۷- اعداد مختلط (ضمیمه H کتاب)

۷-۱- تعریف عدد مختلط

۷-۱-۱- معرفی میدان اعداد مختلط

قبلا دیده شد هر عدد حقیقی در تناظر یک به یک با مجموعه نقاط یک خط راست است. حال این خط را به صفحه xy تعمیم میدهیم و هر نقطه این صفحه را متناظر یک عدد (a,b) در نظر میگیریم و برعکس. بدیهی است اگر عدد a روی محور x قرار داشته باشد, آنرا بایستی با $(a,0)$ نمایش داد. بنابراین نقطه مورد نظر را هم میتوان با a و هم با $(a,0)$ نمایش داد. بنابراین تعمیمی از اعداد حقیقی را تعریف کرده‌ایم. برای این مجموعه اعداد, بایستی تعاریفی ارائه شود که بتوان بر روی آن, حساب این اعداد جدید را بنا نهاد. بدیهی است تعاریف بایستی بگونه‌ای باشند که وقتی در حالت خاص نقطه روی محور x قرار گرفت, به همان تعریف موجود در مجموعه اعداد حقیقی منجر شود. با این مقدمه تعریف زیر ارائه میشود.

فرض کنید $\mathbb{C}$ یک مجموعه ناتهی بصورت $\mathbb{C} = \{(a,b)|\ a,b \in \mathbb{R}\}$ باشد, هر عضو این مجموعه را یک عدد مختلط می‌گوییم هرگاه تعریف تساوی, جمع و ضرب بصورت زیر باشد:

$$(a,b) = (c,d) \leftrightarrow a = c\,; b = d$$
$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b) \times (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

در این تعریف جزء اول زوج مرتب را قسمت حقیقی عدد مختلط و جزء دوم را قسمت موهومی آن مینامیم.

به سادگی میتوان کنترل کرد اگر نقطه مورد نظر روی محور حقیقی قرار گیرد تعریف بالا با تعریف تساوی, جمع و ضرب اعداد حقیقی یکسان است. چرا که با درنظر گرفتن $a = (a,0)$ میتوان درستی هر یک را بررسی کرد:

$$(a,0) = (b,0) \leftrightarrow a = b$$
$$(a,0) + (b,0) = (a+b, 0+0) \rightarrow a + b = (a+b, 0)$$
$$(a,0) \times (b,0) = (ab - 0\times 0, a\times 0 + 0\times b) \rightarrow ab = (ab, 0)$$

حال نشان میدهیم با این تعریف, مجموعه اعداد مختلط همراه با دو عمل جمع و ضرب, در شش خاصیت زیر صدق می‌کند.

۱- خاصیت بسته بودن: عمل $*$ روی مجموعه A دارای خاصیت بسته بودن است هرگاه:

$$\forall\ a,b \in A\quad ;\quad a * b \in A$$

واضح است این خاصیت هم برای عمل جمع و هم ضرب(با تعاریفی که ارائه شد) برقرار است. یعنی چه جمع و چه ضرب دو عدد مختلط خود عددی مختلط است.

۲- خاصیت جابجایی(تعویض‌پذیری): عمل $*$ روی مجموعه A دارای خاصیت جابجایی است هرگاه:

$$\forall\ a,b \in A\quad ;\quad a * b = b * a$$

مثلا برای اثبات این خاصیت برای عمل جمع میتوان نوشت:

$$a = (a_1, a_2)\ ;\ \ b = (b_1, b_2)$$
$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2) = b + a$$

۳- خاصیت شرکت‌پذیری: عمل $*$ روی مجموعه A دارای خاصیت شرکت‌پذیری است هرگاه:

$$\forall\, a,b,c \in A \quad ; \quad a*(b*c)=(a*b)*c$$

مثلا برای اثبات این خاصیت برای عمل ضرب میتوان نوشت:

$$a=(a_1,a_2)\ ;\quad b=(b_1,b_2)\ \ ;\ \ c=(c_1,c_2)$$
$$a(bc)=(a_1,a_2)(b_1c_1-b_2c_2,b_1c_2+b_2c_1)$$
$$=\big(a_1(b_1c_1-b_2c_2)-a_2(b_1c_2+b_2c_1),a_1(b_1c_2+b_2c_1)+a_2(b_1c_1-b_2c_2)\big)$$
$$=\big((a_1b_1-a_2b_2)c_1-(a_1b_2+a_2b_1)c_2,(a_1b_2+a_2b_1)c_1+(a_1b_1-a_2b_2)c_2\big)$$
$$=(a_1b_1-a_2b_2,a_1b_2+a_2b_1)(c_1,c_2)=(ab)c$$

۴- خاصیت پخشی(توزیع‌پذیری): عمل $*$ نسبت به عمل $\circ$ دارای خاصیت پخشی(از دو طرف) است هرگاه:

$$\forall\, a,b,c \in A \quad ; \begin{cases} a*(b\circ c)=(a*b)\circ(a*c) \\ (b\circ c)*a=(b*a)\circ(c*a) \end{cases}$$

مشابه اثبات قسمت قبل در اینجا نیز میتوان نشان داد عمل $\times$ نسبت به عمل $+$ در مجموعه اعداد مختلط دارای این خاصیت نیز میباشد.

۵- وجود عضو بی‌اثر(همانی): اگر در A عضوی مانند e وجود داشته باشد بگونه‌ایکه:

$$\forall\, a\in A \quad ; \quad a*e=e*a=a$$

این عضو را عضو بی‌اثر(همانی) عمل $*$ در A مینامیم. در مجموعه اعداد مختلط از آنجا که:

$$(0,0)+(a,b)=(a,b)+(0,0)=(a+0,b+0)=(a,b)$$
$$(1,0)(a,b)=(a,b)(1,0)=(a\times 1-b\times 0,a\times 0+b\times 1)=(a,b)$$

پس $0=(0,0)$ عضو خنثی عمل جمع و $1=(1,0)$ عضو خنثی عمل ضرب است.

۶- وجود عضو وارون: اگر برای هر عضو $a\in A$, یک عضو مانند $a'\in A$ وجود داشته باشد بگونه‌ایکه:

$$a*a'=a'*a=e$$

آنگاه a' را عضو وارون a نسبت به عمل $*$ مینامیم.

در مجموعه اعداد مختلط, برای وجود عضو وارون نسبت به جمع(که به عنوان قرینه شناخته میشود) کافی است بنویسیم:

$$(a,b)+(x,y)=(0,0)\to(a+x,b+y)=(0,0)\to x=-a\,;y=-b\to(x,y)=(-a,-b)$$

بنابراین $(-a,-b)$ قرینه (a,b) میباشد. گاهی بجای $(-a,-b)$ مینویسیم $-(a,b)$

همچنین برای وجود عضو وارون (نسبت به عمل ضرب به جز صفر) , برای هر $(a,b)\neq(0,0)$ میتوان گفت:

$$(a,b)(x,y)=(1,0)\to\begin{cases} ax-by=1 \\ ay+bx=0 \end{cases}\to x=\frac{a}{a^2+b^2}\ \ ;\ \ y=\frac{-b}{a^2+b^2}$$

بنابراین $\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ عضو وارون عمل ضرب است. عضو وارون ضرب را گاهی با $(a,b)^{-1}$ نمایش میدهیم.

بنا به تعریف مجموعه ناتهی G همراه با دو عمل $+$ و $\times$ یک میدان(هیات) نامیده میشود هرگاه در شش ویژگی بالا صدق کند. بطور خلاصه این ویژگیها عبارتند از بسته بودن, وجود عضو بی‌اثر, جابجایی و شرکت‌پذیری(نسبت به هر دو عمل), توزیع‌پذیری (عمل $\times$ نسبت به عمل $+$) و وجود عضو وارون (نسبت به هر دو عمل, به‌جز عضو صفر نسبت به عمل $\times$) . در اینصورت, میدان G همراه با دو عمل یاد شده را با نماد $(G,+,\times)$ نمایش می‌دهیم.

آشناترین میدانی که با آن برخورد داشته‌ایم مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) همراه با دو عمل جمع و ضرب میباشد, چرا که بسادگی میتوان کنترل کرد که در کلیه خواص شش گانه صادق است. اما مثلا مجموعه اعداد طبیعی با این دو عمل تشکیل میدان نمی‌دهد چرا که بعنوان نمونه عضو خنثی نسبت به عمل جمع برابر صفر خواهد بود که متعلق به مجموعه نیست. با توجه به آنچه دیده شد مجموعه اعداد مختلط نیز در اصول میدان صادق بوده و لذا می‌توان آنرا بصورت میدان $(\mathbb{C},+,\times)$ نمایش داد.

اصول شش گانه فوق در هر میدانی منجر به پیدایش قضایایی میشود (۱۵ قضیه) . به کمک این قضایا می‌توان قوانین دیگری را برای یک میدان نتیجه گرفت. از جمله این قوانین می‌توان به قانون حذف, تفریق, تقسیم و غیره اشاره کرد.

بعنوان نمونه وجود عضو قرینه, قضیه تفریق را ثابت میکند. به عبارتی ثابت میشود که فقط یک عدد مختلط (x,y) وجود دارد که $(a,b)+(x,y)=(c,d)$. به عبارتی برای دو عدد مختلط (a,b) و (c,d) خواهیم داشت:

$$(a,b)+(x,y)=(c,d)\rightarrow(x,y)=(c,d)+(-a,-b)$$

همچنین ثابت میشود که فقط یک عدد مختلط (x,y) وجود دارد که $(a,b)(x,y)=(c,d)$. این قضیه در واقع همان قضیه "امکان تقسیم" بوده و ثابت می‌شود که جواب یکتا نیز می‌باشد. به عبارتی برای دو عدد مختلط (a,b) و (c,d) به شرطی که $(a,b)\neq(0,0)$ خواهیم داشت:

$$(a,b)(x,y)=(c,d)\rightarrow(x,y)=(c,d)(a,b)^{-1}$$

لازم به‌ذکر است که در نظریه مجموعه‌ها ابتدا مفاهیمی مانند گروه, گروه جابجایی (آبلی), حلقه, حلقه یک‌دار و حلقه جابجایی معرفی شده و در نهایت میدان را تعریف می‌کنند. خلاصه‌ای از این تعاریف در بخش ۷-۱۰ آمده است.

۷-۱-۲- نمایش استاندارد عدد مختلط

برای نمایش استاندارد عدد مختلط, از یک مثال ساده شروع کرده و حاصل $(0,1)(0,1)$ را بدست می‌آوریم.

$$(0,1)(0,1)=(0\times0-1\times1,0\times1+1\times0)=(-1,0)=-1$$

بنابراین حاصلضرب عدد مختلط $(0,1)$ در خودش -1 شده است! این عدد را با نماد i نمایش داده و به نام یکه موهومی می‌شناسیم, پس $i=(0,1)$. به‌شکلی دیگر, اگر رادیکال را مشابه اعداد حقیقی تعریف کنیم $i^2=-1\rightarrow i=\sqrt{-1}$. پس این عدد ریشه معادله $z^2+1=0$ خواهد بود چرا که در آن صدق میکند.

با این نماد میتوان اعداد مختلط را به فرم دیگری نیز بیان کرد. برای این منظور از آنجا که میدانیم $(b,0)(0,1)=(0,b)$, میتوان هر عدد مختلط مانند z را بصورت زیر نوشت:

$$z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+\underbrace{(b,0)}_{b}\underbrace{(0,1)}_{i}=a+bi$$

مزیت این نمادگذاری آن است که با توجه به قوانین شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری میتوان محاسبات ضرب یا تقسیم را ساده‌تر انجام داد. مثلا برای ضرب کردن (a,b) در (c,d) دیگر نیازی به حفظ کردن قانون ضرب نخواهیم داشت و میتوان نوشت:

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

که دیده می‌شود بیانگر همان $(ac-bd, ad+bc)$ خواهد بود. همانگونه که عنوان شد در عدد مختلط $z = a + bi$ ترم a را قسمت حقیقی (Real) و ترم b را قسمت موهومی (Imaginary) می‌نامیم. پس بطور خلاصه:

$$z = (a,b) = a + ib \ ; \ a,b \in \mathbb{R} \ ; \ z \in \mathbb{C} \ ; i^2 = -1 \ ; a = Re(z) \ ; b = Im(z)$$

با توجه به تعاریف فوق میتوان مثلا ریشه‌های $x^2 + 2x + 6 = 0$ را بصورت زیر بدست آورد:

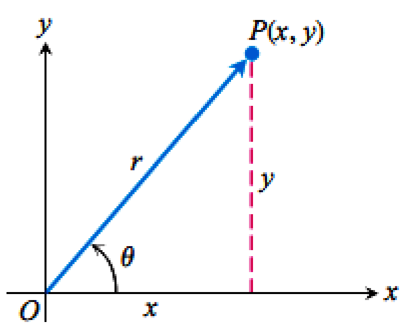
$$x^2 + 2x + 6 = 0 \rightarrow x = -1 \pm \sqrt{1-6} = -1 \pm \sqrt{-5} = -1 \pm \sqrt{5}\sqrt{-1} = -1 \pm \sqrt{5}i$$

لازم بذکر است در اعداد مختلط, ترتیب معنی ندارد. به عنوان نمونه نمی‌توان دو عدد $5 + 2i$ و $3 - 4i$ را به جهت بزرگی و کوچکی با یکدیگر مقایسه کرد.

یک نوع نگاه دیگر به ساخته شدن مجموعه‌های اعداد میتواند این باشد که اعداد را بعنوان ریشه‌های معادلات دانست. برای معادله‌ای مانند $4x - 8 = 0$ جواب در مجموعه اعداد طبیعی وجود دارد. اما برای حل معادله $4x + 8 = 0$ این مجموعه کافی نبوده, به‌ناچار گسترش داده شده و مجموعه اعداد صحیح بوجود آمده است. هر گسترشی با خود یک نماد معرفی کرده است. نمادی که با اعداد صحیح وارد شد نماد منفی بوده است. برای حل معادله $4x - 10 = 0$ مجموعه اعداد صحیح به مجموعه گویا گسترش داده شده است. نماد این مجموعه, کسر میباشد. در حل معادله $x^2 - 2 = 0$ نیز مجموعه اعداد حقیقی با نماد رادیکال تعریف شده است. بالاخره در حل معادله $x^2 + 1 = 0$ مجموعه اعداد مختلط با نماد i ارائه گردید.

۲-۷- تعبیر هندسی و روابط اساسی

از آنجا که عدد مختلط (x,y) یک زوج مرتبی از اعداد حقیقی است میتوان آنرا از نظر هندسی در یک صفحه با یک نقطه مانند P یا یک بردار از مبدا تا نقطه (x,y) نمایش داد. این صفحه را صفحه مختلط, محور x را محور حقیقی و محور y را محور موهومی مینامیم چرا که $i = (0,1)$ تعریف شد. به سادگی دیده میشود با توجه به تعریف جمع اعداد مختلط, تعبیر هندسی جمع دو عدد همان جمع برداری آنها خواهد بود. چرا که در جمع اعداد مختلط مولفه‌های اول با یکدیگر و مولفه‌های دوم نیز با یکدیگر جمع میشوند. این درست معادل جمع برداری دو بردار است که در آنجا نیز تصاویر افقی و عمودی دو بردار را با یکدیگر جمع میکنیم تا برآیند آنها را بدست آورده باشیم.



با توجه به شکل روبرو می‌توان x و y و لذا عدد مختلط z را به فرم قطبی نمایش داد:

$$x = r\cos\theta \ ; \ y = r\sin\theta$$

$$\rightarrow z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = rcis\theta$$

که نماد $cis\theta$ را بعنوان جایگزین $\cos\theta + i\sin\theta$ در نظر گرفته‌ایم. توجه شود بر روی محور قائم, صرفا y واحد انتخاب میکنیم و در واقع اعداد این محور در یک i ضرب میشوند.

در روابط بالا, r بیانگر فاصله نقطه P تا مبدا مختصات بوده و به آن طول یا مدول عدد مختلط z گفته و با $|z|$ نیز نمایش می‌دهیم. همچنین θ در واقع بیانگر زاویه‌ای است که بردار OP با جهت مثبت محور xها می‌سازد و آنرا آرگومان (شناسه,فاز,زاویه) عدد مختلط z مینامیم. بنابراین:

$$z = x + iy \rightarrow r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \theta = Arg(z) = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

بعنوان یک مثال:

$$z = \sqrt{3} - i \rightarrow r = |z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2 \quad ; \quad \theta = Arg(z) = tan^{-1}\frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\pi}{6}$$

اینکه چرا $\theta = \frac{5\pi}{6}$ انتخاب نشد به دلیل آن است که $z = \sqrt{3} - i$ در ربع چهارم قرار دارد.

