تمرینات بخش ۷-۲ جزوه

(۱) a) $|\bar{z}_1+\bar{z}_2|^2 = |x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i|^2 = (x_1+x_2)^2 +$

$(y_1+y_2)^2 \Rightarrow |\bar{z}_1+\bar{z}_2|^2 = \underbrace{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2}$ ($|z_2|^2$ ، $|z_1|^2$)

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2(x_1x_2 + y_1y_2) = z_1\bar{z}_2 = (x_1x_2 + y_1y_2) +$

$(-x_1y_2 + y_1x_2)i \Rightarrow Re(z_1\bar{z}_2) = x_1x_2 + y_1y_2 \Rightarrow$

$|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\bar{z}_2)$

(۲) $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$

(۳) چون z_1 و z_2 دو بردار غیر هم خط و ناموازی هستند

$\frac{x_1}{x_2} \neq \frac{y_1}{y_2}$

$az_1 + az_2 = 0 \Rightarrow ax_1 + iay_1 + ax_2 + iby_2 = 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = 0 \\ ay_1 + by_2 = 0 \end{cases}$ حالا فرض کنیم که a و b مخالف صفر باشند

$* \Rightarrow \begin{matrix} ax_1 = -bx_2 \\ ay_1 = -by_2 \end{matrix} \Rightarrow \frac{ax_1}{ay_1} = \frac{-bx_2}{-by_2} \Rightarrow$

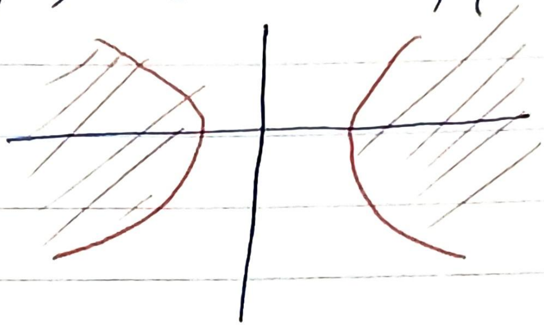
$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Rightarrow$ حکم بدست آمده مخالف فرض است

(۱)

اگر $a=0$ و $b=0$ ⇐ $az_1+bz_2=0$

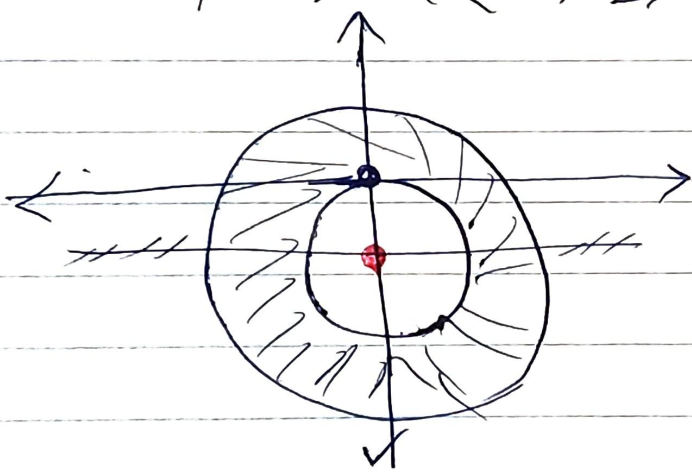
a) $(z_1)^2=(x_1^2-y_1^2+2x_1y_1 i) \Rightarrow Re(z^2)=x^2-y^2$

$Re(z^2)>1 \Rightarrow x^2-y^2>1$



b) $1<|z+i|\leq 2 \Rightarrow$

$1<|x+(y+1)i|\leq 2 \Rightarrow 1<x^2+(y+1)^2\leq 4$



(۵)

$kz^2+akz+a^2=0 \Rightarrow z=\frac{-ak\pm\sqrt{a^2k^2-4ka^2}}{2k} \Rightarrow$

$z=\frac{-a\cancel{k}}{2\cancel{k}}\pm\frac{(\sqrt{4k-k^2}\,a)i}{2k} \Rightarrow k=\frac{\sqrt{4k-k^2}\times a}{2k}$

و $b=\frac{\pm a}{2} \Rightarrow \sqrt{3}\,\frac{a\sqrt{4k-k^2}}{\cancel{2}k}=\frac{a}{\cancel{2}} \rightarrow k=\sqrt{12k-3k^2} \Rightarrow$

$k^2=12k-3k^2 \rightarrow 4k^2=12k \Rightarrow k=0$ یا $k=3$

$A = z^3-(1+4i)z^2-(3-9i)z+14-2i=0$

چون یک ریشه محض دارد

$(xi)^3-(1+4i)(xi)^2+(9i-3)xi+14-2i=0$

$\Rightarrow -x^3i+x^2+4ix^2-9x-3xi+14-2i=0$

$\Rightarrow x^2-9x+14=0 \longrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \quad 7 \\ x=7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=2i}$

$-x^3+4x^2-3x-2=0$

$\Rightarrow A = (z-2i)(z^2-(2i+1)z+(1+7i))=0$

$z^2-(2i+1)z+(1+7i)=0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{-3+4i-4-28i} =$

$i\sqrt{24i+7}) \Rightarrow i(4+3i) = (4i-3) \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2i+1+4i-3 \Rightarrow 3i-1 \\ z_2 = 2i+1+4i+3 = 2-i \end{cases}$

$a+bi \to a=4 \quad b=3 \quad a+bi \quad a^2-b^2=7$

تمرینات کتبی همه H کتاب:

$\frac{1}{2i(\frac{1}{2}-i)} = \frac{1}{i+2} = \frac{1}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} =$

$\frac{2-i}{4+1} = \frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$

10) $\frac{3}{4-2i} = \frac{3}{4-2i} \times \frac{4+2i}{4+2i} = \frac{12+6i}{16+4} = \frac{12}{20} + \frac{6}{20} i$

11) a) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w} \Rightarrow \overline{(a+c)+(b+d)i} = a+c-(b+d)i =$

$\underbrace{(a-bi)}_{\bar{z}} + \underbrace{(c-di)}_{\bar{w}} = \bar{z} + \bar{w}$

b) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w} \Rightarrow \overline{zw} = \overline{((ac-bd)+(ad+cb)i)} =$

