نام درس: سیگنالها و سیستم - استاد اخایی

نویسنده: محمد امانلو - ۸۱۰۱۰۰۰۸۴

تکلیف شماره ۲

سوال اول

الف)

با تعریف کانوولوشن گسسته،

$$y[n] = (x * h)[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k].$$

به‌دلیل کراندار بودن دو دنباله روی بازه‌های $[۰, ۴]$، جمع تنها روی کران‌های مشترک برقرار است:

$$y[n] = \sum_{k=\max(۰,n-۴)}^{\min(n,۴)} \alpha^{n-k}, \qquad ۰ \le n \le ۸,$$

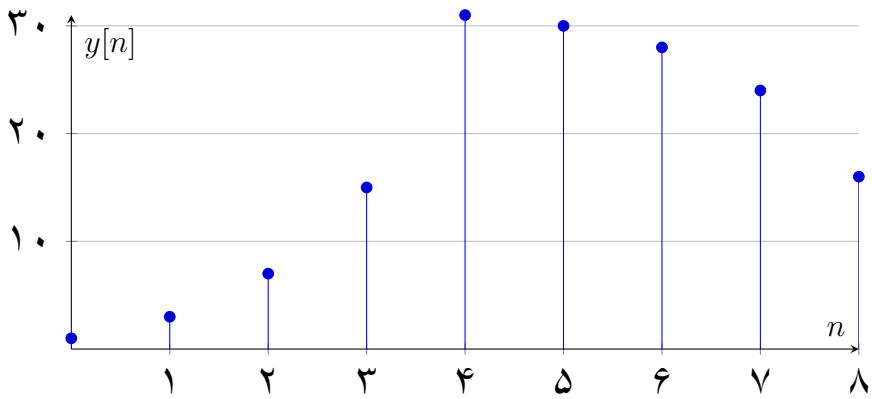
و در غیر این صورت $y[n] = ۰$.

چون جمع بالا هندسی است، فرم بسته قطعه‌ای به‌دست می‌آید:

$$y[n] = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{n+۱} - ۱}{\alpha - ۱}, & ۰ \le n \le ۴, \\ \dfrac{\alpha^{۵} - \alpha^{n-۴}}{\alpha - ۱}, & ۴ \le n \le ۸, \\ ۰, & \text{سایر } n. \end{cases}$$

(توجه: در $n = ۴$ دو عبارت یک مقدار دارند.)

برای مشاهده مقدارهای نمونه، می‌توان برای $\alpha = ۲$ رسم زیر را تولید کرد.



ب)

$$x(t) = \begin{cases} ۱, & ۰ \leq t \leq T \\ ۰, & \text{دیگر} \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} t, & ۰ \leq t \leq ۲T \\ ۰, & \text{دیگر} \end{cases}$$

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau.$$

به‌سبب تکیه‌گاه‌ها، انتگرال فقط روی اشتراک $\tau \in [۰, T] \cap [t - ۲T,\ t]$ برقرار است؛ پس اگر $a = \max(۰, t - ۲T)$ و $b = \min(T, t)$،

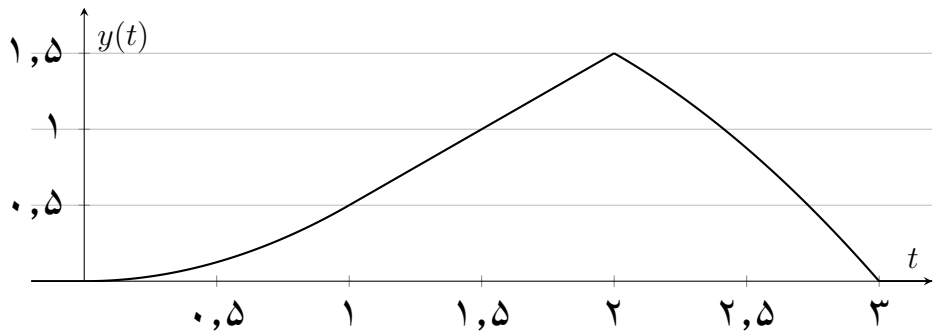
$$y(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b (t-\tau)\, d\tau, & \text{اگر} a < b, \\ ۰, & \text{در غیر این‌صورت.} \end{cases}$$

