# مبانی رایانش نرم

## فازی: مجموعه‌ها

هادی ویسی

h.veisi@ut.ac.ir

دانشگاه تهران – دانشکده علوم و فنون نوین

نیم‌سال اول ۱۳۹۲-۱۳۹۳

# فهرست

- مفهوم فازی
- مجموعه کلاسیک
- مجموعه فازی
  - تعاریف
  - عملگرها
  - برش آلفا
  - انواع عملگرها
    - مکمل
    - اشتراک (t-norm)
    - اجتماع (t-conorm)
  - ترکیب عملگرها

# مفهوم فازی

- سوال (مفهوم جوانی)؟
  - برای سن‌های ۱۵ ساله (ابتدای جوانی)، ۲۵ ساله (کاملا جوان) و ۳۵ ساله (انتهای جوانی)
- ابهام و عدم شفافیت در متغیرهای زبانی و مسائل دنیای واقعی
  - سرد، کم، پایین، خوب، زیبا، ...
- فازی
  - طرز تفکر / دستگاه استنتاجی جدید (چند مقداری)
  - برای برطرف ساختن ناتوانی منطق دومقداری و ریاضیات بسیار دقیق در برخورد با دنیای واقعی و نادقیق

# مجموعه

- مجموعه = گروهی از اشیا و افراد
  - مجموعه دانشجویان سال اول
  - مجموعه حروف فارسی

  - مجموعه افراد قدبلند کلاس
  - مجموعه افراد جوان

- عضویت در مجموعه
  - [می‌دانیم] عنصر a (رضا) عضو مجموعه A (دانشجویان سال اول) هست/نیست

$a \in A$ $a \notin A$

  - چگونه تعیین کنیم:
    - عنصر a (رضا) عضو مجموعه A (افراد قدبلند) هست/نیست؟
    - عنصر a (رضا) عضو مجموعه A (افراد جوان) هست/نیست؟


H. Veisi (h.veisi@ut.ac.ir)

# مجموعه کلاسیک . . .

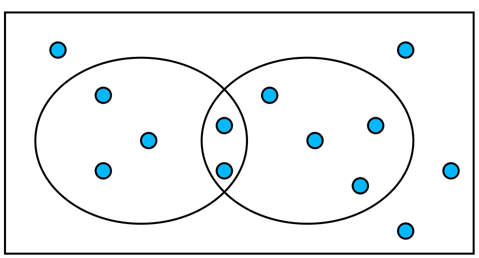
- مجموعه تُرد (Crisp)
  - دو حالته
  - هر عضو مانند a، یا عضو مجموعه A است یا نیست (صفر یا یک)
  - تعریف مجموعه
    - به صورت لیست $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
    - به صورت قانون $A = \{x \mid P(x)\}$

xهایی که هر x دارای مشخصه P است

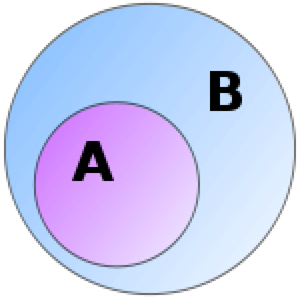
- تابع مشخصه مجموعه (characteristic function)

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in A \\ 0 & \text{for } x \notin A \end{cases}$$

$$\chi_A : X \to \{0,1\}$$



# مجموعه کلاسیک . . .




## عملگرهای مجموعه ...

- مجموعه A زیرمجموعه (subset) مجموعه B است $A \subseteq B$
- مجموعه A مساوی با (equal) مجموعه B است $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ and } B \subseteq A$
- مجموعه A نامساوی با (not equal) مجموعه B است $A \neq B$
- مجموعه A زیرمجموعه مناسب (proper subset) مجموعه B است

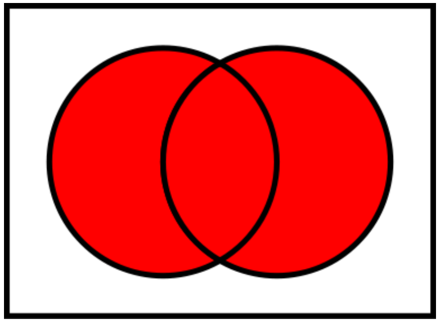
$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ and } A \neq B$

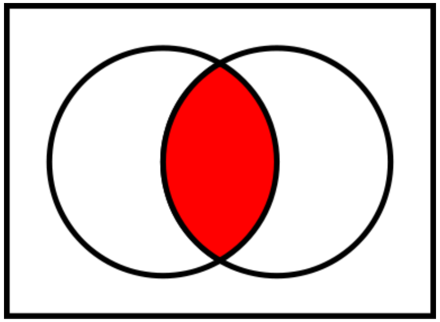
- مجموعه A شامل شده (included in) مجموعه B است $A \subseteq B$
- مجموعه توانی (power set) A عبارتست از کلیه زیر مجموعه‌های A: $\mathcal{P}(A)$
- اندازه مجموعه (cardinality) مجموعه A بیانگر تعداد عناصر مجموعه A است= $|A|$
  - مثال $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

- مکمل نسبی (relative complementary) مجموعه A نسبت به B

$$B - A = \{x \mid x \in B, x \notin A\}$$

# مجموعه کلاسیک . . .





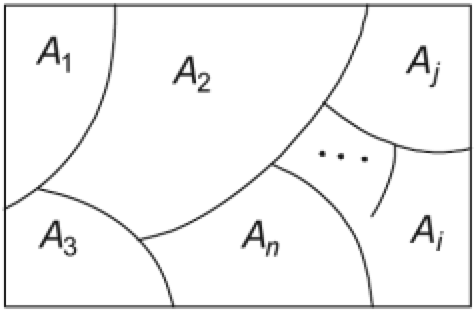
- عملگرهای مجموعه . . .
  - اگر B مجموعه جهانی (X) باشد $B-A=\overline{A}$
    - مکمل (complementary) مجموعه A
    - $\overline{\overline{A}}=A$
    - $\overline{\phi}=X$ (مکمل مجموعه تهی)
    - $\overline{X}=\phi$
  - اجتماع (union) دو مجموعه A و B $A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ or } x\in B\}$
    - حالت گسترش یافته $\bigcup_{i\in I} A_i=\{x \mid x\in A_i \text{ for some } i\in I\}$
  - اشتراک (intersection) دو مجموعه A و B $A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ and } x\in B\}$
    - حالت گسترش یافته $\bigcap_{i\in I} A_i=\{x \mid x\in A_i \text{ for all } i\in I\}$
  - دو مجموعه A و B مجزا (Disjoint) هستند اگر

$$A\cap B=\phi$$



H. Veisi (h.veisi@ut.ac.ir)

# مجموعه کلاسیک . . .




- عملگرهای مجموعه . . .
  - افراز (partition) مجموعه A: $\pi(A)$
    - شکستن فضای مجموعه به زیرمجموعه‌های مجزا

$$\pi(A) = \{A_i | i \in I, A_i \subseteq A\},$$

where $A_i \neq \varnothing$, is a partition on $A$ iff $A_i \cap A_j = \varnothing$ for each pair $i, j \in I, i \neq j$, and $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

  - جمع (Addition) افراز مجموعه A

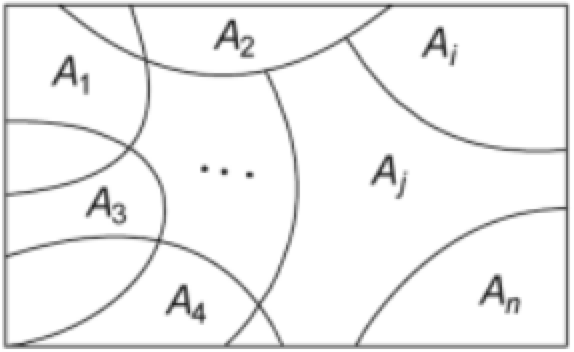
$$|A| = |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

  - مثال

$$A = \{a, b, c, d, e\}, \ A_1 = \{a, b\}, \ A_2 = \{c, d\}, \ A_3 = \{e\},$$

$$|A| = 5, \qquad \Sigma_{i=1}^{3} |A_i| = 2 + 2 + 1 = 5$$

# مجموعه کلاسیک . . .




- عملگرهای مجموعه . . .
  - **پوشش (Cover)** روی مجموعه A
    - شکستن فضای مجموعه به n زیرمجموعه غیرمجزا (دارای همپوشانی)
    - مشابه افراز اما برای مجموعه‌های غیرمجزا
  - **شمول و طرد (Inclusion and Exclusion)** برای پوشش مجموعه A به n زیرمجموعه
    - تعداد اعضای مجموعه پوشش

$$|A| = |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}|A_i \cap A_j| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1 \\ i \neq j \neq k}}^{n}|A_i \cap A_j \cap A_k| \ldots (-i)^{n+1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

- برای حالت ۲ تایی و ۳ تایی

$$|A| = |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$$|A| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$
$$- |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

# مجموعه کلاسیک . . .

- عملگرهای مجموعه . . .
  - ضرب (Cartesian product) مجموعه A و B: $A \times B = \{\langle a, b\rangle | a \in A, b \in B\}$
    - توجه شود $A \times B \neq B \times A.$
    - حالت گسترش یافته $\underset{1 \le i \le n}{\times} A_i = \{\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle | a_i \in A_i \text{ for every } i = 1, 2, \ldots, n\}$

# مجموعه کلاسیک . . .

- عملگرهای مجموعه

| | |
|---|---|
| Involution | $\overline{\overline{A}} = A$ |
| Commutativity | $A \cup B = B \cup A$ |
| | $A \cap B = B \cap A$ |
| Associativity | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ |
| | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |
| Distributivity | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| Idempotence | $A \cup A = A$ |
| | $A \cap A = A$ |
| Absorption | $A \cup (A \cap B) = A$ |
| | $A \cap (A \cup B) = A$ |
| Absorption by $X$ and $\varnothing$ | $A \cup X = X$ |
| | $A \cap \varnothing = \varnothing$ |
| Identity | $A \cup \varnothing = A$ |
| | $A \cap X = A$ |
| Law of contradiction | $A \cap \overline{A} = \varnothing$ |
| Law of excluded middle | $A \cup \overline{A} = X$ |
| De Morgan's laws | $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ |
| | $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ |

# مجموعه کلاسیک . . .

- محدب بودن (convex)

A set $A$ in $\mathbb{R}^n$ is called *convex* iff, for every pair of points

$$\mathbf{r} = \langle r_i | i \in \mathbb{N}_n \rangle \text{ and } \mathbf{s} = \langle s_i | i \in \mathbb{N}_n \rangle$$

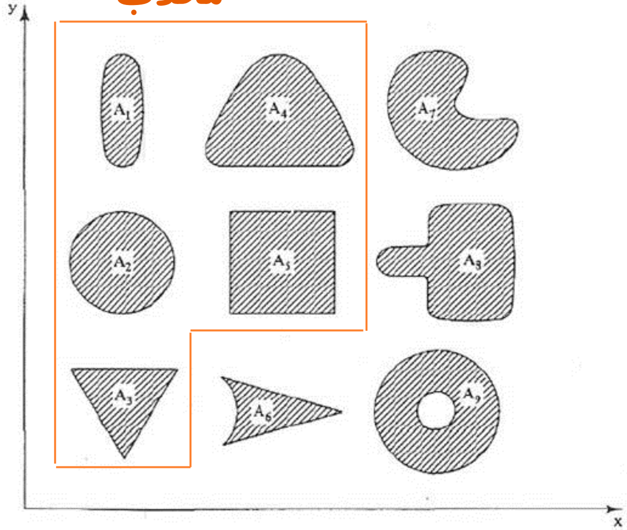
in $A$ and every real number $\lambda \in [0, 1]$, the point

$$\mathbf{t} = \langle \lambda r_i + (1 - \lambda) s_i | i \in \mathbb{N}_n \rangle$$

is also in $A$.

