DATE / / SUBJECT: ۸۱۰۱۰۰۰۸۴ شماره دانشجویی : محمد ابانلو

۱- فرض کنید $f_{(x,y,z)} = x-3y^2+z$ ، آنگاه انتگرال f را روی مسیرهای زیر بیابید

الف) روی مسیر با تعریف $C: \vec{R}_{(t)} = t\hat{i}+t\hat{j}+t\hat{k}$

ب) روی مسیر $C = C_1 \cup C_2$ با تعریف $0 \le t \le 1$ ، $C_1: R_{(t)} = t\hat{i}+t\hat{j}$ ، $C_2: R_{(t)} = \hat{i}+\hat{j}+t\hat{k}$ $0 \le t \le 1$

الف) $|v_{(t)}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \to \int_0^1 (t-3t^2+t)\sqrt{3}\,t = \sqrt{3}[t^2-t^3] = 0$

ب) $|v_{1(t)}| = \sqrt{2}$, $|v_{2(t)}| = 1 \to \int_0^1 (t-3t^2)dt\sqrt{2} + \int_0^1 (1-3+t)dt = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{2}}$

۲- فرض کنید C مسیر کسن زیر باشد $\vec{R}(t) = \cos(4t)\hat{i}+\sin(4t)\hat{j}+t\hat{k}$ ، $t \in [0, 2\pi]$

مطلوبست انتگرال تابع $f(x,y,z) = x^2+y^2$ روی خم C

$\to \frac{dR_{(t)}}{dt} = -4\sin(4t)\hat{i}+4\cos(4t)\hat{j}+1\hat{k} \to |v_{(t)}| = \sqrt{17}$

$\to \int_0^{2\pi} \sqrt{17}\,\underbrace{(1)}_{\cos^2(4t)+\sin^2(4t)}\,dt = \boxed{2\pi\sqrt{17}}$

۳- میدان برداری $F(x,y,z) = (x^2-y, y^2-z, z^2-x)$ داده شده است. کار نیروی F از نقطه $P_0(0,0,0)$ تا نقطه $(1,1,1)$ را روی هر یک از دو خم بیابید.

الف) خم C_1 با ضابطه $\vec{R}_{(t)} = t\hat{i}+t\hat{j}+t\hat{k}$ $t \in [0,1]$

ب) خم C_2 با ضابطه $\vec{R}_{(t)} = t\hat{i}+t^2\hat{j}+t^3\hat{k}$ ، $t \in [0,1]$

الف) $F_{(t)} = (t^2-t, t^2-t, t^2-t)$

$\frac{dR}{dt} = (1,1,1) \to F\cdot\frac{dR}{dt} = 3(t^2-t)$

$\to \int_0^1 3(t^2-t)dt = [t^3-\frac{3t^2}{2}]_0^1 = \boxed{-\frac{1}{2}}$

ب) $F_{(t)} = (0, t^4-t^3, t^6-t)$

$\frac{dR}{dt} = (1, 2t, 3t^2) \to F\cdot\frac{dR}{dt} = 2t^5+3t^8-3t^3 \to \int_0^1 t^3(2t^2-2t+3t^5-3)dt = -\frac{29}{60}$

۴) مطلوب است انتگرال کار نیروی $F(x,y,z)=(x,y,z)$ روی مسیر C به ضابطه $R(t)=(\cos t,\sin t,t)$ ؛ $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$\to F(t)=(\cos t, t, \sin t)\ .\ \frac{dR}{dt}=(-\sin t,\cos t,1) \to F\cdot\frac{dR}{dt}=-\cos t\sin t+t\cos t+\sin t$

$\to \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t+t\cos t-\cos t\sin t)\,dt=\left[\cancel{-\cos t}+t\sin t+\cancel{\cos t}-\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{\frac{\pi-1}{2}}$

۵) قضیه گرین را برای تابع $F(x,y)=(x+y,-xy)$ ، C مرز ناحیه محدود به منحنی‌های $y=x^2$ ، $x=y^2$ تحقیق کنید.

$\operatorname{div} F=\frac{\partial}{\partial x}(x+y)+\frac{\partial}{\partial y}(-xy)=1-x \to \int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt{y}}(1-x)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\frac{y^4}{2}-y^2+\sqrt{y}-\frac{y}{2}\right)dy$

$\boxed{\frac{11}{60}}$

روش دوم: $C_1:\ R(t)=(t,t^2) \to \int_0^1((t^2+t)2t+t^3)\,dt=\frac{17}{12}$

$C_2:\ R(t)=(t^2,t) \to \int_0^1((t^2+t)+t^3(2t))\,dt=\frac{37}{30}$

$\to \frac{17}{12}-\frac{37}{30}=\boxed{\frac{11}{60}}$

۶) درستی قضیه گرین را در مورد میدان برداری $F(x,y)=(x-y,x)$ ، ناحیه D محصور به دایره C به معادله $R(t)=\cos t\,\hat{i}+\sin t\,\hat{j}$ ، $0\le t\le 2\pi$ تحقیق کنید.

