محمد ابانلو ۸۱۰۱۰۰۰۸۴ تکلیف گسسته

۱)

$R^2 = R \circ R = \{(1,4), (1,2), (3,4)\}$

$R^3 = R^2 \circ R = \{(1,4)\}$

$R^4 = \emptyset$

از $n=4$ به بعد R^n برابر تهی است!

۲)

الف) ۱) بازتابی را دارا نیست چرا که (x,y) هایی که $x=y$ را دارا نیست! ✗

۲) خاصیت تقارنی دارد چرا که ✓ $\forall a, \forall b \ \{(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R\}$

۳) $a \neq b$, (a,b) وجود دارد و تقارن نیز وجود دارد ⇐ پادتقارن وجود ندارد ✗

۴) خاصیت تعدی نیز ندارد چرا که مثلاً ✗ $(1,4), (4,1) \in R$ اما $(1,1) \notin R$

ب) ۱) خاصیت بازتابی دارد چرا که $\forall a$ ، $a \overset{\circ}{\equiv} a$ وجود دارد ✓

۲) خاصیت تقارن را دارد $\forall a, \forall b$ ، $a \overset{\circ}{\equiv} b \Rightarrow b \overset{\circ}{\equiv} a$ ✓

۳) خاصیت پادتقارن را ندارد چرا که خاصیت تقارن را دارد و دارای یک $a \neq b$ نیز هست ✗ همچنین $1 \overset{\circ}{\equiv} 2, 2 \overset{\circ}{\equiv} 1$ و $1 \neq 2$

۴) خاصیت تعدی را نیز دارا است! ✓ $(a \overset{\circ}{\equiv} b \wedge b \overset{\circ}{\equiv} c) \Rightarrow a \overset{\circ}{\equiv} c$

ج) ۱) بازتابی را دارد ✓ چون به ازای $\forall x$ ، زوج مرتب (x,x) وجود دارد چون $x \preceq x$ است!

۲) خاصیت تقارنی را ندارد ✗ $(a \neq b)$ $a \preceq b \not\Rightarrow b \preceq a$

۳) خاصیت پادتقارن را دارا است ✓ $(a \preceq b \wedge b \preceq a) \Rightarrow a = b$

۴) خاصیت تعدی را نیز دارا است ✓ $(a \preceq b \wedge b \preceq c) \Rightarrow a \preceq c$

(۳)

الف) $R \cup S$ تقارنی است ✓

$\forall a, \forall b \{(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R\}$

$\forall c, \forall d \{(c,d) \in R \Rightarrow (d,c) \in R\}$

$\forall a, \forall b \Rightarrow \{(a,b) \in R \cup S \Rightarrow (b,a) \in R \cup S\}$

ب) $R - S$ تقارنی نیست ✗ مثال نقض: اگر $A = \{۱,۲\}$ باشد،

$R = \{(۱,۲), (۲,۱), (۱,۱)\}$

$S = \{(۱,۲), (۲,۱)\}$

که شامل ۲ در A نیست

$R - S = \{(۱,۱)\} \rightarrow$ $R - S$ یا تهی است و یا تنها شامل (a,b) $a=b$ است!

ج) $R \oplus S$ تقارنی نیست ✗

متقارن است

$R \oplus S = R \cup S - R \cap S$

که متقارن است طبق الف

$R \cap S$ متقارن است چرا که هر عضوی که در A وجود دارد اگر در یکی از مجموعه‌ها وجود داشته باشد حتماً متقارن آن نیز در آن مجموعه هست

پس هر عضوی که در دو مجموعه مشترک باشد حتماً متقارنش هم مشترک است و چون $\forall a, \forall b \in A$ هر دو مجموعه متقارن اند پس،

$\forall a, \forall b \text{ if } (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R \wedge (b,a) \in S \Rightarrow (b,a) \in R \cap S$ ✓

$A = \{۱,۲\}$

مثال نقض فوق در این مورد نیز صادق است،

$R = \{(۱,۱), (۱,۲), (۲,۱)\}$

$S = \{(۱,۲), (۲,۱)\}$

شامل ۲ در A نیست

$R \cup S = \{(۱,۱), (۱,۲), (۲,۱)\}$ $R \cap S = \{(۱,۲), (۲,۱)\}$ $R \oplus S = \{(۱,۱)\}$ ✗

د) $R \circ S$ متقارن نیست! مثال نقض،

$A = \{۱,۲,۳\}$

$R = \{(۱,۲), (۲,۱), (۳,۲), (۲,۳), (۱,۳), (۳,۱)\}$

$S = \{(۲,۱), (۱,۲), (۳,۲), (۲,۳), (۱,۳), (۳,۱), (۱,۱)\}$

$R \circ S = \{(۱,۱), (۲,۲), (۳,۳), (۳,۱), (۲,۱)\} \rightarrow$ متقارن نیست!

