

سؤال ۱.

در یک مهمانی با n نفر، در میان هر گروه چهار نفره حداقل یک نفر وجود دارد که هر یک از سه نفر دیگر را می شناسد. حداقل تعداد افرادی که در مهمانی همه را می شناسند چقدر است؟

پاسخ.

ما بر روی n استقرای می زنیم تا ثابت کنیم در یک مهمانی با n نفر، حداقل باید $(n - 3)$ نفر باشند که بقیه را بشناسند (بدیهی است که این امر با شناخت همه افراد دیگر به جز سه نفر A, B, C که یکدیگر را نمی شناسند، قابل دستیابی است).
حالت پایه: برای $n = 4$ واضح است.

فرض استقرا: فرض کنید در یک مهمانی با k نفر ($k > 4$)، حداقل $(k - 3)$ نفر بقیه را می شناسند.
حکم استقرا: یک مهمانی با $(k + 1)$ نفر را در نظر بگیرید. k نفر از افراد را در نظر بگیرید (با کنار گذاشتن یک فرد دیگر مثلاً A) و گام استقرایی را به این نتیجه برسانید که حداقل $(k - 3)$ نفر سایر افراد را در گروه k نفره، G می شناسند.

حال فرض کنید همه افراد گروه G همدیگر را می شناسند. سپس ۳ نفر از این افراد و A را در نظر بگیرید تا نتیجه بگیرید که A یک شخص $B \in G$ را می شناسد، به این معنی که B همه افراد دیگر را می شناسد. سپس گام استقرایی را روی k نفر باقیمانده (به استثنای B) اعمال کنید تا $(k - 3)$ افرادی را از بین آنها پیدا کنید که بقیه را می شناسند (البته از جمله B). سپس این افراد $(k - 3)$ و B که $(k - 2)$ نفر را برمی شمارند، به این نتیجه می رسند که حداقل $(k - 3)$ نفر سایر افراد در گروه k نفره، G را می شناسند.

حال فرض کنید همه افراد در گروه G همدیگر را می شناسد سپس ۳ نفر از این افراد و A را در نظر بگیرید تا نتیجه بگیرید که A یک شخص $B \in G$ را می شناسد، به این معنی که B همه افراد دیگر را می شناسد. سپس گام استقرایی را روی k نفر باقیمانده (به استثنای B) اعمال کنید تا $(k - 3)$ افرادی را از بین آنها پیدا کنید که بقیه را می شناسند (از جمله B). سپس این $(k - 3)$ نفر و B که $(k - 2)$ نفر را برمی شمارند، بقیه را می شناسند.

فرض کنید دو نفر $B, C \in G$ وجود دارند که یکدیگر را نمی شناسند. از آنجا که $k - 3 > 1$ ، حداقل یک نفر در G وجود دارد، شخص D ، که همه افراد دیگر را در G می شناسد. حال، A, B, C, D را بگیرید و مشاهده کنید که چون B, C یکدیگر را نمی شناسند، A یا D بقیه A, B, C, D را می شناسد (با شرایط سوال) بنابراین به طور خاص A و D یکدیگر را می شناسند. سپس گام استقرایی را روی k نفر باقیمانده (به استثنای D) اعمال کنید تا $(k - 3)$ نفر را از بین آنها پیدا کنید که بقیه را می شناسند (از جمله D). سپس این $(k - 3)$ نفر و D که $(k - 2)$ نفر را برمی شمارند، بقیه را می شناسند.