گسسته - روابط بازگشتی

محمد دانالو

۸۱۰۱۰۰۰۸۴

(۱) الف)

$a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$

$r^3 = 2r^2 + 5r - 6 \Rightarrow r_1 = 1 \Rightarrow (r-1)(r^2 - r - 6) = (r-1)(r-3)(r+2)$

$r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = 0$ $\qquad \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$

$\Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = -2,\ r_3 = 3 \Rightarrow a_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2 (-2)^n + \alpha_3 3^n \Rightarrow \begin{cases} n=0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 7 \\ n=1 \Rightarrow \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = -4 \\ n=2 \Rightarrow \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 8 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{a_n = 5 + (-1)3^n + 3(-2)^n}$

ب)

$a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}\ ,\ n \geq 2$ $\qquad r^2 = 6r - 8$

$r^2 - 6r + 8 = 0 \Rightarrow (r-2)(r-4)$

$\Rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = 4 \Rightarrow a_n = \alpha_1 (2)^n + \alpha_2 (4)^n \begin{cases} n=0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 4 \\ n=1 \Rightarrow 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 10 \end{cases}$

$2\alpha_2 = 2 \Rightarrow \alpha_2 = 1$

$\Rightarrow \boxed{a_n = 3 \times 2^n + 4^n}$

(۲) با استفاده از تابع مولدهای نمایی تعداد رشته‌های به طول n ← a,b,c (a زوج، c فرد)

(۱) $\underline{\quad a_{n-1} \quad}\ b = x$

(۲) $\underline{\quad a_{n-1} \quad}\ a = y$ (b,c زوج / b,c فرد)

(۳) $\underline{\quad\quad}\ c = a_{n-1}$ (a فرد زوج)

$\underline{\quad\quad}\ = a_{n-1}$ (a زوج فرد)

$a_0 = 1$

$a_n = a_{n-1} + x + y$

$x + y = 3^{n-1} - 2a_{n-1}$

$\Rightarrow a_n = 3^{n-1} - a_{n-1}$

$G(x) = \sum_{1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{1}^{\infty} 3^{n-1} x^n - \sum_{1}^{\infty} a_{n-1} x^n \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{1}^{\infty} 3^{n-1} \frac{x^n}{n!} - \sum_{1}^{\infty} a_{n-1} \frac{x^n}{n!}$

$\Rightarrow G(x) - a_0 = \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} - \int G(x) \Rightarrow G(x) = \frac{1}{4} e^{3x} + \frac{3}{4} e^{-x}$

$\Rightarrow \sum_{0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{4} \sum_{0}^{\infty} 3^n \frac{x^n}{n!} + \frac{3}{4} \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{4}(3)^n + \frac{3}{4}(-1)^n}$

③

تعداد راه‌های رسیدن به یک خانه برابر تعداد راه‌های رسیدن به خانه‌ی بالا راست و بالا چپ، تعداد راه‌های به پایان رسیدن یعنی خانه جمع راه‌های رسیدن به هر ردیف پایینی است پس برای هر ستون داریم،

پس اگر n شماره ستون‌ها و m شماره ردیف‌ها باشد

$$a_{nm} = a_{n-1\,m-1} + a_{n+1\,m-1} \qquad a_{11} = 1 \quad a_{21} = 1$$
$$a_{12} = 1 \quad a_{22} = 3$$

رابطه بازگشتی به صورت فوق است که در ۲ بعد تعریف می‌کند. پس برای یافتن مسئله می‌توان حالت‌ها را برای ۴ ستون در یک سمت نوشت و در ۲ ضرب کرد. پس به صورت شبکه‌ای حالت‌ها را شمارش می‌کنیم. که تعداد کل برابر ۲۰۹۰ تا می‌شود.

④

$$a_n - 3a_{n-1} = n^2 \Rightarrow a_n = 3a_{n-1} + n^2$$

$$G(x) - a_0 = 3\sum_{1} a_{n-1}x^n + \sum_{1}^{\infty} n^2 x^n \Rightarrow G(x) - 1 = 3x\sum_{1} a_{n-1}x^{n-1} + \frac{x(x+1)}{(1-x)}$$

$$\Rightarrow G(x) - 1 = 3x\,G(x) + \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow G(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$

۵

پاسخ مسئله برای دنباله‌ی به طول $2n+1$ را برابر F_n در نظر می‌گیریم. روی آخرین جایی که قبل از جایگاه $2n+1$ صفر شده‌ایم حالت‌بندی می‌کنیم! مثلاً اگر در جایگاه $2i+1$ داشته باشیم که تعداد حالت‌های ۱ تا $2i+1$ برابر F_i است برای ما بقی $2i+2$ تا $2n$ حالا دنباله‌ی به طول $2(n-i-1)+1$ که تمامی اعداد آن از ۱ بیشتر یا مساوی است. پس تعداد حالات آن برابر F_{n-i+1} است (به ازای هر حالتی که داریم همه‌ی اعداد را یکی اضافه می‌کنیم و قرار می‌دهیم که همه‌ی شرایط را حفظ کنیم) پس در کل تعداد حالات برابر $F_i + F_{n-i+1}$ است که باید به ازای هر i محاسبه شود پس:

$$\boxed{F_n = \sum^{n-1} F_i + \sum F_{i+n+1} = \sum_{i=1}^{n-1} F_i + F_{n-i+1}}$$

۶

$a_{n+1} = a_n + ($ زیرمجموعه‌های تشکیل شده با $n+1$ که مساوی a_n است $)$

اگر بزرگترین عضو a_n با $n+1$ زوجیت متفاوتی داشته باشند، $n+1$ را به آن مجموعه اضافه می‌کنیم و در غیر این صورت $n+1$ را جایگزین می‌کنیم

پس a_n برابر زیرمجموعه‌های شامل n است

پس a_{n-1} تعداد زیرمجموعه‌های بدون n است

$a_n = a_{n-1} + \bigcirc$

به دنبال کشف $\bigcirc$ هستیم: این تعداد برابر a_{n-2} است زیرا در زیرمجموعه‌های a_{n-2} اگر بزرگترین عضو زوجیت متفاوت با n داشت $n-1$ و n را در هر دو وارد می‌کنیم اگر هم که با n متفاوت بود n را جدا زیرمجموعه می‌گیریم پس

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2}$$

* اگر n را جدا یا $n-1$ را جداگانه زیر قرار دهیم می‌توان حالات مثبتی را برقرار کرد پس

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2}$$