۵- تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس در واقع بعنوان یک روش برای حل معادلات دیفرانسیل خطی شناخته می‌شود. روشی که می‌تواند یک جایگزین مناسب برای حل معادلات ناهمگن باشد. چرا که گاهی بکارگیری روش ضرایب نامعین یا تغییر پارامتر (لاگرانژ) ممکن است طولانی‌تر از روشی مانند تبدیل لاپلاس باشد. شاید بتوان گفت این روش یکی از مقبولترین روشها برای حل اغلب معادلاتی است که در مهندسی با آن روبرو می‌شویم.

در ابتدا بهتر است مفاهیم اولیه تبدیل لاپلاس و نحوه بکارگیری آن برای حل معادلات دیفرانسیل, در قالب یک مثال ساده بررسی شود. فرض کنید هدف حل مساله زیر باشد:

$$y'(t)+2y(t)=3e^t \quad ; \quad y(0)=0 \quad ; \quad 0<t<\infty$$

معمولا در بحث لاپلاس, متغیر مساله را با t نمایش می‌دهیم, چرا که خواهیم دید تعریف تبدیل لاپلاس برای متغیرهای مثبت خواهد بود و لذا با توجه به مثبت بودن متغیرِ زمان, بهتر است متغیر معادله را t بنامیم.

با تعریف تبدیل لاپلاسِ تابع $y(t)$ بصورت زیر می‌خواهیم این معادله را حل کنیم:

$$\mathcal{L}(y)=\int_0^\infty y(t)e^{-st}\,dt$$

جهت نمایش تبدیل لاپلاس ممکن است بجای $\mathcal{L}(y)$ از نمادهای دیگری مانند $Y(s)$ یا $\overline{y}(s)$ نیز استفاده شود, چرا که بدیهی است جواب انتگرال تابعی از s خواهد شد.

در واقع با این تعریف گویا قرار است کاری شبیه تغییر متغیر انجام شود که متغیر t را به متغیر s تغییر دهیم, اما نه با تغییر متغیرهای معمول, بلکه با انتگرال داده شده. دیده میشود که $y(t)$ به $Y(s)$ تبدیل شده است. یعنی هم متغیر t به متغیر s تغییر یافته است و هم تابع y به Y. به همین دلیل آنرا یک تبدیل مینامیم. به عبارتی تبدیل $(t,y)\to(s,Y)$ را خواهیم داشت.

برای حل معادله مورد نظر ابتدا طرفین آنرا در e^{-st} ضرب کرده , سپس بر روی t از 0 تا ∞ انتگرال می‌گیریم. در اینصورت:

$$\int_0^\infty y'e^{-st}dt+2\int_0^\infty ye^{-st}dt=3\int_0^\infty e^te^{-st}dt\to\mathcal{L}(y')+2\mathcal{L}(y)=3\mathcal{L}(e^t)$$

$$\mathcal{L}(y')=\int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{u}\underbrace{y'dt}_{dv}=\lim_{A\to\infty}y(t)e^{-st}\Big|_0^A+s\int_0^\infty y(t)e^{-st}dt=sY(s)-y(0)\quad ; \quad y(0)=0$$

بدیهی است اعتبار این نتیجه زمانی است که $\lim_{t\to\infty}y(t)e^{-st}=0$ باشد که برای این منظور کافی است $s>0$ انتخاب شود.

در واقع مهمترین دلیلِ مفید بودن تبدیل لاپلاس در این است که توانستیم تبدیل لاپلاس $y'(t)$ را بر حسب تبدیل لاپلاس $y(t)$ بیان کنیم. حال تبدیل لاپلاس عبارت سمت راست را نیز بدست می‌آوریم. در حالت کلی لاپلاس e^{at} عبارت است از:

$$\mathcal{L}(e^{at})=\int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt=\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-(s-a)t}dt=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{s-a}\left[1-e^{-(s-a)A}\right]$$

حال اگر $s>a$ منظور شود:

$$\to\mathcal{L}(e^{at})=\frac{1}{s-a}\qquad (s>a)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y) = 3\mathcal{L}(e^t) \to sY(s) + 2Y(s) = \frac{3}{s-1} \to Y(s) = \frac{3}{(s-1)(s+2)}$$

بنابراین بجای حل یک معادله دیفرانسیل به یک معادله جبری رسیدیم که حل آن ساده است. علت این موضوع نیز آن است که توانستیم تبدیل لاپلاس $y'(t)$ را بر حسب تبدیل لاپلاس $y(t)$ بیان کنیم.

حال بایستی بصورت معکوس عمل کنیم. به این معنی که به دنبال تابعی باشیم که لاپلاس آن $Y(s)$ باشد. به این کار اصطلاحا محاسبه لاپلاس معکوس میگوییم و با نماد $\mathcal{L}^{-1}$ نشان میدهیم. برای یافتن لاپلاس معکوس در این مثال, ساده‌تر است که کسر را تجزیه کنیم. لذا خواهیم داشت:

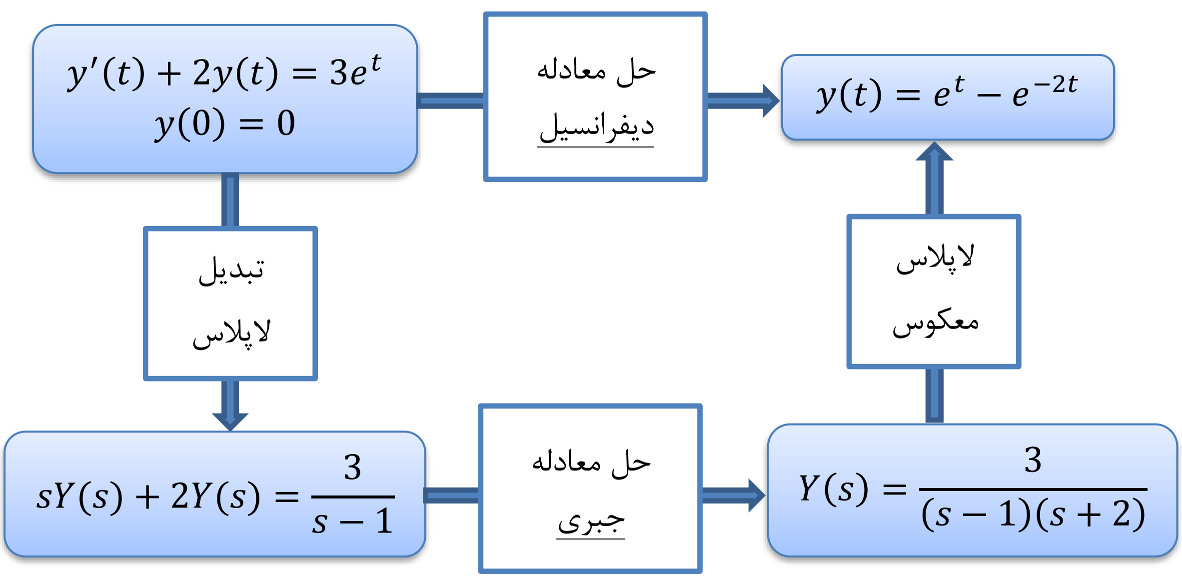
$$Y(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}$$

از طرفی از آنجا که لاپلاس e^{at} برابر $\frac{1}{s-a}$ میباشد, میتوان گفت لاپلاس معکوس $\frac{1}{s-a}$ نیز e^{at} خواهد بود. هر چند بعدا بایستی دقیقتر به این مساله نگاه کنیم و نشان دهیم آیا واقعا تبدیل لاپلاس یک به یک می‌باشد یا خیر. بنابراین رابطه لاپلاس و لاپلاس معکوس را میتوان بصورت زیر نشان داد:

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a} \quad (if \;\; s > a) \quad \to \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) = e^{at}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) \to y(t) = e^t - e^{-2t}$$

بنابراین جواب مساله بدست آمد. خلاصه آنچه در بالا دیده شد را می‌توان بصورت زیر نشان داد:



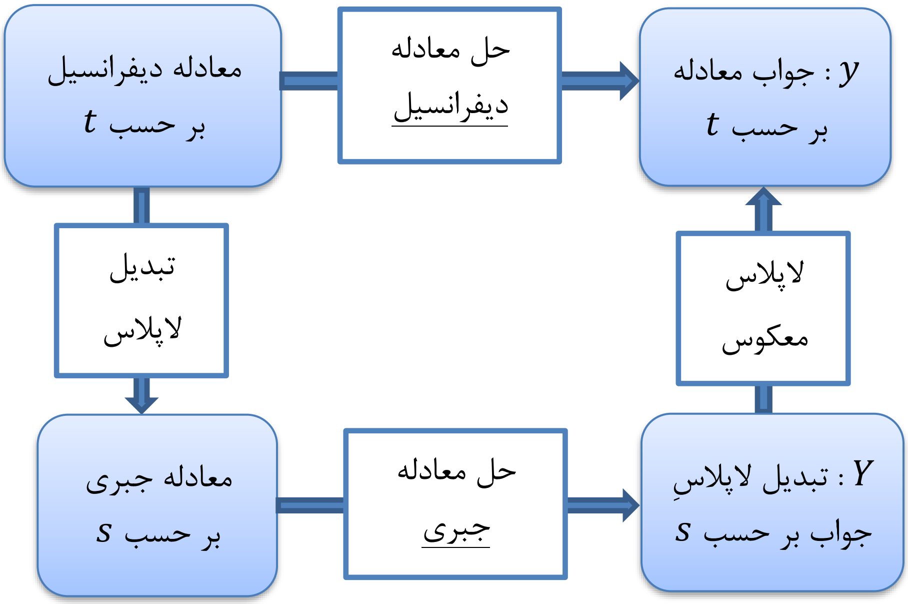
و یا در فرم نوشتاری بصورت خلاصه:

$$y' + 2y = 3e^t \xrightarrow{\mathcal{L}} sY(s) - \underbrace{y(0)}_{0} + 2Y(s) = \frac{3}{s-1} \to (s+2)Y(s) = \frac{3}{s-1}$$

$$\to Y(s) = \frac{3}{(s-1)(s+2)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = e^t - e^{-2t}$$

نکته اصلی و مهم روش لاپلاس این است که در نهایت, لاپلاس همه مشتقات تابع را می‌توان بر حسب لاپلاس تابع y یعنی $Y(s)$ بیان کرده و لذا با حل یک معادله جبری, $Y(s)$ را تعیین کرد.

در حالت کلی حل یک معادله دیفرانسیل به کمک تبدیل لاپلاس بصورت زیر می‌باشد:



و یا در فرم نوشتاری اگر فرض کنیم که L یک اپراتور خطی و $\mathcal{L}$ معرف تبدیل لاپلاس باشد, آنگاه:

$$L[y(t)] = f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} G(s)Y(s) = F(s) \rightarrow Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) \quad \boxed{\surd}$$

بنابراین بحث اصلیِ آنچه در این فصل به آن می‌پردازیم روشهای تعیین تبدیل لاپلاس $f(t)$ و نیز نحوه محاسبه لاپلاس معکوس $Y(s)$ خواهد بود.

به طور خلاصه می‌توان گفت هدف تبدیل لاپلاس تبدیل مساله از فضای اولیه به یک فضای ساده‌تر است. در نهایت نیز پس از حل مساله در فضای جدید, جواب نهایی به فضای اولیه بازگردانده می‌شود. در واقع با استفاده از تبدیل لاپلاس, از فضای حل یک معادله دیفرانسیل به فضای حل یک معادله جبری می‌رسیم و طبیعی است که حل یک معادله جبری قطعا از معادله دیفرانسیل ساده‌تر است. در حالت کلی همه تبدیلات انتگرالی (مانند تبدیل فوریه) چنین رویکردی را برای حل مسائل دارند.

مشابه چنین کاری را قبلا نیز دیده‌ایم. به عنوان نمونه, استفاده از تغییر متغیر در انتگرال‌گیری نیز چنین دیدگاهی را دنبال می‌کند. چرا که با تغییر متغیری مانند $u = g(x)$, انتگرالی که بر حسب x مشکل است, به انتگرال ساده‌ای بر حسب u تبدیل شده و حل می‌شود. در نهایت نیز بصورت معکوس جوابی که بر حسب u بدست آمده است را بر حسب x بیان می‌کنیم. مثلا برای محاسبه $I = \int (x+3)^{50}dx$ اگر مستقیما بخواهیم $(x+3)^{50}$ را بسط دهیم شامل 51 جمله خواهد بود که طولانی است. اما اگر از تغییر متغیر $u = x + 3$ استفاده کنیم مساله به فضای u خواهد رفت که یک انتگرال ساده بوده و جواب بر حسب u خواهد شد. در نهایت میتوانیم جوابِ بر حسب u را بصورت معکوس به فضای اولیه یعنی x برگردانیم.

$$u = x + 3 \xrightarrow{\text{تبدیل به انتگرال ساده}} I = \int u^{50}du = \frac{1}{51}u^{51} + C \xrightarrow{\text{معکوس}} I = \frac{1}{51}(x+3)^{51} + C$$

بعنوان مثال دیگر می‌توان به استفاده از تابع لگاریتم برای محاسبه حاصل‌ضرب دو عدد بزرگ اشاره کرد. دیده شد که می‌توان بجای ضرب دو عدد(که ممکن است طولانی باشد) ابتدا از دو عدد لگاریتم گرفته سپس بجای ضرب از جمع استفاده کرد(که ساده‌تر است). در نهایت نیز با معکوس گرفتن از لگاریتم, به جواب مساله رسید.

یک نکته قابل ذکر آن است که اگر چه در انتهای فصل و در مثال ۵-۷۲ خواهیم دید چگونه میتوان لاپلاس تابع lnt را بدست آورد, اما از آنجا که لاپلاس این تابع, بر حسب ثابت اویلر-ماسکرونی (یعنی γ) بدست می‌آید, لذا ترجیحا معادلات دیفرانسیلی که ترم ناهمگن آن بر حسب lnt میباشد را با روشی به‌جز لاپلاس مانند روش تغییر پارامتر یا روش تجزیه عملگرها حل می‌کنیم.

۵-۱- تعریف تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که در بازه $[0,\infty)$ معرفی شده است, بصورت زیر تعریف میشود.

$$\mathcal{L}(f)=F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

عنوان شد از آنجا که حد پایین انتگرال در تعریف تبدیل لاپلاس صفر میباشد, مرسوم است که نام متغیر را بر خلاف بخشهای قبل t در نظر میگیرند. اساسا در تعریف لاپلاس, مقدار $f(t)$ برای $t<0$ برابر صفر منظور می‌شود.

بدیهی است تبدیل لاپلاس تبدیلی خطی است, یعنی لاپلاس مجموع چند تابع, برابر است با مجموع لاپلاسِ هر تابع (چرا که انتگرال مجموع چند تابع برابر مجموع انتگرالِ هر تابع می‌باشد). همچنین با استفاده از فرمول انتگرال مختلطی که برای محاسبه لاپلاس معکوس در بحث آنالیز مختلط وجود دارد و ما به آن نمی‌پردازیم, می‌توان ثابت کرد که لاپلاس معکوس نیز خطی است.

علاوه بر این برای اکثر توابع معمول ریاضی(مگر در حالاتی بسیار خاص که بعدا خواهیم دید), لاپلاس و معکوس آن منحصر به فرد است, لذا:

$$\mathcal{L}(f)=F(s)\leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big)=f$$

معمولا روش تبدیل لاپلاس برای حل معادلات خطی با ضرایب ثابت بکار میرود, هر چند در ادامه خواهیم دید پاره‌ای از معادلات با ضرایب غیرثابت را نیز می‌توان با این روش حل کرد. (مثال ۵-۲۷)

مثال ۵-۱ لاپلاس توابع e^{at} , $sinat$, $cosat$ و t^a را بدست آورید.

حل برای هر تابع با نوشتن تعریف تبدیل لاپلاس, انتگرالهای مورد نظر را بدست می‌آوریم:

$$1)\ \mathcal{L}(e^{at})=\int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt=\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-(s-a)t}dt=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{s-a}\left[1-e^{-(s-a)A}\right]$$

$$\to \mathcal{L}(e^{at})=\frac{1}{s-a}\quad (if\ \ s>a)\quad\to\quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right)=e^{at}$$

$$a=0\to\mathcal{L}(1)=\frac{1}{s}\qquad (s>0)\quad\to\quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)=1\ \blacksquare$$

$$2)\ \mathcal{L}(sinat)=\int_0^\infty (sinat)e^{-st}\,dt\quad ;\quad I=\int \underbrace{e^{-st}}_{u}\,\underbrace{(sinat)dt}_{dv}=-\frac{e^{-st}cosat}{a}-\frac{s}{a}\int(cosat)e^{-st}\,dt$$

$$\to I=-\frac{e^{-st}cosat}{a}-\frac{s}{a}\left(\frac{e^{-st}sinat}{a}+\frac{s}{a}\int(sinat)e^{-st}\,dt\right)$$

$$\to I=-\frac{e^{-st}cosat}{a}-s\frac{e^{-st}sinat}{a^2}-\frac{s^2}{a^2}I\to I=\frac{-e^{-st}}{s^2+a^2}(s\,sinat+a\,cosat)$$

$$\to \mathcal{L}(sinat)=\int_0^\infty (sinat)e^{-st}\,dt=\lim_{A\to\infty}\frac{-e^{-st}}{s^2+a^2}(s\,sinat+a\,cosat)\Big|_0^A=\frac{a}{s^2+a^2}\quad (s>0)$$

به عنوان مثال:

$$\mathcal{L}(sin^3at)=\mathcal{L}\left(\frac{3}{4}sinat-\frac{1}{4}sin3at\right)=\frac{3}{4}\frac{a}{s^2+a^2}-\frac{1}{4}\frac{3a}{s^2+9a^2}=\frac{6a^3}{(s^2+a^2)(s^2+9a^2)}\ \blacksquare$$

با محاسباتی مشابه بالا:

$$3)\ \ \mathcal{L}(cosat)=\frac{s}{s^2+a^2}\qquad (s>0)$$

به عنوان مثال:

$$\mathcal{L}\left(sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\mathcal{L}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sint+\frac{1}{2}cost\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}=\frac{\sqrt{3}+s}{2(s^2+1)}\ \blacksquare$$

$$4)\ \ \mathcal{L}(t^a)=\int_0^\infty t^a e^{-st}\,dt\xrightarrow{u=st}\mathcal{L}(t^a)=\int_0^\infty\left(\frac{u}{s}\right)^a e^{-u}\frac{du}{s}=\frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty u^a e^{-u}\,du\quad (s>0)$$

شرط $s>0$ به این دلیل بکار گرفته شده است که با تغییر متغیر $u=st$ حدود انتگرال, همان 0 تا ∞ باقی بماند.

$$\to \mathcal{L}(t^a)=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}\quad (a>-1\ ;\ s>0)\quad\to\quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^a}\right)=\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}\quad (a>0\ ;\ s>0)$$

به عنوان مثال:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)=\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\ \blacksquare$$

در حالت خاص که $a=n\in W$ یعنی یک عدد حسابی باشد, از آنجا که $\Gamma(n+1)=n!$, لذا خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}(t^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}\quad (n\in W\ \ ;\ \ s>0)\quad\to\quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^n}\right)=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\quad (n\in\mathbb{N}\ \ ;\ \ s>0)\ \blacksquare$$

<u>توضیح ۱</u>: فرض کنید هدف محاسبه $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+9}\right)$ باشد. ممکن است آنرا به یکی از دو صورت زیر بدست آوریم:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+9}\right)=\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+3^2}\right)=\frac{1}{3}sin3t$$

<u>*or*</u>: $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+9}\right)=\frac{1}{-3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-3}{s^2+(-3)^2}\right)=\frac{1}{-3}sin(-3t)=\frac{1}{3}sin3t$$

از آنجا که نتیجه تفاوتی نمی‌کند مرسوم است که در سینوس و کسینوس, $a>0$ انتخاب می‌شود.

<u>توضیح ۲</u>: به کمک نتایج لاپلاس می‌توان تعدادی از انتگرالهای غیر عادی را که از 0 تا ∞ می‌باشند محاسبه کرد. بعنوان نمونه:

$$\int_0^\infty (t^2+sin2t)e^{-t}\,dt=\mathcal{L}(t^2)|_{s=1}+\mathcal{L}(sin2t)|_{s=1}=\frac{2!}{s^3}\Big|_{s=1}+\frac{2}{s^2+2^2}\Big|_{s=1}=\frac{12}{5}$$

$$\int_0^\infty 5^{-t}sint\,dt=\int_0^\infty e^{-tln5}sint\,dt=\mathcal{L}(sint)|_{s=ln5}=\frac{1}{s^2+1^2}\Big|_{s=ln5}=\frac{1}{1+(ln5)^2}\ \blacksquare$$

مثال ۵-۲ ابتدا لاپلاس تابع e^{iat} را محاسبه کرده و به کمک آن لاپلاس توابع $sinat$ و $cosat$ را بدست آورید.

حل لاپلاس تابع e^{iat} بصورت زیر خواهد بود:

$$\mathcal{L}(e^{iat}) = \int_0^\infty e^{iat}e^{-st}\,dt = \lim_{A\to\infty} -\frac{e^{-(s-ia)t}}{s-ia}\Bigg|_0^A = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{s-ia}\left[1-e^{-(s-ia)A}\right] = \frac{1}{s-ia}$$

که در آن بایستی $s>0$ منظور شود. لازم بذکر است که در محاسبه حد $e^{-(s-ia)A}$ در بینهایت بصورت زیر عمل شده است:

$$\lim_{A\to\infty} e^{-(s-ia)A} = \lim_{A\to\infty} e^{-sA}\left[\underbrace{\lim_{A\to\infty}(cosaA)}_{\text{محدود}} + i\,\underbrace{\lim_{A\to\infty}(sinaA)}_{\text{محدود}}\right] = 0 \qquad (s>0)$$

بنابراین دیده شد که دقیقا همان فرم لاپلاس e^{at} را خواهد داشت که بجای a عبارت ia قرار گرفته است, با این تفاوت که شرط $s>a$ به $s>0$ تغییر پیدا کرد.

برای محاسبه لاپلاس تابع $sinat$ با استفاده از آنچه در اعداد مختلط دیده شد می‌دانیم $sinat=\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}$, در نتیجه:

$$\mathcal{L}(sinat) = \int_0^\infty (sinat)e^{-st}\,dt = \frac{1}{2i}\left(\int_0^\infty e^{iat}e^{-st}\,dt - \int_0^\infty e^{-iat}e^{-st}\,dt\right) = \frac{\mathcal{L}(e^{iat})-\mathcal{L}(e^{-iat})}{2i}$$

$$\mathcal{L}(sinat) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia}-\frac{1}{s+ia}\right) = \frac{1}{2i}\frac{2ia}{s^2+a^2} = \frac{a}{s^2+a^2} \qquad (s>0)$$

به همین ترتیب لاپلاس $cosat$ نیز قابل محاسبه است. ■

<u>توضیح ۱</u>: می‌توان همین نتایج را به طریق دیگری نیز بدست آورد. می‌دانیم $sinat = Im(e^{iat})$, در نتیجه:

$$\mathcal{L}(sinat) = \int_0^\infty (sinat)e^{-st}\,dt = Im\left(\int_0^\infty (cosat + isinat)e^{-st}\,dt\right) = Im\left(\int_0^\infty e^{iat}e^{-st}\,dt\right)$$
$$= Im\left(\mathcal{L}(e^{iat})\right)$$

$$\mathcal{L}(e^{iat}) = \frac{1}{s-ia} = \frac{s}{s^2+a^2} + i\frac{a}{s^2+a^2} \to \mathcal{L}(sinat) = \frac{a}{s^2+a^2} \quad (s>0)$$

در واقع قسمت موهومی این جواب $\mathcal{L}(sinat)$ میباشد. بدیهی است قسمت حقیقی نیز $\mathcal{L}(cosat)$ است. زیرا:

$$\mathcal{L}(cosat) = \int_0^\infty (cosat)e^{-st}\,dt = Re\left(\int_0^\infty e^{iat}e^{-st}\,dt\right) = Re\left(\mathcal{L}(e^{iat})\right) = \frac{s}{s^2+a^2} \quad (s>0)$$

که در واقع معادل همان راه حل قبلی است.

<u>توضیح ۲</u>: لازم به ذکر است این محاسبات می‌تواند فعلا پذیرفته نشود. چرا که هنوز مفهوم انتگرال مختلط را نمی‌دانیم و دیده شد محاسبات بگونه‌ای است که متغیر مختلط در انتگرال وارد شده است. در حالیکه همه آنچه در بحث انتگرال تا به حال دیده شده است برای متغیرهای حقیقی است. به هر حال پس از آشنایی با بحث انتگرال مختلط در درس ریاضی مهندسی می‌توان چنین راه حلی را نیز پذیرفت. ■

مثال ۵-۳ لاپلاس معکوس زیر را بدست آورید.

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{17s^2+22s+51}{(2s+3)(3s^2+12)}\right)$$

حل برای یافتن لاپلاس معکوس توابع کسری, ابتدا کسر را تجزیه می‌کنیم تا به لاپلاس توابع شناخته شده برسیم. برای این منظور بهتر است ابتدا ضمیمه مطالعه شود.

$$\frac{17s^2+22s+51}{(2s+3)(3s^2+12)}=\frac{A}{2s+3}+\frac{Cs+D}{3s^2+12}$$
$$\rightarrow 17s^2+22s+51=A(3s^2+12)+(Cs+D)(2s+3)$$

که در واقع به سه معادله و سه مجهول می‌رسد. اما ساده‌تر است بجای حل دستگاه, از آنجا که با یک اتحاد روبرو هستیم و لذا بایستی به ازای هر s برقرار باشد, ریشه‌های مخرج را بعنوان s در اتحاد جایگذاری کنیم. بنابراین:

$$s=-\frac{3}{2}\rightarrow 56.25=18.75A+0\rightarrow A=3$$
$$s=+2i\rightarrow -17+44i=0+(3+4i)(2Ci+D)$$
$$\rightarrow -17+44i=(3D-8C)+(6C+4D)i\rightarrow\begin{cases}3D-8C=-17\\6C+4D=44\end{cases}\rightarrow\begin{cases}C=4\\D=5\end{cases}$$

توجه شود که صرفا بکارگیری $s=+2i$ کافی است, چرا که هر دو ضریب را خواهد داد و نیازی به $s=-2i$ نخواهیم داشت.

$$\rightarrow f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{2s+3}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4s+5}{3s^2+12}\right)$$

برای معکوس‌گیری بایستی این جملات را به فرم لاپلاسهای شناخته شده تبدیل کنیم. بدیهی است اولین جمله را می‌توان به فرم $\frac{1}{s-a}$ بیان کرد. برای جمله دوم نیز چنانچه آنرا به دو کسر تفکیک کنیم با توجه به جمله $3s^2+12$ در مخرج کسر, با اعمال ضرایبی در صورت و مخرج, فرمهای $\frac{s}{s^2+a^2}$ و $\frac{a}{s^2+a^2}$ ایجاد خواهد شد.

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{2s+3}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4s}{3s^2+12}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5}{3s^2+12}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+\frac{3}{2}}\right)+\frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+2^2}\right)+\frac{5}{3\times 2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)=\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}t}+\frac{4}{3}cos2t+\frac{5}{6}sin2t\ \blacksquare$$

توضیح: راه دومِ تجزیه کسر: با استفاده از روشی که در ضمیمه آمده است میتوان کسر را بصورت زیر نیز تجزیه کرد:

$$F(s)=\frac{g(s)}{h(s)}\rightarrow\frac{17s^2+22s+51}{(2s+3)(3s^2+12)}=\frac{\frac{1}{2}A}{s+\frac{3}{2}}+\frac{Cs+D}{3s^2+12}\rightarrow\frac{1}{2}A=\frac{g(s_j)}{h'(s_j)}$$

دقت شود در استفاده از رابطه $\frac{g(s_j)}{h'(s_j)}$ برای ریشه‌های ساده, حتما بایستی مخرج به فرم $s-s_j$ باشد, یعنی ضریب s برابر 1 گردد, به همین جهت ضریب $\frac{1}{2}$ را به صورت کسر منتقل کردیم.

$$\frac{1}{2}A=\frac{g(-3/2)}{h'(-3/2)}=\frac{17s^2+22s+51}{2(3s^2+12)+6s(2s+3)}\bigg|_{s=-3/2}=1.5\rightarrow A=3$$

اگر اختلاف درجه صورت و مخرج کسری که دارای ضرایب مجهول است, برابر یک باشد(در اینجا کسر $\frac{Cs+D}{3s^2+12}$), با محاسبه حد $sf(s)$ در بینهایت نیز میتوان ثابت C را بدست آورد. به عبارتی:

$$sf(s)=\frac{17s^3+22s^2+51s}{(2s+3)(3s^2+12)}=\frac{As}{2s+3}+\frac{Cs^2+Ds}{3s^2+12}$$

$$\lim_{s\to+\infty}sf(s)=\frac{17}{6}\rightarrow\frac{A}{2}+\frac{C}{3}=\frac{17}{6}\xrightarrow{A=3}C=4$$

ضریب D نیز با انتخاب یک نقطه دلخواه قابل محاسبه است. و یا می‌توان پس از محاسبه A بصورت زیر عمل کرد:

$$\frac{Cs+D}{3s^2+12}=\frac{17s^2+22s+51}{(2s+3)(3s^2+12)}-\frac{3}{2s+3}=\frac{(2s+3)(4s+5)}{(2s+3)(3s^2+12)}=\frac{4s+5}{3s^2+12}\quad\blacksquare$$

مثال ۵-۴ به کمک لاپلاس معکوس $\frac{1}{s-ia}$, حاصل $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)$ را بیابید.

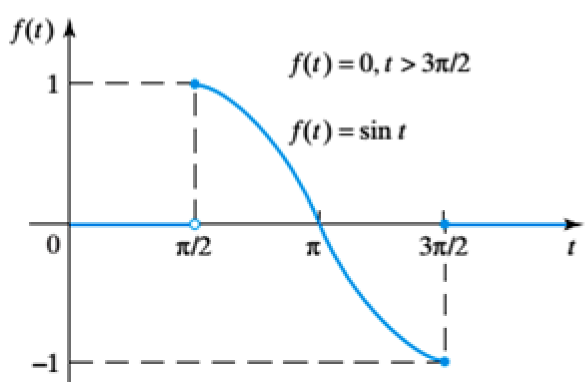
$$\frac{2}{s^2+4}=\frac{A_1}{s+2i}+\frac{A_2}{s-2i}\ ;\ A_j=\frac{g(s_j)}{h'(s_j)}\rightarrow A_1=\frac{g(-2i)}{h'(2i)}=\frac{2}{2s}\bigg|_{s=-2i}=-\frac{1}{2i}\xrightarrow{\cdots}A_2=\frac{1}{2i}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)=\frac{1}{2i}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2i}\right)-\frac{1}{2i}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2i}\right)=\frac{1}{2i}e^{2it}-\frac{1}{2i}e^{-2it}=sin2t\quad\blacksquare$$

مثال ۵-۵ لاپلاس معکوس زیر را بدست آورید.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s\ sin\varphi+a\ cos\varphi}{s^2+a^2}\right)=sin\varphi\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)}_{cos(at)}+cos\varphi\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)}_{sin(at)}=sin(at+\varphi)\quad\blacksquare$$

مثال ۵-۶ لاپلاس تابع زیر را بدست آورید.



$$\mathcal{L}(f)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$=0+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(sint)e^{-st}dt+0$$

$$=\cdots=se^{-\frac{3\pi s}{2}}\frac{e^{\pi s}+1}{s^2+1}\quad\blacksquare$$

مثال ۵-۷ لاپلاس تابع زیر و نیز لاپلاس مشتق آنرا بدست آورید.

$$f(t)=\begin{cases}t^2\,, & 0\le t\le 2\\ 2\,, & t>2\end{cases}\quad ;\quad \mathcal{L}(f)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^2 t^2e^{-st}dt+\int_2^\infty 2e^{-st}dt$$

$$=\left[t^2\left(\frac{-1}{s}e^{-st}\right)-2t\left(\frac{1}{s^2}e^{-st}\right)+2\left(\frac{-1}{s^3}e^{-st}\right)\right]_0^2+\left(\frac{-2}{s}e^{-st}\right)\Big|_2^\infty=-e^{-2s}\left(\frac{2}{s}+\frac{4}{s^2}+\frac{2}{s^3}\right)+\frac{2}{s^3}$$

$$f'(t)=\begin{cases}2t\,, & 0\le t<2\\ 0\,, & t>2\end{cases}\quad ;\quad \mathcal{L}(f')=\int_0^2 2te^{-st}dt=\frac{-4}{s}e^{-2s}-\frac{2}{s^2}e^{-2s}+\frac{2}{s^2}\quad \blacksquare$$

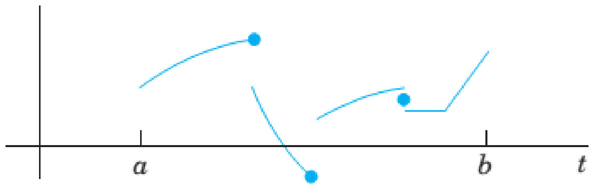
در این بخش لاپلاس تعدادی از توابع مقدماتی را بدست آوردیم. بدیهی است قرار نیست برای هر تابعی به همین شیوه عمل کنیم, چرا که اگر تابع کمی پیچیده شود, این شیوه یعنی انتگرال‌گیری مستقیم بسیار طولانی بوده و لذا ممکن است روشهای دیگر را به لاپلاس ترجیح دهیم.

اهمیت تبدیل لاپلاس به واسطه قضایایی است که کمک می‌کند تبدیل لاپلاس تعداد زیادی از توابع را بدون انتگرال‌گیری و صرفا با در دست بودن لاپلاس چند تابع مقدماتی بدست آوریم. مثلا محاسبه لاپلاس تابعی مانند $te^{3t}cos2t$ با انتگرال‌گیری قطعا طولانی خواهد بود, اما خواهیم دید که قضایای لاپلاس کمک خواهد کرد که این تبدیل را بسیار ساده‌تر از انتگرال‌گیری بدست آوریم. همچنین این قضایا در تعیین لاپلاس معکوس نیز استفاده خواهد شد. به هر حال در استفاده از قضایا به ذهن سپردن لاپلاس و لاپلاس معکوس چند تابع مهم که در جدول زیر ارائه شده است مفید خواهد بود.

Laplace Transform Pairs		
$\boxed{f(t)}$	$\boxed{F(s)=\mathcal{L}(f)}$	Conditions on s
1	$\frac{1}{s}$	$s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s>a$
$t^n\ ;\ n\in W$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0$
$t^a\ ;\ a>-1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$s>0$
$sinat$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s>0$
$cosat$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s>0$
$sinhat$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s>\lvert a\rvert$
$coshat$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s>\lvert a\rvert$

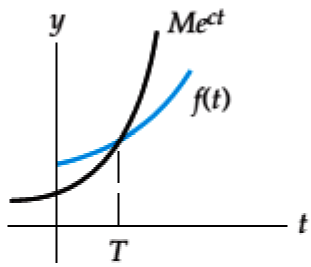
۵-۱-۱- شرط کافی وجود تبدیل لاپلاس

تعریف: تابع $f(t)$ را در بازه $[a,b]$ تکه‌ای پیوسته گوییم اگر تعداد متناهی نقطه $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ وجود داشته باشد که f در تمام زیر بازه‌های (t_i, t_{i+1}) پیوسته بوده و در نقاط انتهایی هر زیر بازه, به یک عدد متناهی همگرا باشد. همچنین توجه شود که الزامی ندارد تابع در نقاط t_i تعریف شده باشد. بعنوان نمونه تابع زیر در بازه $[a,b]$ تکه‌ای پیوسته می‌باشد.



سوال: چه توابعی تبدیل لاپلاس دارند؟ قبل از پاسخ به این سوال یک تعریف ارائه میشود. تابع $f(t)$ را در بازه $[0,\infty)$ از مرتبه نمایی می‌گوییم هرگاه عدد مثبت M و نیز اعداد ثابت نامنفی c و T وجود داشته باشند بگونه‌ایکه:

$$\forall t \geq T \;\; ; \;\; |f(t)| \leq Me^{ct}$$



$$1)\; sinat \;\; : \;\; \forall t \geq 0 \;\; |sinat| \leq 1e^{0t}$$

$$2)\; t^3 \;\; : \;\; \forall t \geq 0 \rightarrow t < e^t \rightarrow t^3 < e^{3t} \rightarrow |t^3| < 1e^{3t}$$

و یا می‌توان گفت $\lim_{t\rightarrow+\infty} \frac{t^3}{e^{ct}} = 0$ که این رابطه برای هر $c > 0$ اعتبار دارد.

قضیه: اگر تابع $f(t)$ در بازه $[0,\infty)$ تکه‌ای پیوسته بوده و از مرتبه نمایی باشد, تبدیل لاپلاس آن برای $s > c$ وجود دارد.

اثبات: از آنجا که تابع $f(t)$ از مرتبه نمایی است, خواهیم داشت:

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \rightarrow |f(t)e^{-st}| \leq Me^{-(s-c)t}$$

$$\rightarrow \left|\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\right| \leq \int_0^\infty |f(t)e^{-st}|dt \leq M\int_0^\infty e^{-(s-c)t}dt = \frac{M}{s-c} \qquad s > c$$

مثلا برای تابع t^n دیدیم که $c > 0$, بنابراین برای $s > c > 0$ تبدیل لاپلاس این تابع وجود دارد. این قضیه یک شرط کافی برای داشتن تبدیل لاپلاس است. بعنوان نمونه تابع $\frac{1}{\sqrt{t}}$ در شرایط قضیه صدق نمی‌کند, اما میتوان نشان داد لاپلاس آن وجود دارد.

دو نتیجه:

$$1)\; |F(s)| \leq \frac{M}{s-c} \rightarrow \lim_{s\rightarrow+\infty} F(s) = 0 \qquad\qquad 2)\; \lim_{s\rightarrow+\infty} |sF(s)| < M$$

برطبق قضیه لرچ $(Lerch)$, اگر دو تابع تکه‌ای پیوسته f و g , تبدیل لاپلاس یکسان داشته باشند, با هم مساویند, مگر در نقاط ناپیوستگی. مثلا تفاوت در مقدار تابع در نقاطی مانند c در داخل بازه میباشد که آن هم اهمیتی ندارد, چرا که در انتگرال گیری تاثیری نخواهد داشت. لذا لاپلاس معکوس هر تابع با صرفنظر از تغییر مقدار آن در تعداد متناهی نقطه, منحصر به فرد است. خلاصه آنکه در فضای توابع تکه‌ای پیوسته و از مرتبه نمایی, تبدیل لاپلاس یک به یک خواهد بود.

❄ **مثال ۵-۸** نشان دهید که توابع $\frac{1}{t+1}$ و $ln(1+t)$ دارای تبدیل لاپلاس هستند و لاپلاس $\frac{1}{t}$ وجود ندارد.

حل الف: تابع $\frac{1}{t+1}$ در بازه $[0,\infty)$ پیوسته بوده و لذا بایستی نشان دهیم از مرتبه نمایی است:

$$0 \leq \frac{1}{t+1} \leq 1 \leq e^t$$

ب: تابع $ln(1+t)$ نیز در بازه $[0,\infty)$ پیوسته بوده و لذا نشان می‌دهیم از مرتبه نمایی است. تابع $f(x)=ln(1+x)$ در بازه $[0,t]$ در شرایط قضیه مقدار میانگین(لاگرانژ) صدق میکند. در نتیجه:

$$\exists c \in (0,t)\ ;\ f(t)-f(0)=f'(c)(t-0) \rightarrow ln(t+1)=\frac{1}{c+1}t \leq t \leq e^t$$

راه دوم آن است که با تعریف تابع $f(t)=e^t-ln(1+t)$ خواهیم داشت $f'(t)=e^t-\frac{1}{1+t} \geq 0$ زیرا برای $t \geq 0$ داریم $e^t \geq 1$ و $\frac{1}{1+t} \leq 1$. در نتیجه f صعودی است. بنابراین خواهیم داشت:

$$t \geq 0 \rightarrow f(t) \geq f(0) \rightarrow e^t-ln(1+t) \geq e^0-ln(1+0)=1 \rightarrow e^t \geq ln(1+t)$$

ج: لاپلاس تابع $\frac{1}{t}$ بصورت زیر است. حال نشان میدهیم که این انتگرال ناسره, واگراست. انتگرال را بصورت زیر تفکیک می‌کنیم:

$$\int_0^\infty \frac{1}{t}e^{-st}dt=\int_0^\varepsilon \frac{1}{t}e^{-st}dt+\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{t}e^{-st}dt$$

انتگرال $\int_0^\varepsilon \frac{1}{t}e^{-st}dt$ در مجاور صفر هم ارز $\int_0^\varepsilon \frac{1}{t}dt$ بوده و از آنجا که این انتگرال واگراست, لذا کل انتگرال واگرا می‌شود. ■

مثال ۵-۹ با نوشتن سری مک‌لوران تابع $f(t)=e^t$ لاپلاس آنرا بدست آورید.

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}(e^t)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^3}+\cdots+\frac{1}{s^{n+1}}=\frac{1}{s}\left(1+\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\cdots+\frac{1}{s^n}\right)=\frac{1}{s}\frac{1}{1-\frac{1}{s}}=\frac{1}{s-1}$$

برای نوشتن لاپلاس معکوس t^n بایستی $s>0$ و برای نوشتن سری آخر بایستی $s>1$ باشد. لذا در مجموع $s>1$. ■

❄ **مثال ۵-۱۰** لاپلاس معکوس $\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ را بدست آورید.

حل نکته مهم سوال آن است که با مساله‌ای روبرو هستیم که نمی‌توان آنرا بر حسب لاپلاس معکوس توابعی که تا بحال دیده‌ایم بیان کرد. با توجه به روشی که در مثال قبل دیده شد, ساده‌ترین برخورد با اینگونه مسائل آن است که از سری مک‌لوران آنها استفاده شود. درست مشابه آنکه وقتی از تابعی نمی‌توانستیم انتگرال بگیریم, لااقل با نوشتن سری مک‌لوران, جواب آنرا بر حسب سری بیان می‌کردیم. در اینجا با استفاده از سری دوجمله‌ای خواهیم داشت:

$$(1+x)^m=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots \quad ; \quad |x|<1$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}=(1+s^2)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}s^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}s^4+\cdots \ ; \ |s|<1$$

اما با این شکل بسط نمیتوان معکوس هر جمله را بدست آورد, زیرا جملات در شرط $\lim_{s\to+\infty} F(s)=0$ صدق نمی‌کنند. بنابراین ابتدا یک s از مخرج کسر فاکتور گرفته و آنرا بصورت زیر تبدیل می‌کنیم تا در واقع s را در مخرج ایجاد کرده باشیم:

$$\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}=\frac{1}{s\sqrt{\frac{1}{s^2}+1}}=\frac{1}{s}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\frac{1}{s^3}+\frac{3}{8}\frac{1}{s^5}-\frac{5}{16}\frac{1}{s^7}+\cdots \quad ; \qquad |s|>1$$

از آنجا که برای محاسبه لاپلاس معکوس هر جمله که به فرم $\frac{1}{s^n}$ می‌باشد بایستی $s>0$ باشد, لذا با توجه به شرط $|s|>1$ و این شرط, لذا $s>1$ انتخاب می‌شود. در نتیجه:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\right)=1-\frac{1}{2}\frac{t^2}{2!}+\frac{3}{8}\frac{t^4}{4!}-\frac{5}{16}\frac{t^6}{6!}+\cdots=1-\frac{t^2}{4}+\frac{t^4}{64}-\frac{t^6}{2304}+\cdots \quad ; \quad s>1$$

دیده میشود که سری حاصله بیانگر تابع بسل مرتبه صفر یعنی $J_0(t)$ میباشد. به عبارتی خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}\big(J_0(t)\big)=\frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \quad ; \quad s>1$$

اگر چه می‌توان به طریق دیگری نشان داد اعتبار این رابطه برای $s>0$ نیز برقرار است. ■

توضیح: دیده شد که بسط تابع مورد نظر در نهایت بصورت زیر نوشته شد:

$$\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}=\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\frac{1}{s^3}+\frac{3}{8}\frac{1}{s^5}-\cdots \quad ; \qquad |s|>1$$

اگر توجه شود این سری حول نقطه صفر است اما توانهای s منفی می‌باشند. طبیعتا این سری را نمی‌توان سری مک‌لوران دانست, چرا که در آنجا بایستی همه توانها غیرمنفی باشند. علت این موضوع آن است که همانگونه که دیده شد اعتبار سری برای $|s|>1$ بوده و این ناحیه در واقع یک ناحیه توخالی است, در حالی که سری تیلور(یا مک‌لوران) همگی در داخل یک دایره توپر معتبرند. مثلا اولین سری نوشته شده برای این تابع (که برای حل مساله ما مناسب نبود) به فرم مک‌لوران است. دیده می‌شود که هم توانهای بسط نامنفی‌اند و هم ناحیه اعتبار جواب بصورت $|s|<1$ می‌باشد که یک دایره توپر است. در ریاضی مهندسی خواهیم دید بسطهایی که برای نواحی توخالی (که اصطلاحا طوق نامیده می‌شود) بدست می‌آید, همگی دارای لااقل چند توان منفی می‌باشند که تحت عنوان سری لوران شناخته می‌شود. ■

تمرینات بخش ۵-۱

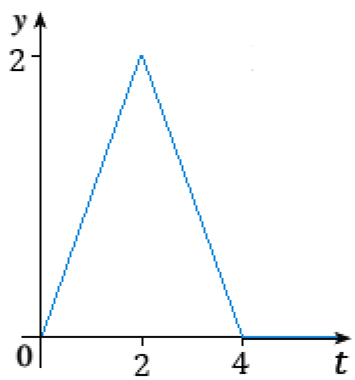
۱- نشان دهید:

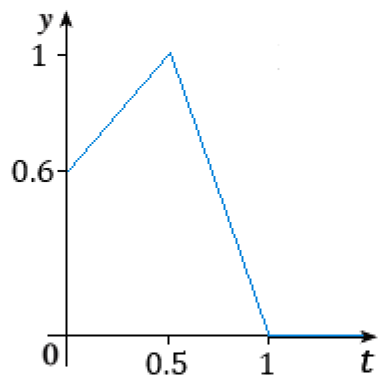
1) $\mathcal{L}(sinhat)=\dfrac{a}{s^2-a^2} \quad s>|a|$; 2) $\mathcal{L}(coshat)=\dfrac{s}{s^2-a^2} \quad s>|a|$

3) $\mathcal{L}(te^{at})=\dfrac{1}{(s-a)^2} \quad s>a$; 4) $\mathcal{L}\big(sinh(2t)sin(2t)\big)=\dfrac{8s}{s^4+64}$

۲- به کمک لاپلاس معکوس $\frac{1}{s-a}$, حاصل $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-a^2}\right)$ را بیابید.

۳- تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید.





$$\underline{Ans}:\ F(s)=\frac{1+e^{-4s}-2e^{-2s}}{s^2} \qquad \underline{Ans}:\ F(s)=\frac{3s+10e^{-s}-14e^{-\frac{s}{2}}+4}{5s^2}$$

۴- لاپلاس معکوس زیر را بدست آورید.

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-11s^2+108s+360}{12(s+3)(s^2-16)}\right) \quad ; \quad \underline{Ans}:\ f(t)=\frac{3}{4}e^{-3t}-\frac{5}{3}cosh4t+\frac{7}{2}sinh4t$$

۵- در مثال ۵-۳ کسر را بصورت زیر تجزیه کنید. سپس ضرایب را از رابطه $\frac{g(s_j)}{h'(s_j)}$ بدست آورده و مساله را مشابه آنچه در مثال ۵-۴ دیده شد مجددا حل کنید.

$$\frac{17s^2+22s+51}{(2s+3)(3s^2+12)}=\frac{A_1}{2s+3}+\frac{1}{3}\left(\frac{Cs+D}{s^2+4}\right)=\frac{\frac{1}{2}A_1}{s+\frac{3}{2}}+\frac{\frac{1}{3}A_2}{s+2i}+\frac{\frac{1}{3}A_3}{s-2i}$$

۶- لاپلاس تابع زیر را با نوشتن بسط مک‌لوران آن بدست آورید.

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{sint}{t} & , \quad t>0\\ 1 & , \quad t=0\end{cases} \quad ; \quad \underline{Ans}:\ F(s)=tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

※ ۷- نشان دهید انتگرال $\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}e^{-st}\,dt$ واگراست و لذا $\mathcal{L}\left(\frac{e^{-t}}{t}\right)$ وجود ندارد.

۵-۲- قضایای تبدیل لاپلاس

بدیهی‌ترین قضیه در اینجا آن است که تبدیل لاپلاس و نیز معکوس آن, تبدیلهایی خطی هستند که قبلا دیده شد. در ادامه قضایای مفید دیگری ارائه میشود که به کمک آنها میتوان تبدیل لاپلاس یا معکوس لاپلاس را به روشهای ساده‌تری بدست آورد. لازم به ذکر است که در کلیه قضایای زیر $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ میباشد.

۵-۲-۱- تبدیل لاپلاس مشتق

فرض کنید تابع $f(t)$ و کلیه مشتقات آن تا مرتبه $n-1$ در بازه $[0,\infty)$ پیوسته و $f^{(n)}(t)$ نیز تکه‌ای پیوسته باشد. حال چنانچه تابع $f(t)$ از مرتبه نمایی نیز باشد, آنگاه به ازای $s>c$ خواهیم داشت:

$$\boxed{\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right)=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0) \quad (1)}$$

اثبات: ابتدا برای $n=1$ قضیه را ثابت می‌کنیم. به عبارتی فرض کنیم تابع $f(t)$ در بازه $[0,\infty)$ پیوسته بوده, از مرتبه نمایی باشد و $f'(t)$ نیز فعلا پیوسته باشد. در اینصورت خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}(f') = \int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{u}\underbrace{f'(t)dt}_{dv} = \lim_{A\to\infty} f(t)e^{-st}\Big|_0^A + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0)$$

توجه شود از آنجا که تابع $f(t)$ از مرتبه نمایی است, در محاسبات بالا از نتیجه زیر استفاده شده است:

$$|f(A)| \le Me^{cA} \to |f(A)e^{-sA}| \le Me^{-(s-c)A} \xrightarrow{if\ \ s>c} \lim_{A\to\infty} f(A)e^{-sA} = 0$$

لازم به ذکر است که اگر $f(0)$ موجود نباشد از $f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$ استفاده خواهد شد. دیده شد که اثبات بالا برای حالتی است که تابع $f'(t)$ پیوسته باشد, چنانچه $f'(t)$ تکه‌ای پیوسته باشد کافی است انتگرال را روی نقاط ناپیوستگی بشکنیم.

