۳- معادلات خطی مرتبه بالاتر

در فصل قبل معادلات خطی مرتبه دو بررسی گردید. در اینجا به بررسی معادلات خطی با مرتبه‌های بالاتر از دو می‌پردازیم. دیده خواهد شد که اغلب قضایا و روابطی که در معادلات خطی مرتبه دو بدست آمد, قابل تعمیم به مرتبه‌های بالاتر نیز می‌باشد.

در حالت کلی فرم یک معادله خطی مرتبه n بصورت زیر است:

$$P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_0(x)y = G(x)$$
$$P_n(x) \neq 0 \rightarrow y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_0(x)y = g(x)$$

مشابه معادلات خطی مرتبه دو, در اینجا نیز اگر $g(x)$ و $p_i(x)$ ها در یک بازه بسته I پیوسته باشند, در اینصورت معادله بالا با n شرط $y(x_0) = b_0$ و $y'(x_0) = b_1$ و ... و $y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}$, در فاصله باز I شامل نقطه x_0, دارای یک جواب یکتا میباشد.

همچنین میتوان ثابت کرد که تعداد جوابهای اساسی برای یک معادله خطی همگن مرتبه n, دقیقا n تاست, نه کمتر و نه بیشتر. شیوه اثبات نیز دقیقا همان روشی است که در معادلات مرتبه دوم دیده شد. علاوه بر آن اگر y_iها $(i = 1,2,\cdots,n)$ جوابهای مستقل خطی معادله همگن باشند, آنگاه بر طبق قضیه آبل:

$$W[y_1,\cdots,y_n](x) = W(x) = ce^{-\int p_{n-1}(x)dx}$$

به عنوان نمونه این رابطه را برای $n = 3$ ثابت می‌کنیم:

$$y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} \rightarrow W' = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow W' = 0 + 0 + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ -p_2y_1'' - p_1y_1' - p_0y_1 & -p_2y_2'' - p_1y_2' - p_0y_2 & -p_2y_3'' - p_1y_3' - p_0y_3 \end{vmatrix}$$

$$W' = -p_2\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} - p_1\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \end{vmatrix} - p_0\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = -p_2W - 0p_1 - 0p_0$$

$$\rightarrow W' = -p_2(x)W \rightarrow W(x) = ce^{-\int p_2(x)dx}$$

علاوه بر این مشابه معادلات خطی مرتبه دو و با همان شیوه می‌توان نشان داد:

$$if \quad W[y_1,\cdots,y_n](x_0) \neq 0 \rightarrow y_c = \sum_{i=1}^{n} c_iy_i \qquad ; \qquad y = y_c + y_p = \sum_{i=1}^{n} c_iy_i + y_p$$

توضیح: روش ضرایب نامعین و تغییر پارامتر(لاگرانژ) برای تعیین جواب خصوصی درست مشابه قبل است. با این تفاوت که در روش تغییر پارامتر, بایستی $n-1$ شرط اضافه به مساله اضافه کرد. در نهایت درست مشابه بخش قبل, دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{Bmatrix} \rightarrow y_p = \sum_{i=1}^{n} u_i\, y_i$$

دقت شود در اینجا نیز در استفاده از فرمولهای تغییر پارامتر, بایستی ضریب $y^{(n)}$ برابر 1 گردد.

همچنین میتوان دستگاه را با استفاده از رابطه کرامر بصورت $u_i' = \frac{W_i}{W}$ نیز حل نمود. که در آن W بیانگر رونسکین جوابهای اساسی و W_i از جایگذاری سمت راست دستگاه در ستون iام رونسکین بدست می‌آید. هر چند گاهی در معادلات با مرتبه بالاتر از دو, ممکن است تعیین u_i'ها از حل مستقیم دستگاه لاگرانژ, ساده‌تر از استفاده از روش کرامر باشد.

۳-۱- معادلات با ضرایب ثابت

فرم کلی این معادله در حالت همگن بصورت زیر است:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0 \rightarrow \underbrace{\left[a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_0\right]}_{L=f(D)} y = 0$$

$$f(r) = 0 \rightarrow a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \rightarrow r_i \quad \boxed{\surd}$$

و یا می‌توان گفت برای تعیین معادله مشخصه, جایگزین‌های زیر را انجام می‌دهیم:

$$(y \rightarrow 1 \quad ; \quad y' \rightarrow r \quad ; \quad y'' \rightarrow r^2 \quad ; \quad y''' \rightarrow r^3 \quad ; \quad \cdots)$$

در ادامه درست مشابه معادلات مرتبه دو, سه حالت زیر را خواهیم داشت:

۱- اگر ریشه ها حقیقی و متمایز باشند, جوابهای پایه بصورت زیر خواهند بود:

$$\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \cdots, e^{r_n x}\}$$

۲- اگر ریشه حقیقی r به تعداد kبار تکرار شده باشد, k جواب پایه متناظر آن بصورت زیر است:

$$\{e^{rx}, xe^{rx}, \cdots, x^{k-1} e^{rx}\}$$

۳- قبلا عنوان شد که در معادله جبری چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی, همواره ریشه‌های مختلط (در صورت وجود) به فرم $\lambda \pm \mu i$ خواهند بود. حال متناظر هر جفت عدد مختلط $\lambda \pm \mu i$ که t بار تکرار شده باشد,$2t$ جواب پایه بصورت زیر خواهند بود:

$$\{e^{\lambda x} \cos(\mu x), e^{\lambda x} \sin(\mu x), \cdots, x^{t-1} e^{\lambda x} \cos(\mu x), x^{t-1} e^{\lambda x} \sin(\mu x)\}$$

مثلا اگر ۱۰ ریشه معادله مشخصه متناظر با یک معادله مرتبه ۱۰ با ضرایب ثابت, بصورت r_i باشد, پایه‌های جواب عبارتند از:

$$r_i = \left\{ \underbrace{4}_{k=1}, \underbrace{6,6,6}_{k=3}, \underbrace{3 \pm 4i}_{t=1}, \underbrace{-3 \pm 4i, -3 \pm 4i}_{t=2} \right\} \rightarrow y_i = \{e^{4x}, e^{6x}, xe^{6x}, x^2 e^{6x}$$
$$, e^{3x} \cos 4x, e^{3x} \sin 4x, e^{-3x} \cos 4x, e^{-3x} \sin 4x, xe^{-3x} \cos 4x, xe^{-3x} \sin 4x\}$$

در نهایت در همه حالات $y_c = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ خواهد بود.

بکارگیری روش ارائه شده در مثال زیر می‌تواند در تعیین ریشه‌های گویا (و صحیح) یک معادله جبری مفید باشد.

مثال ۳-۱ الف: نشان دهید اگر کسر تحویل ناپذیر $r = p/q$ (یعنی $(p,q) = 1$) در معادله جبری با ضرایب صحیح:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

صدق نماید, آنگاه $p|a_0$ و $q|a_n$.

ب: معادله جبری $6r^4 - 25r^3 + 32r^2 + 3r - 10 = 0$ را حل کنید.

حل الف: از آنجا که $r = \frac{p}{q}$ در معادله صدق می‌کند, آنرا در معادله جایگذاری کرده و سپس طرفین معادله را بر p تقسیم می‌کنیم:

$$r = \frac{p}{q} \to a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

$$\xrightarrow{/p} a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \cdots + a_1 q^{n-2} = -\frac{a_0 q^n}{p}$$

سمت چپ عددی صحیح است پس بایستی سمت راست نیز صحیح باشد و چون $(p,q) = 1$ لذا: $p|a_0$

به همین ترتیب با تقسیم طرفین بر q خواهیم داشت: $q|a_n$

ب: مقسوم‌علیه‌های $a_0 = -10$ و $a_4 = 6$ به ترتیب عبارتند از $\{\pm1, \pm2, \pm5, \pm10\}$ و $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$. در نتیجه اگر معادله دارای جواب گویا باشد, این جواب حتما در بین گزینه‌های زیر است:

$$\left\{\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm2, \pm\frac{2}{3}, \pm5, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{6}, \pm10, \pm\frac{10}{3}\right\}$$

با امتحان کردن این گزینه‌ها خواهیم دید جوابهای گویا صرفا $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$ خواهند بود, پس معادله را بر عبارت $(2r+1)(3r-2)$ تقسیم میکنیم که به یک معادله درجه ۲ با ریشه‌های $2 \pm i$ خواهیم رسید, یعنی در نهایت ریشه‌ها عبارتند از: $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 2+i, 2-i\right\}$ ■

توضیح: بدیهی است اگر مجموع ضرایب معادله $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$ برابر صفر باشد, یک ریشه برابر 1 و اگر مجموع ضرایب نظیر توانهای زوج با مجموع ضرایب نظیر توانهای فرد برابر باشد, یک ریشه برابر -1 است. همچنین می‌توان نشان داد مجموع و حاصلضرب تمام ریشه‌های معادله به ترتیب برابر است با $S = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ و $P = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$. ■

مثال ۳-۲ معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید. در معادله دوم فرض کنید می‌دانیم $r = 2 + i$ یک ریشه معادله مشخصه است.

$$1)\ \ y^{(4)} + 16y = 0 \qquad ; \qquad 2)\ \ y^{(4)} - 8y''' + 26y'' - 40y' + 25y = 0$$

حل مطابق آنچه عنوان شد خواهیم داشت:

$$1)\ \ y^{(4)} + 16y = 0 \to (D^4 + 16)y = 0$$

$$f(r) = 0 \to r^4 = -16 \to r = \sqrt[4]{-16} \quad ; \quad z = -16 + 0i \to |z| = r = 16 \ \ , \ \ \theta = \pi$$

$$\to r = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16}\left(cos\frac{2k\pi + \pi}{4} + isin\frac{2k\pi + \pi}{4}\right) \ ; \ k = 0:3$$

$$r_{1,2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2}i \ \ ; \ \ r_{3,4} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$$

$$y_i = \left\{e^{\sqrt{2}x} cos\sqrt{2}x, e^{\sqrt{2}x} sin\sqrt{2}x, e^{-\sqrt{2}x} cos\sqrt{2}x, e^{-\sqrt{2}x} sin\sqrt{2}x\right\} \to y_c = \sum_{i=1}^{4} c_i y_i \ \ ■$$

توضیح: دقت شود برای تعیین مجموعه کاملی از پایه جوابها, بایستی تمام ریشه‌های معادله مشخصه, اعم از حقیقی و مختلط محاسبه شود. مثلا اگر معادله مشخصه بصورت $r^4 = 1$ باشد, همه ریشه‌های آن, یعنی $r = \pm1, \pm i$ بایستی بدست آید. ■

2) $y^{(4)} - 8y''' + 26y'' - 40y' + 25y = 0 \quad ; \quad f(r) = 0 \to r^4 - 8r^4 + 26r^2 - 40r + 25 = 0$

از آنجا که ضرایب این معادله حقیقی بوده و عنوان شده است که $2 + i$ یک ریشه معادله است, لذا مزدوج آن یعنی $2 - i$ نیز جواب خواهد بود. پس معادله به $\big(r - (2+i)\big)\big(r - (2-i)\big) = r^2 - 4r + 5$ بخش‌پذیر است. پس از تقسیم باز هم به $r^2 - 4r + 5$ خواهیم رسید. در نتیجه دو جواب مضاعف خواهیم داشت. یعنی:

$$r_i = \left\{\underbrace{2 \pm i, 2 \pm i}_{t=2}\right\} \to y_i = \{e^{2x}\cos x, e^{2x}\sin x, xe^{2x}\cos x, xe^{2x}\sin x\}$$

$$\to y = \sum_{i=1}^{4} c_i y_i = e^{2x}[(c_1\cos x + c_2\sin x) + x(c_3\cos x + c_4\sin x)] \quad ■$$

مثال ۳-۳ معادله دیفرانسیلی بیابید که دسته منحنیهای زیر جواب آن باشد.

