Subject: جلسه ۵
Year. ۱۴۰۰ Month. ۷ Date. ۱۱

موضوع: روابط بازگشتی: درخت بازگشت _ قضیه اصلی

$T(n) = \underbrace{2T(\frac{n}{2})}_{\text{شکستن به دو تا آرایه}} + \underbrace{O(n)}_{\text{ادغام}} \to \Theta(n)$ $\quad T(1) = O(1)$

$T(1) \le c_1 \qquad T(n) \le 2T(\frac{n}{2}) + c_2 n$

(مساوی حساب می‌کنیم ولی در اصل فرقی ندارد)

روش درخت بازگشت

$T(n) + c_2 n \longrightarrow c_2 n$

$T(\frac{n}{2}) + c_2\frac{n}{2} \quad T(\frac{n}{2}) + c_2\frac{n}{2} \longrightarrow c_2 n$

$T(\frac{n}{4}) \quad T(\frac{n}{4}) \quad T(\frac{n}{4}) \quad T(\frac{n}{4}) \longrightarrow c_2 n$

$\vdots$

$T(1) \to c_1$

تعداد برگ‌ها در سطح آخر $\longrightarrow 2^{\log n} = n$

$4 \to 2, 2 \to 1, 1, 1, 1 \quad \to \log 4 = 2$

ارتفاع درخت $\log_2 n$ است.

$T(n) = \log n \times c_2 n + n \times c_1 = O(n \log n)$

$\Theta(n \log n)$

مثال ۲)

$T(1) = c_1 \qquad T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + c_2 n^2$

$T(n) \longrightarrow c_2 n^2$

$c_2\frac{n^2}{16} \quad T(\frac{n}{4}) \quad T(\frac{n}{4}) \quad T(\frac{n}{4}) \longrightarrow \frac{3}{16} c_2 n^2$

$T(\frac{n}{16}) \quad T(\frac{n}{16}) \quad T(\frac{n}{16}) \longrightarrow (\frac{3}{16})^2 c_2 n^2$

$\longrightarrow (\frac{3}{16})^3 c_2 n^2$

$\vdots$

$T(1) \to c_1$

ارتفاع درخت $\log_4 n$

تعداد برگ‌ها در سطر آخر $= 3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$

در هر مرحله ۳ برابر می‌شود تعداد برگ‌ها

ارتفاع درخت

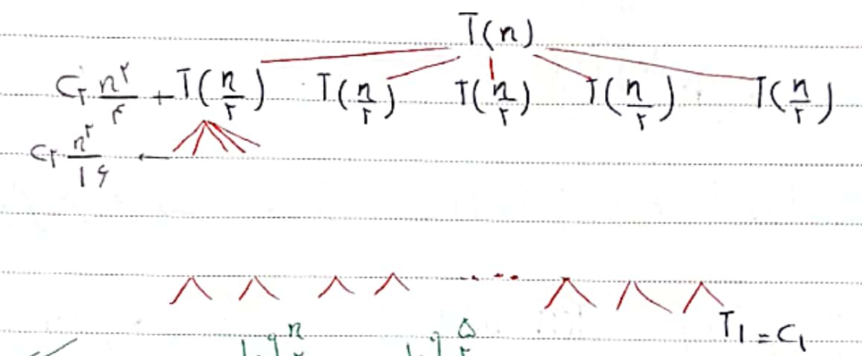
Subject: جلسه ۵
Year. ۱۴۰۰ Month. ۷ Date. ۱۱

$$T(n) = c_1 n^{\log_4^3} + c_2 n^2 \big(\underbrace{1 + \tfrac{3}{16} + (\tfrac{3}{16})^2 + \dots + (\tfrac{3}{16})^{\log_4^n}}_{\text{سری گرا که همیشه برابر مقدار ثابت می‌شود}}\big)$$

$$= O(n^2) \longrightarrow \Theta(n^2)$$

مثال ۳)

$T(n) = 5T(\frac{n}{2}) + c_2 n^2 \qquad T_1 = C_1$



$c_2 n^2$

$\frac{5}{4} c_2 n^2$

$(\frac{5}{4})^2 c_2 n^2$

$(\frac{5}{4})^3 c_2 n^2$

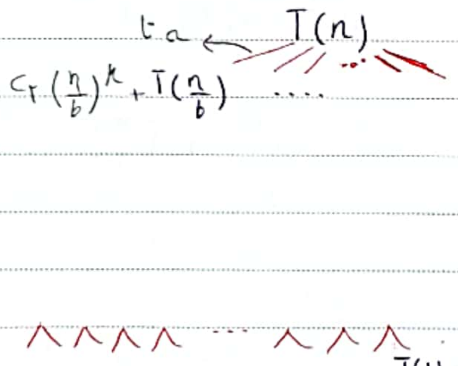
تعداد برگ $= 5^{\log_2^n} = n^{\log_2^5}$ ارتفاع درخت: $\log_2^n$

