۴- حل معادلات خطی مرتبه دوم به کمک سریها

همانگونه که دیده شد فقط تعدادی از معادلات مرتبه دو را با روشهای ذکر شده حل کردیم. حتی در معادلات مرتبه اول نیز جواب بصورت یک انتگرال باقی میماند که ناگزیر از بکارگیری روشهای عددی یا نوشتن سری تیلور توابع هستیم. اما در مسائل فیزیکی معادلات متعددی وجود دارد که در قالب معادلاتی که تا بحال بررسی شد نمی‌گنجند, مانند معادله لژاندر, بسل و ... . روش کار برای این معادلات آن است که اگر نمی‌توانیم جوابی بر حسب توابع مقدماتی بیابیم, لااقل میتوانیم جواب معادله را بصورت سری توانی بیان کنیم.

برای آشنایی با مبانی روش سریها در حل معادلات دیفرانسیل, با ارائه چند مثال ساده کلیات این روش را خواهیم دید.

۱- در ابتدا یک معادله مرتبه اول بصورت $y' + y = 0$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم جواب این معادله بصورت $y = ce^{-x}$ می‌باشد. اما اگر بخواهیم همین مساله را به روش سریها حل کنیم, بایستی جواب را به فرم سری توانی $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ انتخاب کرده و از آنجا که مشتق‌گیری از سریهای توانی مجاز است, با مشتق‌گیری از سری و جایگذاری در معادله دیفرانسیل داده شده, ضرایب سری را بدست آوریم. در اینصورت مطابق آنچه در مثال ۴-۱۱ خواهیم دید پس از جایگذاری در معادله دیفرانسیل, ضریب a_n بصورت زیر بدست می‌آید:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} a_0 \to y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

در نهایت نیز جواب معادله را به همین فرم سری می‌پذیریم. ممکن است در برخی مثالها بتوان سری را بر حسب توابع مقدماتی بیان کرد, که در مورد این مثال بدیهی است $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$ بیانگر تابع e^{-x} می‌باشد. اما همواره این کار امکان پذیر نبوده و معمولا جواب نهایی به فرم سری باقی می‌ماند.

۲- در بحث کاهش مرتبه (تمرینات ۲-۱۱) معادله $y'' - xy' + 2y = 0$ مطرح شد. در این تمرین یک جواب پایه بصورت $y_1 = 1 - x^2$ داده شده است. در نهایت به دلیل آنکه نتوانستیم انتگرال حاصل از روش کاهش مرتبه را مستقیما حل کنیم, با نوشتن سری مک‌لورانِ انتگرالده, جواب دوم بصورت زیر بدست آمد:

$$y_2 = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{1680} - \cdots$$

در این بخش هدف آن است که بدون داشتن یک جواب اولیه, هر دو جواب را بدست آوریم. یعنی جوابها را به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ انتخاب کرده و با جایگذاری, مجهول a_n را بدست آوریم. دیده میشود که هر دو جواب این مثال, به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ میباشند که در جواب y_1 فقط دو جمله سری باقی مانده است و به عبارتی سایر ضرایب سری برابر صفر میباشد. در مثال ۴-۱۲ این معادله حل شده است.

۳- در مثال ۲-۲۱ معادله $x^2y'' + 2x^3y' + (2x^2 - 2)y = 0$ بررسی شد. دیده شد که با داشتن یک جواب معادله یعنی $y_1 = \frac{1}{x}$, جواب دوم را با کاهش مرتبه بدست آوردیم. اما از آنجا که نتوانستیم انتگرال $\int x^2 e^{-x^2} dx$ را محاسبه کنیم, به ناچار با نوشتن سری مک‌لوران e^{-x^2} جواب را بصورت $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+3)} x^{2n+2}$ بدست آوردیم. در اینجا نیز هدف آن است که بدون داشتن یک جواب اولیه هر دو جواب را بدست آوریم. با این تفاوت که در اینجا دیده میشود که فقط جواب دوم به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ است. پس روش سریها جواب اول یعنی $y_1 = \frac{1}{x}$ را بدست نمی‌دهد, زیرا به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ نمیباشد. در بخش ۴-۷ (روش فروبنیوس) خواهیم دید که روش سریها را بگونه‌ای تعمیم میدهیم که جواب اول چنین معادله‌ای را نیز بدست آورد. (مثال ۴-۳۳)

مثال ۴-۱ با مشتق‌گیری از $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, نشان دهید: $f(x)=e^x$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\rightarrow f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=f(x)$$

$$f'(x)=f(x)\rightarrow f(x)=ce^x\ ;\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\rightarrow\ f(0)=1\rightarrow c=1\rightarrow f(x)=e^x\quad\blacksquare$$

توضیح ۱: دقت شود یک اِشکال در نمادگذاری $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ وجود دارد, چرا که برای $x=0$ اولین جمله $a_0 0^0$ خواهد بود که در اینجا قرارداد کرده‌ایم آنرا a_0 در نظر بگیریم. بنابراین اولین جمله سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ برای $x=0$ برابر یک خواهد بود.

توضیح ۲: با توجه به قضیه وجود و یکتایی جواب می‌توان گفت این تنها جوابِ ممکن است. عملا در روش حل معادلات به روش سریها در حل معادله $y'=y$ بجای رسیدن به e^x به $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ میرسیم که اگر بدانیم سری بدست آمده مربوط به چه تابع مقدماتی میباشد جواب را به فرم بسته ارائه داده‌ایم وگرنه به فرم سری باقی میماند. ■

۴-۱- مروری بر سری توانی و تیلور

قبلا سری توانی یک تابع حول نقطه x_0 بصورت $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ تعریف شد. در حالت کلی این سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد. قبلا دیده شد اگر بخواهیم تابع دلخواهی مانند $f(x)$ را به صورت سری توانی بیان کنیم, $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ بدست می‌آید که در اینصورت آنرا سری تیلور میگوییم. اگر $x_0=0$ انتخاب شود آنرا سری مک‌لوران مینامیم. بطور خلاصه سری تیلور عبارت است از بیانِ یک تابع مشخصِ $f(x)$ بصورت سری توانی که ضرایب آن از فرمول بالا بدست می‌آید.

بعنوان مثال فرض کنید سوالی به این صورت مطرح شود که تابعی بیابید که مشتق nام آن در نقطه $x=0$ برابر $n+1$ باشد. بدیهی است انتگرال گیری چاره کار نمیباشد, چرا که مشتق در یک نقطه خاص داده شده است. اما می‌توان به کمک سری تیلور آن تابع را بصورت زیر بدست آورد:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$$

$$f(x)=1+2x+\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{24}x^4+\frac{1}{20}x^5+\cdots$$

بنابراین تابع مورد نظر بدست آمد. اما بدیهی است به فرم توابع مقدماتی شناخته شده نمی‌باشد, اما به هر حال تابع است. اگر قرار باشد از این تابع در مسائل مختلفی استفاده شود میتوان از این به بعد یک نام دلخواه برای آن در نظر گرفت, مانند $f(x)=new(x)$. در اینصورت به لحاظ کاربرد فرقی مثلا با $f(x)=sin(x)$ نخواهد داشت. چرا که در واقع برای محاسبه سینوس یک زاویه نیز بایستی از بسط تیلور آن استفاده کرد. مثلا:

$$sin\left(\frac{\pi}{7}\right)=\left(\frac{\pi}{7}\right)-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^5-\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^7+\cdots$$

که دیده میشود این تابع نیز مانند تابع بالا یک سری نامتناهی است.

از یک سری توانی, در بازه همگرایی میتوان جمله به جمله مشتق یا انتگرال گرفت. پس در ابتدا بازه همگرایی یک سری توانی بیان میشود. برای مشخص کردن شعاع همگرایی معمولا از آزمون نسبت یا ریشه nام استفاده میشود. مثلا با استفاده از آزمون نسبت, برای یک سری توانی خواهیم داشت:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-x_0|<1\to|x-x_0|<\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

$$|x-x_0|<R\to\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

به همین ترتیب با استفاده از آزمون ریشه nام به $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ خواهیم رسید. دقت شود برای نقاط انتهایی بازه (متناظر $L=1$), کنترل همگرایی بایستی بصورت جداگانه انجام شود.

سریهای توانی را می‌توان جمع و یا تفریق کرد. حال سوال این است که ضرب و تقسیم این سریها به چه صورتی است.

برای رسیدن به یک رابطه برای تعیین ضرایب ضرب دو سری نامتناهی, ابتدا ضرب دو سری متناهی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3)$$

فرض کنید بخواهیم ضریب x^3 را در سری حاصلضرب بدست آوریم. با یک ضرب ساده دیده میشود که این ضریب عبارت است از:

$$a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0=\sum_{i=0}^{3}a_i\,b_{3-i}$$

یعنی ضرایبی از هر سری در هم ضرب میشود که مجموعا عدد 3 را بسازند. همین رابطه را میتوان بصورت زیر تعمیم داد:

در ضرب دو سری نامتناهی با ضرایب a_n و b_n, ضرایب سری حاصلضرب بصورت $c_n=\sum_{i=0}^{n}a_i\,b_{n-i}=\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}\,b_i$ میباشد که تحت عنوان قضیه کوشی در ضرب سریها شناخته می‌شود. به عبارتی:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}\,b_i\right)(x-x_0)^n$$

شعاع همگرایی نیز حداقل شعاع همگرایی دو سری اولیه است. همچنین در تقسیم سریها, یا بایستی بسطها را مشابه چندجمله‌ایها به هم تقسیم کرد و یا از فرمول زیر استفاده نمود.

$$f(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots}=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\quad;\quad a_n=\sum_{i=0}^{n}c_i\,b_{n-i}$$

که در آن بایستی $b_0\neq 0$ باشد, در غیر اینصورت از کوچکترین توان مخرج فاکتور می‌گیریم. به مثال ۴-۵ توجه شود.

مثال ۴-۲ شعاع و بازه همگرایی سری توانی زیر را بیابید.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^nx^n}{\sqrt{n+1}}\ ;\ a_n=\frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}}\to\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=3\to R=\frac{1}{3}$$

عنوان شد که برای نقاط انتهایی بازه, کنترل همگرایی بایستی بصورت جداگانه انجام شود. بنابراین برای نقطه سمت چپ بازه:

$$x=-\frac{1}{3}\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\xrightarrow{p=\frac{1}{2}<1}(D)$$

چرا که دنباله $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ در بینهایت معادل $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$ بوده و سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ برای $p>1$ همگرا و برای $p\leq 1$ واگراست. دقت شود سری واگرا (Diverge) را با (D) و سری همگرا (Converge) را با (C) نمایش می‌دهیم. برای نقطه سمت راست بازه:

$$x=\frac{1}{3}\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\rightarrow(C)$$

دقت شود این سری یک سری متناوب بوده و از آنجا که در دو شرط زیر صدق میکند, بنا بر آزمون لایب‌نیتز همگراست.

$$|a_{n+1}|\leq|a_n|\rightarrow\frac{1}{\sqrt{n+2}}<\frac{1}{\sqrt{n+1}}\quad;\quad\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right|=0$$

لذا در نهایت شعاع همگرایی برابر $R=\frac{1}{3}$ و بازه همگرایی $-\frac{1}{3}<x\leq\frac{1}{3}$ خواهد بود. ■

مثال ۴-۳ سری تیلور تابع $f(x)=\frac{1}{x+3}$ را حول $x_0=1$ بیابید.

حل برای نوشتن سری تیلور حول $x=x_0$ ساده‌تر است ابتدا تغییرمتغیر $t=x-x_0$ را اعمال کرده, سپس سری مک‌لوران تابع جدید را حول $t=0$ بدست آوریم.

$$f(x)=\frac{1}{x+3}\quad;\quad t=x-x_0=x-1\ \rightarrow\ f(t)=\frac{1}{t+4}$$

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\cdots\qquad|t|<1$$

$$\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{t}{4}}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{t}{4}+\left(\frac{t}{4}\right)^2-\cdots\right)\qquad\left|\frac{t}{4}\right|<1\rightarrow\left|\frac{x-1}{4}\right|<1\rightarrow-3<x<5$$

بازه همگرایی سری تیلور $-3<x<5$ میباشد, یعنی $R=4$. نقطه $x=-3$ که تابع برای آن تعریف نشده است را نقطه تکین(غیرعادی یا منفرد) میگوییم. به طریق دیگر شعاع همگرایی فاصله x_0 تا نزدیکترین نقطه تکین تابع میباشد, یعنی $|-3-1|=4$. ■

مثال ۴-۴ سه جمله اول بسط تابع $f(x)=\frac{1}{1+x-2x^2}$ را حول $x=0$ همراه با بازه همگرایی بدست آورید.

$$f(x)=\frac{1}{1-x}\times\frac{1}{1+2x}=(1+x+x^2+\cdots)(1-2x+4x^2-\cdots)$$

عنوان شد که طبق قضیه کوشی, در ضرب دو سری نامتناهی با ضرایب a_n و b_n , ضرایب سری حاصلضرب بصورت $c_n=\sum_{i=0}^{n}a_i\,b_{n-i}$ میباشد. شعاع همگرایی نیز حداقل شعاع همگرایی دو سری اولیه است. در نتیجه:

$$f(x)=[1\times1]x^0+[1\times(-2)+1\times1]x^1+[1\times4+1\times(-2)+1\times1]x^2+\cdots$$

$$\rightarrow f(x)=1-x+3x^2+\cdots\quad;\quad min(|x|<1\ \ \&\ \ |2x|<1)\rightarrow|x|<\frac{1}{2}$$

بدیهی است که میتوان مساله را با تجزیه کسر هم حل کرد. ■

مثال ۴-۵ بسط مک‌لوران تابع $f(x)$ را بدست آورید.

$$f(x)=\frac{3(\sinh x-\sin x)}{x^2(1+\tan^{-1}x)}\quad;\quad |x|\le 1$$

حل استفاده از فرمول کلی سری(محاسبه متوالی مشتقات) در اینجا طولانی است. لذا از سریهای موجود استفاده می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{3(\sinh x-\sin x)}{x^2(1+\tan^{-1}x)}=\frac{6\frac{x}{3!}+6\frac{x^5}{7!}+6\frac{x^9}{11!}+\cdots}{1+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots}=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$$

از اینجا به بعد می‌توان به سه طریق مساله را ادامه داد:

راه اول: با طرفین وسطین رابطه بالا میتوان ضرایب را بدست آورد. مطابق قضیه کوشی در ضرب سریها, چنانچه دو سری نامتناهی با ضرایب b_n و c_n, در یکدیگر ضرب شوند, ضرایب بصورت $a_n=\sum_{i=0}^{n}c_i\,b_{n-i}$ خواهد بود. بنابراین:

$$f(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots}=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\quad;\quad a_n=\sum_{i=0}^{n}c_i\,b_{n-i}$$

دقت شود در این روش بایستی $b_0\neq 0$ باشد, در غیر اینصورت از کوچکترین توان مخرج فاکتور می‌گیریم. بنابراین در مثال فوق:

$$a_0=c_0b_0\rightarrow c_0=0\ ;\ a_1=c_0b_1+c_1b_0\rightarrow c_1=1$$

$$a_2=c_0b_2+c_1b_1+c_2b_0\rightarrow c_2=-1\xrightarrow{\cdots}c_3=1\rightarrow\cdots\rightarrow f(x)=x-x^2+x^3-\frac{2}{3}x^4+\cdots$$

روش فوق درست معادل این است که ضرایب را از روابط زیر بدست آوریم:

$$c_n=\frac{(-1)^n}{b_0^{n+1}}\begin{vmatrix}a_0&b_0&0&0&\cdots&0\\a_1&b_1&b_0&0&\cdots&0\\a_2&b_2&b_1&b_0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n-1}&b_{n-1}&b_{n-2}&b_{n-3}&\cdots&b_0\\a_n&b_n&b_{n-1}&b_{n-2}&\cdots&b_1\end{vmatrix}_{(n+1)(n+1)}\qquad(n\ge 0)$$

$$\rightarrow c_0=\frac{a_0}{b_0}\ ;\ c_1=\frac{-1}{b_0^2}\begin{vmatrix}a_0&b_0\\a_1&b_1\end{vmatrix}\ ;\ c_2=\frac{1}{b_0^3}\begin{vmatrix}a_0&b_0&0\\a_1&b_1&b_0\\a_2&b_2&b_1\end{vmatrix}\ ;\ \cdots$$

راه دوم: تقسیم صورت بر مخرج, درست مشابه چندجمله‌ایها

$$x+6\frac{x^5}{7!}+6\frac{x^9}{11!}+\cdots\quad\Bigg|\ \frac{1+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots}{x-x^2+x^3\cdots}$$

$$\underline{x+x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{5}+\cdots}$$

$$-x^2+\frac{x^4}{3}+6\frac{x^5}{7!}-\frac{x^6}{5}+\cdots$$

$$\underline{-x^2-x^3+\frac{x^5}{3}-\frac{x^7}{5}+\cdots}$$

$$x^3+\frac{x^4}{3}-\cdots$$

$$\cdots$$

دقت شود هم مقسوم و هم مقسوم علیه بصورت صعودی نوشته شوند.

که البته شاید خیلی راه مناسبی نباشد, چرا که ممکن است تعدادی از جملات فراموش شود.

راه سوم: با استفاده از سری $\frac{1}{1+a}=1-a+a^2-\cdots$ برای $|a|<1$ می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{1+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots}=1-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)+\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)^2-\cdots$$

$$=1-x+x^2-2\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^5}{5}+\cdots$$

$$f(x)=\left(x+6\frac{x^5}{7!}+6\frac{x^9}{11!}+\cdots\right)\left(1-x+x^2-2\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^5}{5}+\cdots\right)$$

$$f(x)=x-x^2+x^3-\frac{2}{3}x^4+\left(\frac{6}{7!}+\frac{1}{3}\right)x^5+\cdots \quad \blacksquare$$

مثال ۴-۶ بسط تیلور تابع $sin\,x$ را حول $x_0=\frac{\pi}{6}$ بدست آورید.

$$t=x-\frac{\pi}{6}\rightarrow sin\,x=sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)=sin(t)cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+cos(t)sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\cdots\right)\quad ;\quad t=x-\frac{\pi}{6} \quad \blacksquare$$

مثال ۴-۷ حاصل سری عددی زیر را بیابید.

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\rightarrow\frac{e^x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}\rightarrow\left(\frac{e^x}{x}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{n!}$$

$$x=1\rightarrow 0=-1+0+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}\rightarrow A=1 \quad \blacksquare$$

مثال ۴-۸ با استفاده از سری توانی $\frac{1}{1-x}$ و مشتق‌گیری از آن, با انتخاب یک x مناسب نشان دهید: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=6$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\xrightarrow{d}\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\rightarrow\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{1+x}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}\rightarrow\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n\xrightarrow{x=\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}=6 \quad \blacksquare$$

مثال ۴-۹ سریهای توانی زیر را بر حسب توابع مقدماتی بیان کنید.

$$1)\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-2}{(n+2)!}x^n$$

حل ابتدا مخرج کسر را به شکل $n!$ تبدیل می‌کنیم تا مشابه مخرج کسر در سری e^x گردد.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)-4}{(n+2)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}-4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}-4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{n!}$$

$$=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-4\frac{1}{x^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

دیده میشود که سریهای ایجاد شده درست مشابه سری e^x میباشند, با این تفاوت که یکی از 1 و دیگری از 2 شروع شده‌اند. لذا:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\qquad;\qquad e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\rightarrow f(x)=\frac{1}{x}(e^x-1)-4\frac{1}{x^2}(e^x-1-x)\ \blacksquare$$

$$2)\quad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)x^{2n+1}\qquad(|x^2|<1)$$

از سری $\frac{1}{1-x}$ شروع کرده و سعی می‌کنیم تا جملات موجود در سری $f(x)$ را ایجاد کنیم. در واقع بایستی به دنبال ایجاد $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$ و $\sum_{n=0}^{\infty}nx^{2n}$ باشیم.

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\qquad(|x|<1\ )\qquad\rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{1-x^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} & (|x^2|<1)\\ \left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)'=\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2nx^{2n-1}\end{cases}$$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2nx^{2n+1}+3\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}2nx^{2n-1}+3x\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$$

$$g(x)=x^2\frac{2x}{(1-x^2)^2}+3x\frac{1}{1-x^2}=\frac{3x-x^3}{(1-x^2)^2}\ \blacksquare$$

$$3)\ h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(n+3)!}$$

برای ساده‌تر شدن حل ابتدا $t=x+2$ انتخاب شده و مخرج کسر را به شکل $n!$ تبدیل می‌کنیم:

$$h(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n+3)!}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{t^{n-3}}{n!}=\frac{1}{t^3}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{t^3}\left(e^t-1-t-\frac{t^2}{2!}\right)\qquad(t=x+2)\ \blacksquare$$

مثال ۴-۱۰ سری تابعی زیر را بر حسب توابع مقدماتی بیان کنید.

$$C = 1 + cosx + cos(2x) + \cdots + cos\big((n-1)x\big)$$

حل دیده میشود که این عبارت بیانگر هیچ سری شناخته شده‌ای مانند سریهای حسابی یا هندسی یا تلسکوپی نمیباشد. برای حل این مساله بجای $cos(k\alpha)$ عبارت $\frac{e^{ki\alpha}+e^{-ki\alpha}}{2}$ قرار داده می‌دهیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$C = \frac{1}{2}\Big(\big(e^{0i\alpha} + e^{-0i\alpha}\big) + \big(e^{i\alpha} + e^{-1i\alpha}\big) + \cdots + \big(e^{(n-1)i\alpha} + e^{-(n-1)i\alpha}\big)\Big)$$

$$C = \frac{1}{2}\big(1 + e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} + \cdots + e^{(n-1)i\alpha}\big) + \frac{1}{2}\big(1 + e^{-i\alpha} + e^{-2i\alpha} + \cdots + e^{-(n-1)i\alpha}\big) = \frac{1}{2}(A + B)$$

دیده میشود که به مجموع دو سری هندسی رسیدیم. سری اول برابر است با:

$$A = 1 + e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} + \cdots + e^{(n-1)i\alpha} = \frac{1 - e^{ni\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} = \frac{1 - cos(n\alpha) - isin(n\alpha)}{1 - cos\alpha - isin\alpha}$$

با تغییر α به $-\alpha$, سری دوم نیز بدست می‌آید. یا میتوان گفت سری دوم در واقع مزدوج سری اول میباشد. در نتیجه:

$$C = \frac{1}{2}(A + \overline{A}) = \frac{1 - cos(n\alpha) - isin(n\alpha)}{2(1 - cos\alpha - isin\alpha)} + \frac{1 - cos(n\alpha) + isin(n\alpha)}{2(1 - cos\alpha + isin\alpha)}$$
$$= cos\left(\frac{(n-1)\alpha}{2}\right)\frac{sin\frac{n\alpha}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}} \blacksquare$$

توضیح ۱: راه حل دوم که در واقع معادل راه حل بالا است, آن است که یک سری کمکی بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S = 0 + sin\alpha + sin(2\alpha) + \cdots + sin\big((n-1)\alpha\big)$$

حال اگر عبارت $C + iS$ را تشکیل دهیم, به یک سری هندسی میرسیم. که همان سری A در روش بالا است. لذا:

$$A = C + iS = 1 + e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} + \cdots + e^{(n-1)i\alpha} = \frac{1 - e^{ni\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} = \frac{1 - cos(n\alpha) - isin(n\alpha)}{1 - cos\alpha - isin\alpha}$$

هدف محاسبه C بود که قسمت حقیقی عبارت بالا است و در مثال قبل بدست آمد. در نتیجه:

$$C = Re(C + iS) = cos\left(\frac{(n-1)\alpha}{2}\right)\frac{sin\frac{n\alpha}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}}$$

این نوع روش حل اصطلاحا به نام روش $C + iS$ شناخته میشود. نکته مهم در این روش حل آن است که اگرچه C یا S هیچکدام یک سری شناخته شده‌ای نمی‌باشند, اما $C + iS$ معرف سری هندسی است.

توضیح ۲: دیده میشود که تفاوت دو روش حل در آن است که در روش اول به محاسبه دو سری نیاز خواهیم داشت (که دومی, مزدوج اولی است) و در روش دوم به محاسبه یک سری و سپس بیرون کشیدن قسمت حقیقی آن. بدیهی است که این دو معادل یکدیگرند. چرا که قسمت حقیقی عدد مختلط $A = C + iS$ برابر $C = \frac{1}{2}\big(A + \overline{A}\big)$ میباشد.$\blacksquare$

تمرینات بخش ۴-۱

۱- نشان دهید هر یک از سریهای زیر در معادله $y''-xy=0$ صدق می‌کنند. (معادله ایری)

$$y_1(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(2\times 3)(5\times 6)\cdots\big((3n-1)\times 3n\big)}$$

$$y_2(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{(3\times 4)(6\times 7)\cdots\big(3n\times(3n+1)\big)}$$

۲- نشان دهید:

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{n!}x^n=(2+x)e^x \qquad ; \qquad B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)!}=e-2$$

$$C=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3!}{(n+3)!}x^n=\frac{3}{x^2}\left(2-2x+x^2-2e^{-x}\right)$$

$$D=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,sinx$$

۴-۲- معرفی روش سریها با حل یک مثال ساده

قبل از ورود به روش حل معادلات مرتبه دوم به روش سریها, روش کار را بر روی یک معادله ساده مرتبه اول خواهیم دید. در حالت کلی روش حل یک معادله دیفرانسیل به کمک سری توانی آن است که برای جواب, یک سری توانی حول یک نقطه دلخواه مانند $x_0=0$ در نظر میگیریم. سپس از آن مشتق گرفته در معادله جایگزین میکنیم تا ضرایب مجهول a_n بدست آیند. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴-۱۱ معادله مرتبه اول زیر را به روش سریها حل کنید.

$$y'+y=0 \quad ; \quad x_0=0$$

حل بدیهی است این معادله یک معادله مرتبه اول ساده بوده و حل آن به سادگی امکان پذیر است. اما هدف در اینجا آن است که با این مثال ساده , شیوه حل معادلات به روش سریها بررسی شود. برای این منظور ابتدا جواب را به شکل یک سری توانی به شکل $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ در نظر می‌گیریم. با انتخاب $x_0=0$ و نوشتن جمله به جمله سری و جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\rightarrow y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots$$

$$\rightarrow(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots)+(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)=0$$

$$\rightarrow(a_1+a_0)+(2a_2+a_1)x+(3a_3+a_2)x^2+\cdots=0+0x+0x^2+\cdots$$

می‌دانیم مجموعه توابع $\{x^n\}$ مستقلند, لذا برای صفر شدن این سری بایستی تک تک ضرایب سری برابر صفر باشد. در نتیجه از متحد قرار دادن دو سمت تساوی خواهیم داشت:

$$a_1 = -a_0$$
$$a_2 = \frac{-a_1}{2} = \frac{a_0}{2}$$
$$a_3 = \frac{-a_2}{3} = \frac{-a_0}{2 \times 3}$$
$$a_4 = \frac{-a_3}{4} = \frac{a_0}{2 \times 3 \times 4}$$
$$\vdots$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 - a_0 x + \frac{a_0}{2}x^2 - \frac{a_0}{2 \times 3}x^3 + \frac{a_0}{2 \times 3 \times 4}x^4 + \cdots$$

دیده می‌شود که در جواب بدست آمده یک ثابت a_0 وجود دارد. از آنجا که معادله مرتبه اول است انتظار داشتیم که در نهایت به یک ثابت برسیم. برای محاسبه این ثابت نیز نیازمند شرط اولیه می‌باشیم. مثلا اگر $y(0) = 2$ داده شده باشد, با جایگذاری در سری جواب, $a_0 = 2$ بدست می‌آید. ■

توضیح ۱: گاهی اوقات (و نه همیشه) ممکن است بتوان جواب نهایی را بر حسب توابع مقدماتی بیان کرد. مثلا در این مثال:

$$y = a_0\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) = a_0 e^{-x}$$

توضیح ۲: راه معمول آن است که بجای نوشتن سری بصورت جمله به جمله, آنرا بصورت زیگما نوشته و در معادله جایگذاری کنیم:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \xrightarrow{Sub.} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

دقت شود از آنجا که اولین جمله سری y , عدد ثابت a_0 می‌باشد, پس از مشتق, اولین جمله a_1 خواهد بود, لذا شروع اندیسها به $n = 1$ تغییر می‌کند. هرچند بواسطه وجود ترم n در مشتق, چنانچه شروع اندیسها را همان $n = 0$ در نظر بگیریم نیز مشکلی ایجاد نمی‌شود, زیرا این جمله خود به خود حذف خواهد شد.

حال سعی می‌کنیم در هر دو زیگما, توانها را مشابه کنیم تا بتوان از آن فاکتور گرفت. ساده‌تر است که همه را به کمترین توان منتقل کنیم. لذا باید در دومین زیگما x^n را به x^{n-1} تبدیل کنیم. چنانچه بخواهیم اندیس شروع شونده سری را k واحد افزایش دهیم, بایستی در عوض, شمارنده داخل سری را k واحد کاهش داد. چرا که با تغییر اندیس $m = n - k$ خواهیم داشت:

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} x^{n-k} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \xrightarrow{m \to n} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \to \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} x^{n-k}$$

که در انتهای کار اندیس ظاهری سری یعنی m را به n تغییر داده‌ایم. در نتیجه با تبدیل x^n به x^{n-1} در سری دوم:

$$\xrightarrow{\to x^{n-1}} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} = 0$$

اما دیده می‌شود که اندیس شروع زیگماها یکسان نمی‌باشد. برای این منظور یک جمله اول از سری اول یعنی $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ را بیرون کشیده و مابقی را با سری دوم جمع می‌کنیم. اما در این مثال دیده میشود که جمله اول از سری اول برابر صفر است. در واقع این جمله, اختیاری بودن ضریب a_0 را نشان می‌دهد. زیرا: $n = 0 \to 0a_0 = 0 \to$ دلخواه است a_0

در نتیجه:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(na_n+a_{n-1})x^{n-1}=0\rightarrow na_n+a_{n-1}=0\rightarrow a_n=\frac{-a_{n-1}}{n}\quad ;\quad n=1,2,\cdots$$

به این رابطه, رابطه بازگشتی $(recurrence\ formula)$ میگوییم. اگر در رابطه بازگشتی a_n بر حسب a_{n-k} بیان شده باشد میتوان a_n را بر حسب a_0 بدست آورد. در غیراینصورت صرفا به نوشتن چند جمله اول سری اکتفا می‌کنیم. مثلا در اینجا مشابه آنچه در قسمت قبل دیده شد میتوان به‌ازای چند مقدار a_n را متوالیا بدست آورد. راه بهتر آن است که بجای جایگذاری متوالی بر حسب a_0 , بطریق زیر عمل کنیم:

$$\begin{aligned} n=1:&\quad a_1=-a_0\\ n=2:&\quad a_2=\frac{-a_1}{2}\\ n=3:&\quad a_3=\frac{-a_2}{3}\\ &\ \vdots\\ n:&\quad a_n=\frac{-a_{n-1}}{n}\\ \hline &\quad a_n=\frac{(-1)^n}{n!}a_0 \end{aligned}$$

که این رابطه برای $n\geq 1$ اعتبار دارد. اما میتوان کنترل کرد که برای $n=0$ نیز درست بوده و به رابطه بدیهی $a_0=a_0$ می‌رسد. درنتیجه:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$$

توضیح ۳: بدیهی است چنانچه معادله به شکل $y'+y=e^{-2x}$ و یا مثلا $y'+(sinx)y=0$ داده شده باشد, کافی است بسط مک‌لوران دو تابع e^x یا $sinx$ را نوشته و درست مشابه بالا عمل کنیم. به عبارتی در روش سریها هر آنچه در معادله دیده میشود بایستی به فرم چندجمله‌ای نوشته شود تا بتوان دو سمت معادله را متحد قرار داد. فقط در این حالت ممکن است ساده‌تر باشد بجای نوشتن سری به شکل زیگما, آنرا بصورت جمله به جمله بنویسیم.

توضیح ۴: توجه شود روش استفاده از سریهای توانی, صرفا جوابهایی از معادله را ارائه خواهد داد که بتوان آن جواب را به فرم سری توانی بیان کرد. بنابراین اگر معادله دارای پاسخی باشد که نتوان آنرا به فرم سری توانی نوشت, طبیعی است این روش چنین پاسخی را ارائه نخواهد داد. همچنین ممکن است پاسخی که به این روش بدست می‌آید, اگر چه مشابه پاسخ کامل معادله است اما بازه همگرایی آن محدود باشد, درست مشابه آنچه در تمرین ۱ از مجموعه تمرینات بخش ۱-۳-۱ دیده شد. ■

از اینجا به بعد به بررسی معادلات مرتبه دو می‌پردازیم. اما قبل از آن تعریف نقاط عادی و غیرعادی ارائه می‌شود, چرا که شیوه حل مساله به روش سریها, برای نقاط عادی و غیرعادی متفاوت است.

بنا به تعریف, نقطه x_0 را یک نقطه غیر عادی (تکین یا منفرد) تابع $f(x)$ می‌نامیم هرگاه تابع در این نقطه تحلیلی نبوده (یعنی نتوان برای آن سری تیلور حول x_0 نوشت) و در همسایگی x_0 نقاطی وجود داشته باشد که تابع در آنها تحلیلی باشد. مثلا نقطه $x_0=0$ برای توابع $\sqrt{x}$ یا lnx و یا $\frac{1}{x}$ یک تکین محسوب می‌شود. بنابراین نقطه x_0 را یک نقطه عادی برای تابع $f(x)$ می‌نامیم هرگاه تابع در این نقطه تحلیلی باشد, یعنی بتوان سری تیلور آن تابع را حول x_0 نوشت.

همچنین نقطه x_0 را یک نقطه تکین معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ می‌نامیم هرگاه x_0 , نقطه تکین حداقل یکی از توابع $p(x)$, $q(x)$ و یا $g(x)$ باشد. بدیهی است برای معادله $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x)$, چنانچه توابع $Q(x)$, $R(x)$ و $G(x)$ تحلیلی باشند, صرفا نقاطی که در آنها $P(x) = 0$ میباشد, نقاط تکین معادله محسوب میشوند. چرا که بر طبق قضیه وجود و یکتایی معادلات خطی مرتبه دو, برای داشتن جواب, بایستی $p = \frac{Q}{P}$, $q = \frac{R}{P}$ و $g = \frac{G}{P}$ در بازه شامل x_0 پیوسته باشند.

در بخش ۴-۳ جوابهای سری حول نقاط عادی بیان شده و در بخش ۴-۶ نیز به نقاط غیرعادی می‌پردازیم.

تمرینات بخش ۴-۲

۱- معادلات مرتبه اول زیر را به روش سریها حول $x_0 = 0$ حل کنید.

$$1)\ \ y' = 2xy \qquad ; \qquad \underline{Ans}:\ \ y = a_0 e^{x^2}$$

$$2)\ \ y' - y = x \ \ ; \ \ y(0) = 1 \qquad ; \qquad \underline{Ans}:\ \ y = 2e^x - 1 - x$$

۲- معادله زیر را حول $x_0 = 0$ به روش سریها حل کنید. برای حل ابتدا بسط $sinx$ را حول x_0 نوشته و در معادله جایگزین نمایید. نشان دهید جواب حاصله با جوابی که از حل معمول بدست می‌آید یکسان است. در حل معادله به روش فصل اول, برای انتگرال‌گیری از توابعی که انتگرال ندارند از بسطهای تیلور آنها استفاده کنید.

$$xy' - y = xsinx \qquad ; \qquad \underline{Ans}:\ \ y = cx + x^2 - \frac{x^4}{3\times 3!} + \frac{x^6}{5\times 5!} - \frac{x^8}{7\times 7!} + \cdots$$

۴-۳- جوابهای سری حول نقاط عادی

در ابتدا یک قضیه بیان می‌شود که تضمین کننده وجود جواب به شکل سری توانی برای بسط حول نقطه عادی است.

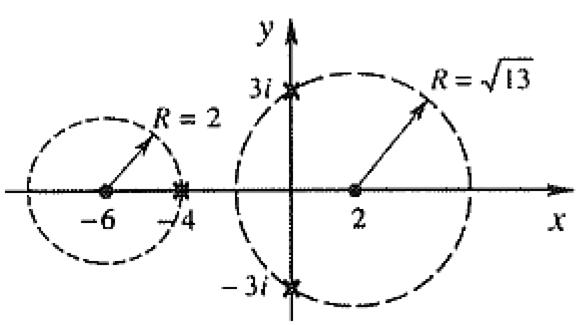
قضیه فوشه: اگر توابع $p(x)$ و $q(x)$ در نقطه x_0 تحلیلی باشند (یعنی x_0 یک نقطه عادی برای این دو تابع باشد), آنگاه هر دو جواب معادله زیر نیز تحلیلی بوده و می‌توان برای هر یک, سری توانی حول x_0 و بصورت زیر در نظر گرفت:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

شعاع همگرایی این جواب نیز حداقل به اندازه فاصله نقطه x_0 تا نزدیکترین نقطه تکین $p(x)$ و $q(x)$ میباشد.

به مثال زیر توجه شود:

$$(4+x)(9+x^2)y'' + 2y' + 3xy = 0 \rightarrow y'' + \frac{2}{(4+x)(9+x^2)}y' + \frac{3x}{(4+x)(9+x^2)}y = 0$$



دیده میشود که توابع $p(x)$ و $q(x)$ صرفا در $x = -4, \pm 3i$ تحلیلی نمی‌باشند. لذا اگر بخواهیم جواب را به فرم سری, حول $x_0 = 2$ بدست آوریم, قبل از اینکه مساله را حل کرده و جواب را بیابیم, میتوان گفت شعاع همگرایی حداقل $R = min\left(\sqrt{13}, 6\right) = \sqrt{13}$ می‌باشد. همچنین اگر $x_0 = -6$ انتخاب شود, $R = min\left(\sqrt{45}, 2\right) = 2$ خواهد بود.

بنابراین دیده میشود که انتخابهای مختلف x_0 باعث تغییر بازه همگرایی جواب خواهد شد. معمولا نقطه‌ای که قرار است سری جواب حول آن بدست آید, در صورت مساله داده میشود. اما پاره‌ای ملاحظات در مورد انتخاب آن وجود دارد که یکی از آنها تغییر بازه همگرایی جواب است که در مثال ساده بالا دیده شد. نکات دیگری نیز در انتخاب این نقطه وجود دارد که در ادامه به آن می‌پردازیم.

دقت شود اگر x_0 یک نقطه عادی برای توابع $p(x)$ یا $q(x)$ نباشد, الزاما جوابهای معادله, به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ نخواهد بود. بعنوان نمونه در مثال ۲-۲۱ معادله $x^2y''+2x^3y'+(2x^2-2)y=0$ را بررسی کردیم. بدیهی است در این معادله $x_0=0$ یک نقطه غیر عادی برای تابع $q(x)=2-\frac{2}{x^2}$ می‌باشد. در آن مثال یک جواب پایه بصورت $y_1=\frac{1}{x}=x^{-1}$ داده شده بود و بدیهی است این جواب به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ نمی‌باشد, چرا که در سری توانی, توانهای x نمی‌تواند منفی باشد. در بخش ۴-۶ خواهیم دید برای حل معادلات به روش سریها برای زمانی که $x_0=0$ یک نقطه غیرعادی است, فرم سری انتخابی را مطابق پیشنهاد فروبنیوس تغییر خواهیم داد.

در این بخش به حل معادلات به روش سریها حول نقطه عادی می‌پردازیم. بنابراین لازم است در ابتدا کنترل کنیم که نقطه x_0 یک نقطه عادی برای معادله دیفرانسیل باشد. به عبارتی توابع $p(x)$ و $q(x)$ در نقطه x_0 تحلیلی باشند. در اینصورت مطابق قضیه فوشه هر دو جواب معادله دیفرانسیل $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ نیز تحلیلی بوده و می‌توان برای هر یک سری توانی حول x_0 بصورت $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ در نظر گرفت.

از اینجا به بعد روش کار درست مشابه روشی است که برای معادله مرتبه اول در مثال ۴-۱۱ دیده شد. به این ترتیب که از جواب انتخاب شده مشتق گرفته در معادله جایگزین می‌کنیم تا در نهایت ضرایب مجهول a_n بدست آیند. همچنین بر طبق قضیه فوشه, می‌توان در ابتدا و قبل از یافتن جواب, شعاع همگرایی جواب را نیز بدست آورد. همانگونه که عنوان شد شعاع همگرایی جواب, حداقل به اندازه فاصله نقطه x_0 تا نزدیکترین نقطه تکین $p(x)$ و $q(x)$ می‌باشد.

در ادامه با ارائه مثالهای مختلف روش کار را خواهیم دید.

