

سؤال ۱.

برای هر عدد صحیح غیر منفی n ، عدد a_{n+1} از عدد a_n بر اساس قانون زیر بدست می‌آید:

اگر آخرین رقم سمت راست عدد a_n از ۵ بیش‌تر باشد، $a_{n+1} = 9a_n$. در غیر این صورت، رقم سمت راست a_n را کنار می‌گذاریم و ارقام باقی‌مانده نمایشگر a_{n+1} است ($a_{n+1} = a_n \operatorname{div} 10$ ، تقسیم صحیح است). اگر a_{n+1} شامل هیچ رقمی نباشد، کار پایان می‌یابد. آیا به ازای هر a ، دلخواه، این فرآیند پایان پذیر است؟

پاسخ.

بله، حکم را با استقرای قوی روی عدد a ، ثابت می‌کنیم. اگر $a = 1$ باشد که حکم واضح است. حال فرض کنید حکم برای اعداد ۱ تا k برقرار باشد، ثابت می‌کنیم برای عدد $k+1$ نیز برقرار است. اگر رقم آخر عدد $k+1$ کوچک‌تر یا مساوی ۵ باشد، یا با کنار گذاشتن آن رقم (یک مرحله از الگوریتم)، عدد حاصل دارای هیچ رقمی نیست که در نتیجه حکم اثبات می‌شود یا این که عدد $a = (k+1) \operatorname{div} 10$ به دست می‌آید که چون عدد $a < k+1$ است، پس طبق فرض استقرا این فرآیند پایان می‌یابد. ولی اگر رقم یکان عدد $k+1$ بزرگ‌تر از ۵ باشد، با اجرای یک مرحله از این الگوریتم عدد $a = 9(k+1)$ به دست می‌آید که رقم یکان آن، برابر ۱، ۲، ۳ یا ۴ است و با اجرای یک مرحله‌ی دیگر از این الگوریتم عدد $b = a \operatorname{div} 10 = 9(k+1)$ به دست می‌آید که عدد $b < k+1$ است. بنابراین باز طبق فرض استقرا، این فرآیند به پایان خواهد رسید.