درس سیگنال ها و سیستم ها، یکشنبه ۱۴، ۲، ۹۹، رستگار

سری فوریه سیگنالهای متناوب زمان گسسته:

$$\begin{cases} x[n] = x[n+N] & , \quad N \text{ عدد طبیعی} \\ x[n] = x[n+mN] \end{cases} \Rightarrow \quad N : \text{دوره تناوب اصلی تابع } x[n] \Rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \quad \text{فرکانس اصلی تابع } x[n]$$

اگر مجموعه تمام توابع نمایی که دارای فرکانس اصلی Ω_0 و مضارب صحیح آن هستند، یعنی تمام توابع نمایی دارای هارمونیک های مرتبط، را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\varphi_k[n] = e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad ; \quad k \in Z$$

اما در مجموعه فوق فقط N ترم مجزا وجود دارد و مابقی همگی تکراری هستند (اولین تفاوت با سری فوریه پیوسته ها این است.)

$$\varphi_0[n] , \varphi_1[n] , \dots , \varphi_{N-1}[n] \quad ; \quad \varphi_k[n] = \varphi_{k+mN}[n] \quad m \in Z$$

$$\varphi_0[n] = \varphi_N[n] \qquad \varphi_1[n] = \varphi_{N+1}[n]$$

در اینصورت سری فوریه سیگنال متناوب $x[n]$ با دوره تناوب اصلی N بصورت زیر خواهد بود:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \cdot \varphi_k[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \cdot e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

a_k : ضرایب سری فوریه

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle K\rangle} x[n] \cdot e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

خود ضرایب سری فوریه هم متناوب با دوره تناوب N خواهند بود یعنی:

$$a_k = a_{k+N} = a_{k+2N}$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \varphi_k[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k[n] = \sum_{k=2}^{N+1} a_k \varphi_k[n]$$

$$\Rightarrow x[n] = a_0\varphi_0[n] + a_1\varphi_1[n] + a_2\varphi_2[n] + \dots + a_{N-2}\varphi_{N-2}[n] + a_{N-1}\varphi_{N-1}[n]$$

$$= a_1\varphi_1[n] + a_2\varphi_2[n] + \dots + a_{N-2}\varphi_{N-2}[n] + a_{N-1}\varphi_{N-1}[n] + a_N\varphi_N[n]$$

اثبات رابطه a_k:

حضارب صحیح N

می‌دانیم : $$\sum_{n=0}^{N-1} e^{+jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} = \begin{cases} N & \text{و اگر } k=0, \mp N, \mp 2N, \mp 3N, \ldots \\ 0 & \text{و درغیراینصورت} \end{cases}$$

ازطرف دیگر داریم : $$\left(x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \cdot e^{+jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}\right) * e^{-jr\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

دو طرف رابطه را در $e^{-jr\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$ ضرب می‌کنیم وسپس برروی N ترم جمع می‌بندیم.

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] \cdot e^{-jr\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=\langle N\rangle} e^{-jr\frac{2\pi}{N}n} \times \left(\sum_{k=\langle N\rangle} a_k \cdot e^{+jk\frac{2\pi}{N}n}\right)$$

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] \cdot e^{-jr\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=\langle N\rangle} \left(a_k \sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}n}\right)$$

ازطرفی می‌دانیم $\Rightarrow$ $\sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}n}$ برابر با صفر است مگر آنکه $k-r$ برابر با صفر یا حضارب صحیح N باشد.

$$\Rightarrow \sum_{n=\langle N\rangle} x[n] \cdot e^{-jr\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \left(\sum_{n=\langle k\rangle} e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}n}\right) = N a_r$$

$$\Rightarrow a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n] \cdot e^{-jr\frac{2\pi}{N}n}$$

مثال: با در نظر گرفتن سیگنال $x[n]$، ضرایب سری فوریه آن را بیابید.

$$x[n] = 1 + \sin\frac{2\pi}{N}n + 3\cos\frac{2\pi}{N}n + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right)$$

حل:

$$x[n] = 1 + \frac{1}{2j}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right] + \frac{3}{2}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[e^{j\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right)} + e^{-j\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right)}\right]$$

$$\Rightarrow x[n] = 1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2j}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2j}\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}n} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[e^{j\frac{4\pi}{N}n} \cdot \underbrace{\cancel{e^{j\frac{\pi}{2}}}}_{=j} + e^{-j\frac{4\pi}{N}n} \cdot \underbrace{\cancel{e^{-j\frac{\pi}{2}}}}_{=-j}\right]$$

$$\Rightarrow x[n] = 1 + \left(\frac{3}{2} - \frac{j}{2}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \left(\frac{3}{2} + \frac{j}{2}\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{j}{2}e^{j\frac{4\pi}{N}n} - \frac{j}{2}e^{-j\frac{4\pi}{N}n}$$