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}sin2x + c_3e^{-x}cos2x$$

حل یک راه, استفاده از دترمینانی است که در بخش ۱-۹ معرفی گردید. در اینجا با توجه به فرم جوابها میتوان گفت که معادله حاکم ضرایب ثابت داشته و ریشه های آن $r = \{3, -1 \pm 2i\}$ میباشند. لذا:

$$(r-3)(r^2 + 2r + 5) = r^3 - r^2 - r - 15 = 0 \to y''' - y'' - y' - 15y = 0 \quad ■$$

مثال ۴-۳ اگر xe^{2x} یک جواب معادله زیر باشد سایر جوابها را بیابید.

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} - 5y'' + a(y' - y) = 0 \quad ; \quad a \in \mathbb{R}$$

حل اینکه یک جواب بصورت xe^{2x} میباشد, یعنی معادله مشخصه آن بر $(r-2)^2$ بخش پذیر است؛ یعنی عدد 2 هم ریشه معادله مشخصه است هم ریشه مشتق آن. لذا:

$$f(r) = r^4 - 4r^3 - 5r^2 + ar - a \to f'(2) = 0 \to a = 36$$

$$g(r) = \frac{f(r)}{(r-2)^2} = r^2 - 9 \xrightarrow{g(r)=0} r = \pm3 \to y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3e^{3x} + c_4e^{-3x} \quad ■$$

مثال ۵-۳ به روش ضرایب نامعین, فرم جواب خصوصی معادلات زیر را بدست آورید.

1) $y^{(4)} + 2y'' + y = xsinx \quad ; \quad f(r) = r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2+1)^2 = 0 \to r = \pm i, \pm i$

$\alpha + i\beta = 0 + 1i \to s = 2$

$y_p = x^2e^{0x}\{(A_1x + A_0)sinx + (B_1x + B_0)cosx\}$ ■

2) $y''' + 7y'' + 16y' + 12y = \underbrace{e^{-2x}}_{g_1} + \underbrace{xe^{x}}_{g_2}$

$f(r) = r^3 + 7r^2 + 16r + 12$

پس باید بدانیم اعداد -2 و 1 چند بار ریشه معادله میباشند. لذا:

$f(1) \neq 0 \;;\; f(-2) = 0 \rightarrow f'(-2) = 0 \rightarrow f''(-2) \neq 0$

$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = x^2 e^{-2x} A_0 + x^0 e^x (B_1 x + B_0)$ ■

توضیح: برای تعیین جواب عمومی از آنجا که دیده شد, عدد -2 دوبار ریشه معادله مشخصه می‌باشد, لذا با تقسیم $f(r)$ بر $(r+2)^2$ به $r+3$ خواهیم رسید. یعنی ریشه سوم $r=-3$ خواهد بود. در نتیجه:

$y_c = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + c_3 e^{-3x}$

راه ساده‌تر آن است که مطابق توضیح مثال ۳-۱ حاصلضرب ریشه‌های معادله $r^3 + 7r^2 + 16r + 12 = 0$ برابر است با $P = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$ یعنی $P = r_1 r_2 r_3 = -12$, بنابراین $r_3 = -3$ خواهد بود.

یا اگر در ابتدا متوجه نشویم که $r=-2$ یک ریشه معادله است, مشابه آنچه در مثال ۳-۱ عنوان شد می‌توان گفت که مقسوم-علیه‌های $a_0 = 12$ و $a_3 = 1$ به ترتیب عبارتند از $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12\}$ و $\{\pm1\}$. در نتیجه اگر معادله دارای جواب گویا باشد, این جواب حتما در بین گزینه‌های $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12\}$ است. با امتحان کردن این گزینه‌ها جوابهای گویا صرفا $\{-2, -3\}$ خواهند بود که -2 ریشه تکراری خواهد بود. ■

3) $(D^4 + 2D^2 + 1)(D^2 - 3D)^2 y = x^2 + 1 + 2x\sin x + x\cosh 3x \quad ; \quad D = \frac{d}{dx}$

$\rightarrow f(r) = (r^4 + 2r^2 + 1)(r^2 - 3r)^2 = 0 \rightarrow r = \pm i \;, \pm i \,, 0 \,, 0 \,, 3 \,, 3$

با تبدیل $\cosh 3x$ به فرم نمایی خواهیم داشت:

$$g(x) = \underbrace{x^2 + 1}_{g_1} + \underbrace{2x\sin x}_{g_2} + \underbrace{\frac{x}{2} e^{3x}}_{g_3} + \underbrace{\frac{x}{2} e^{-3x}}_{g_4}$$

حال بطور مجزا فرم جواب را برای هر یک از g_i ها بدست می‌آوریم.

۱- تابع g_1 یک چندجمله‌ای درجه 2 بوده و $r=0$ دو بار ریشه معادله مشخصه می‌باشد, لذا:

$y_{p_1} = x^2 (A_2 x^2 + A_1 x + A_0)$

۲- تابع g_2 ضرب یک چندجمله‌ای درجه 1 در $e^{0x}\sin x$ بوده که متناظر $r = \pm i$ میباشد و دو بار ریشه معادله مشخصه است:

$y_{p_2} = x^2 e^{0x} \{(B_1 x + B_0)\sin x + (C_1 x + C_0)\cos x\}$

۳- تابع g_3 ضرب یک چندجمله‌ای درجه 1 در e^{3x} بوده که متناظر $r=3$ میباشد و دو بار ریشه معادله مشخصه است. لذا:

$y_{p_3} = x^2 e^{3x} (D_1 x + D_0)$

۴- تابع g_4 ضرب یک چندجمله‌ای درجه 1 در e^{-3x} بوده که متناظر $r=-3$ میباشد که ریشه معادله مشخصه نیست. لذا:

$y_{p_4} = x^0 e^{-3x} (E_1 x + E_0)$

بنابراین جواب خصوص, جمع چهار جواب بالا میباشد. ■

مثال ۳-۶ به روش تغییر پارامتر(لاگرانژ) معادله $y''' + y' = \sin x$ را حل کنید.

حل بدیهی است جوابهای پایه این معادله بصورت $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$ و $y_3 = \sin x$ می‌باشد. همچنین ضریب y''' برابر 1 می‌باشد. چنانچه از فرم ماتریسی دستگاه لاگرانژ استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & cosx & sinx \\ 0 & -sinx & cosx \\ 0 & -cosx & -sinx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{sinx}{1} \end{Bmatrix}$$

از آنجا که در ستون اول ماتریس, دو درایه صفر وجود دارد, لذا دو سطر دوم و سوم یک دستگاه دو معادله دو مجهولِ فاقد u_1' خواهد بود که u_2' و u_3' را خواهد داد. در نهایت با جایگذاری در سطر اول u_1' نیز بدست می‌آید.

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} sinx \\ -\dfrac{sin2x}{2} \\ -sin^2x \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -cosx \\ \dfrac{1}{2}cos^2x \\ \dfrac{1}{4}sin2x - \dfrac{1}{2}x \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow y_p = \sum_{i=1}^{n} u_i\, y_i = -cosx + \frac{1}{2}cos^3x + \left(\frac{1}{4}sin2x - \frac{1}{2}x\right)sinx$$

بدیهی است میتوان ترم $-cosx$ را از جواب خصوصی حذف کرد زیرا در جواب عمومی وجود دارد. در نتیجه:

$$y = c_1 + c_2cosx + c_3sinx + \frac{1}{2}cos^3x + \left(\frac{1}{4}sin2x - \frac{1}{2}x\right)sinx \ \blacksquare$$

توضیح: می‌توان u_i ها را با استفاده از رابطه $u_i' = \frac{W_i}{W}$ نیز بدست آورد:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & cosx & sinx \\ 0 & -sinx & cosx \\ 0 & -cosx & -sinx \end{vmatrix} = 1 \quad ; \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & cosx & sinx \\ 0 & -sinx & cosx \\ sinx & -cosx & -sinx \end{vmatrix} = sinx$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & sinx \\ 0 & 0 & cosx \\ 0 & sinx & -sinx \end{vmatrix} = -\frac{sin2x}{2} \quad ; \quad W_3 = \begin{vmatrix} 1 & cosx & 0 \\ 0 & -sinx & 0 \\ 0 & -cosx & sinx \end{vmatrix} = -sin^2x$$

$$u_i' = \frac{W_i}{W} \rightarrow u_1' = \frac{sinx}{1} = sinx \ ; \ u_2' = \frac{-\frac{sin2x}{2}}{1} = -\frac{sin2x}{2} \ ; \ u_3' = \frac{-sin^2x}{1} = -sin^2x \ \blacksquare$$

تمرینات بخش ۳-۱

۱- معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

1) $y^{(4)} - y'' = 3x^2 - sin2x$; Ans: $y = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4e^{-x} - \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 - \frac{1}{20}sin2x$

2) $y''' + 2y'' - 6y' + 8y = 2e^{2x}cosx + 6e^{2x}sinx$

Ans: $y = c_1e^{-4x} + c_2e^xcosx + c_3e^xsinx + \frac{10}{37}e^{2x}sinx - \frac{14}{37}e^{2x}cosx$

3) $y''' - 3y'' + 2y' = x + e^x$; $y(0) = 1$; $y'(0) = -\frac{1}{4}$; $y''(0) = -\frac{3}{2}$

Ans: $y = 1 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}x^2 - xe^x$

4) $y''' - 3y' + 2y = e^{-2x} + 2sinhx$

Ans: $y = c_1e^{-2x} + (c_2 + c_3x)e^x + \frac{x}{9}e^{-2x} + \frac{x^2}{6}e^x - \frac{1}{4}e^{-x}$

5) $y^{(4)} - y = cosxcoshx$; Ans: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3cosx + c_4sinx - \frac{1}{5}cosxcoshx$

6) $y^{(4)} + y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin x + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x$; Ans: $y = y_c + y_p$

$$y_c = c_1e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x + c_3e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x$$

$$y_p = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}(A_0\sin x + A_1\cos x) + xe^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(B_0\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x + B_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

۲- به روش تغییر پارامتر(لاگرانژ) معادله زیر را حل کنید.

$$y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^x}{1 + e^{-x}}$$

Ans: $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}(e^x + 1)^2ln(e^x + 1)$

۳- مثال ۳-۶ را به دو روش زیر نیز حل کنید.

