۲- معادلات خطی مرتبه دوم

در این فصل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم بررسی خواهد شد. اغلب بحث پیرامون معادلات خطی بوده و در انتها به حالات خاصی از معادلات غیرخطی می‌پردازیم. فرم کلی این معادلات بصورت $y''=f(x,y,\ y')$ بوده و لذا در جواب عمومی معادله, دو ثابت c خواهیم داشت. به بیان دیگر هر دسته منحنی با دو ثابت دلخواه, جواب یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو می‌باشد.

تقسیم بندی کلی مطالب این بخش بصورت زیر است:

- معادلات خطی
  - معادله با ضرایب ثابت (همگن و غیر همگن)
  - معادله کوشی اویلر (همگن و غیر همگن)
  - روشهای حل سایر معادلات خطی
- معادلات غیر خطی

بطور خلاصه ابتدا معادلات با ضرایب ثابت و سپس معادله خاصی با عنوان کوشی اویلر بررسی میشود. به جز ایندو معادله, برای دسته‌ای از معادلات مرتبه دو (خطی یا غیرخطی) روشهایی را بیان میکنیم که معادله یا به ضرایب ثابت, یا کوشی اویلر و یا با کاهش مرتبه به یک معادله مرتبه اول تبدیل گردد. در معادلات با ضرایب ثابت و کوشی اویلر نیز ابتدا معادله همگن و سپس غیرهمگن بررسی می‌شود.

در فصل ۳ به بررسی معادلات خطی مرتبه بالاتر می‌پردازیم که حرف جدیدی در آن وجود نداشته و همگی تعمیم مباحث این فصل می‌باشند.

تعداد زیادی از معادلات مرتبه دو وجود دارد که با روشهای فوق قابل حل نبوده و به ناچار با روش سریها (فصل ۴) بررسی خواهد شد. مثلا معادله به ظاهر ساده‌ای مانند $y''-xy=0$ را نمی‌توان با روشهای ارائه شده در این فصل حل کرد و لذا در فصل ۴ آنرا با روش سریها حل خواهیم کرد.

۲-۱- قضیه وجود و یکتایی

اگر تابع $f(x,y,\ y')$ در یک مکعب که شامل (x_0,y_0,y'_0) است تعریف شده و خود تابع و مشتقات جزئی آن نسبت به y و y' پیوسته باشد, در اینصورت معادله $y''=f(x,y,\ y')$ با دو شرط $y(x_0)=y_0$ و $y'(x_0)=y'_0$ که y_0 و y'_0 دو عدد ثابت میباشند, در یک فاصله باز شامل نقطه x_0 , دارای یک جواب یکتا است. دقت شود که دو شرط داده شده, هر دو مربوط به یک نقطه x_0 میباشند که به چنین مساله‌ای, مساله مقدار اولیه میگوییم.

اگر مساله مقدار اولیه نباشد این قضیه درست نیست. بعنوان مثال بعدا خواهیم دید که جواب عمومی معادله $y''+y=0$ بصورت $y=c_1cosx+c_2sinx$ میباشد. حال اگر برای سه حالت شرایط مرزی زیر مساله را حل کنیم, در حالت اول جواب نداریم, در حالت دوم یک جواب و برای سومین حالت, بیشمار جواب خواهیم داشت.

$$\begin{cases} y(0)=2\ ,y(\pi)=1\rightarrow c_1=2,c_1=-1 & \boxed{\times} \\ y(0)=2\ ,y\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\rightarrow c_1=2,c_2=3 & \boxed{\surd} \\ y(0)=2\ ,y(\pi)=-2\rightarrow c_1=2,c_2=\text{دلخواه} & \end{cases}$$

۲-۲- وابستگی و استقلال خطی توابع

مجموعه توابع $\{u_i(x)\}$ ، $(i = 1,2,3,\dots,n)$ را که در بازه $I = [a,b]$ تعریف شده‌اند در نظر میگیریم. این مجموعه را وابسته خطی می‌گوییم هرگاه حداقل یکی از آنها را بتوان بصورت ترکیب خطی از مابقی نوشت. اگر نتوانیم, مجموعه را مستقل خطی می‌نامیم. مثلا مجموعه توابع $\{1, x, e^x, 3x-2\}$ را در نظر می‌گیریم. بدیهی است می‌توان مثلا $3x-2$ را بر حسب ترکیب خطی سایر توابع بصورت زیر نوشت:

$$3x - 2 = -2(1) + 3(x) + 0(e^x)$$

به همین شکل می‌توان 1 و x را نیز بر حسب ترکیب خطی سایر توابع بیان کرد. اما قطعا نمی‌توان از رابطه بالا e^x را بر حسب بقیه بیان کرد, چرا که ضریب آن صفر است. بنابراین در تعریف وابستگی توابع لازم بود که کلمه "حداقل" قید شود. چون اگر صرفا بتوان یک تابع را برحسب بقیه نوشت همین کافی است برای آنکه مجموعه توابع را وابسته بدانیم.

قضیه: یک مجموعه متناهی از توابعِ $u_i(x)$ بر بازه I وابسته خطی است اگر و تنها اگر اسکالرهای c_i که همگی صفر نیستند, وجود داشته باشد بگونه‌ای که به ازای هر $x \in I$ داشته باشیم $\sum_{i=1}^{n} c_i\, u_i(x) = 0$.

اثبات: اگر توابع وابسته باشند با توجه به تعریف وابستگی بدیهی است این ضرایب وجود دارند. برعکس اگر این رابطه برقرار باشد, چنانچه فرض کنیم مثلا $c_j \neq 0$ در اینصورت طرفین رابطه را بر c_j تقسیم میکنیم و لذا $u_j(x)$ بر حسب بقیه نوشته میشود. یعنی:

$$u_j(x) = \sum_{i \neq j} c_i u_i(x)$$

با این قضیه نیز می‌توان نشان داد مجموعه توابع $\{1, x, e^x, 3x-2\}$ وابسته‌اند, چرا که اسکالرهای c_i که همگی صفر نیستند, وجود دارند که:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\, u_i(x) = 0 \rightarrow \underbrace{2}_{c_1}(1) + \underbrace{(-3)}_{c_2}(x) + \underbrace{(-0)}_{c_3} e^x + \underbrace{1}_{c_4}(3x-2) = 0$$

لذا اگر توابع مستقل خطی باشند آنگاه اگر رابطه $\sum_{i=1}^{n} c_i\, u_i(x) = 0$ به ازای هر $x \in I$ برقرار باشد, خواهیم داشت $c_i = 0$.

چند توضیح:

۱- برای دو تابع u_1 و u_2 شرط لازم و کافی برای وابستگی خطی آن است که یکی مضرب ثابتی ازدیگری باشد. چرا که از رابطه $c_1u_1(x) + c_2u_2(x) = 0$ می‌توان گفت حداقل یکی از ضرایب صفر نیست. اگر فرض کنیم $c_2 \neq 0$ در نتیجه:

$$c_1u_1(x) + c_2u_2(x) = 0 \rightarrow u_2(x) = -\frac{c_1}{c_2}u_1(x) = ku_1(x)$$

و بصورت برعکس اگر $u_2(x) = ku_1(x)$ آنگاه نتیجه می‌شود $ku_1(x) - 1u_2(x) = 0$.

۲- اگر در مجموعه توابع, یکی از توابع, تابع صفر باشد آنگاه مجموعه وابسته خطی است. زیرا میتوان ضریبش را مخالف صفر انتخاب کرد.

۳- اگر مجموعه توابع $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ در بازه I مستقل خطی باشند آنگاه از $\sum_{i=1}^{n} a_i\, u_i(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i\, u_i(x)$ به رابطه $a_i = b_i$ خواهیم رسید. چراکه:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, u_i(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i\, u_i(x) \to \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)\, u_i(x) = 0 \xrightarrow{\text{ها مستقل خطی } u_i(x)} a_i - b_i = 0 \to a_i = b_i$$

توجه شود که اگر توابع مستقل نباشند چنین نتیجه‌گیری غلط است. مثلا اگر برای هر x داشته باشیم:

$$a_1 sinh(x) + a_2 e^{-x} + a_3 e^{x} = 5sinh(x) + 3e^{-x} - 7e^{x}$$

آنگاه نمی‌توان نتیجه گرفت $a_1 = 5$, $a_2 = 3$ و $a_3 = -7$. زیرا توابع مستقل نیستند چرا که $sinh(x) = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x}$.
برای تعیین ضرایب در این حالت بایستی توابع را بر حسب هم جایگزین کرد تا در نهایت مجموعه توابع جدید مستقل باشند:

$$\left(\frac{1}{2}a_1 + a_3\right)e^{x} + \left(-\frac{1}{2}a_1 + a_2\right)e^{-x} = \left(\frac{5}{2} - 7\right)e^{x} + \left(-\frac{5}{2} + 3\right)e^{-x} \to \begin{cases} a_1 + 2a_3 = -9 \\ -a_1 + 2a_2 = 1 \end{cases}$$

طبیعی است دستگاه دو معادله و سه مجهول بالا دارای بیشمار جواب خواهد بود. توجه شود که e^{x} و e^{-x} مستقل هستند.

۴- بحث استقلال و وابستگی بردارها و نیز توابع برداری نیز تقریبا مشابه همین بحث است که در فصل ششم خواهیم دید.

مثال ۲-۱ آیا مجموعه توابع $\{1, x, x^2\}$ وابسته خطی است؟

حل در اینجا مساله را به دو روش حل می‌کنیم. در روش اول می‌گوییم اگر توابع وابسته خطی باشند, بایستی:

$$\forall\, x \in I \quad ;\ if \quad c_1 \times 1 + c_2 x + c_3 x^2 = 0 \to \exists\, c_i \neq 0$$

$$\left.\begin{cases} x = 0 & \to \quad c_1 = 0 \\ x = 1 & \to \quad c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ x = 2 & \to \quad c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0 \end{cases}\right\} \to c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

پس مستقل خطی است. چون بایستی این رابطه به ازای $\forall\, x$ برقرار باشد.

در روش دوم رابطه مورد نظر برای وابستگی و دو مشتق آنرا بصورت یک دستگاه در نظر می‌گیریم. از آنجا که اسکالرهای c_i همگی نمی‌توانند صفر باشند, لذا برای داشتن جواب غیر صفر, بایستی دترمینان ضرایب صفر باشد. در نتیجه:

$$\begin{cases} c_1 \times 1 + c_2 x + c_3 x^2 = 0 \\ c_2 + 2c_3 x = 0 \\ 2c_3 = 0 \end{cases} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A(x)} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \to det(A(x)) = 2 \neq 0 \ \blacksquare$$

توضیح: اگر جواب دترمینان بر حسب x شود,کافی است فقط یک x_0 وجود داشته باشد که به ازای آن $det(A(x)) \neq 0$ در اینصورت توابع مستقل خطی هستند. پس لازم است ببینیم دترمینان ماتریس $A(x)$ چگونه بدست می‌آید. ■

تعریف: رونسکین ($Wronskian$) توابع $u_1, u_2, \cdots, u_n$ در نقطه x را بصورت دترمینان زیر تعریف می‌کنیم:

$$W[u_1, \cdots, u_n](x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \ldots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \ldots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \ldots & u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

معمولا رونسکین چند تابع در نقطه x را برای سادگی با $W(x)$ نمایش می‌دهند.

بدیهی است اگر فقط یک $x_0 \in I$ وجود داشته باشد که $W(x_0) \neq 0$ آنگاه توابع مستقل خطی‌اند و یا معادل آن, اگر توابع وابسته خطی باشند آنگاه $W(x) \equiv 0$. اما عکس مطلب فوق الزاما صحیح نیست. به عبارتی از $W(x) \equiv 0$ حتما نمی‌توان نتیجه گرفت که توابع وابسته‌اند. بعنوان مثال برای دو تابع زیر اگر رونسکین آنها را تشکیل دهیم خواهیم داشت:

$$u_1(x) = \begin{cases} x^2 , & x \leq 0 \\ 0 , & x > 0 \end{cases} \quad ; \quad u_2(x) = \begin{cases} 0 , & x \leq 0 \\ x^2 , & x > 0 \end{cases}$$

$$W(x) = \begin{cases} \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 0 , & x \leq 0 \\ \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0 , & x > 0 \end{cases} \rightarrow W(x) = 0 \ ; \ \forall x$$

به عبارتی $W(x) \equiv 0$ بدست آمد, در حالی‌که با استفاده از تعریف استقلال دو تابع دیده می‌شود که مستقلند. چرا که:

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} c_1 x^2 + c_2 \times 0 = 0 , & x \leq 0 \rightarrow c_1 = 0 \\ c_1 \times 0 + c_2 x^2 = 0 , & x > 0 \rightarrow c_2 = 0 \end{cases}$$

توضیح ۱: بطور خلاصه می‌توان گفت:

$\exists\, x_0 \in I \ ; \ W(x_0) \neq 0 \rightarrow$ مستقل خطی ; اگر وابسته خطی باشند $\rightarrow W(x) \equiv 0$

توضیح ۲: بعدا خواهیم دید اگر u_i ها همگی جوابهای یک معادله دیفرانسیل خطی همگن باشند, آنگاه روابط بالا دو طرفه صحیح است. بعنوان مثال $W(x) \equiv 0$ شرط لازم و کافی برای وابستگی خطی خواهد بود.

۲-۳- معرفی معادلات خطی مرتبه دوم

فرم کلی این معادلات بصورت زیر است:

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x)$$
$$P(x) \neq 0 \rightarrow y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \qquad (1)$$

قضیه وجود و یکتایی در این حالت بصورت زیر ساده میشود. برای معادله خطی به فرم (1) میتوان نوشت:

$$y'' = \underbrace{-p(x)y' - q(x)y + g(x)}_{f(x,y,y')} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -q(x) \ , \ \frac{\partial f}{\partial y'} = -p(x)$$

بنابراین اگر برای این معادله $p(x)$ و $q(x)$ و $g(x)$ در یک بازه بسته I پیوسته باشند, در اینصورت معادله (1) به شرط $y(x_0) = y_0$ و $y'(x_0) = y'_0$, در فاصله باز I شامل نقطه x_0 , دارای یک جواب یکتا میباشد. راه دیگر اثبات یکتایی جواب, مشتق گرفتن متوالی از رابطه (1) و یکتا بودن بسط تیلور تابع $y(x)$ است.

به عنوان یک کاربرد ساده از قضیه بالا معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y'' + e^x y' + e^{sinx} y = 0 \quad ; \quad y(1) = 0 \ ; \ y'(1) = 0$$

حال از آنجا که $y(x) = 0$ هم در معادله و هم در شرایط اولیه صدق میکند, با توجه به پیوستگی $p(x)$ و $q(x)$, این جواب, تنها جواب مساله است.

<u>تعریف یک عملگر</u>: عملگر(اپراتور) D را بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$D=\frac{d}{dx},\cdots,D^n=\frac{d^n}{dx^n}\xrightarrow{Ex.}D^2(x^3)=D\big(D(x^3)\big)=D(3x^2)=6x$$

در اینصورت میتوان معادله (1) را بصورت زیر نوشت:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=D^2y+pDy+qy=\underbrace{(D^2+pD+q)}_{L=f(D)}y=g\rightarrow L[y]=g$$

<u>Ex:</u> $y''-y'-2y=e^{3x}\rightarrow(D^2-D-2)y=e^{3x}\rightarrow L[y]=e^{3x}$

و یا مثلا اگر L بصورت $L=D^2+(sinx)D+5x$ باشد, برای $y=x^2$ خواهیم داشت:

$$L[y]=L[x^2]=(x^2)''+(sinx)(x^2)'+5x(x^2)=2+2xsinx+5x^3$$

عملگر $L=D^2+pD+q$ خطی است. یعنی $L[c_1y_1+c_2y_2]=c_1L[y_1]+c_2L[y_2]$, زیرا:

$$\begin{aligned}L[c_1y_1+c_2y_2]&=(c_1y_1+c_2y_2)''+p(c_1y_1+c_2y_2)'+q(c_1y_1+c_2y_2)\\&=c_1(y_1''+py_1'+qy_1)+c_2(y_2''+py_2'+qy_2)=c_1L[y_1]+c_2L[y_2]\end{aligned}$$

۲-۴- قضایای اساسی معادلات خطی مرتبه دوم همگن

معادله همگن زیر را در نظر میگیریم:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0\ \rightarrow\ L[y]=0\qquad(2)$$

از آنجا که معادله مرتبه دو شامل y'' میباشد, بصورت اجمالی برای تعیین جواب آن نیاز به دو انتگرال گیری خواهیم داشت, لذا انتظار میرود جوابها حاوی دو ثابت c_1 و c_2 باشد. فرض کنیم y_1 و y_2 دو جواب معادله (2) باشند. در اینصورت ترکیب خطی آنها نیز جواب است که تحت عنوان <u>اصل برهم نهی</u> شناخته می‌شود. زیرا:

$$L[c_1y_1+c_2y_2]=c_1\underbrace{L[y_1]}_{0}+c_2\underbrace{L[y_2]}_{0}=0$$

در حالت خاص اگر قرار دهیم $c_2=0$ دیده میشود که c_1y_1 نیز جواب است. یعنی هر مضرب یک جواب, باز هم جواب است. لازم بذکر است که عملگر L صرفا برای سادگی در معرفی معادله بکار گرفته میشود. مثلا اگر قرار باشد بدون این عملگر, درستی رابطه بالا را نشان دهیم, محاسبات طولانی‌تر میشود. چرا که:

$$\begin{aligned}&(c_1y_1+c_2y_2)''+p(c_1y_1+c_2y_2)'+q(c_1y_1+c_2y_2)\\&=c_1\underbrace{(y_1''+py_1'+qy_1)}_{0}+c_2\underbrace{(y_2''+py_2'+qy_2)}_{0}=0\end{aligned}$$

<u>تعریف</u>: مجموعه دو جواب y_1 و y_2 یعنی $\{y_1,y_2\}$ را <u>مجموعه اساسی جواب</u> یا <u>پایه جواب</u> می‌گوییم هرگاه <u>همه</u> جوابهای معادله (2) را بتوان به فرم $c_1y_1+c_2y_2$ نوشت.

هدف اصلی آن است که نشان دهیم هر معادله به فرم (2) حتما دارای مجموعه اساسی جواب میباشد. یعنی حتما میتوان دو جواب y_1 و y_2 را برای آن تعیین کرد بگونه‌ای که همه جوابهای معادله ترکیب خطی ایندو باشند.

اول بررسی می‌کنیم که دو جواب بایستی چه ویژگی داشته باشند تا بتوانند مجموعه اساسی جواب باشند و بعد از آن نشان می‌دهیم حتما می‌توان برای معادله (2) دو جواب با این ویژگی بدست آورد.

قضیه: اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله (2) باشند که به ازای یک x_0 بدانیم $W(x_0) \neq 0$ آنگاه ایندو جواب جوابهای اساسی معادله میباشند. به عبارتی کافی است دو جواب نسبت به هم مستقل باشند تا آنها را جوابهای اساسی معادله بنامیم.

اثبات: برای پاسخ به این سوال فرض کنید هدف حل معادله (2) با شرایط اولیه $y(x_0) = y_0$ و $y'(x_0) = y'_0$ باشد. اگر بپذیریم همه جوابها به فرم $c_1y_1 + c_2y_2$ است, در اینصورت بایستی بتوانیم c_1 و c_2 مناسبی را بدست آوریم که:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y_0 \\ c_1y'_1(x_0) + c_2y'_2(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

بدیهی است این دستگاه وقتی جواب دارد که:

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow W[y_1, y_2](x_0) = W(x_0) \neq 0$$

در اینصورت جواب دیگری نمی‌توان برای معادله (2) تصور نمود. به عبارتی اگر معادله دارای جواب سومی هم باشد حتما به فرم $c_1y_1 + c_2y_2$ خواهد بود. اما اگر $W(x_0) = 0$ آیا حتما دو جواب وابسته خطی‌اند؟ قبلا دیده شد که در حالت کلی ممکن است وابسته نباشند.

قضیه: اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله (2) باشند که به ازای یک x_0 بدانیم $W(x_0) = 0$ آنگاه ایندو جواب حتما وابسته خطی میباشند(یعنی یکی مضرب دیگری است).

اثبات: معادله (2) با شرایط اولیه $y(x_0) = 0$ و $y'(x_0) = 0$ را در نظر میگیریم. بنابراین در دستگاه بالا دترمینان صفر بوده و چون سمت راست صفر است لذا میتوان بیشمار c_1 و c_2 مخالف صفر بدست آورد. با انتخاب یک دسته c_1 و c_2 مخالف صفر, ترکیب $y = c_1y_1 + c_2y_2$ هم در معادله و هم در شرایط اولیه صدق میکند. علاوه بر این $y = 0$ نیز هم در معادله و هم در شرایط اولیه صادق است. پس طبق قضیه وجود و یکتایی جواب ایندو یکی میباشند. به عبارتی $c_1y_1 + c_2y_2 = 0$.

یعنی اگر به ازای یک x_0 داشته باشیم $W(x_0) = 0$, دو جواب حتما وابسته‌اند.

توجه شود که در بخش ۲-۲ دیده شد این موضوع در حالت کلی درست نیست. یعنی رونسکین برابر صفر نتیجه نمی‌دهد وابستگی توابع را. اما اگر این توابع دلخواه نباشند, بلکه پاسخهای یک معادله دیفرانسیل خطی همگن باشند, آنگاه این نتیجه درست است.

در دو قضیه بالا صفر شدن یا نشدن رونسکین در یک نقطه خاص مدنظر قرار گرفت. حال نشان میدهیم این نقطه میتواند هر نقطه بازه انتخاب شود, زیرا بنا بر قضیه زیر رونسکین یا در تمام بازه متحد با صفر است یا هیچگاه صفر نخواهد شد.

قضیه آبل: فرض کنیم y_1 و y_2 دو جواب اساسی معادله با ضرایب پیوسته (2) در یک بازه I باشند. در اینصورت:

$$W(x) = ce^{-\int p(x)dx} \qquad or \qquad W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

اثبات: با استفاده از تعریف رونسکین و مشتق‌گیری از آن خواهیم داشت:

$$W = y_1y'_2 - y_2y'_1 \rightarrow W' = y_1y''_2 - y_2y''_1$$

$$W' = y_1[-p(x)y'_2 - q(x)y_2] - y_2[-p(x)y'_1 - q(x)y_1] = -p(x)(y_1y'_2 - y_2y'_1) = -p(x)W$$

$$\rightarrow W' + p(x)W = 0 \rightarrow W(x) = ce^{-\int p(x)dx}$$

چنانچه انتگرال‌گیری بصورت معین انجام شود رابطه دوم را نتیجه خواهد داد. به عبارتی:

$$\frac{dW}{W} = -p(x)dx \to \int_{x_0}^{x} \frac{dW}{W} = \int_{x_0}^{x} -p(t)\,dt \to Ln\left(\frac{W(x)}{W(x_0)}\right) = -\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt$$

$$\to W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

نتیجه: برای صفر شدن رونسکین صرفا بایستی $c = 0$ باشد. بنابراین اگر برای یک $x_0 \in I$ بدانیم $W(x_0) \neq 0$, آنگاه در تمام بازه$W(x) \neq 0$ و اگر در نقطه‌ای نیز صفر شود, همه جای بازه صفر خواهد بود.

روش دوم اثبات:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \to W' = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -py_1' - qy_1 & -py_2' - qy_2 \end{vmatrix}$$

$$W' = -p(x)\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} - q(x)\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = -p(x)W - 0q(x) \to W(x) = ce^{-\int p(x)dx}$$

توضیح: مشابه همین روش اثبات, برای معادلات خطی مرتبه بالاتر نیز میتوان ثابت کرد این قضیه برقرار است.

مثال ۲-۲ فرض کنید y_1 و y_2 دو جواب معادله زیر باشند. اگر $W(0) = 5$ باشد, آنگاه $W(2)$ را بیابید.

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' + x(1 + 3x)y = 0$$

$$p(x) = \frac{2x}{1 + x^2} \to W(x) = ce^{-\int p(x)dx} = \frac{c}{1 + x^2} \xrightarrow{W(0)=5 \to c=5} W(2) = 1 \quad \blacksquare$$

$$\underline{or}: \quad W(2) = W(0)e^{-\int_0^2 \frac{2t}{1+t^2}dt} = 5e^{-(ln5 - ln1)} = 1 \quad \blacksquare$$

نتیجه نهایی: شرط لازم و کافی برای آنکه دو جواب y_1 و y_2 از معادله (2) مجموعه اساسی جواب (پایه) باشند آن است که مستقل خطی باشند, یعنی برای یک $x_0 \in I$ به $W(x_0) \neq 0$ برسیم. به عبارتی جوابهای پایه همواره مستقلند.

در تمرین ۸ از شما خواسته شده است با استفاده از قضیه آبل و بدون استفاده از قضیه وجود و یکتایی نشان دهید اگر معادله (2) دارای جواب سوم y_3 باشد این جواب حتما به دو جواب مستقل y_1 و y_2 وابسته است.

حال سوال آخر این است که از کجا مشخص است که حتما دو جواب اساسی دارد.

قضیه: اگر $p(x)$ و $q(x)$ در یک بازه بسته I پیوسته باشند, آنگاه حتما یک مجموعه اساسی جواب مانند y_1 و y_2 برای معادله (2) وجود دارد.

اثبات: با انتخاب شرایط اولیه بصورت $y(x_0) = 1$ و $y'(x_0) = 0$ بر طبق قضیه یکتایی, جواب یکتایی داریم که y_1 مینامیم.

همچنین با انتخاب شرایط اولیه بصورت $y(x_0) = 0$ و $y'(x_0) = 1$ بر طبق قضیه یکتایی, جواب یکتایی داریم که y_2 مینامیم.

ایندو جواب مستقلند, زیرا:

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

لذا معادله حتما دارای دو جواب مستقل خواهد بود. کمتر از دو نیست, چرا که جواب دوم مستقل از اولی است. بیشتر هم نیست چرا که در قضیه اول عنوان شد که اگر جواب سومی داشته باشد, حتما ترکیب خطی ایندو خواهد بود. لذا تعداد جوابهای اساسی برای یک معادله خطی همگن مرتبه دو, دقیقا 2 تاست, نه کمتر و نه بیشتر.

در اثبات قضیه بالا دیده شد که این دو جواب با انتخاب یک سری شرایط اولیه خاص (که منجر به رونسکین مخالف صفر شد) بدست آمد. واضح است شرایط اولیه مختلفی می‌توان انتخاب کرد که منجر به جوابهای مستقل دیگری خواهد شد. اما بدیهی است همه این مجموعه جوابهای مستقل, به یکدیگر قابل تبدیلند و لذا انتخاب یک مجموعه مستقل کافی است. (مثال بعد را ببینید)

مثال ۲-۳ برای معادله $y''-9y=0$ همه جوابهای زیر مجموعه جواب اساسی‌اند.

$$\{e^{3x},e^{-3x}\},\{e^{3x},2e^{3x}+e^{-3x}\},\{e^{3x},sinh3x\},\{cosh3x,sinh3x\},\{sinh3x,e^{-3x}\}$$

معمولا مجموعه‌ای را انتخاب می‌کنیم که ساده‌تر باشد, زیرا همانگونه که عنوان شد همه اینها به یکدیگر قابل تبدیلند, مثلا:

$$c_1cosh3x+c_2sinh3x=c_1\frac{e^{3x}+e^{-3x}}{2}+c_2\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{2}$$
$$=\frac{c_1+c_2}{2}e^{3x}+\frac{c_1-c_2}{2}e^{-3x}=c_3e^{3x}+c_4e^{-3x}$$

یعنی جواب بر حسب پایه‌های $\{cosh3x,sinh3x\}$ را می‌توان بر حسب پایه‌های $\{e^{3x},e^{-3x}\}$ (و هر جفت پایه مستقل دیگر) نیز بیان کرد. ■

<u>توضیح</u>: در ارتباط با معادلات <u>غیر خطی</u> و <u>غیر همگن</u> اصل بر هم نهی صحت ندارد. بعنوان نمونه:

$$1)\ y''-9y=18\ \rightarrow\begin{cases}y_1=4e^{3x}-2\\ y_2=e^{3x}-2\end{cases}\qquad L[1y_1+1y_2]\neq 18$$

$$2)\ x^3y''-yy'=0\ \rightarrow\begin{cases}y_1=1\\ y_2=x^2\end{cases}\qquad L[4y_1+3y_2]\neq 0\quad ■$$

مثال ۲-۴ چگونه معادله‌ای به فرم (2) بسازیم که دارای جوابهای مستقل خطی داده شده $y_1(x)$ و $y_2(x)$ باشد؟

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

$$\begin{cases}y_1''+py_1'+qy_1=0\\ y_2''+py_2'+qy_2=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}py_1'+qy_1=-y_1''\\ py_2'+qy_2=-y_2''\end{cases}\quad;\quad\begin{vmatrix}y_1' & y_1\\ y_2' & y_2\end{vmatrix}\neq 0\rightarrow\begin{cases}p(x)\\ q(x)\end{cases}\quad\boxed{\surd}$$

بعنوان نمونه می‌خواهیم معادله دیفرانسیلی بیابیم که دسته منحنیهای $y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$ جواب آن باشد. این جواب, یعنی آنکه $y_1(x)=e^{-x}$ و $y_2(x)=e^{2x}$ جوابهای مستقل معادله است.

$$\begin{cases}py_1'+qy_1=-y_1''\\ py_2'+qy_2=-y_2''\end{cases}\rightarrow\begin{cases}p(-e^{-x})+qe^{-x}=-e^{-x}\\ p(2e^{2x})+qe^{2x}=-4e^{2x}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-p+q=-1\\ 2p+q=-4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}p=-1\\ q=-2\end{cases}$$

لذا به معادله $y''-y'-2y=0$ خواهیم رسید. لازم به ذکر است که در فصل ۱ و در مثال ۱-۱۹ همین مساله با روش حذف ثابتها نیز حل گردید. ■

تمرینات بخش‌های ۲-۲ الی ۲-۴

۱- نشان دهید توابع زیر در بازه $[-1,1]$ مستقل خطی‌اند اما رونسکین آنها برابر صفر است.

$$u_1(x)=\begin{cases}1+x^3 & ,x\leq 0\\ 1 & ,x>0\end{cases}\quad ;\quad u_2(x)=\begin{cases}1 & ,x\leq 0\\ 1+x^3 & ,x>0\end{cases}\quad ;\quad u_3(x)=3+x^3$$

۲- نشان دهید که $y=0$ و $y=x^2 sinx$ هر دو جواب معادله دیفرانسیل زیر میباشند. آیا این موضوع با قضیه وجود و یکتایی جواب در تناقض است؟

$$x^2y''-4xy'+(x^2+6)y=0\quad ;\quad y(0)=0\,;\ y'(0)=0$$

۳- نشان دهید اگر y_1 و y_2 دو جواب اساسی معادله (2) باشند, مجموع و تفاضل ایندو نیز جواب اساسی معادله میباشد.

