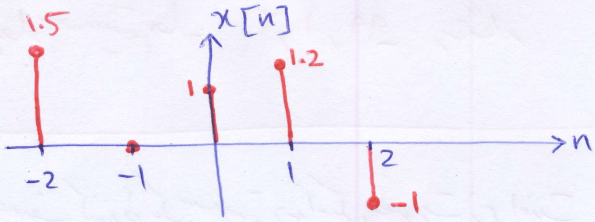
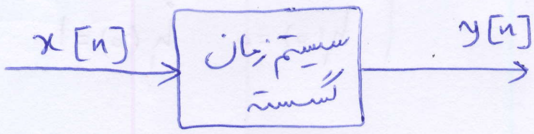
سیگنالها و سیستم‌های زمان گسسته :

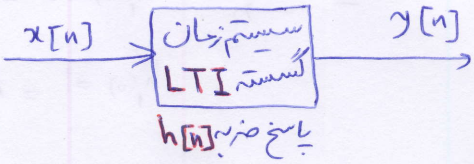


$$\begin{cases} x[-2] = +1.5 \\ x[-1] = 0 \\ x[0] = 1 \\ x[1] = 1.2 \\ x[2] = -1 \end{cases}$$

$x[n] \longrightarrow n \in \mathbb{Z}$

عدد صحیح





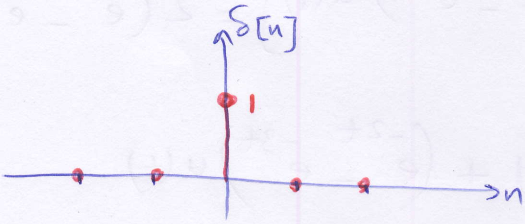
سیگنالهای پایه یا به عبارت بهتر، دنبالهٔ های ویژه :

۱- دنبالهٔ kronecker :

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & ; \quad n = 0 \\ 0 & ; \quad n \neq 0 \end{cases}$$

در اینجا مسألهٔ مساحت زیر سطح نمودار

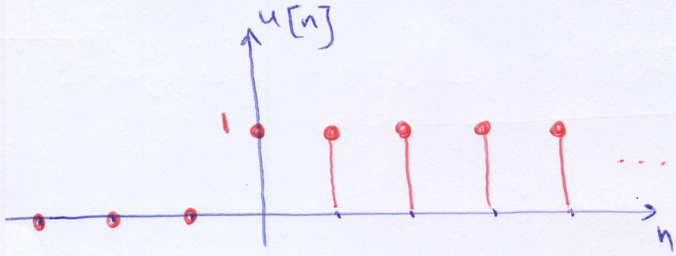
مطرح نیست بلکه مسألهٔ دامنه مطرح است.



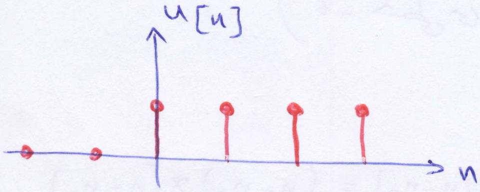
page 3

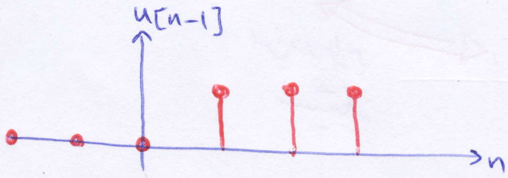
2- دنبالهٔ پلهٔ واحد: $u[n]$

$$u[n] = \begin{cases} 1 & ; \quad n \geq 0 \\ 0 & ; \quad n < 0 \end{cases}$$



$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \cdots$$





$$\Rightarrow \quad \delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \cdots = \sum_{m=0}^{+\infty} \delta[n-m] = \boxed{\sum_{l=-\infty}^{n} \delta[l]}$$

خاصیت مهم تابع یا همان دنبالهٔ $\delta[n]$:

$$x[n] \cdot \delta[n-n_0] = x[n_0] \cdot \delta[n-n_0]$$

در مورد پیوسته‌ها داشتیم $\Rightarrow \quad x(t) \cdot \delta(t-t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t-t_0)$

خواصّ سیستم‌ها: به عنوان مثال سیستم $y[n] = n x[n]$

این سیستم:

1- بدون حافظه است.
2- علّی می‌باشد.
3- ناپایدار می‌باشد.
4- معکوس ناپذیر است.
5- تغییرپذیر با زمان است.
6- خطّی می‌باشد.

