دانشکده فنی دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تمرین ششم درس ریاضیات مهندسی

طراحان

محمدامین کشمیری

امیرعباس قدیری

نیمسال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳

سوال ۱

معادله لاپلاس زیر را با شرایط مرزی داده شده حل نمایید.

$$\nabla^2 u = 0 \qquad , \quad r_0 \le r \le r_1 \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} u_\theta(r,0) = 0 \\ u(r,\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \qquad , \quad \begin{cases} u(r_0,\theta) = \frac{2}{\pi}\theta \\ u(r_1,\theta) = \cos 3\theta - \cos\theta \end{cases}$$

پاسخ:

$$\nabla^2 u = 0, \quad r_0 \le r \le r_1, \quad 0 \le \theta \le \tfrac{\pi}{2}$$

$$u_\theta(r,0) = 0, \quad u\left(r,\tfrac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$u(r_0,\theta) = \tfrac{2}{\pi}\theta, \quad u(r_1,\theta) = \cos(3\theta) - \cos(\theta)$$

$$\mathrm{BC}: \begin{cases} u_\theta(r,0) = 0 \\ u\left(r,\tfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow u(r,\theta) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)\cos((2n-1)\theta)$$

$$\Rightarrow \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(R_n''(r) + \frac{1}{r}R_n'(r) + \frac{(2n-1)^2}{r^2}R_n(r)\right)\cos((2n-1)\theta) = 0$$

$$\Rightarrow R_n(r) = a_n r^{-(2n-1)} + b_n r^{+(2n-1)} \Rightarrow u(r,\theta) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n r^{-(2n-1)} + b_n r^{+(2n-1)}\right)\cos((2n-1)\theta)$$

$$u(r_0,\theta) = \tfrac{2}{\pi}\theta = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n r_0^{-(2n-1)} + b_n r_0^{+(2n-1)}\right)\cos((2n-1)\theta)$$

$$\Rightarrow a_n r_0^{-(2n-1)} + b_n r_0^{+(2n-1)} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi}\theta\cos((2n-1)\theta)d\theta = \frac{4\left((-1)^{n+1}(2n-1)\pi - 2\right)}{(2n-1)^2\pi^2}$$

$$u(r_1,\theta) = \cos(3\theta) - \cos(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n r_1^{-(2n-1)} + b_n r_1^{+(2n-1)}\right)\cos((2n-1)\theta)$$

$$\Rightarrow a_n r_1^{-(2n-1)} + b_n r_1^{+(2n-1)} = \delta[n-2] - \delta[n-1]$$

$$\Rightarrow u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\left(\frac{r_1}{r}\right)^{+(2n-1)} - \left(\frac{r_1}{r}\right)^{-(2n-1)}}{\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{+(2n-1)} - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-(2n-1)}}\left(\frac{4\left((-1)^{n+1}(2n-1)\pi - 2\right)}{(2n-1)^2\pi^2}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{+(2n-1)} - \left(\frac{r}{r_{r2}}\right)^{-(2n-1)}}{\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{+(2n-1)} - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-(2n-1)}}(\delta[n-2] - \delta[n-1])\right] cos((2n-1)\theta)$$

$$\Rightarrow u(r,\theta) = \frac{\left(\frac{r}{r_{r_1}}\right)^{+3} - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-3}}{\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{+3} - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-3}}\cos(3\theta) - \frac{\left(\frac{r}{r_0}\right) - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1}}{\left(\frac{r_1}{r_0}\right) - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-1}}\cos(\theta)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{r_1}{r}\right)^{+n} - \left(\frac{r_1}{r}\right)^{-n}}{\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{+n} - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-n}}\left(\frac{4\left((-1)^{n+1}(2n-1)\pi - 2\right)}{(2n-1)^2\pi^2}\right)\cos((2n-1)\theta)$$

سوال ۲

معادله حرارت زیر با شرایط داده شده را با استفاده از تبدیل فوریه حل کنید

$$\begin{cases} U_t - U_{xx} = e^{-5|x|} \quad -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = f(x) \\ \lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0 \end{cases}$$

پاسخ .