روش ۱: $\operatorname{div}F=\frac{\partial}{\partial x}(x-y)+\frac{\partial}{\partial y}(x)=1$

$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}(1)\,dx\,dy=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy=\boxed{\pi}$

روش ۲: $\int_0^{2\pi}((\cos t-\sin t)(\cos t)-(\cos t)(-\sin t))\,dt=\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\left[\frac{\sin(2t)}{4}+\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=\boxed{\pi}$

۷) مطلوب است مقدار انتگرال $I=\oint(2y+\sqrt{9+x^3})\,dx+(5x+e^{\tan^{-1}y})\,dy$ ... $x^2+y^2\le 4$

$\to \frac{\partial}{\partial y}(2y+\sqrt{9+x^3})=2\ ,\ \frac{\partial}{\partial x}(5x+e^{\tan^{-1}y})=5$

$\Leftrightarrow \iint_R(5-2)\,dy\,dx=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}3\,dy\,dx=6\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=6(2\pi)=\boxed{12\pi}$

8) مساحت بیضی به معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$ را بیابید.

$$\text{مساحت} = \iint_R dy\,dx = \int_{-a}^{a}\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy\,dx = \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = \frac{2b}{2}\left[a\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]_{-a}^{a}$$

$$\Rightarrow S = b(\pi a) = \boxed{\pi ab}$$

9) فرض کنید رویه S بخشی از مخروط $z^2=x^2+y^2$ باشد که بین صفحات $z=1$ و $z=2$ قرار می‌گیرد. انتگرال رویه‌ای تابع $g(x,y,z)=x^2z^2$ روی رویه S را بیابید.

و چون $1\leq z\leq 2$

فرض می‌کنیم: $R(r,\theta) = r\cos\theta\,\hat{i} + r\sin\theta\,\hat{j} + r\hat{k}\ ,\ 1\leq r\leq 2\ ,\ 0\leq\theta\leq 2\pi$

$$\Rightarrow R_r = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j} + \hat{k}\ ,\ R_\theta = -r\sin\theta\,\hat{i} + r\cos\theta\,\hat{j} \rightarrow |R_r\times R_\theta| = r\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow g(r,\theta) = r^4\cos^2\theta \rightarrow \iint_S g\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^4\cos^2\theta\,(r\sqrt{2})\,dr\,d\theta$$

$$\Rightarrow = \frac{21\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \boxed{\frac{21\sqrt{2}}{2}\pi}$$

10) رویه S بخشی از مخروط $y=\sqrt{x^2+z^2}$ است که بین استوانه‌ی $x^2+z^2=4$ قرار می‌گیرد. مساحت S را بیابید.

فرض می‌کنیم: $R(r,\theta) = r\cos\theta\,\hat{i} + r\hat{j} + r\sin\theta\,\hat{k} \rightarrow 1\leq r\leq 2$

چون: $1\leq y\leq 2$ و $0\leq\theta\leq 2\pi$

$$\rightarrow R_r = \cos\theta\,\hat{i} + \hat{j} + \sin\theta\,\hat{k}\ ,\ R_\theta = -r\sin\theta\,\hat{i} + r\cos\theta\,\hat{k}$$

$$\rightarrow |R_r\times R_\theta| = r\sqrt{2} \rightarrow \int_0^{2\pi}\int_1^2 (r\sqrt{2})\,dr\,d\theta = \frac{3\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{6\pi\sqrt{2}}{2} = \boxed{3\pi\sqrt{2}}$$

11) فرض کنید S رویه‌ای باشد که صفحات $x=0$, $x=a$ از استوانه $\begin{cases} y^2+z^2=a^2 \\ z\geq 0\end{cases}$ جدا می‌کند. مطلوب است

شار رو به بیرون میدان $F(x,y,z) = yz\,\hat{j} + z^2\hat{k}$ از رویه S.

$$\underset{(z=y)}{g} = y^2+z^2-a^2 = 0 \rightarrow \nabla g = (0, 2y, 2z) \rightarrow n = \frac{+\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{(0,2y,2z)}{2a} = \frac{(0,y,z)}{a}$$

رو به بیرون

$$P = k \rightarrow d\sigma = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot P|}dA = \frac{2a}{2z}dA = \frac{a\,dA}{z}$$

$$F\cdot n = (0, yz, z^2)\cdot\frac{(0,y,z)}{a} = \frac{zy^2+z^3}{a} = \frac{za^2}{a} = za$$

$$\Rightarrow \iint F\cdot n\,d\sigma = \iint_R (za)\cdot\frac{a}{z}dA = a^2\iint_R dA \rightarrow a^2\int_0^a\int_{-1}^{1} dy\,dx = a^2(2a) = \boxed{2a^3}$$