به عنوان نمونه، در مورد خاصیت تغییرناپذیری با زمان داریم:

$$x_1[n] \xrightarrow{\text{سیستم}} y_1[n] = n x_1[n] \xrightarrow{\text{شیفت به اندازه } n_0} y_1[n-n_0] = (n-n_0)\, x_1[n-n_0]$$

$$x_2[n] \xrightarrow{\text{سیستم}} y_2[n] = n x_2[n] = n x_1[n-n_0]$$

این دو برابر نیستند.

می‌دانیم $x_2[n] = x_1[n-n_0]$ است.

پس سیستم فوق، تغییرپذیر با زمان است.

سیستم‌های خطّی تغییرناپذیر با زمان (LTI):

$$x[n] \longrightarrow \underset{h[n]}{\boxed{LTI}} \longrightarrow y[n]$$

پاسخ ضربه $h[n] = y_{in}[n]$ | $x[n] = \delta[n]$

یعنی حالت اولیه صفر

و امّا خواصّ سیستم‌های LTI با توجّه به پاسخ ضربه:

۱ـ حافظه: یک سیستم LTI بدون حافظه است اگر $h[n]=k\,\delta[n]$ باشد.

2ـ معکوس پذیری:

در حوزهٔ زمان $$h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

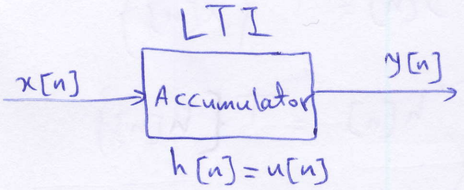
در حوزهٔ فرکانس: $$H(z)\cdot H_i(z) = 1 \Rightarrow H_i(z) = \frac{1}{H(z)}$$

3ـ علّی بودن: یک سیستم LTI زمان گسسته، علّی است اگر و تنها اگر دنبالهٔ $h[n]$ علّی باشد.

4ـ پایداری: یک سیستم LTI زمان گسسته، پایدار است اگر و تنها اگر دنبالهٔ $h[n]$ مطلقاً جمع پذیر باشد یعنی:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$$

به عنوان مثال: سیستم جمع کننده (Accumulator) یک سیستم LTI است که پاسخ ضربهٔ آن $u[n]$ است.



$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\cdot h[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\cdot u[n-k] \qquad u[n-k]=\begin{cases}1 & ; \quad k\leq n\\ 0 & ; \quad k>n\end{cases}$$

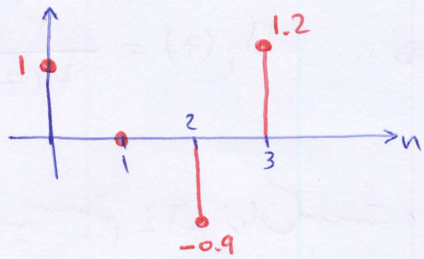
$$= \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

کانولوشن زمان گسسته:

یک نکته: هر سیگنال زمان گسسته $x[n]$ را می‌توان با رابطهٔ زیر هم نمایش داد:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].\delta[n-k]$$

به عنوان مثال

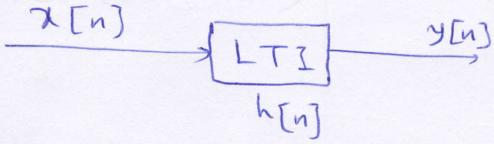


$$x[n] = \delta[n] - 0.9\,\delta[n-2] + 1.2\,\delta[n-3]$$

در یک سیستم زمان گسسته خطی و تغییرناپذیر با زمان داریم: $y[n] = x[n] * h[n]$ که در آن داریم:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[n-k]$$

اثبات:



$$y[n] = T\{x[n]\}$$

$$h[n] = T\{\delta[n]\}$$

تغییرناپذیری با زمان

$$h[n-k] = T\{\delta[n-k]\}$$

$$\Rightarrow y[n] = T\{x[n]\} = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].\delta[n-k]\right\}$$

با استفاده از خاصیت خطی بودن سیستم

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].T\{\delta[n-k]\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[n-k]$$

یک پارامتر

متغیر مستقل

دو رابطهٔ مهم و کاربردی در محاسبهٔ کانولوشن زمان گسسته:

رابطهٔ اول

$$\sum_{i=0}^{N} a^i = \begin{cases} N+1 & ; \quad a=1 \\ \dfrac{1-a^{N+1}}{1-a} & ; \quad a\neq 1 \end{cases}$$

