مثال:

معادله دیفرانسیل توصیف کننده یک سیستم دینامیکی بصورت زیر است. پاسخ ضربه این سیستم را بیابید:

$$\begin{cases} \ddot{y} - 5\dot{y} + 6 = 2\dot{x} + x \\ y(0) = 1 \qquad \dot{y}(0) = -1 \end{cases}$$

حل: برای یافتن پاسخ ضربه سیستم دینامیکی فوق، ابتدا پاسخ ضربه این سیستم را می‌یابیم:

$$\ddot{y} - 5\dot{y} + 6 = x \xrightarrow{\text{حل}} \begin{cases} \ddot{h}_1 - 5\dot{h}_1 + 6 = 0 \\ h_1(0) = 0 \quad \dot{h}_1(0) = 1 \end{cases} \xRightarrow{\text{معادله مشخصه}} s^2 - 5s + 6 = 0 \rightarrow s_1 = -2,\ s_2 = -3$$

$$\Rightarrow h_1(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \xrightarrow{\text{شرایط اولیه}} \begin{array}{l} h_1(0) = 0 = A + B \Rightarrow A = -B \\ h_1'(0) = 1 = As_1 + Bs_2 = -2A - 3B = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h_1(t) = \left(e^{-2t} - e^{-3t}\right) \cdot u(t)$$

وحالا پاسخ ضربه سیستم اصلی بصورت زیر خواهد بود:

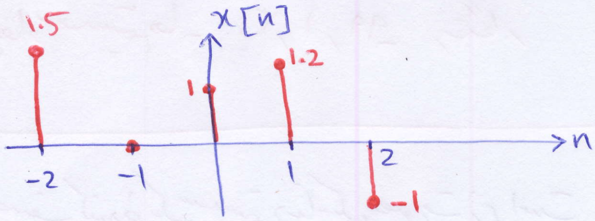
$$\Rightarrow h(t) = 2\left(h_1(t)\right)' + h_1(t)$$

$$\Rightarrow h(t) = 2\left[\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right) \cdot u(t)\right]' + \left[\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right) \cdot u(t)\right] = 2\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right) \cdot \delta(t) +$$

$$+ 2\left(-2e^{-2t} + 3e^{-3t}\right) \cdot u(t) + \left(e^{-2t} - e^{-3t}\right) u(t)$$

$$\Rightarrow h(t) = \left(-3e^{-2t} + 5e^{-3t}\right) u(t) + 2\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)\delta(t)$$

page 2

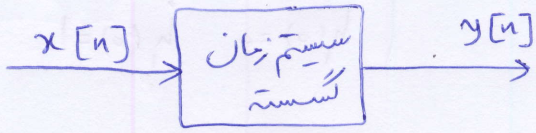


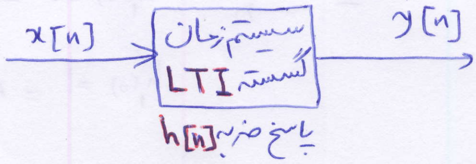
سیگنال‌ها و سیستم‌های زمان گسسته :

$$x[-2] = +1.5,\quad x[-1] = 0,\quad x[0] = 1,\quad x[1] = 1.2,\quad x[2] = -1$$

$x[n] \longrightarrow n \in \mathbb{Z}$

عدد صحیح



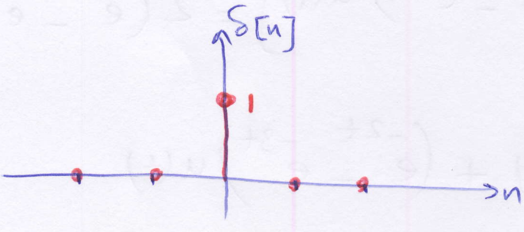


سیگنال‌ها و یا به عبارت بهتر، دنباله‌های ویژه :

۱- دنباله‌ی kronecker :

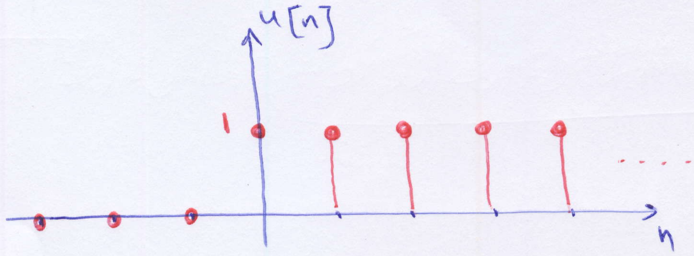
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & ; \quad n = 0 \\ 0 & ; \quad n \neq 0 \end{cases}$$

