سیگنال‌ها و سیستم‌ها، ۹۹/۲/۸، رستگار

## تفاوت‌های توابع نمایی مختلط $e^{j\omega_0 t}$ و $e^{j\Omega_0 n}$ :

| $e^{j\Omega_0 n}$ | $e^{j\omega_0 t}$ |
|---|---|
| * سیگنال‌های یکسان برای توابع نمایی که فرکانس آنها $2\pi$ از یکدیگر فاصله داشته باشد. یعنی $e^{j(\Omega_0+2k\pi)n} = e^{j\Omega_0 n}$ ، $k \in Z$ | * سیگنال‌های مجزا برای مقادیر مجزای $\omega_0$ . |
| تبصره (۱): وقتیکه $\Omega_0$ از صفر افزایش می‌یابد، نرخ نوسانات تابع $e^{j\Omega_0 n}$ نیز افزایش می‌یابد تا اینکه فرکانس به $\pi$ برسد. امّا با افزایش فرکانس $\Omega_0$ از $\pi$ تا $2\pi$ ، نرخ نوسانات کاهش پیدا می‌کند. بنابراین فرکانس‌های نزدیک به صفر و مضارب زوج $\pi$ ، فرکانس‌های پایین با نوسانات آهسته و فرکانس‌های نزدیک $\pi$ و یا مضارب فرد $\pi$ ، فرکانس‌های بالا با نوسانات تند محسوب می‌شوند. | تبصره (۱): وقتی که فرکانس $\omega_0$ از صفر افزایش می‌یابد، نرخ نوسانات سیگنال به طور پیوسته افزایش می‌یابد. |
| برای بررسی توابع نمایی گسسته کافیست فقط بازهٔ فرکانسی $[0, 2\pi]$ را بررسی کنیم. $0 \leq \Omega_0 \leq 2\pi$ | |
| * سیگنال $e^{j\Omega_0 n}$ تنها در صورتی متناوب است که $\Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ باشد. $N$ عدد طبیعی، $m$ عدد صحیح | * سیگنال $e^{j\omega_0 t}$ برای هر انتخاب $\omega_0$، متناوب است |
| در اینصورت $\begin{cases} \text{فرکانس اصلی} = \frac{\Omega_0}{m} = \frac{2\pi}{N} \\ \text{تناوب اصلی} = N \end{cases}$ | $\begin{cases} \omega_0 & \text{فرکانس اصلی} \\ T = \frac{2\pi}{\omega_0} & \text{تناوب اصلی} \end{cases}$ |

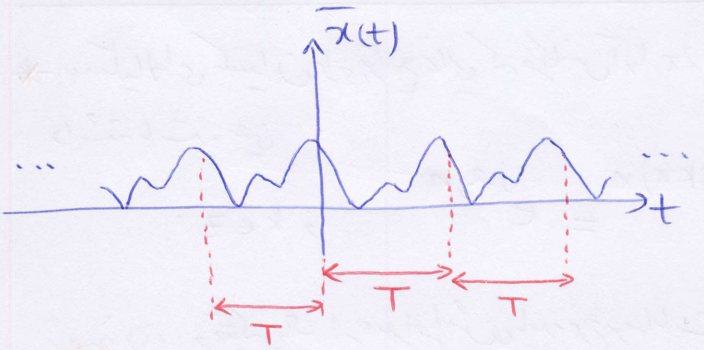
## سری فوریه:

### توابع متناوب

$$x(t) = x(t+T) \ ; \ \forall t$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = x(t+nT) \qquad n \in \mathbb{Z}$$

تناوب اصلی: $T$ فرکانس اصلی $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$




واما محاسبه تناوب مشترک دو تابع متناوب:

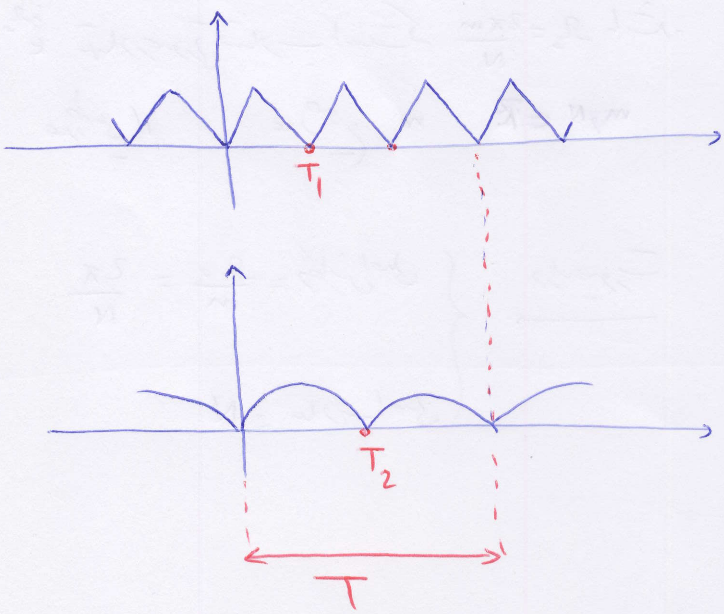
اگر $x_1(t)$ متناوب با دوره تناوب $T_1$

$x_2(t)$ متناوب با دوره تناوب $T_2$

اگر داشته باشیم $n_1 T_1 = n_2 T_2$ و یا اینکه به عبارت دیگر:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_2}{n_1}$$ کسر گویا $\Rightarrow T = n_1 T_1 = n_2 T_2$ تناوب مشترک این دو تابع

مثال:




$$3T_1 = 2T_2 = T$$

page 3

مثال:

$\bar{x}_1(t) = 2\sin 3t \qquad \bar{x}_2(t) = 5\cos(4t)$

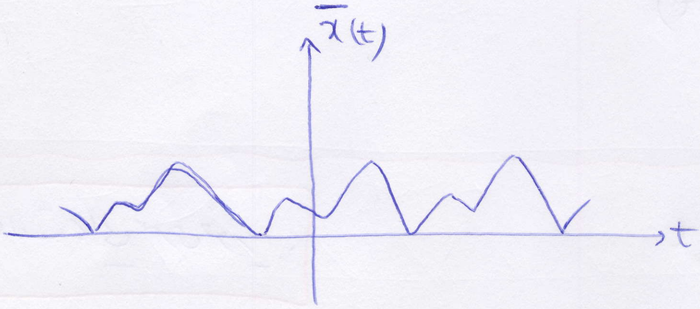
$\omega_1 = 3 \rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{3} \qquad \omega_2 = 4 \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

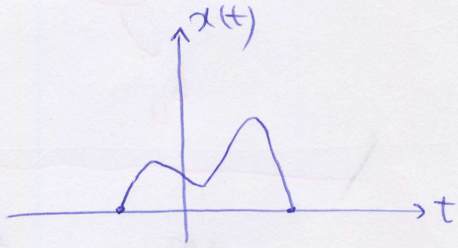
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{2\pi}{4}} = \frac{4}{3} \Rightarrow T = 3T_1 = 4T_2 = 2\pi$$

و اما حالتها (فرم ها)ی مختلف نوشتن سری فوریه:

$\boxed{\text{۱- حالت کارتزین}}$: اگر سیگنال $\bar{x}(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب $T$ و فرکانس اصلی $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ باشد و $x(t)$، همان سیگنال متناوب $\bar{x}(t)$ در یک تناوب باشد، آنگاه داریم:

$$\bar{x}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$




$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,.\,dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\,.\,\cos(n\omega_0 t)\,.\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\,.\,\sin(n\omega_0 t)\,.\,dt$$

$a_1 \cos\omega_0 t + b_1 \sin\omega_0 t \longleftarrow$ هارمونیک اصلی سیگنال $\bar{x}(t)$