۴- فرض کنید y_1 و y_2 دو جواب اساسی معادله (2)در بازه $(-\infty,\infty)$باشند. نشان دهید y_1 بین هر دو ریشه متوالیِ y_2 , یک و تنها یک ریشه دارد. (راهنمایی: تابع $\frac{y_2}{y_1}$ را در نظر گرفته و از قضیه رل استفاده کنید).

۵- اگر $p(x)$ و $q(x)$ پیوسته باشند, نشان دهید چنانچه y_1 و y_2 هر دو در یک نقطه از بازه صفر شوند و یا هر دو در یک نقطه بازه دارای اکسترمم باشند, نمیتوانند تشکیل مجموعه اساسی جواب در آن بازه را بدهند.

۶- نشان دهید اگر y_1 و y_2 دو جواب اساسی معادله (2) باشند, نمیتوانند هر دو به ازای یک مقدار از x از بازه مورد نظر دارای نقطه عطف باشند, مگر آنکه به ازای آن مقدار از x هر دو تابع $p(x)$ و $q(x)$ صفر باشد.

۷- معادله دیفرانسیلی به فرم $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ بیابید که جوابهای پایه آن $y_1=e^x$ و $y_2=x+1$ باشد.

$$\underline{Ans}\ :\ y''-\frac{x+1}{x}y'+\frac{1}{x}y=0$$

۸- فرض کنید $p(x)$ و $q(x)$ در یک بازه بسته I پیوسته بوده و رونسکین دو جواب y_1 و y_2 از معادله (2) برای حداقل یک $x_0\in I$ مخالف صفر باشد. به طریق زیر نشان دهید اگر معادله دارای جواب سوم y_3 باشد, این جواب حتما به دو جواب مستقل y_1 و y_2 وابسته است.

از آنجا که y_1 , y_2 و y_3 جوابهای (2) می‌باشند, لذا:

$$y_1''+py_1'+qy_1=0\quad ;\quad y_2''+py_2'+qy_2=0\quad ;\quad y_3''+py_3'+qy_3=0$$

معادله اول را در $-y_2$ و معادله دوم را در y_1 ضرب کرده و با هم جمع کنید. سپس نشان دهید:

$$W_{12}'+pW_{12}\rightarrow W_{12}=y_1y_2'-y_2y_1'=c_{12}e^{-\int p(x)dx}$$

$$W_{23}'+pW_{23}\rightarrow W_{23}=y_2y_3'-y_3y_2'=c_{23}e^{-\int p(x)dx}$$

$$W_{13}'+pW_{13}\rightarrow W_{13}=y_1y_3'-y_3y_1'=c_{13}e^{-\int p(x)dx}$$

که در آن W_{ij} بیانگر رونسکین دو تابع y_i و y_j می‌باشد. از آنجا که دو جواب y_1 و y_2 مستقلند لذا $c_{12}\neq 0$. حال سطر دوم روابط بالا را در $-y_1$ و سطر سوم را در y_2 ضرب کرده و نشان دهید:

$$y_3=-\frac{c_{23}}{c_{12}}y_1+\frac{c_{13}}{c_{12}}y_2$$

یعنی جواب سوم y_3 حتما ترکیب خطی دو جواب مستقل دیگر می‌باشد. توجه شود که در این روشِ اثبات از قضیه وجود و یکتایی جواب استفاده نشده است.

۲-۵- معادلات خطی همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت

فرم کلی معادله همگن با ضرایب ثابت بصورت زیر است:

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (3) \qquad \underline{or}\ :\ L = aD^2 + bD + c \rightarrow L[y] = 0$$

مطابق آنچه در قسمت قبل عنوان شد, کافی است به دنبال دو جواب مستقل باشیم. از آنجا که دیده شد جواب معادله مرتبه اول $ay' + by = 0$ به فرم نمایی می‌باشد, در اینجا نیز حدس می‌زنیم لااقل یک جواب به فرم $y = e^{rx}$ داشته باشیم.

$$L[e^{rx}] = 0 \rightarrow ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \rightarrow e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

از آنجا که همواره $e^{rx} \neq 0$ لذا:

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (4)$$

که معادله مشخصه (یا معادله شاخص یا معادله مفسر) نامیده میشود. به عبارتی برای تعیین معادله مشخصه, جایگزین‌های زیر را انجام می‌دهیم:

$$(y \rightarrow 1 \ \ ; \ \ y' \rightarrow r \ \ ; \ \ y'' \rightarrow r^2)$$

و یا به طریق دیگر می‌توان گفت از آنجا که در معادله خطی مرتبه دو با ضرایب ثابت $L = f(D) = aD^2 + bD + c$ می‌باشد, معادله مشخصه همان $f(r) = 0$ خواهد بود.

بنابراین با توجه به علامت $\Delta = b^2 - 4ac$ سه حالت وجود دارد.

۱-ریشه ها حقیقی و متمایز باشند. (r_1 و r_2)

بدیهی است در اینحالت دو جواب $y_1 = e^{r_1x}$ و $y_2 = e^{r_2x}$ را خواهیم داشت. می‌توان کنترل کرد که $W(y_1, y_2) \neq 0$ و یا ساده‌تر آنکه چون y_1 و y_2 مضرب ثابتی از یکدیگر نیستند, پس مستقلند. لذا هر دو جواب مستقل این معادله به فرم نمایی میباشند. یعنی <u>همه</u> جوابهای این معادله به صورت $y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$ خواهند بود.

برای حالت $b = 0$ می‌توان فرم دیگری از جواب را نیز بدست آورد. در تمرین ۳ بخش قبل دیده شد که اگر y_1 و y_2 دو جواب اساسی معادله (2) باشند, مجموع و تفاضل ایندو نیز جواب اساسی معادله می‌باشد (چون ضریب یکدیگر نیستند). بنابراین:

$$r_{1,2} = \pm r_1 \rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{r_1x} \\ y_2 = e^{-r_1x} \end{cases} \xrightarrow{y_1 = \frac{y_1+y_2}{2}\ ;\ y_2 = \frac{y_1-y_2}{2}} \begin{cases} y_1 = \cosh(r_1x) \\ y_2 = \sinh(r_1x) \end{cases}$$

منظور از عبارت $y_1 = \frac{y_1+y_2}{2}$ آن است که y_1 جدید را برابر جمع دو جواب قبلی تقسیم بر دو در نظر می‌گیریم (ضریبِ دو, تاثیری در استقلال دو تابع ندارد).

<u>توضیح:</u> بدیهی است همین الگوی حل را می‌توان برای معادله مرتبه اول همگن (با ضرایب ثابت) نیز به کار گرفت. به عبارتی:

$$ay' + by = 0 \rightarrow ar + b = 0 \rightarrow r = -\frac{b}{a} \rightarrow y = e^{rx} = e^{-\frac{b}{a}x}$$

که با استفاده از روابط فصل ۱ نیز همین جواب به‌سادگی بدست می‌آید. در اینجا نیز همه جوابها, ترکیب خطی جوابهای پایه می‌باشد و از آنجا که در معادله مرتبه اول صرفا یک جواب پایه وجود دارد, لذا ترکیب خطی آن $ce^{-\frac{b}{a}x}$ خواهد بود.

مثال ۲-۵ معادلات زیر را همراه با شرایط اولیه داده شده حل کنید.

$$1)\quad y''+8y'-9y=0 \quad ; \quad y(1)=1 \quad ; \quad y'(1)=0$$

$$\to \underbrace{(D^2+8D-9)}_{f(D)}y=0 \quad ; \quad f(r)=0\to r^2+8r-9=0\to r_1=1\ \&\ r_2=-9$$

$$\to y=c_1e^x+c_2e^{-9x}\xrightarrow{I.C.}\begin{cases}c_1e^1+c_2e^{-9}=1\\ c_1e^1-9c_2e^{-9}=0\end{cases}\to y=\frac{9}{10e}e^x+\frac{1}{10e^{-9}}e^{-9x}\quad\blacksquare$$

توضیح: چون شرایط اولیه در $x=1$ داده شده است, ساده‌تر است برای محاسبه ثابتها, فرم جواب را بصورت زیر در نظر بگیریم:

$$y=c_1'e^{x-1}+c_2'e^{-9(x-1)}\xrightarrow{I.C.}\begin{cases}c_1'+c_2'=1\\ c_1'-9c_2'=0\end{cases}\to c_1'=\frac{9}{10}\ ,c_2'=\frac{1}{10}$$

به بیان دیگر می‌توان در این حالت که شرایط اولیه در x_0 داده شده است پایه‌ها را $e^{r_1(x-x_0)}$ و $e^{r_2(x-x_0)}$ در نظر گرفت. این کار درست معادل آن است که از تغییر متغیر $t=x-x_0$ استفاده کنیم. مطابق قسمت ۵ از مثال ۱-۱ خواهیم داشت:

$$t=h(x)\to y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=h'(x)y_t' \quad ; \quad y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx}=h'(x)y_t''$$

$$t=x-1\to y'=y_t' \ ; \ y''=y_t'' \ \to\ y_t''+8y_t'-9y=0 \quad ; \quad y(0)=1 \quad ; \quad y'(0)=0$$

$$y=c_1'e^t+c_2'e^{-9t}\xrightarrow{I.C.}c_1'=\frac{9}{10}\ ,c_2'=\frac{1}{10}\to y(x)=\frac{9}{10}e^{(x-1)}+\frac{1}{10}e^{-9(x-1)}\quad\blacksquare$$

$$2)\quad y''-9y=0 \quad ; \quad y(0)=4 \quad ; \quad y'(0)=-5$$

$$\to \underbrace{(D^2-9)}_{f(D)}y=0 \quad ; \quad f(r)=0\to r^2-9=0\to r_{1,2}=\pm3$$

$$\to y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}\xrightarrow{I.C.}\begin{cases}c_1+c_2=4\\ 3c_1-3c_2=-5\end{cases}\to y=\frac{7}{6}e^{3x}+\frac{17}{6}e^{-3x}$$

و یا از آنجا که $b=0$ میباشد, می‌توان جواب را بصورت زیر نیز بدست آورد:

$$y=c_1\,cosh(3x)+c_2\,sinh(3x)\xrightarrow{I.C.}\begin{cases}c_1=4\\ 3c_2=-5\end{cases}\to y=4\,cosh(3x)-\frac{5}{3}sinh(3x)$$

بدیهی است این دو جواب یکسانند, چرا که:

$$4\,cosh(3x)-\frac{5}{3}sinh(3x)=4\frac{e^{3x}+e^{-3x}}{2}-\frac{5}{3}\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{2}=\frac{7}{6}e^{3x}+\frac{17}{6}e^{-3x}$$

توضیح: فرض کنید شرایط داده شده در مساله بصورت اولیه نبوده و مرزی باشد. حال اگر در شرایط مرزی عنوان شده باشد که جواب در بینهایت کراندار است، در اینصورت استفاده از فرم نمایی مناسبتر است, زیرا یکی از ضرایب به سادگی صفر بدست می‌آید. بعنوان نمونه فرض کنید بخواهیم جواب معادله $y''-9y=0$ با دو شرط $y(0)=6$ و $|y(+\infty)|<M$ را بیابیم.

$$y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x} \ ; \ y(0)=6\to c_1+c_2=6$$

اما از شرط کراندار بودن جواب در بینهایت می‌توان نتیجه گرفت که حتما بایستی ضریب e^{3x} یعنی c_1 برابر صفر باشد. زیرا:

$$|y(+\infty)| < M \rightarrow \left|\lim_{x\to\infty}(c_1e^{3x}+c_2e^{-3x})\right| < M \rightarrow c_1 = 0 \xrightarrow{B.C.} \begin{cases} c_1+c_2=6 \\ c_1=0 \end{cases} \rightarrow y = 6e^{-3x}$$

اما اگر می‌خواستیم از فرم هیپربولیکی استفاده کنیم, به طریق زیر عمل می‌کردیم:

$$y = c_1\cosh(3x) + c_2\sinh(3x) \quad ; \quad y(0) = 6 \rightarrow c_1 = 6$$

$$|y(+\infty)| < M \rightarrow \left|\lim_{x\to\infty}(c_1\cosh(3x)+c_2\sinh(3x))\right|$$
$$= \left|\lim_{x\to\infty}\left(c_1\frac{e^{3x}+e^{-3x}}{2} + c_2\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{2}\right)\right| < M$$

$$\rightarrow \left|\lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{c_1+c_2}{2}\right)e^{3x} + \left(\frac{c_1-c_2}{2}\right)e^{3x}\right)\right| < M \rightarrow \frac{c_1+c_2}{2} = 0 \xrightarrow{c_1=6} c_2 = -6$$

$$\rightarrow y = c_1\cosh(3x) + c_2\sinh(3x) = 6(\cosh(3x) - \sinh(3x)) = 6e^{-3x}$$

که همان جواب بالا است ولی محاسبات طولانی‌تری دارد. در انتها لازم بذکر است همانگونه که در ابتدای این فصل عنوان شد, مساله‌ای با مقدار مرزی در حالت کلی میتواند یک جواب داشته باشد, جواب نداشته باشد یا دارای بیشمار جواب باشد. ■

مثال ۲-۶ در فصل ۱ و در حل مثال ۱-۲۹ (زنجیر آویزان) اگر در رابطه $\frac{dv}{dt} = \frac{gx}{l}$ قرار دهیم $v = \frac{dx}{dt}$ به یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو با ضرایب ثابت خواهیم رسید. مساله را با این روش مجددا حل کنید.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{gx}{l} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{gx}{l} \rightarrow \ddot{x} - \frac{g}{l}x = 0 \quad ; \quad x(0) = b \;\; ; \;\; \dot{x}(0) = v(0) = 0$$

$$\rightarrow r^2 - \frac{g}{l} = 0 \rightarrow r_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}} = \pm k \rightarrow x(t) = c_1\cosh(kt) + c_2\sinh(kt)$$

$$x(0) = b \rightarrow c_1 = b \quad ; \quad \dot{x}(0) = v(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \rightarrow x(t) = b\cosh(kt)$$

$$x(T) = l \rightarrow l = b\cosh(kT) \rightarrow T = \frac{1}{k}\cosh^{-1}\left(\frac{l}{b}\right)$$

که همان نتیجه‌ای است که در مثال ۱-۲۹ با تبدیل معادله حاکم بر مساله به یک معادله مرتبه اول بدست آمد. قطعا روش کار در اینجا ساده‌تر است, چرا که در آنجا ابتدا رابطه v بر حسب x و سپس x بر حسب t بدست آمده بود. ■

۲-ریشه مضاعف باشد. ($r = r_1$)

در اینصورت صرفا یک جواب $y_1 = e^{r_1x}$ بدست می‌آید که در آن $r_1 = \frac{-b}{2a}$. برای تعیین جواب دوم روشهای مختلفی وجود دارد که در ادامه خواهیم دید. یک روش با استفاده از اپراتور L می‌باشد. بدیهی است $L[e^{r_1x}] = 0$ است. حال بایستی دنبال پاسخ مستقل دیگری مانند y_2 باشیم که $L[y_2] = 0$ باشد.

در شروع این مبحث دیده شد که به دنبال جوابی به شکل e^{rx} برای معادله بودیم که با جایگذاری در معادله به فرم زیر رسیدیم:

$$L[e^{rx}] = e^{rx}(ar^2 + br + c) = ae^{rx}(r - r_1)^2$$

حال می‌خواهیم از طرفین این رابطه نسبت به r مشتق بگیریم. از آنجا که اپراتور L خطی بوده و صرفا شامل مشتقات نسبت به x است, در نتیجه اگر از آن نسبت به r مشتق بگیریم $\frac{\partial}{\partial r}L[e^{rx}] = L\left(\frac{\partial}{\partial r}e^{rx}\right)$ خواهد بود. در نتیجه:

$$\frac{\partial}{\partial r}L[e^{rx}]=axe^{rx}(r-r_1)^2+2ae^{rx}(r-r_1)\xrightarrow{for\ \ r=r_1}L\left[\frac{\partial e^{rx}}{\partial r}\right]_{r=r_1}=0\rightarrow L[xe^{r_1x}]=0$$

در نتیجه جواب دوم معادله $y_2=xe^{r_1x}$ خواهد بود. در اینجا نیز می‌توان دید $W(y_1,y_2)\neq 0$ و یا ساده‌تر آنکه چون y_1 و y_2 مضرب ثابتی از یکدیگر نیستند, پس مستقلند.

توضیح: بدون استفاده از اپراتور L نیز می‌توانستیم همین روند را دنبال کنیم که البته طولانی‌تر است:

$$ar^2e^{rx}+bre^{rx}+ce^{rx}=ae^{rx}(r-r_1)^2$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial r}}2are^{rx}+ar^2xe^{rx}+be^{rx}+brxe^{rx}+cxe^{rx}=axe^{rx}(r-r_1)^2+2ae^{rx}(r-r_1)$$

$$\xrightarrow{r=r_1}a\underbrace{(2r_1e^{r_1x}+r_1^2xe^{rx})}_{(xe^{r_1x})''}+b\underbrace{(e^{r_1x}+r_1xe^{r_1x})}_{(xe^{r_1x})'}+c(xe^{r_1x})=0$$

سطر آخر بیانگر این است که تابع xe^{r_1x} در معادله صدق می‌کند, لذا جواب دوم مساله خواهد بود.

راه دوم: با استفاده از رابطه آبل, میتوان با داشتن یک جواب y_1 , جواب دوم را بصورت زیر بدست آورد:

$$W=y_1y_2'-y_2y_1'=ce^{-\int pdx}\rightarrow\frac{y_1y_2'-y_2y_1'}{y_1^2}=\frac{ce^{-\int pdx}}{y_1^2}\rightarrow\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=\frac{c}{y_1^2}e^{-\int pdx}$$

$$\rightarrow y_2=cy_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int pdx}\,dx=ce^{r_1x}\int\frac{1}{(e^{-bx/2a})^2}e^{-\int\frac{b}{a}dx}\,dx=ce^{r_1x}\int 1\,dx=cxe^{r_1x}$$

توجه شود اگر در انتگرال‌گیری آخر یک ثابت جدید اضافه کنیم به $cxe^{r_1x}+c'e^{r_1x}$ خواهیم رسید و چون $y_1=e^{r_1x}$ می‌باشد, گویا این جواب بیانگر آن است که جواب عمومی بطور کامل بدست آمده است. برای سادگی بهتر است $c'=0$ انتخاب شده و در نهایت جواب عمومی را $y=c_1y_1+c_2y_2$ منظور کنیم.

اگر به رابطه $y_1y_2'-y_2y_1'=ce^{-\int pdx}$ توجه کنیم گویا این رابطه اینگونه بیان میکند که با داشتن یک جواب y_1 از معادله, همواره می‌توان جواب دوم y_2 را از حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول بدست آورد. در واقع برای یافتن جواب دوم می‌توان یک معادله با مرتبه پایین‌تر را حل کرد. این روش در واقع تحت عنوان روش کاهش مرتبه شناخته می‌شود که در بخش ۲-۱۱ بطور کامل به آن می‌پردازیم.

راه سوم: بدیهی است اگر $r_1\neq r_2$ باشد, e^{r_1x} و e^{r_2x} جوابهای معادله می‌باشند. لذا هر ترکیب خطی اینها نیز جواب میباشد. یک ترکیب خطی بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$y_2=\frac{1}{r_2-r_1}e^{r_2x}-\frac{1}{r_2-r_1}e^{r_1x}=\frac{e^{r_2x}-e^{r_1x}}{r_2-r_1}$$

حال اگر $r_1=r_2$, می‌توان در جواب بالا, با میل دادن $r_2\rightarrow r_1$ جواب دوم را بدست آورد:

$$\lim_{r_2\rightarrow r_1}y_2=\lim_{r_2\rightarrow r_1}\frac{e^{r_2x}-e^{r_1x}}{r_2-r_1}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{e^{(r_1+h)x}-e^{r_1x}}{h}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{xe^{(r_1+h)x}}{1}=xe^{r_1x}$$

توضیح: در اینجا نیز چنانچه شرایط اولیه در x_0 داده شده باشند, برای سادگی در محاسبه ضرایب می‌توان با استفاده از تغییر متغیر $t=x-x_0$ نشان داد $y_1=e^{r_1(x-x_0)}$ و $y_2=(x-x_0)e^{r_1(x-x_0)}$ پایه‌های جواب خواهند بود.

۳-ریشه ها مختلط باشند.

$$b^2 - 4ac < 0 \rightarrow r_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} i = \lambda \pm \mu i \rightarrow y = c_1 e^{(\lambda + \mu i)x} + c_2 e^{(\lambda - \mu i)x}$$

دیده می‌شود که دو جواب پایه بدست آمده مختلط می‌باشند. از آنجا که ضرایب معادله حقیقی‌اند, لذا می‌خواهیم در صورت امکان پایه های جواب مختلط را به پایه‌هایی حقیقی تبدیل کنیم چرا که لااقل کارکردن با پایه‌های حقیقی ساده‌تر است.

می‌دانیم که مجموع و تفاضل دو جواب پایه, خود نیز پایه می‌باشند, لذا:

$$y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} \ ; \ y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} \rightarrow y_1 = e^{\lambda x} cos(\mu x) \, ; \ y_2 = e^{\lambda x} sin(\mu x)$$

در اینجا نیز میتوان دید $W(y_1, y_2) \neq 0$ و یا ساده‌تر آنکه چون y_1 و y_2 مضرب ثابتی از یکدیگر نیستند, پس مستقلند.

بدیهی است اگر $b = 0$ آنگاه $\lambda = 0$ خواهد شد, لذا جوابها به فرم $y_1 = cos(\mu x)$ و $y_2 = sin(\mu x)$ ساده می‌شوند.

توضیح ۱: از بحث اعداد مختلط در ریاضی ۱ می‌دانیم اگر z ریشه یک معادله جبری چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد, آنگاه $\bar{z}$ نیز ریشه خواهد بود. به عبارتی در یک معادله جبری چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی, همواره ریشه‌های مختلط (در صورت وجود) به فرم $\lambda \pm \mu i$ خواهند بود, یعنی تعداد ریشه‌های مختلط زوج خواهد بود. این موضوع در معادله درجه دو بالا نیز دیده شد.

توضیح ۲: در اینجا نیز چنانچه شرایط اولیه در x_0 داده شده باشند, برای سادگی در محاسبه ضرایب می‌توان با استفاده از تغییر متغیر $t = x - x_0$ نشان داد جوابهای زیر میتوانند بعنوان پایه‌های جواب انتخاب شوند:

$$y_1 = e^{\lambda(x - x_0)} cos\big(\mu(x - x_0)\big) \ ; \ y_2 = e^{\lambda(x - x_0)} sin\big(\mu(x - x_0)\big)$$

توضیح ۳: در ریاضی ۱ دیده شد که ریشه‌های nام یک عدد مختلط دارای n جواب است. مثلا $\sqrt{-4}$ برابر است با:

$$z = -4 + 0i \rightarrow |z| = r = 4 \ ; \ \theta = \pi$$

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \ ; \ k = 0 : n - 1$$

$$w = \sqrt{-4 + 0i} = \underbrace{\sqrt{4}}_{2}\left(cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2}\right)\right) \xrightarrow{k=0,1} \sqrt{-4 + 0i} = \pm 2i$$

مثال ۲-۷ معادلات زیر را حل کنید.

1) $y'' + 4y' + 7y = 0$

$$\rightarrow \underbrace{(D^2 + 4D + 7)}_{f(D)} y = 0 \ ; \quad f(r) = 0 \rightarrow r^2 + 4r + 7 = 0 \rightarrow r_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-3} = -2 \pm \sqrt{3} i$$

$$\rightarrow y = c_1 e^{-2x} cos\big(\sqrt{3}x\big) + c_2 e^{-2x} sin\big(\sqrt{3}x\big) \ \blacksquare$$

2) $y'' + y = 0 \ ; \ f(r) = 0 \rightarrow r^2 + 1 = 0 \rightarrow r_{1,2} = \sqrt{-1} = \pm i \rightarrow y = c_1 cosx + c_2 sinx \ \blacksquare$

راه دوم بدست آوردن جواب برای حالتی که ریشه‌ها مختلط می‌باشد, در قضیه زیر دیده می‌شود:

<u>قضیه:</u> فرض کنید در معادله $L[y]=0$ ضرایب $p(x)$ و $q(x)$ توابع <u>حقیقی</u> پیوسته در بازه I باشند. حال اگر $y=u+iv$ جواب این معادله باشد, اجزای حقیقی و موهومی آن نیز جواب است. چرا که:

$$L[u+iv]=0 \to L[u]+iL[v]=0 \to L[u]=0 \;\;,\;\; L[v]=0$$

بنابراین صرفا با استفاده از جواب $e^{(\lambda+\mu i)x}$, هر دو جواب معادله بدست می‌آید:

$$L\left[e^{(\lambda+\mu i)x}\right]=0 \to L\left[e^{\lambda x}\cos(\mu x)+ie^{\lambda x}\sin(\mu x)\right]=0 \to \begin{cases} L\left[e^{\lambda x}\cos(\mu x)\right]=0 \\ L\left[e^{\lambda x}\sin(\mu x)\right]=0 \end{cases}$$

دقت شود اگر جواب $e^{(\lambda-\mu i)x}$ را نیز انتخاب می‌کردیم, باز هم به همین جوابها می‌رسیدیم. همچنین توجه شود که حقیقی بودن ضرایب $p(x)$ و $q(x)$ الزامی است, چرا که رابطه $A+Bi=0$ وقتی به $A=0$ و $B=0$ منجر میشود که A و B دارای ترم موهومی نباشند, مثلا میتوان دید $(2+3i)+(-3+2i)i=0$ در حالیکه $2+3i\neq 0$ و $-3+2i\neq 0$.

<u>یک کاربرد:</u> بعنوان یک مثال ساده, برای یافتن پاسخ ارتعاش یک سیستم جرم-فنر بایستی معادله دیفرانسیل $m\ddot{x}+kx=0$ را بر حسب متغیر زمان حل کرد که در زیر دیده می‌شود. در بخش ۲-۹-۲ این موضوع کاملتر بررسی خواهد شد.

$$m\ddot{x}+kx=0 \to \ddot{x}+\omega_n^2 x=0 \quad ; \quad \omega_n^2=k/m$$

$$\to r^2+\omega_n^2=0 \to r_{1,2}=\pm\omega_n i \to x(t)=c_1\cos(\omega_n t)+c_2\sin(\omega_n t)$$

حال اگر عنوان شده باشد که در لحظه صفر, سرعت اولیه برابر صفر و جابجایی اولیه برابر A می‌باشد, لذا:

$$\dot{x}(0)=0 \to c_2=0 \quad ; \quad x(0)=A \to c_1=A \quad \to \quad x(t)=A\cos(\omega_n t)$$

توجه شود که علت نامگذاری $\sqrt{k/m}$ با نماد ω_n نیز مشخص شد, چرا که با مفهوم فیزیکی آن همخوانی دارد. همواره ضریبِ t در آرگومان سینوس و کسینوس بیانگر فرکانس زاویه‌ای بوده و برابر است با $\omega_n=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$ که T معرف دوره تناوب و f نماد فرکانس می‌باشد.

<u>توضیحات تکمیلی:</u>

۱- در حالتی که ریشه‌ها مختلط باشند, می‌توان جواب را به فرم یک کسینوس(یا سینوس) نوشت:

$$y=e^{\lambda x}(c_1\cos(\mu x)+c_2\sin(\mu x))=e^{\lambda x}\underbrace{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}_{c}\Bigg(\underbrace{\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}}_{cos\varphi}\cos(\mu x)+\underbrace{\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}}_{sin\varphi}\sin(\mu x)\Bigg)$$

$$y=ce^{\lambda x}\cos(\mu x-\varphi) \quad ; \quad \varphi=\tan^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$$

که در آن φ بعنوان فاز شناخته می‌شود. همچنین می‌توان جواب را به فرم یک سینوس نیز بصورت زیر بیان کرد:

$$y=ce^{\lambda x}\sin(\mu x+\varphi) \quad ; \quad \varphi=\tan^{-1}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$$

۲- اگر ضرایب معادله مختلط باشند, کلیه قضایای وجود و یکتایی, رونسکین و استقلال خطی, همگی برقرار خواهند بود. بعنوان نمونه:

$$y'' + iy = 0 \;\rightarrow\; (D^2 + i)y = 0$$

$$f(r) = 0 \rightarrow r^2 + i = 0 \rightarrow r = \sqrt{-i} \qquad ; \qquad z = -i \rightarrow |z| = r = 1 \;\; ; \;\; \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$\rightarrow r = \sqrt{-i} = \sqrt{1}\left(cos\frac{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}{2} + isin\frac{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}{2} \right) \quad ; \;\; k = 0{,}1$$

$$\rightarrow r_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; , \;\; r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

که می‌توان جواب نهایی را برحسب سینوس و کسینوس نیز بیان کرد.