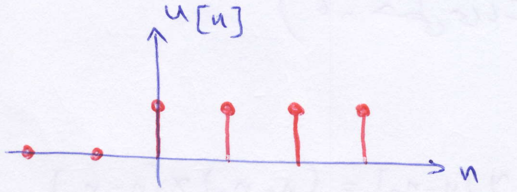
در اینجا مسأله‌ی مساحت زیر سطح نمودار مطرح نیست بلکه مسأله‌ی دامنه مطرح است.

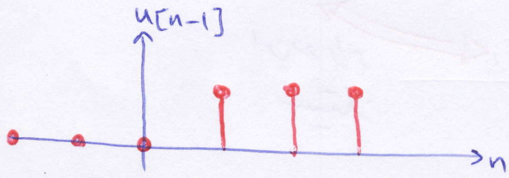


2- دنباله‌ی پله‌ی واحد: $u[n]$

$$u[n] = \begin{cases} 1 & ; \quad n \geq 0 \\ 0 & ; \quad n < 0 \end{cases}$$







$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \cdots$$

$$\Rightarrow \quad \delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \cdots = \sum_{m=0}^{+\infty} \delta[n-m] = \boxed{\sum_{l=-\infty}^{n} \delta[l]}$$

خاصیت مهم تابع یا همان دنباله‌ی $\delta[n]$:

$$x[n] \cdot \delta[n-n_0] = x[n_0] \cdot \delta[n-n_0]$$

در مورد پیوسته‌ها داشتیم $\Rightarrow \quad x(t) \cdot \delta(t-t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t-t_0)$

خواص سیستم‌ها:

به عنوان مثال سیستم $y[n] = nx[n]$

این سیستم:

1- بدون حافظه است.
2- علّی می‌باشد.
3- ناپایدار می‌باشد.
4- معکوس ناپذیر است.
5- تغییرپذیر با زمان است.
6- خطی می‌باشد.

به عنوان نمونه، در مورد خاصیت تغییرناپذیری با زمان داریم:

$$x_1[n] \xrightarrow{\text{سیستم}} y_1[n] = nx_1[n] \xrightarrow{\text{شیفت به اندازه } n_0} y_1[n-n_0] = (n-n_0)\,x_1[n-n_0]$$

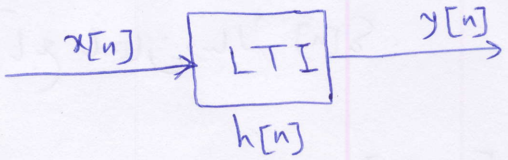
$$x_2[n] \xrightarrow{\text{سیستم}} y_2[n] = n\,x_2[n] = n\,x_1[n-n_0]$$

این دو برابر نیستند.

می‌دانیم $x_2[n] = x_1[n-n_0]$ است.

پس سیستم فوق، تغییرپذیر با زمان است.

سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI):



پاسخ ضربه $h[n] = y_{in}[n] \Big|_{x[n]=\delta[n]}$

یعنی حالت اولیه صفر

و اما خواص سیستمهای LTI با توجه به پاسخ ضربه:

۱ـ حافظه: یک سیستم LTI بدون حافظه است اگر $h[n] = k\,\delta[n]$ باشد.

۲ـ معکوس پذیری:

در حوزهٔ زمان $h[n] * h_i[n] = \delta[n]$

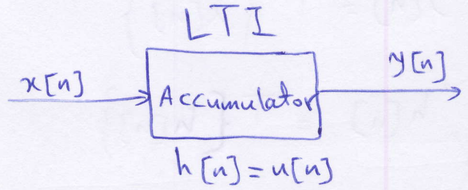
در حوزهٔ فرکانس: $H(z) \cdot H_i(z) = 1 \Rightarrow H_i(z) = \dfrac{1}{H(z)}$

۳ـ علّی بودن: یک سیستم LTI زمان گسسته، علّی است اگر و تنها اگر دنبالهٔ $h[n]$ علّی باشد.

۴ـ پایداری: یک سیستم LTI زمان گسسته، پایدار است اگر و تنها اگر دنبالهٔ $h[n]$ مطلقاً جمع پذیر باشد یعنی:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$$

به عنوان مثال: سیستم جمع کننده (Accumulator) یک سیستم LTI است که پاسخ ضربهٔ آن $u[n]$ است.



