۸- چندجمله‌ای تیلور و تقریب توابع

۸-۱- چند جمله‌ای تیلور

در این فصل بسط و چندجمله‌ای تیلور و سپس در فصل ۱۱ سری تیلور بررسی خواهد شد. سوال اصلی در بسط تیلور این است که آیا میتوان تابعی را که فرم چندجمله‌ای ندارد, بصورت یک چندجمله‌ای بسط داد؟ به‌عبارتی تابع را بر حسب توانهای x و یا در حالت کلی بر حسب توانهای $(x-a)$ نوشت؟ برای این منظور از قضیه اول حساب دیفرانسیل و انتگرال شروع میکنیم:

$$\int_a^x f'(x)\,dx = f(x) - f(a) \rightarrow f(x) = f(a) + \int_a^x f'(x)\,dx \qquad (1)$$

بار دیگر از این قضیه و این‌بار برای انتگرال $f''(x)$ استفاده میکنیم:

$$\int_a^x f''(x)\,dx = f'(x) - f'(a) \rightarrow f'(x) = f'(a) + \int_a^x f''(x)\,dx$$

دقت کنید رابطه اخیر با مشتق‌گیری از (1) بدست نیامده است. با جایگذاری $f'(x)$ رابطه جدید در (1) خواهیم داشت:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \left(f'(a) + \int_a^x f''(x)\,dx\right)dx$$

$$\rightarrow f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x \int_a^x f''(x)\,dxdx \quad (2)$$

چنانچه بار دیگر از قضیه عنوان شده برای انتگرال $f'''(x)$ استفاده کنیم, در نهایت:

$$\cdots \rightarrow f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x \int_a^x \left(f''(a) + \int_a^x f'''(x)\,dx\right)dxdx$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x \int_a^x \int_a^x f'''(x)\,dxdxdx \quad (3)$$

با ادامه همین روند در نهایت به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x)$$

و یا بطور خلاصه:

$$\boxed{f(x) = T_{n-1}(x) + R_n(x)}$$

$$\boxed{T_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\frac{f^{(k)}(a)}{k!}}_{c_k}(x-a)^k \;\; ; \;\; R_n(x) = \int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x f^{(n)}(x)\,(dx)^n}$$

در اینصورت می‌گوییم بسط تیلور تابع $f(x)$ را حول $x = a$ نوشته‌ایم. یعنی تابع بر حسب توانهای $(x-a)$ بیان شده است که در آن $T_{n-1}(x)$ چندجمله‌ای تیلور و $R_n(x)$ باقیمانده نامیده میشود. پس بسط تیلور مجموع چندجمله‌ای تیلور و یک باقیمانده است. اگر $a = 0$ انتخاب شود, بسط تیلور را بسط مک‌لوران مینامند.

بهتر بود رابطه ابتدایی در شروع درس را بصورت $\int_a^x f'(t)\,dt$ می‌نوشتیم که در اینصورت لازم است در هر گام یک متغیر صوری به انتگرال اضافه کنیم. در اینصورت هر کران $R_n(x)$ نیز یک متغیر جدید خواهد داشت که صرفا فرم نوشتن را طولانی‌تر میکند.

مشکل اینست که فعلا چیزی از $R_n(x)$ نمیدانیم جز آنکه به طریق زیر میتوانیم کرانهایی برای آن بیابیم.

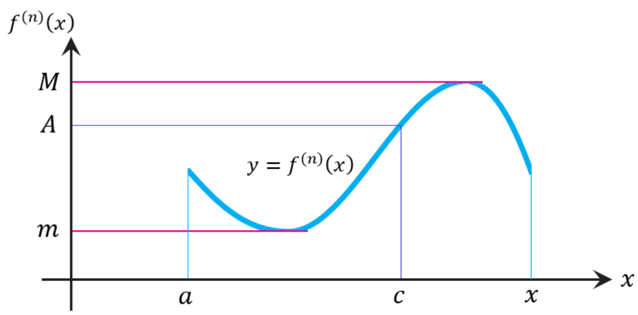
فرض کنید $f^{(n)}(x)$ در بازه $[a,x]$ پیوسته , در (a,x) مشتق پذیر و حداقل و حداکثر مطلق آن به ترتیب m و M باشد. در اینصورت:

$$m \le f^{(n)}(x) \le M \rightarrow \int_a^x \cdots \int_a^x m\,(dx)^n \le \int_a^x \cdots \int_a^x f^{(n)}(x)\,(dx)^n \le \int_a^x \cdots \int_a^x M\,(dx)^n$$

$$\frac{m}{n!}(x-a)^n \le R_n(x) \le \frac{M}{n!}(x-a)^n \rightarrow m \le \frac{n!}{(x-a)^n} R_n(x) \le M$$

با انتخاب عبارت وسط به عنوان A از آنجا که $f^{(n)}(x)$ پیوسته فرض شده است, لذا حداقل یک نقطه c در بازه (a,x) وجود خواهد داشت که $A = f^{(n)}(c)$ باشد (به شکل توجه شود) . در نتیجه:

$$R_n(x) = \frac{A}{n!}(x-a)^n \qquad (m < A < M) \quad \rightarrow \boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \quad a < c < x}$$



که به آن فرم لاگرانژ برای باقیمانده میگوییم. با این فرم باقیمانده میتوان گفت در بسط تیلور, هر جا بخواهیم میتوانیم بسط را قطع کنیم, به شرط آنکه در جمله انتهایی بجای $f^{(k)}(a)$ عبارت $f^{(k)}(c)$ را قرار دهیم.

دقت شود در نوشتن بازه بصورت $[a,x]$ فرض شده است که $a > x$ میباشد. اگر $a < x$ باشد, بازه را $[x,a]$ انتخاب میکنیم.
به هر حال c نقطهای بین x و a میباشد.
ممکن است سوال شود که فرم $R_n(x)$ نیز شبیه چندجملهایها است, $T_{n-1}(x)$ نیز چندجملهای بود, پس آیا توانستهایم هر تابعی(غیر چندجملهای) را بطور کامل(و نه حتی تقریب) بصورت چندجملهای بیان کنیم؟!
مشکل این است که هیچ چیزی از c نمیدانیم بجز آنکه در بازه (a,x) قرار دارد. بنابراین این تصور که گویا هر تابعی(غیر چندجملهای) را میتوان بطور کامل بر حسب چندجملهایها بیان کرد نادرست است.

توضیح ۱: در حالت خاص $n = 1$ به همان قضیه مقدار میانگین در مشتق(لاگرانژ) میرسیم.

$$f(x) = f(a) + \underbrace{\frac{f'(c)}{1!}(x-a)}_{R_1(x)} \rightarrow f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

در آنجا نیز چیزی از c نمیدانستیم جز اینکه در بازه (a,x) قرار داشت. گاهی اوقات c بصورت زیر نوشته میشود:

$$c = a + \theta(x-a) \quad (0 < \theta < 1)$$

توضیح ۲: بطور کلی اگر هدف تقریب یک تابع در یک بازه خاص باشد بهتر است a نقطه میانی بازه انتخاب شود تا با تعداد کمتری جمله بتوان تقریب بهتری یافت. معمولا هر چه نقطه انتخابی x از a دورتر انتخاب شود, بایستی تعداد جملات بیشتری از بسط را برای انطباق بهتر بر $f(x)$ انتخاب کرد, اما گاهی با زیاد کردن جملات, ممکن است تقریب بهتری بدست نیاید. در توضیح مثال ۴-۸ به این موضوع میپردازیم.

توضیح ۳: دیده میشود که شرط لازم برای داشتن بسط تیلور آن است که تابع $f(x)$ و تمام مشتقات آن از مرتبه اول تا nام، در بازه باز شامل $x = a$ موجود و پیوسته باشند. چنین تابعی را از کلاس C^n مینامیم. به همین شیوه در فصل ۱۱ خواهیم دید یک شرط لازم برای داشتن سری تیلور, آن است که تابع بینهایت بار مشتق‌پذیر باشد که چنین تابعی را تابع تحلیلی می‌نامیم.

توضیح ۴: با نوشتن یک تابع بصورت $f(x) = T_{n-1}(x) + R_n(x)$ میتوان گفت $T_{n-1}(x)$ معرف یک چندجمله‌ای از درجه $n-1$ میباشد که تابع $f(x)$ را تقریب میزند. در اینصورت $R_n(x)$ را خطای ناشی از این تقریب می‌نامیم. اگر $n = 2$ انتخاب شود, آنگاه $T_{n-1}(x) = T_1(x)$ در واقع همان تقریب خطی است که در فصل اول معرفی گردید. میتوان خطای ناشی از تقریب خطی در بحث دیفرانسیل را بصورت زیر بدست آورد:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$$

$$\Delta x = x - a \to \underbrace{f(a+\Delta x) - f(a)}_{\Delta y} - \underbrace{f'(a)\Delta x}_{dy} = \frac{f''(c)}{2!}\Delta x^2 \quad ; \quad (\Delta x \to dx)$$

$$\to |\Delta y - dy| \le \frac{|f''(c)|}{2}\Delta x^2 \quad ; \quad a < c < a + \Delta x$$

❋ توضیح ۵: گاهی اوقات باقیمانده بسط تیلور را به فرم دیگری نیز مینویسند که به فرم کوشی شناخته میشود.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\,dt = \frac{\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt}{(n-1)!}$$

$$\left(\exists\, c \in (a,b) \;:\; \int_a^x F(t)G(t)\,dt = F(c)\int_a^x G(t)\,dt\right)$$

مثال ۸-۱ الف: بسط مک‌لوران تابع $f(x) = e^x$ را در بازه $[-1,1]$ بدست آورید ($a = 0$) . ب: چند جمله از آنرا انتخاب کنیم تا خطا از 0.001 کمتر باشد. ج: عدد e را با خطایی کمتر از 10^{-6} بدست آورید.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \to f^{(n)}(0) = 1 \quad ; \quad R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n = \frac{e^c}{n!}x^n$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!}x^n$$

حال برای تعیین حدود $|R_n(x)|$, با توجه به اینکه ممکن است x از $a = 0$ کمتر یا بیشتر باشد, دو حالت را بررسی می‌کنیم:

$$a \le x \le 1 \xrightarrow{c\in(a,x)} 0 < c < x \le 1 \to |R_n(x)| \le \frac{e^c}{n!} \le \frac{e^1}{n!} \le 0.001 \to n \ge 7$$

$$-1 \le x \le a \xrightarrow{c\in(x,a)} -1 \le x < c < 0 \to |R_n(x)| \le \frac{e^c}{n!} \le \frac{e^0}{n!} \le 0.001 \to n \ge 7$$

یعنی در نهایت به $n \ge 7$ می‌رسیم. حال برای محاسبه عدد e کافی است در بسط e^x قرار دهیم $x = 1$.

