط کشیده شده است. به عبارتی مابقی جملات حذف شدند. به همین دلیل آنرا یک سری تلسکوپی می‌نامیم. میتوان سری فوق را به طریق زیر نیز محاسبه کرد:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(1+i)^3 - i^3\right] = \sum_{i=1}^{n}(3i^2 + 3i + 1) = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

اما حاصل $\sum_{i=1}^{n} i$ را می‌دانیم چرا که یک تصاعد حسابی است. بنابراین:

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 = 3M + 3\frac{n(n+1)}{2} + n = 3M + \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n$$

یعنی سری مورد نظر از دو روش محاسبه گردید. در نهایت با مساوی قرار دادن این دو, نتیجه مورد نظر بدست می‌آید:

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3M + \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n \rightarrow M = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

دیده شد با این شیوه, محاسبه $\sum_{i=1}^{n} i^2$ به $\sum_{i=1}^{n} i^1$ و نیز $\sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} i^0$ ارجاع داده شد. به همین شیوه می‌توان $\sum_{i=1}^{n} i^3$ را نیز با شروع از سری $\sum_{i=1}^{n}[(1+i)^4 - i^4]$ بدست آورد. بدیهی است همین روال را می‌توان برای توانهای بالاتر نیز بکار گرفت.

به محاسبه مساحت بر می‌گردیم. یک سوال مهم آن است که در این مثال از ابتدا می‌دانستیم که تابع صعودی بوده و لذا مستطیل‌های بنا شده بر سمت چپ یا راست هر قطعه کرانهای بالا و پایین مساحت را بدست می‌دهد. طبیعی است اگر روند تغییرات تابع نامنظم باشد بایستی مستطیلها را بر روی حداکثر و حداقل ارتفاع تابع در هر زیر بازه سوار کرد. این موضوع در بخش بعد بررسی خواهد شد. در ابتدا یک تعریف ارائه می‌شود.

مجموعه $A = \{x |\ x \in \mathbb{R}\ ;\ 1 \le x < 2\}$ را در نظر می‌گیریم. بدیهی است مینیمم این مجموعه برابر 1 بوده ولی ماکزیممی ندارد. همچنین این مجموعه دارای بیشمار کران بالا وبیشمار کران پایین است. بنا به تعریف بزرگترین کرانِ پایین را اینفیموم مجموعه می‌نامیم و با Inf نمایش می‌دهیم که در این مثال برابر 1 است, یعنی همان مقدار مینیمم. همچنین کوچکترین کرانِ بالا را نیز سوپریمم مجموعه نامیده با Sup نمایش داده می‌شود که در این مثال برابر 2 خواهد بود, هرچند 2 ماکزیمم مجموعه نیست.

بنابراین در مواردی که مجموعه‌ای ماکزیمم (یا مینیمم) نداشته باشد می‌توان بعنوان یک جایگزین مناسب از سوپریمم (یا اینفیموم) کمک گرفت. در واقع بر طبق قضیه‌ای تحت عنوان اصل تمامیت مجموعه اعداد حقیقی (اصل کمال), هر مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی که دارای کران بالایی مانند M باشد, حتما دارای یک کوچکترین کران بالا نیز خواهد بود و به همین ترتیب برای کران پایین. به عبارتی این قضیه بیان می‌کند که در محور اعداد حقیقی هیچ حفره یا سوراخی وجود ندارد.

با این مقدمه در ادامه تعریف انتگرال معین را خواهیم دید.

۳-۲- تعریف انتگرال معین (بخش ۴-۲ کتاب)

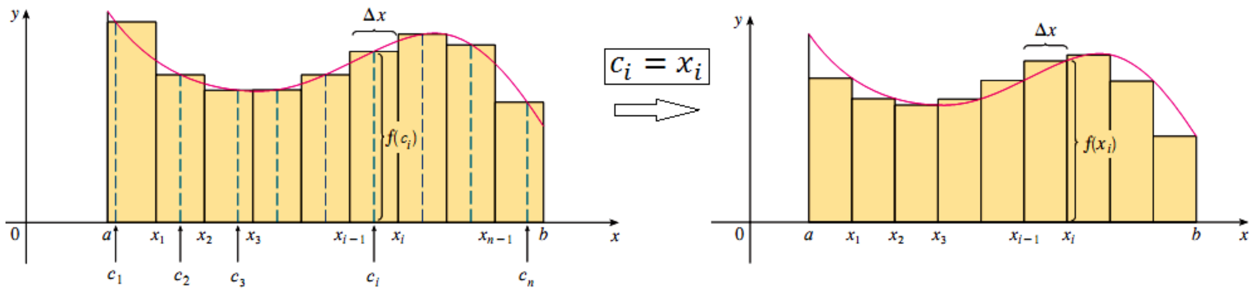
فرض کنید تابع f بر بازه $[a,b]$تعریف شده و کراندار باشد, یک افراز P از این بازه, مجموعه‌ای از نقاط زیر است:

$$\underbrace{x_0}_{a} < x_1 < x_2 < \cdots < \underbrace{x_n}_{b} \quad ; \quad I_i = [x_{i-1}, x_i] \quad ; \quad L(I_i) = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

حداکثر طول زیر بازه‌ها را با $\|P\|$ نمایش می‌دهیم, یعنی $Max\ L(I_i) = \|P\|$. حال اگر M_i و m_i به ترتیب Sup و Inf تابع در زیر بازه I_i باشد:

$$c_i \in [x_{i-1}, x_i] \rightarrow m_i \le f(c_i) \le M_i \rightarrow m_i \Delta x_i \le f(c_i)\Delta x_i \le M_i \Delta x_i$$

$$\rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i}_{L(P,f)} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i}_{S(P,f)} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i}_{U(P,f)}$$



بنا به تعریف اگر $\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f)$ مستقل از افراز P و نیز انتخاب c_i باشد, می‌گوییم f به مفهوم ریمان در بازه $[a,b]$ انتگرال پذیر بوده و می‌نویسیم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

در واقع انتگرال معین بصورت یک حد مجموع تعریف شده است. به تابع f که قرار است از آن انتگرال بگیریم, انتگرالده میگوییم.
اگر f انتگرال پذیر باشد, یعنی حاصل انتگرال مستقل از افراز P و نیز انتخاب c_i است, پس اگر زیر بازه‌ها مساوی و مثلا $c_i = x_i$ انتخاب شود (شکل بالا سمت راست), خواهیم داشت:

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \|P\| \;\; ; \;\; c_i = x_i = a + i\frac{b-a}{n} \quad ; \;\; if \;\; (\|P\| \to 0) \to (n \to \infty)$$

$$\to \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

دقت شود این نتیجه به شرطی درست است که در ابتدا ثابت کرده باشیم تابع انتگرال پذیر است. در حالت کلی زیر بازه‌ها میتوانند مساوی نبوده و نیز c_i هر نقطه دلخواهی در زیر بازه باشد. چرا که اگر قرار است تابع انتگرال‌پذیر باشد بایستی حاصل انتگرال مستقل از افراز P و نیز انتخاب c_i باشد.
ثابت می‌شود یک شرط لازم برای آنکه حاصل انتگرال مستقل از افراز P و نیز انتخاب c_i باشد, آن است که تابع f بر بازه $[a,b]$ کراندار باشد. مثلا تابع زیر در بازه $[0,1]$ انتگرال پذیر نیست, چرا که در این بازه کراندار نمی‌باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1/x & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

اما این شرط صرفا یک شرط لازم است, لذا عکس آن الزاما درست نیست. در مثال ۳-۱ خواهیم دید تابعی می‌تواند کراندار باشد اما انتگرال‌پذیر نباشد.

توضیح ۱: اصطلاحا به $L(P,f)$ و $U(P,f)$ ریمانهای پایین و بالای تابع f بر بازه $[a,b]$ تحت افراز P می‌گوییم. ثابت می‌شود شرط لازم و کافی برای انتگرال پذیری آن است که $\lim_{\|P\|\to 0} L(P,f) = \lim_{\|P\|\to 0} U(P,f)$

توضیح ۲: با توجه به شکل بالا میتوان گفت برای یک تابع مثبت, $U(P,f)$ و $L(P,f)$ به ترتیب کرانهای بالایی و پایینی مساحت زیر منحنی در بازه $[a,b]$ می‌باشند. لذا اگر تابع انتگرال‌پذیر باشد, یعنی ایندو برابر بوده و برابر سطح زیر منحنی در این بازه است.

توضیح ۳: در حالتی که زیر بازه‌ها مساوی و $c_i = x_{i-1}$ انتخاب شود, با روشی مشابه آنچه در بالا دیده شد در نهایت خواهیم دید فرمول تفاوتی نکرده و صرفا حدود زیگما از 0 تا $n-1$ خواهد شد. با توجه به شکل نیز می‌توان گفت $c_i = x_i$ مستطیلهایی با ارتفاع $f(x_1)$ تا $f(x_n)$ ایجاد میکند, در حالیکه ارتفاع مستطیلهای نظیر $c_i = x_{i-1}$ از $f(x_0)$ تا $f(x_{n-1})$ خواهند بود.

سه سوال اصلی:

۱- درجه صورت دو حد طرفین مساوی است, به عبارتی تابع انتگرال پذیر است. (مثالهای ۳-۱ و ۳-۲)

۲- با محاسبه حد مجموع, انتگرال معین را بیابیم. (مثالهای ۳-۳ تا ۳-۵)

۳- برعکس سوال قبل, با داشتن انتگرال معین (به روش بخش ۳-۴) حاصل حد مجموع محاسبه شود. (بخش۳-۷)

قبل از ورود به مثالها, بعنوان یک نکته مهم توجه شود که در این بخش انتگرال معین با استفاده از تعریف آن بررسی شده و حرفی از مشتق نخواهد بود. در بخش ۳-۳ انتگرال نامعین را کاملا مستقل از انتگرال معین تعریف خواهیم کرد که بحث مشتق در آن مطرح می‌شود. در نهایت در بخش ۳-۴ ارتباط این دو انتگرال را که به ظاهر کاملا مستقل از هم تعریف شده‌اند را خواهیم دید.

مثال ۳-۱ نشان دهید تابع $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ (تابع دیریکله) در هیچ بازه $[a,b]$ انتگرال پذیر نیست.

$$\underbrace{x_0}_{a}<x_1<x_2<\cdots<\underbrace{x_n}_{b}\quad ;\quad I_i=[x_{i-1},x_i]\quad ;\quad L(I_i)=x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$$

$$\forall\ c_i\in I_i\to m_i=0\ ; M_i=1\to L(P,f)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i=0\quad ;\quad U(P,f)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i=b-a$$

که اگر $\|P\|\to 0$, دو مجموع بالا تفاوتی نخواهند کرد زیرا به $\|P\|$ بستگی ندارند. از آنجا که این دو با یکدیگر برابر نیستند, لذا تابع انتگرال‌پذیر نیست. ■

مثال ۳-۲ نشان دهید تابع زیر در بازه $[0,1]$ انتگرال پذیر است.

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=0.5\\ 0 & x\neq 0.5\end{cases}$$

حل فرض می‌کنیم 0.5 متعلق به زیر بازه k ام باشد, یعنی $0.5\in I_k$. در اینصورت:

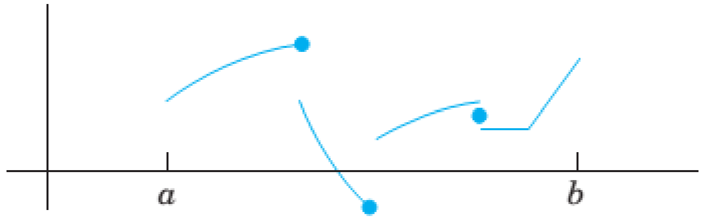
$$\underbrace{x_0}_{0}<x_1<x_2<\cdots<\underbrace{x_n}_{1}\quad ;\quad I_i=[x_{i-1},x_i]\quad ;\quad L(I_i)=x_i-x_{i-1}=\Delta x_i\quad ;\quad 0.5\in I_k$$

$$m_i=0\ ;\ M_i=\begin{cases}1 & i=k\\ 0 & i\neq k\end{cases}\to L(P,f)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i=0\quad ;\quad U(P,f)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i=\Delta x_k\leq\|P\|$$

چون $\|P\|\to 0$, لذا دو ریمان بالا و پایین یکسان بوده و تابع انتگرال‌پذیر است. اگر تصادفا $x_k=0.5$ (یعنی 0.5 متعلق به دو زیر بازه k و $k+1$ ام باشد), مشابه بالا خواهیم داشت $\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i\leq 2\|P\|$ و لذا باز هم دو ریمان بالا و پایین یکسان میباشند. بدیهی است اگر تابع در چند نقطه دیگر این بازه نیز برابر مقدار مشخصی تعریف شود باز هم انتگرال‌پذیر است. ■

با توجه به مثال قبل می‌توان شرط دیگری را برای انتگرال‌پذیر بودن بصورت زیر بیان کرد.

