دانشکده فنی دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تمرین اول درس ریاضیات مهندسی

طراح

نیما کیاحیرتی

نیمسال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳

سوال ۱

سری فوریه تابع

$$f(x) = |\sin(x)| \quad , \quad -\pi < x < \pi$$

را بدست آورید و سپس حاصل عبارت زیر را پیدا کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}$$

پاسخ:
تابع $|\sin(x)|$ زوج است بنابراین $b_n = 0$ در نتیجه برای محاسبه سری فوریه باید ضرایب a_n و a_0 را بدست آوریم:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(x) dx = \frac{1}{\pi}[-\cos(x)]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|\cos(nx) dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(x)\cos(nx) dx$$

میدانیم: $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

$$\hookrightarrow a_n = \frac{1}{\pi}(\int_{0}^{\pi} \sin((n+1)x) dx - \int_{0}^{\pi} \sin((n-1)x) dx) = \frac{2}{\pi}(\frac{(-1)^{n+1} - 1}{n^2 - 1})$$

با توجه به رابطه بدست آمده مشاهده میشود a_n به ازای n های فرد برابر صفر است که البته با توجه به مخرج کسر برای $n = 1$ باید جداگانه حساب شود که در آنصورت نیز برابر صفر میشود در نتیجه خواهیم داشت:

$$a_{2n} = -\frac{4}{\pi(4n^2-1)}, \quad a_{2n+1} = 0$$

$$|\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx)$$

حال اگر $x = \frac{\pi}{2}$ خواهیم داشت:

$$1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$$

$$\hookrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi-2}{4}$$

سوال ۲ امتیازی

تابع $f(x)$ را میتوان بر حسب سری فوریه آن به شکل زیر بیان نمود:

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}\cos(nx) + \frac{1}{n^3}\sin(nx)$$

حاصل انتگرال زیر را بدست آورید:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)[1+\cos(2x)+\sin(3x)]dx$$

پاسخ:
با توجه به پریودیک بودن تابع با پریود 2π خواهیم داشت:

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}\cos(nx) + \frac{1}{n^3}\sin(nx) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$$

$$\longrightarrow a_0 = \frac{1}{3} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2\pi}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{2(n^2+1)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2x)dx = \frac{\pi}{10}$$

$$b_n = \frac{1}{2n^3} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(3x)dx = \frac{\pi}{54}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)[1+\cos(2x)+\sin(3x)]dx = \frac{106\pi}{135}$$

سوال ۳

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را به کمک سری فوریه بیابید.

$$y'' + \alpha y' - y = f(x)$$

ابتدا سری فوریه مختلط تابع $f(x)$ را حساب کنید و سپس به کمک آن معادله دیفرانسیل را حل کنید.

$$f(x) = e^{-|\frac{x}{2}|} sin(5\pi x), \quad -2 < x < 2, \quad T = 4$$

پاسخ:
ابتدا سری فوریه مختلط $f(x)$ را بدست می آوریم:

$$f(x) = e^{-|\frac{x}{2}|}\sin(5\pi x), \quad -2 < x < 2, \quad T = 4$$

$$c_n = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)e^{-j2\pi\frac{n}{4}x}dx = \frac{1}{4}(\int_{-2}^{0} e^{\frac{x}{2}-\frac{jn\pi x}{2}}\sin(5\pi x)dx + \int_{0}^{2} e^{\frac{-x}{2}-\frac{jn\pi x}{2}}\sin(5\pi x)dx)$$

$$= \frac{1}{8j}(\int_{-2}^{0} e^{\frac{x}{2}-\frac{jn\pi x}{2}}(e^{j5\pi x} - e^{-j5\pi x})dx + \int_{0}^{2} e^{\frac{-x}{2}-\frac{jn\pi x}{2}}(e^{j5\pi x} - e^{-j5\pi x})dx)$$

$$= \frac{1}{8j}([\frac{e^{x(\frac{1}{2}+j5\pi-j\frac{n\pi}{2})}}{\frac{1}{2}+j5\pi-j\frac{n\pi}{2}} - \frac{e^{x(\frac{1}{2}-j5\pi-j\frac{n\pi}{2})}}{\frac{1}{2}-j5\pi-j\frac{n\pi}{2}}]_{-2}^{0} + [\frac{e^{x(\frac{-1}{2}+j5\pi-j\frac{n\pi}{2})}}{\frac{-1}{2}+j5\pi-j\frac{n\pi}{2}} - \frac{e^{x(\frac{-1}{2}-j5\pi-j\frac{n\pi}{2})}}{\frac{-1}{2}-j5\pi-j\frac{n\pi}{2}}]_{0}^{2})$$

$$\hookrightarrow c_n = \frac{20jn\pi^2(e^{-1}(-1)^n - 1)}{(1-2jn\pi-n^2\pi^2+100\pi^2)(1+2jn\pi-n^2\pi^2+100\pi^2)}$$

