پردیس دانشکده‌های فنی
دانشگاه تهران

ریاضی عمومی ۱

حسین رحامی
دانشکده علوم مهندسی

بنام خدا

ریاضی ۱ , تعداد واحد : ۳ واحد

مراجع:

- حساب دیفرانسیل و انتگرال, تالیف: جیمز استوارت , ترجمه: علی‌اکبر عالم زاده, انتشارات نیاز دانش (ویرایش هفتم)
- حساب دیفرانسیل و انتگرال (جلد ۱) , تالیف: تام مایک آپوستل , ترجمه: علیرضا ذکائی, مهدی رضایی دلفی و فرخ فیروزان, انتشارات مرکز نشر دانشگاهی
- حساب دیفرانسیل و انتگرال, تالیف: باباخانی, حشمتی و فیض دیزجی, انتشارات دانشگاه تهران
- حساب دیفرانسیل و انتگرال (جلد ۱), تالیف: جورج توماس و راس فینی, ترجمه: مهدی بهزاد، سیامک کاظمی و علی کافی, انتشارات مرکز نشر دانشگاهی

مراجع زبان اصلی بهمراه چند مرجع دیگر در آدرس ftp://172.16.102.100 قرار داده شده است.

1. Apostol   2. Stewart_1   3. Maron   4. Schaum's Outline   5. 3000 Solved Problems

سرفصل مطالب:

۱- مروری بر مفاهیم حد, پیوستگی و مشتق

۲- توابع متعالی (مثلثاتی, نمایی, هیپربولیک و معکوس آنها)

۳- انتگرال معین و نامعین

۴- روشهای انتگرال گیری

۵- کاربردهای انتگرال

۶- مختصات قطبی

۷- اعداد مختلط

۸- چندجمله‌ای تیلور و تقریب توابع

۹- انتگرال غیرعادی

۱۰- دنباله‌ها, سریهای عددی و توانی

۱۱- سری تیلور

ارزشیابی:

- میان ترم: تا پایان فصل سوم, پنجشنبه ۲۰ آبان ۱۴۰۰, ساعت ۸:۳۰
- پایان ترم: یکشنبه ۲۶ دی ۱۴۰۰ , ساعت ۸:۳۰
- کوئیز و تمرینات

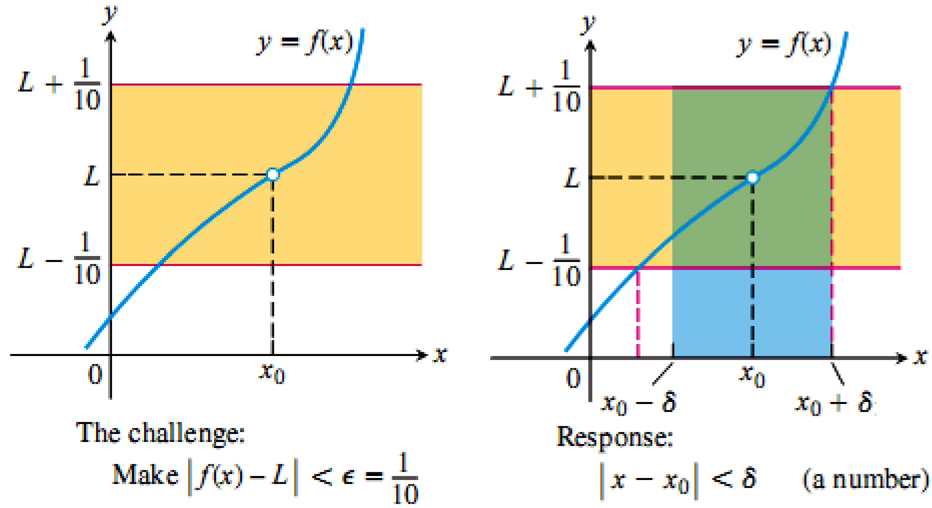
۱- مروری بر مفاهیم حد, پیوستگی و مشتق

۱-۱- تعریف حد با استفاده از مفهوم $\varepsilon - \delta$ (بخش ۱-۷ کتاب)

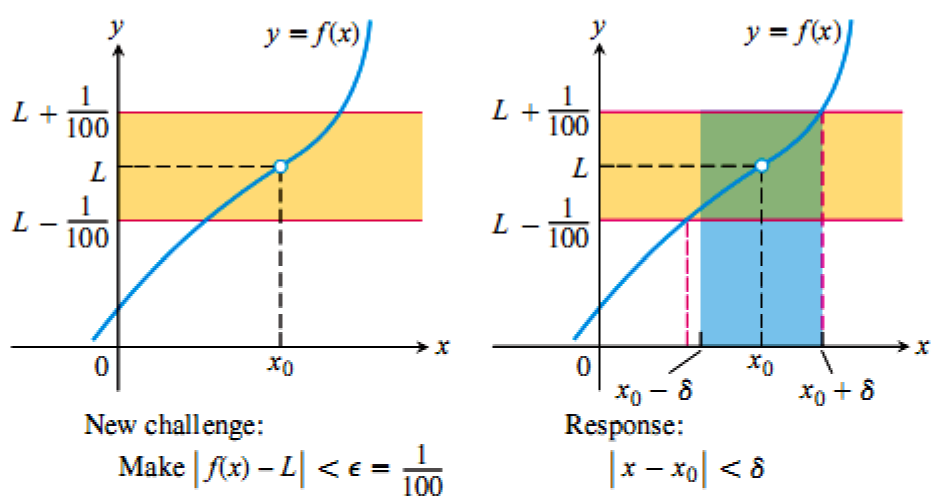
بنا به تعریف می‌دانیم یک همسایگی δ حول نقطه x_0 شامل مجموعه نقاطی است که در بازه باز $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ قرار داشته باشد. با توجه به تعریف هندسی و شهودی حد که قبلا دیده شده است , میتوان $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ را اینگونه توجیه کرد که برای هر همسایگی دلخواه از L بر روی محور yها (مانند ε) , بتوان یک همسایگی از x_0 بر روی محور xها (مانند δ) یافت که اگر x از این همسایگی انتخاب شود, $f(x)$ در همسایگی ε از L قرار گیرد.

بعنوان یک مثال, برای تابع زیر سوال این است که چه همسایگی از x_0 انتخاب کنیم تا $f(x)$ در همسایگی مشخصی (به عنوان مثال $\varepsilon = 0.1$) از L قرار گیرد؟ به عبارتی δ چه مقدار باشد تا:

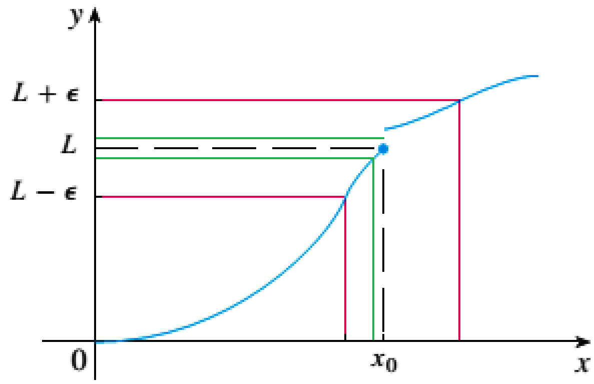
$$|x-x_0| < \delta \to |f(x)-L| < 0.1$$



حال اگر بخواهیم $f(x)$ در یک همسایگی نزدیکتر به L (مثلا $\varepsilon = 0.01$) قرار بگیرد, δ را چه مقدار انتخاب کنیم؟



اگر قرار است حد وجود داشته باشد, بایستی بتوان برای هر ε انتخابی(هرچند کوچک), حداقل یک δ متناظر آن بدست آورد. مثلا در شکل زیر بدیهی است تابع دارای حد L نمی‌باشد, چرا که اگر ε از یک مقداری کوچکتر انتخاب شود, نمی‌توان یک همسایگی از x_0 یعنی بازه $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ بدست آورد که مقدار تابع به ازای مقادیر آن همسایگی در $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ قرار بگیرد.



لذا تعریف دقیق حد را به اینصورت مطرح می‌کنیم:

فرض کنیم تابع $f(x)$ بر بازه بازی شامل نقطه x_0 (به جز احتمالا در خودِ x_0) تعریف شده باشد. در اینصورت می‌گوییم $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ است هرگاه:

$$\boxed{\forall\ \varepsilon > 0\ ;\ \exists\ \delta > 0\ ;\ 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon}$$

یعنی برای هر $\varepsilon > 0$ بتوان حداقل یک $\delta > 0$ بدست آورد تا از شرط $|x - x_0| < \delta$ نتیجه $|f(x) - L| < \varepsilon$ بدست آید.

توجه شود که نوشتن رابطه $0 < |x - x_0|$ به این معنی است که x نمی‌تواند x_0 انتخاب شود. همچنین دقت شود که در اینجا هدف محاسبه حد نیست. به عبارتی حد را با یکی از روشهایی که می‌دانیم محاسبه کرده‌ایم و هدف آن است که درستی حد را بررسی کنیم. با یک مثال ساده روش کار را خواهیم دید.

فرض کنید برای تابع $f(x) = 3x - 4$ میخواهیم ثابت کنیم $\lim_{x\to 1} f(x)$ برابر -1 است. این سوال را مطرح میکنیم که x چقدر به 1 نزدیک باشد تا فاصله $f(x)$ از -1 کمتر از هر مقدار دلخواه ε باشد. فرض کنید این مقدار دلخواه مثلا $\varepsilon = 0.1$ انتخاب شود. ادعا می‌کنیم اگر فاصله x تا 1 از $\delta = \frac{0.1}{3}$ کمتر انتخاب شود, فاصله $f(x)$ تا -1 از عدد انتخاب شده $\varepsilon = 0.1$ کمتر خواهد بود. زیرا:

$$|x - 1| < \frac{0.1}{3} \to |f(x) - (-1)| = |3x - 3| = 3|x - 1| < 3\frac{0.1}{3} = 0.1$$

البته بدیهی است که اگر $\delta \le \frac{0.1}{3}$ نیز انتخاب شود باز هم فاصله $f(x)$ تا -1 از $\varepsilon = 0.1$ کمتر است. اما از آنجا که در تعریفِ ارائه شده, فقط نیاز به یک δ میباشد همان $\delta = \frac{0.1}{3}$ کافی است.

وقتی می‌توانیم ادعا کنیم این حد برابر -1 است, که برای هر مقدار دلخواه ε بتوان جوابی برای این سوال بدست آورد. مثلا برای $\varepsilon = 0.06$ ادعا میکنیم اگر فاصله x از 1 از $\delta = 0.02$ کمتر انتخاب شود, در اینصورت فاصله $f(x)$ از -1 از عدد انتخاب شده $\varepsilon = 0.06$ کمتر خواهد بود. زیرا:

$$|x - 1| < 0.02 \to |f(x) - (-1)| = |3x - 3| = 3|x - 1| < 3 \times 0.02 = 0.06$$

بدیهی است قرار نیست برای هر ε انتخابی این کار را به همین شیوه تکرار کرد. چون ε داده شده و هدف محاسبه δ میباشد, پس به طریق معکوس, از حکم شروع میکنیم تا δی مناسبی برای هر ε انتخابی بدست آوریم. چون این حرکت از راست به چپ شکل گرفته است, لذا در نهایت بایستی کنترل کرد که با این δی بدست آمده میتوان از چپ به راست رسید.

بعنوان نمونه در مثال بالا می‌خواهیم $|f(x)-L|<\varepsilon$ باشد. یعنی $|3x-3|<\varepsilon$ و یا به عبارتی $|x-1|<\frac{\varepsilon}{3}$. پس اگر $\delta \le \frac{\varepsilon}{3}$ انتخاب شود, آنگاه:

$$0<|x-1|<\delta \le \frac{\varepsilon}{3} \rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{3} \rightarrow \underbrace{|3x-3|}_{|f(x)-L|}<\varepsilon \qquad \boxed{\surd}$$

در واقع کنترل کردیم که با این انتخابِ δ میتوان از سمت چپ به راست رسید. مطابق آنچه در بالا دیده شد, به نظر می‌رسد بایستی در ساده سازی عبارت $|f(x)-L|$ به دنبال ایجاد $|x-x_0|$ باشیم تا بتوان δی مناسب را یافت.

آنچه در بالا عنوان شد در مسائل مهندسی نیز قابل استفاده میباشد. در اکثر مسائل مهندسی معمولا یک ورودی به سیستم وجود داشته و بدنبال یک خروجی می‌گردیم. مثلا فرض کنید در یک مدار الکتریکی ورودی اختلاف پتانسیل بوده و آنچه به دنبال آن می‌گردیم نیز مثلا جریان در یک شاخه از مدار باشد. سوال می‌تواند اینگونه مطرح شود که مثلا ورودی (اختلاف پتانسیل) در چه بازه‌ای تغییر کند (δ) تا خروجی (جریان) در یک محدوده مشخصی که مورد نظر ما می‌باشد (ε) قرار بگیرد.

مثال ۱-۱ با استفاده از تعریف حد نشان دهید $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$

حل بایستی نشان دهیم برای هر $\varepsilon>0$ میتوان حداقل یک $\delta>0$ بدست آورد تا استلزام زیر برقرار باشد:

$$\forall\, \varepsilon>0\ ;\ \exists\, \delta>0\ ;\ 0<|x-2|<\delta \rightarrow |x^2-4|<\varepsilon$$

از سمت راست شروع کرده و به دنبال ایجاد $|x-2|$ خواهیم بود.

$$|x^2-4|<\varepsilon \rightarrow |x-2||x+2|<\varepsilon$$

توقع داشتیم مشابه قبل صرفا به $|x-2|$ برسیم تا مساله حل شود. اما اکنون عامل مزاحم $|x+2|$ نیز وجود دارد که بایستی به طریقی آنرا حذف کرد. اگر بتوانم یک کران بالا برای عامل مزاحم مانند M پیدا کنیم, در اینصورت:

$$|x-2||x+2|<M|x-2|$$

که شبیه مساله قبل شد, یعنی اگر ε بگونه‌ای باشد که $M|x-2|<\varepsilon$ گردد, در نتیجه از دو نامساوی اخیر $|x-2||x+2|<\varepsilon$ خواهد شد که همان حکم است.

برای این منظور از آنجا که قرار است x به 2 نزدیک شود, فرض می‌کنیم x در یک همسایگی به شعاع مثلا $r=1$ از 2 قرار دارد(بعدا خواهیم دید انتخاب عدد r تاثیری در حل ندارد). پس:

$$r=1 \rightarrow |x-2|<1 \rightarrow 1<x<3 \rightarrow 3<x+2<5 \rightarrow |x+2|<5$$

حال که یک کران بالا برای عامل مزاحم بدست آوردیم, لذا $|x-2|<\frac{\varepsilon}{5}$ انتخاب می‌شود. از طرفی یک فرض اضافه نیز, خود, انتخاب کرده بودیم که $|x-2|<1$ باشد. بنابراین اگر قرار است هر دو شرط اقناع شود بایستی $\delta \le min\left(\frac{\varepsilon}{5},1\right)$ انتخاب شود. در نهایت کنترل می‌کنیم که با این انتخاب می‌توان از سمت چپ(فرض) به سمت راست(حکم) رسید, چرا که:

$$\underline{Ch.}\quad \begin{cases} if\ \ 1>\frac{\varepsilon}{5} \ \ : \ |x-2|<\delta \le min\left(\frac{\varepsilon}{5},1\right)=\frac{\varepsilon}{5} \rightarrow |x-2||x+2|<\frac{\varepsilon}{5}5=\varepsilon & \boxed{\surd} \\ if\ \ 1\le\frac{\varepsilon}{5} \ \ : \ |x-2|<\delta \le min\left(\frac{\varepsilon}{5},1\right)=1 \rightarrow |x-2||x+2|<1\times 5 \le \varepsilon & \boxed{\surd} \end{cases}$$

هرچند معمولا وقتی $\delta \le min\left(\frac{\varepsilon}{5},1\right)$ بدست آمد کار تمام شده است و اغلب کنترل آخر را انجام نمی‌دهیم. ■

توضیح ۱: بدیهی است اگر شعاع همسایگی r را عدد دیگری انتخاب کنیم δی متفاوتی بدست میآید. مثلا:

$$r = 0.4 \to |x-2| < 0.4 \to 1.6 < x < 2.4 \to 3.6 < x+2 < 4.4 \to |x+2| < \underbrace{4.4}_{M}$$

$$\to \delta \le min(\varepsilon/4.4\ , 0.4)$$

توضیح ۲: به نظر می‌رسد اگر بتوان از سمت راست حدود x را بدست آورد, نیازی به انتخاب همسایگی دلخواه r نخواهیم داشت. مثلا در مثال بالا:

$$|x^2-4| < \varepsilon \to \sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon} \to \sqrt{4-\varepsilon}-2 < x-2 < \sqrt{4+\varepsilon}-2$$

$$\to |x-2| < \underbrace{min\left(2-\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon}-2\right)}_{A} \to \delta \le A$$

بدیهی است این کار همواره امکان پذیر نبوده و انتخاب یک همسایگی دلخواهِ r , در اغلب موارد روش ساده‌تری است. ■

خلاصه: از سمت راست یعنی $|f(x)-L|$ شروع کرده و عبارت $|x-x_0|$ را در آن ایجاد میکنیم. در حالت کلی به $|x-x_0||g(x)| < \varepsilon$ میرسیم. دو حالت وجود دارد:

الف- اگر $|g(x)|$ یک عدد ثابت M باشد, کافی است $\delta \le \frac{\varepsilon}{M}$ انتخاب شود.

ب- اگر $|g(x)|$ تابعی از x باشد, ابتدا یک همسایگی دلخواه r به مرکز x_0 انتخاب میکنیم, به این معنی که $|x-x_0| < r$. سپس با این انتخاب, یک کران بالا برای $|g(x)|$ بدست آورده آنرا M مینامیم. در اینصورت کافی است $\delta \le min\left(\frac{\varepsilon}{M}, r\right)$ انتخاب شود تا بتوان از نامساوی چپ, به نامساوی راست رسید.

چند نکته:

۱- برای آنکه نشان دهیم تابعی در x_0 دارای حدی برابر L نیست, کافی است نشان دهیم حداقل یک ε_0 وجود دارد بگونه‌ای که:

$$\boxed{\exists\ \varepsilon_0 > 0\ ;\ \forall\ \delta > 0\ ;\ 0 < |x-x_0| < \delta \to |f(x)-L| \ge \varepsilon_0}$$

به عبارتی نشان دهیم حکم $|f(x)-L| \ge \varepsilon$ نمی‌تواند برای $\forall\ \varepsilon$ برقرار باشد. در مثال ۱-۵ مثالی در این ارتباط خواهیم دید.

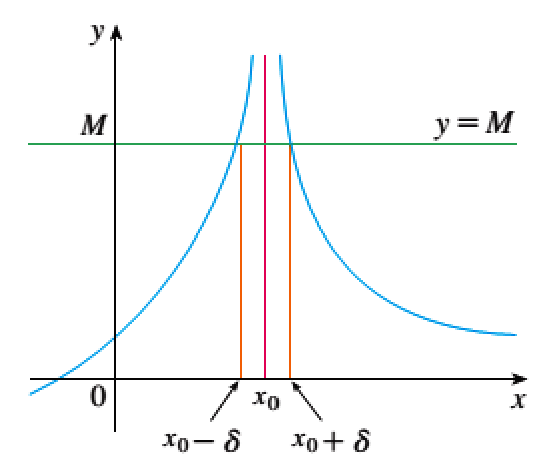
۲- درست مشابه آنچه در بالا دیده شد, چنانچه بخواهیم صرفا درستی حد چپ را بررسی کنیم, تعریف حد بصورت زیر خواهد بود:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \quad ; \quad \boxed{\forall\ \varepsilon > 0\ ;\ \exists\ \delta > 0\ ;\ x_0-\delta < x < x_0 \to |f(x)-L| < \varepsilon}$$

و به همین ترتیب می‌توان برای حد راست نیز تعریف مشابه‌ای را بیان کرد.

