دانشکده فنی دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تمرین سوم درس ریاضیات مهندسی

طراح
سیده غزل موسوی

نیمسال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳

سوال ۱

انتگرال فوریه توابع زیر را محاسبه کنید.

الف)

$$f(x) = \begin{cases} cosh(x) & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

پاسخ:

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(wx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cosh(x)\cos(wx)dx$$

$$\text{جز به جز}\begin{cases} u = \cos(wx) & \rightarrow & du = -w\sin(wx)dx \\ dv = \cosh(x)dx & \rightarrow & v = \sinh(x) \end{cases}$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi}(\cos(wx)\sinh(x))\Big|_{x=-1}^{1} - \frac{w}{\pi}\int_{-1}^{1}\sinh(x)\sin(wx)dx$$

$$\text{جز به جز}\begin{cases} u = \sin(wx) & \rightarrow & du = w\cos(wx)dx \\ dv = \sinh(x)dx & \rightarrow & v = \cosh(x) \end{cases}$$

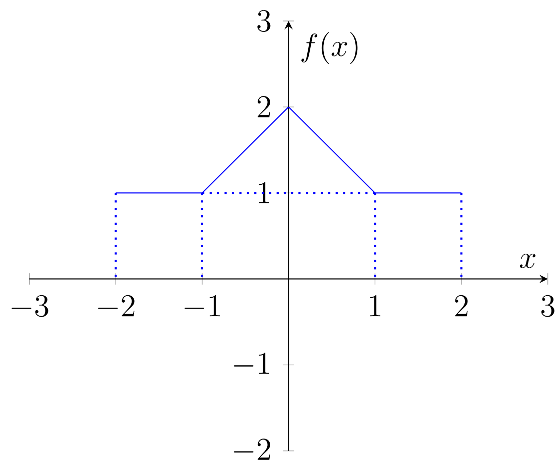
$$A(w) = \frac{1}{\pi}\left(\cos(wx)\sinh(x) - w\sin(wx)\cosh(x)\right)\Big|_{x=-1}^{1} - \frac{w^2}{\pi}\int_{-1}^{1}\cosh(x)\cos(wx)dx$$

$$\boxed{A(w) = \frac{2\sinh(1)\cos(w) + 2w\cosh(1)\sin(w)}{(1+w^2)\pi}}$$

با توجه به اینکه تابع $cosh(x)$ یک تابع زوج است ضریب سینوسی انتگرال فوریه $B(w)$ صفر است.

$$f(x) = \int_0^1 A(w)\cos(wx)dw$$

ب)



پاسخ:
با توجه به زوج بودن تابع خواهیم داشت:

$$B(w) = 0$$

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^2 f(x)\cos(wx)\,dx = 2\int_0^1 (2-x)\cos(wx)\,dx + 2\int_1^2 1\cos(wx)\,dx$$

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos(w)}{w^2}\right) + 2\left(\frac{\sin(2w)}{w}\right)$$

$$\boxed{A(w) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos(w)}{w^2}\right) + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(2w)}{w}\right)}$$

$$f(x) = \int_0^2 A(w)\cos(wx)dw$$

سوال ۲

معادله انتگرالی زیر را برای $Y(x)$ حل کنید.

$$\int_0^\infty Y(x)sin(xt)dx = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1 \\ 2 & 1 \le t < 2 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

پاسخ:

اگر سمت راست را تابع $f(t)$ در نظر بگیریم، ، در این صورت بسط فوریه سینوسی آن به شکل زیر است:

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(wt)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 1\sin(wt)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_1^2 2\sin(wx)\,dx$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\cos(wx)}{w}\right)\Bigg|_{x=0}^{1} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{-2\cos(wx)}{w}\right)\Bigg|_{x=1}^{2}$$

$$B(w) = \frac{1}{w\pi}(1+\cos(w) - 2\cos(2w))$$

$$f(t) = \int_0^\infty B(w)\sin(wt)\,dw = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{w}(1+cos(w) - 2cos(2w)\sin(wt)\,dw$$

$w \to x$

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{1}{x\pi}(1+cos(x) - 2cos(2x))\sin(xt)\,dx = \int_0^\infty Y(x)\sin(xt)\,dx$$

$$\boxed{Y(x) = \frac{1}{x\pi}(1+cos(x) - 2cos(2x))}$$

سوال ۳

در صورتی که $f(x) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ c & \alpha < x < \beta \\ 0 & x > \beta \end{cases}$ و مقادیر $\alpha < 0$ و $\beta > 0$ و c اعداد ثابتی باشند و $f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda)}{\lambda}\cos(x\lambda)\,d\lambda$ مطلوب است محاسبه β و α و c.

