نام درس: سیگنالها و سیستم - استاد اخایی
محمد امانلو

تکلیف شماره ۳

۸۱۰۱۰۰۰۸۴

۱ سوال ۱

۱.۱

سیگنال

$$x(t) = 2 + \cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\, t\right) + \sin\left(\tfrac{5\pi}{3}\, t\right)$$

دارای مؤلفه‌های هارمونیکی با بسامدهای زاویه‌ای $\omega_1 = \frac{2\pi}{3}$ و $\omega_2 = \frac{5\pi}{3}$ است. بنابراین بسامد بنیادین برابر است با

$$\omega_0 = \gcd\big(\omega_1, \omega_2\big) = \tfrac{\pi}{3}, \qquad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 6.$$

نمایش مثلثاتی

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\big], \qquad \omega_0 = \tfrac{\pi}{3}.$$

با مقایسه ترم‌ها، تنها هارمونیک‌های $k = 0, 2, 5$ ناصفرند:

$$a_0 = 2, \qquad a_2 = 1, \qquad b_5 = 1,$$

و برای سایر k ها داریم $a_k = b_k = 0$.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t}, \qquad c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt.$$

با استفاده از روابط $\cos\theta = \frac{1}{2}\big(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\big)$ و $\sin\theta = \frac{1}{2j}\big(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\big)$ داریم:

$$c_0 = 2, \qquad c_{\pm 2} = \tfrac{1}{2}, \qquad c_5 = \tfrac{1}{2j} = -\tfrac{j}{2}, \qquad c_{-5} = -\tfrac{1}{2j} = \tfrac{j}{2},$$

و برای بقیه k ها، $c_k = 0$ است.

۲.۱

سیگنال.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n\, \delta(t - n).$$

چون $(-1)^{n+2} = (-1)^n$ و مکان ضربه‌ها هر دو واحد تکرار می‌شود،

$$T_0 = 2, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi.$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t}, \qquad c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt.$$

در بازه یک دوره $[0,2)$ دو ضربه داریم: در $t = 0$ با دامنه $+1$ و در $t = 1$ با دامنه -1. با استفاده از خاصیت نمونه‌برداری دلتا:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}\int_0^2 \big(\delta(t) - \delta(t-1)\big)\, e^{-jk\pi t}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\Big(e^{-jk\pi\cdot 0} - e^{-jk\pi\cdot 1}\Big) = \frac{1}{2}\big(1 - (-1)^k\big). \end{aligned}$$

بنابراین

$$c_k = \begin{cases} 0, & k \text{ زوج}, \\ 1, & k \text{ فرد}, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad c_0 = 0, \quad c_{-k} = c_k.$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\big], \qquad \omega_0 = \pi.$$

با توجه به $a_k = 2\,\Re\{c_k\}$ و $b_k = -2\,\Im\{c_k\}$ برای $k \geq 1$ داریم

$$a_0 = c_0 = 0, \qquad a_k = \begin{cases} 0, & k \text{ زوج}, \\ 2, & k \text{ فرد}, \end{cases} \qquad b_k = 0 \quad \text{برای همه } k.$$

۳.۱

سیگنال.

$$x(t) = \begin{cases} 1.5, & 0 \leq t < 1, \\ -1.5, & 1 \leq t < 2, \end{cases} \qquad \omega_0 = \pi \Rightarrow T_0 = 2.$$

میانگین در یک دوره صفر است، پس $a_0 = c_0 = 0$.

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 1.5\, e^{-jk\pi t} dt + \int_1^2 (-1.5)\, e^{-jk\pi t} dt\right).$$

با انتگرال‌گیری و استفاده از $e^{-jk\pi} = (-1)^k$، $e^{-j2k\pi} = 1$:

$$c_k = \frac{3}{-2jk\pi}\big((-1)^k - 1\big) = \begin{cases} 0, & k \text{ زوج}, \\ \dfrac{3}{jk\pi}, & k \text{ فرد}. \end{cases}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\big], \qquad \omega_0 = \pi.$$

برای $k \geq 1$: $a_k = 2\Re\{c_k\} = 0$ و $b_k = -2\Im\{c_k\}$. پس

$$a_0 = 0, \qquad a_k = 0 \ \ \forall k, \qquad b_k = \begin{cases} 0, & k \text{ زوج}, \\ \dfrac{6}{k\pi}, & k \text{ فرد}. \end{cases}$$

