دانشکده فنی دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تمرین پنجم درس ریاضیات مهندسی

طراح

عرفان مختاری

نیمسال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

سوال ۱

معادله لاپلاس زیر را با شرایط مرزی داده شده حل نمایید.

$$u_{xx} + u_{yy} = xy \qquad 0 < x < 1\ \ , 0 < y < 1$$

$$\begin{cases} u(0, y) = y \\ u(1, y) = 1 \end{cases} , \qquad \begin{cases} u_y(x, 0) = x \\ u_y(x, 1) = x + 1 \end{cases}$$

پاسخ سوال ۱

$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$

با توجه به اینکه شرایط مرزی در راستای x ساده تر است ، این راستا را برای همگن سازی شرایط مرزی استفاده میکنیم:

$u(x,y) = v(x,y) + ax + b$

$u(0,y) = v(0,y) + b \to y = 0 + b \to b = y$

$u(1,y) = v(1,y) + a + b \to 1 = 0 + a + y \to a = 1 - y$

$u(x,y) = v(x,y) + (1-y)x + y$

معادله حالت گذرا را پیدا میکنیم با جایگذاری در معادله اصلی خواهیم داشت:

$v_{xx} + v_{yy} = xy$

$u_y(x,y) = v_y(x,y) - x + 1$

$u_y(x,0) = v_y(x,0) - x + 1 \to v_y(x,0) = 2x - 1$

$u_y(x,1) = v_y(x,1) - x + 1 \to v_y(x,1) = 2x$

$$v_{xx} + v_{yy} = xy \qquad 0 < x < 1 \ \ , 0 < y < 1$$

$$\begin{cases} v(0,y) = 0 \\ v(1,y) = 0 \end{cases} , \qquad \begin{cases} v_y(x,0) = x \\ v_y(x,1) = x + 1 \end{cases}$$

از جواب حدسی استفاده میکنیم . با توجه به اینکه در راستای x شرایط مرزی همگن است داریم :

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(y) \sin(n\pi x)$$

با جایگذاری در معادله اصلی خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (G_n''(y) - (n\pi)^2 G_n(y)) \sin(n\pi x) = xy$$

$$(G_n''(y) - (n\pi)^2 G_n(y) = 2\int_0^1 xy \sin(n\pi x)\, \mathrm{d}x \to (G_n''(y) - (n\pi)^2 G_n(y) = \frac{2(-1)^{n+1} y}{n\pi}$$

$$G_n(y) = C_n \sinh n\pi y + D_n \cosh n\pi y + \frac{2(-1)^n y}{(n\pi)^3}$$

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \sinh n\pi y + D_n \cosh n\pi y + \frac{2(-1)^n y}{(n\pi)^3}) \sin(n\pi x)$$

$$v_y(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(n\pi C_n\cosh n\pi y+n\pi D_n\sinh n\pi y+\frac{2(-1)^n}{(n\pi)^3})\sin(n\pi x)$$

$$v_y(x,0)=2x-1=\sum_{n=1}^{\infty}(n\pi C_n+\frac{2(-1)^n y}{(n\pi)^3})\sin(n\pi x)\rightarrow$$

$$\frac{2(-1)^n y}{(n\pi)^3})\sin(n\pi x)=2\int_0^1(2x-1)\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

$$C_n=\frac{2(-1)^n}{(n\pi)^4})+\frac{4(-1)^{n+1}y}{(n\pi)^2})+\frac{2(-1)^n-2}{(n\pi)^2})$$

$$v_y(x,1)=2x=\sum_{n=1}^{\infty}(n\pi C_n\cosh n\pi+n\pi D_n\sinh n\pi+\frac{2(-1)^n}{(n\pi)^3})\sin(n\pi x)$$

$$n\pi C_n\cosh n\pi+n\pi D_n\sinh n\pi+\frac{2(-1)^n}{(n\pi)^3}=2\int_0^1 2x\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

$$D_n=\frac{1}{n\pi\sinh(n\pi)}(\frac{4(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2}-\frac{2(-1)^n}{(n\pi)^3}-n\pi C_n\cosh(n\pi)$$

پس پاسخ مسئله به صورت زیر خواهد شد:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\sinh n\pi y+D_n\cosh n\pi y+\frac{2(-1)^n y}{(n\pi)^3})\sin(n\pi x)+(1-y)x+y$$

سوال ۲

معادله لاپلاس زیر را با شرایط مرزی داده شده حل نمایید.

$$U_{xx} + U_{yy} = 0 \qquad 0 < x < a \ \ , 0 < y < b$$

$$\begin{cases} U(0,y) = 0 \\ U_x(a,y) = 0 \end{cases} , \qquad \begin{cases} U(x,0) = 0 \\ U(x,b) = U_0 \sin(\pi \frac{x}{2a}) \end{cases}$$

