۱۱- سری تیلور

۱۱-۱- مقدمه

سری تیلور را میتوان از دو طریق معرفی کرد. یکی با شروع از بسط تیلور و دیگری از سری توانی. در بخش ۱۱-۲ دیدگاه دوم را برای معرفی انتخاب خواهیم کرد. اما قبل از آن خلاصه‌ای از دیدگاه اول بیان میشود.

در فصل ۸ بسط یا چندجمله‌ای تیلور معرفی گردید. دیده شد که این بسطها همگی متناهی بوده و دارای یک جمله باقیمانده میباشند. در این فصل میخواهیم ببینیم آیا میتوان جملات بسط تیلور را تا بینهایت ادامه داد و آنرا بصورت یک سری نامتناهی بیان کرد یا نه. بدیهی است سوال اصلی همگرایی یا واگرایی سری ایجاد شده است. خواهیم دید در برخی بسطها با قبول شرایطی و گاهی اعمال محدودیتهایی بر روی متغیر x این امر امکان پذیر است. مثلا دیده شد که بسط تیلور تابع $\frac{1}{1-x}$ بصورت زیر است:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+\frac{x^n}{(1-c)^{n+1}}$$

سوال این است که آیا میتوان آنرا بصورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

به سادگی میتوان دید که پاسخ بطور کلی منفی است. چرا که مثلا به ازای $x=2$ سری سمت راست واگراست. اما خواهیم دید اگر x را در بازه $-1<x<1$ انتخاب کنیم, این رابطه درست خواهد بود, که به آن سری تیلور تابع $\frac{1}{1-x}$ میگوییم. بعنوان مثالِ دیگر دیده شد که بسط تیلور تابع e^x بصورت زیر است:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}e^c$$

خواهیم دید برای این تابع, میتوان به ازای هر x , جمله باقیمانده را حذف و آنرا بصورت زیر نوشت:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

که سری تیلور e^x میباشد. در ادامه به طریق دیگری و با شروع از سریهای توانی, به معرفی سری تیلور می‌پردازیم.

۱۱-۲- سری تیلور و مک‌لوران (بخش ۱۱-۱۰ کتاب)

در انتهای فصل ۱۰ با دو مساله برخورد کردیم. اولی نمایش یک تابع بر حسب سری توانی بود که در بخش ۱۰-۸ عنوان شد و در بخش ۱۰-۹ نیز معکوس آن یعنی نمایش یک سری همگرا بر حسب توابع مقدماتی بررسی شد. دیده شد که تنها ابزاری که در آنجا برای حل این دو مساله در دست داشتیم, سری هندسی بود. در اینجا می‌خواهیم سریهای دیگری علاوه بر سری هندسی را معرفی کنیم تا به کمک آنها بتوانیم این دو مساله را بصورت کلی‌تری بررسی کنیم. این سریها را به نام سری تیلور معرفی کرده و خواهیم دید که سری هندسی نیز یک سری تیلور محسوب میشود.

سوال اصلی در اینجا تکمیلِ همان سوالی است که در بخش ۱۰-۸ عنوان شد, یعنی می‌خواهیم یک تابع را بر حسب سری توانی بیان کنیم. سوال اصلی این است که اصولا آیا می‌توان هر تابعی را به شکل سری توانی نمایش داد؟ در ادامه سوال این است که اگر می‌شود, چگونه میتوان این کار را انجام داد.

ابتدا جواب سوال دوم را بیان کرده و سپس شرایطی را بیان میکنیم که تابع نیاز دارد تا بتوان نمایشی به شکل سری توانی برای آن ارائه کرد.

فرض کنید که $f(x)$ تابعی است که بتوان آنرا به شکل سری توانی نمایش داد. در اینصورت:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad ; \quad |x-a|<R \quad \rightarrow \quad c_n=?$$

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+c_4(x-a)^4+\cdots \quad ; \quad x=a \rightarrow c_0=f(a)$$

با توجه به قضیه مشتق سریهای توانی, از سری بالا مشتق گرفته و $x=a$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$f'(x)=c_1+2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+4c_4(x-a)^3+\cdots \quad ; \quad x=a \rightarrow c_1=f'(a)$$

با ادامه مشتق‌گیری و انتخاب $x=a$ خواهیم داشت:

$$2c_2=f''(a) \quad ; \quad 3!\,c_3=f'''(a) \quad ; \quad \cdots \quad ; \quad n!\,c_n=f^{(n)}(a)$$

بنابراین اگر بتوان $f(x)$ را به شکل سری توانی نشان داد آنگاه ضرایب آن از فرمول زیر بدست می‌آید.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad ; \quad |x-a|<R \quad \rightarrow \quad c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

با این انتخاب برای c_n , به سری توانی ایجاد شده سری تیلور حول $x=a$ میگوییم. در نتیجه:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad ; \quad |x-a|<R$$

بطور خلاصه سری تیلور عبارت است از بیانِ یک تابع مشخص $f(x)$ بصورت سری توانی که ضرایب آن از فرمول بالا بدست می‌آید.

همچنین در اثبات بالا یکتایی سری تیلور حول نقطه a نیز مشخص می‌شود, چرا که ضرایب بایستی از رابطه $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ بدست آیند.

در اینجا نیز اگر $a=0$ انتخاب شود, سری تیلور را سری مک‌لوران مینامند.

توضیح ۱: ممکن است سوال شود این نتیجه مشابه بسط تیلور است که در فصل ۸ دیده شد. با این تفاوت که در آنجا تعداد جملات محدود بود و لذا در انتهای جملات یک ترم باقیمانده نیز وجود داشت. در بخش بعد به ارتباط بسط تیلور با سری تیلور می‌پردازیم.

توضیح ۲: بدیهی است اولین شرط نوشتن سری تیلور آن است که خود تابع $f(x)$ مشخص باشد. در درس معادلات دیفرانسیل به دنبال تابع $f(x)$ای هستیم که در معادله صدق کند, بنابراین آنرا از ابتدا نمی‌دانیم. به همین دلیل همانگونه که در مثال ۱۰-۳۵ دیده شد در روش حل معادلات به کمک سریها, برای $f(x)$ یک سری توانی بصورت $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ انتخاب کرده و با مشتق گیری از این سری و جایگذاری در معادله دیفرانسیل, ضرایب c_n را بدست می‌آوریم.

مثال ۱۱-۱ تابعی بیابید که مشتق nام آن در نقطه $x=0$ به ازای هر $n=0,1,2,\cdots$ برابر $n+1$ باشد.

حل بدیهی است انتگرال گیری چاره کار نمیباشد, چرا که مشتق در یک نقطه خاص داده شده است. اما میتوان به کمک سری تیلور آن تابع را بصورت زیر بدست آورد:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}x^n$$

$$f(x)=1+2x+\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{24}x^4+\frac{1}{20}x^5+\cdots$$

بدیهی است سری بدست آمده بایستی همگرا باشد, برای این منظور شعاع همگرایی آنرا بدست می‌آوریم:

$$c_n = \frac{n+1}{n!} \to \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 0 \to R = \infty \to -\infty < x < \infty$$

بنابراین تابع بدست آمده به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ همگراست. ■

توضیح ۱: توانستیم تابع مورد نظر مساله را بدست آوریم. اما بدیهی است به فرم توابع مقدماتی شناخته شده نمی‌باشد, اما به هر حال تابع است. اگر قرار باشد از این تابع در مسائل مختلفی استفاده شود میتوان از این به بعد یک نام دلخواه برای آن در نظر گرفت, مثلا $f(x) = new(x)$. در اینصورت به لحاظ کاربرد فرقی مثلا با $f(x) = sin(x)$ نخواهد داشت. چرا که در واقع برای محاسبه سینوس یک زاویه نیز بایستی از سری مک‌لوران آن استفاده کرد. در مثال ۱۱-۷ خواهیم دید که سری مک‌لوران تابع سینوس بصورت زیر است. لذا مثلا برای محاسبه $sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ خواهیم داشت.

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \to sin\left(\frac{\pi}{7}\right) = \left(\frac{\pi}{7}\right) - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^7 + \cdots$$

که دیده میشود این تابع نیز مانند تابع بالا یک سری نامتناهی است.

توضیح ۲: در واقع دیده شد که یکی از کاربرهای سری تیلور آن است که اگر همه مشتقات یک تابع را تنها در صفر(یا در یک نقطه دیگر) بدانیم, مقدار تابع در سایر نقاط را نیز خواهیم دانست. به عبارت دیگر تابع بطور کامل مشخص می‌شود. ■

مثال ۱۱-۲ سری مک‌لوران تابع $f(x) = \frac{1}{1-x}$ و شعاع همگرایی آنرا بیابید. $(a = 0)$

حل در بخش ۱۰-۸ نمایش این تابع بر حسب سریهای توانی با استفاده از فرمول تصاعد هندسی, بدست آمد که به آن سری هندسی گفته شد. در اینجا از فرمولهای سری تیلور استفاده می‌کنیم.

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad ; \quad f^{(n)}(0) = n! \to f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$$

$$c_n = 1 \to \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1 \to R = 1 \to -1 < x < 1$$

که همان بازه‌ای است که قبلا با استفاده از سری هندسی بدست آمد. پس اگر $\frac{1}{1-x}$ حول صفر نمایشی به شکل سری توانی داشته باشد, این سری بصورت $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ است. ■

توضیح: دیده میشود در اینجا با استفاده از سری تیلور به همان نتیجه‌ای رسیدیم که در فصل قبل با سری هندسی بدست آمد. با این تفاوت که در آنجا سری تابعی را صرفا برای توابعی بدست آوردیم که به نحوی با سری هندسی مرتبط میباشند. مثلا سری حاصل از انتگرال یا مشتق از یک سری هندسی. به عبارتی بحث اینجا کاملتر از روشی است است که در بخش ۱۰-۸ بیان شد. ■

مثال ۱۱-۳ سری مک‌لوران تابع $f(x) = e^x$ و شعاع همگرایی آنرا بیابید. $(a = 0)$

$$f^{(n)}(x) = e^x \; ; f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \to f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$c_n = \frac{1}{n!} \to \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 0 \to R = \infty \to -\infty < x < \infty$$

پس اگر e^x حول صفر نمایشی به شکل سری توانی داشته باشد, این سری بصورت $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ است. ■

<u>توضیح</u>: یکی از کاربردهای مهم سریهای مک‌لوران, محاسبه تعدادی از سریهای عددی میباشد. بعنوان نمونه با انتخاب $x = 1$ در سری بالا خواهیم داشت:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \xrightarrow{x=1} e^1 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

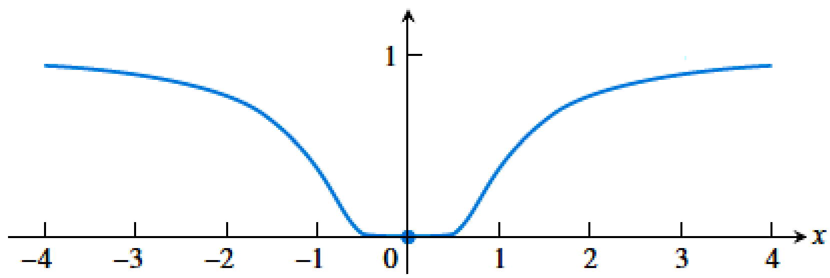
که در ابتدای فصل ۲ همین رابطه به طریق دیگری نیز بدست آمد. دقت شود حتما x انتخابی بایستی در بازه همگرایی سری قرار داشته باشد که در این مثال با توجه به اینکه بازه همگرایی بینهایت است, لذا هر انتخابی برای x مجاز است. همچنین:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \xrightarrow{x=-1} e^{-1} = \frac{1}{0!} + \frac{-1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{-1}{3!} + \cdots \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e} \quad ■$$

سوال اصلی که قرار شد بعدا به آن جواب دهیم این است که چگونه مطمئن شویم که $\frac{1}{1-x}$ و یا e^x نمایشی به شکل سری توانی دارند؟ ممکن است بگوییم مگر اینکه بدست آورده‌ایم سری توانی نیست؟ همین که جوابی بدست آورده‌ایم پس یعنی نمایشی به شکل سری توانی دارند. همین کافی نیست؟! یعنی سوال اول را اصولا سوالی اضافی قلمداد کنیم. به مثال زیر توجه شود.

مثال ۱۱-۴ سری مک‌لوران تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$



حل در تمرین ۳ بخش ۲-۶ دیده شد که تمام مشتقات این تابع در $a = 0$ برابر صفر است. لذا:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots$$

بدیهی است سری توانی نوشته شده در سمت راست به ازای هر x همگراست (مجموع همواره صفر است). اما آیا تابع اصلی نیز $f(x) = 0$ است؟ جواب منفی است. در واقع هرچند سری نوشته شده همواره همگراست, اما همگرا به صفر است نه $f(x)$. به عبارتی فقط در $x = 0$ به $f(x)$ همگراست. ■

<u>توضیح ۱</u>: بنابراین دیده شد که گاهی ممکن است سری همگرا باشد, اما به خود تابع همگرا نشود, که البته این بسیار نادر است. علت این مشکل با بررسی تابع مختلط e^{-1/z^2} در ریاضی مهندسی دیده میشود. در واقع در این مثال, مشخص شد که چرا در قسمتهای قبل از جمله "<u>اگر</u> بتوان $f(x)$ را به شکل سری توانی نشان داد" استفاده شده است. مثال بالا, مثالی است که اصولا نمیتوان آنرا به شکل سری توانی بیان کرد, چرا که اگر چه سری نوشته شده همگرا است, اما به صفر همگراست, نه به $f(x)$. در بخش بعد که شرط داشتن سری تیلور را بیان میکنیم, دلیل اصلی اینکه چرا نمیتوان این تابع را به شکل سری توانی نشان داد را خواهیم دید.

