DATE / / SUBJECT: ۸۱۰۱۰۰۰۸۴ شماره دانشجویی : محمد امانلو

در تمرین‌های زیر، انتگرال دوگانه را روی ناحیه R مشخص شده محاسبه کنید

2) $\iint_R \frac{y}{x^2y^2+1}\,dA$ R: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ $\rightarrow \int_0^1\int_0^1 \underbrace{\frac{y}{x^2y^2+1}\,dx}_{\tan^{-1}(xy)}\,dy = \int_0^1 \tan^{-1}(y)\,dy$

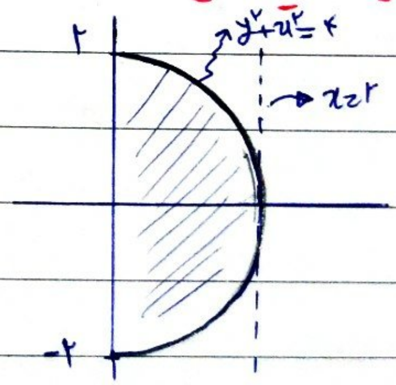
$\rightarrow \int_0^1 \tan^{-1}y\,dy = y\tan^{-1}y\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{y}{1+y^2}\,dy = y\tan^{-1}y\Big|_0^1 - \frac{\ln(y^2+1)}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2} = 1.43$

حجم ناحیه‌ای را بیابید که از بالا به رویه $z=4-y^2$ از پایین به مستطیل $0\le y\le 2$ و $0\le x\le 1$ محدود است

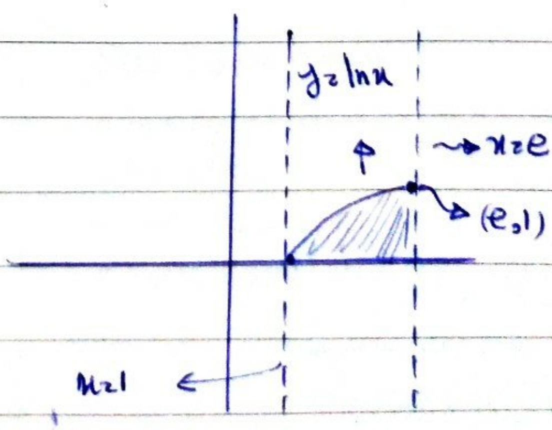
$V = \iint_R (4-y^2)\,dA = \int_0^1\int_0^2 (4-y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[4y-\frac{y^3}{3}\right]_0^2 dx = \int_0^1 \frac{16}{3}\,dx = \boxed{\frac{16}{3}}$

در تمرین‌های زیر ناحیه انتگرال‌گیری را رسم کرده و انتگرال دوگانه معادل با ترتیب انتگرال‌گیری معکوس بنویسید.

2) $\int_0^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x\,dy\,dx = \int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-y^2}} 6x\,dx\,dy$



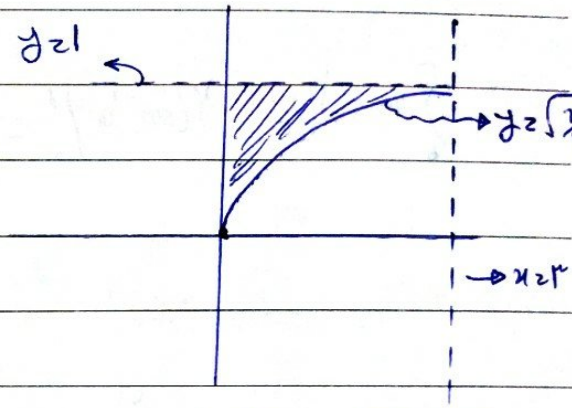
4) $\int_0^e\int_0^{\ln x} xy\,dy\,dx = \int_0^1\int_{e^y}^{e^1=e} xy\,dx\,dy$