پاسخ سوال ۲

$$U_{xx}+U_{yy}=0,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b$$

$$\begin{cases}U(0,y)=0\\ U_x(a,y)=0\end{cases},\quad \begin{cases}U(x,0)=0\\ U(x,b)=U_0\sin\left(\frac{\pi}{2a}x\right)\end{cases}$$

$$\text{Guess:}U(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}Y(y)\sin\left(\frac{2n-1}{2a}\pi x\right)\Rightarrow U_{xx}+U_{yy}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(Y''(y)-\frac{\pi^2(2n-1)^2}{4a^2}Y(y)\right)\sin\left(\frac{2n-1}{2a}\pi x\right)=0$$

$$\text{ODE:}Y''(y)-\frac{\pi^2(2n-1)^2}{4a^2}Y(y)=0,\ \text{BC۱: }Y(0)=0\Rightarrow Y_n(y)=a_n\sinh\left(\frac{2n-1}{2a}\pi y\right)$$

$$\Rightarrow U(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sinh\left(\frac{2n-1}{2a}\pi y\right)\sin\left(\frac{2n-1}{2a}\pi x\right)$$

$$\text{BC۲:}U(x,b)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sinh\left(\frac{2n-1}{2a}\pi b\right)\sin\left(\frac{2n-1}{2a}\pi x\right)=U_0\sin\left(\frac{\pi}{2a}x\right)$$

$$\Rightarrow a_n=\begin{cases}U_0\operatorname{csch}\left(\frac{\pi b}{2a}\right), & n=1\\ 0, & n\neq 1\end{cases}$$

$$\Rightarrow U(x,y)=U_0\operatorname{csch}\left(\frac{\pi b}{2a}\right)\sinh\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$$

سوال ۳

.معادله لاپلاس زیر را با شرایط مرزی داده شده را حل کنید

$$U_{xx} + U_{yy} = x^2 \qquad 0 < x < \pi \ \ , 0 < y < \pi$$

$$\begin{cases} U(0,y) = y - 4 \\ U(\pi,y) = y + 2 \end{cases} \quad , \qquad \begin{cases} U(x,0) = 0 \\ U(x,b) = 0 \end{cases}$$

پاسخ سوال ۳

از جواب حدسی استفاده میکنیم . با توجه به اینکه در راستای y شرایط مرزی همگن است داریم :

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(x)\sin(ny)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(G_n''(x)-(n)^2G_n(x))\sin(ny)=x^2$$

$$G_n''(x)-(n)^2G_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin(ny)\,\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}(\frac{x^2}{n}(1-(-1)^n)$$

$$G_n(x)=C_n\sinh nx+D_n\cosh nx-\frac{2}{\pi n^2}(\frac{x^2}{n}(1-(-1)^n)$$

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\sinh nx+D_n\cosh nx-\frac{2}{\pi n^2}(\frac{x^2}{n}(1-(-1)^n)))\sin ny$$

$$u(0,y)=y-4=\sum_{n=1}^{\infty}(D_n)\sin ny$$

$$D_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(y-4)\sin(ny)\,\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}(-\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1})$$

$$u(\pi,y)=y+2$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\sinh n\pi+D_n\cosh n\pi-\frac{2}{\pi n^2}(\frac{\pi^2}{n}(1-(-1)^n))\sin ny$$

$$(C_n\sinh n\pi+D_n\cosh n\pi-\frac{2}{\pi n^2}(\frac{\pi^2}{n}(1-(-1)^n))$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(y+2)\sin(ny)\,\mathrm{d}y$$

با محاسبه عبارت بالا و جایگذاری مقدار Dn میتوان مقدار Cn را نیز به دست اورد

سوال ۴

معادله لاپلاس زیر را با توجه به شرایط مرزی داده شده حل کنید .

$$\nabla^2 u = x + 2y \qquad , \quad 0 < x < \pi \qquad 0 < y < \pi$$

$$\begin{cases} U(x,0) = x \\ U(x,\pi) = 2 \end{cases} \qquad , \quad \begin{cases} U(0,y) = y \\ U(\pi,y) = \cos(y) \end{cases}$$

پاسخ سوال ۴

$$u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)$$

با توجه به اینکه شرایط مرزی در راستای y ساده تر است ، این راستا را برای همگن سازی شرایط مرزی استفاده میکنیم:

$$u(x,y)=v(x,y)+ay+b$$

$$u(x,0)=v(x,0)+b\rightarrow x=0+b\rightarrow b=x$$

$$u(x,\pi)=v(x,\pi)+a\pi+b\rightarrow 2=0+a\pi+x\rightarrow a=\frac{2-x}{\pi}$$

$$u(x,y)=v(x,y)+(\frac{2-x}{\pi})y+x$$

معادله حالت گذرا را پیدا میکنیم با جایگذاری در معادله اصلی خواهیم داشت:

$$v_{xx}+v_{yy}=x+2y$$

$$u(0,y)+\frac{2}{\pi}y\rightarrow v(0,y)=y(1-\frac{2}{\pi})$$

$$u(\pi,y)=v(\pi,y)+(\frac{2-\pi}{\pi})y+\pi\rightarrow v(\pi,y)=\cos(y)-\pi-(\frac{2-\pi}{\pi})y$$

