جواب سوال ۱:

الف) فرض می‌کنیم جابجایی نهایی X_m باشد .

$$W = \Delta k$$
$$F X_m - \frac{1}{2} k X_m^2 = 0$$
$$X_m (F - \frac{1}{2} k X_m) = 0$$
$$X_m = \frac{2F}{k} = 0.12\ m \quad ans.$$

باید دقت کرد تعادل با توقف فرق دارد و استدلال زیر غلط است:

$$k X_m = F$$
$$X_m = \frac{F}{k} \quad wrong$$

ب)

$$W_F = F X_m = F(2F/k) = 0.36\ J \quad ans.$$

پ)

$$W = -\frac{1}{2} k X_m^2 = -\frac{1}{2} k \left(\frac{2F}{k}\right)^2 = -0.36 J \quad ans.$$

ت) رابطه ی انرژی جنبشی را در حالت کلی می‌نویسیم

$$F x - \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

برای بیشینه شدن انرژی جنبشی به وسیله‌ی مشتق گیری سرعت را بیشینه می‌کنیم

$$F \frac{dx}{dt} - k x \frac{dx}{dt} = m v \frac{dv}{dt}$$
$$dv/dt = 0$$
$$F = k x$$
$$Xc = F/k = 0.06\ m \quad ans.$$

ث)

$$Xc \ = \ F/k$$
$$F\left(\frac{F}{k}\right)-\frac{1}{2}\,k\left(\frac{F}{k}\right)^2 \ = \frac{1}{2}\,m\,v^2$$
$$K_{max} \ = \ 0.09J \quad ans.$$

جواب سوال ۲:

در هر لحظه داریم :

$$w = \Delta k \Longrightarrow pt = \frac{1}{2}mv^2$$
$$v^2 = \frac{2p}{m}t \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2p}{m}t}$$
$$x = \frac{2}{3}\sqrt{2\,\frac{p}{m}t^3} = \sqrt{\frac{8pt^3}{9m}}$$

فرض می‌کنیم کل مسافت D باشد :

$$D = \sqrt{\frac{8pt^3}{9m}} \Longrightarrow D^2 = \frac{8pt^3}{9m}$$

پس از دیفرانسیل گیری داریم :

$$0 = \frac{8}{9\mathrm{m}}(t^3dp + 3t^2pdt) \Longrightarrow 0 = \frac{8}{9} * \frac{t^2}{m}(tdp + 3pdt) \Longrightarrow dt = -\frac{t}{3} * \frac{dp}{p}$$

جواب سوال ۳:

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$W = \int \vec{F}.d\,\vec{r} = \int 2\beta xy\ dx + \beta x^2\,dy$$

$y = \frac{b}{a}x$ معادله سطح شیبدار $\Longrightarrow$

$$W = \int_a^b \frac{2b}{a}\beta x^2\ dx + \beta x^2(\frac{b}{a}dx) = \beta b a^2$$

$$v_A = \sqrt{\beta b a^2 + 4}$$

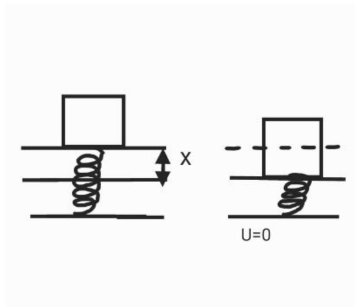
جواب سوال ۴:

الف)

$$mgd - fd = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = 2.38\frac{m}{s}$$

ب)

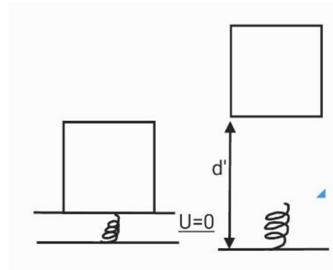


$$mgx + \frac{1}{2}mv^2 - fx = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{1}{2}kx^2 + (f - mg) * x - \frac{1}{2}mv^2 = 0$$

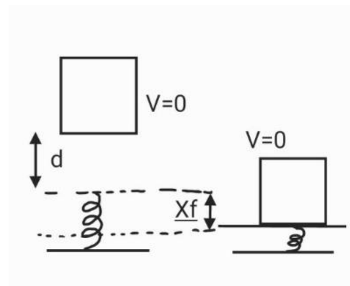
$$x = 0.9\ m$$

پ)



$$\frac{1}{2}kx^2 - fd' = mgd' \Rightarrow \ d' = \frac{1}{2} * \frac{kx^2}{mg+f} = 2.77\ m$$

ت)