$$U_t - 2U_{xx} = e^{-5|x|}$$

$$F\{U_t\} - 2F\{U_{xx}\} = F\left\{e^{-5|x|}\right\}$$

$$\widehat{U}_t - 2\left(-\omega^r \widehat{U}\right) = \frac{10}{25+\omega^2} \to \widehat{U}_t + 2\left(\omega^2 \widehat{U}\right) = \frac{10}{25+\omega^2}$$

حل معادله ODE مرتبه ۱ برای $\widehat{U}$:

$$\widehat{U}(\omega,t) = C\exp\left\{\frac{-50t\omega - 2t\omega^4}{25+\omega^2}\right\} + \frac{5}{25\omega^2+\omega^4}$$

شرایط مرزی:

$$U(x,0) = f(x) \to fouriertransform : \widehat{U}(\omega,0) = \hat{f}(\omega)$$

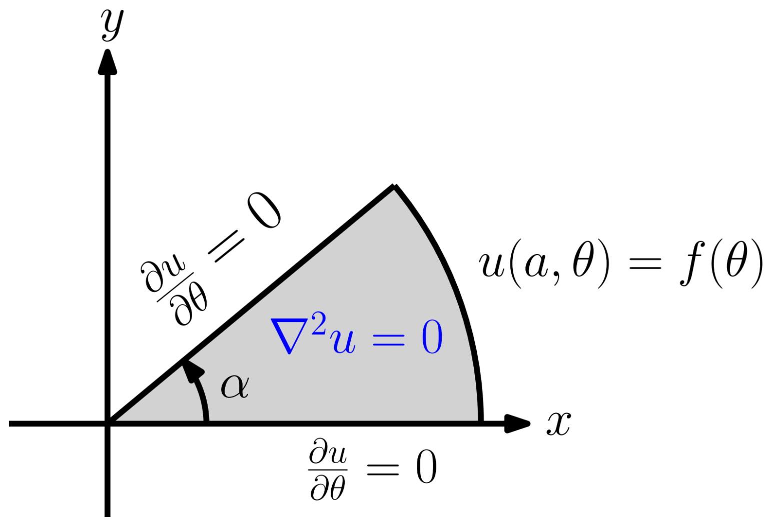
$$C = \hat{f}(\omega) - \frac{5}{25\omega^2+\omega^4}$$

$$\widehat{U}(\omega,t) = \left(\hat{f}(\omega) - \frac{5}{25\omega^2+\omega^4}\right)\exp\left\{\frac{-50t\omega - 2t\omega^4}{25+\omega^2}\right\} + \frac{5}{25\omega^2+\omega^4}$$

$$\to U(x,t) = F^{-1}\{\widehat{U}(\omega,t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{U}(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega$$

سوال ۳

معادله لاپلاس را در ناحیه زیر با شرایط مرزی مشخص شده حل کنید.



پاسخ .

برای حل معادله لاپلاس در ناحیه مشخص شده، از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. در مختصات قطبی، معادله لاپلاس به صورت زیر است:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

ناحیه مورد نظر یک سکتور با زاویه α است و شرایط مرزی به صورت زیر داده شده است:

۱. $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$ در $\theta = 0$ و $\theta = \alpha$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\theta=\alpha} = 0$$

۲. $u(a,\theta) = f(\theta)$:

$$u(a,\theta) = f(\theta)$$

فرض می‌کنیم که حل به صورت $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ باشد. با قرار دادن این فرض در معادله لاپلاس و جداسازی متغیرها، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{R}\left(r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0$$

این معادله را می‌توان به دو معادله عادی جداگانه تقسیم کرد:

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}=-\lambda R$$
$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=\lambda\Theta$$

که λ یک ثابت جداسازی است. حال معادلات به دست آمده را جداگانه حل می‌کنیم.

حل معادله $\Theta(\theta)$:

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=\lambda\Theta$$

این معادله یک معادله دیفرانسیل هارمونیک است و جواب عمومی آن به صورت زیر است:

$$\Theta(\theta)=A\cos(\sqrt{\lambda}\theta)+B\sin(\sqrt{\lambda}\theta)$$

با استفاده از شرایط مرزی $\frac{\partial u}{\partial \theta}=0$ در $\theta=0$ و $\theta=\alpha$:

۱. در $\theta=0$:

$$\left.\frac{d\Theta}{d\theta}\right|_{\theta=0}=0\Rightarrow B\sqrt{\lambda}=0\Rightarrow B=0$$

