



دانشکده فنی دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تمرین ششم درس ریاضیات مهندسی

طراحان

محمدامین کشمیری

امیرعباس قدیری

نیمسال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳

سوال ۱

معادله لاپلاس زیر را با شرایط مرزی داده شده حل نمایید.

$$\nabla^2 u = 0 \quad , \quad r_0 \leq r \leq r_1 \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} u_\theta(r, 0) = 0 \\ u(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} u(r_0, \theta) = \frac{2}{\pi} \theta \\ u(r_1, \theta) = \cos 3\theta - \cos \theta \end{cases}$$

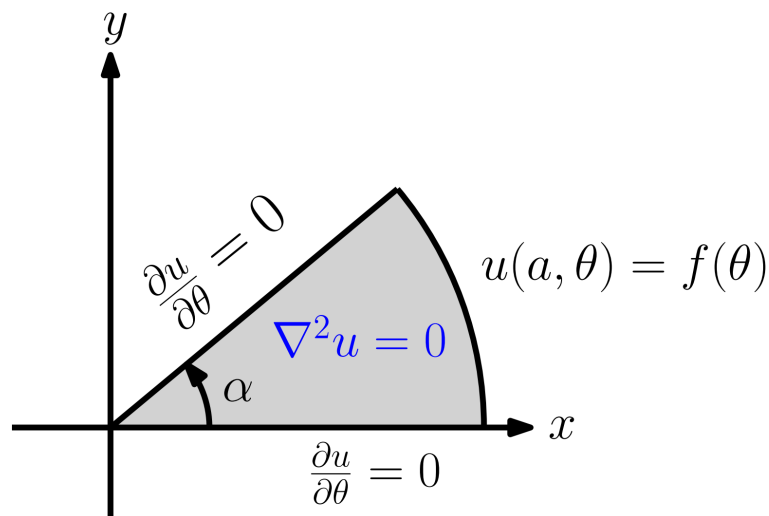
سوال ۲

معادله حرارت زیر با شرایط داده شده را با استفاده از تبدیل فوریه حل کنید.

$$\begin{cases} U_t - U_{xx} = e^{-5|x|} & -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = f(x) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \end{cases}$$

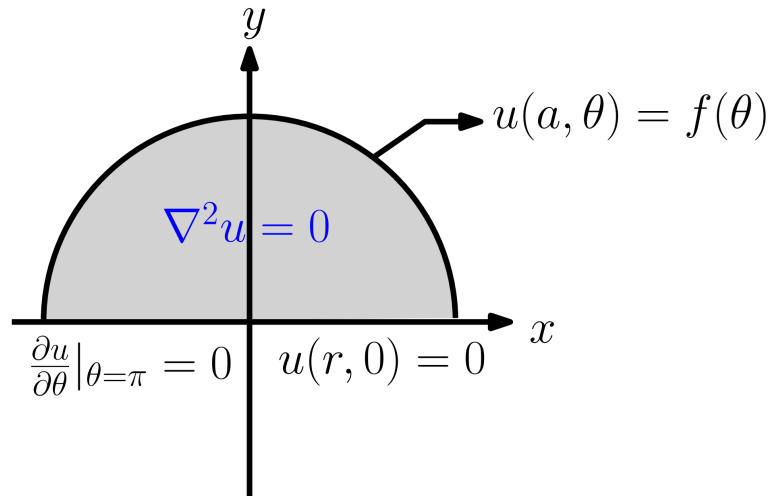
سوال ۳

معادله لاپلاس را در ناحیه زیر با شرایط مرزی مشخص شده حل کنید.



سوال ۴

معادله لاپلاس را در ناحیه زیر با شرایط مرزی مشخص شده حل کنید.



سوال ۵ (امتیازی)

معادله با مشتقات جزئی زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل نمایید.

$$f_{xx} - \frac{1}{\pi^2} f_{tt} = \left(\frac{1}{\pi^2} x^2 - \frac{1}{\pi} x + 2 \right) \sin(t) u(t) - 2t u(t), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t$$

$$\begin{cases} f(x, 0) = 0 \\ f_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(0, t) = e^{-t} u(t) \\ f(\pi, t) = e^{-(t-1)} u(t-1) \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \\ 0, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع پله}$$

سوال ۶

قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی به شکل زیر است.

$$u(x, y) = ax^3 + bx^2 + 30x + cxy^2 + 29y^2 - 10$$

- ضرایب a, b, c را به گونه ای به دست آورید که تابع همساز گردد.
- قسمت موهومی آن یعنی $v(x, y)$ را بیابید.
- اگر داشته باشیم $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ و همچنین $f(0) = -10$ باشد، حاصل $f''(i)$ را بیابید.

سوال ۷

معادلات کوشی ریمان را برای تابع $f(z)$ بررسی کنید و سپس ناحیه ای که در آن $f(z)$ تحلیلی می باشد را مشخص کرده و $f^{(3)}(i)$ را محاسبه کنید.

$$f(z) = \frac{x^3 + xy^2 + x + i(x^2y + y^3 - y)}{x^2 + y^2}$$

سوال ۸

ثابت کنید توابع زیر همساز هستند. سپس، تابع همساز مزدوج v را بدست آورید. $u + iv$ تحلیلی است.

$$u(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2 \quad (\text{الف})$$

$$u(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (\text{ب})$$

سوال ۹

اگر $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ تابعی تحلیلی باشد با فرض این که

$$u(r, \theta) = r \cos(\theta) \ln(r) - r\theta \sin(\theta)$$

$v(r, \theta)$ و $f(z)$ را بیابید و سپس با توجه به آن $f''(i)$ را محاسبه کنید.

نکات کلی درباره تمرین

- در صورتی که در تمرین هر گونه ابهام و یا پرسشی دارید می‌توانید با [محمد امین کشمیری](#) و [امیر عباس قدیری](#) در ارتباط باشید.
- در صورتی که سوالی از تمرین دارید که ممکن است برای دیگران نیز مفید باشد، آن را در گروه درس مطرح کنید.
- مشورت و همفکری با دوستان خود هنگام نوشتن تمرین کاری مفید و سازنده است و از انجام آن پرهیز نکنید، اما این کار باید در راستای فهم درس و تمرین باشد و از کپی کردن تمرین یکدیگر خودداری کنید.
- پاسخ‌های خود را به صورت یک فایل به فرمت PDF در سامانه درس با فرمت نامگذاری Engmath-HWNum-SID بارگذاری نمایید.