دقت شود در حالت کلی, آرگومان, زاویه هر بردار مانند AB با جهت مثبت محور xها خواهد بود, که A میتواند مبدا نیز نباشد.

بدیهی است برای عدد مختلط صفر نمی‌توان آرگومانی بدست آورد. همچنین آرگومان یک عدد مختلط میتواند تعداد زیادی زاویه با اختلاف $2k\pi$ انتخاب شود, چرا که همه معرف یک نقطه میباشند.

با توجه به اینکه هر عدد مختلط را میتوان معادل یک بردار دانست, لذا $|z_1 - z_2|$ بیانگر فاصله z_1 تا z_2 میباشد, چرا که:

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

بعنوان نمونه $|z - 2| = 5$ بیانگر مجموعه zهایی است که فاصله آنها تا عدد مختلط $2 + 0i$ برابر 5 میباشد. لذا این رابطه بیانگر یک دایره به مرکز $(2,0)$ و شعاع 5 خواهد بود.

مزدوج z یا $\bar{z} = Conjugate(z)$ را بصورت $\bar{z} = x - iy$ تعریف میکنیم که در واقع قرینه z نسبت به محور x است.

$$\bar{z} = x - iy \rightarrow |z| = |\bar{z}| \quad ; \quad z\bar{z} = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = r^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}$$

از آنجا که $z\bar{z}$ یک عدد حقیقی است, لذا می‌توان تقسیم دو عدد مختلط را بصورت زیر بدست آورد:

$$z = \frac{1 + 2i}{3 - 4i} = \frac{1 + 2i}{3 - 4i} \times \frac{3 + 4i}{3 + 4i} = \frac{-5 + 10i}{25} = \frac{-1}{5} + \frac{2}{5}i$$

مثال ۷-۱ حاصل توانهای مختلف i را بیابید.

$$i^0 = 1 \ ; \ i^1 = i \ ; \ i^2 = -1 \ ; \ i^3 = i^2 i = -i \ ; \ i^4 = i^2 i^2 = 1 \ ; \ i^5 = i^4 i = i \ ; \ \cdots$$
$$\rightarrow i^{4k} = 1 \ ; \quad i^{4k+1} = i \quad ; \quad i^{4k+2} = -1 \ ; \quad i^{4k+3} = -i \quad \blacksquare$$

مثال ۷-۲ بصورت جبری نشان دهید: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

حل از آنجا که هر عدد مختلط را میتوان با یک بردار نمایش داد این نتیجه بطریق هندسی بدیهی است. چرا که نامساوی فوق در واقع همان نامساوی مثلثی میباشد. در ادامه بصورت جبری درستی این نامساوی را نشان میدهیم.

$$|z_1 + z_2|^2 = |x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2$$

$$(|z_1| + |z_2|)^2 = (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) + 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}$$

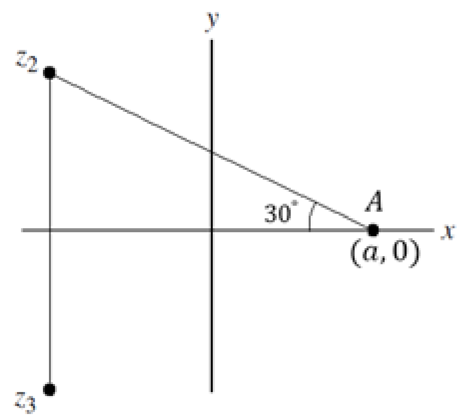
با در نظر گرفتن نامساوی کوشی-شوارتز که بصورت زیر میباشد, نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 \leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \quad \blacksquare$$

توضیح: با استفاده از این مثال میتوان نتایج زیر را بدست آورد:

$$|z_1+z_2+z_3| \le |z_1| + |z_2+z_3| \le |z_1|+|z_2|+|z_3|$$
$$|z_1| = |z_1-z_2+z_2| \le |z_1-z_2| + |z_2| \rightarrow |z_1-z_2| \ge |z_1|-|z_2|$$
$$\xrightarrow{z_2\to -z_2} |z_1-(-z_2)| \ge |z_1| - |-z_2| \rightarrow |z_1+z_2| \ge |z_1|-|z_2| \quad \blacksquare$$

مثال ۷-۳ چنانچه نقطه $A(a,0)$ و دو ریشه مختلط معادله $z^2+2az+7a=0$ ، سه رأس یک مثلث متساوی الاضلاع باشند، a را بدست آورید. ($a \in R^+$)



$$z_{2,3} = -a \pm \sqrt{a^2-7a} = -a \pm i\sqrt{7a-a^2}$$
$$tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{7a-a^2}}{2a} \rightarrow a = 3$$

دقت شود نکته اساسی حل مساله آن است که $\sqrt{a^2-7a}$ را بصورت $i\sqrt{7a-a^2}$ بنویسیم, چرا که در صورت مساله عنوان شده است که ریشه‌های این معادله, مختلط میباشند. بدیهی است اگر ریشه‌ها مختلط نباشند, این سه نقطه روی محور x قرار گرفته و تشکیل مثلث نخواهند داد. ■

چند رابطه

در اینجا به چند رابطه مهم که به راحتی قابل اثبات می‌باشد, اشاره میشود:

1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$; $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$; $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

2) $|z| = |\overline{z}|$; $z\overline{z} = |z|^2$; $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$; $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

3) $\big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1|+|z_2|$

همچنین از آنجا که $|z_1-z_2|$ بیانگر فاصله دو نقطه z_1 و z_2 میباشد, در نتیجه:

۱- دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع R در صفحه مختلط بصورت $|z-z_0| = R$ بیان میشود.

۲- رابطه $|z-z_1| \pm |z-z_2| = R$ بیانگر یک بیضی $(+)$ یا هذلولی $(-)$ باکانونهای z_1 و z_2 می‌باشد.

در حالت خاص, رابطه $|z-z_1| = |z-z_2|$ نیز بیانگر معادله عمود منصف پاره‌خط واصل بین z_1 و z_2 خواهد بود.

همچنین برای تبدیل یک معادله از دستگاه (x,y) به دستگاه مختلط می‌توان از روابط زیر استفاده کرد:

$$\begin{cases} z = x+iy \\ \overline{z} = x-iy \end{cases} \rightarrow \quad x = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad ; \quad y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

مثلا می‌خواهیم معادله دایره‌ای به مرکز $(2,0)$ و شعاع 5 در دستگاه دکارتی را بر حسب دستگاه مختلط بیان کنیم. لذا:

$$(x-2)^2+y^2=25 \rightarrow x^2+y^2-4x=21 \xrightarrow{z\bar{z}=x^2+y^2} z\bar{z}-4\frac{z+\bar{z}}{2}=1 \rightarrow z\bar{z}-2z-2\bar{z}=21$$

که بیانگر معادله دایره در دستگاه مختلط است. می‌توان رابطه بالا را قدری ساده‌تر کرد:

$$z\bar{z}-2z-2\bar{z}=21 \rightarrow (z-2)(\bar{z}-2)=25 \rightarrow \underbrace{(z-2)\overline{(z-2)}}_{|z-2|^2}=25 \rightarrow |z-2|=5$$

که همانگونه که قبلا نیز دیده شد بیانگر مجموعه zهایی است که فاصله آنها تا عدد مختلط $2+0i$ برابر 5 میباشد که همان دایره مورد نظر خواهد بود (مثال ۷-۷ را نیز ببینید).

مثال ۷-۴ نشان دهید اگر z ریشه یک معادله چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد, آنگاه $\bar{z}$ نیز ریشه خواهد بود.

حل فرض کنیم چندجمله‌ای مورد نظر بصورت $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ باشد. از آنجا که z ریشه چندجمله‌ای است, لذا در آن صدق میکند. با مزدوج گرفتن از طرفین خواهیم داشت:

$$P(z)=0 \rightarrow a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0 \xrightarrow{Conj.} \overline{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}=\bar{0}$$

$$\overline{z^n}=\bar{z}^n \rightarrow a_n(\bar{z})^n+a_{n-1}(\bar{z})^{n-1}+\cdots+a_1\bar{z}+a_0=0 \rightarrow P(\bar{z})=0$$

یعنی $\bar{z}$ هم ریشه است. دقت شود شرط حقیقی بودنِ ضرایب مهم است و به همین دلیل در اثبات بالا $\overline{a_i}=a_i$ قرار داده شده است. ■

توضیح: با توجه به آنچه دیده شد در یک معادله چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی, تعداد ریشه‌های مزدوج, زوج میباشد. یک نتیجه این مساله آن است که چون بنا بر قضیه اساسی جبر, هر معادله درجه n دقیقا n ریشه(حقیقی و مختلط) دارد, لذا اگر درجه معادله, فرد باشد, لااقل یکی از ریشه‌ها بایستی حقیقی باشد. این نتیجه قبلا نیز به کمک قضیه بولتزانو بدست آمده بود. ■

مثال ۷-۵ نشان دهید اگر z و w دو عدد مختلط باشند و $|z|=1$ آنگاه: $|z-w|=|1-\bar{z}w|$

$$z\bar{z}=|z|^2=1 \xrightarrow{|\ |} |z||\bar{z}|=1 \rightarrow |\bar{z}|=1 \rightarrow |1-\bar{z}w|=|z\bar{z}-\bar{z}w|=|\bar{z}||z-w|=|z-w| \ ■$$

مثال ۷-۶ نواحی از صفحه را مشخص کنید که در معادلات یا نامعادلات زیر صدق کند.

1) $Re\left(\frac{1}{z}\right)>1 \rightarrow z=?$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i \rightarrow \frac{x}{x^2+y^2}>1 \rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2<\frac{1}{4} \ ■$$

2) $\left|\frac{z-3}{z+3}\right|=2 \rightarrow z=? \quad ; \quad z=x+iy \xrightarrow{Sub.} (x+5)^2+y^2=16$

$$\underline{Or}: \left|\frac{z-3}{z+3}\right|^2=4 \rightarrow \left(\frac{z-3}{z+3}\right)\overline{\left(\frac{z-3}{z+3}\right)}=4 \rightarrow z\bar{z}+5\bar{z}+5z+9=0$$

$$\rightarrow (z+5)(\bar{z}+5)=16 \rightarrow \underbrace{(z+5)\overline{(z+5)}}_{|z+5|^2}=16 \rightarrow |z+5|=4 \ ■$$

مثال ۷-۷ نشان دهید معادله هر دایره یا خط در صفحه z را میتوان بصورت $\alpha z\overline{z}+\beta z+\overline{\beta}\overline{z}+\gamma=0$ نوشت. $\alpha,\gamma\in\mathbb{R}$

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0\rightarrow Az\overline{z}+B\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)+C\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)+D=0$$

$$\rightarrow Az\overline{z}+\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2i}\right)z+\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2i}\right)\overline{z}+D=0\rightarrow Az\overline{z}+\beta z+\overline{\beta}\overline{z}+D=0\ \blacksquare$$

تمرینات بخش ۷-۲ تمرینات ۶ , ۱۰, ۱۸ و ۲۴ از بخش ضمیمه H کتاب

۱- نشان دهید:

$a)\ \ |z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2Re(z_1\overline{z_2})$

$b)\ \ |z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|\Leftrightarrow Arg(z_1)-Arg(z_2)=2k\pi$

۲- فرض کنید $z_1=x_1+iy_1$ و $z_2=x_2+iy_2$ نمایش دو بردار غیر همخط یا غیر موازی باشند. اگر a و b دو عدد حقیقی(اسکالر) باشند بطوری که $az_1+bz_2=0$ ثابت کنید $a=0$ و $b=0$.

۳- نواحی از صفحه را مشخص کنید که در نامعادلات روبرو صدق کند.

$a)\ \ Re(z^2)>1\quad;\quad b)\ \ 1<|z+i|\leq 2$

۴- فرض کنید z_1 , z_2 , z_3 و z_4 رئوس چهار ضلعی $ABCD$ باشند. ثابت کنید $ABCD$ یک متوازی الاضلاع است اگر و تنها اگر $z_1+z_4=z_2+z_3$ باشد.

۵- به ازای چه مقدار k مبدا مختصات و دو ریشه مختلط معادله $kz^2+akz+a^2=0$ ، سه رأس یک مثلث متساوی الاضلاع می‌باشند. ($a\in R^+$) جواب: $k=3$

۶- اعداد مختلط 1 و z و $\frac{1}{z}$ سه راس یک مثلث قائم‌الزاویه با راس قائمه z میباشند. مکان هندسی راس z را بدست آورید.

$\underline{Ans}:\ \ \ |z|^2+|z+1|^2=1\rightarrow x^2+x+y^2=0$

۷- اگر بدانیم یکی از ریشه‌های معادله زیر بصورت xi میباشد, کلیه ریشه‌ها را بدست آورید.

$z^3-(1+4i)z^2-(3-9i)z+14-2i=0\qquad;\qquad \underline{Ans}:\ \ 2i\ ,2-i\ \ ,-1+3i$

۷-۳- ضرب و تقسیم اعداد مختلط در فرم قطبی

با نوشتن دو عدد مختلط در فرم دکارتی میتوان آنها را ضرب یا تقسیم کرد. همچنین میتوان برای اینکار ابتدا آنها را به فرم قطبی نوشت. قبلا دیده شد که هر عدد مختلط در مختصات قطبی بصورت $z=rcis\theta$ خواهد بود. ابتدا از رابطه زیر شروع می‌کنیم:

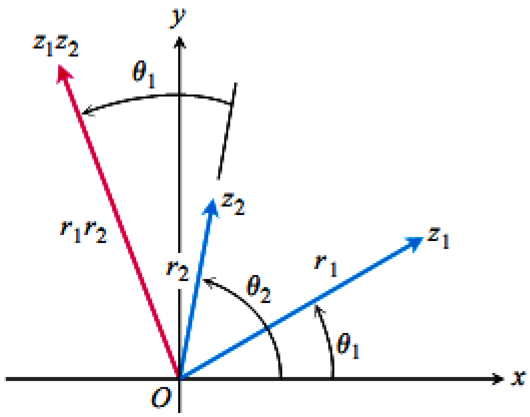
$$cis\theta_1 cis\theta_2=(cos\theta_1+isin\theta_1)(cos\theta_2+isin\theta_2)$$

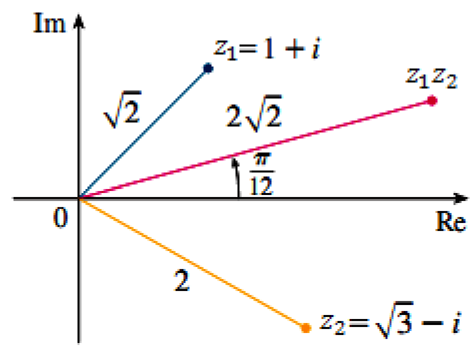
$$=\underbrace{(cos\theta_1cos\theta_2-sin\theta_1sin\theta_2)}_{cos(\theta_1+\theta_2)}+i\,\underbrace{(cos\theta_1sin\theta_2+sin\theta_1cos\theta_2)}_{sin(\theta_1+\theta_2)}=cis(\theta_1+\theta_2)$$

به عبارتی ضرب دو cis در یکدیگر منجر به جمع زوایای آنها شده است. میتوان نشان داد که تقسیم آنها نیز به تفاضل زوایا می‌انجامد. حال با نوشتن دو عدد به فرم قطبی یعنی $z_1=r_1cis\theta_1$ و $z_2=r_2cis\theta_2$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} z_1z_2 = r_1r_2cis(\theta_1+\theta_2) \\ z_1/z_2 = r_1/r_2cis(\theta_1-\theta_2) \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} Arg(z_1z_2) = Arg(z_1)+Arg(z_2)+2k\pi \\ Arg(z_1/z_2) = Arg(z_1)-Arg(z_2)+2k\pi \end{cases}$$

بنابراین z_1z_2 طولی برابر r_1r_2 و زاویه‌ای برابر $\theta_1+\theta_2$ خواهد داشت. در شکل زیر(سمت چپ) دو عدد z_1 و z_2 و ضرب آنها به شکل هندسی نمایش داده شده است.





