ریاضیات گسسته

پاسخنامه تمرین چهارم - ناوردایی

محمد و ارشیا

سؤال ۱.

در خانه های یک جدول ۱۰ * ۱۰، ۲۵ مهره در مربع ۵ * ۵ پایین سمت چپ و ۲۵ مهره در مربع ۵ * ۵ بالا سمت راست قرار گرفته است. در هر حرکت یک مهره میتواند از روی مهره ی مجاور خود بپرد و در خانه ی خالی پس از آن قرار گیرد. حرکت میتواند به صورت افقی، عمودی یا قطری انجام گیرد. آیا با تکرار این حرکت میتوان همه ی مهره ها را در نیمه سمت چپ صفحه قرار داد؟

پاسخ .
خیر.
خانه های جدول را به صورت شطرنجی رنگ میکنیم به طوریکه خانه گوشه سمت چپ پایین سیاه باشد. در اینصورت ۲۶ تا از مهره ها در خانه سیاه و ۲۴ تای دیگر در خانه سفید قرار دارند. پس از انجام هر حرکت مشخص است که رنگ خانه ای که مهره در آن حضور داشته تغییر نمیکند. در نهایت اگر قرار باشد همگی در نیمه سمت چپ قرار بگیرند باید ۲۵ مهره در خانه سفید و ۲۵ تای دیگر در خانه سیاه باشند که چون در ابتدا ۲۶ تا در خانه سیاه بوده اند همچین چیزی امکان پذیر نیست.

سؤال ۲.

در یک دنباله نوع A، عدد اول دنباله، دلخواه است و بعد از آن هر عدد به‌صورت حاصل‌ضرب مجموع ارقام عدد قبل در یکی از مقسوم علیه‌های همان عدد است. مثلا عدد بعد از ۳۵ می‌تواند هر یک از ۱ × ۸، ۵ × ۸، ۷ × ۸ و ۳۵ × ۸ باشد. آیا ممکن است در دنباله‌ای که با ۱۴۴ شروع می‌شود، عدد ۸۰۹۲ ظاهر شود؟

پاسخ .

فرض کنید n عددی بخش‌پذیر بر ۹ باشد، در این صورت مجموع ارقام n که آن را با s نشان می‌دهیم نیز بر ۹ بخش‌پذیر است و لذا اگر k مقسوم‌علیهی از n باشد، آنگاه sk نیز بر ۹ بخش‌پذیر است. نتیجه می‌گیریم عمل گفته شده یعنی ضرب مجموع ارقام n در یکی از مقسوم‌علیه‌های n ویژگی بخش‌پذیری بر ۹ را حفظ می‌کند لذا بخش‌پذیری بر ۹ یک ناوردای این عمل است. حال اگر در دنباله نوع A، جمله اول بر ۹ بخش‌پذیر باشد، آنگاه تمام جملات این دنباله بر ۹ بخش‌پذیرند، لذا اگر جمله اول چنین دنباله‌ای برابر ۱۴۴ باشد، آنگاه عدد ۸۰۹۲ هیچ‌گاه در این دنباله ظاهر نمی‌شود.

سؤال ۳.

$۴n$ توپ را در یک ردیف شامل $۲n$ توپ سفید و $۲n$ توپ سیاه در نظر بگیرید. ثابت کنید زیربازه ای شامل $۲n$ توپ وجود دارد به طوری که تعداد توپ های سفید و سیاه برابر باشد.

پاسخ .
تابع f(i) را اینگونه تعریفت میکنیم:
تعداد توپ های سیاه بازه $2n$ تایی با شروع از خانه i - تعداد توپ های سفید بازه $2n$ تایی با شروع از خانه i
اگر به ازای i ای f(i) برابر ۰ شود آنگاه این بازه شرایط سوال را دارد پس می‌خواهیم ثابت کنیم یک i ای وجود دارد به طوری که f(i) برابر صفر باشد.
اگر $f1$ صفر باشد شرایط سوال براورده شده پس بدون از دست دادن کلیت فرض میکنیم منفی است. پس $f2n+1$ مثبت است. تغییرات fi نسبت به $fi+1$ به اینگونه است که میزان آن یا ۲+ شده است یا ۲- یا تغییری نکرده است. حال چون $f1$ منفی است و $f2n+1$ مثبت است و $f1$ زوج است(چون طول بازه زوج است) یک i ای وجود دارد که f(i) صفر شده باشد زیرا باید از منفی به مثبت برسیم. پس بازه ی خواسته شده سوال پیدا شد.