ریاضیات گسسته

مجموعه سوالات کلاسی چهارم - استقرا

محمد امانلو

سؤال ۱.

تعدادی جزیره در یک اقیانوس قرار دارند. این جزیره‌ها با خطوط آبی به هم وصل هستند (هر خط آبی فقط بین دو جزیره است و حطوط یک‌طرفه هستند). هر یک از این خطوط به یکی از k شرکت موجود تعلق دارند و هر دو خط متعلق به یک شرکت در یک جزیره مشترک‌اند. نشان دهید تمام این جزیره‌ها را می توان به $k+۲$ دسته تقسیم کرد به نحوی که هیچ دو جزیره متعلق به یک گروه با یک خط آبی به هم متصل نباشند.

پاسخ :

حکم را با استقرا روی k ثابت می کنیم.

پایه استقرا: حکم مسئله برای $k=۱$ واضح است.

فرض استقرا: فرض می‌کنیم حکم مسئله برای $k-۱$ نیز برقرار باشد.

اثبات حکم استقرا: حال درستی حکم مسئله را برای k نیز نشان می دهیم.

چون هر دو خط متعلق به یک شرکت در یک جزیره مشترک‌اند، پس تمامی خطوط موجود در یک شرکت یا تشکیل یک مثلث می‌دهند یا تشکیل ستاره.

اگر حداقل یک شرکت موجود باشد که خطوطش تشکیل ستاره می‌دهند، جزیره مرکزی ستاره را حذف می‌کنیم(پس دیگر باقی جزیره‌های این ستاره نمی‌توانند شرکتی تشکیل دهند) و طبق فرض استقرا $k-۱$ شرکت خواهیم داشت که به $k+۱$ گروه تقسیم شده‌اند. در آخر جزیره حذف شده را در یک شرکت به طور تنها قرار می دهیم تا دسته‌ای جداگانه تشکیل دهد.

حالا حالتی را در نظر بگیرید که همه شرکت‌ها مثلثی شکل باشند. شرکتی که از جزایر (u,v,w) تشکیل شده‌باشد را در نظر بگیرید. بقیه $k-۱$ شرکت طبق فرض استقرا می توانند به $k+۱$ دسته تقسیم شوند. حال اگر بتوانیم دو جزیره u و v را در دسته‌های قبلی قرار دهیم و جزیره w را در یک دسته جدید بگذاریم تا شرکتی جدید تشکیل دهد، مسئله حل است.

فرض خلف کنید که نتوان u را در یکی از این $k+۱$ دسته قرار داد، چرا که در هر کدام جزیره ای وجود دارد که به u خط آبی دارد. از آنجایی که $(k-۱) \geq (k+۱)$ پس u به دو جزیره از یک شرکت وصل است و این تناقض است، چرا که u به هر دو این جزایر خط آبی دارد و باید با آنها در یک شرکت باشد که اینطور نیست. پس تناقض است.

پس می‌توان جزایر u و v را در دسته‌های قبلی و جزیره w را در دسته جدید قرار داد و مسئله حل است.

سؤال ۲.

$۲n$ جعبه در یک ردیف به ترتیب با شماره‌های ۱ تا $۲n$ قرار دارند. افیش و فروت در جعبه‌های $۲n$ و $۲n-۱$ یک مهره قرار می‌دهند و پس از آن، هر کس در نوبت خود یکی از مهره‌ها را برداشته و به یکی از جعبه‌های با شماره کوچک‌تر انقال می‌دهد. هرکس که نتواند در نوبت خود حرکتی را انجام دهد بازنده است. اگر افیش حرکت اول را انجام دهد، کدام یک استراتژی برد در این بازی را دارد؟

پاسخ :

فروت استراتژی برد دارد.

این ادعا سوال را با استقرا قوی روی n ثابت می‌کنیم.

پایه استقرا. برای $n=۱$.واضح است که در ابتدا افیش هیچ حرکتی ندارد و فروت برنده بازی است.

