ریاضیات گسسته

تمرین هشتم - گراف پیشرفته

محمد امانلو و امیرپارسا موبد

تاریخ تحویل ۱۴۰۲/۰۲/۲۴

سؤال ۱.

ثابت کنید عدد رنگی گراف مسطح کمتر مساوی ۶ است.

پاسخ :

با استفاده از فرمول اویلر بدست آوردیم که در گراف مسطح

$$e \leq ۳v - ۶$$

و از طرفی

$$\sum_{v \in V(G)} d_v = ۲e$$

در نتیجه با جایگذاری رابطه بالا:

$$\sum_{v \in V(G)} d_v \leq ۲(۳v - ۶) \Rightarrow \frac{۱}{v} \sum_{v \in V(G)} d_v \leq \frac{۶v - ۱۲}{v} < ۶$$

در سمت چپ میانگین درجات رئوس گراف قرار دارد و طبق تعمیم لانه کبوتری یک راس پیدا می‌شود که درجه‌اش کمترمساوی میانگین باشد؛ پس راسی با درجه حداکثر ۵ در این گراف وجود دارد.
حال برای اثبات ۶ رنگ‌پذیری گراف، استقرا می‌زنیم.
پایه : n = ۱ که با یک رنگ نیز می‌توان رنگ کرد.
گام : راس با کمترین درجه را انتخاب و حذف می‌کنیم. $n - ۱$ راس باقی مانده طبق فرض استقرا با حداکثر ۶ رنگ، رنگ می‌شوند. حال برای راس حذف شده باید طوری رنگ انتخاب کنیم که با هیچکدام از همسایه‌هایش یکسان نشود. از آنجایی که این راس حداکثر ۵ همسایه دارد، همسایه‌هایش حداکثر ۵ رنگ مختلف خواهند داشت؛ درنتیجه حداقل یک رنگ از میان ۶ رنگ وجود دارد که در بین این رئوس استفاده نشده، و این رنگ را به عنوان رنگ راس حذف شده قرار می‌دهیم. بدین ترتیب هیچ دو راس مجاوری رنگ یکسان نخواهند داشت و گام استقرا به اثبات می‌رسد.

سؤال ۲.

در جلسه شهرسازان جوان مسئله ای مطرح شده است که طراحان موظف به طراحی شهری به شکل گراف مسطح هستند، به نحوی که کمینه‌ی تعداد خیابان‌های مشترک در یک تقاطع، بیشینه باشد.
-علی ادعا می‌کند یک گراف دو بخشی مسطح همبند دارد، که کمینه تعداد یال‌های خارج شده از یک راس در آن ۴ است.
-زهرا مدعی است، گراف مسطحی طراحی کرده که این عدد در آن برابر ۶ است.
- احسان نیز گراف $K_۴$ را به عنوان پاسخ ارائه داده است.
شما بین این ۳ پاسخ کدام طرح را جهت پیاده‌سازی انتخاب می‌کنید؟ طرح انتخابی توسط شما حتما باید قابلیت پیاده‌سازی داشته باشد.

پاسخ :

-ابتدا ادعای زهرا را مورد بررسی قرار می‌دهیم و آن را رد می کنیم. باید ثابت کنیم، در هر گراف مسطحی راسی با درجه کمتر از ۶ یافت می‌شود. درستی این موضوع را با برهان خلف ثابت می کنیم. فرض کنید، حکم برقرار نباشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$e \geq \frac{۶ * v}{۲} \rightarrow e \geq ۳ * v > ۳ * v - ۶$$

در این توضیحات e نشان‌دهنده تعداد یال‌ها و v نشان‌دهنده تعداد راس‌ها است. پس داریم: $e > ۳ * v - ۶$، ولی می‌دانستیم که در گراف مسطح باید داشته باشیم: $e \leq ۳ * v - ۶$. از این تناقض نتیجه می گیریم که فرض خلف اشتباه بوده و درستی حکم نتیجه می‌شود.
-حال به رد ادعای علی می‌پردازیم. باید ثابت کنیم حداقل یک راس وجود دارد که درجه آن از ۴ کمتر است.
با برهان خلف مسئله را حل می کنیم. یعنی فرض می کنیم، همه راس ها درجه شان بیشتر یا مساوی ۴ است. چون گراف دو بخشی است، دور فرد ندارد. بنابراین دور ۳ نیز نخواهد داشت، پس هر ناحیه این گراف حداقل ۴ یال دارد. طبق فرمول اویلر $f = e - n + ۲$ می‌باشد.
همچنین هر یال در دو ناحیه آمده بنابراین با جمع یال های هر ناحیه هر یال دو بار شمرده خواهد شد. بنابراین:

$$f * ۴ \leq e * ۲ \rightarrow (e - n + ۲) * ۴ \leq e * ۲ \rightarrow e * ۲ \leq ۴ * n - ۸$$