۳- می‌توان نشان داد شرط لازم و کافی برای آنکه در یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو با ضرایب ثابت, جوابهای اساسی در $+\infty$ به صفر میل کنند, آن است که a و b و c هم علامت باشند. چرا که در جوابهای اساسی آن یک ترم نمایی با ضریب منفی ظاهر خواهد شد.

۴- در انتها مجددا یادآوری می‌شود که ممکن است سوال شود در شروع این بخش در واقع جواب اولیه به فرم $y = e^{rx}$ حدس زده شد, در حالیکه معادله ممکن است جوابهایی به فرم دیگری را نیز داشته باشد. پاسخ این است که بر طبق قضایای بخش ۲-۴ اگر این جوابها مستقل باشند, جوابهای اساسی خواهند بود, یعنی همه جوابهای دیگر قطعا ترکیبی خطی از این جوابهای اساسی است.

۵- خلاصه سه حالت ذکر شده در جدول زیر دیده میشود.

$\boxed{ay'' + by' + cy = 0} \rightarrow \boxed{ar^2 + br + c = 0} \rightarrow \boxed{y = c_1 y_1 + c_2 y_2}$	
$\Delta > 0 \rightarrow (r_1, r_2)$ $if \;\; b = 0 \rightarrow (\pm r_1)$	$y_1 = e^{r_1 x} \;\; ; \;\; y_2 = e^{r_2 x}$ $y_1 = cosh(r_1 x) \; ; \; y_2 = sinh(r_1 x)$ یا $y_{1,2} = e^{\pm r_1 x}$
$\Delta = 0 \rightarrow (r_1, r_1)$	$y_1 = e^{r_1 x} \;\; ; \;\; y_2 = xe^{r_1 x}$
$\Delta < 0 \rightarrow r_{1,2} = \lambda \pm \mu i$ $if \;\; b = 0 \rightarrow r_{1,2} = \pm \mu i$	$y_1 = e^{\lambda x} cos(\mu x) \;\; ; \;\; y_2 = e^{\lambda x} sin(\mu x)$ $y_1 = cos(\mu x) \;\; ; \;\; y_2 = sin(\mu x)$

تمرینات بخش ۲-۵

۱- در معادله $y'' + 9y' = 0$ فرض کنید $u = y'$ و با تبدیل معادله به یک معادله مرتبه اول آنرا حل کنید. یکبار دیگر آنرا با روشهای ارائه شده در این بخش حل کرده نتایج را مقایسه کنید.

۲- معادلات زیر را حل کنید.

$1)\; y'' + y = 0 \quad ; \quad y(0) = 3 \; ; \; y'(0) = 0 \quad ; \quad \underline{Ans} : \; y = 3$

$2)\; y'' - 3y' - 4y = 0 \;\; ; \;\; y(0) = 1 \;\; ; \;\; y'(0) = 0 \quad ; \quad \underline{Ans} : \; y = \frac{1}{5}e^{4x} + \frac{4}{5}e^{-x}$

$\underline{3})\ 2y''+9y'+10y=0\ ;\ y(1)=3\ ;\ y'(1)=2$

$\underline{Ans}:\ y=19e^{-2(x-1)}-16e^{-5(x-1)/2}$

$\underline{4})\ 4y''-4y'+y=0\ ;\ y(0)=4\ ;\ y'(0)=-1\ ;\ \underline{Ans}:\ y=(4-3x)e^{x/2}$

$5)\ y''-2y'+y=0\ ;\ y(2)=1\ ;\ y'(2)=-1\ ;\ \underline{Ans}:\ y=(5-2x)e^{x-2}$

$\underline{6})\ y''+2y'+4y=0\ ;\ y(0)=1\ ;\ y'(0)=-1\ ;\ \underline{Ans}:\ y=e^{-x}cos(\sqrt{3}x)$

$\underline{7})\ 2y''-y'+3y=0\ ;\ y(1)=4\ ;\ y'(1)=1\ ;\ \underline{Ans}:\ y=4e^{(x-1)/4}cos\left(\frac{\sqrt{23}}{4}(x-1)\right)$

$8)\ y''-3iy'-2y=0\ ;\ \underline{Ans}:\ y=c_1e^{ix}+c_2e^{2ix}$

$\underline{9})\ y''+iy'-y=0\ ;\ \underline{Ans}:\ y=e^{-ix/2}\left(c_1e^{\sqrt{3}x/2}+c_2e^{-\sqrt{3}x/2}\right)$

۳- معادله زیر را یکبار با روشهای ارائه در این فصل و بار دیگر با استفاده از مشتق‌گیری متوالی (توضیح ۲ در قسمت چهارم مثال ۱-۱) حل کرده, جوابها را مقایسه کنید.

$y''-3y'+2y=0\ ;\ y(0)=4\ ;\ y'(0)=1$

۴- معادله دیفرانسیلی تشکیل دهید که ریشه‌های معادله مشخصه آن $\pm 2i$ باشد. این کار را یکبار با مفاهیم این بخش و بار دیگر مطابق روشی که در مثال ۲-۴ ارائه شد انجام دهید.

۲-۶- قضیه اساسی معادلات خطی مرتبه دوم ناهمگن

فرض کنید در معادله ناهمگن (1) ضرایب $p(x)$ و $q(x)$ و $g(x)$ (که الزاما ثابت نیستند) در یک بازه بسته I پیوسته باشند. حال اگر u_1 و u_2 دو جواب معادله <u>ناهمگن</u> (1) باشند, تفاضل ایندو جواب معادله <u>همگن</u> (2) میباشد. زیرا:

$$L[u_1-u_2]=\underbrace{L[u_1]}_{g}-\underbrace{L[u_2]}_{g}=0$$

اگر فرض کنیم y_p یک جواب معادله ناهمگن (1) و y همه جوابهای این معادله باشد, بنا به آنچه گفته شد $y-y_p$ جواب معادله همگن (2) می‌باشد. اگر همه جوابهای معادله (2) را که بصورت $c_1y_1+c_2y_2$ می‌باشد با y_c نمایش دهیم, خواهیم داشت:

$$y-y_p=\underbrace{c_1y_1+c_2y_2}_{y_c}\rightarrow\boxed{y=y_c+y_p}$$

بنابراین از اینجا به بعد جوابهای معادله (2) را با y_c (یا گاهی y_h) نشان میدهیم که به جواب عمومی (یا جواب مکمل) معادله همگن شناخته میشود و گاهی به اختصار صرفا <u>جواب عمومی</u> عنوان می‌شود. همچنین y_p را یک <u>جواب خصوصی</u> معادله (1) می‌نامیم. هدف محاسبه <u>جواب عمومی معادله ناهمگن</u> است که با y نشان داده و مجموع جواب عمومی معادله همگن (y_c) و جواب خصوصی (y_p) است که گاهی با عنوان <u>جواب کامل</u> نیز شناخته می‌شود.

<u>خلاصه</u>: از جمع y_c (جواب عمومی معادله همگن) و y_p (یک جواب خصوصی معادله ناهمگن) , <u>همه</u> جوابهای عمومی معادله ناهمگن بدست می‌آید. اگر در مساله‌ای ذکر شود <u>جواب معادله</u> را بیابید, منظور همان جواب کامل یعنی جمع جواب عمومی و خصوصی است. مثلا در معادله زیر بدیهی است که $y_p=4$ در معادله صدق می‌کند, پس همه جوابها عبارتند از:

$$y'' + 2y' + 2y = 8 \rightarrow y_c = e^{-x}(c_1 cosx + c_2 sinx)\ ;\ \ y_p = 4 \rightarrow y = y_c + y_p$$

بدیهی است تابعی مانند $y_p = 4 + 3e^{-x}sinx$ نیز در معادله صدق میکند. اما اگر آنرا با y_c جمع کنیم به همان نتیجه بالا خواهیم رسید, چرا که ترم $3e^{-x}sinx$ در y_c وجود دارد.

اگر $g(x)$ بصورت مجموع چند تابع باشد, جواب خصوصی, مجموع جوابهای خصوصی هر تابع میباشد که این نیز تحت عنوان روش برهم نهی یا جمع آثار شناخته می‌شود.

مثلا برای معادله $y'' + 2y' + 2y = 8 + 5e^{x}$ ابتدا فرض میکنیم سمت راست $g_1 = 8$ بوده و جواب خصوصی نظیر آنرا $y_{p_1} = 4$ بدست می‌آوریم. سپس فرض میکنیم سمت راست $g_2 = 5e^{x}$ بوده و جواب خصوصی نظیر آنرا نیز $y_{p_2} = e^{x}$ بدست می‌آوریم. در نتیجه جواب خصوصی مساله $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = 4 + e^{x}$ میباشد. نحوه بدست آوردن هر یک از جوابهای خصوصی در بخش بعد بیان میشود.

علت درستی روش جمع آثار بصورت زیر است:

$$g = \sum_{i=1}^{n} g_i \quad ; \quad L[y_{p_i}] = g_i \rightarrow y = y_c + y_p = y_c + \sum_{i=1}^{n} y_{p_i}$$

$$L[y] = L\left[y_c + \sum_{i=1}^{n} y_{p_i}\right] = \underbrace{L[y_c]}_{0} + L\left[\sum_{i=1}^{n} y_{p_i}\right] = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{L[y_{p_i}]}_{g_i} = g$$

پس از اینجا به بعد بایستی بدنبال محاسبه جواب خصوصی y_p بود. چهار روش اصلی برای یافتن جواب خصوصی عبارتند از:

۱- روش ضرایب نامعین ۲- روش تغییر پارامتر(لاگرانژ) ۳- روش اپراتورمعکوس ۴- روش تجزیه عملگرها

در اینجا صرفا دو روش اول و دوم بیان شده و در انتهای فصل بعد به بررسی دو روش دیگر خواهیم پرداخت.

روش ضرایب نامعین و اپراتور معکوس معمولا برای معادلات با ضرایب ثابت به‌کار گرفته شده و ترم ناهمگنی $g(x)$ بایستی به فرمهای خاصی باشد. اما اگر ترم ناهمگنی $g(x)$ فرمهای دیگری داشته باشد و یا ضرایب معادله ثابت نباشد, روش تغییر پارامتر, مناسب‌ترین روش است. به کمک روش تجزیه عملگرها می‌توان معادلات با ضرایب ثابت یا غیر ثابت را نیز حل کرد, اما خواهیم دید که برای ضرایب غیر ثابت, روش ساده‌ای نمی‌باشد.

۲-۷-روش ضرایب نامعین

این روش در واقع به نوعی حدس جواب بوده و برای حالتی که ضرایب ثابت و $g(x)$ به یکی از سه فرم زیر باشد مناسب است.

$$g(x) = \begin{cases} a_n x^n + \cdots + a_0 = P_n(x) \\ e^{\alpha x} P_n(x) \\ e^{\alpha x} P_n(x) \begin{Bmatrix} cos(\beta x) \\ sin(\beta x) \end{Bmatrix} \end{cases}$$

در اینصورت برای هر حالت جواب را به فرمهایی که در ادامه خواهد آمد (بر حسب یک تعدادی ضرایب نامعین) حدس زده و با جایگذاری در معادله و متحد قرار دادن دو طرف, ضرایب مجهول را بدست می‌آوریم.

الف: اگر $g(x)$ بصورت چند جمله ای باشد.

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = P_n(x) \rightarrow y_p(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} \cdots + A_0$$

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

$$a[n(n-1)A_n x^{n-2} + \cdots + 2A_2] + b[nA_n x^{n-1} + \cdots + A_1] + c[A_n x^n + \cdots + A_0] \\ = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

برای برقراری این تساوی باید درجات x در دو طرف یکسان باشد. اگر $c \neq 0$ مشکلی ایجاد نمی‌شود. اما اگر $c = 0$ و $b \neq 0$ باشد, (درست معادل آنکه عدد صفر, ریشه معادله مشخصه است), در اینصورت نمی‌توان این تساوی را برقرار نمود, لذا می‌توان $y_p(x)$ انتخابی را در x ضرب کرد تا این مشکل برطرف شود. در حالتی که $c = 0$ و $b = 0$ باشد(درست معادل آنکه عدد صفر, دوبار ریشه معادله مشخصه است) نیز $y_p(x)$ را در x^2 ضرب می‌کنیم. به عبارتی:

$$\begin{cases} c \neq 0 \rightarrow y_p(x) = A_n x^n + \cdots + A_0 \\ c = 0, b \neq 0 \rightarrow y_p(x) = x(A_n x^n + \cdots + A_0) \\ c = 0, b = 0 \rightarrow y_p(x) = x^2(A_n x^n + \cdots + A_0) \end{cases}$$

بدیهی است در حالت دوم معادله مشخصه بصورت $ar^2 + br = 0$ بوده و لذا صفر ریشه این معادله است. در حالت سوم نیز این معادله به فرم $ar^2 = 0$ خواهد بود که در اینصورت صفر, دو بار ریشه آن می‌باشد. به تعبیر دیگری می‌توان گفت که جواب در حالت کلی به فرم زیر است, که در آن s تعداد تکرارهای صفر در ریشه‌های معادله مشخصه $(ar^2 + br + c = 0)$ می‌باشد.

$$y_p(x) = x^s(A_n x^n + \cdots + A_0)$$

هر چند راه حل ساده‌تر آن است که در حالت دوم یعنی $ay'' + by' = g(x)$ با انتخاب $y' = p$ به یک معادله مرتبه یک بر حسب p رسیده و آنرا حل کنیم. در حالت سوم نیز معادله $ay'' = g$ با دوبار انتگرال‌گیری حل می‌شود.

حالت خاص: اگر $P_n(x) = a_0$ یعنی چندجمله‌ای از درجه صفر است, لذا بایستی جواب نیز از درجه صفر یعنی A_0 انتخاب شود.

$$y_p(x) = x^s(A_0)$$

ب: اگر $g(x)$ بصورت $e^{\alpha x}P_n(x)$ باشد.

با تغییر تابع $y_p(x) = e^{\alpha x}u(x)$ و جایگذاری در معادله پس از حذف $e^{\alpha x}$ خواهیم داشت:

$$au'' + \underbrace{(2a\alpha + b)}_{b'}u' + \underbrace{(a\alpha^2 + b\alpha + c)}_{c'}u = P_n(x)$$

که به حالت قبل تبدیل می‌شود. در اینجا نیز بسته به اینکه b' یا c' صفر باشد یا نباشد سه حالت وجود دارد.

اگر $c' \neq 0$ به این معنی است که α ریشه معادله مشخصه $(ar^2 + br + c = 0)$ نیست. اما اگر $c' = 0$ یعنی α ریشه معادله مشخصه خواهد بود و در نهایت اگر همزمان $c' = 0$ و $b' = 0$ به این معنی است که α هم ریشه معادله و هم ریشه مشتق آن $(2ar + b = 0)$ می‌باشد, یعنی α دوبار معادله مشخصه را صفر خواهد کرد.

بنابراین در نهایت مشابه قبل جواب به فرم زیر خواهد بود که در آن s تعداد تکرارهای α در ریشه‌های معادله مشخصه میباشد.

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x}(A_n x^n + \cdots + A_0)$$

بدیهی است اگر $g(x)$ به فرم هیپربولیک باشد, ابتدا آنرا بر حسب تابع نمایی می‌نویسیم. (قسمت ۳ از مثال ۲-۸)

حالت خاص: در اینجا نیز اگر $P_n(x) = a_0$, فرم جواب انتخابی بصورت زیر ساده خواهد شد.

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x}(A_0)$$

ج: اگر $g(x)$ بصورت $e^{\alpha x}P_n(x)cos(\beta x)$ و یا $e^{\alpha x}P_n(x)sin(\beta x)$ باشد.

برای این قسمت, دو روش ارائه می‌شود.

روش اول: ترم ناهمگن را به $g(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}P_n(x)$ تغییر می‌دهیم. به عبارتی معادل آن است که بجای $cos(\beta x)$ و $sin(\beta x)$, تابع نمایی $e^{i\beta x}$ را قرار داده‌ایم. در اینصورت می‌توان جواب نظیر این معادله جدید را مشابه قسمت قبل(ب) بدست آورد که چون ترم ناهمگن معادله را تغییر داده‌ایم, جواب بدست آمده y_p نخواهد بود و آنرا z_p در نظر می‌گیریم.

در اینحالت s تعداد تکرارهای $\alpha + i\beta$ در ریشه‌های معادله مشخصه می‌باشد, که در معادله مرتبه دو با ضرایب حقیقی, فقط می‌تواند 0 یا 1 باشد.

حال هدف آن است که با داشتن z_p , جواب خصوصی معادله اصلی یعنی y_p تعیین شود.

قضیه: فرض کنیم $g(x) = g_r(x) + ig_i(x)$ و $z_p = u + iv$ یک جواب مختلط معادله (1) (با ضرایب حقیقی) باشد, در اینصورت:

$$g = L[z_p] \to g_r + ig_i = L[u+iv] = L[u] + iL[v] \to \begin{cases} L[u] = g_r \\ L[v] = g_i \end{cases}$$

یعنی u جواب نظیر ترم ناهمگن g_r و v جواب نظیر ترم ناهمگن g_i می‌باشد. بنابراین:

$$g(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}P_n(x) = e^{\alpha x}P_n(x)cos(\beta x) + ie^{\alpha x}P_n(x)sin(\beta x)$$

$$\begin{cases} if \quad g(x) = e^{\alpha x}P_n(x)cos(\beta x) \to y_p = Re(z_p) \\ if \quad g(x) = e^{\alpha x}P_n(x)sin(\beta x) \to y_p = Im(z_p) \end{cases}$$

روش دوم: راه دیگر آن است که جواب را از ابتدا بصورت زیر انتخاب کنیم:

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x}[cos(\beta x)(A_n x^n + \cdots + A_0) + sin(\beta x)(B_n x^n + \cdots + B_0)]$$

که در اینصورت تعداد ضرایبی که بایستی محاسبه شود, دو برابر خواهد بود. علت درستی این انتخاب را می‌توان با شبیه آنچه در روش اول دیده شد بصورت زیر نشان داد. مثلا اگر $g(x) = e^{\alpha x}P_n(x)sin(\beta x)$ باشد خواهیم داشت:

$$g(x) = e^{\alpha x}P_n(x)sin(\beta x) = e^{\alpha x}P_n(x)\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} = \frac{1}{2i}e^{(\alpha+i\beta)x}P_n(x) - \frac{1}{2i}e^{(\alpha-i\beta)x}P_n(x)$$

که گویا بایستی دو بار از روشی که در قسمت (ب) عنوان شد استفاده کرد. در نتیجه:

$$y_p(x) = x^s e^{(\alpha+i\beta)x}(A'_n x^n + \cdots + A'_0) + x^s e^{(\alpha-i\beta)x}(B'_n x^n + \cdots + B'_0)$$

که معادل است با:

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x}[cos(\beta x)(A_n x^n + \cdots + A_0) + sin(\beta x)(B_n x^n + \cdots + B_0)]$$

حالت خاص: اگر $P_n(x) = a_0$ باشد, در اینصورت فرم جواب انتخابی بصورت زیر ساده خواهد شد.

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x}[A_0 cos(\beta x) + B_0 sin(\beta x)]$$

خلاصه سه فرم ذکر شده در جدول زیر دیده می‌شود.

$g(x)$	$y_p(x)$
$P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$	$x^s(A_n x^n + \cdots + A_0)$
$e^{\alpha x} P_n(x)$	$x^s e^{\alpha x}(A_n x^n + \cdots + A_0)$
$e^{\alpha x} P_n(x) \begin{Bmatrix} cos(\beta x) \\ sin(\beta x) \end{Bmatrix}$	$x^s e^{\alpha x}[cos(\beta x)(A_n x^n + \cdots + A_0) + sin(\beta x)(B_n x^n + \cdots + B_0)]$

که در آن s به‌ترتیب بیانگر تعداد تکرارهای 0 , α و $\alpha + i\beta$ در ریشه‌های معادله مشخصه $ar^2 + br + c = 0$ می‌باشد. بدیهی است با دانستن نتیجه فرم سوم می‌توان نتایج دو فرم اول و دوم بدست آورد.

توضیح ۱: دقت شود شرایط اولیه در محاسبه ضرایب مربوط به جواب خصوصی نقشی ندارد. این شرایط در نهایت بایستی بر روی جواب کامل معادله (جمع جواب عمومی و خصوصی) اعمال شده و عملا مقدار ضرایب مجهول در جواب عمومی را تعیین می‌کنند.

توضیح ۲: دیده شد که اگر ترم غیر همگنی به یکی از اشکال داده شده نباشد, نمی‌توان از این روش استفاده کرد. اشکال در شیوه کار نیست, بلکه در حدس زدن جواب است. مثلا اگر ترم غیرهمگنی بصورت لگاریتمی باشد, نمی‌توان به سادگی فرم جواب خصوصی را حدس زد. به همین ترتیب وقتی ضرایب ثابت نیستند, کار بسیار سخت‌تر می‌شود و نمی‌توان یک الگوی مشابه برای حدس جواب آن ارائه داد. به همین جهت اغلب این روش را قابل استفاده برای ضرایب ثابت و آن‌هم فرمهای خاصی از $g(x)$ می‌دانند. ■

مثال ۲-۸ جواب خصوصی معادلات زیر را بدست آورید.

1) $y'' - y' = x^2 + 1$

$\to (D^2 - D)y = x^2 + 1 \;;\; f(r) = 0 \to r^2 - r = 0 \to r_1 = 0 \;\&\; r_2 = 1 \to y_c = c_1 e^{0x} + c_2 e^{1x}$

$y_p(x) = x^1(A_2 x^2 + A_1 x + A_0) \xrightarrow{sub.} (6A_2 x + 2A_1) - (3A_2 x^2 + 2A_1 x + A_0) = x^2 + 1$

$\to -3A_2 x^2 + (6A_2 - 2A_1)x + 2A_1 - A_0 = x^2 + 1$

از آنجا که مجموعه توابع $\{1, x, x^2\}$ مستقل خطی هستند, لذا برای برقراری تساوی صرفا بایستی:

$$-3A_2 = 1 \;;\; 6A_2 - 2A_1 = 0 \;;\; 2A_1 - A_0 = 1 \to A_0 = -3 \;\;;\;\; A_1 = -1 \;\;;\;\; A_2 = -\frac{1}{3}$$

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1 + c_2 e^x - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \;\blacksquare$$

توضیح: اگر $y_p(x) = A_2 x^2 + A_1 x + A_0$ انتخاب شود, در اینصورت پس از جایگذاری در معادله:

$2A_2 - (2A_2 x + A_1) = x^2 + 1$

می‌بینیم که چنین اتحادی ممکن نیست و A_0 نیز حذف شده است. در واقع $y_p(x) = A_0$ منجر به صفر شدن معادله می‌شود یعنی جواب معادله همگن است. به عبارتی $y_p(x) = A_0$ یک جواب تکراری است که در جواب همگن نیز دیده می‌شود, در حالی که ما دنبال جواب غیرهمگن بودیم. بنابراین راه دوم انتخاب s آن است که بگوییم s باید تا اندازه‌ای باشد که هیچ یک از جملات y_p , جواب معادله همگن متناظر نباشد. ■

$$2)\ \ y'' + 4y = sin3x$$

$$\rightarrow (D^2 + 4)y = sin3x\ ;\ f(r) = 0 \rightarrow r^2 + 4 = 0 \rightarrow r_{1,2} = \pm 2i\quad ;\quad \alpha + i\beta = 0 + 3i \rightarrow s = 0$$

$$y_p(x) = x^0 e^{0x}[A_0 cos(3x) + B_0 sin(3x)] \xrightarrow{sub.} y_p = -0.2sin(3x)\ \blacksquare$$

توضیح ۱: راه حل دوم مساله بصورت زیر است. از آنجا که $sin3x = Im(e^{3ix})$ لذا معادله جایگزین زیر را حل میکنیم.

$$z'' + 4z = e^{3ix} \rightarrow r^2 + 4 = 0 \rightarrow r_{1,2} = \pm 2i\quad ;\quad \alpha = 3i \rightarrow s = 0 \rightarrow z_p(x) = x^0 A_0 e^{3ix}$$

$$z_p''(x) = -9A_0 e^{3ix} \xrightarrow{sub.} A_0 = -0.2 \rightarrow z_p(x) = -0.2e^{3ix}\quad ;\quad y_p = Im(z_p) = -0.2sin(3x)$$

دیده میشود که در این راه بایستی صرفا یک ضریب A_0 محاسبه شود, در حالیکه روش اول نیاز به محاسبه دو ضریب خواهد داشت.

توضیح ۲: عنوان شد که اگر معادله دارای شرط اولیه باشد, این شروط را بر روی جواب کامل معادله اعمال می‌کنیم. مثلا:

$$y'' + 4y = sin3x\quad ;\quad y(0) = 1\ ;\ y'(0) = 1$$

$$y = y_c + y_p = c_1 cos(2x) + c_2 sin(2x) + (-0.2sin(3x)) \xrightarrow{I.C.} c_1 = 1\ ;\ c_2 = 0.8\ \blacksquare$$

$$3)\ \ y'' - 3y' + 2y = 2sinhx$$

$$f(r) = 0 \rightarrow r^2 - 3r + 2 = 0 \rightarrow r_1 = 1\ \&\ r_2 = 2 \rightarrow y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

دقت شود که تابع $sinhx$ به فرم توابع ارائه شده در این بخش نمی‌باشد, اما می‌توان آنرا بر حسب تابع نمایی بیان کرد. در نتیجه:

$$y'' - 3y' + 2y = \underbrace{e^x}_{g_1} + \underbrace{(-e^{-x})}_{g_2} \rightarrow y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

$$g_1 = e^x \rightarrow \alpha = 1 \rightarrow s = 1 \rightarrow y_{p_1} = A_0 x^1 e^x \xrightarrow{sub.\ in\ L[y_{p_1}]=g_1} A_0 = -1$$

$$g_2 = -e^{-x} \rightarrow \alpha = -1 \rightarrow s = 0 \rightarrow y_{p_2} = A_0 x^0 e^{-x} \xrightarrow{sub.\ in\ L[y_{p_2}]=g_2} A_0 = -\frac{1}{6}$$

$$y = y_c + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x - \frac{1}{6}e^{-x}\ \blacksquare$$

$$4)\ \ y'' + y' + y = sin^2 x$$

$$f(r) = 0 \rightarrow r^2 + r + 1 = 0 \rightarrow r_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}i) \rightarrow y_c = e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1 cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

در اینجا نیز تابع sin^2x به فرم توابع ارائه شده در این بخش نمی‌باشد, اما می‌توان آنرا بر توابع مثلثاتی با توان ۱ بیان کرد. لذا:

$$y'' + y' + y = \underbrace{\frac{1}{2}}_{g_1} + \underbrace{\frac{-1}{2}cos2x}_{g_2} \rightarrow y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

$$g_1 = \frac{1}{2} \rightarrow s = 0 \rightarrow y_{p_1} = A_0 x^0 \xrightarrow{sub.\ in\ L[y_{p_1}]=g_1} A_0 = \frac{1}{2}$$

$$g_2 = \frac{-1}{2}cos2x \rightarrow \alpha + i\beta = 0 + 2i \rightarrow s = 0$$

$$\to y_{p_2} = x^0 e^{0x}[A_0 cos(2x) + B_0 sin(2x)] \xrightarrow{sub.\ in\ L[y_{p_2}]=g_2} A_0 = \frac{3}{26}\ ;\ B_0 = \frac{-1}{13}$$

$$y = y_c + y_p = e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1 cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{2} + \frac{3}{26}cos(2x) - \frac{1}{13}sin(2x)\ \blacksquare$$

$$5)\ \ y'' - 4y' + 4y = \underbrace{4xe^{2x}}_{g_1} + \underbrace{xsin2x}_{g_2} \to y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

$$f(r) = 0 \to r^2 - 4r + 4 = 0 \to r_{1,2} = 2$$

$$g_1 = 4xe^{2x} \to \alpha = 2 \to s = 2 \to y_{p_1} = x^2 e^{2x}(A_1 x + A_0) \xrightarrow{sub.\ in\ L[y_{p_1}]=g_1} A_0, A_1\ \boxed{\surd}$$

$$g_2 = xsin2x \to \alpha + i\beta = 0 + 2i \to s = 0$$

$$\to y_{p_2} = x^0 e^{0x}[cos(2x)(A_1 x + A_0) + sin(2x)(B_1 x + B_0)] \xrightarrow{sub.\ in\ L[y_{p_2}]=g_2} A_0, A_1, B_0, B_1\ \boxed{\surd}$$

با جایگذاری در معادله میتوان ضرایب را بدست آورد. دقت شود A_1, A_0 مربوط به y_{p_2} متفاوت از A_1, A_0 نظیر y_{p_1} میباشد. $\blacksquare$

توضیح: برای محاسبه جواب نظیر g_2 , از آنجا که $sin2x = Im\left(e^{2ix}\right)$ لذا می‌توان معادله جایگزین زیر را حل کرد:

$$z'' - 4z' + 4z = xe^{2ix}\ \ ;\ \ r_{1,2} = 2 \to \alpha = 2i \to\to s = 0$$

$$\to z_{p_2} = x^0 e^{2ix}(A_1 x + A_0) \xrightarrow{sub.} A_0, A_1\ \boxed{\surd}\quad ;\quad y_{p_2} = Im\left(z_{p_2}\right)\ \blacksquare$$

$$6)\ \ y'' + 2y' + 5y = 4xe^{-x}cos2x$$

$$f(r) = 0 \to r^2 + 2r + 5 = 0 \to r_{1,2} = -1 \pm 2i\quad ;\quad \alpha + i\beta = -1 + 2i \to s = 1$$

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x}[cos(\beta x)(A_n x^n + \cdots + A_0) + sin(\beta x)(B_n x^n + \cdots + B_0)]$$

$$y_p(x) = x^1 e^{-1x}[cos(2x)(A_1 x + A_0) + sin(2x)(B_1 x + B_0)]$$

با جایگذاری در معادله ضرایب بصورت زیر بدست می‌آید:

$$A_0 = \frac{1}{4}\ ;\ A_1 = 0\ \ ;\ \ B_0 = 0\ ;\ B_1 = \frac{1}{2} \to y_p(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{4}xcos2x + \frac{1}{2}x^2 sin2x\right)\ \blacksquare$$

توضیح ۱: راه حل دوم مساله بصورت زیر است. از آنجا که $cos2x = Re\left(e^{2ix}\right)$ لذا معادله جایگزین زیر را حل میکنیم.

$$z'' + 2z' + 5z = 4xe^{-x}e^{2ix} = 4xe^{(-1+2i)x} \to r^2 + 2r + 5 = 0 \to r_{1,2} = -1 \pm 2i$$

$$\alpha = -1 + 2i \to s = 1 \to z_p(x) = x^1 e^{(-1+2i)x}(A_1 x + A_0)$$

$$\xrightarrow{sub.} A_0 = \frac{1}{4}\ ;\ A_1 = -\frac{1}{2}i \to z_p = e^{-x}(cos2x + isin2x)\left(-\frac{1}{2}ix^2 + \frac{1}{4}x\right)$$

$$\to y_p = Re\left(z_p\right) = e^{-x}\left(\frac{1}{4}xcos2x + \frac{1}{2}x^2 sin2x\right)$$

دیده میشود که در این راه بایستی صرفا دو ضریب محاسبه شود, در حالیکه روش اول نیاز به محاسبه چهار ضریب خواهد داشت.

