۱۰- دنباله‌ها, سریهای عددی و توانی

۱-۱۰- مروری بر دنباله‌های عددی (بخش ۱۱-۱ کتاب)

دنباله, تابعی است که دامنه آن مجموعه اعداد طبیعی و یا قطعه‌ای از آن باشد و یا به تعبیر ساده‌تر فهرستی از اعداد که به ترتیبی معین نوشته شده است. نمادگذاری دنباله بصورت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌باشد که به a_n جمله عمومی دنباله می‌گوییم. مثلا:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\} \qquad \text{یا} \qquad \{b_n\}_{n=1}^{12}=\{3n\}_{n=1}^{12}=\{3,6,9,\cdots,36\}$$

که $\{a_n\}$ دنباله نامتناهی و $\{b_n\}$ دنباله متناهی نامیده می‌شود. بنابراین می‌توان گفت مجموعه اعداد طبیعی و بطور کلی‌تر مجموعه اعدادی که تشکیل تصاعدهای حسابی یا هندسی می‌دهند همگی مثالهایی از دنباله خواهند بود. لذا دنباله را می‌توان تابعی تعریف کرد که دامنه‌اش اعداد صحیح مثبت است و لذا آنرا با $f(n)$ نمایش داد. اما مرسوم است که چون n عدد صحیح مثبتی است (و لذا پیوسته نمی‌باشد) آنرا بصورت اندیس بکار ببریم و بنویسیم f_n که معمولا a_n نوشته می‌شود.

دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را در نظر می‌گیریم. بنا به تعریف می‌گوییم این دنباله دارای حد L است, هر گاه بتوان با بزرگ‌کردن n (به قدر کافی) هر قدر بخواهیم جملات a_n را به L نزدیک کنیم. در اینصورت می‌گوییم دنباله همگرا به L است. به تعبیر ریاضی:

$$\forall\,\varepsilon>0\;;\;\exists\,N>0\,;\,n>N\rightarrow|a_n-L|<\varepsilon$$

در اینصورت می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$. اگر این حد وجود نداشته باشد, دنباله واگرا نامیده می‌شود.

دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ صعودی است اگر $\forall n\,;\,a_{n+1}\geq a_n$ و برعکس آن نزولی خواهد بود. دنباله یکنوا نیز یا صعودی یا نزولی است.

اگر عددی مانند M وجود داشته باشد که $\forall n\,;\,a_n\leq M$, می‌گوییم دنباله از بالا کراندار است. به همین ترتیب اگر عددی مانند m وجود داشته باشد که $\forall n\,;\,a_n\geq m$, دنباله از پایین کراندار خواهد بود.

همچنین دنباله را کراندار می‌گوییم هرگاه از بالا و پایین کراندار باشد. در اینصورت عدد ثابتی مانند K وجود دارد که به ازای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $|a_n|\leq K$.

بر طبق قضیه زیر اگر یک تابع پیوسته را بر جملات یک دنباله همگرا اثر دهیم, نتیجه باز هم همگراست.

قضیه: اگر $f(x)$ تابعی باشد که برای هر $x\geq k$ تعریف شده باشد و دنباله $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که به ازای هر $n\geq k$ داشته باشیم $a_n=f(n)$, آنگاه اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ نتیجه میشود که $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=L$.

به عبارتی می‌توان برای محاسبه حد دنباله در بینهایت, حد تابع متناظر آنرا در بینهایت بدست آورد. به عنوان مثال برای بررسی حد دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ در بینهایت, کافی است $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$ را تعیین کنیم.

اثبات: با فرض $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ خواهیم داشت:

$$\forall\,\varepsilon>0\;;\;\exists\,N>0\,;\,x>N\rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$$

فرض کنید M عددی صحیح و بزرگتر از N و بزرگتر یا مساوی k باشد, در اینصورت:

$$n>M>Max\{N,k\}\rightarrow|a_n-L|=|f(n)\;-L|<\varepsilon\quad\blacksquare$$

قضایای مهم دیگری نیز در بحث دنباله‌ها مطرح می‌شود که در ادامه به آنها می‌پردازیم.

قضیه: هر دنباله همگرا, کراندار است. بنابراین دنباله بیکران حتما واگراست.

اثبات: فرض کنید $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. در اینصورت به ازای مثلا $\varepsilon = 1$ عددی مانند N وجود دارد بطوری‌که:

$$n > N \to |a_n - L| < 1 \to |a_n| - |L| < |a_n - L| < 1 \to |a_n| < |L| + 1$$

حال اگر K بصورت زیر انتخاب شود, آنگاه $|a_n| \leq K$ خواهد شد که بیانگر کراندار بودن دنباله است.

$$K = Max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, |L| + 1\} \to \forall n\ ;\ |a_n| \leq K$$

توجه شود که عکس قضیه درست نیست. به عنوان نمونه دنباله $\{(-1)^n\}$ کراندار است, اما همگرا نیست. ■

قضیه همگرایی یکنوا: هر دنباله صعودی و از بالا کراندار (یا هر دنباله نزولی و از پایین کراندار) همگراست.

اثبات: اثبات این قضیه با استفاده از اصل تمامیت مجموعه اعداد حقیقی (اصل کمال) امکان پذیر است.

ابتدا فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنباله صعودی است. از آنجا که این دنباله کراندار است, لذا مجموعه $A = \{a_n | \ n \geq 1\}$ کران بالا خواهد داشت. بنابراین مطابق اصل بالا دارای کوچکترین کران بالایی است که آنرا L می‌نامیم. از آنجا که L کوچکترین کران بالا است لذا $L - \varepsilon$ کران بالای A نیست $(\varepsilon > 0)$. بنابراین وجود دارد $N > 0$ بگونه‌ای که $a_N > L - \varepsilon$. اما دنباله $\{a_n\}$ صعودی است, لذا به ازای $\forall\ n > N$ خواهیم داشت:

$$a_n \geq a_N > L - \varepsilon \to L - a_n < \varepsilon \xrightarrow{a_n \leq L} 0 \leq L - a_n < \varepsilon \to \forall\ n > N :\ |L - a_n| < \varepsilon$$

در نتیجه $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. بطور مشابه با استفاده از بزرگترین کران پایینی, هر دنباله نزولی و کراندار از پایین, همگراست. ■

توضیح: برای بررسی نزولی بودن دنباله $\{a_n\}$ می‌توان از یکی از سه روش زیر (هر کدام که ساده‌تر است) استفاده کرد:

$$1)\ \ a_{n+1} - a_n < 0 \qquad ; \qquad 2)\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \qquad ; \qquad 3)\ \ a_n = f(n) \to f'(x) < 0$$

و بصورت برعکس برای بررسی صعودی بودن.

مثال ۱۰-۱ درستی حدود زیر را نشان دهید:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Lnn}{n} = 0\ ;\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1\ \ ;\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\ \ ;\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{kn} = 1$$

حل برای قسمت الف, با استفاده از قضیه بیان شده در بالا میتوان بجای محاسبه حد این دنباله, حد تابع متناظر آنرا بدست آورد. از آنجا که $\lim_{x\to\infty} \frac{Lnx}{x}$ با استفاده از قاعده هوپیتال برابر صفر بدست می‌آید, لذا حد دنباله مورد نظر نیز صفر است. برای اثبات مابقی نیز میتوان از جایگزین x استفاده کرد و یا با همان n پیش رفت.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} \to LnA = \lim_{n\to\infty} \frac{Lnk}{n} = 0 \to A = e^0 = 1$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \to LnA = \lim_{n\to\infty} \frac{Lnn}{n} = 0 \to A = e^0 = 1$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{kn} \to LnA = \lim_{n\to\infty} \frac{Ln(kn)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{k}{kn}}{1} = 0 \to A = e^0 = 1\ \blacksquare$$

توضیح: علاوه بر نتایج بدست آمده در مثال بالا, دو رابطه زیر نیز میتواند در تعیین حدود دنباله‌ها مفید باشد:

$$1)\ \ if\ n \to +\infty \to (kn)! \approx \sqrt{2\pi kn}\left(\frac{kn}{e}\right)^{kn} \to \sqrt[n]{(kn)!} \approx \left(\frac{kn}{e}\right)^{k}\ ;\ k \in \mathbb{N} \quad (\text{Stirling's formula})$$

$$2)\ \ if\ n \to +\infty\ ;\ n^n \gg n! \gg b^n \gg n^k \gg log_a n \quad ,\ a, b > 1\ ,\ \ k > 0$$

اثبات رابطه استرلینگ در مثال ۱۱-۴۱ ارائه خواهد شد. ■

مثال ۱۰-۲ دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ بصورت زیر تعریف شده است. حد آنرا بیابید.

$$a_n = Ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$$

حل در واقع بایستی نشان دهیم حد زیر وجود دارد:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} Ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$$

این حد در مثال ۳-۲۵ قسمت ۴ با استفاده از فرمولهای حد مجموع ریمان بدست آمد. در اینجا با استفاده از فرمول استرلینگ به طریق ساده‌تری این حد را بدست می‌آوریم که به همان نتیجه قبل منجر خواهد شد.

$$A = \lim_{n\to\infty} Ln\sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} Ln\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n \times n!}} = \lim_{n\to\infty} Ln\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n\sqrt[n]{n!}}$$

$$\approx \lim_{n\to\infty} Ln\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^2}{n\frac{n}{e}} = Ln\frac{4}{e} = 2Ln2 - 1 \ \ ■$$

* **مثال ۱۰-۳** اگر $a_n = Ax_1^n + Bx_2^n$ و x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + px + q = 0$ باشند, ابتدا رابطه مابین a_n, a_{n-1} و a_{n-2} را یافته سپس به کمک آن جمله عمومی دنباله فیبوناتچی را بدست آورید.

$$\begin{matrix} Ax_1^{n-2} \times \\ Bx_2^{n-2} \times \end{matrix}\begin{cases} x_1^2 + px_1 + q = 0 \\ x_2^2 + px_2 + q = 0 \end{cases} \xrightarrow{+} a_n = -pa_{n-1} - qa_{n-2}$$

$$\text{Fibonacci}:\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \xrightarrow{p=q=-1} x^2 - x - 1 = 0 \to x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$a_n = Ax_1^n + Bx_2^n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \xrightarrow{for\ \ a_0=0\,;\,a_1=1} A = -B = \frac{1}{\sqrt{5}} \ \ ■$$

توضیح: در حالت کلی برای یافتن جمله عمومی در یک معادله بازگشتی بصورت $a_n + pa_{n-1} + qa_{n-2} = 0$, ابتدا معادله مشخصه آنرا که بصورت $r^2 + pr + q = 0$ می‌باشد حل می‌کنیم. جمله عمومی بصورت $a_n = Ar_1^n + Br_2^n$ خواهد بود.

همچنین در معادله بازگشتی بصورت $a_n + pa_{n-1} = 0$ بدیهی است در معادله مشخصه $r = -p$, لذا جمله عمومی بصورت $a_n = A(-p)^n$ خواهد بود. مثلا:

$$a_n - 4a_{n-1} = 0 \xrightarrow{p=-4} a_n = A(-p)^n = A(4)^n \quad ; \quad if\ \ a_0 = 3 \xrightarrow{A=3} a_n = 3(4)^n \ \ ■$$

مثال ۱۰-۴ نشان دهید: الف: دنباله $\{a_n\}$ همگرا است. ❋ ب: دنباله $\{b_n\}$ همگرا است.

$$a_n = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \quad ; \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - Lnn\right) \quad ; \quad (n \in \mathbb{N})$$

حل الف: بدیهی است یک کران پایین برای $\{a_n\}$ برابر صفر است, یعنی $a_n > 0$. از طرفی این دنباله نزولی است, زیرا:

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$
$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n}\right) < 0$$

از آنجا که از دنباله از پایین کراندار و نزولی است لذا همگراست. راه دوم آن است که با استفاده از روش تبدیل حد مجموع به انتگرال معین (بخش ۷-۳) , نشان دهید حد این دنباله برابر $Ln2$ بوده و لذا همگراست. ■

توضیح: می‌توان برای $\{a_n\}$ یک کران بالا نیز بصورت زیر بدست آورد:

$$a_n < \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n+1\ \text{جمله}} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 2 \rightarrow 0 < a_n < 2 \ ■$$

❋ ب: در مثال ۳-۱۱ با استفاده از ریمان بالا و پایین برای تابع $y = \frac{1}{x}$, دیده شد که:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq Lnn \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \rightarrow \frac{1}{n} \leq b_n \leq 1 \rightarrow 0 < b_n \leq 1 \rightarrow \text{کراندار}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - Ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

در بازه $x \in [n, n+1]$ خواهیم داشت $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$. با انتگرال‌گیری بر حسب x از این نامساوی از n تا $n+1$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{n+1} \leq Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \rightarrow \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1} - Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq 0 \rightarrow b_{n+1} - b_n \leq 0$$

از آنجا که از دنباله از پایین کراندار و نزولی است پس همگرا بوده و لذا دارای حد است. این حد را با γ نشان می‌دهند و به ثابت اویلر-ماسکرونی معروف است. نشان داده شده است که مقدار این ثابت تقریبا برابر است با $\gamma = 0.577215\cdots$. ■

مثال ۱۰-۵ دنباله $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ با رابطه بازگشتی $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$ داده شده است. اگر $a_0 = \frac{3}{2}$ باشد, ابتدا نشان دهید دنباله همگرا بوده و سپس حد دنباله را بیابید.