مثال ۷-۸ اگر $z_1 = 1+i$ و $z_2 = \sqrt{3}-i$, حاصل z_1z_2 را بدست آورده و با شکل آنرا نمایش دهید.

حل اعداد داده شده در فرم دکارتی میباشند. با توجه به تعریف ضرب اعداد مختلط که در ابتدای بخش دیده شد:

$$z_1z_2 = (1+i)(\sqrt{3}-i) = \sqrt{3}-i^2+i(\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)$$

همچنین میتوان با نوشتن آنها به فرم قطبی محاسبه را انجام داد.

$$z_1 = 1+i \rightarrow r_1 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \;\; ; \;\; \theta_1 = tan^{-1}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

اینکه چرا $\theta_1 = \frac{\pi}{4}+\pi$ انتخاب نشد به دلیل آن است که $z_1 = 1+i$ در ربع اول قرار دارد.

$$z_2 = \sqrt{3}-i \rightarrow r_2 = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2} = 2 \;\; ; \;\; \theta_2 = tan^{-1}\frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\pi}{6}$$

$$z_1z_2 = 2\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}+\frac{-\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}cis\frac{\pi}{12} = \left(2\sqrt{2}cos\frac{\pi}{12}\right)+i\left(2\sqrt{2}sin\frac{\pi}{12}\right)$$

در شکل بالا(سمت راست) دو عدد z_1 و z_2 و ضرب آنها دیده میشود. ■

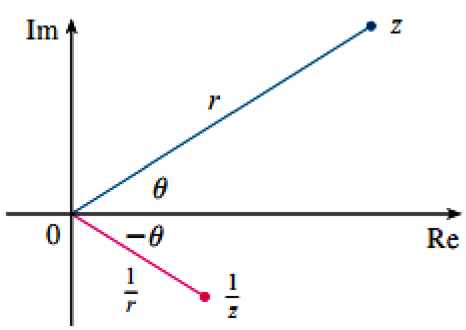
توضیح: از آنجا که هر دو روش بایستی به یک جواب برسند, از مساوی هم قرار دادن آنها, نتیجه زیر بدست می‌آید:

$$cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \;\; ; \;\; sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \;\; ■$$

مثال ۷-۹ وارونِ ضربی یک عدد مختلط را در مختصات قطبی بدست آورده, آنرا نمایش دهید.

$$z_1 = 1 \;\; ; \;\; z = rcis\theta$$

$$\rightarrow \frac{z_1}{z} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}cis(0-\theta) = \frac{1}{r}cis(-\theta)$$



۴-۷- توانهای صحیح یک عدد مختلط

در اینجا نیز اگر چه میتوان با نوشتن عدد مختلط به شکل دکارتی آنرا به توان رساند, اما بدیهی است برای توانهای بالا, ممکن است قدری طولانی باشد, مثلا $(4+3i)^{10}$ شامل 11 جمله خواهد شد. با نوشتن عدد مختلط به شکل قطبی و استفاده از رابطه مربوط به ضرب دو عدد مختلط در قسمت قبل این کار ساده‌تر است. با استفاده از این رابطه خواهیم داشت:

$$z_1z_2 = r_1r_2cis(\theta_1+\theta_2) \xrightarrow{z_1=z_2=z} z^2 = r^2cis(2\theta)$$

حال نشان می‌دهیم این رابطه بصورت $z^n = r^ncis(n\theta)$ برای $n \in \mathbb{N}$ قابل تعمیم است. یک راه ساده استفاده از استقرای ریاضی است. بدیهی است این رابطه برای $n=1$ برقرار است. حال فرض کنیم رابطه برای $n=k$ درست باشد, یعنی:

$$n=k \to z^k = r^kcis(k\theta)$$

حال با استفاده از فرض بالا نشان میدهیم رابطه $z^n = r^ncis(n\theta)$ برای $n=k+1$ نیز برقرار است.

$$z^{k+1} = z^kz = r^kcis(k\theta)rcis(\theta) = r^{k+1}cis(k\theta)cis(\theta) = r^{k+1}cis\big((k+1)\theta\big)$$

که در آن از رابطه $cis\theta_1cis\theta_2 = cis(\theta_1+\theta_2)$ استفاده شده است. بنابراین $z^n = r^ncis(n\theta)$ برای $n \in \mathbb{N}$ برقرار است. دیده میشود که با انتخاب $n=0$ نیز به یک رابطه درست می‌رسیم. همچنین با استفاده از رابطه تقسیم دو عدد مختلط خواهیم داشت:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}cis(\theta_1-\theta_2) \xrightarrow{z_1=1;z_2=z^n} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n}cis(-n\theta)$$

که همان رابطه $z^n = r^ncis(n\theta)$ به‌ازای $n=-1,-2,\cdots$ میباشد. لذا در نهایت برای هر n صحیح:

$$z = rcis\theta \xrightarrow{n\in\mathbb{Z}} z^n = r^ncis(n\theta)$$

در حالت خاص برای $r=1$ خواهیم داشت $z = cis\theta$ در نتیجه رابطه بالا بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$(cis\theta)^n = cis(n\theta) \to \boxed{n \in \mathbb{Z} \quad : \quad (cos\theta + isin\theta)^n = cos(n\theta) + isin(n\theta)}$$

فرمول اخیر به نام فرمول دموآور (de Moivre's formula) شناخته می‌شود.

بعنوان یک کاربرد از رابطه بالا می‌توان بسط توابع مثلثاتی را بطریقی ساده‌تر بدست آورد. مثلا برای بسط $sin(2\theta)$, عبارت $(cis\theta)^2$ را یکبار به طریق معمول و یکبار با استفاده از دموآور محاسبه کرده, نتایج را مساوی قرار می‌دهیم:

$$(cos\theta + isin\theta)^2 = \begin{cases} cos^2\theta - sin^2\theta + i(2sin\theta cos\theta) \\ cos(2\theta) + isin(2\theta) \end{cases} \to \begin{cases} cos(2\theta) = cos^2\theta - sin^2\theta \\ sin(2\theta) = 2sin\theta cos\theta \end{cases}$$

دقت شود فرمول بسط دو جمله‌ای برای اعداد مختلط نیز برقرار است, چرا که در واقع تعمیمی از همان ضرب خواهد بود.

مثال ۷-۱۰ بسط $sin(3\theta)$ و $cos(3\theta)$ را بیابید.

حل در اینجا نیز مشابه آنچه در بالا دیده شد عبارت $(cis\theta)^3$ را یکبار به طریق معمول و یکبار با استفاده از دموآور محاسبه کرده, نتایج را مساوی قرار می‌دهیم.

$$(cos\theta + isin\theta)^3 = \begin{cases} cos^3\theta - 3cos\theta sin^2\theta + i(3cos^2\theta sin\theta - sin^3\theta) \\ cos3\theta + isin3\theta \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} cos3\theta = cos^3\theta - 3cos\theta sin^2\theta \\ sin3\theta = 3cos^2\theta sin\theta - sin^3\theta \end{cases} \quad \blacksquare$$

مثال ۷-۱۱ حاصل عبارت $A = \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{12}$ را بیابید.

حل به راحتی میتوان نشان داد $z = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. اما بدیهی است به توان ۱۲رساندن یک عدد در شکل دکارتی آن شامل ۱۳ جمله و طولانی خواهد شد. در نتیجه با نوشتن این عدد در شکل قطبی آن خواهیم داشت:

$$A = z^{12} = \left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12} \quad ; \quad r = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \quad ; \quad \theta = tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + \pi$$

علت اینکه $\theta = \frac{\pi}{3} + \pi$ انتخاب شد آن است که $z = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ در ربع سوم قرار دارد.

$$A = \left(1 \times cis\frac{4\pi}{3}\right)^{12} = 1^{12}cis\frac{12 \times 4\pi}{3} = 1 \quad \blacksquare$$

توضیح: دیده شد که $z^{12} = 1$ بدست آمد, در حالیکه $z \neq \pm 1$ میباشد. با این مثال دیده میشود که در مجموعه اعداد مختلط معادله $z^{12} = 1$ ریشه‌های دیگری نیز به‌غیر از± 1 خواهد داشت. در بخش بعد به این موضوع میپردازیم. ■

مثال ۷-۱۲ اگر a و b ریشه‌های $x^2 - 2x + 4 = 0$ باشند, حاصل $A = a^n + b^n + ab$ را بیابید. $(n \in \mathbb{N})$

$$x^2 - 2x + 4 = 0 \rightarrow a, b = 1 \pm \sqrt{-3} = 1 \pm \sqrt{3}i = 2cis\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$$

$$A = 2^n\left(cos\frac{n\pi}{3} + isin\frac{n\pi}{3}\right) + 2^n\left(cos\frac{n\pi}{3} - isin\frac{n\pi}{3}\right) + 4 = 2^{n+1}cos\frac{n\pi}{3} + 4 \quad \blacksquare$$

مثال ۷-۱۳ اگر $x + \frac{1}{x} = 2cos\theta$ باشد, مقدار $x^n + \frac{1}{x^n}$ را بدست آورید. $(n \in \mathbb{N})$

$$x + \frac{1}{x} = 2cos\theta \rightarrow x^2 - 2xcos\theta + 1 = 0 \rightarrow x = cos\theta \pm \sqrt{-sin^2\theta} = cos\theta \pm isin\theta = cis(\pm\theta)$$

$$x = cis\theta \rightarrow x^n + \frac{1}{x^n} = cis(n\theta) + cis(-n\theta) = 2cos(n\theta)$$

اگر $x = cis(-\theta)$ انتخاب شود, باز هم به همین جواب خواهیم رسید, چرا که $cis\theta$ و $cis(-\theta)$ عکس یکدیگرند. ■

۷-۵- ریشه‌های n ام یک عدد مختلط

مشابه تعریف آنالیز حقیقی ریشه nام یک عدد مختلط z , عددی مختلط مانند w است, بگونه‌ای که $z = w^n$ باشد.

$$z = w^n \rightarrow rcis\theta = (\rho cis\phi)^n \rightarrow rcos\theta + irsin\theta = \rho^n cos(n\phi) + i\rho^n sin(n\phi)$$

از آنجا که این دو عدد مساوی یکدیگرند, لذا طول آنها نیز با یکدیگر مساوی است, یعنی $\rho^n = r$. حال با مساوی قرار دادن اجزای حقیقی و موهومی دو طرف خواهیم داشت:

$$|w^n| = |z| \to \rho^n = r \to \rho = \sqrt[n]{r} \quad ; \begin{cases} cos(n\phi) = cos\theta \\ sin(n\phi) = sin\theta \end{cases} \to n\phi = \theta + 2k\pi \to \phi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

که در آن $k \in \mathbb{Z}$ می‌باشد. در نتیجه از $z = w^n$ خواهیم داشت:

$$w = \sqrt[n]{z} = \rho cis\phi = \sqrt[n]{r} cis(\phi_k) = \sqrt[n]{r}\left(cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

فرض کنید $n = 5$ باشد, چند مقدار اولیه ϕ با شروع از $k = 0$ عبارت است از:

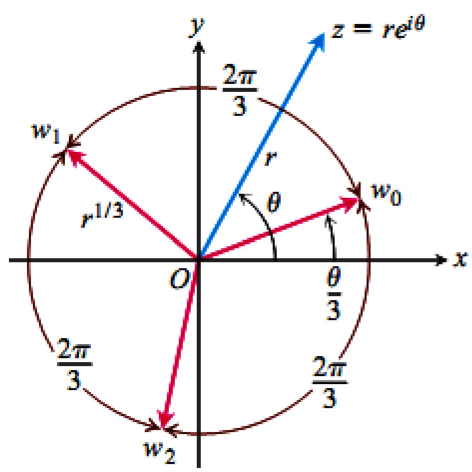
$$\phi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \to \phi_0 = \frac{\theta}{5} \ ; \ \phi_1 = \frac{\theta}{5} + \frac{2\pi}{5} \ ; \ \phi_2 = \frac{\theta}{5} + \frac{4\pi}{5} \ ; \ \phi_3 = \frac{\theta}{5} + \frac{6\pi}{5}$$

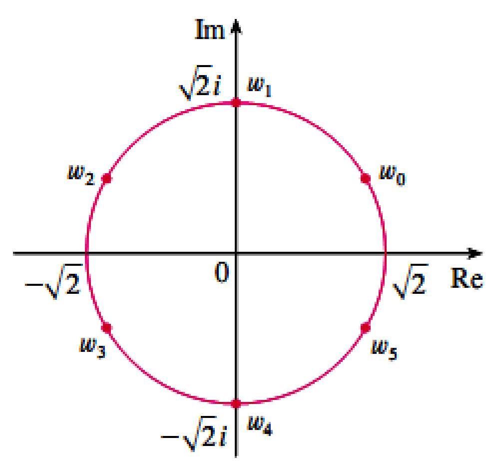
$$\phi_4 = \frac{\theta}{5} + \frac{8\pi}{5} \ ; \ \phi_5 = \frac{\theta}{5} + \frac{10\pi}{5} \ ; \ \phi_6 = \frac{\theta}{5} + \frac{12\pi}{5} \ ; \ \cdots$$

اما $cis(\phi_5) = cis(\phi_0)$ و $cis(\phi_6) = cis(\phi_1)$ و$\cdots$. به عبارتی از $k = 5$ به بعد $cis(\phi_k)$ به جواب تکراری میرسد. همچنین میتوان دید برای kهای منفی نیز به جواب تکراری خواهیم رسید. به عبارتی نیاز نیست $k \in \mathbb{Z}$ انتخاب شود. کافی است فقط $k = 0$ تا $n - 1$ را انتخاب کنیم تا همه جوابها بدست آید. لذا:

$$\boxed{w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \quad ; \quad k = 0{:}\, n - 1}$$

پس ریشه n ام یک عدد مختلط دارای n جواب است که همه هم طول بوده ($\sqrt[n]{r}$) و اختلاف زاویه آنها با یکدیگر $\frac{2\pi}{n}$ میباشد. پس همگی بر روی رئوس یک n ضلعی منتظم قرار میگیرند. مثلا ریشه‌های سوم عدد مختلط z در شکل سمت چپ دیده میشود.