$ac-bd-(ad+cb)i = A$

$\bar{z}\bar{w} = (a-bi)(c-di) = ac-bd-(ad+cb)i = B$

$A = B \Rightarrow \overline{wz} = \bar{z}\cdot\bar{w}$

c) $\overline{z^2} = \bar{z} \times \bar{z} = (\bar{z})^2 \Rightarrow \overline{\underbrace{z \times z \times z \cdots \times z}_{n}} = (\bar{z}) \times (\bar{z}) \times$

$\times \bar{z} \times \cdots \bar{z} = (\bar{z})^n \Rightarrow$ @

$z^2 + \frac{1}{2} z + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow 4z^2 + 2z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{8}$

$\Rightarrow z_1 = \frac{-2+\sqrt{12}i}{8}$ $\qquad z_2 = \left(\frac{-2-\sqrt{12}i}{8}\right)$

$\downarrow$ $\qquad \downarrow$

$z_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{4}$ $\qquad z_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{4}$

تمرینات بخش ۷-۱ تا ۷-۵ جزوه

۱) $z = -15 + 8i \rightarrow r = 17 ,\quad \cos\theta = \frac{-15}{17} \quad \sin\theta = \frac{8}{17}$

$\sqrt{z} = \sqrt{r}\ \text{cis}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right) \quad k = 0, 1 \Rightarrow$

$k=0: \sqrt{z} = \sqrt{r}\left(\text{cis}\ \frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{17}\cos\frac{\theta}{2} + i\sqrt{17}\sin\frac{\theta}{2} = 1 + 4i$ ✓

$k=1: \sqrt{z} = \sqrt{r}\ \text{cis}\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) = -\sqrt{17}\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{17} = -1 - 4i$ ✓

$\theta \simeq 2.8 \qquad \frac{\theta}{2} = 1.4$

$\theta > 90$

$\frac{\cos\theta + 1}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{17} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\theta > 90$

$\frac{1 - \cos\theta}{2} = \sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{16}{17} \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

۲)

$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

طرفین تساوی را در $(x-1)$ ضرب می‌کنیم تا بتوانیم به صورت $x^5 = 1$ در آوریم و جواب‌ها را بگیریم.

$(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 - 1 = 0 \rightarrow x^5 = 1$

حالا شروع می‌کنیم به بدست آوردن

$\sqrt[5]{z_0} = 1\ \text{cis}\left(\frac{\theta}{5} + \frac{2k\pi}{5}\right) \Rightarrow \begin{cases} z_1 = (\text{cis}\ 0) = 1 \Rightarrow \\ z_2 = 1\ \text{cis}\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\sqrt{2(\sqrt{5}+5)}}{4} i \\ z_3 = 1\ \text{cis}\ \frac{4\pi}{5} = \frac{-\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} i \end{cases}$

$$\begin{cases} z_۴ = ۱\,cis\,\frac{۷\pi}{۵} = -\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴} - \frac{\sqrt{۱۰-۲\sqrt{۵}}}{۴}i \\ z_۵ = ۱\,cis\,\frac{۸\pi}{۵} = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۴} - \frac{\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}{۴}i \end{cases}$$

۵

$۲r^۲ cis(۲\theta) + r^۲ cis(-۲\theta)$ ~~$۴r^۲cis$~~ $= ۳ \Rightarrow$

$r^۲(۳cis(۲\theta) + sin(۲\theta)i) = ۳+۰i \Rightarrow$

$sin۲\theta = ۰ \rightarrow cos(۲\theta) = ۱$ یا $-۱ \Rightarrow -r^۲ = ۱ \;,\; r^۲ = ۱ \Rightarrow r = ۱$

یا $r = -۱$

$\Rightarrow cos\theta = ۱ \,,\, \frac{۱}{۲} \,,\, -\frac{۱}{۲} \qquad sin\theta = ۰ \,,\, \frac{\sqrt{۲}}{۲} \,,\, -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\theta = ۰ \Rightarrow z = ۱ \checkmark \qquad \theta = \frac{۲\pi}{۲} \Rightarrow z = -\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}i \checkmark$

$\theta = \frac{۴\pi}{۲} \Rightarrow z = -\frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}i$

$\theta = \frac{۳}{۲} = \frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}i \times \theta = \pi \Rightarrow z = -۱ \times \quad \theta = \frac{۵}{۲} \Rightarrow z = \frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}i \times$

$\theta = ۰$ یا $\frac{۲\pi}{۲}$ یا $\frac{۴\pi}{۲} \Rightarrow z = ۱$ یا $-\frac{۱}{۲} \pm \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۸

$(x+1)^6 + (x-1)^6 = 0 \quad (x+1)^6 + (x-1)^6 =$

$((x+1)^2 + (x-1)^2 i)((x+1)^2 - (x-1)^3 i) =$

$(x+1)(x-1)(2-i) \quad \overbrace{(x+1)^2 + i(x+1)(x-1)^2 + (x-1)^2)}^{A}$

$(x+i + (x-1)i) = (x+1)^2 - (-i)(x+1)(x-1) - (x-1)^2 = 0$

$A = x^2 + (2x) + 1 - (x^2-1)i - (x^2-2x+1) = -x^2 i + 4x + i$

$B = x^2 + 2x + 1 + (x^2-1)i - (x^2-2x+1) = \cancel{x^2} i + 4x + i$

① $x - xi + 1 + i = 0 \Rightarrow \boxed{x = i}$

② $x + xi + 1 - i = 0 \Rightarrow x = i$

③

④ $A = 0 \Rightarrow -x^2 i + 4x + i = 0$, $\Delta = 16 + 4i^2 = 12$

$\dfrac{-4+\sqrt{12}}{-2i} = \sqrt{3}i - 2i$

$\dfrac{-4-\sqrt{12}}{-2i} = -\sqrt{3}i - 2i$

⑤

⑥ $x^2 i + 4x - i = 0$, $\Delta = 16 + 4i^2 = 12$

$\dfrac{-4+\sqrt{12}}{2i} = 2i - \sqrt{3}i$

$\dfrac{-4-\sqrt{12}}{2i} = 2i + \sqrt{3}i$

جواب‌ها مطابق فرمول درست است

if $x=1 \Rightarrow x = \pm i \cot(\frac{\pi}{4}) = \pm i \Rightarrow$ ۱ و ۲ ✓

if $x=0 \Rightarrow x = \pm i \cot(\frac{\pi}{12}) = \pm i(-2 \pm \sqrt{3}) =$
- ④ $-2i - \sqrt{3}i$
- ③ $2i + \sqrt{3}i$

if $x=2 \Rightarrow x = \pm i (\cot \frac{5\pi}{12}) = \pm i(2-\sqrt{3})$
- ⑤ $2i - \sqrt{3}i$
- ⑥ $\sqrt{3}i - 2i$

بنابراین همه جواب‌ها در معادله داده شده صدق و درحل درست است.