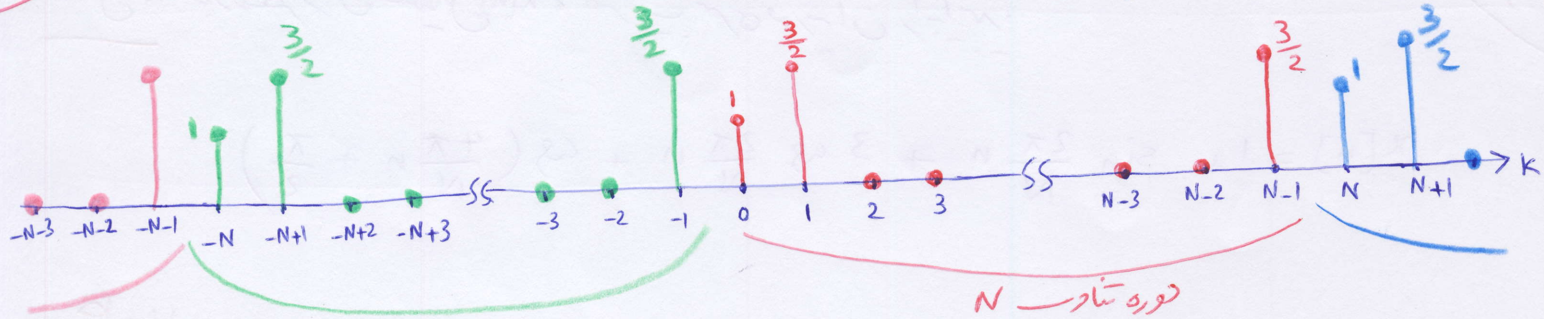
رابطه بالا را با این رابطه مقایسه کنید. $\quad x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \cdot e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

$$\Rightarrow a_0 = 1 \qquad a_1 = \frac{3}{2} - \frac{j}{2} \qquad a_{-1} = a_{N-1} = \frac{3}{2} + \frac{j}{2}$$

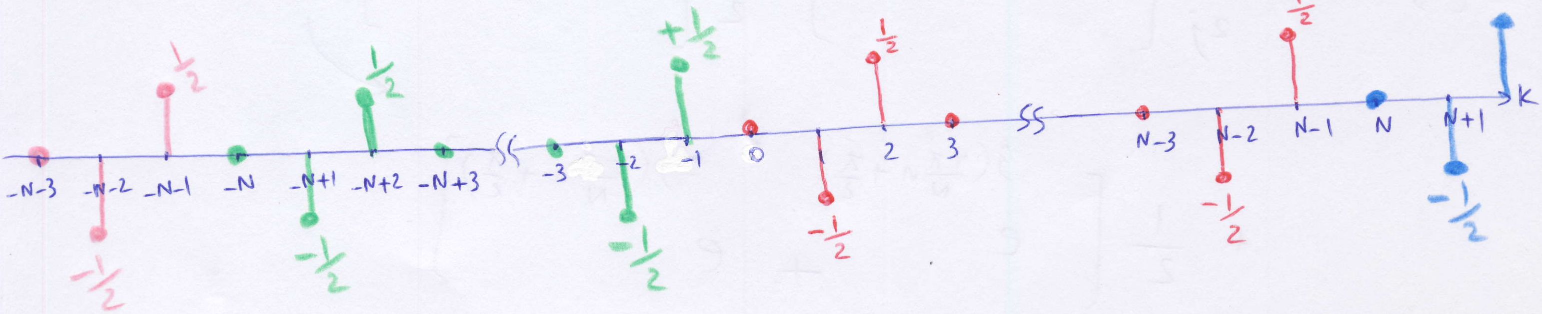
$$a_2 = \frac{j}{2} \qquad a_{-2} = a_{N-2} = \frac{-j}{2}$$

مابقی ضرایب همگی صفر هستند.

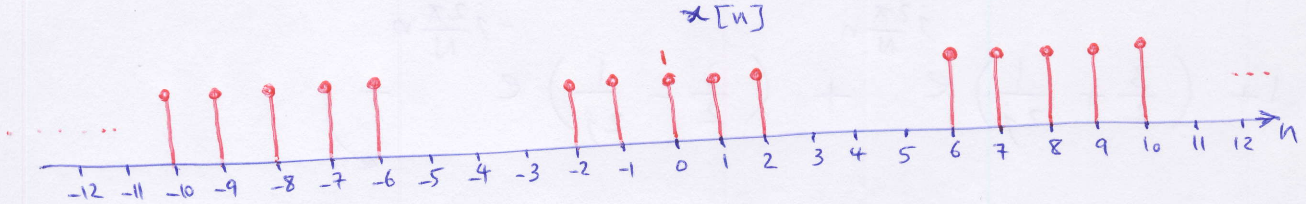
$Re\{a_k\}$ ها را رسم می کنیم



$Im\{a_k\}$ را رسم می کنیم.



