

NOVEMBER 2023

EXERCISE 3

M.Amin HosseinNiya

Presented to:
Dr. BourBour



Exercise 3

1. Exercise 5.1 for Graph G1 (Pg 184-185):

A) BFS:

- A - B - D - I - C - E - G - F - H - J

B) DFS:

- A - B - C - E - D - G - H - F - I - J

2. Exercise 5.4 (Pg 185):

Prove that in a breadth-first search on a undirected graph G , every edge is either a tree edge or a cross edge, where x is neither an ancestor nor descendant of y , in cross edge (x, y) .

برای اثبات این که در جستجوی عرضی از نوع BFS در یک گراف بدون جهت G ، هر یال به عنوان یال درختی یا یال متقاطع تشخیص داده می‌شود، باید طبیعت BFS و رفتار آن را در دست بگیریم.

در یک BFS، گراف به صورت سطح به سطح پیمایش می‌شود. در حین پیمایش، الگوریتم قبل از رفتن به سطح بعدی، رئوس مجاور را بررسی می‌کند. این فرآیند تضمین می‌کند که پیمایش به صورت عرض-اول انجام شود، به این معنی که تمام رئوس در یک سطح مشخص قبل از رفتن به سطح بعدی بررسی می‌شوند.

حالا، دو نوع یال در یک BFS را در نظر بگیرید:

1. یال درختی: اگر یال (x, y) در حین تراورس BFS یک رأس x را به یک رأس مجاورش y وصل کند، این یال یک یال درختی است. این یال‌ها درخت پوشای BFS را تشکیل می‌دهند، زیرا سلسله مراتب و روابط بین رئوس در پیمایش را تعریف می‌کنند.

Exercise 3

2. یال متقاطع: اگر یال (x, y) دو رأس x و y را که نه نسلی از هم هستند و نه نسلی از یکدیگر هستند، درخت BFS به هم وصل کند، آنگاه این یال یک یال متقاطع است. به عبارت دیگر، یک یال متقاطع رأس‌هایی را که در سطوح مختلف پیمایش BFS هستند به هم وصل می‌کند، یا رأس‌هایی را به هم وصل می‌کند که بخشی از یک شاخه درخت BFS نیستند.

برای اثبات این که هر یال در یک BFS یا یال درختی است یا یال متقاطع، می‌توانیم به موارد زیر توجه کنیم:

مورد ۱ - یال‌های درختی: هر یالی که در حین تراورس BFS برخورد می‌کند در ابتدا یک یال درختی است زیرا یک رأس را به رأس مجاورش در سطح بعدی وصل می‌کند. بنابراین، تمام یال‌های درختی در حین BFS در نظر گرفته می‌شوند.

مورد ۲ - یال‌های متقاطع: بعد از بازدید از تمام رؤس مجاور یک سطح، الگوریتم BFS به سطح بعدی می‌رود. در این نقطه، هر یال باقی‌مانده که یال درختی نیست، به عنوان یال متقاطع در نظر گرفته می‌شود زیرا رؤس را که در سطوح مختلف یا شاخه‌های مختلف درخت BFS هستند را به هم وصل می‌کند.

از آنجا که تمام یال‌ها در گراف به عنوان یال‌های درختی بررسی می‌شوند یا در حین پیمایش BFS به یال‌های متقاطع تبدیل می‌شوند، نتیجه می‌گیریم که در جستجوی عرضی از نوع BFS در یک گراف بدون جهت G ، هر یال به عنوان یال درختی یا یال متقاطع تشخیص داده می‌شود.

Exercise 3

3. Exercise 5.6 (a,b) (Pg 185-186):

In breadth-first and depth-first search, an undiscovered node is marked discovered when it is first encountered, and marked processed when it has been completely searched. At any given moment, several nodes might be simultaneously in the discovered state.

(a) Describe a graph on n vertices and a particular starting vertex v such that $\Theta(n)$ nodes are simultaneously in the discovered state during a breadth-first search starting from v .

(b) Describe a graph on n vertices and a particular starting vertex v such that $\Theta(n)$ nodes are simultaneously in the discovered state during a depth-first search starting from v .

(a) می‌توانیم یک گراف به شکل ستاره‌ای را در نظر بگیریم. پیمایش BFS با شروع از رأس v ابتدا همه همسایگان v را ملاقات می‌کند و آن‌ها را به عنوان کشف‌شده علامت‌گذاری می‌کند. از آنجا که تمام رؤسا به v وصل هستند، آن‌ها به صورت همزمان کشف می‌شوند و در وضعیت کشف‌شده باقی می‌مانند تا زمانی که پردازش شوند. بنابراین، در این گراف ستاره‌ای، در طول یک BFS با شروع از v ، تعداد $\Theta(n)$ گره (تمام رؤس به جز v) به طور همزمان در وضعیت کشف شده قرار می‌گیرند.

