۴- روشهای انتگرال گیری

هدف اصلی این بخش, تعیین تابع اولیه (انتگرال نامعین) برای تابع $f(x)$ میباشد. در بخش ۳-۳ عنوان شد که در حالت کلی یافتن تابع اولیه, قانون مشخصی ندارد. بطور کلی دو روش اصلی در تعیین تابع اولیه وجود دارد. یکی تغییر متغیر و دیگری جزء به جزء . اما مشکل آن است که نحوه تعیین تغییر متغیر و یا استفاده از روش جزء به جزء ممکن است ساده نباشد. به این معنی که گاهی نیاز به خلاقیت و یا تسلط فرد بر انتگرال‌گیری خواهد داشت. در ابتدا تا جایی که بتوانیم سعی می‌کنیم مسائل را بگونه‌ای طبقه‌بندی کنیم که بتوان قالبهای مشخصی را مثلا برای تعیین تغییر متغیر مناسب ارائه داد. در برخورد با مسائلی که قالب مشخصی ندارند, ممکن است حل مساله نیاز به خلاقیت داشته و گاهی روند حل نیز طولانی باشد. گاهی اوقات نیز ممکن است مساله تابع اولیه‌ای نداشته باشد. به این معنی که نتوان تابعی بر حسب توابع مقدماتی شناخته شده پیدا کرد که مشتق آن برابر $f(x)$ گردد. در اینگونه موارد اگر لازم باشد, توابع جدیدی معرفی خواهد شد.

در بخش ۴-۱ با ارائه یک جدول, تعدادی از انتگرالهای معروف را خواهیم دید. پس از آن به ترتیب روش تغییر متغیر و جزء به جزء د ربخشهای ۴-۲ و ۴-۳ ارائه خواهد شد. آنچه در بخشهای ۴-۴ الی ۴-۸ دنبال میشود در واقع نحوه استفاده از همین دو روش برای دسته خاصی از انتگرالها خواهد بود. اگر چه روش کلی تعیین انتگرال معین, آن است که ابتدا انتگرال نامعین بدست آید, اما در مواردی نیز ممکن است بتوان بدون محاسبه تابع اولیه, انتگرال معین را محاسبه کرد که در بخش ۴-۹ به آن می‌پردازیم.

۴-۱- استفاده از جداول

با مشتق گیری می‌توان درستی انتگرالهای زیر را نشان داد:

$$1)\ \int u^n\,du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C\quad (n\neq -1)\qquad ;\qquad 2)\ \int \frac{du}{u}=Ln|u|+C$$

$$3)\ \int a^u\,du=\frac{1}{Lna}a^u+C\ ;\ \int e^u\,du=e^u+C$$

$$4)\ \int cosu\,du=sinu+C\ ;\ \int sinu\,du=-cosu+C$$

$$5)\ \int coshu\,du=sinhu+C\ ;\ \int sinhu\,du=coshu+C$$

$$6)\ \int \frac{du}{cos^2u}=tanu+C\qquad ;\ \int \frac{du}{sin^2u}=-cotgu+C$$

$$7)\ \int \frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C\qquad (a>0)$$

$$8)\ \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C\qquad (a>0\,,u^2<a^2)$$

$$9)\ \int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=Ln\left(u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right)+C=\begin{cases} sinh^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right)+C & (+)\\ cosh^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right)+C & (-)\end{cases}\qquad (a>0)$$

$$10)\ \int \frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{2a}Ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right|+C=\frac{1}{a}tanh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C\qquad (a>0)$$

به نظر می‌رسد درستی انتگرالهای ۷ تا ۱۰ برای $a=1$ بدیهی است, اما شاید برای a دلخواه کمی دور از ذهن باشد. به همین دلیل در مثال ۴-۲ قسمت ۱۳ نحوه بدست آوردن یکی از این انتگرالها (شماره ۱۰) را خواهیم دید. به ذهن سپردن کلیه انتگرالهای بالا الزامی است. چرا که در مثالهای ارائه شده یا مستقیما به این انتگرالها می‌رسیم و یا پس از چند مرحله محاسبه, در نهایت با این انتگرالها برخورد خواهیم کرد.

مثال ۴-۱ با استفاده از جدول انتگرالها, انتگرالهای زیر را بیابید.

$$1)\ \int tan^2x\,dx=\int(1+tan^2x-1)dx=\int(1+tan^2x)dx-\int 1\,dx=tanx-x+C\ \blacksquare$$

$$2)\ \int\frac{dx}{sin^2x cos^2x}=\int\frac{1}{sin^2x}\frac{1}{cos^2x}dx=\int(1+cotg^2x)\,(1+tan^2x)dx$$

$$=\int(1+tan^2x)dx+\int(1+cotg^2x)dx=tanx-cotgx+C\ \blacksquare$$

$$\underline{Or}:\int\frac{sin^2x+cos^2x}{sin^2x cos^2x}dx=\int\frac{dx}{cos^2x}+\int\frac{dx}{sin^2x}=tanx-cotgx+C$$

$$3)\ \int_0^{\pi}\sqrt{1+cos2x}\,dx\qquad;\qquad\int\sqrt{1+cos2x}\,dx=\int\sqrt{2cos^2x}\,dx=\sqrt{2}\int|cosx|\,dx$$

$$\to\int_0^{\pi}\sqrt{1+cos2x}\,dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}cosx\,dx+\sqrt{2}\int_{\pi/2}^{\pi}(-cosx)\,dx=2\sqrt{2}$$

دقت شود اگر به قدرمطلق توجه نکرده و انتگرال را بصورت $\sqrt{2}\int_0^{\pi}cosx\,dx$ بنویسیم, به جواب اشتباه صفر میرسیم. ■

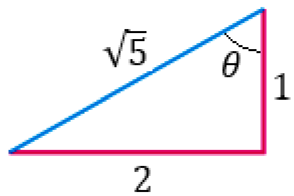
$$4)\ I=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-2sin2x+3cos^2x}\,dx=\int_0^{\pi/2}\underbrace{\sqrt{sin^2x-4sinxcosx+4cos^2x}}_{|sinx-2cosx|}\,dx$$

اما علامت $sinx-2cosx$ در $\theta=tan^{-1}2$ تغییر میکند. لذا بایستی انتگرال را به دو بخش تفکیک کرد:

$$\to I=\int_0^{\theta=tan^{-1}2}(2cosx-sinx)\,dx+\int_{\theta=tan^{-1}2}^{\pi/2}(sinx-2cosx)\,dx=2\sqrt{5}-3$$

$$\to I=(2sinx+cosx)|_0^{\theta}+(-cosx-2sinx)|_{\theta}^{\pi/2}=2\sqrt{5}-3$$

برای رسیدن به جواب نهایی, بهترین راه, ترسیم یک مثلث قائم‌الزاویه است که یکی از زوایای آن $\theta=tan^{-1}2$ باشد. مثلا ساده‌ترین مثلث میتواند به اضلاع 1 و 2 و وتر $\sqrt{5}$ انتخاب شود. با این شکل تعیین نسبتهای مثلثاتی ساده‌تر است. ■



$$\theta=tan^{-1}2\to sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}\ ;\ cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

توضیح: برای استفاده از انتگرالهای مثلثاتی موجود در جدول, ابتدا اگر تابع مثلثاتی دارای توان باشد, توان آنرا به 1 تبدیل می‌کنیم. مثلا برای انتگرال‌گیری از $sin^2 3x cos4x$ ابتدا لازم است با فرمولهای طلایی توان سینوس را حذف کنیم. سپس با روابط مثلثاتی تبدیل ضرب به جمع, انتگرال‌گیری ساده می‌شود. خلاصه این روابط بصورت زیر است:

$$cos^2 ax = (1 + cos2ax)/2 \quad ; \quad sin^2 ax = (1 - cos2ax)/2$$

$$cos^3 ax = \frac{3}{4}cosax + \frac{1}{4}cos3ax \quad ; \quad sin^3 ax = \frac{3}{4}sinax - \frac{1}{4}sin3ax$$

$$sinax\ cosbx = [sin(a+b)x + sin(a-b)x]/2$$

$$cosax\ cosbx = [cos(a+b)x + cos(a-b)x]/2$$

$$sinax\ sinbx = [cos(a-b)x - cos(a+b)x]/2$$

بحث تکمیلی انتگرال‌گیری از توابع مثلثاتی در بخش ۴-۶ ارائه خواهد شد.

تمرینات بخش ۴-۱

۱- درستی انتگرالهای نامعین زیر را نشان دهید. (ثابتهای C در انتهای انتگرالهای نامعین حذف شده‌اند)

$$1)\ \int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + x \quad ; \quad \underline{2})\ \int sin^2 3x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}sin6x$$

$$3)\ \int cos4x\ cos7x\,dx = \frac{1}{6}sin3x + \frac{1}{22}sin11x \quad ; \quad \underline{4})\ \int \frac{2+3x^2}{x^2(1+x^2)}dx = -\frac{2}{x} + tan^{-1} x$$

۲- درستی انتگرالهای معین زیر را نشان دهید.

$$1)\int_{-1}^{2}(x-2|x|)\,dx = -3.5 \quad ; \quad 2)\int_0^{\pi}|sinx - cosx|\,dx = 2\sqrt{2} \quad ; \quad \underline{3})\int_0^{\pi/2}[4sin^2 x]\,dx = \frac{3\pi}{4}$$

توضیح: از جمله سایت‌های مناسب برای انتگرال‌گیری آنلاین می‌توان به wolframalpha و integral-calculator اشاره کرد.

۴-۲- تغییر متغیر (بخش ۴-۵ کتاب)

هدف آن است که به نحوی با یک تغییر متغیر مناسب, انتگرال را به انتگرالی تبدیل کنیم که جواب آنرا بدانیم (مثلا در جدول وجود داشته باشد). این روش زمانی قابل استفاده است که بتوانیم یک انتگرال را بصورت زیر بنویسیم:

$$\int f(g(x))\,g'(x)dx$$

حال اگر $F' = f$ منظور شود, حاصل انتگرال برابر $F(g(x)) + C$ است. زیرا با استفاده از قاعده زنجیری:

$$[F(g(x)) + C]' = F'(g(x)) \times g'(x) = f(g(x)) \times g'(x)$$

اگر از تغییر متغیر $u = g(x)$ استفاده کنیم که در آن g یک تابع مشتق‌پذیر در بازه مورد نظر باشد, آنگاه:

$$\int f(g(x))\,g'(x)dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int f(u)\,du$$

به عنوان مثال دو انتگرال زیر را بررسی می‌کنیم:

$$a)\ \int cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{cos\,\overbrace{(3x)}^{g(x)}}_{f(g(x))}\underbrace{3}_{g'(x)}\,dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{cos\,u}_{f(u)}\,du = \frac{1}{3}sin\,u + C = \frac{1}{3}sin(3x) + C$$

$$b)\ \int xe^{-3x^2}\,dx = \frac{1}{-6}\int \underbrace{e^{\overbrace{-3x^2}^{g(x)}}}_{f(g(x))}\underbrace{-6x}_{g'(x)}\,dx = \frac{1}{-6}\int \underbrace{e^u}_{f(u)}\,du = -\frac{1}{6}e^u + C = -\frac{1}{6}e^{-3x^2} + C$$

یک تعبیر ساده از $f\big(g(x)\big)g'(x)$ آن است که انتگرالده را به صورتی درآورده‌ایم که تغییر متغیر و مشتق آن, در کنار هم دیده میشود. پس در انتخاب $g(x)$ و f دقت شود که بخشی را $g(x)$ مینامیم که مشتق آن در کنارش دیده شود (مگر ضرایب عددی که مشکلی نیست) و بخشی f منظور می‌شود که $\int f(u)\,du$ را بدانیم.

حال به طریق دیگری مساله را بررسی می‌کنیم. دیده شد که در نهایت:

$$\int f\big(g(x)\big)\,g'(x)dx = \int f(u)\,du$$

از آنجا که $u = g(x)$ منظور شده است, لذا $du = g'(x)dx$ خواهد بود. به عبارتی رابطه بالا بیانگر آن است که می‌توان با dx و du مانند دیفرانسیل عمل کرد که با دیدگاهی که قبلا انتگرال را عکس دیفرانسیل معرفی کردیم هم‌خوانی دارد. با این نگاه حل مساله‌ها به روش تغییر متغیر ساده‌تر خواهد شد. مثلا می‌توان دو انتگرال بالا را بطریق ساده‌تری (که معادل همان روش قبل است) بصورت زیر بدست آورد:

$$a)\ u = 3x \to du = 3dx \to \int cos(3x)\,dx = \int cos\,u\frac{du}{3} = \frac{1}{3}sin\,u + C = \frac{1}{3}sin(3x) + C$$

$$b)\ u = -3x^2 \to du = -6xdx \to \int e^{-3x^2}\,xdx = \int e^u\frac{du}{-6} = -\frac{1}{6}e^u + C = -\frac{1}{6}e^{-3x^2} + C$$

بطور خلاصه تغییر متغیر در واقع انتقال از یک فضا به فضای ساده‌تر است. همچنین می‌توان گفت روش تغییر متغیر در انتگرال‌گیری عکس قاعده زنجیری در مشتق می‌باشد.

مثال ۴-۲ انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$1)\ \int (2x+3)^{20}dx \xrightarrow{u=2x+3\to du=2dx} \frac{1}{2}\int u^{20}du = \frac{1}{42}u^{21} + C = \frac{1}{42}(2x+3)^{21} + C$$

همین انتگرال اگر بصورت معین مطرح شود, روش کار تغییری نمی‌کند, بعنوان نمونه:

$$\int_0^1 (2x+3)^{20}dx = \frac{1}{42}(2x+3)^{21}\Big|_0^1 = \frac{1}{42}(5^{21} - 3^{21})$$

یا : $\int_0^1 (2x+3)^{20}dx = \frac{1}{42}u^{21}\Big|_3^5 = \frac{1}{42}(5^{21} - 3^{21}) \quad ; \quad \begin{cases} x = 0 \to u = 3 \\ x = 1 \to u = 5 \end{cases}$

توجه شود که در استفاده از روش تغییر متغیر برای انتگرال معین, ممکن است رعایت نکاتی الزامی باشد که در بخش ۴-۲-۱ به آن می‌پردازیم. ■

$$2)\int cos^2x\,dx=\frac{1}{2}\int(1+cos2x)dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\int cos2xdx\xrightarrow{u=2x\to du=2dx}\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}sin\underbrace{u}_{2x}+C\blacksquare$$

$$3)\int\frac{dx}{sin^2xcos^2x}=4\int\frac{dx}{sin^22x}\xrightarrow{u=2x\to du=2dx}2\int\frac{du}{sin^2u}=-2cotg\underbrace{u}_{2x}+C$$

در مثال ۴-۱ قسمت ۲, همین مساله را با دو روش دیگر نیز حل کردیم. به عبارتی دیده میشود که روش حل یک انتگرال, یکتا نبوده و ممکن است بتوان با چند روش مختلف آنرا حل کرد. اما اختلاف جواب همه روشها, صرفا می‌تواند در یک ثابت C باشد. ■

$$4)\int\frac{sin2x}{1+sin^2x}dx\xrightarrow{u=1+sin^2x\to du=sin2xdx}\int\frac{du}{u}=Ln|u|+C=Ln(1+sin^2x)+C$$

بطور کلی در توابع کسری چنانچه مشتقِ مخرج در صورت کسر ظاهر شده باشد, با انتخاب مخرج بعنوان u به $\int\frac{du}{u}$ میرسیم و لذا جواب بصورت $Ln|u|+C$ خواهد بود. ■

$$5)\int tanx\,dx=\int\frac{sinx}{cosx}dx\xrightarrow{u=cosx\to du=-sinxdx}-\int\frac{du}{u}=-Ln|cosx|+C$$

فرض کنید در این مثال شخصی تغییر متغیر $u=sinx$ را بکار گیرد. در اینصورت خواهیم داشت:

$$u=sinx\to du=cosxdx\to\int\frac{sinx}{cosx}dx=\int\frac{u}{cosx}\frac{du}{cosx}=\int\frac{u}{1-u^2}du$$

با تغییر متغیر $t=1-u^2$ خواهیم داشت $dt=-2udu$, در نتیجه:

$$\to\int\frac{u}{1-u^2}du=\frac{-1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{-1}{2}Ln|t|+C=\frac{-1}{2}Ln|1-sin^2x|+C=-Ln|cosx|+C$$

که همان نتیجه قبل بدست آمد, ولی روش کار کمی طولانی‌تر شده است. ■

$$6)\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\int_0^1\frac{1+x-1}{1+x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx=(x-Ln|1+x|)\Big|_0^1=1-Ln2$$

$\underline{Hint}$: $$\int\frac{1}{1+x}dx\xrightarrow{u=1+x\to du=dx}\int\frac{du}{u}=Ln|u|+C=Ln|1+x|+C$$

به عبارتی اگر با کسری روبرو بودیم که مشتقِ مخرج در صورت دیده شد, جواب Ln قدرمطلق مخرج خواهد بود. ■

<u>توضیح</u>: بجای اضافه و کم کردن 1 به صورت کسر, از آنجا که درجه صورت و مخرج یکسان است, می‌توان ایندو را به هم تقسیم کرد, فقط دقت شود هم مقسوم و هم مقسوم علیه بصورت درجات نزولی مرتب شود.

$$\begin{array}{c|l} x & x+1 \\ \hline \underline{x+1} & 1 \\ -1 & \end{array}\quad\to\frac{x}{1+x}=1+\frac{-1}{1+x}\quad\blacksquare$$

$$7)\ \int x\sqrt{x-5}\,dx \xrightarrow{u=\sqrt{x-5}\to u^2=x-5\to 2udu=dx} 2\int (u^2+5)u^2\,du = 2\int (u^4+5u^2)\,du$$

$$=\frac{2}{5}u^5+\frac{10}{3}u^3+C=\frac{2}{5}(x-5)^{\frac{5}{2}}+\frac{10}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{15}(x-5)^{\frac{3}{2}}(3x+10)+C\ ■$$

$$\underline{Or}:\ \xrightarrow{u=x-5\to du=dx}\int (u+5)\sqrt{u}\,du=\frac{2}{15}u^{\frac{3}{2}}(3u+25)+C\ ■$$

$$8)\ \int cos^4x\,sin^3x\,dx \xrightarrow{u=cosx\to du=-sinxdx} -\int u^4\,(1-u^2)du=-\frac{1}{5}u^5+\frac{1}{7}u^7+C\ ■$$

$$9)\ \int tanxsec^3x\,dx=\int tanxsecxsec^2x\,dx \xrightarrow{u=secx\to du=secxtanxdx}\int u^2\,du=\frac{u^3}{3}+C\ ■$$

$$10)\ \int\frac{dx}{sin^4xcos^2x}=\int\frac{sin^2x+cos^2x}{sin^4xcos^2x}dx=\int\frac{dx}{sin^2xcos^2x}+\int\frac{dx}{sin^4x}$$

اولین انتگرال در قسمت 3 بدست آمد. لذا فقط بایستی نحوه محاسبه انتگرال دوم را ببینیم.

$$\int\frac{dx}{sin^4x}=\int(1+cotg^2x)\frac{dx}{sin^2x}\xrightarrow{u=cotgx\to du=\frac{-1}{sin^2x}dx}-\int(1+u^2)du=-u-\frac{u^3}{3}+C\ ■$$

$$11)\int\frac{dx}{1+e^x}\xrightarrow{u=1+e^x\to du=e^xdx}\int\frac{du}{u(u-1)}=\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}\right)du=Ln\left|\frac{u-1}{u}\right|+C$$

$$=Ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right|+C$$

$$\underline{Hint}:\ \int\frac{1}{u-1}du\xrightarrow{t=u-1\to dt=du}\int\frac{dt}{t}=Ln|t|+C=Ln|u-1|+C$$

به عبارتی گاهی ممکن است نیاز باشد دو بار از تغییر متغیر استفاده شود. در ادامه دو روش دیگر برای حل این مثال ارائه می‌شود.

$$\underline{Or}:\ \int\frac{(1+e^x-e^x)dx}{1+e^x}=\int dx-\int\frac{e^xdx}{1+e^x}\xrightarrow{u=1+e^x\to du=e^xdx}x-Ln(1+e^x)+C$$

$$\underline{Or}:\ \int\frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1}\xrightarrow{u=1+e^{-x}\to du=-e^{-x}dx}-Ln(e^{-x}+1)+C$$

میتوان کنترل کرد که هر سه نتیجه یکسانند:

$$Ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right|=x-Ln(1+e^x)\quad;\quad Ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right|=Ln\left|\frac{1}{e^{-x}+1}\right|=-Ln(e^{-x}+1)\ ■$$

$$12)\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^3-x^4}}\ ;\quad x\in(0,1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3-x^4}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}} \xrightarrow{u=\frac{1}{x}-1 \to du=-\frac{1}{x^2}dx} \int \frac{-du}{\sqrt{u}} = -2\sqrt{u}+C = -2\sqrt{\frac{1}{x}-1}+C \ \blacksquare$$

13) $$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} \xrightarrow{u=\frac{x}{a}\to du=\frac{1}{a}dx} \frac{1}{a}\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{a}tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

$\underline{Or}$: $$\frac{1}{a}\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2a}Ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|+C = \frac{1}{2a}Ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C$$

این انتگرال در ابتدای درس بعنوان یک فرمول ارائه شد. در واقع از اینجا به بعد هرگاه با چنین انتگرالی روبرو شویم بهتر است بجای محاسبات بالا, از نتیجه آن مستقیما استفاده کنیم. اگر فرض کنیم $a^2=4$ باشد, دو انتخاب برای a خواهیم داشت. چنانچه $a=2$ یا $a=-2$ انتخاب شود تفاوتی در جواب نهایی نخواهد داشت, لذا ساده‌تر است همه جا $a>0$ انتخاب شود. ■

14) $$\int \frac{dx}{4-4x-x^2} = \int \frac{dx}{8-(x+2)^2} \xrightarrow{u=x+2\to du=dx}$$

$$\int \frac{du}{\left(2\sqrt{2}\right)^2-u^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}tanh^{-1}\left(\frac{u}{2\sqrt{2}}\right)+C = \frac{1}{4\sqrt{2}}Ln\left|\frac{u+2\sqrt{2}}{u-2\sqrt{2}}\right|+C \quad ; \quad (u=x+2) \ \blacksquare$$

15) $$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx \xrightarrow{u=\sqrt{x+4}\to dx=2udu} \int \frac{u}{u^2-4}2udu = 2\int\left(1+\frac{4}{u^2-4}\right)du$$

$$= 2\int u\,du + 8\int \frac{1}{u^2-4}du = 2u+\frac{8}{4}Ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|+C \quad ; \quad \left(u=\sqrt{x+4}\right) \ \blacksquare$$

16) $$\int \frac{dx}{a^2sin^2x+b^2cos^2x}$$

با تقسیم صورت و مخرج به b^2cos^2x , مخرج کسر را به فرم $1+u^2$ تبدیل می‌کنیم.

$$= \int \frac{\frac{dx}{b^2cos^2x}}{1+\left(\frac{a}{b}tanx\right)^2} \xrightarrow{u=\frac{a}{b}tanx\to du=\frac{a}{bcos^2x}dx} \frac{1}{ab}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{ab}tan^{-1}u+C \ \blacksquare$$

17) $$\int \frac{4^x}{6^x+9^x}dx = \int \frac{\frac{4^x}{9^x}}{\frac{6^x}{9^x}+1}dx = \int \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x}dx \xrightarrow{u=\left(\frac{2}{3}\right)^x\to du=Ln\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^x dx} \frac{1}{Ln\left(\frac{2}{3}\right)}\int \frac{u^2du}{(1+u)u}$$

$$= \frac{1}{Ln\left(\frac{2}{3}\right)}\int \frac{udu}{1+u} = \frac{1}{Ln\left(\frac{2}{3}\right)}\int \frac{(1+u-1)du}{1+u} = \frac{1}{Ln\left(\frac{2}{3}\right)}(u-Ln|1+u|)+C \quad ; \quad u=\left(\frac{2}{3}\right)^x \ \blacksquare$$

مثال ۴-۳ الف: انتگرال $\int tan^7x\, dx$ را به دو روش محاسبه کنید. ب: رابطه‌ای برای محاسبه $\int tan^n x\, dx$ بدست آورید.