مثال ۴-۱۲ معادله مرتبه دوم زیر را به روش سریها حل کنید.

$$y''-xy'+2y=0 \qquad ; \qquad x_0=0$$

حل نقطه $x_0=0$, نقطه عادی برای $p(x)=-x$ و $q(x)=2$ میباشد و چون معادله هیچ نقطه غیرعادی ندارد, شعاع همگرایی جواب بینهایت است.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to y'=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \to y''=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$\xrightarrow{Sub.} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n=0$$

سریهای دوم و سوم دارای توانهای یکسان میباشند. لذا می‌توان آنها را با یک زیگما بیان کرد:

$$\to \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(n-2)a_n x^n=0$$

حال بایستی در هر دو زیگما, توانها را مشابه کنیم, برای این منظور همه را به کمترین توان یعنی $n-2$ منتقل می‌کنیم.

$$\xrightarrow{\rightarrow x^{n-2}} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty}(n-4)a_{n-2}x^{n-2} = 0$$

پس از آن بایستی اندیس شروع زیگماها را یکی کنیم. برای این منظور دو جمله اول از سری اول را بیرون کشیده و مابقی را با سری دوم جمع می‌کنیم. اما دو جمله اول از سری اول برابر صفر است. در واقع این دو جمله, اختیاری بودن ضرایب a_0 و a_1 را نشان می‌دهند. زیرا:

$n = 0 \rightarrow 0(0-1)a_0 = 0 \rightarrow$ دلخواه است a_0 ; $n = 1 \rightarrow 1(1-1)a_1 = 0 \rightarrow$ دلخواه است a_1

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)a_n - (n-4)a_{n-2}]x^{n-2} = 0$$

$$a_n = \frac{n-4}{n(n-1)}a_{n-2} \quad ; \quad n = 2,3,\cdots \ \ (recurrence\ formula)$$

بنابراین می‌توان ضرایب را جمله به جمله و متوالیا بدست آورد.

$$n = 2 \rightarrow a_2 = \frac{-2}{2}a_0 = -a_0 \ \ ; \ \ n = 3 \rightarrow a_3 = \frac{-1}{6}a_1$$

$$n = 4 \rightarrow a_4 = \frac{0}{12}a_2 = 0 \ \ ; \ \ n = 5 \rightarrow a_5 = \frac{1}{20}a_3 = \frac{-1}{120}a_1$$

$$n = 6 \rightarrow a_6 = \frac{2}{30}a_4 = 0 \ \ ; \ \ n = 7 \rightarrow a_7 = \frac{3}{42}a_5 = \frac{-1}{1680}a_1$$

بدیهی است در ادامه خواهیم داشت $a_8 = a_{10} = \cdots = 0$ و بنابراین از ضرایب زوج صرفا a_0 و a_2 باقی می‌ماند. در نتیجه:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = a_0(1-x^2) + a_1\left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{1680} - \cdots\right)$$

در بحث کاهش مرتبه (تمرینات ۲-۱۱) همین مساله با جواب اول داده شده‌ی $y_1 = 1 - x^2$ مطرح شد که به همین نتیجه رسید. با این تفاوت که در اینجا نیازی به جواب اول نداشته و هر دو جواب را بدست آوردیم. ■

توضیح: دیده میشود که فرم رابطه بازگشتی بصورت $a_n = f(n)a_{n-k}$ بدست آمده است. در اینحالت میتوان یک فرمول صریح برای محاسبه a_n ارائه داد. از آنجا که هر ضریب با ضریب ۲ جمله قبل ارتباط دارد , برای محاسبه آنها ۲ ستون بصورت زیر تشکیل میدهیم:

$$\begin{array}{ll}
n = 2 \rightarrow a_2 = \dfrac{-2}{2\times 1}a_0 = -a_0 & n = 3 \rightarrow a_3 = \dfrac{-1}{3\times 2}a_1 \\
n = 4 \rightarrow a_4 = \dfrac{0}{4\times 3}a_2 = 0 & n = 5 \rightarrow a_5 = \dfrac{1}{5\times 4}a_3 \\
n = 6 \rightarrow a_6 = \dfrac{2}{6\times 5}a_4 = 0 & n = 7 \rightarrow a_7 = \dfrac{3}{7\times 6}a_5 \\
\vdots & \vdots \\
n = 2k \rightarrow a_{2k} = 0 & n = 2k+1 \rightarrow a_{2k+1} = \dfrac{(2k-3)}{(2k+1)2k}a_{2k-1}
\end{array}$$

از آنجا که قرار است در سری نهایی اندیس شمارنده n باشد, در روابط بالا اندیس ظاهری k را به n تغییر میدهیم. بنابراین از ستون اول خواهیم داشت:

$$a_2 = -a_0 \;\; ; \;\; a_{2n} = 0 \;\; (n \geq 2)$$

از ضرب ستونهای دوم نیز خواهیم داشت:

$$a_{2n+1} = \frac{(2n-3)}{(2n+1)2n} \times \frac{(2n-5)}{(2n-1)(2n-2)} \times \frac{(2n-7)}{(2n-3)(2n-4)} \times \cdots \frac{3}{7\times 6} \times \frac{1}{5\times 4} \times \frac{-1}{3\times 2} a_1$$

$$a_{2n+1} = \frac{-a_1}{(2n+1)(2n-1)[2n\times(2n-2)\times\cdots\times 6\times 4\times 2]} = \frac{a_1}{(1-4n^2)2^n n!}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = a_0(1-x^2) + a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-4n^2)2^n n!}x^{2n+1}$$

این روش قطعا جواب کاملتری را در مقایسه با روش قبل که ضرایب را جمله به جمله و متوالیا بدست آوردیم, ارائه میدهد. اما صرفا برای حالتی که فرم رابطه بازگشتی بصورت $a_n = f(n)a_{n-k}$ میباشد قابل استفاده است. برای این منظور بایستی k ستون تشکیل داده و برای هر ستون یک فرمول مجزا تعیین شود. بدیهی است اغلب, محاسبات این روش طولانی‌تر از روش قبل یعنی تعیین جمله به جمله ضرایب خواهد بود. ■

مثال ۴-۱۳ معادله مرتبه دوم زیر را به روش سریها حل کنید.

$$y'' + 2xy' + (1+x^2)y = 0 \qquad ; \qquad x_0 = 0$$

حل نقطه $x_0 = 0$, نقطه عادی برای $p(x) = 2x$ و $q(x) = 1 + x^2$ میباشد و چون معادله هیچ نقطه غیرعادی ندارد, شعاع همگرایی جواب بینهایت است.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \to y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$\xrightarrow{Sub.} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

سریهای دوم و سوم دارای توانهای یکسان میباشند. لذا می‌توان آنها را با یک زیگما بیان کرد:

$$\to \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

حال بایستی توانها را مشابه کنیم, برای این منظور همه را به کمترین توان یعنی $n-2$ منتقل می‌کنیم. بنابراین:

$$\xrightarrow{\to x^{n-2}} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty}(2n-3)a_{n-2}x^{n-2} + \sum_{n=4}^{\infty} a_{n-4}x^{n-2} = 0$$

پس از آن بایستی اندیس شروع زیگماها را یکی کنیم. برای این منظور مشابه قبل دیده میشود که دو جمله اول از سری اول برابر صفر است که بیانگر اختیاری بودن ضرایب a_0 و a_1 می‌باشد. جملات نظیر $n = 2$ و $n = 3$ را از دو سری اول بیرون کشیده و مابقی را با سری سوم جمع می‌کنیم. همچنین بجای این کار می‌توان از روش ساده‌تری که در توضیح ۲ آمده است, استفاده کرد.

$$(2a_2+a_0)+(6a_3+3a_1)x+\sum_{n=4}^{\infty}[n(n-1)a_n+(2n-3)a_{n-2}+a_{n-4}]x^{n-2}=0$$

$$2a_2+a_0=0\rightarrow a_2=-\frac{1}{2}a_0 \quad ; \quad 6a_3+3a_1=0\rightarrow a_3=-\frac{1}{2}a_1$$

$$a_n=-\frac{(2n-3)a_{n-2}+a_{n-4}}{n(n-1)} \quad ; \quad n=4,5,\cdots \;\; (recurrence\ formula)$$

از آنجا که فرم رابطه بازگشتی a_n را بر حسب دو جمله ما قبل یعنی a_{n-2} و a_{n-4} بیان کرده است, بایستی ضرایب را جمله به جمله و متوالیا بدست آورد.

$$n=4\rightarrow a_4=-\frac{5a_2+a_0}{12}=\frac{a_0}{8} \quad ; \quad n=5\rightarrow a_5=-\frac{7a_3+a_1}{20}=\frac{a_1}{8}$$

$$\xrightarrow{\cdots} a_6=-\frac{a_0}{48} \;\; ; \;\; a_7=-\frac{a_1}{48} \;\; ; \;\; a_8=\frac{a_0}{384} \;\; ; \;\; a_9=\frac{a_1}{384} \;\; ; \;\; \cdots$$

$$\rightarrow y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$$

$$=a_0\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{48}x^6+\frac{1}{384}x^8-\cdots\right)}_{y_1(x)}+a_1\underbrace{\left(x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{8}x^5-\frac{1}{48}x^7+\frac{1}{384}x^9-\cdots\right)}_{y_2(x)} \blacksquare$$

توضیح ۱: فرض کنید در صورت مساله شرایط اولیه بصورت $y(0)=3$ و $y'(0)=-1$ داده شده باشد. در اینصورت:

$$\begin{cases} y(0)=a_0y_1(0)+a_1y_2(0)\rightarrow 3=a_0(1)+a_1(0) \\ y'(0)=a_0y_1'(0)+a_1y_2'(0)\rightarrow -1=a_0(0)+a_1(1) \end{cases} \rightarrow a_0=3 \;\; ; \;\; a_1=-1$$

$$\rightarrow y(x)=3y_1(x)-y_2(x)$$

$$=3\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{48}x^6+\frac{1}{384}x^8-\cdots\right)-\left(x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{8}x^5-\frac{1}{48}x^7+\frac{1}{384}x^9-\cdots\right)$$

دقت شود اگر شرایط مرزی در نقطه x_0 داده شده باشد بهتر است از ابتدا, سری حول x_0 نوشته شود. چرا که در انتهای کار همانگونه که دیده میشود نیاز به $y_1(x_0)$, $y_1'(x_0)$, $y_2(x_0)$ و $y_2'(x_0)$ میباشد که در اینصورت حاصل این عبارات بسادگی بدست می‌آید. در مثالهای بعد نحوه نوشتن سری حول $x_0\neq 0$ دیده میشود.

توضیح ۲: میتوان برای یکسان شدن اندیس پایین زیگماها بطریق زیر نیز عمل کرد:

$$\rightarrow \sum_{\underbrace{n=0}_{n=2}}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=2}^{\infty}(2n-3)a_{n-2}x^{n-2}+\sum_{\underbrace{n=4}_{n=2}}^{\infty}a_{n-4}x^{n-2}=0$$

دیده میشود که همه اندیسها را به $n=2$ تغییر دادیم. اولا دیده شد که از سری اول دو جمله نظیر $n=0$ و $n=1$ برابر صفر است, لذا مشکلی وجود ندارد. در سری سوم اگر $n=4$ به $n=2$ تغییر داده شود, در واقع دو جمله اضافی $a_{-2}x^{-2}$ و

$a_{-1}x^{-1}$ را به سری اضافه کرده‌ایم. از آنجا که سری جواب بصورت $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ بوده و اولین جمله آن a_0 است, می‌توان فرض کرد که بطور صوری بایستی $a_{-2}=a_{-1}\equiv 0$ انتخاب شود. در اینصورت جمله‌ای از زیگما بیرون کشیده نمی‌شود و خواهیم داشت:

$$\sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)a_n+(2n-3)a_{n-2}+a_{n-4}]x^{n-2}=0 \qquad (a_{-2}=a_{-1}\equiv 0)$$

$$a_n=-\frac{(2n-3)a_{n-2}+a_{n-4}}{n(n-1)} \quad ; \quad n=2,3,4,\cdots \ (recurrence\ formula)$$

که همان رابطه بازگشتی قبل است با این تفاوت که برای $n=2,3$ نیز اعتبار دارد. دقت شود با جایگذاری $n=2,3$ در رابطه بازگشتی جدید:

$$n=2\rightarrow a_2=-\frac{a_0+a_{-2}}{2}=-\frac{1}{2}a_0 \quad ; \quad n=3\rightarrow a_3=-\frac{3a_1+a_{-1}}{6}=-\frac{1}{2}a_1$$

که همان نتیجه‌ای است که با بیرون کشیدن دو جمله از زیگما به آن رسیده بودیم. ■

مثال ۴-۱۴ معادله مرتبه دوم زیر را به روش سریها حل کنید.

$$y''-xy'-2y=0 \quad ; \quad x_0=0$$

حل نقطه $x_0=0$, نقطه عادی برای $p(x)=-x$ و $q(x)=-2$ میباشد و چون معادله هیچ نقطه غیرعادی ندارد, شعاع همگرایی جواب بینهایت است.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\rightarrow y'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}\rightarrow y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$\xrightarrow{Sub.}\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n=0$$

با ترکیب سریهای دوم و سوم:

$$\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_nx^n=0$$

$$\xrightarrow{\rightarrow x^{n-2}}\sum_{\underbrace{n=0}_{\rightarrow n=2}}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}na_{n-2}x^{n-2}=0$$

$$\rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}n\big((n-1)a_n-a_{n-2}\big)x^{n-2}=0\rightarrow a_n=\frac{a_{n-2}}{n-1} \quad (n=2,3,\cdots)$$

میتوان مشابه قبل ضرایب را جمله به جمله و متوالیا بدست آورد. اما از آنجا که فرم رابطه بازگشتی بصورت $a_n=f(n)a_{n-k}$ بدست آمده است, میتوان یک فرمول صریح برای محاسبه a_n نیز ارائه داد.

از آنجا که هر ضریب با ضریب ۲ جمله قبل ارتباط دارد, برای محاسبه آنها ۲ ستون تشکیل میدهیم:

$$a_2=\frac{a_0}{1} \qquad a_3=\frac{a_1}{2}$$
$$a_4=\frac{a_2}{3} \qquad a_5=\frac{a_3}{4}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$a_{2k}=\frac{a_{2k-2}}{2k-1} \quad a_{2k+1}=\frac{a_{2k-1}}{2k}$$
$$a_{2n}=\frac{a_0}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)} \quad a_{2n+1}=\frac{a_1}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}$$

لازم بذکر است در اینجا نیز مشابه مثالی که قبلا حل شد در سطر آخر اندیس ظاهری k را به n تغییر داده‌ایم.

در نتیجه فرمولهایی متفاوت برای ضرایب زوج و فرد سری بصورت زیر بدست می‌آید: (توضیح ۱ را ببینید)

$$\rightarrow\begin{cases}a_{2n}=\dfrac{a_0}{(2n-1)!!}=\dfrac{2^n n!\,a_0}{(2n)!}\\ a_{2n+1}=\dfrac{a_1}{(2n)!!}=\dfrac{a_1}{2^n n!}\end{cases} \quad ; \qquad n=1,2,\cdots \ \ (recurrence\ formula)$$

میتوان کنترل کرد که این روابط برای $n=0$ نیز درست بوده و به روابط بدیهی $a_0=a_0$ و $a_1=a_1$ میرسد. در نتیجه:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}=a_0\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n n!}{(2n)!}x^{2n}}_{y_1(x)}+a_1\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^{2n+1}}_{y_2(x)} \quad \blacksquare$$

توضیح ۱: در روابط بازگشتی برای سادگی از نمادگذاری زیر استفاده شده است:

$$2\times 4\times\cdots\times(2n)=(2n)!!=2^n n!$$
$$1\times 3\times\cdots\times(2n-1)=(2n-1)!!=\frac{(2n-1)!!\,(2n)!!}{(2n)!!}=\frac{(2n)!}{2^n n!}$$

توضیح ۲: می‌توان از خود رابطه بازگشتی نیز شعاع همگرایی را بدست آورد. مثلا در مثال بالا:

$$a_n=\frac{a_{n-2}}{n-1}\rightarrow\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n-1}\right|=0\rightarrow R=\infty$$

دقت شود از آنجا که رابطه بازگشتی a_n را بر حسب a_{n-2} بیان می‌کند, لذا بجای $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ از $\left|\frac{a_n}{a_{n-2}}\right|$ استفاده شده است.

توضیح ۳: میتوان بسط تابع را حول نقطه دیگری غیر از $x_0=0$ نیز انجام داد. بدیهی است تغییر x_0 در حالاتی که نقطه تکین وجود دارد باعث تغییر شعاع همگرایی سری حاصله میشود.

توضیح ۴: بطور کلی بایستی علاوه بر y همه توابع موجود در معادله بر حسب $(x-x_0)^n$ بسط داده شود. مثلا اگر معادله به فرم $y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$ باشد, بایستی$p(x)$, $q(x)$ و$g(x)$ همگی بر حسب $(x-x_0)^n$ بسط داده شوند. چون این توابع همگی مشخص میباشند کافی است سری تیلور آنها را بنویسیم. در واقع همه چیز بر حسب $(x-x_0)^n$ بیان شده است, لذا با مقایسه دو طرف, میتوان ضرایب مجهول a_n را بدست آورد. $\blacksquare$

مثال ۴-۱۵ معادله مرتبه دوم زیر را به روش سریها حل کنید.

$$y'' + (x-1)^2 y' - 4(x-1)y = 0$$

حل در اینجا بهتر است $x_0 = 1$ انتخاب شود. چرا که فرم معادله ساده‌تر خواهد شد. این نقطه, نقطه عادی برای توابع $p(x) = (x-1)^2$ و $q(x) = -4(x-1)$ میباشد و چون معادله هیچ نقطه غیرعادی ندارد, شعاع همگرایی جواب بینهایت است. برای سادگی در ادامه محاسبات از تغییر متغیر $t = x - x_0 = x - 1$ استفاده می‌کنیم.

$$t = x-1 \rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y'_t \qquad ; \qquad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(y'_t)}{dt}\frac{dt}{dx} = y''_t$$

$$y''_t + t^2 y'_t - 4ty = 0 \quad ; \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$\xrightarrow{Sub.} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n t^{n+1} = 0$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n-4)a_n t^{n+1} = 0$$

$$\xrightarrow{\rightarrow t^{n-2}} \sum_{\underbrace{n=0}_{n=2}}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} (n-7)a_{n-3} t^{n-2} = 0$$

$$\rightarrow 2a_2 t^0 + \sum_{n=3}^{\infty} [n(n-1)a_n + (n-7)a_{n-3}] t^{n-2} = 0$$

$$2a_2 = 0 \rightarrow a_2 = 0 \quad ; \quad a_n = -\frac{n-7}{n(n-1)} a_{n-3} \qquad (n = 3,4,\cdots)$$

که سایر a_nها را بر حسب a_0 و a_1 بدست می‌دهد. اما شاید ساده‌تر باشد به طریق زیر عمل کنیم:

$$\sum_{\underbrace{n=0}_{n=2}}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{\underbrace{n=3}_{n=2}}^{\infty} (n-7)a_{n-3} t^{n-2} = 0 \quad ; \quad a_{-1} \equiv 0$$

در سری اول دو جمله نظیر $n = 0,1$ تاثیری در سری نخواهد داشت و اختیاری بودن a_0 و a_1 را مشخص خواهد کرد. در سری دوم نیز با انتخاب $a_{-1} \equiv 0$ سری از $n = 2$ نوشته شده است.

$$\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)a_n + (n-7)a_{n-3}] t^{n-2} = 0 \rightarrow a_n = -\frac{n-7}{n(n-1)} a_{n-3} \qquad (n = 2,3,4,\cdots)$$

که در نهایت به همان جواب بالا منجر خواهد شد, با این تفاوت که $n = 2$ نیز در رابطه بازگشتی اضافه شده است. دقت شود با جایگذاری $n = 2$ در رابطه بازگشتی $a_2 = \frac{5}{2} a_{-1} = 0$ بدست می‌آید که همان نتیجه قبل است.

از آنجا که هر ضریب با ضریب ۳ جمله قبل ارتباط دارد, برای محاسبه آنها ۳ ستون تشکیل می‌دهیم. اولین ضریب a_2 است $(n=2)$ که به فرم $n=3k-1$ میباشد. ضریب بعدی a_3 می‌باشد $(n=3)$ و به فرم $n=3k$ خواهد بود و ضریب a_4 نیز $(n=4)$ فرم $n=3k+1$ را خواهد داشت. ضرایب بعدی نیز به همین فرم تکرار می‌شوند. در نتیجه:

$$\begin{array}{ccc} a_2=-\dfrac{-5}{4\times 3}a_{-1}=0 & a_3=-\dfrac{-4}{3\times 2}a_0 & a_4=-\dfrac{-3}{4\times 3}a_1 \\ a_5=-\dfrac{-2}{5\times 4}a_2=0 & a_6=-\dfrac{-1}{6\times 5}a_3 & a_7=-\dfrac{0}{7\times 6}a_4=0 \\ a_8=0 & a_9=-\dfrac{2}{9\times 8}a_6 & a_{10}=0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{3k-1}=0 & a_{3k}=-\dfrac{3k-7}{3k(3k-1)}a_{3k-3} & a_{3k+1}=0 \end{array}$$

با تغییر اندیس ظاهری k به n , از ستونهای اول و سوم این جدول, خواهیم داشت:

$$a_{3n-1}=0 \quad n\geq 0 \qquad ; \qquad a_{3n+1}=\begin{cases} a_1/4 & n=1 \\ 0 & n\geq 2 \end{cases}$$

همچنین از ضرب ستونهای دوم این جدول:

$$a_{3n}=\frac{(-1)^n[(-4)\times(-1)\times 2\times 5\times\cdots(3n-7)]}{\underbrace{[3\times 6\times\cdots(3n)]}_{3^n n!}\,[2\times 5\times\cdots(3n-7)(3n-4)(3n-1)]}a_0 \quad ; \quad n\geq 1$$

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{3n-1}t^{3n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{3n}t^{3n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{3n+1}t^{3n+1} \quad ; \quad t=x-1$$

$$y(x)=a_0\left(1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^n(x-1)^{3n}}{3^n n!\,(3n-4)(3n-1)}\right)+a_1\left[(x-1)+\frac{1}{4}(x-1)^4\right] \quad \blacksquare$$

توضیح ۱: ممکن است در ابتدا بجای آنکه توانها را به t^{n-2} انتقال دهیم, آنها را به توان دیگری مانند t^n منتقل کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n t^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(n-4)a_n t^{n+1}=0$$

$$\xrightarrow{\to t^n}\sum_{\underbrace{n=-2}_{\to n=0}}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n+\sum_{\underbrace{n=1}_{\to n=0}}^{\infty}(n-5)a_{n-1}t^n=0 \quad ; \quad a_{-1}\equiv 0$$

در سری اول دو جمله نظیر $n=-2,-1$ تاثیری در سری نخواهد داشت و در سری دوم نیز با انتخاب $a_{-1}\equiv 0$ سری از $n=0$ نوشته شده است.

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n-5)a_{n-1}]t^n=0$$

$$\to a_{n+2}=-\frac{n-5}{(n+2)(n+1)}a_{n-1} \quad ; \quad n=0,1,2,\cdots \quad (recurrence\ formula)$$

دیده می‌شود که همان رابطه بازگشتی را خواهیم داشت, چرا که در اینجا رابطه a_{n+2} بر حسب a_{n-1} بدست آمده است.

توضیح ۲: می‌توان در شروع حل برای آنکه ضرایب a_0 و a_1 در محاسبات وارد نشده و از شلوغی فرم جواب کاسته شود, یکبار $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases}$ و یکبار دیگر $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ منظور شود. به این ترتیب با هر یک از این انتخابها, یک جواب پایه بدست آمده و جواب نهایی ترکیب خطی آنها خواهد بود. ■

خلاصه: مراحل کار را می‌توان بصورت زیر جمع بندی کرد:

۱- جایگذاری $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و مشتقات آن در معادله. پس از جایگذاری, چنانچه در سریها جملات با توان مشابه وجود داشته باشد آنها را با یکدیگر جمع میکنیم.

۲- یکسان سازی توانها, که معمولا همه را به کمترین توان تبدیل می‌کنیم, هرچند همانگونه که در توضیح ۱ مثال قبل دیده شد می‌توان به هر توان دیگری نیز انتقال داد.

۳- یکسان سازی اندیس پایین زیگماها. برای اینکار ممکن است نیاز باشد تعدادی اندیس منفی را بطور صوری, صفر تعریف نماییم. هرچند همانگونه که دیده شد میتوان تعدادی از جملات را بیرون کشیده و مابقی را با یک زیگما بیان کرد.

۴- بدست آوردن رابطه بازگشتی

۵- در صورتیکه a_n بر حسب یکی از جملات ماقبل مانند a_{n-k} بیان شده باشد میتوان آنرا بصورت یک فرم بسته بدست آورد, که برای این منظور بایستی k ستون تشکیل داد. در غیراینصورت صرفا چند جمله اول آنرا متوالیا بدست می‌آوریم.

۶- بطور کلی بایستی علاوه بر y همه توابع موجود در معادله بر حسب $(x-x_0)^n$ بسط داده شود. مثلا اگر معادله به فرم $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ باشد, بایستی سری تیلور $p(x), q(x)$ و $g(x)$ همگی بر حسب $(x-x_0)^n$ نوشته شده و با مقایسه دو طرف, ضرایب مجهول a_n تعیین شوند.

در ارتباط با نقطه x_0 (که قرار است سری جواب حول آن نوشته شود) موارد زیر را بایستی در نظر داشت, هرچند همواره این نقطه در صورت مساله داده شده است.

۱- گاهی فرم معادله بگونه‌ای است که با تغییر متغیر $t = x - x_0$ شکل آن ساده‌تر می‌شود.

۲- اگر شرایط اولیه در نقطه x_0 داده شده باشد بهتر است از ابتدا, سری حول x_0 نوشته شود.

۳- انتخابهای مختلف x_0 باعث تغییر بازه همگرایی جواب خواهد شد.

۴- فعلا دقت شود نقطه x_0 تکین $p(x)$ و $q(x)$ نباشد. یعنی نقطه مورد نظر, نقطه عادی برای معادله دیفرانسیل محسوب شود.

مثال ۴-۱۶ معادله مرتبه دوم زیر را به روش سریها حل کنید.

$$(x-1)y'' + y' + 2(x-1)y = 0 \quad ; \quad y(4) = 5 \quad ; \quad y'(4) = 0$$

حل چون شرایط اولیه در نقطه 4 داده شده است بهتر است $x_0 = 4$ انتخاب شود. این نقطه, نقطه عادی برای $p(x) = \frac{1}{x-1}$ و $q(x) = 2$ میباشد. اما چون معادله دارای نقطه تکین $x = 1$ میباشد, پس شعاع همگرایی جواب حداقل به اندازه فاصله x_0 تا تنها نقطه تکین تابع میباشد, یعنی $R = |1-4| = 3$. لذا جواب نهایی حداقل در بازه $1 < x < 7$ اعتبار دارد. لازم بذکر است اگر شرایط اولیه در نقطه 1 داده شده بود, از آنجا که این نقطه, نقطه تکین معادله میباشد, فعلا نمی‌توان با روش این بخش, آنرا حل کرد.

$$t = x - 4 \rightarrow y' = y'_t \;\; ; \;\; y'' = y''_t$$

$$(t+3)y''_t + y'_t + 2(t+3)y = 0 \quad ; \quad y(0) = 5 \quad ; \quad y'(0) = 0$$

$$\xrightarrow{Sub.} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n t^n = 0$$

سریهای اول و سوم دارای توانهای یکسان میباشند. لذا می‌توان آنها را با یک زیگما بیان کرد:

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n t^n = 0$$

$$\rightarrow \sum_{\underbrace{n=1}_{\rightarrow n=2}}^{\infty} (n-1)^2 a_{n-1} t^{n-2} + \sum_{\underbrace{n=1}_{\rightarrow n=2}}^{\infty} 3n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{\underbrace{n=3}_{\rightarrow n=2}}^{\infty} 2a_{n-3} t^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} 6a_{n-2} t^{n-2} = 0$$

تغییر اندیس شروع زیگما در دو سری اول تاثیری در سری نداشته و اختیاری بودن a_0 و a_1 را مشخص خواهد کرد. برای سری سوم نیز کافی است $a_{-1} \equiv 0$ انتخاب شود. (توضیح ۴ را ببینید)

$$\sum_{n=2}^{\infty} [(n-1)^2 a_{n-1} + 3n(n-1)a_n + 2a_{n-3} + 6a_{n-2}] t^{n-2} = 0 \qquad (a_{-1} \equiv 0)$$

$$a_n = -\frac{n-1}{3n} a_{n-1} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{3n(n-1)} a_{n-3} \;\; ; \;\; n = 2,3,\cdots$$

از آنجا که در رابطه بازگشتی a_n بر حسب چند ضریب ماقبل بیان شده است نمی‌توان به یک فرمول برای محاسبه a_n رسید. لذا صرفا به نوشتن چندین جمله اولیه a_n اکتفا می‌کنیم.

$$n = 2: \;\; a_2 = -\frac{1}{6}a_1 - a_0 - \frac{1}{3}a_{-1} = -\frac{1}{6}a_1 - a_0$$

$$n = 3: \;\; a_3 = -\frac{2}{9}a_2 - \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{9}a_0 = -\frac{2}{9}\left(-\frac{1}{6}a_1 - a_0\right) - \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{9}a_0 = -\frac{8}{27}a_1 + \frac{1}{9}a_0$$

$$n = 4: \;\; a_4 = -\frac{1}{4}a_3 - \frac{1}{6}a_2 - \frac{1}{18}a_1 = \cdots = \frac{5}{108}a_1 + \frac{5}{36}a_0$$

$$\rightarrow y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + \left(-\frac{1}{6}a_1 - a_0\right)t^2 + \left(-\frac{8}{27}a_1 + \frac{1}{9}a_0\right)t^3 + \left(\frac{5}{108}a_1 + \frac{5}{36}a_0\right)t^4 + \cdots$$

$$y(t) = a_0 \underbrace{\left[1 - t^2 + \frac{1}{9}t^3 + \frac{5}{36}t^4 + \cdots\right]}_{y_1(t)} + a_1 \underbrace{\left[t - \frac{1}{6}t^2 - \frac{8}{27}t^3 + \frac{5}{108}t^4 + \cdots\right]}_{y_2(t)}$$

حال با توجه به شرایط اولیه در $t = 0$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y(0) = 5 \rightarrow a_0 y_1(0) + a_1 y_2(0) = 5 \rightarrow a_0(1) + a_1(0) = 5 \\ y'(0) = 0 \rightarrow a_0 y_1'(0) + a_1 y_2'(0) = 0 \rightarrow a_0(0) + a_1(1) = 0 \end{cases} \rightarrow a_0 = 5 \;\; ; \;\; a_1 = 0$$

$$t = x - 4 \rightarrow y(x) = 5y_1(x) = 5\left[1 - (x-4)^2 + \frac{1}{9}(x-4)^3 + \frac{5}{36}(x-4)^4 + \cdots\right] \quad \blacksquare$$

توضیح ۱: آیا جوابها مستقلند؟ بله, چون هیچیک مضرب دیگری نیست و یا کافی است رونسکین را در یک نقطه مانند $t = 0$ بدست آوریم:

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

توضیح ۲: میتوان از خودِ رابطه بازگشتی نیز حداقل شعاع همگرایی را بدست آورد.

$$a_n = -\frac{n-1}{3n} a_{n-1} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{3n(n-1)} a_{n-3} \;\; ; \;\; n = 2,3,\cdots$$

$$n \rightarrow \infty : a_n \sim -\frac{1}{3} a_{n-1} \rightarrow \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \frac{1}{3} \rightarrow R = 3$$

توضیح ۳: می‌توانستیم قبل از محاسبه ضرایب a_0 و a_1 , ابتدا جایگذاری $t = x - 4$ را اعمال کرده و سپس ضرایب را بیابیم که قدری طولانی‌تر خواهد شد. چرا که:

$$y(x) = a_0\left[1 - (x-4)^2 + \frac{1}{9}(x-4)^3 + \frac{5}{36}(x-4)^4 + \cdots\right]$$
$$+a_1\left[(x-4) - \frac{1}{6}(x-4)^2 - \frac{8}{27}(x-4)^3 + \frac{5}{108}(x-4)^4 + \cdots\right] = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

حال با توجه به شرایط اولیه در $x = 4$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y(4) = 5 \rightarrow a_0 y_1(4) + a_1 y_2(4) = 5 \rightarrow a_0(1) + a_1(0) = 5 \\ y'(4) = 0 \rightarrow a_0 y_1'(4) + a_1 y_2'(4) = 0 \rightarrow a_0(0) + a_1(1) = 0 \end{cases} \rightarrow a_0 = 5 \;\; ; \;\; a_1 = 0$$

$$\rightarrow y(x) = 5y_1(x) = 5\left[1 - (x-4)^2 + \frac{1}{9}(x-4)^3 + \frac{5}{36}(x-4)^4 + \cdots\right]$$

توضیح ۴: می‌توانستیم در ابتدای حل بجای انتخاب $a_{-1} \equiv 0$ جمله نظیر $n = 2$ را از سریهای اول و دوم و چهارم بیرون کشیده و همه سریها را از $n = 3$ نوشته و جمع کنیم. به عبارتی:

$$\sum_{\underbrace{n=1}_{\rightarrow n=2}}^{\infty} (n-1)^2 a_{n-1} t^{n-2} + \sum_{\underbrace{n=1}_{\rightarrow n=2}}^{\infty} 3n(n-1) a_n t^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} 2a_{n-3} t^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} 6a_{n-2} t^{n-2} = 0$$

$$(a_1 + 6a_2 + 6a_0)t^0 + \sum_{n=3}^{\infty} [(n-1)^2 a_{n-1} + 3n(n-1)a_n + 2a_{n-3} + 6a_{n-2}] t^{n-2} = 0$$

که از مساوی صفر قرار دادن ضریب t^0 یعنی $a_1 + 6a_2 + 6a_0$, به همان رابطه $a_2 = -\frac{1}{6}a_1 - a_0$ خواهیم رسید. $\blacksquare$

مثال ۴-۱۷ معادله مرتبه دوم زیر را به روش سریها حل کنید.

$$y'' + (sinx)y' + e^x y = 0 \qquad ; \qquad x_0 = 0$$

حل نقطه $x_0 = 0$, نقطه عادی برای $p(x) = sinx$ و $q(x) = e^x$ میباشد و چون معادله هیچ نقطه غیرعادی ندارد, شعاع همگرایی جواب بینهایت است. از آنجا که ضرایب بصورت چندجمله‌ای نیستند, آنها را بر حسب سری مک‌لوران بسط می‌دهیم:

$$y'' + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)y' + \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)y = 0$$

در اینحالت که ضرایب بصورت چندجمله‌ای نیستند, ساده‌تر است بجای نوشتن جملات بصورت زیگما, آنها را جمله به جمله بنویسیم.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \xrightarrow{Sub.} (2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots)$$
$$+ \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots\right)(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots)$$
$$+ \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots\right)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = 0$$

$$\rightarrow (2a_2 + a_0) + (6a_3 + 2a_1 + a_0)x + \left(12a_4 + 3a_2 + a_1 + \frac{a_0}{2}\right)x^2$$
$$+ \left(20a_5 + 4a_3 + a_2 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_0}{6}\right)x^3 + \cdots = 0$$

با مساوی صفر قرار دادن ضریب توانهای مختلف خواهیم داشت:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2}\ ; a_3 = -\frac{1}{6}(2a_1 + a_0)\ ; a_4 = -\frac{1}{12}(2a_0 - a_1)\ ; a_5 = \frac{1}{20}(a_0 + a_1)\ ;\ \cdots$$

در نهایت:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2}x^2 - \frac{1}{6}(2a_1 + a_0)x^3 - \frac{1}{12}(2a_0 - a_1)x^4 + \cdots$$
$$y(x) = a_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \cdots\right) \ \blacksquare$$

مثال ۴-۱۸ معادله غیرهمگن زیر را به روش سریها حل کنید.

$$(x-1)y'' - xy' + y = 1 \qquad ; \qquad x_0 = 0$$

حل تفاوت با مسائل قبل آن است که این معادله غیر همگن است. برای حل کافی است بسط تیلور قسمت غیرهمگن را نیز حول $x_0 = 0$ نوشته و دو طرف را متحد قرار دهیم. بدیهی است در اینجا بسط تیلور $g(x) = 1$ حول $x_0 = 0$ خودش خواهد بود.

نقطه $x_0 = 0$, نقطه عادی برای $p(x) = \frac{-x}{x-1}$ و $q(x) = \frac{1}{x-1}$ میباشد. اما چون معادله دارای نقطه تکین $x = 1$ میباشد, پس شعاع همگرایی جواب, حداقل به اندازه فاصله x_0 تا تنها نقطه تکین تابع است, یعنی $R = |1-0| = 1$. بنابراین جواب نهایی حداقل در بازه $-1 < x < 1$ اعتبار دارد.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \to y'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1} \to y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$\xrightarrow{Sub.}\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1$$

سریهای سوم و چهارم دارای توانهای یکسان میباشند. لذا می‌توان آنها را با یک زیگما بیان کرد:

$$\to\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)a_nx^n=1$$

$$\xrightarrow{\to x^{n-2}}\sum_{\underbrace{n=1}_{\to n=2}}^{\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-2}-\sum_{\underbrace{n=0}_{\to n=2}}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}(n-3)a_{n-2}x^{n-2}=1$$

$$\to\sum_{n=2}^{\infty}\{(n-1)(n-2)a_{n-1}-n(n-1)a_n-(n-3)a_{n-2}\}x^{n-2}=1x^0$$

از آنجا که در سمت راست جمله $1x^0$ وجود دارد, از سری سمت چپ جمله نظیر $n=2$ را بیرون می‌کشیم تا x^0 ایجاد شود.

$$\to(-2a_2+a_0)x^0+\sum_{n=3}^{\infty}\{(n-1)(n-2)a_{n-1}-n(n-1)a_n-(n-3)a_{n-2}\}x^{n-2}=1x^0$$

$$-2a_2+a_0=1\to a_2=\frac{a_0-1}{2}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}\{\quad\}=0\to a_n=\frac{n-2}{n}a_{n-1}-\frac{n-3}{n(n-1)}a_{n-2}\qquad(n=3,4,\cdots)$$

از آنجا که در رابطه بازگشتی a_n بر حسب دو ضریب ماقبل بیان شده است نمی‌توان به یک فرمول بسته برای محاسبه a_n رسید.
لذا صرفا به نوشتن چندین جمله اولیه a_n اکتفا می‌کنیم.

$$n=3:\ \ a_3=\frac{1}{3}a_2-\frac{0}{6}a_1=\frac{a_0-1}{6}\quad;\quad n=4:\ \ a_4=\frac{2}{4}a_3-\frac{1}{12}a_2=\frac{a_0-1}{24}$$

$$n=5:\ \ a_5=\frac{3}{5}a_4-\frac{2}{20}a_3=\frac{a_0-1}{120}\quad;\quad n=6:\ \ a_6=\frac{4}{6}a_5-\frac{3}{30}a_4=\frac{a_0-1}{720}$$

سایر ضرایب نیز به همین صورت بدست می‌آیند. در نتیجه:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\left(\frac{a_0-1}{2}\right)x^2+\left(\frac{a_0-1}{6}\right)x^3+\left(\frac{a_0-1}{24}\right)x^4+\cdots$$

$$y(x)=a_0\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\cdots\right)+a_1x-\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\cdots\right)$$

در این مثال خاص می‌توان دو سری داخل پرانتز را بر حسب توابع مقدماتی و بصورت زیر بیان کرد:

$$y(x) = a_0(e^x - x) + a_1 x - (e^x - x - 1)$$

که میتوان آنرا بصورت زیر نیز بیان کرد:

$$y(x) = (a_0 - 1)e^x + (a_1 - a_0 + 1)x + 1 = c_1 e^x + c_2 x + 1 \quad \blacksquare$$

توضیح ۱: این معادله قبلا در روش کاهش مرتبه و در مثال ۲-۲۳ حل شده است. بدیهی است در آن روش نیاز میباشد که یک جواب پایه داده شده باشد و یا قابل تشخیص باشد. گفته شد از آنجا که در این معادله هم $p + xq = 0$ و هم $p + q = -1$ میباشد, لذا هر دو جواب پایه بصورت $y_1 = x$ و $y_2 = e^x$ خواهد بود. در نهایت نیز جواب خصوصی با روش لاگرانژ بدست آمد.

توضیح ۲: یک سوال مهم آن است که در ابتدای حل عنوان شد که جواب نهایی صرفا در بازه $-1 < x < 1$ اعتبار دارد, در حالیکه وقتی همین مساله با کاهش مرتبه حل شد چنین قیدی برای بازه مطرح نشده و در سرتاسر محور حقیقی اعتبار داشت. در واقع در اینجا با توجه به قضیه فوشه, به علت وجود تکین $x = 1$, بازه همگرایی سری محدود میشود, اما این قضیه نمی‌گوید که جواب فقط در این بازه معتبر است. به همین دلیل در تعیین شعاع همگرایی گفته شد که این شعاع, حداقل به اندازه فاصله نقطه x_0 تا نزدیکترین نقطه تکین $p(x)$ و $q(x)$ میباشد. این مثال علت ذکر کلمه "حداقل" در این قضیه را نشان میدهد. ■

به کمک روش سریها میتوان تعدادی از معادلات انتگرالی را نیز حل کرد. مثال زیر بعنوان نمونه ارائه می‌شود.

❋ **مثال ۴-۱۹** معادله انتگرالی زیر را به روش سریها حل کنید.

$$y(x) = 2coshx - xsinhx - 1 + \int_0^x ty(t)\,dt \qquad ; \qquad x_0 = 0$$

حل دیده میشود که در این معادله هم تابع و هم انتگرال آن وجود دارد. به چنین معادلاتی, معادلات انتگرالی می‌گویند. روشهای مختلفی برای حل این معادلات وجود دارد که بسته به مساله متفاوت است. هدف درس معادلات دیفرانسیل بررسی این معادلات نمی‌باشد. اما در این مثال خاص هدف آن است که نشان دهیم به روش سریها میتوان برخی از این معادلات را نیز حل کرد. با جایگذاری $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و نیز سری تیلور توابع $coshx$ و $sinhx$ در معادله انتگرال داده شده خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} - x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - 1 + \int_0^x \left(t\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)dt$$

$$\rightarrow a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots =$$
$$2\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) - \left(x^2 + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} + \cdots\right) - 1 + \frac{a_0}{2}x^2 + \frac{a_1}{3}x^3 + \frac{a_2}{4}x^4 + \cdots$$

از مقایسه دو سمت تساویها خواهیم داشت:

$$a_0 = 1 \ ; \ a_1 = 0 \ ; \ a_2 = \frac{1}{2!} \ ; \ a_3 = 0 \ ; \ a_4 = \frac{1}{4!} \ ; \ a_5 = 0 \ \cdots$$

$$\rightarrow a_{2n} = \frac{1}{(2n)!} \ ; \ a_{2n+1} = 0 \rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = coshx \ \blacksquare$$

تمرینات بخش ۴-۳

۱- معادلات زیر را حول $x_0 = 0$ حل کرده, بازه همگرایی را بیابید.

$$1)\ (1+x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0 \quad ; \quad \underline{Ans}: \ y = a_0(1-3x^2) + a_1\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)$$

$$2)\ y'' + 4y = 0 \quad ; \quad \underline{Ans}: \quad y = a_0 cos2x + a_1 sin2x$$

$$3)\ y'' + xy' + y = 0 \ ; \ \underline{Ans}: \ y = a_0 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!}}_{e^{-\frac{x^2}{2}}} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n n!\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$4)\ y'' + 2x^2y' + 4xy = 0 \ ; \ \underline{Ans}: \ y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n x^{3n}}{3^n n!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n x^{3n+1}}{(3n+1)\cdots 4}$$

۲- معادله زیر را حل کرده, جوابهای آنرا برحسب توابع مقدماتی بیان کنید. بازه همگرایی را بیابید.

$$(1-x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0 \quad ; \quad \underline{Ans}: \ y = a_0 \frac{1}{(1-x^2)^2} + a_1 \frac{3x - x^3}{3(1-x^2)^2}$$

راهنمایی: برای تبدیل جواب دوم بر حسب توابع مقدماتی, قسمت دوم از مثال ۴-۹ را ببینید.

