ریاضیات گسسته

تمرین ششم - استقرا

محمد سعادتی و محمد امانلو

تاریخ تحویل ۱۴۰۲/۰۱/۲۰

سؤال ۱.

در رویداد کانتست (contest) امسال k سری سوال متفاوت تهیه شده که هر سری شامل تعدادی برگه سوال یکسان و هر برگه سوال پشت و رو و دارای دو سمت سوال متفاوت است، یک سوال بسیار آسان و دیگری سوال آسان است. حل سوالات به صورت گروه‌هایی با تعداد اعضای مثبت انجام می‌شود و هر گروه فقط یکی از k سری سوال متمایز را در اختیار دارد. همچنین هریک از n دانشجوی حاضر در کلاس می‌توانند در چند گروه عضو باشند. در ابتدا طبق دستورالعمل مسابقه همه دانشجویان باید سوال آسان را حل کنند. سپس همه اعضای هر گروه با دستور استاد باید برگه سوال خود را پشت و رو کنند. ثابت کنید استاد می‌تواند با پشت و رو کردن برگه سوالات همه اعضای تعدادی از گروه‌ها شرایط مسابقه را به گونه‌ای مدیریت کند که حداقل $\lceil n/۲ \rceil$ از دانشجویان، سوالات بسیار آسان در دست داشته باشند.

سؤال ۲.

نشان دهید برای هر عدد طبیعی n، می‌توان n عدد طبیعی متمایز یافت، که مجموع آن‌ها مربع کامل و حاصل‌ضرب آن‌ها مکعب کامل باشد.

سؤال ۳.

ثابت کنید به ازای $n \in \mathbb{N}$ عددی n رقمی در مبنای ۳ وجود دارد، که اگر در مبنای ۱۰ فرض شود، بر ۲^n بخش پذیر است.

سؤال ۴.

سطری از خانه‌ها در اختیار داریم که از یک طرف نامتناهی است. ابتدا دو مهره در خانه‌های ۱ و ۲ قرار دارند. در هر مرحله یکی از مهره‌ها را انتخاب می‌کنیم و اگر این مهره در خانه i باشد، آن را i خانه خالی به جلو می‌بریم. برای مثال مهره موجود در خانه با شماره ۱ را به خانه شماره ۳ منتقل کنیم. آیا به ازای هر عدد طبیعی مانند n می‌توان با انجام تعدادی حرکت یکی از مهره‌ها را به خانه شماره n برد؟

سؤال ۵.

اگر $a, b > ۰$ باشند، ثابت کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$(n-۱)a^n + b^n \geq na^{n-۱}b$$

و تساوی برقرار است، اگر و تنها اگر $a = b$ یا $n = ۱$ باشد.

سؤال ۶.

فرض کنید اعداد طبیعی $w_1, w_2, \ldots$ و w_n وزن n وزنه باشند. به این مجموعه از وزنه‌ها «کامل» می‌گوییم اگر برای هر عدد طبیعی W که کوچک‌تر از $w_1 + w_2 + \ldots + w_n$ است، مجموع وزن تعدادی‌ها از این وزنه‌ها برابر W شود. ثابت کنید اگر از یک مجموعه وزنه کامل، یک وزنه با سنگین‌ترین وزن را حذف کنیم، مجموعه وزنه‌های باقی‌مانده نیز کامل است.

سؤال ۷.

(امتیازی) در شبکه $\mathbb{Z}^2$ یک کفش‌دوزک از خانه (۰، ۰) شروع به حرکت می‌کند و در هر گام می‌تواند یک خانه به سمت بالا یا یک خانه به سمت راست برود.
دشمن کفش‌دوزک، عنکبوت، که علاقه بسیاری به سمی کردن خانه‌ها دارد، در نظر دارد دنباله $i \in \mathbb{N} : x_i = (a_i, b_i)$ از خانه‌ها را مسموم کند. کفش‌دوزک نیز از قصد شوم عنکبوت آگاه است و می‌داند در مرحله i اُم خانه x_i سمی می‌شود و همیشه سمی خواهد ماند. نشان دهید کفش‌دوزک می‌تواند تا بینهایت به حرکت خود ادامه دهد و هیچگاه مسموم نشود.