توضیح ۲: می‌توان گفت در معادلات مرتبه اول نیز جواب کلی مساله, مجموع جوابهای همگن و غیرهمگن میباشد. مثلا در حل معادله $y' + 2y = g(x)$ بجای حل معادله ناهمگن مرتبه اول, مطابق توضیح ارائه شده در بالای مثال ۲-۵ , خواهیم داشت:

$$y' + 2y = 0 \to (D+2)y = 0 \ ; \ f(r) = 0 \to r + 2 = 0 \to r = -2 \to y_c = ce^{rx} = ce^{-2x}$$

حال بسته به فرم $g(x)$ جواب را مطابق آنچه در این بخش دیده شد انتخاب می‌کنیم. بعنوان نمونه چند حالت بررسی می‌شود:

$$1)\ \ g(x) = 6 \xrightarrow{\alpha=0} s = 0 \to y_p = x^0(A_0) \xrightarrow{sub.} A_0 = 3 \to y_p = 3$$

$$2)\ \ g(x) = 4x \xrightarrow{\alpha=0} s = 0 \to y_p = x^0(A_1x + A_0) \xrightarrow{sub.} A_0 = -1 \ ; \ A_1 = 2 \to y_p = 2x - 1$$

$$3)\ \ g(x) = 3e^{-2x} \xrightarrow{\alpha=-2} s = 1 \to y_p = x^1e^{-2x}(A_0) \xrightarrow{sub.} A_0 = 3 \to y_p = 3xe^{-2x}$$

$$4)\ \ g(x) = 3e^{-2x}cosx \xrightarrow{\alpha=-2+i} s = 0 \to y_p = x^0e^{-2x}(A_0cosx + B_0sinx)$$

$$\xrightarrow{sub.} A_0 = 0 \ ; \ B_0 = 3 \to y_p = 3e^{-2x}sinx$$

$$5)\ \ g(x) = 3xe^{-2x}cosx \xrightarrow{\alpha=-2+i} s = 0 \to y_p = x^0e^{-2x}[cosx(A_1x + A_0) + sinx(B_1x + B_0)]$$

$$\xrightarrow{sub.} A_0 = 3 \ ; \ A_1 = 0 \ ; \ B_0 = 0 \ ; \ B_1 = 3 \to y_p = 3e^{-2x}(xsinx + cosx)$$

و در نهایت نیز جواب کامل بصورت $y = y_c + y_p$ خواهد بود. ■

تمرینات بخش‌های ۲-۶ و ۲-۷

۱- معادلات زیر را حل کنید.

$1)\ y'' - 4y = xsinhx \quad ; \quad \underline{Ans}: y_p = -\frac{x}{3}sinhx - \frac{2}{9}coshx$

$\underline{2})\ y'' + y = x(1 + sinx) \quad ; \quad \underline{Ans}: y_p = x + \frac{1}{4}xsinx - \frac{1}{4}x^2cosx$

$\underline{3})\ y'' + 2y' + 5y = x^2e^{-x}cos2x$

$\underline{Ans}: y_p = e^{-x}\left(\frac{x^3}{12} - \frac{x}{32}\right)sin2x + e^{-x}\frac{x^2}{16}cos2x$

$4)\ y'' - 9y = 4 + 5sinh3x \quad ; \quad y(0) = 0 \ ; \ y'(0) = 2$

$\underline{Ans}: y = \frac{5}{12}e^{3x} + \frac{1}{36}e^{-3x} - \frac{4}{9} + \frac{5}{6}xcosh3x$

$\underline{5})\ \ y'' + 3y' + 2y = sin2x \quad ; \quad y(0) = 2 \ ; \ y'(0) = -1$

$\underline{Ans}: y = \frac{17}{5}e^{-x} - \frac{5}{4}e^{-2x} - \frac{1}{20}sin2x - \frac{3}{20}cos2x$

$\underline{6})\ y'' + y = f(x) \ ; \quad f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 4 \\ 3 & x \ge 4 \end{cases} \quad ; \ y(0) = y'(0) = 0$

$$\underline{Ans}: y(x) = \begin{cases} x - sinx & , \quad 0 \le x < 4 \\ 3 - sinx + sin(x-4) + cos(x-4) & , \quad x \ge 4 \end{cases}$$

توضیح: تابع پله‌ای واحد$(Unit\ step\ function)$ یا هویساید$(Heaviside)$ بصورت زیر تعریف می‌شود. با این تابع می‌توان جواب تمرین آخر را بصورت تک ضابطه‌ای نیز بیان کرد.

$$H_a(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x \ge a \end{cases} \quad \rightarrow \quad y(x) = x - sinx + [3 - x + sin(x-4) + cos(x-4)]H_4(x)$$

۲- در اولین قسمت از مثال ۲-۸ از آنجا که معادله دارای ترم y نمی‌باشد, با انتخاب $u = y'$ معادله به $u' - u = x^2 + 1$ تبدیل می‌شود. این معادله مرتبه اول را حل کرده و با انتگرال‌گیری از u جواب y را بدست آورید.

۲-۸- روش تغییر پارامتر(لاگرانژ)

یکی از مهمترین مزایای روشی که در این بخش ارائه خواهد شد, استفاده از آن برای تعیین جواب خصوصی معادلاتی است که ضرایب ثابت ندارند و یا فرم $g(x)$ به یکی از سه فرم ارائه شده در قسمت قبل نمی‌باشد. در این روش قرار است جواب خصوصی معادله را با توجه به فرم جواب عمومی آن بدست آوریم. در ابتدا برای مشخص شدن ایده لاگرانژ, بهتر است روش کار را برای حل معادله خطی مرتبه اول$y' + p(x)y = g(x)$ بیان کنیم. برای این منظور ابتدا معادله همگن متناظر را حل کرده, یک جواب آنرا مانند y_1 می‌یابیم. مشابه بحث کلی معادلات همگن, جواب عمومی مضرب ثابتی از y_1 است.

$$y' + p(x)y = 0 \rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \rightarrow y_1 = e^{-\int p(x)dx} = \frac{1}{\mu(x)} \rightarrow y_c = cy_1$$

مطابق روش لاگرانژ, جواب خصوصی را بصورت مضربی غیر ثابت از y_1 در نظر گرفته و با جایگذاری در معادله این ضریب را بدست می‌آوریم(چرا که در واقع هر تابعی مضربی نه لزوما ثابت از تابع دیگری است. مثلا $sinx$ مضربی از x است, زیرا $sinx = \frac{sinx}{x}x$). بنابراین فرض میکنیم $y_p = uy_1$ و با جایگذاری:

$$y_p = uy_1 \rightarrow y_p' = u'y_1 + uy_1' \xrightarrow{y_p' + p(x)y_p = g(x)} u'y_1 + u\underbrace{(y_1' + p(x)y_1)}_{0} = g(x)$$

$$\rightarrow u' = \frac{g(x)}{y_1} = \mu(x)g(x) \rightarrow u = \int \mu(x)g(x)dx \rightarrow y_p = uy_1 = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)g(x)dx$$

$$y = y_c + y_p = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)g(x)dx + c\right]$$

در واقع در این روش, ثابت c در جواب عمومی را با تابع نامشخص u در جواب خصوصی جایگزین می‌کنیم.

حال به معادلات مرتبه دوم می‌پردازیم. می‌خواهیم ببینیم از آنجا که جواب عمومی یک معادله خطی به فرم $c_1y_1 + c_2y_2$ میباشد, آیا میتوان جواب خصوصی را نیز بر حسب توابع پایه بیان کرد, با این تفاوت که ثابتها را با توابع نامشخص جایگزین کنیم؟

مثلا فرض کنید جواب خصوصی یک معادله مرتبه دو $y_p = sinx$ بوده و توابع پایه آن $y_1 = 1$ و $y_2 = x$ باشد. بدیهی است نمی‌توان ثابتهای c_1 و c_2 را بگونه‌ای بدست آورد که $sinx = c_1 \times 1 + c_2x$ باشد. اما اگر ثابتها را با توابع u_1 و u_2 جایگزین کنیم, بدیهی است بینهایت انتخاب خواهیم داشت. مثلا:

$$sinx = u_1 \times 1 + u_2 x \to \begin{cases} u_1 = 1 + sinx\ ;\ u_2 = -1/x \\ u_1 = e^x\ ;\ u_2 = (sinx - e^x)/x \end{cases}$$ ، بیشمار انتخاب دیگر

در این‌حالت برای آنکه صرفا یک دسته جواب یکتای u_1 و u_2 داشته باشیم یا بایستی u_1 را بدهند و u_2 را بخواهند(یا برعکس) و یا مثلا یک قید اضافه‌ای به u_1 و u_2 اعمال شود. مثلا اینکه u_1 و u_2ای بیابید که $2u_1 + 3u_2 = 11x$ گردد.

بنابراین در ادامه به جای ثابتهای جواب عمومی, توابع نامشخص u_1 و u_2 را قرار داده و با جایگذاری در معادله سعی می‌کنیم آنها را بگونه‌ای بدست آوریم که منجر به جواب خصوصی معادله شود. به این ترتیب:

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 \to y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 \to y_p' = u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_1 y_1' + u_2 y_2'$$

حال بایستی مشتق دوم y_p نیز محاسبه شده و در معادله جایگذاری شود. گفته شد که برای داشتن یک جواب یکتا می‌توان یک قید اضافه برای u_1 و u_2 منظور کرد. بهتر است این قید بگونه‌ای انتخاب شود که منجر به کاهش تعداد جملات y_p' گردد تا تعداد جملات محاسبه مشتق بعدی آن نیز کم شود. مثلا میتوان u_1 و u_2 را طوری انتخاب کرد که دو جمله اول y_p' حذف شود, یعنی:

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \to y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2' \to y_p'' = u_1 y_1'' + u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_2 y_2''$$

$$y'' + py' + qy = g \xrightarrow{y=y_p} u_1 \underbrace{(y_1'' + py_1' + qy_1)}_{L[y_1]=0} + u_2 \underbrace{(y_2'' + py_2' + qy_2)}_{L[y_2]=0} + u_1' y_1' + u_2' y_2' = g$$

از آنجا که y_1 و y_2 جوابهای معادله همگن می‌باشند, لذا $L[y_1]$ و $L[y_2]$ برابر صفر منظور شده است.

در نهایت معادله اخیر به همراه شرط دلخواه انتخاب شده, دستگاه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = g \end{cases} \to \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ g \end{Bmatrix} \to u_1' = \frac{-g y_2}{W}\ \ , u_2' = \frac{g y_1}{W}$$

از آنجا که y_1 و y_2 جوابهای پایه معادله می‌باشند, لذا رونسکین آنها مخالف صفر بوده و در نتیجه دستگاه بالا دارای جواب است.

<u>توضیح ۱</u>: دقت شود برای استفاده از روش لاگرانژ بایستی ضریب y'' برابر 1 گردد. اهمیت این موضوع در تعیین $g(x)$ می‌باشد. به همین دلیل همیشه در جایگذاری $g(x)$ توجه شود که ترم ناهمگنی را به ضریب y'' تقسیم کنیم.

<u>توضیح ۲</u>: میتوان دستگاه را با استفاده از رابطه کرامر بصورت زیر نیز حل نمود:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{W_1}{W} \quad ; \quad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{W_2}{W} \quad \to \quad u_i' = \frac{W_i}{W}$$

که در آن W بیانگر رونسکین جوابهای اساسی و W_i از جایگذاری سمت راست دستگاه در ستون iام رونسکین بدست می‌آید.

<u>توضیح ۳</u>: دقت شود اگر جملاتی در y_p ظاهر شود که در جواب عمومی هم دیده شود, میتوان آنها را حذف کرد. مثلا فرض کنیم در حل یک معادله مرتبه دو غیرهمگن جواب عمومی بصورت $y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ باشد. همچنین یک جواب خصوصی نیز به فرم $y_p = sinhx + x^4 + 3e^{-x}$ بدست آمده باشد, در اینصورت هم $3e^{-x}$ و هم $sinhx$ قابل حذف شدن میباشند. چرا که $sinhx = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$ و لذا ترمهای آن در جواب عمومی وجود دارد. در نتیجه جواب کامل معادله عبارت است از:

$$y = y_c + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + x^4$$

توضیح ۴: جواب کامل معادله جمع جوابهای عمومی و خصوصی است. به عبارتی:

$$y = y_c + y_p \to y = c_1y_1 + c_2y_2 + u_1y_1 + u_2y_2 = (u_1 + c_1)y_1 + (u_2 + c_2)y_2$$

از آنجا که u_1 و u_2 با انتگرال‌گیری بدست می‌آیند, لذا اگر پس از انتگرال‌گیری, ثابتهای انتگرال را نیز لحاظ کنیم, در واقع به جواب کامل معادله رسیده‌ایم و نیازی به جمع کردن این جواب با جواب عمومی نیست.

توضیح ۵: یکی از مهمترین کاربردهای این روش آن است که اگر در یک معادله غیرهمگن با ضرایب متغیر, هر دو جواب مستقل معادله همگن متناظر در دست باشد, می‌توان جواب کامل معادله غیرهمگن را بدست آورد (به مثال ۲-۱۰ توجه شود).

توضیح ۶: دیده شد که در این روش قید اضافه بصورت $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$ انتخاب شد تا دو جمله اول y_p' را حذف کند. در بخش ۲-۱۱ و در روش کاهش مرتبه قید اضافه بصورت $u_2 = 0$ خواهد بود و لذا $y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = u_1y_1$ خواهد شد.

مثال ۲-۹ معادلات زیر را حل کنید.

1) $y'' + y = secx$

$$y'' + y = 0 \to r^2 + 1 = 0 \to r = \pm i \to y_1 = cosx \; ; \; y_2 = sinx \to y_c = c_1cosx + c_2sinx$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{vmatrix} = 1$$

$$u_1' = \frac{-gy_2}{W} = -\frac{\frac{secx}{1}sinx}{1} = -tanx \to u_1 = ln|cosx|$$

گفته شد که برای استفاده از روش لاگرانژ بایستی ضریب y'' برابر 1 گردد, به همین دلیل $g(x) = \frac{secx}{1}$ منظور شده است.

$$u_2' = \frac{gy_1}{W} = \frac{\frac{secx}{1}cosx}{1} = 1 \to u_2 = x$$

$$\to y_p = u_1y_1 + u_2y_2 \to y_p = (ln|cosx|)cosx + xsinx \to y = y_c + y_p \;\; ■$$

توضیح: می‌توان u_i ها را با استفاده از رابطه $u_i' = \frac{W_i}{W}$ نیز بدست آورد:

$$W = \begin{vmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{vmatrix} = 1 \quad ; \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & sinx \\ secx & cosx \end{vmatrix} = -tanx \quad ; \quad W_2 = \begin{vmatrix} cosx & 0 \\ -sinx & secx \end{vmatrix} = 1$$

$$u_i' = \frac{W_i}{W} \to u_1' = \frac{-tanx}{1} = -tanx \; ; \; u_2' = \frac{1}{1} = 1 \;\; ■$$

2) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1 + x^2}$

$$y'' - 2y' + y = 0 \to r^2 - 2r + 1 = 0 \to r_{1,2} = 1 \to y_1 = e^x; y_2 = xe^x \to y_c = c_1e^x + c_2xe^x$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x}$$

$$u_1' = \frac{-gy_2}{W} = -\frac{x}{1 + x^2} \to u_1 = -\frac{1}{2}ln(1 + x^2) \quad ; \quad u_2' = \frac{gy_1}{W} = \frac{1}{1 + x^2} \to u_2 = tan^{-1}x$$

$$\to y_p = u_1y_1 + u_2y_2 \to y_p = -\frac{1}{2}e^x ln(1 + x^2) + xe^x tan^{-1}x \to y = y_c + y_p \;\; ■$$

$$3)\ \ y''+y=\sqrt{1+x^2} \to y_c=c_1cosx+c_2sinx$$

$$u_1'=\frac{-gy_2}{W}=-\sqrt{1+x^2}sinx \to u_1=-\int\sqrt{1+x^2}sinx\,dx$$

$$u_2'=\frac{gy_1}{W}=\sqrt{1+x^2}cosx \to u_2=\int\sqrt{1+x^2}cosx\,dx$$

$$y_p=u_1y_1+u_2y_2=sinx\int\sqrt{1+x^2}cosx\,dx-cosx\int\sqrt{1+x^2}sinx\,dx$$

مشکل این مثال آن است که انتگرال‌گیری امکان‌پذیر نمی‌باشد. در اینصورت یا می‌توان جواب را به همین شکل انتگرالی ارائه داد و یا با نوشتن سری مک‌لوران توابع تحت انتگرال(انتگرالده), حاصل انتگرال را بصورت یک سری توانی بدست آورد. برای این منظور:

$$\sqrt{1+x^2}cosx=\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\cdots\right)\left(1-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)=1-\frac{x^4}{3}-\frac{13}{90}x^6+\cdots$$

$$\sqrt{1+x^2}sinx=\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\cdots\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)=x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\cdots$$

$$y_p=sinx\left(x-\frac{1}{15}x^5-\frac{13}{630}x^7+\cdots\right)-cosx\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{30}x^6+\cdots\right)\ \blacksquare$$

مثال ۲-۱۰ اگر بدانیم $y_1=x$ و $y_2=xe^x$ دو جواب پایه معادله زیر باشند (جوابهای مستقل معادله همگن متناظر), جواب کامل آنرا بدست آورید.

$$x^2y''-x(x+2)y'+(x+2)y=2x^3$$

حل دیده میشود این معادله, ضرایب ثابت نیست, اما از آنجا که جوابهای پایه داده شده‌اند, به روش لاگرانژ قابل حل است. می‌توان نشان داد $W=x^2e^x$ و لذا:

$$u_1'=\frac{-gy_2}{W}=\frac{-\frac{2x^3}{x^2}xe^x}{x^2e^x}=-2\to u_1=-2x\quad ;\quad u_2'=\frac{gy_1}{W}=\frac{\frac{2x^3}{x^2}x}{x^2e^x}=2e^{-x}\to u_2=-2e^{-x}$$

گفته شد که برای استفاده از روش لاگرانژ بایستی ضریب y'' برابر 1 گردد, به همین دلیل $g(x)=\frac{2x^3}{x^2}$ منظور شده است.

$$\to y_p=u_1y_1+u_2y_2\to y_p=(-2x)x+(-2e^{-x})xe^x=-2x^2-2x$$

$$\to y=y_c+y_p=c_1x+c_2xe^x+(-2x^2-2x)=c_3x+c_2xe^x-2x^2\quad ;\quad c_3=c_1-2\ \blacksquare$$

تمرینات بخش ۲-۸

۱-قسمتهای ۲ و۴ از تمرین ۱ بخش قبل را به روش تغییر پارامتر مجددا حل کنید.

۲- معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$\underline{1})\ \ y''+y=tanx\ \ ;\ \ y(0)=1\,;\ \ y'(0)=2$

$\underline{Ans}:\ \ y=cosx+3sinx+ln\left(\frac{cosx}{1+sinx}\right)cosx$

$\underline{2})\ \ 4y''+y=f(x)\ ;\ y(0)=3\,;\ y'(0)=-7$

$$\underline{Ans:}\quad y(x) = 3cos\left(\frac{x}{2}\right) - 14sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_0^x sin\left(\frac{u}{2}\right) f(x-u)\,du$$

3) $y'' - 2y' + y = 2\dfrac{e^x}{x}$; $\underline{Ans:}\quad y(x) = c_1e^x + c_2xe^x - 2xe^x + 2xe^x ln|x|$

4) $y'' - 9y' + 18y = e^{e^{-3x}}$; $\underline{Ans:}\quad y(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{6x} + \dfrac{1}{9}e^{6x}e^{e^{-3x}}$

۳- در روش تغییر پارامتر دیده شد $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ در نظر گرفته شده و سپس از آنجا که یک حق انتخاب وجود دارد یک شرط اضافی بصورت $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$ انتخاب گردید. حال فرض کنید این شرط اضافی بصورت $u_2 = 0$ منظور شود. به عبارتی مساله را با $y_p = u_1y_1$ حل کرده و جواب نهایی را بدست آورید. به کمک این روش مثال ۲-۱۰ را صرفا با دانستن $y_1 = x$ حل کنید.

۲-۹- کاربردهای مهندسی معادلات مرتبه دو با ضرایب ثابت

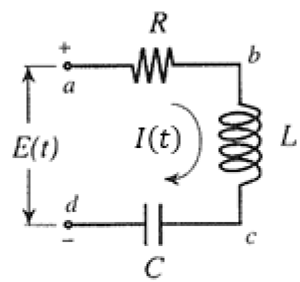
در این قسمت به دو کاربرد مهندسی از معادلات مرتبه دو با ضرایب ثابت می‌پردازیم. در ابتدا یک مدار RLC همراه با ورودی منبع ولتاژ و سپس ارتعاش یک سیستم یک درجه آزادی (جرم-فنر-میراگر) بررسی میشود.

۲-۹-۱- مدارهای الکتریکی: مدار RLC

یک مدار RLC شامل مقاومت, القاگر(سلف) و خازن میباشد که بصورت سری به یک مولد نیرو متصل شده‌اند. برای تحلیل چنین مداری, در ابتدا بایستی معادله پتانسیل برای حلقه نوشته شود. در جدول زیر میزان تغییرات پتانسیل هر المان ارائه شده است:

Name	Symbol	Notation		Unit	Voltage Drop
Ohm's Resistor	—WW—	R	Ohm's Resistance	ohms (Ω)	RI
Inductor	—0000—	L	Inductance	henrys (H)	$L\dfrac{dI}{dt}$
Capacitor	—||—	C	Capacitance	farads (F)	Q/C

مدار RLC زیر را در نظر می‌گیریم. با نوشتن معادله پتانسیل درون حلقه خواهیم داشت:



$$(V_a - V_d) + (V_b - V_a) + (V_c - V_b) + (V_d - V_c) = 0$$

$$\rightarrow\ E(t) - RI(t) - L\frac{dI(t)}{dt} - \frac{Q(t)}{C} = 0$$

دیده میشود که این معادله دارای دو مجهول $I(t)$ و $Q(t)$ میباشد. اما ایندو به هم وابسته هستند, چرا که میزان بار خازن و جریان مدار با رابطه $Q(t) = \int I(t)\,dt$ به هم مربوطند. بنابراین میتوان معادله را بصورت زیر نوشت:

$$E(t) - RI(t) - L\frac{dI(t)}{dt} - \frac{1}{C}\int I(t)\,dt = 0$$

که یک معادله انتگرو-دیفرانسیل(Integrodifferential Equation) می‌باشد, چرا که علاوه بر $I(t)$, مشتق و انتگرال آن نیز در معادله دیده میشود. با مشتق‌گیری نسبت به t انتگرال حذف شده و به یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ بصورت زیر می‌رسیم که در آن جریان $I(t)$ مجهول مورد نظر مساله میباشد.

$$L\frac{d^2I(t)}{dt^2}+R\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{C}I(t)=\frac{dE(t)}{dt}$$

و یا می‌توان بصورت برعکس, جریان $I(t)$ را بر حسب بار خازن $Q(t)$ در معادله اولیه جایگزین کرد, در اینصورت:

$$E(t)-RI(t)-L\frac{dI(t)}{dt}-\frac{Q(t)}{C}=0\xrightarrow{I(t)=\frac{dQ(t)}{dt}}L\frac{d^2Q(t)}{dt^2}+R\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{1}{C}Q(t)=E(t)$$

که اگر در لحظه صفر, بار خازن $Q(0)$ و جریان $I(0)$ که همان $Q'(0)$ است داده شده باشد, جواب نهایی معادله بدست می‌آید.

همچنین می‌توان معادله را بر حسب ولتاژ دو سر یکی از قطعات نیز بیان کرد. مثلا با جایگذاری $Q(t)=CV_C(t)$ در رابطه بالا, می‌توان معادله را بر حسب ولتاژ دو سر خازن بصورت زیر نوشت:

$$L\frac{d^2\left(CV_C(t)\right)}{dt^2}+R\frac{d\left(CV_C(t)\right)}{dt}+\frac{CV_C(t)}{C}=E(t)\rightarrow LC\frac{d^2V_C(t)}{dt^2}+RC\frac{dV_C(t)}{dt}+V_C(t)=E(t)$$

بنابراین دیده میشود که هر تابعی بعنوان مجهول مساله انتخاب شود, در نهایت بایستی یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ حل شود.

بدیهی است اینکه از کدام یک از معادلات دیفرانسیل بالا استفاده کنیم, بستگی به شرایط اولیه‌ای دارد که در مساله داده شده است. مثلا اینکه جریان اولیه یا بار اولیه خازن و یا ولتاژ اولیه دو سر خازن و ... کدام موارد در صورت سوال بعنوان شرایط اولیه داده شده است. هرچند از هر یک از معادلات بالا استفاده کنیم در نهایت تفاوتی در جواب نهایی نخواهیم داشت. به مثال زیر توجه شود.

مثال ۲-۱۱ جریان در مدار بالا را برای دو دسته داده زیر بدست آورید.

$a)\;\; L=2\,H\,;\; R=4\;\;\Omega\,;\; C=0.05\,F\;\;;\; E=100$

برای این دسته داده, بار اولیه خازن و جریان اولیه مدار برابر صفر می‌باشند.

حل الف: در ابتدا بهتر است مجهول معادله را مشخص کنیم. در شرایط اولیه دیده می‌شود که بار اولیه خازن $Q(0)$ و جریان اولیه مدار یعنی $I(0)$ (که همان $Q'(0)$ است) داده شده است. لذا از معادله زیر استفاده می‌کنیم.

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2}+R\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{1}{C}Q(t)=E(t)\rightarrow 2Q''+4Q'+20Q=100$$

$$2Q''+4Q'+20Q=0\rightarrow r_{1,2}=-1\pm 3i\rightarrow Q_c=c_1e^{-t}\cos(3t)+c_2e^{-t}\sin(3t)$$

$$g=100\rightarrow \alpha=0\rightarrow s=0\rightarrow Q_p=t^0A_0\xrightarrow{sub.}A_0=5$$

$$Q=Q_c+Q_p=c_1e^{-t}\cos(3t)+c_2e^{-t}\sin(3t)+5$$

$$Q(0)=0\rightarrow c_1=-5\;\;;\;\; Q'(0)=0\rightarrow c_2=-\frac{5}{3}\rightarrow Q(t)=5-5e^{-t}\left(\cos(3t)+\frac{1}{3}\sin(3t)\right)$$

$$I(t)=\frac{dQ(t)}{dt}=\frac{50}{3}e^{-t}\sin(3t)\quad ■$$

توضیح: فرض کنید بخواهیم مستقیما از معادله جریان برای حل مساله استفاده کنیم. در اینصورت:

$$L\frac{d^2I(t)}{dt^2}+R\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{C}I(t)=\frac{dE(t)}{dt}\to 2I''+4I'+20I=0$$

$$\to I(t)=c_1e^{-t}\cos(3t)+c_2e^{-t}\sin(3t)\quad ;\quad I(0)=0\to c_1=0$$

از آنجا که بار خازن $Q(0)$ داده شده است, با استفاده از اولین رابطه ارائه شده در متن درس, مقدار $I'(0)$ قابل محاسبه است:

$$E(t)-RI(t)-L\frac{dI(t)}{dt}-\frac{1}{C}Q(t)=0\xrightarrow{t=0}4\underbrace{I(0)}_{0}+2I'(0)+20\underbrace{Q(0)}_{0}=\underbrace{E(0)}_{100}\to I'(0)=50$$

$$I(t)=c_2e^{-t}\sin(3t)\xrightarrow{I'(0)=50}c_2=\frac{50}{3}\to I(t)=\frac{50}{3}e^{-t}\sin(3t)$$

که اگر $Q(t)$ نیز سوال شده باشد بایستی از $I(t)$ انتگرال گرفت. ■

$$b)\ L=1\ H\ ;\ R=6\ \Omega\ ;\ C=0.04\ F\ ;\ E=12\sin(5t)\quad ;\quad I_L(0)=5\ A\quad ;\quad V_C(0)=1\ V$$

ب: در اینجا نیز ابتدا بایستی مجهول معادله را مشخص کرد. در شرایط اولیه دیده می‌شود که ولتاژ دو سر خازن و جریان در سلف داده شده است. از آنجا که جریان ثابت است, لذا جریان در خازن نیز همین مقدار میباشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$I_C(0)=I_L(0)=5\ A\ ;\ I_C=\frac{dQ}{dt}=\frac{d(CV_C)}{dt}=C\frac{dV_C}{dt}\to V_C'(0)=I_C(0)/C=5/0.04=125$$

بنابراین شرایط اولیه بر حسب ولتاژ دو سر خازن بصورت $V_C(0)=1$ و $V_C'(0)=125$ بدست می‌آید.

$$LC\frac{d^2V_C}{dt^2}+RC\frac{dV_C}{dt}+V_C=E\to 0.04V_C''+0.24V_C'+V_C=12\sin(5t)$$

$$0.04V_C''+0.24V_C'+V_C=0\to r_{1,2}=-3\pm 4i\to V_{Cc}=c_1e^{-3t}\cos(4t)+c_2e^{-3t}\sin(4t)$$

$$g=12\sin(5t)\to\alpha+i\beta=0+5i\to s=0\to V_{Cp}=t^0[A_0\cos(5t)+B_0\sin(5t)]$$

$$\xrightarrow{sub.}A_0=-10\ ;\ B_0=0$$

$$V_c=V_{Cc}+V_{Cp}=c_1e^{-3t}\cos(4t)+c_2e^{-3t}\sin(4t)-10\cos(5t)$$

$$I.C.\to V_c(0)=1\to c_1=11\quad ;\quad V_C'(0)=125\to c_2=39.5$$

$$\to V_c=11e^{-3t}\cos(4t)+39.5e^{-3t}\sin(4t)-10\cos(5t)$$

$$I(t)=C\frac{dV_C}{dt}=5e^{-3t}\cos(4t)-6.5e^{-3t}\sin(4t)+2\sin(5t)\ ■$$

توضیح ۱: راه دوم برای حل مساله آن است که با توجه به اینکه جریان مشخص است از $V_C(0)$ به $I'(0)$ برسیم.

