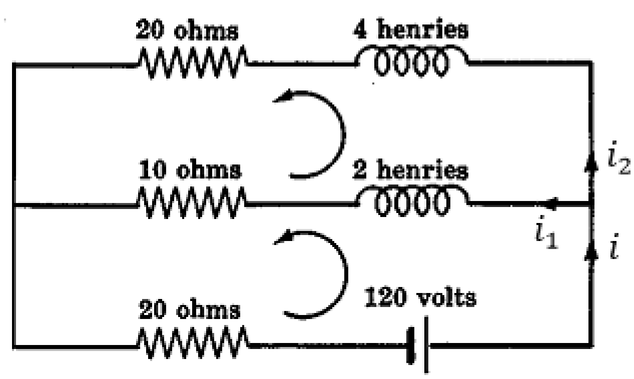
۶- دستگاه معادلات دیفرانسیل

در این فصل به معرفی و حل دستگاهای معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم. این دستگاه ها درست مشابه دستگاههای معادلات جبری بوده و روشهای مختلفی برای حل آنها وجود دارد. این دستگاهها می‌توانند مرتبه اول یا بالاتر بوده همچنین خطی یا غیرخطی باشند. عمده بحث فصل حل دستگاه خطی مرتبه اول میباشد, هرچند به دستگاههای مرتبه بالاتر نیز اشاره خواهد شد. در ابتدای این فصل لزوم بررسی این دستگاهها را برای حل تعدادی از مسائل مهندسی خواهیم دید. سپس دو روش کلی و ساده برای حل چنین دستگاههایی ارائه خواهد شد. یکی از این روشها روش حذفی میباشد که درست مشابه روش حذفی در حل دستگاههای معادلات جبری میباشد. روش دیگر نیز استفاده از تبدیل لاپلاس است که دستگاه معادلات دیفرانسیل را به دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌کند. در ادامه به مهمترین روش حل دستگاههای معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم که مبتنی بر مقادیر ویژه و بردارهای ویژه میباشد. برای این منظور ابتدا مروری بر مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریسها خواهیم داشت و پس از معرفی قضایای اساسی دستگاه معادلات مرتبه اول, در دو بخش مجزا, حل دستگاه معادلات دیفرانسیل همگن و سپس غیرهمگن را خواهیم دید.

۶-۱- دستگاه معادلات دیفرانسیل در مسائل مهندسی

در ابتدا قبل از اینکه به روشهای حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل بپردازیم, به چند نمونه از کاربردهای دستگاه معادلات در مسائل مهندسی اشاره خواهد شد. هدف در این قسمت صرفا استخراج معادلات حاکم بر چند مساله مهندسی میباشد تا در ابتدای بحث, اهمیت بررسی دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل مشخص شود.

مثال ۶-۱ در مدار RL زیر معادلات حاکم بر جریان در هر حلقه را بنویسید.



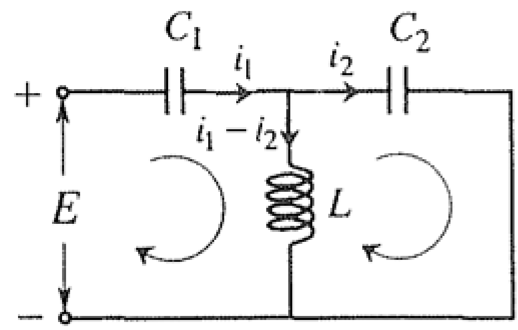
حل با انتخاب جریان‌های $i_1(t)$ و $i_2(t)$ به عنوان مجهولات مساله و نوشتن معادله پتانسیل در هر حلقه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -20i + 120 - 2\dfrac{di_1}{dt} - 10i_1 = 0 \\ 10i_1 + 2\dfrac{di_1}{dt} - 4\dfrac{di_2}{dt} - 20i_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{i=i_1+i_2} \begin{cases} \dfrac{di_1}{dt} + 15i_1 + 10i_2 = 60 \\ \dfrac{di_1}{dt} + 5i_1 - 2\dfrac{di_2}{dt} - 10i_2 = 0 \end{cases}$$

که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول است. ■

مثال ۶-۲ در مدار LC زیر معادلات حاکم بر جریان در هر حلقه را بنویسید.

حل با نوشتن معادله پتانسیل در هر حلقه خواهیم داشت:



$$\begin{cases} E(t) - \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int i_1\,dt - L\dfrac{d}{dt}(i_1 - i_2) = 0 \\ -\dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i_2\,dt + L\dfrac{d}{dt}(i_1 - i_2) = 0 \end{cases}$$

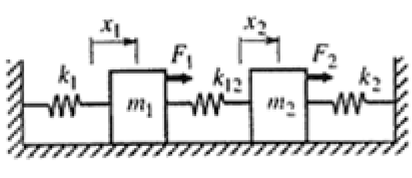
که یک معادله انتگرالی است, چرا که علاوه بر مشتقات i_1 و i_2 , انتگرال آنها نیز در معادله دیده می‌شود. با مشتق‌گیری نسبت به t به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه ۲ بصورت زیر می‌رسیم که در آن جریان‌های $i_1(t)$ و $i_2(t)$ مجهولات مورد نظر مساله میباشد.

$$\begin{cases} Li_1'' - Li_2'' + \dfrac{1}{C_1}i_1 = E'(t) \\ Li_2'' - Li_1'' + \dfrac{1}{C_2}i_2 = 0 \end{cases} \quad \blacksquare$$

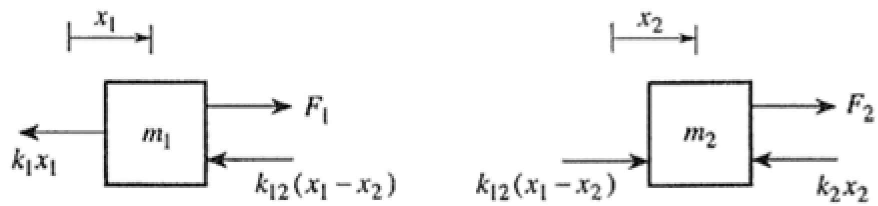
مثال ۶-۳ در سیستم جرم-فنر زیر معادلات حاکم بر ارتعاش هر جرم را بنویسید.

حل سیستم جرم-فنر زیر را که هر جرم تحت یک بار $F(t)$ قرار گرفته است در نظر میگیریم. از آنجا که هر جرم یک درجه آزادی برای ارتعاش خواهد داشت(در راستای x) و به همین دلیل یک سیستم دو درجه آزادی میباشد.

با نوشتن قانون دوم نیوتن برای هر جرم خواهیم داشت:



Mass-spring system.



$$\begin{cases} m_1x_1'' = -k_1x_1 - k_{12}(x_1 - x_2) + F_1(t) \\ m_2x_2'' = -k_2x_2 + k_{12}(x_1 - x_2) + F_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1x_1'' + (k_1 + k_{12})x_1 - k_{12}x_2 = F_1(t) \\ m_2x_2'' - k_{12}x_1 + (k_2 + k_{12})x_2 = F_2(t) \end{cases}$$

بنابراین در اینجا نیز به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه ۲ رسیدیم که در آن جابجایی‌های $x_1(t)$ و $x_2(t)$ مجهولات مورد نظر مساله میباشد. ■

حال بایستی روشهای حل دستگاه معادلات بیان شود. بطور اجمالی آنچه در بخشهای بعد خواهیم دید, بصورت زیر خلاصه می‌شود. معمولا دو دسته روش برای حل دستگاههای معادلات دیفرانسیل وجود دارد که شامل روشهای کلی و ماتریسی است.

در روشهای کلی که در بخش ۶-۲ آمده است, دو روش حذفی و لاپلاس بررسی خواهد شد. در این نوع روش حل, دستگاه با هر مرتبه‌ای, چه همگن باشد و چه غیر همگن, همگی به یک شیوه حل می‌شوند.

در روشهای ماتریسی بحث اصلی پیرامون دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول خواهد بود. توجه شود که علت نامگذاری این روش تحت عنوان ماتریسی آن است که از ابتدا دستگاه معادلات دیفرانسیل را به شکل ماتریس بیان کرده و سپس با استفاده از ویژگیهای این ماتریس از جمله مقادیر ویژه و بردارهای ویژه, مساله حل خواهد شد.

به همین منظور در بخش ۶-۳ مقدمات جبر خطی ارائه خواهد شد. در این بخش مفهوم وابستگی و استقلال بردارها و توابع برداری و سپس مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریسها بررسی می‌شود.

در بخش ۶-۴ به معرفی قضایای اساسی دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول می‌پردازیم. در آنجا خواهیم دید که حل معادله همگن و غیر همگن هرکدام شیوه خاص خود را خواهد داشت. به همین منظور در بخش ۶-۵ حل دستگاه معادلات دیفرانسیل همگن و سپس در بخش ۶-۶ حل دستگاه‌های غیرهمگن را خواهیم دید. عمده بحث در اینجا نیز در ارتباط با دستگاههای با ضرایب ثابت خواهد بود. در نهایت در بخش ۶-۷ نیز به بررسی دستگاه معادلات کوشی-اویلر می‌پردازیم.

۶-۲- دو روش کلی حل دستگاهها

در این بخش دو روش ساده در حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل ارائه خواهد شد.

۶-۲-۱- روش حذفی

در روش حذفی دستگاه معادلات دیفرانسیل به معادلاتی معمولی بر حسب هر یک از متغیرها تبدیل می‌شود. در واقع این روش درست مشابه روش حذفی در حل دستگاههای معادلات جبری می‌باشد. با ارائه مثالهایی روش کار دیده خواهد شد. در این فصل در همه جا t را متغیر مستقل و $x_1(t)$ تا $x_n(t)$ را توابع مجهول در نظر گرفته‌ایم.

مثال ۶-۴ با استفاده از روش حذفی دستگاه‌های زیر را حل کنید.

$$1)\ \begin{cases} x_1' = 4x_1 - 3x_2 + 4t \\ x_2' = 2x_1 - x_2 \end{cases} \quad ; \quad x_1(0) = 1\ ;\ x_2(0) = 0$$

$$2)\ \begin{cases} (x_1'' + x_1' - x_1) + (x_2'' - 3x_2' + 2x_2) = 0 \\ (x_1' + 2x_1) + (2x_2' - 4x_2) = 0 \end{cases}$$

حل الف: با جایگذاری x_2 از معادله اول در معادله دوم, به معادله‌ای میرسیم که فقط بر حسب x_1 بوده و از مرتبه دوم است.

$$x_2 = \frac{1}{3}(-x_1' + 4x_1 + 4t) \xrightarrow{sub.} \frac{1}{3}(-x_1' + 4x_1 + 4t)' = 2x_1 - \frac{1}{3}(-x_1' + 4x_1 + 4t)$$

$$x_1'' - 3x_1' + 2x_1 = 4t + 4 \rightarrow x_1(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + 2t + 5$$

$$\rightarrow x_2(t) = \frac{1}{3}(-x_1' + 4x_1 + 4t) = c_1e^t + \frac{2}{3}c_2e^{2t} + 4t + 6 \xrightarrow{I.C.} c_1 = -10\ ;\ c_2 = 6$$

البته در بعضی دستگاهها این روش طولانی خواهد بود. ■

توضیح ۱: با استفاده از اپراتور $D = \frac{d}{dt}$, جواب کلی یک دستگاه معادلات خطی با ضرایب ثابت با استفاده از روش حذفی بصورت زیر است:

$$\begin{cases} L_1[x_1] + L_2[x_2] = g_1 \\ L_3[x_1] + L_4[x_2] = g_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L_4L_1[x_1] + L_4L_2[x_2] = L_4[g_1] \\ L_2L_3[x_1] + L_2L_4[x_2] = L_2[g_2] \end{cases}$$

با کم کردن دو معادله اخیر به یک معادله دیفرانسیل صرفا بر حسب x_1 خواهیم رسید:

$$L_2L_3[x_1] - L_4L_1[x_1] = L_2[g_2] - L_4[g_1]$$

به عنوان نمونه در مثال بالا با انتخاب اپراتورهای $L_1 = D - 4$, $L_2 = 3$, $L_3 = -2$ و $L_4 = D + 1$ خواهیم داشت:

$$[3(-2) - (D+1)(D-4)]x_1 = 0 - (D+1)[4t] \rightarrow (D^2 - 3D + 2)x_1 = 4 + 4t$$

که همان معادله $x_1'' - 3x_1' + 2x_1 = 4t + 4$ است که در بالا بدست آمد که پس از حل, با جایگذاری x_2 نیز بدست می‌آید.

می‌توانستیم در ابتدا معادله دیفرانسیل را صرفا بر حسب x_2 بدست آوریم که در اینصورت به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$L_1L_4[x_2] - L_3L_2[x_2] = L_1[g_2] - L_3[g_1]$$

توضیح ۲: یک روش دیگر آن است که پس از بکارگیری اپراتور $D = \frac{d}{dt}$, دستگاه معادلات جبری بدست آمده را به روش کِرامر حل کنیم. خلاصه این روش برای دستگاه دو معادله و دو مجهول بصورت زیر است:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{cases} \rightarrow x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{c_1a_{22} - c_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \quad ; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

توضیحات کاملتر روش کرامر در ضمیمه آمده است. به عنوان نمونه برای مثال بالا خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (D-4)x_1 + 3x_2 = 4t \\ -2x_1 + (D+1)x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow x_1 = \frac{4+4t}{D^2 - 3D + 2} \rightarrow x_1'' - 3x_1' + 2x_1 = 4t + 4 \quad \blacksquare$$

$$2) \begin{cases} (x_1'' + x_1' - x_1) + (x_2'' - 3x_2' + 2x_2) = 0 \\ (x_1' + 2x_1) + (2x_2' - 4x_2) = 0 \end{cases}$$

ب: با انتخاب اپراتورهای $L_1 = D^2 + D - 1$, $L_2 = D^2 - 3D + 2$, $L_3 = D + 2$ و $L_4 = 2D - 4$ خواهیم داشت:

$$L_1L_4[x_2] - L_3L_2[x_2] = L_1[g_2] - L_3[g_1]$$

$$\rightarrow [(D^2 + D - 1)(2D - 4) - (D+2)(D^2 - 3D + 2)]x_2 = 0 \rightarrow (D^3 - D^2 - 2D)x_2 = 0$$

از حل معادله اخیر خواهیم داشت:

$$x_2(t) = c_1 + c_2e^{2t} + c_3e^{-t}$$

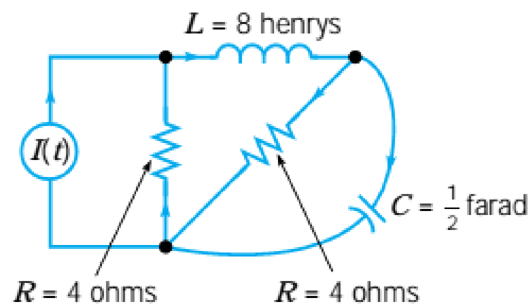
با جایگزینی این عبارت در سطر دوم دستگاه اولیه خواهیم داشت:

$$(x_1' + 2x_1) + (2x_2' - 4x_2) = 0 \rightarrow x_1' + 2x_1 = 4c_1 + 6c_3e^{-t} \rightarrow x_1(t) = 2c_1 + 6c_3e^{-t} + c_4e^{-2t}$$

به نظر میرسد که مساله حل شده است. اما معمولا با روش حذفی, تعدادی ثابت اضافی وارد مساله می‌شود. برای حذف این ثابتهای اضافی میتوان این جواب را در سطر اول دستگاه(که در گام قبل از آن استفاده نشده است) قرار داد. با جایگذاری $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در سطر اول دستگاه, $c_4 = 0$ بدست می‌آید. به هر حال همواره بایستی با جایگذاری جوابهای بدست آمده در تمام معادلات, ثابتهای اضافی وارد شده به مساله را حذف کرد. ■

توضیح: می‌توان نشان داد تعداد ثابتهای لازم در حل یک دستگاه همواره برابر مرتبه $L_1L_4 - L_3L_2$ خواهد بود, مشروط بر آنکه $L_1L_4 - L_3L_2 \neq 0$ باشد. بعنوان نمونه در مثال بالا از آنجا که مرتبه $D^3 - D^2 - 2D$ برابر ۳ میباشد, لذا قطعا بیشتر از ۳ ثابت نبایستی وجود داشته باشد که با جایگذاری در دستگاه اولیه, $c_4 = 0$ بدست آمد. ■

مثال ۶-۵ در مدار داده شده شکل زیر، معادلات دیفرانسیل حاکم بر مدار به صورت زیر بیان گردیده‌اند:



$$\begin{cases} x_1'(t) = -\frac{1}{2}x_1(t) - \frac{1}{8}x_2(t) + \frac{1}{2}I(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - \frac{1}{2}x_2(t) \end{cases}$$

که در آن x_1 جریان عبوری از القاگر، x_2 افت ولتاژ در خازن و $I(t)$ جریان ایجاد شده توسط منبع خارجی می‌باشد. چنانچه $I(t) = e^{-\frac{t}{2}}$ باشد، جریان عبوری از القاگر و افت ولتاژ در خازن را به صورت توابعی از t بیابید.

حل با استفاده از اپراتور $D = \frac{d}{dt}$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 8x_1'(t) = -4x_1(t) - x_2(t) + 4e^{-\frac{t}{2}} \\ 2x_2'(t) = 4x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (8D+4)x_1 + x_2 = 4e^{-\frac{t}{2}} \\ -4x_1 + (2D+1)x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow x_1 = \frac{0}{16D^2 + 16D + 8}$$

$$\rightarrow 2x_1'' + 2x_1' + x_1 = 0 \rightarrow r = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i \rightarrow x_1(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2}} cos\left(\frac{t}{2}\right) + c_2 e^{-\frac{t}{2}} sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$x_2(t) = -8x_1'(t) - 4x_1(t) + 4e^{-\frac{t}{2}} = 4c_1 e^{-\frac{t}{2}} sin\left(\frac{t}{2}\right) - 4c_2 e^{-\frac{t}{2}} cos\left(\frac{t}{2}\right) + 4e^{-\frac{t}{2}} \quad \blacksquare$$

۶-۲-۲- روش تبدیل لاپلاس

در روش لاپلاس نیز از هر یک از معادلات تبدیل لاپلاس میگیریم تا در نهایت بجای دستگاه n معادله دیفرانسیل به دستگاه جبری n معادله n مجهول برسیم. در مثالهای زیر جزئیات کار دیده می‌شود.

مثال ۶-۶ در مثال ۶-۱, با فرض $i_1(0) = i_2(0) = 0$, جریان در هر مدار را بیابید.

$$\begin{cases} i_1' + 15i_1 + 10i_2 = 60 \\ i_1' + 5i_1 - 2i_2' - 10i_2 = 0 \end{cases}$$

حل می‌توان از معادله اول i_2 را بر حسب i_1 بدست آورد که در نهایت با جایگذاری در معادله دوم به یک معادله مرتبه ۲ خواهیم رسید و یا با استفاده از اپراتور $D = \frac{d}{dt}$ و حل دستگاه به روش حذفی, مساله را حل کرد.

راه دیگر استفاده از تبدیل لاپلاس است. اگر لاپلاس i_1 را با I_1 و لاپلاس i_2 را با I_2 نمایش دهیم, خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} sI_1 - i_1(0) + 15I_1 + 10I_2 = \frac{60}{s} \\ sI_1 - i_1(0) + 5I_1 - 2\left(sI_2 - i_2(0)\right) - 10I_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1(s) = \frac{60}{s(s+20)} \\ I_2(s) = \frac{30}{s(s+20)} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}\begin{cases} i_1(t)=3(1-e^{-20t}) \\ i_2(t)=\dfrac{3}{2}(1-e^{-20t}) \end{cases} \quad \blacksquare$$

مثال ۶-۷ دستگاههای زیر را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$1)\ \begin{cases} x'(t)+y(t)=t \\ 4x(t)+y'(t)=0 \end{cases} \quad ; \quad x(0)=1\ ;\ y(0)=-1$$

$$2)\ \begin{cases} x''(t)-x(t)+5y'(t)=f(t) \\ -2x'(t)+y''(t)-4y(t)=0 \end{cases} \quad ; \quad f(t)=\begin{cases} 6t & 0\le t<2 \\ 12 & t\ge 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x(0)=x'(0)=0 \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$$

حل الف: با لاپلاس گرفتن از دو معادله, خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{\mathcal{L}}\begin{cases} sX(s)-x(0)+Y(s)=\dfrac{1}{s^2} \\ 4X(s)+sY(s)-y(0)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X(s)=\dfrac{s^2+s+1}{s(s^2-4)}=\dfrac{-1/4}{s}+\dfrac{7/8}{s-2}+\dfrac{3/8}{s+2} \\ Y(s)=-\dfrac{s^3+4s^2+4}{s^2(s^2-4)}=\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{7/4}{s-2}+\dfrac{3/4}{s+2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}\begin{cases} x(t)=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{7}{8}e^{2t}+\dfrac{3}{8}e^{-2t} \\ y(t)=t-\dfrac{7}{4}e^{2t}+\dfrac{3}{4}e^{-2t} \end{cases} \quad \blacksquare$$

$$2)\ \begin{cases} x''(t)-x(t)+5y'(t)=f(t) \\ -2x'(t)+y''(t)-4y(t)=0 \end{cases} \quad ; \quad f(t)=\begin{cases} 6t & 0\le t<2 \\ 12 & t\ge 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x(0)=x'(0)=0 \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$$

ب: ابتدا لاپلاس $f(t)$ را محاسبه کرده و سپس با لاپلاس گرفتن از دو معادله, خواهیم داشت:

$$f(t)=6t+(12-6t)H_2(t)\rightarrow \mathcal{L}\big(f(t)\big)=\frac{6}{s^2}+e^{-2s}\mathcal{L}\big(12-6(t+2)\big)=\frac{6}{s^2}(1-e^{-2s})$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}}\begin{cases} (s^2-1)X(s)+5sY(s)=\dfrac{6}{s^2}(1-e^{-2s}) \\ -2sX(s)+(s^2-4)Y(s)=0 \end{cases} \rightarrow X(s)=\frac{6(1-e^{-2s})(s^2-4)}{s^2(s^2+1)(s^2+4)}\ ;\ Y(s)=\cdots$$

$$X(s)=\frac{6(s^2-4)}{s^2(s^2+1)(s^2+4)}-e^{-2s}\frac{6(s^2-4)}{s^2(s^2+1)(s^2+4)}=X_1(s)-e^{-2s}X_1(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\big(X_1(s)\big)=\mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{6}{s^2}+\frac{10}{s^2+1}-\frac{4}{s^2+4}\right)=-6t+10sint-2sin(2t)$$

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\big(X(s)\big)}_{x(t)}=-6t+10sint-2sin2t-H_2(t)\big(-6(t-2)+10sin(t-2)-2sin(2t-4)\big)$$

و به همین ترتیب با معکوس گیری از $Y(s)$ می‌توان $y(t)$ را نیز بدست آورد. ■

تمرینات بخش ۶-۲

۱- مثالهای ۶-۶ و ۶-۷ را به روش حذفی نیز حل کنید.

۲- دستگاههای زیر را به کمک لاپلاس حل کنید.

1) $\begin{cases} x_1' - x_1 - x_2 = -9t \\ x_2' - 4x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad ; \quad x_1(0) = 1 \ ; \ x_2(0) = 4$

$\underline{Ans}$: $x_1(t) = -3t + 5 - 5e^{-t} + e^{3t} \quad ; \quad x_2(t) = 12t - 8 + 10e^{-t} + 2e^{3t}$

2) $\begin{cases} x_1' - 4x_1 - 5x_2 = 4e^t cost \\ x_2' + 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \quad ; \quad x_1(0) = 1 \ ; \ x_2(0) = 1$

$\underline{Ans}$: $x_1(t) = e^t(cost + 10sint + 2tcost + 6tsint) \quad ; \quad x_2(t) = e^t(cost - 5sint - 4tsint)$

3) $\begin{cases} x_3'' - x_2 + 2x_1 = 3e^{-t} \\ -2x_3' + 2x_2' + x_1 = 0 \\ 2x_3' - 2x_2 + 2x_1'' + x_1' = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_1'(0) = -2 \end{cases} \ ; \ x_2(0) = 2 \ ; \ \begin{cases} x_3(0) = 1 \\ x_3'(0) = 1 \end{cases}$

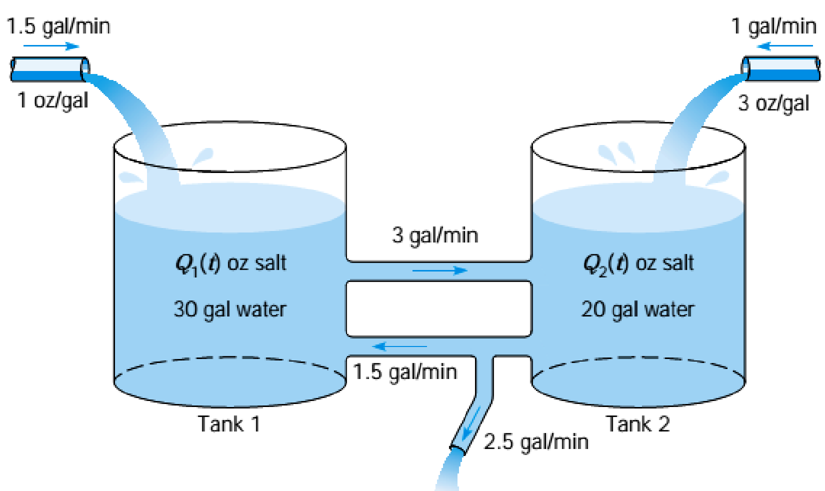
$\underline{Ans}$: $x_1(t) = 2e^{-t} \quad ; \quad x_2(t) = e^t + e^{-t} \quad ; \quad x_3(t) = e^t$

۳- معادله ارتعاش زیر را که قبلا در بحث معادلات مرتبه دوم و در مثال ۲-۱۳ مطرح شد به یک دستگاه مرتبه اول تبدیل کرده، دستگاه حاصله را به کمک لاپلاس حل کنید.

$x'' + 9x' + 14x = 0.5sint \quad ; \quad x(0) = 0 \ ; \ \dot{x}(0) = -1$

$\underline{Ans}$: $x(t) = \dfrac{1}{500}(-90e^{-2t} + 99e^{-7t} + 13sint - 9cost)$

۴- دو مخزن مطابق شکل زیر به یکدیگر متصل شده‌اند. مخزن ۱ در ابتدا حاوی ۳۰ گالون آب و ۲۵ اونس نمک است و مخزن ۲ در ابتدا حاوی ۲۰ گالون آب و ۱۵ اونس نمک میباشد.



آبی که در هر گالن آن ۱ اونس نمک موجود است با نرخ $1.5\ gal/min$ وارد مخزن ۱ میشود. مایع مخلوط شده از مخزن با نرخ $3\ gal/min$ به مخزن ۲ منتقل میشود. آبی حاوی $3\ oz/gal$ از نمک نیز با نرخ $1\ gal/min$ (از خارج) به مخزن ۲ وارد میشود. محلول حاصل با نرخ $4\ gal/min$ از مخزن ۲ خارج میشود. بخشی از این مایع با نرخ $1.5\ gal/min$ به مخزن ۱ برمیگردد و مابقی از دستگاه خارج میشود.

الف: فرض کنید $Q_1(t)$ و $Q_2(t)$ به ترتیب مقدار نمک در زمان t در هر مخزن باشد. معادله دیفرانسیل و شرایط اولیه‌ای را بنویسید که روند این جریان را مدل میکنند. دیده میشود که به یک دستگاه غیرهمگن می‌رسیم.

ب: معادله را حل کرده و مقادیری از $Q_1(t)$ و $Q_2(t)$ را بیابید که دستگاه در حال تعادل باشد. آنها را Q_1^E و Q_2^E بنامید.

ج: فرض کنید $x_1 = Q_1(t) - Q_1^E$ و $x_2 = Q_2(t) - Q_2^E$. معادله دیفرانسیل و شرایط اولیه را بر حسب x_1 و x_2 بیان کنید. دیده میشود که در اینصورت به یک دستگاه همگن خواهیم رسید.

$$\underline{Ans}:\quad a)\ \begin{cases} Q_1' = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{10}Q_1 + \dfrac{3}{40}Q_2 \\ Q_2' = 3 + \dfrac{1}{10}Q_1 - \dfrac{1}{5}Q_2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} Q_1(0) = 25 \\ Q_2(0) = 15 \end{cases} \quad ; \quad b)\ Q_1^E = 42 \ ; \ Q_2^E = 36$$

$$c)\ \begin{cases} x_1' = -\dfrac{1}{10}x_1 + \dfrac{3}{40}x_2 \\ x_2' = \dfrac{1}{10}x_1 - \dfrac{1}{5}x_2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x_1(0) = -17 \\ x_2(0) = -21 \end{cases}$$

۶-۳- مروری بر مقدمات جبر خطی

در این بخش مقدماتی از جبر خطی مورد نیاز برای مباحث بعد ارائه خواهد شد. در ابتدا به مفهوم وابستگی و استقلال بردارها و نیز توابع برداری پرداخته و سپس بحث مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریسها همراه با قضایای آن ارائه خواهد شد. با توجه به اینکه هدف اصلی این بخش استفاده از آن در بخشهای بعدی است, لذا سعی شده است موارد تقریبا بصورت خلاصه ارائه شده و در پاره‌ای موارد از اثبات قضایا صرفنظر شده است. قبل از شروع این بخش لازم است عملیات حذفی گوس از بخش ضمیمه مطالعه شود.

۶-۳-۱- وابستگی و استقلال خطی بردارها و توابع برداری

در این بخش ابتدا به وابستگی و استقلال بردارها و سپس توابع برداری می‌پردازیم. این موضوع درست مشابه بحث وابستگی و استقلال توابع می‌باشد که در بخش ۲-۲ بررسی گردید, با این تفاوت که در آنجا بحث پیرامون توابع بود و در اینجا بردار یا توابع برداری.