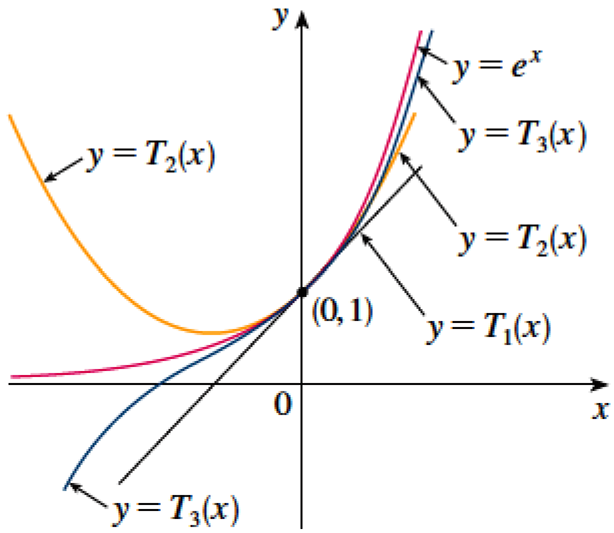
$$0 < c < x = 1 \;\; \rightarrow |R_n(1)| = \frac{e^c}{n!} < \frac{e}{n!} < 10^{-6} \rightarrow n \geq 10$$

$$\rightarrow e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{9!} \approx 2.718282 \;\; \blacksquare$$

توضیح: گفته شد که چندجمله‌ایهای تیلور را می‌توان تقریبهایی از تابع اصلی دانست. مثلا در مثال بالا:

$$T_0(x) = 1 \;\; ; \;\; T_1(x) = 1 + x \;\; ; \;\; T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \;\; ; \;\; \cdots$$

تابع و تقریبهای چندجمله‌ای آن در شکل زیر دیده میشود. چون این چند جمله‌ایها حول صفر نوشته شده‌اند دیده میشود هر چه از این نقطه دورتر شویم بایستی درجه $T_{n-1}(x)$ را برای انطباق بهتر بر e^x , بالاتر انتخاب کرد. ■



x	$x = 0.2$	$x = 3.0$
$T_2(x)$	1.220000	8.500000
$T_4(x)$	1.221400	16.375000
$T_6(x)$	1.221403	19.412500
$T_8(x)$	1.221403	20.009152
$T_{10}(x)$	1.221403	20.079665
e^x	1.221403	20.085537

مثال ۸-۲ یک تقریب مناسب چندجمله‌ای از درجه ۳ برای تابع $f(x) = e^{-x}$ را در بازه $[0.7,1.3]$ بدست آورید. میزان خطا را نیز محاسبه کنید.

حل در این سوال نقطه‌ای که قرار است بسط حول آن انجام شود یعنی a داده نشده است. از آنجا که هر چه از این نقطه دورتر شویم, تقریب دارای خطای بیشتری خواهد بود, بهتر است این نقطه را وسط بازه یعنی 1 انتخاب کنیم, تا خطای تقریب از دو سمت به حداقل برسد. در نتیجه:

$$f(x) = \underbrace{f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3}_{T_3(x)} + R_4(x)$$

با محاسبه مشتقات e^{-x} در نقطه $a = 1$ و جایگذاری خواهیم داشت:

$$f(x) \approx T_3(x) = e^{-1} - \frac{e^{-1}}{1!}(x-1) + \frac{e^{-1}}{2!}(x-1)^2 - \frac{e^{-1}}{3!}(x-1)^3$$

بدیهی است خطای حاصله برابر $R_4(x)$ خواهد بود. حال برای تعیین حدود $|R_n(x)|$, با توجه به اینکه ممکن است x از a کمتر یا بیشتر باشد, دو حالت را بررسی می‌کنیم.

$$a \leq x \leq 1.3 \xrightarrow{c\in(a,x)} 1 < c < 1.3 \rightarrow |R_4(x)| = \left|\frac{e^{-c}}{4!}(x-1)^4\right| \leq \frac{e^{-1}}{4!}0.3^4 = 0.000124$$

$$0.7 \leq x \leq a \xrightarrow{c\in(x,a)} 0.7 < c < 1 \rightarrow |R_4(x)| = \left|\frac{e^{-c}}{4!}(x-1)^4\right| \leq \frac{e^{-0.7}}{4!}0.3^4 = 0.000168 \;\; \blacksquare$$

توضیح: دیده شد برای حل این مساله از فرمول اصلی بسط تیلور استفاده شد, که در آن نیاز به مشتق‌گیری‌های متوالی خواهد بود. اما از آنجا که بسط مک‌لوران تابع e^x را میدانیم, میتوانیم بصورتی ساده‌تر, بدون آنکه نیاز به مشتق‌گیریهای متوالی داشته باشیم, مساله را حل کنیم. بطور کلی برای نوشتن بسط تیلور حول $x = a$ ساده‌تر است ابتدا تغییرمتغیر $t = x - a$ را اعمال کرده, سپس بسط مک‌لوران تابع جدید را حول $t = 0$ بدست آوریم. به عبارتی یک انتقال محورهای مختصات انجام میدهیم. مثلا برای مثال فوق خواهیم داشت:

$$t = x - a = x - 1 \to g(t) = e^{-(t+1)} = e^{-1}e^{-t}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + R_4(x) \to e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + R_4(-x) \;;\; R_4(-x) = e^{-c}\frac{x^4}{4!}$$

لذا متغیر تابع f بجای x متغیر t خواهد شد و همانگونه که در فصل ۱ دیده شد بهتر است نام تابع را نیز مثلا به g تغییر دهیم.

$$g(t) = e^{-1}\left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + e^{-c}\frac{t^4}{4!}\right) = e^{-1} - e^{-1}t + e^{-1}\frac{t^2}{2!} - e^{-1}\frac{t^3}{3!} + e^{-(c+1)}\frac{t^4}{4!}$$

که با جایگذاری $t = x - 1$ به همان نتیجه قبل می‌رسیم. دقت شود با این روش محاسبه $-0.3 \le t \le 0.3$ بوده و در نتیجه $0 < c < 0.3$ و $-0.3 < c < 0$ خواهد بود. ■

مثال ۸-۳ انتگرال $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ را با نوشتن ۵ جمله از بسط مک لوران تابع بصورت تقریبی بدست آورده,خطای حاصل را بیابید.

حل با توجه به بسط e^x در مثال ۸-۱ , با تبدیل x به x^2 خواهیم داشت:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{e^c}{5!}x^5 \to e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!}e^c$$

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!}e^c\right)dx$$

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx = x + \frac{x^3}{3\times 1!} + \frac{x^5}{5\times 2!} + \frac{x^7}{7\times 3!} + \frac{x^9}{9\times 4!} + \frac{x^{11}}{11\times 5!}e^c \Big|_0^1$$

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx = \underbrace{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{42} + \frac{1}{216}}_{\approx 1.4618} + \frac{1}{11\times 5!}e^c$$

$$0 \le x \le 1 \xrightarrow{c\in(a,x)} 0 < c < x \le 1 \to \underbrace{\left|\frac{1}{11\times 5!}e^c\right|}_{E} < \frac{e}{11\times 5!} = 0.0021$$

بنابراین $I \approx 1.4618$ میباشد. در فصل ۱۱ به مثالهای دیگری از حل تقریبی انتگرالها با استفاده از سریهای تیلور می‌پردازیم. ■

توضیح: توجه شود که تبدیل x به x^2 در واقع یک تغییر متغیر (Substitution) نیست بلکه صرفا یک جابجایی (Replacing) است. به این معنی که متغیر x را برداشته‌ایم و به جایش x^2 گذاشته‌ایم. اثبات درستی این کار نیز یکتایی بسط تیلور است, چرا که ضرایب بایستی از رابطه $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ بدست آیند. در مثال ۸-۹ به روش دیگری این یکتایی بررسی شده است. ■

مثال ۸-۴ بسط مک‌لوران تابع $f(x) = ln(1+x)$ را در بازه $[0,1]$ تا جمله x^9 بدست آورید. خطای حاصل از حذف باقیمانده را بیابید.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \to f''(x) = -1(1+x)^{-2} \to f'''(x) = (-2)(-1)(1+x)^{-3} \to \cdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \;\; ; \;\; R_{10}(x) = \frac{f^{(10)}(c)}{10!}(x-0)^{10} = -\frac{x^{10}}{10(1+c)^{10}} \;\; ; \;\; 0 < c < x$$

$$f(x) = T_9(x) + R_{10}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(9)}(0)}{9!}x^{n-1} + R_{10}(x)$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{x^9}{9} + \left(-\frac{x^{10}}{10(1+c)^{10}}\right)$$

$$0 \le x \le 1 \xrightarrow{c\in(a,x)} 0 < c < x \le 1 \to |R_{10}(x)| = \left|\frac{-x^{10}}{10(1+c)^{10}}\right| < \frac{1}{10}$$

دیده میشود که سرعت همگرایی آن بسیار کمتر از بسط e^x در مثال ۸-۱ است. یک علت می‌تواند عدم وجود فاکتوریل در مخرج کسر باقیمانده باشد. ■

توضیح ۱: آیا همواره با زیاد کردن جملات یک بسط به تقریب بهتری خواهیم رسید؟ اگر چه جواب اکثرا مثبت است, اما پاسخ درست به این سوال بستگی به میزان تغییرات $R_n(x)$ دارد. در مثال بالا با توجه به فرم باقیمانده به نظر میرسد چنانچه $x > 1$ انتخاب شود, جملات باقیمانده با اضافه شدن n زیاد شوند. مثلا فرض کنید بخواهیم با استفاده از بسط بالا $ln3$ را بدست آوریم. بنابراین در بسط بالا بایستی $x = 2 > 1$ انتخاب شود. این بسط را با نوشتن $T_1(x)$, $T_5(x)$ و $T_9(x)$ بدست می‌آوریم:

$$ln(1+x) = x + \left(-\frac{x^2}{2(1+c)^2}\right) \to T_1(2) = 2$$

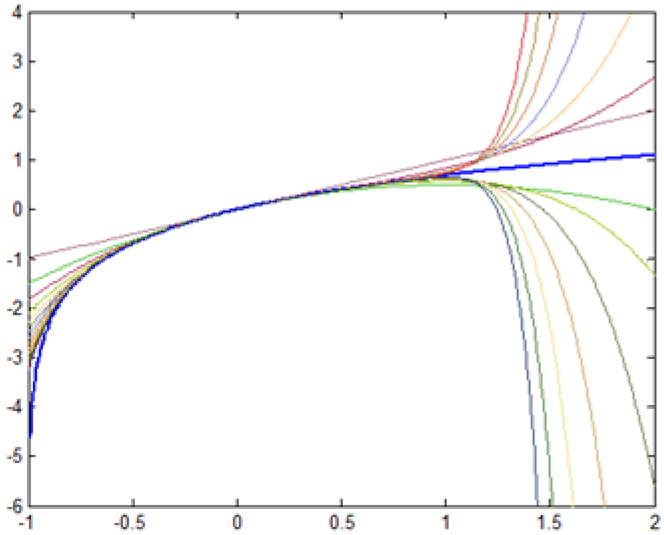
$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \left(-\frac{x^6}{6(1+c)^6}\right) \to T_5(2) = 5.067$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{x^9}{9} + \left(-\frac{x^{10}}{10(1+c)^{10}}\right) \to T_9(2) = 35.57$$

در حالیکه مقدار واقعی $ln3 = 1.098$ میباشد. یعنی به نظر می‌رسد با زیاد شدن جملات, تقریب بدتر میشود. علت اصلی آن است که با زیاد شدن جملات, مقدار باقیمانده نیز در حال زیاد شدن است. بنابراین میتوان گفت اگر قرار است با زیاد شدن جملات به تقریب بهتری برسیم, بایستی جمله باقیمانده با زیاد شدن جملات کوچکتر شود و در ایده‌آل ترین حالت $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)| = 0$ باشد. مثلا در مثال فوق برای این منظور بایستی $x \le 1$ انتخاب شود تا جمله باقیمانده با زیاد شدن جملات کوچکتر شود. این نکته مهم, ایده اصلی تبدیل بسط تیلور به سری تیلور است که در فصل ۱۱ بررسی خواهد شد.