شرط ساده‌تر برای انتگرال‌پذیری: اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ تعریف شده و کراندار بوده و تعداد نقاط ناپیوستگی آن شمارش‌پذیر باشد, میتوان ثابت کرد تابع f در بازه فوق انتگرال‌پذیر است. به تعبیر دیگر اگر تابع, تکه‌ای پیوسته باشد, انتگرال پذیر است. بنا به تعریف تابعی را در بازه‌ای تکه‌ای پیوسته گوییم که اگر بازه را به تعداد متناهی زیر بازه بشکنیم, تابع در تمام این زیر بازه ها پیوسته بوده و در مرز این زیر بازه ها نیز مقدار تابع متناهی باشد (مانند شکل).



یک نکته مهم آنکه چنانچه در نقاط ناپیوستگی تابع دارای یک مقدار متناهی باشد نیز حاصل انتگرال معین (یا به تعبیر دیگر آن مساحت زیر منحنی) تفاوتی نمی‌کند, چرا که وجود یک نقطه عملا هیچ سطح اضافی به سطح موجود اضافه نخواهد کرد. به همین ترتیب اگر از یک تابع پیوسته نیز یک یا چند نقطه را حذف کنیم انتگرال معین تغییری نمی‌کند. درست معادل آنکه از سطح موجود یک خط عمودی را حذف کنیم.

* لازم بذکر است شرط لازم و کافی انتگرال پذیری تابع f بر بازه $[a,b]$ به مفهوم ریمان آن است که تابع کراندار و تعداد نقاط ناپیوستگی آن دارای اندازه لِبگ صفر باشد.

مثال ۳-۳ مطلوب است محاسبه انتگرالهای $\int_a^b 1\,dx$, $\int_0^1 (1-x^2)\,dx$ و $\int_1^3 e^x\,dx$

حل اولا از قضیه بالا مشخص است که هر سه انتگرال وجود دارند. دو انتخاب بایستی صورت بگیرد, یکی تقسیم بندی زیر بازه‌ها و دیگری انتخاب c_i . مثلا بازه را بصورت مساوی افراز کرده و $c_i = x_i$ انتخاب می‌کنیم. در اینصورت:

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \|P\| \;\; ; \;\; c_i = x_i = a + i\frac{b-a}{n} \quad ; \;\; if \;\; (\|P\| \to 0) \to (n \to \infty)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

حال به محاسبه انتگرالها می‌پردازیم:

$$a)\;\; f(x) = 1 \to \int_a^b 1\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 = b-a$$

$$b)\;\; f(x) = 1 - x^2 \to \int_0^1 (1-x^2)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i^2 = n - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$\to \int_0^1 (1-x^2)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\right) = \frac{2}{3} \;\; \blacksquare$$

$$c)\;\; f(x) = e^x \to \int_1^3 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(1 + i\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{1+i\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2e}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{i\frac{2}{n}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} r^i = \frac{r(r^n-1)}{r-1} \to \sum_{i=1}^{n} e^{i\frac{2}{n}} = \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{2}{n}}\right)^i = \frac{e^{\frac{2}{n}}(e^2-1)}{e^{\frac{2}{n}}-1}$$

$$\to \int_1^3 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2e}{n} \frac{e^{\frac{2}{n}}(e^2-1)}{e^{\frac{2}{n}}-1} \xrightarrow{t=\frac{2}{n}} e(e^2-1) \underbrace{\lim_{t\to 0} e^t}_{1} \underbrace{\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{e^t-1}\right)}_{1} = e^3 - e$$

اولین حد که مبهم نمی‌باشد و دومی نیز یا با هوپیتال قابل محاسبه است و یا اینکه در مثال ۲-۸ قسمت ۲ دیده شد که:

$$\lim_{x\to 0} \frac{k^x-1}{x} = Lnk \to \lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$$

دیده میشود که معمولا در این روشِ محاسبه انتگرال, نیاز به دانستن تعدادی از مجموعهای بر حسب n هستیم. ■

نکته مهم: توجه شود حاصل $\int_a^b f(x)\,dx$ عملا به متغیر x بستگی نداشته و فقط تابعی از a , b و f خواهد بود. تنها میدانیم که متغیر تابع یعنی x در بازه $a \le x \le b$ می‌باشد. بنابراین اگر انتگرالها بصورت $\int_a^b f(t)\,dt$ نیز معرفی شوند نتیجه فرقی نخواهد کرد.

مثال ۳-۴ الف: ابتدا نشان دهید:

$$\sum_{i=1}^{n} sin(i\alpha) = \frac{sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$$

راهنمایی: عبارت سمت چپ را در $2sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ضرب کرده و سپس از فرمول تبدیل ضرب به جمع (رابطه زیر) استفاده کنید.

$$2\,sin\,a\,sin\,b = cos(a-b) - cos(a+b)$$

ب: با استفاده از قسمت قبل مطلوب است محاسبه $\int_0^\pi sin5x\,dx$.

حل الف: با ضرب عبارت سمت چپ در $2sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ و سپس فرمول تبدیل ضرب به جمع خواهیم داشت:

$$\to \sum_{i=1}^{n} 2sin(i\alpha)sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(cos\left(i-\frac{1}{2}\right)\alpha - cos\left(i+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)$$

که در واقع یک سری تلسکوپی است که جمله دوم نظیر $i=k$ با جمله اول نظیر $i=k+1$ حذف میشود. یعنی:

$$= \left(cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right)\right) + \left(cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right) - cos\left(\frac{5\alpha}{2}\right)\right) + \cdots + \left(cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha - cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)$$

$$\to \sum_{i=1}^{n} 2sin(i\alpha)sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha = 2sin\frac{(n+1)\alpha}{2} sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$$

که با تقسیم طرفین بر $2sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ حکم مورد نظر بدست می‌آید. لازم به ذکر است که یک روش دیگر اثبات این رابطه در فصل ۷ (اعداد مختلط) دیده خواهد شد.

ب: اولا از قضیه بالا مشخص است که انتگرال وجود دارد. دو انتخاب بایستی صورت بگیرد, یکی تقسیم بندی زیر بازه‌ها و دیگری انتخاب c_i . مثلا بازه را بصورت مساوی افراز کرده و $c_i = x_i$ انتخاب می‌کنیم. در اینصورت:

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \|P\| \;\; ; \;\; c_i = x_i = a + i\frac{b-a}{n} \quad ; \;\; if \;\; (\|P\| \to 0) \to (n \to \infty)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

$$f(x) = sin5x \to \int_0^{\pi} sin5x\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(0 + i\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} sin\left(\frac{5\pi i}{n}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} sin(i\alpha) = \frac{sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right) \to \sum_{i=1}^{n} sin\left(\frac{5\pi i}{n}\right) = \frac{sin\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{5\pi}{2n}\right)}{sin\left(\frac{5\pi}{2n}\right)} sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = cot\left(\frac{5\pi}{2n}\right)$$

$$\to \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} sin\left(\frac{5\pi i}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}cot\left(\frac{5\pi}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n\times tan\left(\frac{5\pi}{2n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n\frac{5\pi}{2n}} = \frac{2}{5} \;\; \blacksquare$$

در اینجا نیز دیده می‌شود که برای محاسبه انتگرال, بایستی فرمول محاسبه مجموع سینوسها (قسمت الف) در دست باشد. ■

مثال ۳-۵ انتگرالهای زیر را با در نظر گرفتن شرایط داده شده بدست آورید.

الف: انتگرال $\int_1^2 x^{-2}\,dx$. بازه را بصورت مساوی افراز کرده و $c_i = \sqrt{x_{i-1}x_i}$ انتخاب شود.

ب: انتگرال $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$. بازه را بصورتی افراز کنید که نقاط افراز تشکیل تصاعد هندسی داده و $c_i = x_i$ لحاظ شود.

حل الف: اولا از قضیه مشخص است که انتگرال وجود دارد. اگر بازه را بصورت مساوی افراز کرده و $c_i = \sqrt{x_{i-1}x_i}$ انتخاب شود:

$$\Delta x_i = \frac{1}{n} = \|P\| \;\; ; \;\; x_i = a + i\frac{b-a}{n} = 1 + \frac{i}{n} \quad ; \;\; if \;\; (\|P\| \to 0) \to (n \to \infty)$$

$$c_i = \sqrt{x_{i-1}x_i} = \sqrt{\left(1 + \frac{i-1}{n}\right)\left(1 + \frac{i}{n}\right)}$$

$$f(x) = x^{-2} \to \int_1^2 x^{-2}\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1 + \frac{i-1}{n}\right)\left(1 + \frac{i}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(n+i-1)(n+i)} = \lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n+i-1} - \frac{1}{n+i}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}\ \blacksquare$$

ب: از قضیه مشخص است که انتگرال وجود دارد. برای آنکه با افرازهای مختلف آشنا شویم در اینجا خواسته شده است که بازه را بصورتی افراز کنیم که نقاط افراز تشکیل تصاعد هندسی داده باشند و c_i نیز برابر x_i انتخاب شود.

$$\underbrace{x_0}_{1}<\underbrace{x_1}_{q}<\underbrace{x_2}_{q^2}<\cdots<\underbrace{x_n}_{2=q^n}\qquad;\qquad q=2^{\frac{1}{n}}$$

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=q^i-q^{i-1}=q^{i-1}(q-1)\qquad;\qquad c_i=x_i=q^i$$

$$q>1\rightarrow \|P\|=q^{n-1}(q-1)=2^{\frac{n-1}{n}}\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)\quad;\quad if\ \ (\|P\|\rightarrow 0)\ \rightarrow (n\rightarrow\infty)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} q^{i-1}(q-1)f\left(q^i\right)$$

$$f(x)=\frac{1}{x}\rightarrow\int_1^2\frac{1}{x}dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{q^{i-1}(q-1)}{q^i}=\lim_{n\to\infty}\frac{q-1}{q}\sum_{i=1}^{n}1=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)}{2^{\frac{1}{n}}}$$

$$\xrightarrow{t=\frac{1}{n}}\int_1^2\frac{1}{x}dx=\lim_{t\to 0}\frac{2^t-1}{t2^t}=\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{1}{2^t}}_{1}\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{2^t-1}{t}}_{Ln2}=Ln2\ \ \blacksquare$$

در پایان این بخش رابطه‌ای که در شروع درس برای محاسبه انتگرال معین ارائه شد را تعمیم می‌دهیم. دیده شد که برای محاسبه انتگرال معینِ یک تابع انتگرال‌پذیر, یک انتخاب ساده آن است که زیر بازه‌ها مساوی و $c_i=x_i$ انتخاب شوند که به رابطه زیر رسیدیم:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$$

از آنجا که عنوان شد c_i میتواند هر نقطه دلخواهی در زیر بازه $I_i=[x_{i-1},x_i]$ باشد, لذا می‌توان آنرا بر حسب پارامتر α بصورت زیر بیان کرد که در آن $0\le\alpha\le 1$ است:

$$c_i=x_i-\alpha\frac{b-a}{n}=a+i\frac{b-a}{n}-\alpha\frac{b-a}{n}=a+(i-\alpha)\frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+(i-\alpha)\frac{b-a}{n}\right)\quad;\quad 0\le\alpha\le 1$$

که در حالت خاص $\alpha=0$ یا $(c_i=x_i)$ به همان رابطه قبل و برای $\alpha=1$ یا $(c_i=x_{i-1})$ به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+(i-1)\frac{b-a}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$$

که همان رابطه قبل است با این تفاوت که حدود از 0 تا $n-1$ تغییر یافته است و در توضیح ۳ ابتدای بخش ۳-۲ نیز دیده شد.