توضیح ۲: دیده میشود که یک شرط لازم برای داشتن سری تیلور آن است که تابع $f(x)$ و تمام مشتقات آن از مرتبه اول تا بینهایت, در بازه باز شامل $x = a$ موجود و پیوسته باشند. بنا به تعریف تابعی که بینهایت بار مشتق پذیر باشد, هموار, یا از کلاس C^{∞} مینامیم. همچنین تابعی که در نقطه $x = a$ با سری تیلور خودش برابر باشد تابع تحلیلی در آن نقطه نامیده میشود. مثلا تابع بالا در نقطه صفر, هموار (از کلاس C^{∞}) بوده, اما تحلیلی نیست زیرا با سری تیلورش برابر نیست. لازم بذکر است که در فصل ۸ عنوان شد که شرط لازم برای داشتن بسط تیلور آن است که تابع از کلاس C^{n} باشد. ■

در بخش بعد شرط لازم و کافی برای داشتن سری تیلور و ارتباط آن با بسط تیلور بیان میشود.

۱۱-۳- شرط داشتن سری تیلور (بخش ۱۱-۱۰ کتاب)

بدیهی است اولین شرط داشتن سری تیلور آن است که سری بدست آمده همگرا باشد. برای این منظور بازه همگرایی را می‌توان به راحتی مثلا با رابطه $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ بدست آورد. اما در مثال ۱۱-۴ دیده شد که این شرط کافی نمی‌باشد.

در بحث بسط تیلور بیان شد که $f(x) = T_{n-1}(x) + R_n(x)$. حال اگر $n \to \infty$, در اینصورت $T_{n-1}(x)$ یک سری نامتناهی خواهد شد که سری تیلور نامیده میشود. شرط لازم و کافی برای آنکه $f(x)$ با سری تیلورش برابر باشد آن است که:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_{n-1}(x) \to \lim_{n\to\infty}|R_n(x)| = 0$$

خلاصه: برای داشتن سری تیلور حول $x = a$ بایستی: ۱- تابع بینهایت بار در $x = a$ مشتق پذیر باشد. ۲- حد جمله باقیمانده در بینهایت صفر شود. یعنی: $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)| = 0$

اگر چنین شرطی برقرار نباشد, سری تیلور تابع با خود تابع برابر نمیباشد. در این حالت فقط میتوان با حفظ جمله باقیمانده, بسط مک‌لوران (و یا تیلور) را نوشت. بنابراین همواره دو حالت زیر را خواهیم داشت:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}|R_n(x)| \neq 0 \to f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}}_{T_{n-1}(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\boxed{c})}{n!}x^n}_{R_n(x)}$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}|R_n(x)| = 0 \to f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

که اولی بسط مک‌لوران (و متناهی) و دومی سری مک‌لوران(و نامتناهی) میباشد.

توضیح ۱: حدود زیر برای کنترل $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)| = 0$ میتواند مفید باشد:

$$1)\ \forall x:\ \lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0 \qquad ; \qquad 2)\ \ |x| < 1:\ \lim_{n\to\infty} x^n = 0 \qquad ; \qquad 3)\ \ x > 0:\ \lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = 1$$

بعنوان نمونه اثبات اولین حد ارائه میشود:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} \approx \lim_{n\to\infty}\frac{e^n x^n}{\sqrt{2\pi n}n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{ex}{n}\right)^n = 0$$

که در انتها با توجه به رشد سریعتر مخرج کسر نسبت به صورت, حد مورد نظر بدست آمده است. هرچند میتوان آنرا مشابه بخش ۳-۳-۲ نیز بدست آورد.

توضیح ۲: بطور خلاصه می‌توان گفت بسط تیلور همواره معتبر است چرا که جمله باقیمانده را حفظ کرده‌ایم. اما در سری تیلور از آنجا که قرار است جمله باقیمانده حذف شود بایستی مطمئن شویم که این جمله در بینهایت به صفر میل میکند که در اینصورت برای سری تیلور یک بازه یا شعاع همگرایی خواهیم داشت.

اما معمولا تعیین xهایی که منجر به برقراری رابطه $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$ گردد ممکن است مشکل باشد, به همین جهت ابتدا با استفاده از رابطه تعیین شعاع همگرایی سریهای توانی مانند $\frac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ بازه همگرایی را بدست آورده و سپس کنترل می‌کنیم که برای این بازه $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$ میباشد. این کنترل تضمین کننده آن است که تابع $f(x)$ با سری تیلورش برابر است, هرچند توابع نادری هستند که در شرط همگرایی صدق کرده ولی حد باقیمانده آنها در بینهایت صفر نباشد (به مثال ۱۱-۴ و ۱۱-۶ توجه شود).

مثال ۱۱-۵ برای توابع e^x و $\frac{1}{1-x}$, بسط و سری مک‌لوران را (در صورت وجود) بنویسید.

$$\boxed{\forall x}\ ;\ e^x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}e^c$$

که برای $x>0$ خواهیم داشت $0<c<x$ و برای $x<0$ نیز $x<c<0$. در اینجا نیز مشابه قسمت قبل:

$$c_n=\frac{1}{n!}\to\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=0\to R=\infty\to\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n!}e^c\right|=0$$

$$\to\boxed{\forall x}\quad ;\quad e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

پس از آنجا که شعاع همگرایی این سری بینهایت می‌باشد, لذا سری در کل محور حقیقی همگراست. همچنین دیده شد که $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$, بنابراین سری مورد نظر به خودِ تابع e^x همگرا است.

و به همین ترتیب برای تابع $\frac{1}{1-x}$ خواهیم داشت:

$$\boxed{\forall x}\ ;\ \frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n=1+x+\cdots+x^{n-1}+\frac{x^n}{(1-c)^{n+1}}$$

که برای $x>0$ خواهیم داشت $0<c<x$ و برای $x<0$ نیز $x<c<0$. ابتدا شعاع همگرایی سری توانی نظیر این بسط را بدست می‌آوریم:

$$c_n=1\to\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=1\to R=1\to-1<x<1\to\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{(1-c)^{n+1}}\right|$$

حال برای دو حالت $0<c<x<1$ و نیز $-1<c<x<0$ می‌توان (با محاسباتی کمی طولانی) نشان داد این حد برابر صفر است (روش ساده‌تری در توضیح ۱ ارائه شده است). بنابراین:

$$\to\boxed{|x|<1}\quad ;\quad \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+x^n+\cdots$$

پس از آنجا که شعاع همگرایی این سری $R=1$ می‌باشد, لذا سری در بازه $|x|<1$ همگراست. همچنین دیده شد که $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$, بنابراین سری مورد نظر به خودِ تابع $\frac{1}{1-x}$ همگرا است.

توضیح ۱: عنوان شد که کنترل $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$ برای تابع $\frac{1}{1-x}$ کمی طولانی است. برای این تابع خاص می‌توان به طریق دیگری باقیمانده را بدست آورد بگونه‌ای که به c بستگی نداشته باشد. برای این منظور آنرا بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{1-x}=\frac{(1-x)+(x-x^2)+(x^2-x^3)+\cdots+(x^{n-1}-x^n)+x^n}{1-x}$$

$$\to\frac{1}{1-x}=\underbrace{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}_{T_{n-1}(x)}+\underbrace{\frac{x^n}{1-x}}_{R_n(x)}\quad;\quad |x|<1\to\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{1-x}\right|=0$$

دیده می‌شود در این مثال خاص, باقیمانده بصورت دقیق و بدون نیاز به وارد کردن عدد c تعیین شده و اگر $|x|<1$ باشد, آنگاه $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$ خواهد شد.

توضیح ۲: فرض کنید بخواهیم سری تیلور e^x را حول $a=2$ بدست آوریم. در اینصورت:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

همچنین میتوان مشابه آنچه در بالا دیده شد نشان داد, شعاع همگرایی این سری نیز بینهایت بوده و $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$. بنابراین سری مورد نظر اولا همگرا بوده, ثانیا به e^x همگرا خواهد بود.

توضیح ۳: بنا به تعریف (در اینجا) نقطه‌ای را که تابع یا مشتقات آن در آن نقطه تعریف نشده باشد را نقطه تکین (غیرعادی یا منفرد) می‌نامیم (تعریف دقیق نقطه تکین در درس ریاضی مهندسی دیده خواهد شد). به عنوان نمونه برای تابع $f(x)=\frac{1}{1-x}$ نقطه $x=1$ تکین محسوب می‌شود. با توجه به آنچه در آنالیز مختلط عنوان می‌شود, شعاع همگرایی یک سری توانی (یا به عنوان نمونه تیلور) همواره کمترین فاصله نقطه $x=a$ (که حول آن سری را نوشته‌ایم) تا نقاط تکین است. لذا در این مثال از آنجا که سری حول $a=0$ نوشته شده و صرفا یک تکین $x=1$ وجود دارد, بنابراین $R=|1-0|=1$ خواهد بود. ■

مثال ۱۱-۶ بررسی کنید که چرا برای تابع زیر که در مثال ۱۱-۴ ارائه شد, نمی‌توان سری مک‌لوران نوشت.

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}\ , & x\neq0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$$

حل گفته شد که نوشتن سری تیلور (مک‌لوران) یک تابع به شرطی درست است که در بسط مک‌لوران آن داشته باشیم $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$. اگر بسط مک لوران این تابع را بنویسیم:

$$f(x)=0+0+\cdots+0+R_n(x)$$

اگر چه این سری توانی به ازای هر x همگراست, اما دیده میشود که در اینجا باقیمانده, خودِ تابع است و بدیهی است که $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|\neq0$. لذا تابع $f(x)$ با سری تیلورش برابر نمی‌باشد. در واقع سری همگرا به صفر است نه $f(x)$. ■

مثال ۱۱-۷ سری مک‌لوران تابع $f(x)=sinx$ را بدست آورده, به کمک آن سری مک‌لوران $g(x)=cosx$ را بیابید.

$$f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k\quad;\quad f^{(2k)}(0)=0$$

$$sinx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

در اینجا نیز میتوان نشان داد $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=0$. در نتیجه شعاع همگرایی سری بینهایت است. حال کنترل می‌کنیم که تابع $f(x)$ با سری تیلورش برابر باشد. برای این منظور ابتدا $R_n(x)$ را بدست می‌آوریم:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n\to|R_n(x)|=\left|\frac{\pm cosc \text{ یا } \pm sinc}{n!}x^n\right|\to\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|\leq\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n!}\right|=0$$

$$\to sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\xrightarrow{\text{مشتق}}cosx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\ \blacksquare$$

توضیح: دیده شد که سری مک‌لوران $cosx$ را با مشتق‌گیری از سری مک‌لوران $sinx$ بدست آوردیم. زیرا قبلا بیان شد که میتوان از دو طرف یک سری توانی مشتق گرفت و سریهای تیلور و مک‌لوران نیز یک سریهای توانی میباشند. ■

مثال ۱۱–۸ رابطه اویلر در اعداد مختلط را ثابت کنید.

حل در بسط مک‌لوران تابع e^x بجای x عبارت $i\theta$ را قرار میدهیم. خواهیم داشت:

$$x=i\theta\to e^{i\theta}=1+\frac{i\theta}{1!}+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\frac{(i\theta)^4}{4!}+\frac{(i\theta)^5}{5!}+\cdots$$

$$e^{i\theta}=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots\right)+i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots\right)=cos\theta+isin\theta\ \blacksquare$$

توضیح: لازم بذکر است که این اثبات, صوری و نادقیق است. علت آن است که سری تیلور معرفی شده برای e^x صرفا برای $x\in\mathbb{R}$ اعتبار دارد و نمی‌توان از این سری برای $x=i\theta\in\mathbb{C}$ نیز استفاده کرد. در بحث آنالیز مختلط در درس ریاضی مهندسی, در معرفی تابع مختلط e^z به طریق دیگری این رابطه را بدست می‌آوریم. اما در آنجا نیز خواهیم دید که با پذیرش چند تعریف, این نتیجه بدست می‌آید. ■

مثال ۱۱–۹ سری مک‌لوران تابع $f(x)=sinhx$ و $g(x)=coshx$ را بدست آورید.

حل راه معمول استفاده از فرمول کلی سری (محاسبه متوالی مشتقات) است. در اینجا با تبدیل تابع به توابعی که سری آنرا میدانیم, محاسبه سری ساده‌تر خواهد شد.

$$sinhx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)}{2}$$

$$sinhx=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots\quad;\quad coshx=(sinhx)'=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

دیده میشود سریهای فوق درست مشابه سریهای مثلثاتی نظیرشان میباشند, با این تفاوت که کلیه ضرایب مثبتند. ■

مثالهای متعدد دیگری از بدست آوردن سریهای مک‌لوران (و نیز تیلور) در بخش ۱۱–۵ ارائه خواهد شد.

مثال ۱۱–۱۰ سری مک‌لوران تابع $f(x)=ln(1+x)$ را بدست آورده, بازه اعتبار آنرا مشخص کنید.