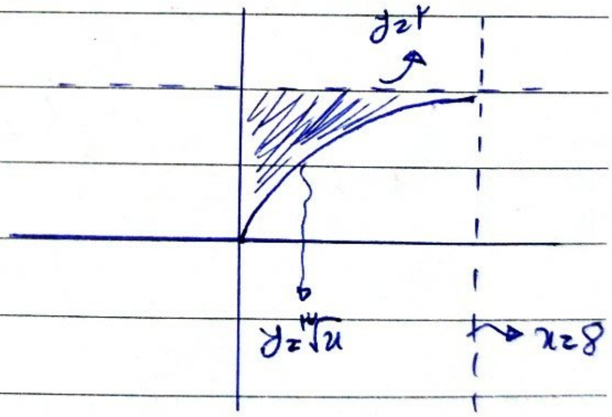
DATE / / SUBJECT:

در تمرین های زیر، ناحیه انتگرال گیری را رسم کرده، ترتیب انتگرال گیری را معکوس کنید، انتگرال را محاسبه نمایید.

2) $$\int_0^3\int_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}}^1 e^{y^3}\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{3y^2} e^{y^3}\,dx\,dy = \int_0^1 3y^2 e^{y^3}\,dy = \left[e^{y^3}\right]_0^1 = \boxed{e-1}$$



4) $$\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\,dx}{y^4+1} = \int_0^2\int_0^{y^3} \frac{dx\,dy}{y^4+1} = \int_0^2 \frac{y^3\,dy}{y^4+1} = \left[\frac{\ln(y^4+1)}{4}\right]_0^2 = \boxed{\frac{\ln(17)}{4}}$$



حجم جسمی را بیابید، در ربع هشتم اول واقع و به صفحات مختصات و استوانه $x^2+y^2=4$ و صفحه $z+y=3$ محدود است.

$$z+y=3 \to z=y+3 \to V=\iint_R -(y-3)\,dA \quad , \quad R: 0\leq x\leq 2 \quad , \quad 0\leq y\leq\sqrt{4-x^2}$$

$$\to V=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} -(y-3)\,dy\,dx=\int_0^2\left(3\sqrt{4-x^2}-\frac{4-x^2}{2}\right)dx=\int_0^2 3\sqrt{4-x^2}\,dx-\left[2x-\frac{x^3}{6}\right]_0^2$$

$$\int_0^2 3\sqrt{4-x^2}\,dx=\left[\frac{3}{2}x\sqrt{4-x^2}+6\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2 \to V=3\pi-\frac{8}{3}=\boxed{\frac{9\pi-8}{3}}$$

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

2) $$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}\,dy\,dx$$

$$x=r\cos\theta \quad , \quad y=r\sin\theta \to J_{(r,\theta)}=r$$

$$\to =\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{2r}{(1+r^2)^2}\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{-1}{1+r^2}\right]_0^1 d\theta=\left[\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=\boxed{\pi}$$

4) $$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\ln(x^2+y^2+1)\,dx\,dy$$

$$x=r\cos\theta \quad , \quad y=r\sin\theta$$

$$\to \int_0^{2\pi}\int_0^1\ln(r^2+1)\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{(r^2+1)(\ln(r^2+1)-1)}{2}\right]_0^1 d\theta$$

$$\to =\int_0^{2\pi}\left(\left(\frac{2\ln 2-1}{2}\right)\right]d\theta=\boxed{\pi(\ln 4-1)}$$

حجم نواحی را بیابید:

2) ناحیه‌ای در یک هشتم اول که به وسیله صفحات مختصات، صفحه $x+z=2$ و استوانه $x=4-y^2$ محصور شده است.

$$y+z=2 \to z=2-y \to 0\le z\le 2-y$$

$$x=4-y^2 \to y=\sqrt{4-x} \to 0\le y\le \sqrt{4-x}$$

$$\Big\} \to V=\int_0^4\int_0^{\sqrt{4-x}}\int_0^{2-y} dz\,dy\,dx$$

$$\to V=\int_0^4\int_0^{\sqrt{4-x}}(2-y)\,dy\,dx=\int_0^4\left[2\sqrt{4-x}-\frac{4-x}{2}\right]dx=\left[-\frac{4}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}}+\frac{(4-x)^2}{4}\right]_0^4=\boxed{\frac{20}{3}}$$

