محمد زمانلو ۸۱۰۱۰۰۰۸۴ تکلیف سری ۳ گسسته

$d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7$

①

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B| : \begin{cases} |A| : d_1 d_2 d_3 = d_4 d_5 d_6 & 10 \times 10 \times 10 \times 1 \times 1 \times 1 \times 10 = 10^4 \\ |B| : \text{به طریق مشابه} & = 10^4 \end{cases}$

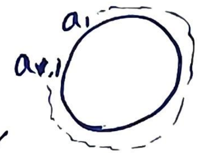
$|A \cap B| \quad d_1 d_2 d_3 = d_4 d_5 d_6 = d_5 d_6 d_7$

$\left.\begin{matrix} d_1 = d_4 = d_5 \\ d_2 = d_5 = d_6 \\ d_3 = d_6 = d_7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = d_7 \Rightarrow 10 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 10$

$\Rightarrow |A \cup B| = 10^4 + 10^4 - 10 = \boxed{19990}$

---

③ فرض می‌کنیم اعداد بطور دور دایره چیده شده باشند؛ مطابق اصل لانه کبوتری



حتماً ۲ عدد وجود دارد $\left\lceil \frac{201}{100} \right\rceil = 2$ که باقیمانده‌شان بر ۱۰۰ برابر است پس،

$a_i \overset{100}{\equiv} a_j \Rightarrow a_i - a_j \overset{100}{\equiv} 0 \Rightarrow (a_1 + \dots + a_i) - (a_1 + \dots + a_j) \overset{100}{\equiv} 0$

$\Rightarrow a_{j+1} + \dots + a_i \overset{100}{\equiv} 0$

می‌دانیم مجموع همه جملات ۳۰۰ است پس حاصل

$a_{j+1} + \dots + a_i = 200$ ✓

یا

$a_{j+1} + \dots + a_i = 100$ → در این صورت نیز جواب حاصل جمع سایر اعداد ۲۰۰ است

۱) ۳-۱ الف)

$$\langle 1,1,1,\dots,1\rangle \Rightarrow 1+x+x^2+x^3+\dots=\frac{1}{1-x}\xrightarrow{x=3a}$$

$$1+3a+(3a)^2+(3a)^3+\dots=1+3a+9a^2+27a^3+\dots=\boxed{\frac{1}{1-3a}}=\frac{1}{1-3a}$$

ب)

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\dots=\boxed{e^x}$$

ج)

$$1+x+x^2+x^3+\dots=\frac{1}{1-x} \qquad \langle 1,1,1,\dots\rangle$$

$$\xrightarrow{x=5a} 1+5a+(5a)^2+(5a)^3+\dots=\frac{1}{1-5a}$$

$$\xrightarrow{a\to x^2} 1+5x^2+(5x^2)^2+(5x^2)^3+\dots=\frac{1}{1-5x^2} \qquad \langle 1,0,5,0,25,0,125,\dots\rangle$$

$$\xrightarrow{\times x} x+5x^3+25x^5+125x^7+\dots=\frac{x}{1-5x^2}$$

$$\langle 0,1,0,5,0,25,0,125,\dots\rangle$$

۳-۲)

$$e_1+e_2+e_3+e_4=n$$

سیب حداکثر ۳ تا: $1+x+x^2+x^3$ $\times$ شلیل یا صفر یا یک: $1+x$ $\times$

هلو ۴× : $1+x^4+x^8$ $\times$ پرتقال زوج تعداد: $1+x^2+x^4+x^6+\dots$ $=$

$$(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6+\dots)(1+x^4+x^8+\dots)(1+x)=$$

$$\frac{(1-\cancel{x^4})}{1-x}\times\frac{1}{(1-x)\cancel{(x+1)}}\times\frac{1}{\cancel{1-x^4}}\times\cancel{(x+1)}=$$

$$\boxed{\frac{1}{(x-1)^2}}$$

۳

الف) در واقع داریم از یک مجموعه $n+1$ عضوی m عضو انتخاب می‌کنیم $= \binom{n+1}{m}$

انتخاب ما

در این انتخاب یک عضو را در نظر می‌گیریم یا هست ① یا نیست ②

① هست: $\binom{n+1-1}{m-1} = \binom{n}{m-1}$

② نیست: $\binom{n}{m} \rightarrow$ عضو دوم

۱. انتخاب ما هست $\binom{n-1}{m-1}$

۲. انتخاب ما نیست $\binom{n-1}{m}$

(+)

پس:

مجموع حالات $\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$

ب)

که هر گروه از بین ۱ تا n نفر عضو دارد

می‌خواهیم از بین n نفر چند گروه تشکیل دهیم که این گروه یک سرگروه نیز دارد ابتدا تعداد اعضای گروه یعنی همان r نفر را از بین n نفر انتخاب می‌کنیم $\binom{n}{r}$ سپس یکی از آن r نفر را سرگروه می‌کنیم $\binom{r}{1} = r$

پس می‌شود

① $\sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} \times r$

برای این کار همچنین می‌توان ابتدا از بین n نفر سرگروه را معین کنیم (n حالت) از مابقی نیز هر کس ۲ حالت دارد می‌تواند در گروه باشد یا نباشد $= 2^{n-1}$ حالت پس

② $n \times 2^{n-1}$

ج) فرض کنیم $n+1$ لباس داریم و برای یک خانواده ۴ نفره می‌خواهیم لباس تخصیص دهیم به‌طوری که لباس پدر از همه بزرگتر باشد اگر به پدر لباس j ام را اختصاص دهیم هر عضو خانواده $j-1$ حالت دارد

پس در مجموع: $\boxed{\sum_{j=2}^{n+1} (j-1)^3 = \sum_{j=1}^{n} j^3}$

از طرفی اگر شماره لباس‌ها هر ۳ عضو دیگر برابر باشد $\binom{n+1}{2}$ حالت / اگر ۲ شماره یکسان باشد $\binom{n+1}{3}\binom{3}{2}\times 2$ حالت

و اگر هیچ ۲ تا چیزی یکسان نباشد $\binom{n+1}{4}\times 3!$ حالت داریم

که حاصل جمع این ۳ مقدار می‌شود:

$= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \boxed{\binom{n+1}{2}^2}$

(۳) اگر تعداد بازی های انجام شده تا روز i ام را a_i بنامیم خواهیم داشت

$a_1, a_2, \ldots, a_{30}$ صعودی $\Rightarrow a_1+m, a_2+m, \ldots, a_{30}+m$ صعودی

و $1 \leq a_i \leq 45 \Rightarrow 1+m \leq a_i+m \leq 45+m$

پس ۶۰ عدد داریم که کوچکتر یا مساوی $45+m$ هستند

$$a_1, a_2, \ldots, a_{30}, a_1+m, \ldots, a_{30}+m$$

حال اگر a_j را برابر a_i+m بگیریم یعنی دقیقاً m بازی از روز $i+1$ ام تا روز j ام به انجام رسیده است

پس حتماً

$$60 \geq 45+m \Rightarrow 15 \geq m$$

همچنین با بررسی $m=15$ در می یابیم چنین حالتی ناممکن است پس $m \leq 14$

پس: $m = 1, 2, 3, \ldots, 14$

Hard! ؟ ؟ (۴)