$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot u[n-k]$$

$$u[n-k] = \begin{cases} 1 & ; \quad k \leq n \\ 0 & ; \quad k > n \end{cases}$$

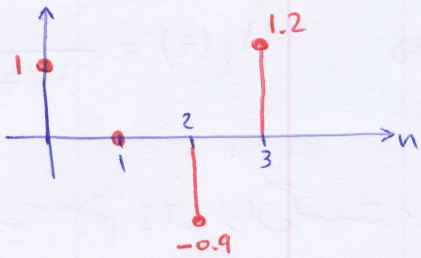
$$= \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

کانولوشن زمان گسسته:

یک نکته: هر سیگنال زمان گسسته $x[n]$ را می‌توان با رابطهٔ زیر هم نمایش داد:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].\delta[n-k]$$

به عنوان مثال →

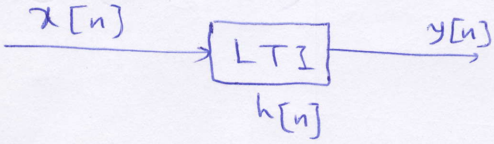


$$x[n] = \delta[n] - 0.9\,\delta[n-2] + 1.2\,\delta[n-3]$$

در یک سیستم زمان گسستهٔ خطی و تغییرناپذیر با زمان داریم: $y[n] = x[n] * h[n]$ که در آن داریم:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[n-k]$$

اثبات:



$$y[n] = T\{x[n]\}$$

$$h[n] = T\{\delta[n]\}$$

تغییرناپذیری با زمان

$$h[n-k] = T\{\delta[n-k]\}$$

$$\Rightarrow\ y[n] = T\{x[n]\} = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].\delta[n-k]\right\}$$

با استفاده از خاصیت خطی بودن سیستم

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].\,T\{\delta[n-k]\}$$

یک پارامتر

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].\,h[n-k]$$

متغیر مستقل

دو رابطهٔ مهم و کاربردی در محاسبهٔ کانولوشن زمان گسسته:

رابطهٔ اوّل

$$\sum_{i=0}^{N} a^{i} = \begin{cases} N+1 & ; \quad a=1 \\ \dfrac{1-a^{N+1}}{1-a} & ; \quad a\neq 1 \end{cases}$$

مثال $\longrightarrow$

$$\sum_{i=0}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{6}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{63}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\times 63}{64} = \boxed{\frac{63}{32}}$$

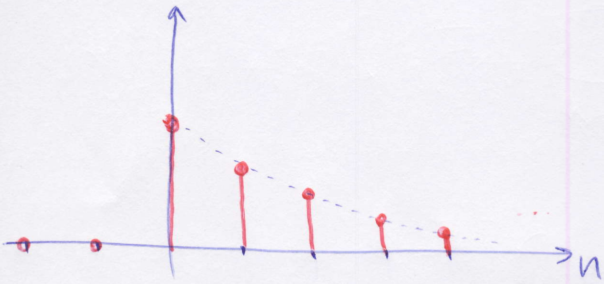
رابطهٔ دوّم

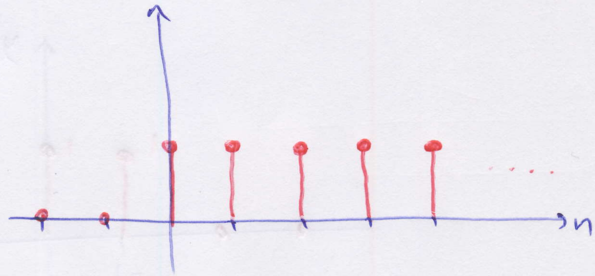
$$\sum_{i=0}^{\infty} a^{i} = \frac{1}{1-a} \quad ; \quad |a|<1$$

مثال: با فرض $|\alpha|<1$ ، حاصل $y[n]=x[n]*h[n]$ را محاسبه کنید.