۱۲) فرض کنید $F(x,y,z)=(xy,\ yz^2,\ xz^3)$ مطلوب است محاسبه $\operatorname{div}\vec F$ ، $\operatorname{curl}\vec F$ ، $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\vec F)$

$$\operatorname{div}\vec F = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xz^3) = \boxed{y + z^2 + 3z^2x}$$

$$\operatorname{curl}\vec F = (0-2zy)\hat i - (z^3-0)\hat j + (0-x)\hat k = \boxed{(-2zy,\ -z^3,\ -x)}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl}\vec F) = \frac{\partial}{\partial x}(-2zy) + \frac{\partial}{\partial y}(-z^3) + \frac{\partial}{\partial z}(-x) = \boxed{0}$$

۱۳) قضیه دیورژانس را در مورد $\vec F_{(x,y,z)}=(x,y,z)$ و کره به معادله $x^2+y^2+z^2=a^2$ بررسی کنید.

$$n = \frac{(2x,2y,2z)}{2a} = \frac{(x,y,z)}{a} \rightarrow F\cdot n = \frac{x^2+y^2+z^2}{a} = a \rightarrow \iint_S a\,d\sigma = a\,(\underbrace{4\pi a^2}_{\text{مساحت کره}}) = \boxed{4\pi a^3}$$

$$\operatorname{div}F = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3 \rightarrow \iiint_D 3\,dv = 3\Big(\underbrace{\frac{4\pi a^3}{3}}_{\text{حجم کره}}\Big) = \boxed{4\pi a^3}$$

۱۴) قضیه استوکس را در حالتی که روی S نیم‌کره $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ z\geq 0\end{cases}$ با دایره مرزی C به معادله $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=0\end{cases}$ است و میدان برداری $\vec F = y\hat i - x\hat j$ است، تحقیق کنید.

$r_{(\theta)} = a\cos\theta\,\hat i + a\sin\theta\,\hat j\ ,\quad 0\leq\theta\leq 2\pi$

$$\frac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta\,\hat i + a\cos\theta\,\hat j\ ,\quad F = a\sin\theta\,\hat i - a\cos\theta\,\hat j \rightarrow F\cdot dr = -a^2\,d\theta$$

$$\oint_C F\cdot dr = \int_0^{2\pi} -a^2\,d\theta = \boxed{-2\pi a^2}$$

$$\operatorname{curl}F = -2\hat k\ ,\quad n = \frac{(2x,2y,2z)}{2a} = \frac{(x,y,z)}{a}\ ,\quad d\sigma = \frac{2a}{2z}\,dA = \frac{a}{z}\,dA \quad (P=k)$$

$$\operatorname{curl}F\cdot n = \frac{-2z}{a} \rightarrow \iint_S \frac{-2z}{a}\cdot\frac{a}{z}\,dA = \iint_S -2\,dA = -2(\underbrace{\pi a^2}_{\text{مساحت دایره به شعاع } a}) = \boxed{-2\pi a^2}$$

۱۵) میدان $\vec{F}$ روی فضای R^3 به صورت زیر تعریف شده است: $\vec{F}_{(x,y,z)} = (\underbrace{2x-3}_{M}, \underbrace{-z}_{N}, \underbrace{\cos z}_{P})$

آیا میدان $\vec{F}$ پایستار است؟

برای اینکه میدان ما پایستار باشد: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z} \leftarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial z} \Leftarrow \frac{\partial N}{\partial z} = -1 , \frac{\partial P}{\partial y} = 0$

$\boxed{\text{میدان پایستار نیست}}$

۱۶) میدان $\vec{F}$ روی R^3 به صورت زیر تعریف شده است: $\vec{F}_{(x,y,z)} = \underbrace{(e^x \cos y)}_{M}\hat{i} + \underbrace{(xz - e^x \sin y)}_{N}\hat{j} + \underbrace{(xy+z)}_{P}\hat{k}$

الف) نشان دهید $\vec{F}$ پایستار است و یک تابع پتانسیل برای میدان F بیابید.

ب) انتگرال کار نیروی $\vec{F}$ از نقطه‌ی $A(0,0,0)$ تا نقطه‌ی $B(1, \frac{\pi}{2}, -1)$ را بیابید.

