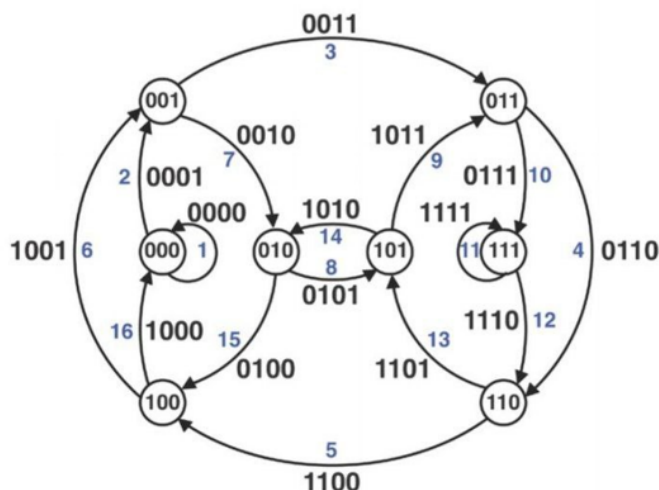


## سؤال ۱.

ثابت کنید می‌توان  $2^n$  رقم ۰ و ۱ را دور دایره چید؛ طوری که تمام رشته‌های دودویی  $n$ -رقمی ممکن در این چینش، دیده شوند. توجه کنید گوییم رشته‌ی  $k$ -رقمی  $S$ ، در یک چینش دیده می‌شود، اگر  $k$  رقم متوالی از ارقام دور دایره موجود باشند که رشته‌ی  $S$  را تشکیل دهند.

**پاسخ.**

گراف  $D$  را به این شکل تعریف می‌کنیم که به ازای هر رشته باینری به طول  $n-1$  یک راس متناظر در آن قرار دارد، همچنین راس  $a$  به  $b$  وصل می‌شود اگر  $n-2$  بیت آخر  $a$  با  $n-2$  برابر باشد، همچنین روی یال واصل بیت آخر  $b$  نوشته می‌شود. به عنوان مثال به ازای  $n=4$  گراف  $D$  به شکل زیر است.



در شکل می‌بینیم که هر یال معادل یک رشته  $n$  بیتی است و چون از هر راس دو یال متناظر با ۰ و ۱ خارج می‌شود همواره رشته دلخواه  $b$  را با شروع از راس دلخواه و انتخاب یال برابر بیت  $i$  م در هر مرحله پس از  $n$  مرحله به یال معادل  $b$  خواهیم رسید، پس به این طریق یال‌های ما تمام رشته‌های  $n$  تایی رو پوشش می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود از هر راس ۲ یال خارج می‌شود چون پس از آن در بیت ۰ یا ۱ می‌تواند بیاید همچنین ۲ یال وارد می‌شود زیرا حاصل افزودن یک بیت به دو رشته با بیت اول دلخواه ۰ یا ۱ می‌تواند باشد. حال چون درجه ورودی و خروجی هر راس زوج است، پس این گراف دارای دور اویلری است. حال با شروع از راس دلخواه و قرار دادن بیت مربوط به هر یال روی دایره و ادامه پیمایش تا اتمام دور ما به ترکیب خواسته شده رسیده‌ایم. چون تمام یال‌ها را پیمایش کردیم و به ازای هر یال یک بیت متناظر آن را روی دایره قرار دادیم، عدد  $n$  بیتی متناظر با هر یال از کنار هم قرار دادن  $n-1$  بیت قبلی هر بیت روی دایره کنار آن بیت، عدد متناظر با یال آن راس تولید می‌شود.