۳- حال می‌خواهیم تعریف ریاضی حد را برای درستی حدود نامتناهی بیان کنیم. به عبارتی هدف آن است که نشان دهیم $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ میباشد. برای این منظور می‌توان گفت بایستی بتوان برای هر M (هر چقدر بزرگ), حداقل یک δ بر روی محور x بگونه‌ای بدست آورد که مقدار تابع به ازای x های داخل بازه $|x-x_0| < \delta$ از M داده شده بزرگتر باشد. به عبارتی:

$$\forall\ M > 0\ ;\ \exists\ \delta > 0\ ;\ 0 < |x-x_0| < \delta \to f(x) > M$$



مثال ۱-۲ درستی حدود زیر را با استفاده از تعریف حد بررسی نمایید.

$$1)\quad \lim_{x\to 1}\frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}=-8 \quad ; \quad x\neq 1 \to f(x)=2x^3-4x^2-3x-3$$

$$\forall\, \varepsilon>0\ ;\ \exists\, \delta>0\ ;\ 0<|x-1|<\delta \to |f(x)-(-8)|<\varepsilon$$

$$|2x^3-4x^2-3x-3-(-8)|=|x-1|\underbrace{|2x^2-2x-5|}_{|g(x)|}<\varepsilon \quad ; \quad Let\ :\ r=1$$

$$|x-1|<\underbrace{1}_{r}\to 0<x<2\to \underbrace{|2x^2-2x-5|}_{|g(x)|}<|2x^2|+|2x|+5<\underbrace{8+4+5}_{M=17}$$

$$\delta\le min\left(\frac{\varepsilon}{M},r\right)\to \delta\le min\left(\frac{\varepsilon}{17},1\right)$$

<u>توضیح</u>: البته در این مثال میتوان کران بالای بهتری برای $|g(x)|$ بدست آورد. به سادگی داریم $|2x^2-2x-5|\le\underbrace{5.5}_{M}$.
اما عملا از آنجا که هدف صرفا محاسبه یک کران بالا است, نیازی به محاسبه <u>بهترین</u> کران بالا نخواهیم داشت. ■

$$2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\frac{1}{2} \quad ; \quad \forall\, \varepsilon>0\ ;\ \exists\, \delta>0\ ;\ 0<|x-0|<\delta \to |f(x)-0.5|<\varepsilon$$

$$x\neq 0\ ;\ \left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon\to |x|\underbrace{\left|\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}\right|}_{|g(x)|}<\varepsilon$$

$$Let\ :\ r=1\to |x-0|<\underbrace{1}_{r}\to -1<x<1\to 1<\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2<3+2\sqrt{2}\to |g(x)|<\underbrace{0.5}_{M}$$

$$\delta\le min\left(\frac{\varepsilon}{M},r\right)\to \delta\le min(2\varepsilon,1)\ ■$$

$$3)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x-1}=8 \quad ; \quad \forall\, \varepsilon>0\ ;\ \exists\, \delta>0\ ;\ 0<|x-2|<\delta \to |f(x)-8|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{x^2+4}{x-1}-8\right|=\left|\frac{(x-2)(x-6)}{x-1}\right|=|x-2|\left|\frac{x-6}{x-1}\right|=|x-2||g(x)|<\varepsilon$$

بایستی یک کران بالا برای $|g(x)|$ بدست آورد. به راحتی میتوان کنترل کرد که تابع $g(x)=\frac{x-6}{x-1}$ تابعی صعودی است و لذا حداکثر و حداقل آن در دو سمت بازه رخ می‌دهد. اگر مشابه قبل $r=1$ انتخاب شود, به $1<x<3$ خواهیم رسید و لذا کران بالای $|g(x)|$ بینهایت خواهد شد, چرا که مخرج کسرِ $g(x)$ در سمت چپ بازه یعنی $x=1$ به صفر میل می‌کند. لذا بایستی r را کمتر انتخاب کرد تا شامل این نقطه نشود. مثلا با انتخاب $r=\frac{1}{2}$ خواهیم داشت:

$$|x-2|<\frac{1}{2}\to\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}\to\begin{cases}x=\frac{3}{2}\to\frac{x-6}{x-1}=-9\\ x=\frac{5}{2}\to\frac{x-6}{x-1}=-\frac{7}{3}\end{cases}\to\left|\frac{x-6}{x-1}\right|=|g(x)|<\underbrace{9}_{M}$$

$$\delta\le min\left(\frac{\varepsilon}{M},r\right)\to \delta\le min\left(\frac{\varepsilon}{9},\frac{1}{2}\right)\ ■$$

$$4)\quad \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^4}=\infty$$

در این‌حالت تعریف ریاضی حد بصورت زیر خواهد بود:

$$\forall\, M>0\ ;\ \exists\,\delta>0\,;\ 0<|x-1|<\delta \to f(x)>M$$

$$\frac{1}{(x-1)^4}>M \to (x-1)^4<\frac{1}{M}\to |x-1|<\frac{1}{\sqrt[4]{M}}\to \delta\le\frac{1}{\sqrt[4]{M}}\ \blacksquare$$

توضیح: با استفاده از مفهوم $\varepsilon-\delta$,کلیه قضایای حد ثابت می‌شوند. از جمله اینکه حد مجموع دو تابع برابر است با مجموع حدود و .... به این ترتیب از اینجا به بعد صرفا از قضایا برای محاسبه حدود استفاده خواهد شد. ■

مثال ۱-۳ با استفاده از قضایای حد, حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$A=\lim_{x\to\infty}x^2\sin^2\left(\pi\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\sin^2(\theta)=\sin^2(\theta-\pi)\to \sin^2\left(\pi\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\right)=\sin^2\left(\pi\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}-\pi\right)=\sin^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right)$$

$$A=\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right)^2=\frac{\pi^2}{4}$$

توجه شود در قسمت آخر از هم‌ارزی $\sin x\sim x$ در مجاور $x=0$ استفاده کرده‌ایم که از اطلاعات دبیرستانی است. معنی دقیق هم‌ارزی را در فصل ۸ خواهیم دید. ■

تمرینات بخش ۱-۱ تمرینات ۲۰ , ۲۸, ۴۲ و ۴۳ از بخش ۱-۷ کتاب استوارت (ویرایش ۷)

* برای کلیه تمرینهای ارائه شده در این جزوه صرفا تمرینهایی که زیر آنها خط کشیده شده است را تحویل دهید.

۱- درستی حدود زیر را با استفاده از تعریف حد بررسی نمایید.

$$1)\quad \lim_{x\to 1}\frac{2x}{x^2+1}=1\quad ;\quad \underline{Ans}:\ \delta\le\sqrt{\varepsilon}$$

$$2)\quad \lim_{x\to 7}\frac{8}{x-3}=2\quad ;\quad \underline{Ans}:\ \delta\le\min\left(\frac{3\varepsilon}{2},1\right)$$

۱-۲- پیوستگی (بخش ۱-۸ کتاب)

اگر تابعی در یک نقطه دارای حد بوده و حد تابع با مقدار تابع در آن نقطه برابر باشد, میگوییم تابع در آن نقطه پیوسته است. به همین ترتیب پیوستگی در یک بازه نیز معادل با پیوسته بودن در تمام نقاط بازه خواهد بود.

در اینجا با ارائه چند مثال این مفهوم بررسی می‌شود.

مثال ۱-۴ نشان دهید اگر تابع f در $x=0$ پیوسته بوده و شرط زیر برقرار باشد, آنگاه f در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$\forall\, a,b\in\mathbb{R}\ ;\ f(a+b)=f(a)f(b)$$

حل نشان میدهیم با در نظر گرفتن شرط داده شده تابع در هر نقطه دلخواه $x_0\in\mathbb{R}$ پیوسته میباشد.

$$x_0\in\mathbb{R}\to \lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{t\to 0}f(x_0+t)=f(x_0)\lim_{t\to 0}f(t)=f(x_0)f(0)=f(x_0+0)=f(x_0)\ \blacksquare$$

توضیح: ممکن است در انتهای حل مساله بخواهیم با محاسبه $f(0)$ به نتیجه برسیم. با انتخاب $a=b=0$ خواهیم داشت:

$$f(a+b)=f(a)f(b) \to f(0)=f^2(0) \to f(0)=0,1$$

$$if\ f(0)=0\ ;\quad \forall x: f(x+0)=f(x)f(0)=0 \to f(x)=0$$

لذا به تابع ثابت $f(x)=0$ خواهیم رسید که بدیهی است همه جا پیوسته است. اگر $f(0)=1$ نیز $f(x_0)f(0)=f(x_0)$ و بنابراین نتیجه مورد نظر بدست می‌آید. ■

مثال ۱–۵ نشان دهید تابع زیر که به نام تابع دیریکله شناخته میشود, در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست.

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

حل نقطه دلخواهی مانند x_0 را در نظر گرفته و با توجه به تعریف ریاضی حد, نشان میدهیم استلزام به ازای هر ε برقرار نمی‌باشد.

$$x_0\in\mathbb{R} \to \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\ \ ;\ \ \forall\,\varepsilon>0\ ;\ \exists\,\delta>0\ ;\ 0<|x-x_0|<\delta \to |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

دقت شود از آنجا که پیوستگی مورد نظر است, در حکم بجای $|f(x)-L|$ عبارت $|f(x)-f(x_0)|$ بکار رفته است.

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \to \begin{cases}x\in\mathbb{Q} \to |1-f(x_0)|<\varepsilon_1\\ x\notin\mathbb{Q} \to |0-f(x_0)|<\varepsilon_2\end{cases}$$

حال نشان میدهیم این دو رابطه به ازای هر ε_1 و ε_2 نمیتواند درست باشد. از جمع طرفین رابطه بالا با یکدیگر و استفاده از نامساوی $|a-b|\le|a|+|b|$ به نامساوی $1<\varepsilon_1+\varepsilon_2$ خواهیم رسید, که مثلا برای $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0.25$ نادرست است.

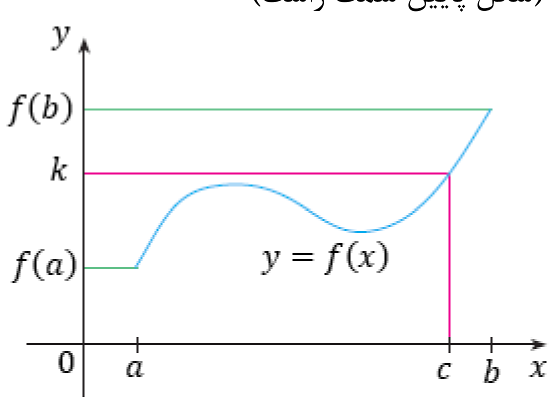
$$\underbrace{|1-f(x_0)+f(x_0)|}_{1} \le |1-f(x_0)|+|-f(x_0)|<\varepsilon_1+\varepsilon_2 \to 1<\varepsilon_1+\varepsilon_2 \quad ■$$

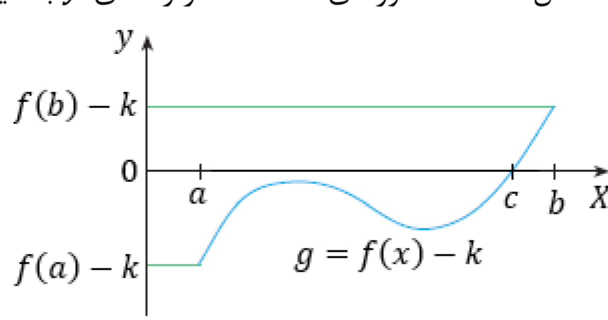
چند قضیه در توابع پیوسته

قضیه بولزانو: اگر تابع f در هر نقطه بازه $[a,b]$ پیوسته بوده و $f(a)f(b)\le 0$ باشد, حداقل یک نقطه‌c در بازه مورد نظر وجود دارد که $f(c)=0$. برای اثبات این قضیه بایستی ابتدا قضیه "محفوظ ماندن علامت در توابع پیوسته" با استفاده از روش $\varepsilon-\delta$ ثابت شود که به جهت پیچیدگی از آن صرفنظر می‌شود.

قضیه مقدار میانی: اگر تابع f در هر نقطه بازه $[a,b]$ پیوسته بوده و$f(a)\neq f(b)$باشد, حداقل یک نقطه‌c در بازه مورد نظر وجود دارد که $f(c)=k$ که k بین$f(a)$ و$f(b)$ میباشد. (شکل پایین سمت چپ)

در واقع تعمیم قضیه بولزانو میباشد. برای اثبات کافی است تابع $g(x)=f(x)-k$ را در نظر بگیریم. بدیهی است $g(a)g(b)\le 0$, لذا بر طبق بولزانو یک نقطه‌c در بازه مورد نظر وجود دارد که $g(c)=0$. به عبارت دیگر, این کار درست معادل انتقال دستگاه محورهای مختصات در راستای y به میزان k میباشد. (شکل پایین سمت راست)





$g(a)g(b)\le 0$

یک نکته: در اینجا به یک موضوع مهم اشاره می‌شود. توجه به رابطه پیوستگی بیانگر آن است که چنانچه تابعی در یک نقطه پیوسته باشد, می‌توان ترتیب حد و تابع را جابجا کرد, چرا که:

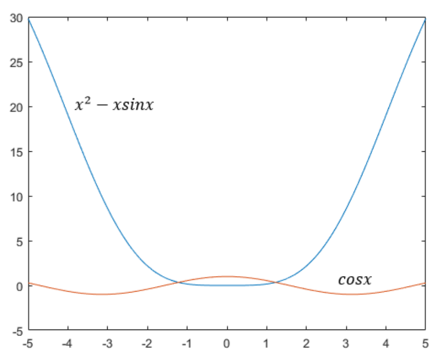
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = f(x_0)$$

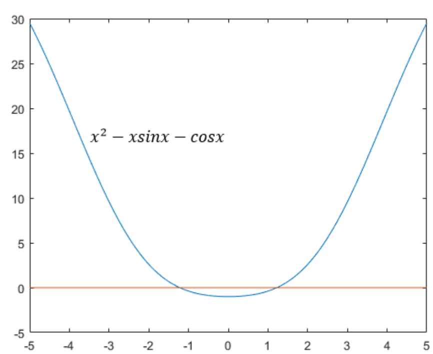
بنابراین برای آنکه بتوان این ترتیب را در یک بازه خاص تغییر داد, بایستی تابع در کل نقاط آن بازه پیوسته باشد.

مثال ۱-۶ تعداد ریشه‌های معادله $x^2 - xsinx = cosx$ را بیابید.

حل ابتدا تابع کمکی $f(x) = x^2 - xsinx - cosx$ را تعریف می‌کنیم. اولا بدیهی است این تابع پیوسته می‌باشد. از آنجا که $f(0)f(\pi) < 0$ لذا قطعا $f(x)$ در $[0,\pi]$ یک ریشه دارد. حال چون برای $x > 0$ داریم $f'(x) = x(2 - cosx) > 0$ لذا تابع در این بازه صعودی بوده و لذا ریشه مثبت دیگری نداریم. به همین ترتیب از آنجا که $f(-\pi)f(0) < 0$ لذا قطعا $f(x)$ در $[-\pi,0]$ یک ریشه دارد. حال چون برای $x < 0$ داریم $f'(x) = x(2 - cosx) < 0$ لذا تابع در این بازه نزولی بوده و لذا ریشه منفیِ دیگری نداریم. بنابراین دقیقا دو ریشه خواهیم داشت. ■

توضیح ۱: در شکل سمت چپ منحنی‌های $x^2 - xsinx$ و $cosx$ و در شکل سمت راست منحنی $x^2 - xsinx - cosx$ ترسیم شده است. با توجه به این اشکال می‌توان مشاهده کرد که تعداد ریشه‌ها دقیقا برابر دو می‌باشد.



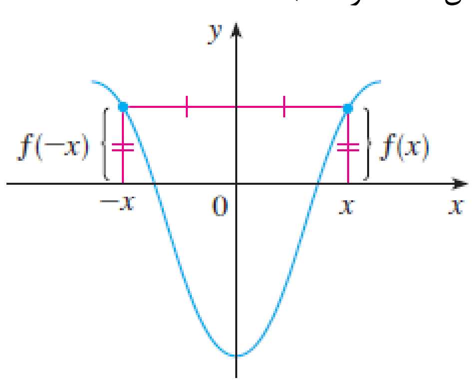


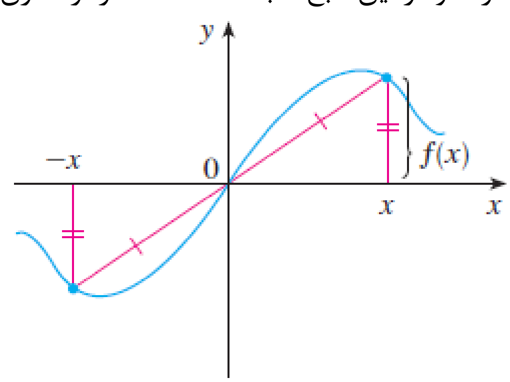
توضیح ۲: با ارائه یک تعریف میتوان مساله را به طریق دیگری نیز بررسی کرد.

چنانچه تابع $f(x)$ برای هر x در شرط $f(-x) = f(x)$ صدق کند, آنرا تابعی زوج مینامیم. مانند توابع x^2 , $cos\,x$, $f(x) = 5$ و ... . بدیهی است در نمودار این تابع محور y ها محور تقارن خواهد بود. (شکل سمت چپ) . همچنین اگر تابع برای هر x در شرط $f(-x) = -f(x)$ صدق کند, آنرا تابعی فرد مینامیم. مانند توابع x , $sin\,x$, $tanx$ و ... . تابع فرد حتما از مبدا میگذرد, زیرا:

$$f(-x) = -f(x) \xrightarrow{x=0} f(0) = -f(0) \to f(0) = 0$$

بدیهی است در نمودار این تابع, مبدا مختصات مرکز تقارن خواهد بود. (شکل سمت راست).





بنابراین اولین شرط اینکه تابعی زوج یا فرد باشد آن است که دامنه آن متقارن باشد. الزاما هر تابعی زوج یا فرد نیست, مانند تابع $x^2 + x$. اما تنها تابعی که هم زوج است و هم فرد, تابع ثابت $f(x) = 0$ میباشد. زیرا:

$$\begin{cases} f(x) = f(-x) \\ f(x) = -f(-x) \end{cases} \xrightarrow{+} f(x) = 0$$

بدیهی است حاصل جمع یا تفریق چند تابع زوج، تابعی زوج و حاصل جمع یا تفریق چند تابع فرد نیز تابعی فرد خواهد بود. جمع یا تفریق دو تابع زوج و فرد، تابعی است که نه زوج است و نه فرد مانند $x^2 + x$. حاصل ضرب یا حاصل تقسیم دو تابع زوج یا دو تابع فرد, تابعی زوج خواهد بود. حاصل ضرب یا حاصل تقسیم یک تابع زوج و یک تابع فرد نیز تابعی فرد است, مانند $tanx$.

بنابراین در مثال بالا همینکه دیده شد تابع برای $x > 0$ صرفا یک ریشه دارد, از آنجا که تابع $f(x) = x^2 - xsinx - cosx$ تابعی زوج است لذا صرفا یک ریشه دیگر برای x های منفی خواهیم داشت که قرینه ریشه مثبت است. یعنی برای یک تابع زوج, تعداد ریشه‌ها دقیقا زوج است, مگر آنکه خودِ $x = 0$ نیز ریشه باشد. ■

مثال ۱–۷ فرض کنید $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و یک به یک بوده و $f(1) > f(0)$. نشان دهید:

$$\forall\ x \in (0,1] \quad \to \quad f(x) > f(0)$$

حل با تعریف تابع $g(x) = f(x) - f(0)$, چون g تابعی پیوسته و یک به یک بوده و نیز $g(0) = 0$ لذا g در هیچ نقطه بازه$(0,1]$ صفر نمیشود و لذا علامت ثابتی دارد. حال یک نقطه را در این بازه کنترل میکنیم تا مثبت یا منفی بودن این علامت را بیابیم. چون $g(1) > 0$, لذا $g(x) > 0$. ■

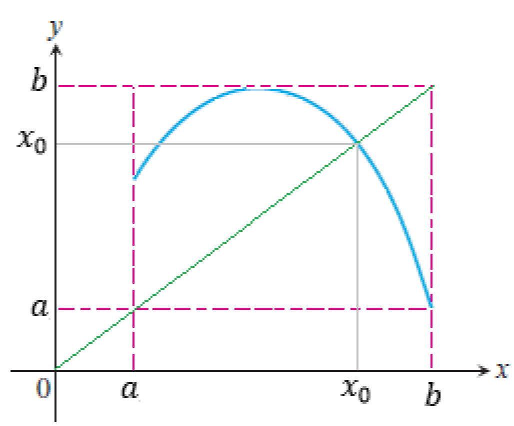
مثال ۱–۸ نشان دهید اگر $f: [a,b] \to [a,b]$ تابعی پیوسته باشد, آنگاه:

$$\exists\ \ x_0 \in [a,b]\ \ ;\ \ f(x_0) = x_0$$

حل تابع $g(x)$ را بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$g(x) = f(x) - x \quad ; \quad g(a) = f(a) - a \geq 0 \quad , \quad g(b) = f(b) - b \leq 0$$

زیرا با توجه به بازه ارائه شده برای برد تابع, مقدار $f(x)$ برای هر نقطه داخل دامنه, از a بیشتر(یا مساوی) و از b کمتر (یا مساوی) است. بنابراین با توجه به اینکه $g(a) \geq 0$ و $g(b) \leq 0$ خواهیم داشت $g(a)g(b) \leq 0$. بنابراین به ازای حداقل یک $x_0 \in [a,b]$ خواهیم داشت $g(x_0) = 0$ و یا $f(x_0) - x_0 = 0$. ■



توضیح: تعبیر هندسی این سوال این است که قرار است نشان دهیم منحنی مورد نظر حتما حداقل در یک نقطه نیمساز را قطع میکند (شکل روبرو). استفاده از تابع $g(x) = f(x) - x$ به تعبیری می‌تواند معادل این باشد که گویا محور x را دوران داده‌ایم تا بر روی نیمساز قرار بگیرد. حال نقطه a بالای این محور جدید و b پایین آن بوده و لذا حداقل در یک نقطه مابین a و b , محور x جدید را قطع می‌کند. ■

❋ قاعده دکارت: در چندجمله‌ای $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ اگر تعداد تغییر علامتهای ضرایب $f(x)$ برابر m باشد, تعداد ریشه‌های مثبت f برابر m یا $m - 2$ یا $m - 4$ و ... خواهد بود. پس این قاعده معمولا نمی‌تواند تعداد دقیق ریشه‌ها را بدهد. برای ریشه‌های منفی ,تعداد تغییرعلامتهای $f(-x)$ مد نظر قرار میگیرد.

※ مثال ۱-۹ تعداد ریشه‌های معادله $f(x) = x^8 + 8x^6 - 5x^4 - 3 = 0$ را بدست آورید.

حل تعداد تغییر علامتهای ضرایب $f(x)$ برابر 1 میباشد. لذا تعداد ریشه‌های مثبت دقیقا یکی است. و چون تابع زوج است, پس دقیقا به دو ریشه خواهیم رسید. البته میتوانستیم برای ریشه‌های منفی تعداد تغییر علامتهای $f(-x)$ را در نظر بگیریم:

$$f(-x) = x^8 + 8x^6 - 5x^4 - 3 = 0 \rightarrow m = 1$$

اگر از این قاعده استفاده نکنیم, با توجه به تمرین ۱ از آنجا که $a_n a_0 < 0$ و نیز زوج بودن تابع, این معادله حداقل دو ریشه خواهد داشت و لازم است با کنترلهای دیگری مانند مشتق یا بولزانو نشان دهیم دقیقا دو ریشه می‌باشد. ■

※ ۱-۲-۱- پیوستگی یکنواخت

تعریف: تابع $f(x)$ را در بازه I پیوسته گوییم, هرگاه در کلیه نقاط بازه پیوسته باشد. حال اگر با مفهوم $\varepsilon - \delta$, برای کلیه نقاط بازه مورد نظر مانند x_0 ,کمیت δ فقط تابعی از ε بدست آمده و به نقطه x_0 بستگی نداشته باشد, تابع $f(x)$ را در بازه I پیوسته یکنواخت می‌گوییم.

مثال ۱-۱۰ نشان دهید تابع $f(x) = x^2$ در بازه $0 < x < 1$ پیوسته یکنواخت است.

حل ابتدا با مفهوم $\varepsilon - \delta$, نشان میدهیم برای نقطه دلخواه x_0 خواهیم داشت $L = x_0^2$ و بعد از آنجا که $f(x_0) = x_0^2$ نیز میباشد, لذا تابع در نقطه دلخواه x_0 پیوسته است. برای این منظور تعریف حد را می‌نویسیم:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;;\; \exists\, \delta > 0 \,;\; 0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - x_0^2| < \varepsilon$$

$$\forall\, x, x_0 \in (0,1) \rightarrow |x^2 - x_0^2| = |x + x_0||x - x_0| < 2|x - x_0| < \varepsilon \rightarrow \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

چون δ فقط تابعی از ε بدست آمد, پس پیوستگی در نقطه دلخواه x_0 یکنواخت نیز میباشد. ■

توضیح: بر طبق یک قضیه اگر f در یک بازه بسته پیوسته باشد, در بازهٔ باز آن پیوسته یکنواخت خواهد بود. بنابراین با استفاده از این قضیه از آنجا که $f(x) = x^2$ در بازه $[0,1]$ پیوسته است, لذا در بازه $(0,1)$ پیوسته یکنواخت میباشد.

مثال ۱-۱۱ نشان دهید تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در بازه $0 < x < 1$ پیوسته یکنواخت نمیباشد.