فرض استقرا. حال فرض می‌کنیم ادعا به ازای $n=۱,۲,۳,\ldots,k$ درست است.

گام استقرا. نشان می‌دهیم که ادعایمان به ازای $n=k+۱$ نیز برقرار است.

الان $۲(k+۱)$ جعبه داریم که در جعبه‌های $۲(k+۱)$ و $۲k$ مهره داریم. حال افیش در اولین حرکت مهره خود را به جعبه با شماره r می‌برد.

اگر $r=۲s$ بود، آنگاه فروت در نوبت خود مهره را به جعبه $۲s-۱$ می‌برد.

آن‌گاه باتوجه به اینکه $۱ \leq s \leq k$ می‌باشد، بنابرفرض استقرا و با توجه به انیکه نوبت افیش است فروت استراتژی برد خواهد داشت. اگر

$r = ۲s - ۱$ باشد فروت در نوبت خود مهره را به خانه $۲s$ می‌بریم و دوباره با توجه به فرض استقرا و اینکه $۱ \leq s \leq k$ و نوبت افیش می‌باشد، فروت استراتژی برد دارد. بنابراین به کمک استقرا ادعایمان ثابت می‌شود.

سؤال ۳.

همه اعداد طبیعی مانند n را بیابید که به ازای آن‌ها بتوان مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ..., n\}$ را به ۳ زیرمجموعه طوری افراز کرد که مجموع اعضای هر یک از زیر مجموعه‌ها باهم برابر باشند.

پاسخ :

اگر مجموعه $X = \{۱, ۲, ۳, ..., n\}$ را بتوان به ۳ زیرمجموعه با ویژگی مورد نظر افراز کرد آنگاه مجموع اعضای X بر ۳ بخش‌پذیر می‌باشد. مجموع اعضای X برابر است با:

$$۱ + ۲ + ... + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

پس $n = ۳k$ یا $n = ۳k + ۲$ باشد.
پایه اسقرا. برای پایه استقرا حکم سوال را برای $n = ۵, ۶$ ثابت می‌کنیم:

$$n = ۵: \quad \{۱, ۴\}, \quad \{۲, ۳\}, \quad \{۵\}$$

$$n = ۶: \quad \{۱, ۶\}, \quad \{۲, ۵\}, \quad \{۳, ۴\}$$

فرض استقرا. حال فرض می‌کنیم حکم سوال برای n برقرار می‌باشد به طوری‌که $n = ۳k + ۲$ یا $n = ۳k$ می‌باشد
گام استقرا. حال نشان می‌دهیم که حکم برای $n + ۳$ نیز برقرار می‌باشد.
فرض می‌کنیم مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ..., n\}$ به سه زیر مجموعه $I_۱, I_۲, I_۳$ افراز شده است به طوری که جمع اعضای این ۳ زیر مجموعه باهم برابر می‌باشند. حال مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ..., n, n + ۱, n + ۲, n + ۳\}$ به صورت زیر به سه زیرمجموعه تقسیم می‌کنیم.

$$I'_۱ = (I_۱ - \{۱\}) \cup \{n + ۳\}$$

$$I'_۲ = I_۲ \cup \{n + ۲\}$$

$$I'_۳ = I_۳ \cup \{۱, k + ۱\}$$

در این صورت $I'_۱, I'_۲, I'_۳$ افرازی از مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ..., n, n + ۱, n + ۲, n + ۳\}$ می‌باشند به طوری که جمع اعضای آن‌ها باهم برابر می‌باشند.

سؤال ۴.

n مثلث در صفحه داده شده‌اند. آنها صفحه را به بخش‌هایی تقسیم می‌کنند. نشان دهید صفحه را می‌توان با دو رنگ چنان رنگ آمیزی کرد که بخش‌هایی که مرز مشترک دارند همرنگ نباشند.