۱- مجموعه <u>بردارهای</u> $\{\mathbf{v}^{(i)}\}$, $(i = 1,2,3, \dots, n)$ در فضای n بعدی را وابسته خطی می‌گوییم اگر و تنها اگر اسکالرهای c_i که همگی صفر نیستند, وجود داشته باشد بگونه‌ای که $\sum_{i=1}^{n} c_i\, \mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{0}$ که در آن $\mathbf{0}$ بیانگر بردار صفر است.

برای کنترل وابستگی یا استقلال مجموعه بردارها دو روش کلی وجود دارد:

الف: می‌توان با نوشتن رابطه $\sum_{i=1}^{n} c_i\, \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ و حل آن به روش معمول حذفی یا کرامر, اسکالرهای c_i را بدست آورد و یا بهتر است از عملیات حذفی گوس (یا هر عملیات سطری مقدماتی) استفاده کرد که علاوه بر تعیین وابستگی یا استقلال مجموعه بردارها, اطلاعات بیشتری از جمله رتبه $(Rank)$ و نیز در صورت وابستگی بردارها, رابطه وابستگی را بدست خواهد داد.

ب: می‌توان بدون حل دستگاه یا انجام عملیات حذفی گوس با استفاده از قضیه زیر نیز وابستگی یا استقلال بردارها را مشخص کرد.

قضیه ۱: مجموعه بردارهای $\{\mathbf{v}^{(i)}\}$, $(i=1,2,3,\dots,n)$ در فضای n بعدی را در نظر می‌گیریم. این مجموعه بردارها مستقلند اگر دترمینان ماتریس حاصل از کنار هم قرار گرفتن این بردارها مخالف صفر باشد. همچنین وابسته‌اند اگر این دترمینان صفر باشد.

اثبات این قضیه نیز ساده است, چرا که اگر دترمینان صفر باشد دستگاه دارای جواب غیر صفر بوده و لذا با توجه به تعریف وابستگی, مجموعه بردارها وابسته‌اند.

۲- مجموعه توابع برداری $\{\mathbf{x}^{(i)}(t)\}$, $(i=1,2,3,\dots,n)$ در فضای n بعدی را که در بازه $I=[a,b]$ تعریف شده‌اند وابسته خطی می‌گوییم اگر و تنها اگر اسکالرهای c_i که همگی صفر نیستند, وجود داشته باشد بگونه‌ای که به ازای هر $t\in I$ داشته باشیم $\sum_{i=1}^{n} c_i\,\mathbf{x}^{(i)}(t)=\mathbf{0}$.

در اینجا نیز برای کنترل وابستگی یا استقلال مجموعه توابع برداری دو روش کلی وجود دارد:

الف: می‌توان با نوشتن رابطه $\sum_{i=1}^{n} c_i\,\mathbf{x}^{(i)}(t)=\mathbf{0}$ و حل آن به روش معمول حذفی یا کرامر, اسکالرهای c_i را بدست آورد و یا بهتر است از عملیات حذفی گوس استفاده کرد. فقط در تعیین مجهولات توجه شود که روابط بدست آمده باید به ازای $\forall t\in I$ برقرار باشند.

ب: می‌توان بدون حل دستگاه یا انجام عملیات حذفی گوس با استفاده از قضیه زیر نیز وابستگی یا استقلال توابع برداری را مشخص کرد.

قضیه ۲: مجموعه توابع برداری $\{\mathbf{x}^{(i)}(t)\}$, $(i=1,2,3,\dots,n)$ در فضای n بعدی که در بازه $I=[a,b]$ تعریف شده‌اند را در نظر می‌گیریم. این مجموعه توابع برداری مستقلند اگر دترمینان ماتریس حاصل از کنار هم قرار گرفتن این توابع برداری به ازای $\forall t\in I$ مخالف صفر باشد.

نکته مهم: به تفاوت قضیه ۲ با قضیه ۱ که مربوط به مجموعه بردارها است, توجه کنید. در مجموعه توابع برداری قضیه ۲ نمی‌گوید که اگر دترمینان برای $\forall t\in I$ برابر صفر شود, حتما توابع برداری وابسته‌اند (به قسمت سوم مثال بعد توجه شود).

اینکه قضیه ۲ برای حالتی که دترمینان صفر شده است, بدون نتیجه باقی می‌ماند, درست مشابه مطلبی است که در بخش ۲-۲ عنوان شد. به این معنی که در آنجا دیدیم برای توابع حقیقی (و نه برداری) اگر رونسکین برای هر x برابر صفر شود, نمی‌توان الزاما نتیجه گرفت که توابع وابسته‌اند. بدیهی است رونسکین ارائه شده برای توابع حقیقی, همان نقش دترمینان حاصل از کنار هم قرار گرفتن توابع برداری را خواهد داشت.

البته در بخش ۶-۴ خواهیم دید که اگر $\mathbf{x}^{(i)}(t)$ ها همگی جوابهای یک دستگاه معادله دیفرانسیل خطی باشند, آنگاه اگر دترمینان برابر صفر شود حتما توابع برداری داده شده وابسته‌اند. مشابه همین موضوع در معادلات خطی نیز دیده شد.

در انتها لازم به ذکر است همانگونه که قبلا نیز در بحث وابستگی و استقلال توابع (بخش ۲-۲) عنوان شد معنی وابستگی خطی آن است که حداقل یکی از آنها را بتوان بصورت ترکیب خطی از مابقی نوشت.

مثال ۶-۸ استقلال و وابستگی بردارها یا توابع برداری زیر را مشخص کنید.

1) $\mathbf{v}^{(1)}=[2,0,1]^T \;;\; \mathbf{v}^{(2)}=[0,1,1]^T \;;\; \mathbf{v}^{(3)}=[2,2,3]^T$

2) $\mathbf{x}^{(1)}(t)=[1-t,1]^T \;;\; \mathbf{x}^{(2)}(t)=[1+t,2+t]^T \;;\; t\in(-\infty,\infty)$

3) $\mathbf{x}^{(1)}(t)=[1,3]^T \;;\; \mathbf{x}^{(2)}(t)=[t,3t]^T \;;\; t\in(-\infty,\infty)$

حل الف: با نوشتن رابطه $\sum_{i=1}^{n} c_i\, \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ خواهیم داشت:

$$c_1\mathbf{v}^{(1)} + c_2\mathbf{v}^{(2)} + c_3\mathbf{v}^{(3)} = \mathbf{0} \to c_1[2,0,1]^T + c_2[0,1,1]^T + c_3[2,2,3]^T = [0,0,0]^T$$

$$\to \begin{cases} 2c_1 + 2c_3 = 0 \\ c_2 + 2c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + 3c_3 = 0 \end{cases} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

برای حل دستگاه می‌توان از عملیات حذفی گوس مطابق آنچه در ضمیمه آمده است استفاده کرد, خواهیم داشت:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{r_1}{(2)} \to r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-(1)r_1 + r_3 \to r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-(1)r_2 + r_3 \to r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

از سطر سوم نتیجه مناسبی بدست نمی‌آید, چرا که همواره برقرار بوده و به عبارتی یک رابطه اضافی است (به همین دلیل هم دترمینان صفر شده است). در این حالت می‌گوییم رتبه (رنک) ماتریس برابر $R = 2$ می‌باشد, زیرا یک سطر آن اضافی است. از سطر دوم خواهیم داشت $c_2 + 2c_3 = 0$. اگر در این رابطه مثلا c_3 را یک عدد دلخواه انتخاب کنیم, می‌توان c_2 را بر حسب آن بدست آورد و در نهایت با جایگذاری در سطر اول c_1 را نیز محاسبه کرد. لذا اگر فرض کنیم $c_3 = k$ خواهیم داشت:

$$c_3 = k \quad ; \quad c_2 + 2c_3 = 0 \to c_2 = -2k \quad ; \quad c_1 + c_3 = 0 \to c_1 = -k$$

بنابراین با هر انتخاب $k \neq 0$ ضرایب c_1 و c_2 بر حسب آن بدست می‌آید. لذا این بردارها وابسته‌اند. می‌توان نحوه این وابستگی را بصورت زیر بیان کرد:

$$c_1\mathbf{v}^{(1)} + c_2\mathbf{v}^{(2)} + c_3\mathbf{v}^{(3)} = \mathbf{0} \to -k\mathbf{v}^{(1)} - 2k\mathbf{v}^{(2)} + k\mathbf{v}^{(3)} = \mathbf{0} \xrightarrow{k \neq 0} \mathbf{v}^{(1)} + 2\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{v}^{(3)} = \mathbf{0} \ \blacksquare$$

توضیح: می‌توان بدون حل دستگاه یا انجام عملیات حذفی گوس, با استفاده از قضیه ۱ نیز وابستگی یا استقلال این مجموعه بردارها را مشخص کرد. بر طبق این قضیه از آنجا که $det([\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}]) = 0$ یعنی دستگاه دارای جواب غیر صفر بوده و لذا بردارها وابسته می‌باشند. اما اگر هدف تعیین نحوه وابستگی این بردارها باشد از همان عملیات حذفی گوس استفاده می‌کنیم. ■

$$2)\ \ \mathbf{x}^{(1)}(t) = [1-t, 1]^T \quad ; \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = [1+t, 2+t]^T \quad ; \quad t \in (-\infty, \infty)$$

ب: در اینجا نیز با نوشتن رابطه $\sum_{i=1}^{2} c_i\, \mathbf{x}^{(i)}(t) = \mathbf{0}$ و حل دستگاه خواهیم داشت:

$$c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) = \mathbf{0} \to c_1[1-t, 1]^T + c_2[1+t, 2+t]^T = [0,0]^T$$

$$\to \begin{cases} c_1(1-t) + c_2(1+t) = 0 \\ c_1 + c_2(2+t) = 0 \end{cases} \to \begin{bmatrix} 1-t & 1+t \\ 1 & 2+t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \forall t \in (-\infty, \infty)$$

برای حل دستگاه از رابطه دوم $c_1 = -c_2(2+t)$ بدست می‌آید, که با جایگذاری در رابطه اول به $(t^2 + 2t - 1)c_2 = 0$ خواهیم رسید. از آنجا که این روابط بایستی به ازای $\forall t \in (-\infty, \infty)$ برقرار باشند, از دومین رابطه نتیجه می‌شود که بایستی $c_2 = 0$ و با استفاده از $c_1 = -c_2(2+t)$ نیز $c_1 = 0$ خواهد شد. بنابراین رابطه صرفا وقتی برقرار است که هر دو ضریب صفر باشند, لذا با توجه به تعریف ارائه شده, این توابع برداری در بازه داده شده مستقلند. ■

<u>توضیح ۱</u>: برای حل دستگاه می‌توان از عملیات حذفی گوس نیز استفاده کرد. در این مثال ساده‌تر است جای سطر اول و دوم را عوض کنیم تا درایه $a_{11} = 1$ باشد. خواهیم داشت:

$$\left[\begin{matrix} 1 & 2+t \\ 1-t & 1+t \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right] \xrightarrow{-(1-t)r_1+r_2 \to r_2} \left[\begin{matrix} 1 & 2+t \\ 0 & t^2+2t-1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right] \to \begin{cases} c_1 + c_2(2+t) = 0 \\ (t^2+2t-1)c_2 = 0 \end{cases}$$

از آنجا که این روابط بایستی به ازای $\forall t \in (-\infty, \infty)$ برقرار باشند, از سطر دوم نتیجه می‌شود که بایستی $c_2 = 0$ و با استفاده از سطر اول نیز $c_1 = 0$ خواهد شد.

<u>توضیح ۲</u>: شاید یک راه ساده برای رسیدن به نتیجه این باشد که چون دستگاه ارائه شده بایستی به ازای $\forall t$ برقرار باشد, با انتخاب یک t در بازه داده شده مانند $t = 0$ مساله را ادامه دهیم. خواهیم داشت:

$$\begin{cases} c_1(1-t) + c_2(1+t) = 0 \\ c_1 + c_2(2+t) = 0 \end{cases} \xrightarrow{t=0} \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \to c_1 = c_2 = 0$$

<u>توضیح ۳</u>: می‌توان بدون حل دستگاه یا انجام عملیات حذفی گوس, با استفاده از قضیه ۲ نیز وابستگی یا استقلال این مجموعه توابع برداری را مشخص کرد. خواهیم داشت:

$$det\left(\left[\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t)\right]\right) = \begin{vmatrix} 1-t & 1+t \\ 1 & 2+t \end{vmatrix} = -t^2 - 2t + 1$$

بدیهی است این دترمینان فقط برای دو t خاص برابر صفر می‌شود, نه برای همه t های بازه. لذا این دو تابع برداری مستقلند. ■

3) $\mathbf{x}^{(1)}(t) = [1,3]^T \quad ; \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = [t, 3t]^T \quad ; \quad t \in (-\infty, \infty)$

ج: در ابتدا ممکن است تصور کنیم این دو تابع برداری وابسته‌اند, چرا که یکی مضربی از دیگری است, اما توجه شود که مضرب ثابتی نیست. اگر بخواهیم مساله را بطریق معمول حل کنیم, مشابه قسمت قبل خواهیم داشت:

$$c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) = \mathbf{0} \to c_1[1,3]^T + c_2[t,3t]^T = [0,0]^T$$
$$\to \begin{cases} c_1 + c_2 t = 0 \\ 3c_1 + 3c_2 t = 0 \end{cases} \to \begin{bmatrix} 1 & t \\ 3 & 3t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \forall t \in (-\infty, \infty)$$

برای حل دستگاه از رابطه اول $c_1 = -c_2 t$ بدست می‌آید, که با جایگذاری در رابطه دوم به $-3c_2 t + 3c_2 t = 0$ خواهیم رسید که یک رابطه همیشه درست است. به عبارتی مجهولات مشخص نشد, علت هم آن است که دترمینان ماتریس برابر صفر است. بنابراین بهتر است از عملیات حذفی گوس استفاده کنیم. خواهیم داشت:

$$\left[\begin{matrix} 1 & t \\ 3 & 3t \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right] \xrightarrow{-(3)r_1+r_2 \to r_2} \left[\begin{matrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right]$$

سطر دوم همواره برقرار بوده و لذا رتبه (رنک) ماتریس برابر $R = 1$ می‌باشد. از سطر اول خواهیم داشت $c_1 + tc_2 = 0$. لذا اگر فرض کنیم $c_2 = k$ خواهیم داشت $c_1 = -tk$. اگر چه با هر انتخاب $k \neq 0$ مقادیری غیر صفر برای c_1 و c_2 بدست می‌آید, اما این ثابتها بایستی اسکالر (اعداد ثابت) باشند تا بگوییم توابع وابسته‌اند. بنابراین از آنجا که نتوانستیم اسکالرهای c_1 و c_2 مخالف صفر را برای برقراری این تساوی بدست آوریم, لذا آنها مستقلند. ■

<u>توضیح ۱</u>: اگر بخواهیم با استفاده از قضیه ۲ مساله را بررسی کنیم خواهیم داشت:

$$det\left(\left[\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t)\right]\right) = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 3 & 3t \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \forall t \in (-\infty, \infty)$$

دیده می‌شود که دترمینان به ازای $\forall t \in I$ برابر صفر است, در حالیکه دیده شد توابع مستقلند. بنابراین در توابع برداری اگر دترمینان برای $\forall t \in I$ برابر صفر شود, نمی‌توان گفت که حتما توابع برداری داده شده وابسته‌اند.

توضیح ۲: در انتها توجه شود که اگر وابستگی یا استقلال توابع برداری برای یک t خاص, مثلا $t = t_0$ مورد نظر باشد, در اینصورت دیگر با تابع برداری روبرو نیستیم چرا که به بردار تبدیل شده‌اند. در اینصورت میتوان گفت اگر دترمینان برابر صفر شود, حتما بردارهای مورد نظر وابسته‌اند. مثلا در مثال بالا دیده شد که توابع برداری $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ و $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ مستقلند, اما اگر مثلا $t = 2$ انتخاب شود, آنگاه به بردارهای $\mathbf{v}^{(1)} = [1,3]^T$ و $\mathbf{v}^{(2)} = [2,6]^T$ خواهیم رسید که وابسته‌اند, چرا که $\mathbf{v}^{(2)} = 2\mathbf{v}^{(1)}$. ■

۶-۳-۲- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریسها

بعنوان یک تعریف کلی, در اینجا هدف آن است که برای یک تبدیل خطی, برداری غیر صفر بدست آوریم که با اعمال تبدیل, راستای بردار عوض نشود. یعنی:

$$\mathbf{Av} = r\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{Av} - r\mathbf{v} = \mathbf{0} \rightarrow (\mathbf{A} - r\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \rightarrow |\mathbf{A} - r\mathbf{I}| = 0$$

با مساوی صفر قرار دادن معادله فوق که اصطلاحا به نام معادله مشخصه یا معادله سرشت‌نمایی ماتریس شناخته میشود, مقادیر ویژه r بدست می‌آید. در ادامه بایستی بردارهای ویژه مستقل را بدست آوریم و مهمتر آنکه مجموعه کاملی(به تعداد بُعد ماتریس) از بردارهای ویژه مستقل بدست آید که البته همواره امکان پذیر نمی‌باشد. در مثال زیر نحوه محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه چند ماتریس دیده می‌شود.

مثال ۶-۹ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریسهای زیر را بدست آورید.

$$1)\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |\mathbf{A} - r\mathbf{I}| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1-r & 2 \\ 2 & 1-r \end{vmatrix} = 0 \rightarrow r^2 - 2r - 3 = 0 \rightarrow r_1 = 3; r_2 = -1$$

$$r_1 = 3 \rightarrow (\mathbf{A} - r\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

دقت شود چون r_1 مقدار ویژه است, لذا حتما دترمینان دستگاه صفر بوده و در واقع با یک معادله و دو مجهول روبرو هستیم. بنابراین در حالت کلی بهتر است از روش حذفی گوس استفاده کنیم. در این مثال ساده با جمع سطر اول با سطر دوم خواهیم داشت:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

سطر دوم همواره برقرار بوده و لذا رتبه (رنک) ماتریس برابر $R = 1$ می‌باشد. از سطر اول خواهیم داشت $-2v_1 + 2v_2 = 0$ که بیشمار جواب خواهد داشت. لذا اگر فرض کنیم $v_1 = k$ آنگاه $v_2 = k$ بدست می‌آید. در نتیجه:

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k \\ k \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

به عبارتی با بیشمار بردار ویژه روبرو خواهیم بود که همگی مضربی از $\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ می‌باشند (معادل آنکه $k = 1$ قرار داده شده باشد). پس تنها یک بردار مستقل خطی خواهیم داشت. به همین ترتیب میتوان نظیر $r_2 = -1$ نیز یک بردار مستقل خطی بدست آورد. بنابراین در نهایت:

$$r_1 = 3 \xrightarrow{k=1} \mathbf{v}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad ; \quad r_2 = -1 \xrightarrow{\cdots} \mathbf{v}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

دیده میشود که بردارهای ویژه نظیر مقادیر ویژه متمایز, مستقل خطی هستند که در بخش ۶-۳-۳ علت آنرا خواهیم دید. ■

توضیح: یک راه دیگر تعیین بردار ویژه برای ماتریس به بعد 2 آن است که چون r مقدار ویژه است, لذا حتما دترمینان دستگاه صفر بوده و لذا یک سطر مضربی از سطر دیگر است. لذا فقط با یک سطر محاسبات را ادامه دهیم. مثلا با همان سطر اول که بصورت $-2v_1 + 2v_2 = 0$ می‌باشد, به همان نتیجه $v_1 = v_2 = k$ می‌رسیم. ■

$$2)\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow |\mathbf{A} - r\mathbf{I}| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2-r & -5 \\ 1 & -2-r \end{vmatrix} = 0 \rightarrow r^2 + 1 = 0 \rightarrow r_1 = i; r_2 = -i$$

$$r_1 = i \rightarrow (\mathbf{A} - r\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

در اینجا نیز می‌توان از روش حذفی گوس استفاده کرد. اما شاید برای ماتریسهای مختلط کمی طولانی باشد. لذا بهتر است مشابه توضیح مثال قبل صرفا محاسبات را با یک سطر ادامه دهیم.

$$(2-i)v_1 - 5v_2 = 0 \xrightarrow{v_2 = k} v_1 = (2+i)k \rightarrow \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} 2+i \\ 1 \end{Bmatrix} \xrightarrow{k=1} \mathbf{v}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 2+i \\ 1 \end{Bmatrix}$$

به همین ترتیب برای مقدار ویژه $r_2 = -i$ نیز به $\mathbf{v}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 2-i \\ 1 \end{Bmatrix}$ خواهیم رسید. ■

توضیح ۱: ممکن است در تعیین بردار ویژه به طریق زیر عمل کنیم:

$$(2-i)v_1 - 5v_2 = 0 \rightarrow (2v_1 - 5v_2) - iv_2 = 0$$

حال با توجه به اینکه سمت چپ یک عبارت مختلط به فرم $a + bi$ می‌باشد, نتیجه بگیریم برای صفر شدن آن باید اجزای حقیقی و موهومی آن صفر باشد که به $v_1 = v_2 = 0$ خواهیم رسید. درست مشابه آنچه در قضیه ارائه شده پس از مثال ۲-۷ عنوان شد, اشتباه این نتیجه‌گیری آن است که در تساوی $a + bi = 0$ صرفا زمانی می‌توان گفت $a = b = 0$ میباشد که a و b حقیقی باشند, در حالیکه در اینجا ممکن است v_1 و v_2 مقادیری مختلط باشند. بنابراین چنین استدلالی نادرست است.

توضیح ۲: فرض کنید r و $\mathbf{v}$ به ترتیب مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس حقیقی $\mathbf{A}$ باشند, یعنی $\mathbf{Av} = r\mathbf{v}$. چنانچه مزدوج مختلط دو سمت این رابطه را بگیریم, خواهیم داشت:

$$\mathbf{Av} = r\mathbf{v} \rightarrow \overline{\mathbf{Av}} = \overline{r\mathbf{v}} \rightarrow \overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{v}} = \overline{r}\,\overline{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbf{A}\,\overline{\mathbf{v}} = \overline{r}\,\overline{\mathbf{v}}$$

این رابطه بیانگر آن است که $\overline{r}$ نیز مقدار ویژه و $\overline{\mathbf{v}}$ بردار ویژه نظیر آن است. بنابراین اگر r مختلط باشد, مزدوج آن هم مقدار ویژه بوده و علاوه بر آن بردار ویژه آن هم مزدوجِ $\mathbf{v}$ خواهد بود. مثلا در مثال بالا:

$$r_1 = i \ ; \ \mathbf{v}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 2+i \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad r_2 = \overline{r_1} = -i \ ; \ \mathbf{v}^{(2)} = \overline{\mathbf{v}^{(1)}} = \begin{Bmatrix} 2-i \\ 1 \end{Bmatrix} \ ■$$

$$3)\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow |\mathbf{A} - r\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 5-r & -6 & -6 \\ -1 & 4-r & 2 \\ 3 & -6 & -4-r \end{vmatrix}$$

بهتر است بجای بسط دترمینان, ابتدا با توجه به خواص دترمینان (عملیات سطری و ستونی) آنرا به شکل ساده‌تری بیان کنیم:

$$\xrightarrow{-C_2+C_3\to C_3}\begin{vmatrix}5-r & -6 & 0\\ -1 & 4-r & r-2\\ 3 & -6 & 2-r\end{vmatrix}\xrightarrow{R_3+R_2\to R_2}\begin{vmatrix}5-r & -6 & 0\\ 2 & -2-r & 0\\ 3 & -6 & 2-r\end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{A}-r\mathbf{I}|=(2-r)[(5-r)(-2-r)+12]=-(r-2)^2(r-1)=0\to r_1=1;r_2=2$$

حال بایستی بردارهای ویژه نظیر هر مقدار ویژه را بدست آوریم. ابتدا برای $r_1=1$ محاسبات را دنبال می‌کنیم:

$$r_1=1\to\begin{bmatrix}4 & -6 & -6\\ -1 & 3 & 2\\ 3 & -6 & -5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

مساله را با استفاده از روش حذفی گوس حل می‌کنیم. در ابتدا $i=1$ انتخاب می‌شود:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}4 & -6 & -6 & 0\\ -1 & 3 & 2 & 0\\ 3 & -6 & -5 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{R_1}{(4)}\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -3/2 & -3/2 & 0\\ -1 & 3 & 2 & 0\\ 3 & -6 & -5 & 0\end{array}\right]\xrightarrow[-(3)R_1+R_3\to R_3]{-(-1)R_1+R_2\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -3/2 & -3/2 & 0\\ 0 & 3/2 & 1/2 & 0\\ 0 & -3/2 & -1/2 & 0\end{array}\right]$$

در این مثال به راحتی دیده می‌شود از جمع سطر ۲ و سطر ۳ ماتریس بالا مثلثی خواهد شد. اما اگر بخواهیم همان روال معمول را طی کنیم در گام بعد $i=2$ انتخاب شده و لذا خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{\frac{R_2}{(3/2)}\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -3/2 & -3/2 & 0\\ 0 & 1 & 1/3 & 0\\ 0 & -3/2 & -1/2 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{-\left(-\frac{3}{2}\right)R_2+R_3\to R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -3/2 & -3/2 & 0\\ 0 & 1 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

از سطر سوم نتیجه مناسبی بدست نمی‌آید, چرا که همواره برقرار بوده و به عبارتی یک رابطه اضافی است. بنابراین رتبه (رنک) ماتریس برابر $R=2$ می‌باشد. از ماتریس نهایی به دو رابطه $v_2+\frac{1}{3}v_3=0$ و $v_1-\frac{3}{2}v_2-\frac{3}{2}v_3=0$ خواهیم رسید که بیشمار جواب خواهد داشت. اگر فرض کنیم $v_3=k$ از این دو معادله خواهیم داشت:

$$v_2+\frac{1}{3}v_3=0\xrightarrow{v_3=k}v_2=-\frac{1}{3}k\qquad;\qquad v_1-\frac{3}{2}v_2-\frac{3}{2}v_3=0\xrightarrow{v_3=k\ ;\ v_2=-k/3}v_1=k$$

$$\to\mathbf{v}=\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{Bmatrix}=k\begin{Bmatrix}1\\ -\dfrac{1}{3}\\ 1\end{Bmatrix}\xrightarrow{k=3}\mathbf{v}^{(1)}=\begin{Bmatrix}3\\ -1\\ 3\end{Bmatrix}$$

به همین ترتیب برای $r_2=2$ خواهیم داشت:

$$r_2=2\to\begin{bmatrix}3 & -6 & -6\\ -1 & 2 & 2\\ 3 & -6 & -6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

در اینجا نیز مشابه قسمت قبل از عملیات حذفی گوس استفاده می‌کنیم. گاهی ممکن است با توجه به فرم ماتریس بتوان با انجام عملیات سطری کوتاهتری (به نسبت روش گوس) به جواب رسید. به عنوان نمونه برای این مثال می‌توان به طریق زیر عمل کرد:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}3 & -6 & -6 & 0\\ -1 & 2 & 2 & 0\\ 3 & -6 & -6 & 0\end{array}\right]\xrightarrow[3R_2+R_3\to R_3]{3R_2+R_1\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

در این‌حالت دو سطر اول و سوم همواره برقرار بوده و لذا روابط اضافی‌اند. یعنی تنها رابطه مفید $-v_1 + 2v_2 + 2v_3 = 0$ می‌باشد. بدیهی است در این‌حالت بایستی دو متغیر را بصورت مستقل انتخاب کرد تا سومی بر حسب آن بدست آید. مثلا:

$$v_2 = k_1 \quad ; \quad v_3 = k_2 \rightarrow v_1 = 2v_2 + 2v_3 = 2k_1 + 2k_2$$

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2k_1 + 2k_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} = k_1 \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + k_2 \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \;\; ; \;\; \mathbf{v}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

بنابراین برای مقدار ویژه تکراری $r_2 = 2$ توانستیم دو بردار ویژه مستقل بدست آوریم. به عبارتی در مجموع برای این ماتریس به بعد 3 توانستیم 3 بردار ویژه مستقل بدست آوریم (هرچند دارای مقدارهای ویژه تکراری می‌باشد). در اینصورت می‌گوییم ماتریس دارای مجموعه کاملی از بردارهای ویژه می‌باشد. ■

توضیح ۱: علت آنکه برای مقدار ویژه تکراری $r_2 = 2$ دو بردار ویژه مستقل بدست آمد آن است که در ماتریس $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ با انجام عملیات سطری, فقط یک سطر غیرصفر باقی مانده است, لذا رتبه آن برابر $R = 1$ بوده و در نتیجه فضای ویژه آن $n - R = 3 - 1 = 2$ بعدی خواهد بود.

به تعبیر دیگر می‌توان گفت زیر فضای متناظر $r_2 = 2$ عبارت است از $span\{[2,1,0]^t, [2,0,1]^t\}$ که زیر فضایی دوبعدی از R^3 بوده و بردارهای $[2,1,0]^t$ و $[2,0,1]^t$ آنرا پدید آورده‌اند.

همچنین برای $r_1 = 1$ دیده شد که پس از انجام عملیات سطری دو سطر غیرصفر باقی مانده است, لذا رتبه آن $R = 2$ و فضای ویژه آن $n - R = 3 - 2 = 1$ بعدی بدست آمد.

توضیح ۲: راه دیگر تعیین رتبه یک ماتریس, جستجو در دترمینانِ زیر ماتریسهای آن است. مثلا اگر در یک ماتریس به بعد 3 دترمینان خودِ ماتریس برابر صفر بوده و حداقل یک زیر ماتریس به بعد 2 وجود داشته باشد که دترمینانش غیرصفر باشد, رتبه آن 2 می‌شود. بعنوان نمونه در مثال بالا برای $r_2 = 2$ در ماتریس $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$, خودِ ماتریس و تمام زیر ماتریسهای 2 تایی آن دترمینان صفر دارند, پس رتبه آن یک است.

