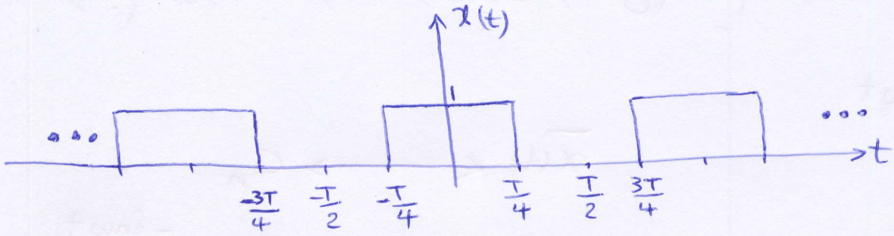
* اگر سیگنال $\bar{x}(t)$ زوج باشد آنگاه تمامی ضرایب $b_n = 0$ خواهند بود و فقط ترم‌های کسینوس را خواهیم داشت.

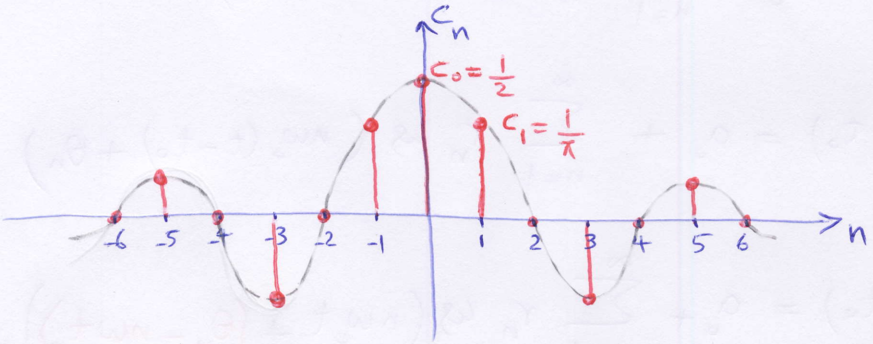
$$\Rightarrow \quad \bar{x}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t)$$

مثال:

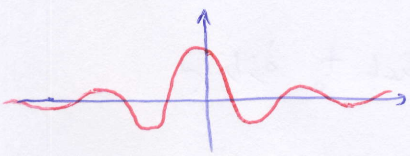


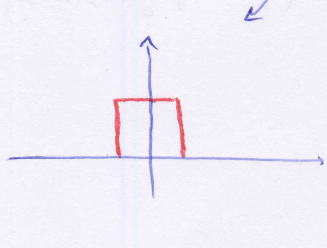
$$c_n = \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} \quad \Rightarrow \quad c_0 = \frac{1}{2} \qquad c_{2k} = 0 \qquad c_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{\pi(2k+1)}$$

$$\Rightarrow \quad a_0 = c_0 = \frac{1}{2} \qquad a_{2k} = 0 \qquad a_{2k+1} = \frac{2(-1)^k}{\pi(2k+1)}$$



همانگونه که دیده می‌شود، ضرایب c_n همان نمونه‌های تابع sinc هستند. در آینده خواهیم دید که تابع sinc،
تبدیل فوریه تابع rect است.





* اگر تابع $\bar{x}(t)$ فرد باشد آنگاه تمامی ضرایب $a_n=0$ خواهند بود و $a_0=0$ خواهد بود و فقط ترم‌های سینوسی را داریم.

$$\bar{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

* اگر تابع متناوب $\bar{x}(t)$ را شیفت (انتقال) دهیم، ضرایب سری فوریه تابع شیفت یافته بصورت زیر خواهند بود:

فرم نمایی $$\bar{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+jn\omega_0 t}$$

$$\bar{x}(t) \longleftrightarrow c_n$$

$$\bar{x}(t-t_0) \longleftrightarrow c_n \cdot e^{-jn\omega_0 t_0}$$

$$\Rightarrow \bar{x}(t-t_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{+jn\omega_0 (t-t_0)}$$

$$\Rightarrow \bar{x}(t-t_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{-jn\omega_0 t_0} \cdot e^{+jn\omega_0 t}$$

فرم قطبی $$\bar{x}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$\Rightarrow \bar{x}(t-t_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(n\omega_0 (t-t_0) + \theta_n)$$

$$\Rightarrow \bar{x}(t-t_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(n\omega_0 t + (\theta_n - n\omega_0 t_0))$$

یعنی شیفت (انتقال)، هیچ تأثیری بر روی دامنه‌ها هارمونیک‌ها ندارد اما فاز آنها را کاهش می‌دهد، مثلاً انتقال به اندازه t_0 باعث می‌شود که فاز هارمونیک k ام به اندازه $k\omega_0 t_0$ کم شود.