۳- معادلات زیر را حل کنید.

$$1)\ (x^2-2x)y'' - 5(x-1)y' - 7y = 0 \quad ; \quad y(1) = 1 \quad ; \quad y'(1) = 2$$

$$\underline{Ans}: \ y(x) = 1 + 2(x-1) - \frac{7}{2}(x-1)^2 - 4(x-1)^3 + \frac{35}{8}(x-1)^4 + \cdots$$

$$2)\ y'' + xy = e^{x+1}$$

$$\underline{Ans}: \ y(x) = a_0\left(1 - \frac{1}{6}x^3 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{12}x^4 + \cdots\right) + e\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \cdots\right)$$

$$3)\ (x^2+4)y'' + xy = x + 2$$

$$\underline{Ans}: \ y(x) = a_0\left(1 - \frac{1}{24}x^3 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{48}x^4 + \cdots\right) + \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{96}x^4 - \cdots\right)$$

$$4)\ x^2y'' + 2y' + (x-1)y = x^2 + 2 \quad ; \quad y(1) = 0 \quad ; \quad y'(1) = 0$$

$$\underline{Ans}: \ y(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2 - \frac{5}{3}(x-1)^3 + \frac{7}{3}(x-1)^4 + \cdots$$

۴-۴- نکات تکمیلی ❄

۴-۴-۱- محاسبه مستقیم ضرایب سری تیلور

این روش در واقع همان روشی است که در ابتدای درس معادلات و در توضیح قسمت چهارم مثال ۱-۱ عنوان شد. در واقع در اینجا می‌خواهیم بجای سری توانی, ضرایب را از فرمول سری تیلور بدست آوریم. برای این منظور بایستی کلیه مشتقات جوابِ $y(x)$ را در نقطه x_0 بدست آوریم. میدانیم بسط تیلور تابع $y(x)$ حول نقطه x_0 بصورت زیر است:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

بنابراین با مشتق گیری متوالی از معادله دیفرانسیل, با داشتن شرط اولیه در نقطه x_0 , سایر مشتقات مراتب بالاتر آن در نقطه x_0 بدست آمده و ضرایب سری تیلور تعیین می‌شوند. به این ترتیب سری تیلور جواب حول نقطه مورد نظر بدست می‌آید. به عبارتی:

$$y(x)=\frac{y(x_0)}{0!}+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{y'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots$$

مثال ۴-۲۰ مثال ۴-۱۶ را با این روش حل کنید.

$$(x-1)y''+y'+2(x-1)y=0 \quad ; \qquad y(4)=5 \quad ; \quad y'(4)=0$$

$$\xrightarrow{Sub.\ x=4} 3y''(4)+\underbrace{y'(4)}_{0}+6\,\underbrace{y(4)}_{5}=0\rightarrow y''(4)=-10$$

$$(x-1)y'''+2y''+2(x-1)y'+2y=0\rightarrow y'''(4)=\frac{10}{3}\xrightarrow{\cdots} y^{(4)}(4)=\frac{50}{3},\cdots$$

$$y(x)=\frac{y(4)}{0!}+\frac{y'(4)}{1!}(x-4)+\frac{y''(4)}{2!}(x-4)^2+\cdots$$

$$y(x)=\frac{5}{1}+\frac{0}{1!}(x-4)+\frac{-10}{2!}(x-4)^2+\frac{10}{3\times 3!}(x-4)^3+\frac{50}{3\times 4!}(x-4)^4+\cdots$$

$$y(x)=5\left[1-(x-4)^2+\frac{1}{9}(x-4)^3+\frac{5}{36}(x-4)^4+\cdots\right] \quad \blacksquare$$

توضیح: اگر شرایط اولیه داده نشده باشد, میتوان با انتخاب $y(x_0)=a$ و $y'(x_0)=b$ مساله را پیش برد و دو جواب مستقل خطی را بر حسب a و b بدست آورد. ■

۴-۴-۲- روش دوم تعیین رابطه بازگشتی

در بخش قبل عنوان شد که با مشتق‌گیری متوالی, میتوان ضرایب مربوط به سری جواب را بدست آورد. حال این سوال پیش می‌آید که آیا می‌توان یک فرمول کلی برای مشتقات مرتبه بالاتر بدست آورد تا نیاز به مشتق‌گیری مرحله به مرحله نباشد؟ در ادامه خواهیم دید که با استفاده از قاعده لایب‌نیتز در محاسبه مشتق nام حاصلضرب دو تابع, میتوان این کار را انجام داد که در نهایت به استخراج رابطه بازگشتی منجر میشود. در واقع کاری که در اینجا انجام می‌شود, تعمیم قسمت قبل است, که بجای مشتق‌گیری متوالی, بدنبال یافتن یک رابطه برای مشتق nام می‌باشیم.

در ریاضی ۱ دیده شد بر طبق قاعده لایب‌نیتز, اگر توابع u و v , n بار مشتق پذیر باشند, در اینصورت مشتق nام حاصل ضرب uv عبارت است از:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u^{(n-i)} v^{(i)}$$

بدیهی است اگر یکی از توابع, بعنوان نمونه u , بصورت چندجمله‌ای باشد, بعد از چند مشتق, به صفر رسیده و لذا حجم محاسبات کم میشود. برای روشن شدن روش کار معادله زیر را که قبلا در مثال ۴-۱۵ بررسی شد, در نظر می‌گیریم. مشابه قبل, ابتدا آنرا حول نقطه صفر بیان می‌کنیم:

$$y'' + (x-1)^2 y' - 4(x-1)y = 0\ ;\ x_0 = 1 \xrightarrow{t=x-x_0} y_t'' + t^2 y_t' - 4ty = 0$$

حال مشتق nام دو سمت معادله $y_t'' + t^2 y_t' - 4ty = 0$ را با قاعده لایب‌نیتز بدست می‌آوریم:

$$y^{(n+2)}(t) + \binom{n}{0}(t^2)y^{(n+1)}(t) + \binom{n}{1}(2t)y^{(n)}(t) + \binom{n}{2}(2)y^{(n-1)}(t) + \binom{n}{0}(-4t)y^{(n)}(t) + \binom{n}{1}(-4)y^{(n-1)}(t) = 0$$

با انتخاب $t = 0$ (برای حذف جملات شامل t) و جایگذاری $y^{(k)}(0) = k!\, a_k$ خواهیم داشت:

$$y^{(n+2)}(0) + \binom{n}{2} 2y^{(n-1)}(0) + \binom{n}{1}(-4)y^{(n-1)}(0) = 0$$

$$(n+2)!\, a_{n+2} + \binom{n}{2} 2(n-1)!\, a_{n-1} + \binom{n}{1}(-4)(n-1)!\, a_{n-1} = 0$$

$$(n+2)(n+1)n(n-1)!\, a_{n+2} + \frac{n(n-1)}{2} 2(n-1)!\, a_{n-1} + n(-4)(n-1)!\, a_{n-1} = 0$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-5)a_{n-1} = 0 \to n(n-1)a_n + (n-7)a_{n-3} = 0$$

در این روش, برای تعیین رابطه بازگشتی, نیازی به انتخاب جواب به فرم سری و جایگذاریهایی که قبلا دیده شد نخواهیم داشت. یک روش دیگر نیز برای تعیین رابطه بازگشتی در بخش ۴-۷ خواهد آمد.

تمرینات بخش ۴-۴

۱- معادله زیر را با روش محاسبه مستقیم ضرایب سری تیلور حول $x_0 = 0$ حل کنید.

$$1)\ y' + (x - 2x^2)y = 1\ ;\ y(0) = 1 \quad ; \quad \underline{Ans} : y = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{5x^4}{8} - \frac{4x^5}{15} + \cdots$$

$$2)\ y'' + xy' + (1 - x^2)y = x\ ;\ y(0) = a\ ;\ y'(0) = b$$

$$\underline{Ans} : y = a + bx - \frac{a}{2}x^2 + \left(\frac{1-2b}{6}\right)x^3 + \frac{5a}{24}x^4 + \left(\frac{7b-2}{60}\right)x^5 + \cdots$$

۴-۵- معادله لژاندر $(Legendre)$

فرم کلی معادله لژاندر بصورت زیر است:

$$\underbrace{(1-x^2)y'' - 2xy'}_{[(1-x^2)y']'} + \alpha(\alpha+1)y = 0\ ;\quad \alpha \in \mathbb{R}$$

که به آن معادله لژاندر از رتبه α می‌گوییم. این معادله در تعدادی از مسائل فیزیکی از جمله تعیین دمای پایدار (حل معادله لاپلاس) در مختصات کروی کاربرد دارد.

از آنجا که جمله اول و دوم این معادله, مشتق کامل یک عبارت میباشد (چرا که $P'(x) = Q(x)$) , پس معادله لژاندر یک معادله خود الحاق است. در مثال ۲-۲۰ همین معادله برای $\alpha = 1$ با روش کاهش مرتبه حل شد. اما در آن روش نیاز به داشتن یک جواب خواهیم بود. بدیهی است نقطه $x_0 = 0$ نقطه عادی برای $p(x)$ و $q(x)$ می‌باشد. اما از آنجا که معادله دارای نقاط تکین $x = \pm 1$ میباشد, پس شعاع همگرایی جواب, حداقل برابر $R = 1$ می‌باشد, لذا جواب نهایی حداقل در بازه $-1 < x < 1$ اعتبار خواهد داشت. با انتخاب $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و جایگذاری در معادله لژاندر خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{Sub.} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n x^n + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

سریهای اول تا سوم دارای توانهای یکسان میباشند. لذا می‌توان آنها را با یک زیگما بیان کرد:

$$\to \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\big(\alpha(\alpha+1) - n(n+1)\big)}_{(\alpha-n)(\alpha+n+1)} a_n x^n = 0$$

$$\xrightarrow{\to x^{n-2}} \sum_{\underbrace{n=0}_{\to n=2}}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} (\alpha-n+2)(\alpha+n-1)a_{n-2} x^{n-2} = 0$$

$$\to \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)a_n + (\alpha-n+2)(\alpha+n-1)a_{n-2}]x^{n-2} = 0$$

$$a_n = -\frac{(\alpha-n+2)(\alpha+n-1)}{n(n-1)} a_{n-2} \quad ; \quad n = 2,3,\cdots$$

از آنجا که در رابطه بازگشتی a_n صرفا بر حسب a_{n-2} بیان شده است, می‌توان به یک فرم بسته برای محاسبه a_n رسید.

$$a_2 = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{2\times 1} a_0 \qquad a_3 = -\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3\times 2} a_1$$

$$a_4 = -\frac{(\alpha-2)(\alpha+3)}{4\times 3} a_2 \qquad a_5 = -\frac{(\alpha-3)(\alpha+4)}{5\times 4} a_3$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$a_{2k} = -\frac{(\alpha-2k+2)(\alpha+2k-1)}{2k(2k-1)} a_{2k-2} \qquad a_{2k+1} = -\frac{(\alpha-2k+1)(\alpha+2k)}{(2k+1)2k} a_{2k-1}$$

از ضرب ستونهای این جدول و با تغییر اندیس ظاهری k به n خواهیم داشت:

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{(\alpha-2n+2)\cdots(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)\cdots(\alpha+2n-1)}{(2n)!} a_0$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(\alpha-2n+1)\cdots(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)\cdots(\alpha+2n)}{(2n+1)!} a_1$$

در نتیجه جواب بصورت زیر میباشد:

$$y(x) = a_0\left(1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2 + \frac{(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4 - \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3 + \frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}x^5 - \cdots\right)$$

که می‌توان آنرا بصورت $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$ بیان کرد. بدیهی است که $y_1(x)$ تابعی زوج و $y_2(x)$ فرد است.

لازم بذکر است در بحث معادله لژاندر صرفا α نامنفی بررسی می‌شود, چرا که می‌توان نشان داد برای α_1 منفی, جواب معادله با جواب نظیر $\alpha = -(\alpha_1 + 1)$ یکسان است.

همچنین می‌توان از خودِ رابطه بازگشتی نیز شعاع همگرایی هر یک از دو سری $y_1(x)$ و $y_2(x)$ را بدست آورد.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-2}}\right| = 1 \to R = 1 \to -1 < x < 1$$

در اینجا نیز از آنجا که رابطه بازگشتی a_n را بر حسب a_{n-2} بیان می‌کند, لذا بجای $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ از $\left|\frac{a_n}{a_{n-2}}\right|$ استفاده شده است.

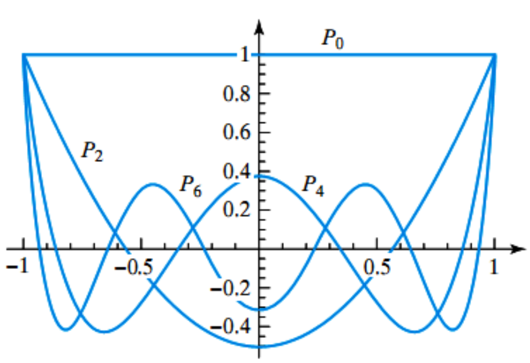
در حالت خاصی که $\alpha = n \in \mathbb{N}$ باشد, جوابهای معادله لژاندر از اهمیت خاصی برخوردار است که در ادامه خواهیم دید.

با توجه به جوابهای $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دیده می‌شود که اگر $\alpha = n$ عددی زوج یا فرد باشد, هر بار یکی از این دو جواب, تعداد محدودی جمله خواهد داشت که به آنها چندجمله‌ای لژاندر می‌گوییم.

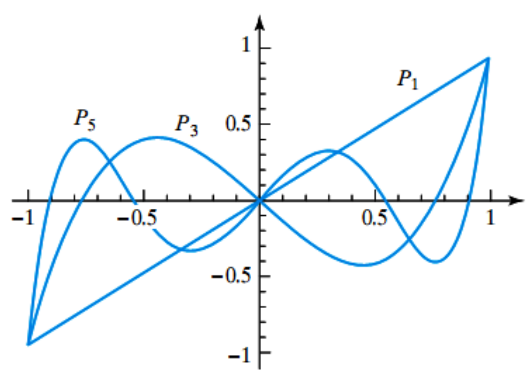
مثلا برای $\alpha = n = 2$ خواهیم داشت $y_1(x) = 1 - \frac{2(2+1)}{2!}x^2 = 1 - 3x^2$ و $y_2(x)$ بصورت سری نامتناهی باقی می‌ماند. معمول این است که چندجمله‌ایهای لژاندر را به ضریبی تقسیم می‌کنند تا همگی در $x = 1$ برابر 1 شوند. بنابراین از آنجا که $y_1(1) = -2$ می‌باشد, لذا چندجمله‌ای لژاندرِ نظیر $n = 2$ که با $P_2(x)$ نمایش داده می‌شود بصورت $P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$ خواهد بود. متناظر $P_2(x)$, جواب دوم را که یک سری نامتناهی است, لژاندر نوع دوم نامیده و با $Q_2(x)$ معرفی می‌شود.

چند نمونه از چندجمله‌ایهای لژاندر و نمودار آنها بصورت زیر می‌باشد:

Even polynomials	*Odd polynomials*
$P_0(x) = 1$	$P_1(x) = x$
$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$	$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$



Even Legendre polynomials.



Odd Legendre polynomials.

❋ ۱-۵-۴- توضیحات تکمیلی در ارتباط با چندجمله‌ایهای لژاندر

قضیه: چندجمله‌ای‌های لژاندر در بازه $(-1,1)$ متعامد میباشد. در واقع:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \qquad (m \neq n)$$

اثبات: چندجمله‌ایهای لژاندر P_m و P_n (m و n اعداد حسابی) در معادله دیفرانسیل لژاندر صدق می‌کنند. بنابراین:

$$\begin{matrix} P_m \times \\ P_n \times \end{matrix}\begin{cases} (1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0 \\ (1-x^2)P_m'' - 2xP_m' + m(m+1)P_m = 0 \end{cases}$$

با ضرب سطر اول در P_m و سطر دوم در P_n و کم کردن این دو سطر خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{-} (1-x^2)(P_mP_n'' - P_m''P_n) - 2x(P_mP_n' - P_m'P_n) + [n(n+1) - m(m+1)]P_mP_n = 0$$

بدیهی است $P_mP_n' - P_m'P_n$ بیانگر رونسکین دو جواب P_m و P_n و $P_mP_n'' - P_m''P_n$ بیانگر مشتق رونسکین است. در نتیجه:

$$(1-x^2)W' - 2xW = \underbrace{[m(m+1) - n(n+1)]}_{k} P_mP_n \to [(1-x^2)W]' = kP_mP_n$$

حال اگر از طرفین این رابطه در بازه $[-1,1]$ انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$\underbrace{(1-x^2)W\Big|_{-1}^{1}}_{0} = k\int_{-1}^{1} P_mP_n dx \xrightarrow{m\neq n \to k\neq 0} \int_{-1}^{1} P_mP_n dx = 0$$

علت اصلی این تعامد آن است که در واقع معادله لژاندر حالت خاصی از معادله اشتورم-لیوویل میباشد که در درس ریاضی مهندسی به آن پرداخته خواهد شد. همچنین با محاسبات قدری طولانی می‌توان نشان داد برای حالت $m = n$ نیز جواب $\frac{2}{2n+1}$ خواهد شد. بنابراین:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$$

مهمترین خاصیت تعامد آن است که میتوان تابع دلخواه $f(x)$ را بر حسب توابع متعامد بسط داد که در ادامه به آن می‌پردازیم.

فرض کنید $\{\varphi_k(x)\}$ مجموعه‌ای متعامد در بازه $[a,b]$ و $f(x)$ تابع دلخواهی باشد. اگر بتوان نوشت:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$$

در اینصورت میگوییم بسط $f(x)$ را بر حسب توابع پایه $\{\varphi_k(x)\}$ نوشته‌ایم. فرض میکنیم که سری نشان داده شده در بالا همگرای یکنواخت به $f(x)$ میباشد. با قبول این فرض, هدف یافتن ضرایب c_n است.

برای محاسبه ضرایب c_n طرفین رابطه بالا را در $\varphi_m(x)$ ضرب کرده و در بازه $[a,b]$ انتگرال می‌گیریم:

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = c_m\int_a^b \varphi_m^2(x)\,dx$$

در واقع تمام جملات سمت راست بعلت تعامد, صفر میباشند, بجز زمانی که $n = m$ باشد. یعنی تعامد باعث حذف همه ضرایب و باقی ماندن صرفا یک ضریب میشود و همین در واقع اهمیت تعامد را در استخراج ضرایب بسط نشان میدهد. هدف آن است که همگرایی بسط داده شده یکنواخت باشد,لذا اجازه تعویض انتگرال و زیگما را خواهیم داشت. با تغییر اندیس m به n خواهیم داشت:

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx}$$

لازم بذکر است که تابع $f(x)$ بایستی در بازه $[a,b]$ تکهای هموار باشد(یعنی خود تابع و مشتق آن تکهای پیوسته باشد). در حالی که در بسط تیلور تابع باید بینهایت بار مشتق پذیر باشد. پس این شرط بسیار ضعیفتر از شرط تیلور است. یعنی کارایی بسط بر حسب توابع متعامد از بسط تیلور گستردهتر خواهد بود.

حال اگر $\{\varphi_k(x)\}$ را چندجملهای‌های لژاندر انتخاب کنیم که در بازه $(-1,1)$ متعامد می‌باشند, میتوان هر تابع تکهای هموار $f(x)$ را بر حسب این مجموعه متعامد, در بازه فوق بسط داد, یعنی:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \quad ; \quad c_n = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx}{\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx} = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx$$

در انتها چند رابطه مهم در ارتباط با چند جملهایهای لژاندر ارائه میشود.

۱- در حالتی که $\alpha = n$ عددی حسابی باشد, چندجملهایهای لژاندر را می‌توان بصورت زیر نیز بیان کرد:

For *even* polynomials:

$$P_{2n}(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{(4n-2r)!}{2^{2n} r!(2n-r)!(2n-2r)!} x^{2n-2r}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

For *odd* polynomials:

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{(4n-2r+2)!}{2^{2n+1} r!(2n-r+1)!(2n-2r+1)!} x^{2n-2r+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

۲- رابطه رودریگز: این رابطه بصورت زیر بوده و بصورت پیاپی چندجملهایهای لژاندر را بدست می‌آورد.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

۳- تابع مولد چندجملهای لژاندر: میتوان با استفاده از سری دوجملهای نشان داد:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

به کمک این رابطه میتوان نشان داد:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \rightarrow P_n(-1) = (-1)^n$$

$$P_{2n-1}(0) = 0 \;\; ; \;\; P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \quad ; \quad n = 1,2,\cdots$$

۴- با مشتق‌گیری از طرفین تابع مولد نسبت به t و مساوی قرار دادن ضرایب t^n در دو سمت تساوی به رابطه زیر خواهیم رسید که به کمک این رابطه نیز میتوان بصورت پیاپی چندجمله‌ایهای لژاندر را بدست آورد.

$$P_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

۵- با مشتق‌گیری از طرفین تابع مولد نسبت به x و مساوی قرار دادن ضرایب t^{n+1} در دو سمت تساوی به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$P'_{n+1}(x)+P'_{n-1}(x)=2xP'_n(x)+P_n(x)$$

حال با مشتق‌گیری از رابطه بدست آمده در قسمت قبل نسبت به x و نیز استفاده از رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x)$$

کاربرد: در حل معادله لاپلاس در مختصات کروی به معادله $y''+cotg(x)y'+\alpha(\alpha+1)y=0$ میرسیم. در تمرین ۶ بخش ۲-۱۲ دیده شد با تغییر متغیر $t=cosx$ معادله فوق به معادله لژاندر بصورت زیر تبدیل میشود.

$$(1-t^2)y''_t-2ty'_t+\alpha(\alpha+1)y=0$$

مثال ۴-۲۱ تابع $f(x)=cosx$ را در بازه $(-1,1)$ بر حسب چند جمله ایهای لژاندر بسط دهید.

حل بدیهی است که تابع $f(x)=cosx$ تکه‌ای هموار است, زیرا هم خودش و هم مشتقش پیوسته است. بنابراین خواهیم داشت:

$$c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\,dx=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}P_n(x)cosx\,dx$$

حال برای هر $P_n(x)$ این انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

$$P_0(x)=1\to c_0=\frac{2\times0+1}{2}\int_{-1}^{1}1\times cosx\,dx=sin1$$

$$P_1(x)=x\to c_1=\frac{2\times1+1}{2}\int_{-1}^{1}xcosx\,dx=0$$

$$P_2(x)=\frac{3x^2-1}{2}\to c_2=\frac{2\times2+1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{3x^2-1}{2}cosx\,dx=\frac{5}{2}(6cos1-4sin1)$$

به همین ترتیب می‌توان سایر ضرایب را نیز بدست آورد.

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(x)=sin1(1)+0(x)+\frac{5}{2}(6cos1-4sin1)\left(\frac{3x^2-1}{2}\right)+\cdots\\&=6sin1-7.5cos1+(22.5cos1-15sin1)x^2+\cdots\ \blacksquare\end{aligned}$$

مثال ۴-۲۲ تابع تکه‌ای هموار $f(x)$ را که در بازه $(-1,1)$ تعریف شده است, بر حسب چند جمله‌ایهای لژاندر بسط دهید.

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\0 & -1<x<0\end{cases}$$

حل برای محاسبه ضرایب بسط $f(x)$ خواهیم داشت:

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\left(\int_{-1}^{0} 0P_n(x)\,dx + \int_0^1 P_n(x)\,dx\right) = \frac{2n+1}{2}\int_0^1 P_n(x)\,dx$$

بجای آنکه مشابه قبل برای هر $P_n(x)$ این انتگرال را محاسبه کنیم, میتوان از رابطه شناخته شده زیر در توابع لژاندر استفاده کرد:

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

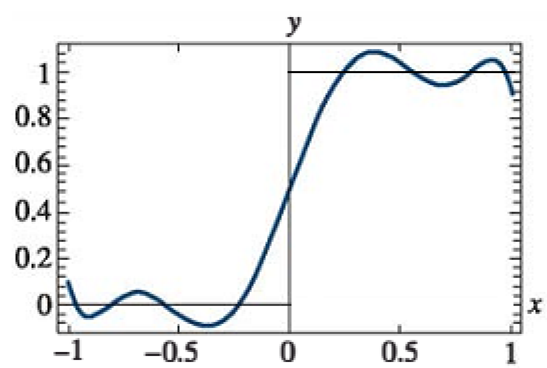
خواهیم داشت:

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^1 P_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)\right)dx = \frac{1}{2}P_{n-1}(0) - \frac{1}{2}P_{n+1}(0)$$

$$c_0 = \frac{1}{2}\ ;c_1 = \frac{3}{4}\ ;c_2 = 0\ ;c_3 = \frac{-7}{16}\ ;c_4 = 0\ ;c_5 = \frac{11}{32}\ ;\ \cdots$$

$$f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{3}{4}P_1(x) - \frac{7}{16}P_3(x) + \frac{11}{32}P_5(x) - \cdots$$

در شکل زیر تابع $f(x)$ در مقایسه با ۵ جمله اول سری لژاندر متناظر آن ترسیم شده است. ■



تمرینات بخش ۴-۵

۱- معادله لژاندر رتبه یک را حل کرده نشان دهید یک جوابِ سری بصورت $y = \frac{x}{2}ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1$ ساده می‌شود.

۲- معادله چبیشف $(Chebyshev)$ را حول نقطه $x_0 = 0$ حل کرده, سپس برای $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ چندجمله‌ایهای چبیشف را بدست آورید.

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0 \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

۴-۶- جوابهای سری حول نقاط غیرعادی(تکین)

در ابتدای این بخش, بهتر است مشخص شود که چرا نمی‌توان جواب حول نقاط غیرعادی را مشابه نقاط عادی بدست آورد. برای این منظور به مثال زیر توجه شود.

مثال ۴-۲۳ معادله کوشی-اویلر زیر را به روش سریها حل کنید.

$$x^2y'' - xy' - 3y = 0 \quad ; \quad x_0 = 0 \quad ; \quad x > 0$$

حل بدیهی است که $x_0 = 0$ نقطه غیرعادی(تکین) معادله است, زیرا هم تکین $p(x) = \frac{-x}{x^2} = \frac{-1}{x}$ و هم $q(x) = \frac{-3}{x^2}$ میباشد. چنانچه بخواهیم مساله را مشابه روشی که برای یافتن جواب حول نقاط عادی بیان شد حل کنیم, خواهیم داشت:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \rightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\xrightarrow{Sub.} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 2n - 3) a_n x^n = 0$$

$$\rightarrow (n+1)(n-3)a_n = 0 \rightarrow \begin{cases} a_n = 0 & n \neq 3 \\ 0a_3 = 0 & n = 3 \end{cases}$$

به عبارتی تمام ضرایب صفر میشود و تنها معادله‌ای که باقی میماند $0a_3 = 0$ میباشد. یعنی a_3 دلخواه است و بقیه صفر و لذا جواب مساله $y = a_3 x^3$ است. به عبارتی فقط یک جواب پایه بدست آمد. در حالی که می‌دانیم جواب دوم این معادله که معادله کوشی-اویلر است $y_2 = \frac{1}{x} = x^{-1}$ میباشد که روش سریها هیچگاه به آن نمی‌رسد, چرا که شمارنده سری یعنی n, نمی‌تواند منفی باشد. ■

بعنوان مثال دیگر اگر جوابهای یک معادله مثلا $x^{\frac{1}{2}}$ و $x^{\frac{1}{3}}$ باشند نیز روش سریها هیچ یک از این جوابها را بدست نمی‌دهد. علت این مشکل از آنجاست که نقطه $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی برای معادله محسوب میشود. به عبارتی انتخاب $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ نمی‌تواند در برگیرنده جوابهایی به فرم x^{-1} , $x^{\frac{1}{2}}$ یا $x^{\frac{1}{3}}$ باشد, چرا که شمارنده سری یعنی n, از صفر شروع شده و صرفا توانهای صحیح مثبت را انتخاب می‌کند. به طریق دیگر تابعی مانند x^{-1} اصلا تحلیلی نیست (زیرا در صفر مقدار تابع یا مشتق آن نامتناهی است) بنابراین نباید توقع داشت بتوان آنرا به فرم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بیان کرد. به همین دلیل است که در ابتدای حل مساله به روش سریهای توانی کنترل می‌کنیم که نقطه x_0 نقطه عادی برای $p(x)$ و $q(x)$ باشد.

سوال دیگری که ممکن است مطرح شود این است که اصولا چرا می‌خواهیم جوابی حول نقاط غیرعادی بدست آوریم. چرا که کافی است بجای این کار, نقطه‌ای که قرار است بسط حول آن نوشته شود را تکین انتخاب نکنیم.

برای پاسخ به این سوال, معادله زیر را در بازه داده شده در نظر می‌گیریم. در این مساله $p(x) = 0$ و $q(x) = \frac{-(x^2-2x+2)}{x^2}$ بوده و تنها تکین آن نقطه $x = 0$ میباشد.

$$x^2 y'' - (x^2 - 2x + 2)y = 0 \quad ; \quad 0 < x < \infty$$

فرض کنید بجای آنکه سری جواب را حول تکین $x_0 = 0$ بنویسیم, تصمیم بگیریم برای فرار از بسط حول تکین, جواب این مساله را حول نقطه عادی $x_0 = 2$ بدست آوریم. اگر این مساله را با دو شرط $y(2) = 2$ و $y'(2) = 1$ به روش سریها حل کنیم, به جواب زیر می‌رسیم:

$$y(x) = 2 + (x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{12}(x-2)^3 + \cdots$$

با فرمولهای تعیین شعاع همگرایی سریهای توانی خواهیم دید که جواب حداقل در بازه $0 < x < 4$ اعتبار دارد (یا می‌توان گفت فاصله $x_0 = 2$ تا تکین $x = 0$ برابر 2 می‌باشد). اما اگر مطابق روشهایی که در ادامه به آن می‌پردازیم جواب مساله را حول تکین $x_0 = 0$ بدست آوریم (تمرینات دوره‌ای این فصل) خواهیم دید که جواب بصورت زیر بدست می‌آید:

$$y(x) = c_1\left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \cdots\right) + c_2\left(\frac{1}{x} + 2 + \frac{x}{2} - \frac{7x^2}{6} + \frac{17x^3}{24} - \frac{31x^4}{120} + \cdots\right)$$

میتوان نشان داد هر دو جواب y_1 و y_2 به ازای هر مقدار x (بجز $x = 0$) همگرا بوده و اتفاقا جواب اول, بسطِ $\frac{e^x}{x}$ و جواب دوم, بسطِ $\frac{e^{-x}}{x}(2x^2 + 2x + 1)$ خواهد بود. با اضافه کردن شرایط اولیه داده شده, به جواب $y(x) = 4\frac{e^{x-2}}{x}$ خواهیم رسید.

به عبارتی اولین تفاوت این دو جواب آن است که وقتی جواب حول نقطه تکین $x_0 = 0$ بدست آمد, به شعاع همگرایی بینهایت رسیدیم, در حالیکه چنانچه جواب حول نقطه عادی $x_0 = 2$ محاسبه شود, شعاع همگرایی آن حداقل به 2 کاهش یافته است.

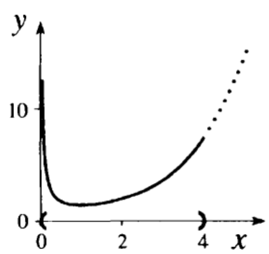
نکته دوم آن است که در جوابی که به فرم سری حول نقطه عادی $x_0 = 2$ بدست آمد, نمی‌توان رفتار سری در نزدیکی نقطه تکین یعنی وقتی ($x \to 0$) را از روی جواب مشاهده کرد, چرا که با جایگذاری $x = 0$ به یک سری نامتناهی خواهیم رسید.

اما در جوابی که حول نقطه تکین $x_0 = 0$ بدست آمد, می‌توان رفتار جواب را در مجاور نقطه تکین بررسی کرد. بدیهی است مقدار x به دلیل وجود ترم $\frac{1}{x}$ نمی‌تواند صفر انتخاب شود, اما وقتی $x \to 0$ در اینصورت خواهیم داشت:

$$y(x) = c_1\left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \cdots\right) + c_2\left(\frac{1}{x} + 2 + \frac{x}{2} - \frac{7x^2}{6} + \frac{17x^3}{24} - \cdots\right) \approx \frac{a}{x} + b$$

به عبارتی در مجاور نقطه تکین, جواب معادله را می‌توان با $\frac{a}{x} + b$ معادل دانست.

در شکل روبرو مقایسه این دو جواب بصورت ترسیمی دیده می‌شود.



بنابراین از اینجا به بعد هدف آن است که بسط حول نقطه غیرعادی انجام شود. برای حل مساله حول این نقاط, روشی که بکار گرفته می‌شود, روش فروبنیوس است. اما این روش نمی‌تواند بسط حول هر نقطه تکینی را بدست آورد. خواهیم دید که برای استفاده از این روش, نقاط غیرعادی بایستی منظم باشند که در ادامه به تعریف آن می‌پردازیم.

قبلا بیان شد اگر توابع $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ و $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ در نقطه x_0 تحلیلی نباشند, این نقطه برای این توابع نقطه غیرعادی نامیده میشود. اما اگر هر دو تابع $(x - x_0)p(x)$ و $(x - x_0)^2q(x)$ در نقطه x_0 تحلیلی باشند (یعنی حول این نقطه بسط تیلور داشته باشند), آنگاه این نقطه, غیرعادیِ منظم و در غیر اینصورت غیرعادیِ نامنظم نامیده می‌شود. در واقع اگر توابع $p(x)$ و $q(x)$ در نقطه x_0 تحلیلی نبوده, اما حاصلضرب آنها به ترتیب در $(x - x_0)$ و $(x - x_0)^2$ در این نقطه تحلیلی باشند, نقطه تکین منظم نامیده می‌شود. مثلا تابع $p(x) = \frac{x^3+4}{x-2}$ در $x_0 = 2$ تحلیلی نیست, اما $(x-2)\frac{x^3+4}{x-2} = x^3 + 4$ در این نقطه (و البته در همه جا) یک تابع تحلیلی است. علت چنین تعریفی را در بخش بعد خواهیم دید.

در حالت خاص اگر $P(x)$, $Q(x)$ و $R(x)$ چندجمله‌ای باشند, کافیست دو حد زیر موجود باشند تا نقطه x_0 , غیرعادیِ منظم نامیده شود:

$$\lim_{x \to x_0}(x - x_0)p(x) \quad ; \quad \lim_{x \to x_0}(x - x_0)^2q(x)$$

لازم بذکر است در کلیه مثالهای این بخش $P(x)$, $Q(x)$ و $R(x)$ بصورت چندجمله‌ای میباشند.

مثال ۴-۲۴ آیا نقاط داده شده برای معادلات زیر منظم میباشند؟

$$1)\ \ y''+\frac{x+2}{x(x-1)}y'+\frac{5}{(x-1)^3}y=0\quad ;\quad x_0=0{,}1$$

$$x_0=0\ :\ (x-x_0)p(x)=xp(x)=\frac{x+2}{x-1}\quad ;\quad (x-x_0)^2q(x)=x^2q(x)=\frac{5x^2}{(x-1)^3}$$

از آنجا که هر دوی این توابع در $x_0=0$ تحلیلی میباشند, لذا این نقطه یک نقطه غیرعادیِ منظم میباشد (در واقع این دو تابع همه جا بجز $x=1$ تحلیلی هستند). روش دیگر آن است که چون $p(x)$ و $q(x)$ بصورت تقسیم دو چندجمله‌ای میباشند, بجای این کار میتوان کنترل کرد که دو حد زیر وجود دارند:

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)p(x)=\lim_{x\to 0}(x-0)\frac{x+2}{x(x-1)}=-2\quad ;\quad \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2q(x)=0$$

$$x_0=1\ :\ (x-x_0)p(x)=\frac{x+2}{x}\quad ;\quad (x-x_0)^2q(x)=\frac{5}{x-1}$$

که $\frac{x+2}{x}$ در $x_0=1$ تحلیلی است, اما $\frac{5}{x-1}$ در این نقطه تحلیلی نمی‌باشد. لذا این نقطه یک نقطه غیرعادیِ نامنظم است و یا:

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)p(x)=\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{x+2}{x(x-1)}=3\quad ;\quad \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2q(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{5}{x-1}=\infty \ \blacksquare$$

$$2)\ \ x^2y''-(2+3x)y=0\quad ;\quad x_0=0$$

از آنجا که $p(x)=0$ و $q(x)=\frac{-(2+3x)}{x^2}$ بصورت تقسیم دو چندجمله‌ای می‌باشند, لذا صرفا دو حد زیر را کنترل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}(x-0)\frac{0}{x^2}=0\quad ;\quad \lim_{x\to 0}(x-0)^2\frac{-(2+3x)}{x^2}=-2$$

بنابراین $x_0=0$ یک نقطه غیرعادیِ منظم است. دقت شود در اولین حد, صفرِ صورت واقعی و صفرِ مخرج بصورت حدی است.■

$$3)\ \ \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2y''+(cosx)y'+(sinx)y=0\quad ;\quad x_0=\frac{\pi}{2}$$

از آنجا که $Q(x)$ و $R(x)$ چندجمله‌ای نیستند, لذا نمی‌توان با کنترل دو حد داده شده, در ارتباط با منظم یا منظم بودن x_0 نظر داد. در این حالت فقط بایستی کنترل کنیم که آیا هر دو تابع $(x-x_0)p(x)$ و $(x-x_0)^2q(x)$ در x_0 تحلیلی هستند یا نه.

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)p(x)=\frac{cosx}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=-1+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}{3!}-\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^4}{5!}+\cdots$$

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2q(x)=sinx=cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1-\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^4}{4!}+\cdots$$

یعنی هر دو تابع, حول $x_0=\frac{\pi}{2}$ دارای بسط تیلور می‌باشند, لذا تحلیلی‌اند. یعنی این نقطه, غیرعادی منظم است. ■

۴-۷- فرمول بندی روش فروبنیوس

در اینجا مساله را در حالت کلی بررسی می‌کنیم. فرض میکنیم $x_0 = 0$ یک نقطه تکین منظم معادله زیر باشد. (بدیهی است اگر $x_0 \neq 0$ باشد میتوان مشابه قبل با یک تغییر متغیر آنرا به صفر منتقل کرد).

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad ; \quad x_0 = 0 \quad ; \quad x > 0$$

با ضرب طرفین در x^2 (یا در حالت کلی $(x-x_0)^2$) خواهیم داشت:

$$L[y] = x^2y'' + x\big(xp(x)\big)y' + \big(x^2q(x)\big)y = 0$$

از آنجا که $x_0 = 0$ یک نقطه تکین منظم معادله می‌باشد, لذا $xp(x)$ و $x^2q(x)$ هر دو تحلیلی بوده و دارای بسط تیلور می‌باشند. در نتیجه با جایگذاری بسطهای تیلور این دو در رابطه بالا خواهیم داشت:

$$L[y] = x^2y'' + x(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots)y' + (q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots)y = 0$$

با توجه به فرم نوشته شده دیده میشود که در همسایگی $x = x_0 = 0$ به معادله $x^2y'' + x(p_0)y' + (q_0)y = 0$ خواهیم رسید که همان معادله کوشی-اویلر است. بنابراین اگر برای معادله اویلر جوابی به صورت a_0x^r داریم, برای این معادله نیز مطابق پیشنهاد فروبنیوس $(Frobenius\ Method)$ جوابی به فرم زیر حدس می‌زنیم که در همسایگی $x = 0$ به همان جواب معادله کوشی-اویلر منجر می‌شود:

$$x^2y'' + x(p_0)y' + (q_0)y = 0 \qquad x^2y'' + x\overbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_nx^n\right)}^{xp(x)}y' + \overbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_nx^n\right)}^{x^2q(x)}y = 0$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$y(x) = a_0x^r \qquad\qquad y(x) = x^r\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\right)$$

در واقع در معادله اویلر با ضرایب p_0 و q_0 جواب بصورت $x^r(a_0)$ میباشد, پس اگر ضرایب بصورت $\sum_{n=0}^{\infty} p_nx^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} q_nx^n$ تغییر کنند, حدس فروبنیوس این است که بتوان جواب را نیز بصورت $x^r(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n)$ انتخاب کرد. در بخشهای بعد خواهیم دید که در برخی حالات چنین حدسی ممکن است ما را صرفا به یک جواب پایه برساند که در اینصورت برای تعیین جواب دوم به طریق دیگری عمل خواهیم کرد. در واقع انتخاب $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+r}$ این اجازه را میدهد که توان x الزاما عدد صحیح مثبت نباشد (به مثال ۴-۲۳ توجه شود که در آنجا نتوانستیم جواب دوم را بیابیم). بنابراین اگر در روش بسط حول نقاط عادی صرفا می‌بایستی ضرایب a_n را بدست آوریم, در اینجا r نیز به مجهولات مساله اضافه می‌شود.

دقت شود که در ادامه همواره اولین ضریب غیرصفر را a_0 در نظر می‌گیریم. در واقع اگر $a_0 = a_1 = 0$ و $a_2 \neq 0$ میتوان در $x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ از x^2 فاکتور گرفت و آنرا جذب x^r کرد. به عبارتی:

$$y(x) = x^r(0x^0 + 0x^1 + 5x^2 - 6x^3 + \cdots) = x^{r+2}\left(\underbrace{5}_{a_0} - 6x + \cdots\right)$$

که $r+2$ خود یک r جدید محسوب میشود. لذا همواره اولین ضریب غیرصفر را a_0 می‌نامیم.

قبل از وارد شدن به جزئیات بحث بهتر است جواب پیشنهادی فروبنیوس را در قالب دو مثال بررسی کنیم.