مثال ۷-۱۴ در مجموعه اعداد مختلط مطلوب است محاسبه:

الف: ریشه‌های ششم $z = -8$ ب: ریشه‌های دوم $z = 4$

ج: ریشه‌های دوم $z = i$ د: ریشه‌های چهارم $z = -2\sqrt{3} - 2i$

ه: حل معادله $z^4 + 3z^3 + 2z^2 + 3z + 1 = 0$

$$1)\ \ z=-8+0i \rightarrow \begin{cases} r=8 \\ \theta=\pi \end{cases} \ ;\ \ w=\sqrt[6]{-8}=\sqrt[6]{8}\left(cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)+isin\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)\right); k=0:5$$

$$k=0 \rightarrow w_0=\sqrt[6]{8}\left(cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+isin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

و به همین ترتیب با انتخاب $k=1:5$ جوابهای زیر را خواهیم داشت:

$$w_{1,4}=\pm\sqrt{2}i\ ;\ w_{2,3}=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i\right)\ ;\ w_5=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

این ۶ ریشه در شکل صفحه قبل (سمت راست) نمایش داده شده است. ■

$$2)\ \ z=4+0i \rightarrow r=4\ ;\ \theta=0$$

$$w=\sqrt{4+0i}=\underbrace{\sqrt{4}}_{2}\left(cos\left(\frac{0+2k\pi}{2}\right)+isin\left(\frac{0+2k\pi}{2}\right)\right)\xrightarrow{k=0,1}\sqrt{4+0i}=\pm 2$$

بنابراین در مجموعه اعداد حقیقی$\sqrt{4}=+2$, اما در مجموعه اعداد مختلط $\sqrt{4}=\pm 2$ می‌باشد. ■

$$3)\ \ z=0+1i \rightarrow r=1; \theta=\frac{\pi}{2}$$

$$w=\sqrt{i}=\underbrace{\sqrt{1}}_{1}\left(cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)+isin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)\right)\xrightarrow{k=0,1}\sqrt{i}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\ \ ■$$

$$4)\ \ z=-2\sqrt{3}-2i \rightarrow r=\sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2+(-2)^2}=4\ ;\ \ \theta=tan^{-1}\left(\frac{-2}{-2\sqrt{3}}\right)=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$$

$$w=\left(-2\sqrt{3}-2i\right)^{\frac{1}{4}}=(4)^{\frac{1}{4}}\left(cos\left(\frac{7\pi/6+2k\pi}{4}\right)+isin\left(\frac{7\pi/6+2k\pi}{4}\right)\right)\ \ ;\ \ k=0,1,2,3$$

$$k=0 \rightarrow w_0=\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{7\pi}{24}\right)+isin\left(\frac{7\pi}{24}\right)\right)\ ;\ k=1 \rightarrow w_1=\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{19\pi}{24}\right)+isin\left(\frac{19\pi}{24}\right)\right)$$

$$k=2 \rightarrow w_2=\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{31\pi}{24}\right)+isin\left(\frac{31\pi}{24}\right)\right)\ ;\ k=3 \rightarrow w_3=\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{43\pi}{24}\right)+isin\left(\frac{43\pi}{24}\right)\right)■$$

$$5)\ \ z^4+3z^3+2z^2+3z+1=0 \rightarrow (z^4+2z^2+1)+(3z^3+3z)=0$$

$$\rightarrow (z^2+1)^2+3z(z^2+1)=0 \rightarrow (z^2+1)(z^2+3z+1)=0$$

$$z^2+1 \rightarrow z=\pm i \qquad ; \qquad z^2+3z+1 \rightarrow z=\left(-3\pm\sqrt{5}\right)/2\ \ ■$$

تمرینات بخش‌های ۷-۳ تا ۷-۵ تمرینات ۳۲ , ۳۴ و ۳۸ از بخش ضمیمه H کتاب

۱- ریشه‌های دوم عدد $z=-15-8i$ را بدست آورید. $\underline{Ans}$: $1-4i,-1+4i$

۲- معادله $z^2+(2i-3)z+5-i=0$ را حل کنید. $\underline{Ans}$: $z=1+i,2-3i$

۳- ریشه‌های مختلط معادله $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ را بیابید.

۴- ابتدا معادله $z^4+1=0$ را حل کرده و سپس با استفاده از جوابهای آن چندجمله‌ای x^4+1 را به حاصلضرب دو چند جمله‌ای درجه دوم با ضرایب حقیقی تجزیه کنید.

$\underline{Ans}$: $x^4+1=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$

۵- معادله $2z^3+(\bar{z})^3=3$ را حل کنید. $\underline{Ans}$: $z=0,-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

۶- نشان دهید:

$$(1+cos\theta+isin\theta)^n+(1+cos\theta-isin\theta)^n=2^{n+1}cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\quad;\quad n\in\mathbb{N}$$

۷- ثابت کنید:

$$a)\ \ cos(5\theta)=16cos^5\theta-20cos^3\theta+5cos\theta$$

$$b)\ \ sin(5\theta)=5cos^4\theta sin\theta-10cos^2\theta sin^3\theta+sin^5\theta$$

۸- نشان دهید ریشه‌های معادله $(x+1)^6+(x-1)^6=0$ عبارت است از:

$$x=\pm icotg\left(\frac{2k+1}{12}\pi\right)\quad;\quad k=0,1,2$$

۷-۶- رابطه اویلر

بر طبق رابطه اویلر (Euler's formula), عبارت $e^{i\theta}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{e^{i\theta}=cos\theta+isin\theta}$$

بهتر است رابطه بالا را یک تعریف بدانیم, هر چند در بحث سریها یک اثبات صوری برای این رابطه ارائه خواهد شد. به کمک رابطه اویلر میتوان نمایش قطبی یک عدد مختلط را بصورت دیگری (که مناسبتر است) ارائه کرد:

$$z=rcis\theta=r(cos\theta+isin\theta)=re^{i\theta}$$

بنابراین از این به بعد, بجای نمایش قطبی اعداد مختلط به شکل $z=rcis\theta$ آنرا با $z=re^{i\theta}$ نمایش میدهیم. همچنین با این تعریف نتایج زیر را خواهیم داشت:

$$z=re^{i\theta}\ \rightarrow\ \bar{z}=re^{-i\theta}\ \ ;\ e^{-i\theta}=cos\theta-isin\theta\ \ ;\ \left|e^{\pm i\theta}\right|=\sqrt{cos^2\theta+sin^2\theta}=1\ \ ;\ e^{i\pi}=-1$$

بنابراین یک عدد مختلط را میتوان هم بصورت $z=x+iy$ (فرم دکارتی یا جمعی) و هم بصورت $z=re^{i\theta}$ (فرم قطبی یا ضربی) نمایش داد. اینکه کدامیک انتخاب شود بستگی به تابعی خواهد داشت که قرار است روی عدد مختلط اعمال شود. مثلا در توابع مختلط خواهیم دید اگر بخواهیم لگاریتم یک عدد مختلط را محاسبه کنیم طبیعتا نمایش فرم ضربی ساده‌تر است و اگر قرار باشد سینوس یک عدد مختلط را بیابیم, نمایش فرم جمعی مناسبتر است.

با در نظر گرفتن رابطه اویلر و جایگذاری θ با $\pm n\theta$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} e^{in\theta} = cos(n\theta) + isin(n\theta) \\ e^{-in\theta} = cos(n\theta) - isin(n\theta) \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} 2cos(n\theta) = e^{in\theta} + e^{-in\theta} \\ 2isin(n\theta) = e^{in\theta} - e^{-in\theta} \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}}$$

که دو رابطه مهم برای تبدیل $cos(n\theta)$ و $sin(n\theta)$ بر حسب $e^{in\theta}$ و $e^{-in\theta}$ می‌باشد.

توضیح ۱: در حالت خاص $n = 1$ خواهیم داشت:

$$cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \;\; ; \;\; cosh\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} \rightarrow \begin{cases} cosh(i\theta) = cos\theta \\ cos(i\theta) = cosh\theta \end{cases}$$

$$sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \;\; ; \;\; sinh\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} \rightarrow \begin{cases} sinh(i\theta) = isin\theta \\ sin(i\theta) = isinh\theta \end{cases} \qquad \left(\frac{1}{i} = -i\right)$$

توضیح ۲: با توجه به توضیح قبل اتحادهای هیپربولیکی را می‌توان با تبدیلات زیر از اتحادهای مثلثاتی بدست آورد.

$$cosx \leftrightarrow coshx \;\; ; \;\; sinx \leftrightarrow isinhx \;\; ; \;\; tanx \leftrightarrow itanhx$$

بعنوان نمونه:

$$cos^2 x + sin^2 x = 1 \rightarrow cosh^2 x + i^2 sinh^2 x = 1 \rightarrow cosh^2 x - sinh^2 x = 1$$

توضیح ۳: با بکارگیری رابطه اویلر میتوان رابطه دموآور را بصورت زیر نیز بیان کرد:

$$n \in \mathbb{Z} \;\; : \;\; (cos\theta + isin\theta)^n = cos(n\theta) + isin(n\theta) \rightarrow \boxed{\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i(n\theta)} \quad n \in \mathbb{Z}}$$

که به نظر می‌رسد که یک رابطه بدیهی بوده و در واقع با پذیرش رابطه اویلر, رابطه دموآور خود بخود بدست می‌آید. در واقع این اشتباه در برداشت, ناشی از آن است که با همان دیدگاه آنالیز حقیقی به آنالیز مختلط نگاه کرده‌ایم. با توجه به اینکه میدان اعداد مختلط متفاوت از میدان اعداد حقیقی است, الزاما نمی‌توان هر آنچه در آنالیز حقیقی بدیهی است, برای آنالیز مختلط پذیرفت.

توضیح ۴: با استفاده از رابطه اویلر میتوان z^n و $z^{\frac{1}{n}}$ را بصورت زیر بیان کرد:

$$n \in \mathbb{Z} \rightarrow z^n = r^n e^{i(n\theta)} \qquad ; \qquad n \in \mathbb{N} \rightarrow z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{2k\pi+\theta}{n}} \quad k = 0 : n-1$$

توضیح ۵: همواره از تساوی $re^{i\theta} = \rho e^{i\varphi}$ می‌توان نتیجه گرفت $r = \rho$ و $\theta = \varphi + 2k\pi$ گرفت. زیرا:

$$re^{i\theta} = \rho e^{i\varphi} \rightarrow \left|re^{i\theta}\right| = \left|\rho e^{i\varphi}\right| \rightarrow |r| \underbrace{\left|e^{i\theta}\right|}_{1} = |\rho| \underbrace{\left|e^{i\varphi}\right|}_{1} \rightarrow r = \rho$$

$$\rightarrow e^{i\theta} = e^{i\varphi} \rightarrow cos\theta + isin\theta = cos\varphi + isin\varphi \rightarrow \begin{cases} cos\theta = cos\varphi \\ sin\theta = sin\varphi \end{cases} \rightarrow \theta = \varphi + 2k\pi$$

مثال ۷-۱۵ بسط $sin^5\theta$ را بر حسب توانهای یک از سینوس بیابید.

حل این مثال در واقع عکس مثال ۷-۱۰ میباشد, یعنی قرار است مشابه فرمولهای طلایی, توان را حذف کنیم.

$$2cos(n\theta) = e^{in\theta} + e^{-in\theta} \;\; ; \;\; 2isin(n\theta) = e^{in\theta} - e^{-in\theta}$$

$$n = 1 \rightarrow (2isin\theta)^5 = \left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^5 = e^{5i\theta} - 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} - 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} - e^{-5i\theta}$$

$$\rightarrow 32isin^5\theta = \left(e^{5i\theta} - e^{-5i\theta}\right) - 5\left(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}\right) + 10\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

$$\rightarrow 32isin^5\theta = 2isin(5\theta) - 10isin(3\theta) + 20isin\theta$$

$$\rightarrow sin^5\theta = \frac{1}{16}(sin(5\theta) - 5sin(3\theta) + 10sin\theta) \;\; ■$$

توضیح ۱: در محاسبه بسط دو جمله‌ای از رابطه زیر استفاده شده است:

$$(a+b)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} a^{m-n} b^m \quad (a, b \in \mathbb{C}) \quad ; \quad \binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!\,k!}$$

توضیح ۲: یکی از کاربردهای مهمِ حذف توان در توابع مثلثاتی, می‌تواند در محاسبه انتگرال باشد. بعنوان نمونه با توجه به مثال بالا:

$$\int sin^5\theta\, d\theta = \frac{1}{16}\int (sin(5\theta) - 5sin(3\theta) + 10sin\theta)\, d\theta$$
$$= \frac{1}{16}\left(\frac{-cos(5\theta)}{5} + 5\frac{cos(3\theta)}{3} - 10cos\theta\right) + C \;\; ■$$

مثال ۷-۱۶ عبارات زیر را بصورت یک تابع نمایی مختلط نشان دهید:

$$A = sin\theta \pm icos\theta \quad ; \quad B = \frac{e^{-4i\theta} + e^{-10i\theta}}{cos3\theta}$$

حل الف: با فاکتورگیری از $\pm i$ می‌توان آنرا به فرم $cos\theta \mp isin\theta$ تبدیل کرد:

$$sin\theta + icos\theta = i(cos\theta - isin\theta) = ie^{-i\theta} \quad ; \quad sin\theta - icos\theta = -i(cos\theta + isin\theta) = -ie^{i\theta}$$

ب: با فاکتورگیری از $e^{-7i\theta}$ (عدد 7 میانگین 4 و 10 می‌باشد) خواهیم داشت:

$$B = \frac{e^{-7i\theta}\left(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}\right)}{cos3\theta} = \frac{e^{-7i\theta}(2cos3\theta)}{cos3\theta} = 2e^{-7i\theta} \;\; ■$$

مثال ۷-۱۷ اگر A , B و C زوایای یک مثلث باشند, حاصل I را بیابید.

$$I = (sinA + icosA)^{1399}(sinB + icosB)^{1399}(sinC + icosC)^{1399}$$

حل با استفاده از قسمت الف از مثال ۷-۱۶ خواهیم داشت:

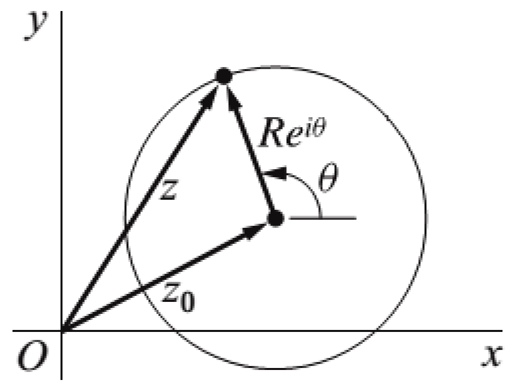
$$(sinA + icosA)^{1399} = \left(ie^{-iA}\right)^{1399} = i^{1399}e^{-1399Ai} = -ie^{-1399Ai}$$

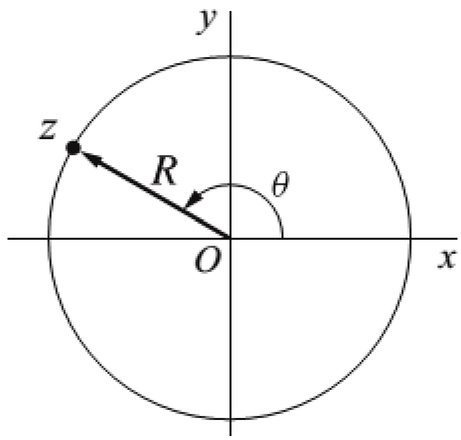
$$I = (-i)^3\left(e^{-1399Ai}\right)\left(e^{-1399Bi}\right)\left(e^{-1399i}\right) = ie^{-i1399(A+B+C)} = ie^{-1399\pi i} = ie^{-1398\pi i}e^{-\pi i}$$

$$\rightarrow I = i \times 1 \times \left(cos(\pi i) - isin(\pi i)\right) = -i$$

توجه شود که برای $k \in \mathbb{Z}$ همواره $e^{2k\pi i} = 1$ میباشد. ■

مثال ۷-۱۸ در دستگاه اعداد مختلط معادله دایره‌ای به شعاع R را بنویسید. ابتدا مرکز را مبدا و سپس نقطه z_0 در نظر بگیرید.





حل در ابتدا با انتخاب مبدا به عنوان مرکز (شکل سمت چپ) , با نوشتن مختصات دکارتی یک نقطه مانند z بر روی دایره و استفاده از رابطه اویلر خواهیم داشت:

$$z = x + iy = Rcos\theta + iRsin\theta = R(cos\theta + isin\theta) = Re^{i\theta}$$

میتوان این رابطه را به این صورت کنترل کرد که اگر طول دو طرف را بدست آوریم خواهیم داشت:

$$z = Re^{i\theta} \to |z| = \left|Re^{i\theta}\right| = |R|\left|e^{i\theta}\right| = |R| = R$$

که $|z| = R$ بیانگر مجموع نقاطی از صفحه است که فاصله آنها از مبدا برابر R می‌باشد که همان دایره است.