تمرینات بخش ضمیمه H کتاب

۳) $z = 4\sqrt{3} + 4i$ $\Downarrow$ $\theta = \pi/6$, $r = 8$

$w = -3 + 3i$ $\Downarrow$ $\theta = \frac{5\pi}{4}$, $r = 3\sqrt{2}$ $\Rightarrow z = 8 \operatorname{cis}(\pi/6)$, $w = 3\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}$

$zw = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) = 24\sqrt{2}(\operatorname{cis}(\frac{17\pi}{12}))$

$\frac{z}{w} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{8}{3\sqrt{2}} \operatorname{cis}(\frac{-13\pi}{12})$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{r_1} \operatorname{cis}(0 - \theta_1) = \frac{1}{8} \operatorname{cis}(-\frac{\pi}{6})$

ج) $(1-\sqrt{3}i)^5 = 2 \operatorname{cis}(-\frac{\pi}{3})^5 = 32 \operatorname{cis}(-\frac{5\pi}{3}) = 32 \operatorname{cis}(-\frac{\pi}{3})$ $\Downarrow$ $r = 2$, $\theta = -\frac{\pi}{3}$

$32 - \sqrt{32}\,2i$

۲۸) the fifth root of 32 , $z_0 = 2\,\mathrm{cis}(0)$

$$\sqrt[5]{32} = 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{0+2k\pi}{5}\right) = \begin{cases} 1)\ = 2\,\mathrm{cis}\,0 = 2 \\ 2)\ \mathrm{cis}\,\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt5-1}{2} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{2}\,i \\ 3)\ 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-\sqrt5-1}{2} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{2}\,i \\ 4)\ 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \frac{-\sqrt5-1}{2} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{2}\,i \\ 5)\ 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt5-1}{2} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{2}\,i \end{cases}$$

تمرینات بخش ۷-۶ جزوه

1) $\sin^4\theta$ $\quad (2i\sin\theta)^4 = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^4$, $n=1$

$\Rightarrow 16\sin^4\theta = e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} - 4(e^{2i\theta}e^{-i\theta} + e^{i\theta}e^{-2i\theta}) +$

$6e^{2i\theta}e^{-2i\theta}$ $\Rightarrow 16\sin^4\theta = 2\cos 4\theta - 8\cos(2\theta + 6) \Rightarrow$

$\sin^4\theta = \frac18\cos4\theta - \frac12\cos2\theta + \frac38$

$16\cos^4\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^4 = e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} + 4(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + 6 \Rightarrow$

$\cos^4\theta = \frac18\cos4\theta + \frac12\cos2\theta + \frac38 \Rightarrow (2\cos\theta)^5 = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^5 =$

$e^{5i\theta} + e^{-5i\theta} + 10(e^{-i\theta} + e^{i\theta}) + 5(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) =$

$2\cos5\theta + 20\cos\theta + 10\cos3\theta = 32\cos^5\theta \Rightarrow \cos^5\theta = \frac{2}{32}\cos5\theta + \frac{20}{32}\cos\theta + \frac{10}{32}\cos3\theta$

parsnote

$$\Rightarrow \cos^{5}\theta = \frac{1}{16}\cos 5\theta + \frac{5}{8}\cos\theta + \frac{5}{16}\cos 3\theta$$

(2) $$A = \frac{1-\cos(nx)-i\sin(nx)}{1-\cos x - i\sin x} \times \frac{1-\cos x + i\sin x}{1-\cos x + i\sin x}$$

$\sin nx \cdot \sin x$

$$\frac{1-\cos x + i\sin x - \cos nx + \cos nx\cos x - i\sin x\cos nx - i\sin nx + \cos x\sin nx \dots}{2-2\cos x}$$

$$Re(A) = \frac{1-\cos x - \cos nx + \cos x(\cos nx) + \sin nx\sin x}{2(1-\cos x)} =$$

$$Re(A) = \frac{(1-\cos x) - \cos nx(1-\cos x)}{2(1-\cos x)} + \frac{2\sin nx \cdot \cos\frac{x}{2}\cdot \sin\frac{x}{2}}{2(1-\cos x) = 4\cos\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1-\cos nx}{2} + \frac{\sin nx \sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}} = -\frac{\cos nx}{2} - \frac{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} =$$

$$-\frac{\cos nx}{2}\left(1 + \frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right) = \frac{-\frac{\cos nx}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}\right) = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\cos\frac{(n-1)x}{2}$$ ✓

parsnote

3

$$\left(\frac{i-\tan(x)}{i+\tan x}\right)^n = \frac{i-\tan x}{i+\tan x} = \frac{i\cos x-\sin x}{i\cos x+\sin x} \quad \underline{\underline{\times -i}}$$

$$\frac{\cos x+i\sin x}{\cos x-i\sin x^2} \Rightarrow \left(\frac{i-\tan x}{i+\tan x}\right)^n = \left(\frac{\cos x+i\sin x}{\cos x-i\sin x}\right)^n \quad \underline{\underline{\times \cos x+i\sin x}}$$

$$\left(\frac{(\cos x+i\sin x)^2}{\cos^2 x+\sin^2 x}\right)^n = (\cos x+i\sin x)^{2n} = (e^{ix})^{2n} = e^{2inx}$$

4

با توجه به قضیه ویت داریم که مجموع همه ی ریشه های مختلط صفر : دارنده n ریشه

n ام آن صفر است.

$$\sqrt[n]{z}=1 \Rightarrow z = cis\left(0+\frac{2\pi k}{n}\right) \rightarrow k=0,\dots,n-1$$