مثال ۴-۲۵ معادله دیفرانسیل زیر را به روش سریها حول نقطه داده شده حل کنید.

$$3xy'' + y' + y = 0 \quad ; \quad x_0 = 0 \ ; \quad 0 < x < \infty$$

حل اولا بدیهی است که $x_0 = 0$ نقطه تکین معادله است, زیرا هم تکین $p(x) = \frac{1}{3x}$ و هم $q(x) = \frac{1}{3x}$ میباشد. حال کنترل میکنیم تکین مورد نظر یک تکین منظم باشد. برای این منظور با توجه به اینکه $P(x)$, $Q(x)$ و $R(x)$ چندجملهای هستند دو حد زیر را تشکیل میدهیم.

$$\lim_{x\to x_0}(x - x_0)p(x) = \lim_{x\to 0}(x - 0)\frac{1}{3x} = \frac{1}{3} \quad ; \quad \lim_{x\to x_0}(x - x_0)^2 q(x) = \lim_{x\to 0}(x - 0)^2\frac{1}{3x} = 0$$

از آنجا که این دو حد وجود دارند لذا $x_0 = 0$ تکین منظم است. حال سری پیشنهادی فروبنیوس را در معادله جایگذاری می‌کنیم. قبل از این کار با توجه به آنچه در روش فروبنیوس دیده شد معادله را به فرم $x^2y'' + x\big(xp(x)\big)y' + \big(x^2q(x)\big)y = 0$ تبدیل می‌کنیم. برای این منظور کافی است طرفین معادله در x ضرب شود. هر چند بعدا خواهیم دید نیازی به این کار نبوده و می‌توان معادله اولیه را مستقیما حل کرد.

$$L[y] = 3x^2y'' + xy' + xy = 0$$

دیده شد که جواب پیشنهادی فروبنیوس برای بسط حول نقطه غیرعادی منظم بصورت زیر است:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \quad ; \quad a_0 \neq 0$$

$$3x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n + r)(n + r - 1)a_n x^{n+r-2} + x\sum_{n=0}^{\infty}(n + r)a_n x^{n+r-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

توجه شود از آنجا که اولین جمله سری $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$, عدد ثابت نمی‌باشد, پس از مشتق, اندیس پایین زیگما همان $n = 0$ باقی مانده است. با وارد کردن ضرایب معادله داخل سری خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3(n + r)(n + r - 1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n + r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0$$

سریهای اول و دوم دارای توانهای یکسان میباشند. لذا می‌توان آنها را با یک زیگما بیان کرد:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[3(n + r)^2 - 2(n + r)]a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0$$

ساده‌تر است که همه زیگماها را به کمترین توان یعنی x^{n+r} انتقال دهیم. لذا در دومین زیگما خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[3(n + r)^2 - 2(n + r)]a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r} = 0$$

که با انتخاب $a_{-1} \equiv 0$ سری دوم را نیز می‌توان از $n = 0$ شروع کرد. در نتیجه:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{[3(n + r)^2 - 2(n + r)]a_n + a_{n-1}\}x^{n+r} = 0 \quad ; \quad a_{-1} \equiv 0$$

$$\rightarrow [3(n+r)^2-2(n+r)]a_n+a_{n-1}=0 \quad ; \quad n=0,1,2,\cdots \quad (recurrence\ formula)$$

توجه در اینجا علاوه بر ضرایب a_n مقادیر r نیز مشخص نمی‌باشند. اگر رابطه بازگشتی بالا را برای $n=0$ تشکیل دهیم:

$$n=0 \rightarrow (3r^2-2r)a_0+a_{-1}=0 \xrightarrow{a_{-1}\equiv 0 \ ; \ a_0\neq 0} 3r^2-2r=0 \rightarrow r_1=\frac{2}{3} \ ; \ r_2=0$$

همانگونه که عنوان شد همواره اولین ضریب غیرصفر را a_0 در نظر می‌گیریم. همچنین بر حسب قرارداد همواره ریشه بزرگتر را r_1 می‌نامیم. بنابراین دیده شد که بیرون کشیدن جمله $n=0$ از سری می‌تواند منجر به محاسبه مجهول r گردد. برای سایر مقادیر n نیز رابطه بازگشتی بصورت زیر خواهد بود:

$$a_n=\frac{1}{3(n+r)^2-2(n+r)}a_{n-1} \quad ; \quad n=1,2,\cdots$$

حال انتظار داریم هر یک از مقادیر r بتواند منجر به یک جواب پایه گردد. ابتدا با $r_1=\frac{2}{3}$ شروع می‌کنیم.

$$r_1=\frac{2}{3} \rightarrow a_n=\frac{-1}{3\left(n+\frac{2}{3}\right)^2-2\left(n+\frac{2}{3}\right)}a_{n-1} \rightarrow a_n=\frac{-1}{3n^2+2n}a_{n-1} \quad ; \quad n=1,2,\cdots$$

دیده میشود که فرم رابطه بازگشتی بصورت $a_n=f(n)a_{n-k}$ بدست آمده است. در اینحالت میتوان یک فرمول صریح برای محاسبه a_n ارائه داد که روش آن قبلا دیده شد. اما در این مثال بجای وارد شدن به نحوه محاسبه این رابطه, صرفا چند جمله اول آنرا بدست می‌آوریم.

$$n=1: a_1=\frac{-1}{5}a_0 \quad ; \quad n=2: a_2=\frac{-1}{16}a_1=\frac{1}{80}a_0 \quad ; \quad n=3: a_3=\frac{-1}{33}a_2=\frac{-1}{2640}a_0$$

و به همین ترتیب سایر ضرایب نیز قابل محاسبه است. با جایگذاری این ضرایب در جواب فروبنیوس خواهیم داشت:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=x^r\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right]=a_0x^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{1}{5}x+\frac{1}{80}x^2-\frac{1}{2640}x^3+\cdots\right)=a_0y_1$$

توجه شود می‌توانستیم جمله a_0 را داخل خودِ زیگما حفظ کنیم, ولی معمولا جواب نهایی فروبنیوس به این شکل نوشته می‌شود.

بنابراین یک جواب معادله بدست آمده است. از آنجا که در نهایت این جواب بایستی در یک ثابت c_1 ضرب شود, می‌توان از ابتدا $a_0=1$ انتخاب شود. به همین ترتیب برای $r_2=0$ نیز می‌توان محاسبات مشابهی را انجام داد:

$$r_2=0 \rightarrow a_n=\frac{-1}{3(n+0)^2-2(n+0)}a_{n-1} \rightarrow a_n=\frac{-1}{3n^2-2n}a_{n-1} \quad ; \quad n=1,2,\cdots$$

$$n=1: a_1=-a_0 \quad ; \quad n=2: a_2=\frac{-1}{8}a_1=\frac{1}{8}a_0 \quad ; \quad n=3: a_3=\frac{-1}{21}a_2=\frac{-1}{168}a_0$$

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=x^r\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right]=a_0x^0\left(1-x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{168}x^3+\cdots\right)=a_0y_2$$

توجه شود که a_n برای $r_2=0$ هیچ ارتباطی با a_n برای $r_1=\frac{2}{3}$ نداشته و صرفا ثابتهای دلخواهی هستند. بنابراین در نهایت:

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$
$$= c_1 x^{\frac{2}{3}}\left(1 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{80}x^2 - \frac{1}{2640}x^3 + \cdots\right) + c_2 x^0\left(1 - x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{168}x^3 + \cdots\right)$$

دیده می‌شود که ایندو جواب مضرب یکدیگر نیستند لذا مستقلند. ■

توضیح: فرض کنید بدون توجه به تکین بودن $x_0 = 0$ جواب مساله را مشابه آنچه در ارتباط با نقاط عادی دیده شد به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ انتخاب می‌کردیم. با نگاه به جوابهای بدست آمده در بالا بدیهی است نمی‌توانستیم به جوابی مانند y_1 برسیم, چرا که توانهای x همگی به فرم کسری می‌باشند, هر چند جواب y_2 را به دست می‌دهد, چرا که برای $r = 0$ جواب به فرم فروبنیوس یعنی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ به $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ می‌رسد. بنابراین اگر چه یک جواب را بدست می‌آوریم اما نیاز به جواب دوم خواهیم داشت و لذا حل کامل نیست. حتی اگر به عنوان نمونه $r_2 = \frac{1}{2}$ بدست آمده بود, حتی نمی‌توانستیم آن یک جواب را هم بدست آوریم. از این جهت این مثال درست مشابه مثال ۴-۲۳ می‌باشد که با انتخاب جواب به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ فقط یک جواب بدست آمد. ■

بنابراین به نظر میرسد که روش کار ساده خواهد بود, چرا که پس از تعیین r به ازای هر r یک جواب مستقل بدست می‌آید. اما مشکل این است که همیشه اینگونه نیست و مثلا اگر برای r دو مقدار مساوی بدست آید جواب دومی نخواهیم داشت. اما مشکل صرفا همین حالت نبوده و مشکلات دیگری نیز خواهیم داشت. برای این منظور مثال دیگری ارائه می‌شود.

مثال ۴-۲۶ معادله دیفرانسیل زیر را به روش سریها حول نقطه داده شده حل کنید.

$$x^2 y'' - (2 + 3x)y = 0 \quad ; \quad x_0 = 0 \;;\quad 0 < x < \infty$$

حل اولا مشخص است که $x_0 = 0$ نقطه تکین معادله است. زیرا هم تکین $p(x) = \frac{0}{x^2}$ و هم $q(x) = \frac{-(2+3x)}{x^2}$ میباشد. حال کنترل میکنیم تکین مورد نظر یک تکین منظم باشد.

$$\lim_{x\to 0}(x-0)\frac{0}{x^2} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}(x-0)^2\frac{-(2+3x)}{x^2} = -2 \to reg.$$

حال سری پیشنهادی فروبنیوس را در معادله جایگذاری می‌کنیم.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \quad ; \quad a_0 \neq 0$$

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} - 3x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{n+r+1} = 0$$

با جمع دو زیگمای اول خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1) - 2]a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{n+r+1} = 0$$

بایستی همه زیگماها را به کمترین توان یعنی x^{n+r} انتقال دهیم. لذا:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)-2]a_n x^{n+r}-\sum_{n=1}^{\infty}3a_{n-1}x^{n+r}=0$$

مشابه آنچه دیده شد با بیرون کشیدن جمله $n=0$ از سری می‌توان مجهول r را تعیین کرد. بنابراین:

$$[r(r-1)-2]a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\{[(n+r)(n+r-1)-2]a_n-3a_{n-1}\}x^{n+r}=0$$

$$[r(r-1)-2]a_0=0\xrightarrow{a_0\neq 0}r^2-r-2=0\rightarrow r_1=2\ ;\ r_2=-1$$

با مساوی صفر قرار دادن ضرایب سری بدست آمده نیز رابطه بازگشتی بصورت زیر خواهد بود:

$$a_n=\frac{3}{(n+r)(n+r-1)-2}a_{n-1}\quad ;\quad n=1,2,\cdots$$

مشابه قبل انتظار داریم هر یک از مقادیر r بتواند منجر به یک جواب پایه گردد. ابتدا با $r_1=2$ شروع می‌کنیم.

$$r_1=2\rightarrow a_n=\frac{3}{(n+2)(n+1)-2}a_{n-1}=\frac{3}{n(n+3)}a_{n-1}$$

از آنجا که فرم رابطه بازگشتی بصورت $a_n=f(n)a_{n-k}$ بدست آمد, می‌توان یک فرمول صریح برای محاسبه a_n ارائه داد:

$$a_n=\frac{3}{n(n+3)}\times\frac{3}{(n-1)(n+2)}\times\frac{3}{(n-2)(n+1)}\times\cdots\times\frac{3}{2\times 5}\times\frac{3}{1\times 4}a_0=\frac{6\times 3^n}{n!\,(n+3)!}a_0$$

همانگونه که در مثال قبل دیده شد با انتخاب $a_0=1$ و جایگذاری این ضرایب در جواب فروبنیوس خواهیم داشت:

$$a_0=1\rightarrow y_1(x)=x^r\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right]=x^2\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6\times 3^n}{n!\,(n+3)!}x^n\right)$$

بنابراین یک جواب پایه بدست آمد. حال به $r_2=-1$ می‌پردازیم:

$$r_2=-1\rightarrow a_n=\frac{3}{(n-1)(n-2)-2}a_{n-1}=\frac{3}{n(n-3)}a_{n-1}\quad ;\quad n=1,2,\cdots$$

به راحتی دیده می‌شود در اینجا نمی‌توان همه ضرایب را مشابه قبل بدست آورد. چرا که مثلا برای $n=3$ به رابطه $a_3=\frac{3}{0}a_2$ خواهیم رسید, به عبارتی رابطه بازگشتی (قبل از تقسیم) بصورت $0a_3=3a_2$ بوده است. پس بایستی a_2 را محاسبه کنیم:

$$n=1:a_1=\frac{3}{-2}a_0\quad ;\quad n=2:a_2=\frac{3}{-2}a_1=\frac{9}{4}a_0$$

از آنجا که قرار شد $a_0\neq 0$ باشد, بنابراین $a_2\neq 0$ خواهد بود و لذا رابطه $0a_3=3a_2$ به نتیجه نادرست $0a_3\neq 0$ می‌انجامد. به عبارتی نمی‌توان a_3 را تعیین کرد و لذا تکلیف سایر ضرایب بعد از a_3 نیز مشخص نیست. بنابراین به نظر می‌رسد نمی‌توان جواب دوم این معادله را به این طریق بدست آورد. در بخش بعد خواهیم دید که اشکالِ کار در این است که اختلاف دو ریشه یعنی $N=r_1-r_2=3$ یک عدد طبیعی است. در مثال قبل چنین مشکلی پیش نیامد چرا که $r_1-r_2=\frac{2}{3}\notin\mathbb{N}$.

■

توضیح ۱: علت آنکه معمولا در جواب نهایی فروبنیوس جمله a_0 جداگانه نوشته میشود آن است که ابتدا $n=0$ را بیرون کشیده و لذا رابطه بازگشتی برای $n \geq 1$ اعتبار دارد. هرچند می‌توان دید رابطه بازگشتی $a_n = \frac{6\times 3^n}{n!(n+3)!}a_0$ که برای $r_1 = 2$ بدست آمد برای $n=0$ نیز معتبر است و به رابطه بدیهی $a_0 = a_0$ می‌رسد. لذا می‌توان جواب را بصورت زیر نیز بیان کرد:

$$a_0 = 1 \to y_1(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6\times 3^n}{n!\,(n+3)!} x^n$$

توضیح ۲: علاوه بر آنچه در مثال بالا دیده شد, در معادله دیگری ممکن است در نهایت به رابطه $0a_3 = 0$ برسیم که در اینصورت اگر چه یک رابطه درستِ ریاضی است, اما معنی آن این است که a_3 می‌تواند هر عددی انتخاب شود.

بنابراین علاوه بر مشکل ریشه مضاعف برای r , بایستی دو حالتی که منجر به $0a_N = 0$ و $0a_N \neq 0$ می‌شود را نیز به عنوان مشکلات روش فروبنیوس بررسی کنیم که در آن $N = r_1 - r_2$ اختلاف دو ریشه و عددی طبیعی میباشد. ■

پس از بررسی این دو مثال در این قسمت معادله را در حالت کلی حل می‌کنیم تا با روش برخورد با مشکلاتی که در مثال بالا دیده شد آشنا شویم.

همانگونه که عنوان شد هدف حل معادله زیر است که در آن $x_0 = 0$ یک نقطه تکین منظم معادله می‌باشد:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad ; \quad x_0 = 0 \quad ; \quad x > 0$$

با ضرب طرفین در x^2 به معادله زیر رسیدیم:

$$L[y] = x^2 y'' + x\big(xp(x)\big)y' + \big(x^2 q(x)\big)y = 0$$

از آنجا که $x_0 = 0$ یک نقطه تکین منظم معادله می‌باشد, لذا $xp(x)$ و $x^2q(x)$ هر دو تحلیلی بوده و دارای بسط تیلور می‌باشند. در نتیجه با جایگذاری بسطهای تیلور این دو در رابطه بالا, شکل معادله به فرم زیر تبدیل شد:

$$L[y] = x^2 y'' + x\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right)y' + \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right)y = 0$$

بر طبق پیشنهاد فروبنیوس با انتخاب $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ و جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \qquad ; \quad a_0 \neq 0$$

$$\xrightarrow{Sub.} L[y] = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}\right) = 0$$

توجه شود از آنجا که اولین جمله سری $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$, عدد ثابت نمی‌باشد, پس از مشتق, اندیس پایین زیگما همان $n=0$ باقی مانده است.

قبلا عنوان شد که در ضرب دو سری نامتناهی با ضرایب a_n و b_n , ضرایب بصورت $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\, b_k$ میباشد. به عبارتی:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\, b_k\right) x^n$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$L[y] = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(k+r)a_k\right)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} q_{n-k}a_k\right)x^{n+r} = 0$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}[(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k\right\}x^{n+r} = 0$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=0}^{n}[(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k\right\}x^{n+r} = 0$$

که با صفر قرار دادن داخل آکولاد, رابطه بازگشتی بدست می‌آید. اما در ادامه فرم نوشتن این رابطه را قدری ساده‌تر خواهیم کرد.

با بیرون کشیدن جمله نظیر $n = 0$ از سری خواهیم داشت:

$$\rightarrow L[y] = [r(r-1) + p_0 r + q_0]a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=0}^{n}[(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k\right\}x^{n+r} = 0$$

اگر توجه کنیم زیگمای داخل آکولاد جملات شامل a_0 , a_1 , ... و a_n می‌سازد. اولین جمله آکولاد نیز جمله a_n دارد. بنابراین برای رسیدن به یک رابطه بازگشتیِ مناسب, بهتر است در سری داخلی جمله نظیر $k = n$ (که a_n ایحاد میکند) را به بیرون از سری منتقل می‌کنیم تا با a_n موجود در اولین جمله آکولاد در کنار هم بوده و بتوان از آن فاکتور گرفت. در نتیجه:

$$\rightarrow L[y] = [r(r-1) + p_0 r + q_0]a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(n+r)(n+r-1)a_n + [(n+r)p_0 + q_0]a_n + \sum_{k=0}^{n-1}[(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k\right\}x^{n+r} = 0$$

با تعریفِ $F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0$ (که همان معادله مشخصه معادله کوشی-اویلر میباشد) رابطه بالا بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$L[y] = F(r)a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{F(n+r)a_n + \sum_{k=0}^{n-1}[(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k\right\}x^{n+r} = 0$$

با توجه به اینکه $a_0 \neq 0$ میباشد, با متحد قرار دادن دو سمت رابطه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 & n = 0 \qquad (1) \\ F(n+r)a_n = -\sum_{k=0}^{n-1}[(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k & n = 1,2,\cdots \qquad (2) \end{cases}$$

که معادله (1) را معادله مشخصه و رابطه (2) را رابطه بازگشتی سری می‌نامیم. در واقع جمله $n = 0$ را به این دلیل از سری بیرون می‌کشیم تا بتوانیم با تعیین معادله مشخصه, مقادیر r را محاسبه کنیم. جمله نظیر $k = n$ از سری داخلی را نیز بصورت مجزا نوشتیم تا a_nها در کنار هم ظاهر شوند. دیده شد که با فاکتورگیری از a_n , ضریب ایجاد شده را می‌توان بصورت $F(n+r)$ بیان کرد.

فرض کنیم ریشه‌های معادله مشخصه r_1 و r_2 باشند. رابطه بازگشتی (2) , ضرایب a_n را که تابعی از r میباشد, بطور متوالی بر حسب ثابت a_0 بدست می‌دهد. چرا که مثلا برای $n = 1$ خواهیم داشت:

$$F(1+r)a_1 = -\sum_{k=0}^{1-1}[(k+r)p_{1-k} + q_{1-k}]a_k = -[(0+r)p_{1-0} + q_{1-0}]a_0$$

به عبارتی a_1 بر حسب a_0 بدست می‌آید. در ادامه برای $n = 2$ نیز خواهیم داشت:

$$F(2+r)a_2 = -\sum_{k=0}^{2-1}[(k+r)p_{2-k} + q_{2-k}]a_k = -[(0+r)p_{2-0} + q_{2-0}]a_0 - [(1+r)p_{2-1} + q_{2-1}]a_1$$

که a_2 را بر حسب a_1 و a_0 بدست می‌دهد و چون a_1 خود بر حسب a_0 بدست آمد, درنهایت a_2 نیز بر حسب a_0 خواهد شد.

به همین ترتیب سایر ضرایب نیز صرفا بر حسب a_0 بدست می‌آیند. به عبارتی برای هر r , جواب بدست آمده صرفا یک ثابت a_0 خواهد داشت, به عنوان نمونه به مثال ۴-۲۳ توجه شود که در آنجا در جواب نهایی صرفا یک ثابت دیده شد و به عبارتی تنها یک جواب پایه بدست آمد. علت هم آن است که برای یک نقطه غیرعادی, جواب را به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ منظور کردیم, در حالیکه بعدا دیده شد بایستی به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ انتخاب شود. از مقایسه این دو سری می‌توان گفت گویا فقط برای $r = 0$ یک جواب پایه بدست آورده‌ایم $(x^{n+0} = x^n)$.

از آنجا که در نهایت همه ضرایب برای یک r مشخص بر حسب تنها یک ثابت a_0 بدست می‌آیند, لذا a_0 عددی دلخواه بوده و لذا ساده‌تر است در انتهای کار $a_0 = 1$ انتخاب شود, چرا که در نهایت این جواب بایستی در یک ثابت c ضرب شود. بنابراین می‌توان گفت اگر مساله جوابی به فرم فروبنیوس داشته باشد, این جواب را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = x^r\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right] \quad ; \quad a_0 = 1 \qquad (3)$$

در اینجا نیز مشابه معادله کوشی-اویلر می‌توان نشان داد در حالتیکه $x < 0$ باشد صرفا کافی است x^r را به $|x|^r$ تغییر دهیم.

همچنین دقیقتر است در فرم نوشتن روابط (2) و (3) از $a_n(r)$ بجای a_n استفاده شود, چرا که a_nای که برای $r = r_1$ بدست می‌آید متفاوت از a_nای که برای $r = r_2$ خواهیم داشت. در مثالهای این فصل در هنگام جایگذاری جواب فروبنیوس در معادله, برای سادگی از a_n استفاده کرده اما در نهایت در رابطه بازگشتی آنرا به $a_n(r)$ تغییر می‌دهیم.

تا اینجای کار به نظر می‌رسد, روش کار روشن بوده و با جایگذاری هر یک از ریشه‌های معادله مشخصه (1) در رابطه بازگشتی (2) میتوان $a_n(r)$ و سپس از رابطه (3) برای هر r یک جواب را بدست آورد. اما دو مشکل وجود دارد.

۱) یک اشکال مربوط به حالتی است که $r_1 = r_2$ باشد, چرا که در واقع یک جواب پایه بیشتر بدست نمی‌آید.

۲) اشکال دوم کمی پیچیده‌تر است و آن زمانی است که نتوانیم $a_n(r)$ را از (2) بدست آوریم. مجددا این رابطه را می‌نویسیم:

$$F(n+r)a_n = -\sum_{k=0}^{n-1}[(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k \qquad n = 1,2,\cdots \qquad (2)$$

طبیعی است زمانی نمی‌توانیم $a_n(r)$ را از رابطه بازگشتی بالا بدست آوریم که ضریب $a_n(r)$ یعنی $F(n+r)$ برابر صفر گردد. حال ببینیم در چه صورت این اتفاق می‌افتد. فرض کنید در یک مساله پس از حل معادله مشخصه یعنی $F(r) = 0$ ریشه‌ها $r_1 = 5$ و $r_2 = 2$ بدست آمده باشد (عنوان شد که همواره ریشه بزرگتر را r_1 می‌نامیم).

بدیهی است در رابطه بازگشتی (2) اگر $r = r_1 = 5$ انتخاب شود, همواره $F(n+5) \neq 0$, چرا که فقط $F(2) = 0$ و $F(5) = 0$ میباشد و در رابطه (2) مقدار $n \neq 0, -3$ است. بنابراین برای ریشه بزرگتر یعنی r_1 مشکلی نخواهیم داشت و جواب به فرم فروبنیوس بوده و با جایگذاری $r = r_1$ در (3) بدست می‌آید.

اما وقتی بخواهیم رابطه بازگشتی را برای ریشه کوچکتر $r = r_2 = 2$ بدست آوریم, زمانی که $n = 3$ (اختلاف دو ریشه) انتخاب شود آنگاه $F(n+2) = F(5) = 0$ خواهد شد. بنابراین اشکال کار زمانی است که اختلاف دو ریشه عددی طبیعی باشد, یعنی $r_1 - r_2 = N \in \mathbb{N}$ و این اشکال فقط برای ریشه کوچکترِ r_2 و زمانی که $n = N$ گردد رخ می‌دهد, چرا که در اینصورت ضریب $a_n(r) = a_N(r_2)$ برابر صفر بدست می‌آید:

$$r = r_2\,, n = N \xrightarrow{(2)} \underbrace{F(N+r_2)}_{F(r_1)=0}\, a_N(r_2) = -\sum_{k=0}^{N-1}[(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k$$

پس $a_N(r_2)$ بدست نمی‌آید, مگر آنکه تصادفا سمت راست تساوی بالا نیز صفر شود که به رابطه بدیهی $0a_N(r_2) = 0$ خواهیم رسید. بدیهی است در اینحالت $a_N(r_2)$ می‌تواند هر عدد دلخواهی انتخاب شود.

اما اگر $0a_N(r_2) \neq 0$ گردد, از آنجا که هیچ a_Nای بدست نمی‌آید, در واقع به این معنی است که توقعِ داشتن جواب به فرم فروبنیوس (برای ریشه کوچکتر) یعنی به فرمِ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$, از ابتدا اشتباه بوده و لذا بایستی به دنبال یافتن جواب دوم به شکل دیگر باشیم.

بعنوان نمونه در مثال ۴-۲۶ دیده شد که ریشه‌های معادله مشخصه $r_1 = 2$ و $r_2 = -1$ بدست آمد. در آنجا دیده شد که برای $r_1 = 2$ توانستیم یک جواب پایه بدست آوریم. اما برای ریشه کوچکتر یعنی $r_2 = -1$ در تعیین a_3 به رابطه نادرست $0a_3 \neq 0$ رسیدیم که همان حالت $0a_N(r_2) \neq 0$ بوده و بنابراین از آنجا که a_3 بدست نمی‌آید, گویا جواب دوم به شکل فروبنیوس نخواهد بود.

در مجموع می‌توان گفت در حالتی‌که دو ریشه متمایز و اختلاف آنها عدد طبیعی نیست, مشکلی برای محاسبه جواب دوم نخواهیم داشت. بعنوان نمونه در مثال ۴-۲۵ دیده شد که ریشه‌های معادله مشخصه $r_1 = \frac{2}{3}$ و $r_2 = 0$ بدست آمد. از آنجا که اختلاف این دو ریشه طبیعی نیست لذا هر یک از ریشه‌ها منجر به تعیین یک جواب پایه برای معادله شد.

اگر دو ریشه مساوی باشد نیز طبیعتا جواب دومی با این شیوه بدست نمی‌آید. همچنین اگر اختلاف دو ریشه عدد طبیعی باشد به یکی از دو حالت $0a_N(r_2) = 0$ و $0a_N(r_2) \neq 0$ خواهیم رسید که در بخشهای بعد به بررسی این موارد می‌پردازیم.

توضیح ۱: بیان شد که برای استفاده از روش فروبنیوس, نقطه x_0 بایستی غیرعادی منظم باشد, یعنی دو تابع $(x-x_0)p(x)$ و $(x-x_0)^2q(x)$ تحلیلی باشند که وقتی $p(x)$ و $q(x)$ نسبت دوچند جمله‌ای باشد, این کار به محاسبه دو حد انجامید. حال نشان می‌دهیم این دو حد در واقع همان p_0 و q_0 میباشند. چرا که با توجه به تحلیلی بودن این دو تابع می‌توان برای آنها سری تیلور نوشت و در نتیجه:

$$(x-x_0)p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x-x_0)^n \to \lim_{x\to x_0}(x-x_0)p(x)=p_0$$

$$(x-x_0)^2q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(x-x_0)^n \to \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2q(x)=q_0$$

یعنی در همان ابتدای کار که کنترل منظم بودن صورت می‌گیرد, می‌توان معادله مشخصه $F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0$ را تشکیل داد و ریشه‌های آنرا بدست آورد تا متوجه شویم با کدام‌یک از حالات عنوان شده در متن درس روبرو هستیم.

توضیح ۲: در تمام حالات, جواب نهایی $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ بوده و برطبق قضیه فروبنیوس شعاع همگرایی جواب حداقل بزرگتر یا مساوی حداقل شعاع همگرایی $(x-x_0)p(x)$ و $(x-x_0)^2q(x)$ خواهد بود. یا می‌توان گفت این شعاع, حداقل به اندازه فاصله نقطه x_0 تا نزدیکترین نقطه تکین$(x-x_0)p(x)$ و $(x-x_0)^2q(x)$ میباشد. مثلا اگر:

$$x_0=0\ ;\ (x-x_0)p(x)=x\ \ ;\ (x-x_0)^2q(x)=\frac{1}{x-1}$$

شعاع همگرایی اولی بینهایت و دومی 1 است. پس شعاع همگرایی جواب نهایی, حداقل برابر 1 خواهد بود. و یا میتوان فاصله x_0 تا نزدیکترین تکین دو عبارت $(x-x_0)p(x)$ و $(x-x_0)^2q(x)$ که همان 1 میباشد برابر است با $R=|1-0|=1$.

خلاصه روش حل معادلات به روش سریها حول نقطه غیرعادی منظم

هدف حل معادله زیر حول نقطه غیرعادی(تکین) x_0 می‌باشد:

$$L[y]=y''+p(x)y'+q(x)y=0\quad ;\quad x_0=0\quad ;\quad x>0$$

که اگر $x_0\neq 0$ باشد, ابتدا با یک تغییر متغیر آنرا به صفر منتقل می‌کنیم. مراحل حل مساله در پنج گام و بصورت زیر می‌باشد:

۱- ابتدا بررسی می‌کنیم که $x_0=0$ نقطه غیرعادی منظم است. سپس برای کنترل محاسبات بعدی معادله مشخصه و ریشه‌های آنرا می‌یابیم:

$$F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0\qquad(1)\qquad;\qquad F(r)=0\to r_1,r_2\qquad(r_1\geq r_2)$$

با تعیین ریشه‌ها به یکی از سه حالت زیر خواهیم رسید که حل مساله برای هر حالت روش خاص خود را خواهد داشت:

الف: دو ریشه متمایز و اختلاف آنها عدد طبیعی نیست.

ب: دو ریشه مساوی هستند.

ج: اختلاف دو ریشه عدد طبیعی است که خود شامل دو حالت $0a_N(r_2)=0$ یا $0a_N(r_2)\neq 0$ خواهد بود. $(N=r_1-r_2)$

این تفاوتِ روش حل در گام پنجم دیده خواهد شد.

۲- جواب را بصورت $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$ انتخاب می‌کنیم که در آن $a_0\neq 0$ عددی دلخواه است. پس از جایگذاری در معادله, چنانچه در سریها جملات با توان مشابه وجود داشته باشد آنها را با یکدیگر جمع میکنیم. در ادامه مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

الف: یکسان سازی توانها, که معمولا همگی به کمترین توان تبدیل می‌شوند.

ب: یکسان سازی اندیس پایین زیگماها به $n=0$ و $n=1$ که ممکن است نیاز باشد تعدادی اندیس منفی برای a_n برابر صفر انتخاب شود.

ج: بیرون کشیدن جمله $n=0$ و نوشتن مابقی جملات بصورت یک سری با شروع از $n=1$.

د: مرتب سازی رابطه بدست آمده به فرم زیر:

$$L[y]=\underbrace{F(r)a_0x^r}_{n=0}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{F(n+r)a_n+\sum_{k=0}^{n-1}(\cdots)a_k\right\}x^{n+r}=0$$

۳- با متحد قرار دادن دو طرف تساوی برای $n=0$ خواهیم داشت:

$$F(r)a_0=0\xrightarrow{a_0\neq 0}F(r)=0\rightarrow r_1,r_2$$

که بایستی به همان نتیجه گام اول برسیم. همچنین باید ضریبِ x^{n+r} نیز برابر صفر باشد که رابطه بازگشتی را خواهد داد.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\quad\}=0\rightarrow F(n+r)a_n(r)=-\sum_{k=0}^{n-1}(\cdots)a_k(r)\ ;n=1,2,\cdots\ \rightarrow a_n(r)=\frac{-\sum_{k=0}^{n-1}(\cdots)\,a_k(r)}{F(n+r)}$$

<u>نکته:</u> توجه شود نوشتن رابطه سمت راست تنها در صورتی مجاز است که $F(n+r)\neq 0$ باشد. دیده شد که تنها زمانی $F(n+r)=0$ می‌شود که اختلاف دو ریشه طبیعی بوده (حالت ج) , $r=r_2$ و $n=N$ انتخاب شود. بنابراین در حالت ج, در گام پنجم (محاسبات نظیر ریشه کوچکتر), در ابتدا با انتخاب $n=N$ و استفاده از فرم اولیه رابطه بازگشتی(و نه تقسیم شده آن) کنترل می‌کنیم که با حالت $0a_N(r_2)=0$ روبرو هستیم یا $0a_N(r_2)\neq 0$.

بنابراین به جز این مورد, در همه جا از فرم تقسیم شده رابطه بازگشتی استفاده می‌کنیم.

۴- با انتخاب $r=r_1$ (ریشه بزرگتر) از رابطه بازگشتی قسمت قبل a_n را یا بصورت فرم بسته و یا بصورت جمله به جمله بدست می‌آوریم. در اینصورت جواب اول به فرم فروبنیوس بوده و با جایگذاری $r=r_1$ در رابطه (3) بدست می‌آید:

$$a_0=1\xrightarrow{(3)}y_1(x)=|x|^{r_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right]$$

۵- با انتخاب $r=r_2$ (ریشه کوچکتر) یکی از سه حالت زیر را خواهیم داشت:

الف: دو ریشه متمایز و اختلاف آنها عدد طبیعی نیست. در این حالت جواب دوم نیز به فرم فروبنیوس بوده و با جایگذاری $r=r_2$ در رابطه (3) بدست می‌آید. (بخش ۴-۷-۱)

ب: دو ریشه مساوی هستند. در این حالت جواب دومی به فرم فروبنیوس بدست نمی‌آید. (بخش ۴-۷-۲)

ج: اختلاف دو ریشه عدد طبیعی است. همانگونه که در انتهای گام سوم عنوان شد, در ابتدا با استفاده از فرم اولیه رابطه بازگشتی (و نه تقسیم شده آن) کنترل می‌کنیم که با حالت $0a_N(r_2) = 0$ روبرو هستیم یا $0a_N(r_2) \neq 0$. به عبارتی با جایگذاری $r = r_2$ و $n = N$ در فرم اولیه رابطه بازگشتی خواهیم داشت:

$$if\ r_1 - r_2 = N \in \mathbb{N} \xrightarrow{r=r_2\ \ ,\ \ n=N} \underbrace{F(N+r_2)}_{F(r_1)=0} a_N(r_2) = -\sum_{k=0}^{N-1} (\cdots) a_k(r)$$

۱) اگر سمت راست تصادفا صفر شود, یعنی $0a_N(r_2) = 0$ بوده و لذا جواب دوم نیز به فرم فروبنیوس می‌باشد. (بخش ۴-۷-۳)

۲) اگر سمت راست صفر نشود, یعنی $0a_N(r_2) \neq 0$ که در اینصورت جواب دوم به فرم فروبنیوس نخواهد بود. (بخش ۴-۷-۴)

همانگونه که قبلا نیز ذکر شد بجز این حالت خاص, در همه جا میتوان از فرم تقسیم شده رابطه بازگشتی استفاده کرد.

توضیح: توجه شود که اگر ریشه‌ها مختلط باشند, از آنجا که ضرایب معادله حقیقی‌اند, لذا ریشه‌ها مزدوج یکدیگر میباشند. بنابراین اختلاف آنها عدد طبیعی نبوده و در واقع همان حالت الف می‌باشد, یعنی دو ریشه متمایز و اختلاف آنها عدد طبیعی نیست. درست شبیه آنچه در بحث معادله کوشی-اویلر دیده شد, جوابها را می‌توان قسمتهای حقیقی و موهومی جوابِ بدست آمده دانست:

$$y(x) = |x|^{\lambda+\mu i} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) x^n$$

$$y_1(x) = Re\big(y(x)\big) = x^{\lambda} \left[cos(\mu ln|x|) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - sin(\mu ln|x|) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right]$$

$$y_2(x) = Im\big(y(x)\big) = x^{\lambda} \left[cos(\mu ln|x|) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + sin(\mu ln|x|) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right]$$

۴-۷-۱- دو ریشه متمایز و اختلاف آنها عدد طبیعی نیست

در شروع بخش ۴-۷ برای آشنایی با روش فروبنیوس مثال ۴-۲۵ مطرح گردید و دیده شد که ریشه‌های آن $r_1 = \frac{2}{3}$ و $r_2 = 0$ بدست آمد. بنابراین در آن مثال با معادله‌ای روبرو بودیم که اختلاف ریشه‌های آن طبیعی نبوده و دیده شد که برای هر r یک جواب مستقل بدست آمد. در اینجا یک مثال دیگر از این حالت ارائه می‌شود. همانگونه که عنوان شد اگر دو ریشه متمایز و اختلاف آنها عدد طبیعی نباشد, هر دو جواب با انتخاب $r = r_1$ و $r = r_2$ به فرم (3) خواهند بود.

مثال ۴-۲۷ معادله دیفرانسیل زیر را به روش سریها حول نقطه داده شده حل کنید.

$$6x^2y'' + 7xy' - (1+x^2)y = 0 \quad ; \quad x_0 = 0 \ ; \quad 0 < x < \infty$$

حل از آنجا که $x_0 = 0$ نقطه تکین معادله است, مراحل حل معادله در پنج گام و بصورت زیر خواهد بود:

۱- بررسی منظم بودن نقطه غیرعادی, تشکیل معادله مشخصه از رابطه (1) و تعیین ریشه‌های آن

از آنجا که $p(x)$ و $q(x)$ نسبت دو چندجمله‌ای هستند, اگر هر دو حد زیر وجود داشته باشد, نقطه غیرعادی, منظم خواهد بود.

$$p_0 = \lim_{x\to 0}(x-0)\frac{7x}{6x^2} = \frac{7}{6} \quad ; \quad q_0 = \lim_{x\to 0}(x-0)^2\frac{-(1+x^2)}{6x^2} = \frac{-1}{6} \to reg.$$

بدیهی است اگر $p(x)$ و $q(x)$ نسبت دو چندجمله‌ای نباشند, برای بررسی منظم بودن, بایستی کنترل کنیم $(x-x_0)p(x)$ و $(x-x_0)^2q(x)$ در تکین x_0 هر دو تحلیلی باشند, یعنی بسط تیلور داشته باشند (مشابه قسمت سوم مثال ۴-۲۴).

معادله مشخصه را با استفاده از رابطه (1) تشکیل می‌دهیم:

$$F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0=r(r-1)+\frac{7}{6}r-\frac{1}{6}$$

$$F(r)=0\rightarrow 6r^2+r-1=0\rightarrow r_1=\frac{1}{3}\ \ ;\ \ r_2=-\frac{1}{2}$$

در واقع این کار لازم نیست, زیرا در گام بعد پس از بیرون کشیدن $n=0$ از سری بدست آمده به همین نتیجه خواهیم رسید. مزیت این کار آن است که در ابتدا متوجه می‌شویم که با حالت الف یعنی ریشه‌ها متمایز و اختلاف آنها غیرطبیعی, سروکار داریم. علاوه بر این, در ادامه وقتی $n=0$ از سری بیرون کشیده می‌شود, میتوان نتیجه را با آنچه در اینجا بدست آورده‌ایم کنترل کرد.

۲- حال که نقطه غیرعادی منظم است, سری پیشنهادی فروبنیوس را در معادله جایگذاری میکنیم:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}\quad ;\quad a_0\neq 0\quad \text{دلخواه}$$

$$6x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}+7x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}-(1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

با وارد کردن ضرایب معادله داخل سری خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty}6(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}7(n+r)a_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+2}=0$$

با ترکیب سریهای اول تا سوم خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[6(n+r)(n+r-1)+7(n+r)-1]a_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+2}=0$$

همه زیگماها را به کمترین توان یعنی x^{n+r} انتقال می‌دهیم. لذا در آخرین زیگما خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[6(n+r)(n+r-1)+7(n+r)-1]a_nx^{n+r}-\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+r}=0$$

در فرمول بندی فروبنیوس از آنجا که قرار است جمله $n=0$ را بیرون کشیده و مابقی را از $n=1$ بنویسیم, لذا اندیس شروع زیگماها را به $n=0$ و $n=1$ تبدیل می‌کنیم. برای این منظور در زیگمای بالا در دومین زیگما $n=2$ را به $n=1$ تغییر داد و در عوض فرض می‌کنیم $a_{-1}\equiv 0$ انتخاب شده است. در نتیجه پس از ساده‌سازی زیگمای اول خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[6(n+r)^2+(n+r)-1]a_nx^{n+r}-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-2}x^{n+r}=0\quad ;\quad a_{-1}\equiv 0$$

برای تعیین معادله مشخصه, با خارج کردن جمله نظیر $n=0$ از سری خواهیم داشت:

$$\underbrace{(6r^2+r-1)}_{F(r)}a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\underbrace{[6(n+r)^2+(n+r)-1]}_{F(n+r)}a_n-a_{n-2}\right\}x^{n+r}=0$$

بهتر است همواره کنترل شود که فرم رابطه نوشته شده, درست مشابه فرم رابطه بازگشتی باشد که در متن درس در حالت کلی بدست آمد.