$$T(n) = c_1 n^{\log_2^5} + c_2 n^2 \left[1 + \tfrac{5}{4} + (\tfrac{5}{4})^2 + \dots + (\tfrac{5}{4})^{\log_2^n}\right]$$

$$T(n) = O(n^{\log_2^5}) = O(n^{2.32})$$

مثال ۴) فرم کلی درخت بازگشتی

$T_1 = C_1 \qquad T(n) = aT(\frac{n}{b}) + c_2 n^k$



$c_2 n^k$

$\frac{a}{b^k} c_2 n^k$

$(\frac{a}{b^k})^2 c_2 n^k$

$\vdots$

$T(1) = C_1$

تعداد برگها: $a^{\log_b^n} = n^{\log_b^a}$ ارتفاع: $\log_b^n$

Subject: جلسه ۵
Year: ۱۴۰۰ Month: ۷ Date: ۱۱ ( )

$$T(n) = c_1 n^{\log_b^a} + c_2 n^k \underbrace{\left[1 + \frac{a}{b^k} + \left(\frac{a}{b^k}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a}{b^k}\right)^{\log_b^n}\right]}_{*}$$

$$k > \log_b^a \longrightarrow b^k > a \longrightarrow O(n^k)$$

این عبارت * یک دنباله‌ی هندسی است که
t جمله هم که برود از هم متباینات می‌شود

$$k = \log_b^a \longrightarrow b^k = a \longrightarrow O(n^k \log^n)$$

$$k < \log_b^a \longrightarrow b^k < a \longrightarrow O(n^{\log_b^a})$$

$\log n = O(n^{\varepsilon})$ به ازای هر ε رشد n^{ε} بزرگ‌تر از (اکیداً بزرگ‌تر از) $\log^n$ است.

قضیه اصلی:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) \qquad T(1) = O(1)$$

مقایسه $f(n)$ با $n^{\log_b^a}$:

case 1: $f(n) = O(n^{\log_b^a - \varepsilon}) \Longrightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b^a})$

case 2: $f(n) = \Theta(n^{\log_b^a}) \Longrightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b^a} \times \log^n)$

case 3: $f(n) = \Omega(n^{\log_b^a + \varepsilon}) \Longrightarrow T(n) = \Theta(f(n))$

مثال)

$$T(n) = \underset{a}{3}\, T\left(\frac{n}{\underset{b}{2}}\right) + \underset{f(n)}{n^2}$$

$n^{\log_2^3} \longleftarrow n^2$ رشد بیشتری داره case 3

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

Subject: جلسه ۵

Year. ۱۴۰۰ Month. ۷ Date. ۱۱ ( )

$T(n) = 3\,T(\frac{n}{2}) + O(n^2)$ $\qquad$ $T(n) = O(n^2)$

$T(n) = 3\,T(\frac{n}{2}) + \Omega(n^2)$ $\qquad$ $T(n) = \Omega(n^2)$

$\Theta(n) = 3\,T(\frac{n}{2}) + \Theta(n^2)$ $\qquad$ $T(n) = \Theta(n^2)$

مثال:

$T(n) = 3\,T(\frac{n}{3}) + \sqrt{n}$

$n^{\log_b^a} = n^{\log_3^3} = n \quad \cdot \quad n^{\frac{1}{2}}$

$T(n) = \Theta(n)$ $\qquad$ $\sqrt{n} \rightarrow O(\sqrt{n})$ $\quad$ $\Theta(n)$

$\sqrt{n} \rightarrow \Omega(\sqrt{n})$ $\quad$ $\Omega(n)$

← اگر جای $\sqrt{n}$، $O(\sqrt{n})$ یا $\Omega(\sqrt{n})$ بود جواب چه می‌شود؟

مثال:

$T(n) = 16\,T(\frac{n}{4}) + n!$

$n^{\log_4^{16}} = n^2$ $\qquad$ $f(n) = n!$

$T(n) = \Theta(n!)$

مثال:

$T(n) = 3\,T(\frac{n}{3}) + \frac{n}{2}$

$n^{\log_b^a} = n$ $\qquad$ $f(n) = \frac{n}{2}$

$n = \Theta(\frac{n}{2})$

Case 2: $T(n) = \Theta(n \log^n)$

مثال:

$T(n) = 3\,T(\frac{n}{3}) + \frac{n}{\log n}$

$n^{\log_3^3} = n$ $\qquad$ $\frac{n}{\log n}$

$\frac{n}{\log n} = O(n^{1-\varepsilon})$ غلط

$\frac{n}{\log n} = \Omega(n^{1+\varepsilon})$ غلط

$\frac{n}{\log n} = \Theta(n)$ غلط

توجه: این مثال با قضیه اصلی نمی‌توان حل کرد.