الف: استفاده از روش ضرایب نامعین برای تعیین جواب خصوصی

ب: انتخاب $z = y'$ و تبدیل آن به یک معادله مرتبه دو و سپس حل مساله جدید.

۴- اگر توابع e^x , e^{-x} , xe^x , $cos2x$ و $sin2x$ جوابهای مستقل معادله زیر باشند, ضرایب a_0 تا a_4 را بدست آورید.

$$y^{(5)} + a_0y^{(4)} + a_1y^{(3)} + a_2y'' + a_3y' + a_4y = 0$$

Ans: $a_0 = -1$; $a_1 = 3$; $a_2 = -3$; $a_3 = -4$; $a_4 = 4$

۳-۲- معادله کوشی-اویلر

فرم کلی این معادله بصورت زیر است:

$$L[y] = a_nx^ny^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0y = 0 \quad ; \quad x > 0 \quad ; \quad a_i \in \mathbb{R}$$

در اینجا نیز مشابه معادله کوشی-اویلر مرتبه ۲ به دو روش می‌توان مساله را حل کرد.

روش اول: برای تعیین معادله مشخصه, جایگزین‌های زیر را انجام میدهیم.

$$(y \to 1 \quad ; \quad xy' \to r \quad ; \quad x^2y'' \to r(r-1) \quad ; \quad x^3y''' \to r(r-1)(r-2) \quad ; \quad \cdots)$$

۱- اگر ریشه ها حقیقی و متمایز باشند, پایه ها بصورت زیر خواهند بود:

$$\{x^{r_1}, x^{r_2}, \cdots, x^{r_n}\}$$

۲- اگر ریشه حقیقی r به تعداد kبار تکرار شده باشد, جواب پایه متناظر آن بصورت زیر است:

$$\{x^r, x^r lnx, \cdots, x^r(lnx)^{k-1}\}$$

۳- متناظر هر جفت عدد مختلط $\lambda \pm \mu i$ که t بار تکرار شده باشد,$2t$ جواب پایه بصورت زیر خواهد بود:

$$\{x^{\lambda} \cos(\mu lnx), x^{\lambda} \sin(\mu lnx), \cdots, x^{\lambda} \cos(\mu lnx)(lnx)^{t-1}, x^{\lambda} \sin(\mu lnx)(lnx)^{t-1}\}$$

مثلا اگر ۸ ریشه معادله مشخصه متناظر با یک معادله کوشی-اویلر مرتبه ۸ , بصورت r_i باشند, پایه‌های y_i عبارتند از:

$$r_i = \left\{\underbrace{4}_{k=1}, \underbrace{6,6,6}_{k=3}, \underbrace{-3 \pm 4i, -3 \pm 4i}_{t=2}\right\} \to y_i = \{x^4, x^6, x^6 lnx, x^6 (lnx)^2$$
$$, x^{-3} \cos(4lnx), x^{-3} \sin(4lnx), x^{-3} \cos(4lnx)\, lnx, x^{-3} \sin(4lnx)\, lnx\}$$

در نهایت در همه حالات $y_c = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ خواهد بود.

روش دوم: مشابه معادلات مرتبه دو برای معادله کوشی اویلر مرتبه بالاتر نیز با تغییر متغیر $x = e^t$ و تبدیلات زیر به یک معادله خطی با ضرایب ثابت خواهیم رسید.

$$D = \frac{d}{dt} \;:\; xy' = Dy \quad ; \quad x^2 y'' = D(D-1)y \quad ; \quad x^3 y''' = D(D-1)(D-2)y \quad ; \cdots$$

مثال ۳-۷ جواب معادله غیرهمگن زیر را بدست آورید.

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = \frac{2}{x} \quad ; \quad x > 0$$

حل روش اول: با نوشتن معادله مشخصه کوشی-اویلر خواهیم داشت:

$$\to r(r-1)(r-2) + r(r-1) - 2r + 2 = 0 \to r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$$

از آنجا که مجموع ضرایب صفر است, یک ریشه $r = 1$ بوده و با تقسیم بر $r - 1$ دو ریشه دیگر 2 و -1 بدست می‌آید.

$$r_1 = 1 \to y_1 = x^1 \quad ; \quad r_2 = 2 \to y_2 = x^2 \quad ; \quad r_3 = -1 \to y_3 = x^{-1}$$

برای یافتن جواب خصوصی به روش لاگرانژ بایستی ضریب y''' برابر 1 گردد, لذا طرفین را بر x^3 تقسیم می‌کنیم. در نتیجه:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{Bmatrix} \to \begin{bmatrix} x & x^2 & x^{-1} \\ 1 & 2x & -x^{-2} \\ 0 & 2 & 2x^{-3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x^{-4} \end{Bmatrix} \xrightarrow{r_2 - x^{-1} r_1 \to r_2}$$

$$\begin{bmatrix} x & x^2 & x^{-1} \\ 0 & x & -2x^{-2} \\ 0 & 2 & 2x^{-3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x^{-4} \end{Bmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2x^{-1} r_2 \to r_3} \begin{bmatrix} x & x^2 & x^{-1} \\ 0 & x & -2x^{-2} \\ 0 & 0 & 6x^{-3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x^{-4} \end{Bmatrix}$$

$$u_3' = \frac{1}{3x} \; ; \; u_2' = \frac{2}{3x^4} \; ; \; u_1' = -\frac{1}{x^3} \to y_p = \sum_{i=1}^{n} u_i\, y_i = \frac{5}{18x} + \frac{lnx}{3x}$$

بدیهی است میتوان ترم $\frac{5}{18x}$ را از جواب خصوصی حذف کرد زیرا در جواب عمومی وجود دارد. در نتیجه:

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^{-1} + \frac{lnx}{3x} \quad \blacksquare$$

توضیح: می‌توان u_i ها را با استفاده از رابطه $u_i' = \frac{W_i}{W}$ نیز بدست آورد:

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^{-1} \\ 1 & 2x & -x^{-2} \\ 0 & 2 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = \frac{6}{x} \quad ; \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^{-1} \\ 0 & 2x & -x^{-2} \\ 2x^{-4} & 2 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = -6x^{-4}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 & x^{-1} \\ 1 & 0 & -x^{-2} \\ 0 & 2x^{-4} & 2x^{-3} \end{vmatrix} = 4x^{-5} \quad ; \quad W_3 = \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 2x^{-4} \end{vmatrix} = 2x^{-2}$$

$$u_i' = \frac{W_i}{W} \rightarrow u_1' = \frac{-6x^{-4}}{6x^{-1}} = -\frac{1}{x^3} \quad ; \quad u_2' = \frac{4x^{-5}}{6x^{-1}} = \frac{2}{3x^4} \quad ; \quad u_3' = \frac{2x^{-2}}{6x^{-1}} = \frac{1}{3x} \quad \blacksquare$$

روش دوم: با تغییر متغیر $x = e^t$, این معادله به ضرایب ثابت تبدیل می‌شود.

$$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = \frac{2}{x} \xrightarrow{x=e^t} [D(D-1)(D-2) + D(D-1) - 2D + 2]y = 2e^{-t}$$

$$\rightarrow \underbrace{(D^3 - 2D^2 - D + 2)}_{L=f(D)} y = 2e^{-t}$$

که $f(D)$ یک عملگر با ضرایب ثابت بوده و لذا معادله مشخصه بصورت $f(r) = 0$ و جواب عمومی به شکل زیر خواهد بود:

$$f(r) = 0 \rightarrow r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$$

$$r_1 = 1 \rightarrow y_1 = e^{1t} \quad ; \quad r_2 = 2 \rightarrow y_2 = e^{2t} \quad ; \quad r_3 = -1 \rightarrow y_3 = e^{-t}$$

$$\rightarrow y_c(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{-t}$$

از آنجا که ترم غیرهمگن بصورت نمایی می‌باشد, می‌توان به جای لاگرانژ به روش ضرایب نامعین نیز جواب خصوصی را بدست آورد.

$$g(t) = 2e^{-t} \rightarrow \alpha = -1 \rightarrow s = 1 \rightarrow y_p(t) = A_0t^1e^{-t}$$

$$(D^3 - 2D^2 - D + 2)y = 2e^{-t} \rightarrow 6A_0e^{-t} = 2e^{-t} \rightarrow A_0 = \frac{1}{3} \rightarrow y_p(t) = \frac{1}{3}te^{-t}$$

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{-t} + \frac{1}{3}te^{-t}$$

$$x = e^t \rightarrow y(x) = c_1x + c_2x^2 + c_3x^{-1} + \frac{lnx}{3x}$$

دیده می‌شود تبدیل معادله کوشی-اویلر به ضرایب ثابت و استفاده از روش ضریب نامعین, ساده‌تر از روش اول و لاگرانژ می‌باشد.■

۳-۳- روش کاهش مرتبه

در اینجا نیز هدف آن است که مرتبه معادله کاهش یابد. مثلا معادله خطی مرتبه ۳ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$L[y] = y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = g(x)$$

مشابه آنچه در روش کاهش مرتبه در معادلات مرتبه دو عنوان شد با انتخاب $y(x) = u(x)v(x)$ خواهیم داشت:

$$y' = uv' + u'v \to y'' = uv'' + 2u'v' + u''v \to y''' = uv''' + 3u'v'' + 3u''v' + u'''v$$

$$\to (uv''' + 3u'v'' + 3u''v' + u'''v) + p_2(uv'' + 2u'v' + u''v) + p_1(uv' + u'v) + p_0 uv = g$$

$$uv''' + (3u' + p_2 u)v'' + (3u'' + 2p_2 u' + p_1 u)v' + (u''' + p_2 u'' + p_1 u' + p_0 u)v = g$$

که معادله مرتبه سوم دیگری بر حسب v میباشد. از آنجا که جواب بصورت حاصلضرب دو تابع منظور شده است لذا یک حق انتخاب خواهیم داشت.

اگر u بگونه‌ای انتخاب شود که ضریب v صفر شود, با انتخاب $z = v'$ به یک معادله مرتبه دو می‌رسیم. معنی این انتخاب آن است که u باید در $L[u] = 0$ صدق کند, یعنی یک جواب پایه معادله همگن باشد. به عبارتی با انتخاب $u = y_1$ جواب کامل معادله غیرهمگن عبارت است از $y = vy_1$ که v از حل یک معادله مرتبه دوم بدست می‌آید. بدیهی است اگر تصادفا ضریب v' نیز صفر گردد, با انتخاب $z = v''$ یک معادله مرتبه اول بر حسب z خواهیم داشت.