مثال:



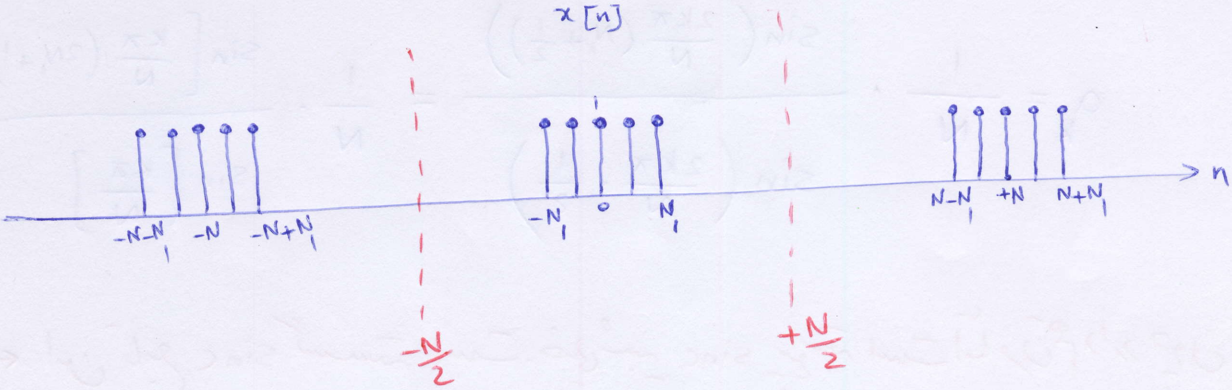
در این مثال، دوره تناوب اصلی تابع $x[n]$ برابر است با: $N = 8$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{8} \sum_{n=\langle 8 \rangle} e^{-jk\left(\frac{2\pi}{8}\right)n} = \frac{1}{8} \sum_{n=-2}^{+2} e^{-jk\frac{2\pi}{8}n}$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{8}\left[e^{+j\frac{\pi}{2}k} + e^{+j\frac{\pi}{4}k} + 1 + e^{-j\frac{\pi}{4}k} + e^{-j\frac{\pi}{2}k} \right]$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{5}{8} \qquad a_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{8} \qquad a_2 = \frac{-1}{8} \qquad a_3 = \frac{1-\sqrt{2}}{8} \qquad a_4 = \frac{1}{8}$$

$$a_5 = \frac{1-\sqrt{2}}{8} \qquad a_6 = \frac{1}{8} \qquad a_7 = \frac{1+\sqrt{2}}{8}$$



$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{+N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

یادآوری مجموع تصاعد هندسی

$$\sum_{i=0}^{N}(a)^i = \frac{1-a^{\overset{\text{تعداد جملات}}{N+1}}}{1-a} \qquad \sum_{i=\alpha}^{\beta}(a)^i = \text{جمله اول} * \frac{1-a^{\text{تعداد جملات}}}{1-a}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=\alpha}^{\beta}(a)^i = a^{\alpha}\cdot\frac{1-a^{\beta-\alpha+1}}{1-a}$$

ادامه می دهیم $\longrightarrow$ $a_k = \frac{1}{N}\cdot e^{jk\frac{2\pi}{N}\cdot N_1}\cdot\frac{\left(1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}(2N_1+1)}\right)}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{N}\cdot e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}\cdot\frac{e^{-jk\frac{2\pi}{N}\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)}\left[e^{jk\frac{2\pi}{N}\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)}\right]}{e^{-jk\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{1}{2}}\left[e^{jk\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{1}{2}} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{1}{2}}\right]}$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{N}\cdot e^{jk\frac{2\pi}{N}\cdot N_1}\,\frac{e^{-jk\frac{2\pi}{N}\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)}\left[\cancel{2j}\sin\left(k\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{(2N_1+1)}{2}\right)\right]}{e^{-jk\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{1}{2}}\left[\cancel{2j}\sin\left(k\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{1}{2}\right)\right]}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2k\pi}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{2k\pi}{N}\cdot\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin\left[\frac{k\pi}{N}\left(2N_1+1\right)\right]}{\sin\left[\frac{k\pi}{N}\right]}$$

این تابع sinc گسسته است. خیلی شبیه sinc پیوسته است اما فرق هم دارد چون sinc گسسته‌ها متناوب است.