

ثابت کنید در هر گراف  $G$ ،  $n(G) \leq \chi(G) * \chi(\bar{G})$  است.

$n$  عدد داریم. یک گراف از روی آن می کشیم که دو عدد به هم یال دارند اگر و تنها اگر جمعشان فرد باشد این گراف حداکثر چند یال دارد؟ توجه کنید که این سوال باید با گراف حل شود و راه های جبری مورد قبول نیست.

اگر  $G$  یک گراف باشد به کوچکترین عدد مانند  $t$  که بتوان یال های این گراف را با  $t$  رنگ، رنگ کرد به طوری که هیچ دو یال هم رنگی سر مشترک نداشته باشند عدد رنگی یالی  $(X(G))$  می گویند.

اثبات کنید:

$$X(K_{n-1}) = X(K_n) = n - 1$$

یک گراف ساده با  $n$  رأس و بدون مثلث ( $K_3$ ) حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

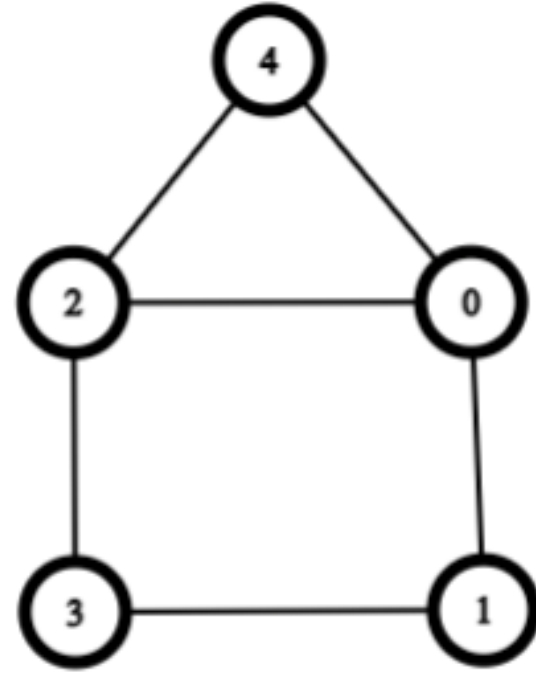
یک گراف دو بخشی مسطح همبند داده شده است. ثابت کنید حداقل یک راس وجود دارد که درجه ی آن کمتر از ۴ است.

ثابت کنید در یک گراف  $n$  راسی که  $n \geq 3$  است و همچنین تعداد یال‌ها  $2 + \binom{n-1}{2}$  است دور همیلتنی وجود دارد.

یک گراف ساده داریم که راس‌هایش سیاه و سفید شده‌اند. در هر مرحله می‌توان یک راس را انتخاب کرد و رنگ خود و همسایه‌هایش را عوض کرد.

ثابت کنید اگر در ابتدا همه‌ی راس‌ها سفید باشند می‌توان همه را سیاه کرد.

چند جمله‌ای رنگی گراف زیر را با استفاده از قضیه چند جمله‌ای رنگی بدست آورید.





فرض کنید  $G$  گرافی اویلری و نامسطح است که با حذف هر یک از یال‌هایش مسطح می‌شود. اگر  $e$  تعداد یال‌ها و  $v$  تعداد رئوس این گراف باشد، ثابت کنید:  $e - v = 5$

...

ابرمکعب  $n$  بعدی  $Q_n$ ، گراف ساده‌ای است که مجموعه رئوس آن  $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \{0, 1\}\}$ . دو رأس در این گراف مجاور هستند اگر و تنها اگر دقیقاً در  $n - 1$  مختصات یکسان باشند (  $n - 1$  عدد از  $x_i$  های آنها با هم برابر باشد) ثابت کنید برای  $Q_n, n > 2$  دور همیلتونی دارد.

برای گراف  $G$  داریم:  $\Delta(G) \leq 1401$  نشان دهید یال‌های  $G$  را می‌توان با ۱۱ رنگ طوری رنگ کرد که زیرگراف مشخص شده توسط هر رنگ دو بخشی باشد...

- الف) ثابت کنید  $k^4 - 12k^3 + 49k^2 - 78k + 40$  نمیتواند چند جمله ای رنگی گرافی باشد.
- ب) ثابت کنید چند جمله ای رنگی گرافی با  $n$  راس، ریشه ی صحیح بزرگتر از  $1 - n$  ندارد.

ثابت کنید اگر بتوان با بزرگترین مسیر گرافی همبند، دوری تشکیل داد که شامل تمامی راس های این مسیر باشد، گراف دارای دور همیلتونی است.

ثابت کنید می‌توان رئوس گراف ساده  $G'$  را به دو دسته افراز کرد به طوری که درجه هر راس در زیرگراف القایی دسته خود زوج باشد (یکی از دسته‌ها می‌تواند تهی باشد).

(راهنمایی: برای حل سوال از استقرا استفاده کنید، ابتدا یک راس را در نظر گرفته و سپس زیرگراف القایی همسایه‌های آن را مکمل کنید و سپس راس مورد نظر را حذف کنید.)