به همین ترتیب اگر توابع $f(t)$ و $f'(t)$ در بازه $[0,\infty)$ پیوسته بوده و نیز $f''(t)$ تکه‌ای پیوسته باشد:

$$\mathcal{L}(f'') = s\mathcal{L}(f') - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

و با ادامه همین روش:

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

در رابطه بالا اگر بجای تابع غیرهمگن $f(t)$, پاسخ $y(t)$ قرار داده شود:

$$\mathcal{L}\left(y^{(n)}(t)\right) = s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)$$

بنابراین استفاده از تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل صرفا زمانی امکان پذیر است که معادله مورد نظر یک مساله مقدار اولیه باشد. مثلا در یک معادله مرتبه دو که نیاز به $\mathcal{L}(y''(t))$ میباشد, اگر مقادیر اولیه داده نشده باشد, کافی است مساله را با $y(0)=a$ و $y'(0)=b$ حل کرد که در اینصورت پاسخ نهایی دارای دو ثابت a و b خواهد بود. طبیعی است در معادله مرتبه دو بدون شرایط اولیه انتظار داشته باشیم که در جواب نهایی دو ثابت ظاهر شود.

پس از چند مثال, قضیه را برای حالتی که خودِ $f(t)$ تکه‌ای پیوسته باشد تعمیم خواهیم داد.

مثال ۵-۱۱ معادلات مقدار اولیه زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$1)\ \ y'' - 3y' + 2y = 2e^{-t}\ \ ;\ \ y(0)=2\ ;\ y'(0)=4\ \ ;\ \ 0<t<\infty$$

$$2)\ \ y'' + 4y = sin3t\ \ ;\ \ y(0)=1\ ;\ y'(0)=1\ \ ;\ \ 0<t<\infty$$

حل الف: در واقع مهمترین هدف تبدیل لاپلاس, استفاده از آن در حل معادلات دیفرانسیل میباشد, که در شروع بحث نیز دیده شد. برای حل معادلات دیفرانسیل, ابتدا لاپلاس طرفین معادله را با توجه به شرایط اولیه داده شده, بدست می‌آوریم.

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) - 3\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) = \frac{2}{s+1}$$

$$\to s^2Y(s) - 2s - 4 - 3sY(s) + 6 + 2Y(s) = \frac{2}{s+1} \to (s^2-3s+2)Y(s) - 2s + 2 = \frac{2}{s+1}$$

$$\to Y(s) = \frac{2s^2}{(s+1)(s^2-3s+2)}$$

حال که لاپلاسِ جواب بدست آمد, بایستی با استفاده از لاپلاس معکوس, جواب $y(t)$ را بدست آورد. مشابه قبل, با تجزیه کسر:

$$Y(s)=\frac{2s^2}{(s+1)(s^2-3s+2)}=\frac{A_1}{s+1}+\frac{A_2}{s-1}+\frac{A_3}{s-2}$$

$$A_1(s-1)(s-2)+A_2(s+1)(s-2)+A_3(s+1)(s-1)=2s^2$$

حال با استفاده از انتخاب ریشه‌های مخرج بعنوان s در اتحاد فوق خواهیم داشت:

$$s=-1\rightarrow 6A_1=2\rightarrow A_1=\frac{1}{3}\quad ;\quad s=1\rightarrow -2A_2=2\rightarrow A_2=-1\quad ;\quad s=2\rightarrow A_3=\frac{8}{3}$$

بدیهی است انتخاب مقادیر s دلخواه است و انتخاب ریشه‌ها صرفا باعث ساده‌تر شدن حل می‌شود. در نهایت:

$$\rightarrow Y(s)=\frac{1}{3}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1}+\frac{8}{3}\frac{1}{s-2}\rightarrow y(t)=\mathcal{L}^{-1}\big(Y(s)\big)=\frac{1}{3}e^{-t}-e^{t}+\frac{8}{3}e^{2t}\quad\blacksquare$$

<u>توضیح ۱</u>: راه دومِ تجزیه کسر: با استفاده از روشی که در ضمیمه آمده است میتوان کسر را بصورت زیر تجزیه کرد:

$$\rightarrow Y(s)=\frac{g(s)}{h(s)}\rightarrow\frac{2s^2}{(s+1)(s^2-3s+2)}=\frac{A_1}{s+1}+\frac{A_2}{s-1}+\frac{A_3}{s-2}\rightarrow A_j=\frac{g(s_j)}{h'(s_j)}$$

$$A_1=\frac{g(-1)}{h'(-1)}=\frac{2s^2}{1(s^2-3s+2)+(s+1)(2s-3)}\bigg|_{s=-1}=\frac{1}{3}$$

و یا ساده‌تر است از فرمول اولیه آن که بصورت حد بود به همین نتیجه رسید. خواهیم داشت:

$$A_j=\lim_{s\rightarrow s_j}(s-s_j)Y(s)\rightarrow A_1=\lim_{s\rightarrow -1}\big(s-(-1)\big)\frac{2s^2}{(s+1)(s^2-3s+2)}=\frac{1}{3}$$

به همین ترتیب با جایگذاری $s=1$ و $s=2$ در عبارت بالا, دو ضریب دیگر نیز $A_2=-1$ و $A_3=\frac{8}{3}$ بدست می‌آیند.

<u>توضیح ۲</u>: با توجه به توضیح ۱ می‌توان گفت اگر فرم تبدیل لاپلاسِ جواب به فرم تقسیم دو چندجمله‌ای بصورت $Y(s)=\frac{g(s)}{h(s)}$ بوده و $h(s)$ <u>صرفا</u> دارای n ریشه ساده متمایز s_i باشد, در اینصورت, جواب معادله دیفرانسیل یعنی $y(t)$ عبارت است از:

$$y(t)=\sum_{j=1}^{n}A_je^{s_jt}\quad ;\quad A_j=\lim_{s\rightarrow s_j}(s-s_j)Y(s)=\frac{g(s_j)}{h'(s_j)}$$

به عنوان مثال:

$$Y(s)=\frac{s^2+3s+7}{(s+1)(s^2+4s+8)}=\frac{s^2+3s+7}{(s+1)(s+2-2i)(s+2+2i)}$$

$$s_1=-1\rightarrow A_1=\lim_{s\rightarrow -1}(s+1)\frac{s^2+3s+7}{(s+1)(s^2+4s+8)}=1$$

$$s_2=-2+2i\rightarrow A_2=\lim_{s\rightarrow -2+2i}(s+2-2i)\frac{s^2+3s+7}{(s+1)(s+2-2i)(s+2+2i)}=\frac{-1}{4i}$$

می‌توان نشان داد برای $s_3=-2-2i$ حاصل کسر برابر $\frac{1}{4i}$ خواهد شد. در نتیجه:

$$y(t)=\sum_{j=1}^{n}A_je^{s_jt}=1e^{-t}-\frac{1}{4i}e^{(-2+2i)t}+\frac{1}{4i}e^{(-2-2i)t}=e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\left(\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i}\right)$$
$$=e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}sin2t$$

توضیح ۳: دیده شد که $Y(s)$ از رابطه زیر بدست آمد:

$$\underbrace{(s^2-3s+2)}_{G(s)}Y(s)=2s-2+\frac{2}{s+1}$$

میتوان گفت $G(s)=s^2-3s+2$ با جایگذاری s^2, s و 1 بجای y'', y' و y در معادله دیفرانسیل بدست آمده است. ترم $I(s)=2s-2$ تبدیل یافته شرایط اولیه و ترم $F(s)=\frac{2}{s+1}$ تبدیل لاپلاس ترم غیرهمگن است.

در حالت کلی برای حل معادله $L[y(t)]=f(t)$ با جایگذاری عبارت $H(s)=\frac{1}{G(s)}$ خواهیم داشت:

$$L[y(t)]=f(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}G(s)Y(s)=I(s)+F(s)\to Y(s)=H(s)I(s)+H(s)F(s)=Y_1(s)+Y_2(s)$$

اگر هدف فقط تعیین جواب عمومی معادله باشد بایستی $f(t)=0$ منظور شود که در اینصورت صرفا به $Y_1(s)$ می‌رسیم. یعنی این جمله به علت وجود شرایط اولیه غیرصفر ایجاد شده است. بنابراین می‌توان گفت $\mathcal{L}^{-1}\big(Y_1(s)\big)$ متناظر جواب عمومی معادله خواهد بود. به همین ترتیب از آنجا که ترم غیرهمگنی یعنی $f(t)$ در $Y_2(s)$ ظاهر شده است, لذا $\mathcal{L}^{-1}\big(Y_2(s)\big)$ نیز متناظر جواب خصوصی معادله میباشد.

به $H(s)$ اصطلاحا تابع انتقال گفته می‌شود. علت این نامگذاری آن است که اگر شرایط اولیه صفر باشد $I(s)=0$ بوده و لذا:

$$Y(s)=H(s)F(s)\to H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{\mathcal{L}(y(t))}{\mathcal{L}(f(t))}=\frac{\mathcal{L}(output)}{\mathcal{L}(input)}$$

به عبارتی تابع انتقال, نسبت لاپلاس خروجی به لاپلاس ورودی می‌باشد. در بخش ۵-۶-۲ مطالب بیشتری در این ارتباط خواهیم دید. ■

$$2)\ \ y''+4y=sin3t\ \ ;\ \ y(0)=1\ ;\ \ y'(0)=1\ \ ;\quad 0<t<\infty$$

ب: دراینجا نیز مشابه قبل ابتدا لاپلاس طرفین معادله را با توجه به شرایط اولیه داده شده, بدست می‌آوریم.

$$\xrightarrow{\mathcal{L}}\big(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\big)+4Y(s)=\frac{3}{s^2+9}\to(s^2+4)Y(s)-s-1=\frac{3}{s^2+9}$$
$$\to Y(s)=\frac{s+1}{s^2+4}+\frac{3}{(s^2+9)(s^2+4)}=Y_1(s)+Y_2(s)$$

از آنجا که هدف تجزیه کسر می‌باشد, ساده‌تر است دو عبارت را با هم جمع نکرده و صرفا عبارت دوم را تجزیه کرد:

$$\frac{3}{(s^2+9)(s^2+4)}=\frac{C_1s+D_1}{s^2+9}+\frac{C_2s+D_2}{s^2+4}\to(C_1s+D_1)(s^2+4)+(C_2s+D_2)(s^2+9)=3$$

حال با استفاده از انتخاب ریشه‌های مخرج بعنوان s در اتحاد فوق خواهیم داشت:

$$s=3i\rightarrow -5(3C_1i+D_1)=3\rightarrow -15C_1i-5D_1=3\rightarrow C_1=0\quad ;\quad D_1=\frac{-3}{5}$$

$$s=2i\rightarrow 5(2C_2i+D_2)=3\rightarrow 10C_2i+5D_2=3\rightarrow C_2=0\quad ;\quad D_2=\frac{3}{5}$$

حال ترم $Y_1(s)=\frac{s+1}{s^2+4}$ را نیز اضافه کرده و جملات مشابه را مرتب می‌کنیم:

$$\rightarrow Y(s)=\frac{-3}{5}\frac{1}{s^2+9}+\frac{3}{5}\frac{1}{s^2+4}+\frac{s+1}{s^2+4}=\frac{-3}{5}\frac{1}{s^2+9}+\frac{8}{5}\frac{1}{s^2+4}+\frac{s}{s^2+4}$$

حال برای معکوس‌گیری با توجه به فرم s^2+a^2 در مخرج کسرها, ضرایبی را در صورت و مخرج هر کسر ضرب می‌کنیم تا به فرم لاپلاس $sinat$ و $cosat$ تبدیل گردد.

$$\rightarrow Y(s)=\frac{-3}{5\times 3}\frac{3}{s^2+9}+\frac{8}{5\times 2}\frac{2}{s^2+4}+\frac{s}{s^2+4}\rightarrow y(t)=\frac{-1}{5}sin3t+\frac{4}{5}sin2t+cos2t \quad \blacksquare$$

توضیح: اگر بخواهیم جوابهای عمومی و خصوصی را بصورت تفکیک شده بنویسیم, خواهیم داشت:

$$y_c(t)=\mathcal{L}^{-1}\big(Y_1(s)\big)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2+4}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)=cos2t+\frac{1}{2}sin2t$$

$$y_p(t)=\mathcal{L}^{-1}\big(Y_2(s)\big)=\frac{-3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+9}\right)+\frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)=\frac{-1}{5}sin3t+\frac{3}{10}sin2t \quad \blacksquare$$

مثال ۵-۱۲ الف: لاپلاس $f(t)=t^n$ را به کمک قضیه بالا بدست آورید. $(n\in\mathbb{N})$

ب: لاپلاس تابع $f(t)=sinat$ را با دو بار مشتق‌گیری از تابع, بدست آورید.

حل الف: بدیهی است برای تابع $f(t)=t^n$ خودِ تابع و همه مشتقات آن تا مرتبه $n-1$ در صفر برابر صفر می‌شوند. در نتیجه:

$$f^{(n)}(t)=n!\xrightarrow{\mathcal{L}}s^nF(s)\underbrace{-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)}_{0}=n!\,\mathcal{L}(1)\rightarrow F(s)=\frac{n!}{s^{n+1}} \quad \blacksquare$$

ب: می‌توان دید مشتق دوم تابع $f(t)=sinat$ به خودِ تابع برمی‌گردد, چرا که $-a^2$ برابر خودش می‌باشد. در نتیجه:

$$f''=-a^2f\rightarrow \mathcal{L}(f'')=-a^2\mathcal{L}(f)\ ;\ \underbrace{\mathcal{L}(f'')}_{-a^2F(s)}=s^2F(s)-s\underbrace{f(0)}_{0}-\underbrace{f'(0)}_{a}\rightarrow F(s)=\frac{a}{s^2+a^2}$$

بدیهی است علت اصلی حل این مساله خاص به کمک این قضیه آن بود که مشتق دوم تابع به خودش برمی‌گردد. ■

مثال ۵-۱۳ اگر برای توابع بسل بدانیم$\big(t^{-v}J_v(t)\big)'=-t^{-v}J_{v+1}(t)$, در اینصورت لاپلاس $J_1(t)$ را بیابید. $(v\in\mathbb{R}^+)$

حل با توجه به نتیجه مثال ۵-۱۰ که در آن لاپلاس $J_0(t)$ بدست آمد, با انتخاب $v=0$ در رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\big(t^{-0}J_0(t)\big)'=-t^{-0}J_1(t)\rightarrow J_1(t)=-J_0'(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\mathcal{L}\big(J_1(t)\big)=-s\mathcal{L}\big(J_0(t)\big)+J_0(0)=1-\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \quad \blacksquare$$

❋ **مثال ۵-۱۴** اگر بدانیم $\mathcal{L}\left(\frac{sint}{t}\right)=tan^{-1}\frac{1}{s}$, آنگاه $\mathcal{L}\left(\int_0^1\frac{sintx}{x}dx\right)$ را بیابید.

حل مطابق قاعده لایب‌نیتز که دستوری برای مشتق‌گیری از انتگرال معین ارائه می‌دهد (به توضیح توجه شود), خواهیم داشت:

$$f(t)=\int_0^1 \frac{sintx}{x}dx \to f'(t)=0-0+\int_0^1 \frac{xcos(tx)}{x}dx=\frac{sint}{t}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}(f')=\mathcal{L}\left(\frac{sint}{t}\right) \to s\mathcal{L}(f)-\underbrace{f(0)}_{0}=tan^{-1}\frac{1}{s} \to \mathcal{L}(f)=\frac{1}{s}tan^{-1}\frac{1}{s} \quad \blacksquare$$

توضیح: اگر توابع دو متغیره f و $\frac{\partial f}{\partial t}$ پیوسته و $u(t)$ و $v(t)$ نیز توابعی مشتق پذیر باشند, آنگاه مشتق $I(t)$ برابر است با:

$$I(t)=\int_{u(t)}^{v(t)} f(x,t)\,dx \to I'(t)=v'(t)f(v(t),t)-u'(t)f(u(t),t)+\int_{u(t)}^{v(t)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx \quad \blacksquare$$

تا اینجای کار فرض شده بود تابع $f(t)$ پیوسته می‌باشد. حال ببینیم اگر تابع $f(t)$ تکه‌ای پیوسته باشد, این قضیه به چه فرمی تبدیل می‌شود. برای این منظور فرض کنیم $f(t)$ در نقطه t_1 دارای ناپیوستگی متناهی باشد. در اینصورت خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}(f')=\int_0^{t_1^-} f'(t)e^{-st}\,dt+\lim_{A\to\infty}\int_{t_1^+}^{A} f'(t)e^{-st}\,dt$$

که در آن منظور از t_1^- یک ε قبل از t_1 و t_1^+ بیانگر یک ε بعد از t_1 خواهد بود.

$$=[f(t)e^{-st}]\Big|_0^{t_1^-}+s\int_0^{t_1^-} f(t)e^{-st}\,dt+\lim_{A\to\infty}\left([f(t)e^{-st}]\Big|_{t_1^+}^{A}+s\int_{t_1^+}^{A} f(t)e^{-st}\,dt\right)$$

$$\to \mathcal{L}(f')=sF(s)-f(0)-e^{-st_1}\big(f(t_1^+)-f(t_1^-)\big)$$

در رابطه بالا می‌توان گفت که $f(t_1^+)-f(t_1^-)$ بیانگر جهش تابع در t_1 میباشد که بایستی متناهی باشد. توجه شود که تابع e^{-st} تابعی پیوسته بوده و به همین جهت بجای $e^{-st_1^+}$ و $e^{-st_1^-}$ مقدار e^{-st_1} قرار داده شده است. همچنین اگر تعداد ناپیوستگیها بیشتر از یکی باشد, جملاتی مشابه ترم آخر رابطه ارائه شده به $\mathcal{L}(f')$ اضافه می‌شود.

در بخش مشتق توابع تکه‌ای پیوسته (بخش ۵-۷-۲) این موضوع به طریق دیگری با استفاده از تابع دلتای دیراک بیان خواهد شد.

مثال ۵-۱۵ لاپلاس مشتق تابع زیر با توجه به لاپلاس خودِ تابع بدست آورید.

$$f(t)=\begin{cases} t^2\,, & 0\le t\le 2\\ 2\,, & t>2\end{cases}$$

حل قبلا در مثال ۵-۷ لاپلاس این تابع و مشتق آن بطریق مستقیم بدست آمد. در اینجا می‌خواهیم با داشتن لاپلاس تابع, لاپلاس مشتق آنرا با استفاده از قضیه بالا بدست آوریم. از آنجا که تابع در $t=2$ ناپیوسته است خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}(f')=sF(s)-f(0)-e^{-st_1}\big(f(t_1^+)-f(t_1^-)\big)$$

$$\mathcal{L}(f')=sF(s)-0^2-e^{-2s}\big(f(2^+)-f(2^-)\big)=sF(s)-e^{-2s}(2-2^2)$$

$$\mathcal{L}(f')=sF(s)+2e^{-2s}=s\left(-e^{-2s}\left(\frac{2}{s}+\frac{4}{s^2}+\frac{2}{s^3}\right)+\frac{2}{s^3}\right)+2e^{-2s}=\frac{-4}{s}e^{-2s}-\frac{2}{s^2}e^{-2s}+\frac{2}{s^2}$$

که همان نتیجه‌ای است که در مثال ۵-۷ با انتگرال‌گیری مستقیم بدست آمد. $\blacksquare$

قضایای مقدار ابتدایی و مقدار انتهایی

با استفاده از قضیه تبدیل لاپلاس مشتق, میتوان دو قضیه مقدار ابتدایی و مقدار انتهایی را بصورت زیر بیان کرد.

الف: قضیه مقدار ابتدایی و اثبات آن

اگر تابع $f(t)$ در بازه $[0,\infty)$ پیوسته و $f'(t)$ تکه‌ای پیوسته بوده و هر دو از مرتبه نمایی باشند, آنگاه:

$$1)\ \lim_{s\to+\infty} sF(s) = f(0)$$

$$\mathcal{L}(f') = sF(s) - f(0) \to \underbrace{\lim_{s\to+\infty} \mathcal{L}(f')}_{0} = \lim_{s\to+\infty} sF(s) - f(0) \to \lim_{s\to+\infty} sF(s) = f(0)$$

که به همین ترتیب با نوشتن لاپلاس f'' و f''' و ... می‌توان آنرا بصورت زیر ادامه داد:

$$\lim_{s\to+\infty} s^2F(s) - sf(0) = f'(0)\ ;\ \ \lim_{s\to+\infty} s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) = f''(0)\ ;\ \ \cdots$$

بنابراین در نهایت از $F(s)$ میتوان $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ و $\cdots$ و در نتیجه سری مک لوران جواب را بدست آورد.

لازم بذکر است اگر $f(t)$ در $t=0$ ناپیوسته باشد, در واقع $\lim_{s\to+\infty} sF(s) = f(0^+)$ خواهد بود که بیانگر جهش تابع $f(t)$ در $t=0$ است چرا که مقدار $f(t)$ برای $t<0$ برابر صفر منظور می‌شود.

ب: قضیه مقدار انتهایی و اثبات آن

$$2)\ \lim_{s\to0} sF(s) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$$

$$\lim_{s\to0} \mathcal{L}(f') = \lim_{s\to0} \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \lim_{s\to0} \frac{df(t)}{dt} e^{-st}\,dt = \int_0^\infty df(t)$$

$$\mathcal{L}(f') = sF(s) - f(0) \to \lim_{s\to0}[sF(s) - f(0)] = \lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0)$$

$$\to \lim_{s\to0} sF(s) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$$

دقت شود با توجه به اینکه $s>0$ میباشد, کلیه حدود بصورت $s\to0^+$ می‌باشند.

مثال ۵-۱۶ ابتدا درستی قضیه مقدار ابتدایی و مقدار انتهایی را برای تابع $f(t) = e^{-t}$ کنترل کنید. سپس با استفاده از لاپلاس این تابع و بصورت معکوس, خودِ تابع را با استفاده از بسط تیلور بدست آورید.

$$\mathcal{L}(e^{-t}) = \frac{1}{s+1}\ \ ;\ \ \lim_{s\to+\infty} sF(s) = f(0) \to \lim_{s\to+\infty} s\frac{1}{s+1} = e^{-0} \to 1 = 1\ \ \boxed{\surd}$$

$$\lim_{s\to0} sF(s) = \lim_{t\to+\infty} f(t) \to \lim_{s\to0}\left(s\frac{1}{s+1}\right) = \lim_{t\to+\infty} e^{-t} \to 0 = 0\ \ \boxed{\surd}$$

حال می‌خواهیم بصورت برعکس $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$ را بدست آوریم. با استفاده از قضیه مقدار ابتدایی:

$$f(0) = \lim_{s\to+\infty} s\frac{1}{s+1} = 1\ \ ;\ \ f'(0) = \lim_{s\to+\infty} s^2\frac{1}{s+1} - s\underbrace{f(0)}_{1} = -1$$

$$f''(0) = \lim_{s\to+\infty} s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) = 1\ ;\ \ \cdots\ \ ;\ f^{(3)}(0) = -1\ ;\ f^{(4)}(0) = 1\ ;\ \cdots$$

$$f(t)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}t+\frac{f''(0)}{2!}t^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}t^3+\cdots$$

$$f(t)=1-\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}+\cdots=e^{-t}\quad\blacksquare$$

مثال ۵-۱۷ لاپلاس معکوس ارائه شده در مثال ۵-۱۰ را با استفاده از قضیه مقدار ابتدایی, بصورت یک سری نامتناهی, بدست آورید.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\right)=?$$

حل در قضیه مقدار ابتدایی دیده شد که با داشتن $F(s)$ می‌توان $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ و $\cdots$ را با حدگیری بدست آورده و لذا لاپلاس معکوس را بصورت یک سری مک لوران بیان کرد. بنابراین خواهیم داشت:

$$f(0)=\lim_{s\to+\infty}s\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}=1\ ;\quad f'(0)=\lim_{s\to+\infty}s^2F(s)-sf(0)=0$$

$$f''(0)=\lim_{s\to+\infty}s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)=-\frac{1}{2}\ ;\ f^{(3)}(0)=0\ ;\ f^{(4)}(0)=\frac{3}{8}\ ;\ \cdots$$

$$f(t)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}t+\frac{f''(0)}{2!}t^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}t^3+\cdots=1-\frac{1}{2}\frac{t^2}{2!}+\frac{3}{8}\frac{t^4}{4!}+\cdots$$

این تابع بیانگر بسل مرتبه صفر یعنی $J_0(t)$ می‌باشد که در مثال ۵-۱۰ به روش دیگری به همین نتیجه رسیدیم. $\blacksquare$

مثال ۵-۱۸ مساله مقدار اولیه زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$y^{(4)}-y=0\quad;\quad y(0)=1\quad;\quad y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0\quad;\quad 0<t<\infty$$

حل درست مشابه مثال ۵-۱۱ در اینجا نیز ابتدا لاپلاس طرفین معادله را با توجه به شرایط اولیه داده شده, بدست می‌آوریم.

$$\xrightarrow{\mathcal{L}}\left(s^4Y(s)-s^3y(0)-s^2y'(0)-sy''(0)-y'''(0)\right)-Y(s)=0\to Y(s)=\frac{s^3}{s^4-1}$$

حال که لاپلاس جواب بدست آمد, بایستی با استفاده از لاپلاس معکوس, جواب $y(t)$ را بدست آورد. با تجزیه کسر خواهیم داشت:

$$Y(s)=\frac{s^3}{s^4-1}=\frac{A_1}{s+1}+\frac{A_2}{s-1}+\frac{Cs+D}{s^2+1}$$
$$A_1(s-1)(s^2+1)+A_2(s+1)(s^2+1)+(Cs+D)(s-1)(s+1)=s^3$$

حال با استفاده از انتخاب ریشه‌های مخرج بعنوان s در اتحاد فوق خواهیم داشت:

$$s=-1\to-4A_1=-1\to A_1=\frac{1}{4}\quad;\quad s=1\to4A_2=1\to A_2=\frac{1}{4}$$

$$s=i\to-2(Ci+D)=-i\to-2D-2Ci=-i\to C=\frac{1}{2}\ ;\ D=0$$

بدیهی است انتخاب مقادیر s دلخواه است و انتخاب ریشه‌ها صرفا باعث ساده‌تر شدن حل میشود. در نهایت:

$$\rightarrow Y(s)=\frac{s^3}{s^4-1}=\frac{1}{4}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{4}\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y(s))=\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{2}cost=\frac{1}{2}(cosht+cost) \quad \blacksquare$$

توضیح ۱: پس از تعیین A_1 و A_2 میتوان با انتخاب $s=0$, ابتدا D را بدست آورده و سپس از حدگیری C را تعیین کرد:

$$Y(0)=0\rightarrow A_1-A_2+D=0 \ \ ; \ \ A_1=\frac{1}{4} \ ; \ A_2=\frac{1}{4}\rightarrow D=0$$

$$\lim_{s\to+\infty} sY(s)\rightarrow 1=A_1+A_2+C\rightarrow C=\frac{1}{2}$$

توضیح ۲: راه دومِ تجزیه کسر: با استفاده از روشی که در ضمیمه آمده است میتوان کسر را بصورت زیر تجزیه کرد:

$$\rightarrow Y(s)=\frac{g(s)}{h(s)}\rightarrow\frac{s^3}{s^4-1}=\frac{A_1}{s+1}+\frac{A_2}{s-1}+\frac{A_3}{s+i}+\frac{A_4}{s-i}\rightarrow A_1=\frac{g(s_1)}{h'(s_1)}=\frac{g(-1)}{h'(-1)}=\frac{1}{4}$$

به همین ترتیب سایر ضرایب نیز $\frac{1}{4}$ بدست می‌آیند. لذا:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y(s))=\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-it}+\frac{1}{4}e^{it}=\frac{1}{2}(cosht+cost) \quad \blacksquare$$

۵-۲-۲- تبدیل لاپلاس انتگرال

اگر تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برابر $F(s)$ باشد, آنگاه:

$$\boxed{\begin{cases}\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)dx\right)=\dfrac{F(s)}{s} & (2a)\\ \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{F(s)}{s}\right)=\int_0^t f(x)dx & (2b)\end{cases}}$$

اثبات: فرض کنیم $g(t)=\int_0^t f(x)dx$ در نتیجه $g'(t)=f(t)$ لذا $g'(t)$ تابعی تکه‌ای پیوسته می‌باشد. از طرفی:

$$|g(t)|=\left|\int_0^t f(x)dx\right|\leq\int_0^t|f(x)|dx\leq\int_0^t Me^{cx}dx=\frac{M}{c}(e^{ct}-1)$$

به عبارتی $g(t)$ از مرتبه نمایی است. در نتیجه با استفاده از قضیه قبل خواهیم داشت:

$$\underbrace{\mathcal{L}\big(g'(t)\big)}_{\mathcal{L}(f(t))}=s\mathcal{L}\big(g(t)\big)-\underbrace{g(0)}_{0}\rightarrow\mathcal{L}\big(g(t)\big)=\frac{F(s)}{s}\rightarrow\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)dx\right)=\frac{F(s)}{s}$$

بدیهی است این قضیه به نوعی دوگان (Dual) قضیه قبل می‌باشد. به بیانی می‌توان گفت این قضیه معادل بکارگیری $n=-1$ در قضیه قبل است. بنابراین اگر بکارگیری $n=1$ در قضیه قبل, تبدیل لاپلاسِ مشتق را بدست میدهد, می‌توان اینگونه تعبیر کرد که $n=-1$ معادل تبدیل لاپلاس انتگرال خواهد بود. قضیه تبدیل لاپلاس انتگرال دارای یک تعمیم بسیار پرکاربرد است که در بخش ۵-۳-۱ به آن می‌پردازیم.

موارد کاربرد:

$(2a)$: کاربرد این رابطه با توجه به شکل آن مشخص است.

$(2b)$: زمانی بکار میرود که لاپلاس معکوس توابعی به فرم $\frac{F(s)}{s}$ سوال شده باشد. به این معنی که اگر عبارت داده شده را در s ضرب کنیم, لاپلاسِ تابع شناخته شده‌ای دیده شود. این رابطه به اثر $\frac{1}{s}$ معروف است. به همین ترتیب برای اثر $\frac{1}{s^n}$, بطور متوالی n بار از این قضیه استفاده می‌شود. به عنوان مثال برای محاسبه $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s^3}\right)$ خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s}\right)=\underbrace{\int_0^t f(x)dx}_{g(t)} \quad ; \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{F(s)}{s}}{s}\right)=\underbrace{\int_0^t g(x)dx}_{h(t)} \quad ; \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{F(s)}{s^2}}{s}\right)=\int_0^t h(x)dx$$

مثال ۵-۱۹ لاپلاس معکوسهای زیر را بدست آورید.

$$1)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+a^2)}\right) \quad ; \quad 2)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+1)}\right)$$

$$1)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right)=\frac{sinat}{a}\rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{s^2+a^2}}{s}\right)=\int_0^t \frac{sinax}{a}dx=\frac{1-cosat}{a^2} \quad \blacksquare$$

$$2)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{s+1}}{s}\right)=\int_0^t e^{-x}dx=1-e^{-t}\rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{s(s+1)}}{s}\right)=\int_0^t (1-e^{-x})dx=t-1+e^{-t} \quad \blacksquare$$

توضیح: با استفاده از تجزیه کسر نیز می‌توان دو مثال فوق را حل کرد. بعنوان نمونه برای قسمت دوم خواهیم داشت:

$$\frac{1}{s^2(s+1)}=\frac{B_1}{s}+\frac{B_2}{s^2}+\frac{A}{s+1}\xrightarrow{\cdots} A=1; B_1=-1; B_2=1\rightarrow \frac{1}{s^2(s+1)}=\frac{-1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+1)}\right)=-1+t+e^{-t} \quad \blacksquare$$

مثال ۵-۲۰ معادله زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$y'-3y+2\int_0^t y(x)\,dx=-2e^{-t} \quad ; \quad y(0)=2$$

حل دیده می‌شود که در این معادله علاوه بر تابع و مشتق آن, انتگرال نیز وجود دارد. به چنین معادلاتی اصطلاحا معادلات انتگرالی گفته می‌شود. در اینجا نیز ابتدا لاپلاس طرفین معادله را با توجه به شرایط اولیه داده شده, بدست می‌آوریم.

$$\xrightarrow{\mathcal{L}}\big(sY(s)-y(0)\big)-3Y(s)+2\frac{Y(s)}{s}=-2\frac{1}{s+1}\rightarrow sY(s)-2-3Y(s)+2\frac{Y(s)}{s}=\frac{-2}{s+1}$$

$$\rightarrow s^2Y(s)-3sY(s)+2Y(s)=\frac{-2s}{s+1}+2s=\frac{2s^2}{s+1}\rightarrow Y(s)=\frac{2s^2}{(s+1)(s^2-3s+2)}$$

$$Y(s)=\frac{2s^2}{(s+1)(s^2-3s+2)}=\frac{A_1}{s+1}+\frac{A_2}{s-1}+\frac{A_3}{s-2}\rightarrow A_1=\frac{1}{3} \ ; \ A_2=-1 \ ; \ A_3=\frac{8}{3}$$

$$\rightarrow Y(s)=\frac{1}{3}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1}+\frac{8}{3}\frac{1}{s-2}\rightarrow y(t)=\mathcal{L}^{-1}\big(Y(s)\big)=\frac{1}{3}e^{-t}-e^{t}+\frac{8}{3}e^{2t}\quad\blacksquare$$

توضیح: یک روش دیگر برای حل معادله فوق آن است که ابتدا با مشتق‌گیری از طرفین, انتگرال را حذف کنیم. در اینصورت با استفاده از فرمول لایب‌نیتز برای محاسبه مشتق انتگرال خواهیم داشت:

$$y''-3y'+2y=2e^{-t}\quad;\quad y(0)=2$$

دیده می‌شود که به یک معادله مرتبه دو رسیدیم. اما به نظر می‌رسد یک شرط دیگر لازم داریم. توجه شود که هر معادله انتگرالی در خود یک شرط اولیه مستتر دارد. چرا که اگر در معادله داده شده در مساله $t=0$ انتخاب شود:

$$y'(0)-3y(0)+2\int_0^0 y(x)\,dx=-2e^{-0}\rightarrow y'(0)-3y(0)=-2\xrightarrow{y(0)=2}y'(0)=4$$

بنابراین معادله جدید با این دو شرط اولیه قابل حل است. این معادله در قسمت اول مثال ۵-۱۱ حل شد و دقیقا به همین نتیجه رسید, چرا که $Y(s)$ در هر دو یکسان بدست آمد. دیده شد که در معادله اولیه ترم ناهمگن بصورت $-2e^{-t}$ می‌باشد که پس از مشتق‌گیری به $2e^{-t}$ رسیدیم و لاپلاس آن ساده است. در استفاده از روش دوم اگر ترم ناهمگن پیچیده باشد, می‌توان آنرا به همان صورت مشتق نگه داشت و از قضیه لاپلاس مشتق, لاپلاس آنرا بدست آورد. بعنوان نمونه در اینجا:

$$y''-3y'+2y=(-2e^{-t})'\xrightarrow{\mathcal{L}}\cdots=s\mathcal{L}(-2e^{-t})-(-2e^{-0})=s\frac{-2}{s+1}+2=\frac{2}{s+1}\quad\blacksquare$$

۵-۲-۳- قضیه مقیاس

اگر تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برابر $F(s)$ باشد, آنگاه برای $b>0$ خواهیم داشت:

$$\boxed{\begin{cases}\mathcal{L}(f(bt))=\dfrac{1}{b}F\left(\dfrac{s}{b}\right) & (3a)\\[2mm] \mathcal{L}^{-1}\big(F(bs)\big)=\dfrac{1}{b}f\left(\dfrac{t}{b}\right) & (3b)\end{cases}}$$

اثبات: برای $b>0$ با تغییر متغیر $x=bt$ در رابطه تبدیل لاپلاس $f(bt)$ خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}(f(bt))=\int_0^\infty f(bt)e^{-st}\,dt=\frac{1}{b}\int_0^\infty f(x)e^{-\frac{s}{b}x}\,dx=\frac{1}{b}F\left(\frac{s}{b}\right)\quad\blacksquare$$

موارد کاربرد:

$(3a)$: زمانی بکار میرود که لاپلاس تابعی را بخواهند که اگر در آن t به bt تبدیل شود, لاپلاس آنرا بدانیم.

$(3b)$: زمانی بکار میرود که لاپلاس معکوس تابعی را بخواهند که اگر در آن s به bs تبدیل شود, لاپلاس معکوس آنرا بدانیم.

مثال ۵-۲۱ الف: تبدیل لاپلاس $\frac{sinbt}{t}$ را با داشتن تبدیل لاپلاس $\frac{sint}{t}$ بدست آورید.

ب: تبدیل لاپلاس $J_0(bt)$ را با داشتن تبدیل لاپلاس $J_0(t)$ بدست آورید. $(b>0)$

حل الف: در تمرین ۶ بخش ۵-۱ تبدیل لاپلاس $\frac{sint}{t}$ بصورت زیر بدست آمد:

$$\mathcal{L}\left(\frac{sint}{t}\right)=tan^{-1}\frac{1}{s}\rightarrow\mathcal{L}\left(\frac{sinbt}{t}\right)=b\mathcal{L}\left(\frac{sin(bt)}{(bt)}\right)=b\frac{1}{b}\mathcal{L}\left(\frac{sint}{t}\right)\Big|_{s\rightarrow\frac{s}{b}}=tan^{-1}\frac{1}{\frac{s}{b}}=tan^{-1}\frac{b}{s}$$

ب: با توجه به نتیجه مثال ۵-۱۰ خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}\big(J_0(t)\big)=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\rightarrow\mathcal{L}\big(J_0(bt)\big)=\frac{1}{b}\mathcal{L}\big(J_0(t)\big)\Big|_{s\rightarrow\frac{s}{b}}=\frac{1}{b}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{s}{b}\right)^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{s^2+b^2}}\quad\blacksquare$$

مثال ۵-۲۲ لاپلاس معکوس زیر را بدست آورید.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{4s^2+1}\right)=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(2s)}{(2s)^2+1}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)\Big|_{t\rightarrow\frac{t}{2}}=\frac{1}{4}cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$or:\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{4s^2+1}\right)=\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+\frac{1}{4}}\right)=\frac{1}{4}cos\left(\frac{t}{2}\right)\quad\blacksquare$$

۵-۲-۴- مشتق تبدیل لاپلاس

اگر تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برابر $F(s)$ باشد:

$$\boxed{\begin{cases}\mathcal{L}(t^nf(t))=(-1)^nF^{(n)}(s) & (4a)\\ \mathcal{L}^{-1}\left(F^{(n)}(s)\right)=(-1)^nt^n\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big)}_{f(t)} & (4b)\end{cases}}$$

اثبات: ابتدا برای $n=1$ قضیه را ثابت می‌کنیم. یعنی ثابت می‌کنیم که $\mathcal{L}(tf(t))=-F'(s)$. برای این منظور:

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt\rightarrow F'(s)=\frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt=\int_0^\infty -tf(t)e^{-st}\,dt=\mathcal{L}(-tf(t))$$

که با استقراء میتوان آنرا برای n های بالاتر نیز ثابت کرد. ■

موارد کاربرد:

$(4a)$: زمانی بکار میرود که تبدیل لاپلاس تابعی را بخواهند که در آن t^n دیده میشود که با حذف t^n , لاپلاس آنچه را باقی می‌ماند بدانیم. کاربرد دوم نیز در حل معادله‌ای با ضرایب متغیر می‌باشد که هر دو در مثالها دیده می‌شود.

$(4b)$: کاربرد اصلی این قضیه معمولا برای $n=1$ است, چرا که به $\mathcal{L}^{-1}\big(F'(s)\big)=-t\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big)$ منجر می‌شود. به عبارتی رابطه لاپلاس معکوس یک تابع را با لاپلاس معکوسِ انتگرال آن (یا بصورت برعکس با لاپلاس معکوسِ مشتق آن) را بدست می‌دهد. بنابراین این قضیه زمانی بکار می‌رود که لاپلاس معکوس تابعی را بخواهند که لاپلاس معکوسِ مشتق یا انتگرال آنرا می‌دانیم. بعنوان نمونه برای محاسبه لاپلاس معکوسِ توابع لگاریتمی و یا معکوس مثلثاتی(یا معکوس هیپربولیکی) می‌توان از این رابطه استفاده کرد.

مثال ۵-۲۳ لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

$$1)\ \mathcal{L}(t^2cos^2 3t)=\mathcal{L}\left(t^2\frac{1+cos6t}{2}\right)=\frac{1}{2}\big(\mathcal{L}(t^2)+\mathcal{L}(t^2cos6t)\big)=\frac{1}{2}\frac{2!}{s^3}+\frac{1}{2}(-1)^2\left(\frac{s}{s^2+36}\right)'' \ ■$$

$$2)\ \mathcal{L}(t^ne^{at})=(-1)^nF^{(n)}(s)=(-1)^n\left(\frac{1}{s-a}\right)^{(n)}=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$\underline{Ex}:\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-4)^3}\right)=\frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2!}{(s-4)^3}\right)=\frac{1}{2}t^2e^{4t}\rightarrow\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)^n}\right)=e^{at}\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}}$$

از آنجا که در تجزیه کسرها ممکن است با این شکل از لاپلاس معکوس روبرو شویم, به ذهن سپردن آن می‌تواند مفید باشد. ■

مثال ۵-۲۴ لاپلاس معکوس $\frac{6s^2+3}{(s-5)^4}$ را بدست آورید.

حل با استفاده از روشی که در ضمیمه آمده است, از آنجا که مخرج دارای ریشه مرتبه ۴ می‌باشد خواهیم داشت:

$$\frac{6s^2+3}{(s-5)^4}=\frac{B_1}{s-5}+\frac{B_2}{(s-5)^2}+\frac{B_3}{(s-5)^3}+\frac{B_4}{(s-5)^4}$$

از اینجا به بعد یا می‌توان مشابه روش معمول, با مخرج مشترک گرفتن و متحد قرار دادن دو طرف ضرایب را بدست آورد و یا مطابق روش دومی که در ضمیمه برای حالت ریشه n گانه مطرح شده است عمل کرد. (توجه شود تابع F معرفی شده در آنجا را برای عدم تشابه با لاپلاس در اینجا با K نمایش داده‌ایم). اگر s_1 ریشه مرتبه n مخرج کسر باشد:

$$K(s)=(s-s_1)^nF(s)\rightarrow B_{n-k}=\frac{1}{k!}\lim_{s\to s_1}K^{(k)}(s)\quad (k=0:n-1)$$

$$K(s)=(s-5)^4\frac{6s^2+3}{(s-5)^4}=6s^2+3$$

$$\rightarrow B_4=\frac{1}{0!}\lim_{s\to 5}K(s)=153\qquad ;\qquad B_3=\frac{1}{1!}\lim_{s\to 5}K'(s)=\frac{1}{1!}\lim_{s\to 5}(12s)=60$$

$$B_2=\frac{1}{2!}\lim_{s\to 5}K''(s)=\frac{1}{2!}12=6\qquad ;\qquad B_1=\frac{1}{3!}\lim_{s\to 5}K'''(s)=\frac{1}{3!}0=0$$

$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6s^2+3}{(s-5)^4}\right)=6\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-5)^2}\right)+60\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-5)^3}\right)+153\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-5)^4}\right)$$

حال با استفاده از رابطه $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)^n}\right)=e^{at}\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ خواهیم داشت:

$$f(t)=6e^{5t}\frac{t^1}{1!}+60e^{5t}\ \frac{t^2}{2!}+153e^{5t}\ \frac{t^3}{3!}=e^{5t}(6t+30t^2+25.5t^3)\ ■$$

<u>توضیح</u>: در این نوع کسرها که مخرج صرفا به فرم $(x-a)^n$ می‌باشد, شاید ساده‌تر باشد برای تجزیه کسر, صورت را برحسب توانهای مخرج (در اینجا $s-5$) بیان کنیم. به عبارتی بسط تیلور صورت کسر را حول ریشه مخرج (در اینجا 5) می‌نویسیم:

$$6s^2+3=6\big((s-5)+5\big)^2+3=6(s-5)^2+60(s-5)+153$$

$$\frac{6s^2+3}{(s-5)^4}=\frac{6(s-5)^2+60(s-5)+153}{(s-5)^4}=\frac{6}{(s-5)^2}+\frac{60}{(s-5)^3}+\frac{153}{(s-5)^4}\ ■$$

قبل از بررسی مثال بعد یادآوری می‌شود که قضیه $(4b)$ زمانی بکار می‌رود که لاپلاس معکوس تابعی را بخواهند که لاپلاس معکوسِ مشتق یا انتگرال آنرا می‌دانیم. بطور خلاصه:

۱- اگر لاپلاس معکوسِ انتگرال تابع مطرح شده در صورت سوال را بدانیم, این انتگرال را $F(s)$ منظور کرده و لذا تابعِ صورت سوال $F'(s)$ خواهد بود و سپس از رابطه $\mathcal{L}^{-1}\big(F'(s)\big) = -t\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big)$ استفاده می‌کنیم.

۲- اگر لاپلاس معکوسِ مشتق تابع مطرح شده در صورت سوال را بدانیم, این مشتق را $F'(s)$ منظور کرده و لذا تابعِ صورت سوال $F(s)$ خواهد بود و سپس از رابطه $\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big) = \frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1}\big(F'(s)\big)$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۵-۲۵ لاپلاس معکوسهای زیر را بدست آورید.

$$1)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s}{(s^2-1)^2}\right) = ? \quad ; \quad \int \frac{2s}{(s^2-1)^2}ds = -\frac{1}{s^2-1} = F(s) \to \mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big) = -sinht$$

دقت شود در اینجا لاپلاس معکوسِ انتگرال تابع مطرح شده در صورت سوال را می‌دانیم, پس اگر این انتگرال را $F(s)$ منظور کنیم, تابعِ صورت سوال $F'(s)$ خواهد بود. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F'(s)\big) = -t\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big) = tsinht \ \blacksquare$$

$$2)\ \mathcal{L}^{-1}\left(tan^{-1}\frac{a}{s}\right) = ? \quad ; \quad \left(tan^{-1}\frac{a}{s}\right)' = \frac{-a}{s^2+a^2} = F'(s) \to \mathcal{L}^{-1}\big(F'(s)\big) = -sinat$$

دقت شود در اینجا لاپلاس معکوسِ مشتق تابع مطرح شده در صورت سوال را می‌دانیم, پس اگر این مشتق را $F'(s)$ منظور کنیم, تابعِ صورت سوال $F(s)$ خواهد بود. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big) = \frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1}\big(F'(s)\big) = \frac{sinat}{t} \ \blacksquare$$

توضیح: می‌توان محاسبات بالا را برای هر دو مثال بصورت زیر نیز نمایش داد:

$$\begin{array}{ccc} \frac{-1}{s^2-1} & \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} & -sinht \\ \boxed{F'(s)} & & \boxed{-tf(t)} \\ \frac{2s}{(s^2-1)^2} & \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} & tsinht \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} tan^{-1}\frac{a}{s} & \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} & \frac{sinat}{t} \\ \boxed{F'(s)} & & \boxed{-tf(t)} \\ \frac{-a}{s^2+a^2} & \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} & -sinat \end{array} \ \blacksquare$$

$$3)\ \mathcal{L}^{-1}\left(ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right) = ?$$

$$\left(ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right)' = \big(ln(1+s^2) - ln(s^2)\big)' = \frac{2s}{1+s^2} - \frac{2}{s} = F'(s) \to \mathcal{L}^{-1}\big(F'(s)\big) = 2cost - 2$$

در اینجا نیز لاپلاس معکوسِ مشتق تابع مطرح شده در صورت سوال را می‌دانیم, پس اگر این مشتق را $F'(s)$ منظور کنیم, تابعِ صورت سوال $F(s)$ خواهد بود. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big) = \frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1}\big(F'(s)\big) = \frac{2(1-cost)}{t} \ \blacksquare$$

توضیح: این مثال از اهمیت بالایی برخوردار است. چرا که نشان می‌دهد چگونه می‌توان لاپلاس معکوس عباراتی را بدست آورد که اگر چه لاپلاس معکوس خودِ عبارت را نمی‌دانیم, اما لاپلاس معکوسِ انتگرال یا لاپلاس معکوسِ مشتق آن در دسترس است. ■

مثال ۵-۲۶ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y''+2y'+y=3te^{-t}\quad ;\quad y(0)=4\quad ;\quad y'(0)=2$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2\big(sY(s)-y(0)\big)+Y(s)=\mathcal{L}(3te^{-t})$$

$$(s^2+2s+1)Y(s)-4s-10=\frac{3}{(s+1)^2}\rightarrow Y(s)=\frac{4s+10}{(s+1)^2}+\frac{3}{(s+1)^4}$$

$$Y(s)=\frac{4(s+1)+6}{(s+1)^2}+\frac{3}{(s+1)^4}\rightarrow y(t)=4e^{-t}+6te^{-t}+\frac{1}{2}t^3e^{-t}\ \blacksquare$$

مثال ۵-۲۷ مثال ۲-۲۵ در فصل دوم را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید. (ضرایب ثابت نیستند)

$$ty''-ty'-y=0\quad ;\quad y(0)=0\quad ;\quad y'(0)=2$$

حل دیده میشود که این اولین مثالی است که در آن ضرایب ثابت نیستند. با لاپلاس‌گیری از طرفین با استفاده از قضیه $(4a)$:

$$\xrightarrow{\mathcal{L}}(-1)^1\frac{d}{ds}\big(\mathcal{L}(y'')\big)-(-1)^1\frac{d}{ds}\big(\mathcal{L}(y')\big)-Y(s)=0$$

$$\rightarrow -\frac{d}{ds}\big(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\big)+\frac{d}{ds}\big(sY(s)-y(0)\big)-Y(s)=0$$

$$y(0)=0\ ;\ y'(0)=2\rightarrow -\big(2sY(s)+s^2Y'(s)\big)+Y(s)+sY'(s)-Y(s)=0$$

$$-2sY(s)-s^2Y'(s)+sY'(s)=0\rightarrow\frac{Y'(s)}{Y(s)}=\frac{-2}{s-1}\rightarrow Y(s)=\frac{c}{(s-1)^2}\rightarrow y(t)=cte^t$$

که فقط بایستی ثابت c بدست آید. شرط $y(0)=0$ همواره برقرار است و از شرط $y'(0)=2$ به $c=2$ خواهیم رسید. $\blacksquare$

توضیح ۱: دقت شود برای معادله با ضرایب غیر ثابت, پس از اعمال تبدیل لاپلاس, بجای حل یک معادله جبری, به حل یک معادله دیفرانسیل دیگر خواهیم رسید که معمولا حل آن ساده‌تر از حل معادله اولیه می‌باشد. هر چند در اینحالت می‌توان معادله دیفرانسیل جدید را نیز مجددا با تبدیل لاپلاس حل کرد که همانگونه که در مثال دیده شد معمولا روش معمولِ حل ترجیح داده می‌شود.

