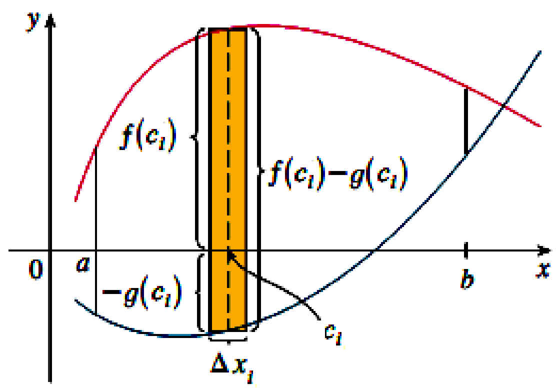
۵- کاربردهای انتگرال

در این فصل به چهار کاربرد انتگرال در محاسبه مساحت, حجم, طول قوس و سطح جانبی اشکال می‌پردازیم. به دلیل کاربردهای گسترده انتگرال در مسائل فیزیک و مهندسی, در بخش انتهایی به تعدادی از این کاربردها خواهیم پرداخت. همچنین سعی خواهد شد در کلیه کاربردها, با مفهوم المان‌گیری که یکی از مرسوم ترین روشها در برخورد با این نوع مسائل میباشد, آشنا شویم.

۵-۱- محاسبه مساحت (بخش ۵-۱ کتاب)

فرض کنید هدف محاسبه مساحت بین دو منحنی $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در فاصله a تا b باشد. یک جزء کوچکی از آنرا در نظر گرفته برای آن, جزء مساحت را می‌یابیم. حد مجموع این اجزاء, بیانگر مساحت می‌باشد.

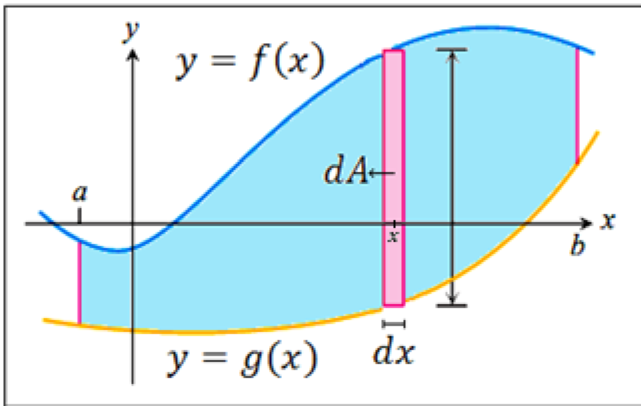
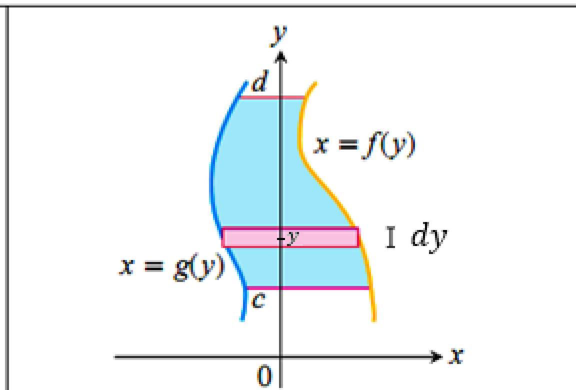


$$\Delta A_i = [f(c_i) - g(c_i)]\Delta x_i \rightarrow A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)]\Delta x_i$$

قبلا گفته شد که حد مجموع بالا, بیانگر انتگرال معین تابع $f(x) - g(x)$ از a تا b می‌باشد. لذا:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \xrightarrow{if\ g(x)=0} A = \int_a^b f(x)\,dx$$

و یا به بیان دیگر از آنجا که ΔA ها تابعی از Δx بوده و قرار است Δx ها به سمت صفر میل کنند $(\|P\| \rightarrow 0)$, لذا بجای ΔA از dA استفاده می‌کنیم. در اینصورت:

	
$dA = [f(x) - g(x)]dx$ $\xrightarrow{\int} A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$	$dA = [f(y) - g(y)]dy$ $\xrightarrow{\int} A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$

توضیح ۱: این نوع بررسی مساله اصطلاحا به نام روش المان گیری شناخته میشود که همان مفاهیم قبل را دارد, فقط بیان آن ساده‌تر است. بطور کلی در انتخاب المان بایستی توجه داشت که:

۱- المان انتخابی صرفا دارای یک دیفرانسیل باشد (در ریاضی دو, المانهایی با دو یا سه دیفرانسیل بررسی خواهد شد).

۲- کمیتی که هدف محاسبه آن میباشد, برای المان انتخاب شده, قابل محاسبه باشد.

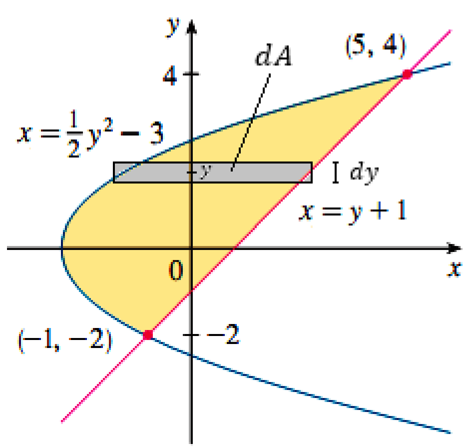
۳- از کنار هم قرار گرفتن المان, کل ناحیه مورد نظر پوشش داده شود. به عنوان نمونه در محاسبه مساحت تکلیف معادله منحنی در دو سمت چپ و راست (برای المان‌گیری افقی) و بالا و پایین (برای المان‌گیری عمودی), بصورت یکتا مشخص باشد.

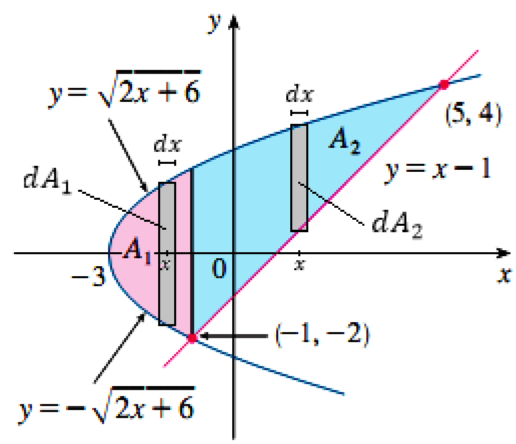
توضیح ۲: دقت شود xای که در شکل بالا (سمت چپ) در در داخل المان مستطیل عمودی دیده میشود جایگزین همان c_i در تعریف انتگرال معین میباشد. بنابراین میتواند در سمت چپ, وسط, سمت راست و یا هر نقطه دیگری در عرض المان انتخاب شود, که در شکل بالا در وسط المان دیده میشود. به همین ترتیب در مورد انتخاب y در المان سمت راست.

مثال ۵-۱ الف: مساحت ناحیه مابین دو منحنی $x=\frac{1}{2}y^2-3$ و $x=y+1$ را بیابید.

ب: مساحت زیر منحنی $y=sinx$ با محور x ها از $x=0$ تا $x=2\pi$ را بدست آورید.

حل الف: محل تلاقی دو منحنی بسادگی قابل محاسبه است. ابتدا مساله را با انتخاب المان افقی حل می‌کنیم (شکل سمت چپ).





$$dA=\left[(y+1)-\left(\frac{1}{2}y^2-3\right)\right]dy \xrightarrow{\int} A=\int_{-2}^{4}\left[(y+1)-\left(\frac{1}{2}y^2-3\right)\right]dy=18$$

توضیح ۱: میتوان مساله را با انتخاب المان عمودی نیز حل کرد(شکل سمت راست). فقط از آنجا که این المان عمودی در کل ناحیه در بالا و پایین بر روی منحنی‌های مختلفی قرار دارد, لازم است دو المان مجزا انتخاب شود. در نتیجه:

$$dA_1=[\sqrt{2x+6}-(-\sqrt{2x+6})]dx \xrightarrow{\int} A_1=\int_{-3}^{-1}[\sqrt{2x+6}-(-\sqrt{2x+6})]\,dx=\frac{16}{3}$$

$$dA_2=[\sqrt{2x+6}-(x-1)]dx \xrightarrow{\int} A_2=\int_{-1}^{5}[\sqrt{2x+6}-(x-1)]\,dx=\frac{38}{3} \to A=18$$

توضیح ۲: اگر از المان گیری استفاده نکرده و بخواهیم از محاسبه حد مجموع مساله را حل کنیم, مثلا برای حالتی که جزء افقی انتخاب کرده‌ایم, بطریق زیر عمل میکنیم که فقط کمی محاسبات را طولانی‌تر خواهد کرد.

$$\Delta A_i = \underbrace{[f(c_i) - g(c_i)]}_{(c_i+1)-\left(\frac{1}{2}c_i^2-3\right)} \Delta y_i \rightarrow A = \lim_{\|P\|\rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} \left[(c_i + 1) - \left(\frac{1}{2}c_i^2 - 3\right)\right] \Delta y_i$$

$$\rightarrow A = \int_{-2}^{4} \left[(y+1) - \left(\frac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy = 18 \quad \blacksquare$$

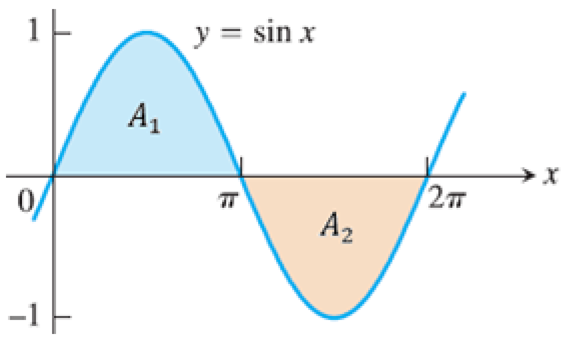
ب: در محاسبه مساحت, توجه شود که نقاط تلاقی منحنی‌ها بایستی شناسایی گردد و گرنه در محاسبه مساحت به نتیجه نادرست می‌رسیم. مثلا فرض کنید سطح زیر منحنی $y = sinx$ با محور x ها از $x = 0$ تا $x = 2\pi$ سوال شده باشد. چنانچه به محل تلاقی منحنی با محور x توجه نشود, با انتخاب المان عمودی خواهیم داشت:

$$dA = (sinx - 0)dx \rightarrow A = \int_0^{2\pi} sinx\, dx = (-cosx)|_{x=0}^{x=2\pi} = (-1) - (-1) = 0$$

اما بایستی توجه کرد در بازه مزبور, منحنی $y = sinx$ با محور x در $x = \pi$ تلاقی دارد. بنابراین در بازه 0 تا π منحنی سینوس بالای محور x و در بازه π تا 2π پایین آن قرار می‌گیرد, لذا:

$$A = \int_0^{\pi} (sinx - 0)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (0 - sinx)\, dx = (-cosx)|_{x=0}^{x=\pi} + (+cosx)|_{x=\pi}^{x=2\pi} = 2 + 2 = 4$$

که برای محاسبه هر انتگرال به این موضوع توجه شده است که کدام منحنی بالای دیگری است. اما برای سادگی شاید مناسبتر باشد با توجه به ماهیت هندسی مساحت (که عددی مثبت است) پس از تعیین محلهای تلاقی, بازه مورد نظر را در نقاط مزبور تفکیک کرده و پس از محاسبه هر یک از انتگرالها, مجموع قدرمطلق آنها را بیابیم تا درگیر اینکه کدام منحنی بالاتر از دیگری است نشویم. به عبارتی:



$$\begin{cases} A_1 = \int_0^{\pi} sinx\, dx = (-cosx)|_{x=0}^{x=\pi} = 2 \\ A_2 = \int_{\pi}^{2\pi} sinx\, dx = (-cosx)|_{x=\pi}^{x=2\pi} = -2 \end{cases}$$

$$\rightarrow A = |A_1| + |A_2| = 4$$

<u>توضیح</u>: توجه شود اگر $\int_0^{2\pi} sinx\, dx$ سوال شده باشد, پاسخ همان 0 خواهد بود. اما سطح زیر منحنی $sinx$ با محور x ها از $x = 0$ تا $x = 2\pi$ برابر 4 خواهد بود. $\blacksquare$

تا اینجا سطح زیر منحنیهای $y = f(x)$ با محور x و یا $x = f(y)$ با محور y بررسی شد. اما اگر منحنی بصورت پارامتری داده شده باشد, مساحت محدود تا محور x برابر است با: (برای آشنایی با منحنی‌های پارامتری بخش ۱۰-۱ کتاب مطالعه شود)

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} ; \ \alpha \le t \le \beta \rightarrow A = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} y\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) f'(t)\, dt$$

به همین ترتیب مساحت محدود تا محور y عبارت است از $A = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g'(t)\, dt$.

❄ اگر منحنی بسته باشد در درس ریاضی دو (با استفاده از انتگرال منحنی الخط) ثابت می‌شود که:

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} x\, dy = -\int_{\alpha}^{\beta} y\, dx = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (xdy - ydx) \quad \blacksquare$$

※ مثال ۵-۲ سطح محدود بین منحنیهای زیر را بیابید.

$$\begin{cases} x = acost \\ y = bsint \end{cases} \; ; \quad 0 \le t \le 2\pi \rightarrow A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(xdy - ydx)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\big(acost(bcost\,dt) - bsint(-asint\,dt)\big) = \frac{ab}{2}\int_{0}^{2\pi} dt = \pi ab$$

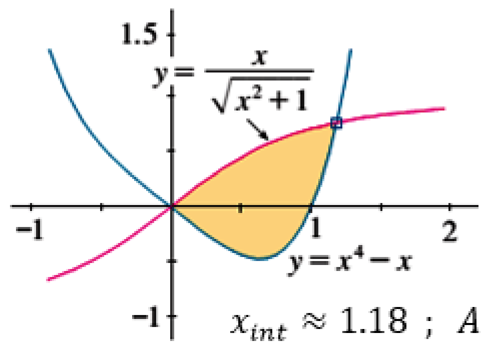
دیده میشود در این مثال خاص, فرمول سوم از دو فرمول قبلی ساده‌تر به جواب میرسد. توجه شود که منحنی بالا در واقع یک بیضی را معرفی می‌کند که مساحت آن برابر πab بدست آمد. ■

مثال ۵-۳ حاصل $I = \int_{-3}^{3}\sqrt{9 - x^2}dx$ را بیابید.

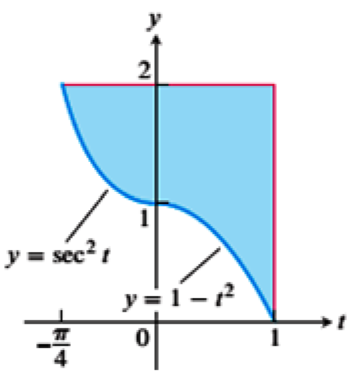
حل این انتگرال بیانگر مساحت نیمه بالایی یک دایره به شعاع ۳ میباشد, بنابراین بدون انتگرال‌گیری $I = \frac{1}{2}\pi 3^2 = 4.5\pi$. ■

تمرینات بخش ۵-۱ تمرینات ۲۰ و ۵۲ از بخش ۵-۱ کتاب

۱- مساحت نواحی نشان داده شده در اشکال زیر را بیابید.



$x_{int} \approx 1.18 \;;\; A \approx 0.785$

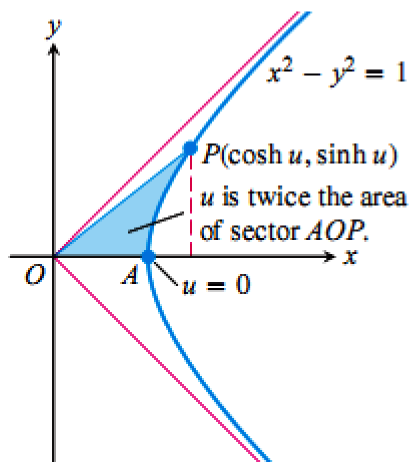


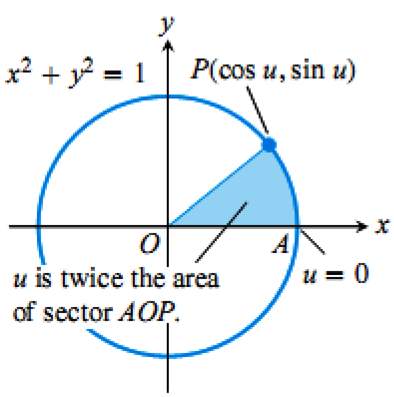
$A = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}$

۲- حاصل $I = \int_{-2}^{2}\sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}dx$ را یکبار با محاسبه مستقیم و یکبار دیگر با در نظر گرفتن مساحت ناحیه ایجاد شده (مشابه مثال ۵-۳) بدست آورید.

۳- در توضیح ۱ بخش ۲-۵ مطلبی در ارتباط با علت نامگذاری توابع هیپربولیک در قیاس با توابع مثلثاتی هم‌نام ارائه شد. با توجه به شکل سمت راست نشان دهید u برابر است با دو برابر سطح قطاع AOP .

راهنمایی: ابتدا نشان دهید مساحت ناحیه مورد نظر از رابطه زیر بدست می‌آید:





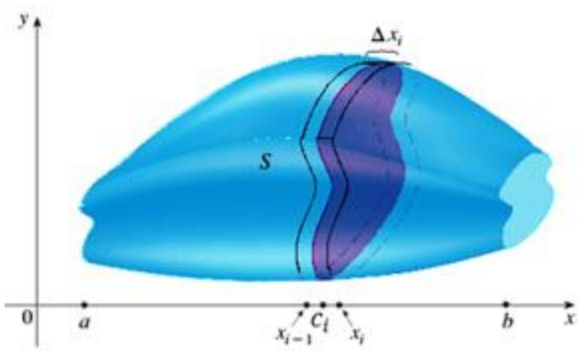
$$A(u) = \frac{1}{2}coshu\;sinhu - \int_{1}^{coshu}\sqrt{x^2 - 1}\,dx$$

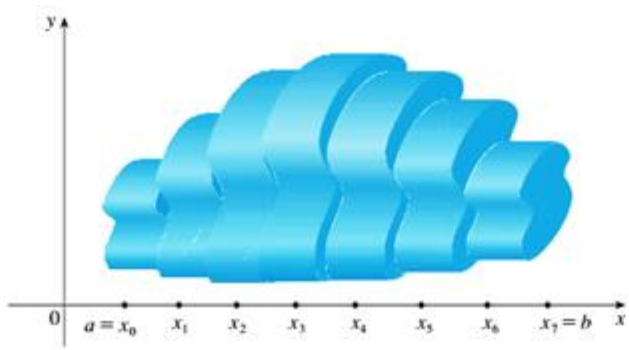
سپس با مشتق‌گیری از $A(u)$ نشان دهید $A'(u) = 1/2$ و از آنجا نتیجه بگیرید $A(u) = u/2$.