$a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t \longleftarrow$ هارمونیک kام سیگنال $\bar{x}(t)$

page 4

**مثال:** در سیگنال متناوب $\overline{x}(t) = \underbrace{4}_{a_0} \cos 20t + \underbrace{8}_{b_k} \sin 22t$ ، مشخص کنید که $\cos 20t$ و $\sin 22t$ ، کدام هارمونیک های سیگنال هستند؟

$$\cos 20t \longrightarrow \omega_1 = 20 \longrightarrow T_1 = \frac{2\pi}{20}$$

$$\sin 22t \longrightarrow \omega_2 = 22 \longrightarrow T_2 = \frac{2\pi}{22}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{20}}{\frac{2\pi}{22}} = \frac{22}{20} = \frac{11}{10}$$

$$\Rightarrow \text{تناوب مشترک} = T = 11 * T_2 = 10 * T_1 = 10 * \frac{2\pi}{20} = \boxed{\pi}$$

$$\Rightarrow \text{فرکانس اصلی } \overline{x(t)} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \quad \Rightarrow \quad 4\cos 20t = \underbrace{4}_{a_{10}} \cos(10 * 2t)$$

$$8 \sin 22t = \underbrace{8}_{b_{11}} \sin(11 * 2t)$$

**2 ـ حالت نمائی سری فوریه:**

$$\overline{x(t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+jn\omega_0 t} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_T x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt$$

$$c_0 = a_0 \qquad c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \qquad c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

برای n های مثبت      برای n های مثبت

$$\boxed{c_n^* = c_{-n}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} = 2\,\mathrm{Real}\{c_n\} \\ b_n = j(c_n - c_{-n}) = -2\,\mathrm{Im}\{c_n\} \end{cases}$$

page 5

3 ـ حالت قطبی سری فوریه :

$$\overline{x(t)} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} r_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \theta_n = -tg^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

$$a_n = r_n \cos\theta_n \qquad b_n = -r_n \sin\theta_n \qquad C_n = \frac{r_n e^{j\theta_n}}{2}$$

---

ثابت کنید در سری فوریه فرم نمایی، ضرائب $C_n$ با رابطه زیر تعیین می‌شوند: $C_n = \frac{1}{T}\int_T x(t).e^{-jn\omega_0 t}.dt$

اثبات :

می‌دانیم $\overline{x(t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n . e^{+jn\omega_0 t}$

از طرفی داریم

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{j(n-m)\omega_0 t} = \begin{cases} 0 & ; \quad n \neq m \\ T & ; \quad n = m \end{cases}$$

$$\left(\overline{x(t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}\right) e^{-jm\omega_0 t}$$

$$\int_T \overline{x(t)}.e^{-jm\omega_0 t}.dt = \int_T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j(n-m)\omega_0 t}.dt$$

$$\Rightarrow \int_T \bar{x}(t)\cdot e^{-jm\omega_0 t}\,dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \int_T e^{j(n-m)\omega_0 t}\,dt = \begin{cases} 0 & ;\ n\neq m \\ C_m T & ;\ n=m \end{cases}$$

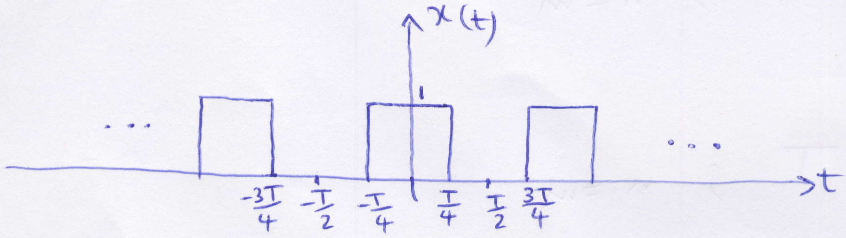
$$\Rightarrow \int_T \bar{x}(t)\cdot e^{-jm\omega_0 t}\,dt = C_m T \quad \Rightarrow C_m = \frac{1}{T}\int_T \bar{x}(t)\cdot e^{-jm\omega_0 t}\,dt$$

## خواص سری فوریه :

۱- اگر $\bar{x}(t)$ زوج باشد، آنگاه ضرایب $b_n = 0$ خواهند بود و فقط ترمهای کسینوسی را خواهیم داشت.