$r=1 \quad \theta=0$

$\Rightarrow z_1=1$

$$z_2 = cis\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$z_3 = cis\left(\frac{4\pi}{n}\right) = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)$$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$$z_n = cis\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{n-1}{n}2\pi\right) + i\sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$

ریشه های n ام واحد

$$\sum_{i=0}^{n} z_i = 0 \Rightarrow$$

چون تمام ریشه ها مجموع صفر دارند پس مجموع قسمت حقیقی و موهومی صفر است

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2i\pi}{n}\right) = 1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)}{n} = 0$$

$$\Rightarrow \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)}{n} = -1$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sin\frac{2i\pi}{n} = 0 \Rightarrow 0 + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$$

$$\Rightarrow \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{2(n-1)}{n} = 0$$

۹

با توجه به اینکه $e^{\frac{2\pi i}{5}}$ یکی از ریشه ۵ واحد است و مخالف ۱ است داریم

$$1+z+z^2+z^3+z^4 = \frac{z^5-1}{z-1} \xrightarrow{z=e^{2\pi i/5}} 0$$

$$z + 1 + z^2 + z^3 + 5z^4 + 4z^5 + 4z^6 + 4z^7 + 4z^8 + 5z^9 =$$

$$\underbrace{z+1+z^2+z^3+z^4}_{0} + 4(z^4+z^5+z^6+z^7+z^8) + 5z^9 =$$

$$0 + 4z^4(1+z+z^2+z^3+z^4) + 5z^9 = 5z^9 =$$

$$5e^{\frac{18\pi i}{5}} = 5e^{\frac{(18-10)\pi i}{5}} = 5e^{\frac{8\pi i}{5}} = -5e^{\frac{3\pi i}{5}}$$

یا

$$z^9 = \frac{z^{10}}{z} \Rightarrow 5z^9 = \frac{5z^{10}}{z} = \frac{5\times e^{4\pi i}}{e^{2\pi i/5}} = \frac{5\times(-1)^4}{e^{2\pi i/5}} = \frac{5}{e^{2\pi i/5}}$$

$$\frac{5}{\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}\times\frac{\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5}}{\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5}}=$$

$$\frac{5\left(\operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right)}{1}=5\left(-\cos\frac{3\pi}{5}-i\sin\frac{3\pi}{5}\right)=$$

$$-5\operatorname{cis}\frac{3\pi}{5}=-5e^{\frac{3\pi i}{5}}$$

تمرینات بخش 3H کتاب (ضمیمه)

۴۹) $e^{x+i}=e^{x}(e^{i})=e^{x}(\cos 1+i\sin 1)=e^{x}\cos 1+e^{x}\sin 1\, i$

$\cos 1=0/540$ $\qquad\qquad$ $\sin 1=0/841$

۵۰) $\int e^{(1+i)x}\,dx=\frac{1}{i+1}e^{(1+i)x}=\frac{e^{x}}{2}(1-i)(\cos x+i\sin x)$

$=\frac{e^{x}}{2}\left(\cos x+\sin x+i(\sin x-\cos x)\right)$

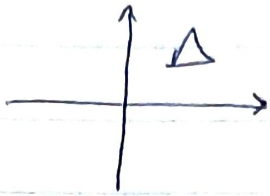
★ $\int e^{(1+i)x}=\int e^{x}(\cos x)+i\int e^{x}\sin x\Rightarrow\int e^{x}\cos x=\frac{e^{x}}{2}(\cos x+\sin x)$

$\int e^{x}\sin x=\frac{e^{x}}{2}(\sin x-\cos x)$

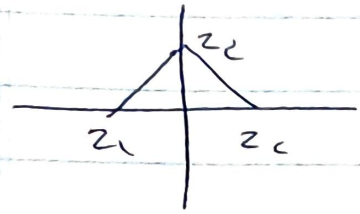
①

تمرینات بخش ۷-۷ جزوه

۱- مثلث دلخواهی را در نظر بگیرید



محورها را وسط ضلع انتقال می‌دهیم تا



عدد حقیقی z_1 و z_2 و عدد موهومی محض z_3 قرار گیرد

z_3 , x

$z_1 = -x \qquad z_2 = x$

$z_3 = 0 + \sqrt{3}\,xi \qquad z_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}\,xi$

$3z_0^2 = 3\left(-\frac{1}{3}x^2\right) = -x^2$

$\Longrightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = x^2 + x^2 - 3x^2 = -x^2 \Longrightarrow$

$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 3z_0^2$

$\frac{1}{z_1-z_2} + \frac{1}{z_2-z_3} + \frac{1}{z_3-z_1} = 0 \Longrightarrow 0 = (z_2-z_3)(z_3-z_1) + (z_1-z_2)$

$(z_3-z)+(z_1-z_2)(z_1-z_2) \Longrightarrow$

$z_2z_3 - z_2z_1 - z_3^2 + z_3z_1 + z_1z_3 - z_1^2 + z_2z_1 - z_2z_3 + z_1z_2 - z_1z_2$

$-z_2^2 + z_2z_3 \Longrightarrow -z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = 0 \Longleftrightarrow$

$-x^2 - x^2 + 3x^2 - x^2 + \sqrt{3}\,xi - \sqrt{3}\,xi = 0$

(٢)

$$y+\frac{1}{y}=2\cos x \Longrightarrow y=e^{ix}=\cos x+i\sin x \Longrightarrow y^n=e^{nix}$$

$$x+\frac{1}{x}=2\cos\theta \Longrightarrow x=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \Longrightarrow x^n=e^{ni\theta}$$

(a) $$\frac{y^n}{x^n}+\frac{x^n}{y^n}=\frac{e^{nix}}{e^{ni\theta}}+\frac{e^{ni\theta}}{e^{nix}}=\underbrace{e^{(nx-n\theta)i}}_{z}+\underbrace{e^{(n\theta-nx)i}}_{\bar z}$$

$$z+\bar z=2\operatorname{Re} z=2\cos(nx-n\theta)=2\cos(n\theta-nx)$$

(b) $$x^n y^n+\frac{1}{x^n y^n}=\underbrace{e^{(n\theta+nx)i}}_{z}+\underbrace{e^{-(n\theta-nx)i}}_{\bar z}=e$$

$$2\operatorname{Re}(e^{n\theta+nx})=2\cos(n\theta+nx)\Longrightarrow$$

(٧)

$$x=\frac{1}{x^4+4}=\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}=$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+1+i)(x-1-i)(x-1+i)}=$$

$$\frac{A}{x-1-i}+\frac{B}{x-1+i}+\frac{C}{x+1+i}+\frac{D}{x+1-i}=\frac{1}{x^4+4}$$