حل ابتدا نشان می‌دهیم که دنباله فوق کراندار است.

$$a_n = a_{n-1}^2 - 2a_{n-1} + 2 \rightarrow a_n = (a_{n-1} - 1)^2 + 1 \geq 1 \rightarrow a_n \geq 1$$
$$n = 1 \rightarrow a_1 = (a_0 - 1)^2 + 1 < 1 + 1 = 2 \quad ; \quad n = 2 \rightarrow a_2 = (a_1 - 1)^2 + 1 < 1 + 1 = 2$$

به همین ترتیب می‌توان با استقرا نشان داد همواره $a_n < 2$. در نتیجه $1 \leq a_n < 2$. یعنی دنباله کراندار است. حال نشان می‌دهیم که دنباله نزولی است. برای این منظور $a_{n+1} - a_n$ را تشکیل می‌دهیم:

$$a_{n+1}-a_n=a_n^2-3a_n+2=(a_n-1)(a_n-2)\xrightarrow{1\le a_n<2}a_{n+1}-a_n<0$$

بنابراین از آنجا که دنباله نزولی و از پایین کراندار است, لذا همگراست. برای محاسبه حد دنباله از آنجا که مشخص شد دنباله همگراست, لذا می‌توان حد آنرا برابر L در نظر گرفت. بنابراین:

$$a_{n+1}=a_n^2-2a_n+2\ \ ;\ \ \lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n=L\to L=L^2-2L+2\to L=1,2$$

از آنجا که دیده شد دنباله نزولی است و $a_0=\frac{3}{2}$ می‌باشد, لذا $L=1$ قابل قبول خواهد بود. ■

❄ **مثال ۱۰-۶** نشان دهید:

$$a)\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{200}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{200}\quad ;\ \ b)\ \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\cdots}}}}=3$$

راهنمایی: برای قسمت دوم از رابطه $(x+n)^2=1+(x+n-1)(x+n+1)$ استفاده کنید.

حل برای قسمت الف, سمت چپ را بصورت زیر بازنویسی کرده و سمت راست را بدست می‌آوریم:

$$\text{سمت چپ}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{200}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{200}\right)=\text{سمت راست}$$

برای قسمت ب نیز با استفاده از رابطه داده شده خواهیم داشت:

$$(x+n)^2=1+(x+n-1)(x+n+1)$$

$$\to x+2=\sqrt{(x+2)^2}=\sqrt{1+(x+1)(x+3)}=\sqrt{1+(x+1)\sqrt{(x+3)^2}}$$

$$=\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)(x+4)}}=\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{(x+3)^2}}}=\cdots$$

که اگر به همین ترتیب ادامه داده و در نهایت $x=1$ انتخاب شود نتیجه مورد نظر بدست می‌آید. ■

❄ **مثال ۱۰-۷** با استفاده از تعریف حد نشان دهید $\forall\, c>0:\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^c}=0$

$$\forall\,\varepsilon>0\ ;\ \exists\,N>0\ ;\ n>N\to|f(n)-L|<\varepsilon$$

$$|f(n)-L|<\varepsilon\to\frac{1}{n^c}<\varepsilon\to n^c>\frac{1}{\varepsilon}\to Ln(n^c)>-Ln\varepsilon\to n>e^{-\frac{Ln\varepsilon}{c}}=N$$

پس اگر بصورت عکس عمل کنیم, با انتخاب $N=e^{-\frac{Ln\varepsilon}{c}}$, اختلاف $f(n)$ از حد مورد نظر(یعنی صفر), از ε کمتر خواهد شد.■

با این مقدمه, در ادامه به بررسی سریها می‌پردازیم. مسیری را که در این فصل طی خواهیم کرد, شامل سری عددی, سری تابعی, سری توانی و بسط یک تابع به سری توانی و برعکس میباشد. در فصل ۱۱ نیز به بررسی سری تیلور خواهیم پرداخت.

تمرینات بخش ۱۰-۱ تمرینات ۵۰ , ۵۲ و ۸۲ از بخش ۱۱-۱ کتاب

۱- ثابت کنید دنباله زیر همگرا بوده و سپس حد آنرا بدست آورید.

$$a_1 = 3 \ ; \ a_{n+1} = 3\frac{1+a_n}{3+a_n} \quad (n \geq 1)$$

۲- نشان دهید:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}$$

راهنمایی: از نامساوی زیر و قضیه فشار استفاده کنید:

$$\frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+1}$$

سوال: آیا می‌توان این حد مجموع را مشابه آنچه در بخش ۳-۶ دیده شد, معادل یک انتگرال معین دانست؟

۱۰-۲- سریهای عددی (بخش ۱۱-۲ کتاب)

مجموع‌های جزئی نظیر یک دنباله بصورت زیر تعریف میشود.

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$\vdots$$
$$s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

این مجموعها, خود یک دنباله جدیدی را ایجاد میکنند که ممکن است حد داشته باشد یا نداشته باشد.

به s_k سری متناهی متناظر این دنباله نامیده میشود. اگر $\lim_{k\to\infty} s_k = s$ وجود داشته باشد, سری همگرا بوده و در اینصورت مینویسیم $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. درست مشابه انتگرالهای ناویژه, اگر این حد وجود نداشته باشد یا بینهایت باشد, سری واگراست. مثلا $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ واگراست. سریهای به فرم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را سریهای نامتناهی می‌نامیم.

شرط لازم (و نه کافی) برای همگرا بودن یک سری آن است که خودِ دنباله در بینهایت همگرا به صفر باشد, یعنی $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ چرا که:

$$\lim_{k\to\infty} s_k = s \ ; \ \lim_{k\to\infty} s_{k-1} = s \xrightarrow{-} \lim_{k\to\infty}(s_k - s_{k-1}) = 0 \rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

یا به صورت دیگر اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, سری قطعا واگراست. اما این شرط کافی نیست, زیرا مثلا در سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ که سری همساز(هارمونیک یا توافقی) نامیده می‌شود $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ می‌باشد, اما در مثال ۱۰-۱۰ خواهیم دید که این سری واگرا است.

بدیهی است اضافه یا کم کردن تعدادی متناهی جمله به یک سری, همگرایی یا واگرایی آنرا تغییر نمیدهد. همچنین بر طبق یک قضیه مجموع و تفاضل دو سری همگرا, خود همگراست.

درست مشابه همان صحبتهایی که در بررسی انتگرال غیرعادی بیان شد, در اینجا نیز ممکن در بعضی حالات بتوان سری را محاسبه کرد(مانند سریهای هندسی و یا استفاده از قاعده تلسکوپی). اما از آنجا که این کار همیشه امکان پذیر نمیباشد, در اکثر حالات مطابق آنچه در بخش ۱۰-۳ تحت عنوان آزمونهای همگرایی خواهیم دید به مشخص کردن همگرایی یا واگرایی سری اکتفا می‌کنیم.

سری هندسی: این سری بصورت زیر است:

$$\sum_{n=1}^{k} r^n = \frac{r(1-r^k)}{1-r} \xrightarrow{|r|<1} \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}$$

بعنوان نمونه:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{5-n}{2}} = 2^{\frac{5}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}^n} = 4\sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 4\sqrt{2}\,\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4(2+\sqrt{2}) \qquad ; \qquad \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1$$

قاعده تلسکوپی: این روش زمانی قابل استفاده است که بتوان a_n را بصورت $b_n - b_{n+1}$ تفکیک کرد. در اینصورت:

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{k} (b_n - b_{n+1}) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{k+1}$$

توضیح: دقت شود تشخیص همگرایی و واگرایی سریهای نامتناهی مهمترین نکته در برخورد با سری می‌باشد. چرا که اگر سری واگرا باشد, ممکن است عملیات حسابی نادرستی بر روی آن انجام پذیرد. مثلا بدیهی است سری زیر واگرا است:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots$$

حال اگر حاصل این سری را برابر A قرار داده و طرفین آنرا در 2 ضرب کنیم, می‌توانیم آنرا بصورت زیر بنویسیم:

$$2A = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots = (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots) - 1 = A - 1$$

تساوی $2A = A - 1$ نتیجه می‌دهد $A = -1$, یعنی جمع بیشمار عدد مثبت برابر -1 شده است! . ایراد این حل, انتخاب یک عددِ A برای سری است. چرا که این سری واگرا بوده و مساوی قرار دادن آن با عددی مانند A نادرست است.

مثال ۱۰-۸ حاصل سریهای متناهی زیر را بر حسب k تعیین کرده و به کمک آن سری نامتناهی متناظر را نیز بدست آورید.

$$1)\ \ s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}$$

$$\underline{or}:\ \ b_n = \frac{1}{n} \rightarrow s_k = b_1 - b_{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1 \ \blacksquare$$

$$2)\ \ s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{k} \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1 \ \blacksquare$$

$$*\ \ 3)\ \ s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} = \frac{1^2}{2^1} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \cdots + \frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}$$

$$\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} = \frac{an^2+bn+c}{2^n} - \frac{a(n+1)^2+b(n+1)+c}{2^{n+1}} \to a=1; b=4; c=6$$

$$s_k = \left(\frac{6}{2^0} - \frac{11}{2^1}\right) + \left(\frac{11}{2^1} - \frac{18}{2^2}\right) + \left(\frac{18}{2^2} - \cdots\right) + \cdots + \left(\cdots - \frac{(k+1)^2+4(k+1)+6}{2^{k+1}}\right)$$

<u>or</u>: $b_n = \dfrac{n^2+4n+6}{2^n} \to s_k = b_0 - b_{k+1} = 6 - \dfrac{(k+1)^2+4(k+1)+6}{2^{k+1}}$

$$\to s_k = 6 - \frac{k^2+6k+11}{2^{k+1}} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} = \lim_{k\to\infty} s_k = 6 \ \blacksquare$$

$$4)\ \ s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(n+2)\sqrt{n} + n\sqrt{n+2}}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+2}\sqrt{n}}\left(\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$$

$$s_k = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)$$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\sqrt{n} + n\sqrt{n+2}} = \lim_{k\to\infty} s_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \ \blacksquare$$

مثال ۱۰-۹ اگر $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, حاصل سریهای $B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^p}$ و $C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ را بیابید. $(p > 1)$

$$A - B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^p} = \frac{1}{2^p}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{A}{2^p} \to B = A\left(1 - \frac{1}{2^p}\right)$$

$$A - C = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^p} = \frac{2}{2^p}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{A}{2^{p-1}} \to C = A\left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)$$

بهتر است دو رابطه اخیر را در ذهن داشته باشیم. توجه شود که در مثال ۱۰-۱۰ خواهیم دید سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ فقط برای $p>1$ همگراست و به همین دلیل می‌توان آنرا با عددی مانند A نمایش داد. ■

تمرینات بخش ۱۰-۲ تمرینات ۲۶ و ۷۸ از بخش ۱۱-۲ کتاب

۱- با تجزیه کسر داده شده, درستی سری زیر نشان دهید.

$$A=\sum_{n=1}^{k}\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{k+1}-\frac{5}{k+2}\right)$$

۲- نشان دهید:

$$\underline{A}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}=1 \quad ; \quad \underline{B}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n(n+2)(n+4)}=\frac{11}{24}$$

$$C=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=1 \ ; \ D=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}tan\frac{\pi}{2^n}=\frac{1}{\pi} \quad \left(\underline{Hint}:\ tan\,\alpha=cot\,\alpha-2\,cot\,2\alpha\right)$$

$$E=\sum_{n=1}^{\infty}tan^{-1}\left(\frac{2}{n^2}\right)=\frac{3\pi}{4} \quad \left(\underline{Hint}:\ \ tan^{-1}(n+1)-tan^{-1}(n-1)=tan^{-1}\left(\frac{2}{n^2}\right)\right)$$

۳- اگر بدانیم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, نشان دهید:

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8} \quad ; \quad \underline{B}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12} \quad ; \quad C=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)^2=\frac{\pi^2}{3}-3$$

۱۰-۳- آزمونهای همگرایی و واگرایی

این آزمونها برای سریهای با جملات نامنفی بکار می‌روند. لازم بذکر است که در ادامه این فصل و فصل ۱۱ هرجا لفظ سریها بکار گرفته شده است, منظور سریهای نامتناهی است. لازم بذکر است همواره بایستی در برخورد با یک سری ابتدا کنترل شود که اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, سری قطعا واگرا بوده و لذا نیاز به هیچ آزمونی نمی‌باشد. قبل از شروع, یک قضیه عنوان می‌شود.

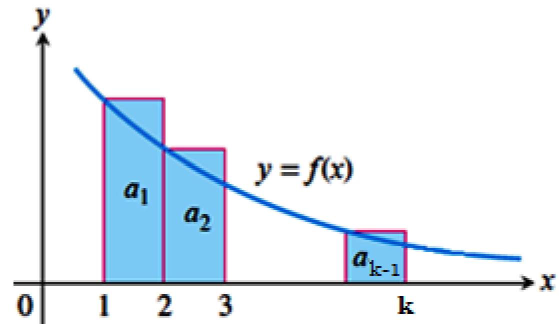
قضیه: اگر $\{a_n\}$ یک دنباله با جملات مثبت باشد, سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگراست اگر و فقط اگر دنباله مجموعهای جزئی آن از طرف بالا کراندار باشد.

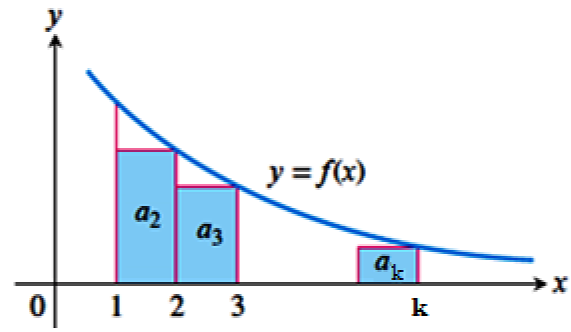
اثبات: دنباله مجموعهای جزئی $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ را در نظر می‌گیریم. از آنجا که $a_n>0$ لذا $s_{n+1}>s_n$. بنابراین اگر دنباله مجموعهای جزئی s_n از بالا کراندار باشد, از آنجا که صعودی است, لذا دنباله s_n همگرا خواهد بود. همچنین اگر s_n از بالا کراندار نباشد, لذا دنباله s_n واگرا خواهد بود.