مثال ۳-۸ اگر بدانیم $y = e^x$ یک جواب معادله همگن زیر است, جواب عمومی آنرا بدست آورید.

$$(2 - x)y''' + (2x - 3)y'' - xy' + y = 0 \quad ; \quad x < 2$$

حل با انتخاب $y = vy_1 = ve^x$ و جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$$y = ve^x \to y' = (v + v')e^x \to y'' = (v + 2v' + v'')e^x \to y''' = (v + 3v' + 3v'' + v''')e^x$$

$$(2 - x)(v + 3v' + 3v'' + v''')e^x + (2x - 3)(v + 2v' + v'')e^x - x(v + v')e^x + ve^x = 0$$

$$(2 - x)v''' + (3 - x)v'' = 0 \qquad ; \qquad z = v'' \to (2 - x)z' + (3 - x)z = 0$$

$$\to z' + \frac{3 - x}{2 - x}z = 0 \to z = c_1 e^{-\int \frac{3-x}{2-x}dx} = c_1 e^{\int\left(-1+\frac{1}{x-2}\right)dx} = c_1 e^{-x} e^{ln|x-2|} = c_1(2 - x)e^{-x}$$

$$v'' = z = c_1(2 - x)e^{-x} \to v = c_1 x e^{-x} + c_2 x + c_3 \to y = ve^x = c_1 x + c_2 x e^x + c_3 e^x \ \blacksquare$$

توضیح ۱: در معادلات مرتبه بالاتر به فرم زیر با تغییر تابع $y^{(m)} = z$ مساله به مرتبه‌ای پایین‌تر, یعنی $(n - m)$ تبدیل میشود.

$$y^{(n)} = f\left(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \cdots, y^{(n-1)}\right) \quad ; \quad m < n$$

توضیح ۲: اگر یک معادله غیرهمگن مرتبه n , ضرایب ثابت یا کوشی اویلر نباشد, اما n جواب مستقل معادله همگن متناظر در دست باشد, می‌توان مشابه مثال ۲-۱۰ , با روش تغییر پارامتر(لاگرانژ) معادله غیرهمگن را حل کرد. (تمرین ۵)

توضیح ۳: برای یک معادله خطی از مرتبه n بصورت $P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_0(x)y = G(x)$, مشابه معادله خطی مرتبه ۲, شرط کامل بودن آن است که:

$$(-1)^n P_n^{(n)}(x) + \cdots + P_2''(x) - P_1'(x) + P_0(x) = 0$$

تمرینات بخش‌های ۳-۲ و ۳-۳

۱- جواب معادله زیر را بدست آورید.

$$(2x + 3)^3 y''' + 3(2x + 3)y' - 6y = 0 \quad ; \quad x > 0$$

<u>*Ans*</u>: $y = c_1(2x + 3) + c_2(2x + 3)^{\frac{1}{2}} + c_3(2x + 3)^{\frac{3}{2}}$

۲- جواب معادله زیر را بدست آورید. یک جواب پایه داده شده است.

$$x^2(x+3)y''' - 3x(x+2)y'' + 6(x+1)y' - 6y = x^3\ ;\ x>0\ ;\ \ y_1 = x+1$$

<u>Ans</u> : $y_2 = x^2\ \ ;\ \ y_3 = x^3$

۳- اگر $y_1 = x$ یک جواب معادله زیر باشد, جواب کامل آنرا بیابید.

$$x^3(sinx)y''' - (3x^2sinx + x^3cosx)y'' + (6xsinx + 2x^2cosx)y' - (6sinx + 2xcosx)y = 0$$

<u>Ans:</u> $y = -c_1xsinx + c_2x^2 + c_3x$

۴- جواب معادله زیر بیابید.

$$y^{(4)} - y'' = 3x^2 - sin2x\ \ ;\ \ \underline{Ans:}\ \ y = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4e^{-x} - \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + \frac{1}{20}sin2x$$

۵- اگر x , e^x و e^{-x} جوابهای پایه معادله زیر باشند (جوابهای مستقل معادله <u>همگن</u> متناظر), جواب کامل آنرا بدست آورید.

$$xy^{(3)} - y'' - xy' + y = 8x^2e^x\ \ ;\ \ \underline{Ans:}\ \ y = c_1x + c_2e^x + c_3e^{-x} + 2x(x-1)e^x$$

* ۳-۴- دو روش دیگر در حل معادلات خطی غیرهمگن

۳-۴-۱- روش تجزیه عملگرها

قبلا عملگر D بصورت $D = \frac{d}{dx}$ تعریف شد. بعنوان یک مثال ساده نشان می‌دهیم که:

$$(D^2 - D - 2)y = (D+1)(D-2)y$$

$$(D+1)(D-2)y = (D+1)(y' - 2y) = D(y' - 2y) + (y' - 2y)$$

$$= y'' - 2y' + y' - 2y = y'' - y' - 2y = (D^2 - D - 2)y$$

نتیجه این مثال ساده آن است که برای عملگر با ضرایب <u>ثابت</u> میتوان عملگر را مشابه عبارات جبری تجزیه کرد.

بنابراین برای حل معادله $L[y] = (D^2 + pD + q)y = g$, چنانچه بتوان عملگر $D^2 + pD + q$ را بصورت $(D+u)(D+v)$ تجزیه کرد, می‌توان نوشت:

$$L[y] = g \to (D^2 + pD + q)y = g \to (D+u)\underbrace{(D+v)y}_{z} = g \to \begin{cases}(D+u)z = g\\(D+v)y = z\end{cases}$$

به عبارتی به دو معادله خطی مرتبه اول رسیدیم که از اولی z بدست آمده و با جایگذاری z به عنوان ترم غیرهمگن معادله دوم, جواب نهایی y بدست می‌آید. دیده شد که در معادلات با ضرایب ثابت, این تجزیه درست مشابه عبارات جبری امکان‌پذیر است.

مثال ۳-۹ معادلات زیر را حل کنید.

$$1)\ \ y'' - y' - 2y = e^{3x} \to (D^2 - D - 2)y = e^{3x} \to (D+1)\underbrace{(D-2)y}_{z} = e^{3x}$$

$$\to \begin{cases}(D+1)z = e^{3x} \to z = c_1e^{-x} + \frac{1}{4}e^{3x}\\(D-2)y = c_1e^{-x} + \frac{1}{4}e^{3x} \to y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + \frac{1}{4}e^{3x}\end{cases}\ \ \blacksquare$$

$$2)\ \ y''-2y'+y=\frac{e^x}{1+x^2}\rightarrow (D^2-2D+1)y=\frac{e^x}{1+x^2}\rightarrow (D-1)\underbrace{(D-1)y}_{z}=\frac{e^x}{1+x^2}$$

$$\rightarrow\begin{cases}(D-1)z=\dfrac{e^x}{1+x^2}\rightarrow z=e^x(c_1+tan^{-1}x)\\(D-1)y=e^x(c_1+tan^{-1}x)\rightarrow y=c_1xe^x+c_2e^x-\dfrac{1}{2}e^x ln(1+x^2)+xe^x\,tan^{-1}x\end{cases}$$

که این معادله در قسمت دوم از مثال ۲-۹ با استفاده از روش تغییر پارامتر(لاگرانژ) نیز حل شده است. ■

توضیح: از آنجا که جواب عمومی معادله با ضرایب ثابت, صرفا با نوشتن یک معادله مشخصه تعیین می‌شود, شاید بهتر باشد در حل معادله به این روش صرفا دنبال جواب خصوصی بوده و بی‌جهت حجم محاسبات را زیاد نکنیم. به عبارتی اگر در حل دو معادله مرتبه اول اشاره شده در بالا از نوشتن ثابتها صرفنظر کنیم, حل مساله ساده‌تر شده و در نهایت جواب خصوصی بدست می‌آید, که اگر جواب کامل مدنظر باشد می‌توان آنرا با جواب عمومی جمع کرد. مثلا در معادله اول, معادله مشخصه دارای ریشه‌های $-1,2$ بوده لذا $y_c=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$ و در معادله دوم نیز از آنجا که معادله مشخصه دارای ریشه تکراری 1 است, لذا جواب عمومی $y_c=c_1xe^x+c_2e^x$ خواهد بود, لذا بدون وارد کردن ثابتهای انتگرال, فقط به دنبال جواب خصوصی خواهیم رفت. ■

بطور خلاصه در معادله $L[y]=g$ اگر بتوان $L=f(D)$ را تجزیه کرد حل مساله به معادله مرتبه اول منجر میشود که در واقع نوعی روش کاهش مرتبه است. برای ضرایب ثابت ادامه این روش به روش اپراتور معکوس منجر می‌شود که در بخش ۳-۴-۲ بیان خواهد شد. روش تجزیه عملگرها برای معادلات با مرتبه بالاتر نیز امکان‌پذیر است. در این روش جواب کامل معادله بدست آمده و نیازی نیست ابتدا y_c و بعد y_p را بدست آوریم. هرچند در توضیح بالا دیده شد برای ساده‌تر شدن حل مساله می‌توان صرفا به دنبال جواب خصوصی بود.

قابل ذکر است از آنجا که در این روش نیازی نیست ترم غیرهمگنی فرم خاصی داشته باشد, لذا کارایی آن برای معادلات خطی, از روش ضرایب نامعین بیشتر است.

اما اگر ضرایب ثابت نباشد باز هم تجزیه عملگر براحتی امکان پذیر است؟ به مثال زیر توجه شود.

مثال ۳-۱۰ الف: درستی رابطه زیر را نشان دهید:

$$xD^2+(2x+3)D+4=(D+2)(xD+2)$$

ب: به کمک قسمت قبل, معادله $xy''+(2x+3)y'+4y=e^{2x}$ را حل کنید.

$$(D+2)(xD+2)y=(D+2)(xDy+2y)=D(xy'+2y)+2(xy'+2y)$$

$$=xy''+y'+2xy'+2y'+4y=[xD^2+(2x+3)D+4]y\quad\boxed{\surd}$$

$$xy''+(2x+3)y'+4y=e^{2x}\rightarrow (D+2)\underbrace{(xD+2)y}_{z}=e^{2x}\rightarrow\begin{cases}(D+2)z=e^{2x}\\(xD+2)y=z\end{cases}$$

$$(D+2)z=e^{2x}\rightarrow z=\frac{1}{4}e^{2x}+c_1e^{-2x}$$

$$(xD+2)y=\underbrace{\frac{1}{4}e^{2x}+c_1e^{-2x}}_{z}\rightarrow x^2y=\frac{1}{8}e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}c_1e^{-2x}\left(x+\frac{1}{2}\right)+c_2\quad ■$$

اما اگر در مثال بالا راهنمایی قسمت الف داده نشده باشد,آیا باز حل معادله ساده است؟ مثلا فرض کنید هدف حل معادله زیر باشد:

$$y'' - x^2 y = 0 \rightarrow (D^2 - x^2)y = 0 \xrightarrow{?} (D + x)(D - x)y = 0$$

کنترل می‌کنیم که آیا تجزیه حدس زده شده برقرار می‌باشد یا خیر.

$$(D + x)(D - x)y = \underbrace{(D + x)(y' - xy)}_{D(y'-xy)+x(y'-xy)} = y'' - (x^2 + 1)y \neq y'' - x^2 y$$

$$(D - x)(D + x)y = y'' - (x^2 - 1)y \neq y'' - x^2 y$$

یعنی حتی $(D + x)(D - x) \neq (D - x)(D + x)$. بنابراین اشکال کار مربوط به سخت بودن تجزیه عملگر (در حالت ضرایب غیر ثابت) می‌باشد. برای حل این مشکل به روش زیر عمل می‌کنیم.

