به نام خدا

گزارش تمرین کامپیوتری چهارم

استاد : دکتر اخوان

محمد فرهی

810198451

بخش اول | الف)

$$v_R(t)+v_L(t)+v_C(t)=v_{in}(t) \rightarrow Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau = v_{in}(t)$$

$$\Rightarrow Ri(t)'+Li(t)''+\frac{1}{C}i(t)=v_{in}(t)' \quad \text{I}$$

ب) $v_{in}(t)\xrightarrow{L} V_{in}(s)$, $i(t)\xrightarrow{L} I(s)$: $\text{I} \xrightarrow{L} RsI(s)+Ls^2I(s)+\frac{1}{C}I(s)=sV_{in}(s)$

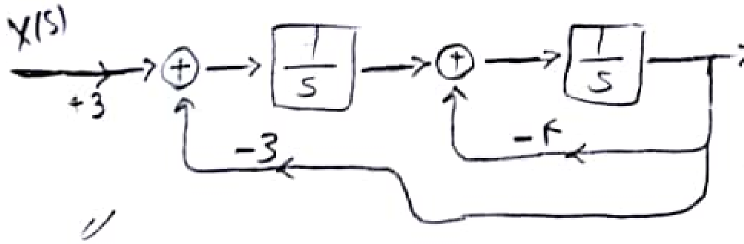
$$\Rightarrow I(s)=\frac{s}{Ls^2+Rs+\frac{1}{C}}V_{in}(s) \quad \text{II}$$

ج) $v_c(t)\xrightarrow{L}V_c(s)$: $(*)\ v_c(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau \xrightarrow[\text{خواص لاپلاس}]{L} V_c(s)=\frac{1}{C}\cdot\frac{I(s)}{s} \xRightarrow{\text{II}}$

$$V_c(s)=\frac{1}{C}\times\frac{1}{s}\times\frac{s}{Ls^2+Rs+\frac{1}{C}}\times V_{in}(s) \xRightarrow[X(s)=V_{in}(s)]{V_c(s)=Y(s)} Y(s)=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}\cdot X(s) \quad \text{III}$$

د) $R=1, L=0.25, C=\frac{4}{3}$: $\text{III} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} Y(s)=\frac{3}{s^2+4s+3}X(s) \Rightarrow$

$$s^2Y(s)+4sY(s)+3Y(s)=3X(s) \Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\big(3X(s)-3Y(s)\big)-4Y(s)\right)$$



بلاک دیاگرام

ه) در معادله به دست آمده در قسمت قبل $\left\{Y(s)=\frac{3}{s^2+4s+3}X(s)\right\}$ ، به جای X(s) ، تبدیل لاپلاس سیگنال پله را قرار می‌دهیم و از Y(s) حاصل ، تبدیل لاپلاس معکوس می‌گیریم.

$$u(t)\xrightarrow{L}U(s)=\frac{1}{s}$$

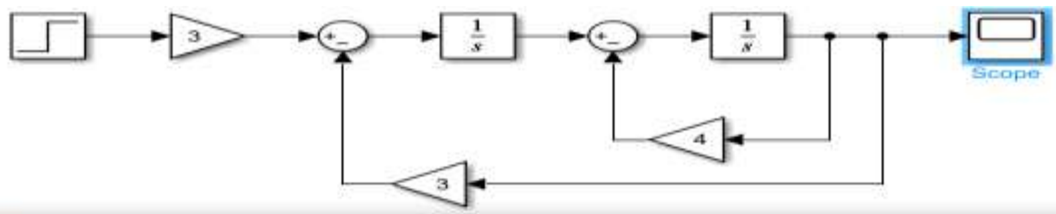
$$\Rightarrow Y(s)=\frac{3}{s^2+4s+3}\times\frac{1}{s}=\frac{1}{1}\times\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{s+3}-\frac{3}{2}\times\frac{1}{s+1}$$

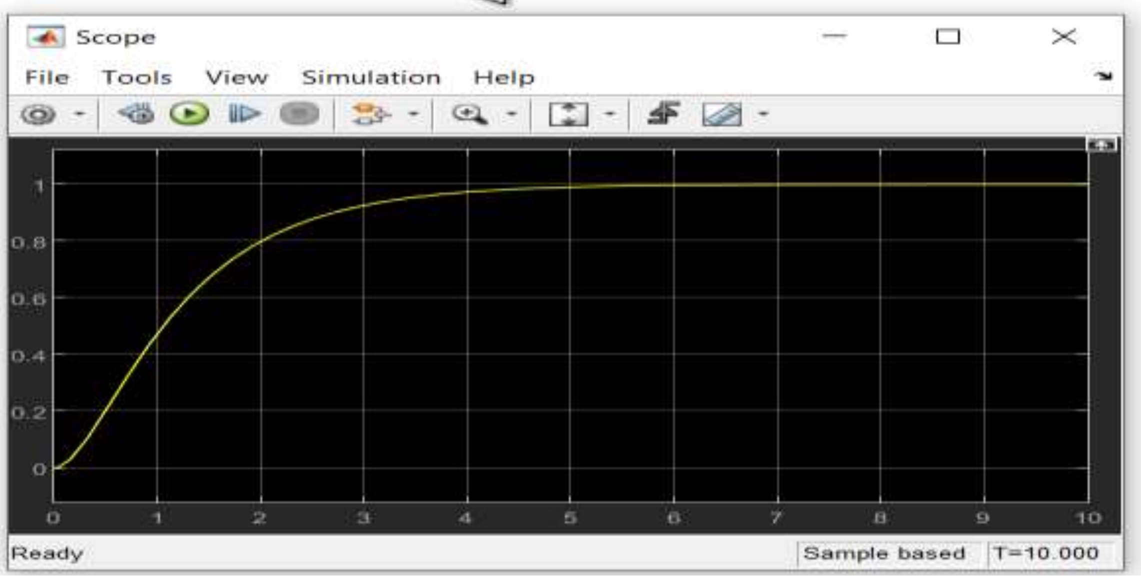
ROC: چون شرط initial rest داریم ، پس سیگنال‌ها دست‌راستی هستند