توضیح ۲: در ادامه کد متلب مربوط به ترسیم تابع $ln(1+x)$ (منحنی پر رنگ) و چندجمله‌ایهای تیلور آن آمده است. همانگونه که توضیح قبل عنوان شد, دیده میشود برای مقادیر $x > 1$, با زیاد شدن جملات, چندجمله‌ای تیلور از تابع اصلی فاصله بیشتری می‌گیرد. ■

```
clear;clc
x=-1:0.01:2;
y1=log(1+x);
y2=0 ; j=1;
for n=1:100
    y2=y2+j*x.^n/n;j=-j;
    plot(x,[y1;y2]);
    axis([-1 2 -6 4]);
    hold on;shg;pause
end
```



مثال ۸-۵ بسط تیلور تابع $f(x)=x^2+3x-1$ را حول $x=1$ بیابید. یعنی آنرا بر حسب توانهای $(x-1)$ بیان کنید.

$$c_k=\frac{f^{(k)}(1)}{k!}\to c_0=f(1)=3\ ;\ \ c_1=\frac{f'(1)}{1!}=5\ \ ;\ \ c_2=\frac{f''(1)}{2!}=1\ \ ;\ \ \ c_k=0\ \ \ (k>2)$$

بدیهی است $f^{(n)}(c)$ نیز برابر صفر شده و لذا باقیمانده‌ای نیز نخواهیم داشت. در نتیجه:

$$\to f(x)=\underbrace{3}_{c_0}(x-1)^0+\underbrace{5}_{c_1}(x-1)^1+\underbrace{1}_{c_2}(x-1)^2\ \ \blacksquare$$

<u>توضیح</u>: در این مثال از آنجا که خودِ تابع, یک چندجمله‌ای است, استفاده از اتحادها ساده‌تر بوده و می‌توان بصورت زیر عمل کرد:

$$f(x)=x^2+3x-1=\big((x-1)+1\big)^2+3\big((x-1)+1\big)-1=(x-1)^2+5(x-1)+3$$

روش بهتر برای بسط حول $x=1$ همانگونه که گفته شد آن است که ابتدا تغییرمتغیر $t=x-1$ را اعمال کنیم. در اینصورت:

$$t=x-1\to g(t)=(t+1)^2+3(t+1)-1=t^2+5t+3$$

که با جایگذاری $t=x-1$ همان نتیجه قبل بدست می‌آید. یعنی در نهایت تابع بر حسب توانهای $(x-1)$ بیان شد.

دیده شد که تعداد جملات بسط در این مثال محدود است, به عبارتی از جایی به بعد (با نوشتن ۳ جمله بسط), باقیمانده صفر بدست آمد. دلیل آن این است که خود تابع از ابتدا به فرم چندجمله‌ای است و هدف بسط تیلور نیز بیان یک تابع بر حسب چندجمله‌ای بود. بنابراین اگر فرم خودِ تابع $f(x)$ بصورت چندجمله‌ای باشد, تعداد جملات حاصل از بسط آن محدود خواهد شد. مثلا بسط مک‌لوران $f(x)=x^3+6x$ به خودِ تابع می‌رسد, زیرا خودش بصورت چندجمله‌ای حول صفر است. ■

مثال ۸-۶ بسط مک‌لوران تابع $f(x)=sinx$ و $g(x)=cosx$ را بیابید.

$$f(x)=sinx\to f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k\ \ ;\ \ \ f^{(2k)}(0)=0$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{cosc}{n!}x^n\ \ \ \left(\text{برای } n \text{ های فرد}\right)$$

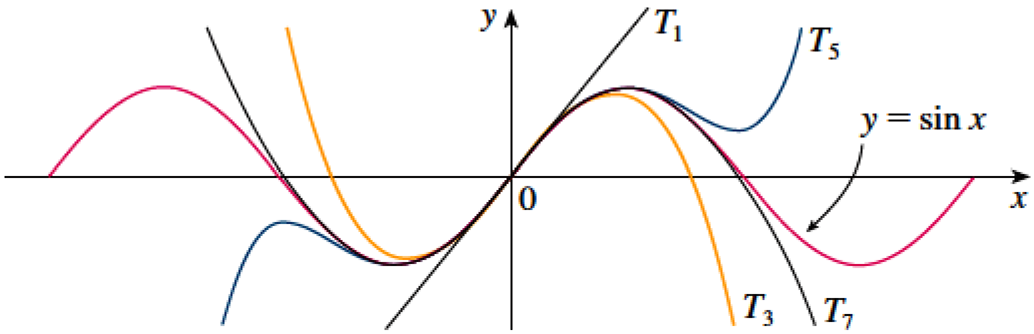
$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n(x)$$

$$sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{\frac{n-3}{2}}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{cosc}{n!}x^n$$

که در آن n عددی فرد است. دقت شود ضریب x^{n-1} برابر صفر است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد:

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{sinc}{n!} x^n$$

که در آن n عددی زوج است. در شکل زیر مقایسه تابع $sinx$ و چندجمله‌ایهای تیلور آن دیده میشود. ■



مثال ۸-۷ مقدار تقریبی $cos5^{\circ}$ را بدست آورده, خطای تقریب را بیابید.

حل چون 5° نزدیک صفر است بهتر است بسط تیلور را حول صفر بنویسیم تا جملات کمتری برای تقریب نیاز داشته باشیم. اگر از دو جمله بسط استفاده کنیم:

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + R_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{cosc}{4!} x^4 \xrightarrow{x=\pi/36} cos\left(\frac{\pi}{36}\right) \approx 1 - \frac{(\pi/36)^2}{2!} = 0.99619$$

$$|R_4(x)| = \left|\frac{cosc}{4!} x^4\right| \le \frac{|x|^4}{4!} < 2.5 \times 10^{-6} \quad ■$$

توضیح: ممکن است سوال شود اگر متوجه صفر بودن ضریب x^3 در بسط فوق نشویم, آنرا بصورت زیر می‌نویسیم:

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + R_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{sinc}{3!} x^3$$

توجه شود که این فرم نوشتن بسط که در آن خطا را بصورت $\frac{sinc}{3!} x^3$ بیان کرده‌ایم هیچ مشکلی ندارد. تنها ضعف آن این است که خطای بیشتری را برآورد می‌کند. چرا که:

$$|R_3(x)| = \left|\frac{sinc}{3!} x^3\right| \le \frac{|x|^3}{3!} < 1.11 \times 10^{-4} \quad ■$$

مثال ۸-۸ وقتی $|x| \le 0.3$, حداکثر خطای موجود در استفاده از تقریب $sinx \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ چقدر است؟ با این تقریب $sin(12^{\circ})$را تا ۶ رقم اعشار بیابید. به ازای چه مقدار از x این تقریب درحد 0.00005 دقیق است؟

$$|R_7(x)| = \left|-\frac{cosc}{7!} x^7\right| \le \left|\frac{x^7}{7!}\right| \le \frac{0.3^7}{7!} \approx 4.3 \times 10^{-8}$$

$$sin(12^{\circ}) = sin\left(\frac{\pi}{15}\right) \approx \frac{\pi}{15} - \left(\frac{\pi}{15}\right)^3 \frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{15}\right)^5 \frac{1}{5!} \approx 0.20791169$$

و با دقت ۶ رقم اعشار برابر 0.207912 میباشد. اما اگر بخواهیم خطا از 0.00005 کمتر شود, بایستی:

$$\left|\frac{x^7}{7!}\right| < 0.00005 \rightarrow |x| < 0.821 \quad ■$$

مثال ۸-۹ فرض کنید f تابعی است که در نقطه $x=0$ تا مرتبه n مشتق دارد. نشان دهید در اینصورت تنها یک و یک چندجمله‌ای P از درجه نابیشتر از n وجود دارد که در $n+1$ شرط زیر صدق میکند.

$$P(0)=f(0)\ ;\ \ P'(0)=f'(0)\ ;\ \ P''(0)=f''(0)\ ;\ \ \cdots\ \ ;\ \ P^{(n)}(0)=f^{(n)}(0)$$

حل به عبارتی به دنبال چندجمله‌ای هستیم که مشتقات مرتبه صفر تا nام آن با مشتقات تابع $f(x)$ یکسان باشد. فعلا فرض میکنیم هیچ اطلاعی از بسط تیلور نداریم. به عبارتی این سوال می‌تواند مستقلا در فصل اول (بحث مشتق تابع) نیز مطرح شود.