4) ناحیه فصل مشترک نواحی داخل استوانه‌های $x^2+y^2=1$ و $x^2+z^2=1$ که یک هشتم آن در شکل زیر نشان داده شده است.

$$x^2+z^2=1 \to z=\sqrt{1-x^2} \to 0\le z\le\sqrt{1-x^2}$$

$$x^2+y^2=1 \to y=\sqrt{1-x^2} \to 0\le y\le\sqrt{1-x^2}$$

$$0\le x\le 1$$

$$\Big\} \to V=8\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz\,dy\,dx$$

چون $\frac{1}{8}$ در شکل است

$$\to V=8\int_0^1(1-x^2)\,dx=8\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{16}{3}$$

فرض کنید که رویه S کره به معادله $x^2+y^2+z^2=1$ باشد، در این صورت محاسبه انتگرال رویه‌ای زیر:

$$I=\iint_S (x^2+y+z)\,dS$$

را پارامتری می‌کنیم: $r(\varphi,\theta)=\sin\varphi\cos\hat{i}+\sin\varphi\sin\theta\hat{j}+\cos\varphi\hat{k}$

$$\to r_\theta=-\sin\varphi\sin\theta\,\hat{i}+\sin\varphi\cos\theta\,\hat{j},\quad r_\varphi=\cos\varphi\,\theta\,\hat{i}+\cos\varphi\sin\theta\,\hat{j}-\sin\varphi\,\hat{k}$$

$$2\,|r_\theta\times r_\varphi|=\sin\varphi \to I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\sin^2\varphi\cos^2\theta+\sin\varphi\sin\theta+\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta$$

$\to |r_\theta\times r_\varphi|$

$$\to I=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta+\frac{4}{3}\cos^2\theta\right)d\theta=\left[-\frac{\pi}{2}\cos\theta\right]_0^{2\pi}+\frac{4}{3}\left[\frac{\cos\theta\sin\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=\frac{4\pi}{3}$$

میدان برداری $F=(yz, 2xz, 3xy)$ روی رویه به معادله‌ی $S=\{(x,y,z)\in R \mid x^2+y^2+z^2=1, \ x,y,z>0\}$

را در نظر بگیرید. اگر n بردار قائم یکه خارجی (رو به بیرون) بر S باشد، انتگرال $I=\iint_S \operatorname{curl}F\cdot n\, ds$ را محاسبه کنید.

$$\operatorname{curl}F=(3x-2x,\ y-3y,\ 2z-z)=(x,-2y,z)\ ,\quad \nabla S=(2x,2y,2z)$$

$$\Rightarrow |\nabla S|=2$$

$$\rightarrow n=\frac{\nabla S}{|\nabla S|}=(x,y,z)\ \rightarrow\ \operatorname{curl}F\cdot n=x^2-2y^2+z^2=-3y^2$$

$$\rightarrow ds=\frac{|\nabla S|}{|\nabla S\cdot \vec{p}|}\underset{(p=k)}{=}\frac{2}{2z}=\frac{1}{z}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\ \rightarrow\ I=\iint_R \frac{-3y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dA$$

$x, y, z \geq 0$ قطبی ←

$$\rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \frac{-3r^2\sin^2\theta}{\sqrt{1-r^2}}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\sin^2\theta\, d\theta=\left(\theta-\frac{\sin(2\theta)}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{\frac{\pi}{2}}$$