۳- با متحد قرار دادن دو طرف تساوی خواهیم داشت:

$$(6r^2+r-1)a_0=0\xrightarrow{a_0\neq 0}r_1=\frac{1}{3}\ \ ;\ \ r_2=-\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\quad\}=0\to\underbrace{[6(n+r)^2+(n+r)-1]}_{F(n+r)}a_n(r)-a_{n-2}(r)=0\quad;\quad n=1,2,\cdots$$

بنابراین از آنجا که در حالت الف هستیم, لذا همواره $F(n+r)\neq 0$ خواهد بود. در نتیجه:

$$a_n(r)=\frac{1}{6(n+r)^2+n+r-1}a_{n-2}(r)\quad;\quad n=1,2,\cdots$$

۴- با انتخاب $r=r_1$ (ریشه بزرگتر) خواهیم داشت:

$$r_1=\frac{1}{3}\to a_n=\frac{1}{6\left(n+\frac{1}{3}\right)^2+n+\frac{1}{3}-1}a_{n-2}=\frac{3}{2(3n+1)^2+3n-2}a_{n-2}\quad;\quad n=1,2,\cdots$$

حال می‌توان جمله به جمله ضرایب را بصورت زیر بدست آورد. (به توضیح ۲ توجه شود)

$$n=1\ :\ \ a_1=\frac{1}{11}a_{-1}=0\qquad;\quad n=2\ :\ \ a_2=\frac{1}{34}a_0$$

$$n=3\ :\ \ a_3=\frac{1}{69}a_1=0\quad;\quad n=4\ :\ \ a_4=\frac{1}{116}a_2=\frac{1}{116}\frac{1}{34}a_0\quad;\quad\cdots$$

در نهایت با انتخاب $a_0=1$ و جایگذاری در رابطه (3) جواب اول بصورت زیر بدست می‌آید:

$$a_0=1\xrightarrow{(3)}y_1(x)=x^{r_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right]$$
$$=x^{\frac{1}{3}}\left[1+\frac{1}{34}x^2+\frac{1}{116\times 34}x^4+\frac{1}{246\times 116\times 34}x^6+\cdots\right]$$

۵- از آنجا که با حالت الف روبرو هستیم, جواب دوم نیز با انتخاب $r=r_2$ (ریشه کوچکتر) بدست می‌آید:

$$r_2=-\frac{1}{2}\to a_n=\frac{1}{6\left(n-\frac{1}{2}\right)^2+n-\frac{1}{2}-1}a_{n-2}=\frac{2}{3(2n-1)^2+2n-3}a_{n-2}\quad;\quad n=1,2,\cdots$$

دقت شود که a_n هایی که برای $r=r_1$ بدست آوردیم هیچ ارتباط با a_n های نظیر $r=r_2$ نداشته و لذا بایستی a_n های نظیر این ریشه را نیز بدست آوریم. به همین جهت همانگونه که دیده شد بهتر است همه جا از نماد $a_n(r)$ استفاده شود, اما معمولا گاهی برای سادگی نمایش همان a_n را بکار می‌برند. در اینجا نیز جمله به جمله ضرایب را بصورت زیر بدست می‌آوریم:

$$n=1\ :\ a_1=a_{-1}=0 \qquad ; \quad n=2\ :\ a_2=\frac{1}{14}a_0$$

$$n=3\ :\ a_3=\frac{1}{39}a_1=0 \quad ; \quad n=4\ :\ a_4=\frac{1}{76}a_2=\frac{1}{76}\frac{1}{14}a_0 \quad ; \quad \cdots$$

$$a_0=1 \xrightarrow{(3)} y_2(x)=x^{r_2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_2)x^n\right]$$

$$=x^{-\frac{1}{2}}\left[1+\frac{1}{14}x^2+\frac{1}{76\times 14}x^4+\frac{1}{186\times 76\times 14}x^6+\cdots\right]$$

و در انتها نیز جواب نهایی ترکیب خطی دو جواب یعنی $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ خواهد بود. ■

توضیح ۱: میتوان مستقیما از رابطه (2) که در اثبات روش فروبنیوس دیده شد, رابطه بازگشتی را بدون جایگذاری جواب به فرم $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$ نیز بدست آورد. برای این منظور ابتدا بسط $(x-x_0)p(x)$ و $(x-x_0)^2q(x)$ را می‌نویسیم:

$$xp(x)=x\frac{7x}{6x^2}=\frac{7}{6}=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots\to p_0=\frac{7}{6} \quad ; \quad oth=0$$

$$x^2q(x)=x^2\frac{-(1+x^2)}{6x^2}=-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}x^2=q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots\to q_0=q_2=-\frac{1}{6} \ ; \ oth=0$$

بنابراین معادله مشخصه (1) و رابطه بازگشتی (2) بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0=r(r-1)+\frac{7}{6}r-\frac{1}{6} \qquad ; \qquad F(r)=0\to r_1=\frac{1}{3};r_2=-\frac{1}{2}$$

$$F(n+r)a_n=-\sum_{k=0}^{n-1}[(k+r)p_{n-k}+q_{n-k}]a_k \qquad n=1,2,\cdots \qquad (2)$$

دقت شود p_0 و q_0 صرفا در معادله مشخصه (1) وارد می‌شوند و رابطه بازگشتی (2) شامل ایندو ضریب نمی‌باشد, چرا که k هیچگاه n نخواهد شد. پس تنها ضریب باقیمانده q_2 خواهد بود, که وقتی $k=n-2$ گردد, ایجاد میشود. به عبارتی در این مثال سمت راست رابطه بازگشتی تنها یک جمله خواهد داشت.

$$\to\left((n+r)(n+r-1)+\frac{7}{6}(n+r)-\frac{1}{6}\right)a_n=-\underbrace{[(n-2+r)p_2+q_2]}_{(n-2+r)0+\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{6}}a_{n-2}=\frac{1}{6}a_{n-2}$$

$$\to(6(n+r)^2+(n+r)-1)a_n=a_{n-2}\to a_n=\frac{1}{6(n+r)^2+n+r-1}a_{n-2} \quad ; \quad n=1,2,\cdots$$

دیده می‌شود با استفاده از این دو رابطه دیگر نیازی به جایگذاری $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$ در معادله و یکسان کردن توانها و نیز بیرون کشیدن $n=0$ نمی‌باشد. فقط دقت شود مزیت استفاده از این روش وقتی است که ضریب y'' یعنی $P(x)$ تک‌جمله‌ای باشد, چرا که در اینصورت از زیگمای موجود در سمت راست رابطه بازگشتی (2) فقط چند جمله آن باقی می‌ماند.

توضیح ۲: در مثال بالا با توجه به اینکه $a_n=f(n,r)a_{n-2}$ بدست آمد, میتوان مشابه قبل یک فرمول صریح برای محاسبه a_n ارائه داد. از آنجا که هر ضریب با ضریب ۲ جمله قبل ارتباط دارد, برای محاسبه آنها ۲ ستون لازم است.

توضیح ۳: همواره قبل از حل معادله می‌توان حداقل شعاع همگرایی جواب را تعیین کرد. عنوان شد که شعاع همگرایی جواب حداقل به اندازه فاصله نقطه x_0 تا نزدیکترین نقطه تکین $(x-x_0)p(x)$ و $(x-x_0)^2q(x)$ میباشد. برای این مثال:

$$(x-x_0)p(x) = x\frac{7x}{6x^2} = \frac{7}{6} \quad ; \quad (x-x_0)^2q(x) = x^2\frac{-(1+x^2)}{6x^2} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6}x^2$$

از آنجا که این دو عبارت تحلیلی میباشند, لذا شعاع همگرایی بینهایت خواهد بود. یعنی اعتبار جواب برای $0 < x < \infty$ میباشد. علاوه بر این مشابه توضیح ۲ مثال ۴-۱۴ می‌توان به کمک رابطه بازگشتی نیز کنترل کرد که شعاع همگرایی هر دو جواب بینهایت است.

حال فرض کنید می‌خواستیم بسط را حول نقطه غیرتکینی مانند $x_0 = 2$ انجام دهیم, مطابق آنچه در بحث نقاط عادی عنوان شد شعاع همگرایی جواب, حداقل به اندازه فاصله $x_0 = 2$ تا نزدیکترین نقطه تکین $p(x)$ و $q(x)$ یعنی 0 می‌باشد. بنابراین $R = |0-2| = 2$ خواهد بود. به عبارتی جواب نهایی حداقل در بازه $|x-2| < 2$ یعنی $0 < x < 4$ اعتبار خواهد داشت. در حالیکه با بسط حول تکین معادله یعنی $x_0 = 0$ همانگونه که دیده شد شعاع همگرایی جواب, بینهایت بدست آمد.

علاوه بر این از مزایای حل در مجاور نقطه تکین آن است که می‌توان رفتار جواب را در مجاور نقطه تکین بررسی کرد. بدیهی است مقدار x به دلیل وجود ترم $x^{-\frac{1}{2}}$ نمی‌تواند صفر انتخاب شود, اما وقتی $x \to 0$ در اینصورت:

$$if \;\; x \to 0 \;\; : \;\; y(x) = c_1x^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1}{34}x^2 + \cdots\right) + c_2x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{14}x^2 + \cdots\right) \approx c_2\frac{1}{\sqrt{x}}$$

توجه شود که اگر بسط حول نقطه عادی بدهیم, نمی‌توان رفتار در نزدیکی تکین را از روی جواب مشاهده کرد چون به یک سری نامتناهی منجر می‌شود.

پس همانگونه که در ابتدا نیز بیان شد لااقل به دو دلیل نیاز به بسط حول نقطه تکین داریم. دلیل اول افزایش بازه همگرایی است و دلیل دوم نیز امکان بررسی جواب در نزدیکی نقطه تکین خواهد بود. ■

تمرینات بخش ۴-۷-۱

۱- جوابهای معادلات دیفرانسیل زیر را به روش سریها، در نزدیکی $x_0 = 0$ بدست آورید.

1) $2xy'' + (1+x)y' - 2y = 0$

$$\underline{Ans}: \;\; y(x) = c_1\left(1 + 2x + \frac{1}{3}x^2\right) + c_2x^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{40}x^2 - \cdots\right)$$

2) $2xy'' + (1+x)y' + y = 0$

$$\underline{Ans}: \;\; y(x) = c_1x^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}} + c_2\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{n-1}(n-1)!}{(2n-1)!}x^n\right)$$

3) $3x^2y'' - (x+x^2)y' + y = 0$

$$\underline{Ans}: \;\; y(x) = c_1x\left(1 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{40}x^2 + \frac{1}{440}x^3 + \cdots\right) + c_2x^{\frac{1}{3}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^nn!}x^n\right)$$

4) $3xy'' + (3x+2)y' - 4y = 0$; Ans: $y_1(x) = x^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$

5) $2xy'' + y' + y = 0$; Ans: $y(x) = c_1 cos\sqrt{2x} + c_2 sin\sqrt{2x}$

توضیح: لازم به ذکر است که معادلات ارائه شده در قسمتهای ۴و ۵ , قبلا در تمرین ۱ بخش ۲-۱۱ با داشتن یک پایه جواب مطرح شده‌اند. همچنین معادله ۵ در تمرین ۷ بخش ۲-۱۲ با استفاده از تغییر متغیر نیز بررسی گردیده است.

۲- جوابهای معادله دیفرانسیل زیر را که در واقع معادله بسل رتبه $v = \frac{1}{3}$ میباشد, حول $x_0 = 0$ بدست آورید. ($x > 0$)

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \xrightarrow{v=\frac{1}{3}} x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$$

$$Ans: \ y_1(x) = x^{\frac{1}{3}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(2+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(n+\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right)$$

$$y_2(x) = x^{-\frac{1}{3}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(2-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(n-\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right)$$

۴-۷-۲- دو ریشه مساوی هستند

در این حالت که ریشه‌ها مساوی هستند, اگر جواب متناظر $r = r_1$ فرم بسته داشته باشد(یعنی بتوان آنرا بر حسب توابع مقدماتی بیان کرد), بهترین کار برای جواب دوم, کاهش مرتبه است. هر چند خواهیم دید حتی اگر جواب اول به فرم بسته هم نباشد باز این کار امکان پذیر است اما طولانی است. در اینجا برای تعیین جواب دوم روش دیگری ارائه می‌شود که تقریبا مشابه روشی است که برای معادله کوشی-اویلر برای ریشه مضاعف عنوان شد. فرض کنید y یک جواب معادله $L[y] = 0$ در دست باشد. در اینصورت:

$$L[y] = F(r)a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{F(n+r)a_n + \sum_{k=0}^{n-1}[(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k\right\}x^{n+r} = 0$$

از آنجا که $F(n+r) \neq 0$ می‌باشد, لذا اگر $a_n(r)$ بصورت زیر انتخاب شود, ضریب x^{n+r} برابر صفر خواهد شد.

$$a_n(r) = \frac{-\sum_{k=0}^{n-1}[(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k}{F(n+r)} \ ; \ n \geq 1$$

با این انتخاب برای $a_n(r)$, از آنجا که $F(r) = (r-r_1)^2$ میباشد, خواهیم داشت:

$$L[y] = F(r)a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\{0\}x^{n+r} = a_0x^r(r-r_1)^2$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r}L[y] = a_0x^r lnx(r-r_1)^2 + 2a_0x^r(r-r_1) \xrightarrow{r=r_1} L\left[\frac{\partial y}{\partial r}\right]_{r=r_1} = 0$$

به عبارتی درست با همان روشی که برای معادله کوشی-اویلر در حالت ریشه مضاعف دیده شد, در اینجا نیز جواب دوم با جایگذاری $r = r_1$ در $\frac{\partial y}{\partial r}$ بدست می‌آید. حال این جواب را بدست می‌آوریم:

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left[x^r\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)x^n\right)\right] = x^r lnx\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)x^n\right) + x^r\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r)x^n$$

از آنجا که $y_1(x) = x^{r_1}(1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n)$ میباشد, با جایگذاری $r = r_1$ در رابطه بالا خواهیم داشت:

$$y_2(x) = \left.\frac{\partial y}{\partial r}\right|_{r=r_1} \rightarrow y_2(x) = y_1(x)lnx + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)x^n \qquad (x>0)$$

بنابراین دیده میشود که در حالت ریشه مضاعف, جواب دوم بدلیل وجود ترم lnx به فرم فروبنیوس نیست. توجه شود در اینجا نیز اگر $x<0$ باشد, صرفا کافی است lnx را به $ln|x|$ و x^{r_1} را به $|x|^{r_1}$ تغییر دهیم.

بطور خلاصه در حالت $r_1 = r_2$ سه روش برای تعیین جواب دوم وجود دارد:

۱- اگر a_n بر حسب a_{n-k} بیان شده باشد, از آنجا که می‌توان $a_n(r)$ را بر حسب a_0 به فرم بسته بدست آورد, با محاسبه $a_n'(r_1)$ و فرمول بالا جواب دوم بدست می‌آید. دقت شود مشتق $a_n(r)$, نسبت به r می‌باشد.

اما در صورتی که بدست آوردن فرم بسته برای $a_n(r)$ مشکل باشد, می‌توان چند جمله اول آنرا بصورت زیر نوشت:

$$y_2(x) = y_1(x)lnx + x^{r_1}[a_1'(r_1)x^1 + a_2'(r_1)x^2 + a_3'(r_1)x^3 + \cdots]$$

که در اینصورت فقط لازم است برای چند جمله اولیه, $a_n'(r_1)$ها بدست آید.

۲- در روش دوم با انتخاب جواب به فرم زیر, ضرایب نامعین b_n را بدست می‌آوریم. در واقع دیده میشود که b_n جایگزین $a_n'(r_1)$ شده است. دقت شود که اندیس b_nها از $n=1$ شروع میشود.

$$y_2(x) = y_1(x)lnx + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

این روش نیز معمولا زمانی استفاده میشود که محاسبه فرم بسته برای $a_n(r)$ و یا حتی تعیین چند جمله اول آن طولانی باشد. دقت شود با این روش نیز معمولا می‌توان به چند جمله اول جواب دست یافت.

دیده می‌شود که مجهولات سری بالا شامل ضرایب b_n می‌باشد. توجه شود که تعداد معادلاتی که از مساوی صفر قرار دادن ضرایب x^n بدست می‌آید دقیقا برابر با n معادله است و تعداد مجهولات نیز به تعداد b_nها یعنی n مجهول. لذا تعداد معادلات و مجهولات با یکدیگر برابر بوده و همه مجهولات را می‌توان تعیین کرد.

۳- روش سوم نیز کاهش مرتبه است که معمولا زمانی بکار گرفته میشود که جواب اول فرم بسته داشته باشد. هر چند اگر جواب اول به فرم بسته هم نباشد, با تقسیم کردن دو سری نامتناهی می‌توان مساله را به این روش نیز حل کرد. (توضیح آخر مثال بعد)

مثال ۴-۲۸ معادله دیفرانسیل زیر را به روش سریها حول نقطه داده شده حل کنید.

$$x^2y'' - (x+x^2)y' + y = 0 \quad ; \quad x_0 = 0 \; ; \quad 0<x<\infty$$

حل از آنجا که $x_0 = 0$ نقطه تکین معادله است, مراحل حل معادله در پنج گام و بصورت زیر خواهد بود:

۱- بررسی منظم بودن نقطه غیرعادی, تشکیل معادله مشخصه از رابطه (1) و تعیین ریشه‌های آن

از آنجا که $p(x)$ و $q(x)$ نسبت دو چندجمله‌ای هستند, می‌توان با کنترل وجود دو حد زیر آنرا تکین منظم نامید.

$$p_0 = \lim_{x\to 0}(x-0)\frac{-(x+x^2)}{x^2} = -1 \;\; ; \;\; q_0 = \lim_{x\to 0}(x-0)^2\frac{1}{x^2} = 1 \to reg.$$

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-1) - r + 1 = (r-1)^2 \qquad ; \qquad F(r) = 0 \to r_{1,2} = 1,1$$

دیده می‌شود که ریشه‌ها مساویند, یعنی با حالت ب روبرو هستیم.

۲- جواب را بصورت $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ انتخاب کرده و در معادله جایگذاری می‌کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

با ترکیب سریهای اول و دوم و چهارم خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{[(n+r)(n+r-2)+1]}_{(n+r-1)^2} a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+1} = 0$$

در دومین سری توان را به x^{n+r} تبدیل می‌کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)^2 a_n x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^{n+r} = 0$$

دیده می‌شود که اندیس شروع زیگماها $n=0$ و $n=1$ است. با بیرون کشیدن $n=0$ از زیگمای اول خواهیم داشت:

$$\underbrace{(r-1)^2}_{F(r)} a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\underbrace{(n+r-1)^2}_{F(n+r)} a_n - (n+r-1)a_{n-1}\right\}x^{n+r} = 0$$

۳- با متحد قرار دادن دو طرف تساوی خواهیم داشت:

$$(r-1)^2 a_0 = 0 \xrightarrow{a_0 \neq 0} r_{1,2} = 1,1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\quad\} = 0 \to \underbrace{(n+r-1)^2}_{F(n+r)} a_n(r) = (n+r-1)a_{n-1}(r) \qquad ; \qquad n = 1,2,\cdots$$

بنابراین از آنجا که در حالت ب هستیم, لذا همواره $F(n+r) \neq 0$ خواهد بود. در نتیجه:

$$\to a_n(r) = \frac{1}{n+r-1}a_{n-1}(r)$$

۴- با انتخاب $r = r_1$ خواهیم داشت:

$$r_1 = 1 \to a_n = \frac{1}{n}a_{n-1} \to a_n = \frac{1}{n!}a_0$$

$$a_0 = 1 \xrightarrow{(3)} y_1(x) = x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right] = x\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right) = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}$$

البته می‌توان گفت $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}x$ بیانگر تابع xe^x می‌باشد, یعنی جواب اول در این مثال را می‌توان به فرم بسته نیز بیان کرد.

۵- از آنجا که با حالت $r_1=r_2$ روبرو هستیم, جواب دوم را می‌توان به سه روش بدست آورد که در ادامه هر سه را خواهیم دید.

روش اول: با محاسبه $a_n'(r_1)$

$$a_n(r)=\frac{1}{n+r-1}a_{n-1}(r)\rightarrow a_n(r)=\frac{1}{r(r+1)\cdots(n+r-1)}a_0$$

در واقع باید $a_0(r)$ می‌نوشتیم, اما از آنجا که a_0 یک عدد ثابت انتخاب می‌شود, تمایزی مابین a_0 و $a_0(r)$ قائل نمی‌شویم.

(بهتر است برای کنترل محاسبات $a_n(r)$ بدست آمده را با $a_n(r_1)$ که در قسمت قبل محاسبه شد چک کنیم

$$\left(a_n(r)=\frac{1}{r(r+1)\cdots(n+r-1)}a_0\xrightarrow{r_1=1}a_n(r_1)=\frac{1}{n!}a_0\quad\boxed{\surd}\right)$$

در ادامه بایستی از $a_n(r)$ نسبت به r مشتق بگیریم. راه حل ساده مشتق‌گیری از $a_n(r)$, آن است که ابتدا لگاریتم آنرا بدست آوریم تا در واقع ضرب را به جمع تبدیل کرده باشیم, سپس از طرفین مشتق گرفته شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$ln\big(a_n(r)\big)=ln(a_0)-[ln(r)+ln(r+1)+\cdots+ln(n+r-1)]$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dr}}\frac{a_n'(r)}{a_n(r)}=0-\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+\cdots+\frac{1}{n+r-1}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1=1}a_n(1)=\frac{1}{n!}a_0\ ;\ a_n'(1)=\frac{-a_0}{n!}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{-a_0}{n!}H(n)\quad;\quad H(n)\equiv\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

در نهایت با انتخاب $a_0=1$, جواب دوم عبارت است از:

$$y_2(x)=y_1(x)lnx+x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(r_1)x^n=y_1(x)lnx-x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H(n)}{n!}x^n$$

که می‌توان بصورت زیر نیز بیان کرد:

$$\begin{aligned}y_2(x)&=y_1(x)lnx-x\left(\frac{H(1)}{1!}x^1+\frac{H(2)}{2!}x^2+\frac{H(3)}{3!}x^3+\cdots\right)\\&=y_1(x)lnx-x\left(\frac{1}{1!}x^1+\frac{1+\frac{1}{2}}{2!}x^2+\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{3!}x^3+\cdots\right)\\&=y_1(x)lnx-x\left(x+\frac{3}{4}x^2+\frac{11}{36}x^3+\cdots\right)\ \blacksquare\end{aligned}$$

توضیح: اگر یافتن فرمولی برای $a_n(r)$ مشکل باشد, می‌توان چند جمله اول را بصورت زیر نوشت:

$$y_2(x) = y_1(x)lnx + x^{r_1}[a_1'(r_1)x^1 + a_2'(r_1)x^2 + a_3'(r_1)x^3 + \cdots]$$

$$a_n(r) = \frac{1}{n+r-1}a_{n-1}(r) \quad ; \quad a_0 = a_0(r) = 1$$

$$n = 1 \rightarrow a_1(r) = \frac{1}{r} \rightarrow a_1'(r) = -\frac{1}{r^2} \rightarrow a_1'(r_1) = -\frac{1}{1} = -1$$

$$n = 2 \rightarrow a_2(r) = \frac{1}{r+1}a_1(r) = \frac{1}{r+1}\frac{1}{r} \rightarrow a_2'(r) = \frac{-\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}\right)}{r(r+1)} \rightarrow a_2'(r_1) = \frac{-3}{4}$$

$$n = 3 \rightarrow a_3(r) = \frac{1}{r+2}a_2(r) = \frac{1}{r+2}\frac{1}{r+1}\frac{1}{r} \rightarrow a_3'(r) = \frac{-\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+\frac{1}{r+2}\right)}{r(r+1)(r+2)} \rightarrow a_3'(r_1) = \frac{-11}{36}$$

و به همین ترتیب سایر a_nها و مشتقات آنرا می‌توان متوالیا بدست آورد. در نتیجه:

$$y_2(x) = y_1(x)lnx + x^{r_1}[a_1'(r_1)x^1 + a_2'(r_1)x^2 + a_3'(r_1)x^3 + \cdots]$$

$$y_2(x) = y_1(x)lnx - x^1\left(x^1 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{36}x^3 + \cdots\right) \quad \blacksquare$$

<u>روش دوم:</u> با انتخاب ضرایب نامعین b_n و محاسبه آنها

$$y_2 = y_1lnx + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_nx^n = y_1lnx + \sum_{n=1}^{\infty} b_nx^{n+1} \quad ; \quad y_2' = y_1'lnx + y_1\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_nx^n$$

$$y_2'' = y_1''lnx + y_1'\frac{1}{x} + y_1'\frac{1}{x} + y_1\left(\frac{-1}{x^2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)b_nx^{n-1}$$

اگر چه y_1 قبلا بدست آمده است, اما بهتر است فعلا سری آنرا جایگزین نکرده و با همان y_1 ادامه دهیم.

$$x^2y_2'' - (x+x^2)y_2' + y_2 = 0 \xrightarrow{Sub.}$$

$$\left(x^2y_1''lnx + 2xy_1' - y_1 + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)b_nx^{n+1}\right) - \left(xy_1'lnx + y_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_nx^{n+1}\right)$$
$$-\left(x^2y_1'lnx + xy_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_nx^{n+2}\right) + \left(y_1lnx + \sum_{n=1}^{\infty} b_nx^{n+1}\right) = 0$$

حال با فاکتورگیری از جملات شامل lnx خواهیم داشت:

$$\rightarrow \overbrace{(x^2y_1'' - (x+x^2)y_1' + y_1)}^{0}\,lnx + 2xy_1' - (2+x)y_1 +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)b_nx^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_nx^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_nx^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_nx^{n+2} = 0$$

دیده شد که با فاکتورگیری از lnx ضریب آن برابر صفر خواهد بود, چرا که بیانگر آن است که y_1 جواب معادله است.

$$\to 2xy_1' - (2+x)y_1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) b_n x^{n+2} = 0$$

از اینجا به بعد می‌توان با جایگذاری سری مربوط به y_1 در رابطه بالا, به دنبال یافتن روابط بازگشتی برای محاسبه b_n بود. روش کار درست مشابه قبل است. یعنی یکسان کردن توانها و شروع اندیسها و متحد قرار دادن ضرایب که در توضیح بعد این مثال روش کار را خواهید دید. اما معمولا این کار طولانی بوده و لذا به طریق زیر صرفا چند جمله اول سری را بدست می‌آوریم. برای این منظور ساده‌تر است سریهایی که شامل ضرایب مجهول b_n هستند را در سمت چپ نگه داشته و مابقی را به راست منتقل کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) b_n x^{n+2} = -2xy_1' + (2+x)y_1$$

از آنجا که صرفا چند جمله اولیه را می‌خواهیم, لذا از جملات y_1 و نیز سریها, چند جمله اول آنرا (مثلا تا x^4) جایگزین می‌کنیم:

$$y_1(x) = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots \to y_1' = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \cdots$$

در حالت کلی بایستی y_1 تا توان x^5 نوشته شود, چرا که در مشتق آن x^4 ظاهر می‌شود و لذا نباید هیچ جمله با توان x^4 را از دست داد. اما از آنجا که در سمت راست سری, جمله xy_1' قرار دارد, y_1' تا درجه ۳ نیز کافی است, چرا که x^4 ایجاد می‌شود.

$$\begin{aligned}(b_1x^2 + 4b_2x^3 + 9b_3x^4 + \cdots) - (2b_1x^3 + 3b_2x^4 + \cdots)\\ = -2x\left(1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \cdots\right) + (2+x)\left(x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots\right)\end{aligned}$$

$$\to b_1x^2 + (4b_2 - 2b_1)x^3 + (9b_3 - 3b_2)x^4 + \cdots = -x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4 - \cdots$$

حال ضرایب توانهای یکسان را در دو طرف مساوی قرار می‌دهیم:

$$x^2 \;:\; b_1 = -1 \qquad ; \qquad x^3 \;:\; 4b_2 - 2b_1 = -1 \to b_2 = -\frac{3}{4}$$

$$x^4 \;:\; 9b_3 - 3b_2 = -\frac{1}{2} \to b_3 = -\frac{11}{36} \quad ; \quad \cdots$$

$$\to y_2 = y_1 lnx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1} = y_1 lnx - \left(x^2 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{11}{36}x^4 + \cdots\right) \ \blacksquare$$

توضیح ۱: دیده شد که توانستیم چند جمله اول جواب را بدست آوریم. همانگونه که عنوان شد یک روش دیگر آن است که به دنبال یافتن جمله عمومی برای b_n باشیم که طبیعتا طولانی‌تر است. در اینجا ضرایب را به این شیوه نیز بدست می‌آوریم.

$$2xy_1' - (2+x)y_1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) b_n x^{n+2} = 0$$

با جایگذاری $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$ در رابطه بالا:

$$2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n-(2+x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}n^2b_nx^{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_nx^{n+2}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(n+1)}{n!}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n!}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+2}+\sum_{n=1}^{\infty}n^2b_nx^{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_nx^{n+2}=0$$

در زیگمای چهارم میتوان شروع اندیس را به $n=0$ تغییر داد چرا که به واسطه ترم n^2, جمله‌ای به سری اضافه نمی‌کند. در زیگمای آخر نیز میتوان این تغییر را انجام داد مشروط به آنکه $b_0\equiv 0$ انتخاب شود. دقت شود از آنجا که اندیس b_nها از $n=1$ شروع می‌شود, لذا b_0 میتواند بطور صوری صفر انتخاب شود. در نتیجه:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n}{n!}+n^2b_n\right)x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}+(n+1)b_n\right)x^{n+2}=0 \quad ; \quad b_0\equiv 0$$

در ادامه برای محاسبه ضرایب b_n , همه توانها را به کمترین آنها یعنی x^{n+1} تبدیل کنیم. لذا خواهیم داشت:

$$\sum_{\underbrace{n=0}_{\to n=1}}^{\infty}\left(\frac{2n}{n!}+n^2b_n\right)x^{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}+nb_{n-1}\right)x^{n+1}=0 \quad ; \quad b_0\equiv 0$$

زیگمای اول را نیز می‌توان از $n=1$ شروع کرد, زیرا مقدار آن به ازای $n=0$ برابر صفر است.

$$\to\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2b_n-nb_{n-1}+\frac{1}{(n-1)!}\right)x^{n+1}=0 \ ; \ b_0\equiv 0$$

$$\to n^2b_n-nb_{n-1}=-\frac{1}{(n-1)!} \quad (n=1,2,\cdots) \ \to b_n=\frac{1}{n}\left(b_{n-1}-\frac{1}{n!}\right) \quad (b_0\equiv 0)$$

$$b_1=\frac{1}{1}\left(0-\frac{1}{1!}\right)=-1 \quad ; \quad b_2=\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{2!}\right)=-\frac{3}{4} \quad ; \quad b_3=\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{3!}\right)=-\frac{11}{36} \ ; \ \cdots$$

$$\to y_2=y_1lnx+\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^{n+1}=y_1lnx-\left(x^2+\frac{3}{4}x^3+\frac{11}{36}x^4+\cdots\right)$$

در واقع همین تعداد جمله کفایت می‌کند, اما اگر بخواهیم فرم کلی b_n را حدس بزنیم بهتر است بصورت زیر عمل کنیم:

$$b_1=\frac{1}{1}\left(0-\frac{1}{1!}\right)=-\frac{1}{1!} \qquad ; \qquad b_2=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)=-\frac{1}{2!}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$b_3=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2!}\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3!}\right)=-\frac{1}{3!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$\xrightarrow{\cdots} b_n=\frac{-1}{n!}H(n)\to y_2=y_1lnx-x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H(n)}{n!}x^n$$

که به همان جوابی رسیدیم که با روش اول بدست آمد. دیده می‌شود که محاسبات آن در مقایسه با حالتی که صرفا چند جمله اول سری را بدست آوردیم قدری طولانی‌تر است, اما طبیعتا جواب کاملتری ارائه خواهد کرد.

* توضیح ۲: دیده شد در اینجا نیز عملا جمله عمومی b_n را حدس زدیم, اما گاهی اوقات ممکن است بتوان مستقیما این ضریب را بدست آورد. به عنوان نمونه در این مثال برای تعیین فرمول بسته برای b_n می‌توان بطریق زیر عمل کرد:

$$nb_n - b_{n-1} = -\frac{1}{n!} \xrightarrow{\times(n-1)!} n!\, b_n - (n-1)!\, b_{n-1} = -\frac{1}{n} \xrightarrow{a_n = n! \times b_n} a_n - a_{n-1} = \frac{-1}{n}$$

حال اگر رابطه اخیر را به ازای $n = 1$ تا n نوشته و همه را جمع کنیم:

$$\begin{array}{l} n=1:\quad a_1 - a_0 = -\frac{1}{1} \\ n=2:\quad a_2 - a_1 = -\frac{1}{2} \\ n=3:\quad a_3 - a_2 = -\frac{1}{3} \\ \qquad\vdots \\ n:\quad a_n - a_{n-1} = -\frac{1}{n} \\ \hline a_n - a_0 = -H(n) \end{array}$$

$$a_n - a_0 = -H(n) \xrightarrow{a_0 = 0! \times b_0 = 0} a_n = -H(n) \to n!\, b_n = -H(n) \to b_n = \frac{-1}{n!} H(n) \quad \blacksquare$$

روش سوم: روش کاهش مرتبه

با توجه به اینکه جواب اول به فرم بسته $y_1 = xe^x$ بدست آمد خواهیم داشت:

$$y_2 = vy_1 \to v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} = \frac{1}{(xe^x)^2} e^{-\int \frac{-x-x^2}{x^2} dx} = \frac{xe^x}{(xe^x)^2} = \frac{e^{-x}}{x} \to v = \int \frac{e^{-x}}{x} dx$$

$$\frac{e^{-x}}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n!} \to v = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n!} dx = lnx + \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n!} dx$$

$$\to v = lnx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{nn!} \to y_2 = vy_1 \quad \blacksquare$$

توضیح ۱: آیا جواب بدست آمده از این روش با دو روش قبلی یکسان است؟ چند جمله اول آنرا می‌نویسیم:

$$y_2 = vy_1 = \left(lnx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{nn!} \right) y_1 = y_1(x) lnx + \left(x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{nn!} \right)$$

$$y_2 = y_1(x) lnx + x \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \right) \left(-\frac{x}{1 \times 1!} + \frac{x^2}{2 \times 2!} - \frac{x^3}{3 \times 3!} \right)$$

$$y_2 = y_1(x) lnx - x^2 \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \right) \left(\frac{1}{1 \times 1!} - \frac{x}{2 \times 2!} + \frac{x^2}{3 \times 3!} - \cdots \right)$$

$$y_2 = y_1(x) lnx - x^2 \left(\frac{1}{1 \times 1!} + \left(\frac{1}{1 \times 1!} - \frac{1}{2 \times 2!} \right) x + \left(\frac{1}{3 \times 3!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{2 \times 2!} \right) x^2 + \cdots \right)$$

$$y_2 = y_1(x)lnx - x^2\left(1 + \frac{3}{4}x + \frac{11}{36}x^2 + \cdots\right)$$

که با آنچه در دو روش قبل بدست آمد مطابقت دارد. هر چند در حالت کلی الزامی به این تطابق نیست و جواب دوم ممکن است از روشهای مختلف, بصورت متفاوتی بدست آید (مانند آنچه در مثال ۴-۳۴ خواهیم دید) . دلیل این موضوع نیز آن است که عنوان شد صرفا یک پایه جواب وجود نداشته و لذا جواب دوم فقط کافی است مستقل از اولی باشد, به عبارتی مضرب ثابتی از آن نباشد.

توضیح ۲: حتی اگر جواب اول به فرم بسته نیز نباشد, باز هم میتوان از این روش استفاده کرد. مثلا فرض کنید در مثال بالا ما ندانیم که $y_1 = x\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)$ بیانگر سری مک‌لوران تابع xe^x می‌باشد. در اینصورت v بصورت زیر بدست می‌آید:

$$v = \int \frac{xe^x}{x^2\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^2}dx = \int \frac{x\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)}{x^2\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^2}dx = \int \frac{1}{x\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)}dx$$

حال درست مشابه تقسیم چندجمله‌ایها, سری صورت را بر سری مخرج تقسیم کرده و چند جمله ابتدایی آنرا می‌نویسیم:

$$v = \int\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{x}{2!} - \frac{x^2}{3!} + \cdots\right)dx = lnx + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{nn!} \rightarrow y_2 = vy_1$$

دیده شد که در این مثال خاص, در انتگرالده, توان دوم مخرج با صورت حذف گردید, چنانچه در مثالی دیگر, مخرج به همان شکل توان ۲ نیز باقی بماند, روش کار تفاوتی نمی‌کند. یعنی ابتدا چند جمله اولیه مخرج را نوشته و سپس تقسیم انجام میشود. به عبارتی:

$$v = \int \frac{x\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)}{x^2\left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \cdots\right)}dx = \int\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{x}{2!} - \frac{x^2}{3!} + \cdots\right)dx \quad \blacksquare$$

مثال ۴-۲۹ در این مثال می‌خواهیم به دو روش دیگر, معادله مشخصه و رابطه بازگشتی مثال قبل را بدست آوریم.

حل روش اول: از آنجا که ضریب y'' یعنی x^2 تک‌جمله‌ای می‌باشد, با نوشتن بسط $(x-x_0)p(x)$ و $(x-x_0)^2q(x)$ و استفاده از روابط (1) و (2) خواهیم داشت:

$$xp(x) = -1 - x = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots \rightarrow p_0 = p_1 = -1 \quad ; \quad oth = 0$$

$$x^2q(x) = 1 = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots \rightarrow q_0 = 1 \quad ; \quad oth = 0$$

پس معادله مشخصه و رابطه بازگشتی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$F(r) = r(r-1) + p_0r + q_0 = (r-1)^2 \xrightarrow{F(r)=0} r_{1,2} = 1{,}1$$

$$F(n+r)a_n = -\sum_{k=0}^{n-1}[(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k \qquad n = 1,2,\cdots \qquad (2)$$

$$\rightarrow (n+r-1)^2a_n = \underbrace{-[(n+r-1)p_1 + q_1]}_{n+r-1}a_{n-1} \rightarrow a_n = \frac{1}{n+r-1}a_{n-1} \quad \blacksquare$$

* روش دوم: با استفاده از روش مشتق nام حاصلضرب نیز میتوان رابطه بازگشتی را بدست آورد. برای این منظور:

$$x^2y''-(x+x^2)y'+y=0$$

$$x^2y^{(n+2)}+\binom{n}{1}2xy^{(n+1)}+\binom{n}{2}2y^{(n)}-(x+x^2)y^{(n+1)}-\binom{n}{1}(1+2x)y^{(n)}-\binom{n}{2}2y^{(n-1)}+y^{(n)}=0$$

با انتخاب $x=0$ و جایگذاری $y^{(k)}(0)=k!\,a_k$ خواهیم داشت:

$$\binom{n}{2}2y^{(n)}(0)-\binom{n}{1}y^{(n)}(0)-\binom{n}{2}2y^{(n-1)}(0)+y^{(n)}(0)=0$$

$$(n-1)^2n!\,a_n-n(n-1)(n-1)!\,a_{n-1}=0\xrightarrow{n\neq 0,1}(n-1)a_n-a_{n-1}=0$$

تنها نکته‌ای که بایستی توجه داشت آن است که فرم رابطه بدست آمده بصورت $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ میباشد. برای تبدیل به فرم فروبنیوس کافی است بجای همه nها (بجز n های اندیس) عبارت $n+r$ قرار داده شود. لذا:

$$\big((n+r)-1\big)a_n-a_{n-1}=0\rightarrow a_n(r)=\frac{1}{n+r-1}a_{n-1}(r)$$

همچنین معادله مشخصه عبارت است از:

$$p_0=\lim_{x\to 0}(x-0)\frac{-(x+x^2)}{x^2}=-1\ ;\quad q_0=\lim_{x\to 0}(x-0)^2\frac{1}{x^2}=1$$

$$\rightarrow F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0=r(r-1)-r+1=(r-1)^2\ \blacksquare$$

مثال ۴-۳۰ جواب معادله بسل مرتبه صفر ($v=0$) را حول نقطه صفر بیابید.

$$x^2y''+xy'+(x^2-v^2)y=0\quad (x>0\ ;\ v\in\mathbb{R}^+)\xrightarrow{v=0}x^2y''+xy'+x^2y=0$$

حل از آنجا که $x_0=0$ نقطه تکین معادله است, مراحل حل معادله در پنج گام و بصورت زیر خواهد بود:

۱- بررسی منظم بودن نقطه غیرعادی, تشکیل معادله مشخصه از رابطه (1) و تعیین ریشه‌های آن

$$p_0=\lim_{x\to 0}(x-0)\frac{x}{x^2}=1\ ;\quad q_0=\lim_{x\to 0}(x-0)^2\frac{x^2}{x^2}=0\rightarrow reg.$$

$$F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0=r(r-1)+r+0=r^2\qquad ;\qquad F(r)=0\rightarrow r_{1,2}=0,0$$

دیده می‌شود که ریشه‌ها مساویند, یعنی با حالت ب روبرو هستیم.

۲- جواب را بصورت $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$ انتخاب کرده و در معادله جایگذاری می‌کنیم.

$$\xrightarrow{Sub.}x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}+x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}+x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

$$\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+2}=0$$

با ترکیب سریهای اول و دوم خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2 a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = 0$$

توان x در دومین سری را بصورت زیر به $n+r$ تبدیل می‌کنیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} \quad ; \quad a_{-1} \equiv 0$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2 a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} = 0 \quad ; \quad a_{-1} \equiv 0$$

دیده می‌شود که اندیس شروع زیگماها $n=0$ و $n=1$ است. حال با بیرون کشیدن $n=0$ خواهیم داشت:

$$\underbrace{r^2}_{F(r)} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\underbrace{(n+r)^2}_{F(n+r)} a_n + a_{n-2}\right\} x^{n+r} = 0 \quad ; \quad a_{-1} \equiv 0$$

۳- با متحد قرار دادن دو طرف تساوی خواهیم داشت:

$$r^2 a_0 = 0 \xrightarrow{a_0 \neq 0} r_{1,2} = 0,0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\quad\} = 0 \rightarrow \underbrace{(n+r)^2}_{F(n+r)} a_n(r) = -a_{n-2}(r) \quad ; a_{-1} \equiv 0 \quad ; \quad n = 1,2,\cdots$$

بنابراین از آنجا که در حالت ب هستیم, لذا همواره $F(n+r) \neq 0$ خواهد بود. در نتیجه:

$$\rightarrow a_n(r) = \frac{-1}{(n+r)^2} a_{n-2}(r) \quad ; a_{-1} \equiv 0 \quad ; \quad n = 1,2,\cdots$$

۴- با انتخاب $r = r_1$ خواهیم داشت:

$$r_1 = 0 \rightarrow a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2} \quad ; \; n = 1,2,\cdots \quad ; \quad a_{-1} \equiv 0$$

حال از آنجا که هر ضریب با ضریب ۲ جمله قبل ارتباط دارد, برای محاسبه آنها ۲ ستون تشکیل میدهیم:

$$a_1 = \frac{-a_{-1}}{1^2} = 0 \qquad a_2 = \frac{-a_0}{2^2}$$
$$a_3 = \frac{-a_1}{3^2} = 0 \qquad a_4 = \frac{-a_2}{4^2}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_{2n-1} = 0 \qquad a_{2n} = \frac{-a_{2n-2}}{(2n)^2}$$

$$a_{2n-1} = 0 \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} a_0$$

$$a_0 = 1 \xrightarrow{(3)} y_1(x) = x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n\right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \equiv J_0(x)$$

جواب بدست آمده را بسل نوع اول مرتبه صفر نامیده و با $J_0(x)$ نمایش می‌دهیم. شعاع همگرایی این جواب بینهایت بوده و می‌توان چند جمله اول آنرا بصورت زیر بیان کرد:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \cdots$$

۵- از آنجا که با حالت $r_1 = r_2$ روبرو هستیم, جواب دوم را می‌توان به سه روش بدست آورد که در اینجا از روش کاهش مرتبه استفاده می‌کنیم.

$$y_2 = vy_1 \rightarrow v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int \frac{1}{x} dx} = \frac{1}{xJ_0^2(x)} \rightarrow v = \int \frac{dx}{xJ_0^2(x)}$$

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1}{4^2 2^2}x^4 + \cdots \rightarrow \frac{1}{J_0^2(x)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{32}x^4 + \frac{23}{576}x^6 + \cdots$$

$$v = \int \frac{dx}{xJ_0^2(x)} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2} + \frac{5x^3}{32} + \cdots\right) dx = lnx + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{128}x^4 + \frac{23}{3456}x^6 + \cdots$$

$$y_2(x) = vy_1(x) \rightarrow y_2(x) = J_0(x)\left(lnx + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{128}x^4 + \frac{23}{3456}x^6 + \cdots\right)$$

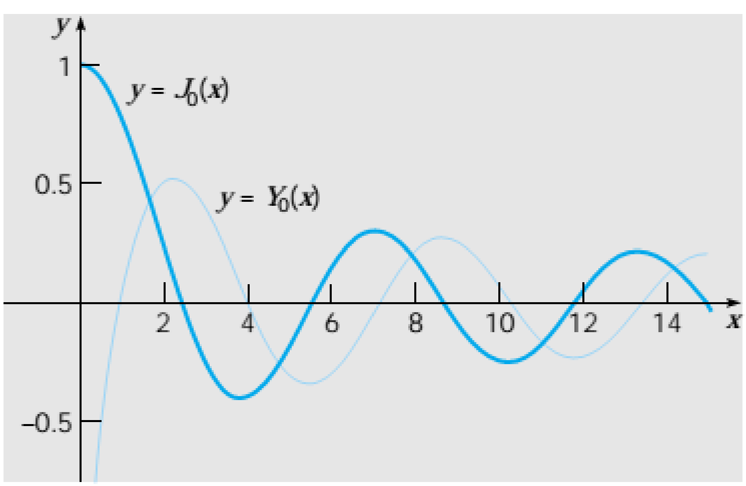
$$\rightarrow y_2(x) = J_0(x)lnx + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{128}x^4 + \frac{11}{13824}x^6 + \cdots \quad \blacksquare$$

توضیح: جواب دوم یعنی $y_2(x)$ به عنوان تابع نیومن شناخته می‌شود. اما معمولا طبق پیشنهاد وِبِر, جواب دوم را بصورت یک ترکیب خطی از بسل نوع اول و تابع نیومن در نظر گرفته, آنرا بسل نوع دوم مرتبه صفر $Y_0(x)$ می‌نامیم. این ترکیب بصورت زیر است:

$$Y_0(x) \equiv \frac{2}{\pi}\left(y_2(x) + (\gamma - ln2)J_0(x)\right)$$

که در آن γ بصورت زیر تعریف شده و به ثابت اویلر-ماسکرونی معروف است.

$$\gamma = -\Gamma'(1) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - lnn\right) = \lim_{n\to\infty}(H(n) - lnn) = 0.577215\cdots$$



که در آن $\Gamma'(x)$ معرف مشتق تابع گاما است که در بخش ۴-۸ به آن می‌پردازیم.