$$\Rightarrow L^{-1}\{Y(s)\}=\underset{(s>0)}{L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}}+\underset{s>-3}{L^{-1}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{1}{s+3}\right\}}-L^{-1}\left\{\frac{3}{2}\times\frac{1}{s+1}\right\}$$

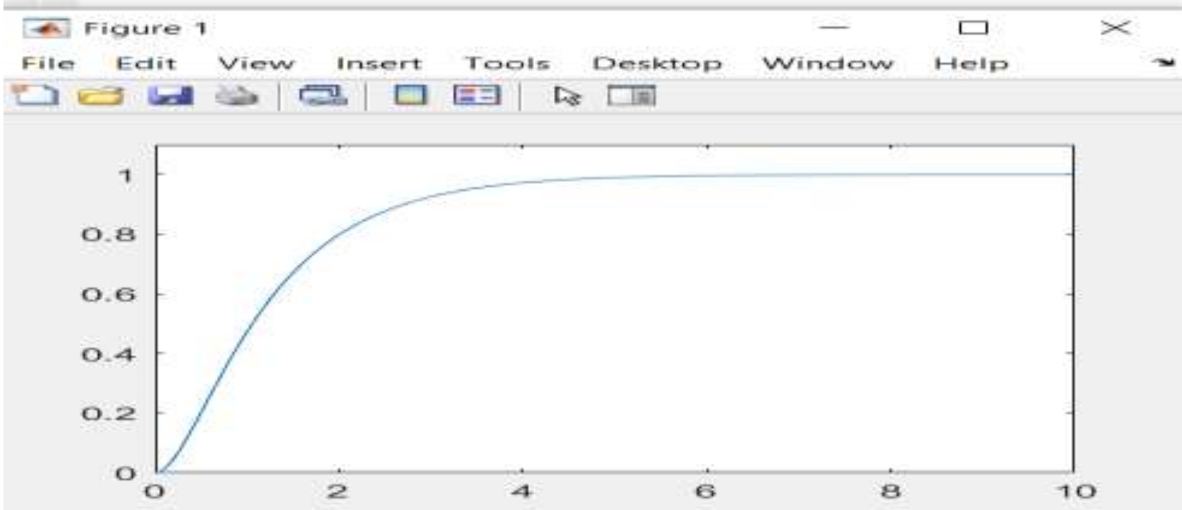
$$\Rightarrow y(t)=u(t)+\frac{1}{2}e^{-3t}u(t)-\frac{3}{2}e^{-t}u(t)$$

ه) از بالا به پایین، به ترتیب عکس نتیجه Simulink و سیگنال مورد انتظار(قسمت (و)) :






```
t = 0:0.01:10;
x = 1 + 0.5 * exp(-3*t) - 1.5 * exp(-t);
plot(t,x);
ylim([0 1.1]);
```



مشاهده می شود که همان نتیجه ای که مد نظرمان بود در شبیه سازی به دست آمده است.

بخش دوم

الف) $K(x(t)-y(t))+B\left(\frac{dx(t)}{dt}-\frac{dy(t)}{dt}\right)=M\frac{d^2y(t)}{dt^2} \xrightarrow{M=K=1}$

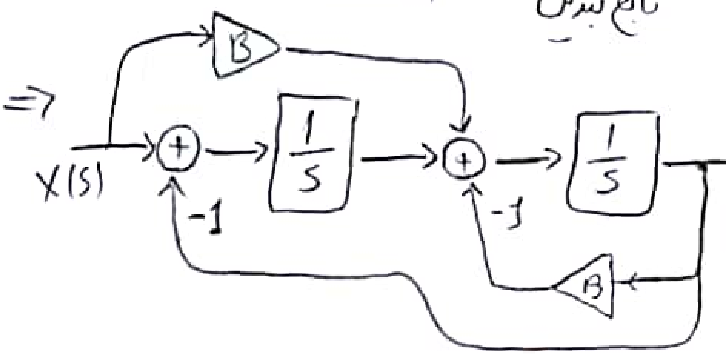
$$B\frac{dx(t)}{dt}+x(t)=\frac{d^2y(t)}{dt^2}+B\frac{dy(t)}{dt}+y(t) \quad \text{(I)}$$

ب) $x(t)\xrightarrow{L}X(s),\ y(t)\xrightarrow{L}Y(s):\ \text{(I)}\xrightarrow{L} BsX(s)+X(s)=s^2Y(s)+BsY(s)+Y(s) \quad \text{(II)}$

$$\text{(II)}\rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{Bs+1}{s^2+Bs+1}=H(s) \quad \text{(III)}$$

تابع تبدیل

$$\text{(II)}\rightarrow Y(s)=\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\left(X(s)-Y(s)\right)+BX(s)-BY(s)\right)$$



بلاک دیاگرام

پیاده سازی این بلاک دیاگرام در Simulink را، همراه با شبیه سازی، در قسمت (ج) انجام می دهیم.