- مثال ۱: مجموعه $A=[0,2]\text{U}[3,5]$ محدب نیست
  - اگر $r = 1, s = 4, \lambda=0.4$، آنگاه $\lambda r+(1- \lambda)s=2.8$ عضو A نیست

محدب



- مثال ۲: مجموعه‌هایی در فضای $\text{R}^2$

# مجموعه کلاسیک

## کران بالا و پایین (upper/lower bound)

- اگر عددی حقیقی مانند s وجود داشته باشد که به ازای همه xهای عضو A داشته باشیم $x<s$، آنگاه r کران بالای A است و A از بالا به s محدود است

- اگر عددی حقیقی مانند r وجود داشته باشد که به ازای همه xهای عضو A داشته باشیم $x>r$، آنگاه r کران پایین A است و A از پایین به r محدود است

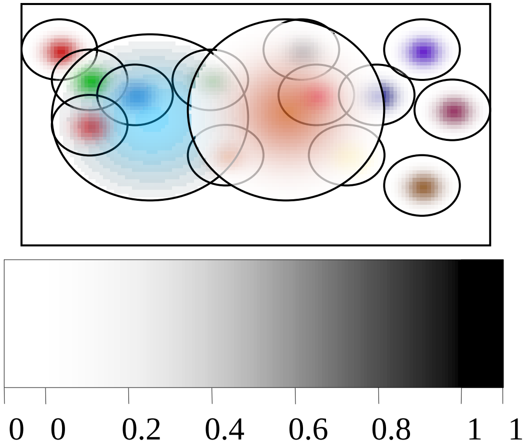
## infimum/supremum

- برای مجموعه A که از بالا محدود شده است، s را supremum گویند اگر s کران بالای A باشد و هیچ عدد کوچکتری از s، کران بالای A نباشد (کوچکترین کران بالا)

- برای مجموعه A که از پایین محدود شده است، r را infimum گویند اگر r کران پایین A باشد و هیچ عدد بزرگتری از r، کران پایین A نباشد (بزرگترین کران پایین)

# مجموعه فازی . . .

- ایده
  - به هر عضو مجموعه (مانند a) میزان تعلق آن به مجموعه A را (بین صفر و یک) در نظر بگیریم



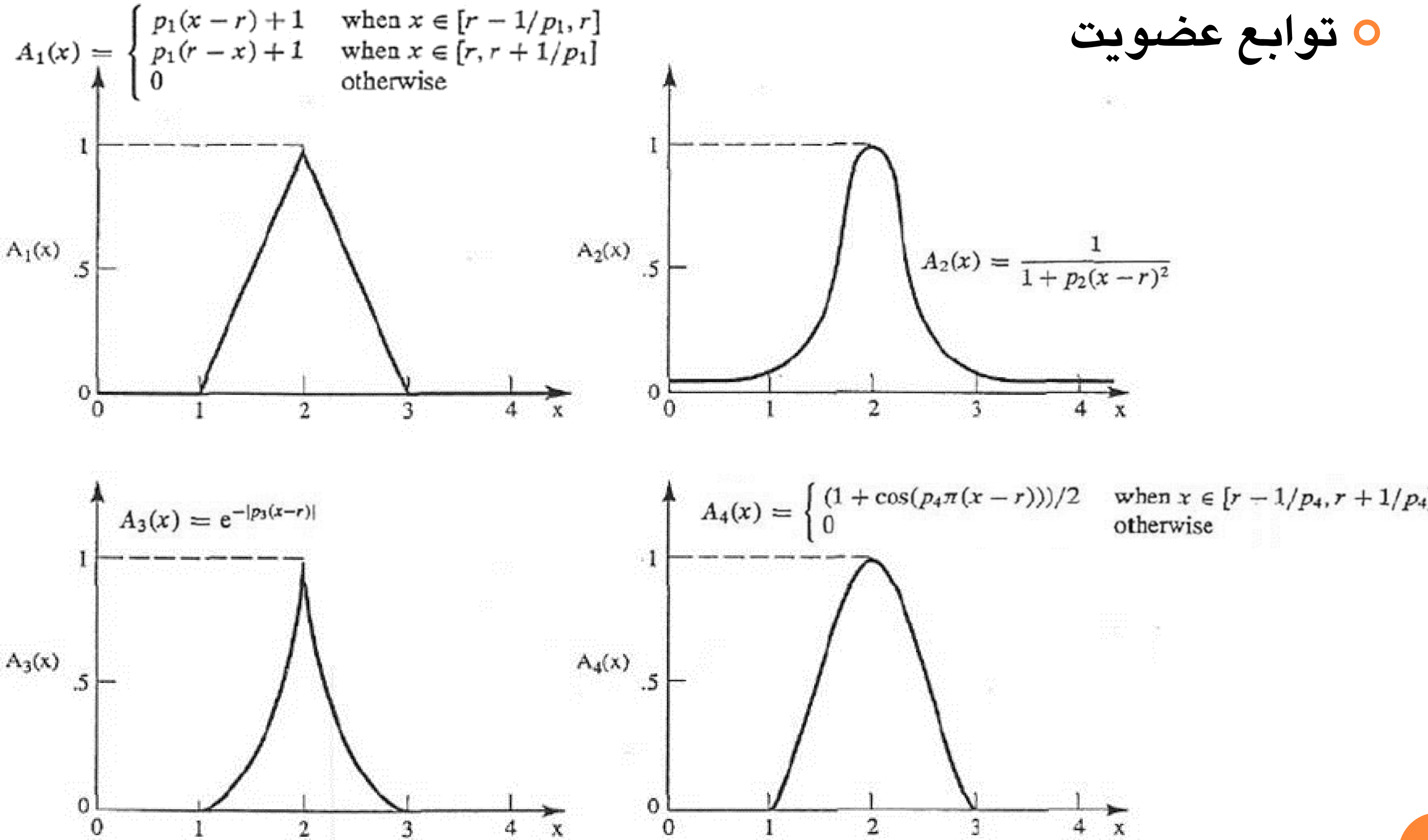

- تابع عضویت (membership function)
  - یک تابع مشخصه (characteristic function)
  - مقادیر در بازه‌ای از اعداد (معمولاً بین صفر و یک)
  - بیانگر میزان درجه/میزان عضویت هر عضو به مجموعه

- مجموعه فازی: مجموعه‌ای که با یک تابع عضویت تعریف می‌شود

$$\mu_A : X \rightarrow [0,1]$$

# مجموعه فازی . . .

- توابع عضویت



# مجموعه فازی . . .

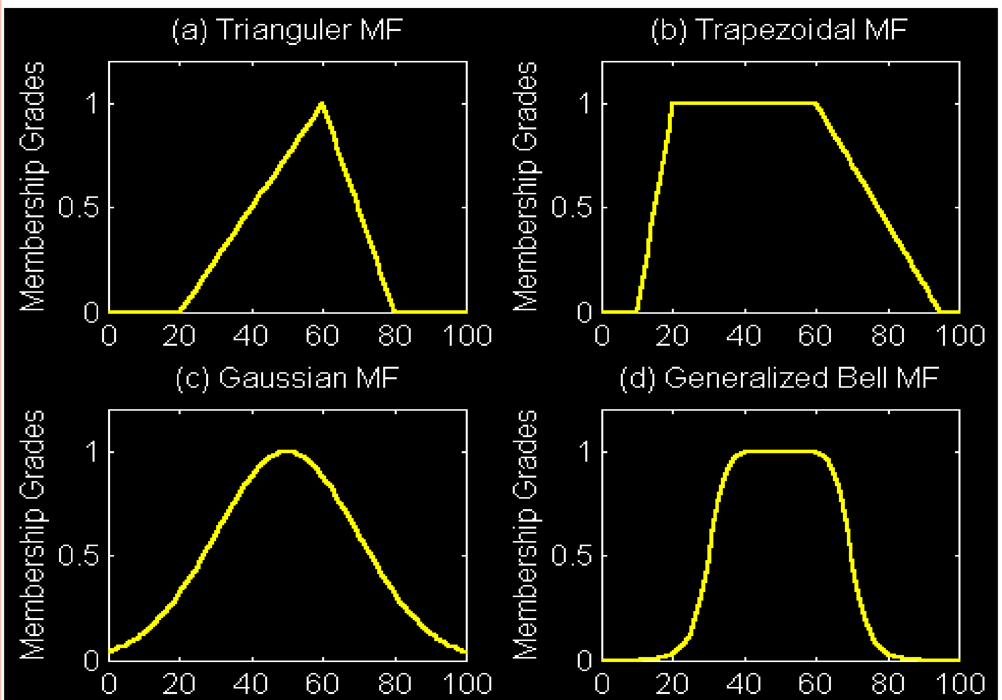
$$tri(x;a,b,c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$$

$$trap(x;a,b,c,d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right)$$

$$gauss(x;a,b,c) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$

$$gbell(x;a,b,c) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{b}\right|^{2b}}$$

- توابع عضویت
  - مثلثی (Triangular)
  - ذوزنقه‌ای (Trapezoidal)
  - گاوسی (Gaussian)
  - زنگوله‌ای (Generalized bell)




برای استفاده و رسم در MATLAB

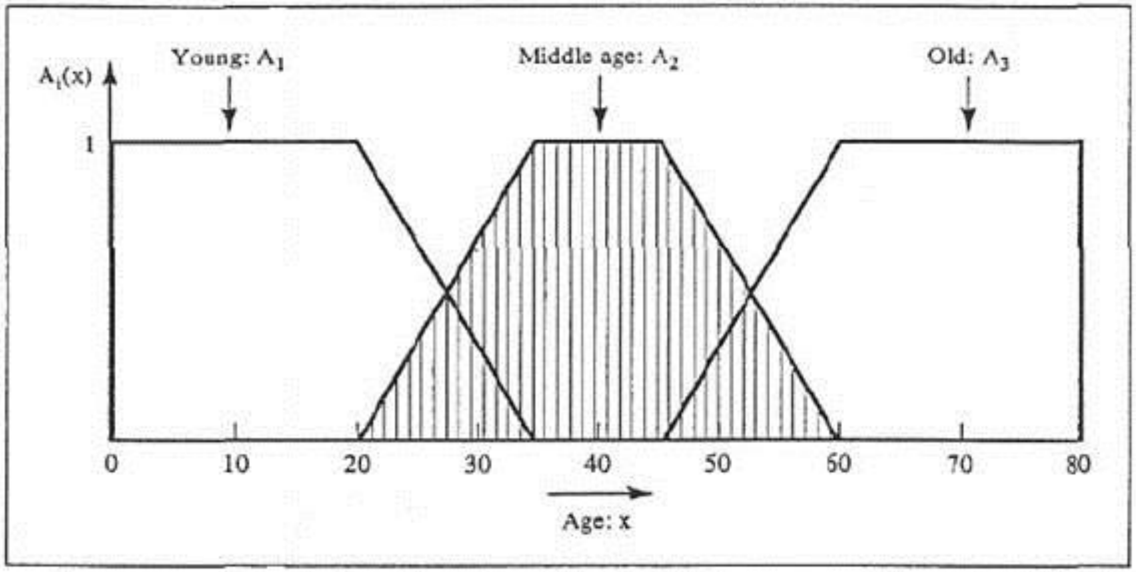
# مجموعه فازی . . .