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\quad;\quad\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\quad(n\neq0)\quad;\quad f(0)=ln1=0$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

$$c_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\to\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=1\to R=1\to -1<x<1$$

همانگونه که عنوان شد بایستی نقاط دو سر بازه نیز کنترل گردد. در اینجا دیده میشود که برای $x=1$ نیز سری همگرا میباشد. حال کنترل می‌کنیم که تابع $f(x)$ در این بازه با سری تیلورش برابر باشد. برای این منظور ابتدا $R_n(x)$ را بدست می‌آوریم:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n=\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(1+c)^n}\xrightarrow{-1<x\leq 1}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(1+c)^n}\right|=0\to f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \blacksquare$$

توضیح ۱: علت اصلی آنکه در بسط مک‌لوران تابع $f(x)=ln(1+x)$ (توضیح مثال ۸-۴) عنوان شد اگر $x>1$ باشد, باقیمانده با اضافه شدن n زیاد می‌شود آن است که این بازه خارج از بازه همگرایی سری بوده و لذا در این بازه $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|\neq 0$ خواهد شد. به همین دلیل با اضافه کردن جملات, عملا بسط تیلور از تابع $f(x)$ (در بازه $x>1$) فاصله بیشتری می‌گرفت.

توضیح ۲: در اینجا نیز میتوان با انتخاب یک x خاص (که بایستی در بازه همگرایی سری قرار داشته باشد), یک سری عددی را بدست آورد. مثلا با انتخاب $x=1$ خواهیم داشت:

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\xrightarrow{x=1}1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=ln2$$

توضیح ۳: برای محاسبه سری مک‌لوران تابع $f(x)=ln(1-x)$ کافی است در سری بالا x را به $-x$ تغییر دهیم.

$$ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)}{n}x^n\quad;\quad -1\leq x<1$$

در اینجا نیز تبدیل x به $-x$ در واقع صرفا یک جابجایی است. به این معنی که متغیر x را برداشته‌ایم و به جایش $-x$ گذاشته‌ایم. اثبات درستی این کار نیز یکتایی سری تیلور است.

توضیح ۴: از آنجا که نقطه $x=-1$ نقطه تکین تابع می‌باشد (مشتق در این نقطه تعریف نشده است), بنابراین شعاع همگرایی فاصله $a=0$ تا نزدیکترین نقطه تکین تابع میباشد, یعنی $1=|0-1-|$. $|-1-0|$ ■

مثال ۱۱-۱۱ سری مک‌لوران $f(x)=ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ و $g(x)=tanh^{-1}x$ را بدست آورید.

حل راه معمول استفاده از فرمول کلی سری (محاسبه متوالی مشتقات) است. در اینجا با تبدیل تابع به توابعی که سری آنرا میدانیم, محاسبه سریهای مورد نظر ساده‌تر خواهد شد. با توجه به مثال قبل و تبدیل x به $-x$ خواهیم داشت:

$$f(x)=ln(1+x)-ln(1-x)$$

$$f(x)=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad;\quad |x|<1$$

در اینجا مجددا لازم بذکر است که مشابه بسط تیلور, هدف نهایی از نوشتن سری تیلور حول نقطه a آن است که در نهایت تابع را بر حسب توانهایی نامتناهی از $(x-a)^n$ بیان کنیم. مثلا در اینجا دیده میشود که سری مک‌لوران $(a=0)$ بدست آمده بر حسب توانهایی نامتناهی از $(x-0)^n$ بیان شده است. برای قسمت دوم نیز می‌توان $tanh^{-1}x$ را بر حسب قسمت قبل نوشت:

$$tanh^{-1}x=\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\quad ;\quad |x|<1\ \blacksquare$$

۱۱-۴- سری دو جمله‌ای (بخش ۱۱-۱۰ کتاب)

در تمرین ۱ از مجموعه تمرینات بخش ۸-۱ از شما خواسته شد که بسط مک‌لوران تابع $(1+x)^m$ که در آن $m\in\mathbb{R}$ میباشد را بدست آورید (بسط دوجمله‌ای). حال در این بخش هدف آن است که سری مک‌لوران این تابع را بدست آوریم.

$$f'(x)=m(1+x)^{m-1}\quad ;\quad \cdots\quad ;\quad f^{(n)}(x)=m(m-1)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

$$(1+x)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n\quad ;\quad \binom{m}{n}=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$$

$$\rightarrow (1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots$$

$$c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\ \rightarrow \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|m-n|}{n+1}=1\rightarrow R=1\rightarrow |x|<1$$

پس برای همگرایی سری بایستی $|x|<1$ باشد. میتوان نشان داد (البته به سختی) که با این شرط حد جمله باقیمانده یعنی $\binom{m}{n}(1+c)^{m-n}x^n$ در بینهایت نیز صفر شده, لذا تابع $f(x)$ با سری تیلورش برابر می‌باشد.

توضیح: در حالت کلی $m\in\mathbb{R}$ است. اما اگر $m=n\in\mathbb{N}$ باشد, این سری پس از $n+1$ جمله خاتمه می‌یابد(تا بینهایت نمیرود) چرا که $f^{(n+1)}(0)=0$ و لذا برای هر x همگراست که همان بسط دوجمله‌ای نیوتن است.

حال با کنترل نقاط انتهایی بازه, بسته به توان m , بازه همگرایی سری دوجمله‌ای بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} m\geq 0\ ;\ m\notin\mathbb{N} & -1\leq x\leq 1\\ -1<m<0 & -1<x\leq 1\\ m\leq -1 & -1<x<1\end{cases}$$

بطور خلاصه با درنظرگرفتن همه حالات, میتوان بازه همگرایی را $|x|<1$ منظور کرد که متناظر شعاع همگرایی $R=1$ میباشد.

مثال ۱۱-۱۲ سری مک‌لوران توابع $f(x)=\frac{1}{1+x}$ و $g(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ را بدست آورید.

$$(1+x)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}x^n\quad ;\quad \binom{-1}{n}=\frac{(-1)(-2)\cdots(-1-n+1)}{n!}=(-1)^n\frac{n!}{n!}=(-1)^n$$

$$\rightarrow \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

در اینجا چون $m=-1$ میباشد, بازه همگرایی بصورت $|x|<1$ خواهد شد. قبلا همین نتیجه با سری هندسی نیز بدست آمد.

$$g(x)=(1+x)^{-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}x^n \quad ; \quad \binom{-2}{n}=\frac{(-2)(-3)\cdots(-2-n+1)}{n!}=(-1)^n(n+1)$$

$$\rightarrow \frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n \quad ; \quad m=-2\rightarrow |x|<1 \ \blacksquare$$

توضیح ۱: راه دوم محاسبه سری مک‌لوران $g(x)$, مشتق‌گیری از سری مک‌لوران $f(x)$ است. خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \rightarrow \frac{-1}{(1+x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n$$

که اگر در یک منفی ضرب شود نتیجه مورد نظر بدست می‌آید. دقت شود اولین جمله سری $\frac{1}{1+x}$ برابر 1 است و لذا پس از مشتق‌گیری, صفر خواهد شد. بدین جهت سری حاصل از مشتق ابتدا از $n=1$ بیان شده است.

توضیح ۲: با تبدیل x به $-x$ در دو سری بدست آمده خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad ; \quad |x|<1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \quad ; \quad |x|<1$$

توضیح ۳: اگر هدف تعیین سری مک‌لوران $\frac{1}{(5+x)^2}$ باشد, ابتدا بایستی عدد 5 را به 1 تبدیل کرده و در سری $\frac{1}{(1+x)^2}$ بجای x عبارت $\frac{x}{5}$ قرار داد. به عبارتی:

$$f(x)=\frac{1}{(5+x)^2}=\frac{1}{25}\frac{1}{\left(1+\frac{x}{5}\right)^2}=\frac{1}{25}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{x}{5}\right)^n \quad ; \quad \left|\frac{x}{5}\right|<1\rightarrow |x|<5$$

توضیح ۴: دقت شود حل مساله بصورت زیر درست نیست:

$$\frac{1}{\left(1+(x+4)\right)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(x+4)^n=1-2(x+4)+3(x+4)^2-4(x+4)^3-\cdots$$

چرا که در اینصورت در واقع سری تیلور تابع حول $a=-4$ نوشته شده است, نه سری حول $a=0$. در اینصورت نیز بازه همگرایی بصورت $|x+4|<1$ یا $-5<x<-3$ خواهد شد. $\blacksquare$

مثال ۱۱-۱۳ سری مک‌لوران $f(x)=\sqrt{1+x}$ را بدست آورید.

$$(1+x)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots$$

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n=1+\frac{1}{2}x+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3+\cdots$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\frac{7}{256}x^5-\cdots$$

در اینجا چون $m=\frac{1}{2}$ میباشد, بازه همگرایی بصورت $|x|\le 1$ خواهد شد. ■

<u>توضیح</u>: فرض کنید بخواهیم خطای حاصل از تقریب خطی $\sqrt{1+x}$ را بیابیم.

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x \rightarrow E=1+\frac{x}{2}-\sqrt{1+x}=\cdots=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2\approx\frac{x^2}{8}$$

دیده میشود که خطا, همان جمله بعدی سری یعنی $\frac{x^2}{8}$ میباشد. همچنین میتوان گفت که سری فوق, متناوب بوده و در شرایط لایب‌نیتز صدق میکند, پس خطای ناشی از قطع کردن سری فوق در یک جمله خاص, از قدرمطلق جمله بعدی یعنی $\frac{x^2}{8}$ کمتر است.

یک راه دیگرِ برآورد خطا, نوشتن بسط مک‌لوران(به جای سری مک‌لوران) میباشد, چرا که در آنجا $R_2(x)$ بیانگر خطا میباشد. ■

تمرینات بخشهای ۱۱-۲ تا ۱۱-۴

تمرینات ۴ , ۱۰, ۱۶, ۲۸, ۳۴ , ۴۴, ۵۰ , ۶۴ و ۷۰ از بخش ۱۱-۱۰ کتاب

۱- سری مک‌لوران توابع زیر را همراه با شعاع همگرایی آنها بیابید.

1) $f(x)=2^x$; <u>Ans:</u> $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Ln2)^n}{n!}x^n$; $R=\infty$

2) $f(x)=sinhx$; <u>Ans:</u> $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $R=\infty$

۲- نشان دهید در سری مک‌لوران توابع فرد, فقط ضرایب با اندیس فرد باقی می‌ماند و به همین ترتیب در توابع زوج, صرفا ضرایب زوج باقی خواهد ماند.

۳- سری تیلور توابع زیر را همراه با شعاع همگرایی آنها حول نقاط داده شده بدست آورید.

1) $f(x)=x^4-3x^2+1$; $a=1$

<u>Ans:</u> $f(x)=-1-2(x-1)+3(x-1)^2+4(x-1)^3+(x-1)^4$; $R=\infty$

2) $f(x)=lnx$; $a=2$; <u>Ans:</u> $f(x)=ln2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}(x-2)^n$; $R=2$

3) $f(x)=e^{2x}$; $a=3$; <u>Ans:</u> $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^ne^6}{n!}(x-3)^n$; $R=\infty$

۱۱-۵- استفاده از جدول سریها برای محاسبه سری سایر توابع (بخش ۱۱-۱۰ کتاب)

در اینجا تعدادی از سریهای مک‌لوران مهم در جدولی ارائه میگردد (حفظ کردن آن میتواند مفید باشد).

استفاده از سریهای مک‌لوران شناخته شده باعث میشود برای نوشتن سریهای توابع دیگر, بتوان با تبدیل آن تابع بر حسب توابع این جدول, بدون محاسبه مستقیم ضرایب سری از فرمول $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, سری را ساده‌تر بدست آورد.

مثلا برای نوشتن سری مک‌لوران $f(x) = e^x sinx$ کافی است سری‌های مک‌لوران نظیر e^x و $sinx$ را در هم ضرب کرد. در ادامه با ارائه مثالهای دیگری, این روش بیشتر بررسی خواهد شد.

توضیح: برای نوشتن سری تیلور حول $x = a$ یک راه حل آن است که ابتدا تغییرمتغیر $t = x - a$ را اعمال کرده, سپس سری مک‌لوران تابع جدید را حول $t = 0$ بدست آوریم. به عبارتی یک انتقال محورهای مختصات انجام داده‌ایم.

TABLE Frequently used Taylor series

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad |x| < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \qquad -1 < x \le 1$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \tanh^{-1} x = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| < 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| \le 1$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^n}{n!} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n, \quad \binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}, \quad |x| < 1$$

۱۱-۵-۱- سریهای مک‌لوران

مثال ۱۱-۱۴ با استفاده از سری مک‌لوران e^x , سری مک‌لوران 2^x را بدست آورید.

$$2^x = e^{xln2} \quad ; \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \to 2^x = e^{xln2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xln2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ln2)^n}{n!} x^n$$

$$|xln2| < \infty \to |x| < \infty \ \blacksquare$$

مثال ۱۱-۱۵ با استفاده از سری مک‌لوران $ln(1+x)$, سری مک‌لوران $ln(5+x)$ را بدست آورید.

$$ln(5+x) = ln\left(5\left(1+\frac{x}{5}\right)\right) = ln5 + ln\left(1+\frac{x}{5}\right) = ln5 + \frac{x}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{5}\right)^3 - \cdots$$

$$-1 < \frac{x}{5} \le 1 \to -5 < x \le 5 \ \blacksquare$$

توضیح: دقت شود حل مساله بصورت زیر درست نیست:

$$ln(5+x) = ln\big(1+(x+4)\big) = (x+4) - \frac{1}{2}(x+4)^2 + \frac{1}{3}(x+4)^3 - \cdots$$

چرا که در اینصورت در واقع سری تیلور تابع حول $a=-4$ نوشته شده است, نه سری حول $a=0$. در اینصورت نیز بازه همگرایی بصورت $-1 < x+4 \le 1$ یا $-5 < x \le -3$ خواهد شد. $\blacksquare$

مثال ۱۱-۱۶ سری مک‌لوران تابع $f(x)$ را بدست آورید.

$$f(x) = \frac{3(\sinh x - \sin x)}{x^2(1+\tan^{-1} x)} \quad ; \quad |x| \le 1$$

حل استفاده از فرمول کلی سری (محاسبه متوالی مشتقات) در اینجا طولانی است. لذا از سریهای موجود استفاده می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{3(\sinh x - \sin x)}{x^2(1+\tan^{-1} x)} = \frac{6\frac{x}{3!} + 6\frac{x^5}{7!} + 6\frac{x^9}{11!} + \cdots}{1 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots}$$

از اینجا به بعد می‌توان به سه طریق مساله را ادامه داد.