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$$

$$f(0)=P(0)=a_0\to a_0=\frac{f(0)}{0!}\quad ;\quad f'(0)=P'(0)=a_1\to a_1=\frac{f'(0)}{1!}$$

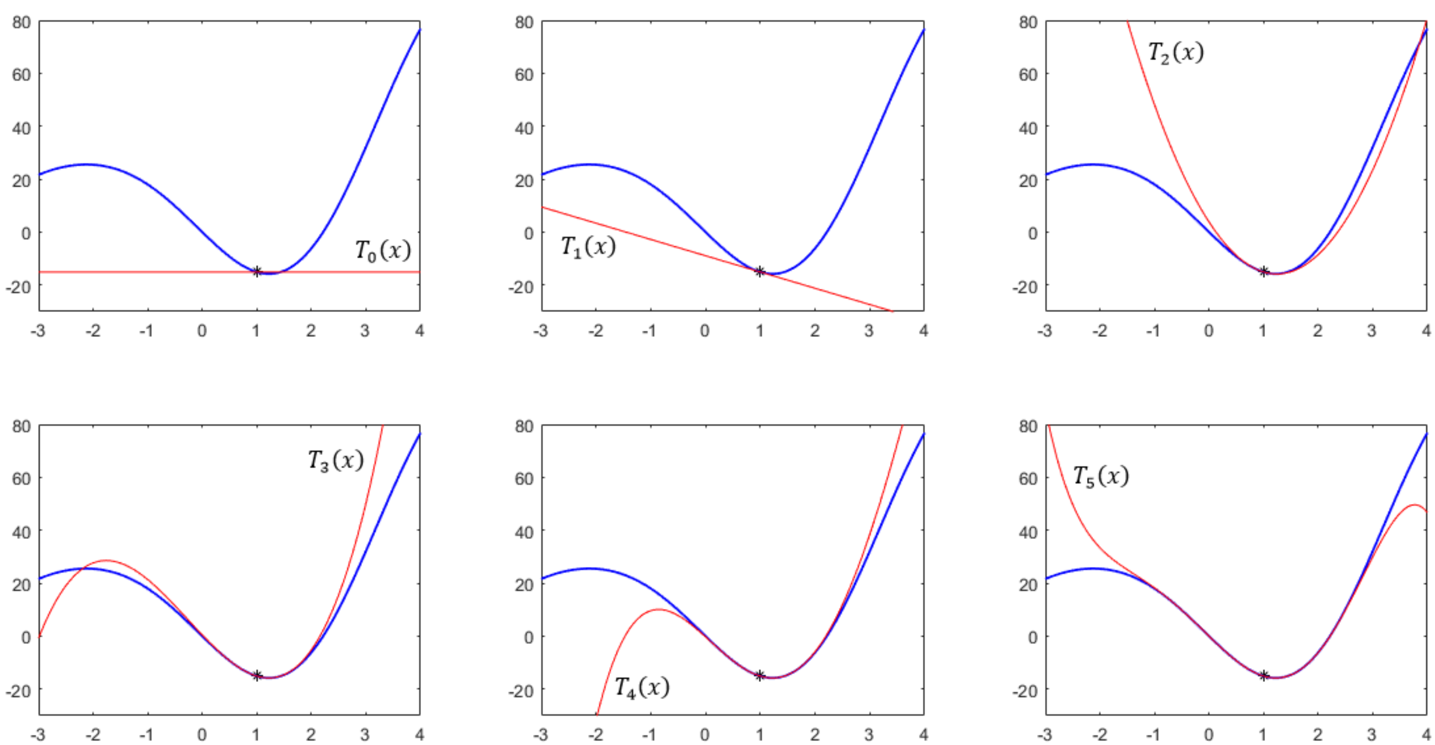
$$f''(0)=P''(0)=2a_2\to a_2=\frac{f''(0)}{2!}\quad ;\quad \cdots$$

$$f^{(n)}(0)=P^{(n)}(0)=a_nn!\to a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\quad\to\quad P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

دیده می‌شود این چندجمله‌ای دقیقا همان چندجمله‌ای تیلور تابع $f(x)$ حول $x=0$ می‌باشد. همینطور اگر بخواهیم یک چندجمله‌ای بیابیم که در $x=a$ مشتقات مرتبه صفر تا nام آن با مشتقات تابع $f(x)$ یکسان باشد, به چندجمله‌ای تیلور f حول $x=a$ می‌رسیم.

نتیجه مهم این مثال آن است که چندجمله‌ایهای تیلور بگونه‌ای هستند که در $T_0(x)$ مقادیر f ها,در $T_1(x)$ مقادیر f و f' , در $T_2(x)$ مقادیر f و f' و f'' , … و در $T_{n-1}(x)$ مقادیر f و f' و...و $f^{(n-1)}$ بین تابع اصلی و چندجمله‌ای یکسان می‌شود.

شکل زیر چندجمله‌ای تیلور یک تابع فرضی را حول $x=1$, همراه با ۶ جمله اول بسط تیلور آن نشان می‌دهد. ■



در ادامه بسط مک‌لوران چند تابع مهم آمده است. در همه روابط جمله آخر $R_n(x)$ می‌باشد.

Frequently used Maclaurin Expansions with remainder
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^c$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{(1-c)^{n+1}}$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \frac{(-1)^n x^n}{(1+c)^{n+1}}$
$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{cosc}{n!} x^n$ (n فرد)
$sinhx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{coshc}{n!} x^n$ (n فرد)
$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{sinc}{n!} x^n$ (n زوج)
$coshx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{sinhc}{n!} x^n$ (n زوج)
$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n(1+c)^n}$
$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots + \binom{m}{n-1} x^{n-1} + \binom{m}{n} (1+c)^{m-n} x^n$ $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} \quad ; \quad m \in \mathbb{R}$

۸-۱-۱- مثالهای تکمیلی

مثال ۸-۱۰ با استفاده از بسط تیلور نامساوی $x - \frac{x^2}{2} < ln(1+x) < x$ را برای $x > 0$ ثابت کنید.

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n(1+c)^n} \quad ; \quad 0 < c < x$$

$$n = 2 \rightarrow ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+c)^2} \rightarrow ln(1+x) < x$$

$$n = 3 \rightarrow ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3} \xrightarrow{0<c<x} x - \frac{x^2}{2} < ln(1+x) \quad \blacksquare$$

مثال ۸-۱۱ تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را با چندجمله‌ای تیلور از درجه ۲ تقریب بزنید. اگر $7 \le x \le 9$ این تقریب چقدر دقیق است؟

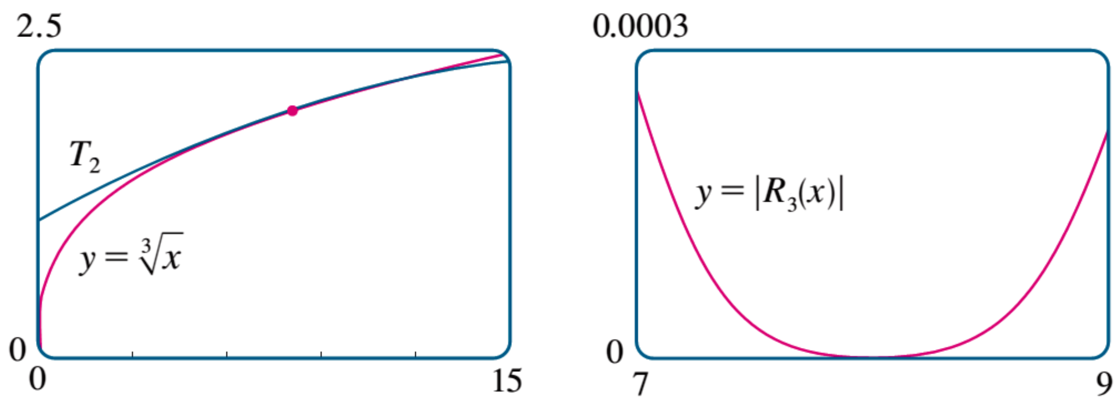
حل عنوان شد که برای رسیدن به تقریب مناسبتر, بهتر است نقطه‌ای که قرار است بسط حول آن انجام شود را وسط بازه یعنی در این مثال 8 انتخاب کنیم, تا خطای تقریب از دو سمت به حداقل برسد. بنابراین با انتخاب $a = 8$ خواهیم داشت:

$$T_2(x) = f(8) + \frac{f'(8)}{1!}(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2 \to \sqrt[3]{x} \approx 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2$$

اما با توجه به جمله باقیمانده بسط تیلور میتوان گفت:

$$\begin{cases} f^{(3)}(c) = \dfrac{10}{27}\dfrac{1}{c^{8/3}} \le \dfrac{10}{27}\dfrac{1}{7^{\frac{8}{3}}} < 0.0021 \\ 7 \le x \le 9 \to |x-8| \le 1 \end{cases} \to |R_3(x)| = \left|\frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-8)^3\right| < 0.0004$$

در شکل سمت چپ تقریب نمودار تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ با چندجمله‌ای $T_2(x)$ ارائه شده است. در شکل سمت راست نیز دیده میشود که با دور شدن از نقطه $a = 8$ مقدار تقریب بیشتر میشود. ■



توضیح ۱: با استفاده از بسط دوجمله‌ای (تمرین ۱) نیز میتوان این مثال را با تغییر متغیر $t = x - 8$ بصورت زیر حل کرد:

$$g(t) = \sqrt[3]{8+t} = 2\left(1+\frac{t}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 2\left(1 + \frac{1}{3}\frac{t}{8} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{t}{8}\right)^2 + R_3(t)\right)$$

$$g(t) = 2\left(1 + \frac{t}{24} - \frac{t^2}{9\times 64} + R_3(t)\right) \to f(x) = \underbrace{2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2}_{T_2(x)} + R_3(x)$$

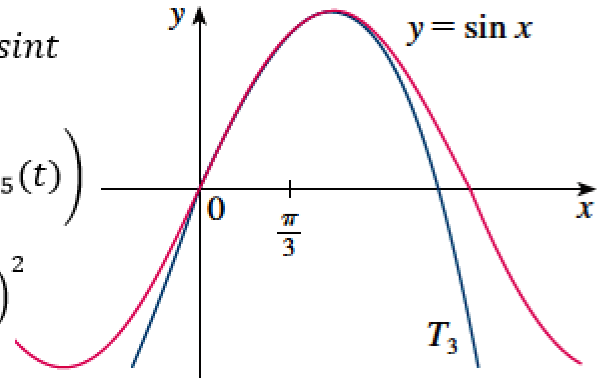
توضیح ۲: دقت شود هدف نهایی از نوشتن بسط تیلور حول نقطه a آن است که در نهایت تابع را بصورت چندجمله‌ای و بر حسب توانهایی از $(x-a)^n$ تقریب بزنیم. مثلا در مثال بالا دیده میشود که $T_2(x)$ تقریبی از $\sqrt[3]{x}$ حول نقطه $a = 8$ بوده و لذا فرم توانهای $(x-8)^n$ بیان شده است. ■

مثال ۸-۱۲ تابع $f(x) = sinx$ را حول $a = \frac{\pi}{3}$ بصورت یک چندجمله‌ای از درجه ۳ تقریب بزنید.

$$sinx = \underbrace{f\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3}_{T_3(x)} + R_4(x)$$

$$sinx = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\times 1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2\times 2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2\times 3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + R_4(x)$$ ■

توضیح: در شکل زیر مقایسه تابع $sinx$ و چندجمله‌ای $T_3(x)$ ارائه شده است. دیده میشود هر چه از نقطه $a=\frac{\pi}{3}$ دورتر شویم انطباق این دو نمودار کاهش می‌یابد. در کنار این شکل, روش دوم حل این مثال ارائه شده است. ■



$$t=x-\frac{\pi}{3}\to sin\left(\frac{\pi}{3}+t\right)=sin\left(\frac{\pi}{3}\right)cost+cos\left(\frac{\pi}{3}\right)sint$$

$$sin\left(\frac{\pi}{3}+t\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{t^2}{2!}+R_4(t)\right)+\frac{1}{2}\left(t-\frac{t^3}{3!}+R_5(t)\right)$$

$$t=x-\frac{\pi}{3}\to sinx=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2\times 2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2-\frac{1}{2\times 3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+R_4(x)$$

ترم $R_4(x)$ در انتهای رابطه به این دلیل نوشته شده است که جملات قبلی همگی بیانگر $T_3(x)$ بوده و جایگزینی برای $\frac{\sqrt{3}}{2}R_4(t)+\frac{1}{2}R_5(t)$ می‌باشد. ■

مثال ۸-۱۳ با استفاده از مثال قبل, مقدار تقریبی $sin54^\circ$ را با استفاده از تقریب $T_2(x)$ بدست آورید.

