دانشکده فنی دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تمرین هفتم درس ریاضیات مهندسی

طراحان
محمدعرفان مفید

نیمسال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳

سوال ۱

تابع $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ را در نظر بگیرید .
الف) کلیه بسط های لوران حول z=۰ بدست آورید.
ب) اگر بخواهیم f(z) را حول z=۱+j بسط دهیم درکدام ناحیه تابع بسط تیلور و درکدام ناحیه بسط لوران خواهد داشت؟

پاسخ:
الف)

$$f(z) = \frac{1}{z\,(1-z)}; \quad z = 0$$

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}, \quad 0 < |z| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{-z(1-\frac{1}{z})} = -\frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+2}}, \quad |z| > 1$$

ب)

$$u = z - (1+j)$$

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{-1}{(u + (1+j))(u+j)}$$

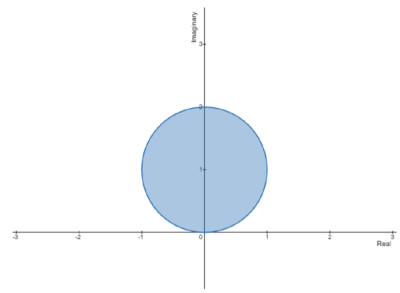
$$|u| < 1 \longrightarrow |z - (1+j)| < 1 : \text{Taylor series}$$

$$1 < |u| < \sqrt{2} \longrightarrow 1 < |z - (1+j)| < \sqrt{2} : \text{Laurent series}$$

$$|u| > \sqrt{2} \longrightarrow |z - (1+j)| > \sqrt{2} : \text{Laurent series}$$

سوال ۲

اتصویر ناحیه زیر را تحت نگاشت $\omega = \frac{i}{Z}$ بیابید



شکل ۱: شکل سوال دوم

پاسخ:

(۱) نگاشت را میتوان به شکل زیر نوشت:

$$= \frac{1}{z}e^{i\pi/2}$$

(۲) پس ابتدا عملیات را انجام میدهیم سپس نتیجه را ۹۰ درجه میچرخانیم:

$$w = \frac{i}{z} = i\omega, \quad \omega = \frac{1}{z}, \quad z = x + iy$$

$$\omega = u + iv$$

$$\omega = \frac{1}{z} \implies z = \frac{1}{\omega} \implies x+iy = \frac{1}{u+iv}\cdot\frac{u-iv}{u-iv} \implies x = \frac{u}{u^2+v^2},\ y = \frac{-iv}{u^2+v^2}$$

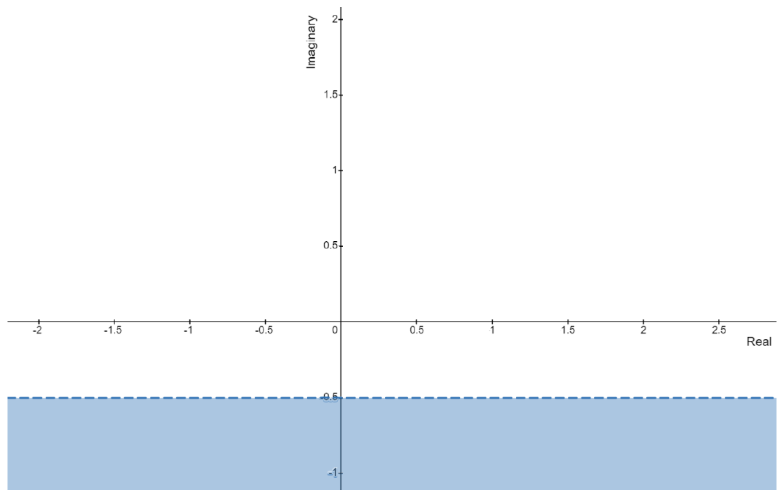
$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \implies x^2 + y^2 - 2y = 0$$ معادله دایره