L : مسافت کل

X_f : فشردگی نهایی فنر

$$mg\left(d + X_f\right) - f * L = \frac{1}{2}k(X_f)^2$$

چون اصطکاک ایستایی قابل صرف نظر کردن است معادله ی دوم را به اینصورت می‌نویسیم:

$$mg = k\,X_f \Longrightarrow \ X_f = \frac{mg}{k}$$
$$mg\left(d + \frac{mg}{k}\right) - f\ L = \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2$$
$$f\ L = \frac{1}{2}\frac{(mg)^2}{k} + mg\ d$$
$$L = 15.1\ m$$

جواب سوال ۵:

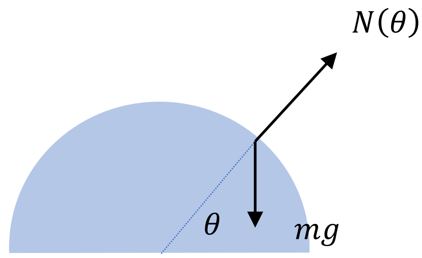
$$mg\sin\theta - N(\theta) = \frac{mv_\theta^2}{R}$$

$$\frac{1}{2}mv_\theta^2 + mgR\sin\theta = mRg$$

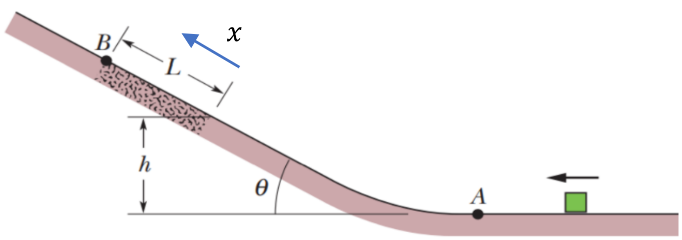
$$\rightarrow\quad N(\theta) = mg(3\sin\theta - 2)$$

$$if\quad N(\theta_c) = 0 \quad\rightarrow\quad \sin\theta_c = \frac{2}{3}$$

$$H = R\sin\theta_c = \frac{2R}{3}$$



جواب سوال ۶:



فرض کنیم جسم به اندازه x روی قسمت با اصطکاک حرکت کرده است و v_x سرعت جسم در آن لحظه است:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = mg(h + x\sin\theta) + \mu_k mg\cos\theta\ \ x + \frac{1}{2}m\,v_x^2$$

اگر در این رابطه به ازای $x = L$ به دست بیاوریم $v_{x=L}^2 \geq 0$، یعنی جسم می‌تواند به نقطه‌ی B برسد (اگر مقدار منفی به دست بیاوریم یعنی نمی‌توانسته به بالا برسد). با محاسبه از رابطه بالا به دست می‌آوریم:

$$v_B^2 = 12.36\ \left(\frac{m}{s}\right)^2 \quad\rightarrow\quad v_B = 3.51\ \frac{m}{s}$$

اگر نمی‌توانست به نقطه‌ی B برسد، برای پیدا کردن بیشترین مقدار پیشروی در سطح اصطکاک‌دار، در رابطه بالا مقدار $v_x = 0$ قرار می‌دادیم و معادله را برای x حل می‌کردیم.

جواب سوال ۷:

الف) نقطه شروع حرکت جسم در پایین سطح شیبدار را نقطه A و لحظه ای که فنر به اندازه x فشرده می شود را نقطه B فرض می کنیم.طبق قانون بقا انرژی داریم:

$$E_{K_A} + U_A = E_{K_B} + U_B$$

$$E_{K_A} + 0 = E_{K_B} + mg(d + x)sin(\frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}kx_B^2$$

$$\rightarrow E_{K_B} - E_{K_A} = -(mg\frac{3d}{5} + \frac{1}{50}kd^{\,2}) = -d(\frac{30w_g + kd}{50})$$

$$\rightarrow \Delta E_k = -d(\frac{30w_g + kd}{50})$$

ب)

$$E_{K_A}^{'} + U_A^{'} = E_{K_B}^{'} + U_B^{'}$$

$$E_{K_A}^{'} + 0 = 0 + mg(d + x_B^{'})sin(\frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}k\frac{9d^2}{4}$$

$$\rightarrow E_{K_A}^{'} = \frac{5}{4}w_g d + \frac{9}{8}kd^{\,2} = \frac{d}{4}(5w_g + 4.5kd)$$

