۲- تابع معکوس و توابع متعالی (مثلثاتی, نمایی, هیپربولیک و معکوس آنها)

۲-۱- تابع معکوس و مشتقات آن (بخش ۶-۱ کتاب)

در مطالعه فصل ۶ از کتاب, هر جا صحبت از انتگرال شده است, می‌توان فعلا آنرا نادیده گرفت.

فرض کنید تابع f با زوج مرتبهای (x,y) تعریف شده باشد. معکوس f را با f^{-1} نمایش داده و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^{-1}=\{(y,x)\ ;\ \ (x,y)\in f\}$$

دقت شود f^{-1} به هیچ وجه بیانگر $\frac{1}{f}$ نمی‌باشد. با توجه به تعریف ارائه شده بدیهی است f^{-1} الزاما بیانگر یک تابع نیست. به سادگی می‌توان نشان داد شرط لازم و کافی برای آنکه f^{-1} تابع شود, آن است که f یک به یک باشد. با این تعریف واضح است که دامنه f برد f^{-1} خواهد شد و برعکس.

همچنین از $(y,x)\in f^{-1}$ نتیجه می‌شود $x=f^{-1}(y)$. از طرفی $y=f(x)$, در نتیجه:

$$x=f^{-1}(y)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}of(x)=x \qquad ; \qquad y=f(x)=f\left(f^{-1}(y)\right)\rightarrow fof^{-1}(y)=y$$

از آنجا که معادله یک تابع معمولا رابطه y را بر حسب x می‌دهد, لذا برای بدست آوردن معادله تابع معکوس کافی است در تابع اصلی x را بر حسب y (در صورت امکان) محاسبه کنیم. همچنین از آنجا که علاقمندیم در بیان یک تابع, معمولا متغیر را x در نظر بگیریم, لذا در انتها جای x و y را عوض می‌کنیم.

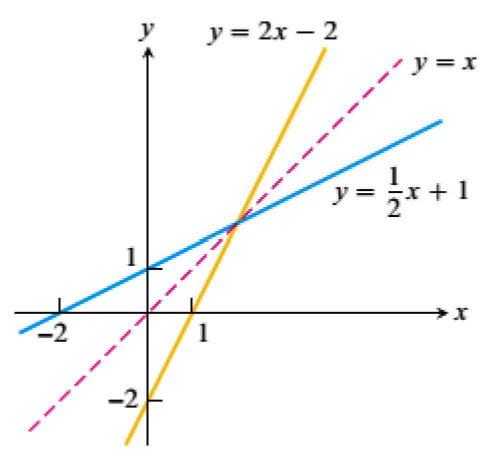
بعنوان نمونه معکوس تابع $y=\frac{1}{2}x+1$ عبارت است از:

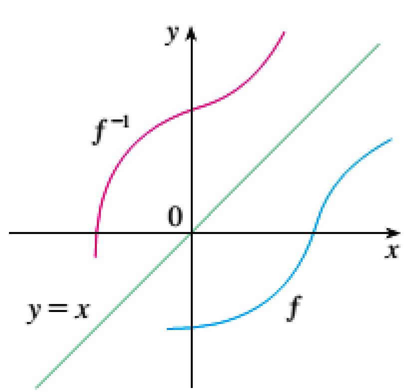
$$y=\frac{1}{2}x+1\rightarrow x=2y-2\xrightarrow{x\leftrightarrow y}y=2x-2$$

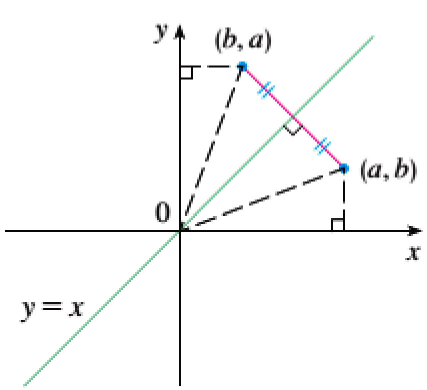
می‌توان کنترل کرد که:

$$f^{-1}of(x)=f^{-1}(f(x))=2\left(\frac{1}{2}x+1\right)-2=x\ ;\ fof^{-1}(y)=f\left(f^{-1}(y)\right)=\frac{1}{2}(2y-2)+1=y$$

از آنجا که تابع معکوس با جابجایی (x,y) در تابع اصلی بدست می‌آید, می‌توان انتظار داشت چنانچه بخواهیم نمودار تابع معکوس را رسم کنیم, کافی است قرینه آن نسبت به نیمساز ربع اول و سوم ترسیم گردد (شکل سمت چپ برای یک نقطه و شکل وسط برای یک تابع). در شکل سمت راست نیز تابع $y=\frac{1}{2}x+1$ و معکوس آن $y=2x-2$ رسم شده است.

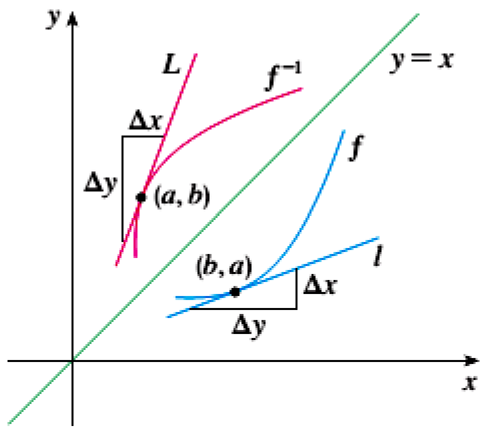






ثابت می‌شود که اگر تابعی پیوسته و یک به یک باشد, معکوس آن نیز پیوسته خواهد بود. در ادامه می‌خواهیم رابطه‌ای برای محاسبه مشتق تابع معکوس بر حسب مشتق خودِ تابع بدست آوریم. یک استدلال شهودی آن است که گویا قرار است در شکل زیر رابطه شیب خط مماس L را با l بدست آوریم. به کمک همین شکل می‌توان نشان داد این شیبها عکس یکدیگرند.

برای این منظور دیده می‌شود که $f(b) = a$ و لذا $f^{-1}(a) = b$, در نتیجه:



$$(f^{-1})'(a) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{f'(b)} \quad ; \quad b = f^{-1}(a)$$

بدیهی است در نقاطی که $f'(b) = 0$ می‌باشد, شیب خط l برابر صفر شده و لذا شیب L بینهایت خواهد شد. به عبارتی در این نقطه تابع معکوس فاقد مشتق است.

قضیه: اگر f تابعی مشتق‌پذیر و یک به یک بوده و معکوس آنرا با f^{-1} نمایش دهیم, چنانچه $f'\left(f^{-1}(a)\right) \neq 0$ آنگاه:

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(a)\right)}$$

اثبات: از آنجا که f تابعی مشتق‌پذیر است, لذا پیوسته بوده و معکوس آن نیز پیوسته است. اگر $f(b) = a$ فرض شود, آنگاه با توجه به تعریف, مشتق $y = f^{-1}(x)$ در $x = a$ عبارت است از:

$$(f^{-1})'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}{x - a} = \lim_{y\to b} \frac{y - b}{f(y) - f(b)} = \lim_{y\to b} \frac{1}{\frac{f(y)-f(b)}{y-b}} = \frac{1}{\lim_{y\to b} \frac{f(y)-f(b)}{y-b}} = \frac{1}{f'(b)} \blacksquare$$

توضیح ۱: با تعویض a با x و در نظر گرفتن $y = f^{-1}(x)$ و $x = f(y)$ می‌توان با نماد لایب‌نیتز آنرا بصورت زیر نمایش داد:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \to \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

توضیح ۲: روش دوم اثبات قضیه با استفاده از فرمول مشتق زنجیری و بصورت زیر می‌باشد:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} f'\left(f^{-1}(x)\right)\left(f^{-1}\right)'(x) = 1 \to \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \blacksquare$$

مثال ۲-۱ موارد زیر را (در صورت وجود) محاسبه کنید:

الف: $(f^{-1})'(4)$ برای تابع $f(x) = x^2$ برای ناحیه $x \geq 0$.

ب: $(g^{-1})'(6)$ برای تابع $g(x) = x^3 - 2$

ج: $(h^{-1})'(1)$ برای تابع $h(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$

حل الف: دقت شود که اگر چه تابع x^2 مشتق‌پذیر است, اما یک به یک نمی‌باشد, لذا معکوس ندارد. اما اگر شاخه $x \geq 0$ (یا $x \leq 0$) انتخاب شود, تابع یک به یک گردیده و لذا می‌توان معکوس آنرا بدست آورد. این مثال را می‌توان به دو روش حل کرد.

راه اول: از آنجا که در این مثال می‌توان صریحا f^{-1} را بدست آورد, لذا:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow (f^{-1})'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

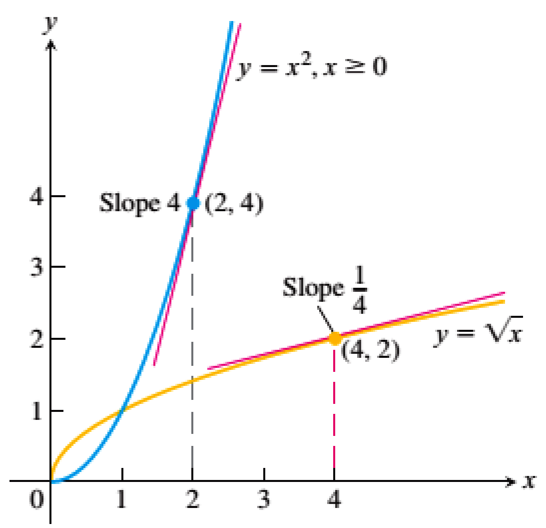
راه دوم: در اینجا مساله را با استفاده از فرمول ارائه شده نیز حل می‌کنیم. از $x^2 = 4$ با توجه به اینکه $x \geq 0$ لذا $x = 2$ خواهد شد. یعنی $f^{-1}(4) = 2$ در نتیجه:

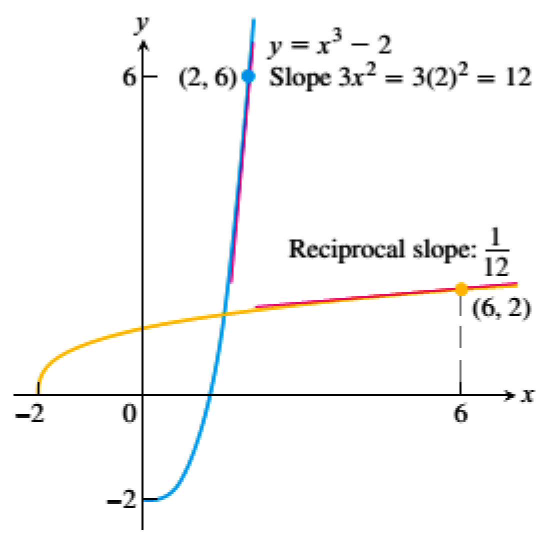
$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(4)\right)} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2x}\bigg|_{x=2} = \frac{1}{4}$$

ب: تابع g نیز همواره مشتق‌پذیر و یکنوا است (چون مشتق آن مثبت است) . در اینجا نیز می‌توان از دو روش اشاره شده در قسمت قبل استفاده کرد, اما روش دوم ساده‌تر است. از $x^3 - 2 = 6$ خواهیم داشت $x = 2$. یعنی $g^{-1}(6) = 2$ در نتیجه:

$$(g^{-1})'(6) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(6)\right)} = \frac{1}{g'(2)} = \frac{1}{3x^2}\bigg|_{x=2} = \frac{1}{12}$$

در شکل زیر نمودار دو تابع قسمت الف و ب و معکوسات آنها همراه با مشتقات مورد نظر ترسیم شده است.





ج: تابع h نیز مشتق‌پذیر و یکنوا است (مشتق آن مثبت است) . اما طبیعتا ممکن است یافتن معکوس آن مشکل باشد, لذا از روش دوم (فرمول) استفاده می‌کنیم. از $2x^3 + 3x^2 + 6x + 1 = 1$ فقط $x = 0$ بدست می‌آید. یعنی $h^{-1}(1) = 0$, لذا:

$$(h^{-1})'(1) = \frac{1}{h'\left(h^{-1}(1)\right)} = \frac{1}{h'(0)} = \frac{1}{6x^2 + 6x + 6}\bigg|_{x=0} = \frac{1}{6} \quad ■$$

مثال ۲-۲ فرض کنید $f(x) = 2x + sin^3x$, نشان دهید این تابع معکوس‌پذیر بوده و $(f^{-1})'(0)$ را بیابید.

حل توجه شود که نمی‌توان از رابطه داده شده صریحا f^{-1} را بدست آورد. در ابتدا باید نشان دهیم تابع یک به یک است.

$$f'(x) = 2 + 3sin^2x\ cosx = 2 + \frac{3}{2}sinx\ sin2x \geq \frac{1}{2} > 0$$

لذا f یک تابع صعودی و لذا یک به یک است. لذا معکوس پذیر بوده و از آنجا که $f(0) = 0$ لذا $f^{-1}(0) = 0$ بنابراین:

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(0)\big)} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

مثال ۲-۳ ثابت کنید که تابع مشتق‌پذیری مانند $y = f(x)$ با دامنه $\mathbb{R}$ موجود است که در معادله $x = 2y + siny$ صدق می‌کند. سپس $f'(x)$ را بیابد.

