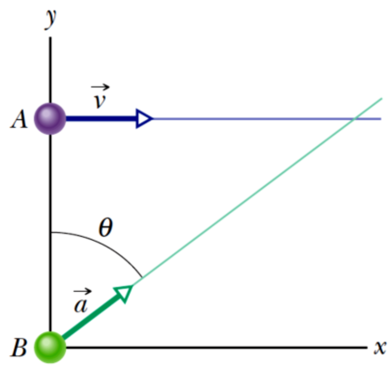
۱-



حرکت ذره B در صفحه، با **شتاب ثابت** است.

برای حرکت ذره B در راستای قائم:

$$y=\frac{1}{2}a_y t^2 \quad\Rightarrow\quad 30\text{ m}=\frac{1}{2}\left[(0.40\text{ m/s}^2)\cos\theta\right]t^2.$$

در صورت برخورد ذره A و B مختصه x آن‌ها باید برابر شود :

$$vt=\frac{1}{2}a_x t^2 \quad\Rightarrow\quad (3.0\text{ m/s})\,t=\frac{1}{2}\left[(0.40\text{ m/s}^2)\sin\theta\right]t^2.$$

و به دست می آوریم:

$$t=\frac{2v}{a_x}=\frac{2(3.0\text{ m/s})}{(0.40\text{ m/s}^2)\sin\theta}.$$

این زمان را در رابطه حرکت عمودی جایگذاری می کنیم:

$$30\text{ m}=\frac{1}{2}\left[(0.40\text{ m/s}^2)\cos\theta\right]\left(\frac{2(3.0\text{ m/s})}{(0.40\text{ m/s}^2)\sin\theta}\right)^2$$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta,$

$$30=\frac{9.0}{0.20}\,\frac{\cos\theta}{1-\cos^2\theta} \quad\Rightarrow\quad 1-\cos^2\theta=\frac{9.0}{(0.20)(30)}\cos\theta.$$

$$\cos\theta=\frac{-1.5+\sqrt{1.5^2-4(1.0)(-1.0)}}{2}=\frac{1}{2} \qquad\qquad \theta=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=60^\circ.$$

۲- معادلات حرکت (شتاب ثابت) را برای آسانسور و پیچ می نویسیم:

$$y_{\text{پیچ}} = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0 = -\frac{1}{2}(9.8)t^2 + 2.4\,t + 2.7$$

$$y'_{\text{کف}} = \frac{1}{2}at^2 + v_0t = \frac{1}{2}(2.2)t^2 + 2.4\,t$$

الف) در زمان برخورد پیچ با کف آسانسور:

$$y_{\text{پیچ}} = y'_{\text{کف}}$$

$$-4.9\,t^2 + 2.7 = 1.1\,t^2 \rightarrow 6t^2 = 2.7 \;\rightarrow\; t \cong 0.7\,s$$

ب) $$\Delta y = y - 2.7 = -\frac{1}{2}(9.8)(0.7)^2 + 2.4\,(0.7) \cong -0.71\,m$$

۳- برای حل مسئله، به تکنیک ضرب مشتق‌ها در فرمول شتاب دقت کنید.

الف)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = \alpha\sqrt{x}\,\frac{\alpha}{2\sqrt{x}} = \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\int_0^v dv = \int_0^t \frac{\alpha^2}{2}dt \Rightarrow v = \frac{\alpha^2}{2}t$$

ب)

$$\Delta x = s = \int v dt = \int \frac{\alpha^2}{2} t\, dt = \frac{\alpha^2}{4} t^2 \Rightarrow t = \frac{2\sqrt{s}}{\alpha}$$

$$v_{avg} = \frac{\int v(t) dt}{\int dt} = \frac{s}{\frac{2\sqrt{s}}{\alpha}} = \frac{\alpha\sqrt{s}}{2}$$

۴- مولفه‌های بردار شتاب **ثابت نیستند** و باید از روش انتگرال استفاده کنیم:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad \rightarrow 3v_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$\int_5^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = \int_0^t 3\, dt$$

$$ln \frac{v_x}{5} = 3t \quad \rightarrow v_x = 5e^{3t}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \int_{20}^{x} dx = \int_0^t v_x dt$$

$$\int_{20}^{x} dx = \int_0^t 5e^{3t} dt \quad \rightarrow \quad x = \frac{5}{3}(e^{3t} - 1) + 20$$

$$x(t = 4) = \frac{5}{3}(e^{12} - 1) + 20 \cong 271 \times 10^3 m$$

به طریق مشابه:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} \rightarrow \int_{2}^{v_y} dv_y = \int_{0}^{t} 4t\,dt$$

$$v_y = 2t^2 + 2$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \rightarrow \int_{40}^{y} dy = \int_{0}^{t} v_y dt$$

