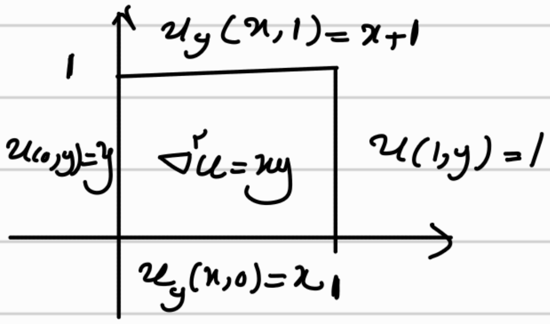
تکلیف سری پنجم ریاضی مهندسی   استاد طالع

محمد امانلو   ۸۱۰۱۰۰۰۸۴

---

(۱)

$$u_{xx}+u_{yy}=xy \qquad \begin{cases} u(0,y)=y \\ u(1,y)=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_y(x,0)=x \\ u_y(x,1)=x+1 \end{cases}$$



شرایط مرزی را در راستای x همگن می‌کنیم به علت

$$u(x,y)=v(x,y)+w(x,y) \xrightarrow[x]{\text{BC در راستای}} w(x,y)=C+Dx$$

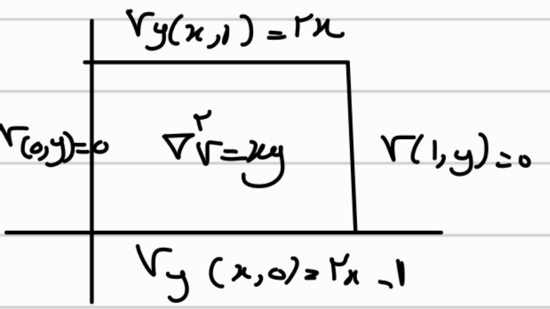
$$u(0,y)=\cancel{v(0,y)}+w(0,y)=C=y$$

$$u(1,y)=\cancel{v(1,y)}+w(1,y)=C+D=1 \xrightarrow{C=y} D=1-y$$

$$w=y+x(1-y) \qquad \begin{matrix} w_{xx}=0 \\ w_{yy}=0 \end{matrix} \longrightarrow u=y+x(1-y)+v$$

معادله حالت v را بازنویسی می‌کنیم

$$v_{xx}+v_{yy}=xy$$



$$\begin{cases} v(0,y)=0 \\ v(1,y)=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} v_y(x,0)=u_y(x,0)-w_y(x,0)=2x-1 \\ v_y(x,1)=u_y(x,1)-w_y(x,1)=2x \end{cases}$$

شرایط BC در راستای x ، جواب حدسی ما به صورت زیر است

$$V(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(y)\sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(y)\sin(n\pi x)\xrightarrow[\text{لاپلاس}]{\nabla^2 V=xy}$$

$$\nabla^2 V=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\underbrace{F_n''(y)-(n\pi)^2F_n(y)}_{\text{ضریب سینوسی } xy}\Big]\sin(n\pi x)=xy$$

$$F_n''(y)-(n\pi)^2F(y)=-2y\frac{(-1)^n}{n\pi}\longrightarrow \underset{\text{عمومی}}{F_n(y)}=A_n\cosh(n\pi y)+B_n\sin(n\pi y)$$

$$\underset{\text{خصوصی}}{F_n(y)}=2y\frac{(-1)^n}{(n\pi)^3}$$

$$F_n(y)=A_n\cosh(n\pi y)+B_n\sinh(n\pi y)+2y\frac{(-1)^n}{(n\pi)^3}$$

$$V(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cosh(n\pi y)+B_n\sinh(n\pi y)+2y\frac{(-1)^n}{(n\pi)^3}\right]\sin(n\pi x)$$