۱۰-۳-۱- آزمون انتگرال (بخش ۱۱-۳ کتاب)

فرض کنید $f(x)$ تابعی پیوسته, مثبت و نزولی روی $[N,\infty)$ باشد و $a_n=f(n)$. در اینصورت همگرایی و واگرایی $\sum_{n=N}^{\infty}a_n$ با $\int_N^{\infty}f(x)\,dx$ یکسان است. (در واقع N بگونه‌ای انتخاب میشود که تابع از آنجا به بعد نزولی باشد)

اثبات: در ابتدا فرض میکنیم $N = 1$ باشد. یعنی $f(x)$ تابعی پیوسته, مثبت و نزولی روی $[1,\infty)$ باشد. بدیهی است $\int_N^\infty f(x)\,dx$ بیانگر سطح زیر منحنی $f(x)$ در بازه $[N,\infty)$ میباشد. به همین ترتیب می‌توان گفت a_k بیانگر مساحت مستطیلی است که ارتفاع آن برابر $a_k = f(k)$ و عرض آن برابر 1 باشد. از کنار هم قرار دادن چنین مستطیلهایی می‌توان ریمانهای بالا و پایین تابع در بازه $[1,k]$ را بصورتی که در شکل زیر دیده می‌شود ترسیم کرد (مساحت هر مستطیل در داخل آن ارائه شده است). از مقایسه سطح زیر منحنی و سطوحی که از کنار هم قرار گرفتن مستطیلهای فوق ایجاد می‌شود خواهیم داشت:





$$\int_1^k f(x)\,dx < a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} \qquad ; \qquad a_2 + a_3 + \cdots + a_k < \int_1^k f(x)\,dx$$

بنابراین از ترکیب این دو نامساوی خواهیم داشت:

$$\int_1^k f(x)\,dx + a_k < \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}_{s_k} < a_1 + \int_1^k f(x)\,dx$$

$$k \to \infty \quad : \quad \lim_{k\to\infty} a_k + \lim_{k\to\infty} \int_1^k f(x)\,dx < \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n < a_1 + \lim_{k\to\infty} \int_1^k f(x)\,dx$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k + \int_1^\infty f(x)\,dx < \sum_{n=1}^{\infty} a_n < a_1 + \int_1^\infty f(x)\,dx$$

حال اگر $\int_1^\infty f(x)\,dx$ همگرا باشد, از نامساوی سمت راست می‌توان نتیجه گرفت $\sum_{n=1}^\infty a_n$ همگراست و یا دقیقتر آن است که بگوییم $s_k = \sum_{n=1}^k a_n$ که یک دنباله صعودی است, از بالا کراندار بوده و لذا $\lim_{k\to\infty} s_k$ یعنی $\sum_{n=1}^\infty a_n$ همگراست.

به همین ترتیب اگر $\int_1^\infty f(x)\,dx$ واگرا باشد, از نامساوی سمت چپ می‌توان نتیجه گرفت $\sum_{n=1}^\infty a_n$ واگراست.

به عبارتی رفتار $\sum_{n=1}^\infty a_n$ با $\int_1^\infty f(x)\,dx$ یکسان است. برای $N \neq 1$ همین مقایسه را میتوان از N به بعد انجام داد, چرا که اضافه یا کم کردن تعدادی متناهی جمله به یک سری, همگرایی یا واگرایی آنرا تغییر نمی‌دهد.

مثال ۱۰–۱۰ به ازای چه مقادیری از p سری $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ همگراست. (این سری به سری p معروف است)

حل بدیهی است تابع $f(x) = \frac{1}{x^p}$ تابعی پیوسته, مثبت و نزولی روی $[1,\infty)$ میباشد. پس رفتار این سری با $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ یکسان است. بنابراین اگر $p > 1$ سری همگرا و اگر $p \leq 1$ واگراست.

به عنوان یک نتیجه, سری $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ که به نام سری همساز شناخته می‌شود, یک سری واگرا می‌باشد. ■

مثال ۱۰-۱۱ همگرایی و واگرایی سریهای زیر را مشخص کنید.

$$1)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nLnn}\ ;\ \frac{1}{xLnx}>0\ ;\ \left(\frac{1}{xLnx}\right)'<0\ ;\ \lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{dx}{xLnx}=\lim_{A\to+\infty}(Ln(Lnx))\Big|_2^A=\infty\ ■$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n^2}\ ;\ xe^{-x^2}>0\ ;\ \left(xe^{-x^2}\right)'<0\ ;\ \lim_{A\to+\infty}\int_1^A xe^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2e}\ ■$$

توضیح ۱: بدیهی است شرط به کارگیری این آزمون علاوه بر پیوسته, مثبت و نزولی بودن تابع, آن است که بتوان از تابع مورد نظر انتگرال گرفت که همواره امکان پذیر نمیباشد.

توضیح ۲: اگر انتگرال به عدد خاصی همگرا شد, نمیتوان گفت سری نیز به همان عدد همگراست. زیرا:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\neq\int_1^{\infty}f(x)\,dx\ ;\ a_n=f(n)$$

اما می‌توان به کمک نامساوی بدست‌آمده در اثبات آزمون, کرانهای بالا و پایین برای $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ را بدست آورد:

$$\lim_{k\to\infty}ke^{-k^2}+\frac{1}{2e}<\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n^2}<1\times e^{-1^2}+\frac{1}{2e}\to\frac{1}{2e}<\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n^2}<\frac{3}{2e}$$

در بخش بعد این موضوع را تحت عنوان تخمین یک سری, بررسی کرده و همین مثال را با تخمین بهتری تقریب خواهیم زد. ■

❄ تخمین یک سری با استفاده از آزمون انتگرال

اگر در شروع اثبات آزمون, از رابطه زیر برای سمت چپ استفاده کنیم, تقریب بهتری را خواهیم داشت:

$$a_1+\int_2^k f(x)\,dx<a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}$$

در نهایت با شروع از رابطه بالا میتوان مشابه قبل نتیجه گرفت اگر $f(x)$ تابعی پیوسته, مثبت و نزولی روی $[N,\infty)$ باشد, آنگاه:

$$a_N+\int_{N+1}^{\infty}f(x)\,dx<\sum_{n=N}^{\infty}a_n<a_N+\int_N^{\infty}f(x)\,dx$$

$$\xrightarrow{+s_{N-1}}\boxed{s_N+\int_{N+1}^{\infty}f(x)\,dx<s<s_N+\int_N^{\infty}f(x)\,dx}$$

این رابطه در واقع تکمیل شده روشی است که در توضیح ۲ مثال ۳-۱۱ به آن پرداخته شد.

مثال ۱۰-۱۲ مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ را با بکارگیری ۱۰ جمله و سری $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n^2}$ را با استفاده از ۳ جمله آن تخمین بزنید.

$$if\ N=10\to s_{10}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n^3}\approx1.1975\ ;\ \int_N^{\infty}\frac{dx}{x^3}=\frac{1}{2N^2}$$

$$s_N+\int_{N+1}^{\infty}f(x)\,dx<s<s_N+\int_N^{\infty}f(x)\,dx$$

$$\underbrace{1.1975+\frac{1}{2(11)^2}}_{1.2017}<s<\underbrace{1.1975+\frac{1}{2(10)^2}}_{1.2025}\xrightarrow{Average}s\approx 1.2021\ \blacksquare$$

$$if\ N=3\rightarrow s_3=\sum_{n=1}^{3}ne^{-n^2}\approx 0.40488\ ;\ \int_N^\infty xe^{-x^2}=\frac{1}{2}e^{-N^2}$$

$$s_N+\int_{N+1}^\infty f(x)\,dx<s<s_N+\int_N^\infty f(x)\,dx$$

$$\underbrace{0.40488+\frac{1}{2}e^{-4^2}}_{0.40488}<s<\underbrace{0.40488+\frac{1}{2}e^{-3^2}}_{0.40494}\xrightarrow{Average}s\approx 0.40491\ \blacksquare$$

۱۰-۳-۲- آزمون مقایسه (بخش ۱۱-۴ کتاب)

این آزمون درست مشابه آزمون مقایسه در انتگرالهاست.

فرض کنید برای همه $n\geq N$ بدانیم $0\leq a_n\leq kb_n$ که در آن k یک عدد مثبت است. دراینصورت اگر سری $\sum_{n=1}^\infty b_n$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^\infty a_n$ همگرا خواهد بود. همچنین اگر سری $\sum_{n=1}^\infty a_n$ واگرا باشد, سری $\sum_{n=1}^\infty b_n$ نیز واگراست.

از آنجا که کافی است این نامساوی به ازای $n\geq N$ برقرار باشد, لذا در بررسی نامساویها ممکن است ساده‌تر باشد که آنها را در بینهایت مقایسه کنیم.

اثبات: دنباله‌های t_n و s_n را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$t_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\quad ;\quad s_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$$

بدیهی است هر دو دنباله $\{t_n\}$ و $\{s_n\}$ صعودی هستند. حال برای $n\geq N$ خواهیم داشت:

$$t_n=a_1+a_2+\cdots+a_{N-1}+a_N+\cdots+a_n=t_{N-1}+a_N+\cdots+a_n\leq t_{N-1}+k(b_N+\cdots+b_n)$$
$$\rightarrow t_n\leq t_{N-1}+k(s_n-s_{N-1})$$

اگر سری $\sum_{n=1}^\infty b_n$ همگرا باشد, آنگاه دنباله $\{s_n\}$ همگرا بوده و لذا کراندار است. بنابراین دنباله $\{t_n\}$ نیز که یک دنباله صعودی است مطابق نامساوی $t_n\leq t_{N-1}+k(s_n-s_{N-1})$ از بالا کراندار و لذا همگراست. برعکس اگر سری $\sum_{n=1}^\infty a_n$ واگرا باشد, از آنجا که دنباله $\{t_n\}$ صعودی است لذا $t_n\rightarrow\infty$ و بنا به نامساوی بالا $s_n\rightarrow\infty$ و در نتیجه سری $\sum_{n=1}^\infty b_n$ واگرا خواهد شد.

معمولا سریهایی که برای مقایسه بکار میرود یا سری p است و یا سری هندسی. چرا که همگرایی یا واگرایی آنها مشخص است.

مثال ۱۰-۱۳ همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را مشخص کنید.

$$1)\ \sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\quad for\ n>2\rightarrow\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}\quad ;\quad \sum_{n=2}^\infty\frac{1}{2^{n-1}}=\sum_{n=2}^\infty\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (C)\rightarrow\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\ \ (C)$$

$$\left(\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}=2+\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{n!}<2+\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{2^{n-1}}=2+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3\right)\ ;\ \left(\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}=e\right)\ \blacksquare$$

$$2)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{Lnn}\quad for\ n>2\quad \frac{1}{Lnn}>\frac{1}{n}\quad ;\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\ (D)\rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{Lnn}\ (D)\ \blacksquare$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{5n-1}\qquad \frac{5}{5n-1}=\frac{1}{n-\frac{1}{5}}>\frac{1}{n}\quad ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ (D)\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{5n-1}\ (D)\ \blacksquare$$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2}\quad ;\ \ for\ n>N\ \rightarrow\ e^{-n^2}<\frac{1}{n^2}\quad ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ (C)\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2}\ \ (C)\ \blacksquare$$

$$5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}\left(1+Ln(1+n^2)\right)=2\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}_{(C)}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Ln(1+n^2)}{n^2}\qquad \left(Lnn<\sqrt{n}\right)$$

$$\frac{Ln(1+n^2)}{n^2}<\frac{Ln(2n^2)}{n^2}=\frac{Ln2+2Ln(n)}{n^2}<\frac{Ln2+2\sqrt{n}}{n^2}=\frac{Ln2}{n^2}+\frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$$

که هر دو همگرا می‌باشند. می‌توانستیم بصورت زیر نیز عمل کنیم:

$$\frac{Ln(1+n^2)}{n^2}<\frac{Ln(4n^2)}{n^2}=\frac{2Ln(2n)}{n^2}<\frac{2\sqrt{2n}}{n^2}=\frac{2\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\ \ (C)\rightarrow(C)\ \ \blacksquare$$

مثال ۱۰-۱۴ نشان دهید سری همساز, یک سری واگرا است.

حل اگر چه در آزمون انتگرال این موضوع بررسی شد, اما در اینجا یک راه حل خاص برای بررسی واگرایی این سری ارائه می‌شود.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1}&>\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}&>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}&>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\\ &\vdots\end{aligned}\qquad \xrightarrow{+}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}>k\frac{1}{2}\xrightarrow{k\rightarrow\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ \ (D)\ \blacksquare$$

توضیح: گاهی اوقات این آزمون نتیجه‌ای نمیدهد. مثلا:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}\quad ;\quad \frac{1}{2^n-1}>\frac{1}{2^n}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\ \ (C)\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}\ \ (?)$$

در کل مشکل این روش آن است که پیدا کردن یک نامساوی مفید ممکن است کار ساده‌ای نباشد. ■

تمرینات ۳۰, ۳۲ و ۴۶ از بخش ۱۱-۳ کتاب

تمرینات ۲۰ , ۲۶ و ۳۲ از بخش ۱۱-۴ کتاب

۱۰-۳-۳- آزمون مقایسه حدی یا خارج قسمت (بخش ۱۱-۴ کتاب)

آزمون خارج قسمت درست مشابه آزمون انتگرالهای غیرعادی نوع اول بوده و بصورت زیر است:

فرض کنید a_n و b_n دنباله‌های مثبتی بوده و هدف بررسی همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ می‌باشد. سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ را در نظر می‌گیریم. اگر $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$ باشد, آنگاه سه حالت زیر را خواهیم داشت:

الف: اگر $0 < A < \infty$ باشد, آنگاه دو سری هم رفتارند.

ب: اگر $A = 0$ باشد, آنگاه اگر سری b_n همگرا باشد, نتیجه میشود a_n نیز همگراست.

ج: اگر $A = \infty$ باشد, آنگاه اگر سری b_n واگرا باشد, نتیجه میشود a_n نیز واگراست.

در واقع با داشتن دنباله a_n درپی یافتن یک دنباله مانند b_n می‌باشیم که در یکی از سه شرط بالا صدق کند.

اثبات: در ابتدا فرض کنیم $0 < A < \infty$ باشد. با توجه به تعریف ریاضی حد دنباله خواهیم داشت:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;; \exists\, N > 0 \,; n > N \to \left|\frac{a_n}{b_n} - A\right| < \varepsilon \to -\varepsilon + A < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon + A \to b_n(A-\varepsilon) < a_n < b_n(A+\varepsilon)$$

بنابراین با توجه به آزمون مقایسه و در نظر گرفتن دو سمت نامساوی مشابه آنچه در آزمون انتگرال دیده شد, دو سری هم رفتارند یعنی یا هر دو همگرا خواهند بود یا هر دو واگرا.

اما اگر $A = 0$ فقط نامساوی سمت راست رابطه اعتبار دارد (عبارت $b_n(A-\varepsilon)$ منفی میشود), لذا همگرایی b_n , همگرایی a_n را نتیجه می‌دهد. در انتها نیز اگر $A = \infty$, با انتخاب حد $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n}$ مشابه قسمت اول, واگرایی b_n , واگرایی a_n را نتیجه می‌دهد.