۴.۱

ابتدا دوره بنیادین را بیابید. برای $\sin(\omega t)$، $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$ و برای $|\sin(\omega t)|$، $T_2 = \frac{\pi}{\omega}$. با $\omega = \frac{8\pi}{3}$ داریم

$$T_1 = \frac{3}{4}, \qquad T_2 = \frac{3}{8}, \qquad T_0 = \operatorname{lcm}(T_1, T_2) = \frac{3}{4}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{8\pi}{3}.$$

نمایش کلی:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\big].$$

ترم $\sin(\omega_0 t)$ فقط به b_1 سهم می‌دهد: $b_1 = 1$ و سایر b_k از این جزء صفرند. برای بخش $|\sin(\omega_0 t)|$ از سری معلوم استفاده می‌کنیم

$$|\sin\theta| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m\theta)}{4m^2 - 1},$$

که فقط هارمونیک‌های زوجِ کسینوسی دارد. با جایگذاری $\theta = \omega_0 t$:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}, \qquad a_{2m} = -\frac{4}{\pi(4m^2 - 1)}, \quad m = 1, 2, \ldots, \qquad a_{2m-1} = 0.$$

از جمع کل سیگنال نتیجه می‌شود:

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{\pi}, \quad a_{2m} = -\frac{4}{\pi(4m^2 - 1)}, \ a_{2m-1} = 0, \quad b_1 = 1, \ b_{k\neq 1} = 0.}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\omega_0 t}, \qquad c_0 = a_0, \quad c_{\pm n} = \frac{a_n}{2} \ \ (n \geq 1), \quad c_{\pm n} = \pm\frac{b_n}{2j}.$$

پس

$$\boxed{c_0 = \frac{2}{\pi}, \qquad c_{\pm(2m)} = -\frac{2}{\pi(4m^2 - 1)}, \ m \geq 1, \qquad c_1 = -\frac{j}{2}, \ \ c_{-1} = \frac{j}{2}, \qquad c_k = 0 \text{ برای سایر } k\text{های فرد.}}$$

۲ سوال ۲

$$\text{(Real)} \ \ x(t) \in \mathbb{R} \iff c_{-k} = c_k^*, \qquad \text{(Even)} \ \ x(t) = x(-t) \iff c_{-k} = c_k.$$

$x_1(t) = \sum_{k=0}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^k e^{jk\frac{2\pi}{50}t}$ ضرایب:

$$c_k = \begin{cases} (1/2)^k, & 0 \le k \le 100, \\ 0, & \text{غیره}. \end{cases}$$

برای $k > 0$: $c_{-k} = 0 \neq c_k^*$ و نیز $c_{-k} \neq c_k$.

$\Rightarrow$ $x_1(t)$ نه حقیقی است و نه زوج.

$x_2(t) = \sum_{k=-100}^{100} \cos(k\pi)\, e^{jk\frac{2\pi}{50}t}$ چون $\cos(k\pi) = (-1)^k \in \mathbb{R}$ و $\cos(-k\pi) = \cos(k\pi)$،

$$c_k = (-1)^k \;\Rightarrow\; c_{-k} = (-1)^{-k} = (-1)^k = c_k = c_k^*.$$

$\Rightarrow$ $x_2(t)$ هم حقیقی است و هم زوج.

$x_3(t) = \sum_{k=-100}^{100} j \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) e^{jk\frac{2\pi}{50}t}$

$$c_k = j\sin\left(\tfrac{k\pi}{2}\right) \;\Rightarrow\; c_{-k} = j\sin\left(-\tfrac{k\pi}{2}\right) = -j\sin\left(\tfrac{k\pi}{2}\right) = -c_k.$$

از طرفی $c_k^* = -j\sin(\frac{k\pi}{2}) = -c_k$، پس

$c_{-k} = c_k^* \quad \Rightarrow \quad x_3(t)$ حقیقی است.

ولی $c_{-k} = -c_k \neq c_k$ (برای همه kهای فرد)،

$\Rightarrow$ $x_3(t)$ زوج نیست.