حال اگر مرکز دایره z_0 باشد, با استفاده از قوانین جمع بردارها در اعداد مختلط (شکل سمت راست) خواهیم داشت:

$$z - z_0 = Re^{i\theta} \leftrightarrow |z - z_0| = R \quad \blacksquare$$

مثال ۷-۱۹ عبارت $A = \left(1 - e^{i\alpha}\right)^n$ را ساده کنید. $(n \in \mathbb{N})$

حل برای حل به نظر میرسد بایستی بتوانیم به نحوی عبارت $1 - e^{i\alpha}$ را به فرم ضربی تبدیل کنیم. برای این منظور:

$$1 - cos\alpha - isin\alpha = 2sin^2\frac{\alpha}{2} - 2isin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2} = -2isin\frac{\alpha}{2}\left(cos\frac{\alpha}{2} + isin\frac{\alpha}{2}\right) = -2isin\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

$$\to A = \left(1 - e^{i\alpha}\right)^n = \left(-2isin\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^n = 2^n(-i)^n sin^n\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{n\alpha}{2}} \quad \blacksquare$$

مثال ۷-۲۰ قسمت حقیقی عبارت زیر را بیابید. $(n \in \mathbb{N})$

$$A = \frac{1 - cos(n\alpha) - isin(n\alpha)}{1 - cos\alpha - isin\alpha}$$

حل با استفاده از نتیجه مثال قبل خواهیم داشت:

$$A = \frac{-2isin\frac{n\alpha}{2}e^{i\frac{n\alpha}{2}}}{-2isin\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}} = \left(\frac{sin\frac{n\alpha}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}}\right)e^{i\frac{(n-1)\alpha}{2}} \to Re(A) = \frac{sin\frac{n\alpha}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}}cos\left(\frac{(n-1)\alpha}{2}\right)$$

راه دوم آن است که از ابتدا صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج مخرج ضرب کنیم. $\blacksquare$

مثال ۷-۲۱ حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$C = 1 + cos\alpha + cos(2\alpha) + \cdots + cos\big((n-1)\alpha\big)$$

حل دیده میشود که این عبارت بیانگر هیچ سری شناخته شده‌ای مانند سریهای حسابی یا هندسی یا تلسکوپی نمیباشد. برای حل این مساله بجای $cos(k\alpha)$ عبارت $\frac{e^{ki\alpha}+e^{-ki\alpha}}{2}$ قرار داده می‌دهیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$C=\frac{1}{2}\Big(\left(e^{0i\alpha}+e^{-0i\alpha}\right)+\left(e^{i\alpha}+e^{-1i\alpha}\right)+\cdots+\left(e^{(n-1)i\alpha}+e^{-(n-1)i\alpha}\right)\Big)$$

$$C=\frac{1}{2}\left(1+e^{i\alpha}+e^{2i\alpha}+\cdots+e^{(n-1)i\alpha}\right)+\frac{1}{2}\left(1+e^{-i\alpha}+e^{-2i\alpha}+\cdots+e^{-(n-1)i\alpha}\right)=\frac{1}{2}(A+B)$$

دیده میشود که به مجموع دو سری هندسی رسیدیم. در واقع اگرچه C بیانگر هیچ سری شناخته شده‌ای نبود, اما آرگومانهای آن یعنی 0 , α , 2α , 3α و ... تصاعد عددی تشکیل میدهند که این آرگومانها با رابطه $\frac{e^{ki\alpha}+e^{-ki\alpha}}{2}$ به توان منتقل شده و لذا تولید تصاعد هندسی خواهند کرد. حال این دو سری A و B را بدست می‌آوریم:

$$A=1+e^{i\alpha}+e^{2i\alpha}+\cdots+e^{(n-1)i\alpha}=\frac{1-e^{ni\alpha}}{1-e^{i\alpha}}=\frac{1-cos(n\alpha)-isin(n\alpha)}{1-cos\alpha-isin\alpha}$$

با تغییر α به $-\alpha$, سری دوم نیز بدست می‌آید. یا میتوان گفت سری دوم در واقع مزدوج سری اول میباشد. در نتیجه:

$$C=\frac{1}{2}\left(A+\overline{A}\right)=\frac{1-cos(n\alpha)-isin(n\alpha)}{2(1-cos\alpha-isin\alpha)}+\frac{1-cos(n\alpha)+isin(n\alpha)}{2(1-cos\alpha+isin\alpha)}$$
$$=cos\left(\frac{(n-1)\alpha}{2}\right)\frac{sin\frac{n\alpha}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}}\ \blacksquare$$

توضیح ۱: راه حل دوم که در واقع معادل راه حل بالا است, آن است که یک سری کمکی بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S=0+sin\alpha+sin(2\alpha)+\cdots+sin\big((n-1)\alpha\big)$$

حال اگر عبارت $C+iS$ را تشکیل دهیم, به یک سری هندسی میرسیم. که همان سری A در روش بالا است. لذا:

$$A=C+iS=1+e^{i\alpha}+e^{2i\alpha}+\cdots+e^{(n-1)i\alpha}=\frac{1-e^{ni\alpha}}{1-e^{i\alpha}}=\frac{1-cos(n\alpha)-isin(n\alpha)}{1-cos\alpha-isin\alpha}$$

هدف محاسبه C بود که قسمت حقیقی عبارت بالا است و در مثال قبل بدست آمد. در نتیجه:

$$C=Re(C+iS)=cos\left(\frac{(n-1)\alpha}{2}\right)\frac{sin\frac{n\alpha}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}}$$

این نوع روش حل اصطلاحا به نام روش $C+iS$ شناخته میشود. نکته مهم در این روش حل آن است که اگرچه C یا S هیچکدام یک سری شناخته شده‌ای نمی‌باشند, اما $C+iS$ معرف سری هندسی است. در بخش مثالهای تکمیلی, سریهای دیگری را به روش $C+iS$ بدست می‌آوریم.

راه دیگر آن است که $B=C-iS$ را تشکیل داده و لذا $2C=A+B$ خواهد شد که عملا همان راه حل اول است.

توضیح ۲: دیده میشود که تفاوت دو روش حل در آن است که در روش اول به محاسبه دو سری نیاز خواهیم داشت (که دومی, مزدوج اولی است) و در روش دوم به محاسبه یک سری و سپس بیرون کشیدن قسمت حقیقی آن. بدیهی است که این دو معادل یکدیگرند, چرا که قسمت حقیقی عدد مختلط $A=C+iS$ برابر $C=\frac{1}{2}\left(A+\overline{A}\right)$ می‌باشد. ■

مثال ۷-۲۲ ریشه‌های nام واحد را بدست آورید. $(n \in \mathbb{N})$

حل با نوشتن عدد $z=1$ به فرم قطبی و استفاده از رابطه مربوط به محاسبه ریشه n ام خواهیم داشت:

$$\sqrt[n]{1}=\sqrt[n]{|1|}\left(\cos\left(\frac{0+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{0+2k\pi}{n}\right)\right)=e^{\frac{2k\pi i}{n}}\ \ ;\ \ k=0:n-1$$

$$if\ \omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}\rightarrow\sqrt[n]{1}=1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}=\omega^k\ \ ;\quad k=0:n-1\ \blacksquare$$

توضیح: در مقایسه ریشه‌های nام عددی مانند z , با ریشه‌های nام واحد دیده میشود که:

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\ \ ;\ \ if\ k=0\rightarrow w_0=r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i\theta}{n}}$$

$$w=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}=\underbrace{r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i\theta}{n}}}_{w_0}\underbrace{e^{\frac{2k\pi i}{n}}}_{\omega^k}=\omega^k w_0\ \ ;\ \ k=0:n-1$$

یعنی کافی است ریشه‌های nام واحد را در یک جواب ریشه nام z ضرب کنیم تا همه ریشه‌های z بدست آید. $\blacksquare$

* **مثال ۷-۲۳** اگر $\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ باشد, نشان دهید: $\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^k)=n$

حل با توجه به مثال قبل مشخص است که ω^k ریشه‌های معادله $z^n=1$ میباشد. لذا:

$$\frac{z^n-1}{z-1}=\left(z-e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)\left(z-e^{\frac{4\pi i}{n}}\right)\cdots\left(z-e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}\right)\qquad;\qquad\frac{z^n-1}{z-1}=(z^{n-1}+\cdots+z^2+z+1)$$

از مقایسه این‌دو و انتخاب $z=1$ خواهیم داشت:

$$\left(1-e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)\left(1-e^{\frac{4\pi i}{n}}\right)\cdots\left(1-e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}\right)=n$$

یا به عبارت ساده‌تر اگر ریشه‌های معادله $z^n=1$ برابر $z_1=1$ تا z_n باشند, آنگاه:

$$(1-z_2)(1-z_3)\cdots(1-z_n)=n\ \blacksquare$$

۷-۶-۱- توانهای حقیقی یک عدد مختلط

در ابتدای این بخش عنوان شد که با بکارگیری رابطه اویلر میتوان رابطه دموآور را برای $n\in\mathbb{Z}$ بصورت $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{i(n\theta)}$ بیان کرد که به نظر میرسد در آنالیز حقیقی یک رابطه بدیهی است. یک سوال مهم آن است که تا بحال z^n و $z^{\frac{1}{n}}$ را بررسی کردیم, اما z^m را که در آن $m\in\mathbb{R}$ میباشد, چگونه بدست آوریم؟ قبل از آن مجددا z^n و $z^{\frac{1}{n}}$ را مرور میکنیم:

$$z^n=r^n\big(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\big)\qquad;\qquad z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)$$

اگر به این دو رابطه توجه شود خواهیم دید که گویا در رابطه دوم نیز مشابه رابطه اول عمل شده است, با این تفاوت که بجای θ مقدار $\theta+2k\pi$ قرار گرفته است. دقت شود که این تشابه سازی صرفا یک تعبیر است از آنچه به لحاظ ریاضی قبلا ثابت شده است.

در واقع قبلا عنوان شد که برای یک نقطه, در مختصات قطبی, θ یکتا نیست. به همین دلیل در رابطه دوم همه مقادیر ممکن θ را بصورت $\theta + 2k\pi$ قرار دادیم و دیده شد که هر انتخاب k نیز منجر به یک جواب خواهد شد, تا جایی که به جوابهای تکراری رسیدیم. به نظر میرسد در رابطه اول نیز بایستی بجای θ مقدار $\theta + 2k\pi$ قرار گیرد. اما اگر چنین جایگزینی انجام پذیرد جواب جدیدی بدست نمی‌آید. زیرا از آنجا که $k \in \mathbb{Z}$ خواهیم داشت:

$$z^n = r^n\left(cos\big(n(\theta + 2k\pi)\big) + isin\big(n(\theta + 2k\pi)\big)\right) = r^n\big(cos(n\theta) + isin(n\theta)\big)$$

حال به سراغ z^m میرویم. در واقع قرار است یک تابع جدید را تعریف کنیم. معمولا در بحث آنالیز مختلط تعاریف بگونه‌ای انجام میشود که تا حد ممکن مشابه تعریف آنالیز حقیقی باشد. در توابع مختلط در درس ریاضی مهندسی خواهیم دید ${z_1}^{z_2}$ بصورت $e^{z_2 ln z_1}$ تعریف می‌شود. دراینجا تعریف زیر را برای تابع z^m ارائه می‌کنیم که می‌توان ثابت کرد معادل همان تعریف اصلی است:

$$z^m = \left(re^{i\theta}\right)^m \equiv r^m e^{i(\theta+2k\pi)m}$$

در واقع این تعریف اینگونه بیان میکند که در رابطه دموآور, میتوان هر عدد حقیقی را بعنوان توان انتخاب کرد. فقط همانگونه که دیده میشود بایستی بجای θ مقدار $\theta + 2k\pi$ قرار گیرد. حال با پذیرش این تعریف بعنوان یک مثال ساده, یک عدد مختلط دلخواه را انتخاب و آنرا به سه توان مختلف صحیح, گویا و حقیقی می‌رسانیم. خواهیم داشت:

$$z = re^{i\theta} \rightarrow \begin{cases} z^2 = r^2 e^{2i\theta} = r^2\big(cos(2\theta) + isin(2\theta)\big) \\ z^{1.2} = r^{1.2} e^{1.2i\theta} = r^{1.2}\big(cos(1.2\theta) + isin(1.2\theta)\big) \\ z^{\sqrt{2}} = r^{\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}i\theta} = r^{\sqrt{2}}\left(cos\big(\sqrt{2}\theta\big) + isin\big(\sqrt{2}\theta\big)\right) \end{cases}$$

همانگونه که عنوان شد اگر بجای θ زاویه $\theta + 2k\pi$ قرار گیرد در سطر اول تغییری ایجاد نمیشود. اما در سطر دوم نتایج زیر را خواهیم داشت:

$$cos(1.2\theta)\ ;\ cos\big(1.2(\theta + 2\pi)\big)\ ;\ cos\big(1.2(\theta + 4\pi)\big)\ ;\ cos\big(1.2(\theta + 6\pi)\big)$$
$$cos\big(1.2(\theta + 8\pi)\big)\ ;\ cos\big(1.2(\theta + 10\pi)\big) = cos(1.2\theta)$$

به این معنی که بعد از 5 مقدار متفاوت, نتایج تکرار میشود. پس $z^{1.2}$, یک تابع 5 مقداری است. در حالت کلی اگر $m = \frac{p}{q}$ که p و q نسبت به هم اول باشند یعنی $(p,q) = 1$, آنگاه z^m دقیقا دارای q مقدار متمایز خواهد بود. در مثال فوق $1.2 = \frac{6}{5}$ و $(6,5) = 1$ لذا $z^{1.2}$, یک تابع 5 مقداری است.

حال اگر به سطر سوم توجه کنیم خواهیم دید که $z^{\sqrt{2}}$ یک تابع بینهایت مقداری خواهد بود. خلاصه آنکه در توانهای صحیح نیازی نیست $\theta + 2k\pi$ نیز بررسی شود. اما در توانهای غیر صحیح حتما بایستی بجای θ مقدار $\theta + 2k\pi$ قرار داده شود, چراکه منجر به ایجاد جوابهای دیگری نیز خواهد شد.

ممکن است سوال شود با این توضیحات $z^{1.2}$ و $z^{\sqrt{2}}$ در تعریف تابع نمی‌گنجد. در آنالیز مختلط, تابع میتواند برای یک ورودی چند خروجی نیز داشته باشد و با تعریف تابع در آنالیز حقیقی متفاوت است.

با آنچه در بالا عنوان شد, میتوان فرمول ریشه n ام یک عدد مختلط را بطریق دیگری بدست آورد. مشابه آنالیز حقیقی ریشه n ام یک عدد مختلط بصورت توان $\frac{1}{n}$ تعریف شد. اما از آنجا که $\frac{1}{n}$ عددی صحیح نیست ($n \neq 1$), با توجه به آنچه دیده شد, جواب, تک مقداری نخواهد بود و چون $(1,n) = 1$ لذا $z^{\frac{1}{n}}$ دقیقا دارای n جواب است. بنابراین بایستی در نوشتن عدد مختلط در فرم قطبی, بجای θ مقدار $\theta + 2k\pi$ قرار داده شود. در نتیجه:

$$w = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \to w = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \quad ; \quad k = 0{:}\,n-1$$

دیده شد که به همان نتیجه‌ای رسیدیم که قبلا نیز با روش دیگری بدست آمد.

خلاصه: برای بدست آوردن همه جوابهای ممکن, در نوشتن اعداد به فرم قطبی, همه جا آرگومان بایستی بصورت $\theta + 2k\pi$ لحاظ شود مگر آنکه مانند z^n که در آن $n \in \mathbb{Z}$ مشخص شود وارد کردن $2k\pi$ باعث اضافه شدن جواب جدیدی نمی‌شود.

توضیح: در درس ریاضی مهندسی خواهیم دید که معمولا لازم است که تابع چند مقداری را تک مقداری کرد. بعنوان نمونه برای تک مقداری کردن تابع $\sqrt[n]{z}$ میتوان الزام کرد که مثلا $-\pi < \theta \le \pi$ و $k = 0$ باشد. در اینصورت تابع $\sqrt[n]{z}$, یک خروجی بیشتر نخواهد داشت و آن را مقدار اصلی ریشه n ام می‌نامیم. همچنین خواهیم دید تابعی مانند $ln(z)$ نیز یک تابع بیشمار مقداری خواهد بود. لذا در اینجا نیز برای تک مقداری کردن تابع لگاریتم میتوان مثلا $-\pi < \theta \le \pi$ و $k = 0$ را انتخاب کرد. در اینصورت تابع لگاریتم, یک خروجی بیشتر نخواهد داشت و آن را $Ln(z)$ نشان داده و مقدار اصلی لگاریتم نامیده میشود. دقت شود قبلا هم در آنالیز حقیقی با این مورد روبرو شده‌ایم. مثلا $arcsin$ بیشمار جواب دارد, اما اگر الزام کنیم که خروجی در یک بازه خاص قرار داشته باشد(مثلا $-\frac{\pi}{2} < \theta \le \frac{\pi}{2}$) , آنگاه آنرا به یک تابع تک مقداری تبدیل کرده‌ایم که به آن مقدار اصلی آرک سینوس گفته و با $Arcsin$ نمایش میدهیم.

تمرینات بخش ۷-۶ تمرینات ۴۶ و ۵۰ از بخش ضمیمه H کتاب

۱- بسط $sin^4\theta$ و $cos^5\theta$ را بر حسب توانهای یک از سینوس و کسینوس بیابید.