حل از آنجا که 54° به 60° نزدیک بوده و $sin60^\circ$ را میدانیم, از بسط این تابع حول $a=\frac{\pi}{3}$ استفاده می‌کنیم.

$$sinx\cong T_2(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2\times 1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2\times 2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2$$

$$sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)\cong T_2\left(\frac{3\pi}{10}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2\times 1!}\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2\times 2!}\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{\pi}{3}\right)^2=0.80892$$

در حالیکه مقدار $sin54^\circ$ با ۵ رقم اعشار برابر 0.80902 است. یعنی اختلاف 10^{-4} می‌باشد. یعنی صرفا با نوشتن سه جمله به چنین دقتی رسیدیم. ■

* توضیح ۱: فرض کنید بخواهیم میزان خطای ناشی از محاسبه بالا را بدون دانستن مقدار واقعی جواب, تخمین بزنیم. بدیهی است مقدار خطا $|R_3(x)|$ میباشد. از آنجا که $|f^{(3)}(c)|=|cosc|$ است, لذا یک کران بالا برای $|f^{(3)}(c)|$ عدد 1 میباشد. حال چون x مورد نظر سمت چپ a میباشد, در نتیجه:

$$c\in(x,a)\to\frac{3\pi}{10}<c<\frac{\pi}{3}\to|R_3(x)|=\left|\frac{f^{(3)}(c)}{3!}\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{\pi}{3}\right)^3\right|<1\times 1.92\times 10^{-4}$$

اما اگر بخواهیم میتوان کران بالای بهتری را برای $|f^{(3)}(c)|$ بصورت زیر بدست آورد.

$$\frac{3\pi}{10}<c<\frac{\pi}{3}\to|f^{(3)}(c)|=cosc<cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$$

از آنجا که مقدار تقریبی $sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ برابر 0.80892 بدست آمد, لذا مقدار تقریبی $cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ برابر است با:

$$cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)=\sqrt{1-0.80892^2}\cong 0.59<0.6\to|f^{(3)}(c)|=cosc<cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)<0.6$$

$$\rightarrow |R_3(x)| = \left|\frac{f^{(3)}(c)}{3!}\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{\pi}{3}\right)^3\right| < 0.6\times 1.92\times 10^{-4} = 1.15\times 10^{-4}$$

دیده میشود خطای واقعی یعنی 10^{-4} با اختلاف اندکی کمتر از محاسبه خطا با استفاده از $|R_3(x)|$ میباشد.

توضیح ۲: اگر از بسط تابع حول $a=0$ استفاده کرده و مشابه مثال حل شده از ۳ جمله بسط استفاده کنیم, خواهیم داشت:

$$sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) \cong \frac{3\pi}{10} - \frac{1}{3!}\left(\frac{3\pi}{10}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{3\pi}{10}\right)^5 = 0.79675$$

بنابراین در تقریب توابع, اگر نقطه‌ای که قرار است بسط حول آن نوشته شود یعنی a , نزدیک به نقطه مورد نظر سوال باشد, با نوشتن تعداد جملات یکسان, تقریب بهتری خواهیم داشت. مشروط بر آنکه مطابق آنچه در توضیح مثال ۸-۴ عنوان شد, با زیاد شدن جملات, مقدار باقیمانده افزایش نداشته باشد. ■

مثال ۸-۱۴ فرض کنید تابع $f(x)$ در I تعریف شده و بدانیم $f'(a)=f''(a)=f'''(a)=0$, در ارتباط با اکسترمم بودن نقطه $a\in I$ بحث کنید.

حل اگر c نقطه‌ای بین x و a باشد, آنگاه:

$$f(x) = f(a)+0+0+0+\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-a)^4 \rightarrow \begin{cases} if \;\; f^{(4)}(c)>0 \rightarrow f(x)>f(a) \\ if \;\; f^{(4)}(c)<0 \rightarrow f(x)<f(a) \end{cases}$$

بنابراین در حالت اول a مینیمم نسبی و در حالت دوم ماکزیمم نسبی است.

توضیح: اگر $f^{(n)}(x)$ در همسایگی a پیوسته باشد, پس یک همسایگی بسیار کوچک در اطراف a (که شامل نقطه‌ای مانند c میباشد) وجود دارد که $f^{(n)}(a)$ با $f^{(n)}(c)$ هم علامت باشد.

۱) اگر n زوج باشد و $f^{(n)}(a)>0$ پس $f^{(n)}(c)>0$, لذا $f(x)\geq f(a)$ یعنی a مینیمم نسبی است.

۲) اگر n زوج باشد و $f^{(n)}(a)<0$ پس $f^{(n)}(c)<0$, لذا $f(x)\leq f(a)$ یعنی a ماکزیمم نسبی است.

۳) اگر n فرد باشد علامت $(x-a)^n$ در دو سمت نقطه a متغیر است. در اینحالت a نقطه عطف است. ■

مثال ۸-۱۵ نشان دهید عدد نپر یک عدد گنگ است.

حل فرض میکنیم این عدد, عددی گویا باشد, یعنی $e=\frac{p}{q}$ که $(p,q)=1$. حال تابع e^x را تا جمله $n>q$ بسط می‌دهیم:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$x=1\rightarrow e=\frac{p}{q}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!} \;\;;\;\; (p,q)=1 \;\;;\;\; \underbrace{0}_{a}<c<\underbrace{1}_{x}$$

$$\xrightarrow{\times n!} n!\,e = \underbrace{n!\frac{p}{q}}_{\in\mathbb{Z}} = \underbrace{n!+n!+\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}+\cdots+\frac{n!}{n!}}_{\in\mathbb{Z}}+\frac{n!\,e^c}{(n+1)!} \rightarrow \frac{e^c}{n+1}\in\mathbb{Z}$$

$$0<c<1\rightarrow e^0=1<e^c<e^1\approx 2.718 \;\;;\;\; n>q\rightarrow n\geq 2\rightarrow 0<\frac{e^c}{n+1}<1$$

از آنجا که $0<\frac{e^c}{n+1}<1$ لذا این کسر نمی‌تواند عددی صحیح باشد, بنابراین فرضِ گویا بودن عدد نپر نادرست است. ■

تمرینات بخش ۸-۱

۱- بسط مک‌لوران تابع $(1+x)^m$ که در آن $m \in \mathbb{R}$ میباشد را بدست آورید. این بسط تحت عنوان بسط دوجمله‌ای نیز شناخته می‌شود. نشان دهید اگر $m=n$ باشد, این بسط پس از $m+1$ جمله خاتمه یافته و جمله باقیمانده برابر صفر خواهد شد.

$$\underline{Ans}:\quad (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \binom{m}{n-1}x^{n-1} + \binom{m}{n}(1+c)^{m-n}x^n$$

۲- با استفاده از بسط مک‌لوران توابع $ln(1+x)$ و $ln(1-x)$, بسط مک‌لوران تابع $tanh^{-1}x$ را بیابید. $(|x|<1)$

$$\underline{Ans}:\quad tanh^{-1}x = \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+3}(x)$$

بار دیگر همین مساله را مشابه مثال ۸-۱ با مشتق‌گیری متوالی از تابع $tanh^{-1}x$ حل کنید.

۳- بسط مک‌لوران $f(x) = ln\sqrt{(1-x^2)^x}$ را بدست آورید.

$$\underline{Ans}:\quad f(x) = -\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{4} - \frac{x^7}{6} - \frac{x^9}{8} - \cdots - \frac{x^{2n+1}}{2n} + R_{2n+3}(x)$$

۴- چند جمله‌ای تیلور درجه 4 تابع $f(x) = cos(sinx)$ را بیابید. $\underline{Ans}:\quad T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}$

۵- بسط مک‌لوران $f(x) = a^{cosx}$ را تا درجه 4 بیابید.

$$\underline{Ans}:\quad T_4(x) = a - \frac{aLna}{2}x^2 + \frac{aLna + 3a(Lna)^2}{24}x^4$$

۶- با استفاده از بسط e^x بسط تابع $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ را تا درجه 4 بیابید.

$$\underline{Ans}:\ f(x) = e^{\frac{1}{x}ln(1+x)} = e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} - \frac{7x^3}{16} + \left(\frac{1}{5} + \frac{13}{72} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24\times 16}\right)x^4 + R_5(x)\right)$$

۷- با کمک بسط $cosx$ حول $a=\frac{\pi}{2}$, مقدار تقریبی $cos80^{\circ}$ را همراه با خطای آن با استفاده از تقریب $T_3(x)$ بدست آورید.

$$\underline{Ans}:\ cos80^{\circ} = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 \approx 0.17365 \qquad ; \qquad E = |R_4(x)| \le \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 \approx 10^{-6}$$

۸- با استفاده از بسط تیلور نامساویهای زیر را ثابت کنید.

1) $tanx > x + \dfrac{x^3}{3}\ \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$; 2) $1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{x}{2}\ \ (x>0)$

3) $coshx \ge 0.5x^2 + 1\ \ (\forall x)$

۹- اگر تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی با مشتق پیوسته باشد, با استفاده از بسط تیلور تابع $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ نشان دهید حداقل یک $c \in (0,1)$ وجود دارد بطوریکه:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = f(0) + \frac{1}{2}f'(c)$$

۸-۲- هم‌ارزی

تعریف: فرض کنید توابع $f(x)$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشند. اگر $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ می‌گوییم دو تابع در نزدیکی $x=a$ هم‌ارزند و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1\to f\approx g \qquad (x\to a)$$

مثلا برای $f(x)=sinx$ میتوان در مجاور صفر $g(x)=tanx$ یا $g(x)=x$ را به عنوان هم ارز انتخاب کرد, زیرا حد تقسیم آنها مجاور صفر برابر یک است. اما اغلب به دنبال $g(x)$ به شکل چندجمله‌ای هستیم, چرا که کار کردن با آن ساده‌تر است, لذا $g(x)=x$ به عنوان هم ارز مناسبتر است.

فرض کنید تابع $f(x)$ حول $x=a$ دارای بسط تیلور بوده و مشتقات مرتبه صفر تا $n-1$ ام آن در $x=a$ برابر صفر و $f^{(n)}(a)\neq 0$ باشد, در اینصورت با نوشتن بسط تیلور با باقیمانده $R_{n+1}(x)$ خواهیم داشت:

$$f(x)=\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{0}+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

در اینصورت با تعریف $g(x)$ بصورت زیر خواهیم داشت:

$$g(x)\equiv\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\to\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1\to f(x)\approx\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (x\to a)$$

بنابراین اولین جمله‌ای که در چندجمله‌ای تیلور یک تابع باقی می‌ماند, بیانگر هم‌ارزی آن عبارت در $x=a$ می‌باشد. همچنین در اینصورت آنچه از $f(x)$ باقی مانده است بر $(x-a)^n$ بخش پذیر خواهد بود, لذا می‌توان گفت $x=a$, صفر مرتبه nام تابع $f(x)$ میباشد. به بیان دیگر اگر مشتقات مرتبه صفر تا $n-1$ ام تابع $f(x)$ در $x=a$ برابر صفر گردد و $f^{(n)}(a)\neq 0$ باشد, آنگاه $x=a$ را صفر مرتبه nام تابع $f(x)$ می‌گوییم.