پاسخ :

حکم را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم.
پایه استقرا: حکم مسئله برای $n = ۱$ واضح است. درون مثلث با سفید و بیرون آن با سیاه رنگ آمیزی می‌شود.
فرض استقرا: فرض می‌کنیم حکم مسئله برای n نیز برقرار باشد.
اثبات حکم استقرا: حال درستی حکم مسئله را برای $n + ۱$ نیز نشان می‌دهیم.

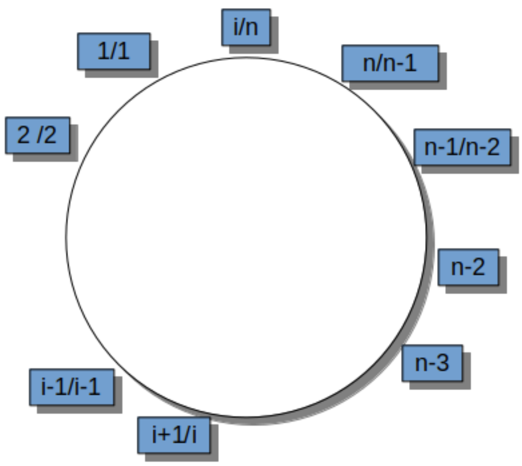
یکی از مثلث‌ها را نادیده بگیرید. طبق فرض استقرا صفحه را می‌توان طوری رنگ آمیزی کرد که بخش‌هایی که مرز مشترک دارند همرنگ نباشند. اکنون مثلث $n+1$ ام را بیفزایید. رنگ نواحی بیرونی مثلث جدید را حفظ کنید و درون مثلث رنگ هر ناحیه را تغییر دهید (سفیدها، سیاه و سیاه ها سفید می شوند). در این صورت رنگ نواحی مرزی مثلث جدید نیز متفاوت خواهند بود و حل مسئله کامل است.

سؤال ۵.

n جعبه با شماره‌های ۱ تا n در اختیار داریم، به طوری که برای هر $1 \le k \le n$ جعبه‌ای وجود دارد که دارای k توپ می‌باشد. هر بار می‌توانیم تعداد توپ‌های یک جعبه را با استفاده از توپ‌های جعبه‌ای که تعداد توپ بیشتری دارد، دوبرابر کنیم.ثابت کنید با تکرار این عمل می‌توان به وضعیتی رسید که برای هر $1 \le k \le n$ در جعبه k ام، دقیقا k توپ قرار داشته باشد.

پاسخ :

با استقرا ضعیف روی n حکم سوال را ثابت می‌کنیم. (فرض می‌کنیم $P(n)$ حکم سوال برای عدد n می‌باشد)
پایه استقرا. $P(1)$ به وضوح برقرار می‌باشد.
فرض استقرا. حال فرض می‌کنیم که $P(n-1)$ درست می‌باشد. ($n > 1$)
گام استقرا. کافیست نشان دهیم که $P(n)$ نیز درست می‌باشد و سپس به کمک استقرا نتیجه می‌گیریم که $P(n)$ برای هر n ای برقرار است.
اگر در جعبه n ام n توپ وجود داشته باشد، آنگاه این جعبه را کنار می‌گذاریم و $n-1$ جعبه باقی مانده را باتوجه به فرض استقرا می‌توان طوری تغییر داد که جعبه k ام شامل k توپ باشد. حال فرض کنید که جعبه i ام شامل n توپ می‌باشد به‌طوری که $1 \le i \le n-1$. حال جعبه i ام را کنار می‌گذاریم و شماره هر یک از جعبه‌های $i+1, i+2, \ldots, n$ را یکی کم می‌کنیم. $n-1$ جعبه باقی‌مانده دارای شرایط مساله برای $n-1$ جعبه می‌باشند پس بنابر فرض استقرا می‌توان این $n-1$ جعبه را طوری تغییر داد که در جعبه k ام k توپ وجود داشته باشد. حال شماره جعبه‌های $i+1, i+2, \ldots, n$ را که تغییر داده بودیم به حالت اول برمی‌گردانیم و جعبه i را نیز به مجموعه جعبه‌هایمان اضافه می‌کنیم. حال جعبه ها را به این صورت دور یک دایره می‌چینیم.