توضیح ۲: می‌توان قبل از یافتن معکوس نیز, ثابت c را بدست آورد. با استفاده از قضیه مقدار ابتدایی خواهیم داشت:

$$\lim_{s\to+\infty}sY(s)=y(0)\rightarrow c=?$$

که همواره برقرار بوده و c بدست نمی‌آید. دقت شود که در روش اول نیز همین شرط $y(0)=0$ مقدار c را نتیجه نداد.

در واقع اگر مخرج کسر $Y(s)$ یک درجه بیشتر از صورت بود, با این رابطه c بدست می‌آمد, اما در اینجا که مخرج کسر $Y(s)$ دو درجه بیشتر از صورت است از رابطه $\lim\limits_{s\to+\infty}s^2Y(s)-sy(0)=y'(0)$ استفاده می‌کنیم. بنابراین:

$$\lim_{s\to+\infty}s^2Y(s)-sy(0)=y'(0)\rightarrow\lim_{s\to+\infty}\left(\frac{s^2c}{(s-1)^2}-s\underbrace{y(0)}_{0}\right)=2\rightarrow c=2$$

توضیح ۳: بدیهی است اگر نخواهیم از روش لاپلاس استفاده کنیم از آنجا که ضرایب ثابت نیستند, احتمالا بایستی مساله را با روش سریها حل کرد که قطعا راه حل طولانی‌تری خواهد بود. اینکه عنوان شد "احتمالا" به این دلیل است که در فصل دوم دیده شد

برخی معادلات با ضرایب غیرثابت را ممکن است بتوان به روشهایی مانند کاهش مرتبه (با حدس یک جواب) , تبدیل به فرم متعارف, بررسی کامل بودن و یا تغییر متغیر مناسب حل کرد. اما این روشها صرفا برای برخی معادلات خاص که شرایط خاصی دارند امکان‌پذیر است. مثلا همین معادله قبلا در مثال ۲-۲۵ حل شده است, چرا که کنترل شد این معادله یک معادله کامل است. هر چند در حالت کلی نمی‌توان عنوان کرد روش تبدیل لاپلاس برای هر معادله با ضرایب غیرثابت, روش ساده‌ای خواهد بود, چرا که مثلا اگر ضریب y'' در معادله بالا برابر t^2 باشد, در نهایت پس از لاپلاس گرفتن, به یک معادله مرتبه دو بر حسب $Y(s)$ خواهیم رسید که ممکن است حل آن ساده نباشد. ■

مثال ۵-۲۸ معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید. (ضرایب ثابت نیستند)

$$ty' + ty + y = 0$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{d}{ds}\big(sY(s) - y(0)\big) - \frac{d}{ds}\big(Y(s)\big) + Y(s) = 0 \to Y'(s) = 0 \to Y(s) = c$$

$$\lim_{s\to+\infty} Y(s) = 0 \to c = 0 \to Y(s) = 0 \to y(t) = 0$$

به کمک این روش صرفا جواب بدیهی $y(t) = 0$ بدست آمد. اما اگر آنرا به روش معمول حل کنیم:

$$y' + \left(1 + \frac{1}{t}\right)y = 0 \to y = c_1\frac{e^{-t}}{t}$$

چرا تبدیل لاپلاس, چنین جوابی را بدست نیاورد؟ علت آن است که جواب فوق برای $c_1 \neq 0$ تبدیل لاپلاس ندارد. زیرا تابع تکه‌ای پیوسته نیست. به این معنی که میتوان ثابت کرد انتگرال $\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}e^{-st}\,dt$ واگراست. به عبارتی به روش لاپلاس, فقط همه جوابهایی را بدست می‌آوریم که برای آن جوابها, تبدیل لاپلاس وجود داشته باشد. ■

۵-۲-۵- انتگرال تبدیل لاپلاس

اگر تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برابر $F(s)$ بوده و $\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}$ موجود باشد, آنگاه:

$$\boxed{\begin{cases} \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^{+\infty} F(u)du & (5a) \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\int_s^{+\infty} F(u)du\right) = \frac{f(t)}{t} & (5b) \end{cases}}$$

اثبات: ابتدا رابطه تبدیل لاپلاس $f(t)$ را نوشته و سپس در بازه s تا $+\infty$ از آن انتگرال می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$F(u) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-ut}dt \to \int_s^{+\infty} F(u)du = \int_s^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-ut}dt\right)du$$

از آنجا که حدود انتگرال‌گیری به t و u بستگی ندارد می‌توان ترتیب انتگرال‌گیری را تعویض کرد. لذا:

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_s^{+\infty} f(t)e^{-ut}du\right)dt = \int_0^{+\infty} f(t)\left(\frac{-1}{t}e^{-ut}\right)\Big|_{u=s}^{u=\infty} dt = \int_0^{+\infty} f(t)\frac{1}{t}e^{-st}dt = \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)$$

توجه شود که می‌توان نشان داد شرط $\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}$ معادل از مرتبه نمایی بودنِ تابع $\frac{f(t)}{t}$ میباشد.

توضیح ۱: اگر در رابطه $(5a)$, تعریف تبدیل لاپلاس را نوشته و $s = 0$ انتخاب شود:

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt = \int_s^\infty F(u)du \xrightarrow{s=0} \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty F(u)du$$

یعنی انتگرالهای به‌فرم $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt$, با استفاده از انتگرال لاپلاس $f(t)$ قابل محاسبه است. به عنوان مثال:

$$\int_0^\infty \frac{sinat}{t} dt = \int_0^\infty \mathcal{L}(sinat)du = \int_0^\infty \frac{a}{u^2+a^2} du = \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{du}{(u/a)^2+1} = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$$
$$= (tan^{-1} x)|_0^\infty = \frac{\pi}{2} \quad (a > 0)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^t - cos2t}{t} dt = \int_0^\infty \mathcal{L}(e^t - cos2t)du = ln\frac{|u-1|}{\sqrt{u^2+4}}\bigg|_0^\infty = ln1 - ln\left(\frac{1}{2}\right) = ln2$$

توضیح ۲: این قضیه نیز دوگان (Dual) قضیه قبل می‌باشد. در اینجا نیز می‌توان گفت این قضیه معادل بکارگیری $n = -1$ در قضیه قبل است. یعنی اگر بکارگیری $n = 1$ در قضیه قبل به یک بار مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس منجر شده است, می‌توان اینگونه تعبیر کرد که $n = -1$ معادل یک بار انتگرال از تبدیل لاپلاس خواهد بود.

موارد کاربرد:

$(5a)$: زمانی بکار میرود که تبدیل لاپلاس تابعی را بخواهند که به فرم $\frac{f(t)}{t}$ بوده و لاپلاس $f(t)$ را بدانیم.

$(5b)$: این رابطه نیز درست مشابه $(4b)$ زمانی بکار می‌رود که لاپلاس معکوس تابعی را بخواهند که لاپلاس معکوسِ مشتق (یا بصورت برعکس لاپلاس معکوسِ انتگرال) آنرا می‌دانیم, چرا که این قضیه و قضیه قبل در واقع عکس یکدیگر می‌باشند. اما معمولا استفاده از $(4b)$ برای حل این نوع مسائل ساده‌تر از $(5b)$ است.

مثال ۵-۲۹ تبدیلات زیر را بدست آورید.

$$1)\ \mathcal{L}\left(\frac{sinat}{t}\right) =? \quad (a > 0) \quad ; \quad \lim_{t\to 0}\frac{sinat}{t} = a \quad \boxed{\surd}$$

$$= \int_s^\infty \frac{adu}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\int_s^\infty \frac{du}{(u/a)^2+1} = \int_{\frac{s}{a}}^\infty \frac{dx}{x^2+1} = (tan^{-1} x)|_{\frac{s}{a}}^\infty = \frac{\pi}{2} - tan^{-1}\frac{s}{a} = tan^{-1}\frac{a}{s} \ \blacksquare$$

$$2)\ \mathcal{L}\left(t\int_0^t \frac{e^{2u}-e^u}{u} du\right) =?$$

$$(4a):\ \mathcal{L}(tf(t)) = -F'(s) \qquad ; \qquad (2a):\ \mathcal{L}\left(\int_0^t g(x)dx\right) = \frac{G(s)}{s}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-e^t}{t} = 1 \xrightarrow{(5a)} \mathcal{L}\left(\frac{e^{2t}-e^t}{t}\right) = \int_s^\infty \mathcal{L}(e^{2t}-e^t)du = \int_s^\infty \left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u-1}\right)du = ln\frac{s-1}{s-2}$$

$$(2a) \to \mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{e^{2u}-e^u}{u} du\right) = \frac{1}{s} ln\frac{s-1}{s-2} \xrightarrow{(4a)} Ans = -\left(\frac{1}{s} ln\frac{s-1}{s-2}\right)' \ \blacksquare$$

$$3)\ \mathcal{L}^{-1}\left(tan^{-1}\frac{a}{s}\right)=? \quad ; \quad \left(tan^{-1}\frac{a}{s}\right)'=\frac{-a}{s^2+a^2}\to\int_s^{\infty}\frac{adu}{u^2+a^2}=tan^{-1}\frac{a}{s}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\int_s^{\infty}F(u)du\right)=\frac{f(t)}{t}\to\mathcal{L}^{-1}\left(\int_s^{\infty}\frac{adu}{u^2+a^2}\right)=\frac{f(t)}{t}=\frac{sinat}{t} \quad \blacksquare$$

$$4)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s}{(s^2-1)^2}\right)=? \quad ; \quad \int_s^{\infty}\frac{2udu}{(u^2-1)^2}=0-\frac{-1}{s^2-1}=\frac{1}{s^2-1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\int_s^{\infty}F(u)du\right)=\frac{f(t)}{t}\to\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left(\int_s^{\infty}\frac{2udu}{(u^2-1)^2}\right)}_{sinht}=\frac{f(t)}{t}\to f(t)=tsinht \quad \blacksquare$$

توضیح: لازم بذکر است دو قسمت آخر در مثال ۵-۲۵ با استفاده از قضیه قبل (که در واقع عکس این قضیه است) نیز بدست آمده بود. همانگونه که عنوان شد, معمولا این نوع مسائل با بکارگیری قضیه $(4b)$ ساده‌تر حل می‌شوند. ■

۵-۲-۶- انتقال بر روی محور s

اگر تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برابر $F(s)$ باشد, آنگاه:

$$\boxed{\begin{cases}\mathcal{L}(e^{at}f(t))=F(s-a) & (6a)\\ \mathcal{L}^{-1}(F(s-a))=e^{at}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}(F(s))}_{f(t)} & (6b)\end{cases}}$$

اثبات:

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t))=\int_0^{\infty}e^{at}f(t)e^{-st}\,dt=\int_0^{\infty}f(t)e^{-(s-a)t}\,dt=F(s-a)$$

موارد کاربرد:

$(6a)$: زمانی بکار میرود که تبدیل لاپلاس تابعی را بخواهند که در آن e^{at} دیده شده و با حذف e^{at} , لاپلاسِ آنچه باقی می‌ماند را بدانیم.

$(6b)$: زمانی بکار میرود که لاپلاس معکوس تابعی را بخواهند که اگر در آن $s-a$ به s تبدیل شود, لاپلاس معکوس آنرا بدانیم. در اینجا معمولا عبارت $s-a$ صریحا در تابع دیده نمی‌شود و بایستی آنرا ایجاد کرد.

مثال ۵-۳۰ تبدیلات معکوس زیر را بدست آورید.

$$1)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-4)^3}\right)=e^{4t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right)=\frac{t^2}{2}e^{4t} \quad \blacksquare$$

$$2)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4s+5}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2+1}\right)=e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=e^{2t}sint$$

$$or:\ \frac{1}{s^2-4s+5}=\frac{\frac{1}{2i}}{s-(2+i)}-\frac{\frac{1}{2i}}{s-(2-i)}\to Ans=\frac{1}{2i}\left(e^{(2+i)t}-e^{(2-i)t}\right)$$

$$=e^{2t}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=e^{2t}sint \quad \blacksquare$$

$$3)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+3s-10}\right)=\frac{3}{3.5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3.5}{(s+1.5)^2-(3.5)^2}\right)=\frac{3}{3.5}e^{-1.5t}sinh(3.5t)$$
$$=\frac{3}{3.5}e^{-1.5t}\frac{e^{3.5t}-e^{-3.5t}}{2}=\frac{3}{7}(e^{2t}-e^{-5t})$$

$$or:\ \frac{3}{s^2+3s-10}=\frac{\frac{3}{7}}{s-2}-\frac{\frac{3}{7}}{s+5}\rightarrow Ans=\frac{3}{7}(e^{2t}-e^{-5t})\ \blacksquare$$

توضیح: دقت شود در تعدادی از معادلات مرتبه ۲ در انتهای کار به معکوس سازی عباراتی مشابه دو مثال بالا (قسمتهای ۲ و۳) می‌رسیم که در بخش ۵-۳-۲ دلیل این موضوع را خواهیم دید. برای چنین عباراتی در کل سه روش وجود دارد. یکی تجزیه کسر, یکی استفاده از قضیه انتقال بر محور s و روش سوم نیز که در بخش بعد خواهیم دید, روش انتگرال تلفیقی یا انتگرال پیچشی است. بسته به مساله ممکن است یکی از روشها ساده‌تر باشد. مثلا در مثال قسمت ۲ دیده می‌شود که استفاده از قضیه انتقال بر محور s ساده‌تر از روش تجزیه کسر است. در حالی که در مثال قسمت ۳ روش تجزیه کسر محاسبات کمتری دارد. ■

$$4)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6\big((s-2)+2\big)-4}{(s-2)^2+16}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6(s-2)+8}{(s-2)^2+16}\right)$$
$$=\mathcal{L}^{-1}\left(6\frac{(s-2)}{(s-2)^2+16}+2\frac{4}{(s-2)^2+16}\right)=6e^{2t}cos4t+2e^{2t}sin4t\ \blacksquare$$

$$or:\ \frac{6s-4}{s^2-4s+20}=\frac{3-i}{s-(2+4i)}+\frac{3+i}{s-(2-4i)}$$
$$\rightarrow Ans=(3-i)e^{(2+4i)t}+(3+i)e^{(2-4i)t}=3e^{2t}\underbrace{\left(e^{4it}+e^{-4it}\right)}_{2cos4t}-ie^{2t}\underbrace{\left(e^{4it}-e^{-4it}\right)}_{2isin4t}\ \blacksquare$$

$$5)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+3s+7}{(s+1)(s^2+4s+8)}\right)\quad;\quad\frac{s^2+3s+7}{(s+1)(s^2+4s+8)}=\frac{\overbrace{A}^{1}}{s+1}+\frac{\overbrace{C}^{0}s+\overbrace{D}^{-1}}{s^2+4s+8}$$

$$Ans=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+2)^2+4}\right)=e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}sin2t$$

که این قسمت قبلا در توضیح ۲ از قسمت اول مثال ۵-۱۱ به طریق دیگری حل شده است. ■

$$6)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{((s+2)^2+1)^2}\right)=e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2}\right)=?\quad;\quad\int\frac{s\,ds}{(s^2+1)^2}=\frac{1}{2}\frac{-1}{s^2+1}=F(s)\rightarrow\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big)=\frac{-1}{2}sint$$

دقت شود در اینجا لاپلاس معکوسِ انتگرال تابع مطرح شده در صورت سوال را می‌دانیم, پس اگر این انتگرال را $F(s)$ منظور کنیم, تابعِ صورت سوال $F'(s)$ خواهد بود. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F'(s)\big)=-t\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big)=-t\left(\frac{-1}{2}sint\right)=\frac{1}{2}tsint$$

$$\rightarrow Ans=e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2}\right)=\frac{t}{2}e^{-2t}sint\ \blacksquare$$

در اینجا به یک کاربرد بسیار مهم قضیه $(6a)$ می‌پردازیم. دیده شد که:

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a)$$

حال اگر a یک عدد مختلط انتخاب شود خواهیم داشت:

$$a = b+ci \rightarrow \mathcal{L}\left(e^{(b+ci)t}f(t)\right) = F\big(s-(b+ci)\big)$$

$$\rightarrow \mathcal{L}(e^{bt}cos(ct)f(t)) + i\mathcal{L}(e^{bt}sin(ct)f(t)) = F\big(s-(b+ci)\big)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}(e^{bt}cos(ct)f(t)) = Re\left(F\big(s-(b+ci)\big)\right) \\ \mathcal{L}(e^{bt}sin(ct)f(t)) = Im\left(F\big(s-(b+ci)\big)\right) \end{cases}$$

بنابراین به کمک نتیجه بالا میتوان لاپلاس حاصلضرب$f(t)$ در $e^{bt}cos(ct)$ یا $e^{bt}sin(ct)$ را بدست آورد.

در حالت خاص که $b=0$ باشد, خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(cos(ct)f(t)) = Re\big(F(s-ci)\big) \\ \mathcal{L}(sin(ct)f(t)) = Im\big(F(s-ci)\big) \end{cases}$$

این دو رابطه لاپلاس $f(t)$ را که در سینوس یا کسینوس ضرب شده باشد, بر حسب لاپلاس $f(t)$ می‌دهد.

مثال ۵-۳۱ لاپلاس تابع $e^{3t}cos2t$ را بدست آورید.

حل برای روشن شدن روشهای مختلف حل مساله, آنرا به سه روش حل میکنیم.

۱- میتوان اینگونه به مساله نگاه کرد که $f(t) = cos2t$ و این تابع در e^{3t} ضرب شده است. لذا:

$$\mathcal{L}\left(e^{3t}\underbrace{cos2t}_{f(t)}\right) = \mathcal{L}(cos2t)|_{s\rightarrow s-3} = \frac{s-3}{(s-3)^2+4}$$

۲- میتوان اینگونه به مساله نگاه کرد که $f(t) = e^{3t}$ و این تابع در $cos2t$ ضرب شده است. لذا:

$$\mathcal{L}(e^{3t}) = \frac{1}{s-3} \rightarrow \mathcal{L}\left(\underbrace{e^{3t}}_{f(t)}cos2t\right) = Re\left(\frac{1}{(s-2i)-3}\right) = \frac{s-3}{(s-3)^2+4}$$

ممکن است به روش زیر که در واقع معادل روش بالا است, مساله را حل کرد:

$$\mathcal{L}\left(\underbrace{e^{3t}}_{f(t)}cos2t\right) = \mathcal{L}\left(e^{3t}\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left(e^{(3+2i)t}\right) + \mathcal{L}\left(e^{(3-2i)t}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-(3+2i)} + \frac{1}{s-(3-2i)}\right) = \frac{s-3}{(s-3)^2+4}$$

از آنجا که $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ لذا بسادگی میتوان معادل بودن دو راه حل بالا را نتیجه گرفت. به عبارتی:

$$Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \rightarrow Re\left(\frac{1}{(s-2i)-3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-(3+2i)} + \frac{1}{s-(3-2i)}\right)$$

یعنی یا بایستی جزء حقیقی یک عبارت مختلط را بدست آورد و یا کافی است آنرا با مزدوجش جمع و به ۲ تقسیم کرد.

۳- میتوان اینگونه به مساله نگاه کرد که $f(t)=1$ بوده و این تابع در $e^{3t}cos2t$ ضرب شده است. لذا:

$$\mathcal{L}\left(e^{3t}cos2t \times \underbrace{1}_{f(t)}\right) = Re\Big(F\big(s-(3+2i)\big)\Big) = Re\left(\frac{1}{s-(3+2i)}\right) = \frac{s-3}{(s-3)^2+4} \quad \blacksquare$$

مثال ۵-۳۲ تبدیل لاپلاس زیر را بدست آورید.

$$\mathcal{L}\left(2e^t\int_0^t e^{-x}cos^2x\,dx\right) \quad ; \quad \mathcal{L}(cos^2t) = \mathcal{L}\left(\frac{1+cos2t}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}\right)$$

$$(6a) \to \mathcal{L}(e^{-t}cos^2t) = \mathcal{L}(cos^2t)|_{s\to s-(-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1}+\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right)$$

$$(2a) \to \mathcal{L}\left(\int_0^t e^{-x}cos^2x\,dx\right) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(e^{-t}cos^2t) = \frac{1}{2s}\left(\frac{1}{s+1}+\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right)$$

$$(6a) \to \mathcal{L}\left(2e^t\int_0^t e^{-x}cos^2x\,dx\right) = 2\,\mathcal{L}\left(\int_0^t e^{-x}cos^2x\,dx\right)\Bigg|_{s\to s-1} = \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}\right) \quad \blacksquare$$

توضیح: می‌توان مساله را بصورت زیر نیز حل کرد. اگر فرض کنیم $f(t)=2e^t\int_0^t e^{-x}cos^2x\,dx$ خواهیم داشت:

$$f'(t) = 2e^t\int_0^t e^{-x}cos^2x\,dx + 2e^t(e^{-t}cos^2t) = f(t)+2cos^2t$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} sF(s)-\underbrace{f(0)}_{0} = F(s)+\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4} \to F(s) = \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}\right) \blacksquare$$

مثال ۵-۳۳ قسمت b از مثال ۲-۱۱ (مدار RLC) را که در بحث کاربردهای معادله مرتبه دو بررسی شد, به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$L=1\,H\,;\ R=6\ \Omega\,;\ C=0.04\,F\ ;\ E=12sin(5t) \quad ; \quad I_L(0)=5\ A \quad ; \quad V_C(0)=1\ V$$

حل در آنجا دیده شد که معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله بر حسب ولتاژ دو سر خازن بصورت زیر می‌باشد:

$$0.04V_C''+0.24V_C'+V_C = 12sin(5t) \quad ; \quad V_C(0)=1 \ ; \quad V_C'(0)=125$$

اگر لاپلاس V_C را با $\overline{V}(s)$ نمایش دهیم, خواهیم داشت:

$$0.04\left(s^2\overline{V}(s)-sV_C(0)-V_C'(0)\right)+0.24\big(s\overline{V}(s)-V_C(0)\big)+\overline{V}(s) = 12\mathcal{L}\big(sin(5t)\big)$$

$$\to 0.04\big(s^2\overline{V}(s)-s-125\big)+0.24\big(s\overline{V}(s)-1\big)+\overline{V}(s) = \frac{60}{s^2+25}$$

$$\overline{V}(s) = \frac{11s+191}{s^2+6s+25}-\frac{10s}{s^2+25} = \frac{11(s+3)+158}{(s+3)^2+16}-\frac{10s}{s^2+25}$$

$$= 11\frac{s+3}{(s+3)^2+16}+\frac{158}{4}\frac{4}{(s+3)^2+16}-10\frac{s}{s^2+25}$$

$$\to V_C(t) = 11e^{-3t}\,cos(4t)+39.5e^{-3t}\,sin(4t)-10cos(5t) \quad \blacksquare$$

تمرینات بخش ۵-۲

۱- قسمتهای اول دو مثال ۵-۱۹ و ۵-۲۵ را با تجزیه کسر نیز حل کنید.

۲- نشان دهید:

$$1)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-2s+3}\right)=e^t\cos\sqrt{2}t+\frac{1}{\sqrt{2}}e^t\sin\sqrt{2}t \quad ; \quad 2)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{8s}{s^4+64}\right)=\sinh(2t)\sin(2t)$$

$$3)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)\right)=\frac{e^{bt}-e^{at}}{t} \quad ; \quad 4)\ \mathcal{L}^{-1}\left(cotg^{-1}(s+3)\right)=e^{-3t}\frac{\sin t}{t}$$

$$5)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\ln\left(\frac{s(s+1)}{s+2}\right)\right)=\int_0^t\left(\frac{e^{-2x}}{x}-\frac{e^{-x}}{x}-\frac{1}{x}\right)dx$$

۳- معادلات دیفرانسیل زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$1)\ y''+3y'+2y=10e^{-t}\ ;\ y(0)=7\ ;\ y'(0)=0\ ;\ \underline{Ans}: y(t)=4e^{-t}+10te^{-t}+3e^{-2t}$$

$$2)\ y''+3y'+2y=\sin 2t\ ;\ y(0)=2\ ;\ y'(0)=-1$$

$$\underline{Ans}:\ y(t)=\frac{-5}{4}e^{-2t}+\frac{17}{5}e^{-t}-\frac{1}{20}\sin 2t-\frac{3}{20}\cos 2t$$

$$3)\ ty''+(1-2t)y'-2y=0\quad ;\quad y(0)=1\quad ;\quad y'(0)=2\quad ;\quad \underline{Ans}:\ y(t)=e^{2t}$$

$$4)\ y(t)+2\int_0^t y(x)\,dx=e^{3t}\cos 2t\quad ;\quad \underline{Ans}:\ y(t)=\frac{1}{29}(19e^{5t}\cos 2t-4e^{5t}\sin 2t+10)$$

۴- معادله دیفرانسیل زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$y''+2y'+y=t\quad ;\quad y(0)=-3\ ;\quad y(1)=-1\quad ;\quad \underline{Ans}:\ y(t)=t-2+e^{-t}(t-1)$$

توضیح: دقت شود که این مساله مقدار اولیه نیست, زیرا $y'(0)$ داده نشده است. از آنجا که در بکارگیری لاپلاس بایستی این مقدار مشخص باشد, ابتدا فرض میکنیم $y'(0)=b$ و پس از حل مساله بر حسب این پارامتر, در جواب نهایی با استفاده از شرط مرزی $y(1)=-1$ مقدار b را بدست می‌آوریم. لازم بذکر است در مسائل مقدار مرزی, در حالت کلی ممکن است مساله جواب نداشته باشد, بیشمار جواب داشته باشد و یا جواب آن یکتا باشد.

۵- مثال ۲-۳۲ را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$(t-1)y''-ty'+y=1\quad ;\quad \underline{Ans}:\ y(t)=c_1e^t+c_2t+1$$

توضیح: در اینجا نیز از آنجا که مقادیر اولیه داده نشده است, مساله را با فرض $y(0)=a$ و $y'(0)=b$ حل کنید.

۶- معادله بسل رتبه صفر را با استفاده از لاپلاس حل کنید. (توجه شود که ضرایب ثابت نیستند)

$$ty''+y'+ty=0\quad ;\quad y(0)=1\quad ;\quad y'(0)=0\quad ;\quad \underline{Ans}:\ y(t)=J_0(t)$$

۷- نشان دهید تبدیل لاپلاس $f(t)=\int_t^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx$ برابر $\frac{ln(s+1)}{s}$ است.

راهنمایی: ابتدا از طرفین $f(t)=\int_t^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx$ مشتق گرفته و سپس لاپلاس دو سمت را بدست آورید.

۸- انتگرالهای زیر را با استفاده از نتایج تبدیل لاپلاس بدست آورید. $(a,b>0)$

$$1)\ \int_0^\infty \frac{sinat}{t}dt=\frac{\pi}{2}\qquad ;\qquad 2)\ \int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt=ln\frac{b}{a}$$

$$3)\ \int_0^\infty e^{-t}\frac{sin^2t}{t}dt=\frac{ln5}{4}\qquad ;\qquad 4)\ \int_0^\infty te^{-2t}sint\,dt=\frac{4}{25}$$

❊ توضیح: دو روش دیگر برای محاسبه $\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$ با استفاده از مباحث مطرح شده در درس ریاضی ۲ بصورت زیر است:

$$1)\ I(a,b)=\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt\to\frac{\partial I}{\partial a}=\int_0^\infty \frac{-te^{-at}-0}{t}dt=\frac{-1}{a}\ ;\ \frac{\partial I}{\partial b}=\frac{1}{b}$$

$$\frac{\partial I}{\partial a}=\frac{-1}{a}\to I=-lna+f(b)\to\frac{\partial I}{\partial b}=f'(b)=\frac{1}{b}\to f(b)=lnb+c$$

$$I=lnb-lna+c=ln\frac{b}{a}+c\ \ ;\ \ if\ a=b\to I=0\to c=0\to I=ln\frac{b}{a}$$

$$2)\ \frac{1}{t}=\int_0^\infty e^{-ty}dy\to\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt=\int_0^\infty\int_0^\infty (e^{-at}-e^{-bt})e^{-ty}dydt$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty \left(e^{-(y+a)t}-e^{-(y+b)t}\right)dtdy=\int_0^\infty \left(\frac{1}{y+a}-\frac{1}{y+b}\right)dy=ln\frac{b}{a}$$

۵-۳- انتگرال تلفیقی یا پیچش دو تابع $(Convolution)$

بر طبق قضیه خطی بودن دیده شد که $\mathcal{L}(f\pm g)=\mathcal{L}(f)\pm\mathcal{L}(g)$ می‌باشد. اما بدیهی است که $\mathcal{L}(fg)\neq\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$

حال سوال این است که آیا میتوان تابعی پیدا کرد که لاپلاس آن برابر حاصلضرب لاپلاس دو تابع f و g باشد؟ یعنی:

$$\mathcal{L}(?)=\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)\quad or\quad \int_0^\infty (?)e^{-st}\,dt=\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$$

از سمت راست یعنی $\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$ شروع می‌کنیم تا ببینیم این حاصل ضرب, لاپلاس چه تابعی میتواند باشد.

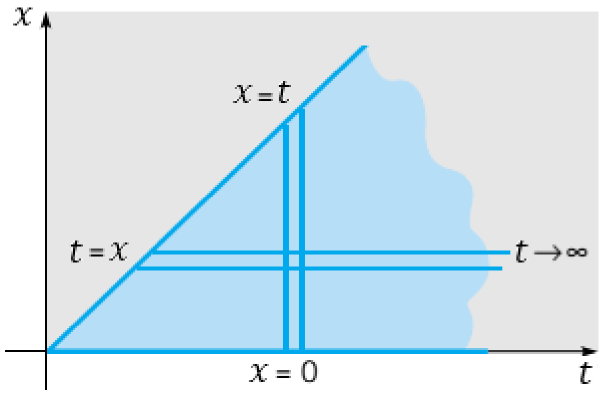
$$\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)=\left(\int_0^\infty e^{-su}f(u)du\right)\left(\int_0^\infty e^{-sx}g(x)dx\right)=\int_0^\infty e^{-sx}g(x)\left(\int_0^\infty e^{-su}f(u)du\right)dx$$

علت درستی رابطه آخر آن است که تابع تحت انتگرال در انتگرال اول به متغیر انتگرال‌گیری در انتگرال دوم یعنی x بستگی ندارد. حال از آنجا که $e^{-sx}g(x)$ نسبت به u ثابت محسوب می‌شود, آنرا به انتگرالِ داخلی وارد می‌کنیم. لذا:

$$\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-s(u+x)} f(u)g(x)du\right)dx$$

برای ایجاد ترم e^{-st} از تغییر متغیر $t = u + x$ استفاده می‌کنیم. از آنجا که در انتگرال داخلی, x متغیر نبوده و یک ثابت تلقی میشود, لذا $du = dt$ و در نتیجه:

$$\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g) = \int_0^\infty \left(\int_{t=x}^{t=\infty} e^{-st} f(t-x)g(x)dt\right)dx$$



از آنجا که برای ایجاد فرمِ تبدیل لاپلاس نیاز داریم e^{-st} به بیرون از انتگرال داخلی منتقل شود, لذا ترتیب انتگرال‌گیری را تغییر می‌دهیم. بدیهی است برای این کار بایستی ناحیه مورد نظر ترسیم شود تا حدود جدید مشخص گردد. با توجه به شکل روبرو خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g) = \int_0^\infty \left(\int_{x=0}^{x=t} e^{-st} f(t-x)g(x)\,dx\right)dt$$

حال با بیرون کشیدن e^{-st} از انتگرال داخلی:

$$\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g) = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_{x=0}^{x=t} f(t-x)g(x)\,dx\right)dt = \mathcal{L}\left(\int_{x=0}^{x=t} f(t-x)g(x)\,dx\right) \equiv \mathcal{L}(f*g)$$

بنابراین مشخص شد که $\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$ برابر لاپلاس $\int_{x=0}^{x=t} f(t-x)g(x)\,dx$ می‌باشد. برای سادگی انتگرال فوق را اصطلاحا انتگرال تلفیقی دو تابع f و g نامیده و با $f * g$ نمایش می‌دهیم. این انتگرال گاهی تحت عنوان پیچش یا کانولوشن دو تابع f و g نیز شناخته می‌شود. در بحث تجزیه تحلیل سیگنالها معمولا بجای x متغیر τ قرار داده شده و آنرا تاخیر زمانی مینامند.

۵-۳-۱- قضیه لاپلاس پیچش دو تابع

اگر تبدیل لاپلاس توابع $f(t)$ و $g(t)$ به ترتیب $F(s)$ و $G(s)$ باشند, آنگاه:

$$\boxed{\begin{cases}\mathcal{L}(f*g) = F(s)G(s) & (7a)\\ \mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s)) = f*g & (7b)\end{cases}}$$

موارد کاربرد:

$(7a)$: زمانی بکار میرود که هدف بدست آوردن لاپلاس توابعی است که بتوان آنرا بصورت حاصلضرب پیچشی دو تابع دانست. یکی از این موارد, حل برخی معادلات انتگرالی است.

$(7b)$: زمانی بکار میرود که لاپلاس معکوس تابعی را بخواهند که بتوان آنرا بصورت حاصلضرب دو تابع نوشت که لاپلاس معکوس هر یک را بدانیم.

توضیح ۱: با یک تغییرمتغیر ساده می‌توان دید پیچش دارای خاصیت جابجایی میباشد,یعنی $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$.

$$f(t) * g(t) = \int_{x=0}^{x=t} f(t-x)g(x)\,dx \xrightarrow{u=t-x} \int_{u=t}^{u=0} f(u)g(t-u)\,(-du)$$
$$= \int_{u=0}^{u=t} g(t-u)f(u)\,du = g(t) * f(t)$$

یعنی فرقی نمی‌کند که کدام تابع را f و کدام را g بگیریم (یعنی شیفت را به کدام یک اعمال کنیم). اینکه از کدام انتگرال برای محاسبه پیچش استفاده کنیم بستگی به میزان ساده بودن تابع $f(t)$ یا $g(t)$ دارد. مثلا اگر $f(t)$ به نسبت $g(t)$ ساده‌تر است بهتر است میزان شیفت را به $f(t)$ اعمال کنیم. راه دیگر آن است که در اثبات پیچش بجای $\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$ از $\mathcal{L}(g)\mathcal{L}(f)$ شروع کنیم. همچنین میتوان نشان داد: $f * (g * h) = (f * g) * h$

توضیح ۲: در ضرب دو سری با ضرایب a_n و b_n, ضرایب بصورت $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i\, b_{n-i}$ میباشد. به تعبیر دیگر, میتوان این ضرایب را بصورت $c = a * b$ بیان کرد که همان پیچش در توابع گسسته می‌باشد.

توضیح ۳: قضیه تبدیل لاپلاس انتگرال که قبلا بیان شد حالت خاصی از این قضیه میباشد. زیرا:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)dx\right) = \mathcal{L}(f * 1) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(1) = F(s)\frac{1}{s}$$

مثال ۵-۳۴ تبدیلات زیر را بدست آورید.

$$1)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+3s-10}\right) = 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\frac{1}{s+5}\right) = 3e^{2t} * e^{-5t} = 3\int_{x=0}^{x=t} e^{2x}e^{-5(t-x)}\,dx$$
$$= 3\int_{x=0}^{x=t} e^{7x-5t}dx = 3e^{-5t}\int_{x=0}^{x=t} e^{7x}dx = 3e^{-5t}\left(\frac{1}{7}e^{7x}\Big|_{x=0}^{x=t}\right) = \frac{3}{7}(e^{2t} - e^{-5t})$$

این مساله قبلا در مثال ۵-۳۰ (قسمت ۳) با استفاده از قضیه انتقال بر روی محور s و نیز تجزیه کسر نیز حل شده است که برای این مثال به نظر می‌رسد روش تجزیه کسر از دو روش دیگر ساده‌تر است. در بخش ۵-۳-۲ علت اهمیت محاسبه لاپلاس معکوس عباراتی به فرم $\frac{1}{G(s)}$ را خواهیم دید. ■

$$2)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+a^2)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+a^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right) = 1 * \frac{sinat}{a}$$

$$\underbrace{1}_{f(x)} * \underbrace{\frac{sinat}{a}}_{g(x)} = \int_{x=0}^{x=t} \underbrace{1}_{f(x)} \underbrace{\frac{sina(t-x)}{a}}_{g(t-x)}\,dx = \frac{1-cosat}{a^2}$$

$$\underline{or}:\ = \int_{x=0}^{x=t} \underbrace{1}_{f(t-x)} \underbrace{\frac{sinax}{a}}_{g(x)}\,dx = \frac{1-cosat}{a^2}$$

این مساله قبلا در مثال ۵-۱۹ با قضیه اثر $\frac{1}{s}$ به طریق ساده‌تری حل شده است. ■

$$3)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\frac{1}{s^2+a^2}\right)=\frac{sin(at)}{a}*\frac{sin(at)}{a}$$

$$\frac{sin(at)}{a}*\frac{sin(at)}{a}=\frac{1}{a^2}\int_0^t sin(ax)\,sin\big(a(t-x)\big)\,dx=\frac{sin(at)-atcos(at)}{2a^3}$$

که برای محاسبه انتگرال بایستی از فرمولهای تبدیل ضرب به جمع استفاده شود. ■

$$4)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s^2}{(s^2+1)(s^2+4)}\right)=2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\frac{s}{s^2+4}\right)=2cost*cos2t=\frac{4}{3}sin2t-\frac{2}{3}sint \ ■$$

$$5)\ \mathcal{L}\left(e^t\int_0^t e^{-2x}\frac{1-e^{-x}}{x}\,dx\right)=\mathcal{L}\left(\int_0^t e^{t-x}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx\right)=\mathcal{L}\left(e^t*\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\right)$$
$$=\frac{1}{s-1}ln\frac{s+2}{s+1} \ ■$$

$$6)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)*\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}*e^t=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{x}}e^{t-x}\,dx$$
$$=\frac{e^t}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx=\frac{2e^t}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-u^2}\,du=e^t\,erf\big(\sqrt{t}\big)$$

که $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$ در انتهای مثال ۵-۱ بدست آمد. همچنین توجه شود این مساله به شیوه تجزیه کسر امکان‌پذیر نیست, چرا که کسر $\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}$ جزو کسرهای گویا نمی‌باشد. ■

توضیح ۱: تابع زیر یعنی $erf(x)$ به نام تابع خطا شناخته شده و مقدار آن بر حسب x بصورت عددی و یا تقریبی محاسبه شده است. یک راه محاسبه تقریبی این تابع, نوشتن سری مک‌لوران تابع e^{-t^2} میباشد.

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=1-erfc(x)\quad ;\quad erf(\infty)=1$$

تابع $erfc(x)$, تابع مکمل خطا نامگذاری شده است.

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}-\frac{x^7}{42}+\frac{x^9}{216}-\cdots\right)$$

$$erf(x)\approx 1-\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^3}+\frac{1\times 3}{2^2x^5}-\frac{1\times 3\times 5}{2^3x^7}+\cdots\right)$$

توضیح ۲: با توجه به مثال فوق, از آنجا که $\mathcal{L}^{-1}(F(s-a))=e^{at}f(t)$, لذا می‌توان $\mathcal{L}\big(erf\big(\sqrt{t}\big)\big)$ را بصورت زیر بدست آورد:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right)=e^{-t}e^t\,erf\big(\sqrt{t}\big)=erf\big(\sqrt{t}\big)\ \rightarrow \mathcal{L}\big(erf\big(\sqrt{t}\big)\big)=\frac{1}{s\sqrt{s+1}}$$

راه دوم محاسبه لاپلاس $f(t)=erf\left(\sqrt{t}\right)$ بصورت زیر است:

$$f(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\,dx \to\ f'(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-t}\xrightarrow{\mathcal{L}} sF(s)-\underbrace{f(0)}_{0}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathcal{L}\left(\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right)$$

در واقع اگرچه لاپلاس خودِ $f(t)$ را نمی‌دانیم, اما لاپلاسِ مشتق آن قابل محاسبه است. چرا که:

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)=\frac{\Gamma(0.5)}{s^{0.5}}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}\to\mathcal{L}\left(\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{s+1}}\quad ;\quad sF(s)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathcal{L}\left(\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right)\to F(s)=\frac{1}{s\sqrt{s+1}}$$

توضیح ۳: توابعی که در اینجا پیچش آنها محاسبه شد در بازه $[0,\infty)$ توابع تک ضابطه‌ای بودند و لذا محاسبه انتگرال کانولوشن برای آنها چندان مشکل نبود. اما چنانچه توابع چند ضابطه‌ای بوده و یا صرفا در یک بازه مشخص تعریف شده باشند, محاسبه پیچش کمی نیاز به دقت و تفکیک بازه‌های مشخص دارد. در بخش ۵-۳-۳ که مفهوم تصویری پیچش بیان میشود با ارائه یک مثال جزئیات کار دیده خواهد شد. ■

مثال ۵-۳۵ معادلات انتگرالی زیر را حل کنید.

$$1)\ \int_0^t \frac{f(u)}{\sqrt{t-u}}du=1+t\qquad ;\qquad 2)\ f(t)=e^{-t}+2\int_0^t e^{-3x}f(t-x)dx$$

حل الف: در اولین معادله انتگرالی, سمت چپ در واقع پیچش دو تابع $f(t)$ و $\frac{1}{\sqrt{t}}$ میباشد. در نتیجه:

$$f(t)*\frac{1}{\sqrt{t}}=1+t\to F(s)\frac{\Gamma(0.5)}{s^{0.5}}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\qquad ;\qquad \left(\mathcal{L}(t^a)=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}\ ;\ s>0\right)$$

$$F(s)=\frac{1}{\Gamma(0.5)}\left(\frac{1}{s^{0.5}}+\frac{1}{s^{1.5}}\right)\to f(t)=\frac{1}{\underbrace{\Gamma(0.5)}_{\sqrt{\pi}}}\left(\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(0.5)}+\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\underbrace{\Gamma(1.5)}_{0.5\Gamma(0.5)}}\right)=\frac{t^{-\frac{1}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}}{\pi}\quad ■$$

ب: در دومین معادله انتگرالی, دیده میشود که انتگرال داده شده, پیچش دو تابع e^{-3t} و $f(t)$ میباشد, در نتیجه:

$$f(t)=e^{-t}+2\int_0^t e^{-3x}f(t-x)dx\to f(t)=e^{-t}+2e^{-3t}*f(t)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)=\frac{1}{s+1}+2\frac{1}{s+3}F(s)\to F(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{2}{(s+1)^2}\to f(t)=e^{-t}+2te^{-t}\quad ■$$

توضیح ۱: بعنوان راه حل دوم برای دومین معادله انتگرالی, از آنجا که انتگرال داده شده معرف پیچش است, می‌توان معادله را با استفاده از خاصیت جابجایی در پیچش بصورت زیر تبدیل کرد. (معادل بکارگیری تغییر متغیر $u=t-x$ در داخل انتگرال).

$$f(t)=e^{-t}+2\int_0^t e^{-3x}f(t-x)dx=e^{-t}+2\int_0^t e^{-3(t-x)}f(x)dx=e^{-t}+2e^{-3t}\int_0^t e^{3x}f(x)dx$$

به تعبیری با استفاده از خاصیت جابجایی در پیچش, انتگرال پیچشی را بصورتی تبدیل کردیم که در داخل انتگرال صرفا متغیر x باشد تا بتوانیم از قضیه تبدیل لاپلاس انتگرال استفاده کنیم:

$$(6a)\ :\ \mathcal{L}(e^{3t}f(t)) = F(s-3) \xrightarrow{(2a)} \mathcal{L}\left(\int_0^t e^{3x}f(x)dx\right) = \frac{F(s-3)}{s}$$

$$(6a):\ \mathcal{L}\left(e^{-3t}\int_0^t e^{3x}f(x)dx\right) = \frac{F((s-(-3))-3)}{s-(-3)} = \frac{F(s)}{s+3}$$

$$f(t) = e^{-t} + 2e^{-3t}\int_0^t e^{3x}f(x)dx \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{1}{s+1} + 2\frac{F(s)}{s+3} \to F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}$$

توضیح ۲: معمولا هر معادله انتگرالی دربرگیرنده یک شرط اولیه میباشد. مثلا در این معادله با جایگذاری $t = 0$ خواهیم داشت:

$$f(0) = e^{-0} + 2\int_0^0 e^{-3x}f(0-x)dx \to f(0) = 1$$

و می‌توان کنترل کرد که در جواب بدست آمده نیز $f(0) = 1$ خواهد شد.

توضیح ۳: می‌توان مساله را با اطلاعات ریاضی ۱ نیز حل کرد. با تغییر متغیر $u = t - x$ در داخل انتگرال خواهیم داشت:

$$f(t) = e^{-t} + 2\int_0^t e^{-3x}f(t-x)dx = e^{-t} + 2\int_0^t e^{-3(t-u)}f(u)du = e^{-t} + 2e^{-3t}\int_0^t e^{3u}f(u)du$$

$$\to e^{3t}f(t) = e^{2t} + 2\int_0^t e^{3u}f(u)du$$

با مشتق گیری از طرفین مطابق قضیه اول حساب دیفرانسیل و انتگرال:

$$\to 3e^{3t}f(t) + e^{3t}f'(t) = 2e^{2t} + 2e^{3t}f(t) \to f(t) + f'(t) = 2e^{-t}$$

$$\to f(t) = 2te^{-t} + ce^{-t} \xrightarrow{f(0)=1} c = 1 \to f(t) = 2te^{-t} + e^{-t}\ \blacksquare$$

مثال ۵-۳۶ درستی قضیه پیچش را برای دو تابع $f(t) = e^{-t}$ و $g(t) = sint$ بررسی کنید. ($t > 0$)

حل در واقع بایستی کنترل کنیم که $\mathcal{L}(f * g) = F(s)G(s)$ میباشد. ابتدا پیچش دو تابع را بدست می‌آوریم:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)\,dx = \int_0^t e^{-(t-x)}sinx\,dx = e^{-t}\int_0^t e^{x}sinx\,dx$$

انتگرال فوق با دو بار استفاده از روش جزء به جزء قابل محاسبه است. در نهایت:

$$f(t) * g(t) = e^{-t}\left(\frac{1 - e^{t}cost + e^{t}sint}{2}\right) = \frac{1}{2}(e^{-t} - cost + sint)$$

حال لاپلاس تابع بدست آمده را بدست می‌آوریم:

$$\mathcal{L}(f(t)*g(t))=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}\right)=\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$$

$$f(t)=e^{-t}\rightarrow F(s)=\frac{1}{s+1}\ \ ;\ \ g(t)=sint\rightarrow G(s)=\frac{1}{s^2+1}\rightarrow F(s)G(s)=\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$$

بنابراین دیده میشود که $\mathcal{L}(f*g)=F(s)G(s)$ بدست آمد. ■

❋ مثال ۵-۳۷ با فرض $f(t)=t^n$ و $g(t)=t^m$ ابتدا نشان دهید:

$$f*g=t^{m+n+1}\int_0^1 x^m\,(1-x)^n dx\qquad (m,n\in\mathbb{R}^+)$$

سپس حاصل انتگرال $I=\int_0^1 x^m\,(1-x)^n dx$ را که به تابع بتا معروف است بیابید.

حل ابتدا درستی رابطه عنوان شده را بدست آورده و سپس از لاپلاس گرفتن از دو طرف آن, تابع بتا را بدست می‌آوریم.

$$f*g=\int_0^t u^m(t-u)^n\,du\xrightarrow{x=\frac{u}{t}\rightarrow dx=\frac{du}{t}}f*g=\int_0^1(xt)^m(t-xt)^n\,(tdx)=\text{حکم}$$

$$\underbrace{\mathcal{L}(f*g)}_{F(s)G(s)}=\mathcal{L}(t^{m+n+1}\underbrace{\int_0^1 x^m\,(1-x)^n dx}_{I})=I\times\mathcal{L}(t^{m+n+1})$$

دقت شود در رابطه بالا, حاصل انتگرال معین I , یک عدد ثابت بوده و لذا آنرا از لاپلاس بیرون کشیدیم.

$$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}=I\times\frac{\Gamma(m+n+2)}{s^{m+n+2}}\rightarrow I=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+n+2)}\ \ ■$$

۵-۳-۲-کاربرد قضیه کانولوشن در تعیین جواب خصوصی

فرض کنید هدف حل معادله دیفرانسیل $L[y(t)]=f(t)$ باشد. روش معمول حل این معادله به کمک تبدیل لاپلاس آن است که از دو طرف معادله لاپلاس گرفته و در نهایت با استفاده از لاپلاس معکوس‌گیری مساله حل شود. اما با بکارگیری قضیه پیچش می‌توان مساله را بدون تعیین لاپلاس تابع $f(t)$ نیز حل کرد. برای این منظور همانگونه که در توضیح ۳ مثال ۵-۱۱ دیده شد:

$$L[y(t)]=f(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}G(s)Y(s)=I(s)+F(s)\quad ;\ \ H(s)=\frac{1}{G(s)}\rightarrow Y(s)=H(s)I(s)+H(s)F(s)$$

بنابراین در یافتن جواب خصوصی معادله $L[y(t)]=f(t)$, بایستی معادله $Y(s)=H(s)F(s)$ حل شود. برای این منظور:

$$Y(s)=H(s)F(s)\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}y_p(t)=\mathcal{L}^{-1}\big(H(s)\big)*f(t)=h(t)*f(t)$$

دیده می‌شود که در این روش حل نیازی, به محاسبه لاپلاس طرف دوم تساوی یعنی $f(t)$ نیست. دلیل آن هم این است که در نهایت از آنجا که قرار است با استفاده از قضیه پیچش, لاپلاس معکوس را بدست آوریم, به خودِ $f(t)$ نیاز داریم نه لاپلاس آن.