حل معمولا این کار با مثال نقض انجام میشود.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;;\; \exists\, \delta > 0 \,;\; 0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow \left|f(x) - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$$

$$\forall\, x, x_0 \in (0,1) \rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$$

چون این رابطه بایستی به ازای هر x و x_0 در بازه مورد نظر برقرار باشد, اگر انتخاب کنیم $x = x_0 + \delta$ آنگاه:

$$\left|\frac{1}{x_0 + \delta} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon \rightarrow \frac{\delta}{x_0(x_0 + \delta)} < \varepsilon$$

بدیهی است اگر x_0 نزدیک به صفر انتخاب شود, این کسر را میتوان هر مقدار که لازم باشد بزرگ نمود. ■

تمرینات بخش ۱-۲ تمرینات ۴۸, ۵۰, ۵۲ و ۶۶ از بخش ۱-۸ کتاب

۱- نشان دهید هر چندجمله‌ای بصورت $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, اگر از درجه فرد باشد و یا اگر $a_n a_0 < 0$, آنگاه حداقل یک ریشه حقیقی خواهد داشت.

۲- فرض کنید $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ اعداد حقیقی باشند بطوریکه:

$$f(x_1) = x_2 \quad ; \quad f(x_2) = x_3 \quad ; \quad f(x_3) = x_4 \quad ; \quad f(x_4) = x_1$$

نشان دهید وجود دارد $c \in \mathbb{R}$ بطوریکه $f(f(c)) = c$

۳- نشان دهید معادله زیر حداقل یک ریشه مثبت خواهد داشت که از $a + b$ بیشتر نیست.

$$x = asin(x) + b \quad ; \quad 0 < a < 1 \;\; ; \quad b > 0$$

۴- نشان دهید اگر $f : [a, b] \to \mathbb{Q}$ تابعی پیوسته باشد, آنگاه f تابعی ثابت است.

راهنمایی: از برهان خلف استفاده کنید. به عبارتی فرض کنید حداقل برای دو مقدار $x_1 \neq x_2$ در بازه مزبور, دو مقدار نابرابر $y_1 \neq y_2$ داشته باشیم. حال از آنجا که می‌دانیم بین هر دو عدد گویا, حتما عدد گنگی وجود دارد, این عدد را y_3 انتخاب کرده و با توجه به قضیه مقدار میانی در توابع پیوسته به تناقض برسید.

* ۵- با استفاده از روش دنباله‌ها نشان دهید تابع دیریکله در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست. (مثال ۱-۵)

تمرینات ۱۹, ۳۰ , ۳۹ , ۴۲ , ۴۴ و ۵۰ از بخش مرور مطالب فصل ۱

۱-۳- مشتق (بخشهای ۲-۵ و ۲-۶ کتاب)

برای تابع $y = f(x)$, اگر x از a تا $a + \Delta x$ تغییر کند میزان تغییرات تابع عبارت است از:

$$\Delta y = \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$$

در اینصورت مشتق تابع در نقطه $x = a$ بصورت زیر تعریف میشود:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

در ادامه با ارائه چند مثال مفهوم مشتق بررسی می‌شود.

مثال ۱-۱۲ فرض کنید تابع f به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$ در شرط زیر صدق میکند:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \;\; ; \;\; f(a + b) = f(a) f(b)$$

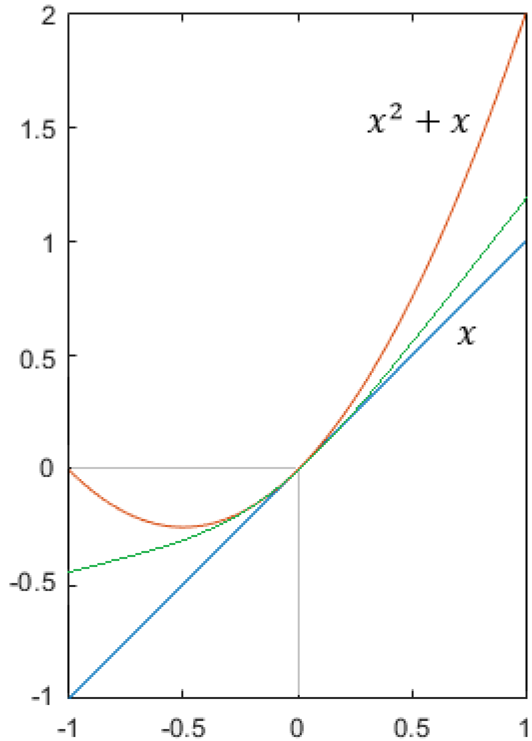
همچنین $f(0) = 1$ و $f'(0)$ موجود می‌باشد. نشان دهید تابع f در هر نقطه دلخواه x_0 مشتق‌پذیر بوده و مشتق آن عبارت است از $f'(x_0) = f'(0) f(x_0)$.

حل اگر $f'(x_0)$ موجود باشد, بایستی آنرا بصورت زیر بدست آورد:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) f(h) - f(x_0)}{h} = f(x_0) \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h}$$

با در نظر گرفتن $f(0) = 1$ می‌توان گفت حد آخر بیانگر $f'(0)$ است که با توجه به صورت مساله موجود بوده و لذا تابع در هر نقطه دلخواه x_0 مشتق‌پذیر است. ■

مثال ۱-۱۳ اگر به‌ازای هر x در بازه $|x| < 1$ داشته باشیم $x \le f(x) \le x^2 + x$, در اینصورت $f'(0)$ را بیابید.



$$0 \le f(0) \le 0^2 + 0 \rightarrow f(0) = 0$$

$$\rightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$$

$$\begin{cases} x \rightarrow 0^+ & 1 \le \dfrac{f(x)}{x} \le x + 1 \ \rightarrow \ f'_+(0) = 1 \\ x \rightarrow 0^- & 1 \ge \dfrac{f(x)}{x} \ge x + 1 \ \rightarrow \ f'_-(0) = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow f'(0) = 1 \ \blacksquare$$

تعبیر هندسی این سوال در شکل روبرو ارائه شده است.

مثال ۱-۱۴ فرض کنید $g(x)$ تابعی با مشتقات پیوسته از هرمرتبه دلخواه بوده و $g(0) = g'(0) = 0$. مقدار $f'(0)$ را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} g(x)cos(1/x^3) & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

حل با نوشتن فرمول مشتق $f'(0)$ را بدست می‌آوریم.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} cos\left(\frac{1}{x^3}\right) = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x}}_{0} \underbrace{\lim_{x\to 0} cos\left(\frac{1}{x^3}\right)}_{\text{محدود}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = 0 \ \blacksquare$$

در انتهای این بحث, به مفهوم دیگری تحت عنوان "پادمشتق" یا "عکسِ مشتق" می‌پردازیم.

دیده شد که برای یک تابع خاص مانند $f(x)$ می‌توان مشتق آنرا با استفاده از روابط مربوط بدست آورد. حال این سوال پیش می‌آید که آیا می‌توان بصورت برعکس عمل کرد؟ یعنی با داشتن مشتق, خودِ تابع را بدست آورد؟

مثلا در فیزیک دیده شد که با مشتق‌گیری از موقعیت یک ذره, می‌توان سرعت آنرا بدست آورد. حال سوال اینگونه مطرح می‌شود که با داشتن سرعت, چگونه می‌توان موقعیت ذره را در زمانی خاص بدست آورد. به چنین عملی اصطلاحا محاسبه "پادمشتق" گفته شده و بحثی بسیار مهم در حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌باشد که به تفصیل در مبحث انتگرال به آن می‌پردازیم.

مثلا فرض کنید سوال این باشد که مشتق چه تابعی برابر $-2x$ خواهد بود. با اطلاعاتی که از مشتق داریم, برای این تابع ساده می‌توان پادمشتق آنرا به سادگی به دست آورد. به عبارتی اگر مشتق x^n برابر nx^{n-1} است, لذا پاد مشتق nx^{n-1} برابر x^n خواهد شد, یا ساده‌تر است که بگوییم پاد مشتق x^n برابر $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ می‌باشد $(n \ne -1)$. طبیعتا بایستی یک ثابت C نیز به جواب اضافه کرد, چرا که مشتق عدد ثابت برابر صفر است. بنابراین پادمشتق تابع $-2x$ بصورت $-x^2 + C$ خواهد شد.

به عبارتی بی‌شمار تابع که اختلاف همگی صرفا در یک مقدار ثابت می‌باشد, همگی پادمشتق $-2x$ خواهند بود. و یا می‌توان گفت اگر همه این پادمشتقها را رسم کنیم, درست مشابه این خواهد بود که تابع $-x^2$ را در امتداد محور قائم به بالا و پایین انتقال داده باشیم. ممکن است این سوال مطرح شود که از کجا می‌توان گفت تابع $-2x$, پادمشتق دیگری نخواهد داشت. در بحث انتگرال ثابت می‌شود که همه پادمشتق‌های یک تابع صرفا در یک مقدار ثابت C اختلاف داشته و لذا پادمشتق دیگری برای تابع $-2x$ نمی‌توان متصور شد.

نحوه محاسبه پادمشتق در حالت کلی کار ساده‌ای نبوده و در بحث انتگرال بطور کامل به بررسی آن خواهیم پرداخت.

۱-۳-۱- قاعده زنجیری

دیده شد برای تابع $y = f(x)$, اگر x از a تا $a + \Delta x$ تغییر کند, میزان تغییرات تابع با Δy نمایش داده شد. در ادامه تابع ε را بصورت $\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a)$ تعریف می‌کنیم. بدیهی است وقتی $\Delta x = 0$ باشد, آنگاه ε تعریف نشده است. بنابراین اگر تعریف کنیم وقتی $\Delta x = 0$ آنگاه $\varepsilon = 0$ باشد, آنگاه ε تابعی پیوسته از Δx خواهد شد. در نتیجه:

$$\Delta y = (f'(a) + \varepsilon)\Delta x \quad ; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0$$

از این ویژگی, در اثبات قضیه زیر که تحت عنوان قاعده زنجیری شناخته می‌شود, استفاده خواهد شد.

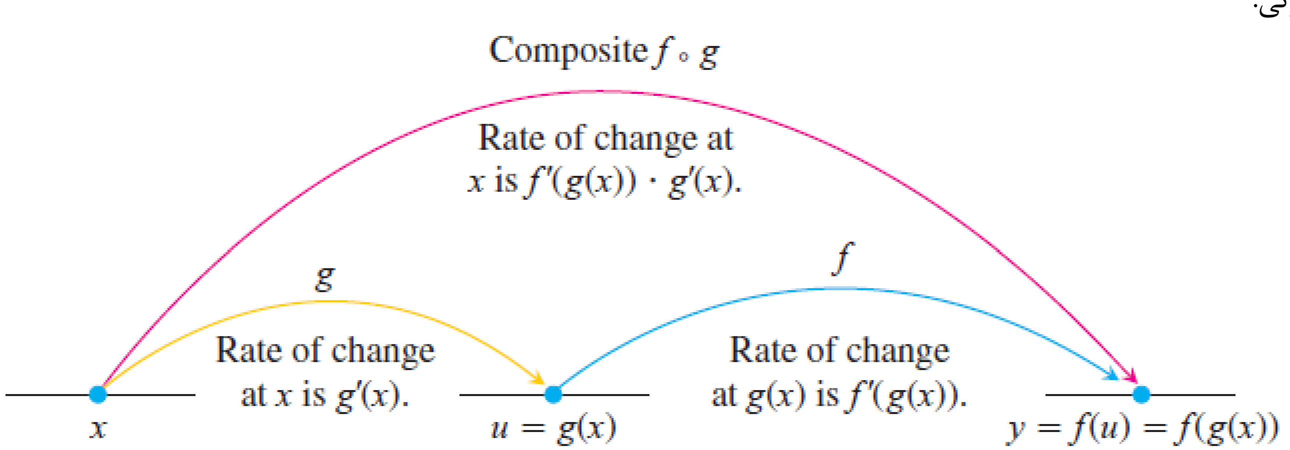
قضیه: فرض کنید $u = g(x)$ در a مشتق‌پذیر بوده و $y = f(u)$ نیز در $b = g(a)$ مشتق‌پذیر باشد. در اینصورت تابع $h = fog$ در a مشتق پذیر بوده و مشتق آن عبارت است از:

$$\underbrace{[f(g(x))]'_{x=a}}_{h'(a)} = f'(g(a)) \times g'(a)$$

و در حالت کلی برای هر نقطه دلخواه x خواهیم داشت:

$$[f(g(x))]' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

به عبارتی:



قبل از اثبات این قضیه, به عنوان مثال مشتق دو تابع $y = sin(x^2)$ و $y = sin^2x$ را نسبت به x بدست می‌آوریم:

$$u = g(x) = x^2 \quad ; \quad y = f(u) = sin(u) \to [f(g(x))]' = \underbrace{f'(g(x))}_{cos(g(x))} \times \underbrace{g'(x)}_{2x} = 2xcos(x^2)$$

$$u = g(x) = sinx \quad ; \quad y = f(u) = u^2 \to [f(g(x))]' = \underbrace{f'(g(x))}_{2g(x)} \times \underbrace{g'(x)}_{cosx} = 2sinxcosx$$

اثبات: برای دو تابع $g(x)$ و $f(u)$ میزان تغییرات را بدست می‌آوریم:

$$u = g(x) \to \Delta u = (g'(a) + \varepsilon_1)\Delta x \quad ; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 = 0$$

$$y = f(u) \to \Delta y = (f'(b) + \varepsilon_2)\Delta u \quad ; \quad \lim_{\Delta u \to 0} \varepsilon_2 = 0$$

از این دو سطر دیده میشود که اگر $\Delta x \to 0$ آنگاه هم $\varepsilon_1 \to 0$ و هم $\varepsilon_2 \to 0$. لذا با ترکیب ایندو رابطه:

$$\to \Delta y = (f'(b) + \varepsilon_2)(g'(a) + \varepsilon_1)\Delta x$$

$$\to h'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(b) + \varepsilon_2)(g'(a) + \varepsilon_1) = f'(b)g'(a)$$

دقت شود به این دلیل خواستیم ε تابعی پیوسته از Δx باشد که پیوستگی شرط لازم برای مشتق‌پذیری است. ■

روش دوم اثبات: تابع F را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{f(g(x)+r) - f\big(g(x)\big)}{r} - f'\big(g(x)\big) & ; \ r \neq 0 \\ 0 & ; \ r = 0 \end{cases}$$

از آنجا که f در $g(x)$ مشتق‌پذیر است, لذا:

$$\lim_{r \to 0} F(r) = f'\big(g(x)\big) - f'\big(g(x)\big) = 0 = F(0)$$

لذا F در 0 پیوسته است. با توجه به تعریف F خواهیم داشت:

$$f(g(x)+r) - f\big(g(x)\big) = r\Big(F(r) + f'\big(g(x)\big)\Big)$$

با فرض $r = g(x+k) - g(x)$ نتیجه می‌شود:

$$f\big(g(x+k)\big) - f\big(g(x)\big) = (g(x+k) - g(x))\Big(F(r) + f'\big(g(x)\big)\Big)$$

از آنجا که g در x مشتق‌پذیر و F در 0 پیوسته است, خواهیم داشت:

$$\lim_{k \to 0} \frac{f\big(g(x+k)\big) - f\big(g(x)\big)}{k} = \lim_{k \to 0} \Big(F(r) + f'\big(g(x)\big)\Big)\frac{g(x+k) - g(x)}{k} = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

چرا که $\lim_{k \to 0} F(r) = F\Big(\lim_{k \to 0} r\Big) = F(0) = 0$ و لذا اثبات کامل است. ■

توضیح ۱: در نام‌گذاری توابع دقت شود. مثلا اگر $y = f(u) = \sqrt{u}$ و $u = g(x) = x^2 + 1$ باشد, در اینصورت بدیهی است y در نهایت تابعی از x خواهد بود. اما نام آن دیگر f نخواهد بود, مثلا می‌توان آنرا $h(x)$ نامگذاری کرد. بنابراین:

$$y = f(u) = \sqrt{u} = \sqrt{x^2 + 1} = h(x)$$

حتی در تابعی مانند $f(x) = 5 + x^3$ اگر خواستیم x را $-x$ با تعویض کنیم به $f(-x) = 5 - x^3$ می‌رسیم که بهتر است نام این تابع جدید را مثلا $g(x)$ بنامیم, زیرا عملکرد متفاوت دارند. مثلا $f(2) = 13$ اما $g(2) = -3$

توضیح ۲: لایب‌نیتز برای مشتق, نمادگذاری دیگری بصورت زیر ارائه داده است:

$$y = f(x) \to y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} y \quad or \quad y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f$$

دقت شود از نماد $\frac{dy}{dx}$ فعلا نباید بصورت کسر(نسبت دو عبارت) استفاده شود. چرا که هنوز مفهومی برای عبارات صورت و مخرج آن ارائه نشده است. در بخش بعد (دیفرانسیل) به این موضوع میپردازیم.

با نماد لایب‌نیتز مشتق مراتب بالاتر(مثلا مرتبه ۲) بصورت زیر بیان میشود:

$$y = f(x) \to y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2y}{dx^2}$$

گاهی اوقات از نماد $D = \frac{d}{dx}$ و $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ و ... نیز بعنوان عملگر مشتق استفاده میشود. با این نماد:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(f) = Df \quad ; \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}(f) = D^2f$$

<u>توضیح ۳</u>: قاعده زنجیری را میتوان با نماد فوق بصورت زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} y = f(u) \\ u = g(x) \end{cases} ; \; y = h(x) = fog(x) \to h'(x) = f'(g(x))g'(x) \to \frac{dh}{dx} = \frac{df}{du}\frac{dg}{dx}$$

بدیهی است میتوان این رابطه را بصورت $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ نیز بیان کرد. با این شکل جدید, مطابق آنچه در بخش بعد خواهیم دید, اگر نمادگذاری لایب‌نیتز را در حکم نسبت بدانیم, به ذهن سپردن قاعده زنجیری, ساده‌تر خواهد بود.

مثلا مشتق دو تابع $y = sin(x^2)$ و $y = sin^2x$ را نسبت به x به این روش بدست می‌آوریم:

$$u = g(x) = x^2 \; ; \; y = f(u) = sin(u) \to \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = cos(u) \times 2x = 2xcos(x^2)$$

$$u = g(x) = sinx \; ; \; y = f(u) = u^2 \to \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 2u \times cosx = 2sinxcosx$$

که به نسبت ساده‌تر از روشی است که قبلا بکار گرفته شد.

<u>توضیح ۴</u>: فرض کنید برای معرفی یک تابع بجای آنکه فرم تابع بصورت $y = f(x)$ معرفی شده باشد, متغیر x و تابع y بر حسب پارامتری مانند t بصورت $x = g(t)$ و $y = h(t)$ بیان شده باشند که در اینصورت معرف منحنی $y = f(x)$ خواهد بود. چنین فرمی اصطلاحا فرم پارامتری نامیده می‌شود. حال اگر هدف محاسبه $\frac{dy}{dx}$ باشد, چنانچه دو تابع g و h هر دو مشتق‌پذیر باشند, با استفاده از قاعده زنجیری خواهیم داشت:

$$y = f(x) \; ; \; x = g(t) \to \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \xrightarrow{\frac{dx}{dt} \neq 0} \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{h'(t)}{g'(t)}$$

به عبارتی اگر $\frac{dx}{dt} \neq 0$ می‌توان مشتق تابع y نسبت به متغیر x را از رابطه بالا بدست آورد. بعنوان مثال فرض کنید x و y بصورت زیر تعریف شده و هدف تعیین معادله خط مماس بر این منحنی پارامتری در نقطه $t = 1$ باشد. خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = (1 + t^3)^4 + t^2 \\ y = t^5 + t^2 + 2 \end{cases} \to \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{5t^4 + 2t}{12t^2(1 + t^3)^3 + 2t} \to \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \frac{1}{14}$$

$$t = 1 \to \begin{cases} x = 14 \\ y = 4 \end{cases} \to (y - 4) = \frac{1}{14}(x - 14) \to y = \frac{1}{14}x + \frac{39}{14}$$

مثال ۱-۱۵ اگر $y(x)y'(x) = -x$ و $y(1) = 3$, معادله $y(x)$ را بیابید.