فرض کنید $L[y] = (D^2 + pD + q)y = g$ باشد. اگر عملگر $D^2 + pD + q$ را بصورت $(D + u)(D + v)$ در نظر بگیریم, بایستی بتوان u و v را بدست آورد. برای این منظور:

$$L[y] = (D + u)(D + v)y = (D + u)(y' + vy) = D(y' + vy) + u(y' + vy) = g$$

$$\rightarrow [D^2 + (u + v)D + (v' + uv)]y = g \xrightarrow{(D^2+pD+q)y=g} \begin{cases} p = u + v \\ q = v' + uv \end{cases} \rightarrow v' = q - pv + v^2$$

بنابراین با حذف u از دستگاه, به یک معادله ریکاتی بر حسب v می‌رسیم که طبیعتا مشکلات حل این معادله از جمله لزوم داشتن (یا حدس) یک جواب اولیه را به همراه خواهد داشت! پس از تعیین v , تابع u نیز از رابطه $u = p - v$ بدست می‌آید.

در انتها لازم بذکر است که اگر چه در اینجا روش تجزیه عملگرها به عنوان یک روش برای حل معادلات ناهمگن عنوان شد, اما بدیهی است از آن می‌توان برای حل معادلات همگن نیز استفاده کرد, به شرط آنکه بتوان عملگر مورد نظر را تجزیه کرد. به عبارتی برای معادله همگنی که ضرایب آن ثابت نیست بتوان جواب معادله ریکاتیِ $v' = q - pv + v^2$ را بدست آورد (مثال بعد).

مثال ۳-۱۱ معادله همگن زیر را حل کنید.

$$y'' + 2xy' + (1 + x^2)y = 0 \quad \rightarrow \quad v' = q - pv + v^2 = 1 + x^2 - 2xv + v^2$$

معادله ریکاتی بالا در مثال ۱-۱۴ با داشتن یک جواب $v_1 = x$ حل شد و جواب بصورت $v = x + \frac{1}{c-x}$ بدست آمد. از آنجا که هدف صرفا تجزیه عبارت عملگر می‌باشد, پس یافتن تنها یک v و یک u کافی است. مثلا با انتخاب $v = x$ خواهیم داشت:

$$v = x \ , \ \ u = p - v = 2x - x = x \rightarrow (D + x)\underbrace{(D + x)y}_{z} = 0$$

$$z' + xz = 0 \rightarrow z = c_1 e^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow y' + xy = c_1 e^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow y = (c_1 x + c_2)e^{-\frac{x^2}{2}} \ \blacksquare$$

<u>توضیح ۱</u>: انتخاب دیگری از v نیز به همان جواب می‌رسد. مثلا اگر در $v = x + \frac{1}{c-x}$ مقدار $c = 0$ انتخاب شود خواهیم داشت:

$$v = x - \frac{1}{x} \ \ ; \ \ u = p - v = x + \frac{1}{x} \rightarrow \left(D + x + \frac{1}{x}\right)\underbrace{\left(D + x - \frac{1}{x}\right)y}_{z} = 0$$

$$z' + \left(x + \frac{1}{x}\right)z = 0 \rightarrow z = \frac{c_1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow y' + \left(x - \frac{1}{x}\right)y = \frac{c_1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow y = (c_2 x - c_1)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

<u>توضیح ۲</u>: لازم به ذکر است که در توضیح ارائه شده در بخش ۲-۱۳-۳ و همچنین در تمرین ۲ از مجموعه تمرینات بخش ۱-۵ , به دو شکل دیگر, ارتباط بین معادله $y'' + p(x)y' + q(x) = 0$ و تبدیل آن به معادله ریکاتی دیده شد. ■

۳-۴-۲- روش اپراتور معکوس

روشی برای تعیین جواب خصوصی معادلات خطی است که مناسب برای ضرایب ثابت بوده و می‌تواند جایگزین روش ضرایب نامعین باشد. بخصوص برای وقتی که معادله مشخصه دارای ریشه تکراری باشد. لازم بذکر است که این روش به لحاظ مبانی ریاضیاتی و تعاریف خاص آن, چندان مورد قبول نبوده و اکثر کتابهای مرجع آنرا قابل پذیرش نمی‌دانند.

فرض کنید هدف حل معادله ساده $y' = g(x)$ باشد که با یک انتگرال‌گیری ساده بدست می‌آید. اگر این معادله را به شکل $Dy = g(x)$ بیان کنیم, می‌توان جواب را به شکل $y = \frac{1}{D} g(x)$ تعریف کرد. بدیهی است از آنجا که D یک اپراتور است, این کار به لحاظ ریاضی بی معنی است. اما از آنجا که می‌دانیم جواب مساله, انتگرال $g(x)$ میباشد, می‌توان تصور کرد که چون D معادل مشتق است, لذا $\frac{1}{D}$ را معادل انتگرال تعریف کرده‌ایم. به همین ترتیب در حل معادله $y' + y = g(x)$ خواهیم داشت:

$$Dy + y = g(x) \to (D+1)y = g(x) \xrightarrow{\text{تعریف}} y = \frac{1}{D+1} g$$

حال سوال این است که اگر معنی $\frac{1}{D} g$ معادل انتگرال از تابع g است, تعبیر $\frac{1}{D+1} g$ چه خواهد بود؟ در حالت کلی یک معادله مرتبه خطی با ضرایب ثابت بصورت زیر است:

$$L[y] = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = g \to \underbrace{(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_0)}_{L = f(D)} y = g$$

از آنجا که جواب عمومی معادله مرتبه خطی با ضرایب ثابت را می‌دانیم, هدف صرفا یافتن جواب خصوصی است. در نتیجه:

$$f(D) y_p = g \xrightarrow{\text{تعریف}} y_p = \frac{1}{f(D)} g \quad ; \quad \underline{Ex}:\ y'' - 2y = 3e^{-2x} \xrightarrow{\text{تعریف}} y_p = \frac{1}{D^2 - 2}(3e^{-2x})$$

به عبارتی در حالت کلی باید تعبیری برای $\frac{1}{f(D)}$ (که اصطلاحا اپراتور (عملگر) معکوس نامیده می‌شود) بدست آوریم.

بدیهی است در حالتی که $f(D) = D^n$ باشد $\frac{1}{D^n} g$ معادل n بار انتگرال‌گیری از g است. اما اغلب $f(D)$ اینگونه نبوده و به فرم یک چندجمله‌ای بر حسب D می‌باشد, که بایستی نحوه برخورد با این اپراتور معکوس را بیان کرد.

در ابتدا با $f(D) = D - m$ شروع می‌کنیم. برای مشخص شدن معنی عملگر $\frac{1}{D-m} g$, معادله $y' - my = g(x)$ را درنظر می‌گیریم. بنا به تعریف بالا جواب این معادله عبارت است از $y_p = \frac{1}{D-m} g(x)$. از طرف دیگر می‌توان به طریق معمول این معادله را حل کرد که جواب $y_p = e^{mx} \int e^{-mx} g(x) dx$ بدست می‌آید. لذا می‌توان $\frac{1}{D-m} g$ را معادل عبارت زیر دانست:

$$\frac{1}{D-m} g = e^{mx} \int e^{-mx} g(x) dx$$

مثال ۳-۱۲ یک جواب خصوصی برای معادلات زیر بدست آورید.

$$1)\ \ y'' - y' - 2y = 3e^{-2x} \to (D^2 - D - 2)y = 3e^{-2x} \to y_p = \frac{1}{(D+1)(D-2)} 3e^{-2x}$$

$$= \frac{1}{D+1}\left(\frac{1}{D-2} 3e^{-2x}\right) = \frac{1}{D+1}\left(\frac{-3}{4} e^{-2x}\right) = \frac{3}{4} e^{-2x} \quad \blacksquare$$

<u>توضیح</u>: می‌توان y_p را بصورت $y_p = \left(\frac{-1/3}{D+1} + \frac{1/3}{D-2}\right) 3e^{-2x}$ نوشت و از رابطه $\frac{1}{D-m} g$ استفاده کرد. ■

$$2)\ \ y''+3y'+2y=e^{e^x}\to y_p=\frac{1}{D^2+3D+2}\left(e^{e^x}\right)=\frac{1}{D+1}\left(e^{e^x}\right)-\frac{1}{D+2}\left(e^{e^x}\right)=I-J$$

$$\frac{1}{D-m}g=e^{mx}\int e^{-mx}g(x)dx\to I=\frac{1}{D+1}\left(e^{e^x}\right)=e^{-x}\int e^xe^{e^x}dx=e^{-x}e^{e^x}$$

$$J=\frac{1}{D+2}\left(e^{e^x}\right)=e^{-2x}\int e^{2x}e^{e^x}dx=e^{-2x}\int \underbrace{e^x}_{u}\,\underbrace{e^xe^{e^x}dx}_{dv}=e^{-2x}\Big(e^xe^{e^x}-\underbrace{\int e^xe^{e^x}dx}_{e^{e^x}}\Big)$$

$$y_p=e^{-x}e^{e^x}-e^{-2x}\left(e^xe^{e^x}-e^{e^x}\right)=e^{-2x}e^{e^x}\ \ \blacksquare$$

در ادامه بحث برای حل ساده‌تر معادلات با ضرایب ثابت, مشابه روش ضرایب نامعین, برای حالات خاص $g(x)$, روابط ساده‌تری بدست می‌آوریم. بدیهی است در حالتی که $g(x)$ به فرمهای زیر نباشد, مساله را درست مشابه مثال قبل می‌توان حل کرد.

لازم بذکر است که در ادامه تابع $f(r)$ در واقع همان معادله مشخصه‌ای است که قبلا عنوان شد. همچنین برای تعیین جواب خصوصی معادله کوشی-اویلر نیز بایستی ابتدا آنرا به معادله با ضرایب ثابت تبدیل کرد.