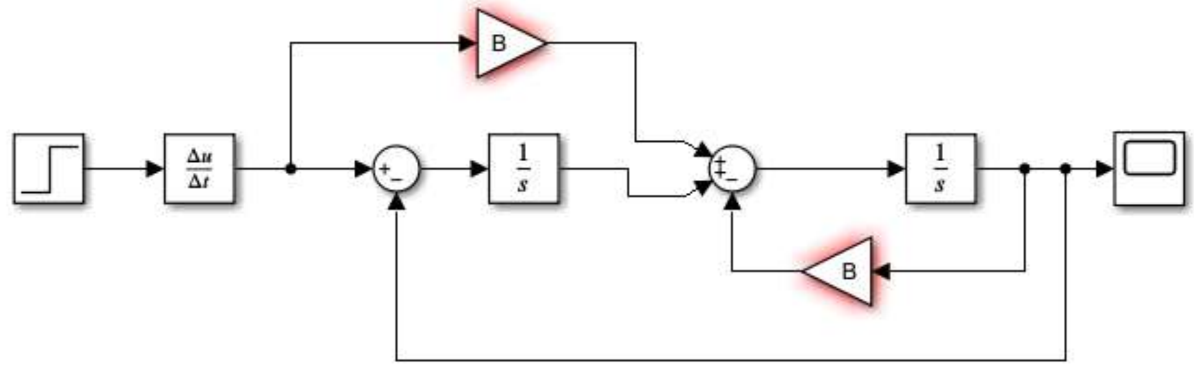
ج) $\text{(III)}\longrightarrow Y(s)=H(s)X(s)\xrightarrow[B=0]{X(s)=L\{\delta(t)\}=1} Y(s)=H(s)\times 1=\frac{1}{s^2+1}$

$\Rightarrow y(t)=h(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin(t)u(t)$ پاسخ ضربه

طبیعت مسئله حکم می کند که سیگنال، دست راستی باشد پس در تبدیل معکوس دست راستی در نظر گیریم

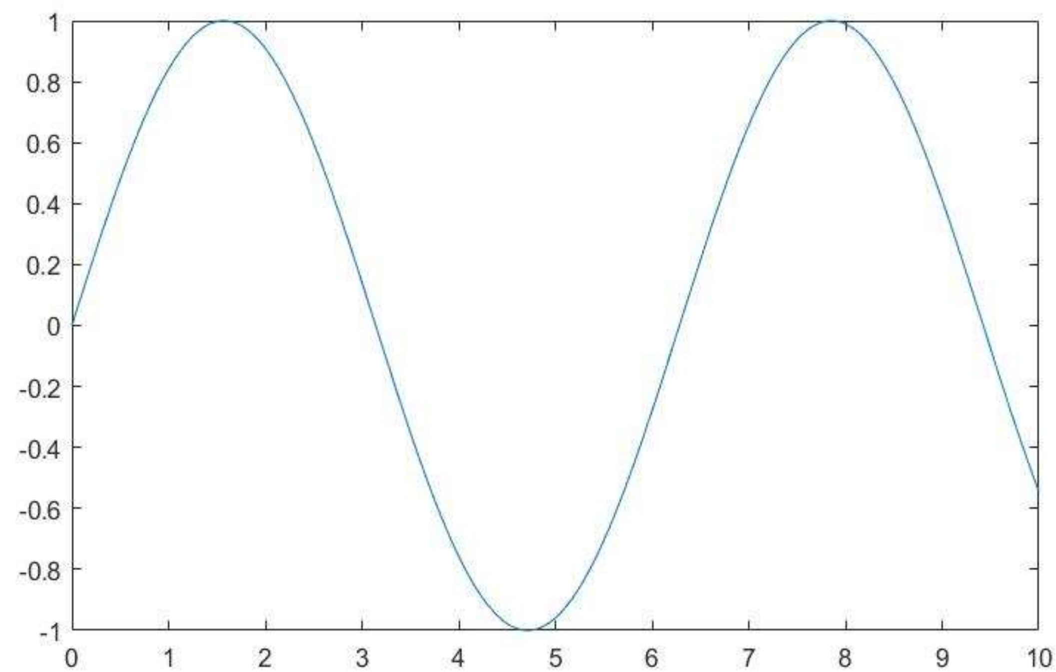
* با توجه به پاسخ به دست آمده، می توان گفت که در صورت عدم وجود تعدیل کننده، $y(t)$ که همان نوسانات کابین اتومبیل را مشخص می کند، حالت سینوسی خواهد داشت که این یعنی در صورت رد شدن اتومبیل از یک دست انداز (ورودی ضربه)، کابین اتومبیل در لحظات بعد، به صورت سینوسی بالا و پایین شده که این پدیده، برای سرنشینان، خوشایند نیست.

