سؤال ۱.

اگر گراف G یک گراف همبند با مرتبه‌ی ۳ یا بزرگ‌تر از آن باشد که همیلتونی نباشد، آنگاه طول k از طولانی‌ترین مسیر گراف G در رابطه‌ی $k \geq 2\delta(G)$، صدق می‌کند.

پاسخ .

فرض کنید $p : u_0, u_1, \ldots, u_k$ طولانی ترین مسیر در گراف G باشد. از آنجا که p طولانی ترین مسیر می‌باشد، هر یک از رئوس u_0 و u_k با تنها دو راس از p مجاور می‌باشند.

اگر یال $u_0 u_i \in E(G)$ به ازای $1 \leq i \leq k$ باشد، آنگاه یال $u_{i-1} u_k \notin E(G)$ نمی‌باشد زیرا در غیر این صورت، سیکل $C : u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_k, u_{k-1}, u_{k-2}, \ldots, u_i, u_0$ به طول $k+1$ در گراف G وجود خواهد داشت.

سیکل C نمی‌تواند شامل تمامی رئوس گراف G باشد، زیرا G یک گراف همیاتونی نمی‌باشد. بنابراین راسی ملنند w وجود دارد که در سیکل C قرار نداشته و یا یک راس از C مجاور می‌باشد، اما این امر بیان می‌دارد که گراف G شامل یک مسیر به طول $k+1$ می‌باشد که غیرممکن است. در نتیجه، برای هر راس از مجموعه‌ی $u_1, u_2, \ldots, u_k$ که مجاور با u_0 می‌باشند، یک راس از مجموعه‌ی $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ وجود دارد که با u_k مجاور نمی‌باشند. بنابراین داریم: $\deg u_k \leq k - \deg u_0$، که از این رابطه داریم: $k \geq \deg u_0 + \deg u_k \geq 2\delta(G)$

لذا، اثبات کامل شده است.