ریاضیات گسسته

نمونه سوال استقرا - بهار افشار

سؤال ۱.

نامساوی زیر را به کمک استقرا ثابت کنید. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}<1$

پاسخ .

پایه استقرا: $n=1, \frac{1}{2}<1$ برقرار است.

فرض استقرا:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^k}<1$$

حکم استقرا:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}<1$$

اثبات: دو طرف فرض را در $\frac{1}{2}$ ضرب میکنیم

$$\rightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}<\frac{1}{2}$$

حال دو طرف را به علاوه $\frac{1}{2}$ کرده و حکم استقرا ثابت میشود.

$$\rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}<1$$

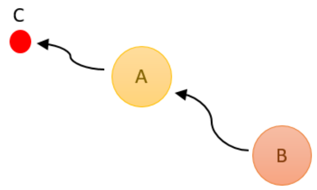
سؤال ۲.

کشوری در اختیار داریم که هر جاده ای از آن را که در نظر بگیریم یکطرفه است و نیز هر دو شهر دقیقاً با یک راه مستقیم به هم وصل شده اند. نشان دهید شهری وجود دارد که میتوان از تمام شهرهای دیگر به صورت مستقیم یا با عبور از تنها یک شهر دیگر به آن رفت.

پاسخ .

پایه استقرا: برای دو شهر برقرار است

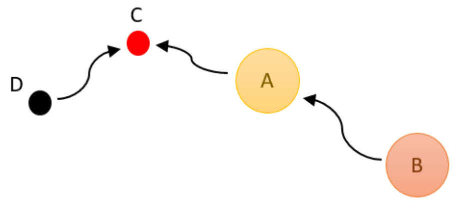
فرض استقرا: شرایط مسئله برای k شهر، شهر مرکزی C، شهر هایی که مستقیما به شهر مرکزی راه دارند A و شهر هایی که با یک واسطه به شهر مرکزی راه دارند B برقرار است.



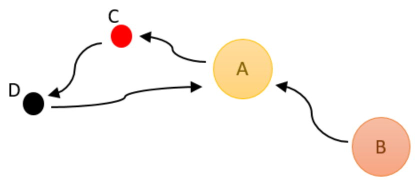
حکم استقرا: فرض را برای $k+1$ شهر اثبات میکنیم.

اثبات: شهری را از مجموعه ی حکم حذف میکنیم. طبق فرض، در این مجموعه شهر مرکزی وجود دارد حال شهر حذف شده را اضافه میکنیم و آن را D مینامیم.

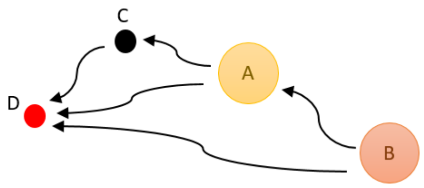
۱. اگر از D به سمت C راهی وجود داشته باشد، C شهر مرکزی باقی خواهد ماند.



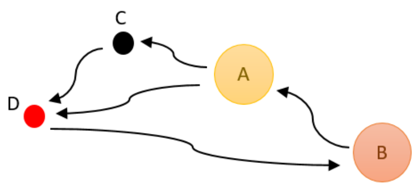
۲. اگر از C به سمت D و از D به سمت A راهی وجود داشته باشد، C شهر مرکزی باقی خواهد ماند. در این حالت D با یک واسطه به C میرود.



۳. اگر از B به سمت D راهی باشد، همه ی شهرها به D راه دارند و D مرکزیست.



۴. اگر از D به B راه وجود داشته باشد، B با یک واسطه به D راه دارد و D مرکزیست.



توجه کنید که درحالت اخیر، راه هایی که از سمت B یا A به D کشیده شده اند به این معناست که همه ی راه ها به سمت D هستند اما راه هایی که از D به B و A کشیده شده به این معناست که حداقل یکی از آن ها به آن سمت است.

سؤال ۳.

ثابت کنید هر عدد طبیعی $n > ۷۳$ را می توان به صورت مجموع چند عدد طبیعی نشان داد به طوری که مجموع معکوس های این عددها برابر واحد باشد. با این فرض که می دانیم حکم برای $n = ۳۳, ۳۴, \ldots, ۷۳$ درست است.

پاسخ .

مسئله را برای n های زوج و فرد به صورت جدا حل میکنیم.