با توجه به شرایط مرزی A_n و B_n را بدست آوریم:

$$V_y=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n n\pi\sinh(n\pi y)+B_n n\pi\cosh(n\pi y)+\frac{2(-1)^n}{n\pi}\right]\sin(n\pi x)$$

$$V(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_n n\pi+\frac{2(-1)^n}{(n\pi)^3}\right]\sin(n\pi x)=2x-1$$

$$B_n n\pi+\frac{2(-1)^n}{(n\pi)^3}=2\int_0^1\sin(n\pi x)(2x-1)\,dx=\frac{-4(-1)^n}{n\pi}+2\frac{(-1)^n-1}{n\pi}$$

$$\longrightarrow B_n=\frac{-2}{(n\pi)^2}\left((-1)^n+1\right)-\frac{2(-1)^n}{(n\pi)^4}=2\left(\frac{-(1+n^2\pi^2)(-1)^n-n^2\pi^2}{(n\pi)^4}\right)\quad (1)$$

$$V(x,1)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[A_n n\pi\sinh(n\pi)+2\left(\frac{-(1+n^2\pi^2)(-1)^n-n^2\pi^2}{(n\pi)^4}\right)n\pi\cosh(n\pi)$$
$$+\frac{2(-1)^n}{(n\pi)^3}\Big]\sin(n\pi x)=2x$$

$$\rightarrow A_n n\pi\sinh(n\pi)+\frac{2\left(-(1+n^2\pi^2)(-1)^n-n^2\pi^2\right)}{(n\pi)^4}n\pi\cosh(n\pi)+\frac{2(-1)^n}{(n\pi)^3}=2\int_0^1 2x\sin(n\pi x)\,dx$$

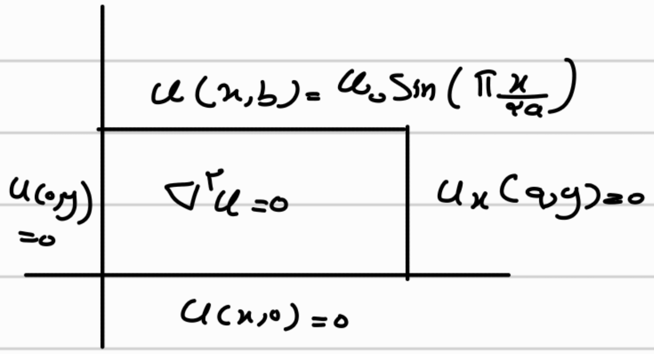
$$= -\frac{4(-1)^n}{n\pi} \Longrightarrow A_n = \frac{1}{\sinh(n\pi)}\left[\frac{-4(-1)^n}{n^2\pi^2} - \frac{2\left(-(1+n^2\pi^2)(-1)^n - n^2\pi^2\right)}{(n\pi)^4}\cosh(n\pi) - \frac{2(-1)^n}{(n\pi)^4}\right] \quad ②$$

داریم B_n , A_n

$$①,② \Longrightarrow u(x,y) = y + x(1-y) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cosh(n\pi y) + B_n\sin(n\pi y) + \frac{2y(-1)^n}{(n\pi)^3}\right]\sin(n\pi x)$$

---

②



$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\begin{cases} u(0,y)=0 \\ u_x(0,y)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u(x,0)=0 \\ u(x,b) = u_0\sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \end{cases}$$

$u(x,y) = X(x) \times Y(y)$ در راستای محور x ۲ شرط مرزی همگن داریم

شرایط مرزی ترکیبی از شرایط نیومن و دیریکله است پس فرم جواب حدسی برای $X_n(x)$:

$$\begin{cases} u(0,y)=0 \\ u_x(a,y)=0 \end{cases} \Longrightarrow \text{فرم جواب حدسی برای } X_n(x) \quad \begin{cases} X_n(x) = \sin\left(\frac{2n-1}{2a}\pi x\right) \\ Y_n(x) = B_n\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad Y_n(0)=0 \end{cases}$$

← فرم جواب برای $Y(y)$ (در راستای محور x شرایط مرزی همگن داریم)

