page 1

جلسهٔ یکشنبه ۹۹/۲/۲۸

ادامهٔ خواص سری فوریه:

4_ خاصیت خطی بودن (linearity) سری فوریه:

$$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega)$$
$$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(j\omega)$$
$$\Rightarrow a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \longleftrightarrow a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega)$$

5_ خاصیت Scaling

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow f(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{j\omega}{\alpha}\right)$$

6_

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega) \xrightarrow[\alpha=-1]{\text{scaling}} f(-t) \longleftrightarrow F(-j\omega) \xrightarrow[F(-j\omega)\leftrightarrow F^*(j\omega)]{\text{خاصیت اول}} f(-t) \longleftrightarrow F^*(j\omega)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(-t) \longleftrightarrow F^*(j\omega)}$$

7_ انتقال (شیفت) در حوزهٔ زمان (Time Shifting):

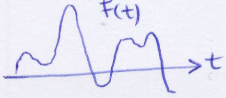
$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow f(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} \cdot F(j\omega)$$

8_ انتقال (شیفت) در حوزهٔ فرکانس (Frequency Shifting):

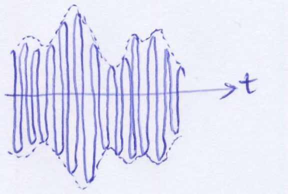
$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow f(t) \cdot e^{+j\omega_0 t} \longleftrightarrow F\left(j(\omega-\omega_0)\right)$$

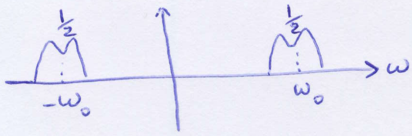
مثال:

$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$



$f(t)\cdot \cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow ?$





حل:

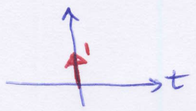
$$f(t)\cdot\cos(\omega_0 t) = f(t)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) = \frac{f(t)\cdot e^{j\omega_0 t} + f(t)\cdot e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

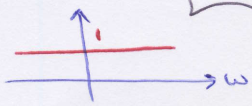
$$f(t)\cdot\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{F(j(\omega-\omega_0)) + F(j(\omega+\omega_0))}{2}$$

مثال:

$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} ?$

$\delta(t) \longleftrightarrow 1$





$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt = 1$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{1\} = \delta(t) \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot e^{+j\omega t}\cdot d\omega = \delta(t) \Rightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t}\cdot d\omega = 2\pi\delta(t) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t}\cdot dt = 2\pi\delta(\omega) \end{cases}$$

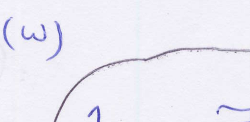
$1 \xrightarrow{\mathcal{F}} ?$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt = 2\pi\,\delta(-\omega) = 2\pi\,\delta(\omega)$$

$e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$

یک رابطه مهم برای محاسبه تبدیل فوریه توابع پریودیک

$1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\,\delta(\omega)$



۹- مشتق گیری زمانی:

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow \frac{d^n f(t)}{dt^n} \longleftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

$$\delta^{(n)}(t) \longleftrightarrow (j\omega)^n$$

۱۰- مشتق گیری فرکانسی:

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow (-jt)^n f(t) \longleftrightarrow \frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n}$$

۱۱- انتگرال گیری زمانی:

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow \int_{-\infty}^{t} f(\alpha).d\alpha \longleftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0).\delta(\omega)$$

تبدیل فوریه تابع پله واحد $u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

۱۲- انتگرال گیری فرکانسی:

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow \frac{f(t)}{-jt} + \pi f(0).\delta(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(j\alpha).d\alpha$$

۱۳- قضیه کانولوشن برای سیگنالهای زمان پیوسته:

$$\begin{cases} f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega) \\ f_2(t) \longleftrightarrow F_2(j\omega) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega).F_2(j\omega) \\ f_1(t).f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega) \end{cases}$$

۱۴- دوگانی (Duality):

مثال

$$\begin{cases} \delta(t) \longleftrightarrow 1 \\ 1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \end{cases}$$

مثال

$$\begin{cases} f(t) = rect(t) \longleftrightarrow F(j\omega) = \frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}} = sinc\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \\ sinc\left(\frac{t}{2\pi}\right) \longleftrightarrow 2\pi\, rect(\omega) \end{cases}$$

$$\frac{a}{\pi} sinc\left(\frac{at}{\pi}\right) \longleftrightarrow rect\left(\frac{\omega}{2a}\right)$$

بنابراین خاصیت دوگانی را می‌توان بدین صورت نوشت :

$$\begin{cases} g(t) \longleftrightarrow G(\omega) \\ G(t) \longleftrightarrow 2\pi g(-\omega) \end{cases}$$

به عنوان یک مثال دیگر :

قبلاً این مثال را حل کرده‌ایم که $\Rightarrow$

$$e^{-|t|} \longleftrightarrow \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\frac{2}{1+t^2} \longleftrightarrow ?$$

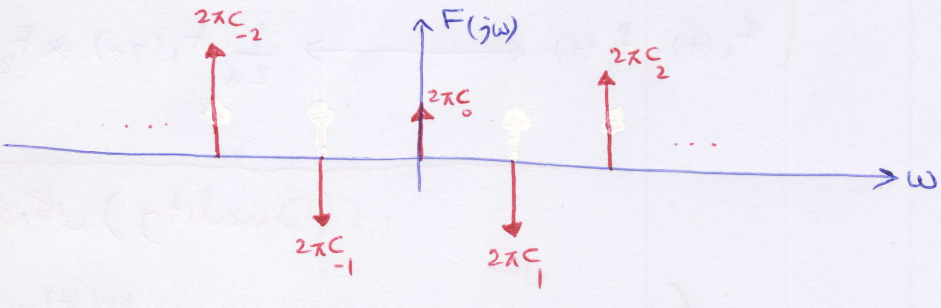
$$\mathcal{F}\left\{\frac{2}{1+t^2}\right\} = 2\pi \cdot e^{-|-\omega|} = 2\pi e^{-|\omega|}$$

تبدیل فوریه توابع پریودیک :

$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow \quad F(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi C_n \, \delta(\omega - n\omega_0)$$

تبدیل فوریه توابع پریودیک پیوسته، به صورت قطار ضربه و در نتیجه گسسته است.



رابطهٔ پارسوال :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 \cdot d\omega$$

$$G_x(j\omega) = |X(j\omega)|^2$$

تابع چگالی طیف توان