

سؤال ۱.

فرض کنید گراف G یک گراف ساده با n راس و m یال باشد که $m \geq \frac{1}{4}(n-1)(n-2) + 2$ می باشد. اگر ثابت کنید گراف G همیتونی می باشد. آیا عکس عبارت گفته شده درست می باشد؟

پاسخ.

فرض کنید u و v دو راس غیرمجاور در گراف G باشند. فرض کنید x و y به ترتیب درجات این رئوس باشند. اگر راس u و v را از گراف G حذف کنیم، زیرگرافی با n راس به دست می آوریم. اگر این زیرگراف دارای q یال باشد، آنگاه $q \leq \frac{1}{4}(n-2)(n-3)$ می باشد. از آنجا که u و v غیرمجاور می باشند، داریم: $m = q + x + y$ در نتیجه داریم:

$$x + y = m - q \geq \left\{ \frac{1}{4}(n-1)(n-2) + 2 \right\} - \left\{ \frac{1}{4}(n-2)(n-3) \right\} = n$$

بنابراین گراف موردنظر، همیتونی می باشد. عکس نتیجه ی اثبات شده همواره درست نمی باشد. زیرا یک گراف ۲-منتظم با ۵ راس (شکل زیر را مشاهده کنید) همیتونی بوده، اما در نامعادله ی بیان شده در صورت سوال، صدق نمی کند.

