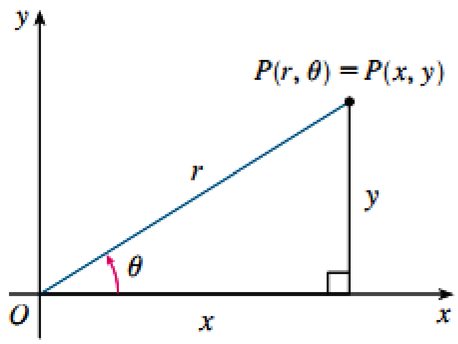
۶- مختصات قطبی

۶-۱- تعریف (بخش ۱۰-۳ کتاب)

در اینجا هدف معرفی یک دستگاه مختصات جدید میباشد که مولفه‌های آن متفاوت از مختصات دکارتی است.

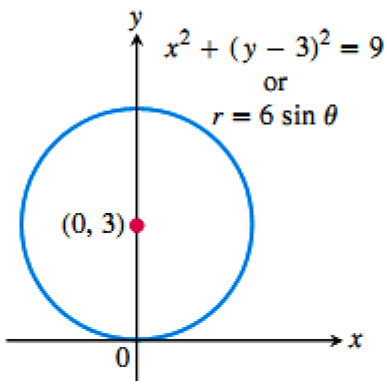


$$\boxed{x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta} \quad \boxed{r^2 = x^2 + y^2 \quad \tan\theta = \frac{y}{x}}$$

$$Ex.\ \ P\left(2, \frac{\pi}{6}\right) = P\left(2, -\frac{11\pi}{6}\right) = P\left(-2, \frac{7\pi}{6}\right)$$

یعنی برای یک نقطه, هم میتوان زاویه θ را از سمت منفی سنجید و هم برای آن r منفی قائل شد و به زاویه آن π اضافه کرد.

مثال ۶-۱ معادله $x^2 + (y-3)^2 = 9$ را در مختصات قطبی بنویسید.

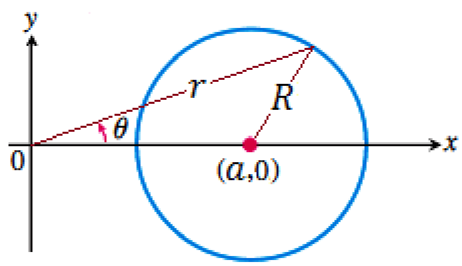


$$x^2 + y^2 - 6y = 0$$

$$\to r^2 - 6r\sin\theta = 0$$

$$r \neq 0 \to r = 6\sin\theta$$

توضیح: در حالت کلی میتوان بطریق هندسی و با نوشتن رابطه کسینوسها در مثلث نیز رابطه مابین r و θ را بدست آورد.



$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

$$\to r^2 - 2r(a\cos\theta + b\sin\theta) = R^2 - (a^2 + b^2)$$

$$if\ b = 0 \to r^2 - 2ar\cos\theta + a^2 = R^2$$

در ادامه, معادله تعدادی منحنی در مختصات دکارتی و قطبی برای مقایسه آمده است.

Polar equation	Cartesian equivalent
$r\cos\theta = 2$	$x = 2$
$r^2\cos\theta\sin\theta = 4$	$xy = 4$
$r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1$	$x^2 - y^2 = 1$
$r = 1 + 2r\cos\theta$	$y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$
$r = 1 - \cos\theta$	$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$

مثال ۶-۲ معادله $r = tan\theta sec\theta$ را در مختصات دکارتی بدست آورید.

$$r = \frac{sin\theta}{cos^2\theta} \rightarrow rcos^2\theta = sin\theta \rightarrow r^2cos^2\theta = rsin\theta \rightarrow x^2 = y \ ■$$

مثال ۶-۳ حداقل و حداکثر فاصله منحنی $x^2 + xy + y^2 = 16$ تا مبدا مختصات را بیابید.

