

ریاضیات گسسته

کوئیز چهارم - استقرا

علی زیلوچی

تاریخ برگزاری ۰/۰/۰

زمان پاسخگویی: ۱۵ دقیقه

نام و نام خانوادگی:

شماره دانشجویی:

سؤال ۱.

به ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید:

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

پاسخ:

حکم را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم:
پایه استقرا: برای $n = 1$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

فرض استقرا: شرط برای $n - 1$ برقرار است: یعنی:

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{(2n-3)(2n-1)} = \frac{n-1}{2n-1}$$

اثبات حکم استقرا: دو طرف فرض را با $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ جمع می‌کنیم:

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n-1}{2n-1} + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

با مقایسه این عبارت با حکم سوال درمی‌یابیم، حکم معادل این است که ثابت کنیم:

$$\frac{n-1}{2n-1} + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

حال دو طرف را در $(2n-1)(2n+1)$ ضرب می‌کنیم:

$$(n-1)(2n+1) + 1 = n(2n-1) = 2n^2 - n$$

مشاهده می‌شود که تساوی برقرار است و چون حکم برای n برقرار است، پس برای همه اعداد طبیعی برقرار خواهد بود و حکم سوال ثابت می‌شود.