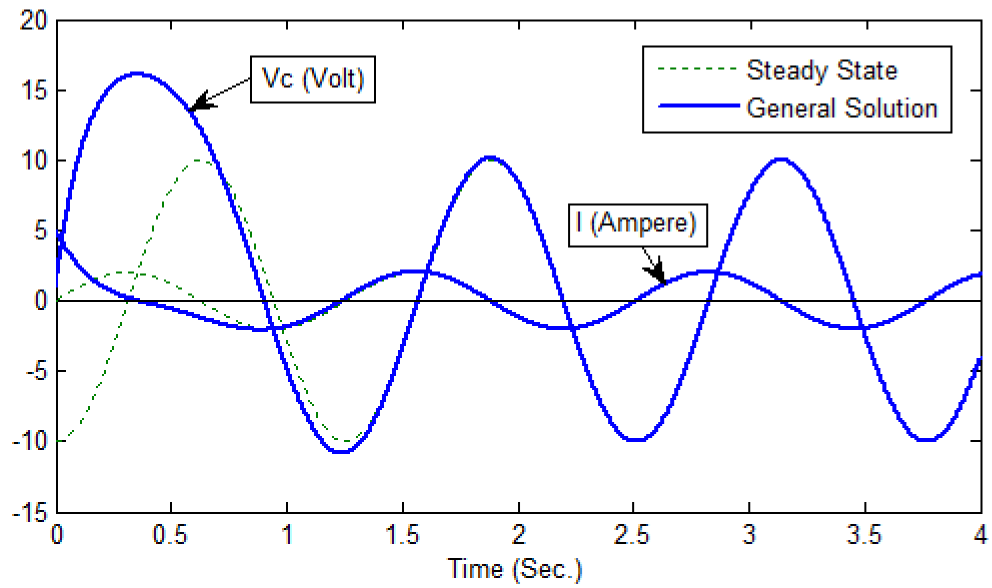
$$Q(t)=CV_C(t)\to Q(0)=CV_C(0)=0.04$$

$$E(t)-RI(t)-L\frac{dI(t)}{dt}-\frac{1}{C}Q(t)=0\xrightarrow{t=0}6\underbrace{I(0)}_{5}+I'(0)+25\underbrace{Q(0)}_{0.04}=\underbrace{E(0)}_{0}\to I'(0)=-31$$

لذا بایستی معادله زیر را که بر حسب جریان مرتب شده است حل کنیم:

$$L\frac{d^2I(t)}{dt^2}+R\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{C}I(t)=\frac{dE(t)}{dt}\quad ;\quad I(0)=5\ \ ;\quad I'(0)=-31$$

توضیح ۲: در بخش ۲-۵ عنوان شد که شرط لازم و کافی برای آنکه در یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو با ضرایب ثابت, جوابهای اساسی(عمومی) در $+\infty$ به صفر میل کنند, آن است که a و b و c هم علامت باشند. بدیهی است در معادلاتی که در بالا عنوان شد همه ضرایب مثبت بوده و لذا می‌توان گفت اضافه کردن جواب عمومی صرفا در زمانهای اولیه نتیجه را کمی تغییر داده و به مرور حذف میشود. به همین دلیل در اینگونه مسائل, جواب خصوصی را جواب پایدار (Steady State) و جواب عمومی را جواب گذرا (Transient) مینامیم. البته جواب پایدار را میتوان با میل دادن زمان به بینهایت نیز بدست آورد که به همان جواب خصوصی منجر خواهد شد. بعنوان نمونه در این مثال, در شکل دیده میشود که هم برای ولتاژ و هم برای جریان, عملا بعد از گذشت حدودا $1.5\ sec.$, جواب عمومی حذف شده و فقط جواب خصوصی باقی میماند. به همین جهت در محاسبات مهندسی اغلب جواب خصوصی مدنظر قرار میگیرد.



به همین ترتیب در مثال قبل نیز, بار پایدار خازن همان $Q_p(t)$ خواهد بود, که با میل دادن $t\to\infty$ در $Q(t)$ نیز بدست می‌آید.

$$Q(t)=\underbrace{-5e^{-t}\left(cos(3t)+\frac{1}{3}sin(3t)\right)}_{Q_c(t)}+\underbrace{5}_{Q_p(t)}\quad ;\quad \lim_{t\to\infty}Q(t)=5$$

این نتیجه نشان می‌دهد در حالتی که ورودی $E(t)$ ثابت باشد, مقدار بار خازن پس از مدتی به مقدار ثابتی خواهد رسید.

همچنین در فصل ۱ و در مثال ۱-۲۸ نیز همین تفکیک را می‌توان دید. مثلا برای قسمت c , جواب بصورت زیر تفکیک می‌شود:

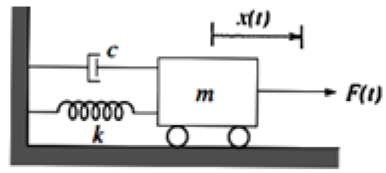
$$I'+5I=25sin5t\xrightarrow{I(0)=0}I(t)=\underbrace{\frac{5}{2}e^{-5t}}_{I_c=Transient}+\underbrace{\frac{5}{2}(sin5t-cos5t)}_{I_p=Steady\ State}$$

لازم بذکر است در یک معادله مرتبه دو با ضرایب ثابت, چنانچه a و c هم علامت و $b=0$ باشد, جواب بصورت نوسانی خواهد شد. ضریب b در واقع ضریب مشتق اول می‌باشد که در معادلات بالا همان R خواهد بود. به عبارتی چنانچه مدار بصورت LC باشد, بایستی در جواب نهایی, جواب عمومی نیز منظور شود, چرا که در بینهایت میرا نخواهد بود. اما از آنجا که چنین مداری یک مدار ایده‌آل بوده و معمولا خودِ سیم و یا مولد دارای یک مقاومت ناچیز میباشند, همین مقدار ناچیز باعث می‌شود ترمِ دارای مشتق اول در معادله ظاهر شده و در نهایت, جواب عمومی پس از گذشت زمان به صفر میل نماید. ■

۲-۹-۲- ارتعاش سیستم یک درجه آزادی $(SDOF)$

سیستم جرم-فنر-میراگر زیر را که تحت بار $F(t)$ قرار گرفته است در نظر میگیریم. این سیستم فقط یک درجه آزادی برای ارتعاش خواهد داشت(در راستای x) و به همین دلیل یک سیستم یک درجه آزادی$(SDOF)$ میباشد.

حال با نوشتن قانون دوم نیوتن معادله حاکم بر ارتعاش را بدست می‌آوریم. می‌دانیم نیرو در فنر متناسب با جابجایی آن بوده و لذا بصورت $kx(t)$ خواهد بود. نیرو در میراگر نیز متناسب با سرعت آن بوده و بنابراین برابر با $c\frac{dx(t)}{dt}$ خواهد بود. در نتیجه:



$$\sum F_x = ma \rightarrow F(t) - c\frac{dx(t)}{dt} - kx(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$\rightarrow m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + c\frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F(t)$$

بنابراین در اینجا نیز در نهایت بایستی یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ حل شود.

توضیح: میتوان این سیستم$SDOF$ را معادل مدارRLC قسمت قبل دانست. این معادل سازی میتواند به دو صورت زیر انجام شود:

الف: یک معادل سازی آن است که دو رابطه زیر را متناظر یکدیگر بدانیم:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE(t)}{dt} \qquad ; \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

در واقع اگر L را متناظر m بدانیم, R را متناظر c , $\frac{1}{C}$ را نظیر k و $\frac{dE(t)}{dt}$ را نیز نظیر $F(t)$, آنگاه جریان $I(t)$ در مدار RLC , معادل $x(t)$ در سیستم $SDOF$ خواهد بود. به عبارتی:

$$\left(L \leftrightarrow m \;\; ; \;\; R \leftrightarrow c \;\; ; \;\; \frac{1}{C} \leftrightarrow k \;\; ; \;\; \frac{dE(t)}{dt} \leftrightarrow F(t)\right) \qquad \rightarrow \qquad I(t) \leftrightarrow x(t)$$

ب: همچنین میتوان دو رابطه زیر را معادل یکدیگر در نظر گرفت:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t) \qquad ; \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

در این حالت نیز مشابه بالا, تناظرهای زیر را خواهیم داشت:

$$\left(L \leftrightarrow m \;\; ; \;\; R \leftrightarrow c \;\; ; \;\; \frac{1}{C} \leftrightarrow k \;\; ; \;\; E(t) \leftrightarrow F(t)\right) \qquad \rightarrow \qquad Q(t) \leftrightarrow x(t)$$

مثال ۲-۱۲ پاسخ ارتعاش یک سیستم جرم-فنر (یک درجه آزادی) که در لحظه $t = 0$ در مکان x_0 قرار داشته و با سرعت اولیه v_0 شروع به نوسان میکند را بیابید.

$$m\ddot{x} + kx = 0 \rightarrow \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \;\; ; \;\; \omega_n^2 = k/m \qquad ; \qquad x(0) = x_0 \;\; ; \;\; \dot{x}(0) = v_0$$

$$\rightarrow r^2 + \omega_n^2 = 0 \rightarrow r_{1,2} = \pm\omega_n i \rightarrow x(t) = c_1\cos(\omega_n t) + c_2\sin(\omega_n t)$$

$$\xrightarrow{x(0)=x_0} c_1 = x_0 \rightarrow \; x(t) = x_0\cos(\omega_n t) + c_2\sin(\omega_n t) \xrightarrow{\dot{x}(0)=v_0} c_2 = \frac{v_0}{\omega_n}$$

$$\rightarrow x(t) = x_0\cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$$

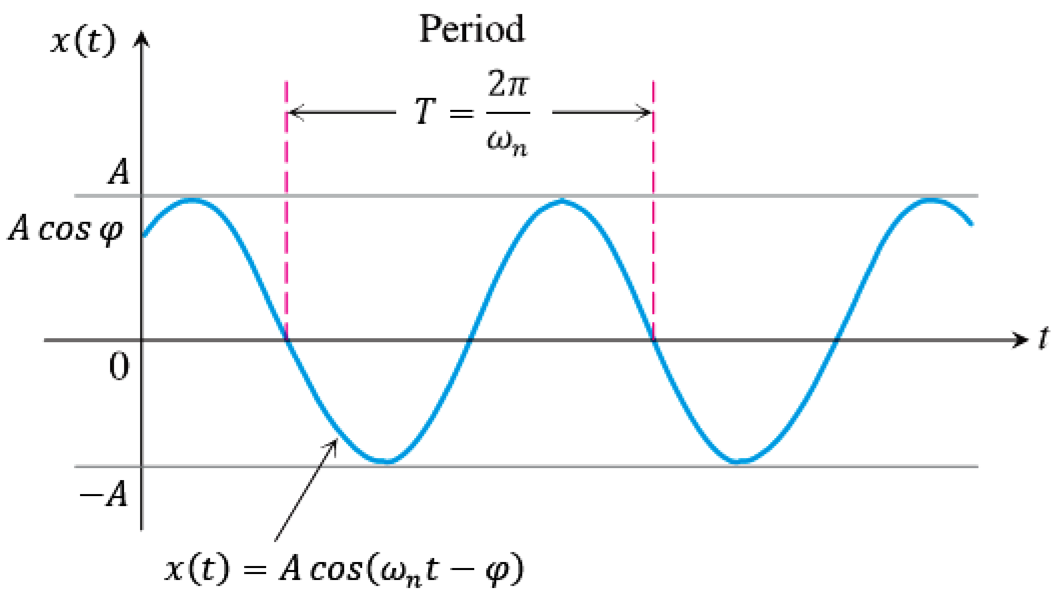
بدیهی است $x(t)$ بدست آمده بیانگر یک پاسخ نوسانی با دوره تناوب $T=\frac{2\pi}{\omega_n}$ میباشد. لازم بذکر است که پاسخ سیستم در حالت $F(t)=0$ تحت عنوان ارتعاش آزاد شناخته می‌شود که همان حل معادله همگن خواهد بود. ■

توضیح ۱: در بخش ۲-۵ دیده شد که در حالتی که ریشه‌ها مختلط باشند, می‌توان جواب را به فرم یک کسینوس(یا سینوس) بیان کرد. بنابراین در اینجا نیز می‌توان جواب $x(t)$ را بصورت زیر نوشت:

$$x(t)=a\cos(\omega_n t)+b\sin(\omega_n t)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\omega_n t-\varphi)\quad ;\quad \varphi=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$x(t)=x_0\cos(\omega_n t)+\frac{v_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t)=A\cos(\omega_n t-\varphi)\qquad ;\qquad \begin{cases} A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \\ \varphi=\tan^{-1}\left(\frac{v_0}{\omega_n x_0}\right)\end{cases}$$

در نتیجه نمودار مربوط به پاسخ $x(t)$ بصورت زیر خواهد بود:



توضیح ۲: فرض کنید در لحظه $t=0$ به جسمی با جابجایی اولیه صفر و سرعت برابر صفر, یک بار ضربه‌ای به میزان I واحد اعمال شود. در اینصورت پاسخ جسم عبارت است از:

$$I=m\Delta v=m\big(\dot{x}(0^+)-\dot{x}(0^-)\big)\xrightarrow{\dot{x}(0^-)=0}\dot{x}(0^+)=v_0=\frac{I}{m}\xrightarrow{x_0=0}x(t)=\frac{\sin(\omega_n t)}{m\omega_n}I$$

که در آن منظور از 0^- زمانِ قبل از اعمال ضربه و 0^+ زمانِ بعد از اعمال ضربه می‌باشد. ■

مثال ۲-۱۳ پاسخ ارتعاش سیستم جرم-فنر-میراگر زیر را که در لحظه $t=0$ در مکان $x_0=0$ قرار داشته و با سرعت اولیه $v_0=-1$ شروع به نوسان میکند, تحت بار $F(t)=5sint$ بدست آورید.

$$m=10\;;\;\;c=90\;;\;\;k=140\;;\;\;F(t)=5sint\;;\;\;x(0)=0\,;\;\dot{x}(0)=-1$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t)\rightarrow\ddot{x}+9\dot{x}+14x=0.5sint$$

مشابه قبل در اینجا نیز ابتدا پاسخ معادله همگن و سپس پاسخ نظیر ترم ناهمگن را (مثلا به کمک روش ضرایب نامعین) بدست می‌آوریم. در اینصورت پاسخها عبارتند از:

$$\ddot{x}+9\dot{x}+14x=0\rightarrow x_c(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-7t}\ \ ;\ \ x_p(t)=\frac{13}{500}sint-\frac{9}{500}cost$$

$$\rightarrow x(t)=x_c(t)+x_p(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-7t}+\frac{13}{500}sint-\frac{9}{500}cost$$

$$\xrightarrow{I.C.}x(t)=\frac{1}{500}(-90e^{-2t}+99e^{-7t}+13sint-9cost)\ \blacksquare$$

توضیح ۱: مطابق آنچه در انتهای بخش ۲-۹-۱ عنوان شد, در اینجا نیز در حالتی که میرایی در سیستم وجود دارد (که همان ضریب مشتق اول معادله می‌باشد), اضافه کردن جواب عمومی صرفا در زمانهای اولیه نتیجه را کمی تغییر داده و به مرور حذف می‌شود. به همین دلیل در اینگونه مسائل نیز جواب خصوصی را جواب پایدار (Steady State) و جواب عمومی را جواب گذرا (Transient) می‌نامیم. البته جواب پایدار را میتوان با میل دادن زمان به بینهایت نیز بصورت زیر بدست آورد که در واقع همان $x_p(t)$ خواهد شد:

$$if\ t\rightarrow\infty\ \ ;\ \ x(t)\rightarrow x_p(t)=\frac{13}{500}sint-\frac{9}{500}cost=-0.0316cos(t+0.965)$$

توضیح ۲: همانگونه که در مدار RLC نیز عنوان شد اگر در یک معادله مرتبه دو با ضرایب ثابت, a و c هم علامت و $b=0$ باشد, جواب بصورت نوسانی خواهد شد. ضریب b در واقع ضریب مشتق اول می‌باشد که در بحث ارتعاشات همان c خواهد بود. به عبارتی چنانچه سیستم بصورت جرم-فنر باشد, جواب عمومی نوسانی بوده و لذا در بینهایت میرا نخواهد بود (مثال ۲-۱۲) . لذا بایستی در جواب نهایی, جواب عمومی نیز منظور شود. اما از آنجا که چنین سیستمی یک سیستم ایده‌آل بوده و معمولا هر سیستم ارتعاشی دارای یک میرایی ذاتی می‌باشد, لذا ترمِ دارای مشتق اول در معادله ظاهر شده و در نهایت, جواب عمومی پس از گذشت زمان به صفر میل خواهد کرد. ■

مثال ۲-۱۴ با استفاده از روش لاگرانژ پاسخ ارتعاش یک سیستم جرم-فنر, تحت بار دلخواه $F(t)$ را بدست آورید.

حل معادله ارتعاش این سیستم, بصورت $m\ddot{x}+kx=F(t)$ است. در اینصورت:

$$m\ddot{x}+kx=F(t)\rightarrow\ddot{x}+\omega_n^2x=\frac{F(t)}{m}=g(t)\ \ ;\ \ \omega_n^2=\frac{k}{m}$$

$$\ddot{x}+\omega_n^2x=0\rightarrow x_1=cos(\omega_nt)\ \ ;\ \ x_2=sin(\omega_nt)$$

$$\rightarrow x_c=c_1cos(\omega_nt)+c_2sin(\omega_nt)\ \ ;\ \ W=\begin{vmatrix}cos(\omega_nt) & sin(\omega_nt)\\ -\omega_nsin(\omega_nt) & \omega_ncos(\omega_nt)\end{vmatrix}=\omega_n$$

$$u_1'=\frac{-gx_2}{W}=-\frac{F(t)}{m\omega_n}sin(\omega_nt)\rightarrow u_1=-\frac{1}{m\omega_n}\int F(t)sin(\omega_nt)\,dt$$

$$u_2'=\frac{gx_1}{W}=\frac{F(t)}{m\omega_n}cos(\omega_nt)\rightarrow u_2=\frac{1}{m\omega_n}\int F(t)cos(\omega_nt)\,dt$$

$$x_p=u_1x_1+u_2x_2=\frac{sin(\omega_nt)}{m\omega_n}\int F(t)cos(\omega_nt)\,dt-\frac{cos(\omega_nt)}{m\omega_n}\int F(t)sin(\omega_nt)\,dt\ \blacksquare$$

* توضیح ۱: جواب خصوصی را می‌توان بصورت انتگرال معین نیز بیان کرد. به عبارتی از $u'(t) = g(t)$ هم می‌توان نوشت $u = \int g(t)\,dt$ و هم اینکه با انتگرال گیری معین از دو طرف خواهیم داشت:

$$u'(t) = g(t) \to \underbrace{\int_{t_0}^{t} u'(\tau)\,d\tau}_{u(t)-u(t_0)} = \int_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau \to u(t) = \int_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau + u(t_0)$$

$$\to u_1 = -\frac{1}{m\omega_n}\int_{t_0}^{t} F(\tau)sin(\omega_n\tau)\,d\tau + u_1(t_0)\ \ ;\ \ u_2 = \frac{1}{m\omega_n}\int_{t_0}^{t} F(\tau)cos(\omega_n\tau)\,d\tau + u_2(t_0)$$

$$x_p(t) = \frac{sin(\omega_n t)}{m\omega_n}\int_{t_0}^{t} F(\tau)cos(\omega_n\tau)\,d\tau - \frac{cos(\omega_n t)}{m\omega_n}\int_{t_0}^{t} F(\tau)sin(\omega_n\tau)\,d\tau$$

توجه شود که دو ترم $u_1(t_0)cos(\omega_n t) + u_2(t_0)sin(\omega_n t)$ نیز بایستی در جواب بالا اضافه شود. از آنجا که این جواب در نهایت بایستی با جواب عمومی یعنی $c_1cos(\omega_n t) + c_2sin(\omega_n t)$ جمع شود و $u_1(t_0)$ و $u_2(t_0)$ دو عدد ثابت می‌باشند, لذا این دو ترم حذف شده است.

در نهایت از آنجا که متغیر انتگرال τ می‌باشد, با وارد کردن ترمهای $sin(\omega_n t)$ و $cos(\omega_n t)$ داخل انتگرال خواهیم داشت:

$$x_p(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_{t_0}^{t} F(\tau)\big(sin(\omega_n t)cos(\omega_n\tau) - cos(\omega_n t)sin(\omega_n\tau)\big)\,d\tau$$

$$\to x_p(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_{t_0}^{t} sin\big(\omega_n(t-\tau)\big)F(\tau)\,d\tau$$

این رابطه تحت عنوان انتگرال دوهامل شناخته می‌شود. در این رابطه t_0 زمانی انتخاب میشودکه x آن در صورت مساله داده شده باشد. لازم بذکر است که این رابطه برای حالتی که سیستم دارای میراگر می‌باشد نیز قابل تعمیم است که در تمرین ۴ از شما خواسته شده است آنرا بدست آورید.

* توضیح ۲: ممکن است بخواهیم کنترل کنیم که چرا جواب انتگرالی بدست آمده (یعنی انتگرال دوهامل) در معادله صدق می‌کند. در ابتدا بایستی قاعده لایب‌نیتز برای مشتق‌گیری از انتگرال معین, یادآوری شود. بر طبق قاعده لایب‌نیتز, اگر توابع دو متغیره f و $\frac{\partial f}{\partial x}$ پیوسته و نیز $u(x)$ و$v(x)$ مشتق‌پذیر باشند, مشتق $I(x)$ عبارت است از:

$$I(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,z)\,dz \to I'(x) = v'(x)f\big(x,v(x)\big) - u'(x)f\big(x,u(x)\big) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f(x,z)}{\partial x}dz$$

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_{t_0}^{t} sin\big(\omega_n(t-\tau)\big)\,F(\tau)d\tau \quad ; \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{m\omega_n}\left(1 \times sin\big(\omega_n(t-t)\big)F(t) - 0 + \omega_n\int_{t_0}^{t} cos\big(\omega_n(t-\tau)\big)\,F(\tau)d\tau\right) = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} cos\big(\omega_n(t-\tau)\big)\,F(\tau)d\tau$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m}\left(1 \times cos\big(\omega_n(t-t)\big)F(t) - \omega_n\int_{t_0}^{t} sin\big(\omega_n(t-\tau)\big)\,F(\tau)d\tau\right) = \frac{1}{m}\left(F(t) - \omega_n\int_{t_0}^{t} sin\big(\omega_n(t-\tau)\big)\,F(\tau)d\tau\right)$$

$$m\ddot{x} + kx = F(t) - \omega_n\int_{t_0}^{t} sin\big(\omega_n(t-\tau)\big)\,F(\tau)d\tau + \underbrace{k}_{m\omega_n^2}\frac{1}{m\omega_n}\int_{t_0}^{t} sin\big(\omega_n(t-\tau)\big)\,F(\tau)d\tau = F(t) \quad \blacksquare$$

* پاسخ عمومی (ارتعاش آزاد) سیستم یک درجه آزادی در حالت کلی

حال پس از آنکه با ارائه تعدادی مثال, با پاسخ سیستم یک درجه آزادی آشنا شدیم, بهتر است پاسخ عمومی این معادله را در حالت کلی(با وجود میراگر) بدست آوریم که تحت عنوان ارتعاش آزاد شناخته می‌شود. در ابتدا معادله را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m}$$

با تعریف $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ و $\frac{c}{m} = 2\xi\omega_n$ معادله بصورت زیر بیان می‌شود: (این نوع جایگذاری باعث ساده‌تر شدن فرم جواب می‌شود)

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

برای یافتن پاسخ عمومی این معادله ابتدا ریشه‌های معادله مشخصه را بدست می‌آوریم:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \rightarrow r^2 + 2\xi\omega_n r + \omega_n^2 = 0 \rightarrow r_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

بدیهی است با توجه به مقدار ξ که در علامت زیر رادیکال موثر است, سه حالت خواهیم داشت که عبارتند از:

$$1)\ \ \xi = 1\ (critical\ damping)\quad ;\quad 2)\ \xi > 1\ (overdamping)\quad ;\quad 3)\ \xi < 1\ (underdamping)$$

حال این سه حالت را بررسی می‌کنیم:

$$1)\ \ \xi = 1 \rightarrow r_{1,2} = -\omega_n \rightarrow x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t} = (c_1 + c_2 t)e^{-\omega_n t}$$

$$2)\ \xi > 1 \rightarrow r_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = \omega_n\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

$$\rightarrow x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = e^{-\xi\omega_n t}\left(c_1 e^{+\omega_n\sqrt{\xi^2-1}t} + c_2 e^{-\omega_n\sqrt{\xi^2-1}t}\right)$$

$$3)\ \xi < 1 \rightarrow r_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = \lambda \pm \mu i$$

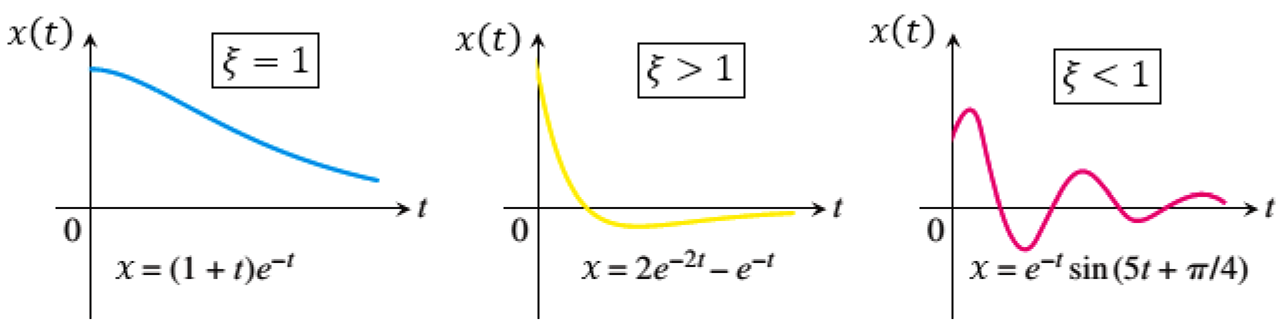
با تعریف $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$ خواهیم داشت $r_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_d$. بنابراین:

$$\rightarrow x(t) = c_1 e^{\lambda t}\, cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t}\, sin(\mu t) = e^{-\xi\omega_n t}\big(c_1 cos(\omega_d t) + c_2 sin(\omega_d t)\big)$$

$$\rightarrow x(t) = ce^{-\xi\omega_n t} cos(\omega_d t - \varphi)\quad ;\quad c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\quad ;\quad \varphi = tan^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$$

بنابراین در این حالت یعنی $\xi < 1$ با پاسخ نوسانی روبرو خواهیم بود. همچنین بدیهی است در هر سه حالت جواب ارتعاش در بینهایت (به علت وجود ترم c) و ظاهر شدن ترم $e^{-\xi\omega_n t}$ در جوابها به سمت صفر خواهد رفت. $\left(\xi = \frac{c}{2m\omega_n} \geq 0\right)$

در شکل زیر یک مثال از پاسخ عمومی سیستم (حل معادله همگن) برای هر سه حالت ارائه شده است. ■



(a) Critical damping (b) Overdamping (c) Underdamping

در انتها لازم بذکر است که با تناظری که در ابتدای این بخش بین مدار RLC و سیستم $SDOF$ برقرار شد, همین نتایج را می‌توان برای مدار RLC نیز تعمیم داد.

تمرینات بخش ۲-۹

۱- قسمت ب از مثال ۲-۱۱ را یکبار با نوشتن معادله دیفرانسیل بر حسب I و یکبار بر حسب Q مجددا حل کنید.