قسمت پیاده سازی مورد (ب):

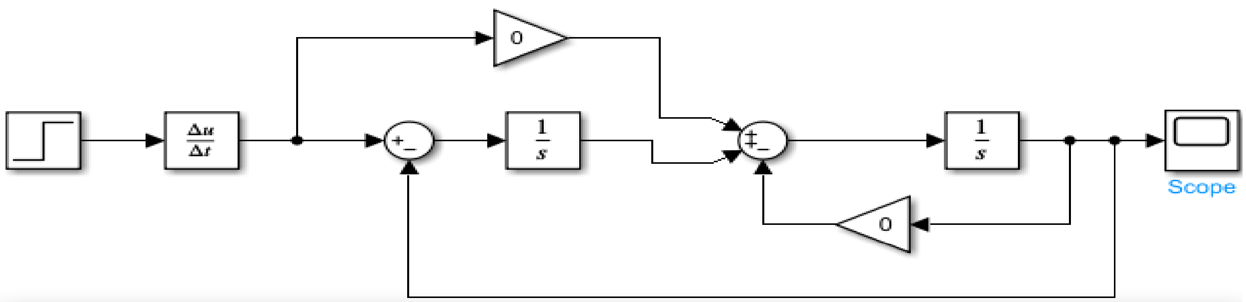


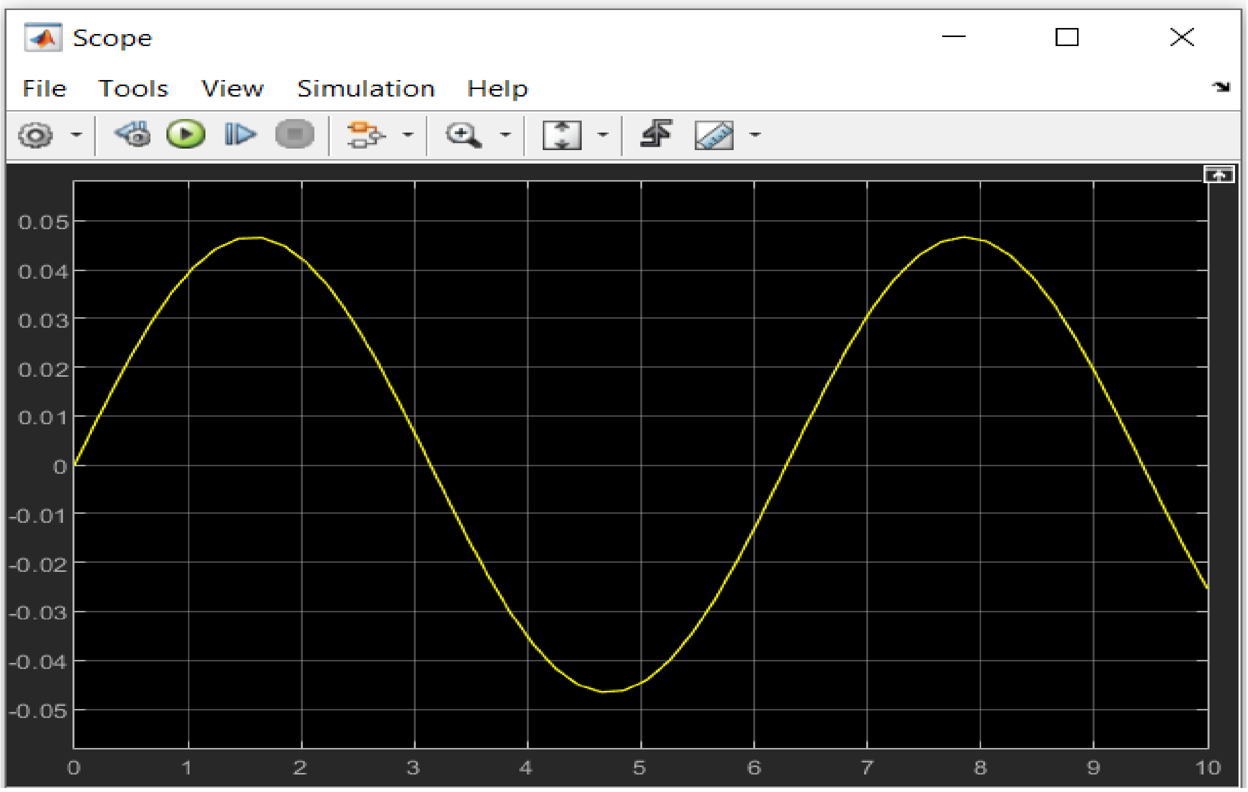
مورد (ج):

سیگنال مورد انتظار: $\sin(t)\,.\,u(t)$



نتیجه شبیه سازی :





همان طور که مشاهده می شود نتیجه شبیه سازی با نتیجه تئوری یکسان است. تنها تفاوت این است که دامنه سیگنال خروجی در شبیه سازی کمتر است که این به دلیل این است که سیگنال ورودی در شبیه سازی، دقیقا برابر ضربه یا Dirac Delta نیست. (step time را 0.001 در نظر گرفتیم در سیگنال پله)