حل با تعریف $g(y) = 2y + siny$ در واقع $x = g(y)$ خواهد بود. بدیهی است g روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. از آنجا که همواره $g'(y) = 2 + cosy \geq 1$ لذا g صعودی و لذا وارون پذیر است که معکوس آن همان f خواهد بود. لذا:

$$f'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'\big(f(x)\big)} = \frac{1}{2 + cosy} \quad \blacksquare$$

تمرینات بخش ۲-۱ تمرینات ۳۸, ۴۲, ۴۶ و ۵۰ از بخش ۶-۱ کتاب

۱- ثابت کنید که تابع مشتق‌پذیری مانند $y = f(x)$ با دامنه $\mathbb{R}$ موجود است که در معادله $f(x^3 + x) = x$ صدق می‌کند. سپس $f'(0)$ و $f'(2)$ را بیابد.

۲- فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ توابعی باشند که در روابط زیر صدق کنند:

$$\forall\, x > 0\ ;\ f'(x) = \frac{1}{x}\ \ ;\ \ f(g(x)) = x$$

نشان دهید $g'(x)$ موجود بوده و $g'(x) = g(x)$ می‌باشد.

۲-۲-معرفی توابع متعالی و عدد نپر

۲-۲-۱- معرفی توابع متعالی

تابع $y = f(x)$ را تابع جبری میگوییم هرگاه در معادله زیر صدق کند:

$$P(x)y^n + Q(x)y^{n-1} + \cdots + R(x)y + S(x) = 0$$

که در آن $P(x)$, $Q(x)$, … , $R(x)$ و $S(x)$ چندجمله‌ای می‌باشند.

مثلا $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ تابعی جبری است زیرا در معادله $(x+1)y^2 - 1 = 0$ صدق میکند. توابعی که جبری نباشند, متعالی (Transcendental) نامیده می‌شوند. ثابت میشود توابع مثلثاتی, لگاریتمی, نمایی, هیپربولیک و معکوس آنها همگی متعالی‌اند. در این فصل به بررسی این توابع می‌پردازیم. همچنین همه این توابع (جبری و متعالی) در مجموع توابع مقدماتی نامیده می‌شوند.

به همین ترتیب, هر عددی را که ریشه یک معادله چند جمله‌ای با ضرایب گویا باشد عدد جبری و در غیر اینصورت عدد متعالی می‌نامیم. مثلا $\sqrt{3}$ عددی جبری است, زیرا ریشه $x^2 - 3 = 0$ می‌باشد. همچنین ثابت میشود عدد π , عددی متعالی است.

۲-۲-۲- معرفی عدد نپر

در ابتدا نیاز است مقدماتی از بحث دنباله‌ها عنوان شود. بحث کاملتر در فصل ۱۰ ارائه خواهد شد.

دنباله, تابعی است که دامنه آن مجموعه اعداد طبیعی و یا قطعه‌ای از آن باشد و یا به تعبیر ساده‌تر فهرستی از اعداد که به ترتیبی معین نوشته شده است. نمادگذاری دنباله بصورت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌باشد که به a_n جمله عمومی دنباله می‌گوییم. مثلا:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\} \qquad \text{یا} \qquad \{b_n\}_{n=1}^{12}=\{3n\}_{n=1}^{12}=\{3,6,9,\cdots,36\}$$

که $\{a_n\}$ دنباله نامتناهی و $\{b_n\}$ دنباله متناهی نامیده می‌شود. بنابراین می‌توان گفت مجموعه اعداد طبیعی و بطور کلی‌تر مجموعه اعدادی که تشکیل تصاعدهای حسابی یا هندسی می‌دهند همگی مثالهایی از دنباله خواهند بود. لذا دنباله را می‌توان تابعی تعریف کرد که دامنه‌اش اعداد صحیح مثبت است و لذا آنرا با $f(n)$ نمایش داد. اما مرسوم است که چون n عدد صحیح مثبتی است و لذا متعلق به $\mathbb{R}$ نمی‌باشد, آنرا بصورت اندیس بکار برده و بصورت f_n (یا a_n) نشان داده می‌شود.

دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را در نظر می‌گیریم. بنا به تعریف می‌گوییم این دنباله دارای حد L است, هر گاه بتوان با بزرگ‌کردن n (به قدر کافی) هر قدر بخواهیم جملات a_n را به L نزدیک کنیم. در اینصورت می‌گوییم دنباله همگرا به L است. به تعبیر ریاضی:

$$\forall\, \varepsilon>0\ ;\ \exists\, N>0\,;\ n>N\rightarrow |a_n-L|<\varepsilon$$

در اینصورت می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} a_n=L$. اگر این حد وجود نداشته باشد, دنباله واگرا نامیده می‌شود.

دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ صعودی است اگر $\forall n\ ;\ a_{n+1}\geq a_n$ و برعکس آن نزولی خواهد بود. دنباله یکنوا نیز یا صعودی یا نزولی است.

اگر عددی مانند M وجود داشته باشد که $\forall n\ ;\ a_n\leq M$, می‌گوییم دنباله از بالا کراندار است. به همین ترتیب اگر عددی مانند m وجود داشته باشد که $\forall n\ ;\ a_n\geq m$, دنباله از پایین کراندار خواهد بود. در فصل ۱۰ خواهیم دید که هر دنباله صعودی و از بالا کراندار (یا هر دنباله نزولی و از پایین کراندار) همگراست. با این مقدمه کوتاه, یک دنباله مهم را بررسی می‌کنیم.

دنباله $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ را در نظر گرفته و چند جمله آنرا بدست می‌آوریم:

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_1^{\infty}=\left\{\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\cdots,\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\cdots\right\}$$
$$=\left\{\underbrace{2}_{n=1},\underbrace{2.25}_{n=2},\underbrace{2.370}_{n=3},\cdots,\underbrace{2.692}_{n=50},\cdots,\underbrace{2.705}_{n=100},\cdots,\underbrace{2.717}_{n=1000},\cdots\right\}$$

به نظر می‌رسد که این دنباله صعودی بوده و از بالا کراندار است. اگر چنین باشد می‌توان گفت دنباله همگرا بوده و دارای حد است.

<u>قضیه:</u> نشان دهید دنباله $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ اکیدا صعودی بوده و از بالا کراندار است.

❋ <u>اثبات:</u> ابتدا نشان می‌دهیم که دنباله اکیدا صعودی است. برای این منظور:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

چرا که بر طبق نامساوی برنولی اگر $x>-1$ و $r>1$ آنگاه:

$$(1+x)^r > 1+rx \to \left(1+\frac{-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1-\frac{(n+1)}{(n+1)^2} = 1-\frac{1}{n+1}$$

از آنجا که $a_1 = 2$ و دنباله a_n اکیدا صعودی است, لذا $a_n > 2$. حال نشان می‌دهیم $a_n < 3$ نیز می‌باشد یعنی از بالا کراندار است. برای این منظور از بسط دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+n\frac{1}{n}+\frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n^n}$$
$$= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$
$$< 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = 2+\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) < 3$$

که در سطر آخر از نامساوی $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$ استفاده شده است. ■

از آنجا که ثابت شد دنباله مورد نظر صعودی و از بالا کراندار است, لذا دارای یک حد خواهد بود که آنرا با e نمایش داده و به نام ثابت نپر (Napier's constant) یا عدد اویلر (Euler's number) می‌شناسیم. در نتیجه:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818\ldots\ldots$$

همچنین می‌توان نشان داد وقتی $n \to -\infty$ حد مورد نظر با زمانی که $n \to +\infty$ یکسان بوده و لذا آن هم برابر e خواهد شد.

توضیح ۱: نشان می‌دهیم این حد به ازای هر عدد حقیقی و مثبت x نیز برقرار است.

$$n=[x] \to n \le x < n+1 \to \frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n} \to 1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n} \xrightarrow{n\le x<n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \to \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

حال اگر طرفین به $+\infty$ میل کند, حد دو طرف برابر e می‌باشد, لذا حد وسط نیز تحت فشار طرفین e خواهد شد. به همین ترتیب می‌توان برای هر عدد حقیقی و منفی x نیز نشان داد که این حد تغییر نمی‌کند. لذا در نهایت:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

لازم به ذکر است که در فصل چندجمله‌ایهای تیلور در مثال ۸-۱۵ خواهیم دید که عدد نپر, عددی گنگ است.

توضیح ۲: در اثبات $a_n < 3$ در قضیه بالا دیده شد که:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

در نتیجه اگر $n \to +\infty$, یک بیان دیگر برای معرفی عدد نپر بصورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) \to \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = e}$$

مثال ۲-۴ حدود زیر را بدست آورید.

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-6t}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-6}=e^{-6}\qquad\left(-\frac{3}{x}=\frac{1}{t}\to x=-3t\right)$$

روش دوم : $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{x}\right)^{\frac{x}{-3}}\right]^{-6}=e^{-6}$

$$b)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2x+1}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-2}}\right]^{\frac{-2(3x-1)}{2x+1}}=e^{-3}$$

دیده می‌شود که در واقع هر دو حد به فرم 1^∞ بوده و در نهایت به دو جواب متفاوت منجر شد. لذا 1^∞ جزو صور مبهم است. روش دیگری برای محاسبه این صورت مبهم در بخش ۲-۳-۳ ارائه می‌شود. ■

۲-۳- تابع لگاریتمی و نمایی (بخشهای ۶-۲ , ۶-۳ و ۶-۴ کتاب)

در کتاب استوارت این سه بخش در دو فرم متفاوت ارائه شده است. فرم دوم بصورت ستاره‌دار (مانند ۶-۲*) مشخص شده است. مطالبی که اینجا عنوان می‌شود نظیر فرم اول است.

تابع $y=a^x$ که در آن a یک عدد ثابت مثبت و مخالف 1 است, بعنوان تابع نمایی شناخته می‌شود. اگر $x=n\in\mathbb{N}$ باشد مفهوم این تابع مشخص بوده و معرف n بار ضرب a در خودش می‌باشد. برای سایر حالات از تعاریف زیر استفاده می‌کنیم:

$$a^0=1\ ;\ a^{-n}=\frac{1}{a^n}\quad;\quad x=r=\frac{p}{q}\to a^r=\left(\sqrt[q]{a}\right)^p\quad q>0$$

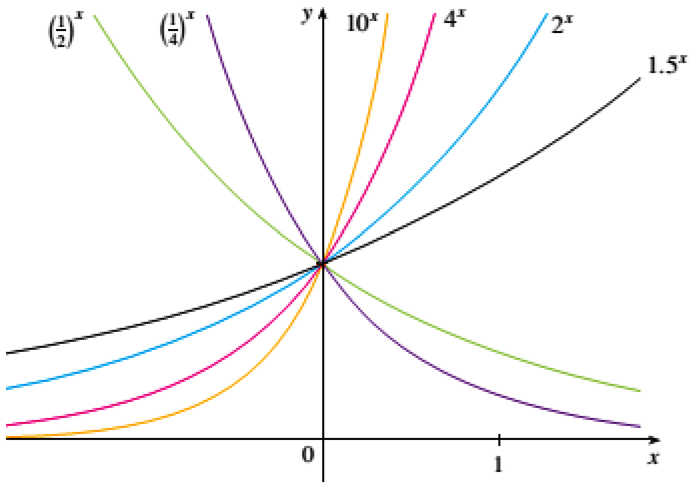
برای حالتی که x گنگ باشد a^x را بصورت $\lim_{r\to x}a^r$ تعریف می‌کنیم به عبارتی کافی است حد a^r را که در آن r عددی گویا است بدست آوریم. این تعریف قابل قبول است زیرا هر عدد گنگ را می‌توان هر قدر که لازم باشد به یک عددی گویا نزدیک کرد.

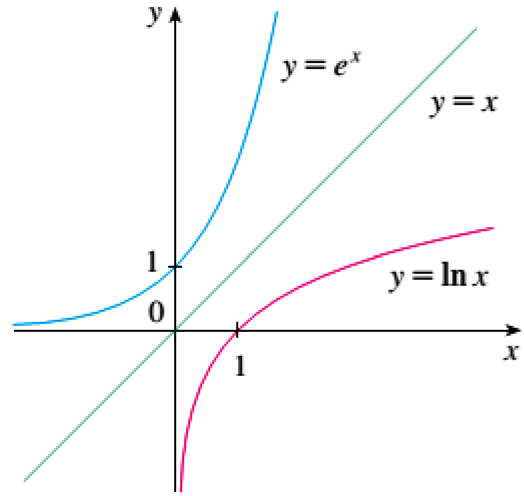
بطور خلاصه می‌توان گفت تابع $y=a^x$ یک تابع پیوسته با دامنه $\mathbb{R}$ و برد $(0,\infty)$ بوده و خواص آن بصورت زیر است:

$$x,y\in\mathbb{R}\ ,\ a,b>0\to\ a^{x+y}=a^xa^y\quad;\quad a^{x-y}=\frac{a^x}{a^y}\quad;\quad (a^x)^y=a^{xy}\quad;\quad (ab)^x=a^xb^x$$

اگر x و y اعدادی گویا باشند, این خواص همان قوانین جبر مقدماتی است و برای $x,y\in\mathbb{R}$ نیز با توجه به تعریفی که در بالا بصورت $a^x=\lim_{r\to x}a^r$ ارائه شد, می‌توان درستی آنها را نشان داد. رفتار این تابع برای a های مختلف در شکل سمت چپ دیده می‌شود.

معکوس تابع نمایی, تابع لگاریتم یعنی $y=log_a\,x$ بوده و برای ترسیم آن بایستی قرینه تابع نمایی را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم رسم کنیم. لازم بذکر است از آنجا که لگاریتم معکوس تابع نمایی است, در تعریف آن بایستی $a>0, a\neq1, x>0$ لحاظ شود. بنا بر دلیلی که بعدا خواهیم دید در حالتی که $a=e$ انتخاب شود, تابع نمایی از اهمیت خاصی برخوردار خواهد شد که به آن تابع نمایی طبیعی $y=e^x$ گفته میشود. معکوس آن نیز لگاریتم طبیعی نامیده شده و با $y=log_e\,x=Ln\,x$ نمایش می‌دهیم (شکل راست). همچنین بدیهی است برای $x>0$ خواهیم داشت $a^{log_a x}=x$ لذا $e^{Lnx}=x$.