D را ناحیه محصور توسط بیضی $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ فرض کنید، مقدار انتگرال حاصل $I=\iint_D (x^2\sin y+x^3+1)\,dA$

$$g(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-1=0\ \rightarrow\ \nabla g=\left(\frac{2x}{4},\frac{2y}{9},0\right)$$

$$D:\ -3\leq x\leq 3\ ,\ -2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}\leq x\leq 2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}\ \rightarrow\ I=\int_{-3}^{3}\int_{-2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}}^{2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}}(x^2\sin y+x^3+1)\,dx\,dy$$

$$\rightarrow I=\int_{-3}^{3}\left(\frac{4}{3}\left(1-\frac{y^2}{9}\right)^{\frac{3}{2}}\times 4\sin y+2\times 2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}\right)dy\ \rightarrow\ \boxed{I=14}$$

DATE / / SUBJECT:

فرض کنید V درون مخروط $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ و درون $\rho = 1-\cos\varphi$ و خارج کره $\rho = \frac{3}{2}$ باشد. مطلوب است محاسبه:

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dv \longrightarrow v: \frac{2\pi}{3} \le \varphi \le \pi \ , \ 0 \le \theta \le 2\pi \ , \ \frac{3}{2} \le \rho \le 1-\cos\varphi$$

$$x = \sin\varphi\,\theta\rho \ , \ y = \sin\varphi\cos\theta\rho \ , \ z = \cos\varphi\rho \longrightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho$$

$$\hookrightarrow I = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\int_{\frac{3}{2}}^{1-\cos\varphi} \rho \, \underbrace{\rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta}_{dv} = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\frac{3}{2}}^{1-\cos\varphi} \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

$$\hookrightarrow I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{(1-\cos\varphi)^4}{4} - \frac{81}{64}\right)\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{47}{80}\, d\theta = \frac{47\pi}{40}$$

$F = (y^2-x^2, x^2+y^2)$ با استفاده از قضیه گرین، از میدان برداری F بر منحنی داده شده، انتگرال بگیرید.

$\hookrightarrow$

(مثلث محدود به خطوط $y=0$ و $y=x$ و $x=1$ است)

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(y^2-x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = -2x+2y$$

$$\longrightarrow \iint_R (-2x+2y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^x (-2x+2y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[-2xy+y^2\right]_0^x dx$$

$$\longrightarrow \int_0^1 -x^2\,dx = \left[\frac{-x^3}{3}\right]_0^1 = \boxed{\frac{-1}{3}}$$

حاصل $I = \iint_D \frac{x+2y}{\cos(x-y)}\,dx\,dy$ که در آن D محدود به ناحیه زیر است را محاسبه کنید: $y=x$, $y=x-1$, $y=-\frac{x}{2}+1$,

$$\left.\begin{matrix} x+2y = u \\ x-y = v \end{matrix}\right\} \longrightarrow x = \frac{u+2v}{3} \ , \ y = \frac{u-v}{3} \longrightarrow J(u,v) = -\frac{1}{9} - \frac{2}{9} = \frac{-1}{3}$$

$D: y = \frac{-x}{2}$

$$\hookrightarrow y = \frac{-x}{2} : u=0 \ , \ y = \frac{-x}{2}+1 : u=2 \ , \ y = x-1 : v=1 \ , \ y=x : v=0$$

$$\hookrightarrow I = \int_0^1\int_0^2 \frac{u}{\cos v}\underbrace{\left(\frac{-1}{3}\right)}_{J(u,v)} du\,dv = \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}\right)(2)\frac{1}{\cos v}\,dv = \frac{-2}{3}\left[\ln(\tan x + \sec x)\right]_0^1$$

$$\hookrightarrow \boxed{I = -0{,}817}$$

مطلوب است محاسبه انتگرال سطح $\iint_S F\cdot n\, ds$ که در آن $F=(2xz,\ 1-4xy^2,\ 2z-z^2)$ که رویه جسم محصور

به سطحی رویه $z=6-2x^2-2y^2$ ، صفحه xy است.