$\Longrightarrow A(x^2+2x+2)(x-1+i)+B(x^2+2x+2)(x-1-i)+C(x^2-2x+2)(x+1-i)+D(x^2-2x+2)(x+1+i)$

$x=1+i \to 2i(4+4i)A=1 \Rightarrow 8(i-1)A=8A=\frac{1}{i-1} \Rightarrow 8A=\frac{1}{1-i} \Rightarrow$

$\frac{-1-i}{2} \Rightarrow \boxed{A=\frac{1+i}{16}}$

$x=1-i \Rightarrow -2i(4-4i)B=1 \Rightarrow (-8i-8)B=1 \Rightarrow B=\frac{-1}{8i+8}=\boxed{B=\frac{-1+i}{16}}$

$x=-1-i \Rightarrow (4+4i)(-2i)C=1 \to (8-8i)C=1 \to C=\frac{1}{8-8i} \Rightarrow \boxed{C=\frac{1+i}{16}}$

$x=-1+i \Rightarrow (4-4i)(2i)D=1 \; (8i+8)D=1 \to D=\frac{1-i}{16}$

$\Longrightarrow \alpha=\frac{1}{16}\left(\frac{-1-i}{x-1-i}+\frac{i-1}{x+i-1}+\frac{1+i}{x+1+i}+\frac{1-i}{x+1-i}\right)=$

$\frac{1}{16}\left(\frac{-2x+4}{x^2-2x+2}-\frac{+2x+2}{x^2+2x+2}\right)=\frac{-\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2-2x+2}+\frac{\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2+2x+2}$

تمرینات بخش ۷-۹ جزوه

$C=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\dots \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n+1)x}{2^n}=$

$\frac{1}{2}\sum_{0}^{+\infty} e^{(2n+1)xi}+e^{-(2n+1)xi}$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{0}^{+\infty} \frac{e^{(2n+1)\alpha i}}{2^n} + \sum_{0}^{+\infty} \frac{e^{-(2n+1)\alpha i}}{2^n}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{\alpha i} + \sum_{1}^{+\infty} e^{\alpha i}\left(\frac{e^{2\alpha i}}{2}\right)^n + e^{-\alpha i} + \sum_{1}^{+\infty}\left(\frac{e^{-2\alpha i}}{2}\right)^n e^{-\alpha i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\alpha i} + e^{\alpha i}\frac{\frac{e^{2\alpha i}}{2}}{1-\frac{e^{2\alpha i}}{2}} + e^{-\alpha i} + e^{-\alpha}\frac{\frac{e^{-2\alpha i}}{2}}{1-2e^{2\alpha i}}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{\alpha i} + \frac{e^{2\alpha}}{2-e^{2\alpha i}} + e^{\alpha i} + \frac{e^{-2\alpha i}}{2-e^{-2\alpha i}}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2e^{\alpha i}}{2-e^{2\alpha i}} + \frac{2e^{-\alpha i}}{2-e^{-2\alpha i}}\right) = \frac{2e^{\alpha i} - e^{-\alpha i} + 2e^{-\alpha i} - e^{\alpha i}}{4+1-2e^{2\alpha i}+e^{-2\alpha i}} =$$

$$\frac{e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}}{5-2(2\cos 2\alpha)} = \boxed{\frac{2\cos\alpha}{5-4\cos 2\alpha}}$$

تمرینات سری ۹-۲ خودم

$$\lim \int_0^{1-a} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_{1+a}^{3} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{a\to 0} (-3\sqrt[3]{a}+3) + \lim 3(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{a})$$

$$\text{ans} = 3 + 3\sqrt[3]{2}$$

۵

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2}{1+2x}\,dx \Rightarrow I = \frac{2}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(1+2x)\Big]_2^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(x^2+1)^2}{1+2x}\right)\Big]_2^{+\infty} = \lim_{A\to\infty} \ln \frac{(A^2+1)^2}{1+2A} - \ln\left(\frac{25}{5}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$I = -\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 5\right)}{2} = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$$

۴

$$A = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx \xrightarrow[\Rightarrow dx = \frac{\sec^2\theta}{2\sqrt{\tan\theta}}]{x^2 = \tan\theta} \int_0^{\pi/2} \frac{\tan\theta\,(\sec^2\theta)}{(1+\tan^2)\,2\sqrt{\tan\theta}} =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\,d\theta \Rightarrow B = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} \xrightarrow[dx = \frac{1+\tan^2\theta}{\sqrt{\tan\theta}}]{x^2 = \tan\theta} = \int \frac{1+\tan^2\theta}{(1+\tan^2)\,2\sqrt{\tan\theta}} =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1}{\tan\theta}}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cot\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} f(\cot\theta)^{\theta} =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} f\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\Big)^{\theta} = \int_0^{\pi/2} f(\cot(\frac{\pi}{2} - \theta))^{\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} f(\tan\theta)^{\theta} =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta} = A \quad \square$$

تمرینات کتاب ۸-۷

۲۴. $\int_0^{+\infty}\frac{e^x}{(e^x)^2+3}dx = \xrightarrow[dt=e^x dx]{e^x=t} \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2+3} = \left(\frac{\arctan\frac{t}{\sqrt3}}{\sqrt3}\right]_1^{+\infty}$

$\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt3} - \frac{\frac{\pi}{6}}{\sqrt3} = \boxed{\frac{\sqrt3\,\pi}{9}}$

۳۰. $\int_6^8 \frac{4}{(x-6)^2}dx = \lim \int_{6+\varepsilon}^8 \frac{4}{(x-6)^2}dx = \frac{4(x-6)^{-1}}{-1}\Big]_{6+\varepsilon}^{8} = \infty$

واگرا است

۴۸. $\int_0^1 \frac{e^{\frac1x}}{x^3}dx = -\int_0^1 e^{\frac1x}\cdot\frac1x\cdot -\frac{1}{x^2}\,dx \xrightarrow[dt=-\frac{1}{x^2}dx]{\frac1x=t}$

