تکلیف هفتم ریاضی مهندسی - محمد امانلو - کد دانشجویی : ۸۱۰۱۰۰۰۸۴ - استاد طالع

۱) الف)

$$f(s)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}(1+z+z^2+\dots)=\frac{1}{z}+1+z+\dots \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} \quad . \; |z|<1$$

$$f(s)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z^2}\left(\frac{-1}{1-\frac{1}{z}}\right)=\frac{-1}{z^2}+\frac{-1}{z^3}+\frac{-1}{z^4}\dots \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+2}} \quad |z|>1$$

۱) ب)

$$\xrightarrow{i+1}(z-i-1) \Big/ f(s)=\frac{-1}{z(z-1)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}=$$

$$\frac{1}{1+i+(z-i-1)}-\frac{1}{i+(z-i-1)}$$

$$=\frac{1}{i+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{z-i-1}{i+1}\right]^n(-1)^n \qquad \text{I} \quad 1>\left|\frac{z-i-1}{i+1}\right|$$

$$\frac{1}{(z-i-1)+(i+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{i+1}{z-i-1}\right](-1)^n \qquad \text{II} \quad 1<\left|\frac{z-1-i}{i+1}\right|$$

سیاتزم ۱

سیاتزم ۲

$$\frac{-1}{(i+1)+(z-i-1)}=\frac{-1}{i}\times\frac{1}{1+\frac{(z-i-1)}{i+1}}=\frac{-1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i-1}{i}\right)^n(-1)^n \qquad \text{III} \quad 1>\left|\frac{z-1-i}{i}\right|$$

$$=\frac{-1}{z-i-1}\times\frac{1}{1+\frac{i+1}{z-i-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{-1}{z-i-1}\right]^{n+1}(i)^n \qquad \text{IV} \quad 1<\left|\frac{z-i-1}{i}\right|$$

// تعیین بازه‌ی همگرایی →

$$\left|\frac{z-i-1}{i+1}\right|<1 \Rightarrow |z-1-i|<\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{z-i-1}{i+1}\right|>1 \Rightarrow |z-1-i|>\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{z-i-1}{i}\right|<1 \Rightarrow |z-1-i|<1$$

$$\left|\frac{z-i-1}{i}\right|>1 \Rightarrow |z-1-i|>1$$

توان‌های z مثبت ⇐ سری تیلور

سری‌ها بنابر دو ناحیه:

$$1-|z-i-1|<1 \xrightarrow{\text{I}+\text{III}} f(s)=\frac{1}{(i+1)+(z-i-1)}-\frac{1}{i+(z-1-i)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{z-1-i}{i+1}\right]^n(-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{z-1-i}{i}\right]^n(-1)^n$$

$$2-|z-i-1|<\sqrt{2} \xrightarrow{\text{I}+\text{IV}} f(s)=\dots$$

سری لوران است ⇐ سری تیلور ⇐ z هم در صورت هم در مخرج

$$3-|z-i-1|>\sqrt{2} \xrightarrow{\text{II}+\text{IV}} f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(i+1)^n}{(z-i-1)^{n+1}}\right](-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{-1}{z-1-i}\right]^{n+1}(i)^n$$

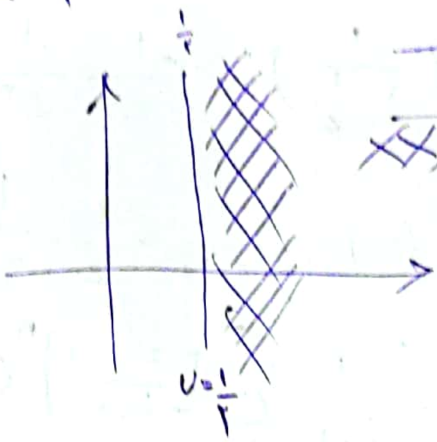
z در مخرج ⇐ لوران

۲) معادله دایره → $x^2+(y-1)^2\le 1 \to x^2+y^2-2y\le 0$ (I)

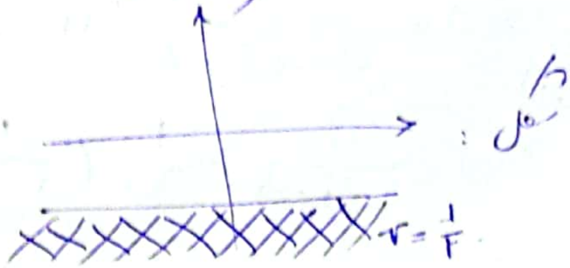
$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \to A+Bu-Cv+D(u^2+v^2)=0$

(I)$\div$ ⇒ $2v+1\le 0 \to v\le -\frac{1}{2}$

$|w|=1$, زاویه $=\frac{\pi}{2}$ → دوران $\frac{\pi}{2}$



شکل :



ناحیه هاشور زده تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ است.