۲. در $\theta=\alpha$:

$$\left.\frac{d\Theta}{d\theta}\right|_{\theta=\alpha}=0\Rightarrow -A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\alpha)=0$$

برای اینکه این شرط برقرار باشد، باید $\sin(\sqrt{\lambda}\alpha)=0$، بنابراین:

$$\sqrt{\lambda}\alpha=n\pi\Rightarrow\lambda=\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2$$

در نتیجه:

$$\Theta_n(\theta)=A_n\cos\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right)$$

حل معادله $R(r)$:

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}-\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2R=0$$

این معادله، معادله بسل است و جواب عمومی آن به صورت زیر است:

$$R_n(r) = C_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} + D_n r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}$$

با توجه به محدودیت‌های فیزیکی و هندسی مسئله، معمولاً D_n باید صفر باشد تا جواب در مبدأ محدود باشد. بنابراین:

$$R_n(r) = C_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}}$$

ترکیب جواب‌ها:

حل کلی به صورت جمع سری از حل‌های جزئی است:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} \cos\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right) \right]$$

با استفاده از شرایط مرزی $u(a,\theta) = f(\theta)$:

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} \cos\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right) \right]$$

ضرایب A_n از طریق بسط سری فوریه $f(\theta)$ به دست می‌آیند:

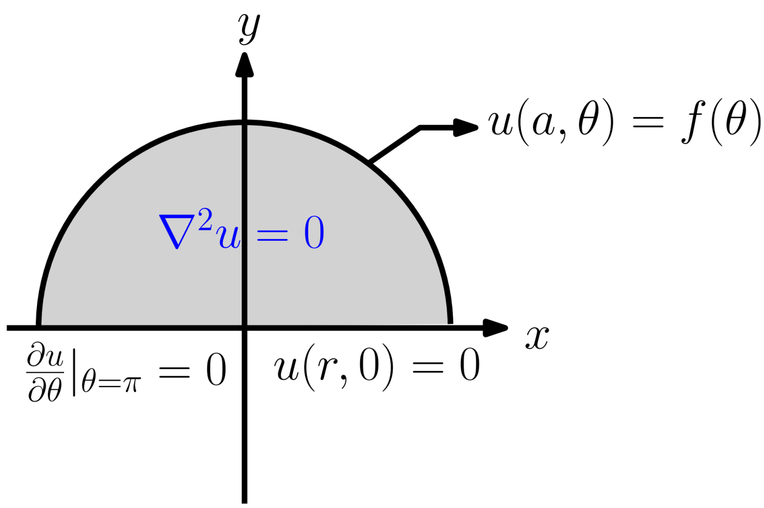
$$A_n = \frac{2}{a^{\frac{n\pi}{\alpha}} \alpha} \int_0^{\alpha} f(\theta) \cos\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right) d\theta$$

در نهایت، جواب کامل مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2}{a^{\frac{n\pi}{\alpha}} \alpha} \left(\int_0^{\alpha} f(\theta) \cos\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right) d\theta \right) r^{\frac{n\pi}{\alpha}} \cos\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right) \right]$$

سوال ۴

معادله لاپلاس را در ناحیه زیر با شرایط مرزی مشخص شده حل کنید.



پاسخ .
این سوال نیز مشابه سوال قبلی است و روش حل نیز همان است، تنها باید به شرایط مرزی جدید دقت کرد.

برای حل معادله لاپلاس در ناحیه نیم‌دایره با شرایط مرزی زیر:

۱. $u(a,\theta) = f(\theta)$ بر روی کمان.
۲. $u(r,0) = 0$ بر روی شعاع در $\theta = 0$.
۳. $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$ بر روی شعاع در $\theta = \pi$.

ابتدا معادله لاپلاس در مختصات قطبی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

فرض می‌کنیم که پاسخ به صورت $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ است. با جایگذاری این فرض در معادله لاپلاس و جدا کردن متغیرها، به معادلات زیر می‌رسیم:

$$\frac{1}{R}\left(r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0$$

این معادله به دو معادله دیفرانسیل معمولی جدا می‌شود:

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}=-\lambda R$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=\lambda\Theta$$

که در آن λ یک ثابت جداکننده است.