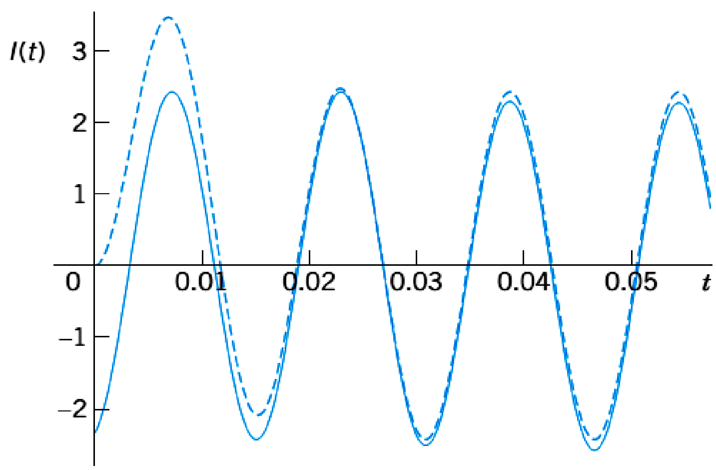
۲- در یک مدار RLC مقادیر پارامترها بصورت زیر می‌باشد:

$$L = 0.1\ H\ ;\ R = 11\ \ \Omega\ ;\ C = 0.01\ F\quad ;\quad E = 110sin(60 \times 2\pi t) = 110sin(377t)\ \ V$$

اگر بار اولیه خازن و جریان اولیه هر دو برابر صفر باشند, جریان مدار و جریان پایدار آنرا در هر لحظه t بدست آورده و رسم کنید.

$$\underline{Ans}\ :\ I(t) = -0.323e^{-10t} + 3.033e^{-100t} - 2.71cos(377t) + 0.796sin(377t)$$

$$I_p(t) = -2.71cos(377t) + 0.796sin(377t) = 2.824sin(377t - 1.29)$$



۳- معادله ارتعاش یک سیستم یک درجه آزادی بصورت زیر است. به این سیستم در لحظه $t = 0$ ضربه‌ای به میزان ۱ واحد و در $t = \pi$ ضربه‌ای به میزان ۳ واحد وارد میشود. پاسخ سیستم را بیابید.

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0\quad ;\quad x(0) = \dot{x}(0) = 0\quad ;\quad \underline{Ans}\ :\ x(t) = e^{-t}sint - 3H_\pi(t)e^{-(t-\pi)}sint$$

<u>راهنمایی</u>: با توجه به توضیح ۲ مثال ۲-۱۲ اثر اعمال ضربه, تغییر سرعت اولیه از صفر به $\frac{I}{m}$ میباشد. لذا:

$$\dot{x}(0^+) - \dot{x}(0) = \frac{I_0}{m} = 1\quad ;\quad \dot{x}(\pi^+) - \dot{x}(\pi^-) = \frac{I_\pi}{m} = 3$$

۴- جواب خصوصی ارتعاش یک سیستم جرم-فنر-میراگر, تحت بار دلخواه $F(t)$ را با استفاده از روش لاگرانژ و جواب عمومی ارائه شده در انتهای بخش قبل, برای حالتی که $\xi < 1$ می‌باشد (یعنی وجود پاسخ نوسانی) بدست آورید.

$$\underline{Ans}\ :\ x_p(t) = \frac{1}{m\omega_d}\int_{t_0}^{t} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}sin\big(\omega_n(t-\tau)\big)F(\tau)\,d\tau$$

۵- تمرین ۷ از مجموعه تمرینات بخش ۱-۱۰ را با استفاده از معادله $L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0$ مجددا حل کنید.

۲-۱۰- معادله کوشی-اویلر

این معادله نیز یک معادله خطی بوده و بصورت زیر است:

$$L[y] = x^2y'' + p_0xy' + q_0y = g(x) \quad ; \quad x \neq 0 \quad ; \quad p_0, q_0 \in \mathbb{R} \qquad (5)$$

در اینجا نیز مشابه معادلات با ضرایب ثابت ابتدا معادله همگن (جواب عمومی) را بدست آورده سپس جواب معادله غیرهمگن(جواب خصوصی) را با جواب عمومی جمع میکنیم تا جواب کامل بدست آید.

لازم به ذکر است یکی از کاربردهای این معادله در درس ریاضی مهندسی در حل معادله لاپلاس در محیط دایره‌ای می‌باشد. همچنین در حل معادلات به روش سریها در فصل چهارم, ایده اصلی روش فروبنیوس همین معادله کوشی-اویلر می‌باشد. در واقع علت اینکه در اینجا ضرایب معادله با p_0 و q_0 نمایش داده شده اند به این دلیل است که در روش فروبنیوس خواهیم دید ضرایبِ نظیر y' و y تعمیم داده شده و با $p(x)$ و $q(x)$ جایگزین خواهند شد.

برای حل معادله کوشی-اویلر دو روش ارائه می‌شود. در روش اول(روش مستقیم) ابتدا معادله همگن را حل کرده و سپس با استفاده از جواب عمومی این معادله میتوان با استفاده از روش تغییرپارامتر (لاگرانژ) جواب خصوصی را نیز بدست آورد. در روش دوم با یک تغییر متغیر این معادله را به معادله با ضرایب ثابت تبدیل میکنیم که حل آن قبلا دیده شد.

بعنوان یک پیشنهاد می‌توان گفت اگر چه در اکثر مراجع, روش اول بعنوان روش اصلی حل معادله کوشی-اویلر مطرح شده است, اما به نظر می‌رسد روش دوم (بخصوص برای معادله ناهمگن) روش مناسبتری باشد.

۲-۱۰-۱- روش مستقیم

ابتدا معادله (5) را برای حالت $g(x) = 0$ بررسی می‌کنیم. در شروع کار فرض می‌کنیم $x > 0$ باشد. با توجه به فرم معادله حدس می‌زنیم لااقل یک جواب به فرم $y = x^r$ داشته باشیم. با جایگذاری:

$$L[x^r] = 0 \rightarrow x^2(r(r-1)x^{r-2}) + p_0x(rx^{r-1}) + q_0(x^r) = 0 \rightarrow [r(r-1) + p_0r + q_0]x^r = 0$$

از آنجا که همواره $x^r \neq 0$ لذا:

$$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0 \qquad (6)$$

که معادله مشخصه کوشی-اویلر نامیده می‌شود. دقت شود اگر در ابتدا عدد ثابتی در x^2y'' ضرب شده بود در معادله مشخصه (6) بایستی این عدد در $r(r-1)$ نیز ضرب گردد. به عبارتی برای تعیین معادله مشخصه, جایگزین های زیر را انجام می‌دهیم.

$$\left(y \rightarrow 1 \quad ; \quad xy' \rightarrow r \quad ; \quad x^2y'' \rightarrow r(r-1)\right)$$

با توجه به علامت Δ سه حالت وجود دارد.

۱-ریشه ها حقیقی و متمایز باشند. (r_1 و r_2)

بدیهی است دو جواب $y_1 = x^{r_1}$ و $y_2 = x^{r_2}$ خواهیم داشت و چون مضرب یکدیگر نیستند پس مستقلند.

$$y = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}$$

۲-ریشه مضاعف باشد. ($r = r_1$)

در اینصورت صرفا یک جواب $y_1 = x^{r_1}$ بدست می‌آید که در آن $r_1 = \frac{1-p_0}{2}$. برای تعیین جواب دوم به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$$L[x^r] = [r(r-1) + p_0 r + q_0]x^r = x^r(r-r_1)^2$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r} L[x^r] = x^r(r-r_1)^2 lnx + 2x^r(r-r_1) \xrightarrow{r=r_1} L\left[\frac{\partial x^r}{\partial r}\right]_{r=r_1} = 0 \rightarrow L[x^{r_1} lnx] = 0$$

در نتیجه جواب دوم معادله $y_2 = x^{r_1} lnx$ خواهد بود. در اینجا نیز می‌توان دید $W(y_1, y_2) \neq 0$ و یا ساده‌تر آنکه چون y_1 و y_2 مضرب ثابتی از یکدیگر نیستند, پس مستقلند.

راه دوم: مشابه آنچه در معادله با ضرایب ثابت دیده شد, میتوان از رابطه آبل, با داشتن یک جواب y_1 , جواب دوم را بدست آورد:

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = ce^{-\int p dx} \rightarrow \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{ce^{-\int p dx}}{y_1^2} \rightarrow \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{c}{y_1^2} e^{-\int p dx}$$

$$\rightarrow y_2 = cy_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} dx = cx^{r_1} \int \frac{1}{\left(x^{\frac{1-p_0}{2}}\right)^2} e^{-\int \frac{p_0}{x} dx} dx = cx^{r_1} \int \frac{dx}{x} = cx^{r_1} lnx$$

۳-ریشه ها مختلط باشند.

$$r_{1,2} = \lambda \pm \mu i \rightarrow y = c_1 x^{\lambda + \mu i} + c_2 x^{\lambda - \mu i}$$

مشابه آنچه در معادله با ضرایب ثابت دیده شد, بهتر است این فرم مختلط از جواب را انتخاب نکنیم. با توجه به اینکه هر یک از جوابها به فرم $y = u + iv$ میباشد, لذا اجزا حقیقی و موهومی آن نیز جواب است. از آنجا که $a^b = e^{blna}$ لذا خواهیم داشت:

$$L\left[\underbrace{x^{\lambda+\mu i}}_{x^\lambda e^{i\mu lnx}}\right] = L\left[x^\lambda cos(\mu lnx) + ix^\lambda sin(\mu lnx)\right] = 0 \rightarrow \begin{cases} L\left[x^\lambda cos(\mu lnx)\right] = 0 \\ L\left[x^\lambda sin(\mu lnx)\right] = 0 \end{cases}$$

یعنی $x^\lambda cos(\mu lnx)$ و $x^\lambda sin(\mu lnx)$ جوابهای اساسی معادله می‌باشند. در نتیجه:

$$y = x^\lambda[c_1 cos(\mu lnx) + c_2 sin(\mu lnx)]$$

مثال ۲-۱۵ معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$1)\ \ x^2y'' + 7xy' + 9y = 0 \ \ ; \ \ x > 0 \xrightarrow{(6)} r(r-1) + 7r + 9 = 0 \rightarrow r_{1,2} = -3, -3$$

$$\rightarrow y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_1} lnx = x^{-3}(c_1 + c_2 lnx) \ \ \blacksquare$$

$$2)\ \ 4x^2y'' + 5y = 0 \ \ ; \ \ x > 0 \ \ ; \ \ y(1) = 6 \ ; \ \ y'(1) = 4$$

$$\xrightarrow{(6)} 4r(r-1) + 5 = 0 \rightarrow r_{1,2} = 0.5 \pm i \rightarrow y(x) = x^{\frac{1}{2}}(c_1 cos(lnx) + c_2 sin(lnx))$$

دقت شود از آنجا که x^2y'' دارای یک ضریب 4 است, لذا در معادله مشخصه (6) عبارت $r(r-1)$ در 4 ضرب شده است.

$$y(1) = 6 \rightarrow \sqrt{1}(c_1 cos(ln1) + c_2 sin(ln1)) = 6 \rightarrow c_1 = 6$$

$$y'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(6 cos(lnx) + c_2 sin(lnx)) + x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{-6}{x} sin(lnx) + \frac{c_2}{x} cos(lnx)\right)$$

$$y'(1) = 4 \rightarrow c_2 = 1 \rightarrow y(x) = \sqrt{x}(6 cos(lnx) + sin(lnx)) \ \ \blacksquare$$

توضیح ۱: در معادله‌ای به فرم زیر کافی است $t = ax + b$ انتخاب شود تا به معادله کوشی-اویلر برسیم.

$$(ax+b)^2 y'' + p_0(ax+b)y' + q_0 y = 0$$

در اینجا نیز توجه شود که y' و y'' (که مشتقات بر حسب x هستند) بایستی بر حسب y'_t و y''_t بیان گردند. به عبارتی:

$$t = ax+b \rightarrow dt = adx \rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = ay'_t$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(ay'_t)}{dx} = a\frac{d(y'_t)}{dx} = a\frac{d(y'_t)}{dt}\frac{dt}{dx} = a^2 y''_t \rightarrow a^2 t^2 y''_t + ap_0 t y'_t + q_0 y = 0$$

توضیح ۲: اگر در معادله کوشی-اویلر $x < 0$ باشد, ابتدا تغییر متغیر $t = -x$ را بکار میبریم. در اینصورت:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{dy}{dt} \;\; ; \;\; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\xrightarrow{(5)} t^2y'' + p_0 t y' + q_0 y = g(-t) \quad ; \quad t > 0$$

که درست مشابه (5) است. مثلا برای حالتی که ریشه ها حقیقی و متمایز بوده و $g(x) = 0$ باشد:

$$\begin{cases} x > 0 \rightarrow y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} \\ x < 0 \rightarrow y(x) = c_1 t^{r_1} + c_2 t^{r_2} \end{cases} \rightarrow \quad \forall x \quad ; \quad y(x) = c_1|x|^{r_1} + c_2|x|^{r_2}$$

چنانچه برای دو حالت ریشه مضاعف و مختلط نیز به همین ترتیب عمل کنیم خواهیم دید که بطور خلاصه در کلیه حالات کافی است از $|x|$ استفاده شود تا جواب به ازای هر مقدار $x \neq 0$ معتبر باشد.

توضیح ۳: برای حل معادله غیرهمگن, از آنجا که ضرایب ثابت نیست, بهتر است از روش تغییر پارامتر(لاگرانژ) استفاده کرد. چرا که برای حالتی که ضرایب ثابت نیستند, حدس جواب در روش ضرایب نامعین ممکن است چندان ساده نباشد. ■

مثال ۲-۱۶ معادله کوشی اویلر غیرهمگن زیر را حل کنید.

$$x^2y'' - xy' + y = \frac{4}{x} \quad ; \quad x > 0$$

$$\xrightarrow{(6)} r(r-1) - r + 1 = 0 \rightarrow r_{1,2} = 1 \rightarrow y_1 = x \; ; \; y_2 = xlnx \rightarrow y_c = c_1 x + c_2 xlnx$$

برای حل معادله غیرهمگن, دو روش عنوان شد. از آنجا که ضرایب معادله ثابت نیست, تنها میتوان از روش تغییر پارامتر عمل کرد.

$$W = \begin{vmatrix} x & xlnx \\ 1 & 1+lnx \end{vmatrix} = x \quad ; \quad u'_1 = \frac{-gy_2}{W} = \frac{-\frac{4}{x^3}xlnx}{x} = -\frac{4}{x^3}lnx \rightarrow u_1 = \frac{2lnx}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$\left(\int \frac{lnx}{x^3}dx = \int \underbrace{lnx}_{u}\underbrace{\frac{1}{x^3}dx}_{dv} = lnx\left(\frac{-1}{2x^2}\right) - \int \frac{-1}{2x^2}\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{2}\frac{lnx}{x^2} - \frac{1}{4x^2}\right)$$

$$u'_2 = \frac{gy_1}{W} = \frac{\frac{4}{x^3}x}{x} = \frac{4}{x^3} \rightarrow u_2 = -\frac{2}{x^2}$$

$$\rightarrow y_p = u_1y_1 + u_2y_2 \rightarrow y_p = \left(\frac{2lnx}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)x + \left(-\frac{2}{x^2}\right)(xlnx) = \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow y = y_c + y_p \rightarrow y = c_1 x + c_2 x lnx + \frac{1}{x}$$

دقت شود در استفاده از فرمولهای لاگرانژ بایستی ضریب y'' برابر 1 گردد, لذا $g(x) = \frac{4}{x^3}$ منظور شده است.

توضیح: می‌توان u_i ها را با استفاده از رابطه $u_i' = \frac{W_i}{W}$ نیز بدست آورد:

$$W = \begin{vmatrix} x & xlnx \\ 1 & 1+lnx \end{vmatrix} = x \;\; ; \;\; W_1 = \begin{vmatrix} 0 & xlnx \\ \frac{4}{x^3} & 1+lnx \end{vmatrix} = -\frac{4}{x^2} lnx$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{4}{x^3} \end{vmatrix} = \frac{4}{x^2} \;\; ; \;\; u_i' = \frac{W_i}{W} \rightarrow u_1' = \frac{-\frac{4}{x^2} lnx}{x} = -\frac{4}{x^3} lnx \;\; ; \;\; u_2' = \frac{\frac{4}{x^2}}{x} = \frac{4}{x^3} \;\; \blacksquare$$

خلاصه سه حالت ذکر شده در جدول دیده میشود.

$\boxed{x^2 y'' + p_0 x y' + q_0 y = 0} \rightarrow \boxed{r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0} \rightarrow \boxed{y = c_1 y_1 + c_2 y_2}$	
$\Delta > 0 \rightarrow (r_1, r_2)$	$y_1 = \lvert x\rvert^{r_1} \;\; ; \;\; y_2 = \lvert x\rvert^{r_2}$
$\Delta = 0 \rightarrow (r_1, r_1)$	$y_1 = \lvert x\rvert^{r_1} \;\; ; \;\; y_2 = \lvert x\rvert^{r_1} ln\lvert x\rvert$
$\Delta < 0 \rightarrow r_{1,2} = \lambda \pm \mu i$	$y_1 = \lvert x\rvert^{\lambda} cos(\mu ln\lvert x\rvert) \;\; ; \;\; y_2 = \lvert x\rvert^{\lambda} sin(\mu ln\lvert x\rvert)$

۲-۱۰-۲- روش تبدیل به معادله با ضرایب ثابت

در این روش ابتدا نشان می‌دهیم با استفاده از تغییر متغیر $x = e^t$ معادله کوشی اویلر به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل میشود. در اینصورت نیازی به حفظ کردن روابط بالا نبوده و مستقیما از حل معادله با ضرایب ثابت, معادله کوشی-اویلر(همگن یا غیرهمگن) نیز حل میشود.

در اینجا نیز بایستی y' که در واقع y_x' می‌باشد بر حسب y_t' بیان شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$x = e^t \rightarrow dx = e^t dt \rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{e^t} y_t' = \frac{1}{x} y_t' \rightarrow \boxed{xy' = y_t'}$$

و یا می‌توان گفت از آنجا که $y = y(e^t)$ لذا با مشتق‌گیری از دو طرف نسبت به t به $y_t' = (e^t)' y' = xy'$ خواهیم رسید.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x} y_t'\right)}{dx} = \frac{-1}{x^2} y_t' + \frac{1}{x} \underbrace{\frac{d(y_t')}{dx}}_{\frac{d(y_t')}{dt}\frac{dt}{dx}} = -\frac{1}{x^2} y_t' + \frac{1}{x^2} y_t'' \rightarrow \boxed{x^2 y'' = y_t'' - y_t'}$$

$$\xrightarrow{Sub.} \underbrace{x^2 y''}_{y_t'' - y_t'} + p_0 \underbrace{xy'}_{y_t'} + q_0 y = g(\underbrace{x}_{e^t}) \rightarrow y_t'' + (p_0 - 1) y_t' + q_0 y = g(e^t)$$

که یک معادله با ضرایب ثابت بر حسب t می‌باشد. به عبارتی کافی است در معادله کوشی-اویلر بجای $x^2 y''$ و xy' به ترتیب $y_t'' - y_t'$ و y_t' را قرار دهیم تا این معادله به معادله با ضرایب ثابت تبدیل شود.

توضیح ۱: برای تبدیل y'' بر حسب مشتقات روی t میتوان به طریق زیر نیز عمل کرد:

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{e^t}y'_t\right)}{dt}\frac{dt}{dx}=\left(\frac{-e^t}{e^{2t}}y'_t+\frac{1}{e^t}y''_t\right)\frac{1}{e^t}=-\frac{1}{e^{2t}}y'_t+\frac{1}{e^{2t}}y''_t=-\frac{1}{x^2}y'_t+\frac{1}{x^2}y''_t$$

و یا در حالت کلی:

$$x=h(t)\rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{h'(t)}y'_t \quad ; \quad y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{h'(x)}y''_t$$

توضیح ۲: می‌توان با استفاده از عملگرها به شکل دیگری نیز تبدیل معادله کوشی-اویلر به معادله با ضرایب ثابت را انجام داد. با تعریف عملگر $D^n=\frac{d^n}{dt^n}$ می‌توان xy' و x^2y'' را بصورت زیر نیز بیان کرد:

$$xy'=y'_t=Dy \quad ; \quad x^2y''=y''_t-y'_t=(D^2-D)y=D(D-1)y$$

دقت شود که تساوی $(D^2-D)y=D(D-1)y$ یک تساوی درست است. چرا که:

$$D(D-1)y=D(y'_t-y)=y''_t-y'_t=(D^2-D)y$$

بنابراین با این عملگر, معادله کوشی-اویلر بصورت زیر بیان خواهد شد:

$$x^2y''+p_0xy'+q_0y=D(D-1)y+p_0Dy+q_0y=\underbrace{[D(D-1)+p_0D+q_0]}_{L=f(D)}y$$

که در اینجا نیز $f(D)$ عملگری با ضرایب ثابت بوده و لذا معادله مشخصه همان $f(r)=0$ خواهد بود که با آنچه در روش اول بدست آوریم مطابقت دارد. لازم به ذکر است که در تبدیل معادله کوشی-اویلر مراتب بالاتر به معادله با ضرایب ثابت, استفاده از این عملگر, کار تبدیل را ساده‌تر خواهد کرد. (بخش ۳-۲)

توضیح ۳: توجه شود اصولا به لحاظ ریاضی بهتر است در نامگذاری توابع پس از اعمال تغییر متغیر دقت بیشتری شود. به این معنی که اگر تابع جواب $y(x)$ می‌باشد, پس از تغییر متغیر بهتر است نام تابع از y به تابع دیگری مانند z تغییر داده شود چرا که عملکرد تابع تغییر یافته است. به عبارتی بجای $y(x)$ با $z(t)$ سروکار داریم و عملا بهتر بود بجای $xy'_x=y'_t$ می‌نوشتیم $xy'_x=z'_t$. به همین ترتیب برای ترم غیرهمگنی $g(x)$ نیز بهتر است نام g مثلا به h تغییر داده شود. اما معمولا تا جایی که مشکلی پیش نیاید می‌توان از همان اسامی استفاده کرد.

مثال ۲-۱۷ مثالهای ۲-۱۵ (قسمت دوم) و ۲-۱۶ را مجددا با روش دوم حل کنید.

$$1)\ \ 4x^2y''+5y=0\rightarrow 4D(D-1)y+5y=0\rightarrow \underbrace{(4D^2-4D+5)}_{L=f(D)}y=0$$

به عبارتی اکنون بایستی معادله با ضرایب ثابت $4y''_t-4y'_t+5y=0$ حل شود.

$$f(r)=0\rightarrow 4r^2-4r+5=0\rightarrow r_{1,2}=0.5\pm i\rightarrow y(t)=c_1e^{\frac{t}{2}}\cos t+c_2e^{\frac{t}{2}}\sin t$$

$$x=e^t\rightarrow\begin{cases}t=\ln x\\ e^{\frac{t}{2}}=x^{\frac{1}{2}}\end{cases}\rightarrow y(x)=c_1x^{\frac{1}{2}}\cos(\ln x)+c_2x^{\frac{1}{2}}\sin(\ln x)\xrightarrow{I.C}c_1=6\ ;\ c_2=1\ \blacksquare$$

توضیح ۱: می‌توانستیم به جای استفاده از اپراتور مستقیما x^2y'' و xy' را به ترتیب با $y''_t-y'_t$ و y'_t جایگزین کنیم:

$$4x^2y''+5y=0\xrightarrow{x^2y''=y''_t-y'_t}4y''_t-4y'_t+5y=0\xrightarrow{(4)}4r^2-4r+5=0$$

توضیح ۲: آنچه در بالا تحت عنوان دقت در نامگذاری توابع عنوان شد را می‌توان در این مثال دنبال کرد. به این معنی که پس از تغییر متغیر, جواب بایستی با $z(t)$ یعنی $z(t) = c_1 e^{\frac{t}{2}} \cos t + c_2 e^{\frac{t}{2}} \sin t$ بیان می‌شد که ما همان $y(t)$ را بکار گرفتیم. اشکال ریاضی وارد به آن هم این است که دو تابع $c_1 e^{\frac{t}{2}} \cos t + c_2 e^{\frac{t}{2}} \sin t$ و $c_1 x^{\frac{1}{2}} \cos(lnx) + c_2 x^{\frac{1}{2}} \sin(lnx)$ عملا دو ساختار متفاوت دارند و نامگذاری هر دوی آنها با y به لحاظ ریاضی صحیح نیست, اما از آنجا که معمولا به لحاظ محاسباتی مشکلی ایجاد نمی‌کند, اغلب با نامگذاری یکسان بکار گرفته می‌شود. ■

$$2)\ x^2y'' - xy' + y = \frac{4}{x} \to [D(D-1) - D + 1]y = 4e^{-t} \to (D^2 - 2D + 1)y = 4e^{-t}$$

لذا اکنون بایستی معادله با ضرایب ثابت $y_t'' - 2y_t' + y = 4e^{-t}$ حل شود.

$$f(r) = 0 \to r^2 - 2r + 1 = 0 \to r_{1,2} = 1 \to y_c(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$$

$$g(t) = 4e^{-t} \to \alpha = -1 \to s = 0 \to y_p(t) = A_0 t^0 e^{-t}$$

$$y_t'' - 2y_t' + y = 4e^{-t} \xrightarrow{Sub.} A_0 e^{-t} + 2A_0 e^{-t} + A_0 e^{-t} = 4e^{-t} \to A_0 = 1 \to y_p(t) = e^{-t}$$

$$\to y(t) = y_c(t) + y_p(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + e^{-t} \quad ; \quad x = e^t \to y(x) = c_1 x + c_2 x lnx + \frac{1}{x} \ ■$$

توضیح ۱: دقت شود گاهی ممکن است شکل معادله بگونه‌ای نوشته شده باشد که در ابتدا شبیه معادله کوشی-اویلر نباشد. مثلا معادله‌ای به شکل $xy'' - y' + \frac{1}{x}y = \frac{4}{x^2}$ که با ضرب طرفین آن در x همان معادله بالا خواهد بود.

توضیح ۲: می‌توان گفت که استفاده از روش دوم برای معادله کوشی-اویلر غیرهمگن کارایی بیشتری دارد, چرا که در اینصورت هم می‌توان معادله غیرهمگن را با روش تغییر پارامتر(لاگرانژ) حل کرد و هم با روش ضرایب نامعین(البته اگر ترم غیرهمگن به یکی از سه فرم عنوان شده باشد). در برخی مسایل روش ضرایب نامعین به جهت اینکه نیاز به انتگرال‌گیری ندارد ممکن است محاسبات کمتری نیاز داشته باشد. در حالی که در روش اول حل معادله کوشی-اویلر غیر همگن, برای یافتن جواب خصوصی, صرفا بایستی از روش تغییر پارامتر استفاده کرد. (مثال ۲-۱۶) ■

مثال ۲-۱۸ معادله غیرهمگن زیر را حل کنید.

$$(2x+1)^2 y'' + 4(2x+1)y' - 8y = \frac{ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$$

حل همانگونه که در متن درس عنوان شد با تغییر متغیر $t = 2x + 1$ به معادله کوشی-اویلر می‌رسیم.

$$t = 2x + 1 \to dt = 2dx \to y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 2y_t'$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(2y_t')}{dx} = 2\frac{d(y_t')}{dx} = 2\frac{d(y_t')}{dt}\frac{dt}{dx} = 4y_t'' \to 4t^2y_t'' + 8ty_t' - 8y = \frac{lnt}{t^2}$$

حال اگر بخواهیم مساله را از روش دوم حل کنیم, با تغییر متغیر $t = e^z$, این معادله به ضرایب ثابت تبدیل می‌شود.

$$4t^2y_t'' + 8ty_t' - 8y = \frac{lnt}{t^2} \to [4D(D-1) + 8D - 8]y = ze^{-2z} \to (4D^2 + 4D - 8)y = ze^{-2z}$$

حال بایستی معادله با ضرایب ثابت $4y_z'' + 4y_z' - 8y = ze^{-2z}$ حل شود.

$$f(r)=0 \rightarrow 4r^2+4r-8=0 \rightarrow r_1=1; r_2=-2 \rightarrow y_c(z)=c_1e^z+c_2e^{-2z}$$

$$s=1 \rightarrow y_p(z)=z^1e^{-2z}(A_1z+A_0) \xrightarrow{sub.} y_p(z)=ze^{-2z}\left(-\frac{1}{24}z-\frac{1}{36}\right)$$

$$\rightarrow y=c_1e^z+c_2e^{-2z}-\frac{z^2}{24}e^{-2z}-\frac{z}{36}e^{-2z}=c_1t+c_2t^{-2}-\frac{(lnt)^2}{24t^2}-\frac{lnt}{36t^2} \;\; ; \;\; t=2x+1$$

❊ ۲-۱۰-۳- حل معادلات تفاضلی

این معادلات از نوع معادلات دیفرانسیل نیستند, اما از این جهت که در اینها نیز میتوان فرم جواب را حدس زد, در این قسمت مثالهایی از این معادلات ارائه می‌شود. مشابه معادله کوشی-اویلر که در آن فرم جواب را بصورت x^r حدس زدیم, در اینجا نیز فرم cr^n را انتخاب کرده با جایگذاری در معادله, r را بدست می‌آوریم.

