ریاضی دانشگاهی:

اثبات قضیه‌ی جمع:

فرض: $\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \lim_{x\to a} g(x) = M$

حکم: $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = M+L$

$\forall \varepsilon>0 , \exists \delta>0$

$|x-a|<\delta , |f(x)+g(x)-M-L|<\varepsilon$

$\Rightarrow |f(x)-L+g(x)-M|<\varepsilon$

چون $|f(x)-L+g(x)-L| \leqslant |f(x)-L|+|g(x)-M|$

اگر $\varepsilon$ از $|f(x)-L|+|g(x)-M|$ بزرگتر باشد حتماً از $|f(x)-L+g(x)-M|$ بزرگتر است

$\Rightarrow |f(x)-L|+|g(x)-M|<\varepsilon \longrightarrow |f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2}$

$|g(x)-M|<\frac{\varepsilon}{2}$

چون حد وجود دارد $\lim_{x\to a} f(x) = L \rightarrow \forall \frac{\varepsilon}{2}>0 , \exists \delta_1>0 \quad |x-a|<\delta_1 , f(x)-L<\frac{\varepsilon}{2}$

و $\forall\varepsilon$ است $\quad \forall \frac{\varepsilon}{2}>0 , \exists \delta_2>0 \quad |x-a|<\delta_2 , g(x)-M<\frac{\varepsilon}{2}$

یعنی برای هر $\varepsilon$ نشان $\frac{\varepsilon}{2}$ یک $\delta$ از بین $\delta_1, \delta_2$ یافت می‌شود

پس: $\delta = Min\{\delta_1,\delta_2\}$ وجود دارد

○ مثال های جزوه ـ صد

* مثال ۱-۳)

$$A = \lim_{x \to \infty} x^2 \sin^2\left(\pi \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\right)$$

$$x^2 \sin^2\left(\pi - \pi \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi\sqrt{x} - \pi\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \sin^2\left(\frac{\cancel{\pi^2 x} - \cancel{\pi^2 x} - \pi^2}{\sqrt{x}\,(\cancel{\pi}\sqrt{x} + \cancel{\pi}\sqrt{x+1})}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}\right)$$

$$x^2 \left(\frac{\pi}{2x}\right)^2 = x^2 \times \frac{\pi^2}{4x^2}, \quad \boxed{\frac{\pi^2}{4}}$$

* تمرین ۱ جزوه

1) $\lim_{x \to 1} \frac{2x}{x^2+1} = 1$

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 : |x-1| < \delta , |f(x)-1| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{2x}{x^2+1} - 1\right| = \left|\frac{2x - x^2 - 1}{x^2+1}\right| = \left|\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\right| < \varepsilon$$

$$(x-1)^2 \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{M} < \varepsilon \Rightarrow (x-1)^2 < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \sqrt{\varepsilon}$$

$$\text{Max } M = 1 \Rightarrow \boxed{\delta \leq \sqrt{\varepsilon}}$$

2) $\lim_{x \to 7} \frac{8}{x-3} = 2$

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 : |x-7| < \delta , \left|\frac{8}{x-3} - 2\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{8 - 2x + 6}{x-3}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2(7-x)}{x-3}\right| = |7-x|\left|\frac{2}{x-3}\right| < \varepsilon \to |7-x| < \frac{3\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \text{Min}\left(1, \frac{3\varepsilon}{2}\right)}$$

$$\left|\frac{2}{x-3}\right|, r = 1 \to 6 < x < 8 \to 3 < x-3 < 5 \Rightarrow \text{Max } \frac{2}{x-3} = \frac{2}{3}$$

تمارین استوارت ج۱ - حد

$$20-\ \lim_{x\to 10}\left(3-\frac{4}{5}x\right)=-5$$

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0\ \ |x-10|<\delta\ ,\ \left|3-\frac{4}{5}x+5\right|<\varepsilon$$

$$\left|8-\frac{4}{5}x\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{40-4x}{5}\right| = |10-x|\frac{4}{5}<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |10-x|<\frac{5}{4}\varepsilon$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta \leq \frac{5}{4}\varepsilon}$$

$$28-\ \lim_{x\to 6^+}\sqrt[8]{6+x}=0$$

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ x_0<x<x_0+\delta\ ,\ \left|\sqrt[8]{6+x}\right|<\varepsilon$$