← باید برای $n=0$ جواب را بررسی کنیم

$$Y'' - \lambda Y = 0 \longrightarrow (n=0 \longrightarrow \lambda = 0)$$

$$\left.\begin{aligned} &X'' + \lambda X = 0 \longrightarrow n=0 \longrightarrow X_0(x) = \sin\left(\frac{-1}{2a}\pi x\right) \\ &Y_0(x) = \sinh(0) = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow X_0(x)Y_0(y) = 0$$

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{2n-1}{2a}\pi x\right)}$$

B_n را براساس $u(x,b)$ ما بدست می آوریم :

$$u(x,b) = u_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \sin\left(\frac{2n-1}{2a}\pi x\right)$$

طبق نوع بدست آمدن این سری و sin دار سادی یک عبارت sin دارسته پس فقط یکی از جمله های این سری غیرصفر است یعنی فقط سری به ازای $n=1$ مقدار دارد. زیرا تنها جمله ی غیرصفر سری برای $u_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$ است.

$$u_0 = B_n \sinh\left(\frac{\pi b}{a}\right) \xrightarrow{n=1} B_n = \frac{U_0}{\sinh\left(\frac{\pi b}{a}\right)} \longrightarrow$$

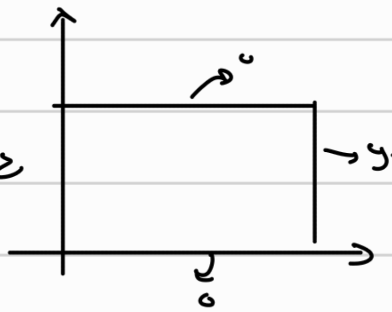
B_n فقط در $n=1$ مقدار دارد و بقیه ی n ها 0 است. پس $u(x,y)$ فقط در $n=1$ مقدار دارد.

$$\boxed{u(x,y) = \frac{U_0}{\sinh\left(\frac{\pi b}{a}\right)} \sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}$$

۳

$$u_{xx} + u_{yy} = x^2 \qquad 0<x<\pi \qquad 0<y<\pi$$

$$\begin{cases} u(0,y) = y-4 \\ u(x,y) = y+2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u(x,0) = 0 \\ u(x,b) = 0 \end{cases}$$



شرایط مرزی در راستای y همگن است پس جواب عمومی به فرم روبه رو است

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x) \sin(ny)$$ در صورت $b=\pi$ است

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n''(x) \sin(ny) + \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \sin(ny) G_n(x) = x^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\underbrace{G_n''(x) - n^2 G_n(x)}_{\text{ضرایب سینوسی } x^2} \Big) \sin(ny) = x^2$$

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin(ny)\,dy = \frac{2}{\pi}x^2\left(-\frac{\cos ny}{n}\right)\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}x^2\left[-\frac{\cos n\pi}{n}+\frac{1}{n}\right]$$

$$G_n''(x)-n^2G_n(x) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos n\pi}{n}+\frac{1}{n}\right]x^2 \quad \frac{-2((-1)^n-1)}{n\pi}x^2$$

جواب همگن $= A_n \sinh(nx) + B_n \cosh(nx)$

جواب خصوصی $\Rightarrow X_p = A_2x^2 + A_1x + A_0$

جایگذاری جواب خصوصی در معادله :

$$2A_2 - n^2(A_2x^2 + A_1x + A_0) = \frac{-2((-1)^n-1)}{n\pi}x^2$$

$$-n^2A_2 = \frac{-2((-1)^n-1)}{n\pi} \Rightarrow A_2 = \frac{2((-1)^n-1)}{n^3\pi}$$

$$(2A_2 - n^2A_0) = 0 \qquad 2A_2 = n^2A_0 \qquad \frac{4((-1)^n-1)}{\pi n^3} = n^2A_0$$

$$A_0 = \frac{4((-1)^n-1)}{\pi n^5} \qquad A_1 = 0 \Rightarrow$$

$$G_n(x) = A_n\sinh(nx) + B_n\cosh(nx) + \frac{2((-1)^n-1)}{n^3\pi}x^2 + \frac{4((-1)^n-1)}{\pi n^5}$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sinh(nx) + B_n\cosh(nx) + \frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^3}x^2 + \frac{4((-1)^n-1)}{\pi n^5}\right)\sin(ny)$$