حل با ضرب طرفین رابطه داده شده در 2 , سمت چپ به فرم مشتق $y^2(x)$ خواهد شد.

$$2y(x)y'(x) = -2x \rightarrow [y^2(x)]' = -2x$$

حال سوال این است که مشتق چه تابعی برابر $-2x$ خواهد بود. همان سوالی که در انتهای بحث مشتق, تحت عنوان محاسبه پادمشتق به آن پاسخ داده شد. دیده شد که پادمشتق تابع $-2x$ بصورت $-x^2 + C$ خواهد بود. بنابراین:

$$[y^2(x)]' = -2x \rightarrow y^2(x) = -x^2 + C \xrightarrow{y(1)=3} C = 10$$
$$\rightarrow x^2 + y^2 = 10 \rightarrow y = \sqrt{10 - x^2}$$

دقت شود با توجه به شرط اولیه $y(1) = 3$, نیمه بالایی دایره, جواب مساله خواهد بود. ■

<u>توضیح:</u> در این مثال معادله $yy' = -x$ حل شد. به چنین معادله‌ای اصطلاحا معادله دیفرانسیل گفته می‌شود, چرا که در معادله, تابع و مشتقاتِ آن دیده می‌شود. بحث کلی معادلات دیفرانسیل در درسی با این عنوان بررسی خواهد شد. ■

مثال ۱-۱۶ فرض کنید تابع y به ازای هر x دارای مشتق دوم بوده و در روابط زیر صدق کند. نشان دهید $y(x) \equiv 0$

$$y''(x) + y(x) = 0 \;\; ; \;\; y(0) = y'(0) = 0$$

حل با ضرب طرفین رابطه داده شده در $2y'(x)$, سمت چپ به فرم مشتق یک عبارت خواهد شد.

$$2y''(x)y'(x) + 2y(x)y'(x) = 0 \rightarrow \left[{y'}^2(x)\right]' + [y^2(x)]' = 0 \rightarrow \left[{y'}^2(x) + y^2(x)\right]' = 0$$

در اینجا نیز دیده میشود که مشتق یک تابع برابر صفر شده است. پس بار دیگر به مفهوم پادمشتق برمی‌گردیم. بدیهی است این تابع بایستی تابع ثابت باشد. یعنی ${y'}^2(x) + y^2(x) = C$. حال برای یافتن ثابت C از شرطهای داده شده استفاده می‌کنیم:

$$y(0) = y'(0) = 0 \rightarrow {y'}^2(0) + y^2(0) = C \rightarrow C = 0$$

از آنجا که C یک مقدار ثابت است و برای یک نقطه خاص برابر صفر بدست آمد, لذا C همواره برابر صفر می‌باشد. لذا به رابطه ${y'}^2(x) + y^2(x) = 0$ می‌رسیم. حال می‌گوییم مجموع دو مقدار مثبت صفر شده است, لذا هر یک بایستی برابر صفر باشند. یعنی $y(x) = 0$. ■

<u>توضیح:</u> ممکن است بگوییم چرا در ابتدای حل ضرایب C را بکار نبردیم, یعنی بایستی آنرا بصورت زیر می‌نوشتیم:

$$\left[{y'}^2(x) + C_1\right]' + [y^2(x) + C_2]' = 0 \rightarrow \left[{y'}^2(x) + y^2(x) + C_1 + C_2\right]' = 0$$
$$\rightarrow {y'}^2(x) + y^2(x) + C_1 + C_2 = C \rightarrow {y'}^2(x) + y^2(x) = C_3$$

به عبارتی اگر اینگونه عمل می‌کردیم نیز در نهایت صرفا یک ثابت باقی می‌ماند. ■

مثال ۱-۱۷ فرض کنید توابع f و g به ازای هر x در روابط زیر صدق کند. نشان دهید <u>تنها</u> توابعی که در این شروط صدق میکنند عبارتند از $f(x) = sin(x)$ و $g(x) = cos(x)$.

$$\begin{cases} f'(x) = g(x) \\ g'(x) = -f(x) \end{cases} \;\; ; \;\; \begin{cases} f(0) = 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

حل بدیهی است دو تابع $f(x) = sin(x)$ و $g(x) = cos(x)$ در شرایط فوق صدق میکنند. فرض می‌کنیم توابع دیگری با نامهای F و G وجود داشته باشند که در این شروط صدق نمایند. در ادامه نشان می‌دهیم این توابع همان f و g خواهند بود.

$$\begin{cases} F'(x) = G(x) \\ G'(x) = -F(x) \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} F(0) = 0 \\ G(0) = 1 \end{cases}$$

بنابراین اگر نشان دهیم تابع $h(x) = (F - f)^2 + (G - g)^2$ برابر صفر است, نتیجه بدست آمده است. برای این منظور:

$$h'(x) = 2(F - f)\underbrace{(F' - f')}_{G-g} + 2(G - g)\underbrace{(G' - g')}_{-F+f} = 0 \to h(x) = cte$$

$$x = 0 \to h(0) = \big(F(0) - f(0)\big)^2 + \big(G(0) - g(0)\big)^2 = (0 - 0)^2 + (1 - 1)^2 = 0 \to h(x) = 0$$

از آنجا که $h(x)$ مجموع دو مقدار مثبت بوده و برابر صفر بدست آمد, لذا هر یک از عبارات $F - f$ و $G - g$ بایستی برابر صفر باشند. یعنی اینکه فرض کردیم توابع دیگری با نامهای F و G وجود دارند که در شرایط مساله صدق می‌کنند ما را به این رسانید که این توابع بایستی همان $f(x) = sin(x)$ و $g(x) = cos(x)$ باشند. ■

توضیح: ممکن است بجای استفاده از تابع $h(x)$ معرفی شده در بالا بخواهیم مستقلا نشان دهید دو تابع $F - f$ و $G - g$ برابر صفرند. مثلا فرض کنیم $z(x) = F - f$. در اینصورت با مشتق‌گیری از آن:

$$z'(x) = F' - f' = G - g$$

که منجر به این میشود که نشان دهیم $G - g$ هم صفر است. یعنی در واقع دومین تابعی که قرار بود نشان داده شود که برابر صفر است. بنابراین به نتیجه خاصی نرسیدیم. با یکبار دیگر مشتق‌گیری خواهیم داشت:

$$z''(x) = G' - g' = -F + f = -z(x) \to z''(x) + z(x) = 0$$

از طرفی:

$$z(x) = F(0) - f(0) = 0 - 0 = 0 \quad ; \quad z'(0) = F'(0) - f'(0) = G(0) - g(0) = 1 - 1 = 0$$

بنابراین به یک مساله جدید رسیدیم که:

$$z''(x) + z(x) = 0 \;\; ; \;\; z(0) = z'(0) = 0$$

که دقیقا مساله‌ای است که در مثال قبل حل شد و دیده شد که بایستی $z(x) = 0$ و در نتیجه $F = f$ باشد. به همین ترتیب میتوان نشان داد $G = g$. دیده میشود که این روش قدری طولانی‌تر از روشی است که در حل مثال دیده شد. ■

مثال ۱–۱۸ فرض کنید در تابع f به ازای هر x داشته باشیم $f'(x) = \frac{1}{x}$ و نیز $f(1) = 0$. نشان دهید:

$$\forall \;\; x, z > 0 \to f(xz) = f(x) + f(z)$$

حل از آنجا که که عنوان شده است به ازای هر x و z یعنی دو متغیر مستقلند. حال مشتق $f(xz)$ را نسبت به x بدست می‌آوریم, بنابراین با z مشابه یک عدد ثابت برخورد می‌کنیم (در واقع f یک تابع یک متغیره بر حسب x می‌باشد). در اینصورت:

$$[f(xz)]'_x = zf'(xz) = z\frac{1}{xz} = \frac{1}{x} = f'(x) \to f(xz) = f(x) + c \quad (1)$$

$$x = 1 \to f(z) = f(1) + c \xrightarrow{f(1)=0} c = f(z) \xrightarrow{(1)} f(xz) = f(x) + f(z) \;■$$

مثال ۱–۱۹ با استفاده از تغییر متغیر $x = \frac{1}{t}$ معادله دیفرانسیل $x^4y'' + 2x^3y' + y = 0$ را به معادله دیفرانسیلی بر حسب متغیر t تبدیل کنید. به عبارتی: $(x,y) \to (t,y)$

حل ممکن است در ابتدا بگوییم فقط بایستی بجای x^4 و $2x^3$ به ترتیب $\frac{1}{t^4}$ و $2\frac{1}{t^3}$ را قرار دهیم. اما نکته مهم آن است که منظور از y' و y'' مشتق نسبت به x است که اینها هم بایستی بر حسب t بیان شوند. برای این منظور با استفاده از قاعده زنجیری:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y'_t\frac{dt}{dx} \xrightarrow{t=\frac{1}{x}\to\frac{dt}{dx}=\frac{-1}{x^2}=-t^2} y' = y'_t(-t^2) = -t^2y'_t$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(-t^2y'_t)}{dt}\frac{dt}{dx} = (-2ty'_t + (-t^2)y''_t)(-t^2) = 2t^3y'_t + t^4y''_t$$

$$x^4y'' + 2x^3y' + y = 0 \xrightarrow{Sub.} \frac{1}{t^4}(2t^3y'_t + t^4y''_t) + 2\frac{1}{t^3}(-t^2y'_t) + y = 0 \to y''_t + y = 0$$

دیده میشود که این تغییر متغیر باعث شد معادله اولیه به یک معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت تبدیل گردد. ■

توضیح: برای تبدیل y'' به مشتقات y بر حسب t , می‌توان به طریق زیر نیز عمل کرد, که قدری طولانی‌تر است:

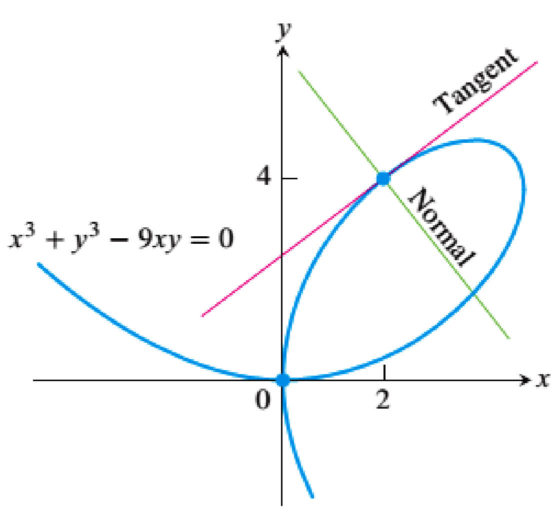
$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\frac{-1}{x^2}y'_t\right)}{dx} = \frac{2}{x^3}y'_t + \left(\frac{-1}{x^2}\right)\underbrace{\frac{d(y'_t)}{dx}}_{y''_t\frac{dt}{dx}} = \frac{2}{x^3}y'_t + \frac{1}{x^4}y''_t = 2t^3y'_t + t^4y''_t \quad ■$$

۱–۳–۲- مشتق‌گیری ضمنی

بدیهی است چنانچه یک تابع به فرم $y = f(x)$ داده شده باشد, روش مشتق‌گیری از آن مشخص است. اما گاهی نمیتوان از تابع داده شده صریحا y را بر حسب x بدست آورد و یا ممکن است طولانی باشد. مثلا فرض کنید هدف آن باشد که از رابطه $y^2 = x^2 + sin(xy)$ مشتق y را بر حسب x بدست آوریم. بدیهی است استخراج y بر حسب x غیرممکن است. اگر چه بحث کلی در این ارتباط در حساب دیفرانسیل توابع چند متغیره مطرح خواهد شد, اما بطور ساده روش کار عبارت است از مشتق‌گیری از طرفین رابطه نسبت به x و سپس استخراج y' از آن. در مثال زیر جزئیات کار دیده می‌شود.

مثال ۱–۲۰ معادله خط مماس و قائم بر منحنی $x^3 + y^3 = 9xy$ در نقطه $(2,4)$ را بدست آورید.

حل اگر چه ممکن است در این مثال بتوان با کمی محاسبات طولانی صریحا y را بر حسب x بدست آورد, اما نیاز به روشهای حل معادله درجه ۳ خواهد داشت. میتوان کنترل کرد که نقطه $(2,4)$ روی منحنی مورد نظر میباشد. همچنین شکل منحنی نیز بصورت روبرو است, هر چند برای حل نیاز به ترسیم منحنی نمی‌باشد.



در واقع منحنی داده شده یک تابع نیست. اما هدف بررسی شیب در قطعه‌ای از منحنی است که از $(2,4)$ میگذرد که می‌توان در همسایگی این نقطه آنرا یک تابع دانست. با مشتق گیری از طرفین رابطه داده شده نسبت به x خواهیم داشت:

$$x^3+y^3=9xy \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} 3x^2+3y^2y'=9(xy'+y)$$

$$\rightarrow (3y^2-9x)y'=9y-3x^2 \rightarrow y'=\frac{3y-x^2}{y^2-3x}$$

حال که فرمول مشتق در حالت کلی بدست آمد, شیب خط مماس در نقطه مورد نظر و معادله خط مماس عبارت است از:

$$y'|_{(2,4)}=\frac{4}{5} \rightarrow y-4=\frac{4}{5}(x-2) \rightarrow y=\frac{4}{5}x+\frac{12}{5}$$

شیب خط قائم نیز برابر $\frac{-5}{4}$ خواهد بود. در نتیجه معادله خط قائم نیز عبارت است از:

$$y-4=\frac{-5}{4}(x-2) \rightarrow y=\frac{-5}{4}x+\frac{13}{2}$$

که هر دو خط در شکل بالا ترسیم شده‌اند. ■

توضیح ۱: می‌توان به طریق دیگری نیز مساله را حل کرد. بدیهی است از دیدِ این کلاس, y تابعی از متغیر مستقل x است. در درس ریاضی ۲ با توابع چند متغیره آشنا خواهیم شد. مثلا $z=F(x,y)$ تابعی دو متغیره است که در آن z تابعی از دو متغیر مستقل x و y است.

حال اگر بخواهیم برای این تابع دو متغیره, $z=0$ گردد یعنی به $F(x,y)=0$ خواهیم رسید. در آن درس ثابت می‌شود برای محاسبه مشتق ضمنی توابعی به فرم $F(x,y)=0$ (توجه شود سمت راست باید صفر شده باشد) می‌توان از رابطه $y'=-\frac{F_x}{F_y}$ استفاده کرد. از آنجا که عنوان شد در آنجا z تابعی از دو متغیر مستقل x و y است, لذا در این رابطه, F_x مشتق نسبت به x (با فرض اینکه y عددی ثابت است) و F_y مشتق نسبت به y (با فرض اینکه x عددی ثابت است) منظور می‌شود. لذا با این دیدگاه حل مثال بالا بصورت زیر نیز امکان‌پذیر است:

$$x^3+y^3=9xy \rightarrow \underbrace{x^3+y^3-9xy}_{F(x,y)}=0 \rightarrow y'=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{3x^2-9y}{3y^2-9x}=\frac{3y-x^2}{y^2-3x}$$

توضیح ۲: چنانچه مشتقات مرتبه بالاتر نیز سوال شده باشد, میتوان به همین شیوه عمل کرد . مثلا فرض کنید مشتق دوم y بر حسب x از رابطه $2x^3-3y^2=8$ سوال شده باشد. برای این منظور:

$$2x^3-3y^2=8 \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} 6x^2-6yy'=0 \rightarrow y'=\frac{x^2}{y} \quad (y\neq 0)$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{y}\right)=\frac{2xy-x^2y'}{y^2}=\frac{2x}{y}-\frac{x^2}{y^2}y'=\frac{2x}{y}-\frac{x^2}{y^2}\frac{x^2}{y}=\frac{2x}{y}-\frac{x^4}{y^3} \quad (y\neq 0) \ ■$$

مشتق مرتبه nام حاصلضرب دو تابع (فرمول لایب‌نیتز)

اگر توابع u و v , n بار مشتق پذیر باشند, در اینصورت با استقرا میتوان ثابت کرد:

$$(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u^{(n-i)}v^{(i)}$$

به عنوان مثال مشتق دوازدهم تابع $y=xsinx$ عبارت است از:

$$y^{(12)}=\binom{12}{0}(sinx)^{(12)}x^{(0)}+\binom{12}{1}(sinx)^{(11)}x^{(1)}+0+\cdots+0=xsinx-12cosx$$

تمرینات بخش ۱-۳ تمرینات ۴۶, ۵۴, ۶۲ و ۷۲ از بخش ۲-۵ و نیز ۲۱, ۲۴, ۴۶ و ۶۲ از بخش ۲-۶ کتاب

۱- تابع $f(x)$ بصورت زیر تعریف شده است. نشان دهید اگر $a \geq \frac{9}{8}$ آنگاه $f'(x) \geq 0$.

$$f(x) = ax - \frac{x^3}{1+x^2}$$

۲- مطلوب است محاسبه $f'(0)$ و $f''(0)$ در صورت وجود.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

جواب: $f'(0) = 0$ اما $f''(x)$ وجود ندارد.

۳- فرض کنید تابع f بگونه ای است که در شرایط زیر صدق میکند. در اینصورت $f(0)$, $f'(0)$ و $f'(x)$ را بیابید.

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \;\; ; \;\; f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + y^2x \;\; ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

<u>*Ans*</u> : $\quad f(0) = 0 \;\; ; \;\; f'(0) = 1 \;\; ; \;\; f'(x) = 1 + x^2$

۴- فرض کنید توابع f و g هر دو از $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بوده و در روابط زیر صدق نمایند. نشان دهید: $f'(x) = f(x)$

$$\forall\;\; x, y \in \mathbb{R} \;\to f(x+y) = f(x)f(y) \;\; ; \;\; f(x) = 1 + xg(x) \;\; ; \;\; \lim_{x\to 0} g(x) = 1$$

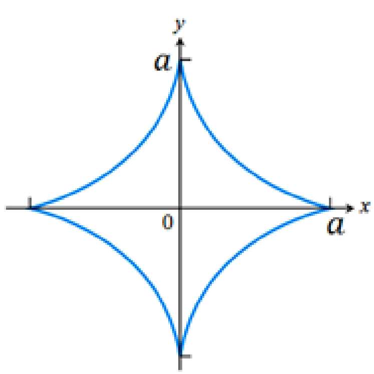
۵- نشان دهید اگر $y = f(t)$ و $x = g(t)$ هر دو دوبار مشتق‌پذیر باشند, در اینصورت:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g'(t)f''(t) - f'(t)g''(t)}{\left(g'(t)\right)^3} \quad ; \quad g'(t) \neq 0$$

۶- با استفاده از تغییر متغیر $x = tant$ معادله دیفرانسیل زیر را به معادله دیفرانسیلی بر حسب متغیر t تبدیل کنید.

$$(1+x^2)^2y'' + (1+2x)(1+x^2)y' + y = 0 \quad ; \quad \underline{Ans}: \;\; y''_t + y'_t + y = 0$$

۷- نشان دهید که طول بخشی از خط مماس بر هر نقطه روی استروئید (ستاره‌وار) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ که بین محورهای مختصات قرار میگیرد برابر با مقدار ثابت $a > 0$ میباشد.



۱-۴- آهنگ تغییرات و آهنگهای وابسته (بخشهای ۲-۷ و ۲-۸ کتاب)

در این بخش به دو مورد از کاربردهای ابتدایی مشتق می‌پردازیم.

۱-۴-۱- آهنگ تغییرات

اگر خارج قسمت $\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ را میزان تغییر متوسط f و یا آهنگِ تغییر f در بازه a تا $a+\Delta x$ تعبیر کنیم، می‌توان حد آنرا وقتی $\Delta x \to 0$ ، بیانگر میزان تغییر f در نقطه a دانست که همان مشتق f نسبت به x در $x=a$ یا $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$ خواهد بود.

درست به همین شکل می‌توان برای حرکت در امتداد یک خط راست، چنانچه فرض کنیم موقعیت ذره بصورت $x=f(t)$ بیان شده باشد، آنگاه جابجایی ذره در بازه زمانی t_1 تا t_2 برابر است با $\Delta x = f(t_2)-f(t_1)$ و لذا آهنگ تغییر جابجایی نسبت به زمان(که بصورت خلاصه با سرعت متوسط بیان میشود) عبارت است از $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$. حال اگر $\Delta t \to 0$ در اینصورت سرعت لحظه‌ای ذره بدست می‌آید که با توجه به تعریف مشتق برابر $\frac{dx}{dt}$ یعنی مشتق جابجایی نسبت به زمان خواهد بود. همچنین بنا به تعریف $|v|=\left|\frac{dx}{dt}\right|$ بعنوان تندی شناخته می‌شود. به همین ترتیب می‌توان شتاب ذره را بصورت $a=\frac{d^2x}{dt^2}$ بدست آورد.

به عنوان یک مثال ساده می‌خواهیم آهنگ تغییرات مساحت یک دایره به قطر $D=10$ را نسبت به تغییر بسیار کوچک قطر آن بدست آوریم. برای این منظور کافی است $\frac{dA}{dD}$ را بدست آورده و آنرا در $D=10$ محاسبه کنیم. یعنی:

$$\frac{dA}{dD}=\frac{d}{dD}\left(\frac{\pi}{4}D^2\right)=\frac{\pi D}{2} \to \left.\frac{dA}{dD}\right|_{D=10}=5\pi$$

توجه شود اگر میزان تغییرات کاهنده باشد با علامت منفی نمایش داده خواهد شد.

در مثال دیگر فرض کنید جرم یک میله غیرهمگن با رابطه $m=f(x)$ داده شده باشد، که در آن x فاصله نقطه مورد نظر تا مثلا سمت چپ میله باشد. بنابراین جرمی که در فاصله x_1 تا x_2 قرار می‌گیرد عبارت است از $\Delta m = f(x_2)-f(x_1)$ لذا می‌توان گفت چگالی متوسط این بخش برابر است با $\rho=\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. حال اگر $\Delta x \to 0$ در اینصورت چگالی خطی نقطه مورد نظر را بدست می‌آوریم که بدیهی است برابر $\frac{dm}{dx}$ یعنی مشتق جرم نسبت به طولش خواهد بود. بعنوان نمونه اگر $m=\sqrt{x}$ داده شده باشد، می‌توان گفت چگالی متوسط بخشی از میله که بین $x_1=1$ و $x_2=1.2$ قرار دارد برابر است با:

$$\rho=\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\sqrt{1.2}-\sqrt{1}}{1.2-1}\approx 0.48$$

و نیز چگالی آن دقیقا در $x=1$ برابر است با:

$$\rho=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{dm}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \to \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=1}=\frac{1}{2\sqrt{1}}=0.5$$

مثال ۱-۲۱ حجم یک هرم با سرعت $30\ cm^3/s$ و سطح قاعده آن با سرعت $5\ cm^2/s$ اضافه میشود. در لحظه‌ای که سطح قاعده $100\ cm^2$ و ارتفاع آن $8\ cm$ میباشد, ارتفاع با چه سرعتی اضافه میشود؟

حل بدیهی است $V = \frac{1}{3}S.H$ و $\frac{dH}{dt}$ در لحظه‌ای خاص سوال شده است. از آنجا که $\frac{dV}{dt} = 30$ و $\frac{dS}{dt} = 5$ داده شده است, لذا:

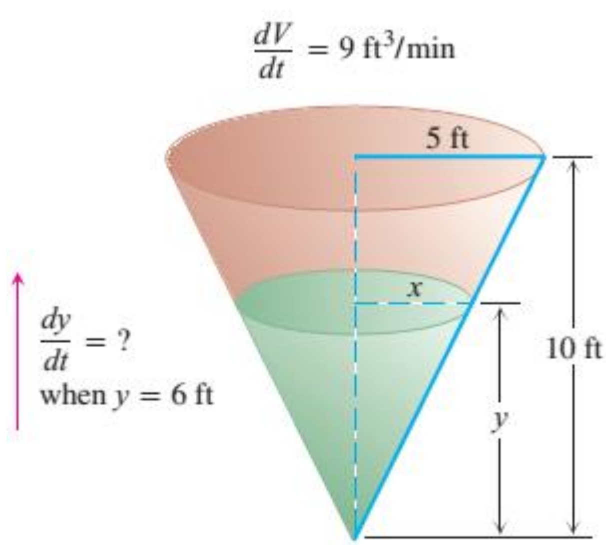
$$V = \frac{1}{3}S.H \rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\left(H.\frac{dS}{dt} + S.\frac{dH}{dt}\right) \xrightarrow{Sub.} \frac{dH}{dt} = 0.5 \ \blacksquare$$

۱-۴-۲- آهنگهای وابسته

فرض کنید بخواهیم آهنگ تغییرات صعود یک موشک را نسبت به زمان اندازه بگیریم. طبیعی است اینکه دستگاهی بر روی موشک قرار دهیم تا فاصله آنرا به زمین منتقل کند نیازمند تمهیداتی خواهد بود. اما شاید بهتر باشد از نقطه مشخصی روی زمین میزان تغییرات زاویه موشک نسبت به زمین را اندازه گرفته و سپس به کمک یک رابطه مثلثاتی ساده, مجهول مورد نظر را بدست آوریم. به عبارتی اگر چه به دنبال $\frac{dh}{dt}$ هستیم, اما ساده‌تر است $\frac{d\theta}{dt}$ را بدست آورده و از روی آن $\frac{dh}{dt}$ را محاسبه کنیم.

همچنین محاسبه میزان تغییر حجم یک کره نسبت به زمان ممکن است نیاز به ابزارهایی داشته باشد. اما قطعا تعیین میزان تغییر شعاع آن نسبت به زمان کار ساده‌تری است. از آنجا که حجم کره به شعاع آن مرتبط است, لذا حل مساله مشخص خواهد بود.

