ریاضیات گسسته

پاسخنامه تمرین هشتم - روابط بازگشتی

نگار مرادی

سؤال ۱.

جمله عمومی رابطه‌های بازگشتی زیر را به دست آورید.

.۱

$$a_n = ۲a_{n-۱} + ۵a_{n-۲} - ۶a_{n-۳}$$
$$a_۰ = ۷$$
$$a_۱ = -۴$$
$$a_۲ = ۸$$

.۲

$$a_n = ۶a_{n-۱} - ۸a_{n-۲}, n \geq ۲$$
$$a_۰ = ۴$$
$$a_۱ = ۱۰$$

پاسخ.

۱.این رابطه یک رابطه‌ی بازگشتی از نوع سوم است. معادله‌ی مشخصه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$r^۳ - ۲r^۲ - ۵r + ۶ = ۰$$

$$r^۳ - ۲r^۲ - ۵r + ۶ = (r - ۱)(r^۲ - r - ۶) = (r - ۱)(r - ۳)(r + ۲)$$

در نتیجه ریشه‌ها برابرند با: $r = ۱, ۳, -۲$ جواب این معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$a_n = \alpha_۱ ۱^n + \alpha_۲ ۳^n + \alpha_۳ (-۲)^n$$

حال برای به دست آوردن ضرایب از شرایط اولیه کمک می‌گیریم.

$$a_۰ = ۷ = \alpha_۱ + \alpha_۲ + \alpha_۳$$

$$a_۱ = -۴ = \alpha_۱ + ۳\alpha_۲ - ۲\alpha_۳$$

$$a_۲ = ۸ = \alpha_۱ + ۹\alpha_۲ + ۴\alpha_۳$$

با حل معادله‌های بالا ضرایب به صورت‌های زیر به دست می‌آیند.

$$\alpha_۱ = ۵, \alpha_۲ = -۱, \alpha_۳ = ۳$$

در نتیجه جمله عمومی این رابطه برابر است با:

$$a_n = ۵ - ۳^n + ۳(-۲)^n$$

۲. معادله‌ی مشخصه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$r^۲ - ۶r + ۸ = ۰$$

$$r^۲ - ۶r + ۸ = (r - ۴)(r - ۲)$$

در نتیجه ریشه‌ها برابرند با: $r = ۲, ۴$ جواب این معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$a_n = \alpha_۱ ۲^n + \alpha_۲ ۴^n$$

حال برای به دست آوردن ضرایب از شرایط اولیه کمک می‌گیریم.

$$a_۰ = ۴ = \alpha_۱ + \alpha_۲$$

$$a_۱ = ۱۰ = ۲\alpha_۱ + ۴\alpha_۲$$

با حل معادله‌های بالا ضرایب به صورت‌های زیر به دست می‌آیند.

$$\alpha_۱ = ۳, \alpha_۲ = ۱$$

در نتیجه جمله عمومی این رابطه برابر است با:

$$a_n = ۳ \times ۲^n + ۱ \times ۴^n = ۳ \times ۲^n + ۴^n$$

سؤال ۲.

۲. با استفاده از تابع مولد نمایی تعداد رشته‌های به طول n از حروف a, b, c که در آن‌ها تعداد a زوج و تعداد b فرد باشند را بیابید.

پاسخ .

۱. به ازای هر حرف یک تابع مولد نمایی متناسب با محدودیت‌هایی که برای آن وجود دارد در نظر می‌گیریم:

$$A(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^{۲n}}{(۲n)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{۲}$$

$$B(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} = \frac{e^x - e^{-x}}{۲}$$

$$C(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$A(x)B(x)C(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{۲} \frac{e^x - e^{-x}}{۲} e^x = \frac{e^{۲x} - e^{-۲x}}{۴} e^x = \frac{e^{۳x} - e^{-x}}{۴}$$

تا اینجا فرم بسته شده را به دست آوردیم که کافی است. اگر بخواهیم ساده سازی را ادامه دهیم:

$$A(x)B(x)C(x) = \frac{۱}{۴}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(۳x)^n}{n!} - \frac{۱}{۴}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n x^n}{n!} = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۳^n - (-۱)^n}{۴}\frac{x^n}{n!}$$

ضریب $\frac{x^n}{n!}$ برابر است با:

$$\frac{۳^n - (-۱)^n}{۴}$$

سؤال ۳.

