

ریاضیات گسسته

تمرین مقدماتی چهارم - استقرا

علی زیلوچی

تاریخ تحویل ۱۴۰۱/۱۲/۵

سؤال ۱.

به ازای هر $n \geq 24$ ثابت کنید اعداد صحیح و نامنفی x و y وجود دارند، به طوری که $5x + 7y = n$.

پاسخ:

حکم را با استقرا روی n ثابت می کنیم:
پایه استقرا: برای $n = 24$ خواهیم داشت:

$$5(2) + 7(2) = 10 + 14 = 24$$

فرض استقرا: شرط برای $k - 1$ برقرار است؛ یعنی:

$$5x + 7y = k - 1$$

اثبات حکم استقرا: اگر $y \geq 2$ تساوی

$$5(x + 3) + 7(y - 2) = k$$

را در نظر می گیریم؛ و اگر $y \geq 1$ ، آنگاه $x \geq 4$ (چون شرط $k \geq 24$ باید برقرار باشد) و تساوی

$$5(x - 4) + 7(y + 3) = k$$

را در نظر می گیریم. پس در هر صورت اعداد صحیح و نامنفی s و t وجود دارند، به طوری که $5t + 7s = k$.
لذا اگر حکم به ازای $n = k - 1$ درست باشد، آنگاه به ازای $n = k$ نیز درست است. پس حکم برای همه اعداد $n \geq 24$ برقرار است.

سؤال ۲.

$n - 1$ خانه از یک جدول $n \times n$ را علامت گذاشته ایم. ثابت کنید با جابه جایی سطرها و جابه جایی ستون های این جدول می توان به جدولی رسید، که همه ی خانه های علامت دار آن زیر قطر اصلی جدول باشند.

پاسخ:

حکم را با استقرا روی n ثابت می کنیم:
پایه استقرا: حکم برای $n = 1$ به وضوح برقرار است.
فرض استقرا: شرط برای k برقرار است.

اثبات حکم استقرا: فرض کنید k خانه از یک جدول $(k + 1) \times (k + 1)$ را علامت گذاشته باشیم. در این صورت حداقل یک ستون وجود دارد، که در آن هیچ علامتی قرار ندارد. این ستون را با ستون آخر جدول جابه جا می کنیم. همچنین سطری از جدول را که حداقل یک

علامت در آن قرار دارد، با سطر آخر جدول جابه‌جا می‌کنیم. حال سطر و ستون آخر جدول را حذف می‌کنیم و به جدولی $k_i \times k_i$ می‌رسیم، که حداکثر $k_i - 1$ خانه از آن علامت دارند. طبق فرض استقرا می‌توانیم با جابه‌جایی سطرها و جابه‌جایی ستون‌های این جدول، به جدولی برسیم که همه‌ی خانه‌های علامت‌دار آن زیر قطر اصلی جدول قرار داشته باشند. پس حکم به‌ازای $k_i + 1$ و در نتیجه همه اعداد طبیعی درست است.