د) در تابع تبدیل $H(s)=\frac{Bs+1}{s^2+Bs+1}$ ، فقط ریشه‌های مخرج می‌توانند باعث ایجاد قطب شوند؛ پس کاری می‌کنیم ریشه‌های مخرج حقیقی شوند. برای این کار:

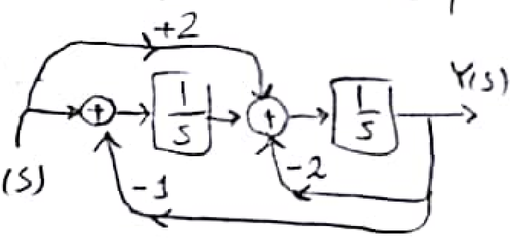
$s^2+Bs+1=0 \longrightarrow \Delta \geq 0 \Longleftrightarrow$ ریشه‌های حقیقی

$\Rightarrow \Delta = B^2-4 \geq 0 \Rightarrow |B| \geq 2 \xrightarrow[\text{حداقل مقدار}]{B>0} B=2 \Big\} \Rightarrow H(s)=\frac{2s+1}{(s+1)^2} \Rightarrow$ پاسخ ضربه: $h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ تبدیل دست راستی

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{(s+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s+1)^2}\right\} \overset{\text{خواص لاپلاس}}{=\!=} 2e^{-t}u(t) - te^{-t}u(t) \Big\}$

رسم این سیگنال و نتیجه شبیه‌سازی آن در صفحه بعد، نشان داده خواهد شد.

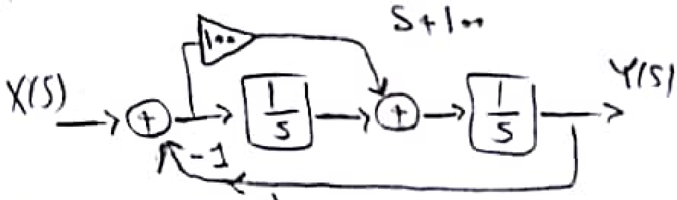
بلاک دیاگرام: $\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s+1}{s^2+2s+1} \rightarrow Y(s)=\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}(X(s)-Y(s))+2X(s)-2Y(s)\right)$



ه) $H(s)=\frac{100s+1}{s^2+100s+1} = \frac{\alpha}{s+100} + \frac{\beta}{s+0.01} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=100\\ 100\beta+0.01\alpha=1\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}\beta=0\\ \alpha=100\end{matrix} \Rightarrow H(s) \simeq \frac{100}{s+100}$ دست راستی

$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} \simeq \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{100}{s+100}\right\} = 100e^{-100t}u(t) \Big\}$

$\Rightarrow$

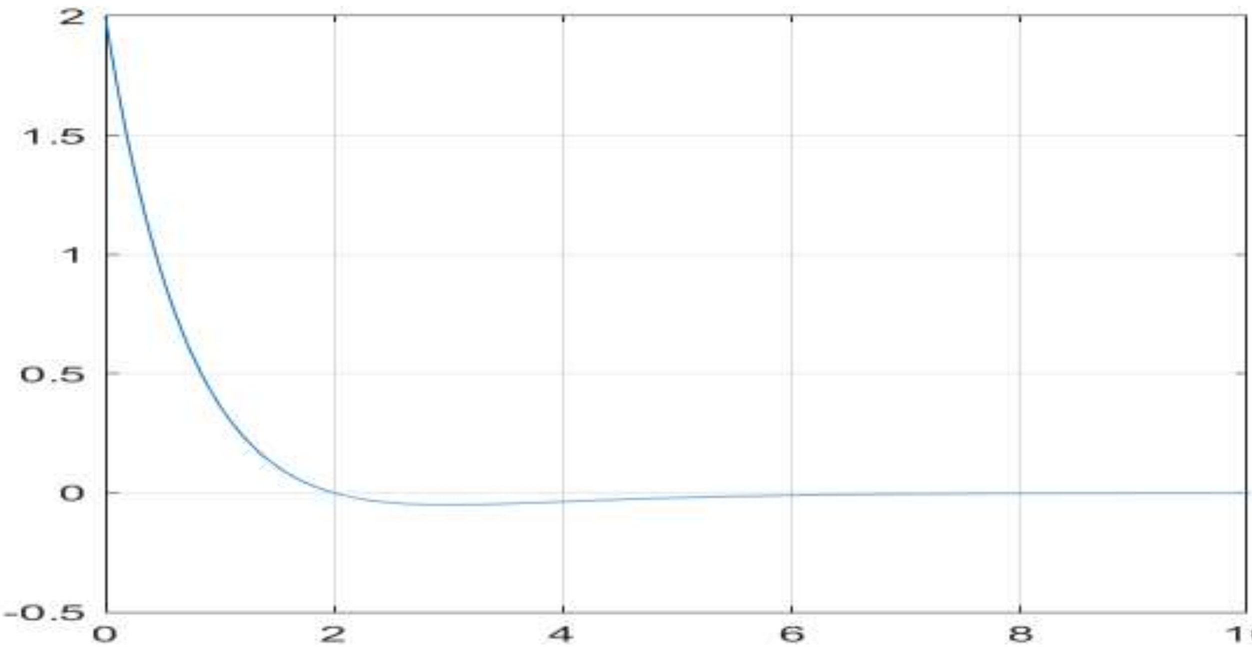


بلاک دیاگرام: $H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{100s+1}{s^2+100s+1} \Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}(X(s)-Y(s))+100(X(s)-Y(s))\right)$

