ریاضیات گسسته
پاسخنامه تمرین ششم - استقرا

محمد سعادتی و محمد امانلو

تاریخ تحویل ۱۴۰۲/۰۱/۲۰

سؤال ۱.

در رویداد کانتست (contest) امسال k سری سوال متفاوت تهیه شده که هر سری شامل تعدادی برگه سوال یکسان و هر برگه سوال پشت و رو و دارای دو سمت سوال متفاوت است، یک سوال بسیار آسان و دیگری سوال آسان است. حل سوالات به صورت گروه‌هایی با تعداد اعضای مثبت انجام می‌شود و هر گروه فقط یکی از k سری سوال متمایز را در اختیار دارد. همچنین هریک از n دانشجوی حاضر در کلاس می‌توانند در چند گروه عضو باشند. در ابتدا طبق دستورالعمل مسابقه همه دانشجویان باید سوال آسان را حل کنند. سپس همه اعضای هر گروه با دستور استاد باید برگه سوال خود را پشت و رو کنند. ثابت کنید استاد می‌تواند با پشت و رو کردن برگه سوالات همه اعضای تعدادی از گروه‌ها شرایط مسابقه را به گونه‌ای مدیریت کند که حداقل $\lceil n/۲\rceil$ از دانشجویان، سوالات بسیار آسان در دست داشته باشند.

پاسخ :

حکم را با استقرا روی k ثابت می‌کنیم:

پایه استقرا: برای $k = ۱$ واضح است که با تغییر وضعیت همان یک گروه می‌توان شرایط مسئله را برآورده کرد.

فرض استقرا: فرض می‌کنیم با $k - ۱$ گروه شرایط مسئله برآورده می‌شود.

حکم استقرا: باید ثابت کنیم که با k گروه می‌توان $\lceil n/۲\rceil$ نفر داشت که روی سوالات بسیار آسان کار می‌کنند.

طبق فرض استقرا می‌دانیم با اضافه کردن گروه جدید و اعضای حذف شده آن گروه به گروه‌های دیگر خود مجددا می‌توانیم حالتی را ایجاد کنیم که در آن $\lceil n - m/۲\rceil$ نفر روی سوالات بسیار آسان کار می‌کنند. برای m نفر جدیدی که به حالت قبلی اضافه شده اما دو حالت زیر وجود دارد.

۱) در حین انجام تغییرات برای ایجاد حالت فرض استقرا دست کم $\lceil m/۲\rceil$ نفر از m نفر جدید در نهایت سوال آسان در اختیار داشته باشند. که در این صورت حکم استقرا اثبات شده و شرایط مسئله برآورده می‌شود.

۲) در غیر این صورت اگر دستور پشت و رو کردن برگه را به اعضای گروه حذف شده دهیم، چون تعدادی کمتر از $\lceil m/۲\rceil$ نفر سوالات بسیار آسان را در اختیار دارند پس قطعا تعدادی مساوی یا بیشتر از این مقدار سوال آسان را در اختیار دارند. با تغییر سوال همه اعضای این گروه تعدادی بیش از $\lceil m/۲\rceil$ نفر دارای سوال بسیار آسان می‌شوند.که به همراه $\lceil n - m/۲\rceil$ نفری که از قبل سوال بسیار آسان داشتند، به $\lceil n/۲\rceil$ دانشجو با سوال آسان خواهیم رسید.

سؤال ۲.

نشان دهید برای هر عدد طبیعی n، می‌توان n عدد طبیعی متمایز یافت، که مجموع آن‌ها مربع کامل و حاصل‌ضرب آن‌ها مکعب کامل باشد.

پاسخ :

برای اثبات حکم کافی است که به ازای هر عدد طبیعی n، n عدد طبیعی با شرایط مسئله بیابیم. اعداد زیر را در نظر بگیرید:

$$۱^۳, ۲^۳, \dots, n^۳$$

می‌دانیم که هر کدام از این اعداد مکعب کامل هستند. در نتیجه حاصل‌ضرب آن‌ها نیز مکعب کامل است. همچنین به کمک استقرا اثبات می‌کنیم که جمع آن‌ها برابر $\left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲$ است و در نتیجه مربع کامل است.

پایه استقرا: این حکم برای $n = ۱$ به وضوح درست است. (۱ مربع و مکعب کامل است.)

فرض استقرا: حال فرض کنید که حکم برای $n - ۱$ برقرار باشد، یعنی:

$$۱^۳ + ۲^۳ + ... + (n-۱)^۳ = (\frac{n(n-۱)}{۲})^۲$$

حکم استقرا: برای نتیجه گرفتن حکم در حالت n باید نشان دهیم که:

$$(\frac{n(n-۱)}{۲})^۲ + n^۳ = (\frac{n(n+۱)}{۲})^۲$$

که این هم به سادگی قابل بررسی است:

$$(\frac{n(n-۱)}{۲})^۲ + n^۳ = \frac{n^۴ - ۲n^۳ + n^۲}{۴} = (\frac{n(n+۱)}{۲})^۲$$

و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

سؤال ۳.