الف) $\frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x} , \frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial z} , \frac{\partial N}{\partial x} = z - e^x \sin y = \frac{\partial M}{\partial y} \rightarrow \boxed{\vec{F} \text{ پایستار است}}$

$\frac{\partial U}{\partial x} = M \rightarrow \underset{\text{پتانسیل}}{U_{(x,y,z)}} = e^x \cos y + xyz + g_{(y,z)} \rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = -e^x \sin y + xz + \frac{\partial g_{(y,z)}}{\partial y} =$

$xz - e^x \sin y \rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \rightarrow$ g تابعی از z است $\rightarrow \frac{\partial U}{\partial z} = xy + \frac{\partial g}{\partial z} = xy + z \rightarrow g_{(z)} = \frac{z^2}{2} + C$

$\boxed{U_{(x,y,z)} = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C} \rightarrow$ تابع پتانسیل

ب) $\vec{F} = \nabla U \rightarrow \int_C F \cdot dr = U_{(B)} - U_{(A)} = \left(\frac{-\pi}{2} + \frac{1}{2} + C\right) - (1 + C) = \boxed{\frac{-\pi - 1}{2}}$

کار نیروی F از A تا B

۷) مطلوب است محاسبه کار نیروی $F=(x^2y^3-5y+e^{x^2})\hat{i}+(x^3y^2+3x+\sin y^2)\hat{j}$ در امتداد دایره به معادله $C: x^2+y^2=4$ و در جهت خلاف عقربه‌های ساعت.

$$r_{(t)}=2\cos t\,\hat{i}+2\sin t\,\hat{j} \longrightarrow r'_{(t)}=-2\sin t\,\hat{i}+2\cos t\,\hat{j}$$

$$\vec{F}_{(t)}=(32\cos^2 t\sin^3 t-10\sin t+e^{4\cos^2 t},\ 32\cos^3 t\sin^2 t+6\cos t+\sin(4\sin^2 t))$$

$$\hookrightarrow F_{(t)}\cdot r'=64\cos^2 t\sin^2 t(\cos 2t)+12+8\sin^2 t-2\sin t\,e^{4\cos^2 t}+2\cos t\sin(4\sin^2 t)$$

$$\hookrightarrow \int_0^{2\pi}F_{(t)}\cdot r'\,dt=\underbrace{\left[\frac{8\sin^3(2t)}{3}\right]_0^{2\pi}}_{0}+24\pi+4\underbrace{\left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi}}_{8\pi}-0+0=\boxed{32\pi}$$

۸) مطلوب است مساحت رویه‌ای که صفحات $x=2$ ، $x=6$ از سهمی‌وار $z=x^2+y^2$ جدا می‌کنند.

فرض می‌کنیم

$$R_{(r,\theta)}=(r\cos\theta,r\sin\theta,r^2)\longrightarrow \left.\begin{array}{l}R_r=(\cos\theta,\sin\theta,2r)\\ R_\theta=(-r\sin\theta,r\cos\theta,0)\end{array}\right\}\longrightarrow |R_r\times R_\theta|=r\sqrt{4r^2+1}$$

$$2\leq x\leq 6\longrightarrow 2\leq r\cos\theta\leq 6\longrightarrow \frac{2}{\cos\theta}\leq r\leq\frac{6}{\cos\theta}$$

$$\hookrightarrow \underset{\text{با ماشین}}{S}=\int_0^{2\pi}\int_{2/\cos\theta}^{6/\cos\theta}r\sqrt{4r^2+1}\,dr\,d\theta \hookrightarrow =\int_0^{2\pi}\frac{(\cos^2\theta+144)^{\frac{3}{2}}-(\cos^2\theta+16)^{\frac{3}{2}}}{12\cos^3\theta}\,d\theta$$

$$\hookrightarrow \boxed{S=6.93\times 10^{-6}}$$

۱۹- میدان برداری $\vec{F}_{(x,y,z)} = (yz, 2xz, 3xy)$ و رویه S با معادله $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1,\ x,y,z>0\}$ را در نظر بگیرید. اگر n بردار قائم یکه خارجی (بیرونسو) باشد، انتگرال $\iint_S \mathrm{curl}F\cdot n\,ds$ را محاسبه نمایید.

$$\mathrm{Curl}F=(x,-2y,z)\ ,\quad \nabla S=(2x,2y,2z)\Rightarrow |\nabla S|=2$$

$$\Rightarrow n=\frac{\nabla S}{|\nabla S|}=(x,y,z)\Rightarrow \mathrm{Curl}F\cdot n=x^2-2y^2+z^2=1-3y^2$$

$$\Rightarrow \underset{(P=k)}{ds}=\frac{2}{2z}\,dA=\frac{1}{z}\,dA=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dA\rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\frac{1-3r^2\sin^2\theta}{\sqrt{1-r^2}}\,r\,dr\,d\theta$$

چون $x,y,z>0$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{(1-2\sin^2\theta)}_{\cos(2\theta)}\,d\theta=\boxed{\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0}$$