حل الف: روش اول استفاده از تغییر متغیر $u = tanx$ میباشد.

$$u = tanx \to du = (1 + tan^2 x)dx \to \int tan^7 x\, dx \to \int u^7 \frac{1}{1+u^2} du$$

در اینجا کافی است u^7 را به $1 + u^2$ به شیوه معمول تقسیم کنیم. یعنی:

$$\begin{array}{l|l} u^7 & \dfrac{u^2+1}{u^5 - u^3 + u} \\ \underline{u^7 + u^5} & \\ -u^5 & \\ \underline{-u^5 - u^3} & \\ u^3 & \\ \underline{u^3 + u} & \\ -u & \end{array}$$

$$I = \int \left(u^5 - u^3 + u - \frac{u}{1+u^2}\right) du$$
$$= \frac{1}{6}u^6 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}Ln|1+u^2| + C$$
$$= \frac{1}{6}tan^6 x - \frac{1}{4}tan^4 x + \frac{1}{2}tan^2 x + Ln|cosx| + C$$

که در محاسبه انتگرال $\int \frac{u}{1+u^2} du$ یکبار دیگر تغییر متغیر $t = 1 + u^2$ بکار گرفته شده است.

روش دوم حل مساله بصورت زیر است:

$$\int tan^7 x\, dx = \int (tan^7 x + tan^5 x - tan^5 x)\, dx = \int \underbrace{(tan^7 x + tan^5 x)}_{tan^5 x(tan^2 x + 1)} dx - \int tan^5 x\, dx$$

به عبارتی با اضافه و کم کردن $tan^5 x$, مشتق $tanx$ یعنی $tan^2 x + 1$ را در کنار آن ایجاد کرده‌ایم. دیده میشود که اولین انتگرال قابل محاسبه است و حال بایستی $\int tan^5 x\, dx$ محاسبه شود. برای حل این انتگرال نیز با اضافه و کم کردن $tan^3 x$ در نهایت به $\int tan^3 x\, dx$ خواهیم رسید که اگر اینجا نیز عبارت $tanx$ را اضافه و کم کنیم, نهایتا به $\int tanx\, dx$ میرسیم که آنرا میدانیم. به عبارتی هر بار از توانِ $tanx$ دو واحد کم میشود. بطور خلاصه می‌توان همه این عملیات را بصورت زیر نوشت:

$$\int tan^7 x\, dx = \int (tan^7 x + tan^5 x - tan^5 x + tan^3 x - tan^3 x + tanx - tanx)\, dx$$

$$= \int \underbrace{(tan^7 x + tan^5 x)}_{tan^5 x(tan^2 x+1)} dx - \int \underbrace{(tan^5 x + tan^3 x)}_{tan^3 x(tan^2 x+1)} dx + \int \underbrace{(tan^3 x + tanx)}_{tanx(tan^2 x+1)} dx - \int tanx\, dx$$

$$= \frac{1}{6}tan^6 x - \frac{1}{4}tan^4 x + \frac{1}{2}tan^2 x + Ln|cosx| + C$$

که همه انتگرالها قابل محاسبه میباشند. (در سه انتگرال اول, تغییر متغیر $u = tanx$ را بکار میبریم). ■

ب: برای قسمت دوم سوال با توجه به نحوه محاسبه انتگرال در قسمت قبل میتوان گفت که اگر تعریف کنیم $I_n = \int tan^n x\, dx$ آنگاه میتوان این انتگرال را بصورت بازگشتی برحسب I_{n-2} و I_{n-4} و $\cdots$ بدست آورد. یعنی:

$$I_n = \int tan^n x\, dx = \int (tan^n x + tan^{n-2}x)\, dx - \int tan^{n-2}x\, dx$$

$$u = tanx \rightarrow \int \underbrace{tan^{n-2}x}_{u^{n-2}} \underbrace{(tan^2 x + 1)dx}_{du} = \int u^{n-2}\, du = \frac{1}{n-1} tan^{n-1}x$$

$$\rightarrow I_n = \frac{1}{n-1} tan^{n-1}x - I_{n-2}$$

انتگرالهای دیگری را نیز میتوان به این شیوه حل کرد که در بحث دستورهای بازگشتی (بخش ۴-۴) خواهیم دید. ■

توضیح ۱: می‌توان فرم حل مساله را بر حسب تابع سکانت و بصورت زیر بیان کرد:

$$I_n = \int tan^n x\, dx = \int (sec^2 x - 1) tan^{n-2} x dx$$

$$u = tanx \rightarrow I_n = \int \underbrace{tan^{n-2}x}_{u^{n-2}}\ \underbrace{sec^2 x dx}_{du} - \int tan^{n-2} x dx = \frac{1}{n-1} tan^{n-1}x - I_{n-2}$$

توضیح ۲: بعنوان نمونه با بکارگیری این رابطه بازگشتی می‌خواهیم $\int tan^6 x\, dx$ و $\int tan^7 x\, dx$ را بدست آوریم. خواهیم داشت:

$$I_n = \frac{1}{n-1} tan^{n-1}x - I_{n-2} \rightarrow I_6 = \int tan^6 x\, dx = \frac{1}{6-1} tan^{6-1}x - I_{6-2}$$

$$\rightarrow I_6 = \frac{1}{5} tan^5 x - I_4 \ \ ;\ \ I_4 = \frac{1}{3} tan^3 x - I_2\ ;\ I_2 = \frac{1}{1} tan^1 x - I_0 = tan^1 x - \int tan^0 x\, dx$$

$$I_6 = \frac{1}{5} tan^5 x - \left(\frac{1}{3} tan^3 x - \left(tan^1 x - \int tan^0 x\, dx\right)\right) = \frac{1}{5} tan^5 x - \frac{1}{3} tan^3 x + tanx - x - C$$

همچنین برای محاسبه $\int tan^7 x\, dx$ خواهیم داشت:

$$I_n = \frac{1}{n-1} tan^{n-1}x - I_{n-2} \rightarrow I_7 = \frac{1}{6} tan^6 x - I_5\ ;\ \ I_5 = \frac{1}{4} tan^4 x - I_3$$

$$I_3 = \frac{1}{2} tan^2 x - I_1\ ;\ \ I_1 = \int tanx\, dx = -Ln|cosx| + C\ \rightarrow\ I_7\ \ \boxed{\surd}\ \ \blacksquare$$

در انتهای این بخش به ذکر دلیل یک نکته که در فصل قبل مطرح شد می‌پردازیم. در بخش ۳-۷ دیده شد که همه حد مجموعهایی که قابل تبدیل به انتگرال معین بودند را توانستیم به انتگرال معینی در بازه 0 تا 1 بیان کنیم. همچنین عنوان شد که می‌توان حدود را هر بازه دیگری نیز انتخاب کرد. در اینجا علت درستی این موضوع را خواهیم دید. به عنوان نمونه در مثال ۳-۲۵ قسمت F در نهایت به انتگرال زیر رسیدیم:

$$F = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+3x}} dx$$

در توضیح ۱ از همین مثال عنوان شد که می‌توان حد مجموع را بصورت انتگرال دیگری نیز بیان کرد که حدود آن الزاما 0 تا 1 نباشد. یک انتخابِ ممکن برای حدود انتگرال بصورت زیر عنوان شد:

$$c_i = a + i\frac{b-a}{n} = 1 + 3\frac{i}{n} \rightarrow a = 1; b = 4 \xrightarrow{f(x)=\sqrt{1/x}} F = \frac{2}{3}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

حال با روش تغییر متغیر نشان می‌دهیم که در واقع این دو انتگرال یکی می‌باشند.

$$u = 1 + 3x \rightarrow du = 3dx \rightarrow F = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+3x}}dx = \frac{2}{3}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{u}}du \quad ; \quad \begin{cases} x = 0 \rightarrow u = 1 \\ x = 1 \rightarrow u = 4 \end{cases}$$

که حاصل انتگرال برابر با 2 بدست می‌آید. در واقع علت اصلی آنکه در بخش ۳-۷ می‌توان حد مجموعهایی که قابل تبدیل به انتگرال معین بودند را با حدود 0 تا 1 بیان کنیم آن است که هر انتگرالی با حدود متناهی a تا b با یک تغییر متغیر خطی, قابل تبدیل به انتگرالی با حدود 0 تا 1 می‌باشد. چرا که:

$$u = px + q \rightarrow \begin{cases} 0 = pa + q \\ 1 = pb + q \end{cases} \rightarrow u = \frac{x-a}{b-a}$$

$$x = (b-a)u + a \rightarrow dx = (b-a)du \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f((b-a)u + a)\,du$$

❋ <u>یک کاربرد:</u> در انتهای این بخش به یکی از کاربردهای انتگرال در فیزیک می‌پردازیم.

فرض کنید یک مدار الکتریکی دارای یک مقاومت و یک منبع مولد جریان است. چنانچه جریان مستقیم باشد, توان تلف شده در مقاومت عبارت است از $P = RI^2$ که در آن R مقاومت و I جریان میباشد. اما چنانچه جریان متناوب شود, از آنجا که در هر لحظه جریان $i(t)$ متغیر است لذا توان در بازه زمانی $[t_1, t_2]$ از رابطه $\int_{t_1}^{t_2} Ri^2(t)\,dt$ بدست می‌آید. بنابراین توان متوسط نیز تقسیم این مقدار بر $t_2 - t_1$ خواهد بود. بنا به تعریف, برای یک جریان متناوب, به دنبال یافتن جریانی هستیم که اگر بصورت مستقیم اعمال شود, توان آن با توان متوسطِ جریان متناوب در یک دوره تناوب T یکسان باشد, چرا که متوسط یک تابع متناوب با متوسط آن در یک دوره تناوب یکسان است. چنین جریانی اصطلاحا جریان موثر I_e نامیده می‌شود. حال فرض کنید جریان در یک مدار متناوب بصورت $i(t) = I_m cos(\omega t)$ باشد که در آن $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T زمان تناوب و I_m جریان حداکثر است. هدف تعیین رابطه بین جریان موثر و جریان حداکثر است. با توجه به توضیحات ارائه شده بایستی:

$$RI_e^2 = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} Ri^2(t)\,dt \rightarrow I_e^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I_m^2\cos^2(\omega t)dt = \frac{I_m^2}{T}\int_0^T \left(\frac{1+cos(2\omega t)}{2}\right)dt$$

$$I_e^2 = \frac{I_m^2}{2T}\left(t + \frac{1}{2\omega}sin(2\omega t)\right)\Bigg|_0^T = \frac{I_m^2}{2T}\left(T + \frac{1}{2\omega}sin(2\omega T)\right) \xrightarrow{\omega T = 2\pi} I_e^2 = \frac{I_m^2}{2} \rightarrow I_e = \frac{1}{\sqrt{2}}I_m$$

به عبارتی جریان موثر از تقسیم جریان حداکثر بر $\sqrt{2}$ قابل محاسبه است. به همین ترتیب می‌توان ولتاژ موثر را تعریف کرد و درست مشابه بالا ولتاژ موثر نیز از رابطه $V_e = \frac{1}{\sqrt{2}}V_m$ بدست می‌آید. ■

<u>توضیح:</u> هرچند در ادامه روشهای دیگری نیز برای محاسبه انتگرال‌ها بیان خواهد شد, اما همواره نمی‌توان همه انتگرالهای نامعین را بدست آورد. مثلا انتگرالهای زیر بر حسب توابع مقدماتی قابل بیان نیستند.

$$\int e^{-x^2}dx \;\; ; \int \sqrt{1+x^4}\,dx \;\; ; \int \frac{sinx}{x}dx \;\; ; \int \frac{e^x}{x}dx \;\; ; \int \frac{dx}{Lnx} \;\; ; \int \sqrt{1-k^2sin^2x}\,dx \quad 0 < k < 1$$

۴-۲-۱- تغییرمتغیر در انتگرال معین

در استفاده از روش تغییرمتغیر در انتگرال معین , فرمول, درست مشابه انتگرال معین میباشد. اما بایستی به یک سری نکات توجه شود. مثلا فرض کنید هدف محاسبه انتگرال $\int_0^3 (x-2)^2 dx$ باشد و می‌خواهیم این انتگرال را با تغییر متغیر $u=(x-2)^2$ حل کنیم. هر چند نیازی به این تغییر متغیر نبوده و به راحتی میتوان آنرا بدون تغییر متغیر نیز حل کرد. اما در اینجا هدف صرفا بررسی نکاتی است که بایستی به آن توجه شود. با این تغییر متغیر ابتدا انتگرال نامعین را باز نویسی می‌کنیم:

$$x-2=\pm\sqrt{u} \rightarrow dx=\pm\frac{du}{2\sqrt{u}} \longrightarrow \int (x-2)^2\,dx=\int u\left(\pm\frac{du}{2\sqrt{u}}\right)=\frac{\pm 1}{2}\int \sqrt{u}\,du$$

حال سوال این است که با کدام علامت بایستی مساله را حل کرد. علت اصلی این مشکل یک به یک نبودن تغییر متغیر است و لذا انتخاب یکتایی برای x بدست نیامد. جواب آن است که انتخاب x مناسب بستگی به حدود آن دارد. از رابطه $x=2\pm\sqrt{u}$ دو انتخاب برای x وجود دارد که یکی بیشتر از 2 و دیگری کمتر از آن است. بنابراین برای حل انتگرال معین داده شده بطریق زیر عمل می‌کنیم:

$$\int_0^3 (x-2)^2dx=\underbrace{\int_0^2 (x-2)^2dx}_{x=2-\sqrt{u}<2}+\underbrace{\int_2^3 (x-2)^2dx}_{x=2+\sqrt{u}>2}=\frac{-1}{2}\int_4^0 \sqrt{u}\,du+\frac{+1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\,du=\frac{8}{3}+\frac{1}{3}=3$$

علاوه بر این نکته بایستی دقت شود تابعی که x را بر حسب u بیان میکند بایستی پیوسته باشد. مثلا می‌دانیم:

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{4+x^2}=\frac{1}{2}tan^{-1}\frac{x}{2}\Big|_{-2}^{2}=\frac{\pi}{4}$$

اما با تغییر متغیر $u=\frac{1}{x}$ خواهیم داشت:

$$I=-\int_{-0.5}^{0.5}\frac{du}{4u^2+1}=-\frac{\pi}{4}$$

که نادرست است چرا که تابع $x=\frac{1}{u}$ در $u=0$ (که در بازه انتگرال‌گیری u قرار دارد) پیوسته نیست.

مثال ۴-۴ با استفاده از تغییرمتغیر $u=sin^{-1}x$ انتگرال $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ را بدست آورید.

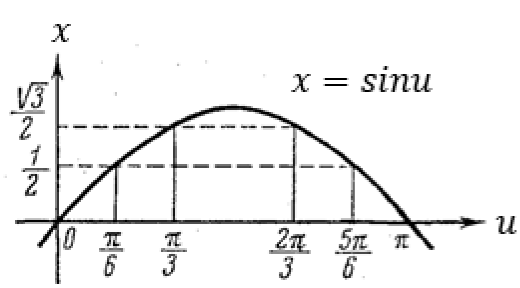
حل در اینجا نیز با مشکل یک به یک نبودن تابع $u=sin^{-1}x$ روبرو هستیم. ابتدا انتگرال نامعین آنرا بدست می‌آوریم:

$$u=sin^{-1}x \rightarrow x=sinu \rightarrow dx=cosudu \rightarrow \int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{cosu}{sinu|cosu|}du$$

در اینجا نیز سوال این است که با قدرمطلق چه باید کرد. با توجه به حدود x اگر بخواهیم حدود u را بدست آوریم, انتخابهای متعددی خواهیم داشت. با توجه به شکل زیر میتوان حدود زیر را برای u پیشنهاد داد:

$$x=\frac{1}{2}\rightarrow u=\cdots,\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\cdots$$

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow u=\cdots,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\cdots$$



حال برای حل انتگرال معین داده شده میتوان یکی از انتگرالهای زیر را محاسبه کرد:

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{du}{sinu} \quad \text{یا} \quad \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{-du}{sinu} \quad \text{یا} \quad \cdots$$

در توضیح ۲ دیده میشود این انتگرالها, همه به یک نتیجه می‌رسند. نکته آخر در انتخاب حدود, آن است که مقدار $x=sinu$ نبایستی در هیچ نقطه‌ای, از بازه داده شده برای x خارج نشود. به عبارتی نمی‌توان انتگرال را مثلا در بازه $u\in\left[\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ بدست آورد, زیرا در اینصورت مقدار $x=sinu$ در یک سری نقاط, خارج بازه $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ قرار می‌گیرد. به همین دلیل در بخش ۴-۷, در انتخاب تغییر متغیر مثلثاتی, آنرا محدود به بازه‌های مشخصی خواهیم کرد. ■

<u>توضیح ۱</u>: لازم به ذکر است قبلا دیده‌ایم برای آنکه $u=sin^{-1}x$ یک تابع گردد, بایستی برد آن محدود گردد که معمولا بصورت $-\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2}$ انتخاب میشود. با قبول این بازه, طبیعتا $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{du}{sinu}$ را انتخاب می‌کنیم. اما هدف این مثال بیان این موضوع است که اگر قرار باشد بازه دیگری بعنوان برد انتخاب شود, بایستی مقدار $x=sinu$ در تمام نقاط داخل بازه $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ قرار گیرد.

<u>توضیح ۲</u>: کنترل میکنیم دو انتگرال ذکر شده در بالا هر دو به یک نتیجه میرسند. در بخش ۴-۶ و در مثال ۴-۱۸ انتگرال $\int\frac{du}{sinu}$ را بدست می‌آوریم. در آنجا خواهیم دید که این انتگرال بصورت $Ln\left|tan\left(\frac{u}{2}\right)\right|$ بدست می‌آید. بنابراین:

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{cosudu}{sinu\,|cosu|}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{du}{sinu}=Ln\left|tan\left(\frac{u}{2}\right)\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=Ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$I=\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{cosudu}{sinu\,|cosu|}=\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{-du}{sinu}=Ln\left|tan\left(\frac{u}{2}\right)\right|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}}=Ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

<u>توضیح ۳</u>: بطور خلاصه در بکارگیری تغییرمتغیر در انتگرال معین, از $u=g(x)$ خواهیم داشت $x=g^{-1}(u)$, لذا لازم است:

۱- تابع g^{-1} در بازه مورد نظر یکتا , پیوسته و یکنوا باشد. ۲- مشتق g^{-1} پیوسته باشد.

۳- مقدار $x=g^{-1}(u)$ در هیچ نقطه‌ای, از بازه داده شده برای x خارج نشود. ■

تمرینات بخش ۴-۲ تمرینات ۱۲ , ۲۰, ۵۲ , ۷۸ و ۸۴ از بخش ۴-۵ کتاب

<u>۱</u>- درستی انتگرالهای زیر را نشان دهید. (ثابتهای C در انتهای انتگرالهای نامعین حذف شده‌اند)

$$1)\int\sqrt{cotgx}\,csc^2x\,dx=\frac{-2}{3}(cotgx)^{\frac{3}{2}} \quad ; \quad \underline{2})\int_0^{13}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}=3$$

$$\underline{3})\int_0^1\frac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^4}=\frac{1}{6} \quad ; \quad 4)\int\frac{dx}{\sqrt{x+x^{\frac{3}{2}}}}=4\sqrt{1+\sqrt{x}}$$

$$\underline{5})\int\frac{6x^3+x^2-2x+1}{2x-1}dx=x^3+x^2+\frac{1}{2}Ln|2x-1|$$

$$6)\int sec^6x\,dx = tanx+\frac{2}{3}tan^3x+\frac{1}{5}tan^5x \quad ; \quad \underline{Hint}:\ sec^6x = sec^4x sec^2x$$

$$7)\int \frac{sinx}{1+sinx}dx = \frac{1}{cosx}-tanx+x \quad ; \quad 8)\int \frac{1}{sin^2xcos^4x}dx = \frac{1}{3}tan^3x+2tanx-cotgx$$

$$9)\int \frac{x}{(x+1)^2}dx = Ln|x+1|+\frac{1}{x+1} \quad ; \quad \underline{Hint}:\ \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)-1}{(1+x)^2}$$

۲- چنانچه $f'(x)$ تابعی پیوسته باشد, معادله انتگرالی زیر را حل کنید.

$$f(x)-sinx = \int_0^x f'(t)(2-sint)sint\,dt \qquad \left(x<\frac{\pi}{2}\right) \quad ; \quad \underline{Ans}:\quad f(x) = \frac{sinx}{1-sinx}$$

۳- درستی رابطه زیر را نشان دهید:

$$\int \frac{sin(x^n)}{x}dx = \frac{1}{n}\int \frac{sint}{t}dt \quad ; \quad n\in\mathbb{N}$$

۴- ابتدا با مشتق‌گیری درستی انتگرال $I == \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = sec^{-1}x + C$ را نشان دهید. سپس با تغییرمتغیر $x = coshu$ این انتگرال را مجددا محاسبه کرده و با مساوی قرار دادن نتیجه این دو حل, رابطه بین $sec^{-1}x$ و تانژانت معکوس یک عبارتِ بر حسب x را بیابید.

۵- انتگرال $\int_{-2}^{2}\sqrt[5]{x^2}dx$ را یک بار بطور مستقیم و بار دیگر با استفاده از تغییر متغیر $u = x^{\frac{2}{5}}$ بدست آورید.