این روش حل, مقدمه‌ای است بر روشی که در بحث تحلیل سیستمهای خطی در بخش ۵-۶-۲ ارائه خواهد شد. در آن بخش مفهوم ریاضی و فیزیکی $h(t)=\mathcal{L}^{-1}\big(H(s)\big)$ را نیز خواهیم دید.

مثال ۵-۳۸ الف: معادله دیفرانسیل زیر را با لاپلاس گیری از دو سمت حل کنید.

$$y''+4y'+13y=2e^{-2t}sin3t \quad ; \quad y(0)=1 \quad ; \quad y'(0)=0$$

ب: با انتخاب $f(t)=2e^{-2t}sin3t$ بدون تعیین لاپلاس $f(t)$, مساله را به روشی که در بالا ارائه شد نیز حل کنید.

حل الف: با لاپلاس گیری از دو سمت معادله خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4\big(sY(s)-y(0)\big)+13Y(s)=2\frac{3}{(s+2)^2+3^2}=\frac{6}{s^2+4s+13}$$

$$Y(s)=\frac{s+4}{s^2+4s+13}+\frac{6}{(s^2+4s+13)^2}=Y_1(s)+Y_2(s)$$

$$Y_1(s)=\frac{s+4}{s^2+4s+13}=\frac{(s+2)+2}{(s+2)^2+3^2}=\frac{(s+2)}{(s+2)^2+3^2}+\frac{2}{3}\frac{3}{(s+2)^2+3^2}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}\big(Y_1(s)\big)=e^{-2t}cos3t+\frac{2}{3}e^{-2t}sin3t$$

برای $\mathcal{L}^{-1}\big(Y_2(s)\big)$ می‌توان مشابه قسمت ۶ مثال ۵-۳۰ عمل کرد. یعنی به دنبال یافتنن لاپلاس معکوس انتگرالِ $\frac{6}{(s^2+4s+13)^2}$ برویم و یا با استفاده از قضیه پیچش خواهیم داشت:

$$Y_2(s)=\frac{6}{(s^2+4s+13)^2}=6\frac{1}{s^2+4s+13}\times\frac{1}{s^2+4s+13}$$
$$=\frac{2}{3}\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\times\frac{3}{(s+2)^2+3^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right)=e^{-2t}sin3t \quad ; \quad \mathcal{L}^{-1}\big(F(s)G(s)\big)=f*g$$

$$\mathcal{L}^{-1}\big(Y_2(s)\big)=\frac{2}{3}(e^{-2t}sin3t*e^{-2t}sin3t)=\frac{2}{3}\int_0^t e^{-2x}sin3xe^{-2(t-x)}sin3(t-x)dx$$

$$=\frac{2}{3}e^{-2t}\int_0^t sin3xsin3(t-x)\,dx=\frac{2}{3}e^{-2t}\left(\frac{1}{6}sin3t-\frac{1}{2}tcos3t\right)$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\big(Y_1(s)\big)+\mathcal{L}^{-1}\big(Y_2(s)\big)=e^{-2t}cos3t+\frac{7}{9}e^{-2t}sin3t-\frac{1}{3}te^{-2t}cos3t \;\blacksquare$$

ب: از دو سمت معادله لاپلاس گرفته می‌شود. با این تفاوت که در این روش لاپلاس $f(t)$ را بدون محاسبه بصورت $F(s)$ می‌نویسیم:

$$y''+4y'+13y=f(t) \quad ; \quad y(0)=1 \quad ; \quad y'(0)=0$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4\big(sY(s) - y(0)\big) + 13Y(s) = F(s)$$

$$Y(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+13} + \frac{F(s)}{s^2+4s+13} = Y_1(s) + Y_2(s)$$

دیده می‌شود که $Y(s)$ به همان فرم $H(s)I(s) + H(s)F(s)$ بدست آمد که در آن $H(s) = \frac{1}{G(s)} = \frac{1}{s^2+4s+13}$ میباشد.

بدیهی است $\mathcal{L}^{-1}\big(Y_1(s)\big)$ مشابه قبل بدست می‌آید. اما برای محاسبه $\mathcal{L}^{-1}\big(Y_2(s)\big)$ بطریق زیر عمل می‌کنیم:

$$\mathcal{L}^{-1}\big(Y_2(s)\big) = \mathcal{L}^{-1}\big(H(s)F(s)\big) = h(t) * f(t)$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(H(s)\big) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4s+13}\right) = \frac{1}{3}\frac{3}{(s+2)^2+3^2} = \frac{1}{3}e^{-2t}sin3t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\big(Y_2(s)\big) = h(t) * f(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{3}e^{-2(t-x)}sin3(t-x)\right)(2e^{-2x}sin3x)\,dx$$
$$= \frac{2}{3}e^{-2t}\left(\frac{1}{6}sin3t - \frac{1}{2}tcos3t\right)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(Y_1(s)\big) + \mathcal{L}^{-1}\big(Y_2(s)\big) = \underbrace{e^{-2t}cos3t + \frac{2}{3}e^{-2t}sin3t}_{y_c(t)} + \underbrace{\frac{2}{3}e^{-2t}\left(\frac{1}{6}sin3t - \frac{1}{2}tcos3t\right)}_{y_p(t)}$$

در توضیح ۳ مثال ۵-۱۱ عنوان شد که $\mathcal{L}^{-1}\big(Y_1(s)\big)$ متناظر جواب عمومی و $\mathcal{L}^{-1}\big(Y_2(s)\big)$ نیز متناظر جواب خصوصی معادله میباشد. ■

❋ **مثال ۵-۳۹** الف: معادله ارتعاش یک سیستم جرم-فنر را برای بارگذاری ثابت $f(t) = F_0$ بدست آورید. ب: قسمت قبل را برای بار دلخواه $f(t)$ مجددا حل کنید. ج: چنانچه $f(t)$ بصورت زیر باشد, پاسخ خصوصی ارتعاش را بدست آورید.

$$f(t) = \begin{cases} \frac{a}{b}t & 0 \le t \le b \\ a & b \le t \end{cases}$$

حل الف: ابتدا معادله ارتعاش سیستم جرم-فنر را برای بار $f(t)$ نوشته و از طرفین آن لاپلاس می‌گیریم:

$$m\ddot{x} + kx = f(t) = F_0 \xrightarrow{\mathcal{L}} m\big(s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\big) + kX(s) = \frac{F_0}{s}$$

$$\to X(s) = \frac{sx(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + \frac{k}{m}} + \frac{F_0}{ms\left(s^2 + \frac{k}{m}\right)}$$

حال اگر $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ انتخاب شود, مخرج به فرم $s^2 + \omega_n^2$ خواهد شد که فرمِ لاپلاس شناخته شده‌ای می‌باشد.

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \to X(s) = \frac{sx(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + \omega_n^2} + \frac{F_0}{ms(s^2 + \omega_n^2)}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t) = x(0)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+\omega_n^2}\right) + \dot{x}(0)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\omega_n^2}\right) + \frac{F_0}{m}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+\omega_n^2)}\right)$$

$$\rightarrow x(t) = \underbrace{x(0)cos\omega_n t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_n}sin\omega_n t}_{x_c(t)} + \underbrace{\frac{F_0}{k}(1-cos\omega_n t)}_{x_p(t)} \quad \blacksquare$$

ب: حال مساله را برای بار دلخواه $f(t)$ حل می‌کنیم:

$$m\ddot{x} + kx = f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{sx(0)+\dot{x}(0)}{s^2+\omega_n^2} + \frac{F(s)}{m(s^2+\omega_n^2)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s^2+\omega_n^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\omega_n^2}\right) = f(t) * \frac{sin\omega_n t}{\omega_n}$$

$$\rightarrow x(t) = \underbrace{x(0)cos\omega_n t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_n}sin\omega_n t}_{x_c(t)} + \underbrace{f(t) * \frac{sin\omega_n t}{m\omega_n}}_{x_p(t)}$$

که جواب خصوصی میتواند به یکی از دو صورت زیر بیان شود:

$$x_p(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t f(\tau)sin\big(\omega_n(t-\tau)\big)\,d\tau = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t f(t-\tau)sin(\omega_n\tau)\,d\tau$$

همانگونه که در مثال ۲-۱۴ عنوان شد این انتگرال اصطلاحا به نام انتگرال دوهامل شناخته می‌شود. $\blacksquare$

ج: حل مساله برای بار داده شده با استفاده از رابطه قسمت قبل انجام می‌شود. از آنجا که بار دو ضابطه‌ای است, آنرا در دو بخش حل می‌کنیم:

۱- برای $0 \le t \le b$ خواهیم داشت:

$$x_p(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t \left(\frac{a}{b}\tau\right)sin\big(\omega_n(t-\tau)\big)\,d\tau = \frac{a}{m\omega_n b}\int_0^t \tau sin\big(\omega_n(t-\tau)\big)\,d\tau = \frac{a}{m\omega_n b}I$$

$$I = \int_0^t \underbrace{\tau}_{u}\underbrace{sin\big(\omega_n(t-\tau)\big)\,d\tau}_{dv} = \underbrace{\tau}_{u}\underbrace{\frac{1}{\omega_n}cos\big(\omega_n(t-\tau)\big)}_{v}\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} - \int_0^t \underbrace{\frac{1}{\omega_n}cos\big(\omega_n(t-\tau)\big)}_{v}\underbrace{d\tau}_{du}$$

$$\rightarrow I = \frac{t}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n^2}sin\big(\omega_n(t-\tau)\big)\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{t}{\omega_n} - \frac{sin\omega_n t}{\omega_n^2} \rightarrow x_p(t) = \frac{a}{m\omega_n^2}\left(\frac{t}{b} - \frac{sin\omega_n t}{b\omega_n}\right)$$

۲- برای $b \le t$ خواهیم داشت:

$$x_p(t) = \frac{1}{m\omega_n}\left[\int_0^b \left(\frac{a}{b}\tau\right)sin\big(\omega_n(t-\tau)\big)\,d\tau + \int_b^t (a)sin\big(\omega_n(t-\tau)\big)\,d\tau\right]$$

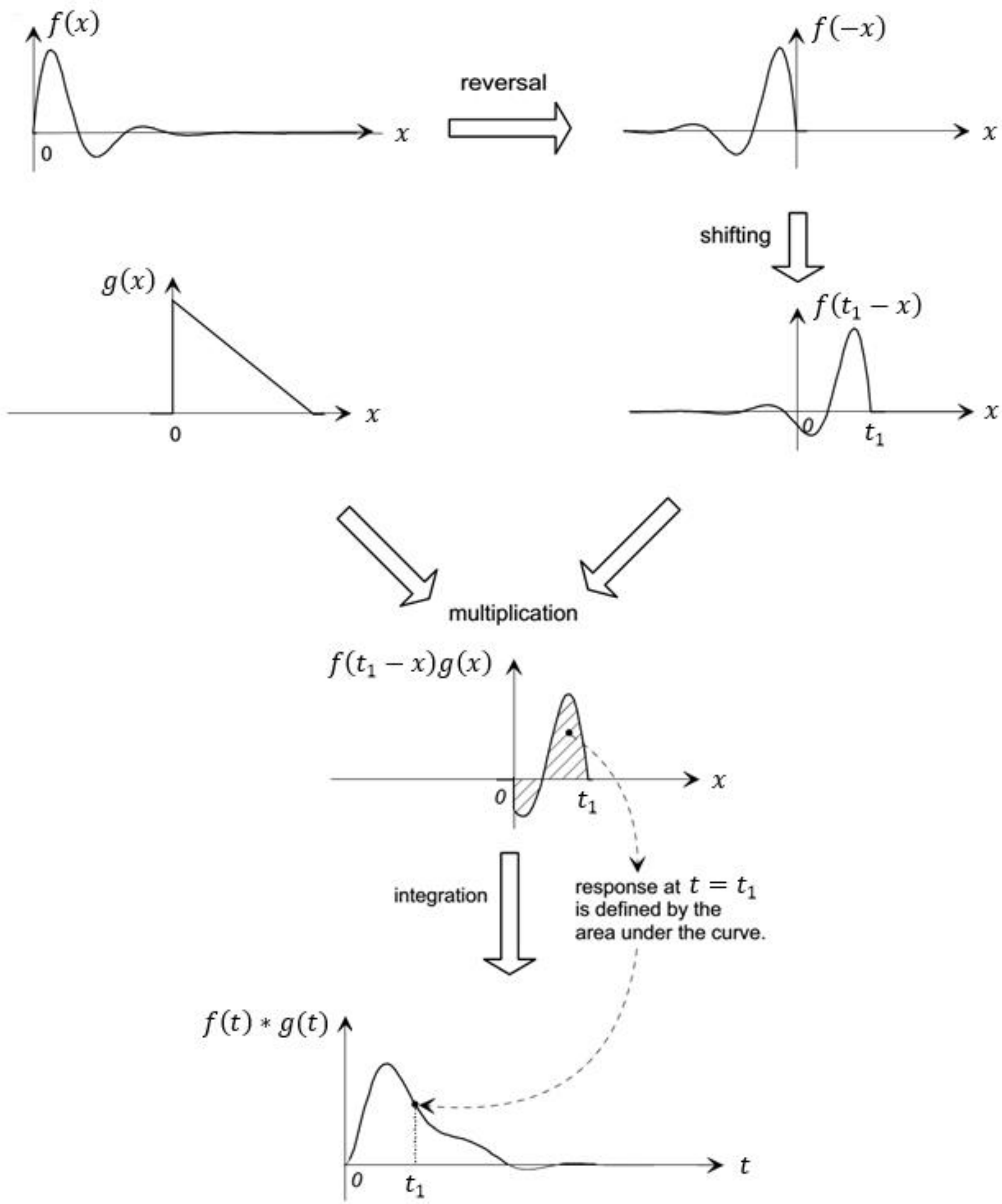
$$\cdots = \frac{a}{m\omega_n^2}\left(1 - \frac{sin\omega_n t - sin\big(\omega_n(t-b)\big)}{\omega_n b}\right) \quad \blacksquare$$

۵-۳-۳-مفهوم تصویری پیچش دو تابع

با توجه به تعریف پیچش دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ که بصورت زیر می‌باشد, می‌توان یک مفهوم تصویری برای پیچش ارائه کرد:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-x) g(x)\, dx$$

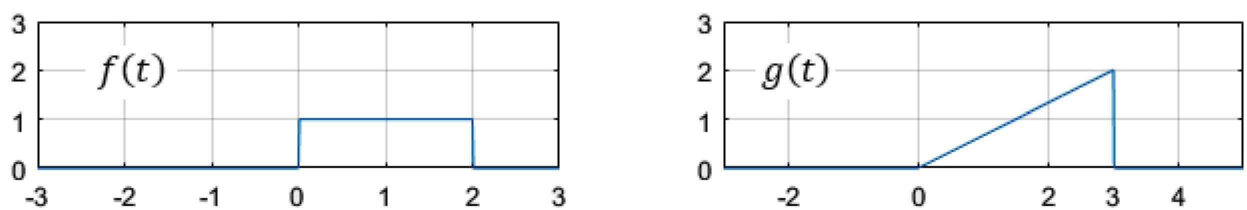
از آنجا که متغیر داخل انتگرال x می‌باشد, ابتدا متغیر هر دو تابع را به x تبدیل می‌کنیم, لذا با توابع $f(x)$ و $g(x)$ سروکار داریم. حال بایستی $f(t-x)$ و $g(x)$ را رسم کنیم که t یک مقدار ثابت است و بهتر است برای هر $t = t_1$ جداگانه محاسبه شود. مراحل کار در شکل زیر و توضیحات مربوط در انتها ارائه شده است.



در واقع پس از آنکه متغیر هر دو تابع را به x تبدیل کردیم, ابتدا یکی از دو تابع مانند $f(x)$ را انتخاب کرده, نسبت به محور قائم برعکس می‌کنیم. سپس آنرا به اندازه t_1 انتقال میدهیم (در واقع t_1 یک نقطه دلخواه از محور t می‌باشد). حال تابع جدید $f(t_1-x)$ را در $g(x)$ ضرب کرده و انتگرال می‌گیریم که در واقع معادل سطح زیر نمودار میباشد. حاصل انتگرال مقدار پیچش را در نقطه t_1 خواهد داد. با تغییر t_1 جواب مساله برای هر t بدست می‌آید. نکته مهم در محاسبه پیچش توجه به میزان همپوشانی در ضرب دو تابع $f(t_1-x)$ و $g(x)$ میباشد. در این قسمت بسته به میزان t_1 ممکن است توابع به فرمهای مختلفی با یکدیگر همپوشانی داشته باشند. معمولا در محاسبات, بجای t_1 از همان مقدار t استفاده می‌شود تا جواب برای هر t بدست آید.

همانگونه که در ابتدای این بخش نیز عنوان شد, محاسبه پیچش برای توابع چند ضابطه‌ای و یا توابعی که صرفا در یک بازه مشخص تعریف شده‌اند, ممکن است به سادگی توابع تک ضابطه‌ای نبوده و نیاز به تفکیک بازه‌های مشخص جهت انتگرال‌گیری خواهد داشت.

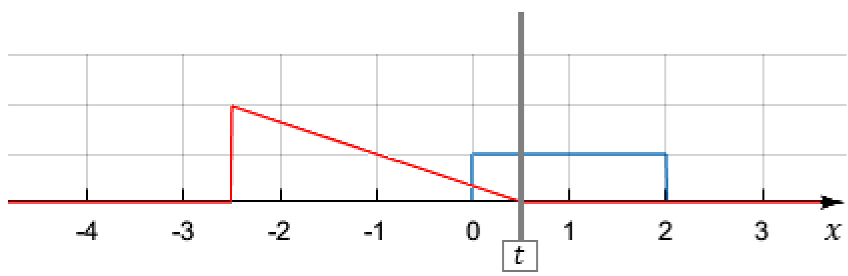
به عنوان نمونه فرض کنید بخواهیم پیچش دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ که در شکل زیر دیده می‌شود را بدست آوریم.



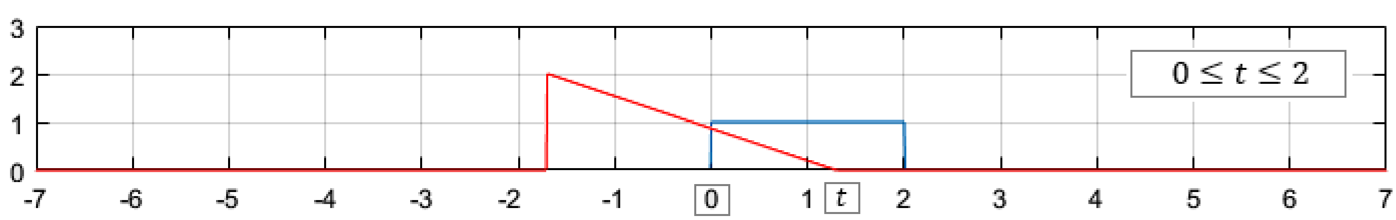
ابتدا متغیر هر دو تابع را به x تبدیل می‌کنیم. حال یکی از دو تابع مانند $g(x)$ را انتخاب کرده, آنرا برعکس کرده و انتقال می‌دهیم.

$$g(t)=\frac{2}{3}t \to g(t-x)=\frac{2}{3}(t-x) \to f(t)*g(t)=\frac{2}{3}\int_0^t f(x)(t-x)\,dx$$

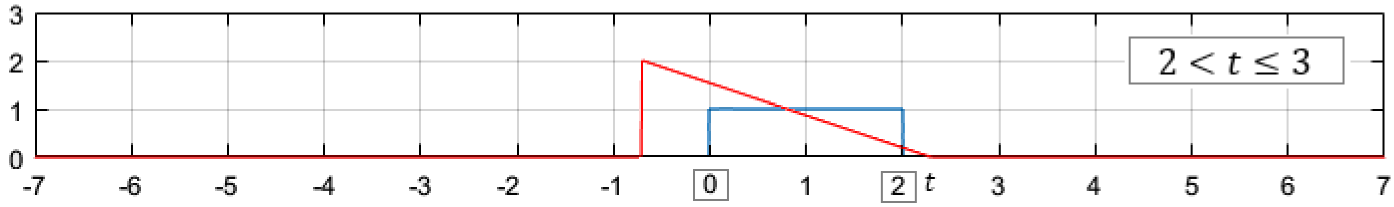
در اینصورت $f(x)$ تغییر نکرده و $g(t-x)$ بسته به مقدار t ممکن است به اشکال مختلفی با $f(x)$ همپوشانی داشته باشد.



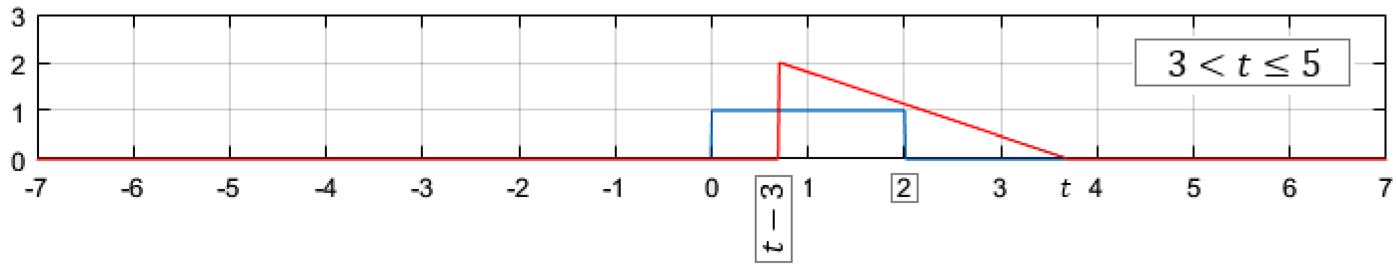
بنابراین بسته به مقدار t , به ترتیب حالات زیر را در نظر می‌گیریم: $(t \geq 0)$



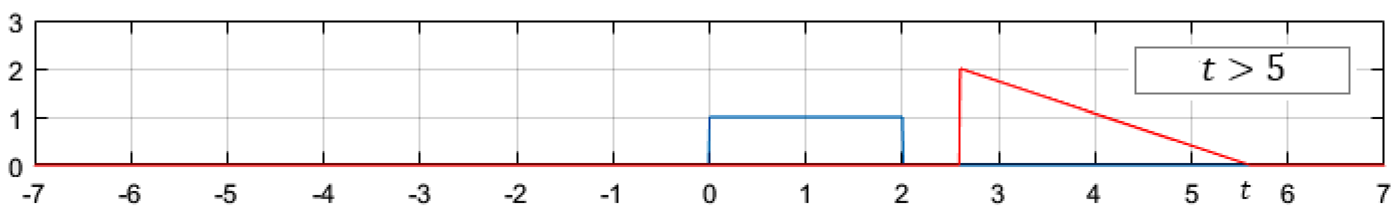
$$1)\ \ 0 \leq t \leq 2 \to f(t)*g(t)=\frac{2}{3}\int_0^t \underbrace{f(x)}_{1}(t-x)\,dx=\frac{2}{3}\left(tx-\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{x=0}^{x=t}=\frac{t^2}{3}$$



$$2)\ \ 2 < t \leq 3 \rightarrow f(t) * g(t) = \frac{2}{3}\int_{0}^{2} \underbrace{f(x)}_{1}\,(t-x)\,dx = \frac{4}{3}(t-1)$$

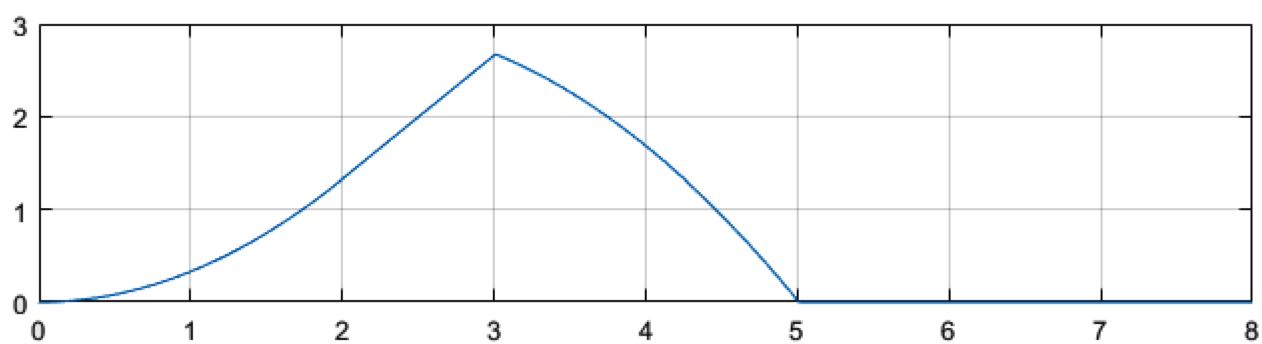


$$3)\ \ 3 < t \leq 5 \rightarrow f(t) * g(t) = \frac{2}{3}\int_{t-3}^{2} \underbrace{f(x)}_{1}\,(t-x)\,dx = \frac{1}{3}(-t^2+4t+5)$$



$4)\ \ t > 5 \rightarrow$ بدون همپوشانی $\rightarrow f(t) * g(t) = 0$

در نتیجه با در نظر گرفتن هر ۴ حالت, شکل نمودار $f(t) * g(t)$ بصورت زیر خواهد بود:



دقت شود از آنجا که پیچش دارای خاصیت تقارنی است, لذا در انتخاب تابعی که قرار است آنرا برعکس کرده و انتقال دهیم, بهتر است تابعی را که فرم ساده‌تری دارد انتخاب کنیم. مثلا در بالا ساده‌تر بود تابع $f(x)$ را برای این منظور انتخاب می‌کردیم, اما به جهت آنکه با کلیات روش بهتر آشنا شویم تابع $g(x)$ را انتخاب کردیم.

تمرینات بخش ۵-۳

۱- لاپلاس معکوس زیر را یکبار با تجزیه کسر, یکبار با قضیه اثر $\frac{1}{s}$ و یکبار با انتگرال تلفیقی بدست آورید.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2-4)}\right) \qquad ; \qquad \underline{Ans}: \quad f(t)=\frac{1}{8}sinh(2t)-\frac{t}{4}$$

۲- درستی لاپلاس معکوسهای زیر را نشان دهید.

$$\underline{1})\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{(s^2-1)^2}\right)=\frac{1}{2}t\,cosht+\frac{1}{2}sinht \quad ; \quad 2)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}ln\frac{s}{s-1}\right)=e^{-t}\int_0^t\frac{e^{2x}-e^x}{x}dx$$

$$\underline{3})\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}cot^{-1}(s+1)\right)=\int_0^t\frac{e^{-x}}{x}sinx\,cos(t-x)dx$$

۳- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y''+3y'+2y=cos(\alpha t) \quad ; \quad y(0)=1 \quad ; \quad y'(0)=0$$

$$\underline{Ans}: \quad y(t)=2e^{-t}-e^{-2t}+\int_0^t\left(e^{-(t-x)}-e^{-2(t-x)}\right)cos(\alpha x)\,dx$$

۴- معادله انتگرالی زیر را با سه روش ارائه شده حل کنید.

$$e^tf(t)=4t^2e^t-\int_0^t e^xf(x)dx \qquad ; \qquad \underline{Ans}: \quad f(t)=e^{-2t}+2t^2+2t-1$$

الف: از طرفین با استفاده از قضیه لاپلاس انتگرال, لاپلاس بگیرید.

ب: طرفین را در e^{-t} ضرب کرده و با استفاده از قضیه لاپلاس پیچش, لاپلاس بگیرید. (مشابه قسمت دوم مثال ۵-۳۵)

ج: بدون استفاده از لاپلاس, از طرفین مشتق گرفته و پس از حل معادله دیفرانسیلی که بدست می‌آید, با استفاده از شرط $f(0)=0$ تابع $f(t)$ را بدست آورید. دقت شود شرط $f(0)=0$ با جایگذاری $t=0$ در معادله انتگرالی بدست می‌آید.

۵- معادله انتگرالی زیر را حل کنید:

$$y''(t)=sinht+2e^t\int_0^t e^{-x}\,y'(x)dx \qquad ; \qquad y(0)=y'(0)=0$$

$$\underline{Ans}: \quad y(t)=\frac{-1}{2}+\frac{4}{9}e^{-t}+\frac{1}{3}te^{-t}+\frac{1}{18}e^{2t}$$

۶- حاصل انتگرال زیر را بدست آورید:

$$I=\int_0^\infty\int_0^t coshx\,e^{-2t}\,sin^2(t-x)\,dx\,dt \qquad ; \qquad \underline{Ans}: \quad I=\frac{1}{12}$$

۷- مثال که در بخش ۵-۳-۳ برای تعیین پیچش دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ مطرح گردید را مجددا حل کنید با این تفاوت که اینبار تابع f را برعکس کرده و g را ثابت در نظر بگیرید, به عبارتی $\int_0^t f(t-x)g(x)\,dx$ را محاسبه کنید.

۵-۴- تابع پله‌ای واحد $(Unit\ step\ function)$

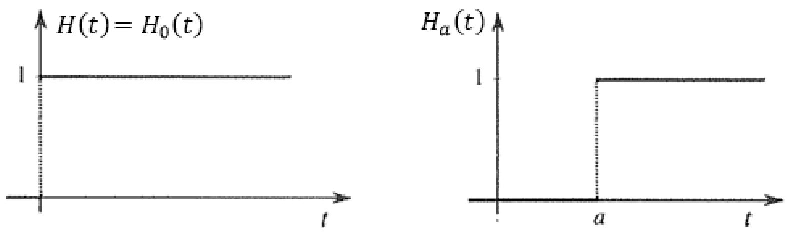
یکی از مشکلاتی که در حل معادلات غیرهمگن در فصلهای اولیه دیده شد آن است که تابع غیرهمگنی, چندضابطه‌ای باشد. دیده شد که در اینصورت بایستی برای هر بازه معادله غیرهمگن بطور مجزا حل شده و با استفاده از شرط پیوستگی حل مساله کامل شود که قدری حل را طولانی خواهد کرد. ایده استفاده از تابع پله‌ای عملا راهی است برای تک ضابطه‌ای کردن یک تابع چند ضابطه‌ای, که در ادامه به آن می‌پردازیم.

تابع پله‌ای واحد$(Unit\ step\ function)$ یا هویساید$(Heaviside)$ بصورت زیر تعریف میشود:

$$H_a(t)=\begin{cases}0 & t\le a\\ 1 & t>a\end{cases}$$

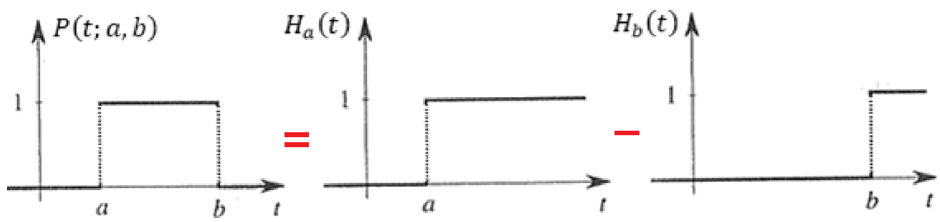
گاهی اوقات $H_a(t)$ را با $H(t-a)$ نیز نمایش می‌دهند. مثلا $H_0(t)$ بصورت $H(t)$ نمایش داده میشود. همچنین در برخی کتب این تابع بصورت $u(t-a)=u_a(t)$ نیز معرفی شده است.

لازم بذکر است که معمولا مقدار تابع در خودِ $t=a$ مهم نبوده و بسته به اینکه در مساله, علامت تساوی به کدام بخش داده شده باشد, می‌توان هویساید را متناظر همان تعریف کرد (در مثال ۵-۴۰ قسمت ۲ این موضوع را خواهیم دید).



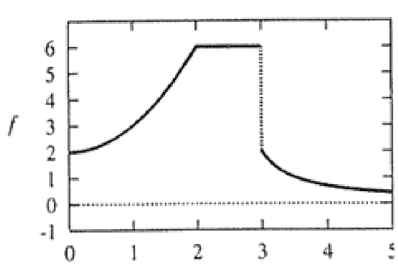
در ادامه چند تابع تکه‌ای بر حسب تابع پله‌ای(هویساید) بیان شده است.

$$1)\ \ Rectangular\ Pulse:\quad P(t;a,b)=1[H_a(t)-H_b(t)]$$



درحالتی که یک تابع دلخواه $f(t)$ در بازه (a,b) تعریف شده باشد, می‌توان این تابع را به کمک تابع مستطیلی بالا بصورت $f(t)P(t;a,b)=f(t)[H_a(t)-H_b(t)]$ نشان داد. به مثال زیر توجه شود.

$$2)\ \ f(t)=(2+t^2)[H_0(t)-H_2(t)]+6[H_2(t)-H_3(t)]+\frac{2}{2t-5}[H_3(t)-H_\infty(t)]$$



$$f(t)=\begin{cases}2+t^2, & 0<t<2\\ 6, & 2<t<3\\ 2/(2t-5) & 3<t<\infty\end{cases}$$

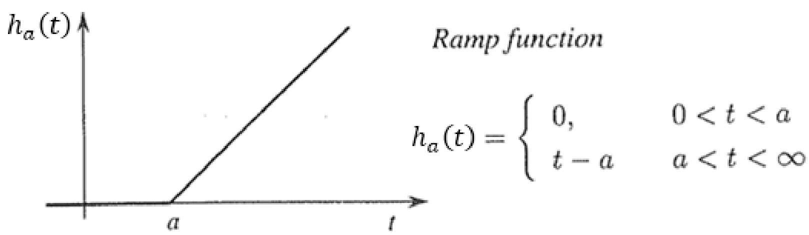
بدیهی است $H_\infty(t)=0$ و $H_0(t)=H(t-0)=1$ میباشد. البته در حالت کلی $H_{-\infty}(t)=1$ میباشد, اما از آنجا که $t>0$ منظور شده است لذا $H_0(t)=1$.

توضیح: می‌توان برای بیان توابع چندضابطه‌ای بر حسب تابع هویساید, علاوه بر آنچه در بالا دیده شد, یک رابطه دیگر نیز بصورت زیر ارائه کرد که در آن k تعداد گسستگی‌ها و d_k میزان اختلاف رابطه دو تابع (نه مقدار آن) در نقطه گسستگیِ t_k می‌باشد:

$$f(t)=\sum_k d_k H_{t_k}(t)=\left((2+t^2)-0\right)H_0(t)+\left(6-(2+t^2)\right)H_2(t)+\left(\frac{2}{2t-5}-6\right)H_3(t)$$

توجه شود همواره d_k برابر رابطه تابع در سمت راست منهای رابطه تابع در سمت چپ است. در شروع نیز فرض شده است مقدار تابع در سمت چپِ $t=0$ برابر صفر است.

3) $Ramp\ function$: $\quad h_a(t)=(t-a)[H_a(t)-H_\infty(t)]=(t-a)H_a(t)$



توضیح ۱: مشتق تابع شیب برابر تابع پله‌ای میباشد. زیرا:

$$h_a(t)=\begin{cases}0 & 0<t<a\\ t-a & t>a\end{cases}\to h'_a(t)=\begin{cases}0 & 0<t<a\\ 1 & t>a\end{cases}=H_a(t)\to h'_a(t)=H_a(t)$$

هرچند ممکن است این اِشکال وارد شود که این تابع در $t=a$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد. در واقع در اینجا منظور مشتق چپ و راست بصورت مجزا بوده و مشتق در خود نقطه تعریف نمی‌شود. اثبات دقیقتر درستی این رابطه در بخش ۵-۷-۱ ارائه خواهد شد.

توضیح ۲: تابع پله‌ای غیر واحد بصورت زیر تعریف می‌شود. چنانچه در مساله‌ای اشاره به واحد یا غیر واحد بودن تابع پله نشود, منظور همان تابع پله‌ای واحد است.

$$H_a(t)=\begin{cases}b & t\le a\\ c & t>a\end{cases}$$

توضیح ۳: می‌توان تابع علامت یعنی $Sign$ را بر حسب تابع پله‌ای بصورت $Sign(x)=2H(x)-1$ بیان کرد.

مثال ۵-۴۰ لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

$$1)\ \mathcal{L}\left(H_a(t)\right)=\int_0^\infty e^{-st}H_a(t)dt=\int_a^\infty e^{-st}dt=\frac{e^{-as}}{s}\ \to\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-as}}{s}\right)=H_a(t)$$

بدیهی است درستی این رابطه برای $s>0$ میباشد. می‌توان کنترل کرد که برای $a=0$ خواهیم داشت:

$$a=0\to\mathcal{L}\left(H_0(t)\right)=\mathcal{L}(1)=\frac{e^{-0s}}{s}=\frac{1}{s}\ \blacksquare$$

$$2)\ f(t)=\begin{cases}t & 0\le t<4\\ 3 & t\ge 4\end{cases}$$

دقت شود با توجه به اینکه مقدار تابع برای $t\ge 4$ برابر 3 داده شده است, بر خلاف تعریف اولیه تابع هویساید, مقدار 1 را برای $t\ge a$ در نظر می‌گیریم, یعنی تساوی را به سطر پایین میدهیم. به عبارتی با کمی تغییر در تعریف تابع هویساید خواهیم داشت:

$$H_a(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & t\ge a\end{cases}\to f(t)=t\left(H_0(t)-H_4(t)\right)+3\left(H_4(t)-H_\infty(t)\right)=t-tH_4(t)+3H_4(t)$$

به راحتی می‌توان کنترل کرد که اگر $t<4$ باشد حاصل تابع تک ضابطه‌اِی بالا برابر t و اگر $t\geq 4$, حاصل برابر 3 می‌شود.

$$\mathcal{L}(f(t))=\frac{1}{s^2}+\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{-4s}}{s}\right)+3\frac{e^{-4s}}{s}=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-4s}}{s^2}-\frac{e^{-4s}}{s}\quad ;\quad \left(\mathcal{L}\big(tg(t)\big)=-G'(s)\right)\quad \blacksquare$$

توضیح ۱: لازم بذکر است چنانچه تغییری در بیان تابع هویساید (در نقطه ناپیوستگی) صورت پذیرد, در جواب نهاییِ حاصل از حل معادله دیفرانسیل نیز اگر در لاپلاس معکوس نیاز به هویساید باشد, از همین تعریف جدید استفاده خواهد شد.

توضیح ۲: اگر قرار بود لاپلاس تابع را بدون استفاده از تابع هویساید بدست آوریم بایستی مشابه مثالهای ۵-۶ و ۵-۷ از تعریف لاپلاس استفاده میکردیم. در اینصورت:

$$\mathcal{L}(f)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^4 te^{-st}dt+\int_4^\infty 3e^{-st}dt$$

$$=\left[t\left(\frac{-1}{s}e^{-st}\right)-\left(\frac{1}{s^2}e^{-st}\right)\right]_0^4+3\left(\frac{-1}{s}e^{-st}\right)\Big|_4^\infty=-\frac{e^{-4s}}{s}-\frac{e^{-4s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}\quad \blacksquare$$

دیده شد که $\mathcal{L}\big(H_a(t)\big)=\frac{e^{-as}}{s}$ بدست آمد. حال سوال این است که اگر تابع $H_a(t)$ در یک تابع دلخواه $f(t)$ ضرب شود, تبدیل لاپلاس آن چه خواهد بود. در قضیه بعد به این سوال پاسخ می‌دهیم.

۵-۴-۱- قضیه انتقال بر روی محور t

هدف آن است که $\mathcal{L}(H_a(t)f(t))$ را بر حسب لاپلاس $f(t)$ بدست آوریم. در ابتدا ساده‌تر است که $\mathcal{L}(H_a(t)f(t-a))$ را محاسبه کنیم:

$$\mathcal{L}(H_a(t)f(t-a))=\int_a^\infty f(t-a)e^{-st}\,dt=\int_0^\infty f(x)e^{-(x+a)s}\,dx=e^{-as}F(s)$$

بنابراین:

$$\boxed{\begin{cases}\mathcal{L}(H_a(t)f(t-a))=e^{-as}\underbrace{\mathcal{L}(f(t))}_{F(s)} & (8a)\\ \mathcal{L}^{-1}(e^{-as}F(s))=H_a(t)f(t-a) & (8b)\end{cases}}$$

لازم بذکر است که این قضیه نیز به نوعی دوگان (Dual) قضیه انتقال بر روی محور s (بخش ۵-۲-۶) می‌باشد.

توضیح ۱: در ابتدا عنوان شد که هدف محاسبه $\mathcal{L}(H_a(t)f(t))$ می‌باشد, در حالیکه $\mathcal{L}(H_a(t)f(t-a))$ را بدست آوردیم. یک روش حل این است که در داخل تابع f متغیر $t-a$ را ایجاد کنیم که این کار با جایگزینی $t=(t-a)+a$ امکان‌پذیر است. روش دوم آنکه مستقیما رابطه‌ای برای $\mathcal{L}(H_a(t)f(t))$ بدست آوریم. در ادامه نشان می‌دهیم که:

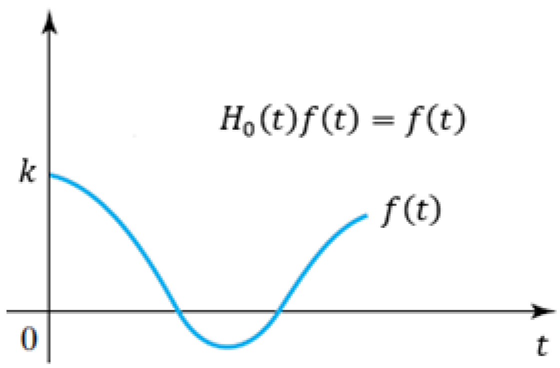
$$\mathcal{L}(H_a(t)f(t))=e^{-as}\mathcal{L}(f(t+a))$$

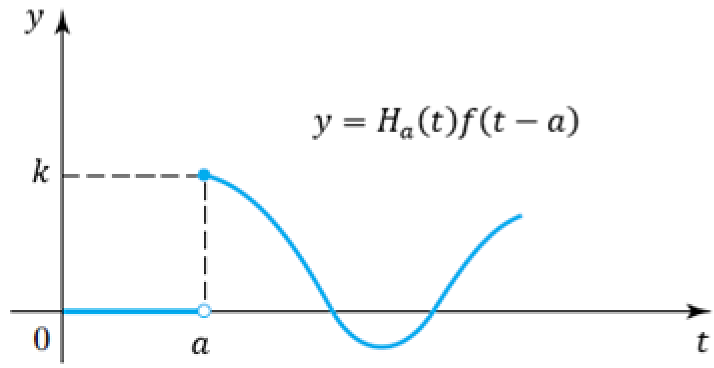
که در واقع معادل همان رابطه اصلی است. برای اثبات کافی است در ابتدا قرار دهیم $g(t)=f(t-a)$. درنتیجه:

$$\mathcal{L}\big(H_a(t)f(t-a)\big)=e^{-as}F(s)\rightarrow\mathcal{L}\big(H_a(t)g(t)\big)=e^{-as}\mathcal{L}(f(t))=e^{-as}\mathcal{L}(g(t+a))$$

که با تغییر تابع g به f نتیجه مورد نظر به دست می‌آید.

توضیح ۲: علت نامگذاری این قضیه تحت عنوان "قضیه انتقال بر روی محور زمان" آن است که در واقع $H_a(t)f(t-a)$ بیانگر انتقال تابع $f(t)$ بر روی محور t به میزان a خواهد بود. به عبارتی:





$$\begin{cases} 0 & t<0 \\ f(t) & t\geq 0 \end{cases} = H_0(t)f(t) \qquad y(t) = \begin{cases} 0 & t<a \\ f(t-a) & t\geq a \end{cases} = H_a(t)f(t-a)$$

موارد کاربرد:

$(8a)$: زمانی بکار میرود که تبدیل لاپلاسی را بخواهند که در آن تابعی به میزان a واحد انتقال داده شده باشد.

$(8b)$: زمانی بکار میرود که لاپلاس معکوس تابعی را بخواهند که در آن e^{-as} دیده میشود که با حذف e^{-as} ، لاپلاس معکوسِ آنچه را باقی می‌ماند بدانیم. دقت شود $f(t-a)$ معادل $\mathcal{L}^{-1}(F(s))|_{t\to t-a}$ میباشد.

مثال ۵-۴۱ تبدیلات زیر را بدست آورید.

1) $\mathcal{L}\big(H_a(t)\big) = \mathcal{L}(H_a(t)\times 1)$

$$f(t-a)=1 \to f(t)=1 \to \mathcal{L}\big(H_a(t)\big) = e^{-as}\mathcal{L}(1) = \frac{e^{-as}}{s} \ \blacksquare$$

2) $\mathcal{L}\big(h_a(t)\big) = \mathcal{L}\big(H_a(t)(t-a)\big)$

$$f(t-a)=t-a \to f(t)=t \to \mathcal{L}\big(h_a(t)\big) = e^{-as}\mathcal{L}(t) = \frac{e^{-as}}{s^2} \ \blacksquare$$

3) $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1-e^{-2s}}{s^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2}\right) = t - H_2(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)\bigg|_{t\to t-2}$$
$$= t - H_2(t)(t-2) \ \blacksquare$$

4) $$\mathcal{L}\big(H_2(t)(t^2+3t-1)\big) = \mathcal{L}\left(H_2(t)\left(\big((t-2)+2\big)^2 + 3\big((t-2)+2\big) - 1\right)\right)$$

$$= \mathcal{L}\left(H_2(t)\,\underbrace{\big((t-2)^2+7(t-2)+9\big)}_{f(t-2)}\right) = e^{-2s}\mathcal{L}(t^2+7t+9) = e^{-2s}\left(\frac{2!}{s^3}+\frac{7}{s^2}+\frac{9}{s}\right)$$

که در قیاس با رابطه‌ای که برای $\mathcal{L}\big(H_a(t)f(t-a)\big)$ بدست آمد, در واقع $f(t)=t^2+7t+9$ خواهد بود.