$\int_1^\infty te^t\,dt = (te^t - e^t)\Big|_1^\infty \Rightarrow e^t(t-1)\Big]_1^\infty = \infty - 0 = \infty$

واگرا است

۵۹. $\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{\sqrt x}$ ، $\sin^2 x\le 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\sqrt x} \le \frac{1}{\sqrt x} \Rightarrow \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt x}dx =$

$2\sqrt x\Big]_0^\pi = 2\sqrt\pi$

تابع $\frac{\sin^2 x}{2\sqrt x}$ در بازه داده شده به علت همگرا بودن تابع $\frac{1}{\sqrt x}$ که بزرگتر از آن است همگرا است

۵۶. $\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx = \int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx + \int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$

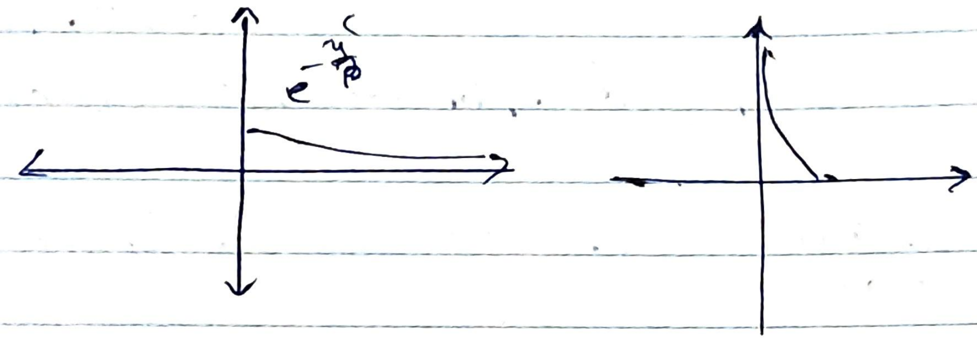
$= \int\frac{x\,dx}{x^2\sqrt{x^2-4}} + \int_2^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^2\sqrt{x^2-4}} \xrightarrow[dt=2x\,dx]{x^2=t} \frac12\int_4^1 \frac{1}{t\sqrt{t-4}} +$

$$\int_0^\infty \frac{1}{t\sqrt{t-4}} \xrightarrow{\sqrt{t-4}=u} \Rightarrow \int_0^{\sqrt2}\frac{du}{u^2+4}\cdot 2 + \int_{\sqrt2}^\infty \frac{1}{u^2+4}\,du =$$

$$\frac{\arctan\frac{u}{2}}{2}\Bigg]_0^{\sqrt2} + \frac{\arctan\frac{u}{2}}{2}\Bigg]_{\sqrt2}^\infty = \arctan\frac{\sqrt2}{2} - 0 + \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\sqrt2}{2}$$

$= \frac{\pi}{2}$ مقدارش $\frac{\pi}{2}$ است

(۷۶)



با توجه به منحنی دارها مساحت زیر نمودارها باهم برابر است اگر به جای y در $x(y)^2$ قرار داده شود به هم منطبق می‌شوند

تمرینات کتاب [illegible]

(۱)

برای هر $x>0$ داریم $f(x) = \frac{2+2x}{3+x}$ $\Leftarrow$ $\lim_{x\to\infty} f = 3$

با توجه به صعودی بودن f در $x>0$ پس $f(x) \geq 2$

می‌توان با استقرا نشان داد که تمام جملات a_n مثبت باشند زیرا ... هر

خروجی f است داریم $a_1>0 \Rightarrow a_2>0 \Rightarrow a_3>0 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_n>0$.

کران آن ۲ است

از طرفی

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n+2}{a_n+2} - a_n = \frac{2-a_n^2}{a_n+2}$$

که با توجه به ... a_n عبارت منفی است پس تابع نزولی است

به علت صعودی بودن f با هر جمله‌ای ... از حاصل عبارت ... است چون $a_1 = f(1) = 2$

چون تابع نزولی و پایین‌ تر ... کران‌دار پس همگراست

$$\lim_{x\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \Rightarrow l = \frac{2l+2}{l+2} \Rightarrow l^2 + 2l = 2l + 2 \Rightarrow l^2 = 2$$

پس عبارت به $\sqrt{2}$ همگراست

چون تمام جملات مثبت است پس همگرا به $\sqrt{2}$

2)

$$\frac{b}{n^2+a} > \frac{b}{n^2+m} \quad b>0 \quad n^2+a < n^2+m$$

$$\Leftarrow n^2+1 < n^2+n \quad \frac{b}{n^2+1} > \frac{b}{n^2+n} \quad (b>0)$$

$$\frac{1}{n^2+n}, \frac{n}{n^2+n} < a_n < \frac{1}{n^2+n} + \frac{1}{n^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x^2+a} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{x^2+a} + (n-1)d\right)n}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{n^2+(n-1)}{\frac{n^2+1}{2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \lim \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2+1} = \lim \frac{\sum_{i=1}^{n} i}{n^2+1} =$$

$$a_n = \frac{1}{2}$$

ضابطه ... $f\left(\frac{1}{n}\right)$ ... پیدا کرد

تمرینات فصل ۱ ما ۱ تمرین :

۵۰. $\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n} = \frac{2\ln n}{n} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln n}{n} \Rightarrow \frac{2}{n} = 0$

دنباله همگرا است

۵۲ $a_n = n - \sqrt{n+1}\sqrt{n+2} = n - \sqrt{n^2+3n+2}$

$\lim_{x\to\infty} n - \sqrt{n^2+3n+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{n^2 - (n^2+3n+2)}{n+\sqrt{n^2+3n+2}} = \frac{-3n}{2n} = -\frac{3}{2}$

دنباله همگرا است

۸۲ $a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n}$ $a_1 = 2$

$f(x) = \frac{1}{3-x}$ if $x \le 3 \Rightarrow f(x) \ge 0$

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3-a_n} - a_n \Rightarrow \frac{1}{3-x} - x$

که ریشه‌ها $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ هستند پس دنباله نزولی است

برای هر n ها از ۰ تا ۲ عبور f(x) بین ۰ تا ۱

$0 \le a_n \le 2$ $a_1 \le 2 \to a_2 \le 2 \to \cdots 0 \le a_n \le 2$

پس دنباله محدود کران‌دار است و همگراست

$l = \frac{1}{3-l} \Rightarrow 3l - l^2 = 1 \to l^2 - 3l + 1 = 0 \to l = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, l = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

همگرا به $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ است.