همچنین برای $r_1 = 1$ دیده می‌شود که در ماتریس $\mathbf{A} - 1\mathbf{I}$ که دترمینان آن صفر است, یک زیر ماتریس 2 تایی مانند $\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ با دترمینان غیر صفر وجود دارد, پس رتبه آن $R = 2$ و لذا فضای ویژه آن یک بعدی است. ■

$$4) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow r_1 = 2; r_2 = 1$$

توجه شود از آنجا که ماتریس بالا مثلثی است, لذا مقادیر ویژه درایه‌های روی قطر خواهند بود.

ابتدا بردار ویژه نظیر $r_1 = 2$ را بدست می‌آوریم:

$$r_1 = 2 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ -v_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \xrightarrow{k=1} \mathbf{v}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

توجه شود در این مثال از آنجا که ماتریس خود بالا مثلثی است نیاز به عملیات حذفی گوس نخواهد بود. از آنجا که در معادلات v_3 دیده نمی‌شود لذا v_3 اختیاری بوده و برابر k انتخاب شده است. در ادامه برای ریشه مضاعف $r_2 = 1$ خواهیم داشت:

$$r_2 = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \xrightarrow{k=1} \mathbf{v}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

که در اینجا v_1 اختیاری بوده و برابر k انتخاب شده است. بنابراین در این مثال برای مقدار ویژه تکراری $r_2 = 1$ بر خلاف مثال قبل دو بردار ویژه مستقل بدست نیامد. به عبارتی همواره تکرر یک مقدار ویژه با بعد فضای ویژه آن یکسان نیست. لذا در این مثال نتوانستیم مجموعه کاملی از بردارهای ویژه را بدست آوریم. ■

توضیح: مشابه توضیح قسمت قبل در اینجا نیز می‌توان گفت علت آنکه برای مقدار ویژه تکراری $r_2 = 1$ نتوانستیم دو بردار ویژه مستقل بدست آوریم آن است که در ماتریس $\mathbf{A} - 1\mathbf{I}$ دو سطر غیرصفر بوده, در نتیجه رتبه آن برابر $R = 2$ بوده و لذا فضای ویژه آن یک بعدی میشود. و یا اینکه بگوییم در ماتریس $\mathbf{A} - 1\mathbf{I}$ با دترمینان صفر, یک زیر ماتریس 2 تایی $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ با دترمینان غیر صفر وجود دارد, پس رتبه آن 2 خواهد بود. ■

۶-۳-۳- ماتریس هرمیتی و قضایای آن

در ابتدا چند تعریف ارائه می‌شود. برای ماتریس $\mathbf{A}$, ماتریسهای $\mathbf{A}^T$, $\overline{\mathbf{A}}$ و $\mathbf{A}^*$ بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3-i \\ 5+4i & -6+3i \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 4 & 5+4i \\ 3-i & -6+3i \end{bmatrix} \; ; \; \overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 3+i \\ 5-4i & -6-3i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T = \begin{bmatrix} 4 & 5-4i \\ 3+i & -6-3i \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^*: Hermitian\ Conjugate$$

که $\mathbf{A}^*$ مزودجِ هرمیتیِ ماتریس $\mathbf{A}$ نامیده می‌شود. حال اگر $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ باشد, آنگاه ماتریس $\mathbf{A}$ را هرمیتی می‌نامیم. بدیهی است اگر ماتریس حقیقی باشد, کافی است متقارن باشد تا بگوییم هرمیتی است.

قضایا: در اینجا صورت چند قضیه از جبر خطی ارائه می‌شود. همچنین صرفا اثبات قضیه اشاره شده در بند ۳ را با توجه به اهمیت آن خواهیم دید. اثبات دو قضیه دیگر را می‌توان در کتب جبر خطی ملاحظه کرد.

۱- اگر ماتریس$\mathbf{A}$ به بعد nهرمیتی باشد:

الف- تمام مقادیر ویژه حقیقی است.

ب- اگر دارای مقدار ویژه تکراری از مرتبه k باشد, زیر فضای متناظر با آن مقدار ویژه k-بعدی است.

ج- بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز, بر هم عمودند.

توضیح: لازم به ذکر است که عکس دو قضیه الف و ب درست نیست. (به قسمت سوم مثال قبل توجه شود)

در مورد قضیه ج توجه شود که برای مقادیر ویژه تکراری, الزاما بردارهای ویژه متعامد نیستند. اما چون طبق قضیه ب مستقلند, پس میتوان k بردار ویژه حاصله را به روش مثلا گرام-اشمیت متعامد ساخت. به بیان دیگر, چون بعد این زیر فضا k میباشد قطعا دارای k پایه متعامد میباشد. خلاصه آنکه برای یک ماتریس هرمیتی در هر شرایطی میتوان n بردار ویژه متعامد مستقل بدست آورد.

۲- شرط لازم و کافی برای متعامدبودن یک ماتریس (یعنی $\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{B}^{T}$) آن است که بردارهای ویژه دو به دو بر هم عمود بوده و نرم آنها واحد باشد. پس ماتریس شامل بردارهای ویژه هر ماتریس هرمیتی را می‌توان متعامد کرد.

۳- برای ماتریس $\mathbf{A}$ چنانچه بتوان ماتریسی مانند $\mathbf{T}$ بدست آورد که $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ قطری شود, آنگاه می‌گوییم $\mathbf{A}$ قطری شدنی است.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آنکه ماتریس $\mathbf{A}$ به بعد n قطری شود آن است که دارای n بردار ویژه مستقل باشد. در اینصورت ماتریس $\mathbf{T}$ که منجر به قطری شدن $\mathbf{A}$ می‌شود از کنار هم قرار دادن بردارهای ویژه $\mathbf{A}$ بدست می‌آید.

اثبات: ابتدا ثابت می‌کنیم اگر ماتریس $\mathbf{A}$ دارای n بردار ویژه مستقل باشد, آنگاه قطری شدنی است. برای این منظور در یک ماتریس $\mathbf{A}$ به بعد n , اگر بردارهای ویژه مستقل را $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n$ بنامیم, خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\mathbf{A}\mathbf{v}_1=r_1\mathbf{v}_1\\ \mathbf{A}\mathbf{v}_2=r_2\mathbf{v}_2\\ \cdots\\ \mathbf{A}\mathbf{v}_n=r_n\mathbf{v}_n\end{cases}\rightarrow \mathbf{A}[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n]=[r_1\mathbf{v}_1,r_2\mathbf{v}_2,\cdots,r_n\mathbf{v}_n]=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n]\begin{bmatrix}r_1&0&0&0\\0&r_2&\cdots&0\\0&\vdots&\ddots&0\\0&0&0&r_n\end{bmatrix}$$

با فرض $\mathbf{T}=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n]$ رابطه بالا بیانگر آن است که $\mathbf{A}\mathbf{T}=\mathbf{T}\mathbf{D}$ که در آن $\mathbf{D}$ ماتریسی قطری است که درایه‌های آن همان مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ بوده و ترتیب قرارگیری آنها نیز نظیر بردار ویژه‌های هر یک می‌باشد. حال از آنجا که ماتریس $\mathbf{T}$ دارای n بردار ویژه (ستون) مستقل می‌باشد, پس دترمینان آن مخالف صفر بوده لذا وارون‌پذیر می‌باشد. در نتیجه با ضرب طرفین رابطه $\mathbf{A}\mathbf{T}=\mathbf{T}\mathbf{D}$ در $\mathbf{T}^{-1}$ خواهیم داشت $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\mathbf{D}$ که همان نتیجه مورد نظر ما می‌باشد.

حال ثابت می‌کنیم اگر ماتریس قطری شدنی باشد, یعنی $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\mathbf{D}$ آنگاه ستونهای $\mathbf{T}$ بایستی بردارهای ویژه $\mathbf{A}$ باشند.

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\mathbf{D}\rightarrow \mathbf{A}\mathbf{T}=\mathbf{T}\mathbf{D}\rightarrow \mathbf{A}[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n]=[r_1\mathbf{v}_1,r_2\mathbf{v}_2,\cdots,r_n\mathbf{v}_n]\rightarrow \mathbf{A}\mathbf{v}_i=r_i\mathbf{v}_i\quad;\quad i=1:n$$

حال سوال این است که آیا رابطه $\mathbf{A}\mathbf{v}_i=r_i\mathbf{v}_i$ بیانگر آن است که $\mathbf{v}_i$ها الزاما بردارهای ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ می‌باشند؟

برای این منظور باید نشان دهیم اولا هیچ یک از ستونهای $\mathbf{T}$ بردار صفر نمی‌باشند, همچنین همه ستونهای آن مستقلند. از آنجا که فرض شده است $\mathbf{A}$ قطری شدنی است, پس $\mathbf{T}^{-1}$ وجود دارد. پس درایه‌ای هیچ یک از ستونهای $\mathbf{T}$ همگی نمی‌توانند صفر باشند, همچنین از آنجا که $\mathbf{T}$ وارون‌پذیر است, پس رتبه ماتریس $\mathbf{T}$ برابر n بوده و لذا ستونهای آن الزاما بایستی مستقل باشند. بنابراین هیچ یک از ستونهای $\mathbf{T}$ بردار صفر نبوده و همه ستونهای آن نیز مستقلند, لذا بردارهای ویژه خواهند بود. ■

توضیح ۱: توجه شود چنانچه برخی مقادیر ویژه تکراری بوده اما بردارهای ویژه نظیر آنها کامل باشد, باز هم نتیجه بالا برقرار بوده و در اثبات آن خللی ایجاد نخواهد شد, چرا که در اینصورت فقط برخی درایه‌های $\mathbf{D}$ تکراری میشود, اما $\mathbf{T}$ ماتریس کاملی است. بعنوان نمونه برای ماتریس ارائه شده در قسمت سوم مثال ۶-۹ , با توجه به اینکه بردارهای ویژه آن کامل است می‌توان آنرا بصورت زیر قطری کرد:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5&-6&-6\\-1&4&2\\3&-6&-4\end{bmatrix}\quad;\quad r_1=1\rightarrow \mathbf{v}^{(1)}=\begin{Bmatrix}3\\-1\\3\end{Bmatrix}\quad;\quad r_2=2\rightarrow \mathbf{v}^{(2)}=\begin{Bmatrix}2\\1\\0\end{Bmatrix}\quad;\quad \mathbf{v}^{(3)}=\begin{Bmatrix}2\\0\\1\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{D}$$

دیده می‌شود که درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $\mathbf{D}$, به ترتیب مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ می‌باشند.

توضیح ۲: عنوان شد که اگر ماتریس $\mathbf{A}$ هرمیتی باشد, دارای n بردار ویژه مستقل خواهد بود, بنابراین هر ماتریس هرمیتی قطری شدنی است. مطابق آنچه در بند ۱ قسمت ج عنوان شد, می‌توان بردارهای نظیر مقادیر ویژه تکراری $\mathbf{T}$ را با گرام-اشمیت متعامد ساخت و در نهایت نرم هر ستون ماتریس را واحد کرد تا به یک ماتریس متعامد برسیم. در نتیجه $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$ گردیده و لذا رابطه قطری سازی برای ماتریسهای هرمیتی می‌تواند بصورت ساده $\mathbf{T}^T\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{D}$ تبدیل شود. هرچند الزامی به این کار نبوده و می‌توان بدون متعامد سازی از همان رابطه اولیه $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{D}$ نیز ماتریس را قطری کرد. از این نتایج در بخش ۶-۶-۱ استفاده خواهد شد. ■

تمرینات بخش ۶-۳

۱- استقلال و وابستگی بردارها یا توابع برداری زیر را مشخص کنید.

$a)$ $\mathbf{v}^{(1)} = [1,3]^T$; $\mathbf{v}^{(2)} = [2,0]^T$; $\mathbf{v}^{(3)} = [-1,3]^T$; $\mathbf{v}^{(4)} = [7,3]^T$

$b)$ $\mathbf{v}^{(1)} = [0,0,2]^T$; $\mathbf{v}^{(2)} = [0,0,3]^T$; $\mathbf{v}^{(3)} = [2,-1,5]^T$; $\mathbf{v}^{(4)} = [1,2,4]^T$

$c)$ $\mathbf{x}^{(1)}(t) = [t,0]^T$; $\mathbf{x}^{(2)}(t) = [0,t]^T$; $\mathbf{x}^{(3)}(t) = [t,t]^T$; $t \in (-\infty,\infty)$

$d)$ $\mathbf{x}^{(1)}(t) = [1,e^t]^T$; $\mathbf{x}^{(2)}(t) = [e^t,1]^T$; $\mathbf{x}^{(3)}(t) = [5,5]^T$; $t \in (-\infty,\infty)$

Ans: $a)\ -\mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)} + \mathbf{v}^{(3)} + 0\mathbf{v}^{(4)} = \mathbf{0}$; $b)\ -3\mathbf{v}^{(1)} + 2\mathbf{v}^{(2)} + 0\mathbf{v}^{(3)} + 0\mathbf{v}^{(4)} = \mathbf{0}$

$c)$ وابسته $d)$ مستقل

۲- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریسهای زیر را بدست آورده و در صورت امکان آنها را قطری کنید.

$$1)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \ ;\ 2)\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ ;\ 3)\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \ ;\ 4)\ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Ans: $\mathbf{D} : r = 4,-2,-2$; $r_1 = 4 \to \mathbf{v}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$; $r_2 = -2 \to \mathbf{v}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$; $\mathbf{v}^{(3)} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

۶-۴- فضاهای اساسی دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول

فرم کلی یک دستگاه معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول بصورت زیر است:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + g_1(t) \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + g_n(t) \end{cases}$$

که در آن t متغیر مستقل و $x_1(t)$ تا $x_n(t)$ توابع مجهول می‌باشند. معمولا این دستگاه با استفاده از نمادهای ماتریس و بردار بصورت $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ نشان داده می‌شود, که در آن:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} \; ; \; \mathbf{x}' = \begin{Bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} \end{Bmatrix} \; ; \; \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{g}(t) = \begin{Bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{Bmatrix}$$

در اینجا نیز اگر $\mathbf{g}(t) = \mathbf{0}$ باشد, دستگاه همگن نامیده میشود. لازم به ذکر است که مشتق یا انتگرال از بردارها را بصورت مشتق یا انتگرال از تک تک درایه‌های آن بردار تعریف می‌کنیم.

در ادامه صرفا قضایای مربوط به دستگاه‌های معادلات خطی مرتبه اول ارائه شده و از اثبات آنها صرفنظر می‌شود.

قضیه ۱: اگر ضرایب ماتریس $\mathbf{A}(t)$ و درایه‌های $\mathbf{g}(t)$ در یک بازه باز شامل t_0 پیوسته باشند, این دستگاه یک جواب یکتا خواهد داشت که در شرط اولیه $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ صدق می‌نماید. (قضیه وجود و یکتایی)

دیده می‌شود که فرم دستگاه معادلات یعنی $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ و صورت قضیه وجود و یکتایی درست مشابه معادله خطی مرتبه اول $y' + p(x)y = g(x)$ می‌باشد.

قضیه ۲: چنانچه $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, $\mathbf{x}^{(2)}(t)$, … و $\mathbf{x}^{(m)}(t)$ جوابهای دستگاه همگن $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ باشند, آنگاه ترکیب خطی آنها یعنی $\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i \mathbf{x}^{(i)}(t)$ نیز جواب است. این قضیه به نام قضیه جمع آثار شناخته شده و دلیل درستی آن هم ساده است, چرا که با جایگذاری این جواب در دستگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \frac{d}{dt}\left(c_1\mathbf{x}^{(1)} + \cdots + c_m\mathbf{x}^{(m)}\right) = c_1\left(\mathbf{x}^{(1)}\right)' + \cdots + c_m\left(\mathbf{x}^{(m)}\right)' \\ &= c_1\mathbf{A}(t)\mathbf{x}^{(1)} + \cdots + c_m\mathbf{A}(t)\mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{A}(t)\left[c_1\mathbf{x}^{(1)} + \cdots + c_m\mathbf{x}^{(m)}\right] = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \end{aligned}$$

قضیه ۳: دستگاه همگن $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ حتما دارای یک مجموعه اساسی جواب بصورت $\{\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t), \cdots, \mathbf{x}^{(n)}(t)\}$ می‌باشد که در آن n ابعاد ماتریس مربعی $\mathbf{A}(t)$ می‌باشد. به عبارتی سایر جوابها قطعا ترکیب خطی این جوابهای اساسی خواهد بود.

در واقع این قضیه بیان می‌کند که تعداد جوابهای اساسی دقیقا برابر n است, نه بیشتر و نه کمتر.

قضیه ۴: فرض کنید دستگاه همگن $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ دارای n جواب بصورت $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, $\mathbf{x}^{(2)}(t)$, … و $\mathbf{x}^{(n)}(t)$ باشد, در اینصورت:

الف: دترمینان ماتریس $\left[\mathbf{x}^{(1)}(t), \cdots, \mathbf{x}^{(n)}(t)\right]$ یا در کل بازه متحد با صفر است و یا در هیچ نقطه‌ای صفر نمی‌شود (توضیح ۳ را ببینید)

ب: اگر دترمینان برابر صفر باشد, یعنی جوابها وابسته‌اند و اگر مخالف صفر باشد یعنی مستقل.

توجه شود که در بخش ۶-۳-۱ دیده شد این موضوع در حالت کلی درست نیست. یعنی اگر این دترمینان برابر صفر باشد, نمی‌توان نتیجه گرفت توابع برداری وابسته‌اند. اما اگر این توابع پاسخهای یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی باشند, آنگاه این نتیجه درست است.

با توجه به قضایای بالا می‌توان گفت اگر بتوانیم n جواب بصورت $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, $\mathbf{x}^{(2)}(t)$, ... و $\mathbf{x}^{(n)}(t)$ بدست آوریم که دترمینان ماتریس ارائه شده در قضیه قبل, صرفا در یک نقطه دلخواه مخالف صفر باشد, آنگاه این جوابها, جوابهای اساسی بوده و در نتیجه جواب عمومی دستگاه عبارت است از:

$$\mathbf{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathbf{x}^{(i)}(t)$$

در صورتیکه جوابها اساسی باشند, ماتریس ارائه شده در بالا را ماتریس اساسی جواب نامیده و با $\boldsymbol{\Psi}(t)$ نمایش می‌دهیم. یعنی:

$$\boldsymbol{\Psi}(t)=\left[\mathbf{x}^{(1)}(t),\cdots,\mathbf{x}^{(n)}(t)\right]$$

با این تعریف می‌توان جواب را بصورت زیر نیز بیان کرد:

$$\mathbf{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathbf{x}^{(i)}(t)=\left[\mathbf{x}^{(1)}(t),\cdots,\mathbf{x}^{(n)}(t)\right]\begin{Bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{Bmatrix}=\boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{c}$$

که در آن $\mathbf{c}$ بیانگر بردار ضرایب c_1 تا c_n می‌باشد. لازم به ذکر است از ماتریس $\boldsymbol{\Psi}(t)$ در بخش ۶-۶-۳ برای تعیین جواب خصوصی معادلات ناهمگن نیز استفاده خواهد شد.

<u>توضیح ۱</u>: هر معادله خطی مرتبه n را میتوان به یک دستگاه خطی مرتبه اول (با n تابع مجهول) تبدیل کرد و برعکس. مثلا:

$$y'''+2ty''-y'+(sint)y=cost$$

با تعریف توابع x_1 , x_2 و x_3 بصورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x_1=y\\ x_2=y'\\ x_3=y''\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_1'=y'=x_2\\ x_2'=y''=x_3\\ x_3'=y'''\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_1'=x_2\\ x_2'=x_3\\ x_3'=-2tx_3+x_2-(sint)x_1+cost\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{Bmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_3'\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\ 0&0&1\\ -sint&1&-2t\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ cost\end{Bmatrix}\rightarrow\mathbf{x}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{g}(t)$$

در واقع آنچه در اینجا انجام شده است دقیقا عکس روش حذفی برای حل دستگاه‌هاست که در بخش ۶-۲-۱ دیده شد.

<u>توضیح ۲</u>: هر دستگاه خطی مرتبه بالاتر قابل تبدیل به یک دستگاه خطی مرتبه اول است. مثلا در دستگاه مرتبه ۲ زیر با اضافه کردن دو تابع جدید $x_3=x_1'$ و $x_4=x_2'$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x_1''+3x_1'+2x_1-x_2=e^t\\ x_2''-x_2'+5x_1'-x_1-6x_2=t\end{cases}\xrightarrow{x_3=x_1'\ ;\ x_4=x_2'}\begin{cases}x_1'=x_3\\ x_2'=x_4\\ x_3'=-3x_3-2x_1+x_2+e^t\\ x_4'=x_4-5x_3+x_1+6x_2+t\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{Bmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_3'\\ x_4'\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ -2&1&-3&0\\ 1&6&-5&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ e^t\\ t\end{Bmatrix}\rightarrow\mathbf{x}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{g}(t)$$

حال که دیده شد دستگاه معادلات مرتبه بالاتر قابل تبدیل به مرتبه اول می‌باشند, پس قضیه وجود و یکتایی در دستگاههای با مرتبه بالاتر نیز برقرار است. بنابراین اگر با یک دستگاه معادلات خطی با مرتبه بالاتر روبرو باشیم, می‌توانیم آنرا به یک دستگاه معادلات خطی مرتبه اول تبدیل کرده و با شیوه‌ای که در ادامه برای حل این دستگاه ارائه خواهد شد, آنرا حل کرد. ■

توضیح ۳: در بحث دستگاه معادلات نیز قضیه‌ای بصورت زیر توسط لیوویل ارائه شده است که در حالت خاص به قضیه آبل منجر خواهد شد. فرض کنیم $\boldsymbol{\Psi}(t)$ جواب دستگاه همگن $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ باشد. در اینصورت:

$$|\boldsymbol{\Psi}(t)| = c\, exp\left(\int tr(\mathbf{A}(t))\,dt\right) \qquad or \qquad |\boldsymbol{\Psi}(t)| = |\boldsymbol{\Psi}(t_0)|exp\left(\int_{t_0}^{t} tr(\mathbf{A}(t))\,dt\right)$$

که در آن $tr(\mathbf{A}(t))$ معرف مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $\mathbf{A}(t)$ می‌باشد. بنابراین اثبات قضیه ۴ مشخص می‌شود.

۶-۵- حل دستگاه همگن با ضرایب ثابت

هدف حل دستگاه $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ می‌باشد که در آن $\mathbf{A}$ ماتریسی ثابت است. از آنجا که جواب معادله مرتبه اول $y' = ay$ به فرم $y = ce^{ax}$ می‌باشد در اینجا نیز حدس می‌زنیم لااقل یک جواب به فرم $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{rt}$ داشته باشیم. لذا خواهیم داشت:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad ; \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{rt} \to r\mathbf{v}e^{rt} = \mathbf{A}\mathbf{v}e^{rt} \to \mathbf{A}\mathbf{v} = r\mathbf{v}$$

بصورت برعکس نیز از $\mathbf{A}\mathbf{v} = r\mathbf{v}$ می‌توان به $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ رسید که در آن $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{rt}$ می‌باشد.

بنابراین $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{rt}$ جواب $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ می‌باشد, اگر و تنها اگر r مقدار ویژه و $\mathbf{v}$ بردار ویژه نظیر r باشد, لذا:

$$\mathbf{x}^{(i)}(t) = \mathbf{v}^{(i)}e^{r_i t}$$

در ابتدا فرض می‌کنیم ماتریس $\mathbf{A}$ به بعد n دارای n بردار ویژه مستقل باشد (بردار ویژه‌های آن کامل باشد), در نتیجه:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}^{(i)}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}^{(i)} e^{r_i t}$$

بدیهی است جواب را می‌توان بصورت $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{c}$ نیز بیان کرد.

همچنین از آنجا که بردارهای ویژه مستقل می‌باشند, لذا $\mathbf{x}^{(i)}(t)$ ها نیز مستقل خواهند بود. چرا که:

$$det\big(\boldsymbol{\Psi}(t)\big) = det\big[\mathbf{v}^{(1)}e^{r_1 t}, \cdots, \mathbf{v}^{(n)}e^{r_n t}\big] = e^{(r_1+\cdots+r_n)t} det\big[\mathbf{v}^{(1)}, \cdots, \mathbf{v}^{(n)}\big] \neq 0$$

در اینجا نیز مشابه آنچه در معادلات خطی عنوان شد ممکن است سوال شود ما صرفا جوابهایی به فرم $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{rt}$ را بدست آورده‌ایم (در واقع حدس زدیم), در حالیکه دستگاه ممکن است جوابهایی به فرم دیگری را نیز داشته باشد. پاسخ نیز درست مشابه قبل است. یعنی بر طبق قضیه ۴ اگر این جوابها مستقل باشند, جوابهای اساسی خواهند بود, به عبارتی همه جوابهای دیگر قطعا ترکیبی خطی از این جوابهای اساسی است.

مثال ۶-۱۰ دستگاه‌های $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ را حل کنید.

$$1)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \to |\mathbf{A} - r\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -3-r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-r \end{vmatrix} = 0 \to r^2 + 5r + 4 = 0 \to r_1 = -1; r_2 = -4$$

$$r_1 = -1 = -1 \to (\mathbf{A} - r\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \to \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

از سطر اول $-2v_1 + \sqrt{2}v_2 = 0$ بدست می‌آید. لذا با انتخاب $v_1 = k$ خواهیم داشت $v_2 = \sqrt{2}k$. در نتیجه:

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix} \xrightarrow{k=1} \mathbf{v}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix} \quad ; \quad r_2 = -4 \xrightarrow{\cdots} \mathbf{v}^{(2)} = \begin{Bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}^{(i)}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}^{(i)} e^{r_i t} = c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{Bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-4t} \quad \blacksquare$$

<u>توضیح ۱</u>: فرض کنید در صورت سوال $\mathbf{x}(0) = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ داده شده باشد, در اینصورت ثابتهای جواب عمومی عبارتند از:

$$t = 0 \to \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} = c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix} + c_2 \begin{Bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \to c_1 = 1 \ ; \ c_2 = \sqrt{2} \quad \blacksquare$$

<u>توضیح ۲</u>: می‌توان جواب را با استفاده از ماتریس اساسی جواب بصورت زیر نیز بیان کرد:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c} = \left[\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t)\right] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & -\sqrt{2}e^{-4t} \\ \sqrt{2}e^{-t} & -e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}$$

در متن درس دیده شد که $\mathbf{x}^{(i)}(t)$ هایی که با این شیوه حل بدست آمده‌اند حتما مستقلند. اما می‌توان این موضوع را نیز کنترل کرد. کافی است $det\big(\mathbf{\Psi}(t)\big)$ را تشکیل دهیم و یا ساده‌تر است آنرا صرفا در یک نقطه دلخواه مانند $t = 0$ محاسبه کنیم. چرا که اگر در یک نقطه دلخواه مخالف صفر باشد, بر طبق قضیه ۴ در همه نقاط مخالف صفر بوده و لذا جوابها مستقلند. بنابراین:

$$det\big(\mathbf{\Psi}(0)\big) = \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

با استفاده از ماتریس اساسی جواب نیز می‌توان برای حالتی که $\mathbf{x}(0) = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ داده شده باشد, ثابتها را بصورت زیر بدست آورد:

$$t = 0 \to \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix} \quad \blacksquare$$

$$2) \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

در مثال ۶-۹ (قسمت سوم) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ بصورت زیر بدست آمد:

$$r_1 = 1 \to \mathbf{v}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad ; \quad r_2 = 2 \to \mathbf{v}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{v}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}^{(i)}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}^{(i)} e^{r_i t} = c_1 \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{Bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{2t}$$

که در آن $r_3 = r_2 = 2$ منظور شده است. ■

توضیح ۱: می‌توان جواب را با استفاده از ماتریس اساسی جواب بصورت زیر نیز بیان کرد:

$$\mathbf{x}(t)=\boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{c}=\left[\mathbf{x}^{(1)}(t),\mathbf{x}^{(2)}(t),\mathbf{x}^{(3)}(t)\right]\begin{Bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}3e^{t}&2e^{2t}&2e^{2t}\\-e^{t}&e^{2t}&0\\3e^{t}&0&e^{2t}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{Bmatrix}$$

در متن درس دیده شد که $\mathbf{x}^{(i)}(t)$ هایی که با این شیوه حل بدست آمده‌اند حتما مستقلند. اما می‌توان این موضوع را نیز کنترل کرد. کافی است $det\big(\boldsymbol{\Psi}(t)\big)$ را در یک نقطه دلخواه مانند $t=0$ محاسبه کنیم:

$$det\big(\boldsymbol{\Psi}(0)\big)=\begin{vmatrix}3&2&2\\-1&1&0\\3&0&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

توضیح ۲: فرض کنید در صورت سوال $\mathbf{x}(0)=\begin{Bmatrix}5\\-2\\5\end{Bmatrix}$ داده شده باشد, در اینصورت ثابتهای جواب عمومی عبارتند از:

$$\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}3&2&2\\-1&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{Bmatrix}\rightarrow\mathbf{c}=\begin{Bmatrix}1\\-1\\2\end{Bmatrix}\quad\blacksquare$$

بنابراین اگر مقادیر ویژه متمایز باشند و یا اگر تکراری است, به تعداد تکرار, بردار ویژه داشته باشیم (بردارهای ویژه کامل باشند), جواب دستگاه به سادگی مشخص می‌شود (مانند مثال بالا).

در ادامه به بررسی دو حالت دیگر می‌پردازیم. اول آنکه ببینیم اگر مقادیر ویژه, مختلط باشند جواب به چه صورت خواهد شد و در ادامه حالتی را بررسی می‌کنیم که مقادیر ویژه تکراری بوده, اما به تعداد تکرار, بردار ویژه نداشته باشیم (بردارهای ویژه کامل نباشند).