معادله حالت گذرا را پیدا میکنیم با جایگذاری در معادله اصلی خواهیم داشت:

$$v_{xx}+v_{yy}=x+2y\qquad ,\ 0<x<\pi\qquad 0<y<\pi$$

$$\begin{cases}v(x,0)=0\\ v(x,\pi)=0\end{cases}\qquad ,\ \begin{cases}v(0,y)=y(1-\frac{2}{\pi})\\ v(\pi,y)=\cos(y)-\pi-(\frac{2-\pi}{\pi})y\end{cases}$$

از جواب حدسی استفاده میکنیم . با توجه به اینکه در راستای y شرایط مرزی همگن است داریم :

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(x)\sin(ny)$$

با جایگذاری در معادله اصلی خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(G_n''(x)-(n)^2G_n(x))\sin(ny)=x+2y$$

$$G_n''(x)-(n)^2G_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x+2y\sin(ny)\,\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}(\frac{x}{n}(1-(-1)^n)+\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1})$$

$$G_n(x)=C_n\sinh nx+D_n\cosh nx-\frac{2}{\pi n^2}(\frac{x}{n}(1-(-1)^n)+\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}))$$

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\sinh nx+D_n\cosh nx-\frac{2}{\pi n^2}(\frac{x}{n}(1-(-1)^n)+\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}))\sin ny$$

$$v(0,y) = y(1-\frac{2}{\pi}) = \sum_{n=1}^{\infty}(D_n - \frac{2}{\pi n^2}(\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1})) \sin ny$$

$$D_n - \frac{2}{\pi n^2}(\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(y(1-\frac{2}{\pi}))\sin(ny)\,\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi}(1-\frac{2}{\pi})(\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1})$$

$$D_n = \frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1})(1-\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi n^2})$$

$$v(\pi,y) = \cos y - \pi - (\frac{2-\pi}{\pi})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(C_n \sinh n\pi + D_n \cosh n\pi - \frac{2}{\pi n^2}(\frac{\pi}{n}(1-(-1)^n) + \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1})) \sin ny$$

$$(C_n \sinh n\pi + D_n \cosh n\pi - \frac{2}{\pi n^2}(\frac{\pi}{n}(1-(-1)^n) + \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}))$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos y - \pi - (\frac{2-\pi}{\pi})y)\sin(ny)\,\mathrm{d}y$$

با محاسبه عبارت بالا و جایگذاری مقدار Dn میتوان مقدار Cn را نیز به دست اورد در نهایت داریم :

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n \sinh nx + D_n \cosh nx - \frac{2}{\pi n^2}(\frac{x}{n}(1-(-1)^n) + \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1})) \sin ny$$

$$+ (\frac{2-x}{\pi})y + x$$

سوال ۵

معادله لاپلاس زیر را حل کنید.

$$\nabla^2 u = 0 \qquad , \; 0 < x \leq \pi \qquad 0 < y < \infty$$

$$\begin{cases} U(x,0) = \sin(7x) - \frac{5}{8}\sin(2x) \\ \lim_{y\to\infty} U(x,y) = 0 \end{cases} \qquad , \quad \begin{cases} U(0,y) = 0 \\ U(\pi,y) = 0 \end{cases}$$

پاسخ سوال ۵

این مسئله مشابه یکی از مثال های حل شده در ویدیو درس است داریم

$X_n(x) = sin(nx)$

$Y_n(y) = A_n e^{-ny}$

$$\to U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) e^{ny}$$

$$U(x,0) = \sin(7x) - \frac{5}{8}\sin(2x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) \to \begin{cases} A_2 = -\frac{5}{8}, n = 2 \\ A_7 = 1, n = 7 \\ A_n = 0, n \neq 2, 7 \end{cases}$$

$$U(x,y) = -\frac{5}{8}\sin(2x)e^{-2y} + \sin(7x)e^{-7y}$$

نکات کلی درباره تمرین

- در صورتی که در تمرین هر گونه ابهام و یا پرسشی دارید می‌توانید با عرفان مختاری در ارتباط باشید.
- در صورتی که سوالی از تمرین دارید که ممکن است برای دیگران نیز مفید باشد،آن را در گروه درس مطرح کنید.
- مشورت و همفکری با دوستان خود هنگام نوشتن تمرین کاری مفید و سازنده است و از انجام آن پرهیز نکنید، اما این کار باید در راستای فهم درس و تمرین باشد و از کپی‌کردن تمارین یکدیگر خودداری کنید.
- پاسخ های خود را به صورت یک فایل به فرمت PDF در سامانه درس با فرمت نامگذاری Engmath-HWNum-SID بارگذاری نمایید.