در شکل روبرو نمودار توابع بسل نوع اول و دوم مرتبه صفر دیده میشود مطابق آنچه در تمرین ۴ بخش ۲-۴ دیده شد, از آنجا که $y_1 = J_0$ و $y_2 = Y_0$ دو جواب اساسی معادله می‌باشند, لذا بین هر دو ریشه متوالیِ J_0 , Y_0 یک و تنها یک ریشه دارد. ■

تمرینات بخش ۴-۷-۲

۱- با استفاده از دو روش $a'_n(r_1)$ و b_n (روشهای اول و دوم) نشان دهید جواب دوم معادله بسل مرتبه صفر عبارت است از:

$$y_2(x) = J_0(x)lnx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2} H(n) \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

۲- جوابهای معادلات دیفرانسیل زیر را به روش سریها، در نزدیکی $x_0 = 0$ بدست آورید.

1) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 \quad ; \quad \underline{Ans:} \; y_1(x) = x^2 \; ; \quad y_2(x) = x^2 lnx$

2) $4x^2y'' + 4x^2y' + (1+2x)y = 0$

$$\underline{Ans:} \; y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} e^{-x} \; ; \quad y_2(x) = y_1(x) lnx + x^{\frac{1}{2}} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} H(n) x^n\right)$$

3) $x^2y'' + (x^3 - x)y' + y = 0$

$$\underline{Ans:} \begin{cases} y_1(x) = x - \dfrac{1}{2^2}x^3 + \dfrac{1\times 3}{2^2 4^2}x^5 - \dfrac{1\times 3\times 5}{2^2 4^2 6^2}x^7 + \cdots \\ y_2(x) = y_1(x)lnx - \left(\dfrac{1}{128}x^5 - \dfrac{59}{65536}x^9 + \cdots\right) \end{cases}$$

4) $x(1-x)y'' + (1-x)y' - y = 0 \quad ; \quad x > 0$

$$\underline{Ans:} \; a_n(r) = \frac{(r^2+1)((r+1)^2+1)\cdots((r+n-1)^2+1)}{(r+1)^2(r+2)^2\cdots(r+n)^2} a_0$$

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\times 2\times 5\times \cdots \times ((n-1)^2+1)}{(n!)^2} x^n$$

$$y_2(x) = y_1(x)lnx + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\times 2\times \cdots \times ((n-1)^2+1)}{(n!)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k-2}{k((k-1)^2+1)}\right] x^n$$

۴-۷-۳- اختلاف دو ریشه عدد طبیعی بوده و $0a_N(r_2) = 0$

در این بخش به بررسی حالتی که $r_1 - r_2 = N \in \mathbb{N}$ است می‌پردازیم. در اینجا نیز ابتدا یک جواب متناظر ریشه بزرگتر را مطابق (3) بدست می‌آوریم. قبلا گفته شد که در اینصورت جواب دوم مساله بستگی به این دارد که $0a_N(r_2) = 0$ یا $0a_N(r_2) \neq 0$. در این بخش و بخش بعد برای دو حالت فوق مساله را حل میکنیم. اگر $0a_N(r_2) = 0$ باشد, از آنجا که می‌توان $a_N(r_2)$ را هر عدد دلخواهی انتخاب کرد, معمولا برای سادگی, صفر انتخاب می‌شود. لذا جواب دوم نیز به فرم فربنیوس مطابق رابطه (3) و با انتخاب $r = r_2$ بدست خواهد آمد.

مثال ۴-۳۱ جوابهای معادله زیر را حول نقطه صفر بیابید.

$$xy'' + (x-1)y' - y = 0 \quad ; \quad x_0 = 0$$

حل از آنجا که $x_0 = 0$ نقطه تکین معادله است, مراحل حل معادله در پنج گام و بصورت زیر خواهد بود:

۱- بررسی منظم بودن نقطه غیرعادی, تشکیل معادله مشخصه از رابطه (1) و تعیین ریشه‌های آن

با توجه به اینکه $p(x)$ و $q(x)$ نسبت دو چندجمله‌ای هستند:

$$p_0 = \lim_{x\to 0}(x-0)\frac{x-1}{x} = -1 \quad ; \quad q_0 = \lim_{x\to 0}(x-0)^2\frac{-1}{x} = 0 \to reg.$$

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-1) - r = r(r-2) \qquad ; \qquad F(r) = 0 \to r_{1,2} = 2,0$$

دیده می‌شود که با حالت ج یعنی اختلاف دو ریشه عدد طبیعی روبرو هستیم. $(N = r_1 - r_2 = 2)$

۲- جواب را بصورت $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ انتخاب کرده و در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-2)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)a_n x^{n+r}$$

از آنجا که کوچکترین توان ظاهر شده $n+r-1$ است, توان دومین زیگما را به x^{n+r-1} منتقل کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-2)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r-2)a_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

دیده می‌شود که اندیس شروع زیگماها $n = 0$ و $n = 1$ است. لذا با بیرون کشیدن $n = 0$ از زیگمای بالا خواهیم داشت:

$$\underbrace{r(r-2)}_{F(r)}\,a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\underbrace{(n+r)(n+r-2)}_{F(n+r)}\,a_n + (n+r-2)a_{n-1}\right\}x^{n+r-1} = 0$$

۳- با متحد قرار دادن دو طرف تساوی خواهیم داشت:

$$r(r-2)a_0 = 0 \xrightarrow{a_0\neq 0} r_1 = 2\,;\; r_2 = 0 \;\;;\;\; N = r_1 - r_2 = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\quad\} = 0 \to \underbrace{(n+r)(n+r-2)}_{F(n+r)}\,a_n(r) = -(n+r-2)a_{n-1}(r) \quad ; \quad n = 1,2,\cdots$$

بنابراین از آنجا که در حالت ج هستیم, ممکن است $F(n+r) = 0$ گردد. دیده شد چنانچه همزمان $r \neq r_2$ و $n \neq N$ باشد, آنگاه قطعا $F(n+r)$ مخالف صفر بوده و در نتیجه خواهیم داشت:

$$a_n(r) = -\frac{1}{n+r}a_{n-1}(r) \quad ; \quad n = 1,2,\cdots \quad ; \qquad \begin{cases} n \neq N \\ r \neq r_2 \end{cases}$$

۴- با انتخاب $r = r_1$ (ریشه بزرگتر) خواهیم داشت:

$$r_1 = 2 \to a_n = -\frac{a_{n-1}}{n+2} \to a_n = \frac{2(-1)^n}{(n+2)!}a_0$$

$$a_0 = 1 \xrightarrow{(3)} y_1(x) = x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right] = x^2\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(n+2)!}x^n\right)$$

۵- با انتخاب $r = r_2$ (ریشه کوچکتر) از آنجا که اختلاف دو ریشه عدد طبیعی است, بایستی کنترل کرد که آیا $0a_N(r_2) = 0$ می‌باشد یا خیر. با استفاده از فرم اولیه رابطه بازگشتی (و نه تقسیم شده آن) با جایگذاری $r = r_2$ و $n = N$ خواهیم داشت:

$$(n+r)(n+r-2)a_n(r) = -(n+r-2)a_{n-1}(r) \xrightarrow{r=r_2=0\ ;\ n=N=2} 0a_2 = -0a_1 = 0$$

از آنجا که $0a_2 = 0$ بدست آمد, لذا با حالت $0a_N(r_2) = 0$ روبرو هستیم. یعنی جواب دوم نیز به فرم (3) می‌باشد.

از آنجا که a_2 میتواند هر عدد دلخواهی باشد, معمولا برای سادگی صفر انتخاب می‌شود(در توضیح ۲ خواهیم دید که اگر صفر انتخاب نشود همین ریشه کوچکتر هر دو جواب را خواهد داد). در نتیجه با استفاده از رابطه بازگشتی برای $n \neq N$ خواهیم داشت:

$$n \neq 2 \rightarrow a_n = -\frac{a_{n-1}}{n} \quad (n = 1,3,4,\cdots) \quad ; \quad a_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} a_1 = -a_0 & (n=1) \\ a_n = 0 & (n \geq 2) \end{cases}$$

دقت شود که در رابطه بازگشتی بالا $n = 2$ را کنار گذاشته‌ایم, چرا که قبلا $a_2 = 0$ انتخاب شده است.

$$a_0 = 1 \xrightarrow{(3)} y_2(x) = x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right] = x^0(1-x) = 1 - x \quad \blacksquare$$

توضیح ۱: دقت شود اگر برای جواب نظیر $r_2 = 0$ از فرم تقسیم شده رابطه بازگشتی استفاده کنیم, به جواب نادرست می‌رسیم:

$$a_n(r) = \frac{-1}{n+r}a_{n-1}(r) \ ; \quad r = r_2 = 0 \rightarrow a_n = -\frac{a_{n-1}}{n} \rightarrow a_1 = -a_0 \ ; \ a_2 = -\frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2} \ ; \ \cdots$$

علت اشتباه هم این است که تقسیم دو طرف رابطه بازگشتی به $(n+r-2)$ نادرست است, چرا که این عبارت به ازای $r = r_2 = 0$ و $n = N = 2$ برابر صفر می‌باشد. در واقع همواره در حالت اختلاف دو ریشه طبیعی, مقدار $F(n+r)$ به ازای ریشه کوچکتر r_2 و $n = N$ برابر صفر است, چرا که $F(N + r_2) = F(r_1) = 0$.

توضیح ۲: برای ریشه کوچکتر هنگامی که به$0a_N(r_2) = 0$ میرسیم, اگر $a_N(r_2)$ را صفر انتخاب نکنیم, در نهایت در جواب آخر یک ثابت $a_N(r_2)$ نیز وارد میشود. یعنی در حالت $0a_N(r_2) = 0$ ریشه کوچکتر هر دو جواب را می‌دهد و نیازی به حل مساله برای ریشه بزرگتر نداریم. هرچند معمولا به این روش عمل نمی‌کنیم, اما برای روشن شدن روش کار مثال بالا را با همین روش حل میکنیم. فرض کنید جواب نظیر ریشه بزرگتر را بدست نیاورده‌ایم. در اینصورت برای ریشه کوچکتر همانگونه که دیده شد به رابطه $0a_2 = 0$ رسیدیم. حال اگر a_2 صفر انتخاب نشود, سایر ضریبها بر حسب این ضریب بدست می‌آید. حال اگر ضریب a_0 را نیز که همیشه برابر 1 در نظر می‌گرفتیم به همان صورت a_0 باقی بگذاریم, در نهایت دو ضریب a_0 و a_2 را خواهیم داشت. لذا به هر دو جواب مستقل y_1 و y_2 رسیده‌ایم. مراحل کار در زیر دیده میشود:

$$n \neq 2 \rightarrow a_n = -\frac{a_{n-1}}{n} \quad (n = 1,3,4,\cdots) \quad ; \quad n = 1 \rightarrow a_1 = -a_0$$

$$n \geq 3 \ : \ a_n = -\frac{a_{n-1}}{n} \rightarrow a_n = \frac{2(-1)^n}{n!}a_2$$

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r_2}=a_0+\underbrace{a_1}_{-a_0}x+a_2x^2+a_2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n!}x^n$$

که اگر اندیس پایین زیگما را به 1 تبدیل کنیم (با تغییر اندیس n به $n+2$) به همان جواب قبل می‌رسیم. یعنی:

$$y(x)=a_0(1-x)+a_2x^2\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(n+2)!}x^n\right)=a_0y_1(x)+a_2y_2(x)$$

یعنی هر دو جواب با استفاده از ریشه کوچکتر بدست آمد. ■

مثال ۴-۳۲ جوابهای معادله زیر را حول نقطه صفر بیابید.

$$xy''-(4+x)y'+2y=0\quad ;\quad x_0=0$$

حل از آنجا که $x_0=0$ نقطه تکین معادله است, مراحل حل معادله در پنج گام و بصورت زیر خواهد بود:

۱- بررسی منظم بودن نقطه غیرعادی, تشکیل معادله مشخصه از رابطه (1) و تعیین ریشه‌های آن

$$p_0=\lim_{x\to 0}(x-0)\frac{-(4+x)}{x}=-4\ ;\ \ q_0=\lim_{x\to 0}(x-0)^2\frac{2}{x}=0\to reg.$$

$$F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0=r(r-1)-4r=r(r-5)\qquad ;\qquad F(r)=0\to r_{1,2}=5{,}0$$

دیده می‌شود که با حالت ج یعنی اختلاف دو ریشه عدد طبیعی روبرو هستیم. $(N=r_1-r_2=5)$

۲- جواب را بصورت $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$ انتخاب کرده و در معادله جایگذاری می‌کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-1}-4\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}$$
$$+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-5)a_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-2)a_nx^{n+r}=0$$

در اینجا نیز از آنجا که کوچکترین توان ظاهر شده $n+r-1$ است, توان دومین زیگما را به x^{n+r-1} منتقل می‌کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-5)a_nx^{n+r-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-3)a_{n-1}x^{n+r-1}=0$$

دیده می‌شود که اندیس شروع زیگماها $n=0$ و $n=1$ است. لذا با بیرون کشیدن $n=0$ از زیگمای بالا خواهیم داشت:

$$\underbrace{r(r-5)}_{F(r)}a_0x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\underbrace{(n+r)(n+r-5)}_{F(n+r)}a_n-(n+r-3)a_{n-1}\right\}x^{n+r-1}=0$$

۳- با متحد قرار دادن دو طرف تساوی خواهیم داشت:

$$r(r-5)a_0 = 0 \xrightarrow{a_0 \neq 0} r_1 = 5\ ;\ r_2 = 0\ \ ;\ \ N = r_1 - r_2 = 5$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\quad\} = 0 \to \underbrace{(n+r)(n+r-5)}_{F(n+r)} a_n(r) = (n+r-3)a_{n-1}(r) \quad ; \quad n = 1,2,\cdots$$

بنابراین از آنجا که در حالت ج هستیم, ممکن است $F(n+r) = 0$ گردد. دیده شد چنانچه همزمان $r \neq r_2$ و $n \neq N$ باشد, آنگاه قطعا $F(n+r)$ مخالف صفر بوده و در نتیجه خواهیم داشت:

$$a_n(r) = \frac{n+r-3}{(n+r)(n+r-5)} a_{n-1}(r) \quad ; \quad n = 1,2,\cdots \quad ; \quad \begin{cases} n \neq N \\ r \neq r_2 \end{cases}$$

۴- با انتخاب $r = r_1$ (ریشه بزرگتر) خواهیم داشت:

$$r_1 = 5 \to a_n = \frac{n+2}{n(n+5)} a_{n-1} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

$$\to a_n = \frac{n+2}{n(n+5)} \frac{n+1}{(n-1)(n+4)} \frac{n+0}{(n-2)(n+3)} \frac{n-1}{(n-3)(n+2)} \times \cdots \times \frac{5}{3\times 8} \frac{4}{2\times 7} \frac{3}{1\times 6} a_0$$

$$\to a_n = \frac{5\times 4\times 3}{n!\,(n+5)(n+4)(n+3)} a_0$$

$$a_0 = 1 \xrightarrow{(3)} y_1(x) = x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right] = x^5\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{60x^n}{n!\,(n+5)(n+4)(n+3)}\right)$$

۵- با انتخاب $r = r_2$ (ریشه کوچکتر) از آنجا که اختلاف دو ریشه عدد طبیعی است, بایستی کنترل کرد که آیا $0a_N(r_2) = 0$ می‌باشد یا خیر. با استفاده از فرم اولیه رابطه بازگشتی (و نه تقسیم شده آن) با جایگذاری $r = r_2$ و $n = N$ خواهیم داشت:

$$(n+r)(n+r-5)a_n(r) = (n+r-3)a_{n-1}(r) \xrightarrow{r=r_2=0\ ;\ n=N=5} 0a_5 = 2a_4 \quad (?)$$

اما صفر بودن یا نبودن مقدار a_4 مشخص نیست. بنابراین با استفاده از رابطه بازگشتی مقادیر a_n را گام به گام محاسبه می‌کنیم تا a_4 بدست آید. برای $n < N = 5$ از آنجا که $n \neq N$ است, می‌توان a_n ها را از فرم تقسیم شده رابطه بازگشتی بصورت زیر بدست آورد:

$$r_2 = 0 \to a_n = \frac{n-3}{n(n-5)} a_{n-1} \to a_1 = \frac{1}{2}a_0 \to a_2 = \frac{1}{6}a_1 = \frac{1}{12}a_0 \to a_3 = 0 \to a_4 = \frac{-a_3}{4} = 0$$

از آنجا که $a_4 = 0$ بدست آمد, لذا $0a_5 = 2a_4 = 0$ خواهد شد و لذا با حالت $0a_N(r_2) = 0$ روبرو هستیم. یعنی جواب دوم نیز به فرم (3) می‌باشد.

از آنجا که a_5 می‌تواند هر عدد دلخواهی باشد, معمولا صفر انتخاب می‌شود. در نتیجه برای $n > N = 5$ نیز خواهیم داشت:

$$a_n = \frac{n-3}{n(n-5)} a_{n-1} \xrightarrow{a_5=0} a_6 = a_7 = \cdots = 0$$

$$a_0 = 1 \xrightarrow{(3)} y_2(x) = x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right] = x^0\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2\right)$$

این معادله قبلا در تمرین ۱ بخش ۲-۱۱ (قسمت ۶) مطرح شده بود که یک جواب پایه آن نیز داده است. ■

مثال ۴-۳۳ جوابهای معادله زیر را حول نقطه صفر بیابید.

$$x^2y'' + 2x^3y' + (2x^2-2)y = 0 \quad ; \quad x_0 = 0$$

حل از آنجا که $x_0 = 0$ نقطه تکین معادله است, مراحل حل معادله در پنج گام و بصورت زیر خواهد بود:

۱- بررسی منظم بودن نقطه غیرعادی, تشکیل معادله مشخصه از رابطه (1) و تعیین ریشه‌های آن

$$p_0 = \lim_{x\to 0}(x-0)\frac{2x^3}{x^2} = 0 \ ; \quad q_0 = \lim_{x\to 0}(x-0)^2\frac{2x^2-2}{x^2} = -2 \to reg.$$

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-1) - 2 = r^2 - r - 2 \quad ; \quad F(r) = 0 \to r_{1,2} = 2, -1$$

دیده می‌شود که با حالت ج یعنی اختلاف دو ریشه عدد طبیعی روبرو هستیم. $(N = r_1 - r_2 = 3)$

۲- جواب را بصورت $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ انتخاب کرده و در معادله جایگذاری می‌کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)-2]a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r+1)a_n x^{n+r+2} = 0$$

توان دومین زیگما را به x^{n+r} تبدیل می‌کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{[(n+r)(n+r-1)-2]}_{(n+r-2)(n+r+1)} a_n x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} 2(n+r-1)a_{n-2}x^{n+r} = 0$$

با انتخاب $a_{-1} \equiv 0$ می‌توان اندیس شروع زیگمای دوم را به $n = 1$ تغییر داد. سپس با بیرون کشیدن $n = 0$ خواهیم داشت:

$$\underbrace{(r-2)(r+1)}_{F(r)} a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\underbrace{(n+r-2)(n+r+1)}_{F(n+r)} a_n + 2(n+r-1)a_{n-2}\right\}x^{n+r} = 0 \ ; \ a_{-1} \equiv 0$$

۳- با متحد قرار دادن دو طرف تساوی خواهیم داشت:

$$(r-2)(r+1)a_0 = 0 \xrightarrow{a_0 \neq 0} r_1 = 2\ ;\ r_2 = -1 \ ; \ N = r_1 - r_2 = 3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\quad\} = 0 \to \underbrace{(n+r-2)(n+r+1)}_{F(n+r)} a_n(r) = -2(n+r-1)a_{n-2}(r) \quad ; \quad n = 1,2,\cdots$$

بنابراین از آنجا که در حالت ج هستیم, ممکن است $F(n+r) = 0$ گردد. دیده شد چنانچه همزمان $r \neq r_2$ و $n \neq N$ باشد, آنگاه قطعا $F(n+r)$ مخالف صفر بوده و در نتیجه خواهیم داشت:

$$a_n(r) = \frac{-2(n+r-1)}{(n+r-2)(n+r+1)} a_{n-2}(r) \quad ; \quad n = 1,2,\cdots \quad ; \quad \begin{cases} n \neq N \\ r \neq r_2 \end{cases}$$

۴- با انتخاب $r = r_1$ (ریشه بزرگتر) خواهیم داشت:

$$r_1 = 2 \rightarrow a_n = -\frac{2(n+1)}{n(n+3)} a_{n-2} \quad ; \quad n = 1,2,\cdots$$

با جایگذاری $n = 1$ از آنجا که $a_{-1} \equiv 0$ انتخاب شد, لذا $a_1 = 0$ بدست آمده و چون در رابطه بازگشتی هر ضریب با ضریب دو جمله قبل ارتباط دارد, لذا تمامی اندیسهای فردِ a برابر صفر خواهد شد. یعنی:

$$n = 1 \rightarrow a_1 = -\frac{2(1+1)}{1(1+3)} = -a_{-1} = 0 \rightarrow a_{2k+1} = 0$$

اندیسهای زوجِ a نیز بصورت زیر قابل محاسبه است:

$$a_{2k} = \frac{-2(2k+1)}{2k(2k+3)} \times \frac{-2(2k-1)}{2(k-1)(2k+1)} \times \frac{-2(2k-3)}{2(k-2)(2k-1)} \times \cdots \times \frac{-2 \times 3}{2 \times 5} a_0$$

$$a_{2k} = \frac{3(-1)^k}{k!\,(2k+3)} a_0$$

$$a_0 = 1 \xrightarrow{(3)} y_1(x) = x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n\right] = x^2\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{n!\,(2n+3)} x^{2n}\right)$$

$$\rightarrow y_1(x) = 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+3)} x^{2n+2}$$

که می‌توان ضریب 3 را نیز حذف کرد, چرا که در نهایت این جواب در ثابت c ضرب می‌شود.

۵- با انتخاب $r = r_2$ (ریشه کوچکتر) از آنجا که اختلاف دو ریشه عدد طبیعی است, بایستی کنترل کرد که آیا $0a_N(r_2) = 0$ می‌باشد یا خیر. با استفاده از فرم اولیه رابطه بازگشتی (و نه تقسیم شده آن) با جایگذاری $r = r_2$ و $n = N$ خواهیم داشت:

$$(n+r-2)(n+r+1)a_n(r) = -2(n+r-1)a_{n-2}(r) \xrightarrow{r=r_2=-1\ ;\ n=N=3} 0a_3 = -2a_1 \ \ (?)$$

اما صفر بودن یا نبودن مقدار a_1 مشخص نیست. بنابراین با استفاده از رابطه بازگشتی مقدار a_1 را محاسبه می‌کنیم.

$$r_2 = 0 \rightarrow a_n = -\frac{2(n-2)}{n(n-3)} a_{n-2} \quad ; \quad n = 1 \neq N \rightarrow a_1 = -\frac{2(1-2)}{1(1-3)} = -a_{-1} = 0$$

از آنجا که $a_1 = 0$ بدست آمد, لذا $0a_3 = -2a_1 = 0$ خواهد شد و لذا با حالت $0a_N(r_2) = 0$ روبرو هستیم. یعنی جواب دوم نیز به فرم (3) می‌باشد.

از آنجا که a_3 می‌تواند هر عدد دلخواهی باشد, آنرا صفر انتخاب می‌کنیم. در نتیجه برای $n \neq N = 3$ خواهیم داشت:

$$a_n = -\frac{2(n-2)}{n(n-3)} a_{n-2} \quad (n = 1,2,4,5,\cdots) \quad ; \quad a_{-1} \equiv 0$$

دقت شود رابطه بالا برای $n = 3$ برقرار نیست. بنابراین رابطه بالا $a_3 = 0$ را نمی‌دهد. بلکه ما خود, آنرا صفر انتخاب کردیم. با این انتخاب رابطه بالا به $a_{2k+1} = 0$ منجر می‌شود. حال اندیسهای زوجِ a را بدست می‌آوریم:

$$a_2 = -0a_0 = 0 \rightarrow a_{2k} = 0$$

بنابراین همه ضرایب بجز a_0 انتخابی, برابر صفر بدست می‌آید. در نتیجه:

$$a_0 = 1 \xrightarrow{(3)} y_2(x) = x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right] = x^{-1}(1+0) = \frac{1}{x}$$

در نهایت:

$$y = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+3)} x^{2n+2} + c_2 \frac{1}{x}$$

در بحث کاهش مرتبه و در مثال ۲-۲۱ همین مساله با جواب اول داده شده‌ی $y_1 = \frac{1}{x}$ حل شد که به همین نتیجه رسیدیم, با این تفاوت که در اینجا نیازی به جواب اول نداشته و هر دو جواب بدست آمد. ■

دو سوال در ارتباط با نقاط عادی

سوال ۱: چرا برای نقاط عادی, با داشتن یک رابطه بازگشتی, هر دو جواب بدست می‌آید؟

برای پاسخ به این سوال تصور کنید بخواهیم برای نقاط عادی, جواب را به شیوه فروبنیوس یعنی با انتخاب $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ بدست آوریم. فرض کنید نقطه $x_0 = 0$ یک نقطه عادی معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد. این بدان معنی است که $p(x)$ و $q(x)$ هر دو تحلیلی می‌باشند. سری تیلور $p(x)$ را در نظر میگیریم:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \to xp(x) = c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + \cdots = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots$$

بنابراین $p_0 = 0$ و مابقی ضرایب p_n مقدار خواهند داشت(البته ممکن است بعضی از ضرایب صفر باشد). به عبارتی سری $xp(x)$ از جمله x^1 به بعد خواهد بود. به همین ترتیب اگر سری تیلور $x^2q(x)$ را بنویسیم, خواهیم داشت $q_0 = q_1 = 0$ و مابقی ضرایب q_n مقدار خواهند داشت. یعنی سری $x^2q(x)$ از جمله x^2 به بعد خواهد بود. لذا در نهایت:

$$\begin{cases} p_0 = 0 & ; \quad oth \neq 0 \\ q_0 = q_1 = 0 & ; \quad oth \neq 0 \end{cases}$$

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-1) \xrightarrow{F(r)=0} r_1 = 1\,;\ \ r_2 = 0\ \ ;\ \ N = r_1 - r_2 = 1$$

بنابراین از رابطه بازگشتی (2) با قرار دادن $n = N = 1$ و $r = r_2 = 0$ خواهیم داشت:

$$F(n+r)a_n = -\sum_{k=0}^{n-1}[(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k \quad ; \quad n = 1,2,\cdots \qquad (2)$$

$$\underbrace{F(1+0)}_{0}\, a_1 = -\sum_{k=0}^{1-1}[(k+0)p_{1-k} + q_{1-k}]a_k = -[(0+0)p_{1-0} + q_{1-0}]a_0 = 0 \to 0a_1 = 0$$

توجه شود که با انتخاب ریشه کوچکتر یعنی $r = r_2 = 0$ جواب فروبنیوس یعنی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_2}$ به $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تبدیل میشود که همان جوابی است که برای نقاط عادی انتخاب کرده بودیم. از آنجا که با این انتخاب $0a_1 = 0$ بدست آمد, حال اگر a_1 برابر صفر منظور نشود, به همراه a_0 هر دو در جواب نهایی به عنوان دو ضریب ظاهر شده و جواب کامل معادله بدست می‌آید. در واقع این همان موضوعی است که در توضیح مثال ۴-۳۱ عنوان شد. بدیهی است با $r = r_1 = 1$ فقط یک جواب بدست می‌آید.

سوال ۲: آیا با استفاده از معادله (2) میتوان رابطه بازگشتی برای نقاط عادی را نیز بدست آورد؟ جواب مثبت است. بعنوان نمونه رابطه بازگشتی معادله زیر را که پس از تغییر متغیر در مثال ۴-۱۵بدست آمد را با استفاده از (2) تعیین می‌کنیم.

$$y''+x^2y'-4xy=0\ ;\quad x_0=0$$

$$xp(x)=x^3\rightarrow p_3=1\quad ;\quad oth=0$$

$$x^2q(x)=-4x^3\rightarrow q_3=-4\quad ;\quad oth=0\quad\rightarrow\quad F(r)=r(r-1)$$

$$F(n+r)a_n=-\sum_{k=0}^{n-1}[(k+r)p_{n-k}+q_{n-k}]a_k\quad ;\quad r=0$$

$$n(n-1)a_n=-\sum_{k=0}^{n-1}[(k+0)p_{n-k}+q_{n-k}]a_k=-[(n-3+0)p_3+q_3]a_{n-3}$$

$$a_n=-\frac{n-7}{n(n-1)}a_{n-3}$$

تمرینات بخش ۴-۷-۳

۱- با استفاده از ریشه کوچکتر مثال ۴-۳۲ هر دو جواب را بدست آورید. (مشابه توضیح ۲ مثال ۴-۳۱)

۲- جوابهای معادله زیر را حول نقطه صفر بیابید.

$$xy''+(3-x)y'-y=0\ ;\ \underline{Ans}:\ y=c_1\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+2)!}x^n\right)+c_2x^{-2}(1+x)$$

۳- برای معادله زیر که معادله بسل مرتبه $\frac{1}{2}$ می‌باشد, ابتدا کنترل کنید که $0a_N(r_2)=0$ بوده و نشان دهید این ریشه هر دو جواب را خواهد داد. درنهایت جوابها را به فرم بسته (بر حسب توابع مقدماتی) بیان کنید.

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0\quad ;\quad \underline{Ans}:\ y_1=\frac{sinx}{\sqrt{x}}\ \ ;\ \ y_2(x)=\frac{cosx}{\sqrt{x}}$$

توضیح: توجه شود در بحث کلی معادله بسل (بخش ۴-۹) خواهیم دید که a_0 که عددی دلخواه بوده و معمولا برابر یک در نظر گرفته می‌شود, در معادله بسل برای سادگی مقدار دیگری انتخاب می‌شود که برای بسل مرتبه $\frac{1}{2}$ برابر $a_0=\sqrt{2/\pi}$ منظور شده و لذا جوابهای بالا در این ضرب می‌شوند, هر چند در کل نیازی به این کار نیست چرا که جواب نهایی ترکیب خطی این جوابها است.

۴- با یک تغییر متغیر مناسب, معادله زیر را به معادله بسل مرتبه $\frac{1}{2}$ تبدیل نموده و با توجه به تمرین قبل جوابها را بدست آورید. این معادله قبلا با استفاده از تبدیل به فرم متعارف (مثال ۲-۲۷) نیز حل شده است.

$$4x^2y''+4xy'+(x^2-1)y=0\quad ;\quad \underline{Ans}:\ y=c_1\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{x}}+c_2\frac{cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{x}}$$

۵- معادله بسل مرتبه $\frac{3}{2}$ که بصورت زیر می‌باشد را حل کنید.

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)y=0 \quad ; \quad x>0$$

$$y_1=x^{\frac{3}{2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\left(1+\frac{3}{2}\right)\left(2+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(n+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right)$$

$$y_2=x^{-\frac{3}{2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\left(1-\frac{3}{2}\right)\left(2-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(n-\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right)$$

توضیح: در بحث معادله بسل خواهیم دید این جوابها را نیز می‌توان به فرم بسته بر حسب توابع سینوس و کسینوس بیان کرد.

۶- برای معادلات زیر رابطه بازگشتی را یکبار با استفاده از رابطه (2) و بار دیگر از رابطه مربوط به مشتق nام حاصلضرب بیابید.

1) $xy''+3y'+4x^3y=0 \;\; ; \;\; x_0=0$

2) $(x+3)y''+y'+2(x+3)y=0 \;\; ; \;\; x_0=0$

۴-۷-۴- اختلاف دو ریشه عدد طبیعی بوده و $0a_N(r_2)\neq 0$

در اینجا نیز $r_1-r_2=N\in\mathbb{N}$ بوده و همانگونه که قبلا نیز عنوان شد با ریشه بزرگتر, یک جواب مطابق (3) بدست می‌آید.

اما برای ریشه کوچکتر, از آنجا که $0a_N(r_2)\neq 0$, در اینصورت هیچ $a_N(r_2)$ای بدست نیامده, لذا جواب دوم به شکل فروبنیوس یعنی $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$ نمی‌باشد. یعنی در این‌حالت ریشه کوچکتر هیچ جوابی نخواهد داد. در ادامه برای محاسبه جواب دوم, مشابه حالتی که ریشه‌ها مساوی بودند, مساله را ادامه می‌دهیم.

مطابق آنچه در حالت ریشه مضاعف دیده شد, در رابطه (2) مقدار $a_n(r)$ را بگونه‌ای تعیین میکنیم که ضریب x^{n+r} برابر صفر شود, در اینصورت $L[y]$ بصورت زیر خواهد شد:

$$L[y]=F(r)a_0x^r=a_0x^r(r-r_1)(r-r_2)$$

اگر به آنچه در بدست آوردن جواب دوم مربوط به حالت ریشه مضاعف عنوان شد برگردیم, خواهیم دید آنچه باعث بدست آوردن جواب دوم شد, وجود ترم $(r-r_1)^2$ بود. چرا که پس از مشتق‌گیری, عامل $(r-r_1)$ در هر دو جمله باقی مانده و لذا به $L\left[\frac{\partial y}{\partial r}\right]_{r=r_1}=0$ رسیدیم که جواب دوم را بدست میدهد. اما در اینجا چنین عامل مربع کاملی نداریم. با یک ترفند ساده از آنجا که a_0 دلخواه است, لذا $a_0(r)=r-r_2$ انتخاب می‌شود تا به طریقی عامل مربع کامل را ساخته باشیم. دقت شود بجای a_0 از نماد $a_0(r)$ استفاده کردیم, چرا که در این‌حالت $r-r_2$ تابعی از r می‌باشد. در نتیجه:

$$L[y]=x^r(r-r_1)(r-r_2)^2\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial r}}L\left[\frac{\partial y}{\partial r}\right]_{r=r_2}=0$$

با محاسبه $\frac{\partial y}{\partial r}$ و جایگذاری $r=r_2$ و انجام محاسباتی که قدری طولانی است, در نهایت خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{\cdots} y_2(x) = ky_1(x)lnx + x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(r_2)x^n\right] \quad ; \quad k = \lim_{r\to r_2} a_N(r)$$

لذا یک پارامتر دیگرِ k نیز در جواب ظاهر می‌شود. در واقع برای ریشه کوچکتر, در مخرج کسرِ رابطه بازگشتی, صفر ایجاد می‌شود, چراکه $F(N+r_2) = F(r_1) = 0$, در حالیکه صورت کسر صفر نیست. لذا با انتخاب $a_0(r) = r - r_2$ در صورت کسر نیز, صفر ایجاد می‌کنیم تا عامل صفر کننده صورت و مخرج حذف شوند. به همین دلیل, محاسبه ضریب k بصورت حدی بدست آمده است.

بنابراین در این حالت نیز مشابه حالت ریشه مضاعف, جواب دوم بدلیل وجود ترم lnx به فرم فروبنیوس نیست. توجه شود در اینجا نیز اگر $x < 0$ باشد, صرفا کافی است lnx را به $ln|x|$ و x^{r_2} را به $|x|^{r_2}$ تغییر دهیم.

بطور خلاصه در حالت $r_1 - r_2 = N \in \mathbb{N}$ و $0a_N(r_2) \neq 0$ نیز سه روش برای تعیین جواب دوم وجود دارد:

۱- اگر a_n بر حسب a_{n-k} بیان شده باشد, از آنجا که می‌توان $a_n(r)$ را بر حسب $a_0(r)$ به فرم بسته بدست آورد, با محاسبه $a'_n(r_1)$ و فرمول بالا جواب دوم بدست می‌آید. باز هم تاکید می‌شود که مشتق $a_n(r)$, نسبت به r می‌باشد.

اما در صورتی که بدست آوردن فرم بسته برای $a_n(r)$ مشکل باشد, می‌توان چند جمله اول آنرا بصورت زیر نوشت:

$$y_2(x) = ky_1(x)lnx + x^{r_2}[1 + a'_1(r_2)x^1 + a'_2(r_2)x^2 + a'_3(r_2)x^3 + \cdots]$$

که در اینصورت فقط لازم است برای چند جمله اولیه, $a'_n(r_2)$ها بدست آید. فقط دقت شود در محاسبات $a_0(r) = r - r_2$ منظور گردد.

<u>توضیح</u>: دیده شد که جواب دوم, با انتخاب ثابت دلخواه a_0 بصورت $a_0(r) = r - r_2$ بدست آمد. در بعضی کتب $a_0(r) = 1$ منظور شده است که در اینصورت بایستی ضرایب $a_n(r)$ در $(r - r_2)$ ضرب گردد. به عبارتی جواب دوم بصورت زیر تغییر می‌کند:

$$y_2(x) = ky_1(x)lnx + x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(r - r_2)a_n(r)]'_{r=r_2} x^n\right] \quad ; \quad k = \lim_{r\to r_2}(r - r_2)a_N(r)$$

۲- در روش دوم با انتخاب جواب به فرم زیر, ضرایب نامعین c_n را بدست می‌آوریم. در واقع دیده میشود که c_n جایگزین $a'_n(r_2)$ شده است. در اینجا نیز اندیس c_nها از $n = 1$ شروع میشود.

$$y_2(x) = ky_1(x)lnx + x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right]$$

این روش نیز معمولا زمانی استفاده میشود که محاسبه فرم بسته برای $a_n(r)$ و یا حتی تعیین چند جمله اول آن طولانی باشد. دقت شود با این روش نیز معمولا می‌توان به چند جمله اول جواب دست یافت.

دیده می‌شود که مجهولات سری بالا شامل ضرایب c_n و ثابت k می‌باشد. در حالت ریشه مضاعف دیده شد که چون ضرایب صرفا b_nها بودند, تعداد معادلاتی که از مساوی صفر قرار دادن ضرایب x^n بدست آمد دقیقا برابر با n معادله بود و تعداد مجهولات نیز به تعداد b_nها یعنی n مجهول. لذا تعداد معادلات و مجهولات با یکدیگر برابر بوده و همه مجهولات قابل محاسبه بود.

بدیهی است در اینجا که یک ثابت k نیز اضافه شده است, مجهولات یکی بیشتر از معادلات خواهد بود و لذا در تعیین ضرایبِ c_n یکی از آنها ضریب آزاد محسوب شده و می‌تواند اختیاری انتخاب شود.

۳- روش سوم کاهش مرتبه است و معمولا زمانی مناسب است که جواب اول فرم بسته داشته باشد. هر چند دیده شد اگر جواب اول به فرم بسته هم نباشد, با تقسیم کردن دو سری نامتناهی می‌توان مساله را به این روش نیز حل کرد.(توضیح آخر مثال ۴-۲۸)

توضیح: دیده میشود که در جواب نهایی به دلیل انتخاب خاص $a_0(r)$ یک ثابت k ظاهر میشود. بدیهی است این جواب در برگیرنده حالت قبل یعنی $0a_N(r_2)=0$ نیز خواهد بود. چرا که در آنصورت با توجه به اینکه $a_N(r)$ بر حسب $a_0(r)=r-r_2$ خواهد شد, لذا $k=0$ بدست آمده و جواب فاقد جمله لگاریتمی و لذا به فرم فروبنیوس خواهد بود.

بنابراین در حالتی که اختلاف ریشه‌ها طبیعی است, می‌توان بدون توجه به اینکه آیا $0a_N(r_2)=0$ یا $0a_N(r_2)\neq 0$, جواب را به فرم زیر انتخاب کرده و با جایگذاری در معادله مجهولات k و c_n را بدست آورد:

$$y_2(x)=ky_1(x)lnx+x^{r_2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n\right]$$

حال اگر $k=0$ بدست آمد, بیانگر آن است که جواب دوم, فاقد لگاریتم و به فرم فروبنیوس میباشد, یعنی همان جوابی که در حالت $0a_N(r_2)=0$ بررسی گردید. اما اینکه چرا از ابتدا به این شکل عمل نکردیم به این دلیل است که معمولا روش جایگذاری, آخرین روش انتخابی است. چرا که محاسبات آن پرحجم است. به عنوان نمونه برای حالت ریشه مضاعف در مثال ۴-۲۸ دیده شد که روش جایگذاری, محاسباتی به مراتب طولانی‌تری دارد. در اینجا نیز برای حالتی که اختلاف ریشه‌ها طبیعی است در مثالهای زیر خواهیم دید که باز هم با محاسبات طولانی روبرو خواهیم بود. بنابراین اگر در ابتدا ببینیم که $0a_N(r_2)=0$ میباشد, جواب دوم به مراتب ساده‌تر بدست می‌آید, چرا که در اینصورت جواب دوم فاقد لگاریتم و به فرم فروبنیوس می‌باشد.