راه اول: اگر $f(x)$ بصورت زیر باشد, می‌توان آنرا بصورت یک سری به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ بیان کرد:

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

توجه شود چنانچه $f(x)$ تابعی فرد باشد خواهیم داشت $c_0 = c_2 = c_4 = \cdots = 0$ و صرفا کافی است ضرایب با اندیس فرد یعنی c_1 , c_3 و ... نوشته شود و به ترتیبِ عکس برای زمانی که $f(x)$ تابعی زوج باشد.

در بخش ۱۰-۶-۲ دیده شد که مطابق قضیه کوشی در ضرب سریها, چنانچه دو سری نامتناهی با ضرایب b_n و c_n, در یکدیگر ضرب شوند, ضرایب عبارتند از:

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} c_i\, b_{n-i} \to a_0 = c_0 b_0 \quad ; \quad a_1 = c_0 b_1 + c_1 b_0 \quad ; \quad a_2 = c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0 \quad ; \quad \cdots$$

دقت شود در استفاده از این فرمول, در صورت و مخرجِ $f(x)$ دو جمله ثابت دیده می‌شود (a_0, b_0) . به عبارتی ابتدا از تمامِ x های صورت و مخرج فاکتور گرفته می‌شود تا چنین فرمی ایجاد شود. بنابراین برای مثال فوق:

$$f(x) = x\frac{6\frac{1}{3!} + 6\frac{x^4}{7!} + 6\frac{x^8}{11!} + \cdots}{1 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots} = x(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)$$

$$a_0 = c_0 b_0 \to 6\frac{1}{3!} = c_0 \times 1 \to c_0 = 1 \quad ; \quad a_1 = c_0 b_1 + c_1 b_0 \to 0 = 1 \times 1 + c_1 \times 1 \to c_1 = -1$$

$$a_2 = c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0 \to c_2 = 1 \xrightarrow{\cdots} c_3 = -\frac{2}{3} \to \cdots \to f(x) = x\left(1 - x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \cdots\right)$$

روش فوق درست معادل این است که ضرایب را از روابط زیر بدست آوریم:

$$c_n = \frac{(-1)^n}{b_0^{n+1}} \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & b_1 & b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 \\ a_n & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 \end{vmatrix}_{(n+1)(n+1)} \qquad (n \geq 0)$$

$$\to c_0 = \frac{a_0}{b_0} \;\; ; \;\; c_1 = \frac{-1}{b_0^2}\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \;\; ; \;\; c_2 = \frac{1}{b_0^3}\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & 0 \\ a_1 & b_1 & b_0 \\ a_2 & b_2 & b_1 \end{vmatrix} \;\; ; \;\; \cdots$$

<u>راه دوم:</u> تقسیم صورت بر مخرج, درست مشابه چندجمله‌ایها

$$\begin{array}{l|l} x + 6\frac{x^5}{7!} + 6\frac{x^9}{11!} + \cdots & 1 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \\ \cline{2-2} \underline{x + x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} + \cdots} & x - x^2 + x^3 \cdots \\ -x^2 + \frac{x^4}{3} + 6\frac{x^5}{7!} - \frac{x^6}{5} + \cdots & \\ \underline{-x^2 - x^3 + \frac{x^5}{3} - \frac{x^7}{5} + \cdots} & \\ \quad x^3 + \frac{x^4}{3} - \cdots & \\ \quad \cdots & \end{array}$$

دقت شود هم مقسوم و هم مقسوم علیه بصورت صعودی نوشته شوند.

همانگونه که قبلا نیز عنوان شد این روش شاید روش مناسبی نباشد, چرا که ممکن است تعدادی از جملات فراموش شود.

<u>راه سوم:</u> با استفاده از سری $\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - \cdots$ برای $|a| < 1$ می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{1 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots} = 1 - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) + \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right)^2 - \cdots$$

$$= 1 - x + x^2 - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{5} + \cdots$$

$$f(x) = \left(x + 6\frac{x^5}{7!} + 6\frac{x^9}{11!} + \cdots\right)\left(1 - x + x^2 - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{5} + \cdots\right)$$

$$f(x) = x - x^2 + x^3 - \frac{2}{3}x^4 + \left(\frac{6}{7!} + \frac{1}{3}\right)x^5 + \cdots \quad \blacksquare$$

مثال ۱۱-۱۷ با استفاده از سری مک‌لوران تابع $\sqrt{1+x}$ تقریبی برای $\sqrt{1-x^2}$ بدست آورید.

حل سری مک‌لوران $\sqrt{1+x}$ در مثال ۱۱-۱۳بدست آمد. با تبدیل x به $-x^2$ خواهیم داشت:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \cdots$$

$$x \to -x^2 \quad : \quad \sqrt{1-x^2} \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 \quad ; \quad |x^2| \le 1$$

هرچند ناحیه همگرایی $|x^2| \le 1$ میباشد, اما هرچه x به نقطه‌ای که حول آن سری را نوشته‌ایم (در اینجا صفر) نزدیکتر باشد, تقریب دقیقتر است. به همین دلیل گاهی در کنار این تقریب عبارت "وقتی $|x| \to 0$" بایستی قید شود. ■

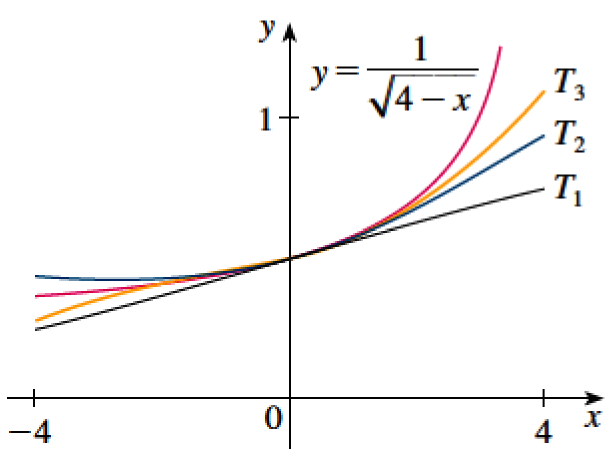
مثال ۱۱-۱۸ سری مک لوران $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ را بدست آورید.

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x}{4}}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{\frac{-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{x}{4}\right)^n \quad ; \quad -1 < \left|-\frac{x}{4}\right| \le 1$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{4}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(-\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}\left(-\frac{x}{4}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{8}x + \frac{1\times 3}{2!\,8^2}x^2 + \frac{1\times 3\times 5}{3!\,8^3}x^3 + \cdots + \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{n!\,8^n}x^n + \cdots\right]$$

دقت شود در اینجا چون $m = -\frac{1}{2}$ میباشد, بازه همگرایی بصورت $-4 \le x < 4$ بدست آمد. شکل این تابع همراه با سه جمله اول تقریب آن(چند جمله‌ایهای تیلور), در شکل آمده است.



توضیح: ممکن است فرم نوشتن بصورت زیر ساده‌تر باشد:

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}}=\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x}{4}}}\ ;\ t=-\frac{x}{4}\rightarrow f(t)=\ \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+t}}$$

حال با استفاده از تمرین ۴ خواهیم داشت:

$$f(t)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}t+\frac{3}{8}t^2-\frac{5}{16}t^3+\frac{35}{128}t^4-\cdots\right)\qquad ;\qquad -1<|t|\leq 1\rightarrow -1<\left|-\frac{x}{4}\right|\leq 1\ \blacksquare$$

مثال ۱۱–۱۹ سری مک‌لوران تابع $f(x)=(x-1)e^{2+x}$ را بدست آورید.

$$f(x)=(x-1)e^{2+x}=(x-1)e^2e^x=(x-1)e^2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)$$

$$=e^2\left(-1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{8}+\frac{x^5}{30}+\frac{x^6}{144}+\cdots\right)\ \blacksquare$$

توضیح: دقت شود نمی‌توان بجای e^{2+x} عبارت زیر را جایگزین کرد:

$$e^{2+x}=1+(2+x)+\frac{(2+x)^2}{2!}+\frac{(2+x)^3}{3!}+\cdots$$

چرا که در اینصورت عملا سری تیلور تابع حول $a=-2$ نوشته شده است. ■

مثال ۱۱–۲۰ الف: با انتگرال‌گیری از سری $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, سری $tan^{-1}x$ را بدست آورید. ب: با استفاده از سری بدست آمده, حاصل سریهای عددی زیر را بدست آورید:

$$A=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\qquad ;\qquad B=1-\frac{1}{3\times 3}+\frac{1}{5\times 3^2}-\frac{1}{7\times 3^3}+\cdots$$

حل با جایگذاری x^2 بجای x در سری مک‌لوران $\frac{1}{1+x}$ سری زیر بدست می‌آید:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots\qquad |x^2|<1\rightarrow |x|<1$$

با تعویض x به t و انتگرالگیری معین از 0 تا x خواهیم داشت: (توجه شود از آنجا که سری تیلور یک سری توانی است, لذا میتوان از سری تیلور, انتگرال (یا مشتق) گرفت)

$$\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\cdots\Big|_0^x\rightarrow tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

حال می‌توان کنترل کرد دو نقطه دو سمت بازه یعنی $x=\pm 1$ نیز در بازه همگرایی سری اخیر قرار دارند.

دقت شود اگر در انتهای کار, انتگرال نامعین گرفته شود, بایستی با انتخاب یک x مناسب ثابت C را بدست آورد:

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+C\quad ;\quad x=0\rightarrow C=0$$

ب: با توجه به سری $tan^{-1}\,x$ و مقایسه آن با سری عددی A میتوان گفت اگر در سری $tan^{-1}\,x$ به جای x مقدار 1 قرار داده شود خواهیم داشت:

$$tan^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots \xrightarrow{x=1} 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

اما محاسبه سری B قدری دقت لازم دارد. برای رسیدن به سری B ابتدا سری $tan^{-1}x$ را به x تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{tan^{-1}x}{x} = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{7}x^6 + \cdots \xrightarrow{x=\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = 1 - \frac{1}{3\times 3} + \frac{1}{5\times 3^2} - \frac{1}{7\times 3^3} + \cdots$$

دقت شود که $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ در بازه همگرایی سری قرار دارد. ■

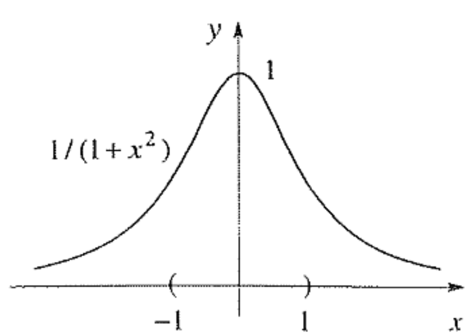
توضیح: یک سوال مهم در اینگونه مسائل آن است که از کجا بدانیم از چه سری مک‌لورانی استفاده کنیم. البته در مثال بالا, این مشکل وجود ندارد, چرا که در صورت سوال گفته شده است که از قسمت الف استفاده شود. اما به هر حال اگر سری داده نشده باشد, گاهی پیدا کردن آن کمی مشکل بوده و احتیاج به تسلط بر جدول سریهای مک‌لوران دارد. مثلا در این مثال اگر به مخرج سری عددی B توجه شود, می‌بینیم یک سری اعداد بصورت تواندار هستند که این ذهنیت را بوجود می‌آورد که با توجه به وجود توانهای مختلف x در سری مک‌لوران, این اعداد بایستی با انتخاب x مناسب بدست آیند. با صرفنظر از آنها, در مخرج کسر اعداد 3 , 5 , 7 و $\cdots$ دیده میشود که اگر به جدول سریهای مک‌لوران برگردیم, تنها سری که در مخرج آن این اعداد دیده میشود, سری مک‌لوران $tan^{-1}\,x$ میباشد.

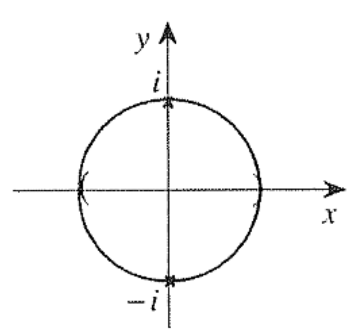
بنابراین اگر سری اولیه داده شده باشد, فقط بایستی یک x مناسب انتخاب کرد, در غیر اینصورت ابتدا بایستی سری مک‌لوران متناظر با سری عددی خواسته شده را پیدا کنیم. مثالهای دیگری در بخش ۱۱-۶-۲ در این ارتباط خواهیم دید. ■

❋ **مثال ۱۱-۲۱** سری مک‌لوران تابع $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ را نوشته بررسی کنید که چرا با وجود خوش‌رفتار بودن این تابع, شعاع همگرایی آن $R = 1$ میباشد.

$$t = x^2 \rightarrow f(t) = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \cdots$$
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \quad ; \quad |x^2| < 1 \rightarrow |x| < 1$$

اگر بخواهیم شعاع همگرایی جواب را قبل از نوشتن سری بدست آوریم, دیده میشود که از دید اعداد حقیقی تابع تکینی نداشته و انتظار آن است که شعاع همگرایی بینهایت گردد. اما اگر از دید آنالیز مختلط به آن نگاه کنیم این تابع دارای دو تکین $z = \pm i$ میباشد, لذا بدیهی است که شعاع همگرایی سری تیلور $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ برابر با $R = 1$ بوده و تابع فقط در داخل دایره $|z| < 1$ تحلیلی است. ■





۱۱-۵-۲- سریهای تیلور

مثال ۱۱-۲۲ سری تیلور تابع $f(x)=\frac{1}{x+3}$ را حول $a=1$ بیابید.