عدد اول شماره جعبه و عدد دوم تعداد توپ‌های جعبه می‌باشد.
حال از جعبه i ام $n-1$ توپ برمی‌داریم و به جعبه n ام می‌دهیم. سپس از جعبه n ام $n-2$ توپ برمی‌داریم و به جعبه $n-1$ ام می‌دهیم. و بعد از آن از جعبه $n-1$ ام $n-3$ توپ برداشته و به جعبه $n-2$ می‌دهیم و این روند را تا جعبه اولی ادامه می‌دهیم. درپایان، جعبه با شماره n دارای n توپ می‌باشد و به ازای هر $1 \le k \le n-1$ یک جعبه با k توپ میان جعبه‌های ۱ تا $n-1$ یافت می‌شود. حال با حذف جعبه n ام و به کمک فرض استقرا، درستی $P(n)$ ثابت می‌شود.

سؤال ۶.

دو تیم A و B داریم که هرکدام شامل ۱۰۰۰ بازیکن می‌باشند. هر بازیکن از یک تیم با هر بازیکن از یک تیم دیگر مسابقه می‌دهد به طوری که هر مسابقه حتما یک برنده دارد و تساوی در آن‌ها رخ نمی‌دهد. ثابت کنید ۱۰ بازیکن از یک تیم می‌توان انتخاب کرد به‌طوری که هر بازیکن

از تیم دیگر به حداقل یکی از این ۱۰ بازیکن باخته باشد.

پاسخ :

حکم کلی‌تر از آنچه در صورت مساله آمده است را اثبات می کنیم:
فرض کنید تیم A تیمی شامل m بازیکن و B تیمی شامل n بازیکن باشد و هر بازیکن از A با هر بازیکن از B مسابقه داده باشد. ثابت می‌کنیم $\lceil log_۲m\rceil$ بازیکن از B وجود دارد که هر بازیکن از A حداقل به یکی از آن‌ها باخته باشد یا $\lceil log_۲n\rceil$ بازیکن از A وجود دارد به‌طوری که هر بازیکن از B حداقل به یکی از آن‌ها باخته باشد.
ابتدا لم زیر را ثابت می کنیم.
لم: اگر n بازیکن داشته باشیم به گونه‌ای که برخی از آن‌ها با هم مسابقه داده‌اند و مسابقه‌های آن‌ها حتما برنده داشته و تساوی درآن‌ها رخ نداده است، آن‌گاه بازیکنی داریم که حداقل نیمی از مسابقه‌های خود را برده باشد.
اثبات لم: فرض کنید چنین چیزی برقرار نباشد و هر بازیکن تعداد باخت‌هایش بیشتر از تعداد بردهای آن باشد. آن‌گاه مجموع بردهای تمام بازیکن‌ها کمتر از مجموع باخت‌های تمام بازیکن‌ها می‌باشد که این تناقض می‌باشد زیرا مجموع بردهای بازیکن‌ها با مجموع باخت آن‌ها برابر است زیرا میان برد هر بازیکن با باخت بازیکن دیگری تناظر یک به یک برقرار می‌باشد.
حال به اثبات حکم‌مان می‌پردازیم. برای این‌کار ابتدا فرض می‌کنیم که $a=\lceil log_۲m\rceil$ و $b=\lceil log_۲n\rceil$ باشد. حال روی مجموع a و b استقرا می‌زنیم.
پایه استقرا: در حالتی که $a+b=۰ (m=۱, n=۱)$ درستی حکم واضح می‌باشد.
فرض استقرا: درستی حکم به‌ازای هر a,b به طوری که $a+b=k$ برقرار می‌باشد.
گام استقرا: حال نشان می‌دهیم که حکم برای هر a,b به‌طوری که $a+b=k+۱$ نیز برقرار است.
با توجه به لم بازیکنی مانند x وجود دارد به‌طوری که حداقل نیمی از بازی‌های خود رو برده است. بدون کم شدن از کلیت مساله فرض می‌کنیم $x \in A$. مجموعه B' را مجموعه بازیکن‌هایی از B در نظر می‌گیریم که x به آن‌ها باخته است. در این صورت داریم: $|B'| \le \frac{n}{۲} < ۲^{b-۱}$. طبق فرض استقرا برای دو تیم A و B' یکی از دو حالت زیر برقرار است.
حالت اول: a بازیکن از B' وجود دارد به طوری که هر بازیکن از A به حداقل یکی از آن‌ها باخته است. که در این صورت حکم سوال برای A و B نیز برقرار می‌باشد.
حالت دوم: $b-۱$ بازیکن از A وجود دارند به‌طوری که هر بازیکن از B' به حداقل یکی از آن‌ها باخته است. در این حالت اگر x را به آن $b-۱$ بازیکن اضافه کنیم، آن‌گاه بازیکنان $B-B'$ به بازیکنان x و B' هم به حداقل یکی از $b-۱$ بازیکن دیگر باخته‌اند. درنتیجه در این حالت نیز حکم سوال برقرار می‌باشد.