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 \\ s.t. \\ x^2 + xy + y^2 = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(r,\theta) = r^2 \\ s.t. \\ 2r^2 + r^2sin2\theta = 32 \end{cases} \rightarrow r^2 = \frac{32}{2 + sin2\theta}$$

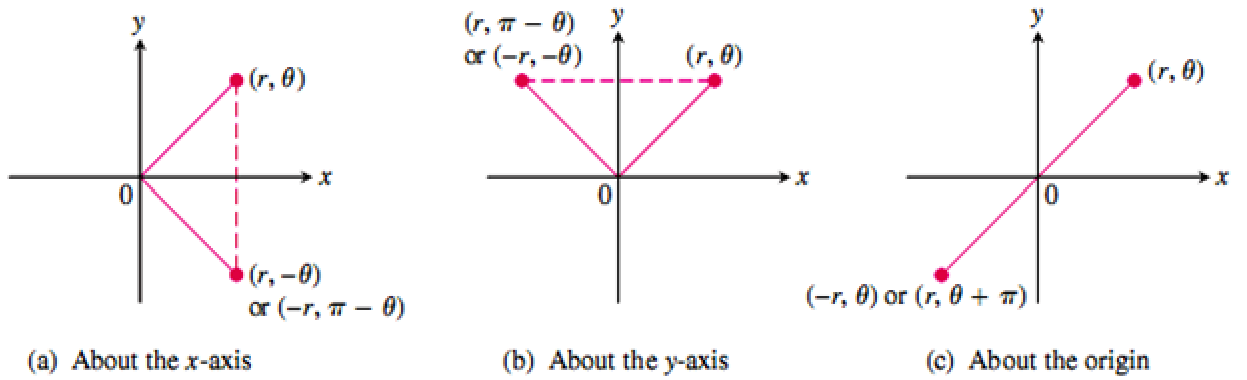
لذا از آنجا که حداقل و حداکثر $sin2\theta$ برابر ±1 است لذا $r_{max} = \sqrt{32}$ و $r_{min} = \sqrt{32/3}$ خواهد شد. ■

توضیح: در تمرین ۳ بخش ۱-۶ از شما خواسته شده بود همین مساله را در مختصات دکارتی حل کنید. در قیاس با آن حل میتوان دید حل مساله در مختصات قطبی ساده‌تر است. علت ساده شدن حل نیز, فرم تابع $f(x, y)$ میباشد که هم فرم دایره بوده و در مختصات قطبی با رابطه ساده r^2 نمایش داده میشود. ■

۶-۲- ترسیم منحنی

در ترسیم منحنی‌ها در مختصات قطبی ساده‌ترین روش, شیوه نقطه‌یابی است. دو نکته زیر در ترسیم بهتر منحنیها مفید است:

۱- تقارن: در شکل زیر انواع مختلف تقارن در مختصات قطبی ترسیم شده است.



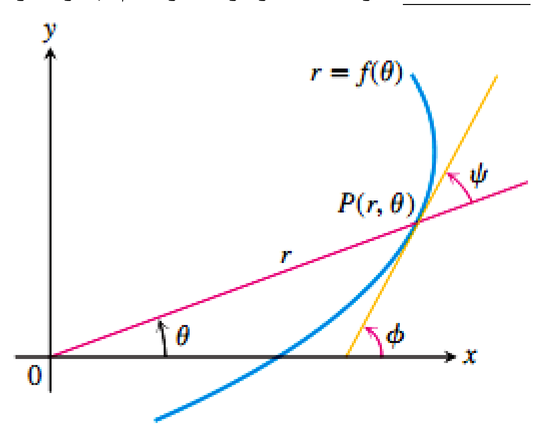
(a) About the x-axis (b) About the y-axis (c) About the origin

* ۲- شیب: در اینجا نیز برای ترسیم بهتر نیاز است که رابطه شیب خط مماس(ψ) را بدانیم. به شکل توجه شود:

$$\begin{cases} x = rcos\theta = f(\theta)cos\theta \\ y = rsin\theta = f(\theta)sin\theta \end{cases}$$

$$\rightarrow tan\phi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{rcos\theta + r'_\theta sin\theta}{r'_\theta cos\theta - rsin\theta} = \frac{r + r'_\theta tan\theta}{r'_\theta - rtan\theta}$$