حل همانگونه که گفته شد یک راه برای نوشتن سری تیلور حول $x=a$ آن است که ابتدا تغییرمتغیر $t=x-a$ را اعمال کرده, سپس سری مک‌لوران تابع جدید را حول $t=0$ بنویسیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{1}{x+3}\quad ;\quad t=x-a=x-1\ \rightarrow\ g(t)=\frac{1}{t+4}$$

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\cdots\qquad |t|<1$$

$$g(t)=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{t}{4}}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{t}{4}+\left(\frac{t}{4}\right)^2-\cdots\right)\qquad (t=x-1)$$

$$\left|\frac{t}{4}\right|<1\rightarrow\left|\frac{x-1}{4}\right|<1\rightarrow -3<x<5$$

بازه همگرایی سری تیلور $-3<x<5$ میباشد, یعنی $R=4$. به طریق دیگر از آنجا که نقطه $x=-3$ نقطه تکین تابع می‌باشد بنابراین شعاع همگرایی فاصله $a=1$ تا نزدیکترین نقطه تکین تابع میباشد, یعنی $|-3-1|=4$. ■

توضیح ۱: بدون تغییر متغیر نیز میتوان سری فوق را بدست آورد. برای اینکار بایستی در صورت سوال فرم $x-1$ بوجود آید که با کم و زیاد کردن 1 در مخرج کسر این کار امکان پذیر است. بدیهی است که این کار دقیقا مشابه همان تغییر متغیر میباشد که به شکل دیگری انجام میشود.

$$f(x)=\frac{1}{4+(x-1)}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{x-1}{4}+\left(\frac{x-1}{4}\right)^2-\cdots\right)\quad ;\quad \left|\frac{x-1}{4}\right|<1$$

توضیح ۲: دقت شود اگر از ابتدا بدون توجه به نقطه $a=1$ سری را بنویسیم در اینصورت خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{3}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2-\cdots\right)\qquad \left|\frac{x}{3}\right|<1\rightarrow -3<x<3$$

یعنی جملات بصورت توانهایی از x نوشته شده است. در حالیکه بایستی همه جملات شامل توانهای $x-1$ باشند.

توضیح ۳: یک سوال مهم آن است که چرا در یک مساله می‌خواهیم سری حول نقطه‌ای غیر از صفر نوشته شود. ساده‌ترین جواب این است که چون شعاع همگرایی یک سری فاصله a تا نزدیکترین تکین تابع میباشد, هرچه نقطه انتخابی a از تکین تابع فاصله بیشتری داشته باشد, شعاع همگرایی سری بیشتر بوده و لذا اعتبار سری برای بازه گسترده‌تری میباشد. مثلا فرض کنید بخواهیم برای $f(x)=\frac{1}{1+x}$ دو سری حول $a=0$ و $a=5$ بدست آوریم. این دو سری و بازه همگرایی آنها بصورت زیر است:

$$a=0\rightarrow f(x)=1-x+x^2-x^3+\cdots\quad ;\quad |x|<1\rightarrow -1<x<1$$

$$a=5\rightarrow t=x-5\rightarrow g(t)=\frac{1}{6}\frac{1}{1+\frac{t}{6}}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{t}{6}+\left(\frac{t}{6}\right)^2-\cdots\right)\quad ;\quad \left|\frac{t}{6}\right|<1\rightarrow -1<x<11$$

همانگونه که دیده میشود با فاصله گرفتن نقطه a از تکین تابع, بازه همگرایی گسترده‌تر شده است. ■

مثال ۱۱-۲۳ سری تیلور تابع $f(x)=\frac{1}{(x-2)(x-3)}$ را حول $a=1$ بدست آورده, سپس بازه همگرایی را بیابید.

$$t=x-1\rightarrow g(t)=\frac{1}{(t-1)(t-2)}=\frac{-1}{t-1}+\frac{1}{t-2}=\frac{1}{1-t}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{t}{2}}$$

$$=-(1+t+t^2+\cdots)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{t}{2}+\left(\frac{t}{2}\right)^2+\cdots\right)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}t+\frac{7}{8}t^2+\frac{15}{16}t^3+\cdots\ ;\ (t=x-1)$$

از آنجا که شعاع همگرایی اولین سری 1 و دومین سری 2 میباشد, بایستی بازه مشترک آنها بعنوان بازه همگرایی منظور شود. لذا:

$$R=min\left(|t|<1\ \&\ \ \left|\frac{t}{2}\right|<1\rightarrow|t|<2\right)\rightarrow R=1\rightarrow|x-1|<1$$

و یا می‌توان گفت از آنجا که تکینهای تابع $x=2$ و $x=3$ می‌باشند, شعاع همگرایی فاصله $a=1$ تا نزدیکترین نقطه تکین تابع یعنی $x=2$ خواهد بود, بنابراین $R=|2-1|=1$. ■

راه دوم: می‌توان با استفاده از قضیه کوشی, مساله را بصورت زیر حل کرد:

$$\frac{1}{(t-1)(t-2)}=\frac{1}{t-1}\times\frac{1}{t-2}=\frac{1}{-1}(1+t+t^2+\cdots)\times-\frac{1}{2}\left(1+\frac{t}{2}+\left(\frac{t}{2}\right)^2+\cdots\right)$$

قبلا گفته شد که طبق قضیه کوشی, در ضرب دو سری نامتناهی با ضرایب a_n و b_n , ضرایب سری حاصلضرب بصورت $c_n=\sum_{i=0}^{n}a_i\,b_{n-i}$ میباشد. شعاع همگرایی, حداقل شعاع همگرایی دو سری اولیه میباشد.

$$g(t)=\frac{1}{2}\left([1\times1]t^0+\left[1\times\frac{1}{2}+1\times1\right]t^1+\left[1\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+1\times1\right]t^2+\cdots\right)$$

$$g(t)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}t+\frac{7}{4}t^2+\cdots\right)\quad;\quad R=\ min(|t|<1\ \&\ \ |t/2|<1)=1\rightarrow|t|<1$$

طبیعی است راه حلِ تجزیه کسر ساده‌تر است, چرا که به جمع دو سری می‌رسیم نه ضرب دو سری. ■

مثال ۱۱-۲۴ الف: سری تیلور تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را حول $a=2$ بدست آورید. ب: سری تیلور تابع $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ را حول $a=3$ بیابید.

$$t=x-2\rightarrow g(t)=\sqrt{2+t}=\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{t}{2}}=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{t}{2}-\frac{1}{8}\left(\frac{t}{2}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{t}{2}\right)^3-\cdots\right)\ ;\ \left|\frac{t}{2}\right|\le1$$

که از سری مک‌لوران $\sqrt{1+x}$ که در مثال ۱۱-۱۳ بدست آمد, استفاده شده است. بدیهی است بازه همگرایی $|x-2|<2$ خواهد بود یعنی $R=2$. همچنین می‌توان گفت از آنجا که نقطه $x=0$ نقطه تکین تابع می‌باشد (مشتق در این نقطه تعریف نشده است), بنابراین شعاع همگرایی فاصله $a=2$ تا نزدیکترین نقطه تکین تابع است, یعنی $2=|2-0|$.

برای قسمت دوم خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}\quad;\quad t=x-a=x-3\ \rightarrow\ g(t)=\frac{1}{(2+t)^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{\left(1+\frac{t}{2}\right)^2}$$

$$\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}\left(\frac{t}{2}\right)^{n}\quad ;\quad \binom{m}{n}=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$$

$$g(t)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2}=\frac{1}{4}\left[1+\frac{(-2)}{1!}\frac{t}{2}+\frac{(-2)(-3)}{2!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2}+\frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}\left(\frac{t}{2}\right)^{3}+\cdots\right]$$

$$m=-2\rightarrow\left|\frac{t}{2}\right|<1\rightarrow\left|\frac{x-3}{2}\right|<1\rightarrow|x-3|<2\rightarrow1<x<5\quad\blacksquare$$

۱۱-۵-۳- مثالهای تکمیلی

مثال ۱۱-۲۵ سری مک‌لوران تابع $f(x)=sin(x+1)$ را بدست آورید.

$$f(x)=sin(x+1)=(cos1)(sinx)+(sin1)(cosx)$$

$$f(x)=cos1\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\cdots\right)+sin1\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)$$

$$f(x)=sin1+(cos1)x-\frac{sin1}{2}x^2-\frac{cos1}{6}x^3+\cdots\quad\blacksquare$$

توضیح: دقت شود حل مساله بصورت زیر درست نیست:

$$f(x)=sin(x+1)=(x+1)-\frac{(x+1)^3}{3!}+\frac{(x+1)^5}{5!}-\cdots$$

چرا که در اینصورت در واقع سری تیلور تابع حول $a=-1$ نوشته شده است. ■

مثال ۱۱-۲۶ سری تیلور تابع $f(x)=x^2sinx$ را حول $a=2$ بیابید.

$$t=x-2\rightarrow g(t)=(t+2)^2sin(t+2)=(t^2+4t+4)(sintcos2+costsin2)$$

$$=(t^2+4t+4)\left(cos2\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\cdots\right)+sin2\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\cdots\right)\right)\quad(t=x-2)$$

که پس از مرتب سازی و جایگذاری $t=x-2$ خواهیم داشت:

$$f(x)=4sin2+4(cos2+sin2)(x-2)+(4cos2-sin2)(x-2)^2$$
$$+\left(\frac{1}{3}cos2-2sin2\right)(x-2)^3-\frac{1}{3}(2cos2+sin2)(x-2)^4+\cdots\quad\blacksquare$$

مثال ۱۱-۲۷ سری مک‌لوران تابع $f(x)=(1+x)^x$ را بدست آورید.

$$f(x)=(1+x)^x\rightarrow ln\big(f(x)\big)=xln(1+x)=x\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)=u$$

$$f(x)=e^u=1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\cdots$$

$$f(x)=1+\left(x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\cdots\right)+\frac{1}{2!}\left(x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\cdots\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x^2-\frac{x^3}{2}-\cdots\right)^3+\cdots$$

$$f(x)=1+x^2-\frac{1}{2}x^3+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2!}\right)x^4+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2!}\times 2\times 1\times -\frac{1}{2}\right)x^5+\cdots$$

$$f(x)=1+x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{6}x^4-\frac{3}{4}x^5+\frac{33}{40}x^6+\cdots \quad \blacksquare$$

مثال ۱۱-۲۸ سری مک‌لوران تابع $f(x)=sin(e^x)$ را بدست آورید.

$$sin(e^x)=e^x-\frac{e^{3x}}{3!}+\frac{e^{5x}}{5!}+\cdots$$

$$sin(e^x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)-\frac{1}{3!}\left(1+(3x)+\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^3}{3!}+\cdots\right)+\cdots$$

$$sin(e^x)=\underbrace{\left(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\cdots\right)}_{sin1}+\underbrace{\left(1-\frac{3}{3!}+\frac{5}{5!}-\cdots\right)}_{cos1}x+\left(\frac{1}{2!}-\frac{9}{3!\,2!}+\frac{25}{5!\,2!}-\cdots\right)x^2+\cdots \quad \blacksquare$$

توضیح ۱: حل مساله به یکی از دو صورت زیر نیز امکان‌پذیر است که تقریبا طولانی‌تر از روش بالا خواهد بود:

$$1)\ \ sin(e^x)=sin\left(1+\underbrace{x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots}_{u}\right)=(sin1)(cosu)+(cos1)(sinu)$$

$$f(u)=(sin1)\left(1-\frac{u^2}{2!}+\cdots\right)+(cos1)\left(u-\frac{u^3}{3!}+\cdots\right)$$

که با جایگذاری u بر حسب x , چندجمله اول این سری عبارت است از:

$$f(x)=sin1+(cos1)x+\frac{cos1-sin1}{2}x^2-\frac{sin1}{2}x^3-\frac{5cos1+6sin1}{24}x^4+\cdots$$

$$2)\ \ sin(e^x)=sin\left(\underbrace{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots}_{u}\right)=u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}-\cdots$$

توضیح ۲: در حالت کلی چنانچه تصور کردیم محاسبات به یکی از این روشها ممکن است طولانی باشد, میتوان مستقیما از همان فرمول اولیه c_n استفاده کرد. یعنی:

$$f(x)=sin(e^x)\quad ;\quad f'(x)=e^x cos(e^x)\quad ;\quad f''(x)=e^x cos(e^x)-e^{2x}sin(e^x)\quad ;\quad \cdots$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots=sin1+(cos1)x+\frac{cos1-sin1}{2}x^2+\cdots \quad \blacksquare$$

❄ **مثال ۱۱-۲۹** سری تیلور تابع $f(x)=sin(2e^x)$ را حول $a=3$ بدست آورید.

$$t=x-a=x-3\rightarrow 2e^x=2e^{t+3}=2e^3e^t$$

$$f(x) = sin(2e^x) = sin(2e^3e^t) = sin\left(2e^3 + \underbrace{2e^3t + 2e^3\frac{t^2}{2!} + 2e^3\frac{t^3}{3!} + \cdots}_{u}\right)$$

$$f(u) = (sin2e^3)(cosu) + (cos2e^3)(sinu)$$

$$f(u) = (sin2e^3)\left(1 - \frac{u^2}{2!} + \cdots\right) + (cos2e^3)\left(u - \frac{u^3}{3!} + \cdots\right)$$

که با جایگذاری u بر حسب t چند جمله اول این سری عبارت است از:

$$f(t) = sin2e^3 + (2e^3cos2e^3)t - \left(-\frac{1}{2!}4e^6sin2e^3 + 2e^3\frac{1}{2!}cos2e^3\right)t^2 + \cdots$$

و در نهایت با جایگذاری $t = x - 3$ خواهیم داشت:

$$f(x) = sin2e^3 + 2e^3cos2e^3(x-3) + (e^3cos2e^3 - 2e^6sin2e^3)(x-3)^2 + \cdots \blacksquare$$

توضیح: حل مساله بصورت زیر نیز امکان‌پذیر است, اما در نهایت مرتب سازی جملات بر حسب توانهای t ممکن است طولانی‌تر باشد.

$$f(x) = sin(2e^x) = sin(2e^{3+t}) = sin\left(2 + 2(3+t) + 2\frac{(3+t)^2}{2!} + 2\frac{(3+t)^3}{3!} + \cdots\right) = sinu$$

$$sinu = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \cdots \blacksquare$$

تمرینات بخش ۱۱-۵

۱- با انتگرال‌گیری از سری دو جمله‌ای $\frac{1}{\sqrt{1 \pm x^2}}$, سری $sin^{-1}x$ و $sinh^{-1}x$ را بدست آورید.