۶-۵-۱- مقادیر ویژه مختلط

اگر چه می‌توان در اینحالت جواب را به فرم $\mathbf{x}(t)=\mathbf{v}e^{rt}=\big(\mathbf{v}^{(r)}+i\mathbf{v}^{(i)}\big)e^{(\lambda+\mu i)t}$ پذیرفت, اما از آنجا که تمایل داریم در یک دستگاه با ضرایب حقیقی, جوابهای اساسی نیز در صورت امکان فرم حقیقی داشته باشند, می‌توان این شکل از جوابهای اساسی را با استفاده از دو قضیه زیر بدست آورد.

قضیه ۱: اگر $\mathbf{x}(t)=\mathbf{y}(t)+i\mathbf{z}(t)$ یک جواب مختلط دستگاه $\mathbf{x}'(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ باشد که در آن $\mathbf{A}$ ماتریسی حقیقی است, آنگاه اجزای حقیقی و موهومی این جواب مختلط یعنی $\mathbf{y}(t)$ و $\mathbf{z}(t)$ جوابهای حقیقی آن می‌باشند. زیرا:

$$\mathbf{x}'(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)\rightarrow\mathbf{y}'(t)+i\mathbf{z}'(t)=\mathbf{A}\mathbf{y}(t)+i\mathbf{A}\mathbf{z}(t)\rightarrow\begin{cases}\mathbf{y}'(t)=\mathbf{A}\mathbf{y}(t)\\\mathbf{z}'(t)=\mathbf{A}\mathbf{z}(t)\end{cases}$$

قضیه ۲: اگر $r=\lambda+\mu i$ مقدار ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ با ضرایب حقیقی و $\mathbf{v}=\mathbf{v}^{(r)}+i\mathbf{v}^{(i)}$ بردار ویژه نظیر آن باشد, در اینصورت:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t)=\mathbf{v}e^{rt}&=\big(\mathbf{v}^{(r)}+i\mathbf{v}^{(i)}\big)e^{(\lambda+\mu i)t}=e^{\lambda t}\big(\mathbf{v}^{(r)}+i\mathbf{v}^{(i)}\big)(cos\mu t+isin\mu t)\\&=e^{\lambda t}\big(\mathbf{v}^{(r)}cos\mu t-\mathbf{v}^{(i)}sin\mu t\big)+ie^{\lambda t}\big(\mathbf{v}^{(r)}sin\mu t+\mathbf{v}^{(i)}cos\mu t\big)=\mathbf{y}(t)+i\mathbf{z}(t)\end{aligned}$$

همانگونه که در قضیه قبل دیده شد, $\mathbf{y}(t)$ و $\mathbf{z}(t)$ جوابهای حقیقی دستگاه می‌باشند. در نتیجه متناظر این مقدار ویژه, دو جواب $\mathbf{y}(t)$ و $\mathbf{z}(t)$ بصورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\left(\mathbf{v}^{(r)}cos\mu t - \mathbf{v}^{(i)}sin\mu t\right)\\ \mathbf{z}(t) = e^{\lambda t}\left(\mathbf{v}^{(r)}sin\mu t + \mathbf{v}^{(i)}cos\mu t\right)\end{cases}$$

که می‌توان کنترل کرد این دو جواب مستقلند. معمولا بجای حفظ کردن این رابطه, روش آنرا در حل مسائل دنبال می‌کنیم, یعنی جواب را بصورت مختلط بدست آورده و سپس اجزای حقیقی و موهومی آنرا بدست می‌آوریم. به مثال زیر توجه شود.

مثال ۶-۱۱ دستگاه‌های $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ را حل کنید.

$$1)\ \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix} \quad ; \qquad r_1 = 1 \to \mathbf{v}^{(1)} = \begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix} \to \mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}e^t$$

$$r_2 = i \to \mathbf{v}^{(2)} = \begin{Bmatrix}-i\\1\\i\end{Bmatrix} \quad ; \quad r_3 = -i \to \mathbf{v}^{(3)} = \begin{Bmatrix}i\\1\\-i\end{Bmatrix}$$

از آنجا که ماتریس حقیقی است دیده می‌شود که $r_3 = \overline{r_2}$ و $\mathbf{v}^{(3)} = \overline{\mathbf{v}^{(2)}}$ خواهد بود.

جواب مساله برای ریشه مختلط $r_2 = i$ عبارت است از:

$$\mathbf{v}^{(2)}e^{r_2 t} = \begin{Bmatrix}-i\\1\\i\end{Bmatrix}e^{it} = \begin{Bmatrix}-i\\1\\i\end{Bmatrix}(cost + isint) = \begin{Bmatrix}-icost + sint\\ cost + isint\\ icost - sint\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}sint\\cost\\-sint\end{Bmatrix} + i\begin{Bmatrix}-cost\\sint\\cost\end{Bmatrix}$$

$$\to \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix}sint\\cost\\-sint\end{Bmatrix}\ ;\ \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{Bmatrix}-cost\\sint\\cost\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{x}^{(i)}(t) = c_1\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}e^t + c_2\begin{Bmatrix}sint\\cost\\-sint\end{Bmatrix} + c_3\begin{Bmatrix}-cost\\sint\\cost\end{Bmatrix}$$

بدیهی است اگر برای ریشه مختلط $r_3 = -i$ نیز محاسباتی مشابه بالا انجام دهیم, به همین نتیجه خواهیم رسید. به عبارتی از آنجا که عنوان شد برای یک ماتریس حقیقی, مزدوج یک ریشه مختلط, حتما ریشه خواهد بود, لذا بکارگیری آن نتیجه جدیدی به همراه نخواهد داشت. لذا فقط کافی است جواب نظیر یکی از ریشه‌های مختلط بدست آید. در اینصورت جزء حقیقی و موهومی آن, دو جواب اساسی بدست خواهد داد. ■

$$2)\ \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix} \quad ; \qquad r_1 = 1 \to \mathbf{v}^{(1)} = \begin{Bmatrix}2\\-3\\2\end{Bmatrix} \to \mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix}2\\-3\\2\end{Bmatrix}e^t$$

دو ریشه دیگر نیز $r_{2,3} = 1 \pm 2i$ میباشند که فقط کافی است یکی را بررسی کنیم.

$$r_2 = 1 + 2i \to \mathbf{v}^{(2)} = \begin{Bmatrix}0\\1\\-i\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{v}^{(2)}e^{r_2 t} = \begin{Bmatrix}0\\1\\-i\end{Bmatrix}e^{(1+2i)t} = \begin{Bmatrix}0\\1\\-i\end{Bmatrix}(cos2t + isin2t)e^t = \begin{Bmatrix}0\\cos2t\\sin2t\end{Bmatrix}e^t + i\begin{Bmatrix}0\\sin2t\\-cos2t\end{Bmatrix}e^t$$

$$\to \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix}0\\cos2t\\sin2t\end{Bmatrix}e^t\ ;\ \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{Bmatrix}0\\sin2t\\-cos2t\end{Bmatrix}e^t$$

$$\mathbf{x}(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{x}^{(i)}(t)=c_1\begin{Bmatrix}2\\-3\\2\end{Bmatrix}e^t+c_2\begin{Bmatrix}0\\cos2t\\sin2t\end{Bmatrix}e^t+c_3\begin{Bmatrix}0\\sin2t\\-cos2t\end{Bmatrix}e^t \quad ■$$

❋ **مثال ۶-۱۲** دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش سیستم دو درجه آزادی که در مثال ۶-۳ مطرح شد را برای داده‌های زیر حل کنید.

$$m_1=m_2=k_1=k_{12}=k_2=1 \quad ; \quad F_1(t)=F_2(t)=0$$

حل در مثال ۶-۳ دستگاه بصورت زیر بدست آمد که با توجه به داده‌های مساله خواهیم داشت:

$$\begin{cases}m_1x_1''+(k_1+k_{12})x_1-k_{12}x_2=F_1(t)\\m_2x_2''-k_{12}x_1+(k_2+k_{12})x_2=F_2(t)\end{cases}\to\begin{cases}x_1''=-2x_1+x_2\\x_2''=x_1-2x_2\end{cases}\to\begin{Bmatrix}x_1''\\x_2''\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\1&-2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}$$

دیده می‌شود که این دستگاه در واقع مرتبه اول نبوده و به فرم $\mathbf{x}''(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ می‌باشد. یک راه آن است که مطابق توضیح ۲ ارائه شده در بخش ۶-۴ با اضافه کردن دو تابع جدید $x_3=x_1'$ و $x_4=x_2'$ آنرا به دستگاه مرتبه اول تبدیل کرد. در تمرین ۳ از شما خواسته شده است مساله را به این روش حل کنید. در اینجا مساله را به طریق دیگری حل می‌کنیم. فرض می‌کنیم برای این دستگاه نیز بتوان جواب را به فرم $\mathbf{x}(t)=\mathbf{v}e^{rt}$ انتخاب کرد. در اینصورت خواهیم داشت:

$$\mathbf{x}''(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad ; \quad \mathbf{x}(t)=\mathbf{v}e^{rt}\to r^2\mathbf{v}e^{rt}=\mathbf{A}\mathbf{v}e^{rt}\to\mathbf{A}\mathbf{v}=r^2\mathbf{v}$$

تفاوت این است که در اینجا می‌توان گفت مقدار ویژه $\lambda=r^2$ بوده و $\mathbf{v}$ بردار ویژه نظیر r^2 می‌باشد.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2&1\\1&-2\end{bmatrix} \quad ; \quad \lambda=-1\to\mathbf{v}^{(1)}=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix} \quad ; \quad \lambda=-3\to\mathbf{v}^{(2)}=\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}$$

بنابراین از $\lambda=-1$ خواهیم داشت $r=\pm i$ که دو ریشه مزدوجند. لذا با انتخاب $r_1=i$ دو پایه بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{v}^{(1)}e^{r_1t}=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}e^{it}=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}(cost+isint)=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}cost+i\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}sint$$

همچنین از $\lambda=-3$ به $r=\pm\sqrt{3}i$ می‌رسیم. با در نظرگرفتن $r_2=\sqrt{3}i$ دو پایه دیگر نیز بدست می‌آیند:

$$\mathbf{v}^{(2)}e^{r_2t}=\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}e^{\sqrt{3}it}=\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}\left(cos\sqrt{3}t+isin\sqrt{3}t\right)=\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}cos\sqrt{3}t+i\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}sin\sqrt{3}t$$

بنابراین با ترکیب خطی این پاسخها جواب نهایی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{x}(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{x}^{(i)}(t)=c_1\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}cost+c_2\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}sint+c_3\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}cos\sqrt{3}t+c_4\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}sin\sqrt{3}t \quad ■$$

توضیح ۱: جواب نهایی را می‌توان بصورت زیر نیز بیان کرد:

$$\mathbf{x}(t)=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}(c_1cost+c_2sint)+\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}\left(c_3cos\sqrt{3}t+c_4sin\sqrt{3}t\right)$$

در بخش ۲-۵ دیده شد هر ترکیب خطی از سینوس و کسینوس را می‌توان با یک سینوس همراه با اختلاف فاز بیان کرد. در واقع:

$$y=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t=A\sin(\omega t+\varphi) \quad ; \quad A=\sqrt{c_1^2+c_2^2} \quad ; \quad \varphi=tan^{-1}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$$

$$\to\mathbf{x}(t)=A_1\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}sin(t+\varphi_1)+A_2\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}sin\left(\sqrt{3}t+\varphi_2\right)$$

به عبارتی پاسخ سیستم, ترکیب دو جمله سینوسی همراه با اختلاف فاز است که در یکی فرکانس زاویه‌ای برابر $\omega_1 = 1$ و در دیگری برابر $\omega_2 = \sqrt{3}$ می‌باشد. ترم $\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$ را مود ارتعاشی نظیر $\omega_1 = 1$ و ترم $\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}$ را مود ارتعاشی نظیر $\omega_2 = \sqrt{3}$ می‌نامیم. ترم $\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$ مود پایینتر نامیده می‌شود, چرا که نظیر فرکانس زاویه‌ای کمتر است. توجه شود که دو مود ارتعاشی بر هم عمودند, به عبارتی ضرب داخلی آنها صفر است. علت این موضوع نیز متقارن بودن ماتریس $\mathbf{A}$ می‌باشد.

توضیح ۲: بسته به شرایط اولیه داده شده, ممکن است یکی از این دو مود یا هر دو را تحریک کرد. چند حالت را بررسی می‌کنیم:

$$1)\ \begin{cases} x_1(0) = x_2(0) = 0 \\ x_1'(0) = x_2'(0) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_1 = 1\ ;\ A_2 = 0 \\ \varphi_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix} sin\, t$$

در اینحالت صرفا حرکت مود پایین رخ می‌دهد.

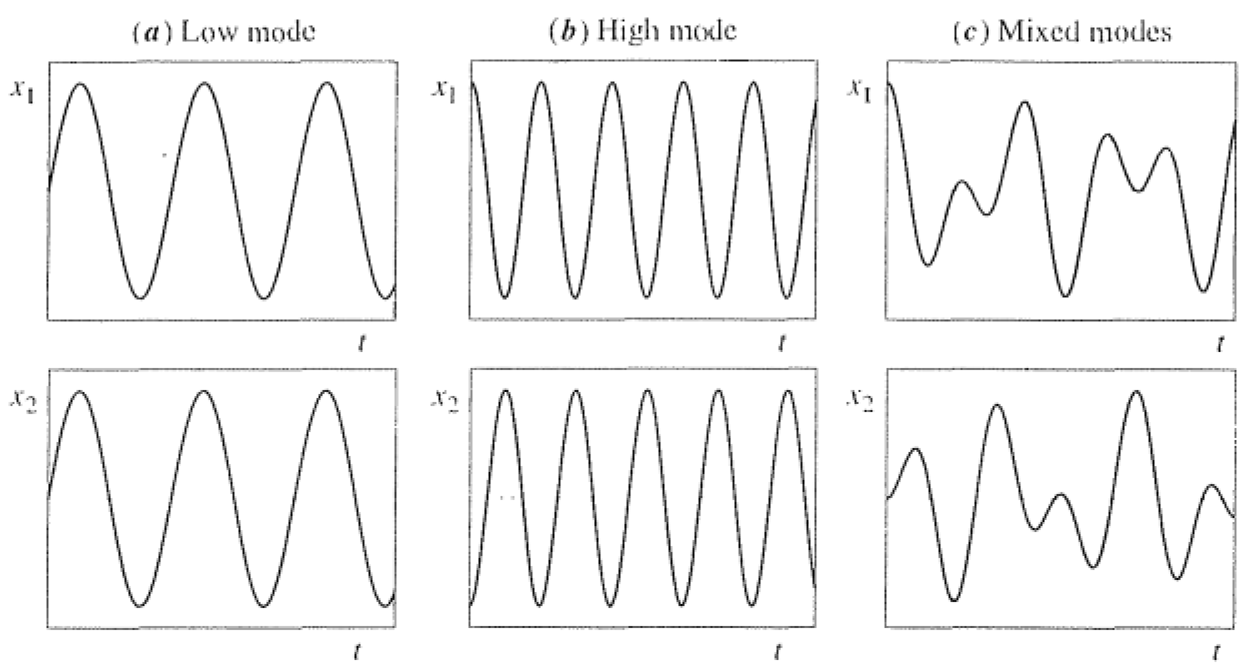
$$2)\ \begin{cases} x_1(0) = 1; x_2(0) = -1 \\ x_1'(0) = x_2'(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_1 = 0\ ; A_2 = 1 \\ \varphi_2 = \pi/2 \end{cases} \rightarrow \mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix} sin\left(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{2}\right) = \begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix} cos\left(\sqrt{3}t\right)$$

در اینحالت صرفا حرکت مود بالا اتفاق می‌افتد.

$$3)\ \begin{cases} x_1(0) = 1\ ; x_2(0) = 0 \\ x_1'(0) = x_2'(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_1 = \dfrac{1}{2}\ ;\ A_2 = \dfrac{1}{2} \\ \varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}\ ;\ \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \mathbf{x}(t) = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix} sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix} sin\left(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{2}\right) == \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix} cost + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix} cos\left(\sqrt{3}t\right)$$

لذا در اینحالت حرکت از دو مود تشکیل شده است. شکل زیر نحوه نوسان را در هر حالت نشان می‌دهد. دیده می‌شود که در حالت اول دو جسم دقیقا مشابه هم نوسان میکنند و هر دو با فرکانس زاویه‌ای ثابتِ $\omega_1 = 1$. در حالت دوم فرکانس زاویه‌ای ثابت و برابر $\omega_2 = \sqrt{3}$ می‌باشد, اما فرم ارتعاش آنها دقیقا عکس یکدیگر است. در حالت سوم هم هیچ روند مشخصی در نوسان دیده نمی‌شود چرا که ترکیب دو مود ارتعاشی است. ■



۶-۵-۲- مقادیر ویژه تکراری

در اینجا هدف آن است که برای حالتی که مساله دارای مقدار ویژه تکراری است اما بردار ویژه های آن کامل نیست, جوابهای اساسی را بدست آوریم.

فرض کنید هدف حل دستگاه $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ باشد که در آن $\mathbf{A}$ بصورت زیر است. در اینصورت دو مقدار ویژه مساوی بوده, اما صرفا یک بردار ویژه بدست می‌آید. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} \quad ; \quad r_1 = 3 \rightarrow \mathbf{v}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} e^{3t} \quad ; \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = ?$$

از آنجا که بردار ویژه دومی نخواهد داد پس جواب دومی هم نخواهیم داشت. در حالی که نیاز به دو جواب مستقل داریم. قبل از ورود به بحث فرض کنید بخواهیم مساله را با روش حذفی حل کنیم. در اینصورت:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x} \rightarrow \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -9x_1 + 6x_2 \end{cases} \rightarrow x_1'' = x_2' = -9x_1 + 6x_2 = -9x_1 + 6x_1'$$

$$\rightarrow x_1'' - 6x_1' + 9x_1 = 0 \rightarrow x_1 = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} \rightarrow x_2 = x_1' = 3c_1 e^{3t} + c_2 e^{3t}(1+3t)$$

$$\rightarrow \mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{Bmatrix} t \\ 1+3t \end{Bmatrix} e^{3t}$$

پس مشخص است که چرا جواب دوم بدست نیامد, زیرا در واقع جواب دوم به فرم $\mathbf{v}e^{rt}$ نمی‌باشد. در فرم پیشنهادی که در شروع بحث دیده شد, $\mathbf{v}$ تابع متغیر t نیست لذا نمی‌تواند بصورت $\begin{Bmatrix} t \\ 1+3t \end{Bmatrix}$ باشد. اشکال از تکراری بودن مقادیر ویژه است که نتواستیم به تعداد تکرار آنها, بردار ویژه مستقل بیابیم. حال ببینیم در این حالت چه اصلاحاتی بایستی در فرم جواب پیشنهادی اعمال شود.

۱- ریشه مضاعف

فرض کنیم r_1 ریشه مضاعفی باشد که ۲ بردار ویژه ندهد. در اینصورت جواب اول را میتوان مشابه قبل بدست آورد:

$$r_1 \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{v}^{(1)} - r_1\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}^{(1)} \rightarrow \mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{v}^{(1)} e^{r_1 t}$$

در اینحالت جواب دوم را مشابه جوابهای تکراری در معادلات معمولی بصورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \left(\mathbf{v}^{(3)} t + \mathbf{v}^{(2)}\right) e^{r_1 t}$$

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \xrightarrow{sub.\ \mathbf{x}^{(2)}} \left(\mathbf{A}\mathbf{v}^{(3)} - r_1\mathbf{v}^{(3)}\right)t + \left(\mathbf{A}\mathbf{v}^{(2)} - r_1\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{v}^{(3)}\right) = \mathbf{0}$$

پس باید هر دو پرانتز صفر گردد. صفر شدن پرانتز اول بیانگر آن است که $\mathbf{v}^{(3)}$ بایستی همان $\mathbf{v}^{(1)}$ باشد. لذا:

$$\mathbf{v}^{(3)} = \mathbf{v}^{(1)} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{v}^{(1)} - r_1\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\mathbf{v}^{(2)} - r_1\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v}^{(1)} \end{cases} \rightarrow \mathbf{x}^{(2)}(t) = \left(\mathbf{v}^{(1)} t + \mathbf{v}^{(2)}\right) e^{r_1 t}$$

که معادله اول قبلا در یافتن جواب اول $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ حل شده و جواب آن مشخص است. در معادله دوم از آنجا که r_1 مقدار ویژه $\mathbf{A}$ است, دترمینان دستگاه صفر بوده و از آنجا که سمت راست یعنی $\mathbf{v}^{(1)}$, بردار ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ میباشد, لذا دستگاه دارای بینهایت جواب است. بنابراین کافی است یکی از این بینهایت جواب را به عنوان جواب دوم مستقل انتخاب کنیم.

مثال ۶-۱۳ دستگاه‌های زیر را حل کنید.

$$1)\ \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}\mathbf{x} \quad ; \quad r_1 = 3 \to \mathbf{v}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \to \mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} e^{3t}$$

این همان مثالی است که در ابتدای بحث عنوان شد. دیده شد که جواب اول به راحتی قابل محاسبه است. برای محاسبه جواب دوم:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}^{(2)} - r_1\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v}^{(1)} \to \mathbf{A}\mathbf{v}^{(2)} - 3\mathbf{v}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \to \begin{cases} -3v_1 + v_2 = 1 \\ -9v_1 + 3v_2 = 3 \end{cases}$$

دیده می‌شود که سطر دوم سه برابر سطر اول است, لذا دستگاه بیشمار جواب خواهد داشت. با انتخاب $v_1 = k$ خواهیم داشت:

$$v_2 = 1 + 3k \to \mathbf{v}^{(2)} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k \\ 1 + 3k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + k\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

بعنوان جواب دوم مستقل, کافی است یکی از این بینهایت جواب را انتخاب کنیم. مثلا اگر $k = 0$ انتخاب شود:

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \left(\mathbf{v}^{(1)}t + \mathbf{v}^{(2)}\right)e^{r_1 t} = \left(\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}t + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}\right)e^{3t} \to \mathbf{x}(t) = c_1\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}e^{3t} + c_2\begin{Bmatrix} t \\ 1 + 3t \end{Bmatrix}e^{3t}$$

که همان جوابی است که با روش حذفی بدست آوردیم. ■

توضیح ۱: توجه شود که اگر $k = 0$ انتخاب نشود, $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ هر دو جواب را خواهد داد, یعنی همان $\mathbf{x}(t)$ است. چرا که:

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \left(\mathbf{v}^{(1)}t + \mathbf{v}^{(2)}\right)e^{r_1 t} = \left(\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}t + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + k\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}\right)e^{3t} = k\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}e^{3t} + \begin{Bmatrix} t \\ 1 + 3t \end{Bmatrix}e^{3t}$$

که درست معادل آن است که جواب قبلی را به c_2 تقسیم کرده باشیم و $k = \frac{c_1}{c_2}$ انتخاب شده باشد.

توضیح ۲: در حالتی‌که ریشه مضاعف یا چندگانه می‌باشد, همواره بهتر است در انتهای حل کنترل کنیم که جوابها, اساسی باشند. چرا که شکل این جوابها از فرم $\mathbf{v}^{(i)}e^{r_i t}$ خارج شده است. بعنوان نمونه برای مثال فوق:

$$det\left(\mathbf{\Psi}(t)\right) = \begin{vmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & (1 + 3t)e^{3t} \end{vmatrix} = e^{6t} \neq 0 \ ■$$

$$2)\ \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}\mathbf{x} \quad ; \quad r_1 = -3 \to \mathbf{v}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \to \mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-3t}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}^{(2)} - (-3)\mathbf{v}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \to \begin{cases} 6v_1 - 18v_2 = 3 \\ 2v_1 - 6v_2 = 1 \end{cases} \xrightarrow{v_2 = k} \mathbf{v}^{(2)} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5 + 3k \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{Bmatrix} + k\begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

بعنوان جواب دوم مستقل, کافی است یکی از این بینهایت جواب را انتخاب کنیم. مثلا اگر $k = 0$ انتخاب شود:

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \left(\begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix}t + \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{Bmatrix}\right)e^{-3t} \to \mathbf{x}(t) = c_1\begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{Bmatrix} 3t + 0.5 \\ t \end{Bmatrix}e^{-3t}$$

در اینجا نیز اگر $k = 0$ انتخاب نشود, $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ هر دو جواب را خواهد داد, یعنی $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(2)}(t)$ ■

* توضیح: دو روش دیگر برای یافتن جواب دوم برای این حالت وجود دارد. بطور کلی در حل مسائلی که بردار ویژه آنها کامل نمی‌باشد, یک روش استفاده از تابع نمایی ماتریسی $e^{\mathbf{A}t}$ می‌باشد که در برخی کتب, حل دستگاه معادلات به طور کامل با این شیوه بیان شده است. پرداختن به جزئیات این روش طولانی بوده و در اینجا از آن صرفنظر می‌شود. همچنین روش دیگری نیز برای یافتن جواب دوم در این حالت وجود دارد که همان روش کاهش مرتبه می‌باشد. درست مشابه معادلات مرتبه دوم که با داشتن یک جواب پایه می‌توانستیم جواب دوم را بدست آوریم, در این شیوه نیز با داشتن یک جواب پایه به دنبال جواب مستقل دوم می‌باشیم. در تمرین ۲ این بخش با این روش آشنا خواهیم شد.

در فصل دو دیده شد که استفاده از رابطه آبل (که حالت خاصی از رابطه لیوویل می‌باشد) در نهایت منجر به روش کاهش مرتبه گردید. بنابراین می‌توان بجای استفاده از روشی که در تمرین ۲ این بخش تحت عنوان کاهش مرتبه عنوان شده است, از رابطه لیوویل استفاده کرد. توجه شود در اینجا, کاهش مرتبه معادل کاهش مرتبه ماتریس می‌باشد که مشابه روش حذفی است.

به عنوان نمونه برای قسمت اول از مثال بالا با بکارگیری رابطه لیوویل, ماتریس مرتبه 2, به ماتریس مرتبه 1 تبدیل می‌شود یعنی یک معادله معمولی و نه یک دستگاه. به عبارتی خواهیم داشت:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}\mathbf{x} \quad ; \quad r_1 = 3 \to \mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} e^{3t} \quad ; \quad |\mathbf{\Psi}(t)| = \mathrm{c}\, exp\left(\int tr\big(\mathbf{A}(t)\big)\, dt\right)$$

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & x_1(t) \\ 3e^{3t} & x_2(t) \end{bmatrix} \to |\mathbf{\Psi}(t)| = e^{3t}(x_2(t) - 3x_1(t)) = ce^{6t} \to x_2(t) - 3x_1(t) = ce^{3t}$$

با استفاده از اولین سطر دستگاه داده شده و رابطه بالا, در نهایت معادله‌ای صرفا بر حسب $x_1(t)$ خواهیم داشت:

$$\to x_1'(t) = x_2(t) \to x_1'(t) - 3x_1(t) = ce^{3t} \to x_1(t) = cte^{3t} + c_2 e^{3t}$$

بعنوان جواب دوم مستقل, کافی است یکی از این بینهایت جواب را انتخاب کنیم. مثلا اگر $c_2 = 0$ و $c = 1$ انتخاب شود:

$$\to x_2(t) = e^{3t} + 3te^{3t} \to \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} te^{3t} \\ e^{3t} + 3te^{3t} \end{Bmatrix} = \left(\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}\right) e^{3t}$$

لازم به ذکر است که معمولا حل مساله به این روش طولانی‌تر از روشی است که در بالا دیده شد. به همین دلیل معمولا روش انتخاب جواب دوم به فرم $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \big(\mathbf{v}^{(1)}t + \mathbf{v}^{(2)}\big)e^{r_1 t}$ را شاید بتوان مناسبترین روش برای حالتی دانست که مقدار ویژه مضاعف بوده ولی صرفا یک بردار ویژه بدست می‌آید.

۲- ریشه سه‌گانه

الف- اگر r_1 ریشه سه گانه‌ای باشد که فقط یک بردار ویژه $\mathbf{v}^{(1)}$ بدهد, لذا صرفا یک جواب $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ در دست است. در اینحالت $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ را مشابه قسمت قبل بصورت $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \big(\mathbf{v}^{(1)}t + \mathbf{v}^{(2)}\big)e^{r_1 t}$ انتخاب کرده و $\mathbf{x}^{(3)}(t)$ را نیز بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{x}^{(3)}(t) = \left(\mathbf{v}^{(1)}\frac{t^2}{2} + \mathbf{v}^{(2)}t + \mathbf{v}^{(3)}\right)e^{r_1 t} \xrightarrow{sub.\ \mathbf{x}^{(3)}} \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{v}^{(1)} - r_1\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\mathbf{v}^{(2)} - r_1\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v}^{(1)} \\ \mathbf{A}\mathbf{v}^{(3)} - r_1\mathbf{v}^{(3)} = \mathbf{v}^{(2)} \end{cases}$$

توجه شود که معادله اول یعنی $\mathbf{Av}^{(1)}-r_1\mathbf{v}^{(1)}=\mathbf{0}$ همواره برقرار است چرا که $\mathbf{v}^{(1)}$ بردار ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ می‌باشد و برای تعیین جواب اول آنرا بدست آورده‌ایم. لذا برای جواب دوم, معادله $\mathbf{Av}^{(2)}-r_1\mathbf{v}^{(2)}=\mathbf{v}^{(1)}$ و برای جواب سوم, معادله $\mathbf{Av}^{(3)}-r_1\mathbf{v}^{(3)}=\mathbf{v}^{(2)}$ بایستی حل شود.