۶- معادله انتگرالی زیر را حل کنید.

$$f(x) = e^{-x}+2\int_0^x e^{-3t}f(x-t)dt \quad ; \quad \underline{Ans}\ :\ f(x) = e^{-x}+2xe^{-x}$$

راهنمایی: ابتدا درستی رابطه زیر را نشان داده و سپس مشابه مثالهای بخش ۳-۶ آنرا حل کنید:

$$\int_0^x e^{-3t}f(x-t)dt = e^{-3x}\int_0^x e^{3t}f(t)dt$$

۷- اگر $g(x)$ در همه جا پیوسته باشد, با شرایط زیر حاصل $f''(1)$ را بیابید.

$$f(x) = \int_0^x (x-t)^2g(t)dt \quad ; \quad \int_0^1 g(t)\,dt = 1 \quad ; \quad \underline{Ans}:\ f''(1) = 2$$

۸- با استفاده از رابطه زیر, ضابطه تابع $f(x)$ را بدست آورید.

$$f^2(x^3+1) = \int_0^{x^3+1}\frac{f(t)}{t^2+2t+1}dt \quad ; \quad f(0)=0 \quad ; \quad \underline{Ans}:\ f(x) = \frac{x}{2x+2}$$

۹- نشان دهید:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{\frac{n-2}{2}}+\sqrt{\frac{n-3}{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

تمرینات ۴۹ و ۵۳ از بخش مرور مطالب فصل ۴

تمرینات ۲ و ۳ از بخش مسائل اضافی فصل ۴

۴-۳- روش جزء به جزء (بخش ۷-۱ کتاب)

فرض کنید هدف محاسبه انتگرال $I=\int xcosx\,dx$ باشد. انتگرال $J=\int sinx\,dx$ را در نظر میگیریم که حاصل آنرا میدانیم. اگر ایندو را با یکدیگر جمع کنیم, انتگرال مجموع را نیز میدانیم. در واقع:

$$I+J=\int xcosx\,dx+\underbrace{\int sinx\,dx}_{-cosx+C_1}=\int \underbrace{xcosx\,dx+sinx\,dx}_{d(xsinx)}=xsinx+C_2$$

$$\rightarrow I=xsinx+cosx+C$$

دیده شد که اگر چه انتگرال I را نمی‌دانستیم, اما با جمع کردن آن با یک انتگرال ساده (J) , انتگرال مجموع قابل محاسبه بوده و لذا میتوان I را بدست آورد. سوال این است که J را چگونه انتخاب کردیم؟ در واقع اگر به انتگرال مجموع نگاه کنیم خواهیم داشت:

$$d\left(\underbrace{x}_{u}\underbrace{sinx}_{v}\right)=\underbrace{x}_{u}\underbrace{cosxdx}_{dv}+\underbrace{sinx}_{v}\ \underbrace{dx}_{du}\rightarrow\int\underbrace{x}_{u}\underbrace{cosxdx}_{dv}=\underbrace{x}_{u}\underbrace{sinx}_{v}-\int\underbrace{sinx}_{v}\ \underbrace{dx}_{du}$$

پس باید یک قسمت را u و قسمت دیگر را dv نامگذاری کنیم, بگونه‌ای که انتگرال $\int vdu$ را بدانیم.

دیده شد که روش تغییر متغیر به نوعی عکس قاعده زنجیری است. با همین قیاس می‌توان گفت روش جزء به جزء در انتگرال‌گیری نیز عکس قاعده مشتق حاصلضرب می‌باشد.

توضیح ۱: گاهی اوقات انتخاب نادرست u و dv ممکن است ما را به انتگرال مشکل‌تری برساند. بعنوان نمونه:

$$\int\underbrace{cosx}_{u}\,\underbrace{xdx}_{dv}=\underbrace{cosx}_{u}\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v}-\int\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v}\underbrace{(-sinx)dx}_{du}\quad\boxtimes$$

توضیح ۲: نیازی نیست در محاسبه v از روی dv ثابت C ذکر شود, چرا که در نهایت حذف میشود. مثلا:

$$\int xcosx\,dx=x(sinx+C)-\int(sinx+C)\,dx=xsinx-\int sinx\,dx$$

رابطه نهایی روش جزء به جزء: در حالت کلی اگر u و v توابعی مشتق پذیر از x باشند:

$$d(uv)=udv+vdu\rightarrow udv=d(uv)-vdu\xrightarrow{\int}\boxed{\int udv=uv-\int vdu}$$

دو نکته مهم این روش عبارتند از:

۱- قسمتی را dv بنامیم که انتگرال آنرا بدانیم.

۲- انتگرال $\int vdu$ در دسترس باشد.

مثال ۴-۵ انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$1)\ I=\int\underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{3x}dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u = x & dv = e^{3x}dx \\ \downarrow & \downarrow \\ du = 1dx & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases} \rightarrow I = \underbrace{x}_{u}\underbrace{\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)}_{v} - \int \underbrace{\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)}_{v}\underbrace{1dx}_{du} = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C \ \blacksquare$$

<u>توضیح ۱</u>: بدیهی است اگر انتگرال بصورت معین باشد نیز مشابه قبل حل میشود. به عنوان نمونه:

$$\int_1^2 xe^{3x}\,dx = x\frac{1}{3}e^{3x}\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3}e^{3x}\,dx = \frac{2}{3}e^6 - \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)\Big|_1^2 = \frac{5}{9}e^6 - \frac{2}{9}e^3$$

یا $\int_1^2 xe^{3x}\,dx = \left(\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right)\Big|_1^2 = \frac{5}{9}e^6 - \frac{2}{9}e^3$

<u>توضیح ۲</u>: در اینجا نیز انتخاب نادرست u و dv میتواند انتگرال را مشکل‌تر کند. بعنوان نمونه:

$$\int \underbrace{e^{3x}}_{u}\underbrace{xdx}_{dv} = \underbrace{e^{3x}}_{u}\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v}\underbrace{3e^{3x}dx}_{du} \quad \boxed{\times} \ \blacksquare$$

$$2)\ I = \int \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{cosxdx}_{dv} \ ; \begin{cases} u = x^2 & dv = cosxdx \\ \downarrow & \downarrow \\ du = 2xdx & v = sinx \end{cases} \rightarrow I = x^2 sinx - \int 2x\,sinxdx$$

بنابراین پس از یک گام, باز به انتگرال قابل محاسبه‌ای نرسیده‌ایم, اما لااقل یکی از توان x کم شده است. پس یک گام دیگر همین روند را ادامه می‌دهیم.

$$\begin{cases} u = 2x & dv = sinxdx \\ \downarrow & \downarrow \\ du = 2dx & v = -cosx \end{cases} \rightarrow \quad \begin{aligned} I &= x^2 sinx - \left(2x(-cosx) - \int 2(-cosx)\,dx\right) \\ &= x^2 sinx + 2xcosx - 2sinx + C \ \blacksquare \end{aligned}$$

<u>توضیح ۱</u>: اگر در مرحله <u>دوم</u> در انتخاب u و dv اشتباه کنیم ممکن است به انتگرال اولیه برسیم. به عبارتی راهی را که یک گام جلو رفته‌ایم, بازگشته‌ایم!

$$I = \int \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{cosxdx}_{dv} = x^2 sinx - 2\int \underbrace{sinx}_{u}\underbrace{xdx}_{dv}$$

$$I = x^2 sinx - 2\left(\frac{x^2}{2}sinx - \int \frac{x^2}{2}cosx\,dx\right) = x^2 sinx - x^2 sinx + \underbrace{\int x^2 cosxdx}_{I} \rightarrow 0 = 0 \ \boxed{!}$$

<u>توضیح ۲</u>: دیده شد برای محاسبه انتگرال مورد نظر, دو بار از جزء به جزء استفاده شد. می‌توان این دو گام را بصورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} u = x^2 & dv = cosxdx \\ \downarrow & \downarrow \\ du = 2xdx & v = sinx \end{cases} , \begin{cases} u = 2x & dv = sinxdx \\ \downarrow & \downarrow \\ du = 2dx & v = -cosx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 & cosx \\ \downarrow & \downarrow \\ 2x & sinx \\ \downarrow & \downarrow \\ 2 & -cosx \end{cases}$$

با توجه به جواب بدست آمده میتوان تعبیر زیر را برای محاسبه این انتگرال ارائه داد. (شکل سمت چپ)

$\begin{array}{ccc} x^2 & & cosx \\ & \searrow^{+} & \\ 2x & & sinx \\ & \searrow^{-} & \\ 2 & \xrightarrow[+\int]{} & -cosx \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \int x^2cosxdx = \\ x^2sinx \\ -2x(-cosx) \\ +\int 2(-cosx)\,dx \end{array}$	$\begin{array}{ccc} x^2 & & cosx \\ & \searrow^{+} & \\ 2x & & sinx \\ & \searrow^{-} & \\ 2 & & -cosx \\ & \searrow^{+} & \\ 0 & \xrightarrow[-\int]{} & -sinx \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \int x^2cosxdx = \\ x^2sinx \\ -2x(-cosx) \\ +2(-sinx) \end{array}$

همچنین میتوان همین روند را یک گام دیگر ادامه داد تا به شکل سمت راست رسید که در این صورت هیچ انتگرالی برای محاسبه باقی نمی‌ماند. در واقع در اینجا به دلیل آنکه یک عبارت چند جمله‌ای در انتگرال وجود دارد (x^2) , با تکرار روش جزء به جزء در نهایت به صفر خواهیم رسید. خلاصه آنکه در روش جزء به جزء همواره در هر گام, از مشتق یکی از عبارات کاسته شده و به مشتقات دیگری اضافه می‌شود. به عبارتی در حالت کلی:

$$\int f^{(0)}g^{(n)}dx = f^{(0)}g^{(n-1)} - f^{(1)}g^{(n-2)} + f^{(2)}g^{(n-3)} - f^{(3)}g^{(n-4)} + \cdots$$

$$+(-1)^{n-1}f^{(n-1)}g^{(0)} + (-1)^n\int f^{(n)}g^{(0)}dx$$

فقط محاسبات را تا جایی پیش می‌بریم که انتگرال آخر را بدانیم. از این ایده در مواردی که نیازمند کاهش دادن مشتقات یک تابع هستیم استفاده می‌شود. یک نمونه مهم از این موارد بحثی است در روش اجزاء محدود که با عنوان "فرم ضعیف شده" شناخته می‌شود. ■

$$3)\ \ I = \int \underbrace{tan^{-1}x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} \quad ; \quad \begin{cases} u = tan^{-1}x & dv = dx \\ \quad\downarrow & \quad\downarrow \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} & v = x \end{cases} \qquad or: \boxed{\begin{array}{cc} tan^{-1}x & 1 \\ \dfrac{1}{1+x^2} & x \end{array}}$$

$$\rightarrow I = x\,tan^{-1}x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\,tan^{-1}x - \frac{1}{2}Ln(1+x^2) + C \ \blacksquare$$

<u>توضیح</u>: فرض کنید بخواهیم مساله را با تغییر متغیر حل کنیم. خواهیم داشت:

$$u = tan^{-1}x \rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \rightarrow dx = (1+u^2)du = (1+tan^2 u)du \rightarrow I = \int u(1+tan^2 u)du$$

که برای حل این مساله جدید باز هم بایستی از روش جزء به جزء استفاده کنیم. از آنجا که u متغیر ظاهری انتگرال است, برای اشتباه نشدن با u و v در روش جزء به جزء, آنرا به t تغییر می‌دهیم. بنابراین تغییر متغیر ما $t = tan^{-1}x$ منظور می‌شود.

$$I = \int \underbrace{t}_{u}\,\underbrace{(1+tan^2 t)dt}_{dv} \ ; \ \begin{cases} u = t & dv = (1+tan^2 t)dt \\ \quad\downarrow & \quad\downarrow \\ du = dt & v = tan\,t \end{cases} \qquad or: \boxed{\begin{array}{cc} t & 1+tan^2 t \\ 1 & tant \end{array}}$$

$$I = t\,tant - \int tant\,dt = t\,tant - (-Ln|cost|) + C$$

$$t=tan^{-1}x \to tant=x\,,cost=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \to I=x\,tan^{-1}x-\frac{1}{2}Ln(1+x^2)+C$$

که دیده میشود برای این مثال روش طولانی‌تری است. ■

$$4)\ \ I=\int \underbrace{Lnx}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv}\quad ;\quad \begin{cases} u=Lnx & dv=dx \\ \downarrow & \downarrow \\ du=\dfrac{1}{x}dx & v=x \end{cases}\qquad or: \boxed{\begin{matrix} Lnx & 1 \\ \dfrac{1}{x} & x \end{matrix}}$$

$$\to I=xLnx-\int x\frac{dx}{x}=x(Lnx-1)+C\ \ ■$$

<u>توضیح</u>: در اینجا نیز اگر بخواهیم با تغییر متغیر مساله را حل کنیم, در نهایت باز هم بایستی از جزء به جزء استفاده کرد. چرا که:

$$u=Lnx \to du=\frac{1}{x}dx \to dx=\underbrace{x}_{e^u}du \to \int Lnx\,dx=\int ue^u\,du$$

که برای حل این مساله جدید, نیازمند روش جزء به جزء خواهیم بود. با تعویض متغیر ظاهری u به t خواهیم داشت:

$$I=\int \underbrace{t}_{u}\ \underbrace{e^tdt}_{dv}\ \ ;\ \begin{cases} u=t & dv=e^tdt \\ \downarrow & \downarrow \\ du=dt & v=e^t \end{cases}\quad ;\quad or: \boxed{\begin{matrix} t & e^t \\ 1 & e^t \end{matrix}}$$

$$\to I=te^t-\int e^t\,dt=te^t-e^t+C\quad ;\quad t=Lnx \to e^t=x\quad \to\quad I=x(Lnx-1)+C\ \ ■$$

$$5)\ I=\int 3^{\sqrt{2x+1}}dx \xrightarrow{t=\sqrt{2x+1}\to dx=tdt} I=\int \underbrace{t}_{u}\,\underbrace{3^tdt}_{dv}\ \ ;\ \begin{cases} u=t & dv=3^tdt \\ \downarrow & \downarrow \\ du=dt & v=\dfrac{3^t}{Ln3} \end{cases}\quad or: \boxed{\begin{matrix} t & 3^t \\ 1 & \dfrac{3^t}{Ln3} \end{matrix}}$$

$$\to I=\frac{t3^t}{Ln3}-\frac{1}{Ln3}\int 3^tdt=\frac{t3^t}{Ln3}-\frac{3^t}{(Ln3)^2}+C\quad ■$$

$$6)\ I=\int \frac{Lnx}{x^3}dx\quad ;\quad I=\int \underbrace{Lnx}_{u}\underbrace{\frac{1}{x^3}dx}_{dv}\quad ;\quad \begin{cases} u=Lnx & dv=\dfrac{1}{x^3}dx \\ \downarrow & \downarrow \\ du=\dfrac{1}{x}dx & v=\dfrac{-1}{2x^2} \end{cases}\qquad or: \boxed{\begin{matrix} Lnx & \dfrac{1}{x^3} \\ \dfrac{1}{x} & \dfrac{-1}{2x^2} \end{matrix}}$$

$$\to I=Lnx\left(\frac{-1}{2x^2}\right)-\int \frac{-1}{2x^2}\frac{1}{x}dx=-\frac{1}{2}\frac{Lnx}{x^2}-\frac{1}{4x^2}+C\quad ■$$

$$7)\ I=\int \underbrace{e^{2x}}_{u}\,\underbrace{cos3xdx}_{dv}\quad ;\quad \begin{cases} u=e^{2x} & dv=cos3xdx \\ \downarrow & \downarrow \\ du=2e^{2x}dx & v=\dfrac{1}{3}sin3x \end{cases}$$

$$\rightarrow I = e^{2x}\left(\frac{1}{3}sin3x\right) - \frac{2}{3}\int \underbrace{e^{2x}}_{u}\,\underbrace{sin3xdx}_{dv} \quad ; \quad \begin{cases} u = e^{2x} & dv = sin3xdx \\ \downarrow & \downarrow \\ du = 2e^{2x}dx & v = -\frac{1}{3}cos3x \end{cases}$$

$$\rightarrow I = e^{2x}\left(\frac{1}{3}sin3x\right) - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{2x}cos3x - \left(\frac{-2}{3}\right)\int e^{2x}cos3xdx\right)$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{3}e^{2x}sin3x + \frac{2}{9}e^{2x}cos3x + \frac{-4}{9}I \rightarrow \frac{13}{9}I = \frac{1}{3}e^{2x}sin3x + \frac{2}{9}e^{2x}cos3x \rightarrow I\ \boxed{\surd}$$

توضیح ۱: این مثال نیز با دو بار استفاده از جزء به جزء مشابه انتگرال قسمت 2 بدست آمد, با این تفاوت که در نهایت به انتگرال اولیه باز گشتیم. میتوان هر دو مرحله را بصورت جدولی نوشت که در اینصورت حجم نوشتاری کمتری خواهیم داشت.

$$\begin{array}{ccc} e^{2x} & & cos3x \\ & \searrow^{+} & \\ 2e^{2x} & & \frac{1}{3}sin3x \\ & \searrow^{-} & \\ 4e^{2x} & \underset{+\int}{\rightarrow} & -\frac{1}{9}cos3x \end{array}$$

توضیح ۲: در حالت کلی برای محاسبه چنین انتگرالهایی میتوان یک رابطه بصورت زیر بدست آورد:

$$I = \int e^{ax}\begin{pmatrix} cosbx \\ sinbx \end{pmatrix}dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}sinbx + \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}cosbx\right) \ \blacksquare$$

8) $I = \int xLn(x+3)dx$

$$I = \int \underbrace{Ln(x+3)}_{u}\,\underbrace{xdx}_{dv} \quad ; \quad \begin{cases} u = Ln(x+3) & dv = xdx \\ \downarrow & \downarrow \\ du = \frac{dx}{x+3} & v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases} \quad or\ : \boxed{\begin{array}{cc} Ln(x+3) & x \\ \frac{1}{x+3} & \frac{x^2}{2} \end{array}}$$

$$\rightarrow I = \frac{x^2}{2}Ln(x+3) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+3}dx = \frac{x^2}{2}Ln(x+3) - \frac{1}{2}\int \left(x - 3 + \frac{9}{x+3}\right)dx$$

$$\rightarrow I = \frac{x^2}{2}Ln(x+3) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 9Ln(x+3)\right) \ \blacksquare$$

توضیح: می‌توان مساله را بطریق زیر نیز حل کرد:

$$I = \int \underbrace{xLn(x+3)}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} \quad ; \quad \begin{cases} u = xLn(x+3) & dv = dx \\ \downarrow & \downarrow \\ du = \left(Ln(x+3) + \frac{x}{x+3}\right)dx & v = x \end{cases}$$

$$\rightarrow I = x^2Ln(x+3) - \int x\left(Ln(x+3) + \frac{x}{x+3}\right)dx = x^2Ln(x+3) - I - \int \frac{x^2}{x+3}dx$$

که اگر I را به سمت دیگر تساوی ببریم, به همان نتیجه بالا خواهیم رسید. ■

$$9)\ I = \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$$

اگر چه این انتگرال را میتوان با روش تجزیه کسر که در بخش ۴-۵ خواهیم دید حل کرد, اما در اینجا هدف آن است که از جزء به جزء استفاده کنیم. اولین نکته آن است که بایستی قسمتی را dv بگیریم که انتگرال آنرا بدانیم. با توجه به مخرج کسر(که به صورت توان ۲ یک عبارت میباشد) میتوان بصورت برعکس, تصور کرد اگر $v = \frac{1}{1+x^2}$ باشد, دیفرانسیل آن $dv = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}dx$ خواهد بود. پس سعی میکنیم در انتگرال داده شده این شکل را ایجاد کرده و آنرا dv بنامیم. به عبارتی:

$$I = -\frac{1}{2}\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}dx}_{dv} \quad ; \quad \begin{cases} u = x & dv = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}dx \\ \downarrow & \downarrow \\ du = dx & v = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases} \quad or\ : \boxed{\begin{array}{ll} x & \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} \\ 1 & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}}$$

$$I = \frac{-x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{-x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}tan^{-1}x + C \ ■$$

$$10)\ I = \int \underbrace{\sqrt{a^2-x^2}}_{u}\underbrace{dx}_{dv} \quad ; \quad \begin{cases} u = \sqrt{a^2-x^2} & dv = dx \\ \downarrow & \downarrow \\ du = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx & v = x \end{cases}$$

$$\rightarrow I = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{-x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{(a^2-x^2-a^2)dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$I = x\sqrt{a^2-x^2} - \underbrace{\int \sqrt{a^2-x^2}dx}_{I} + a^2\underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}}_{sin^{-1}\frac{x}{a}+C_1} \rightarrow 2I = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\,sin^{-1}\frac{x}{a} + C \ ■$$

$$11)\ I = \int e^{2x}e^{e^x}dx = \int \underbrace{e^x}_{u}\underbrace{e^xe^{e^x}dx}_{dv} \quad ; \quad \begin{cases} u = e^x & dv = e^xe^{e^x}dx \\ \downarrow & \downarrow \\ du = e^xdx & v = e^{e^x} \end{cases}$$

<u>*Hint*:</u> $v = \int e^xe^{e^x}dx \ ; \ t = e^x \rightarrow dt = e^xdx \rightarrow v = \int e^tdt = e^t = e^{e^x}$

$$\rightarrow I = e^xe^{e^x} - \underbrace{\int e^xe^{e^x}dx}_{e^{e^x}} = e^{e^x}(e^x-1) \ ■$$

سوال: در حالت کلی چه فرم از انتگرالهایی را می‌توان به روش جزء به جزء محاسبه کرد؟ ابتدا سه گروه از توابع را تعریف می‌کنیم:

گروه ۱: لگاریتمی, معکوس مثلثاتی, معکوس هیپربولیک

گروه ۲: چند جمله ایها گروه ۳: نمایی, سینوس و کسینوس, هیپربولیک

در اینصورت یک بخش مهم از انتگرالهایی که به روش جزء به جزء قابل محاسبه‌اند عبارتند از:

۱) انتگرال گیری از گروه ۱

۲) انتگرال گیری از ضرب گروه ۱ در ۲

۳) انتگرال گیری از ضرب گروه ۲ در ۳

۴) انتگرال گیری از ضرب گروه ۳ در یکدیگر

البته ممکن است انتگرالهای دیگری نیز به جز آنچه در بالا عنوان شد با روش جزء به جزء قابل حل باشند. (مانند قسمتهای ۶ و ۹ تا ۱۱ از مثال قبل) ■

مثال ۴-۶ فرض کنید تابع $f(x)$ دوبار مشتق پذیر بوده و در رابطه زیر صدق کند. اگر $f'(0)=1$ باشد, مقدار $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ را بیابید.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[4f(x)+f''(x)]cos(2x)\,dx=3$$

حل معمولا در مسائلی که مشتقات تابع $f(x)$ در داخل انتگرال قرار دارد, سعی می‌کنیم با استفاده از جزء به جزء, از مشتقات تابع کم کنیم تا نهایتا به $f(x)$ برسیم. در اینجا دو انتگرال وجود دارد که برای دومین انتگرال بصورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{cos(2x)}_{u}\underbrace{f''(x)dx}_{dv}=f'(x)cos(2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin(2x)f'(x)dx}_{I}$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{sin(2x)}_{u}\underbrace{f'(x)dx}_{dv}=f(x)sin(2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos(2x)f(x)dx$$

$$\to\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos(2x)f''(x)dx=[f'(x)cos(2x)+2f(x)sin(2x)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos(2x)f(x)dx$$

$$Sub.\to\int_0^{\frac{\pi}{2}}[4f(x)+f''(x)]cos(2x)\,dx=-f'\left(\frac{\pi}{2}\right)-\underbrace{f'(0)}_{1}=3\to f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-4 \quad ■$$

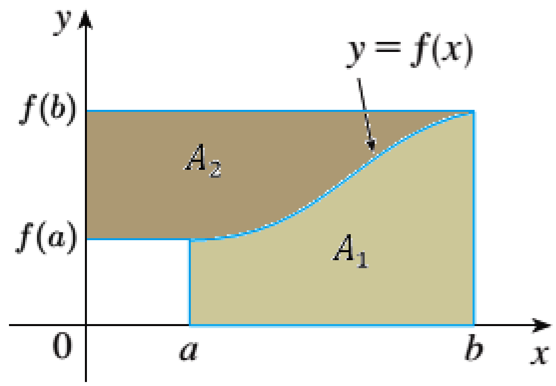
مثال ۴-۷ اگر f تابعی اکیدا یکنوا و f' پیوسته باشد, با استفاده از تغییرمتغیر $x=f(t)$ نشان دهید:

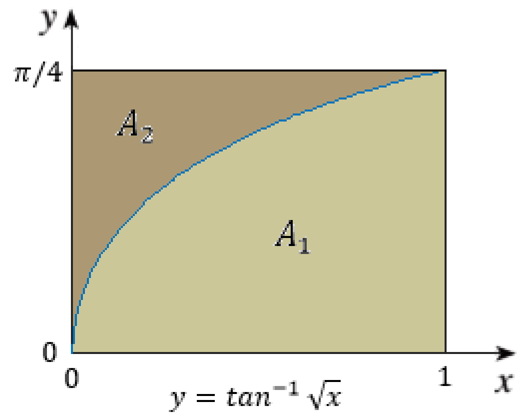
$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_{f(a)}^{f(b)}f^{-1}(x)\,dx=bf(b)-af(a)$$

حل با استفاده از تغییرمتغیر داده شده, از انتگرال دوم شروع کرده و به روش جزء به جزء انتگرال اول را ایجاد می‌کنیم. به عبارتی:

$$\int_{f(a)}^{f(b)}f^{-1}(x)\,dx=\int_a^b\underbrace{f^{-1}(f(t))}_{u=t}\underbrace{f'(t)dt}_{dv}=tf(t)\Big|_a^b-\int_a^b f(t)\,dt\to \text{حکم}$$

توضیح ۱: این رابطه به روش هندسی هم مطابق شکل زیر(سمت چپ) قابل اثبات است. چرا که اولین انتگرال در واقع معرف سطح زیر منحنی $f(x)$ با محور xها (A_1) و دومین انتگرال را اگر بصورت $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy$ ببینیم, بیانگر سطح زیر منحنی وارون $f(x)$ با محور yها است(A_2). لذا جمع این دو سطح برابر است با اختلاف مساحت دو مستطیل با مساحتهای $bf(b)$ و $af(a)$.