روش دوم: می‌توان با استفاده از رابطه زیر (که در متن درس بدست آمد) نیز مساله را حل کرد:

$$\mathcal{L}\big(H_a(t)f(t)\big) = e^{-as}\mathcal{L}\big(f(t+a)\big)$$

$$\rightarrow \mathcal{L}\big(H_2(t)(t^2+3t-1)\big) = e^{-2s}\mathcal{L}((t+2)^2+3(t+2)-1)$$

$$= e^{-2s}\mathcal{L}(t^2+7t+9) = e^{-2s}\left(\frac{2!}{s^3}+\frac{7}{s^2}+\frac{9}{s}\right) \quad \blacksquare$$

$$5)\ \mathcal{L}\left(H_{\frac{\pi}{6}}(t)sint\right) = \mathcal{L}\left(H_{\frac{\pi}{6}}(t)\underbrace{sin\left(\left(t-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right)}_{f(t-\pi/6)}\right) \xrightarrow{f(t)=sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)} = e^{-\frac{\pi}{6}s}\mathcal{L}\left(sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$e^{-\frac{\pi}{6}s}\mathcal{L}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sint+\frac{1}{2}cost\right) = e^{-\frac{\pi}{6}s}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{e^{-\frac{\pi}{6}s}}{2(s^2+1)}(\sqrt{3}+s)$$

$$or:\ \mathcal{L}(H_a(t)f(t)) = e^{-as}\mathcal{L}(f(t+a)) \rightarrow \mathcal{L}\left(H_{\frac{\pi}{6}}(t)sint\right) = e^{-\frac{\pi}{6}s}\mathcal{L}\left(sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= e^{-\frac{\pi}{6}s}\frac{\sqrt{3}+s}{2(s^2+1)} \quad \blacksquare$$

$$6)\ f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t < 4 \\ 3 & t \ge 4 \end{cases} \rightarrow f(t) = t\big(H_0(t)-H_4(t)\big)+3\big(H_4(t)-H_\infty(t)\big)$$

$$= t - tH_4(t) + 3H_4(t) = t - \big((t-4)+4\big)H_4(t) + 3H_4(t)$$

$$= t - \underbrace{(t-4)}_{f(t-4)}H_4(t) - H_4(t) \rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2} - e^{-4s}\mathcal{L}(t) - \frac{e^{-4s}}{s} = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-4s}}{s^2} - \frac{e^{-4s}}{s}$$

$$\underline{or}:\ \mathcal{L}\big(H_a(t)f(t)\big) = e^{-as}\mathcal{L}\big(f(t+a)\big) \xrightarrow{f(t)=t} \mathcal{L}\big(tH_4(t)\big) = e^{-4s}\mathcal{L}(t+4) = \frac{e^{-4s}}{s^2} + 4\frac{e^{-4s}}{s}$$

$$f(t) = t - tH_4(t) + 3H_4(t) \rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2} - \left(\frac{e^{-4s}}{s^2}+4\frac{e^{-4s}}{s}\right) + 3\frac{e^{-4s}}{s} = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-4s}}{s^2} - \frac{e^{-4s}}{s}$$

لازم بذکر است که این قسمت قبلا در مثال ۵-۴۰ (قسمت ۲) با استفاده از قضیه مشتق تبدیل لاپلاس نیز بدست آمده بود. ■

$$7)\ f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t \le 2 \\ 2, & t > 2 \end{cases} \rightarrow f(t) = t^2\big(H_0(t)-H_2(t)\big)+2\big(H_2(t)-H_\infty(t)\big)$$

$$f(t) = t^2 - t^2H_2(t) + 2H_2(t) = t^2 - \big((t-2)+2\big)^2H_2(t) + 2H_2(t)$$

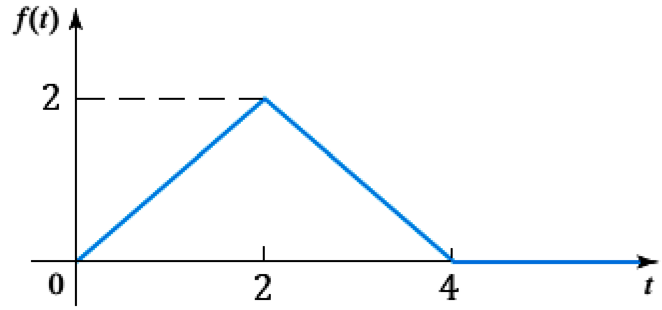
$$= t^2 - \underbrace{(t-2)^2}_{f(t-2)}H_2(t) - 4\underbrace{(t-2)}_{f(t-2)}H_2(t) - 2H_2(t)$$

$$\rightarrow F(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-2s}\mathcal{L}(t^2) - 4e^{-2s}\mathcal{L}(t) - 2\frac{e^{-2s}}{s} = \frac{2}{s^3} - \frac{2e^{-2s}}{s^3} - 4\frac{e^{-2s}}{s^2} - 2\frac{e^{-2s}}{s}$$

$$= -e^{-2s}\left(\frac{2}{s}+\frac{4}{s^2}+\frac{2}{s^3}\right)+\frac{2}{s^3}$$

این قسمت نیز قبلا در مثال ۵-۷ با انتگرال‌گیری مستقیم بدست آمده بود. ■

8) $f(t)=\begin{cases} t & 0\le t\le 2 \\ 4-t & 2<t\le 4 \\ 0 & t>4 \end{cases}$



لازم بذکر است که این قسمت قبلا بعنوان تمرین در مجموعه تمرینات بخش ۵-۱ داده شده است و هدف آن بود با استفاده از فرمول تبدیل لاپلاس آنرا محاسبه کنید. در این قسمت می‌خواهیم با نوشتن این تابع بر حسب تابع پله‌ای آنرا حل کنیم.

$$f(t)=t[H_0(t)-H_2(t)]+(4-t)[H_2(t)-H_4(t)]=t-2\underbrace{(t-2)}_{f(t-2)}H_2(t)+\underbrace{(t-4)}_{f(t-4)}H_4(t)$$

$$\mathcal{L}(H_a(t)f(t-a))=e^{-as}F(s)\to\mathcal{L}(f)=\frac{1}{s^2}-2e^{-2s}\frac{1}{s^2}+e^{-4s}\frac{1}{s^2}=\frac{1+e^{-4s}-2e^{-2s}}{s^2}\quad\blacksquare$$

یکی از مواردی که ممکن است با آن روبرو شویم تعیین پیچش یک تابع دلخواه $f(t)$ در $H_a(t)$ است. این مورد ممکن است یا مستقیما مطرح شود یا چنانچه بخواهیم معادله‌ای را که ترم ناهمگنی آن بر حسب $H_a(t)$ می‌باشد, با روش ارائه شده در بخش ۵-۳-۲ (کاربرد کانولوشن) حل کنیم, در انتهای کار نیازمند این محاسبه خواهیم بود.

در ابتدا رابطه درستی رابطه کلی‌ترِ زیر را نشان می‌دهیم:

$$\boxed{\int_0^t f(t,x)H_a(x)\,dx=H_a(t)\int_a^t f(t,x)\,dx\qquad (a\ge 0\ ;\ t>0)}$$

برای اثبات می‌توان گفت از آنجا که انتگرال شامل تابع پله‌ای می‌باشد, لذا برای مقادیر مختلف t حاصل انتگرال متفاوت است.

۱- اگر $0\le t\le a$ در اینصورت $H_a(x)=0$ بوده, لذا حاصل انتگرال سمت چپ برابر صفر است.

۲- اگر $a<t$ تابع پله‌ای برای وقتی $0\le x\le a$ برابر صفر و برای وقتی $a<x\le t$ برابر واحد است. لذا:

$$\int_0^t f(t,x)H_a(x)\,dx=\int_0^a 0\,dx+\int_a^t f(t,x)\,dx=\int_a^t f(t,x)\,dx$$

بنابراین با در نظر گرفتن هر دو حالت, جواب را می‌توان بصورت یک تابع بر حسب هویساید بیان کرد:

$$\int_0^t f(t,x)H_a(x)\,dx=\begin{cases} 0 & t\le a \\ \int_a^t f(t,x)dx & t>a \end{cases}=H_a(t)\int_a^t f(t,x)dx$$

همچنین با انتخاب $f(t,x)=1$ دیده می‌شود که مشتق تابع شیب برابر تابع هویساید است. زیرا:

$$f(t,x)=1\to\int_0^t H_a(x)\,dx=H_a(t)\int_a^t dx=(t-a)H_a(t)=h_a(t)\to h'_a(t)=H_a(t)$$

هرچند این نتیجه‌گیری دقیق نیست, چرا که تابع $H_a(x)$ در شرایط قضیه اول حساب دیفرانسیل و انتگرال صدق نمی‌کند (برای $t>a$ تابع پیوسته نیست). در بخش ۵-۷-۱ درستی این رابطه به شکل دقیقتری ارائه خواهد شد.

حالت خاص: بدیهی است چنانچه $f(t,x)$ به فرم $f(t-x)$ باشد, در واقع $f(t)*H_a(t)$ بدست آمده است. لذا:

$$\boxed{f(t)*H_a(t)=H_a(t)\int_a^t f(t-x)dx \qquad (a\geq 0\ ;\ t>0)}$$

مثال ۵-۴۲ پیچش دو تابع $f(t)=t$ و $g(t)=H_1(t)$ را بدست آورید. $(t\geq 0)$

حل با استفاده از رابطه بالا خواهیم داشت:

$$f(t)*H_a(t)=H_a(t)\int_a^t f(t-x)dx$$

$$t*H_1(t)=H_1(t)\int_1^t (t-x)dx=\frac{-1}{2}(t-x)^2\Big|_{x=1}^{x=t}H_1(t)=\frac{1}{2}(t-1)^2H_1(t)\ \blacksquare$$

توضیح: اگر فرمول را در ذهن نداشته باشیم می‌توان پیچش را مستقیما بصورت زیر نیز بدست آورد:

$$t*H_1(t)=\int_0^t (t-x)H_1(x)\,dx$$

۱- اگر $0\leq t\leq 1$ در اینصورت $H_1(x)=0$ بوده, لذا $t*H_1(t)$ برابر صفر است.

۲- اگر $t>1$ تابع پله‌ای برای وقتی $0\leq x\leq 1$ برابر صفر و برای وقتی $1<x\leq t$ برابر واحد است. لذا:

$$t*H_1(t)=\int_0^1 0\,dx+\int_1^t (t-x)\,dx=\frac{1}{2}(t-1)^2$$

حال می‌توان هر دو جواب را بصورت یک ضابطه و به فرم $\frac{1}{2}(t-1)^2H_1(t)$ بیان کرد. $\blacksquare$

مثال ۵-۴۳ الف: پیچش دو تابع $f(t)=e^t$ و $g(t)=H_1(t)-H_2(t)$ را بدست آورید. ب: درستی قضیه پیچش را برای آن بررسی کنید. $(t\geq 0)$

حل الف: مشابه مثال قبل خواهیم داشت:

$$f(t)*H_a(t)=H_a(t)\int_a^t f(t-x)dx$$

$$e^t*\big(H_1(t)-H_2(t)\big)=H_1(t)\int_1^t e^{t-x}\,dx-H_2(t)\int_2^t e^{t-x}\,dx$$

$$=e^tH_1(t)\int_1^t e^{-x}\,dx-e^tH_2(t)\int_2^t e^{-x}\,dx=e^tH_1(t)(e^{-1}-e^{-t})-e^tH_2(t)(e^{-2}-e^{-t})$$

$$\rightarrow f*g=H_1(t)(e^{t-1}-1)-H_2(t)(e^{t-2}-1)\ \blacksquare$$

ب: حال برای بررسی درستی قضیه پیچش بایستی کنترل کنیم که $\mathcal{L}(f*g)=\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$. برای این منظور:

$$\mathcal{L}(f*g)=\frac{e^{-s}}{s-1}-\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s-1}+\frac{e^{-2s}}{s}=\frac{e^{-s}}{s(s-1)}-\frac{e^{-2s}}{s(s-1)}$$

$$\mathcal{L}(f*g)=\frac{1}{s-1}\left(\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s}\right)=\mathcal{L}(e^t)\mathcal{L}\big(H_1(t)-H_2(t)\big)=\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)\quad \boxed{\surd}\ \blacksquare$$

توضیح ۱: برای قسمت الف می‌توان پیچش را مستقیما بصورت زیر نیز بدست آورد:

$$f*g=\int_0^t f(t-x)g(x)\,dx=\int_0^t e^{t-x}\big(H_1(x)-H_2(x)\big)\,dx=e^t\int_0^t e^{-x}\big(H_1(x)-H_2(x)\big)\,dx$$

از آنجا که انتگرال شامل تابع پله‌ای می‌باشد, لذا برای مقادیر مختلف t حاصل انتگرال متفاوت است.

۱- اگر $0\le t\le 1$ هر دو تابع پله‌ای داخل انتگرال, صفر بوده لذا $f*g=0$ بدست می‌آید.

۲- اگر $1<t\le 2$ اولین تابع پله‌ای فقط برای وقتی $1<x\le t$ برابر واحد و دومی همواره صفر است. لذا:

$$f*g=e^t\int_0^t e^{-x}\,dx=e^t\left(\int_0^1 0\,dx+\int_1^t e^{-x}\,dx\right)=e^{t-1}-1$$

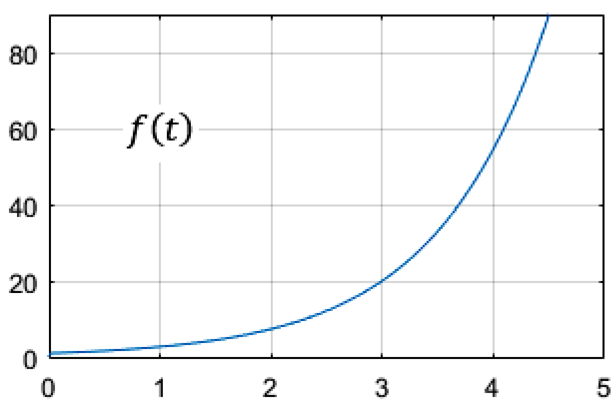
۳- اگر $2<t$ عبارت $H_1(x)-H_2(x)$ فقط برای وقتی $1<x\le 2$ غیر صفر است. لذا:

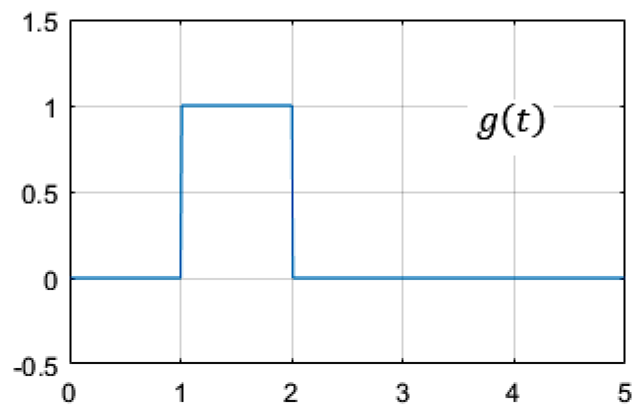
$$f*g=e^t\int_0^t e^{-x}\,dx=e^t\left(\int_0^1 0\,dx+\int_1^2 e^{-x}\,dx+\int_2^t 0\,dx\right)=e^{t-1}-e^{t-2}$$

در مجموع جواب را می‌توان بصورت زیر خلاصه کرد:

$$f*g=\begin{cases}0 & 0<t<1\\ e^{t-1}-1 & 1<t<2\\ e^{t-1}-e^{t-2} & 2<t\end{cases}\rightarrow f*g=H_1(t)(e^{t-1}-1)+H_2(t)(1-e^{t-2})$$

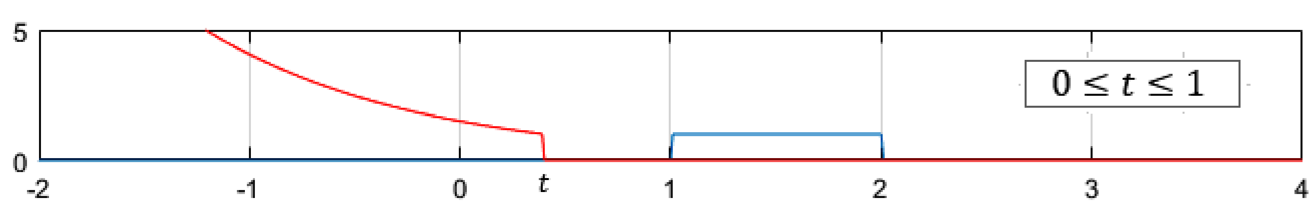
توضیح ۲: می‌توان درست مشابه آنچه در بخش ۵-۳-۳ دیده شد پیچش دو تابع را بصورت تصویری نیز بدست آورد, که عملا همان روش بالا است اما به شکل تصویری.



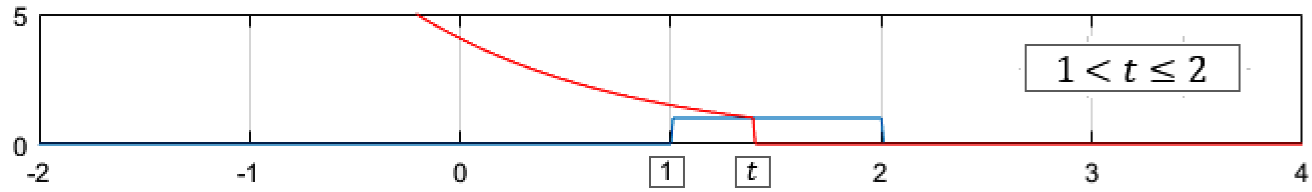


$$f(t)=e^t\rightarrow f(t-x)=e^{t-x}\rightarrow f(t)*g(t)=\int_0^t f(t-x)g(x)\,dx=\int_0^t e^{t-x}g(x)dx$$

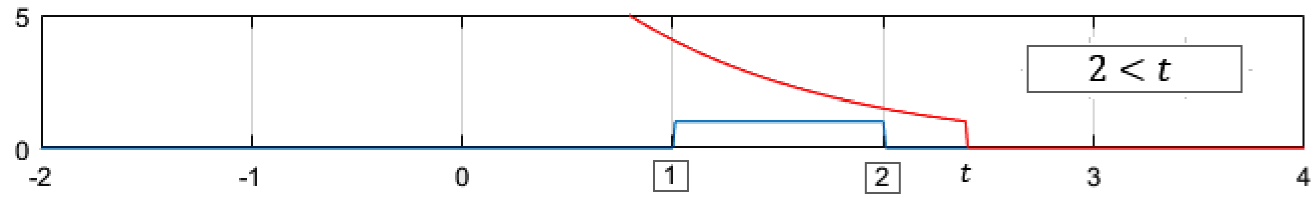
بسته به مقدار t , به ترتیب حالات زیر را در نظر می‌گیریم:



1) $0\le t\le 1\rightarrow$ بدون همپوشانی $\rightarrow f(t)*g(t)=0$



$$2)\ \ 1 < t \le 2 \to f(t) * g(t) = \int_1^t e^{t-x} \underbrace{g(x)}_{1}\, dx = e^{t-1} - 1$$



$$3)\ \ 2 < t \to f(t) * g(t) = \int_1^2 e^{t-x} \underbrace{g(x)}_{1}\, dx = e^{t-1} - e^{t-2} \ \blacksquare$$

مثال ۵-۴۴ معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$1)\ \ y'' - y = e^{-t}H_3(t) \ \ ; \ \ y(0) = y'(0) = 0$$

حل مشابه قبل بایستی از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس گرفته شود. ابتدا لاپلاس $f(t)$ را بدست می‌آوریم.

$$f(t) = e^{-t}H_3(t) = e^{-3}e^{-(t-3)}H_3(t) \to F(s) = e^{-3}e^{-3s}\mathcal{L}(e^{-t}) = \frac{e^{-3(s+1)}}{s+1}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - Y(s) = F(s) \to Y(s) = \frac{F(s)}{s^2-1} = e^{-3}\frac{e^{-3s}}{(s-1)(s+1)^2}$$

$$\frac{1}{(s-1)(s+1)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B_1}{s+1} + \frac{B_2}{(s+1)^2} \to A = \frac{1}{4} \ \ ; \ \ B_1 = -\frac{1}{4} \ \ ; \ \ B_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\to Y(s) = \frac{e^{-3}}{4}e^{-3s}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} - 2\frac{1}{(s+1)^2}\right)$$

حال با استفاده از رابطه $\mathcal{L}^{-1}(e^{-as}F(s)) = H_a(t)\mathcal{L}^{-1}(F(s))|_{t\to t-a}$ خواهیم داشت:

$$\to y(t) = \frac{e^{-3}}{4}H_3(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} - 2\frac{1}{(s+1)^2}\right)\Bigg|_{t\to t-3} ; \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)^n}\right) = e^{at}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\to y(t) = \frac{e^{-3}}{4}H_3(t)\left(e^{t-3} - e^{-(t-3)} - 2(t-3)e^{-(t-3)}\right) = \frac{1}{4}H_3(t)\left((5-2t)e^{-t} + e^{t-6}\right) \ \blacksquare$$

توضیح: می‌توان مساله را مشابه روشی که در بخش ۵-۳-۲ عنوان شد نیز حل کرد. خواهیم داشت:

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2-1} \to y(t) = sinht * f(t) = sinht * e^{-t}H_3(t)$$

در اینجا مساله به فرم پیچش $sinht$ در $H_a(t)$ نبوده و تابع هویساد در تابع دیگری (e^{-t}) نیز ضرب شده است. لذا با نوشتن فرمول پیچش, از رابطه کلی‌ترِ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^t f(t,x)H_a(x)\,dx = H_a(t)\int_a^t f(t,x)\,dx$$

$$y(t) = \int_0^t \underbrace{sinh(t-x)e^{-x}}_{f(t,x)} H_3(x)\,dx \to y(t) = H_3(t)\int_3^t sinh(t-x)e^{-x}\,dx$$

$$= H_3(t)\int_3^t \frac{e^{t-x}-e^{-(t-x)}}{2}e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}H_3(t)\int_3^t (e^{t-2x}-e^{-t})\,dx$$

$$= \frac{1}{4}H_3(t)\big((5-2t)e^{-t}+e^{t-6}\big)$$

دیده میشود که با این روش نیازی به محاسبه $F(s)$ نبوده و محاسبات نهایی نیز با توجه به اینکه نیاز به تجزیه کسر نمی‌باشد ساده‌تر شده است. ■

$$2)\ \ y''+y=f(t)\ ;\ \ f(t)=\begin{cases} t & 0\le t<4 \\ 3 & t\ge 4\end{cases}\ \ ;\ \ y(0)=y'(0)=0$$

مشابه قسمت قبل عمل می‌کنیم. لاپلاس $f(t)$ قبلا در مثال ۵-۴۰ قسمت ۲ (و نیز ۵-۴۱ قسمت ۶) بصورت زیر بدست آمد:

$$H_a(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & t\ge a\end{cases} \to f(t)=t-tH_4(t)+3H_4(t) \to F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-4s}}{s^2}-\frac{e^{-4s}}{s}$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+Y(s)=F(s)\to Y(s)=\frac{F(s)}{s^2+1}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2(s^2+1)}-\frac{e^{-4s}}{s^2(s^2+1)}-\frac{e^{-4s}}{s(s^2+1)}=Y_1(s)-e^{-4s}Y_1(s)-e^{-4s}Y_2(s)$$

$$Y_1(s)=\frac{1}{s^2(s^2+1)}=\frac{As+B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+1}\to A=C=0;B=1;D=-1$$

$$Y_2(s)=\frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}\to A=1;B=-1;C=0$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}-\left(\frac{e^{-4s}}{s^2}-\frac{e^{-4s}}{s^2+1}\right)-\left(\frac{e^{-4s}}{s}-\frac{se^{-4s}}{s^2+1}\right)$$

$$y(t)=t-sint-(t-4)H_4(t)+sin(t-4)H_4(t)-H_4(t)+cos(t-4)H_4(t)$$

$$y(t)=t-sint+[3-t+sin(t-4)+cos(t-4)]H_4(t)$$

$$y(t)=\begin{cases} t-sint & , \quad 0\le t<4\\ 3-sint+sin(t-4)+cos(t-4) & , \quad t\ge 4\end{cases} \quad ■$$

<u>توضیح ۱</u>: برای $\frac{1}{s^2(s^2+1)}$ می‌توان با استفاده از قضیه تبدیل لاپلاس انتگرال (اثر $\frac{1}{s}$) به صورت زیر نیز عمل کرد:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right)=\int_0^t sinx dx=1-cost \quad ; \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right)=\int_0^t (1-cosx)dx$$

<u>توضیح ۲</u>: بدیهی است میتوان مشابه آنچه قبلا در معادلات مرتبه دوم دیده‌ایم نیز این معادله را حل کرد که قدری طولانی‌تر است. چرا که نیاز به حل دو مساله جداگانه خواهیم داشت. بنابراین استفاده از تبدیل لاپلاس برای حل معادلاتی که قسمت غیرهمگنی آن, توابع چندضابطه‌ای میباشد, ساده‌تر است. روش دیگر حل این مساله نیز درست مشابه توضیحی است که در قسمت الف دیده شد و در تمرین ۵ از شما خواسته شده است که مساله را با این روش نیز حل کنید. ■

مثال ۵-۴۵ معادله انتگرالی زیر را حل کنید.

$$f(t)-\int_0^t e^{x-t}cos(x-t)f'(x)\,dx=(t-\pi)H_\pi(t)$$

حل انتگرال داده شده بیانگر پیچش دو تابع $e^{-t}cost$ و $f'(t)$ می‌باشد, در نتیجه با لاپلاس گرفتن از دو طرف خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{\mathcal{L}}\mathcal{L}(f)-\mathcal{L}(e^{-t}cost)\times\mathcal{L}(f')=e^{-\pi s}\mathcal{L}(t)\rightarrow F(s)-\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)\big(sF(s)-f(0)\big)=\frac{e^{-\pi s}}{s^2}$$

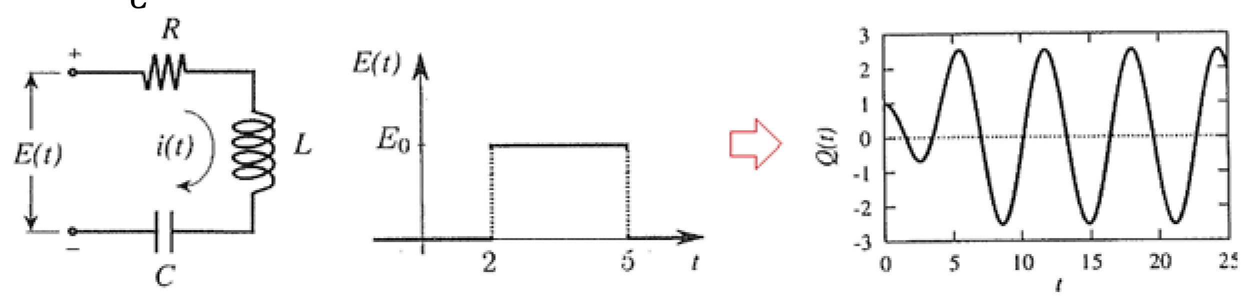
با جایگذاری $t=0$ در معادله انتگرالی $f(0)=0$ بدست می‌آید. لذا:

$$\rightarrow F(s)\left(1-\frac{s^2+s}{s^2+2s+2}\right)=\frac{e^{-\pi s}}{s^2}\rightarrow F(s)=\frac{s^2+2s+2}{s^2(s+2)}e^{-\pi s}$$

$$F(s)=\left(\frac{\frac{1}{2}}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{\frac{1}{2}}{s+2}\right)e^{-\pi s}\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}f(t)=\frac{1}{2}H_\pi(t)\big(1+2(t-\pi)+e^{-2(t-\pi)}\big)\quad\blacksquare$$

مثال ۵-۴۶ در مدار RLC نشان داده شده در شکل زیر, فرض کنید $R=0$ و $E(t)$ بصورت پالس مستطیلی نشان داده شده باشد. مقدار بار خازن (Q) را بیابید. بار اولیه خازن برابر Q_0 و جریان اولیه نیز صفر است. (در شکل سمت راست, جواب نهایی نیز رسم شده است)

$$LQ''+RQ'+\frac{1}{C}Q=E(t)\quad;\quad Q(0)=Q_0\quad;\quad Q'(0)=i(0)=0$$



حل از آنجا که $i(t)=\frac{dQ}{dt}$ لذا $Q'(0)=i(0)=0$ خواهد بود. پس می‌توان اینگونه تصور کرد که کلیدی در لحظه $t=0$ باز و پس از آن بسته میشود.

$$R=0\rightarrow LQ''+\frac{1}{C}Q=E_0[H_2(t)-H_5(t)]$$

اگر لاپلاس $Q(t)$ را با $\overline{Q}(s)$ نمایش دهیم, خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{\mathcal{L}}L\left(s^2\overline{Q}(s)-sQ(0)-Q'(0)\right)+\frac{1}{C}\overline{Q}(s)=E_0\left(\frac{e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-5s}}{s}\right)$$

$$\rightarrow\overline{Q}(s)\left(s^2+\frac{1}{LC}\right)=Q_0s+\frac{E_0}{L}\frac{1}{s}(e^{-2s}-e^{-5s})$$

$$\rightarrow \overline{Q}(s)=\frac{Q_0 s}{s^2+\frac{1}{LC}}+\frac{E_0}{L}\frac{1}{s\left(s^2+\frac{1}{LC}\right)}\left(e^{-2s}-e^{-5s}\right)$$

حال اگر $\omega^2=\frac{1}{LC}$ انتخاب شود, مخرج به فرم $s^2+\omega^2$ خواهد شد که فرمِ لاپلاس شناخته شده‌ای می‌باشد.

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}\rightarrow \overline{Q}(s)=\frac{Q_0 s}{s^2+\omega^2}+\frac{E_0}{L}\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\left(e^{-2s}-e^{-5s}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-as}F(s)\right)=H_a(t)f(t-a)\quad;\quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right)=\frac{1-cos(\omega t)}{\omega^2}$$

$$Q(t)=Q_0cos(\omega t)+\frac{E_0}{L}\left(H_2(t)\frac{1-cos\big(\omega(t-2)\big)}{\omega^2}-H_5(t)\frac{1-cos\big(\omega(t-5)\big)}{\omega^2}\right)$$

$$\omega^2=\frac{1}{LC}\rightarrow Q(t)=\underbrace{Q_0cos(\omega t)}_{Q_c(t)}+\underbrace{E_0C\big[H_2(t)\big(1-cos\omega(t-2)\big)-H_5(t)\big(1-cos\omega(t-5)\big)\big]}_{Q_p(t)}$$

که می‌توان آنرا بصورت یک تابع سه ضابطه‌ای بصورت زیر بیان کرد:

$$Q(t)=\begin{cases}Q_0cos(\omega t) & 0\le t<2\\ Q_0cos(\omega t)+E_0C\big(1-cos\omega(t-2)\big) & 2<t<5\\ Q_0cos(\omega t)+E_0C\big(cos\omega(t-5)-cos\omega(t-2)\big) & 5<t\end{cases}$$

در شکل بالا (سمت راست) این جواب برای حالت خاص $Q_0=E_0=L=C=1$ رسم شده است. در اینجا نیز علت نامگذاری $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ با نماد ω مشخص شد, چرا که ضریبِ t در کسینوس بوده و با مفهوم فیزیکی آن (فرکانس زاویه‌ای) همخوانی دارد. ■

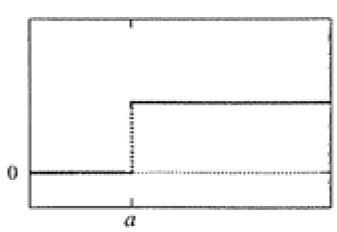
توضیح ۱: دیده میشود استفاده از تابع هویساید و تبدیل لاپلاس حل مساله را به مراتب ساده‌تر از روش حل معمول کرده است. چرا که جواب برای تمام بازه $0<t<\infty$ به سادگی بدست آمد. اگر قرار باشد با روشهای حل معادلات مرتبه دو این مساله را حل کنیم, به ناچار می‌بایستی سه مساله جداگانه بصورت زیر حل شود.

1) $0\le t\le 2\ ;\ LQ''+Q/C=0\ ;\ Q(0)=Q_0\ ;\ Q'(0)=0\ \rightarrow\ Q(2)=a\ ;\ Q'(2)=b$

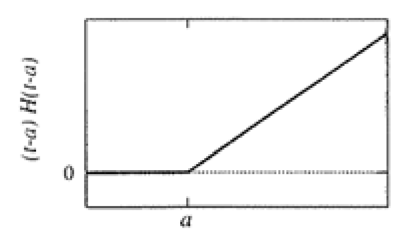
2) $2\le t\le 5\ ;\ LQ''+Q/C=E_0\ ;\ Q(2)=a\ ;\ Q'(2)=b\ \rightarrow\ Q(5)=c\ ;\ Q'(5)=d$

3) $5\le t<\infty\ ;\ LQ''+Q/C=0\ ;\ Q(5)=c\ ;\ Q'(5)=d$

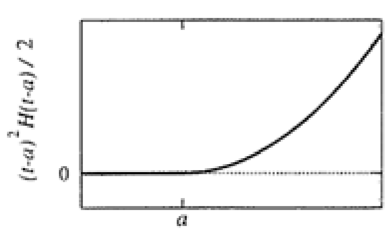
توضیح ۲: چرا در حالی که ورودی مساله یعنی $E(t)$ تابعی ناپیوسته است, جواب $Q(t)$ بصورت پیوسته بدست آمد؟ علت اصلی آن است که اصولا حل یک معادله دیفرانسیل یک فرایند انتگرال گیری است و انتگرال گیری فرایندی هموار ساز است. بعنوان یک مثال ساده‌تر در شکل زیر دوبار از $H_a(t)$ انتگرال گیری شده است. ■



$H_a(t)$



$h_a(t)=(t-a)H_a(t)$



$(t-a)^2H_a(t)/2$

مثال ۵-۴۷ الف: در مثال ۵-۳۹ با فرض $x(0)=\dot{x}(0)=0$ پاسخ ارتعاش یک سیستم جرم-فنر را برای بار ثابت بصورت $f(t)=AH_a(t)$ بدست آورید. ب: پاسخ ارتعاش یک سیستم جرم-فنر را برای بار شیب بصورت $f(t)=Bh_a(t)$ بدست آورید. ج: به کمک دو قسمت قبل پاسخ ارتعاش سیستم زیر را بدست آورید:

$$m\ddot{x}+kx=f(t)\quad ;\quad f(t)=\begin{cases}100 & 0\le t\le 0.1\\ 1000(0.2-t) & 0.1\le t\le 0.2\\ 0 & 0.2\le t\end{cases}\quad ;\quad x(0)=\dot{x}(0)=0$$

حل الف: مشابه قسمت الف مثال ۵-۳۹ خواهیم داشت:

$$m\ddot{x}+kx=f(t)=AH_a(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}m\left(s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)\right)+kX(s)=A\frac{e^{-as}}{s}$$

$$\xrightarrow{\omega_n^2=\frac{k}{m}}X(s)=\frac{Ae^{-as}}{ms(s^2+\omega_n^2)}=\frac{Ae^{-as}}{k}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega_n^2}\right)\to x(t)=\frac{A}{k}\left(1-cos\omega_n(t-a)\right)H_a(t)$$

ب: مشابه قسمت قبل:

$$m\ddot{x}+kx=f(t)=Bh_a(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}m\left(s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)\right)+kX(s)=B\frac{e^{-as}}{s^2}$$

$$X(s)=\frac{Be^{-as}}{k}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+\omega_n^2}\right)\to x(t)=\frac{B}{k}\left((t-a)-\frac{sin\omega_n(t-a)}{\omega_n}\right)H_a(t)$$

ج: بار $f(t)$ را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

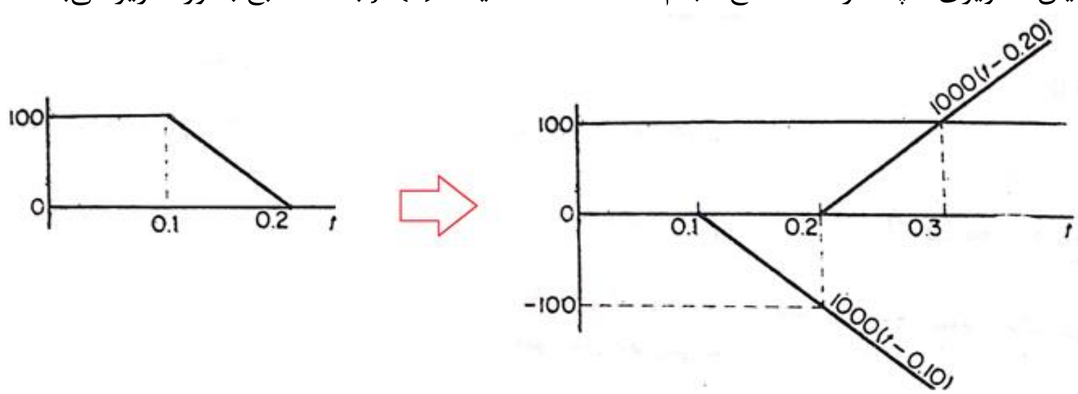
$$\begin{aligned}f(t)&=100\left(H_0(t)-H_{0.1}(t)\right)+1000(0.2-t)\left(H_{0.1}(t)-H_{0.2}(t)\right)\\&=100H_0(t)-1000(t-0.1)H_{0.1}(t)+1000(t-0.2)H_{0.2}(t)\end{aligned}$$

$$h_a(t)=(t-a)H_a(t)\to f(t)=100H_0(t)-1000h_{0.1}(t)+1000h_{0.2}(t)$$

از آنجا که ترم ناهمگن بصورت مجموع سه بخش بوده و پاسخ برای هر یک از بخشها بدست آمده است, در نتیجه:

$$x(t)=\frac{100}{k}(1-cos\omega_n t)H_0(t)-\frac{1000}{k}\left((t-0.1)-\frac{sin\omega_n(t-0.1)}{\omega_n}\right)H_{0.1}(t)$$
$$+\frac{1000}{k}\left((t-0.2)-\frac{sin\omega_n(t-0.2)}{\omega_n}\right)H_{0.2}(t)\quad ■$$

<u>توضیح</u>: در واقع بیان تصویری آنچه در قسمت ج انجام شده است, تفکیک $f(t)$ به سه تابع بصورت زیر می‌باشد: ■

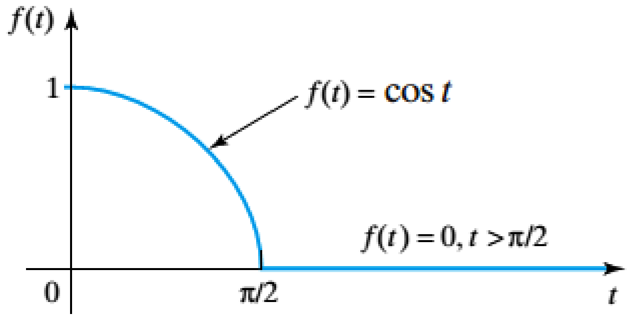


تمرینات بخش ۵-۴

۱- لاپلاس توابع $P(t;a,b)$ و $h_a(t)$ را بدست آورید.

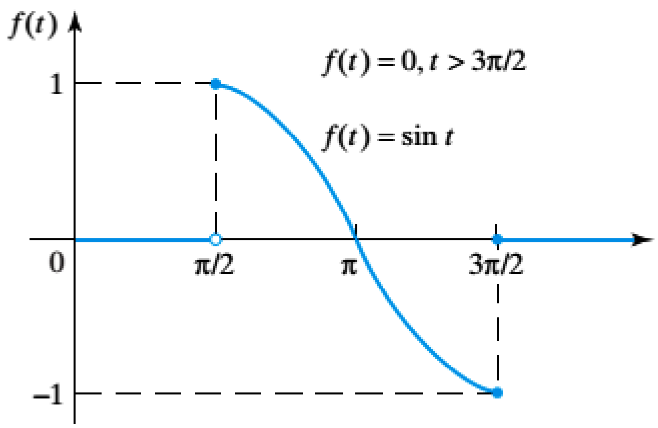
۲- نشان دهید: $\mathcal{L}([t])=\frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$

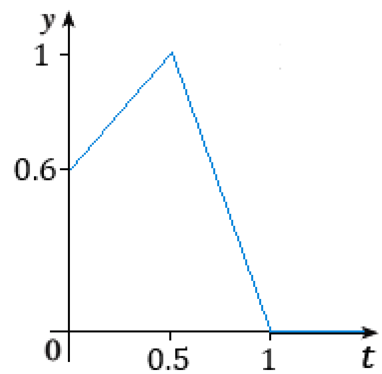
۳- تبدیل لاپلاس تابع $y=f(t)$ را بیابید.



$$\underline{Ans}\ :\ \mathcal{L}(f)=\frac{s+e^{-\frac{\pi s}{2}}}{s^2+1}$$

۴- تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید.





$$\underline{Ans:}\quad \mathcal{L}(f)=se^{-\frac{3\pi s}{2}}\frac{e^{\pi s}+1}{s^2+1}\qquad ;\qquad \mathcal{L}(f)=\frac{0.8+0.6s-2.8e^{-s/2}+2e^{-s}}{s^2}$$

۵- قسمت دوم مثال ۵-۴۴ را مشابه روشی که در بخش ۵-۳-۲ عنوان شد مجددا حل کنید.

۶- حاصل انتگرال زیر را با استفاده از قضایای تبدیل لاپلاس بدست آورید.

$$I=\int_3^{\infty} te^{-2t}cosh(t-3)\,dt\qquad ;\qquad \underline{Ans:}\ I=\frac{23}{9}e^{-6}$$

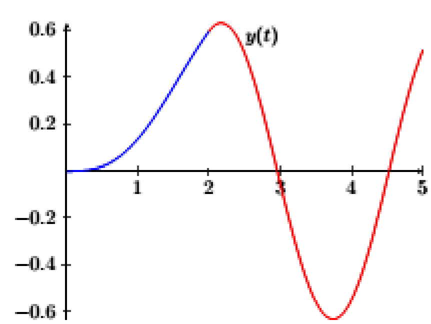
۷- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. (جواب در سمت راست ترسیم شده است)

$$y''+4y=f(t)\ ;\quad f(t)=\begin{cases} t & 0\le t<2\\ 0 & t\ge 2\end{cases}$$

$$y(0)=0\ ;\ y'(0)=0$$

$$\underline{Ans:}\ y(t)=\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}sin2t$$

$$+H_2(t)\left(-\frac{1}{4}t+\frac{1}{8}sin2(t-2)+\frac{1}{2}cos2(t-2)\right)$$



۸- در مدار RLC مثال ۵-۴۶, با فرض $L = 0$ و $R = C = 1$ مقدار بار خازن (Q) را بیابید.

$$RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t) \quad ; \quad E(t) = \begin{cases} 50t & 0 < t < 2 \\ 40 & t > 2 \end{cases} \quad ; \quad Q(0) = 0$$

<u>Ans:</u> $Q(t) = 50(t - 1 + e^{-t}) + H_2(t)(90 - 50t + 10e^{2-t})$

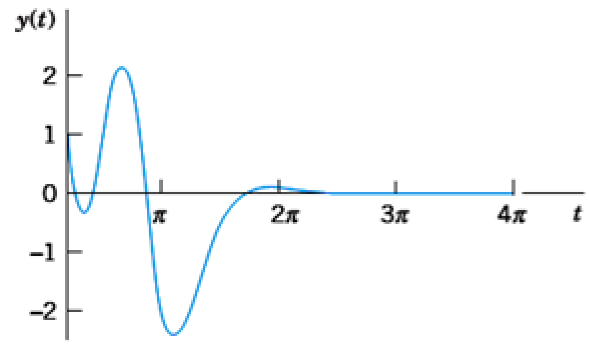
۹- معادله دیفرانسیل $y'' + 2y' + 2y = f(t)$ را حل کنید. (جواب در سمت راست ترسیم شده است)

$$f(t) = \begin{cases} 10sin(2t) & 0 \le t < \pi \\ 0 & t \ge \pi \end{cases}$$

$y(0) = 1 \quad ; \quad y'(0) = -5$

<u>Ans:</u> $y(t)$

$$= \begin{cases} 3e^{-t}cost - 2cos(2t) - sin(2t) & 0 \le t < \pi \\ e^{-t}[(3 + 2e^{\pi})cost + 4e^{\pi}sint] & t \ge \pi \end{cases}$$



❋ ۱۰- الف: قسمت ج از مثال ۵-۴۷ را مشابه قسمت ج از مثال ۵-۳۹ یعنی با استفاده از انتگرال دوهامل مجددا حل کنید.

ب: قسمت ج از مثال ۵-۳۹ را مشابه قسمت ج از مثال ۵-۴۷ یعنی با نوشتن $f(t)$ بر حسب تابع ثابت و شیب مجددا حل کنید.

۵-۵- تبدیل لاپلاس توابع متناوب

اگر $f(t)$ تابعی تکه‌ای پیوسته و متناوب با دوره تناوب T باشد, آنگاه:

$$\boxed{F(s) = \frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1 - e^{-sT}} \qquad (9)}$$

که صورت کسر معادل لاپلاس تابع f صرفا در یک دوره تناوب است که می‌توان آنرا با $\mathcal{L}(f_T)$ نمایش داد.

<u>اثبات</u>: با نوشتن رابطه تبدیل لاپلاس $f(t)$ و تفکیک آن به دو بازه خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}(f) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt = \int_0^{T} e^{-st}f(t)dt + \int_T^{\infty} e^{-st}f(t)dt \qquad (s > 0)$$

$$\xrightarrow{t=T+u} \int_T^{\infty} e^{-st}f(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-s(T+u)}f(T+u)du = e^{-sT}\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-su}f(u)du}_{F(s)}$$

$$F(s) = \int_0^{T} e^{-st}f(t)dt + e^{-sT}F(s) \to F(s) = \frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1 - e^{-sT}} = \frac{\mathcal{L}(f_T)}{1 - e^{-sT}}$$

<u>توضیح</u>: روش دوم اثبات بصورت زیر است:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st}f(t)dt$$

هر یک از انتگرالهای داخل زیگما را می‌توان با تغییر متغیر بصورت زیر بیان کرد:

$$x = t - nT \rightarrow \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)dt = \int_0^T e^{-s(x+nT)} \underbrace{f(x+nT)}_{f(x)} dx = e^{-nsT} \int_0^T e^{-sx} f(x)dx$$

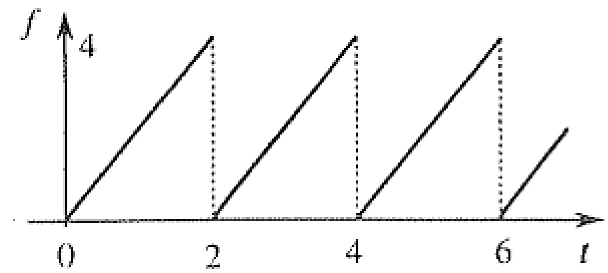
$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-nsT} \int_0^T e^{-sx} f(x)dx \right) = \int_0^T e^{-sx} f(x)dx \times \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT}$$

اما سری $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT}$ یک سری هندسی با قدر نسبت e^{-sT} بوده و برای $|e^{-sT}| < 1$ همگرا است. لذا:

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-sx} f(x)dx = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)dt}{1-e^{-sT}} \qquad ; \qquad |e^{-sT}| < 1 \rightarrow s > 0$$

توجه شود که شیوه اثبات دوم از آن جهت ارائه شد که اگر قرار باشد از لاپلاس معکوس یک تابع متناوب به خودِ تابع برسیم, معمولا آنچه در بالا دیده شد را بصورت برعکس دنبال می‌کنیم. به عبارتی بجای $\frac{1}{1-e^{-as}}$ از $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nas}$ استفاده کرده و لاپلاس معکوسِ تک تک جملات را محاسبه می‌کنیم. در قسمت ب مثالهای ۵-۴۸ و ۵-۵۰ این موضوع را خواهیم دید.