ب- اگر r_1 ریشه سه گانه‌ای باشد که فقط دو بردار ویژه $\mathbf{v}^{(1)}$ و $\mathbf{v}^{(2)}$ بدهد, لذا دو جواب $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ و $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ تعیین می‌شود. در اینجا برای بدست آوردن جواب سوم یعنی $\mathbf{x}^{(3)}(t)$, آنرا بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}^{(1)}+c_2\mathbf{v}^{(2)}\quad;\quad \mathbf{x}^{(3)}(t)=\left(\mathbf{v}t+\mathbf{v}^{(3)}\right)e^{r_1t}\xrightarrow{sub.\ \mathbf{x}^{(3)}}\begin{cases}\mathbf{Av}-r_1\mathbf{v}=\mathbf{0}\\ \mathbf{Av}^{(3)}-r_1\mathbf{v}^{(3)}=\mathbf{v}\end{cases}$$

توجه شود که معادله اول یعنی $\mathbf{Av}-r_1\mathbf{v}=\mathbf{0}$ همواره برقرار است چرا که $\mathbf{v}^{(1)}$ و $\mathbf{v}^{(2)}$ بردارهای ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ می‌باشد, لذا ترکیب خطی آنها هم بردار ویژه $\mathbf{A}$ خواهد بود. لذا برای جواب سوم صرفا بایستی معادله $\mathbf{Av}^{(3)}-r_1\mathbf{v}^{(3)}=\mathbf{v}$ حل شود.

مثال ۶-۱۴ دستگاه زیر را حل کنید.

$$\mathbf{x}'=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}\mathbf{x}\qquad;\qquad r_1=2\rightarrow\mathbf{v}^{(1)}=\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}\rightarrow\mathbf{x}^{(1)}(t)=\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}e^{2t}$$

با حالت الف روبرو هستیم که فقط یک بردار ویژه بدست آمد. لذا برای محاسبه جواب دوم خواهیم داشت:

$$\mathbf{Av}^{(2)}-r_1\mathbf{v}^{(2)}=\mathbf{v}^{(1)}\rightarrow\mathbf{Av}^{(2)}-2\mathbf{v}^{(2)}=\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{cases}v_1=k\\v_2=1\\v_3=0\end{cases}\rightarrow\mathbf{v}^{(2)}=\begin{Bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}k\\1\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix}+k\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}$$

بعنوان جواب دوم مستقل, کافی است یکی از این بینهایت جواب را انتخاب کنیم. مثلا اگر $k=0$ انتخاب شود:

$$\mathbf{x}^{(2)}(t)=\left(\mathbf{v}^{(1)}t+\mathbf{v}^{(2)}\right)e^{r_1t}=\left(\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}t+\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix}\right)e^{2t}=\begin{Bmatrix}t\\1\\0\end{Bmatrix}e^{2t}$$

در نهایت برای تعیین جواب سوم یعنی $\mathbf{x}^{(3)}(t)$, بایستی $\mathbf{v}^{(3)}$ از رابطه زیر تعیین شود:

$$\mathbf{Av}^{(3)}-r_1\mathbf{v}^{(3)}=\mathbf{v}^{(2)}\rightarrow\mathbf{Av}^{(3)}-2\mathbf{v}^{(3)}=\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{cases}v_1=k\\v_2=0\\v_3=1\end{cases}\rightarrow\mathbf{v}^{(3)}=\begin{Bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}k\\0\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix}+k\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}$$

بعنوان جواب سوم مستقل, کافی است یکی از این بینهایت جواب را انتخاب کنیم. مثلا اگر $k=0$ انتخاب شود:

$$\mathbf{x}^{(3)}(t)=\left(\mathbf{v}^{(1)}\frac{t^2}{2}+\mathbf{v}^{(2)}t+\mathbf{v}^{(3)}\right)e^{r_1t}=\left(\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}\frac{t^2}{2}+\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix}t+\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix}\right)e^{2t}=\begin{Bmatrix}\frac{t^2}{2}\\t\\1\end{Bmatrix}e^{2t}\quad\blacksquare$$

تمرینات بخش ۶-۵

۱- دستگاه $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ را برای حالات زیر حل کنید.

$$1)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \ ;\ \mathbf{x}(0) = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \ ; \quad \underline{Ans}:\ \mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{7t}$$

$$2)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \ ; \quad \underline{Ans}:\ \mathbf{x}(t) = c_1 \begin{Bmatrix} 2sin2t \\ cos2t \end{Bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{Bmatrix} -2cos2t \\ sin2t \end{Bmatrix} e^{t}$$

$$3)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \ ; \quad \underline{Ans}:\ \mathbf{x}(t) = c_1 \begin{Bmatrix} 3cost - sint \\ -2cost \end{Bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{Bmatrix} cost + 3sint \\ -2sint \end{Bmatrix} e^{t}$$

$$4)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \ ; \quad \underline{Ans}:\ \mathbf{x}(t) = c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{Bmatrix} 1-t \\ t \end{Bmatrix} e^{2t}$$

$$5)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \ ; \quad \underline{Ans}:\ \mathbf{x}(t) = c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{Bmatrix} t \\ t \\ 2t-1 \end{Bmatrix} e^{2t}$$

$$6)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ ;\ \mathbf{x}(0) = \begin{Bmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{Bmatrix} \ ; \quad \underline{Ans}:\ \mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} 8 + 21t + 36t^2 \\ 3 + 24t \\ 6 \end{Bmatrix}$$

$$7)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \ ; \quad \underline{Ans}:\ \mathbf{x}(t) = c_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ t \\ -t \end{Bmatrix} e^{2t}$$

۲- ابتدا دستگاه $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ را که در آن $\mathbf{A}$ بصورت زیر است, حل کنید.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

دیده می‌شود که برای این ماتریس دو مقدار ویژه برابر $r_1 = -3$ خواهیم داشت که فقط یک بردار ویژه خواهد داد. روش حل این نوع مسائل در این بخش دیده شد. حال می‌خواهیم به روش دیگری که کاهش مرتبه می‌باشد نیز دستگاه را حل کنیم.

برای این منظور ابتدا یک جواب دستگاه یعنی $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ را بدست آورید. حال تغییر متغیری بصورت $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$ به دستگاه معادلات اعمال کنید. در اینجا $\mathbf{T}$ یک ماتریس واحد است که ستون دوم آنرا با $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ جایگزین کرده‌ایم. با جایگذاری این جواب در معادله به دستگاه معادلاتی بر حسب متغیر جدید $\mathbf{y}$ برسید و جواب آنرا با توجه به فرم ساده‌تر دستگاه, به روش حذفی بدست آورید. در نهایت از رابطه $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$ جواب مساله را بدست آورده و آنرا با جواب بدست آمده از روش قبل مقایسه کنید. مراحل محاسبات در زیر آمده است:

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-3t} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \mathbf{y} \xrightarrow{sub} \begin{bmatrix} 1 & e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{Bmatrix} e^{-3t} \\ 4t \end{Bmatrix} + c_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_2 \end{Bmatrix} e^{-3t} + 4c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} te^{-3t}$$

۳- مثال ۶-۱۲ را با تبدیل دستگاه معادلات مرتبه دو به یک دستگاه معادلات مرتبه اول مجددا حل کنید.

۶-۶- حل دستگاه غیرهمگن

در اینجا نیز با یک قضیه مشابه آنچه در معادلات خطی غیرهمگن دیده شد روبرو هستیم.

قضیه: فرض کنید $\mathbf{x}_c(t)$ جواب عمومی دستگاه همگن $\mathbf{x}'(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ باشد. حال اگر $\mathbf{x}_p(t)$ یک جواب خصوصی دستگاه غیر همگن $\mathbf{x}'(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{g}(t)$ در دست باشد, آنگاه همه جوابهای دستگاه غیرهمگن اخیر عبارت است از:

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_c(t)+\mathbf{x}_p(t)=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c}+\mathbf{x}_p(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathbf{x}^{(i)}(t)+\mathbf{x}_p(t)$$

اثبات: درست مشابه اثباتی که در معادلات خطی دیده شد از آنجا که $\mathbf{x}_p(t)$ صرفا یک جواب خصوصی دستگاه معادلات ناهمگن $\mathbf{x}'(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{g}(t)$ است, اگر فرض کنیم $\mathbf{x}(t)$ همه جوابهای این دستگاه باشد, آنگاه:

$$\begin{cases}\mathbf{x}'(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{g}(t)\\ \mathbf{x}_p'(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}_p(t)+\mathbf{g}(t)\end{cases}\xrightarrow{-}\left(\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_p(t)\right)'=\mathbf{A}(t)\left(\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_p(t)\right)$$

به عبارتی $\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_p(t)$ جواب معادله همگن $\mathbf{x}'(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ خواهد بود. از آنجا که قبلا دیده شد جوابهای این معادله بصورت $\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c}$ می‌باشد, در نتیجه:

$$\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_p(t)=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c}\rightarrow\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c}+\mathbf{x}_p(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathbf{x}^{(i)}(t)+\mathbf{x}_p(t)$$

لذا صرفا بایستی به دنبال تعیین یک $\mathbf{x}_p(t)$ باشیم. در این بخش سه روش قطری سازی, ضرایب نامعین و تغییر پارامتر (لاگرانژ) برای تعیین این جواب خصوصی ارائه خواهد شد. در دو روش اول, ماتریس $\mathbf{A}(t)$ بایستی دارای درایه‌های ثابت باشد (یعنی تابع متغیر t نباشد) لذا صرفا با $\mathbf{A}$ نمایش داده می‌شود و در روش تغییرپارامتر, این ماتریس می‌تواند بصورت $\mathbf{A}(t)$ منظور شود به شرط آنکه جوابهای معادله همگن یعنی $\mathbf{x}'(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ در دست باشد.

۶-۶-۱- روش قطری سازی

این روش صرفا زمانی به کار میرود که ماتریس $\mathbf{A}$ دارای درایه‌های ثابت بوده و قطری شدنی باشد. قبلا عنوان شد که شرط لازم و کافی برای قطری شدن آن است که $\mathbf{A}$ دارای n بردار ویژه مستقل باشد. بنابراین هر ماتریس هرمیتی حتما قطری شدنی است. هرچند ممکن است ماتریسی هرمیتی نباشد اما بردارهای ویژه آن کامل بوده و بتوان آنرا قطری کرد.

برای حل مساله ابتدا تغییر تابع $\mathbf{x}=\mathbf{T}\mathbf{y}$ را بکار می‌بریم که در آن $\mathbf{T}$ ماتریسی است که منجر به قطری شدن $\mathbf{A}$ می‌شود و همانگونه که دیده شد از کنار هم قرار دادن بردارهای ویژه $\mathbf{A}$ بدست می‌آید. در اینصورت:

$$\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{g}\rightarrow\mathbf{T}\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y}+\mathbf{g}\xrightarrow{\times\mathbf{T}^{-1}}\mathbf{y}'=\underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}}_{\mathbf{D}}\mathbf{y}+\mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}\rightarrow\mathbf{y}'=\mathbf{D}\mathbf{y}+\mathbf{h}$$

که در آن $\mathbf{h}(\mathrm{t})=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(\mathrm{t})$ می‌باشد. توجه شود در روابط بالا متغیر t برای سادگی حذف گردیده است.

بنابراین به n دستگاه تفکیک شده رسیدیم که هر سطر آن یک معادله مرتبه اول غیر همگن است. در بخش ۶-۳-۳ عنوان شد که ماتریس $\mathbf{D}$ ماتریسی قطری است که درایه‌های آن مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ می‌باشد. بنابراین سطر i ام دستگاه عبارت است از:

$$y_i'=r_iy_i+h_i\quad(i=1:n)\rightarrow y_i\rightarrow\mathbf{x}=\mathbf{T}\mathbf{y}$$

بطور خلاصه:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}+\mathbf{g} \arrow[r, "Coupled"] \arrow[d, "\mathbf{y} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}"] & \mathbf{x}(t) \\
\mathbf{y}' = \mathbf{Dy}+\mathbf{T}^{-1}\mathbf{g} \arrow[r, "Decoupled"] & \mathbf{y}(t) \arrow[u, "\mathbf{x} = \mathbf{Ty}"']
\end{tikzcd}$$

فضای تفکیک شده $(Decoupled)$ اصطلاحا فضای مودال نامیده می‌شود.

توضیح ۱: اگر دستگاه همگن بوده و ماتریس $\mathbf{A}$ دارای n بردار ویژه مستقل باشد, به همان نتیجه ابتدای بخش ۶-۵ می‌رسیم.

$$if\ \ \mathbf{g}(t) = \mathbf{0} \to y_i' = r_i y_i \to y_i = c_i e^{r_i t} \to \mathbf{x} = \mathbf{Ty} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}^{(i)}(c_i e^{r_i t}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \underbrace{\mathbf{v}^{(i)} e^{r_i t}}_{\mathbf{x}^{(i)}(t)}$$

توضیح ۲: ممکن است بخواهیم در ابتدا $\mathbf{T}$ را متعامد نماییم تا بجای $\mathbf{T}^{-1}$ از $\mathbf{T}^T$ استفاده کنیم. در ماتریسهای به بعد بالاتر از ۲ ممکن است این کار به صرفه باشد. برای این منظور بایستی اولا ستونهای ماتریس $\mathbf{T}$ دو به دو بر هم عمود باشند که برای ماتریس هرمیتی اگر مقادیر ویژه متمایز باشند خود به خود برقرار خواهد بود و در غیر اینصورت می‌توان از گرام-اشمیت استفاده کرد. در نهایت نیز بایستی نرم هر ستون ماتریس نیز برابر یک گردد تا به ماتریس متعامد برسیم. در اینصورت ماتریس $\mathbf{T}$ متعامد شده و لذا $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$ خواهد شد.

مثال ۶-۱۵ دستگاه معادله دیفرانسیل غیرهمگن زیر را حل کنید.

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + e^t \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad ; \quad r_1 = 0; r_2 = 5\ ;\ \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \to \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g} = \frac{1}{5}\begin{Bmatrix} e^t \\ 7e^t \end{Bmatrix} \to \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{y} + \frac{1}{5}\begin{Bmatrix} e^t \\ 7e^t \end{Bmatrix} \to \begin{cases} y_1' = \dfrac{1}{5}e^t \\ y_2' = 5y_2 + \dfrac{7}{5}e^t \end{cases}$$

و یا می‌توان پس از تعیین $\mathbf{h}$ بدون نوشتن معادله $\mathbf{y}' = \mathbf{Dy} + \mathbf{h}(t)$, مستقیما از فرمول $y_i' = r_i y_i + h_i$ استفاده کرد:

$$y_i' = r_i y_i + h_i \to \begin{cases} y_1' = 0 \times y_1 + \dfrac{1}{5}e^t \\ y_2' = 5 \times y_2 + \dfrac{7}{5}e^t \end{cases} \to \begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{5}e^t + c_1 \\ y_2 = \dfrac{-7}{20}e^t + c_2 e^{5t} \end{cases} \to \mathbf{x} = \mathbf{Ty} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

$$\to \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} y_1 + 2y_2 \\ -2y_1 + y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 + 2c_2 e^{5t} - \dfrac{1}{2}e^t \\ -2c_1 + c_2 e^{5t} - \dfrac{3}{4}e^t \end{Bmatrix} = \underbrace{c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix} + c_2 \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{5t}}_{\mathbf{x}_c(t)} + \underbrace{\frac{-1}{4}\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} e^t}_{\mathbf{x}_p(t)} \quad \blacksquare$$

توضیح: ممکن است برای ساده‌تر شدن حل, صرفا به دنبال جواب خصوصی باشیم, چرا که جواب عمومی از حل معادله همگن قابل محاسبه است. برای این منظور در حل معادله $y_i' = r_i y_i + h_i$ نیازی نیست جواب عمومی را وارد کنیم. به عنوان نمونه در مثال بالا:

$$r_1 = 0; r_2 = 5\ ;\ \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \to \mathbf{x}_c(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \underbrace{\mathbf{v}^{(i)} e^{r_i t}}_{\mathbf{x}^{(i)}(t)} = c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix} e^{0t} + c_2 \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{5t}$$

پس از حل معادلات $y_i' = r_i y_i + h_i$ نیز چنانچه از ضرایب صرفنظر شود خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{5} e^t \\ y_2 = \dfrac{-7}{20} e^t \end{cases} \to \mathbf{x}_p(t) = \mathbf{T}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4 \\ -7 \end{Bmatrix} \frac{e^t}{20} = \frac{-1}{4} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} e^t$$

که از جمع $\mathbf{x}_c(t)$ و $\mathbf{x}_p(t)$ جواب کامل معادله بدست می‌آید. ■

مثال ۶-۱۶ دستگاه مقدار اولیه غیرهمگن زیر را حل کنید.

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{Bmatrix} 8e^t \\ 18t \end{Bmatrix}\ ;\ \ \mathbf{x}(0) = \begin{Bmatrix} 4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$r_1 = 3; r_2 = -1\ ;\ \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

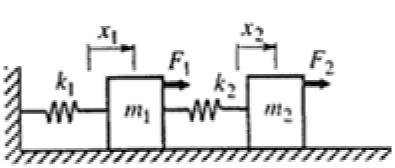
$$\mathbf{h} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g} = \begin{Bmatrix} 2e^t + 9t \\ -2e^t + 9t \end{Bmatrix} \to \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{Bmatrix} 2e^t + 9t \\ -2e^t + 9t \end{Bmatrix} \to \begin{cases} y_1' = 3y_1 + 2e^t + 9t \\ y_2' = -y_2 - 2e^t + 9t \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} y_1 = c_1 e^{3t} - 3t - e^t - 1 \\ y_2 = c_2 e^{-t} + 9t - e^t - 9 \end{cases} \to \mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

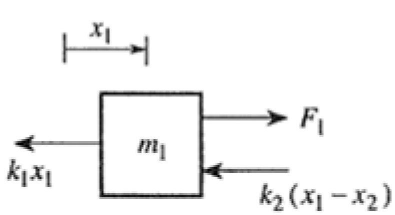
$$\to \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} 2y_1 - 2y_2 \\ y_1 + y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-t} - 24t + 16 \\ c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} + 6t - 2e^t - 10 \end{Bmatrix}$$

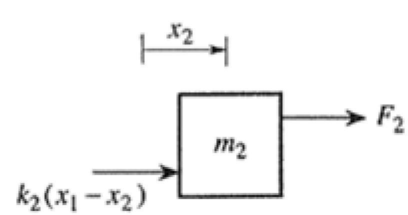
$$\to \mathbf{x} = \underbrace{c_1 \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-t}}_{\mathbf{x}_c(t)} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -24 \\ 6 \end{Bmatrix} t - \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix} e^t + \begin{Bmatrix} 16 \\ -10 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{x}_p(t)}\ \ ;\ \ \mathbf{x}(0) = \begin{Bmatrix} 4 \\ 0 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 9 \end{Bmatrix}\ \blacksquare$$

مثال ۶-۱۷ در سیستم جرم-فنر زیر پاسخ ارتعاش را برای داده‌های داده شده دست آورید.



Mass-spring system.





$$m_1 = 3\ ;\ m_2 = 2\ ;\ k_1 = k_2 = 6\ \ ;\ \ F_1(t) = 3cos2t\ ;\ F_2(t) = 0$$

حل در ابتدا لازم است معادلات ارتعاش حاکم بر حرکت را بدست آوریم. مشابه مثال ۶-۳ با نوشتن قانون دوم نیوتن برای هر جرم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} m_1x_1'' = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) + F_1(t) \\ m_2x_2'' = k_2(x_1 - x_2) + F_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1x_1'' + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_1(t) \\ m_2x_2'' - k_2x_1 + k_2x_2 = F_2(t) \end{cases}$$

با جایگذاری داده‌های مساله و تبدیل دستگاه به فرم ماتریسی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 3x_1'' + 12x_1 - 6x_2 = 3cos2t \\ 2x_2'' - 6x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1'' + 4x_1 - 2x_2 = cos2t \\ x_2'' - 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{Bmatrix} cos2t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

دیده می‌شود که این دستگاه در واقع مرتبه اول نبوده و به فرم $\mathbf{x}'' = \mathbf{Ax} + \mathbf{g}(t)$ می‌باشد. اما درست می‌توان مشابه آنچه در این بخش برای دستگاه مرتبه اول دیده شد این معادله را نیز قطری کرد. چرا که قطری کردن صرفا با ماتریس سروکار دارد و مرتبه دستگاه تاثیری در روش نخواهد داشت.

$$r_1 = -1; r_2 = -6\ ;\ \mathbf{T} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g} = \frac{3}{5}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} cos2t \rightarrow \mathbf{y}'' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}\mathbf{y} + \frac{3}{5}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} cos2t \rightarrow \begin{cases} y_1'' + y_1 = 0.6cos2t \\ y_2'' + 6y_2 = -0.6cos2t \end{cases}$$

از حل هر یک از معادلات خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y_1 = c_1cost + c_2sint - 0.2cos2t \\ y_2 = c_3cos\sqrt{6}t + c_4sin\sqrt{6}t - 0.3cos2t \end{cases} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{Ty} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{x}(t) = \frac{1}{3}\begin{Bmatrix} 2c_1cost + 2c_2sint - 3c_3cos\sqrt{6}t - 3c_4sin\sqrt{6}t + 0.5cos2t \\ 3c_1cost + 3c_2sint + 3c_3cos\sqrt{6}t + 3c_4sin\sqrt{6}t - 1.5cos2t \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{3}\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}(c_1cost + c_2sint) + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}\left(c_3cos\sqrt{6}t + c_4sin\sqrt{6}t\right) + \frac{1}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \end{Bmatrix} cos2t$$

عنوان شد که هر ترکیب خطی از سینوس و کسینوس را می‌توان با یک سینوس همراه با اختلاف فاز بیان کرد. به عبارتی:

$$y = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t = A\sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad ; \quad \varphi = tan^{-1}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$$

بنابراین می‌توان جواب را بصورت زیر نیز ارائه داد:

$$\rightarrow \mathbf{x}(t) = \underbrace{\frac{A_1}{3}\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} sin(t + \varphi_1) + A_2\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} sin\left(\sqrt{6}t + \varphi_2\right)}_{\mathbf{x}_c(t)} + \underbrace{\frac{1}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \end{Bmatrix} cos2t}_{\mathbf{x}_p(t)}$$

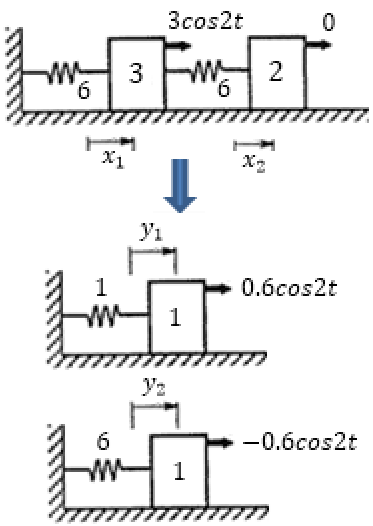
به عبارتی پاسخ سیستم, ترکیب دو جمله سینوسی همراه با اختلاف فاز است که در یکی فرکانس زاویه‌ای برابر $\omega_1 = 1$ و در دیگری برابر $\omega_2 = \sqrt{6}$ می‌باشد. همچنین پاسخ پایدار (Steady State) این سیستم نیز $\mathbf{x}_p(t)$ خواهد بود. ■

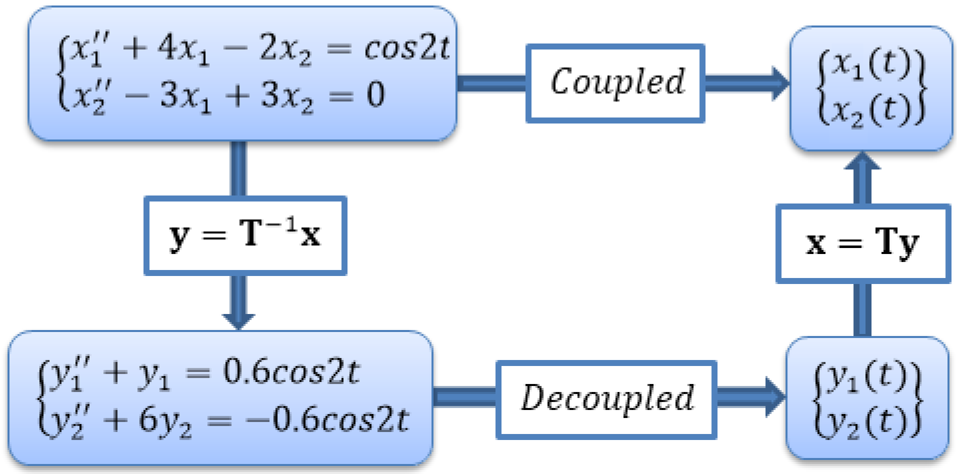
توضیح ۱: چنانچه هدف صرفا تعیین جواب خصوصی معادله (جواب پایدار) باشد, کافی است از رابطه $\mathbf{x}_p = \mathbf{Ty}_p$ استفاده کنیم:

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{Ty}_p \rightarrow \mathbf{x}_p(t) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -0.2cos2t \\ -0.3cos2t \end{Bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \end{Bmatrix} cos2t$$

توضیح ۲: در بخش ۲-۹-۲ دیده شد که معادله ارتعاش سیستم یک درجه آزادی (جرم-فنر) بصورت $mx'' + kx = F(t)$ می‌باشد. دیده می‌شود که دو معادله‌ای که پس از اعمال تغییر تابع $\mathbf{x} = \mathbf{Ty}$ بدست آمد یعنی $y_1'' + y_1 = 0.6cos2t$ و $y_2'' + 6y_2 = -0.6cos2t$ هر دو به همین فرم می‌باشند, فقط تابع آنها بجای $x(t)$, توابع $y_1(t)$ و $y_2(t)$ می‌باشد.

لذا می‌توان گفت گویا سیستم دو درجه آزادی مورد بحث را به دو سیستم یک درجه آزادی بصورت زیر تفکیک کرده‌ایم و قرار است از روی پاسخ ایندو سیستم, پاسخ سیستم دو درجه آزادی را بیابیم. به عبارتی:





همانگونه که قبلا نیز عنوان شد در مباحث مهندسی, چنین روش حلی اصطلاحا تحت عنوان آنالیز مودال شناخته می‌شود.

توضیح ۳: توجه شود در بحث ارتعاشات همواره ماتریس $\mathbf{A}$ متقارن بوده, لذا دارای n بردار ویژه مستقل است. بعنوان نمونه در مثال بالا:

$$\begin{cases} m_1x_1'' + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_1(t) \\ m_2x_2'' - k_2x_1 + k_2x_2 = F_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{Bmatrix} m_1x_1'' \\ m_2x_2'' \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 \\ k_2 & -k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix}$$

که معمولا بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{Bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{Mx}'' + \mathbf{Kx} = \mathbf{F} \quad \blacksquare$$

تمرینات بخش ۶-۶-۱

۱- دستگاههای زیر را به روش قطری سازی حل کنید.

1) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \end{Bmatrix} e^t$

Ans : $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} e^t + c_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \end{Bmatrix} e^{-t} + 5 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} te^t + \frac{3}{2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \end{Bmatrix} e^t$

2) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{Bmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{Bmatrix}$

<u>*Ans*</u> : $\mathbf{x}(t) = c_1\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}e^{-5t} - \frac{3}{50}\begin{Bmatrix} 9 \\ 7 \end{Bmatrix} + \frac{3}{5}\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}t + \frac{1}{4}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}e^{-t}$

<u>3</u>) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{Bmatrix} sint \\ 4 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{x}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$

<u>*Ans*</u> : $\mathbf{x}(t) = \frac{61}{180}\begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \end{Bmatrix}e^{3t} - \frac{1}{180}\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}e^{-3t} + \frac{4}{9}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{10}\begin{Bmatrix} -cost \\ 9sint \end{Bmatrix}$

4) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} - \begin{Bmatrix} 4t^2 + 3 \\ t^2 - 2t + 3 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{x}(0) = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$

<u>*Ans*</u> : $\mathbf{x}(t) = \frac{5}{4}\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}e^{3t} + \frac{7}{4}\begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix}e^{-t} + \begin{Bmatrix} 3 \\ t^2 \end{Bmatrix}$

<u>۲</u>- مثال ۶-۱۶ را با استفاده از تبدیل لاپلاس مجددا حل کنید.

۶-۶-۲- روش ضرایب نامعین

درست مشابه آنچه در معادلات خطی غیرهمگن عنوان شد, از این روش زمانی می‌توان استفاده کرد که ماتریس $\mathbf{A}$ دارای درایه‌های ثابت بوده و مولفه‌های $\mathbf{g}(t)$ به فرم نمایی, چندجمله‌ای, سینوس و کسینوس و یا حاصلضربی از اینها باشد.

در ادامه هر یک از حالات را بررسی می‌کنیم.

الف: اگر $\mathbf{g}(t) = \mathbf{u}^{(0)}e^{\alpha t}$ یعنی به فرم نمایی باشد, با انتخاب $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{w}^{(0)}e^{\alpha t}$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \quad ; \quad \mathbf{g}(t) = \mathbf{u}^{(0)}e^{\alpha t} \to \mathbf{x}_p(t) = \mathbf{w}^{(0)}e^{\alpha t}$$

$$\to \alpha\mathbf{w}^{(0)}e^{\alpha t} = \mathbf{A}\mathbf{w}^{(0)}e^{\alpha t} + \mathbf{u}^{(0)}e^{\alpha t} \to \alpha\mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{A}\mathbf{w}^{(0)} + \mathbf{u}^{(0)} \to (\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I})\mathbf{w}^{(0)} = -\mathbf{u}^{(0)}$$

بجای استفاده از دستگاه بالا می‌توان با جایگذاری مستقیمِ جواب انتخابی در دستگاه, بردار مجهولات $\mathbf{w}^{(0)}$ را بدست آورد.