※ مثال ۲-۵ با استفاده از مفهوم $\varepsilon - \delta$ (تعریف حد) نشان دهید:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2}{1+e^{-\frac{1}{x}}}=2$$

حل بایستی نشان دهیم برای هر $\varepsilon > 0$ میتوان حداقل یک $\delta > 0$ بدست آورد تا استلزام زیر برقرار باشد:

$$\forall\,\varepsilon>0\ ;\ \exists\,\delta>0\ ;\ 0<|x-0|<\delta\rightarrow|f(x)-2|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{2}{1+e^{-\frac{1}{x}}}-2\right|<\varepsilon\rightarrow\left|\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right|=\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}<\varepsilon\rightarrow\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}<\varepsilon\rightarrow e^{\frac{1}{x}}>\frac{2}{\varepsilon}-1$$

حال برای تعیین بازه x برای برقراری این نامساوی, از طرفین Ln میگیریم. چون Ln تابعی صعودی است لذا:

$$\xrightarrow{Ln}\frac{1}{x}>Ln\left(\frac{2}{\varepsilon}-1\right)\rightarrow x<\frac{1}{Ln\left(\frac{2}{\varepsilon}-1\right)}\rightarrow\delta\le\frac{1}{Ln\left(\frac{2}{\varepsilon}-1\right)}\qquad for\ \varepsilon<2$$

بدیهی است برای $\varepsilon > 2$ همواره $\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}} < \varepsilon$ برقرار میباشد. ■

در ادامه هدف آن است که مشتق این توابع را بدست آوریم. مسیری که به ترتیب دنبال می‌کنیم بصورت زیر است:

$$\begin{array}{ccc}(log_a\,x)' & \rightarrow & (Lnx)' \\ & & \downarrow \\ (a^x)' & \leftarrow & (e^x)'\end{array}$$

بنابراین ابتدا مشتق تابع $y = log_a\,x$ را بدست می‌آوریم.

۲-۳-۱- مشتق تابع لگاریتم

در این بخش مشتق تابع لگاریتم را با استفاده از تعریف مشتق بدست می‌آوریم:

$$f(x)=log_a\,x\rightarrow y'=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{log_a(x+h)-log_a\,x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=log_a\left(\lim_{h\to0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right)=log_a\left(\lim_{h\to0}\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}\right)=log_a e^{\frac{1}{x}}=\frac{log_a e}{x}$$

که با توجه به پیوسته بودن تابع log , جای lim و log را عوض کرده‌ایم. حال از آنجا که $x > 0$ اگر $a > 1$ لذا مشتق مثبت بوده و درنتیجه لگاریتم, تابعی صعودی است و اگر $a < 1$, تابع لگاریتم نزولی خواهد بود که قبلا در شکل هم دیده شد.

حال اگر $a = e$ انتخاب شود, خواهیم داشت $(Lnx)' = \frac{1}{x}$. در واقع تابعی پیدا کرده‌ایم که مشتق آن $\frac{1}{x}$ است.

با بکارگیری قاعده زنجیری برای مشتق تابع مرکب خواهیم داشت:

$$\boxed{y = Ln|u| \to y' = \frac{u'}{u}} \quad , \quad \boxed{y = log_a|u| = \frac{Ln|u|}{Lna} \to y' = \frac{1}{Lna}\frac{u'}{u}}$$

توضیح ۱: در مثال ۱-۱۵ عنوان شد که پادمشتق تابع x^n برابر $\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ می‌باشد. اما بدیهی است اعتبار این رابطه برای زمانی است که $n \neq -1$ باشد, به عبارتی پادمشتق $\frac{1}{x}$ را نمی‌توان از این رابطه بدست آورد. در اینجا دیده شد که پادمشتق این تابع $Lnx + C$ می‌باشد.

توضیح ۲: در اینجا لازم است به دیدگاه دیگری که در نحوه ورود به تابع Ln اتخاذ میشود اشاره کرد. دیده شد در اینجا عدد نپر با استفاده از حد یک دنباله تعریف شد و با استفاده از این تعریف مشتق تابع لگاریتم طبیعی برابر $\frac{1}{x}$ بدست آمد که همان فرم اول کتاب استوارت است که در ابتدای این بخش به آن اشاره شد.

دیدگاه دیگر برعکس است. یعنی تابعی که مشتق آن $\frac{1}{x}$ است را به نام Lnx تعریف می‌کنیم (که در شکل انتگرالی بصورت $\int_1^x \frac{dt}{t} = Lnx$ بیان می‌شود), سپس نشان داده می‌شود که این تابع از جنس لگاریتم بوده و در قضایای لگاریتم صدق می‌کند و در نهایت از روی آن عدد نپر بدست می‌آید. این همان فرم دوم کتاب است که با علامت ❋ مشخص گردیده است.

مثال ۲-۶ مشتق تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2(x+2)^2 \cdots (x+n)^2}$$

حل مشتق‌گیری به شیوه معمول بسیار طولانی خواهد بود. اما مزیت تابع لگاریتم آن است که ضرب را به جمع تبدیل می‌کند. لذا:

$$Ln\big(f(x)\big) = \underbrace{Ln(1)}_{0} - 2[Ln(x+1) + Ln(x+2) + \cdots + Ln(x+n)]$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{f'(x)}{f(x)} = -2\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+n}\right) \to f'(x) = \frac{-2\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+n}\right)}{(x+1)^2(x+2)^2 \cdots (x+n)^2} \quad \blacksquare$$

۲-۳-۲- مشتق تابع نمایی

ابتدا مشتق تابع نمایی طبیعی را بدست آورده و به کمک آن مشتق تابع نمایی نتیجه خواهد شد. از آنجا که معکوس تابع e^x یعنی تابع $Ln\,x$ در بازه $(0,\infty)$ یک به یک میباشد, لذا با استفاده از فرمول مشتق تابع معکوس خواهیم داشت:

$$f(x) = Ln\,x \to (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)} = \frac{1}{f'(e^x)} \xrightarrow{f'(x)=\frac{1}{x}} (e^x)' = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$$

همچنین می‌توان مستقیما به طریق زیر عمل کرد:

$$y = e^x \to x = Ln\,y \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} 1 = \frac{y'}{y} \to y' = y = e^x$$

این روش دوم زمانی امکان‌پذیر است که بتوان x را بر حسب y بیان کرد. بنابراین دیده شد که با انتخاب $a=e$ به تابعی رسیدیم که مشتق آن با خودش برابر است. لذا بر طبق قاعده زنجیری مشتق e^u هم برابر $u'e^u$ خواهد شد.

برای محاسبه مشتق تابع نمایی می‌توان مشابه بالا عمل کرد و یا از رابطه زیر که به رابطه تغییر پایه شناخته می‌شود استفاده کرد:

$$a^b=c^x\xrightarrow{log_c}x=b\,log_c a\to a^b=c^x=c^{b\,log_c a}\xrightarrow{for\ \ c=e}\boxed{a^b=e^{b\,Ln\,a}}$$

بنابراین در حالت کلی مشتق تابع نمایی و نمایی طبیعی عبارت است از:

$$\boxed{y=e^u\to y'=u'e^u}\xrightarrow{a^b=e^{b\,Ln\,a}}\boxed{y=a^u=e^{uLna}\to y'=u'a^uLna}$$

مثال ۲-۷ نشان دهید معادله $x=2^{-x}$ در بازه $[0,1]$ فقط یک ریشه دارد.

حل ابتدا تابع کمکی $f(x)=x-2^{-x}$ را تعریف میکنیم. بدیهی است $f(0)f(1)<0$ لذا در بازه $[0,1]$ قطعا یک ریشه خواهد داشت. اما از آنجا که مشتق آن $1+2^{-x}Ln2$ مثبت است لذا $f(x)$ همواره صعودی بوده و لذا تنها یک ریشه دارد. ■

توضیح: راه دوم حل مساله آن است که از قضیه رل استفاده کنیم. برای این منظور می‌گوییم اگر تابع در دو نقطه x_1 و x_2 صفر شود, الزاما در نقطه‌ای مابین ایندو بایستی مشتق آن صفر باشد, که چنین نقطه‌ای وجود ندارد. چرا که:

$$0<x_1<x_2<1\ ;\ \exists\, c\in(x_1,x_2)\ ;\ f'(c)=1+2^{-c}Ln2=0\quad\boxed{\times}\quad ■$$

مثال ۲-۸ حدود زیر را بدست آورید.

$$1)\ \lim_{x\to0}\frac{Ln(1+x)}{x}\ \left(\frac{0}{0}\right)\to L=\lim_{x\to0}Ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=1\quad\to\quad Ln(1+x)\sim x\ \ (x\to0)$$

نتیجه آخر بیانگر آن است که $Ln(1+x)$ در مجاور صفر با x هم ارز است. مفهوم دقیق هم‌ارزی در بخش ۸-۲ خواهد آمد. ■

$$2)\ \lim_{x\to0}\frac{k^x-1}{x}\ \left(\frac{0}{0}\right)\to L=\lim_{x\to0}\frac{k^x-k^0}{x-0}=(k^x)'|_{x=0}=Lnk\xrightarrow{k>0}k^x-1\sim xLnk\ \ (x\to0)\ ■$$

که در حالت خاص به هم ارزی $e^x-1\sim x$ در مجاور صفر منجر خواهد شد. تعمیم حد بالا بصورت زیر است:

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{x}=Ln\left(\frac{a}{b}\right)\qquad a,b>0\quad ■$$

توضیح: با خطی سازی تابع $f(x)=k^x-1$ حول $a=0$ نیز می‌توان حد دوم را بدست آورد:

$$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)=(k^0-1)+k^0(Lnk)(x-0)=xLnk\ ■$$

مثال ۲-۹ نشان دهید برای $x>0$ خواهیم داشت $e^x>x+1$

حل ابتدا تابع کمکی $f(x)=e^x-x-1$ را تعریف میکنیم. از آنجا که مشتق آن مثبت است لذا:

$$f(x)=e^x-x-1\to f'(x)=e^x-1>0\ \ ;\ \ x>0\to f(x)>f(0)\to \text{حکم}$$

راه حل دوم آن است که برای تابع $f(x)=e^x$ در بازه $[0,x]$ از قضیه لاگرانژ استفاده کنیم. در نتیجه:

$$\exists\, c\in(0,x):\ e^x-e^0=e^c(x-0)\xrightarrow{0<c<x\to e^c>1}e^x-1=xe^c>x\ ■$$

مثال ۲-۱۰ با استفاده از تابع $y=\frac{Lnx}{x}$ نامساوی زیر را نشان دهید.

$$e^x > x^e \quad ; \quad x>0\,, x\neq e$$

حل با استفاده از تابع کمکی $f(x)=\frac{Lnx}{x}$ خواهیم داشت:

$$y'=\frac{1-Lnx}{x^2} \;\; ; \;\; y'=0 \to x=e$$

$$\begin{cases} 0<x<e \xrightarrow{y'>0} f(x)<f(e) \to \dfrac{Lnx}{x}<\dfrac{1}{e} \to eLnx<x \to \underbrace{e^{eLnx}}_{x^e}<e^x \\ \qquad x>e \xrightarrow{y'<0} f(x)<f(e) \to \text{همان نتیجه بالا} \end{cases}$$

لذا در دو حالت $x<e$ و $x>e$ به یک نتیجه رسیدیم. در حالت خاص $x=\pi$ نامساوی جالب $e^{\pi}>\pi^e$ را خواهیم داشت. ■

مثال ۲-۱۱ تابع مشتق‌پذیر $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ بگونه‌ای است که $f(0)=0$ بوده و در شرط زیر نیز صدق میکند. تمام جوابهای ممکن تابع f را بیابید. (راهنمایی: از تابع $g(x)=e^{-2x}f(x)$ استفاده کنید)

$$\forall\;\; x\in(0,1) \;:\;\; 0\leq f'(x)\leq 2f(x)$$

حل با استفاده از تابع کمکی $g(x)=e^{-2x}f(x)$ خواهیم داشت:

$$g(x)=e^{-2x}f(x)\to g'(x)=e^{-2x}(f'(x)-2f(x))\leq 0$$

$$g(x)=e^{-2x}f(x)\to g'(x)=e^{-2x}(f'(x)-2f(x))\leq 0 \;\;;\;\; 0\leq x\to g(x)\leq g(0)=0$$

یعنی g تابعی نزولی است, لذا در بازه $[0,1]$ خواهیم داشت $g(x)\leq g(0)=0$. از طرفی در صورت سوال $f(x)\geq 0$ عنوان شده است, لذا $g(x)=e^{-2x}f(x)\geq 0$ خواهد شد. بنابراین تنها تابعی که در این بازه در این دو شرط صدق کند تابع $g\equiv 0$ است و لذا $f\equiv 0$ خواهد شد. ■

مثال ۲-۱۲ با استفاده از تغییر متغیر $x=e^t$ معادله دیفرانسیل $x^2y''+axy'+by=0$ را که در آن a و b اعداد ثابتی هستند, به معادله دیفرانسیلی بر حسب متغیر t تبدیل کنید. به عبارتی: $(x,y)\to(t,y)$

$$x=e^t\to dx=e^t dt\to y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{e^t}y'_t=\frac{1}{x}y'_t\to xy'=y'_t$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{e^t}y'_t\right)}{dt}\frac{dt}{dx}=\left(\frac{-e^t}{e^{2t}}y'_t+\frac{1}{e^t}y''_t\right)\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^2}y'_t+\frac{1}{x^2}y''_t$$

$$\to x^2y''=y''_t-y'_t\xrightarrow{Sub.}\underbrace{x^2y''}_{y''_t-y'_t}+a\underbrace{xy'}_{y'_t}+by=0\to y''_t+(a-1)y'_t+by=0$$

دیده میشود که این تغییر متغیر باعث شد معادله اولیه به یک معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت تبدیل گردد. ■

توضیح: برای تبدیل y'' بر حسب مشتقات روی t میتوان به طریق زیر نیز عمل کرد:

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{x}y'_t\right)}{dx}=\frac{-1}{x^2}y'_t+\frac{1}{x}\frac{d(y'_t)}{dx}=\frac{-1}{x^2}y'_t+\frac{1}{x}\left(y''_t\frac{dt}{dx}\right)=-\frac{1}{x^2}y'_t+\frac{1}{x^2}y''_t \;\blacksquare$$

۲-۳-۳- دو کاربرد تابع لگاریتمی و نمایی

الف- برای بررسی حدودی که صورت حدی آنها به یکی از اشکال 0^0 , ∞^0 و 1^∞ میباشد, ابتدا آنرا بصورت زیر به فرم نمایی تبدیل کرده و در نهایت به محاسبه حد حاصلضرب می‌رسیم.