بعنوان یک مثال دیگر فرض کنید بدانیم در یک مخزن مخروطی وارون (مطابق شکل روبرو), آب با میزان $9\ ft^3/min$ وارد می‌شود. سوال این است که سطح آب وقتی عمق آن برابر $y =$ $6\ ft$ است, با چه سرعتی بالا می‌آید.



به عبارتی $\frac{dV}{dt} = 9$ و $y = 6$ داده شده است و $\frac{dy}{dt}$ مجهول مساله است. بنابراین بایستی V و y را به یکدیگر مرتبط کنیم. بدیهی است $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$, اما این معادله متغیر دیگری به نام x هم دارد. از آنجا که اطلاعاتی راجع به x و $\frac{dx}{dt}$ در مساله داده نشده است, بایستی x را حذف کنیم. برای این منظور با توجه به شکل می‌توان گفت:

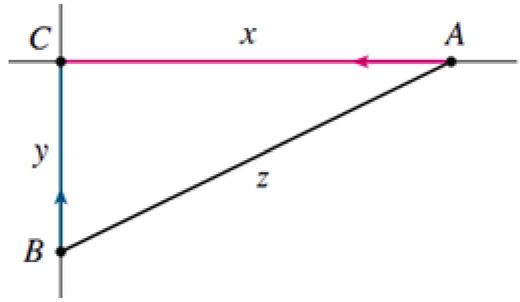
$$\frac{x}{5} = \frac{y}{10} \rightarrow x = \frac{y}{2} \rightarrow V = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 y = \frac{1}{12}\pi y^3$$

حال برای محاسبه $\frac{dy}{dt}$ کافی است از رابطه بالا نسبت به t مشتق بگیریم:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{12}\pi(3y^2)\frac{dy}{dt} \rightarrow 9 = \frac{1}{12}\pi(3 \times 6^2)\frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\pi} \approx 0.32 \quad (ft/min)$$

به عبارتی سطح آب با سرعت 0.32 بالا می‌رود.

مثال ۱-۲۲ اتوموبیل A با سرعت $50\ mi/h$ به سمت غرب و اتوموبیل B با سرعت $60\ mi/h$ به سمت شمال, هر دو به سمت تقاطع C حرکت میکنند. وقتی A در 0.3 مایلی و B در 0.4 مایلی این تقاطع قرار دارد, اتوموبیلها با چه آهنگی به هم نزدیک میشوند؟



حل فرض کنید در زمان t فاصله اتوموبیلها از تقاطع به ترتیب برابر x و y باشد. هدف محاسبه $\frac{dz}{dt}$ است. از آنجا که $\frac{dx}{dt}=-50$ و $\frac{dy}{dt}=-60$ داده شده است, لذا بایستی z را به x و y مرتبط کرد. توجه شود مشتقها منفی‌اند, چرا که x و y کم می‌شوند.

$$z^2=x^2+y^2 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} 2z\frac{dz}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt} \xrightarrow{x=0.3\ ;y=0.4\rightarrow z=0.5} \frac{dz}{dt}=-78\ \frac{mi}{h}\quad \blacksquare$$

تمرینات بخش ۱-۴ تمرینات ۱۰, ۱۶, ۱۸ و ۱۹ از بخش ۲-۷ و نیز ۱۰, ۲۶, ۳۵ و ۳۸ از بخش ۲-۸ کتاب

۱- موقعیت یک جسم متحرک در امتداد یک خط راست بصورت $x=t^3-6t^2+9t$ داده شده است. مطلوب است:

الف: شتاب جسم در هر زمانی که سرعت صفر می‌شود.

ب: تندی جسم در هر زمانی که شتاب صفر می‌شود.

ج: مسافت کل پیموده شده توسط جسم در بازه زمانی $t_1=0$ تا $t_2=2$

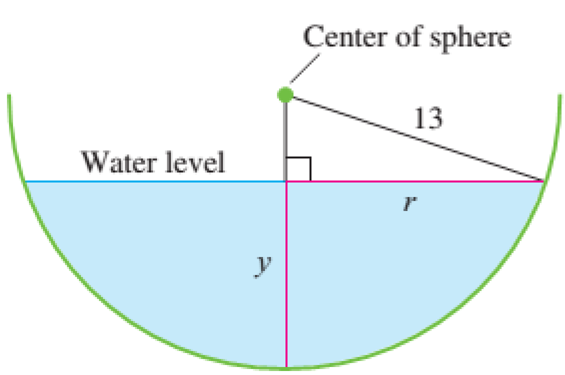
$$\underline{Ans}:\ a)\ \ t=1\rightarrow a=-6\ (m/sec^2)\ \ ;\ \ t=3\rightarrow a=6\ (m/sec^2)$$

$$b)\ \ |v(2)|=3\ (m/sec)\qquad ;\qquad c)\ d=6\,(m)$$

۲- میزان تغییر حجم یک بالون کروی نسبت به شعاع آنرا وقتی $r=2$ میباشد, بدست آورید. وقتی شعاع از 2 به 2.2 تغییر می‌کند, حجم تقریبا چقدر افزایش می‌یابد؟ میزان دقیق تغییر حجم چه اندازه است؟

$$\underline{Ans}:\ a)\ \left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=2}=16\pi\ (ft^3/ft)\quad ;\quad b)\ 3.2\pi\ (ft^3)\quad ;\quad c)\ 11.09\ (ft^3)$$

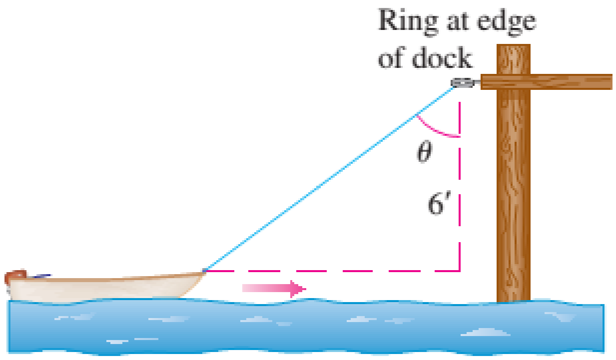
۳- در نظر بگیرید که آبی به میزان $6\ m^3/min$ از یک مخزن به شکل کاسه نیم‌کروی به شعاع $R=13$ متر (در شکل روبرو نیمرخ آن دیده میشود), به خارج جریان دارد. مطابق آنچه در مثال ۵-۹ خواهیم دید حجم آبی که درعمق y متر قرار گرفته است از رابطه $\frac{\pi}{3}y^2(3R-y)$ بدست می‌آید. حال موارد زیر را تعیین کنید:



الف: وقتی سطح آب 8 متر است, میزان تغییر سطح آب چقدر است؟

ب: وقتی عمق آب 8 متر است, میزان تغییر شعاع r چقدر است؟

$$\underline{Ans}:\ a)\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=8}=\frac{-1}{24\pi}\ (m/min)\quad ;\quad b)\ r=\sqrt{26y-y^2}\ \ ;\ \left.\frac{dr}{dt}\right|_{y=8}=\frac{-5}{288\pi}\ (m/min)$$



۴- یک قایق تفریحی را با یک طناب از یک دماغه در اسکله و از میان یک حلقه که $6\ ft$ بالای دماغه است می‌کشیم. طناب با سرعت $2\ ft/sec$ کشیده می‌شود.

الف: وقتی $10\ ft$ از طناب بیرون است, سرعت نزدیک شدن قایق به اسکله چقدر است؟

ب: در این لحظه میزان تغییر θ چه اندازه است؟

$$\underline{Ans}:\quad a)\ \frac{dx}{dt}\bigg|_{s=10}=-2.5\quad (ft/sec)\quad ;\quad b)\ \frac{d\theta}{dt}\bigg|_{s=10}=-\frac{3}{20}\quad (rad/sec)$$

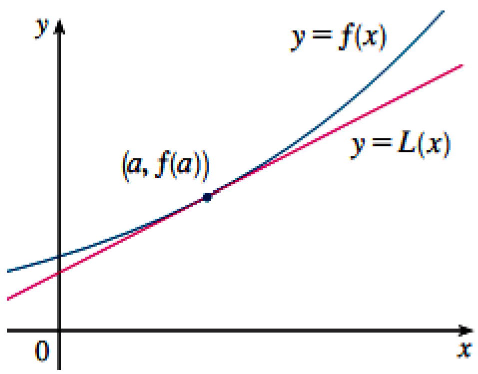
۱-۵- خطی سازی و دیفرانسیل (بخش ۲-۹ کتاب)

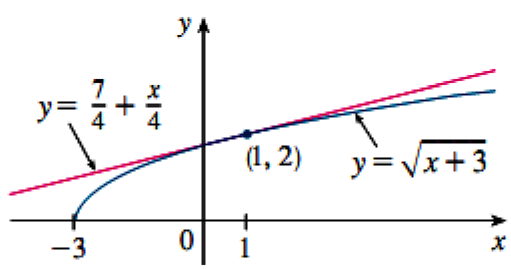
۱-۵-۱- خطی سازی

منحنی $y=f(x)$ را در نظر میگیریم. معادله خط مماس بر منحنی در نقطه $(a,f(a))$ عبارت است از:

$$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

بدیهی است در اطراف نقطه $(a,f(a))$ این منحنی و خط مماس خیلی به هم نزدیکند (شکل سمت چپ). لذا در این ناحیه, خط مماس میتواند بعنوان تقریبی خطی از منحنی استفاده شود, به عبارت دیگر $f(x)\approx L(x)$. دقت شود هر چه از نقطه $(a,f(a))$ دور شویم, خطای این تقریب بیشتر میشود. اصطلاحا میگوییم $f(x)$ حول $x=a$ خطی شده است. لازم به‌ذکر است در بحث سریها با تقریبهای بهتر توابع آشنا میشویم.





مثال ۱-۲۳ تابع $f(x)=\sqrt{x+3}$ را حول $a=1$ خطی کنید. به کمک آن $\sqrt{4.05}$ را تقریب بزنید. (شکل سمت راست)

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\rightarrow L(x)=f(1)+f'(1)(x-1)=\sqrt{1+3}+\frac{1}{2\sqrt{1+3}}(x-1)=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$$

$$f(x)\approx L(x)\rightarrow \sqrt{x+3}\approx\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}\rightarrow\sqrt{4.05}\approx\frac{1.05}{4}+\frac{7}{4}=2.0125\quad ;\quad (\sqrt{4.05}=2.01246)$$

دقت شود که این تقریب تقریب خوبی خواهد بود, چرا که نقطه $x=1.05$ به نقطه $a=1$ نزدیک می‌باشد. ■

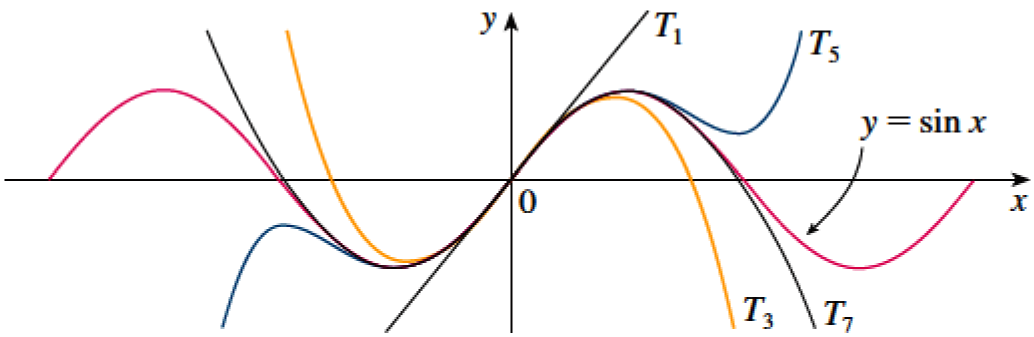
<u>توضیح ۱</u>: ممکن است از ابتدا در صورت سوال مقدار تقریبی $\sqrt{4.05}$ سوال شده باشد. در اینحالت بایستی یک تابع انتخاب کرده و آنرا حول یک نقطه خطی کنیم. با توجه به سوال خواسته شده, این تابع می‌تواند $\sqrt{x}$ انتخاب شود. در اینصورت x بایستی 4.05 لحاظ شود. از آنجا که این عدد نزدیک 4 است, برای تقریب مناسبتر, بهتر است آنرا حول $a=4$ خطی کنیم. خواهیم داشت:

$$f(x)=\sqrt{x}\to f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\to L(x)=f(4)+f'(4)(x-4)=2+\frac{1}{4}(x-4)=\frac{1}{4}x+1$$

$$f(x)\approx L(x)\to \sqrt{x}\approx\frac{1}{4}x+1\to\sqrt{4.05}\approx\frac{4.05}{4}+1=2.0125$$

که همان نتیجه‌ای است که در بالا با انتخاب تابع $f(x)=\sqrt{x+3}$ و بسط حول $a=1$ بدست آمد.

توضیح ۲: درواقع در خطی سازی, به دنبال چندجمله‌ای هستیم که در نقطه $x=a$ مقدار تابع و مقدار مشتق آن با تابع اصلی یکی باشد که به معادله یک خط میرسیم. میتوان این بحث را ادامه داد. به این معنی که به دنبال چندجمله‌ای باشیم که در نقطه مورد نظر علاوه بر مقدار تابع و مشتق اول, مقدارمشتق دوم چندجمله‌ای نیز با تابع اصلی یکی باشد که به یک منحنی درجه ۲ میرسیم که تقریب بهتری است. و به همین ترتیب ادامه داد تا منحنی‌های بهتری را بدست آورد. این ایده اصلی چندجمله‌ای تیلور است که در فصل دهم به آن می‌پردازیم. مثلا در شکل زیر چندجمله‌ایهای خطی, درجه ۳, درجه ۵ و درجه ۷ برای تقریب بهتر تابع $sinx$ دیده میشود. ■



مثال ۱-۲۴ تابع $f(x)=\sqrt{x+1}$ را حول $a=0$ خطی کرده, خطای حاصل از خطی سازی (تقریب) را نیز بدست آورد.

حل درست مشابه مثال قبل خواهیم داشت:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\to L(x)=f(0)+f'(0)(x-0)=1+\frac{x}{2}\to\sqrt{1+x}\approx1+\frac{x}{2}$$

خطای حاصل از این برآورد عبارت است از:

$$E=1+\frac{x}{2}-\sqrt{1+x}=\frac{1}{2}\left(x+2-2\sqrt{1+x}\right)=\frac{1}{2}\left((x+1)-2\sqrt{1+x}+1\right)$$

$$\to E=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2\approx\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}-1\right)^2=\frac{x^2}{8}$$

توجه شود که برای محاسبه خطا, در سطر اخر باز هم از تقریبی که بدست آوردیم استفاده شد. فعلا چاره‌ای جز این نداریم تا در فصل ۸ روش دقیقتری برای برآورد خطا ارائه شود. ■

توضیح: مثلا برای محاسبه تقریبی $\sqrt{0.994}$ خواهیم داشت:

$$\sqrt{1+x}\approx1+\frac{x}{2}\to\sqrt{0.994}=\sqrt{1+(-0.006)}\approx1+\frac{-0.006}{2}=0.997$$

دقت شود که -0.006 نزدیک $a=0$ بوده و لذا خطای تقریب ناچیز است. این خطا عبارت است از:

$$E\approx\frac{x^2}{8}\to E\approx\frac{(-0.006)^2}{8}\ \blacksquare$$

مثال ۱-۲۵ به‌کمک خطی شده تابع $\sqrt{x+1}$ حول $a=0$ از مثال قبل, تابع $f(x)=\sqrt{x+3}$ را حول $a=1$ خطی کنید.

حل ابتدا یک انتقال محورهای مختصات انجام میدهیم. از آنجا که قرار است از بسط حول $a=0$ به بسط حول $a=1$ برسیم, لذا این انتقال بایستی برابر 1 باشد. به عبارتی با انتخاب $t=x-1$ و با توجه به مثال قبل خواهیم داشت:

$$\sqrt{x+3}=\sqrt{t+4}=2\sqrt{1+\frac{t}{4}}\approx 2\left(1+\frac{1}{2}\frac{t}{4}\right)=2+\frac{x-1}{4}=\frac{x}{4}+\frac{7}{4}$$

که همان نتیجه‌ای است که در مثال ۱-۲۳ بدست آمد. ■

۱-۵-۲- دیفرانسیل

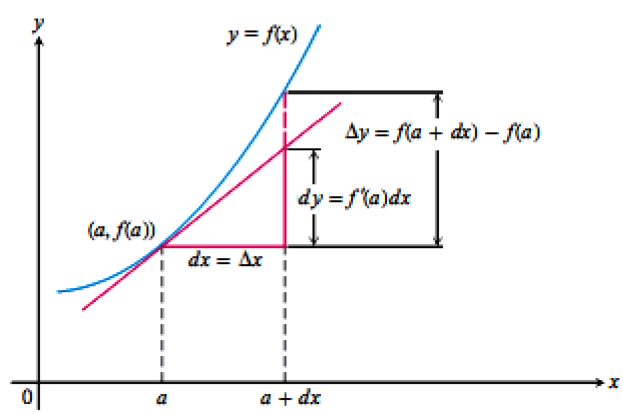
تابع مشتق‌پذیر $y=f(x)$ را در نظر میگیریم. حال dx را در حکم یک متغیر در نظر گرفته و آنرا دیفرانسیل x می‌نامیم. دیفرانسیل y یا dy را بصورت تابع زیر تعریف می‌کنیم:

$$dy \stackrel{\text{def}}{=} f'(x)dx$$

به عبارتی دیفرانسیل یک تابع برابر است با مشتق آن تابع, ضربدر دیفرانسیل متغیر آن تابع. بعنوان مثال برای تابع $y=x^3$ خواهیم داشت $dy=3x^2dx$.

دقت شود در این تعریف, dy تابع است نه y, متغیر نیز dx میباشد نه x . یعنی dx متغیر مستقل بوده و dy تابعی است از هم dx و هم x . این تعریف به گونه‌ای انجام شده است که بانمادگذاری لایب‌نیتز برای مشتق, تطابق دارد. به این معنی که این تعریف درست معادل آن است که در نماد لایب‌نیتز $\frac{dy}{dx}$ را در حکم یک کسر بدانیم که در اینجا تعریفی برای صورت و مخرج ارائه شده است. این تعریف, تعبیر هندسی نیز خواهد داشت.

در شکل روبرو از نقطه $(a,f(a))$ به اندازه Δx حرکت کرده‌ایم. بنابراین تابع به میزان Δy تغییر می یابد. اگر dx را که یک متغیر مستقل میباشد برابر با Δx انتخاب کرده و بجای خودِ تابع, از خطی شده آن در $x=a$ (که تقریبی است) استفاده کنیم, با توجه به تعبیر هندسی مشتق, تابع به میزان $f'(a)dx$ تغییر یافته است که با توجه به تعریف دیفرانسیل, این مقدار برابر با dy خواهد بود که در آن $dx=\Delta x$ و $x=a$ انتخاب شده است.



پس Δy تغییر واقعی تابع و dy تغییر تقریبی ناشی از خطی سازی است. واضح است که ایندو یکی نبوده ولی اگر Δx کوچک انتخاب شود, اختلاف ایندو کمتر خواهد بود. پس تمام مسائلی که با تقریب خطی بررسی شدند(مانند تقریب توابع), با دیفرانسیل نیز قابل بررسی است (مثال ۱-۲۷) . با توجه به آنچه در خطی سازی عنوان شد خواهیم داشت:

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)\xrightarrow{x\to a+dx}\boxed{f(a+dx)\approx f(a)+f'(a)dx}$$

که dx می‌تواند منفی هم باشد.

اگرچه دیفرانسیل با توجه به مشتق تعریف گردید, اما توجه شود که $f'(a)$ در واقع شیب خط مماس در $x = a$ است و دیفرانسیل, تغییر تقریبی ناشی از خطی سازی در $x = a$ یعنی $dy = f'(a)dx$ که در شکل بالا نمایش داده شده است.

توضیح ۱: رابطه بالا بصورت زیر نیز قابل اثبات است:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \to 0} f'(a) \approx \frac{f(a + dx) - f(a)}{\Delta x} \;\; ; \;\; dx = \Delta x$$

توضیح ۲: در ابتدای فصل ۸ و در بحث چندجمله‌ای تیلور, نشان می‌دهیم اگر تابع f دارای مشتق دوم پیوسته بوده و c نقطه‌ای در بازه $(a, a + \Delta x)$ باشد, در اینصورت حداکثر خطای خطی سازی عبارت است از:

$$\Delta y - dy = \frac{f''(c)}{2!}\Delta x^2 \to |\Delta y - dy| \leq \frac{|f''(c)|}{2}\Delta x^2 \quad ; \quad a < c < a + \Delta x$$

پس اگر $f''(x) < 0$ خطا منفی و اگر $f''(x) > 0$ خطا مثبت است.

توضیح ۳: قوانین دیفرانسیل درست مشابه مشتق میباشد. مثلا:

$$d(uv) = (uv)'dx = \left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)dx = udv + vdu$$

توضیح ۴: به یک شکل دیگر نیز می‌توان مفهوم دیفرانسیل را بررسی کرد. می‌دانیم که:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \;\; ; \;\; f'(x) = \frac{dy}{dx} \;\; \to \;\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

به نظر میرسد بجای Δy عبارت dy و بجای Δx عبارت dx قرار داده شده و حد را حذف کرده‌ایم. گفته شد که چون dx یک متغیر مستقل میباشد, آنرا برابر با Δx انتخاب می‌کنیم و این ربطی به بزرگی و کوچکی Δx ندارد. اما در صورت کسر فقط در حالت حدی که $\Delta x \to 0$ میل می‌کند می‌توان dy را معادل Δy دانست که با آنچه در بالا گفته شد تطابق دارد.

توضیح ۵: بعدا دیده میشود که انتگرال را عکس دیفرانسیل تعریف می‌کنیم. لذا:

$$y' = f(x) \to \frac{dy}{dx} = f(x) \to dy = f(x)dx \to \underbrace{\int dy}_{y} = \int f(x)dx$$

توضیح ۶: دیده شد که برای تابع $y = f(x)$ دیفرانسیل y بصورت $dy = f'(x)dx$ تعریف می‌شود. یعنی مشتق تابع ضربدر دیفرانسیل متغیر. حال فرض کنید رابطه‌ای بصورت زیر بیان شده باشد:

$$y^4 + 2y = \frac{x + 2}{x - 1}$$

برای محاسبه دیفرانسیل این رابطه, در ابتدا دو سمت این رابطه را w در نظر می‌گیریم. لذا به دو عبارت زیر می‌رسیم که در اولی w تابعی از y و در دومی w تابعی از x میباشد. در نتیجه:

$$\begin{cases} w = y^4 + 2y \to dw = f'(y)dy = (4y^3 + 2)dy \\ w = \dfrac{x + 2}{x - 1} \quad \to dw = g'(x)dx = \dfrac{-3}{(x - 1)^2}dx \end{cases} \to (4y^3 + 2)dy = \frac{-3}{(x - 1)^2}dx$$

با توجه به نتیجه بدست آمده می‌توان اینگونه تعبیر کرد که گویا از دو طرف دیفرانسیل گرفته‌ایم. هر سمت نسبت به متغیر خودش.