سؤال ۷.

مدرسه‌ای n دانش‌آموز دارد که در k کلاس تقسیم شده‌اند. به ازای هر دو کلاس مانند A و B ، فردی از A و فردی از B وجود دارد که با هم دوست هستند. نشان دهید n دانش‌آموز را می توان به $n-k+۱$ گروه تقسیم کرد به نحوی که افراد متعلق به یک گروه با هم دوست باشند.

پاسخ :

حکم را با استقرا روی n ثابت می کنیم.
پایه استقرا: حکم مسئله برای $n=۱$ واضح است.
فرض استقرا: فرض می‌کنیم حکم مسئله برای n نیز برقرار باشد.
اثبات حکم استقرا: حال درستی حکم مسئله را برای $n+۱$ نیز نشان می‌دهیم.
حالت اول. همه کلاس‌ها تک نفره باشند.
اگر همه کلاس‌ها تک نفره باشد حکم درست است (طبق فرض مسئله در این حالت همه با هم دوست هستند، پس می‌توانیم $n-k+۲$ دسته بسازیم و بچه ها را در آنها قرار دهیم).
حالت دوم. همه کلاس‌ها تک نفره نباشند.
در این صورت، فرض کنید در یک کلاس دو نفر مانند A و B وجود دارند. به جای A و B فردی مانند C قرار دهید. می گوییم D با C دوست است هرگاه حداقل با یکی از A و B دوست باشد. حال n نفر داریم که طبق فرض استقرا در $n-k+۱$ گروه قرار می گیرند. فرض کنید D در گروه H باشد. اجازه دهید A در گروه H باقی بماند و B را در گروه جدیدی که خالی است قرار دهید. اعضای گروه H با هم دوست هستند(به جز احتمالا A و B با هم) و با یکی از A و B یا هر دو. هر کس دوست A بود اجازه دهید در H باقی بماند و هر کدام با B دوست بود به گروه او منتقلش کنید. در این صورت تمام اعضای گروه A با هم و تمام اعضای گروه B با هم دوست هستند و حل مسئله

کامل است.

سؤال ۸.

یک جدول $m \times n$ با خانه‌های سفیدرنگ داریم. می‌دانیم رنگ بنفش از ترکیب رنگ‌های آبی و سرخ حاصل می‌شود. در هر یک از خانه‌های این جدول عددی نوشته شده‌است. حداقل p تا $(p \leq m)$ از خانه‌هایی با بزرگ‌ترین اعداد در هر ستون را به رنگ آبی و حداقل q تا $(q \leq n)$ از خانه‌هایی با بزرگ‌ترین اعداد در هر سطر را به رنگ قرمز در می‌آوریم. نشان دهید حداقل به تعداد pq خانه به رنگ بنفش درآمده‌اند.