ثابت کنید به ازای $n \in \mathbb{N}$ عددی n رقمی در مبنای ۳ وجود دارد، که اگر در مبنای ۱۰ فرض شود، بر ۲^n بخش پذیر است.

پاسخ :

حکم را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم:
پایه استقرا: به ازای $n = ۱$ عدد ۲ یک نمونه از اعدادی است که در شرایط صورت سوال صدق می‌کند.
فرض استقرا: فرض می‌کنیم مسئله به ازای $n = k$ درست باشد.
حکم استقرا: ثابت می‌کنیم به ازای $n = k + ۱$ نیز مسئله صحیح است.
طبق فرض استقرا داریم عدد k رقمی A_k بر ۲^k بخش‌پذیر است. باقی‌مانده‌اش بر $k + ۱$ دو حالت دارد:
حالت اول: باقی‌مانده بر $۲^{k+۱}$ برابر ۰ است. که در این حالت با اضافه کردن عدد ۲ به سمت چپ عدد حکم مسئله بدست می‌آید. چراکه $A_{k+۱} = A_k + ۲^{k+۱} * ۵^k$ و چون هم A_k و هم $۲^{k+۱} * ۵^k$ بر $۲^{k+۱}$ بخش پذیر است. پس $A_{k+۱} \equiv ۰ \pmod{۲^{k+۱}}$
حالت دوم: $A_k \equiv ۲^k \pmod{۲^{k+۱}}$ در این حالت نیز با اضافه کردن ۱ به سمت چپ عدد جواب بدست می‌آید. زیرا در این صورت $A_{k+۱} = A_k + ۲^k * ۵^k \equiv ۲^k + ۲^k = ۲^{k+۱} \pmod{۲^{k+۱}}$ که باز هم $A_{k+۱}$ بر $۲^{k+۱}$ بخش پذیر است.

سؤال ۴.

سطری از خانه‌ها در اختیار داریم که از یک طرف نامتناهی است. ابتدا دو مهره در خانه‌های ۱ و ۲ قرار دارند. در هر مرحله یکی از مهره‌ها را انتخاب می‌کنیم و اگر این مهره در خانه i باشد، آن را i خانه خالی به جلو می‌بریم. برای مثال مهره موجود در خانه با شماره ۱ را به خانه شماره ۳ منتقل کنیم. آیا به ازای هر عدد طبیعی مانند n می‌توان با انجام تعدادی حرکت یکی از مهره‌ها را به خانه شماره n برد؟

پاسخ :

حکم قوی‌تری را ثابت می‌کنیم: می‌توان حرکات را به‌گونه‌ای انجام داد که مهره جلوتر در خانه شماره n و مهره دیگر در خانه‌ای با شماره حداقل $\frac{n}{۲}$ قرار گیرد.

با استقرای قوی روی n، حکم را ثابت می‌کنیم.

پایه استقرا: برای $n = ۲$ حالت اولیه صدق می‌کند. برای $n = ۳$ عدد ۱ را به خانه ۳ می‌بریم.

فرض استقرا: فرض می‌کنیم حکم برای تمامی اعداد کمتر از n یعنی $n-۱, n-۲, ..., ۵, ۴$ برقرار باشد.

حکم استقرا: درستی حکم را برای n بررسی می‌کنیم. اگر n زوج باشد کافی است شیوه رسیدن به خانه $\frac{n}{۲}$ در نظر بگیرید. مهره جلوتر را حرکت می‌دهیم و طبق قوانین معرفی شده این مهره به خانه n منتقل می‌شود. مهره عقب را نیز حرکت می‌دهیم و طبق فرض استقرا این مهره

در خانه‌ای با شماره حداقل $\frac{n}{۲}$ قرار خواهد گرفت. اگر n فرد باشد شیوه رسیدن به خانه $\frac{n-۱}{۲}$ را در نظر می‌گیریم. مهره عقب‌تر را حرکت می‌دهیم و با کمی دقت در فرض استقرا، متوجه می‌شویم که این مهره در خانه‌ای جلوتر از $\frac{n-۱}{۲}$ قرار خواهد گرفت. حال مهره واقع در خانه $\frac{n-۱}{۲}$ را حرکت می‌دهیم و چون مهره دیگر در راه این مهره قرار دارد، پس این مهره $۱ + \frac{n-۱}{۲}$ خانه جلو می‌رود، پس در خانه n قرار خواهد گرفت.

پس استقرا کامل شده است.

سؤال ۵.

اگر $a, b > ۰$ باشند، ثابت کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$(n-۱)a^n + b^n \geq na^{n-۱}b$$

و تساوی برقرار است، اگر و تنها اگر $a = b$ یا $n = ۱$ باشد.

پاسخ :

اگر $a = b$ باشد که واضح است که حکم برقرار است پس ثابت می‌کنیم اگر $a \neq b$ و $n > ۱$ باشد، $(n-۱)a^n + b^n > na^{n-۱}b$ است.

به ازای $n = ۲$ که حکم برقرار است زیرا، $(a+b)^۲ > ۰$ پس $a^۲ + b^۲ > ۲ab$.