حل $\Theta(\theta)$:

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=\lambda\Theta$$

پاسخ عمومی به صورت زیر است:

$$\Theta(\theta)=A\cos(\sqrt{\lambda}\theta)+B\sin(\sqrt{\lambda}\theta)$$

با استفاده از شرایط مرزی:

۱. در $\theta=0$:

$$u(r,0)=0\Rightarrow\Theta(0)=0\Rightarrow A=0$$

۲. در $\theta=\pi$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|_{\theta=\pi}=0\Rightarrow B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\pi)=0$$

برای اینکه این شرط برقرار باشد، باید $\cos(\sqrt{\lambda}\pi)=0$ که به معنی زیر است:

$$\sqrt{\lambda}\pi=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\Rightarrow\lambda=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$$

بنابراین:

$$\Theta_n(\theta)=B_n\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)$$

حل $R(r)$:

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2R=0$$

این معادله به شکل معادله بسل است. پاسخ عمومی به صورت زیر است:

$$R_n(r) = C_n r^{n+\frac{1}{2}}$$

با در نظر گرفتن قیود فیزیکی و هندسی، معمولاً D_n باید صفر باشد تا پاسخ در مبدا محدود باشد.

ترکیب پاسخ‌ها:

پاسخ کلی جمعی از پاسخ‌های جزئی است:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_n r^{n+\frac{1}{2}} \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\right]$$

با استفاده از شرط مرزی $u(a,\theta) = f(\theta)$:

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_n a^{n+\frac{1}{2}} \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\right]$$

ضرایب C_n از طریق بسط سری فوریه $f(\theta)$ تعیین می‌شوند:

$$C_n = \frac{2}{a^{n+\frac{1}{2}}\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right) d\theta$$

پاسخ نهایی:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2}{a^{n+\frac{1}{2}}\pi} \left(\int_0^{\pi} f(\theta) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right) d\theta \right) r^{n+\frac{1}{2}} \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\right]$$

سوال ۵ (امتیازی)

معادله با مشتقات جزئی زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل نمایید.

$$f_{xx}-\frac{1}{\pi^2}f_{tt}=\left(\frac{1}{\pi^2}x^2-\frac{1}{\pi}x+2\right)\sin(t)u(t)-2tu(t),\quad 0<x<\pi,\quad 0<t$$

$$\begin{cases} f(x,0)=0 \\ f_t(x,0)=0 \end{cases}\quad \begin{cases} f(0,t)=e^{-t}u(t) \\ f(\pi,t)=e^{-(t-1)}u(t-1) \end{cases}$$

$$u(t)=\begin{cases} 1, & 0<t \\ 0, & t<0 \end{cases}\Rightarrow \text{تابع پله}$$

پاسخ .

$$f_{xx}-\frac{1}{\pi^2}f_{tt}=\left(\frac{1}{\pi^2}x^2-\frac{1}{\pi}x+2\right)\sin(t)u(t)-2tu(t),\quad 0<x<\pi,\quad 0<t$$

$$\begin{cases} f(x,0)=0 \\ f_t(x,0)=0 \end{cases},\quad \begin{cases} f(0,t)=e^{-t}u(t) \\ f(\pi,t)=e^{-(t-1)}u(t-1) \end{cases}$$

$$u(t)=\begin{cases} 1, & 0<t \\ 0, & t<0 \end{cases}\Rightarrow \text{تابع پله}$$

$$F_{xx}(x,s)-\frac{s^2}{\pi^2}F(x,s)=\left(\frac{1}{\pi^2}x^2-\frac{1}{\pi}x+2\right)\frac{1}{s^2+1}-\frac{2}{s^2}\Rightarrow\begin{cases} F_h(x,s)=k_1e^{-\frac{s}{\pi}x}+k_2e^{\frac{s}{\pi}x} \\ F_p(x,s)=Ax^2+Bx+C \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{s^2}{\pi^2}A=\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{s^2+1} \\ -\frac{s^2}{\pi^2}B=-\frac{1}{\pi}\frac{1}{s^2+1} \\ 2A-\frac{s^2}{\pi^2}C=\frac{2}{s^2+1}-\frac{2}{s^2} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A=-\frac{1}{s^2(s^2+1)} \\ B=\frac{\pi}{s^2(s^2+1)} \\ C=0 \end{cases}\Rightarrow F_p(x,s)=\frac{\pi x-x^2}{s^2\left(s^2+1\right)}$$