بررسی حالات خاص تابع $g(x)$

۱- تابع نمایی

در ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $f(\alpha)\neq 0$ در اینصورت:

$$if\ \ f(\alpha)\neq 0\to\frac{1}{f(D)}e^{\alpha x}=\frac{1}{f(\alpha)}e^{\alpha x}$$

اثبات: در اثبات قضایای این بخش, معمولا معکوس آنها را ثابت می‌کنیم. مثلا در اینجا نشان می‌دهیم $f(D)e^{\alpha x}=f(\alpha)e^{\alpha x}$ که اگر آنرا به شکل معکوس بنویسیم, حکم موردنظر ثابت می‌شود. با تعریف $f(D)=a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_0$ خواهیم داشت:

$$f(D)e^{\alpha x}=(a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}\cdots+a_0)e^{\alpha x}=f(\alpha)e^{\alpha x}\to\frac{1}{f(D)}e^{\alpha x}=\frac{1}{f(\alpha)}e^{\alpha x}$$

همچنین بدیهی است اگر $e^{\alpha x}$ در ضریبی ضرب شده باشد, این ضریب را می‌توان به بیرون منتقل کرد. ■

مثلا برای مثال قبل از آنجا که $\alpha=-2$ بوده و $f(\alpha)\neq 0$ در نتیجه:

$$y_p=\frac{1}{D^2-D-2}3e^{-2x}=3\frac{1}{(-2)^2-(-2)-2}e^{-2x}=\frac{3}{4}e^{-2x}$$

دیده شد که بایستی $f(\alpha)\neq 0$ باشد.

حال ثابت میکنیم اگر α ریشه مرتبه sام تابع $f(D)$ باشد, یعنی:

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots=f^{(s-1)}(\alpha)=0\,,f^{(s)}(\alpha)\neq 0$$

آنگاه:

$$\frac{1}{f(D)}e^{\alpha x}=x^s\frac{1}{f^{(s)}(\alpha)}e^{\alpha x}$$

اثبات: از آنجا که α ریشه مرتبه sام تابع $f(D)$ میباشد, لذا می‌توان این تابع را بصورت $f(D)=g(D)(D-\alpha)^s$ بیان کرد. در ابتدا ثابت می‌کنیم $f^{(s)}(\alpha)=s!\,g(\alpha)$. برای این منظور اگر فرض کنیم درجه چندجمله‌ای $g(D)$ برابر m باشد, آنگاه بسط تیلور این تابع حول α بصورت زیر است:

$$g(D)=g(\alpha)+c_1(D-\alpha)+c_2(D-\alpha)^2+\cdots+c_m(D-\alpha)^m$$
$$\to f(D)=g(\alpha)(D-\alpha)^s+c_1(D-\alpha)^{s+1}+c_2(D-\alpha)^{s+2}+\cdots+c_m(D-\alpha)^{s+m}$$
$$f^{(s)}(D)=s!\,g(\alpha)+h(D-\alpha)\to f^{(s)}(\alpha)=s!\,g(\alpha)$$

که تابع $h(D-\alpha)$ شامل توانهای مثبت $(D-\alpha)$ می‌باشد. حال خواهیم داشت:

$$f(D)(x^s e^{\alpha x})=g(D)(D-\alpha)^s(x^s e^{\alpha x})=g(D)s!\,e^{\alpha x}=g(\alpha)s!\,e^{\alpha x}=f^{(s)}(\alpha)e^{\alpha x}$$
$$\to \frac{1}{f(D)}e^{\alpha x}=x^s\frac{1}{f^{(s)}(\alpha)}e^{\alpha x}$$

از آنجا که $f(r)$ همان معادله مشخصه میباشد, این نتیجه درست معادل آن است که قبلا در روش ضرایب نامعین عنوان شد اگر α ریشه مرتبه sام تابع $f(r)$ باشد, بایستی چندجمله‌ای انتخابی را در x^s ضرب کرد. ■

بدیهی است اگر در ابتدا متوجه نشویم که α ریشه تابع $f(D)$ است, مشکلی ایجاد نمی‌شود, چرا که پس از جایگذاری, در مخرج کسر به صفر می‌رسیم که بیانگر آن است که $f(\alpha)=0$ می‌باشد. بنابراین مطابق آنچه در بالا دیده شد به ازای هر بار صفر شدن کافی است یک درجه به توان x در ابتدای عبارت و نیز یک مرتبه به مشتق مخرج اضافه شود.

مثال ۳-۱۳ یک جواب خصوصی برای معادلات زیر بدست آورید.

$$1)\ \ y'''-5y''+8y'-4y=3e^{2x}\to y_p=3\frac{1}{D^3-5D^2+8D-4}e^{2x}\quad;\quad f(2)=0$$

با جایگذاری $\alpha=2$ در مخرج کسر دیده می‌شود که $f(2)=0$ خواهد شد. در نتیجه یک x در ابتدای عبارت اضافه کرده و مخرج را نیز با $f'(D)$ جایگزین می‌کنیم. بنابراین:

$$y_p=3x\frac{1}{3D^2-10D+8}e^{2x}\quad;\quad f'(2)=0$$

باز هم با جایگذاری $\alpha=2$ در مخرج کسر دیده می‌شود که $f'(2)=0$ خواهد شد. لذا مجددا یک x در ابتدای عبارت اضافه کرده (یک درجه به توان x اضافه میشود) و مخرج را نیز بصورت $f''(D)$ می‌نویسیم:

$$y_p=3x^2\frac{1}{6D-10}e^{2x}\quad;\quad f''(2)\neq 0\to y_p=3x^2\frac{1}{6(2)-10}e^{2x}=\frac{3x^2}{2}e^{2x}$$

بدیهی است x^s در اینجا دقیقا همان x^s ای است که در روش ضرایب نامعین عنوان شد. در واقع اگر قرار بود مساله با روش ضرایب نامعین حل شود, از آنجا که $\alpha=2$ دوبار ریشه معادله مشخصه یعنی $f(D)$ می‌باشد $(s=2)$, لذا می‌بایستی جواب انتخابی را بصورت $x^2e^{2x}(A_0)$ در نظر بگیریم. ■

توضیح ۱: اگر در معادله‌ای در ابتدا به راحتی تشخیص داده شود که α ریشه مرتبه s ام تابع $f(D)$ است, می‌توان بجای مراحل بالا که بصورت مرحله به مرحله انجام شد, یکباره از فرمول استفاده کرد. به عنوان نمونه برای مثال بالا $\alpha=2$ ریشه مضاعف $f(D)$ است, بنابراین:

$$y_p = 3x^2 \frac{1}{(D^3-5D^2+8D-4)''} e^{2x} = 3x^2 \frac{1}{6D-10} e^{2x} = 3x^2 \frac{1}{6(2)-10} e^{2x} = \frac{3x^2}{2} e^{2x}$$

توضیح ۲: می‌توان با تجزیه $f(D)$ نیز جواب را بصورت زیر بدست آورد:

$$y_p = 3\frac{1}{(D-2)^2}\left(\frac{1}{D-1}e^{2x}\right) = \frac{3}{(D-2)^2}\left(\frac{1}{2-1}e^{2x}\right) = 3x^2 \frac{1}{((D-2)^2)''} e^{2x} = 3x^2 \frac{1}{2} e^{2x} \quad \blacksquare$$

$$2)\ \ x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = \frac{2}{x} \quad ; \quad x > 0$$

این معادله کوشی-اویلر بوده و در مثال ۳-۷ حل آن دیده شد. از آنجا که قرار است در اینجا آنرا با روش اپراتور معکوس حل کنیم, بایستی ابتدا با تغییرمتغیر $x = e^t$ معادله را به معادله با ضرایب ثابت تبدیل کنیم. این کار در روش دوم همان مثال انجام شده و تبدیل یافته آن بصورت زیر است:

$$(D^3 - 2D^2 - D + 2)y = 2e^{-t} \rightarrow y_p(t) = 2\frac{1}{D^3-2D^2-D+2}e^{-t} \quad ; \quad f(-1) = 0$$

از آنجا که $\alpha = -1$ ریشه مرتبه یکم تابع $f(D)$ می‌باشد خواهیم داشت:

$$y_p(t) = 2t\frac{1}{(D^3-2D^2-D+2)'}e^{-t} = 2t\frac{1}{3D^2-4D-1}e^{-t} = 2t\frac{1}{3(-1)^2-4(-1)-1}e^{-t}$$

$$\rightarrow y_p(t) = \frac{1}{3}te^{-t} \qquad ; \qquad x = e^t \rightarrow y_p(x) = \frac{lnx}{3x} \quad \blacksquare$$

توضیح: می‌توان با تجزیه $f(D)$ نیز جواب را بصورت زیر بدست آورد:

$$\rightarrow y_p(t) = 2\frac{1}{D+1}\left(\frac{1}{D^2-3D+2}e^{-t}\right) = 2\frac{1}{D+1}\left(\frac{1}{(-1)^2-3(-1)+2}e^{-t}\right)$$

$$\rightarrow y_p(t) = 2\frac{1}{D+1}\left(\frac{1}{6}e^{-t}\right) = \frac{2}{6}t\frac{1}{(D+1)'}e^{-t} = \frac{1}{3}te^{-t} \quad \blacksquare$$

۲- تابع سینوس یا کسینوس

میتوان ثابت کرد اگر $f(-\beta^2) \neq 0$ آنگاه:

$$\frac{1}{f(D^2)}cos(\beta x) = \frac{1}{f(-\beta^2)}cos(\beta x) \quad ; \quad \frac{1}{f(D^2)}sin(\beta x) = \frac{1}{f(-\beta^2)}sin(\beta x)$$

بعنوان نمونه اولین رابطه بصورت زیر قابل اثبات است:

$$f(D) = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_0 \rightarrow f(D^2) = a_n(D^2)^n + a_{n-1}(D^2)^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$\begin{aligned} f(D^2)cos(\beta x) &= (a_n(D^2)^n + a_{n-1}(D^2)^{n-1} + \cdots + a_0)cos(\beta x) \\ &= (a_n(-\beta^2)^n + a_{n-1}(-\beta^2)^{n-1} + \cdots + a_0)cos(\beta x) = f(-\beta^2)cos(\beta x) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{1}{f(D^2)}cos(\beta x) = \frac{1}{f(-\beta^2)}cos(\beta x)$$

دقت شود اگر مشابه قسمت قبل از $f(D)$ شروع می‌کردیم, با توجه به اینکه مشتقات فرد کسینوس به سینوس تبدیل میشود, در نهایت نمی‌توانستیم نتیجه بدست آمده را بر حسب f بیان کنیم. اما با شروع از $f(D^2)$ دیده شد که همه جملات شامل کسینوس می‌شوند (مشتقات زوج کسینوس) و پس از فاکتورگیری آنچه باقی می‌ماند تابعی بر حسب f و بصورت $f(-\beta^2)$ خواهد بود. ■

توضیح ۱: ثابت می‌شود که اگر $-\beta^2$ ریشه مرتبه sام تابع $f(D^2)$ باشد, آنگاه:

$$\frac{1}{f(D^2)}\begin{Bmatrix}cos(\beta x)\\ sin(\beta x)\end{Bmatrix}=x^s\frac{1}{f^{(s)}(-\beta^2)}\begin{Bmatrix}cos(\beta x)\\ sin(\beta x)\end{Bmatrix}$$

در اینجا نیز اگر در ابتدا متوجه نشویم که $-\beta^2$ ریشه تابع $f(D^2)$ است, مشکلی ایجاد نمی‌شود, چرا که کافی است به ازای هر بار صفر شدنِ مخرج, یک درجه به توان x در ابتدای عبارت و نیز یک مرتبه به مشتق مخرج اضافه شود.

