page 1

یکشنبه ۱۱ ,۳ ,۹۹

تبدیل لاپلاس:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

عکس تبدیل لاپلاس:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{+st} \cdot ds$$

برای محاسبهٔ عکس تبدیل لاپلاس در مورد تبدیلهای لاپلاس گویا $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ ، می‌توان از روش گسترش به کسرهای جزئی استفاده کرد:

$$X(s) = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{s + a_i}$$

برای هر جملهٔ $\frac{A_i}{s+a_i}$ ، دو انتخاب ممکن برای عکس تبدیل لاپلاس وجود دارد →

- اگر ROC مربوط به $X(s)$ در سمت راست قطب $s = -a_i$ باشد $\longrightarrow A_i e^{-a_i t} \cdot u(t)$ راست‌سو
- اگر ROC مربوط به $X(s)$ در سمت چپ قطب $s = -a_i$ باشد $\longrightarrow -A_i e^{-a_i t} \cdot u(-t)$ چپ‌سو

خواص تبدیل لاپلاس:

$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$, $ROC = R$ $\qquad$ $x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s)$, $ROC = R_1$ $\qquad$ $x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s)$, $ROC = R_2$

۱- خطی بودن تبدیل لاپلاس:

$$a x_1(t) + b x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} a X_1(s) + b X_2(s) \qquad ROC = R_1 \cap R_2 \text{ شامل}$$

2- انتقال زمانی:

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} \cdot X(s) \qquad ROC = R$$

3 - انتقال در حوزهٔ s :

$$e^{s_0 t} \cdot x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s-s_0) \qquad ROC = R + Re\{s_0\}$$

توجه کنید که اگر $X(s)$، قطب و یا صفری در $s=a$ داشته باشد، آنگاه $X(s-s_0)$، قطب و یا صفری در $s-s_0=a$، یعنی در $s=a+s_0$ خواهد داشت. یعنی قطب‌ها و صفرها هم انتقال پیدا می‌کنند.

4- تغییر مقیاس زمانی:

$$x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \qquad ROC = \frac{R}{a}$$

برای $a>1$ ⇐ ROC مربوط به $X(s)$، برای $X(\frac{s}{a})$ با ضریب $\frac{1}{a}$ فشرده خواهد شد.

برای $0<a<1$ ⇐ ROC با ضریب $\frac{1}{a}$، گسترش خواهد یافت.

برای $-1<a<0$ ⇐ ROC با ضریب $\frac{1}{|a|}$ گسترش یافته و سپس حول محور $j\omega$ وارون می‌شود.

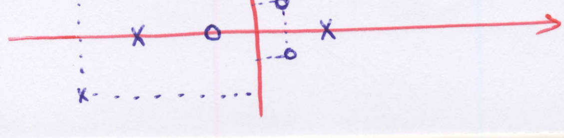
برای $a<-1$ ⇐ ROC با ضریب $\frac{1}{|a|}$ فشرده خواهد شد و سپس حول محور $j\omega$ وارون می‌گردد.

$$x(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(-s) \qquad ROC = -R$$

5- مزدوج گیری:

$$x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X^*(s^*) \qquad ROC = R$$

پس اگر $x(t)$ یک سیگنال حقیقی باشد، داریم $X(s) = X^*(s^*)$. یعنی در مورد سیگنال‌های حقیقی $x(t)$، قطبها و صفرها، مزدوج مختلط هستند. یعنی اگر $a+jb$، قطبی از $X(s)$ باشد، $a-jb$ هم قطبی از آن است و اگر $\alpha+j\beta$، صفری از $X(s)$ باشد، $\alpha-j\beta$ هم صفری از آن است.