* اگر از تابع متناوب $\overline{x}(t)$ مشتق بگیریم، ضرایب سری فوریه تابع مشتق به چه صورت خواهند بود؟

فرم نمایی

$$\overline{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot e^{+jn\omega_0 t}$$

$$\overline{x}(t) \longleftrightarrow C_n$$

$$\overline{x'}(t) \longleftrightarrow jn\omega_0 C_n$$

$$\Rightarrow \quad \overline{x'}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot jn\omega_0 \cdot e^{+jn\omega_0 t}$$

فرم کارتزین

$$\overline{x}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{x'}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0 b_n \cos(n\omega_0 t) - n\omega_0 a_n \sin(n\omega_0 t)$$

کانولوشن دایره‌ای : Circular Convolution

اگر $\overline{x_1}(t)$ و $\overline{x_2}(t)$ دو تابع متناوب با دوره تناوب T باشند، آنگاه کانولوشن دایره‌ای آنها تابع $\overline{x}(t)$ خواهد بود که خود، تابعی متناوب با دوره تناوب T است.

$$\overline{x}(t) = \overline{x_1}(t) * \overline{x_2}(t) = \overline{x_2}(t) * \overline{x_1}(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f_1(t-\tau)\, f_2(\tau) \cdot d\tau$$

$$= x_1(t) * \overline{x_2}(t) = \overline{x_2}(t) * x_1(t)$$

$$= \overline{x_1}(t) * x_2(t) = x_2(t) * \overline{x_1}(t)$$

* اگر ضرایب سری فوریه $\overline{x}(t)$ را C_n، ضرایب سری فوریه $\overline{x_1}(t)$ را d_n و ضرایب سری فوریه $\overline{x_2}(t)$ را e_n بنامیم آنگاه:

$$\overline{x}(t) \longleftrightarrow C_n$$

$$\overline{x_1}(t) \longleftrightarrow d_n \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_n = T d_n e_n}$$

$$\overline{x_2}(t) \longleftrightarrow e_n$$

اثبات:

داریم: $\begin{cases} \bar{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+jn\omega_0 t} \\ \bar{x}_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \cdot e^{+jn\omega_0 t} \\ \bar{x}_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e_n \cdot e^{+jn\omega_0 t} \end{cases}$ $\quad \bar{x}(t) = \bar{x}_1(t) * \bar{x}_2(t)$

$$\bar{x}(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_1(t-\tau) \cdot x_2(\tau) \cdot d\tau = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \cdot e^{+jn\omega_0 (t-\tau)} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e_m \cdot e^{+jm\omega_0 \tau} \cdot d\tau$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_n e_m e^{+jn\omega_0 t} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{j(m-n)\omega_0 \tau} \cdot d\tau$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T d_n e_n \cdot e^{+jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+jn\omega_0 t}$$

$$c_n = T d_n e_n$$

---

* اگر تابع متناوب $\bar{x}(t)$، برابر با حاصلضرب دو تابع متناوب $\bar{x}_1(t)$ و $\bar{x}_2(t)$ باشد آنگاه خواهیم داشت:

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_1(t) \cdot \bar{x}_2(t) \Longrightarrow C_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{n-k} e_k$$

$\bar{x}(t) \longleftrightarrow c_n$

$\bar{x}_1(t) \longleftrightarrow d_n$

$\bar{x}_2(t) \longleftrightarrow e_n$

page 5

اثبات:

داریم: $C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \bar{x}(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt$

$$\Rightarrow C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \bar{x}_1(t) \cdot \bar{x}_2(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \bar{x}_1(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e_k \cdot e^{+jk\omega_0 t} \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt$$

$$\Rightarrow C_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e_k \cdot \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \bar{x}_1(t) \cdot e^{-j(n-k)\omega_0 t} \cdot dt}_{d_{n-k}}$$

$$\Rightarrow C_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e_k \cdot d_{n-k}$$

تساوی پارسوال :

اگر داشته باشیم

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \, e^{+jn\omega_0 t} \\ \\ \bar{x}_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e_n \cdot e^{+jn\omega_0 t} \end{cases}$$

$$\bar{x}_1(t) \longleftrightarrow d_n$$

$$\bar{x}_2(t) \longleftrightarrow e_n$$

آنگاه $\longrightarrow$

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \bar{x}_1^*(t) \cdot \bar{x}_2(t) \cdot dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n^* \, e_n$$

اثبات:

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \bar{x}_1^*(t) \cdot \bar{x}_2(t) \cdot dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n^* \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e_m \cdot e^{+jm\omega_0 t} \cdot dt$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_n^* \, e_m \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{+j(m-n)\omega_0 t} \cdot dt$$

$$= \boxed{\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n^* \, e_n}$$

حالت خاص قضیه پارسوال ← قضیه انرژی ← اگر $\bar{x}_1(t) = \bar{x}_2(t)$ باشد آنگاه:

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \bar{x}^*(t) \cdot \bar{x}(t) \cdot dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* \, c_n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \cdot dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

$$\int_T |x(t)|^2 \cdot dt = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

کل انرژی سیگنال $\bar{x}(t)$ در یک دوره تناوب