با استفاده از شرایط اولیه A_n و B_n را محاسبه می‌کنیم :

$$u(0,y) = y-4 = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(B_n + \frac{4((-1)^n-1)}{\pi n^5}\right)}_{\text{ضرایب سینوسی سری فوریه}}\sin(ny)$$

$$B' = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(y-4)(\sin(ny))\,dy = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(4-\pi)\cos(\pi n)-4}{n}\right]$$

$$B_n + \frac{4((-1)^n-1)}{\pi n^5} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(4-\pi)(-1)^n-4}{n}\right]$$

$$B_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(4-\pi)(-1)^n-4}{n}\right] - \frac{4((-1)^n-1)}{\pi n^5}$$

$$y+2=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\underbrace{A_n\sinh(n\pi)+B_n\cosh(n\pi)+\frac{2((-1)^n-1)x^2}{\pi n^3}+\frac{4((-1)^n-1)}{\pi n^5}}\Big)\sin(ny)=A_n$$

ضریب سینوسی عبارت $y+2$

$$A'=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(y+2)\sin(ny)\,dy=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-\pi-2)\cos(\pi n)}{n}+\frac{2}{n}\right]$$

$$A_n\sinh(n\pi)+B_n\cosh(n\pi)+\frac{2((-1)^n-1)x^2}{\pi n^3}+\frac{4((-1)^n-1)}{\pi n^5}=A'$$

حال B_n و A' را داریم و با ساده کردن آن‌ها A_n بدست می‌آید. فرض کنید $Q=A_n$ می‌شود

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[Q\sinh(nx)+\left[\frac{2}{\pi}\left(\frac{(4-\pi)(-1)^n-4}{n}\right)-\frac{4(-1)^n-1}{n^5\pi}\right]\cosh(nx)+\frac{2((-1)^n-1)x^2}{\pi x^3}+\frac{4((-1)^n-1)}{\pi n^5}\right]\sin(ny)$$

---

(4)

$$\nabla^2 y=x+2y \qquad 0<x<\pi \qquad 0<y<\pi$$

$$\begin{cases}u(x,0)=x\\ u(x,\pi)=2\end{cases}\qquad \begin{cases}u(0,y)=y\\ u(\pi,y)=\cos(y)\end{cases}\qquad BC=\begin{cases}u(x,0)=x\\ u(x,\pi)=2\end{cases}\Longrightarrow$$

$$C+Dy=w(x,y)\longrightarrow C=x$$

$$x+D\pi=2\longrightarrow D=\frac{2-x}{\pi}$$

$$w(x,y)=x+\frac{y}{\pi}(2-x)$$

$$u_{xx}+u_{yy}=v_{xx}+v_{yy}=x+2y$$

$$BC\begin{cases}v(x,0)=0\\ v(x,\pi)=0\end{cases}\qquad IC\begin{cases}v(0,y)=y-2\frac{y}{\pi}\\ v(\pi,y)=\cos y-\pi-\frac{y}{\pi}(2-\pi)\end{cases}$$

$$r(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X(x)\sin(ny)$$

$$r_{xx} + r_{yy} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\ddot{X}(x) - n^2 X(x)\right)\sin(ny) = x+2y$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+2y)\sin(ny)\,dy = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right) + \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} y\sin(ny)\,dy$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right) + \frac{4}{\pi}\left(\frac{-y\cos(ny)}{n}\right)\Big]_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi}\cos ny\,dy}_{0}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right) + \frac{4}{\pi}\left(\frac{-\pi(-1)^n}{n}\right)$$

$$\ddot{X}(x) - n^2 X(x) = 0 \Longrightarrow X(x) = a_n\cosh(nx) + b_n\sinh(nx)$$ جواب عمومی:

$$X(x) = \frac{4(-1)^n}{n^3} - x\,\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}$$