- مثال: مفهوم جوانی، میان‌سالی و کهن‌سالی
  - بازه [۰–۸۰]

$$A_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{when } x \le 20 \\ (35-x)/15 & \text{when } 20 < x < 35 \\ 0 & \text{when } x \ge 35 \end{cases}$$

$$A_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{when either } x \le 20 \text{ or } \ge 60 \\ (x-20)/15 & \text{when } 20 < x < 35 \\ (60-x)/15 & \text{when } 45 < x < 60 \\ 1 & \text{when } 35 \le x \le 45 \end{cases}$$

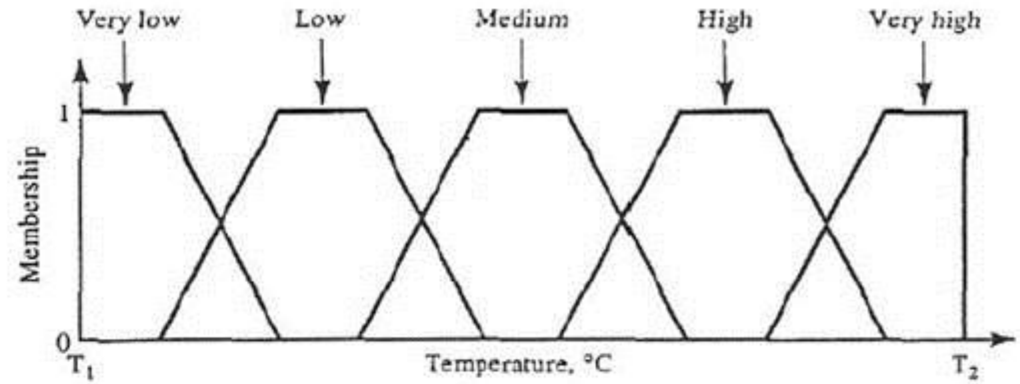
$$A_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{when } x \le 45 \\ (x-45)/15 & \text{when } 45 < x < 60 \\ 1 & \text{when } x \ge 60 \end{cases}$$



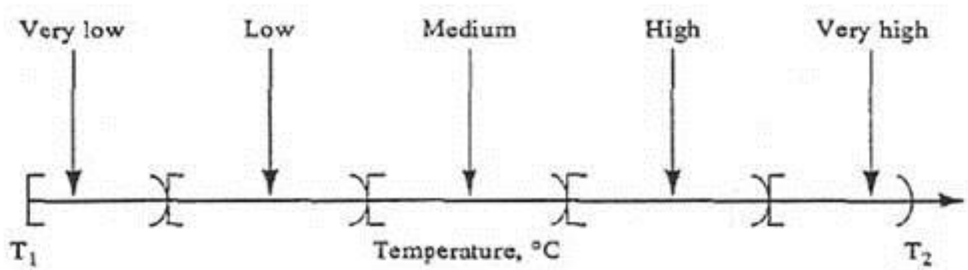

| $x$ | $D_2(x)$ |
|---|---|
| $x \notin \{22, 24, \ldots, 58\}$ | 0.00 |
| $x \in \{22, 58\}$ | 0.13 |
| $x \in \{24, 56\}$ | 0.27 |
| $x \in \{26, 54\}$ | 0.40 |
| $x \in \{28, 52\}$ | 0.53 |
| $x \in \{30, 50\}$ | 0.67 |
| $x \in \{32, 48\}$ | 0.80 |
| $x \in \{34, 46\}$ | 0.93 |
| $x \in \{36, 38, \ldots, 44\}$ | 1.00 |

# مجموعه فازی . . .

- مثال: درجه حرارت
  - فازی




  - کریسپ



# مجموعه فازی . . .

## حالت اصلی

$$A = \{(x,\ \mu_{\tilde{A}}(x)),\ x \in X\}$$

- مثال: مجموعه دانش‌آموزان (X) = {علی، احمد، بهنام، سینا، شبنم}
- مجموعه فازی دانش‌آموزان "باهوش"
  - {(۰.٤، علی)، (۰.۸، احمد)، (۰.۶، بهنام)، (۱، سینا)، (۰.۹، شبنم)}

## نوع دیگر

- نمایش (در حالت گسسته)

$$A = \sum_{x_i \in X} \mu_{\tilde{A}}(x_i)/x_i$$

  - علی/۰.٤ + احمد/۰.۸ + بهنام/ ۰.۶ + سینا/۱ + شبنم/ ۰.۹

- نمایش (در حالت پیوسته)

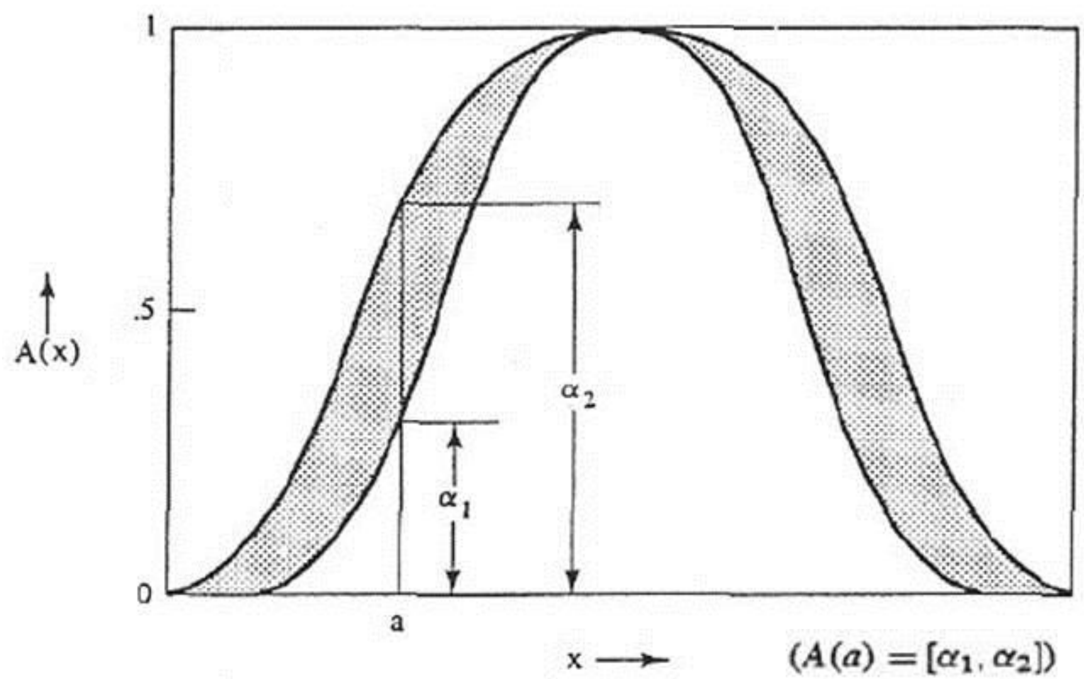
$$A = \int_X \mu_{\tilde{A}}(x)/x$$

# مجموعه فازی . . .

- مجموعه فازی بازه‌ای (Interval-valued)
  - مقدار تابع عضویت به ازای هر مقدار، یک بازه است نه یک مقدار

$$A: X \rightarrow \varepsilon([0,1]), \quad \mathcal{E}([0, 1]) \subset \mathcal{P}([0, 1]).$$

Power set





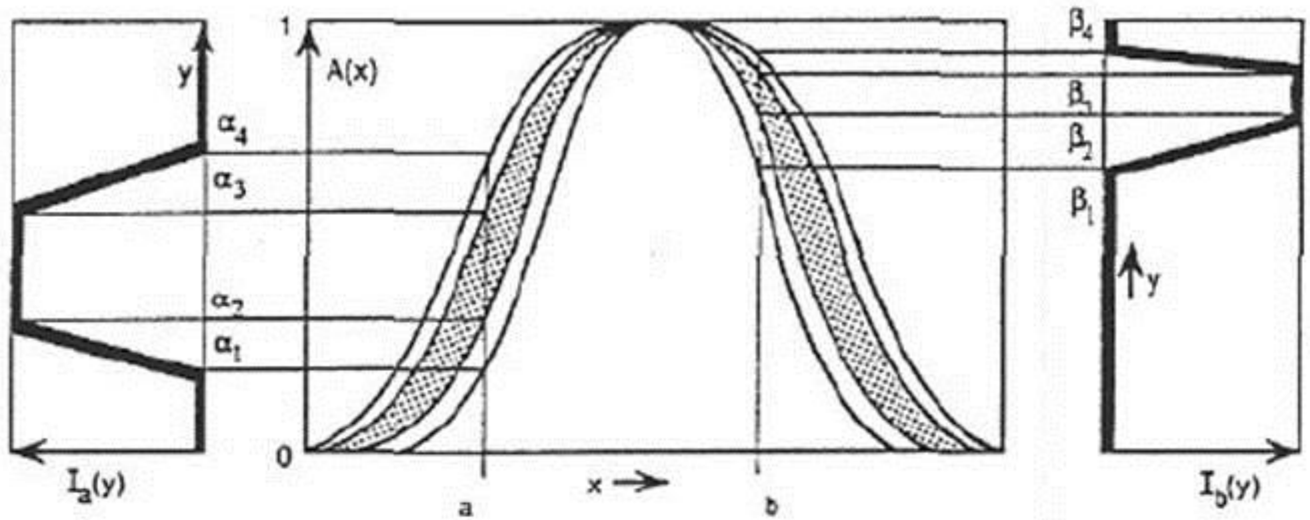

H. Veisi (h.veisi@ut.ac.ir)

# مجموعه فازی . . .

- مجموعه فازی نوع ۲(type 2)
  - مقدار تابع عضویت برای هر مقدار، خودش یک تابع عضویت است

$$A : X \to \mathcal{F}([0, 1]),$$

  - نیاز به محاسبات بالا ⮜ عدم استفاده در کاربردهای واقعی

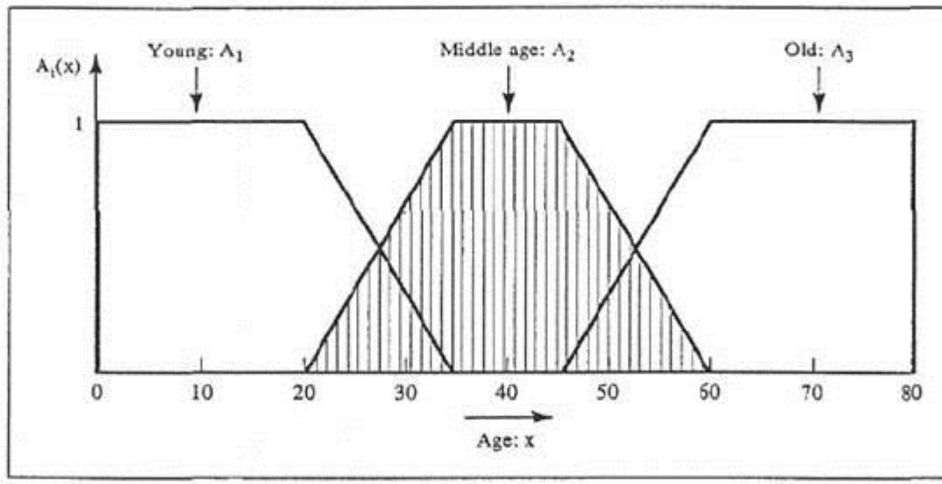


# مجموعه فازی . . .

- برش α (α-cut) و برش قوی α (strong α-cut)
  - مقادیر بزرگ‌تر (و مساوی) از α برای تابع عضویت

$$^{\alpha}A = \{x | A(x) \geq \alpha\}$$
$$^{\alpha+}A = \{x | A(x) > \alpha\}.$$

$$\alpha \in [0,1]$$




$$A_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{when } x \leq 20 \\ (35-x)/15 & \text{when } 20 < x < 35 \\ 0 & \text{when } x \geq 35 \end{cases}$$

$$A_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{when either } x \leq 20 \text{ or } \geq 60 \\ (x-20)/15 & \text{when } 20 < x < 35 \\ (60-x)/15 & \text{when } 45 < x < 60 \\ 1 & \text{when } 35 \leq x \leq 45 \end{cases}$$

$$A_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{when } x \leq 45 \\ (x-45)/15 & \text{when } 45 < x < 60 \\ 1 & \text{when } x \geq 60 \end{cases}$$