مثال

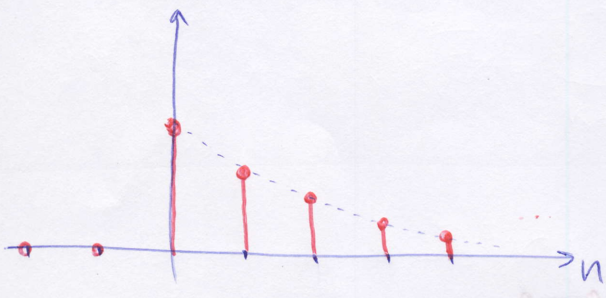
$$\sum_{i=0}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{63}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\times 63}{64} = \frac{63}{32}$$

رابطهٔ دوم

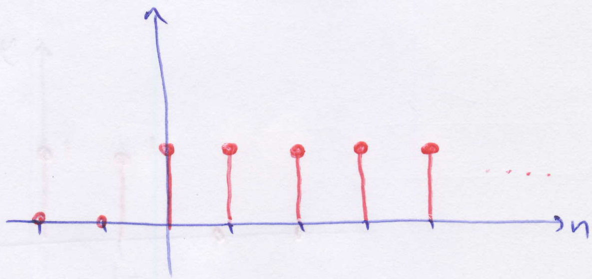
$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a} \quad ; \quad |a|<1$$

مثال: با فرض $|\alpha|<1$ ، حاصل $y[n]=x[n]*h[n]$ را محاسبه کنید.

$$x[n] = \alpha^n u[n] \quad ; \quad |\alpha|<1$$



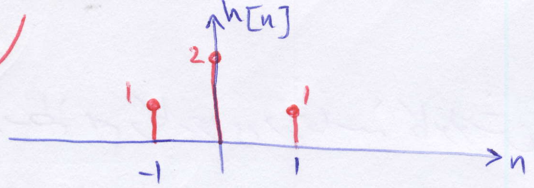
$$h[n] = u[n]$$

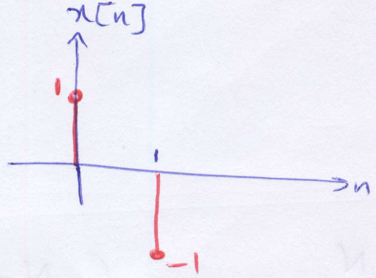


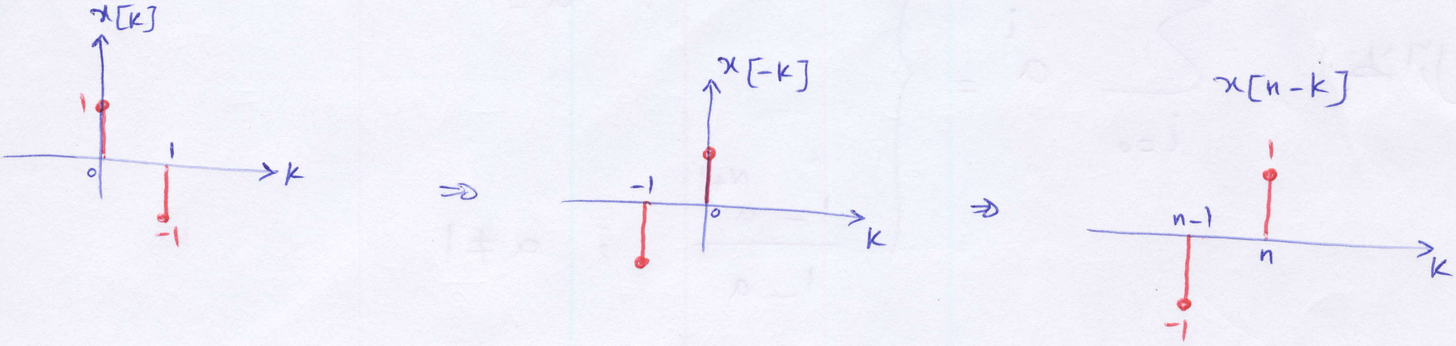
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha^k u[k].u[n-k] = \sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^k u[n-k]$$

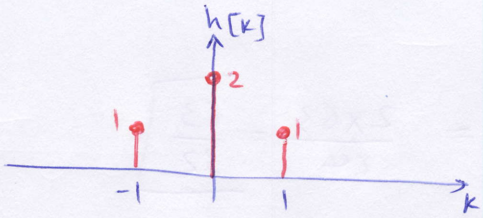
$$= \sum_{k=0}^{n}\alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \Rightarrow y[n] = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}.u[n]$$