مثال ۱۰-۱۵ همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را مشخص کنید.

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \quad ; \quad 2)\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1 + nLnn}{n^2 + 5}$$

حل برای هر دو قسمت بایستی به دنبال یک b_n مناسب بود.

الف: توقع داریم سری $a_n = \frac{1}{2^n - 1}$ برای n های بزرگ, رفتاری مشابه $b_n = \frac{1}{2^n}$ داشته باشد. بنابراین:

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \;;\; b_n = \frac{1}{2^n} \;;\; \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} = 1 \neq (0, \infty)$$

پس چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ همگراست, سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ نیز همگرا خواهد بود. توجه شود با آزمون مقایسه دیده شد نمی‌توان در مورد همگرایی یا واگرایی این سری اظهار نظر کرد. در کل این روش کارایی بیشتری نسبت به آزمون مقایسه دارد. ■

ب: در اینجا نیز توقع داریم سری $a_n = \frac{1+nLnn}{n^2+5}$ برای n های بزرگ, رفتاری مشابه $\frac{Lnn}{n} = \frac{nLnn}{n^2}$ داشته باشد. اما به ازای $n \geq 3$ از $\frac{Lnn}{n}$ از $\frac{1}{n}$ بزرگتر بوده و میدانیم $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست. لذا اگر $b_n = \frac{1}{n}$ انتخاب شود, خواهیم داشت:

$$b_n = \frac{1}{n} \to \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n + n^2 Lnn}{n^2 + 5} = \infty$$

پس چون سری $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست, سری $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1+nLnn}{n^2+5}$ نیز واگرا خواهد بود. ■

۱۰-۳-۴- آزمون مقایسه ویژه (ریمان) (بخش ۱۱-۴ کتاب)

دیده شد که انتخاب b_n مناسب همیشه کار ساده‌ای نیست. لذا در اینجا نیز مشابه انتگرالهای غیرعادی نوع اول از یک b_n شناخته شده استفاده می‌کنیم. به عبارتی اگر $b_n = \frac{1}{n^p}$ (سری p) انتخاب شود, آزمون خارج قسمت را آزمون مقایسه ویژه یا ریمان نامیده و خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n^p a_n = A$$

در اینجا نیز مشابه بحث انتگرالهای غیرعادی نوع اول با توجه به شرایط همزمان همگرایی و واگرایی سری p و آزمون خارج قسمت, دو حالت زیر را خواهیم داشت:

الف: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ وقتی همگراست که $p > 1$. از طرفی از آزمون خارج قسمت اگر $0 < A < \infty$ رفتار دو سری یکسان است, یعنی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا می‌شود. همچنین اگر $A = 0$ نیز باشد, همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را بدنبال خواهد داشت.

ب: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ وقتی واگراست که $p \le 1$. از طرفی از آزمون خارج قسمت اگر $0 < A < \infty$ رفتار دو سری یکسان است, یعنی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز واگرا میشود. همچنین اگر $A = \infty$ نیز باشد, واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را نتیجه خواهد داد. در مجموع خواهیم داشت:

اگر $p > 1$ و A متناهی باشد, سری همگرا و اگر $p \le 1$ و $A \neq 0$ باشد, سری واگراست.

دقت شود این آزمون نمی‌گوید مثلا اگر $p > 1$ و A نامتناهی باشد, سری قطعا واگراست. در اینصورت بایستی یک p دیگری را امتحان کرد.

توضیح ۱: اگر بتوان p را بگونه‌ای بدست آورد که مرتبه بینهایت در صورت و مخرجِ عبارت $n^p a_n$ یکسان شود, آنگاه A مخالف صفر و بینهایت شده و لذا اگر $p > 1$ سری همگرا و اگر $p \le 1$ سری واگرا است.

توضیح ۲: برای یافتن p مناسب, بهتر است ابتدا یک هم ارزی در بینهایت محاسبه شود.

توضیح ۳: یک نتیجه ساده این آزمون بصورت زیر است:

$$if\ n\to\infty\ ;\ a_n \approx \frac{k}{n^p}\ \rightarrow \begin{cases} p > 1 & \text{همگرا} \\ p \le 1 & \text{واگرا} \end{cases}$$

چرا که در اینصورت $\lim_{n\to\infty} n^p a_n = A = k$ خواهد شد و بدیهی است که در بیانِ هم ارزی $k \neq 0, \infty$ میباشد.

خلاصه: همواره بهتر است در شروع کار به دنبال هم‌ارزی a_n با $\frac{1}{n^p}$ در بینهایت باشیم. اما اگر نتوان یک هم ارزی بصورت فوق بدست آورد, باید بدنبال یک p مناسب بود که در یکی از دو حالت ذکر شده بالا صدق نماید.

مثال ۱۰-۱۶ همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را مشخص کنید.

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{2n^3+1}\ ;\ if\ n\to\infty\ ;\ \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3+1} \approx \frac{1}{2n^2} \xrightarrow{p=2>1} (C)$$

$$\underline{Or}:\ p = 2 \rightarrow \lim_{n\to\infty} n^p\frac{n+\sqrt{n}}{2n^3+1} = \frac{1}{2} \neq \infty \rightarrow (C)\ \blacksquare$$

$$2)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+nLnn}{n^2+5}\ ;\ if\ n\to\infty\ ;\ \frac{1+nLnn}{n^2+5}\approx\frac{Lnn}{n}>\frac{1}{n}\xrightarrow{p=1}(D)$$

$$\underline{Or}:\ p=1\to\lim_{n\to\infty}n^p\frac{1+nLnn}{n^2+5}=\infty\neq 0\to(D)\ \blacksquare$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}Ln\left(1+sin\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)\ ;\ if\ n\to\infty\ ;\ Ln\left(1+sin\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)\approx\frac{1}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\xrightarrow{p=\frac{3}{2}}(C)$$

چرا که اگر $x\to 0$ خواهیم داشت $Ln(1+x)\approx x$.

$$\underline{Or}:\ p=\frac{3}{2}\to\lim_{n\to\infty}n^pLn\left(1+sin\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)=1\neq\infty\to(C)\ \blacksquare$$

مثال ۱۰–۱۷ الف: با استفاده از قاعده هوپیتال نشان دهید برای $c>0$ خواهیم داشت $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Lnn}{n^c}=0$

ب: به کمک قسمت قبل نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Lnn}{n^{\frac{3}{2}}}$ همگراست.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Lnn}{n^c}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{cn^{c-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{cn^c}=0\ \ ;\ \ if\ \ n\to+\infty\ :\ \ n^c\gg Lnn\quad(c>0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Lnn}{n^{\frac{3}{2}}}\ ;\ if\ n\to\infty\ ;\ \frac{Lnn}{n^{\frac{3}{2}}}<\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{n}\quad(?)\quad;\quad\frac{Lnn}{n^{\frac{3}{2}}}<\frac{n^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\to(C)\ \blacksquare$$

مثال ۱۰–۱۸ به ازای چه مقادیری از k سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^k+1}-\sqrt{n^k}\right)$ همگراست؟

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^k+1}-\sqrt{n^k}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^k+1}+\sqrt{n^k}}\quad;\ if\ n\to\infty\quad\frac{1}{\sqrt{n^k+1}+\sqrt{n^k}}\approx\frac{1}{2\sqrt{n^k}}=\frac{1}{2n^{\frac{k}{2}}}$$

پس برای همگرایی باید $\frac{k}{2}>1$ و یا $k>2$. $\blacksquare$

مثال ۱۰–۱۹ کلیه مقادیر حقیقی k را بگونه ای بیابید که سری زیر همگرا گردد.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^k\quad;\quad a_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}=\frac{(2n)!}{(2^nn!)^2}$$

که در آن نماد $n!!$ معادل $n(n-2)(n-4)\cdots$ میباشد, که اگر n فرد باشد تا 1 و اگر زوج باشد تا 2 ادامه می‌یابد.

حل در ابتدای فصل عنوان شد که اگر $n\to\infty$ آنگاه برای $k\in\mathbb{N}$ خواهیم داشت $(kn)!\approx\sqrt{2\pi kn}\left(\frac{kn}{e}\right)^{kn}$. در نتیجه:

$$if\ n\to\infty\ ;\ a_n\approx\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{2^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}(2\pi n)}=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}n^{\frac{1}{2}}}\to(a_n)^k\approx\frac{1}{\pi^{\frac{k}{2}}n^{\frac{k}{2}}}\to\frac{k}{2}>1\to k>2\ \blacksquare$$

۱۰-۳-۵- آزمون نسبت(دالامبر) (بخش ۱۱-۶ کتاب)

قضیه: فرض کنید $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$ باشد. در اینصورت بنا به این آزمون اگر $L<1$ سری همگرا و اگر $L>1$ سری واگراست.
برای $L=1$ این آزمون نتیجه‌ای نمی‌دهد.

اثبات: اگر $L<1$ می‌توان عدد ثابت r را بگونه‌ای اختیار کرد که $L<r<1$. از آنجاییکه $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$ و $L<r$, لذا نسبت $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ به ازای n به اندازه کافی بزرگ, کمتر از r خواهد بود (توجه شود جملات دنباله همگی نامنفی هستند). بنابراین عدد صحیحی مانند N وجود دارد که برای $n\geq N$ داشته باشیم:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<r\ \ ;\ \ (n\geq N)\ \ \to a_{n+1}<ra_n$$

حال اگر در رابطه بالا $n=N$, $n=N+1$ و ... قرار داده شود, در نهایت از جمع این روابط خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_{N+1}<ra_N \\ a_{N+2}<ra_{N+1}<r^2a_N \\ a_{N+3}<ra_{N+2}<r^3a_N \\ \qquad\vdots \end{cases} \xrightarrow{+} a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots<a_N(r+r^2+r^3+\cdots)$$

چون $0<r<1$, پس سمت راست همگراست. لذا با توجه به آزمون مقایسه سمت چپ نیز همگرا میشود.

برای حالت $L>1$ به راحتی میتوان نشان داد از جایی به بعد جملات رشد صعودی دارند. لذا در بینهایت جمله عمومی دنباله صفر نمی‌شود. لذا سری واگراست. برای حالت $L=1$ میتوان دو سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ را مثال زد که برای آنها $L=1$ خواهد شد, اما اولی واگرا و دومی همگراست.

مثال ۱۰-۲۰ همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را مشخص کنید.

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}n^4e^{-n^2}\ \ ;\ \ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4e^{-2n-1}=0<1\to(C)\ \blacksquare$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\ \ ;\ \ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}<1\to(C)\ \blacksquare$$

$$3)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n-n^3}{n^5-5n^2}\ \ ;\ a_n=\frac{3^n-n^3}{n^5-5n^2}\ ;\ b_n=\frac{3^n}{n^5}\ \ ;\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1\neq(0,\infty)$$

پس همگرایی یا واگرایی دو سری یکسان است. اما خودِ سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{n^5}$ با آزمون نسبت واگراست. زیرا:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{n^5}\ \ ;\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}3\left(\frac{n}{n+1}\right)^5=3>1\to(D)$$

و یا ساده‌تر است که بگوییم از آنجا که در بینهایت $3^n\gg n^5$ لذا $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{n^5}\neq 0$, بنابراین سری واگراست. ■

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!\,n!}{(2n)!}\ ;\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4^{n+1}(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}\times\frac{(2n)!}{4^n n!\,n!}=\frac{4(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{2n+1}=1\rightarrow (?)\ ;\ \text{اما}\ \frac{a_{n+1}}{a_n}>1\rightarrow a_{n+1}>a_n>a_1=2\rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n\nrightarrow 0\rightarrow (D)\ \blacksquare$$

$$5)\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n\ ;\ a_n=\begin{cases}\dfrac{n}{2^n} & n\ odd\\ \dfrac{1}{2^n} & n\ even\end{cases}\ ;\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n+1}}\Big/\dfrac{n}{2^n}=\dfrac{1}{2n} & n\ \ odd\\ \dfrac{n+1}{2^{n+1}}\Big/\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{n+1}{2} & n\ \ even\end{cases}\ \rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\ (?)$$

بنابراین این آزمون نمی‌تواند همگرایی یا واگرایی سری را مشخص کند. در مثال ۱۰-۲۱ آنرا با آزمون ریشه nام بررسی می‌کنیم.■

۱۰-۳-۶- آزمون ریشه nام(کوشی) (بخش ۱۱-۶ کتاب)

قضیه: فرض کنید $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$ باشد. در اینصورت بنا به این آزمون اگر $L<1$ سری همگرا و اگر $L>1$ سری واگراست. برای $L=1$ این آزمون نتیجه‌ای نمی‌دهد.

اثبات: اگر $L<1$ می‌توان عدد ثابت r را بگونه‌ای اختیار کرد که $L<r<1$. از آنجایی‌که $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$ و $L<r$, لذا $\sqrt[n]{a_n}$ به ازای n به اندازه کافی بزرگ, کمتر از r خواهد بود. بنابراین عدد صحیحی مانند N وجود دارد که برای $n\geq N$ داشته باشیم:

$$\sqrt[n]{a_n}<r\ \ ;\ \ (n\geq N)\quad \rightarrow a_n<r^n$$

حال اگر در رابطه بالا $n=N$, $n=N+1$ و ... قرار داده شود, در نهایت از جمع این روابط خواهیم داشت:

$$\begin{cases}a_{N+1}<r^{N+1}\\ a_{N+2}<r^{N+2}\\ a_{N+3}<r^{N+3}\\ \quad\vdots\end{cases}\xrightarrow{+} a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots<r^N(r+r^2+r^3+\cdots)$$

چون $0<r<1$, پس سمت راست همگراست. لذا با توجه به آزمون مقایسه سمت چپ نیز همگرا میشود.

برای حالت $L>1$ دیده میشود که از جایی به بعد جملات بزرگتر از 1 میشوند. لذا در بینهایت جمله عمومی دنباله صفر نمیشود. لذا سری واگراست. برای حالت $L=1$ نیز مشابه قبل, میتوان دو سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ را مثال زد که برای آنها $L=1$ خواهد شد, اما اولی واگرا و دومی همگراست.