۵-۲- محاسبه حجم (بخشهای ۵-۲ و ۵-۳ کتاب)

۵-۲-۱- روش کلی محاسبه حجم

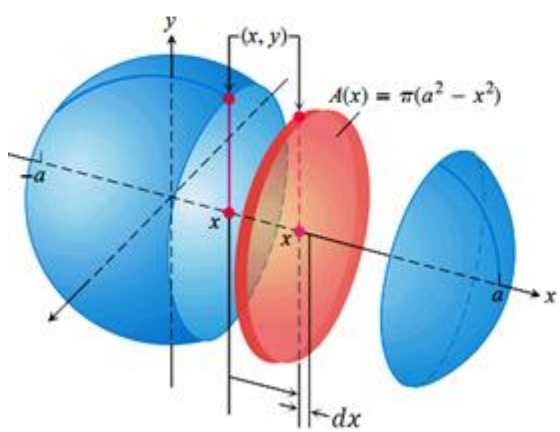
در این بخش به نحوه محاسبه احجام با استفاده از انتگرال می‌پردازیم. در بخش قبل که مساحت را بررسی کردیم, عملا حرف جدیدی مطرح نشد چرا که قبلا معرفی انتگرال معین دقیقا به محاسبه مساحت انجامید.
اما همان الگو را میتوان برای محاسبه حجم نیز به کار گرفت. به عبارتی گویا این بار قرار است بجای کنار هم قرار دادن یک سری اجزای مساحت, تعدادی جزء حجم در کنار یکدیگر قرار داده شود. تفاوت در این است که اگر در محاسبه مساحت لازم بود تعدادی خطوط عمودی منجر به ایجاد تعدادی جزء سطح مستطیلی گردد, در اینجا با استفاده از صفحات عمودی , تعدادی جزء حجم ایجاد خواهد شد. برای این منظور کافی است یک جزء کوچکی از حجم را در نظر گرفته برای آن, جزء حجم را بیابیم. در شکل سمت راست صرفا ۷ جزء حجم برای محاسبه حجم مورد نظر انتخاب شده است که طبیعتا تقریبی خواهد بود. لذا اگر تعداد این اجزاء بیشتر گردد, در نهایت حد مجموع این اجزاء وقتی ضخامت هر جزء حجم به سمت صفر میل کند, بیانگر حجم کلی جسم میباشد.





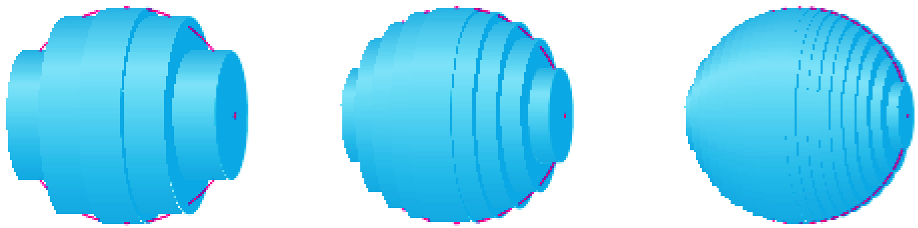
$$\Delta V_i = A(c_i)\Delta x_i \rightarrow V = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} A(c_i)\Delta x_i \rightarrow V = \int_a^b A(x)dx$$

برای ساده‌تر شدن محاسبات میتوان بجای محاسبه ΔV_i برای یک جزء iام, با المان گیری, حجم را محاسبه کرد. مشابه قبل چون $\|P\| \to 0$ یعنی Δx کوچک است. لذا بجای ΔV از dV استفاده میکنیم. در اینصورت مثلا برای محاسبه حجم یک کره به شعاع a خواهیم داشت:



$$A(x) = \pi y^2 = \pi(a^2 - x^2) \rightarrow dV = A(x)dx \xrightarrow{\int} V = \pi\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi a^3 \approx 4.189a^3$$

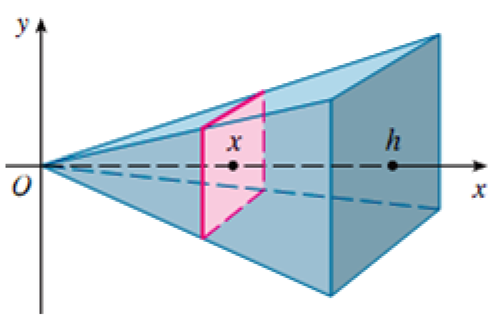
در شکل زیر حجم این جسم با در نظر گرفتن تعداد اجزاء کمتر, برای $a = 1$ و $n = 5,10,20$ دیده میشود.

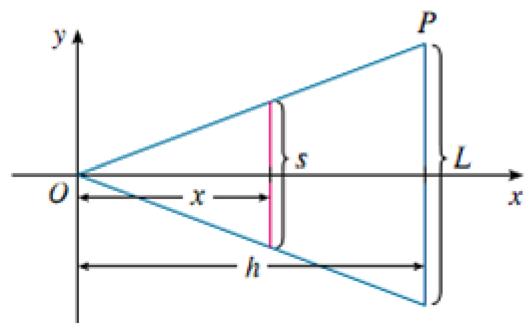


(a) Using 5 disks, $V \approx 4.2726$ (b) Using 10 disks, $V \approx 4.2097$ (c) Using 20 disks, $V \approx 4.1940$

مثال ۵-۴ حجم هرم زیر را بیابید.

حل ابتدا در نقطه دلخواه x یک صفحه بصورتی که در شکل زیر دیده میشود را با حجم مورد نظر قطع می‌دهیم. چنانچه این صفحه را با ضخامت dx تصور کنیم, میتوان حجم جزء مکعب مستطیل بدست آمده را بدست آورد. به عبارتی گویا دو صفحه موازی به فاصله dx از یکدیگر, عمود بر محور افق ترسیم شده و جزء حجم نشان داده شده را ایجاد کرده است. در نتیجه:

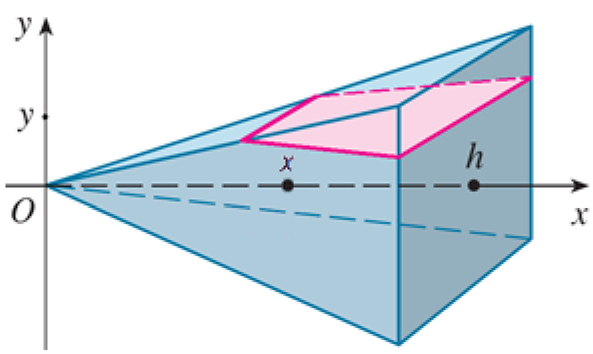




$$A(x) = s^2 \to dV = A(x)dx = s^2 dx \xrightarrow{\frac{x}{h}=\frac{s}{L}} V = \int_0^h \left(\frac{Lx}{h}\right)^2 dx = \frac{L^2 h}{3}$$

$$\underline{Or}:\ x = \frac{h}{L}s \to V = \frac{h}{L}\int_0^L s^2\, ds = \frac{L^2 h}{3} \quad \blacksquare$$

توضیح: می‌توان المان را بصورت افقی انتخاب کرد که البته محاسبات طولانی‌تری خواهد داشت. در این حالت المان جزء حجم, یک منشور می‌باشد که سطح آن ذوزنقه و ارتفاع آن dy میباشد. در نتیجه:



$$x = \frac{hs}{L} \xrightarrow{s=2y} x = \frac{2hy}{L} \to A(y) = (s+L)\frac{h-x}{2}$$

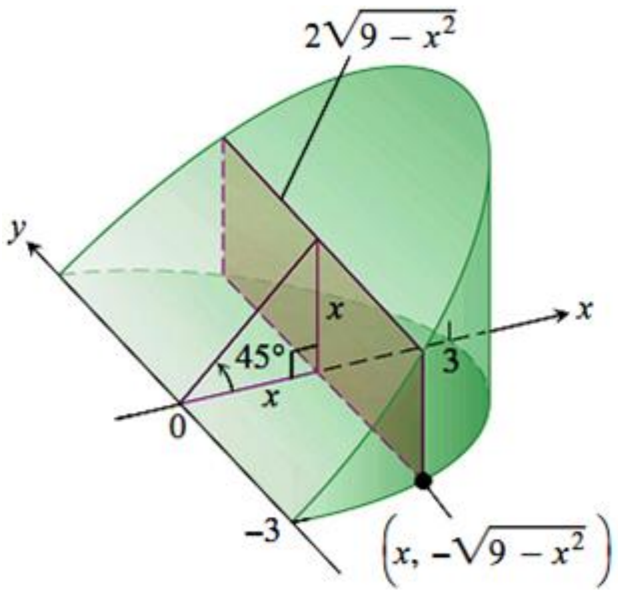
$$A(y) = (2y+L)\frac{h - \frac{2hy}{L}}{2} = \frac{h}{2L}(L^2 - 4y^2)$$

$$\to dV = A(y)dy = \frac{h}{2L}(L^2 - 4y^2)dy$$

$$\to V = \frac{h}{2L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (L^2 - 4y^2)\, dy = \frac{L^2 h}{3} \quad \blacksquare$$

مثال ۵-۵ حجم محدود به استوانه $x^2+y^2=9$, بالای صفحه xoy و زیر صفحه $z=x$ را بدست آورید.

حل در اینجا نیز مراحل کار درست مشابه مثال قبل است. یعنی در یک نقطه دلخواه x, دو صفحه موازی به فاصله dx از یکدیگر, عمود بر محور افق ترسیم شده و جزء حجم نشان داده شده را ایجاد کرده است. در نتیجه:

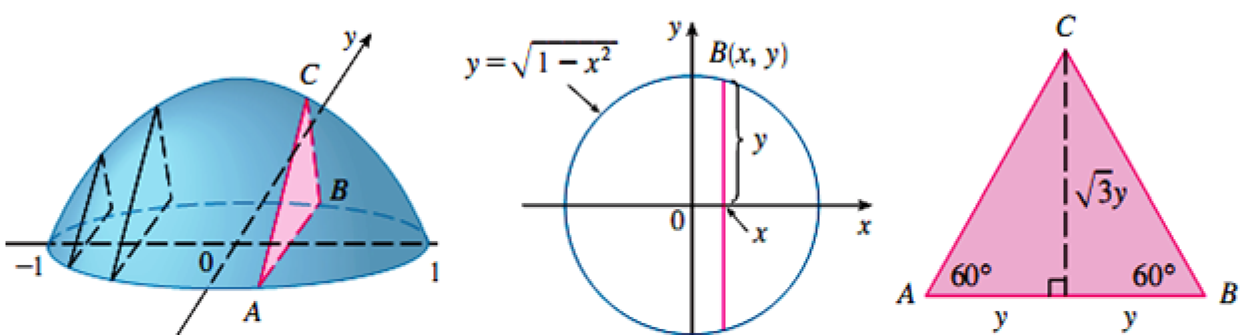


$$A(x)=2x\sqrt{9-x^2}\rightarrow dV=A(x)dx$$

$$\rightarrow V=\int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,dx=18 \quad \blacksquare$$

مثال ۵-۶ حجم جسم زیر را بیابید. در این شکل بر روی همه وترهای موازی با محور y از دایره $x^2+y^2=1$ مثلثهایی متساوی الاضلاع با ضلعی برابر با طول وتر, عمود بر صفحه xoy بنا شده است.

حل ابتدا در نقطه دلخواه x یک صفحه بصورتی که در شکل زیر دیده میشود را با حجم مورد نظر قطع داده و برای آن یک ضخامت dx درنظر می‌گیریم. سطح مقطع منشور بدست آمده یک مثلث متساوی الاضلاع میباشد. در نتیجه:



(a) The solid (b) Its base (c) A cross-section

$$A(x)=\frac{1}{2}(2y)\sqrt{3}y=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3}(1-x^2)$$

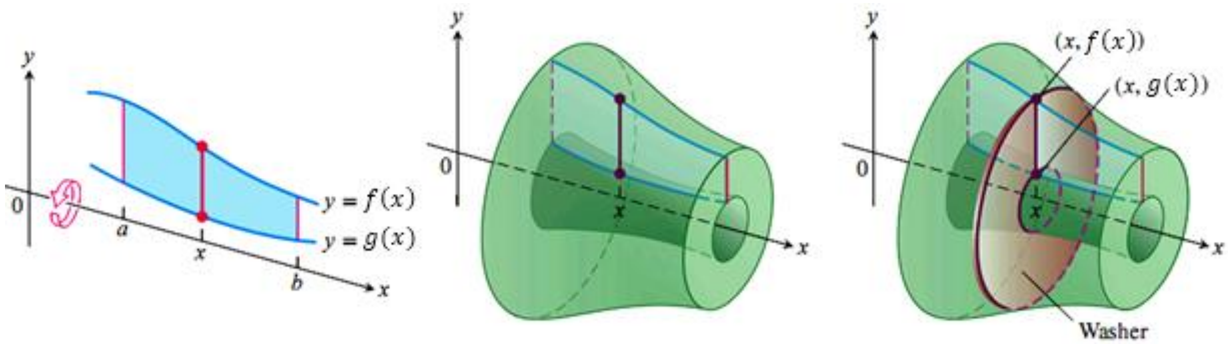
$$dV=A(x)dx\rightarrow V=\int_{-1}^{1}\sqrt{3}(1-x^2)\,dx=\frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \blacksquare$$

۵-۲-۲- روش خاص برای احجام دوار

اگر حجم مورد نظر حاصل از دوران یک سطح باشد, در اینصورت برای $A(x)$ یا $A(y)$ عبارات ساده‌تری بدست می‌آید. برای این منظور دو نوع المان خاص را بکار میبریم.

الف: المان واشری $(Washer\ Method)$

فرض کنید سطح مابین منحنی‌های $y = f(x)$, $y = g(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$, حول محور x دوران یابد. در این صورت حجم ایجاد شده یک حجم دوار نامیده شده و هدف محاسبه این حجم می‌باشد. از آنجا که حجم مورد نظر از دوران سطح ایجاد شده است, لذا با انتخاب المان سطح, المان حجم را بدست می‌آوریم. فرض کنید از المان سطحِ عمودی مطابق شکل زیر استفاده شود.



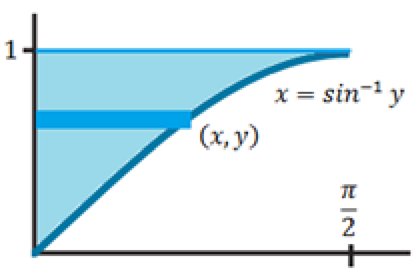
دوران یافته این المانِ سطح عمودی , یک المانِ حجم ایجاد میکند که شکلی شبیه واشر خواهد داشت. حجم این المان واشری, برابر مساحت رویه واشر ضربدر ضخامتِ dx خواهد بود. سطح رویه واشر نیز اختلاف سطح دو دایره میباشد که برابر است با $\pi[f^2(x) - g^2(x)]$. در نتیجه خواهیم داشت:

$$dV = \overbrace{\pi[f^2(x) - g^2(x)]}^{A(x)}\, dx \to V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$$

توضیح: اگر هدف دوران حول محور y باشد, بایستی المانِ سطح, افقی در نظر گرفته شود تا المانِ حجم, واشری گردد.

مثال ۵-۷ ناحیه محدود بین نصف قوس از منحنی $y = sinx$ یعنی $0 < x < \frac{\pi}{2}$ و محور عرضها و خط $y = 1$ را حول محور y دوران میدهیم, حجم حاصله را بیابید.

حل اگر المان را افقی در نظر بگیریم, در اثر دوران آن حول محور y , المان واشری بوجود می‌آید(که البته واشر توپر خواهد شد).



u^2	$+$	$cosu$
$2u$	$-$	$sinu$
2	$+$	$-cosu$
0	$-\int$	$-sinu$

$$dV = \pi(x^2 - 0^2)dy \xrightarrow{x = sin^{-1} y} V = \pi \int_0^1 (sin^{-1} y)^2\, dy \xrightarrow{u = sin^{-1} y} V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 cosu\, du$$

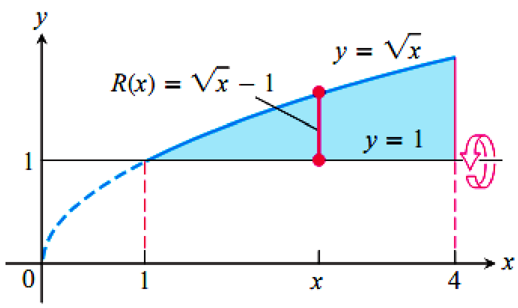
$$= \pi(u^2 sinu + 2ucosu - 2sinu)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}(\pi^2 - 8) \quad \blacksquare$$

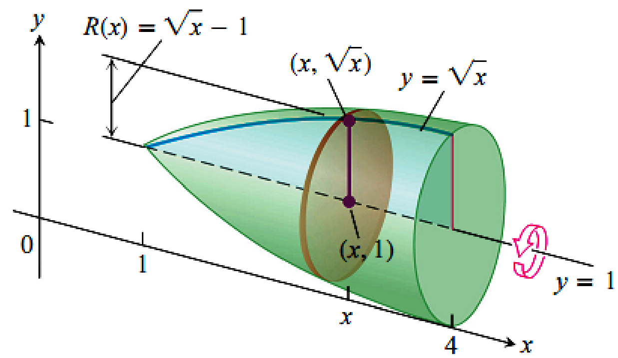
توضیح: می‌توان بجای آنکه x را بر حسب y قرار داد, بصورت برعکس عمل کرد که در نهایت به همان انتگرال‌گیری بالا منجر خواهد شد. به عبارتی:

$$dV = \pi(x^2 - 0^2)dy \xrightarrow{dy=cosxdx} V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 cosx\, dx = \cdots = \frac{\pi}{4}(\pi^2 - 8) \ \blacksquare$$

مثال ۵-۸ حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به $y = \sqrt{x}\,; y = 1\,; x = 4$ حول خط $y = 1$ را بیابید.

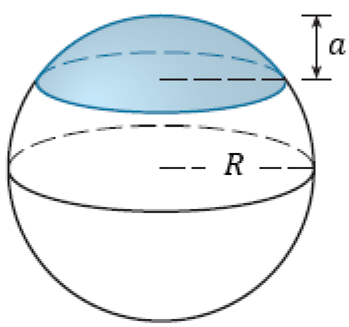
حل یک راه میتواند انتقال محورهای مختصات باشد تا خط $y = 1$ به محور x منتقل شود.اما ساده‌تر است بصورت زیر عمل کنیم.