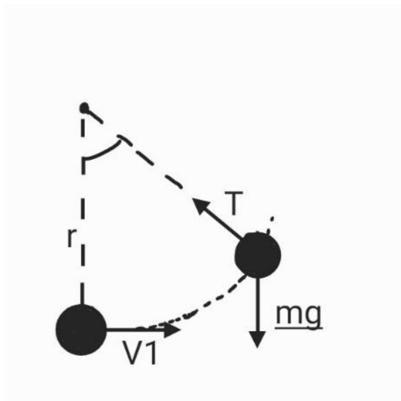
ج)

$$\Delta E_k = -2.72\,J \quad , \quad E_{K_A}^{'} = 23\,J$$

جواب سوال ۸:

از زمان شروع حرکت تا گیر کردن ریسمان داریم :

$$mgl = \frac{1}{2} * mv_1^2$$



بعد از گیر کردن تا انتها :

$$\frac{1}{2} * mv_1^2 = mgr(1 - cos\theta) + \frac{1}{2} * mv_\theta^2$$

$$v_\theta^2 = v_1^2 - 2gr(1 - cos\theta)$$

$$\sum f_n = m * a_n = \frac{mv^2}{r}$$

$$T - mgcos\theta = \frac{mv_1^2}{r} - 2mg(1 - cos\theta)$$

$$T = \frac{mv_1^2}{r} + mg(3cos\theta - 2)$$

$$= \frac{2mgl}{r} + mg(3cos\theta - 2)$$

$$= mg\left(\frac{2l}{r} - 2 + 3cos\theta\right)$$

$$T_{max} \ \ at\ \theta = 0$$

$$T_{min} \ \ at\ \theta = \pi$$

$$\Rightarrow\ mg\left(\frac{2l}{r} - 5\right) < T < mg\left(\frac{2l}{r} + 1\right)$$

برای آنکه توپ بتواند حول میخ بپیچد کشش نخ باید همه جا مثبت باشد. طبق روابط بالا همانطور که دیده می‌شود کمترین کشش نخ در بالاترین نقطه اتفاق می‌افتد این نقطه بحرانی است .

$$T > 0 \Rightarrow mg\left(\frac{2l}{r} - 5\right) > 0 \Rightarrow r < \frac{2}{5}l$$
$$\Rightarrow r_{max} = 48\ cm \Rightarrow d_{min} = l - r_{max} = 72\ cm$$

جواب سوال ۹:

الف)

$$F = -\frac{du}{dr} \rightarrow F = 0 = -\frac{du}{dr} \rightarrow -2ar^{-3} + br^{-2} = 0 \rightarrow r_0 = \frac{2a}{b}$$
$$\frac{d^2u}{dr^2}(r = r_0) = 6ar_0^{-4} - 2br_0^{-3} = \frac{b^4}{(2a)^3} \succ 0$$

پس تعادل نقطه r_0 پایدار است.

ب)

$$F = -\frac{du}{dr} = \frac{2a}{r^3} - \frac{b}{r^2} \rightarrow \frac{dF}{dr} = 0 \rightarrow -6ar^{-4} + 2br^{-3} = 0$$
$$r = \frac{6a}{2b} = \frac{3a}{b} \rightarrow F_{max} = 2a(\frac{3a}{b})^{-3} - b(\frac{3a}{b})^{-2} = -\frac{1}{27}\frac{b^3}{a^2}$$

جواب سوال ۱۰:

$$U + K = U_0 + K_0$$

برای زمین و جرم M انرژی پتانسیل گرانشی ثابت است. مکان اولیه جرم 2M را سطح مبدا گرانش در نظر میگیریم. پس:

$$U_0 + K_0 = 0 \quad \rightarrow \; U + K = 0 \;\; \rightarrow \; \frac{1}{2}kd^2 - 2Mgd + K = 0$$

$$\rightarrow \; K = 2Mgd - \frac{1}{2}kd^2$$

ب)

$$K = K_M + K_{2M} \quad \Rightarrow \quad (K_M = \frac{1}{2}Mv^2 \;\&\; K_{2M} = \frac{1}{2}(2M)v^2)$$

$$K_{2M} = \frac{2}{3}K = \frac{2}{3}(2Mgd - \frac{1}{2}kd^2)$$

ج) توقف لحظه ای یعنی جایی که u=0 باشد یعنی K=0 باشد:

$$2Mgd - \frac{1}{2}kd^2 = 0 \;\rightarrow\; d = 4\frac{Mg}{k}$$

جواب سوال ۱۱:

رابطه‌ی قیدی حرکت بین دو جرم:

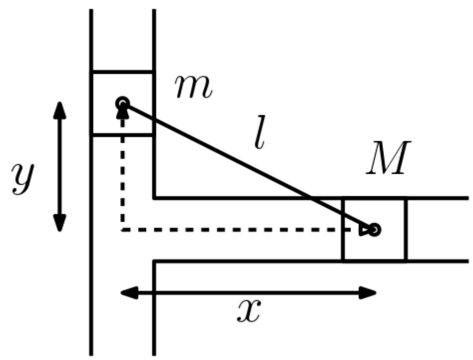
$$x^2 + y^2 = l^2 \rightarrow \ xdx/dt + ydy/dt = 0$$

از رابطه بالا هنگامی که y=0 است نتیجه می‌شود dx/dt=0 یا به عبارتی سرعت جرم M صفر است.