<u>*Ans:*</u> $cos^5\theta = \frac{1}{8}cos(4\theta) + \frac{1}{2}cos(2\theta) + \frac{3}{8}$

۲- مثال ۷-۲۰ را با ضرب کردن صورت و مخرج کسر در مزدوج مخرج حل کنید.

۳- نشان دهید:

$$\left(\frac{i - tan\alpha}{i + tan\alpha}\right)^n = e^{2in\alpha}$$

۴- به کمک ریشه‌های nام واحد نشان دهید:

$$cos\frac{2\pi}{n} + cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = -1 \quad ; \quad sin\frac{2\pi}{n} + sin\frac{4\pi}{n} + \cdots + sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$$

۵- درستی قسمت الف از مثال ۳-۴ را با کمک اعداد مختلط نشان دهید. به عبارتی:

$$\sum_{i=1}^{n} sin(i\alpha) = \frac{sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$$

۶- درستی سریهای زیر را برای $-1 < a < 1$ نشان دهید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n cos(nx) = \frac{1 - acosx}{1 - 2acosx + a^2} \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} a^n sin(nx) = \frac{asinx}{1 - 2acosx + a^2}$$

۷- به کمک مثال ۷-۲۱ حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A = sin^2\frac{\alpha}{2} + sin^2\frac{2\alpha}{2} + sin^2\frac{3\alpha}{2} + \cdots + sin^2\frac{(n-1)\alpha}{2}$$

۸- به کمک مثال ۷-۲۳ نشان دهید:

$$sin\frac{\pi}{n}\,sin\frac{2\pi}{n}\,sin\frac{3\pi}{n}\cdots sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}} \quad ; \quad n = 2,3,\cdots$$

راهنمایی: از طرفین رابطه بدست آمده در مثال ۷-۲۳ مزدوج گرفته , سپس دو رابطه را در هم ضرب کنید.

۹- اگر عدد مختلط $z = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ باشد, حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$w = 1 + z + z^2 + z^3 + 5z^4 + 4z^5 + 4z^6 + 4z^7 + 4z^8 + 5z^9 \quad ; \quad \underline{Ans:}\ \ w = -5e^{\frac{3\pi i}{5}}$$

راهنمایی: بدیهی است z یکی از ریشه‌های پنجم واحد است, لذا $z^5 = 1$ بوده و در نتیجه:

$$z^5 - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4) = 0 \xrightarrow{z\neq 1} 1 + z + z^2 + z^3 = -z^4$$

۷-۷- چند مثال تکمیلی

❊ مثال ۷-۲۴ مقدار $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ را بیابید.

حل ابتدا عدد z را بصورت زیر تعریف میکنیم. بدیهی است این عدد, یکی از ریشه‌های $z^5 = 1$ میباشد.

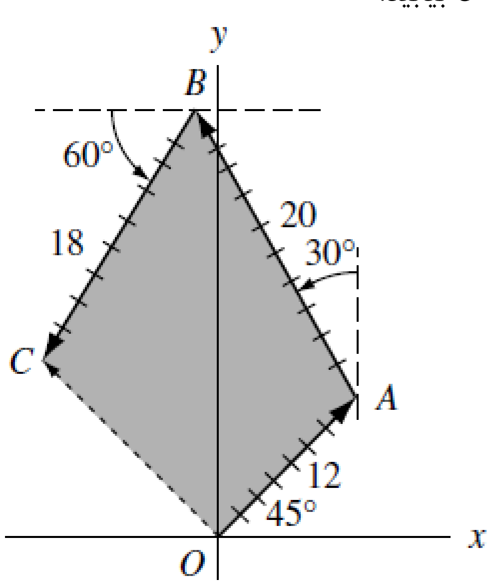
$$z = cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \to z^5 = 1 \xrightarrow{z\neq 1} z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{/z^2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0 \to \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

$$z + \frac{1}{z} = e^{\frac{2\pi}{5}i} + e^{-\frac{2\pi}{5}i} = cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + cos\left(\frac{-2\pi}{5}\right) + isin\left(\frac{-2\pi}{5}\right) = 2cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0 \to 4cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0 \to cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad ■$$

مثال ۷-۲۵ شخصی مسیر زیر را از نقطه O تا C طی میکند. موقعیت C را نسبت به O بیابید.



$$OA = 12(cos45^0 + isin45^0) = 12e^{\frac{\pi i}{4}}$$

$$AB = 20e^{\frac{2\pi i}{3}} \ ; \ BC = 18e^{\frac{4\pi i}{3}}$$

$$OC = OA + AB + BC$$

$$OC = \left(6\sqrt{2} - 19\right) + \left(6\sqrt{2} + 3\right)i$$

$$r = |OC| = \sqrt{x^2 + y^2} \approx 14.7$$

$$\underbrace{Arg(z)}_{\theta} = tan^{-1}\frac{y}{x} \approx 135^0\ 49'$$

مثال ۷-۲۶ ثابت کنید $A=(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ را می‌توان بصورت مجموع دو مربع کامل نوشت.

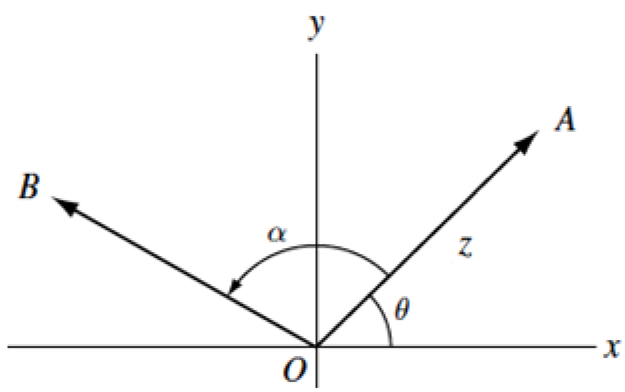
$$A=\underbrace{(a+i)(b+i)(c+i)}_{z}\underbrace{(a-i)(b-i)(c-i)}_{\bar{z}}=x^2+y^2 \quad \blacksquare$$

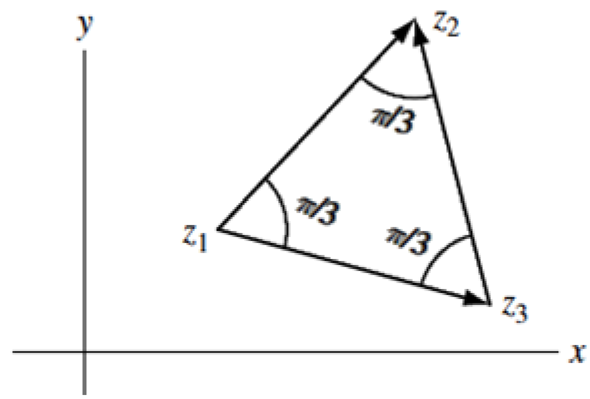
مثال ۷-۲۷ دوران یافته یک بردار به مرکز O و به میزان α درجه را بدست آورید.

حل با توجه به شکل سمت چپ, بردار اولیه را با OA و دوران یافته آن‌را با OB نمایش میدهیم. با نوشتن آنها به فرم مختلط:

$$OA=z=Re^{i\theta} \quad ; \quad OB=Re^{i(\theta+\alpha)}=\underbrace{Re^{i\theta}}_{z}e^{i\alpha}=ze^{i\alpha}$$

به عبارتی برای یافتن دوران یافته بردار z به میزان α درجه, کافی است بردار z را در $e^{i\alpha}$ ضرب کنیم. $\blacksquare$





مثال ۷-۲۸ نشان دهید اگر z_1, z_2 و z_3 سه راس یک مثلث متساوی الاضلاع باشند(شکل سمت راست), آنگاه:

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3$$

حل از آنجا که بردار z_2-z_1 دوران یافته z_3-z_1 به میزان $\frac{\pi}{3}$ و بردار z_1-z_3 نیز دوران یافته z_2-z_3 به همین اندازه می‌باشد, لذا با توجه به نتیجه مثال قبل:

$$z_2-z_1=(z_3-z_1)e^{i\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad z_1-z_3=(z_2-z_3)e^{i\frac{\pi}{3}} \rightarrow \frac{z_2-z_1}{z_1-z_3}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_3} \rightarrow \text{حکم} \quad \blacksquare$$

مثال ۷-۲۹ کسر زیر را تجزیه کنید.

$$f(x)=\frac{x^3}{x^4-1}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

حل تجزیه کسر بصورتی است که در بالا ارائه شده است. با متحد قرار دادن صورت کسرِ دو طرف خواهیم داشت:

$$A_1(x-1)(x^2+1)+A_2(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)(x+1)=x^3$$

حال با استفاده از انتخاب ریشه‌های مخرج بعنوان x (یا هر عدد دلخواه دیگری) در اتحاد فوق خواهیم داشت:

$$x=-1\rightarrow -4A_1=-1\rightarrow A_1=\frac{1}{4} \quad ; \quad x=1\rightarrow 4A_2=1\rightarrow A_2=\frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} x=i\rightarrow -2(Ci+D)=-i \\ x=-i\rightarrow -2(-Ci+D)=i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C=1/2 \\ D=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad f(x)=\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} \quad \blacksquare$$

توضیح ۱: میتوان با انتخاب $x=0$ ابتدا D را بدست آورده و سپس از حدگیری زیر استفاده کرد:

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) \to 1 = A_1 + A_2 + C \to C = 0.5$$

توضیح ۲: در اینجا راه حل دیگری برای این مثال ارائه میشود. از آنجا که اکنون با بحث اعداد مختلط می‌توانیم x^2+1 را تجزیه کنیم, میتوان تجزیه $f(x)$ را بصورت زیر نیز نوشت که در اینصورت محاسبه ضرایب ساده‌تر از روش قبل خواهد بود:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^4-1} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+i} + \frac{A_4}{x-i} \to A_1 = \frac{g(x_1)}{h'(x_1)} = \frac{g(-1)}{h'(-1)} = \frac{1}{4}$$

به همین ترتیب سایر ضرایب نیز $\frac{1}{4}$ بدست می‌آیند.حال اگر دو جمله آخر را بصورت جمع شده بنویسیم به همان جواب بالا می‌رسیم.

$$\frac{\frac{1}{4}}{x+i} + \frac{\frac{1}{4}}{x-i} = \frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1} \quad \blacksquare$$

مثال ۷-۳۰ انتگرال زیر را بدست آورید.

$$I = \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \quad ; \quad \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{C_1x+D_1}{x^2+1} + \frac{C_2x+D_2}{x^2+4}$$

حل تجزیه کسر بصورتی است که در بالا ارائه شده است. با متحد قرار دادن صورت کسرِ دو طرف خواهیم داشت:

$$(C_1x+D_1)(x^2+4) + (C_2x+D_2)(x^2+1) = 1$$

$$x = i \to 3C_1i + 3D_1 = 1 \to \begin{cases} C_1 = 0 \\ D_1 = 1/3 \end{cases} \quad ; \quad x = 2i \to -6C_2i - 3D_2 = 1 \to \begin{cases} C_2 = 0 \\ D_2 = -1/3 \end{cases}$$

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{3(x^2+1)} - \frac{1}{3(x^2+4)} \to I = \frac{1}{3}tan^{-1}x - \frac{1}{6}tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C \quad \blacksquare$$

توضیح: راه حل دوم تجزیه کسر بصورت زیر است:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A_1}{x+i} + \frac{A_2}{x-i} + \frac{A_3}{x+2i} + \frac{A_4}{x-2i}$$

$$A_1 = \frac{g(-i)}{h'(-i)} = \frac{1}{4(-i)^3 + 10(-i)} = \frac{1}{-6i} = \frac{i}{6}\,; A_2 = \frac{-i}{6}; A_3 = \frac{-i}{12}; A_4 = \frac{i}{12}$$

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{i/6}{x+i} + \frac{-i/6}{x-i} + \frac{-i/12}{x+2i} + \frac{i/12}{x-2i} = \frac{1}{3(x^2+1)} - \frac{1}{3(x^2+4)}$$

دیده میشود که این راه حل ساده‌تر است. اما در نهایت تبدیل کسر مختلط به یک کسر حقیقی ممکن است کار را طولانی کند. ■

مثال ۷-۳۱ با استفاده از بسط دو جمله‌ای $(1+i)^n$, نشان دهید:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \cdots = 2^{\frac{n}{2}}cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$(1+i)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}i + \binom{n}{2}i^2 + \binom{n}{3}i^3 + \binom{n}{4}i^4 + \binom{n}{5}i^5 + \cdots$$

$$\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}\right)^n = \left\{\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \cdots\right\} + i\left\{\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots\right\}$$

$$\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}\right)^n = 2^{\frac{n}{2}}cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i2^{\frac{n}{2}}sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \to \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \cdots = 2^{\frac{n}{2}}cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \quad \blacksquare$$

مثال ۷-۳۲ اگر $sin\beta = itan\alpha$, نشان دهید: $e^{i\alpha} = tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)$

$$sin\beta = itan\alpha \rightarrow \frac{1}{sin\beta} = \frac{cos\alpha}{isin\alpha} \rightarrow \frac{1+sin\beta}{1-sin\beta} = \frac{cos\alpha + isin\alpha}{cos\alpha - isin\alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$$

$$\rightarrow \left(\frac{cos\frac{\beta}{2}+sin\frac{\beta}{2}}{cos\frac{\beta}{2}-sin\frac{\beta}{2}}\right)^2 = e^{2i\alpha} \xrightarrow{\text{جذر}} tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right) = e^{i\alpha} \ \blacksquare$$

تمرینات بخش ۷-۷

۱- اگر z_1, z_2 و z_3 سه راس یک مثلث متساوی الاضلاع بوده و z_0 مختصات مرکز مثلث باشد, نشان دهید:

$$\frac{1}{z_1-z_2}+\frac{1}{z_2-z_3}+\frac{1}{z_3-z_1}=0 \quad ; \quad z_1^2+z_2^2+z_3^2=3z_0^2$$

۲- اگر $x+\frac{1}{x}=2cos\theta$ و $y+\frac{1}{y}=2cos\varphi$ نشان دهید:

$$\frac{x^m}{y^n}+\frac{y^n}{x^m}=2cos(m\theta-n\varphi) \ ; \ x^my^n+\frac{1}{x^my^n}=2cos(m\theta+n\varphi)$$

۳- اگر $a^2+b^2=1$ باشد, آنگاه ریشه های حقیقی معادله $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = a+bi$ را بیابید.

۴- ابتدا درستی انتگرال I را نشان داده به کمک آن انتگرال J را بیابید.

$$I=\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\,d\theta = \begin{cases} 2\pi & n=0 \\ 0 & n=\pm1,\pm2,\cdots \end{cases} \quad ; \quad J=\int_0^{2\pi} cos^4\theta\,d\theta \ ; \quad \underline{Ans}: \ J=\frac{3\pi}{4}$$

۵- معادلات زیر را با استفاده از راهنماییهای داده شده حل کنید:

$$1)\ \ z^4+iz^3-z^2-iz+1=0 \rightarrow z^4-z^2(1-iz)+(1-iz) \xrightarrow{\times(1+iz)} \cdots$$

$$2)\ \ z^4+3z-2=0 \rightarrow (z^2+az+b)(z^2+cz+d)=0$$

۶- در مجموعه تمرینات بخش ۴-۵ از شما خواسته شده بود که کسر زیر را مطابق راهنمایی داده شده تجزیه کنید:

$$\frac{1}{x^4+4}=\frac{1}{\underbrace{x^4+4x^2+4}_{(x^2+2)^2}-4x^2}=\frac{\overbrace{C_1}^{1/8}\,x+\overbrace{D_1}^{1/4}}{x^2+2x+2}+\frac{\overbrace{C_2}^{-1/8}\,x+\overbrace{D_2}^{1/4}}{x^2-2x+2}$$

در اینجا مساله را با درنظر گرفتن ریشه‌های مختلط مخرج نیز مجددا حل کرده, نشان دهید نتیجه نهایی تجزیه کسر یکسان است.

❊ ۷-۸- توابع مختلط

تا به حال توابعی مانند z^n و $\sqrt[n]{z}$ بررسی شدند. در اینجا چند تابع دیگر نیز بطور خلاصه و بدون ذکر جزئیات هر یک ارائه میشود. لازم بذکر است معرفی توابع مختلط و کاربردهای آن در ریاضی مهندسی مطرح میشود.