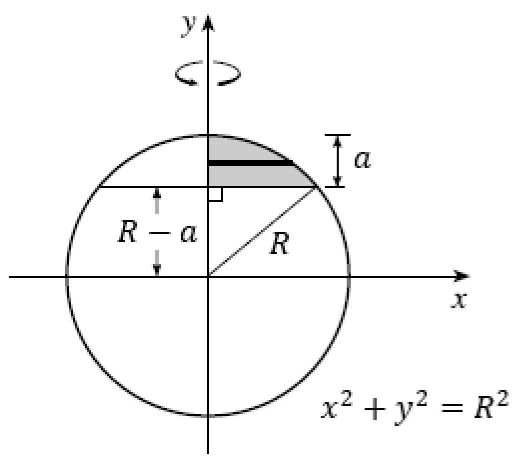




$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{y=1} x = 1\ ;\ dV = \pi\left(\sqrt{x} - 1\right)^2 dx \to V = \pi\int_1^4 \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 dx = \frac{7\pi}{6} \ \blacksquare$$

مثال ۵-۹ نشان دهید حجم عرقچین کروی زیر (شکل سمت چپ) برابر است با $\frac{\pi}{3}a^2(3R - a)$.





حل این حجم از دوران المان سطحی که در شکل سمت راست دیده می‌شود بدست می‌آید. با انتخاب المان سطح افقی:

$$dV = \pi x^2 dy = \pi(R^2 - y^2)dy \to V = \pi\int_{R-a}^{R} (R^2 - y^2)dy = \pi\left(R^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{R-a}^{R} = \frac{\pi}{3}a^2(3R - a)$$

که در حالت خاص $a = R$ به $V = \frac{2}{3}\pi R^3$ یعنی حجم نیمکره و برای $a = 2R$ به $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ یعنی حجم کره خواهیم رسید. $\blacksquare$

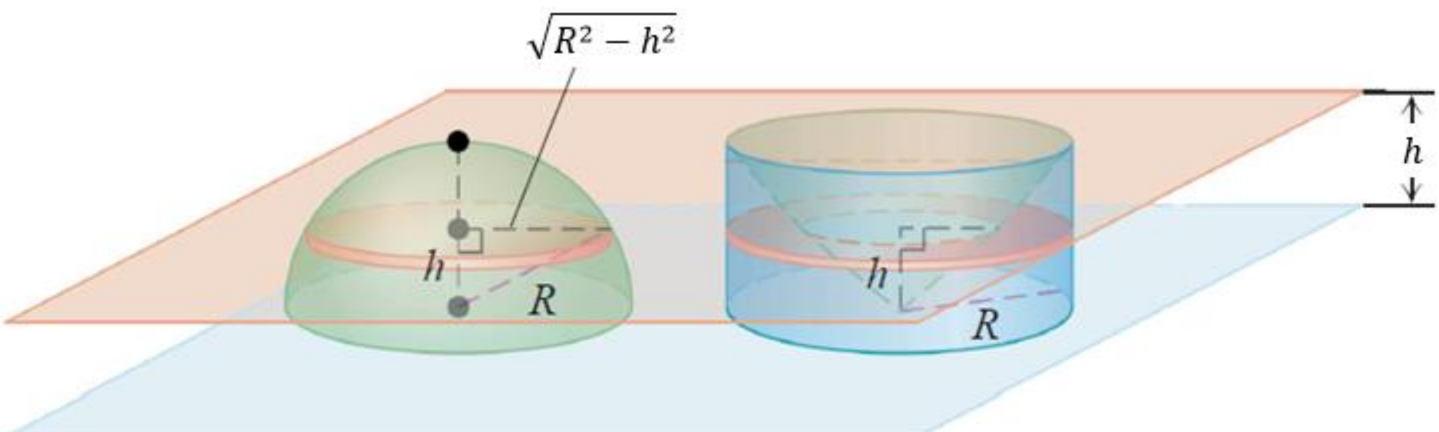
* توضیح: در اینجا هدف آن است که مساله را به روش دیگری به‌جز انتگرال‌گیری حل کنیم. در ابتدا اصل کاوالیری بیان می‌شود.

فرض کنید دو ناحیه در یک فضای سه بعدی بین دو صفحه موازی قرار گرفته‌اند. اگر هر صفحه‌ای که موازی با این دو صفحه است, هر دو ناحیه را در سطح مقطعهایی با مساحت برابر قطع کند, حجم دو ناحیه یکسان است. اثبات این موضوع با استفاده از انتگرال ساده است, چرا که $dV = A(y)dy$ و از آنجا که $A(y)$ برای هر دو حجم یکسان و حدود تغییرات y نیز یکی است, لذا حجم آندو یکسان خواهد شد.

یک تعبیر ساده از این اصل آن است که فرض کنید تعدادی سکه هم اندازه بصورت مرتب روی هم قرار گرفته باشد. طبیعی است حجم این سکه‌ها معادل حجم یک استوانه خواهد بود. حال اگر با ضربه‌ای ناچیز, این سکه‌ها را کمی جابجا کنیم, حجم جدید دیگر بیانگر یک استوانه نخواهد بود, اما همان مقدار حجم را خواهد داشت.

برای مشخص شدن روش استفاده از این اصل در حل مساله بالا, ابتدا حجم یک نیمکره به شعاع R را بدست می‌آوریم.

ابتدا استوانه‌ای با شعاع R و ارتفاع R را در کنار این نیمکره قرار می‌دهیم بگونه‌ای که کف آنها در یک سطح قرار داشته باشد. در این استوانه مخروط معکوسی مطابق شکل سمت راست در نظر می‌گیریم. بدیهی است زاویه راس این مخروط برابر 45° می‌باشد.



اگر صفحه‌ای موازی افق و با فاصله h از کف, این دو حجم را قطع کند, سطحی که در ناحیه بیرون مخروط و داخل استوانه قرار می‌گیرد یک دایره توخالی به شعاع خارجی R و شعاع داخلی h است. لذا مساحت آن برابر است با $A_1 = \pi R^2 - \pi h^2$.

همچنین مساحتی که از نیمکره قطع می‌شود نیز برابر است با $A_2 = \pi\left(\sqrt{R^2 - h^2}\right)^2$. بنابراین $A_1 = A_2$. لذا مطابق اصل کاوالیری, حجم بیرون مخروط و داخل استوانه (شکل سمت راست) با حجم نیمکره (شکل سمت چپ) برابر است. در نتیجه:

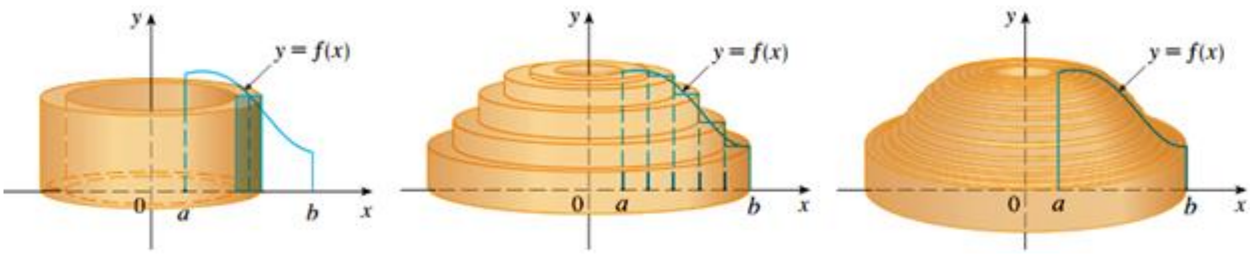
$$V = (\pi R^2)R - \frac{1}{3}\pi(R^2)R = \frac{2}{3}\pi R^3$$

به همین شیوه برای حل مثال ۵-۹ به این روش بایستی از حجم یک استوانه به شعاع R و ارتفاع a , حجم یک مخروطِ ناقصِ معکوس به ارتفاع a را کم کنیم. لذا خواهیم داشت:

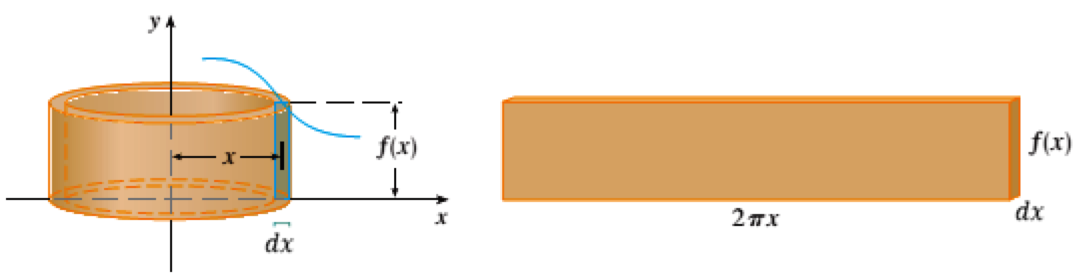
$$V = (\pi R^2)a - \left(\frac{1}{3}\pi(R^2)R - \frac{1}{3}\pi(R-a)^2(R-a)\right) = \frac{1}{3}\pi a^2(3R - a) \quad \blacksquare$$

ب: المان پوسته استوانه‌ای $(Cylindrical\ Shells)$

درست مشابه قسمت قبل در اینجا نیز می‌خواهیم حجم دوار را محاسبه کنیم. فرض کنید هدف آن باشد که حجم حاصل از دوران سطح مابین منحنی‌های $y = f(x)$, $y = g(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$, حول محور y محاسبه شود. در توضیح قسمت قبل عنوان شد که برای این منظور می‌توان المان سطح را افقی در نظر گرفت, تا پس از دوران, المانِ حجم واشری ایجاد گردد. حال ببینیم اگر المان عمودی انتخاب شود, روش محاسبه حجم دوار چگونه است. در ابتدا فرض می‌کنیم $g(x) = 0$ باشد.



دوران یافته این المان سطحِ عمودی, یک المانِ حجم ایجاد می‌کند که شکلی مشابه یک استوانه جدار نازک (پوسته استوانه‌ای) خواهد داشت. برای محاسبه حجم این المان, بجای کم کردن حجم دو استوانه توخالی از یکدیگر, می‌توان اینگونه تصور کرد که از آنجا که dx بسیار کوچک است, اگر مطابق شکل زیر این پوسته را باز کنیم به یک مکعب مستطیل به طول $2\pi x$, عرض $f(x)$ و ضخامت dx خواهیم رسید. لذا حجم برابر است با مساحت جانبی پوسته یعنی $2\pi x \times f(x)$ ضربدر ضخامتِ dx . در نتیجه:



$$dV = \underbrace{2\pi x \times f(x)}_{A(x)}\, dx \rightarrow V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$

یک نگاه دیگر به مساله آن است که بگوییم حجم این پوسته برابر مساحت حلقه دایره‌ای ضربدر ارتفاعِ $f(x)$ خواهد بود. از آنجا که حلقه دایره‌ای دارای ضخامت ناچیزِ dx می‌باشد, برای محاسبه سطح آن نیز می‌توان بجای کم کردن مساحت دو دایره, اینگونه تصور کرد که اگر این حلقه دایره‌ای را باز کنیم, یک مستطیل به طول $2\pi x$ (محیط دایره) و عرض dx (ضخامت حلقه) خواهیم داشت که سطح آن برابر است با $2\pi x dx$. در نتیجه خواهیم داشت:

$$dV = \underbrace{2\pi x dx}_{A(x)}\, f(x) \rightarrow V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$

در توضیح ۲ روشهای دیگری نیز برای محاسبه مساحت حلقه دایره‌ای ارائه شده است.

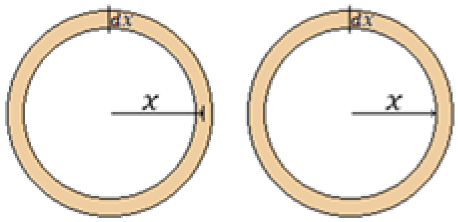
در انتها لازم به ذکر است که اگر علاوه بر منحنی $y = f(x)$ یک منحنی دیگر مانند $y = g(x)$ در زیر این منحنی قرار داشته باشد, مشابه هر یک از دو روش بالا, حجم دوارِ سطح مابین این دو منحنی در بازه داده شده حول محور x برابر است با:

$$dV = \underbrace{2\pi x\big(f(x) - g(x)\big)}_{A(x)}\, dx \rightarrow V = \int_a^b 2\pi x\big(f(x) - g(x)\big) dx$$

$$dV = \underbrace{2\pi x dx}_{A(x)}\,(f(x) - g(x)) \rightarrow V = \int_a^b 2\pi x\big(f(x) - g(x)\big)dx$$: یا

توضیح ۱: اگر هدف دوران حول محور x باشد, بایستی المانِ سطح, افقی انتخاب شود تا المانِ حجم, پوسته استوانه‌ای گردد.

توضیح ۲: در شکل زیر نحوه محاسبه مساحت حلقه آمده است. دیده میشود در حالتی که ضخامت حلقه (dx) ناچیز است, مهم نیست x را فاصله تا حد وسط دو دایره بدانیم یا تا دایره کوچکتر(یا بزرگتر). این موضوع درست مشابه مطلبی است که در توضیح ۲ قبل از مثال ۵-۱ برای انتخاب x عنوان شد.



1) $dA = \pi\left(x + \frac{dx}{2}\right)^2 - \pi\left(x - \frac{dx}{2}\right)^2 = 2\pi x dx$

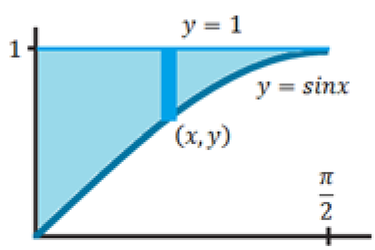
2) $dA = \pi(x + dx)^2 - \pi x^2 = 2\pi x dx + \underbrace{\pi(dx)^2}_{0}$

3) $A = \pi x^2 \rightarrow dA = 2\pi x dx$

توجه شود از آنجا که از دیفرانسیلها بعنوان جایگزینی برای Δ وقتی $\Delta \rightarrow 0$ استفاده شده است, لذا می‌توان از جمله $dxdx$ (در سطر دوم) با توجه به بسیار کوچک بودن آن (در مقابل جمله $2\pi x dx$) صرفنظر کرد.

مثال ۵-۱۰ حجمهای زیر را بدست آورید.

حل الف: ناحیه محدود بین نصف قوس از منحنی $y = sinx$ یعنی $0 < x < \frac{\pi}{2}$ و محور عرضها و خط $y = 1$ را حول محور y دوران میدهیم. حجم حاصله را بیابید (این مساله قبلا در مثال ۵-۷ با المان واشری حل شده است).

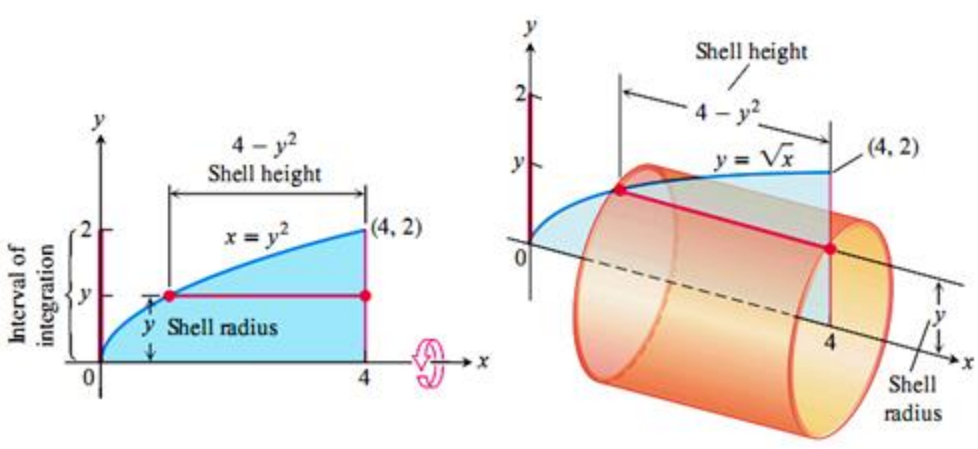


$$dV = (1 - sinx)2\pi x dx$$

$$\rightarrow V = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1 - sinx)dx = \frac{\pi}{4}(\pi^2 - 8)$$

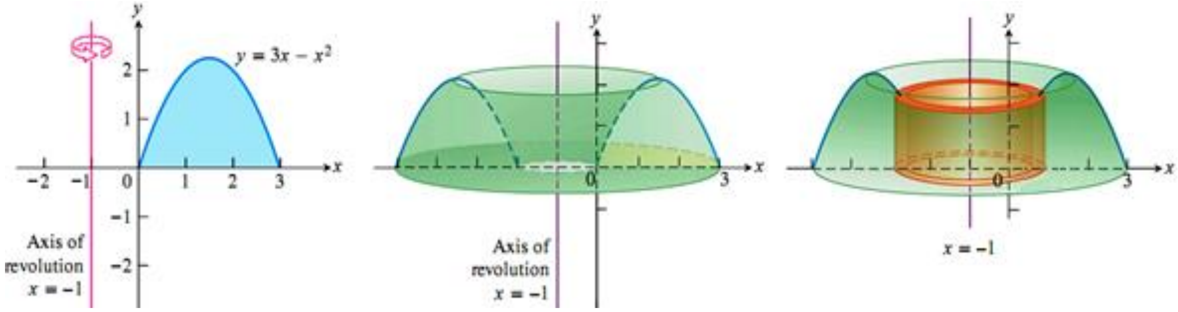
دیده میشود که انتگرال بدست آمده در واقع همان ادامه حل جزء به جزء مثال ۵-۷ است. تمرین ۹ را ببینید. ■

ب: حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به $x = 0\ ; x = 4\ ; x = y^2$ حول محور x را بیابید.



$$dV = (4 - y^2)2\pi y dy \rightarrow V = 2\pi\int_0^2 y(4 - y^2)dy = 8\pi$$ ■

ج: حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به $y = 3x - x^2$ و محور x را حول خط $x = -1$ بیابید.



$$dV = \big((3x - x^2) - 0\big)2\pi(x+1)dx \rightarrow V = 2\pi\int_0^3 (x+1)(3x - x^2)dx = \frac{45\pi}{2} \quad \blacksquare$$

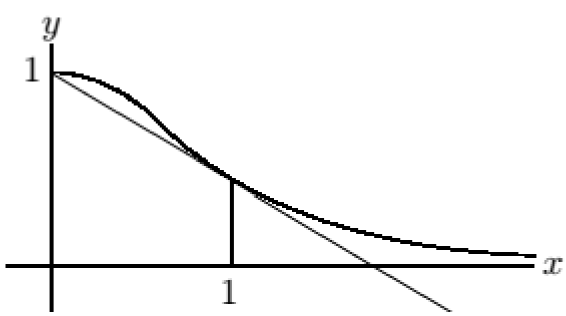
٭ **مثال ۵-۱۱** معادله خطی که از نقطه $A(0,1)$ بر ناحیه سمت راست از منحنی $y = \frac{1}{1+x^2}$ مماس میشود را بیابید. نشان دهید این مماس فقط در یک نقطه منحنی را قطع می‌کند. با محاسبه سطح زیر منحنی و سطح زیر خط مماس در بازه $0 \le x \le 1$ نشان دهید $\pi > 3$. همچنین با محاسبه حجم حاصل از دوران نواحی مورد نظر حول محور y ها نشان دهید $Ln2 > \frac{2}{3}$.