اما فراموش نشود که برای انتگرال‌پذیر بودن, بایستی حاصل انتگرال, مستقل از افراز P و نیز انتخاب c_i باشد. لذا هر یک از فرمولهای بالا به شرطی معتبر است که ابتدا ثابت کرده باشیم تابع انتگرال‌پذیر است.

حالت خاص: اگر بازه انتگرال $[0,1]$ باشد:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-\alpha}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad ; \quad 0\le\alpha\le 1$$

در واقع اولین زیگما برای هر نقطه دلخواه $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, دومین زیگما برای $c_i = x_i$ و سومی مربوط به $c_i = x_{i-1}$ می‌باشد. در بخش ۳-۷ از این رابطه استفاده خواهیم کرد.

۳-۲-۱- چند خاصیت انتگرال معین

در اینجا تعدادی از خواص انتگرال معین ارائه می‌شود. درستی اکثر این قضایا را می‌توان با تعبیر هندسی انتگرال معین که همان سطح زیر منحنی است, بسادگی نشان داد. اما از آنجا که سطح زیر منحنی در واقع یک تعبیر از انتگرال معین است, بهتر است اثباتها با استدلال ریاضی که همان نوشتن تعریف انتگرال معین بصورت حد مجموع است, انجام شود.

۱- اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد, آنگاه:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \xrightarrow{for\ b=a} \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

یک دلیل درستی این رابطه آن است که با توجه به تعریف انتگرال معین, چنانچه حدود انتگرال جابجا شود عبارت Δx_i به $-\Delta x_i$ تغییر می‌یابد. اگرچه گاهی اوقات رابطه بالا صرفا بعنوان یک تعریف پذیرفته می‌شود.

۲- اگر توابع f و g بر بازه $[a,b]$ انتگرال پذیر بوده و k عددی ثابت باشد, آنگاه توابع $f\pm g$, kf, $|f|$ و fg در بازه مزبور انتگرال پذیر بوده و خواهیم داشت:

$$a)\ \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

اثبات این رابطه در حالت کلی برای زمانی که علامت $f(x)$ ثابت نبوده و یا c در بازه (a,b) نباشد ساده نیست, هرچند تعبیر هندسی آن با توجه به مفهوم مساحت کاملا بدیهی است. مثلا:

$$\int_1^{n+1} Ln[x]\,dx = \int_1^2 Ln1\,dx + \int_2^3 Ln2\,dx + \cdots + \int_n^{n+1} Lnn\,dx = Ln(n!)$$

$$\int_1^{n+1} Ln[x]\,dx = Ln1\underbrace{\int_1^2 dx}_{1} + Ln2\underbrace{\int_2^3 dx}_{1} + \cdots + Lnn\underbrace{\int_n^{n+1} dx}_{1} = Ln(n!)$$

دقت شود که کران بالای 2 در اولین انتگرال در واقع 2^- است. اما از آنجا که وجود یا حذف یک نقطه تاثیری در جواب انتگرال معین ندارد به همان صورت 2 باقی مانده است. درست مشابه اینکه از یک سطح یک خط را بیرون بکشیم که تاثیری در مساحت آن ندارد.

$$b)\ \int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \ \ \rightarrow \int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

اثبات این رابطه به سادگی با نوشتن تعریف انتگرال معین برای توابع $f(x) \pm g(x)$ بدست می‌آید.

$$c)\ \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

اثبات این رابطه بصورت زیر است:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |f(c_i)\Delta x_i| = \sum_{i=1}^{n} |f(c_i)|\Delta x_i \xrightarrow{\|P\|\to 0} \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

۳- اگر توابع f و g بر بازه $[a,b]$ انتگرال پذیر باشند:

$$if \quad \forall x \in [a,b]\ ;\ f(x) \ge g(x) \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

اثبات این مورد نیز ساده است. چرا که برای هر افراز P خواهیم داشت $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \ge \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\Delta x_i$. در نتیجه اگر حد دو طرف را وقتی $\|P\| \to 0$ بدست آوریم, نامساوی مورد نظر ثابت می‌شود.

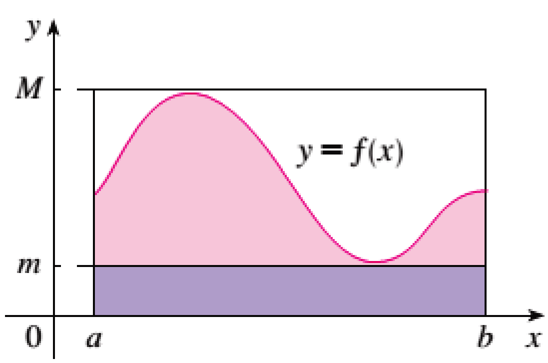
حالت خاص: اگر تابع f بر بازه فوق نامنفی باشد ($f(x) \ge 0$) خواهیم داشت $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

توضیح: به کمک خاصیت ۳ می‌توان خاصیت ۲ (قسمت c) را به طریق زیر نیز اثبات نمود:

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \rightarrow -\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

۴- اگر M و m به ترتیب Sup و Inf تابع انتگرال پذیر f در بازه $[a,b]$ باشند, با استفاده از خاصیت قبل میتوان یک کران بالا و پایین برای $\int_a^b f(x)\,dx$ بصورت زیر ارائه داد:



$$m \le f(x) \le M$$

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$$\left(\int_a^b 1\,dx = b-a\right)$$

۳-۲-۲- قضیه مقدار میانگین در انتگرال معین

قضیه: اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد, در اینصورت:

$$\exists\, c \in (a,b) \ :\ \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

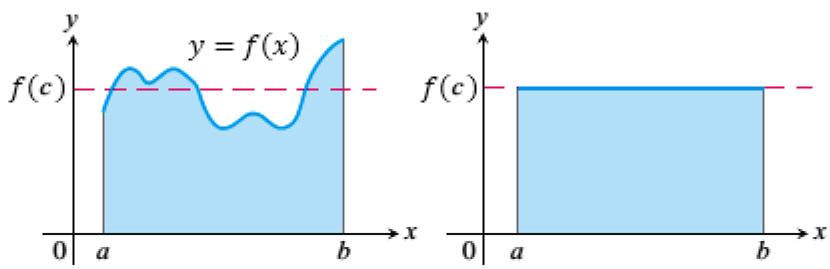
اثبات: در قسمت قبل و در خاصیت ۴ دیده شد که:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \to \underbrace{Min(f)}_{m} \le \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}}_{A} \le \underbrace{Max(f)}_{M}$$

بنابراین A مقداری بین حداقل و حداکثر تابع می‌باشد. با توجه به قضیه مقدار میانی برای توابع پیوسته:

$$\exists\, c \in (a,b) \ :\ f(c) = A = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

توضیح: حاصل $f(c)$ را مقدار متوسط تابع f در بازه $[a,b]$ نامیده و گاهی آنرا با f_{ave} نمایش میدهیم. در واقع مقدار $f(c)$ ارتفاع مستطیلی است که هم مساحت با سطح زیر منحنی در این بازه است.



قضیه مقدار میانگین وزندار: اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته بوده و g در این بازه انتگرال‌پذیر بوده و تغییر علامت ندهد, آنگاه:

$$\exists\, c \in (a,b) \ :\ \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

اثبات: از آنجا که g در این بازه تغییر علامت نمی‌دهد, پس در این بازه یا همیشه $g \ge 0$ است یا همیشه $g \le 0$. اگر فرض کنیم $g \ge 0$ باشد, در نتیجه:

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x) \to m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx$$

که در آن اگر M و m به ترتیب Max و Min تابع انتگرال پذیر f در بازه $[a,b]$ میباشد.

بدیهی است اگر $g(x) = 0$ باشد, قضیه به ازای هر c برقرار است. لذا برای $g(x) > 0$ از آنجا که $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ خواهد شد, با تقسیم طرفین رابطه بالا به این انتگرال و استفاده از قضیه مقدار میانی برای توابع پیوسته (مشابه اثبات قضیه قبل) حکم ثابت میشود. اگر $g \le 0$ باشد, کافی است همین استدلال را برای تابع $-g$ بکار بگیریم.

توضیح ۱: در حالت خاص که $g(x) = 1$ باشد, این قضیه به قضیه مقدار میانگین منجر خواهد شد.

توضیح ۲: در بخش ۳-۵ خواهیم دید از خاصیتهای ذکر شده در بخش ۳-۲-۱ و نیز قضایای مقدار میانگین در بخش ۳-۲-۲ میتوان برای تخمین(برآورد) تعدادی از انتگرالها استفاده کرد.

تمرینات بخش ۳-۲ تمرینات ۲۴ و ۶۹ از بخش ۴-۲ کتاب

۱- نشان دهید در بازه $[0,1]$, تابع $f(x)$ انتگرال‌پذیر نبوده و تابع $g(x)$ در این بازه انتگرال‌پذیر می‌باشد.

$$f(x) = \begin{cases} [sin(1/x)] & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} 1/x - [1/x] & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

۲- نشان دهید $\int_a^b x^2\, dx = \frac{b^3-a^3}{3}$

۳- فرض کنید f تابعی پیوسته بوده و $\int_1^3 f(x)\, dx = 8$ باشد. نشان دهید f حداقل یکبار در بازه $[1,3]$ برابر 4 خواهد بود.

۳-۳- انتگرال نامعین

اگر f بر بازه I تعریف شده باشد, F را یک تابع اولیه یا پادمشتق f بر I می‌نامیم هرگاه:

$$\forall\, x \in I \;\; : \;\; F'(x) = f(x)$$

به عنوان نمونه تابع $F(x) = sin\, x$ یک پادمشتق $f(x) = cos\, x$ می‌باشد چرا که $(sin\, x)' = cos\, x$. سوال این است که آیا می‌توان برای آن پادمشتق دیگری بدست آورد؟ ممکن است بگوییم بله $F(x) = sin\, x + C$. باز هم سوال مطرح است که آیا به جز این, پاد مشتق دیگری ندارد؟ به عنوان یک مثال دیگر دو تابع زیر را در نظر گرفته و مشتق هر دو را بدست می‌آوریم:

$$(tan^{-1}x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad ; \quad \left(\frac{1}{2} tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right)' = \frac{1}{1+x^2}$$

دیده می‌شود که برای $\frac{1}{1+x^2}$ دو پاد مشتق می‌توان متصور شد (و شاید هم بیشتر). قضیه زیر تکلیف این موضوع را روشن می‌کند.

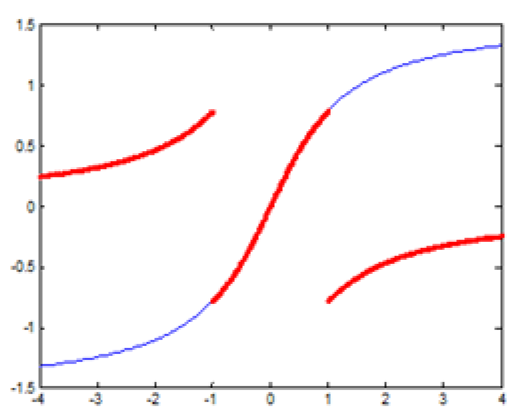
قضیه: اگر دو تابع F و G دو تابع اولیه f بر I باشند, در اینصورت: $F(x) - G(x) = C$.

$$\underline{Proof} \;\; : \; H(x) = F(x) - G(x) \to H'(x) = f - f = 0 \to H(x) = C$$

بنابراین همه پادمشتقهای $f(x) = cos\, x$ بصورت $F(x) = sin\, x + C$ خواهند بود. به عبارتی فقط کافی است یک پاد مشتق بدست آورده و با جمع آن با عدد ثابت C , همه پادمشتقها بدست می‌آید.