مثال ۲-۱۹ معادلات تفاضلی زیر را حل کرده و فرم جواب عمومی را بدست آورید.

$$1)\;\; a_{n+1}-4a_n=0 \;\; ; \;\; a_n=cr^n \rightarrow cr^{n+1}-4cr^n=0 \rightarrow cr^n(r-4)=0$$

$$r=4 \rightarrow a_n=c4^n \quad ; \quad if \;\; a_0=3 \rightarrow c=3 \rightarrow a_n=3(4)^n \;\; \blacksquare$$

$$2)\;\; a_{n+2}-a_{n+1}-6a_n=0$$

$$a_n=cr^n \rightarrow cr^{n+2}-cr^{n+1}-6cr^n=0 \rightarrow cr^n(r^2-r-6)=0$$

$$r^2-r-6=0 \rightarrow r_{1,2}=-2,3 \rightarrow a_n=c_1(-2)^n+c_2(3)^n \;\; \blacksquare$$

$$3)\; a_n=a_{n-1}+a_{n-2} \quad (Fibonacci\ Sequence) \quad ; \quad r^2-r-1=0 \rightarrow r=\left(1\pm\sqrt{5}\right)/2$$

$$a_n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n ; \; if \;\; a_0=0; a_1=1 \rightarrow c_1=-c_2=\frac{1}{\sqrt{5}} \;\; \blacksquare$$

تمرینات بخش ۲-۱۰

۱- جواب معادلات دیفرانسیل زیر یکبار با استفاده از فرمولهای معادله کوشی-اویلر و یکبار با تغییر تابع $z=y'$ بدست آورید.

$$xy''+y'=x \quad (x>0) \quad ; \quad \underline{Ans}: \quad y=c_1+c_2lnx+x^2/4$$

۲- جواب معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

$$\underline{1})\;\; y''-\frac{6}{x^2}y=1 \quad ; \quad x>0 \quad ; \qquad \underline{Ans}: y=c_1x^{-2}+c_2x^3-\frac{x^2}{4}$$

$$\underline{2})\;\; x^2y''+xy'-y=\frac{1}{x+1} \; ; \; x>0 \; ; \; \underline{Ans}: y=c_1x+\frac{c_2}{x}+\frac{x}{2}ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{2x}ln(x+1)-\frac{1}{2}$$

$$3)\;\; x^2y''-xy'+4y=cos(lnx)+xsin(lnx) \quad ; \quad x>0$$

$$\underline{Ans}:\; y_p(x)=\frac{1}{13}\left(3cos(lnx)-2sin(lnx)\right)+\frac{1}{2}xsin(lnx)$$

4) $xy'' - y' - \frac{3}{x}y = xlnx \quad ; \quad x > 0 \quad ; \qquad \underline{Ans}:\ y_p(x) = \frac{-1}{3}x^2\left(lnx + \frac{2}{3}\right)$

5) $(2x+3)^2y'' + (2x+3)y' + y = \left(ln(2x+3)\right)^2 + 2ln(2x+3) \quad ; \quad 2x+3 = e^t$

$\underline{Ans}:\ y = e^{t/4}\left[c_1cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}t\right) + c_2sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}t\right)\right] + t^2 + 6t + 4 \ ;\ t = ln(2x+3)$

۳- معادله ۲ از تمرین قبل را بصورت زیر تبدیل به یک معادله مرتبه اول کرده آنرا حل کنید. در واقع به چنین معادلاتی, معادله کامل گفته میشود که در بخش ۲-۱۲-۱ بررسی خواهند شد.

$$x^2y'' + xy' - y = \underbrace{x^2y'' + 2xy'}_{(x^2y')'} - \underbrace{(y + xy')}_{(xy)'} = (x^2y' - xy)' = \frac{1}{x+1}$$

۴- مثال ۲-۱۸ را با روش اول حل معادله کوشی-اویلر حل کرده, نتایج را مقایسه کنید.

۵- اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله زیر باشند, حاصل $y_1(x) - y_2(x)$ را بیابید.

$$\begin{cases} x^2y'' + 3xy' + y = f(x) \\ y_1(1) = y_2(1) \\ y_1'(1) - y_2'(1) = 1 \end{cases} \qquad ; \qquad \underline{Ans}:\ y_1(x) - y_2(x) = \frac{lnx}{x}$$

۲-۱۱- روش کاهش مرتبه

ایده این روش درست مشابه آن است که در یک معادله جبری یکی از ریشه‌ها مانند x_1 داده شده باشد. بدیهی است در آنجا برای یافتن سایر ریشه‌ها معادله را به $x - x_1$ تقسیم کرده و لذا درجه معادله یک واحد کاهش می‌یابد.

در اینجا نیز هدف آن است که بگونه‌ای بتوان مرتبه یک معادله را کاهش داد, مثلا معادله مرتبه دو را به مرتبه یک تبدیل کرد. خواهیم دید در اینجا نیز لازم است یک جواب معادله در دست باشد.

در حالت کلی معادله خطی غیر همگن زیر را در نظر می‌گیریم:

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \qquad (1)$$

با انتخاب $y(x) = u(x)v(x)$ که در آن $y(x)$ جواب کامل معادله غیر همگن است خواهیم داشت:

$$y = uv \rightarrow y' = uv' + u'v \rightarrow y'' = uv'' + 2u'v' + u''v$$

$$y'' + py' + qy = g \rightarrow (uv'' + 2u'v' + u''v) + p(uv' + u'v) + quv = g$$

$$\rightarrow uv'' + (2u' + pu)v' + (u'' + pu' + qu)v = g$$

که معادله مرتبه دوم دیگری بر حسب v میباشد. از آنجا که جواب بصورت حاصلضرب دو تابع منظور شده است لذا یک حق انتخاب خواهیم داشت.

اگر u بگونه‌ای انتخاب شود که ضریبِ v یعنی $u'' + pu' + qu$ صفر شود, با انتخاب $z = v'$ به یک معادله مرتبه یک می‌رسیم. معنی این انتخاب آن است که u باید در $L[u] = 0$ صدق کند, یعنی یک جواب پایه معادله همگن (2) باشد. به عبارتی با انتخاب $u = y_1$ جواب کامل معادله غیرهمگن (1) عبارت است از $y = vy_1$ که v از حل یک معادله مرتبه اول بدست می‌آید.

لازم بذکر است که این روش درست همان ایده‌ای است که در تمرین ۳ بخش ۲-۸ (روش تغییر پارامتر) عنوان شد, با این تفاوت که در اینجا شرط اضافیِ روش تغییر پارامتر بجای $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$ بصورت $u_2 = 0$ انتخاب گردیده است و لذا جواب بصورت $y = u_1y_1 + u_2y_2 = u_1y_1$ خواهد شد که u_1 در آنجا همان نقش v در اینجا را خواهد داشت.

در بخش ۲-۱۲-۳ به جای صفر کردن ضریب v به دنبال صفر کردن ضریب v' خواهیم بود.

بطور خلاصه در روش کاهش مرتبه, جواب کامل معادله, مضربی غیر ثابت از یک جواب معادله همگن در نظر گرفته می‌شود.

لذا اگر یک جواب معادله همگن یعنی y_1 در دست باشد, با انتخاب $u = y_1$ و $z = v'$ معادله فوق بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$uv'' + (2u' + pu)v' + \underbrace{(u'' + pu' + qu)}_{0}v = g \xrightarrow{z=v'\ ;\ u=y_1} z' + \left(p + 2\frac{y_1'}{y_1}\right)z = \frac{g}{y_1} \qquad (7)$$

حال مساله را برای دو حالت همگن و غیرهمگن بررسی می‌کنیم. در هر دو حالت یک جواب y_1 معادله همگن را می‌دانیم.

الف: معادله همگن

از آنجا که معادله همگن است در اینجا هدف یافتن جواب دوم مستقل یعنی y_2 میباشد.

در حالت $g(x) = 0$ معادله (7) بصورت $z' + f(x)z = 0$ تبدیل می‌شود که جواب آن $z = ce^{-\int f(x)dx}$ می‌باشد. لذا:

$$z = ce^{-\int\left(p+2\frac{y_1'}{y_1}\right)dx} = ce^{-\int pdx}e^{-2\ln y_1} = \frac{c}{y_1^2}e^{-\int pdx} \xrightarrow{z=v'} v' = \frac{c}{y_1^2}e^{-\int pdx} \qquad (8)$$

حال که v' بدست آمد با انتگرال‌گیری v محاسبه شده و لذا جواب نهایی معادله $y = vy_1$ خواهد بود. فقط توجه شود که بایستی ثابت انتگرال را نیز لحاظ کرده باشیم تا جواب نهایی با دو ثابت ظاهر شود. هرچند ساده‌تر است به طریق زیر عمل شود.

معمولا برای سادگی در رابطه (8) مقدار $c = 1$ انتخاب می‌شود, چرا که کافی است فقط بتوانیم y_2 را بدست آوریم. در اینصورت اگر در انتگرال‌گیری نیز ثابتِ انتگرال را لحاظ نکنیم, در نهایت هیچ ثابتی در جواب ظاهر نشده و لذا vy_1 اینبار بجای y فقط y_2 را خواهد داد, یعنی $y_2 = vy_1$. که در اینصورت جواب عمومی بصورت $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ بیان خواهد شد.

راه دوم اثبات: با استفاده از رابطه آبل با داشتن یک جواب y_1 , می‌توان جواب دوم را بصورت زیر نیز بدست آورد:

$$W = y_1y_2' - y_2y_1' \to \frac{W}{y_1^2} = \frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' \xrightarrow{y_2=vy_1} v' = \frac{W}{y_1^2} = \frac{c}{y_1^2}e^{-\int pdx}$$

دیده شد که $v' = \frac{W}{y_1^2}$ می‌باشد. بنابراین در معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ می‌توان صرفا با داشتن یک جواب مستقل y_1 و محاسبه رونسکین, جواب دوم مستقل را بصورت $y_2 = vy_1$ بدست آورد.

توضیح ۱: دیده شد که استفاده از این روش به شرطی امکان‌پذیر است که یک جواب معادله همگن (یک پایه جواب) در دست باشد. این پایه یا در صورت مساله داده شده است و یا در برخی حالات خاص می‌توان آنرا حدس زد, بعنوان نمونه:

۱- اگر $p + xq = 0$ باشد, آنگاه یک جواب معادله همگن $y_1 = x$ است.

۲- اگر بتوان یک r بگونه‌ای یافت که $r^2 + pr + q = 0$ گردد, یک جواب معادله همگن $y_1 = e^{rx}$ است. در حالت خاص:

$$if \quad p + q = -1 \xrightarrow{r=+1} y_1 = e^{x} \qquad ; \qquad if \quad p - q = +1 \xrightarrow{r=-1} y_1 = e^{-x}$$

توضیح ۲: در حل معادلات همگن با ضرایب ثابت دیده شد که اگر ریشه معادله مشخصه مضاعف باشد, صرفا یک جواب بدست می‌آید که با یک روش مشتق‌گیری, جواب دوم را بدست آوردیم. بعنوان راه دوم, دیده شد که با استفاده از رابطه آبل, با داشتن یک جواب y_1 , جواب دوم بدست آمد. در واقع آنچه آنجا تحت عنوان راه دوم ارائه شد, همان روش کاهش مرتبه می‌باشد. چرا که:

$$y_1 = e^{r_1 x} \xrightarrow{(8)} v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} = \frac{1}{(e^{-bx/2a})^2} e^{-\int \frac{b}{a} dx} = 1 \to v = x \to y_2 = x e^{r_1 x}$$

بدیهی است برای معادله کوشی-اویلر (در حالت ریشه مضاعف) نیز می‌توان به همین شکل جواب دوم را بدست آورد.

مثال ۲-۲۰ معادله همگن زیر را حل کنید. (معادله لژاندر رتبه یک)

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad (-1 < x < 1)$$

حل میتوان کنترل کرد که $p + xq = 0$ میباشد. در نتیجه یک جواب معادله مشخص است.

$$p + xq = \frac{-2x}{1 - x^2} + x\frac{2}{1 - x^2} = 0 \to y_1 = x$$

$$(8) \to v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} = \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{-2x}{1-x^2} dx} = \frac{1}{x^2} e^{-ln(1-x^2)} = \frac{1}{x^2(1 - x^2)}$$

$$v = \int \frac{dx}{x^2(1 - x^2)} = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{0.5}{1 - x} + \frac{0.5}{1 + x}\right) dx = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2} ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

$$y_2 = v y_1 = \frac{x}{2} ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) - 1 \to y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad \blacksquare$$

توضیح: ممکن است سوال شود که اگر $x = 0$ باشد, در مخرج کسر v' مشکل بوجود می‌آید. برای رفع این مشکل میتوان محاسبات بالا را یکبار برای بازه $0 < x < 1$ و یکبار برای بازه $-1 < x < 0$ به همین شکل تکرار کرد. در نهایت کنترل میکنیم که جواب نهایی برای $x = 0$ نیز اعتبار داشته, لذا در کل بازه معتبر است. ■

مثال ۲-۲۱ معادله همگن زیر را حل کنید. یک جواب پایه داده شده است.

$$x^2 y'' + 2x^3 y' + (2x^2 - 2)y = 0 \quad ; \quad 0 < x < \infty \quad ; \quad y_1 = 1/x$$

$$(8) \to v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} = \frac{1}{(1/x)^2} e^{-\int 2x dx} = x^2 e^{-x^2} \to v = \int x^2 e^{-x^2} dx$$

این انتگرال قابل محاسبه نمی‌باشد. اما می‌توان با نوشتن بسط e^{-x^2} جواب را بصورت یک سری توانی بدست آورد.

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{1}{1!}(x^2) + \frac{1}{2!}(x^2)^2 - \frac{1}{3!}(x^2)^3 + \cdots$$

$$\to v = \int x^2 e^{-x^2} dx = \int \left(x^2 - \frac{1}{1!}x^4 + \frac{1}{2!}x^6 - \frac{1}{3!}x^8 + \cdots\right) dx$$

$$\to v = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{14}x^7 - \frac{1}{54}x^9 + \cdots \to y_2 = v \underbrace{y_1}_{1/x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n + 3)} x^{2n+2}$$

پس این معادله جواب دومی که بر حسب توابع مقدماتی قابل بیان شدن باشد ندارد. در بحث سریها و در مثال ۴-۳۳ همین مساله را مجددا حل می‌کنیم, با این تفاوت که نیازی به جواب اول نیز نخواهیم داشت. ■

ب: معادله غیرهمگن

پس از یافتن جواب دوم معادله همگن بصورت $y_2 = vy_1$ (مطابق آنچه در قسمت قبل عنوان شد) در واقع پایه جوابها بدست آمده است. بنابراین یک راه تعیین جواب خصوصیِ معادله غیرهمگن یعنی y_p , استفاده از روش لاگرانژ است, چرا که جوابهای پایه مشخص شده است. در نهایت جواب کامل معادله بصورت $y = y_c + y_p$ خواهد بود.

اما می‌توان بدون بکارگیری روش لاگرانژ نیز جواب کامل را بدست آورد. دقت شود که رابطه (7) یک معادله خطی مرتبه اول غیرهمگن است که جواب آن یعنی z قابل محاسبه است که پس از حل آن از رابطه $v' = z$ با انتگرال‌گیری, v محاسبه می‌شود. در نهایت نیز جواب کامل معادله غیر همگن بصورت $y = vy_1$ خواهد بود.

خلاصه: اگر y_1 یک جواب معادله همگن $L[y] = 0$ در دست باشد, به یکی از دو روش زیر می‌توان جواب کامل معادله غیرهمگن $L[y] = g(x)$ را بدست آورد:

$$\begin{cases} (8) \to v' = \dfrac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} \to y_2 = vy_1 \to y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 \xrightarrow{\text{لاگرانژ}} y_p \to y = y_c + y_p \\ (7) \to z' + \left(p + 2\dfrac{y_1'}{y_1}\right) z = \dfrac{g}{y_1} \xrightarrow{z=v'} y = vy_1 \end{cases}$$

توجه شود هم در روش اول (استفاده از لاگرانژ) و هم در روش دوم, در تعیین $g(x)$ بایستی ضریب y'' برابر 1 گردد. همچنین در روش دوم از آنجا که قرار است مستقیما جواب کامل معادله غیرهمگن بدست آید, بایستی در انتگرال‌گیری از v' ثابت انتگرال را لحاظ کنیم.

توضیح: در بخش ۳-۴-۱ روشی تحت عنوان تجزیه عملگرها ارائه خواهد شد که به کمک آن می‌توان معادلات همگن و ناهمگن را حل کرد, هرچند استفاده از این روش اغلب ساده نمی‌باشد. دیده می‌شود که در این روش نیازی نیست ابتدا y_c و بعد از آن y_p را بدست آوریم. در آنجا خواهیم دید در معادله $L[y] = g$ اگر بتوان $L = f(D)$ را تجزیه کرد, حل مساله به معادله مرتبه اول منجر می‌شود. اما در واقع همین قسمتِ تجزیه L , برای معادلات با ضرایب غیر ثابت, کار پیچیده‌ای است. بنابراین می‌توان گفت این روش نیز به نوعی روش کاهش مرتبه محسوب می‌شود. اما آنچه در مراجع تحت عنوان کاهش مرتبه عنوان شده است, اغلب همین بحثی است که در اینجا ارائه شده است.

مثال ۲-۲۲ معادله غیر همگن زیر را از دو راه حل کنید.

$$xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = e^x \;\; ; \;\; x > 0 \;\; ; \;\; p + q = -1 \to y_1 = e^x$$

حل راه اول: ابتدا به کمک معادله (8) جوابهای همگن معادله را تعیین کرده و سپس با روش لاگرانژ جوابهای خصوصی را بدست می‌آوریم.

$$v' = \frac{1}{e^{2x}} e^{-\int \frac{1-2x}{x} dx} = \frac{1}{e^{2x}} e^{-lnx + 2x} = \frac{1}{x} \to v = lnx \to y_2 = vy_1 = e^x lnx$$

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^x lnx \quad ; \quad W = \begin{vmatrix} e^x & e^x lnx \\ e^x & e^x lnx + \dfrac{e^x}{x} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{x}$$

راه دوم : $W = y_1^2 v' = e^{2x} \dfrac{1}{x}$

$$u_1' = \frac{-gy_2}{W} = \frac{-\frac{e^x}{x} e^x lnx}{\frac{e^{2x}}{x}} = -lnx \rightarrow u_1 = -xlnx + x \;\; ; \;\; u_2' = \frac{gy_1}{W} = \frac{\frac{e^x}{x} e^x}{\frac{e^{2x}}{x}} = 1 \rightarrow u_2 = x$$

$$\rightarrow y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 \rightarrow y_p = (-xlnx + x)e^x + xe^x lnx = xe^x$$

$$\rightarrow y = y_c + y_p = e^x(c_1 + c_2 lnx + x)$$

راه دوم: می‌توان به کمک معادله (7) با داشتن صرفا یک جواب پایه, مستقیما جواب کامل را بدست آورد.

$$z' + \left(p + 2\frac{y_1'}{y_1}\right) z = \frac{g}{y_1} \qquad ; \qquad y_1 = e^x \quad ; \quad z = v'$$

$$z' + \left(\frac{1-2x}{x} + 2\frac{e^x}{e^x}\right) z = \frac{\frac{e^x}{x}}{e^x} \rightarrow xz' + z = 1 \rightarrow (xz)' = 1 \rightarrow xz = x + c_1 \rightarrow z = 1 + \frac{c_1}{x}$$

$$\xrightarrow{z=v'} v' = 1 + \frac{c_1}{x} \rightarrow v = x + c_1 lnx + c_2 \rightarrow y = vy_1 = (x + c_1 lnx + c_2)e^x \;\; \blacksquare$$

مثال ۲-۲۳ معادله غیرهمگن زیر را حل کنید.

$$(x-1)y'' - xy' + y = 1$$

حل میتوان کنترل کرد که هم $p + xq = 0$ و هم $p + q = -1$ میباشد. لذا هر دو جواب پایه بدست می‌آید.

$$p + xq = 0 \rightarrow y_1 = x \quad ; \quad p + q = -1 \rightarrow y_2 = e^x$$

با داشتن این دو جواب می‌توان از روش لاگرانژ جواب خصوصی را محاسبه کرد.

$$y_c = c_1 x + c_2 e^x \;\; ; \;\; W = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = e^x(x-1)$$

$$u_1' = \frac{-gy_2}{W} = \frac{-\frac{1}{x-1}e^x}{e^x(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2} \rightarrow u_1 = \frac{1}{x-1}$$

$$u_2' = \frac{gy_1}{W} = \frac{\frac{1}{x-1}x}{e^x(x-1)} = \frac{x}{e^x(x-1)^2} \rightarrow u_2 = \frac{-1}{e^x(x-1)}$$

$$\rightarrow y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 \rightarrow y_p = \left(\frac{1}{x-1}\right)x + \left(\frac{-1}{e^x(x-1)}\right)e^x = 1$$

هر چند در اینجا با توجه به فرم خودِ معادله نیز ممکن است بتوان تشخیص داد که $y_p = 1$ یک جواب خصوصی معادله است.

$$\rightarrow y = y_c + y_p = c_1 e^x + c_2 x + 1 \;\; \blacksquare$$

تمرینات بخش ۲-۱۱

۱- معادلات همگن زیر را حل کنید. در هر تمرین, یک جواب پایه داده شده است.

1) $xy'' + (1-x)y' + g(x)y = 0 \quad ; \quad y_1 = \frac{1}{x^2} \quad ; \quad$ Ans : $y_2(x) = \left(x - 3 + \frac{6}{x} - \frac{6}{x^2}\right)e^x$

2) $y'' - xy' + 2y = 0 \quad ; \quad y_1 = 1 - x^2 \quad ; \quad$ Ans: $y_2(x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{1680} - \cdots$

3) $x^2y'' + (x^2 - 2x)y' + 2y = 0 \quad ; \quad y_1(x) = x^2e^{-x}$

4) $3xy'' + (3x + 2)y' - 4y = 0 \quad ; \quad y_1(x) = x^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$

5) $2xy'' + y' + y = 0 \quad ; \quad y_1 = cos\sqrt{2x} \quad ;$ Ans: $y_2(x) = sin\sqrt{2x}$

6) $xy'' - (4 + x)y' + 2y = 0 \;\; ; \;\; y_1 = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2$

Ans: $y_2(x) = x^5\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{60x^n}{n!\,(n+5)(n+4)(n+3)}\right)$

۲- معادله همگن زیر را حل کنید.

$xy'' - (x + 1)y' + y = 0 \quad ;$ Ans : $y = c_1e^x + c_2(x + 1)$

۳- جواب معادلات ناهمگن زیر را مشابه مثال ۲-۲۲ از دو راه بدست آورید. یک جواب پایه داده شده است.

1) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x\sqrt{x}$ ($\frac{1}{2}$ بسل غیرهمگن رتبه) ; $y_1 = \frac{sinx}{\sqrt{x}}$

Ans : $y_2 = \frac{cosx}{\sqrt{x}} \; ; \; y_p = \frac{1}{\sqrt{x}}$

2) $(1 - xcotx)y'' - xy' + y = (sinx - xcosx)^2 \quad ; \quad y_1 = x \quad ;$ Ans : $y_2 = -sinx$

3) $(x - 1)^2y'' + 7(x - 1)y' + 5y = x \quad ; \quad x > 5 \quad ; \quad y_1 = \frac{1}{1 - x}$

۴- آیا می‌توان با داشتن یک جواب y_1 در معادله ریکاتی, جواب عمومی را با انتخاب $y = vy_1$ بدست آورد؟

۵- نشان دهید اگر حاصل ضرب جوابهای پایه معادله (2) عددی ثابت باشد, آنگاه $q' + 2pq = 0$. حال فرض کنید بدانیم $y_1 = e^{-x^2}$ یک جواب معادله $xy'' - y' - 4x^3y = 0$ است, در اینصورت جواب عمومی را بیابید.

۶- اگر $y = (1 + x)^2$ جوابی از معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ بوده و رونسکین هر دو جواب معادله نیز عددی ثابت باشد, جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 1 + x \quad ;$ Ans : $y = c_1(1 + x)^2 + c_2\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{4}x(1 + x)^2$

۷- در مثال ۲-۲۳ فرض کنید فقط بدانیم $y_1 = x$ یک جواب پایه است. به کمک معادله (7) جواب کامل را بیابید.

۸- اگر در معادله زیر بدانیم که حاصل تقسیم جوابهای پایه برابر x میباشد, معادله را حل کنید.

$y'' + 2xy' + (1 + x^2)y = 0$

Ans : $y_1 = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{48}x^6 + \frac{1}{384}x^8 - \cdots \quad ; \quad y_2 = xy_1$

۹- معادله $x(x + 1)y'' - y' - 2y = 0$ را حل کنید. یک جواب پایه بصورت $y_1(x) = x^2$ داده شده است.

۲-۱۲- سایر روشهای حل معادلات خطی

در ادامه به بررسی چند روش دیگر حل معادلات خطی می‌پردازیم.

۲-۱۲-۱- معادلات کامل

بحث را با یک سوال آغاز می‌کنیم. در چه صورت یک معادله خطی از مرتبه ۲ را میتوان بصورت مشتق یک عبارت نوشت؟ یعنی:

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = (P(x)y' + f(x)y)'$$

$$\rightarrow P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = P(x)y'' + (P'(x) + f(x))y' + f'(x)y$$

$$\begin{cases} P'(x) + f(x) = Q(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} P''(x) + f'(x) = Q'(x) & \xrightarrow{\text{با حذف } f'(x)} P''(x) - Q'(x) + R(x) = 0 \\ f'(x) = R(x) & \end{cases}$$

حال ثابت می‌کنیم این رابطه یک شرط کافی نیز هست.

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = P(x)y'' + Q(x)y' + \big(Q'(x) - P''(x)\big)y$$

$$= P(x)y'' - P''(x)y + Q(x)y' + Q'(x)y + \underbrace{P'(x)y' - P'(x)y'}_{0}$$

$$= \underbrace{P(x)y'' + P'(x)y'}_{(P(x)y')'} + \underbrace{\big(Q'(x) - P''(x)\big)y + \big(Q(x) - P'(x)\big)y'}_{\left(\left(Q(x)-P'(x)\right)y\right)'}$$

$$= (P(x)y')' + \Big(\big(Q(x) - P'(x)\big)y\Big)' = \Big(P(x)y' + \big(Q(x) - P'(x)\big)y\Big)' = (P(x)y' + f(x)y)'$$

یعنی با قبول آن شرط, معادله به فرم مشتق یک عبارت مرتبه اول قابل بیان شدن است. لازم بذکر است که این شرط برای معادلات خطی مرتبه بالاتر نیز قابل تعمیم است که در فصل بعد خواهیم دید.

بنابراین ابتدا شرط کامل بودن معادله بررسی شده و سپس از رابطه $f(x) = Q(x) - P'(x)$ معادله مرتبه اول بدست آمده را حل می‌کنیم. در واقع در اینجا نیز به نوعی یک کاهش مرتبه صورت گرفته است و معادله مرتبه دو را به مرتبه یک تبدیل کرده‌ایم.

مثال ۲-۲۴ معادله زیر را حل کنید.

$$(x^3 + x)y'' + (5x^2 + 1)y' + 4xy = 4x \quad ; \quad x > 0$$

$$P''(x) - Q'(x) + R(x) = (x^3 + x)'' - (5x^2 + 1)' + 4x = 0 \rightarrow f(x) = Q(x) - P'(x) = 2x^2$$

$$(P(x)y' + f(x)y)' = 4x \rightarrow [(x^3 + x)y' + 2x^2y]' = 4x$$

$$\rightarrow (x^3 + x)y' + 2x^2y = 2x^2 + c_1 \rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{2x}{x^2+1}dx} = e^{Ln(x^2+1)} = x^2 + 1$$

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)g(x)dx + c\right] = \frac{1}{x^2+1}\left[\int (x^2+1)\frac{2x^2+c_1}{x^3+x}dx + c_2\right] = \frac{x^2 + c_1 lnx + c_2}{x^2+1} \quad \blacksquare$$

مثال ۲-۲۵ معادله زیر را حل کنید.

$$xy'' - xy' - y = 0 \quad ; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad y'(0) = 2$$

$$P''(x) - Q'(x) + R(x) = x'' - (-x)' + (-1) = 0 \rightarrow f(x) = Q(x) - P'(x) = -x - 1$$

$$(P(x)y' + f(x)y)' = 0 \rightarrow (xy' + (-x-1)y)' = 0 \rightarrow xy' + (-x-1)y = c$$

$$y(0) = 0 \ ; \ y'(0) = 2 \rightarrow 0y'(0) + (-0-1)y(0) = c \rightarrow c = 0$$

$$xy' + (-x-1)y = 0 \rightarrow \frac{dy}{y} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx \rightarrow y = cxe^x \xrightarrow{y'(0)=2 \rightarrow c=2} y = 2xe^x \ \blacksquare$$

در اینجا نیز همانند معادلات مرتبه اول سوال این است که اگر معادله کامل نباشد, آیا می‌توان آنرا کامل کرد؟

برای این منظور با ضرب طرفین معادله اول در $\mu(x)$ خواهیم داشت:

$$\mu(x)(P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y) = (\mu(x)P(x)y' + f(x)y)'$$

با مشتق گیری از سمت راستِ تساوی و مساوی قرار دادن ضرایب دو طرف خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \mu Q - (\mu P)' = f \xrightarrow{\text{مشتق}} (\mu Q - (\mu P)')' = f' \quad \xrightarrow{f' \text{ با حذف}} (\mu P)'' - (\mu Q)' + \mu R = 0 \\ \qquad\qquad f' = \mu R \end{cases}$$

که برای ساده‌نویسی متغیر x حذف شده است. معادله بالا را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

$$P\mu'' + (2P' - Q)\mu' + (P'' - Q' + R)\mu = 0$$

که یک معادله مرتبه دو بر حسب $\mu(x)$ می‌باشد که به معادله الحاقی معروف است و بدیهی است حل آن گاهی سخت‌تر از حل معادله اولیه خواهد بود! چنانچه بتوانیم این معادله را حل کنیم μ بدست آمده و f نیز از رابطه $f = \mu Q - (\mu P)'$ تعیین خواهد شد.

بنا به تعریف, اگر معادله الحاقی با معادله اولیه یکسان گردد, معادله را خودالحاق (Self-Adjoint) می‌گوییم, هرچند تعریف دقیق خود الحاق بودن یک عملگر, کمی پیچیده‌تر از تعریفی است که در اینجا ارائه شد. بدیهی است برای خودالحاق بودن بایستی $2P' - Q = Q$ یعنی $P' = Q$ و نیز $P'' - Q' + R = R$ باشد که اگر $P' = Q$ باشد, این نیز برقرار خواهد بود.

