

تکلیف اول: شمار و احتمال - استادمهر

۸۴-۸۱۰۱۰۰۰

محمد امین

$$P = \frac{\binom{n}{k} \binom{N-n}{m-k}}{\binom{N}{m}} \rightarrow \text{انتخاب } (m-k) \text{ آمار از کل } (n-n) \text{ آمار می‌گذرد!}$$

① احتمال طلاسید!

تعداد روش‌های انتخاب m مهر

② آمارهای ۳ تایی مجبوری $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ را می‌نویسیم به شرطی که یکی از مجبورهای آمار آزوج باشد! طلاس

① آمار اول دارای ۱ نفر باشد: $(2, 2, 4)$

$$\binom{1}{2} \times \binom{2}{2} \times \left(\binom{2}{2} - \binom{2}{2} \right) = \frac{1!}{1! \times 1!} \times 1 = 1 \times 1 = 1$$

$\binom{1}{2}$: آمار اول
 $\binom{2}{2}$: آمار دوم
 $\left(\binom{2}{2} - \binom{2}{2} \right)$: آمارهای ۲ نفره

② آمار اول دارای ۲ نفر باشد: $(4, 2, 4)$

$$\binom{1}{4} \binom{4}{2} \binom{2}{2} \times \left(\binom{2}{2} - \binom{2}{2} \right) = 1 \times 6 \times 1 \times 1 = 6$$

③ آمار اول دارای ۳ نفر باشد:

$$\binom{1}{6} \binom{6}{3} \binom{3}{2} \times \left(\binom{2}{2} - \binom{2}{2} \right) = 1 \times 20 \times 3 \times 1 = 60$$

$$\text{Sum} = \underline{1 + 6 + 60} = 67$$

(۳)

$$P_1 = \frac{\binom{3}{4} \binom{5}{4}}{\binom{8}{12}} + \frac{\binom{2}{4} \binom{4}{4}}{\binom{6}{12}} = \frac{4 \times 20 + 10 \times 1}{\frac{12 \times 11 \times 10}{8 \times 7 \times 6}} = \frac{130}{40 \times 11} = \frac{13}{44}$$

$$= \frac{3}{11}$$

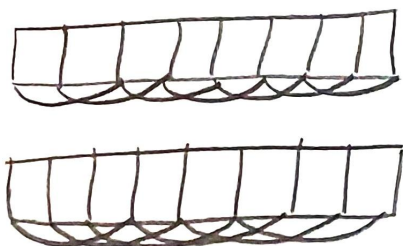
$$P_2 = \frac{\binom{3}{4} \binom{4}{4}}{\binom{7}{12}} + \frac{\binom{2}{4} \binom{5}{4}}{\binom{7}{12}} + \frac{\binom{1}{4} \binom{4}{4}}{\binom{5}{12}} = \frac{20 \times 10 + 10 \times 4 + 4}{72 \times 11}$$

$$\frac{294}{72 \times 11} = \frac{1}{2}$$

$$Ans = \frac{11}{22} - \frac{4}{22} = \frac{7}{22}$$

(۴) برای اینکه دو تا اسب یکدیگر را تهدید نکنند باید روی اقطار یک مستطیل 2×3 باشند

تعداد مستطین ها $84 = 4 \times 7 \times 3$ $\left\{ \begin{array}{l} 7 \text{ تا انتخاب مجاور عمودی} \\ 4 \text{ تا انتخاب مجاور افقی} \end{array} \right.$



اسب سفید می تواند در هر یک از ۸۴ گوشه ای این مستطیل قرار بگیرد. به ازای هر حالت قرارگیری اسب سفید در هر مستطیل نیز تنها یک حالت برای اسب سیاه متصور است پس جواب

$$84 \times 4 = 336$$

$$\underbrace{\pi_1}_{\text{}} \underbrace{\pi_2}_{\text{}} \underbrace{\pi_3}_{\text{}} \underbrace{\pi_4}_{\text{}} \underbrace{\pi_5}_{\text{}} \underbrace{\pi_6}_{\text{}} \underbrace{\pi_7}_{\text{}}$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 + \pi_7 = 40$$

$$\pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5 \geq 1$$

$$\pi_1 + \pi'_2 + \pi'_3 + \pi'_4 + \pi'_5 + \pi_6 + \pi_7 = 29$$

$$\pi_1 - \pi_7 \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 29 + 4 - 1 \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 3 \end{pmatrix}$$