توضیح: لازم بذکر است که حد کوشی همواره وجود دارد, در حالی که حد دالامبر ممکن است موجود نباشد (مثال ۱۰-۲۰ قسمت ۵), بنابراین آزمون کوشی در کل آزمون قویتری نسبت به دالامبر محسوب میشود. می‌توان با استفاده از حد دنباله‌ها ثابت کرد که در صورتی که حد دالامبر وجود داشته باشد, آنگاه حد آن با جواب حد کوشی یکسان است. به عبارتی:

$$if\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L\rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$$

به عبارتی در صورت وجود حد در آزمون دالامبر, نتیجه آزمونهای دالامبر و کوشی یکسان است. نتیجه مهم آنکه اگر در آزمون دالامبر $L=1$ گردد, آزمون کوشی هم جوابگو نخواهد بود, چرا که آن هم به $L=1$ می‌رسد.

مثال ۱۰-۲۱ همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را مشخص کنید.

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\quad ;\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}<1\to(C)$$

چرا که در ابتدای این فصل عنوان شد که اگر $n\to\infty$ آنگاه برای $k\in\mathbb{N}$ خواهیم داشت $\sqrt[n]{(kn)!}\approx\left(\frac{kn}{e}\right)^k$ ■

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}\quad ;\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{n}}}{2}=\frac{1}{2}<1\to(C)\ ■$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\quad ;\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n!)^2}}{\sqrt[n]{(2n)!}}=\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^2}{\left(\frac{2n}{e}\right)^2}=\frac{1}{4}<1\to(C)\ ■$$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n\quad ;\quad a_n=\begin{cases}\frac{n}{2^n} & n\ \ odd\\ \frac{1}{2^n} & n\ \ even\end{cases}\to\frac{1}{2}\le\sqrt[n]{a_n}\le\frac{\sqrt[n]{n}}{2}\to\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}<1\to(C)$$

دقت شود همین مساله در قسمت ۵ از مثال ۱۰-۲۰ نیز با آزمون نسبت بررسی شد که از آن آزمون نتیجه‌ای بدست نیامد. ممکن است سوال شود این نتیجه با آنچه در توضیح قبل بیان شد تناقض دارد. چرا که عنوان شد اگر روش دالامبر به جواب نرسد, کوشی نیز جواب نخواهد داد. اگر به توضیح توجه شود دیده خواهد شد این نتیجه‌گیری برای زمانی است که حد دالامبر وجود داشته باشد, در حالیکه در قسمت ۵ از مثال ۱۰-۲۰ دیده شد که این حد وجود ندارد. به عبارتی این نتیجه می‌گوید اگر در روش دالامبر به $L=1$ رسیدیم, قطعا آزمون کوشی نیز به $L=1$ خواهد رسید. ■

$$5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5\left(\sqrt{5}+(-1)^n\right)^n}{4^n}\quad ;\quad \underbrace{\frac{n^5\left(\sqrt{5}+(-1)^n\right)^n}{4^n}}_{a_n}\le\underbrace{\frac{n^5\left(\sqrt{5}+1\right)^n}{4^n}}_{b_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}<1\quad(C)\to\sum_{n=1}^{\infty}a_n\quad(C)\ ■$$

مثال ۱۰-۲۲ همگرایی یا واگرایی سری زیر را مشخص کنید.

$$\left(\frac{2^2}{1^2}-\frac{2}{1}\right)^{-1}+\left(\frac{3^3}{2^3}-\frac{3}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{4^4}{3^4}-\frac{4}{3}\right)^{-3}+\cdots\to a_n=\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}-\frac{n+1}{n}\right)^{-n}$$

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{-1}=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=(e\times1-1)^{-1}=\frac{1}{e-1}<1\to(C)\ ■$$

❈ ۱۰-۳-۷- آزمون رابه

فرض کنید $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=L$ باشد. در اینصورت اگر $L>1$ سری همگرا و اگر $L<1$ سری واگراست. همچنین برای $L=1$ این آزمون نتیجه‌ای نمی‌دهد. معمولا این آزمون زمانی بکار میرود که در آزمون دالامبر یا کوشی به جواب نرسیم, به عبارتی در این آزمونها به $L=1$ رسیده باشیم.

مثال ۱۰-۲۳ همگرایی یا واگرایی سری زیر را مشخص کنید.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1\times 4}{3\times 6}\right)^2+\left(\frac{1\times 4\times 7}{3\times 6\times 9}\right)^2+\cdots \to \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2=1 \quad \boxed{?}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2\right)=\frac{4}{3}>1\to (C) \ \blacksquare$$

تمرینات بخش ۱۰-۳ تمرینات ۲۴ , ۲۸ و ۳۶ از بخش ۱۱-۶ کتاب

۱- نشان دهید سریهای $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Lnn}{n^p}$ و $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(Lnn)^p}$ برای $p>1$ همگرا و برای $p\le 1$ واگراست.

۲- نشان دهید:

$$1)\ \frac{\pi}{4}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2} \qquad ; \qquad 2)\ \frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}\le\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{k}\le\frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}}+\sqrt{k}-\frac{2}{3}$$

۳- نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$, یک سری همگرا است. راهنمایی: $\frac{1}{n^n}<\frac{1}{2^n}$

۴- به ازای چه مقادیری از k سری زیر همگراست؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k\left(\sqrt[3]{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^2-n+1}\right)$$

۵- همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را مشخص کنید.

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!\,e^n} \ ; \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right) \ ; \ 3)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(Lnn)^{\frac{n+1}{n}}} \ ; \ 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n!}}$$

۶- نشان دهید $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(Lnn)^p}$ برای هر $p\in\mathbb{R}$ واگراست.

۷- در قسمت ۵ از مثال ۱۰-۲۱ آیا می‌توان با استفاده از آزمون ریشه nام مستقیما برای a_n استفاده کرد؟

۸- فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ دو سری با جملات مثبت و همگرا باشند. نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sqrt{b_n}$ نیز همگراست.

راهنمایی: از همگرا بودن $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ نشان دهید از یک $n\ge N$ به بعد $0<b_n<1$ و سپس نامساوی $0<a_n\sqrt{b_n}<a_n$ را نتیجه بگیرید.

۱۰-۴- سریهای متناوب-آزمون لایب‌نیتز (بخش ۱۱-۵ کتاب)

دیده شد که آزمونهای قبل همگی برای سریهای با جملات نامنفی قابل استفاده می‌باشند. بنا به تعریف, یک سری را متناوب میگوییم هرگاه جملات آن یک در میان مثبت و منفی باشد. بعنوان مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots$$

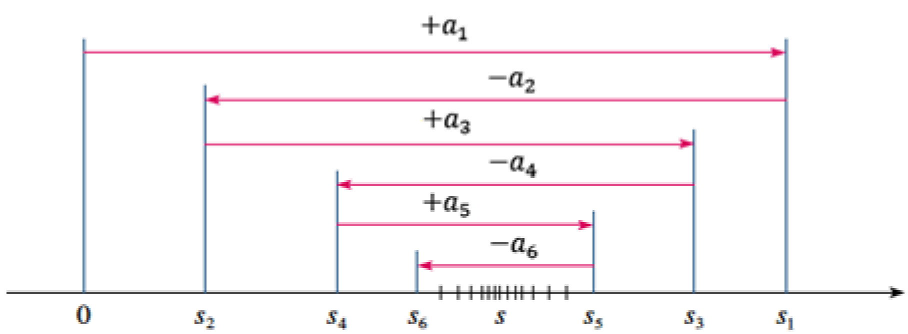
بر طبق آزمون لایب‌نیتز چنانچه دو شرط زیر همزمان برقرار باشند, سری همگراست.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad ; \quad n > N \quad |a_{n+1}| \le |a_n| \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

میتوان درستی این آزمون را در شکل زیر مشاهده کرد. دیده میشود که مجموعهای جزئی زوج $(s_2, s_4, s_6, \cdots)$ صعودی و کراندار است(زیرا از a_1 کوچکتر است). پس دنباله $\{s_{2n}\}$ همگراست. حد آنرا s مینامیم. همچنین:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = s + 0 = s$$

بنابراین هم حد مجموعهای جزئی زوج و هم فرد به یک عدد همگرا میشود. لذا در نهایت سری همگرا به s خواهد بود.



توضیح: با توجه به شکل بدیهی است همواره به ازای $n > N$ خواهیم داشت $|s - s_n| < |a_{n+1}|$. یعنی اگر در تخمین یک سری همگرای متناوب, مجموع سری را تا جمله nام حساب کنیم(s_n), خطای حاصل از این تقریب, از جمله $n+1$ام کمتر است.

مثال ۱۰-۲۴ همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را مشخص کنید.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad ; \quad n \ge 1 \qquad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \to (C) \blacksquare$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1} \quad ; n \ge \boxed{2} \quad |a_{n+1}| \le |a_n| \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^2}{n^3+1}\right| = 0 \to (C)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3+1} \to f'(x) = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2} < 0 \to x > \sqrt[3]{2} \quad \blacksquare$$

مثال ۱۰-۲۵ چنانچه در سری زیر مجموع جملات تا ۷ جمله محاسبه شود, خطای تقریب چقدر است؟

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \quad ; \quad n \ge 1 \to \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{n!} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0 \to (C)$$

$$s = \underbrace{\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}}_{s_7} - \underbrace{\frac{1}{7!}}_{a_8} + \cdots \to |s - s_7| < |a_8| = 0.0002$$

کنترل: $s_7 \approx 0.368056 \quad s = \frac{1}{e} = 0.3678794 \to |s - s_7| = 0.00018 < 0.0002$ ■

در فصل بعد خواهیم دید که چرا $\frac{1}{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ می‌باشد. ■

۱۰-۵- همگرای مطلق و مشروط

ممکن است با یک سری روبرو شویم که نتوانیم همگرایی یا واگرایی آنرا تشخیص دهیم اما بررسی همگرایی یا واگراییِ قدرمطلق آن سری ساده باشد. در اینجا نشان می‌دهیم چنانچه سری قدرمطلق آن همگرا باشد, خود سری همگراست. برای این منظور:

$$-|a_n| \le a_n \le |a_n| \to 0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$$

پس از آنجا که سری $2|a_n|$ همگراست, لذا با توجه به آزمون مقایسه, سری a_n نیز همگرا خواهد بود.

بنا به تعریف یک سری را همگرای مطلق میگوییم هرگاه سری قدر مطلق آن همگرا باشد. بنابراین با توجه به آنچه در بالا عنوان شد, خودِ سری نیز همگرا خواهد شد. به عبارتی یک سری همگرای مطلق, خود, همگراست.

به طور خلاصه اگر سری a_n همگرا و سری $|a_n|$ نیز همگرا باشد, سری a_n همگرای مطلق است. اما اگر سری a_n همگرا و سری $|a_n|$ واگرا باشد, سری a_n را همگرای مشروط می‌نامیم.

در اینجا با سریهایی سروکار داریم که شامل جملات منفی نیز میباشد.

آزمونهای دالامبر و کوشی را می‌توان برای سریهایی که الزاما مثبت نیستند, بصورت زیر بکار گرفت. در اینجا نیز اگر $L < 1$ گردد, سری $\sum a_n$ همگرای مطلق(و لذا همگرا) و اگر $L > 1$ سری $\sum b_n$ واگراست.

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad ; \quad L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

از این روش برای یافتن بازه همگرایی سریهای توانی در بخش ۱۰-۶-۱ استفاده خواهد شد.

توضیح ۱: همواره در سریهای متناوب در ابتدا بهتر است به دنبال سری قدرمطلق آن برویم که اگر همگرا بود, بگوییم سری اولیه همگرای مطلق(و لذا همگرا) است. اما اگر سری قدرمطلق واگرا شد, آزمون لایب‌نیتز را بررسی میکنیم.

توضیح ۲: سری متناوب p بصورت $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ میباشد. با آزمون لایب‌نیتز دیده میشود اگر $p > 0$ آنگاه سری همگراست. اما برای قدرمطلق آن میتوان گفت اگر $p > 1$ سری همگرا و درغیراینصورت واگراست. یعنی در نهایت اگر $p > 1$ سری متناوب p همگرای مطلق است و اگر $0 < p \le 1$ همگرای مشروط.

مثال ۱۰-۲۶ همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را مشخص کنید.

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ \ (C)$$

یعنی سری اولیه همگرای مطلق است, لذا همگراست. همچنین میتوان گفت از آنجا که سری متناوب بوده و در دو شرط آزمون لایب‌نیتز نیز صدق میکند, همگرا خواهد شد. اما روش اول که به همگرایی مطلق رسیده است ارزشمندتر است, زیرا همگرایی مطلق چیزی فراتر از همگرایی بدست می‌دهد. در انتهای این مثال علت ارزشمندتر بودن همگرای مطلق به همگرا را خواهیم دید.■

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\quad ;\quad \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\quad (D)\to(?)$$

حال که دیده شد سری قدرمطلق واگراست, پس از این روش نتیجه‌ای بدست نیامده و لذا به سراغ آزمون لایب نیتز میرویم. در مثال ۱۰-۲۴ دیده شد که سری اولیه همگراست. حال چون سری قدرمطلق آن همگرا نیست, لذا همگرای مشروط است. ■

$$3)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(Lnn)^2}\quad ;\quad \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(Lnn)^2}$$

میتوان با آزمون انتگرال نشان داد سری قدرمطلق همگراست. پس سری اولیه همگرای مطلق است, لذا همگراست. ■

$$4)\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n}Lnn}{n}\quad ;\quad \sum_{n=3}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{Lnn}{n}\quad ;\quad \frac{Lnn}{n}>\frac{1}{n}\ \to\sum_{n=3}^{\infty}\frac{Lnn}{n}(D)\to(?)$$

با آزمون لایب‌نیتز میتوان نشان داد که سری اولیه همگراست. حال چون قدرمطلق آن همگرا نیست, لذا همگرای مشروط است. ■

$$5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{cosn}{n^2}\quad ;\quad \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|cosn|}{n^2}\qquad \frac{|cosn|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}\ (C)\to\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\ \ (C)$$

سری قدرمطلق با آزمون مقایسه همگراست. پس سری اولیه همگرای مطلق است, لذا همگراست. دقت شود سری اولیه دارای جملات مثبت نمیباشد و فرم متناوب هم ندارد. بنابراین آزمونهای قبل برای سری اولیه کاربرد ندارد. ■

$$6)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{3^n}\quad ;\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=\frac{1}{3}<1\to \text{همگرای مطلق}\ ■$$

<u>سوال</u>: چرا سریهای همگرای مطلق مهم می‌باشند؟

چنانچه جملات یک سری همگرای مطلق را به دلخواه جابجا کنیم (تجدید آرایش) , آنگاه سری بدست آمده باز هم به همان مقدار اولیه همگراست. اما در سری همگرای مشروط, تجدید آرایش ممکن است سری را واگرا کرده و یا به عدد دیگری همگرا نماید. مثلا سری همگرای مشروط S را در نظر گرفته و آنرا با $\frac{1}{2}S$ جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases} S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\cdots \\ \frac{1}{2}S=0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+0+\cdots \end{cases}\xrightarrow{+}\frac{3}{2}S=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\cdots$$

دیده میشود که سری حاصل از جمع دو سری S و $\frac{1}{2}S$, همان سری اولیه است با این تفاوت که جملات آن جابجا شده‌اند. اما بجای S به $\frac{3}{2}S$ همگرا شده است! در واقع جابجایی جملات در سری همگرای مشروط, میتواند مقدار همگرایی سری را تغییر داده و یا حتی آنرا واگرا کند. ثابت میشود که با تغییر آرایش در سری همگرای مشروط, میتوان آنرا به <u>هر</u> عدد دلخواهی همگرا کرد.