توضیح ۲: بعنوان یک مثال از کاربرد این رابطه, فرض کنید هدف محاسبه انتگرال زیر باشد:

$$\int_0^1 tan^{-1}\sqrt{x}\,dx \xrightarrow{x=t^2} 2\int_0^1 \underbrace{tan^{-1}t}_{u}\,\underbrace{tdt}_{dv} = 2\left(\frac{t^2}{2}tan^{-1}t\,\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2dt}{1+t^2}\right) = \frac{\pi}{2}-1$$

که همان مساحت A_1 در شکل بالا(سمت راست) می‌باشد و در محاسبه آن هم روش تغییر متغیر و هم جزء به جزء بکارگرفته شد. اما از آنجا که $y = tan^{-1}\sqrt{x}$ تابعی اکیدا یکنواست (شکل سمت راست) میتوان با محاسبه تابع معکوس آن, بطریق زیر عمل کرد, که برای این مثال دیده میشود که محاسبه آن ساده‌تر خواهد بود. یعنی بجای $\int_0^1 y\,dx$ ابتدا $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,dy$ را محاسبه کرده و آنرا از مساحت مستطیل کم می‌کنیم.

$$y = tan^{-1}\sqrt{x} \to x = tan^2 y \to A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^2 y\,dy = 1-\frac{\pi}{4} \to A_1 = \left(1\times\frac{\pi}{4}\right) - A_2 = \frac{\pi}{2}-1$$

به عبارتی هرگاه محاسبه انتگرال معین از وارون یک تابع ساده‌تر از خودِ تابع باشد, می‌توان از این رابطه استفاده کرد. ■

مثال ۴-۸ انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$I = \int \frac{sinx - xcosx}{x^2}dx = \int \frac{sinx}{x^2}dx - \int \frac{cosx}{x}dx$$

حل انتگرال $\int \frac{sinx}{x^2}dx$ را میتوان با روش جزء به جزء بصورت زیر نوشت:

$$\int \underbrace{sinx}_{u}\underbrace{\frac{dx}{x^2}}_{dv} = -\frac{sinx}{x} - \int \frac{-1}{x}cosxdx \to I = -\frac{sinx}{x} - \int \frac{-1}{x}cosxdx - \int \frac{cosx}{x}dx = -\frac{sinx}{x}\ \blacksquare$$

توضیح: به عبارتی خود انتگرال $\int \frac{sinx}{x^2}dx$ قابل محاسبه نبوده و به $\int \frac{cosx}{x}dx$ میرسد, که در صورت سوال همین ترم را باید از انتگرال کم کرد. در واقع این سوال بصورت معکوس طرح شده است. چرا که:

$$\int \frac{sinx - xcosx}{x^2}dx = \int d\left(-\frac{sinx}{x}\right) = -\frac{sinx}{x}\ \blacksquare$$

تمرینات بخش ۴-۳ تمرینات ۲۰, ۳۴ و ۶۹ از بخش ۷-۱ کتاب

۱- درستی انتگرالهای زیر را نشان دهید. (ثابتهای C در انتهای انتگرالهای نامعین حذف شده‌اند)

$$1)\ \int_{-1}^{1}|xe^x|\,dx = 2-2e^{-1}\quad ;\quad \underline{2})\ \int sin(Lnx)\,dx = \frac{x}{2}\big(sin(Lnx)-cos(Lnx)\big)$$

$$3)\ \int \frac{tan^{-1}(e^x)}{e^x}dx = -\frac{1}{2}Ln(e^{-2x}+1)-\frac{tan^{-1}(e^x)}{e^x}$$

$$\underline{4})\ \int \left(\frac{Lnx}{x}\right)^2 dx = -\frac{Ln^2x}{x}-2\frac{Lnx}{x}-\frac{2}{x}\quad ;\quad \underline{5})\ \int \frac{xe^{2x}dx}{(1+2x)^2}=\frac{e^{2x}}{8x+4}$$

$$6)\ \int sin^{-1}\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{x(1-x)}+(2x-1)\,sin^{-1}\sqrt{x}$$

$$\underline{7})\ \int (sin^{-1}x)^2\,dx = x(sin^{-1}x)^2+2sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}-2x$$

$$8)\ \int \frac{x^4dx}{(1-x^2)^2}=\frac{x^3}{2(1-x^2)}+\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}Ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\quad ;\quad 9)\ \int x^3e^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)$$

$$10)\ \int x^2Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx=\frac{1}{3}\left(Ln|x^2-1|+x^3Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+x^2\right)$$

$$11)\ \int sec^5x\,dx=\frac{3Ln|tanx+secx|+secx(2sec^2x+3)tanx}{8}\ ;\ \underline{Hint}:sec^5x=\underbrace{sec^3x}_{u}\,\underbrace{sec^2xdx}_{dv}$$

$$12)\ \int \frac{3x-2}{x^3}e^{3x}\,dx=\frac{e^{3x}}{x^2}\quad ;\quad \underline{13})\ \int_{-\pi}^{\pi}x\,cos(x+|x|)\,dx=-\frac{\pi^2}{2}$$

۲- قسمت ۱۰ از مثال ۴-۵ را با دو راه حل دیگر بصورت حل کنید:

الف- با ضرب صورت و مخرج در $\sqrt{a^2-x^2}$ ب- با تغییر متغیر $x=asinu$

۳- معادله انتگرالی زیر را حل کنید.

$$e^xf(x)=4x^2e^x-\int_0^x e^tf(t)dt\quad ;\quad \underline{Ans}:\ \ f(x)=e^{-2x}+2x^2+2x-1$$

۴- اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دو مرتبه مشتق‌پذیر بوده و $f(a)=f(b)=0$ باشد, نشان دهید:

$$\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)dx=2\int_a^b f(x)\,dx$$

توضیح مهم: اساسا بیشتر از دو روش برای انتگرال‌گیری نداریم, یا تغییرمتغیر یا جزء به جزء. در قسمتهای بعد, عملا از همین دو روش استفاده می‌کنیم. در بخش ۴-۴ با دستورهای بازگشتی آشنا می‌شویم که در آن قرار است یک انتگرال به انتگرالی هم شکل با آن تبدیل شود. در بخش ۴-۵ نحوه تجزیه کسرهای گویا برای تبدیل یک کسر به کسرهای ساده‌تر بیان خواهد شد. در ادامه نیز در بخشهای ۴-۶ الی ۴-۸ به معرفی تغییرمتغیرهای خاص برای انتگرال‌گیری از توابع مثلثاتی, رادیکالی و ... می‌پردازیم. توجه شود که اینها عملا روش محسوب نمی‌شوند و در همه آنها از همان دو روش تغییر متغیر یا جزء به جزء استفاده خواهد شد.

۴-۴- دستورهای بازگشتی (ادامه بخش ۷-۱ کتاب)

در مثال ۴-۳ و در محاسبه انتگرال $\int tan^7x\,dx$ دیده شد که این انتگرال به محاسبه $\int tan^5x\,dx$, سپس $\int tan^3x\,dx$ و در نهایت $\int tanx\,dx$ برمیگردد. در قسمت دوم این مثال عنوان شد که با تعریف $I_n = \int tan^n x\,dx$ می‌توان این انتگرال را بصورت بازگشتی برحسب I_{n-2} و I_{n-4} و $\cdots$ بدست آورد. بنابراین در این روش یک انتگرال بر حسب n (یا در حالت کلی بر حسب n,m) به انتگرالی با اندیس معمولا کمتر (و گاهی بیشتر) مرتبط می‌شود. گاهی اوقات ممکن است بتوان فرم بسته‌ای برای جواب بدست آورد. به مثالهای زیر توجه شود.

مثال ۴-۹ یک رابطه بازگشتی برای محاسبه انتگرالهای زیر بدست آورید.

$$1)\ I_n = \int (Lnx)^n\,dx \quad ; \quad \begin{cases} u = (Lnx)^n & dv = dx \\ \quad\downarrow & \quad\downarrow \\ du = n\dfrac{1}{x}(Lnx)^{n-1}dx & v = x \end{cases}$$

$$\to I_n = x(Lnx)^n - n\int x\frac{1}{x}(Lnx)^{n-1}dx = x(Lnx)^n - nI_{n-1} \quad \blacksquare$$

$$2)\ I_n = \int e^{-x^3}x^{3n+2}\,dx \quad ; \quad \begin{cases} u = e^{-x^3} & dv = x^{3n+2}dx \\ \quad\downarrow & \quad\downarrow \\ du = -3x^2e^{-x^3}dx & v = \dfrac{1}{3n+3}x^{3n+3} \end{cases}$$

$$\to I_n = \frac{1}{3n+3}e^{-x^3}x^{3n+3} + \frac{3}{3n+3}\int e^{-x^3}x^{3n+5}\,dx = \frac{1}{3n+3}e^{-x^3}x^{3n+3} + \frac{1}{n+1}I_{n+1}$$

دقت شود که $\int e^{-x^3}x^{3n+5}\,dx$ بیانگر I_{n+1} است چرا که اگر به I_n توجه شود خواهیم دید که اندیس n در واقع به این صورت معرفی شده است که از توان x^{3n+2} به اندازه 2 واحد کم شده و جواب به 3 تقسیم شده است. لذا $\frac{3n+5-2}{3} = n+1$. $\blacksquare$

توضیح ۱: ممکن است سوال شود که رابطه بازگشتی نیست چرا که I_n به یکی بیشتر یعنی I_{n+1} مرتبط شده است. هر چند برای n های منفی, این رابطه منجر به کاهش توان x می‌شود. برای n های مثبت کافی است رابطه را بصورت برعکس بیان کنیم. لذا:

$$\to I_n = \frac{1}{3n+3}e^{-x^3}x^{3n+3} + \frac{1}{n+1}I_{n+1} \to I_{n+1} = \frac{-1}{3}e^{-x^3}x^{3n+3} + (n+1)I_n$$

توضیح ۲: می‌توان مساله را با انتخابهای دیگری برای u و dv نیز حل کرد. اگر بخواهیم $dv = e^{-x^3}$ در نظر بگیریم,امکان پذیر نیست زیرا انتگرال آنرا نمی‌دانیم. اما می‌توان مشتق توان آن یعنی $-3x^2$ (یا با حذف ضریب آن x^2) را از x^{3n+2} بیرون کشیده و در کنار آن قرار دهیم تا بتوان انتگرال $x^2e^{-x^3}$ را محاسبه کرد. در اینصورت:

$$\begin{cases} u = x^{3n} & dv = x^2e^{-x^3}dx \\ \quad\downarrow & \quad\downarrow \\ du = 3nx^{3n-1}dx & v = \dfrac{-1}{3}e^{-x^3} \end{cases} \quad \to I_n = \frac{-1}{3}e^{-x^3}x^{3n} + n\underbrace{\int e^{-x^3}x^{3n-1}\,dx}_{I_{n-1}}$$

که همان نتیجه‌ای است که در توضیح قبل بدست آمد, با این تفاوت که اندیس ظاهری n را به $n+1$ تبدیل کنیم. $\blacksquare$

$$3)\ I_n=\int\frac{(ax+b)^{\frac{n}{2}}}{x}dx=\int(ax+b)^{\frac{n-2}{2}}\left(a+\frac{b}{x}\right)dx$$

$$I_n=a\int(ax+b)^{\frac{n-2}{2}}dx+b\int\frac{(ax+b)^{\frac{n-2}{2}}}{x}dx=\frac{2(ax+b)^{\frac{n}{2}}}{n}+bI_{n-2}\ \blacksquare$$

$$4)\ I_n=\int\frac{dx}{x^n\sqrt{ax+b}}\quad;\quad\begin{cases}u=x^{-n} & dv=(ax+b)^{-\frac{1}{2}}dx\\ \downarrow & \downarrow\\ du=-nx^{-n-1}dx & v=\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}\end{cases}$$

$$I_n=\frac{2\sqrt{ax+b}}{ax^n}+\frac{2n}{a}\int\frac{\sqrt{ax+b}dx}{x^{n+1}}=\frac{2\sqrt{ax+b}}{ax^n}+\frac{2n}{a}\int\frac{(ax+b)dx}{x^{n+1}\sqrt{ax+b}}$$

$$I_n=\frac{2\sqrt{ax+b}}{ax^n}+\frac{2n}{a}\int\frac{ax\,dx}{x^{n+1}\sqrt{ax+b}}+\frac{2n}{a}\int\frac{b\,dx}{x^{n+1}\sqrt{ax+b}}$$

$$I_n=\frac{2\sqrt{ax+b}}{ax^n}+2n\underbrace{\int\frac{dx}{x^n\sqrt{ax+b}}}_{I_n}+\frac{2nb}{a}\underbrace{\int\frac{dx}{x^{n+1}\sqrt{ax+b}}}_{I_{n+1}}$$

$$I_{n+1}=-\frac{\sqrt{ax+b}}{nbx^n}+\frac{a(1-2n)}{2nb}I_n\rightarrow I_n=-\frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)bx^{n-1}}+\frac{a(3-2n)}{2(n-1)b}I_{n-1}\ \blacksquare$$

مثال ۴-۱۰ الف: یک رابطه بازگشتی برای محاسبه انتگرال I_n بدست آورید. ب: به کمک آن انتگرالهای A و B را محاسبه کنید.

$$I_n=\int(a^2-x^2)^n\,dx\quad;\quad A=\int\sqrt{a^2-x^2}dx\quad;\quad B=\int\frac{dx}{(-x^2-x+1)^3}$$

حل با بکارگیری روش جزء به جزء خواهیم داشت:

$$I_n=\int\underbrace{(a^2-x^2)^n}_{u}\underbrace{dx}_{dv}=x(a^2-x^2)^n+2n\int x^2(a^2-x^2)^{n-1}\,dx$$

$$I_n=x(a^2-x^2)^n-2n\int((a^2-x^2)-a^2)(a^2-x^2)^{n-1}\,dx$$

$$I_n=x(a^2-x^2)^n-2n\underbrace{\int(a^2-x^2)^n\,dx}_{I_n}+2na^2\underbrace{\int(a^2-x^2)^{n-1}\,dx}_{I_{n-1}}$$

$$\rightarrow I_n=\frac{x(a^2-x^2)^n}{2n+1}+\frac{2na^2}{2n+1}I_{n-1}$$

برای قسمت ب کافی است انتگرالهای A و B را بر حسب I_n بیان کنیم.

$$A=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=I_{\frac{1}{2}}=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}I_{-\frac{1}{2}}=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\underbrace{\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}}_{sin^{-1}\frac{x}{a}+C}$$

$$B=\int\frac{dx}{(-x^2-x+1)^3}=\int\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-3}dx\xrightarrow{u=x+\frac{1}{2}}\int(a^2-u^2)^{-3}\,du=I_{-3}$$

حال بایستی I_{-3} را بر حسب I_{-2} بیان کرد. خواهیم داشت:

$$n=-2\rightarrow I_{-2}=\frac{x(a^2-x^2)^{-2}}{2(-2)+1}+\frac{2(-2)a^2}{2(-2)+1}I_{-3}\rightarrow I_{-3}=\frac{x(a^2-x^2)^{-2}}{4a^2}+\frac{3}{4a^2}I_{-2}$$

و در ادامه I_{-2} بر حسب I_{-1} بیان خواهد شد که مقدار $I_{-1}=\int\frac{dx}{a^2-x^2}$ نیز در جدول انتگرالها وجود دارد. ■

مثال ۴-۱۱ یک رابطه بازگشتی برای محاسبه انتگرال زیر بدست آورید.

$$\int\frac{sin^nx}{cos^mx}dx=\int sin^nx\,cos^{-m}x\,dx=I_{n,-m}$$

حل اولین نکته آن است که بایستی قسمتی را dv بگیریم که انتگرال آنرا بدانیم. با توجه عبارت $cos^{-m}x$, میتوان برعکس تصور کرد اگر $v=cos^{-m+1}x$ باشد, دیفرانسیل آن $dv=(-m+1)cos^{-m}x(-sinx)dx$ خواهد بود. پس سعی میکنیم در انتگرال داده شده این شکل را ایجاد کرده و آنرا dv بنامیم. به عبارتی:

$$I_{n,-m}=\frac{1}{m-1}\int\underbrace{sin^{n-1}x}_{u}\underbrace{(m-1)cos^{-m}x(sinx)dx}_{dv}$$
$$=\frac{1}{m-1}\left(\underbrace{sin^{n-1}x}_{u}\ \underbrace{cos^{-m+1}x}_{v}-\int\underbrace{cos^{-m+1}x}_{v}\underbrace{(n-1)sin^{n-2}x(cosx)dx}_{du}\right)$$

$$I_{n,-m}=\frac{1}{m-1}\left(\frac{sin^{n-1}x}{cos^{m-1}x}-(n-1)\int\frac{sin^{n-2}x}{cos^{m-2}x}dx\right)=\frac{sin^{n-1}x}{(m-1)cos^{m-1}x}-\frac{n-1}{m-1}I_{n-2,-(m-2)}\quad■$$

توضیح: می‌توان مثال بالا را به طریق دیگری نیز حل کرد. با توجه عبارت sin^nx, میتوان برعکس تصور کرد اگر $v=sin^{n+1}x$ باشد, دیفرانسیل آن $dv=(n+1)sin^nx(cosx)dx$ خواهد بود. اگر مشابه بالا عمل کنیم, در نهایت:

$$I_{n,-m}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{sin^{n+1}x}{cos^{m+1}x}-(m+1)I_{n+2,-(m+2)}\right)$$

که در اینصورت انتگرال بازگشتی به مقادیر بیشتر مرتبط شده است. مشابه آنچه در توضیح مثال قبل عنوان شد, خواهیم داشت:

$$I_{n+2,-(m+2)}=\frac{sin^{n+1}x}{(m+1)cos^{m+1}x}-\frac{n+1}{m+1}I_{n,-m}$$

حال با جایگزینی $n+2\rightarrow n$ و $m+2\rightarrow m$ به همان نتیجه قبل خواهیم رسید. یعنی:

$$I_{n,-m}=\frac{sin^{n-1}x}{(m-1)cos^{m-1}x}-\frac{n-1}{m-1}I_{n-2,-(m-2)}\quad■$$

مثال ۴-۱۲ ابتدا یک رابطه بازگشتی برای انتگرال زیر بدست آورده, سپس I_3 را محاسبه کنید.

$$I_n=\int_0^1 (arccosx)^n\,dx \qquad ; \qquad n>1$$

حل با بکارگیری روش جزء به جزء خواهیم داشت:

$$I_n=\int_0^1 \underbrace{(arccosx)^n}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv}=\underbrace{x(arccosx)^n|_0^1}_{0}+n\int_0^1 (arccosx)^{n-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int_0^1 \underbrace{(arccosx)^{n-1}}_{u}\underbrace{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx}_{dv}=-\sqrt{1-x^2}(arccosx)^{n-1}\Big|_0^1-(n-1)\int_0^1 (arccosx)^{n-2}\,dx$$

$$\to I_n=n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}-n(n-1)I_{n-2}$$

برای محاسبه I_3 کافی است ابتدا I_1 را بدست آوریم.

$$I_1=\int_0^1 \underbrace{(arccosx)}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv}=\underbrace{x(arccosx)|_0^1}_{0}-\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1=1\to I_3=3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-6I_1=\frac{3\pi^2}{4}-6 \;\blacksquare$$

تمرینات بخش ۴-۴ تمرینات ۴۸ و ۵۶ از بخش ۷-۱ کتاب

۱- یک رابطه بازگشتی برای محاسبه انتگرالهای زیر بیابید.

$$1)\ I_n=\int\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad ; \qquad 2)\ I_n=\int\frac{dx}{x^n\sqrt{ax+b}} \qquad ; \qquad 3)\ I_n=\int\frac{dx}{(1+Lnx)^n}$$

۲- یک رابطه بازگشتی برای محاسبه انتگرال معین زیر بیابید.