تمرینات سری ۱۱-۲ کتاب

۲۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{2^{n-1}} \Rightarrow r = \frac{e}{2} < 1 \Rightarrow$ دنباله هندسی است

$\Rightarrow A = \sum_{n=1}^{\infty} e\left(\frac{e}{2}\right)^{n-1} = \frac{e}{1-\frac{e}{2}} \Rightarrow A = \frac{2e}{2-e}$

با توجه به شکل دو مورد عمود رسم شود مثلث [illegible]

۷۸) $b\sin^n\theta$

$\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\theta\,\sin^{n-1}\theta = \frac{b\sin\theta}{1-\sin\theta}$ سری هندسی [illegible] است

تمرینات سری ۱-۲

۲) $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} \to a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} =$

$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n(\sqrt{n+1})} \times \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2(n+1)} \Rightarrow$

$a_n = \frac{(n+1)\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\,n}{n(n+1)(n+1-n)} = \frac{\cancel{(n+1)}\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1) = n\cancel{(n+1)}} =$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$ ✓

$B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(n+2)(n+4)} \Rightarrow a_n = \frac{n}{n(n+2)(n+4)} = \frac{1/8}{n} = \frac{1}{n+4} + \frac{1/8}{n+2}$

$B = \frac{1/8}{1} = \frac{1/8}{2} + \frac{1/8}{3} + \frac{1/8}{4} = \frac{11}{24}$

B $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \Longrightarrow$ جمع زوج ها و جمع فرد ها

$\sum_{1}^{\infty} \frac{+1}{4n^2} = \frac{1}{4}\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}$ $x \to 2n$

$\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{3\pi^2}{24} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{3\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$

$C = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)}\right)^2 = a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow a_n^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2}{n(n+1)} =$

$\frac{1}{n^2(n+1)^2} - 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} - 2$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \to \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow{n+1=t} \frac{1}{t^2} \Rightarrow \sum b_n = \sum_{t=2}^{\infty} \frac{1}{t^2} = \sum_{t=1}^{\infty}$

$\frac{1}{t^2} - 1 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{6} - 1 - 2 = \frac{\pi^2}{3} - 3$

تمرین سخت ۱۱ الی ۲۰ کتاب

30) $\sum_{x=3}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)[\ln(\ln x)]^p}$ $\frac{\ln t}{dt = du}$ $= \int^{A} \frac{dt}{t(\ln t)^p} \Rightarrow du = u$

$\int_{\ln(\ln 3)}^{A} \frac{du}{u^p}$ طبق همگرایی p در صورتی واگراست $p \leq 1$

۳۶)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$$

$$\lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{\ln x\, dx}{x^p} = \int_1^A \frac{\ln x}{x} \cdot \alpha \frac{1}{\alpha x^{p-1}} dx$$

ابتدا انتگرال را به صورت تابع بر حسب p تعریف می کنیم

$$I = \int \frac{\ln x}{x^p} \to p=1 \Rightarrow \lim_{A\to\infty} \left(\frac{\ln x (1-p)-1}{A^{p-1}(1-p)} - \frac{1}{-1p} \in R \right)$$

$$= \frac{-1}{(p-1)x} \xrightarrow{R} \lim_{A\to\infty} \frac{1}{A^{p-1}}$$

$p \neq 1$ و اگر $\lim_{A\to\infty} \frac{1}{A^{p-1}}$ همگرا شود A را برای همین باید در حد حقیقی بودن

همیشه مثبت باشد همگرا میشود

۴۶)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{c}{1} - \frac{1}{2} + \frac{c}{2} - \frac{1}{3} \dots$$

$C + (C-1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots\right) \Rightarrow C - 1 = 0 \to C = 1$

واگرا

۳)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4^n}{n(2^n)}$$

تمرینات فصل ۱۱-۴ کتاب

$$f(x) = 2\frac{4^x}{2^x} - \frac{x+2}{x+2^x} \to f'(x) = 2 \times \frac{4}{2} \times \frac{2x}{2^x} + \frac{(1+2^x+x)\dots}{(x+2^x)^2}$$

الف) می‌شود f برای xها نزولی و f پیوسته $f > f(0)$ و چون $\frac{e^n}{2^n}$ همگرا است

پس سری کوچکتر از آن هم همگرا است

(۲۶) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

$n^2-1 < n^2$ $\longrightarrow$ برای $n \geq 2$

$\Downarrow$

$\sqrt{n^2-1} < \sqrt{n^2}$

$\Downarrow$

$n\sqrt{n^2-1} < n\sqrt{n} \Longrightarrow$

$\frac{1}{n\sqrt{n^2-1}} < \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}} \Longrightarrow$ همگرا $\Rightarrow \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$ همگرا

(۲۷) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

if $n>0 \Rightarrow 1+\frac{1}{n} > 1 \Longrightarrow p>1 \Rightarrow \frac{1}{n^p}$ همگرا $\Rightarrow \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ همگرا

تمرینات ب ۱

(۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^{(p-1)}\ln n}{n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \Rightarrow$ همگرا

$\lim \frac{n^p \ln n}{n^p} = \infty \Rightarrow$ واگرا $p<1$ در نتیجه

پس $p \leq 1$ واگرا

$p > 2$ همگرا

$p = 1$ واگرا

۳

جمله‌ها را کوچکتر کرده‌ایم $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n} + 1 \to \ln \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1.02$$

همچنین کوچکتر شدن هر جمله حقیقی

۴ $\sum_{n=1}^{\infty} n^k \left(\sqrt[3]{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^2-n+1} \right)$

دنباله $\frac{n^k}{\sqrt[3]{n}}$ را در نظر می‌گیریم

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{n^k \left(\sqrt[3]{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^2-n+1}\right)}{\frac{n^k}{\sqrt[3]{n}}} = \frac{2}{3}$$

$b_n = \frac{1}{n^{(\frac{1}{3}-k)}}$ چون دنباله بالا شده هم رفتار $\frac{n^k}{\sqrt[3]{n}}$ است پس