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)Ln(f(x))} \to \lim_{x\to a} g(x)Ln(f(x)) =?$$

و یا اینکه از طرفین رابطه $A = \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ لگاریتم گرفته و سپس با تعویض جای حد و لگاریتم مساله را حل می‌کنیم. بدیهی است هر دو روش معادل یکدیگرند. البته برای حالت 1^∞ یک روش حل دیگری نیز در مثال ۲-۴ ارائه شد.

لازم به ذکر است که در تعریف $f(x)^{g(x)}$ بایستی $\lim_{x\to a} f(x) > 0$ باشد.

مثال ۲-۱۳ حاصل حد زیر را بدست آورید.

$$A = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \quad (1^\infty) \to LnA = Ln \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} = 1 \to A = e$$

و یا همانگونه که ذکر شد بطریق زیر عمل کنیم که البته فرم نوشتن آن قدری طولانی‌تر خواهد بود.

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}Ln(1+x)} = e^{Ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} \to \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0} Ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{Ln \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^1 = e \quad \blacksquare$$

توضیح: مشابه همین روش می‌توان نشان داد: $\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ ■

یک سوال مهم: آیا صورت حدی 0^∞ جزو صور مبهم است؟ در اینجا نشان می‌دهیم که اینگونه نیست. فرض کنید A به فرم 0^∞ باشد:

$$A = \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \to LnA = \lim_{x\to a} g(x)Ln\big(f(x)\big) ; \begin{cases}(g(x)\to +\infty) \to (LnA \to -\infty) \to A = 0 \\ (g(x)\to -\infty) \to (LnA \to +\infty) \to A = +\infty\end{cases}$$

بنابراین در نهایت پاسخ یا 0 است و یا $+\infty$, لذا صورت حدی 0^∞ جزو صور مبهم نیست.

ب- برای محاسبه مشتق توابع به فرم $u(x)^{v(x)}$ که در آن $u(x) > 0$ است, مشابه قسمت قبل یک راه آن است که این توابع را به‌فرم $e^{v(x)Lnu(x)}$ نوشته و طبق روابط تابع نمایی از آن مشتق بگیریم.

در روش معادل, از دو طرف $f(x) = u(x)^{v(x)}$ ابتدا Ln گرفته و سپس مشتق‌گیری می‌کنیم.

مثال ۲-۱۴ مشتق تابع x^x را برای $(x > 0)$ بدست آورید.

$$f(x) = x^x \quad (x>0) \to Lnf(x) = xLnx \to \frac{f'(x)}{f(x)} = Lnx + \frac{1}{x}x \to f'(x) = x^x(1+Lnx) \quad \blacksquare$$

❋ ۲-۳-۴- کاربردهای مهندسی تابع نمایی طبیعی (بخش ۶-۵ کتاب)

در این بخش با ارائه چند مثال به کاربردهای مهندسی تابع نمایی طبیعی می‌پردازیم.

در قسمت قبل دیده شد که تابع نمایی دارای این خاصیت است که مشتق آن با خودش برابر است. به عبارت دیگر e^x جواب معادله $y' = y$ می‌باشد که در واقع یک معادله دیفرانسیل است. حال این معادله را تعمیم می‌دهیم. در مثال ۳-۱۴ و پس از معرفی

انتگرالها خواهیم دید که جواب معادله دیفرانسیل $y' = ky$ عبارت است از $y = Ce^{kx}$, که در آن x متغیر معادله و C یک ثابت دلخواه است. به راحتی نیز می‌توان کنترل کرد که این جواب در معادله صدق می‌کند.

حال فرض کنید با کمیتی روبرو هستیم که میزان تغییرات آن (بر حسب زمان), با مقدار آن کمیت در آن لحظه متناسب باشد, به عبارتی $y' \propto y$. در نتیجه از آنجا که y تابعی از t می‌باشد, لذا:

$$y' \propto y \rightarrow y' = ky \rightarrow y = Ce^{kt}$$

به عبارتی هر کمیتی که میزان تغییرات آن با مقدار آن کمیت در آن لحظه متناسب باشد, جوابی به شکل نمایی دارد. مثلا سرعت سرد شدن یک جسم, میزان سود سرمایه, تجزیه عنصر رادیو اکتیو , رشد جمعیت و ... . حال اگر میزان کمیت در زمان $t = 0$ برابر y_0 باشد, میتوان ثابت C را نیز بدست آورد که همان y_0 میشود.

$$y(0) = y_0 \rightarrow y_0 = Ce^{k0} \rightarrow C = y_0 \rightarrow \boxed{y = y_0e^{kt}}$$

با این مقدمه به چند کاربرد مهندسی از تابع نمایی می‌پردازیم.

مثال ۲-۱۵ بر طبق قانون نیوتن, دمای یک جسم با سرعتی متناسب با تفاضل دمای هر لحظه جسم (T) و دمای محیط (T_0) تغییر میکند. بنابراین طبق این قانون معادله حاکم بر مساله بصورت $\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$ خواهد بود. مشابه آنچه در بالا دیده شد می‌توان نشان داد جواب این معادله دیفرانسیل نیز بصورت $T = T_0 + Ce^{kt}$ بدست می‌آید. طبیعی است این معادله برای تغییر دمای یک اتاق (T) بر حسب دمای بیرون (T_0) نیز قابل استفاده است.

فرض کنید سوالی به این صورت مطرح شود که دماسنجی دمای داخل اتاق را $70^{\circ C}$ و دمای خارج را $10^{\circ C}$ نشان دهد و بدانیم بعد از 3 دقیقه دمای اتاق $25^{\circ C}$ میباشد. هدف آن است که دما را در هر لحظه بیابیم. برای این منظور:

$$T = T_0 + Ce^{kt} \xrightarrow{t=0} 70 = 10 + Ce^{k0} \rightarrow C = 60$$

$$t = 3 \rightarrow 25 = 10 + 60e^{3k} \rightarrow e^{3k} = \frac{1}{4} \xrightarrow{Ln} k = \frac{-1}{3}Ln4 = -0.46 \rightarrow T = 10 + 60e^{-0.46t}$$

دیده شد که شرط اولیه(یعنی در زمان $t = 0$) ثابت C را نتیجه داد و شرط دیگر(یعنی در زمان $t = 3$) ثابت k را. ■

مثال ۲-۱۶ رادیم در هر لحظه با سرعتی متناسب با مقدار موجود در همان لحظه تجزیه میشود, به عبارتی $\frac{dm}{dt} = km$ میباشد. اگر نیمه عمر رادیوم T سال و مقدار اولیه آن m_0 باشد, مقدار رادیوم موجود پس از t سال را تعیین کنید.

$$\frac{dm}{dt} = km \rightarrow m = m_0e^{kt} \quad ; \quad \frac{m_0}{2} = m_0e^{kT} \rightarrow e^{kT} = \frac{1}{2} \rightarrow k = -\frac{Ln2}{T}$$

$$\rightarrow m = m_0e^{-\frac{t}{T}Ln2} = m_02^{-\frac{t}{T}} \quad ; \quad \underline{or}: \ m = m_0e^{kt} = m_0(e^{kT})^{\frac{t}{T}} = m_02^{-\frac{t}{T}} \ ■$$

مثال ۲-۱۷ در نظر بگیرید مقدار اولیه سرمایه‌ای A_0 و نرخ بهره برای یک دوره r باشد. پس از t دوره ارزش سرمایه را بیابید. فرض کنید پس از هر دوره به سود دوره قبل نیز سود تعلق بگیرد که به نام بهره مرکب شناخته می‌شود.

حل در اینجا نیز معادله حاکم بر مساله ما به فرم $\frac{dA}{dt} = rA$ است و جواب این مساله نیز همانگونه که دیدیم بصورت $A = A_0e^{rt}$ میباشد. در ادامه بدون توجه به معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله و جواب آن, از طریق دیگری همین جواب را بدست می‌آوریم.

$t = 0\ ;\ \ A = A_0$

$t = 1\ ;\ \ A = A_0 + A_0 r = A_0(1+r)$

حال برای محاسبه سود سرمایه در $t = 2$ بایستی سرمایه در زمان $t = 1$ را که (در واقع سرمایه اولیه A_0 بانضمام سود $A_0 r$ میباشد) در نرخ بهره r ضرب شود. این نوع سود دهی, بهره مرکب نامیده میشود. بنابراین:

$t = 2\ ;\ \ A = A_0(1+r) + A_0(1+r)r = A_0(1+r)^2$

$\vdots$

$t = t\ ;\ \ A = A_0(1+r)^t$

اگر بخواهیم دقیقتر میزان ارزش سرمایه را بیابیم بایستی میزان سود را بجای پایان هر دوره برای واحدهای زمانی کوچکتر حساب کنیم. مثلا بجای آنکه دوره را سالانه در نظر بگیریم بهتر است آنرا ماهیانه, روزانه یا ساعتی در نظر بگیریم. دقیقترین سود آن است که تعداد دوره‌ها را بینهایت در نظر بگیریم. اگر تعداد دوره‌های سود دهی n باشد, میزان بهره $\frac{r}{n}$ خواهد بود. لذا پس از t دوره:

$$A = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \xrightarrow{n\to\infty} A = A_0 \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rt} = A_0 e^{rt}$$

که همان نتیجه‌ای است که در ابتدا با درنظر گرفتن معادله حاکم بر مساله بدست آمد.

در این‌حالت که n به بینهایت میل داده شده است, بهره مرکب را بهره مرکب پیوسته می‌نامیم. بعنوان یک مثال عددی ارزش ۱۰ میلیون تومان پول با نرخ بهره سالیانه ۱۸ درصد پس از ۵ سال با در نظر گرفته دو نوع بهره سالیانه و بهره پیوسته برابر است با:

$A = A_0(1+r)^t = 10(1+0.18)^5 = 22.9$ بهره مرکب سالانه

$A = A_0 e^{rt} = 10e^{0.18\times 5} = 24.6$ بهره مرکب پیوسته ■

تمرینات بخش ۲-۳

تمرینات ۵۴, ۶۸ و ۹۹ از بخش ۶-۲ , تمرینات ۲۸, ۴۶, ۶۴ و ۶۸ از بخش ۶-۳ و نیز تمرینات ۳۸, ۵۶ و ۶۲ از بخش ۶-۴ کتاب

۱- نشان دهید که تابع زیر نزولی است.

$$f(x) = (1+a^x)^{1/x}\ \ ;\ \ a > 0\ ,\ \ x > 0$$

۲- پیوستگی و مشتق پذیری تابع زیر را در صفر بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \pi^{xLnx} & ,x > 0 \\ \pi^x & ,x \le 0 \end{cases}$$

جواب: تابع در صفر پیوسته بوده ولی مشتق راست ندارد.

۳- تابع f در بازه$[0,\infty)$ دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته بوده و نیز به ازای هر x در رابطه $f'(x) - 2xf(x) \ge 0$ صدق میکند. نشان دهید: $f(x) \ge f(0)e^{x^2}$.

۴- مشتق تابع $f(x) = x^2 cosx(1+x^4)^{-7}$ را بدست آورید.

$$\underline{Ans:}\quad f'(x)=\frac{2xcosx}{(1+x^4)^7}-\frac{x^2sinx}{(1+x^4)^7}-\frac{28x^5cosx}{(1+x^4)^8}$$

۵- مثال ۲-۱۰ را با استفاده از تابع $f(x)=e^x-x^e$ مجددا حل کنید.

۶- به کمک قضیه مقدار میانگین نشان دهید:

$$x\geq 0\rightarrow Ln(1+x)<e^x$$

۷- درستی حد زیر را یکبار مشابه روش ارائه شده در مثال ۲-۴ و بار دیگر مشابه مثال ۲-۱۳ نشان دهید.

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{1/x}=e^{-2}$$

۸- فرض کنید $f(x)=x^m(x-1)^n$ که در آن m و n دو عدد صحیحی بزرگتر از ۱ میباشند. ابتدا نشان دهید:

$$f'(x)=\left(\frac{m}{x}-\frac{n}{1-x}\right)f(x)$$

سپس نشان دهید تابع $f(x)$ دارای یک اکسترمم در بازه $0<x<1$ است که اگر n زوج باشد, ماکزیمم و اگر n فرد باشد, مینیمم خواهد بود.

۹- نشان دهید:

$$0<a<b<\frac{\pi}{2}\rightarrow (a-b)tanb<Ln\left(\frac{cosb}{cosa}\right)<(a-b)tana$$

❋ ۱۰- فرض کنید $f(x)=(1+x^2)e^x-k$ که در آن k یک عدد ثابت است. الف: نشان دهید $f'(x)\geq 0$.