حال خواهیم داشت:

$$y = \sum_{-\infty}^{\infty} c'_n e^{j\frac{n\pi}{2}x}, \quad y' = \sum_{-\infty}^{\infty}$$

در نهایت با توجه به صورت سوال و جایگذاری روابط بالا در آن خواهیم داشت:

$$y'' + \alpha y' - y = f(x)$$

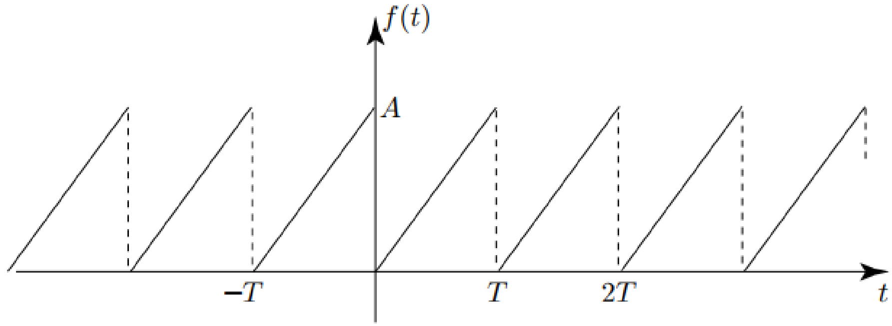
$$\hookrightarrow \sum_{-\infty}^{\infty}(-\frac{n^2\pi^2}{4} + \frac{\alpha jn\pi}{2} - 1)c'_n e^{j\frac{n\pi}{2}x} =$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{20jn\pi^2(e^{-1}(-1)^n - 1)}{(1-2jn\pi-n^2\pi^2+100\pi^2)(1+2jn\pi-n^2\pi^2+100\pi^2)}e^{\frac{jn\pi}{2}x}$$

$$\hookrightarrow c'_n = \frac{80jn\pi^2(e^{-1}(-1)^n - 1)}{(1-2jn\pi-n^2\pi^2+100\pi^2)(1+2jn\pi-n^2\pi^2+100\pi^2)(2\alpha jn\pi - n^2\pi^2 - 4)}$$

سوال ۴

یک سیگنال ولتاژ متناوب به صورت زیر داریم:



شکل ۱: تابع$f(t)$ (سوال ۴)

الف)شکل مختلط سری فوریه سیگنال داده شده، $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$، را بدست آورید که در آن $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.
ب)با در نظر گرفتن رابطه پارسوال $\sum_{-\infty}^{\infty} |C_n|^2$ را بدست آورید.
پاسخ:

$$f(t) = \frac{A}{T}t, \quad f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2n\pi}{T}t}$$

الف)

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A}{T} t e^{-j\frac{2n\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T}\left[\frac{e^{-j\frac{2n\pi}{T}t}}{\frac{4n^2\pi^2}{T^2}} - \frac{te^{-j\frac{2n\pi}{T}t}}{\frac{2jn\pi}{T}}\right]_0^T$$

$$\hookrightarrow c_n = -\frac{T}{2jn\pi}$$

ب)

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A^2}{T^2} t^2 dt = \frac{A^2}{T^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^T = \frac{A^2}{3}$$

سوال ۵

سری فوریه مختلط $f(x) = \sin^3 x \cos 2x$ را بدست آورید و سپس به کمک رابطه پارسوال حاصل رابطه $\int_0^\pi \sin^6 x \cos^2 2x$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$f(x) = \sin^3(x)\cos(2x) = (\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j})^3(\frac{e^{2jx} + e^{-2jx}}{2}) =$$

$$\frac{(e^{3jx} - 3e^{jx} + 3e^{-jx} - e^{-3jx})(e^{2jx} + e^{-2jx})}{-16j}$$

$$\hookrightarrow f(x) = \frac{e^{5jx} - e^{-5jx} + 4e^{jx} - 4e^{-jx} - 3e^{3jx} + 3e^{-3jx}}{-16j}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^6(x)\cos^2(2x)dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = (\frac{1}{16})^2 + (\frac{1}{16})^2 + (\frac{4}{16})^2 + (\frac{4}{16})^2 + (\frac{3}{16})^2 + (\frac{3}{16})^2$$

$$\int_0^\pi \sin^6(x)\cos^2(2x)dx = \frac{31\pi}{128}$$

سوال ۶

اگر $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}\cos nx + \frac{n}{n^3+1}\sin nx$ باشد حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\sin^2 x + \cos 5x)^2 \sin 3x$$