الف: تابع نمایی

توابع مختلط را بگونه‌ای تعریف میکنیم که ۱) تحلیلی بوده و ۲) با جایگذاری $y = 0$ به همان تعریف آنالیز حقیقی برسیم. در اینجا, علاوه بر دو شرط بالا, دو شرط زیر را نیز انتخاب می‌کنیم:

$$3)\quad (e^z)' = e^z \quad ; \quad 4)\ e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

با قبول این شرایط در درس ریاضی مهندسی تابع e^z بصورت زیر بدست می‌آید:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(cosy + isiny)$$

که درست معادل آن است که رابطه اویلر یعنی $e^{iy} = cosy + isiny$ را بعنوان یک تعریف پذیرفته باشیم.

ب: توابع مثلثاتی

این توابع نیز مشابه حقیقی تعریف میشوند. به عبارتی روابط زیر را تعریف می‌کنیم:

$$cosz = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\ ;\ sinz = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\ ;\ coshz = \frac{e^z+e^{-z}}{2}\ ;\ sinhz = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

از آنجا که قبلا تابع e^z تعریف شده است, لذا هر یک از عبارات بالا قابل محاسبه است. با انتخاب $z = x + iy$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} sinz = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} &= \frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix-y}-e^{-ix+y}}{2i} \\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{-y}(cosx + isinx) - e^{y}(cosx - isinx)\right) \\ &= sinx\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right) + icosx\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right) = \underbrace{sinxcoshy}_{u} + i\,\underbrace{cosxsinhy}_{v} \end{aligned}$$

به همین ترتیب می‌توان $cosz$, $sinhz$ و $coshz$ را نیز بدست آورد. در نهایت:

$$sinz = sin(x+iy) = sinxcoshy + icosxsinhy$$

$$cosz = cos(x+iy) = cosxcoshy - isinxsinhy$$

$$sinhz = sinh(x+iy) = sinhxcosy + icoshxsiny$$

$$coshz = cosh(x+iy) = coshxcosy + isinhxsiny$$

به عنوان مثال:

$$cos(1+2i) = cos1\,cosh2 - isin1\,sinh2 = 2.033 - 3.052i$$

$$sin\left(\frac{\pi}{2} + iln5\right) = cosh(ln5) = \frac{e^{ln5}+e^{-ln5}}{2} = 2.6$$

دیده می‌شود ممکن است سینوس یک عدد مختلط از 1 نیز بیشتر شود.

به سادگی دیده می‌شود که نتایج بالا در محاسبه نسبتهای مثلثاتی و هیپربولیکی یک عدد مختلط درست معادل همان بسطهای توابع مثلثاتی حقیقی, یعنی روابط مربوط به محاسبه سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه می‌باشد. چراکه به عنوان مثال:

$$sinz = sin(x+iy) = sinx\,\underbrace{cos(iy)}_{coshy} + cosx\,\underbrace{sin(iy)}_{isinhy}$$

$$sinhz = sinh(x+iy) = sinhx\,\underbrace{cosh(iy)}_{cosy} + coshx\,\underbrace{sinh(iy)}_{isiny}$$

مثال ۷-۳۳ اگر $sin(\theta+i\varphi)=tan\alpha+isec\alpha$, نشان دهید: $cos(2\theta)cosh(2\varphi)=3$

$$sin\theta cosh\varphi+icos\theta sinh\varphi=tan\alpha+isec\alpha\rightarrow\begin{cases}sin\theta cosh\varphi=tan\alpha\\cos\theta sinh\varphi=sec\alpha\end{cases}$$

$$sec^2\alpha-tan^2\alpha=1\rightarrow cos^2\theta sinh^2\varphi-sin^2\theta cosh^2\varphi=1$$

$$\left(\frac{1+cos2\theta}{2}\right)\left(\frac{cosh2\varphi-1}{2}\right)-\left(\frac{1-cos2\theta}{2}\right)\left(\frac{cosh2\varphi+1}{2}\right)=1\rightarrow \text{حکم}\ \blacksquare$$

ج: تابع لگاریتمی

$$lnz=ln\left(re^{i(\theta+2k\pi)}\right)=lnr+i(\theta+2k\pi)\ \ ;\ \ r=\sqrt{x^2+y^2}\ \ ;\ \ \theta=tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$k=0\rightarrow Lnz=Lnr+i\theta\ \ ;\ \ 0\le\theta<2\pi\ \ \rightarrow Ln(-5)=Ln5+i\pi$$

دیده میشود که $ln(z)$ یک تابع بیشمار مقداری است. زیرا $\theta+2k\pi$ بیشمار مقدار دارد. لذا در اینجا نیز با یک تابع چند مقداری روبرو هستیم. همانگونه که قبلا نیز عنوان شد از آنجا که معمولا لازم است که تابع چند مقداری را تک مقداری کرد مثلا میتوان الزام کرد که مثلا $-\pi<\theta\le\pi$ و $k=0$ باشد. در اینصورت تابع لگاریتم, یک خروجی بیشتر نخواهد داشت و آن را $Ln(z)$ نشان داده و مقدار اصلی لگاریتم نامیده میشود.

مثال ۷-۳۴ قسمت حقیقی عبارت $z=Ln\left(1+re^{i\theta}\right)$ را بیابید.

$$z=Ln\left(\underbrace{1+rcos\theta}_{x}+i\underbrace{rsin\theta}_{y}\right)=ln\left(\sqrt{(1+rcos\theta)^2+(rsin\theta)^2}\right)+i\,tan^{-1}\left(\frac{rsin\theta}{1+rcos\theta}\right)$$

$$\rightarrow Re(z)=\frac{1}{2}ln(1+r^2+2rcos\theta)\ \blacksquare$$

مثال ۷-۳۵ مقدار اصلی Lni و i^i را بیابید.

$$Lni=Ln1+i\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}i\qquad\left(i^2=-1=e^{\pi i}\rightarrow 2Lni=\pi i\rightarrow Lni=\frac{\pi}{2}i\right)$$

$$A=i^i\rightarrow LnA=iLni=i\frac{\pi}{2}i=-\frac{\pi}{2}\rightarrow A=e^{-\frac{\pi}{2}}\ \blacksquare$$

مثال ۷-۳۶ تابع $sin^{-1}z$ را بر حسب تابع لگاریتم طبیعی بیان کنید.

حل از آنجا که توابع مثلثاتی بر حسب تابع نمایی مختلط بیان شد, پس معکوس این توابع را میتوان بر حسب معکوس نمایی مختلط (لگاریتم طبیعی) بیان کرد.

$$w=sin^{-1}z\rightarrow z=sinw=\frac{1}{2i}\left(e^{iw}-e^{-iw}\right)\xrightarrow{t=e^{iw}}t=e^{iw}=iz+\sqrt{1-z^2}$$

دقت شود در توابع مختلط, $\sqrt{1-z^2}$ خود, دارای دو جواب میباشد, لذا الزامی به قرار دادن $\pm$ در ابتدای آن نیست.

$$\rightarrow sin^{-1}z=-iLn\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)\ \blacksquare$$

۷-۹- کاربردها

۷-۹-۱- محاسبه تعدادی از مجموعهای مثلثاتی , روش $C+iS$

در مثال ۷-۲۱ دیده شد گاهی هدف محاسبه یک سری است در حالیکه آن سری بیانگر هیچ سری شناخته شده‌ای مانند سریهای حسابی یا هندسی یا تلسکوپی نمی‌باشد. اما در برخی سریها می‌توان با تعریف یک سری کمکی, عبارتی به فرم $C+iS$ ایجاد کردیم بگونه‌ای که حاصل آن قابل محاسبه باشد. در نهایت نیز با بیرون کشیدن جزء حقیقی یا موهومی آن, سری مورد نظر بدست آمد. در اینجا مثالهای دیگری را در این ارتباط خواهیم دید.

مثال ۷-۳۷ حاصل انتگرال $I=\int e^{ax}cos(bx)\,dx$ را بیابید.

حل راه حل کلی میتواند روش جزء به جزء باشد. در اینجا به طریق دیگری مساله را حل می‌کنیم. یک راه آن است که بجای $cos(bx)$ بر حسب e^{ibx} و e^{-ibx} قرار داد که در اینصورت فقط بایستی انتگرالهای نمایی محاسبه شود که ساده است. یا معادل همین راه حل, درست مشابه توضیح ۱ در مثال ۷-۲۱ , با تعریف J بصورت زیر و محاسبه $I+iJ$, با بیرون کشیدن قسمت حقیقی آن, جواب را بدست آورد.

$$J=\int e^{ax}sin(bx)\,dx \to I+iJ=\int e^{ax}e^{ibx}\,dx=\int e^{(a+ib)x}\,dx=\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}$$

$$\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}=\frac{e^{ax}}{a+ib}e^{ibx}=\frac{e^{ax}(a-ib)}{a^2+b^2}\big(cos(bx)+isin(bx)\big)$$

$$\to I=Re(I+iJ)=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\big(bsin(bx)+acos(bx)\big)$$

$$\to \int e^{ax}\begin{pmatrix}cosbx\\ sinbx\end{pmatrix}dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(\begin{pmatrix}b\\ a\end{pmatrix}sinbx+\begin{pmatrix}a\\ -b\end{pmatrix}cosbx\right)\ \blacksquare$$

مثال ۷-۳۸ درستی رابطه زیر را نشان دهید.

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n cosn\theta=\frac{1-r^2}{1-2rcos\theta+r^2}\quad ;\quad |r|<1\quad ;\quad n\in\mathbb{N}$$

حل با نوشتن $cosn\theta$ بر حسب $e^{in\theta}$ و $e^{-in\theta}$ خواهیم داشت:

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n cosn\theta=1+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{r^ne^{in\theta}}_{(re^{i\theta})^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{r^ne^{-in\theta}}_{(re^{-i\theta})^n}=1+\frac{re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}+\frac{re^{-i\theta}}{1-re^{-i\theta}}$$

$$=\frac{1-r^2}{1-2rcos\theta+r^2}\quad ;\quad \left|re^{\pm i\theta}\right|<1\ \blacksquare$$

<u>توضیح</u>: میتوان عبارت داخل آکولاد را به صورت زیر نیز بدست آورد که در واقع معادل همان روش بالا است.

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n cosn\theta=1+2\sum_{n=1}^{\infty}Re\left(r^ne^{in\theta}\right)=1+2Re\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(re^{i\theta}\right)^n\right)=1+2Re\left(\frac{re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)$$

$$=1+\frac{2rcos\theta-2r^2}{1-2rcos\theta+r^2}=\frac{1-r^2}{1-2rcos\theta+r^2}\ \blacksquare$$

❋ مثال ۷-۳۹ درستی رابطه زیر را نشان دهید.

$$A=\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{r^n}{n}sinn\theta=\frac{1}{2}tan^{-1}\left(\frac{2rsin\theta}{1-r^2}\right)\quad;\quad(|r|<1)$$

حل اگر از این عبارت نسبت به θ مشتق بگیریم, سری ساده‌تری را برای محاسبه خواهیم داشت.

$$C=\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}r^n cosn\theta=\frac{1}{2}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}r^n\left(e^{in\theta}+e^{-in\theta}\right)$$

هر یک از دو سری بالا, یک سری هندسی با قدر نسبت کمتر از یک است. چرا که $\left(\left|r^2e^{2i\theta}\right|=|r^2|<1\right)$

$$|x^2|<1\rightarrow\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x^2}\rightarrow\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}r^ne^{\pm in\theta}=\frac{re^{\pm i\theta}}{1-r^2e^{\pm 2i\theta}}\quad|r^2|<1$$

$$\rightarrow C=\frac{r(1-r^2)cos\theta}{1+r^4-2r^2cos(2\theta)}=\frac{r(1-r^2)cos\theta}{(1-r^2)^2+(2rsin\theta)^2}=\frac{1}{2}\frac{\frac{2rcos\theta}{1-r^2}}{1+\left(\frac{2rsin\theta}{1-r^2}\right)^2}$$

$$u=\frac{2rsin\theta}{1-r^2}\rightarrow C=\frac{dA}{d\theta}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{d\theta}\rightarrow A=\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{2}tan^{-1}u+c$$

که با انتخاب یک θ مشخص مانند $\theta=0$, ثابت انتگرال‌گیری برابر $c=0$ بدست می‌آید. ■

توضیح: راه حل دوم آن است که با تعریف S بصورت زیر, عبارت $C+iS$ را تشکیل داده و در نهایت قسمت حقیقی آنرا بدست آوریم که در واقع معادل همان روش بالا است.

$$S=\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}r^n sinn\theta\rightarrow C+iS=\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}r^ne^{in\theta}\rightarrow C=Re\left(\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}r^ne^{in\theta}\right)\ ■$$

❋ ۷-۹-۲- حل معادلات درجه سوم (فرمول کاردانو)

قبلا دیده شد که به کمک اعداد مختلط برای معادله درجه دو با دلتای منفی می‌توان دو جواب بدست آورد.

حال معادله $x^3+ax^2+bx+c=0$ را در نظر میگیریم. با تغییر متغیر $x=t-\frac{a}{3}$ میتوان ضریب x^2 را صفر کرده و معادله $t^3+pt+q=0$ را بدست آورد. برای حل این معادله متغیر t را به مجموع دو متغیر u و v می‌شکنیم, یعنی $t=u+v$. پس قطعا حق انتخاب یک رابطه دلخواه بین ایندو را خواهیم داشت.

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0\rightarrow u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0$$

این معادله دو مجهول دارد و لذا رابطه دوم بین u و v را بصورت $3uv+p=0$ انتخاب میکنیم تا معادله بالا را تا حد ممکن ساده کند. درنتیجه:

$$\begin{cases}u^3+v^3=-q\\3uv+p=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}u^3+v^3=-q\\u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27}\end{cases}\rightarrow z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0\rightarrow z=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}$$

دقت شود از آنجا که مجموع و حاصلضرب دو کمیت u^3 و v^3 را داریم, معادله درجه دومی نوشتیم که ریشه‌هایش u^3 و v^3 باشد. با حل این معادله $z = u^3$ و $z = v^3$ بدست می‌آید. حال با ریشه سوم گرفتن از آنها u و v و درنتیجه $t = u + v$ محاسبه میشود. از آنجا که با ریشه سوم گرفتن از هر جواب z , ۳ جواب برای u و ۳ جواب برای v بدست می‌آید, به نظر میرسد که در کل ۹ جواب حاصل شود. اما چون هر جفت u و v بایستی در شرط $uv = -\frac{p}{3}$ صدق کند, نشان میدهیم که در کل ۳ جواب برای t بیشتر نخواهیم داشت.

فرض کنید u_1 و v_1 دو ریشه باشند که در شرط $u_1 v_1 = -\frac{p}{3}$ صدق نمایند. با جمع ایندو, t_1 یعنی یک جواب معادله بدست می‌آید. حال ساده‌ترین راه تقسیم معادله بر $t - t_1$ است که دو جواب دیگر را بدست می‌دهد. اما در ادامه راه دیگری ارائه میشود.

قبلا دیده شد با داشتن ریشه‌های nام واحد میتوان همه جوابها را از روی u_1 و v_1 بدست آورد. فرض کنید u_2 و v_2 دو جواب دیگر بوده و ω_1 و ω_2 ریشه‌های سوم واحد باشد. در اینصورت:

$$\begin{cases} u_2 = \omega_1 u_1 \\ v_2 = \omega_2 v_1 \end{cases} \;;\quad u_2 v_2 = -\frac{p}{3} \rightarrow \omega_1 \omega_2 = 1$$

پس بایستی ω_1 و ω_2 بگونه‌ای انتخاب شود که ضرب آنها یک شود. تنها انتخابهای ممکن عبارتند از:

$$\begin{cases} \omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ \omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (1,1) \\ (\omega, \omega^2) \\ (\omega^2, \omega) \end{cases} \rightarrow \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}$$

خلاصه آنکه با ریشه سوم گرفتن از هر جواب z , ۳ جواب برای u و ۳ جواب برای v بدست می‌آید. یک u_1 و یک v_1 بگونه‌ای انتخاب میکنیم که ضرب آنها $-\frac{p}{3}$ گردد. حال با ضرب ماتریس بالا(که یک ماتریس همواره ثابت است) همه جوابها بدست می‌آید. این روش حل معادله درجه ۳, اصطلاحا به فرمول کاردانو (Cardano) شناخته میشود.