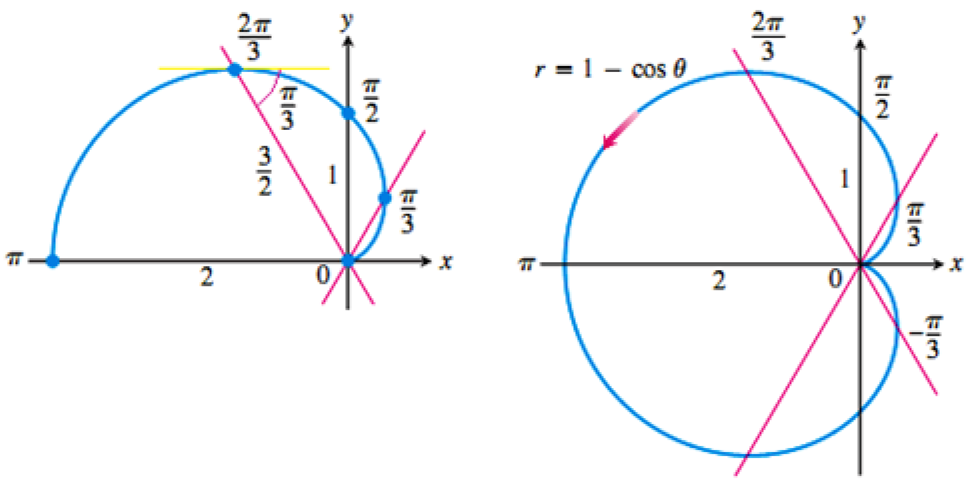
$$\xrightarrow{\psi=\phi-\theta} tan\psi = \frac{tan\phi - tan\theta}{1 + tan\phi tan\theta} \xrightarrow{Sub.} \boxed{tan\psi = \frac{r}{r'_\theta}}$$



مثال ۶-۴ منحنی‌های $r = 1 - cos\theta$ و $r = 1 - sin\theta$ را رسم کنید.

حل منحنی اول نسبت به افق تقارن دارد, لذا ترسیم نصف آن کافی است. بنابراین با انتخاب چند θ مختلف و به شیوه نقطه‌یابی آنرا رسم می‌کنیم. برای ترسیم منحنی دوم نیز از آنجا که $cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = sin\theta$ لذا کافی است منحنی اول $\frac{\pi}{2}$ دوران یابد. ■

θ	$r = 1 - \cos\theta$
0	0
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3}{2}$
π	2



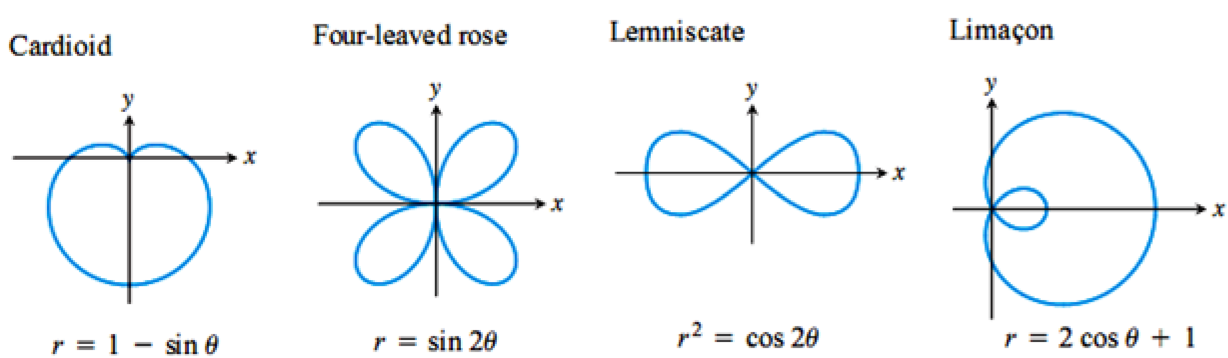
* <u>توضیح:</u> با توجه به آنچه عنوان شد, رابطه شیب خط مماس (ψ) برای معادله $r = a(1 - cos\theta)$ بصورت زیر است:

$$tan\psi = \frac{r}{r'_\theta} = \frac{1 - cos\theta}{sin\theta} = tan\frac{\theta}{2} \to \psi = \frac{\theta}{2} \quad \text{یا} \quad \psi = \frac{\theta}{2} + \pi$$

لذا با توجه به این رابطه میتوان رسم دقیقتری از منحنی بدست آورد. مثلا در شکل بالا دیده میشود که در نقطه‌ای که $\theta = \frac{2\pi}{3}$ است, $\psi = \frac{\pi}{3}$ میباشد. (بالاترین نقطه منحنی) ■

<u>ترسیم شده چند منحنی قطبی</u>

در شکل زیر ترسیم شده چند منحنی قطبی ارائه شده است.