جواب خصوصی:

$$r(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cosh(nx) + b_n\sinh(nx) + \frac{4(-1)^n}{n^3} - x\,\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}\right)\sin(ny)$$

$$r(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + \frac{4(-1)^n}{n^3}\right)\sin(ny)$$

$$\left(a_n + \frac{4(-1)^n}{n^3}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(y - \frac{2y}{\pi}\right)\sin(ny)\,dy = \left(\frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi(-1)^n}{n}\right)\right)\left(1-\frac{2}{\pi}\right)$$

$$a_n = \left(\frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi(-1)^n}{n}\right)\right)\left(1-\frac{2}{\pi}\right) + \left(a_n + \frac{4(-1)^n}{n^3}\right)$$

$$r(\pi,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi(-1)^n}{n}\right)\left(1-\frac{2}{\pi}\right) + \left(a_n + \frac{4(-1)^n}{n^3}\right)\cosh(n\pi) + \right.\right.$$

$$\left. b_n\sinh(n\pi) + \frac{4(-1)^n}{n^3} - x\,\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}\right)\sin(ny)$$

$$\left(\frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi(-1)^n}{n}\right)\left(1-\frac{2}{\pi}\right)+\left(a_n+\frac{4(-1)^n}{n3}\right)\right)\cosh(n\pi)$$

$$+b_n\sinh(n\pi)+\frac{4(-1)^n}{n3}-\pi\,\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos y-y-\frac{y}{\pi}(2-\pi)\right)$$

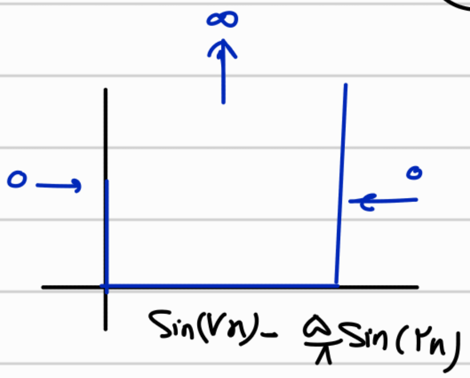
$$\sin(ny)=\frac{2\left(\pi-2(-1)^n\right)}{n(n^2-1)\pi}+\frac{2n\left(1-\pi+3(-1)^n\right)}{(n^2-1)\pi}$$

$$\longrightarrow b_n\left(\frac{2(\pi-2(-1)^n)}{n(n^2-1)\sinh(n\pi)\pi}+\frac{2n(1-\pi+3(-1)^n)}{(n^2-1)\pi\sinh(n\pi)}\right)\left(1-\delta(n-1)\right)-a_n\coth(n\pi)$$

۵

$$\nabla^2 u=0\qquad 0<x<\pi\qquad 0<y<\infty$$

$$\begin{cases} u(x,0)=\sin(7x)-\frac{5}{8}\sin(2x)\\ \lim\limits_{y\to\infty}u(x,y)=0\end{cases}\qquad \begin{cases}u(0,y)=0\\ u(\pi,y)=0\end{cases}$$



$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}Y_n(y)\sin(nx)\longleftarrow$$ با توجه به شرایط مرزی در راستای x

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس}}\nabla^2u=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ddot{Y}_n(y)-n^2Y_n(y)\right]\sin(nx)=0$$

$$\ddot{Y}_n(y)-n^2Y_n(y)=0\longrightarrow Y_n(y)=A_ne^{-ny}+B_ne^{ny}$$

$$Y_n(y)=A_ne^{-ny}$$ چون باید در بی‌نهایت کراندار باشد $\longleftarrow B_n=0$

شرایط مرزی $$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx)=\sin(7x)-\frac{5}{8}\sin(2x)$$

$$A_n=\begin{cases}A_2=-\frac{5}{8} & n=2\\ A_7=1 & n=7\\ A_n=0 & n\neq 2,\ n\neq 7\end{cases}\longrightarrow \boxed{u(x,y)=-\frac{5}{8}e^{-2y}\sin(2x)+e^{-7y}\sin(7x)}$$