مثال ۴-۳۴ جوابهای معادله زیر را حول نقطه صفر بیابید.

$$x^2y''+(2x^2+x)y'+(4x-1)y=0 \quad ; \quad x_0=0$$

حل از آنجا که $x_0=0$ نقطه تکین معادله است, مراحل حل معادله در پنج گام و بصورت زیر خواهد بود:

۱- بررسی منظم بودن نقطه غیرعادی, تشکیل معادله مشخصه از رابطه (1) و تعیین ریشه‌های آن

با توجه به اینکه $p(x)$ و $q(x)$ نسبت دو چندجمله‌ای هستند, موجود بودن دو حد زیر بیانگر منظم بودن این نقطه خواهد بود.

$$p_0=\lim_{x\to 0}(x-0)\frac{2x^2+x}{x^2}=1 \ ; \quad q_0=\lim_{x\to 0}(x-0)^2\frac{(4x-1)}{x^2}=-1\to reg.$$

$$F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0=r(r-1)+r-1=(r-1)(r+1)\ ; \ F(r)=0\to r_{1,2}=\pm 1$$

دیده می‌شود که با حالت ج یعنی اختلاف دو ریشه عدد طبیعی روبرو هستیم. $(N=r_1-r_2=2)$

۲- جواب را بصورت $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$ انتخاب کرده و در معادله جایگذاری می‌کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+(2x^2+x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}+(4x-1)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)a_nx^{n+r+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}4a_{n-1}x^{n+r+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

سریهای با توان مشابه را با یکدیگر جمع می‌کنیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r+1)a_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r+2)a_n x^{n+r+1}=0$$

از آنجا که کوچکترین توان ظاهر شده $n+r$ است, توان دومین زیگما را به x^{n+r} منتقل می‌کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r+1)a_n x^{n+r}+\sum_{n=1}^{\infty}2(n+r+1)a_{n-1}x^{n+r}=0$$

دیده می‌شود که اندیس شروع زیگماها $n=0$ و $n=1$ است. لذا با بیرون کشیدن $n=0$ از زیگمای بالا خواهیم داشت:

$$\underbrace{(r-1)(r+1)}_{F(r)}a_0 x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\underbrace{(n+r-1)(n+r+1)}_{F(n+r)}a_n+2(n+r+1)a_{n-1}\right\}x^{n+r}=0$$

۳- با متحد قرار دادن دو طرف تساوی خواهیم داشت:

$$(r-1)(r+1)a_0=0\xrightarrow{a_0\neq 0}r_1=1\ ;r_2=-1\ ;\quad N=r_1-r_2=2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\quad\}=0\to\underbrace{(n+r-1)(n+r+1)}_{F(n+r)}a_n(r)=-2(n+r+1)a_{n-1}(r)\quad;\quad n=1,2,\cdots$$

بنابراین از آنجا که در حالت ج هستیم, ممکن است $F(n+r)=0$ گردد. دیده شد چنانچه همزمان $r\neq r_2$ و $n\neq N$ باشد, آنگاه قطعا $F(n+r)$ مخالف صفر بوده و در نتیجه خواهیم داشت:

$$a_n(r)=\frac{-2}{n+r-1}a_{n-1}(r)\quad;\quad n=1,2,\cdots\quad;\qquad\begin{cases}n\neq N\\ r\neq r_2\end{cases}$$

۴- با انتخاب $r=r_1$ (ریشه بزرگتر) خواهیم داشت:

$$r_1=1\to a_n=\frac{-2}{n}a_{n-1}\to a_n=\frac{(-1)^n 2^n}{n!}a_0$$

$$a_0=1\overset{(3)}{\to}y_1(x)=x^{r_1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right)=x^1\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n!}x^n\right)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^n}{n!}$$

می‌توان جواب اول را بر حسب توابع مقدماتی به شکل $y_1=xe^{-2x}$ نیز نوشت.

۵- با انتخاب $r=r_2$ (ریشه کوچکتر) از آنجا که اختلاف دو ریشه عدد طبیعی است, بایستی کنترل کرد که آیا $0a_N(r_2)=0$ می‌باشد یا خیر. با استفاده از فرم اولیه رابطه بازگشتی (و نه تقسیم شده آن) با جایگذاری $r=r_2$ و $n=N$ خواهیم داشت:

$$(n+r-1)(n+r+1)a_n(r)=-2(n+r+1)a_{n-1}(r)\xrightarrow{r=r_2=-1\ ;\ n=N=2}0a_2=-4a_1\quad(?)$$

اما صفر بودن یا نبودن مقدار a_1 مشخص نیست. بنابراین با استفاده از رابطه بازگشتی آنرا بدست می‌آوریم:

$$a_n(r)=\frac{-2}{n+r-1}a_{n-1}(r)\xrightarrow{r=r_2=-1\ ;\ n=1\neq N}a_1=2a_0\neq 0$$

از آنجا که $a_1\neq 0$ بدست آمد لذا $0a_2=-4a_1\neq 0$ گردیده و در نتیجه با حالت $0a_N(r_2)\neq 0$ روبرو هستیم. به عبارتی ریشه کوچکتر, جوابی به فرم فروبنیوس نخواهد داد. بنابراین از یکی از سه روش ذکر شده بایستی جواب دوم را بدست آورد.

در این مثال مساله را با هر سه روش حل می‌کنیم:

روش اول: با محاسبه $a'_n(r_2)$

با استفاده از رابطه بازگشتی گام ۳ می‌توان $a_n(r)$ را بر حسب $a_0(r)$ بصورت زیر بدست آورد:

$$a_n(r)=\frac{-2}{n+r-1}a_{n-1}(r)\rightarrow a_n(r)=\frac{(-1)^n2^na_0(r)}{(n+r-1)(n+r-2)\cdots(r+2)(r+1)r}$$

(بهتر است برای کنترل محاسبات $a_n(r)$ بدست آمده را با $a_n(r_1)$ که در قسمت قبل محاسبه شد چک کنیم)

$$\left(r_1=1\rightarrow a_n(r_1)=\frac{(-1)^n2^n}{n!}a_0\quad\boxed{\surd}\right)$$

حال $a_0(r)=r-r_2=r-(-1)$ منظور می‌شود. در واقع با این انتخاب در صورت کسر نیز $r+1$ بوجود آوردیم تا عامل صفر کننده صورت و مخرج حذف شوند. در ادامه برای محاسبه مشتق $a_n(r)$ نسبت به r , مشابه مثال ۴-۲۸ ابتدا از طرفین لگاریتم گرفته و سپس مشتق می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$a_n(r)=\frac{(-1)^n2^n}{(n+r-1)(n+r-2)\cdots(r+2)\times r}$$

$$ln\big(a_n(r)\big)=ln((-1)^n2^n)-[ln(n+r-1)+\cdots+ln(r+2)+ln(r)]$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dr}}\frac{a'_n(r)}{a_n(r)}=-\left(\frac{1}{n+r-1}+\frac{1}{n+r-2}+\cdots+\frac{1}{r+2}+\frac{1}{r}\right)$$

$$a_n(-1)=\frac{(-1)^n2^n}{(n-2)(n-3)\cdots1\times-1}=\frac{-(-1)^n2^n}{(n-2)!}$$

$$a'_n(-1)=\frac{(-1)^n2^n}{(n-2)!}\left(\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-3}+\cdots+\frac{1}{1}+\frac{1}{-1}\right)=\frac{(-1)^n2^n}{(n-2)!}(H(n-2)-1)\quad;\quad n>2$$

دقت شود از آنجا که $H(n-2)$ برای $n>2$ تعریف شده است, لذا برای $n=1,2$ بایستی $a'_1(-1)$ و $a'_2(-1)$ را جداگانه بدست آورد:

$$n=1\rightarrow a_1(r)=\frac{-2}{r}\overbrace{a_0(r)}^{r-(-1)}=\frac{-2(r+1)}{r}\rightarrow\ a'_1(-1)=2$$
$$n=2\rightarrow a_2(r)=\frac{-2}{r+1}a_1(r)=\frac{-2}{r+1}\frac{-2(r+1)}{r}=\frac{4}{r}\rightarrow\ a'_2(-1)=-4$$

توجه شود که عملا $a_2(r)$ بصورت حدی بدست آمده است . بنابراین می‌توان گفت که $a_2(r_2)$ همان $k=\lim\limits_{r\rightarrow r_2}a_N(r)$ می‌باشد و یا اینکه مستقیما k را بصورت زیر بدست آورد:

$$k=\lim_{r\rightarrow r_2}a_N(r)=\lim_{r\rightarrow-1}a_2(r)=\lim_{r\rightarrow-1}\frac{-2}{r+1}\frac{-2(r+1)}{r}=-4$$

بنابراین جواب دوم بصورت زیر خواهد بود:

$$y_2(x) = ky_1(x)lnx + x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(r_2)x^n\right]$$

$$y_2(x) = -4y_1(x)lnx + x^{-1}\left[1 + 2x - 4x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(n-2)!}(H(n-2)-1)x^n\right]$$
$$= -4y_1(x)lnx + x^{-1} + 2 - 4x + 0x^2 + 4x^3 - \frac{40}{9}x^4 + \cdots$$

روش دوم: با انتخاب ضرایب نامعین c_n و k محاسبه آنها

$$y_2(x) = ky_1(x)lnx + x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right] = ky_1 lnx + x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n-1}$$

$$\rightarrow\ y'_2 = ky'_1 lnx + \frac{k}{x}y_1 - \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)c_n x^{n-2}$$

$$\rightarrow y''_2 = ky''_1 lnx + \frac{2k}{x}y'_1 - \frac{k}{x^2}y_1 + \frac{2}{x^3} + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)(n-2)c_n x^{n-3}$$

اگر چه y_1 قبلا بدست آمده است, اما بهتر است فعلا سری آنرا جایگزین نکرده و با همان y_1 ادامه دهیم.

$$x^2y'' + (2x^2 + x)y' + (4x-1)y = 0 \xrightarrow{Sub.}$$
$$\left(kx^2y''_1 lnx + 2kxy'_1 - ky_1 + \frac{2}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)(n-2)c_n x^{n-1}\right)$$
$$+\left(2kx^2y'_1 lnx + 2kxy_1 - 2 + \sum_{n=1}^{\infty}2(n-1)c_n x^n\right) + \left(kxy'_1 lnx + ky_1 - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)c_n x^{n-1}\right)$$
$$+\left(4kxy_1 lnx + 4 + \sum_{n=1}^{\infty}4c_n x^n\right) - \left(ky_1 lnx + x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}c_n x^{n-1}\right) = 0$$

حال با فاکتورگیری از جملات شامل lnx خواهیم داشت:

$$\rightarrow k\underbrace{\left(x^2y''_1 + (2x^2+x)y'_1 + (4x-1)y_1\right)}_{0} lnx + 2kxy'_1 + 2kxy_1 + 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n^2-2n)c_n x^{n-1}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(2n+2)c_n x^n = 0$$

دیده شد که با فاکتورگیری از lnx ضریب آن برابر صفر خواهد بود, چرا که بیانگر آن است که y_1 جواب معادله است.

$$2kxy'_1 + 2kxy_1 + 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n^2-2n)c_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+2)c_n x^n = 0$$

از اینجا به بعد می‌توان با جایگذاری سری مربوط به y_1 در رابطه بالا به دنبال تعیین k و یافتن روابط بازگشتی برای محاسبه c_n بود. اما همانگونه که در مثال ۴-۲۸ عنوان شد معمولا این کار طولانی بوده و لذا صرفا چند جمله اول سری را بدست می‌آوریم. برای این منظور ساده‌تر است سریهایی که شامل ضرایب مجهول c_n هستند را در سمت چپ نگه داشته و مابقی را به راست منتقل کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-2n)c_n x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(2n+2)c_n x^n=-2kxy_1'-2kxy_1-2$$

از آنجا که صرفا چند جمله اولیه را می‌خواهیم, لذا از جملات y_1 و نیز سریها, چند جمله اول آنرا (مثلا تا x^4) جایگزین می‌کنیم:

$$y_1(x)=x-2x^2+2x^3-\frac{4}{3}x^4+\cdots\rightarrow y_1'=1-4x+6x^2-\frac{16}{3}x^3+\cdots$$

در حالت کلی بایستی y_1 تا توان x^5 نوشته شود, چرا که در مشتق آن x^4 ظاهر می‌شود و لذا نباید هیچ جمله با توان x^4 را از دست داد. اما از آنجا که در سمت راست سری, جمله xy_1' قرار دارد, y_1' تا درجه ۳ نیز کافی است, چرا که x^4 ایجاد می‌شود.

$$\begin{aligned}(-c_1+0c_2x+3c_3x^2+8c_4x^3+15c_5x^4+\cdots)+(4c_1x+6c_2x^2+8c_3x^3+10c_4x^4+\cdots)\\=-2kx\left(1-4x+6x^2-\frac{16}{3}x^3+\cdots\right)-2kx(x-2x^2+2x^3+\cdots)-2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow -c_1+(0c_2+4c_1)x+(3c_3+6c_2)x^2+(8c_4+8c_3)x^3+(15c_5+10c_4)x^4+\cdots\\=-2-2kx+6kx^2-8kx^3+\frac{20}{3}kx^4+\cdots\end{aligned}$$

حال ضرایب توانهای یکسان را در دو طرف مساوی قرار می‌دهیم:

$$x^0\ :\ -c_1=-2\rightarrow c_1=2\quad ;\quad x^1\ :\ 4c_1=-2k\rightarrow k=-4$$

$$x^2\ :\ 3c_3+6c_2=6k\quad ;\quad x^3\ :\ 8c_4+8c_3=-8k\quad ;\quad x^4\ :\ 15c_5+10c_4=\frac{20}{3}k$$

دیده می‌شود که از ضریب x^2 , مقدار c_3 بر حسب c_2 , از ضریب x^3 , مقدار c_4 بر حسب c_3 (و لذا c_2) و .... بدست می‌آید. می‌توان این ضرایب را به همین شکل بدست آورد. در نهایت یک ثابت c_2 در تمام ضرایب بعدی و لذا در جواب نهایی ظاهر خواهد شد که طبیعتا بیانگر ترکیب خطی با جوابی دیگر است. بنابراین از آنجا که صرفا به یک جواب اساسی دیگر نیاز داریم برای سادگی بهتر است $c_2=0$ انتخاب شود. یعنی اگر c_2 عدد دیگری انتخاب شود, جواب دیگری بدست می‌آید که مستقل از این دو جواب نخواهد بود.

علت اینکه در نهایت یکی از ثابتها اختیاری خواهد بود را می‌توان به طریق دیگری نیز توجیه کرد. توجه شود که در مساوی قرار دادن ضرایب x , رابطه در واقع بصورت $0c_2+4c_1=-2k$ بدست آمده بود که در نوشتن آن از $0c_2$ صرفنظر کردیم. اما همین عبارت بیانگر آن است که c_2 می‌تواند اختیاری باشد. با انتخاب $c_2=0$ ادامه حل بصورت زیر خواهد بود:

$$x^2\ :\ 3c_3+6c_2=6k\quad ;\quad x^3\ :\ 8c_4+8c_3=-8k\quad ;\quad x^4\ :\ 15c_5+10c_4=\frac{20}{3}k$$

$$c_2=0\rightarrow c_3=-8\ ;\ c_4=12\ ;\ c_5=-\frac{88}{9}\ ;\ \cdots$$

$$y_2(x)=ky_1lnx+x^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^{n-1}=-4y_1lnx+x^{-1}+2-8x^2+12x^3-\frac{88}{9}x^4+\cdots\ \blacksquare$$

توضیح: دیده می‌شود که y_2 بدست آمده با جواب دومی که از روش اول یعنی $a'_n(r_2)$ بدست آمد متفاوت است, اما به هر حال یک پاسخ اساسی دیگر است که مستقل از y_1 می‌باشد. به بیان دیگر, اگر چه نیازی نیست, اما می‌توان با ترکیب خطی این جواب جدید و y_1 , جواب قبل را بدست آورد. برای این منظور اگر این جواب را با $-4y_1$ جمع کنیم خواهیم داشت:

$$-4y_1 lnx + x^{-1} + 2 - 8x^2 + 12x^3 - \frac{88}{9}x^4 + \cdots - 4\left(x - 2x^2 + 2x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \cdots\right)$$
$$= 4y_1 lnx + x^{-1} + 2 - 4x + 4x^3 - \frac{40}{9}x^4 + \cdots$$

که همان جوابی است که در روش اول بدست آمد.

همانگونه که عنوان شد در حل دستگاه به هر حال یکی از ضرایب آزاد و انتخابی است. مثلا اگر c_3 را بصورت اختیاری برابر صفر در نظر می‌گرفتیم, $y_2(x)$ بصورت زیر بدست می‌آمد:

$$x^2 \;:\; 3c_3 + 6c_2 = 6k \qquad ; \qquad x^3 \;:\; 8c_4 + 8c_3 = -8k \qquad ; \qquad x^4 \;:\; 15c_5 + 10c_4 = \frac{20}{3}k$$
$$c_3 = 0 \to c_2 = -4 \;;\; c_4 = 4 \;;\; c_5 = -\frac{40}{9} \;;\; \cdots$$
$$\to y_2(x) = ky_1 lnx + x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n-1} = -4y_1 lnx + x^{-1} + 2 - 4x + 4x^3 - \frac{40}{9}x^4 + \cdots$$

که در اینجا دقیقا به همان جوابی رسیدیم که از روش اول یعنی $a'_n(r_2)$ بدست آمده بود. به هر حال نیازی به این همه دقت نیست. کافی است یکی از ضرایب را چه c_2 و چه c_3 , برابر صفر در نظر بگیرید تا یک جواب مستقل دیگر را بدست آورید. ■

روش سوم: روش کاهش مرتبه

اگر جواب اول را به شکل $y_1 = xe^{-2x}$ بنویسیم, می‌توان جواب دوم را بصورت زیر نیز بدست آورد.

$$y_2 = vy_1 \to v' = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p dx} = \frac{1}{(xe^{-2x})^2}e^{-\int \frac{2x^2+x}{x^2}dx} = \frac{\frac{e^{-2x}}{x}}{(xe^{-2x})^2} = \frac{e^{2x}}{x^3} \to v = \int \frac{e^{2x}}{x^3}dx$$
$$\frac{e^{2x}}{x^3} = \frac{1}{x^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!} \to v = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\int x^{n-3}\,dx = -\frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x} + 2lnx + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{2^n x^{n-2}}{(n-2)n!} \to y_2 = vy_1$$

هرچند در توضیح آخر مثال ۴-۲۸ دیده شد که حتی اگر جواب اول به فرم بسته نیز نباشد, باز هم می‌توان از این روش استفاده کرد که در اینصورت بایستی دو سری نامتناهی را به یکدیگر تقسیم کرد. ■

توضیح: در اینجا نیز با توجه به اینکه ضریب y'' یعنی x^2 تک‌جمله‌ای می‌باشد, میتوان بدون جایگذاری جواب فربنیوس, با نوشتن بسط $(x - x_0)p(x)$ و $(x - x_0)^2 q(x)$ و استفاده از معادله (2) رابطه بازگشتی را بصورت زیر بدست آورد.

$$xp(x) = x\frac{2x^2 + x}{x^2} = 1 + 2x = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots \to p_0 = 1 \;;\; p_1 = 2 \;;\; oth = 0$$
$$x^2 q(x) = x^2\frac{4x - 1}{x^2} = -1 + 4x = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots \to q_0 = -1 \;;\; q_1 = 4 \;;\; oth = 0$$

پس معادله مشخصه و رابطه بازگشتی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0=(r-1)(r+1)\xrightarrow{F(r)=0}r_1=0;r_2=-1;N=r_1-r_2=1$$

$$F(n+r)a_n=-\sum_{k=0}^{n-1}[(k+r)p_{n-k}+q_{n-k}]a_k\quad ;\quad n=1,2,\cdots\qquad (2)$$

با توجه به مقادیر p_1 و q_1 و صفر شدن سایر ضرایب, لذا تنها جمله نظیر $k=n-1$ از سری سمت راست باقی می‌ماند. یعنی:

$$\rightarrow (n+r-1)(n+r+1)a_n=-[(n-1+r)(2)+4]a_{n-1}=-2(n+1+r)a_{n-1}\quad \blacksquare$$

مثال ۴-۳۵ جوابهای معادله زیر را حول نقطه صفر بیابید.

$$x^2y''+x^2y'-xy=0\quad ;\quad x_0=0$$

حل از آنجا که $x_0=0$ نقطه تکین معادله است, مراحل حل معادله در پنج گام و بصورت زیر خواهد بود:

۱- بررسی منظم بودن نقطه غیرعادی, تشکیل معادله مشخصه از رابطه (1) و تعیین ریشه‌های آن

$$p_0=\lim_{x\to 0}(x-0)\frac{x^2}{x^2}=0\ ;\ \ q_0=\lim_{x\to 0}(x-0)^2\frac{-x}{x^2}=0\rightarrow reg.$$

$$F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0=r(r-1)\qquad ;\qquad F(r)=0\rightarrow r_{1,2}=1,0$$

دیده می‌شود که با حالت ج یعنی اختلاف دو ریشه عدد طبیعی روبرو هستیم. $(N=r_1-r_2=1)$

۲- جواب را بصورت $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$ انتخاب کرده و در معادله جایگذاری می‌کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+1}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)a_nx^{n+r+1}=0$$

از آنجا که کوچکترین توان ظاهر شده $n+r$ است, توان دومین زیگما را به x^{n+r} منتقل می‌کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-2)a_{n-1}x^{n+r}=0$$

دیده می‌شود که اندیس شروع زیگماها $n=0$ و $n=1$ است. لذا با بیرون کشیدن $n=0$ از زیگمای بالا خواهیم داشت:

$$\underbrace{r(r-1)}_{F(r)}a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\underbrace{(n+r)(n+r-1)}_{F(n+r)}a_n+(n+r-2)a_{n-1}\right\}x^{n+r}=0$$

۳- با متحد قرار دادن دو طرف تساوی خواهیم داشت:

$$r(r-1)a_0=0\xrightarrow{a_0\neq 0}r_1=1\ ;r_2=0\ ;\quad N=r_1-r_2=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\quad\}=0\rightarrow\underbrace{(n+r)(n+r-1)}_{F(n+r)}a_n(r)=-(n+r-2)a_{n-1}(r)\quad;\quad n=1,2,\cdots$$

بنابراین از آنجا که در حالت ج هستیم, ممکن است $F(n+r)=0$ گردد. دیده شد چنانچه همزمان $r\neq r_2$ و $n\neq N$ باشد, آنگاه قطعا $F(n+r)$ مخالف صفر بوده و در نتیجه خواهیم داشت:

$$a_n(r)=\frac{-(n+r-2)}{(n+r)(n+r-1)}a_{n-1}(r)\quad;\quad n=1,2,\cdots\quad;\quad\begin{cases}n\neq N\\ r\neq r_2\end{cases}$$

۴- با انتخاب $r=r_1$ (ریشه بزرگتر) خواهیم داشت:

$$r_1=1\rightarrow a_n=\frac{(1-n)}{n(n+1)}a_{n-1}\ ;\ n=1,2,\cdots$$

از رابطه بازگشتی بالا $a_1=a_2=\cdots=0$ بدست آمده و فقط a_0 باقی می‌ماند. در نتیجه:

$$a_0=1\xrightarrow{(3)}y_1(x)=x^{r_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right]=x$$

یعنی جواب اول به فرم ساده $y_1(x)=x$ بدست آمد.

۵- با انتخاب $r=r_2$ (ریشه کوچکتر) از آنجا که اختلاف دو ریشه عدد طبیعی است, بایستی کنترل کرد که آیا $0a_N(r_2)=0$ می‌باشد یا خیر. با استفاده از فرم اولیه رابطه بازگشتی (و نه تقسیم شده آن) با جایگذاری $r=r_2$ و $n=N$ خواهیم داشت:

$$(n+r)(n+r-1)a_n(r)=-(n+r-2)a_{n-1}(r)\xrightarrow{r=r_2=0\ ;\ n=N=1}0a_1=a_0\neq 0$$

از آنجا که $0a_1\neq 0$ بدست آمد, لذا با حالت $0a_N(r_2)\neq 0$ روبرو هستیم. به عبارتی ریشه کوچکتر, جوابی به فرم فروبنیوس نخواهد داد.

در ادامه جواب دوم را با استفاده از دو روش دوم و سوم بدست می‌آوریم.

روش دوم: با انتخاب جواب به فرم زیر, ضرایب نامعین c_n و k را بدست می‌آوریم.

$$y_2(x)=ky_1(x)lnx+x^{r_2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n\right]=ky_1lnx+1+\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n$$

هر چند برای ادامه محاسبات بهتر است $y_1=x$ قرار داده شود تا مشتقات ساده‌تر محاسبه شود, اما در اینجا مساله در حالت کلی و برای y_1 دلخواه حل می‌شود.

$$\rightarrow\ y_2'=ky_1'lnx+\frac{k}{x}y_1+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}$$

$$\rightarrow y_2''=ky_1''lnx+\frac{k}{x}y_1'-\frac{k}{x^2}y_1+\frac{k}{x}y_1'+\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$$

$$x^2y'' + x^2y' - xy = 0 \xrightarrow{Sub.}$$

$$\left(kx^2y_1''lnx + 2kxy_1' - ky_1 + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)c_nx^n\right) + \left(kx^2y_1'lnx + kxy_1 + \sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n+1}\right)$$
$$-\left(kxy_1lnx + x + \sum_{n=1}^{\infty} c_nx^{n+1}\right) = 0$$

$$\to k\underbrace{(x^2y_1'' + xy_1' - xy_1)}_{0}lnx + 2kxy_1' - ky_1 + kxy_1 - x + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)c_nx^n$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)c_nx^{n+1} = 0$$

$$\to 2kxy_1' - ky_1 + kxy_1 - x + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)c_nx^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)c_nx^{n+1} = 0$$

از اینجا به بعد می‌توان به دنبال تعیین k و یافتن روابط بازگشتی برای محاسبه c_n بود. در توضیح بعد, مساله به این روش حل شده است. در اینجا صرفا چند جمله اول سری را بدست می‌آوریم. برای این منظور ساده‌تر است سریهایی که شامل ضرایب مجهول c_n هستند را در سمت چپ نگه داشته و مابقی را به راست منتقل کنیم. با جایگذاری $y_1 = x$ خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)c_nx^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)c_nx^{n+1} = -2kxy_1' + ky_1 - kxy_1 + x$$

از آنجا که صرفا چند جمله اولیه را می‌خواهیم, لذا از سریها, چند جمله اول آنرا (مثلا تا x^4) جایگزین می‌کنیم. در اینجا $y_1 = x$ بدست آمد. لذا سمت راست رابطه بالا ساده می‌شود. اگر y_1 نیز به فرم سری بدست آمده باشد, بایستی آنرا نیز تا x^4 بنویسیم.

$$(0c_1x + 2c_2x^2 + 6c_3x^3 + 12c_4x^4 + \cdots) + (0c_1x^2 + c_2x^3 + 2c_3x^4 + \cdots) = (1-k)x - kx^2$$
$$0c_1x + 2c_2x^2 + (6c_3 + c_2)x^3 + (12c_4 + 2c_3)x^4 + \cdots = (1-k)x - kx^2$$

حال ضرایب توانهای یکسان را در دو طرف مساوی قرار می‌دهیم:

$$x^1 \ : \ 1 - k = 0 \to k = 1 \quad ; \quad x^2 \ : \ 2c_2 = -k \to c_2 = -\frac{1}{2}$$
$$x^3 \ : \ 6c_3 + c_2 = 0 \to c_3 = \frac{1}{12} \quad ; \quad x^4 \ : \ 12c_4 + 2c_3 = 0 \to c_4 = \frac{-1}{72} \quad ; \quad \cdots$$

دقت شود که یک ضریب c_1 باقی ماند, چرا که ضریب آن یعنی x , جواب اول معادله است ($y_1 = x$) . لذا از آنجا که صرفا به دنبال یک جواب اساسی دیگر هستیم می‌تواند $c_1 = 0$ انتخاب شود. توجه شود که رابطه $0c_1 = 1 - k$ نیز بیانگر اختیاری بودن c_1 خواهد بود. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\to y_2(x) = ky_1lnx + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_nx^n = xlnx + 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{72}x^4 + \cdots \ \blacksquare$$

توضیح: دیده شد که توانستیم چند جمله اول جواب را بدست آوریم. همانگونه که عنوان شد یک روش دیگر آن است که به دنبال یافتن جمله عمومی برای c_n باشیم. در اینجا ضرایب را به این شیوه نیز بدست می‌آوریم.

$$2kxy_1' - ky_1 + kxy_1 - x + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)c_n x^{n+1} = 0$$

از آنجا که $y_1 = x$ بدست آمد, خواهیم داشت:

$$2kx - kx + kx^2 - x + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)c_n x^{n+1} = 0$$

سری دوم را به x^n (کمترین توان) منتقل میکنیم.

$$\rightarrow (k-1)x + kx^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-2)c_{n-1} x^n = 0$$

جایگذاری $n = 1$ در سری اول ضریبِ صفر ایجاد می‌کند, لذا این سری را از $n = 2$ شروع کرده و با سری دوم جمع می‌کنیم.

$$\rightarrow (k-1)x + kx^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \{n(n-1)c_n + (n-2)c_{n-1}\} x^n = 0$$

از آنجا که بیرون سری ترم x^2 ظاهر شده است, جمله نظیر x^2 را به بیرون از سری منتقل می‌کنیم:

$$\rightarrow (k-1)x + (k+2c_2)x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \{n(n-1)c_n + (n-2)c_{n-1}\} x^n = 0$$

$$(k-1)x + (k+2c_2)x^2 = 0 \rightarrow k = 1 \ ; \ c_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \quad = 0 \rightarrow c_n = -\frac{(n-2)}{n(n-1)} c_{n-1} \quad (n \geq 3) \ \rightarrow \ c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!\,(n-1)}$$

دقت شود که یک ضریب c_1 باقی ماند, چرا که ضریب آن یعنی x , جواب اول معادله است ($y_1 = x$) . پس نیازی به تکرار آن نیست. لذا با انتخاب $c_1 = 0$ خواهیم داشت:

$$\rightarrow y_2(x) = ky_1 lnx + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = xlnx + 1 - \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!\,(n-1)} x^n$$

$$= xlnx + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)!} x^{n+1} \quad \blacksquare$$

روش سوم: کاهش مرتبه

$$y_2 = vy_1 \rightarrow v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int pdx} = \frac{e^{-\int \frac{x^2}{x^2}dx}}{y_1^2} = \frac{e^{-x}}{x^2} \rightarrow v = \int \frac{e^{-x}}{x^2} dx$$

$$\frac{e^{-x}}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-2}}{n!} \rightarrow v = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{(-1)^n x^{n-2}}{n!} dx = -\frac{1}{x} - lnx - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)n!} x^{n-1}$$

$$\rightarrow v=-\frac{1}{x}-lnx-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)!}x^{n+1}\rightarrow y_2=vy_1=-1-xlnx-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)!}x^{n+1}\ \blacksquare$$

که همان جوابی است که قبلا بدست آمد. دقت شود علامت آن قرینه است که مهم نیست, چرا که در نهایت در جواب عمومی, این جواب دوم در یک ثابت c ضرب میشود. ■

توضیح: ممکن است به نظر برسد این دو روش, ساده‌تر از روش اول, یعنی محاسبه $a_n'(r)$ است. اما معمولا این دو روش طولانی بوده و علت اینکه در اینجا ساده‌تر به نظر می‌رسد این است که جواب اول به فرم ساده $y_1=x$ می‌باشد. ■

مثال ۴-۳۶ جوابهای معادله زیر را حول نقطه صفر بیابید.

$$x^2y''+(x^2-2x)y'+(x^2+2)y=0\quad ;\quad x_0=0$$

حل از آنجا که $x_0=0$ نقطه تکین معادله است, مراحل حل معادله در پنج گام و بصورت زیر خواهد بود:

۱- بررسی منظم بودن نقطه غیرعادی, تشکیل معادله مشخصه از رابطه (1) و تعیین ریشه‌های آن

$$p_0=\lim_{x\to 0}(x-0)\frac{x^2-2x}{x^2}=-2\ ;\quad q_0=\lim_{x\to 0}(x-0)^2\frac{x^2+2}{x^2}=2\rightarrow reg.$$

$$F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0=r(r-1)-2r+2=(r-1)(r-2)\ ;\ F(r)=0\rightarrow r_{1,2}=2,1$$

دیده می‌شود که با حالت ج یعنی اختلاف دو ریشه عدد طبیعی روبرو هستیم. $(N=r_1-r_2=1)$

۲- جواب را بصورت $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$ انتخاب کرده و در معادله جایگذاری می‌کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+(x^2-2x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}+(x^2+2)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r+1}-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+2}$$
$$+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{[(n+r)(n+r-3)+2]}_{(n+r-1)(n+r-2)}a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+2}=0$$

تمام توانها را به x^{n+r} منتقل می‌کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r-2)a_nx^{n+r}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^{n+r}+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+r}=0$$

در اینجا با انتخاب $a_{-1}\equiv 0$ می‌توان سری سوم را به $n=1$ تغییر داد. با بیرون کشیدن $n=0$ خواهیم داشت:

$$\underbrace{(r-1)(r-2)}_{F(r)}a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\underbrace{(n+r-1)(n+r-2)}_{F(n+r)}a_n+(n+r-1)a_{n-1}+a_{n-2}\right\}x^{n+r}=0$$

۳- با متحد قرار دادن دو طرف تساوی خواهیم داشت:

$$(r-1)(r-2)a_0=0\xrightarrow{a_0\neq 0}r_1=2\ ;r_2=1\ ;\quad N=r_1-r_2=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\quad\}=0\rightarrow\underbrace{(n+r-1)(n+r-2)}_{F(n+r)}a_n(r)=-(n+r-1)a_{n-1}(r)-a_{n-2}(r)\,;n=1,2,\cdots$$

بنابراین از آنجا که در حالت ج هستیم, ممکن است $F(n+r)=0$ گردد. دیده شد چنانچه همزمان $r\neq r_2$ و $n\neq N$ باشد, آنگاه قطعا $F(n+r)$ مخالف صفر بوده و در نتیجه خواهیم داشت:

$$a_n(r)=-\frac{a_{n-1}(r)}{n+r-2}-\frac{a_{n-2}(r)}{(n+r-1)(n+r-2)}\quad;\quad n=1,2,\cdots\quad;\quad\begin{cases}n\neq N\\ r\neq r_2\end{cases}$$

۴- با انتخاب $r=r_1$ (ریشه بزرگتر) خواهیم داشت:

$$r_1=2\rightarrow a_n=-\frac{a_{n-1}}{n}-\frac{a_{n-2}}{n(n+1)}\quad;\quad n=1,2,\cdots$$

از آنجا که در رابطه بازگشتی a_n بر حسب دو ضریب ماقبل بیان شده است, نمی‌توان به یک فرمول برای محاسبه a_n رسید. لذا صرفا به نوشتن چندین جمله اولیه a_n اکتفا می‌کنیم.

$$n=1:\ \ a_1=-a_0-\frac{1}{2}a_{-1}=-a_0\qquad;\qquad a_{-1}\equiv 0$$

$$n=2:\ \ a_2=-\frac{a_1}{2}-\frac{a_0}{6}=\frac{1}{3}a_0\quad;\quad n=3:\ \ a_3=-\frac{a_2}{3}-\frac{a_1}{12}=-\frac{1}{36}a_0$$

و به همین ترتیب می‌توان جمله به جمله سایر ضرایب را نیز بدست آورد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$a_0=1\xrightarrow{(3)}y_1(x)=x^{r_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right]=x^2\left(1-x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{36}x^3+\cdots\right)$$

۵- با انتخاب $r=r_2$ (ریشه کوچکتر) از آنجا که اختلاف دو ریشه عدد طبیعی است, بایستی کنترل کرد که آیا $0a_N(r_2)=0$ می‌باشد یا خیر. با استفاده از فرم اولیه رابطه بازگشتی (و نه تقسیم شده آن) با جایگذاری $r=r_2$ و $n=N$ خواهیم داشت:

$$(n+r-1)(n+r-2)a_n(r)=-(n+r-1)a_{n-1}(r)-a_{n-2}(r)$$

$$\xrightarrow{r=r_2=1\ ;\ n=N=2}0a_1=-a_0-a_{-1}=-a_0\neq 0\quad;\quad a_{-1}\equiv 0$$

از آنجا که $0a_1\neq 0$ بدست آمد, لذا با حالت $0a_N(r_2)\neq 0$ روبرو هستیم. به عبارتی ریشه کوچکتر, جوابی به فرم فروبنیوس نخواهد داد.

برای محاسبه جواب دوم, سه روش معرفی شد. اما از آنجا که در این مثال نمی‌توان به یک فرم بسته برای محاسبه $a_n(r)$ رسید, یا از روش دوم استفاده می‌کنیم (که در توضیح انتهای حل مساله آمده است) و یا $a_n'(r)$ را جمله به جمله بصورت زیر بدست می‌آوریم:

$$a_n(r)=-\frac{a_{n-1}}{n+r-2}-\frac{a_{n-2}}{(n+r-1)(n+r-2)}\quad;\ a_0=r-r_2=r-1\quad;\quad a_{-1}=0$$

$$n = 1 \rightarrow a_1(r) = -\frac{a_0}{r-1} - \frac{a_{-1}}{r(r-1)} = -\frac{r-1}{r-1} = -1 \rightarrow a_1'(r) = 0 \rightarrow a_1'(1) = 0$$

دیده میشود که جمله $a_1(r_2)$ بصورت حدی بدست آمد و لذا $a_1(r_2)$ همان $k = \lim\limits_{r \to r_2} a_N(r)$ می‌باشد.

$$n = 2 \rightarrow a_2(r) = -\frac{a_1}{r} - \frac{a_0}{(r+1)r} = \frac{1}{r} - \frac{r-1}{r(r+1)} = \frac{2}{r(r+1)} \rightarrow a_2'(r) = \cdots \rightarrow a_2'(1) = -\frac{3}{2}$$

$$n = 3 \rightarrow a_3(r) = -\frac{a_2}{r+1} - \frac{a_1}{(r+2)(r+1)} = -\frac{\frac{2}{r(r+1)}}{r+1} - \frac{-1}{(r+2)(r+1)} \rightarrow a_3'(1) = \frac{31}{36}$$

و به همین ترتیب می‌توان جمله به جمله سایر ضرایب را نیز بدست آورد. در نتیجه جواب دوم عبارت است از:

$$y_2(x) = ky_1(x)lnx + x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_2)x^n\right]$$

$$y_2(x) = -y_1(x)lnx + x^1\left(1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{31}{36}x^3 + \cdots\right) = -y_1(x)lnx + x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{31}{36}x^4 + \cdots \quad \blacksquare$$

<u>توضیح:</u> برای ریشه کوچکتر, حل مساله با استفاده از روش دوم بصورت زیر است:

$$y_2(x) = ky_1(x)lnx + x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right] = ky_1 lnx + x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

$$\rightarrow\ y_2' = ky_1' lnx + \frac{k}{x}y_1 + 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_n x^n$$

$$\rightarrow y_2'' = ky_1'' lnx + \frac{k}{x}y_1' - \frac{k}{x^2}y_1 + \frac{k}{x}y_1' + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_n x^{n-1}$$

$$x^2y'' + (x^2 - 2x)y' + (x^2 + 2)y = 0 \xrightarrow{Sub.}$$

$$\left(kx^2y_1'' lnx + 2kxy_1' - ky_1 + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_n x^{n+1}\right)$$
$$+\left(kx^2y_1' lnx + kxy_1 + x^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_n x^{n+2}\right)$$
$$-\left(2kxy_1' lnx + 2ky_1 + 2x + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+1)c_n x^{n+1}\right)$$
$$+\left(kx^2y_1 lnx + x^3 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+3}\right) + \left(2ky_1 lnx + 2x + \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n x^{n+1}\right) = 0$$

$$\rightarrow k\,\underbrace{\left(x^2y_1''+(x^2-2x)y_1'+(x^2+2)y_1\right)}_{0}lnx+2kxy_1'+kxy_1+x^2-3ky_1+x^3$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-n)c_nx^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_nx^{n+2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^{n+3}=0$$

چند جمله اول ضرایب را به طریق زیر بدست می‌آوریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-n)c_nx^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_nx^{n+2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^{n+3}=-2kxy_1'-kxy_1-x^2+3ky_1-x^3$$

از آنجا که صرفا چند جمله اولیه را می‌خواهیم, لذا از جملات y_1 و نیز سریها, چند جمله اول آنرا (مثلا تا x^4) جایگزین می‌کنیم:

$$y_1(x)=x^2-x^3+\frac{1}{3}x^4-\cdots\rightarrow y_1'=2x-3x^2+\frac{4}{3}x^3-\cdots$$

در حالت کلی بایستی y_1 تا توان x^5 نوشته شود, چرا که در مشتق آن x^4 ظاهر می‌شود و لذا نباید هیچ جمله با توان x^4 را از دست داد. اما از آنجا که در سمت راست سری, جمله xy_1' قرار دارد, y_1' تا درجه ۳ نیز کافی است, چرا که x^4 ایجاد می‌شود.

$$(0c_1x^2+2c_2x^3+6c_3x^4+\cdots)+(2c_1x^3+3c_2x^4+\cdots)+(c_1x^4)$$
$$=-2kx\left(2x-3x^2+\frac{4}{3}x^3-\cdots\right)-kx(x^2-x^3+\cdots)-x^2$$
$$+3k\left(x^2-x^3+\frac{1}{3}x^4-\cdots\right)-x^3$$

$$\rightarrow(2c_2+2c_1)x^3+(6c_3+3c_2+c_1)x^4+\cdots=(-k-1)x^2+(2k-1)x^3+\left(\frac{-2k}{3}\right)x^4+\cdots$$

حال ضرایب توانهای یکسان را در دو طرف مساوی قرار می‌دهیم:

$$x^2\ :\ 0=-k-1\rightarrow k=-1\quad;\quad x^3\ :\ 2c_2+2c_1=2k-1\quad;\quad x^4\ :\ 6c_3+3c_2+c_1=\frac{-2k}{3}$$

دیده می‌شود که مابقی ضرایب بر حسب c_1 خواهند شد. از آنجا که صرفا یک جواب دیگر می‌خواهیم, ساده‌ترین انتخاب $c_1=0$ می‌باشد. توجه شود از مساوی قرار دادن ضرایب x^2 در دو طرف, رابطه $0c_1=-k-1$ نیز بیانگر اختیاری بودن c_1 است.

$$c_1=0\rightarrow 2c_2+2c_1=2k-1\rightarrow c_2=\frac{-3}{2}\quad;\quad 6c_3+3c_2+c_1=\frac{-2k}{3}\rightarrow c_3=\frac{31}{36}\ ;\ \cdots$$

$$y_2(x)=ky_1lnx+x+\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^{n+1}=-y_1lnx+x-\frac{3}{2}x^3+\frac{31}{36}x^4+\cdots\ \blacksquare$$

مثال ۴-۳۷ جوابهای معادله زیر را حول نقطه صفر بیابید.

$$x(x-1)y''+3xy'+y=0\quad;\quad x_0=0$$

حل از آنجا که $x_0=0$ نقطه تکین معادله است, مراحل حل معادله در پنج گام و بصورت زیر خواهد بود:

۱- بررسی منظم بودن نقطه غیرعادی, تشکیل معادله مشخصه از رابطه (1) و تعیین ریشه‌های آن

$$p_0=\lim_{x\to0}(x-0)\frac{3x}{x(x-1)}=0\ ;\quad q_0=\lim_{x\to0}(x-0)^2\frac{1}{x(x-1)}=0\rightarrow reg.$$

$$F(r) = r(r-1) \quad ; \quad F(r) = 0 \to r_1 = 1\,;\, r_2 = 0$$

دیده می‌شود که با حالت ج یعنی اختلاف دو ریشه عدد طبیعی روبرو هستیم. $(N = r_1 - r_2 = 1)$

۲- جواب را بصورت $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ انتخاب کرده و در معادله جایگذاری می‌کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

با ترکیب سریهای اول و دوم و چهارم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{[(n+r)(n+r+2)+1]}_{(n+r+1)^2} a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} = 0$$

از آنجا که در این مثال ضریب y'' به شکل معمول x^2 نبوده و برابر $x(x-1)$ می‌باشد, لذا کمترین توان بصورت x^{n+r-1} ظاهر شده است. لذا زیگمای اول را به این توان منتقل می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)^2 a_{n-1} x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} = 0$$

اندیس شروع زیگماها $n = 0$ و $n = 1$ است. حال با بیرون کشیدن $n = 0$ و ضرب عبارت بالا در یک منفی خواهیم داشت:

$$\underbrace{r(r-1)}_{F(r)} a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\underbrace{(n+r)(n+r-1)}_{F(n+r)} a_n - (n+r)^2 a_{n-1}\right\} x^{n+r-1} = 0$$

۳- با متحد قرار دادن دو طرف تساوی خواهیم داشت:

$$r(r-1)a_0 = 0 \xrightarrow{a_0 \neq 0} r_1 = 1\,;\, r_2 = 0 \;;\; N = r_1 - r_2 = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\quad\} = 0 \to \underbrace{(n+r)(n+r-1)}_{F(n+r)} a_n = (n+r)^2 a_{n-1} \quad ; \quad n = 1,2,3,\cdots$$

بنابراین از آنجا که در حالت ج هستیم, ممکن است $F(n+r) = 0$ گردد. دیده شد چنانچه همزمان $r \neq r_2$ و $n \neq N$ باشد, آنگاه قطعا $F(n+r)$ مخالف صفر بوده و در نتیجه خواهیم داشت:

$$a_n(r) = \frac{n+r}{n+r-1} a_{n-1}(r) \quad ; \quad n = 1,2,3,\cdots \quad ; \quad \begin{cases} n \neq N \\ r \neq r_2 \end{cases}$$

۴- با انتخاب $r = r_1$ (ریشه بزرگتر) خواهیم داشت:

$$r_1 = 1 \to a_n = \frac{n+1}{n} a_{n-1} \to a_n = (n+1)a_0 \quad ; \quad n = 1,2,3,\cdots$$

$$a_0 = 1 \xrightarrow{(3)} y_1(x) = x^{r_1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n\right) = x^1\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n\right)$$

۵- با انتخاب $r = r_2$ (ریشه کوچکتر) از آنجا که اختلاف دو ریشه عدد طبیعی است, بایستی کنترل کرد که آیا $0a_N(r_2) = 0$ می‌باشد یا خیر. با استفاده از فرم اولیه رابطه بازگشتی (و نه تقسیم شده آن) با جایگذاری $r = r_2$ و $n = N$ خواهیم داشت:

$$(n+r)(n+r-1)a_n = (n+r)^2 a_{n-1} \xrightarrow{r=r_2=0\ ;\ n=N=1} 0a_1 = 1a_0 \neq 0$$

در نتیجه با حالت $0a_N(r_2) \neq 0$ روبرو هستیم. به عبارتی ریشه کوچکتر, جوابی به فرم فروبنیوس نخواهد داد.

