



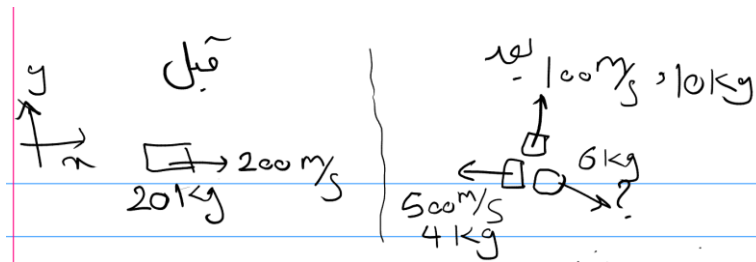
# فیزیک ۱



## پاسخ تمرین مرکز جرم و تکانه

### سؤال (۱)

وضعیت جرم قبل و بعد از انفجار در شکل زیر نشان داده شده است. از آنجایی که انفجار نیروی داخلی محسوب می شود طبق اصل پایستگی تکانه، تکانه سیستم قبل و بعد از انفجار یکسان است.



(الف)

$$x: 20 * 200 = -4 * 500 + 6v_x \rightarrow v_x = 1000 \text{ m/s}$$

$$y: 0 = 10 * 100 + 6v_y \rightarrow v_y = -\frac{1000}{6} \text{ m/s}$$

(ب) با فرض اینکه انرژی انفجار تماماً صرف افزایش انرژی جنبشی سیستم شده و به صورت هیچ نوع انرژی دیگر مانند حرارت، صوت، نور و ... آزاد نمی شود می توان با محاسبه تغییر انرژی جنبشی انرژی آزاد شده را پیدا کرد.

$$\Delta E_{mec} = W_{external}, \Delta U = 0 \rightarrow \Delta K = W_{external}$$

$$K_1 = \frac{20 * 200^2}{2}, K_2 = \frac{1}{2} \left[ 10 * 100^2 + 4 * 500^2 + 6 * \left( 1000^2 + \left( \frac{1000}{6} \right)^2 \right) \right]$$

$$\Delta K \approx 32.3 * 10^5 \text{ J}$$

### سؤال (۲)

(الف) بسادگی می توان دید شتاب حرکت اتومبیل ها بر اثر نیروی اصطکاک و سرعت اولیه آنها

$$a = \frac{f_k}{m} = \mu_k g, v^2 - v_0^2 = 2ax \rightarrow v = \sqrt{2\mu_k g d}$$

$$v_A = 4.6 \text{ m/s}, v_B = 3.9 \text{ m/s}$$

(ب) از پایستگی تکانه

$$m_B v_0 = m_A v_A + m_B v_B \rightarrow v_0 = 7.5 \text{ m/s}$$



# فیزیک ۱



## پاسخ تمرین مرکز جرم و تکانه

ج) بقای تکانه بر این اصل استوار است که در مدت زمان برخورد، تنها نیروی مؤثر، نیروی برخورد میان دو اتومبیل است و بقیه نیروها قابل صرف نظر کردن هستند. چنانچه مدت زمان برخورد کوتاه بوده با دقت خوبی این فرض برقرار است. اما اگر مدت زمان برخورد خیلی طولانی شود (اتومبیل‌ها تغییر شکل داده و مسافت زیادی در حین برخورد بلغزند) از دقت فرض پایداری کاسته می‌شود. گرچه هنوز هم فرض پایداری فرض خوب و معقولی است.

### سؤال ۳

از پایداری تکانه در برخورد سرعت پس از برخورد محاسبه می‌شود:

$$m_1 v_1 = m_1 v + m_2 v \rightarrow v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

پس از برخورد مسأله به این شکل می‌شود که یک جرم (با جرم کل دو جرم) و با سرعت معین به یک فنر با سرعت برخورد می‌کند. می‌خواهیم حداکثر فشردگی فنر را پیدا کنیم. برای حل از بقای انرژی مکانیکی استفاده می‌کنیم:

$$E_1 = E_2 \rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2}kx^2$$
$$x = \frac{m_1 v_1}{\sqrt{(m_1 + m_2)k}}$$

توجه: یک راه حل اشتباه متداول توسط دانشجویان این است که از ابتدا بدون در نظر گرفتن مسأله برخورد از رابطه انرژی استفاده می‌کنند.