ممکن است سوال شود که این نتیجه با آنچه در جبر برای مجموع چند عدد داریم متناقض است, زیرا در آنجا جابجایی جملات تاثیری در جواب ندارد. توجه شود این موضوع برای جمع <u>چند</u> جمله است, نه <u>بینهایت</u> جمله. در بخشهای بعد نیز خواهیم دید که همه کارهایی که در چندجمله‌ایها مجاز هستیم ممکن است در سریهای نامتناهی مجاز نباشیم.

تمرینات بخشهای ۱۰-۴ و ۱۰-۵ تمرینات ۲۰ و ۳۴ از بخش ۱۱-۵ کتاب

۱- همگرایی مطلق یا مشروط سریهای زیر را بررسی کنید.

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+n(-1)^n}\quad ;\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,tan^{-1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)\quad ;\quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$$

۲- نشان دهید سریهای زیر همگرا هستند.

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt[n]{n}}{n}\quad ;\quad 2)\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\,log_5^n}$$

۳- اگر k و α ثابتهای مثبتی باشند, همگرایی یا واگرایی سری زیر را مشخص کنید.

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{\sqrt{n^2-2kn+\alpha^2}}$$

۱۰-۶- سری توانی (بخش ۱۱-۸ کتاب)

تا به‌حال سریهای عددی بررسی شد که در آن تنها پارامتر موجود, n میباشد. حال سری زیر را در نظر میگیریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^3+\cdots$$

به این سری, سری توانی و به c_nها ضرایب سری گفته میشود. دیده میشود که در این سری متغیری به‌نام x بصورت توانی وجود دارد. بدیهی است با انتخاب هر x به یک سری عددی میرسیم که ممکن است همگرا یا واگرا باشد. مثلا اگر $c_n=1$ آنگاه سری توانی به سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ منجر میشود که فقط به‌ازای $-1<x<1$ همگراست. بنابراین سری هندسی, حالت خاصی از سری توانی است. دقت شود یک اِشکال در نمادگذاری بالا وجود دارد, چرا که برای $x=0$ اولین جمله $c_0 0^0$ خواهد بود که گویا در اینجا قرارداد کرده‌ایم آنرا c_0 در نظر بگیریم.

تعمیم سری فوق بصورت $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ است که به آن سری توانی حول $x=a$ میگوییم.

از آنجا که سری توانی ممکن است به ازای xهای مختلف, مثبت یا منفی باشد, لذا آزمونهای همگرایی در مورد قدرمطلق جملات سری اعمال می‌شود که منجر به همگرایی مطلق خواهد شد.

مثال ۱۰-۲۷ به ازای چه مقدارهایی از x سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n}$ همگراست؟

$$a_n(x)=\frac{(x-3)^n}{n}\quad ;\quad L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-3|}{1+\frac{1}{n}}=|x-3|$$

پس اگر $L=|x-3|<1$ سری همگرای مطلق است یعنی $2<x<4$. اما دیده شد برای $L=|x-3|=1$ این آزمون جواب نمیدهد. لذا بطور جداگانه اگر $x=2$ به سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ می‌رسیم که بنا به آزمون سری متناوب, همگراست. اگر $x=4$ به سری همساز می‌رسیم که واگراست. بنابراین سری برای $2<x<4$ همگرای مطلق و برای $x=2$ همگرای مشروط است. از آنجا که همگرای مطلق, خود, همگراست لذا در کل سری برای $2\le x<4$ همگرا خواهد بود. در ادامه روابط ساده‌تری برای بازه همگرایی سریهای توانی ارائه میشود. ■

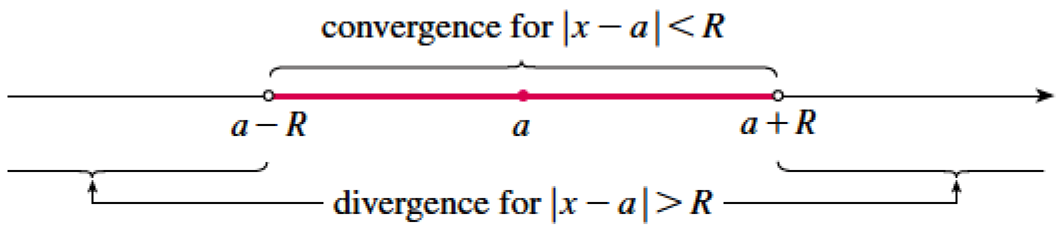
۱۰-۶-۱- قضیه آبل

در همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, فقط سه حالت وجود دارد:

الف: سری فقط در $x=a$ مطلقا همگراست. ب: سری به‌ازای همه x ها مطلقا همگراست.

ج: عدد مثبتی به‌نام R وجود دارد که اگر $|x-a|<R$ سری مطلقا همگرا و اگر $|x-a|>R$ سری واگراست.

به این عدد, شعاع همگرایی (یا به عبارتی در اینجا پاره خط همگرایی) گفته میشود. بنابراین در حالت الف $R=0$ و در حالت ب $R=\infty$ میباشد. برای حالت ج نیز بسته به اینکه $x=a\pm R$ جزو نقاط همگرایی باشد یا نباشد, چهار حالت وجود دارد.



مهمترین نتیجه این قضیه آن است که بازه همگرایی یک سری هیچگاه بصورت تکه تکه نمی‌باشد. به این معنی که بازه همگرایی نمی‌تواند مثلا (a,b) و (c,d) باشد, بلکه اگر سری در بازه‌ای همگرا باشد, حتما بصورت تک بازه (e,f) خواهد بود.

برای یافتن شعاع همگرایی و یا بازه‌ای که در آن بازه سری توانی مطلقا همگرا می‌باشد, معمولا از آزمون نسبت یا ریشه nام استفاده میشود. با توجه به این آزمونها, برای یک سری توانی خواهیم داشت:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n}\right|=|x-a|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|<1\to|x-a|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}$$

$$|x-a|<R\to\boxed{\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}$$

به همین ترتیب با استفاده از آزمون ریشه nام به $\frac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$ خواهیم رسید.

توجه شود از آنجا که آزمون نسبت(یا ریشه nام) برای $L=1$ نتیجه‌ای به همراه ندارد, لذا در انتها لازم است حالت $L=1$ که متناظر $|x-a|=R$ می‌باشد را نیز بررسی کنیم تا مشخص شود سری در نقاط انتهایی بازه نیز همگرا میباشد یا خیر.

توضیح ۱: دقت شود از آنجا که دامنه x در حالت کلی ممکن است از مجموعه اعداد مختلط انتخاب شود, لذا در این حالت با شعاع همگرایی روبرو هستیم, نه پاره خط همگرایی. بحث کاملتر درباره سریهای مختلط در ریاضی مهندسی ارائه خواهد شد.

توضیح ۲: اگر سری مثلا بصورت $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^{2n}$ باشد, بایستی $\frac{1}{R^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ یا $\frac{1}{R^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$ اعمال شود.

توضیح ۳: چنانچه $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ در بینهایت به اعداد مختلفی میل کنند (مثلا برای n زوج و فرد), در اینحالت بایستی شعاع همگرایی کوچکترین مقدار انتخاب شود. به عبارتی همواره $\frac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty} sup\left(\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|\right)$ و به همین ترتیب $\frac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty} sup\left(\sqrt[n]{|c_n|}\right)$ خواهد بود.

مثال ۱۰-۲۸ بازه همگرایی سریهای زیر را مشخص کنید.

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n}\ \ ;\ c_n=\frac{1}{n}\ \rightarrow \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=1\rightarrow R=1\xrightarrow{|x-a|<R}2<x<4$$

این همان مثال ۱۰-۲۷ است که به روش ساده‌تری بازه همگرایی آن بدست آمد. در ادامه مشابه همان مثال نقاط انتهایی بازه را بررسی میکنیم. برای $x=2$ به سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ میرسیم که همگراست و برای $x=4$ به سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ که واگراست. لذا بازه همگرایی سری $2\le x<4$ خواهد بود. ■

$$2)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}\ ;\ c_n=\frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}}\ \rightarrow \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=3\rightarrow R=\frac{1}{3}\xrightarrow{|x-a|<R}-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{3}\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\xrightarrow{p=\frac{1}{2}<1}(D) \\ x=\frac{1}{3}\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\rightarrow(C)\end{cases}\rightarrow\ -\frac{1}{3}<x\le\frac{1}{3}\ \blacksquare$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-5)^n}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\left(x-\frac{5}{3}\right)^n}{\sqrt{n}}\ \ ;\ \ c_n=\frac{3^n}{\sqrt{n}}\ \rightarrow\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=3\rightarrow R=\frac{1}{3}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{3}<x-\frac{5}{3}<\frac{1}{3}\rightarrow\frac{4}{3}<x<2$$

$$\begin{cases} x=\frac{4}{3}\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\rightarrow(C) \\ x=2\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\rightarrow(D)\end{cases}\ \rightarrow\ \frac{4}{3}\le x<2\ \blacksquare$$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(5+(-1)^n)^n\,(x-2)^n\ \ ;\ c_n=(5+(-1)^n)^n\ \rightarrow\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}(5+(-1)^n)$$

دیده می‌شود این حد برای n های زوج برابر 6 و برای n های فرد برابر 4 است. در اینحالت بایستی شعاع همگرایی کوچکترین مقدار انتخاب شود. به عبارتی:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}sup\left(\sqrt[n]{|c_n|}\right)=6\rightarrow R=\frac{1}{6}$$

توجه شود اگر سری بصورت $\sum_{n=1}^{\infty}(5+(-1)^n)^n\,(x-2)^{2n}$ باشد, با توجه به توانِ $2n$, مقدار $R=\frac{1}{\sqrt{6}}$ خواهد شد. ■

۱۰-۶-۲- قضایای مهم سریهای توانی

قضیه: اگر شعاع همگرایی یک سری توانی برابر R بوده و سری در این بازه به $f(x)$ همگرا باشد, آنگاه میتوان از دو سمت رابطه جمله به جمله مشتق یا انتگرال گرفت.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n \rightarrow \begin{cases} f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(x-a)^{n-1} \\ \int f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\dfrac{(x-a)^{n+1}}{n+1}+C \end{cases}$$

شعاع همگرایی سریهای حاصله نیز همان R میباشد. اما نقاط انتهایی بازه بایستی مجزا کنترل گردند. زیرا ممکن است سری اولیه در نقطه انتهایی همگرا(یا واگرا) باشد اما سری مشتق گرفته شده خیر.

دقت شود ممکن است تصور شود که این قضیه کاملا بدیهی است. چرا که سمت راست مجموع چند جمله بوده و در واقع جمله به جمله مشتق یا انتگرال گرفتهایم. اما مشابه سوالی که در انتهای بخش ۱۰-۵ مطرح شد, دیده می‌شود که سمت راست مجموع بینهایت جمله است و نه چند جمله. لذا همانگونه که عنوان شد همه کارهایی که در چندجملهایها مجاز هستیم ممکن است در سریهای نامتناهی مجاز نباشیم. مثال نقض این موضوع را در بخش ۱۰-۷ خواهیم دید.

لازم بذکر است در مشتق‌گیری ممکن است کران پایین زیگما, مشابه $f(x)$ از همان صفر نوشته شود که دراینصورت جمله اول صفر به سری مشتق, اضافه خواهد شد. از این سری و مشتق آن در بحث حل معادلات دیفرانسیل به روش سریها در درس معادلات دیفرانسیل استفاده میشود. در آنجا برای $f(x)$ یک سری توانی بصورت $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ انتخاب کرده و با مشتق گیری از این سری و جایگذاری در معادله دیفرانسیل, ضرایب c_n را بدست می‌آوریم. در مثال ۱۰-۳۵ با این روش آشنا خواهیم شد.

قضیه کوشی در ضرب سریها: برای رسیدن به یک رابطه برای تعیین ضرایب ضرب دو سری نامتناهی, ابتدا ضرب دو سری متناهی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3)$$

فرض کنید بخواهیم ضریب x^3 را در سری حاصلضرب بدست آوریم. با یک ضرب ساده دیده میشود که این ضریب عبارت است از:

$$a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0=\sum_{i=0}^{3}a_i\,b_{3-i}$$

یعنی ضرایبی از هر سری در هم ضرب میشود که مجموع اندیس آنها عدد 3 را بسازد. همین رابطه را میتوان تعمیم داد:

در ضرب دو سری نامتناهی با ضرایب a_n و b_n, ضرایب سری حاصلضرب بصورت $c_n=\sum_{i=0}^{n}a_i\,b_{n-i}$ میباشد. به عبارتی:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\,b_{n-i}\right)(x-a)^n$$

شعاع همگرایی نیز حداقل شعاع همگرایی دو سری اولیه میباشد.