با استفاده از رابطه بازگشتی گام ۳ می‌توان $a_n(r)$ را بر حسب $a_0(r)$ بصورت زیر بدست آورد:

$$a_n(r) = \frac{n+r}{n+r-1}a_{n-1}(r) \to a_n(r) = \frac{n+r}{r}a_0(r) = \frac{n+r}{r}\Big(r - \underbrace{r_2}_{0}\Big) = n+r \to a_n'(r) = 1$$

توجه شود که عملا $a_n(r)$ بصورت حدی بدست آمده است . بنابراین می‌توان گفت که $a_1(r_2)$ همان $k = \lim\limits_{r\to r_2} a_N(r)$ می‌باشد و یا اینکه مستقیما k را بصورت زیر بدست آورد:

$$k = \lim_{r\to r_2} a_N(r) = \lim_{r\to 0} a_1(r) = \lim_{r\to 0}\frac{1+r}{r}\Big(r - \underbrace{r_2}_{0}\Big) = 1$$

بنابراین جواب دوم بصورت زیر خواهد بود:

$$y_2(x) = ky_1(x)lnx + x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_2)x^n\right] = y_1(x)lnx + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \blacksquare$$

<u>توضیح ۱</u>: می‌توان جواب اول را بصورت زیر بر حسب توابع مقدماتی نیز بیان کرد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \xrightarrow{d} \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \to y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

که در اینصورت جواب دوم نیز بصورت زیر ساده می‌شود:

$$y_2(x) = y_1(x)lnx + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x}{(1-x)^2}lnx + \frac{1}{1-x} = \frac{xlnx + 1 - x}{(1-x)^2}$$

<u>توضیح ۲</u>: از آنجا که جواب اول به فرم بسته تبدیل می‌شود, لذا جواب دوم را می‌توان به روش کاهش مرتبه نیز بدست آورد:

$$y_2 = vy_1 \to v' = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int pdx} = \frac{e^{-\int \frac{3x}{x(x-1)}dx}}{y_1^2} = \frac{(x-1)^{-3}}{\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)^2} = \frac{x-1}{x^2} \to v = lnx + \frac{1}{x}$$

$$y_2 = vy_1 = \left(lnx + \frac{1}{x}\right)\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{xlnx + 1}{(1-x)^2}$$

توجه شود شکل این جواب با جواب بدست آمده از روش اول یکسان نیست, اما می‌تواند پایه دوم باشد, چرا که در واقع مجموع دو پایه قبلی است. یعنی:

$$y_1 + y_2 = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{xlnx + 1 - x}{(1-x)^2} = \frac{xlnx + 1}{(1-x)^2}$$

توضیح ۳: همواره قبل از حل معادله می‌توان حداقل شعاع همگرایی جواب را تعیین کرد. عنوان شد که شعاع همگرایی جواب حداقل به اندازه فاصله نقطه x_0 تا نزدیکترین نقطه تکین $(x-x_0)p(x)$ و $(x-x_0)^2q(x)$ میباشد. برای این مثال:

$$(x-x_0)p(x)=(x-0)\frac{3x}{x(x-1)}=\frac{3x}{x-1}\quad ;\quad (x-x_0)^2q(x)=(x-0)^2\frac{1}{x(x-1)}=\frac{x}{x-1}$$

از آنجا که دو عبارت بالا دارای تکین $x=1$ میباشند, لذا قبل از حل معادله می‌توان گفت حداقل شعاع همگرایی جواب $R=1$ می‌باشد (فاصله x_0 تا نزدیکترین تکین دو عبارت بالا). ■

تمرینات بخش ۴-۷-۴

۱- معادله زیر را حل کنید.

$$x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0\quad ;\quad x_0=0$$ (معادله بسل رتبه یک)

$$\underline{Ans}:\ y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}n!\,(n+1)!}x^{2n+1}$$

$$y_2(x)=\frac{1}{16}y_1(x)lnx+x^{-1}\left[1-\frac{1}{4}x^2-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}n!\,(n+1)!}\left(H(n)-\frac{1}{2n}\right)x^{2n}\right]$$

۲- معادله زیر را حل کنید. جواب دوم را با استفاده از سه روش محاسبه $a_n'(r_2)$, محاسبه ضرایب نامعین c_n و نیز کاهش مرتبه بدست آورید.

$$xy''-y'+y=0\quad ;\quad \underline{Ans}:\ y_1(x)=x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{360}x^5+\cdots$$

$$y_2(x)=y_1(x)lnx+\left(-2-2x+\frac{4}{9}x^3-\frac{25}{288}x^4+\cdots\right)$$

۳- جوابهای معادله $x(x+1)y''-y'-2y=0$ را حول نقطه صفر بیابید. سپس جواب بدست آمده را با جوابی که از روش کاهش مرتبه در تمرین ۹ از مجموعه تمرینات بخش ۲-۱۱ بدست آوردید مقایسه کنید.

۴- در مثال ۴-۲۶ معادله زیر مطرح شد و توانستیم یک جواب پایه را بدست آوریم. اما از آنجا که به رابطه $0a_3\neq 0$ رسیدیم, جواب دومی بدست نیامد. جواب دوم این معادله را تعیین کنید.

$$x^2y''-(2+3x)y=0\quad ;\quad x_0=0$$

$$\underline{Ans}:\ \ y_2(x)=y_1lnx+\frac{4}{9x}-\frac{2}{3}+x-\frac{15}{16}x^3-\frac{351}{800}x^4+\cdots$$

۵- جوابهای معادله $x^2y''+(x^2-2x)y'+2y=0$ را حول نقطه صفر بیابید.

$$\underline{Ans}:\ y_1(x)=x^2e^{-x}\quad ;\quad y_2(x)=-y_1lnx+x\left(1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^nH(n-1)}{(n-1)!}x^n\right)$$

تمرینات دوره‌ای

۱- معادلات زیر را حول $x_0 = 0$ حل کنید.

1) $x^2y'' + 2x^3y' + (2x^2 - 2)y = 0$; Ans : $y = c_1\frac{1}{x} + c_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(2n+3)}x^{2n+2}$

2) $4xy'' + 2y' + y = 0$; Ans : $y = c_1 cos\sqrt{x} + c_2 sin\sqrt{x}$

3) $xy'' + 3y' + 4x^3y = 0$; Ans : $y = c_1\frac{cos(x^2)}{x^2} + c_2\frac{sin(x^2)}{x^2}$

4) $x^2y'' + (x^2 + 2x)y' - 2y = 0$

Ans : $y_1(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3!}{(n+3)!}x^n = \frac{3}{x^2}(2 - 2x + x^2 - 2e^{-x})$; $y_2(x) = \frac{e^{-x}}{x^2}$

دقت شود جواب دوم می‌تواند $y_2(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$ نیز انتخاب شود.

5) $x^2y'' - (x^2 - 2x + 2)y = 0$

Ans : $y_1(x) = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \cdots = \frac{e^x}{x}$

$$y_2(x) = \frac{1}{x} + 2 + \frac{x}{2} - \frac{7x^2}{6} + \frac{17x^3}{24} - \frac{31x^4}{120} + \cdots = \frac{e^{-x}}{x}(2x^2 + 2x + 1)$$

6) $x^2y'' + x(1 - x)y' - (1 + 3x)y = 0$

Ans : $y_1(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{3n!}x^{n+1}$

$$y_2(x) = y_1(x)lnx + x^{-1}\left(1 - 2x - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{[1 - (n+1)H(n-2)]}{(n-2)!}x^n\right)$$

7) $x^2y'' + 2xy' + xy = 0$

Ans : $y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!}x^n$

$$y_2(x) = (-1)y_1(x)lnx + x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{(n-1)!\,n!}\left(H(n-1) + \frac{1}{2n}\right)x^n\right]$$

8) $(x^2 - x)y'' - xy' + y = 0$; Ans : $y_1(x) = x$; $y_2(x) = 1 + xlnx$

9) $(x^2 - x)y'' + (4x - 2)y' + 2y = 0$; $0 < x < 1$; Ans : $y_1(x) = \frac{1}{x}$; $y_2(x) = \frac{1}{1-x}$

۲- جوابهای معادله زیر را برای x های بزرگ بدست آورید. (راهنمایی $t=\frac{1}{x}$ و حول $t=0$ بسط دهید)

$$x(1-x)y''-3y'+2y=0 \quad ; \quad \underline{Ans}: \; y=c_1(x^2+2x+3)+c_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+4)}{4x^{n+1}}$$

۳- الف: نشان دهید نقطه $x=0$ یک نقطه تکین نامنظم برای معادله دیفرانسیل $x^4y''+\lambda y=0$ می‌باشد.

ب: با استفاده از تغییر متغیر $t=\frac{1}{x}$ نشان دهید معادله فوق به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$t\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+\lambda ty=0$$

ج: کنترل کنید که نقطه $t=0$ یک نقطه تکین منظم برای معادله بدست آمده در قسمت ب می‌باشد.

د: جواب‌های معادله قسمت ب را به روش سری‌ها حول نقطه $t=0$ بدست آورده و آنرا بر حسب توابع مقدماتی بیان کنید.

$$\underline{Ans}: \; y=c_1x\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{x}\right)+c_2x\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{x}\right)$$

۴-۸- تابع گاما $(Gamma)$

تابع گاما بصورت زیر تعریف میشود که در آن n یک عدد حقیقی است.

$$\Gamma(n)=\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}\,dx$$

ابتدا هدف بررسی همگرایی یا واگرایی این تابع میباشد. در واقع در اینحالت با ترکیب انتگرال غیرعادی نوع اول و دوم روبرو هستیم که تحت عنوان نوع سوم شناخته میشود. چرا که برای $n<1$ نقطه $x=0$ یک تکین محسوب می‌شود.

بنابراین انتگرال را بصورت زیر تفکیک می‌کنیم:

$$\Gamma(n)=\int_0^{1}x^{n-1}e^{-x}\,dx+\int_1^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}\,dx=I_1+I_2$$

اگر $n>1$ آنگاه I_1 عادی است و I_2 به‌روش زیر همگراست.

$$p=2\rightarrow\lim_{x\to+\infty}x^2x^{n-1}e^{-x}=0\neq\infty \; ; \; Or: \; if \; x\to+\infty\rightarrow x^{n+1}<e^x\rightarrow x^{n-1}e^{-x}<\frac{1}{x^2}\rightarrow(C)$$

و اگر $n<1$ آنگاه I_2 مشابه آزمون بالا همگرا شده و I_1 زمانی همگراست که:

$$if \; x\to0^+\rightarrow x^{n-1}e^{-x}\approx\frac{1}{x^{1-n}}\rightarrow1-n<1\rightarrow n>0$$

یعنی تابع گاما برای $n>0$ همگراست.

در ادامه هدف محاسبه مقدار تابع گاما خواهد بود. دیده شد که این انتگرال غیرعادی به ازای $n>0$ همگراست. مطابق آنچه در زیر دیده میشود میتوان $\Gamma(n+1)$ را بر حسب $\Gamma(n)$ بیان کرد:

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx \to \Gamma(n+1)=\int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \underbrace{x^n}_{u}\,\underbrace{e^{-x}dx}_{dv}$$

$$\Gamma(n+1)=\lim_{A\to+\infty}\left(x^n(-e^{-x})|_0^A-\int_0^A n(-e^{-x})\,x^{n-1}dx\right)=0+n\Gamma(n)\to\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$$

که یک رابطه بازگشتی است. بعنوان نمونه $\Gamma(4)$ را بصورت زیر میتوان بدست آورد:

$$\Gamma(4)=3\times\Gamma(3)=3\times2\times\Gamma(2)=3\times2\times1\times\Gamma(1)$$

پس اگر $n\in\mathbb{N}$ در انتها به $\Gamma(1)$ نیاز خواهیم داشت که مقدار آن به سادگی برابر 1 بدست می‌آید.

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx \to \Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-x}dx=1$$

بنابراین اگر n عددی طبیعی باشد, خواهیم داشت:

$$n\in\mathbb{N}\to\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=\cdots=n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1\times\Gamma(1)=n!\to\Gamma(5)=4!=24$$

به همین جهت گاهی تابع گاما را تابع فاکتوریل نیز می‌نامند. به همین شیوه میتوان مثلا $\Gamma(4.7)$ را نیز بدست آورد:

$$\Gamma(4.7)=3.7\times\Gamma(3.7)=3.7\times2.7\times\Gamma(2.7)=3.7\times2.7\times1.7\times\Gamma(1.7)$$

پس فقط کافی است مقدار تابع گاما در یک بازه به طول 1 در دست باشد. برای این منظور با روشهای محاسبات عددی جداولی برای $1\le n<2$ ارائه شده است. مثلا از جدول صفحه بعد دیده میشود که $\Gamma(1.7)=0.9086$. در نتیجه:

$$\Gamma(4.7)=3.7\times2.7\times1.7\times0.9086=15.43$$

در قیاس با رابطه $\Gamma(n+1)=n!$ برای n های طبیعی, میتوان گفت $\Gamma(4.7)$ میتواند معرف $(3.7)!$ باشد. به عبارتی به تعمیمی از نماد فاکتوریل رسیده‌ایم.

در بخش بعد و در تعیین جواب معادله بسل به عبارتی به فرم $\prod_{n=1}^{k}(n+v)$ می‌رسیم که می‌توان آنرا بر حسب گاما بیان کرد, برای این منظور از $\Gamma(k+v+1)$ شروع می‌کنیم تا به $\Gamma(1+v)$ برسیم:

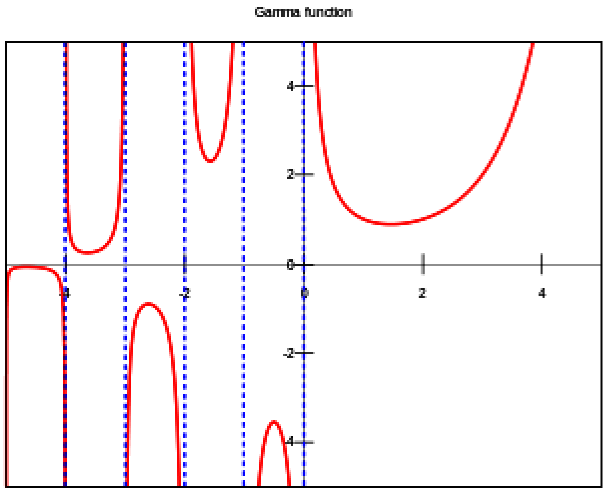
$$\begin{aligned}\Gamma(k+v+1)&=(k+v)\Gamma(k+v)=(k+v)(k+v-1)\Gamma(k+v-1)=\cdots\\&=(k+v)(k+v-1)\cdots(1+v)\Gamma(1+v)\end{aligned}$$

$$\to\prod_{n=1}^{k}(n+v)=(1+v)(2+v)\cdots(k+v)=\frac{\Gamma(k+v+1)}{\Gamma(v+1)}$$

برای $n<0$ دیده شد که این تابع با تعریف داده شده, همگرا نیست. در این شرایط تابع گاما را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma(n)\equiv\frac{1}{n}\Gamma(n+1)\quad;\quad n<0\quad;\quad n\neq-1,-2,\cdots$$

دقت شود انگیزه این تعریف, دقیقا از از معکوس رابطه $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ ایجاد شده است. بدیهی است تعریف بالا $\Gamma(0)$ را نمی‌دهد. به همین ترتیب $\Gamma(-1)$ به $\Gamma(0)$ برمیگردد, و لذا آن هم بدست نمی‌آید. به همین جهت در تعریف بالا n نمی‌تواند اعداد صحیح منفی باشد.



n	$\Gamma(n)$
1.00	1.0000
1.10	0.9514
1.20	0.9182
1.30	0.8975
1.40	0.8873
1.50	0.8862
1.60	0.8935
1.70	0.9086
1.80	0.9314
1.90	0.9618
2.00	1.0000

دیده شد که تابع گاما برای تمام اعداد طبیعی قابل محاسبه است, چرا که به فاکتوریل انجامید. در ادامه خواهیم دید می‌توان مقدار این تابع را برای تمام اعداد نیم‌صحیح (اعداد به فرم $\frac{k}{2}$ که در آن k یک عدد صحیحِ فرد است) نیز بدست آورد.

برای این منظور از رابطه زیر که در ریاضی ۲ ثابت می‌شود استفاده خواهیم کرد:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

بعنوان نمونه با استفاده از این رابطه میتوان $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ را بصورت زیر بدست آورد:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{-1}{2}} e^{-x}\, dx \xrightarrow{x=t^2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi} \to \left(-\frac{1}{2}\right)! \equiv \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

بنابراین می‌توان مقدار تابع گاما را با استفاده از $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ برای تمام اعداد نیم‌صحیح نیز بطور دقیق بدست آورد.

مثال ۴-۳۸ حاصل عبارات و انتگرالهای زیر را بیابید.

1) $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$ ■

2) $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{-\frac{3}{2}}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$ ■

3) $\int_0^\infty x^6 e^{-2x} dx \xrightarrow{t=2x} \frac{1}{2^7}\int_0^\infty t^6 e^{-t} dt = \frac{\Gamma(7)}{2^7} = \frac{6!}{2^7} = \frac{45}{8}$ ■

4) $\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x^3} dx \xrightarrow{t=x^3} \frac{1}{3}\int_0^\infty t^{\frac{-1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$ ■

۴-۹- معادله بسل $(Bessel)$

در تعدادی از مسائل فیزیکی از جمله حل معادله ارتعاش(یا حرارت) یک ورق دایروی, در صورتی که تغییر شکل(یا دمای) اولیه صرفا تابعی از فاصله تا مرکز باشد, به این معادله برخورد می‌کنیم. فرم کلی معادله بسل بصورت زیر است:

$$x^2y''+xy'+(x^2-v^2)y=0 \quad ; \quad x_0=0 \quad ; \quad x>0 \quad ; \quad v\in\mathbb{R}^+$$

که به آن معادله بسل مرتبه v می‌گوییم. از آنجا که $x_0=0$ نقطه تکین معادله است, مراحل حل معادله در پنج گام و بصورت زیر خواهد بود:

۱- بررسی منظم بودن نقطه غیرعادی, تشکیل معادله مشخصه از رابطه (1) و تعیین ریشه‌های آن

با توجه به اینکه $p(x)$ و $q(x)$ نسبت دو چندجمله‌ای می‌باشند, دو حد زیر را بررسی می‌کنیم:

$$p_0=\lim_{x\to 0}(x-0)\frac{x}{x^2}=1 \ ; \quad q_0=\lim_{x\to 0}(x-0)^2\frac{x^2-v^2}{x^2}=-v^2\to reg.$$

$$F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0=r(r-1)+r-v^2=r^2-v^2 \quad ; \ F(r)=0\to r_1=v\,;r_2=-v$$

بنابراین در ابتدا متوجه می‌شویم که فرم جواب دوم بستگی به مقدار v دارد. حال که نقطه غیرعادی منظم است, پس می‌توان روش فروبنیوس را بکار برد. از آنجا که اختلاف ریشه‌ها برابر $2v$ میباشد, لذا بسته به اینکه $2v\notin\mathbb{N}$ یا $2v=0$ یا $2v\in\mathbb{N}$ جوابهای مساله متفاوت خواهد بود. در حالت اول هر ریشه یک جواب به فرم فروبنیوس خواهد داشت. در حالت دوم با ریشه مضاعف سروکار داریم و در حالت سوم نیز ممکن است $0a_N(r_2)=0$ یا $0a_N(r_2)\neq 0$ که در گام پنجم به هر یک می‌پردازیم.

۲- جواب را بصورت $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$ انتخاب کرده و در معادله جایگذاری می‌کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+2}-v^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

با ترکیب سریهای اول و دوم و چهارم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)^2-v^2]a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+2}=0$$

توان x در دومین سری را بصورت زیر به $n+r$ تبدیل می‌کنیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+2}=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+r}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-2}x^{n+r} \quad ; \ a_{-1}\equiv 0$$

$$\to\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)^2-v^2]a_nx^{n+r}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-2}x^{n+r}=0 \quad ; \ a_{-1}\equiv 0$$

دیده می‌شود که اندیس شروع زیگماها $n=0$ و $n=1$ است. حال با بیرون کشیدن $n=0$ خواهیم داشت:

$$\underbrace{(r^2-v^2)}_{F(r)}a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\underbrace{[(n+r)^2-v^2]}_{F(n+r)}a_n+a_{n-2}\right\}x^{n+r}=0 \quad ; \ a_{-1}\equiv 0$$

۳- با متحد قرار دادن دو طرف تساوی خواهیم داشت:

$$(r^2-v^2)a_0=0\xrightarrow{a_0\neq 0} r_1=v\ ;r_2=-v\ ;\quad N=r_1-r_2=2v$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\quad\}=0\rightarrow \underbrace{[(n+r)^2-v^2]}_{F(n+r)}a_n(r)=-a_{n-2}(r)\quad ;\quad a_{-1}\equiv 0$$

$$a_n(r)=-\frac{a_{n-2}(r)}{(n+r)^2-v^2}\quad ;\quad n=1,2,\cdots$$

توجه شود چنانچه $N=2v\in\mathbb{N}$ باشد در حالت ج هستیم, بنابراین رابطه تقسیم شده بالا به شرطی اعتبار دارد که همزمان $r\neq r_2$ و $n\neq N$ باشد.

۴- با انتخاب $r=r_1$ (ریشه بزرگتر) خواهیم داشت:

$$r_1=v\rightarrow a_n=-\frac{a_{n-2}}{n(n+2v)}\quad ;\quad (n=1,2,\cdots)$$

حال از آنجا که هر ضریب با ضریب ۲ جمله قبل ارتباط دارد, برای محاسبه آنها ۲ ستون تشکیل داده, مشابه آنچه در بسل مرتبه صفر (مثال ۴-۳۰ از بخش ۴-۷-۲) دیده شد, خواهیم داشت:

$$\rightarrow a_1=-\frac{a_{-1}}{1+2v}=0\quad (v\geq 0)\xrightarrow{\cdots} a_{2k-1}=0$$

$$n=2k\rightarrow a_{2k}=-\frac{a_{2k-2}}{2k(2k+2v)}\rightarrow a_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}k!\,(1+v)(2+v)\cdots(k+v)}a_0$$

در بخش ۴-۸ دیده شد که می‌توان حاصلضرب مخرج را بر حسب تابع گاما بیان کرد, در نتیجه:

$$(1+v)(2+v)\cdots(k+v)=\frac{\Gamma(k+v+1)}{\Gamma(v+1)}\rightarrow a_{2k}=\frac{\Gamma(v+1)(-1)^k}{2^{2k}k!\,\Gamma(k+v+1)}a_0$$

از آنجا که a_0 اختیاری است, معمولا آنرا بصورت $a_0=\frac{1}{2^v\Gamma(v+1)}$ درنظر می‌گیرند که منجر به فرم ساده‌تر جواب خواهد شد:

$$a_0=\frac{1}{2^v\Gamma(v+1)}\rightarrow a_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k+v}k!\,\Gamma(k+v+1)}$$

از آنجا که در رابطه (3) فرض شده بود $a_0=1$ و در اینجا آنرا تغییر دادیم, لذا a_{2k} را در فرمول کلی فروبنیوس جایگذاری می‌کنیم(توجه شود $a_{2k-1}=0$ بدست آمد):

$$\rightarrow y_1(x)=x^v\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{2k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+v+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v}\equiv J_v(x)\ ;\ \mathit{first\ kind\ of\ order\ v}$$

این جواب را بسل نوع اول مرتبه v می‌نامیم. بدیهی است چنانچه v یک عدد طبیعی باشد, می‌توان بجای تابع گاما از معادل فاکتوریل آن استفاده کرد, به عبارتی $\Gamma(n+v+1)=(n+v)!$

۵- با انتخاب $r=r_2$ (ریشه کوچکتر) از آنجا که $N=2v$ میباشد, لذا فرم جواب دوم بستگی به v خواهد داشت. بنابراین بسته به اینکه $2v\notin\mathbb{N}$ یا $2v=0$ یا $2v\in\mathbb{N}$ جوابهای مساله متفاوت خواهد بود.

الف: اگر $2v \notin \mathbb{N}$, یعنی اختلاف ریشه‌ها طبیعی نبوده و لذا جواب دوم به فرم فروبنیوس بوده و صرفا با تعویض v به $-v$ در جواب قسمت قبل بدست می‌آید. (تمرین ۲ از مجموعه تمرینات بخش ۴-۷-۱ که بسل رتبه $\frac{1}{3}$ است).

$$r_2 = -v \rightarrow J_{-v}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-v}$$

ب: اگر $2v = 0$, یعنی $r = \pm v = 0$ ریشه مضاعف بوده و لذا جواب دوم لگاریتمی است. (مثال ۴-۳۰ از بخش ۴-۷-۲)

ج: اگر $2v \in \mathbb{N}$, یعنی اختلاف دو ریشه عدد طبیعی است. با انتخاب $r = r_2$ (ریشه کوچکتر), بایستی کنترل کرد که آیا $0a_N(r_2) = 0$ می‌باشد یا خیر. با استفاده از فرم اولیه رابطه بازگشتی, با جایگذاری $r = r_2$ و $n = N$ خواهیم داشت:

$$[(n+r)^2 - v^2]a_n(r) = -a_{n-2}(r) \xrightarrow{r=r_2=-v\ ;\ n=N=2v} 0a_N = -a_{N-2}$$

اما صفر بودن یا نبودن مقدار a_{N-2} مشخص نیست. اگر قرار است $2v \in \mathbb{N}$ باشد, دو حالت اتفاق می‌افتد. یکی اینکه $v \in \mathbb{N}$ و دوم آنکه $v = \frac{k}{2}$ باشد که در آن k یک عدد طبیعی فرد است و اصطلاحا آنرا مرتبه نیم‌صحیح می‌نامیم. حال ببینیم در هر یک از این حالات جواب دوم به چه صورت خواهد بود:

۱- اگر v به فرم نیم‌صحیح باشد, یعنی $v = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots$, یعنی در این حالت $N = 2v$ یک عدد فرد می‌باشد, لذا $N-2$ یک عدد فرد خواهد شد. از آنجا که مطابق رابطه بازگشتی هر $a_n(r)$ به $a_{n-2}(r)$ مرتبط می‌باشد, لذا در نهایت a_{N-2} بر حسب a_{-1} بدست می‌آید و چون $a_{-1} \equiv 0$ می‌باشد, بنابراین مشابه جواب اول صرفا ضرایب زوج باقی می‌ماند. به عبارتی $a_{N-2} = 0$ بوده و لذا به فرم $0a_N(r_2) = 0$ می‌رسیم. یعنی در اینحالت نیز مشابه قسمت الف, جواب دوم نیز به فرم فروبنیوسی خواهد بود که بصورت $J_{-v}(x)$ بیان می‌شود. (تمرینات ۳ و ۵ از مجموعه تمرینات بخش ۴-۷-۳ که بسلهای رتبه $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$ میباشند).

۲- اگر $v \in \mathbb{N}$ باشد, بر خلاف قسمت قبل $N = 2v$ یک عدد زوج بوده و لذا $N-2$ یک عدد زوج خواهد شد. از آنجا که در نهایت a_{N-2} بر حسب a_0 بدست می‌آید و $a_0 \neq 0$ می‌باشد, در نتیجه فرم $0a_N(r_2) \neq 0$ ایجاد شده و لذا جواب دوم لگاریتمی خواهد بود. (تمرین ۱ از مجموعه تمرینات بخش ۴-۷-۴ که بسل رتبه 1 است).

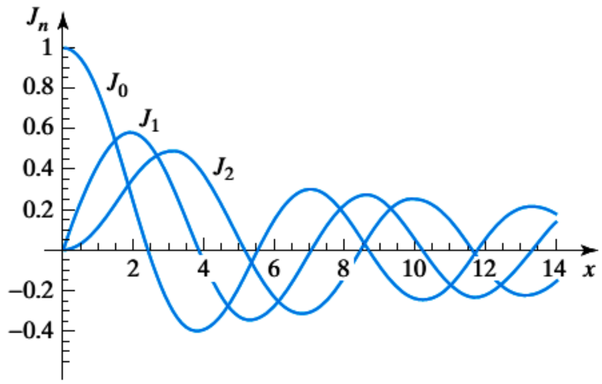
خلاصه:

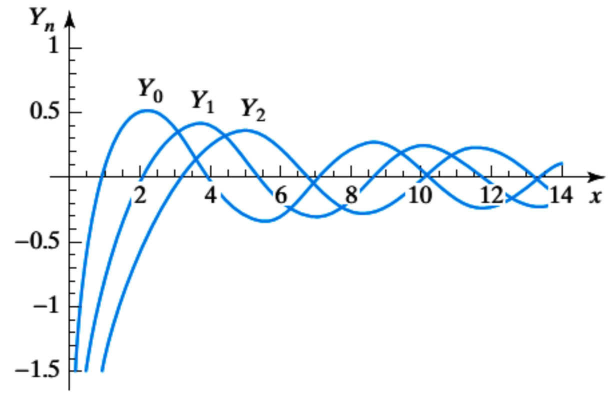
می‌توان گفت چنانچه $v \notin \{0,1,2,\cdots\}$ در اینصورت جواب دوم به فرم فروبنیوسی بوده و بصورت $J_{-v}(x)$ بیان می‌شود. اما اگر $v \in \{0,1,2,\cdots\}$ باشد, جواب دوم به فرم لگاریتمی خواهد شد که آنرا تابع نیومن می‌نامیم.

توضیح ۱: در حالتی که $v \in \{0,1,2,\cdots\}$ مشابه آنچه در توضیح مثال ۴-۳۰ برای $v = 0$ عنوان شد, طبق پیشنهاد وِبر معمول است که جواب دوم را بصورت یک ترکیب خطی از بسل نوع اول و تابع نیومن, بصورت زیر در نظر بگیریم. در اینصورت این جواب را بسل نوع دوم مرتبه v نامیده و با $Y_v(x)$ نمایش می‌دهیم. لازم به ذکر است که γ (ثابت اویلر-ماسکرونی) در توضیح مثال ۴-۳۰ معرفی شده است.

$$Y_v(x) \equiv \frac{2}{\pi}\big(y_2(x) + (\gamma - ln2)J_v(x)\big) \quad ; \quad v = 0,1,2,\cdots \quad ; \quad second\ kind\ of\ order\ v$$

این جواب گاهی اوقات با $Y_n(x)$ نیز نمایش داده می‌شود. در شکل زیر نمودار توابع بسل نوع اول و دوم تا مرتبه ۲ دیده میشود.





توضیح ۲: در معادله بسل نیز با توجه به اینکه ضریب y'' یعنی x^2 تک‌جمله‌ای می‌باشد, میتوان بدون جایگذاری جواب فربنیوس, با نوشتن بسط $(x-x_0)p(x)$ و $(x-x_0)^2q(x)$ و استفاده از معادله (2) رابطه بازگشتی را بصورت زیر بدست آورد.

$$xp(x)=x\frac{x}{x^2}=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots\rightarrow p_0=1\quad;\quad oth=0$$

$$x^2q(x)=x^2\frac{x^2-v^2}{x^2}=q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots\rightarrow q_0=-v^2;q_2=1\ ;\ \ oth=0$$

$$F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0=r^2-v^2\ ;\ F(r)=0\rightarrow r_1=v\ ;r_2=-v$$

$$F(n+r)a_n=-\sum_{k=0}^{n-1}[(k+r)p_{n-k}+q_{n-k}]a_k\qquad n=1,2,\cdots\qquad (2)$$

$$\rightarrow[(n+r)^2-v^2]a_n=-\underbrace{[(n+r-2)p_2+q_2]}_{(n+r-2)0+1=1}a_{n-2}=-a_{n-2}\ ;\ \ a_{-1}\equiv 0\ \ \blacksquare$$

۱-۹-۴- توضیحات تکمیلی در ارتباط با معادله بسل

توضیح ۱: یکی از مهمترین ویژگیهای توابع بسل (همانند چندجمله‌ایهای لژاندر) تعامد آنهاست. چرا که معادله بسل را می‌توان حالت خاصی از معادله اشتورم-لیبیول (که در درس ریاضی مهندسی با آن آشنا می‌شوید) دانست. در آنجا دیده خواهد شد که جوابهای این معادله نسبت به تابع وزن x متعامد می‌باشند. به همین دلیل می‌توان تابع دلخواه $f(x)$ را (که البته بایستی در شرایط خاصی صدق کند) بر حسب جوابهای معادله بسل بسط داد.

توضیح ۲: به ازای هر مقدار v میتوان جواب دوم را از روش کاهش مرتبه بدست آورد:

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int pdx}}{y_1^2}dx=J_v(x)\int\frac{e^{-\int\frac{1}{x}dx}}{J_v^2(x)}dx=J_v(x)\int\frac{dx}{xJ_v^2(x)}$$

توضیح ۳: تعدادی از خواص و روابط مهم بین توابع بسل بصورت زیر است:

$$W[J_v(x),J_{-v}(x)]=\frac{-2sin(v\pi)}{\pi x}\qquad;\qquad if\ x\rightarrow\infty:\ J_v(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}cos\left(x-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x) \quad \text{for } n=1,2,\ldots.$$

$$J_0'(x)=-J_1(x)$$

$$\int x^{\nu}J_{\nu-1}(x)dx = x^{\nu}J_{\nu}(x)+C$$

$$\int x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)dx = -x^{-\nu}J_{\nu}(x)+C$$

$$\frac{d}{dx}[x^{\nu}J_{\nu}(x)] = x^{\nu}J_{\nu-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu}J_{\nu}(x)] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$$

$$J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x)$$

$$J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)=2J_{\nu}'(x)$$

مثلا دیده میشود در حالت $n\in\mathbb{N}$ داریم $J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$. لذا برای $n\in\mathbb{N}$ جواب دوم مستقل نمی‌تواند $J_{-n}(x)$ باشد. همچنین از رابطه رونسکین هم می‌توان به همین نتیجه رسید زیرا:

$$W[J_n(x),J_{-n}(x)]=\frac{-2sin(n\pi)}{\pi x}=0$$

توضیح ۴: با استفاده از روابط ارائه شده در توضیح ۳, فرمولهای نیم‌صحیح را میتوان بصورت زیر بدست آورد.

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=\frac{2n-1}{x}J_{n-\frac{1}{2}}(x)-J_{n-\frac{3}{2}}(x) \quad ; \quad n\in\mathbb{N}$$

در تمرین ۳ از مجموعه تمرینات بخش ۴-۷-۳ جواب معادله بسل مرتبه $\frac{1}{2}$ بصورت زیر بدست آمد:

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}sinx \quad ; \quad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}cosx$$

بعنوان مثال جوابهای معادله بسل مرتبه $\frac{3}{2}$ با استفاده از رابطه داده شده عبارتند از:

$$\nu=\frac{3}{2}\to J_{\frac{3}{2}}(x)=\frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x)-J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{sinx}{x}-cosx\right) \quad ; \quad J_{-\frac{3}{2}}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{cosx}{x}+sinx\right)$$

ثابت می‌شود حالت ν به فرم نیم‌صحیح, تنها حالتی از معادله بسل است که می‌توان جوابها را برحسب توابع مقدماتی (در اینجا سینوس و کسینوس) بیان کرد. زیرا در اینحالت می‌توان بجای $\Gamma(n+\nu+1)$ یا $\Gamma(n-\nu+1)$ مقدار دقیق آنرا قرار داد, چرا که در نهایت به $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ نیاز خواهیم داشت که مقدار آن برابر $\sqrt{\pi}$ است.

توضیح ۵: دیده شد که جواب دوم به دو صورت $J_{-\nu}(x)$ یا $Y_n(x)$ نشان داده میشود. برای یکسان شدن فرم جواب دوم میتوان با تعریف $Y_\nu(x)$ بصورت زیر هر دو را به یک شکل نشان داد. در اینصورت میتوان جواب دوم را همواره به شکل $Y_\nu(x)$ دانست.

$$Y_\nu(x)\equiv\frac{J_\nu(x)cos(\nu\pi)-J_{-\nu}(x)}{sin(\nu\pi)} \quad ; \quad \nu\neq 0,1,2,\cdots$$

بدیهی است اگر $\nu\to n$ به همان $Y_n(x)$ میرسیم. (میتوان نشان داد $J_\nu(x)$ و $Y_\nu(x)$ مستقل خطی‌اند). بنابراین به ازای همه مقادیر ν جواب عمومی معادله بسل بصورت $y(x)=c_1J_\nu(x)+c_2Y_\nu(x)$ می‌باشد.

توضیح ۶: تعدادی از معادلات حاکم بر مسائل فیزیکی را می‌توان با تغییر متغیر به معادله بسل تبدیل کرد. چند نمونه از این معادلات و تغییر متغیرهای لازم آنها بصورت زیر می‌باشد:

$$x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - v^2)y = 0 \quad ; \quad t = \lambda x$$

$$4x^2y'' + 4xy' + (x - v^2)y = 0 \quad ; \quad t = \sqrt{x}$$

$$x^2y'' + (1 + 2v)xy' + xy = 0 \quad ; \quad u = x^v y$$

توضیح ۷: به غیر از معادلات لژاندر و بسل معادلات دیگری نیزدر فیزیک کاربرد دارد که در زیر آمده است:

Equation	$\alpha \in \mathbb{R} \;\; ; \;\; n \in \mathbb{Z}^+$	Singular Point
Legendre	$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$	± 1
Airy	$y'' - xy = 0$	$-$
Chebyshev	$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$	± 1
Bessel	$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$	0
Laguerre	$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$	0
Hermite	$y'' - 2xy' + 2ny = 0$	$-$

تمرینات بخش ۴-۹

۱- نشان دهید با تغییر متغیر و تغییر تابع نشان داده شده(با انتخاب مناسبA, B و C), معادله زیر به یک معادله بسل تبدیل میشود.

$$(x^a y')' + bx^c y = 0 \quad ; \quad t = Ax^B \quad ; \quad u = x^C y \quad ; \quad (x, y) \to (t, u)$$

۲- معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$x^2y'' + (1 - 2a)xy' + (b^2c^2x^{2c} + a^2 - k^2c^2)y = 0$$

ابتدا با تغییر تابع $u = x^a y$ آنرا به معادله زیر تبدیل نمائید.

$$x^2u'' + xu' + (b^2x^{2c} - k^2)c^2u = 0$$

سپس با تغییر متغیر $t = bx^c$ آنرا به معادله بسل تبدیل کرده نشان دهید جواب نهایی بصورت زیر است:

$$y(x) = Ax^kJ_k(bx^c) + Bx^kY_k(bx^c)$$

۳- با استفاده از تمرین قبل, معادله ایری را به معادله بسل تبدیل کرده آنرا حل کنید.

❄ ۴- معادله شرودینگر برای نوسانگر هارمونیک یک بعدی بصورت زیر میباشد: (Ψ تابعی از x است)

$$\frac{-h^2}{2m}\Psi'' + \left(\frac{1}{2}m\omega^2x^2 - E\right)\Psi = 0$$

نشان دهید با تغییر متغیر و تغییر تابع داده شده در زیر, به معادله هرمیتی خواهیم رسید.

$$t = \sqrt{\frac{m\omega}{h}}x \;;\; \Psi = e^{\frac{-t^2}{2}}y \;\; \to \;\; y_t'' - 2ty_t' - \underbrace{\left(\frac{2E}{h\omega} + 1\right)}_{2n}y = 0 \qquad (x, \Psi) \to (t, y)$$