<u>توضیح:</u> در قیاس با مختصات قطبی, نوع دیگری از مختصات با نام مختصات شبه قطبی(بیضوی) ارائه شده است. مزیت این مختصات آن است که بیضی را به معادله ساده $r = 1$ تبدیل می‌کند. در واقع:

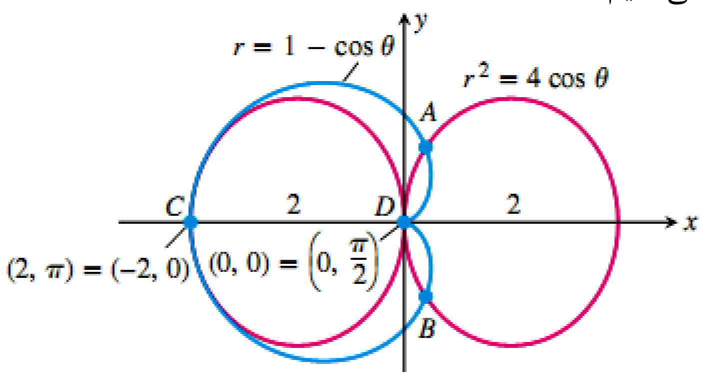
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\; ; \;\; \begin{cases} x = arcos\theta \\ y = brsin\theta \end{cases} \to r = 1$$

* <u>نقاط تلاقی دو منحنی</u>

با یک مثال ساده شروع میکنیم. فرض کنید سوال این باشد که آیا نقطه $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ روی منحنی $r = 2cos2\theta$ قرار دارد؟ بدیهی است $2 \neq 2cos\left(2\frac{\pi}{2}\right)$. اما اگر نقطه را به شکل معادل آن یعنی $\left(-2, -\frac{\pi}{2}\right)$ نمایش دهیم, پاسخ مثبت است, زیرا در منحنی صدق میکند, یعنی $-2 = 2cos\left(2\frac{-\pi}{2}\right)$. به عبارتی بایستی همواره نقطه متناظر r منفی را نیز کنترل کنیم. همین نکته کار یافتن نقاط تلاقی دو منحنی در مختصات قطبی را پیچیده میکند.

مثال ۶-۵ نقاط تلاقی دو منحنی $r = 1 - cos\theta$ و $r^2 = 4cos\theta$ را بیابید.

حل ابتدا به شیوه معمول r دو منحنی را مساوی هم قرار می‌دهیم:



$$r = 1 - cos\theta \ ; \ r^2 = 4cos\theta$$

$$r = 1 - \frac{r^2}{4} \rightarrow r^2 + 4r - 4 = 0$$

$$(r, \theta) = \left(2\sqrt{2} - 2, \pm 80^{\circ}\right) \rightarrow A, B$$

دقت شود که فقط دو نقطه بدست آمد, در حالی که دو تلاقی دیگر نیز وجود دارد. علت آن است که این دو منحنی با مقدار θ یکسان به این دو نقطه نمی‌رسند. مثلا $r = 1 - cos\theta$ وقتی $\theta = \pi$ و $r^2 = 4cos\theta$ وقتی $\theta = 0$ میباشد به نقطه C میرسند. و نیز ایندو به ترتیب با $\theta = 0$ و $\theta = \frac{\pi}{2}$ به مبدا D میرسند. یک راه مناسب آن است که در یکی از معادلات تبدیل $(r, \theta) = (-r, \pi + \theta)$ را انجام داده و بعد دو معادله را قطع دهیم. البته در اینصورت میتوان دید باز هم D بدست نمی‌آید. بعنوان تمرین علت آنرا بیابید. بهرحال همواره بهترین راه یافتن تلاقی‌ها, ترسیم دو منحنی میباشد. ■

تمرینات بخش‌های ۶-۱ و ۶-۲

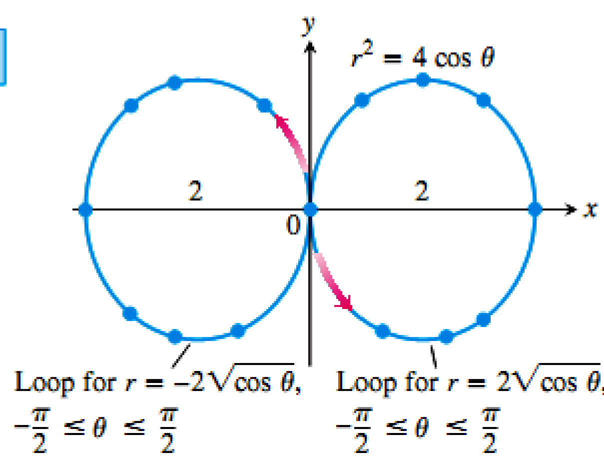
۱- الف: تبدیل یافته $r = 1 + 2rcos\theta$ در مختصات دکارتی را بیابید.