بدیهی است اگر α مقدار ویژه $\mathbf{A}$ نباشد, دستگاه جواب خواهد داشت. اما اگر α مقدار ویژه باشد, ممکن است $\mathbf{w}^{(0)}$ بدست نیاید و یا یکتا نباشد. فرم جواب در حالتی که α فقط یک بار مقدار ویژه $\mathbf{A}$ باشد, بصورت زیر انتخاب می‌شود:

$$\mathbf{x}_p(t) = \left(\mathbf{w}^{(1)}t + \mathbf{w}^{(0)}\right)e^{\alpha t}$$

در حالت خاص اگر $\mathbf{g} = \mathbf{u}^{(0)}$ (یعنی یک بردار ثابت باشد) کافی است در نتایج بالا $\alpha = 0$ قرار داده شود.

ب: چنانچه $\mathbf{g}(t)$ به فرم حاصلضرب چندجمله‌ای در نمایی باشد, یعنی:

$$\mathbf{g}(t) = \left(\mathbf{u}^{(n)}t^n + \mathbf{u}^{(n-1)}t^{n-1} + \cdots + \mathbf{u}^{(1)}t + \mathbf{u}^{(0)}\right)e^{\alpha t} = \mathbf{P}_n(t)e^{\alpha t}$$

در اینصورت فرم جواب خصوصی به شکل زیر انتخاب می‌شود:

$$\mathbf{x}_p(t) = \left(\mathbf{w}^{(n)}t^n + \mathbf{w}^{(n-1)}t^{n-1} + \cdots + \mathbf{w}^{(1)}t + \mathbf{w}^{(0)}\right)e^{\alpha t} = \mathbf{Q}_n(t)e^{\alpha t}$$

که در آن $\mathbf{P}_n(t)$ و $\mathbf{Q}_n(t)$ چندجمله‌ای‌هایی بر حسب t (با حداکثر درجه n) و با ضرایب برداری می‌باشند.

به عنوان نمونه اگر $\mathbf{g}(t) = \mathbf{P}_1(t)e^{\alpha t}$ باشد, فرم جواب خصوصی بصورت $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{Q}_1(t)e^{\alpha t}$ انتخاب می‌شود. در اینصورت:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \quad ; \quad \mathbf{g}(t) = \left(\mathbf{u}^{(1)}t + \mathbf{u}^{(0)}\right)e^{\alpha t} \to \mathbf{x}_p(t) = \left(\mathbf{w}^{(1)}t + \mathbf{w}^{(0)}\right)e^{\alpha t}$$

$$\to \mathbf{w}^{(1)}e^{\alpha t} + \alpha\left(\mathbf{w}^{(1)}t + \mathbf{w}^{(0)}\right)e^{\alpha t} = \mathbf{A}\mathbf{w}^{(1)}te^{\alpha t} + \mathbf{A}\mathbf{w}^{(0)}e^{\alpha t} + \mathbf{u}^{(1)}te^{\alpha t} + \mathbf{u}^{(0)}e^{\alpha t}$$

$$\left(\mathbf{A}\mathbf{w}^{(1)} - \alpha\mathbf{w}^{(1)} + \mathbf{u}^{(1)}\right)t + \mathbf{A}\mathbf{w}^{(0)} - \alpha\mathbf{w}^{(0)} + \mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{0} \to \begin{cases} (\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I})\mathbf{w}^{(1)} = -\mathbf{u}^{(1)} \\ (\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I})\mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{u}^{(0)} \end{cases}$$

در اینجا نیز اگر α مقدار ویژه $\mathbf{A}$ نباشد, دستگاه جواب خواهد داشت. اما اگر α مقدار ویژه باشد, ممکن است $\mathbf{w}^{(1)}$ یا $\mathbf{w}^{(0)}$ بدست نیاید و یا یکتا نباشند. فرم جواب در حالتی که α فقط یک بار مقدار ویژه $\mathbf{A}$ باشد, برای مثال بالا بصورت زیر انتخاب می‌شود:

$$\mathbf{x}_p(t) = \left(\mathbf{w}^{(2)}t^2 + \mathbf{w}^{(1)}t + \mathbf{w}^{(0)}\right)e^{\alpha t} = \mathbf{Q}_2(t)e^{\alpha t}$$

به همین ترتیب اگر α مقدار ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ با تکرار s باشد, جواب در حالت کلی به فرم $\mathbf{Q}_{n+s}(t)e^{\alpha t}$ انتخاب می‌شود.

در حالت خاص اگر $\mathbf{g}(t) = \mathbf{P}_n(t)$ (یعنی صرفا به فرم چندجمله‌ای باشد) کافی است در نتایج بالا $\alpha = 0$ منظور شود.

بدیهی است برای $n = 0$ به $\mathbf{g}(t) = \mathbf{P}_0(t)e^{\alpha t} = \mathbf{u}^{(0)}e^{\alpha t}$ و $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{Q}_0(t)e^{\alpha t} = \mathbf{w}^{(0)}e^{\alpha t}$ می‌رسیم که همان حالت الف است.

ج: برای حالتی که ترم ناهمگنی بر حسب کسینوس (یا سینوس) باشد, درست مشابه آنچه در بخش ۲-۷ دیده شد, یک راه مناسب آن است که ترم ناهمگنی را بر حسب تابع نمایی مختلط بیان کرده و سپس اجزای حقیقی (یا موهومی) جواب را بدست آوریم (قسمت سوم مثال بعد را ببینید).

در انتها لازم بذکر است که به جهت قیاس می‌توان گفت اینکه α به تعداد s بار مقدار ویژه $\mathbf{A}$ باشد معادل این است که s بار ریشه معادله مشخصه ماتریس است. یعنی درست مشابه است با روش ضرایب نامعین در معادلات خطی که در آنجا نیز به دنبال آن بودیم که ببینیم α چند بار ریشه معادله مشخصه میباشد.

<u>خلاصه:</u>

اگر $\mathbf{g}(t) = \mathbf{P}_n(t)e^{\alpha t}$ آنگاه فرم جواب خصوصی بصورت $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{Q}_{n+s}(t)e^{\alpha t}$ خواهد بود. در این رابطه, s تعداد تکرارهای α در ریشه‌های معادله مشخصه ماتریس $\mathbf{A}$ میباشد. به بیان دیگر چند بار مقدار ویژه ماتریس است.

۱- برای $n = 0$ ترم ناهمگن بصورت $\mathbf{g}(t) = \mathbf{u}^{(0)}e^{\alpha t}$ خواهد بود و اگر α مقدار ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ نباشد, جواب خصوصی به فرم $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{w}^{(0)}e^{\alpha t}$ خواهد شد. در اینحالت کافی است دستگاه $(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I})\mathbf{w}^{(0)} = -\mathbf{u}^{(0)}$ را حل کنیم.

۲- برای $\mathbf{g}(t) = \mathbf{P}_n(t)$ کافی است $\alpha = 0$ منظور شود.

۳- برای ترم ناهمگنی بر حسب سینوس یا کسینوس, ساده‌تر است آنرا به فرم نمایی تبدیل کنیم.

مثال ۶-۱۸ جواب خصوصی دستگاه‌های غیرهمگن زیر را بدست آورید.

$$1)\ \ \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{Bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ -e^{2t} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{g}(t) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} e^{2t} = \mathbf{u}^{(0)} e^{\alpha t} \to \mathbf{u}^{(0)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \ ;\ \alpha = 2$$

می‌توان کنترل کرد که $\alpha = 2$ مقدار ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ نیست, لذا یک راه ساده جایگذاری مستقیم جواب بصورت $\mathbf{w}^{(0)} e^{\alpha t}$ است:

$$\mathbf{x}_p(t) = \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{Bmatrix} e^{2t} \to 2\begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{Bmatrix} e^{2t} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{Bmatrix} e^{2t} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} e^{2t} \to \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \ \blacksquare$$

<u>توضیح:</u> به عنوان روش دوم حل مساله, از آنجا که ترم غیرهمگنی بصورت نمایی است و $\alpha = 2$ مقدار ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ نیست, مطابق آنچه در متن درس دیده شد با انتخاب $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{w}^{(0)} e^{\alpha t}$ در نهایت بایستی دستگاه زیر حل شود:

$$(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I})\mathbf{w}^{(0)} = -\mathbf{u}^{(0)} \to (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{w}^{(0)} = -\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \to \mathbf{w}^{(0)} = \begin{Bmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \to \mathbf{x}_p(t) = \begin{Bmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{2t}$$

بدیهی است جواب کامل دستگاه نیز جمع این جواب با جواب عمومی خواهد بود. ■

$$2)\ \ \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{Bmatrix} 6e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{g}(t) = \begin{Bmatrix} 6 \\ 2 \end{Bmatrix} e^{3t} = \mathbf{u}^{(0)} e^{\alpha t} \to \mathbf{u}^{(0)} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 2 \end{Bmatrix} \ ;\ \alpha = 3$$

از آنجا که مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ برابر 3 و -1 میباشد , لذا $\alpha = 3$ فقط یک بار مقدار ویژه $\mathbf{A}$ بوده $(s = 1)$ و در نتیجه:

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{Q}_{n+s}(t) e^{\alpha t} = \left(\mathbf{w}^{(1)} t + \mathbf{w}^{(0)}\right) e^{\alpha t} = \left(\begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix}\right) e^{3t}$$

با جایگذاری جواب انتخابی در دستگاه و متحد قرار دادن دو سمت خواهیم داشت:

$$\mathbf{x}' - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} 6e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{Bmatrix} \to \left(\begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix}\right) 3e^{3t} + \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{Bmatrix} e^{3t} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix}\right) e^{3t}$$
$$= \begin{Bmatrix} 6 \\ 2 \end{Bmatrix} e^{3t}$$

$$\to \begin{Bmatrix} 2a_1 - 2b_1 \\ -2a_1 + 2b_1 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} a_1 + 2a_0 - 2b_0 \\ b_1 - 2a_0 + 2b_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 2 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} 2a_1 - 2b_1 \\ -2a_1 + 2b_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \to \begin{cases} a_1 = k \\ b_1 = k \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 + 2a_0 - 2b_0 \\ b_1 - 2a_0 + 2b_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 2 \end{Bmatrix} \xrightarrow{a_1 = b_1 = k} \begin{Bmatrix} 2a_0 - 2b_0 \\ -2a_0 + 2b_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 - k \\ 2 - k \end{Bmatrix}$$

برای داشتن جواب بایستی $2 - k = -(6 - k)$ باشد که به $a_1 = b_1 = k = 4$ می‌رسیم. در نتیجه:

$$\begin{Bmatrix} 2a_0 - 2b_0 \\ -2a_0 + 2b_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -2 \end{Bmatrix} \to \begin{cases} b_0 = k \\ a_0 = 1 + k \end{cases} \to \mathbf{x}_p(t) = \left(\mathbf{w}^{(1)} t + \mathbf{w}^{(0)}\right) e^{\alpha t} = \left(\begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 1 + k \\ k \end{Bmatrix}\right) e^{3t}$$

علت اینکه در جواب نهایی پارامتر k ظاهر شده است آن است که $\alpha = 3$ مقدار ویژه $\mathbf{A}$ می‌باشد. حال کافی است یکی از این بینهایت جواب را انتخاب کنیم. مثلا اگر $k = 0$ انتخاب شود:

$$\mathbf{x}_p(t) = \begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \end{Bmatrix} t e^{3t} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} e^{3t} \ \blacksquare$$

توضیح: در اینجا نیز جواب نهایی جمع این جواب با جواب عمومی خواهد بود. جواب عمومی این دستگاه عبارت است از:

$$\mathbf{x}_c(t) = c_1 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{3t}$$

توجه شود اگر $k = 0$ انتخاب نشود یک ترم $k \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{3t}$ نیز به جواب خصوصی اضافه خواهد شد که در جواب همگن نیز وجود دارد و لذا نیازی به آن نیست. ■

$$3)\ \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{Bmatrix} cost \\ sint \end{Bmatrix} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ -i \end{Bmatrix} e^{it} = \begin{Bmatrix} cost \\ sint \end{Bmatrix} + i \begin{Bmatrix} sint \\ -cost \end{Bmatrix} \to \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{Bmatrix} 1 \\ -i \end{Bmatrix} e^{it}$$

می‌توان کنترل کرد که $\alpha = i$ مقدار ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ نیست. در نتیجه از آنجا که ترم غیرهمگنی بصورت نمایی بوده $\alpha = i$ مقدار ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ نمی‌باشد, جواب بصورت $\mathbf{z}_p(t) = \mathbf{w}^{(0)} e^{\alpha t} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix} e^{it}$ خواهد بود. مطابق آنچه در متن درس دیده شد یا می‌توان با جایگذاری مستقیم, جواب را بدست آورد و یا اینکه کافی است دستگاه $(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I})\mathbf{w}^{(0)} = -\mathbf{u}^{(0)}$ را حل کنیم. خواهیم داشت:

$$(\mathbf{A} - i\mathbf{I})\mathbf{w}^{(0)} = -\begin{Bmatrix} 1 \\ -i \end{Bmatrix} \to \mathbf{w}^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \to \mathbf{z}_p(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} e^{it} \to \mathbf{x}_p(t) = Re\left(\mathbf{z}_p(t)\right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -cost \end{Bmatrix}$$

که بایستی با جواب عمومی جمع شود. ■

توضیح: در این مثال از آنجا که ترم ناهمگنی بر حسب سینوس و کسینوس یک زاویه بود, توانستیم هر دو را با یک تابع نمایی بیان کنیم. در حالت کلی ممکن است نیاز باشد برای هر زاویه, یک تابع نمایی جداگانه بنویسیم. به عنوان نمونه:

$$\mathbf{g}(t) = \begin{Bmatrix} 3cos2t \\ -sin5t \end{Bmatrix} = Re\left(\begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \end{Bmatrix} e^{2it}\right) + Im\left(\begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} e^{5it}\right) \ \ or\ \ \mathbf{g}(t) = Re\left(\begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \end{Bmatrix} e^{2it}\right) + Re\left(\begin{Bmatrix} 0 \\ i \end{Bmatrix} e^{5it}\right)$$

حال مطابق آنچه در انتهای بخش ۲-۶ عنوان شد از روش جمع آثار استفاده می‌کنیم. به عبارتی $\mathbf{g}(t) = \mathbf{g}_1(t) + \mathbf{g}_2(t)$ منظور شده و برای هر یک از ترمهای $\mathbf{g}_1(t)$ و $\mathbf{g}_2(t)$ جواب خصوصی را بدست آورده و در نهایت جوابها را با یکدیگر جمع می‌کنیم. نمونه‌ای از روش جمع آثار در قسمت دوم مثال بعد ارائه شده است. ■

مثال ۶-۱۹ دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل غیرهمگن زیر را حل کنید.

$$1)\ \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{Bmatrix} 8e^t \\ 18t \end{Bmatrix} \ ; \ \mathbf{x}(0) = \begin{Bmatrix} 4 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{g}(t) = \begin{Bmatrix} 8 \\ 0 \end{Bmatrix} e^t + \begin{Bmatrix} 0 \\ 18 \end{Bmatrix} t$$

$$\mathbf{x}_c(t) = c_1 \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-t} \ \ ; \ \ \mathbf{x}_p(t) = \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix} e^t + \begin{Bmatrix} c_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{Bmatrix}$$

برای ترم نمایی $\begin{Bmatrix} 8 \\ 0 \end{Bmatrix} e^t = \mathbf{u}^{(0)} e^{1t}$ از آنجا که $\alpha = 1$ مقدار ویژه $\mathbf{A}$ نیست (به بیان دیگر ترم e^{1t} در جوابهای پایه دیده نمی‌شود), لذا جواب به فرم $\mathbf{Q}_0(t)e^{1t} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix} e^{1t}$ انتخاب شده است. همچنین برای ترم $\begin{Bmatrix} 0 \\ 18 \end{Bmatrix} t = \mathbf{P}_1(t)e^{0t}$ از آنجا که $\alpha = 0$ مقدار ویژه $\mathbf{A}$ نیست (یا اینکه بگوییم e^{0t} در جوابهای پایه دیده نمی‌شود), لذا جواب $\mathbf{Q}_1(t)e^{0t} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{Bmatrix}$ در نظر گرفته شده است. با جایگذاری این جواب در دستگاه اولیه خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{Sub.} \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{Bmatrix} e^t + \begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix} e^t + \begin{Bmatrix} c_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} 8 \\ 0 \end{Bmatrix} e^t + \begin{Bmatrix} 0 \\ 18 \end{Bmatrix} t$$

که با متحد قرار دادن ضرایب t , e^t و بردارهای ثابت در دو طرف تساوی, خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 8 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 18 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{Bmatrix}$$

و در نهایت پس از حل این دستگاه‌های معادلات خطی, ضرایب بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} c_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -24 \\ 6 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 16 \\ -10 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_p(t) = \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix} e^t + \begin{Bmatrix} c_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \end{Bmatrix} e^t + \begin{Bmatrix} -24 \\ 6 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 16 \\ -10 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{Bmatrix} 4 \\ 0 \end{Bmatrix} \to \underbrace{c_1 \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-t}}_{\mathbf{x}_c(t)} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \end{Bmatrix} e^t + \begin{Bmatrix} -24 \\ 6 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 16 \\ -10 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{x}_p(t)} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 0 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 9 \end{Bmatrix}$$

لازم بذکر است که این دستگاه قبلا در مثال ۶-۱۶ به روش قطری سازی نیز حل شده است. ■

توضیح: در اینجا نیز شاید یک راه بهتر برای محاسبه سریعتر جواب خصوصی, استفاده از روش جمع آثار باشد. به عبارتی ابتدا جواب خصوصی را برای $\mathbf{g}_1(t) = \begin{Bmatrix} 8 \\ 0 \end{Bmatrix} e^t$ و سپس برای $\mathbf{g}_2(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 18 \end{Bmatrix} t$ بدست آورده و در نهایت جوابها را جمع کنیم. مثال قسمت بعد را با این روش حل می‌کنیم. ■

$$2)\ \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{Bmatrix} 6e^t \\ 7 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{g}(t) = \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \end{Bmatrix} e^t + \begin{Bmatrix} 0 \\ 7 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{x}_c(t) = c_1 \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix} e^{0t} + c_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} e^{7t}$$

مطابق آنچه در توضیح مثال قبل عنوان شد می‌توان از روش جمع آثار استفاده کرد. مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ عبارتند از 0 و 7 . بنابراین برای $\mathbf{g}_1(t) = \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \end{Bmatrix} e^{1t} = \mathbf{u}^{(0)} e^{1t}$ از آنجاکه $\alpha = 1$ مقدار ویژه $\mathbf{A}$ نیست (به بیان دیگر ترم e^{1t} در جوابهای پایه دیده می‌شود), لذا جواب را به فرم $\mathbf{x}_{p_1}(t) = \mathbf{Q}_0(t) e^{1t} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix} e^{1t}$ انتخاب کرده و با جایگذاری در دستگاه, ضرایب را بدست می‌آوریم: (دقت شود سمت راست صرفا $\mathbf{g}_1(t)$ لحاظ شود)

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \end{Bmatrix} e^t \to \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix} e^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix} e^t + \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \end{Bmatrix} e^t \to \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -3 \end{Bmatrix} \to \mathbf{x}_{p_1}(t) = \begin{Bmatrix} 5 \\ -3 \end{Bmatrix} e^t$$

و یا از آنجا که ترم غیرهمگنی بصورت نمایی بوده و $\alpha = 1$ مقدار ویژه ماتریس نیست, با استفاده از رابطه ارائه شده در متن درس:

$$(\mathbf{A} - \alpha \mathbf{I}) \mathbf{w}^{(0)} = -\mathbf{u}^{(0)} \to (\mathbf{A} - 1\mathbf{I}) \mathbf{w}^{(0)} = -\mathbf{u}^{(0)} \to \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

برای $\mathbf{g}_2(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 7 \end{Bmatrix} = \mathbf{u}^{(0)} e^{0t}$ می‌توان گفت که این ترم نیز معادل ترم نمایی با $\alpha = 0$ است. حال از آنجا که $\alpha = 0$ فقط یک بار مقدار ویژه $\mathbf{A}$ می‌باشد (به بیان دیگر ترم e^{0t} در جوابهای پایه دیده می‌شود), لذا جواب را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{x}_{p_2}(t)=\mathbf{Q}_1(t)e^{0t}=\left(\mathbf{w}^{(1)}t+\mathbf{w}^{(0)}\right)e^{0t}=\mathbf{w}^{(1)}t+\mathbf{w}^{(0)}=\begin{Bmatrix}a_1\\b_1\end{Bmatrix}t+\begin{Bmatrix}a_0\\b_0\end{Bmatrix}$$

حال سمت راست را صرفا $\begin{Bmatrix}0\\7\end{Bmatrix}$ منظور کرده و مشابه قسمت قبل با جایگذاری جواب بالا در دستگاه $\mathbf{x}'=\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{Bmatrix}0\\7\end{Bmatrix}$ چهار ضریب را تعیین می‌کنیم. در اینصورت $\begin{Bmatrix}a_1\\b_1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-2\\1\end{Bmatrix}$ بدست آمده و نیز با انتخاب $b_2=k$ جواب نهایی عبارت است از:

$$b_0=k\rightarrow a_0=-2-2k\rightarrow\ \mathbf{x}_{p_2}(t)=\begin{Bmatrix}-2\\1\end{Bmatrix}t+\begin{Bmatrix}-2-2k\\k\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-2\\1\end{Bmatrix}t+\begin{Bmatrix}-2\\0\end{Bmatrix}+k\begin{Bmatrix}-2\\1\end{Bmatrix}$$

علت اینکه در جواب نهایی, پارامتر k ظاهر شده است آن است که $\alpha=0$ مقدار ویژه $\mathbf{A}$ می‌باشد. حال کافی است یکی از این بینهایت جواب را انتخاب کنیم. مثلا اگر $k=0$ انتخاب شود:

$$\mathbf{x}_{p_2}(t)=\begin{Bmatrix}-2\\1\end{Bmatrix}t+\begin{Bmatrix}-2\\0\end{Bmatrix}\rightarrow\mathbf{x}_p(t)=\mathbf{x}_{p_1}(t)+\mathbf{x}_{p_2}(t)=\begin{Bmatrix}5\\-3\end{Bmatrix}e^t+\begin{Bmatrix}-2\\1\end{Bmatrix}t+\begin{Bmatrix}-2\\0\end{Bmatrix}$$

اگر $k=0$ انتخاب نشود یک ترم $k\begin{Bmatrix}-2\\1\end{Bmatrix}$ نیز به جواب خصوصی اضافه خواهد شد که در جواب همگن نیز وجود دارد. زیرا:

$$\mathbf{x}_c(t)=c_1\begin{Bmatrix}2\\-1\end{Bmatrix}+c_2\begin{Bmatrix}1\\3\end{Bmatrix}e^{7t}\rightarrow\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_c(t)+\mathbf{x}_p(t)\quad\blacksquare$$

<u>توضیح</u>: فرض کنید در این مثال شرایط اولیه بصورت $\mathbf{x}(0)=\begin{Bmatrix}2\\-1\end{Bmatrix}$ داده شده باشد. در اینصورت:

$$\mathbf{x}(t)=\underbrace{c_1\begin{Bmatrix}2\\-1\end{Bmatrix}+c_2\begin{Bmatrix}1\\3\end{Bmatrix}e^{7t}}_{\mathbf{x}_c(t)}+\underbrace{\begin{Bmatrix}5\\-3\end{Bmatrix}e^t+\begin{Bmatrix}-2\\1\end{Bmatrix}t+\begin{Bmatrix}-2\\0\end{Bmatrix}}_{\mathbf{x}_p(t)}\rightarrow c_1=\frac{-5}{7}\ ;\ c_2=\frac{3}{7}$$

$$\rightarrow\mathbf{x}(t)=\frac{3}{7}\begin{Bmatrix}1\\3\end{Bmatrix}e^{7t}+\begin{Bmatrix}5\\-3\end{Bmatrix}e^t+\begin{Bmatrix}-2\\1\end{Bmatrix}t+\frac{1}{7}\begin{Bmatrix}-24\\5\end{Bmatrix}\quad\blacksquare$$

3) $\mathbf{x}'=\begin{bmatrix}5&3\\-1&1\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{Bmatrix}1-2e^{2t}\\e^{2t}-5t+7\end{Bmatrix}$

$$\mathbf{g}(t)=\left(\begin{Bmatrix}-2\\1\end{Bmatrix}e^{2t}\right)+\left(\begin{Bmatrix}0\\-5\end{Bmatrix}t+\begin{Bmatrix}1\\7\end{Bmatrix}\right)=\mathbf{g}_1(t)+\mathbf{g}_2(t)\quad;\quad\mathbf{x}_c(t)=c_1\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}e^{2t}+c_2\begin{Bmatrix}3\\-1\end{Bmatrix}e^{4t}$$

با بکارگیری روش جمع آثار برای ترم نمایی $\mathbf{g}_1(t)=\begin{Bmatrix}-2\\1\end{Bmatrix}e^{2t}=\mathbf{u}^{(0)}e^{2t}$ از آنجا که $\alpha=2$ فقط یک بار مقدار ویژه $\mathbf{A}$ میباشد(یا ترم e^{2t} در جوابهای پایه دیده می‌شود), لذا جواب نظیر آن $\mathbf{x}_{p_1}(t)=\mathbf{Q}_1(t)e^{2t}=\left(\begin{Bmatrix}a_1\\b_1\end{Bmatrix}t+\begin{Bmatrix}a_0\\b_0\end{Bmatrix}\right)e^{2t}$ در نظر گرفته شده و با جایگذاری در معادله $\mathbf{x}'=\begin{bmatrix}5&3\\-1&1\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{Bmatrix}-2\\1\end{Bmatrix}e^{2t}$ این چهار ثابت را بدست می آوریم.

برای ترم خطی $\mathbf{g}_2(t)=\begin{Bmatrix}0\\-5\end{Bmatrix}t+\begin{Bmatrix}1\\7\end{Bmatrix}=\mathbf{P}_1(t)e^{0t}$ نیز از آنجا که $\alpha=0$ مقدار ویژه $\mathbf{A}$ نیست (یا اینکه بگوییم e^{0t} در جوابهای پایه دیده نمی‌شود), لذا جواب را بصورت $\mathbf{x}_{p_2}(t)=\mathbf{Q}_1(t)e^{0t}=\begin{Bmatrix}c_1\\d_1\end{Bmatrix}t+\begin{Bmatrix}c_0\\d_0\end{Bmatrix}$ در نظر گرفته, با جایگذاری در معادله $\mathbf{x}'=\begin{bmatrix}5&3\\-1&1\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{Bmatrix}0\\-5\end{Bmatrix}t+\begin{Bmatrix}1\\7\end{Bmatrix}$ این چهار ثابت را نیز بدست می آوریم. $\blacksquare$

توضیح: به طریق دیگر می‌توانستیم جواب را در مجموع بصورت زیر درنظر گرفته و در معادله جایگذاری کنیم که در اینصورت محاسبات آن طولانی‌تر خواهد شد:

$$\mathbf{x}_p(t) = \left(\begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix}\right) e^{2t} + \begin{Bmatrix} c_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{Bmatrix} \quad \blacksquare$$

مثال ۶-۲۰ سیستم جرم-فنر مطرح شده در مثال ۶-۱۷ را مجددا به کمک روش ضرایب نامعین حل کنید.

حل در مثال ۶-۱۷ دیده شد که دستگاه مورد نظر بصورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{Bmatrix} cos2t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ابتدا بایستی جواب عمومی دستگاه را بدست آوریم. چنانچه مشابه مثال ۶-۱۷ عمل کنیم پاسخ عمومی بصورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{x}_c(t) = \frac{1}{3}\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}(c_1 cost + c_2 sint) + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}\left(c_3 cos\sqrt{6}t + c_4 sin\sqrt{6}t\right)$$

دیده می‌شود که ترم ناهمگن بصورت کسینوسی است, لذا آنرا بر حسب تابع نمایی نوشته و معادله جدید را حل می‌کنیم. در نهایت قسمت حقیقی پاسخ بدست آمده از حل معادله جدید, $\mathbf{x}_p(t)$ خواهد بود.

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} e^{2it} = \begin{Bmatrix} cos2t \\ 0 \end{Bmatrix} + i\begin{Bmatrix} sin2t \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{z}'' = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} e^{2it}$$

از آنجا که $\alpha = 2i$ مقدار ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ نیست, در نتیجه جواب را بصورت $\mathbf{Q}_0(t)e^{2it} = \mathbf{w}^{(0)}e^{2it}$ انتخاب کرده و در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\mathbf{z}_p(t) = \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix} e^{2it} \xrightarrow{Sub.} -4\begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix} e^{2it} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix} e^{2it} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} e^{2it} \rightarrow \begin{cases} 2b_0 = -1 \\ 3a_0 + b_0 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{z}_p(t) = \frac{1}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \end{Bmatrix} e^{2it} \rightarrow \mathbf{x}_p(t) = Re\left(\mathbf{z}_p(t)\right) = \frac{1}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \end{Bmatrix} cos2t$$

که همان جوابی است که در مثال ۶-۱۷ نیز بدست آمده بود. دیده می‌شود در این مثال, استفاده از روش ضرایب نامعین محاسبات کمتری نیاز خواهد داشت. ■

تمرینات بخش ۶-۶-۲

۱- دستگاههای مطرح شده در تمرین ۱ از مجموعه تمرینات بخش ۶-۶-۱ را به روش ضرایب نامعین مجددا حل کنید.

۲- جواب خصوصی دستگاههای زیر را با روش ضرایب نامعین بدست آورید.

1) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{Bmatrix} -t^2 \\ 2t \end{Bmatrix}$; <u>Ans</u> : $\mathbf{x}_p(t) = \frac{1}{8}\begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix} t + \frac{1}{4}\begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \end{Bmatrix} t^2$

2) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{Bmatrix} e^{-t} \\ 2t \end{Bmatrix}$; <u>Ans</u> : $\mathbf{x}_p(t) = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} t + \frac{1}{3}\begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \end{Bmatrix} e^{-t} + \frac{1}{3}\begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix} te^{-t}$

3) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{Bmatrix} 4te^{t} - 4te^{-t} \\ 2te^{-t} \end{Bmatrix}$; <u>Ans</u> : $\mathbf{x}_p(t) = \begin{Bmatrix} -e^{t} - 2t^2e^{-t} \\ -te^{t} + t^2e^{-t} \end{Bmatrix}$

۶-۶-۳- روش تغییرپارامتر (لاگرانژ)

در حل معادلات خطی غیرهمگن مرتبه n دیده شد که با داشتن جواب همگن به فرم $y_c=\sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ و تغییر ثابتهای c_i به توابع u_i , جواب کامل بصورت $y=\sum_{i=1}^{n} u_i y_i$ بدست آمد. هدف آن است که در اینجا نیز از همین الگو برای حل دستگاه‌های غیرهمگن استفاده کنیم.

قبلا دیده شد که جواب عمومی دستگاه همگن را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\mathbf{g}(t)=\mathbf{0}\rightarrow \mathbf{x}_c(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{x}^{(i)}(t)=\left[\mathbf{x}^{(1)}(t),\cdots,\mathbf{x}^{(n)}(t)\right]\begin{Bmatrix} c_1\\ \vdots \\ c_n\end{Bmatrix}=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c}$$

همانگونه که در بخش ۶-۴ دیده شد, ماتریس $\mathbf{\Psi}(t)$ ماتریس اساسی جواب نامگذاری شد که از کنار هم قرار دادن جوابهای اساسی $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ تا $\mathbf{x}^{(n)}(t)$ بدست می‌آید. به راحتی می‌توان نشان داد این ماتریس در دستگاه همگن $\mathbf{x}'(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ صدق می‌کند, یعنی $\mathbf{\Psi}'(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{\Psi}(t)$ خواهد بود. چرا که:

$$\begin{cases}\left(\mathbf{x}^{(1)}(t)\right)'=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}^{(1)}(t)\\ \quad\cdots\\ \left(\mathbf{x}^{(n)}(t)\right)'=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}^{(n)}(t)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\left[\mathbf{x}^{(1)}(t),\cdots,\mathbf{x}^{(n)}(t)\right]'=\mathbf{A}(t)\left[\mathbf{x}^{(1)}(t),\cdots,\mathbf{x}^{(n)}(t)\right]\\ \qquad\rightarrow\mathbf{\Psi}'(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{\Psi}(t)\end{cases}$$

دیده شد که جواب همگن به شکل $\mathbf{x}_c(t)=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c}$ بدست آمد. لذا مشابه روش لاگرانژ در اینجا نیز جواب دستگاه غیرهمگن را به فرم $\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t)$ انتخاب می‌کنیم.

$$\mathbf{x}'(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{g}(t)\quad;\quad\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\rightarrow\mathbf{\Psi}'(t)\mathbf{u}(t)+\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t)+\mathbf{g}(t)\xrightarrow{\mathbf{\Psi}'(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{\Psi}(t)}\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t)=\mathbf{g}(t)$$

عملا حل مساله در همین‌جا تمام شده است. چرا که با حل دستگاه جبری $\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t)=\mathbf{g}(t)$ بردار $\mathbf{u}'(t)$ بدست آمده و با انتگرال‌گیری از آن $\mathbf{u}(t)$ مشخص می‌شود. در نهایت نیز از رابطه $\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t)$ جواب مساله تعیین خواهد شد. در اینجا نیز مشابه آنچه در روش تغییر پارامتر در معادلات خطی دیده شد, چنانچه در انتگرال‌گیری از u_i'ها ثابتهای c_i را نیز وارد کنیم جواب کامل دستگاه و اگر این ثابتها را حذف کنیم, صرفا جواب خصوصی بدست می‌آید.

برای حل دستگاه جبری $\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t)=\mathbf{g}(t)$ نیز یا می‌توان از رابطه $\mathbf{u}'(t)=\mathbf{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t)$ استفاده کرد و یا چنانچه دستگاه ساده باشد, بجای معکوس‌گیری, دستگاه را مستقیما (مثلا با روش حذفی) حل می‌کنیم. توجه شود از آنجا که $\mathbf{\Psi}(t)$ شامل جوابهای پایه می‌باشد و این جوابها مستقلند, لذا دترمینان این ماتریس مخالف صفر بوده و لذا $\mathbf{\Psi}^{-1}(t)$ وجود دارد.

نکته مهم آنکه در روش تغییرپارامتر, ضرایب ماتریس $\mathbf{A}(t)$ میتواند ثابت نباشد, به شرط آنکه ماتریس اساسی جواب موجود باشد. درست مشابه معادلات دیفرانسیل خطی که اگر معادله دارای ضرایب متغیر باشد, به شرطی می‌توان از روش تغییر پارامتر استفاده کرد که جوابهای اساسی را بدانیم. در مثال ۶-۲۴ مساله‌ای با ضرایب ماتریسی غیرثابت را به این روش حل خواهیم کرد.

توضیح: دیده شد که کلید حل مساله در روش لاگرانژ آن بود که $\mathbf{\Psi}'(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{\Psi}(t)$, یعنی ماتریس اساسی جواب در معادله همگن صدق میکند. در روش لاگرانژ در معادلات خطی نیز دقیقا از همین نکته استفاده شد. به عنوان نمونه در معادله مرتبه دو با

جایگذاری $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ در $y'' + py' + qy = g$, از اینکه $L[y_1] = 0$ و $L[y_2] = 0$ (صدق کردن جوابهای اساسی در معادله همگن) استفاده شد تا در نهایت به رابطه ساده $u_1'y_1' + u_2'y_2' = g$ رسیدیم.

مثال ۶-۲۱ جواب خصوصی دستگاه معادله دیفرانسیل غیرهمگن زیر را بدست آورید.

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{Bmatrix} 0 \\ e^t sin2t \\ e^t cos2t \end{Bmatrix}$$

حل ابتدا دستگاه همگن را حل کرده و ماتریس اساسی جواب را بدست می‌آوریم. در قسمت دوم مثال ۶-۱۱ این مساله حل شده است. از کنار هم قرار دادن جوابهای اساسی خواهیم داشت:

$$\mathbf{\Psi}(t) = \left[\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t), \mathbf{x}^{(3)}(t)\right] = \begin{bmatrix} 2e^t & 0 & 0 \\ -3e^t & e^t cos2t & e^t sin2t \\ 2e^t & e^t sin2t & -e^t cos2t \end{bmatrix}$$

حال بایستی از رابطه $\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t)$ مجهولات $\mathbf{u}'(t)$ را بدست آورد. یک راه, حل مستقیم این دستگاه با استفاده از معکوس سازی ماتریس اساسی است که به رابطه $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t)$ منجر می‌شود. اما گاهی اوقات فرم دستگاه $\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t)$ بگونه‌ای است که به روشهای ساده‌تری به جز معکوس سازی نیز می‌توان آنرا حل کرد. به عنوان نمونه در این مثال با توجه به اینکه در سطر اول ماتریسِ $\mathbf{\Psi}(t)$ دو درایه برابر صفر می‌باشد, به سادگی $u_1'(t) = 0$ بدست می‌آید. زیرا:

$$\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t) \to \begin{bmatrix} 2e^t & 0 & 0 \\ -3e^t & e^t cos2t & e^t sin2t \\ 2e^t & e^t sin2t & -e^t cos2t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ u_3'(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ e^t sin2t \\ e^t cos2t \end{Bmatrix} \to u_1'(t) = 0$$

با جایگذاری $u_1'(t) = 0$ در دو معادله دیگر و حل دستگاه دو معادله و دو مجهول, خواهیم داشت:

$$\begin{cases} u_1'(t) = 0 \\ u_2'(t) = sin4t \\ u_3'(t) = -cos4t \end{cases} \to \mathbf{x}_p(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t & 0 & 0 \\ -3e^t & e^t cos2t & e^t sin2t \\ 2e^t & e^t sin2t & -e^t cos2t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{4}cos4t \\ -\dfrac{1}{4}sin4t \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_p(t) = -\frac{1}{4}\begin{Bmatrix} 0 \\ cos2t \\ sin2t \end{Bmatrix} e^t cos4t - \frac{1}{4}\begin{Bmatrix} 0 \\ sin2t \\ -cos2t \end{Bmatrix} e^t sin4t \quad \blacksquare$$

توضیح ۱: در اینجا نیز برای یافتن جواب کامل دستگاه, یا می‌توان در انتگرال‌گیری از u_i'ها , ثابتهای c_1, c_2 و c_3 را نیز وارد کرد و یا آنکه جواب عمومی $\mathbf{x}_c(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{x}^{(i)}(t)$ را به جواب بالا اضافه نمود. بنابراین:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{x}_p(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{x}^{(i)}(t) + \mathbf{x}_p(t)$$

$$= c_1\begin{Bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{Bmatrix} e^t + c_2\begin{Bmatrix} 0 \\ cos2t \\ sin2t \end{Bmatrix} e^t + c_3\begin{Bmatrix} 0 \\ sin2t \\ -cos2t \end{Bmatrix} e^t - \frac{1}{4}\begin{Bmatrix} 0 \\ cos2t \\ sin2t \end{Bmatrix} e^t cos4t - \frac{1}{4}\begin{Bmatrix} 0 \\ sin2t \\ -cos2t \end{Bmatrix} e^t sin4t$$

توضیح ۲: فرض کنید در صورت سوال $\mathbf{x}(0) = \begin{Bmatrix} 2 \\ -0.25 \\ 3 \end{Bmatrix}$ داده شده باشد. در اینصورت ثابتهای جواب عمومی عبارتند از:

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ -0.25 \\ 3 \end{Bmatrix} = c_1 \begin{Bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{Bmatrix} + c_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + c_3 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \blacksquare$$

جمع بندی روش در قالب یک فرمول:

با همین روابطی که دیده شد می‌توان جواب خصوصی یک دستگاه غیر همگن را به روش تغییر پارامتر و بصورت گام به گام بدست آورد. در اکثر کتابهای معادلات دیفرانسیل, بجای روش بالا مرسوم است که این گامها را در هم ادغام کرده و برای یک دستگاه غیرهمگن, جواب روش تغییر پارامتر را بصورت یک فرمول کلی ارائه داد. دیده شد که برای شروع حل بایستی معادله $\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t)$ را حل کرد که حل ماتریسی آن بصورت $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t)$ می‌باشد. لذا با انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$\mathbf{u}(t) = \int \mathbf{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t)\,dt + \mathbf{c}_0 \xrightarrow{\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t)} \mathbf{x}(t) = \underbrace{\mathbf{\Psi}(t)\int \mathbf{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t)\,dt}_{\mathbf{x}_p(t)} + \underbrace{\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c}_0}_{\mathbf{x}_c(t)}$$

توجه شود از آنجا که جواب عمومی قبلا به شکل $\mathbf{x}_c(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c}$ معرفی شد, میتوان $\mathbf{c}_0$ را همان $\mathbf{c}$ دانست. بنابراین:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\left(\int \mathbf{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t)\,dt + \mathbf{c}\right)} \quad (1) \quad ; \quad \mathbf{c} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{Bmatrix}$$

که در آن منظور از انتگرال یک بردار, انتگرال‌گیری از هر یک از مولفه‌های آن است. به عبارتی بجای حل گام به گام مساله مطابق مثال قبل, میتوان مستقیما جواب نهایی را از رابطه (1) بدست آورد.

توضیح ۱: می‌توان این جواب را با جواب معادلات مرتبه اول غیر همگن که بصورت زیر است مقایسه کرد:

$$x' + p(t)x = g(t) \to x(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left(\int \mu(t)g(t)dt + c\right)$$

توضیح ۲: در حالتی که در مساله شرایط اولیه بصورت $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ داده شده باشد, به دو طریق میتوان ثابتهای جواب عمومی یعنی بردار $\mathbf{c}$ را بدست آورد. راه اول جایگذاری مستقیم شرایط اولیه در جواب $\mathbf{x}(t)$ است. به عبارتی خواهیم داشت:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{x}_p(t) \xrightarrow{\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}^0} c_i \quad \boxed{\surd}$$

بعنوان راه دوم می‌توان بجای انتگرال‌گیری نامعین از $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t)$ که منجر به (1) شد, از آن انتگرال معین گرفت. در اینصورت:

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t) \to \underbrace{\int_{t_0}^{t} \mathbf{u}'(s)\,ds}_{\mathbf{u}(t)-\mathbf{u}(t_0)} = \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds \to \mathbf{u}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds + \mathbf{u}(t_0)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t) \to \mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\left(\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds + \mathbf{u}(t_0)\right)$$

اگر t_0 را نقطه‌ای انتخاب کنیم که شرایط اولیه در آن نقطه داده شده باشد, آنگاه $\mathbf{u}(t_0)$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$if\ \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}^0 \rightarrow \mathbf{x}^0=\mathbf{\Psi}(t_0)\big(0+\mathbf{u}(t_0)\big) \rightarrow \mathbf{u}(t_0)=\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0$$

$$\rightarrow \boxed{\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Psi}(t)\left(\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds+\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0\right)} \quad (2)$$

در صورتیکه در مساله شرایط اولیه داده شده باشد, به کمک رابطه (2) می‌توان جواب نهایی را بدون نیاز به استفاده از رابطه (1) بصورت مستقیم بدست آورد.

توضیح ۳: در بعضی کتب با معرفی تابع $\mathbf{\Phi}(t)=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)$ پس از قدری محاسبات و ساده‌سازی, جواب بر حسب این تابع بصورت زیر بیان شده است.

$$if\quad \mathbf{\Phi}(t)=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0) \xrightarrow{\ \cdots\ } \mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t)\left(\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds+\mathbf{x}^0\right)$$

خلاصه: بنا بر آنچه دیده شد برای تعیین جواب به روش تغییر پارامتر می‌توان مساله را به شکل گام به گام (مشابه مثال ۶-۲۱) حل کرد و یا مستقیما از فرمول (1) استفاده کنیم. چنانچه مساله دارای شرط اولیه $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}^0$ نیز باشد, دو راه وجود دارد. یکی اینکه با جایگذاری مستقیمِ این شرط در جواب $\mathbf{x}(t)$, ثابتهای $\mathbf{c}$ تعیین شود و یا مستقیما از فرمول (2) استفاده کنیم.

به نظر می‌رسد بجای فرمولهای (1) یا (2) روش گام به گام روش ساده‌تری باشد, چرا که هم نیاز به حفظ کردن فرمول نخواهد داشت و هم اینکه مراحل کار قابل درک است. علاوه بر این در استفاده از فرمولهای (1) یا (2) حتما نیاز است که $\mathbf{\Psi}^{-1}(t)$ محاسبه شود, در حالیکه همانگونه که در مثال ۶-۲۱ دیده شد گاهی دستگاه بگونه‌ای است که حل $\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t)=\mathbf{g}(t)$ بدون نیاز به تعیین $\mathbf{\Psi}^{-1}(t)$ نیز امکان‌پذیر می‌باشد.

مثال ۶-۲۲ دستگاه مقدار اولیه غیرهمگن مطرح شده در مثال ۶-۱۶ را به روش تغییر پارامتر حل کنید.

$$\mathbf{x}'=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{Bmatrix}8e^t\\ 18t\end{Bmatrix}\ ;\quad \mathbf{x}(0)=\begin{Bmatrix}4\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}\ ;\ r_1=3; r_2=-1 \rightarrow \mathbf{x}^{(1)}(t)=\begin{Bmatrix}2\\ 1\end{Bmatrix}e^{3t}\ ;\ \mathbf{x}^{(2)}(t)=\begin{Bmatrix}-2\\ 1\end{Bmatrix}e^{-t}$$

$$\mathbf{\Psi}(t)=\begin{bmatrix}2e^{3t} & -2e^{-t}\\ e^{3t} & e^{-t}\end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{\Psi}^{-1}(t)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}e^{-3t} & 2e^{-3t}\\ -e^{t} & 2e^{t}\end{bmatrix}$$

برای محاسبه جواب $\mathbf{x}(t)$ یک راه استفاده از فرمول (1) می‌باشد. یعنی:

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Psi}(t)\left(\int \mathbf{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t)\,dt+\mathbf{c}\right)=\begin{bmatrix}2e^{3t} & -2e^{-t}\\ e^{3t} & e^{-t}\end{bmatrix}\left(\int \frac{1}{4}\begin{bmatrix}e^{-3t} & 2e^{-3t}\\ -e^{t} & 2e^{t}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}8e^t\\ 18t\end{Bmatrix}dt+\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}\right)$$

ابتدا انتگرال بردار را با انتگرال‌گیری از هر یک از مولفه‌های آن بدست می‌آوریم:

$$\int \frac{1}{4}\begin{bmatrix}e^{-3t} & 2e^{-3t}\\ -e^{t} & 2e^{t}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}8e^t\\ 18t\end{Bmatrix}dt=\int\begin{Bmatrix}2e^{-2t}+9te^{-3t}\\ -2e^{2t}+9te^{t}\end{Bmatrix}dt=\begin{Bmatrix}-e^{-2t}-(3t+1)e^{-3t}\\ -e^{2t}+9(t-1)e^{t}\end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}2e^{3t} & -2e^{-t}\\ e^{3t} & e^{-t}\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}-e^{-2t}-(3t+1)e^{-3t}\\ -e^{2t}+9(t-1)e^{t}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}\right)$$

بدیهی است اگر در انتگرال‌گیری ثابتهای c_i را نیز وارد می‌کردیم, می‌توانستیم بردار $\mathbf{c}$ را در فرمول (1) حذف کنیم.

$$\rightarrow \mathbf{x}(t)=\begin{Bmatrix}-24t+16\\ -2e^{t}+6t-10\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}2e^{3t} & -2e^{-t}\\ e^{3t} & e^{-t}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}=\mathbf{x}_p(t)+\mathbf{x}_c(t)$$

حال از آنجا که شرایط اولیه بصورت $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}^0$ داده شده است, با جایگذاری مستقیم آن در جواب $\mathbf{x}(t)$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{x}(0)=\begin{Bmatrix}-24\times 0+16\\ -2e^{0}+6\times 0-10\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}2e^{0} & -2e^{-0}\\ e^{0} & e^{-0}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}4\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}16\\ -12\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-12\\ 12\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3\\ 9\end{Bmatrix}\rightarrow \mathbf{x}(t)=\begin{Bmatrix}-24t+16+6e^{3t}-18e^{-t}\\ -2e^{t}+6t-10+3e^{3t}+9e^{-t}\end{Bmatrix}\ \blacksquare$$

توضیح ۱: روش دوم حل مساله به شکل گام به گام (مشابه مثال ۶-۲۱) و بصورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t)=\mathbf{g}(t)\rightarrow \mathbf{u}'(t)=\mathbf{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t)=\begin{Bmatrix}9te^{-3t}+2e^{-2t}\\ 9te^{t}-2e^{2t}\end{Bmatrix}\rightarrow \mathbf{u}(t)=\begin{Bmatrix}-e^{-3t}(3t+e^{t}+1)\\ -e^{t}(e^{t}-9t+9)\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_p(t)=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t)=\begin{Bmatrix}-24t+16\\ -2e^{t}+6t-10\end{Bmatrix}\quad ;\quad \mathbf{x}_c(t)=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c}=\begin{bmatrix}2e^{3t} & -2e^{-t}\\ e^{3t} & e^{-t}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}$$

توضیح ۲: دیده شد که برای حل دستگاه, ابتدا به کمک رابطه (1) جواب کامل را بر حسب ضرایب مجهول $\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}$ بدست آورده و سپس با استفاده از شرایط اولیه $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}^0$ این ثابتها بدست آمد. روش دیگر حل مساله برای دستگاهی که همراه با مقدار اولیه می‌باشد, استفاده مستقیم از رابطه (2) است. از آنجا که شرایط اولیه در 0 داده شده است. با انتخاب $t_0=0$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Psi}(t)\left(\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds+\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0\right)\quad ;\quad t_0=0$$

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}2e^{3t} & -2e^{-t}\\ e^{3t} & e^{-t}\end{bmatrix}\left(\int_0^t\frac{1}{4}\begin{bmatrix}e^{-3s} & 2e^{-3s}\\ -e^{s} & 2e^{s}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}8e^{s}\\ 18s\end{Bmatrix}ds+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}4\\ 0\end{Bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{3t} & -2e^{-t}\\ e^{3t} & e^{-t}\end{bmatrix}\left(\int_0^t\begin{Bmatrix}2e^{-2s}+9se^{-3s}\\ 9se^{s}-2e^{2s}\end{Bmatrix}ds+\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}\right)=\begin{Bmatrix}-24t+16+6e^{3t}-18e^{-t}\\ -2e^{t}+6t-10+3e^{3t}+9e^{-t}\end{Bmatrix}\ \blacksquare$$

مثال ۶-۲۳ دستگاه غیرهمگن زیر را حل کنید.

$$\mathbf{x}'=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 8 & -6\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{Bmatrix}1\\ 3\end{Bmatrix}\frac{e^{-2t}}{t}$$

حل ابتدا بایستی دستگاه همگن را حل کنیم تا ماتریس اساسی جواب بدست آید.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 8 & -6\end{bmatrix}\ ;\ r_1=-2\rightarrow \mathbf{v}^{(1)}=\begin{Bmatrix}1\\ 2\end{Bmatrix}\rightarrow \mathbf{x}^{(1)}(t)=\begin{Bmatrix}1\\ 2\end{Bmatrix}e^{-2t}$$

بنابراین برای ریشه مضاعف $r_1=-2$ دو بردار ویژه بدست نمی‌آید. لذا جواب دوم را بصورت زیر انتخاب میکنیم:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}^{(2)} - r_1\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v}^{(1)} \to \mathbf{x}^{(2)}(t) = \left(\mathbf{v}^{(1)}t + \mathbf{v}^{(2)}\right)e^{r_1 t}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}^{(2)} - (-2)\mathbf{v}^{(2)} = \begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix} \to \begin{cases}4a - 2b = 1\\8a - 4b = 2\end{cases} \xrightarrow{a=k} \mathbf{v}^{(2)} = \begin{Bmatrix}a\\b\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}k\\2k - 0.5\end{Bmatrix} = k\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}0\\-0.5\end{Bmatrix}$$

بعنوان جواب دوم مستقل, کافی است یکی از این بینهایت جواب را انتخاب کنیم. مثلا با انتخاب $k = 0.5$ داریم:

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \left(\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix}t + \begin{Bmatrix}0.5\\0.5\end{Bmatrix}\right)e^{-2t} \to \mathbf{x}_c(t) = c_1\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix}e^{-2t} + c_2\left(\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix}t + \begin{Bmatrix}0.5\\0.5\end{Bmatrix}\right)e^{-2t}$$

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{bmatrix}1 & 2t+1\\2 & 4t+1\end{bmatrix}e^{-2t} \to \mathbf{\Psi}^{-1}(t) = \begin{bmatrix}-(4t+1) & 2t+1\\2 & -1\end{bmatrix}e^{2t}$$

دقت شود برای سادگی محاسبات, ستون دوم ماتریس $\mathbf{\Psi}(t)$ را در ۲ ضرب کرده‌ایم, هرچند الزامی به انجام آن نیست. از آنجا که هر مضربی از جواب پایه, خود یک جواب پایه است, لذا انجام این کار صحیح است.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{\Psi}(t)\left(\int \mathbf{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t)\,dt + \mathbf{c}\right)\\ &= \begin{bmatrix}1 & 2t+1\\2 & 4t+1\end{bmatrix}e^{-2t}\left(\int \begin{bmatrix}-(4t+1) & 2t+1\\2 & -1\end{bmatrix}e^{2t}\begin{Bmatrix}1\\3\end{Bmatrix}\frac{e^{-2t}}{t}dt + \begin{Bmatrix}c_1\\c_2\end{Bmatrix}\right)\\ &= e^{-2t}\begin{Bmatrix}2t + lnt - 2tlnt\\4t + 3lnt - 4tlnt\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 2t+1\\2 & 4t+1\end{bmatrix}e^{-2t}\begin{Bmatrix}c_1\\c_2\end{Bmatrix} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

توضیح: می‌توان جواب مساله را به شکل گام به گام و بصورت زیر نیز بدست آورد:

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t) = \begin{Bmatrix}2/t + 2\\-1/t\end{Bmatrix} \to \mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix}2t + 2lnt\\-lnt\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix}2t + lnt - 2tlnt\\4t + 3lnt - 4tlnt\end{Bmatrix}e^{-2t}\ ;\ \ \mathbf{x}_c(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c} = \begin{bmatrix}1 & 2t+1\\2 & 4t+1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\c_2\end{Bmatrix}e^{-2t} \quad \blacksquare$$

مثال ۶-۲۴ دستگاه غیرهمگن زیر را حل کنید. (دقت شود ضرایب ثابت نمی‌باشد)

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & t^{-1}\end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{Bmatrix}0\\3t\end{Bmatrix}$$

حل این اولین مثالی است که ضرایب غیرثابت دارد. اما به جهت سادگی دستگاه داده شده, می‌توان جوابهای دستگاه همگن را به روش حذفی بدست آورد.

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & t^{-1}\end{bmatrix}\mathbf{x} \to \begin{cases}x_1' = x_2\\x_2' = \dfrac{1}{t}x_2\end{cases} \to \begin{cases}x_1' = x_2\\tx_2' = x_2\end{cases}$$

$$tx_2' = x_2 \to x_2 = c_1 t\ ;\ \ x_1' = x_2 = c_1 t \to x_1 = \frac{c_1}{2}t^2 + c_2 \to \mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix} = \frac{c_1}{2}\begin{Bmatrix}t^2\\2t\end{Bmatrix} + c_2\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}$$

$$\to \mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}\ ;\ \ \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix}t^2\\2t\end{Bmatrix}$$

بدیهی است میتوان جوابهای پایه بیشماری بدست آورد که فقط دو جواب مستقل کافی است.

$$\mathbf{\Psi}(t)=\begin{bmatrix}1 & t^2\\ 0 & 2t\end{bmatrix}\to\mathbf{\Psi}^{-1}(t)=\frac{1}{2t}\begin{bmatrix}2t & -t^2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Psi}(t)\left(\int\mathbf{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t)\,dt+\mathbf{c}\right)=\begin{bmatrix}1 & t^2\\ 0 & 2t\end{bmatrix}\left(\int\frac{1}{2t}\begin{bmatrix}2t & -t^2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 3t\end{Bmatrix}dt+\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}\right)$$
$$=\begin{bmatrix}1 & t^2\\ 0 & 2t\end{bmatrix}\left(\int\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}-3t^2\\ 3\end{Bmatrix}dt+\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}\right)=\begin{Bmatrix}t^3\\ 3t^2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & t^2\\ 0 & 2t\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}$$

دیده میشود که در روش تغییرپارامتر ضرایب میتواند ثابت نباشد, البته به شرط آنکه ماتریس اساسی جواب موجود باشد. ■

توضیح: فرض کنید در صورت سوال $\mathbf{x}(1)=\begin{Bmatrix}7\\ 5\end{Bmatrix}$ داده شده باشد. به دو طریق می‌توان ثابتهای جواب را بدست آورد. راه اول جایگذاری مستقیم شرایط اولیه در جواب $\mathbf{x}(t)$ است. یعنی:

$$\mathbf{x}(t)=\begin{Bmatrix}t^3\\ 3t^2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & t^2\\ 0 & 2t\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}\ ;\ \mathbf{x}(1)=\begin{Bmatrix}7\\ 5\end{Bmatrix}\to\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}5\\ 1\end{Bmatrix}\to\mathbf{x}(t)=\begin{Bmatrix}5+t^2+t^3\\ 2t+3t^2\end{Bmatrix}$$

راه دوم تعیین جواب برای مساله‌ای که مقدار اولیه آن داده شده است, استفاده مستقیم از رابطه (2) میباشد.

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Psi}(t)\left(\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds+\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0\right)\quad;\quad t_0=1$$

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}1 & t^2\\ 0 & 2t\end{bmatrix}\left(\int_1^t\frac{1}{2s}\begin{bmatrix}2s & -s^2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 3s\end{Bmatrix}ds+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}7\\ 5\end{Bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}1 & t^2\\ 0 & 2t\end{bmatrix}\left(\int_1^t\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}-3s^2\\ 3\end{Bmatrix}ds+\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}9\\ 5\end{Bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1 & t^2\\ 0 & 2t\end{bmatrix}\frac{1}{2}\left(\begin{Bmatrix}-t^3+1\\ 3t-3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}9\\ 5\end{Bmatrix}\right)=\begin{Bmatrix}5+t^2+t^3\\ 2t+3t^2\end{Bmatrix}\ \blacksquare$$

تمرینات بخش ۶-۶-۳

۱- دستگاههای مربوط به تمرینات بخش ۶-۶-۱ را مجددا با روش تغییر پارامتر حل کنید.

۲- دستگاه‌های زیر را با روش تغییر پارامتر حل کنید.

1) $\mathbf{x}'=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{Bmatrix}sect\\ 0\end{Bmatrix}\ ;\ \mathbf{x}(0)=\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}$

Ans : $\mathbf{x}(t)=\begin{Bmatrix}cost\\ -sint\end{Bmatrix}(1+t)+\begin{Bmatrix}sint\\ cost\end{Bmatrix}\left(1+ln(sect)\right)$

2) $\mathbf{x}'=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}\mathbf{x}-\begin{Bmatrix}15\\ 4\end{Bmatrix}te^{-2t}\ ;\ \mathbf{x}(0)=\begin{Bmatrix}7\\ 3\end{Bmatrix}$

Ans : $\mathbf{x}(t)=\frac{1}{14}\begin{Bmatrix}6+28t-7t^2\\ -4+14t+21t^2\end{Bmatrix}e^{-2t}+\frac{23}{7}\begin{Bmatrix}2\\ 1\end{Bmatrix}e^{5t}$

3) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{Bmatrix} 1 \\ t \\ 2t \end{Bmatrix}$

Ans : $\mathbf{x}(t) = c_1\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}e^{3t} + c_2\begin{Bmatrix} -sint \\ -cost \\ sint + cost \end{Bmatrix} + c_3\begin{Bmatrix} cost \\ -sint \\ sint - cost \end{Bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{Bmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{Bmatrix}t$

۳- مدار اشاره شده در مثال ۶-۵ را به روش ضرایب نامعین و تغییر پارامتر مجددا حل کنید.