حل فرض کنیم نقطه مماس $B(p,q)$ باشد, در اینصورت:

$$y = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow m = y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\bigg|_{x=p} = \frac{-2p}{(1+p^2)^2} = -2pq^2 \rightarrow y = -2pq^2x + c$$

حال چون نقطه $A(0,1)$ بر روی منحنی قرار دارد, میتوان ثابت c را بدست آورد:

$$A(0,1) \rightarrow c = 1 \quad ; \quad B(p,q) \rightarrow q = 2pq^2p + 1 \rightarrow \frac{1}{1+p^2} = \frac{2p^2}{(1+p^2)^2} + 1 \rightarrow p^4 = p^2$$



تنها جواب مثبت این معادله $p = 1$ میباشد. لذا $y = -x/2 + 1$ معادله خط مورد نظر است. (شکل روبرو)

حال کنترل می‌کنیم که این مماس, نقطه تلاقی دیگری با منحنی ندارد. برای این منظور:

$$-\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow x^3 - 2x^2 + x = 0 \rightarrow x = 0,1,1$$

حال نشان میدهیم که در بازه $0 \le x \le 1$ منحنی بالای خط مماس قرار میگیرد. برای این منظور:

$$0 \le x \le 1 \rightarrow \frac{1}{1+x^2} - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) \ge 0$$

بنابراین با محاسبه سطح زیر خط مماس (A_1) و سطح زیر نمودار (A_2) در بازه $0 \le x \le 1$ و مقایسه آنها خواهیم داشت:

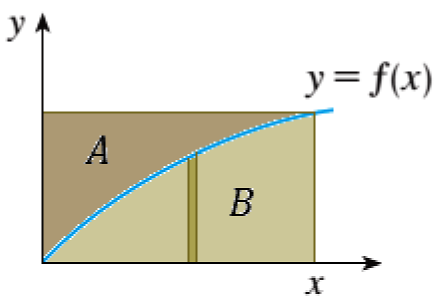
$$A_1 = \frac{3}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \;\; ; \;\; A_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad A_2 > A_1 \rightarrow \pi > 3$$

همچنین با محاسبه حجم حاصل از دوران این دو ناحیه حول محور y ها و مقایسه آنها خواهیم داشت:

$$V_1 = \int_0^1 2\pi yx\,dx = 2\pi \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x+1\right)x\,dx = \frac{2\pi}{3}$$

$$V_2 = \int_0^1 2\pi yx\,dx = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}x\,dx = \pi Ln2 \;\; ; \;\; V_2 > V_1 \to Ln2 > \frac{2}{3} \quad \blacksquare$$

مثال ۵-۱۲ منحنی به معادله $y=f(x)$ که از مبدا مختصات میگذرد در ربع اول مفروض است(شکل زیر). خطوط موازی محورهای مختصات که از یک نقطه دلخواه روی منحنی رسم میشوند، دو ناحیه A و B را ایجاد میکنند. اگر حجم ایجاد شده از دوران ناحیه A حول محور x، n برابر حجم ایجاد شده از دوران ناحیه B حول همین محور باشد، تابع $f(x)$ را بدست آورید.



$$V_A = nV_B$$

$$V_B = \pi \int_0^x f^2(t)dt$$

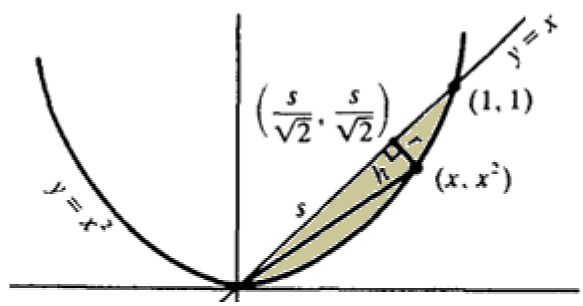
$$V_A = \pi f^2(x)x - V_B$$

$$\to \pi f^2(x)x = (1+n)V_B$$

$$\pi f^2(x)x = (1+n)\pi \int_0^x f^2(t)dt \xrightarrow{\text{مشتق}} \pi f^2(x) + 2\pi x f(x)f'(x) = (1+n)\pi f^2(x) \xrightarrow{f(x)\neq 0}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{2x} \to \frac{df(x)}{f(x)} = \frac{n}{2}\frac{dx}{x} \to Ln(f(x)) = \frac{n}{2}Lnx + \underbrace{K}_{LnC} = Ln\left(Cx^{\frac{n}{2}}\right) \to f(x) = Cx^{\frac{n}{2}} \quad \blacksquare$$

⁕ **مثال ۵-۱۳** ناحیه محدود به دو منحنی $y=x^2$ و $y=x$ حول خط $y=x$ دوران می‌کند. حجم حاصله را بیابید.



حل بر خلاف مثالهای قبل که در آن ناحیه مورد نظر حول یکی از دو محور(یا محورهایی موازی آنها) دوران یافته بود, در اینجا ناحیه, حول یک خط مورب دلخواه دوران یافته است. یک راه حل معمول میتواند دوران محورهای مختصات باشد تا خط مورد نظر به یکی از دو محور منتقل شود. راه حل دیگر, انتخاب یک المان مورب بصورتی است که در شکل دیده میشود. در اینصورت:

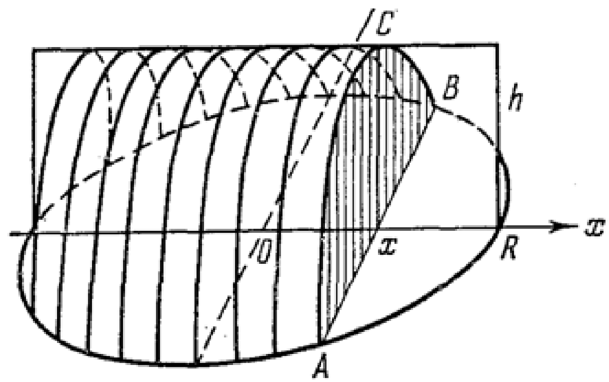
$$V = \pi \int_0^{\sqrt{2}} r^2 ds \quad ; \quad \begin{cases} r^2 + s^2 = x^2 + x^4 \\ r^2 = \left(x - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(x + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 \to s = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+x^2) \end{cases}$$

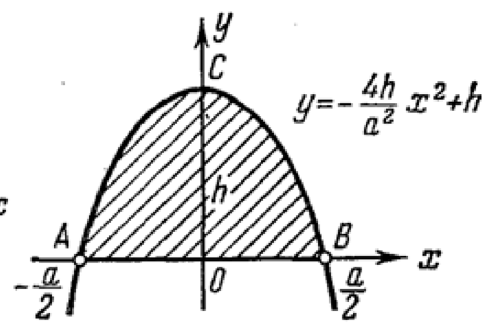
$$V = \pi \int_0^{\sqrt{2}} r^2 ds = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4\right)\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+2x)dx}_{ds} = \frac{\pi}{30\sqrt{2}} \quad \blacksquare$$

تمرینات بخش ۵-۲ تمرینات ۱۴ و ۴۸ از بخش ۵-۲ و تمرینات ۸ و ۲۰ از بخش ۵-۳ کتاب

۱- مثال ۵-۵ را این‌بار با انتخاب المانی عمود بر محور y حل کنید. یعنی در یک نقطه دلخواه y, دو صفحه موازی به فاصله dy از یکدیگر, عمود بر این محور ترسیم کرده و جزء حجم نشان داده شده را بدست آورید. توجه شود در این حالت مقطعِ المان, به جای مستطیل, مثلثی شکل خواهد بود.

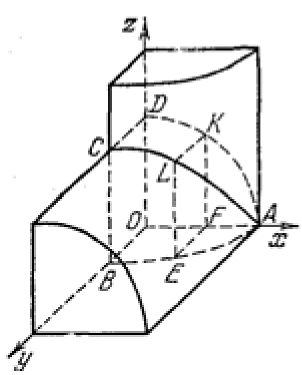
۲- در مثال ۵-۶ نشان دهید اگر بجای مثلث, سهمی‌هایی با ارتفاع برابر h بر روی هر وتر AB از دایره‌ای به شعاع R قرار بگیرد, حجم جسم حاصله برابر با $\frac{2}{3}\pi h R^2$ خواهد بود.

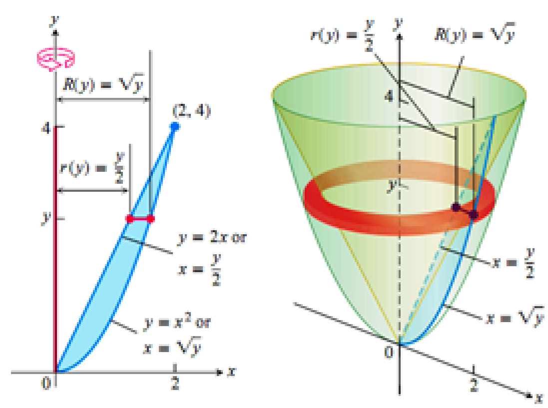




۳- حجم ناحیه مابین دو استوانه $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+z^2=a^2$ در ربع اول را بیابید. (شکل چپ)

$$\underline{Ans}:\ V=\frac{2}{3}a^3$$





۴- حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به $y=x^2$ و $y=2x$ حول محور y را بیابید. (شکل راست)

$$\underline{Ans}:\ V=\frac{8\pi}{3}$$

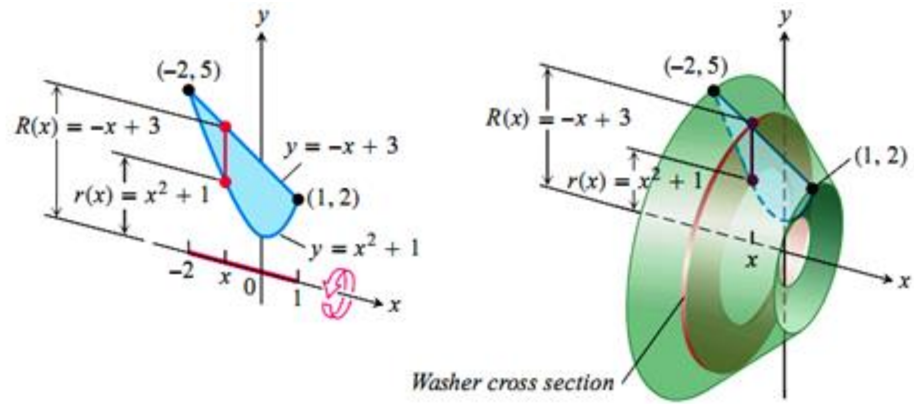
۵- تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ با ضابطه زیر را حول محور x دوران می‌دهیم. حجم حاصل از دوران را بدست آورید.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(x+2)}}\qquad;\qquad \underline{Ans}:\ \ V=\frac{\pi}{10}(\pi+2ln3-3ln2)$$

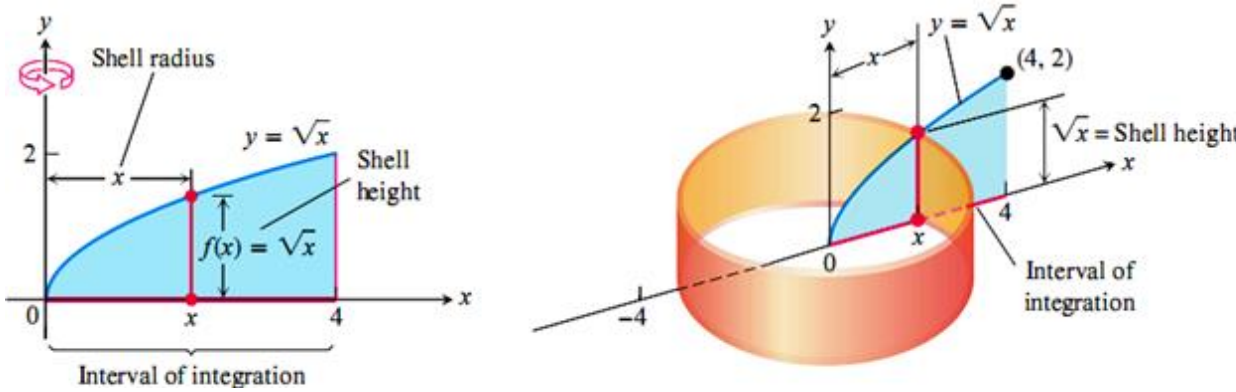
۶- نشان دهید حجم چنبره‌ای که از دوران دایره $(x-b)^2+y^2=a^2$ حول محور y بدست می آید $2\pi^2ba^2$ میباشد.

۷- حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به $y = x^2 + 1$ و $y = -x + 3$ حول محور x را بیابید.

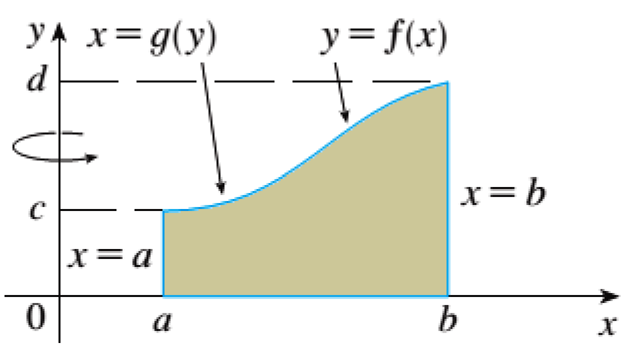
$\underline{Ans}$: $V = \dfrac{117\pi}{5}$



۸- حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به $x = 0\,; x = 4\,; y = \sqrt{x}$ حول محور y را بیابید. $\underline{Ans}$: $V = \frac{128\pi}{5}$



۹- هدف این تمرین آن است که نشان دهیم روش المان پوسته استوانه‌ای و المان واشری با استفاده از رابطه جزء به جزء به یکدیگر قابل تبدیلند. فرض کنید تابع $y = f(x)$ تابعی یکنوا است, لذا دارای وارون $x = g(y)$ می‌باشد. درستی رابطه اول را با توجه به شکل داده شده و درستی رابطه دوم را با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء نشان دهید.



$$V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \int_c^d \pi g^2(y)\, dy$$

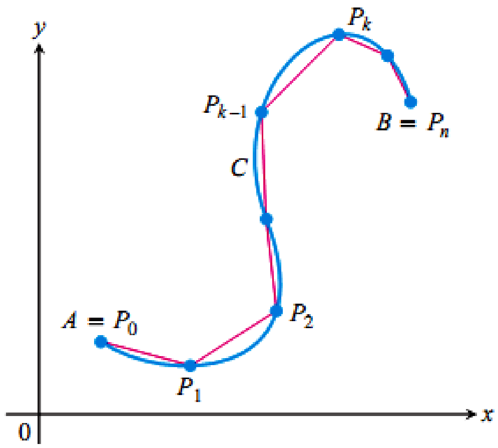
$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$

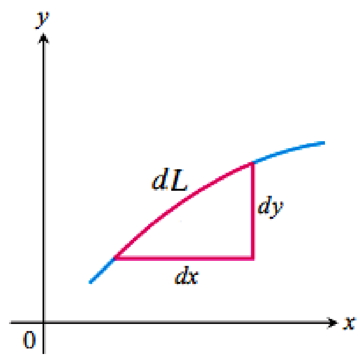
تمرین ۲۴ از بخش مرور مطالب فصل ۵

تمرینات ۸ و ۹ از بخش مسائل اضافی فصل ۵

۵-۳- محاسبه طول قوس (بخش ۸-۱ کتاب)

هدف آن است که طول قوس منحنی $y = f(x)$ را از $A(a, f(a))$ تا $B(b, f(b))$ بدست آوریم. مشابه قبل یک المان به طول dL از آن انتخاب کرده و سعی میکنیم آنرا بر حسب dx یا dy بیان کنیم. خواهیم داشت:





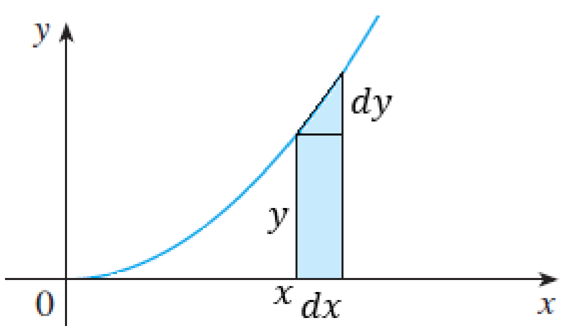
$$(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (1 + y'^2)(dx)^2 \xrightarrow{\int} L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

توضیح ۱: چنانچه منحنی به فرم $x = f(y)$ داده شده باشد, بهتر است از رابطه زیر استفاده کرد:

$$(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (1 + x'^2)(dy)^2 \to L = \int_{f(a)}^{f(b)} \sqrt{1 + x'^2}\, dy$$

و در حالتی که منحنی بصورت پارامتری $x = f(t)$ و $y = g(t)$ باشد, رابطه زیر مناسبتر است:

$$(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right](dt)^2 \to L = \int_\alpha^\beta \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt$$



توضیح ۲: اگر از مفهوم ریمان در محاسبه مساحت و توضیحاتی که پیرامون انتخاب c_i داده شد صرفنظر کنیم, ممکن است سوال شود چرا در محاسبه مساحتِ یک المان, اختلاف دو سمت مستطیلها یعنی dy وارد محاسبات نشد. چنانچه بخواهیم از چنین نگاهی dA را بدست آوریم بجای المان مستطیل به المان ذوزنقه خواهیم رسید. در اینصورت:

$$dA = \frac{1}{2}dx\big(y + (y + dy)\big) = ydx + \frac{1}{2}dxdy$$

در اینجا نیز (مشابه توضیح ۲ ارائه شده در بالای مثال ۵-۱۰) می‌توان از جمله $dxdy$ با توجه به بسیار کوچک بودن آن (در مقابل جمله ydx) صرفنظر کرده و لذا به $dA = ydx$ خواهیم رسید که همان نتیجه‌ای است که با انتخاب المان مستطیلی نیز بدست آمد.