همچنین طبق فرضی که کرده‌ایم. $e * ۲ \geq ۴ * n$ که دو معادله آخر همزمان نمی‌توانند رخ دهند که تناقض وجود دارد و حکم ثابت می‌شود.
- می‌دانیم گراف $K_۴$ مسطح است، پس طرح احسان را انتخاب می کنیم.

سؤال ۳.

توان k-ام یک گراف ساده G گراف ساده G^k است، که مجموعه رئوس آن $V(G)$ و مجموعه یال های آن $\{uv : d_G(u, v) \leq k\}$ است.
فرض کنید G حداقل ۳ مولفه همبندی غیر تهی مجاور راس x دارد که در هر کدام راس x دقیقا یک همسایه دارد.
ثابت کنید $G^۲$ همیلتونی نیست.
$d_G(u, v)$:کمینه تعداد یالهایی که باید طی شود تا از راس u به راس v برویم را فاصله u و v گویند و با $d_G(u, v)$ نشان می‌دهند.
مولفه همبندی:یک زیر گراف مانند H از G یک مؤلفهٔ همبندی برای G است اگر و فقط اگر بین هر دو راس در H، دست‌کم یک مسیر وجود داشته باشد و با افزودن هر راس (و یا یال) دیگری از G به H این خاصیت از بین برود.

پاسخ :

فرض کنید $v_۱$ و $v_۲$ و $v_۳$ همسایه منحصر به فرد راس x در سه مولفه $H_۱$ و $H_۲$ $H_۳$ از $G - x$ باشد فرض کنید $S = \{x, v_۱, v_۲, v_۳\}$
از آنجایی که هر H_i غیر تهی است، $G^۲ - S$. حداقل سه مولفه همبندی دارد.
در S ، فقط رئوس x و v_i همسایه هایی در $H_i - v_i$ دارند.دور همیلتونی $G^۲$باید از طریق رئوس متمایز S وارد و خارج $H_i - v_i$ شود. اینها می توانند رئوس فقط x و v_i باشند. بنابراین حداقل سه یال به راسx برخورد می کند، (یکی به هر H_i) که در یک دور همیلتونی غیرممکن است.

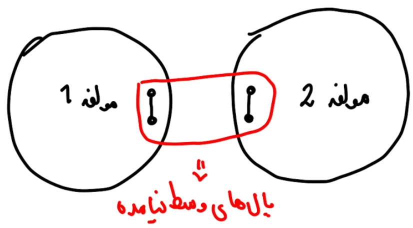
سؤال ۴.

گراف G راس تنها ندارد و هیچ زیرگراف القایی از آن دقیقا دو یال ندارد (زیر گراف القایی، زیرگرافی از گراف اصلی است، که رئوس آن یک زیرمجموعه از رئوس گراف است و به ازای هر دو راس از آن که در گراف اصلی به هم یال دارند، این یال در زیرگراف القایی هم وجود دارد.).
ثابت کنید این گراف کامل است.

پاسخ :

برهان خلف:
فرض می‌کنیم گراف کامل نیست.
اگر گراف ناهمبند باشد، حداقل دو مولفه داریم، و از آنجایی که راس تنها نداریم، هر مولفه حداقل دو راس دارد. درون هر مولفه حداقل یک

یال پیدا می‌شود؛ پس در صورتی که، از دو مولفه دلخواه، از هرکدام دو سر یک یالش را انتخاب کنیم، زیرگراف القایی ۴ راس انتخاب شده دقیقا دو یال خواهد داشت که تناقض است.



پس می‌توان فرض کرد گراف همبند است. با این فرض اگر گراف کامل نباشد دو راس هستند که به همدیگر به صورت مستقیم وصل نیستند پس کوتاه ترین مسیر بین آنها حداقل ۲ یال دارد. اگر ۳ راس اول مسیر را بگیریم راس اول و سوم به هم وصل نخواهند بود زیرا در این صورت مسیر کوتاه‌تری بین دو راس پیدا می‌شود. درنتیجه اگر زیرگراف القایی این ۳ راس را بگیریم. دقیقا دو یال خواهد داشت که تناقض است.