در واقع حتی برای حالت ساده $y = f(x)$ نیز می‌توان مساله را به همین شکل دید. به عبارتی اگر در سمت چپ (مستقل از سمت راست) y را در حکم متغیر بگیریم, دیفرانسیل آن عبارت است از مشتق آن یعنی 1 در دیفرانسیل متغیر یعنی dy. در سمت راست یعنی عبارت $f(x)$ نیز, متغیر x میباشد, لذا دیفرانسیل آن عبارت است از مشتق آن یعنی $f'(x)$ در دیفرانسیل متغیر یعنی dx , که در اینصورت به $dy = f'(x)dx$ خواهیم رسید.

اگر بخواهیم می‌توانیم مساله بالا را با مشتق‌گیری نیز حل کنیم. اگر از طرفین نسبت به x مشتق بگیریم, خواهیم داشت:

$$y^4 + 2y = \frac{x+2}{x-1} \to (4y^3+2)y' = \frac{-3}{(x-1)^2} \xrightarrow{y'=\frac{dy}{dx}} (4y^3+2)dy = \frac{-3}{(x-1)^2}dx$$

توضیح ۷: یکی از کاربردهای دیفرانسیل تعیین تقریبی میزان تغییر یک تابع نسبت به تغییر متغیر آن است, مشروط به اینکه تغییرات متغیر کوچک باشد. بعنوان نمونه فرض کنید در مثال مخزنی که در شروع بخش ۱-۴-۲ دیده شد سوال این باشد که اگر در $y = 6\ \ ft$ میزان تغییر حجم برابر $0.5\ \ ft^3$ باشد, در اینصورت میزان تغییر y چه اندازه خواهد بود. برای این منظور:

$$V = \frac{1}{12}\pi y^3 \to dV = \frac{1}{4}\pi y^2 dy \to 0.5 = \frac{1}{4}\pi (6)^2 dy \to dy = 0.0177\ \ ft$$

دقت شود که اگر طرفین رابطه $dV = \frac{1}{4}\pi y^2 dy$ به dt تقسیم شود, به همان آهنگ تغییرات خواهیم رسید که درست معادل مشتق‌گیری نسبت به t بوده و مثال اولیه مخزن در بخش ۱-۴-۲ به همین روش حل شد. ■

مثال ۱-۲۶ اختلاف Δy و dy را برای تابع $y = 3x^3 + x - 1$ به‌ازای $x = 1$ و $\Delta x = 0.1$ بیابید.

$$\Delta y = [3(x+\Delta x)^3 + (x+\Delta x) - 1] - (3x^3 + x - 1) \;\; ; \;\; dy = (9x^2+1)dx$$

$$\xrightarrow{dx=\Delta x} |\Delta y - dy| = |(9x^2\Delta x + 9x\Delta x^2 + 3\Delta x^3 + \Delta x) - (9x^2+1)dx| = 0.093 \;\; ■$$

مثال ۱-۲۷ مقدار تقریبی $\sqrt{4.05}$ را با استفاده از مفهوم دیفرانسیل بدست آورید.

حل با استفاده از تابع $f(x) = \sqrt{x}$ خواهیم داشت:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to f(a+dx) \approx f(a) + f'(a)dx \to \sqrt{a+dx} \approx \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}dx$$

$$a = 4; dx = 0.05 \to \sqrt{4.05} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}0.05 = 2.0125$$

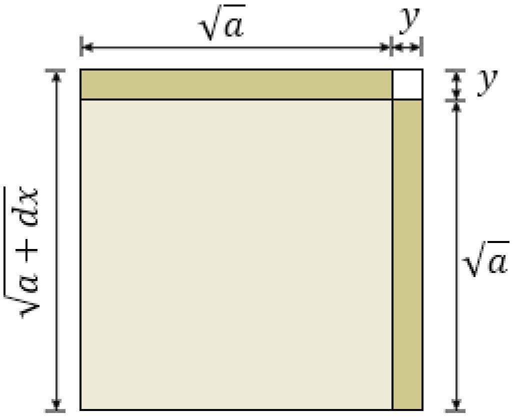
که همان نتیجه‌ای است که در مثال ۱-۲۳ نیز از طریق خطی سازی تابع $f(x) = \sqrt{x+3}$ بدست آمد. ■

توضیح ۱: میتوان برای محاسبه مقدار تقریبی $\sqrt{4.05}$ از تابع دیگری مانند $f(x) = \sqrt{x+3}$ نیز استفاده کرد. در اینصورت:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \to \sqrt{a+dx+3} \approx \sqrt{a+3} + \frac{1}{2\sqrt{a+3}}dx$$

$$a = 1 \;\; ; \;\; dx = 0.05 \to \sqrt{4.05} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{1+3}}0.05 = 2.0125$$

توضیح ۲: میتوان به طریق هندسی فرمول محاسبه جذر اعداد نزدیک به مربع کامل را بصورت زیر نیز ثابت کرد. فرض کنیم مساحت مربع کوچک a و مساحت مربع بزرگ $a+dx$ باشد, لذا $\sqrt{a+dx}=\sqrt{a}+y$ و y بصورت زیر بدست می‌آید:



$$\begin{cases} A_1 = a+dx \\ A_2 = a \end{cases}$$

$$\Delta A = a+dx-a \approx 2y\sqrt{a} \rightarrow y = \frac{dx}{2\sqrt{a}}$$

$$\sqrt{a+dx} = \sqrt{a}+y \rightarrow \sqrt{a+dx} \approx \sqrt{a} + \frac{dx}{2\sqrt{a}}$$

مثال ۱–۲۸ مقدار تقریبی $\sqrt[6]{65}$ را محاسبه و حداکثر خطای خطی سازی را بیابید.

$$f(x)=\sqrt[6]{x} \rightarrow f(a+dx) \approx f(a)+f'(a)dx \rightarrow \sqrt[6]{a+dx} \approx \sqrt[6]{a} + \frac{1}{6\sqrt[6]{a^5}}dx$$

$$a=64\,;\ dx=1 \rightarrow \sqrt[6]{65} \approx \sqrt[6]{64} + \frac{1}{6\times 2^5}\times 1 = 2+\frac{1}{192} \approx 2.005$$

$$f''(x) = \frac{-5}{36}x^{\frac{-11}{6}} \rightarrow |\Delta y - dy| = \frac{|f''(c)|}{2}\Delta x^2 = \frac{5}{72}c^{-\frac{11}{6}}(1)^2 < \frac{5}{72}2^{-11} \quad ; \quad 64<c<65$$

چون $f''(x)<0$, لذا خطا منفی است. یعنی $dy=2.005$ از مقدار واقعی $\sqrt[6]{65}$ بزرگتر است. ■

مثال ۱–۲۹ اگر شعاع داخلی یک کره توخالی $21\ cm$ و شعاع خارجی آن $21.05\ cm$ باشد, حجم تقریبی کره چقدر است؟

حل روش ساده اولیه آن است که حجم دو کره را محاسبه کرده و از هم کم کنیم. یعنی:

$$V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow \Delta V = V(21.05)-V(21) = 277.7487\ \ cm^3$$

که نیازمند محاسبه دو حجم خواهد بود در حالیکه اختلاف آنها سوال شده است. لذا ساده‌تر است که از دیفرانسیل کمک بگیریم.

با انتخاب $dr=\Delta r=0.05$, چون Δr عدد کوچکی است , می‌توان $\Delta V \approx dV$ در نظر گرفت و لذا:

$$\Delta V \approx dV = 4\pi r^2 dr \rightarrow dV = 4\pi 21^2(0.05) = 277.0885\ \ cm^3 \ ■$$

توضیح: به سوال زیر توجه کنید:

اگر در تخمین شعاع یک کره از وسیله‌ای استفاده کرده باشیم که حداکثر خطای آن $0.05\ cm$ بوده و شعاع آنرا $21\ cm$ بدست آورده باشیم, حداکثر خطای محاسبه حجم چقدر است؟

حل این سوال نیز دقیقا مشابه بالاست, یعنی این دو مساله معادل یکدیگرند. با این تفاوت که در آنجا ΔV حجم کره توخالی نازک بود و در اینجا اختلاف حجم واقعی از حجم محاسبه شده, که هر دو بیانگر یک تغییر در تابع حجم می‌باشند. تنها تفاوت آن است که بجای بایستی $dr=\pm 0.05$ قرار داده شود که معادل خطای مثبت یا منفی در تخمین شعاع میباشد. بنابراین:

$$\Delta V \approx dV = 4\pi r^2 dr \rightarrow dV = 4\pi 21^2(\pm 0.05) = \pm 277.0885\ cm^3 \ ■$$

تمرینات بخش ۱-۵ تمرینات ۴, ۲۶, ۳۶ و ۴۲ از بخش ۲-۹ کتاب

۱- نشان دهید حول $a=0$ به ازای هر مقدار از k خواهیم داشت: $(1+x)^k \approx 1+kx$

بعنوان نمونه:

$$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x \qquad k = 1/2$$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \approx 1+(-1)(-x) = 1+x \qquad k=-1;\ \text{replace } x \text{ by } -x.$$

$$\sqrt[3]{1+5x^4} = (1+5x^4)^{1/3} \approx 1+\frac{1}{3}(5x^4) = 1+\frac{5}{3}x^4 \qquad k=1/3;\ \text{replace } x \text{ by } 5x^4.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \approx 1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) = 1+\frac{1}{2}x^2 \qquad k=-1/2;\ \text{replace } x \text{ by } -x^2.$$

۲- مقدار تقریبی تابع $\sqrt[3]{25}$ را یکبار با خطی سازی و یکبار با دیفرانسیل بیابید.

$$\underline{Ans:}\quad f(x)=\sqrt[3]{x} \to f(25) \approx 3-\frac{2}{27}$$

۳- مقدار تقریبی تابع $f(x)=\sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}}$ را در $x=0.15$ یکبار با خطی سازی و یکبار با دیفرانسیل بیابید. سپس حداکثر خطای خطی سازی را محاسبه کنید. (مقدار واقعی $f(0.15)$ با ۴ رقم اعشار برابر 0.9702 میباشد)

تمرینات ۶ , ۲۶ , ۵۰ , ۵۵ , ۷۴ , ۸۴ , ۹۰ و ۹۱ از بخش مرور مطالب فصل ۲

تمرینات ۱, ۳, ۱۱ و ۱۶ از بخش مسائل اضافی فصل ۲

۱-۶- مثالهایی از کاربردهای مشتق

در دروس ریاضی دبیرستان دیده شد که یکی از کاربردهای مشتق, تعیین مقادیر ماکزیمم و مینیمم یک تابع است که اصطلاحا تحت عنوان اکسترمم‌ها شناخته می‌شوند. همچنین به کمک آن نقاط عطف را تعیین کرده و همچنین صعودی یا نزولی بودن یک تابع را مشخص کرد. دیده شد که همه اینها می‌توانند برای ترسیم نمودار یک تابع بکار گرفته شوند. همچنین از مشتق می‌توان برای اثبات برخی تساویها و نامساویها نیز استفاده کرد. در ادامه با ارائه چند مثال, برخی از این کاربردها را خواهیم دید. یک کاربرد مهم دیگرِ مشتق در بحث بهینه سازی است که در بخش ۱-۸ به آن خواهیم پرداخت.

۱-۶-۱- صعودی و نزولی بودن

مثال ۱-۳۰ فرض کنید تابع f بر $\mathbb{R}$ مشتق پذیر بوده و $f(a)=a\,;f(b)=b$, همچنین در تمام $\mathbb{R}$ داشته باشیم $|f'(x)| \le 1$, نشان دهید: $\forall\, x \in [a,b] \to f(x)=x$

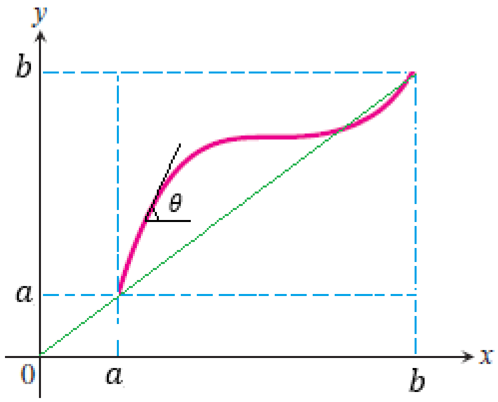
حل ابتدا تابع $g(x)$ را بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$g(x)=f(x)-x \to g(a)=g(b)=0 \;\;;\;\; g'(x)=f'(x)-1$$

$-1 \leq f'(x) \leq 1 \to -2 \leq g'(x) \leq 0 \to g$ نزولی

$$\begin{cases} a \leq x \to g(a) \geq g(x) \to g(x) \leq 0 \\ x \leq b \to g(x) \geq g(b) \to g(x) \geq 0 \end{cases} \to g(x) = 0 \to f(x) = x \ \blacksquare$$

توضیح: تعبیر هندسی این سوال این بصورت زیر است. به عبارتی هر منحنی دیگری به جز $f(x) = x$ که از نقاط $[a, a]$ و $[b, b]$ بگذرد انتخاب کنیم, در نقاطی از آن شیب از 45° بیشتر (مانند θ در شکل) یا از -45° کمتر خواهد بود, لذا در شرط $|f'(x)| \leq 1$ صدق نمی‌کند. ■



مثال ۱–۳۱ آیا تابعی مانند f بر بازه $[0, \infty)$ وجود دارد که دوبار مشتق پذیر بوده و در شرایط زیر صدق کند؟

$$f(0) = 0\,, f'(0) = 1\,, f(1) = 1 \qquad , \qquad \forall\, x > 0 \to f''(x) > 0$$

راهنمایی: از تابع $g(x) = f(x) - x$ کمک بگیرید.

حل از تابع $g(x)$ و دو شرط $f(0) = 0\,, f'(0) = 1$ استفاده کرده و نشان میدهیم $f(x) > x$ بوده و لذا $f(1) \neq 1$.

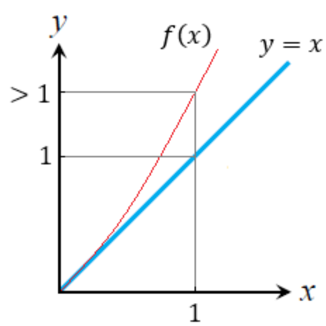
$$g(x) = f(x) - x \ \ ; \quad f(0) = 0 \to g(0) = 0 \ ; \ g'(x) = f'(x) - 1$$

با توجه به اینکه $f''(x) > 0$ لذا f' اکیدا صعودی است, بنابراین:

$x \geq 0 \to f'(x) > f'(0) = 1 \to f'(x) - 1 > 0 \to g'(x) > 0 \to$ تابع $g(x)$ اکیدا صعودی است

$$x \geq 0 \to g(x) > g(0) \to f(x) - x > f(0) - 0 = 0 \to f(x) > x \to f(1) \neq 1 \ \blacksquare$$

توضیح: تعبیر هندسی این سوال در شکل روبرو ارائه شده است:



۱–۶–۲- اثبات تساویها و نامساویها

مثال ۱–۳۲ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

$$cos^4x + sin^4x = \frac{1}{4}(3 + cos4x)$$

حل تابع $f(x)$ را بصورت تفاضل سمت چپ و راست عبارت بالا تعریف میکنیم:

$$f(x) = cos^4x + sin^4x - \frac{1}{4}(3 + cos4x)$$

$$f'(x) = -4sinxcos^3x + 4cosxsin^3x + sin4x = -2sin2xcos2x + sin4x = 0$$

بنابراین $f(x)$ تابعی ثابت است. برای یافتن این ثابت کافی است یک نقطه دلخواه را در تابع قرار دهیم. مثلا به سادگی دیده میشود که $f(0) = 0$. پس چون $f(x)$ ثابت است, لذا $f(x)$ همواره برابر صفر است. ■

مثال ۱-۳۳ درستی نامساویهای زیر را نشان دهید:

$$1)\ \ x \geq 0 \to x \geq sinx$$

$f(x) = x - sinx \to f'(x) = 1 - cosx \geq 0 \to f$ صعودی

$$x \geq 0 \to f(x) \geq f(0) \to x - sinx \geq 0 - sin0 = 0 \to x \geq sinx$$

$$2)\ \ 1 + x \geq 0 \to \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$$

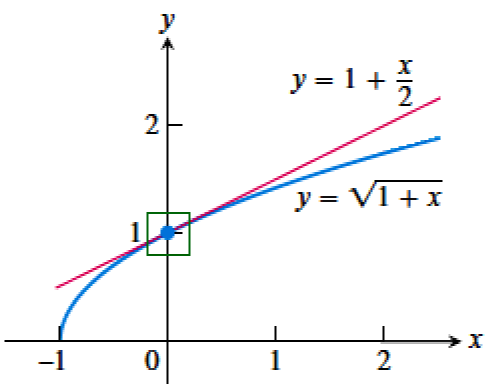
$$f(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} \to f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2}$$

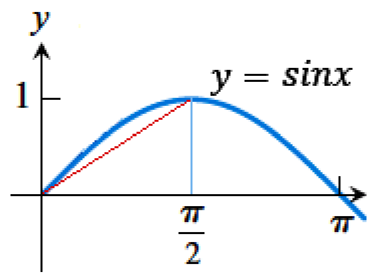
$$\begin{cases} 0 \leq x \to f'(x) \leq 0 \to f(x) \leq f(0) \to \sqrt{1+x} - 1 - \dfrac{x}{2} \leq \sqrt{1+0} - 1 - \dfrac{0}{2} = 0 \\ -1 < x < 0 \to f'(x) > 0 \to f(x) < f(0) \to \sqrt{1+x} - 1 - \dfrac{x}{2} < 0 \end{cases}$$

نقطه $x = -1$ در دامنه مشتق نمی‌باشد. لذا درستی رابطه را برای این نقطه بطور جداگانه بررسی می‌کنیم:

$$x = -1 \to \sqrt{1 + (-1)} < 1 + \frac{-1}{2}$$

روش دوم حل مساله آن است که در مثال ۱-۲۴ دیده شد که خطی شده تابع $y = \sqrt{1+x}$ در $a = 0$ بصورت $y = 1 + \frac{x}{2}$ می‌باشد (شکل سمت چپ). حال از آنجا که با محاسبه مشتق دوم دیده میشود تقعر این منحنی رو به پایین است, لذا خطی شده تابع در بالای نمودار تابع قرار می‌گیرد, یعنی $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.





$$3)\ \ 0 < x < \frac{\pi}{2} \to sinx > \frac{2}{\pi}x$$

می‌توان مشابه قبل با تعریف تابع $f(x) = sinx - \frac{2}{\pi}x$, درستی این نامساوی را نشان داد. برای این منظور:

$$f(x) = sinx - \frac{2}{\pi}x \to f'(x) = cosx - \frac{2}{\pi}\ \ ;\ f'(x) = 0 \to x = \alpha$$

$$\begin{cases} 0 < x \leq \alpha \to \dfrac{2}{\pi} \leq cosx \to f'(x) \geq 0 \xrightarrow{x>0} f(x) > f(0) \to sinx - \dfrac{2}{\pi}x > sin0 - \dfrac{2}{\pi}0 = 0 \\ \alpha < x < \dfrac{\pi}{2} \to cosx < \dfrac{2}{\pi} \to f'(x) < 0 \xrightarrow{x<\pi/2} sinx - \dfrac{2}{\pi}x > f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \to sinx - \dfrac{2}{\pi}x > 1 - \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

که هر دو به $sinx > \frac{2}{\pi}x$ منجر می‌شود. اما در اینجا راه ساده‌تر آن است که بگوییم منحنی سینوس در بازه فوق, تقعر رو به پایین داشته و لذا بالای خط واصل مبدا و نقطه $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ یعنی $y = \frac{2}{\pi}x$ قرار می‌گیرد (شکل بالا سمت راست).

$$4)\ \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \to 12\pi sinx \ge (\pi^2 + 24)x - 4x^3$$

$$f(x) = 12\pi sinx - (\pi^2 + 24)x + 4x^3 \to f''(x) = -12\pi(sinx - \frac{2}{\pi}x) \le 0$$

از آنجا که f تابعی پیوسته و $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ و نیز تقعر آن به سمت پایین است, لذا در این بازه بالای محور x می‌باشد. ■

۱-۶-۳- نامساوی کوشی-شوارتز

بعنوان یک نامساوی مهم که مشابه آن در بحث بردارها و توابع نیز وجود دارد نامساوی کوشی-شوارتز را بیان میکنیم. هر چند روش اثبات در اینجا با استفاده از مفاهیم مشتق بیان نشده است, اما در ادامه بحث نامساویها, بیان آن و روش اثبات خاص آن میتواند مفید باشد. می‌خواهیم نشان دهیم:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

تابع $f(x)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i x - b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i\right)x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \ge 0$$

که یک معادله درجه ۲ بر حسب x می‌باشد. از آنجا که $\forall x \in \mathbb{R}\ ; f(x) \ge 0$, پس با توجه به مثبت بودن ضریب x^2 , بایستی دلتای معادله کوچکتر یا مساوی صفر باشد که به اثبات رابطه می‌انجامد.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ ;\ \ f(x) \ge 0\ \to\ \Delta \le 0 \to 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \le 0 \to \text{حکم}\ \blacksquare$$

دقت شود این نامساوی در انتگرالها, فضای بردارها و فضای توابع نیز برقرار است. بعنوان نمونه در فضای بردارهای سه بعدی, ضرب داخلی دو بردار $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ و $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$ عبارت است از:

$$|\vec{a}.\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||cos\theta| \le |\vec{a}||\vec{b}| \to |\vec{a}.\vec{b}|^2 \le |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$$

$$\to (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

که همان نامساوی کوشی-شوارتز برای $n = 3$ می‌باشد.

مثال ۱-۳۴ حداکثر $f(t) = asint + bcost$ رابیابید.

$$(asint + bcost)^2 \le (a^2 + b^2)(sin^2t + cos^2t) \to |asint + bcost| \le \sqrt{a^2 + b^2}\ \ \blacksquare$$

تمرینات بخش ۱-۶ تمرینات ۵۷, ۶۴ و ۶۸ از بخش ۳-۱ کتاب

۱- فرض کنید $f(x) = x^m(x-1)^n$ که در آن m و n اعداد طبیعی بزرگتر از یک میباشند. ابتدا نشان دهید:

$$f'(x) = \left(\frac{m}{x} - \frac{n}{1-x}\right) f(x)$$

سپس ثابت کنید تابع فوق در نقطه‌ای مابین 0 و 1 دارای یک اکسترمم است. نشان دهید اگر n زوج باشد این نقطه ماکزیمم و اگر فرد باشد, مینیمم است.