<u>Ans</u>: $sin^{-1}x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots \quad ; \quad |x| \le 1$

<u>Ans</u>: $sinh^{-1}x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 - \frac{5}{112}x^7 + \cdots \quad ; \quad |x| \le 1$

۲- با استفاده از سری مک‌لوران تابع $cosx$ سری مک‌لوران توابع زیر را همراه با شعاع همگرایی آنها بیابید.

1) $f(x) = xcos\left(\frac{x^2}{2}\right)$; <u>Ans</u>: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(2n)!}x^{4n+1}$; $R = \infty$

2) $f(x) = sin^2x$; <u>Ans</u>: $f(x) = \frac{1-cos2x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$; $R = \infty$

۳- سری مک لوران توابع زیر را بدست آورید.

1) $f(x) = tanx$; <u>Ans</u>: $tanx = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$

راهنمایی: در این تمرین با توجه به اینکه $tanx$ تابعی فرد است, خواهیم داشت $c_0 = c_2 = c_4 = \cdots = 0$.

2) $f(x)=\dfrac{x}{sinx}$; <u>Ans</u>: $\dfrac{x}{sinx}=1+\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{7}{360}x^4+\cdots$

3) $f(x)=\dfrac{e^x}{cosx}$; <u>Ans</u>: $\dfrac{e^x}{cosx}=1+x+x^2+\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^4+\cdots$

4) $f(x)=\dfrac{xsinx}{1-cosx}$; <u>Ans</u>: $\dfrac{xsinx}{1-cosx}=2+2\left(\dfrac{2}{4!}-\dfrac{1}{3!}\right)x^2+\cdots$

5) $f(x)=\dfrac{sinx}{1+3x^2}$; <u>Ans</u>: $\dfrac{sinx}{1+3x^2}=x-\dfrac{19}{6}x^3+\dfrac{1141}{120}x^5-\cdots$

۴- با استفاده از سری دوجمله‌ای, نشان دهید:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\frac{63}{256}x^5+\cdots \quad ; \quad -1<x\le 1$$

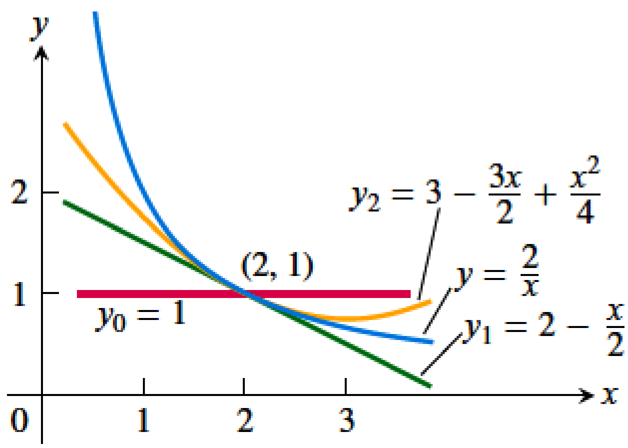
۵- با استفاده از سری دوجمله‌ای, سری مک‌لوران توابع زیر را همراه با شعاع همگرایی آنها بیابید.

1) $f(x)=\sqrt[4]{1-x}$; <u>Ans:</u> $f(x)=1-\dfrac{1}{4}x-\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{3\times 7\times\cdots\times(4n-5)}{4^n n!}x^n$; $R=1$

2) $f(x)=\dfrac{1}{(2+x)^3}$; <u>Ans:</u> $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{2^{n+4}}x^n$; $R=2$

3) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$; <u>Ans:</u> $f(x)=\dfrac{x}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{3n+1}n!}x^{2n+1}$; $R=2$

۶- سری تیلور تابع $f(x)=\frac{2}{x}$ را حول $a=2$ بدست آورید. در چه ناحیه‌ای سری همگراست؟ نشان دهید سری حاصله یک سری هندسی است و در ناحیه همگرایی برابر با خود تابع میباشد. (شکل روبرو)



۷- با استفاده از سری دوجمله‌ای, سری تیلور $f(x)=(8+x)^{-1/2}$ را حول $a=1$ بدست آورده, بازه همگرایی را بیابید.

<u>Ans</u>: $f(t)=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt{1+t/9}}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{54}t+\dfrac{1}{648}t^2-\dfrac{5}{34992}t^3+\cdots$; $(t=x-1)$; $|x-1|<9$

۸- الف: نشان دهید که سری مک‌لوران تابع $f(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$ بصورت $\sum_{n=1}^{\infty}f_n x^n$ میباشد که f_n بیانگر nامین جمله دنباله فیبوناتچی میباشد. یعنی: $f_1=1; f_2=1; f_n=f_{n-1}+f_{n-2} \quad n\ge 3$

<u>راهنمایی:</u> راحت‌ترین راه, انتخاب جواب به فرم $c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$ میباشد.

ب: با استفاده از تجزیه کسرها و بدست آوردن سری مک‌لوران $f(x)$ به طریق دیگر, دستوری صریح برای nامین جمله دنباله فیبوناتچی بدست آورید.

۹- سریهای زیر را حول نقاط خواسته شده بدست آورید.

$$1)\ \ f(x)=ln(2-e^{2x})\ \ ;\ \ a=0\ \ ;\ \ \underline{Ans}\ :\ f(x)=-2x-4x^2-8x^3-\frac{52}{3}x^4-40x^5-\cdots$$

$$2)\ \ f(x)=\frac{1}{(1+cosx)}\ \ ;\ \ a=0\ \ ;\ \ \underline{Ans}\ :\ f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{48}x^4+\cdots$$

$$3)\ \ f(x)=e^{cos(x+3)}\ \ ;\ \ a=0$$

$$\underline{Ans}\ :\ f(x)=e^{cos3}-(e^{cos3}sin3)x-e^{cos3}\left(\frac{cos3}{2}-\frac{sin^2 3}{2}\right)x^2+\cdots$$

$$4)\ \ f(x)=cos(2+x)\ \ ;\ \ a=3$$

$$f(x)=cos5-(sin5)(x-3)-\frac{cos5}{2}(x-3)^2+\frac{sin5}{6}(x-3)^3+\frac{cos5}{24}(x-3)^4+\cdots$$

$$5)\ \ f(x)=ln(1+cosx)\ \ ;\ \ a=2$$

$$f(x)=ln(1+cos2)-\frac{sin2}{1+cos2}(x-2)-\frac{(x-2)^2}{2(1+cos2)}\left(cos2-\frac{sin^2 2}{1+cos2}\right)+\cdots$$

۱۱-۶- سایر کاربردهای سری تیلور (بخش ۱۱-۱۱ کتاب)

۱۱-۶-۱- محاسبه مشتقات مراتب بالاتر یک تابع در یک نقطه

بدیهی است اگر صرفا ضریب یک جمله خاص از سری سوال شده باشد, میتوان از فرمول مربوط به ضرایب سری, آنرا محاسبه کرد. مثلا فرض کنید هدف محاسبه ضریب $(x-1)^2$ در سری تیلور تابع e^{x^2+x} باشد. در اینصورت:

$$e^{x^2+x}=\cdots+c_2(x-1)^2\cdots\rightarrow c_2=\frac{f''(1)}{2!}=\frac{11}{2}e^2$$

اما اگر نوشتن سری با کمک جدول ساده باشد, می‌توان به طریق معکوس, مشتقات مرتبه بالاتر را بدون مشتق‌گیری بدست آورد.

به عنوان نمونه فرض کنید برای تابع $f(x)=(x-1)e^{2+x}$ هدف محاسبه $f^{(50)}(0)$ باشد. از آنجا که مشتق در صفر سوال شده است, لذا بایستی سری مک‌لوران این تابع را بدست آورد. در مثال ۱۱-۱۹ این کار انجام شده و نتیجه بصورت زیر است:

$$f(x)=(x-1)e^{2+x}=(x-1)e^2e^x=(x-1)e^2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)$$

بنابراین برای محاسبه $f^{(50)}(0)$ ابتدا بایستی c_{50} را از سری بالا بدست آورده و سپس با $\frac{f^{(50)}(0)}{50!}$ مساوی قرار دهیم:

$$f(x)=-e^2+\cdots+\underbrace{e^2\left(\frac{1}{49!}-\frac{1}{50!}\right)}_{c_{50}}x^{50}+\cdots\ \ ;\ \ c_{50}=\frac{f^{(50)}(0)}{50!}\rightarrow f^{(50)}(0)=49e^2$$

مثال ۱۱-۳۰ سری مک‌لوران تابع $f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$ را بیابید $(|x|<1)$. به کمک آن $f^{(36)}(0)$ را بدست آورید.

$$f(x)=\frac{1-x}{1-x^3}=(1-x)\frac{1}{1-x^3}=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}-\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n+1}$$

$$\frac{f^{(36)}(0)}{36!}=c_{36}=1\rightarrow f^{(36)}(0)=36!\ \blacksquare$$

مثال ۱۱-۳۱ اگر مشتق n ام تابع $f(x)=(x^2-6x-5)e^{x-1}$ در نقطه $x=1$ برابر 1390 باشد، مقدار n را بیابید.

$$t=x-1\ \rightarrow g(t)=(t^2-4t-10)e^t\qquad ;\qquad f^{(n)}(1)=g^{(n)}(0)=1390$$

$$g(t)=(t^2-4t-10)\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{t^n}{n!}+\cdots\right)$$

حال ضریب t^n را بدست آورده و با $\frac{g^{(n)}(0)}{n!}$ مساوی قرار می‌دهیم:

$$\frac{g^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{(n-2)!}-\frac{4}{(n-1)!}-\frac{10}{n!}$$

$$\rightarrow 1390=n(n-1)-4n-10\rightarrow(n-40)(n+35)=0\rightarrow n=40\ \blacksquare$$

مثال ۱۱-۳۲ سری مک‌لوران تابع $f(x)=\int_0^x sin^3t\,dt$ را بدست آورده و ضریب x^{100} و x^{1001} را بیابید.

$$sin^3t=\frac{3}{4}sint-\frac{1}{4}sin3t=\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(3t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$f(x)=\int_0^x sin^3t\,dt=\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+2}}{(2k+2)(2k+1)!}-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 3^{2k+1}x^{2k+2}}{(2k+2)(2k+1)!}$$

$$\rightarrow c_{100}=\frac{-3}{400\times 99!}+\frac{3^{99}(3^{98}-1)}{400\times 99!}\quad ;\quad c_{1001}=0\ \blacksquare$$

۱۱-۶-۲- محاسبه تعدادی از سریهای نامتناهی

مثال ۱۱-۳۳ حاصل سریهای عددی زیر را بدست آورید.

$$1)\ A=\frac{\pi^2}{4^2 2!}-\frac{\pi^4}{4^4 4!}+\cdots\quad ;\quad cosx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}}A=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\ \blacksquare$$

$$2)\ B=1+\frac{1}{2^2 3}+\frac{1}{2^4 5}+\frac{1}{2^6 7}+\cdots\quad ;\quad tanh^{-1}x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\xrightarrow{x=\frac{1}{2}}B=ln3$$

که در آن از سری $tanh^{-1}x$ (مثال ۱۱-۱۱) استفاده شده است. همچنین $tanh^{-1}0.5=\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+0.5}{1-0.5}\right)$ میباشد. $\blacksquare$

مثال ۱۱-۳۴ حاصل سری عددی A را بیابید.

$$A=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\cdots$$

حل با وجود فاکتوریل اعداد متوالی در مخرج کسر, سری e^x به ذهن میرسد. اما در صورت کسرهای موجود در e^x توانهای x دیده میشود, در حالی که در سری داده شده, اعداد متوالی $1,2,3,\cdots$ می‌بینیم. برای ایجاد چنین اعدادی میتوان از سری داده شده مشتق گرفت و سپس $x=1$ را انتخاب کرد که در اینصورت اعداد ظاهر شده در صورت, یکی بیشتر از اعدادی است که در صورت کسر A داده شده است. چرا که:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \xrightarrow{\text{مشتق}} e^x = 0 + \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \cdots$$

بنابراین ابتدا e^x را بر x تقسیم میکنیم تا یکی از توانهای آن کاسته شده و سپس مشتق می‌گیریم. در نتیجه:

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{e^x(x-1)}{x^2} = \frac{-1}{x^2} + 0 + \frac{1}{2!} + \frac{2x}{3!} + \frac{3x^2}{4!} + \cdots$$

حال با انتخاب $x=1$ نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.

$$x = 1 \to 0 = -1 + 0 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \cdots \to A = 1 \ \blacksquare$$

توضیح: می‌توان حل مساله را با نماد زیگما بصورت زیر نیز نوشت.

$$A = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} \ ; \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \to \frac{e^x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \to \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{n!}$$

$$x = 1 \to 0 = -1 + 0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} \to A = 1 \ \blacksquare$$

مثال ۱۱-۳۵ حاصل سری عددی A بیابید.

$$A = \frac{1}{3 \times 2!} + \frac{1}{9 \times 3!} + \frac{1}{27 \times 4!} + \cdots$$

حل در اینجا نیز با وجود فاکتوریل اعداد متوالی در مخرج کسر, سری e^x به ذهن میرسد. با تقسیم این سری به x خواهیم داشت:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \to \frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots$$

$$x = \frac{1}{3} \to 3\sqrt[3]{e} = 3 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{3 \times 2!} + \frac{1}{9 \times 3!} + \frac{1}{27 \times 4!} + \cdots \to A = 3\sqrt[3]{e} - 4 \ \blacksquare$$

مثال ۱۱-۳۶ سریهای زیر را بر حسب توابع مقدماتی بیان کنید.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2}{(n+2)!} x^n \qquad ; \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!}$$

حل در اینجا دقیقا همان کاری را انجام خواهیم داد که در بخش ۱۰-۹ دیده شد. یعنی بیان یک سری همگرا بر حسب توابع مقدماتی. با این تفاوت که در آنجا تنها سری شناخته شده, سری هندسی بود و در اینجا می‌توانیم از همه سریهای مک‌لوران بدست آمده جهت یافتن تابع مقدماتی کمک بگیریم.