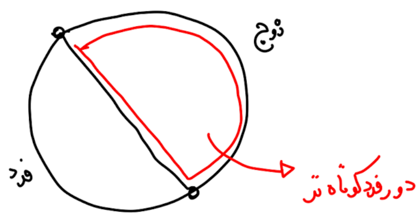
پس در هر دو صورت زیرگرافی القایی با دقیقا دو یال پیدا می‌شود و درنتیجه فرض خلف غلط است و حکم ثابت می‌شود.

سؤال ۵.

در گراف ساده n راسی G که $n \geq ۵$ و $\chi(G) \geq ۴$ و $\delta(G) \geq ۱$ ثابت کنید، می‌توان رئوس گراف را به دو دسته تقسیم کرد، به طوری که عدد رنگی یک دسته حداقل ۳ و عدد رنگی دسته دیگر حداقل ۲ باشد. ($\chi(G)$ همان عدد رنگی G است.)

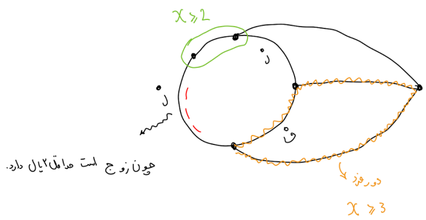
پاسخ :

می‌دانیم یک گراف دوبخشی است، اگر و تنها اگر دور فرد نداشته باشد. درنتیجه، برای ارائه یک دسته که عدد رنگی‌اش حداقل ۳ باشد، کافی است تعدادی از رئوس را انتخاب کنیم، که زیرگراف القایی آنها دور فرد داشته باشد. در این صورت قطعا دوبخشی نیست و عدد رنگی آن از ۲ بیشتر خواهد بود؛ در بین باقی رئوس گراف نیز، کافی است حداقل یک یال وجود داشته باشد تا به حداقل دو رنگ نیاز داشته باشیم، که دو سر هر یالی رنگ متفاوتی داشته باشند.
لم۱: هیچ دو راسی از داخل کوتاه ترین دور فرد به هم متصل نیستند.
برهان: چون در این صورت مسیر بین این دور راس از یک طرف زوج است و دور فرد کوتاه‌تر تشکیل می‌دهد.

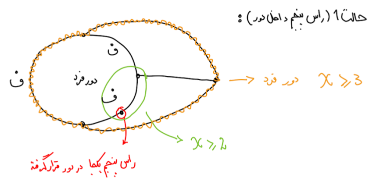


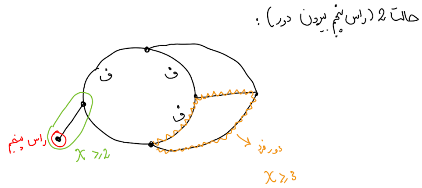
چون عدد رنگی گراف حداقل چهار است، قطعا دور فرد داریم. کوچکترین دور فرد گراف را در نظر می‌گیریم. در نتیجه اگر زیرگراف القایی حاصل از رئوس این دور را در نظر بگیریم، یک دور فرد می‌شود، که عدد رنگی دور فرد ۳ است. تعداد رئوس خارج دور نیز حداقل ۱ راس است، چون در غیر این صورت کل گراف یک دور فرد می‌شود، که می‌توان آن را فقط با ۳ رنگ، رنگ کرد که با فرض سوال در تناقض است.

اگر دو راس از بیرون به یکدیگر وصل باشند، این دسته نیز عدد رنگی حداقل ۲ دارد و دسته بندی خواسته شده در صورت سوال پیدا می‌شود.
در غیر این صورت نتیجه می‌دهد، رئوسِ بیرونِ کوچکترین دور هیچکدام به هم وصل نیستند و چون هر راس درجه حداقل یک دارد، حداقل یک همسایه در کوچکترین دور فرد دارند.
اگر هر راس از بیرون به حداکثر دو راس از دور یال داشته باشد، می‌توان دور فرد را با سه رنگ رنگ کرد؛ و رئوس بیرون چون حداکثر درجه ۲ هستند، همیشه حداقل یک رنگ از سه رنگ، برایشان وجود دارد که در همسایه‌های آن‌ها استفاده نشده، و همان را می‌شود برای رنگ این راس انتخاب کرد. در این صورت گراف با حداکثر ۳ رنگ رنگ خواهد شد، که با فرض در تناقض است.
پس راسی از بیرون وجود دارد که به حداقل سه راس از دور متصل است. این سه راس دور فرد را به سه تکه تقسیم می‌کنند اگر طول یک تکه زوج شود مطابق شکل زیر می‌توان دسته بندی را ارائه داد.