جای گذاری:

$$\implies \frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{2v}{u^2+v^2} = 0$$

$$\frac{u^2+v^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{2v}{u^2+v^2}=0 \implies \frac{u^2+v^2+2v(u^2+v^2)}{(u^2+v^2)^2}=0$$

$$\implies 1+2v=0 \implies v=-\frac{1}{2}$$

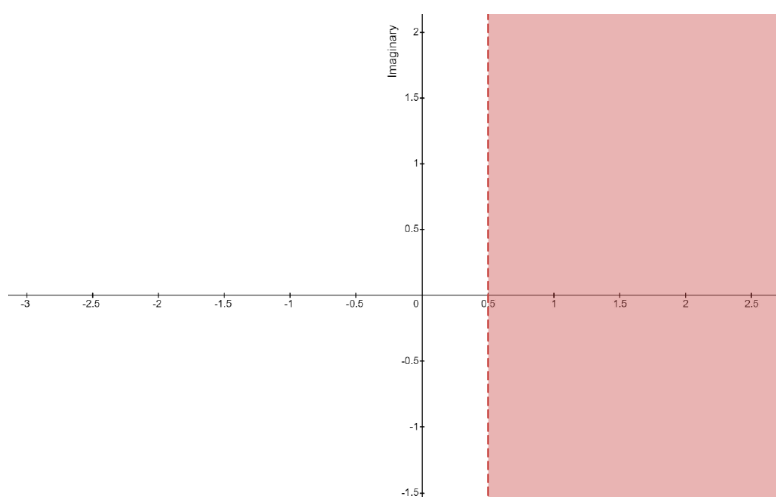


شکل ۲: شکل قبل از چرخش

تصویر داخل دایره پایین خط است چون:

$$y \geq 0 \longrightarrow \left(-\frac{v}{u^2+v^2}\right) \geq 0 \implies v<0$$

حال نگاشت را ۹۰ درجه خلاف عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم:



شکل ۳: شکل نهایی

سوال ۴

موارد زیر را ابتدا اثبات کنید تابع داخل آرگومان انتگرال گیری تحلیلی است یا نه، سپس در صورت تحلیلی بودن به صورت تابعی از z بنویسید و در انتها انتگرال معین آنها را محاسبه کنید (شرط کوشی ریمان را بررسی کنید).

$$\int_{j}^{1} (x^2 - y^2 - 2xyj)\, dz$$

$$\int_{j+1}^{0} (e^x \cos(y) + je^x \sin(y))\, dz$$

$$\int_{1}^{3j} \left(\sin(x)\cosh(y) + j\cos(x)\sinh(y)\right)\, dz$$

پاسخ:
شرط کوشی ریمان:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

$$\int_{j}^{1} (x^2 - y^2 - 2xyj)\, dz$$

اگر $u_x = 2x \neq v_y = -2x$ باشد، تابع فوق تحلیلی نمی‌باشد و با انتگرال معین نمی‌توان آن را حل کرد.

$$\int_j^1 \left(e^x \cos(y) + je^x \sin(y)\right)\, dz$$

$$u_x = e^x \cos(y) = v_y, \quad u_y = -e^x \sin(y) = -v_x$$

تابع تحلیلی است

محاسبه انتگرال:

$$\int_j^1 \left(e^x \cos(y) + je^x \sin(y)\right)\, dz = \int_j^1 e^x(\cos(y){+}j\sin(y))\, dz = \int_j^1 e^{(x+jy)}\, dz =$$

$$\int_j^1 e^z\, dz = 1 - e^{(j+1)}$$

$$\int_1^{3j} \left(\sin(x)\cosh(y) + j\cos(x)\sinh(y)\right)\, dz$$

$$\int_1^{3j} \left(\sin(x)\cosh(y) + j\cos(x)\sinh(y)\right)\, dz$$

$$u_x = \cos(x)\cosh(y) = v_y$$

$$u_y = \sin(x)\sinh(y) = -v_x$$

تابع تحلیلی است

محاسبه انتگرال:

$$\cosh(y) = \cos(jy)$$

$$\sinh(y) = -j\sin(jy)$$

$$\sin(x)\cosh(y){+}j\cos(x)\sinh(y) = \sin(x)\cos(jy){-}j\cos(x)\sin(jy) = \sin(x{+}jy) = \sin(z)$$

$$\int_1^{3j} \sin(z)\, dz = \cos(1) - \cos(3j)$$

سوال ۶

دایره $|z| = d$ با نگاشت $w = z^k + \frac{1}{z^k}$ به چه شکلی تبدیل خواهد شد؟ (k عدد طبیعی و d>۱ است)

پاسخ:

بانوجه به نگاشت ژوکوفسکی:

$$w1 = z^k, w = w1 + \frac{1}{w1}$$

ابتدا نگاشت $w1$ دایره را بر روی دایره $|z| = d^k$ نگاشت می‌کند و سپس نگاشت w دایره ای به شعاع d^k را بر روی بیضی با نیم قطرهای $R + \frac{1}{R}, R - \frac{1}{R}$ و کانون های $+2$ و -2 تصویر میکند.