

# ریاضیات گسسته

## آزمون کوتاه هفتم - گراف پیشرفته و درخت

محمد امانلو و ملیکا حیدری دستجردی

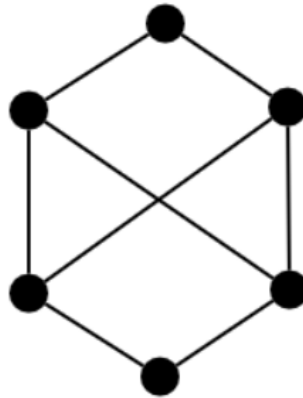
تاریخ برگزاری ۱۴۰۲/۰۳/۰۲

نام و نام خانوادگی:

شماره دانشجویی:

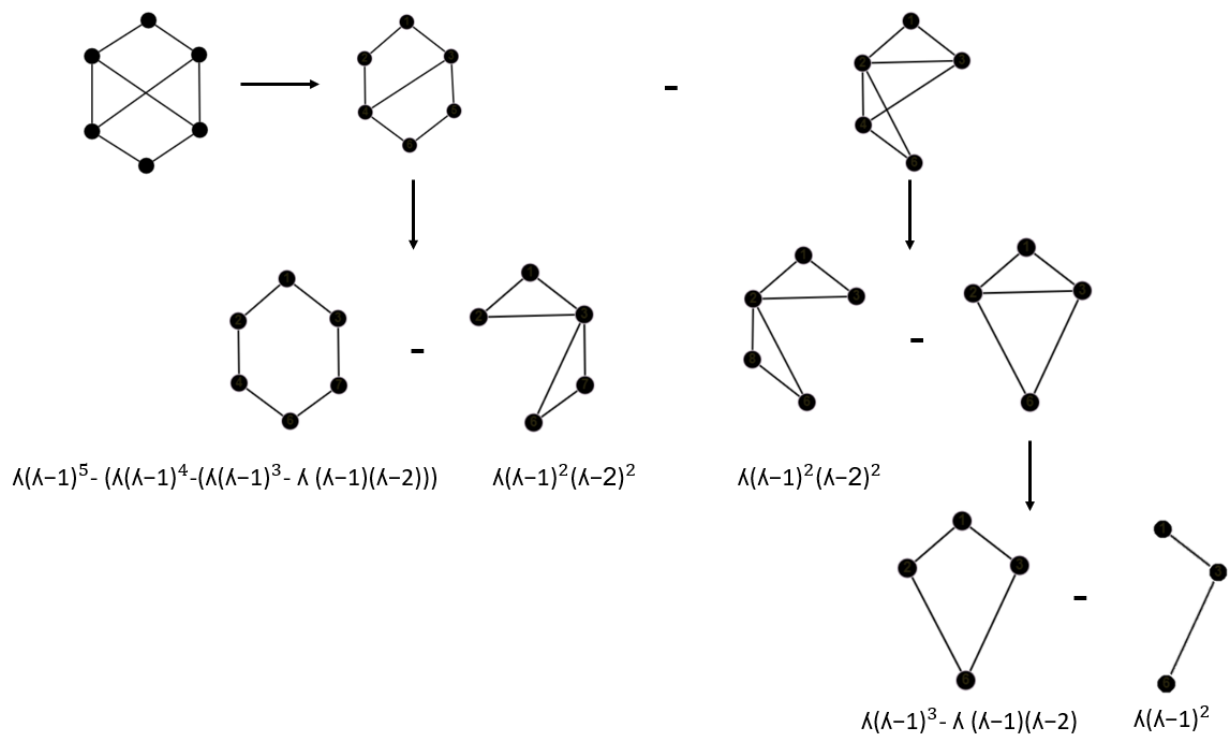
### سؤال ۱.

عدد رنگی و چندجمله‌ای رنگی گراف زیر را معین کنید.



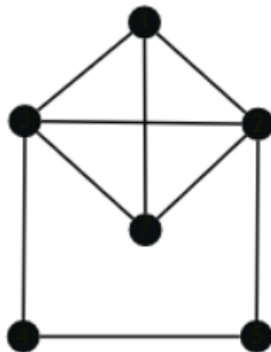
### پاسخ:

طبق مراحل زیر چندجمله‌ای رنگی را بدست می‌آوریم.