در ارتباط با پادمشتق $\frac{1}{1+x^2}$ نیز همین موضوع صادق است. در تمرین ۶ بخش ۲-۴ از شما خواسته شده بود که نشان دهید برای دو تابعی که در بالا مشتق آنها $\frac{1}{1+x^2}$ بدست آمد, اختلاف آنها در بازه‌های مختلف مقداری ثابت است, که بیانگر درستی قضیه بالا می‌باشد. در واقع:

$$\frac{1}{2} tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} - tan^{-1}x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x < -1 \\ 0 & -1 < x < 1 \\ -\frac{\pi}{2} & x > 1 \end{cases}$$



تعریف: همه توابع اولیه f را انتگرال نامعین f نامیده و با نماد $\int f(x)\,dx$ نمایش می‌دهیم. بنابراین:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

دقت شود فعلا نماد $\int$ هیچ ارتباطی با نماد $\int_a^b$ در بخش قبل ندارد.

با توجه به تعریف انتگرال نامعین, می‌توان درستی هر یک از روابط زیر را با مشتق‌گیری از جواب ارائه شده بررسی کرد:

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \neq -1) \quad ; \quad \int \frac{1}{x}dx = Ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = tan^{-1}x + C \quad ; \quad \int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int cos\,ax\,dx = \frac{1}{a}sin\,ax + C \quad ; \quad \int sin\,ax\,dx = -\frac{1}{a}cos\,ax + C$$

به تعبیر دیگری می‌توان گفت انتگرال نامعین, عکس دیفرانسیل‌گیری است. به عبارتی:

$$y' = f(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \rightarrow dy = f(x)dx \rightarrow \underbrace{\int dy}_{y} = \int f(x)dx$$

در واقع انتگرال, دیفرانسیل را حذف می‌کند. بعنوان یک مثال:

$$y' = cos\,x \rightarrow \frac{dy}{dx} = cos\,x \rightarrow dy = cos\,x\,dx \rightarrow \underbrace{\int dy}_{y} = \int cos\,x\,dx$$

که معمولا مراحل میانی نوشته نشده و صرفا از $y' = cos\,x$ رابطه $y = \int cos\,x\,dx$ را نتیجه می‌گیریم.

هدف اصلی فصل ۴ در واقع محاسبه تابع اولیه برای یک تابع دلخواه $f(x)$ خواهد بود. به عبارتی به دنبال تابعی هستیم که مشتق آن برابر $f(x)$ باشد. خواهیم دید بر خلاف مشتق این کار همواره ساده نخواهد بود, چرا که یافتن تابع اولیه, قانون مشخصی ندارد. روشهایی بیان خواهد شد که بتوان برخی توابع اولیه را بدست آورد. یعنی تا جایی که بتوانیم دسته‌بندیهایی ارائه می‌دهیم که به کمک آن بتوان تعدادی از توابع اولیه را بدست آورد. اما در حالت کلی محاسبه تابع اولیه ممکن است یا بسیار مشکل و طولانی باشد, یا نیاز به خلاقیتهای خاص داشته باشد و یا شاید اصولا تابع اولیه‌ای که بر حسب توابع مقدماتی قابل بیان شدن باشد, نداشته باشد. به هر حال بحث انتگرال‌گیری نامعین اگر چه به تعبیری عکس مشتق‌گیری است, اما به جز برای برخی مسائل, ممکن است در کل کار ساده‌ای نباشد.

۳-۴- رابطه انتگرال معین و نامعین (بخشهای ۴-۳ و ۴-۴ کتاب)

در این بخش مهمترین بحث مربوط به انتگرالها عنوان خواهد شد. در اینجا خواهیم دید که اگر چه بخشهای ۳-۲ و بخش ۳-۳ بطور مستقل از هم تعریف شدند, اما به یکدیگر مربوطند. دو قضیه اساسی ارتباط ایندو را به یکدیگر مشخص خواهد کرد و به کمک آن از انتگرال نامعین(بخش ۳-۳) برای محاسبه انتگرال معین(بخش ۳-۲) استفاده خواهیم کرد.

عنوان شد که حاصل $\int_a^b f(x)\,dx$ عملا به متغیر x بستگی نداشته و فقط تابعی از a , b و f خواهد بود و فقط می‌دانیم متغیر تابع یعنی x در بازه $a \leq x \leq b$ می‌باشد. بنابراین اگر انتگرال بصورت $\int_a^b f(t)\,dt$ نیز معرفی شود نتیجه فرقی نخواهد کرد.

۳-۴-۱- قضیه اول حساب دیفرانسیل و انتگرال

قضیه: اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد, در اینصورت تابع G با تعریف:

$$G(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad ; \quad a\le x\le b$$

روی این بازه پیوسته و در (a,b) مشتق پذیر بوده و $G'(x)=f(x)$. یعنی G تابع اولیه f است.

اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم که $G'(x)$ موجود است, در نتیجه بنا به قضیه $G(x)$ پیوسته خواهد شد. برای محاسبه $G'(x)$ ابتدا عبارت $G(x+h)-G(x)$ را بدست آورده و سپس با توجه به قضیه مقدار میانگین در انتگرال خواهیم داشت:

$$G(x+h)-G(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt=f(c)h \quad ; \quad \begin{cases} x\le c\le x+h & h>0 \\ x+h\le c\le x & h<0 \end{cases}$$

$$x\in[a,b]\rightarrow G'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}=\lim_{h\to 0}f(c)=f(x)$$

که آخرین قسمت اثبات, از پیوسته بودن f نتیجه شده است. اگر $x=a$ آنگاه $G'(x)$ بیانگر مشتق راست بوده و با $h\to 0^+$ به دست می‌آید. (و به همین ترتیب برای $x=b$) . در نهایت نیز از آنجا که $G'(x)$ وجود دارد, لذا $G(x)$ پیوسته خواهد بود.

توضیح ۱: روش دوم برای اثبات پیوستگی $G(x)$ آن است که بگوییم اگر x یک نقطه داخلی بازه $[a,b]$ باشد, آنگاه:

$$\lim_{h\to 0}[G(x+h)-G(x)]=\lim_{h\to 0}hf(c)=0\rightarrow \lim_{h\to 0}G(x+h)=\lim_{h\to 0}G(x)=G(x)$$

در نتیجه $G(x)$ پیوسته است. همچنین اگر $x=a$ یا $x=b$, به ترتیب با استفاده از حدود چپ و راست می‌توان نشان داد که $G(x)$ در این دو نقطه نیز پیوسته است.

توضیح ۲: دقت شود همانگونه که قبلا عنوان شد برای داشتن انتگرال معین, پیوستگی تابع الزامی نیست. زیرا اگر تعداد نقاط ناپیوستگی f شمارش‌پذیر باشد آنگاه:

$$\int_a^x f(t)\,dt=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i$$

لذا مطابق این قضیه اگر تابع f بر بازه $[a,b]$, پیوسته نباشد, تابع $G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ وجود دارد, اما الزاما در رابطه $G'(x)=f(x)$ صدق نمی‌کند.

نتیجه مهم قضیه اول: این قضیه انتگرال معین تابع $f(x)$ را (سمت راست) به پادمشتق این تابع (یعنی $G(x)$ در سمت چپ) ارتباط میدهد. به عبارتی بیان این مطلب است که اگر چه بخش ۳-۲ و بخش ۳-۳ بطور مستقل از هم تعریف شدند اما به یکدیگر مربوطند. از آنجا که معمولا کران بالای انتگرال معین هم یک عدد است, فقط باید ببینیم اگر این کران یک عدد باشد نتیجه چه خواهد شد که در قضیه دوم به آن می‌پردازیم.

۳-۴-۲- قضیه دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال(دستور لایب‌نیتز)

قضیه: اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد, در اینصورت اگر F یک تابع اولیه برای f باشد:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

اثبات: تابع G را مشابه قضیه اول تعریف می‌کنیم. از آنجا که هم F و هم G تابع اولیه f هستند, پس اختلاف آنها ثابت است. لذا:

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (a \le x \le b) \quad ; \quad F(x) - G(x) = C \to F(b) - G(b) = F(a) - G(a)$$

$$\to F(b) - \int_a^b f(t)\,dt = F(a) - \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{0} \to \boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)}$$

بعنوان یک مثال ساده $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ که در قسمت ب از مثال ۳-۵ با استفاده از تعریف انتگرال معین بدست آمد, با این روش برابر است با:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \underbrace{(Ln|x| + C)}_{F(x)}\Big|_1^2 = \underbrace{(Ln|2| + C)}_{F(2)} - \underbrace{(Ln|1| + C)}_{F(1)} = Ln2$$

که دیده میشود بسیار ساده‌تر از قبل بدست آمد. دقت شود انتگرال معین بصورت $Ln|x| + C$ می‌باشد و از آنجا که بایستی $F(b) - F(a)$ محاسبه شود, ثابت C حذف شده و لذا نیازی به وارد کردن ثابت (وقتی قرار است انتگرال معین گرفته شود) نمی‌باشد.

توضیح ۱: دیده شد که شرط استفاده از قضیه حساب دیفرانسیل و انتگرال آن است که تابع f بر بازه مشخص $[a,b]$ کراندار و پیوسته باشد. در فصل هشتم قرار است انتگرالهایی را بررسی کنیم که یا بازه آن در یک یا دو سمت به بینهایت برود و یا آنکه تابع f بربازه مورد نظر کراندار نبوده و به بینهایت برود. این انتگرالها, غیرعادی(منفرد) نامیده میشوند.

توضیح ۲: به هیچ عنوان نباید تابع اولیه داشتن را با انتگرال‌پذیری یکی دانست. مثلا تابع $f(x) = [x]$ بر هر بازه مشخص $[a,b]$ دارای انتگرال ریمان است, اما f مشتق هیچ تابعی نیست.

مثال ۳-۶ تابعی بیابید که از نقطه $(1,5)$ عبور کرده و مشتق آن در هر نقطه $2x$ باشد.

$$y' = 2x \to dy = 2xdx \xrightarrow{\int} y = \int 2x\,dx = x^2 + C \xrightarrow{y(1)=5} C = 4 \to y = x^2 + 4 \;\blacksquare$$

توضیح: در حل بالا از انتگرال‌گیری نامعین مساله حل شد. یک راه دیگر استفاده از انتگرال معین و بصورت زیر است:

$$y'(x) = f(x) \to \underbrace{\int_a^x y'(t)\,dt}_{y(x)-y(a)} = \int_a^x f(t)\,dt \to y(x) = \int_a^x f(t)dt + y(a)$$

که در آن a نقطه‌ای انتخاب میشودکه y آن در صورت مساله داده شده باشد. لذا برای مثال بالا خواهیم داشت:

$$y' = 2x \to y(x) = \int_1^x 2tdt + y(1) = t^2\Big|_1^x + 5 = x^2 - 1 + 5 = x^2 + 4 \;\blacksquare$$

مثال ۳-۷ انتگرال زیر به دو روش محاسبه شده است. روش صحیح کدام است؟

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx = tan^{-1}x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} \quad ; \quad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$$

حل راه حل دوم غلط است, زیرا همان‌گونه که در قضیه اول عنوان شد, تابع اولیه بایستی در بازه داده شده پیوسته باشد. ■

مثال ۳-۸ چند جمله‌ای $f(x)$ با کمترین درجه را بگونه‌ای بیابید که دارای سه نقطه عطف $(1,1)$, $(-1,-1)$ و نقطه‌ای به طول 0 باشد, بگونه‌ای که در این نقطه شیب خط مماس برابر 60° گردد.