$$6<x<6+\delta$$

$$\left|\sqrt[8]{6+x}\right|<\varepsilon \Rightarrow 6+x<\varepsilon^8 \Rightarrow x<\varepsilon^8-6$$

$$x-6<\varepsilon^8-12 \Rightarrow \boxed{\delta\leq\varepsilon^8-12}$$

$$42-\ \lim_{x\to -3}\frac{1}{(x+3)^4}=\infty$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0,\ |x+3|<\delta\ ,\ \left|\frac{1}{(x+3)^4}\right|>\varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{x+3}\right|>\sqrt[4]{\varepsilon} \rightarrow |x+3|<\frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon}}$$

$$\boxed{\delta\leq\frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon}}}$$

$$43-\ \lim_{x\to -1^-}\frac{5}{(x+1)^3}=-\infty$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0;\ -1-\delta<x<-1\ ,\ \frac{5}{(x+1)^3}<\varepsilon \rightarrow x+1>\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \Rightarrow -(x+1)<\frac{-\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$$

$$\delta>-(x+1) \Rightarrow \boxed{\delta\leq -\sqrt[3]{5}/\sqrt[3]{\varepsilon}}$$

## مسائل های جزوه - پیوستگی حل ۱۲

$1-\ f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$

چون تابع پیوسته است.

$x = 0 \ : \quad f(0) = a_0$

$x \to +\infty \quad f(+\infty) = +\infty = f(a_1)$

$x \to -\infty \quad f(-\infty) = -\infty = f(a_2)$

$\Rightarrow f(a_1) \cdot f(a_2) < 0$ ، f پیوسته است

$\xRightarrow{\text{بولزانو}} \boxed{\exists c : f(c) = 0}$

$۲-\ g(x) = f(f(x)) - x$

$g(x_1) = f(f(x_1)) - x_1 = f(x_2) - x_1 = x_3 - x_1 > 0$

$g(x_2) = f(f(x_2)) - x_2 = f(x_3) - x_2 = x_4 - x_2 > 0$

$g(x_3) = f(f(x_3)) - x_3 = x_1 - x_3 < 0$

$g(x_4) = f(f(x_4)) - x_4 = f(x_1) - x_4 = x_2 - x_4 < 0$

$g(x_1) \cdot g(x_4) < 0 \xRightarrow{\text{بولزانو}}$ در بازه ی $[x_1, x_4]$ حداقل یک نقطه با مقدار (x) و صفر یافت می شود.

$۳-\ g(x) = a\sin(x) + b - x$

$Max(x) = a + b$

$x \begin{cases} x_1 > a+b \ : \quad g(x_1) < 0 \\ x_2 < a+b \ , \quad g(x_2) > 0 \end{cases} \rightarrow g(x_1) \cdot g(x_2) < 0 \xrightarrow{\text{بولزانو}} \underline{g(c) = 0}$

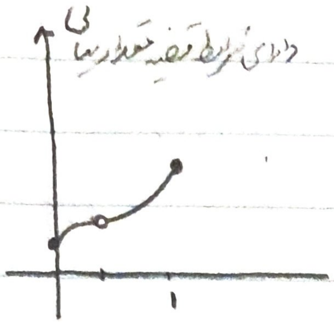
$۴-\ x_1 \neq x_2 \ , \quad f(x_1) \neq f(x_2)$ f برعکس ، برهان خلف

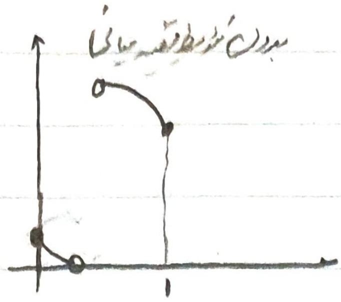
$\Rightarrow f(x_1) \in \mathbb{Q} \quad f(x_2) \in \mathbb{Q}$

می دانیم بین هر ۲ عدد گویا یک عدد گنگ وجود دارد $(y_0)$ پس بین $f(x_1)$ ، $f(x_2)$ مقدار گنگ $f(x_0)$ وجود دارد که متعلق به برد نیست با توجه به قضیه مقدار میانی تناقض داریم ✗.