مثال ۸-۱۶ برای توابع زیر یک هم ارزی در مجاور صفر بدست آورده, تعیین کنید عدد صفر چند بار تابع را صفر میکند.

$$1)\ f(x)=x-sinx \quad ; \quad f(0)=f'(0)=f''(0)=0 \quad ; \quad f'''(0)=1\neq 0$$

$$\to f(x)\approx\frac{f'''(0)}{3!}x^3=\frac{1}{6}x^3 \quad (x\to 0) \quad\to\quad Order\ at\ zero\ is\ 3\ \blacksquare$$

توضیح: روش دوم آن است که مشابه آنچه در اثبات بالا دیده شد از بسط تیلور حول صفر استفاده کنیم. در اینصورت:

$$f(x)=x-sinx=x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+R_5(x)\right)=\frac{x^3}{6}-R_5(x)\to f(x)\approx\frac{1}{6}x^3$$

دقت شود اگر جملات بسط را کمتر نوشته و فقط یک جمله از $sinx$ را بنویسیم, هیچ چندجمله‌ای باقی نمی‌ماند:

$$f(x)=x-sinx=x-(x+R_3(x))$$

در اینصورت همه جملات حذف شده و فقط باقیمانده میماند, لذا نمی‌توان برای آن هم ارزی تعیین کرد و بایستی به جملات بسط اضافه کرد تا حداقل یک جمله بجز باقیمانده باقی بماند. ■

$$2)\ f(x)=cosx-\sqrt[3]{cosx} \quad ; \quad f(0)=f'(0)=0 \quad ; \quad f''(0)=\frac{-2}{3}\neq 0$$

$$\to f(x)\approx\frac{f''(0)}{2!}x^2=\frac{-x^2}{3} \quad (x\to 0) \quad\to\quad Order\ at\ zero\ is\ 2\ \blacksquare$$

$$3)\ f(x) = sinx + sinhx - 2x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_7(x) + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_7(x) - 2x$$

توجه شود $R_7(x)$ های نوشته شده مستقل از هم بوده و صرفا برای بیان باقیمانده بکار گرفته شده‌اند.

$$\rightarrow f(x) = \frac{2}{5!}x^5 + R_7(x) \rightarrow f(x) \approx \frac{2}{5!}x^5\ \ (x \rightarrow 0) \rightarrow Order\ at\ zero\ is\ 5\ \blacksquare$$

توضیح: دیده شد در قسمت سوم این مثال, نوشتن بسط, ساده‌تر از استفاده از تعیین مشتقات متوالی, مرتبه صفر بودن تابع را مشخص میکند. دقت شود در اینجا نیز اگر جملات بسط را کمتر می‌نوشتیم هیچ چندجمله‌ای باقی نمی‌ماند:

$$f(x) = sinx + sinhx - 2x = x - \frac{x^3}{3!} + R_4(x) + x + \frac{x^3}{3!} + R_4(x) - 2x$$

در اینصورت همه جملات حذف شده و فقط باقیمانده میماند, به همین جهت لازم بود جملات بسط را حداقل تا x^5 بنویسیم. $\blacksquare$

چند هم ارزی مهم: اگر $f(x) \rightarrow 0$ در اینصورت:

$$1)\ \ \begin{matrix} sin \\ tan \end{matrix}\big(f(x)\big) \approx f(x)\ \ ;\ \ \begin{matrix} sin^{-1} \\ tan^{-1} \end{matrix}\big(f(x)\big) \approx f(x)\qquad ;\qquad 2)\ \ 1 - cos\big(f(x)\big) \approx f^2(x)/2$$

$$3)\ \ ln\big(1 + f(x)\big) \approx f(x)\qquad ;\qquad 4)\ \ a^{f(x)} - 1 \approx f(x)lna\quad (a > 0)$$

$$5)\ \ (1 + f(x))^p - 1 \approx pf(x) \xrightarrow{p=1/n} \sqrt[n]{1 + f(x)} - 1 \approx f(x)/n$$

بعنوان نمونه می‌توان درستی قسمت ۴ را به دو روش زیر بررسی کرد:

$$\lim_{f(x)\rightarrow 0} \frac{a^{f(x)} - 1}{f(x)lna} = \lim_{t\rightarrow 0} \frac{t}{ln(t+1)} = \lim_{t\rightarrow 0} \frac{1}{ln(t+1)^{1/t}} = 1$$

$$\underline{or}:\ a^{f(x)} - 1 = e^{f(x)lna} - 1 = e^t - 1 = \big(1 + t + R_2(t)\big) - 1 = t + R_2(t)$$

که در آن از بسط e^t حول صفر استفاده شده است. بنابراین اولیه جمله بسط که همان $t = f(x)lna$ میباشد, بیانگر هم‌ارزی مورد نظر خواهد بود.

۸-۳- معرفی نماد o کوچک

تعریف: فرض کنید توابع $f(x)$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشند. اگر $\lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ می‌گوییم $f(x)$ از مرتبه‌ای کوچکتر از $g(x)$ در نزدیکی $x = a$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \rightarrow f = o(g)\qquad (x \rightarrow a)$$

نماد o اصطلاحا بنام o کوچک (Little − o notation) شناخته میشود. بدیهی است با این تعریف, برای $o(g)$ میتوان بی‌شمار f در نظر گرفت. مثلا در نزدیکی $x = 0$ می‌توان گفت $o(x^2) = x^3$ و یا $o(x^2) = sin^4x$ و ...

در جبر oها وقتی $x \rightarrow a$ روابط زیر قابل اثبات می‌باشند:

$$1)\ \ o\big(g(x)\big) \pm o\big(g(x)\big) = o\big(g(x)\big)\qquad ;\qquad 2)\ \ o\big(cg(x)\big) = o\big(g(x)\big)\qquad c \neq 0$$

$$3)\ \ o\Big(o\big(g(x)\big)\Big) = o\big(g(x)\big)\qquad ;\qquad 4)\ \ f(x) \times o\big(g(x)\big) = o\big(f(x)g(x)\big)$$

بعنوان مثال برای اثبات اولین رابطه, فرض کنید در نزدیکی $x=a$, اولین o برابر $o(g(x))=f_1(x)$ و دومین o برابر $o(g(x))=f_2(x)$ باشد, در اینصورت:

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)\pm f_2(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g(x)}\pm\lim_{x\to a}\frac{f_2(x)}{g(x)}=0\to f_1(x)\pm f_2(x)=o\big(g(x)\big)$$

با این تعریف بدیهی است $\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^m}$, فقط برای $n\geq m$ برابر صفر است و اگر $n<m$ باشد, مقدار مشخصی نخواهد داشت. چرا که:

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^m}=\begin{cases}0 & n\geq m\\ ? & n<m\end{cases}\quad ;\quad \text{مثال}:\ \lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^4}\to\begin{cases}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^4}=\infty\\ \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1\\ \lim_{x\to 0}\frac{x^5}{x^4}=0\end{cases}$$

بعنوان مثال دیگر در نزدیکی $x=0$ خواهیم داشت:

$$o(x^3)\pm o(x^4)=o(x^3)\quad ;\quad \text{زیرا}:\ \lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)\pm o(x^4)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}\pm\lim_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{x^3}=0$$

* توضیح: لازم بذکر است گاهی در کنار نماد o کوچک, نماد دیگری تحت عنوان O بزرگ (Big − O notation) نیز دیده می‌شود که تعریف متفاوتی دارد. رابطه $f(x)=O(g(x))$ وقتی $x\to a$ به این معنی است که به ازای هر x در همسایگی a , نامساوی $|f(x)|\leq C|g(x)|$ برقرار است که در آن C یک ثابت دلخواه می‌باشد. بعنوان نمونه $f(x)=O(1)$ وقتی $x\to a$ بیانگر آن است که $f(x)$ در همسایگی a یک تابع کراندار است.

۸-۳-۱- فرم دیگر نمایش باقیمانده بسط تیلور

با این تعریف می‌توان فرم دیگری را برای نمایش باقیمانده بسط تیلور برای وقتی x در مجاور a میباشد ارائه داد:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n\to 0\leq|R_n(x)|\leq\frac{M}{n!}|x-a|^n$$

$$\to 0\leq\lim_{x\to a}\left|\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n-1}}\right|\leq\lim_{x\to a}\frac{M}{n!}|x-a|=0\to\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n-1}}=0$$

$$\to\boxed{R_n(x)=o((x-a)^{n-1})}\quad (x\to a)$$

یعنی چنانچه $x\to a$, جمله باقیمانده از مرتبه‌ای کوچکتر از $(x-a)^{n-1}$ میباشد. به عنوان مثال:

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\quad (x\to 0)\ ;\ sinx=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\quad (x\to 0)$$

دقت شود $o(x^n)$ با $-o(x^n)$ تفاوتی ندارد. همچنین بسط دوجمله‌ای نیز (مجاور صفر) بصورت زیر خواهد شد:

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\binom{m}{n-1}x^{n-1}+o(x^{n-1})\quad (x\to 0)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+o(x)\quad (x\to 0)\qquad or:\quad (1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\quad (x\to 0)$$

توضیح: بهتر است برای بسط $sinx$ با توجه به اینکه در بسط آن ضریب x^4 صفر میباشد, $o(x^4)$ نوشته شود. هر چند $o(x^3)$ نیز اشتباه نیست, چرا که در مجاور $x=0$ هر تابعی که $o(x^4)$ باشد قطعا $o(x^3)$ نیز خواهد بود.

مثال ۸-۱۷ بسط مک‌لوران تابع $sin^2x - x^2e^{-x}$ را تا مرتبه‌ای بنویسید که درجه کوچکی آن نسبت به x برابر 4 باشد.

$$f(x) = sin^2x - x^2e^{-x} = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2 - x^2\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right)$$

$$f(x) = \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - \left(x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2!} + o(x^4)\right) = x^3 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4) \ \blacksquare$$

توضیح ۱: می‌توانستیم عبارت sin^2x را بصورت $\frac{1-cos2x}{2}$ نوشته و از بسط $cos2x$ نیز جواب را بدست آوریم. فقط در انتها جملات بایستی بر حسب x^n مرتب شوند.

