אנליזה נומרית - מטלת אמצע

תשפ"ב סמסטר ב'

הנחיות הגשה

- את העבודה יש להגיש בקובץ PDF יחיד.
- בכל שאלה בה התבקשתם לכתוב קוד, עליכם לצרפו לקובץ ה-PDF לא באמצעות צילום מסך אלא באמצעות העתק-הדבק של הטקסט (תוכלו לבדוק כי ביצעתם זאת נכון כאשר תייצאו את הPDF ותוכלו להעתיק בעצמכם את הטקסט מתוכו).
- בכל שאלה בה התבקשתם לכתוב קוד, אם ייבאתם ספריות יש לצרף חלק זה של הקוד גם כן.
- יש לצרף הסברים לבחירות השונות שנעשו בעת כתיבת הפונקציות הנדרשות.
- בסעיפים בהם אתם מתבקשים לנתח תוצאות שקיבלתם בצעו ניתוח מעמיק ככל האפשר בעזרת החומר העיוני שנלמד בקורס (כלומר, תשובות בסגנון "הגרף הראשון גבוה יותר מהשני" לשאלות "מה ההבדל בין הגרפים וממה לדעתכם הוא נובע" לא יתקבלו).
- תשובות לא קריאות לא יבדקו.
- אין צורך לצרף את הקוד בקובץ נפרד.

שאלה 1: אינטגרציית גאוס ופולינומים אורתוגונליים

בשאלה זו נסמן P_n - פולינום לג'נדר מסדר n המוגדר ע"י הנוסחא הקלאסית

$$P_n\left(x\right)=\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left\{\left(x^2-1\right)^n\right\}$$

(נירמול $P_n\left(1\right)=1$); $\tilde{P}_n$ - פולינום לג'נדר מסדר n עם מקדם מוביל = 1.

א. (7 נק') ממשו בפייתון את נוסחת הרקורסיה עבור $\{P_n\}$ שראינו בכיתה והשתמשו בה לחישוב ערכי $P_{35}(x)$ ב-1000 נקודות שוות מרחק בקטע $[-1,1]$. בסעיף זה אין להשתמש בפונקציות עזר כלשהן מספריות חיצוניות. ציירו את התוצאה.

ב. (3 נק') חשבו את $P_{35}\left(x\right)$ באותן נקודות כמו בסעיף הקודם, כאשר במקום נוסחת הרקורסיה השתמשו בבפונקציות הבאות:

- scipy.special.legendre לחישוב מקדמי P_n,
- numpy.polyval לחישוב ערך הפולינום הנתון באמצעות מקדמיו.

ציירו את התוצאה והשוו לסעיף הקודם. האם קיבלתם תוצאה שונה? נסו להסביר מדוע.

ג. (7 נק') פתחו נוסחת רקורסיה עבור $\left\{\tilde{P}_n\right\}$, כלומר, מצאו מקדמים $\{\beta_n,\gamma_n\}$ לכל $n=0,1,\ldots$ עבורם מתקיים

$$\tilde{P}_{n+1}\left(x\right)=\left(x-\beta_n\right)\tilde{P}_n\left(x\right)-\gamma_n^2\tilde{P}_{n-1}\left(x\right).$$

(רמז: השתמשו בנוסחת הרקורסיה עבור $\{P_n\}$ שראינו בכיתה)

ד. (10 נק') ממשו פונקציה בפייתון המחשבת את המשקולות והצמתים של כלל אינטגרציית גאוס מסדר n, כלומר, את $\{w_i,x_i\}_{i=0}^n$ עבורם סדר הדיוק האלגברי של הנוסחא

$$\int_{-1}^1 f\left(x\right)dx\approx\sum_{i=0}^n w_i f\left(x_i\right)$$

הוא מקסימלי. בסעיף זה מותר להשתמש בפונקציות עזר לחישוב ערכים עצמיים וקטורים עצמיים של מטריצות (numpy.linalg.eig). בדקו את החישוב:

- חשבו את ערכי $P_{35}(x)$ (באמצעות הפונקציה שמימשתם בסעיף א') בצמתים של כלל גאוס מסדר $n = 34$. הסבירו את התוצאה שקיבלתם.
- חשבו נומרית את $\sum_{i=0}^{n} w_i$ והשוו לערך שאמור להתקבל מהתאוריה.

ה. (8 נק') לכל n, כתבו פונקציה המחשבת קירוב לאינטגרל

$$\int_{1}^{1.2} \cos\left(x^{24}\right) dx$$

באמצעות כלל גאוס עם n נקודות, ופונקציה נוספת המחשבת את הקירוב באמצעות כלל סימפסון מצורף עם n נקודות (ניתן להניח כי $n-1$ זוגי). הריצו את הפונקציות הללו למספר ערכי n בטווח $[10, 1000]$. ציירו גרף של שגיאות הקירוב. וודאו מהגרף שקצב דעיכת השגיאה של כלל סימפסון מתאים למה שנלמד בכיתה. בכמה נקודות מספיק להשתמש כדי להגיע לשגיאה 10^{-14} בשיטת גאוס? לצורך חישוב השגיאה ניתן להשתמש בערך המדוייק של האינטגרל הנ"ל עד לדיוק מכונה : -0.01521513770698.