$$f(0,t)=e^{-t}u(t)\Rightarrow F(0,s)=\frac{1}{s+1},\quad f(\pi,t)=e^{-(t-1)}u(t-1)\Rightarrow F(\pi,s)=\frac{e^{-s}}{s+1}$$

$$\begin{cases} F(0,s)=k_1+k_2=\frac{1}{s+1} \\ F(\pi,s)=k_1e^{-s}+k_2e^{s}=\frac{e^{-s}}{s+1} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} k_1=\frac{1}{s+1} \\ k_2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(x,s)=\frac{1}{s+1}e^{-\frac{x}{\pi}s}+\frac{\pi x-x^2}{s^2}-\frac{\pi x-x^2}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow\boxed{f(x,t)=e^{-\left(t-\frac{x}{\pi}\right)}u\left(t-\frac{x}{\pi}\right)+\left(\pi x-x^2\right)tu(t)-\left(\pi x-x^2\right)\sin(t)u(t)}$$

سوال ۶

قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی به شکل زیر است.

$$u(x,y) = ax^3 + bx^2 + 30x + cxy^2 + 29y^2 - 10$$

- ضرایب a, b, c را به گونه ای به دست آورید که تابع همساز گردد.
- قسمت موهومی آن یعنی $v(x,y)$ را بیابید.
- اگر داشته باشیم $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ و همچنین $f(0) = -10$ باشد، حاصل $f''(i)$ را بیابید.

پاسخ :

$$a) \quad u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow u_{xx} = 6ax + 2b, u_{yy} = 2cx + 58 \Rightarrow b = -29, c = -3a$$

$$u(x,y) = ax^3 - 29x^2 + 30x - 3axy^2 + 29y^2 - 10$$

$$b) \quad u_x = v_y \Rightarrow u_x = 3ax^2 - 58x + 30 - 3ay^2 = v_y \Rightarrow v(x,y) = \int u_x dy + g(x)$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \int 3ax^2 - 58x + 30 - 3ay^2 dy + g(x) = 3ax^2y - 58xy + 30y - ay^3 + g(x)$$

$$v_x = -u_y \Rightarrow 6axy - 58y + g'(x) = -(-6axy + 58y)$$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = k(\text{ constant })$$

$$\Rightarrow v(x,y) = 3ax^2y - 58xy + 30y - ay^3 + k$$

$$c) \quad f(0) = -10 \Rightarrow u(0,0) = -10, v(0,0) = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0) = az^3 - 29z^2 + 30z - 10$$

$$\Rightarrow f''(z) = 6az - 58 \Rightarrow f''(i) = 6ai - 58$$

سوال ۷

معادلات کوشی ریمان را برای تابع $f(z)$ بررسی کنید و سپس ناحیه ای که در آن $f(z)$ تحلیلی می باشد را مشخص کرده و $f^{(3)}(i)$ را محاسبه کنید.

$$f(z)=\frac{x^3+xy^2+x+i\left(x^2y+y^3-y\right)}{x^2+y^2}$$

پاسخ :

$$f(z)=\frac{x^3+xy^2+x+i\left(x^2y+y^3-y\right)}{x^2+y^2}$$

$$f(z)=\frac{x^3+xy^2+x+i\left(x^2y+y^3-y\right)}{x^2+y^2}=\frac{x\left(x^2+y^2+1\right)+iy\left(x^2+y^2-1\right)}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{\left(x^2+y^2\right)(x+iy)+(x-iy)}{x^2+y^2}=(x+iy)+\frac{(x-iy)}{x^2+y^2}=z+\frac{z}{z\bar{z}}=z+\frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow f(z)\ is\ analytic\ for\ z\neq 0$$

$$\text{if } z\neq 0 \text{ then: }،u(x,y)=x+\frac{x}{x^2+y^2}\quad ,v(x,y)=y-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$u_x=1+\frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1+\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\quad ,v_y=1-\frac{x^2+y^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1+\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=u_x$$

$$u_y=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\quad ,\quad v_x=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=-u_y$$

$$f(z)=z+\tfrac{1}{z}\Rightarrow f'''(z)=\tfrac{-6}{z^4}\Rightarrow f'''(i)=\tfrac{-6}{l^4}=-6$$

سوال ۸

ثابت کنید توابع زیر همساز هستند.سپس، تابع همساز مزدوج v را بدست آورید.($u+iv$ تحلیلی است.)