اگر تابه‌حال به باغ کتاب تهران رفته باشید، ممکن است گذرتان به پله‌های طولانی حیاط آن افتاده باشد. به دلیل اینکه ارتفاع بین دو پله متوالی بسیار کم است، نیما و شانلی تصمیم می‌گیرند تا پله‌ها را به صورت مورب طی کنند. به طور دقیق‌تر، آنها یک پله در بالاترین ردیف را انتخاب کرده و در هر مرحله به پله پایین چپ یا پایین راست می‌روند. برای سادگی مسأله، مجموعه پله‌ها را به صورت ۱۰ ردیف که هر ردیف شامل ۸ پله است، در نظر بگیرید. نیما و شانلی چند مسیر متفاوت از شروع تا پایان را می‌توانند طی کنند؟

پاسخ .

ستون‌ها را به ترتیب از چپ به راست و ردیف‌ها را به ترتیب از بالا به پایین و از یک شماره‌گذاری می‌کنیم.

تعریف می‌کنیم:

$f[i][j]$: تعداد روش‌های رسیدن به ستون i ام ردیف j. واضح است که جواب نهایی $\sum_{i=۱}^{۸} f[i][۱۰]$ می‌باشد.

حال طبق شروط مساله برای رسیدن به هر پله، باید در مرحله قبل روی پله بالا راست و یا بالا چپ قرار داشته باشیم؛ پس داریم:

$$\begin{cases} f[i][۱] = ۱ & for \quad ۱ \le i \le ۸ \\ f[۱][i] = f[۲][i-۱] & for \quad ۲ \le i \le ۱۰ \\ f[۸][i] = f[۷][i-۱] & for \quad ۲ \le i \le ۱۰ \\ f[i][j] = f[i-۱][j-۱] + f[i+۱][j-۱] & o.w. \end{cases}$$

حال پس با پر کردن جدول طبق قواعد بالا، جواب نهایی ۲۰۹۰ خواهد بود.

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	2	2	2	1
2	3	4	4	4	4	3	2
3	6	7	8	8	7	6	3
6	10	14	15	15	14	10	6
10	20	25	29	29	25	20	10
20	35	49	54	54	49	35	20
35	69	89	103	103	89	69	35
69	124	172	192	192	172	124	69
124	241	316	364	364	316	241	124

سؤال ۴.

۱. تابع مولد دنباله‌ی بازگشتی داده شده را به دست آورید.

$$a_n - ۳a_{n-۱} = n^۲; n \geq ۱, a_۰ = ۱$$

پاسخ .

۱. تابع مولد $G(x)$ را متناظر با دنباله‌ی بازگشتی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$$

طرفین رابطه‌ی بازگشتی را در x^n ضرب می‌کنیم و سیگما می‌گیریم:

$$a_n - ۳a_{n-۱} = n^۲$$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} (a_n - ۳a_{n-۱})x^n = \sum_{n=۱}^{\infty} (n^۲)x^n$$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n x^n - ۳\sum_{n=۱}^{\infty} a_{n-۱}x^n = \sum_{n=۱}^{\infty} n^۲ x^n$$

$$G(x) - a_۰ - ۳x\sum_{n=۱}^{\infty} a_{n-۱}x^{n-۱} = \sum_{n=۱}^{\infty} (n^۲)x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - n + n)x^n \quad 3x - 1 - G(x)$$

$$G(x) - 1 - 3xG(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n(n-1) + n)x^n$$

$$G(x)(1 - 3x) - 1 = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

برای محاسبه مقدار $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n$ از ایده مشتق استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

بنابراین داریم:

$$G(x)(1-3x) - 1 = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

$$G(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3(1-3x)} + \frac{1}{(1-3x)}$$

سؤال ۵.

می‌خواهیم یک دنباله از اعداد بسازیم. برای این کار ابتدا قرار می‌دهیم $a_1 = 0$ و پس از آن برای عضوهای بعدی دنباله دو انتخاب داریم: یا قرار می‌دهیم $a_n = |a_{n-1} - 1|$ یا $a_n = |a_{n-1} + 1|$. تعداد دنباله‌های ممکن به طول $2n + 1$ به طوری که $a_{2n+1} = 0$ باشد را به صورت یک رابطه بازگشتی بنویسید. (به عنوان مثال دنباله ۰،۱،۰،۱،۲،۱،۰ یک دنباله قابل قبول برای $n = 3$ است.)

پاسخ .