### سؤال ۴

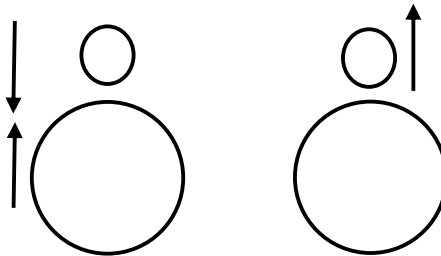
سرعت دو توپ هنگام رسیدن به زمین  $\sqrt{2gh}$  است. توپ بسکتبال ابتدا به زمین خورده و با همان سرعت برمی‌گردد، سپس به توپ بیسبال برخورد می‌کند. بعد از برخورد سرعت توپ بسکتبال صفر است. (مطابق شکل زیر) از فرمول برخورد الاستیک استفاده می‌کنیم.



# فیزیک ۱



پاسخ تمرین مرکز جرم و تکانه



داریم:

$$v_M = \frac{M-m}{M+m} v_{M0} + \frac{2m}{M+m} v_{m0} = \frac{M-m}{M+m} \sqrt{2gh} - \frac{2m}{M+m} \sqrt{2gh} = \frac{M-3m}{M+m} \sqrt{2gh} = 0$$

$$\rightarrow m = \frac{M}{3}$$

ب) از فرمول برخورد الاستیک سرعت جرم  $m$  را پس از برخورد و با دانستن  $m = \frac{M}{3}$  بدست می آوریم:

$$v_m = \frac{m-M}{M+m} (-\sqrt{2gh}) + \frac{2M}{M+m} (\sqrt{2gh}) = \frac{3M-m}{M+m} \sqrt{2gh} = 2\sqrt{2gh}$$

حرکت توپ بیسبال از این لحظه به بعد سقوط آزاد با سرعت اولیه فوق است و در نتیجه حداکثر ارتفاعی توپ:

$$h_{max} = \frac{v^2}{2g} = 4h$$

پس توپ بیسبال به اندازه چهار برابر ارتفاع اولیه ای که از آن رها شده پس از برخورد بالا خواهد رفت.

## سؤال ۵

به دلیل اینکه جرم ها و زاویه برخوردها مساوی است شرایط تقارن کامل در این مسأله برخورد برقرار است و با توجه به شهود فیزیکی مان می دانیم که مسیر حرکت و سرعت جرم ها پس از برخورد هم باید متقارن باشد. همانطور که می دانید مسأله ریاضی برخورد دوبعدی تعداد مجهولات بیشتر از معادلات است و در حالت کلی قابل حل نیست. اما در اینجا شهود فیزیکی باعث می شود جواب های ممکن ریاضی ولی غیرمتقارن حذف شوند و در نتیجه مسأله قابل حل می باشد.

الف) دو جسم به همدیگر می چسبند. با توجه به پایستگی تکانه در راستای  $y$  سرعت  $y$  صفر است و روی محور  $x$  با همان سرعت  $v \cos \theta$  حرکت خواهند کرد



# فیزیک ۱



## پاسخ تمرین مرکز جرم و تکانه

ب) انرژی جنبشی ثابت می ماند و با توجه به تقارن اندازه سرعت ها باید با قبل از برخورد یکسان باشد. از بقای تکانه نتیجه می شود که دو جسم پس از برخورد دقیقاً با همان زاویه های قبل از برخورد در مسیر خط های ۲ و ۳ حرکت خواهند کرد

ج) در این حالت مقداری از انرژی جنبشی تلف می شود و اندازه سرعت پس از برخورد باید کمتر باشد. مولفه ی  $x$  سرعت طبق پایستگی تکانه تغییر نمی تواند بکند پس باید مقدار مولفه  $y$  کم شود تا اندازه سرعت کاهش پیدا کند. در نتیجه جرم ها پس از برخورد در ناحیه های  $B$  و  $C$  حرکت خواهند کرد

د) همانطور که اشاره شد در این حالت اندازه سرعت پس از برخورد با اندازه آن قبل از برخورد یکی خواهد بود.

ه) طبق پایستگی تکانه  $vcos\theta$

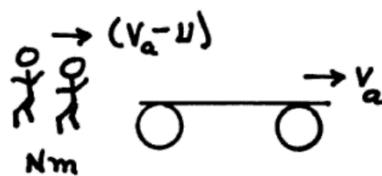
### سؤال ۶

در هر مورد وقتی  $N$  مرد با هم می پرند، گاری در سرعت نهایی خود است: پس از پرش گاری شتابی ندارد.  
الف:

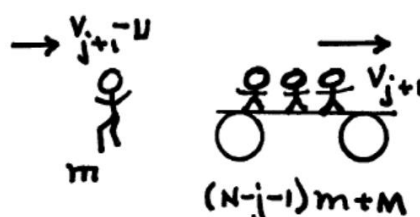
$$P_i = 0$$

$$P_f = Mv_a + Nm(v_a - u) = 0$$

$$\text{Hence } v_a = \left( \frac{Nm}{Nm+M} \right) u$$



ب: فرض میکنیم که فرد  $j$  پریده است. پس سرعت گاری  $v_j$  است.





