(۵) ؟

(۲) الف) پایه ، $n=3$ ، ۲ ، ۳ ، ۱

فرض: ۱ تا k را می‌توان کنار هم نوشت

پس اگر از ۱ تا 2^n را بتوانیم کنار هم بنویسیم ۱ تا n را نیز می‌توانیم!

چون a_1 تا a_k ترتیبی از اعداد ۱ تا 2^k است که برای آن می‌توان از ۱ تا 2^k بدون حضور میانگین در بین اعداد سری را نوشت، (طبق فرض مسئله) پس، 2^k+a_1 و 2^k+a_2 ، ... ترتیبی از اعداد $2^k+1, 2^k+2, \ldots$ است که میانگین هیچ دو عددی بین آنها نیست پس

$$\frac{a_i+(a_j+2^k)}{2} = \frac{a_i+a_j}{2} + 2^{k+1}$$

چون عبارت بالا با میانگین a_i و a_j نمی‌تواند مساوی باشد پس برای $k+1$ نیز می‌توان عمل مذکور را انجام داد چون برای k ، $k+1$ صادق بود پس به طور کلی برای هر n این عمل انجام پذیر است

ب) ؟

۳) پایه ، $n = m = 1$

$f(3) = f(1)f(1) + f(2)f(2) = 2$ ✓

استقرای قوی ، $\forall m,n \leq K$ ، $f_{(m+n+1)} = f_nf_m +$ —— برقرار است

فرض می کنیم:

$f_{m+(n+1)+1} = f_{n+1}f_m + f_{n+2}f_{m+1} \xrightarrow{f_{n+1} = f_n + f_{n-1}} =$

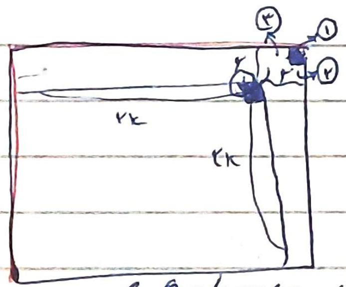
$(f_n + f_{n-1})f_m + (f_{n+1} + f_n)f_{m+1} =$

$f_nf_m + f_{n-1}f_m + f_{n+1}f_{m+1} + f_nf_{m+1} \overset{\text{فرض}}{=} f_{n+m+1} + f_{n-1+m+1} = \boxed{f_{n+m+1} + f_{n+m}}$

$= \boxed{f_{m+n+2} = f_{m+(n+1)+1}}$

به رابطه ی همواره درست رسیدیم چون تنها ساده سازی و تجزیه (دو طرف نوشتیم) پس فرض مسئله درست است!

۴) پایه ، ✓ در یک مربع ۲×۲ صادق است



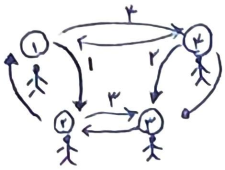
فرض برای مربع های ۲K×۲K صادق است

حکم: برای مربع های (۲K+۲)(۲K+۲) صادق است

چون این شرط در مربع ۲K×۲K برقرار است و همچنین برای آن که هیچ دو خانه ی مجاوری هم رنگ نباشد بایستی که از یک نوع کاشی استفاده کرد پس رنگ گوشه ی صفحه با رنگ گوشه ی مربع ۲K×۲K مشابه است به طریق مشابه رنگ ۲ گوشه ی دیگر خارج از مربع ۲K×۲K نیز مشابه گوشه های بزرگ خودی شود بنا به فرض استقراء این ۳ گوشه ، ۳ رنگ متفاوت دارند . و چون ۴ رنگ در ۴ گوشه ی مربع ۲K×۲K به کار رفته و این ۳ رنگ ، ۳ رنگ از آن ۴ رنگ هستند پس رنگ چهارم هم متفاوت است!

حکم ثابت شد ✓

سری ۵ گسسته   محمد امانلو   ۸۱۰۱۰۰۰۸۴   استقراء



① پایه: $n=4$ ✓ $(2\times4-4)=4$

فرض: K نفر با $2K-4$ تماس همه خبر را می‌فهمند

حکم: $K+1$ نفر با $2K-2$ تماس همه خبر را می‌فهمند

نفر $K+1$ ام را جدا می‌کنیم، خبر او را به یکی از K نفر باقی‌مانده می‌دهیم، طبق فرض این K نفر از همه‌ی اخبار با $2K-4$ حرکت از همه‌ی اخبار موجود مطلع می‌شوند!

سپس یک نفر از این K نفر اخبار را به طور کامل به آن یک نفر جدا شده منتقل می‌کند پس:

$$1+2K-4+1=\underline{2K-2}$$

② پایه: $n=1$ ✓

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$$

فرض:

$$\overbrace{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}}^{A}<\frac{1}{\sqrt{3n}}$$

حکم:

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}<\frac{1}{\sqrt{3n+3}}$$

$$A\times\frac{2n+1}{2n+2}<\frac{1}{\sqrt{3n}}\times\frac{2n+1}{2n+2}$$

فرض می‌کنیم:

$$(1)\quad A<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\quad,\quad A\times\frac{2n+1}{2n+2}<\frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$

$$\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}\ \frac{1}{\sqrt{3n+1}}\times\frac{2n+1}{2n+2}<\frac{1}{\sqrt{3n+4}}\ \overset{n\geq1}{\Longleftrightarrow}\ \frac{1}{3n+1\times(2(n+1))^2}<\frac{1}{(3n+4)(2n+1)^2}$$

$$\Longleftrightarrow (3n+1)(2n+2)^2>(3n+4)(2n+1)^2 \Longleftrightarrow$$

$$(3n+1)(4n^2+4+8n)>(3n+4)(4n^2+1+4n)\Longleftrightarrow 12n^3+28n^2+20n+4>$$

$$12n^3+28n^2+4+19n \Longleftrightarrow$$

$n>0$ قطعی همیشه درست ✓

چون همه‌ی روابط ۲ شرطی است پس ثابت می‌شود $A\times\frac{2n+1}{2n+2}<\frac{1}{\sqrt{3n+4}}$ است و چون $\frac{1}{\sqrt{3n+3}}>\frac{1}{\sqrt{3n+4}}$ است پس

$A\times\frac{2n+1}{2n+2}<\frac{1}{\sqrt{3n+3}}$ است!