جمله kام دنباله بازگشتی را با C_k نشان می‌دهیم . حالت‌بندی را روی کوچکترین k که به ازای آن $a_{2k+1} = 0$ است انجام می‌دهیم. (دقت کنید که فقط خانه‌های فرد می‌توانند صفر باشند چراکه مقدار خانه‌های زوج همواره فرد است) اگر بدانیم که $a_{2k+1} = 0$ تعداد دنباله‌های ممکن پس از این نقطه برابر C_{n-k} خواهد بود. کافی است که تعداد دنباله‌های ممکن پیش از این نقطه را به دست بیاوریم. می‌دانیم که k اولین نقطه‌ای است که $a_{2k+1} = 0$ است، پس می‌توان نتیجه گرفت که مقدار تمام خانه‌های ۲ تا $2k$ بیشتر یا مساوی ۱ است. تعداد دنباله‌های ممکن برای خانه ۲ تا $2k$ برابر C_{k-1} است. چرا که اگر هر دنباله دلخواه با شرایط مسئله به طول $2k - 1$ بسازیم، می‌توانیم با اضافه کردن یک واحد به تمام عناصر دنباله آن را در خانه‌های ۲ تا $2k$ قرار دهیم. پس تعداد دنباله‌ها به ازای یک k مشخص برابر $C_{k-1} \times C_{n-k}$ است. از حالت بندی روی k داریم:

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}$$

و $C_۰ = ۱$ است.

سؤال ۶.

فرض کنید x_n تعداد زیر مجموعه‌های ناتهی مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد به طوری که اگر اعضای زیرمجموعه را از کوچک به بزرگ در یک دنباله قرار دهیم، زوجیت جملات مجاور متفاوت باشد. (برای مثال $\{۱, ۴, ۹, ۱۴\}, \{۳\}$ این ویژگی را دارند ولی $\{۳, ۷\}$ این ویژگی را ندارند.). رابطه بازگشتی برای x_n بیابید و سپس آن را حل کرده و به رابطه مستقیم برسید.

پاسخ.

تعداد زیر مجموعه‌های با این ویژگی که عضو n را ندارند برابر $x_{n-۱}$ است. همچنین هر زیرمجموعه با این ویژگی که عضو n و حداقل یک عضو از $\{۱, ۲, \ldots, n-۲\}$ شامل آن است را می توان به یک زیر مجموعه با همان ویژگی که از مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, n-۲\}$ به دست می‌آید نگاشت (رابطه یک به یک برقرار کرد): یک زیر مجموعه مطلوب از $\{۱, ۲, \ldots, n-۲\}$ در نظر بگیرید؛ اگر زوجیت بزرگترین عضو این زیر مجموعه با زوجیت n متفاوت بود، n را به آن اضافه می‌کنیم و در غیر این صورت $n, n-۱$ را اضافه می کنیم. پس تعداد این زیر مجموعه‌ها برابر $x_{n-۲}$ است. همچنین تعداد زیر مجموعه‌هایی که n را دارند و هیچ یک از اعضای $\{۱, ۲, \ldots, n-۲\}$ را ندارند برابر ۲ است ($\{n, n-۱\}, \{n\}$).

در نتیجه رابطه بازگشتی برابر $x_n = x_{n-۱} + x_{n-۲} + ۲$ است.

حل رابطه بازگشتی :

قسمت همگن :

$$x_n - x_{n-۱} - x_{n-۲} = ۰ \Rightarrow r^۲ - r - ۱ = ۰ \Rightarrow r_۱ = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}, r_۲ = \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow x_{n_h} = a_۱(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})^n + a_۲(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲})^n$$

قسمت ناهمگن : از آنجا که قسمت ناهمگن عدد ثابت است؛ پس جواب خصوصی به فرم $x_{n_p} = P$ است.

$$x_n = x_{n-۱} + x_{n-۲} + ۲ \Rightarrow P = P + P + ۲ \Rightarrow P = -۲ = x_{n_p}$$

در نهایت با توجه به این که $x_۰ = ۰, x_۱ = ۱$ است(بدیهی) داریم :

$$x_n = x_{n_h} + x_{n_p} = a_۱(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})^n + a_۲(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲})^n - ۲$$

$$\rightarrow x_۰ = ۰ = a_۱ + a_۲ - ۲, x_۱ = ۱ = \frac{a_۱ + a_۲}{۲} + \frac{\sqrt{۵}(a_۱ - a_۲)}{۲} - ۲$$

$$\rightarrow a_۱ = ۱ + \frac{۲}{\sqrt{۵}}, a_۲ = ۱ - \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$