محمد دانالو ۸۱۰۱۰۰۰۸۴

تکلیف هفته هفتم گسسته

۱

$$\left.\begin{array}{l} m^n \mid n^m \\ n^k \mid k^n \end{array}\right\} \Rightarrow m^k \mid k^m$$

$$\left.\begin{array}{l} m^n \mid n^m \xrightarrow{\wedge k} m^{kn} \mid n^{km} \\ n^k \mid k^n \xrightarrow{\wedge m} n^{km} \mid k^{mn} \end{array}\right\} \Rightarrow m^{kn} \mid k^{mn} \Rightarrow \boxed{m^k \mid k^m}$$

۲

$$a_n = 10 + n^2$$

$$a_k = 10 + k^2$$
$$a_{k+1} = 10 + (k+1)^2 = 10 + 1 + k^2 + 2k$$

$$\gcd(10+k^2,\ 10+k^2+2k+1) = \gcd(10+k^2,\ 2k+1)$$

$$d \mid 10+k^2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d \mid 20+2k^2 \\ d \mid 2k^2+k \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d \mid 20-k \Rightarrow d \mid 40-2k \\ d \mid 2k+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{d \mid 41}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d=1 \\ d=41 \end{array}\right. \xrightarrow{41>1} \boxed{d=41}$$

۳

$$ab = cd \qquad T_m = a^m + b^m + c^m + d^m$$

الف)

$$T_1 = a+b+c+d \Rightarrow aT_1 = a^2 + ab + ac + ad = (a+c)(a+d)$$

فرض کنیم T_1 اول است پس:

$$T_1 = \frac{(a+c)(a+d)}{a} = \frac{a+c}{a} \times a+d = \underbrace{\left(1+\frac{c}{a}\right)}_{\neq 1}(a+d)$$

$$\Rightarrow a+d = 1 \quad \text{خ}$$

a، d طبیعی هستند

پس T_1 مرکب است

ب) مشابه الف

$$T_m b^m = c^m d^m + b^m b^m + c^m b^m + d^m b^m$$
$$\Rightarrow T_m = \frac{(c^m+b^m)(b^m+d^m)}{b^m}$$

اگر T_m اول باشد یا $\frac{c^m+b^m}{b^m}$ برابر است یا $\frac{b^m+d^m}{b^m}$ پس چون هر ۲ مخالف ۱ هستند پس T_m مرکب است

$$T_m = \Big(\underbrace{1+\frac{c^m}{b^m}}_{\neq 1}\Big)\big(\underbrace{b^m+d^m}_{1}\big) \Rightarrow b^m + d^m = 1 \quad \text{خ} \Rightarrow T_m \text{ مرکب}$$

ج) چون T_m عدد مرکب است پس

$n^{2\times s}-1 \qquad n\geq 2$

چون، $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+\dots+x+1)$

پس، $n^{2\times s}-1=(n^2)^s-1=\underbrace{(n^2-1)}_{\in\mathbb{Z}}\underbrace{(\cdots)}_{\in\mathbb{Z}}$

$\Rightarrow$ توانستیم $n^{2\times s}-1$ را بصورت حاصلضرب دو عدد صحیح بنویسیم پس

$$\boxed{n^{2\times s}-1\notin P}$$

(۴)

الف) $15x^2-7y^2=9 \qquad 3|9 \Rightarrow 3|15x^2-7y^2 \Rightarrow 3|-7y^2 \Rightarrow 3|y^2$

$\Rightarrow \boxed{y=3k}$

$\Rightarrow 15x^2-63k^2=9 \Rightarrow 15x^2=9(1+7k^2) \Rightarrow 9|15x^2 \Rightarrow 3|x^2 \Rightarrow 3|x$

$\Rightarrow x=3p$

$\Rightarrow 15\times 9p^2-7\times 9k^2=9$

$\Rightarrow 15p^2-7k^2=1 \Rightarrow 15p^2=7k^2+1$

$k\neq 3\alpha \Rightarrow k^2\overset{3}{\equiv}1 \Rightarrow 7k^2\overset{3}{\equiv}1 \Rightarrow 7k^2+1\overset{3}{\equiv}2 \Rightarrow 15p^2\overset{3}{\equiv}2$ ✗

پس معادله جواب ندارد

ب) $x^2+y^2+z^2=2xyz$

اگر بتوان عبارت فوق را تشکیل داد حتما یکی از ۳ عدد x و y و z زوج هستند. فرض کنیم $x=2a$ است پس

$4a^2+y^2+z^2=4ayz$

اگر y و z فرد باشند،

$(2k+1)^2=4k^2+1+4k=4m+1 \Rightarrow$ بر ۴ بخش‌پذیر نیست

پس حاصل جمع y و z بر ۴ نمی‌تواند بخش‌پذیر باشد پس رابطه برقرار نیست

پس y و z حتما زوج هستند،

پس ، $x=2a \quad y=2b \quad z=2c$

$$4a^2+4b^2+4c^2=2\times2a\times2b\times2c = 4abc$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=4abc \quad *$$

همچنین نشان دادیم اگر $x^2+y^2+z^2=2^n xyz$ باشد و اگر هر ۳ تای x, y, z زوج باشند تبدیل می‌شود

$a^2+b^2+c^2=2^{n+1}abc$

چون از معادله‌ی * باز هم تبدیل می‌شود a, b, c زوج هستند پس x, y, z به ازای $\forall k\in\mathbb{N}$ وقتی k بار تقسیم بر ۲ می‌شوند باید زوج باشند تنها عددی که چنین ویژگی‌ای دارد ۰ است

پس $\boxed{x=y=z=0}$

۵

الف) $(p-1)! \overset{p}{\equiv} -1$ ؛ قضیه‌ی ویلسون $\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \overset{p}{\equiv} (-1)^{\frac{p+1}{2}}$

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)!\left(\frac{p-1}{2}\right)! \overset{p}{\equiv} (-1)^{\frac{p-1}{2}}\times\left(\frac{p-1}{2}\right)!\times\left(\frac{p+1}{2}\right)!\times\left(\frac{p+3}{2}\right)!\times\dots\times(p-1)$$

$$\overset{p}{\equiv}(-1)^{\frac{p-1}{2}}\underbrace{(p-1)!}_{-1}\overset{p}{\equiv}(-1)^{\frac{p-1}{2}}\times(-1)\overset{p}{\equiv}\boxed{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}$$

ب) چون $p\overset{4}{\equiv}1$ پس $p=4k+1$

$$\boxed{(-1)^{\frac{p+1}{2}}=(-1)^{2k+1}=-1 \checkmark}$$

پس $\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2$ طبق الف هم‌ارز با ۱- است

$p\overset{4}{\equiv}3$ پس $p=4k+3$

$$\boxed{(-1)^{\frac{p+1}{2}}=(-1)^{2k}=1 \checkmark}$$

پس $\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2$ طبق الف هم‌ارز ۱ است

ج) $1^2\times3^2\times5^2\times\dots(p-4)^2(p-2)^2\overset{p}{\equiv}1\times1\times3\times3\times\dots(p-4)(p-4)(p-2)(p-2)$

$$\overset{p}{\equiv}1\times(1-p)\times3\times(3-p)\times\dots(p-4)(-4)(p-2)(-2)$$

$$\overset{p}{\equiv}(p-1)!\times(-1)^{\frac{p-1}{2}}\overset{p}{\equiv}(-1)(-1)^{\frac{p-1}{2}}\overset{p}{\equiv}\boxed{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}$$