محمد شاملو ۸۱۰۱۰۰۰۸۴ تکلیف سه

۱) الف) دور همیلتونی داریم

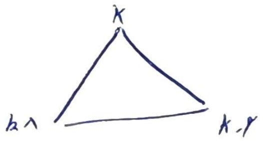
acfjiehgdba

ب) نداریم. همه‌ی یال‌های رأسی که درجه ۲ است باید در دور باشند که در صورت گذر از یکی از رئوس درجه ۲ باز باقی به آن رأس برگردیم پس دور همیلتونی نداریم

ج) همه‌ی یال‌های رأس‌های a c g o باید در دور باشند که تا ندره a وقتی به b می‌رسیم یا باید به سمت e حرکت کنیم یا c ، ① اگر به سمت e برویم. بعد از باید به نحوی به c برگردیم دو حالت داریم ① از مسیر k به k برسیم ② از مسیر 9k برسیم اگر k باشد حتما برخی از رئوس دیده نشده‌اند پس بعد از رسیدن به c می‌بینیم دور نداریم چون مربع داخلی مثل به مربع خارجی است به دلیل تقارن نمی‌توان همه‌ی رئوس را دیده بود پس در این صورت نیز با رسیدن به c دور تمام می‌شود چون دیگر نمی‌توان به a بازگشت ② اگر مسیر bc را برویم تا پس از ورود به مربع داخلی به مثل بخش ① می‌رسیم و باز نمی‌توان با دیدن همه‌ی رئوس به a برگشت (مربع داخلی قرینه مربع خارجی است)

پس هیچ دور همیلتونی وجود ندارد!

۲) پایه، $n=3$



$$k(k-2)(k-1) = (k-1)((k-1)^2-1)$$

$$= (k-1)^3-(k-1) = (k-1)^3+(-1)^3(k-1)$$

فرض،

$$P(C_n,k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$$

حکم،

$$P(C_{n+1},k) = (k-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(k-1)$$

$\boxed{P_{n+1} = C_{n+1} - e}$

با حذف یال e و روی هم منطبق کردن دو رأس از آن یک گراف جدید یکریخت با C_n می‌رسیم که همان C_{n+1}/e است!

پس

$$P(C_{n+1}/e, k) = P(C_n,k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$$

چون $C_{n+1}-e = P_{n+1} \Rightarrow P(C_{n+1}-e, k) = P(P_{n+1}, k) = k(k-1)^n$

$$\Rightarrow P(C_{n+1}, k) = P(C_{n+1}-e, k) - P(C_{n+1}/e, k)$$

$$= k(k-1)^n - (k-1)^n - (-1)^n(k-1) =$$

$$(k-1)^{n+1} - (-1)^n(k-1) = \boxed{(k-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(k-1)}$$

۳) می‌دانیم گراف G یک زیرگراف همریخت با $K_{3,3}$ یا K_5 دارا است. باید ثابت کنیم که این زیرگراف، زیرگراف ناسره یا خودش است! (قضیه کوراتوفسکی)

برهان خلف، اگر این زیرگراف خود G نباشد یعنی یک یال که از G حذف شود طبق فرض مسئله مسطح است! پس این زیرگراف خودش است! (یعنی اگر این زیرگراف G نباشد با حذف یال نامسطح است که خلاف فرض است)

پس G یا همریخت $K_{3,3}$ است یا K_5! چون $K_{3,3}$ دارای درجه رأس فرد است و G درجه رأس فرد ندارد (چون اویلری است) پس ثابت می‌شود G حتما همریخت با K_5 است!

در K_5 داریم $v=5$، $e=10$ و با انجام عملیات زیرتقسیم‌ها همسان $v=5$، $e=10$ باقی می‌ماند پس

در گراف G که با K_5 همریخت است $\boxed{v=5, e=10}$

④ در یک گراف مسطح داریم:

[redacted] $e \le 3v - 6 \Rightarrow 2e \le 6v - 12$ (*)

با برهان خلف فرض می‌کنیم که همه‌ی رئوس لااقل ۶ یال را دارند چون مجموع درجه‌ها $= 2e$ است

یعنی [redacted]

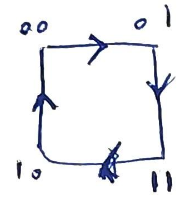
$\sum \deg v = 2e \Rightarrow 2e \geq 6v$

از طرفی می‌دانیم طبق (*) که در گراف مسطح $2e \le 6v - 12$ که این تناقض است ✗

پس رأسی با کمتر از ۶ یال داریم! تمام :)

⑤ استقرا: پایه:

$n=2$



$n=2$

فرض: Q_n دارای دور همیلتونی است

حکم: Q_{n+1} دارای دور همیلتونی است

Q_{n+1} از ۲ زیرگراف یک‌ریخت با Q_n درست شده که رأس‌های دوتا Q_n باهم یال دارند! طبق فرض استقرا در هرکدام از این ۲ زیرگراف یک دور همیلتونی وجود دارد! اگر از هرکدام این زیرگراف‌ها یال آخر دور را حذف کنیم مثلاً اگر یال $a \to b$ یال آخر دور همیلتونی یک زیرگراف و یال متناظر [redacted] $a' \to b'$ آخرین یال از دور زیرگراف دوم باشد با حذف این دو یال می‌توان از a شروع کرد به b رسید سپس به [redacted] b' رفت دور را تکمیل کرد به [redacted] a' و سپس a بازگشت که در این صورت دور همیلتونی تکمیل می‌گردد! (چون a و a' دو رأس متناظرند پس یال دارند همین‌طور b و b') در واقع به جای یال ab، $b'a'$ دو یال aa' و bb' طی می‌شود!

Hard! ④