مثال ۵-۴۸ الف: لاپلاس تابع زیر را بدست آورید. ب: با توجه به لاپلاس معکوسِ بدست آمده, تابع $f(t)$ را بدست آورید.



$$a)\ \mathcal{L}(f_T) = \int_0^2 e^{-st}(2t)dt = \frac{2-2e^{-2s}-4e^{-2s}}{s^2}$$

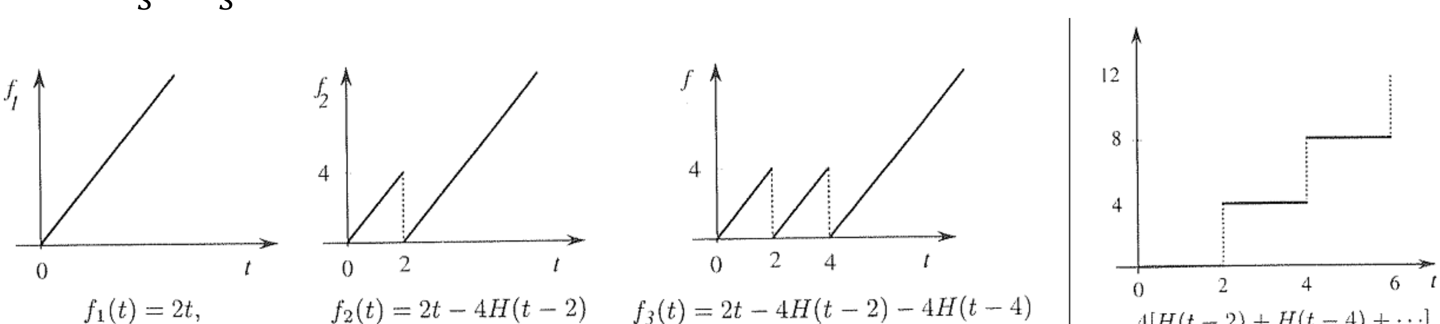
همچنین می‌توان تابع را در یک دوره تناوب بصورت $f_T = 2t\big(H_0(t) - H_2(t)\big) = 2t - 2tH_2(t)$ نیز بیان کرده و لاپلاس آنرا محاسبه کرد. خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}(f_T) = \mathcal{L}\big(2t - 2tH_2(t)\big) = \frac{2}{s^2} - 2e^{-2s}\mathcal{L}(t+2) = \frac{2-2e^{-2s}-4e^{-2s}}{s^2}$$

$$\rightarrow F(s) = \frac{\mathcal{L}(f_T)}{1-e^{-sT}} = \frac{\int_0^2 e^{-st}(2t)dt}{1-e^{-2s}} = \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s}\frac{e^{-2s}}{1-e^{-2s}} \quad \blacksquare$$

ب: از آنجا که $|e^{-2s}| < 1$ میباشد (زیرا $s > 0$) , لذا با نوشتن سری هندسی تابع $\frac{e^{-2s}}{1-e^{-2s}}$ خواهیم داشت:

$$F(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s}(e^{-2s} + e^{-4s} + \cdots) \rightarrow f(t) = 2t - 4(H_2(t) + H_4(t) + \cdots) \quad \blacksquare$$



توضیح: دقت شود الزاما وجود ترم $1-e^{-sT}$ در مخرج یک کسر, بیانگر آن نیست که با لاپلاس یک تابع متناوب روبرو هستیم. مثلا در شکل بالا سمت راست دیده میشود که $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s}\frac{e^{-2s}}{1-e^{-2s}}\right)$ یک تابع پلکانی است و کم شدن این تابع از $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2}\right)$ باعث میشود تا به یک تابع متناوب برسیم. لازم به ذکر است که هر تابع متناوبی را میتوان بصورت مجموعی از بینهایت جمله شامل تابع هویساید بیان کرد (توضیح مثال ۵-۵۰). ■

مثال ۵-۴۹ لاپلاس تابع زیر را بدست آورید.

$$f(t)=\begin{cases} t & 0\le t\le \pi \\ 2\pi-t & \pi\le t<2\pi \end{cases}\quad ;\quad f(t)=f(t+2\pi)$$

حل لاپلاس تابع در یک دوره تناوب برابر است با:

$$\mathcal{L}(f_T)=\int_0^T e^{-st}f(t)dt=\int_0^\pi e^{-st}(t)dt+\int_\pi^{2\pi} e^{-st}(2\pi-t)dt=\frac{e^{-2\pi s}-2e^{-\pi s}+1}{s^2}$$

همچنین می‌توان تابع را در یک دوره تناوب بصورت $f_T=t\big(H_0(t)-H_\pi(t)\big)+(2\pi-t)\big(H_\pi(t)-H_{2\pi}(t)\big)$ نیز بیان کرده و لاپلاس آنرا محاسبه کرد. در نهایت:

$$F(s)=\frac{\mathcal{L}(f_T)}{1-e^{-sT}}=\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}=\frac{e^{-2\pi s}-2e^{-\pi s}+1}{s^2(1-e^{-2\pi s})}=\frac{1-e^{-\pi s}}{s^2(1+e^{-\pi s})}=\frac{1}{s^2}tanh\left(\frac{\pi s}{2}\right)\quad ■$$

مثال ۵-۵۰ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. فرض کنید تابع $f(t)$ دارای دوره تناوب $T=4$ میباشد.

$$y''+y=f(t)\quad ;\quad y(0)=y'(0)=0\quad ;\quad f(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<2\\ 0 & 2\le t<4\end{cases}$$

حل از آنجا که تابع $f(t)$ متناوب است خواهیم داشت:

$$F(s)=\frac{\mathcal{L}(f_T)}{1-e^{-4s}}=\frac{\int_0^4 e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-4s}}=\frac{\int_0^2 e^{-st}dt}{1-e^{-4s}}=\frac{1-e^{-2s}}{s(1-e^{-4s})}=\frac{1}{s(1+e^{-2s})}$$

همچنین می‌توان تابع را در یک دوره تناوب بصورت زیر بیان کرده و لاپلاس آنرا محاسبه کرد. خواهیم داشت:

$$f_T=1\big(H_0(t)-H_2(t)\big)=1-H_2(t)\to\mathcal{L}(f_T)=\frac{1}{s}-\frac{e^{-2s}}{s}\to F(s)=\frac{\mathcal{L}(f_T)}{1-e^{-4s}}=\frac{1}{s(1+e^{-2s})}$$

حال لاپلاس دو سمت معادله را بدست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+Y(s)=F(s)\to Y(s)=\frac{F(s)}{s^2+1}=\frac{1}{s(s^2+1)(1+e^{-2s})}$$

$$Y(s)=\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2+1}\right)\frac{1}{1+e^{-2s}}=\frac{1}{s(1+e^{-2s})}-\frac{s}{(s^2+1)(1+e^{-2s})}=Y_1(s)-Y_2(s)$$

لاپلاس معکوس $Y_1(s)$ همان $f(t)$ می‌باشد. برای محاسبه معکوس دومین عبارت, از سری هندسی استفاده می‌کنیم. از آنجا که با انتخاب شرط $s>0$ خواهیم داشت $|e^{-2s}|<1$, لذا:

$$\frac{1}{1+e^{-2s}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-2ns}\rightarrow Y_2(s)=\frac{s}{s^2+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-2ns}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{se^{-2ns}}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-as}F(s))=H_a(t)\mathcal{L}^{-1}(F(s))|_{t\to t-a}\rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{se^{-2ns}}{s^2+1}\right)=H_{2n}(t)cos(t-2n)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\big(Y_2(s)\big)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{se^{-2ns}}{s^2+1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n H_{2n}(t)cos(t-2n)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\big(Y_1(s)\big)=f(t)\rightarrow y(t)=f(t)-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n H_{2n}(t)cos(t-2n)\ \blacksquare$$

توضیح: دیده شد در اینجا برای محاسبه لاپلاس معکوس بایستی از سری هندسی استفاده شود. بجای اینکار می‌توان درست مشابه روشی که در بخش ۵-۳-۲ عنوان شد, مساله را از ابتدا بدون تعیین لاپلاس $f(t)$ زیر حل کرد. برای این منظور می‌توان تابع متناوب $f(t)$ را بصورت زیر بر حسب یک سری نامتناهی از تابع هویساید بیان کرد:

$$f(t)=1[H_0(t)-H_2(t)]+1[H_4(t)-H_6(t)]+1[H_8(t)-H_{10}(t)]+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n H_{2n}(t)$$

$$Y(s)=\frac{F(s)}{s^2+1}\rightarrow y(t)=sint*f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\big(sint*H_{2n}(t)\big)$$

$$sint*H_{2n}(t)=H_{2n}(t)\int_{2n}^{t}sin(t-x)dx=H_{2n}(t)\big(1-cos(t-2n)\big)$$

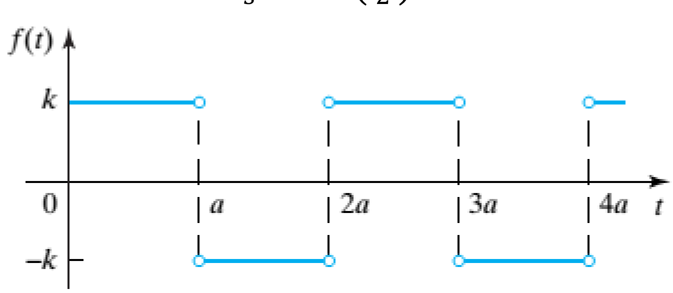
$$\rightarrow y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n H_{2n}(t)\big(1-cos(t-2n)\big)$$

که با جایگذاری $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n H_{2n}(t)$ همان نتیجه قبل بدست می‌آید. دیده می‌شود با استفاده از این روش نیاز به محاسبه لاپلاس $f(t)$ و نیز تجزیه کسر نیز نخواهد بود. ■

تمرینات بخش ۵-۵

۱- لاپلاس تابع $f(t)=[t]$ را بدست آورید. (در اینجا از لاپلاس تابع $g(t)=t-[t]$ استفاده نمایید)

۲- نشان دهید لاپلاس تابع زیر برابر است با: $F(s)=\frac{k}{s}tanh\left(\frac{as}{2}\right)\quad s>0$



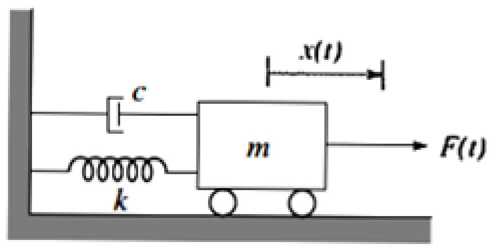
۳- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y' + y = f(t) \;\; ; \;\; f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1 \\ 0 & 1 \le t < 2 \end{cases} \;\; ; \;\; T = 2 \;\; ; \;\; y(0) = a$$

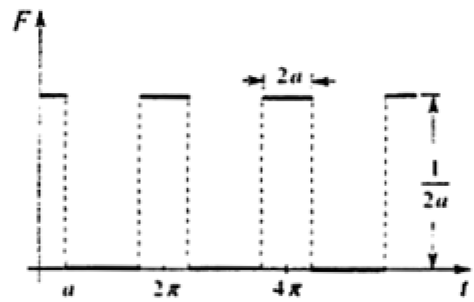
<u>Ans:</u> $y(t) = ae^{-t} + (1 - e^{-t}) - H_1(t)(1 - e^{1-t}) + H_2(t)(1 - e^{2-t}) - \cdots$

۴- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید که در آن $F(t)$ یک تابع متناوب است که در شکل زیر ارائه شده است.

$$x'' + 0.04x' + 15x = F(t) \quad ; \quad x(0) = x'(0) = 0$$



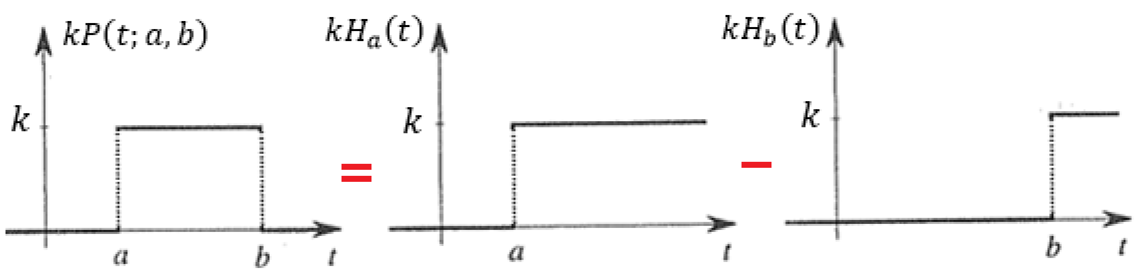
$$mx'' + cx' + kx = F(t)$$



توضیح: این معادله می‌تواند بیانگر پاسخ ارتعاش یک سیستم جرم-فنر-میراگر باشد که در آن $c = 0.04\ kg/s\ , m = 1\ kg$ و $k = 15\ \frac{kg}{s^2}$ منظور شده است.

۵-۶- تابع دلتای دیراک یا ضربه $(Dirac\ Impulse)$

تابع مستطیلی زیر را در نظر می‌گیریم. دیده شد که این تابع, تفاضل دو تابع پله‌ای (هویساید) می‌باشد.



$$f(t) = kP(t; a, b) = kH_a(t) - kH_b(t) \rightarrow \mathcal{L}\big(f(t)\big) = k\left(\frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}\right)$$

حال فرض میکنیم $k = \frac{1}{b-a}$ که در اینصورت سطح زیر مستطیل برابر واحد خواهد شد. تابع دلتای دیراک را بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$\delta_a(t) = \lim_{b \to a} f(t) = \lim_{b \to a} \frac{H_a(t) - H_b(t)}{b - a}$$

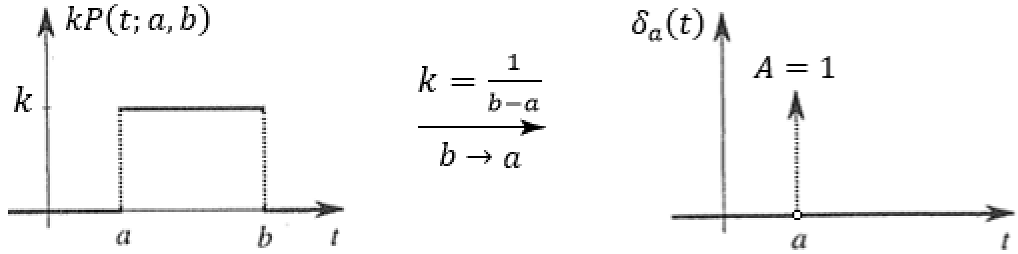
$$\rightarrow \mathcal{L}\big(\delta_a(t)\big) = \lim_{b \to a} \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{(b-a)s} = \frac{e^{-as}}{s} \lim_{h \to 0} \frac{1 - e^{-hs}}{h} = e^{-as} \quad ; \quad (h = b - a)$$

که در حالت خاص:

$$\mathcal{L}\big(\delta_0(t)\big) = 1 \rightarrow \mathcal{L}^{-1}(1) = \delta_0(t)$$

گاهی اوقات $\delta_a(t)$ را با $\delta(t-a)$ نیز نمایش میدهند. مثلا $\delta_0(t)$ بصورت $\delta(t)$ نمایش داده میشود.

این تابع را معمولا بصورت زیر نمایش میدهند:



<u>دو رابطه مهم</u>: مطابق آنچه در بالا دیده شد اگر نقطه $t=a$ داخل بازه $[b,c)$ قرار داشته باشد, حاصل $\int_b^c \delta_a(t)\,dt$ برابر واحد و در غیر اینصورت صفر است. به عبارتی:

$$1)\quad \int_b^c \delta_a(t)\,dt = \begin{cases} 1 & b \le a < c \\ 0 & a < b \ \ or \ \ a \ge c \end{cases}$$

دقت شود که <u>تعریف</u> می‌کنیم که در حالت تساوی $a=b$ نیز مقدار انتگرال برابر یک باشد. یعنی اینگونه در نظر میگیریم که تابع $\delta_a(t)$ اساسا از a به بعد تعریف میشود. بعنوان مثال:

$$\int_2^4 \delta_3(t)\,dt = 1 \quad ; \quad \int_2^4 \delta_2(t)\,dt = 1 \quad ; \quad \int_2^4 \delta_4(t)\,dt = 0$$

حال سوال این است که اگر تابع $\delta_a(t)$ در یک تابع دلخواه $f(t)$ (که در همسایگی a پیوسته است) ضرب شود حاصل انتگرال چه خواهد شد؟

$$2)\quad \int_b^c f(t)\delta_a(t)\,dt = \begin{cases} f(a) & b \le a < c \\ 0 & a < b \ \ or \ \ a \ge c \end{cases}$$

برای اثبات این رابطه میتوان گفت در حالت $a<b$ یا $a \ge c$ بدیهی است که $\delta_a(t)=0$. برای $b \le a < c$ خواهیم داشت:

$$\int_b^c f(t)\delta_a(t)\,dt = \int_b^a 0\,dt + \int_a^{a+\varepsilon} f(t)\delta_a(t)\,dt + \int_{a+\varepsilon}^c 0\,dt$$

در بازه a تا $a+\varepsilon$ مقدار $f(t)$ را میتوان با توجه به آنکه در حالت حدی $\varepsilon \to 0$, برابر $f(a)$ در نظر گرفت. در نتیجه:

$$\int_b^c f(t)\delta_a(t)\,dt = 0 + f(a)\int_a^{a+\varepsilon} \delta_a(t)\,dt + 0 = f(a) \times 1 = f(a)$$

بعنوان مثال:

$$\int_2^4 e^{2t+3}\,\underbrace{\delta_3(t)}_{\delta(t-3)}\,dt = e^9 \quad ; \quad \int_2^4 e^{2t+3}\,\underbrace{\delta_2(t)}_{\delta(t-2)}\,dt = e^7 \quad ; \quad \int_2^4 e^{2t+3}\,\underbrace{\delta_4(t)}_{\delta(t-4)}\,dt = 0$$

همچنین میتوان با استفاده از این رابطه لاپلاس دلتای دیراک را به طریق ساده‌تری بدست آورد:

$$\mathcal{L}\big(\delta_a(t)\big) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{f(t)}\,\delta_a(t)\,dt = \underbrace{e^{-as}}_{f(a)} \quad (s>0)$$

لازم بذکر است که معمولا بجای آنکه با خود تابع دلتای دیراک سروکار داشته باشیم, انتگرال آن در محاسبات بکار گرفته میشود. چرا که اساسا تعریف تابع فوق بر اساس خواص انتگرال آن است. همانند لاپلاس گرفتن از این تابع که دیده شد انتگرال آن وارد حل شده است.

توضیح ۱: تابع دلتای دیراک یک تابع تعمیم یافته یا نمادین شناخته می‌شود, چرا که دیده شد تابع دیراک در واقع بصورت یک تابع حدی تعریف شد و لذا در تعریف دقیق یک تابع نمی‌گنجد و گاهی بصورت حد یک تابع توزیع در علم آمار شناخته می‌شود. در بخش ۵-۷-۱ به معرفی دقیق توابع تعمیم یافته و خواص آنها می‌پردازیم.

توضیح ۲: قبلا دیده شد که $\lim_{s\to+\infty} F(s) = 0$ در حالیکه $\mathcal{L}\big(\delta_0(t)\big) = 1$ بدست آمده که در این قضیه صدق نمی‌کند. علت این تناقض همان مطلبی است که در توضیح قبل عنوان شد. همچنین می‌توان دید که $\lim_{s\to+\infty} s\mathcal{L}\big(\delta_0(t)\big) = f(0^+) = \infty$ که با واقعیت تطابق دارد. زیرا جهش تابع $\delta_0(t)$ در صفر برابر بینهایت است.

توضیح ۳: در برخی کاربردهای مهندسی مرسوم است که کران پایین تبدیل لاپلاس را 0^- انتخاب می‌کنند تا بدین ترتیب اثر بار دلتای دیراک(ضربه) که احیانا در زمان 0 اعمال میشود را نیز لحاظ کرده باشند. اما با تعریفی که در این قسمت برای دلتای دیراک عنوان شد, کران پایین 0^- الزامی ندارد, چرا که عنوان شد تابع $\delta_a(t)$ اساسا از a به بعد تعریف می‌شود.

۵-۶-۱- تبدیل لاپلاس حاصلضرب یک تابع در دلتای دیراک

تبدیل لاپلاس حاصلضرب $\delta_a(t)$ در یک تابع $f(t)$ (که در همسایگی a پیوسته است) عبارت است از:

$$\boxed{\mathcal{L}\big(\delta_a(t)f(t)\big) = f(a)e^{-as} \qquad (10)}$$

اثبات: با نوشتن رابطه تبدیل لاپلاس و استفاده از فرمول حاصلضرب یک تابع در $\delta_a(t)$ خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}(\delta_a(t)f(t)) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-st}f(t)}_{g(t)}\,\delta_a(t)\,dt = g(a) = f(a)e^{-as}$$

و در حالت خاص:

$$\mathcal{L}\big(\delta_a(t)\big) = \mathcal{L}(\delta_a(t)\times 1) = \underbrace{f(a)}_{1}\,e^{-as} = e^{-as}$$

مثال ۵-۵۱ تبدیلات زیر را بدست آورید.

$$1)\ \mathcal{L}\left(\delta_{\frac{\pi}{3}}(t)cost\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right)e^{-\frac{\pi}{3}s} = \frac{e^{-\frac{\pi}{3}s}}{2}\ \blacksquare$$

$$2)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(1-\frac{1}{s^2+1}\right) = \mathcal{L}^{-1}(1) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \delta_0(t) - sint\ \blacksquare$$

$$3)\ f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-a}{s^2(s+a)}\right)\ ;\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-a}{s+a}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(1-\frac{2a}{s+a}\right) = \delta_0(t) - 2ae^{-at}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-a}{s^2(s+a)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-a}{s+a}\right) = t * (\delta_0(t) - 2ae^{-at})$$

$$= \underbrace{\int_0^t (t-x)\,\delta_0(x)dx}_{t} - 2a\int_0^t (t-x)\,e^{-ax}dx = t + \frac{2}{a}(1-e^{-at}) - 2t = \frac{2}{a}(1-e^{-at}) - t\ \blacksquare$$

یکی از مواردی که ممکن است با آن روبرو شویم تعیین پیچش یک تابع دلخواه $f(t)$ در $\delta_a(t)$ است. این مورد ممکن است یا مستقیما مطرح شود یا چنانچه بخواهیم معادله‌ای را که ترم ناهمگنی آن بر حسب $\delta_a(t)$ می‌باشد, با روش ارائه شده در بخش ۵-۳-۲ (کاربرد کانولوشن) حل کنیم, در انتهای کار نیازمند این محاسبه خواهیم بود.

در ابتدا رابطه درستی رابطه کلی‌ترِ زیر را نشان می‌دهیم:

$$\boxed{\int_0^t f(t,x)\delta_a(x)\,dx = H_a(t)f(t,a) \qquad (a \geq 0\ ;\ t > 0)}$$

دلیل درستی رابطه بالا نیز بصورت زیر می‌باشد:

$$\int_b^c f(t,x)\delta_a(x)\,dx = \begin{cases} f(t,a) & b \leq a < c \\ 0 & a < b\ \ or\ \ a \geq c \end{cases} \rightarrow \int_0^t f(t,x)\delta_a(x)\,dx = \begin{cases} f(t,a) & 0 \leq a < t \\ 0 & a \geq t \end{cases}$$

از آنجا که a بر روی محور t و مثبت اختیار می‌شود, لذا پاسخ نهایی را می‌توان بصورت $H_a(t)f(t,a)$ بیان کرد.

همچنین با انتخاب $f(t,x) = 1$ دیده می‌شود که مشتق تابع هویساید برابر تابع دلتای دیراک است. زیرا:

$$f(t,x) = 1 \rightarrow \int_0^t \delta_a(x)dx = H_a(t) \rightarrow H_a'(t) = \delta_a(t)$$

مشابه آنچه در ارتباط با مشتق تابع هویساید عنوان شد این نتیجه‌گیری نیز دقیق نیست, چرا که تابع $\delta_a(x)$ در شرایط قضیه اول حساب دیفرانسیل و انتگرال صدق نمی‌کند (پیوسته نیست) . در بخش ۵-۷-۱ درستی این رابطه به شکل دقیقتری ارائه خواهد شد. در آنجا با تعریف توابع تعمیم یافته خواهیم دید که رابطه بین توابع دلتای دیراک, هویساید و نیز شیب بصورت $h_a''(t) = H_a'(t) = \delta_a(t)$ خواهد بود.

<u>حالت خاص:</u> بدیهی است چنانچه $f(t,x)$ به فرم $f(t-x)$ باشد, در واقع $f(t) * \delta_a(t)$ بدست آمده است. لذا:

$$\boxed{f(t) * \delta_a(t) = H_a(t)f(t-a) \qquad (a \geq 0\ ;\ t > 0)}$$

که در حالت خاص با انتخاب $a = 0$ به $f(t) * \delta_0(t) = f(t)$ خواهیم رسید. به عنوان نمونه در انتهای قسمت ۳ از مثال قبل می‌توان $t * \delta_0(t)$ را مستقیما برابر t دانست.

مثال ۵-۵۲ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' + 4y = 6\delta_1(t) \quad ; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad y'(0) = -3$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = 6e^{-s}$$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{-3}{s^2+4} + \frac{6e^{-s}}{s^2+4} \qquad ; \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-3}{s^2+4}\right) = \frac{-3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = \frac{-3}{2}sin2t$$

لاپلاس معکوس ترم دوم نیز با توجه به رابطه $\mathcal{L}^{-1}(e^{-as}F(s)) = H_a(t)f(t-a)$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6e^{-s}}{s^2+4}\right) = \frac{6}{2}H_1(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)\Bigg|_{t\rightarrow t-1} = 3H_1(t)sin\big(2(t-1)\big)$$

$$\rightarrow y(t) = \underbrace{\frac{-3}{2}sin2t}_{y_c(t)} + \underbrace{3H_1(t)sin\big(2(t-1)\big)}_{y_p(t)} \quad \blacksquare$$

توضیح ۱: دقت شود از آنجا که در جواب خصوصی تابع هویساید دیده می‌شود, به این معنی است که جواب دارای تاخیر است. علت آن است که ترم ناهمگنی به صورت $6\delta_1(t)$ می‌باشد و از آنجا که معنی این ترم آن است که گویا این ترم صرفا در $t=1$ اعمال شده است, طبیعی است که انتظار داشته باشیم جواب مساله, قبل و بعد این نقطه متفاوت باشد.

دیده شد که معادله ارتعاش یک سیستم جرم فنر بصورت $m\ddot{x}+kx=f(t)$ می‌باشد. در قیاس با معادله فوق می‌توان گفت پاسخ بدست آمده می‌تواند مربوط به ارتعاش یک سیستم با جرم $m=1$ و سختی $k=4$ باشد. در بخش ۵-۷-۳ خواهیم دید که از دید کاربردی می‌توان گفت ترم ناهمگن $6\delta_1(t)$ معادل آن است که به چنین سیستمی در زمان $t=1$, یک بار ضربه به میزان 6 واحد اعمال شده است.

توضیح ۲: بدون محاسبه لاپلاس $f(t)$ می‌توان جواب معادله را با فرض $f(t)=6\delta_1(t)$ بصورت زیر بدست آورد:

$$y''-4y=f(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4Y(s)=F(s)\to Y(s)=\frac{-3}{s^2+4}+\frac{F(s)}{s^2+4}$$

که با معکوس‌گیری از اولین عبارت جواب عمومی بدست می‌آید. جواب خصوصی نیز بصورت زیر خواهد بود:

$$y_p(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}F(s)\right)=\frac{1}{2}sin2t*f(t)=3sin2t*\delta_1(t)$$

$$f(t)*\delta_a(t)=H_a(t)f(t-a)\to y_p(t)=3H_1(t)sin\big(2(t-1)\big)$$

حتی اگر این فرمول را در ذهن نداشته باشیم می‌توانیم بصورت زیر عمل کنیم:

$$y_p(t)=3sin2t*\delta_1(t)=3\int_0^t sin\big(2(t-x)\big)\delta_1(x)\,dx$$

بدیهی است جواب این انتگرال برای $t\le 1$ و $t>1$ متفاوت است. لذا خواهیم داشت:

$$y_p(t)=\begin{cases}0 & t\le 1\\ 3sin\big(2(t-1)\big) & t>1\end{cases}=3sin\big(2(t-1)\big)H_1(t)\ \blacksquare$$

مثال ۵-۵۳ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$2y''-y'=\delta_1(t)-\delta_2(t)\quad;\quad y(0)=0\quad;\quad y'(0)=0$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}}2(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0))-(sY(s)-y(0))=e^{-s}-e^{-2s}$$

$$\to Y(s)=\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{2s^2-s}\quad;\quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(2s-1)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{2s-1}-\frac{1}{s}\right)=e^{t/2}-1$$

$$\to y(t)=H_1(t)\big(e^{(t-1)/2}-1\big)-H_2(t)\big(e^{(t-2)/2}-1\big)\ \blacksquare$$

توضیح: راه حل دوم مساله بصورت زیر است. با فرض $f(t)=\delta_1(t)-\delta_2(t)$ خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{\mathcal{L}}2(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0))-(sY(s)-y(0))=F(s)\to Y(s)=\frac{F(s)}{2s^2-s}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2s^2 - s}F(s)\right) = \left(e^{\frac{t}{2}} - 1\right) * f(t) = \left(e^{\frac{t}{2}} - 1\right) * \delta_1(t) - \left(e^{\frac{t}{2}} - 1\right) * \delta_2(t)$$

حال با استفاده از فرمول $f(t) * \delta_a(t) = H_a(t)f(t-a)$ خواهیم داشت:

$$y(t) = H_1(t)\left(e^{(t-1)/2} - 1\right) - H_2(t)\left(e^{(t-2)/2} - 1\right) \quad \blacksquare$$

مثال ۵-۵۴ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y' + 2y = \left(t - \frac{\pi}{3}\right)H_{\frac{\pi}{3}}(t) + \int_0^t (t-x)e^{2x}\,dx + (cost)\delta_{\frac{\pi}{3}}(t) \quad ; \quad y(0) = 1$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{e^{-\frac{\pi}{3}s}}{s^2} + \frac{1}{s^2(s-2)} + \frac{e^{-\frac{\pi}{3}s}}{2}$$

دقت شود $\int_0^t (t-x)e^{2x}\,dx$ در واقع بیانگر $t * e^{2t}$ می‌باشد, لذا لاپلاس آن برابر حاصلضرب لاپلاس ایندو تابع گردید.

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{e^{-\frac{\pi}{3}s}}{s^2(s+2)} + \frac{1}{s^2(s^2-4)} + \frac{e^{-\frac{\pi}{3}s}}{2(s+2)} \quad ; \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) = e^{-2t}$$

$$\frac{1}{s^2(s+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{s^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{s} + \frac{\frac{1}{4}}{s+2} \to \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+2)}\right) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t}$$

$$\to \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{3}s}}{s^2(s+2)}\right) = \left(\frac{t - \frac{\pi}{3}}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2\left(t-\frac{\pi}{3}\right)}\right)H_{\frac{\pi}{3}}(t)$$

برای $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2-4)}\right)$ یا می‌توان از انتگرال تلفیقی جواب را بدست آورد و یا با استفاده از اثر $\frac{1}{s}$ خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2-4)}\right) = \frac{1}{2}\int_0^t sinh2xdx = \frac{1}{4}cosh2t - \frac{1}{4}$$

$$\to \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right) = \int_0^t \left(\frac{1}{4}cosh2x - \frac{1}{4}\right)dx = \frac{1}{8}sinh2t - \frac{t}{4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2(s+2)}\right) = \frac{1}{2}e^{-2t} \to \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{3}s}}{2(s+2)}\right) = \frac{1}{2}e^{-2\left(t-\frac{\pi}{3}\right)}H_{\frac{\pi}{3}}(t)$$

$$y(t) = e^{-2t} + \left(\frac{t - \frac{\pi}{3}}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-2\left(t-\frac{\pi}{3}\right)}\right)H_{\frac{\pi}{3}}(t) + \frac{1}{8}sinh2t - \frac{t}{4} \quad \blacksquare$$

مثال ۵-۵۵ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' + 6y' + 5y = \delta_0(t) + \delta_2(t) \quad ; \quad y(0) = 1 \quad ; \quad y'(0) = 0$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} (s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 6(sY(s) - y(0)) + 5Y(s) = 1 + e^{-2s}$$

$$(s^2+6s+5)Y(s) = s+7+e^{-2s} \rightarrow Y(s) = \frac{s+7}{s^2+6s+5} + \frac{e^{-2s}}{s^2+6s+5}$$

با تجزیه دو کسر فوق خواهیم داشت:

$$\frac{1}{s^2+6s+5} = \frac{\frac{1}{4}}{s+1} + \frac{-\frac{1}{4}}{s+5} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2+6s+1}\right) = \frac{1}{4}H_2(t)\left(e^{-(t-2)} - e^{-5(t-2)}\right)$$

$$\frac{s+7}{s^2+6s+5} = \frac{\frac{3}{2}}{s+1} - \frac{\frac{1}{2}}{s+5} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+7}{s^2+6s+1}\right) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-5t}$$

$$\rightarrow y(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-5t} + \frac{1}{4}H_2(t)\left(e^{-(t-2)} - e^{-5(t-2)}\right) \ \blacksquare$$

توضیح: می‌توان معادله را با انتخاب $f(t) = \delta_0(t) + \delta_2(t)$ بصورت زیر نیز حل کرد:

$$y'' + 6y' + 5y = f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 6(sY(s) - y(0)) + 5Y(s) = F(s)$$

$$\rightarrow (s^2+6s+5)Y(s) = s+6+F(s) \rightarrow Y(s) = \frac{s+6}{s^2+6s+5} + \frac{F(s)}{s^2+6s+5}$$

که با معکوس‌گیری از اولین عبارت جواب عمومی بدست می‌آید. جواب خصوصی نیز بصورت زیر خواهد بود:

$$y_p(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+6s+5}F(s)\right) = \frac{1}{4}(e^{-t} - e^{-5t}) * \delta_0(t) + \frac{1}{4}(e^{-t} - e^{-5t}) * \delta_2(t)$$

حال با استفاده از فرمول $f(t) * \delta_a(t) = H_a(t)f(t-a)$ خواهیم داشت:

$$y_p(t) = \frac{1}{4}\underbrace{H_0(t)}_{1}(e^{-t} - e^{-5t}) + \frac{1}{4}H_2(t)\left(e^{-(t-2)} - e^{-5(t-2)}\right) \ \blacksquare$$

مثال ۵-۵۶ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' + 4y' + 3y = 3\delta(t) \quad ; \quad y(0) = 2 \quad ; \quad y'(0) = 1$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 3Y(s) = 3e^{-0s}$$

$$Y(s) = \frac{2s+12}{s^2+4s+3} = \frac{5}{s+1} - \frac{3}{s+3} \rightarrow y(t) = 5e^{-t} - 3e^{-3t}$$

دقت شود جواب نهایی در این حالت فاقد تاخیر است. یعنی در آن تابع هویساید دیده نمی‌شود. علت آن است که تابع ضربه در صفر اعمال شده است. ■

توضیح: می‌خواهیم کنترل کنیم که آیا جواب نهایی در شرایط اولیه صدق میکند؟ به راحتی میتوان دید که $y(0) = 2$ اما $y'(0) = 4$ بدست می‌آید. علت چیست؟ علت وجود تابع دلتای دیراک است. در واقع وجود این تابع باعث جهش در $y'(0)$ میگردد.

برای بررسی بهتر موضوع, در حالت کلی معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

میتوان ثابت کرد اگر $f(t)$ تکه‌ای پیوسته باشد, آنگاه $y(t)$ و $y'(t)$ هر دو پیوسته خواهند بود. اما اگر $f(t)$ تابع دلتای دیراک باشد, آنگاه $y(t)$ تابعی پیوسته و $y'(t)$ ناپیوسته خواهد بود, چرا که انتظار می‌رود در مشتق $y'(t)$ یعنی $y''(t)$ تابع دلتای دیراک ظاهر شود. حال معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$ay'' + by' + cy = I\delta_{t_0}(t)$$

$$\to a\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} y''\,dt + b\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} y'\,dt + c\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} y\,dt = I\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \delta_{t_0}(t)\,dt = I$$

$$\to ay'(t)\big|_{t_0}^{t_0+\varepsilon} + by(t)\big|_{t_0}^{t_0+\varepsilon} + c\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} y\,dt = I$$

$$if\ \varepsilon \to 0 : a(y'(t_0^+) - y'(t_0)) + b\underbrace{(y(t_0^+) - y(t_0))}_{0} = I \to y'(t_0^+) - y'(t_0) = \frac{I}{a}$$

بنابراین برای مثال فوق:

$$y'(0^+) - y'(0) = \frac{3}{1} \to 4 - 1 = 3 \quad \boxed{\surd}$$

بنابراین آنچه ما بدست آورده‌ایم $y'(0^+)$ میباشد. با این توضیحات میتوان در شروع حل مساله, ترم $3\delta(t)$ را در سمت راست معادله حذف و بجای آن معادله همگن زیر را حل کرد:

$$y'' + 4y' + 3y = 0 \quad ; \quad y(0) = 2 \quad ; \quad y'(0^+) = 1 + 3$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y(s) - sy(0) - \underbrace{y'(0)}_{4} + 4(sY(s) - y(0)) + 3Y(s) = 0$$

در حالی که لاپلاس معادله اصلی بصورت زیر بود:

$$s^2Y(s) - sy(0) - \underbrace{y'(0)}_{1} + 4\big(sY(s) - y(0)\big) + 3Y(s) = 3e^{0s}$$

عملا گویا ترم $3e^{0s} = 3$ در سمت راستِ لاپلاس به سمت چپ منتقل شده است.

حال فرض کنید در سمت راست بجای $3\delta(t)$ عبارت $3\delta_1(t)$ قرار گرفته باشد. به عبارتی هدف حل معادله زیر باشد:

$$y'' + 4y' + 3y = 3\delta_1(t) \quad ; \quad y(0) = 2 \quad ; \quad y'(0) = 1$$

یک روش این است که از طرفین لاپلاس گرفته و معادله حل شود. روش دوم آن است که معادله را به دو معادله زیر تفکیک کنیم:

$$1)\ \ 0 \le t < 1 \quad ; \quad y'' + 4y' + 3y = 0 \quad ; \quad y(0) = 2 \quad ; \quad y'(0) = 1 \ \to\ y(1) = y_1 \ ; \ y'(1) = y_1'$$

$$2)\ \ 1 \le t < \infty \quad ; \quad y'' + 4y' + 3y = 0 \quad ; \quad y(1) = y_1 \quad ; \quad y'(1^+) = y_1' + \frac{I}{a} = y_1' + \frac{3}{1}$$

حال می‌توان هر یک از این دو معادله را به روشهای ارائه شده در فصل ۲ حل کرد. در تمرین ۳ از شما خواسته شده است که معادله‌ای را به هر دو روش حل کنید. ■

۵-۶-۲- تحلیل سیستمهای خطی

در این بخش هدف آن است که راه حل کلی برای یافتن جواب خصوصی یک معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن ارائه کنیم. روش ارائه شده در واقع تکمیل شده بحثی است که در بخش ۵-۳-۲ عنوان شد.

در مسائل مهندسی, معمولا سمت چپ معادله که شامل تابع و مشتقات آن است, بیانگر سیستم مورد مطالعه و سمت راست(ترم غیرهمگن) بیانگر بار ورودی به سیستم میباشد. در ادامه خواهیم دید یک روش مناسب برای یافتن جواب خصوصی یک سیستم خطی(حل یک سیستم یعنی یافتن پاسخ معادله برای ورودی مورد نظر) آن است که ابتدا فرض کنیم ورودی مورد نظر, بار ضربه میباشد, پاسخ سیستم را برای این بار ضربه بدست آورده و از ضرب پیچشی این پاسخ در بار ورودی مورد نظر, پاسخ نهایی را بدست آوریم. جزئیات کار در ادامه ارائه میشود.

الف: در ابتدا فرض کنید هدف محاسبه پاسخ یک سیستم خطی برای بار ورودی ضربه‌ای $\delta(t)$ میباشد. اگر فرض کنیم L یک اپراتور خطی بوده و پاسخ را برای ورودی ضربه با $h(t)$ نمایش دهیم, در نتیجه خواهیم داشت:

$$L[h(t)]=\delta(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}G(s)H(s)=1\rightarrow H(s)=\frac{1}{G(s)}\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}h(t)\ \boxed{\surd}$$

مثال ۵-۵۷ پاسخ سیستم زیر را برای بار ورودی ضربه بدست آورید.

$$y''+6y'+9y=f(t)\quad;\quad y(0)=y'(0)=0$$

حل اگر پاسخ سیستم به بار ورودی ضربه را با $h(t)$ نمایش دهیم, خواهیم داشت:

$$h''+6h'+9h=\delta(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\underbrace{(s^2+6s+9)}_{G(s)}H(s)=1\rightarrow H(s)=\frac{1}{s^2+6s+9}$$

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+6s+9}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)^2}\right)=te^{-3t}\quad\blacksquare$$

ب: حال فرض کنید پاسخ برای یک بار دلخواه $f(t)$ مورد نظر باشد که آنرا با $y(t)$ نمایش میدهیم, در نتیجه:

$$L[y(t)]=f(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}G(s)Y(s)=F(s)\rightarrow Y(s)=H(s)F(s)\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}y(t)=h(t)*f(t)$$

بنابراین کافی است پاسخ سیستم برای ورودی ضربه مشخص باشد تا بتوان جواب را برای هر ورودی دلخواه $f(t)$ بدست آورد. لذا نیازی به محاسبه لاپلاس $f(t)$ نخواهد بود, زیرا در انتها به خود $f(t)$ نیاز خواهیم داشت. به عبارتی:

$$\boxed{f(t)=\delta(t)\rightarrow y(t)=h(t)\quad;\quad \text{دلخواه}\ f(t)\rightarrow y(t)=h(t)*f(t)}$$

در بحث کنترل سیستمها به $H(s)$ تابع انتقال گفته شده و برابر است با نسبت لاپلاس خروجی به لاپلاس ورودی.

مثال ۵-۵۸ پاسخ سیستم مثال قبل را برای بار دلخواه $f(t)$ بدست آورید.

$$y''+6y'+9y=f(t)\quad;\quad y(0)=y'(0)=0$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}}(s^2+6s+9)Y(s)=F(s)\to Y(s)=\frac{1}{s^2+6s+9}F(s)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}y(t)=h(t)*f(t)=te^{-3t}*f(t)$$

که با مشخص بودن $f(t)$, جواب مساله بدست می‌آید. مثلا برای $f(t)=e^{-3t}$ خواهیم داشت:

$$y(t)=h(t)*f(t)=te^{-3t}*e^{-3t}=\int_0^t xe^{-3x}e^{-3(t-x)}\,dx=e^{-3t}\int_0^t x\,dx=\frac{1}{2}t^2e^{-3t}\quad\blacksquare$$

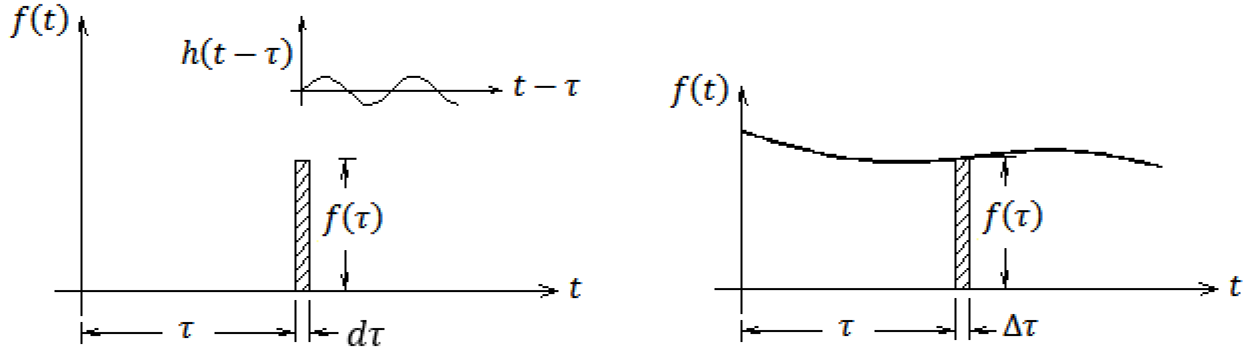
❊ اصل جمع آثار در تحلیل سیستمهای خطی

دیده شد اگر پاسخ یک سیستم خطی برای بار ضربه $\delta(t)$ را $h(t)$ بنامیم , پاسخ در برابر بار دلخواه $f(t)$ عبارت است از:

$$x(t)=h(t)*f(t)=\int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

حال به طریق دیگری همین نتیجه را بدست می‌آوریم.

گفته شد اگر ضربه در زمان صفر به سیستمی اعمال شده باشد, پاسخ آن $h(t)$ میباشد. پس اگر ضربه در زمان τ وارد شود, پاسخ آن $h(t-\tau)$ میباشد(شکل سمت چپ).



حال فرض کنیم بارگذاری, دلخواه باشد. هر بار دلخواه را میتوان مجموعی از بیشمار بار ضربه با مقدار $f(\tau)\Delta\tau$ دانست. (شکل سمت راست) . از آنجا که برای بار واحد(ضربه واحد) پاسخ سیستم $h(t-\tau)$ میباشد, لذا برای جزء بار $f(\tau)\Delta\tau$ پاسخ برابر است با $h(t-\tau)f(\tau)\Delta\tau$. در نتیجه:

$$dx(t)=h(t-\tau)f(\tau)\Delta\tau\xrightarrow{\Delta\tau\to 0}x(t)=\int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

بدیهی است برای محاسبه پاسخ در زمان t کافی است انتگرال‌گیری تا لحظه $\tau=t$ انجام پذیرد. در واقع به طریق دیگری به همان انتگرال کانولوشن رسیدیم. چنین نگرشی اصطلاحا روش جمع آثار گفته میشود.

❋ **مثال ۵-۵۹** مساله ارتعاش سیستم جرم-فنر-میراگر را ابتدا برای بار ضربه و سپس برای بار دلخواه با شریط اولیه صفر حل کنید. لازم به ذکر است برای داشتن حرکت نوسانی بایستی $c^2 < 4km$ باشد. پاسخ برای بار ضربه را با $h(t)$ نمایش می‌دهیم.

حل الف: ابتدا فرض میکنیم که بار, بصورت ضربه باشد. یعنی معادله $m\ddot{h} + c\dot{h} + kh = \delta(t)$ را حل می‌کنیم.

$$m\ddot{h} + c\dot{h} + kh = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} ms^2\overline{h}(s) + cs\overline{h}(s) + k\overline{h}(s) = 1$$

که در آن منظور از $\overline{h}(s)$ همان تبدیل لاپلاس $h(t)$ می‌باشد.

$$\rightarrow \overline{h}(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1}{m}\frac{1}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}} = \frac{1}{m}\frac{1}{\left(s + \frac{c}{2m}\right)^2 + \frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = \frac{1}{m}\frac{1}{(s+a)^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + b^2}\right) = \frac{1}{b}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{b}{s^2 + b^2}\right) = \frac{1}{b}sin(bt)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s+a)) = e^{-at}f(t) \rightarrow h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{m}\frac{1}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}}\right) = \frac{1}{mb}e^{-at}sin(bt)$$

که بایستی a و b جایگزین شوند. برای ساده شدن فرمولها از رابطه فرکانس زاویه‌ای $\omega_n = \sqrt{k/m}$ و نیز تعریف $\xi = \frac{c}{2m\omega_n}$ کمک می‌گیریم:

$$a = \frac{c}{2m} = \xi\omega_n \quad ; \quad b = \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m} = \frac{\sqrt{4m^2\omega_n^2 - 4m^2\omega_n^2\xi^2}}{2m} = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \omega_d$$

که در آن $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ تعریف شده است. دقت شود برای حرکت نوسانی بایستی $\xi < 1$ باشد, زیرا:

$$c^2 < 4km \rightarrow 4m^2\omega_n^2\xi^2 < 4m^2\omega_n^2 \rightarrow \xi < 1$$

بنابراین با جایگذاری a و b در جواب نهایی خواهیم داشت:

$$h(t) = \frac{1}{mb}e^{-at}sin(bt) = \frac{1}{m\omega_d}e^{-\xi\omega_n t}sin(\omega_d t)$$

ب: در قسمت قبل پاسخ ارتعاش برای بار ضربه بدست آمد. حال اگر بار دلخواه باشد خواهیم داشت:

$$x(t) = h(t) * f(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t f(\tau)e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}sin\big(\omega_d(t-\tau)\big)\,d\tau \quad \blacksquare$$

توضیح: اگر سیستم بصورت جرم-فنر (فاقد میراگر) باشد, پاسخ برای بار دلخواه عبارت است از:

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} = 0 \rightarrow \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \omega_n \rightarrow x(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t f(\tau)sin\big(\omega_n(t-\tau)\big)\,d\tau \quad \blacksquare$$

تمرینات بخش ۵-۶

۱- با استفاده از تجزیه کسر قسمت ۳ از مثال ۵-۵۱ را مجددا حل کنید.

۲- لاپلاس معکوس زیر را یکبار با تجزیه کسر، یکبار با قضیه انتقال بر روی محور s و یکبار با انتگرال تلفیقی بدست آورید.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4s-12}\right) \qquad ; \qquad \underline{Ans}: \quad f(t)=\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{3}{4}e^{-6t}$$

۳- معادله دیفرانسیل زیر را یکبار با استفاده از تبدیل لاپلاس و بار دیگر با استفاده از روشهای حل معادلات مرتبه دوم (فصل ۲) حل کنید. (توضیح مثال ۵-۵۶ را ببینید)

$$y''-4y'+4y=3\delta_1(t) \;\; ; \;\; y(0)=y'(0)=1$$

$$\underline{Ans}: \;\; Y(s)=\frac{s-3+3e^{-s}}{s^2-4s+4}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{3e^{-s}}{(s-2)^2}$$

$$y(t)=e^{2t}-te^{2t}+3H_1(t)e^{2(t-1)}(t-1)$$

۴- معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$1)\;\; y''+2y'+3y=sint+\delta_\pi(t) \qquad ; \qquad y(0)=y'(0)=0$$

$$\underline{Ans}: \; y(t)=\frac{1}{4}(sint-cost)+\frac{1}{4}e^{-t}cos\left(\sqrt{2}t\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-(t-\pi)}sin\left(\sqrt{2}(t-\pi)\right)H(t-\pi)$$

$$2)\;\; y''+16y=2H_3(t)+5\delta_1(t) \;\; ; \;\; y(0)=1 \;\; ; \;\; y'(0)=2$$

$$\underline{Ans}: \; y(t)=\frac{1}{8}H_3(t)\big(1-cos(4t-12)\big)+\frac{5}{4}H_1(t)sin(4t-4)+cos(4t)+\frac{1}{2}sin(4t)$$

۵- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y''+4y=\begin{cases} t & , \quad 0\le t<1 \\ 1+\delta_2(t) & , \quad t\ge 1 \end{cases} \qquad ; \qquad y(0)=y'(0)=0$$

$$\underline{Ans}: \; y(t)=\frac{t}{4}-\frac{1}{8}sin(2t)-\left(\frac{1}{4}(t-1)-\frac{1}{8}sin(2t-2)\right)H_1(t)+\frac{1}{2}sin(2t-4)H_2(t)$$

۶- به کمک تبدیل لاپلاس معادله انتگرالی زیر را حل کنید.

$$y''(t)-8\int_0^t (t-\tau)^2\, y'(\tau)d\tau=cos(t)\delta_3(t) \quad ; \quad y(0)=y'(0)=0$$

۷- با استفاده از قضیه پیچش نشان دهید:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-as}F(s)\right)=H_a(t)f(t-a)$$

۸- معادله ارائه شده در مثال ۵-۳۸ را مطابق روش ارائه شده در مثال ۵-۵۷ مجددا حل کنید.

❄ ۵-۷- مطالب تکمیلی

در این بخش ابتدا به معرفی توابع تعمیم یافته و خواص آن پرداخته و توابع دلتای دیراک و هویساید را به عنوان دو نمونه مهم از این دسته توابع معرفی می‌کنیم. سپس چهار کاربرد مهم تابع دلتای دیراک (و نیز هویساید) ارائه میشود. در یکی از کاربردها, نحوه مشتق‌گیری از توابع تکه‌ای پیوسته بررسی خواهد شد. در ادامه بعنوان یکی از مهمترین کاربردها, تحلیل سیستمهای خطی ارائه می‌شود. علاوه بر اینها این تابع را میتوان در مسائل فیزیکی برای بیان شدت نیرو بکار گرفت که از دو دیدگاه زمانی و مکانی در دو بخش پایانی این بخش به آن می‌پردازیم.

۵-۷-۱- توابع تعمیم یافته

تعریف تابع دیراک به شکلی که قبلا عنوان شد ممکن است گاهی در محاسبات ریاضی ما را با مشکلاتی مواجه کند. همچنان که دیده شد اثبات اینکه چرا مشتق تابع هویساید برابر دلتای دیراک میباشد با آنچه در ریاضی ۱ دیده بودیم تطابق چندانی نداشت. برای این منظور ال.شوارتزر (L. Schwarts) این تابع و دسته دیگری از توابع را به عنوان توابع تعمیم یافته تعریف کرد. به این معنی که تعریف آنها را تغییر داده و آنها را بر اساس خواص انتگرالشان (یا به عبارتی اثرشان بر یک تابع دیگر) تعریف کرد.

بنا به تعریف, تابع حقیقی $\phi(t)$ را یک تابع امتحان (Test Function) مینامیم هرگاه اولا از کلاس C^{∞} باشد, همچنین در بینهایت, بسیار سریع نزولی باشد که گاهی با شرط $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\phi(t)=0$ بیان می‌شود. برای مثال همه توابعی که در بازه $(-\infty,\infty)$ بینهایت بار مشتق‌پذیر بوده و بیرون از یک بازه معین برابر صفر باشند, می‌توانند بعنوان تابع امتحان انتخاب شوند.

با این مقدمه تابع $f(t)$ را که به ازای هر تابع امتحان $\phi(t)$ در رابطه زیر صدق کند, بعنوان تابع تعمیم یافته تعریف می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)\,dt=\phi(0)$$

با این تعریف $f(t)$ را مشابه یک تابع عادی تعریف نکرده‌ایم, چرا که در یک تعریف عادی توقع داریم مقدار تابع را در نقاط مختلط با ضوابط مشخص داشته باشیم. یعنی در اینجا به جای آنکه به تعریف خودِ تابع بپردازیم, این تابع را با یک خاصیتِ انتگرالی تعریف کرده‌ایم, به عبارتی $f(t)$ با توجه به اثرش بر یک تابع امتحان تعریف شده است. در توابع تعمیم یافته هیچگاه از مقدار تابع صحبت نخواهد شد بلکه از اثرشان بر تابع دیگر صحبت میشود.