ب: تبدیل یافته $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$ را در مختصات قطبی بدست آورید.

$\underline{Ans:}$ $a)\ y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0 \quad ; \quad b)\ r = 1 - cos\theta$

۲- منحنی $r^2 = 4cos\theta$ را رسم کنید.

θ	$\cos\theta$	$r = \pm 2\sqrt{\cos\theta}$
0	1	± 2
$\pm\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\approx \pm 1.9$
$\pm\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\approx \pm 1.7$
$\pm\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\approx \pm 1.4$
$\pm\frac{\pi}{2}$	0	0



۳- الف: منحنی $r = 2cos\theta + 1$ را رسم کنید. ب: منحنی $r^2 = cos2\theta$ را رسم کرده نشان دهید زاویه مماس بر منحنی در مبدا $\frac{\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{4}$ میباشد.

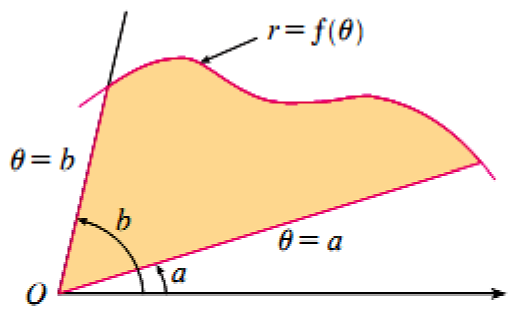
۴- منحنی $r = asin^3\frac{\theta}{3}$ را رسم کنید.

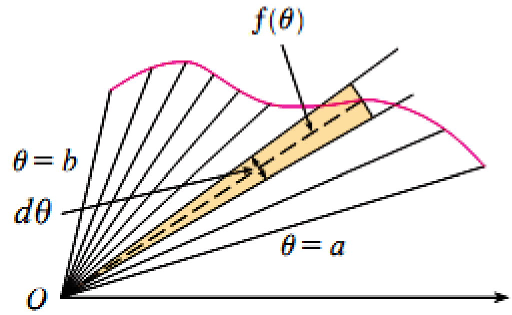
۵- حداکثر x در منحنی به معادله $(x^2 + y^2)^{3/2} = 9xy$ را بیابید. $\underline{Ans:}$ $x = 2\sqrt{3}$

۶-۳- کاربردها (بخش ۱۰-۴ کتاب)

۶-۳-۱- محاسبه مساحت

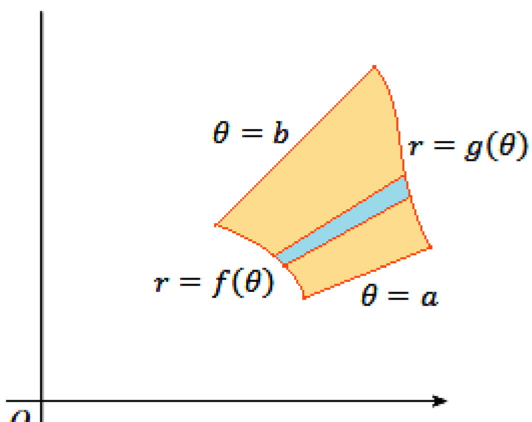
بطور خلاصه میتوان با المان گیری مشابه آنچه در بحث کاربردهای انتگرال دیده شد, در اینجا نیز عمل کرد. مثلا برای محاسبه مساحت شکل زیر, المان را بصورتی انتخاب میکنیم که در شکل سمت راست دیده میشود. به عبارتی سطح مورد نظر را از کنار هم قرار دادن بیشمار قطاع باریک دایروی که دارای شعاع $f(\theta)$ و زاویه مرکزی $d\theta$ می‌باشد, در نظر می‌گیریم. در نتیجه:



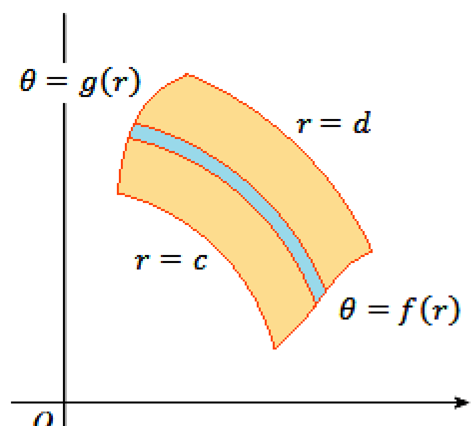


$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2}f^2(\theta)d\theta \to A = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta$$