طبق توضیحات مسئله ۴۰ نفر را به صورت یک دایره می‌کنیم که باید نخ به هم متصل اند برای اینکه با هم حالتی آرزو برآورده شود باید بتوان از محل نخ را بیاورد. می‌دانیم اگر m زن و n مرد دور یک فرشته باشند $m - kn$ روش می‌توان آنها را باز کرد و از حالت دایره‌ای به حالت خطی تبدیل کرد اگر k باید از نسبت $\frac{m}{n}$ باشد که در این مسئله می‌شود $\frac{30}{100} = 3$ پس k یا برابر ۱ است یا ۲ از آنجا که هر روشی که با $k=1$ انجام نگیرد است با $k=2$ نیز انجام نگیرد و به بیان دیگر کل حالت‌های $k=2$ در $k=1$ وجود دارد پس با $1 \times 100 - 300 = 70$ می‌توان با حفظ سبک مسئله نخ را بیاورد و تعداد کل حالت‌ها یا بیاوردن هم که ۴۰ تا است پس

$$P = \frac{70}{400} = \frac{1}{2}$$

۷) ابتدا باید ۲ عدد در مجموع مثل او را جایگذاری کنیم که ۲ حالت دارد

$$\underline{12126} \quad \underline{2121}$$

برای جایگذاری عدد سوم ۵ انتخاب داریم
و به طور مشابه برای جایگذاری عدد چهارم ۷ انتخاب داریم

۲ عدد داریم بین این ۲ عدد ۵ جای خالی است و ۲ جای خالی هم خارج این اعداد است
- بطریق مشابه برای جایگذاری n مین عدد $(2(n-1)-1)$ جای خالی بین اعداد قبلی و ۲ جای خالی در طرف
اعداد داریم پس $2n-1 = (2(n-1)-1) + 2$

$$n=1 \quad 0$$

$$n=2 \quad 2$$

$$n=3 \quad \binom{5}{2} \binom{7}{2} \binom{9}{2} - \binom{2n-1}{2}$$

در هر مرحله از جاهای خالی ۲ مکان متفاوت باید انتخاب شود

۸) لم: تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ که هیچ دو عضو متوالی نداشته باشند $\binom{n-r+1}{r}$

اگر A_i را زیرمجموعه n ام در نظر بگیریم، تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی یک مجموعه به شکلی که دو عضو متوالی نداشته باشند مانند مشابه زیر است

$$\underline{A_1} \quad \underline{A_2} \quad \dots \quad \underline{A_{r+1}}$$

که دارای ۲-۱ فضای وسطی که حتماً باید پر شود و ۲ فضای خالی اطراف است!
در واقع یک شماره است به ترتیب رو به

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{r+1} = n$$

$$x_2, x_3, \dots, x_r \geq 1$$

آنها از $(r-1)$ جای خالی که باید پر شود یکی کم کرده (یک عضو اختصاص باید)

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{r+1} = n - r + 1 \rightarrow \binom{n-r+1}{r} \text{ حالت}$$

اگر داده را از حالت دوری به حالت بی‌نیستی و صلی در امتدادی مجاور تصور کنیم: جواب می‌دهیم
 در اول و آخر در روی خطی سه را حذف می‌کنیم چون کم تعداد حالات $-(n-r-1)_{r-2}$
 کل حالات می‌شود تعداد حالات بی‌نیستی اول $(n-r+1)_r$ است ~~تعداد حالات دوم~~
 در آخر را حذف می‌کنیم $(n-r-1)_{r-2}$ در بین اینها $S(n, r)$ جواب مطلوب می‌دهد.