حال طبق روش قهقرایی فرض می‌کنیم حکم استقرا درست باشد یعنی:

$$na^{n+۱} + b^{n+۱} > (n+۱)a^n b = na^n b + a^n b$$

طبق فرض استقرا داریم: $(n-۱)a^n + b^n > na^{n-۱}b$ ، پس:

$$na^{n+۱} + b^{n+۱} > (n-۱)a^{n+۱} + ab^n + a^n b$$

پس با ساده کردن طرفین داریم:

$$a^{n+۱} + b^{n+۱} > ab^n + a^n b$$

با فاکتورگیری از طرفین نامساوی داریم:

$$a(a^n - b^n) - b(a^n - b^n) > ۰ \Rightarrow (a-b)(a^n - b^n) > ۰$$

که نامساوی فوق درست است زیرا $a, b > ۰$ و $a \neq b$. حال اگر استدلال را معکوس به عقب برگردیم، اثبات کامل است.

سؤال ۶.

فرض کنید اعداد طبیعی $w_۱, w_۲, \ldots$ و w_n وزن n وزنه باشند. به این مجموعه از وزنه‌ها «کامل» می‌گوییم اگر برای هر عدد طبیعی W که کوچک‌تر از $w_۱ + w_۲ + \ldots + w_n$ است، مجموع وزن تعدادی‌ها از این وزنه‌ها برابر W شود. ثابت کنید اگر از یک مجموعه وزنه کامل، یک وزنه با سنگین‌ترین وزن را حذف کنیم، مجموعه وزنه‌های باقی‌مانده نیز کامل است.

پاسخ :

نشان می‌دهیم مجموعه n عدد $w_1 \leq w_2 \leq \ldots \leq w_n$ کامل است اگر و تنها اگر $w_1 = 1$ و برای هر $2 \leq i \leq n$ داشته باشیم $w_i \leq w_1 + w_2 + \ldots + w_{i-1} + 1$. توجه کنید اگر $w_1 \leq w_2 \leq \ldots \leq w_n$ دارای شرط یاد شده باشند، اعداد $w_1 \leq w_2 \leq \ldots \leq w_{n-1}$ نیز دارای آن شرط هستند. پس برای اثبات حکم کافی است ادعای خود را ثابت کنیم.

روشن است که اگر $w_1 > 1$ یا برای یک $2 \leq i \leq n$ داشته باشیم $w_i > w_1 + w_2 + \ldots + w_{i+1} + 1$ آن‌گاه به ترتیب عدد ۱ یا عدد $w_1 + w + 2 + \ldots + w_{i-1} + 1$ مجموع هیچ تعدادی از وزنه‌ها نمی‌شود. پس اگر تعدادی وزنه کامل باشند شرط بالا درباره آن‌ها صادق است. حال اگر برای تعدادی وزنه شرط یاد شده برقرار باشد به استقرا روی n نشان می‌دهیم که کامل هستند.

پایه استقرا: پایه استقرا در حالتی که تنها یک وزنه داریم واضح است. در حالتی که دو وزنه داریم نیز تنها حالت برای مقادیر وزن وزنه‌ها با توجه به ادعای گفته شده برابر $w_1 = 1, w_2 = 2$ می‌باشد، که در این حالت مقادیر مجاز برای W برابر ۱ و ۲ می‌باشد. در نتیجه با حذف وزنه سنگین‌تر (w_2) همچنان مجموعه وزنه‌های باقی‌مانده کامل می‌باشند. پس پایه استقرا ثابت شد.

فرض استقرا: فرض می‌کنیم حکم به ازای $n = k - 1$ برقرار است.

حکم استقرا: باید نشان دهیم که حکم به ازای $n = k$ نیز برقرار می‌باشد. اگر $w_1 \leq w_2 \leq \ldots \leq w_k$ دارای شرط یاد شده باشند، اعداد $w_1 \leq w_2 \leq \ldots \leq w_{k-1}$ نیز دارای آن شرط هستند. پس طبق فرض استقرا مجموعه‌ای کامل‌اند. پس هر عدد طبیعی W که کوچکتر از $w_1 + w_2 + \ldots + w_{k-1}$ باشد به صورت جمع تعدادی از $w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}$ است. حال برای آن Wهای طبیعی که $w_1 + w_2 + \ldots + w_{k-1} < W < w_1 + w_2 + \ldots + w_k$ چون $w_k \leq w_1 + w_2 + \ldots + w_{k-1} + 1$ داریم:

$$-1 \leq w_1 + w_2 + \ldots + w_{k-1} - w_k < W - w_k < w_1 + w_2 + \ldots + w_{k-1}$$

در حالت $W - w_k = 0$ مطلوب حاصل است. در غیر این صورت $1 \leq W - w_k < w_1 + w_2 + \ldots + w_{k-1}$ پس طبق فرض استقرا $W - w_k$ به صورت جمع تعدادی از $w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}$ است. حال اگر w_k را به آن مجموعه اضافه کنیم، مجموع اعضای مجموعه جدید برابر W خواهد بود و حکم برای $n = k$ نیز نتیجه می‌شود.