ب: نشان دهید معادله $(1+x^2)e^x=k$ اگر $k>0$ فقط یک ریشه حقیقی دارد و اگر $k\leq 0$ ریشه حقیقی نخواهد داشت.

۲-۴- توابع معکوس مثلثاتی و مشتقات آنها (بخش ۶-۶ کتاب)

فرض کنید پس از حل یک معادله مثلثاتی در نهایت به رابطه $sin\,x=0.2$ رسیده باشیم. طبیعی است از آنجا که در حل هر معادله, هدف محاسبه x میباشد, در اینجا نمی‌توان x را بصورت دقیق بدست آورد و صرفا می‌توان گفت که "x زاویه‌ای است که سینوس آن 0.2 است". در ریاضیات این جمله را می‌توان بصورت $x=Arcsin(0.2)$ بیان کرد که به آن آرک سینوسِ 0.2 می‌گوییم. به تعبیری این واژه "آرک" جایگزین مناسبی برای "نمی‌دانم" است. با این توصیف رابطه $x=Arcsin(0.2)$ بیانگر آن است که x کمانی است که سینوسِ آن 0.2 است و در واقع مقدار دقیق آنرا نمی‌دانیم.

از نگاه دیگر گویا قرار است از $sin\,x=y$ با معلوم بودن y , مقدار x را بر حسب آن بیابیم. با این تعبیر می‌توان گفت با معکوس تابع سینوس روبرو هستیم. که در اینصورت باید آنرا بصورت $x=sin^{-1}y$ نمایش داد. به عبارتی هر دو شکل نمایش $Arcsin(0.2)$ یا $sin^{-1}(0.2)$ درست است. بنابراین در ادامه هدف آن است که به معرفی معکوس توابع مثلثاتی پرداخته و سپس مشتقات آنها را نیز محاسبه کنیم.

نکته مهم این است که از آنجا که این توابع متناوب میباشند, لذا طبیعتا یک به یک نبوده و در حالت کلی نبایستی معکوس داشته باشند. اما چنانچه آنها را محدود به ناحیه مشخصی نماییم می‌توان آنها را معکوس‌پذیر دانست.

الف: معکوس تابع سینوس

تابع $y = sin\,x$ از $\mathbb{R} \to [-1,1]$ بوده و از آنجا که یک به یک نیست, لذا دارای معکوس نخواهد بود. اما چنانچه دامنه این تابع را محدود به $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ نماییم, آنگاه در این بازه تابع یکنوا بوده و لذا دارای معکوس خواهد بود. دقت شود بازه انتخابی بایستی بگونه‌ای باشد که علاوه بر یکنوا بودن, کل بردِ تابع یعنی $[-1,1]$ را نیز پوشش دهد, مثلا بازه $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ مناسب نیست, چرا که اگر چه تابع در این بازه یکنوا است ولی برد آن $[0,1]$ خواهد بود و نه $[-1,1]$. به این ترتیب می‌توان مثلا بازه $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ را نیز انتخاب کرد, ولی عموما مرسوم است که همان $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ انتخاب شود.

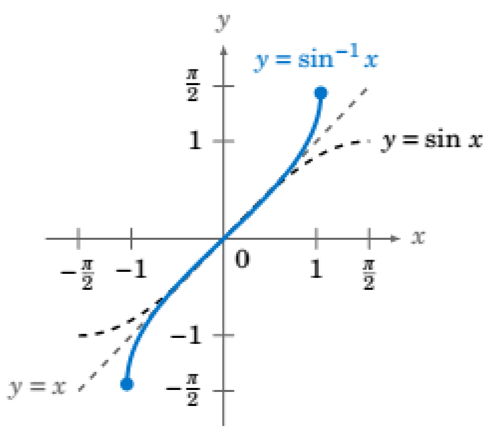
عنوان شد که معکوس این تابع را با sin^{-1} و یا $Arcsin$ نمایش می‌دهند. لذا:

$$y = sin\,x \to \begin{cases} x = sin^{-1}y \\ x = Arcsin\,y \end{cases} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} \begin{cases} y = sin^{-1}x \\ y = Arcsin\,x \end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y = sin\,x \\ \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \begin{cases} y = sin^{-1}\,x = Arcsin\,x \\ [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$



گاهی اوقات ممکن است برای معکوس تابع سینوس با نماد $arcsin\,x$ روبرو شویم. دیده شد که با محدود کردن دامنه سینوس سعی کردیم خروجی تابع معکوس یکتا گردد تا بتوان آنرا تابع نامید. مثلا $Arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ معادل این سوال است که سینوسِ چه زاویه‌ای $\frac{1}{2}$ است که اگر محدوده پاسخ را به $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ محدود کنیم, تنها جواب $\frac{\pi}{6}$ را خواهیم داشت.

اما چنانچه $arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ سوال شود, منظور تعیین همه زوایایی است که سینوس آنها $\frac{1}{2}$ است که طبیعتا جواب $2k\pi + \frac{\pi}{6}$ و $2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$ خواهد بود. طبیعی است با این تعریف دیگر $arcsin\,x$ تابع نخواهد بود. بنابراین شاید چندان برای ما مناسب نباشد, هر چند در حل معادلات مثلثاتی و مواردی که نیاز به تعیین همه پاسخهای ممکن است, از آن استفاده می‌شود.

مثال ۲-۱۸ مطلوب است محاسبه:

$$a)\ cos\left(sin^{-1}\left(\frac{-8}{17}\right)\right) \qquad ; \qquad b)\ sin^{-1}\left(sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

حل الف: اگر داخل پرانتز را α در نظر بگیریم, هدف محاسبه $cos\alpha$ است.

$$\alpha = sin^{-1}\left(\frac{-8}{17}\right) \to sin\alpha = \frac{-8}{17} \to cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha} = \frac{15}{17}$$

توجه شود که از $sin\alpha = \frac{-8}{17}$ می‌توان نتیجه گرفت که انتهای کمان α در ربع چهارم قرار داشته و لذا $cos\alpha$ بایستی مثبت باشد.

ب: در این مثال توجه شود که اشتباها با استفاده از رابطه $f^{-1}of(x)=x$ حاصل عبارت را $\frac{3\pi}{4}$ محاسبه نکنیم. چرا که بایستی خروجی sin^{-1} در بازه $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ قرار داشته باشد. باز هم اگر داخل پرانتز را α در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\alpha=sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow sin^{-1}(\alpha)=sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ \blacksquare$$

توضیح: تعمیم روابط بالا در حالت کلی بصورت زیر است:

$$cos(sin^{-1}x)=\sqrt{1-x^2}\qquad ;\qquad sin^{-1}(sin\,x)=x\quad \left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\ \blacksquare$$

در ادامه می‌خواهیم مشتق این تابع را بدست آوریم. مشابه آنچه قبلا دیده شد:

$$f(x)=sinx\rightarrow (f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}=\frac{1}{f'(sin^{-1}x)}\rightarrow (sin^{-1}x)'=\frac{1}{cos(sin^{-1}x)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad ;\quad x\neq\pm1$$

دقت شود در محاسبه مشتق $sin^{-1}\,x$ از آنجا که مخرجِ کسرِ مشتق در $x=\pm1$ برابر صفر است بایستی دامنه را بجای $[-1,1]$ به $(-1,1)$ محدود کنیم که در اینصورت $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ خواهد بود.

اما بجای استفاده از این فرمول شاید بهتر باشد به طریق زیر عمل کنیم:

$$y=sin^{-1}x\rightarrow x=siny\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x}1=y'cosy\rightarrow y'=\frac{1}{cosy}=\frac{1}{\sqrt{1-sin^2y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

توجه شود که اگر $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ لذا $cosy>0$ است. در نتیجه در حالت کلی:

$$y=sin^{-1}u\rightarrow y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\quad ;\quad -1<u<1$$

ب: معکوس تابع کسینوس

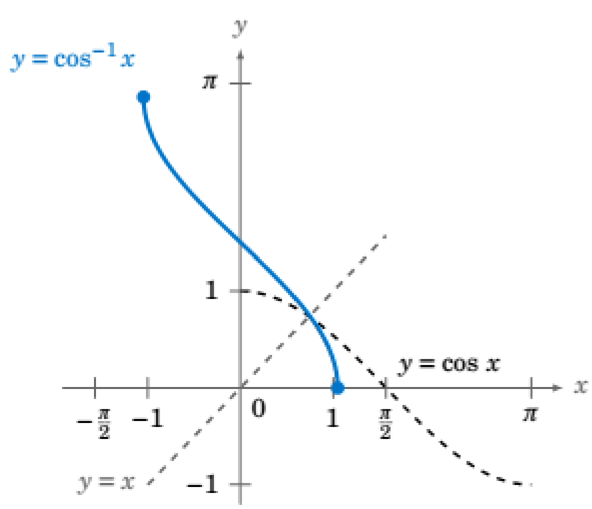
تابع $y=cos\,x$ از $\mathbb{R}\rightarrow[-1,1]$ بوده و از آنجا که یک به یک نیست, لذا دارای معکوس نخواهد بود. اما چنانچه دامنه این تابع را محدود به $[0,\pi]$ نماییم, آنگاه در این بازه تابع یکنوا بوده و لذا دارای معکوس خواهد بود. مشابه نمادگذاری قبل در اینجا نیز معکوس این تابع را با cos^{-1} و یا $Arccos$ نمایش می‌دهند. لذا:

$$y=cos\,x\rightarrow\begin{cases}x=cos^{-1}y\\x=Arccos\,y\end{cases}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}\begin{cases}y=cos^{-1}x\\y=Arccos\,x\end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}y=cos\,x\\ [0,\pi]\rightarrow[-1,1]\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}}\begin{cases}y=cos^{-1}x=Arccos\,x\\ [-1,1]\rightarrow[0,\pi]\end{cases}$$

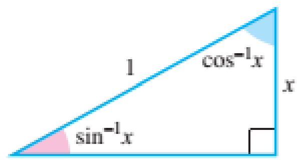


مشابه روش که برای محاسبه مشتق $sin^{-1}x$ دیده شد, می‌توان مشتق $cos^{-1}x$ را بصورت زیر بدست آورد:

$$y = cos^{-1}x \to y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad -1 < x < 1$$

در اینجا نیز در محاسبه مشتق $cos^{-1}x$ بایستی دامنه را به $(-1,1)$ محدود کنیم.

ارتباط بین $sin^{-1}x$ و $cos^{-1}x$ را می‌توان با رابطه $sin^{-1}x + cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ بیان کرد. اگر چه می‌توان درستی این رابطه را بصورت جبری نشان داد (مشابه مثال ۲-۱۹) , اما استفاده از شکل زیر ساده‌ترین روش اثبات آن می‌باشد.



یک روش دیگر اثبات آن است که نشان دهیم تابع $f(x) = sin^{-1}x + cos^{-1}x$ تابع ثابتی است. برای این منظور:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \to f(x) = cte$$

برای محاسبه این مقدار ثابت کافی است یک x دلخواه قرار دهیم, مثلا برای $x = 0$ به $f(0) = \frac{\pi}{2}$ خواهیم رسید و چون تابع ثابت است لذا همواره برابر همین مقدار خواهد بود.

بطریق معکوس اگر ابتدا درستی $sin^{-1}x + cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ را مثلا با استفاده از شکل بالا نشان داده باشیم, میتوان مشتق $cos^{-1}x$ را با توجه به آن بدست آورد:

$$cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - sin^{-1}x \to (cos^{-1}x)' = 0 - (sin^{-1}x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

بنابراین در حالت کلی:

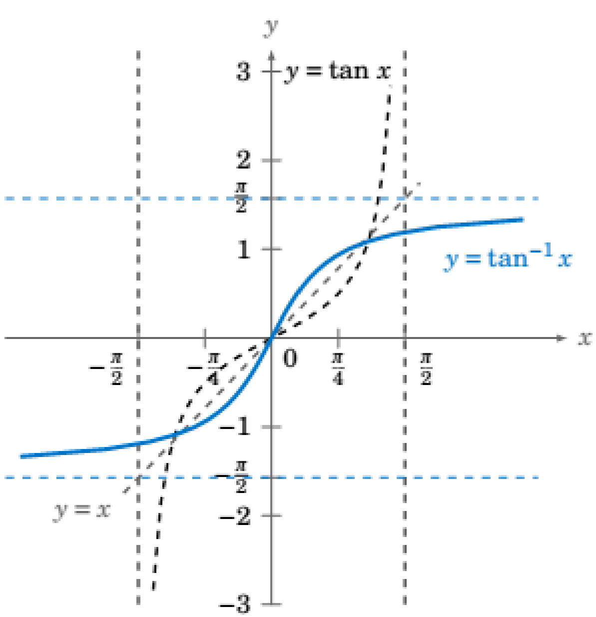
$$y = cos^{-1}u \to y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad ; \quad -1 < u < 1$$

ج: معکوس توابع تانژانت و کتانژانت

تابع $y = tan\,x$ از $\mathbb{R} - \left\{\frac{2k+1}{2}\pi\right\} \to \mathbb{R}$ بوده و از آنجا که یک به یک نیست, لذا دارای معکوس نخواهد بود.

اما چنانچه دامنه این تابع را محدود به $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ نماییم, آنگاه در این بازه تابع یکنوا بوده و لذا دارای معکوس خواهد بود. مشابه نمادگذاری قبل در اینجا نیز معکوس این تابع را با tan^{-1} و یا $Arctan$ نمایش می‌دهند.