(b) می‌توانیم یک گراف زنجیره‌ای خطی را در نظر بگیریم. در یک گراف زنجیره‌ای خطی، همه رؤسا به ترتیب خطی وصل هستند و یک ساختار شبیه به زنجیره را ایجاد می‌کنند. با شروع از رأس v ، گردش DFS هر رأس را در زنجیره بازدید خواهد کرد تا به آخرین رأس برسد. با پیشرفت گردش، هر رأس به عنوان کشف شده علامت‌گذاری می‌شود.

در این گراف زنجیره‌ای خطی، در طول یک DFS با شروع از v ، $\Theta(n)$ گره به طور همزمان در وضعیت کشف شده قرار می‌گیرند. این به این دلیل است که گردش تمام زنجیره را بررسی می‌کند و هر رأس را پیش از ادامه‌ی حرکت به عنوان کشف شده علامت‌گذاری می‌کند. مهم است توجه کنیم که تعداد گره‌های همزمان در وضعیت کشف‌شده در یک DFS ممکن است بستگی به ترتیب بررسی همسایگان داشته باشد. در مورد یک گراف زنجیره‌ای خطی، جایی که فقط در یک جهت بررسی می‌شود، تعداد گره‌های در وضعیت کشف شده $\Theta(n)$ است.

Exercise 3

4. Exercise 5.18 (Pg 188):

Consider a set of movies M_1, M_2, \dots, M_k . There is a set of customers, each one of which indicates the two movies they would like to see this weekend. Movies are shown on Saturday evening and Sunday evening. Multiple movies may be screened at the same time.

You must decide which movies should be televised on Saturday and which on Sunday, so that every customer gets to see the two movies they desire. Is there a schedule where each movie is shown at most once? Design an efficient algorithm to find such a schedule if one exists.

یک راه برای حل این مسئله این است که یک گراف دوبخشی ایجاد کنی، جایی که یک مجموعه از گره‌ها فیلم‌ها را نمایش می‌دهد و مجموعه‌ی دیگر گره‌ها مشتریان را نمایش می‌دهد. وجود یال بین یک فیلم و یک مشتری نشان می‌دهد که آن مشتری می‌خواهد آن فیلم را ببیند.

گره‌ها:

- مجموعه‌ی فیلم‌ها
- مجموعه‌ی مشتریان

یال‌ها:

- برای هر مشتری، یک یال بین یک فیلم و آن مشتری ایجاد می‌کنیم اگر آن مشتری می‌خواهد آن فیلم را ببیند.

گراف دوبخشی:

- گراف دوبخشی است زیرا دو مجموعه متمایز از گره‌ها وجود دارد (فیلم‌ها و مشتریان) و تمام یال‌ها بین این دو مجموعه قرار دارند.

حالا، مسئله یافتن یک برنامه زمانی که هر فیلم حداکثر یک بار نمایش داده می‌شود معادل با یافتن یک جفت کامل در این گراف دوبخشی است. یعنی یک مجموعه از یال‌ها که هر گره را دقیقاً یک بار پوشش می‌دهد.

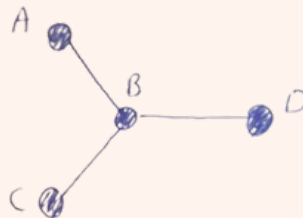
Exercise 3

اگر یک جفت کامل وجود داشته باشد، می‌توانیم فیلم‌ها را به این ترتیب برنامه‌ریزی کنیم. اگر جفت کاملی وجود نداشته باشد، امکان پیدا کردن برنامه زمانی که هر فیلم حداکثر یک بار نمایش داده می‌شود وجود ندارد و برخی از مشتریان همه دو فیلم مورد نظر خود را نمی‌بینند.

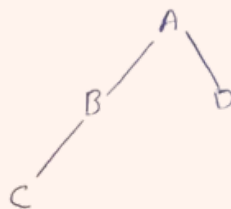
5. Exercise 5.30 (Pg 189):

Suppose G is a connected undirected graph. An edge “ e ” whose removal disconnects the graph is called a bridge. Must every bridge “ e ” be an edge in a depth-first search tree of G ? Give a proof or a counterexample.

نه، اینطور نیست که هر پل (bridge) باید یک یال در درخت جستجوی اولیه (DFS) باشد. به این گراف توجه کنید:



هریک از یال‌های این گراف یک پل هستند. جستجوی DFS با شروع از A به این نتیجه خواهدانجامید:



می‌بینیم که یال BD که در گراف اولیه وجود داشت و یک پل بود، جایی در این نتیجه ندارد.