6_ خاصیت کانولوشن:

$$x_1(t) * x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_1(s) \cdot X_2(s) \qquad ROC = R_1 \cap R_2$$ شامل

7_ مشتق گیری در حوزهٔ زمان

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} sX(s) \qquad ROC = R$$ شامل

8_ مشتق گیری در حوزهٔ s :

$$-t\,x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{dX(s)}{ds} \qquad ROC = R$$

9_ انتگرال گیری در حوزهٔ زمان:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\cdot d\alpha \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{X(s)}{s} \qquad ROC = R \cap \{Re\{s\} > 0\}$$ شامل

10_ قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی:

* اگر برای $t<0$ ، $x(t)=0$ باشد و $x(t)$ شامل هیچگونه ضربه یا توابع ویژهٔ مرتبهٔ بالاتر در مبداء نباشد، آنگاه:

قضیهٔ مقدار اولیه : $x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$

قضیهٔ مقدار نهایی : $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$

صفحهٔ 780 , 781 کتاب

تبدیل لاپلاس یکطرفه :

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

مشتق گیری در حوزه زمان :

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sX(s) - x(0^-)$$

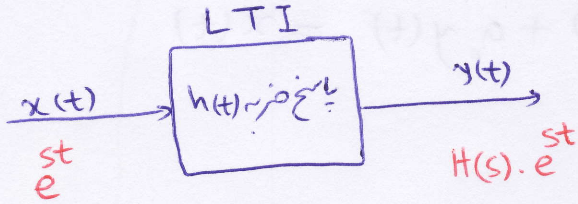
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \longleftrightarrow s^2X(s) - s\,x(0^-) - x'(0^-)$$

انتگرال گیری زمانی :

$$\int^{t} x(\alpha) \cdot d\alpha \longleftrightarrow \frac{X(s)}{s}$$

The Transfer Function

تابع انتقال یا همان تابع تبدیل سیستم:



$$\boxed{H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}}$$ تابع تبدیل یا تابع انتقال

اگر معادله دیفرانسیل توصیف کننده سیستم LTI فوق به صورت زیر باشد:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \, y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j \, x^{(j)}(t)$$

مشتق i ام خروجی نسبت به زمان t

مشتق j ام ورودی نسبت به زمان t

page 5

حال ورودی $x(t) = e^{st}$ را به این سیستم اعمال می‌کنیم. می‌دانیم خروجی خواهد بود: $y(t) = H(s) \cdot e^{st}$

بنابراین $\Rightarrow$ $x^{(j)}(t) = s^{j} \cdot e^{st}$ $\quad$ $y^{(i)}(t) = s^{i} \cdot H(s) \cdot e^{st}$

در معادلهٔ دیفرانسیل توصیف کنندهٔ سیستم، قرار می‌دهیم. $\Rightarrow$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i s^i \cdot H(s) \cdot e^{st} = \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot s^j e^{st}$$

$$\Rightarrow H(s) \cdot e^{st} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} a_i s^i \right) = e^{st} \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j s^j \right)$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots\cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 s + a_0}$$

مثلاً $\quad y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = x(t)$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

برای اینکه سیستم قابل پیاده‌سازی باشد (Realizable) باید $n \geq m$ باشد وگرنه با ضربه $\delta(t)$ مواجه می‌شویم.

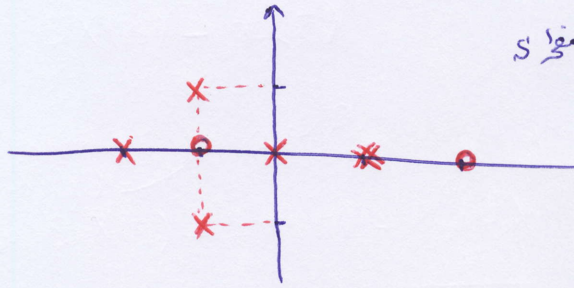
$$H(s) = \frac{b_m}{a_n} \times \frac{s^m + \frac{b_{m-1}}{b_m} s^{m-1} + \cdots\cdots + \frac{b_1}{b_m} s + \frac{b_0}{b_m}}{s^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} s^{n-1} + \cdots\cdots + \frac{a_1}{a_n} s + \frac{a_0}{a_n}}$$

ضریب ثابت K

$$\Rightarrow H(s) = K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots\cdots(s-p_n)}$$

اگر صورت را مساوی صفر قرار دهیم، صفرهای تابع تبدیل و اگر مخرج را مساوی صفر قرار دهیم، قطبهای تابع تبدیل را به دست می‌آوریم.