۴) الف) چون f تابع است پس

$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\} \Rightarrow y_1 \neq y_2$

پس تمامی $x \in A$ در دامنه وجود دارند ✓

چون تابع یک به یک است ⇐

$\{(x_1, y_1), (x_2, y_1) \ldots\} \Rightarrow x_1 = x_2$

پس y ها هم منحصر به فرد است.

پس به تعداد x ها باید y داشته باشیم، تعداد x ، تعداد x ها نیز برابر $|A|$ است و چون $|A|=|B|$ است پس تمام اعضای مجموعه B در برد تابع حاضر هستند پس f پوشا است ✓

ب) چون طبق الف f پوشا است پس تمامی اعضای B باید در برد تابع وجود داشته باشند و از طرفی چون شرط تابع بودن یکتا بودن x است پس تمام x های عضو A نیز تنها یکبار استفاده می‌شود چون $|A|=|B|$ پس دقیقاً همان تعداد y که در B وجود دارد در تابع نیز حضور دارد چون y ها یکتا و غیرتکراری هستند پس تابع یک به یک است ✓

۵)

حالت قبولی به وجود نمی‌آید

if $x \leq 5 \; R \; x > 5 \xrightarrow{\text{تقارن}} \times$

چون x های کمتر از ۵ متصل هستند و $x>5$ هم متصل‌اند پس کافی است هم‌ارزی های هر تایی را بدست آوریم و سپس به توان ۲ برسانیم

ضرب حالات دو کلاس مساوی

چون در هم‌ارزی خواص تعدی، تقارن، بازتابی وجود دارد برای مجموعه $A=\{1,2,3,4,5\}$ روابط هم‌ارزی را در نظر می‌گیریم،

$\binom{۵}{۲}=۱۰$ ، ۲ عضو از A داشته باشیم

$\binom{۵}{۳}=۱۰$ ، ۳ عضو از A

$\binom{۵}{۴}=۵$ ، ۴ عضو از A

$\binom{۵}{۵}=۱$ ، ۵ عضو A

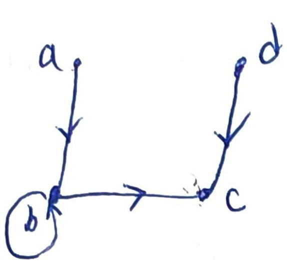
$\xrightarrow{+} ۲۶ \xrightarrow[\text{تقارن}]{\times ۲} ۵۲$

تعداد هم‌ارزی

$\boxed{۵۲^۲ = ۲۷۰۴}$

که یک به یک بودن حالات ۲ مجموعه

۶) برای پاد تقارنی نبودن باید از بین ۳ طوقه ممکن حداکثر ۲ تا از آنها را بکشیم پس



(*) تعداد رسم طوقه $2^3 - 1 = 7$

$S = \{(a,b), (b,b), (b,c), (d,c)\}$

حضور طوقه ها اثری در متعدی شدن یک مجموعه ندارد پس تغییری در وضعیت فوق ایجاد نمی کند

$(a,b), (b,c)$ ✓

پس حتماً باید (a,c) اضافه شود ✓

۱) اگر (a,d) اضافه شود $\Leftarrow$ باید (a,c) هم اضافه شود ✓

۲) اگر (b,a) اضافه شود $\Leftarrow$ باید (a,c) را هم اضافه کنیم

۳) $(d,a) \Rightarrow (d,c),(d,b)$

۴) $(c,b) \Rightarrow (a,b)$

۵) $(c,d),(a,d) \Rightarrow (b,d)$

۶) $(b,d),(a,d) \Rightarrow (a,d),(b,c)$

۶ حالت

$6 \times 7 = \boxed{42}$