بنا به تعریف دو تابع تعمیم یافته $f(t)$ و $g(t)$ را مساوی گوییم, هرگاه به ازای هر تابع امتحان $\phi(t)$ داشته باشیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t)\,dt$$

تابع دلتای دیراک یکی از این توابع تعمیم یافته تلقی شده و لذا تعریف آن بصورت زیر خواهد بود:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)\,dt=\phi(0)$$

با پذیرش این تعریف میتوان با تغییر متغیرهای مناسب نشان داد که:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t)\phi(t)\,dt=\phi(a)\quad ;\quad \delta(\alpha t)=\frac{\delta(t)}{|\alpha|}\to\delta(-t)=\delta(t)$$

همچنین با استفاده از خاصیت تساوی توابع تعمیم یافته میتوان نشان داد:

$f(t)\delta_a(t) = f(a)\delta_a(t)$

چرا که:

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)\delta_a(t)]\phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\delta_a(t)[f(t)\phi(t)]\,dt = f(a)\phi(a) = f(a)\int_{-\infty}^{\infty}\delta_a(t)\phi(t)\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}[f(a)\delta_a(t)]\phi(t)\,dt \to f(t)\delta_a(t) = f(a)\delta_a(t)$$

تعریف تابع هویساید قبلا دیده شد. حال اگر بخواهیم آنرا بصورت یک تابع تعمیم یافته تعریف کنیم خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_a(t)\phi(t)\,dt = \int_{a}^{\infty}\phi(t)\,dt$$

برای یک تابع تعمیم یافته می‌توان مشتق آنرا از هر مرتبه‌ای بدست آورد. این مشتق نیز طبیعتا مشتق تعمیم یافته است.

بنا به تعریف اگر $f(t)$ یک تابع تعمیم یافته باشد, مشتق تعمیم یافته آن بصورت زیر خواهد بود:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f'(t)\phi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\phi'(t)\,dt$$

این تعریف, با تعریف زمانی که $f(t)$ یک تابع معمولی است سازگاری دارد زیرا:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f'(t)\phi(t)\,dt = f(t)\phi(t)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}f(t)\phi'(t)\,dt$$

عبارت اول صفر است چرا که در تعریف $\phi(t)$ دیده شد $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\phi(t) = 0$ منظور شده است. به همین ترتیب مشتق n ام تابع تعمیم یافته $f(t)$ با تکرار رابطه بالا بصورت زیر خواهد بود:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^{(n)}(t)\phi(t)\,dt = (-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\phi^{(n)}(t)\,dt$$

در حالت خاص که $f(t) = \delta_a(t)$ انتخاب شود:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_a^{(n)}(t)\phi(t)\,dt = (-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}\delta_a(t)\phi^{(n)}(t)\,dt = (-1)^n\phi^{(n)}(a)$$

در ادامه نشان می‌دهیم که مشتق تابع هویساید برابر تابع دلتای دیراک خواهد بود. برای این منظور:

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_a'(t)\phi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty}H_a(t)\phi'(t)\,dt = -\int_{a}^{\infty}\phi'(t)\,dt = -\phi(t)|_a^{\infty} = \phi(a)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\delta_a(t)\phi(t)\,dt$$

لذا با استفاده از خاصیت تساوی توابع تعمیم یافته, از آنجا که $\phi(t)$ یک تابع امتحان دلخواه است لذا $H_a'(t) = \delta_a(t)$.

حال تابع تعمیم یافته شیب را در نظر میگیریم. هدف محاسبه مشتق این تابع میباشد. از آنجا که $h_a(t) = (t-a)H_a(t)$ لذا با استفاده از رابطه‌ای که برای مشتق توابع تعمیم یافته ارائه شد خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty}h_a'(t)\phi(t)\,dt = -\int_{a}^{\infty}(t-a)\phi'(t)\,dt = -(t-a)\phi(t)|_a^{\infty} + \int_{a}^{\infty}\phi(t)\,dt = \int_{a}^{\infty}\phi(t)\,dt$$

جمله اول در انتگرال جزء به جزء به این دلیل صفر است که در تعریف $\phi(t)$ دیده شد $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\phi(t) = 0$ منظور شده است.

اما قبلا دیده شد که $\int_{-\infty}^{\infty} H_a(t)\phi(t)\,dt = \int_a^{\infty} \phi(t)\,dt$ در نتیجه با استفاده از خاصیت تساوی توابع تعمیم یافته خواهیم داشت $h'_a(t) = H_a(t)$. هر چند یک اثبات صوری به شکل زیر نیز می‌توان برای این موضوع ارائه کرد:

$$h_a(t) = (t-a)H_a(t) \to h'_a(t) = H_a(t) + (t-a)\delta_a(t) = H_a(t)$$

چرا که از رابطه $f(t)\delta_a(t) = f(a)\delta_a(t)$ خواهیم داشت $(t-a)\delta_a(t) = (a-a)\delta_a(t) = 0$.

یعنی $h'_a(t) = H_a(t)$. در نهایت با ترکیب این نتیجه با رابطه $H'_a(t) = \delta_a(t)$, رابطه مهم زیر را خواهیم داشت:

$$h''_a(t) = H'_a(t) = \delta_a(t)$$

مثال ۵-۶۰ نشان دهید $y = H_1(t)sin(t-1)$ در معادله دیفرانسیل $y'' + y = \delta_1(t)$ صدق می‌کند.

$$y = H_1(t)sin(t-1) \to y' = \delta_1(t)sin(t-1) + H_1(t)cos(t-1)$$

دیده شد که $f(t)\delta_a(t) = f(a)\delta_a(t)$, لذا اولین جمله y' را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$y' = \underbrace{\delta_1(t)sin(1-1)}_{0} + H_1(t)cos(t-1) = H_1(t)cos(t-1)$$

$$y'' = \underbrace{\delta_1(t)cos(t-1)}_{\delta_1(t)cos(1-1)} - H_1(t)sin(t-1) = \delta_1(t) - H_1(t)sin(t-1)$$

$$\to y'' + y = \delta_1(t) - H_1(t)sin(t-1) + H_1(t)sin(t-1) = \delta_1(t) \quad \boxed{\surd} \quad ■$$

مثال ۵-۶۱ با استفاده از مشتق‌گیری لایب‌نیتز نشان دهید جواب زیر در معادله دیفرانسیل داده شده صدق می‌کند.

$$u(x) = \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c|x-t|} f(t)\,dt \quad ; \quad u''(x) - c^2u(x) = -f(x)$$

حل در ابتدا دستور لایب‌نیتز برای مشتق‌گیری از انتگرال را یادآوری میکنیم. اگر توابع دو متغیره f و $\frac{\partial f}{\partial x}$ پیوسته و نیز $u(x)$ و $v(x)$ مشتق پذیر باشند, مشتق $I(x)$ برابر است با:

$$I(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,dt \to I'(x) = v'(x)f\big(x,v(x)\big) - u'(x)f\big(x,u(x)\big) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,dt$$

$$u(x) = \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c|x-t|} f(t)\,dt \to u'(x) = \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c|x-t|}\frac{\partial}{\partial x}(-c|x-t|)f(t)\,dt$$

می‌دانیم $\frac{\partial}{\partial x}|x-t| = \begin{cases} +1\,, & x>t \\ -1\,, & x<t \end{cases} = 2H_t(x) - 1$ در نتیجه:

$$u'(x) = \frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c|x-t|}(2H_t(x)-1)f(t)\,dt$$

$$u''(x) = \frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c|x-t|}(-c)\underbrace{(2H_t(x)-1)^2}_{1} f(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c|x-t|}2\delta_t(x)f(t)\,dt$$

که از رابطه $H'(x) = \delta(x)$ استفاده شده است. از آنجا که $\delta(-x) = \delta(x)$ لذا $\delta_t(x) = \delta_x(t)$, بنابراین:

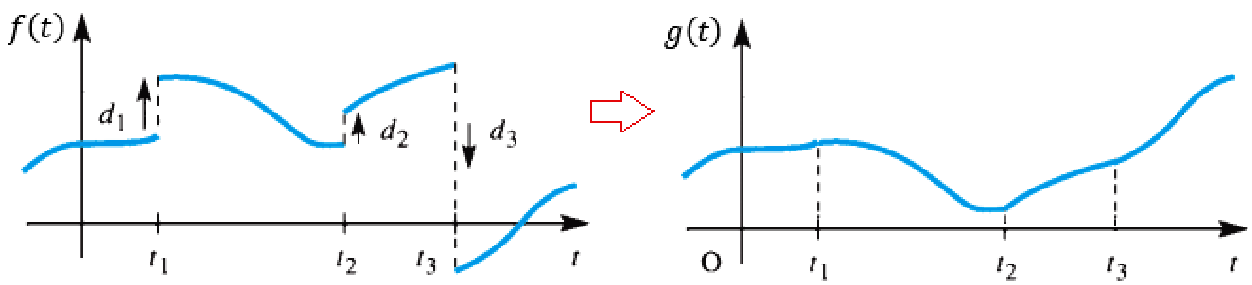
$$u''(x) = \frac{c}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c|x-t|} f(t)\,dt - \frac{1}{2}2f(x) = c^2u(x) - f(x) \quad \boxed{\surd} \quad ■$$

۵-۷-۲- مشتق توابع تکه‌ای پیوسته

گفته شد که تابع دلتای دیراک, بعنوان یک تابع تعمیم یافته شناخته می‌شود. به کمک این تابع میتوان مشتق تعمیم یافته را برای توابع تکه‌ای پیوسته نیز تعریف کرد. همانگونه که در قسمت قبل دیده شد:

$$h_a''(t) = H_a'(t) = \delta_a(t)$$

حال به کمک این رابطه مشتق تعمیم یافته یک تابع تکه‌ای پیوسته را بدست می‌آوریم. بعنوان مثال تابع تکه‌ای پیوسته $f(t)$ را بصورت زیر در نظر میگیریم.



این تابع در بازه فرضی داده شده, در سه نقطه دارای گسستگیهایی به میزان d_1 , d_2 و d_3 میباشد. میتوان با استفاده از تابع هویساید با کم کردن این سه مقدار از تابع بصورت زیر, آنرا پیوسته کرد که در شکل سمت راست دیده می‌شود:

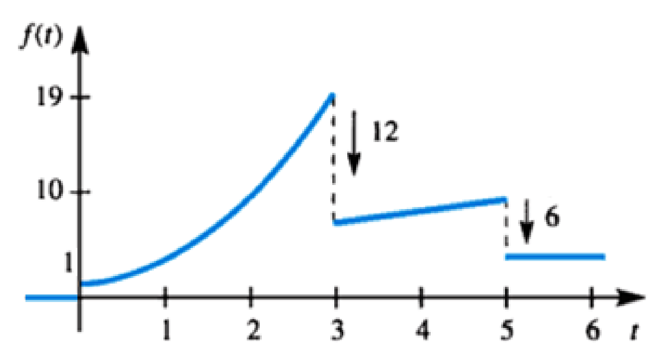
$$d_i = f(t_i^+) - f(t_i^-) \to g(t) = f(t) - d_1 H_{t_1}(t) - d_2 H_{t_2}(t) - d_3 H_{t_3}(t)$$

و یا در حالت کلی اگر تابع $f(t)$ در نقاط t_k دارای گسستگیهایی به میزان d_k باشد:

$$g(t) = f(t) - \sum_k d_k H_{t_k}(t) \to g'(t) = f'(t) - \sum_k d_k \delta_{t_k}(t) \to f'(t) = g'(t) + \sum_k d_k \delta_{t_k}(t)$$

که در آن $g'(t)$ مشتق معمولی تابع $f(t)$ (در قسمتهایی که مشتق وجود دارد) میباشد.

مثال ۵-۶۲ مشتق تابع روبرو را بدست آورید.



حل با توجه به آنچه دیده شد خواهیم داشت:

$$f'(t) = g'(t) + 1\delta_0(t) - 12\delta_3(t) - 6\delta_5(t)$$

که در آن:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t^2 + 1 & 0 \le t < 3 \\ t + 4 & 3 \le t < 5 \\ 3 & 5 \le t \end{cases} \to g'(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 4t & 0 < t < 3 \\ 1 & 3 < t < 5 \\ 0 & 5 < t \end{cases} \to f'(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1\delta_0(t) & t = 0 \\ 4t & 0 < t < 3 \\ -12\delta_3(t) & t = 3 \\ 1 & 3 < t < 5 \\ -6\delta_5(t) & t = 5 \\ 0 & 5 < t \end{cases}$$

به تعبیر دیگر میتوان گفت در نقاط ناپیوسته, مشتق برابر است با میزان تغییرات تابع در دو سمت آن نقطه, ضربدر دلتای دیراکی که در آن نقطه منظور می‌شود. یا میتوان اینگونه تصور کرد که برابر است با دلتای دیراکی که بجای مساحت واحد, مساحت آن برابر با اختلاف تابع در دو سمت میباشد. ■

توضیح: و یا مستقیما می‌توان این تابع را بر حسب تابع هویساید بیان کرد و سپس از آن مشتق گرفت:

$$f(t) = (2t^2+1)\big(H_0(t)-H_3(t)\big) + (t+4)\big(H_3(t)-H_5(t)\big) + 3\big(H_5(t)-H_\infty(t)\big)$$

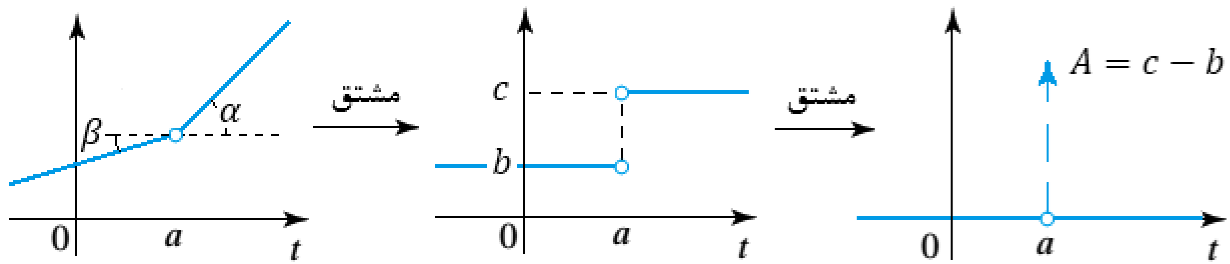
$$f'(t) = 4t\big(H_0(t)-H_3(t)\big) + (2t^2+1)\big(\delta_0(t)-\delta_3(t)\big) + \big(H_3(t)-H_5(t)\big) + (t+4)\big(\delta_3(t)-\delta_5(t)\big) + 3\delta_5(t)$$

حال با توجه به رابطه $f(t)\delta_a(t) = f(a)\delta_a(t)$ خواهیم داشت:

$$f'(t) = 4t\big(H_0(t)-H_3(t)\big) + \delta_0(t) - 19\delta_3(t) + \big(H_3(t)-H_5(t)\big) + \big(7\delta_3(t)-9\delta_5(t)\big) + 3\delta_5(t)$$

$$f'(t) = 4t\big(H_0(t)-H_3(t)\big) + \big(H_3(t)-H_5(t)\big) + \delta_0(t) - 12\delta_3(t) - 6\delta_5(t) \quad ■$$

با توجه به آنچه گفته شد, رابطه بین تابع شیب تعمیم یافته, تابع پله‌ای غیر واحد و تابع دلتای دیراک بصورت زیر است:



که در آن $\tan\alpha = c$ و $\tan\beta = b$ میباشد.

استفاده از لاپلاس مشتقات یک تابع, میتواند روش ساده‌تری برای محاسبه لاپلاس خود تابع ارائه دهد. به این معنی که گاهی لاپلاس مشتق یک تابع به مراتب ساده‌تر از لاپلاس خود تابع است. این موضوع بخصوص در توابع چند ضابطه‌ای و نیز توابعی که به فرم چندجمله‌ای میباشند, بیشتر دیده میشود. چرا که توابع چندجمله‌ای بهرحال پس از چندبار مشتق‌گیری به تابع دلتای دیراک میرسند و لاپلاس چنین تابعی بسیار ساده است. حال با استفاده از ارتباط لاپلاس تابع و لاپلاس مشتقات آن, میتوان بطریق معکوس, لاپلاس خود تابع را بدست آورد. در دو مثال زیر این موضوع با جزئیات کامل بررسی خواهد شد.

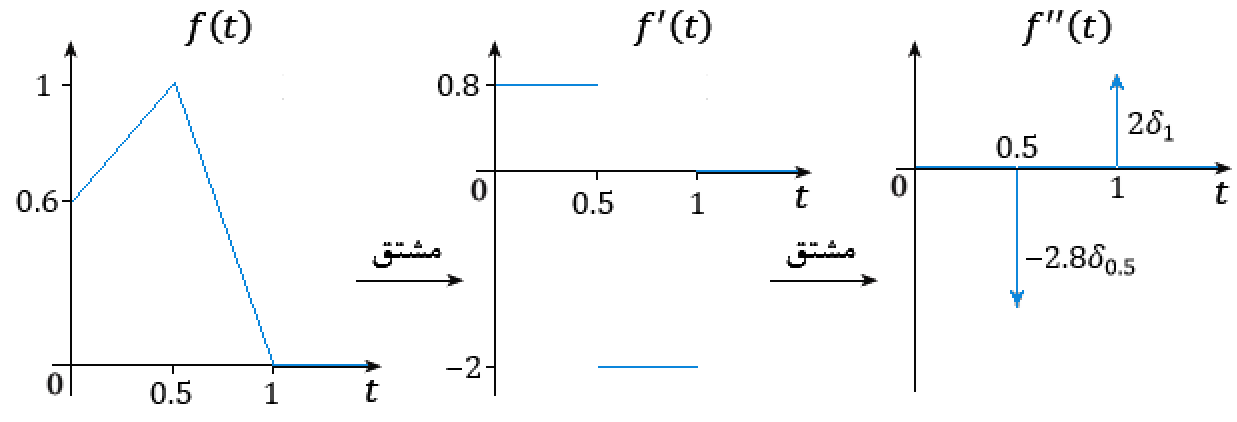
مثال ۵-۶۳ لاپلاس تابع زیر را با استفاده از لاپلاس مشتق آن بدست آورید.

حل بجای استفاده مستقیم از فرمول لاپلاس, از تابع دوبار مشتق گرفته (شکل صفحه بعد) و از مشتق دلتای دیراک استفاده میکنیم:

$$f''(t) = -2.8\delta_{0.5}(t) + 2\delta_1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2\mathcal{L}(f) - s\underbrace{f(0)}_{0.6} - \underbrace{f'(0)}_{0.8} = -2.8e^{-\frac{s}{2}} + 2e^{-s}$$

$$\to \mathcal{L}(f) = \frac{0.8 + 0.6s - 2.8e^{-s/2} + 2e^{-s}}{s^2}$$

بدیهی است این راه ساده‌تر از آن است که با نوشتن معادله خطوط و انتگرال‌گیری جزء به جزء مساله را حل کنیم. لازم بذکر است این نوع روش حل درست معادل انتگرال گیری جزء به جزء, اما بطریق تصویری است. ■



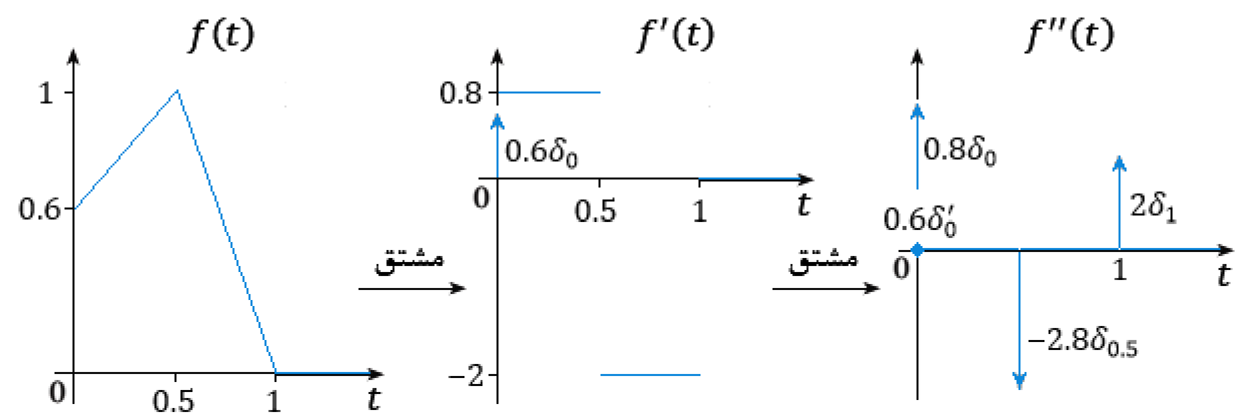
توضیح ۱: می‌توان با یکبار مشتق‌گیری نیز مساله را حل کرد, که در اینصورت به لاپلاس تابع هویساید می‌رسیم:

$$f'(t) = 0.8\big(H_0(t) - H_{0.5}(t)\big) + (-2)\big(H_{0.5}(t) - H_1(t)\big)$$

$$= 0.8H_0(t) - 2.8H_{0.5}(t) + 2H_1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s\mathcal{L}(f) - \underbrace{f(0)}_{0.6} = \frac{0.8}{s} - 2.8\frac{e^{-\frac{s}{2}}}{s} + 2\frac{e^{-s}}{s}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}(f) = \frac{0.8 + 0.6s - 2.8e^{-s/2} + 2e^{-s}}{s^2}$$

توضیح ۲: اگر بخواهیم دقیقتر به مساله نگاه کنیم بایستی در زمان $t = 0$ نیز از دلتای دیراک استفاده شود. چرا که تابع $f(t)$ قبل از $t = 0$ مقداری برابر صفر داشته و لذا در $t = 0$ جهش خواهیم داشت. در نتیجه:



$$f'(t) = 0.6\delta_0(t) + 0.8H_0(t) - 2.8H_{0.5}(t) + 2H_1(t)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} s\mathcal{L}(f) = 0.6 + \frac{0.8}{s} - 2.8\frac{e^{-\frac{s}{2}}}{s} + 2\frac{e^{-s}}{s} \rightarrow \mathcal{L}(f) = \frac{0.8 + 0.6s - 2.8e^{-s/2} + 2e^{-s}}{s^2}$$

نکته مهم آن است که اگر به اینصورت عمل شود, آنگاه $\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right) = s^n\mathcal{L}(f)$ بوده و نبایستی سایر ترمهای فرمول لاپلاس مشتق را نوشت. چرا که این ترمها عملا با اضافه کردن جهش‌ها در صفر وارد حل شده است.

اگر بخواهیم لاپلاس این تابع را با استفاده از مشتق دوم آن بدست آوریم خواهیم داشت:

$$f''(t) = 0.6\delta_0'(t) + 0.8\delta_0(t) - 2.8\delta_{0.5}(t) + 2\delta_1(t)$$

دقت شود در شکل بالا $\delta'_a(t)$ را بصورت صوری با یک لوزی کوچک (♦) بر روی محور t در $t=a$ نمایش داده‌ایم. چرا که اساسا با تبدیل لاپلاس آن سروکار داریم نه شکل واقعی آن. حال بایستی رابطه‌ای برای لاپلاس مشتقات تابع دلتای دیراک بیان شود. با توجه به بخش ۵-۷-۱ (بحث مشتق توابع تعمیم یافته) و اینکه $f(t)$ برای $t<0$ برابر صفر است لذا:

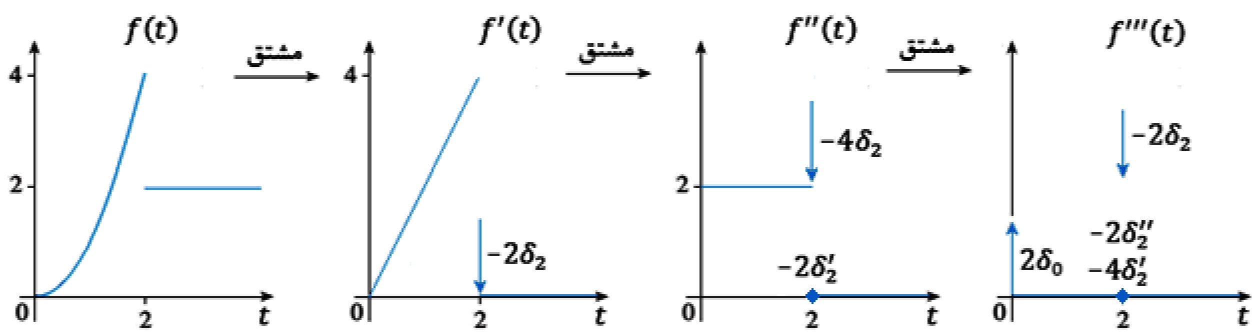
$$\int_0^\infty f(t)\,\delta_a^{(n)}(t)dt = (-1)^n f^{(n)}(a) \xrightarrow{f(t)=e^{-st}} \mathcal{L}\left(\delta_a^{(n)}(t)\right) = s^n e^{-as}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} s^2\mathcal{L}(f) = 0.6s^1e^{-0s} + 0.8 - 2.8e^{-\frac{s}{2}} + 2e^{-s} = 0.6s + 0.8 - 2.8e^{-\frac{s}{2}} + 2e^{-s}$$

که همان نتیجه قبل بدست می‌آید. ■

مثال ۵-۶۴ لاپلاس تابع زیر را بدست آورید.

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t \le 2 \\ 2, & t > 2 \end{cases}$$



حل با سه بار مشتق‌گیری به شکلی میرسیم که صرفا شامل تابع دلتای دیراک و مشتقات آن میباشد. در نتیجه:

$$f'''(t) = 2\delta_0(t) - 2\delta_2(t) - 4\delta'_2(t) - 2\delta''_2(t)$$

در مثال قبل گفته شد که $\mathcal{L}\left(\delta_a^{(n)}(t)\right) = s^n e^{-as}$. در نتیجه:

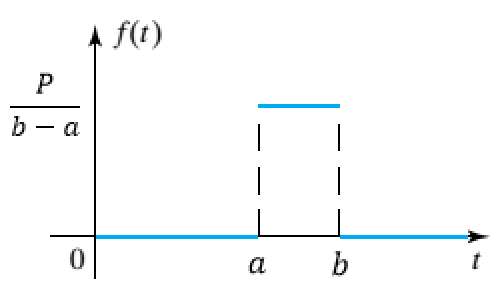
$$\xrightarrow{\mathcal{L}} s^3\mathcal{L}(f) = 2 - 2e^{-2s} - 4se^{-2s} - 2s^2e^{-2s}$$

$$\to \mathcal{L}(f) = \frac{2 - 2e^{-2s} - 4se^{-2s} - 2s^2e^{-2s}}{s^3} = -e^{-2s}\left(\frac{2}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s^3}\right) + \frac{2}{s^3}$$

که در ابتدای این فصل در دو مثال ۵-۷ و ۵-۱۵ این مساله با دو روش دیگر نیز حل شده است. ■

۵-۷-۳- شدت ناشی از ضربه (متغیر زمانی)

فرض کنید نمودار نیروی اعمالی به یک جسم بر حسب زمان بصورت زیر باشد:



می‌دانیم سطح زیر نمودار, کل نیرو (P) و ارتفاع آن($\frac{P}{b-a}$) بیانگر شدت نیرو است. حال اگر $P=1$ و زمان اعمال نیرو صفر باشد,یعنی $b\to a$, نیرو را ضربه مینامیم. پس دیراک معادل شدت نیروی ناشی از ضربه واحد است. به عبارت دیگر اگر کل نیروی اعمالی برابر P بوده و در زمان $t=a$, به جسمی بصورت ناگهانی وارد شود, شدت آن برابر است با $\omega(t)=P\delta_a(t)$ زیرا:

$$\omega(t)=\lim_{b\to a}\frac{P}{b-a}\big(H_a(t)-H_b(t)\big)=P\delta_a(t)$$

دلیل دیگر درستی این موضوع آن است که انتگرال شدت نیرو بایستی برابر کل نیرو باشد و این برقرار است زیرا:

$$\text{کل نیرو}=\int_a^{a+\varepsilon}P\delta_a(t)\ dt=P\int_a^{a+\varepsilon}\delta_a(t)\ dt=P\times 1=P$$

مثلا اگر در مساله‌ای بیان شود به جسمی در زمان $t=2$ ثانیه ضربه‌ای به میزان ۳ وارد شده است, بجای شدت نیرو, مقدار $3\delta_2(t)$ را قرار میدهیم.

مثال ۵-۶۵ چکشی ضربه‌ای به میزان 3 واحد, در لحظه صفر به سیستم جرم-فنر با مشخصات $k=1$ و $m=1$ وارد می‌نماید. اگر جابجایی و سرعت اولیه جسم صفر باشد, پاسخ سیستم را بیابید.

$$m\ddot{x}+kx=f(t)\to\ddot{x}+x=3\delta(t)\to s^2X(s)+X(s)=3\to X(s)=\frac{3}{s^2+1}\to x(t)=3sint$$

دقت شود عدد 3 دارای بعد میباشد, بگونه‌ای که $3\delta(t)$ از جنس شدت نیرو خواهد بود. دقت شود اگر بجای لحظه صفر, در زمان $t=7$ ضربه‌ای به میزان 3 واحد وارد شده بود, در سمت راست $3\delta_7(t)$ را قرار می‌دادیم. ■

مثال ۵-۶۶ الف: فرض کنید در یک سیستم جرم-فنر, در لحظه $t=0$ یک بار ضربه به میزان I واحد اعمال شود. اگر جابجایی و سرعت اولیه صفر باشد, پاسخ سیستم را بدست آورید. ب: پاسخ برای بار دلخواه $f(t)$ را بدست آورید.

حل الف: با توجه به معادله ارتعاش که بصورت $m\ddot{x}+kx=f(t)$ می‌باشد, خواهیم داشت:

$$m\ddot{x}+kx=I\delta(t)\xrightarrow{\omega_n=\sqrt{k/m}}\ddot{x}+\omega_n^2x=\frac{I}{m}\delta(t)\to s^2X(s)+\omega_n^2X(s)=\frac{I}{m}$$

$$\to X(s)=\frac{I}{m\omega_n}\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}\to x(t)=\frac{I}{m\omega_n}sin(\omega_nt)$$

توجه شود اگر $I=1$ باشد, بهتر است جواب را بجای $x(t)$ با $h(t)$ نمایش دهیم که در واقع بیانگر پاسخ به بار ضربه واحد خواهد بود.

ب: با توجه به آنچه در بخش ۵-۶-۲ عنوان شد, با داشتن پاسخ برای بار ضربه واحد, یعنی $h(t)$, پاسخ برای بار دلخواهِ $f(t)$ عبارت است از:

$$x(t)=h(t)*f(t)=\frac{sin(\omega_nt)}{m\omega_n}*f(t)=\int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau=\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t f(\tau)sin\big(\omega_n(t-\tau)\big)d\tau$$

که تحت عنوان انتگرال دوهامل قبلا در مثالهای ۲-۱۴ و ۵-۳۹ نیز بدست آمد. ■

توضیح ۱: بدیهی است آنچه در مثال بالا تحت عنوان بخشهای الف و ب مطرح شد می‌تواند بصورت معکوس نیز عنوان شود. به عبارتی می‌توان با داشتن جواب برای بار دلخواه (قسمت ب) , جواب برای بار ضربه (قسمت الف) را بصورت زیر بدست آورد:

$$f(t) = I\delta(t) \rightarrow x(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t \underbrace{I\delta(\tau)}_{f(\tau)} sin\big(\omega_n(t-\tau)\big)\, d\tau = \frac{I}{m\omega_n} sin(\omega_n t)$$

ممکن است اینگونه تصور شود که دور خود چرخیده‌ایم! به این معنی که ابتدا مساله را برای بار ضربه حل کرده و سپس نتیجه را برای بار دلخواه بدست آوردیم. به دنبال آن از نتیجه بار دلخواه, جواب را برای بار ضربه بدست آورده‌ایم. لازم بذکر است اینها در واقع دو مساله مجزا میباشند که بصورت زیر است:

۱- حل مساله برای بار دلخواه را داریم و هدف, محاسبه جواب برای بار ضربه میباشد.

۲- حل مساله برای بار ضربه را داریم و هدف, محاسبه جواب برای بار دلخواه میباشد.

در اینجا هر دو مساله فوق بررسی شد تا در واقع درستی هر دو مسیر حل کنترل شده باشد. توجه شود در برخورد با مساله‌ای که بار آن دلخواه است هم میتوان آنرا مستقیما برای بار داده شده حل کرد و هم اینکه ابتدا جواب را برای بار ضربه بدست آورده و سپس از انتگرال تلفیقی استفاده کرد. مزیت روش دوم آن است که در اکثر مسائل حل مساله برای بار ضربه بسیار کم‌حجم‌تر از حل آن برای بار دلخواه میباشد.

توضیح ۲: قسمت الف را می‌توان به طریق دیگری نیز حل کرد. نشان می‌دهیم که وجود بار ضربه در لحظه صفر معادل آن است که به سرعت اولیه به میزان $\frac{I}{m}$ اضافه گردد. این موضوع را از دو دیدگاه می‌توان بررسی کرد. از دیدگاه فیزیکی می‌دانیم که I بایستی برابر تغییر اندازه حرکت یعنی $m\Delta v$ باشد, لذا:

$$I = m\Delta v = m(v_{0^+} - v_0) = m\big(\dot{x}(0^+) - \dot{x}(0)\big) \rightarrow \dot{x}(0^+) - \dot{x}(0) = \frac{I}{m}$$

لذا می‌توان در شروع حل مساله, ترم $I\delta(t)$ را در سمت راست حذف و بجای آن معادله همگن زیر را حل کرد:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad ; \quad x(0) = 0 \;\; ; \;\; \dot{x}(0^+) = \dot{x}(0) + \frac{I}{m} = \frac{I}{m}$$

این معادله و معادله اولیه معادل یکدیگرند. یعنی هر دو یک جواب خواهند داشت. به عبارتی معادله را درست بعد از اعمال ضربه نوشته‌ایم. دیده می‌شود که بعد از اعمال ضربه, شدت نیرو برابر صفر می‌شود (معادله همگن شده است), اما در عوض به سرعت اولیه $\frac{I}{m}$ اضافه گردیده است. در توضیح ۲ مثال ۲-۱۲ مساله با این روش حل شده است.

از دیدگاه ریاضی نیز به همین نتیجه خواهیم رسید. در حل معادله $ay'' + by' + cy = I\delta_{t_0}(t)$ در توضیح مثال ۵-۵۶ دیده شد که: $y'(t_0^+) - y'(t_0) = \frac{I}{a}$, بنابراین برای $m\ddot{x} + kx = I\delta(t)$ خواهیم داشت: $\dot{x}(0^+) - \dot{x}(0) = \frac{I}{m}$ ■

۵-۷-۴- شدت ناشی از نیرو و لنگر متمرکز(متغیر مکانی)

در نوشتن معادله دیفرانسیل حاکم بر تعدادی از مسائل, نیازمند شدت بار هستیم, در حالیکه ممکن است کل بار یا ممان را داشته باشیم. حال ببینیم چگونه بار یا ممان را بر حسب شدت بیان کنیم. مثلا در یک تیر خمشی, معادله دیفرانسیلی که برای تعیین تغییرشکل آن لازم است بصورت $EIy^{(4)}(x) = \omega(x)$ میباشد. دیده میشود که در سمت راست, شدت بار لازم است. اگر نیرو بصورت گسترده باشد, شدت آن مشخص است. اما اگر نیروی متمرکز P و یا ممان متمرکز M_0 در مکان $x = a$ به تیر وارد شود, در سمت راست چه عبارتی را بایستی قرار داد؟ برای بیان شدت نیروی گسترده, نیروی متمرکز و لنگر متمرکز به موارد زیر توجه شود:

۱- نیروی گسترده: اگر بار بصورت گسترده با شدت ω_0 در بازه $a < x < b$ پخش شده باشد, درست معادل تابع مستطیلی بوده ولذا شدت آن با رابطه $\omega(x) = \omega_0\big(H_a(x) - H_b(x)\big)$ بیان می‌شود که H تابع پله‌ای واحد است. (شکل سمت چپ)

۲- نیروی متمرکز: در شکل سمت چپ فرض کنید کل نیروی اعمالی برابر P باشد, در نتیجه شدت آن برابر $\omega_0 = \frac{P}{b-a}$ خواهد شد (شکل سمت راست) . حال اگر $P = 1$ و مکان اعمال نیرو صفر باشد, یعنی $b \to a$, شدت این بار همان دلتای دیراک خواهد بود. پس دیراک, معادل شدت بار متمرکز واحد است. به عبارت دیگر اگر کل نیروی متمرکز P بوده و در مکان $x = a$, به جسمی وارد شود, شدت آن برابر است با $\omega(x) = P\delta_a(x)$ زیرا:

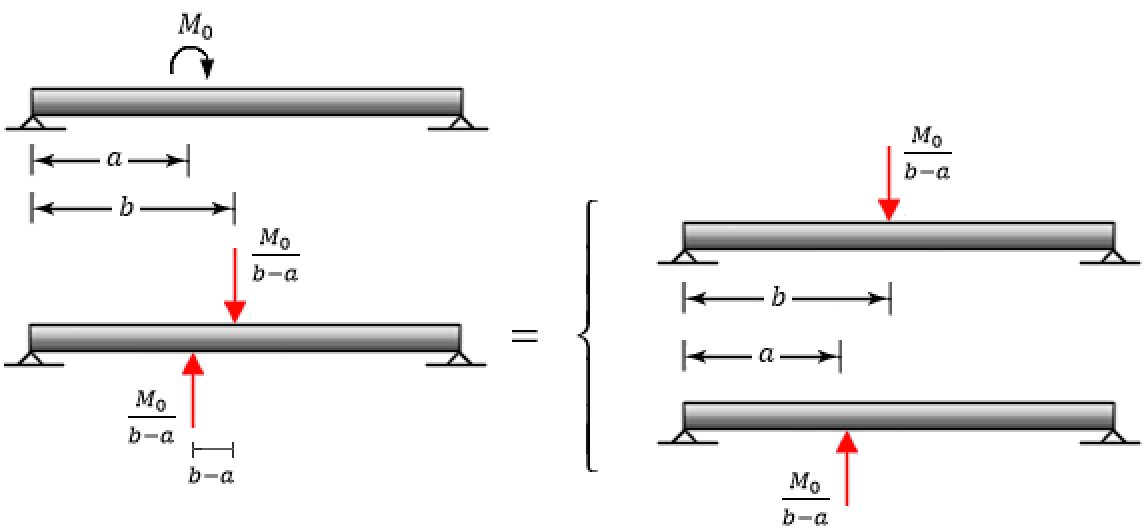
$$\omega(x) = \lim_{b\to a} \frac{P}{b-a}\big(H_a(x) - H_b(x)\big) = P\delta_a(x)$$

دلیل دیگر درستی این موضوع آن است که میدانیم انتگرال شدت بار بایستی برابر برش P باشد و این برقرار است زیرا:

$$\text{برش} = \int_a^{a+\varepsilon} P\delta_a(x)\,dx = P$$

خلاصه: شدت معادل یک نیروی متمرکز P که در نقطه $x = a$ اعمال شده باشد برابر $P\delta_a(x)$ میباشد.

۳- لنگر متمرکز: برای بیان شدت لنگر متمرکزی که در در نقطه $x = a$ به تیر اعمال شده است, میتوان آنرا معادل کوپل نیروی متمرکز $\frac{M_0}{b-a}$ دانست که در فاصله $b - a$ از یکدیگر اعمال شده‌اند. در نتیجه:



$$\omega(x) = \lim_{b\to a}\left(\frac{M_0}{b-a}\delta_a(x) - \frac{M_0}{b-a}\delta_b(x)\right) = M_0 \lim_{b\to a}\left(\frac{\delta(x-a) - \delta(x-b)}{b-a}\right)$$

$$\to \omega(x) = M_0\delta_a'(x)$$

البته توجه شود که اثبات بالا یک اثبات صوری بوده و شیوه دقیق اثبات, استفاده از فرمول مشتق توابع تعمیم یافته می‌باشد.

خلاصه: شدت معادل لنگر متمرکز ساعتگرد M_0 که در نقطه $x = a$ اعمال شده باشد برابر $M_0\delta_a'(x)$ میباشد.

مثال ۵-۶۷ یک تیر دو سر ساده تحت بار متمرکز در وسط آن $\left(x=\frac{l}{2}\right)$ قرار گرفته است. تغییر شکل تیر تحت بار فوق را بدست آورید.

$$EIy^{(4)}=P\delta_{l/2}(x)\quad;\quad y(0)=0\;;\;y''(0)=0\quad;\quad y(l)=0\;;\;y''(l)=0$$

حل دقت شود که این یک مساله مقدار اولیه نبوده و مساله مقدار مرزی محسوب می‌شود. برای حل مساله به کمک تبدیل لاپلاس بایستی $y'(0)$ و $y'''(0)$ نیز مشخص باشد, لذا مساله را با فرض $y'(0)=a$ و $y'''(0)=b$ حل کرده و در نهایت با دو شرط مرزی باقیمانده در $x=l$ این دو ثابت را محاسبه می‌کنیم.

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} EI\big(s^4Y(s)-s^3\underbrace{y(0)}_{0}-s^2\underbrace{y'(0)}_{a}-s\underbrace{y''(0)}_{0}-\underbrace{y'''(0)}_{b}\big)=Pe^{-ls/2}$$

$$\rightarrow EIs^4Y(s)=Pe^{-ls/2}+aEIs^2+bEI\rightarrow Y(s)=\frac{a}{s^2}+\frac{b}{s^4}+\frac{P}{EIs^4}e^{-ls/2}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(x)=ax+\frac{b}{6}x^3+\frac{P}{6EI}\left(x-\frac{l}{2}\right)^3H_{l/2}(x)$$

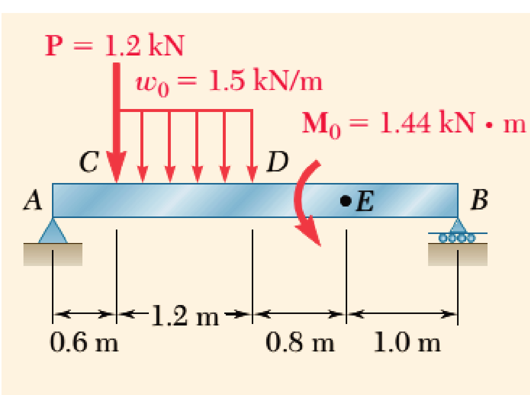
حال بایستی دو ثابت a و b را تعیین کرد. از آنجا که برای $x>\frac{l}{2}$ خواهیم داشت $H_{\frac{l}{2}}(x)=1$, در نتیجه:

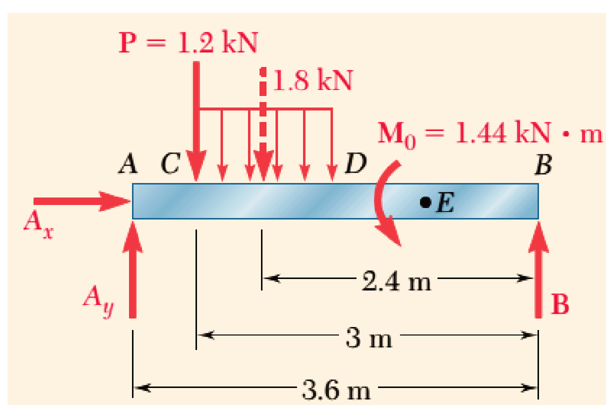
$$x>\frac{l}{2}\rightarrow H_{\frac{l}{2}}(x)=1\rightarrow y(x)=ax+\frac{b}{6}x^3+\frac{P}{6EI}\left(x-\frac{l}{2}\right)^3$$

$$\begin{cases}y(l)=0\\ y''(l)=0\end{cases}\rightarrow a=\frac{Pl^2}{16EI}\;\;;\;\;b=\frac{-P}{2EI}\rightarrow y(x)=\frac{Pl^2}{16EI}x-\frac{P}{12EI}x^3+\frac{P}{6EI}\left(x-\frac{l}{2}\right)^3H_{l/2}(x)$$

$$\rightarrow y(x)=\begin{cases}\dfrac{Pl^2}{16EI}x-\dfrac{P}{12EI}x^3 & 0\le x<\dfrac{l}{2}\\[2ex] \dfrac{Pl^2}{16EI}x-\dfrac{P}{12EI}x^3+\dfrac{P}{6EI}\left(x-\dfrac{l}{2}\right)^3 & \dfrac{l}{2}\le x\le l\end{cases}\qquad\blacksquare$$

مثال ۵-۶۸ معادله نیروی برشی و لنگر خمشی را برای تیر زیر بدست آورید.





حل ابتدا واکنشهای تکیه‌گاهی را بدست می‌آوریم:

$$\sum M_B=0\rightarrow A_y\times 3.6-1.2\times 3-1.8\times 2.4-1.44=0\rightarrow A_y=2.6\,kN$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y - 1.2 - 1.8 = 0 \rightarrow B_y = 0.4\ kN \quad ; \quad \sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

از استاتیک می‌دانیم که رابطه بین شدت بار وارده (ω) و نیروی برشی (V) و لنگر خمشی (M) بصورت زیر است:

$$\frac{dV}{dx} = \omega \rightarrow V(x) = \int \omega(x)\,dx \quad ; \quad \frac{dM}{dx} = V \rightarrow M(x) = \int V(x)\,dx$$

یعنی با انتگرال‌گیری از معادله شدت بار, به معادله برش و با انتگرال‌گیری از معادله برش, به معادله لنگر می‌رسیم.

بنابراین ابتدا باید معادله شدت بار را برای تیری به طول l بنویسیم. معادله شدت بار با در نظر گرفتن همه نیروها (از جمله واکنشهای تکیه‌گاهی) بصورت زیر می‌باشد:

$$\omega(x) = A_y\delta_0(x) - P\delta_{0.6}(x) - \omega_0\big(H_{0.6}(x) - H_{1.8}(x)\big) - M_0\delta'_{2.6}(x) + B_y\delta_{3.6}(x)$$
$$= 2.6\delta_0(x) - 1.2\delta_{0.6}(x) - 1.5\big(H_{0.6}(x) - H_{1.8}(x)\big) - 1.44\delta'_{2.6}(x) + 0.4\delta_{3.6}(x)$$

با انتگرال‌گیری از شدت بار, برش بدست می‌آید. انتگرال تابع پله‌ای, تابع شیب میباشد که با توجه به رابطه $h_a(x) = (x-a)H_a(x)$ تابع شیب را نیز بر حسب تابع پله بیان می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$V(x) = 2.6H_0(x) - 1.2H_{0.6}(x) - 1.5(x-0.6)H_{0.6}(x) + 1.5(x-1.8)H_{1.8}(x) - 1.44\delta_{2.6}(x) + 0.4H_{3.6}(x)$$

حال با انتگرال‌گیری از معادله برش به معادله لنگر خواهیم رسید:

$$M(x) = 2.6xH_0(x) - 1.2(x-0.6)H_{0.6}(x) - 0.75(x-0.6)^2H_{0.6}(x) + 0.75(x-1.8)^2H_{1.8}(x) - 1.44H_{2.6}(x) + 0.4(x-3.6)H_{3.6}(x)$$

که در انتگرال‌گیری از رابطه زیر استفاده شده است:

$$\int (x-a)^n H_a(x)\,dx = \frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}H_a(x)$$

که میتوان معادله برش و لنگر را در بازه‌های مختلف تفکیک کرده و بصورت چند ضابطه‌ای بیان کرد, و یا اگر برش و ممان نقطه‌ای خاص مورد نظر باشد, آنرا محاسبه کرد. مثلا برای وسط تیر ($x = 1.8$) خواهیم داشت:

$$V(1.8) = 2.6\underbrace{H_0(1.8)}_{1} - 1.2\underbrace{H_{0.6}(1.8)}_{1} - 1.5(1.8-0.6)\underbrace{H_{0.6}(1.8)}_{1} + 1.5\underbrace{(1.8-1.8)}_{0}H_{1.8}(1.8) - 1.44\underbrace{\delta_{2.6}(1.8)}_{0} + 0.4\underbrace{H_{3.6}(1.8)}_{0} = -0.4$$

$$M(1.8) = 2.6(1.8)\underbrace{H_0(1.8)}_{1} - 1.2(1.8-0.6)\underbrace{H_{0.6}(1.8)}_{1} - 0.75(1.8-0.6)^2\underbrace{H_{0.6}(1.8)}_{1} + 0.75\underbrace{(1.8-1.8)^2}_{0}H_{1.8}(1.8) - 1.44\underbrace{H_{2.6}(1.8)}_{0} + 0.4(1.8-3.6)\underbrace{H_{3.6}(1.8)}_{0} = 2.16 \quad \blacksquare$$

توضیح: ممکن است سوال شود چرا در فرایند انتگرال‌گیری, ثابتهای انتگرال وارد نشد. میتوان کنترل کرد که با لحاظ کردن همه نیروها از جمله واکنشهای تکیه‌گاهی, اگر چنین ثابتهایی را وارد کنیم همگی صفر بدست می‌آیند. اما در مثال بعد که قرار است یکبار دیگر از لنگر, انتگرال گرفته شود, بدلیل آنکه در آنجا به مجهولات سینماتیک (شیب و تغییر شکل) برخورد میکنیم لازم است ثابتها را وارد کرده و با اعمال شرایط مرزی آنها را محاسبه کنیم. در واقع در این قسمت به دلیل آنکه فقط نیرو و لنگر محاسبه شد, اعمال همه نیروها و لنگرها باعث میشود که اضافه کردن ثابت انتگرال‌گیری (که معادل اضافه یا کم کردن یک نیرو یا لنگر است) مورد نیاز نباشد. ■

مثال ۵-۶۹ معادله شیب و تغییرشکل(جابجایی) را برای تیر مثال قبل بدست آورید.