ممکن است سوال شود این المان چگونه انتخاب شد؟ دقت شود در بحث دکارتی ما دو متغیر x و y داشتیم. انتخاب المان افقی به این معنی است که در دو مرز المان y ثابت است. و انتخاب المان عمودی نیز بیانگر ثابت بودن x در دو مرز المان است. پس در اینجا نیز که متغیرها r و θ میباشند, یا بایستی المان بگونه‌ای باشد که مشابه شکل سمت چپ(و نیز شکل بالا) در دو سمت آن θ ثابت باشد و یا مشابه شکل سمت راست, در دو سمت المان انتخابی r مقدار ثابتی را داشته باشد. برای هر یک جزء مساحت یعنی dA بصورتی است که در زیر آن آمده است.



$$\boxed{dA = \frac{1}{2}(g^2(\theta) - f^2(\theta))d\theta}$$



$$\boxed{dA = r(g(r) - f(r))dr}$$

مثال ۶-۶ مساحت دایره به شعاع a را بیابید.

حل در این مثال ساده, هم میتوان از جزء المان سمت چپ و هم از جزء المان سمت راست استفاده کرد. لذا خواهیم داشت:

$$dA = \frac{1}{2}a^2 d\theta \to A = \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi} d\theta = \pi a^2 \quad \text{یا} \quad dA = r(2\pi)dr \to A = 2\pi\int_0^a r dr = \pi a^2 \ \blacksquare$$

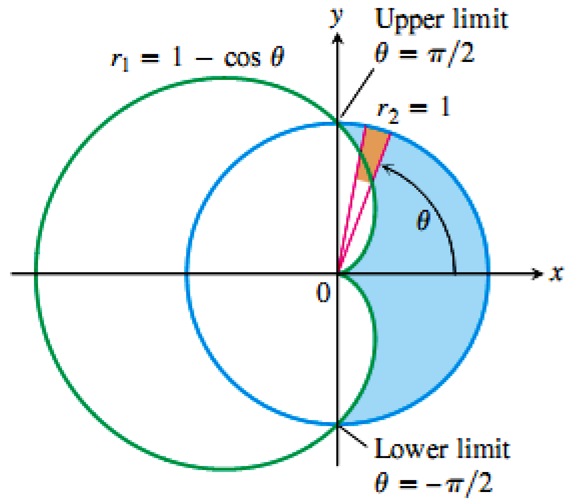
مثال ۶-۷ مساحت ناحیه درون منحنی $r = 1$ و بیرون منحنی $r = 1 - cos\theta$ را بیابید.

حل با استفاده از جزء المان سمت چپ (یعنی المانی که در دو سمت آن θ ثابت باشد) خواهیم داشت:

$$dA = \frac{1}{2}\left(g^2(\theta) - f^2(\theta)\right)d\theta$$

$$\rightarrow A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1^2 - (1 - cos\theta)^2)d\theta$$

$$\rightarrow A = 2 - \frac{\pi}{4}$$



۶-۳-۲- محاسبه طول قوس

فرض کنیم معادله منحنی موردنظر بصورت $r = f(\theta)$ باشد, در اینصورت:

$$L = \int_a^b \sqrt{{x'_\theta}^2 + {y'_\theta}^2}\, d\theta \ ; \ \begin{cases} x = rcos\theta = f(\theta)cos\theta \rightarrow x'_\theta = r'_\theta cos\theta - rsin\theta \\ y = rsin\theta = f(\theta)sin\theta \rightarrow y'_\theta = r'_\theta sin\theta + rcos\theta \end{cases}$$

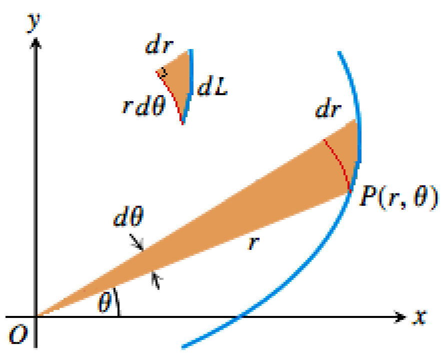
$$\rightarrow {x'_\theta}^2 + {y'_\theta}^2 = r^2 + {r'_\theta}^2 \rightarrow L = \int_a^b \sqrt{r^2 + {r'_\theta}^2}\, d\theta$$