تکیه‌گاه پاسخ $[۰, ۳T]$ است و نتیجه قطعه‌ای زیر به‌دست می‌آید:

$$y(t) = \begin{cases} ۰, & t < ۰, \\ \dfrac{t^۲}{۲}, & ۰ \leq t \leq T, \\ tT - \dfrac{T^۲}{۲}, & T \leq t \leq ۲T, \\ tT - \dfrac{t^۲}{۲} + \dfrac{۳}{۲}T^۲, & ۲T \leq t \leq ۳T, \\ ۰, & t > ۳T. \end{cases}$$

(مقادیر در نقاط مرزی پیوسته‌اند: در $t = T$ هر دو بخش $\frac{T^۲}{۲}$ و در $t = ۲T$ هر دو بخش $\frac{۳}{۲}T^۲$ می‌دهند.)

$y(t) = (x * h)(t)$ for the signals above (here $T = 1.0$)



سوال دوم

سیستمی خطی است اگر دو ویژگی زیر را داشته باشد:

- هم‌افزایی: $T\{x_۱(t) + x_۲(t)\} = T\{x_۱(t)\} + T\{x_۲(t)\}$
- هم‌ریختی: $T\{ax(t)\} = aT\{x(t)\}$

الف) $y(t) = \dfrac{x(t)e^{jx(t)}}{j}$

فرض کنید:

$$x_۱(t) \to y_۱(t) = \frac{x_۱(t)e^{jx_۱(t)}}{j}, \quad x_۲(t) \to y_۲(t) = \frac{x_۲(t)e^{jx_۲(t)}}{j}$$

ورودی ترکیبی:

$$z(t) = ax_۱(t) + bx_۲(t) \Rightarrow w(t) = \frac{z(t)e^{jz(t)}}{j}$$

اما:

$$y_۳(t) = ay_۱(t) + by_۲(t) = a\frac{x_۱(t)e^{jx_۱(t)}}{j} + b\frac{x_۲(t)e^{jx_۲(t)}}{j}$$

مقایسه $w(t)$ و $y_۳(t)$ نشان می‌دهد:

$w(t) \neq y_۳(t) \Rightarrow$ سیستم غیرخطی است.

ب) $\frac{dy(t)}{dt} + ۲y(t) = x^۲(t)$

فرض کنید:

$$x_۱(t) \to y_۱(t), \quad x_۲(t) \to y_۲(t)$$

ورودی ترکیبی:

$$z(t) = ax_۱(t) + bx_۲(t) \Rightarrow \frac{dw(t)}{dt} + ۲w(t) = z^۲(t)$$

اما:

$$\frac{dy_۳(t)}{dt} + ۲y_۳(t) = ax_۱^۲(t) + bx_۲^۲(t)$$

چون:

$$(ax_۱(t) + bx_۲(t))^۲ \neq ax_۱^۲(t) + bx_۲^۲(t) \Rightarrow \text{سیستم غیرخطی است.}$$

ج) $y[n] = \left(\prod_{i=۱}^{n} x[n-i]\right)^{۱/n}$

ورودی ترکیبی:

$$z[n] = ax_۱[n] + bx_۲[n] \Rightarrow w[n] = \left(\prod_{i=۱}^{n}(ax_۱[n-i] + bx_۲[n-i])\right)^{۱/n}$$

اما:

$$y_۳[n] = ay_۱[n] + by_۲[n] = a\left(\prod_{i=۱}^{n} x_۱[n-i]\right)^{۱/n} + b\left(\prod_{i=۱}^{n} x_۲[n-i]\right)^{۱/n}$$