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n cosx\,dx \qquad n\in\{0,1,2,\cdots\} \qquad ; \qquad \underline{Ans}:\ I_n=\left(\frac{\pi}{2}\right)^n-n(n-1)I_{n-2}$$

۳- مثال ۴-۱۲ را با تغییر متغیر $u=arccosx$ حل کنید.

۴-۵- تجزیه کسرهای گویا (بخش ۷-۴ کتاب)

با یک مثال ساده شروع میکنیم. بعنوان نمونه فرض کنید $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$ را نمی‌دانیم. با تجزیه کسر $\frac{1}{x^2-a^2}$ به دو کسر ساده‌تر (که اصطلاحا کسرهای جزئی نامیده می‌شود) , می‌توان انتگرال آنرا بصورت زیر بدست آورد:

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx=\frac{1}{2a}Ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

اما سوال این است که نحوه تجزیه کسر ممکن است همواره ساده نباشد. مثلا فرض کنید بخواهیم کسر $\frac{5x^2-3x+2}{(x-1)^3}$ را تجزیه کنیم. یک راه حل اولیه آن است که در صورت کسر عبارت $x-1$ را (که در مخرج کسر وجود دارد) ایجاد کنیم:

$$\frac{5x^2-3x+2}{(x-1)^3}=\frac{5\big((x-1)+1\big)^2-3\big((x-1)+1\big)+2}{(x-1)^3}=\frac{5(x-1)^2+7(x-1)+4}{(x-1)^3}$$
$$=\frac{5}{x-1}+\frac{7}{(x-1)^2}+\frac{4}{(x-1)^3}$$

حال اگر هدف محاسبه $\int\frac{5x^2-3x+2}{(x-1)^3}dx$ باشد, انتگرال تک تک کسرهای ایجاد شده به سادگی قابل محاسبه است. اما این راه حل ممکن است گاهی طولانی بوده و یا بعنوان نمونه مخرج کسر به فرم مشکلتری مانند $x(x^2+1)^2$ باشد که در این صورت, این روش قدری پیچیده می‌شود. به همین منظور بهتر است روش دیگری برای تجزیه ارائه گردد.

بنا به تعریف, کسری را گویا می‌نامیم که در آن صورت و مخرج هر دو چندجمله‌ای باشند. در تجزیه این کسرها ابتدا اگر درجه صورت بیشتر یا مساوی مخرج باشد, صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم تا به کسری برسیم که درجه صورت از مخرج کمتر باشد. حال کنترل می‌کنیم چنانچه صورت آن مشتق مخرج باشد, حاصل انتگرال برابر با Ln مخرج خواهد بود, در غیر اینصورت بایستی کسر را تجزیه کرد. در کسرهای تجزیه شده (کسرهای جزئی) همواره تکلیف مخرج آنها روشن است چرا که از تجزیه مخرج کسر اولیه بدست می‌آید. لذا هدف تعیین صورت هر کسر است. از آنجا که در کسر اولیه درجه صورت از مخرج کمتر است, لذا در تمام موارد, صورتِ کسرهای جزئی را بگونه‌ای انتخاب می‌کنیم که درجه آن از مخرج کمتر باشد. اما از آنجا که در ابتدا نمی‌دانیم این درجه چه اندازه کمتر است, لذا آنرا با حداکثر درجه یعنی یک درجه کمتر از مخرج انتخاب می‌کنیم. در ادامه با جزئیات کار آشنا می‌شویم.

بطور معمول در تجزیه کسرها ۴ حالت خواهیم داشت:

الف: اگر مخرج n ریشه ساده داشته باشد.

در اینصورت کسر را بصورت مجموعی از n کسر می‌نویسیم که در مخرج هر یک عبارت $x-x_j$ قرار داشته باشد, که در آن x_j معرف j امین ریشه مخرج است. سپس در صورت کسر از آنجا که بایستی درجه آن کمتر از مخرج باشد, ضرایب ثابتی مانند A_j را در نظر گرفته و سعی میکنیم این ضرایب را بیابیم.

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\cdots+\frac{A_j}{x-x_j}+\cdots+\frac{A_n}{x-x_n}$$

برای محاسبه ضرایب یک راه آن است که با مخرج مشترک‌گیری از سمت راست و متحد قرار دادن صورت کسر ایجاد شده با $g(x)$ ضرایب را بدست آورد. بجای این کار میتوان گفت از آنجا که این رابطه بایستی به‌ازای تمام مقادیر x برقرار باشد, با انتخاب ریشه‌های مخرج بعنوان x , ضرایب بدست می‌آید. بدیهی است میتوان x را هر عدد دلخواهی انتخاب کرد. اما اگر این مقادیر ریشه‌های مخرج انتخاب شوند ضرایب ساده‌تر محاسبه میشود. دقت شود چنانچه در مخرج کسر ضریب بزرگترین درجه برابر a باشد, بهتر است در شروع حل از a در مخرج کسر فاکتور گرفت (قسمت دوم از مثال بعد).

راه حل دوم آن است که با ضرب طرفین کسر $f(x)$ در $x-x_j$ و سپس حدگیری از طرفین, ضرایب را بدست آورد:

$$A_j=\lim_{x\to x_j}(x-x_j)f(x)=\lim_{x\to x_j}(x-x_j)\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to x_j}\frac{g(x)}{\frac{h(x)-h(x_j)}{x-x_j}}\to A_j=\frac{g(x_j)}{h'(x_j)}$$

که در آن از $h(x_j)=0$ استفاده شده است, چرا که x_j ریشه ساده مخرج می‌باشد.

مثال ۴-۱۳ کسرهای زیر را تجزیه کنید.

$$1)\ f(x)=\frac{15x^2-4x-81}{x^3-13x+12}=\frac{A_1}{x-3}+\frac{A_2}{x+4}+\frac{A_3}{x-1}$$

$$15x^2-4x-81=A_1(x+4)(x-1)+A_2(x-3)(x-1)+A_3(x-3)(x+4)$$

$$x=3\to 42=14A_1\to A_1=3\ \ ;\ \ x=-4\to A_2=5\ ;\ \ x=1\to A_3=7$$

$$\underline{Or}:\ \ A_1=\frac{g(3)}{h'(3)}=\frac{15x^2-4x-81}{3x^2-13}\bigg|_{x=3}=\frac{42}{14}=3\ ;\ A_2=\frac{g(-4)}{h'(-4)}=5\ \ ;\ \ A_3=\frac{g(1)}{h'(1)}=7$$

در اینحالت گاهی اوقات ساده‌تر است ضرایب را از فرمول اولیه آن یعنی $A_j=\lim\limits_{x\to x_j}(x-x_j)f(x)$ بدست آوریم. ■

$$2)\ f(x)=\frac{7x+1}{12x^2+2x-2}\qquad ;\qquad 12x^2+2x-2=0\to x_{1,2}=-\frac{1}{2},\frac{1}{3}$$

$$\to 12x^2+2x-2=12\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=(4x+2)(3x-1)$$

$$f(x)=\frac{A_1}{4x+2}+\frac{A_2}{3x-1}\to 7x+1=A_1(3x-1)+A_2(4x+2)$$

$$x=-\frac{1}{2}\to-\frac{5}{2}=A_1\left(-\frac{5}{2}\right)\to A_1=1\ ;\ \ x=\frac{1}{3}\to\frac{10}{3}=A_2\left(\frac{10}{3}\right)\to A_2=1\ ■$$

<u>توضیح</u>: می‌توان بطریق زیر نیز ضرایب را بدست آورد:

$$f(x)=\frac{7x+1}{12x^2+2x-2}=\frac{1}{12}\left(\frac{A_1}{x+\frac{1}{2}}+\frac{A_2}{x-\frac{1}{3}}\right)=\frac{\frac{1}{12}A_1}{x+\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{12}A_2}{x-\frac{1}{3}}$$

دقت شود در استفاده از روش دوم اگر بخواهیم از مشتق استفاده کنیم, حتما بایستی مخرج به فرم $x-x_j$ باشد, یعنی ضریب x برابر 1 گردد, به همین جهت ضریب $\frac{1}{12}$ را به صورت کسر منتقل کردیم.

$$\to\frac{1}{12}A_1=\frac{g\left(-\frac{1}{2}\right)}{h'\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{-\frac{5}{2}}{-10}=\frac{1}{4}\to A_1=3\ \ ;\ \frac{1}{12}A_2=\frac{g\left(\frac{1}{3}\right)}{h'\left(\frac{1}{3}\right)}=\frac{\frac{10}{3}}{10}=\frac{1}{3}\to A_2=4$$

$$\to\frac{7x+1}{12x^2+2x-2}=\frac{1}{12}\left(\frac{3}{x+\frac{1}{2}}+\frac{4}{x-\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{4x+2}+\frac{1}{3x-1}\ ■$$

$$3)\ f(x)=\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}\xrightarrow{u=x^2}\frac{2u-1}{u^2+5u+4}=\frac{A_1}{u+4}+\frac{A_2}{u+1}\to A_1=3;A_2=-1$$

دیده میشود که استفاده از تغییر متغیر درجه مخرج را کمتر و تجزیه را ساده‌تر کرد. ■

بدیهی است انتگرالهایی که شامل کسرهایی به این شکل می‌باشند را می‌توان پس از تجزیه کسر آنها تعیین کرد. به عنوان نمونه:

$$\int\frac{dx}{x(x^5-1)}\xrightarrow{u=x^5\to du=5x^4dx}\int\frac{\frac{du}{5x^4}}{x(u-1)}=\frac{1}{5}\int\frac{du}{u(u-1)}=\frac{1}{5}Ln\left|\frac{1-u}{u}\right|+C\quad(u=x^5)\ ■$$

ب: اگر مخرج n ریشه تکراری x_1 داشته باشد.

فرض کنید هدف تجزیه کسر $\frac{2x+3}{x(x-3)^2}$ باشد. عنوان شد که در تمام موارد, کسرهای جزئی را بگونه‌ای انتخاب می‌کنیم که درجه صورت هر کسر از مخرج آن یک واحد کمتر باشد. در نتیجه بایستی آنرا به فرم زیر تجزیه کرد:

$$\frac{2x+3}{x(x-3)^2}=\frac{A}{x}+\frac{ax+b}{(x-3)^2}$$

اما کسر دوم را نیز می‌توان به دو کسر دیگر بصورت زیر تجزیه کرد:

$$\frac{ax+b}{(x-3)^2}=\frac{a\big((x-3)+3\big)+b}{(x-3)^2}=\frac{a(x-3)+b+3a}{(x-3)^2}=\frac{a}{x-3}+\frac{b+3a}{(x-3)^2}=\frac{B_1}{x-3}+\frac{B_2}{(x-3)^2}$$

بنابراین:

$$\frac{2x+3}{x(x-3)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x-3}+\frac{B_2}{(x-3)^2}$$

به عبارت دیگر می‌توان گفت اگر مخرج صرفا n ریشه تکراری x_1 داشته باشد, تجزیه آن بصورت زیر می‌باشد:

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{B_1}{x-x_1}+\frac{B_2}{(x-x_1)^2}+\cdots+\frac{B_n}{(x-x_1)^n}$$

در اینجا نیز صورت کسر تجزیه شده را با صورت کسر اولیه مساوی قرار داده و یا با انتخاب ریشه‌های مخرج (و یا هر عدد دیگری) بعنوان x, ضرایب را بدست می‌آوریم. راه دوم آن است که ابتدا طرفین را در $(x-x_1)^n$ ضرب و آن‌را $F(x)$ نامگذاری میکنیم:

$$F(x)=(x-x_1)^n f(x)=(x-x_1)\,\text{جملاتی شامل}+B_{n-2}(x-x_1)^2+B_{n-1}(x-x_1)+B_n$$

حال اگر حد دو طرف را زمانی که $x\to x_1$ بدست آوریم, B_n بصورت زیر بدست می‌آید:

$$B_n=\lim_{x\to x_1}F(x)$$

حال برای محاسبه B_{n-1} کافی است از $F(x)$ مشتق بگیریم:

$$F'(x)=\ (x-x_1)\,\text{جملاتی شامل}+2\times B_{n-2}(x-x_1)+1\times B_{n-1}\to B_{n-1}=\lim_{x\to x_1}F'(x)$$

و به همین ترتیب برای محاسبه B_{n-2} مشتق دوم $F(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$F''(x)=(x-x_1)\,\text{جملاتی شامل}+2\times 1\times B_{n-2}\to B_{n-2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to x_1}F''(x)$$

و با ادامه همین روش در نهایت فرمول کلی برای محاسبه تمامی B_n ها بصورت زیر خواهد بود:

$$\cdots\to\boxed{B_{n-k}=\frac{1}{k!}\lim_{x\to x_1}F^{(k)}(x)\quad(k=0{:}\,n-1)\quad;\quad F(x)=(x-x_1)^n f(x)}$$

بنابراین ابتدا B_n , سپس B_{n-1} و .. محاسبه می‌گردد.

مثال ۴-۱۴ کسرهای زیر را تجزیه کنید.

$$1)\ \ f(x)=\frac{5x^2-3x+2}{(x-1)^3}=\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)^3}$$

$$5x^2-3x+2=B_1(x-1)^2+B_2(x-1)+B_3$$

$$x=1\to B_3=4\ \ ;\ \ \begin{cases}x=0\to B_1-B_2+4=2\\ x=-1\to 4B_1-2B_2+4=10\end{cases}\to\begin{cases}B_1=5\\ B_2=7\end{cases}$$

$\underline{Or}$: $F(x)=(x-1)^3f(x)=5x^2-3x+2$

$$B_{n-k}=\frac{1}{k!}\lim_{x\to x_1}F^{(k)}(x)\xrightarrow{n=3}\begin{cases}k=0\to B_3=\dfrac{1}{0!}\lim\limits_{x\to 1}F(x)=4\\ k=1\to B_2=\dfrac{1}{1!}\lim\limits_{x\to 1}F'(x)=\dfrac{1}{1!}\lim\limits_{x\to 1}(10x-3)=7\\ k=2\to B_1=\dfrac{1}{2!}\lim\limits_{x\to 1}F''(x)=\dfrac{1}{2!}\lim\limits_{x\to 1}(10)=5\end{cases}$$

این مثال در شروع درس با ایجاد عبارت $x-1$ در صورت کسر نیز حل شده است. به عبارتی در این نوع کسرها که مخرج صرفا به فرم $(x-a)^n$ می‌باشد, شاید ساده‌تر باشد برای تجزیه کسر, صورت را برحسب توانهای مخرج یعنی $x-a$ بیان کنیم. ■

$$2)\ \ f(x)=\frac{2x^2-3x+3}{\underbrace{x^3-2x^2+x}_{x(x-1)^2}}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}$$

در واقع این مثال ترکیبی از دو حالت الف و ب میباشد.

$$2x^2-3x+3=A(x-1)^2+B_1x(x-1)+B_2x\to\begin{cases}x=0\to A=3\ \ ;\ \ x=1\to B_2=2\\ x=-1\to 4A+2B_1-B_2=8\to B_1=-1\end{cases}$$

همچنین به جای انتخاب $x=-1$ از آنجا که $x=1$ ریشه مضاعف میباشد, لذا میتوان آنرا در مشتق رابطه نیز جایگذاری کرد:

$$\to 4x-3=2\underbrace{A}_{3}(x-1)+B_1(2x-1)+\underbrace{B_2}_{2}\xrightarrow{x=1}1=0+B_1+2\to B_1=-1$$

<u>راه دوم</u>: از آنجا که $x=0$ ریشه ساده و $x=1$ ریشه مضاعف میباشد, با توجه به روابط ارائه شده در دو حالت الف و ب:

$$A=\frac{g(0)}{h'(0)}=\frac{3}{1}=3\ \ ;\ \ \ F(x)=(x-1)^2f(x)=2x-3+\frac{3}{x}$$

$$B_{n-k}=\frac{1}{k!}\lim_{x\to x_1}F^{(k)}(x)\xrightarrow{n=2}\begin{cases}k=0\to B_2=\dfrac{1}{0!}\lim\limits_{x\to 1}F(x)=2\\ k=1\to B_1=\dfrac{1}{1!}\lim\limits_{x\to 1}F'(x)=\dfrac{1}{1!}\lim\limits_{x\to 1}\left(2-\dfrac{3}{x^2}\right)=-1\end{cases}$$ ■

مثال ۴-۱۵ انتگرال زیر را بدست آورید.

$$\int\frac{dx}{e^{2x}+e^x}\xrightarrow{u=e^x\to du=e^xdx}\int\frac{du}{u^2(u+1)}$$

$$\frac{1}{u^2(u+1)}=\frac{A}{u+1}+\frac{B_1}{u}+\frac{B_2}{u^2}\to A=1\ ;\ B_1=-1\ ;\ B_2=1$$

$$\to\int\frac{du}{u^2(u+1)}=\int\frac{1}{u+1}du+\int\frac{-1}{u}du+\int\frac{1}{u^2}du=Ln\left(\frac{u+1}{u}\right)-\frac{1}{u}+C\quad(u=e^x)\ \blacksquare$$

ج: حداقل یکی از عبارات مخرج دارای ریشه حقیقی نبوده و تکراری نیست. در مثال زیر جزئیات کار دیده میشود.

مثال ۴-۱۶ انتگرال زیر را بدست آورید.

$$I=\int\frac{2x^5-2x+1}{x^4-1}dx=\int\left(2x+\frac{1}{x^4-1}\right)dx$$

حل از آنجا که درجه صورت بیشتر از مخرج می‌باشد, ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم کردیم. حال کسر دوم را تجزیه میکنیم:

$$f(x)=\frac{1}{x^4-1}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

دیده میشود که در کسری که مخرج دارای ریشه حقیقی نیست, درجه صورت کسر را چندجمله‌ای با یک درجه کمتر قرار می‌دهیم.

$$1=A_1(x+1)(x^2+1)+A_2(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)(x+1)$$

$$x=1\to 4A_1=1\to A_1=\frac{1}{4}\ \ ;\ \ x=-1\to -4A_2=1\to A_2=-\frac{1}{4}$$

اما مخرج کسر سوم ریشه‌های حقیقی ندارد. در فصل ۷ خواهیم دید می‌توانیم برای $x^2+1=0$ ریشه‌های مختلط بدست آورده و مساله را مشابه قسمت الف حل کنیم. بنابراین در اینجا به جای این روش, دو عدد دلخواه را قرار می‌دهیم.

$$x=0\to A_1-A_2-D=1\to D=-\frac{1}{2}\ \ ;\ \ x=-2\xrightarrow{\cdots}C=0$$

$$I=x^2+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}\right)dx=x^2+\frac{1}{4}Ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}tan^{-1}x+C$$
$$=x^2-\frac{1}{2}tanh^{-1}x-\frac{1}{2}tan^{-1}x+C\ \blacksquare$$

توضیح ۱: اگر اختلاف درجه صورت و مخرج کسری که دارای ضرایب مجهول است, برابر یک باشد(در اینجا کسر $\frac{Cx+D}{x^2+1}$), با محاسبه حد $xf(x)$ در بینهایت نیز میتوان ثابت C را بدست آورد. به عبارتی:

$$xf(x)=\frac{x}{x^4-1}=\frac{A_1x}{x-1}+\frac{A_2x}{x+1}+\frac{Cx^2+Dx}{x^2+1}\quad;\quad\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0\to 0=A_1+A_2+C\to C=0$$

راه دیگر آن است که پس از محاسبه A_1 و A_2 بطریق زیر عمل شود:

$$\frac{Cx+D}{x^2+1}=\frac{1}{x^4-1}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{x^4-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\frac{1-x^2}{x^4-1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}$$

توضیح ۲: راه دوم تجزیه کسر $f(x)$ بصورت زیر است. یعنی ابتدا ضرایب A_1 و A_2 را با فرمولهای داده شده در قسمت الف بدست آورده و سپس با انتخاب دو نقطه دلخواه ضرایب C و D را می‌یابیم.

$$f(x)=\frac{1}{x^4-1}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\rightarrow A_1=\frac{g(1)}{h'(1)}=\frac{1}{4}\quad;\quad A_2=\frac{g(-1)}{h'(-1)}=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\rightarrow\begin{cases}x=0\rightarrow -1=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+D\rightarrow D=-\frac{1}{2}\\ x=-2\rightarrow \frac{1}{15}=\frac{-1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{-2C+D}{5}\xrightarrow{D=-\frac{1}{2}} C=0\end{cases}\quad\blacksquare$$

د: حداقل یکی از عبارات مخرج دارای ریشه حقیقی نبوده و تکراری است. به مثال زیر توجه شود.

