אנליזה נומרית- מטלת אמצע

1. בשימוש בכלים של אנליזה, אנו יודעים כי $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}=\infty$. על כן, עבור ערכי n הולכים וגדלים, ניתן לצפות כי למחשב סופי תהיה בעיה בחישוב ערכי $\frac{n^n}{n!}$. בתרגיל זה נבדוק זאת:

א. ממשו פונקציה f אשר מקבלת משתנה מספרי n. מתוך התיקייה scipy.special של פייתון, התקינו את פונקציית factorial, והשתמשו בה על מנת להגדיר את הפונקציה שלכם להחזיר את הערך $\frac{n^n}{n!}$. אם f שבניתם מקבל ערך מהסוג int, מה יהיה הסוג של n^n? הפונקציה factorial תמיד מחזירה ערכי float. מה תחזיר הפונקציה שלכם? עבור ערכים שלמים בין 1 ל-1001, הדפיסו את ערכי $(n, \mathrm{f}(n))$, עד שתתקלו בשגיאה. הסבירו מהי השגיאה וממה היא נובעת.

ב. ננסה לתקן את הבעיה שהתקבלה בסעיפים הקודמים. נפרק את $\frac{n^n}{n!}$ למכפלה בצורה הבאה:

$$\frac{n^n}{n!}=\frac{n}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdots\frac{n}{1}$$

ממשו פונקצייה חדשה newf שמקבלת משתנה מספרי n, ומחזירה את הערך $\frac{n^n}{n!}$ תוך שימוש בפירוק שהוצג לעיל. אם f שבניתם מקבל ערך מהסוג int, איזה סוג ערך היא תחזיר? עבור ערכים שלמים בין 1 ל-1001, הדפיסו את ערכי $(n, \mathrm{newf}(n))$. מה קורה הפעם? אילו ערכים מודפסים? הסבירו.

ג. סכמו את ההבדל המתקבל בין שתי שיטות החישוב השונות במחשב.

2. רוצים לחשב את השורש הקטן ביותר של $f(x)=e^{-2x}+sin(x)$.

(א) הציעו איך לאתחל את שיטת חצייה לטובת המשימה לעיל, בלי שימוש במחשבון.

(ב) נניח כי בגלל שגיאת מדידה/רעש אנחנו מחשבים $h(x)=f(x)+\epsilon x$ כאשר $|\epsilon|=o\left(10^{-2}\right)$ האם שיטת החצייה עבור הקטע שבחרתם בסעיף קודם עדיין תתכנס? נמקו.

(ג) כתבו תוכנה שמקרבת את השורש הקטן ביותר של $f(x)$ עם השיטה מסעיף א' עם תנאי עצירה של שגיאה קטנה מ-10^{-5}. כמה איטרציות זה לקח?

(ד) האם ניתן להשתמש בשיטת נקודת שבת עבור $g(x)=x+f(x)$ עם ניחוש התחלתי בקטע שחישבתם בסעיף א'?

(ה) כתבו תוכנה שמקרבת את השורש הקטן ביותר של $f(x)$ עם השיטה מסעיף ג' עם ניחוש התחלתי אקראי בקטע ותנאי עצירה של שגיאה קטנה מ- 10^{-5}. האם זה לקח יותר או פחות איטרציות מסעיף ג? האם התוצאה מפתיעה?

3. (א) כתבו תוכנה שמחשבת את הפירוק LU של מטריצה A בלי החלפות שורות.

(ב) תהי A המטריצה $n\times n$ כך ש- $A_{ij}=|i-j|+1$. תהי $x=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, ו- $b=Ax$. חשבו את x_c, הפתרון של $Ax_c=b$ עם התוכנה שכתבתם בסעיף א' עבור $n=100,200,300,400,500$. מה נורמת אינסוף של השגיאה היחסית של x_c.

(ג) חשבו את $Cond\left(A\right)$ עבור $n=100,200,300,400,500$ וחסמו את נורמת אינסוף של השגיאה היחסית של הפתרון x_c.

(ד) תהי C המטריצה $n\times n$ כך ש- $C_{ij}=\sqrt{(i-j)^2+n/10}$. תחזרו על סעיפים ב' ו-ג' עבור C ונמקו את ההבדלים בין התוצאות.

4. צפרדע יכולה להימצא באחת מ- n+1 נקודות שוות מרחק $x_0,...,x_n$. אם הצפרדע נמצאת בנקודה x_i היא יכולה לקפוץ לנקודות x_{i-1},x_{i+1} באותה הסתברות ואינה יכולה לקפוץ לנקודה אחרת.

נגדיר הסתברויות $\{P_i\}_{i=0}^{n}$ כך שהצפרדע המתחילה ממיקום x_i תגיע לנקודה x_0 לפני שתגיע לנקודה x_n. ברור כי $P_0=1,P_n=0$. בנוסף, מתקיים: $P_i=\frac{1}{2}P_{i-1}+\frac{1}{2}P_{i+1};i=1,...,n-1$ (חשבו מדוע)

- הראו כי מוגדרת המערכת:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & . & . & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & . & . & . \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & . & . & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ . \\ . \\ . \\ P_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

- פתרו את המערכת בשיטה איטרטיבית: הסבירו באיזו שיטה אתם משתמשים, מהי מטריצת האיטרציה שלכם - מדוע השיטה תתכנס? ניתן להיעזר בתכונה הבאה: עבור מטריצה טריאגונלית A, אם היא טופליץ $(toeplitz)$, כלומר הערכים על כל "אלכסון" קבועים אז ישנה נוסחה סגורה לערכים העצמיים: $\lambda_k=a+2\sqrt{b\cdot c}cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right);k=1,...,n$ כאשר a,b,c הערכים על האלכסון הראשי, המשני העליון והמשני התחתון בהתאמה.
- עבור $n=10$ מצאו פתרון מקורב למערכת בשיטה שהגדרתם - התייחסו למספר איטרציות ולניחוש התחלתי.
- כעת ההסתברות לקפוץ ימינה ושמאלה משתנה ל-α ו- $1-\alpha$ בהתאמה. הסיקו מהי המערכת הלינארית המתאימה לבעיה.
- חזרו על סעיף 3 עבור $\alpha=\frac{1}{3}$ ו- $n=50$.