مقایسه دو طرف:

$$w[n] \neq y_۳[n] \Rightarrow \text{سیستم غیرخطی است.}$$

د) $\frac{d^۲y(t)}{dt^۲} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + ۲x(t)$

این معادله دیفرانسیلی با ضرایب ثابت است. برای ورودی ترکیبی:

$$z(t) = ax_۱(t) + bx_۲(t) \Rightarrow \frac{d^۲w(t)}{dt^۲} + \frac{dw(t)}{dt} + w(t) = \frac{dz(t)}{dt} + ۲z(t)$$

و:

$$\frac{d^۲y_۳(t)}{dt^۲} + \frac{dy_۳(t)}{dt} + y_۳(t) = a\left(\frac{dx_۱(t)}{dt} + ۲x_۱(t)\right) + b\left(\frac{dx_۲(t)}{dt} + ۲x_۲(t)\right)$$

دو طرف برابرند.

$\Rightarrow$ سیستم خطی است.

سوال سوم

سیستمی وارون‌پذیر است اگر بتوان ورودی را به‌صورت یکتا از خروجی بازسازی کرد. به عبارت دیگر، برای هر خروجی $y(t)$ یا $y[n]$، تنها یک ورودی $x(t)$ یا $x[n]$ وجود داشته باشد که آن را تولید کرده باشد.

۱) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$

بررسی: با مشتق‌گیری از دو طرف:

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) \Rightarrow x(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

چون مشتق‌گیری عملیاتی خطی و یکتا است، می‌توان $x(t)$ را به‌صورت یکتا از $y(t)$ بازیابی کرد.

$x(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ سیستم وارون‌پذیر است و سیستم وارون:

۲) $y(t) = x\left(\frac{t}{۳}\right)$

بررسی: برای بازیابی $x(t)$، کافی است t را با $۳t$ جایگزین کنیم:

$$y(۳t) = x(t) \Rightarrow x(t) = y(۳t)$$

این عملیات یکتا است و هیچ اطلاعاتی از بین نمی‌رود.

$x(t) = y(۳t)$ سیستم وارون‌پذیر است و سیستم وارون:

۳) $y(t) = x(۵t - ۳)$

بررسی: برای بازیابی $x(t)$، کافی است $۵t - ۳ = k \Rightarrow t = \frac{k+۳}{۵}$ قرار دهیم:

$$x(k) = y\left(\frac{k+۳}{۵}\right) \Rightarrow x(t) = y\left(\frac{t+۳}{۵}\right)$$

این تبدیل یکتا است و اطلاعات از بین نمی‌رود.

$$\boxed{\text{سیستم وارون‌پذیر است و سیستم وارون: } x(t) = y\left(\frac{t+۳}{۵}\right)}$$

۴) $y[n] = nx[n]$

بررسی: برای $n \neq ۰$:

$$x[n] = \frac{y[n]n}{}$$

اما برای $n = ۰$:

$y[۰] = ۰ \cdot x[۰] = ۰ \Rightarrow$ مقدار $x[۰]$ قابل بازیابی نیست.

چون $x[۰]$ را نمی‌توان تعیین کرد، سیستم یکتا نیست.

$$\boxed{\text{سیستم وارون‌ناپذیر است.}}$$

۵) $y(t) = ۳x(۱) + x(۲t - ۱)$

بررسی: ابتدا $t = ۱$ قرار دهید:

$$y(۱) = ۳x(۱) + x(۱) = ۴x(۱) \Rightarrow x(۱) = \frac{y(۱)}{۴}$$

سپس برای بازیابی $x(t)$ در سایر نقاط:

$$۲t - ۱ = k \Rightarrow t = \frac{k+۱}{۲} \Rightarrow x(k) = y\left(\frac{k+۱}{۲}\right) - \frac{۳}{۴}y(۱)$$

این رابطه برای هر k یکتا است و اطلاعات کافی برای بازیابی $x(t)$ وجود دارد.

$$\boxed{\text{سیستم وارون‌پذیر است و: } x(t) = y\left(\frac{t+۱}{۲}\right) - \frac{۳}{۴}y(۱)}$$

۶) $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

بررسی: با انتگرال‌گیری:

$$x(t) = \int y(t)\,dt + C$$

چون ثابت انتگرال C نامشخص است، بینهایت ورودی می‌توانند به یک خروجی منجر شوند. پس بازیابی یکتا ممکن نیست.