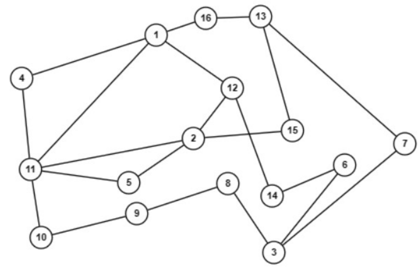
اگر طول هر سه تکه فرد باشد با توجه به اینکه $n \geq ۵$ به جز این راس و همسایه‌های این راس در دور حداقل یک راس دیگر وجود دارد.
دو حالت پیش می‌آید، اینکه راس پنجم داخل دور باشد یا بیرون دور که هر دو حالت در شکل زیر بررسی شده است و با گرفتن دسته سبز به عنوان یک دسته و بقیه رئوس به عنوان یک دسته، دسته بندی مطلوب صورت سوال ارائه شده است.





سؤال ۶.

مسطح بودن گراف زیر را بررسی کنید. ادعای خود را ثابت کنید.



پاسخ :

با حذف تمام رئوس درجه ۲ به کمک عملیات زیربخش مقدماتی که منجر به ایجاد شدن گراف همریخت گراف فوق می‌شود، متوجه می‌شویم که این گراف با گراف $K_{۳,۳}$ همریخت است پس طبق قضیه کوراتوفسکی این گراف مسطح نیست. در واقع توانستیم با تعدادی عملیات زیربخش مقدماتی به گرافی نامسطح برسیم پس نتیجه می‌گیریم گراف اولیه مسطح نیست.

سؤال ۷.

(امتیازی) در یک جدول $n \times m$، تعدادی دومینوی ۲ $\times$ ۱ و ۱ $\times$ ۲ قرار داده‌ایم، به‌طوری که هر کدام دقیقا دو خانه از جدول را پر کرده‌اند و هیچ دو دومینویی رو هم نیافتاده‌اند. دومینوها لزوما کل جدول را پر نکرده‌اند.
ثابت کنید می‌توان دومینوهای موجود در جدول را طوری با چهار رنگ، رنگ کرد، که هیچ دو دومینوی مجاوری(که در بیش از یک نقطه با یکدیگر اشتراک دارند)، همرنگ نباشند.

پاسخ :

لم: اگر راس‌های یک گراف را بتوان به دو زیرگراف افراز کرد به طوریکه اولی $a_۱$ رنگ پذیر و دومی $a_۲$ رنگ پذیر باشد، گراف اصلی $a_۱ \times a_۲$ رنگ پذیر است. حال دومینوها را به دو دسته تقسیم می‌کنیم. به ازای دومینوهای عمودی، خانه پایین آن‌ها و به ازای دومینوهای افقی خانه چپ آن‌ها را علامت می‌زنیم. اگر دومینویی خانه علامت زده شده اش در خانه‌ای باشد که سطر و ستون آن‌ها هم زوجیت باشند، آن را در دسته اول قرار می‌دهیم و در غیر این‌صورت آن را در دسته دوم.
حال ثابت می‌کنیم هر کدام از دسته‌ها دوبخشی هستند. برای اینکار ابتدا گرافی را در نظر بگیرید که راس‌های آن دومینوها و یال‌هایشان مجاورت‌ها باشند. نشان می‌دهیم هیچ دسته ای دور فرد ندارد، دو دومینوی مجاور که در یک دسته قرار دارند به این‌صورت هستند که خانه علامت زدشون یا دو فاصله در سطر دارند یا دو فاصله در ستون. پس به ازای هر مجاورت جمع سطر و ستون خانه علامت زده شده دومینو، دو واحد تغییر می‌کند پس هر دوری که داشته باشیم به طول زوج است. در نتیجه هر بخش دو بخشی است و در نتیجه دومینوها ۴ رنگ پذیر.