۲- درستی نامساویهای زیر را نشان دهید:

$$1)\ \ 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad cosx > 1 - \frac{2}{\pi}x \quad , \quad tanx < \frac{\pi x}{\pi - 2x}$$

$$2)\ \ x \geq -1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} (1+x)^r \geq 1 + rx & r > 1 \ \ or \ \ r < 0 \\ (1+x)^r \leq 1 + rx & 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$ نامساوی برنولی

$$\rightarrow \sqrt[n]{1+x} \leq 1 + \frac{x}{n} \quad (n > 1)$$

$$3)\ \ 0 \leq p \leq 1 \ \ , \quad a,b > 0 \quad \rightarrow \quad (a+b)^p \leq a^p + b^p \quad ; \quad \underline{Hint:} \quad x = a/b$$

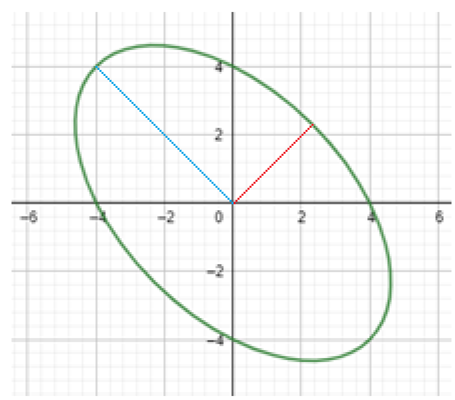
$$4)\ \ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \quad \rightarrow \quad sin2x > \frac{16x^2}{\pi^2}$$

۳- حداقل و حداکثر فاصله منحنی $x^2 + xy + y^2 = 16$ تا مبدا مختصات را بیابید.

راهنمایی: به جای $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ ساده‌تر است اکسترممهای تابع $g = x^2 + y^2$ را بدست آورده و از جواب جذر بگیرید.

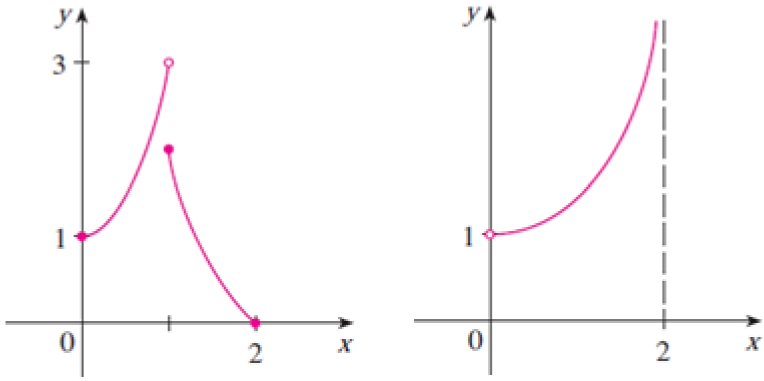
$$\begin{cases} g = f(x,y) = x^2 + y^2 \\ s.t. \\ x^2 + xy + y^2 = 16 \end{cases}$$

$$\underline{Ans}: \ \ d_{max} = \sqrt{32} \ ; \ \ d_{min} = \sqrt{32/3}$$



۱-۷- قضایای رل, لاگرانژ و کوشی (بخش ۳-۲ کتاب)

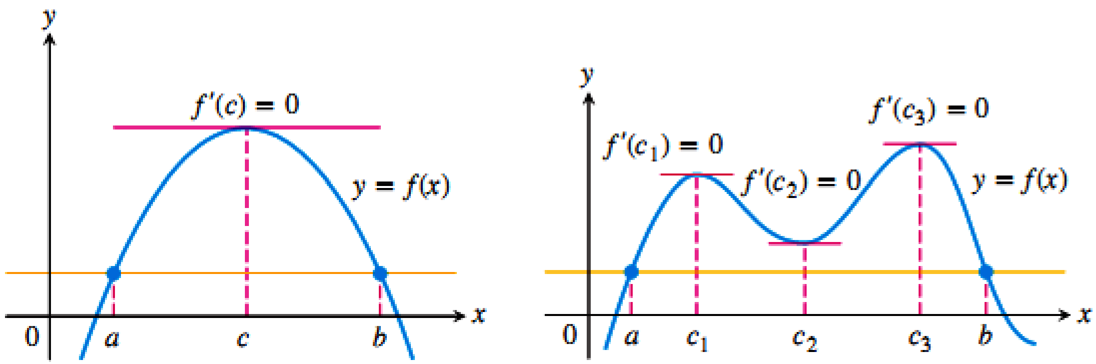
قبل از ورود به قضایای فوق لازم است به قضیه مقدار اکسترمم در توابع پیوسته اشاره گردد. بر طبق این قضیه اگر تابع f در بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد, آنگاه در نقاطی در داخل بازه $[a,b]$ مقدار اکسترمم مطلق خود را اختیار خواهد کرد. توجه شود هر دو شرط بسته بودن بازه و نیز پیوسته بودن, جهت تضمین وجود نقاط اکسترمم مطلق, الزامی است. چرا که مثلا در اشکال زیر در شکل سمت چپ, تابع بر بازه بسته $[0,2]$ تعریف شده است, اما مقدار ماکزیمم مطلق ندارد (هر چند برد آن $(0,3)$ میباشد), این



موضوع قضیه را نقض نمی‌کند, چرا که تابع پیوسته نیست. و یا در شکل سمت راست, باز هم تابع, ماکزیمم مطلقی ندارد. این هم قضیه را نقض نمی‌کند, چرا که تابع صرفا در بازه باز $(0,2)$ پیوسته است.

۱-۷-۱- قضیه رُل

قضیه: اگر تابع f در هر نقطه بازه $[a,b]$ پیوسته, در بازه (a,b) مشتق پذیر و نیز $f(a)=f(b)=k$ باشد, در اینصورت حداقل یک نقطه c در بازه (a,b) وجود دارد که: $f'(c)=0$.



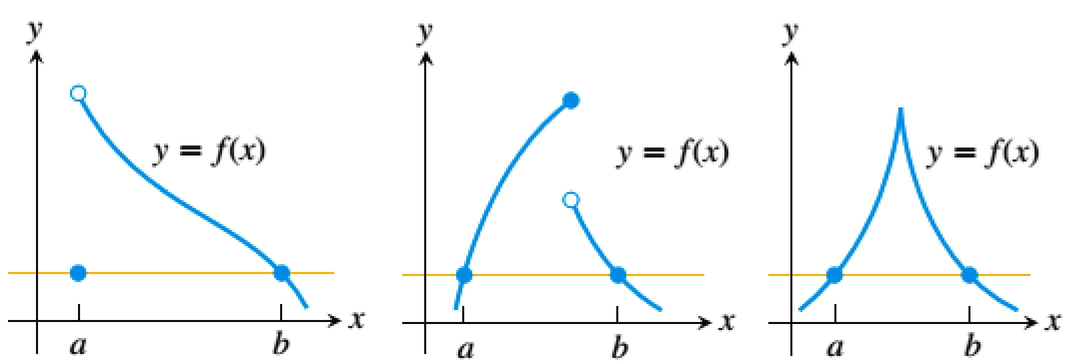
اثبات: از آنجا که تابع f پیوسته است, مقادیر اکسترمم مطلق خود را در $[a,b]$ اختیار می‌کند. نقاط اکسترمم فقط می‌توانند یکی از سه حالت زیر باشند:

۱- در نقاط درونی (a,b) میباشد که در آنها f' موجود نیست. (بنا به فرض مشتق‌پذیری این رد میشود)

۲- نقاط انتهایی بازه که در اینجا a و b میباشد. در این‌حالت اگر ماکزیمم و مینیمم هر دو در a یا b باشند, یعنی هر دو مقدار ماکزیمم و مینیمم برابر k میباشد و لذا تابع در کل بازه ثابت بوده و همه جا $f'=0$ میباشد.

۳- در نقاط درونی (a,b) میباشد که در آنها f' صفر است و لذا نقطه‌ای در بازه وجود دارد که $f'(c)=0$

اگر یکی از شرایط قضیه رل برقرار نباشد, ممکن است نتوان نقطه‌ای یافت که در آن $f'(c)=0$ باشد. مثلا:



مثال ۱-۳۵ تعداد ریشه‌های معادله $f(x) = x^3 + x - 1$ را بیابید.

حل درجه تابع فرد است لذا حداقل یک ریشه دارد. فرض کنیم دو ریشه داشته باشیم:

$$f(c_1) = f(c_2) = 0 \to \exists\, c \in (c_1, c_2)\ ;\ \ f'(c) = 3c^2 + 1 = 0 \to \text{تناقض}$$

ویا اینکه بگوییم چون مشتق مثبت است لذا همواره صعودی بوده و نمی‌تواند ریشه دیگری داشته باشد. ■

نتیجه قضیه رل: اگر تابع f در هر نقطه بازه $[a,b]$ پیوسته و در بازه (a,b) مشتق پذیر بوده و معادله $f'(x) = 0$ دارای m ریشه باشد, در اینصورت معادله $f(x) = 0$ حداکثر $m + 1$ ریشه دارد.

چرا که مثلا فرض کنید $f'(x) = 0$ دارای $m = 4$ ریشه باشد. حال اگر $f(x) = 0$ بخواهد ۶ ریشه داشته باشد, یعنی مابین هر دو ریشه, مشتق بایستی صفر باشد, لذا $f'(x) = 0$ دارای ۵ ریشه خواهد بود و نه ۴ ریشه. اینکه چرا عنوان شده است "حداکثر" هم برای این است که ممکن است مثلا $f(x) = 0$ دارای ۲ ریشه باشد و بین این دو ریشه, مشتق آن ۴ بار صفر شود. چرا که قضیه رل صرفا وجود یک نقطه را تضمین کرد, درحالیکه ممکن است مشابه شکلی که در صفحه قبل دیده شد تعداد این نقاط بیشتر هم باشد.

به این ترتیب در مثال فوق می‌توان گفت از آنجا که مشتق, هیچ ریشه‌ای ندارد, لذا خود تابع حداکثر یک ریشه خواهد داشت. از طرفی چون درجه تابع فرد است, لذا حداقل یک ریشه دارد. بنابراین دقیقا یک ریشه خواهیم داشت.

به کمک این نتیجه و قضیه بولزانو(مقدار میانی) کران تعداد ریشه ها بدست می‌آید.

مثال ۱-۳۶ تعداد ریشه‌های معادله $x^2 - xsinx = cosx$ را بیابید.

حل این مساله قبلا در مثال ۱-۶ با استفاده از قضیه بولزانو بررسی گردید. در اینجا مساله را به کمک قضیه رل حل می‌کنیم. مشابه قبل تابع $f(x)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 - xsinx - cosx \to f'(x) = x(2 - cosx)$$

معادله $f'(x) = 0$ تنها یک جواب $x = 0$ خواهد داشت. پس معادله $f(x) = 0$ حداکثر دو جواب دارد. حال از آنجا که $f(0)f(100) < 0$, پس حداقل یک ریشه در بازه فوق خواهیم داشت. و به سبب زوج بودن تابع قرینه این ریشه نیز جواب است. لذا دقیقا دو ریشه خواهد داشت. ■

مثال ۱-۳۷ نشان دهید هرگاه $\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ آنگاه معادله $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ در بازه $(0,1)$ حداقل دارای یک ریشه است.

حل با تعریف تابع $f(x)$ بصورت زیر خواهیم داشت:

$$f(x) = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots + \frac{1}{2} a_1 x^2 + a_0 x \quad ; \quad f(0) = f(1) = 0 \to \exists\, c \in (0,1)\ ;\ f'(c) = 0 \ ■$$

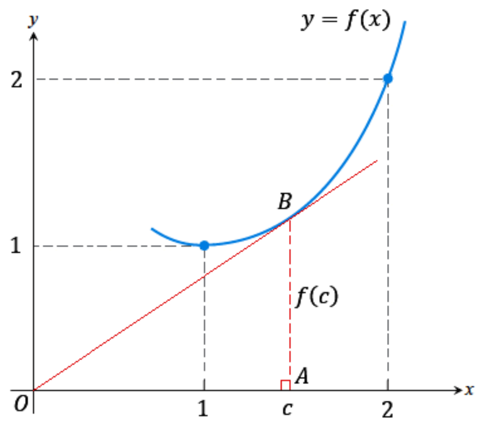
مثال ۱-۳۸ تعداد ریشه‌های معادله $\pi cos(\pi x) = 4(1 - 2x)$ را در بازه $0 < x < 0.5$ بیابید.

حل با تعریف تابع $f(x)$ بصورت زیر خواهیم داشت:

$$f(x) = \pi cos(\pi x) - 4(1-2x) \to f'(x) = 0 \to sin(\pi x) = \frac{8}{\pi^2}$$

از آنجا که $0 < x < 0.5$ لذا $0 < \pi x < \frac{\pi}{2}$, یعنی زاویه πx در ربع اول است. حال چون f' در بازه $[0,0.5]$ فقط یک جواب دارد, بنابراین f در این بازه حداکثر دو ریشه خواهد داشت. اما در انتهای بازه مقدار تابع صفر است زیرا $f(0.5) = 0$. لذا f در $(0,0.5)$ حداکثر میتواند یک ریشه داشته باشد. از آنجا که $f(0.25)f(0) < 0$ پس لذا f در $(0,0.25)$ حداقل یک ریشه دارد. لذا دقیقا یک ریشه خواهیم داشت. راه دوم با ترسیم منحنی و یافتن نقاط تلاقی است. ■

مثال ۱–۳۹ فرض کنید تابع f بر بازه $[1,2]$ پیوسته و بر بازه $(1,2)$ مشتق‌پذیر باشد. اگر $f(1) = 1$ و $f(2) = 2$ باشد , نشان دهید نقطه‌ای مانند $c \in (1,2)$ وجود دارد بطوریکه مماس بر نمودار تابع f در این نقطه, از مبدا مختصات عبور می‌کند. (راهنمایی: از تابع $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ استفاده کنید)



حل بهتر است در ابتدا ببینیم بایستی به دنبال اثبات چه رابطه‌ای باشیم. با توجه به شکل زیر بایستی بتوان نشان داد:

$$\exists\ c \in (1,2)\ :\ tan(AOB) = \frac{AB}{OA} \to f'(c) = \frac{f(c)}{c}$$

برای اثبات رابطه بالا, از آنجا که $1 = \frac{f(2)}{2} = \frac{f(1)}{1}$ میباشد , لذا تابع $h(x)$را بصورت $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ تعریف میکنیم تا در واقع تابعی مانند h ساخته باشیم که برای آن $h(1) = h(2)$ باشد.

پس این تابع در شرایط قضیه رل صدق میکند. درنتیجه عدد $c \in (1,2)$ وجود دارد بگونه‌ای که:

$$h'(c) = 0 \to \frac{cf'(c) - f(c)}{c^2} = 0 \to \exists\ c \in (1,2)\ :\ f(c) = cf'(c)$$

به عبارتی نقطه $(c, f(c))$ روی خط مماس $y = f'(c)x$ قرار دارد که از مبدا مختصات نیز میگذرد. ■

توضیح: ممکن است شخصی تابع $g(x)$ را بصورت $h(x) = f(x) - x$ درنظر بگیرد. دقت شود در اینصورت نیز $h(1) = h(2)$ خواهد شد. پس این تابع در شرایط قضیه رل صدق میکند. درنتیجه عدد $c \in (1,2)$ وجود دارد بگونه‌ای که:

$$h'(c) = 0 \to f'(c) - 1 = 0 \to \exists\ c \in (1,2)\ :\ f'(c) = 1$$

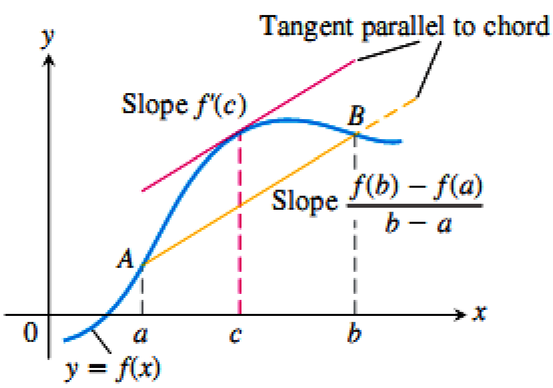
این نتیجه هم یک نتیجه درست است. یعنی نشان دادیم که نقطه‌ای مانند عدد c وجود دارد که شیب مماس در آن نقطه برابر 1 باشد. هرچند این نتیجه آن چیزی که در صورت سوال خواسته شده است نمی‌باشد, اما دقیقا همان موردی است که در قضیه بعد به آن می‌پردازیم. به عبارتی وجود دارد $c \in (1,2)$ که در آن نقطه, شیب خط مماس با شیب خط واصل بین دو نقطه (در اینجا $g(x) = x$) یکی باشد.

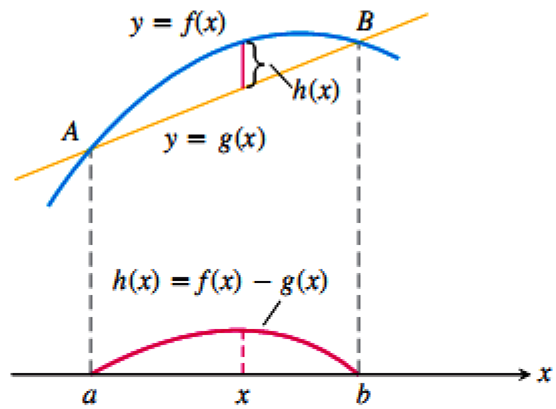
این روش در واقع یکی از ساده‌ترین روشهای ساختن تابعی است که برای آن $h(a) = h(b)$ باشد. به عبارتی تابع $f(x)$ را از خط واصل بین دونقطه (در اینجا $g(x) = x$) کم میکنیم تا برای این تابع جدید $h(a) = h(b)$ گردد تا بتوانیم قضیه رل را برای آن بکار گیریم. ■

۱-۷-۲- قضیه مقدار میانگین در مشتق (لاگرانژ)

قضیه: اگر تابع f در هر نقطه بازه $[a,b]$ پیوسته و در بازه (a,b) مشتق پذیر باشد, در اینصورت حداقل یک نقطه c در بازه (a,b) وجود دارد که شیب خط مماس در این نقطه با شیب خط واصل بین دو نقطه یکی باشد. به عبارتی:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$





اثبات: در ابتدا بدون آنکه وارد اثبات ریاضی قضیه شویم, می‌توان گفت چنانچه محور x بگونه‌ای دوران کند که موازی خط واصل بین دو نقطه باشد, آنگاه دقیقا به قضیه رل خواهیم رسید. و یا مشابه توضیح مثال قبل, تابع $f(x)$ را از معادله خطی که A را به B وصل میکند(تابع $g(x)$) کم کنیم تا $h(a)=h(b)$ گردد. به عبارتی:

$$g(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\quad ;\quad h(x)=f(x)-g(x)\rightarrow h(a)=h(b)=0$$

$$\exists c\in(a,b)\ ;\ h'(c)=0\rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

راه دوم اثبات: تابع $h(x)=f(x)-rx$ را در نظر میگیریم که در آن r یک عدد ثابت بوده و آنرا بگونه‌ای می‌یابیم که منجر به برقراری تساوی $h(a)=h(b)$ گردد.

$$h(a)=h(b)\rightarrow f(a)-ra=f(b)-rb\rightarrow r=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

از آنجا که تابع f بازه $[a,b]$ پیوسته و در بازه (a,b) مشتق پذیر است, تابع $h(x)$ نیز اینگونه خواهد بود. لذا طبق قضیه رل:

$$\exists c\in(a,b)\ ;\ h'(c)=0\rightarrow f'(c)-r=0\rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\quad\blacksquare$$

در انتها لازم بذکر است که در بحث ریاضی ۱ با سه قضیه مقدار میانگین روبرو هستیم. یکی در پیوستگی, یکی در مشتق و دیگری در انتگرال. اولی در بخش ۱-۲ (پیوستگی), با عنوان قضیه مقدار میانی مطرح شد. در اینجا نیز این قضیه برای مشتق بررسی گردید و در بخش ۳-۲-۲ آنرا برای انتگرال خواهیم دید.

بدیهی است در حالت خاص که $f(a)-f(b)=k$ باشد به همان قضیه رل خواهیم رسید. یک نکته مهم در این قضیه و نیز قضیه رل آن است که این قضیه صرفا وجود حداقل یک c را تضمین میکند و هیچ اطلاع دیگری از آن بدست نمی‌دهد بجز آنکه در بازه (a,b) قرار دارد. در بحث بسط چندجمله‌ای تیلور خواهیم دید همین c در فرم باقیمانده بسط نیز ظاهر خواهد شد.

مثال ۱-۴۰ نشان دهید:

$$|\sin b-\sin a|\le |b-a|$$

حل با تعریف تابع $f(x)=\sin x$ از آنجا که این تابع در هر زیر بازه دلخواه $\mathbb{R}$ در شرایط قضیه میانگین صدق می‌کند, لذا:

$$f(x)=\sin x\to \exists c\in(a,b)\ ;\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\frac{\sin b-\sin a}{b-a}=\cos c\to |\sin b-\sin a|=|\cos c||b-a|\le |b-a|\ \blacksquare$$

<u>نتیجه قضیه لاگرانژ</u>: اگر f' در بازه $[a,b]$ در شرایط لاگرانژ صدق کرده و کراندار باشد (یعنی $\alpha\le f'(x)\le\beta$) آنگاه:

$$\alpha\le f'(c)\le\beta\to\alpha(b-a)\le f(b)-f(a)\le\beta(b-a)$$

مثال ۱-۴۱ فرض کنید تابع $f(x)$ در بازه $[-2,1]$ پیوسته و در $(-2,1)$ مشتق پذیر بوده و نیز:

$$f(1)=2\ ;\ f'(x)=\frac{1}{x^4+x^2+1}$$

در اینصورت حدود $f(-2)$ را بیابید.

$$\alpha=\frac{1}{21}\ ;\ \beta=1\ \to\frac{1}{21}\big(1-(-2)\big)\le f(1)-f(-2)\le 1\big(1-(-2)\big)\to -1\le f(-2)\le\frac{13}{7}\ \blacksquare$$

مثال ۱-۴۲ اگر تابع f در شرط $f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}$ صدق کند و نیز $f(0)=1$ باشد, نشان دهید:

$$\forall\ x\ge 0\ ;\ 1<f(x)\le x+1$$

حل با توجه به تعریف $f'(x)$ بدیهی است $f'(x)>0$ در نتیجه:

$$f'(x)>0\ ;\ \ x\ge 0\ \to f(x)>f(0)=1$$

و یا می‌توان گفت از آنجا که در بازه $[0,x]$ تابع در شرایط قضیه لاگرانژ صدق میکند و حداقل $f'(x)$ برابر $\alpha=0$ است, لذا:

$$\underbrace{\alpha}_{0}(x-0)<f(x)-\underbrace{f(0)}_{1}\to f(x)>1$$

همچنین از آنجا که $f(x)>1$ بدست آمد, لذا حداکثر $f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}$ برابر $\beta=1$ خواهد شد. در نتیجه:

$$f(x)-\underbrace{f(0)}_{1}\le\underbrace{\beta}_{1}(x-0)\to f(x)\le x+1\ \blacksquare$$

مثال ۱-۴۳ با استفاده از قضیه لاگرانژ, حاصل حد زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x\to+\infty}[\sin((x+1)^k)-\sin(x^k)]\quad ;\quad 0<k<1$$

حل با نوشتن قضیه لاگرانژ برای تابع $f(x)=\sin(x^k)$ در بازه $(a,b)=(x,x+1)$ خواهیم داشت:

$$\exists c\in(a,b)\to f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\exists c\in(x,x+1)\to kc^{k-1}\cos(c^k)=\frac{\sin((x+1)^k)-\sin(x^k)}{(x+1)-x}$$

$$\rightarrow sin((x+1)^k) - sin(x^k) = kc^{k-1}cos(c^k)$$

اگر $x \rightarrow +\infty$, از آنجا که $c \in (x, x+1)$, لذا $c \rightarrow +\infty$. چون $cos(c^k)$ کراندار و $k-1<0$ است, پس حد عبارت سمت راست در بینهایت صفر بوده و لذا حد موردنظر نیز صفر است. ■

❋ **مثال ۱-۴۴** با بکارگیری قضیه لاگرانژ برای تابع $f(x) = x^k$, کلیه جوابهای حقیقی معادله $2^k + 5^k = 3^k + 4^k$ را بیابید.