# استوارت پیوستگی ۸-۱

۴۸-




۵۰- $f(3) < 6$ برهان خلف:

$\Rightarrow$ طبق قضیه مقدار میانی $\longrightarrow f(3) \neq f(2)$

f پیوسته

$\Rightarrow$ حداقل یک نقطه بین ۲ و ۳ وجود دارد که $f(x) = 6$ باشد

$\Rightarrow$ فرض خلف باطل است $\times$

$\Rightarrow \boxed{f(3) > 6}$

۵۲- $g(x) = \sqrt[3]{x} + x - 1$ $\longrightarrow$ $g(1) = 1$, $g(0) = -1$ $\Big\} \Rightarrow$ حداقل یک ریشه بین ۰ و ۱ وجود دارد

$0 < x < 1$

۴۴- $g(x) = \dfrac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \dfrac{b}{x^3 + x - 2}$

① $x^3 + 2x^2 - 1 = (x+1)(x^2 + x - 1)$ $\Big\langle$ $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $-1$, $-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

② $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2)$ $\rightarrow \Delta < 0$

در نتیجه تابع در تمام بازه $(-1, 1)$ پیوسته نیست باید آن را در بازه‌ای دیگر تجزیه کرد

$\left(-1, -\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right), \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right)$

$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \dfrac{a}{2^-} + \dfrac{b}{0^-} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^+} g(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ طبق قضیه بولزانو در این بازه حداقل یک ریشه حقیقی دارد

رستولت درس ۱ - حد و پیوستگی - (۹۷/۹/۷)

۱۹- $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad g(x) = \sin(x)$ $\quad fog(a)\,,\ gof(b)$
$fof(c)\,,\ gog(d)$

$fog(a) = \sqrt{\sin a} \qquad D = [۰, \pi] + ۲k\pi$

$gof(b) = \sin\sqrt{b} \qquad D = \mathbb{R}^+$

$fof(c) = \sqrt[۴]{x} \qquad D = \mathbb{R}^+$

$gog(d) = \sin(\sin(d)) \qquad D = \mathbb{R}$

۳۰- $\lim\limits_{t \to ۲} \dfrac{t^۲ - ۴}{t^۳ - ۸} \xrightarrow{H} \dfrac{۲t}{۳t^۲} \to \dfrac{۲}{۳t} = \dfrac{۲}{۳ \times ۲} = \boxed{\dfrac{۱}{۳}}$

۳۹- $۲x - ۱ \leq f(x) \leq x^۲ \qquad ۰ < x < ۳$

$\lim_{x \to ۱} =$

$۲ \times ۱ - ۱ \leq f(x) \leq ۱^۲ \Rightarrow \boxed{f(x) = ۱}$

۴۲- $\lim\limits_{x \to ۰} \sqrt[۳]{x} = ۰$

$\forall \varepsilon > ۰ , \exists \delta > ۰ \quad |x| < \delta \,,\ |\sqrt[۳]{x}| < \varepsilon$

$\Rightarrow x < \varepsilon^۳$

$\Rightarrow \boxed{\delta \leq \varepsilon^۳}$

۴۴- $\lim\limits_{x \to ۴^+} \dfrac{۲}{\sqrt{x - ۴}} = +\infty$

$\forall M > ۰ \ \exists \delta > ۰ \ s \ ,\ ۴ < x < ۴ + \delta \ ,\ \dfrac{۲}{\sqrt{x - ۴}} > M$

$\sqrt{x - ۴} < ۲M \Rightarrow x - ۴ < ۴M^۲ \Rightarrow x < ۴M^۲ + ۴$

$۴ + \delta \leq ۴M^۲ + ۴$

$\boxed{\delta \leq ۴M^۲}$

۵- $g(x) = ۲\sin x + ۲x - ۳ \rightarrow g(۱) > ۰ \,,\ g(۰) < ۰ \longrightarrow$ طبق قضیه [illegible] ریشه دارد

# تمرینات جزوه بخش ۳-۱

1- $f'(x) = a - \dfrac{3x^2(1+x^2) - 2x(x^3)}{(1+x^2)^2} > 0$

$\Rightarrow a > \underbrace{\dfrac{3x^4+3x^2-2x^4}{(1+x^2)^2}}_{g(x)}$

$\max g(x) = \frac{9}{8} \Rightarrow \boxed{a > \frac{9}{8}}$

2- $f' = \underbrace{2x}_{0}\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cancel{\left((-1)\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)x^2} = 0+0 = \boxed{0}$

$\infty$

$f''(0) = 2\sin\left(\frac{1}{x}\right) + (-1)\left(\frac{1}{x^2}\right)2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow f''$ ناپیوسته