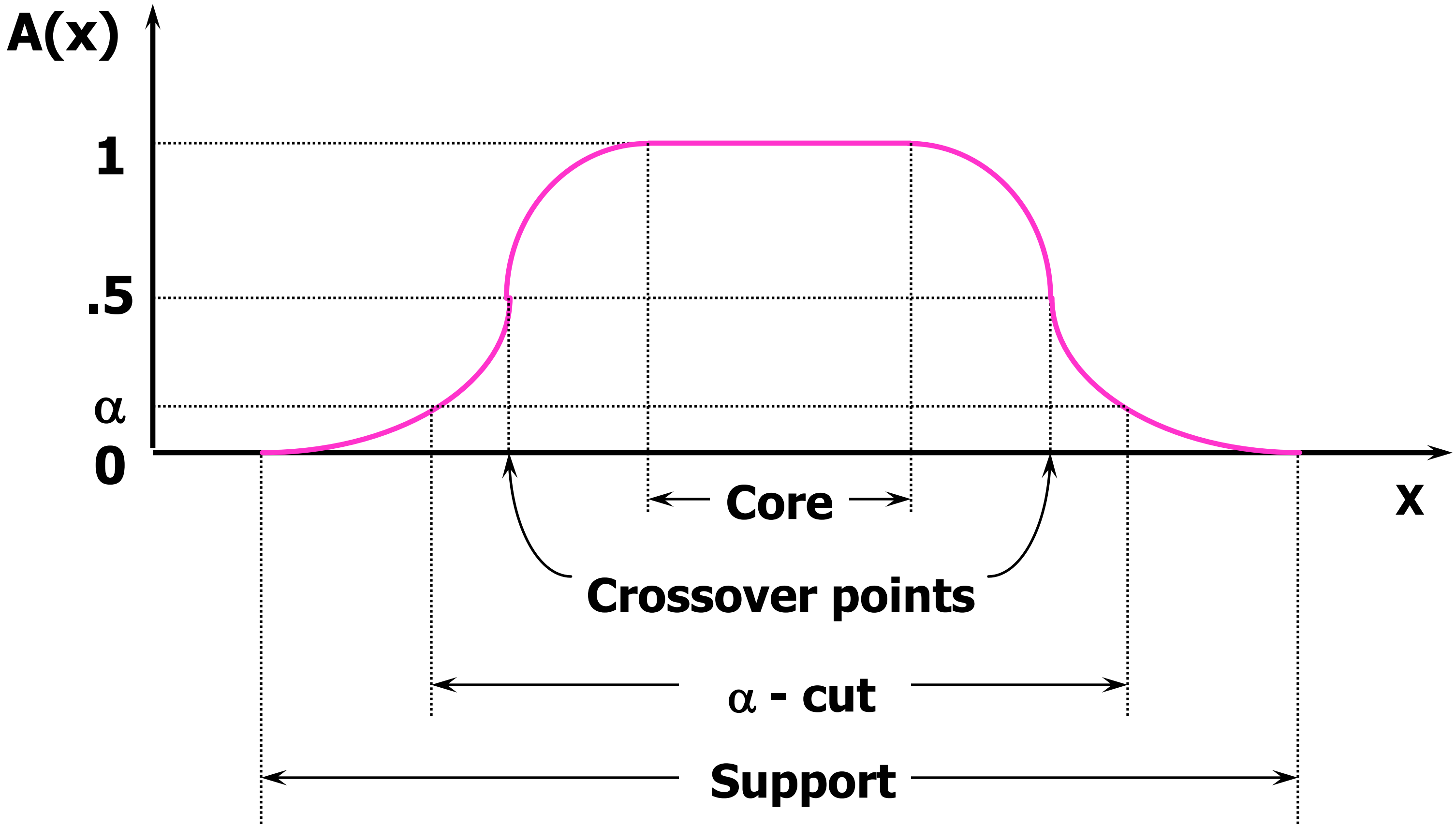
$$^{0}A_1 = {}^{0}A_2 = {}^{0}A_3 = [0, 80] = X;$$
$$^{\alpha}A_1 = [0, 35 - 15\alpha], {}^{\alpha}A_2 = [15\alpha + 20, 60 - 15\alpha], {}^{\alpha}A_3 = [15\alpha + 45, 80] \text{ for all } \alpha \in (0, 1];$$
$$^{\alpha+}A_1 = (0, 35 - 15\alpha), {}^{\alpha+}A_2 = (15\alpha + 20, 60 - 15\alpha), {}^{\alpha+}A_3 = (15\alpha + 45, 80) \text{ for all } \alpha \in [0, 1);$$
$$^{1+}A_1 = {}^{1+}A_2 = {}^{1+}A_3 = \varnothing.$$

# مجموعه فازی . . .

- مجموعه پشتیبان (support) فازی
  - مجموعه پشتیبان برای مجموعه فازی A در یک مجموعه جهانی X، مجموعه‌ای کریسپ است که حاوی تمام عناصر X است که شامل درجه عضویت غیرصفر در A هستند.
  - مجموعه پشتیبان برای مجموعه فازی A برابر با برش قوی α از A برای α=0 است
  - $S(A) \text{ or } supp(A) = {}^{0+}A$
- مجموعه هسته (core) فازی
  - معادل برش α از A برای α=1 است، یعنی ${}^{1}A$
- ارتفاع (height) یک مجموعه فازی
  - معادل بزرگ‌ترین درجه عضویت در مجموعه A (برای هر کدام از عناصر) $h(A) = \sup_{x \in X} A(x)$
  - اگر $h(A) = 1$ باشد، مجموعه A را نرمال (normal) می‌گویند
  - اگر $h(A) < 1$ باشد، مجموعه A را زیرنرمال (subnormal) می‌گویند
  - معادل supremum برای α که ${}^{\alpha}A \neq \phi$

# مجموعه فازی . . .

- مثال



# مجموعه فازی . . .

- مجموعه فازی محدب (Convex)
  - تابع محدب (Convex)

$$f(tx+(1-t)y) \le tf(x)+(1-t)f(y)$$

    - برای دو نقطه x و y در دامنه و برای هر مقدار t در [0,1]
  - تابع مقعر (Concave)

$$f(tx+(1-t)y) \ge tf(x)+(1-t)f(y)$$

**Theorem 1.1.** A fuzzy set $A$ on $\mathbb{R}$ is convex iff

$$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \min[A(x_1), A(x_2)] \tag{1.13}$$

for all $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ and all $\lambda \in [0, 1]$, where min denotes the minimum operator.

***Proof:*** (i) Assume that $A$ is convex and let $\alpha = A(x_1) \le A(x_2)$. Then, $x_1, x_2 \in {}^\alpha A$ and, moreover, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in {}^\alpha A$ for any $\lambda \in [0, 1]$ by the convexity of $A$. Consequently,

$$\Rightarrow \quad A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \alpha = A(x_1) = \min[A(x_1), A(x_2)].$$

(ii) Assume that $A$ satisfies (1.13). We need to prove that for any $\alpha \in (0, 1]$, ${}^\alpha A$ is convex. Now for any $x_1, x_2 \in {}^\alpha A$ (i.e., $A(x_1) \ge \alpha$, $A(x_2) \ge \alpha$), and for any $\lambda \in [0, 1]$, by (1.13)

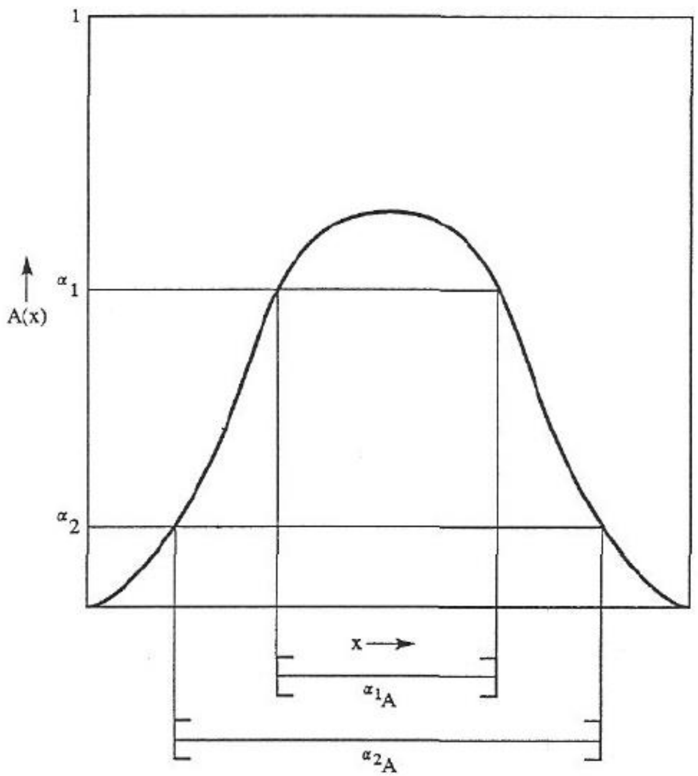
$$\Leftarrow \quad A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \min[A(x_1), A(x_2)] \ge \min(\alpha, \alpha) = \alpha;$$

i.e., $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in {}^\alpha A$. Therefore, ${}^\alpha A$ is convex for any $\alpha \in (0, 1]$. Hence, $A$ is convex. ■