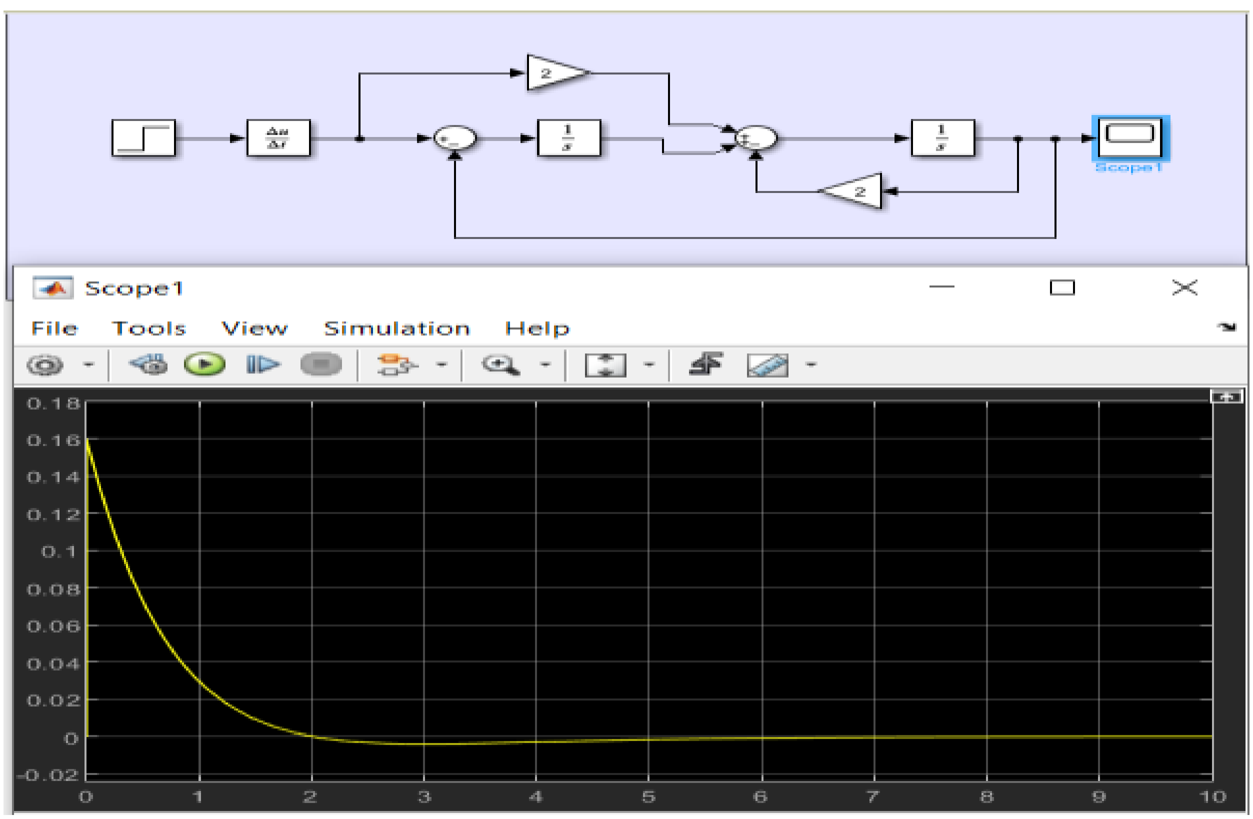
رسم این سیگنال و نتیجه شبیه‌سازی آن در دو صفحه بعد قابل مشاهده است.

مورد (د):