پاسخ:

با توجه به شکل انتگرالی تابع داده شده و شکل تابع برای $f(x)$ (که فرم انتگرال فوریه کسینوسی است.) نتیجه می گیریم که تابع زوج است پس باید $\alpha = -\beta$. حال انتگرال فوریه $f(x)$ را می نویسیم.

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\beta c\cos(x\omega)\,dx = \frac{2c}{\pi\omega}\sin(\omega\beta)$$

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cos(x\omega)\,d\omega = \int_0^\infty A(\lambda)\cos(x\lambda)\,d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \frac{2c}{\pi\lambda}\sin(\lambda\beta)\cos(x\lambda)\,d\lambda = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda)\cos(x\lambda)\,d\lambda \quad \rightarrow \beta = 1$$

$$\frac{2c}{\pi} = 1 \rightarrow c = \frac{\pi}{2} \qquad \alpha = -\beta = -1$$

$$\boxed{\alpha = -1 \quad \beta = 1 \quad c = \frac{\pi}{2}}$$

سوال ۴

انتگرال فوریه تابع زیر را به دست آورده و سپس درستی انتگرال I را نشان دهید.

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & 0 < x < \pi \\ 0 & \text{o.w} \end{cases} \quad ; \quad I = \int_0^\infty \frac{\cos^2(\frac{x\pi}{2})}{1-x^2}\, dx = 0$$

پاسخ:
توجه شود که تابع داده شده در بازه مورد نظر نه زوج است نه فرد.

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(\omega x)\, dx = \frac{\cos(\pi\omega)+1}{\pi(1-\omega^2)}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\sin(\omega x)\, dx = \frac{\sin(\pi\omega)}{\pi(1-\omega^2)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^\infty \left(A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)\right) d\omega$$

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}x)}{1-x^2}\, dx \xrightarrow{x=\omega} \int_0^\infty \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}\omega)}{1-\omega^2}\, d\omega$$

$$\cos^2(\frac{\pi}{2}\omega) = \frac{1+\cos(\pi\omega)}{2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+\cos(\pi\omega)}{1-\omega^2}\, d\omega$$

$$x = \pi \Rightarrow f(\pi) = \sin(\pi) = 0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos^2(\pi\omega)+\cos(\pi\omega)+\sin^2(\pi\omega)}{1-\omega^2}\, d\omega$$

$$0 = \int_0^\infty \frac{1+\cos(\pi\omega)}{1-\omega^2}$$

$$\Rightarrow I = 0$$

سوال ۵

به کمک انتگرال فوریه برقراری رابطه زیر را اثبات کنید.

$$\frac{6}{\pi}\int_0^\infty \frac{2+\omega^2}{4+5\omega^2+\omega^4}\cos(\omega x)\,d\omega = e^{-x}+e^{-2x} \quad x>0$$

پاسخ:

تابع $f(x)=e^{-x}+e^{-2x}$ را بسط زوج می دهیم، پس $B(\omega)=0$ و داریم:

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(x\omega)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (e^{-x}+e^{-2x})\cos(x\omega)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\cos(x\omega)\,dx + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-2x}\cos(x\omega)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\mathcal{L}\{\cos(\omega x)\}\Big|_{s=1} + \frac{2}{\pi}\mathcal{L}\{\cos(\omega x)\}\Big|_{s=2} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)\Big|_{s=1} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)\Big|_{s=2} \\
&= \frac{2}{\pi(1+\omega^2)} + \frac{4}{\pi(4+\omega^2)} = \frac{6(2+\omega^2)}{\pi(4+5\omega^2+\omega^4)}
\end{aligned}$$