حل از مقاومت مصالح می‌دانیم رابطه بین تغییر شکل و لنگرخمشی بصورت $EIy''(x) = M(x)$ می‌باشد. لذا با دوبار انتگرال-گیری از لنگر خمشی, تغییر شکل تیر بدست میآید. در مثال قبل دیده شد:

$$\begin{aligned} M(x) = {} & 2.6xH_0(x) - 1.2(x-0.6)H_{0.6}(x) - 0.75(x-0.6)^2H_{0.6}(x) + 0.75(x-1.8)^2H_{1.8}(x) \\ & - 1.44H_{2.6}(x) + 0.4(x-3.6)H_{3.6}(x) \end{aligned}$$

$$EIy''(x) = M(x) \rightarrow EIy'(x) = \int M(x)\,dx$$

که در آن $y'(x)$ بیانگر شیب منحنی تغییرشکل (θ) در نقطه x می‌باشد. بنابراین:

$$\begin{aligned} EIy'(x) = {} & \int M(x)\,dx \\ & = 1.3x^2H_0(x) - 0.6(x-0.6)^2H_{0.6}(x) - 0.25(x-0.6)^3H_{0.6}(x) \\ & + 0.25(x-1.8)^3H_{1.8}(x) - 1.44(x-2.6)H_{2.6}(x) + 0.2(x-3.6)^2H_{3.6}(x) + C_1 \end{aligned}$$

حال با انتگرال‌گیری از رابطه بالا, معادله تغییرشکل تیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} EIy(x) = {} & 0.4333x^3H_0(x) - 0.2(x-0.6)^3H_{0.6}(x) - 0.0625(x-0.6)^4H_{0.6}(x) \\ & + 0.0625(x-1.8)^4H_{1.8}(x) - 0.72(x-2.6)^2H_{2.6}(x) + 0.0667(x-3.6)^3H_{3.6}(x) \\ & + C_1x + C_2 \end{aligned}$$

حال با استفاده از شرایط مرزی ثابتها را بدست می‌آوریم. در مرز سمت چپ جابجایی صفر است. اگر در رابطه بالا $x = 0$ را قرار دهیم, همگی توابع پله‌ای صفر شده و لذا $C_2 = 0$ به دست می‌آید. در مرز سمت راست نیز جابجایی صفر است. در نتیجه با اعمال $x = 3.6$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} EI\,\underbrace{y(3.6)}_{0} = {} & 0.4333(3.6)^3\,\underbrace{H_0(3.6)}_{1} - 0.2(3.6-0.6)^3\,\underbrace{H_{0.6}(3.6)}_{1} \\ & - 0.0625(3.6-0.6)^4\,\underbrace{H_{0.6}(3.6)}_{1} + 0.0625(3.6-1.8)^4\,\underbrace{H_{1.8}(3.6)}_{1} \\ & - 0.72(3.6-2.6)^2\,\underbrace{H_{2.6}(3.6)}_{1} + 0.0667\,\underbrace{(3.6-3.6)^3}_{0}\,H_{3.6}(3.6) + C_1(3.6) + \underbrace{C_2}_{0} \end{aligned}$$

$$\rightarrow 0 = 9.6912 + 3.6C_1 \rightarrow C_1 = -2.692$$

بنابراین معادله تغییر شکل بدست آمد. بعنوان نمونه میتوان تغییر شکل وسط تیر را بصورت زیر محاسبه کرد:

$$EIy(1.8) = 0.4333(1.8)^3 \underbrace{H_0(1.8)}_{1} - 0.2(1.8-0.6)^3 \underbrace{H_{0.6}(1.8)}_{1}$$

$$-0.0625(1.8-0.6)^4 \underbrace{H_{0.6}(1.8)}_{1} + 0.0625 \underbrace{(1.8-1.8)^4}_{0} H_{1.8}(1.8) - 0.72(1.8-2.6)^2 \underbrace{H_{2.6}(1.8)}_{0}$$

$$+ 0.0667(1.8-3.6)^3 \underbrace{H_{3.6}(1.8)}_{0} + (-2.692)(1.8) = -2.794$$

با فرض $E = 200\ GPa$ و $I = 6.87 \times 10^{-6}\ m^4$ جابجایی وسط تیر برابر $-2.03\ mm$ بدست می‌آید. ■

توضیح: لازم بذکر است که اگر قرار بود جابجایی این تیر با روش معمول و بدون استفاده از توابع پله‌ای و دیراک محاسبه شود, بایستی در ۴ مقطع مختلف, لنگرهای محاسبه شده و برای هر مقطع دو بار انتگرال‌گیری انجام شود. هر انتگرال دو ثابت وارد مساله می‌کند. این ۸ ثابت مجهول نیز بایستی با استفاده از دو شرط مرزی $y = 0$ در دو طرف تیر و نیز سازگاری شیب و تغییر مکان در سه نقطه C , D و E بدست آید. بدیهی است انجام این نوع محاسبات بسیار طولانی‌تر از روشی است که در بالا عنوان شد. ■

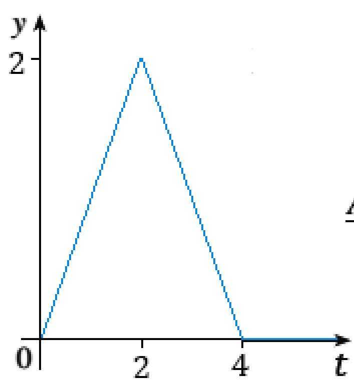
تمرینات بخش ۵-۷

۱- نشان دهید جواب زیر در معادله دیفرانسیل داده شده که مربوط به ارتعاش سیستم یک درجه آزادی است صدق می‌کند.

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t f(\tau)e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} sin\big(\omega_d(t-\tau)\big)d\tau \quad ; \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad ; \quad c = 2m\omega_n\xi \quad ; \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad ; \quad \xi < 1$$

۲- لاپلاس تابع زیر را با استفاده از لاپلاس مشتق آن بدست آورید.



$$\underline{Ans}: \ F(s) = \frac{1 + e^{-4s} - 2e^{-2s}}{s^2}$$

۳- لاپلاس تابع زیر را با استفاده از لاپلاس مشتقات آن بدست آورید.

$$f(t) = \begin{cases} t^4 + 5 & 0 < t < 4 \\ t^3 & 4 < t < 7 \\ t^2 - t & 7 < t < 10 \\ 2 & t > 10 \end{cases}$$

۴- معادله ارتعاش یک سیستم بصورت زیر است. به این سیستم در لحظه $t = 0$ ضربه‌ای به میزان ۱ واحد و در $t = \pi$ ضربه‌ای به میزان ۳ واحد اعمال میشود. معادله ارتعاش را بیابید. سپس نشان دهید جواب بدست آمده در معادله صدق میکند.

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0 \quad ; \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0 \quad ; \quad \underline{Ans} : x(t) = e^{-t}sint - 3H_\pi(t)e^{-(t-\pi)}sint$$

۵-۸- خلاصه فرمولهای لاپلاس

1) $\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$

2) $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)dx\right) = \frac{F(s)}{s} \quad ; \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s}\right) = \int_0^t f(x)dx$

3) $\mathcal{L}(f(bt)) = \frac{1}{b} F\left(\frac{s}{b}\right) \quad ; \quad \mathcal{L}^{-1}\left(F(bs)\right) = \frac{1}{b} f\left(\frac{t}{b}\right) \quad ; \quad b > 0$

4) $\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s) \quad ; \quad \mathcal{L}^{-1}\left(F^{(n)}(s)\right) = (-1)^n t^n \mathcal{L}^{-1}(F(s))$

5) $\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty F(u)du \quad ; \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\int_s^\infty F(u)du\right) = \frac{f(t)}{t} \quad ; \quad if \ \lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$ موجود باشد

6) $\mathcal{L}\left(e^{at} f(t)\right) = F(s-a) \quad ; \quad \mathcal{L}^{-1}(F(s-a)) = e^{at} \mathcal{L}^{-1}(F(s))$

$\mathcal{L}(e^{bt} cos(ct) f(t)) + i\mathcal{L}(e^{bt} sin(ct) f(t)) = F\left(s - (b+ci)\right)$

7) $\mathcal{L}(f * g) = F(s)G(s) \quad ; \quad \mathcal{L}^{-1}\left(F(s)G(s)\right) = f * g \quad ; \quad f * g = \int_0^t f(t-x)g(x)\, dx$

8) $\mathcal{L}(H_a(t) f(t)) = e^{-as} \mathcal{L}(f(t+a)) \quad ; \quad \mathcal{L}^{-1}(e^{-as} F(s)) = H_a(t) f(t-a)$

9) $if\ f(t)\ is\ a\ periodic\ function:\ F(s) = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)dt}{1 - e^{-sT}}$

10) $\mathcal{L}(\delta_a(t) f(t)) = f(a) e^{-as}$

نحوه انتخاب قضیه مورد نیاز

الف: لاپلاس: در زیر فرض میکنیم تبدیل لاپلاس $f(t)$ را میدانیم و برابر $F(s)$ میباشد.

۱-ممکن است $f(t)$ در یکی از عاملهای e^{at}, t^n , $e^{bt}\begin{Bmatrix} cos(ct) \\ sin(ct) \end{Bmatrix}, \frac{1}{t}$, $H_a(t)$ یا $\delta_a(t)$ ضرب شده باشد.

۲- فرم $f(bt)$ دیده شود.

۳- مشتق nام $f(t)$ یا انتگرال $f(x)$ در بازه 0 تا t سوال شده باشد.

۴- پیچش $f(t)$ در یک تابع $g(t)$ (که لاپلاس هر دو را بدانیم) مدنظر باشد.

۵- تابع $f(t)$ متناوب باشد.

ب: لاپلاس معکوس: در زیر فرض می‌کنیم تبدیل لاپلاس معکوس $F(s)$ را میدانیم و برابر $f(t)$ میباشد.

۱- ممکن است $F(s)$ در $\frac{1}{s^n}$ ضرب شده باشد که بطور متوالی از قضیه اثر $\frac{1}{s}$ استفاده میشود (و یا پیچش) و اگر $F(s)$ در e^{-as} ضرب شده باشد, جواب بصورت تابع انتقال یافته بر روی محور t است. (فرم هویسایدِ)

۲- در توابع کسری ابتدا به تجزیه کسر فکر میکنیم. بعد اینکه آیا لاپلاس معکوسِ انتگرال یا مشتق $F(s)$ را میدانیم یا نه.

۳- کنترل اینکه آیا میتوان تابع داده شده را حاصلضرب لاپلاس دو تابع شناخته شده دانست یا نه.

۴- فرم $F(bs)$ یا $F(s-a)$ دیده شود.

تمرینات دوره‌ای

۱- درستی تبدیلات لاپلاس زیر را نشان دهید.

$$1)\ \mathcal{L}(sin^3t)=\frac{3}{4(s^2+1)}-\frac{3}{4(s^2+9)} \quad ; \quad \underline{2})\ \mathcal{L}\left(\sqrt{t}e^{2t}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)/(s-2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\underline{3})\ \mathcal{L}(H_3(t)(t^2+2))=e^{-3s}\left(\frac{11s^2+6s+2}{s^3}\right)$$

$$4)\ f(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<\pi/2\\ cost & \pi/2\le t<3\pi/2\\ 0 & 3\pi/2\le t\end{cases} \quad ; \quad F(s)=-\frac{e^{-3\pi s/2}+e^{-\pi s/2}}{s^2+1}$$

$$5)\ f(t)=\begin{cases}t & 0\le t<1\\ [t^2] & 1\le t<\sqrt{2}\end{cases} \quad ; \ f\left(t+\sqrt{2}\right)=f(t)\ ; \ F(s)=\frac{1+e^{-s}-se^{-\sqrt{2}s}}{s^2\left(1-e^{-\sqrt{2}s}\right)}$$

$$\underline{6})\ \mathcal{L}\left(\int_0^t\frac{cos(t-x)}{x}sinhx\,dx\right)=\frac{s}{2(s^2+1)}ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right)$$

۲- درستی تبدیلات لاپلاس معکوس زیر را نشان دهید.

$$\underline{1})\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{9s-1}}\right)=\frac{e^{t/9}}{3\sqrt{\pi t}} \quad ; \quad 2)\ \mathcal{L}^{-1}\left(ln\left(1-\frac{a^2}{s^2}\right)\right)=2\frac{1-cosh(at)}{t}$$

$$3)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^4-1}\right)=\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}sint \quad ; \quad 4)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{9s^2-12s+5}\right)=\frac{1}{3}e^{2t/3}sin\left(\frac{t}{3}\right)$$

$$\underline{5})\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s^2+1)^2}\right)=-2+\frac{1}{2}t^2+2cost+\frac{1}{2}tsint$$

$$6)\ \mathcal{L}^{-1}\left(sln\left(\frac{s}{s-1}\right)-1\right)=\frac{te^t-e^t+1}{t^2} \quad ; \ \underline{7})\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-3s}}{(2s-1)^3}\right)=\frac{1}{16}H_3(t)e^{(t-3)/2}(t-3)^2$$

$$\underline{8})\ \ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-5s}}{\sqrt{s-1}}\right)=\frac{e^{t-5}}{\sqrt{\pi(t-5)}}H_5(t) \quad ; \quad 9)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^3+2s^2+2s}\right)=1-e^{-t}(sint+cost)$$

۳- با استفاده از انتگرال کانولوشن (پیچش) درستی تبدیلات معکوس زیر را نشان دهید.

$$1)\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2}\right)=\frac{1}{2}tsint \quad ; \ \underline{2})\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right)=(t+2)e^{-t}+t-2$$

۴- معادلات دیفرانسیل زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$1)\ \ y''-6y'+9y=6t^2e^{3t}\ ;\ y(0)=y'(0)=0 \quad ; \quad \underline{Ans}:\ \ y(t)=\frac{1}{2}t^4e^{3t}$$

$\underline{2}$) $y'' - 3y' + 2y = e^{-t} \quad ; \quad y(2) = 0 \quad ; \quad y'(2) = 1$

$\underline{Ans}$: $\quad y(t) = -\frac{1}{2}e^{t-4} + \frac{1}{3}e^{2(t-3)} + \frac{1}{6}e^{-t} - e^{t-2} + e^{2(t-2)}$

$\underline{3}$) $y' - y = \big(H_1(t) - H_3(t)\big)e^t \; ; \; y(0) = 4$

$\underline{Ans}$: $y(t) = e^t\big((t-1)H_1(t) - (t-3)H_3(t) + 4\big)$

4) $y'' + y' + y = f(t) \; ; \; f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases} \; ; \; y(0) = 1 \; ; \; y'(0) = 0$

$\underline{Ans}$: $y(t) = H_1(t) - H_1(t)e^{-\frac{1}{2}(t-1)}\left(cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1) - sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right)$

$$+ e^{-\frac{1}{2}t}\left(cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}}sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$\underline{5}$) $4y'' + y = f(t) \; ; \; y(0) = 3 \; ; \; y'(0) = -7$

$\underline{Ans}$: $y(t) = 3cos\left(\frac{t}{2}\right) - 14sin\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_0^t sin\left(\frac{x}{2}\right)f(t-x)dx$

$\underline{6}$) $y'' + y = cos(2t) - \delta_1(t) \quad ; \quad y(0) = y'(0) = 0$

$\underline{Ans}$: $y(t) = \frac{1}{3}cost - \frac{1}{3}cos(2t) - H_1(t)sin(t-1)$

7) $y'' + 2y' + 5y = -2\delta_\pi(t) \quad ; \quad y(0) = y'(0) = 1$

$\underline{Ans}$: $y(t) = e^{-t}\big(sin(2t) + cos(2t)\big) - H_\pi(t)e^{-(t-\pi)}sin(2t)$

$\underline{8}$) $y''' - 3y'' + 2y' = t + e^t \quad ; \quad y(0) = 1 \quad ; \quad y'(0) = -\frac{1}{4} \quad ; \quad y''(0) = -\frac{3}{2}$

$\underline{Ans}$: $y(t) = 1 + \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}t^2 - te^t$

9) $ty'' + (1-t)y' + y = 2 - 2e^t \quad ; \quad y(0) = 3 \quad ; \quad y'(0) = -3$

$\underline{Ans}$: $\quad y(t) = 4 - 2t - e^t$

10) $ty'' = \delta_1(t)sint \; ; \; y(0) = y'(0) = 0 \; ; \quad \underline{Ans}$: $\; y = (sin1)H_1(t)(t-1)$

۵- به کمک تبدیل لاپلاس معادلات انتگرالی زیر را حل کنید.

1) $y'(t) + 3y(t) + 2\int_0^t y(\tau)\,d\tau = t \quad ; \quad y(0) = 1 \quad ; \quad \underline{Ans}$: $\; y(t) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}e^{-2t} - 2e^{-t}$

$\underline{2}$) $y' = e^t + cost\int_0^t y(x)cosx\,dx + sint\int_0^t y(x)sinx\,dx \quad ; \quad y(0) = 0$

$\underline{Ans}$: $\quad y(t) = 2e^t - 2 - t - \frac{1}{2}t^2$

❄ ۵-۹- چند مساله تکمیلی

مثال ۵-۷۰ لاپلاس $f(t)=\int_t^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx$ را بدست آورید.

حل از آنجا که فرم تبدیل لاپلاس داده شده در قضایا وجود ندارد, ابتدا با مشتق‌گیری, انتگرال را حذف می‌کنیم. لذا:

$$f(t)=\int_t^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx\rightarrow f'(t)=-\frac{e^{-t}}{t}$$

بنابراین با یافتن $\mathcal{L}\big(f'(t)\big)$ به $\mathcal{L}\big(f(t)\big)$ خواهیم رسید. اما اگر چه $f'(t)$ به فرم $\frac{f(t)}{t}$ میباشد, ولی $\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t)}{t}$ موجود نمی‌باشد. لذا در اینجا نیز سعی میکنیم آنرا به قضایای شناخته شده مرتبط کنیم. از آنجا که $\mathcal{L}\big(tf'(t)\big)$ را میدانیم, خواهیم داشت:

$$tf'(t)=-e^{-t}\xrightarrow{\mathcal{L}}-\frac{d}{ds}\Big(s\mathcal{L}\big(f(t)\big)-f(0)\Big)=-\frac{1}{s+1}\xrightarrow{\int}s\mathcal{L}\big(f(t)\big)-f(0)=ln(s+1)+c_1$$

$$s\mathcal{L}\big(f(t)\big)=ln(s+1)+c_2\rightarrow\mathcal{L}\big(f(t)\big)=\frac{ln(s+1)}{s}+\frac{c_2}{s}$$

$$\lim_{s\to0}s\mathcal{L}\big(f(t)\big)=\lim_{t\to\infty}f(t)=0\rightarrow c_2=0\ ∎$$

مثال ۵-۷۱ ابتدا لاپلاس $g(t)$ را بدست آورده و سپس $g(t)$ را بیابید. در نهایت انتگرال فرنل را محاسبه کنید.

$$g(t)=\int_0^{\infty}cos(tx^2)\,dx\rightarrow G(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}\int_0^{\infty}cos(tx^2)\,dx\,dt$$

$$G(s)=\int_0^{\infty}\underbrace{\int_0^{\infty}e^{-st}cos(tx^2)\,dt}_{\mathcal{L}(cos(at))\,;\,a=x^2}\,dx=\int_0^{\infty}\frac{s}{s^2+x^4}dx\xrightarrow{x=\sqrt{stan\theta}}G(s)=\frac{\pi\sqrt{2}}{4\sqrt{s}}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}g(t)=\frac{\sqrt{2\pi}}{4\sqrt{t}}\xrightarrow{t=1}\int_0^{\infty}cos(x^2)\,dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

تعمیم: به همین ترتیب میتوان نشان داد $\int_0^{\infty}sin(x^2)\,dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$ و تعمیم آن $\int_0^{\infty}sin(tx^p)\,dx=\frac{\pi sec\frac{\pi}{2p}}{2p\sqrt[p]{t}\,\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)}$ ∎

مثال ۵-۷۲ با مشتق گیری از تابع گاما و استفاده از رابطه زیر, لاپلاس lnt را بیابید.

$$\Gamma'(1)=-\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-lnn\right)=-0.577215\cdots=-\gamma$$

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty}u^xe^{-u}\,du\rightarrow\Gamma'(x+1)=\int_0^{\infty}u^xe^{-u}lnu\,du$$

$$x=0\rightarrow\Gamma'(1)=\int_0^{\infty}e^{-u}lnu\,du\xrightarrow{u=st\ ;\ s>0}\underbrace{\Gamma'(1)}_{-\gamma}=s\underbrace{\int_0^{\infty}e^{-st}lnt\,dt}_{\mathcal{L}(lnt)}+slns\int_0^{\infty}e^{-st}\,dt$$

$$\rightarrow\mathcal{L}(lnt)=\frac{-1}{s}(\gamma+lns)\ ∎$$

مثال ۵-۷۳ با توجه به اینکه می‌دانیم $y(t)=e^{-t^2}$ جواب معادله زیر است, $\mathcal{L}\left(e^{-t^2}\right)$ را بیابید. سپس به کمک قسمت قبل $\mathcal{L}(erf(t))$ را بیابید.

$$y'+2ty=0\ \ ;\ \ y(0)=1\ \ \xrightarrow{\mathcal{L}}\ \ sY(s)-y(0)-2Y'(s)=0\rightarrow Y'(s)-\frac{1}{2}sY(s)=-\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow\left(e^{-\frac{s^2}{4}}Y(s)\right)'=-\frac{1}{2}e^{-\frac{s^2}{4}}\xrightarrow{\int_0^s}e^{-\frac{s^2}{4}}Y(s)-Y(0)=-\frac{1}{2}\int_0^s e^{-\frac{u^2}{4}}du$$

$$Y(s)=\int_0^\infty e^{-st}e^{-t^2}\,dt\rightarrow Y(0)=\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$Y(s)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{s^2}{4}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^s e^{-\frac{u^2}{4}}du\right)\xrightarrow{u=2v}Y(s)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{s^2}{4}}\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{s}{2}}e^{-v^2}\,dv\right)$$

$$\rightarrow Y(s)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{s^2}{4}}\left(1-erf\left(\frac{s}{2}\right)\right)\rightarrow\mathcal{L}\left(e^{-t^2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{s^2}{4}}erfc\left(\frac{s}{2}\right)$$

که در آن $erfc(x)=1-erf(x)$ بیانگر تابع مکمل خطا است. برای قسمت دوم مساله به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$$erf(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}\,dx\rightarrow\mathcal{L}(erf(t))=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathcal{L}\left(\int_0^t e^{-x^2}\,dx\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}I$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)dx\right)=\frac{F(s)}{s}\rightarrow I=\mathcal{L}\left(\int_0^t e^{-x^2}\,dx\right)=\frac{\mathcal{L}\left(e^{-t^2}\right)}{s}=\frac{\sqrt{\pi}}{2s}e^{\frac{s^2}{4}}erfc\left(\frac{s}{2}\right)$$

$$\rightarrow\mathcal{L}(erf(t))=\frac{1}{s}e^{\frac{s^2}{4}}erfc\left(\frac{s}{2}\right)\ \ \blacksquare$$

❋ ۵-۱۰- محاسبه لاپلاس معکوس با استفاده از آنالیز مختلط

این موضوع معمولا در انتهای بحث آنالیز مختلط در ریاضی مهندسی مطرح میشود. در اینجا بدون وارد شدن به جزئیات, صرفا روابط و نحوه استفاده از آن ارائه می‌شود. فرض کنیم $f(z)$ بصورت تقسیم دو چندجمله‌ای باشد. در اینصورت ریشه‌های مخرج را قطب نامیده و مرتبه یک قطب (m) را تعداد صفر شدنهای مخرج منهای تعداد صفر شدنهای صورت تعریف میکنیم. مثلا اگر $z=a$ مخرج یک کسر را ۴ بار و صورت آنرا ۱ بار صفر کند, این نقطه, قطب مرتبه ۳ می‌باشد. لازم بذکر است تعریف دقیق‌تر قطب, متفاوت از تعریفی است که در اینجا ارائه شد.

برای قطب $z=a$ از مرتبه m, مانده $(Residual)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$R=Res[f(z);a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\rightarrow a}[(z-a)^m f(z)]^{(m-1)}$$

که در حالت خاص اگر قطب, از مرتبه اول باشد, مانده بصورت زیر ساده می‌شود:

$$if\ m=1\quad :\quad R=Res[f(z);a]=\lim_{z\rightarrow a}[(z-a)f(z)]$$

بعنوان مثال برای تابع $f(z)=\frac{1}{z(z+2)^3}$ دیده می‌شود که تکینهای این تابع $z=0$ و $z=-2$ میباشد. بدیهی است $z=0$ قطب مرتبه اول و $z=-2$ قطب مرتبه ۳ است (مخرج را سه بار صفر کرده و صورت را صفر نمی‌کند). در نتیجه:

$$z=0 \xrightarrow{m=1} R_1=\lim_{z\to 0}\left[(z-0)\frac{1}{z(z+2)^3}\right]=\frac{1}{8}$$

$$z=-2 \xrightarrow{m=3} R_2=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -2}\left[(z+2)^3\frac{1}{z(z+2)^3}\right]''=-\frac{1}{8}$$

قضیه زیر در بحث آنالیز مختلط قابل اثبات است که در اینجا صرفا به بیان صورت قضیه اکتفا می‌شود:

قضیه: اگر $F(s)$ بصورت تقسیم دو چندجمله‌ای بوده و درجه مخرج لااقل یکی از صورت بیشتر باشد, لاپلاس معکوس $F(s)$ برابر است با جمع مانده‌های تابع $e^{st}F(s)$ در کلیه نقاط قطب آن.

مثال ۵-۷۴ لاپلاس معکوسهای زیر را با استفاده از روابط بالا بدست آورید.

$$1)\ F(s)=\frac{1}{s-2}\ ;\ s=2 \xrightarrow{m=1} R_1=\lim_{s\to 2}\left[(s-2)\frac{e^{st}}{s-2}\right]=e^{2t}\to \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)=R_1=e^{2t}\ \blacksquare$$

$$2)\ F(s)=\frac{1}{s^2-4}\to\begin{cases} s=2 & (m=1)\\ s=-2 & (m=1)\end{cases}\ ;\ s=2 \xrightarrow{m=1} R_1=\lim_{s\to 2}\left[(s-2)\frac{e^{st}}{s^2-4}\right]=\frac{e^{2t}}{4}$$

$$s=-2 \xrightarrow{m=1} R_2=\lim_{s\to -2}\left[(s+2)\frac{e^{st}}{s^2-4}\right]=-\frac{e^{-2t}}{4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right)=R_1+R_2=\frac{1}{4}\left(e^{2t}-e^{-2t}\right)=\frac{1}{2}sinh2t\ \blacksquare$$

$$3)\ F(s)=\frac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}\to\begin{cases} s=1 & (m=2)\\ s=-1 & (m=3)\end{cases}$$

$$s=-1 \xrightarrow{m=3} R_1=\frac{1}{2!}\lim_{s\to -1}\left(\left(s-(-1)\right)^3\frac{se^{st}}{(s+1)^3(s-1)^2}\right)''=\frac{1}{16}e^{-t}(1-2t^2)$$

$$s=1 \xrightarrow{m=2} R_2=\frac{1}{1!}\lim_{s\to 1}\left((s-1)^2\frac{se^{st}}{(s+1)^3(s-1)^2}\right)'=\frac{1}{16}e^{t}(2t-1)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}\right)=R_1+R_2=\frac{1}{16}e^{-t}(1-2t^2)+\frac{1}{16}e^{t}(2t-1)\ \blacksquare$$

تمرینات بخش‌های ۵-۹ و ۵-۱۰

۱- مشابه روش ارائه شده در مثال ۵-۷۳ اگر بدانیم $y(t)=sin\sqrt{t}$ جواب معادله زیر است, $\mathcal{L}\left(sin\sqrt{t}\right)$ را بیابید.

$$4ty''+2y'+y=0\quad ;\quad \underline{Ans}:\ \mathcal{L}\left(sin\sqrt{t}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}e^{-\frac{1}{4s}}\quad ;\quad s>0\ \blacksquare$$

۲- لاپلاس معکوسهای زیر را بدست آورید.

$$a)\ F(s)=\frac{2(s-1)}{(s+1)(s^2+2s+5)}\quad ;\quad \underline{Ans}:\ f(t)=e^{-t}(sin2t+cos2t-1)$$

$$b)\ F(s)=\frac{e^{-2s}}{(s-1)(s-3)}\ ;\ Re(s)>3\ ;\ \underline{Ans}:\ f(t)=\frac{1}{2}\left(e^{3(t-2)}-e^{t-2}\right)H_2(t)$$

$$c)\ F(s)=\frac{s}{(s+2)^2(s^2+1)}\quad ;\quad \underline{Ans}:\ f(t)=\frac{3}{25}cost+\frac{4}{25}sint-\frac{3}{25}e^{-2t}-\frac{10}{25}te^{-2t}$$

ضمیمه: تجزیه کسرهای گویا

بنا به تعریف, کسری را گویا می‌نامیم که در آن صورت و مخرج هر دو چندجمله‌ای باشند. در تجزیه این کسرها ابتدا اگر درجه صورت بیشتر یا مساوی مخرج باشد, صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم تا به کسری برسیم که درجه صورت از مخرج کمتر باشد. در کسرهای تجزیه شده (کسرهای جزئی) همواره تکلیف مخرج آنها روشن است چرا که از تجزیه مخرج کسر اولیه بدست می‌آید. لذا هدف تعیین صورت هر کسر است. از آنجا که در کسر اولیه درجه صورت از مخرج کمتر است, لذا در تمام موارد, صورتِ کسرهای جزئی را بگونه‌ای انتخاب می‌کنیم که درجه آن از مخرج کمتر باشد. اما از آنجا که در ابتدا نمی‌دانیم این درجه چه اندازه کمتر است, لذا آنرا با حداکثر درجه یعنی یک درجه کمتر از مخرج انتخاب می‌کنیم. روش کلی متحد قرار دادن دو طرف تساوی‌ها است. بطور معمول ۴ حالت خواهیم داشت:

الف: اگر مخرج n ریشه ساده داشته باشد:

در اینصورت کسر را بصورت مجموعی از n کسر می‌نویسیم که در مخرج هر یک عبارت $x-x_j$ قرار داشته باشد, که در آن x_j معرف j امین ریشه مخرج است. سپس در صورت کسر از آنجا که بایستی درجه آن کمتر از مخرج باشد, ضرایب ثابتی مانند A_j را در نظر گرفته و سعی میکنیم این ضرایب را بیابیم.

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\cdots+\frac{A_j}{x-x_j}+\cdots+\frac{A_n}{x-x_n}$$

برای محاسبه ضرایب یک راه آن است که با مخرج مشترک‌گیری از سمت راست و متحد قرار دادن صورت کسر ایجاد شده با $g(x)$ ضرایب را بدست آورد. بجای این کار میتوان گفت از آنجا که این رابطه بایستی به‌ازای تمام مقادیر x برقرار باشد, با انتخاب ریشه‌های مخرج بعنوان x , ضرایب بدست می‌آید. بدیهی است میتوان x را هر عدد دلخواهی انتخاب کرد. اما اگر این مقادیر ریشه‌های مخرج انتخاب شوند ضرایب ساده‌تر محاسبه میشود. دقت شود چنانچه در مخرج کسر ضریب بزرگترین درجه برابر a باشد, بهتر است در شروع حل از a در مخرج کسر فاکتور گرفت (قسمت دوم از مثال بعد).

راه حل دوم آن است که با ضرب طرفین کسر $f(x)$ در $x-x_j$ و سپس حدگیری از طرفین, ضرایب را بدست آورد:

$$A_j=\lim_{x\to x_j}(x-x_j)f(x)=\lim_{x\to x_j}(x-x_j)\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to x_j}\frac{g(x)}{\frac{h(x)-h(x_j)}{x-x_j}}\to A_j=\frac{g(x_j)}{h'(x_j)}$$

که در آن از $h(x_j)=0$ استفاده شده است, چرا که x_j ریشه ساده مخرج می‌باشد.

مثال کسرهای زیر را تجزیه کنید.

$$1)\ f(x)=\frac{15x^2-4x-81}{x^3-13x+12}=\frac{A_1}{x-3}+\frac{A_2}{x+4}+\frac{A_3}{x-1}$$

$$15x^2-4x-81=A_1(x+4)(x-1)+A_2(x-3)(x-1)+A_3(x-3)(x+4)$$

$$x=3\to 42=14A_1\to A_1=3\ ;\ x=-4\to A_2=5\ ;\ x=1\to A_3=7$$

$$\underline{Or}:\ A_1=\frac{g(3)}{h'(3)}=\left.\frac{15x^2-4x-81}{3x^2-13}\right|_{x=3}=\frac{42}{14}=3\ ;\ A_2=\frac{g(-4)}{h'(-4)}=5\ ;\ A_3=\frac{g(1)}{h'(1)}=7$$

در اینحالت گاهی اوقات ساده‌تر است ضرایب را از فرمول اولیه آن یعنی $A_j=\lim_{x\to x_j}(x-x_j)f(x)$ بدست آوریم. ■

$$2)\ f(x)=\frac{7x+1}{12x^2+2x-2} \qquad ; \qquad 12x^2+2x-2=0\to x_{1,2}=-\frac{1}{2},\frac{1}{3}$$

$$\to 12x^2+2x-2=12\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=(4x+2)(3x-1)$$

$$f(x)=\frac{A_1}{4x+2}+\frac{A_2}{3x-1}\to 7x+1=A_1(3x-1)+A_2(4x+2)$$

$$x=-\frac{1}{2}\to -\frac{5}{2}=A_1\left(-\frac{5}{2}\right)\to A_1=1\ ;\ x=\frac{1}{3}\to\frac{10}{3}=A_2\left(\frac{10}{3}\right)\to A_2=1\ \blacksquare$$

توضیح: می‌توان بطریق زیر نیز ضرایب را بدست آورد:

$$f(x)=\frac{7x+1}{12x^2+2x-2}=\frac{1}{12}\left(\frac{A_1}{x+\frac{1}{2}}+\frac{A_2}{x-\frac{1}{3}}\right)=\frac{\frac{1}{12}A_1}{x+\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{12}A_2}{x-\frac{1}{3}}$$

دقت شود در استفاده از روش دوم اگر بخواهیم از مشتق استفاده کنیم, حتما بایستی مخرج به فرم $x-x_j$ باشد, یعنی ضریب x برابر 1 گردد, به همین جهت ضریب $\frac{1}{12}$ را به صورت کسر منتقل کردیم.

$$\to\frac{1}{12}A_1=\frac{g\left(-\frac{1}{2}\right)}{h'\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{-\frac{5}{2}}{-10}=\frac{1}{4}\to A_1=3\ ;\ \frac{1}{12}A_2=\frac{g\left(\frac{1}{3}\right)}{h'\left(\frac{1}{3}\right)}=\frac{\frac{10}{3}}{10}=\frac{1}{3}\to A_2=4$$

$$\to\frac{7x+1}{12x^2+2x-2}=\frac{1}{12}\left(\frac{3}{x+\frac{1}{2}}+\frac{4}{x-\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{4x+2}+\frac{1}{3x-1}\ \blacksquare$$

$$3)\ f(x)=\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}\xrightarrow{u=x^2}\frac{2u-1}{u^2+5u+4}=\frac{A_1}{u+4}+\frac{A_2}{u+1}\to A_1=3; A_2=-1$$

دیده میشود که استفاده از تغییر متغیر درجه مخرج را کمتر و تجزیه را ساده‌تر کرد. $\blacksquare$

ب: اگر مخرج n ریشه تکراری x_1 داشته باشد:

فرض کنید هدف تجزیه کسر $\frac{2x+3}{x(x-3)^2}$ باشد. عنوان شد که در تمام موارد, کسرهای جزئی را بگونه‌ای انتخاب می‌کنیم که درجه صورت هر کسر از مخرج آن یک واحد کمتر باشد. در نتیجه بایستی آنرا به فرم زیر تجزیه کرد:

$$\frac{2x+3}{x(x-3)^2}=\frac{A}{x}+\frac{ax+b}{(x-3)^2}$$

اما کسر دوم را نیز می‌توان به دو کسر دیگر بصورت زیر تجزیه کرد:

$$\frac{ax+b}{(x-3)^2}=\frac{a\big((x-3)+3\big)+b}{(x-3)^2}=\frac{a(x-3)+b+3a}{(x-3)^2}=\frac{a}{x-3}+\frac{b+3a}{(x-3)^2}=\frac{B_1}{x-3}+\frac{B_2}{(x-3)^2}$$

بنابراین:

$$\frac{2x+3}{x(x-3)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x-3}+\frac{B_2}{(x-3)^2}$$

به عبارت دیگر میتوان گفت اگر مخرج صرفا n ریشه تکراری x_1 داشته باشد, تجزیه آن بصورت زیر می‌باشد:

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{B_1}{x-x_1}+\frac{B_2}{(x-x_1)^2}+\cdots+\frac{B_n}{(x-x_1)^n}$$

در اینجا نیز صورت کسر تجزیه شده را با صورت کسر اولیه مساوی قرار داده و یا با انتخاب ریشه‌های مخرج (و یا هر عدد دیگری) بعنوان x, ضرایب را بدست می‌آوریم. راه دوم آن است که ابتدا طرفین را در $(x-x_1)^n$ ضرب و آن‌را $F(x)$ نامگذاری میکنیم:

$$F(x)=(x-x_1)^n f(x)=(x-x_1)\ \text{جملاتی شامل}+B_{n-2}(x-x_1)^2+B_{n-1}(x-x_1)+B_n$$

$$\rightarrow B_n=\lim_{x\to x_1}F(x)$$

حال برای محاسبه B_{n-1} کافی است از $F(x)$ مشتق بگیریم:

$$F'(x)=\ (x-x_1)\ \text{جملاتی شامل}+2\times B_{n-2}(x-x_1)+1\times B_{n-1}\rightarrow B_{n-1}=\lim_{x\to x_1}F'(x)$$

و به همین ترتیب برای محاسبه B_{n-2} مشتق دوم $F(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$F''(x)=(x-x_1)\ \text{جملاتی شامل}+2\times 1\times B_{n-2}\rightarrow B_{n-2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to x_1}F''(x)$$

و با ادامه همین روش در نهایت فرمول کلی برای محاسبه تمامی B_n ها بصورت زیر خواهد بود:

$$\cdots\rightarrow\boxed{B_{n-k}=\frac{1}{k!}\lim_{x\to x_1}F^{(k)}(x)\quad(k=0{:}\,n-1)\quad;\quad F(x)=(x-x_1)^n f(x)}$$

بنابراین ابتدا B_n , سپس B_{n-1} و .. محاسبه می‌گردد.

مثال کسرهای زیر را تجزیه کنید.

$$1)\ \ f(x)=\frac{5x^2-3x+2}{(x-1)^3}=\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)^3}$$

$$5x^2-3x+2=B_1(x-1)^2+B_2(x-1)+B_3$$

$$x=1\rightarrow B_3=4\ \ ;\ \ \begin{cases}x=0\rightarrow B_1-B_2+4=2\\ x=-1\rightarrow 4B_1-2B_2+4=10\end{cases}\rightarrow\begin{cases}B_1=5\\ B_2=7\end{cases}$$

$\underline{Or}$: $F(x)=(x-1)^3f(x)=5x^2-3x+2$

$$B_{n-k}=\frac{1}{k!}\lim_{x\to x_1}F^{(k)}(x)\xrightarrow{n=3}\begin{cases}k=0\rightarrow B_3=\dfrac{1}{0!}\lim\limits_{x\to1}F(x)=4\\ k=1\rightarrow B_2=\dfrac{1}{1!}\lim\limits_{x\to1}F'(x)=\dfrac{1}{1!}\lim\limits_{x\to1}(10x-3)=7\\ k=2\rightarrow B_1=\dfrac{1}{2!}\lim\limits_{x\to1}F''(x)=\dfrac{1}{2!}\lim\limits_{x\to1}(10)=5\end{cases}$$

<u>راه دوم:</u> در این نوع کسرها که مخرج صرفا به فرم $(x-a)^n$ می‌باشد, شاید ساده‌تر باشد برای تجزیه کسر, صورت را برحسب توانهای مخرج یعنی $x-a$ بیان کنیم. به عبارتی بسط تیلور صورت کسر را حول ریشه مخرج (در این مثال $a=1$) می‌نویسیم:

$$\frac{5x^2-3x+2}{(x-1)^3}=\frac{5\left((x-1)+1\right)^2-3\left((x-1)+1\right)+2}{(x-1)^3}=\frac{5(x-1)^2+7(x-1)+4}{(x-1)^3}$$
$$=\frac{5}{x-1}+\frac{7}{(x-1)^2}+\frac{4}{(x-1)^3}\quad ■$$

$$2)\ \ f(x)=\frac{2x^2-3x+3}{\underbrace{x^3-2x^2+x}_{x(x-1)^2}}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}$$

در واقع این مثال ترکیبی از دو حالت الف و ب میباشد.

$$2x^2-3x+3=A(x-1)^2+B_1x(x-1)+B_2x\rightarrow\begin{cases}x=0\rightarrow A=3\ \ ;\ \ x=1\rightarrow B_2=2\\ x=-1\rightarrow 4A+2B_1-B_2=8\rightarrow B_1=-1\end{cases}$$

همچنین به جای انتخاب $x=-1$ از آنجا که $x=1$ ریشه مضاعف میباشد, لذا میتوان آنرا در مشتق رابطه نیز جایگذاری کرد:

$$\rightarrow 4x-3=2\underbrace{A}_{3}(x-1)+B_1(2x-1)+\underbrace{B_2}_{2}\xrightarrow{x=1}1=0+B_1+2\rightarrow B_1=-1$$

راه دوم: از آنجا که $x=0$ ریشه ساده و $x=1$ ریشه مضاعف میباشد, با توجه به روابط ارائه شده در دو حالت الف و ب:

$$A=\frac{g(0)}{h'(0)}=\frac{3}{1}=3\quad ;\quad F(x)=(x-1)^2f(x)=2x-3+\frac{3}{x}$$

$$B_{n-k}=\frac{1}{k!}\lim_{x\to x_1}F^{(k)}(x)\xrightarrow{n=2}\begin{cases}k=0\rightarrow B_2=\dfrac{1}{0!}\lim\limits_{x\to 1}F(x)=2\\ k=1\rightarrow B_1=\dfrac{1}{1!}\lim\limits_{x\to 1}F'(x)=\dfrac{1}{1!}\lim\limits_{x\to 1}\left(2-\dfrac{3}{x^2}\right)=-1\end{cases}\quad ■$$

ج: حداقل یکی از عبارات مخرج دارای ریشه حقیقی نبوده و تکراری نیست. در مثال زیر جزئیات کار دیده میشود.

مثال کسر زیر را تجزیه کنید.

$$\frac{2x^5-2x+1}{x^4-1}=2x+\frac{1}{x^4-1}$$

حل از آنجا که درجه صورت بیشتر از مخرج می‌باشد, ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم کردیم. حال کسر دوم را تجزیه میکنیم:

$$f(x)=\frac{1}{x^4-1}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

دیده میشود که در کسری که مخرج دارای ریشه حقیقی نیست, درجه صورت کسر را چندجمله‌ای با یک درجه کمتر قرار می‌دهیم. اما در مثال بعد خواهیم دید میتوان در این حالت ریشه‌های مختلط را بدست آورده و مساله را مشابه قبل حل کرد.

$$1=A_1(x+1)(x^2+1)+A_2(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)(x+1)$$
$$x=1\rightarrow 4A_1=1\rightarrow A_1=\frac{1}{4}\ \ ;\ \ x=-1\rightarrow -4A_2=1\rightarrow A_2=-\frac{1}{4}$$

گفته شد که دو ریشه دیگر مختلطند. در اینجا اگر نخواهیم به ریشه‌های مختلط توجه کنیم, میتوان دو عدد دلخواه را قرار داد. لذا:

$$x=0\rightarrow A_1-A_2-D=1\rightarrow D=-\frac{1}{2}\ \ ;\ \ x=-2\xrightarrow{\cdots}C=0\ ■$$

توضیح ۱: اگر اختلاف درجه صورت و مخرج کسری که دارای ضرایب مجهول است, برابر یک باشد(در اینجا کسر $\frac{Cx+D}{x^2+1}$), با محاسبه حد $xf(x)$ در بینهایت نیز میتوان ثابت C را بدست آورد. به عبارتی:

$$xf(x)=\frac{x}{x^4-1}=\frac{A_1x}{x-1}+\frac{A_2x}{x+1}+\frac{Cx^2+Dx}{x^2+1}\quad;\quad \lim_{x\to+\infty}xf(x)=0\to 0=A_1+A_2+C\to C=0$$

راه دیگر آن است که پس از محاسبه A_1 و A_2 بطریق زیر عمل شود:

$$\frac{Cx+D}{x^2+1}=\frac{1}{x^4-1}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{x^4-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\frac{1-x^2}{x^4-1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}$$

توضیح ۲: راه دوم تجزیه کسر $f(x)$ بصورت زیر است. یعنی ابتدا ضرایب A_1 و A_2 را با فرمولهای داده شده در قسمت الف بدست آورده و سپس با انتخاب دو نقطه دلخواه ضرایب C و D را می‌یابیم.

$$f(x)=\frac{1}{x^4-1}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\to A_1=\frac{g(1)}{h'(1)}=\frac{1}{4}\quad;\quad A_2=\frac{g(-1)}{h'(-1)}=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\to\begin{cases}x=0\to -1=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+D\to D=-\frac{1}{2}\\ x=-2\to\frac{1}{15}=\frac{-1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{-2C+D}{5}\xrightarrow{D=-\frac{1}{2}}C=0\end{cases}\quad\blacksquare$$

مثال کسرهای زیر را تجزیه کنید.

$$1)\ f(x)=\frac{x^3}{x^4-1}$$

حل بدون استفاده از ریشه‌های مختلط, تجزیه را بصورت زیر در نظر گرفته و با متحد قرار دادن دو طرف ضرایب را می‌یابیم.

$$f(x)=\frac{x^3}{x^4-1}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\to A_1(x-1)(x^2+1)+A_2(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)(x+1)=x^3$$

میتوان دو طرف را متحد قرار داد و یا ساده‌تر است که ریشه‌های مخرج(و یا هر عدد دیگری) را بعنوان x انتخاب کنیم. لذا:

$$x=-1\to -4A_1=-1\to A_1=\frac{1}{4}\quad;\quad x=1\to 4A_2=1\to A_2=\frac{1}{4}$$

$$\begin{cases}x=i\to -2(Ci+D)=-i\\ x=-i\to -2(-Ci+D)=i\end{cases}\to C=\frac{1}{2}\ ;\ D=0\to f(x)=\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}\quad\blacksquare$$

راه دوم: با درنظر گرفتن ریشه‌های مختلط خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^4-1}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x+i}+\frac{A_4}{x-i}\to A_1=\frac{g(x_j)}{h'(x_j)}=\frac{g(-1)}{h'(-1)}=\frac{1}{4}$$

به همین ترتیب سایر ضرایب نیز $\frac{1}{4}$ بدست می‌آیند. حال اگر دو جمله آخر را بصورت جمع شده بنویسیم به همان جواب بالا می‌رسیم. به عبارتی:

$$f(x)=\frac{\frac{1}{4}}{x+i}+\frac{\frac{1}{4}}{x-i}=\frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1}\ \blacksquare$$

$$2)\ f(x)=\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{C_1x+D_1}{x^2+1}+\frac{C_2x+D_2}{x^2+4}$$

$$(C_1x+D_1)(x^2+4)+(C_2x+D_2)(x^2+1)=1$$

حال با استفاده از انتخاب ریشه‌های مخرج بعنوان x در اتحاد فوق خواهیم داشت:

$$x=i\rightarrow 3C_1i+3D_1=1\rightarrow C_1=0\,;\ D_1=\frac{1}{3}$$

$$x=2i\rightarrow -6C_2i-3D_2=1\rightarrow C_2=0\,;\ D_2=-\frac{1}{3}\rightarrow f(x)=\frac{1}{3(x^2+1)}-\frac{1}{3(x^2+4)}\ \blacksquare$$

راه دوم: با در نظرگرفتن ریشه‌های مختلط میتوان مخرج کسر را به ریشه‌های ساده تجزیه کرد:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{A_1}{x+i}+\frac{A_2}{x-i}+\frac{A_3}{x+2i}+\frac{A_4}{x-2i}$$

$$A_1=\frac{g(-i)}{h'(-i)}=\frac{1}{4(-i)^3+10(-i)}=\frac{1}{-6i}=\frac{i}{6}\ \ ;\ A_2=\frac{-i}{6};\ A_3=\frac{-i}{12}\ \ ;\ A_4=\frac{i}{12}$$

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{i/6}{x+i}+\frac{-i/6}{x-i}+\frac{-i/12}{x+2i}+\frac{i/12}{x-2i}=\frac{1}{3(x^2+1)}-\frac{1}{3(x^2+4)}$$

اگرچه این راه حل ساده‌تر است, اما در نهایت, تبدیل کسر مختلط به کسر حقیقی, ممکن است کار را طولانی‌تر از راه اول کند. ■

د: حداقل یکی از عبارات مخرج دارای ریشه حقیقی نبوده و تکراری است. بعنوان مثال:

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{C_1x+D_1}{x^2+1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+1)^2}$$

مشابه آنچه در قسمتهای ب و ج دیده شد, می‌توان فرم تجزیه شده کسر را بصورتی که در بالا دیده میشود بیان کرد.

$$A=\frac{g(0)}{h'(0)}=1\rightarrow 1-x+2x^2-x^3=\underbrace{A}_{1}(x^2+1)^2+(C_1x+D_1)x(x^2+1)+(C_2x+D_2)x$$

برای محاسبه سایر ضرایب بایستی دو طرف را متحد قرار داد و یا با انتخاب نقاط دلخواه, ضرایب را محاسبه کرد. مثلا:

$$x=1\rightarrow 1=4+2(C_1+D_1)+(C_2+D_2)$$

$$x=-1\rightarrow 5=4-2(-C_1+D_1)-(-C_2+D_2)$$

$$x=2\rightarrow -1=25+10(2C_1+D_1)+2(2C_2+D_2)$$

$$x=-2\rightarrow 19=25-10(-2C_1+D_1)-2(-2C_2+D_2)$$

از حل این دستگاه خواهیم داشت:

$$C_1=-1\,;\ D_1=-1\ \ ;\ C_2=1\,;\ D_2=0\ \ \rightarrow\ \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{-x-1}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}\ \blacksquare$$