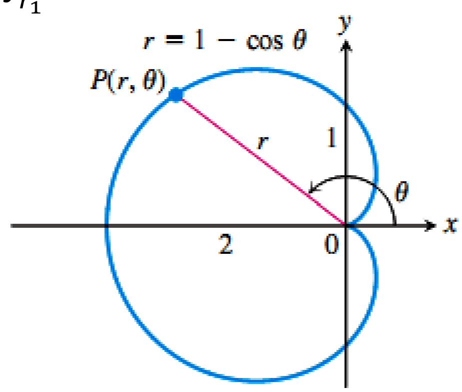
می‌توان نشان داد اگر معادله منحنی بصورت $\theta = f(r)$ باشد, در اینصورت: $L = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + r^2{\theta'_r}^2}\, dr$

راه هندسی اثبات: با توجه به شکل سمت چپ خواهیم داشت:

$$(dL)^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2 = \left(r^2 + {r'_\theta}^2\right)(d\theta)^2 \rightarrow L = \int_a^b \sqrt{r^2 + {r'_\theta}^2}\, d\theta$$

<u>or:</u> $$(dL)^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2 = \left(1 + r^2{\theta'_r}^2\right)(dr)^2 \rightarrow \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + r^2{\theta'_r}^2}\, dr$$





مثال ۶-۸ طول قوس منحنی $r = 1 - cos\theta$ (شکل سمت راست) را بیابید.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - cos\theta)^2 + (sin\theta)^2}\, d\theta = 8 \ \blacksquare$$

مثال ۶-۹ طول قوس منحنی $\theta = \int_1^r \frac{sinht}{t}dt$ را در فاصله $1 \le r \le 2$ بیابید.

$$L = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + r^2 {\theta'_r}^2}\, dr = \int_1^2 \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{sinhr}{r}\right)^2}\, dr = \int_1^2 \underbrace{\sqrt{1 + sinh^2 r}}_{coshr}\, dr = sinh2 - sinh1 \blacksquare$$

*** مثال ۶-۱۰** طول قوس تمام منحنی $r = asin^3(\theta/3)$ را بیابید.

حل دقت شود برای طی کردن کل منحنی باید $0 \le \theta/3 \le 2\pi$ انتخاب شود, یعنی $0 \le \theta \le 6\pi$. اما در ابتدا خواهیم دید که نقطه با مختصات $(3\pi + \alpha_0, -r_0)$ همان نقطه با مختصات (α_0, r_0) میباشد. لذا برای ترسیم کامل منحنی, کافی است تا 3π حرکت کنیم. چرا که:

$$A(\alpha_0, r_0) \xrightarrow{\alpha_0 \in [0,3\pi]} r(3\pi + \alpha_0) = asin^3 \frac{3\pi + \alpha_0}{3} = -asin^3 \frac{\alpha_0}{3} = -r(\alpha_0) = -r_0$$

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + {r'_\theta}^2}\, d\theta = \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2 sin^4(\theta/3)}\, d\theta = \frac{a}{2}\int_0^{3\pi}\left(1 + cos\frac{2\theta}{3}\right)d\theta = \frac{3\pi a}{2} \quad \blacksquare$$

۶-۳-۳- محاسبه رویه دوار

فرض کنید هدف محاسبه سطح دوار حاصل از دوران یک منحنی حول محور x باشد. مشابه آنچه در مختصات دکارتی دیده شد:

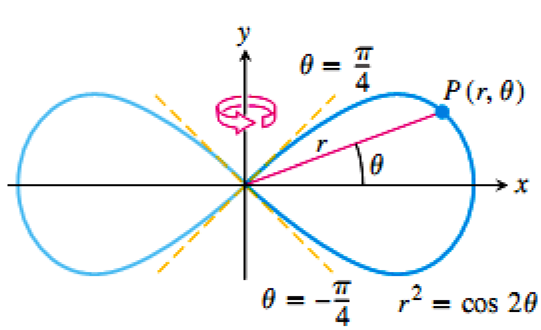
$$dP = 2\pi y dL \to P = 2\pi \int y dL = 2\pi \int_a^b rsin\theta \sqrt{r^2 + {r'_\theta}^2}\, d\theta$$