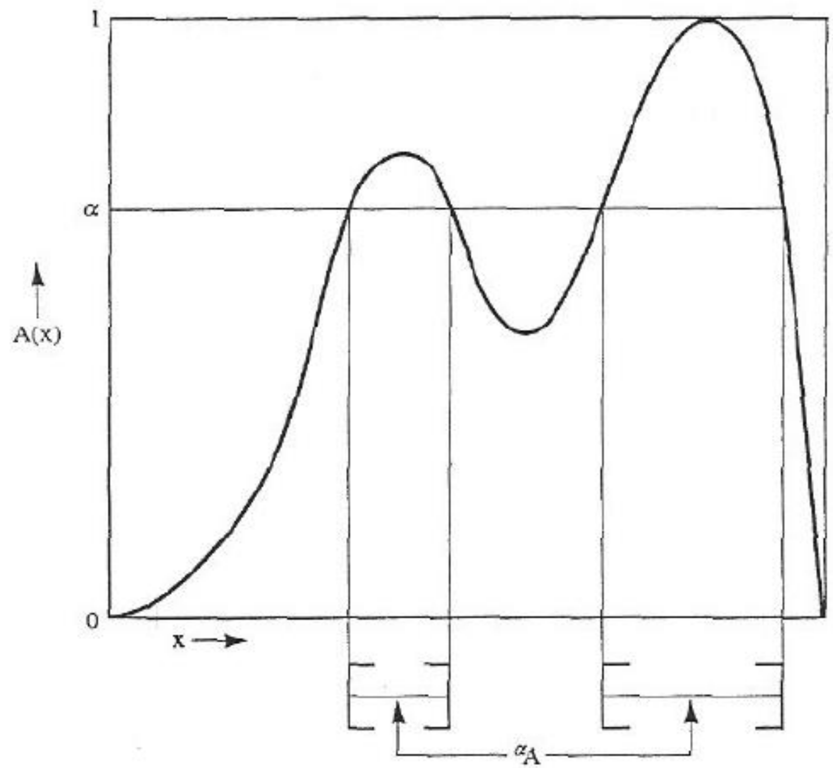

H. Veisi (h.veisi@ut.ac.ir)

# مجموعه فازی . . .

- مجموعه محدب و زیرنرمال

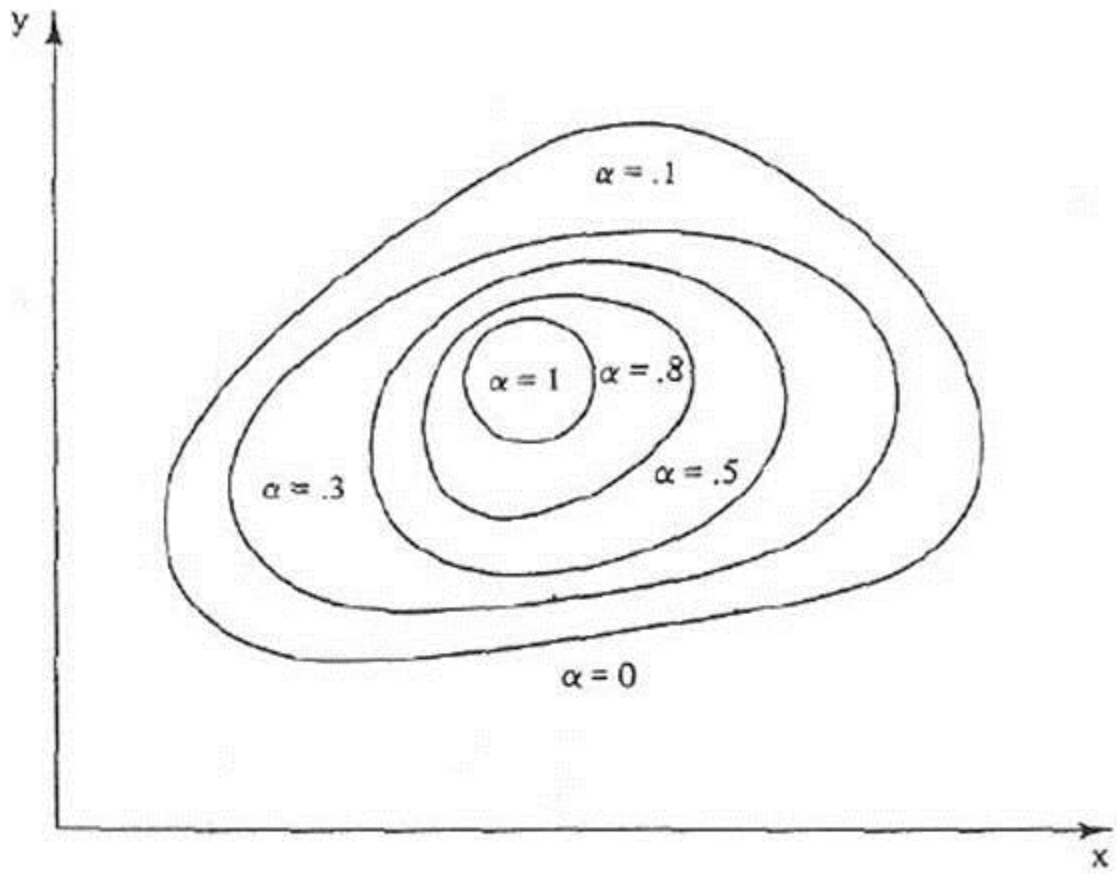



- مجموعه غیرمحدب و نرمال



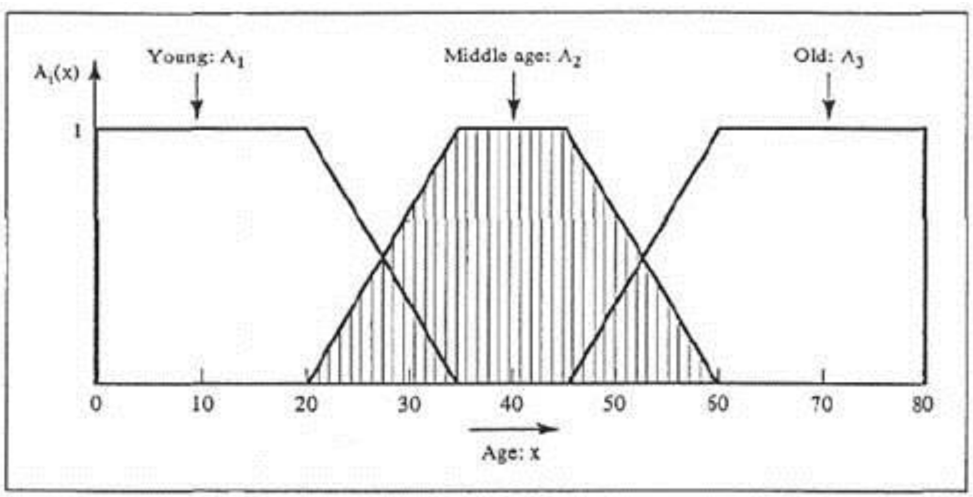
# مجموعه فازی . . .

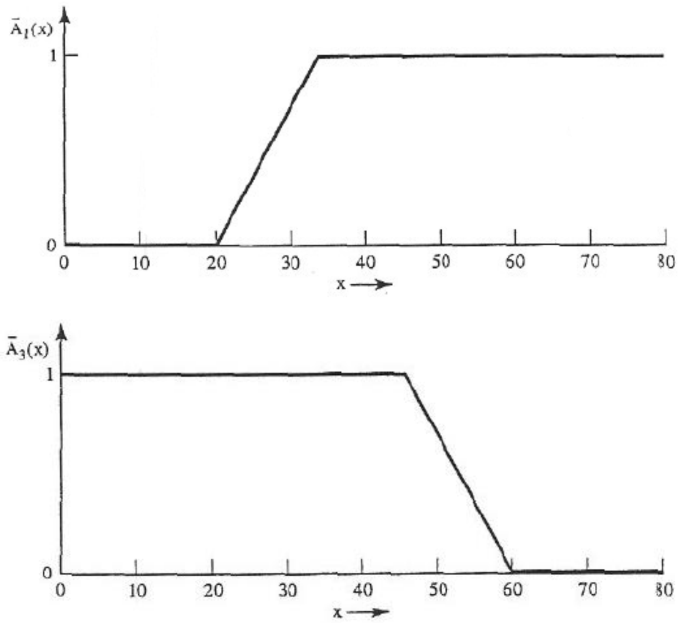
- مجموعه نرمال



# مجموعه فازی . . .

- مکمل (complement) $\bar{A}(x) = 1 - A(x)$
  - تابع مکمل استاندارد (توابع دیگری نیز برای این کار وجود دارند)
  - نقطه تعادل $\bar{A}(x) = A(x)$

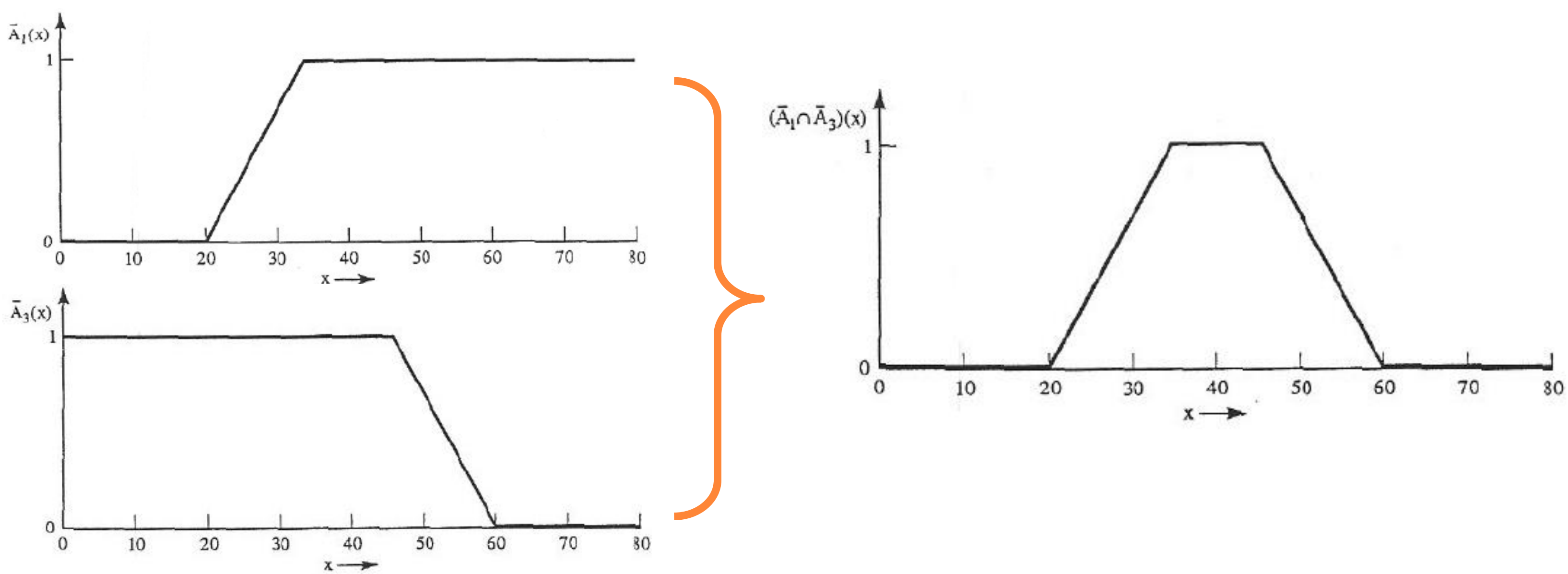


# مجموعه فازی . . .

- اجتماع و اشتراک
  - تعریف استاندارد (تعاریف دیگری نیز وجود دارند)
    - اشتراک = t-norm و اجتماع = t-conorm
  - می‌تواند نرمال بودن و محدب بودن را عوض کند

$$(A \cap B)(x) = \min[A(x), B(x)],$$
$$(A \cup B)(x) = \max[A(x), B(x)],$$



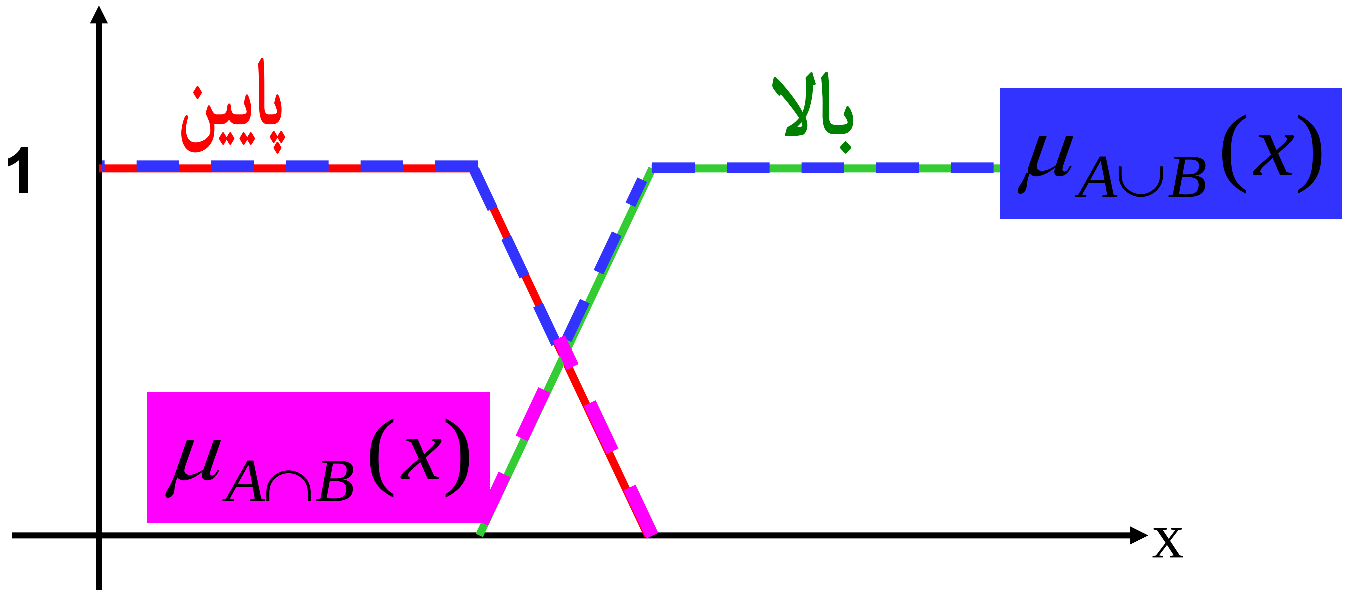
# مجموعه فازی . . .

- اجتماع (جمع)

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

- اشتراک (ضرب)

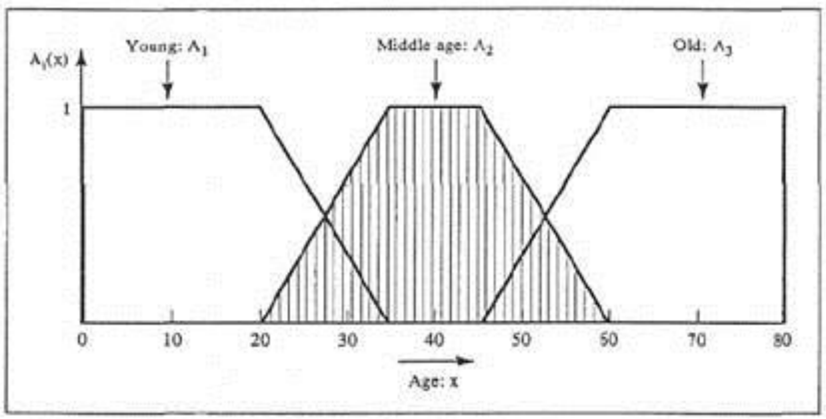
$$\mu_{A\cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

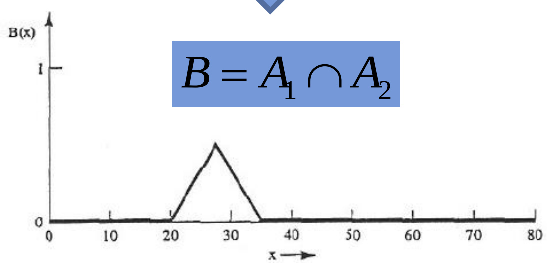


# مجموعه فازی . . .

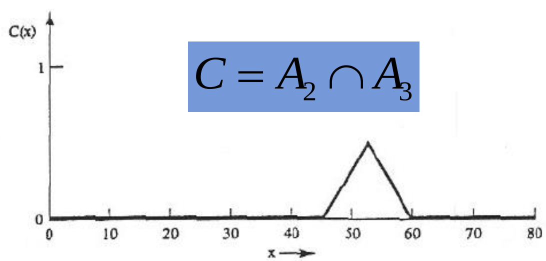
## مثال

- سه مجموعه $A_1, A_2, A_3$ نرمال هستند
- مجموعه‌های Bو C زیرنرمال هستند
- مجموعه‌های Bو C محدب هستند
- دو مجموعه $B\cup C$ و $\overline{B\cup C}$ محدب نیستند