# فیزیک ۱



## پاسخ تمرین مرکز جرم و تکانه

$$P_i = [(N - j)m + M]v_j$$

$$P_f = [(N - j - 1)m + M]v_{j+1} + m(v_{j+1} - u)$$

$$v_{j+1} = \frac{m}{(N - j - 1)m + M}u + v_j$$

$$\text{Hence } v_b = \left[ \frac{m}{Nm+M} + \frac{m}{(N-1)m+M} + \dots + \frac{m}{m+M} \right] u$$

### سؤال (۷)

چون قوطی دارای جرم یکنواخت است پس مرکز جرم آن در مرکز هندسی آن یعنی روی محور مرکزی گذرنده از دو قاعده قوطی و به فاصله  $\frac{H}{2}$  از یک انتهای قوطی می باشد. مرکز جرم نوشابه هم به تنهایی در مرکز هندسی آن قرار دارد (یعنی در فاصله  $\frac{x}{2}$  از قاعده پایین قوطی و روی محور مرکزی استوانه)  
الف) وقتی قوطی نوشابه پر است مرکز جرم در  $\frac{H}{2}$  می باشد پس مرکز جرم قوطی و نوشابه باهم برابر است با:

$$h = \frac{M\left(\frac{H}{2}\right) + m\left(\frac{H}{2}\right)}{M + m} = \frac{H}{2}$$

وقتی قوطی کاملاً خالی است مرکز جرم آن به اندازه  $\frac{H}{2}$  فاصله از قاعده آن (و روی محور مرکزی آن) قرار دارد.  
ب) با توجه به قسمت الف ابتدا ارتفاع لحظه ای مرکز جرم نسبت به ته قوطی کاهش یافته و سپس تا مقدار  $\frac{H}{2}$  افزایش می یابد.

ج) وقتی ارتفاع لحظه ای سطح نوشابه از ته قوطی  $x$  باشد جرم نوشابه موجود در قوطی برابر  $m_p = m\left(\frac{x}{H}\right)$  می باشد (که  $m$  جرم نوشابه می باشد وقتی که قوطی پر است یعنی  $x = H$ )  
مرکز جرم نوشابه به تنهایی به صورت لحظه ای در فاصله  $\frac{x}{2}$  از ته قوطی می باشد پس:

$$\lambda = \frac{M\left(\frac{H}{2}\right) + m_p\left(\frac{x}{2}\right)}{M + m_p} = \frac{M\left(\frac{H}{2}\right) + m\left(\frac{x}{H}\right)\left(\frac{x}{2}\right)}{M + \left(\frac{mx}{H}\right)} = \frac{MH^2 + mx^2}{2(MH + mx)}$$

برای اینکه  $x$  را وقتی که مرکز جرم به پایین ترین نقطه خود می رسد بیابیم باید مشتق  $h$  را نسبت به  $x$  گرفته و مساوی صفر قرار دهیم و برای  $x$  حل کنیم. پس داریم:

$$\frac{dh}{dx} = \dots = \frac{m^2x^2 + 2MxHx - MxH^2}{2(MH + mx)^2} = 0 \rightarrow x = \frac{MH}{m} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{m}{M}} \right)$$

توجه شود که ریشه مثبت انتخاب شد چون  $x$  باید مثبت باشد برای این  $x$  داریم:

$$h = \frac{(MH^2 + mx^2)}{2(MH + mx)}$$

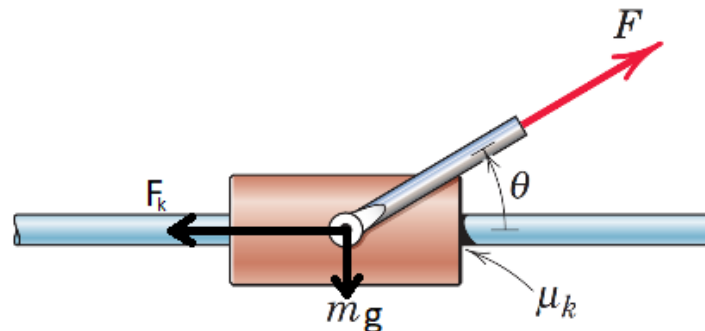


# فیزیک ۱

پاسخ تمرین مرکز جرم و تکانه



سؤال ۸



$$\Sigma F_x = \frac{dP_x}{dt} \Rightarrow \Delta P_x = \int_{t_0}^t \Sigma F_x dt$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F \sin \theta + N = mg \Rightarrow N = mg - F \sin \theta$$