مشتق این تابع نیز بصورت زیر بدست می‌آید:



$$f(x) = tanx \rightarrow (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \rightarrow (tan^{-1}x)' = \frac{1}{1+tan^2y} = \frac{1}{1+x^2}$$

و یا:

$$y = tan^{-1}x \rightarrow x = tany \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} 1 = y'(1+tan^2y) \rightarrow y' = \frac{1}{1+tan^2y} = \frac{1}{1+x^2}$$

برای تابع کتانژانت نیز می‌توان به همین شکل معکوس آنرا را تعریف کرد. می‌توان نشان داد:

$$tan^{-1}x + cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} \rightarrow (cot^{-1}x)' = 0 - (tan^{-1}x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

بنابراین در حالت کلی:

$$y = tan^{-1}u \rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2} \quad ; \quad y = cot^{-1}u \rightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2}$$

مثال ۲-۱۹ نشان دهید:

$$4\,tan^{-1}\frac{1}{5} - tan^{-1}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

حل فرض کنیم $\alpha = tan^{-1}\frac{1}{5}$ و $\beta = tan^{-1}\frac{1}{239}$ بایستی ثابت کنیم $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$. برای این منظور نشان می‌دهیم $tan(4\alpha-\beta) = 1$. توجه شود با توجه به تعریفی که برای tan^{-1} انتخاب کردیم α و β در بازه $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ قرار دارند.

$$tan\alpha = \frac{1}{5}\ ;\ tan\beta = \frac{1}{239} \rightarrow tan(4\alpha-\beta) = \frac{tan(4\alpha) - tan\beta}{1+tan(4\alpha)tan\beta}$$

فقط بایستی $tan(4\alpha)$ را بر حسب $tan\alpha$ بیان کرد.

$$tan(2\alpha) = \frac{2tan\alpha}{1-tan^2\alpha} = \frac{2/5}{1-1/25} = \frac{5}{12}\ ;\ tan(4\alpha) = \frac{2tan(2\alpha)}{1-tan^2(2\alpha)} = \frac{10/12}{1-25/144} = \frac{120}{119}$$

$$tan(4\alpha-\beta) = \frac{tan(4\alpha)-tan\beta}{1+tan(4\alpha)tan\beta} = \frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\frac{1}{239}} = 1 \rightarrow 4\alpha-\beta = \frac{\pi}{4}$$

دقت شود از آنجا که $4\alpha-\beta = tan^{-1}(1)$ بایستی جوابی را انتخاب کنیم که در بازه $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ قرار داشته باشد و لذا جواب فقط $\frac{\pi}{4}$ است. ■

مثال ۲-۲۰ نشان دهید:

1) $tan^{-1}b - tan^{-1}a \le b - a \qquad a < b$

2) $\frac{b-a}{1+b^2} < tan^{-1}b - tan^{-1}a < \frac{b-a}{1+a^2} \qquad 0 < a < b$

سپس به کمک قسمت ب نشان دهید: $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < tan^{-1}\frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$

حل الف: با تعریف تابع $f(x) = tan^{-1}x$ و استفاده از قضیه مقدار میانگین (لاگرانژ) خواهیم داشت:

$$f(x)=tan^{-1}x \to \exists c\in(a,b)\ ;\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\frac{tan^{-1}b-tan^{-1}a}{b-a}=\frac{1}{1+c^2}\le 1\to tan^{-1}b-tan^{-1}a\le b-a$$

توضیح: می‌توان مساله را بدون استفاده از قضیه لاگرانژ مشابه مثال ۲-۹ نیز حل کرد. برای اینکار رابطه مورد نظر را بصورت $tan^{-1}b-b\le tan^{-1}a-a$ می‌نویسیم. حال با تعریف تابع $f(x)=tan^{-1}x-x$ خواهیم داشت:

$$f'(x)=\frac{-x^2}{1+x^2}\le 0\to f \text{ نزولی } \quad ;\quad a<b\to f(a)\ge f(b)\to tan^{-1}a-a\ge tan^{-1}b-b\ \blacksquare$$

ب: از آنجا که $a<c<b$ در نتیجه:

$$\frac{1}{1+b^2}<\frac{1}{1+c^2}<\frac{1}{1+a^2}\to\frac{1}{1+b^2}<\frac{tan^{-1}b-tan^{-1}a}{b-a}<\frac{1}{1+a^2}\xrightarrow{b-a>0}\text{حکم}\ \blacksquare$$

$$if\ \ a=1;b=\frac{4}{3}\to\frac{3}{25}<tan^{-1}\frac{4}{3}-tan^{-1}1<\frac{1}{6}\ \ \blacksquare$$

در انتهای این بخش دو تابع مثلثاتی دیگر را نیز معرفی می‌کنیم. مرسوم است که معکوسِ کسینوس را با سکانت و معکوسِ سینوس را با کسکانت نامگذاری می‌کنند. به عبارتی:

$$sec\,x\equiv\frac{1}{cos\,x}\quad ;\ \underbrace{cosec\,x}_{csc\,x}\equiv\frac{1}{sin\,x}$$

حال مشتق این توابع را بدست می‌آوریم.

$$\frac{d}{dx}(sec\,x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{cos\,x}\right)=\frac{sin\,x}{cos^2x}=sec\,x\,tan\,x$$

$$\frac{d}{dx}(csc\,x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{sin\,x}\right)=\frac{-cos\,x}{sin^2x}=-csc\,x\,cot\,x$$

با این تعریف می‌توان مشتق $tan\,x$ را نیز بر حسب $sec\,x$ بیان کرد. چرا که:

$$\frac{d}{dx}(tan\,x)=1+tan^2x=1+\frac{sin^2x}{cos^2x}=\frac{1}{cos^2x}=sec^2x$$

و به همین ترتیب مشتق $cot\,x$ نیز برابر $-csc^2x$ خواهد شد. در تمرین ۵ از شما خواسته شده است که مشتق توابع معکوس $sec\,x$ و $csc\,x$ را بدست آورید.

تمرینات بخش ۲-۴ تمرینات ۳۴, ۳۸ و ۴۸ از بخش ۶-۶ کتاب

۱- نشان دهید:

$$a)\ \ cot^{-1}x=\begin{cases}sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) & x>0\\ \pi-sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) & x<0\end{cases}\quad ;\quad b)\ \ sin^{-1}\frac{\sqrt5}{5}+sin^{-1}\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\pi}{4}$$

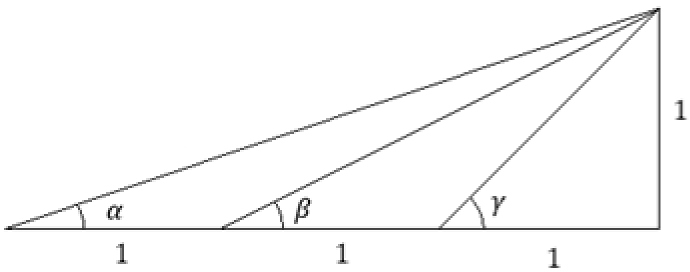
۲- ثابت کنید برای $x \geq 1$ عبارت زیر دارای یک مقدار ثابت است.

$$2\,tan^{-1}x + sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$$

۳- از رابطه $tan^{-1}x + tan^{-1}y + tan^{-1}z = \frac{\pi}{2}$ رابطه $xy + yz + xz = 1$ را نتیجه بگیرید.

۴- در مثلث روبرو نشان دهید:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

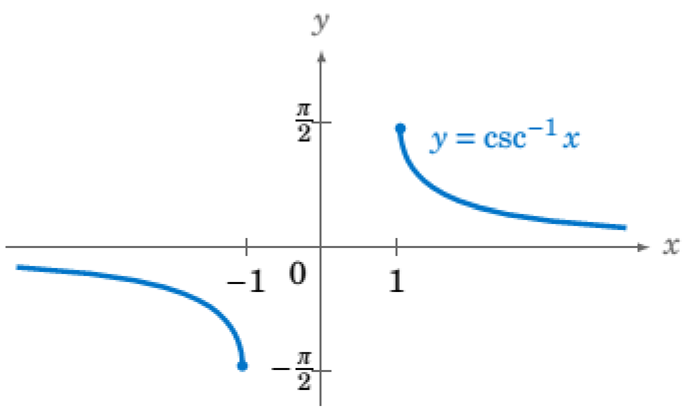


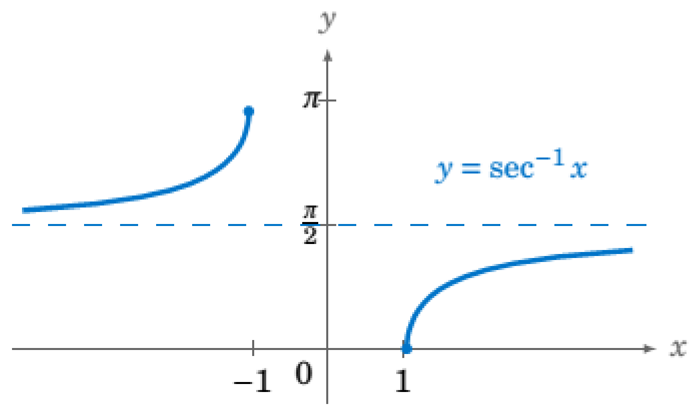
۵- نشان دهید:

$$(sec^{-1}u)' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}} \quad (|u|>1) \quad ; \quad (csc^{-1}u)' = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}} \quad (|u|>1)$$

راهنمایی:

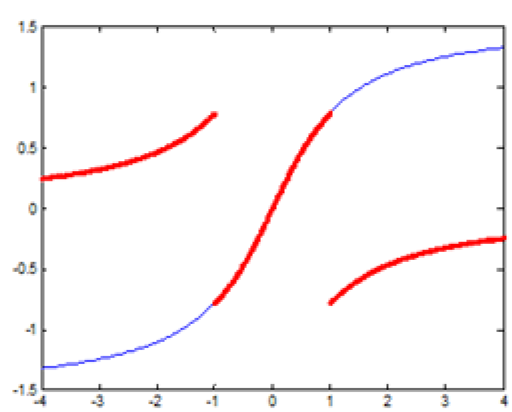
$$y = sec^{-1}x \to x = secy = \frac{1}{cosy} \to cosy = \frac{1}{x} \to y = cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \left(|x| \geq 1 \to [0,\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right)$$





۶- نشان دهید:

$$\frac{1}{2}tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} - tan^{-1}x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x < -1 \\ 0 & -1 < x < 1 \\ -\frac{\pi}{2} & x > 1 \end{cases}$$



منحنی آبی رنگ تابع $tan^{-1}x$ و منحنی قرمز تابع $\frac{1}{2}tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ می‌باشد.

❊ ۷- نشان دهید:

$$0<x<1 \rightarrow \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}<\frac{Ln(1+x)}{sin^{-1}x}<1$$

❊ ۸- با استفاده از تمرین ۱۱ بخش ۲-۳ , در ریشه‌های معادله $e^x-1=k\,tan^{-1}x$ برحسب مقادیر مختلف k بحث کنید.

راهنمایی: $y=tan^{-1}x \rightarrow y'=\frac{1}{1+x^2}$

۲-۵-توابع هیپربولیک و معکوس آنها (بخش ۶-۷ کتاب)

هر تابع $f(x)$ را می‌توان بصورت مجموع دو تابع زوج و فرد نوشت, چرا که:

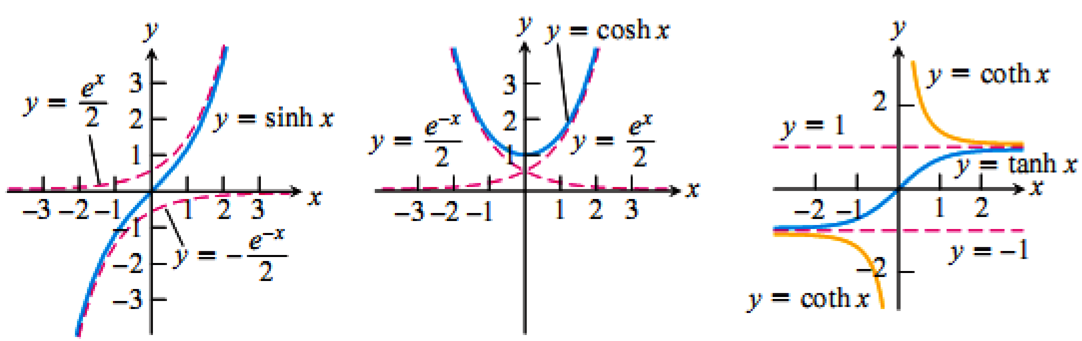
$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}=g(x)+h(x)$$

به راحتی میتوان کنترل کرد که $g(x)$ تابعی زوج و $h(x)$ فرد است. با این توضیح می‌توان تابع e^x را بصورت زیر بیان کرد:

$$e^x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

بنا به تعریف جمله اول رابطه بالا را $cosh(x)$ و دومی $sinh(x)$ نامیده میشود. مشابه توابع مثلثاتی نیز $tanh(x)$ و $coth(x)$ تعریف میشود. این توابع را توابع هیپربولیک یا هذلولوی می‌نامند. علت این نوع نامگذاری آن است که این توابع شباهت زیادی با توابع مثلثاتی دارند و در توضیح ۱ خواهیم دید که در واقع همان رابطه‌ای را با هذلولی دارند که توابع مثلثاتی با دایره.

با توجه به تعریف این توابع, نمودارهای $cosh(x)$ و $sinh(x)$ را می‌توان از جمع و تفریق دو نمودار $\frac{e^x}{2}$ و $\frac{e^{-x}}{2}$ بدست آورد.



می‌توان گفت نمودارهای $cosh(x)$ و $sinh(x)$ در بینهایت به نمودارهای $\frac{e^x}{2}$ و $\frac{e^{-x}}{2}$ مجانب شده‌اند, چرا که فاصله آنها در بینهایت تا این نمودارها کم می‌شود. همچنین دو نمودار $tanh(x)$ و $coth(x)$ دارای دو مجانب افقی $y=\pm1$ می‌باشند.