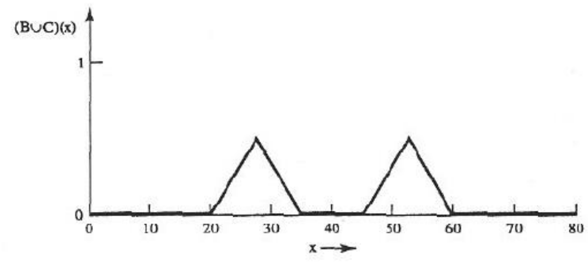


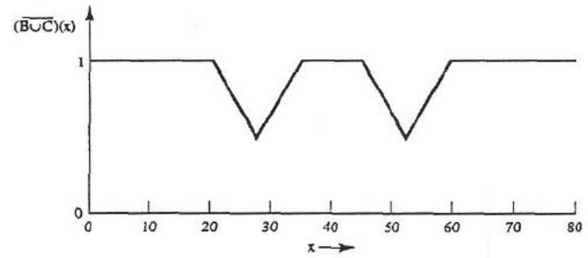




$$B = A_1 \cap A_2$$




$$C = A_2 \cap A_3$$



# مجموعه فازی . . .

## ویژگی‌های اجتماع و اشتراک

- برقرار بودن تمام ویژگی‌های بیان شده برای مجموعه‌های کریسپ به غیر از
  - قانون تناقض (contradiction)
  - قانون (excluded middle)

| | |
|---|---|
| Involution | $\overline{\overline{A}} = A$ |
| Commutativity | $A \cup B = B \cup A$ |
| | $A \cap B = B \cap A$ |
| Associativity | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ |
| | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |
| Distributivity | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| Idempotence | $A \cup A = A$ |
| | $A \cap A = A$ |
| Absorption | $A \cup (A \cap B) = A$ |
| | $A \cap (A \cup B) = A$ |
| Absorption by $X$ and $\varnothing$ | $A \cup X = X$ |
| | $A \cap \varnothing = \varnothing$ |
| Identity | $A \cup \varnothing = A$ |
| | $A \cap X = A$ |
| ~~Law of contradiction~~ | $\cancel{A \cap \overline{A} = \varnothing}$ |
| ~~Law of excluded middle~~ | $\cancel{A \cup \overline{A} = X}$ |
| De Morgan's laws | $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ |
| | $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ |

$$A \cup \overline{A} \neq \mathrm{U}$$

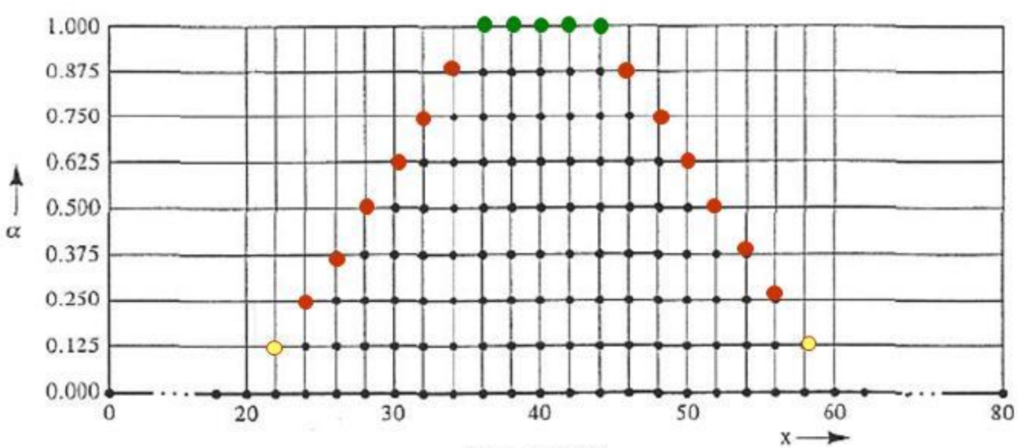
$$A \cap \overline{A} \neq \phi$$



H. Veisi (h.veisi@ut.ac.ir)

# مجموعه فازی . . .

- زیرمجموعه
  - مجموعه A زیرمجموعه مجموعه B است ( $A \subseteq B$ ) اگر $A(x) \leq B(x)$
  - همچنین داریم $A \subseteq B$ iff $A \cap B = A$ and $A \cup B = B$ for any A, B
- اندازه مجموعه (scalar cardinality) $|A| = \sum_{x \in X} A(x)$
  - مثال $|D_2| = 2(.13 + .27 + .4 + .53 + .67 + .8 + .93) + 5 = 12.46.$




(a) $\alpha$ - cuts ${}^{\alpha}D_2$

# مجموعه فازی . . .

- ضرب دو مجموعه فازی A و B

$$\mu_{\tilde{A}\cdot\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x)\,\mu_{\tilde{B}}(x)$$

$$\tilde{A} = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.8), (x_3, 0.4)\}$$

$$\tilde{B} = \{(x_1, 0.4)\ (x_2, 0), (x_3, 0.1)\}$$

$$\tilde{A}\cdot\tilde{B} = \{(x_1, 0.08)\ (x_2, 0)\ (x_3, 0.04)\}$$

- ضرب یک عدد صحیح در یک مجموعه فازی

$$\mu_{a\cdot\tilde{A}}(x) = a\cdot\mu_{\tilde{A}}(x)$$

$$\tilde{A} = \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.6), (x_3, 0.8)\}$$

$$a = 0.3$$

$$a\cdot\tilde{A} = \{(x_1, 0.12), (x_2, 0.18), (x_3, 0.24)\}$$

# مجموعه فازی: برش آلفا . . .

- قضیه

**Theorem 2.1.** Let $A, B \in \mathcal{F}(X)$. Then, the following properties hold for all $\alpha, \beta \in [0, 1]$:

برش آلفا و برش قوی آلفا همیشه نزولی نوایی (نسبت به آلفا) هستند

اجتماع و اشتراک فازی، برش آلفا و برش قوی آلفا را حفظ می‌کند

(i) ${}^{\alpha+}A \subseteq {}^{\alpha}A$;

(ii) $\alpha \leq \beta$ implies ${}^{\alpha}A \supseteq {}^{\beta}A$ and ${}^{\alpha+}A \supseteq {}^{\beta+}A$;

(iii) ${}^{\alpha}(A \cap B) = {}^{\alpha}A \cap {}^{\alpha}B$ and ${}^{\alpha}(A \cup B) = {}^{\alpha}A \cup {}^{\alpha}B$;

(iv) ${}^{\alpha+}(A \cap B) = {}^{\alpha+}A \cap {}^{\alpha+}B$ and ${}^{\alpha+}(A \cup B) = {}^{\alpha+}A \cup {}^{\alpha+}B$;

(v) ${}^{\alpha}(\overline{A}) = {}^{(1-\alpha)+}\overline{A}$

مکمل فازی، برش آلفا و برش قوی آلفا را حفظ نمی‌کند

$${}^{\alpha}(\overline{A}) \neq \overline{{}^{\alpha}A} \text{ and } {}^{\alpha+}(\overline{A}) \neq \overline{{}^{\alpha+}A}$$

**Theorem 2.2.** Let $A_i \in \mathcal{F}(X)$ for all $i \in I$, where $I$ is an index set. Then,

(vi) $\bigcup_{i \in I} {}^{\alpha}A_i \boxed{\subseteq} {}^{\alpha}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ and $\bigcap_{i \in I} {}^{\alpha}A_i = {}^{\alpha}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$;

(vii) $\bigcup_{i \in I} {}^{\alpha+}A_i = {}^{\alpha+}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ and $\bigcap_{i \in I} {}^{\alpha+}A_i \underset{\supseteq}{\cancel{\subseteq}} {}^{\alpha+}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$.

# مجموعه فازی: برش آلفا . . .

- قضیه

$$\text{(iii)}\ \ {}^{\alpha}(A \cap B) = {}^{\alpha}A \cap {}^{\alpha}B \text{ and } {}^{\alpha}(A \cup B) = {}^{\alpha}A \cup {}^{\alpha}B;$$

- اثبات

***Proof:*** We prove only (iii) and (v); the rest is left to the reader as an exercise.

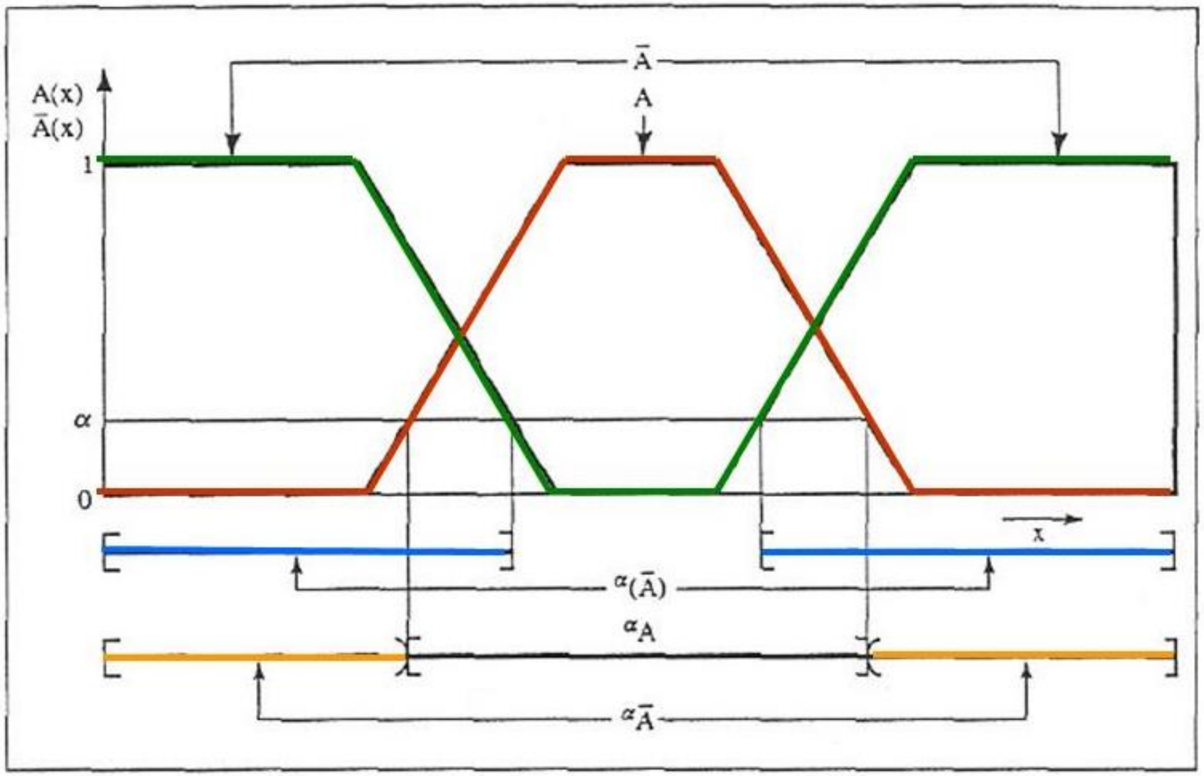
(iii) *First equality.* For any $x \in {}^{\alpha}(A \cap B)$, we have $(A \cap B)(x) \geq \alpha$ and, hence, $\min[A(x), B(x)] \geq \alpha$. This means that $A(x) \geq \alpha$ and $B(x) \geq \alpha$. This implies that $x \in {}^{\alpha}A \cap {}^{\alpha}B$ and, consequently, ${}^{\alpha}(A \cap B) \subseteq {}^{\alpha}A \cap {}^{\alpha}B$. Conversely, for any $x \in {}^{\alpha}A \cap {}^{\alpha}B$, we have $x \in {}^{\alpha}A$ and $x \in {}^{\alpha}B$; that is $A(x) \geq \alpha$ and $B(x) \geq \alpha$. Hence, $\min[A(x), B(x)] \geq \alpha$, which means that $(A \cap B)(x) \geq \alpha$. This implies that $x \in {}^{\alpha}(A \cap B)$ and, consequently, ${}^{\alpha}A \cap {}^{\alpha}B \subseteq {}^{\alpha}(A \cap B)$. This concludes the proof that ${}^{\alpha}(A \cap B) = {}^{\alpha}A \cap {}^{\alpha}B$.