توضیح ۲: مطابق آنچه در در بخش ۲-۷ عنوان شد, در این‌حالت می‌توان به طریق زیر, مساله را به حالت قبل تبدیل کرد.

$$\frac{1}{f(D^2)}\begin{Bmatrix}cos(\beta x)\\ sin(\beta x)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}Re\\ Im\end{Bmatrix}\frac{1}{f(D)}e^{i\beta x}\ ■$$

مثال ۳-۱۴ یک جواب خصوصی برای معادلات زیر بدست آورید.

$$1)\quad y^{(4)}+2y''+y=cos2x\to(D^4+2D^2+1)y=cos2x$$

$$\to y_p=\frac{1}{(D^2+1)^2}cos2x\xrightarrow{\beta=2}y_p=\frac{1}{(-4+1)^2}cos2x=\frac{1}{9}cos2x\ ■$$

$$2)\quad y'''+y''+2y'-y=cos2x\to y_p=\frac{1}{D^3+D^2+2D-1}cos2x$$

$$\xrightarrow{\beta=2\,;\,D^3=DD^2}y_p=\frac{1}{D(-4)+(-4)+2D-1}cos2x=\frac{-1}{2D+5}cos2x$$

که معادل است با معادله مرتبه اول $2y'+5y=-cos2x$ که قابل حل است. اما ساده‌تر است آنرا به طریق زیر حل کنیم:

$$\frac{-1}{2D+5}cos2x=\frac{5-2D}{4D^2-25}cos2x=(5-2D)\left(\frac{1}{4(-4)-25}cos2x\right)=\frac{-1}{41}(5-2D)(cos2x)$$

$$\to y_p=\frac{-4}{41}sin2x-\frac{5}{41}cos2x$$

که در آن برای محاسبه $\frac{h(D)}{f(D)}g$ آنرا بصورت $h(D)\left(\frac{1}{f(D)}g\right)$ نوشتیم. ■

توضیح: راه حل دوم مساله بصورت زیر است. از آنجا که $cos2x=Re\left(e^{2ix}\right)$ لذا معادله جایگزین زیر را حل می‌کنیم:

$$z'''+z''+2z'-z=e^{2ix}\to z_p=\frac{1}{D^3+D^2+2D-1}e^{2ix}$$

$$\xrightarrow{\alpha=2i}z_p=\frac{1}{(2i)^3+(2i)^2+2(2i)-1}e^{2ix}=\frac{1}{-5-4i}e^{2ix}$$

$$y_p=Re(z_p)=Re\left(\frac{-5+4i}{41}e^{2ix}\right)=\frac{1}{41}(-4sin2x-5cos2x)\ ■$$

$$3)\quad y''+4y=3sin2x+2sinhx\rightarrow y_p=\frac{1}{D^2+4}(3sin2x+2sinhx)$$

$$\rightarrow y_p=3\frac{1}{D^2+4}sin2x+\frac{1}{D^2+4}e^x-\frac{1}{D^2+4}e^{-x}=y_{p_1}+y_{p_2}-y_{p_3}$$

برای محاسبه y_{p_1} از آنجا که $\beta=2$ بوده و $-\beta^2=-4$ ریشه مرتبه یکم تابع $f(D^2)$ می‌باشد خواهیم داشت:

$$y_{p_1}=3\frac{1}{D^2+4}sin2x=3x\frac{1}{2D}sin2x=3x\frac{D}{2D^2}sin2x=3xD\left(\frac{1}{2(-4)}sin2x\right)=-\frac{3}{4}xcos2x$$

همچنین برای محاسبه y_{p_2} و y_{p_3} نیز از آنجا که $f(1)\neq 0$ و $f(-1)\neq 0$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$y_{p_2}=\frac{1}{D^2+4}e^x=\frac{1}{(1)^2+4}e^x=\frac{1}{5}e^x\qquad;\qquad y_{p_3}=\frac{1}{D^2+4}e^{-x}=\frac{1}{(-1)^2+4}e^{-x}=\frac{1}{5}e^{-x}$$

$$\rightarrow y_p=-\frac{3}{4}xcos2x+\frac{1}{5}e^x-\frac{1}{5}e^{-x}=-\frac{3}{4}xcos2x+\frac{2}{5}sinhx\ \blacksquare$$

۳- ضرب تابع نمایی در تابع دلخواه

در این‌حالت ساده‌ترین راه, استفاده از رابطه زیر می‌باشد:

$$\frac{1}{f(D)}(e^{\alpha x}h(x))=e^{\alpha x}\frac{1}{f(D+\alpha)}h(x)$$

اثبات: ابتدا با استقراء نشان می‌دهیم که $D^n(e^{\alpha x}h(x))=e^{\alpha x}(D+\alpha)^n h(x)$. برای $n=1$ رابطه درست است. زیرا:

$$n=1\rightarrow D(e^{\alpha x}h(x))=e^{\alpha x}Dh(x)+\alpha e^{\alpha x}h(x)=e^{\alpha x}(D+\alpha)h(x)$$

حال فرض میکنیم رابطه برای $n=k$ درست باشد, با مشتق‌گیری از طرفین آن خواهیم داشت:

$$n=k\rightarrow D^k(e^{\alpha x}h(x))=e^{\alpha x}(D+\alpha)^k h(x)\rightarrow D^{k+1}\left(e^{\alpha x}h(x)\right)=D\left(e^{\alpha x}(D+\alpha)^k h(x)\right)$$

$$\rightarrow D^{k+1}\left(e^{\alpha x}h(x)\right)=e^{\alpha x}D(D+\alpha)^k h(x)+\alpha e^{\alpha x}(D+\alpha)^k h(x)=e^{\alpha x}(D+\alpha)^{k+1}h(x)$$

که درستی رابطه را برای $n=k+1$ نشان می‌دهد. حال از آنجا که اپراتور خطی $f(D)$ شامل ترمهای D^n میباشد, داریم:

$$f(D)\left(e^{\alpha x}h(x)\right)=a_nD^n\left(e^{\alpha x}h(x)\right)+a_{n-1}D^{n-1}\left(e^{\alpha x}h(x)\right)+\cdots+a_0e^{\alpha x}h(x)$$

$$\rightarrow f(D)\left(e^{\alpha x}h(x)\right)=e^{\alpha x}[a_n(D+\alpha)^n+a_{n-1}(D+\alpha)^{n-1}+\cdots+a_0]h(x)=e^{\alpha x}f(D+\alpha)h(x)$$

در نتیجه اگر آنرا به شکل معکوس بنویسیم, حکم مورد نظر ثابت می‌شود. ■

مثال ۳-۱۵ یک جواب خصوصی برای معادلات زیر بدست آورید.

$$1)\quad y''-2y'+y=xe^x sinx\rightarrow y_p=\frac{1}{(D-1)^2}(xe^x sinx)$$

$$\xrightarrow{\alpha=1} y_p=e^x\frac{1}{D^2}(xsinx)=e^x\frac{1}{D}\left(\int xsinx\,dx\right)=e^x\frac{1}{D}(-xcosx+sinx)$$

$$=e^x\int(-xcosx+sinx)\,dx=-e^x(xsinx+2cosx)\ \blacksquare$$

$$2)\ \ y''' + y' = e^{-2x}cos2x \rightarrow y_p = \frac{1}{D^3 + D}(e^{-2x}cos2x)$$

$$\xrightarrow{\alpha=-2} y_p = e^{-2x}\frac{1}{(D-2)^3 + (D-2)}cos2x = e^{-2x}\frac{1}{D^3 - 6D^2 + 13D - 10}cos2x$$

$$\xrightarrow{\beta=2\ ;\ D^3=DD^2} y_p = e^{-2x}\frac{1}{9D + 14}cos2x = \frac{e^{-2x}}{260}(9sin2x + 7cos2x)$$

توجه شود در این مثال می‌توانستیم با انتخاب $z = y'$ معادله را به یک معادله مرتبه دو تبدیل کرده و سپس آنرا حل کنیم. اما این راه معمولا پیشنهاد نمی‌شود, چرا که در انتها یک انتگرال‌گیری از z لازم دارد که ممکن است حجم محاسبات آن, طولانی‌تر از راه حل ارائه شده در بالا باشد. ■

توضیح: راه حل دوم مساله بصورت زیر است. از آنجا که $cos2x = Re\left(e^{2ix}\right)$ لذا معادله جایگزین زیر را حل می‌کنیم:

$$z''' + z' = e^{-2x}e^{2ix} = e^{2(i-1)x} \rightarrow z_p = \frac{1}{D^3 + D}e^{2(i-1)x}$$

$$\xrightarrow{\alpha=2(i-1)} z_p = \frac{1}{\left(2(i-1)\right)^3 + \left(2(i-1)\right)}e^{2(i-1)x} = \frac{1}{14 + 18i}e^{-2x}(cos2x + isin2x)$$

$$y_p = Re\left(z_p\right) = Re\left(\frac{14 - 18i}{520}e^{-2x}(cos2x + isin2x)\right) = \frac{e^{-2x}}{260}(9sin2x + 7cos2x)\ \ ■$$

۴- چندجمله‌ای

روش کلی حل معادله به روش اپراتور معکوس برای حالتی که ترم ناهمگنی چندجمله‌ای باشد, آن است که مخرج کسر یعنی $f(D)$ را به فرم $1 \pm g(D)$ تبدیل کرده و بسط تیلور $\frac{1}{f(D)} = \frac{1}{1 \pm g(D)}$ را درست مشابه بسط $\frac{1}{1 \pm x}$ بنویسیم. بدیهی است از آنجا که D یک اپراتور است لذا این کار کاملا صوری انجام می‌شود. راه دیگر آن است که مستقیما عبارت 1 را بر $f(D)$ درست مشابه تقسیم دو چندجمله‌ای (و این بار هم صوری) تقسیم کنیم. بدیهی است در هر دو این روشها عملا عملگر D از مخرج حذف شده و آنرا در صورت خواهیم دید. لذا اثر آن بر چندجمله‌ای, معادل مشتق‌گیری متوالی بوده و در نهایت نیز چندین بار مشتق متوالی از چندجمله‌ایها به صفر خواهد رسید. در مثالهای زیر نحوه کار را خواهیم دید.

در انتها لازم به ذکر است که معمولا برای زمانی که ترم ناهمگنی چندجمله‌ای (و بخصوص با درجه زیاد باشد) شاید استفاده از روش ضرایب نامعین محاسبات کمتری نیاز داشته باشد.