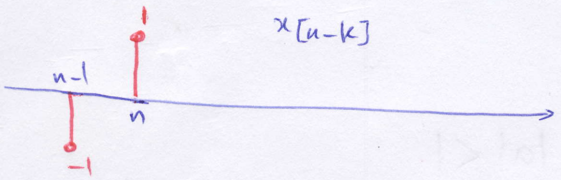
مثال:









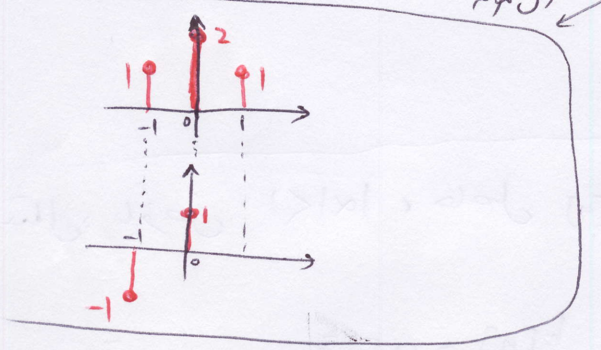


حالت اول : $n \le -2 \Rightarrow$ هم‌پوشانی ندارند $\Rightarrow y[n]=0$

حالت دوم : $n=-1 \Rightarrow y[n]=1\times1=1$

حالت سوم $n=0 \Rightarrow y[n]=1\times2+(-1)\times1=1$

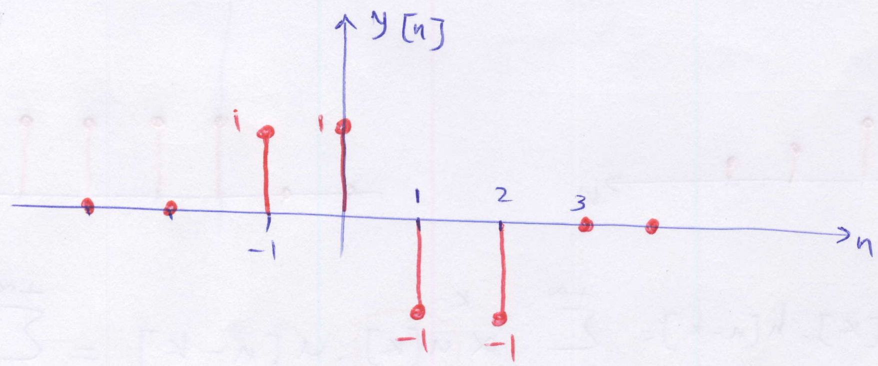
به عنوان نمونه



حالت چهارم $n=1 \Rightarrow y[n]=1\times1+2\times(-1)=-1$

حالت پنجم $n=2 \Rightarrow y[n]=1\times(-1)=-1$

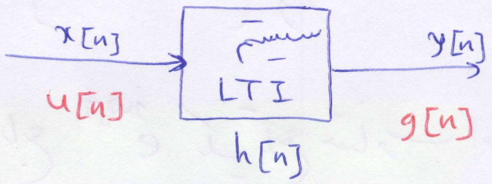
حالت ششم $n\geq3 \Rightarrow y[n]=0$



رابطه بین پاسخ ضربه و پاسخ پله در سیستم های زمان گسسته:

پاسخ ضربه $h[n] = y_{in}[n]\Big|_{x[n]=\delta[n]}$

پاسخ پله $g[n] = y_{in}[n]\Big|_{x[n]=u[n]}$



می دانیم $y[n] = x[n] * h[n]$

$$\Rightarrow g[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

$$u[n-k] = \begin{cases} 1 \,; & k \le n \\ 0 \,; & k > n \end{cases}$$

حال اگر سیستم LTI ما علّی هم باشد. $\Rightarrow h[n] = 0 \,; \quad n \le -1$

$$\Rightarrow g[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k]$$

$$\Rightarrow g[n] = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} h[k]}_{g[n-1]} + h[n] \Longrightarrow h[n] = g[n] - g[n-1]$$

سیگنالهای متناوب $e^{j\omega_0 t}$ و $e^{j\Omega_0 n}$ و مقایسه آنها

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t) \qquad e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right] \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}\left[e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right]$$

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}\left[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right] \qquad \sin\theta = \frac{1}{2j}\left[e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right]$$

تابع $e^{j\omega_0 t}$ یک تابع متناوب است که فرکانس اصلی آن ω_0 و دوره تناوب اصلی آن T است.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

مثلا

$$e^{j\sqrt{2}t} \longrightarrow \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{2} \ \frac{rad}{sec} \\ T = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi \ \ sec \end{cases}$$

$$e^{j\frac{3t}{2}} \longrightarrow \begin{cases} \omega_0 = \frac{3}{2} \ \frac{rad}{sec} \\ T = \frac{2\pi}{3/2} = \frac{4\pi}{3} \ \ sec \end{cases}$$

در تابع متناوب $e^{j\omega_0 t}$، با افزایش ω_0، نرخ نوسانات هم افزایش می‌یابد.