الف: ابتدا مخرج هر کسر را به شکل $n!$ تبدیل می‌کنیم تا مشابه مخرج کسر در سری e^x گردد.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)-4}{(n+2)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}-4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}-4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{n!}$$
$$=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-4\frac{1}{x^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

دیده میشود که سریهای ایجاد شده درست مشابه سری e^x میباشند, با این تفاوت که یکی از 1 و دیگری از 2 شروع شده‌اند. لذا:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\qquad;\qquad e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\rightarrow f(x)=\frac{1}{x}(e^x-1)-4\frac{1}{x^2}(e^x-1-x)\ \blacksquare$$

ب: برای ساده‌تر شدن حل ابتدا $t=x+2$ انتخاب شده و مخرج کسر را به شکل $n!$ تبدیل می‌کنیم:

$$g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n+3)!}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{t^{n-3}}{n!}=\frac{1}{t^3}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{t^3}\left(e^t-1-t-\frac{t^2}{2!}\right)\qquad(t=x+2)\ \blacksquare$$

مثال ۱۱-۳۷ سری زیر را بر حسب توابع مقدماتی بیان کنید.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)n!}$$

حل با توجه به وجود $n+2$ در توان x و مخرج کسر, با مشتق‌گیری از $f(x)$ خواهیم داشت:

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=xe^x\ \rightarrow\ f(x)=\int xe^x\,dx=xe^x-e^x+C$$

با توجه به $f(x)$ داده شده می‌توان گفت $f(0)=0$ و لذا $C=1$ بدست می‌آید. $\blacksquare$

توضیح: در ادامه سه روش دیگر نیز ارائه می‌شود. روش اول استفاده از انتگرال است که در واقع معکوس روش بالا می‌باشد.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=xe^x\rightarrow\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!}dt=\int_0^x te^t\,dt\rightarrow\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)n!}}_{f(x)}=xe^x-e^x+1$$

همچنین می‌توان بطریق زیر نیز مساله را حل کرد:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-2)!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n(n-1)}{n!}$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\rightarrow\frac{e^x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{xe^x-e^x}{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{n!}$$

$$\xrightarrow{\times x^2} xe^x - e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)x^n}{n!} = -1 + 0 + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n(n-1)}{n!}}_{f(x)} \rightarrow f(x) = xe^x - e^x + 1$$

روش دیگر حل این مساله بدون استفاده از مشتق یا انتگرال بصورت زیر است:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)n!} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-2)!} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n(n-1)}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{nx^n}{n!} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$
$$= x(e^x - 1) - (e^x - 1 - x) = xe^x - e^x + 1$$

و یا می‌توان با توجه به اینکه اضافه کردن $n = 1$ تاثیری در $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n(n-1)}{n!}$ ندارد, از ادامه زیگمای سوم بصورت زیر عمل کرد:

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n(n-1)}{n!} = \sum_{\boxed{n=1}}^{\infty}\frac{x^n(n-1)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = xe^x - (e^x - 1) = xe^x - e^x + 1 \quad \blacksquare$$

مثال ۱۱–۳۸ با مشتق‌گیری از $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, نشان دهید: $f(x) = e^x$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \rightarrow f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = f(x)$$

$$f'(x) = f(x) \rightarrow f(x) = ce^x \;\; ; \;\; f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \rightarrow \; f(0) = 1 \rightarrow c = 1 \rightarrow f(x) = e^x \quad \blacksquare$$

توضیح ۱: دقت شود قبلا عنوان شد که اولیه جمله سری برای $x = 0$ به 0^0 خواهد رسید که قرارداد کرده‌ایم آنرا 1 در نظر بگیریم.

توضیح ۲: لازم بذکر است در این روش حل بایستی بدانیم که معادله دیفرانسیل داده شده با شرایط اولیه, دارای جواب منحصر به فرد است که در درس معادلات, درستی این موضوع را تحت عنوان قضیه وجود و یکتایی جواب خواهیم دید. ■

۱۱–۶–۳– محاسبه تقریبی انتگرالهای معین

مثال ۱۱–۳۹ با نوشتن سری مک لوران تابع $sin(x^2)$, انتگرال زیر را با خطای کمتر از 0.001 تخمین بزنید.

$$\int_0^1 sin(x^2)\,dx \qquad ; \qquad sin(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{4n+2} = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} - \cdots$$

$$\int_0^1 sin(x^2)\,dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{7\times 3!} + \frac{1}{11\times 5!} - \frac{1}{15\times 7!} + \cdots$$

که جواب حاصله, خود یک سری متناوب است. در نتیجه با نوشتن دو جمله از سری , حاصل انتگرال و خطای آن برابر است با:

$$s_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{7\times 3!} \approx 0.310268 \ ; \quad |s - s_2| < |a_3| = \frac{1}{11\times 5!} \approx 0.00076$$

دقت شود اگر فقط یک جمله انتخاب کنیم خطا بیشتر از 0.001 میشود. ■

<u>توضیح</u>: با این روش میتوان انتگرالهای نامعین را نیز بصورت یک سری توانی بیان کرد. بعنوان نمونه در مثال فوق:

$$\int sin(x^2)\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!} x^{4n+3} + C \ ■$$

❊ **مثال ۱۱–۴۰** فرمولی تقریبی برای محاسبه محیط بیضی بیابید.

$$\begin{cases} x = acost \\ y = bsint \end{cases} \rightarrow L = \int_\alpha^\beta \sqrt{{x'_t}^2 + {y'_t}^2}\,dt = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{(-asin)^2 + (bcost)^2}\,dt$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)cos^2t}\,dt = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2cos^2t}\,dt$$

$$L = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2sin^2t}\,dt = 4aE(e) \ ; \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} < 1$$

$$\sqrt{1-x} = 1 + \frac{1}{2}(-x) + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}(-x)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}(-x)^3 + \cdots \ ; \ |x| < 1$$

$$\sqrt{1 - e^2sin^2t} = 1 - \frac{1}{2}(e^2sin^2t) - \frac{1}{2\times 4}(e^2sin^2t)^2 - \frac{1}{16}(e^2sin^2t)^3 - \cdots$$

$$E(e) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2sin^2t}\,dt = \frac{\pi}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1\times 3}{2\times 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \cdots\right)$$

$$L = 4aE(e) \approx \pi\left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right]$$

$$\left(\int_0^{\pi/2} sin^ptdt = \frac{\pi}{2}\frac{1\times 3\times\cdots\times(p-1)}{2\times 4\times\cdots\times p} = \frac{\pi}{2}\frac{(p-1)!!}{p!!} \quad p\ is\ an\ even\ number\right) \ ■$$

❊ **مثال ۱۱–۴۱** با استفاده از تابع گاما, فرمول استرلینگ را ثابت کنید. یعنی اگر $n \rightarrow \infty$ آنگاه: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}x^n dx = \int_0^{+\infty} e^{nlnx - x} dx \xrightarrow{x=n+y} n! = e^{-n}\int_{-n}^{+\infty} e^{nln(n+y) - y} dy$$

$$= e^{-n}\int_{-n}^{+\infty} e^{nlnn + nln\left(1+\frac{y}{n}\right) - y} dy = e^{-n}n^n\int_{-n}^{+\infty} e^{n\left(\frac{y}{n} - \frac{y^2}{2n^2} + \frac{y^3}{3n^3} - \cdots\right) - y} dy$$

$$\xrightarrow{y=\sqrt{n}t} n! = e^{-n}n^n\sqrt{n}\int_{-n}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3\sqrt{n}} - \cdots} dt \approx e^{-n}n^n\sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \rightarrow n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \ ■$$

مثال ۱۱-۴۲ با استفاده از تمرین ۹ بخش ۹-۲ نشان دهید:

$$\int_0^1 x^x\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

حل ابتدا تابع x^x را بصورت نمایی می‌نویسیم تا بتوانیم از سری مک‌لوران تابع نمایی استفاده کنیم. خواهیم داشت:

$$x^x=e^{xlnx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(xlnx)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n(lnx)^n}{n!}\to\int_0^1 x^x\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(lnx)^n\,dx$$

حاصل انتگرال داخل زیگما را در تمرین ۸ بخش ۹-۲ برای $n\in\{0,1,2,\cdots\}$ برابر $\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$ بدست آوردیم. در نتیجه:

$$\int_0^1 x^x\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(lnx)^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^n}\ \blacksquare$$

۱۱-۶-۴- استفاده از روش $C+iS$ برای محاسبه تعدادی از مجموعهای مثلثاتی

روش کار درست مشابه ایده‌ای است که در بحث مختلط دیده شد, با این تفاوت که در آنجا مسائل بگونه‌ای طرح شده بود که به سری هندسی منجر شود که جواب آنرا میدانستیم. در اینجا به سریهایی میرسیم که حاصل آنها را با توجه به سریهای تیلور, میتوان بر حسب توابع مقدماتی بیان کرد.

مثال ۱۱-۴۳ حاصل سری زیر را بیابید. یعنی آنرا بر حسب توابع مقدماتی بیان کنید.

$$C=1+\frac{cos\theta}{cos\theta}+\frac{cos(2\theta)}{2!\,cos^2\theta}+\frac{cos(3\theta)}{3!\,cos^3\theta}+\cdots$$

حل با انتخاب S بصورت زیر , عبارت $C+iS$ را تشکیل داده و قسمت حقیقی آنرا بدست می‌آوریم.

$$S=0+\frac{sin\theta}{cos\theta}+\frac{sin(2\theta)}{2!\,cos^2\theta}+\frac{sin(3\theta)}{3!\,cos^3\theta}+\cdots$$

$$C+iS=1+\frac{e^{i\theta}}{cos\theta}+\frac{e^{2i\theta}}{2!\,cos^2\theta}+\frac{e^{3i\theta}}{3!\,cos^3\theta}+\cdots=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^x\quad;\quad x=\frac{e^{i\theta}}{cos\theta}$$

$$C+iS=e^{\frac{e^{i\theta}}{cos\theta}}=ee^{itan\theta}=e\big(cos(tan\theta)+isin(tan\theta)\big)\to C=ecos(tan\theta)$$

بعنوان راه حل دوم می‌توان بجای $cos(n\theta)$ بر حسب تابع نمایی قرار داد و مشابه مثال ۷-۲۱ عمل کرد. ■

توضیح: همانگونه که در توضیح مثال ۱۰-۳۶ عنوان شد, روش حل این مثال و مثالهای دیگر این بخش, در اینجا میتواند پذیرفته نشود. چرا که فعلا سری تیلور برای $x\in\mathbb{R}$ بدست آمده است و هنوز نمیدانیم که مثلا میتوان سری را برای $x=\frac{e^{i\theta}}{cos\theta}\in\mathbb{C}$ نیز بکار برد. که در بحث آنالیز مختلط در درس ریاضی مهندسی, درستی بکارگیری این سریها را خواهیم دید. ■

❋ **مثال ۱۱-۴۴** سری زیر را بر حسب توابع مقدماتی بیان کنید.