مثال ۴-۱۷ انتگرال زیر را بدست آورید.

$$\int\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}dx\ ;\ \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{C_1x+D_1}{x^2+1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+1)^2}$$

حل مشابه آنچه در قسمتهای ب و ج دیده شد, می‌توان فرم تجزیه شده کسر را بصورتی که در بالا دیده میشود بیان کرد.

$$A=\frac{g(0)}{h'(0)}=1\rightarrow 1-x+2x^2-x^3=\underbrace{A}_{1}(x^2+1)^2+(C_1x+D_1)x(x^2+1)+(C_2x+D_2)x$$

برای محاسبه سایر ضرایب بایستی دو طرف را متحد قرار داد و یا با انتخاب نقاط دلخواه, ضرایب را محاسبه کرد. مثلا:

$$x=1\rightarrow 1=4+2(C_1+D_1)+(C_2+D_2)$$
$$x=-1\rightarrow 5=4-2(-C_1+D_1)-(-C_2+D_2)$$
$$x=2\rightarrow -1=25+10(2C_1+D_1)+2(2C_2+D_2)$$
$$x=-2\rightarrow 19=25-10(-2C_1+D_1)-2(-2C_2+D_2)$$

از حل این دستگاه خواهیم داشت:

$$C_1=-1\ ;\ D_1=-1\ ;\ C_2=1\ ;\ D_2=0\quad\rightarrow\quad\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{-x-1}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}$$

$$\rightarrow\int\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}dx=Ln|x|-\frac{1}{2}Ln(x^2+1)-tan^{-1}x-\frac{1}{2(x^2+1)}+C\quad\blacksquare$$

توضیح: چنانچه مخرج کسر بصورت $g(x)=(3x+5)(x-1)^2(2x^2+1)^2(x^4+x+3)^3$ داده شده باشد, فرم تجزیه آن عبارت است از:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{3x+5}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{C_1x+D_1}{2x^2+1}+\frac{C_2x+D_2}{(2x^2+1)^2}+\frac{C_1x^3+D_1x^2+E_1x+F_1}{x^4+x+3}$$
$$+\frac{C_2x^3+D_2x^2+E_2x+F_2}{(x^4+x+3)^2}+\frac{C_3x^3+D_3x^2+E_3x+F_3}{(x^4+x+3)^3}\quad\blacksquare$$

تمرینات بخش ۴-۵ تمرینات ۵۸ و ۷۲ از بخش ۷-۴ کتاب

۱- انتگرالهای زیر را بدست آورید.

$$1)\ \int \frac{4x^2+5}{(x+3)(x-2)^3}dx \quad ; \quad \underline{Ans}:\ f(x)=\frac{\frac{-41}{125}}{x+3}+\frac{\frac{41}{125}}{x-2}+\frac{\frac{59}{25}}{(x-2)^2}+\frac{\frac{21}{5}}{(x-2)^3}$$

$$2)\int \frac{dx}{x^4+4}\ ;\ \frac{1}{x^4+4}=\frac{1}{\underbrace{x^4+4x^2+4}_{(x^2+2)^2}-4x^2}=\frac{\overbrace{C_1}^{1/8}x+\overbrace{D_1}^{1/4}}{x^2+2x+2}+\frac{\overbrace{C_2}^{-1/8}x+\overbrace{D_2}^{1/4}}{x^2-2x+2}$$

$$\int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+2}\xrightarrow{u=x+1\rightarrow du=dx}\int \frac{u+1}{u^2+1}du=\int \frac{u}{u^2+1}du+\int \frac{1}{u^2+1}du$$

$$3)\int \frac{(2x-1)dx}{(x-2)^2(2x^2+1)^2}$$

$$\underline{Hint}:\quad \frac{2x-1}{(x-2)^2(2x^2+1)^2}=\frac{B_1}{x-2}+\frac{B_2}{(x-2)^2}+\frac{C_1x+D_1}{2x^2+1}+\frac{C_2x+D_2}{(2x^2+1)^2}$$

$$4)\int \frac{dx}{x(x^2+1)(x^2+2)^2}\quad ;\quad \underline{Hint}:\ \frac{1}{x(x^2+1)(x^2+2)^2}=\frac{x}{x^2(x^2+1)(x^2+2)^2}\rightarrow u=x^2$$

۲- ابتدا یک رابطه بازگشتی برای I_n بدست آورده, به کمک آن J را محاسبه کنید.

$$I_n=\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}\quad ;\quad J=\int \frac{x^6dx}{(x^2+1)^5}\quad ;\quad \frac{x^6}{(x^2+1)^5}=\frac{\left((x^2+1)-1\right)^3}{(x^2+1)^5}=\cdots$$

۴-۶- انتگرال‌گیری از توابع مثلثاتی و هیپربولیکی (بخش ۷-۲ کتاب)

در این قسمت تعدادی از حالاتی که در انتگرال‌گیری از توابع مثلثاتی و هیپربولیکی با آن روبرو می‌شویم, بررسی خواهد شد.

۱- اگر انتگرال بصورت $(sinmx)(cosnx)$ باشد از روابط تبدیل ضرب به جمع استفاده میکنیم. همینطور برای حاصلضرب دو سینوس یا دو کسینوس در یکدیگر.

۲- اگر انتگرال $\int sin^m x cos^n x\, dx$ مورد نظر باشد, دو حالت وجود دارد: (m,n صحیح و مثبتند)

الف: اگر یکی از توانها فرد باشد, از توان فرد یکی کم کرده و مابقی را بر حسب دیگری مینویسیم.

ب: اگر هر دو زوج باشند, یکی را به دیگری تبدیل کرده و از فرمولهای طلایی توان را کاهش میدهیم.

راه حل کلیتر برای m و n صحیح(مثبت یا منفی), استفاده از رابطه بازگشتی است که قبلا بدست آوردیم.

۳- اگر انتگرال $\int tan^m x sec^n x\, dx$ مورد نظر باشد, دو حالت وجود دارد: (m, n صحیح و مثبتند)

الف: اگر n زوج باشد, sec^2x را جدا کرده بر حسب $tanx$ مینویسیم.

ب: اگر n فرد باشد, sec^2x را جدا کرده بر حسب $tanx$ می‌نویسیم, سپس از جزء به جزء استفاده می‌کنیم. به عنوان نمونه:

$$I = \int sec^3x dx = \int \underbrace{secx}_{u}\, \underbrace{sec^2x dx}_{dv} = secx tanx - \int secx\, \underbrace{tan^2x}_{sec^2x-1}\, dx$$

$$I = secx tanx - I + \int secx dx \rightarrow I \quad \boxed{\surd}$$

و به همین ترتیب برای $\int cotg^m x csc^n x\, dx$

۴- در انتگرال گیری از $\int sec^n x\, dx$ و $\int csc^n x\, dx$ اگر توان n زوج باشد, از تغییرمتغیر $u = tanx$ برای اولی و $u = cotx$ برای دومی استفاده میشود. بعنوان مثال:

$$\int sec^n x\, dx = \int sec^{n-2}x\, sec^2x dx = \int (sec^2x)^{\frac{n-2}{2}} sec^2x dx = \int (1 + tan^2x)^{\frac{n-2}{2}} sec^2x dx$$
$$= \int (1 + u^2)^{\frac{n-2}{2}} du$$

که برای این انتگرال آخر نیز $u = tant$ انتخاب می‌شود.

اگر n فرد باشد با انتخاب $dv = sec^2x$ در اولی و $dv = csc^2x$ در دومی و مابقی بعنوان u از روش جزء به جزء استفاده میشود که در نهایت به یک رابطه بازگشتی خواهیم رسید. بعنوان مثال:

$$I_n = \int sec^n x\, dx = \int sec^{n-2}x\, sec^2x dx \;\; ; \; \begin{cases} u = sec^{n-2}x \rightarrow du = (n-2)sec^{n-2}x\, tanx\, dx \\ dv = sec^2x dx \rightarrow v = tanx \end{cases}$$

$$\rightarrow (n-1)I_n = sec^{n-2}x\, tanx + (n-2)I_{n-2}$$

توضیح: برای ادامه بحث لازم است تعریف تابع گویای دو متغیره ارائه شود. فرض کنید $f(x, y)$ یک کسر بصورت زیر باشد:

$$f(x, y) = \frac{x^3y - 2xy^2 + x - 2y}{x^4 + xy^5 - 8}$$

دیده میشود که صورت و مخرج چند جمله‌ای از x و y می‌باشند. چنین تابعی را تابعی گویا از x و y می‌گوییم. حال اگر $x = sin\theta$ و $y = cos\theta$ انتخاب شود, تابعی گویا از سینوس و کسینوس بدست آورده‌ایم.

۵- در انتگرال گیری از توابع گویا بر حسب سینوس و کسینوس, روش کلی, استفاده از روابط نصف قوس میباشد که در نهایت به تجزیه کسرهای گویا خواهد رسید.

$$\int f(sinx, cosx)dx \; ; \; u = tan\frac{x}{2} \rightarrow sinx = \frac{2u}{1+u^2} \quad ; \quad cosx = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$x = 2tan^{-1}u \rightarrow dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

۶- در حالات زیر, ساده‌تر است بجای استفاده از تغییر متغیر کلی بند قبل, از تغییر متغیرهای ارائه شده در هر قسمت استفاده کرد:

$$f(-sinx, cosx) = -f(sinx, cosx) \rightarrow u = cosx$$

$$f(sinx, -cosx) = -f(sinx, cosx) \rightarrow u = sinx$$

$$f(-sinx, -cosx) = f(sinx, cosx) \rightarrow u = tanx$$

۷- در انتگرال‌گیری از توابع هیپربولیک, درست مشابه توابع مثلثاتی روابط زیر می‌تواند مفید باشد:

$$cosh^2x = \frac{cosh2x+1}{2} \quad ; \quad sinh^2x = \frac{cosh2x-1}{2} \quad ; \quad (sinhx)(coshx) = \frac{1}{2}sinh2x$$

در انتگرال‌گیری از توابع گویا بر حسب سینوس و کسینوس هیپربولیک نیز مشابه بند ۵ می‌توان از روابط نصف قوس استفاده کرد:

$$\int f(sinhx, coshx)dx \ ; \ u = tanh\frac{x}{2} \rightarrow sinhx = \frac{2u}{1-u^2} \quad ; \quad coshx = \frac{1+u^2}{1-u^2} \quad ; \quad |u| < 1$$

$$x = 2tanh^{-1}u \rightarrow dx = \frac{2du}{1-u^2} \quad ; \quad |u| < 1$$

برای توابع گویای هیپربولیک نیز چنانچه شرایط بند ۶ برقرار باشد, می‌توان از تغییر متغیرهای نظیر آن بند استفاده کرد.

مثال ۴-۱۸ انتگرالهای زیر را بدست آورید.

$$1) \int secx\,dx = \int \frac{dx}{cosx} = \int \frac{cosx}{1-sin^2x}dx \ ; \ f(sinx, -cosx) = -f(sinx, cosx) \rightarrow u = sinx$$

$$\rightarrow I = \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}Ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + C = Ln\sqrt{\frac{1+u}{1-u}} + C = Ln\frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}} + C \quad ; \ (|u| < 1)$$

$$\rightarrow I = Ln\frac{1+sinx}{|cosx|} + C = Ln|secx + tanx| + C \ \blacksquare$$

توضیح ۱: می‌توان از روش کلی (استفاده از روابط نصف قوس) نیز مساله را حل کرد. با انتخاب $u = tan\frac{x}{2}$ خواهیم داشت:

$$\int secx\,dx = \int \frac{dx}{cosx} = \int \frac{1+u^2}{1-u^2}\frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{2du}{1-u^2} = Ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + C = Ln\left|\frac{tan\frac{x}{2}+1}{tan\frac{x}{2}-1}\right| + C$$

$$\underline{Hint:} \quad \int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}Ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C = \frac{1}{a}tanh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad (a > 0)$$

توضیح ۲: به همین شیوه می‌توان انتگرال زیر را نیز بدست آورد. این دو انتگرال را بهتر است به عنوان فرمول در ذهن داشته باشیم.

$$\int cscx\,dx = \int \frac{dx}{sinx} = -Ln|cscx + cotgx| + C = Ln\left|tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C \ \blacksquare$$

$$2) \int \frac{dx}{sinx(2+cosx-2sinx)}$$

$$u = tan\frac{x}{2} \rightarrow I = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}\left(2+\frac{1-u^2}{1+u^2}-2\frac{2u}{1+u^2}\right)} = \int \frac{1+u^2}{u(u^2-4u+3)}du$$

$$\frac{1+u^2}{u(u^2-4u+3)}=\frac{A_1}{u}+\frac{A_2}{u-3}+\frac{A_3}{u-1}\rightarrow A_1=\frac{1}{3}\ ;\ A_2=\frac{5}{3}\ ;\ A_3=-1$$

$$\rightarrow I=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u}+\frac{5}{3}\int\frac{du}{u-3}-\int\frac{du}{u-1}=\frac{1}{3}Ln|u|+\frac{5}{3}Ln|u-3|-Ln|u-1|+C\ \blacksquare$$

3) $\displaystyle\int\frac{dx}{sinx(2cos^2x-1)}\quad ;\quad f(-sinx,cosx)=-f(sinx,cosx)\rightarrow u=cosx$

اگر چه می‌توان این مثال را نیز با تغییرمتغیر کلی $u=tan\frac{x}{2}$ حل کرد, اما با توجه به بند ۶ استفاده از تغییرمتغیر $u=cosx$ ساده‌تر است. با ضرب صورت و مخرج در $sinx$ خواهیم داشت:

$$I=\int\frac{\overbrace{sinxdx}^{-du}}{\underbrace{sin^2x}_{1-u^2}\underbrace{(2cos^2x-1)}_{2u^2-1}}\quad ;\quad \int\frac{du}{(1-u^2)(1-2u^2)}=\int\frac{2du}{1-2u^2}-\int\frac{du}{1-u^2}$$

دقت کنید ممکن است سوال شود مخرج کسرهای تجزیه شده یعنی $1-2u^2$ و $1-u^2$ قابلیت تجزیه بیشتر را نیز دارند. مثلا می‌توان $1-u^2$ را به دو کسر با مخرج $1-u$ و $1+u$ نیز تجزیه کرد. اما از آنجا که هدف انتگرال‌گیری است, تجزیه را تا جایی انجام می‌دهیم که انتگرال کسر مورد نظر در دست باشد. در جدول انتگرالها , تابع اولیه توابع به فرم $\frac{1}{a^2-u^2}$ داده شده است و هر دو کسر بالا به این فرم می‌باشند, لذا نیاز به تفکیک بیشتر نبوده و به کمک همین فرمول (که در توضیح ۱ مثال اول نیز آمده است) می‌توان جواب انتگرال را بدست آورد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\int\frac{du}{1-2u^2}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\frac{1}{2}-u^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{2\frac{\sqrt{2}}{2}}Ln\left|\frac{u+\frac{\sqrt{2}}{2}}{u-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|=\frac{1}{2\sqrt{2}}Ln\left|\frac{\sqrt{2}u+1}{\sqrt{2}u-1}\right|$$

$$\int\frac{du}{1-u^2}=Ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\rightarrow I=\frac{1}{\sqrt{2}}Ln\left|\frac{\sqrt{2}cosx+1}{\sqrt{2}cosx-1}\right|+Ln\left|tan\frac{x}{2}\right|+C\ \blacksquare$$

توضیح: کسر داخل انتگرال بصورت زیر تجزیه شده است:

$$t=u^2\rightarrow\frac{1}{(1-u^2)(1-2u^2)}=\frac{1}{(1-t)(1-2t)}=\frac{A_1}{1-t}+\frac{A_2}{1-2t}=\frac{-A_1}{t-1}+\frac{-\frac{1}{2}A_2}{t-\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow -A_1=\frac{g(1)}{h'(1)}=1\rightarrow A_1=-1\ ;\ -\frac{1}{2}A_2=\frac{g(0.5)}{h'(0.5)}=-1\rightarrow A_2=2$$

$$t=u^2\rightarrow\frac{1}{(1-u^2)(1-2u^2)}=\frac{2}{1-2u^2}-\frac{1}{1-u^2}\ \blacksquare$$

4) $\displaystyle\int cschx\,dx=\int\frac{dx}{sinhx}\quad ;\quad u=tanh\frac{x}{2}\rightarrow sinhx=\frac{2u}{1-u^2}\ ;\ dx=\frac{2du}{1-u^2}\quad ;\quad |u|<1$

$$\rightarrow I=\int\frac{dx}{sinhx}=\int\frac{1-u^2}{2u}\frac{2du}{1-u^2}=\int\frac{du}{u}=Ln|u|+C=Ln\left|tanh\frac{x}{2}\right|+C\ \blacksquare$$

تمرینات بخش ۴-۶ تمرینات ۳۴ و ۴۰ از بخش ۷-۲ کتاب

۱- درستی انتگرالهای زیر را نشان دهید.

$$1)\ \int \frac{dx}{2+cosx}=\frac{2}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tan\frac{x}{2}\right)+C \quad ; \quad 2)\ \int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+sinx+cosx}=Ln2$$

$$3)\ \int \frac{dx}{5+sinx+3cosx}=\frac{2}{\sqrt{15}}tan^{-1}\left(\frac{1+2tan\frac{x}{2}}{\sqrt{15}}\right)+C$$

$$4)\ \int \frac{2tanx+3}{sin^2x+2cos^2x}dx=Ln(tan^2x+2)+\frac{3}{\sqrt{2}}tan^{-1}\left(\frac{tan\,x}{\sqrt{2}}\right)+C$$

$$5)\ \int \frac{(1+sec^2x)sec^2x}{1+tan^3x}dx=Ln(tan\,x+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\sqrt{3}\frac{tan\,x-1}{tan\,x+1}\right)+C$$

۲- به کمک انتگرال I (که برای $|a|<1$ اعتبار دارد) و راهنمایی داده شده, درستی انتگرال J را نشان دهید.

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+acosx}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \quad ; \quad J=\int_0^{2\pi}\frac{cosxdx}{17-8cosx}=\frac{-1}{8}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{17}{17-8cosx}\right)dx=\frac{\pi}{30}$$

۴-۷- انتگرال‌گیری از توابع رادیکالی (بخش ۷-۳ کتاب)

این نوع انتگرالها را در سه حالت مختلف بررسی می‌کنیم.

۱- اگر تعدادی رادیکال با فرجه‌های مختلف داشته باشیم $x=u^m$ را بکار می‌بریم که m ک.م.م فرجه‌ها است.

مثال ۴-۱۹ انتگرالهای زیر را بدست آورید.

$$1)\ \int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx \xrightarrow{x=u^6\to dx=6u^5du} I=6\int\frac{u^5+u^3+1}{1+u^2}du=6\int\left(u^3+\frac{1}{1+u^2}\right)du$$

$$=\frac{6}{4}u^4+6\,tan^{-1}u+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\,tan^{-1}\sqrt[6]{x}+C \quad \blacksquare$$

$$2)\ \int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}=\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}}$$

$$\frac{x+2}{x-1}=u^4\to x=\frac{u^4+2}{u^4-1}\to x-1=\frac{3}{u^4-1} \quad ; \quad x+2=\frac{3u^4}{u^4-1} \quad ; \quad dx=\frac{-12u^3}{(u^4-1)^2}du$$

$$\to I=\int\frac{(u^4-1)(u^4-1)(-12u^3)}{3(3u^4)u(u^4-1)^2}du=\frac{-4}{3}\int\frac{du}{u^2}=\frac{4}{3u}+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C \quad \blacksquare$$

۲- اگر عبارت کسری بوده و مخرج به فرم $\sqrt{ax^2+bx+c}$ باشد معمولا آنرا به مربع کامل تبدیل می‌کنیم.

مثال ۴-۲۰ انتگرالهای زیر را بدست آورید.

$$1)\ \int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}} = \int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{(2x+1)^2-4}} \quad ; \quad u=2x+1 \to I = \frac{1}{4}\int \frac{(u+5)\,du}{\sqrt{u^2-4}}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{u\,du}{\sqrt{u^2-4}} + \frac{5}{4}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-4}} = \frac{1}{4}\sqrt{u^2-4} + \frac{5}{4}Ln\left|u+\sqrt{u^2-4}\right| + C$$

$$I = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x-3} + \frac{5}{4}Ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}\right| + C$$

$$\underline{Hint}:\quad \int \frac{u\,du}{\sqrt{u^2-4}} \xrightarrow{t=u^2-4\to dt=2udu} \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} = \sqrt{u^2-4} \quad \blacksquare$$

$$2)\ \int \sqrt{\frac{9-x}{1+x}}dx = \int \frac{9-x}{\sqrt{(9-x)(1+x)}}dx = \int \frac{9-x}{\sqrt{25-(x-4)^2}}dx = \int \frac{5-u}{\sqrt{25-u^2}}du$$

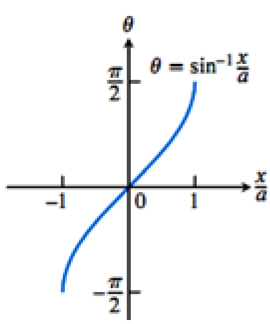
$$\int \frac{5}{\sqrt{25-u^2}}du - \int \frac{u}{\sqrt{25-u^2}}du = 5\sin^{-1}\left(\frac{u}{5}\right) - \left(-\sqrt{25-u^2}\right) + C \quad ; \quad (u=x-4) \ \blacksquare$$

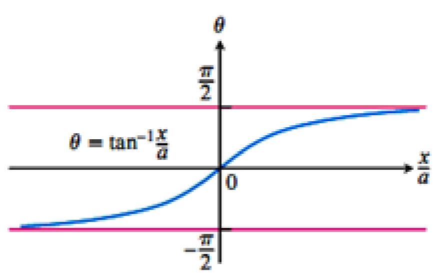
۳- تغییر متغیرهای زیر توابع رادیکالی را به مثلثاتی یا هیپربولیک تبدیل میکنند. در همه موارد f تابعی گویا و $a>0$ میباشد.