שאלה 2: בעיות נומריות

בשימוש בכלים של אנליזה, אנו יודעים כי $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$. על כן, עבור ערכי n הולכים וגדלים, ניתן לצפות כי למחשב סופי תהיה בעיה בחישוב ערכי $\frac{n^n}{n!}$. בתרגיל זה נבדוק זאת

א. (10 נק') ממשו פונקציה f אשר מקבלת משתנה מספרי n. מתוך התיקייה scipy.special של פייתון, התקינו את פונקציית factorial, והשתמשו בה על מנת להגדיר את הפונקציה שלכם להחזיר את הערך $\frac{n^n}{n!}$. אם f שבניתם מקבל ערך מהסוג int, מה יהיה הסוג של n^n? הפונקציה factorial תמיד מחזירה ערכי float. מה תחזיר הפונקציה שלכם? עבור ערכים שלמים בין 1 ל-1001, הדפיסו את ערכי $(n, \mathrm{f}(n))$, עד שתתקלו בשגיאה. הסבירו מהי השגיאה וממה היא נובעת.

ב. (10 נק') ננסה לתקן את הבעיה שהתקבלה בסעיפים הקודמים. נפרק את $\frac{n^n}{n!}$ למכפלה בצורה הבאה:

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdots \frac{n}{1}$$

ממשו פונקצייה חדשה newf שמקבלת משתנה מספרי n, ומחזירה את הערך $\frac{n^n}{n!}$ תוך שימוש בפירוק שהוצג לעיל. אם f שבניתם מקבל ערך מהסוג int, איזה סוג ערך היא תחזיר? עבור ערכים שלמים בין 1 ל-1001, הדפיסו את ערכי $(n, \mathrm{newf}(n))$. מה קורה הפעם? אילו ערכים מודפסים? הסבירו.

ג. (10 נק') סכמו את ההבדל המתקבל בין שתי שיטות החישוב השונות במחשב.

שאלה 3: ניוטון נגד לגראנז' נגד טיילור (וקצת צ'בישב)

בתרגיל זה נקרב את פונקציית $\cos(x)$ בעזרת שני קירובים פולינומיאליים - קירוב טיילור וקירוב בעזרת פולינום אינטרפולציה.

א. (4 נק') יישמו בפייתון פונקצייה שמייצרת את רשימת ההפרשים המחולקים המתאימים למקדמים בשיטת ניוטון. הפונקציה צריכה לקבל רשימה x של ערכי דגימה, ורשימה y של ערכי פונקציה באותן נקודות הדגימה. הפונקציה צריכה להוציא כפלט את רשימת ההפרשים המחולקים המתקבלים.

ב. (4 נק') יישמו בפייתון פונקציה שמחשבת את ערכי פולינום ניוטון ברשימת ערכים חדשה. הפונקציה צריכה לקבל רשימה c של מקדמי פולינום שמתקבל מהפונקציה הקודמת שכתבתם, אותה רשימת ערכי דגימה x מהפונקציה הקודמת, ורשימה $xnew$ של ערכים בהם אנחנו רוצים לחשב את ערכי הפולינום. הפונקציה צריכה להוציא כפלט את רשימת הערכים שהתקבלו.

ג. (14 נק') העריכו נומרית את השגיאה המקסימלית המתקבלת מהערכת $\cos(x)$ בעזרת פולינום האינטרפולציה שבניתם, ושרטטו גרף של השגיאה (בסקאלה לוגריתמית) כפונקציה של מספר נקודות הדגימה n וסוגן. עשו זאת באופן הבא:

שרטטו במערכת צירים אחת (בסקאלה לוגריתמית) את הערכת השגיאה המקסימלית כפונקציה של מספר נקודות הדגימה n הנלקחות במרחקים שווים בקטע $[-\pi, \pi]$ כאשר:

- משתמשים בפולינום האינטרפולציה בשיטת ניוטון שבניתם בסעיפים הקודמים.
- משתמשים בשיטת lagrange barycentric (ניתן להשתמש בפונקצייה scipy.interpolate.barycentric_interpolate כפי שהוצגה בהרצאה)
  - לכל n, חזרו על התהליך הקודם כאשר נקודות הדגימה הן נקודות צ'בישב המסודרות בסדר עולה.
  - לכל n, חזרו על התהליך הקודם כאשר נקודות הדגימה הן נקודות צ'בישב מסודרות בסדר אקראי.

(סה"כ אמורים להיות לכם שישה גרפים!) בחרו ערכי n שונים וגדולים מספיק על מנת שייצרו גרף אינפורמטיבי.

- בעזרת הגרפים שייצרתם, הסבירו איזו משלוש השיטות נתנה את הערכת השגיאה הקטנה ביותר? מה מקור ההבדל בין השיטות? בעזרת הגרפים, מה ניתן להסיק על היציבות הנומרית של שיטת ניוטון?

ד. (3 נק') יישמו בפייתון פונקציה שבהינתן ערך שלם וזוגי n, ורשימת נקודות $xnew$, מחזירה את ערכי פולינום טיילור ממעלה n של $\cos(x)$ בנקודות הנ"ל. העריכו את השגיאה המקסימלית המתקבלת מהערכת $\cos(x)$ בעזרת פולינום טיילור באופן נומרי, ושרטטו גרף של השגיאה (בסקאלה לוגריתמית) כפונקציה של מעלת הפולינום n, בקטע $[-\pi,\pi]$. בחרו את אותם ערכי n שבחרתם מקודם.

ה. (10 נק') מה ניתן ללמוד מהגרפים? מה ההבדל בין הקירובים שנעשו בעזרת פולינום אינטרפולציה וזה שנעשה באמצעות פיתוח טיילור?