حل با توجه به وجود سه نقطه عطف, این چند جمله‌ای حداقل از درجه ۳ می‌باشد. لذا:

$$f''(x) = ax(x-1)(x+1) = a(x^3-x)$$

$$f'(x) = a\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)+C \xrightarrow{f'(0)=\sqrt{3}\to C=\sqrt{3}} f'(x) = a\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)+\sqrt{3}$$

و یا بعنوان راه دوم می‌توان بجای انتگرال‌گیری نامعین, با انتگرال‌گیری معین, $f'(x)$ را بصورت زیر بدست آورد:

$$f'(x) = \int_0^x a(t^3-t)dt + \underbrace{f'(0)}_{\sqrt{3}} = a\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^x + \sqrt{3} = a\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)+\sqrt{3}$$

$$f(x) = \int_1^x \left(a\frac{t^4}{4}-a\frac{t^2}{2}+\sqrt{3}\right)dt + \underbrace{f(1)}_{1} = a\left(\frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{6}+\frac{7}{60}\right)+\sqrt{3}(x-1)+1$$

در نهایت نیز با استفاده از تنها رابطه باقیمانده, یعنی $f(-1) = -1$ مقدار $a = \frac{60(\sqrt{3}-1)}{7}$ بدست می‌آید. ■

مثال ۳-۹ با استفاده از قضایای اساسی, از قضیه مقدار میانگین در مشتق(لاگرانژ), قضیه مقدار میانگین در انتگرال را نتیجه بگیرید.

حل فرض کنیم برای هر $x \in [a,b]$ تعریف کنیم $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. از آنجا که G در بازه مورد نظر پیوسته و در بازه (a,b) مشتق‌پذیر است, لذا طبق قضیه مقدار میانگین در مشتق برای تابع $G(x)$ خواهیم داشت:

$$G(b)-G(a) = G'(c)(b-a) \to \int_a^b f(t)\,dt - \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{0} = f(c)(b-a) \ ■$$

مثال ۳-۱۰ با استفاده از نامساوی زیر, درستی انتگرال I را نشان دهید.

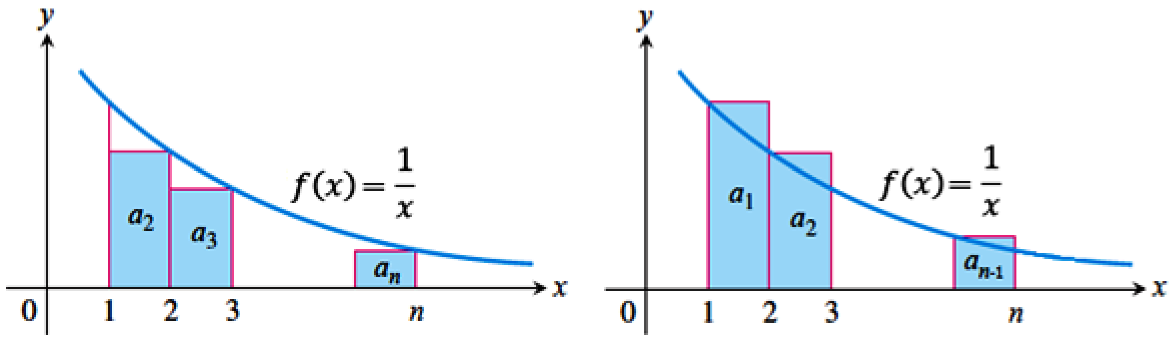
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \quad ; \quad I = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{sinnx}{x^2+n^2}dx = 0$$

$$\left|\int_0^{2\pi}\frac{sinnx}{x^2+n^2}dx\right| \le \int_0^{2\pi}\left|\frac{sinnx}{x^2+n^2}\right|dx \le \int_0^{2\pi}\frac{1}{n^2}dx = \frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi}dx = \frac{2\pi}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} |I| \le 0 \to I = 0 ■$$

مثال ۳-۱۱ با استفاده از مجموع ریمانهای بالا و پایین برای تابع $y = \frac{1}{x}$ و تعبیر هندسی انتگرال معین نشان دهید:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<Ln(n)<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

حل در شکل زیر مجموع ریمانهای بالا و پایین تابع در مقایسه با خود تابع دیده می‌شوند.



با انتخاب $\Delta x_i = 1$ با توجه به نزولی بودن تابع, مقدار $m_i = \frac{1}{i+1}$ (در سمت راست زیر بازه) و $M_i = \frac{1}{i}$ (در سمت چپ) میباشد.
از آنجا که تعدادزیر بازه‌ها $n-1$ میباشد, با نوشتن ریمانهای بالا و پایین (کران بالا را به $n-1$ تغییر می‌دهیم) خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n-1} m_i\Delta x_i \le \int_1^n \frac{dx}{x} \le \sum_{i=1}^{n-1} M_i\Delta x_i \xrightarrow{\Delta x_i=1} \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i+1} \le \underbrace{\int_1^n \frac{dx}{x}}_{Ln(n)} \le \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i} \quad \blacksquare$$

در واقع مجموع ریمان پایین کمتر از سطح زیر منحنی در بازه $[1,n]$ و مجموع ریمان بالا بیشتر از این سطح خواهد بود. ■

توضیح ۱: از رابطه بدست آمده میتوان برای تخمین سری $s_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$ نیز استفاده کرد. برای این منظور خواهیم داشت:

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i} \le Ln(n) \le \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i} \to s_n - \frac{1}{1} \le Ln(n) \le s_n - \frac{1}{n} \to Ln(n)+\frac{1}{n} \le s_n \le Ln(n)+1$$

مثلا : $s_{1000} = \sum_{i=1}^{1000}\frac{1}{i} \to \underbrace{Ln(1000)+\frac{1}{1000}}_{6.9088} \le s_{1000} \le \underbrace{Ln(1000)+1}_{7.9078}$

مثلا می‌توان میانگین دو کران بالا و پایین را یک برآورد مناسب برای سری دانست که به 7.4083 خواهیم رسید که به مقدار واقعی این سری که برابر 7.4855 می‌باشد, نزدیک است.

توضیح ۲: بعنوان یک نتیجه مهم از مثال فوق میتوان گفت اگر $f(x)$ تابعی پیوسته, مثبت و نزولی روی $[c,n]$ باشد, آنگاه:

$$\sum_{k=c+1}^{n} f(k) < \int_c^n f(x)\,dx < \sum_{k=c}^{n-1} f(k)$$

مشابه توضیح قبل, با استفاده از این رابطه نیز می‌توان برخی سریهای عددی را تخمین زد که در بخش ۱۰-۳-۱ به آن می‌پردازیم.

■

مثال ۳-۱۲ فرض کنید تابع f بصورت زیر تعریف شده باشد, $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$ را بیابید.

$$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}\ ;\ \ f(x)=\int_0^x min\{t,t^2\}dt$$

حل ابتدا ضابطه تابع را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases}0\le x\le 1\to 0\le t\le x, t^2\le t\to min\{t,t^2\}=t^2\to f(x)=\dfrac{x^3}{3}\\ 1\le x<\infty\to f(x)=\underbrace{\int_0^1 min\{t,t^2\}dt}_{f(1)}+\int_1^x\underbrace{min\{t,t^2\}}_{t}dt\to f(x)=\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}\end{cases}$$

بدیهی است تابع اکیدا صعودی و مشتق پذیر است. لذا وارون آن موجود بوده و مشتق پذیر خواهد بود. در ابتدا بایستی $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ را محاسبه کنیم. اما از آنجا که تابع دو ضابطه‌ای است, لذا بایستی هر دو را بررسی کنیم:

$$0\le x\le 1\to\frac{1}{2}=\frac{x^3}{3}\to x=\sqrt[3]{1.5}>1\quad\boxed{\times}$$

$$1\le x<\infty\to\frac{1}{2}=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}\to x=\frac{2}{\sqrt{3}}>1\to f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(f^{-1})'(a)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(a)\right)}\to(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{1}{\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}\right)'\Big|_{\frac{2}{\sqrt{3}}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\blacksquare$$

❄ **مثال ۳-۱۳** فرض کنید:

$$Sign(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

الف: اگر قرار دهیم $\varphi(x)=\int_{-1}^{x}Sign(t)\,dt$ نشان دهید هرگاه$ab>0$, آنگاه:

$$\int_a^b Sign(x)\,dx=\varphi(b)-\varphi(a)$$

ب: با ذکر دلیل مشخص کنید که آیا تابع $\varphi(x)$ تعریف شده در قسمت الف, پادمشتقی(تابع اولیه‌ای) برای تابع $Sign(x)$ بر روی $\mathbb{R}$ میباشد یا خیر.

ج: آیا $\varphi'(0)$ وجود دارد؟ (از تعریف مشتق استفاده کنید).

د: اگر $g(x)=-e^x$ نشان دهید $\frac{d^n}{dx^n}\varphi(g(x))$ به ازای هر $n=1,2,3,\cdots$ وجود دارد.

حل الف: از آنجا که$ab>0$, لذا دو حالت زیر را در نظر گرفته, نشان می‌دهیم هر دو طرف تساوی یکسان است.

$$1)\quad a>0\,,b>0\to\int_a^b Sign(x)\,dx=\int_a^b 1\,dx=b-a$$

$$\varphi(b)=\int_{-1}^{b}Sign(t)\,dt=\int_{-1}^{0}Sign(t)\,dt+\int_{0}^{b}Sign(t)\,dt=\int_{-1}^{0}-1\,dt+\int_{0}^{b}1\,dt=b-1$$

$$\varphi(a)=\int_{-1}^{a}Sign(t)\,dt=a-1\rightarrow\varphi(b)-\varphi(a)=(b-1)-(a-1)=b-a$$

$$2)\ \ a<0\,,b<0\rightarrow\int_{a}^{b}Sign(x)\,dx=\int_{a}^{b}-1\,dx=a-b$$

$$\varphi(b)=\int_{-1}^{b}Sign(t)\,dt=\int_{-1}^{b}-1\,dt=-b-1\quad;\quad\varphi(a)=-a-1$$

$$\rightarrow\varphi(b)-\varphi(a)=(-b-1)-(-a-1)=a-b$$

ب: با توجه به شکل ظاهری رابطه نوشته شده در قسمت الف, ممکن است چنین نتیجه شود که تابع $\varphi(x)$ قسمت قبل, پادمشتقی برای $Sign(x)$ بر روی $\mathbb{R}$ می‌باشد. اما با توجه به قضیه اول حساب دیفرانسیل, از آنجا که تابع $Sign$, بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته نیست, این نتیجه‌گیری غلط است.

ج: با استفاده از تعریف مشتق برای تابع $\varphi(x)=\int_{-1}^{x}Sign(t)\,dt$ خواهیم داشت:

$$\varphi'(0)=\lim_{h\to0}\frac{\varphi(0+h)-\varphi(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\int_{-1}^{h}Sign(t)\,dt-\int_{-1}^{0}Sign(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\int_{0}^{h}Sign(t)\,dt}{h}$$

$$\lim_{h\to0^+}\frac{\int_{0}^{h}Sign(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\int_{0}^{h}1\,dt}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{h}{h}=1$$

$$\lim_{h\to0^-}\frac{\int_{0}^{h}Sign(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{\int_{0}^{h}-1\,dt}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

بنابراین مشتق این تابع در نقطه صفر وجود ندارد. برای قسمت آخر مساله با استفاده از قضیه اول حساب دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx}\varphi(-e^x)=\frac{d}{dx}\int_{-1}^{-e^x}Sign(t)\,dt=-e^xSign(-e^x)=e^x$$

و به همین ترتیب می‌توان مشتقات مراتب بالاتر را نیز بدست آورد. ■

یکی از کاربردهای مهم انتگرال‌گیری, حل معادلات دیفرانسیل می‌باشد که در درس مربوطه به تفصیل بررسی خواهد شد. در انتهای این بخش به عنوان نمونه یکی از ساده‌ترین انواع معادلات دیفرانسیل ارائه می‌شود.