مثال ۷-۴۰ معادلات زیر را حل کنید.

$$1)\;\; t^3 - 3t + 2 = 0 \rightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1, -1 \rightarrow u = \sqrt[3]{-1} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i ; -1 ; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right\}$$

$$v = u \xrightarrow{u_1 v_1 = -\frac{p}{3} = 1} \begin{cases} u_1 = -1 \\ v_1 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

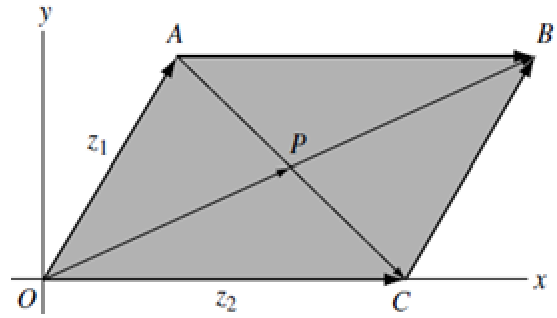
نکته جالب توجه آن است که برای معادله‌ای با ضرایب حقیقی و جوابهای حقیقی, اعداد مختلط وارد حل و در نهایت حذف شد. ■

$$2)\;\; t^3 - 6t + 4 = 0 \rightarrow z = -2 \pm 2i \quad ; \quad \begin{cases} u = \sqrt[3]{-2+2i} = \left\{ 1+i ; \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)} ; \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)} \right\} \\ v = \sqrt[3]{-2-2i} = \left\{ 1-i ; \sqrt{2} e^{\frac{5\pi}{12} i} ; \sqrt{2} e^{i\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)} \right\} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{u_1 v_1 = -\frac{p}{3} = 2} \begin{cases} u_1 = 1+i \\ v_1 = 1-i \end{cases} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1+i \\ 1-i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1-\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} \end{Bmatrix} \;\; ■$$

۷-۹-۳- حل مسائل هندسه

مثال ۷-۴۱ نشان دهید که اقطار یک متوازی‌الاضلاع همدیگر را نصف میکنند.



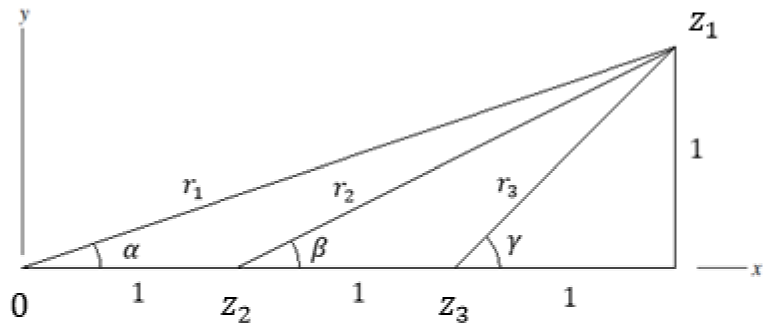
$$\begin{cases} AC = z_2 - z_1 \rightarrow AP = m(z_2 - z_1) & 0 \le m \le 1 \\ OB = z_1 + z_2 \rightarrow OP = n(z_1 + z_2) & 0 \le n \le 1 \end{cases}$$

$$OA + AP = OP \rightarrow z_1 + m(z_2 - z_1) = n(z_1 + z_2)$$

$$\rightarrow (1 - m - n)z_1 + (m - n)z_2 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 - m - n = 0 \\ m - n = 0 \end{cases} \rightarrow m = n = \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

مثال ۷-۴۲ در مثلث زیر نشان دهید $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. (این مثال قبلا بعنوان تمرین در بخش ۲-۴ مطرح شده بود)



حل هر یک از سه وتر مثلث را بصورت یک بردار مختلط در نظر گرفته و آنها را به فرم قطبی و دکارتی بیان می‌کنیم. به عبارتی:

$$z_1 - 0 = r_1 e^{i\alpha} = 3 + i \quad ; \quad z_1 - z_2 = r_2 e^{i\beta} = 2 + i \quad ; \quad z_1 - z_3 = r_3 e^{i\gamma} = 1 + i$$

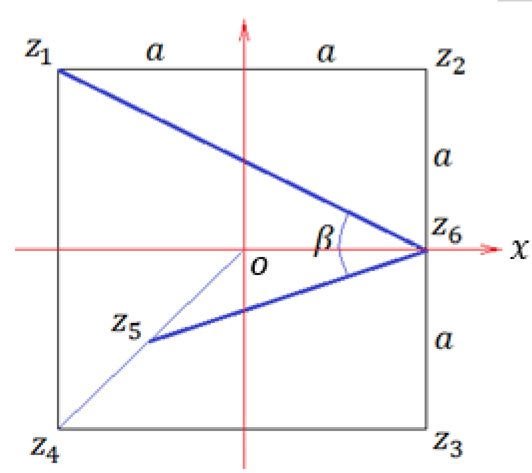
حال از ضرب سه عبارت بالا در یکدیگر, نتیجه مورد نظر بدست می‌آید:

$$r_1 r_2 r_3 e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = (3 + i)(2 + i)(1 + i) = 10i = 10e^{i\frac{\pi}{2}} \rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \quad , \quad r_1 r_2 r_3 = 10 \quad \blacksquare$$

توضیح: دقت شود قبلا عنوان شد که از $re^{i\theta} = \rho e^{i\varphi}$ می‌توان نتیجه گرفت $r = \rho$ و $\theta = \varphi + 2k\pi$ می‌باشد. $\blacksquare$

مثال ۷-۴۳ با توجه به شکل زیر زاویه β را بدست آورید. چهارضلعی داده شده یک مربع بوده و z_5 وسط oz_4 میباشد.

حل زاویه مورد نظر, اختلاف زاویه $z_1 z_6 x$ یعنی $Arg(z_1 - z_6)$ از $z_5 z_6 x$ یعنی $Arg(z_5 - z_6)$ میباشد. در نتیجه:



$$\beta = Arg(z_5 - z_6) - Arg(z_1 - z_6) = Arg\left(\frac{z_5 - z_6}{z_1 - z_6}\right)$$

$$\frac{z_5 - z_6}{z_1 - z_6} = \frac{\left(-\frac{a}{2} - \frac{a}{2}i\right) - (a)}{(-a + ai) - (a)} = \frac{3 + i}{4 - 2i} = \frac{1 + i}{2}$$

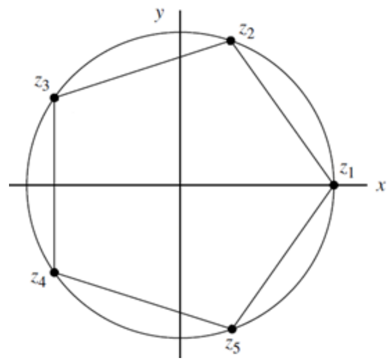
$$\rightarrow Arg\left(\frac{1 + i}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

توضیح: اگر مبدا مختصات را در z_6 انتخاب کنیم, محاسبات مربوط به آرگومان ساده‌تر خواهد بود. در اینصورت:

$$\beta = Arg(z_5) - Arg(z_1) = Arg\left(\frac{z_5}{z_1}\right) \quad ; \quad \frac{z_5}{z_1} = \frac{-\frac{3a}{2} - \frac{a}{2}i}{-2a + ai} = \frac{1+i}{2} \to Arg\left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \ ■$$

❋ مثال ۷-۴۴ اگر نقاط A_1 تا A_5 به‌ترتیب نقاط یک ۵ ضلعی منتظم با شعاع دایره محیطی برابر با ۱ باشند, با استفاده از نتیجه مثال ۷-۲۳ نشان دهید: $\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} = \sqrt{5}$

حل این نقاط را میتوان ریشه‌های پنجم واحد در نظر گرفت و به ترتیب با z_1 تا z_5 نمایش داد. (شکل زیر)



در مثال ۷-۲۳ دیده شد که برای ریشه‌های nام واحد خواهیم داشت:

$$n = 5 \to (1-z_2)(1-z_3)(1-z_4)(1-z_5) = 5 \quad ; \quad z_1 = 1$$

اما با توجه به شکل بدیهی است که $z_4 = \overline{z_3}$ و $z_5 = \overline{z_2}$. در نتیجه:

$$(1-z_2)(1-z_3)(1-\overline{z_3})(1-\overline{z_2}) = 5 \to |1-z_2|^2|1-z_3|^2 = 5$$

با جذر گرفتن از طرفین و اینکه $1 - z_2$ برابر با فاصله z_1 تا z_2 و $1 - z_3$ فاصله z_1 تا z_3 میباشد, نتیجه بدست می‌آید. ■

❋ مثال ۷-۴۵ قضیه بطلمیوس را در چهارضلعی محاطی $ABCD$ ثابت کنید. یعنی:

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$$

حل بدون آنکه از کلیت مساله کاسته شود فرض میکنیم شعاع دایره محیطی برابر واحد باشد. به عبارتی اگر اینگونه نبود, می‌توان آنرا مقیاس کرد تا شعاع آن واحد شود. نقاط مورد نظر را به ترتیب با z_1 تا z_4 نمایش می‌دهیم. در نتیجه برای هر یک از نقاط خواهیم داشت:

$$z_i\overline{z_i} = |z_i|^2 = 1 \to \overline{z_i} = \frac{1}{z_i} \quad ; \quad i = 1:4$$

$$AC \times BD = |z_1 - z_3||z_2 - z_4| = \sqrt{(z_1-z_3)(\overline{z_1}-\overline{z_3})}\sqrt{(z_2-z_4)(\overline{z_2}-\overline{z_4})}$$

$$= \sqrt{(z_1-z_3)\left(\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_3}\right)(z_2-z_4)\left(\frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_4}\right)} = \sqrt{\frac{(z_1-z_3)(z_3-z_1)(z_2-z_4)(z_4-z_2)}{z_1z_2z_3z_4}} = \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{\sqrt{z_1z_2z_3z_4}}$$

به همین ترتیب اگر عبارت $AB \times CD + AD \times BC$ را نیز بدست آوریم, در نهایت به همین نتیجه خواهیم رسید. ■

تمرینات بخش ۷-۹

۱- الف: ابتدا حاصل $S = \sum_{k=0}^{n} sin(k\alpha)$ را بدست آورده, سپس نشان دهید:

$$\sum_{k=0}^{n} sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = cotg\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

ب: با مشتق گیری از S نسبت به α نشان دهید:

$$\sum_{k=0}^{n} k\, sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{(n+1)^2}{4} + \frac{1}{4} cotg^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

۲- نشان دهید:

$$C = cos\alpha + \frac{1}{2}cos(3\alpha) + \frac{1}{2^2}cos(5\alpha) + \cdots = \frac{2cos\alpha}{5 - 4cos(2\alpha)}$$

۳- حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A = cos\alpha sin\alpha + cos^2\alpha sin(2\alpha) + cos^3\alpha sin(3\alpha) + \cdots$$

راهنمایی: ابتدا B را بصورت زیر تعریف کرده و سپس سری $B + iA$ را بدست آورید.

$$B = cos\alpha cos\alpha + cos^2\alpha cos(2\alpha) + cos^3\alpha cos(3\alpha) + \cdots$$

$$B + iA = cos\alpha e^{i\alpha} + cos^2\alpha e^{2i\alpha} + \cdots = \frac{cos\alpha e^{i\alpha}}{1 - cos\alpha e^{i\alpha}} \times \frac{1 - cos\alpha e^{-i\alpha}}{1 - cos\alpha e^{-i\alpha}}$$

* ۴- فرض کنید نقاط A_1 تا A_n به‌ترتیب نقاط یک n ضلعی منتظم باشند که در دایره‌ای به مرکز O وشعاع R محاط شده باشند, P را نقطه‌ای در امتداد OA_1 و در طرف دیگر A_1 در نظر میگیریم. نشان دهید:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{PA_k} = \overline{OP}^n - R^n$$

۷-۱۰- خلاصه تعاریف گروه , حلقه و میدان در نظریه مجموعه‌ها

فرض کنیم A یک مجموعه ناتهی باشد, یک عمل بر روی A عبارت است از تابعی از $A \times A$ به A. به عبارت دیگر یک عمل, قانونی است که به هر زوج مرتب از عناصر A, یک عضو منحصر به فرد از A را نسبت دهد. یک عمل با نمادی مانند * بیان میشود. مجموعه A الزاما مجموعه اعداد نبوده و ممکن است مجموعه ماتریسها یا غیره باشد, همچنین عمل * میتواند جمع و ضرب معمولی یا عمل دیگری باشد که بایستی تعریف شده باشد. مثلا اگر برای هر زوج مرتب (m,n) در مجموعه اعداد طبیعی تعریف کنیم $m * n = m^2 + n$, در اینصورت * یک عمل محسوب میشود. سه خاصیت مهم یک عمل, بسته بودن, جابجایی و شرکت‌پذیری است. همچنین یک عمل روی یک مجموعه ممکن است دارای دو عضو بی‌اثر (همانی) و عضو وارون باشد.

تعریف گروه: فرض کنید G یک مجموعه ناتهی و * یک عمل روی G باشد. چنانچه عمل * روی G دارای چهار خاصیت بسته بودن, شرکت‌پذیری, وجود عضو بی‌اثر و وجود عضو وارون باشد, مجموعه فوق با عمل تعریف شده یک گروه را تشکیل داده و با $(G,*)$ نمایش میدهیم. مثلا مجموعه اعداد صحیح مثبت همراه با عمل تفریق, یک گروه نیست, زیرا دارای خاصیت شرکت‌پذیری نمیباشد. بعنوان نمونه: $5-(4-6) \neq (5-4)-6$

همچنین مجموعه اعداد طبیعی همراه با عمل جمع یک گروه نیست زیرا دارای عضو بی‌اثر نمیباشد.

میتوان ثابت کرد در یک گروه عضو بی‌اثر و وارون یکتا هستند. لازم به‌ذکر است چنانچه عمل * دارای خاصیت پنجمی بنام جابجایی هم باشد, گروه فوق گروه جابجایی(آبلی) نامگذاری میشود.

تعریف حلقه: مجموعه ناتهی R همراه با دو عمل $+$ و $\times$ یک حلقه نامیده میشود هرگاه:

۱- $(R,+)$ یک گروه جابجایی باشد. ۲-مجموعه R نسبت به عمل $\times$ بسته باشد.

۳- عمل $\times$ در R شرکت‌پذیر باشد.

۴- عمل $\times$ نسبت به عمل $+$ دارای خاصیت توزیع‌پذیری (از دو طرف) باشد, یعنی:

$$\forall\, a,b,c \in R \quad ; \quad \begin{cases} a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c) \\ (b+c) \times a = (b \times a) + (c \times a) \end{cases}$$

این دستگاه را با نماد $(R,+,\times)$ نمایش میدهیم. عنوان دو عمل $+$ و $\times$ قراردادی بوده و الزاما معنی جمع و ضرب معمولی را نمیدهد. بدیهی است با این تعریف نیازی نیست که حلقه دارای دارای عضو بی‌اثر نسبت به $\times$ بوده یا نسبت به این عمل تعویض‌پذیر باشد. حلقه با این ویژگیها نامهای دیگری خواهد داشت.

اگر حلقه نسبت به عمل $\times$ دارای عضو بی‌اثر باشد, آنرا حلقه یک‌دار میگوییم. و اگر عمل $\times$ در آن تعویض‌پذیر باشد باشد, حلقه, تعویض‌پذیر نامیده میشود.

تعریف میدان: حلقه $(R,+,\times)$ یک میدان(هیات) نامیده میشود هرگاه R تعویض‌پذیر و یک‌دار بوده و هر عضو مخالف صفر آن یک وارون نسبت به $\times$ داشته باشد. منظور از صفر, عضو خنثی عمل $+$ میباشد.

به این ترتیب شش اصل موضوع هر میدان $(R,+,\times)$ عبارت میشوند از بسته بودن, وجود عضو بی‌اثر, قوانین جابجایی و شرکت-پذیری(نسبت به هر دو عمل), توزیع‌پذیری(عمل $\times$ نسبت به عمل $+$) و وجود عضو وارون(نسبت به هر دو عمل, به‌جز عضو صفر نسبت به عمل $\times$) .