الف) $u(x,y)=3x^2y+2x^2-y^3-2y^2$

ب) $u(x,y)=ln(x^2+y^2)$

پاسخ : الف:

$$u_x=6xy+4x, u_y=3x^2-3y^2-4y$$

$$u_{xx}=6y+4, u_{yy}=-6y-4$$

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=6y+4-6y-4=0$$

درنتیجه همساز است.

برای u خواهیم داشت:

$$u_x=v_y, v_x=-u_y \to v_y=6xy+4x$$

$$v=\int(6xy+4x)dy=3xy^2+4xy+g(x) \to v_x=3y^2+4y+g'(x)$$

$$v_x=-u_y \to 3y^2+4y+g'(x)=-3x^2+3y^2+4y \to g'(x)=-3x^2 \to g(x)=-x^3$$

در نتیجه تابع همساز مزدوج به صورت زیر خواهد بود:

$$v(x,y)=3xy^2+4xy-x^3$$

ب:

$$u_x=\frac{2x}{x^2+y^2}, u_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$u_{xx}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, u_{yy}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0$$

درنتیجه همساز است.

$$u_x = v_y, v_x = -u_y \to v_y = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$v = \int \frac{2x}{x^2+y^2}dy = 2arctan(\frac{y}{x}) + g(x) \to v_x = \frac{-2y}{x^2+y^2} + g'(x)$$

$$v_x = -u_x \to \frac{-2y}{x^2+y^2}+g'(x) = \frac{-2y}{x^2+y^2} \to g'(x) = 0 \to g(x) = c \to v(x,y) = 2arctan(\frac{y}{x})$$

سوال ۹

اگر $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ تابعی تحلیلی باشد با فرض این که
$u(r,\theta) = r\cos(\theta)\ln(r) - r\theta\sin(\theta)$ باشد،
$v(r,\theta)$ و $f(z)$ را بیابید و سپس با توجه به آن $f''(i)$ را محاسبه کنید.

پاسخ :

$$\mathbf{r}\ \mathbf{u}_r = v_\theta \Longrightarrow r(\cos\theta\ln(r) + \cos\theta - \theta\sin\theta) = v_\theta$$

$$\Rightarrow v(r,\theta) = \int r(\cos\theta\ln(r) + \cos\theta - \theta\sin\theta)d\theta =$$

$$r\ln(r)\sin\theta + r\sin\theta - r(\sin\theta - \theta\cos\theta) + g(r)$$

$$\Longrightarrow v(r,\theta) = r\ln(r)\sin\theta + r\theta\cos\theta + g(r)$$

$$u_\theta = -rv_r \Rightarrow -r\ln(r)\sin\theta - r(\sin\theta + \theta\cos\theta) =$$

$$-r\left(\sin\theta\ln(r) + \sin\theta + \theta\cos\theta + g'(r)\right)$$

$$\Rightarrow g'(r) = 0 \Rightarrow g(r) = k(\mathrm{constan}\,t)$$

$$\Rightarrow v(r,\theta) = r\ln(r)\sin\theta + r\theta\cos\theta + k$$

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta) \Rightarrow r = z, \theta = 0$$

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0) = z\ln(z) + ik \Rightarrow f''(z) = -\frac{1}{z} \Rightarrow f''(i) = -\frac{1}{i} = -i$$

نکات کلی درباره تمرین

- در صورتی که در تمرین هر گونه ابهام و یا پرسشی دارید می‌توانید با محمدامین کشمیری و امیرعباس قدیری در ارتباط باشید.
- در صورتی که سوالی از تمرین دارید که ممکن است برای دیگران نیز مفید باشد،آن را در گروه درس مطرح کنید.
- مشورت و همفکری با دوستان خود هنگام نوشتن تمرین کاری مفید و سازنده است و از انجام آن پرهیز نکنید، اما این کار باید در راستای فهم درس و تمرین باشد و از کپی‌کردن تمارین یکدیگر خودداری کنید.
- پاسخ های خود را به صورت یک فایل به فرمت PDF در سامانه درس با فرمت نامگذاری Engmath-HWNum-SID بارگذاری نمایید.