ریاضیات گسسته

تمرین هشتم - گراف پیشرفته

محمد امانلو و امیرپارسا موبد

تاریخ تحویل ۱۴۰۲/۰۲/۲۴

سؤال ۱.

ثابت کنید عدد رنگی گراف مسطح کمتر مساوی ۶ است.

سؤال ۲.

در جلسه شهرسازان جوان مسئله ای مطرح شده است که طراحان موظف به طراحی شهری به شکل گراف مسطح هستند، به نحوی که کمینه‌ی تعداد خیابان‌های مشترک در یک تقاطع، بیشینه باشد.
-علی ادعا می‌کند یک گراف دو بخشی مسطح همبند دارد، که کمینه تعداد یال‌های خارج شده از یک راس در آن ۴ است.
-زهرا مدعی است، گراف مسطحی طراحی کرده که این عدد در آن برابر ۶ است.
- احسان نیز گراف$K_۴$ را به عنوان پاسخ ارائه داده است.
شما بین این ۳ پاسخ کدام طرح را جهت پیاده‌سازی انتخاب می‌کنید؟ طرح انتخابی توسط شما حتما باید قابلیت پیاده‌سازی داشته باشد.

سؤال ۳.

توان k-ام یک گراف ساده G گراف ساده G^k است، که مجموعه رئوس آن $V(G)$ و مجموعه یال های آن $\{uv : d_G(u,v) \leq k\}$ است.
فرض کنید G حداقل ۳ مولفه همبندی غیر تهی مجاور راس x دارد که در هر کدام راس x دقیقا یک همسایه دارد.
ثابت کنید $G^۲$ همیلتونی نیست.
$d_G(u,v)$:کمینه تعداد یالهایی که باید طی شود تا از راس u به راس v برویم را فاصله u و v گویند و با $d_G(u,v)$ نشان می‌دهند.
مولفه همبندی:یک زیر گراف مانند H از G یک مؤلفهٔ همبندی برای G است اگر و فقط اگر بین هر دو راس در H، دست‌کم یک مسیر وجود داشته باشد و با افزودن هر راس (و یا یال) دیگری از G به H این خاصیت از بین برود.

سؤال ۴.

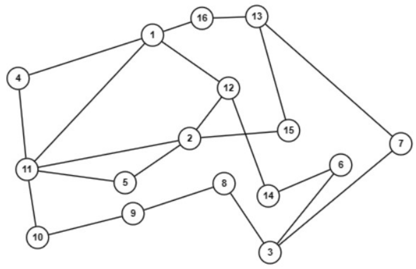
گراف G راس تنها ندارد و هیچ زیرگراف القایی از آن دقیقا دو یال ندارد (زیر گراف القایی، زیرگرافی از گراف اصلی است، که رئوس آن یک زیرمجموعه از رئوس گراف است و به ازای هر دو راس از آن که در گراف اصلی به هم یال دارند، این یال در زیرگراف القایی هم وجود دارد.).
ثابت کنید این گراف کامل است.

سؤال ۵.

در گراف ساده n راسی G که $n \geq ۵$ و $\chi(G) \geq ۴$ و $\delta(G) \geq ۱$ ثابت کنید، می‌توان رئوس گراف را به دو دسته تقسیم کرد، به طوری که عدد رنگی یک دسته حداقل ۳ و عدد رنگی دسته دیگر حداقل ۲ باشد. ($\chi(G)$ همان عدد رنگی G است.)

سؤال ۶.

مسطح بودن گراف زیر را بررسی کنید. ادعای خود را ثابت کنید.



سؤال ۷.

(امتیازی) در یک جدول $n \times m$، تعدادی دومینوی ۲ × ۱ و ۱ × ۲ قرار داده‌ایم، به‌طوری که هر کدام دقیقا دو خانه از جدول را پر کرده‌اند و هیچ دو دومینویی رو هم نیافتاده‌اند. دومینوها لزوما کل جدول را پر نکرده‌اند.
ثابت کنید می‌توان دومینوهای موجود در جدول را طوری با چهار رنگ، رنگ کرد، که هیچ دو دومینوی مجاوری(که در بیش از یک نقطه با یکدیگر اشتراک دارند)، همرنگ نباشند.