مثال ۳-۱۶ یک جواب خصوصی برای معادلات زیر بدست آورید.

$$1)\ \ y' + y = x^2 \rightarrow y_p = \frac{1}{D+1}(x^2) = (1 - D + D^2 - D^3 + \cdots)(x^2)$$

دقت شود $\frac{1}{D+1}$ را کاملا صوری مطابق آنچه در بسط $\frac{1}{1+x}$ دیده شد, بسط داده‌ایم. به عبارتی کاری کردیم که نماد D از مخرج خارج شود. بنابراین:

$$y_p = x^2 - D(x^2) + D^2(x^2) - D^3(x^2) + \cdots = x^2 - 2x + 2 + 0 + 0 + \cdots = x^2 - 2x + 2\ \ ■$$

توضیح ۱: بدیهی است این نوع تقسیم را میتوان برای قسمتهای قبل نیز بکار برد. اما اشکال آن است که خارج قسمت نامتناهی است. مزیت استفاده از این تقسیم در اینجا آن است که $g(x)$ چندجمله‌ای است, لذا بسته به درجه چندجمله‌ای در نهایت به صفر رسیده و سری, متناهی میشود. از آنجا که این تقسیم به تعداد نامتناهی جمله خواهد داشت, نیازی به نوشتن همه جملات نبوده و صرفا کافی است تا D^m ادامه دهیم که m درجه $g(x)$ است. چرا که اثر سایر جملات بر روی چندجمله‌ای صفر خواهد شد. بعنوان نمونه در مثال بالا نوشتن بسط تا جمله D^2 یعنی $1-D+D^2+\cdots$ کافی است.

توضیح ۲: چنانچه مثلا اپراتور معکوس به شکل $\frac{1}{D-3}$ باشد, به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{1}{D-3}=\frac{1}{-3}\frac{1}{1-\frac{D}{3}}=\frac{1}{-3}\left(1+\frac{D}{3}+\left(\frac{D}{3}\right)^2+\left(\frac{D}{3}\right)^3+\cdots\right)$$

توضیح ۳: برای اپراتورهای به شکل دیگر ممکن است استفاده از بسط تیلور $\frac{1}{1\pm D}$ کمی پیچیده باشد, به همین دلیل در اینگونه موارد صورت و مخرج را باز هم به شکل صوری به هم تقسیم می‌کنیم. در قسمت بعد از این روش استفاده شده است. ■

$$2)\;\; 2y'''-y'+2y=x^3-x\to y_p=\frac{1}{2D^3-D+2}(x^3-x)$$

همانگونه که عنوان شد با نوشتن مقسوم و مقسوم علیه بصورت صعودی و تقسیم آنها به یکدیگر خواهیم داشت:

$$\begin{array}{l|l}
\quad 1 & \quad 2-D+2D^3 \\
\underline{1-\frac{1}{2}D+D^3} & \overline{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}D+\frac{1}{8}D^2-\frac{7}{16}D^3\cdots} \\
\frac{1}{2}D-D^3 & \\
\underline{\frac{1}{2}D-\frac{1}{4}D^2+\frac{1}{2}D^4} & \\
\frac{1}{4}D^2-D^3+\frac{1}{2}D^4 & \\
\quad\cdots &
\end{array}$$

بنابراین:

$$y_p=\frac{1}{2D^3-D+2}(x^3-x)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}D+\frac{1}{8}D^2-\frac{7}{16}D^3\cdots\right)(x^3-x)$$

$$y_p=\frac{1}{2}(x^3-x)+\frac{1}{4}(3x^2-1)+\frac{1}{8}(6x)-\frac{7}{16}(6)+0+0+\cdots=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{23}{8}\quad ■$$

توضیح: بجای تقسیم می‌توانیم شکل اپراتور معکوس را به فرم $\frac{1}{1\pm D}$ تبدیل کنیم. بعنوان نمونه برای این مثال:

$$\frac{1}{2-D+2D^3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{D-2D^3}{2}}\right)\quad ;\quad \frac{1}{1-u}=1+u+u^2+\cdots\;\; ;\;\; u=\frac{D-2D^3}{2}$$

و در نوشتن بسط صرفا کافی است توانهایی از D را بنویسیم که حداکثر آن D^3 باشد. ■

$$3)\ \ y''-4y=xsinhx\rightarrow y_p=\frac{1}{D^2-4}(xsinhx)=\frac{1}{2}\frac{1}{D^2-4}(xe^x-xe^{-x})=\frac{1}{2}(I-J)$$

$$I=\frac{1}{D^2-4}(xe^x)=e^x\frac{1}{(D+1)^2-4}(x)=e^x\left(-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}D\cdots\right)(x)=e^x\left(-\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}\right)$$

$$J=\frac{1}{D^2-4}(xe^{-x})=e^{-x}\frac{1}{(D-1)^2-4}(x)=e^{-x}\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{9}D\cdots\right)(x)=e^{-x}\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}\right)$$

$$y_p=\frac{1}{2}(I-J)=\frac{-1}{3}x\frac{e^x-e^{-x}}{2}-\frac{2}{9}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{-1}{3}xsinhx-\frac{2}{9}coshx\ \ \blacksquare$$

$$4)\ \ y''-2y'+y=xe^xsinx\ \ \rightarrow\ z''-2z'+z=xe^xe^{ix}\rightarrow y_p=\ Im(z_p)$$

$$z_p=\frac{1}{D^2-2D+1}\left(xe^{(1+i)x}\right)=e^{(1+i)x}\frac{1}{(D+1+i)^2-2(D+1+i)+1}(x)$$

$$z_p=-e^{(1+i)x}\frac{1}{1-(D^2+2iD)}(x)=-e^{(1+i)x}(1+(D^2+2iD)+\cdots)(x)=-e^{(1+i)x}(x+2i)$$

$$y_p=Im(z_p)=Im\left(-e^x(cosx+isinx)(x+2i)\right)=-e^x(2cosx+xsinx)\ \ \blacksquare$$

$$5)\ \ y'''+2y''+y'=x^2e^{2x}\rightarrow y_p=\frac{1}{D^3+2D^2+D}(x^2e^{2x})$$

$$y_p=e^{2x}\frac{1}{(D+2)^3+2(D+2)^2+(D+2)}(x^2)=e^{2x}\frac{1}{D^3+8D^2+21D+18}(x^2)$$

$$y_p=e^{2x}\left(\frac{1}{18}\frac{1}{1+\frac{D^3+8D^2+21D}{18}}(x^2)\right)$$

$$=\frac{1}{18}e^{2x}\left(1-\frac{D^3+8D^2+21D}{18}+\left(\frac{D^3+8D^2+21D}{18}\right)^2-\cdots\right)(x^2)$$

$$y_p=\frac{1}{18}e^{2x}\left(x^2-\left(\frac{8D^2+21D}{18}\right)(x^2)+\left(\frac{21D}{18}\right)^2(x^2)\right)=\frac{1}{18}e^{2x}\left(x^2-\frac{7}{3}x+\frac{11}{6}\right)\ \ \blacksquare$$

مثال ۳-۱۷ یک جواب خصوصی برای معادله زیر بدست آورید.

$$x^2y''-xy'-3y=x^2lnx\quad ;\ \ x>0$$

حل این معادله کوشی-اویلر بوده و از آنجا که ضرایب آن ثابت نیست, ابتدا با تغییرمتغیر $x=e^t$ آنرا به معادله با ضرایب ثابت تبدیل می‌کنیم.

$$[D(D-1)-D-3]y=te^{2t}\rightarrow(D^2-2D-3)y=te^{2t}\rightarrow y_p=\frac{1}{D^2-2D-3}(te^{2t})$$

$$\xrightarrow{\alpha=2}y_p=e^{2t}\frac{1}{(D+2)^2-2(D+2)-3}(t)=e^{2t}\frac{1}{D^2+2D-3}(t)$$

در اینجا بجای تقسیم $\frac{1}{D^2+2D-3}$ از تجزیه کسر استفاده می‌کنیم تا به دو کسر به فرم $\frac{1}{1\pm D}$ برسیم.

$$y_p = e^{2t}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{D-1}-\frac{1}{D+3}\right)(t) = \frac{e^{2t}}{4}\left(\frac{1}{-1}\frac{1}{1-D}-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{D}{3}}\right)(t)$$

$$y_p = \frac{e^{2t}}{4}\left(-(1+D+D^2+\cdots)-\frac{1}{3}\left(1-\frac{D}{3}+\left(\frac{D}{3}\right)^2-\cdots\right)\right)(t)$$

$$= \frac{e^{2t}}{4}\left(-t-1+0-\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{3}+0\right)\right) = -\frac{1}{3}e^{2t}\left(t+\frac{2}{3}\right)$$

$$y_p = -\frac{1}{3}(e^t)^2\left(t+\frac{2}{3}\right) \rightarrow y_p(x) = \frac{-1}{3}x^2\left(lnx+\frac{2}{3}\right) \quad \blacksquare$$

مثال ۳-۱۸ یک جواب خصوصی برای معادله زیر بدست آورید.

$$4y''+4y'-8y = xe^{-2x}$$

حل در مثال ۲-۱۸ پس از تبدیل معادله کوشی-اویلر داده شده به ضرایب ثابت, به معادله بالا رسیده و با استفاده از روش ضرایب نامعین جواب خصوصی آنرا بدست آوردیم. در اینجا می‌خواهیم آنرا با استفاده از روش اپراتور معکوس حل کنیم.

$$\rightarrow y_p = \frac{1}{4D^2+4D-8}(xe^{-2x}) = e^{-2x}\frac{1}{4(D-2)^2+4(D-2)-8}(x)$$

$$y_p = \frac{e^{-2x}}{4}\frac{1}{D^2-3D}(x) = \frac{e^{-2x}}{12}\left(\frac{-1}{D}+\frac{1}{D-3}\right)(x) = \frac{e^{-2x}}{12}\left(\frac{-1}{D}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{D}{3}}\right)(x)$$

و یا می‌توان مشابه مثال قبل, در عبارت $\frac{1}{D^2-3D}$ عدد 1 را به $-3D+D^2$ مشابه چندجمله‌ایها تقسیم کرد.

$$y_p = \frac{e^{-2x}}{12}\left(\frac{-1}{D}-\frac{1}{3}\left(1+\frac{D}{3}+\left(\frac{D}{3}\right)^2+\cdots\right)\right)(x) = \frac{e^{-2x}}{12}\left(-\int xdx-\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}+0\right)\right)$$

$$y_p = \frac{e^{-2x}}{12}\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}\right) \quad ; \quad y_c(x) = c_1e^x+c_2e^{-2x}$$

$$\rightarrow y = c_1e^x+c_3e^{-2x}-\frac{x^2}{24}e^{-2x}-\frac{x}{36}e^{-2x} \quad ; \quad c_3 = c_2-\frac{1}{108} \quad \blacksquare$$