سیستم وارون‌ناپذیر است.

۷) $y[n] = \mathbf{Even}\{x[n]\} = \dfrac{x[n] + x[-n]}{۲}$

بررسی: این سیستم فقط قسمت زوج سیگنال را حفظ می‌کند و قسمت فرد را از بین می‌برد. برای مثال:

$$x_۱[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = \frac{\delta[n] + \delta[-n]}{۲} = \delta[n]$$

$$x_۲[n] = \delta[n] - \delta[n-۱] \Rightarrow y[n] = \frac{\delta[n] + \delta[-n]}{۲} = \delta[n]$$

دو ورودی مختلف، یک خروجی مشابه داده‌اند پس یکتا نیست.

سیستم وارون‌ناپذیر است.

۸) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-k} x[k]$

بررسی: این یک سیستم □□□ خطی است. می‌توان آن را به‌صورت بازگشتی نوشت:

$$y[n] = x[n] + \frac{۱}{۲}y[n-۱] \Rightarrow x[n] = y[n] - \frac{۱}{۲}y[n-۱]$$

این رابطه یکتا است و اطلاعات کامل برای بازیابی $x[n]$ وجود دارد.

سیستم وارون‌پذیر است و: $x[n] = y[n] - \frac{۱}{۲}y[n-۱]$

سوال چهارم

یک سامانه گسسته یا پیوسته تغییرناپذیر زمانی است اگر:

$$\forall t_۰ : \quad x(t-t_۰) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(t-t_۰) \quad \Longleftrightarrow \quad T\{x(t-t_۰)\} = y(t)\big|_{t\to t-t_۰}$$

در غیر این صورت تغییرپذیر زمانی نامیده می‌شود. برای هر یک از سامانه‌های داده‌شده، ابتدا ورودی جابه‌جا شده را اعمال کرده و خروجی آن را $w(\cdot)$ می‌نامیم، سپس با $y(\cdot - t_۰)$ مقایسه می‌کنیم.

۱.۰

$$y(t) = ۲x(t) - ۵$$

آزمون:

$$z(t) = x(t-t_۰) \;\rightarrow\; w(t) = ۲z(t) - ۵ = ۲x(t-t_۰) - ۵$$

از طرفی:

$$y(t-t_۰) = ۲x(t-t_۰) - ۵ \Rightarrow w(t) = y(t-t_۰)$$

نتیجه: سامانه تغییرناپذیر زمانی است.

۲.۰

$$y(t) = x\left(\frac{t}{۵}\right)$$

آزمون:

$$z(t) = x(t-t_۰) \;\rightarrow\; w(t) = z\left(\frac{t}{۵}\right) = x\left(\frac{t}{۵} - t_۰\right)$$

اما:

$$y(t-t_۰) = x\left(\frac{t-t_۰}{۵}\right) \Rightarrow w(t) \neq y(t-t_۰)$$

نتیجه: سامانه تغییرپذیر زمانی است.