قسمت رسم سیگنال پاسخ ضربه : $2e^{-t}.u(t) - t.e^{-t}.u(t)$



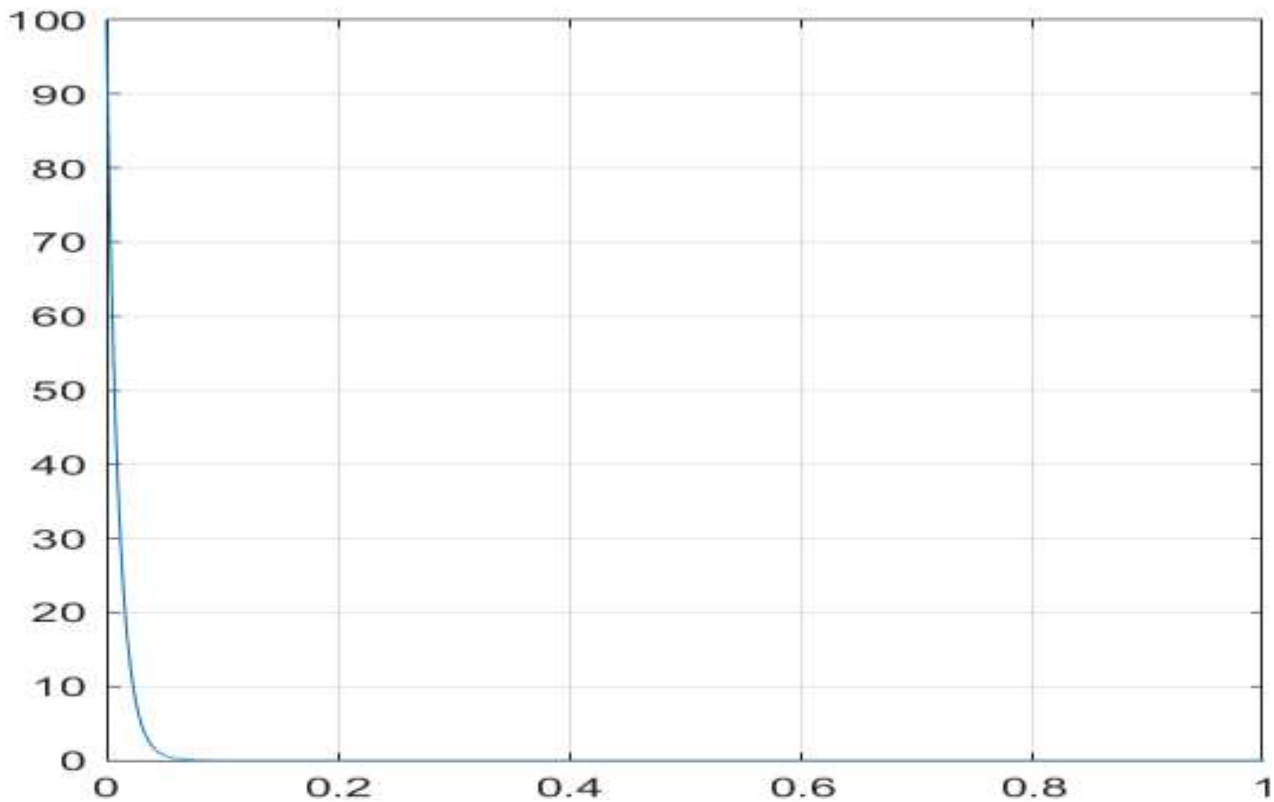
قسمت شبیه سازی در Simulink :



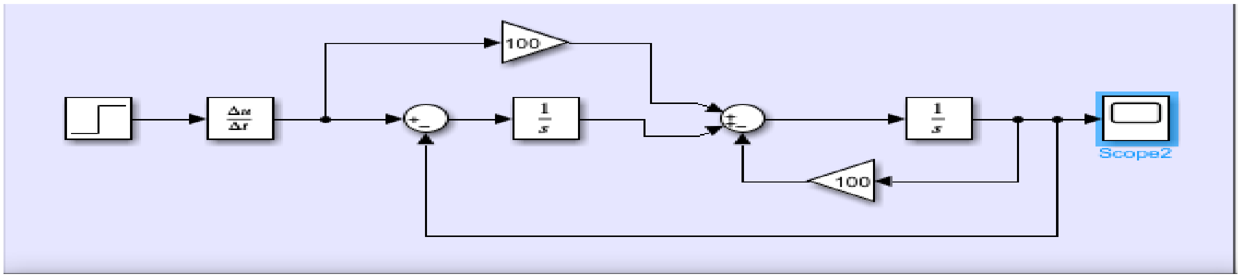
همان طور که مشخص است، نتیجه شبیه سازی با نتیجه تئوری یکسان است و سیگنال خروجی که همان میزان نوسانات کابین اتومبیل است، حالت میرا دارد و بعد از چند ثانیه از بین می رود. تنها تفاوت سیگنال شبیه سازی با سیگنال مورد انتظار، مقدار دامنه است که این به خاطر این است که سیگنال ورودی به بلاک شبیه ساز دقیقا ضربه نیست.

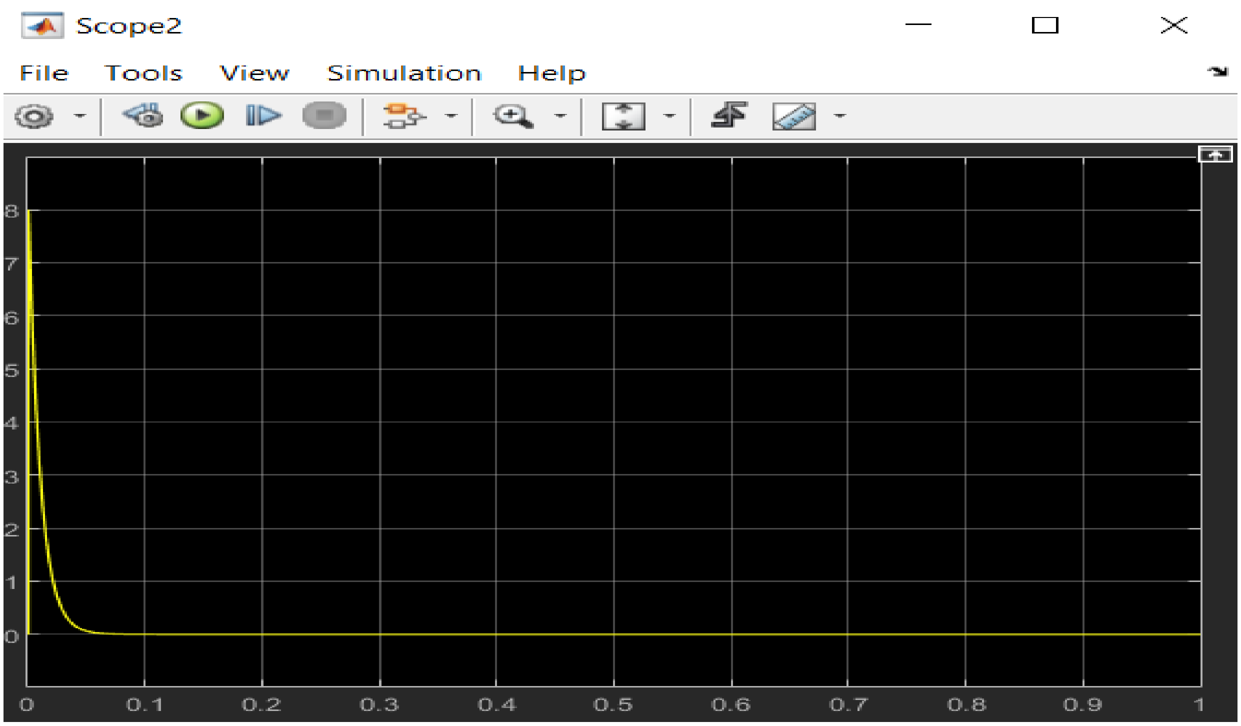
مورد (و):

