ریاضیات گسسته

تمرین پیشرفته چهارم - استقرا

محمد امین هاشمی

تاریخ تحویل ۱۴۰۱/۱۲/۵

سؤال ۱.

در یک صفحه شطرنجی نامتناهی، یک بازی تیمی به این صورت انجام می‌شود: در شروع بازی $n^۲$ مهره روی یک بلوک $n \times n$ از مربع‌های مجاور هم چیده شده است. در هر مرحله می‌توان یک مهره مانند a را از روی یکی از مهره‌های مجاور ضلعی‌اش مانند b رد و مهره b را حذف کرد. اگر خانه مجاور ضلعی b (در همان راستای a) خالی باشد، سپس جای a را هم به همین خانه خالی تغییر می‌دهیم. تمام nهایی را بدست آورید، که بتوان به صورتی بازی را انجام داد، که تنها یک مهره در صفحه باقی بماند؟

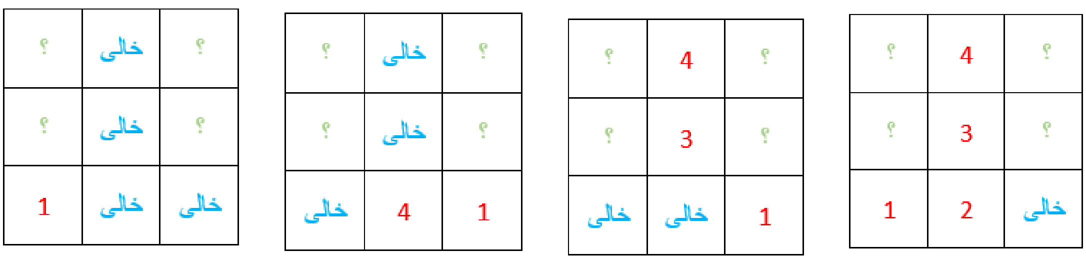
پاسخ :

ابتدا ثابت می‌کنیم به ازای $n = ۳k$ نمی‌توان جوری بازی کرد که در انتها یک مهره باقی بماند:

صفحه را با سه رنگ ۱ و ۲ و ۳ جوری رنگ می‌کنیم، که هر سه خانه متوالی سطری یا ستونی شامل ۳ رنگ ما باشند. حال در هر نوبت بازی ما سه خانه متوالی را انتخاب می‌کنیم و از خانه اول و دوم آن مهره برداشته و به خانه سوم آن اضافه می‌کنیم، طبق رنگ‌آمیزی ما می‌توان گفت از دو رنگ مختلف یک مهره برداشته و به رنگ سوم یک مهره اضافه خواهیم کرد. بنابراین در هر نوبت تعداد مهره‌ها از هر رنگ دقیقا یک واحد تغییر خواهد کرد، یا به عبارتی می‌توان گفت زوجیت هر کدام از رنگ‌ها در هر نوبت در حال عوض شدن است. چون $n = ۳k$ برقرار است. بنابراین تعداد مهره‌ها به ۳ بخش‌پذیر است، یا به عبارتی از هر رنگ تعداد یکسانی مهره وجود دارد. به این دلیل که از هر رنگ تعداد یکسانی مهره وجود دارد بنابراین زوجیت تعداد مهره‌های هر رنگ نیز یکسان است و طبق چیزی که قبل‌تر گفته شد، در هر مرحله نیز زوجیت تعداد مهره‌های هر رنگ یکسان می‌ماند. بنابراین در لحظه آخر اگر بخواهیم یک مهره برای ما در صفحه بماند، یعنی از یک رنگ یک مهره داریم و از دو رنگ دیگر صفر مهره، یا به عبارتی از یک رنگ فرد مهره داریم و از دو رنگ دیگر زوج مهره؛ که این امکان‌پذیر نیست، چون زوجیت هر سه رنگ همیشه یکسان است.

حال ثابت می‌کنیم برای $n = ۳k + ۱$ و $n = ۳k + ۲$ می‌توان جوری بازی را انجام داد، که در انتها یک مهره باقی‌بماند.

اما قبل از این که وارد آن اثبات شویم، یک نوع حرکت را معرفی می‌کنیم، به نام حرکت L. در حرکت L ما سه خانه متوالی که دارای مهره است را با کمک یک مهره متصل به آن حذف می‌کنیم، که در مجموع این چهار مهره به شکل L درمی‌آیند. توجه کنید که خانه مقابل خانه‌ای که قرار نیست حذف شود باید خالی باشد و وضعیت بقیه خانه‌ها برای ما اهمیت ندارد. اثبات حرکت L در زیر نشان داده شده است.



شکل ۱: در اینجا ۴ مهره با شماره‌های ۱ تا ۴ داریم؛ که می‌خواهیم تمامی مهره‌ها را حذف کنیم، بجز مهره شماره ۱.

حال با استقرا روی n ثابت می‌کنیم، که به ازای $n = ۳k + ۱$ و $n = ۳k + ۲$ خواسته مسئله برقرار است.

پایه استقرا:

برای $n = ۱$، که حکم مشهود است.

برای $n = ۲$، کافی است هر کدام از دو مهره پایینی را از روی مهره‌های بالایی رد کنیم و سپس از روی همدیگر به صورتی افقی رد کنیم.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

برای $n = ۴$، به شکل زیر عمل می‌کنیم.