۳ سوال ۳

سیگنال ورودی با دوره‌ی $T = 8$ تعریف شده است:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 4, \\ -1, & 4 \le t < 8, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}.$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{8}\left(\int_0^4 e^{-jk\frac{\pi}{4}t} dt - \int_4^8 e^{-jk\frac{\pi}{4}t} dt\right).$$

با محاسبه انتگرال‌ها و استفاده از $e^{-jk\pi} = (-1)^k$ و $e^{-j2k\pi} = 1$:

$$c_k = \frac{1}{-jk\pi}\Big((-1)^k - 1\Big) = \begin{cases} \dfrac{2}{jk\pi}, & k \text{ فرد}, \\ 0, & k \text{ زوج}, \end{cases} \qquad c_0 = 0.$$

برای سیستم LTI با پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$، مؤلفه هارمونیکِ مرتبه k در خروجی برابر است با

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, H(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}.$$

اینجا

$$H(jk\omega_0) = \frac{\sin\left(4k\omega_0\right)}{k\omega_0} = \frac{\sin(k\pi)}{k\omega_0} = 0 \quad (\forall\, k \in \mathbb{Z}),$$

و برای $k = 0$ نیز گرچه $\lim_{\omega\to 0} H(j\omega) = 4$، ولی $c_0 = 0$ است.

$$\boxed{y(t) \equiv 0}$$

بنابراین خروجیِ سیستم برای این ورودی، سیگنال صفر است.

۴ سوال ۴

سیگنال

$$x(t) = 1 - |t|, \qquad -2 < t < 2,$$

با دوره‌ی $T = 4$ است؛ لذا

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}, \qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t}.$$

اگر $e^{jk\omega_0 t_0} = \alpha^k$ باشد، آنگاه

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k a_k = x(t_0)$$

(در نقاط ناپیوستگی برابر با مقدار میانگین طرفین). این را برای ضرایب خواسته‌شده به‌کار می‌بریم.

۱) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} j^k a_k$

چون $j^k = e^{jk\pi/2}$ و $\omega_0 = \pi/2$، با $t_0 = 1$ داریم

$$\sum_k j^k a_k = x(1) = 1 - |1| = 0.$$

۲) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k a_k$

چون $(-1)^k = e^{jk\pi}$ و $\omega_0 t_0 = \pi \Rightarrow t_0 = 2$،

$$\sum_k (-1)^k a_k = x(2).$$

گسترش تناوبی در $t = 2$ پیوسته است (مقدار دوطرف -1)، پس

$$\sum_k (-1)^k a_k = -1.$$

۳) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$

طبق Parseval:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \frac{1}{T}\int_{-2}^{2} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{4}\cdot 2\int_0^2 (1-t)^2 dt = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

۴) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{2k+1}$

بگذارید $S = \sum_k a_k = x(0) = 1$ و $S_\pm = \sum_k (-1)^k a_k = x(2) = -1$. با جداکردن زوج/فرد:

$$S = S_e + S_o, \qquad S_\pm = S_e - S_o \;\Rightarrow\; S_o = \frac{S - S_\pm}{2} = \frac{1-(-1)}{2} = 1.$$

بنابراین

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{2k+1} = 1.$$

۵ سوال ۵

(الف) سیگنال ذوزنقه‌ای (دوره $T = 4$)

یک دوره را در بازه‌ی $0 \le t < 4$ چنین تعریف می‌کنیم (همان شکلی که در نمودار دیده می‌شود):

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 1, & 1 \le t < 3, \\ 4-t, & 3 \le t < 4, \end{cases} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}.$$

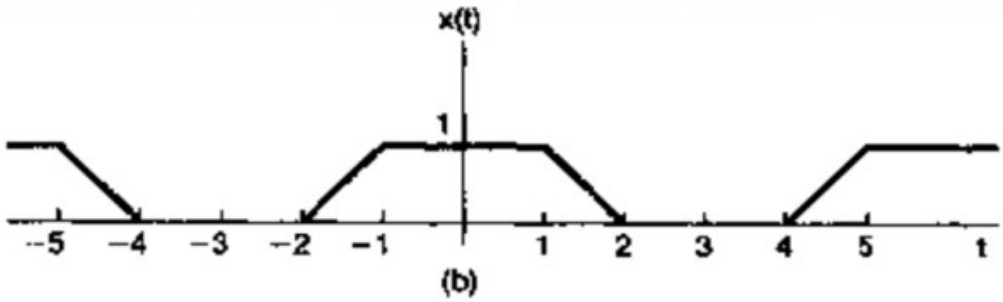
میانگین روی یک دوره $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^4 x(t)\, dt = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