مثال ۵-۱۴ طول قوس منحنی‌های زیر را در فاصله‌های داده شده بیابید.

$$1)\ \ x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}Lny\ \ ;\ \ y=1\,;\,y=2$$

$$L=\int_{f(a)}^{f(b)}\sqrt{1+x'^2}\,dy=\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2y}\right)^2}\,dy=\int_1^2\sqrt{\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)^2}\,dy=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}Ln2\ \ ■$$

$$2)\ \ y=\int_0^x\sqrt{sint}\,dt\ \ ;\ \ x=0\,;\,x=\frac{\pi}{2}\ \ \to\ \ L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx\ \ ;\ \ y'=\sqrt{sinx}$$

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+sinx}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(sin^2\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}\right)+2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}\,dx=\cdots=2$$

$$\underline{Or}\ :\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}f(sinx)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(cosx)dx\to L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+cosx}\,dx=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|cos\frac{x}{2}\right|dx=2\ \ ■$$

$$3)\ \ \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$$

یک راه آن است که منحنی را بصورت پارامتری بیان کنیم. با توجه به معادله منحنی می‌توان آنرا به فرم $cos^2t+sin^2t=1$ تبدیل کرد. برای این منظور معادله را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\left((x/2)^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2=1\to\begin{cases}(x/2)^{\frac{1}{3}}=cost\\ y^{\frac{1}{3}}=sint\end{cases}\to\begin{cases}x=2cos^3t\\ y=sin^3t\end{cases}\ \ ;\ \ \ 0\le t\le 2\pi$$

حال از آنجا که منحنی نسبت به دو محور x و y متقارن است, طول قوس را در ربع اول بدست آورده و نتیجه را ۴ برابر میکنیم.

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-6sintcos^2t)^2+(3costsin^2t)^2}dt$$

$$\to L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}sintcost\sqrt{36cos^2t+9sin^2t}dt\xrightarrow{u=36cos^2t+9sin^2t}4\int_{36}^{9}\sqrt{u}\left(\frac{-1}{54}\right)du=\frac{28}{3}\ \ ■$$

$$4)\ \ y=\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\ \ \ ;\ \ \ x=0\,;\,x=2\ \ \ \to\ \ y'=\frac{2}{3}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{-1}{3}}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

از آنجا که y' در $x=0$ تعریف نشده است, نمی‌توان مساله را به این طریق حل کرد, لذا منحنی را به فرم $x=f(y)$ می‌نویسیم:

$$y=\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\to x=2y^{\frac{3}{2}}\to\ x'=3y^{\frac{1}{2}}\ \ ;\ \begin{cases}x=0\to y=0\\ x=2\to y=1\end{cases}$$

$$L=\int_{f(a)}^{f(b)}\sqrt{1+x'^2}\,dy=\int_0^1\sqrt{1+x'^2}\,dy=\int_0^1\sqrt{1+9y}\,dy=\frac{1}{9}\frac{2}{3}(1+9y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\approx 2.27\ \ ■$$

*** مثال ۵-۱۵** فرمولی برای محاسبه محیط بیضی بیابید.

حل با نوشتن فرمول بیضی بصورت پارامتری خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = acost \\ y = bsint \end{cases} \rightarrow L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{{x'_t}^2 + {y'_t}^2}\, dt = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{(-asin)^2 + (bcost)^2}\, dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)cos^2t}\, dt = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2cos^2t}\, dt$$

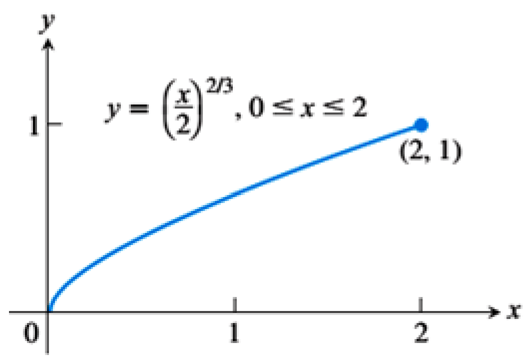
$$L = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2sin^2t}\, dt = 4aE(e) \;\; ; \;\; e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

که $E(e)$ یک انتگرال بیضوی نامیده میشود(نوع دوم) و به روشهای تقریبی قابل محاسبه است. یک روش محاسبه چنین انتگرالهایی در فصل ۸ و ۱۱ دیده میشود. ■

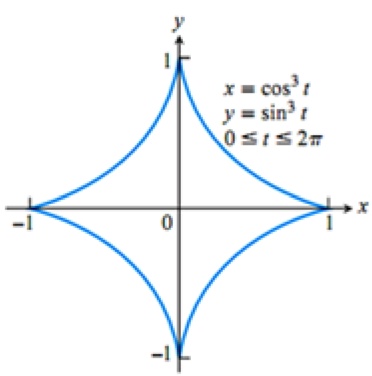
تمرینات بخش ۵-۳ تمرینات ۱۰ و ۴۱ از بخش ۸-۱ کتاب

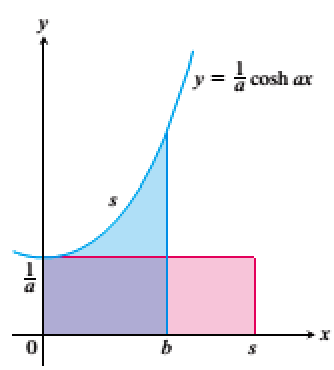
۱- طول قوس منحنی $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ را در فاصله $x = 0$ تا $x = 2$ بیابید. جواب: $\frac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$

(دقت شود مشتق تابع در $x = 0$ تعریف نشده است لذا نمی‌توان از فرمول اول که در آن y' مورد نیاز است استفاده کرد).



۲- طول قوس منحنی ارائه شده در شکل سمت چپ را بیابید. جواب: $L = 6$

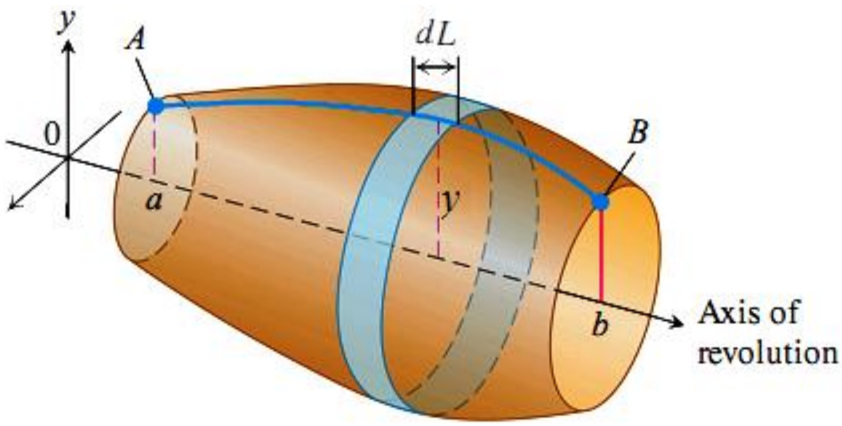




۳- در شکل سمت راست نشان دهید مساحت ناحیه واقع در ربع اول و محصور به منحنی $y = \frac{1}{a}cosh(ax)$, محورهای مختصات و خط $x = b$ با مساحت یک مستطیل به عرض $\frac{1}{a}$ و طول s برابر است, که در آن s طول منحنی از $x = 0$ تا $x = b$ می‌باشد.

۵-۴- محاسبه سطح جانبی (بخش ۸-۲ کتاب)

در اینجا نیز سطح, میتواند دوار یا غیردوار باشد. در ابتدا سطح دوار را بررسی کرده و سپس با ارائه یک مثال, نحوه محاسبه سطح غیر دوار را خواهیم دید. حل فرض میکنیم هدف محاسبه سطح حاصل از دوران قسمتی از منحنی AB حول محور x باشد. بدیهی است که این سطح, دوار خواهد بود. ابتدا سطح حاصل از دوران یک المان به طول dL را می‌یابیم.



$$dP = 2\pi y dL$$

$$\rightarrow P = 2\pi \int y dL$$

که در آن مشابه بخش قبل dL میتواند به یکی از ۳ صورت زیر (بسته به نوع معرفی تابع) جایگزین شود:

$$dL = \sqrt{1+y'^2}dx \quad ; \quad dL = \sqrt{1+x'^2}dy \quad ; \quad dL = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt$$

بطور مشابه برای دوران حول محور y , سطح جانبی برابر $P = 2\pi \int x dL$ خواهد بود.

<u>توضیح</u>: کلیه مباحث مربوط به منحنی‌های پارامتری در بخشهای ۱۰-۱ و ۱۰-۲ کتاب ارائه شده است.

مثال ۵-۱۶ سطح جانبی حاصل از دوران منحنی‌های زیر را حول محور x بیابید.

1) $y = x^3 \quad ; \quad 0 \le x \le 0.5$

$$P = 2\pi \int y dL = 2\pi \int_0^{0.5} y\sqrt{1+y'^2}\, dx = 2\pi \int_0^{0.5} x^3\sqrt{1+9x^4}\, dx$$

$$u = 1+9x^4 \rightarrow du = 36x^3 dx \rightarrow P = \frac{2\pi}{36}\int_1^{\frac{25}{16}} \sqrt{u}\, du = \frac{2\pi}{36}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^{\frac{25}{16}} = \frac{61\pi}{1728} \quad \blacksquare$$

2) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad ; \quad a > 0$

$$y' = -\frac{\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}}{\frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \rightarrow 1+y'^2 = a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{-2}{3}} \rightarrow dL = a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{-1}{3}}dx \qquad (x>0)$$

از آنجا که منحنی نسبت به محور y متقارن است, طول قوس را برای $x > 0$ بدست آورده و نتیجه را ۲ برابر میکنیم.

$$P = 2\times 2\pi \int y\, dL = 4\pi a^{\frac{1}{3}} \int_0^a \left(\underbrace{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}_{u}\right)^{\frac{3}{2}} x^{\frac{-1}{3}} dx = -6\pi a^{\frac{1}{3}} \int_{a^{\frac{2}{3}}}^{0} u^{\frac{3}{2}}\, du = \frac{12\pi}{5}a^2 \quad \blacksquare$$

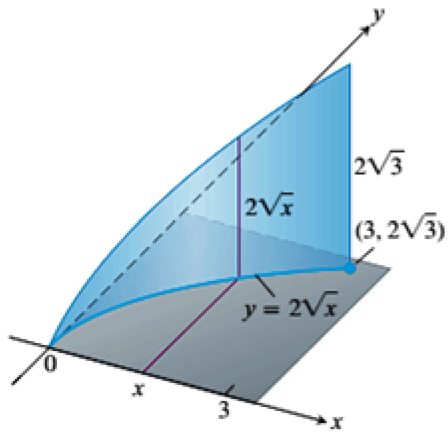
3) $x^2 + (y-1)^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = cost \\ y = 1 + sint \end{cases} \quad ; \quad 0 \le t \le 2\pi$

$$P = 2\pi \int_0^{2\pi} y\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt = 2\pi \int_0^{2\pi} (1+sint)\underbrace{\sqrt{(-cost)^2 + (sint)^2}}_{1}\, dt = 4\pi^2 \quad \blacksquare$$

مثال ۵-۱۷ الف: بر روی هر نقطه از منحنی $y = 2\sqrt{x}$ در بازه $0 \le x \le 3$ پاره‌خطی عمود بر صفحه xy به اندازه $h = 2\sqrt{x}$ رسم کرده‌ایم. سطح رویه ایجاد شده را بیابید (دقت شود این رویه دوار نیست).

❋ ب: مساحت قسمتی از استوانه $x^2 + y^2 = ay$ در $\frac{1}{8}$ اول را که توسط کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ بریده شده است بیابید.

حل الف: اگرچه رویه دوار نیست اما صرفا بایستی بتوانیم برای آن dP را محاسبه کنیم. به سادگی دیده میشود که با انتخاب یک المان عمودی, $dP = 2\sqrt{x}dL$ خواهد بود. در نتیجه:



$$dL = \sqrt{1 + y'^2}dx \to dP = 2\sqrt{x}dL = 2\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}dx$$

$$\to P = \int_0^3 2\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}dx = \frac{28}{3} \quad \blacksquare$$

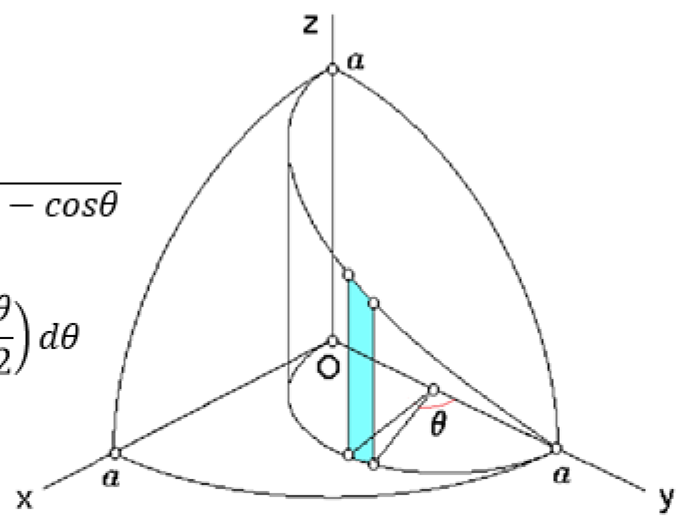
❋ ب: سطح ایجاد شده دوار نیست. لذا یک المان از سطح را بصورت زیر انتخاب کرده, مساحت آنرا بدست آورده و انتگرال می‌گیریم. برای این منظور ساده‌تر است مطابق شکل زیر x و y را بر حسب پارامتر θ بیان کنیم. در اینصورت:

$$H = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}sin\theta\right)^2 - \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}cos\theta\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - cos\theta}$$

$$dA = HdL = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - cos\theta}\left(\frac{a}{2}d\theta\right) = \frac{a^2}{2}sin\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

$$\to A = 4\int_0^{\pi} \frac{a^2}{2}sin\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta = 4a^2$$



تمرینات بخش ۵-۴ تمرینات ۱۰ و ۱۶ از بخش ۸-۲ کتاب

۱- قسمت ۲ از مثال ۵-۱۶ را با نوشتن معادله منحنی بصورت پارامتری (مشابه قسمت ۳ از مثال ۵-۱۴) حل کنید.

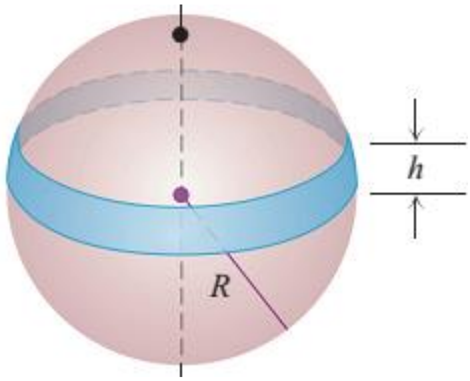
۲- سطح حاصل از دوران منحنی $y = 2\sqrt{x}$ در بازه $1 \le x \le 2$ حول محور xها را بیابید. $\underline{Ans:}$ $\frac{8\pi}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$

۳- سطح حاصل از دوران بیضی $x^2 + 4y^2 = 4$ حول محور xها را بیابید. $\underline{Ans:}$ $\frac{8\pi^2}{3\sqrt{3}} + 2\pi$

۴- سطح حاصل از دوران منحنی $y = e^x$ در بازه $0 \le x \le 1$ حول محور xها را بیابید.

$$\underline{Ans:}\ \pi\left[e\sqrt{1+e^2} + Ln\left(e+\sqrt{1+e^2}\right) - \sqrt{2} - Ln(\sqrt{2}+1)\right]$$

۵- یک منطقه از کره نشان داده شده در شکل زیر توسط دو صفحه موازی با فاصله h از یکدیگر جدا شده است. نشان دهید سطح جانبی این منطقه کروی برابر است با $P = 2\pi rh$. به عبارتی این سطح فقط تابع ارتفاع منطقه بوده و از جای خاص دو صفحه نسبت به کره مستقل است. به عبارتی اگر دو منطقه با ارتفاع برابر h از هر قسمت کره انتخاب شود, سطح جانبی آنها یکسان است.



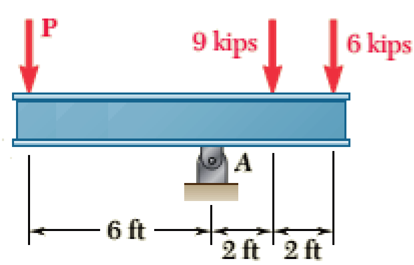
تمرین ۸ از بخش مرور مطالب فصل ۸

تمرین ۶ از بخش مسائل اضافی فصل ۸

❄ ۵-۵- کاربردهای فیزیکی

۵-۵-۱- محاسبه جرم, مرکز جرم و مرکز سطح

بنا به تعریف گشتاور اول (لنگر اول یا ممان اول) یک نیروی دو بعدی حول یک نقطه برابر است با حاصلضرب آن نیرو در فاصله عمودی خط اثر نیرو تا نقطه مورد نظر. این مفهوم در واقع معادل است با عامل چرخش یک جسم حول یک نقطه. برای ایجاد تعادل یک جسم دو بعدی علاوه بر اینکه باید $\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$ باشند, بایستی مجموع گشتاورهای اول نیز صفر باشد. بعنوان نمونه در شکل زیر اگر هدف آن باشد که جسم حول تکیه‌گاه A چرخش نداشته باشد, بایستی:



$$\sum M_A = 0 \to 6\times4 + 9\times2 - P\times6 = 0$$
$$\to P = 7\ \ kips$$

که در آن جهت چرخشِ ساعت‌گرد مثبت منظور شده است.

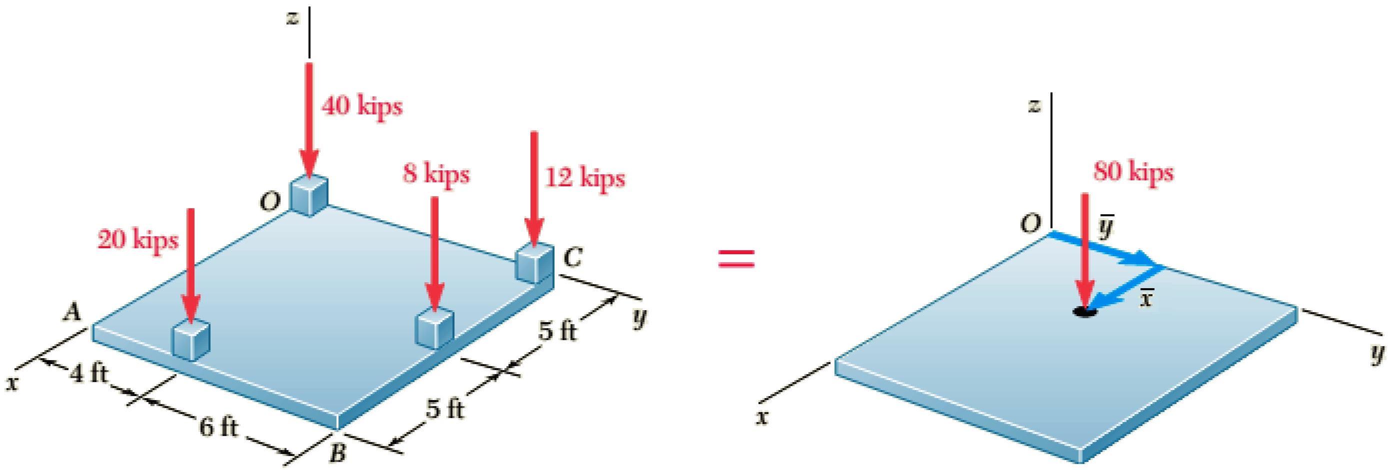
در ادامه از همین مفهوم برای محاسبه مرکز ثقل یک جسم استفاده خواهد شد. به عنوان نمونه فرض کنید به یک صفحه صلب بارهای زیر وارد شده باشند. هدف آن است که این بارها را در نقطه‌ای متمرکز کنیم بگونه‌ای که همان اثر اولیه را داشته باشند.