پاسخ :

حکم را با استقرا روی $m + n$ ثابت می‌کنیم.
پایه استقرا: حکم مسئله برای $m = n = ۱$ واضح است. تنها خانه موجود در جدول به رنگ بنفش در می‌آید.
فرض استقرا: فرض می‌کنیم حکم مسئله برای $m + n - ۱$ نیز برقرار باشد.
اثبات حکم استقرا: حال درستی حکم مسئله را برای $m + n$ نیز نشان می‌دهیم.
اگر تمام خانه‌های ماتریس به رنگ بنفش درآمده باشند، در این صورت تعداد آنها حداقل pq است و مسئله حل است.
در غیر این صورت، از میان خانه‌هایی که فقط یک‌بار رنگ شده‌اند، بزرگ‌ترین عدد M را انتخاب می‌کنیم به نحوی که M از بزرگ‌ترین ها در سطر یا ستون خود (ولی نه هر دو) باشد. فرض کنید M یکی از بزرگ‌ترین اعداد ستونش باشد، اما یکی از بزرگ‌ترین‌های سطرش نیست.
پس حداقل q تا خانه در سطر M وجود دارند که که از M بزرگ‌تر اند.
نشان می‌دهیم این q خانه حتما به رنگ بنفش درآمده‌اند.
می دانیم این q خانه همگی اعدادی بزرگ‌تر از M دارند. حال اگر یکی از آنها به رنگ بنفش نباشد یعنی یکی از بزرگ‌ترین‌های ستونش نیست. در این صورت عددی بزرگ‌تر از M با ویژگی مورد نظر یافت شده و این تناقض است.
سطر عدد M را کنار می‌گذاریم. حال یک ماتریس $n \times (m - ۱)$ به‌دست آورده‌ایم که در آن حداقل q تا از بزرگ‌ترین عددها در هر سطر و حداقل $p - ۱$ تا از بزرگ‌ترین‌ها در هر ستون رنگ شده‌اند. پس طبق فرض استقرا حداقل $q \times (p - ۱)$ تا خانه به رنگ بنفش درآمده‌اند.
این خانه‌ها در ماتریس mn هم بنفش‌رنگ هستند. به علاوه نشان دادیم حداقل p عدد از سطر کنار گذاشته‌شده هم بنفش هستند. پس در ماتریس $m \times n$ حداقل $(p - ۱) \times q + q = pq$ خانه بنفش‌رنگ هستند.

سؤال ۹.

یک رشته، یک دنباله متناهی از صفر و یک است. A یک مجموعه متناهی از رشته‌هاست که برای هر دو رشته دلخواه α و β از آن داریم: $\alpha\beta = \beta\alpha$ (منظور از $\alpha\beta$ رشته‌ای است که از کنار هم قرار دادن دو رشته α و β به دست می‌آید).
ثابت کنید رشته‌ای مانند w وجود دارد که هر رشته دلخواه A را می توان از کنار هم گذاشتن تعدادی w به دست آورد.

پاسخ :

در صورتی که رشته β از کنارهم گذاشتن تعدادی رشته α تولید شود، α را یک سازه β می‌نامیم. طول رشته α را با $|\alpha|$ نشان می‌دهیم. برای حل مسئله دو لم زیر را ثابت می‌کنیم:
لم ۱: اگر $\alpha\beta = \beta\alpha$ باشد، آنگاه α و β یک سازه مشترک دارند.
اثبات لم: حکم را با استقرا روی $|\alpha\beta|$ ثابت می‌کنیم.
پایه استقرا: اگر $|\alpha\beta| = |\alpha| + |\beta| = ۲$ باشد، حکم واضح است.
فرض استقرا: فرض می‌کنیم که حکم برای هر $\alpha\prime$ و $\beta\prime$ که $\alpha\prime\beta\prime = \beta\prime\alpha\prime$ و $|\alpha\prime\beta\prime| \leq |\alpha\beta|$ باشد، برقرار باشد.
اثبات حکم استقرا: حکم را برای α و β به این صورت ثابت می‌کنیم: بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض کنید $|\alpha| \leq |\beta|$.
حال اگر $|\alpha| = |\beta|$ باشد، آنگاه $\alpha = \beta$ ، پس α و β سازه مشترک دارند.
حال فرض کنید $|\alpha| < |\beta|$ و $A = \alpha\beta = \beta\alpha$ باشد. از یک طرف $|\alpha|$ تا رقم اول A همان $|\alpha|$ رقم اول رشته β و از طرف دیگر همان α می‌باشد. بنابراین رشته β به شکل $\beta = \alpha\beta\prime$ می‌باشد که $|\beta\prime| < |\beta|$ و خواهیم داشت:

$$A = \alpha\beta = \alpha\alpha\beta\prime = \beta\alpha = \alpha\beta\prime\alpha$$

در نتیجه:

$$\beta\prime\alpha = \alpha\beta\prime$$

طبق فرض استقرا رشته های α و $\beta\prime$ دارای سازه مشترکی مانند w هستند و چون این سازه مشترک هم α و هم $\beta\prime$ را می‌سازد، رشته $\beta = \alpha\beta\prime$ را نیز می‌سازد. بنابراین w سازه مشترک رشته‌های α و β می باشد.
لم ۲: اگر α و β دو سازه مشترک A بلشند، آنگاه α و β سازه مشترک دارند.
اثبات لم: چون α و β سازه های مشترک A هستند، برای هر k داریم:

$$\underbrace{AA...A}_{k} = \underbrace{\alpha\alpha...\alpha}_{\frac{k|A|}{|\alpha|}} = \underbrace{\beta\beta...\beta}_{\frac{k|A|}{|\beta|}} = X$$

d را بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک $|\alpha|$ و $|\beta|$ در نظر می‌گیریم. فرض می کنیم:

$$X = w_۱w_۲...w_n, n = \frac{k|A|}{d}, |w_i| = d$$

از طرفی چون $X = \alpha\alpha...\alpha$ است، به ازای هر l داریم $w_i = w_{i+\frac{l|\alpha|}{d}}$.
از طرفی دیگر چون $X = \beta\beta...\beta$ است، بنابراین به ازای هر l داریم $w_i = w_{i+\frac{l|\beta|}{d}}$.
با توجه به اینکه d بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک $|\alpha|$ و $|\beta|$ است، اعداد صحیح و مثبت $l_۱$ و $l_۲$ وجود دارند به نحوی که:

$$\begin{cases} l_۱\alpha - l_۲\alpha = d \\ \frac{l_۱|\alpha|}{d} = \frac{l_۲|\beta|}{d} + ۱ \end{cases}$$

بنابراین به ازای هر i داریم:

$$w_i = w_{i+\frac{l_۱|\alpha|}{d}} = w_{i+\frac{l_۲|\alpha|}{d}+۱} = w_{i+۱}$$

پس $w = w_i$ یک سازه مشترک برای α و β می‌باشد.
نتیجه لم ۲: اگر $\alpha_۱, \alpha_۲, ..., \alpha_n$ سازه‌های A باشند، آنگاه α_i ها دارای سازه مشترکی هستند.
یک عضو دلخواه از A را انتخاب می کنیم و آن را α می‌نامیم. برای هر β_i بنا به فرض داریم $\alpha\beta_i = \beta_i\alpha$ ، پس لم ۱ نتیجه می دهد که α و β_i سازه مشترکی دارند که آن را w_i می‌نامیم. حال همه w_i ها را در نظر بگیرید. بنا به نتیجه لم ۲، این رشته‌ها دارای یک سازه مشترک هستند که آن را w می‌نامیم. چون W سازه w_i و w_i سازه β_i است، پس w سازه مشترک همه β_i ها است و بنابراین حکم ثابت شد.