۳.۰

$$y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-۱), & x(۲t) \geq ۰ \\ ۰, & x(۲t) < ۰ \end{cases}$$

ورودی جابه‌جا شده:

$$z(t) = x(t-t_۰) \;\rightarrow\; w(t) = \begin{cases} z(t) + z(t-۱), & z(۲t) \geq ۰ \\ ۰, & z(۲t) < ۰ \end{cases} = \begin{cases} x(t-t_۰) + x(t-t_۰-۱), & x(۲t-t_۰) \geq ۰ \\ ۰, & x(۲t-t_۰) < ۰ \end{cases}$$

خروجی زمان جابه‌جا شده:

$$y(t-t_۰) = \begin{cases} x(t-t_۰) + x(t-t_۰-۱), & x(۲(t-t_۰)) \geq ۰ \\ ۰, & x(۲(t-t_۰)) < ۰ \end{cases}$$

چون شرط $x(۲t-t_۰)$ با $x(۲t-۲t_۰)$ متفاوت است، در general $w(t) \neq y(t-t_۰)$.

نتیجه: سامانه تغییرپذیر زمانی است.

۴.۰ $y[n] = x[-n]$

ورودی جابه‌جا شده:

$$z[n] = x[n-n_۰] \;\rightarrow\; w[n] = z[-n] = x[-n-n_۰]$$

خروجی زمان جابه‌جا شده:

$$y[n-n_۰] = x[-(n-n_۰)] = x[-n+n_۰] \Rightarrow w[n] \neq y[n-n_۰]$$

نتیجه: سامانه تغییرپذیر زمانی است.

۵.۰ $y[n] = x[n] - ۲n$

ورودی جابه‌جا شده:

$$z[n] = x[n-n_۰] \;\rightarrow\; w[n] = z[n] - ۲n = x[n-n_۰] - ۲n$$

خروجی زمان جابه‌جا شده:

$$y[n-n_۰] = x[n-n_۰] - ۲(n-n_۰) = x[n-n_۰] - ۲n + ۲n_۰ \Rightarrow w[n] \neq y[n-n_۰]$$

نتیجه: سامانه تغییرپذیر زمانی است.

۶.۰

$$y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-۱), & x(t) \geq ۰ \\ ۰, & x(t) < ۰ \end{cases}$$

ورودی جابه‌جا شده:

$$z(t) = x(t-t_۰) \;\rightarrow\; w(t) = \begin{cases} x(t-t_۰) + x(t-t_۰-۱), & x(t-t_۰) \geq ۰ \\ ۰, & x(t-t_۰) < ۰ \end{cases}$$

خروجی زمان جابه‌جا شده:

$$y(t-t_۰) = \begin{cases} x(t-t_۰) + x(t-t_۰-۱), & x(t-t_۰) \geq ۰ \\ ۰, & x(t-t_۰) < ۰ \end{cases} \Rightarrow w(t) = y(t-t_۰)$$

نتیجه: سامانه تغییرناپذیر زمانی است.

سوال پنجم

یک سیستم علّی (Causal) است اگر خروجی در هر لحظه t (یا n) فقط به مقادیر ورودی در همان لحظه و گذشته وابسته باشد.

برای حالت پیوسته داریم:

$$y(t) \text{ depends only on } x(\tau),\ \tau \leq t.$$

برای حالت گسسته داریم:

$$y[n] \text{ depends only on } x[k],\ k \leq n.$$

در غیر این صورت غیرعلّی است.

$$y(t) = x(t+۲)$$

برای $t = ۱$ داریم:

$$y(۱) = x(۳).$$

خروجی در زمان ۱ به ورودی در زمان ۳ (آینده) وابسته است، پس غیرعلّی است.

نتیجه: سیستم غیرعلّی است.

$$y(t) = x(t)\cos(t+۲)$$

ضریب $\cos(t+۲)$ فقط تابع زمان است؛ بنابراین

$$y(t) = \big(\cos(t+۲)\big)\, x(t)$$

و تنها به $x(t)$ (همان لحظه) وابسته است.

نتیجه: سیستم علّی است.

$$y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-۱), & x(t) \geq ۰ \\ ۰, & x(t) < ۰ \end{cases}$$

در هر دو شاخه فقط $x(t)$ و $x(t-۱)$ ظاهر شده‌اند (لحظه جاری و گذشته). شرط $x(t) \geq ۰$ نیز فقط به همان لحظه بستگی دارد.

