به نام خدا

سید محمد پارسا دزمره

جواب پرسش ۱ـ

فرض کنیم مربعی به اندازه a و دایره‌ای با قطر a و شعاع $\frac{a}{2}$ محاط در اختیار داریم مساحت و حجم این مربع و دایره به صورت زیر خواهد بود.

$$V_{\text{دایره}} = S = \pi R^2 \longleftrightarrow \frac{\pi}{4} a^2$$

$$V_{\text{مربع}} = S = a^2$$

$$V_{\text{فضای خالی}} = V_{\text{دایره}} - V_{\text{مربع}} = a^2 - \frac{\pi}{4} a^2 = a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$V_{\text{فضای اشغال شده}} = \frac{\pi}{4\cancel{8}} a^3$$

این برای زمانی است که ما در دو بعد هستیم حالا ابعاد را به یک واحد افزایش می دهیم دایره به کره و مربع به مکعب تبدیل می‌شود.

$$V_{\text{حجم کره}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{a^3}{8} = \frac{\pi}{6} a^3$$

$$V_{\text{مکعب}} = a^3$$

$$V_{\text{فضای خالی}} = V_{\text{مکعب}} - V_{\text{کره}} = a^3 - \frac{\pi}{6} a^3 = a^3\left(1 - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$V_{\text{فضای اشغال شده}} = \frac{\pi}{6} a^3$$

با این دو مثال نتیجه می‌شود که با افزایش ابعاد فضای اشغال شده به صفر و فضای خالی به فضای مربع در ابعاد بالا همگرا می‌شود

حجم یک کره n بعدی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$V_{2k}(R) = \frac{\pi^k}{k!} R^{2k}$$

$$V_{2k+1}(R) = \frac{2(k!)(4\pi)^k}{(2k+1)!} R^{2k+1}$$

و می‌دانیم برای عدد حقیقی n رابطه $n! \geq c^n$ که c یک عدد ثابت است برقرار است

با این مقایسه اگر از روابط بالا حد بگیریم

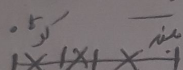
$$\lim_{2k\to\infty}\left(\frac{a}{2}\right) = \lim_{2k\to\infty}\frac{\pi^k}{k!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2k} = \lim_{2k\to\infty}\frac{\pi^k}{k!} = 0$$

رشد $k!$ بیشتر است.

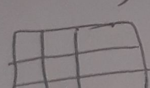
$$\lim_{2k\to\infty}\left(\frac{a}{2}\right) \simeq 0 \qquad V_{\text{اشغال شده}}\,(n\to\infty) \simeq 0$$

در نتیجه می بینیم که با افزایش ابعاد فضای اشغال شده به صفر همگرا می شود.

جواب سوال ۵) وقتی تعداد بعد زیاد می شود موجب این می شود برای داده ها sparsity رخ می دهد مثلا فرض کنید ما یک فیچر یک بعد داشته باشیم مثلا قد افراد که بلند قد کوتاه قد و متوسط هستند برای این که کمترین داده ها را برداریم تمام این قد افراد را پوشش بدهی کنند به حداقل ۳ داده نیاز داریم

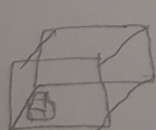


اما اگر فیچر وزن را اضافه کنیم فرض وزن لاغر متوسط و چاق حالا ما برای این که تمام حالت ها را پوشش بدهیم به ۹ داده نیاز داریم



یعنی به ازای افزایش ابعاد داده های ما باید به صورت نمایی زیاد شود یعنی که هر جای وقتی داده باشد افزایش ابعاد خوب است اما این جای بعد باعث مشکلات یادگیری و گویا نبودن data می شود

یک مثال دیگر در مورد یک مکعب متری D بعدی داریم ۳ بعدی مکعب حال می خواهیم حجم f را از این مکعب اشغال کنیم. مکعب بزرگ ما ابعاد آن ۱ است پس به طبع حجم آن نیز برابر ۱ است ما می خواهیم با استفاده از حجم



بیان کنیم که ضلع مکعب کوچک یا همان اشغال کننده چقدر باید باشد تا f مقدار حجم را اشغال کند.

$$e_D(f) = f^{1/D}$$

مثلا در معیار e_{10} ی برای اشغال ۱۰ حجم از ضلع کوچک برابر ۰.۸ باشد

$e_{10}(0.1) = 0.8$

یعنی هرچه فضا بزرگتر می‌شود هم ظرفیت ضلع بیشتر می‌شود.

جواب پرسش ۶-۱۵-

با استقرا داریم می‌خواهیم چند جمله‌ای های دو متغیره را محاسبه کنیم

$m=0 \longrightarrow a_0$

$m=1 \longrightarrow a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$

$m=2 \longrightarrow a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2 + a_4 x_1^2 + a_5 x_2^2$

می‌توانیم تعداد ضرایب را از چند جمله‌ای های بالا به صورت زیر به دست آوریم.

$m=0 \longrightarrow a_0 + 0 \cdot x_1^{m} + 0 \cdot x_2^{m_2}$

تعداد ضرایب برابر است با جواب های معادله زیر

$m_1 + m_2 = 0 \longrightarrow$ تعداد $\binom{1}{1} = 1$

$m=1 \longrightarrow$ تعداد = تعداد قبلی + تعداد جواب $(m_1 + m_2 = 1)$

تعداد $= 1 + \binom{2}{1} = 1 + 2$

$m=2 \longrightarrow$ تعداد = تعداد قبلی + تعداد جواب $(m_1 + m_2 = 2)$

تعداد $= 1 + 2 + \binom{3}{1} = 1 + 2 + 3$

همان طور که مشخص است فرمول به دست آوردن تعداد جواب معادله $m_1 + m_2 = k$ برابر است با $\binom{m+k-1}{m-1}$ و به ازای m های [illegible]

$m = (0, 1, 2, \ldots)$ هر بار تعداد ضرایب چند جمله‌ای برابر است با تعداد [illegible]

چند جمله‌ای با mهای کمتر مساوی به ازای $D=2$ (دو متغیره) داریم

$$\text{تعداد جملات} = \sum_{i=1}^{m} \binom{i+2-1}{i-1}$$

و اگر بخواهیم D را تغییر دهیم

$$\text{تعداد جملات} = \sum_{i=1}^{M} \binom{i+D-1}{i-1}$$

که حاصل جمع ترکیب بالا در نهایت برابر است با

$$n(D,M) = \frac{(D+m-1)!}{(D-1)!\,M!}$$

جواب پرسش ۶-۱۴

$$N(\cancel{D}d, M) = \frac{(D+M)!}{D!\,M!}$$

می‌خواهیم با استفاده از تخمین استرلینگ حاصل عبارت بالا را بیابیم

stirling $n! \simeq n^n e^{-n}$

$$\cancel{N(D)}\ N(d,M) = \frac{(D+M)!}{D!\,M!} = \frac{(D+M)^{(D+M)}\, e^{-(D+M)}}{D^D e^{-D}\; M^M e^{-M}}$$

$$= \frac{(D+M)^{(D+M)}\, e^{-(D+M)}}{D^D M^M e^{-(D+M)}} = \frac{(D+M)^{D+M}}{D^D M^M}$$

$$\Rightarrow N(d,m) = \frac{(D+M)^{D+M}}{D^D M^M}$$