پاسخ:

با استفاده از اتحاد های مثلثاتی رابطه I به صورت زیر ساده میشود:

$$\frac{1}{16}\int_{-\pi}^{\pi}(-5\sin(x)-5\sin(2x)+8\sin(3x)+\sin(4x)-4\sin(5x)-2\sin(6x)$$
$$+\sin(7x)+5\sin(8x)-sin(10x))f(x)dx$$

همچنین با توجه به صورت سوال میدانیم:

$$a_n=\frac{1}{n^3+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx,\quad b_n=\frac{n}{n^3+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{\pi}{16}(-5b_1-5b_2+8b_3+b_4-4b_5-2b_6+b_7+5b_8-b_10)$$

$$=\frac{\pi}{16}(-\frac{5}{2}-\frac{10}{9}+\frac{24}{28}+\frac{4}{65}-\frac{20}{126}-\frac{12}{217}+\frac{7}{344}+\frac{40}{513}-\frac{10}{1001})=-0.176\pi$$

سوال ۷

سری فوریه تابع $f(x)=\sin^7(x)$ را:

الف) در بازه $-\pi<x<\pi$ بدست آورید.

ب) در بازه $0<x<\pi$ بدست آورید.

پاسخ:

الف)

$$\sin^7(x)=(\frac{1-\cos(2x)}{2})^3\sin(x)=\frac{35}{64}\sin(x)-\frac{21}{64}\sin(3x)+\frac{7}{64}\sin(5x)-\frac{1}{64}\sin(7x)$$

ب)

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}(\frac{35}{32}-\frac{7}{32}+\frac{7}{160}-\frac{1}{224})=\frac{32}{35\pi}$$

$$b_n=0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^7(x)\cos(2nx)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\frac{35}{64})\sin(x)\cos(2nx) - \frac{21}{64}\sin(3x)\cos(2nx) + \frac{7}{64}\sin(5x)\cos(2nx) \\ -\frac{1}{64}\sin(7x)\cos(2nx))dx$$

$$\hookrightarrow a_n = \frac{2}{\pi}(\frac{35}{32}(\frac{1}{1-4n^2}) - \frac{21}{32}(\frac{3}{9-4n^2}) + \frac{7}{32}(\frac{5}{25-4n^2}) - \frac{1}{32}(\frac{7}{49-4n^2}))$$

$$\sin^7(x) = \frac{32}{35\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2nx)$$

سوال ۸ امتیازی

چنانچه $f(x)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب 2π بوده و مقدار متوسط آن صفر باشد با جایگذاری ضرایب در بسط فوریه تابع نشان دهید که میتوان $f(x)$ را به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x')\cos(n(x'-x))dx'$$

پاسخ: با توجه به اینکه در صورت سوال گفته شده است متوسط تابع صفر است در نتیجه متوجه میشویم که این تابع یک تابع فرد است پس خواهیم داشت:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x')\cos(nx')dx' = 0$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x')\sin(nx')dx'$$

$$\hookrightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$
$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x') \sin(nx') \sin(nx) dx'$$

از روابط مثلثاتی میدانیم:

$$\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a)\cos(b)$$

$$\hookrightarrow f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x')(\cos(n(x'-x)) - \cos(nx)\cos(nx'))dx'$$
$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\int_{-\pi}^{\pi} f(x') \cos(n(x'-x))dx' - \cos(nx) \int_{-\pi}^{\pi} f(x') \cos(nx')dx')$$

با توجه به اینکه $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x') \cos(nx')dx' = 0$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x') \cos(n(x'-x))dx'$$

نکات کلی درباره تمرین

- در صورتی که در تمرین هرگونه ابهام و یا سوالی دارید می‌توانید با نیما کیاحیرتی در ارتباط باشید.
- در صورتی که سوالی از تمرین دارید که ممکن است برای دیگران نیز مفید باشد،آن را در گروه درس مطرح کنید.
- مشورت و همفکری با دوستان خود هنگام نوشتن تمرین کاری مفید و سازنده است و از انجام آن پرهیز نکنید، اما این کار باید در راستای فهم درس و تمرین باشد و از کپی‌کردن تمارین یکدیگر خودداری کنید.
- پاسخ های خود را به صورت یک فایل مرتب به فرمت PDF در سامانه درس با فرمت نامگذاری Engmath-HWNum-SID بارگذاری نمایید.