۱. اگر n زوج باشد، از هر $\frac{n}{۲} - ۱$ میتوان به n رسید:

$$\frac{n}{۲} - ۱ = a_۱ + a_۲ + \ldots + a_k$$

و طبق فرض داریم:

$$\frac{۱}{a_۱} + \frac{۱}{a_۲} + \ldots + \frac{۱}{a_k} = ۱$$

از ضرب کردن تساوی اول در ۲ حکم برای n ثابت میشود.

$$n = ۲ + ۲a_۱ + ۲a_۲ + \ldots + ۲a_k$$

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲a_۱} + \frac{۱}{۲a_۲} + \ldots + \frac{۱}{۲a_k} = ۱$$

۲. اگر n فرد باشد، از هر $\frac{n-۹}{۲}$ میتوان به n رسید:

$$\frac{n-۹}{۲} = a_۱ + a_۲ + \ldots + a_k$$

و طبق فرض داریم:

$$\frac{۱}{a_۱} + \frac{۱}{a_۲} + \ldots + \frac{۱}{a_k} = ۱$$

از ضرب کردن تساوی اول در ۲ حکم برای n ثابت میشود.

$$n = ۳ + ۶ + ۲a_۱ + ۲a_۲ + \ldots + ۲a_k$$

$$\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۲a_۱} + \frac{۱}{۲a_۲} + \ldots + \frac{۱}{۲a_k} = ۱$$

سؤال ۴.

تعداد نامتناهی بازه بسته روی محور اعداد حقیقی داده شده است.به طوری که از هر $n + ۱$ بازه حداقل دو بازه اشتراک داشته باشند. ثابت کنید n نقطه روی محور وجود دارند که هر بازه شامل حداقل یکی از این نقاط است.

پاسخ .

پایه استقرا: $n = ۱$،هر دو بازه باهم اشتراک دارند. بازه ای را در نظر میگیریم که چپ ترین نقطه ی راست را دارد. نقطه ی راست آن را انتخاب میکنیم. چون هر بازه باید با آن اشتراک داشته باشد و طبق انتخابمان نقطه راست تمام بازه ها سمت راست آن است، نقطه ی چپ تمام بازه ها باید سمت چپ آن باشد. پس تمام بازه ها شامل نقطه ی سمت راست بازه ی انتخابی هستند و این نقطه جواب مسئله است.

فرض استقرا: اگر از هر $n+۱$ بازه، دوتایشان باهم اشتراک داشته باشند، n نقطه وجود دارد که هر بازه شامل حداقل یکی از آنهاست.

حکم استقرا: اگر از هر $n+۲$ بازه، دوتایشان باهم اشتراک داشته باشند، $n+۱$ نقطه وجود دارد که هر بازه شامل حداقل یکی از آنهاست.

گام استقرا: بازه ای را در نظر میگیریم که چپ ترین نقطه ی راست را داشته باشد و آن را x می نامیم. تمام بازه هایی که با این بازه اشتراک دارند را مجموعه ی A می نامیم. طبق نحوه ی انتخاب بازه x نقطه ی سمت راست تمام بازه ها سمت راست نقطه ی چپ x قرار دارد. پس برای اینکه با x اشتراک داشته باشند، نقطه ی چپ بازه ها باید سمت چپ نقطه ی راست x باشد. به این ترتیب همه ی مجموعه ی A و بازه x شامل نقطه سمت راست x میشوند. این نقطه را انتخاب میکنیم. مجموعه ی B را سایر بازه ها به جز بازه های مجموعه ی A و x در نظر میگیریم. میخواهیم اثبات کنیم که در بین این بازه ها از هر $n+۱$ بازه دو تا باهم اشتراک دارند.

اثبات: هر $n+۱$ بازه که در مجموعه ی B در نظر بگیریم طبق انتخاب با x اشتراک ندارد. اکنون این $n+۱$ بازه را همراه با x در نظر بگیرید، $n+۲$ بازه خواهیم داشت که طبق فرض و شرایط مسئله دوتا بازه هستند که باهم اشتراک دارند. اما هیچ کدام از این دو بازه نمیتواند x باشد، پس دو تا از $n+۱$ بازه اولیه بوده اند که باهم اشتراک داشتند. پس از هر $n+۱$ بازه ای که در B در نظر بگیریم، دو تا هستند که باهم اشتراک دارند. لذا طبق فرض استقرا n نقطه هستند که هر بازه از مجموعه ی B حداقل شامل یکی از این نقاط است. حال یکی از این نقاط را کنار نقطه ی سمت راست بازه x میگذاریم. هر بازه ای از مجموعه ی B شامل حداقل یکی از n نقطه میشود و هر بازه ای از مجموعه ی A و x شامل نقطه ی راست بازه ی x. پس $n+۱$ نقطه وجود دارد که هر بازه شامل حداقل یکی از آنهاست و حکم ثابت میشود.