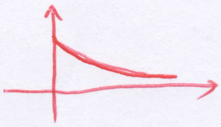
$$H(s) = \frac{4(s+1)(s-2)}{s(s-1)^2(s+2)(s^2+2s+2)}$$



قطبهای ساده $\begin{cases} p_1 = 0 \quad p_2 = -2 \\ p_{3,4} = -1 \mp j \end{cases}$

قطبهای تکراری مرتبهٔ دوم $p_5 = +1$

بررسی پایداری سیگنال‌ها و سیستم‌ها از روی محل صفرها و قطب‌ها

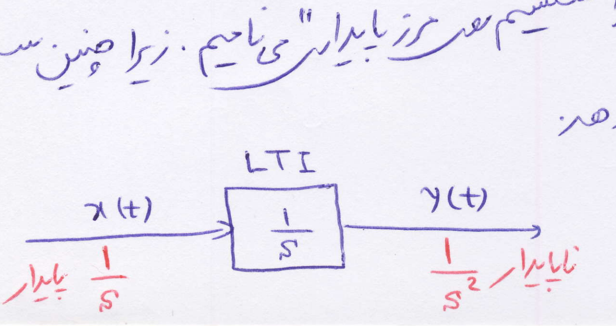


سیگنال پایدار $\Longleftrightarrow$
- تمامی قطبها سمت چپ محور $j\omega$ باشند ← پایدار مجانبی
- اگر هم قطب هایی بر روی محور $j\omega$ داشته باشیم باید از نوع قطبهای منفرد و نه تکراری باشند.

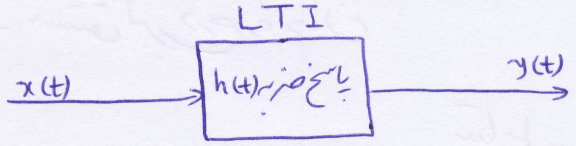
پس اگر یک سیگنال، حتی یک قطب در سمت راست محور $j\omega$ داشته باشد و یا حتی اینکه بر روی محور $j\omega$، فقط یک قطب تکراری داشته باشد، ناپایدار است.

سیستم پایدار $\Longleftrightarrow$ تمامی قطبهای تابع تبدیل، سمت چپ محور $j\omega$ باشند.

اگر سیستمی تمامی قطب هایش سمت چپ محور $j\omega$ باشند و فقط تعدادی قطب منفرد بر روی محور $j\omega$ داشته باشد، جزء سیستم های ناپایدار محسوب می شود. اما آن را "سیستم مرز پایداری" می نامیم. زیرا چنین سیستمی به ازای تمام ورودی‌ها به جز تعداد محدودی ورودی، خروجی پایدار می دهد.



تحلیل و توصیف سیستم‌های LTI با استفاده از تبدیل لاپلاس:



$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

$$Y(s) = \underbrace{H(s)}_{\text{تابع تبدیل سیستم}} \cdot X(s)$$

علیت:

ROC مربوط به تابع سیستم برای یک سیستم LTI علّی، یک نیم صفحهٔ راست است.

زیرا: برای یک سیستم LTI علّی، پاسخ ضربه h(t) برای $t<0$، برابر با صفر است و لذا h(t) راست سوی باشد.

در حالت کلّی، عکس این عبارت می‌تواند درست نباشد. امّا می‌توان گفت:

در یک سیستم LTI با تابع تبدیل گویا داریم:

علّی بودن سیستم $\Longleftrightarrow$ ROC یک نیم صفحهٔ راست در سمت راستِ راست‌ترین قطب است

پایداری:

یک سیستم LTI پایدار است اگر و فقط اگر ROC مربوط به تابع تبدیل H(s)، شامل محور $j\omega$ نیز (یعنی شامل $Re\{s\}=0$ نیز) باشد.

پس یک سیستم LTI علّی با تابع تبدیل گویای H(s) پایدار است اگر و تنها اگر تمامی قطب‌های H(s) در نیمهٔ چپ صفحهٔ s باشند. یعنی تمامی قطبها دارای جزء حقیقی منفی باشند.