حال از تعریف انتگرال فوریه داریم:

$$\int_0^\infty (A(\omega)\cos(\omega x)+B(\omega)\sin(\omega x))\,dx = f(x)$$

$$\frac{6}{\pi}\int_0^\infty \frac{2+\omega^2}{4+5\omega^2+\omega^4}\cos(\omega x)\,dx = e^{-x}+e^{-2x} \quad x>0$$

سوال ۶

اگر $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2+4} cos(\omega x) + \frac{\omega}{\omega^2+4} sin(\omega x)\, d\omega$ باشد، حاصل M را پیدا کنید.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(2\cos^3 x + 3\sin^3 x)\, dx$$

پاسخ:

با توجه به معادله $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(2\cos^3 x + 3\sin^3 x)\, dx$ داریم:

$$A(\omega) = \frac{2}{\omega^2+4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) cos(\omega x)\, dx$$
$$B(\omega) = \frac{2\omega}{\omega^2+4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) sin(\omega x)\, dx$$

با استفاده از روابط زیر خواهیم داشت:

$$cos^3(x) = \frac{1}{4}cos(3x) + \frac{3}{4}cos(x)$$
$$sin^3(x) = \frac{-1}{4}sin(3x) + \frac{3}{4}sin(x)$$

باجاگذاری در روابط بالا در انتگرال خواسته شده داریم:

$$\begin{aligned}
M &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(2\cos^3(x) + 3\sin^3(x))\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) 2\cos^3(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) 3\sin^3(x)\, dx \\
&= \frac{3}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(x)\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(3x)\, dx + \frac{9}{4}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(x)\, dx - \frac{3}{4}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(3x)\, dx \\
&= \frac{3\pi}{2}A(1) + \frac{\pi}{2}A(3) + \frac{9\pi}{4}B(1) - \frac{3\pi}{4}B(3) \\
&= \pi(3(\frac{1}{1^2+4}) + (\frac{1}{3^2+4}) + \frac{9}{2}(\frac{1}{1^2+4}) - \frac{3}{2}(\frac{3}{3^2+4})) \\
&= \pi(\frac{3}{5} + \frac{1}{13} + \frac{9}{10} - \frac{9}{26}) \\
&= \frac{16\pi}{13}
\end{aligned}$$

$$\boxed{M = \frac{16\pi}{13}}$$

سوال ۷

$f(x)$ که تابعی زوج است و در صفر مقدار ۱ دارد را به دست آورید.

$$3\int_0^\infty f(x)cos(ax)\,dx - \int_0^\infty xf(x)sin(ax)\,dx = 0$$

پاسخ:
با توجه به انتگرال اول در سمت چپ رابطه $f(x)$ را بسط زوج کی دهیم.

$$f(x) = \int_0^\infty A(a)cos(ax)\,da$$
$$A(a) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)cos(ax)\,dx$$
$$A^{'}(a) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty xf(x)sin(ax)\,dx$$
$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}(3A(a) + A^{'}(a)) = 0 \rightarrow A(a) = ce^{-3a}$$
$$f(x) = \int_0^\infty ce^{-3a}cos(ax)\,da = c\frac{3}{9+x^2}$$

حال با استفاده از شرط اولیه داده شده در سوال مقدار ثابت c را پیدا می کنیم.

$$c = 3f(0) = 3$$

$$\boxed{f(x) = \frac{9}{9+x^2}}$$

نکات کلی درباره تمرین

- در صورتی که در تمرین هر گونه ابهام و یا پرسشی دارید می‌توانید با سیده غزل موسوی در ارتباط باشید.
- در صورتی که سوالی از تمرین دارید که ممکن است برای دیگران نیز مفید باشد، آن را در گروه درس مطرح کنید.
- مشورت و همفکری با دوستان خود هنگام نوشتن تمرین کاری مفید و سازنده است و از انجام آن پرهیز نکنید، اما این کار باید در راستای فهم درس و تمرین باشد و از کپی‌کردن تمارین یکدیگر خودداری کنید.
- پاسخ های خود را به صورت یک فایل به فرمت PDF در سامانه درس با فرمت نامگذاری Engmath-HWNum-SID بارگذاری نمایید.