سوال ۵ تمرین قبل :

$u_{xx} = u_t$

$u(0,t) = e^{-4t} \qquad u(x,0) = x\sin(x)$

$u(x,t) = X(x)T(t) \to X''(x)T = XT' \to \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = k$

$k<0 \to k = -w^2 \qquad ODE(t) \Rightarrow T' + w^2 T = 0 \to T(t) = e^{-w^2 t}$

$ODE(x) \to X'' + w^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = A(w)\cos(wx) + B(w)\sin(wx)$

$\to u = \int_0^\infty \Big(A(w)\cos(wx) + B(w)\sin(wx) \Big) e^{-w^2 t}\, dw$

مرزی $\quad u(0,t) = e^{-4t} = \int_0^\infty e^{-w^2 t} A(w)\, dw \to A(w) = \delta(w-2)$

$u(x,t) = e^{-4t}\cos(\sqrt{4}\,x) + \int_0^\infty B(w)\, e^{-w^2 t}\sin(wx)\, dw$

شرایط اولیه $\quad u(x,0) = x\sin x = \cos(\sqrt{4}\,x) + \int_0^\infty B(w)\sin(wx)\, dw$

$\operatorname{Sign}(x)\left(x\sin x - \cos\sqrt{4}x\right) = F^{-1}\Big(F\big(\operatorname{Sign}(x)\left(x\sin x - \cos\sqrt{4}x\right)\big)\Big)$

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F\Big(\underbrace{\operatorname{Sign}(x)\left(x\sin x - \cos\sqrt{4}x\right)}_{h(x)}\Big) e^{iwx}\, dw = \frac{1}{2\pi}\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} F(h(x))\cos(wx)\, dw + i\int_{-\infty}^{\infty} F(h(x))\sin(wx)\, dw \right.$

$\int_{-\infty}^{\infty} F(h(x))\cos(wx) = 0 \quad \leftarrow$ تابع فرد $\leftarrow h(x)$

$= \frac{i}{\pi}\int_0^\infty F(h(x))\sin(wx)\, dw \to B(w) = \frac{i}{\pi} F(h(x))$

$F(\operatorname{Sign}(x)\sin x) = \frac{1}{2i}\left(\frac{2}{i(w-1)} - \frac{2}{i(w+1)}\right) \Rightarrow$

$$F(\operatorname{sign}(x)\sin x) = i\,F'(\operatorname{sign}(x)\sin x) \to F(\operatorname{sign}(x)\,x\sin x) = i\left(\frac{1}{(\omega-1)^2} - \frac{1}{(\omega+1)^2}\right)$$

$$F(\operatorname{sign}(x)\cos(\sqrt{4}\,x)) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{i(\omega-\sqrt{4})} + \frac{2}{i(\omega+\sqrt{4})}\right)$$

$$B(\omega) = \frac{i}{\pi}F(h(x)) = \frac{i}{\pi}\Big[F(\operatorname{sign}(x)\,x\sin x) - F(\operatorname{sign}(x)\cos(\sqrt{4}x))\Big]$$

$$B(\omega) = \frac{i}{\pi}\left(i\left(\frac{1}{(\omega-1)^2} - \frac{1}{(\omega+1)^2}\right) - \left(\frac{1}{i(\omega-\sqrt{4})} + \frac{1}{i(\omega+\sqrt{4})}\right)\right)$$

$$\begin{cases} u(x,t) = e^{-4t}\cos(\sqrt{4}x) + \displaystyle\int_0^\infty B(\omega)\, e^{-\omega^2 t}\sin(\omega x)\,d\omega \\[2ex] B(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{-1}{(\omega-1)^2} + \dfrac{1}{(\omega+1)^2} - \dfrac{1}{\omega-\sqrt{4}} - \dfrac{1}{\omega+\sqrt{4}}\right) \end{cases}$$