نتیجه: سیستم علّی است.

$$y[n] = x[n \bmod ۴]$$

برای $n = -۱$ داریم:

$$y[-۱] = x\big((-۱) \bmod ۴\big) = x[۳].$$

خروجی در $n = -۱$ به ورودی در $n = ۳$ (آینده نسبت به -۱) وابسته است، پس غیرعلّی است.

نتیجه: سیستم غیرعلّی است.

$$y(t) = x(\sin t)$$

برای $t = -\frac{۳\pi}{۲}$ داریم:

$$\sin\Big(-\frac{۳\pi}{۲}\Big) = +۱ \quad \Rightarrow \quad y\Big(-\frac{۳\pi}{۲}\Big) = x(۱).$$

در زمان خروجی $-\frac{۳\pi}{۲}$ به ورودی در زمان $+۱$ نیاز داریم (آینده)، پس غیرعلّی است.

نتیجه: سیستم غیرعلّی است.

$$y(t) = x\big(x(t)\big)$$

برای نمونه نقض، فرض کنید:

$$x(۱) = ۳ > ۱ \quad \Rightarrow \quad y(۱) = x\big(x(۱)\big) = x(۳).$$

پس خروجی در $t = ۱$ به مقدار ورودی در $t = ۳$ (آینده) وابسته می‌شود؛ بنابراین سیستم غیرعلّی است.

نتیجه: سیستم غیرعلّی است.

سوال ششم

تعریف: سیستم زمانی پایدار است اگر برای هر ورودی کراندار $|x(t)| \leq M_x < \infty$ خروجی نیز کراندار باشد یعنی $|y(t)| \leq M_y < \infty$.

۱)
$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{۱}{x(t)}, & |x(t)| > ۱ \\ x(t+۲), & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در حالت دوم $|y(t)| = |x(t+۲)| \leq M_x$. در حالت اول چون $|x(t)| > ۱$، داریم $|y(t)| = \frac{۱}{|x(t)|} < ۱$. در نتیجه خروجی کراندار است.

نتیجه: سیستم پایدار است.

۲)
$$y[n] = \begin{cases} x[n], & n \geq ۱ \\ ۰, & n = ۰ \\ x[n+۱], & n \leq -۱ \end{cases}$$

اگر $|x[n]| \leq M_x$، در هر شاخه $|y[n]| \leq M_x$ است.

نتیجه: سیستم پایدار است.

۳) $y(t) = \dfrac{\sin(x(t))}{x(t)}$

تابع $\sin(x)/x$ پیوسته است و مقدارش همواره بین $[-۱, ۱]$ قرار دارد. پس $|y(t)| \leq ۱$ برای ورودی‌های کراندار.

نتیجه: سیستم پایدار است.

۴) $y(t) = \dfrac{t^۳}{t^۲ - ۱۰} x(t)$

در $t = \pm\sqrt{۱۰}$ مخرج صفر می‌شود و ضریب زمانی نامتناهی می‌گردد. حتی با ورودی محدود، خروجی نامتناهی می‌شود.

نتیجه: سیستم ناپایدار است.

۵) $y(t) = \displaystyle\int_{t-۵}^{t} x(\tau)\, d\tau$

اگر $|x(\tau)| \leq M_x$:

$$|y(t)| \leq \int_{t-۵}^{t} |x(\tau)|\, d\tau \leq ۵ M_x.$$

بنابراین خروجی کراندار است.

نتیجه: سیستم پایدار است.

۶) $y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{\tau} x(-\tau^۲)\, d\tau$

برای ورودی کراندار $|x(-\tau^۲)| \leq M_x$:

$$|y(t)| \leq M_x \int_{-\infty}^{t} e^{\tau}\, d\tau = M_x e^t.$$

چون e^t با گذر زمان رشد می‌کند، خروجی کراندار نیست.

نتیجه: سیستم ناپایدار است.

مراجع