دانشکده فنی دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تمرین سوم درس ریاضیات مهندسی

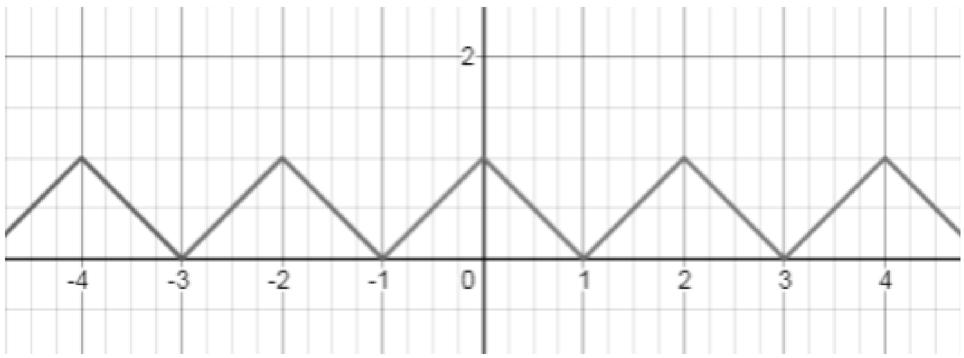
طراح

ستاره دهقان فرد

نیمسال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳

سوال ۱

تبدیل فوریه تابع زیر را به دست آورید.



شکل ۱: تابع $g(x)$ (سوال ۱)

پاسخ:

ابتدا از روی شکل تابع می توان فهمید:

$$T = 2 \rightarrow L = \frac{T}{2} = 1$$

$$fourier \quad series \quad of \quad x(t) \rightarrow c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} \Lambda(t) e^{-\frac{-jn\pi}{L}x}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \Lambda(t) e^{jn\pi x}\, dx$$

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |x| \quad ، \quad |x| < 1 \\ \qquad 0 \qquad otherwise \end{cases}$$

$$\rightarrow c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-jn\pi x}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1}(-x+1)e^{-jn\pi x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{j}{\pi n}xe^{-jn\pi x} + \frac{1}{\pi^2 n^2}e^{-jn\pi x})|_{-1}^{0} + \frac{j}{2\pi n}e^{-jn\pi x}|_{-1}^{0}$$
$$- \frac{1}{2}(\frac{j}{\pi n}xe^{-jn\pi x} + \frac{1}{\pi^2 n^2}e^{-jn\pi x})|_{0}^{1} + \frac{j}{2\pi n}e^{-jn\pi x}|_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{\pi^2 n^2} - \frac{1}{2\pi^2 n^2}(e^{j\pi n} + e^{-j\pi n}) = \frac{1}{\pi^2 n^2}(1 - cos(n\pi)) = \frac{1}{\pi^2 n^2}(1-(-1)^n)$$

$$\rightarrow c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(x+1)\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1}(-x+1) = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{F}(\omega) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\delta(\omega - n\omega_0), \omega_0 = \pi$$

$$\rightarrow \mathcal{F}(\omega) = 2\pi(\tfrac{1}{2}\delta(\omega) + \textstyle\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty}\tfrac{1}{\pi^2 n^2}(1-(-1)^n)\delta(\omega - n\pi))$$

سوال ۲

با استفاده از خواص تبدیل، تبدیل فوریه تابع زیر را محاسبه کنید.

$$g(x) = (\frac{1}{9+x^2})$$

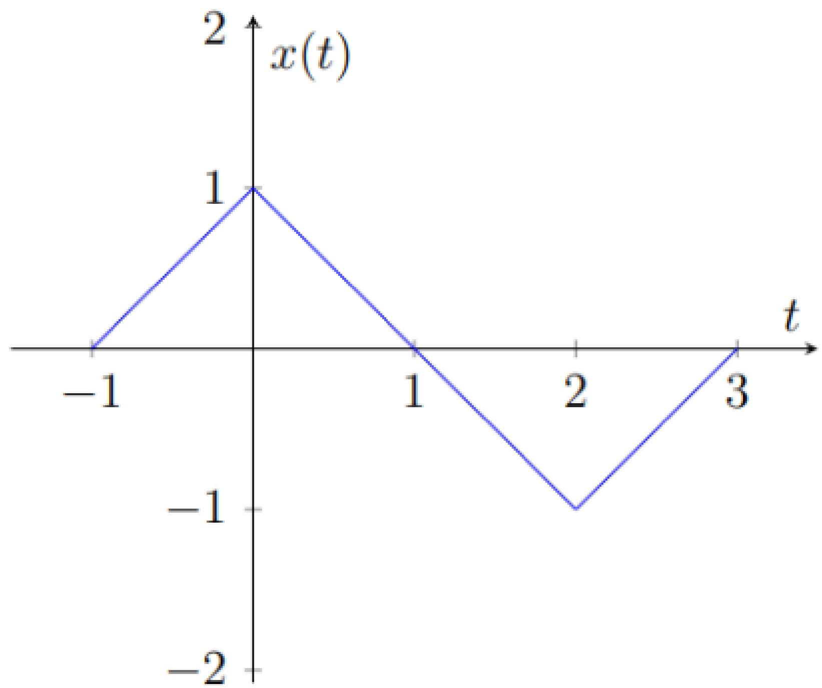
پاسخ:

$$\mathcal{F}(\underbrace{e^{-3|x|}}_{f(x)}) = \underbrace{\frac{6}{9+\omega^2}}_{\mathcal{F}(\omega)} \to \mathcal{F}(x) = \frac{6}{9+x^2} \quad ; \quad f(-\omega) = e^{-3|-\omega|}$$

$$\to \mathcal{F}(\frac{6}{9+x^2}) = 2\pi \underbrace{e^{-3|-\omega|}}_{f(-\omega)} \to \mathcal{F}(\frac{1}{9+x^2}) = \frac{1}{6} 2\pi e^{-3|-\omega|} = \frac{\pi}{3} e^{-3|\omega|}$$

سوال ۳

با توجه به شکل x(t) حاصل عبارت های خواسته شده را بدست آورید.



شکل ۲: تابع$x(t)$ (سوال ۳)

آ)

$$X(0)$$

ب)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, d\omega$$

ج)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X^2(\omega)|\, d\omega$$

پاسخ:

آ)

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt \to X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt = 0$$

ب)

$$x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, d\omega \to \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, d\omega = 2\pi$$

ج) با استفاده از قضیه پارسوال داریم:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-1}^{0} (t+1)^2\, dt + \int_{0}^{2} (1-t)^2\, dt \\
&+ \int_{2}^{3} (3-t)^2\, dt = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \\
&\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega = \frac{8\pi}{3}
\end{aligned}$$

سوال ۴

در معادله زیر به ازای $x(t) = e^{-3t}u(t)$، y(t) را بیابید.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

پاسخ:

با گرفتن تبدیل فوریه از دو طرف معادله داریم:

$$(j\omega)^2Y(\omega) + j\omega Y(\omega) - 2Y(\omega) = X(\omega)$$

$$X(\omega) = \mathcal{F}[e^{-3t}u(t)] = \frac{1}{3+j\omega} \to Y(\omega) = \frac{1}{(j\omega+2)(j\omega-1)(j\omega+3)}$$

$$= \frac{A}{j\omega-1} + \frac{B}{j\omega+2} + \frac{C}{j\omega+3}$$

$$A = Y(\omega)(j\omega-1)|_{\omega=-j} = \frac{1}{(j\omega+2)(j\omega+3)}|_{\omega=-j} = \frac{1}{12}$$

$$B = Y(\omega)(j\omega+2)|_{\omega=2j} = \frac{1}{(j\omega-1)(j\omega+3)}|_{\omega=2j} = \frac{-1}{3}$$

$$C = Y(\omega)(j\omega+3)|_{\omega=3j} = \frac{1}{(j\omega+2)(j\omega-1)}|_{\omega=3j} = \frac{1}{4}$$

$$\to Y(\omega) = \frac{\frac{-1}{12}}{1-j\omega} + \frac{\frac{-1}{3}}{2+j\omega} + \frac{\frac{1}{4}}{3+j\omega}$$

$$\mathcal{F}[f(-x)] = F(-\omega) \to \mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{1-j\omega}] = e^{x}u(-x)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{-1}{12}e^{t}u(-t) - \frac{1}{3}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{4}e^{-3t}u(t)$$

سوال ۵

تبدیل فوریه معکوس توابع زیر را حساب کنید

آ)

$$\frac{1}{4+\frac{\omega^2}{2\pi}}$$

ب)

$$\frac{1}{(j\omega+4)(j\omega-4)}$$

پاسخ:

آ)

$$\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{4+\frac{\omega^2}{2\pi}}] = \mathcal{F}^{-1}[\frac{2\pi}{8\pi+\omega^2}]$$

$$\mathcal{F}[e^{\sqrt{8\pi}|x|}] = \frac{2\sqrt{8\pi}}{8\pi+\omega^2} \rightarrow \mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{4+\frac{\omega^2}{2\pi}}] = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}e^{-\sqrt{8\pi}|x|}$$