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{r^n}{n} sinn\theta = rsin\theta + \frac{r^3}{3} sin3\theta + \frac{r^5}{5} sin5\theta + \cdots \qquad ; \qquad |r| < 1$$

حل این مساله قبلا در فصل اعداد مختلط و در مثال ۷-۳۹, با مشتق‌گیری از سری داده شده و استفاده از سری هندسی بدست آمد. در اینجا بطریق دیگری آنرا حل می‌کنیم. عبارت سمت چپ را S مینامیم. حال $C + iS$ را تشکیل داده و قسمت موهومی آنرا بدست می آوریم.

$$x = re^{i\theta} \to C + iS = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots = tanh^{-1}(x) \qquad ; \qquad \left|re^{i\theta}\right| = |r| < 1$$

$$C + iS = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}\right) \qquad ; \qquad \left(tanh^{-1}x = \frac{1}{2} ln\frac{1 + x}{1 - x} \quad ; \quad |x| < 1\right)$$

با استفاده از مثال ۷-۳۴ خواهیم داشت:

$$ln\left(1 + re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2} ln(1 + r^2 + 2rcos\theta) + i\, tan^{-1}\alpha \quad ; \quad \alpha = \frac{rsin\theta}{1 + rcos\theta}$$

$$ln\left(1 - re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2} ln(1 + r^2 + 2rcos\theta) + i\, tan^{-1}\beta \quad ; \quad \beta = \frac{-rsin\theta}{1 - rcos\theta}$$

$$Im(C + iS) = \frac{1}{2}(tan^{-1}\alpha - tan^{-1}\beta) = \frac{1}{2} tan^{-1}\left(\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}\right) = \frac{1}{2} tan^{-1}\left(\frac{2rsin\theta}{1 - r^2}\right) \quad ■$$

توضیح: بعنوان راه حل دوم میتوان بجای سینوس بر حسب تابع نمایی قرار داد. در اینصورت:

$$sinn\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \to S = \frac{tanh^{-1}\left(re^{i\theta}\right) - tanh^{-1}\left(re^{-i\theta}\right)}{2i} = \cdots \quad ■$$

مثال ۱۱-۴۵ حاصل سری زیر را بیابید.

$$C = cos^2\theta - \frac{1}{3} cos^3\theta cos3\theta + \frac{1}{5} cos^5\theta cos5\theta - \cdots$$

حل عبارت S را بصورت زیر تعریف کرده, سپس $C + iS$ را تشکیل داده و این بار قسمت حقیقی آنرا بدست می آوریم.

$$S = cos\theta sin\theta - \frac{1}{3} cos^3\theta sin3\theta + \frac{1}{5} cos^5\theta sin5\theta - \cdots$$

$$x = cos\theta e^{i\theta} \to C + iS = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = tan^{-1}(x) = tan^{-1}\left(cos\theta e^{i\theta}\right) \quad ; \quad |x| \le 1$$

$$\to \begin{cases} C + iS = tan^{-1}\left(cos\theta e^{i\theta}\right) \\ C - iS = tan^{-1}\left(cos\theta e^{-i\theta}\right) \end{cases} \xrightarrow{+} 2C = tan^{-1}\alpha + tan^{-1}\beta = tan^{-1}\left(\frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta}\right)$$

$$\to 2C = tan^{-1}\left(\frac{2cos^2\theta}{1 - cos^2\theta}\right) = tan^{-1}(2cotg^2\theta) \to C = \frac{1}{2} tan^{-1}(2cotg^2\theta) \quad ■$$

توضیح: در واقع $C + iS$ و $C - iS$ معادل آن است که از اول بجای $cosn\theta$ بر حسب تابع نمایی قرار داده باشیم. ■

※ مثال ۱۱-۴۶ با استفاده از سری $ln(1+x)$ نشان دهید:

$$ln\left(2cos\frac{\theta}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}cosn\theta}{n}\quad;\quad(-\pi<\theta<\pi)$$

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\quad;\quad(-1<x\le 1)$$

$$x=e^{i\theta}\rightarrow Ln\left(1+e^{i\theta}\right)=e^{i\theta}-\frac{e^{2i\theta}}{2}+\frac{e^{3i\theta}}{3}-\frac{e^{4i\theta}}{4}+\cdots\quad;\quad\left|e^{i\theta}\right|=1$$

در اینجا نیز مشابه مثال ۷-۳۴ خواهیم داشت:

$$1+e^{i\theta}=1+cos\theta+isin\theta=2cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}\rightarrow Ln\left(1+e^{i\theta}\right)=ln\left(2cos\frac{\theta}{2}\right)+i\frac{\theta}{2}$$

$$Ln\left(2cos\frac{\theta}{2}\right)+i\frac{\theta}{2}=e^{i\theta}-\frac{e^{2i\theta}}{2}+\frac{e^{3i\theta}}{3}-\frac{e^{4i\theta}}{4}+\cdots\quad;\quad\left(e^{in\theta}=cosn\theta+isinn\theta\right)$$

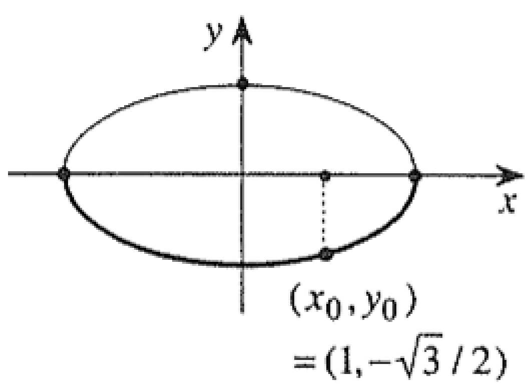
با مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی دو طرف, نتیجه مطلوب بدست می‌آید. ■

توضیح: علت آنکه در اینجا نماد $Ln\left(1+e^{i\theta}\right)$ بجای $ln\left(1+e^{i\theta}\right)$ بکار رفته است, آن است که در آنالیز مختلط ثابت میشود که $ln(z)$ یک تابع بیشمار مقداری است و منظور از $Ln(z)$ مقدار اصلی آن است, که منجر به یک خروجی میشود. درست مشابه تفاوت $arcsin$ و $Arcsin$ در مثلثات که $arcsin$ یک تابع بیشمار مقداری است, اما اگر الزام کنیم که خروجی در یک بازه خاص قرار داشته باشد(مثلا $-\frac{\pi}{2}<\theta\le\frac{\pi}{2}$) , آنگاه آنرا به یک تابع تک مقداری تبدیل کرده‌ایم که به آن مقدار اصلی آرک سینوس می‌گوییم. ■

※ ۱۱-۶-۵- مشخص کردن یک تابع در یک رابطه ضمنی (قضیه تابع ضمنی)

مطالب این بخش در واقع بایستی پس از مطالعه توابع چند متغیره در ریاضی ۲ عنوان شود. در ریاضی ۱ تابع تک متغیره‌ای را که در آن y بصورت ضمنی بر حسب x بیان شده است را با $f(x,y)=0$ نمایش میدهیم. در اینجا میخواهیم ببینیم آیا میتوان بطریقی از این رابطه ضمنی, y را بر حسب x بیان کرد یا نه. و سوال دیگر آنکه آیا این بیان یکتا است؟

فرض کنیم تساوی $f(x,y)=0$ با زوج مرتب (x_0,y_0) برقرار باشد. همچنین تابع f و مشتقات اول آن نسبت به دو متغیر, در همسایگی نقطه (x_0,y_0) پیوسته باشند (این مفهوم در ریاضی ۲ دیده خواهد شد) . همچنین $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\neq 0$ باشد. در اینصورت بر طبق یک قضیه میتوان گفت رابطه $f(x,y)=0$ تابع y را برحسب x بصورت یکتا در همسایگی x_0 خواهد داد و این تابع در آن همسایگی مشتق پذیر نیز میباشد. بعنوان مثال:



$$f(x,y)=x^2+4y^2-4=0$$

$$f\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$$

$$\rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}=2x\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}=8y$$

بدیهی است هر دو مشتق فوق در همسایگی نقطه مورد نظر پیوسته اند. همچنین $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,-\sqrt{3}/2)} = -4\sqrt{3} \neq 0$. پس رابطه فوق فقط یک تابع یکتای مشتق پذیر $y(x)$ را در مجاور $(1,-\frac{\sqrt{3}}{2})$ خواهد داد. اما اگر نقطه $(2,0)$ انتخاب شود, طبق این قضیه تضمینی بر یکتایی تابع مجاور این نقطه نخواهد بود. لازم بذکر است در دستگاه روابط با تعداد متغیرهای بالاتر این کنترل به کمک مفهوم ژاکوبین صورت میگیرد.

مثال ۱۱-۴۷ نشان دهید رابطه زیر تابع y را برحسب x بصورت یکتا در همسایگی (x_0,y_0) خواهد داد. سپس آنرا بیابید.

$$f(x,y)=(y-2x)e^y-x^2+1=0 \quad ; \quad (x_0,y_0)=(1,2)$$

$$f(1,2)=0 \to \frac{\partial f}{\partial x}=-2e^y-2x \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y}=(y-2x+1)e^y$$

بدیهی است هر دو مشتق فوق در همسایگی نقطه مورد نظر پیوسته اند. همچنین $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,2)} = e^2 \neq 0$. پس رابطه فوق فقط یک تابع یکتای مشتق پذیر $y(x)$ را خواهد داد. اما مشکل این است که معمولا نمی‌توان به راحتی تابع را بصورت صریح بیان کرد!

بهترین روش در اینگونه موارد نوشتن سری تیلور است. مثلا در اینجا میدانیم سری تیلور این تابع حول $x_0=1$ بصورت زیر است:

$$y(x)=y(1)+\frac{y'(1)}{1!}(x-1)+\frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2+\cdots$$

بنابراین اگر مشتقات مراتب مختلف تابع y را در این سری جایگذاری کنیم, تابع را به فرم سری بدست آورده‌ایم.

$$f(x,y)=(y-2x)e^y-x^2+1=0 \to (y'-2)e^y+(y-2x)e^y y'-2x=0$$

$$\to y'=\frac{2+2xe^{-y}}{y-2x+1} \to y'(1)=2+2e^{-2} \quad (x=1 \to y=2)$$

$$\to y''=\frac{(2-2xy')e^{-y}}{y-2x+1}+\frac{(2+2xe^{-y})(-1)(y'-2)}{(y-2x+1)^2} \to y''(1)=-6e^{-2}-8e^{-4}$$

$$\to y(x)=y(1)+\frac{y'(1)}{1!}(x-1)+\frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2+\cdots$$

$$\to y(x)=2+(2+2e^{-2})(x-1)+\frac{-6e^{-2}-8e^{-4}}{2!}(x-1)^2+\cdots$$

$$\to y(x)=2+2.271(x-1)-0.479(x-1)^2+\cdots \quad \blacksquare$$

تمرینات بخش ۱۱-۶ تمرینات ۶, ۲۴ و ۳۶ از بخش ۱۱-۱۱ کتاب

۱- ضریب x^3 در سری مک‌لوران $\sqrt[3]{1+tan^{-1}x}$ را بدست آورید. جواب: $c_3=\frac{-4}{81}$

۲- با استفاده از سری تلسکوپی مثال ۱۱-۳۵ را حل کنید.

۳- درستی عبارت زیر را نشان دهید:

$$A=\frac{4}{3!}\pi^2-\frac{6}{5!}\pi^4+\frac{8}{7!}\pi^6-\frac{10}{9!}\pi^8+\cdots=3$$

راهنمایی: با توجه به وجود فاکتوریل اعداد فرد در مخرج، طرفین سری مک‌لوران سینوس را در x ضرب کرده و مشتق بگیرید.

۴- نشان دهید:

$$\underline{A}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}=e^3-1 \qquad ; \qquad \underline{f(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{n!}x^n=(2+x)e^x$$

$$B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)!}=e-2 \qquad ; \qquad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^3x^n=\frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$$

$$\underline{h(x)}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n3!}{(n+3)!}x^n=\frac{3}{x^2}(2-2x+x^2-2e^{-x}) \qquad ; \qquad C=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{ln2}{3}+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

راهنمایی: برای قسمت C , ابتدا سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^{3n}$ را بدست آورده و سپس از طرفین در بازه 0 تا 1 انتگرال بگیرید.

۵- با نوشتن سری تیلور تابع $f(x)=\frac{1}{x^3+3x^2+3x+5}$ حول نقطه $a=-1$, حاصل $f^{(99)}(-1)$ را بدست آورید.

$$\underline{Ans}:\quad f^{(99)}(-1)=\frac{-1}{4^{34}}(99)!$$

۶- حاصل انتگرالهای زیر را با خطای کمتر از مقادیر عنوان شده بیابید.

1) $I=\int_0^{0.4}\sqrt{1+x^4}\,dx$; $|E|\le 5\times10^{-6}$; $\underline{Ans}$: $I\approx 0.40102$ (با نوشتن 2 جمله)

2) $I=\int_0^{0.5}x^3\,tan^{-1}x\,dx$; $|E|\le 5\times10^{-6}$; $\underline{Ans}$: $I\approx 0.0059$ (با نوشتن 3 جمله)

۷- نشان دهید:

$$1)\ \int\frac{cosx-1}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{2n(2n)!}+C \qquad ; \qquad \underline{2})\ \int_0^1\frac{ln(1+x)}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

۸- با نوشتن سری مک‌لوران تابع e^{-t^2} روابط تقریبی زیر را برای محاسبه تابع خطا بدست آورید.

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}-\frac{x^7}{42}+\frac{x^9}{216}-\cdots\right)$$

$$erf(x)\approx 1-\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^3}+\frac{1\times3}{2^2x^5}-\frac{1\times3\times5}{2^3x^7}+\cdots\right)$$

۹- با استفاده از سری e^x و با انتخاب $x=e^{i\theta}$, درستی سریهای زیر را نشان دهید.

$$f(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{cosn\theta}{n!}=e^{cos\theta}cos(sin\theta) \qquad ; \qquad g(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{sinn\theta}{n!}=e^{cos\theta}sin(sin\theta)$$

۱۰- نشان دهید:

$$1+\frac{x^2cos(2\theta)}{2!}+\frac{x^4cos(4\theta)}{4!}+\cdots=cosh(xcos\theta)cos(xsin\theta)$$

تمرینات ۲۲, ۲۶ , ۳۰ و ۴۲ از بخش مرور مطالب فصل ۱۱

تمرینات ۴ , ۱۱ و ۱۷ از بخش مسائل اضافی فصل ۱۱