مثال ۳-۱۴ جواب معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

$$1)\ \ y'=cosx\quad y(1)=2\qquad;\qquad 2)\ \ y'=2xy\quad y(0)=1\qquad;\qquad 3)\ \ y'=p(x)y$$

حل الف: اولین معادله در واقع چیزی به جز یک انتگرال‌گیری ساده نیست. بنابراین:

$$y'=cosx\rightarrow y=sinx+C$$

البته شکل درست برای رسیدن به این نتیجه آن است که آنرا بصورت زیر باز نویسی کنیم:

$$y' = cosx \to \frac{dy}{dx} = cosx \to dy = cosx\, dx \to y = \int cosx\, dx \to y = sinx + C$$

حال با استفاده از شرط $y(1) = 2$ ثابت C را بدست می‌آوریم.

$$y(1) = 2 \to 2 = sin1 + c \to C = 2 - sin1 \to y = sinx + 2 - sin1 \ \blacksquare$$

توضیح: در حل بالا مساله با انتگرال‌گیری نامعین حل شد. یک راه دیگر با انتگرال‌گیری معین و بصورت زیر است:

$$y' = f(x) \to y(x) = \int_a^x f(t)dt + y(a) \xrightarrow{y'=cosx} y(x) = \int_1^x costdt + y(1) = sinx - sin1 + 2$$

ب: در حل معادله $y' = 2xy$ نیز کافی است $y' = \frac{dy}{dx}$ منظور شده و متغیر x را به یک سمت و تابع y را به سمت دیگر معادله انتقال داده و با انتگرال‌گیری مساله را حل کرد. به عبارتی:

$$y' = 2xy \to \frac{dy}{dx} = 2xy \to \frac{dy}{y} = 2xdx \to \int \frac{1}{y} dy = \int 2xdx \to Ln|y| = \int 2xdx + C_1$$

$$\to y = \underbrace{\pm e^{C_1}}_{C_2} e^{\int 2xdx} = C_2 e^{x^2 + C_3} = Ce^{x^2} \ \ ; \ y(0) = 1 \to C = 1 \to y = e^{x^2} \ \blacksquare$$

ج: این قسمت تعمیم قسمت قبل است, لذا درست مشابه آن عمل می‌کنیم:

$$y' = p(x)y \to \frac{dy}{dx} = p(x)y \to \frac{dy}{y} = p(x)dx \to Ln|y| = \int p(x)dx + C_1$$

$$\to y = \underbrace{\pm e^{C_1}}_{C} e^{\int p(x)dx} = Ce^{\int p(x)dx}$$

بدیهی است برای حالت خاصی که $p(x) = k$ باشد, جواب بصورت زیر ساده می‌شود, که در بخش ۲-۳-۴ (کاربردهای مهندسی تابع نمایی طبیعی) از آن استفاده شد:

$$y' = ky \to y = Ce^{kx} \ \blacksquare$$

❄ توضیح: در انتهای این بخش برای آشنایی بیشتر با معادلات دیفرانسیل, شیوه حل یک معادله پرکاربرد بیان می‌شود. فرض کنید بخواهیم معادله دیفرانسیل $y' + p(x)y = g(x)$ را حل کنیم. برای این منظور طرفین معادله را در $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ ضرب می‌کنیم. در این صورت سمت چپ را می‌توان مشتق $e^{\int p(x)dx}y$ دانست. یعنی:

$$y' + p(x)y = g(x) \xrightarrow{\times e^{\int p(x)dx}} \underbrace{y' e^{\int p(x)dx} + p(x)e^{\int p(x)dx} y}_{\left(e^{\int p(x)dx} y\right)'} = g(x)e^{\int p(x)dx}$$

لذا در نهایت با انتگرال‌گیری از طرفین, جواب مساله یعنی y بدست می‌آید:

$$e^{\int p(x)dx} y = \int g(x)e^{\int p(x)dx} dx \to y = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)g(x)dx + C \right]$$

توضیحات تکمیلی این روش و بررسی سایر معادلات در درس معادلات دیفرانسیل ارائه خواهد شد. ■

تمرینات بخش ۳-۴ تمرینات ۱۴, ۲۸, ۳۸, ۵۶ و ۶۹ از بخش ۴-۳ و تمرینات ۲۵, ۲۸ , ۴۰ , ۶۸ و ۷۲ از بخش ۴-۴ کتاب

۱- با ترسیم نمودار تابع $y = [e^x]$ در بازه $0 \leq x < Ln(n)$ ابتدا درستی انتگرال زیر را نشان داده, سپس به کمک آن و اینکه $[e^x] \leq e^x$ می‌باشد, نامساوی سمت راست را نتیجه بگیرید.

$$\int_0^{Ln(n)} [e^x]\, dx = nLn(n) - Ln(n!) \qquad ; \qquad n! \geq n^n e^{1-n}$$

۳-۵- برآورد یا تخمین انتگرال معین

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل, اینگونه بیان کرد که برای محاسبه انتگرال معین, نیاز به دانستن انتگرال نامعین خواهیم بود. در فصل بعد روش محاسبه تعدادی از انتگرالهای نامعین را بیان خواهیم کرد. خواهیم دید برای تعداد زیادی از انتگرالها یا تابع اولیه‌ای وجود ندارد و یا محاسبه آن نیاز به خلاقیتهای خاصی خواهد داشت. آیا تنها راه محاسبه انتگرال معین, استفاده از انتگرال نامعین است؟ در انتهای فصل ۴ و در بخش ۴-۹ خواهیم دید که در تعداد محدودی از انتگرالهای معین, می‌توان بدون محاسبه انتگرال نامعین, انتگرال معین را بدست آورد. فعلا در اینجا هدف آن است که بدون محاسبه انتگرال نامعین, لااقل بتوانیم تخمین یا برآوردی از مقدار انتگرال معین داشته باشیم. بدیهی است هر چه بازه برآورد شده جمع‌تر باشد, برآورد, مناسب‌تر است.

یک راه استفاده از خاصیت زیر است که در آن بایستی بتوان یک $g(x)$ مناسبی که $\int_a^b g(x)\, dx$ در دست باشد را تعیین کرد.

$$if \quad \forall x \in [a,b] \;;\; f(x) \geq g(x) \to \int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$$

راه دیگر آن است که از خاصیت ۴ که در بخش ۳-۲-۱ بیان شد استفاده کنیم. به این ترتیب که اگر M و m به ترتیب Sup و Inf تابع انتگرال پذیر f در بازه $[a,b]$ باشند, آنگاه:

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\, dx < M(b-a)$$

که البته معمولا برآورد چندان مناسبی نیست, چرا که بازه بزرگی را برای برآورد انتگرال ارائه می‌دهد. علاوه بر این اینها, می‌توان با استفاده از قضیه مقدار میانگین و مقدار میانگین وزندار نیز برخی انتگرالها را تخمین زد. در درس محاسبات عددی با روشهای بسیار دقیقتری برای برآورد انتگرالها آشنا خواهیم شد.

مثال ۳-۱۵ الف: نشان دهید:

$$0 < \int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt[3]{1+x^8}}\, dx < \frac{1}{8}$$

ب: با استفاده از قضیه مقدار میانگین وزندار در انتگرالها, انتگرال زیر را از دو راه برآورد کنید.

$$I = \int_0^1 \frac{sinx}{1+x^2}\, dx \qquad ; \qquad \exists\, c \in (a,b) \;:\; \int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(c)\int_a^b g(x)\, dx$$

حل الف: از آنجا که انتگرالده مثبت است, لذا نامساوی سمت چپ برقرار میباشد. برای نامساوی سمت راست نیز کافی است یک کران بالا برای مخرج کسر بدست آوریم. برای این منظور:

$$x \in [0,1] \to \sqrt[3]{1+x^8} > 1 \to 0 < \frac{x^7}{\sqrt[3]{1+x^8}} < x^7 \xrightarrow{\int_0^1} 0 < \int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt[3]{1+x^8}} dx < \frac{1}{8} \quad \blacksquare$$

ب: برای این قسمت کافی است انتگرالده را به دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ بشکنیم. فقط بایستی دقت شود مطابق شرایط قضیه مقدار میانگین وزندار, $g(x)$ بایستی در بازه مورد نظر تغییر علامت ندهد. این شکستن به دو طریق امکان پذیر است:

$$1) \quad \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{g} \underbrace{sinx}_{f} \, dx = sinc \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} sinc$$

$$0 < c < 1 \to sin0 < sinc < sin1 \to 0 < I < \frac{\pi}{4} sin1 = 0.64$$

$$2) \quad \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{f} \underbrace{sinx}_{g} \, dx = \frac{1}{1+c^2} \int_0^1 sinx \, dx = \frac{1-cos1}{1+c^2}$$

$$0 < c < 1 \to \frac{1}{2} < \frac{1}{1+c^2} < 1 \to \underbrace{\frac{1-cos1}{2}}_{0.23} < I < \underbrace{1-cos1}_{0.46} \quad \blacksquare$$

توضیح: لازم بذکر است که انتگرال نامعین تابع ارائه شده در قسمت "ب" را نمی‌توان بر حسب توابع مقدماتی که تا بحال با آنها سروکار داشته‌ایم, بدست آورد. در چنین مواردی برای محاسبه دقیق این انتگرال بایستی از روشهای درس محاسبات عددی کمک گرفت. این روشها معمولا با استفاده از مفهوم هندسی انتگرال معین, که همان سطح زیر منحنی می‌باشد, می‌توانند با دقت بالایی مقدار انتگرال را (بدون نیاز به محاسبه انتگرال نامعین آن) محاسبه کنند که طبیعتا از برآورد انتگرال مناسبتر است. یک ایده ساده که در درس محاسبات عددی به آن پرداخته میشود, استفاده از ریمان بالا و پایین انتگرال بعنوان جایگزینی برای خود انتگرال باشد که بدیهی است هر چه تعداد افرازها بیشتر باشد, دقت محاسبه نیز بالاتر خواهد بود. بعنوان مثال در آنجا میتوان نشان داد حاصل انتگرال ارائه شده در قسمت "ب" با ۴ رقم اعشار برابر $I = 0.3218$ میباشد. ■

مثال ۳-۱۶ با استفاده از تابع $f(x)$ درستی نامساوی سمت راست را نشان دهید.

$$f(x) = \begin{cases} x^x & ; \quad 0 < x \le 1 \\ 1 & ; \quad x = 0 \end{cases} \qquad ; \qquad 0.692 < \int_0^1 x^x \, dx < 1$$

حل قبلا دیده شد که $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$, لذا تابع $f(x)$ تابعی پیوسته در بازه مورد نظر بوده و حداکثر آن در در دو سمت برابر $M = 1$ و حداقل آن برابر است با:

$$f'(x) = x^x(1+Lnx) = 0 \to x = \frac{1}{e} \to m = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \approx 0.692$$

$$m(b-a) < \int_0^1 x^x \, dx < M(b-a) \to 0.692 < \int_0^1 x^x \, dx < 1 \quad \blacksquare$$

سه نامساوی مهم در برآورد انتگرالها

۱- نامساوی برنولی: این نامساوی قبلا در فصل اول بصورت زیر بیان شد:

$$1+x \geq 0 \text{ و } n>1 \to \sqrt[n]{1+x} \leq 1+\frac{x}{n}$$

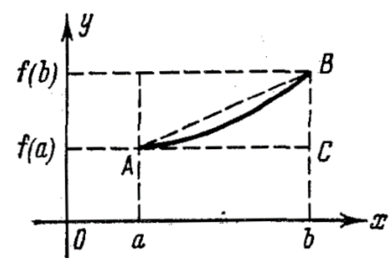
۲- نامساوی کوشی-شوارتز: این نامساوی نیز در فصل اول برای اعداد حقیقی ثابت شد. شکل دیگر این نامساوی, در فضای برداری بصورت $|\vec{u}.\vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$ می‌باشد. فرم انتگرالی آن نیز(که اثباتی مشابه قبل دارد) بصورت زیر است:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$$

۳- اگر تابع $f(x)$ در بازه$[a,b]$ صعودی بوده و تقعر آن به سمت بالا باشد, آنگاه:

$$(b-a)f(a) < \int_a^b f(x)\,dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

اثبات این نامساوی با استفاده از شکل ارائه شده کاملا بدیهی است. بدیهی است اگر تقعر به سمت پایین باشد نیز میتوان نامساوی دیگری مشابه نامساوی بالا برای آن ارائه داد.