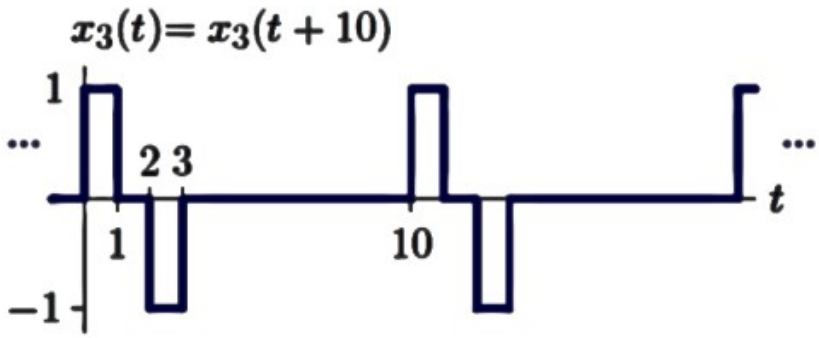
برای ضرایب نماییِ CTFS از خاصیت مشتق استفاده می‌کنیم. بگذارید

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ 0, & 1 < t < 3, \\ -1, & 3 < t < 4, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad b_k = \frac{1}{T}\int_0^T y(t) e^{-jk\omega_0 t} dt,$$

که به رابطه‌ی $b_k = jk\omega_0\, a_k$ متصل است. بنابراین

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{4}\left(\int_0^1 e^{-jk\omega_0 t} dt - \int_3^4 e^{-jk\omega_0 t} dt\right) \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{-jk\omega_0}\left(e^{-jk\omega_0} - 1 - e^{-jk4\omega_0} + e^{-jk3\omega_0}\right). \end{aligned}$$





شکل ۱: نمودار سیگنال ذوزنقه‌ایِ تناوبی. از $t=0$ تا 1 افزایش خطی تا سطح 1، از 1 تا 3 مقدارِ ثابت 1، و از 3 تا 4 کاهش خطی تا 0؛ سپس با دوره 4 تکرار می‌شود.

از $e^{-jk4\omega_0} = e^{-jk2\pi} = 1$ نتیجه می‌گیریم

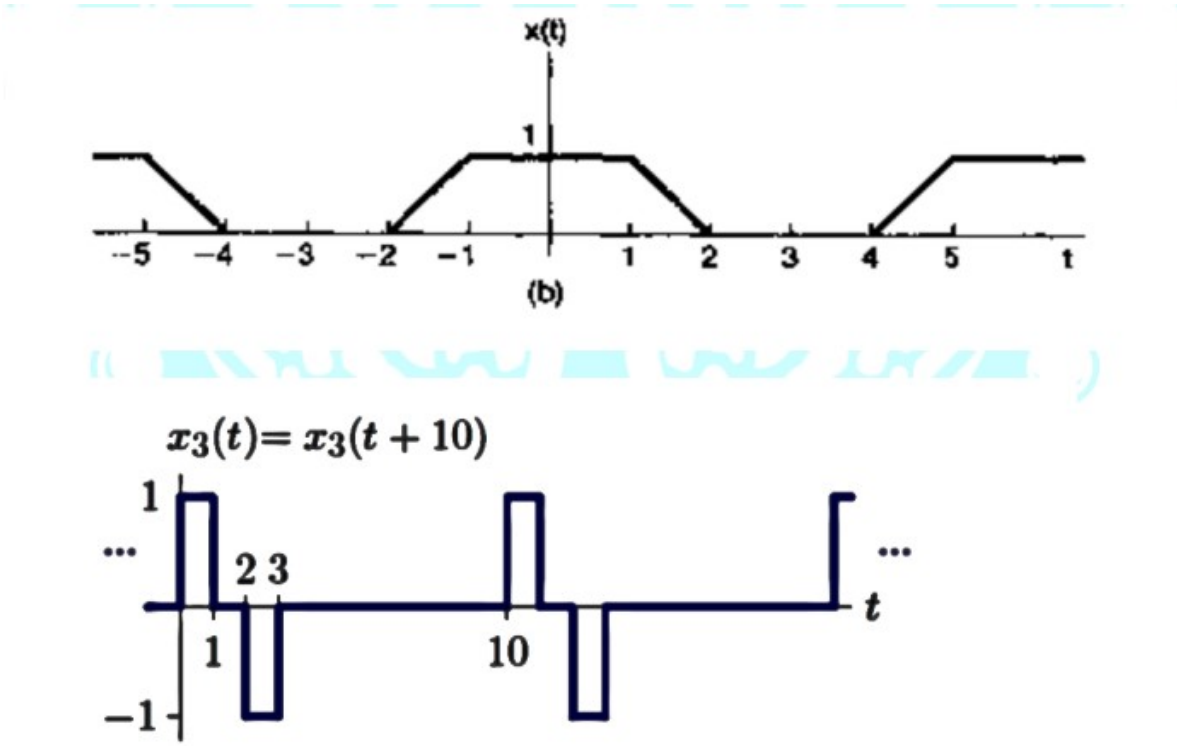
$$a_k = \frac{b_k}{jk\omega_0} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(k\omega_0)^2}\Big(e^{-jk\omega_0} + e^{-jk3\omega_0} - 2\Big).$$