$$\rightarrow \quad y = \frac{2}{3}t^3 + 2t + 40 \quad \rightarrow y(t=4) \approx 91\ (m)$$

$$\vec{r}(t=4) = 271000\,\hat{\imath} + 91\,\hat{\jmath}$$

ـ۵

با توجه به جهت دلخواه مختصات و قوانین حرکت در دو بعد:

$$v_1 = -v_{1x}\widehat{i} - gt\ \widehat{j}$$

$$v_2 = v_{2x}\widehat{i} - gt\ \widehat{j}$$

حال اگر دو بردار سرعت بر هم عمود باشند:

$$v_1.v_2 = 0 \rightarrow -v_{1x}v_{2x} + (gt)^2 = 0 \rightarrow t = \frac{\sqrt{v_{1x}v_{2x}}}{g}$$

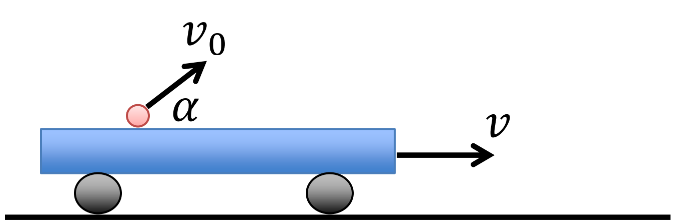
و مسافتهای پیموده شده افقی در این دو زمان

$$x_1 = v_{1x}t\ ,\ x_2 = v_{2x}t$$

در نتیجه فاصله بین دو پرتابه

$$L = x_1 + x_2 = (v_{1x} + v_{2x})t = (v_{1x} + v_{2x})\frac{\sqrt{v_{1x}v_{2x}}}{g} = 2.42m$$

۶- گلوله در لحظه رها شدن علاوه بر سرعت اولیه پرتاب، سرعت ارابه را هم با خود دارد.



برای حرکت پرتابی داریم:

$$x = (v_{0x} + v)t$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_{0y}t$$

$$y = -\frac{g\left(\frac{x}{v_{0x} + v}\right)^2}{2} + v_{0y}\left(\frac{x}{v_{0x} + v}\right)$$

برد پرتابه با برابر قرار دادن $x = R\ , y = 0$ **از رابطه زیر بدست می آید:**

$$\{x = R, y = 0\} \Rightarrow R = 2\frac{v_{0y}(v_{0x} + v)}{g} = 2\frac{v_0\sin(\alpha)\ (v_0\cos(\alpha) + v)}{g}$$

برای بیشینه نمودن برد خواهیم داشت:

$$\frac{dR}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \cos(\alpha)\left(\cos(\alpha) + \frac{v}{v_0}\right) - \sin(\alpha)^2 = 0$$

$$2\cos(\alpha)^2 + \frac{v}{v_0}\cos(\alpha) - 1 = 0$$

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{v}{4v_0} \pm \sqrt{\left(\frac{v}{4v_0}\right)^2 + \frac{1}{2}}\right)$$

مقادیر قابل قبول α عبارت است از: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

۷- الف) از صورت مسئله متوجه می‌شویم که در ۵ ثانیه جهت سرعت برعکس شده است. پس دوره تناوب حرکت دایره‌ای برابر است با $T = 2 \times 5 = 10\ s$.

$$v = \sqrt{(3.00\ \text{m/s})^2 + (4.00\ \text{m/s})^2} = 5.00\ \text{m/s},$$

$$r = \frac{vT}{2\pi} = 7.96\ m$$

$$a_r = \frac{v^2}{r} = 3.14\ \frac{m}{s^2}$$

ب)

$$\vec{a}_{\text{avg}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{(-3\ \hat{\text{i}} - 4\ \hat{\text{j}})\ \text{m/s} - (3\ \hat{\text{i}} + 4\ \hat{\text{j}})\ \text{m/s}}{5\ \text{s} - 0\ \text{s}} = -1.2\ \frac{m}{s^2}\ \hat{\imath} - 1.6\ \frac{m}{s^2}\ \hat{\jmath}$$

$$|\vec{a}_{avg}| = \sqrt{(-1.2)^2 + (-1.6)^2} = 2\ \frac{m}{s^2}$$

-۸

فرض میکنیم $v_{c/w}$ سرعت قایق نسبت به آب و $v_{w/G}$ سرعت آب نسبت به زمین باشد. واحدهای مسافت و زمان به ترتیب کیلومتر و ساعت فرض می شوند.
می دانیم که در هنگام حرکت در خلاف جهت آب:

$$v_{c/w} - v_{w/G} = 2$$

در هنگام حرکت موافق جهت حرکت آب در مدت زمان t داریم:

$$(v_{c/w} + v_{w/G})\, t = 5$$

همچنین برای بطری میتوان نوشت:

$$v_{w/G}(t+1) = 3$$

با حل همزمان این سه رابطه برای $v_{w/G}$ به معادله زیر خواهیم رسید:

$$2(v_{w/G})^2 + v_{w/G} - 6 = 0$$

(الف) ریشه مثبت معادله فوق عبارتست از:

$$v_{w/G} = 1.5\ km/h$$

(ب) در این حالت خواهیم داشت:

$$v_{c/w} = 2\ km/h\ +\ v_{w/G} = 3.5\ km/h$$

۹-

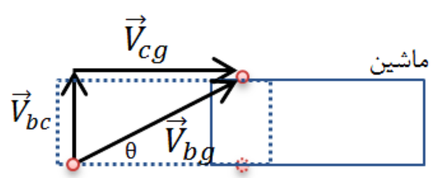
سرعت ماشین نسبت به زمین:

$$\vec{V}_{cg} = 180\ \frac{Km}{h}\ \hat{\imath}$$

سرعت گلوله نسبت به زمین را با $\vec{V}_{bg}$ و سرعت گلوله نسبت به ماشین را با $\vec{V}_{bc}$ نشان می‌دهیم. در اثر برخورد با بدنه ماشین ۲۰ درصد از انرژی گلوله کم میشود (از اثر گرانش روی گلوله صرف نظر می‌کنیم).
پس از رابطه نسبی بین سرعتها داریم:

$$0.8\,\vec{V}_{bg} = \vec{V}_{bc} + \vec{V}_{cg}$$

چون دو سوراخ عبور گلوله از بدنه ماشین دقیقا روبروی یکدیگر قرار دارند یعنی مولفه افقی سرعت گلوله (داخل ماشین) نسبت به زمین با سرعت جلو رفتن ماشین برابر بوده است:

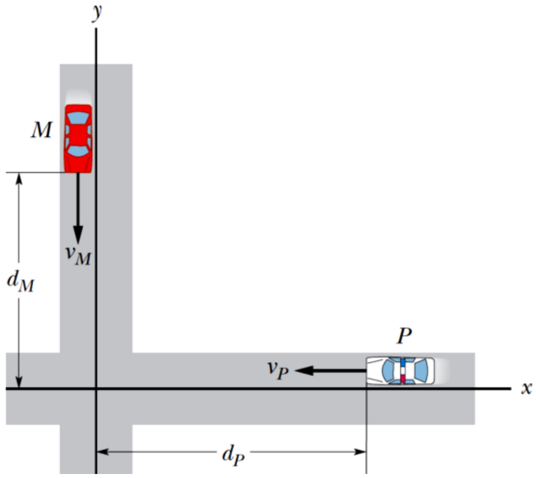


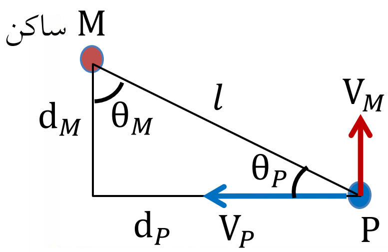
$$0.8\,V_{bg}\cos\theta = V_{cg} \quad \rightarrow \cos\theta = \frac{180\ \times 1000}{0.8\times 360\times 3600} = 0.173$$

$$\theta \cong 80°$$

لذا جواب نهایی یعنی انحراف از حالت عمود بر مسیر در شلیک گلوله، $10°$ است.

۱۰-





الف) سرعت نسبی P از دید M برآیند دو بردار روبرو است:

مولفه در راستای خط واصل:

$$V_{rel} = V_P cos\theta_P + V_M cos\theta_M = \frac{V_P d_P + V_M d_M}{l}$$

مولفه در راستای عمود بر خط واصل:

$$V_{rel} = V_P sin\theta_P - V_M sin\theta_M = \frac{V_P d_M - V_M d_P}{l}$$

زاویه سرعت نسبی با راستای خط واصل: $tan\phi = \frac{V_P d_M - V_M d_P}{V_P d_P + V_M d_M}$

ب) با توجه به ثابت بودن سرعت اتومبیل‌ها در طی زمان سرعت نسبی آن‌ها هم ثابت خواهد بود. بنابراین اتومبیل P از دید M با سرعت ثابت روی خط راست حرکت می‌کند.

ج) کمترین فاصله برابر فاصله M از خط مسیر حرکت نسبی است که برابر می‌شود با $l sin\phi$

د) با توجه به حرکت نسبی شرط لازم و کافی برای برخورد هنگامی است که سرعت نسبی در راستای خط واصل دو اتومبیل باشد. باید مولفه‌ی سرعت نسبی عمود بر راستای خط واصل صفر باشد که طبق الف خواهیم داشت: $d_M/V_M = d_P/V_P$