برای این منظور اولا با توجه به اینکه بایستی $\sum F_z = 0$ باشد, مقدار بار برابر است با مجموع بارهای وارده یعنی $W = 80$. اما سوال این است که این بار بایستی در کجا قرار داده شود. از آنجا که این صفحه دوبعدی است, لذا حول دو محور y و x دارای گشتاور اول است که با Q_y و Q_x نمایش می‌دهیم. گشتاور حول محور تعریف خاص خود را خواهد داشت که در حالت خاصی که

نیرو عمود بر محور باشد همان حاصل ضرب نیرو در فاصله نیرو تا محور خواهد بود. از آنجا که برآیند بارها نیز بایستی حول این دو محور همان اندازه گشتاور ایجاد کنند, لذا:

$$Q_y = 20 \times 10 + 8 \times 5 + 12 \times 0 + 40 \times 0 = 80 \times \overline{x} \rightarrow \overline{x} = 3 \ \ ft$$

$$Q_x = 20 \times 4 + 8 \times 10 + 12 \times 10 + 40 \times 0 = 80 \times \overline{y} \rightarrow \overline{y} = 3.5 \ \ ft$$



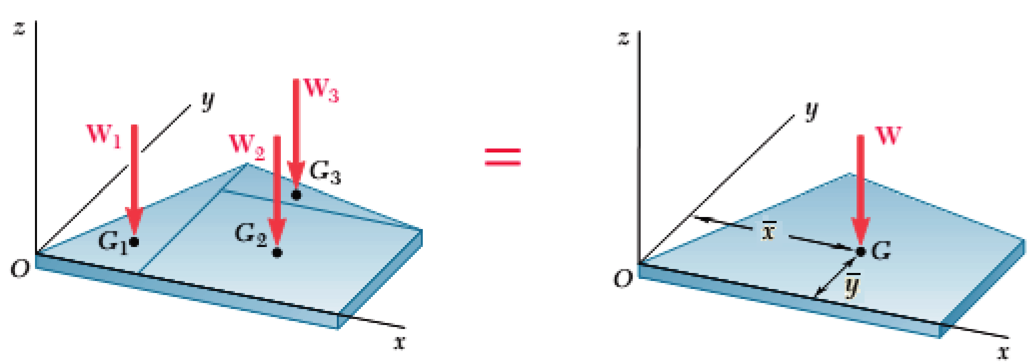
بنابراین نقطه اثر بار برآیند بدست آمد (شکل سمت راست) . به این نقطه اصطلاحا مرکز نیرو گفته می‌شود. حال اگر این نیرو بیانگر وزن باشد, آنرا مرکز ثقل می‌گوییم. بنابراین روابط بالا را می‌توان بصورت زیر فرمول بندی کرد:

$$\overline{x} \sum W_i = \sum x_i W_i \rightarrow \overline{x} = \frac{\sum x_i W_i}{\sum W_i} = \frac{\sum x_i W_i}{W} \quad ; \quad \overline{y} \sum W_i = \sum y_i W_i \rightarrow \overline{y} = \frac{\sum y_i W_i}{\sum W_i} = \frac{\sum y_i W_i}{W}$$

حال سوال این است که اگر نیروها بصورت متمرکز نباشند تعیین مرکز ثقل چگونه خواهد بود.

در ابتدا فرض می‌کنیم جسم قابل تفکیک به اجزای منظم باشد. در این حالت برای هر قطعه, وزن آنرا در مرکز ثقل آن قطعه قرار داده و لذا نیروها متمرکز شده و به مسالهای مشابه مثال بالا می‌رسیم. بنابراین در اینحالت برای محاسبه مرکز ثقل, مجموع گشتاور اول هر وزن را با لنگر اول وزن کل که در مرکز ثقل قرار میگیرد مساوی قرار داده می‌شود. فرض کنید بخواهیم مرکز ثقل جسم زیر را بدست آوریم. این جسم را می‌توان متشکل از سه قطعه دانست که برای هر قطعه, وزن و مرکز ثقل آن مشخص است. برای محاسبه $\overline{x}$ ابتدا گشتاور اول هر قطعه را حول محور y بدست آورده و همگی را با هم جمع می‌کنیم. اگر فرض کنیم فاصله بار W_i تا محور y برابر x_i باشد, گشتاور اول آنها حول y که با Q_y نمایش داده شد برابر است با:

$$Q_y = x_1 W_1 + x_2 W_2 + x_3 W_3 = \sum x_i W_i$$



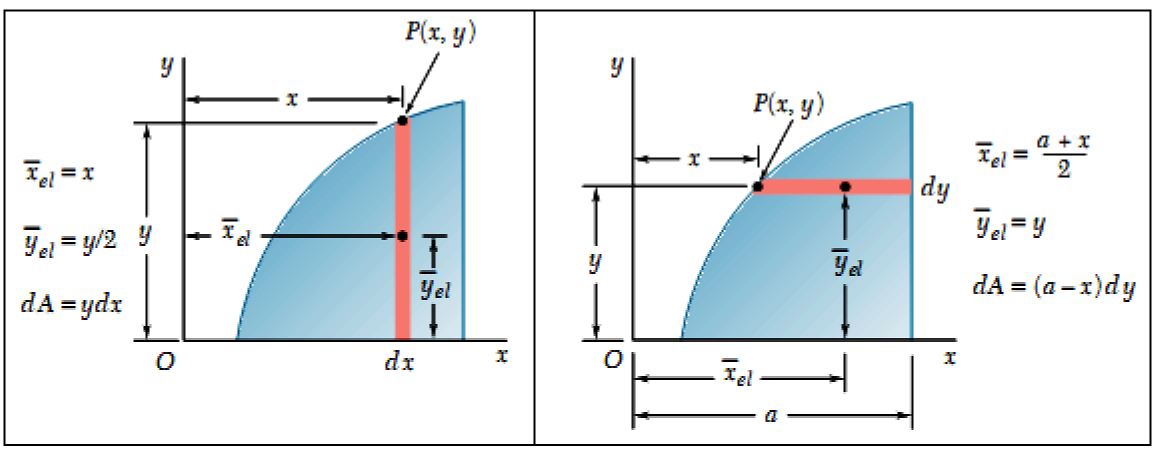
حال می‌گوییم اگر قرار است کل این سه نیرو با یک نیروی معادل (W) جایگزین گردد, اولا این بار بایستی برابر مجموع بارهای موجود باشد یعنی $W = \sum W_i$, همچنین گشتاوری که حول محور y ایجاد میکند درست به میزان گشتاوری باشد که سیستم اولیه ایجاد کرده است. گشتاور این نیروی معادل عبارت است از $Q_y = \overline{x}\sum W_i$. حال با مساوی قرار دادن ایندو خواهیم داشت:

$$\overline{x}\sum W_i = \sum x_i W_i \rightarrow \overline{x} = \frac{\sum x_i W_i}{\sum W_i}$$

به همین ترتیب با مساوی قرار دادن گشتاور نیروهای موجود و معادل حول محور x مقدار $\overline{y}$ بدست می‌آید.

آنچه در بالا عنوان شد در واقع بیانگر مرکز ثقل میباشد. مشابه این تعریف, مفهوم دیگری به نام مرکز جرم نیز تعریف شده است. در واقع مرکز جرم, میانگین وزندار موقعیت تمام جرمهای یک سیستم است. به عبارتی همان تعریف مرکز ثقل را دارد با این تفاوت که گشتاور را, حاصل ضرب جرم در فاصله در نظر بگیریم. بدیهی است اگر شتاب ثقل ثابت باشد مرکز ثقل, همان مرکز جرم خواهد بود.

در حالتی که جسم قابل تفکیک به اجزای منظم نباشد نیز روش کار به همین صورت است. با این تفاوت که اجزای تفکیک شده آن یک سری المانهای افقی یا عمودی خواهند بود. مشابه قبل برای هر المان, گشتاور اول را بدست آورده, همگی را جمع می‌کنیم. بدیهی است از آنجا که المانها در یک بعد ناچیز میباشند, با حد مجموع آنها روبرو خواهیم بود. قبلا نیز دیده شد که این حد مجموع را می‌توان با انتگرال جایگزین کرد. به عنوان مثال شکل زیر را میتوان به دو صورت مختلف تفکیک کرد. با المانهای عمودی یا افقی.



حال اگر هدف محاسبه جرم و مرکز جرم باشد, همانگونه که قبلا ذکر شد, المان بایستی بگونه‌ای انتخاب شود که برای آن المان, جرم و مرکز جرم مشخص باشد. مثلا برای محاسبه جرم با توجه به المان سمت راست خواهیم داشت:

$$dm = \rho dA = \rho(a-x)dy \rightarrow m = \int \rho(a-x)dy$$

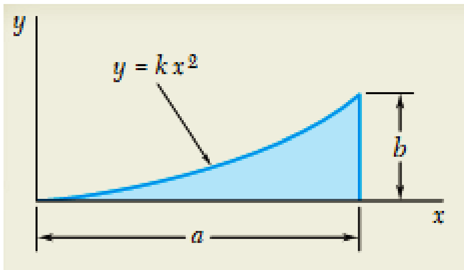
حال برای محاسبه مرکز جرم یعنی $(\overline{x}, \overline{y})$ بایستی Q_y و Q_x را تعیین کنیم. مثلا در شکل سمت راست Q_y عبارت است از:

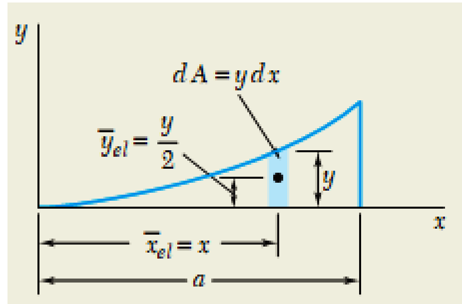
$$dQ_y = \overline{x}_{el}dm \rightarrow \overline{x}m = \int \overbrace{\overline{x}_{el}dm}^{dQ_y} = \int \overline{x}_{el}\rho dA = \int \frac{a+x}{2}\rho(a-x)dy$$

به همین ترتیب با محاسبه Q_x مقدار $\overline{y}$ بدست می‌آید. لازم به ذکر است که در ریاضی ۲ خواهیم دید الزامی به انتخاب المانهای نواری افقی و عمودی نبوده و می‌توان المان را بصورت $dA = dxdy$ انتخاب کرد.

مثال ۵-۱۸ مرکز جرم سطح زیر یکبار با انتخاب المان عمودی و یکبار با المان افقی بیابید. $(\rho = Cte)$

حل توجه شود برای محاسبه مرکز جرم لازم است ابتدا جرم را بدست آوریم. ابتدا مساله را با انتخاب المان عمودی حل می‌کنیم.



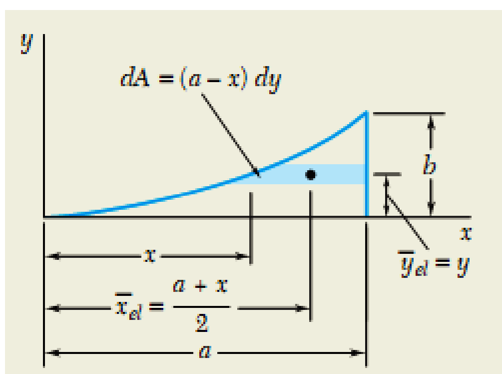


$$b = ka^2 \to k = \frac{b}{a^2} \;\; ; \;\; dm = \rho dA = \rho y dx \to m = \rho \int_0^a kx^2 dx = \frac{ab}{3}\rho$$

$$\bar{x}m = \int \bar{x}_{el}\, dm \to \frac{ab}{3}\rho\bar{x} = \rho\int_0^a xydx = \frac{a^2 b}{4}\rho \to \bar{x} = \frac{3}{4}a$$

$$\bar{y}m = \int \bar{y}_{el}\, dm \to \frac{ab}{3}\rho\bar{y} = \rho\int_0^a \frac{y}{2}ydx = \frac{ab^2}{10}\rho \to \bar{y} = \frac{3}{10}b \;\; \blacksquare$$

حال مساله را با انتخاب المان افقی حل میکنیم که در نهایت به همان نتایج خواهیم رسید:



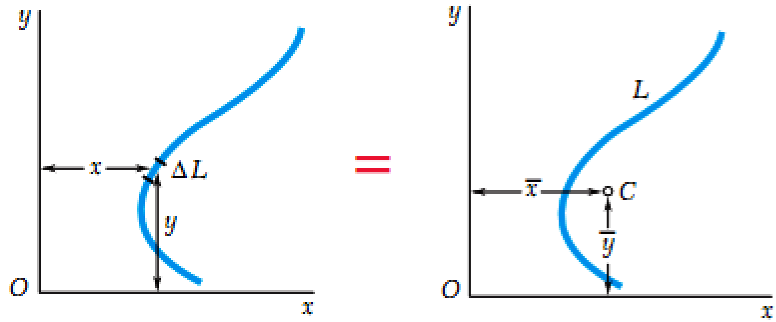
$$dm = \rho dA = \rho(a-x)dy \to m = \rho\int_0^a (a-x)\underbrace{dy}_{2kxdx} = \frac{ab}{3}\rho \quad \left(Or : x = \frac{a}{\sqrt{b}}\sqrt{y}\right)$$

$$\bar{x}m = \int \bar{x}_{el}\, dm \to \frac{ab}{3}\rho\bar{x} = \rho\int_0^b \frac{a+x}{2}(a-x)dy = \frac{a^2 b}{4}\rho \to \bar{x} = \frac{3}{4}a$$

$$\bar{y}M = \int \bar{y}_{el}\, dm \to \frac{ab}{3}\rho\bar{y} = \rho\int_0^b y(a-x)dy = \frac{ab^2}{10}\rho \to \bar{y} = \frac{3}{10}b \;\; \blacksquare$$

توضیح ۱: اگر چگالی جرمی ثابت نباشد, داخل انتگرالها باقی میماند. اگر چگالی بصورت $\rho(x)$ داده شده باشد, صرفا بایستی از المان قائم استفاده کرد, چرا که در المان قائم چگالی ثابت خواهد بود. اما اگر به صورت $\rho(y)$ بیان شده باشد, المان‌گیری بایستی افقی باشد. اما در صورتیکه $\rho(x,y)$ داشته باشیم, فعلا با روشهای انتگرال‌گیری درس ریاضی ۱ نمی‌توان مساله را حل کرد و مطابق آنچه در ریاضی ۲ خواهیم دید نیاز به انتگرال‌گیری دوگانه و انتخاب $dA = dxdy$ خواهیم داشت.

توضیح ۲: مرکز جرم یک منحنی نیز درست مشابه بالا تعریف میشود. مثلا:



$$dm = \rho dL$$

$$\bar{x}m = \int \underbrace{\bar{x}_{el}}_{x}\, dm$$

$$\bar{y}m = \int \underbrace{\bar{y}_{el}}_{y}\, dm$$

توضیح ۳: درحالتی که چگالی ثابت است, به جای مرکز جرم, می‌توان مرکز خط (و بصورت درست‌تر مرکز منحنی), مرکز سطح یا مرکز حجم (بسته به بعد مساله) تعریف کرد. رابطه آن نیز درست مشابه مرکز جرم است با این تفاوت که ρ از طرفین حذف شده است. مثلا برای یک سطح مشابه مثال بالا که در آن مرکز جرم محاسبه شد, مرکز سطح بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{x}\underbrace{m}_{\rho A} = \int \bar{x}_{el}\underbrace{dm}_{\rho dA} \rightarrow \bar{x}A = \int \bar{x}_{el} dA$$

توضیح ۴: بدیهی است گشتاور اول هر جسم حول محور گذرنده از مرکز آن صفر است. مثلا اگر در مثال بالا سطح مورد نظر را افقی کرده و بر روی نقطه مرکز ثقل آن (که همان مرکز جرم خواهد بود) یعنی $\left(\frac{3}{4}a, \frac{3}{10}b\right)$ قرار دهیم, بایستی ثابت مانده و چرخشی در هیچ جهت نداشته باشد. ■

۵-۵-۲- قضایای پاپوس-گلدینوس

در اینجا روش دیگری برای محاسبه حجم دوار و سطح دوار ارائه می‌دهیم. استفاده از این روش وقتی مناسب است که حجم جسم دواری را بخواهیم که مرکز سطحِ سطحی که دوران کرده است را بدانیم. یا سطح دواری را بخواهیم که مرکز خطِ مربوط به منحنی که دوران کرده است را بدانیم. در واقع در اینجا همان مراحل قبل را انجام می‌دهیم, با این تفاوت که دانستن مرکز سطح یا مرکز خط می‌تواند باعث ساده‌سازی‌هایی در حل گردد. این دو قضیه بنام قضایای پاپوس-گلدینوس(Pappus – Guldinus) شناخته می‌شوند.

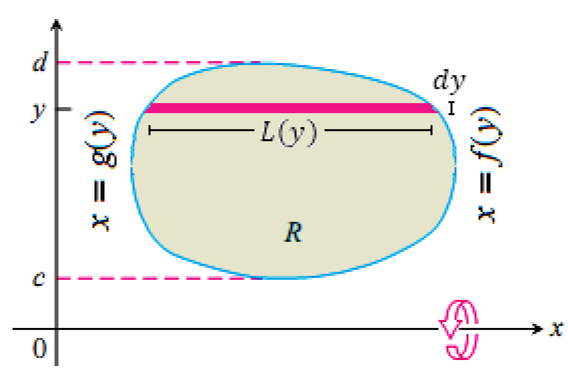
قضیه اول: حجم حاصل از دوران یک ناحیه بسته حول یک محور برابر است با سطح ناحیه مورد نظر ضربدر محیط دایره‌ای که مرکز سطح آن ناحیه ضمن دوران ایجاد مینماید. یعنی $V = 2\pi\bar{y}A$.