چون نیروی پایستار وزن بر مجموعه عمل می‌کند و اتلافی هم نداریم میتوانیم رابطه‌ی بقای انرژی مکانیکی بین لحظه‌ی اول و لحظه‌ی y=0 بنویسیم:

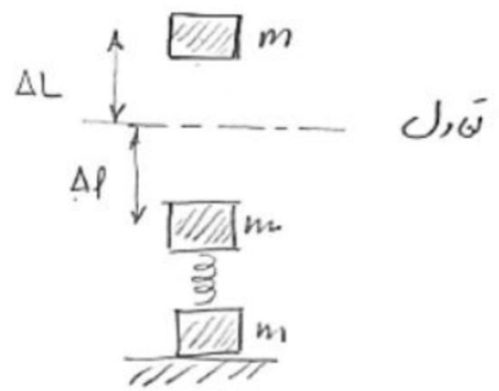
$$mgh = 1/2mv^2 + 1/2M(0)^2 \rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

پس سرعت جسم برابر با سرعت سقوط آزاد آن از ارتفاع h خواهد بود. توجه کنید که این رابطه تنها برای نقطه‌ی خاص y=0 برقرار است. برای دیگر y ها سرعت جسم m از سرعت سقوط آزاد متفاوت خواهد بود (چرا؟)



جواب سوال ۱۲:

در شکل زیر وضعیت دو جرم را زمانی که جرم پایین در حال جدا شدن از سطح زمین می باشد،نشان می دهد.در این لحظه جرم بالایی از حالت آزاد فنر نیز گذشته و به اندازه ΔLنیز بالاتر رفته است.سرعت جرم پایین هنوز صفر است اما جرم دارای انرژی جنبشی می باشد.



مقدار این انرژی جنبشی از روابط زیر بدست می آید:

$$W_{spring} + W_{gravity} = \Delta K$$

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - 0 = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$W_{spring} = \int_{-\Delta l}^{0} (-\kappa x)dx + \int_{0}^{\Delta L} (-\kappa x)dx$$

$$W_{spring} = (\frac{-1}{2}\kappa x^2)_{\Delta l}^{0} + (\frac{-1}{2}\kappa x^2)_{0}^{\Delta L} = \frac{1}{2}\kappa(\Delta l)^2 - \frac{1}{2}\kappa(\Delta L)^2$$

$$W_{gravity} = \int_{-\Delta l}^{\Delta L} (-mg)dx = -mg(\Delta l + \Delta L)$$

در نهایت نتیجه می شود:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}\kappa(\Delta l)^2 - \frac{1}{2}\kappa(\Delta L)^2 - mg(\Delta l + \Delta L)$$

در این معادله علاوه بر Δlکه مد نظر سوال است دو مجهول دیگرΔLو v_fنیز وجود دارد که مقادیر آن ها از طریق دیگری باید پیدا شوند.

1.در این معادله هر اندازه Δl(مقدار فشردگی اولیه فنر)بزرگتر باشد،سرعت نهایی جرم بالایی بیشتر خواهد بود.چون دنبال کمترین مقدار Δlهستیم پس سرعت نهایی را صفر می گیریم$(v_f = 0)$.

2.در لحظه جدا شدن جرم پایین از زمین نیروی عکس العمل سطح صفر خواهد بود پس نیروی کشش فنر برابر وزن جرم پایین خواهد بود.

$$\kappa\Delta L = mg \ \rightarrow \ \Delta L = \frac{mg}{\kappa}$$

با قرار دادن این مقادیر در معادله اصلی خواهیم داشت:

$$(\Delta l)^2 - \frac{2mg}{\kappa}\Delta l - 3\left(\frac{mg}{\kappa}\right)^2 = 0 \rightarrow \Delta l = 3\frac{mg}{\kappa} \quad \left(\Delta l = -\frac{mg}{\kappa}\ \text{غ.ق}\right)$$