در واقع در صورت خود الحاق بودن یک معادله, جمله اول و دوم آن, مشتق کامل خواهند بود. یعنی:

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = (P(x)y')' + R(x)y$$

به تفاوت این دو تعریف توجه شود. در معادله کامل, کل معادله, مشتق کامل یک عبارت است, در حالی که در خودالحاق بودن, صرفا دو جمله اول (شامل y'' و y') مشتق کامل یک عبارت خواهد بود.

۲-۱۲-۲- تغییر متغیر مناسب

گاهی اوقات یک تغییر متغیر (یا تغییر تابع) مناسب, معادله را به ضرایب ثابت تبدیل میکند. مثلا فرض کنید بخواهیم تغییر متغیر $t = h(x)$ را برای معادله (1) انجام دهیم:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x) \qquad (1) \qquad ; \qquad t=h(x)\to y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}\to y'=h'(x)y'_t$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d(h'(x)y'_t)}{dx}=h''(x)y'_t+h'(x)\frac{d(y'_t)}{dx}\xrightarrow{\frac{d(y'_t)}{dx}=\frac{dy'_t}{dt}\frac{dt}{dx}}y''=h''(x)y'_t+(h'(x))^2y''_t$$

$$(1)\to (h'(x))^2y''_t+h''(x)y'_t+p(x)h'(x)y'_t+q(x)y=g(x)$$

که بایستی در این رابطه همه x ها بر حسب t نوشته شوند. در اینگونه مسائل معمولا تغییر متغیر, بایستی در صورت سوال داده شده باشد. در تمرین ۴ این بخش, یک حالت خاص که در آن معادله (1) به معادله با ضرایب ثابت تبدیل میشود, ارائه شده است.

مثال ۲-۲۶ معادله زیر را با تغییر متغیر داده شده حل کنید. $(-1<x<1)$

$$(1-x^2)y''-xy'+y=0 \qquad ; \qquad x=sint \qquad\qquad (x,y)\to(t,y)$$

$$x=sint\to dx=(cost)dt\to y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{cost}y'_t$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{cost}y'_t\right)}{dt}\frac{dt}{dx}=\left(\frac{sint}{cos^2t}y'_t+\frac{1}{cost}y''_t\right)\frac{1}{cost}$$

$$\xrightarrow{Sub.} y''_t+(tant)y'_t-(tant)y'_t+y=0\to y''_t+y=0$$

$$\to y=c_1cost+c_2sint=c_1\sqrt{1-x^2}+c_2x \quad \blacksquare$$

۲-۱۲-۳- تبدیل به فرم متعارف

در شروع بخش روش کاهش مرتبه دیده شد که با انتخاب $y(x)=u(x)v(x)$ در معادله (1) خواهیم داشت:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x) \qquad \to \qquad uv''+(2u'+pu)v'+(u''+pu'+qu)v=g$$

قبلا u بگونه‌ای انتخاب شد که ضریب v صفر شود که منجر به روش کاهش مرتبه گردید. اما اگر u بگونه‌ای انتخاب شود که ضریب v' را صفر کند, آنرا تبدیل شده به فرم متعارف می‌گوییم. در اینصورت:

$$2u'+pu=0\to u=e^{-\int\frac{p}{2}dx}$$

$$\to u'=-\frac{p}{2}e^{-\int\frac{p}{2}dx}=-\frac{p}{2}u\to u''=-\frac{p'}{2}u-\frac{p}{2}u'=-\frac{p'}{2}u-\frac{p}{2}\left(-\frac{p}{2}u\right)=\frac{1}{4}p^2u-\frac{1}{2}p'u$$

$$uv''+(0)v'+(u''+pu'+qu)v=g\to v''+\frac{u''+pu'+qu}{u}v=\frac{g}{u}$$

$$\frac{u''+pu'+qu}{u}=\left(\frac{1}{4}p^2-\frac{1}{2}p'\right)+p\left(-\frac{p}{2}\right)+q=q-\frac{1}{4}p^2-\frac{1}{2}p'$$

$$\to v''+\left(q-\frac{1}{4}p^2-\frac{1}{2}p'\right)v=\frac{g}{u}\to v''+\lambda v=\frac{g}{u}$$

پس اگر $\lambda=q-\frac{1}{4}p^2-\frac{1}{2}p'$ عددی ثابت مانند k شود معادله به ضرایب ثابت و اگر به فرم $\frac{k}{x^2}$ بدست آید, به معادله کوشی-اویلر تبدیل شده است. از حل این معادله v بدست آمده و لذا جواب بصورت $y=uv$ خواهد بود.

مثال ۲-۲۷ معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$1)\ \ 4x^2y'' + 4xy' + (x^2-1)y = 0$$

$$p = \frac{1}{x}\ \ , q = \frac{x^2-1}{4x^2} \rightarrow \lambda = q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p' = \frac{1}{4}$$

از آنجا که λ عدد ثابتی بدست آمد, در نتیجه به معادله با ضرایب ثابت خواهیم رسید.

$$v'' + \lambda v = \frac{g}{u} \xrightarrow{g=0} v'' + \frac{1}{4}v = 0 \rightarrow v = c_1 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$u = e^{-\int \frac{p}{2}dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow y = uv = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(c_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \ \ \blacksquare$$

$$2)\ \ x^2y'' + (x - 4x^2)y' + \left(4x^2 - 2x - \frac{9}{4}\right)y = \sqrt{x}e^{2x} \quad ; \quad x > 0$$

$$p = \frac{1}{x} - 4\ \ , q = 4 - \frac{2}{x} - \frac{9}{4x^2} \rightarrow \lambda = q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p' = \frac{-2}{x^2}$$

از آنجا که λ به فرم $\frac{k}{x^2}$ بدست آمد, در نتیجه به معادله کوشی-اویلر خواهیم رسید.

$$u = e^{-\int \frac{p}{2}dx} = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}} \quad ; \quad v'' + \lambda v = \frac{g}{u} \rightarrow v'' + \frac{-2}{x^2}v = \frac{\frac{\sqrt{x}e^{2x}}{x^2}}{\frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{x} \rightarrow x^2v'' - 2v = x$$

$$x^2v'' - 2v = x \xrightarrow{x=e^t} [D(D-1) - 2]v = e^t \rightarrow (D^2 - D - 2)v = e^t$$

$$f(r) = 0 \rightarrow r^2 - r - 2 = 0 \rightarrow r_1 = 2\ ;\ r_2 = -1 \rightarrow v_c = c_1e^{2t} + c_2e^{-t} = c_1x^2 + c_2x^{-1}$$

$$s = 0 \rightarrow v_p = A_0t^0e^t \xrightarrow{Sub.} A_0e^t - A_0e^t - 2A_0e^t = e^t \rightarrow A_0 = \frac{-1}{2} \rightarrow v_p = \frac{-1}{2}e^t = -\frac{x}{2}$$

$$v = v_c + v_p = c_1x^2 + c_2x^{-1} - \frac{x}{2} \rightarrow y = uv = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}\left(c_1x^2 + c_2x^{-1} - \frac{x}{2}\right) \ \ \blacksquare$$

تمرینات بخش ۲-۱۲

۱- جواب معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

$$1)\ y'' + \left(\frac{4+x}{x}\right)y' + \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{4}\right)y = e^{-\frac{1}{2}x} \quad ; \quad \underline{Ans}:\ y = \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{x^2}\left(c_1x^{-1} + c_2x^2 + \frac{x^4}{10}\right)$$

$$2)\ (1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = 12x^2 \quad ; \quad \underline{Ans}:\ y = \frac{x^4 + c_1x + c_2}{1+x^2}$$

۲- معادلات زیر را حل کنید.

$$1)\ \ (1-x^2)y'' - 3xy' - y = 1 \quad ; \quad \underline{Ans}: y = c_1\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} + c_2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1$$

2) $x^2y'' + xy' - y = \frac{1}{x+1} \quad ; \quad x > 0$

$\underline{Ans}: y = c_1x + \frac{c_2}{x} + \frac{x}{2}ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{2x}ln(x+1) - \frac{1}{2}$

دقت شود معادله دوم, قبلا در بخش تمرینات کوشی-اویلر نیز مطرح شده بود.

$\underline{3}$) $y'' + 2xy' + x^2y = 2e^{x-\frac{x^2}{2}} \quad ; \quad \underline{Ans}: y = e^{-\frac{x^2}{2}}(c_1e^x + c_2e^{-x} + xe^x)$

۳- معادلات زیر را با تغییر متغیر (یا تغییر تابع) داده شده حل کنید.

$\underline{1}$) $(1+x^2)^2y'' + (1+2x)(1+x^2)y' + y = 0 \quad ; \quad x = tant \quad ; \quad \underline{Ans}: \ y_t'' + y_t' + y = 0$

2) $2(y+1)y'' + 2y'^2 + y^2 + 2y = 0 \quad ; \quad u = y^2 + 2y$

۴- الف: نشان دهید معادله (1) با تغییر متغیر $t = \int \sqrt{\frac{q(x)}{k}}dx$ به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$y_t'' + Ay_t' + ky = \frac{kg(x)}{q(x)} \quad ; \quad A = k\frac{t'' + p(x)t'}{q(x)}$

بدیهی است اگر A عددی ثابت شود, معادله قابل حل خواهد بود. در تغییر متغیر معرفی شده, k عددی ثابت است و بهتر است بگونه‌ای انتخاب گردد که t ساده‌تر محاسبه شود.

ب: به کمک قسمت قبل معادله زیر را حل کنید.

$y'' - (1+4e^x)y' + 3e^{2x}y = e^{2x} \quad ; \quad \underline{Ans}: \ q(x) = 3e^{2x} \xrightarrow{for\ k=3 \to t=e^x} y_t'' - 4y_t' + 3y = 1$

۵- مثال ۲-۲۶ را با روشهای زیر نیز حل کنید.

الف: از آنجا که $p + xq = 0$ می‌باشد, یک جواب پایه $y_1 = x$ بوده و جواب دوم را با روش کاهش مرتبه بدست آورید.

ب: نشان دهید معادله کامل بوده و سپس جواب آنرا بدست آورید.

۶- در حل معادله لاپلاس در مختصات کروی به معادله $y'' + cotg(x)y' + \alpha(\alpha+1)y = 0$ میرسیم. نشان دهید با تغییر متغیر $t = cosx$ معادله فوق به معادله لژاندر بصورت زیر تبدیل میشود.

$(1-t^2)y_t'' - 2ty_t' + \alpha(\alpha+1)y = 0$

۷- معادله زیر که در اولین تمرین بخش ۲-۱۱ (قسمت ۵) با داشتن یک پایه مطرح شد, این‌بار با تغییر متغیر داده شده حل کنید.

$2xy'' + y' + y = 0 \quad ; \quad t = \sqrt{2x} \quad ; \quad \underline{Ans}: \ y(x) = c_1cos\sqrt{2x} + c_2sin\sqrt{2x}$

۸- با استفاده از تغییر تابع $y(x) = e^{x^2}u(x)$ معادله زیر را حل کنید.

$y'' - 4xy' + 4x^2y = cotg(\sqrt{2}x)e^{x^2}$

۹- معادله $x^4y'' + 2x^3y' + y = \frac{1+x}{x}$ را با تغییر متغیر $t = \frac{1}{x}$ حل کنید.

۲-۱۳- روشهای مشترک در حل معادلات خطی و غیرخطی

در ادامه به بررسی چند روش خاص می‌پردازیم که در صورت برقرار بودن شرایط آنها می‌تواند برای حل معادلات خطی و غیرخطی بکار گرفته شود. استفاده از این روشها محدودیتی به لحاظ خطی یا غیرخطی بودن معادله نداشته و صرفا کافی است شرط مورد نظر در هر یک را برآورده کرده باشد. یعنی یا فاقد y باشد, یا فاقد x و یا معادله همگن همراه با تابع همگن, که به ترتیب به بررسی هر یک می‌پردازیم.

۲-۱۳-۱- معادلات فاقد y

در این حالت با انتخاب $y' = z$ خواهیم داشت $y'' = z'$ و لذا:

$$y'' = f(x, y') \xrightarrow{y'=z\ \to y''=z'} z' = f(x, z) \quad ; \quad (x, y) \to (x, z)$$

که به یک معادله مرتبه اول بر حسب z تبدیل گردید.

مثال ۲-۲۸ معادله زیر را حل کنید.

$$x^2y'' + 2xy' - 1 = 0 \ ; \quad x > 0 \qquad \to \qquad x^2z' + 2xz - 1 = 0$$

$$\to (x^2z)' = 1 \to x^2z = x + c_1 \xrightarrow{z=y'} y' = \frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2} \to y = lnx - \frac{c_1}{x} + c_2 \ ■$$

توضیح: دقت شود که این معادله یک معادله کوشی-اویلر غیرهمگن نیز می‌باشد که در تمرینات خواسته شده است به این روش نیز آنرا حل کنید. ■

مثال ۲-۲۹ معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + \left(\frac{2}{x} - \frac{xsinx}{sinx - xcosx}\right)y' = 0 \to z' + \left(\frac{2}{x} - \frac{xsinx}{sinx - xcosx}\right)z = 0 \to z' + p(x)z = 0$$

$$z = c_1e^{-\int p(x)dx} \ ; \quad \int p(x)dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{xsinx}{sinx - xcosx}\right)dx = 2ln|x| - ln|sinx - xcosx|$$

که برای محاسبه انتگرال دوم از تغییر متغیر $u = sinx - xcosx$ استفاده شد که به $du = xsinx\ dx$ خواهد رسید.

$$z = c_1e^{-\int p(x)dx} = c_1e^{-2ln|x| + ln|sinx - xcosx|} = c_1\frac{sinx - xcosx}{x^2}$$

توجه شود که در واقع بایستی جواب بصورت قدرمطلق نوشته شود که با توجه به وجود ثابت c_1 نیازی نخواهد بود.

$$z = c_1\frac{sinx - xcosx}{x^2} \xrightarrow{z=y'} y = -c_1\frac{sinx}{x} + c_2 \ ■$$

توضیح: انتگرال آخر بصورت زیر با استفاده از روش جزء به جزء بدست آمده است:

$$\int \underbrace{sinx}_{u}\underbrace{\frac{dx}{x^2}}_{dv} - \int \frac{cosx}{x}\,dx = -\frac{sinx}{x} - \int \frac{-1}{x}cosxdx - \int \frac{cosx}{x}\,dx = -\frac{sinx}{x} \ ■$$

۲-۱۳-۲- معادلات فاقد x

در این حالت نیز $y' = z$ انتخاب شده و برای تعیین y'' بطریق زیر عمل می‌کنیم:

$$y'' = f(y, y') \xrightarrow{y'=z} y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy} \qquad ; \quad (x, y) \to (y, z)$$

ممکن است سوال شود به چه دلیل بعد از انتخاب $y' = z$ مشابه قسمت قبل $y'' = z'$ منظور نشده است. دقت شود در اینجا قرار است متغیر و تابع مساله به (y, z) تغییر یابد. چنانچه $y'' = z' = \frac{dz}{dx}$ نوشته شود متغیر x نیز وارد معادله شده است.

مثال ۲-۳۰ معادله زیر را حل کنید.

$$y'' = 2yy'^3 \;\; ; \;\; y' = z \to y'' = z\frac{dz}{dy} \to z\frac{dz}{dy} = 2yz^3 \quad ; \quad z = 0 \to \; y = k$$

$$z \neq 0 \to \frac{dz}{z^2} = 2ydy \to \frac{-1}{z} = y^2 + c_1 \xrightarrow{z=y'} -dx = (y^2 + c_1)dy \to y^3 = 3(c_2 - x - c_1 y)$$

که جواب $y = k$ یک جواب غیرعادی معادله است. ■

مثال ۲-۳۱ معادله $y'' - 9y = 0$ را با شرط $y(0) = 0$ و $y'(0) = 6$ حل کنید.

حل دیده میشود که این معادله فاقد x است, لذا خواهیم داشت:

$$y'' - 9y = 0 \;\; ; \;\; y' = z \to y'' = z\frac{dz}{dy} \to z\frac{dz}{dy} = 9y \to zdz = 9ydy \to \frac{1}{2}z^2 = \frac{9}{2}y^2 + c$$

در همینجا می‌توان با استفاده از شرایط اولیه, ثابت c را بدست آورد. خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}y'^2(0) = \frac{9}{2}y^2(0) + c \to \frac{1}{2}36 = \frac{9}{2}0 + c \to c = 18 \to y'^2 = 9y^2 + 36$$

حال بایستی این معادله مرتبه اول را حل کرد:

$$\underbrace{y'}_{z} = \pm 3\sqrt{y^2 + 4} \xrightarrow{y'(0)=6} y' = 3\sqrt{y^2 + 4} \to \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 4}} = 3dx \to sinh^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) = 3x + c$$

$$y(0) = 0 \to c = 0 \to sinh^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) = 3x \to y = 2sinh(3x) \;\blacksquare$$

توضیح: بدیهی است این معادله, یک معادله با ضرایب ثابت است که می‌توان آنرا مطابق آنچه در بخش ۲-۵ دیده شد, بصورت زیر و بسیار ساده‌تر از روش بالا حل کرد:

$$y'' - 9y = 0 \quad ; \; y(0) = 0 \quad ; \quad y'(0) = 6$$

$$r^2 - 9 = 0 \to r = \pm 3 \to y = c_1\,cosh(3x) + c_2\,sinh(3x) \xrightarrow{I.C.} \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 2 \end{cases} \to y = 2sinh(3x) \;\blacksquare$$

مثال ۲-۳۲ معادله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$yy'' + (y+1){y'}^2 = 0 \;\; ; \;\; y(0) = 1 \; ; \; y'(0) = e$$

$$\rightarrow yz\frac{dz}{dy} + (y+1)z^2 = 0 \;\; ; \quad z = 0 \rightarrow y = k \rightarrow y'(0) = 0 \quad \boxed{\times}$$

$$z \neq 0 \rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{y+1}{y}dy \rightarrow ln|z| = -y - ln|y| + c_1 \xrightarrow{z=y'} yy' = ce^{-y} \xrightarrow{I.C.} c = e^2$$

در اینجا نیز قبل از حل معادله مرتبه اول, با استفاده از شرایط اولیه ثابت c تعیین شد. در ادامه خواهیم داشت:

$$y\frac{dy}{dx} = e^{2-y} \rightarrow ye^y dy = e^2 dx \rightarrow e^y(y-1) = e^2x + c_2 \xrightarrow{I.C.} c_2 = 0 \rightarrow e^y(y-1) = e^2x \;\; \blacksquare$$

مثال ۲-۳۳ معادله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y' = y\frac{y''}{y'} + \left(\frac{y''}{y'}\right)^2 \quad ; \quad y(0) = -2 \; ; \; y'(0) = -1$$

$$y' = z \rightarrow y'' = z\frac{dz}{dy} \rightarrow \frac{y''}{y'} = \frac{z\frac{dz}{dy}}{z} = \frac{dz}{dy} \xrightarrow{Sub.} z = y\frac{dz}{dy} + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \rightarrow z = yz' + (z')^2$$

که یک معادله مرتبه اول غیرخطی است. در مقایسه با معادله $y = xy' + f(y')$ دیده میشود که این معادله, کلرو است, که در آن z تابع و y متغیر مساله است, یعنی $(x,y) \rightarrow (y,z)$. با انتخاب $z' = p$ و مشتق گیری نسبت به y خواهیم داشت:

$$z = yp + p^2 \xrightarrow{\frac{d}{dy}} p = p + y\frac{dp}{dy} + 2p\frac{dp}{dy} \rightarrow \frac{dp}{dy}(y+2p) = 0$$

بنابراین دو حالت زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} z = yp + p^2 \\ \dfrac{dp}{dy} = 0 \rightarrow z = c \end{cases} \rightarrow z = cy + c^2 \xrightarrow{z=y'} y' = cy + c^2 \xrightarrow{I.C.} c = 1 \rightarrow y' = y + 1$$

$$\rightarrow \frac{dy}{y+1} = dx \rightarrow ln|y+1| = x + c_1 \rightarrow |y+1| = ce^x \xrightarrow{I.C.} c = 1 \rightarrow |y+1| = e^x$$

$$\begin{cases} z = yp + p^2 \\ y + 2p \rightarrow p = -\dfrac{y}{2} \end{cases} \rightarrow z = -\frac{y^2}{2} + \left(-\frac{y}{2}\right)^2 = -\frac{y^2}{4} \xrightarrow{z=y'} y' = -\frac{y^2}{4} \rightarrow 4\frac{dy}{y^2} = dx$$

$$\rightarrow 4\frac{1}{y} = x + c \xrightarrow{I.C.} c = -2 \rightarrow y = \frac{4}{x-2} \;\; \blacksquare$$

۲-۱۳-۳- معادلات همگن با تابع همگن

فرض کنید هدف حل معادله دیفرانسیل همگن $f(x,y,y',y'')=0$ باشد که در آن خودِ تابع $f(x,y,y',y'')$ نیز نسبت به y و مشتقات آن (و نه x) همگن از مرتبه α باشد. به عبارتی:

$$f(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda^{\alpha} f(x,y,y',y'')$$

دقت شود که متغیر x به همان صورت باقی مانده است. برای حل چنین معادله‌ای یک تغییر تابع بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$y(x)=e^{\int v(x)dx}\rightarrow \begin{cases} y'=ve^{\int vdx}=vy \\ y''=v'y+vy'=v'y+v(vy)=(v'+v^2)y \end{cases} \quad ; \qquad (x,y)\rightarrow(x,v)$$

دقت شود با این تغییر تابع هم y' و هم y'' بر حسب y بدست آمد. در نتیجه با توجه به همگن بودن f نسبت به y و مشتقات آن, در تمام جملات معادله, ترم y^{α} ظاهر می‌شود که با حذف آن, به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول بر حسب v خواهیم رسید, که ممکن است قابل حل باشد.

مثال ۲-۳۴ معادله زیر را حل کنید.

$$y''=\frac{y'^2+6xy^2}{y}\rightarrow \underbrace{yy''-y'^2-6xy^2}_{f(x,y,y',y'')}=0$$

حل می‌توان کنترل کرد که تابع $f(x,y,y',y'')$ نسبت به y و مشتقات آن (و نه x) همگن از مرتبه 2 می‌باشد. چرا که:

$$f(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda^2 f(x,y,y',y'')\rightarrow\alpha=2 \quad ; \quad y=e^{\int vdx}\rightarrow y'=vy\rightarrow y''=(v'+v^2)y$$

$$yy''-y'^2-6xy^2=0\xrightarrow{sub.}y(v'+v^2)y-v^2y^2-6xy^2=0$$

$$\xrightarrow{y\neq0}v'=6x\rightarrow v=3x^2+c_1\rightarrow y=e^{\int(3x^2+c_1)dx}=e^{x^3+c_1x+c_2}=c_3e^{x^3+c_1x} \quad ■$$

توضیح: ممکن است بگوییم با این تعریف هر معادله به فرم (2) یک معادله با تابع همگن از مرتبه یک است. چرا که:

$$L[y]=0\rightarrow\underbrace{y''+p(x)y'+q(x)y}_{f(x,y,y',y'')}=0 \quad ; \quad f(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda^1 f(x,y,y',y'')$$

لذا به نظر می‌رسد بتوان هر معادله به فرم (2) را با این روش حل کرد. با جایگذاری y' و y'' بر حسب v و y خواهیم داشت:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0\rightarrow(v'+v^2)y+pvy+qy=0$$

$$\xrightarrow{y\neq0}(v'+v^2)+pv+q=0\rightarrow v'=-q(x)-p(x)v-v^2$$

که یک معادله مرتبه اول است, اما از نوع ریکاتی. به این معنی که حل این نیز مشخص نیست و بایستی یک جواب اولیه آنرا بدانیم. به عبارتی اگر برای معادله ریکاتی یک حل کامل در دست بود, هر معادله خطی همگن مرتبه دو (با ضرایب غیرثابت) را می‌توانستیم حل کنیم. در بخش ۳-۴-۱ به طریق دیگری ارتباط معادله ریکاتی و $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ را خواهیم دید. ■

تمرینات بخش ۲-۱۳

۱- معادلات زیر را حل کنید.

1) $xy'' + y' = x$; $\underline{Ans}$: $y = c_1 + c_2 lnx + x^2/4$

2) $xy'' = y' + x^5$; $y(1) = 0.5$; $y'(1) = 1$; $\underline{Ans}$: $24y = x^6 + 9x^2 + 2$

3) $3yy'' - 3y'^2 + 12y^2 = 0$; $\underline{Ans}$: $y = e^{-2x^2+c_1x+c_2}$

۲- معادله زیر را حل کنید.

$yy'' + y'^2 = 1$; $\underline{Ans}$: $y^2 - x^2 = c_1x + c_2$

راهنمایی: معادله را یکبار بصورت $(yy')' = 1$ نوشته و آنرا حل کنید. سپس از آنجا که معادله بالا فاقد x میباشد, آنرا با روشی که برای حل این نوع معادلات بیان شد, مجددا حل کنید.

۳- معادله مطرح شده در مثال ۲-۲۸ را به عنوان یک معادله کوشی-اویلر غیرهمگن درنظر گرفته و مجددا آنرا حل کنید.

۴- الف: ابتدا معادله غیرخطی زیر را با روش بخش ۲-۱۳-۳ حل کنید.

$4yy'' - 4y'^2 - 9xy^2 = 0$; $y(0) = 1$; $y(1) = e^{\frac{11}{8}}$; $\underline{Ans}$: $lny = \frac{3}{8}x^3 + x$

ب: به عنوان روش دوم, مساله را با استفاده از راهنمایی زیر نیز حل کنید.

$$\frac{4yy'' - 4y'^2}{y^2} = 9x \rightarrow \left(\frac{4y'}{y}\right)' = 9x$$

۲-۱۴- خلاصه

۱- معادله با ضرایب ثابت یا کوشی اویلر ۲- ممکن است معادله فاقد x یا y باشد

۳-کاهش مرتبه (یا یک جواب را داده باشند و یا قابل حدس باشد)

۴-کامل بودن معادله ۵-همگن بودن تابع

۶-استفاده از تغییر متغیر یا تغییر تابع مناسب و یا تبدیل به فرم متعارف (معمولا مساله به حالت ۱ میرسد)

اگر مساله با ضرایب ثابت یا کوشی اویلر باشد, برای تعیین جواب خصوصی از یکی از روشهای لاگرانژ یا ضرایب نامعین استفاده می‌شود. در روش کاهش مرتبه اگر یک جواب معادله همگن در دسترس باشد میتوان از فرمول (7) جواب کامل را بدست آورد و یا از فرمول (8) استفاده کرد که در اینصورت فقط جواب عمومی بدست آمده و بایستی جواب خصوصی را نیز محاسبه کرد. در بقیه حالات جواب معادله بطور کامل بدست آمده و نیازی نیست از $y = y_c + y_p$ استفاده شود.

جواب خصوصی معادلات غیرهمگن

۱-لاگرانژ (نیازی نیست ضرایب ثابت باشد, فقط بایستی دو جواب مستقل خطی معادله همگن متناظر را بدانیم)

۲-ضرایب نامعین(معادله با ضرایب ثابت برای فرمهای خاصی از تابع $g(x)$)

تمرینات دوره‌ای

۱- معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

1) $x^2y'' - 3xy' + 4y = lnx \quad (x > 0) \quad ; \quad \underline{Ans}:\ y = c_1x^2 + c_2x^2 lnx + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} lnx$

2) $x^2y'' - (x^2 - 2x + 2)y = 0 \ ; \ y_1 = \frac{e^x}{x} \ ; \ y(2) = 2 \ ; \ y'(2) = 1$

$\underline{Ans}\ :\ y = c_1\frac{e^x}{x} + c_2\frac{e^{-x}}{x}(2x^2 + 2x + 1) \xrightarrow{I.C.} y = 4\frac{e^{x-2}}{x}$

3) $y'' - 4y' + 4y = 2x^2 + 4xe^{2x} + xsin2x$

$\underline{Ans}: y_p = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{4} + \frac{2}{3}x^3e^{2x} - \frac{1}{16}sin2x + \left(\frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\right)cos2x$

4) $y'' = xy'^3 \quad ; \quad \underline{Ans}: x = c_1 \sin(y - c_2) \ ; \ y = k$

5) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0 \quad \left(\frac{1}{2}\ \text{بسل رتبه}\right) \ ; \ y = \frac{u}{\sqrt{x}} \ ; \ \underline{Ans}: u'' + u = 0$

6) $y'' + 2(tanhx)y' + 5y = 1 \quad ; \quad \underline{Ans}:\ y = \frac{1}{coshx}\left(c_1cos2x + c_2sin2x + \frac{coshx}{5}\right)$

7) $(x^2 - 2x)y'' + 4(x - 1)y' + 2y = 9e^{3x} \quad ; \quad \underline{Ans}: y = \frac{e^{3x} + c_1x + c_2}{x^2 - 2x}$

8) $x^2y'' + 3xy' + y = (lnx)^2 \ ; \ y(1) = 0 \ ; \ y'(1) = 1$

$\underline{Ans}: y = (lnx)^2 - \frac{6}{x} - \frac{lnx}{x} - 4lnx + 6$

9) $y'' - 2y' + y = 3 - 4\frac{e^x}{x} \quad (x > 0) \ ; \ \underline{Ans}: \quad y = c_1e^x + c_2xe^x + 3 + 4x(1 - lnx)e^x$

10) $x^2y'' + xy' + 2y = 9x + 22x^3 \quad (x > 0) \ ; \ \underline{Ans}:\ y_p(x) = 2x^3 + 3x$

11) $y'' - (y')^3 - y' = 0 \quad ; \quad \underline{Ans}: y = sin^{-1}(c_2e^x) + c_1$