و اما در مورد تابع $e^{j\Omega_0 n}$ در حوزه زمان گسسته:

تابع $e^{j\Omega_0 n}$، همواره متناوب نیست بلکه فقط در صورتی متناوب است که مقدار Ω_0، کسر گویایی از 2π باشد یعنی تابع $e^{j\Omega_0 n}$ تنها در صورتی متناوب است که

$$\Omega_0 = \frac{m}{N} * 2\pi \quad ; \quad m, N \in Z$$

در اینصورت دوره تناوب اصلی تابع، برابر با N خواهد بود.

مثال : $e^{j\sqrt{2}n}$ متناوب نیست $\xrightarrow{\text{زیرا}}$ $\Omega_0 = \sqrt{2} \neq \frac{m}{N} 2\pi$

$e^{j\frac{3}{2}n}$ متناوب نیست زیرا $\longrightarrow$ $\Omega_0 = \frac{3}{2} \neq \frac{m}{N} 2\pi$

$e^{j\frac{\pi}{2}n}$ متناوب است زیرا $\longrightarrow$ $\Omega_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} * 2\pi \longrightarrow N = 4$

دورهٔ تناوب اصلی این تابع $\underline{4}$ است.

<u>چرا؟</u> می‌دانیم تعریف یک تابع متناوب این است: بتوان مقدار N را به گونه‌ای یافت که

گسسته‌ها $x[n] = x[n+N] \longrightarrow$ N دورهٔ تناوب اصلی ← N باید یک عدد طبیعی باشد.

پیوسته‌ها $x(t) = x(t+T) \longrightarrow$ دورهٔ تناوب اصلی $T \in \mathbb{R}$

$\rightarrow x[n] = x[n+N] \longrightarrow e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0 (n+N)}$

$\rightarrow e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0 n} \cdot \cancelto{1}{e^{j\Omega_0 N}} \longrightarrow e^{j\Omega_0 N} = 1 \rightarrow \cos(\Omega_0 N) + j\sin(\Omega_0 N) = 1$

$\rightarrow \cos \Omega_0 N = 1 \longrightarrow \Omega_0 N = 2\pi m \Rightarrow \Omega_0 = \frac{m}{N} 2\pi$

می‌دانیم $\cos(2m\pi) = 1$

پس یک تفاوت $e^{j\omega_0 t}$ و $e^{j\Omega_0 N}$ این است: $e^{j\omega_0 t}$ برای تمام مقادیر ω_0 متناوب است اما $e^{j\Omega_0 n}$ فقط در صورتی متناوب است که $\Omega_0 = \frac{m}{N} 2\pi$ باشد.

تفاوت مهم دیگر : $e^{j\omega_0 t}$ و $e^{j\Omega_0 n}$

می‌دانیم

$$\begin{cases} e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)} & \text{زیرا این تابعی متناوب است.} \\ e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0 (n+N)} & \text{زیرا اگر } \Omega_0 = \frac{m}{N}2\pi \text{ باشد، این هم تابعی متناوب است.} \end{cases}$$

امّا

$$\begin{cases} e^{j(\omega_0 + 2k\pi)t} \neq e^{j\omega_0 t} \\ e^{j(\Omega_0 + 2k\pi)n} = e^{j\Omega_0 n} \end{cases}$$

زیرا:

$$e^{j(\omega_0 + 2\pi k)t} = e^{j\omega_0 t} \cdot \underbrace{e^{j2\pi k t}}_{\text{این برابر یک نیست.}} = e^{j\omega_0 t} \cdot \underbrace{(\cos 2k\pi t + j \sin 2k\pi t)}_{\text{این برابر یک نیست.}}$$

$$e^{j(\Omega_0 + 2k\pi)n} = e^{j\Omega_0 n} \cdot \underbrace{\cancel{e^{j2k\pi n}}}_{=1} = e^{j\Omega_0 n} \underbrace{\cancel{(\cos(2k\pi n) + j \sin(2k\pi n))}}_{=1} = e^{j\Omega_0 n}$$

یعنی در حوزهٔ سیگنالهای زمان گسسته، خود فرکانس‌ها هم متناوب و تکراری هستند.