$\frac{1}{3} - k > 1 \longrightarrow k < -\frac{2}{3}$ همگرا

$1 - k \le 1 \longrightarrow k \ge -\frac{2}{3}$ واگرا

۵

با استفاده از آزمون دالامبر

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!\, e^n}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\, e^{n+1}}}{\frac{n^n}{n!\, e^n}} = \frac{1}{e} \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

[illegible]

آزمون مقایسه حدی با $\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^n}{n!e^n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^n}{n!\,e^n}}{\frac{1}{n}} = \infty$$

$\frac{1}{n}$ واگراست $\longrightarrow$ سری واگراست

(۲)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\,(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\sqrt{n}\,(2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$$

مقایسه حدی با $\frac{1}{n^{3/2}}$ $n \geq 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}\,(2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{1}{4} \Longrightarrow$$ همگرا

$\frac{1}{n^{3/2}}$ همگرا

تمرینات تمرین ۱۱-۶ (۳) ب

(۲۴)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2(n+1)!}{(2(n+1))!}}{\frac{(2n)!}{2(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)!} = 4 > 0 \rightarrow$$ دنباله واگرا

آزمون دال

(۳۴) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln^p n}{n}$

همگرا با لایبنیتس بعد همگرایی مطلق جدا شروع می‌شود

$$\Rightarrow f(n) = (a_n) = \frac{\ln^p n}{n} = f'(n) = \frac{p(\ln n)^{p-1}\frac{1}{n}\cdot n - 1 \cdot \ln^p n}{n^2}$$

$$p \ln^{p-1} n - \ln^p n$$

برای نزدیک بودن به صفر باید منفی باشد

for $\forall x \geq 1 \Rightarrow f(n) = \lim P_n \ (P \ln n) \leq 0 \Rightarrow P \ln n \leq 0$

$\Rightarrow p \leq \ln 1 = 0$ ... $\Rightarrow p \leq 0$

تمرینات بخش ۱-۴ و ۱-۵ جزوه

(1) $|a_n| = \dfrac{1}{2n + (-1)^n n}$ زوج $\dfrac{1}{3n}$ → همگرا نیست

فرد $\dfrac{1}{n}$ همگرا نیست

سری این نامساوی همگرا مشروط است

(2) $a_n = (-1)^n(\sqrt{n^2+1} - n) = \dfrac{(-1)^n(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n}$

$\Rightarrow a_n = (-1)^n \times \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1} + n} \Rightarrow |a_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}$

$\to \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1} + n} = 1 \to$

واگرا است

(3) $(-1)^n \dfrac{1}{n \log^n_5}$, $\lim |a_n| = \dfrac{1}{n \log^n_5} = 0$

$f(n) = \dfrac{1}{n \log^n_5} \to g(n) = n \log^n_5$ ... صعودی است

$\Rightarrow f(n) =$ ... نزولی است

همچنین حد سری مطلق لایب نیتز داریم

همگرا است

تمرینات متن ۱-۶ خود

(1) $\lim \frac{x^n}{2^n+1} \rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} \quad R=2$

$\Rightarrow |x+3| < 2 \Rightarrow -5 < x < -1$

(4) $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+1} \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2+1}}{\frac{1}{n^2+1}} = 1 \rightarrow R=1$

$\Rightarrow |x-1| \le 1 \quad 0 \le x \le 2$

(5) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n(\ln n)^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1 \rightarrow R=1$

$|x|<1 \rightarrow -1 \le x < 1 \quad \rightarrow x=1, x=-1$

همگرا

(7) $\sum \frac{2^{n-1}}{n(n+1)} \Rightarrow \lim \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}}}{\frac{2^n}{n(n+1)}} = 2 \rightarrow R=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow |x-2| < \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$

در هر دو سر همگرا

تمرینات سری ۱۱-۸ کتاب

(9) $\sum \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}$

$|x|<1 \rightarrow -1 \le x \le 1$

در هر دو سر همگرا

(10) $\sum \frac{\ln n}{n^2} \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}}{\frac{\ln n}{n^2}} = 1 \quad R=1$

همگرا

(18) $a_n = \frac{?}{2^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2$

$|x+1| < 2 \to -3 < x < 1$

if $x = 1 \to$ then (D), if $x = -3 \to$

(24) $c_n = \frac{1}{n(\ln n)^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1 \to R = 1$

$-1 \le x \le 1$ همگراست

قرینه تمرین ۱۰ ـ ۸ جزوه

(1) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) \Rightarrow$

$f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$

$f'(x) = 2\sum_{n}^{\infty} (x^2)^n \to f(x) = 2\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\right) dx =$

$2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^n}{2n} \to g(x) = \frac{1}{(2x+1)^2} \Rightarrow$

$\left(-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2x+1}\right)' = g(x)$

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2x+1} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^n \to g(x) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0} n(2x)^n\right) dx \Rightarrow$

$g(x) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \times 2 \frac{x^{n+1}}{n+1} (-1)^n \to f(x) = x g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n (n+1) x^n$

تمرینات بخش ۱۰-۹ خود

(۱) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \xrightarrow{d/dx} \sum 2x^{2n} = \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$

$\Rightarrow f(x) = \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{-x+1} \right) dx = \ln(1+x) - \ln(1-x) \neq$

$\ln \frac{1+x}{1-x} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} -1\, 2^{n} (n+1) x^{n+1} = x \sum_{x=0} (-1)^n 2^m (n) x^n \Rightarrow$

$\int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^m (n+1) x^n \, dx = \sum (-1)^n 2^n x^{n+1} = -\frac{1}{1+2x} + \frac{1}{2}$

$f(x) = x \left(\frac{1}{(2x+1)^2} = \frac{x}{(2x+1)^2} \right)$

(۲) $\frac{\cos nx}{2^n} = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2 \times 2^n}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{2 \times 2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-inx}}{2 \times 2^n} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{e^{ix}}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{e^{-ix}}{2}}$

$\frac{2}{4 - e^{ix}} + \frac{2}{4 - e^{-ix}} = \frac{8 - 2e^{-ix} - 2e^{ix}}{16 - 4e^{ix} - 4e^{-ix} + 1} = \frac{4\cos x - 1}{17 - 8\cos x}$