

فرض کنید که یک ماشین در اختیار داریم که می تواند این سه کار را بر روی کارت هایی که بر روی هر یک از آنها یک کلمه نوشته شده است انجام دهد:

- دو کارت که بر روی آنها دو کلمه نوشته شده است را بگیرد و یک کارت تولید کند که بر روی آن این دو کلمه پشت سر هم نوشته شده باشد. (برای مثال اگر بر روی کارت اول رشته aab و بر روی کارت دوم رشته bab نوشته شده باشد، خروجی ماشین کارتی خواهد بود که بر روی آن $aabbab$ نوشته شده است.)

- یک کارت که بر روی آن کلمه S نوشته شده است را دریافت کند و در خروجی کارتی ایجاد کند که بر روی آن aSb نوشته شده است. (برای مثال اگر بر روی کارت ورودی کلمه aba نوشته شده باشد، خروجی ماشین کارتی خواهد بود که بر روی آن کلمه $aabab$ نوشته شده است)

- یک کارت که بر روی آن کلمه S نوشته شده است را دریافت کند و در خروجی کارتی ایجاد کند که بر روی آن bSa نوشته شده است. (برای مثال اگر بر روی کارت ورودی هیچ کلمه ای نوشته نشده باشد. خروجی ماشین کارتی خواهد بود که بر روی آن کلمه ba نوشته شده است.)

در ابتدا تعداد زیادی کارت که بر روی آنها هیچ کلمه ای نوشته نشده است در اختیار ما قرار گرفته است. الف) نشان دهید که با استفاده از این کارت ها و با این ماشین می توان کارتی را ایجاد کرد که بر روی آن کلمه $abbaba$ نوشته شده باشد. ب) ثابت کنید که با استفاده از این ماشین می توان هر کارتی که بر روی آن یک کلمه نوشته شده است را تولید کرد، اگر و فقط اگر این کلمه تنها از a و b تشکیل شده باشد و تعداد a های آن برابر b های آن باشد.

پاسخ.

الف) ابتدا با استفاده از یک کارت خالی و عمل دوم، کارت ab و بعد با استفاده از یک کارت خالی و عمل سوم، کارت ba و بعد با استفاده از عمل اول و کارت های ab و ba ، کارت $abba$ و بعد با استفاده از عمل اول و کارت های $abba$ و ba ، کارت $abbaba$ را تولید می کنیم.

ب) اگر کلمه S توسط این ماشین تولید شده باشد، با استقرای قوی روی طول کلمه S ، ثابت می کنیم که کلمه S تنها از حروف a و b تشکیل شده است و تعداد a ها و b ها در کلمه S ، با یکدیگر برابر است.

اگر طول S صفر باشد که حکم واضح است. فرض کنید این حکم برای همه ی کلمات S' با طول کمتر از n درست باشد. ثابت می کنیم برای هر کلمه S به طول n نیز درست است. اگر کلمه S با عمل اول درست شده باشد. یعنی $S = S_1 S_2$ ، S_1 و S_2 هر کلمه ای که کمتر از n است، پس کلمات S_1 و S_2 فقط از حروف a و b تشکیل شده اند و تعداد حروف های a در کلمه S_1 و S_2 برابر با تعداد حروف های b در آنهاست. بنابراین کلمه S تنها از حروف a و b تشکیل شده است و تعداد حروف های a با تعداد حروف های b در S مساوی است. به طریق مشابه اگر کلمه S با استفاده از عمل دوم (سوم) درست شده باشد. یعنی $S = aS'b$ یا $S = bS'a$ باشد. چون طول کلمه S' برابر با $n-2$ است. بنابراین طبق فرض استقرای کلمه S' تنها از حروف a و b تشکیل شده است و تعداد حروف a و b در کلمه S' با یکدیگر برابر است؛ در نتیجه کلمه $S = aS'b$ یا $S = bS'a$ تنها از حروف a و b تشکیل شده است و تعداد حروف های a در کلمه S برابر تعداد حروف های b آن است. پس حکم با استقرا ثابت شد.

حال با استقرای قوی روی طول کلمه S ، ثابت می کنیم هر کلمه ای که تنها از حروف a و b تشکیل شده باشد و تعداد حروف a با تعداد حروف b برابر باشد را می توان تولید کرد.

اگر طول کلمه S صفر باشد که حکم واضح است. فرض کنید که حکم برای همه ی کلمات S' با طول کمتر از n درست باشد ثابت می کنیم برای هر کلمه S به طول n نیز حکم برقرار است. اگر حرف اول و آخر کلمه S متفاوت باشند. یعنی S به صورت $aS'b$ یا $bS'a$ باشد (S' کلمه ای است که از حذف حرف اول و آخر کلمه S به دست می آید). واضح است که کلمه S' تنها از حروف a و b ساخته شده است و تعداد حروف a با تعداد حروف b در آن مساوی است (زیرا در S چنین است) و طول کلمه S' کمتر از n است؛ پس طبق فرض استقرا می توان کلمه S' را تولید کرد. حال اگر کلمه $S = aS'b$ یا $S = bS'a$ باشد؛ می توان با استفاده از کلمه S' و عمل دوم (عمل سوم) کلمه S را تولید کرد.

پس فرض کنید حروف اول و آخر کلمه S یکسان باشند. بنابر تقارن فرض کنید حرف اول و آخر کلمه S ، a باشد. x_i را مساوی تعداد a های کلمه S منهای تعداد b های آن در i حرف اول آن می گیریم. واضح است که $x_i = 1$ و $x_{n-1} = -1$ (زیرا $x_n = 0$) و حرف n ام a است. از طرف دیگر $|x_{i+1} - x_i| = 1$ است؛ در نتیجه لااقل یک $i < n$ وجود دارد که $x_i = 0$ باشد. حال فرض کنید $S = S_1 S_2$ باشد که S_1 کلمه ای است که از i حرف اول کلمه S ساخته شده است و S_2 کلمه ای است که از $n-i$ حرف آخر کلمه S ساخته شده

است. با توجه به این که $x_i = 0$ و $x_n = 0$ است؛ پس تعداد حروف a در کلمه‌ی $S_1(S_2)$ برابر با تعداد حروف b در آن است. از طرف دیگر طول کلمات S_1 و S_2 کمتر از n است و تنها از حروف a و b تشکیل شده‌اند. بنابراین طبق فرض استقرا می‌توان کلمات S_1 و S_2 را ساخت، حال با استفاده از کلمات S_1 و S_2 را ساخت، حال با استفاده از کلمات S_1 و S_2 می‌توان کلمه‌ی $S = S_1 S_2$ را تولید کرد.