قسمت رسم سیگنال پاسخ ضربه مورد انتظار: $100\ e^{-100t}u(t)$



قسمت مربوط به شبیه سازی در Simulink :





مشاهده می شود که در این حالت هم، تنیجه حالت تئوری و شبیه ساز یکی است و در این حالت نسبت به دو حالت قبلی بسیار سریع تر، سیگنال خروجی میرا می شود. در این حالت هم تفاوت دامنه بین سیگنال تئوری و شبیه سازی شده را به دلیل دقیق نبودن سیگنال ورودی به شبیه ساز، داریم.

مورد (ه) : حالت (و)، حالت بهتری برای سیستم تعلیق کننده یک اتومبیل است زیرا در آن، همان طور که در نمودارها دیدیم، سیگنال خروجی یا همان نوسانات حاصل از ورودی ضربه (که معمولا در دست انداز ها هم ورودی ضربه داریم) بسیار سریع از بین می رود و به حالت میرا در می آید.

بخش ۳ الف) از آن جا که در لاپلاس یک طرفه، از صفر تا $+\infty$ انتگرال گرفته می شود پس می توان گفت سیگنال های ورودی در حوزه زمان دست راستی هستند و ROC متناظر در حوزه لاپلاس نیز، دست راستی است.

همچنین برای تبدیل لاپلاس یک طرفه گرفتن از معادله، از خاصیت زیر استفاده می کنیم:

$$\frac{dx(t)}{dt} \to sX(s) - x(0^-) \qquad \left\{ \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \,,\; y(0^-)=1 \,,\; y'(0^-)=1 \,,\; x(t)=5u(t) \right.$$

$$\xrightarrow{UL} s(sY(s)-1) - 1 + 3(sY(s)-1) + 2Y(s) = 5X(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}X(s) + \frac{s+4}{s^2+3s+2}$$

همان طور که مشاهده می شود $Y(s)$، به صورت جمع دو term درآمد که در یکی از آن ها $X(s)$ دخیل است به طوری که مثلاً اگر $X(s)$ (یا $x(t)$) صفر شود، آن ترم نیز حذف می شود. پس می توان فهمید که ترم اول عبارت سمت راست ($\frac{1}{s^2+3s+2}X(s)$) یا تبدیل لاپلاس معکوس آن، پاسخ ناشی از ورودی است. و ترم دوم ($\frac{s+4}{s^2+3s+2}$) ناشی از شرایط اولیه است و به ورودی یا $X(s)$ ($x(t)$) وابسته نیست.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \xrightarrow[X(s)]{5u(t)\to\frac{5}{s}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)(s+1)}\times\frac{5}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{(s+2)(s+1)}\right\} =$$

حاصل از ورودی

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2{,}5}{s} + \frac{2{,}5}{s+2} + \frac{-5}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+1}\right\} = u(t)\left(2{,}5 + 2{,}5e^{-2t} - 5e^{-t}\right) +$$

$$u(t)\left(3e^{-t} - 2e^{-2t}\right)$$ حاصل از شرایط اولیه

$$\Rightarrow y(t) = u(t)\left(2{,}5 + 2{,}5e^{-2t} - 5e^{-t}\right) + u(t)\left(3e^{-t} - 2e^{-2t}\right)$$

* توجه شود که پاسخ $y(t)$ که از لاپلاس یک طرفه به دست آمد، برای $t \geq 0^+$ برقرار است. اگر جواب دقیق تر $y(t)$ را بخواهیم، باید به این جواب، $\{1 = y(0^-) \,,\; 1 = y'(0^-)\}$ را نیز اضافه کنیم.

قسمت (ب)

کد زده شده برای این قسمت در فایل اسکریپت متلب به نام Q3.m که در کنار گزارش آپلود شده، قابل مشاهده است. در تصویر زیر، دو نمودار یکی مربوط جواب تئوری و یکی جواب متلب برای معادله بیان شده، آمده است که همان طور که مشخص است، این دو جواب با هم یکسان هستند.