توضیح ۲: بعنوان یک کاربرد جنبی, همواره میتوان با داشتن سری, به طریق معکوس مشتقات مرتبه بالاتر را بدون مشتق‌گیری بدست آورد. مثلا اگر هدف محاسبه مشتق چهارم $f(x)$ در $x=0$ باشد, میتوان گفت که ضریب x^4 در سری مک‌لوران $\frac{f^{(4)}(0)}{4!}$ است. از طرف دیگر در سری نوشته شده در بالا این ضریب برابر $-\frac{5}{6}$ بدست آمد. در نتیجه از مساوی قرار دادن این‌دو خواهیم داشت:

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -\frac{5}{6} \to f^{(4)}(0) = -20 \ \blacksquare$$

توضیح ۳: فرض کنید هدف محاسبه حد زیر باشد. با توجه به بسط مک‌لوران $sin^2x - x^2e^{-x}$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to0}\frac{sin^2x - x^2e^{-x} - x^3}{x^4} = \lim_{x\to0}\frac{x^3 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4) - x^3}{x^4} = -\frac{5}{6} + \lim_{x\to0}\frac{o(x^4)}{x^4} = -\frac{5}{6} + 0 = -\frac{5}{6}$$

حال فرض کنید در نوشتن بسط مک‌لوران تابع, صرفا آنرا تا x^3 نوشته باشیم, در اینصورت:

$$\lim_{x\to0}\frac{sin^2x - x^2e^{-x} - x^3}{x^4} = \lim_{x\to0}\frac{x^3 + o(x^3) - x^3}{x^4} = \lim_{x\to0}\frac{o(x^3)}{x^4} = ?$$

به عبارتی تکلیف جواب مشخص نیست و در واقع بایستی آنرا تا همان x^4 (یعنی مرتبه مخرج) بسط می‌دادیم. در کل می‌توان گفت در محاسبه حدود, زیاد نوشتنِ جملات بسط هیچگاه مشکل ایجاد نمی‌کند و اشکال زمانی ایجاد می‌شود که جملات کمتر از تعداد مورد نیاز باشد.

حال فرض کنید بخواهیم با استفاده از هم‌ارزیها مساله را حل کنیم. با توجه به اینکه در مجاور صفر $e^{-x} \approx 1 - x$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to0}\frac{sin^2x - x^2e^{-x} - x^3}{x^4} = \lim_{x\to0}\frac{x^2 - x^2(1-x) - x^3}{x^4} = \lim_{x\to0}\frac{0}{x^4} \quad \boxtimes$$

در واقع عدد صفر که در صورت ایجاد شده است نادرست بوده و بایستی همان $o(x^3)$ می‌نوشتیم که با توجه به اینکه از نماد o استفاده نشده است, در صورت کسر دیده نمی‌شود. به عبارتی در محاسبه حدود, استفاده از هم ارزیها ممکن است ما را به جواب نادرست برساند. در مثال ۸-۲۶ مسائل متعددی از محاسبه حدود ارائه خواهد شد. ■

مثال ۸-۱۸ بسط مک‌لوران تابع $f(x) = ln\left(\frac{sinx}{x}\right)$ را تا جمله x^6 بنویسید.

حل همانگونه که قبلا هم ذکر شد هدف نهایی بسط مک‌لوران آن است که تابع بصورت توانهای x نوشته شود. برای این منظور:

$$f(x) = ln\left(1 + \left(\frac{sinx}{x} - 1\right)\right) = ln\left(1 + \frac{sinx - x}{x}\right)$$

$$t = \frac{sinx - x}{x} = -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + o(x^7) \ \ ; \ ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \underbrace{o(t^3)}_{o(x^6)}$$

$$= \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + o(x^7)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{3!} + o(x^3)\right)^3$$

$$f(x) = -\frac{x^2}{3!} + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{2 \times (3!)^2}\right)x^4 + \left(-\frac{1}{7!} + \frac{1}{3!\,5!} - \frac{1}{3 \times (3!)^3}\right)x^6 + o(x^6) \ \ ■$$

مثال ۸-۱۹ با توجه به بسط مک‌لوران تابع $f(x) = ln(1+x)$ بسط مک‌لوران تابع $g(x) = \frac{1}{1+x}$ را بنویسید.

حل با مشتق‌گیری از بسط $ln(1+x)$ خواهیم داشت:

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1} + o(x^{n-1})$$

$$\rightarrow \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-2}x^{n-2} + o(x^{n-2})$$

دقت شود که با مشتق‌گیری یک مرتبه از توان x در $o(x^{n-1})$ کاسته میشود. (این موضوع را ثابت کنید) ■

مثال ۸-۲۰ با توجه به بسط مک‌لوران تابع $f(x) = \frac{1}{1+x}$ بسط مک‌لوران تابع $g(x) = tan^{-1} x$ را بنویسید.

حل با تعویض x به t^2 در بسط تابع $f(x)$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{2n-2} + o(t^{2n-1})$$

از آنجایی که ضریب t^{2n-1} برابر صفر است از $o(t^{2n-1})$ استفاده شده است. هرچند بکارگیری $o(t^{2n-2})$ نیز اشتباه نمی‌باشد, فقط دقت اولی بهتر است. حال با انتگرال‌گیری معین در بازه 0 تا x خواهیم داشت:

$$\underbrace{\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}}_{tan^{-1} x} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n}) \ \ ■$$

<u>توضیح</u>: دقت شود اگر در انتهای کار, انتگرال نامعین گرفته شود, بایستی با انتخاب یک x مناسب ثابت C را بدست آورد:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n}) + C \quad ; \quad x = 0 \rightarrow C = 0 \ \ ■$$

مثال ۸-۲۱ با توجه به بسط مک‌لوران تابع $f(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ بسط مک‌لوران تابع $g(x)=sin^{-1}x$ را تا جمله x^6 بنویسید.

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\binom{m}{n-1}x^{n-1}+o(x^{n-1})$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-x^2)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-x^2)^3+o(x^7)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+o(x^5)\rightarrow\underbrace{\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}_{sin^{-1}x}=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+o(x^6)\ \blacksquare$$

<u>توضیح</u>: در اینجا نیز اگر در انتهای کار, انتگرال نامعین گرفته شود, بایستی با انتخاب یک x مناسب ثابت C را بدست آورد:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+o(x^6)+C\quad;\quad x=0\rightarrow C=0\ \blacksquare$$

مثال ۸-۲۲ بسط مک‌لوران $f(x)=(6-x-x^2)^{\frac{5}{3}}$ را تا مرتبه‌ای بنویسید که درجه کوچکی آن نسبت به x برابر2 باشد.

حل ابتدا عبارت پایه را تجزیه کرده و آنرا به فرم $(1+x)^m$ تبدیل می‌کنیم.

$$f(x)=(2-x)^{\frac{5}{3}}(3+x)^{\frac{5}{3}}=2^{\frac{5}{3}}3^{\frac{5}{3}}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{5}{3}}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{5}{3}}$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\binom{m}{n-1}x^{n-1}+o(x^{n-1})$$

$$f(x)=6^{\frac{5}{3}}\left(1-\left(\frac{5}{3}\right)\frac{x}{2}+\frac{\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2+o(x^2)\right)\left(1+\left(\frac{5}{3}\right)\frac{x}{3}+\frac{\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{x}{3}\right)^2+o(x^2)\right)$$

$$=6^{\frac{5}{3}}\left(1-\frac{5}{6}x+\frac{5}{9}x+\frac{5}{36}x^2+\frac{5}{81}x^2-\frac{25}{54}x^2+o(x^2)\right)=6^{\frac{5}{3}}\left(1-\frac{5}{18}x-\frac{85}{324}x^2+o(x^2)\right)\ \blacksquare$$

<u>توضیح</u>: میتوان بطریق زیر نیز عمل کرد:

$$f(x)=6^{\frac{5}{3}}\left(1-\left(\frac{x}{6}+\frac{x^2}{6}\right)\right)^{\frac{5}{3}}=6^{\frac{5}{3}}\left(1-\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{x}{6}+\frac{x^2}{6}\right)+\frac{\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{x}{6}+\frac{x^2}{6}\right)^2+o(x^2)\right)$$

ممکن است سوال شود در انتها بایستی $o(x^3)$ قرار گیرد, چرا که قطعا همه جملات باقیمانده از مرتبه کوچکتری نسبت به x^3 در مجاور صفر برخوردارند. اگر بتوان این اطمینان را پیدا کرد $o(x^3)$ قرار میدهیم(که گاهی کنترل آن طولانی و زمان بر است), اگر نه, $o(x^2)$ حداقل مرتبه‌ای است که نسبت به آن مطمئنیم. بنابراین:

$$f(x)=6^{\frac{5}{3}}\left(1+\frac{5}{18}x-\frac{5}{18}x^2+\frac{5}{9\times36}x^2+o(x^2)\right)=6^{\frac{5}{3}}\left(1-\frac{5}{18}x-\frac{85}{324}x^2+o(x^2)\right)\ \blacksquare$$

مثال ۸-۲۳ بسط مک‌لوران تابع $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ را تا جمله x^2 بنویسید.

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}ln(1+x)} \quad ; \quad ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\frac{1}{x}ln(1+x)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\to f(x)=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}=ee^u \quad ; \quad u=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)$$

$$e^u=1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)=1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)^2+o(x^2)$$

$$e^u=1-\frac{x}{2}+\frac{11x^2}{24}+o(x^2)\to f(x)=e\times e^u=e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11x^2}{24}+o(x^2)\right) \quad \blacksquare$$

مثال ۸-۲۴ الف: نشان دهید:

$$if \ \lim_{x\to a} g(x)=0\to\frac{1}{1+g(x)}=1-g(x)+o(g(x))$$

ب: با استفاده از بسط $\sqrt{1+x}$ و به کمک قسمت قبل بسط مک‌لوران تابع $g(x)=sin^{-1}x$ را تا جمله x^3 بنویسید.

حل با استفاده از مجموع جملات تصاعد هندسی از آنجا که برای وقتی $x\to a$ خواهیم داشت $|g(x)|<1$ لذا:

$$\frac{1}{1+g(x)}=1-g(x)+\underbrace{g^2(x)-g^3(x)+\cdots}_{h(x)} \quad ; \quad \lim_{x\to a}\frac{h(x)}{g(x)}=0\to h(x)=o\big(g(x)\big)$$

که نتیجه مورد نظر بدست می‌آید. برای قسمت دوم مطابق آنچه در مثال ۸-۲۱ دیده شد به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+o(x)\to\sqrt{1-x^2}=1+\frac{1}{2}(-x^2)+o(x^2)=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{1\underbrace{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}_{g(x)}}=1-\left(-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)+o(x^2)=1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

$$\to\underbrace{\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}_{sin^{-1}x}=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3) \quad \blacksquare$$

توضیح: روش دوم اثبات قسمت الف (بدون استفاده از رابطه جمع جملات تصاعد هندسی) بصورت زیر است:

$$\frac{1}{1+g(x)}=\frac{1-g^2(x)+g^2(x)}{1+g(x)}=\frac{\big(1-g(x)\big)\big(1+g(x)\big)+g^2(x)}{1+g(x)}=1-g(x)+\frac{g^2(x)}{1+g(x)}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{g^2(x)}{1+g(x)}}{g(x)}=0 \ \to\frac{g^2(x)}{1+g(x)}=o\big(g(x)\big)\to\frac{1}{1+g(x)}=1-g(x)+o\big(g(x)\big) \quad \blacksquare$$

مثال ۸-۲۵ به کمک قسمت الف مثال قبل, بسط مک‌لوران تابع $tanx$ را تا جمله x^3 بنویسید.

