Subject: جلسه سوم
Year: ۱۴۰۰ Month: ۷ Date: ۴

موضوع: تحلیل مجانبی و نمادهای O - Ω - Θ - o - w

مثال ۱) (فرض: n عدد طبیعی است)

$T_1(n) = 6n^2 + 21$

$T_2(n) = 4n^2 + 2n + 1$

آیا این گزاره درست است؟ یک مقدار n_0 وجود دارد که به ازای هر $n \geq n_0$:

$$\frac{T_1(n)}{T_2(n)} \leq 3$$

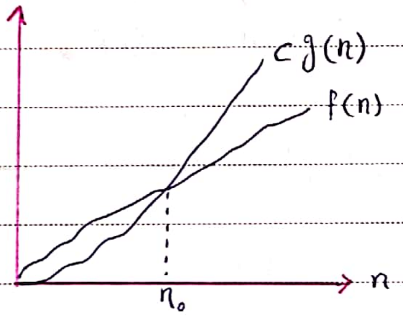
$$\Longrightarrow \frac{6n^2+21}{4n^2+2n+1} \leq 3 \rightarrow 6n^2+21 \leq 12n^2+6n+3 \rightarrow 3 \leq n^2+n \rightarrow n \geq 2$$

$\Longleftarrow$ n_0 هر مقداری بیشتر از ۲ می‌تواند باشد.

تعریف: دو تابع $f(n)$ و $g(n)$ داده شده است.

$f(n) = O(g(n)) \; : \exists \, n_0$ و c ، $n_0 \in N$ ، $c > 0$

$\forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq c\,g(n)$



مثال ۱) $f(n) = 3n^2 \quad g(n) = n^2$

می‌خواهیم ثابت کنیم: $f(n) = O(g(n))$

$\exists n_0, c \quad \forall n \geq n_0 \quad 3n^2 \leq cn^2$

کافی است $c = 3$ و $n_0 = 1$

$n_0 = 1$ و $c = 4$

(کافی است یک مثال بیابیم)

مثال ۲) $f(n) = 3n^3 + 8 \quad g(n) = n^4$

می‌خواهیم ثابت کنیم $f(n) = O(g(n))$

$\exists n_0, c \quad \forall n \geq n_0 \quad 3n^3 + 8 \leq cn^4$

$3n^3+8 \le 3n^3+8n^3=11n^3$

بنابراین $c=11$ و $n_0=1$ (کافی است یک عدد نشان دهیم این رابطه برقرار است)

مثال ۳) $\underbrace{\log(n)}_{f(n)}=O(\underbrace{n}_{g(n)})$

$\exists n_0, c \quad \forall n \ge n_0 \quad \log n \le cn$

قضیه: به ازای هر $n \ge 2$ ، $\log_2^n \le n$ $\longleftarrow$ $c=1$, $n_0=2$

اثبات با استقرا:

پایه: $n=2$: $\log_2^2 \le 2$

$\Rightarrow 1 \le 2$ ✓

فرض: برای n و مقادیر کمتر از n گزاره برقرار است $(\log_2^n \le n)$ برای $n+1$ ثابت می‌کنیم.

$n+1 \ge \log^n + 1 = \log^n + \log^2 = \log^{2n} \ge \log^{n+1}$ (طبق نمودار $\log^{2n}$ از $n=1$ بزرگتر تراز $\log^{n+1}$ است)

مثال ۴) $8n^2+3n=O(n^2)$

$\exists n_0, c \quad \forall n \ge n_0 \quad 8n^2+3n \le cn^2$

$8n^2+\underbrace{3n}_{n\ge 1\ ?} \le 8n^2+3n^2=11n^2 \Longrightarrow \begin{cases} c=11 \\ n_0=1 \end{cases}$

مثال ۵) (فرض $a_i \ge 0$)

$f(n)=\underbrace{a_0+a_1n+a_2n^2+\dots+a_kn^k}_{\text{چندجمله‌ای درجه } K}=O(n^k)$

$a_0+a_1n+a_2n^2+\dots+a_kn^k \le a_0n^k+a_1n^k+\dots+a_kn^k \le [a_0+a_1+\dots+a_k]\,n^k$

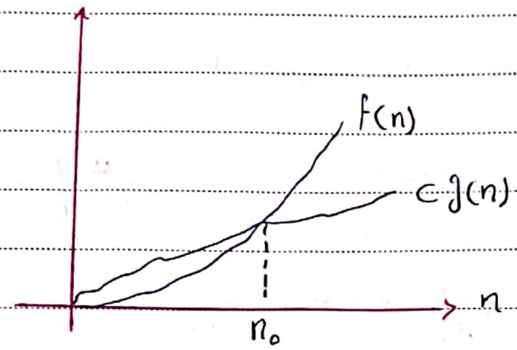
کافی است $n_0=1$ و $c=\sum_{i=0}^{k} a_i$

نماد Ω :