$$x[n]=\alpha^{n}u[n] \quad ; \quad |\alpha|<1$$

$$h[n]=u[n]$$



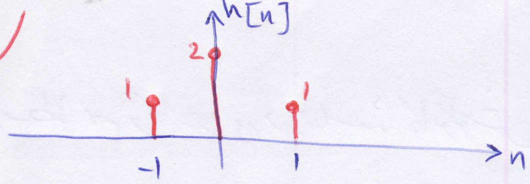


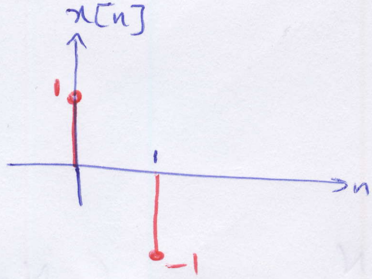
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^{k} u[k].u[n-k] = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^{k} u[n-k]$$

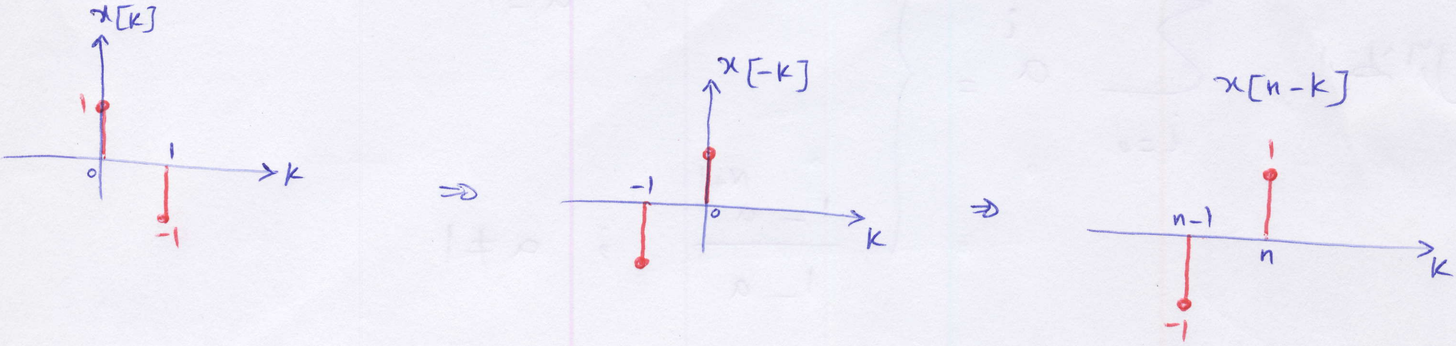
$$= \sum_{k=0}^{n} \alpha^{k} = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \Rightarrow y[n]=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}.u[n]$$

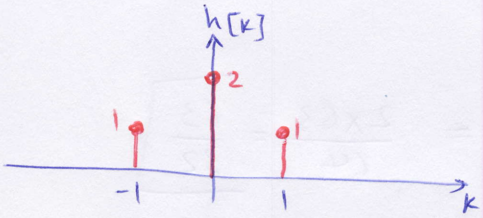
page 8

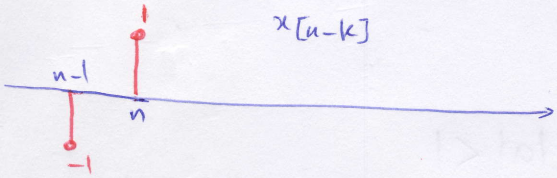
مثال:



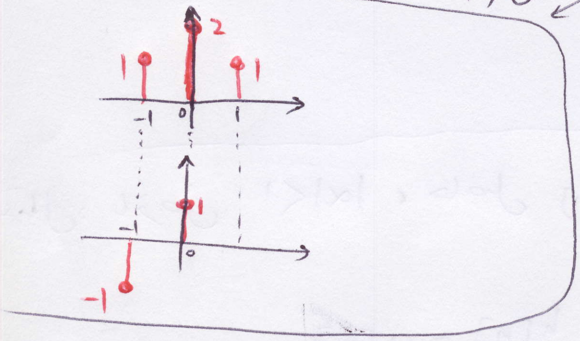








به عنوان نمونه



حالت اول: $n \leq -2$ ⇒ هم‌پوشانی ندارند ⇒ $y[n] = 0$

حالت دوم: $n = -1$ ⇒ $y[n] = 1 \times 1 = 1$

حالت سوم $n = 0$ ⇒ $y[n] = 1 \times 2 + (-1) \times 1 = 1$

حالت چهارم $n = 1$ ⇒ $y[n] = 1 \times 1 + 2 \times (-1) = -1$

حالت پنجم $n = 2$ ⇒ $y[n] = 1 \times (-1) = -1$

حالت ششم $n \geq 3$ ⇒ $y[n] = 0$