چند رابطه مهم:

در ادامه چند رابطه ارائه می‌شود که برای اثبات هر یک, کافی است بجای توابع هیپربولیک, آنها را بر حسب تابع نمایی بیان کنیم.

$$cosh^2x-sinh^2x=(coshx+sinhx)(coshx-sinhx)=e^xe^{-x}=1$$

$$(sinhx)'=coshx \quad ; \quad (coshx)'=sinhx \quad ; \quad (tanhx)'=1-tanh^2x=\frac{1}{cosh^2x}\equiv sech^2x$$

$$sinh2x = 2(sinhx)(coshx) \quad ; \quad cosh2x = cosh^2x + sinh^2x$$

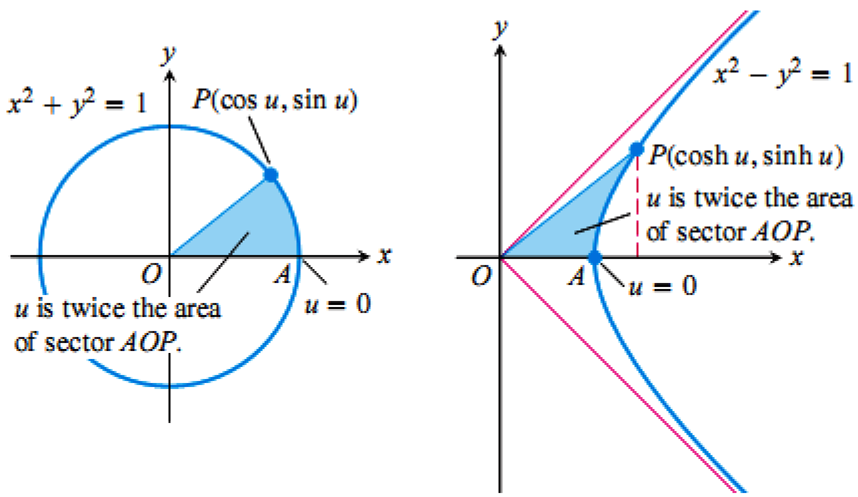
$$cosh^2x = \frac{cosh2x + 1}{2} \quad ; \quad sinh^2x = \frac{cosh2x - 1}{2}$$

مثال ۲-۲۱ نشان دهید همواره $coshx \geq 1$

حل با توجه به تعریف $coshx$ و اینکه $t = e^x$ همواره مثبت می‌باشد, خواهیم داشت:

$$coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{t + \frac{1}{t}}{2} \geq \frac{2}{2} = 1 \quad ; \quad \left(t = e^x > 0 \to t + \frac{1}{t} \geq 2\right) \ \blacksquare$$

توضیح: در شکل زیر, علت نامگذاری این توابع را در قیاس با توابع مثلثاتی هم‌نام آنها می‌بینیم. در واقع در توابع مثلثاتی نقطه $P(cosu, sinu)$ روی دایره $x^2 + y^2 = 1$ حرکت میکند و u دو برابر سطح قطاع AOP میباشد. در توابع هذلولوی نیز نقطه $P(coshu, sinhu)$ روی هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ حرکت میکند و u در اینجا نیز دو برابر سطح قطاع AOP است.



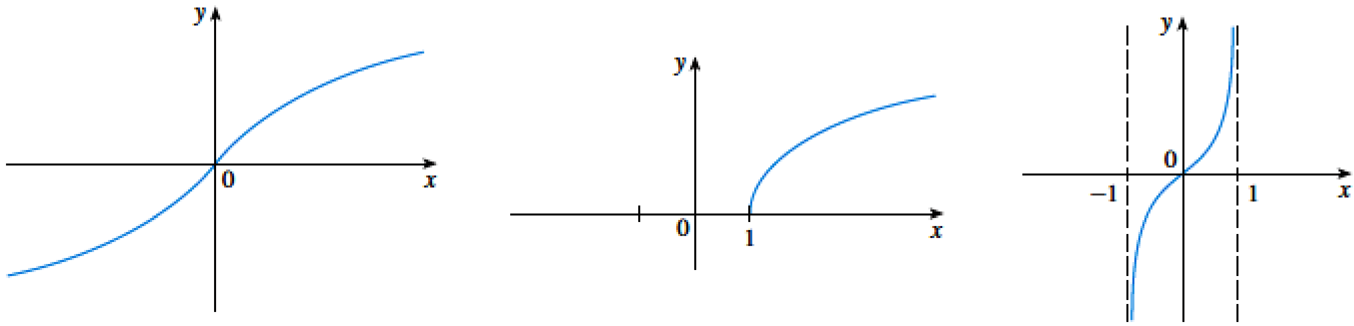
۲-۵-۱- معکوس توابع هیپربولیک

درست مشابه معکوس توابع مثلثاتی در اینجا نیز معکوس سه تابع $sinh^{-1} x$ و $cosh^{-1} x$ و $tanh^{-1} x$ را بدست می‌آوریم. فقط دقت شود برای معکوس پذیری, تابع بایستی پیوسته و یک به یک باشد.

از آنجا که توابع هیپربولیک بر حسب تابع نمایی تعریف شده‌اند, پس معکوس این توابع را می‌توان بر حسب معکوس تابع نمایی (یعنی لگاریتم طبیعی) بیان کرد. به عبارتی:

تابع نمایی	$\leftrightarrow$	توابع هیپربولیک
$\downarrow$		$\downarrow$
معکوس تابع نمایی (لگاریتم طبیعی)	$\xleftrightarrow{(?)}$	معکوس توابع هیپربولیک

در ابتدا بهتر است نمودار معکوس این توابع را رسم کنیم. برای این منظور کافی است قرینه هر تابع, نسبت به خط $y = x$ رسم شود. دقت شود از آنجا که تابع $y = cosh\,x$ یک تابع زوج است, لذا یک به یک نبوده و لذا صرفا می‌توان معکوس یک شاخه آنرا بدست آورد. در شکل زیر معکوس شاخه سمت راست دیده می‌شود.



$y = \sinh^{-1} x$
domain = ℝ   range = ℝ

$y = \cosh^{-1} x$
domain = $[1, \infty)$ range = $[0, \infty)$

$y = \tanh^{-1} x$
domain = $(-1, 1)$ range = ℝ

۱- در ابتدا تابع $y = sinh^{-1}\, x$ را بررسی می‌کنیم. بدیهی است تابع $y = sinh\, x$ از $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بوده و از آنجا که یک به یک میباشد, لذا دارای معکوس است. بنابراین خواهیم داشت:

$$y = sinh^{-1}\, x \to x = sinhy \to coshy = \pm\sqrt{x^2+1}$$

از آنجا که همواره $coshy > 0$ است, لذا مقدار منفی در بیرون رادیکال را حذف می‌کنیم. در نتیجه:

$$e^y = sinhy + coshy = x + \sqrt{x^2+1} \to y = sinh^{-1}\, x = Ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

دقت شود می‌توان به طریق زیر نیز به همین جواب رسید:

$$x = sinhy = \frac{e^y - \frac{1}{e^y}}{2} \xrightarrow{t=e^y} t^2 - 2xt - 1 = 0 \to t = e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

در اینجا نیز اگر $e^y = x - \sqrt{x^2+1}$ انتخاب شود, به $e^y < 0$ میرسیم که نادرست است. لذا:

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1} \to y = sinh^{-1}\, x = Ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

مشتق این تابع را نیز می‌توان بصورت زیر بدست آورد:

$$y = sinh^{-1}\, x \to x = sinhy \xrightarrow{\frac{d}{dx}} 1 = y'coshy \to y' = \frac{1}{coshy} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

روش دوم محاسبه مشتق این تابع نیز آن است که ابتدا آنرا بر حسب لگاریتم نوشته و سپس مشتق بگیریم:

$$y = sinh^{-1}\, x = Ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \to y' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

در نهایت با استفاده از رابطه مشتق زنجیری خواهیم داشت:

$$y = sinh^{-1}\, u \to y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}} \quad \blacksquare$$

۲- حال به تابع $y = cosh^{-1}\, x$ می‌پردازیم. همانگونه که عنوان شد بایستی معکوس یک شاخه آنرا بدست آوریم. مثلا برای شاخه سمت راست, تابع $cosh^{-1}\, x$ از $[0, +\infty] \to [1, +\infty]$ خواهد بود. بنابراین خواهیم داشت:

$$y = cosh^{-1}\, x \to x = coshy = \frac{e^y + \frac{1}{e^y}}{2} \xrightarrow{t=e^y} t^2 - 2xt + 1 = 0 \to t = e^y = x \pm \sqrt{x^2-1}$$

از آنجا که شاخه سمت راست ($x \geq 1$) را انتخاب کرده‌ایم, بایستی از علامت مثبت رابطه بالا استفاده شود. چرا که چون $y \geq 0$ در نتیجه $e^y \geq 1$ خواهد شد, در حالی که اگر علامت منفی را انتخاب کنیم به $e^y \leq 1$ میرسیم. چرا که:

$$e^y = x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \leq \frac{1}{x} \leq 1 \rightarrow e^y \leq 1 \quad \boxed{\times}$$

$$\rightarrow y = cosh^{-1} x = Ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad ; \quad x \geq 1$$

مشابه روش قسمت قبل, مشتق این تابع نیز بصورت زیر بدست می‌آید:

$$y = cosh^{-1} u \rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}} \quad ; \quad u > 1 \quad \blacksquare$$

۳- به همین ترتیب می‌توان نشان داد تابع $y = tanh^{-1} x$ نیز بصورت زیر بر حسب تابع لگاریتم بیان می‌شود: (تمرین ۳)

$$tanh^{-1} x = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \; ; \quad |x| < 1$$

شرط $|x| < 1$ نیز به این دلیل است که برد تابع $tanhx$ در بازه $(-1,1)$ میباشد. مشتق این تابع نیز بصورت زیر است:

$$y = tanh^{-1} u \rightarrow y' = \frac{u'}{1 - u^2} \quad ; \quad |u| < 1 \quad \blacksquare$$

مثال ۲-۲۲ با استفاده از تابع $f(x) = cosh((x + 1)^x)$ و تقریب خطی (دیفرانسیل) نشان دهید:

$$cosh(1.1)^{0.1} \approx cosh1$$

حل با توجه به تابع داده شده کافی است در رابطه $f(a + dx) \approx f(a) + f'(a)dx$ مقدار $a = 0$ و $dx = 0.1$ انتخاب شود, چرا که dx مقدار کوچکی است. حال بایستی مشتق $f(x)$ را بدست آوریم.

$$f'(x) = ((x + 1)^x)' sinh(x + 1)^x$$

$$g(x) = (x + 1)^x \rightarrow Ln\big(g(x)\big) = xLn(x + 1) \rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = Ln(x + 1) + \frac{x}{x + 1}$$

$$\rightarrow f'(x) = (x + 1)^x \left(Ln(x + 1) + \frac{x}{x + 1}\right) sinh(x + 1)^x \rightarrow f'(0) = 0$$

$$f(a + dx) \approx f(a) + f'(a)dx \rightarrow cosh(1.1)^{0.1} = cosh1 \quad \blacksquare$$

تمرینات بخش ۲-۵ تمرینات ۱۸ ,۲۰, ۴۶ و ۵۶ از بخش ۶-۷ کتاب

۱- نشان دهید:

$$a) \quad -1 < tanhx < 1 \qquad ; \qquad b) \quad \frac{1}{2}x^2 + 1 \leq coshx$$

۲- نشان دهید:

$$\underline{a)} \quad sech^{-1} x = Ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right) = cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \quad ; \quad 0 < x \leq 1$$

$\underline{b})\ tanh^{-1} x = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ ;\ |x| < 1$; $c)\ (tanh^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2}\ ;\ |x| < 1$

$d)\ (sech^{-1} u)' = \frac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}}\ \ (0 < u < 1)$; $e)\ (csch^{-1} u)' = \frac{-u'}{|u|\sqrt{1+u^2}}\ \ (u \neq 0)$

۳- اگر $sinh\, c = \frac{3}{4}$ باشد, نشان دهید معادله زیر جواب ندارد.

$$Ln\left(e^x - \sqrt{e^{2x} - 1}\right) = c$$

۴- جواب معادله زیر را بدست آورید:

$$3\, sinh\, x + \frac{9}{5} cosh\, x = -\frac{9}{5} \qquad ; \qquad \underline{Ans:}\quad x = -Ln4$$

۴- تمام جوابهای معادله زیر را بیابید.

$$x^2 + cosh(xy)\,[2x + cosh(xy) + 1] - 1 = 0$$

جواب: فقط زوج مرتب $(-1,0)$ در معادله صدق می‌کند.

۲-۶- قاعده هوپیتال (بخش ۶-۸ کتاب)

در این بخش به معرفی قاعده هوپیتال برای رفع ابهام توابع کسری به فرم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ می‌پردازیم. صورت کامل قضیه بصورت زیر است:

قضیه: فرض کنید روی بازه‌ای مانند I که شامل a می‌باشد, توابع $f(x)$ و $g(x)$ مشتق‌پذیر باشند (بجز احتمالا در خودِ a) . همچنین $g'(x) \neq 0$. علاوه بر این:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \text{یا} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

در اینصورت اگر $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود باشد, آنگاه:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

اثبات: در اینجا اثبات را صرفا برای حالتی که $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ میباشد ارائه می‌کنیم (اثبات برای حالت دیگر کمی طولانی‌تر است). برای این منظور دو تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & ;\ x \neq a \\ 0 & ;\ x = a \end{cases} \qquad ; \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & ;\ x \neq a \\ 0 & ;\ x = a \end{cases}$$

از آنجا که f بر بازه I شامل a (مگر احتمالا در a) پیوسته بوده و در خودِ a نیز خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} f(x) = 0 = F(a)$$

لذا تابع F (و به همین ترتیب G) بر کل I پیوسته می‌باشند. در واقع هدف از ارائه F و G آن بود که دو تابع پیوسته بسازیم.