---

۴) (همیشه) تابع مختلط در انتگرال گیری

الف) $\begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=-2xy \end{cases}$ $\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-2y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-2x \quad \frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y$ ⇒ $\begin{cases} 2x\neq -2x \to \frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y} \\ -2y\neq 2y \to \frac{\partial u}{\partial y}\neq\frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$

از آنجا که تابع فقط در $(x=y=0)$ تحلیلی است، پس در ناحیه انتگرال گیری تحلیلی نیست.

ب) $\begin{cases} v=e^x\sin(y) \to e^x\sin(y)=\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos(y) \\ u=e^x\cos(y) \to e^x\cos(y)=\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}=e^x(\sin y) \end{cases}$ ⇒

$e^x\sin(y)=e^x\sin(y)$
$e^x\cos(y)=e^x\cos(y)$ ⇒ $\boxed{\text{تابع تحلیلی است}}$ → تابعی از z

$\to \int_{j+1}^{0} e^z dz = e^z\Big|_{j+1}^{0} = 1-e^{j+1} = -1\ ee^{j} = 1-e[\cos(1)+i\sin(1)]$

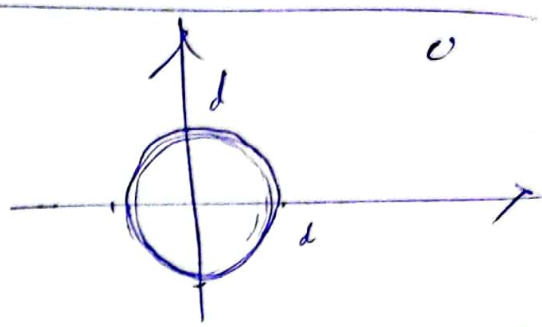
ج) → $\begin{cases} u=\sin(x)\cosh(y) \\ v=\cos(x)\sinh(y) \end{cases}$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\cos(x)\cosh(y),\ \frac{\partial u}{\partial y}=\sin(x)\sinh(y) \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\sin(x)\sinh(y),\ \frac{\partial v}{\partial y}=\cos(x)\cosh(x)$

→ $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \longleftrightarrow \cos(x)\cosh(y)=\cos(x)\cosh(x) \\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y} \longleftrightarrow -\sin(x)\sinh(y)=-\sin(x)\sinh(y) \end{cases}$ → همواره تحلیلی

$\xrightarrow{\text{برحسب } z}$ $\displaystyle\int_1^{3j} \sin(z)\,dz = -\cos(z)\Big|_1^{3j} = \boxed{\cos(1) - \cos(3j)}$

---

(4) $|z| = d \rightarrow z = re^{i\theta} \underset{r=d}{=} de^{i\theta}$



$\xrightarrow{w = z^k + \frac{1}{z^k}}$

$w = z^k + \dfrac{1}{z^k} = d^k e^{ik\theta} + \dfrac{1}{d^k} e^{-ik\theta} \underset{\text{سیزی}}{=} d^k\left(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)\right) + \dfrac{1}{d^k}\left(\cos(k\theta) - i\sin \ldots\right)$

$\boxed{\mathrm{I}}$

$= \left(\dfrac{1}{d^k} + d^k\right)\cos(k\theta) + i\left(d^k - \dfrac{1}{d^k}\right)\sin(k\theta)$

$\mathrm{I}, w = u + iv \Rightarrow \begin{cases} u = \left(\frac{1}{d^k} + d^k\right)\cos(k\theta) \rightarrow \dfrac{u}{(d^{-k} + d^k)} = \cos(k\theta) & \mathrm{II} \\ v = \left(\frac{1}{d^k} + d^k\right)\sin(k\theta) \rightarrow \dfrac{v}{(d^k - d^{-k})} = \sin(k\theta) & \mathrm{III} \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} \mathrm{II}, \mathrm{III} \\ \cos^2(k\theta) + \sin^2(k\theta) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\dfrac{v^2}{d^k - d^{-k}}\right) + \left(\dfrac{u}{d^k - d^{-k}}\right) = 1$

حاصل ضرب فرض بیضی

$d^k + d^{-k} > d^k - d^{-k}, d > 1$ $\Big| \Rightarrow$ بیضی بسته زیر می‌شود که حاصل نگاشت $|z| = d$ تحت $w = z^k + \frac{1}{z^k}$ است.