سؤال ۵.

یک کارخانه تولید اسباب بازی ، جغجغه هایی در k رنگ مختلف تولید می کند. این کارخانه برای بسته بندی از جعبه هایی استفاده می کندکه در هر یک n جغجغه جا می گیرد. ثابت کنید این کارخانه می تواند nk جغجغه (با تعداد دلخواهی از هر رنگ) را به گونه ای در k بسته جا دهد که در هرجعبه ، حداکثر جغجغه ها ، دو رنگ مختلف داشته باشند.

پاسخ .

رنگی مانند a وجود دارد که در میان nk جغجغه حداکثر n جغجغه به این رنگ هستند. و رنگی مانند b وجود دارد که در میان nk جغجغه حداقل n جغجغه به این رنگ هستند.در یک جعبه همه جغجغه های به رنگ a را قرار می دهیم و بقیه ی جعبه را با جغجغه های به رنگ b پر میکنیم. اکنون $k-۱$ رنگ و $k-۱$ جعبه داریم که به طریق مشابه پر می شوند و حکم مسئله اثبات می شود.

سؤال ۶.

تساوی مقابل را به ازای هر $n \geq ۱$ ثابت کنید.($F(n)$ دنباله ی فیبوناچی است)

$$F(n-۱).F(n+۱) - F(n)^۲ = (-۱)^n$$

پاسخ .

پایه استقرا:

$$n = ۱$$
$$F(۰).F(۲) - F(۱)^۲ = -۱$$

فرض استقرا: $n = k$

$$F(k-۱).F(k+۱) - F(k)^۲ = (-۱)^k$$

فرض استقرا: $n = k+۱$

$$F(k).F(k+۲) - F(k+۱)^۲ = (-۱)^{k+۱}$$

اثبات:

$$F(k-1).F(k+1)-F(k)^{2}=(-1)^{k}$$

ضرب دو طرف در -1:

$$F(k)^{2}-F(k-1).F(k+1)=(-1)^{k+1}$$

استفاده ار خاصیت اعداد فیبوناچی: $F(n+1)=F(n)+F(n-1)$

$$F(k)^{2}-(F(k+1)-F(k)).F(k+1)=(-1)^{k+1}$$

$$F(k)^{2}+F(k+1).F(k)-F(k+1)^{2}=(-1)^{k+1}$$

$$F(k)(F(k)+F(k+1))-F(k+1)^{2}=(-1)^{k+1}$$

$$F(k).F(k+2)-F(k+1)^{2}=(-1)^{k+1}$$

سؤال ۷.

۱۰ وزنه دور دایره ای قرار دارند که بین هر دو وزنه مجاور یک توپ به وزن تفاضل دو وزنه وجود دارد. ثابت کنید می توان توپ هارا در دو کفه ی ترازو قرار داد به طوری که ترازو در حالت تعادل قرار گیرد.

پاسخ .

مسئله را برای حالت کلی n وزنه حل می کنیم و از درستی آن، درستی ۱۰ وزنه را نتیجه می گیریم.
پایه استقرا: دو وزنه به وزن a_n و a_m داریم. به طوری که $a_m > a_n$.
طبق فرض بین این دو وزنه، دو توپ به وزن $a_m - a_n$ وجود دارد(بین هردو وزنه یک توپ). پس می توان دو توپ رو در دو کفه ترازو قرار داد به طوری که ترازو در حالت تعادل قرار گیرد.

فرض استقرا: n وزنه به وزن های $a_1, a_2, .., a_n$ دور دایره ای قرار دارند و بین هر دو وزنه مجاور یک توپ به وزن تفاضل دو وزنه وجود دارد. که می توان توپ هارا در دو کفه ی ترازو قرار داد به طوری که ترازو در حالت تعادل قرار گیرد.