در ابتدا ۲ و ۳ و ۴ را با حرکت L، حذف می‌کنیم و سپس ۵ و ۹ و ۱۳ را به همین طریق، و بعد ۱۴ و ۱۵ و ۱۶ را حذف می‌کنیم. حال ۱۰ را از روی ۶ رد می‌کنیم و بعد ۱ را از روی ۱۰ رد می‌کنیم، سپس ۱ و ۷ و ۱۱ را با حرکت L حذف می‌کنیم، و در انتها با رد کردن ۸ از روی ۱۲ به یک مهره می‌رسیم.

برای $n = ۵$ به شکل زیر عمل می‌کنیم.

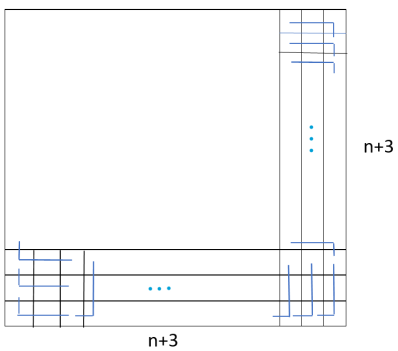
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

اول ۵،۴،۳ و بعد ۱۰،۹،۸ و بعد ۱۵،۱۴،۱۳ و بعد ۲۱،۱۶،۱۱ و بعد ۲۲،۱۷،۱۲ و بعد ۲۵،۲۴،۲۳ را با حرکت L حذف می‌کنیم. سپس ۱ و ۲ را به ترتیب از روی ۶ و ۷ رد می‌کنیم. حال ۱ را از روی ۲ رد می‌کنیم، و در آخر ۲۰،۱۹،۱۸ را با L حذف می‌کنیم.

فرض استقرا: به ازای n، خواسته سوال برقرار است.

حکم استقرا: خواسته مسئله به ازای $n + ۳$ برقرار است.

حال جدول $(n + ۳) \times (n + ۳)$ را در نظر بگیرید. با استفاده از حرکت L سه سطر و سه ستون آخر را حذف می‌کنیم. برای درک بیشتر شکل زیر را مشاهده کنید که در آن نحوه زدن L مشخص شده است.



شکل ۲: هر کدام از حرکات L با شکل آبی مشخص شده و ترتیب L زدن هم از بالا به پایین و بعد از راست به چپ می‌باشد.

حال یک جدول $n \times n$، داریم که طبق فرض استقرا می‌توان جوری بازی کرد که در انتها یک مهره باقی بماند. توجه داشته باشید که در اینجا n باید حداقل سه باشد؛ به دلیل سه حرکت آخر L زدن.

سؤال ۲.

ثابت کنید از بین هر $2^{k+1} - 1$ عدد صحیح می‌توان 2^k عدد انتخاب کرد، که مجموع‌شان بر 2^k بخش‌پذیر باشد.

پاسخ :

با استقرا روی k حکم مسئله را اثبات می‌کنیم:

پایه استقرا: به ازای $k = 0$ مشهود است، زیرا هر عدد صحیحی به عدد ۱ بخش پذیر است.

فرض استقرا: شرط مسئله به ازای $k - 1$ برقرار است.

حکم استقرا: شرط مسئله به ازای k برقرار است.

گام استقرا: در ابتدا $n = 2^{k+1} - 1$ عدد داریم که از بین آن‌ها $2^k - 1$ عدد را انتخاب می‌کنیم و طبق فرض استقرا از بین آن‌ها 2^{k-1} عدد می‌توان انتخاب کرد که مجموعشان بر 2^{k-1} بخش پذیر است، این 2^{k-1} عدد را کنار و اسم آن‌ها را دسته a می‌گذاریم. حال از $n = 2^{k+1} - 1 - (2^{k-1})$ عدد باقی‌مانده باری دیگر $2^k - 1$ عدد را جدا می‌کنیم و از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم که بین این 2^k عدد، 2^{k-1} عدد وجود دارد که مجموعشان بر 2^{k-1} بخش‌پذیر است؛ این 2^{k-1} عدد را به عنوان دسته b کنار می‌گذاریم. در این لحظه ما $n = 2^{k+1} - 1 - 2^{k-1} - 2^{k-1} = 2^k - 1$ عدد داریم و برای سومین بار از فرض استفاده می‌کنیم و از بین این n عدد، 2^{k-1} عدد جدا می‌کنیم و اسم آن‌ها را دسته c می‌گذاریم. می‌دانیم که اگر یک عدد مانند x به 2^{k-1} بخش پذیر باشد، باقی مانده آن نسبت به 2^k برابر صفر یا 2^{k-1} است. حال اگر سه دسته a و b و c را در نظر بگیریم، تمامی این دسته‌ها به 2^{k-1} بخش‌پذیر هستند؛ بنابراین باقی‌مانده آن‌ها نسبت به 2^k همان‌طور که گفته شد دو حالت دارد. از آن‌جایی که سه دسته و دو حالت باقی‌مانده داریم، طبق اصل لانه کبوتری دو دسته وجود دارند که باقی‌مانده یکسان دارند، اگر این دو دسته را جمع بزنیم، مجموع به 2^k بخش‌پذیر است و حکم استقرا اثبات می‌شود.