اثبات: فرض کنید ناحیه بسته R در شکل زیر حول محور x دوران کند, آنگاه حجم حاصل از دوران عبارت است از:

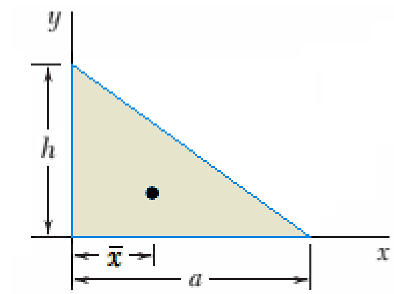
$$dV = 2\pi y L(y) dy$$

$$\rightarrow V = 2\pi \int_c^d y\, \underbrace{L(y)dy}_{dA} \quad ; \quad (\bar{y}_{el} = y)$$

$$\rightarrow V = 2\pi\bar{y}A$$



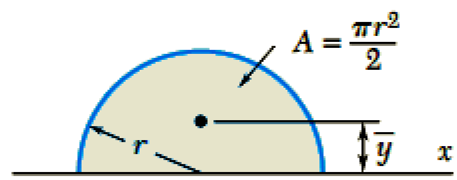
برای کنترل این رابطه یک مثال ساده را بررسی می‌کنیم. مثلا می‌دانیم از دوران مثلث زیر حول محور y یک مخروط ایجاد می‌شود. اگر بدانیم مرکز سطح مثلث در فاصله $\frac{1}{3}$ از قاعده قرار دارد, می‌توان حجم مخروط را بصورت زیر بدست آورد:



$$V = 2\pi\bar{x}A \;\; ; \;\; \bar{x} = \frac{a}{3}$$

$$\rightarrow V = 2\pi\frac{a}{3}\frac{ah}{2} = \frac{1}{3}\pi a^2 h$$

و یا گاهی می‌توان بصورت برعکس با معلوم بودن حجم, مرکز سطح بدست آورید. مثلا از آنجا که یک نیم‌دایره در دوران خود حول قطر, یک کره ایجاد می‌کند, با دانستن حجم دوار کره, می‌توان مرکز سطح نیم‌دایره را بدست آورد. برای این منظور خواهیم داشت:



$$V = 2\pi\bar{y}A$$

$$\rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi\bar{y}\frac{\pi r^2}{2} \rightarrow \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

به عبارتی در اینجا عکس قضیه عمل کرده‌ایم, یعنی با داشتن حجم کره, مرکز سطح مولد آن یعنی نیم‌دایره را بدست آوردیم.

قضیه دوم: سطح حاصل از دوران یک منحنی حول یک محور برابر است با طول منحنی مورد نظر ضربدر محیط دایره‌ای که مرکز خط آن منحنی ضمن دوران ایجاد می‌نماید. یعنی $P = 2\pi\bar{y}L$. اثبات این قضیه نیز مشابه قبل بوده و از آن صرفنظر میشود.

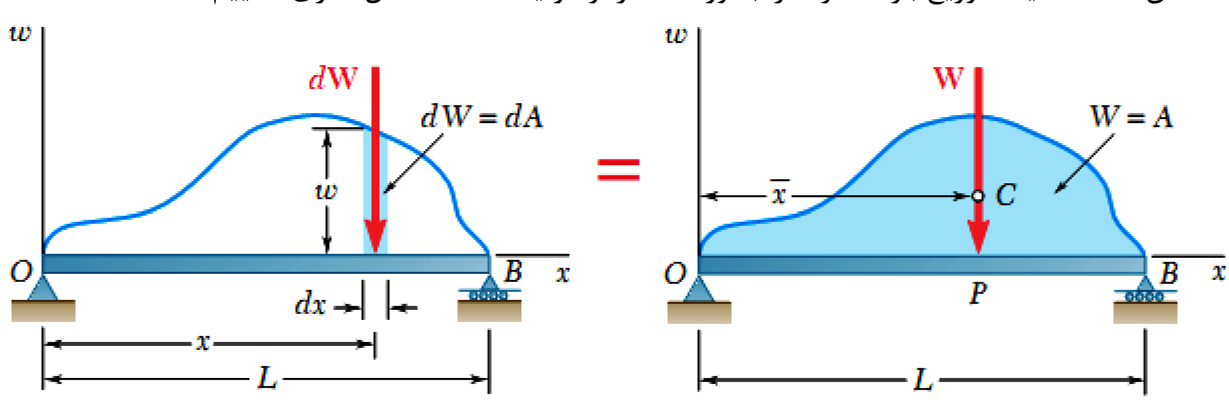
بعنوان مثال مشابه آنچه در مورد کره حجم دیده شد, در اینجا با دانستن سطح یک کره می‌توان مرکز خط مولد آن یعنی نیم‌دایره را بصورت زیر بدست آورد:

$$P = 2\pi\bar{y}L \rightarrow 4\pi r^2 = 2\pi\bar{y}(\pi r) \rightarrow \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$$

توجه شود $\bar{y} = \frac{2r}{\pi}$ مرکز منحنی نیم‌دایره است, در حالیکه $\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$ که قبلا بدست آوردیم مرکز سطح نیم‌دایره می‌باشد.

۵-۵-۳- بارهای گسترده

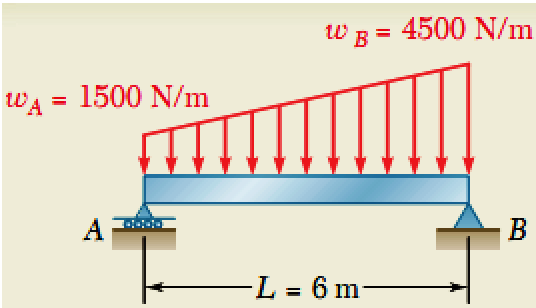
در اینجا هدف آن است که یک توزیع بار گسترده را بصورت متمرکز در یک نقطه معادل سازی نماییم.

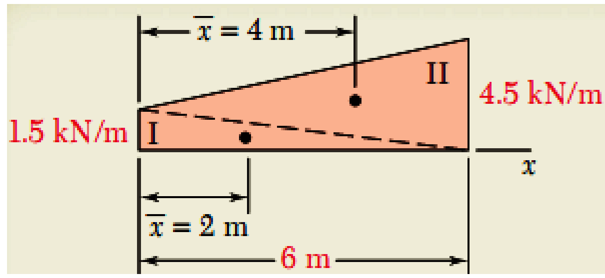


$$dW = \underbrace{\omega dx}_{dA} \rightarrow \underbrace{W}_{A} = \int_0^L \omega dx \rightarrow \bar{x}W = \int_0^L x dW \rightarrow \bar{x}A = \int_0^L x dA$$

مثال ۵-۱۹ برآیند بارهای زیر را همراه با عکس العمل تکیه گاهها بیابید.

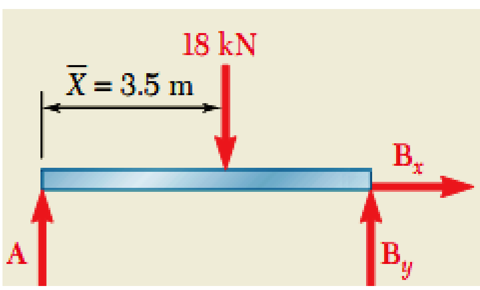
حل هرچند در اینجا میتوان از انتگرال گیری استفاده کرد(که در توضیح بعد از مثال خواهیم دید), اما از آنجا که توزیع بار شکل ذوزنقه‌ای دارد, با تفکیک آن به دو مثلث و استفاده از زیگما بجای انتگرال, محاسبات ساده‌تر خواهد بود.





$$W = A = \left(\frac{6 \times 1.5}{2} + \frac{6 \times 4.5}{2}\right) = 18\ kN$$

$$\bar{x}A = \sum \bar{x}_i A_i \rightarrow 18\bar{x} = \underbrace{\frac{6 \times 1.5}{2}}_{A_1} \times \underbrace{2}_{x_1} + \underbrace{\frac{6 \times 4.5}{2}}_{A_2} \times \underbrace{4}_{x_2} \rightarrow \bar{x} = 3.5\ m$$



$$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 6B_y = 18 \times 3.5 \rightarrow B_y = 10.5\ kN$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A + B_y = 18 \rightarrow A = 7.5\ kN$$

توضیح: اگر بخواهیم از انتگرال برای محاسبه W و $\bar{x}$ استفاده کنیم, با نوشتن معادله خط $\omega = 1.5 + 0.5x$ خواهیم داشت:

$$W = A = \int_0^L \omega dx = \int_0^6 (1.5 + 0.5x)\, dx = 18$$

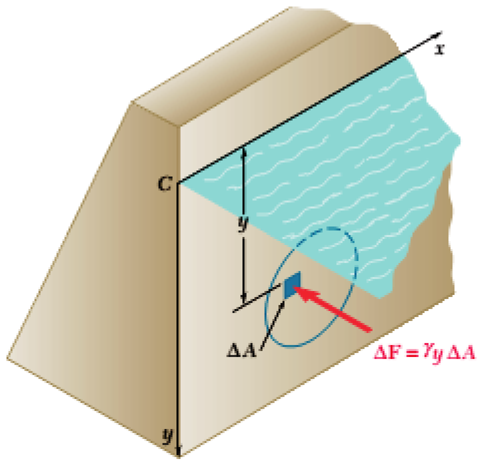
$$\bar{x}A = \int_0^L x dA \xrightarrow{dA=\omega dx} 18\bar{x} = \int_0^6 x(1.5 + 0.5x)\, dx = 63 \rightarrow \bar{x} = 3.5\ m \ \blacksquare$$

۵-۵-۴- محاسبه گشتاور دوم (اینرسی یا لختی)

فرض کنید هدف محاسبه میزان گشتاوری باشد که ناشی از فشار آب پشت یک سد به بدنه آن وارد میشود. یک المان از آنرا dA انتخاب میکنیم که در فاصله y از سطح آب قرار گرفته است.

در شکل زیر این المان بصورت $dA = dxdy$ انتخاب شده است که چنین المانی در ریاضی ۲ بررسی خواهد شد. در ریاضی ۱ این المان را بصورت یک نوار باریک در راستای x انتخاب میکنیم. مثلا اگر عرض سد برابر b باشد خواهیم داشت $dA = bdy$.

در هر صورت بدیهی است فشاری که بر این المان وارد میشود برابر γy و لذا نیروی وارد بر آن برابر $dF = \gamma y dA$ خواهد بود. برای محاسبه گشتاور, کافی است این نیرو در y ضرب شود. در نتیجه:



$$dF = \gamma y dA \rightarrow F = \gamma \int y dA = \gamma Q_x$$

$$dM_x = y dF = \gamma y^2 dA$$

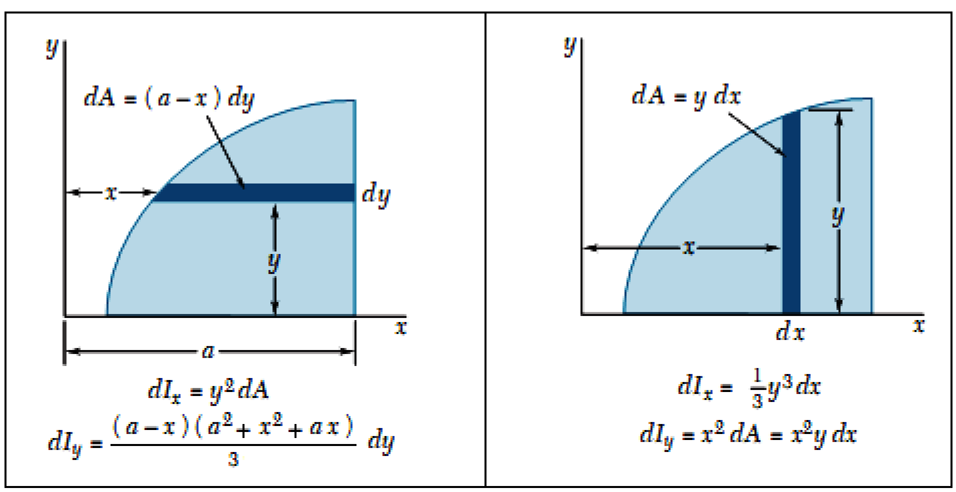
$$\rightarrow M_x = \gamma \int y^2 dA = \gamma I_x$$

بر طبق تعریف $I_x = \int y^2 dA$ گشتاور دوم(ممان اینرسی, گشتاور لختی) حول محور x نامیده میشود.

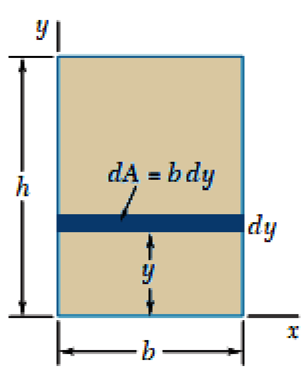
به عبارتی زمانی گشتاور دوم وارد یک مساله می‌شود که در محاسبه گشتاور اول یعنی $M = Fx$, خودِ F تابعی خطی از x باشد.

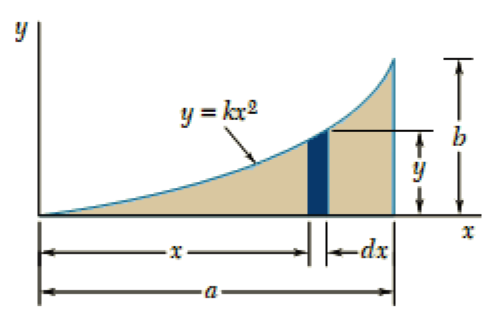
برای محاسبه گشتاور دوم یک ناحیه, آنرا به المانهای افقی یا عمودی تقسیم کرده برای هر یک گشتاور دوم را بدست می‌آوریم, سپس با انتگرال گیری جواب مساله بدست می‌آید.

در شکل زیر گشتاور ناشی از انتخاب المانهای افقی و عمودی ارائه شده است که در ادامه نحوه تعیین آنها را خواهیم دید.



مثال ۵-۲۰ گشتاور دوم(ممان اینرسی) سطوح زیر را حول محورهای x و y بیابید.





حل الف: برای شکل سمت چپ با انتخاب یک المان افقی خواهیم داشت:

$$dI_x = y^2 \underbrace{dA}_{bdy} \rightarrow I_x = \int_0^h y^2 bdy = \frac{bh^3}{3}$$

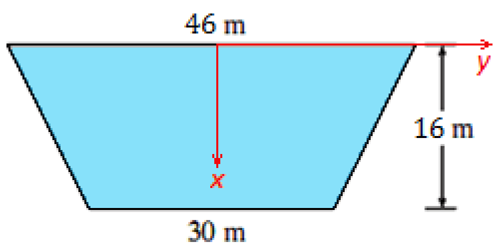
که دقیقا همان نتیجه‌ای است که در شکل قبل(روابط محاسبه گشتاور المانها) ارائه شده است. به همین ترتیب با انتخاب المان قائم $I_y = \frac{hb^3}{3}$ بدست می‌آید.

ب: برای شکل سمت راست آنرا به تعدادی المان مشابه قسمت قبل تقسیم میکنیم. از آنجا که عرض این المان dx و ارتفاع آن y میباشد, لذا $dI_x = \frac{1}{3}y^3dx$ خواهد شد که هم در قسمت الف محاسبه گردید و هم در شکل مربوط به روابط محاسبه گشتاور المانها ارائه شده است. بنابراین با مشخص شدن dI_x و انتگرال‌گیری جواب مساله بدست می‌آید. در ابتدا ضریب k را در معادله منحنی بدست می‌آوریم:

$$y = kx^2 \ ; b = ka^2 \rightarrow k = \frac{b}{a^2} \ ; \ dI_x = \frac{1}{3}y^3dx = \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)^3 dx \rightarrow I_x = \frac{ab^3}{21}$$

$$dI_y = x^2dA = x^2ydx = \frac{b}{a^2}x^4dx \rightarrow I_y = \frac{a^3b}{5} \quad \blacksquare$$

مثال ۵-۲۱ مرکز سطح و ممان اینرسی سطح زیر را حول محور گذرنده از ضلع بالایی بیابید.



$$A\overline{x} = \sum A_i\overline{x}_i$$

$$\rightarrow (608)\overline{x} = \underbrace{30 \times 16}_{A_1} \times \underbrace{8}_{\overline{x}_1} + \underbrace{2 \times 8 \times \frac{16}{2}}_{A_2} \times \underbrace{\frac{16}{3}}_{\overline{x}_2}$$

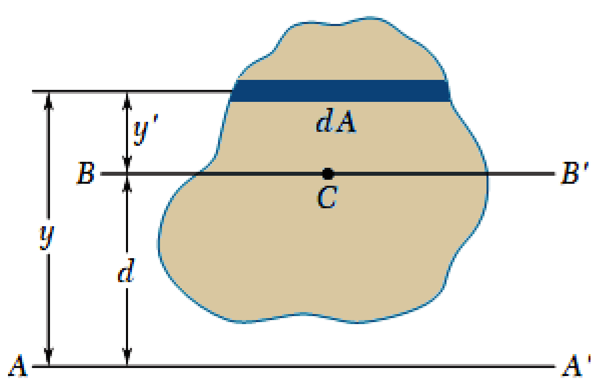
$$\rightarrow \overline{x} = 7.44\ m$$

در تمرین ۳ از شما خواسته شده است که نشان دهید ممان اینرسی مثلث حول محوری که از قاعده آن میگذرد برابر $\frac{bh^3}{12}$ می‌باشد. در نتیجه با تفکیک شکل به یک مستطیل و دو مثلث خواهیم داشت:

$$I_y = \frac{30 \times 16^3}{3} + 2\frac{8 \times 16^3}{12} = 46421.3 \quad m^4 \quad \blacksquare$$

<u>قضیه محورهای موازی:</u> در اینجا هدف آن است که با داشتن گشتاور دوم حول محوری که از مرکز یک سطح میگذرد, گشتاور دوم حول یک محور دیگر موازی با آن را از طریق ساده‌تری بدست آوریم.