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \rightarrow \frac{1}{cosx} = \frac{1}{1 + \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$tanx = \frac{sinx}{cosx} = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad \blacksquare$$

توضیح: روش دیگر آن است ابتدا هر دو سری صورت و مخرج را بر حسب توانهای x بصورت صعودی نوشته و درست مشابه چندجمله‌ایها تقسیم کنیم, که البته شاید خیلی راه مناسبی نباشد, چرا که ممکن است تعدادی از جملات فراموش شود. در فصل ۱۱ و در مثال ۱۱-۱۶ روشهای دیگری برای تعیین سریهای ناشی از تقسیم دو سری نامتناهی ارائه خواهد شد.

$$tanx = \frac{sinx}{cosx} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

$$\begin{array}{l|l} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) & 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\ \hline -x + \frac{x^3}{2} - o(x^4) & x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \\ \hline \frac{x^3}{3} + o(x^4) & \\ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6} + o(x^6) & \\ \hline o(x^4) & \end{array}$$

مثال ۸-۲۶ حدود زیر را بیابید.

$$1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x - sinx}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - (x + o(x^2))}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-o(x^2)}{x^3} = ?$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{-o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{6} \quad \blacksquare$$

توضیح: توجه شود که همواره استفاده از نماد o دقیقتر از استفاده از هم‌ارزیهاست, چرا که مرتبه کوچکی سایر جملات نیز مشخص میشود. مثلا در همین مثال در اولین برخورد اگر $sinx$ را هم‌ارز x قرار دهیم به جواب غلط صفر میرسیم و متوجه اشتباه خود نیز نخواهیم شد, علت هم آن است که هیچ چندجمله‌ای از بسط باقی نمانده و فقط باقیمانده یعنی $o(x^2)$ دیده می‌شود. اما اگر از نماد o استفاده کرده باشیم, همانگونه که در شروع حل دیده شد به $\frac{-o(x^2)}{x^3}$ میرسیم که نامشخص است و متوجه میشویم که بایستی جمله بعدی بسط را نیز اضافه کنیم. ■

$$2)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x - sinx} - \frac{6}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3 - 6(x - sinx)}{x^2(x - sinx)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3 - 6\left(\frac{x^3}{3!} - o(x^4)\right)}{x^2\left(\frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{\frac{x^5}{6} + o(x^6)} = ?$$

توجه شود اگر مخرج را با یک جمله بسط سینوس می‌نوشتیم به $x^2o(x^2)=o(x^4)$ می‌رسیدیم که فاقد چند جمله‌ای می‌شد.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-6\left(\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right)}{x^2\left(\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{6\frac{x^5}{5!}+o(x^6)}{\frac{x^5}{6}+o(x^6)}$$

یعنی صرفا کافی است صورت را تا مرتبه مخرج بسط دهیم. در این مثال دیده می‌شود مخرج نیز شامل o می‌باشد. یک راه دقیق آن است که از قسمت الف مثال ۸-۲۴ استفاده کنیم تا مخرج را به صورت منتقل کرده باشیم:

$$if\ \lim_{x\to a}g(x)=0\to\frac{1}{1+g(x)}=1-g(x)+o(g(x))$$

$$\frac{1}{\frac{x^5}{6}+o(x^6)}=\frac{6}{x^5}\frac{1}{1+o(x)}=\frac{6}{x^5}\Big(1-o(x)+o\big(o(x)\big)\Big)=\frac{6}{x^5}\big(1+o(x)\big)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{6\frac{x^5}{5!}+o(x^6)}{\frac{x^5}{6}+o(x^6)}=\lim_{x\to 0}\left(6\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right)\left(\frac{6}{x^5}\big(1+o(x)\big)\right)=\frac{3}{10}$$

که گویا درست معادل آن است که در مخرج کسر از $o(x^6)$ در کنار $\frac{x^5}{6}$ صرفنظر شده است. به عبارتی:

$$\lim_{x\to 0}\frac{6\frac{x^5}{5!}+o(x^6)}{\frac{x^5}{6}+o(x^6)}=\lim_{x\to 0}\frac{6\frac{x^5}{5!}+o(x^6)}{\frac{x^5}{6}}=\frac{3}{10}$$

البته میتوان مشابه توضیح مثال ۸-۲۵ از تقسیم نیز استفاده کرد که به لحاظ ریاضی خیلی دقیق نیست.

خلاصه: در توابع کسری ساده‌تر است در مخرج از هم ارزی استفاده کرده و صورت را نیز صرفا تا درجه مخرج بسط دهیم. ■

$$3)\ \ A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sinx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\qquad (1^\infty)$$

$$\to lnA=ln\lim_{x\to 0}\left(\frac{sinx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{ln\left(\frac{sinx}{x}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{3!}+o(x^2)}{x^2}=\frac{-1}{6}\to A=e^{\frac{-1}{6}}\ \ ■$$

توضیح ۱: می‌توان بصورت زیر عمل کرد که در واقع بیان دیگری از همین روش, اما به طریق دیگری است.

$$A=\lim_{x\to 0}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to 0}e^{g(x)lnf(x)}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}ln\left(\frac{sinx}{x}\right)}=\cdots=e^{\frac{-1}{6}}$$

توضیح ۲: این مساله از آنجا که به فرم 1^∞ میباشد, با روش ارائه شده در فصل ۲ نیز بصورت زیر قابل حل است.

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{sinx-x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-x^2}{6}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{-x^2}{6}\right)^{\frac{-6}{x^2}}\right]^{\frac{-1}{6}}=e^{\frac{-1}{6}}\ \ ■$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{sinhx-xcoshx+\frac{1}{3}x^3}{x^2tan^3x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right)-x\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)\right)+\frac{1}{3}x^3}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x^5}{30}+o(x^6)}{x^5}=\frac{-1}{30}\ \ ■$$

$$5)\ \ A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}\qquad (1^{\infty})$$

$$\to lnA=ln\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-lne}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-x}{x^2}=\frac{-1}{2}\to A=e^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\ \ \blacksquare$$

$$6)\ \ A=\lim_{x\to +\infty}\left(sin^2\left(\frac{1}{x}\right)+cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}\qquad (1^{\infty})$$

از آنجا که حد در بینهایت سوال شده است, ابتدا با تغییر متغیر $t=\frac{1}{x}$ حد را به صفر تبدیل می‌کنیم تا بتوانیم از سریهای مک‌لوران (حول صفر) استفاده کنیم.

$$t=\frac{1}{x}\to lnA=ln\lim_{t\to 0}(sin^2t+cost)^{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to 0}\frac{ln(sin^2t+cost)}{t^2}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{ln\left(t^2+o(t^2)+1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{ln\left(1+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)}{t^2}=\frac{1}{2}\to A=\sqrt{e}\ \ \blacksquare$$

$$7)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-sinx+cosx-2}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x+o(x))-\left(x+o(x^2)\right)+\left(1+o(x)\right)-2}{\frac{x^2}{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{\frac{x^2}{3}}=?$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)-\left(x+0x^2+o(x^2)\right)+\left(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3)\right)-2}{\frac{x^2}{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{\frac{x^2}{3}}=0\ \ \blacksquare$$

$$8)\ \ \lim_{x\to 0}\frac{ln(cos\,x)+2\sqrt{4+x^2}-4}{x^4}$$

با استفاده از تمرین ۱ همین بخش بسط $ln(cos\,x)$ تا جمله x^4 بصورت زیر است:

$$ln(cos\,x)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)\quad ;\quad (1+x)^m=\ 1+mx\ +\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ o(x^2)$$

$$2(4+x^2)^{\frac{1}{2}}=4\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\quad ;\quad \left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\ 1+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x^2}{4}\right)-\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{x^2}{4}\right)^2+o(x^4)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)+4\left(1+\frac{x^2}{8}-\frac{x^4}{128}+o(x^4)\right)-4}{x^4}=-\frac{11}{96}\ \ \blacksquare$$

$$9)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^{-1}x}{\sinh x}\right)^{\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to 0}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to 0}e^{g(x)\ln f(x)}$$

$$\ln f(x)=\ln\left(\frac{x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+o(x^6)}{x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)}\right)$$

$$\to \ln f(x)=\ln\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+o(x^5)\right)-\ln\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)$$

$$\ln(1+t)=t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+o(t^3)$$

$$\ln f(x)=\left(\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+o(x^5)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+o(x^5)\right)^2-\left(\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0}\left(g(x)\ln f(x)\right)=\frac{1}{x^4}\left(\frac{3x^4}{40}-\frac{x^4}{120}-\frac{1}{2}\frac{x^4}{36}+o(x^5)+\frac{1}{2}\frac{x^4}{36}+o(x^5)\right)=\frac{1}{15}$$

بنابراین جواب مساله برابر $e^{\frac{1}{15}}$ خواهد بود. ■

مثال ۸-۲۷ با نوشتن بسط مک‌لوران $sinx$ حاصل انتگرال I را بدست آورید.

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{3\varepsilon}\frac{\sin x}{x^2}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{3\varepsilon}\frac{x+o(x^2)}{x^2}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{3\varepsilon}\frac{dx}{x}+\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{3\varepsilon}\frac{o(x^2)}{x^2}dx}_{0}=Ln3$$

دقت شود که $\frac{sinx}{x^2}$ دارای تابع اولیه نبوده و لذا برای محاسبه انتگرال, از بسط مک‌لوران $sinx$ استفاده شده است. ■

تمرینات بخشهای ۸-۲ و ۸-۳

۱- بسط مک‌لوران تابع $f(x)=\ln(\cos x)$ را تا جمله x^7 بنویسید. $\left(\frac{-\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

<u>Ans</u>: $f(x)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^7)$

۲- الف: نشان دهید اگر $\lim_{x\to a}g(x)=0$, آنگاه:

$$\frac{1}{1-g(x)}=1+g(x)+g^2(x)+o(g^2)$$

ب: به کمک قسمت قبل بسط مک‌لوران تابع $tanx$ را تا جمله x^5 بنویسید.

<u>Ans</u>: $tanx = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$

۳- بسط مک‌لوران $f(x) = cos\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$ را تا مرتبه‌ای بنویسید که درجه کوچکی آن نسبت به x برابر 4 باشد.

<u>Ans</u>: $cos\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{23}{24}x^4 + o(x^4)$

۴- عدد n را بگونه‌ای بدست آورید که حد زیر 0 و ∞ نشود.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{cosx - \sqrt[3]{cosx}}{x^n}$; <u>Ans</u>: $n = 2$

۵- درستی حدود زیر را نشان دهید.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}cosx}{tan^4x} = \frac{1}{3}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x^2 - \frac{x}{sin\frac{1}{x}}\right) = -\frac{1}{6}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin(sinx) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5} = \frac{19}{20}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{e}{2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2 - cos\left(\frac{x}{1-x^2}\right)}{x^4} = \frac{23}{24}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}} = \frac{16}{9}$