$g = z+2x^2+2y^2-6=0 \rightarrow \nabla g=(4x,\ 4y,\ 1) \rightarrow |\nabla g| = \sqrt{16x^2+16y^2+1}$

$\rightarrow n = \dfrac{\nabla g}{|\nabla g|} = \dfrac{(4x,4y,1)}{\sqrt{16x^2+16y^2+1}} \rightarrow F\cdot n = \dfrac{8x^2z+4y-16y^3+2z-z^2}{\sqrt{16x^2+16y^2+1}}$

$\rightarrow ds = \dfrac{|\nabla g|}{\cancel{|\nabla g\cdot k|}}\, dA \quad \rightarrow \iint_R (8x^2z+4y-16xy^3+2z-z^2)\, dA$, $z=0$ صفحه xy $\rightarrow x^2+y^2=3$

$(D=k)$

$\rightarrow \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} (32x^4+48x^2+8x^2y^2+4y-16xy^3-24+20y^2-4y^4)\, dy\, dx =$

$\rightarrow \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \dfrac{\sqrt{3-x^2}}{15}(256x^4+2244x^2-324)\, dx \rightarrow 142\pi$

درستی قضیه گرین را برای میدان برداری $F=(xy^2+x^2,\ 4x-1)$ روی مسیر مثلثی با رئوس $(-3,0)$ ، $(0,0)$ ، $(0,3)$ بررسی کنید

$\operatorname{div} F = \dfrac{\partial}{\partial x}(xy^2+x^2) + \dfrac{\partial}{\partial y}(4x-1) = y^2+2x \rightarrow \int_{-3}^{0}\int_{0}^{x+3} (y^2+2x)\, dy\, dx = \int_{-3}^{0} \dfrac{x^3+15x^2+45x+}{3}$

$\rightarrow \boxed{\dfrac{-9}{4}}$ مسیرهای مثلث را تقسیم می‌کنیم : ① $C_1: R_1(t) = 0\hat{i}+t\hat{j} \rightarrow dx=0,\ dy=dt$

$\rightarrow \int_0^3 (0)\, dt = 0$, ② $C_2: R_2(t) = t\hat{i}+(t+3)\hat{j} \rightarrow dx=dt,\ dy=dt$

$\rightarrow \int_{-3}^{0} (t(t+3)^2+t^2)\, dt - (4t-1)\, dt = \dfrac{93}{4}$, ③ $C_3: R_3(t) = t\hat{i}+0\hat{j}$,

$dx=dt$

$\rightarrow \int_{-3}^{0} -(4t-1)\, dt = 21 \rightarrow 21-\dfrac{93}{4} = \boxed{\dfrac{-9}{4}} \rightarrow$ قضیه گرین صحیح است

DATE / / SUBJECT:

فرض کنید T مثلث دارای رئوس $(0,1)$، $(1,0)$، $(0,0)$ باشد انتگرال $\iint e^{\frac{y-x}{y+x}}dA$ را

الف) با تبدیل به مختصات قطبی

ب) با تغییر متغیر های $u=y-x,\ v=y+x$ محاسبه کنید

ب) $\left.\begin{array}{l} u=y-x \\ v=y+x \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} y=\frac{u+v}{2} \\ x=\frac{v-u}{2} \end{array}\right\} \to J(u,v)=\frac{-1}{2}$

$T:\ y=0,\ x=0,\ y=1-x \to y=0:\ -v=u,\ y=1-x:\ v=1,\ x=0:\ u=v$

$$\to \underbrace{\frac{-1}{2}}_{J(u,v)}\int_0^1\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\,du\,dv = \frac{+1}{2}\int_0^1 v(e-e^{-1})\,dv = \frac{+1}{4}(e-e^{-1})$$

الف) $x=r\cos\theta$ ، $y=r\sin\theta \to y=1-x:\ r\sin\theta=1-\cos\theta \to r=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$

$$\to \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} e^{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}}\cdot\frac{1}{2(\cos\theta+\sin\theta)^2}\,d\theta$$

$$u=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta} \to du=\frac{2d\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^2} \to \boxed{\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{u}\,du = \frac{1}{4}(e-e^{-1})}$$