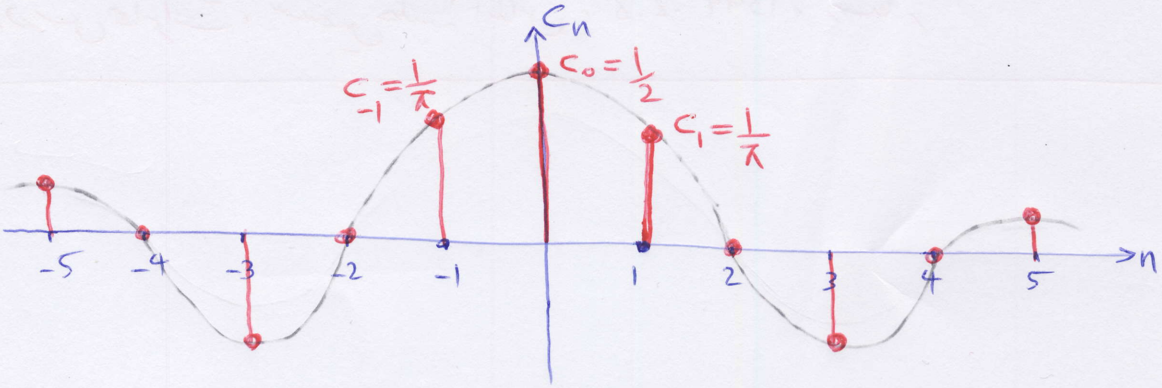
$$\bar{x}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t)$$

مثال:

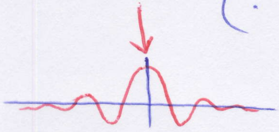



$$c_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} \Rightarrow c_0 = \frac{1}{2} \qquad C_{2k} = 0 \qquad C_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{\pi(2k+1)}$$

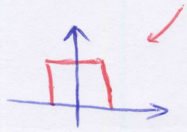
$$\Rightarrow a_0 = c_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad a_{2k} = 0 \qquad a_{2k+1} = \frac{2(-1)^k}{\pi(2k+1)}$$




می بینیم که ضرایب $c_n$، نمونه‌های تابع sinc هستند. در آینده خواهیم دید که تابع sinc،



تبدیل فوریه تابع rect است.



2- اگر $x(t)$ فرد باشد، آنگاه $a_n = 0$ هستند و $a_0 = 0$ و فقط ترم‌های سینوس را خواهیم داشت.

3- اگر تابع متناوب را شیفت (انتقال) دهیم، ضرایب سری فوریه آن به صورت زیر تغییر خواهند کرد:

فرم نمایی $\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+jn\omega_0 t}$ $\qquad \bar{f}(t) \longleftrightarrow c_n$

$$\bar{f}(t-t_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 (t-t_0)} \qquad \bar{f}(t-t_0) \longleftrightarrow c_n \cdot e^{-jn\omega_0 t_0}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-jn\omega_0 t_0} e^{jn\omega_0 t}$$

فرم قطبی $\bar{f}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$

$$\Rightarrow \bar{f}(t-t_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos\left(n\omega_0 t + (\theta_n - n\omega_0 t_0)\right)$$

یعنی شیفت، تأثیری بر روی دامنه هارمونیک‌ها ندارد اما از فاز هارمونیک kام به اندازه $k\omega_0 t_0$ می‌کاهد.

4- مشتق گیری از یک تابع متناوب، ضرایب سری فوریه آن را به چه صورت تغییر خواهد داد؟

فرم نمایی

$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot e^{+jn\omega_0 t}$$

$$\bar{f}(t) \longleftrightarrow C_n$$

$$\bar{f}'(t) \longleftrightarrow jn\omega_0 C_n$$

$$\bar{f}'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jn\omega_0 C_n \, e^{+jn\omega_0 t}$$

فرم کارتزین

$$\bar{f}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \bar{f}'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -n\omega_0 a_n \sin(n\omega_0 t) + n\omega_0 b_n \cos(n\omega_0 t)$$