از آنجا که با توجه به صورت قضیه ممکن است F و G در خودِ a مشتق‌پذیر نباشند, لذا اثبات قضیه را در دو حالت $x \to a^+$ و $x \to a^-$ جداگانه بررسی می‌کنیم.

ابتدا حالت $x \to a^+$ را در نظر می‌گیریم. از آنجا که برای هر $x \in I$ و بزرگتر از a شرایط قضیه کوشی برای دو تابع جدید F و G برقرار است (چرا که دیده شد در بازه $[a,x]$ پیوسته بوده و در بازه (a,x) نیز بنا به فرض صورت مشتق‌پذیر است) بنابراین:

$$\exists\ c \in (a,x)\ \ ;\ \ \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} \to \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

زیرا $F(a) = G(a) = 0$, $F' = f'$ و $G' = g' \neq 0$ می‌باشد. از آنجا که $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ وجود دارد, با حدگیری از دو سمت رابطه بالا و توجه به اینکه چون $a < c < x$ لذا اگر $x \to a^+$ آنگاه $c \to a^+$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{c\to a^+}\frac{f'(c)}{g'(c)}\quad ;\quad c \in (a,x)$$

به همین ترتیب می‌توان برای وقتی $x \to a^-$ نیز درستی نتیجه را بررسی کرد. در نهایت:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

این اثبات برای زمانی است که a متناهی باشد. اگر a نامتناهی باشد (مثلا $a = +\infty$) , با تغییر متغیر $t = \frac{1}{x}$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to0^+}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to0^+}\frac{-\frac{1}{t^2}f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2}g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\quad \blacksquare$$

<u>توضیح ۱:</u> توجه شود تضمینی وجود ندارد که هوپیتال حتما منجر به رفع ابهام شود, چرا که با توجه به صورت قضیه ممکن است $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود <u>نباشد,</u> اما $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ وجود داشته باشد. بعنوان نمونه $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2 sin\frac{1}{x}}{x} = 0$ است, در حالیکه حد زیر وجود ندارد.

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(x^2 sin\frac{1}{x}\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to0}\frac{2x sin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}}{1}$$

<u>توضیح ۲:</u> در اثبات قضیه دیده شد که قاعده هوپیتال برای حدود یک طرفه و حدود در بینهایت نیز معتبر است. همچنین توجه شود برای محاسبه یک حد ممکن است چندین بار نیاز به استفاده از این قاعده باشد, مشروط به اینکه در هر گام شرایط برقراری قضیه بررسی گردد.

<u>توضیح ۳:</u> در حالت خاص که $f(a) = g(a) = 0$ و f' و g' پیوسته و $g'(a) \neq 0$ باشد, می‌توان قضیه را بطریق ساده‌تری اثبات کرد:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

توضیح ۴: دقت شود که برای استفاده از هوپیتال ابتدا بایستی کنترل شود که حد مورد نظر در شرایط هوپیتال صدق کند. مثلا:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-3}=\frac{0}{6}=0$$

اما اگر از هوپیتال استفاده کنیم به $\frac{1}{6}$ خواهیم رسید که نادرست است, چرا که حالت حدی به فرم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ نیست.

توضیح ۵: می‌دانیم که دو حالت $\infty\times 0$ و $\infty-\infty$ نیز مبهم می‌باشند. برای استفاده از قاعده هوپیتال در این دو فرم, برای حالت $\infty\times 0$ می‌توان از رابطه $fg=\frac{f}{\frac{1}{g}}$ آنرا بصورت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کرد و یا گاهی اوقات تغییر متغیر $t=\frac{1}{x}$ را بکار گرفت. برای حالت $\infty-\infty$ نیز بایستی با روشهایی مانند مخرج مشترک گرفتن, گویا کردن و یا فاکتورگیری آنرا به فرم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کنیم. ■

مثال ۲-۲۳ با بکارگیری قضیه هوپیتال حدود زیر را بدست آورید:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-sinx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{cosx}{6}=\frac{1}{6}\ ■$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}-1/2}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}}{2}=-\frac{1}{8}\ ■$$

$$3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{9x+1}{x+1}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{9}{1}}=\sqrt{9}=3\ ■$$

$$4)\ \lim_{x\to+\infty}xsin\left(\frac{\pi}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{sin(\pi/x)}{1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(-\pi/x^2)cos(\pi/x)}{-1/x^2}=\pi\lim_{x\to+\infty}cos(\pi/x)=\pi$$

دقت شود که این قسمت به فرم مبهم $\infty\times 0$ است که از رابطه $fg=\frac{f}{\frac{1}{g}}$ آنرا به $\frac{0}{0}$ تبدیل کردیم. روش دوم بصورت زیر است:

$$t=\frac{1}{x}\to\lim_{x\to+\infty}xsin\left(\frac{\pi}{x}\right)=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}sin(\pi t)=\lim_{t\to 0^+}\frac{sin(\pi t)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\pi cos(\pi t)}{1}=\pi\ ■$$

$$5)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tan\,x-\frac{1}{cos\,x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sinx-1}{cos\,x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{-sinx}=0\ ■$$

$$6)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sin\,x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-sinx}{xsinx}=\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{sinx+xcosx}=\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{2cosx-xsinx}=0$$

دقت شود که دو قسمت 5 و 6 به فرم مبهم $\infty-\infty$ است که با مخرج مشترک‌گیری به $\frac{0}{0}$ تبدیل شد. ■

$$7)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x-sinx}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-cosx}{1}\quad(?)$$

دقت شود که این حد موجود نیست, در حالیکه بدون هوپیتال می‌توان به سادگی حد را برابر 1 بدست آورد. به عبارتی همانگونه که عنوان شد ممکن است $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود نباشد, اما $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ وجود داشته باشد. ■

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{2}2x(x^2+1)^{-1/2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

چنانچه بار دیگر از هوپیتال استفاده کنیم به فرم اولیه برمی‌گردیم. بنابراین استفاده از هوپیتال در این مثال مفید نخواهد بود. در حالی که می‌توان بدون هوپیتال, حد را با تقسیم صورت ومخرج کسر بر x بصورت زیر محاسبه کرد:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1\ \blacksquare$$

9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x3^x}{3^x-1}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)\to L=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x3^xLn3+3^x}{3^xLn3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xLn3+1}{Ln3}=\dfrac{1}{Ln3}\ \blacksquare$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}x^3e^{-x^2}\ \ (\infty\times0)\to L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{2xe^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{2e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{4xe^{x^2}}=0\ \blacksquare$

11) $\lim\limits_{x\to1^+}Lnx\,tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\ \ (0\times\infty)\to L=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{Lnx}{cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1/x}{-\frac{\pi}{2}\left(1+cot^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)}=-\dfrac{2}{\pi}\ \blacksquare$

12) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{Lnx}\right)\ \ (\infty-\infty)\to L=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{xLnx-(x-1)}{(x-1)Lnx}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(1/x)+Lnx-1}{(x-1)(1/x)+Lnx}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{Lnx}{1-(1/x)+Lnx}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1/x}{1/x^2+1/x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{1+x}=\dfrac{1}{2}\ \blacksquare$

13) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-Lnx)\ \ (\infty-\infty)\to L=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(1-\dfrac{Lnx}{x}\right)=\infty\ \ ;\ \left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{Lnx}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1}=0\right)\blacksquare$

14) $n\in\mathbb{N}\,;\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^n}\ \ \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\to L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}}=\cdots=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{n!}=\infty\ \blacksquare$

15) $A=\lim\limits_{x\to0^+}(4x+1)^{cot\,x}\ \ \ (1^\infty)\to LnA=\lim\limits_{x\to0^+}cot\,x\,Ln(4x+1)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{Ln(4x+1)}{tan\,x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{4/(4x+1)}{1+tan^2\,x}=4\to LnA=4\to A=e^4\ \blacksquare$

یا : $\lim\limits_{x\to0^+}(4x+1)^{cot\,x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left((1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right)^{\frac{4x}{tanx}}=e^4\ \ \ ;\ \ \left(\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{4x}{tanx}\right)=4\right)$

16) $A=\lim\limits_{x\to0^+}(cosx)^{1/x^2}\ \ \ (1^\infty)\to LnA=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{Ln(cos\,x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\tan x}{2x}=\dfrac{-1}{2}\to A=e^{\frac{-1}{2}}\blacksquare$

مثال ۲-۲۴ سه تابع e^{ax}, x^b و $(Lnx)^c$ را از نظر مرتبه بزرگی در مثبت بینهایت مقایسه کنید. $(a,b,c>0)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{e^{ax}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{\frac{a}{b}x}}\right)^b\quad;\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\frac{a}{b}x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{a}{b}e^{\frac{a}{b}x}}=0\to\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{\frac{a}{b}x}}\right)^b=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(Lnx)^c}{x^b}\ ;\ t=Lnx\to L=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^c}{e^{bt}}=0\ \to\boxed{e^{ax}\gg x^b\gg(Lnx)^c}\ \blacksquare$$

توضیح: با توجه به مثال حل شده می‌توان حدود زیر را نیز نتیجه گرفت:

$$a>0\ ;\ \lim_{x\to0^+}x^aLnx\quad;\quad t=\frac{1}{x}\to L=\lim_{t\to+\infty}\frac{-Lnt}{t^a}=0$$

$$\lim_{x\to0^+}x^x=\lim_{x\to0^+}e^{xLnx}=e^0=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}\quad;\quad t=\frac{1}{x}\to L=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^t}=1\ \blacksquare$$

مثال ۲-۲۵ اگر برای تابع $f(x)$, حد زیر برقرار باشد, مشتق $f\left(\frac{1}{x}\right)$ در $x=1$ را بیابید.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h}=\sqrt{x}$$

حل با استفاده از قاعده هوپیتال, حد داده شده را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\lim_{h\to0}\frac{2f'(x+2h)+f'(x-h)}{1}=3f'(x)=\sqrt{x}\to f'(x)=\frac{\sqrt{x}}{3}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}}{3}\to\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]'=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{\sqrt{1/x}}{3}\xrightarrow{x=1}\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]'_{x=1}=\frac{-1}{3}\ \blacksquare$$

مثال ۲-۲۶ الف: اگر f'' در یک همسایگی a موجود و پیوسته باشد, نشان دهید:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)$$

ب: با حذف شرط پیوستگی f'' در a درستی رابطه بالا را بررسی کنید.

حل از آنجا که f در a پیوسته است لذا صورت کسر برابر صفر بوده و به $\frac{0}{0}$ خواهیم رسید. با به کارگیری قاعده هوپیتال:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{f''(a+h)+f''(a-h)}{2}$$

که اگر f'' در a پیوسته باشد, حاصل برابر $f''(a)$ خواهد شد. اما اگر شرط پیوستگی f'' در a را حذف کنیم می‌توان گفت:

$$\lim_{h\to0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}=\lim_{h\to0}\left(\frac{f'(a+h)-f'(a)}{2h}+\frac{f'(a)-f'(a-h)}{2h}\right)=\frac{f''(a)}{2}+\frac{f''(a)}{2}$$

که باز هم به $f''(a)$ خواهیم رسید. $\blacksquare$

تمرینات بخش ۶-۸ تمرینات ۳۶, ۴۰ , ۵۲ , ۶۰ , ۶۴ , ۷۴ , ۹۵ و ۹۷ از بخش ۶-۸ کتاب

۱- درستی حدود زیر را نشان دهید.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-4x}}{x}=3$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^a-ax+a-1}{(x-1)^2}=\dfrac{a(a-1)}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{2x-\pi}{\cos^2 x}=-\infty$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x}\right)=1$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^{-1}x}{x}=1$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x+Lnx}{1+\cos(\pi x)}=\dfrac{-1}{\pi^2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\dfrac{1}{2}$; 8) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x^3)e^{2x}=0$

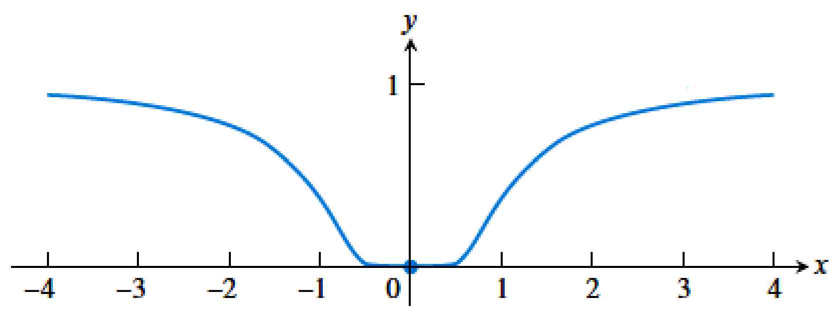
9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{xLnx}=1$; 10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{Ln(1+x^2)}{2Lnx}\right)^{x^2Lnx}=\sqrt{e}$

۲- تابع $f(x)$ بگونه‌ای است که حد تابع و مشتقات اول و دوم آن در $+\infty$ برابر $+\infty$ است. همچنین $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{xf'(x)}=3$. نشان دهید:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{xf''(x)}=-\frac{3}{2}$$

* ۳- نشان دهید مشتق اول و دوم تابع زیر در صفر, برابر صفر است. با استقرا نشان دهید تمام مشتقات این تابع در صفر, برابر صفر میباشد.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$$



تمرینات ۴۰ , ۵۸ , ۷۲ , ۱۱۴ و ۱۱۶ از بخش مرور مطالب فصل ۶

تمرینات ۱ , ۶ , ۱۰ و ۱۴ از بخش مسائل اضافی فصل ۶