مثال ۳-۱۷ انتگرال زیر را با استفاده از قضیه مقدار میانگین و سه نامساوی بالا برآورد کنید.

$$I=\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$$

$$1)\ \ I=f(c)(b-a)=\sqrt{1+c^4} \to 1<I<\sqrt{2}$$

$$2)\ \ x \geq -1 \to \sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2} \to 1 < \sqrt{1+x^4} < 1+\frac{x^4}{2} \xrightarrow{\int_0^1} 1 < I < 1.1$$

$$3)\ \ \left(\int_0^1 \underbrace{\sqrt{1+x^4}}_{f} \times \underbrace{1}_{g}\,dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 (1+x^4)\,dx\right)\left(\int_0^1 1\,dx\right) = 1.2 \to |I| \leq \underbrace{\sqrt{1.2}}_{1.095}$$

۴) جهت تقعر تابع $f(x)=\sqrt{1+x^4}$ در بازه$[0,1]$ به سمت بالاست, زیرا $f''(x)>0$. لذا:

$$\underbrace{(1-0)f(1)}_{1} < \underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{I} < \underbrace{(1-0)\frac{f(0)+f(1)}{2}}_{\approx 1.207} \quad \blacksquare$$

تمرینات بخش ۳-۵

۱- با استفاده از خاصیت ۴ بخش ۳-۲-۱ درستی برآوردهای زیر را نشان دهید:

$$2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^4}\,dx \leq 2\sqrt{2} \quad ; \quad \frac{\pi}{12} \leq \int_{\pi/4}^{\pi/3} tanx\,dx \leq \frac{\pi\sqrt{3}}{12} \quad ; \quad \frac{\sqrt{3}}{8} \leq \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{sinx}{x}\,dx \leq \frac{\sqrt{2}}{6}$$

۲- انتگرال زیر را مشابه آنچه در مثال ۳-۱۷ دیده شد از روشهای مختلف برآورد کنید.

$$I = \int_{0}^{1} \sqrt{1+x^3}\,dx \quad ; \quad \underline{Ans:}\ I < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

۳-۶- مشتق گیری از انتگرال معین (دستور لایب‌نیتز)

انتگرال معین زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید هدف آن باشد که بخواهیم مشتق این انتگرال معین را بیابیم. خواهیم داشت:

$$I(x) = \int_{2x}^{x^2} t^2\,dt \to I(x) = \frac{1}{3}t^3\Big|_{2x}^{x^2} = \frac{1}{3}x^6 - \frac{8}{3}x^3 \to I'(x) = 2x^5 - 8x^2$$

بدیهی است اگر انتگرال نامعین بود, مشتق‌گیری از آن به خود انتگرالده یعنی خود تابع منجر میشود. اگر در انتگرال معین نیز, کرانهای بالا و پایین اعداد ثابت باشند, از آنجا که حاصل انتگرال در نهایت یک عدد خواهد شد, لذا مشتق برابر صفر بدست می‌آید. حال می‌خواهیم ببینیم آیا می‌توان بدون محاسبه انتگرال نامعین (در مثال بالا $\frac{1}{3}t^3$) حاصل $I'(x)$ را بدست آورد؟

اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته بوده و $u(x)$ و $v(x)$ توابعی مشتق‌پذیر باشند که مقادیرشان در بازه $[a,b]$ قرار داشته باشد, آنگاه مشتق $I(x)$ برابر است با:

$$I(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = F\big(v(x)\big) - F(u(x)) \to I'(x) = v'(x)F'\big(v(x)\big) - u'(x)F'(u(x))$$

$$\xrightarrow{F'=f} I'(x) = v'(x)f\big(v(x)\big) - u'(x)f(u(x))$$

که در حالت خاص زیر به همان قضیه اول حساب دیفرانسیل و انتگرال خواهد رسید:

$$G(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt \to G'(x) = (x)'(f(t)|_{t=x}) - (a)'(f(t)|_{t=a}) = f(x)$$

به عنوان نمونه در مثال بالا بدون نیاز به محاسبه انتگرال نامعین, $I'(x)$ برابر است با:

$$I(x) = \int_{2x}^{x^2} t^2\,dt \to I'(x) = (x^2)'(t^2|_{t=x^2}) - (2x)'(t^2|_{t=2x}) = 2x(x^2)^2 - 2(2x)^2$$

که به همان نتیجه $2x^5 - 8x^2$ رسیدیم.

توضیح: روش دوم اثبات این قاعده با استفاده از قضیه اول حساب دیفرانسیل و انتگرال و نیز قاعده زنجیری بصورت زیر است:

$$I(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt=\int_{u(x)}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{v(x)} f(t)\,dt=\int_{0}^{v(x)} f(t)\,dt-\int_{0}^{u(x)} f(t)\,dt$$

$$I'(x)=\frac{d}{dv}\int_{0}^{v} f(t)\,dt\times\frac{dv}{dx}-\frac{d}{du}\int_{0}^{u} f(t)\,dt\times\frac{du}{dx}=f\big(v(x)\big)v'(x)-f\big(u(x)\big)u'(x)$$

مثال ۳-۱۸ به ازای چه مقادیری از a و b حد زیر برابر 1 خواهد بود؟

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-sinx}\int_{0}^{x}\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt \quad ; \quad \underline{Hop}:\ A=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{b-cosx}\to b=1$$

دقت شود اگر $b\neq 1$ باشد صورت کسر صفر بوده و مخرج مخالف صفر است, لذا حد برابر صفر خواهد شد. پس اگر قرار است حد برابر 1 باشد, بایستی مخرج نیز صفر گردد تا پس از رفع ابهام با انتخاب درست a حاصل حد برابر 1 گردد. بنابراین در ادامه:

$$\to A=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{\frac{x^2}{2}}=1\to a=4\ ■$$

مثال ۳-۱۹ اگر $f(x)$ بصورت زیر تعریف شده باشد و $g(x)$ معکوس آن باشد, نشان دهید $g''=\frac{3}{2}g^2$.

$$f(x)=\int_{0}^{x}\frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} \qquad x\geq 0$$

$$g'(x)=\frac{1}{f'\big(g(x)\big)}\ ;\ f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\to g'(x)=\sqrt{1+g^3(x)}\to g''=\frac{3g^2g'}{2\sqrt{1+g^3}}=\frac{3}{2}g^2\ ■$$

مثال ۳-۲۰ معادله انتگرالی زیر را حل کنید.

$$f(x)=3+2\int_{1}^{x} tf(t)dt$$

حل دیده می‌شود که در این معادله هم تابع و هم انتگرال آن وجود دارد. به چنین معادلاتی, معادلات انتگرالی میگویند. روشهای مختلفی برای حل این معادلات وجود دارد که بسته به مساله متفاوت است. هدف درس ریاضی ۱ بررسی این معادلات نمی‌باشد. اما در این مثال خاص با مشتق‌گیری از رابطه داده شده به یک معادله دیفرانسیل ساده خواهیم رسید که حل آن ساده است.

$$\to f'(x)=2xf(x)\to\frac{df}{dx}=2xf\to\frac{df}{f}=2xdx\to Ln|f|=x^2+C$$

معمولا هر معادله انتگرالی دربرگیرنده یک شرط اولیه میباشد. مثلا در این معادله, با جایگذاری $x=1$ مطابق زیر, $f(1)=3$ بدست آمده و در نتیجه ثابت C محاسبه می‌شود.

$$f(1)=3+2\int_{1}^{1} tf(t)dt=3\to C=Ln3-1\to f(x)=e^{x^2+Ln3-1}=3e^{x^2-1}$$

دقت شود که در انتها بایستی از $|f(x)|$ استفاده می‌کردیم که به $f(x)=\pm 3e^{x^2-1}$ منجر می‌شود. اما از آنجا که بایستی $f(1)=3$ باشد, لذا صرفا جواب $+3e^{x^2-1}$ را انتخاب کردیم. ■

مثال ۳-۲۱ اگر $f(x)$ تابعی مشتق پذیر و مخالف صفر باشد, از معادله زیر آنرا بیابید.

$$f^2(x) = 2\int_1^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}dt$$

حل در اینجا نیز با یک معادله انتگرالی روبرو هستیم. مشابه مثال قبل با مشتق‌گیری از رابطه داده شده خواهیم داشت:

$$2f(x)f'(x) = 2\frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow{f(x)\neq 0} f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \rightarrow f(x) = sinh^{-1}x + C$$

اما با توجه به معادله داده شده, مطابق جایگذاری زیر $f(1) = 0$ خواهد بود. در نتیجه ثابت C بدست می‌آید.

$$f^2(1) = 2\int_1^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}dt = 0 \rightarrow f(1) = 0 \rightarrow C = -sinh^{-1}1 \rightarrow f(x) = sinh^{-1}x - sinh^{-1}1 \blacksquare$$

مثال ۳-۲۲ با محاسبه $f'(x)$ از رابطه زیر, تابع $f(x)$ را بیابید.

$$f(x) = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^n)}$$

حل به نظر می‌رسد محاسبه انتگرال حتی اگر روشهای انتگرال‌گیری فصل بعد را هم بدانیم کار مشکلی است. اما با توجه به راهنمایی داده شده خواهیم داشت:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}\frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)} - \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)} = \frac{-1}{1+x^2} \rightarrow f(x) = -tan^{-1}x + C$$

فقط بایستی ثابت C محاسبه شود. برای این منظور کافی است مقدار انتگرال را برای یک نقطه خاص بدانیم. با توجه به حدود انتگرال داده شده یعنی x و $\frac{1}{x}$, چنانچه $x = 1$ انتخاب شود, حدود بالا و پایین برابر شده و مقدار انتگرال برابر صفر خواهد بود. بنابراین:

$$f(1) = \int_1^{\frac{1}{1}} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^n)} = 0 \rightarrow C = \frac{\pi}{4} \rightarrow f(x) = \frac{\pi}{4} - tan^{-1}x \quad \blacksquare$$

❋ ۳-۶-۱- تعمیم دستور لایب نیتز

اگر توابع دو متغیره $f(x,t)$ و $\frac{\partial f}{\partial x}$ (یعنی مشتق تابع f نسبت به x با فرض ثابت دانستن t) پیوسته و نیز $u(x)$ و $v(x)$ توابعی مشتق پذیر باشند, آنگاه مطابق آنچه در ریاضی ۲ خواهیم دید مشتق $I(x)$ برابر است با:

$$I(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,dt \rightarrow I'(x) = v'(x)f\big(x,v(x)\big) - u'(x)f\big(x,u(x)\big) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt$$

مثال ۳-۲۳ اگر $f(x)$ بصورت زیر داده شده باشد, حاصل $f'(x)$ را بیابید.

$$f(x)=\int_0^x \frac{sin(tx)}{t}dt$$

حل از آنجا که در انتگرالده, متغیر x نیز دیده میشود, از فرمول تعمیم لایب‌نیتز استفاده می‌کنیم.

$$f'(x)=1\frac{sin(x^2)}{x}-0+\int_0^x cos(tx)dt=\frac{sin(x^2)}{x}+\frac{1}{x}sin(tx)\Big|_{t=0}^{t=x}=2\frac{sin(x^2)}{x} \quad \blacksquare$$

توضیح: در فصل بعد خواهیم دید که میتوان با تغییر متغیر بگونه‌ای عمل کرد که در انتگرالده صرفا یک متغیر ظاهری دیده شود. در اینصورت میتوان از خود فرمول لایب‌نیتز(و نه تعمیم آن) مشتق را بدست آورد. مثلا برای این مثال:

$$u=tx\rightarrow du=xdt\rightarrow f(x)=\int_0^{x^2}\frac{xsinu}{u}\frac{du}{x}\rightarrow f'(x)=2x\frac{sin(x^2)}{x^2}-0 \quad \blacksquare$$

مثال ۳-۲۴ با توجه به انتگرال داده شده, حاصل I را بیابید.

$$\int_0^\pi \frac{dx}{a-cosx}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} \quad a>1\ ; \quad I=\int_0^\pi\frac{dx}{(2-cosx)^2}$$

حل با مشتق گیری از دو طرف رابطه داده شده نسبت به a و در با نهایت جایگذاری $a=2$ خواهیم داشت:

$$0-0+\int_0^\pi\frac{-dx}{(a-cosx)^2}=\left(\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\right)'=-\frac{\pi a}{(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}\xrightarrow{a=2} I=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \quad \blacksquare$$

تمرینات بخش ۳-۶

۱- معادله انتگرالی زیر را حل کنید.

$$f(x)=\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt+1 \quad (x>0) \quad ; \quad \underline{Ans}:\ f(x)=Ln(x)+1$$

۲- با محاسبه $f'(x)$ از رابطه زیر, تابع $f(x)$ را بیابید.

$$f(x)=\int_x^{1/x}\frac{Lnt}{1+t^2}dt \ ; \quad \underline{Ans}:\ f(x)=0$$

۳- اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ بصورت زیر تعریف شده باشند, حاصل $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ را بیابید.

$$f(x)=\int_0^{g(x)}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \ ; \quad g(x)=\int_0^{cosx}(1+sin^2t)\,dt \ ; \quad \underline{Ans}:\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

۴- اگر f در بازه $[0,\infty]$ پیوسته و مثبت باشد, نشان دهید تابع زیر تابعی صعودی است.

$$g(x)=\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$

۳-۷- محاسبه برخی از حد مجموعها به کمک انتگرال

در ابتدای درس بیان شد که یک سوال دیگر میتواند این باشد که اگر از حد مجموع میتوان به انتگرال معین رسید, برعکس, با داشتن انتگرال معین (با استفاده از قضیه دوم حساب دیفرانسل و انتگرال) بایستی بتوان حاصل حد مجموع را محاسبه کرد. برای این منظور از رابطه زیر که در ابتدای درس بیان شد استفاده می‌کنیم. هرچند میتوان از رابطه کلی‌تر که در بازه $[a,b]$ بیان شد نیز استفاده کرد, اما بکارگیری رابطه زیر ساده‌تر است:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

بنابراین حد مجموعهایی که به یکی از دو فرم ارائه شده در بالا می‌باشند را می‌توان معادل یک انتگرال دانست. برای این منظور بایستی فرم حد مجموع ارائه شده را به یکی از این دو شکل تغییر داد. دقت شود تفاوت این دو فرم صرفا در شروع و پایان اندیس زیگما بوده و تعداد جملات زیگما در هر دو شکل آن همواره برابر با n است.