تابع $f(n)$ و $g(n)$ درنظر بگیرید

$f(n)=\Omega(g(n)) \quad \exists \underset{\in N}{n_0}, \underset{>0}{c} \quad \forall n \ge n_0 \quad f(n) \ge c\,g(n)$

(c می‌تواند اعشاری باشد)



مثال ۶) $f(n)=3n^3$ و $g(n)=n^3$ ← $f(n)=\Omega(g(n))$

$\exists n_0, c \quad \forall n\geq n_0 \quad 3n^3 \geq cn^3$

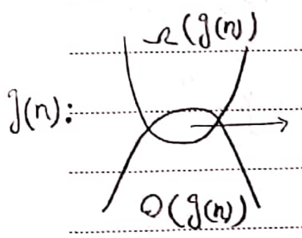
آری است $c=3,2,1,\frac{1}{100},\dots / n_0=1$

مثال ۷) (فرض $a_k>0$) $f(n)=a_0+a_1n+a_2n^2+\dots+a_kn^k=\Omega(n^k)$

$a_0+a_1n+a_2n^2+\dots+a_kn^k\geq a_kn^k \longrightarrow \begin{cases} c=a_k \\ n_0=1\end{cases}$

$f(n)=O(n^5)$ ← مفهوم O: آنالیز دارم می‌کنم که بدترین تابع ام مثل n^5 است.

$O(g(n))$: مجموعه تمام توابعی است که رشد کمتر مساوی $g(n)$ دارند $f(n)\in O(g(n))$



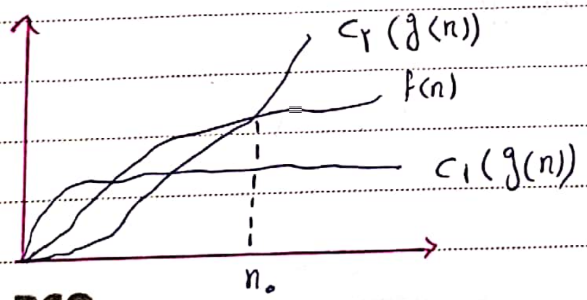
رشد مساوی
$g(n)=\Theta(g(n))$

نماد Θ

برای دو تابع $g(n)$ و $f(n)$، $f(n)=\Theta(g(n))$ اگر

$\exists n_0,c_1,c_2 \quad \forall n\geq n_0 \quad c_1g(n)\leq f(n)\leq c_2g(n)$

$f(n)=\Theta(g(n))$ اگر و تنها اگر $f(n)=O(g(n))$ و $f(n)=\Omega(g(n))$



Subject: جلسه سوم
Year. ۱۴۰۰ Month. ۷ Date. ۴ ( )

مثال :

$$\underbrace{a_0+a_1 n+a_2 n^2+a_3 n^3+\dots+a_k n^k}_{f(n)}=\Theta(\underbrace{n^k}_{g(n)})$$

در مثال ۷ : $f(n)=\Omega(g(n))$
در مثال ۴ : $f(n)=O(g(n))$
$\Leftarrow$ درنتیجه: $f(n)=\Theta(g(n))$

* درصورتی که ابهام نباشد تابع درون Θ ساده باشد چنین جواب درست یکتاست. $5n^2-4=\Theta(4n^2+7)=\Theta(n^2)$

مثال: (فرض $x>2$) $\log_x n=\Theta(\log_2 n)$

$\exists n_0, c_1, c_2 \quad \forall n\ge n_0 \quad c_1\log_2 n\le \log_x n\le c_2\log_2 n$, $c_2=1$

$\log_x n=\log_2 n\times\log_x 2 \longrightarrow c_1=\log_x 2 \longrightarrow \begin{cases} c_2=1\\ n_0=1\end{cases}$

بنابراین پایه لگاریتم مهم نیست.

مثال: $\log n!=\Theta(n\log n)$

$$\log n!=\log n(n-1)\cdots 1=\underbrace{\log n+\log (n-1)+\log (n-2)+\dots \log 1}_{n \text{ جمله}}\le n\log n \quad (c_2=1)$$

$$\log n!=\log n+\dots\log 1\ge \log n+\log(n-1)+\dots+\log\left(\tfrac{n}{2}+1\right)\ge \frac{n}{2}\log\frac{n}{2}\ge\frac{n}{2}[\log n-1]$$

نصف جملات را درنظر گرفتیم

با فرض $\log n\ge 2$ $\longrightarrow \ \ge \frac{n}{2}\left[\frac{\log n}{2}\right]=\frac{n}{4}\log n$

کافی است $c_1=\frac{1}{4}$ ، $c_2=1$ ، $n_0=4$

* اگر $f(n)=O(g(n))\Leftrightarrow g(n)=\Omega(f(n))$

$\exists n_0, c \quad \forall n\ge n_0 \quad f(n)\le c(g(n)) \rightarrow g(n)\ge\frac{1}{c}f(n)$