

سؤال ۱.

یال‌های گراف K_n را با n رنگ، رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. ثابت کنید مثلثی وجود دارد که از سه رنگ مختلف ساخته شده باشند. (از هر رنگ حداقل یک بار استفاده شده است.)

پاسخ.

یک زیرگراف ۳ راسی دلخواه را در نظر می‌گیریم. اگر مثلث موجود در این زیرگراف ۳ رنگی باشد که حکم ثابت است وگرنه ۱ یا ۲ رنگ دارد. حال در هر مرحله یک راس از گراف اصلی به همراه یال‌های متناظرش را به این زیرگراف اضافه می‌کنیم، می‌دانیم در هر مرحله ۰ یا تعدادی رنگ جدید به زیرگراف ما اضافه می‌شود، حال اگر ثابت کنیم مرحله‌ای وجود دارد که در آن بیش از ۱ رنگ به زیرگراف ما اضافه می‌شود حکم ثابت است زیرا، در این مرحله راس جدید ۲ یال با رنگ متفاوت دارد که قبلاً این رنگ‌ها در زیرگراف نبوده پس مثلث حاصل از این راس جدید و دو سر دیگر این دو یال تشکیل یک مثلث ۳ رنگ می‌دهد. همچنین چون از ابتدا گفتیم مثلث اولیه ۱ یا ۲ رنگ است و ما n رنگ داریم پس اگر در هر مرحله تنها یک رنگ نیز اضافه شود به این تعداد رنگ نمی‌رسیم و قطعاً مرحله‌ای وجود دارد که در آن بیش از ۱ رنگ اضافه شود. به این ترتیب حکم مسئله اثبات می‌شود.