با $\omega_0 = \pi/2$ و استفاده از همانی‌ها:

$$\boxed{a_k = \frac{2}{k^2\pi^2}\Big((-1)^k \cos\frac{k\pi}{2} - 1\Big), \qquad k \neq 0, \quad a_0 = \frac{3}{4}.}$$

شکل ساده‌شده (برای درک بهتر الگو):

$$\boxed{\begin{array}{ll} k \text{ فرد}: & a_k = -\dfrac{2}{k^2\pi^2}, \\ k = 4m: & a_k = 0, \\ k = 4m+2: & a_k = -\dfrac{1}{(2m+1)^2\pi^2}. \end{array}}$$



شکل ۲: قطار پالس: در هر دوره $0 \le t < 10$ یک پالسِ $+1$ روی $[0,1)$ و یک پالسِ -1 روی $[2,3)$؛ باقی بازه صفر.

(ب) قطار پالس تناوبی (دوره $T = 10$)

طبق شکل، در هر دوره‌ی $0 \le t < 10$ یک پالسِ $+1$ روی بازه‌ی $[0,1)$ و یک پالسِ -1 روی $[2,3)$ داریم؛ در بقیه‌ی زمان‌ها سیگنال صفر است:

$$x_3(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ -1, & 2 \le t < 3, \\ 0, & \text{در غیر این صورت در } [0,10), \end{cases} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}.$$

میانگین یک‌دوره‌ای صفر است، پس $a_0 = 0$. ضرایب نمایی:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T}\left(\int_0^1 e^{-jk\omega_0 t}dt - \int_2^3 e^{-jk\omega_0 t}dt\right) \\ &= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{-jk\omega_0}\left(e^{-jk\omega_0} - 1 - e^{-jk3\omega_0} + e^{-jk2\omega_0}\right). \end{aligned}$$

می‌توان این را فشرده‌تر نوشت. اگر $R_k = \frac{1}{10}\int_0^1 e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{10}\,e^{-jk\omega_0/2}\,\frac{2\sin(k\omega_0/2)}{k\omega_0}$, آنگاه

$$\boxed{a_k = R_k\left(1 - e^{-j2k\omega_0}\right) = \frac{1}{10}\,e^{-j\frac{3}{2}k\omega_0}\,\frac{4j}{k\omega_0}\,\sin\frac{k\omega_0}{2}\,\sin(k\omega_0), \qquad k \ne 0, \quad a_0 = 0.}$$

در (الف) سیگنال پیوسته و گوشه‌دار است $|a_k| \sim 1/k^2 \Rightarrow$. در (ب) سیگنال دارای پرش است $|a_k| \sim 1/k \Rightarrow$. هر دو با فرمول‌ها سازگارند.

مراجع