



① رأس درخواه a را در نظریه کیرم،

و بهمان خلف فرض می‌کنیم هیچ دوری به طول ۴ یافت نمی‌شود که شامل a باشد!

۹۰ رأس که از رأس a با راه‌های انحصاری به نقطه حرکت در بدترین حالت می‌توانند جدا شوند به یکی دیگر از این ۱۰ رأس مجاور a بروند نه غیر این صورت برای a دوری به طول ۴ یافت شود که خلاف فرض بهمان خلف است!
پس در بدترین حالت حرکت از این ۹۰ رأس به ۸ رأس جدید می‌روند. اگر ۲ تا از این ۹۰ رأس به یک رأس مشترک بروند باز هم دوری به طول ۴ یافت شود که خلاف فرض بهمان خلف است!
پس این ۱۰ رأس به ۸ رأس جدید می‌روند که

$$10 \times 8 = 80$$

۸۰ رأس خارج از a !

این ۸۰ رأس به همراه ۱۰ رأس اولیه ۹۰ رأس را تشکیل می‌دهند که به همراه رأس a می‌شود ۹۱ رأس که خلاف فرض می‌شوند
پس در این خلاف برای هر رأس درخواه که به طول ۴ یافت می‌شود

②

چون اجتماع دو گراف همبند شده است پس یا دو گراف یا یک گراف دارند یا دو گراف هیچ‌یک از آنها نمی‌توانند و در یک رأس (لاستیک رأس) مشترک هستند! چرا که اگر نه یا یکی مشترک باشد (استدلال پس از یک رأس) و از رأس مشترک باشد از هیچ یک از رؤوس تفاوت G نمی‌توان به هیچ یک از رؤوس تفاوت G مسیر داشت فلذا تفاوت نهایی ناهمبند می‌شود!

(۲)

رض می کنیم دو یال e, e_2 بین رؤس a, b وجود ندارد! طبق صورت سوال می دانیم که گراف اولی است.
 بدین معنی که همی رؤس آن بهی زوج دارند. پس، پس از حذف دو یال e, e_2 رؤس a همخان زوج $\frac{1}{2}$ درج
 باقی ماند اما رؤس b و c دو رأس با درج فردی شوند حال، مسئله همی نیز با یک مسیر اولی از b به c را داراست
 حال اگر e, e_2 را اضافه کنیم می توان از c به a و از a به b رفت و یک دور اولی ای را کرد!

(۴)

(الف) چون گراف هیچ P_4 ندارد و P_4 خود زیرگرافی از K_4 است پس هیچ دوری به طول ۴ یا بیشتر وجود ندارد
 همچنین چون طبق مسئله C_4 نداریم پس به طول کلی هیچ دوری در K_4 وجود ندارد!
 حال چون گراف هیچ دور به طول فردی ندارد پس حتماً دو بخشی است

(ب) گراف کامل را در دو بخش (مجموعی رؤس) A, B تقسیم می کنیم.
 برهان خلف: گراف کامل دو بخشی نیست!

طبق صورت سوال، گراف همبند است پس رؤس $a \in A$ با a بهی از رؤس B یال داشته باشد (مانند a)
 همچنین رؤس $b \in A$ نیز باید به یک رأس دیگر از B یال داشته باشد (مانند a) می توان این کار را جایگزین کرد اما آن
 برابر $a \neq b$ چون اعضای مجموعه A به یکدیگر متصل نیستند پس گراف دو بخشی نیست! با اتصال یال های جدا افتاده به هم
 یک P_n ایجاد می شود که شامل P_4 بود! بدین آنگه در زیر گراف P_4 داشته باشیم



ما پس همه رؤس یک یال جدید نیز اضافه کنند و یک رأس دیگر از مجموعه مقابل وصل شوند!
 حال مجدداً با انتخاب ۴ یال که در دو مجموعه M متصل شده اند (۲ از مجموعه A ، ۲ از B) P_4 یافت می شود پس باید
 وصل کرد (رؤس A به B را جای ۱۱ و ۱۲ هر ۴ رأس (رؤس P_4 سازند)



هیچ رؤسی با تعداد یال کمتر از ۲ تا باقی ماند یا با شکل P_4 نداشته باشیم
 وصل کرد (عضای A به B با یک دو بخشی کامل شد) گراف می شود