تمرینات بخش ۱۰-۶ تمرینات ۶ , ۱۰, ۱۸ و ۲۶ از بخش ۱۱-۸ کتاب

۱- بازه همگرایی سریهای زیر را مشخص کنید.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}} \quad (-5 < x < 1)$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Lnn}{e^n}(x-1)^n \quad (1-e < x < 1+e)$

3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{nLnn} \quad (-1 \le x < 1)$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}(x+1)^n \quad (-2 \le x \le 0)$

5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(Lnn)^2} \quad (-1 \le x \le 1)$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n \quad \left(-\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}\right)$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}(x-3)^{n+1}}{n(n+2)} \quad \left(\frac{5}{2} \le x \le \frac{7}{2}\right)$; 8) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}x^n \quad (-1 \le x \le 1)$

۲- نشان دهید تابع بسل مرتبه صفر که بصورت زیر میباشد, به‌ازای هر x همگراست.

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

۳- برای تابع زیر بازه‌های همگرایی f , f' و f'' را بدست آورید.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

❋ ۱۰-۷- سری تابعی و مفهوم همگرایی یکنواخت

هر سری به فرم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ سری تابعی شناخته میشود. بدیهی است سری توانی, حالت خاصی از سری تابعی است. در اینجا نیز میتوان با استفاده از آزمونهای گفته شده بازه همگرایی سری را بدست آورد.

مثال ۱۰-۲۹ به ازای چه مقدارهایی از x سری زیر همگراست؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^n \quad ; \quad L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}\left|\frac{x+2}{x-1}\right| = \left|\frac{x+2}{x-1}\right| \quad ; \quad x \ne 1,-2$$

پس اگر $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| < 1$ سری همگرای مطلق است و اگر $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| = 1$ یعنی $x = -\frac{1}{2}$ این آزمون جوابی نمیدهد.

در نهایت می‌توان کنترل کرد که سری برای $x = -\frac{1}{2}, -2$ همگرا و برای $x = 1$ واگراست. لذا در نهایت بازه همگرایی سری $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ خواهد بود. ■

یک سوال مهم آن است که آیا میشود از یک سری تابعی, مشابه سری توانی جمله به جمله مشتق گرفت؟ با یک مثال شروع می‌کنیم.

در بحث سری فوریه ثابت میشود که تساوی زیر در بازه داده شده صحیح است:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} sinnx \quad ; \quad -\pi < x < \pi$$

اولا دیده میشود که این سری, سری توانی نبوده و یک سری تابعی است. فرض کنید بخواهیم از طرفین مشتق بگیریم. در اینصورت سمت چپ برابر 1 و سمت راست $\sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} cosnx$ خواهد شد. بدیهی است که مساوی دانستن ایندو غلط است, زیرا سری بدست آمده شرط لازم همگرایی را نیز ندارد, تا چه برسد که بخواهد به 1 همگرا گردد.

قضایای مربوط به مشتق و انتگرال‌گیری از سریهای تابعی کمی پیچیده‌تر است. بطور خلاصه بدون وارد شدن به جزئیات, اگر یک سری همگرای یکنواخت یا یک‌شکل(UC) باشد, میتوان جمله به جمله از آن انتگرال گرفت, به عبارتی جای زیگما و انتگرال را عوض کرد. مشتق گیری نیز زمانی مجاز است که سری حاصل از مشتقِ جمله به جمله, همگرای یکنواخت باشد.

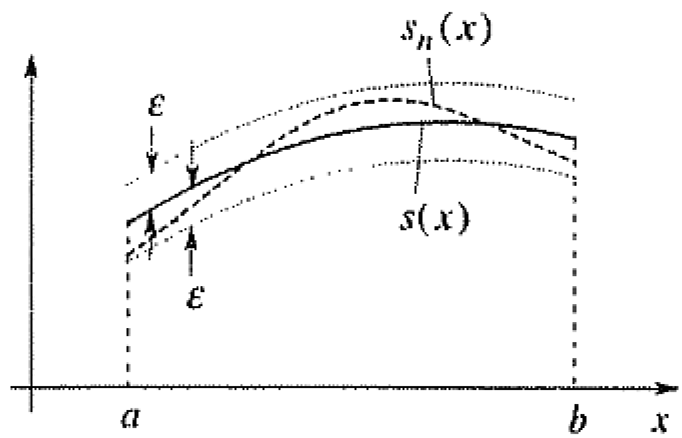
برای مشخص شدن مفهوم همگرایی یکنواخت سری تابعی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ را در نظر میگیریم. مجموع جزئی nام آن بصورت زیر است:

$$s_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \cdots + a_n(x)$$

سری تابعی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ را در بازه $[a,b]$ بطور یکنواخت همگرا به$s(x)$ مینامیم برای هر ε انتخابی(هرچند کوچک), یک $N(\varepsilon)$, مستقل از x وجود داشته باشد بطوریکه:

$$\forall\, x \in [a,b] \;\;\&\;\; \forall\, n > N(\varepsilon) \rightarrow |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$$

تعبیر هندسی این نوع همگرایی آن است که مطابق شکل زیر برای هر ε انتخابی, مجموع جزئی $s_n(x)$ از یک $n > N(\varepsilon)$, در بازه $[a,b]$ در داخل نوار $s(x) \pm \varepsilon$ قرار بگیرد. مهم آن است که N فقط تابعی از ε انتخابی بوده و به نقطه x وابسته نباشد.



چگونه کنترل کنیم که یک سری همگرای یکنواخت است؟ راه کلی بررسی شرطی است که در بالا دیده شد. به‌غیر از این بررسی که ممکن است طولانی باشد, یک شرط کافی برای همگرایی یکنواخت, آزمون M وایرشتراس میباشد. بر طبق این آزمون اگر بتوان دنباله اعداد مثبتی چون M_1 , M_2 , M_3 , $\cdots$ یافت بطوریکه در یک بازه مشخص دو شرط زیر برقرار باشد, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ در آن بازه همگرای یکنواخت است.

$$1) \quad |a_n(x)| \le M_n \;\; ; \; n = 1,2,\cdots \qquad \& \qquad 2) \sum_{n=1}^{\infty} M_n$$ همگرا باشد

مثال ۱۰-۳۰ آیا سری زیر همگرای یکنواخت است؟

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(nx)}{n^3}\quad;\quad \left|\frac{sin(nx)}{n^3}\right|\le\frac{1}{n^3}\quad;\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\ \text{همگرا}\ \rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(nx)}{n^3}\rightarrow(UC)\ \blacksquare$$

مثال ۱۰-۳۱ اگر $f(x)$ بصورت زیر تعریف شده باشد, تساوی سمت راست را نشان دهید.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(nx)}{n^3}\rightarrow\int_0^{\pi}f(x)\,dx=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

از آنجا که دیدیم تابع $f(x)$ همگرای یکنواخت است لذا مجاز به انتگرال گیری میباشیم. در نتیجه:

$$\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(nx)}{n^3}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{sin(nx)}{n^3}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\overbrace{cos(n\pi)}^{(-1)^n}}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^4}\ \blacksquare$$

۱۰-۸- نمایش یک تابع به شکل سری توانی (بخش ۱۱-۹ کتاب)

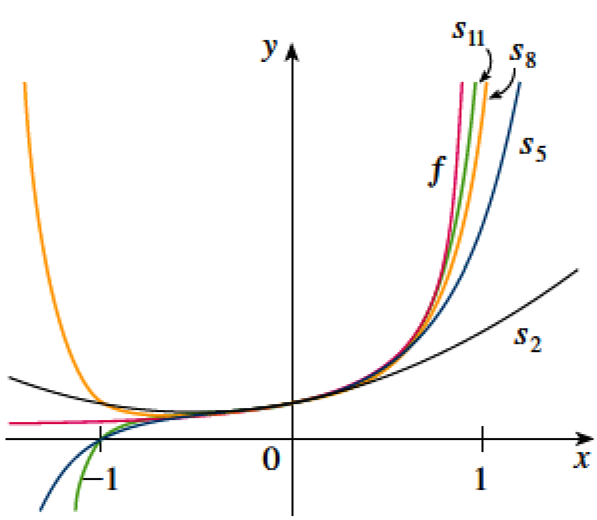
یک سوال مهم آن است که آیا میتوان هر تابعی را به شکل یک سری توانی نمایش داد؟ در اینجا با چند مثال نشان میدهیم دانستن سری هندسی و قاعده مشتق و انتگرال از سریهای توانی کمک بزرگی به حل این سوال میکند. پاسخ کاملتر این سوال در فصل بعد داده خواهد شد.

با استفاده از فرمول تصاعد هندسی, سری هندسی به یکی از دو صورت زیر نمایش داده میشود:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\quad;\quad\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n\quad;\quad|x|<1$$

با این فرمولها می‌توان گفت برای تابع $f(x)=\frac{1}{1-x}$ و یا $g(x)=\frac{1}{1+x}$ می‌توان آنها را در بازه اعتبارشان بصورت سری توانی نمایش داد.

شکل روبرو تابع $f(x)$ و چند مجموع جزئی از سری سمت راست را نشان میدهد $(s_k=\sum_{n=0}^{k}x^n)$. اعتبار این رابطه همانگونه که در شکل دیده میشود در بازه $-1<x<1$ میباشد. دیگر آنکه برای نقاط نزدیک صفر(نقطه‌ای که سری حول آن نوشته شده است), تعداد کمی از جملات سری میتواند تقریب مناسبی از تابع را ارائه دهد. اما هر چه از نقطه صفر دور شویم, جملات بیشتری برای انطباق بهتر لازم است.



یک کاربرد مهم نمایش توابع به شکل سریهای توانی, تخمین انتگرالهای معینی است که یا صریحا قابل انتگرال‌گیری نبوده یا انتگرال نامعین آن بسیار پیچیده است. کاربرد دیگر نیز محاسبه تعدادی از سریهای عددی با انتخاب یک x مناسب میباشد که هر دو مورد در مثالهای زیر دیده میشوند.

مثال ۱۰-۳۲ توابع زیر را به شکل سری توانی نمایش دهید.

$$1)\ \frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\quad ;\quad \underbrace{|x^2|<1}_{-1<x<1}\rightarrow R=1\ \blacksquare$$

$$2)\ \frac{3}{5-2x}=\frac{3}{5}\frac{1}{1-\frac{2x}{5}}=\frac{3}{5}\frac{1}{1-0.4x}=\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(0.4x)^n\quad ;\ |0.4x|<1\rightarrow |x|<2.5\rightarrow R=2.5\ \blacksquare$$

$$3)\ \frac{1}{(1-x)^2}\quad ;\quad \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\quad ;\quad R=1$$

$$\underline{Or}:\ \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x}=(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x+x^2+x^3+\cdots)=\cdots\ \blacksquare$$

$$4)\ \frac{x^3}{x+2}=x^3\frac{1}{x+2}=x^3\frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)}=\frac{x^3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^{n+3}$$

$$=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}}x^n=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^5-\frac{1}{16}x^6+\cdots\quad ;\quad \underbrace{\left|\frac{x}{2}\right|<1}_{-2<x<2}\rightarrow R=2$$

برای محاسبه شعاع همگرایی میتوان از رابطه $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\frac{1}{2}$ نیز به همین جواب رسید. $\blacksquare$

$$5)\ ln(1-x)\quad ;\quad \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\xrightarrow{\int}-ln(1-x)=\int(1+x+x^2+\cdots)\,dx$$

$$\rightarrow -ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+C=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}+C=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+C\quad ;\quad -1<x<1$$

$$C=?\xrightarrow{x=0}-ln(1-0)=C\rightarrow C=0\rightarrow ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\quad ;\quad -1<x<1$$

$$if\ x=\frac{1}{2}\rightarrow ln2=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{64}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}\ \blacksquare$$

$$6)\ tan^{-1}x\quad ;\quad \frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\xrightarrow{\int}tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+C\quad ;\quad |x|<1$$

$$C=?\xrightarrow{x=0}tan^{-1}0=C\rightarrow C=0\rightarrow tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\quad ;\quad |x|<1$$

$$\underline{or}:\ \frac{1}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\xrightarrow{\int_0^x}tan^{-1}x-0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\quad ;\quad |x|<1\ \blacksquare$$

توضیح ۱: گفته شد که شعاع همگرایی سری حاصل از انتگرال‌گیری با شعاع همگرایی سری اولیه برابر است. اما نقاط انتهایی بازه بایستی بطور مجزا کنترل گردند. مثلا در اینجا سری $\frac{1}{1+x^2}$ صرفا در $|x|<1$ همگراست. اما با کنترل دو نقطه انتهایی درسری حاصل از انتگرال آن یعنی $tan^{-1}x$, دیده میشود که بازه همگرایی سری فوق $|x|\leq 1$ خواهد شد. پس اگر بازه همگرایی(و نه شعاع همگرایی) سوال شده باشد, بایستی این نقاط را نیز کنترل کرد.

توضیح ۲: با انتخاب $x=1$ به سری عددی زیر می‌رسیم که لایب‌نیتز از آن برای محاسبه عدد π استفاده کرد.