$$f_k = \mu_k N = \mu_k (mg - F \sin \theta)$$

چون  $F \leq mg$  بنابراین  $N$  مثبت است.

$$\Sigma F_x = F \cos \theta - \mu_k (mg - F \sin \theta) = F (\cos \theta + \mu_k \sin \theta) - \mu_k mg$$

$$\theta = kt \Rightarrow dt = \frac{d\theta}{k}$$

$$\Rightarrow m(v_2 - v_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [F (\cos \theta + \mu_k \sin \theta) - \mu_k mg] \frac{d\theta}{k}$$

$$\Rightarrow m(v_2 - v_1) = \frac{1}{k} \left[ F(1 + \mu_k) - \mu_k mg \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\Rightarrow v_2 = v_1 + \frac{1}{mk} \left[ F(1 + \mu_k) - \mu_k mg \frac{\pi}{2} \right]$$

$$v_2 = v_1 \Rightarrow F(1 + \mu_k) = \frac{\pi \mu_k mg}{2}$$

$$\Rightarrow F = \frac{\pi \mu_k mg}{2(1 + \mu_k)}$$

سؤال ۹

الف) از پایستگی انرژی داریم:

$$m_1 v_1 = m_2 v - m_1 v \rightarrow m_1 v_1 = (m_2 - m_1) v$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2$$

$$m_1 v_1^2 = (m_2 + m_1) \left( \frac{m_1 v_1}{m_2 - m_1} \right)^2 \rightarrow \frac{m_1 (m_1 + m_2)}{(m_1 - m_2)^2} = 1$$



# فیزیک ۱



پاسخ تمرین مرکز جرم و تکانه

$$\rightarrow m_1^2 + m_1 m_2 = m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \rightarrow 3m_1 m_2 = m_2^2 \rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$$

ب) با توجه به بقا تکانه خطی در راستای x , y داریم:

$$m_1 v = (m_1 v_1 + m_2 v_2) \cos \theta \quad \text{رابطه 1}$$

$$m_1 v_1 \sin \theta = m_2 v_2 \sin \theta \rightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2 \quad \text{رابطه 2}$$

و با توجه به پایستگی انرژی داریم:

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad \text{رابطه 3}$$

از روابط 1 و 2 داریم:

$$m_1 v = 2m_1 v_1 \cos \theta \rightarrow v_1 = \frac{v}{2 \cos \theta}, v_2 = \frac{m_1 v}{2m_2 \cos \theta}$$

و در ادامه از رابطه 3 بدست می آید:

$$m_1 v^2 = m_1 \left( \frac{v}{2 \cos \theta} \right)^2 + m_2 \left( \frac{m_1 v}{2m_2 \cos \theta} \right)^2 \rightarrow 1 = \frac{1}{4 \cos^2 \theta} + \frac{m_1}{4m_2 \cos^2 \theta}$$

$$\rightarrow 4m_2 \cos^2 \theta = m_2 + m_1 \rightarrow m_2 (4 \cos^2 \theta - 1) = m_1$$

$$\rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 4 \cos^2 \theta - 1$$

سؤال (۱۰)

سرعت جرم هنگام ورود به تخته:

$$1/2 m v_0^2 = mgh \rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$$

الف) اگر  $v_1$  سرعت دیسک نسبت به تخته و  $v_2$  سرعت تخته نسبت به زمین باشد

$$m v_0 = m(v_1 + v_2) + M v_2 \rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{gh}{2}}$$

ب) اصطکاک نیروی داخلی مجموعه دیسک و تخته به حساب می آید. پایستگی تکانه:

$$m v_0 = (M + m) v \rightarrow v = \frac{m}{m + M} \sqrt{2gh}$$

ج) طبق پایستگی انرژی کاهش انرژی مکانیکی سیستم برابر با کار اصطکاک است

$$W_f = mgh - 1/2 (m + M) v^2 = m M / (M + m) gh$$