*Second equality.* For any $x \in {}^{\alpha}(A \cup B)$, we have $\max[A(x), B(x)] \geq \alpha$ and, hence, $A(x) \geq \alpha$ or $B(x) \geq \alpha$. This implies that $x \in {}^{\alpha}A \cup {}^{\alpha}B$ and, consequently, ${}^{\alpha}(A \cup B) \subseteq {}^{\alpha}A \cup {}^{\alpha}B$. Conversely, for any $x \in {}^{\alpha}A \cup {}^{\alpha}B$, we have $x \in {}^{\alpha}A$ or $x \in {}^{\alpha}B$; that is $A(x) \geq \alpha$ or $B(x) \geq \alpha$. Hence, $\max[A(x), B(x)] \geq \alpha$, which means that $(A \cup B)(x) \geq \alpha$. This implies that $x \in {}^{\alpha}(A \cup B)$ and, consequently, ${}^{\alpha}A \cup {}^{\alpha}B \subseteq {}^{\alpha}(A \cup B)$. This concludes the proof that ${}^{\alpha}(A \cup B) = {}^{\alpha}A \cup {}^{\alpha}B$.

# مجموعه فازی: برش آلفا . . .

- اثر عملگر مکمل بر برش آلفا و برش قوی آلفا

$$^{\alpha}(\overline{A}) \neq {}^{\alpha}\overline{A} \text{ and } {}^{\alpha+}(\overline{A}) \neq {}^{\alpha+}\overline{A}$$

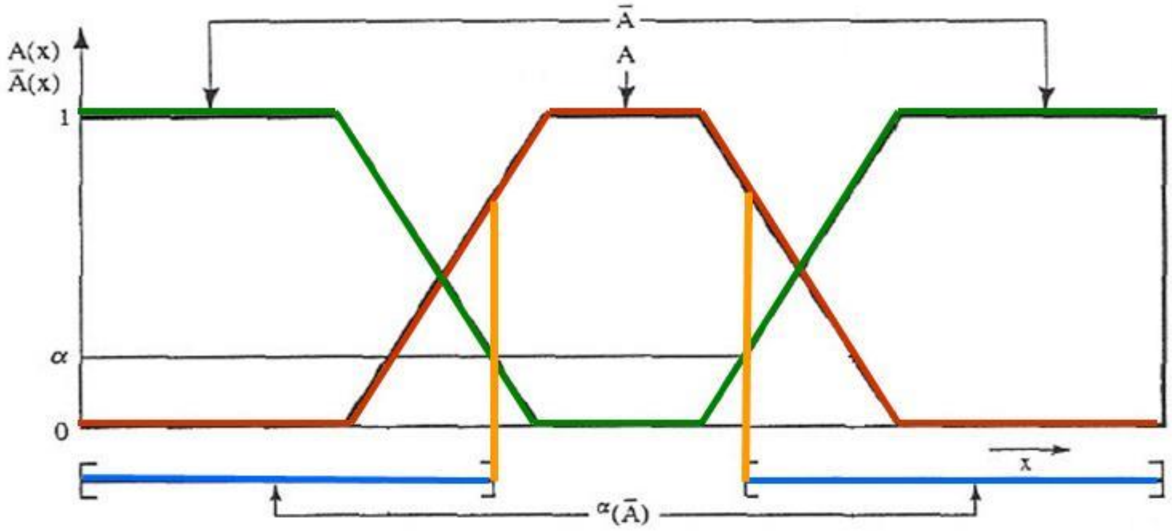


# مجموعه فازی: برش آلفا . . .

- اثر عملگر مکمل بر برش آلفا و برش قوی آلفا

$$\boxed{\text{(v)}\quad {}^{\alpha}(\overline{A}) = {}^{(1-\alpha)+}\overline{A}}$$

(v) For any $x \in {}^{\alpha}(\overline{A})$, we have $1 - A(x) = \overline{A}(x) \geq \alpha$; that is, $A(x) \leq 1 - \alpha$. This means that $x \notin {}^{(1-\alpha)+}A$ and, clearly, $x \in {}^{(1-\alpha)+}\overline{A}$; consequently, ${}^{\alpha}(\overline{A}) \subseteq {}^{(1-\alpha)+}\overline{A}$. Conversely, for any $x \in {}^{(1-\alpha)+}\overline{A}$, we have $x \notin {}^{(1-\alpha)+}A$. Hence, $A(x) \leq 1 - \alpha$ and $1 - A(x) \geq \alpha$. That is, $\overline{A}(x) \geq \alpha$, which means that $x \in {}^{\alpha}(\overline{A})$. Therefore, ${}^{(1-\alpha)+}\overline{A} \subseteq {}^{\alpha}(\overline{A})$ and, consequently, ${}^{\alpha}(\overline{A}) = {}^{(1-\alpha)+}\overline{A}$. ■



# مجموعه فازی: برش آلفا . . .

- قضیه

**Theorem 2.3.** Let $A, B \in \mathcal{F}(X)$. Then, for all $\alpha \in [0, 1]$,

(viii) $A \subseteq B$ iff ${}^{\alpha}A \subseteq {}^{\alpha}B$;
$A \subseteq B$ iff ${}^{\alpha+}A \subseteq {}^{\alpha+}B$;

(ix) $A = B$ iff ${}^{\alpha}A = {}^{\alpha}B$;
$A = B$ iff ${}^{\alpha+}A = {}^{\alpha+}B$.

اگر A زیرمجموعه B باشد، برش آلفا و برش قوی آلفا نیز همین‌طور هستند

اگر A مساوی B باشد، برش آلفا و برش قوی آلفا نیز همین‌طور هستند

**Theorem 2.4.** For any $A \in \mathcal{F}(X)$, the following properties hold:

(x) ${}^{\alpha}A = \bigcap_{\beta<\alpha} {}^{\beta}A = \bigcap_{\beta<\alpha} {}^{\beta+}A$;

(xi) ${}^{\alpha+}A = \bigcup_{\alpha<\beta} {}^{\beta}A = \bigcup_{\alpha<\beta} {}^{\beta+}A$.

# مجموعه فازی: برش آلفا . . .

- نمایش مجموعه فازی بر اساس برش آلفا
  - مثال $A = .2/x_1 + .4/x_2 + .6/x_3 + .8/x_4 + 1/x_5$
  - نمایش بر اساس برش‌های آلفا

$$
\begin{aligned}
{}^{.2}A &= 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5,\\
{}^{.4}A &= 0/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5,\\
{}^{.6}A &= 0/x_1 + 0/x_2 + 1/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5,\\
{}^{.8}A &= 0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5,\\
{}^{1}A &= 0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + 0/x_4 + 1/x_5.
\end{aligned}
$$

- تعریف مجموعه فازی $\boxed{{}_{\alpha}A(x) = \alpha \cdot {}^{\alpha}A(x).}$
  - آنگاه

$$
\begin{aligned}
{}_{.2}A &= \boxed{.2/x_1} + .2/x_2 + .2/x_3 + .2/x_4 + .2/x_5,\\
{}_{.4}A &= 0/x_1 + \boxed{.4/x_2} + .4/x_3 + .4/x_4 + .4/x_5,\\
{}_{.6}A &= 0/x_1 + 0/x_2 + \boxed{.6/x_3} + .6/x_4 + .6/x_5,\\
{}_{.8}A &= 0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + \boxed{.8/x_4} + .8/x_5,\\
{}_{1}A &= 0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + 0/x_4 + \boxed{1/x_5.}
\end{aligned}
$$

  - داریم $A = {}_{.2}A \cup {}_{.4}A \cup {}_{.6}A \cup {}_{.8}A \cup {}_{1}A.$

# مجموعه فازی: برش آلفا . . .

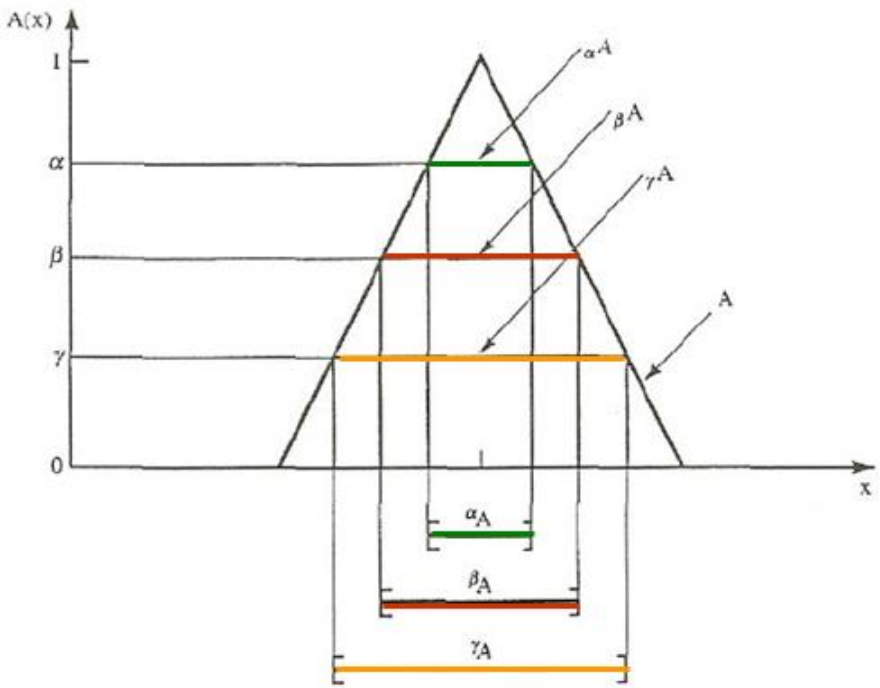
- نمایش مجموعه فازی بر اساس برش آلفا (قضیه)

**Theorem 2.5 (First Decomposition Theorem).** For every $A \in \mathcal{F}(X)$,

$$A = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} {}_{\alpha}A, \qquad (2.2)$$

$$\boxed{{}_{\alpha}A(x) = \alpha \cdot {}^{\alpha}A(x).}$$

where ${}_{\alpha}A$ is defined by (2.1) and $\cup$ denotes the standard fuzzy union.




- مثال

$$A(x) = \begin{cases} x-1 & \text{when } x \in [1,2] \\ 3-x & \text{when } x \in [2,3] \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- برای $\alpha$ها در $[0,1]$

$${}^{\alpha}A = [\alpha + 1, 3 - \alpha],$$

- و

$${}_{\alpha}A = \begin{cases} \alpha & \text{when } x \in [\alpha + 1, 3 - \alpha] \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

# مجموعه فازی: برش آلفا . . .

- نمایش مجموعه فازی بر اساس برش قوی آلفا (قضیه)

**Theorem 2.6 (Second Decomposition Theorem).** For every $A \in \mathcal{F}(X)$,

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha+}A, \tag{2.3}$$

where ${}_{\alpha+}A$ denotes a special fuzzy set defined by

$${}_{\alpha+}A(x) = \alpha \cdot {}^{\alpha+}A(x) \tag{2.4}$$

and $\cup$ denotes the standard fuzzy union.