ب)

$$F(\omega) = \frac{1}{(j\omega+4)(j\omega-4)} = \frac{A}{j\omega+4} + \frac{B}{j\omega-4}$$

$$A = F(\omega)(j\omega+4)|_{\omega=4j} = \frac{1}{j\omega-4}|_{\omega=4j} = -\frac{1}{8}$$

$$B = F(\omega)(j\omega-4)|_{\omega=-4j} = \frac{1}{j\omega+4}|_{\omega=-4j} = \frac{1}{8}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{8}f^{-1}(\frac{1}{4+j\omega}) + \frac{1}{8}f^{-1}(\frac{1}{j\omega-4})$$

$$= -\frac{1}{8}e^{-4x}u(x) - \frac{1}{8}e^{4x}u(-x)$$

$$= -\frac{1}{8}(e^{-4x}u(x) - e^{4x}u(-x)) = \frac{-1}{8}e^{-4|x|}$$

سوال ۶

با استفاده از تبدیل فوریه

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

حاصل انتگرال $\int_0^{+\infty} \frac{sin^3\omega}{\omega}\, d\omega$ را به دست آورید.

پاسخ:

تابع زوج است. پس از تبدیل فوریه کسینوسی استفاده می کنیم:

$$F_c(\omega) = \int_0^{+\infty} f(x)cos(\omega x)\, dx = \int_0^1 (1)cos(\omega x)\, dx = \frac{sin(\omega)}{\omega}$$
$$\rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_c(\omega)cos(\omega x)\, d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{sin(\omega)}{\omega}cos(\omega x)\, d\omega$$
$$\rightarrow \frac{\pi}{2}f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{sin(\omega)}{\omega}\, d\omega \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{sin(\omega)}{\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{2}$$

انتگرال خواسته شده را به صورت زیر می نویسیم:

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin^3\omega}{\omega}\, d\omega = \int_0^{+\infty} \frac{0.25(3sin(\omega) - sin(3\omega))}{\omega}\, d\omega$$
$$= \frac{3}{4}\int_0^{+\infty} \frac{sin\omega}{\omega}\, d\omega - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{sin(3\omega)}{\omega}\, d\omega = \frac{3}{4}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

سوال ۷ (امتیازی)

با استفاده از تبدیل فوریه $e^{-b|x|}$ ثابت کنید $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+0.25)^4}\, dx = \pi$

پاسخ:

$$\mathcal{F}(e^{-b|x|}) = \frac{2b}{\omega^2+b^2} \rightarrow \mathcal{F}(xe^{-b|x|}) = j\frac{d}{d\omega}(\frac{2b}{\omega^2+b^2}) = \frac{-4j\omega b}{(\omega^2+b^2)^2}$$

$$Parseval: \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (xe^{-b|x|})^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{16\omega^2 b^2}{(\omega^2+b^2)^4}\, d\omega$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2}{(\omega^2+b^2)^4}\, d\omega = \frac{\pi}{8b^2}\int_{-\infty}^{+\infty} (xe^{-b|x|})^2\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4b^2}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2bx}\, dx = \frac{\pi}{4b^2} \times \frac{1}{4b^3} = \frac{\pi}{16b^5}$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2}{(\omega^2+b^2)^4}\, d\omega = \frac{\pi}{16b^5}$$

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\omega^2}{(\omega^2+b^2)^4}\, d\omega = \frac{\pi}{16b^5} \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\omega^2}{(\omega^2+b^2)^4}\, d\omega = \frac{\pi}{32b^5}$$

$$b = 0.5 \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\omega^2}{(\omega^2+0.25)^4}\, d\omega = \pi \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+0.25)^4}\, dx = \pi$$

نکات کلی درباره تمرین

- در صورتی که در تمرین هر گونه ابهام و یا سوالی دارید می‌توانید با ستاره دهقان فرد در ارتباط باشید.
- در صورتی که سوالی از تمرین دارید که ممکن است برای دیگران نیز مفید باشد،آن را در گروه درس مطرح کنید.
- مشورت و همفکری با دوستان خود هنگام نوشتن تمرین کاری مفید و سازنده است و از انجام آن پرهیز نکنید، اما این کار باید در راستای فهم درس و تمرین باشد و از کپی‌کردن تمارین یکدیگر خودداری کنید.
- پاسخ های خود را به صورت یک فایل به فرمت PDF در سامانه درس با فرمت نامگذاری Engmath-HWNum-SID بارگذاری نمایید.