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$$

در اینجا نیز یک تفاوت دیگر سریهای متناهی و نامتناهی را میتوان بررسی کرد. دیده می‌شود که سمت راست مجموع بیشمار جمله گویا است, اما در نهایت, حاصل عددی گنگ شده است. در واقع آنچه ما از تئوری اعداد می‌دانیم این است که همواره مجموع تعدادی متناهی جمله گویا, گویا خواهد شد و دیده میشود که این نتیجه برای بیشمار جمله الزاما معتبر نخواهد بود. ■

$$7)\quad \frac{1}{1+x-2x^2}=\frac{1}{1-x}\times\frac{1}{1+2x}=(1+x+x^2+\cdots)(1-2x+4x^2-\cdots)$$

قبلا گفته شد که طبق قضیه کوشی, در ضرب دو سری نامتناهی با ضرایب a_n و b_n , ضرایب سری حاصلضرب بصورت $c_n=\sum_{i=0}^{n}a_i\, b_{n-i}$ میباشد. شعاع همگرایی, حداقل شعاع همگرایی دو سری اولیه است. در نتیجه:

$$\frac{1}{1+x-2x^2}=[1\times 1]x^0+[1\times(-2)+1\times 1]x^1+[1\times 4+1\times(-2)+1\times 1]x^2+\cdots$$

$$\to\frac{1}{1+x-2x^2}=1-x+3x^2+\cdots\qquad;\qquad min(|x|<1\ \ \&\ \ |2x|<1)\to|x-0|<\frac{1}{2}\quad ■$$

مثال ۱۰-۳۳ انتگرال $\int_0^{0.5}\frac{dx}{1+x^7}$ را به شکل سری توانی بیان کرده و آنرا با دقت 10^{-10} تقریب بزنید.

$$\int\frac{dx}{1+x^7}=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^7)^n\,dx=x-\frac{x^8}{8}+\frac{x^{15}}{15}-\frac{x^{22}}{22}+\cdots+C\quad;\quad\underbrace{|x^7|<1}_{-1<x<1}$$

$$\int_0^{0.5}\frac{dx}{1+x^7}=\left[x-\frac{x^8}{8}+\frac{x^{15}}{15}-\cdots\right]_0^{0.5}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8\times 2^8}+\frac{1}{15\times 2^{15}}-\frac{1}{22\times 2^{22}}+\cdots$$

سری مورد نظر نامتناهی بوده و مقدار دقیق انتگرال را میدهد. اما چون سری حاصله متناوب است, اگر صرفا تا ۴ جمله را جمع کنیم, طبق قضیه سریهای متناوب, حداکثر خطای حاصله برابر است با قدرمطلق جمله ۵ام. لذا:

$$\int_0^{0.5}\frac{dx}{1+x^7}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8\times 2^8}+\frac{1}{15\times 2^{15}}-\frac{1}{22\times 2^{22}}\approx 0.49951374$$

$$|s-s_4|<a_5=\frac{1}{29\times 2^{29}}\approx 6.4\times 10^{-11}\quad ■$$

توضیح ۱: دقت شود که اگر بخواهیم بطریق معمول انتگرال $\frac{1}{1+x^7}$ را بدست آوریم, حل بسیار طولانی خواهد بود.

توضیح ۲: اگر بازه انتگرال گیری خارج از $-1 < x < 1$ باشد, بایستی بطریق زیر عمل کرد که عملا به جهت آنکه دارای توانهای منفی برای متغیر x می‌باشد سری تیلور محسوب نشده و در ریاضی مهندسی آنرا بعنوان سری لوران می‌شناسیم.

$$\frac{1}{1+x^7}=\frac{1}{x^7}\frac{1}{1+\frac{1}{x^7}}=\frac{1}{x^7}\left(1-\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^{14}}-\frac{1}{x^{28}}+\cdots\right)\quad ;\quad \left|\frac{1}{x^7}\right|<1\rightarrow\begin{cases}x>1\\x<1\end{cases} \blacksquare$$

مثال ۱۰-۳۴ با استفاده از سری توانی $\frac{x}{(1-x)^2}$ و مشتق‌گیری از آن, با انتخاب یک x مناسب نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=6$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\rightarrow\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{1+x}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}\rightarrow\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n\xrightarrow{x=\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}=6$$

دقت شود شرط نوشتن $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ آن است که $|x|<1$ باشد و $x=\frac{1}{2}$ نیز در همین بازه قرار دارد. لازم به ذکر است که در قسمت سوم از مثال ۱۰-۸ همین مثال را با استفاده از قاعده تلسکوپی نیز بدست آوردیم. ■

در ادامه بعنوان یک کاربرد مهم سریهای توانی, یک معادله دیفرانسیل ساده را با استفاده از سریهای توانی حل می‌کنیم. بحث کاملتر این روش در درس معادلات دیفرانسیل دیده خواهد شد.

❄ **مثال ۱۰-۳۵** معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را به روش سریهای توانی حل کنید.

$$y'-y=x\quad ;\quad y(0)=1$$

حل ابتدا جواب را به شکل یک سری توانی به شکل $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ در نظر می‌گیریم. در درس معادلات دیفرانسیل خواهیم دید اگر شرایط اولیه در نقطه a داده شده باشد بهتر است سری حول $x_0=a$ نوشته شود, لذا $x_0=0$ منظور می‌شود.

حال با جایگذاری سری انتخابی در معادله دیفرانسیل داده شده خواهیم داشت:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$\rightarrow y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

$$\rightarrow(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots)-(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)=x$$

$$(a_1-a_0)+(2a_2-a_1)x+(3a_3-a_2)x^2+\cdots+(na_n-a_{n-1})x^{n-1}+\cdots=0+x+0x^2+\cdots$$

در نتیجه از متحد قرار دادن دو سمت تساوی خواهیم داشت:

$$a_1-a_0=0\rightarrow a_1=a_0$$
$$2a_2-a_1=1\rightarrow a_2=\frac{1+a_1}{2}=\frac{1+a_0}{2}$$

$$3a_3 - a_2 = 0 \rightarrow a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{1 + a_0}{3 \times 2}$$
$$4a_4 - a_3 = 0 \rightarrow a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{1 + a_0}{4 \times 3 \times 2}$$
$$\vdots$$
$$na_n - a_{n-1} = 0 \rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{1 + a_0}{n!}$$
$$\vdots$$

با جایگذاری ضرایب بدست آمده در سری انتخابی خواهیم داشت:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_0 x + \frac{1 + a_0}{2!}x^2 + \frac{1 + a_0}{3!}x^3 + \frac{1 + a_0}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1 + a_0}{n!}x^n + \cdots$$

دیده می‌شود که یک ثابت a_0 در جواب وجود دارد. شرط اولیه داده شده بایستی این ثابت را بدست آورد. با توجه به سری انتخاب شده $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ میتوان دید که $y(0) = a_0$ خواهد بود که با توجه به شرط اولیه $a_0 = 1$ خواهد شد, در نتیجه:

$$y = 1 + x + 2\left(\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots\right) = 1 + x + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \quad \blacksquare$$

توضیح: معمولا جواب نهایی به همین شکل سری باقی می‌ماند. اما گاهی اوقات(و نه همیشه) ممکن است بتوان آنرا بر حسب توابع مقدماتی بیان کرد. بعنوان نمونه در فصل بعد خواهیم دید که:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

بنابراین در این مثال خاص می‌توان جواب را بصورت ساده‌تر زیر نیز بیان کرد:

$$y = 1 + x + 2(e^x - 1 - x) = 2e^x - 1 - x \quad \blacksquare$$

تمرینات بخش ۱۰-۸ تمرینات ۱۲, ۱۶و ۲۸ از بخش ۱۱-۹ کتاب

۱- قسمت ۷ از مثال ۱۰-۳۲ را با استفاده از تجزیه کسر نیز حل کنید.

۲- توابع زیر را به شکل سری توانی نمایش دهید.

1) $ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$; Ans: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n + 1}$; $|x| < 1$

2) $\frac{1 + x}{(1 - x)^2}$; Ans: $\sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1)x^n$; $|x| < 1$

3) $\frac{x}{(1 + 4x)^2}$; Ans: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n (n + 1)x^{n+1}$; $|x| < \frac{1}{4}$

۳- با استفاده از سری $tan^{-1}x$ که در قسمت ۶ از مثال ۱۰-۳۲ بدست آمد, درستی سری عددی زیر را نشان دهید.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-1$$

۴- انتگرال $I=\int_0^{0.1} x\,tan^{-1}3x\,dx$ را به شکل سری توانی بیان کرده و با نوشتن ۳ جمله از بسط, مقدار و خطای آنرا بیابید.

$$\underline{Ans}:\ I\approx\frac{1}{10^3}-\frac{9}{5\times10^5}+\frac{243}{35\times10^7}\approx0.000983\quad;\quad E=\frac{2187}{63\times10^9}\approx3.5\times10^{-8}$$

۵- الف: درستی انتگرال I را نشان دهید. ب: با تجزیه $\frac{1}{1+x^3}$, انتگرال I را بازنویسی کرده, سپس $\frac{1}{1+x^3}$ را بصورت سری توانی نوشته و عبارت زیر را که بعنوان یک تقریب مناسب π میباشد, بدست آورید.

$$I=\int_0^{0.5}\frac{dx}{x^2-x+1}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\qquad;\qquad \pi=\frac{3\sqrt{3}}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n}\left(\frac{2}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}\right)$$

۱۰-۹- نمایش سریهای توانی همگرا بر حسب توابع مقدماتی

تا اینجا سوال این بود که یک تابع را به شکل یک سری توانی نمایش دهیم. برعکس این سوال نیز میتواند مهم باشد. یعنی اینکه آیا میتوان گفت هر سری توانی, در بازه همگرایی خود به چه تابعی همگرا میشود؟ یعنی یک فرم بسته بر حسب توابع مقدماتی برای نمایش دادن سری بدست آوریم.

مثلا میدانیم اگر $-1<x<1$ باشد, سری زیر نمایش $\frac{1}{1-x}$ می‌باشد:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}\quad;\quad |x|<1$$

بنابراین در مورد سری هندسی جواب مثبت است. گاهی اوقات ممکن است با انجام عملیاتی مانند مشتق یا انتگرال از سری هندسی نیز بتوان یک سری را بصورت یک تابع مقدماتی بیان کرد که در مثال بعد نمونه‌ای از آنرا خواهیم دید. بنابراین دانستن سریهای مختلف می‌تواند کمک بزرگی به حل این مساله باشد. در فصل بعد که با سریهای تیلور آشنا می‌شویم مثالهای بیشتری در این ارتباط ارائه خواهد شد. اما در حالت کلی جواب این سوال که آیا همواره می‌توان هر سری توانی (در بازه همگرایی‌اش را) به فرم یک یا چند تابع مقدماتی بیان کرد منفی است.

مثال ۱۰-۳۶ سری توانی زیر در بازه همگرایی داده شده به چه تابع مقدماتی همگرا میشود.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)x^{2n+1}\qquad;\qquad |x|<1$$

حل از سری $\frac{1}{1-x}$ شروع کرده و سعی می‌کنیم تا جملات موجود در سری $f(x)$ را ایجاد کنیم. در واقع بایستی به دنبال ایجاد $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$ و $\sum_{n=0}^{\infty}nx^{2n}$ باشیم.

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad (|x|<1\ ) \quad \rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1-x^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} & (|x^2|<1) \\ \left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)'=\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2nx^{2n-1} & \end{cases}$$

توجه شود که قاعدتا پس از مشتق‌گیری از سری $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$ بایستی $n=1$ گردد, چرا که جمله اول سری, یک عدد ثابت است, اما از آنجا که سری مشتق بصورت $2nx^{2n-1}$ بدست آمده است, تغییر $n=1$ به $n=0$ نتیجه را عوض نمیکند, زیرا یک صفر به سری اضافه خواهد کرد. حال $f(x)$ را بر حسب دو سری بالا بیان می‌کنیم:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2nx^{2n+1}+3\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}2nx^{2n-1}+3x\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$$

$$f(x)=x^2\frac{2x}{(1-x^2)^2}+3x\frac{1}{1-x^2}=\frac{3x-x^3}{(1-x^2)^2} \quad \blacksquare$$

توضیح: ممکن است علاوه بر سریهای توانی, بتوان برای برخی سریهای تابعی نیز آنها را برحسب توابع مقدماتی نمایش داد. در مثال بعد دو نمونه از نمایش سریهای تابعی بر حسب توابع مقدماتی را خواهیم دید. ■

مثال ۱۰-۳۷ سریهای تابعی زیر در بازه همگرایی خود به چه تابع مقدماتی همگرا میشوند.

$$1)\ \ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{1}{3+sinx}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{3+sinx}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{-1}{3+sinx}\right)}=\frac{3+sinx}{8+2sinx}$$

$$\underline{Hint}:\ \ |x|<1\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\ \ ;\ \ \frac{1}{4}\le\left|\frac{1}{3+sinx}\right|\le\frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

$$2)\ \ g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{sinnx}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right)=\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{-ix}}{2}\right)^n\right)$$

$$\rightarrow g(x)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-\frac{e^{ix}}{2}}-\frac{1}{1-\frac{e^{-ix}}{2}}\right)=\frac{1}{i}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{5-2(e^{ix}+e^{-ix})}=\frac{2sinx}{5-4cosx}$$

$$\underline{Hint}:\ \ |x|<1\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\ \ ;\ \ \left|\frac{e^{ix}}{2}\right|=\frac{1}{2}<1 \quad \blacksquare$$

توضیح: این اثبات اینجا می‌تواند پذیرفته نشود, چرا که فعلا سری تیلور صرفا برای $x\in\mathbb{R}$ بدست آمده است و هنوز نمی‌دانیم می‌توان از این سری برای $x=\frac{e^{i\theta}}{2}\in\mathbb{C}$ نیز استفاده کرد. درستی بکارگیری این سری برای متغیر مختلط, در بحث آنالیز مختلط در درس ریاضی مهندسی دیده خواهد شد. ■

تمرینات بخش ۱۰-۹

۱- مشخص کنید سریهای توانی زیر در بازه همگرایی خود به چه تابع مقدماتی همگرا میشوند. (برعکس تمرین ۲ بخش ۱۰-۸)

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}\ ;\ |x|<1\quad ;\quad \underline{Ans:}\ ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$2)\ \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{n}\quad ;\ |x|<1\quad ;\quad \underline{Ans:}\ \frac{1+x}{(1-x)^2}$$

$$3)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^n(n+1)x^{n+1}\ ;\ |x|<\frac{1}{4}\quad ;\ \underline{Ans:}\ \frac{x}{(1+4x)^2}$$

۲- سری تابعی زیر در بازه همگرایی خود به چه تابع مقدماتی همگرا میشود.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cosnx}{4^n}\quad ;\quad \underline{Ans:}\ \ f(x)=\frac{4cosx-1}{17-8cosx}$$

۳- فرض کنید $f(x)=x+\frac{x^3}{1\times3}+\frac{x^5}{1\times3\times5}+\cdots$, ابتدا نشان دهید $f'(x)=1+xf(x)$. سپس از حل این معادله دیفرانسیل نشان دهید سری توانی $f(x)$ به تابع زیر همگرا میشود.

$$f(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

<u>راهنمایی</u>: در درس معادلات دیفرانسیل خواهیم دید جواب معادله $y'+p(x)y=g(x)$ بصورت زیر است:

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}\ ;\quad y=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int\mu(x)g(x)dx+c\right]$$