برای این منظور ابتدا ترم $\frac{1}{n}$ را در بیرون زیگما و سپس ترم $\frac{i}{n}$ را در داخل زیگما بوجود می‌آوریم. آنگاه با توجه به فرم عبارتی که در داخل زیگما قرار گرفته و برابر با $f\left(\frac{i}{n}\right)$ می‌باشد, تابع $f(x)$ را بدست آورده و از 0 تا 1 انتگرال می‌گیریم. جواب زیگمای مورد نظر با $\int_0^1 f(x)\,dx$ یکسان است. توجه شود که اگر حد مجموع مورد نظر ترم $\frac{1}{n}$ ندارد بایستی آنرا ایجاد کرد که این کار با ضرب صورت و مخرج عبارت داده شده در n امکان‌پذیر است, چرا که $\frac{a(n)}{b(n)} = \frac{1}{n}\frac{na(n)}{b(n)}$.

مثال ۳-۲۵ حد مجموعهای زیر را بر حسب یک انتگرال معین بیان کرده و در مواردی که امکان دارد انتگرل را محاسبه کنید.

$$1)\quad A = \lim_{n\to\infty}\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$$

$$A = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(\frac{i}{n}\right)^k}_{f\left(\frac{i}{n}\right)} \xrightarrow{f\left(\frac{i}{n}\right)=\left(\frac{i}{n}\right)^k \to f(x)=x^k} A = \int_0^1 x^k\,dx = \frac{1}{k+1}x^{k+1}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{k+1} \quad \blacksquare$$

$$if\ k = \frac{1}{2} \to \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} \approx \frac{2}{3}\sqrt{n^3} \quad (n\to\infty) \quad \blacksquare$$

$$2)\quad B = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{n}{n^2+1^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+i^2}$$

$$B = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}_{f\left(\frac{i}{n}\right)} \xrightarrow{f(x)=\frac{1}{1+x^2}} B = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = tan^{-1}x\,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \quad \blacksquare$$

$$3)\ \ C=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{2}{3n+2}+\cdots+\frac{3n}{3n+3n}\right)$$

تعداد جملات بایستی برابر با n باشد که در اینجا $3n$ است. لذا ابتدا یک تغییر متغیر $m=3n$ اعمال میکنیم.

$$m=3n\to C=3\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m+1}+\frac{2}{m+2}+\cdots+\frac{m}{m+m}\right)=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n+i}$$

$$C=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{\frac{i}{n}}{1+\frac{i}{n}}}_{f\left(\frac{i}{n}\right)}\xrightarrow{f\left(\frac{i}{n}\right)=\frac{\frac{i}{n}}{1+\frac{i}{n}}\to f(x)=\frac{x}{1+x}}C=3\int_0^1\frac{x}{1+x}dx$$

در اینجا هدف صرفا تبدیل این حد به انتگرال بود. اما در فصل بعد خواهیم دید این انتگرال بصورت زیر قابل حل است.

$$C=3\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx=3\big(x-Ln(x+1)\big)\Big|_0^1=3-3Ln2\ \blacksquare$$

$$4)\ \ D=\lim_{n\to\infty}Ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$$

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{Ln\left(1+\frac{i}{n}\right)}_{f\left(\frac{i}{n}\right)}\xrightarrow{f(x)=Ln(1+x)}D=\int_0^1Ln(1+x)\,dx$$

در فصل بعد خواهیم دید این انتگرال با استفاده از روش تغییر متغیر و جزء به جزء بصورت زیر بدست می‌آید.

$$D=\int_1^2Lnu\,du=(uLnu-u)|_1^2=2Ln2-1\ \blacksquare$$

$$5)\ \ E=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)\sqrt{2n+1}}+\frac{n}{(n+2)\sqrt{2(2n+2)}}+\cdots+\frac{n}{2n\sqrt{n\times3n}}\right)$$

$$E=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{(n+i)\sqrt{i(2n+i)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2}{(n+i)\sqrt{i(2n+i)}}$$

$$E=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\sqrt{\frac{i}{n}\left(2+\frac{i}{n}\right)}}}_{f\left(\frac{i}{n}\right)}\xrightarrow{f(x)=\frac{1}{(1+x)\sqrt{x(2+x)}}}E=\int_0^1\frac{1}{(1+x)\sqrt{x(2+x)}}dx$$

در فصل بعد و در بخش ۴-۷ خواهیم دید که مقدار این انتگرال برابر با $\frac{\pi}{3}$ خواهد بود. $\blacksquare$

$$6)\ \ F=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right)$$

$$F=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\frac{n}{n+3i}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{\sqrt{\frac{1}{1+3\frac{i}{n}}}}_{f\left(\frac{i}{n}\right)}\xrightarrow{f(x)=\sqrt{\frac{1}{1+3x}}}F=2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+3x}}dx$$

در فصل بعد خواهیم دید این انتگرال با استفاده از روش تغییر متغیر برابر $\frac{2}{3}$ و لذا $F=\frac{4}{3}$ بدست می‌آید. ■

<u>توضیح</u>: میتوان حد مجموع را بصورت انتگرال دیگری نیز بیان کرد که حدود آن الزاما 0 تا 1 نباشد. در اینصورت:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$$

مثلا برای انتگرال F می‌توان نوشت:

$$F=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\frac{1}{1+3\frac{i}{n}}}$$

حال اگر بخواهیم $a+i\frac{b-a}{n}=1+3\frac{i}{n}$ باشد, باید $a=1$ و $b=4$ انتخاب شود, در اینصورت:

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{3}^{b-a}}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{\sqrt{\frac{1}{1+3\frac{i}{n}}}}_{f\left(1+3\frac{i}{n}\right)}\xrightarrow{f(x)=\sqrt{1/x}}I=\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_{x=1}^{x=4}=2\rightarrow F=\frac{2}{3}I=\frac{4}{3}$$

حتی می‌توانیم $a+i\frac{b-a}{n}=5-3\frac{i}{n}$ انتخاب کنیم در اینصورت باید $a=5$ و $b=2$ انتخاب شود, بنابراین:

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{-3}^{b-a}}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{\sqrt{\frac{1}{1+3\frac{i}{n}}}}_{f\left(5-3\frac{i}{n}\right)}\xrightarrow{f(x)=\sqrt{1/(6-x)}}I=\int_5^2\frac{dx}{\sqrt{6-x}}=-2\rightarrow F=\frac{2}{-3}I=\frac{4}{3}$$

در فصل بعد خواهیم دید عملا همه این انتگرالهایی که به آنها رسیدیم عملا یکی است و به عبارتی قابل تبدیل به یکدیگرند. ■

مثال ۳-۲۶ حد مجموع زیر را بصورت یک انتگرال بیان کنید.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}tan^{-1}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)$$

حل در ابتدای بحث انتگرال معین دیده شد که رابطه کلی حد مجموع بصورت زیر است:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-\alpha}{n}\right) \quad ; \quad 0 \le \alpha \le 1$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} tan^{-1}\left(\frac{2i-1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{tan^{-1}\left(\frac{i-0.5}{n}\right)}_{f\left(\frac{i-0.5}{n}\right)} = \int_0^1 tan^{-1} x\,dx \ \blacksquare$$

توضیح: در فصل بعد و در مثال ۴-۵ (قسمت ۴) خواهیم دید که حاصل این انتگرال برابر $\frac{\pi}{4} - Ln\sqrt{2}$ می‌باشد. ■

مثال ۳-۲۷ حد زیر را بصورت یک انتگرال بیان کنید.

$$A = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n^2}}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{n^2}} \ldots\ldots \left(1+\frac{n}{n}\right)^{\frac{n}{n^2}}$$

حل دیده میشود که این حد در واقع حد یک حاصلضرب است, نه یک حد مجموع. بنابراین ابتدا بایستی آنرا به حد مجموع تبدیل کرد. برای این منظور از طرفین لگاریتم می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$Ln(A) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}Ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n^2}Ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{n}{n^2}Ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}Ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n}Ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{n}{n}Ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)$$

$$\to Ln(A) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{i}{n}Ln\left(1+\frac{i}{n}\right)}_{f\left(\frac{i}{n}\right)} \xrightarrow{f(x)=xLn(1+x)} Ln(A) = \int_0^1 xLn(1+x)\,dx \ \blacksquare$$

توضیح: مطابق آنچه در فصل ۴ بیان خواهد شد, حاصل این انتگرال با روش جزء به جزء (درست مشابه مثال ۴-۵ قسمت ۸) برابر $\frac{1}{4}$ بدست می‌آید, لذا $A = e^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{e}$ خواهد شد. ■

تمرینات بخش ۳-۷

۱- حد مجموع زیر را بدست آورید.

$$\underline{A} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+3(1\times n)^2}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+3(2\times n)^2}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^4+3(n\times n)^2}}\right)$$

توضیح: هرگاه فاکتور گیری از $\frac{1}{n}$ مشکل باشد, ابتدا یک $\frac{1}{n}$ بیرون زیگما نوشته و همه جملات را در n ضرب می‌کنیم. مثلا در اینجا:

$$A = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1\times n}{\sqrt{n^4+3(1\times n)^2}}+\frac{2\times n}{\sqrt{n^4+3(2\times n)^2}}+\cdots+\frac{n\times n}{\sqrt{n^4+3(n\times n)^2}}\right)$$

۲- درستی حد مجموعهای زیر را نشان دهید.

$$\underline{B} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^4+1^4}+\frac{2n^2}{n^4+2^4}+\cdots+\frac{(n-1)n^2}{n^4+(n-1)^4}\right)=\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$$

$$\underline{C} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2x^2}=\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2x^2}$$

❋ ۳- درستی حد مجموع زیر را نشان دهید.

$$D = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+\frac{1}{n}}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{n}{n}}\right)=\int_0^1 2^x dx$$

<u>راهنمایی</u>: از نامساوی $n \le n+\frac{i}{n} \le n+1$ استفاده کنید. یعنی:

$$n \le n+\frac{i}{n} \le n+1 \to \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n+\frac{i}{n}} \le \frac{1}{n} \to \frac{2^{\frac{i}{n}}}{n+1} \le \frac{2^{\frac{i}{n}}}{n+\frac{i}{n}} \le \frac{2^{\frac{i}{n}}}{n}$$

سپس نشان دهید حد مجموع دو سمت نامساوی بالا برابر $\int_0^1 2^x dx$ بوده و با استفاده از قضیه فشار نتیجه را بدست آورید.