ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۰۱ــ۰۰

مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

یادآوری جلسه پنجم — **روابط بازگشتی: درخت بازگشت و قضیه‌ی اصلی** — علیرضا حبیب‌زاده

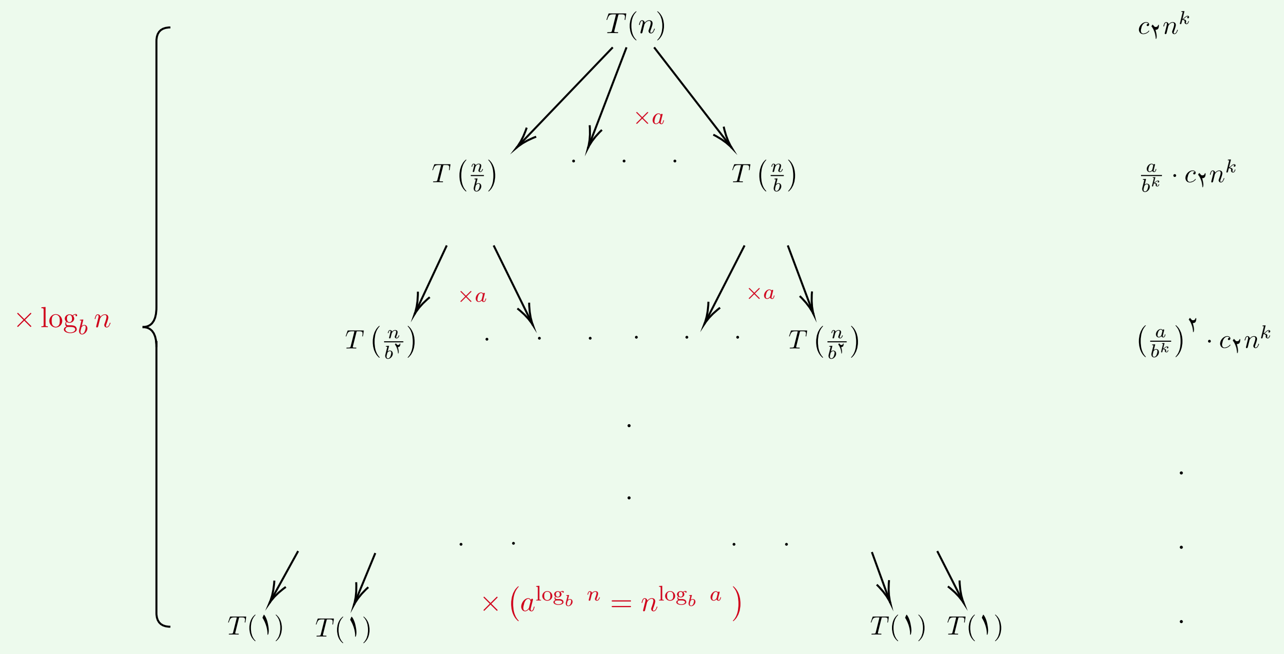
در جلسه‌ی قبل به تحلیل روابط بازگشتی با استفاده از درخت بازگشت و قضیه اصلی پرداختیم. می‌خواهیم رابطه بازگشتی به فرم کلی زیر را با استفاده از درخت بازگشت بررسی کنیم:

$$T(۱) = O(۱) \quad , \quad T(n) = aT(\frac{n}{b}) + O(n^k)$$

برای تحلیل این رابطه، بایستی ابتدا $O(n^k)$ را به صورت دقیق‌تر بنویسیم. با توجه به تعریف O، مقادیر $c_۱$ و $c_۲$ وجود دارد و می‌توانیم رابطه را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$T(۱) \leq c_۱ \quad , \quad T(n) \leq aT(\frac{n}{b}) + c_۲n^k$$

حال رابطه را به کمک درخت بازگشت حل می‌کنیم:



با توجه به درخت بازگشت می‌توان نوشت:

$$T(n) \leq c_۱n^{\log_b a} + c_۲n^k \left[۱ + \frac{a}{b^k} + (\frac{a}{b^k})^۲ + \cdots + (\frac{a}{b^k})^{\log_b n}\right]$$

برای رابطه بالا سه حالت را بررسی می‌کنیم:

۱. $k > \log_b a \quad \Rightarrow \quad b^k > a \quad \Rightarrow \quad T(n) = \mathcal{O}(n^k)$

۲. $k = \log_b a \quad \Rightarrow \quad b^k = a \quad \Rightarrow \quad T(n) = \mathcal{O}(n^k \log n)$

۳. $k < \log_b a \quad \Rightarrow \quad b^k < a \quad \Rightarrow \quad T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a})$

در حالت اول اگر تعداد جملات عبارت داخل براکت بینهایت باشد، به صورت یک دنباله هندسی با قدر نسبت کوچک‌تر از یک است و به عدد ثابتی میل می‌کند پس از مرتبه $\mathcal{O}(۱)$ است.

در حالت دوم تعداد جملات برابر $\log_b n$ و مقدار آن‌ها برابر یک بوده و بنابراین از مرتبه $\mathcal{O}(\log n)$ می‌باشد.

در حالت سوم نیز با حساب کردن عبارت درون براکت می‌توان نشان داد مرتبه‌ی کلی عبارت برابر با $\mathcal{O}(n^{\log_b a})$ می‌شود (اثبات دقیق این بخش در cw در دسترس است).

این مثال در واقع ما را به **(قضیه‌ی اصلی)** می‌رساند که فرم کلی آن به صورت زیر است:

$$T(۱) = \mathcal{O}(۱) \quad , \quad T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$$

در این صورت، سه حالت داریم:

۱. $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \varepsilon}) \quad \Rightarrow \quad T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

۲. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \quad \Rightarrow \quad T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

۳. $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) \quad \Rightarrow \quad T(n) = \Theta(f(n))$

مثال۱) رابطه بازگشتی $T(n) = ۳T(\frac{n}{۳}) + \sqrt{n}$ را به کمک قضیه اصلی حل کنید.

$$\log_b a = \log_۳ ۳ = ۱$$

$$f(n) = \sqrt{n} = n^{(\frac{۱}{۲})} = \mathcal{O}(n^{\log_۳ ۳ - ۰/۵}) \xrightarrow{\text{حالت ۱}} T(n) = \Theta(n^{\log_۳ ۳}) = \Theta(n)$$

مثال۲) رابطه بازگشتی $T(n) = ۳T(\frac{n}{۳}) + \frac{n}{\log n}$ را به کمک قضیه اصلی تحلیل کنید.

در این رابطه $f(n) = \frac{n}{\log n}$ است که نمی‌توان آن را به صورت $\mathcal{O}(n^{\log_b a - \varepsilon})$ نوشت بنابراین هیچ کدام از سه حالتی که برای قضیه‌ی اصلی گفتیم صدق نمی‌کند. پس قضیه اصلی همه‌ی حالت‌ها را شامل نمی‌شود.

پرسش: به کمک قضیه اصلی مرتبه زمانی روابط بازگشتی زیر را به‌دست آورید.

۱. $T(n) = ۴T(\frac{n}{۲}) + O(n^۲)$

۲. $T(n) = ۳T(\frac{n}{۴}) + \sqrt[۳]{n^۲}$

پاسخ‌های خود را تا قبل از شروع کلاس به این آدرس ارسال کنید.