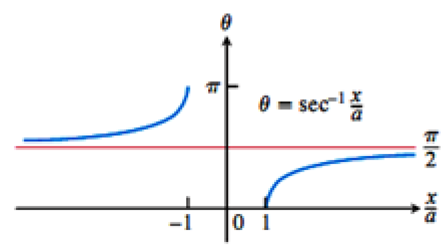
$$\int f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx \quad ; \quad x=asin\theta \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \quad ; \quad (or\ x=acos\theta)$$

$$\int f\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)dx \quad ; \quad x=atan\theta \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad ; \quad (or\ x=asinh\theta)$$

$$\int f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)dx \quad ; \begin{cases} x=asec\theta \quad ; & \begin{cases} 0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2} & (x \ge a) \\ \dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi & (x \le -a) \end{cases} \\ x=acosh\theta \quad ; & x \ge a\,;\ \theta \ge 0 \end{cases}$$







یکی از انتگرالهایی که بهتر است نتیجه آنرا در ذهن سپرد انتگرال $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ می‌باشد. با تغییر متغیر $x=asec\theta$ ابتدا برای $x \ge a$ بازه بصورت $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ انتخاب می‌شود. در این بازه $tan\theta \ge 0$ بوده و لذا خواهیم داشت:

$$dx = sec\theta\, tan\theta d\theta \;;\; \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2sec^2\theta - a^2} = |atan\theta| = atan\theta \quad (a>0)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} \xrightarrow{x=asec\theta} \int \frac{sec\theta\, tan\theta}{sec\theta\,(atan\theta)} d\theta = \int \frac{d\theta}{a} = \frac{1}{a}\theta + C = \frac{1}{a}sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

همچنین برای $x \le -a$ بایستی $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$ انتخاب شود که در اینصورت مقدار $tan\theta$ منفی بوده و خواهیم داشت:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} \xrightarrow{x=asec\theta} \int \frac{sec\theta\, tan\theta}{sec\theta\,(-atan\theta)} d\theta = -\int \frac{d\theta}{a} = -\frac{1}{a}sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

از آنجا که اختلاف آرک سکانتِ یک زاویه با قرینه آن یک ثابت π بوده و این ثابت در داخل C قرار می‌گیرد, لذا در نهایت:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C \quad (a>0)$$

به عنوان یک کاربرد, به مثال ۳-۲۵ (قسمت ۵) برمی‌گردیم. در آنجا حاصل یک حد مجموع به انتگرال زیر منجر شد که با یک تغییر متغیر ساده و استفاده از رابطه بالا حاصل آن بدست می‌آید.

$$E = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x(2+x)}}dx \quad ; \quad u = 1+x \rightarrow E = \int_1^2 \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = sec^{-1}|u|\big|_1^2 = \frac{\pi}{3}$$

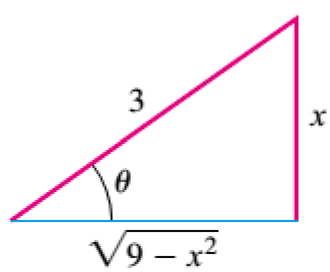
مثال ۴-۲۱ انتگرالهای زیر را بدست آورید.

$$1)\quad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}} \xrightarrow{x=3sin\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)} \int \frac{9sin^2\theta \times 3cos\theta}{|3cos\theta|}d\theta = 9\int sin^2\theta\, d\theta$$

از آنجا که $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ است, لذا $cos\theta > 0$ بوده و علامت قدرمطلق از مخرج حذف گردید.

$$= \frac{9}{2}(\theta - sin\theta cos\theta) + C = \frac{9}{2}\left(sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x}{3}\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right) + C = \frac{9}{2}sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C$$

معمولا تبدیل جواب نهایی برحسب x با ترسیم یک مثلث بصورت زیر, ساده‌تر از استفاده از روابط مثلثاتی است. ■



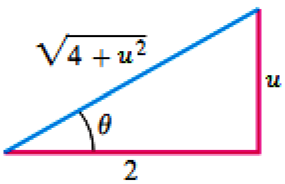
$$sin\theta = \frac{x}{3} \rightarrow cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

توضیح: اگر مخرج کسر بصورت $\sqrt{9-25x^2}$ باشد, ابتدا آنرا به $5\sqrt{\frac{9}{25}-x^2}$ تبدیل کرده و سپس تغییر متغیر $x = \frac{3}{5}sin\theta$ را بکار می‌بریم. ■

$$2)\ \int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{((x+1)^2+4)^3}} \quad ; \quad u = x+1 \rightarrow I = \int \frac{du}{\sqrt{(4+u^2)^3}}$$

$$u = 2tan\theta \rightarrow du = \frac{2}{cos^2\theta}d\theta \rightarrow \sqrt{4+u^2} = 2\sqrt{1+tan^2\theta} = \frac{2}{cos\theta} \quad ; \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I = \int \frac{\frac{2}{cos^2\theta}d\theta}{\left(\frac{2}{cos\theta}\right)^3} = \frac{1}{4}\int cos\theta d\theta = \frac{1}{4}sin\theta + C = \frac{1}{4}\frac{tan\theta}{\sqrt{1+tan^2\theta}} + C = \frac{x+1}{4\sqrt{5+2x+x^2}} + C \ \blacksquare$$



$$tan\theta = \frac{u}{2} \rightarrow sin\theta = \frac{u}{\sqrt{4+u^2}} = \frac{x+1}{\sqrt{5+2x+x^2}}$$

<u>توضیح:</u> اگر مخرج کسر بصورت $\sqrt{(5+x+x^2)^3}$ باشد, تغییر متغیرهای لازم بصورت زیر می‌باشد:

$$5+x+x^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2 \rightarrow x+\frac{1}{2} = u \quad ; \quad u = \frac{\sqrt{19}}{2}tan\theta \ \blacksquare$$

$$3)\ \int \frac{x^3dx}{\sqrt{4+x^2}} \xrightarrow{x=2tan\theta \rightarrow dx=2sec^2\theta d\theta} \int \frac{8tan^3\theta}{2sec\theta}2sec^2\theta d\theta = 8\int tan^3\theta sec\theta\, d\theta$$

$$= 8\int tan\theta sec\theta(sec^2\theta - 1)\, d\theta = 8\int tan\theta sec\theta sec^2\theta\, d\theta - 8\int tan\theta sec\theta\, d\theta$$

$$u = sec\theta \rightarrow I = 8\left(\frac{1}{3}sec^3\theta - sec\theta\right) + C \qquad \left(sec\theta = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}\right) \ \blacksquare$$

$$4)\ \int \frac{dx}{(x^2+4)^3} \xrightarrow{x=2tan\theta} \int \frac{2(1+tan^2\theta)d\theta}{(4tan^2\theta+4)^3} = \frac{1}{32}\int \frac{d\theta}{(tan^2\theta+1)^2}$$

$$= \frac{1}{32}\int (cos^2\theta)^2 d\theta = \frac{1}{32}\int \left(\frac{1+cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{128}\int \left(1+2cos2\theta+cos^2(2\theta)\right)d\theta = \frac{\theta}{128} + \frac{sin(2\theta)}{128} + \frac{\theta}{256} + \frac{sin(4\theta)}{1024} + C$$

که میتوان بصورت زیر θ را بر حسب x بیان کرد:

$$x = 2tan\theta \rightarrow \theta = tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) \quad ; \quad sin(2\theta) = \frac{2tan\theta}{1+tan^2\theta} = \frac{x}{1+x^2/4} = \frac{4x}{4+x^2}$$

$$sin(4\theta) = 2sin(2\theta)cos(2\theta) = 2\frac{4x}{4+x^2}\frac{1-x^2/4}{1+x^2/4} = 8\frac{x(4-x^2)}{(4+x^2)^2} \ \blacksquare$$

<u>توضیح:</u> دیده شد که اکثر توابع رادیکالی را میتوان به مثلثاتی تبدیل کرد که انتگرالهای مثلثاتی یا بصورت معمول قابل محاسبه‌اند و یا قابل تبدیل به کسرهای گویا می‌باشند.

تمرینات بخش ۴-۷ تمرینات ۱۶ و ۳۲ از بخش ۷-۳ کتاب

۱- درستی انتگرالهای زیر را نشان دهید.

$$1)\ \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{1-x} = 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$$

$$2)\ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C \quad ; \quad 3)\ \int \frac{\sqrt{16+x^2}}{x^4}dx = -\frac{(16+x^2)^{\frac{3}{2}}}{48x^3} + C$$

$$4)\ \int \frac{-dx}{x\sqrt{1-x^2}} = Ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + C = sech^{-1}x + C \quad ; \quad 5)\ \int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3dx}{(9+4x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{32}$$

$$6)\ \int \frac{xdx}{\sqrt{(3-2x-x^2)^3}} = \frac{3-x}{4\sqrt{3-2x-x^2}} + C \quad ; \quad 7)\ \int_0^{0.6} \frac{x^2dx}{\sqrt{9-25x^2}} = \frac{9\pi}{500}$$

$$8)\ \int \frac{xdx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = -\sqrt{3-2x-x^2} - \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

❊ ۴-۸- تغییرمتغیرهای اویلر و دوجملهای دیفرانسیلی

الف- تغییرمتغیرهای اویلر

این روش برای انتگرالهای به شکل زیر بکار می‌رود:

$$\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \ ; \ \sqrt{ax^2+bx+c} = \begin{cases} t \pm x\sqrt{a} & a>0 \quad (1) \\ tx \pm \sqrt{c} & c>0 \quad (2) \\ (x-k)t & ak^2+bk+c=0 \quad (3) \end{cases}$$

که در آن f تابعی گویا است. دقت شود در حالت سوم, k یک ریشه چندجملهای درجه دو میباشد.

مثال ۴-۲۲ انتگرالهای زیر را بدست آورید.

$$1)\ I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} \ ; \ a=1>0 \xrightarrow{(1)} \sqrt{x^2+2x+2} = t-x$$

$$t = x + \sqrt{x^2+2x+2} \rightarrow x = \frac{t^2-2}{2(t+1)}$$

$$I = \int \frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}dt = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{2}{(t+2)^2}\right)dt = Ln|t+1| + \frac{2}{t+1} + C \ \blacksquare$$

$$2)\ \ I=\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}\ ;\ c=1>0 \xrightarrow{(2)} \sqrt{x^2-x+1}=tx-1 \to x^2-x+1=(tx-1)^2$$

$$(2t-1)x=(t^2-1)x^2\ \to x=\frac{2t-1}{t^2-1} \to dx=-2\frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}$$

$$I=\int \frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}dt=\int\left(\frac{2}{t}+\frac{-0.5}{t-1}+\frac{-1.5}{t+1}+\frac{-3}{(t+1)^2}\right)dt$$

$$I=2Ln|t|-\frac{1}{2}Ln|t-1|-\frac{3}{2}Ln|t+1|+\frac{3}{t+1}+C \quad ; \quad t=\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}$$

البته از آنجا که $a=1>0$ می‌باشد, می‌توان این مساله را با تغییر متغیر حالت (1) نیز حل کرد. ■

$$3)\ \ I=\int \frac{dx}{\sqrt{(-x^2+7x-10)^3}}\ \ ;\ \ a<0\,, c<0 \xrightarrow{(3)} \sqrt{-x^2+7x-10}=(x-2)t$$

$$t=\frac{\sqrt{-x^2+7x-10}}{x-2}=\sqrt{\frac{5-x}{x-2}} \to x=\frac{2t^2+5}{t^2+1}$$

$$I=\int \frac{dx}{\big((x-2)t\big)^3}=\frac{-2}{9}\int \frac{2t^2+5}{t^2}dt=\frac{-2}{9}\left(\frac{-5}{t}+2t\right)+C \ ■$$

ب- انتگرال‌گیری از دو جمله‌ای دیفرانسیلی

هدف محاسبه انتگرال زیر میباشد که در آن m , n و p اعداد گویا می‌باشند.

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

۱- اگر p صحیح و مثبت باشد, پرانتز را بسط میدهیم و اگر منفی بود, تغییرمتغیر $x=t^k$ را بکار میبریم که در آن k , ک.م.م m و n میباشد.

۲- اگر $\frac{m+1}{n}$ عددی صحیح باشد, تغییرمتغیر $a+bx^n=t^k$ را بکار میبریم که در آن k مخرج کسر p میباشد.

۳- اگر $\frac{m+1}{n}+p$ عددی صحیح باشد, تغییرمتغیر $a+bx^n=t^kx^n$ را بکار میبریم که k مخرج کسر p میباشد.

مثال ۴-۲۳ انتگرالهای زیر را بدست آورید.

$$1)\ \ I=\int \frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}=\int x^{-1}\left(1+x^{1/3}\right)^{-2}dx \xrightarrow{p=-2\to(1)} x=t^3\ \ ;\ \ t=\sqrt[3]{x}$$

$$I=3\int \frac{dt}{t(1+t)^2}=3\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}-\frac{1}{(1+t)^2}\right)=3Ln\left|\frac{t}{1+t}\right|+\frac{1}{1+t}+C \ ■$$

$$2)\ \ I=\int\frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}=\int x^{-11}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}dx\xrightarrow{\frac{m+1}{n}+p=-3\to(3)}1+x^4=t^2x^4$$

$$I=\int(t^2-1)^{\frac{11}{4}}\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^{\frac{-1}{2}}\frac{-t}{2}(t^2-1)^{\frac{-5}{4}}dt=\frac{-1}{2}\int(t^2-1)^2\,dt=\frac{-1}{10}t^5+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t+C\blacksquare$$

تمرینات دوره‌ای

۱- درستی انتگرالهای زیر را نشان دهید.

$$\int\frac{cos^{-1}(x/2)}{\sqrt{4-x^2}}dx=-\frac{1}{2}cos^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

$$\int cos^2(lnx)\,dx=\frac{x}{2}+\frac{xcos(2lnx)+2xsin(2lnx)}{10}+C$$

$$\int\frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}}dx=\frac{5}{\sqrt{3}}sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\sqrt{4-3x^2}+C$$

$$\int sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)dx=xsin^{-1}\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)-\sqrt{x}+tan^{-1}\sqrt{x}+C$$

$$\int\sqrt{1+x^2}x^5\,dx=\frac{1}{7}(1+x^2)^{7/2}-\frac{2}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$\int\sqrt{x-x^2}\,dx=\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{8}sin^{-1}(2x-1)+C$$

$$\int\frac{ln(2x)}{xln(4x)}dx=lnx-(ln2)ln|lnx+2ln2|+C\quad;\quad\int e^{2\sqrt{x}}\left(2x+x^{\frac{3}{2}}\right)dx=x^2e^{2\sqrt{x}}+C$$

$$\int xe^{3x}sin2x\,dx=\frac{e^{3x}}{169}(12cos2x-5sin2x-26xcos2x+39xsin2x)+C$$

$$\int\frac{dx}{2^x+3}=\frac{x}{3}-\frac{1}{3ln2}ln(2^x+3)+C\quad;\quad\underline{Hint}:\ \frac{1}{2^x+3}=\frac{1}{3}\left(\frac{(2^x+3)-2^x}{2^x+3}\right)$$

$$\int\frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}dx=x-\frac{5}{2}ln(x^2+3x+4)+\frac{9}{\sqrt{7}}tan^{-1}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right)+C$$

$$\int\frac{sin^2x}{e^x}dx=\frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{cos2x-2sin2x}{5}-1\right)+C\quad;\quad\int\frac{xdx}{x^4-4x^2+3}=\frac{1}{4}ln\left|\frac{x^2-3}{x^2-1}\right|+C$$

$$\int\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx=-\frac{9}{2(x-3)}-\frac{1}{2(x+1)}+C$$

$$\int \frac{cos\theta}{sin^2\theta - 6sin\theta + 5} d\theta = \frac{1}{4} ln\left(\frac{5 - sin\theta}{1 - sin\theta}\right) + C$$

$$\int \frac{3sin\theta + 2cos\theta}{2sin\theta + 3cos\theta} d\theta = \frac{12}{13}\theta - \frac{5}{13} ln|2sin\theta + 3cos\theta| + C$$

$$\int \sqrt{tan\theta}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} tan^{-1}\left(\frac{tan\theta - 1}{\sqrt{2tan\theta}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} ln\left|\frac{tan\theta - \sqrt{2tan\theta} + 1}{tan\theta + \sqrt{2tan\theta} + 1}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1 - x^2}}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1 + x^5}} = \frac{1}{10} ln\left(\frac{(u - 1)^2}{u^2 + u + 1}\right) + \frac{\sqrt{3}}{5} tan^{-1}\left(\frac{2u + 1}{\sqrt{3}}\right) + C \quad ; \quad u = \sqrt[3]{1 + x^5}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2} ln\left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{2a} + x^a + 1}} = \frac{-1}{a} ln\left(\frac{1}{x^a} + \frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^a} + \frac{1}{x^{2a}}}\right) + C \;\; ; \;\; x > 0 \;\; ; \;\; a > 0$$

$$\int \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{8x^4 + 4x^2 + 3}{15x^5}\sqrt{x^2 - 1} \quad ; \quad \underline{Hint}:\ u = \frac{1}{x}$$

۲- با تغییر متغیر $x = \frac{1}{u}$ درستی انتگرال زیر را نشان دهید.

$$\int \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{8x^4 + 4x^2 + 3}{15x^5}\sqrt{x^2 - 1} + C$$

۳- با یافتن یک رابطه بازگشتی برای محاسبه $I_n = \int sin^n\theta\, d\theta$, سه مورد زیر را به ترتیب نتیجه بگیرید.

$$a)\ \ I_n = \int_0^{\pi/2} sin^n\theta\, d\theta \quad (n = 0,1,2,\cdots) \rightarrow I_n = \frac{n - 1}{n} I_{n-2}$$

$$b)\ \ \int_0^{\pi/2} sin^n\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} cos^n\theta\, d\theta = \frac{(n - 1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$c)\ \ \lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1 \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{7}\frac{8}{9}\cdots = \frac{\pi}{2} \quad (wallis\ formula)$$

۴- الف: با تغییر متغیر $x = 2 - cos\theta$ حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.

$$\int_{\frac{3}{2}}^{2} \left(\frac{x - 1}{3 - x}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

ب: نشان دهید برای $a < b$ خواهیم داشت:

$$\int_p^q \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{(b-a)\left(\pi + 3\sqrt{3} - 6\right)}{12} \quad ; \quad p = \frac{3a+b}{4} \quad ; \quad q = \frac{a+b}{2}$$

۵- الف: از انتگرالهای زیر a و I را بدست آورید.

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx = a - \pi \quad ; \quad I = \int_0^1 x^4(1-x)^4 dx \; ; \; \underline{Ans:} \;\; a = \frac{22}{7} ; I = \frac{1}{630}$$

ب: نشان دهید $a - I < \pi < a - \frac{1}{2}I$ که یک بازه مناسب برای مقدار عدد π می‌باشد.

۴-۹- استفاده از چند رابطه برای محاسبه ساده‌تر انتگرالهای معین

در اینجا چند رابطه بیان میشود که به کمک آن می‌توان تعدادی از انتگرالهای معین را به طریق ساده‌تری بدست آورد.

$$1) \int_{-a}^{a} \underbrace{f(x)}_{\text{زوج}} dx = 2\int_0^a f(x)dx \quad ; \quad \int_{-a}^{a} \underbrace{f(x)}_{\text{فرد}} dx = 0$$

$$\underline{Proof}: \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = \underbrace{\int_{-a}^{0} f(x)dx}_{u=-x} + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(-u)du + \int_0^a f(x)dx$$

که اگر $f(x)$ زوج باشد انتگرال اول برابر انتگرال انتگرال دوم و اگر فرد باشد, قرینه انتگرال دوم خواهد شد.

$$2) \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

$$\underline{Proof}: \quad \int_a^b f(a+b-x)dx \xrightarrow{u=a+b-x \to du=-dx} -\int_b^a f(u)du = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx$$

<u>دو حالت خاص:</u>

$$2a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(cosx)dx \qquad ; \qquad 2b) \quad a=-b \to \int_{-b}^{b} f(x)dx = \int_{-b}^{b} f(-x)dx$$

$$\underline{Proof}: \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{f(sinx)}_{g(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g\left(0 + \frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(cosx)dx$$

$$3) \int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$$

$$\underline{Proof}: \quad \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx \xrightarrow{u=x-c \to du=dx} \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx$$

دو حالت خاص: اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد:

$$3a)\ \int_a^b f(x)dx=\int_{a+kT}^{b+kT} f(x)dx \quad (k\in\mathbb{Z}) \qquad ; \qquad 3b)\ \int_0^T f(x)dx=\int_c^{c+T} f(x)dx$$

$$\underline{Proof}:\int_0^T f(x)dx=\int_0^c f(x)dx+\int_c^T f(x)dx=\int_T^{c+T}\underbrace{f(x-T)}_{f(x)}dx+\int_c^T f(x)dx=\int_c^{c+T} f(x)dx$$

بنابراین در کل سه رابطه اصلی ارائه شد که دو مورد ۲ و ۳ هر کدام دارای دو حالت خاص می‌باشند که در مثالهای زیر کاربرد آنها را خواهیم دید.

مثال ۴-۲۴ حاصل انتگرالهای معین زیر را بدست آورید.

$$1)\ I=\int_1^3\frac{xdx}{\sqrt{4x-x^2}}=\int_1^3\frac{xdx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} \qquad ; \quad u=x-2$$

$$\to I=\int_{-1}^1\frac{(u+2)du}{\sqrt{4-u^2}}=\underbrace{\int_{-1}^1\frac{udu}{\sqrt{4-u^2}}}_{0}+2\int_{-1}^1\frac{du}{\sqrt{4-u^2}}=2\,sin^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)\Big|_{-1}^1=\frac{2\pi}{3}$$

اولین انتگرال برابر صفر خواهد بود. چرا که بازه آن متقارن بوده و انتگرالده نیز فرد می‌باشد. همچنین می‌توان گفت دومین انتگرالده نیز زوج بوده و از آنجا که بازه متقارن است برابر با $2\int_0^1\frac{du}{\sqrt{4-u^2}}$ خواهد بود که در نهایت به همین جواب می‌رسد. ■

$$2)\ I=\int_a^b\frac{xdx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}=\int_a^b\frac{xdx}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2}} \qquad ; \quad u=x-\frac{b+a}{2}$$

$$=\underbrace{\int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}}\frac{udu}{\sqrt{\left(\frac{c-b}{2}\right)^2-u^2}}}_{0}+\frac{b+a}{2}\int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}}\frac{du}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-u^2}}=\frac{b+a}{2}sin^{-1}\left(\frac{2u}{b-a}\right)\Big|_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}}=\frac{\pi}{2}(b+a)$$

دیده می‌شود که انتگرال ارائه شده در قسمت 2 در واقع تعمیم انتگرال قسمت 1 می‌باشد. ■

مثال ۴-۲۵ حاصل انتگرالهای معین زیر را بدون محاسبه انتگرال نامعین آنها بیابید.

$$1)\ I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^2x\,dx\xrightarrow{(2a)}I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^2x\,dx\xrightarrow{+}I+I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}\to I=\frac{\pi}{4}\ ■$$

$$2)\ I=\int_0^{\pi}sin^{2m}x\,cos^{2n+1}x\,dx\xrightarrow{(2)}I=\int_0^{\pi}sin^{2m}(\pi-x)cos^{2n+1}(\pi-x)dx=-I\to I=0$$

یا می‌توان با انتخاب $c=-\frac{\pi}{2}$ در رابطه (3) , بازه انتگرال را متقارن کرده و با توجه به فرد شدن تابع به جواب صفر رسید. یعنی:

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin^{2m}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\ cos^{2n+1}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\ dx=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{cos^{2m}x\ sin^{2n+1}x}_{\text{فرد}}\ dx=0 \quad \blacksquare$$

$$3)\ I=\int_{-5}^{1} Ln\left(\sqrt{x^2+4x+5}-x-2\right)\ dx=\int_{-5}^{1} Ln\left(\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)\right)\ dx$$

$$u=x+2\rightarrow I=\int_{-3}^{3} Ln\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)\ du \xrightarrow{(1)} I=0$$

چرا که تابع $Ln\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)$ تابعی فرد است. زیرا:

$$f(u)=Ln\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)\rightarrow f(-u)=Ln\left(\sqrt{u^2+1}+u\right)=Ln\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}-u}\right)=-f(u) \quad \blacksquare$$

$$4)\ I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^5+\sqrt{1+x^{10}}}$$

با توجه به حالت خاصی که در رابطه $(2b)$ عنوان شد خواهیم داشت:

$$\int_{-b}^{b} f(x)dx=\int_{-b}^{b} f(-x)dx\rightarrow I=\int_{-1}^{1} f(-x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-x^5+\sqrt{1+x^{10}}}$$

$$\xrightarrow{+} I+I=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+x^5+\sqrt{1+x^{10}}}+\frac{1}{1-x^5+\sqrt{1+x^{10}}}\right)dx=\int_{-1}^{1} dx=2\rightarrow I=1 \quad \blacksquare$$

مثال ۴-۲۶ درستی رابطه زیر را نشان دهید.

$$I=\int_{a}^{b}\frac{f(x)}{f(x)+f(a+b-x)}dx=\frac{b-a}{2}$$

$$\xrightarrow{(2)} I=\int_{a}^{b}\frac{f(a+b-x)}{f(a+b-x)+\underbrace{f\big(a+b-(a+b-x)\big)}_{f(x)}}\xrightarrow{+} 2I=\int_{a}^{b} dx=b-a\rightarrow I=\frac{b-a}{2} \quad \blacksquare$$

توضیح ۱: این رابطه در دو حالت خاص به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\int_{a}^{b}\frac{f(x)}{f(x)+f(a+b-x)}dx=\frac{b-a}{2}\rightarrow\begin{cases}1)\ \ I=\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx=\frac{a-0}{2}=\frac{a}{2}\\ 2)\ \ I=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{f(x)+f(-x)}dx=\frac{a-(-a)}{2}=a\end{cases}$$

توضیح ۲: روابط توضیح قبل را بهتر است در ذهن داشته باشید, چرا که مثالهای متنوعی به کمک آنها حل می‌شود. به عنوان نمونه:

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{Ln(3+x)}\,dx}{\sqrt{Ln(9-x)}+\sqrt{Ln(3+x)}} = \int_2^4 \frac{f(x)\,dx}{f(2+4-x)+f(x)} = \frac{4-2}{2} = 1$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2} \qquad ; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{sinx}\,dx}{\sqrt[n]{sinx}+\sqrt[n]{cosx}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{sinx}\,dx}{\sqrt[n]{sinx}+\sqrt[n]{sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{-6}^{6} \frac{\sqrt{[x]+9}}{\sqrt{[x]+9}+\sqrt{[-x]+9}}dx = 6 \qquad ; \qquad \int_{-2}^{2} \frac{e^{sinx}dx}{cosh(sinx)}dx = 2\int_{-2}^{2} \frac{e^{sinx}dx}{e^{sinx}+e^{-sinx}} = 4 \ \blacksquare$$

مثال ۴-۲۷ درستی روابط زیر را نشان دهید.

$$1)\ I = \int_0^{\pi} f(sinx)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)dx \quad ; \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)dx + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(sinx)dx}_{J}$$

$$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \underbrace{f(sinx)}_{g(x)}dx \xrightarrow{(3)\ :\ c=-\frac{\pi}{2}} J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(cosx)dx \xrightarrow{(2a)} J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)dx$$

$$\rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)dx + J = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)dx$$

یا به جای تفکیک انتگرال به دو بخش مجزا, می‌توان با توجه به اینکه $g(x) = f(cosx)$ نسبت به x زوج است, بصورت زیر عمل کرد:

$$\xrightarrow{(3)\ :\ c=-\frac{\pi}{2}} I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{f\left(sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)}_{g(x)=f(cosx)}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{f(cosx)}_{g(x)}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)dx \ \blacksquare$$

$$2)\ \int_0^{\pi} xf(sinx)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(sinx)dx$$

$$\xrightarrow{(2)} I = \int_0^{\pi} x\,\underbrace{f(sinx)}_{g(x)}dx = \int_0^{\pi} (\pi-x)\ \underbrace{g(\pi-x)}_{f(sin(\pi-x))}\ dx = \int_0^{\pi} (\pi-x)f(sinx)dx$$

$$\rightarrow I = \pi\int_0^{\pi} f(sinx)dx - I \rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(sinx)dx \ \blacksquare$$

توضیح: با ترکیب دو رابطه بدست آمده, نتیجه زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{\int_0^{\pi} xf(sinx)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(sinx)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(cosx)dx} \ \blacksquare$$

مثال ۴-۲۸ به کمک نتیجه بدست آمده در قسمت قبل, انتگرال زیر رابدست آورید.

$$\int_0^{\pi}\frac{xsinx}{1+sinx}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{sinx}{1+sinx}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{1+sinx}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{1+cosx}dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2cos^2\frac{x}{2}-1}{2cos^2\frac{x}{2}}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{cos^2\frac{x}{2}}=\pi x|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\left(2tan\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}(\pi-2)\ \blacksquare$$

توضیح: می‌توانیم گام آخر (تبدیل انتگرال از سینوس به کسینوس) را حذف کرده و مستقیما $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{1+sinx}dx$ را محاسبه کنیم:

$$\int\frac{sinx\,dx}{1+sinx}=\int\frac{sinx-sin^2x}{cos^2x}dx=\int\frac{sinx}{cos^2x}dx-\int tan^2xdx=\frac{1}{cosx}-(tanx-x)+C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{1+sinx}dx=\left(x+\frac{1-sinx}{cosx}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-(0+1)=\frac{\pi-2}{2}$$

توجه شود که در محاسبه $\frac{1-sinx}{cosx}$ در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ مقدار حدی آن جایگزین شده است. بحث مربوط به جایگذاری مقادیر با مقادیر حدی را در فصل ۹ بطور کامل خواهیم دید. ■

مثال ۴-۲۹ با بکارگیری رابطه(2) , انتگرالهای زیر را بیابید.

$$1)\ I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}Ln(1+tanx)dx\xrightarrow{(2)}I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}Ln\left(1+tan\left(0+\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx$$

$$\to I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}Ln\left(\frac{2}{1+tanx}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}Ln2\,dx-I\to I=\frac{\pi}{8}Ln2\ \blacksquare$$

$$2)\ \int_0^1\frac{Ln(1+x)}{1+x^2}dx\xrightarrow{x=tanu}\int_0^{\frac{\pi}{4}}Ln(1+tanu)du=\frac{\pi}{8}Ln2\ \blacksquare$$

$$3)\ I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}Ln(sinx)dx\xrightarrow{(2)}I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}Ln(cosx)dx\to I+I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}Ln\left(\frac{1}{2}sin2x\right)dx$$

$$\to 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(Ln\left(\frac{1}{2}\right)+Ln\left(sin\,\underbrace{2x}_{u}\right)\right)dx=\frac{-\pi Ln2}{2}+\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\pi}Ln(sinu)du}_{2I}\to I=\frac{-\pi Ln2}{2}\ \blacksquare$$

توضیح: انتگرال آخر در واقع انتگرال غیرعادی محسوب میشود, چرا که انتگرالده در صفر تعریف نشده است. در فصل نهم خواهیم دید که اگر نقطه مشکل‌دار (در اینجا صفر) در داخل بازه نباشد, میتوان مشابه انتگرال معین معمولی آنرا محاسبه کرد و فقط کافی است از مقدار حدی آن استفاده کرد. ■

مثال ۴-۳۰ فرض کنید توابع g و h هر دو از $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دربازه $I = [0, a]$ پیوسته بوده و نیز:

$$\forall x \in I \quad ; \quad g(x) = g(a-x) \quad ; \quad h(x) + h(a-x) = k = Cte \quad ; \quad a > 0$$

نشان دهید:

$$\int_0^a g(x)h(x)dx = \frac{k}{2}\int_0^a g(x)dx$$

حل از سمت چپ شروع کرده و از رابطه (2) استفاده می‌کنیم. خواهیم داشت:

■ حکم $\leftarrow$ $$I = \int_0^a g(x)h(x)dx \xrightarrow{(2)} I = \int_0^a \underbrace{g(0+a-x)}_{g(x)}\,\underbrace{h(0+a-x)}_{k-h(x)}\,dx = k\int_0^a g(x)dx - I$$

توضیح: به کمک این مثال می‌توان قسمت ۲ از مثال ۴-۲۷ را نتیجه گرفت:

■ $$\begin{cases} h(x) = x \\ g(x) = f(sinx) \end{cases} \xrightarrow{a=\pi>0} \begin{cases} g(x) = g(\pi - x) \\ h(x) + h(\pi - x) = \underbrace{\pi}_{k} \end{cases} \to \int_0^\pi xf(sinx)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(sinx)dx$$

تمرینات بخش ۴-۹

۱- درستی انتگرالهای زیر نشان دهید.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1-x}{3^x + 3^{-x}}dx = \frac{2}{Ln3}\left(tan^{-1}3 - \frac{\pi}{4}\right)$$

۲- درستی انتگرالهای معین زیر را با استفاده از روابط ارائه شده در این بخش بررسی کنید.

$$1)\ \int_0^\pi \frac{xdx}{1+cos^2x} = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} \qquad ; \qquad 2)\ \int_\pi^{\frac{5\pi}{4}} \frac{sin2x}{cos^4x + sin^4x}dx = \frac{\pi}{4}$$

$$3)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{cosx(sinx+cosx)} = \frac{\pi}{8}Ln2$$

۳- مساله زیر را یکبار به روش معمول(تغییر متغیر) و یکبار با استفاده از راهنمایی داده شده حل کنید.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin\,x}{1+cos\,x+sin\,x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\overbrace{sin\,x}^{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}}{\underbrace{1+cosx}_{2cos^2\frac{x}{2}} + \underbrace{sinx}_{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}}dx$$

تمرینات ۱۷, ۲۸ , ۳۲ , ۳۸ و ۴۰ از بخش مرور مطالب فصل ۷

تمرینات ۲ و ۹ از بخش مسائل اضافی فصل ۷

۴-۱۰- مثالهای تکمیلی

مثال ۴-۳۱ اگر به ازای $x>0$ داشته باشیم $f(x)=\int_1^x \frac{Lnt}{t+1}dt$, حاصل $g(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$ را بیابید.

حل با جایگذاری $f(x)$ در $g(x)$ و سپس استفاده از تغییر متغیر $u=\frac{1}{t}$ خواهیم داشت:

$$g(x)=\int_1^x \frac{Lnt}{t+1}dt+\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{Lnt}{t+1}dt \quad ; \ u=\frac{1}{t}\to \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{Lnt}{t+1}dt=\int_1^x \frac{-Lnu}{\frac{1}{u}+1}\left(\frac{-du}{u^2}\right)=\int_1^x \frac{Lnt\,dt}{t(t+1)}$$

$$\to g(x)=\int_1^x Lnt\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{t(t+1)}\right)dt=\int_1^x \frac{Lnt}{t}dt=\frac{(Lnx)^2}{2} \ \blacksquare$$

توضیح: راه حل دوم مساله بصورت زیر است:

$$f(x)=\int_1^x \frac{Lnt}{1+t}dt\to f'(x)=\frac{Lnx}{1+x} \qquad ; \qquad g'(x)=f'(x)-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{Lnx}{x}$$

$$g'(x)=\frac{Lnx}{x}\to g(x)=\int \frac{Lnx}{x}dx=\frac{(Lnx)^2}{2}+c \ ; \ f(1)=0\to g(1)=0\to c=0 \ \blacksquare$$

مثال ۴-۳۲ الف: حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}Ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)dx$$

ب: به کمک قسمت قبل, انتگرالهای زیر را نیز محاسبه کنید.

$$A=\int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}Ln\left(\frac{x^2+3x+2}{(x+3)^2}\right)dx \qquad ; \qquad B=\int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}Ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)dx$$

حل الف: با یک تغییر متغیر ساده این انتگرال قابل محاسبه است:

$$u=\frac{x+1}{x+3}\to du=\frac{2}{(x+3)^2}dx\to I=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} Lnu\,du=\frac{1}{6}Ln3-\frac{1}{4}Ln2-\frac{1}{12}$$

بدیهی است اگر آرگومان تابع Ln به فرم $\frac{x+a}{x+3}$ نیز باشد, انتگرال به سادگی قابل محاسبه است. $\blacksquare$

ب: این دو انتگرال را به انتگرالی مشابه قسمت قبل تبدیل می‌کنیم. با استفاده از خواص Ln خواهیم داشت:

$$A=\int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}\left(Ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)+Ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)\right)dx$$

$$\to A=\int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}Ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)dx+\int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}Ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)dx$$

اولین انتگرال در قسمت قبل محاسبه شد و انتگرال دوم نیز به همان شیوه قابل محاسبه است. در نهایت:

$$A = \frac{19}{12}Ln3 - \frac{29}{12}Ln2 - \frac{1}{6}$$

برای انتگرال دوم از آنجا که در مخرجِ کسرِ داخل لگاریتم عبارت $x+3$ وجود ندارد, صورت و مخرج را به $x+3$ تقسیم می‌کنیم:

$$B = \int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}\left(Ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right) - Ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)\right)dx$$

$$\rightarrow B = \int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}Ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)dx - \int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}Ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)dx = -\frac{5}{4}Ln3 + \frac{23}{12}Ln2 \quad \blacksquare$$

*** مثال ۴-۳۳** با تغییر متغیر $x = sin(4u)$ انتگرال زیر را بدست آورید.

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2}dx \qquad ; \qquad tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$$

حل با تغییر متغیر داده شده خواهیم داشت:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{4cos(4u)}{\sqrt{1+sin(4u)} + \sqrt{1-sin(4u)} + 2}du \qquad ; \qquad 1 \pm sin(4u) = \left(cos(2u) \pm sin(2u)\right)^2$$

در بازه $-\frac{\pi}{8} \le u \le \frac{\pi}{8}$ خواهیم داشت $cos(2u) \ge sin(2u)$. در نتیجه:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{4cos(4u)}{\left(cos(2u) + sin(2u)\right) + \left(cos(2u) - sin(2u)\right) + 2}du = 2\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{cos(4u)}{cos^2u}du$$

$$cos(4u) = 8cos^4u - 8cos^2u + 1 \rightarrow I = 2\int_0^{\frac{\pi}{8}} \left(8cos^2u - 8 + \frac{1}{cos^2u}\right)du = 4\sqrt{2} - \pi - 2 \quad \blacksquare$$

*** مثال ۴-۳۴** الف: منحنی C_1 از مبدا مختصات عبور کرده و در رابطه زیر صدق می‌کند. نشان دهید منحنی C_1 , در مبدا دارای مینیمم و در $\left(1, \frac{1}{2e}\right)$ دارای ماکزیمم است. سپس منحنی آنرا ترسیم کنید.

$$y' = x(1-x^2)e^{-x^2}$$

ب: منحنی C_2 از مبدا مختصات عبور کرده و در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$y' = x(1-x^2)e^{-x^3}$$

نشان دهید منحنی C_2 نیز در مبدا دارای یک مینیمم و در $(1,k)$ دارای یک ماکزیمم است, که در آن $k > \frac{1}{2e}$ میباشد.

حل الف: برای یافتن نقاط اکسترمم, بایستی مشتق را برابر صفر قرار داد. در نتیجه:

$$y' = x(1-x^2)e^{-x^2} = 0 \rightarrow x = 0\,, x = \pm 1$$

برای یافتن y متناظر هر نقطه, بایستی ابتدا با انتگرال‌گیری تابع مورد نظر را بدست آورد.

$$\int \underbrace{(1-x^2)}_{u}\underbrace{xe^{-x^2}dx}_{dv} = (1-x^2)\frac{-1}{2}e^{-x^2} - \int x\,e^{-x^2} = \frac{-1}{2}(1-x^2)e^{-x^2} + \frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

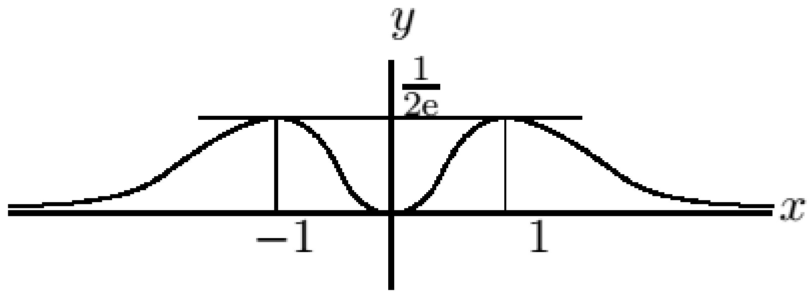
از آنجا که منحنی از مبدا می‌گذرد, لذا $C=0$ بدست می‌آید. در نتیجه نقاط اکسترمم عبارتند از:

$$y = \frac{1}{2}x^2e^{-x^2} \rightarrow (0,0), \left(1,\frac{1}{2e}\right), \left(-1,\frac{1}{2e}\right)$$

برای تعیین ماکزیمم یا مینیمم بودن, بایستی مشتق دوم تابع را بدست آورد:

$$y' = (x-x^3)e^{-x^2} \rightarrow y'' = (1-5x^2+2x^4)e^{-x^2} \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y''>0 \rightarrow (0,0) & Min \\ x=\pm1 \rightarrow y''<0 \rightarrow \left(\pm1,\dfrac{1}{2e}\right) & Max \end{cases}$$

از آنجا که وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ مقدار تابع به صفر میل خواهد کرد, لذا منحنی مربوط به تابع بصورت زیر می‌باشد. ■



ب: در اینجا نیز برای یافتن نقاط اکسترمم, بایستی مشتق را برابر صفر قرار داد که به همان نقاط قبل می‌رسیم. اما مشکل آن است که نمی‌توان از y' داده شده انتگرال گرفت و تابع را بدست آورد. در این حالت مشتق دوم بصورت زیر است:

$$y'' = (1-3x^2-3x^3+3x^5)e^{-x^3} \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y''>0 \rightarrow (0,0) & Min \\ x=1 \rightarrow y''<0 \rightarrow (1,y(1)) & Max \end{cases}$$

اما از آنجا که نمی‌توان منحنی C_2 را بدست آورد, مقدار $y(1)$ مشخص نیست. تنها میتوان آنرا با C_1 مقایسه کرد.

$$0<x<1 \rightarrow x^3<x^2 \rightarrow e^{-x^3}>e^{-x^2} \rightarrow x(1-x^2)e^{-x^3} > x(1-x^2)e^{-x^2} \rightarrow y'_{C_2} > y'_{C_1}$$

دیده شد که $y'_{C_2} > y'_{C_1}$ و هر دو منحنی از مبدا می‌گذرند, لذا می‌توان گفت در بازه $0<x\le1$ منحنی C_2 بالاتر از منحنی C_1 قرار میگیرد. بنابراین حداقل نتیجه ممکن آن است که $y(1) > \frac{1}{2e}$ خواهد بود. هر چند با این استدلال نمی‌توان مقدار دقیق آنرا تعیین کرد. ■

مثال ۴-۳۵ الف: انتگرالهای معین I و J را بدون محاسبه انتگرال نامعین آنها بدست آورید.

$$I = \int_0^a \frac{cosx}{sinx+cosx}dx \quad ; \quad J = \int_0^a \frac{sinx}{sinx+cosx}dx \quad ; \quad 0 \le a < \frac{3\pi}{4}$$

ب: انتگرال زیر را نیز بدست آورید.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx+4}{3sinx+4cosx+25}dx$$

حل الف: حاصل $I+J$ و $I-J$ را بدست می‌آوریم. اولی بسیار ساده بوده و در دومی, صورت, مشتق مخرج می‌باشد. لذا:

$$\begin{cases} I+J=\int_0^a \dfrac{cosx+sinx}{sinx+cosx}dx=\int_0^a dx=a \\ I-J=\int_0^a \dfrac{cosx-sinx}{sinx+cosx}dx=Ln(cosa+sina) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I=\dfrac{1}{2}\big(a+Ln(cosa+sina)\big) \\ J=\dfrac{1}{2}\big(a-Ln(cosa+sina)\big) \end{cases}$$

تعبیر دیگر این کار آن است که در واقع صورت کسر را به شکل ترکیبی خطی از مخرج و مشتق مخرج بنویسیم. به عبارتی:

$$cosx=A(sinx+cosx)+B(sinx+cosx)' \rightarrow A=B=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^a \frac{cosx\,dx}{sinx+cosx}=\frac{1}{2}\int_0^a \frac{sinx+cosx}{sinx+cosx}dx+\frac{1}{2}\int_0^a \frac{(sinx+cosx)'}{sinx+cosx}dx=\frac{a+Ln(cosa+sina)}{2} \blacksquare$$

ب: در اینجا نیز مشابه قسمت قبل خواهیم داشت:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx+4}{3sinx+4cosx+25}dx$$

$$cosx+4=A(3sinx+4cosx+25)+B(3sinx+4cosx+25)' \rightarrow A=\frac{4}{25}\ ;\ B=\frac{3}{25}$$

دقت شود در سمت راست رابطه بالا ضریب کسینوس بایستی برابر 1 , ضریب سینوس برابر 0 و عدد ثابت برابر 4 باشد. در حالیکه دو مجهول A و B بیشتر نداریم. بنابراین این روش وقتی جوابگو است که دستگاه دارای جواب باشد, چرا که تعداد مجهولات کمتر از معلومات است. مساله بالا بگونه‌ای طراحی شده است که توانستیم دو مجهول A و B را بیابیم که در هر سه معادله صدق کند.

$$I=\frac{4}{25}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3sinx+4cosx+25}{3sinx+4cosx+25}dx+\frac{3}{25}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(3sinx+4cosx+25)'}{3sinx+4cosx+25}dx=\frac{4}{25}\frac{\pi}{2}+\frac{3}{25}Ln\left(\frac{28}{29}\right) \blacksquare$$

❋ **مثال ۴-۳۶** هدف محاسبه انتگرال زیر میباشد:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+cos\alpha\, sinx} \quad ; \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

الف: ابتدا با تغییر متغیر $t=tan\frac{x}{2}$ نشان دهید:

$$I=\int_0^1 \frac{2}{(t+cos\alpha)^2+sin^2\alpha}dt$$

ب: سپس با تغییر متغیر $t+cos\alpha=sin\alpha\, tanu$ حاصل انتگرال را بدست آورید.

ج: به کمک نتیجه قسمت قبل, درستی انتگرال زیر را نشان دهید:

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+sin\alpha\, cosx}=\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{cos\alpha}$$

حل الف: با بکارگیری تغییر متغیر داده شده خواهیم داشت:

$$I=\int_0^1 \frac{1}{1+cos\alpha\ \frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\int_0^1 \frac{2}{1+2tcos\alpha+t^2}dt=\int_0^1 \frac{2}{(t+cos\alpha)^2+sin^2\alpha}dt \quad \blacksquare$$

ب: با تغییر متغیر داده شده, ابتدا حدود انتگرال را بدست می‌آوریم:

$$t+cos\alpha=sin\alpha\ tanu \rightarrow \begin{cases} t=0 \rightarrow tanu=cot\alpha \rightarrow u=\frac{\pi}{2}-\alpha \\ t=1 \rightarrow 1+cos\alpha=sin\alpha\ tanu \rightarrow u=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

$$I=\int_0^1 \frac{2dt}{(t+cos\alpha)^2+sin^2\alpha}=\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}} \frac{2sin\alpha\ sec^2u}{sin^2\alpha(1+tan^2u)}du=\frac{2}{sin\alpha}\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}} du=\frac{\alpha}{sin\alpha}$$

$$\rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+cos\alpha\ sinx}=\frac{\alpha}{sin\alpha} \quad \blacksquare$$

ج: برای حل انتگرال ارائه شده, ابتدا $cosx$ را با تغییر متغیر $x=\frac{\pi}{2}-y$ به سینوس تبدیل کرده و سپس $sin\alpha$ را نیز به فرم کسینوس تبدیل می‌کنیم تا به همان انتگرال I برسیم.

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+sin\alpha\ cosx}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-dy}{1+sin\alpha\ siny}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{1+cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)siny}=I\Big|_{\alpha\rightarrow\frac{\pi}{2}-\alpha}=\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{cos\alpha} \quad \blacksquare$$

توضیح: در قسمت "ب" چنانچه تغییر متغیر داده نشده باشد, می‌توان مساله را بصورت زیر نیز حل کرد:

$$u=t+cos\alpha \rightarrow I=\int_{cos\alpha}^{1+cos\alpha} \frac{2du}{u^2+sin^2\alpha}=\frac{2}{sin\alpha}tan^{-1}\left(\frac{u}{sin\alpha}\right)\Big|_{cos\alpha}^{1+cos\alpha}=\frac{2}{sin\alpha}\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{sin\alpha}$$

که در آن از دو رابطه زیر استفاده شده است:

$$\int \frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C \qquad (a>0) \qquad ; \qquad tan^{-1}a-tan^{-1}b=tan^{-1}\left(\frac{a-b}{1+ab}\right) \quad \blacksquare$$