حکم استقرا: $n+1$ وزنه به وزن های $a_1, a_2, .., a_n, a_{n+1}$ دور دایره ای قرار دارند و بین هر دو وزنه مجاور یک توپ به وزن تفاضل دو وزنه وجود دارد. که می توان توپ هارا در دو کفه ی ترازو قرار داد به طوری که ترازو در حالت تعادل قرار گیرد.
اثبات:

وزنه جدید a_{n+1} را جایی بین دو وزنه دلخواه a_k و a_m اضافه میکنیم(بدون کم شدن از کلیت مسئله در نظر میگیریم: $a_k > a_m$).
طبق فرض بین این دو وزنه توپی به وزن $a_k - a_m$ وجود دارد. حالات زیر پیش می آید:

۱. $a_k > a_{n+1} > a_m$
در این حالت مجموع وزن دو توپ ایجاد شده بین وزنه ها برابر است با:

$$a_k - a_{n+1} + a_{n+1} - a_m = a_k - a_m$$

پس توپ قبلی (بین a_k و a_m) را از کفه خارج کرده و دو توپ جدید که در مجموع وزنی برابر با $a_k - a_m$ دارند را به همان کفه اضافه می کنیم و طبق فرض شرایط برقرار است.

۲. $a_k > a_m > a_{n+1}$
در این حالت تفاضل وزن دو توپ ایجاد شده بین وزنه ها برابر است با:

$$a_k - a_{n+۱} - (a_m - a_{n+۱}) = a_k - a_m$$

پس توپ قبلی (بین a_k و a_m) را از کفه خارج کرده و توپ جدید سنگین تر را به همان کفه و توپ جدید سبک تر را به کفه مقابل اضافه می کنیم و طبق فرض شرایط برقرار است.

۳. $a_{n+۱} > a_k > a_m$
در این حالت تفاضل وزن دو توپ ایجاد شده بین وزنه ها برابر است با:

$$a_{n+۱} - a_k - (a_{n+۱} - a_m) = a_m - a_k$$

پس توپ قبلی (بین a_k و a_m) را از کفه خارج کرده و توپ جدید سبکتر را به همان کفه و توپ جدید سنگین تر را به کفه مقابل اضافه می کنیم و طبق فرض شرایط برقرار است.

بدین ترتیب میتوانیم حکم را برای تمام n ها ثابت کنیم.

سؤال ۸.

یک عدد را شبه اول می‌نامیم، هرگاه یا عددی اول باشد یا برابر ۱ باشد. ثابت کنید هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند عدد شبه اول متمایز نوشت.

راهنمایی: برای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$ ، عددی اول مانند p وجود دارد که $n < p < ۲n$

پاسخ .

مساله را با استفاده از استقرای قوی روی n حل می‌کنیم. فرض کنید حکم برای $k \leq n$ برقرار باشد. حال برای $k = n + ۱$ ، p را عددی شبه اول در بازه $\frac{n+۱}{۲} < p \leq n + ۱$ در نظر بگیرید. طبق فرض استقرا حکم برای $n + ۱ - p$ برقرار است. از طرفی دیگر چون $\frac{n+۱}{۲} < p \leq n + ۱$ پس $۰ \leq n + ۱ - p < \frac{n+۱}{۲}$ است و درنتیجه تمامی شبه اعدادی که در فرض استقرا $n + ۱ - p$ را می‌سازند از p کوچک‌تر هستند.

حال این مجموعه اعداد در کنار p ، شبه اعداد متمایزی هستند که حاصل جمعشان $n + ۱$ می‌شود پس حکم استقرا ثابت و مساله حل می‌شود.

پایه: می‌توانید به راحتی پایه را برای $n = ۱$ یا $n = ۲$ بررسی کنید.

سؤال ۹.

فرض کنید n عدد حقیقی متمایز روی تخته نوشته شده است. به جای این اعداد، اختلاف دوبه‌دوی آنها را می‌نویسیم. ثابت کنید اگر n فرد باشد این اعداد مثبت به دست آمده را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد که مجموع اعداد دو دسته با هم برابر باشد.

پاسخ .

راهنمایی: با استقرای ساده روی n سعی کنید اعداد جدید اضافه شده را طوری به فرض استقرا اضافه کنید که مجموع جدید دو دسته همچنان با هم برابر باشد.