

سؤال ۱.

n اتومبیل در یک مسیر دایره‌ای قرار دارند. مجموع سوخت آنها به میزانی است که یک اتومبیل بتواند این مسیر را بطور کامل طی کند. اگر اتومبیلی به اتومبیل دیگر برسد سوخت آن را می‌گیرد. ثابت کنید اتومبیلی وجود دارد که قبل از اتمام سوختش بتواند تمام مسیر را یکبار طی کند.

پاسخ.

با استقرای ساده مسئله را حل می‌کنیم:

پایه‌ی استقرا: به ازای $n = 1$ همان یک اتومبیل به میزان کافی سوخت دارد.

گام استقرا: فرض کنید قضیه برای $n = k$ برقرار است و می‌خواهیم مسئله را برای $n = k + 1$ اتومبیل حل کنیم.

اتومبیلی همانند A وجود دارد که به اتومبیل بعدی B میتواند برسد (اگر هیچ کدام از اتومبیل‌ها نتواند به اتومبیل بعدی خود برسند مجموع سوخت آنها به میزان یک دور کامل نیست). فرض کنید سوخت B را به A بدهیم و B را حذف کنیم. حال k اتومبیل داریم که سوخت آنها برای یک دور کافیست. طبق فرض استقرا اتومبیلی وجود دارد که می‌تواند تمام مسیر را طی کند. همان اتومبیل در بین $k + 1$ اتومبیل نیز می‌تواند مسیر را پیماید. زیرا مسیر از A تا B را می‌تواند با سوخت اتومبیل A طی کند و مابقی مسیر را با سوختی که از دیگر اتومبیل‌ها در حالت k اتومبیل گرفته می‌پیماید.

در نتیجه مسئله به ازای $n = k + 1$ اتومبیل نیز اثبات شد.