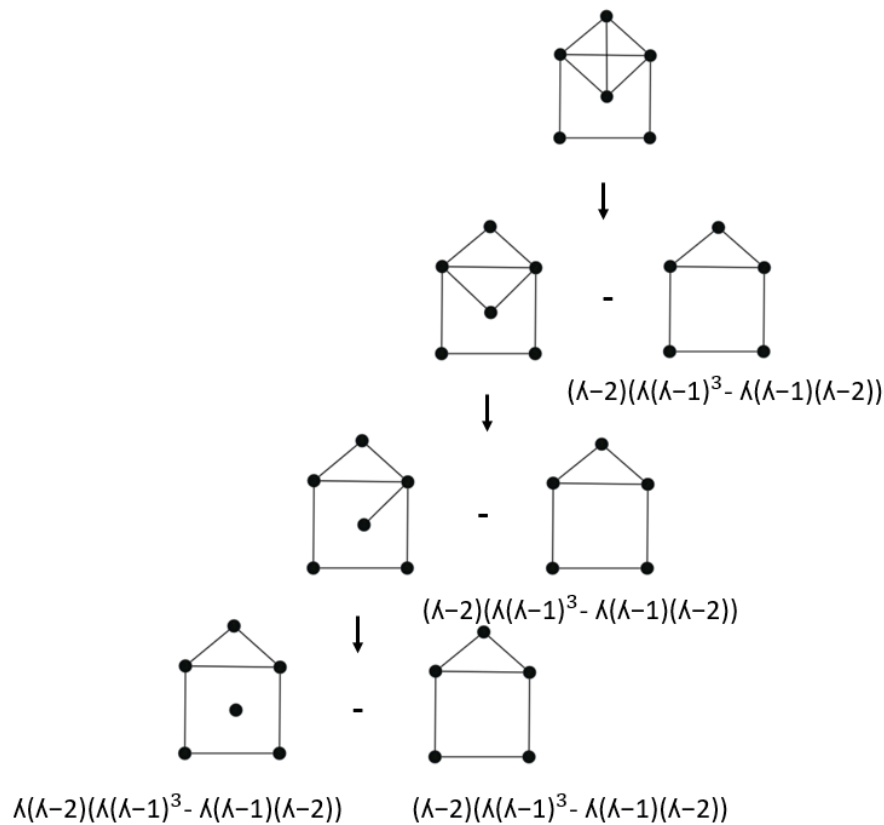


## سؤال ۲.

عدد رنگی و چندجمله‌ای رنگی گراف زیر را معین کنید.



طبق مراحل زیر چندجمله‌ای رنگی را بدست می‌آوریم.



## سؤال ۳.

ثابت یا رد کنید: اگر  $T$  درختی با  $k$  یال باشد و  $G$  گرافی ساده با حداقل درجه  $k$ ، آن گاه  $T$  زیرگرافی از  $G$  است.

پاسخ:

روی  $k$  استقرا می‌زنیم. یک برگ را از درخت حذف می‌کنیم. در گراف، درخت ثانویه  $T'$  طبق فرض استقرا وجود دارد. چون مینیمم درجه  $k$  است و  $T'$  یک یال داشته، هر جای درخت که جایگاه برگ حذفی باشد حتماً یالی وجود دارد که استفاده نشده است و در زیردرخت فعلی نیست. لذا می‌توانیم آن را به درخت ابتدایی اضافه کنیم و حکم ثابت می‌شود.

## سؤال ۴.

ثابت کنید حداقل مجموع فواصل دو به دو رئوس در یک درخت برابر  $(n-1)^2$  است.

پاسخ:

در یک درخت  $n$  رأسی، تعداد جفت رأس‌ها با فاصله ۱ برابر  $n-1$  است، چون فاصله ۱ به معنای یک یال است و این مقدار، تعداد یال‌های یک درخت است؛ اگر بقیه  $(n-1) - (n(n-1)/2)$  فاصله، همه برابر ۲ باشد، مجموع فواصل برابر

$$2 \times ((n(n-1)/2) - (n-1)) + (n-1) = (n-1)^2$$

می‌شود که حداقل این مقدار، متعلق به ستاره است. لذا حداقل این مقدار برای تمام درخت‌ها برابر  $(n-1)^2$  است.