حل بدیهی است یک جواب $k = 0$ میباشد. معادله را به شکل زیر نوشته و از تابع $f(x) = x^k$ استفاده می‌کنیم.

$$5^k - 4^k = 3^k - 2^k \quad ; \quad f(x) = x^k \rightarrow f'(x) = kx^{k-1}$$

این تابع در شرایط قضیه لاگرانژ صدق میکند, لذا:

$$\begin{cases} \exists c_1 \in (4,5) \ ; \ 5^k - 4^k = kc_1^{k-1}(5-4) \\ \exists c_2 \in (2,3) \ ; \ 3^k - 2^k = kc_2^{k-1}(3-2) \end{cases} \rightarrow \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{k-1} = 1 \xrightarrow{c_1 \neq c_2} k = 1 \ ■$$

۱-۷-۳- قضیه کوشی(تعمیم لاگرانژ)

قضیه: اگر توابع f و g در شرایط قضیه میانگین صدق کرده و برای هر $x \in (a,b)$ بدانیم $g'(x) \neq 0$. در اینصورت حداقل یک نقطه c در بازه (a,b) وجود دارد که:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

اثبات: تابع $h(x) = f(x) - rg(x)$ را در نظر میگیریم که در آن r یک عدد ثابت بوده و آنرا بگونه‌ای می‌یابیم که منجر به تساوی $h(a) = h(b)$ گردد.

$$h(a) = h(b) \rightarrow f(a) - rg(a) = f(b) - rg(b) \rightarrow r = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

از آنجا که توابع f و g در بازه $[a,b]$ پیوسته و در بازه (a,b) مشتق پذیرند, تابع $h(x)$ نیز اینگونه خواهد بود. بنابراین طبق قضیه رل:

$$\exists c \in (a,b) \ ; \ h'(c) = 0 \rightarrow f'(c) - rg'(c) = 0 \rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

بدیهی است در حالت خاص $g(x) = x$, قضیه کوشی به قضیه لاگرانژ منجر میشود. ممکن است سوال شود چنانچه دوبار قضیه لاگرانژ را برای دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ بنویسیم و آن‌دو را به هم تقسیم کنیم, قضیه کوشی بدست می‌آید. این روش اثبات نادرست است, چرا که نباید c بکار رفته در لاگرانژ برای تابع $f(x)$ با c بکار رفته برای تابع $g(x)$ یکسان درنظر گرفته شود.

یکی از کاربردهای مهم قضیه کوشی, استفاده از آن در اثبات قاعده هوپیتال است که در بخش ۲-۶ خواهیم دید.

تمرینات بخش ۱-۷ تمرینات ۱۸, ۲۴, ۲۶ و ۲۸ از بخش ۳-۲ کتاب

۱- فرض کنید تابع$f(x)$ در بازه $[0,1]$ پیوسته و در $(0,1)$ مشتق پذیر باشد. نشان دهید:

$$\exists c \in (0,1) \;\; \rightarrow \;\; c^2 f'(c) + 2cf(c) = f(1)$$

راهنمایی: از تابع $g(x) = x^2 f(x)$ در قضیه لاگرانژ استفاده کنید.

۲- فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ دارای مشتق مرتبه دوم باشد, بطوریکه $f(-1) = -2$ ، $f(0) = 0$ و $f(1) = 2$. نشان دهید $c \in (-1,1)$ موجود است که $f''(c) = 0$.

۳- فرض کنید تابع f دوبار مشتق پذیر بوده و $f(2) = 5$, $f(5) = 2$ باشد.

الف: نشان دهید, حداقل یک نقطه c در بازه $(2,5)$ وجود دارد بگونه‌ایکه $f(c) = c$ باشد.

ب: با تعریف g بصورت $g(x) = f(f(x))$ نشان دهید حداقل یک نقطه c در بازه $(2,5)$ وجود دارد که $g''(c) = 0$ باشد.

۴- فرض کنید تابع f در $\mathbb{R}$ مشتق مرتبه دوم پیوسته داشته و نیز:

$$\forall\, x\, ;\; f''(x) \geq 0 \quad ; \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R} \;\rightarrow\; a < f(b) + f'(b)$$

نشان دهید: $a < f(b+1)$

۵- فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$در بازه $[0,1]$ پیوسته و در$(0,1)$ مشتق پذیر باشد. همچنین $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{3}$, نشان دهید:

$$\exists\; c_1, c_2, c_3 \in (0,1) \;\; \rightarrow \;\; f'(c_1) + f'(c_2) + f'(c_3) = 1$$

۶- ابتدا نشان دهید:

$$\exists c \in (a,b) \;\; ; \; cotgc = \frac{sinb - sina}{cosa - cosb}$$

سپس با انتخاب $a = 0$ و $b = x$ نشان دهید $c = x/2$. آیا نتیجه برای $x < 0$ نیز معتبر است؟

۷- فرض کنید تابع f بر بازه $[a,b]$ که شامل نقطه صفر نیست پیوسته و در بازه (a,b) مشتق پذیر باشد, نشان دهید:

$$\exists c \in (a,b) \;\; ; \; \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} = f(c) - cf'(c)$$

راهنمایی: رابطه سمت چپ را بصورت $\frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$ بازنویسی کرده و سپس $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ و $G(x) = \frac{1}{x}$ را انتخاب کرده, قضیه کوشی را بکار بگیرید.

۱-۸- بهینه سازی (بخش ۳-۷ کتاب)

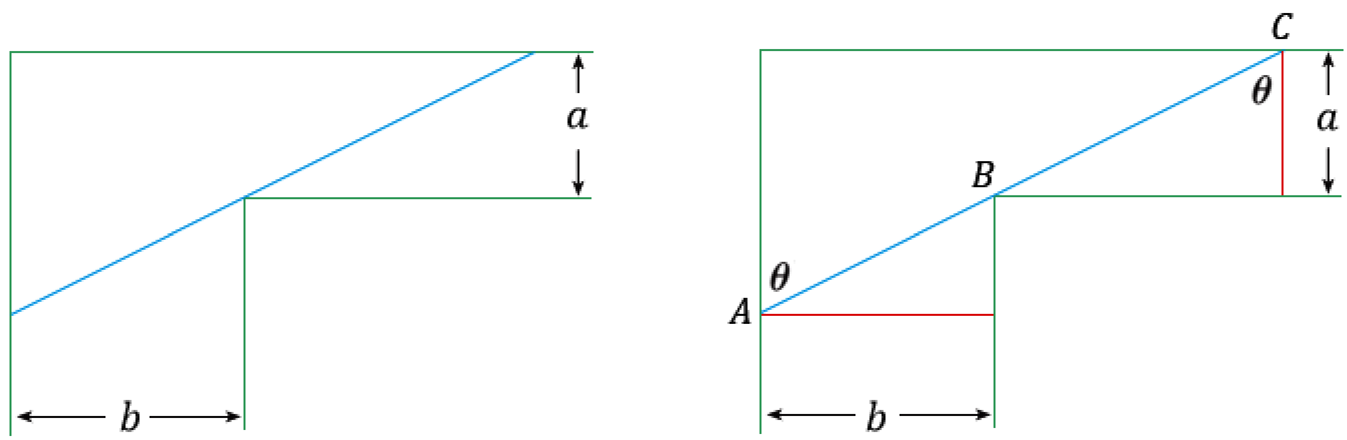
یکی از مهمترین کاربردهای مشتق را میتوان حل مسائل بهینه سازی دانست, چرا که عملا به یافتن مقادیر اکسترمم یک تابع منجر خواهد شد. مهمترین نکته در این نوع مسائل فرمول بندی مساله است. یعنی شناسایی مجهولات و سپس تعیین تابعی که قرار است اکسترمم شود. در ادامه با ارائه چند مثال نحوه برخورد با این نوع مسائل را خواهیم دید.

مثال ۱–۴۵ قطاعی از دایره با شعاع r و زاویه مرکزی θ (بر حسب رادیان) مفروض است (r و θ ثابت نیستند). چنانچه محیط این قطاع ثابت باشد, مساحت قطاع به ازای چه مقدار θ حداکثر است؟

$$S(r,\theta)=\frac{1}{2}r^2\theta \xrightarrow{2r+r\theta=k\to r=\frac{k}{2+\theta}} S(\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{k}{2+\theta}\right)^2\theta \to \frac{dS}{d\theta}=0\to\theta=2\ rad$$

دقت شود که $S(r,\theta)=\frac{1}{2}r^2\theta$ شامل دو متغیر است و با استفاده از رابطه $2r+r\theta=k$ یکی از متغیرها را حذف کردیم تا S تابعی یک متغیره گردد. در انتها برای اینکه مطمئن شویم این نقطه مساحت حداکثر است(و نه حداقل) بایستی نشان داد که مشتق دوم تابع S نسبت به θ در نقطه $\theta=2$ منفی است که به راحتی می‌توان آنرا کنترل کرد. در اینصورت شعاع دایره نیز برابر $r=\frac{k}{2+\theta}=\frac{k}{4}$ بدست می‌آید. ■

مثال ۱–۴۶ مطلوب است محاسبه طول بلندترین نردبانی که می‌توان از گوشه یک راهرو مطابق شکل زیر عبور داد. فرض کنید نردبان موازی با سطح زمین حمل می‌گردد. (شکل سمت چپ)



حل مطابق شکل بالا(سمت راست) بایستی حداکثر طول AC را بیابیم. با انتخاب θ بعنوان مجهول مساله, این طول را بر حسب آن بیان کرده و سپس ماکزیمم می‌کنیم. با استفاده از شکل خواهیم داشت:

$$AC=AB+BC=\frac{b}{sin\theta}+\frac{a}{cos\theta}=f(\theta)\to f'(\theta)=\frac{-bcos\theta}{sin^2\theta}+\frac{asin\theta}{cos^2\theta}=0\to tan^3\theta=\frac{b}{a}$$

$$\to tan\theta=\sqrt[3]{b/a}\to\frac{1}{cos^2\theta}=1+tan^2\theta=1+\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}\to\frac{1}{cos\theta}=\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}}{a^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{1}{sin\theta}=\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}}{b^{\frac{1}{3}}}\to AC=b\frac{1}{sin\theta}+a\frac{1}{cos\theta}=b\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}}{b^{\frac{1}{3}}}+a\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}}{a^{\frac{1}{3}}}=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

می‌توان با محاسبه مشتق دوم نشان داد این طول, حداکثر است. راه ساده‌تر آن است که بگوییم طول حداقل برابر صفر است, لذا این جواب بایستی حداکثر را بدهد. ■

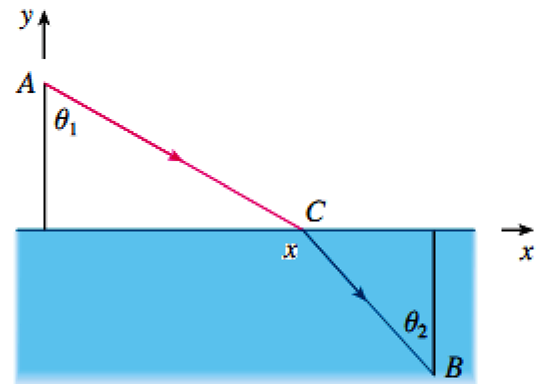
مثال ۱-۴۷ رابطه شکست نور (قانون اسنل) را ثابت کنید.

حل همواره تشخیص تابعی که بایستی مینیمم شود مهم است. مطابق اصل فرما, پرتوهای نور برای رفتن از A به B مسیری را انتخاب می‌کنند که کمترین زمان ممکن را داشته باشد. لذا در اینجا تابع هدف, زمان رسیدن پرتو از A تا B است. حال با انتخاب یک دستگاه مختصات مطابق شکل زیر و منظور کردن مکان نقطه C بعنوان مجهول مساله (x) خواهیم داشت:

$$f(x) = \frac{AC}{v_1} + \frac{BC}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2 + y_A^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}{v_2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y_A^2}}}{v_1} = \frac{\frac{x_B-x}{\sqrt{(x_B-x)^2+y_B^2}}}{v_2}$$

$$\rightarrow \frac{sin\theta_1}{v_1} = \frac{sin\theta_2}{v_2} \rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{sin\theta_1}{sin\theta_2} \quad \blacksquare$$



می‌توان با محاسبه مشتق دوم نشان داد این زمان, حداقل است.

<u>چند نکته:</u>

فرض کنید $x_1, \cdots, x_n$متغیرهای <u>مثبت</u> باشند, در اینصورت:

۱-اگر مجموع این متغیرها عددی ثابت باشد, حاصل ضرب $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ با شرط $(\alpha_i \geq 0)$ وقتی <u>حداکثر</u> است که:

$$\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \cdots = \frac{x_n}{\alpha_n} \qquad (1)$$

بعنوان نمونه میتوان مثال ۱-۴۵ را با استفاده از این رابطه ساده‌تر حل کرد:

$$2r + r\theta = k \quad ; \quad S = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{4}(2r)(r\theta) \xrightarrow{for\ S_{max}} \frac{2r}{1} = \frac{r\theta}{1} \rightarrow \theta = 2$$

<u>دوگان قضیه بالا</u>: اگر حاصل ضرب $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ $(\alpha_i \geq 0)$ ثابت باشد, مجموع متغیرها وقتی <u>حداقل</u> است که شرط (1) برقرار باشد.

۲- اگر حاصلضرب این متغیرها عددی ثابت باشد, حاصل جمع $x_1^{\alpha_1} + x_2^{\alpha_2} + \cdots + x_n^{\alpha_n}$ $(\alpha_i \geq 0)$ وقتی <u>حداکثر</u> است که شرط (1) برقرار باشد, و دوگان آن.

۳- اگر مجموع مربعات این متغیرها عددی ثابت باشد, حاصل جمع $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ وقتی <u>حداکثر</u> است که شرط (1) برقرار باشد, و دوگان آن.

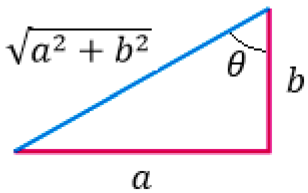
بعنوان نمونه برای محاسبه حداکثر $f(\theta) = sin\theta + cos\theta$ در بازه $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, از آنجا که مجموع مربعات این متغیرها عددی ثابت است (یک متغیر $sint$ و متغیر دیگر $cost$ منظور شده است), در نتیجه:

$$sin^2\theta + cos^2\theta = 1 \xrightarrow{\text{برای } f_{max}} \frac{sin\theta}{1} = \frac{cos\theta}{1} \rightarrow tan\theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow f_{max} = \sqrt{2}$$

تعمیم: حداکثر $f(\theta) = asin\theta + bcos\theta$ در بازه $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{sin\theta}{a} = \frac{cos\theta}{b} \to tan\theta = \frac{a}{b} \to f_{max} = a\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + b\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{a^2+b^2}$$

برای محاسبه $sin\theta$ و $cos\theta$ بر حسب $tan\theta$ یا می‌توان از روابط مثلثاتی استفاده کرد و یا ساده‌تر است از شکل زیر کمک بگیریم:



$$tan\theta = \frac{a}{b} \to sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

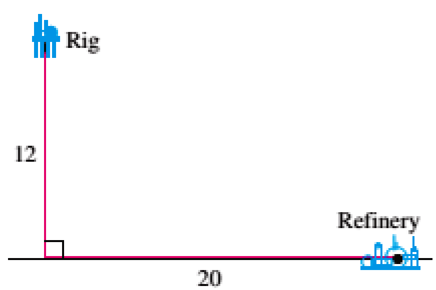
تمرینات بخش ۱-۸ تمرینات ۲۴, ۴۱ و ۵۶ از بخش ۳-۷ کتاب

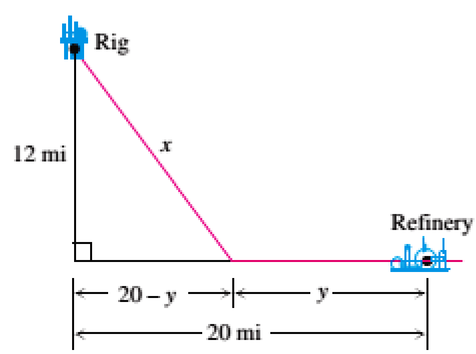
۱- می‌خواهیم یک سیلو به شکل استوانه که رویش یک نیمکره قرار دارد بسازیم(قاعده به حساب نمی‌آید). هزینه ساخت سطح نیمکره به ازای هر واحد سطح, دو برابر هزینه ساخت سطح استوانه است. اگر هدف تامین حجم ثابتی مانند V بوده و بخواهیم کمترین هزینه ساخت را داشته باشیم, ابعاد سیلو چه اندازه خواهد بود. از ضخامت سیلو و ضایعات ساخت صرفنظر می‌شود.

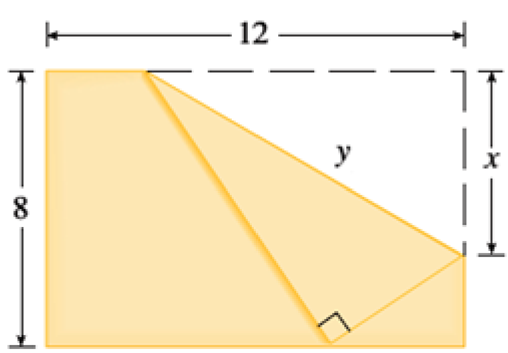
$$\underline{Ans}:\ V = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 \to h = \frac{V}{\pi r^2} - \frac{2r}{3} \quad ; \quad C = 2\pi r h + 4\pi r^2 = 2\pi r\left(\frac{V}{\pi r^2} - \frac{2r}{3}\right) + 4\pi r^2$$

$$\frac{dC}{dr} = 0 \to r = \left(\frac{3V}{8\pi}\right)^{1/3} \quad ; \quad h = \left(\frac{3V}{\pi}\right)^{1/3} \quad ; \quad \frac{d^2C}{dr^2} > 0$$

۲- فرض کنید بخواهیم یک چاه نفت را که در فاصله 12 مایلی ساحل است با خط لوله به یک تصفیه خانه در ساحل که در 20 مایلی امتداد ساحل قرار دارد متصل کنیم. اگر لوله‌های زیر آب برای هر مایل 500 هزار دلار و لوله‌های ساحلی 300 هزار دلار هزینه داشته باشند, چه ترکیبی از این‌دو کمترین هزینه اتصال را خواهد داشت. $\underline{Ans}:\ y = 11\ \ (mi)$



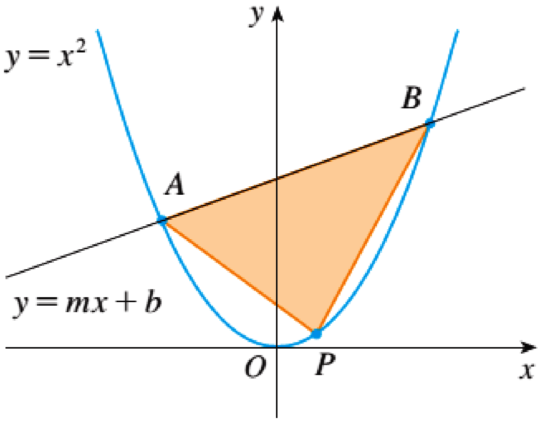


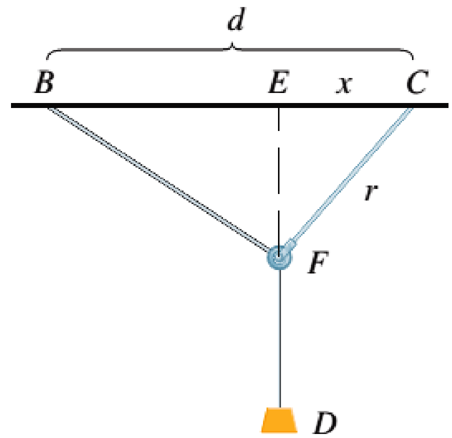


۳- گوشه بالا سمت راست کاغذی به ابعاد 8×12 را مانند شکل روبرو تا کرده‌ایم تا روی ضلع پایینی قرار بگیرد. مقدار x را چقدر انتخاب کنیم تا طولِ خط‌تا (y) مینیمم گردد.

$\underline{Ans}:\ x = 6$

۴- خط $y = mx + b$ سهمی $y = x^2$ را در نقاط A و B قطع می‌کند (شکل زیر سمت چپ) . نقطه P روی قوس AOB از سهمی را چنان تعیین کنید که مساحت مثلث PAB حداکثر باشد. جواب: $x_P = \frac{1}{2}m$





٭ ۵- قرقره‌ای توسط طنابی به طول r به نقطه C در سقف یک اتاق وصل شده است (شکل بالا سمت راست). از نقطه B نیز طنابی از قرقره در نقطه F عبور کرده و وزنه W را تحمل میکند. بر طبق نظریه هوپیتال, اگر سیستم در حال تعادل باشد, آنگاه $|ED|$ حداکثر است. اگر طول طناب BFD برابر l بوده و $d > r$ باشد, نشان دهید در وضعیت تعادل, $x = \frac{r}{4d}\left(r + \sqrt{r^2 + 8d^2}\right)$ بوده و به مقادیر W و l بستگی ندارد.

تمرینات ۳۴ , ۳۵ , ۴۳ و ۶۶ از بخش مرور مطالب فصل ۳

تمرینات ۳, ۸ , ۱۴و ۲۰ از بخش مسائل اضافی فصل ۳