۴- قسمتهای دوم و سوم از تمرین ۲ بخش ۶-۶-۲ را به روش قطری سازی و تغییر پارامتر مجددا حل کنید.

۵- قسمت دوم از مثال ۶-۱۹ را به روش قطری سازی و تغییر پارامتر مجددا حل کنید.

۶- قسمت دوم از تمرین ۲ از مجموعه تمرینات بخش ۶-۲ را به روش تغییر پارامتر حل کنید. این تمرین بصورت زیر است:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{Bmatrix} 4e^t cost \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{x}(0) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Ans : $\mathbf{x}(t) = e^t\begin{Bmatrix} cost + 10sint + 2tcost + 6tsint \\ cost - 5sint - 4tsint \end{Bmatrix}$

توضیح: جواب دستگاه همگن متناظر, در مجموعه تمرینات بخش ۶-۵ ارائه شده است.

۷- دستگاه زیر را به سه روش قطری سازی, ضرایب نامعین و تغییر پارامتر حل کنید.

$$\begin{cases} x' = x + y + z - 1 \\ y' = x + y + z \\ z' = x + y + z \end{cases} ; \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases} ; \quad Ans: \begin{cases} x(t) = \frac{1}{9} - \frac{2}{3}t - \frac{1}{9}e^{3t} \\ y(t) = z(t) = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}e^{3t} \end{cases}$$

۶-۷- دستگاه کوشی-اویلر

فرم دستگاه کوشی-اویلر مرتبه اول بصورت $t\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)$ می‌باشد. در اینجا نیز دو روش برای حل دستگاه وجود دارد. در روش اول ابتدا دستگاه همگن را حل کرده و سپس به کمک جواب عمومی این معادله میتوان با استفاده از روش تغییر پارامتر (لاگرانژ) جواب خصوصی را نیز بدست آورد. در روش دوم با یک تغییر متغیر این دستگاه را به یک دستگاه با ضرایب ثابت تبدیل می‌کنیم که حل آن قبلا دیده شد.

بعنوان یک پیشنهاد در اینجا نیز به نظر می‌رسد روش دوم (بخصوص برای معادله ناهمگن) روش مناسبتری باشد.

روش اول: فرض کنید هدف حل دستگاه همگن $t\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ باشد. در اینجا نیز مشابه بحث کوشی-اویلر, جواب به فرم زیر انتخاب می‌شود.

$$t\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad ; \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{v}t^r \to r\mathbf{v}t^r = \mathbf{A}\mathbf{v}t^r \to \mathbf{A}\mathbf{v} = r\mathbf{v}$$

یعنی در اینجا $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}t^r$ جواب $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ می‌باشد اگر و تنها اگر r مقدار ویژه و $\mathbf{v}$ بردار ویژه نظیر r باشد, لذا $\mathbf{x}^{(i)}(t) = \mathbf{v}^{(i)}t^{r_i}$. حال اگر ماتریس $\mathbf{A}$ به بعد n دارای n بردار ویژه مستقل باشد (بردار ویژه‌های آن کامل باشد), آنگاه:

$$\mathbf{x}(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{x}^{(i)}(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{v}^{(i)}t^{r_i}$$

همچنین اگر r_1 مقدار ویژه مضاعفی باشد که دو بردار ویژه ندهد, در اینصورت جواب اول را میتوان مشابه قبل بدست آورد:

$$r_1\to \mathbf{A}\mathbf{v}^{(1)}-r_1\mathbf{v}^{(1)}=\mathbf{0}\to \mathbf{v}^{(1)}\to \mathbf{x}^{(1)}(t)=\mathbf{v}^{(1)}t^{r_1}$$

و در اینحالت جواب دوم را مشابه آنچه در بخش ۶-۵-۲ دیده شد بصورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\mathbf{x}^{(2)}(t)=\left(\mathbf{v}^{(3)}lnt+\mathbf{v}^{(2)}\right)t^{r_1}$$

$$t\mathbf{x}'(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)\xrightarrow{sub.\ \mathbf{x}^{(2)}}\left(\mathbf{A}\mathbf{v}^{(3)}-r_1\mathbf{v}^{(3)}\right)lnt+\left(\mathbf{A}\mathbf{v}^{(2)}-r_1\mathbf{v}^{(2)}-\mathbf{v}^{(3)}\right)=0$$

پس باید هر دو پرانتز صفر گردد. صفر شدن پرانتز اول بیانگر آن است که $\mathbf{v}^{(3)}$ بایستی همان $\mathbf{v}^{(1)}$ باشد. لذا:

$$\mathbf{v}^{(3)}=\mathbf{v}^{(1)}\to\begin{cases}\mathbf{A}\mathbf{v}^{(1)}-r_1\mathbf{v}^{(1)}=\mathbf{0}\\ \mathbf{A}\mathbf{v}^{(2)}-r_1\mathbf{v}^{(2)}=\mathbf{v}^{(1)}\end{cases}\to \mathbf{x}^{(2)}(t)=\left(\mathbf{v}^{(1)}lnt+\mathbf{v}^{(2)}\right)t^{r_1}$$

که معادله اول قبلا در یافتن جواب اول $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ حل شده و جواب آن مشخص است. دترمینان معادله دوم نیز صفر خواهد بود(زیرا r_1 مقدار ویژه $\mathbf{A}$ است). پس برای جواب دوم مستقل, یکی از بینهایت جواب آن کافی است.

حال به سراغ دستگاه غیر همگن می‌رویم. جواب خصوصی دستگاه $t\mathbf{x}'(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{g}(t)$ را یا بایستی به روش قطری سازی و یا تغییرپارامتر بدست آورد که برای این نوع معادلات معمولا روش تغییرپارامتر(لاگرانژ) ساده‌تر است. روش ضرایب نامعین را از آنجهت کنار گذاشتیم که این روش در حالتی که ضرایب ثابت نمی‌باشد ممکن است مشکلاتی به لحاظ حدس جواب داشته باشد.

روش دوم: اما راه حل بهتر استفاده از تغییر متغیر $t=e^z$ است. چرا که عملا دستگاه را به فرم $\mathbf{x}'(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{g}(t)$ تبدیل کرده و هر آنچه تابحال در مورد این فرم دستگاه آموخته‌ایم را می‌توان برای حل آن بکار گرفت. در این روش پس از اعمال تغییر متغیر فوق خواهیم داشت:

$$t=e^z\to dt=e^z dz=tdz\to t\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\frac{d\mathbf{x}}{dz}\to t\mathbf{x}'(t)=\mathbf{x}'(z)$$

$$t\mathbf{x}'(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{g}(t)\xrightarrow{t\mathbf{x}'(t)=\mathbf{x}'(z)}\mathbf{x}'(z)=\mathbf{A}\mathbf{x}(z)+\mathbf{g}(z)$$

بنابراین دستگاه غیرهمگن اخیر را میتوان به هر یک از روشهای بخش ۶-۶ حل کرده و در نهایت با جایگذاری $t=e^z$ جواب $\mathbf{x}(t)$ را بدست آورد. در مثالهای زیر دستگاه کوشی-اویلر را با هر دو روش بررسی می‌کنیم.

توضیح: در اینجا نیز مشابه آنچه در بخش ۲-۱۰ عنوان شد به لحاظ ریاضی بهتر است در نامگذاری توابع پس از اعمال تغییر متغیر دقت شود. به این معنی که اگر تابع جواب $\mathbf{x}(t)$ می‌باشد, پس از تغییر متغیر آنرا با $\mathbf{y}(z)$ نمایش دهیم و به همین ترتیب برای ترم غیرهمگنی $\mathbf{g}(t)$. اما عنوان شد که معمولا تا جایی که مشکلی پیش نیاید می‌توان از همان اسامی استفاده کرد.

مثال ۶-۲۵ دستگاه معادله دیفرانسیل همگن زیر را حل کنید.

$$t\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} \;\;;\;\; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \to r_1 = -3 \to \mathbf{v}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \;;\; r_2 = -6 \to \mathbf{v}^{(2)} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} t^{-3} + c_2 \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix} t^{-6} \;\; \blacksquare$$

توضیح: روش دوم حل مساله, استفاده از تغییرمتغیر $t = e^z$ می‌باشد.

$$t\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} \;\;;\;\; t = e^z \to dt = e^z dz = t dz \to t\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dz} \to t\mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}'(z)$$

$$\to \mathbf{x}'(z) = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x}(z) \to \mathbf{x}(z) = c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-3z} + c_2 \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-6z}$$

$$t = e^z \to \mathbf{x}(t) = c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} t^{-3} + c_2 \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix} t^{-6} \;\; \blacksquare$$

مثال ۶-۲۶ دستگاه معادله دیفرانسیل غیرهمگن زیر را حل کنید. (دستگاه همگن آن در مثال قبل حل شده است)

$$t\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} t \;\;;\;\; \mathbf{x}_c(t) = c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} t^{-3} + c_2 \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix} t^{-6}$$

$$\xrightarrow{\times\, t^{-1}} \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -5t^{-1} & 2t^{-1} \\ t^{-1} & -4t^{-1} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \;\;;\;\; \mathbf{\Psi}(t) = \begin{bmatrix} t^{-3} & -2t^{-6} \\ t^{-3} & t^{-6} \end{bmatrix}$$

به این دلیل طرفین در t^{-1} ضرب شد, تا دستگاه به فرم $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)$ در آمده و بتوان از روشهای حل این شکل از دستگاه‌های غیر همگن که در بخش ۶-۶ بررسی شد استفاده کرد. بدیهی است با ضرب طرفین یک دستگاه در یک عبارت, جوابهای اساسی آن یعنی $\mathbf{\Psi}(t)$ تغییر نمی‌کند. برای حل دستگاه غیر همگن می‌توان از روش تغییر پارامتر و مستقیما از فرمول (1) استفاده کرد:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\left(\int \mathbf{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t)\,dt + \mathbf{c}\right) \to \mathbf{x}_p(t) = \mathbf{\Psi}(t)\int \mathbf{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t)\,dt$$

$$\mathbf{\Psi}^{-1}(t) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} t^3 & 2t^3 \\ -t^6 & t^6 \end{bmatrix} \to \mathbf{x}_p(t) = \begin{bmatrix} t^{-3} & -2t^{-6} \\ t^{-3} & t^{-6} \end{bmatrix}\left(\int \frac{1}{3}\begin{bmatrix} t^3 & 2t^3 \\ -t^6 & t^6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} dt\right)$$

$$\to \mathbf{x}_p(t) = \begin{bmatrix} t^{-3} & -2t^{-6} \\ t^{-3} & t^{-6} \end{bmatrix}\frac{t^4}{21}\begin{Bmatrix} 7 \\ -t^3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} t \;\; \blacksquare$$

توضیح: می‌توان بدون استفاده از فرمول (1) جواب مساله را به شکل گام به گام و بصورت زیر نیز بدست آورد:

$$\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t) \to \begin{bmatrix} t^{-3} & -2t^{-6} \\ t^{-3} & t^{-6} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \frac{t^4}{21}\begin{Bmatrix} 7 \\ -t^3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t) = \frac{t}{7}\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} \to \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{x}_p(t) = c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} t^{-3} + c_2 \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix} t^{-6} + \frac{1}{7}\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} t \;\blacksquare$$

مثال ۶-۲۷ دستگاه مثال قبل را با استفاده از تغییرمتغیر $t=e^z$ مجددا حل کنید.

$$t\mathbf{x}'=\begin{bmatrix}-5&2\\1&-4\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{Bmatrix}2\\1\end{Bmatrix}t\quad;\quad t=e^z\to dt=e^zdz=tdz\to t\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\frac{d\mathbf{x}}{dz}\to t\mathbf{x}'(t)=\mathbf{x}'(z)$$

$$\to\mathbf{x}'(z)=\begin{bmatrix}-5&2\\1&-4\end{bmatrix}\mathbf{x}(z)+\begin{Bmatrix}2\\1\end{Bmatrix}e^z\to\mathbf{x}_c(z)=c_1\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}e^{-3z}+c_2\begin{Bmatrix}-2\\1\end{Bmatrix}e^{-6z}$$

برای حل دستگاه $\mathbf{x}'(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{g}(t)$ می‌توان از یکی روشهای حل دستگاه‌های غیر همگن استفاده کرد. در اینجا به جهت آنکه ترم غیرهمگنی پس از تغییر متغیر $t=e^z$ به فرم نمایی $\mathbf{g}(z)=\begin{Bmatrix}2\\1\end{Bmatrix}e^z$ بدست آمده است, شاید روش ضرایب نامعین نسبت به بقیه روشها ساده‌تر باشد. مطابق آنچه در بخش ۶-۶-۲ دیده شد, از آنجا که $\alpha=1$ مقدار ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ نیست (و یا به بیان دیگر ترم e^{1z} در جوابهای پایه دیده نمی‌شود), فرم $\mathbf{x}_p(z)$ را بصورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\mathbf{x}_p(z)=\mathbf{w}^{(0)}e^{\alpha z}=\begin{Bmatrix}a_0\\b_0\end{Bmatrix}e^{1z}\xrightarrow{Sub.}\begin{Bmatrix}a_0\\b_0\end{Bmatrix}e^z=\begin{bmatrix}-5&2\\1&-4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_0\\b_0\end{Bmatrix}e^z+\begin{Bmatrix}2\\1\end{Bmatrix}e^z\to\begin{cases}6a_0-2b_0=2\\a_0-5b_0=-1\end{cases}$$

$$\to\begin{Bmatrix}a_0\\b_0\end{Bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{Bmatrix}3\\2\end{Bmatrix}\to\mathbf{x}_p(z)=\begin{Bmatrix}a_0\\b_0\end{Bmatrix}e^{1z}=\frac{1}{7}\begin{Bmatrix}3\\2\end{Bmatrix}e^z$$

$$t=e^z\to\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_c(t)+\mathbf{x}_p(t)=c_1\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}t^{-3}+c_2\begin{Bmatrix}-2\\1\end{Bmatrix}t^{-6}+\frac{1}{7}\begin{Bmatrix}3\\2\end{Bmatrix}t\quad\blacksquare$$

<u>توضیح</u>: برای یافتن جواب خصوصی از آنجا که ترم غیرهمگنی بصورت نمایی بوده و $\alpha=1$ مقدار ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ نیست, می‌توان از رابطه $(\mathbf{A}-\alpha\mathbf{I})\mathbf{w}^{(0)}=-\mathbf{u}^{(0)}$ استفاده کرد که عملا معادل همان روش بالا می‌باشد:

$$(\mathbf{A}-1\mathbf{I})\mathbf{w}^{(0)}=-\begin{Bmatrix}2\\1\end{Bmatrix}\to\begin{bmatrix}-6&2\\1&-5\end{bmatrix}\mathbf{w}^{(0)}=-\begin{Bmatrix}2\\1\end{Bmatrix}\to\mathbf{w}^{(0)}=\frac{1}{7}\begin{Bmatrix}3\\2\end{Bmatrix}\to\mathbf{x}_p(z)=\frac{1}{7}\begin{Bmatrix}3\\2\end{Bmatrix}e^z\quad\blacksquare$$

تمرینات بخش ۶-۷

<u>۱</u>- دستگاه زیر را حل کنید.

$$t\mathbf{x}'=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{Bmatrix}1-t^2\\2t\end{Bmatrix}\quad;\quad t>0$$

$$\underline{Ans}:\ \ \mathbf{x}(t)=c_1\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}t+c_2\begin{Bmatrix}1\\3\end{Bmatrix}t^{-1}-\begin{Bmatrix}\frac{t}{2}-tlnt-\frac{4}{3}t^2-2\\\frac{3t}{2}-tlnt-t^2-3\end{Bmatrix}$$

<u>۲</u>- جواب خصوصی مثال ۶-۲۷ را به روش قطری سازی نیز بدست آورید.

ضمیمه: عملیات حذفی گوس

دستگاه جبری n معادله و n مجهول زیر را در نظر می‌گیریم. این دستگاه را می‌توان به فرم ماتریسی نیز نشان داد:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{Bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{c}$$

اگر دترمینان ماتریس مخالف صفر باشد, این ماتریس دارای جواب منحصر به فرد است که می‌توان با استفاده از فرمول کرامر آنرا بدست آورد. در حالتی که بعد ماتریس 2 باشد, ممکن است بجای روش کرامر از روش ساده حذفی نیز استفاده کرد.

اما اگر این دترمینان صفر گردد, دستگاه ممکن است جواب نداشته باشد و یا بی‌شمار جواب داشته باشد که در اینحالت روش کرامر روش مناسبی نیست. هرچند در کل در ماتریسهای با بعد زیاد در هر صورت روش کرامر طولانی خواهد بود. یک روش دیگر برای حل دستگاه‌های جبری انجام عملیات حذفی گوس می‌باشد که گاهی بنام عملیات سطری گوس نیز شناخته می‌شود. این روش مزیتهای بیشتری نسبت به کرامر داشته و در تشخیص رتبه یا رَنک $(Rank)$ ماتریس و نیز استقلال و وابستگی بردارها روش مفیدتری می‌باشد.

در حالت کلی رتبه (رنک) یک ماتریس برابر R می‌باشد هرگاه بزرگترین ماتریس(یا زیر ماتریس) مربعی با دترمینان غیرصفر که از داخل ماتریس می‌توان استخراج کرد از مرتبه R باشد.

بنابراین یک راه تعیین رتبه یک ماتریس, جستجو در دترمینانِ زیر ماتریسهای آن است. مثلا اگر در یک ماتریس به بعد 3 دترمینان خودِ ماتریس برابر صفر بوده و حداقل یک زیر ماتریس به بعد 2 وجود داشته باشد که دترمینانش غیرصفر باشد, رتبه آن 2 می‌شود. راه دیگر تعیین رتبه انجام عملیات حذفی گوس (یا هر عملیات سطری مقدماتی) می‌باشد. به این معنی که چنانچه پس از عملیات سطری, R سطر غیر صفر باقی بماند, رتبه ماتریس R خواهد بود.

دترمینان ماتریس $\boldsymbol{A}$ به بعد n را می‌توان با بسط دادن آن بر حسب هر سطر دلخواه i از رابطه $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$ بدست آورد که در آن M_{ij} بیانگر دترمینان ماتریسی است که از حذف سطر i ام و ستون j امِ ماتریس $\boldsymbol{A}$ باقی می‌ماند.

با ارائه یک مثال جزئیات روش کرامر و حذفی گوس ارائه می‌شود.

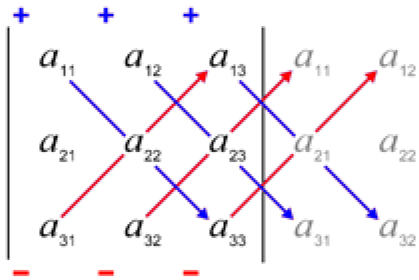
مثال دستگاه جبری زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \\ 8 \end{Bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{c}$$

حل ابتدا دترمینان ماتریس $\boldsymbol{A}$ را بدست می‌آوریم. مثلا با بسط دترمینان نسبت به سطر اول $(i = 1)$ خواهیم داشت:

$$det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{3}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} = (1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 14 + 8 = -4$$

لازم به ذکر است که برای محاسبه دترمینان ماتریس به بعد 3 می‌توان از روش ساروس نیز استفاده کرد. برای این منظور دو ستون اول ماتریس را در کنار ماتریس اولیه نوشته و به طریق زیر عمل می‌کنیم:



$$det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

$$det(\boldsymbol{A}) = \big(1 \times 1 \times 4 + 1 \times (-2) \times 1 + (-2) \times 3 \times (-1)\big) \\ - \big(1 \times 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) \times 1 + 4 \times 3 \times 1\big) = 8 - 12 = -4$$

حال از آنجا که دترمینان مخالف صفر است, مساله جواب منحصر به فرد خواهد داشت و می‌توان مساله را هم به روش کرامر و هم حذفی گوس حل کرد. در ابتدا مساله را به روش کرامر حل می‌کنیم.

در این روش برای محاسبه x_i کافی است ستون iام ماتریس $\boldsymbol{A}$ را با بردار $\boldsymbol{c}$ جایگزین کرده و دترمینان ماتریس جدید را به $det(\boldsymbol{A})$ تقسیم کنیم. در اینصورت:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{det(\boldsymbol{A})} = \frac{5}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -2 \\ 1 & 8 & 4 \end{vmatrix}}{det(\boldsymbol{A})} = \frac{5}{2} \quad ; \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix}}{det(\boldsymbol{A})} = 2$$

در ادامه مساله به روش حذفی گوس بررسی خواهد شد.

در این روش ماتریس $\boldsymbol{A}$ را به یک ماتریس بالامثلثی (پایین مثلثی و یا قطری) تبدیل می‌کنیم. روش کلی کار به این صورت است که ابتدا ماتریس افزوده را بصورت زیر با اضافه کردن بردار $\boldsymbol{c}$ به ماتریس $\boldsymbol{A}$ تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

حال بر روی ماتریس افزوده دو مرحله زیر را متوالیا و به ترتیب برای سطرهای $i = 1$ الی $i = n - 1$ دنبال می‌کنیم:

۱- با تقسیم سطر iام به a_{ii} , درایه روی قطر اصلی در این سطر برابر واحد خواهد شد.

۲- درایه‌های زیر قطر اصلی در ستون iام را با استفاده از سطر iام صفر می‌کنیم. برای این منظور می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$for \quad j > i \quad ; \quad -a_{ji}\left(\text{سطر } i\text{ام}\right) + \text{سطر } j\text{ام} \rightarrow \text{سطر } j\text{ام}$$

بنابراین برای این مثال ابتدا با $i = 1$ شروع می‌کنیم. دیده می‌شود که در سطر اول درایه a_{11} خود برابر واحد است. لذا فقط کافی است درایه‌های زیر قطر اصلی در ستون اول را با استفاده از سطر اول مطابق رابطه بالا صفر کنیم. خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[-(1)R_1+R_3 \rightarrow R_3]{-(3)R_1+R_2 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

که منظور از R_i سطر iام ماتریس است. در گام بعد $i = 2$ خواهد بود. در سطر دوم درایه a_{22} برابر -2 است. لذا با تقسیم این سطر بر -2 آنرا به واحد تبدیل کرده و سپس تنها درایه زیر قطر اصلی در ستون دوم را با استفاده از سطر دوم صفر می‌کنیم. لذا:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & 4 & 3\\ 0 & -2 & 6 & 7\end{array}\right] \xrightarrow{\frac{R_2}{-2}\rightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2 & -1.5\\ 0 & -2 & 6 & 7\end{array}\right] \xrightarrow{-(-2)R_2+R_3\rightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2 & -1.5\\ 0 & 0 & 2 & 4\end{array}\right]$$

دیده می‌شود که ماتریس به فرم بالا مثلثی تبدیل شده است و لذا این اتمام عملیات حذفی گوس است. در ادامه از سطر پایین ماتریس شروع کرده و به ترتیب با جایگذاری در سطرهای بالای آن همه مجهولات را بدست می‌آوریم.

$$2x_3 = 4 \rightarrow x_3 = 2 \quad ; \quad x_2 - 2x_3 = -1.5 \rightarrow x_2 = 2.5 \quad ; \quad x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \rightarrow x_1 = 2.5$$

توجه شود که چنانچه درایه i ام قطر اصلی برابر صفر باشد, ساده‌تر است که سطر i ام را با یکی از سطرهای زیر آن جابجا کرد. ■

حال که با روش حذفی آشنا شدیم به مثالی می‌پردایم که دترمینان ماتریس ضرایب آن صفر باشد.

مثال دستگاه جبری زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}x_1 - 2x_2 + x_3 = 1\\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3\\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 7\end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1\\ 3\\ 7\end{Bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{c}$$

حل ابتدا دترمینان ماتریس $\boldsymbol{A}$ را بدست می‌آوریم. با بسط دترمینان نسبت به سطر اول خواهیم داشت:

$$det(\boldsymbol{A}) = (1)\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = -6 + 4 + 2 = 0$$

از آنجا که دترمینان برابر صفر است, دستگاه ممکن است بی‌شمار جواب داشته باشد و یا جوابی نداشته باشد. در اینحالت بهتر است مساله به روش حذفی گوس حل شود. اگر مساله را به این روش حل کنیم, خلاصه مراحل کار بصورت زیر خواهد بود:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 4 & 7\end{array}\right] \xrightarrow[-(1)R_1+R_3\rightarrow R_3]{-(1)R_1+R_2\rightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 3 & 6\end{array}\right] \xrightarrow{-(3)R_2+R_3\rightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

اشکال قضیه در این است که روی قطر اصلی عدد صفر دیده می‌شود (چرا که دترمینان ماتریس برابر صفر بود). از سطر سوم نتیجه مناسبی بدست نمی‌آید, چرا که همواره برقرار بوده و به عبارتی یک رابطه اضافی است (به همین دلیل هم دترمینان صفر شده است). در این حالت می‌گوییم رتبه (رنک) ماتریس برابر 2 میباشد, زیرا دو سطر غیر صفر باقی مانده است.

از سطر دوم خواهیم داشت $x_2 + x_3 = 2$. اگر در این رابطه مثلا x_3 را یک عدد دلخواه انتخاب کنیم, می‌توان x_2 را بر حسب آن بدست آورد و در نهایت با جایگذاری در سطر اول x_1 را نیز محاسبه کرد. لذا اگر فرض کنیم $x_3 = k$ خواهیم داشت:

$$x_3 = k \quad ; \quad x_2 + x_3 = 2 \rightarrow x_2 = 2 - k \quad ; \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \rightarrow x_1 = 5 - 3k$$

بنابراین مساله دارای بی‌شمار جواب خواهد بود. ■

توضیح ۱: راه دیگر تعیین رتبه یک ماتریس, جستجو در دترمینانِ زیر ماتریسهای آن است. بعنوان نمونه در مثال بالا دترمینان ماتریس $\mathbf{A}$ برابر صفر است و یک زیر ماتریس 2 تایی $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ با دترمینان غیر صفر وجود دارد, پس رتبه آن 2 خواهد بود.

<u>توضیح ۲</u>: می‌توانستیم بجای انتخاب $x_3 = k$, انتخاب دیگری را نیز انجام دهیم. به عبارتی از رابطه $x_2 + x_3 = 2$ فرض کنیم x_2 یک عدد دلخواه باشد. در اینصورت اگر فرض کنیم $x_2 = k'$ خواهیم داشت:

$$x_2 = k' \quad ; \quad x_2 + x_3 = 2 \rightarrow x_3 = 2 - k' \quad ; \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \rightarrow x_1 = 3k' - 1$$

اگرچه شکل ظاهری آن با آنچه در بالا بدست آمد متفاوت است, اما معادلند. چرا که از مساوی قرار دادن نتایج با یکدیگر به این نتیجه می‌رسیم که با انتخاب $k' = 2 - k$ هر دو جواب یکی می‌باشند.

<u>توضیح ۳</u>: فرض کنید در مثال بالا ماتریس نهایی پس از اعمال عملیات حذفی گوس بصورت زیر بدست آمده باشد:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

در این‌حالت دو سطر پایین همواره برقرار بوده و لذا روابط اضافی‌اند. یعنی تنها رابطه مفید $x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$ می‌باشد. بدیهی است در این‌حالت بایستی دو متغیر را بصورت مستقل انتخاب کرد تا سومی بر حسب آن بدست آید. به عنوان نمونه:

$$x_3 = k_1 \quad ; \quad x_2 = k_2 \rightarrow x_1 = 1 + 2x_2 - x_3 = 1 + 2k_2 - k_1$$

بنابراین در این حالت رتبه (رنک) ماتریس برابر 1 است, چرا که صرفا یک سطر غیر صفر باقی مانده است.

<u>توضیح ۴</u>: فرض کنید بخواهیم همین مساله را به روش کرامر حل کنیم. ممکن است در ابتدا تصور شود که امکان‌پذیر نیست, چرا که دترمینان ماتریس (که در مخرج کسر قرار می‌گیرد) برابر صفر است. برای این منظور خواهیم داشت:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{det(\boldsymbol{A})} = \frac{0}{0} \quad ; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -2 \\ 1 & 8 & 4 \end{vmatrix}}{det(\boldsymbol{A})} = \frac{0}{0} \quad ; \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix}}{det(\boldsymbol{A})} = \frac{0}{0}$$

به این معنی که اگرچه روابط بالا بیانگر دلخواه بودن x_1 , x_2 و x_3 می‌باشند, اما دیده شد که این دلخواه بودن به معنی این نیست که هر کدام می‌توانند مستقلا هر مقداری را انتخاب کنند. در واقع در حالتی که دترمینان ضرایب صفر باشد, عملیات حذفی گوس دقیقا مشخص می‌کند که تعداد متغیرهای مستقل چه اندازه است و به عبارتی رتبه ماتریس مشخص می‌شود. در حالی که در استفاده از روش کرامر این موارد دیده نمی‌شود. به عبارتی روش حذفی گوس در کل اطلاعات مفیدتری از ماتریس ارائه می‌دهد.

<u>توضیح ۵</u>: عنوان شد که اگر دترمینان صفر گردد, دستگاه ممکن است بی‌شمار جواب داشته باشد و یا جواب نداشته باشد. در مثال بالا حالتی بررسی شد که در آن مساله دارای بی‌شمار جواب است. حال فرض کنید ماتریس نهایی پس از اعمال عملیات حذفی گوس بصورت زیر بدست آمده باشد:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

در اینجا نیز بر روی قطر اصلی صفر دیده می‌شود. اما تفاوت آن با مساله بالا این است که نمی‌توان x_3 را بدست آورد, چرا که از سطر سوم رابطه $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3$ بدست می‌آید که نادرست است. بنابراین مساله جواب نخواهد داشت. ■