فرض کنید گشتاور دوم شکل زیر حول محور BB' (که از مرکز سطح می‌گذرد) مشخص بوده و بخواهیم گشتاور دوم آنرا حول محوری موازی با آن یعنی AA' بدست آوریم. از آنجا که برای المان انتخابی نشان داده شده $y = y' + d$, لذا خواهیم داشت:



$$I_{AA'} = \int y^2dA$$

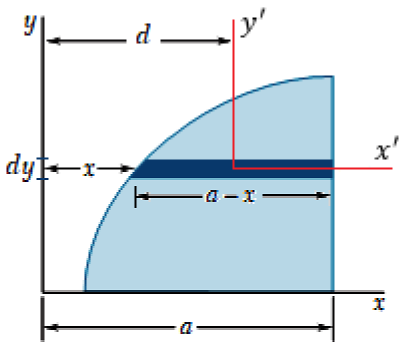
$$= \int y'^2dA + 2d\underbrace{\int y'dA}_{0} + d^2\int dA$$

$$= \overline{I}_{BB'} + Ad^2 \rightarrow \boxed{I_{AA'} = \overline{I}_{BB'} + Ad^2}$$

مثلا در مستطیل قسمت الف از مثال قبل, ممان اینرسی حول محوری که به موازات x بوده و از مرکز آن میگذرد برابر است با:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad^2 \rightarrow \frac{bh^3}{3} = \bar{I}_{x'} + (bh)\left(\frac{h}{2}\right)^2 \rightarrow \bar{I}_{x'} = \frac{bh^3}{12}$$

همچنین می‌توان dI_y را برای المان افقی نشان داده شده در شکل مربوط به روابط محاسبه گشتاور المانها, بصورت زیر بدست آورد:



$$dI_y = d\bar{I}_{y'} + (dA)d^2 \quad ; \quad d\bar{I}_{y'} = \frac{h^3 b}{12} = \frac{(a-x)^3 dy}{12}$$

$$dA = (a-x)dy \quad ; \quad d = \frac{a+x}{2}$$

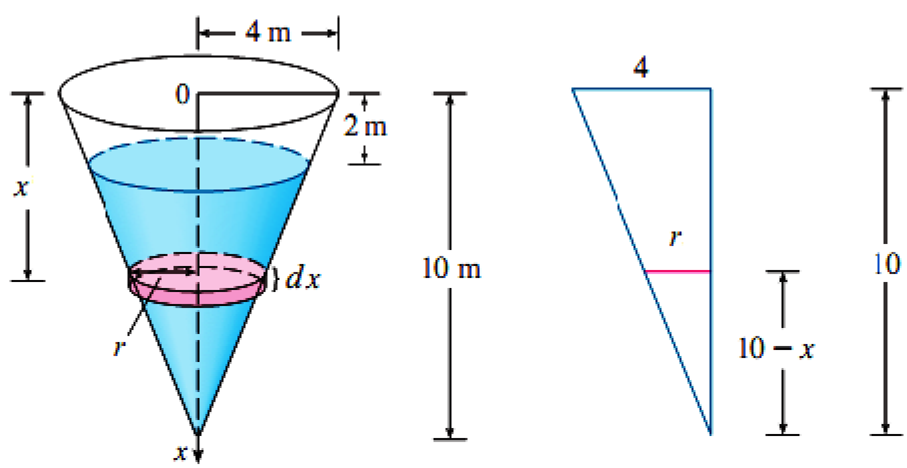
$$dI_y = \frac{(a-x)^3 dy}{12} + (a-x)\left(\frac{a+x}{2}\right)^2 dy$$

$$dI_y = \frac{(a-x)(a^2+ax+x^2)}{3} dy$$

۵-۵-۵- محاسبه کار

در این بخش با یک مثال ساده, نحوه محاسبه کار که از مباحث مهم فیزیک میباشد ارائه خواهد شد.

مثال ۵-۲۲ کار لازم برای خالی کرده آب ذخیره شده در این تانک از بالای آنرا بیابید.



حل ابتدا کار لازم برای انتقال یک المان مشابه آنچه در شکل دیده میشود را بدست می‌آوریم. برای این منظور, وزن این المان را محاسبه کرده (dF) و سپس برای محاسبه کار لازم (dW) , وزن آنرا در فاصله المان تا بالای تانک یعنی x , ضرب می‌کنیم.

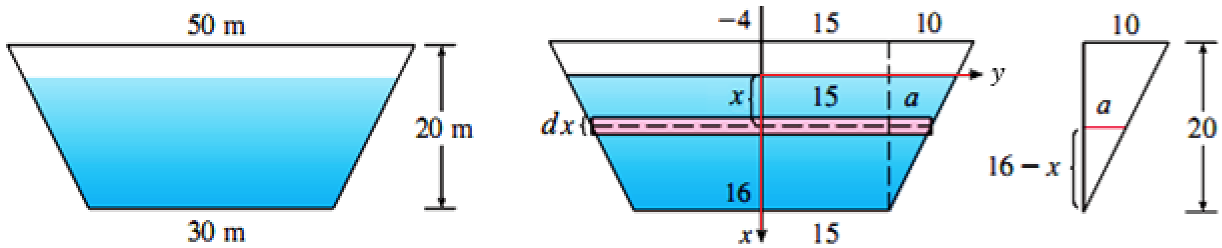
$$\frac{r}{4} = \frac{10-x}{10} \rightarrow r = \frac{2}{5}(10-x) \rightarrow dF = \gamma\, \underbrace{\pi r^2 dx}_{dV} \rightarrow dW = xdF \qquad (\gamma = 9800 \;\; N/m^3)$$

$$\rightarrow W = 1568\pi \int_2^{10} x(10-x)^2 dx \approx 3.4 \times 10^6 \;\; J$$

۵-۵-۶- محاسبه فشار و مرکز فشار

در این بخش نیز با ارائه دو مثال, نحوه محاسبه فشار و مرکز فشار که از مباحث مهم بحث مکانیک سیالات میباشد را خواهیم دید.

مثال ۵-۲۳ در شکل زیر ارتفاع آب تا بالای مخزن $4\ m$ است. نیروی فشار هیدرواستاتیکی وارد به بدنه مخزن را بیابید.



حل یک المان افقی به طول w و عرض dx انتخاب میکنیم. دقت شود سطحی که آب پر کرده است همان سطح مثال ۵-۲۱ است.

$$a = 8 - 0.5x \to w = 2(15 + a) = 46 - x \to dA = wdx \to dF = PdA = \gamma x dA$$

$$\to F = 9800 \int_0^{16} x(46 - x)dx \approx 4.43 \times 10^7\ \ N$$

$$\underline{Or} : F = \gamma \int xdA\ = \gamma A\bar{x} = \gamma \times 8(46 + 30) \times 7.44 \approx 4.43 \times 10^7\ \ N \quad \blacksquare$$

مثال ۵-۲۴ در مثال قبل مشخص کنید برآیند این نیروی فشاری در چه نقطه ای اعمال میشود؟ (مرکز فشار). سپس نشان دهید این نقطه پایینتر از مرکز سطح آن میباشد. مرکز سطح و ممان اینرسی آن در مثال ۵-۲۱ بدست آمده است.

$$dM_y = xdF = \gamma x^2 dA \to M_y = \gamma \int x^2 dA = \gamma I_y \quad ; \quad M_y = Fx_{cp} = (\gamma A\bar{x})x_{cp}$$

$$\to x_{cp} = \frac{I_y}{A\bar{x}} = \frac{46421.3}{8(46 + 30) \times 7.44} = 10.26\ \ m > \bar{x} = 7.44\, m$$

اما این رابطه همیشه درست است که مرکز فشار (x_{cp}) پایینتر از مرکز سطح $(\bar{x})$ قرار می‌گیرد. چرا که:

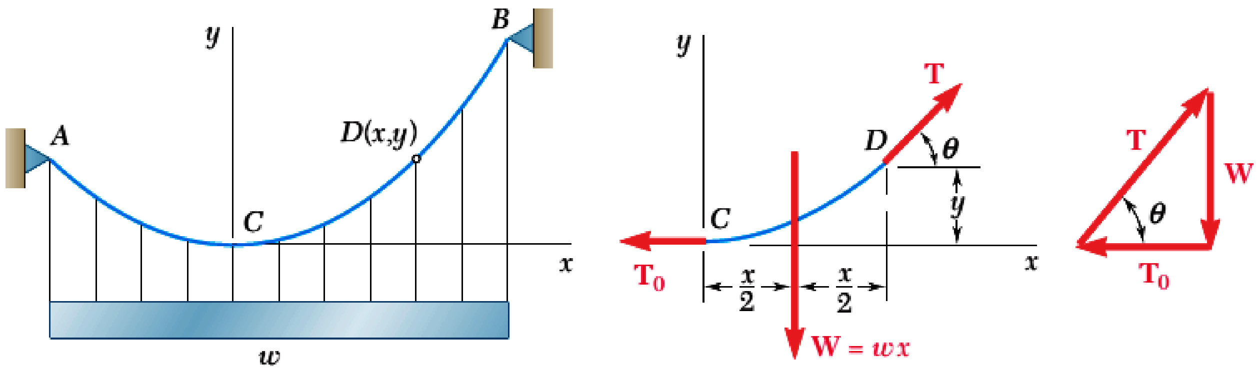
$$x_{cp} = \frac{I_y}{A\bar{x}} = \frac{I_{y'} + A\bar{x}^2}{A\bar{x}} = \bar{x} + \frac{I_{y'}}{A\bar{x}} > \bar{x} \quad \blacksquare$$

۵-۵-۷- تعیین منحنی کابل آویزان

مساله در دو حالت بررسی می‌شود. اول آنکه کابل تحت اثر بار یکنواخت قرار گرفته باشد و در حالت دوم, تحت اثر وزن خود کابل.

الف: بار یکنواخت

فرض کنید شدت بار در راستای x , ثابت و برابر ω بوده و از وزن کابل در برابر بار وارده صرفنظر شده است. مبدا دستگاه محورهای مختصات را در پایینترین نقطه کابل یعنی C در نظر می‌گیریم. با بیرون کشیدن قطعه CD و ترسیم مثلث نیروها خواهیم داشت:



با لنگر گیری حول نقطه D معادله کابل به سادگی تعیین می‌شود:

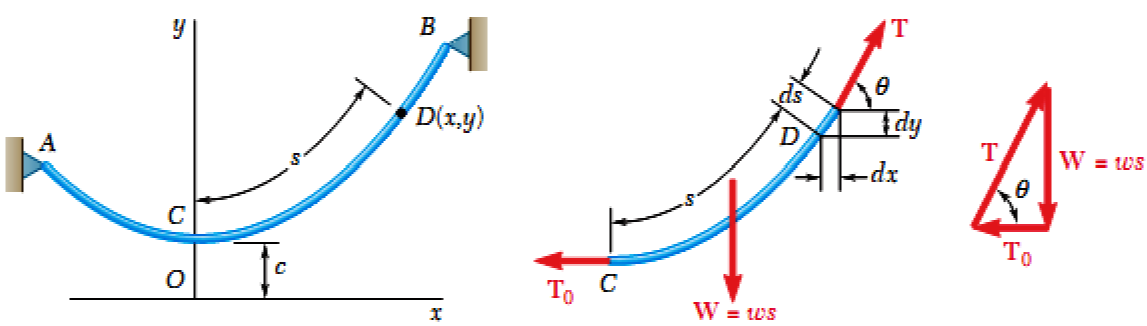
$$\sum M_D = 0 \rightarrow T_0 y - \omega x \frac{x}{2} = 0 \rightarrow y = \frac{\omega x^2}{2T_0}$$

یعنی معادله کابل به شکل سهمی خواهد بود که T_0 فعلا مشخص نیست. نکته مهم آن است که در عمل پایینترین نقطه کابل را بجز در حالتی که A و B هم ارتفاع باشند نمی‌دانیم. برای این منظور بایستی مختصات پارامتری این دو نقطه را در $y = \frac{\omega x^2}{2T_0}$ قرار داد و سپس از اینکه $x_B - x_A = L$ و $y_B - y_A = d$ استفاده کرد (L و d از ابتدا مشخص می‌باشند) تا مختصات نقاط و به دنبال آن T_0 تعیین شود. در نهایت نیز می‌توان طول کابل و نیروی کشش آنرا بصورت زیر محاسبه کرد:

$$y' = tan\theta = \frac{\omega x}{T_0} \;;\; L = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega x}{T_0}\right)^2}\, dx \quad ; \quad T = \sqrt{T_0^2 + \omega^2 x^2}$$

ب: تحت اثر وزن کابل

فرض کنید شدت بار در راستای کابل , ثابت و برابر ω میباشد, بعنوان نمونه کابلی که تحت اثر وزن خود آویزان شده است. بدیهی است در اینصورت ω معادل چگالی کابل خواهد بود.



مبدا مختصات را در زیر پایینترین نقطه کابل یعنی C در نظر می‌گیریم. اینکه میزان این انتقال چه اندازه باشد تا پاسخ مساله ساده‌تر بدست آید را در ادامه خواهیم دید. با ترسیم مثلث نیروها و انتخاب پارامتر $c = \frac{T_0}{\omega}$ خواهیم داشت:

$$T = \sqrt{T_0^2 + \omega^2 s^2} \xrightarrow{c = \frac{T_0}{\omega}} T = \omega\sqrt{c^2 + s^2} \qquad (1)$$

مشکل این است که نمی‌توان مشابه قسمت قبل عمل کرد, چرا که فاصله افقی $W = \omega s$ تا نقطه D را نمی‌دانیم.

$$dx = ds\,cos\theta = \frac{T_0}{T}ds = \frac{\omega c}{\omega\sqrt{c^2+s^2}}ds = \frac{ds}{\sqrt{1+\left(\frac{s}{c}\right)^2}} \rightarrow x = c\,sinh^{-1}\left(\frac{s}{c}\right) + k$$

$$if\ s = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow k = 0 \rightarrow s = c\,sinh\left(\frac{x}{c}\right) \qquad (2)$$

$$dy = dx\,tan\theta = \frac{W}{T_0}dx = \frac{\omega s}{\omega c}dx \xrightarrow{(2)} dy = sinh\left(\frac{x}{c}\right)dx \rightarrow y = c\,cosh\left(\frac{x}{c}\right) + k$$

برای سادگی محاسبات اگر مبدا دستگاه مختصات را در فاصله c از پایینترین نقطه کابل (C) در نظر بگیریم, بایستی برای $x=0$ به $y=c$ برسیم. لذا:

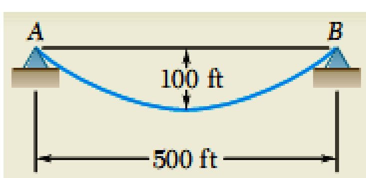
$$if\ x = 0 \rightarrow y = c \rightarrow k = 0 \rightarrow y = c\,cosh\left(\frac{x}{c}\right) \qquad (3)$$

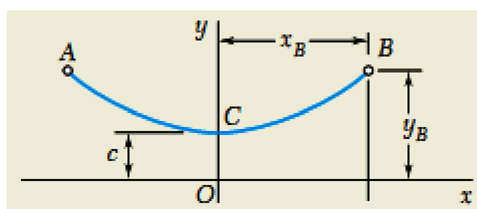
لذا منحنی یک کابل که تحت اثر وزن خود آویخته باشد به شکل کسینوس هیپربولیک خواهد بود. برای تعیین c بایستی مختصات یکی از دو سمت کابل در معادله بالا قرار داده شود (مثال بعد). همچنین طول کابل و کشش هر نقطه نیز بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\xrightarrow{(2),(3)} y^2 - s^2 = c^2 \quad (4) \quad \xrightarrow{(1)} T = \omega y \quad (5)$$

لذا کمترین کشش مربوط به پایینترین نقطه یعنی C و بیشترین کشش مربوط به بالاترین نقطه کابل (در اینجا B) خواهد بود.

مثال ۵-۲۵ اگر وزن واحد طول کابل برابر $3\,\frac{lb}{ft}$ باشد, معادله منحنی تغییر شکل کابل, حداکثر و حداقل کشش و طول آنرا بیابید.





حل با نوشتن رابطه (3) و جایگذاری مختصات یکی از دو سمت کابل مانند B , معادله لازم برای محاسبه c تعیین می‌شود:

$$(3) \rightarrow y = c\,cosh\left(\frac{x}{c}\right) \xrightarrow{B(250,100+c)} 100 + c = c\,cosh\left(\frac{250}{c}\right) \rightarrow c = 328$$

دقت شود c در معادله بالا با یکی از روشهای محاسبات عددی (مانند نصف کردن) و یا روش ترسیمی بدست آمده است.

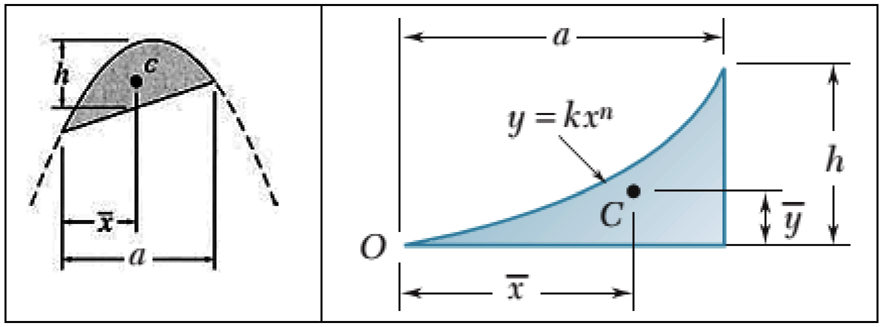
$$(5) \rightarrow T = \omega y \rightarrow \begin{cases} T_{Min} = T_C = \omega y_C = 3 \times 328 = 984\ \ lb \\ T_{Max} = T_B = \omega y_B = 3 \times 428 = 1284\ \ lb \end{cases}$$

با جایگذاری مختصات B در رابطه (4) , طول کابل CB بدست می‌آید:

$$y^2 - s^2 = c^2 \rightarrow (428)^2 - s^2 = (328)^2 \rightarrow s = 275\ ft \rightarrow L = 2s = 550\ ft \quad \blacksquare$$

تمرینات بخش ۵-۵

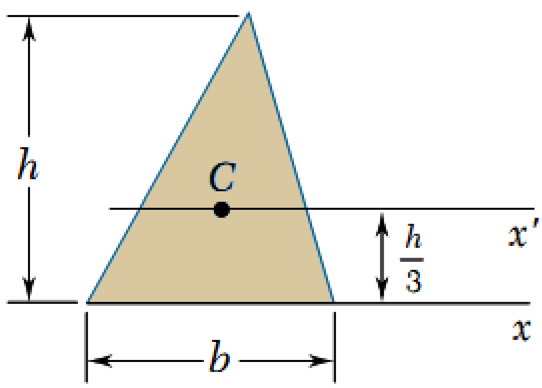
۱- مطلوب است محاسبه جرم و مرکز جرم اشکال زیر. شکل چپ یک قطاع از سهمی درجه ۲ می‌باشد. چگالی ثابت فرض شود.



$$\underline{Ans}:\ m=\frac{2}{3}\rho a h\,,\bar{x}=\frac{a}{2}\qquad ;\qquad m=\frac{\rho a h}{n+1}\ ,\bar{x}=\frac{n+1}{n+2}a\ ,\bar{y}=\frac{n+1}{4n+2}h$$

۲- سطح حاصل از دوران بیضی $x^2+4y^2=4$ حول محور xها را بیابید. $\underline{Ans}:\ \frac{8\pi^2}{3\sqrt{3}}+2\pi$

۳- ممان اینرسی یک مثلث را حول قاعده و محوری که از مرکز آن میگذرد را بیابید.



$$\bar{I}_{x'}=\frac{1}{36}bh^3$$

$$I_x=\frac{1}{12}bh^3$$