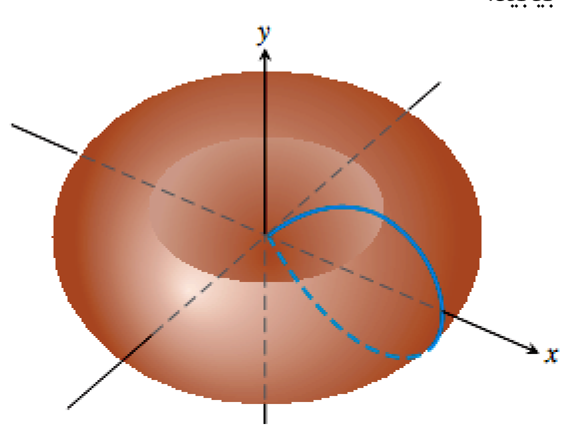
مثال ۶-۱۱ سطح جانبی یک کره به شعاع a را بیابید.

حل کره مورد نظر از دوران دایره $r = a$ حول محور x ایجاد می‌شود. در نتیجه:

$$r = a \to r'_\theta = 0 \to P = 2\pi \int_0^{2\pi} asin\theta \sqrt{a^2 + 0^2}\, d\theta = 4\pi a^2 \quad \blacksquare$$

مثال ۶-۱۲ سطح جانبی دوران یافته بخش سمت راست منحنی $r^2 = cos2\theta$ که ترسیم شده آن در شکل زیر آمده است را حول محور y بیابید.



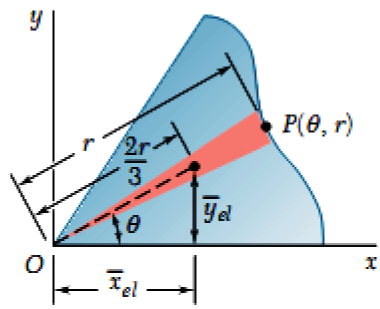


$$P = 2\pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} rcos\theta \sqrt{r^2 + {r'_\theta}^2}\, d\theta = 2\pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} cos\theta \sqrt{r^4 + (rr'_\theta)^2}\, d\theta = 2\pi\sqrt{2}$$

<u>Hint:</u> $r^2 = cos2\theta \to 2rr'_\theta = -2sin2\theta \to (rr'_\theta)^2 = sin^2 2\theta \to r^4 + (rr'_\theta)^2 = 1 \quad \blacksquare$

❋ ۶-۳-۴- محاسبه مرکز سطح

در اینجا نیز کافی است مساحت و مرکز سطحِ المان را بدانیم. مثلا برای المانی که در دو سمت آن θ ثابت است خواهیم داشت:



$$dA = \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

$$\bar{x}_{el} = \frac{2r}{3} \cos\theta$$

$$\bar{y}_{el} = \frac{2r}{3} \sin\theta$$

مثال ۶-۱۳ مرکز سطح نیم‌دایره‌ای به شعاع a را بیابید. (این مثال در بخش ۵-۵-۲ با قضیه پاپوس-گلدینوس حل شده است).

$$r = a \rightarrow \bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\, dA \rightarrow \bar{y}\left(\frac{\pi}{2}a^2\right) = \int_0^{\pi} \left(\frac{2a}{3} sin\theta\right)\left(\frac{1}{2}a^2 d\theta\right) = \frac{2a^3}{3} \rightarrow \bar{y} = \frac{4a}{3\pi} \quad \blacksquare$$

تمرینات بخش ۶-۳

۱- مساحت ناحیه محدود بین منحنیهای $r = 3cos\theta$ و $r = 1 + cos\theta$ را بیابید. جواب: $A = \frac{5\pi}{4}$

۲- مساحت ناحیه محدود بین منحنیهای $r = \sqrt{2}sin\theta$ و $r^2 = sin2\theta$ را بیابید. جواب: $A = \frac{\pi}{8}$

۳- طول قوس منحنی $r = e^{\theta/2}$ را در فاصله $0 \le \theta \le 4\pi$ بیابید. جواب: $L = \sqrt{5}(e^{2\pi} - 1)$

۴- طول قوس منحنی $r = sin^2(\theta/2)$ را از $\theta = 0$ تا $\theta = \pi$ بیابید. جواب: $L = 2$

۵- سطح جانبی دوران یافته منحنی $r = a(1 + cos\theta)$ حول محور x را بیابید. جواب: $P = \frac{32\pi}{5}a^2$

❋ ۶- مرکز سطح نیمه سمت راست منحنی $r = acos2\theta$ را بیابید. جواب: $\bar{x} = 0.549a \; ; \; \bar{y} = 0$