3- $x = 0 \rightarrow f(y) = f(0) + f(y) \Rightarrow f(0) = 0$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{f(0)=0} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 1$

$\Rightarrow f'(0) = 1$

$f(x+h) = f(x) + f(h) + x^2h + h^2x$

$f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x)+f(h)+x^2h+h^2x-f(x)}{h}$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} + \lim_{x\to 0}\frac{x^2h+h^2x}{h}$

$\xrightarrow{f(0)=0} \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{xh(x+h)}{h} = f'(0) + x^2 = 1+x^2$

$f'(x) = 1+x^2$

۴- $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x)(f(h)-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)(1+hg(h)-1)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x)\times h\times g(h)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x)\times g(h) = f(x)$

$\Rightarrow \boxed{f'(x) = f(x)}$

۵- $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{f'(t)\times t'}{g'(t)\times t'} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$

$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{(f''(t)\times t'\times g'(t)) - g''(t)\times f'\times f'(t)}{g'(t)\times t'\times g'^2(t)}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{g'(t)f''(t) - f'(t)g''(t)}{(g'(t))^2} \quad , \quad g'(t) \neq 0}$

۶- $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{1+\tan^2 t} \Rightarrow$

$\frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{y''_t(1+\tan^2 t) - (2\tan t(1+\tan^2 t)y')}{(1+\tan^2)^2}$

$\Rightarrow y'' = \frac{y''_t - 2y'\tan t}{(1+\tan^2)^2}$

معادله $\Rightarrow (1+\tan^2 t)\frac{y''_t - 2y'\tan t}{(1+\tan^2 t)^2} + (1+2\tan t)(1+\tan^2 t)\frac{y'_t}{1+\tan^2 t} + y$

$= y''_t - 2y'_t\tan t + y'_t + 2y'_t\tan t + y = 0$

$y''_t + y'_t + y = 0$

تمرینات استوارت مشتق،

۴۶ - $y' = 4 \times (x+(x+\sin^2 x)^3)' \times [x+(x+\sin^2 x)^3)^3$

$= 4(\cancel{\ }) + 3\times(1+2\sin\cos x)(x+\sin^2 x)^2) \times (x+(x+\sin^2 x)^3)^3$

۴۴ - $y\sec(x) = x\tan(y)$, $\frac{dx}{dy} = ?$

$f(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{-f_y}{f_x}$

$y\sec(x) - x\tan(y) = 0 \quad \Rightarrow$

$f(y) = \sec(x) - x(1+\tan^2(y))$

$f(x) = y.\sec(x)\tan(x) - \tan y$

$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x(1+\tan^2(y)) - \sec(x)}{y.\sec(x)\tan(x) - \tan y}$

۴۲) $x^2 + 4y^2 = 5 \qquad f'(x) = \frac{-2x}{8y} = \frac{-x}{4y}$

$(x_0, y_0) \to y - y_0 = \frac{-x_0}{4y_0}(x - x_0) \xrightarrow{(-5,0)}$

$-y_0 = \frac{+x_0}{4y_0}(5 + x_0) \to x_0(5 + x_0) + 4y^2 = 0$

$5x_0 + 5 = 0 \to x_0 = -1$

$x_0 = -1 \to y_0 = 1 \Rightarrow f'(-1) = -1/4$

$\Rightarrow a = \boxed{2}$

۵۴) $y' = \cos x + ۲ \sin x \cos x$

$f'(۰) = ۱ + ۲ \times ۰ \times ۱ = \boxed{۱}$

۶۱) $\frac{d}{dx}\{f(x) + x^۲[f(x)]^۳\} \Rightarrow f'(x) + x^۲ \cdot ۳[f(x)]^۲ \cdot f'(x) + [f(x)]^۳ \times ۲x$

$= ۰ \rightsquigarrow x = ۱ \quad f'(۱) + ۱۲ \times f'(۱) + ۱۶ = ۰$

$\Rightarrow f'(۱) + ۱۲ f'(۱) = -۱۶ \Rightarrow f'(۱) = \boxed{\frac{-۱۶}{۱۳}}$

۷۴- $f'(x) = (f(x) + x f'(x))(f(x f(x)) + x f'(x f(x)))(f'(x f(x f(x))))$

$\Rightarrow f'(۱) = ۶ \times ۸ \times ۶ = \boxed{۲۸۸}$