- نمایش مجموعه فازی بر اساس برش آلفا (قضیه)

**Theorem 2.7 (Third Decomposition Theorem).** For every $A \in \mathcal{F}(X)$,

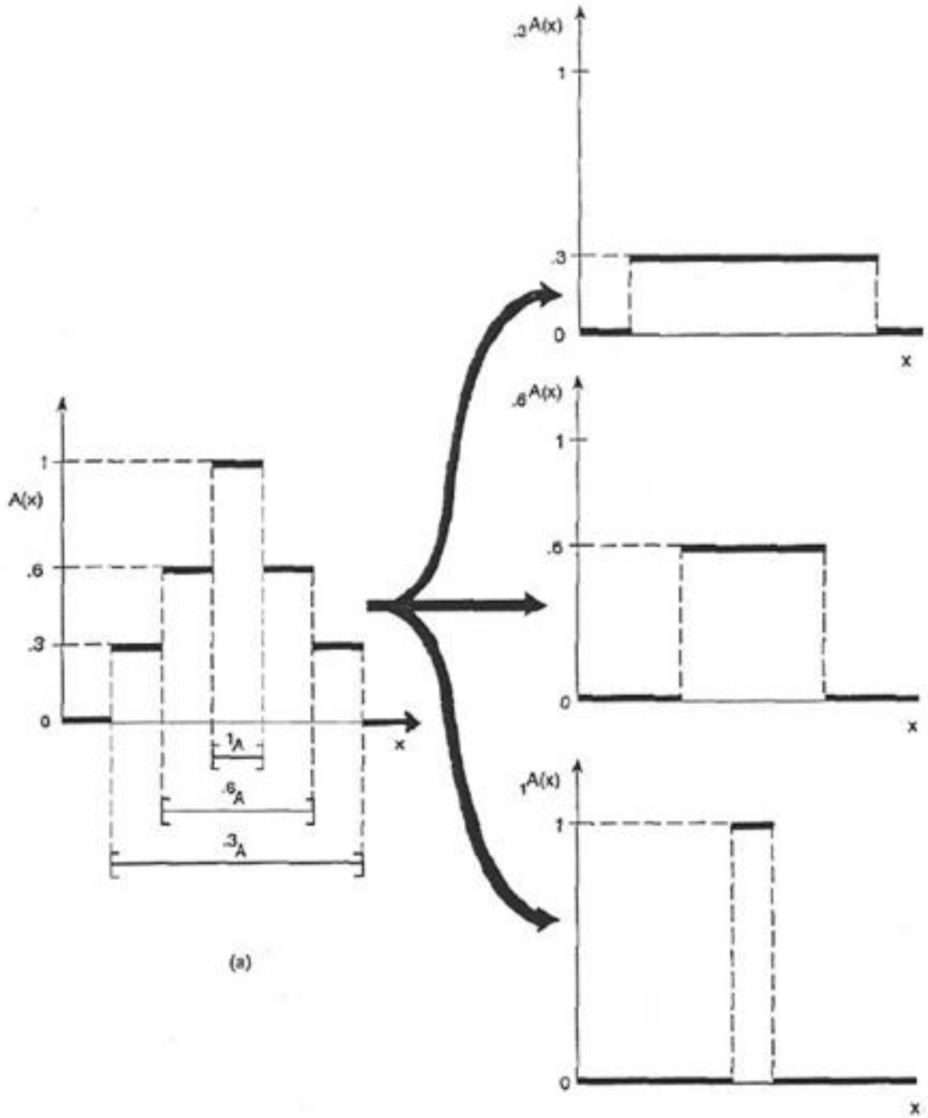
$$A = \bigcup_{\alpha \in \Lambda(A)} {}_{\alpha}A, \tag{2.5}$$

where $\Lambda(A)$ is the level set of $A$, ${}_{\alpha}A$ is defined by (2.1), and $\cup$ denotes the standard fuzzy union.

$$\boxed{\Lambda(A) = \{\alpha | A(x) = \alpha \text{ for some } x \in X\},}$$

$$\boxed{{}_{\alpha}A(x) = \alpha \cdot {}^{\alpha}A(x).}$$

# مجموعه فازی: برش آلفا




- مثال
  - مجموعه سطح A

$$\Lambda(A) = \{0, .3, .6, 1\}$$

$$_{0}A = \varnothing$$

$$\boxed{{}_{0}A = 0 \times {}^{0}A = \sum_{x \in X} \frac{0}{x} = \phi}$$

# مجموعه فازی: انواع دیگر عملگرها . . .

- عملگرهای استاندارد مجموعه‌های فازی
  - مکمل $\overline{A}(x) = 1 - A(x),$
  - اشتراک $(A \cap B)(x) = \min[A(x), B(x)],$
  - اجتماع $(A \cup B)(x) = \max[A(x), B(x)]$
  - حالت توسعه داده شده مجموعه‌های کلاسیک

- عملگرهای فوق می‌توانند به صورت‌های دیگری نیز تعریف شوند
  - اشتراک فازی را t-norms و اجتماع فازی را t-conorms (s-norm) می‌گویند
  - هم توابع عضویت و هم عملگرها، وابسته به بافت (context-dependent) هستند
    - بلند بودن: برای انسان، درختان
    - دمای بالا: برای تب بیمار، حرارت کوره آجرپزی

# مجموعه فازی: انواع دیگر عملگرها

- ویژگی‌های عملگرهای استاندارد
  - تنها عملگرهایی که برش آلفا و برش قوی آلفا را حفظ می‌کنند
  - اشتراک استاندارد فازی=ضعیف‌ترین اشتراک فازی
    - برای هر مجموعه فازی، بزرگ‌ترین مجموعه فازی را تولید می‌کند (از میان تمام t-normها)
  - اجتماع استاندارد فازی=قوی‌ترین اجتماع فازی
    - برای هر مجموعه فازی، کوچک‌ترین مجموعه فازی را تولید می‌کند (از میان تمام t-conormها)
  - عملگرهای استاندارد به صورت ذاتی مانع گسترش/ترکیب خطای عملوندها می‌شوند
    - اگر هرکدام از توابع عضویت $A(x)$ و $B(x)$ دارای خطای e باشند، آنگاه بیشترین مقدار خطا برای مکمل، اشتراک و یا اجتماع آنها، همان e خواهد بود.

# مجموعه فازی: مکمل . . .

- تعریف: تابع c روی مجموعه فازی A(x)

$$c : [0, 1] \to [0, 1], \qquad c(A(x)) = cA(x)$$

- همه توابع مکمل باید شرایط دو اصل زیر را داشته باشند
  - چارچوب اصولی ( axiomatic skeleton) مکمل

**Axiom c1.** $c(0) = 1$ and $c(1) = 0$ (*boundary conditions*).

**Axiom c2.** For all $a, b \in [0, 1]$, if $a \leq b$, then $c(a) \geq c(b)$ (*monotonicity*).

  - توابعی که اصول فوق را دارند، کلی‌ترین توابع مکمل هستند

- دو اصل دیگر برای تابع مکمل

**Axiom c3.** $c$ is a continuous function.

**Axiom c4.** $c$ is *involutive*, which means that $c(c(a)) = a$ for each $a \in [0, 1]$.



H. Veisi (h.veisi@ut.ac.ir)

# مجموعه فازی: مکمل . . .

**Axiom c1.** $c(0) = 1$ and $c(1) = 0$ (*boundary conditions*).

**Axiom c2.** For all $a, b \in [0, 1]$, if $a \leq b$, then $c(a) \geq c(b)$ (*monotonicity*).

**Axiom c3.** $c$ is a continuous function.

**Axiom c4.** $c$ is *involutive*, which means that $c(c(a)) = a$ for each $a \in [0, 1]$.

- قضیه

**Theorem 3.1.** Let a function $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ satisfy Axioms c2 and c4. Then, $c$ also satisfies Axioms c1 and c3. Moreover, $c$ must be a bijective function.

تابعی که هم یک به یک (injective ) هم پوشا (surjective ) باشد

# مجموعه فازی: مکمل . . .

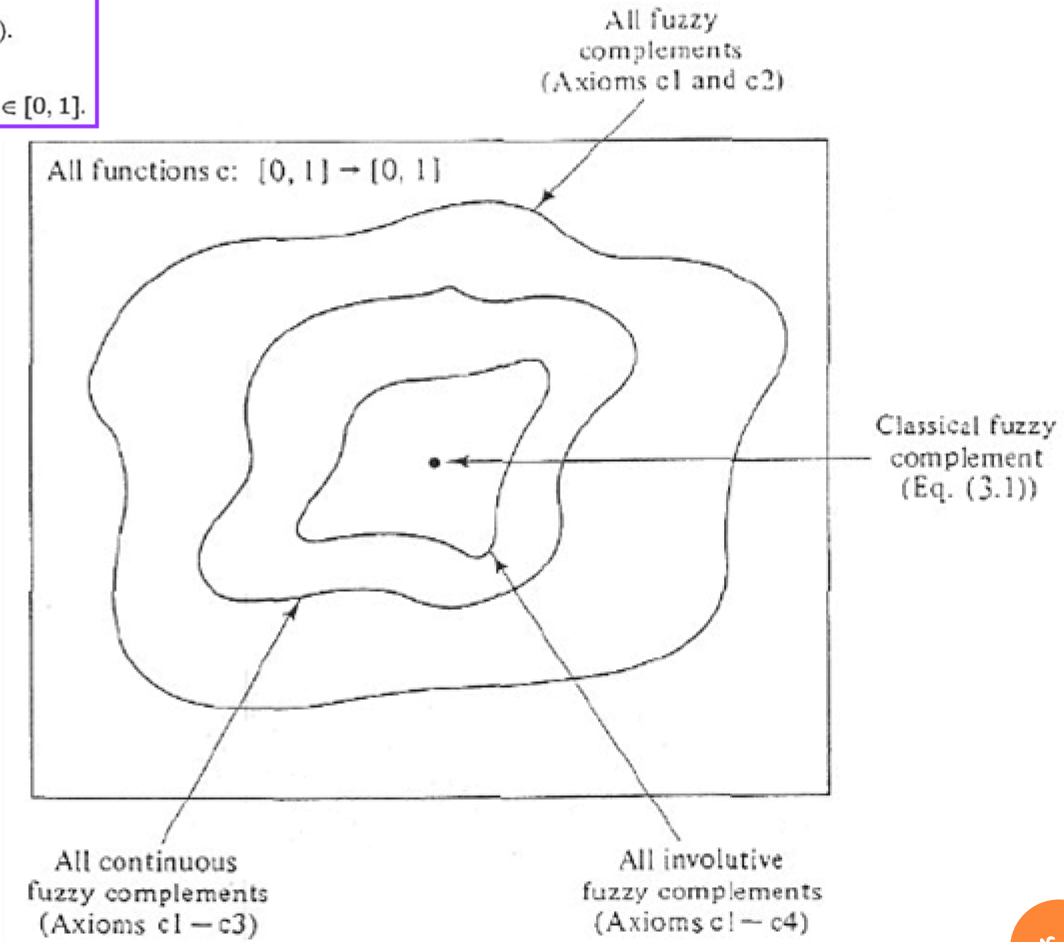
- ساختار تودرتو برای مکمل‌های فازی

**Axiom c1.** $c(0) = 1$ and $c(1) = 0$ (*boundary conditions*).

**Axiom c2.** For all $a, b \in [0, 1]$, if $a \leq b$, then $c(a) \geq c(b)$ (*monotonicity*).

**Axiom c3.** $c$ is a continuous function.

**Axiom c4.** $c$ is *involutive*, which means that $c(c(a)) = a$ for each $a \in [0, 1]$.



# مجموعه فازی: مکمل . . .

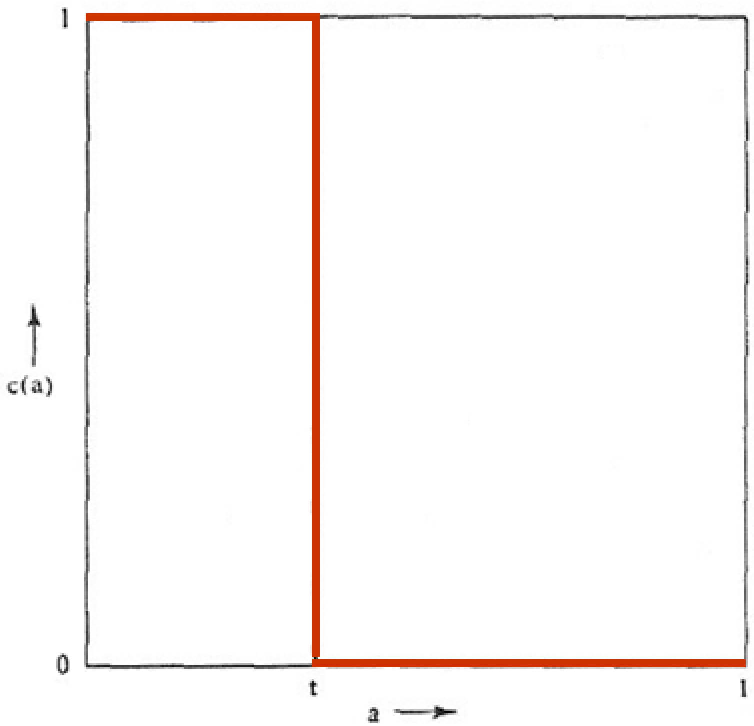
- مثال: فقط اصل اول و دوم را دارد

**Axiom c1.** $c(0) = 1$ and $c(1) = 0$ (*boundary conditions*).

**Axiom c2.** For all $a, b \in [0, 1]$, if $a \leq b$, then $c(a) \geq c(b)$ (*monotonicity*).

**Axiom c3.** $c$ is a continuous function.

**Axiom c4.** $c$ is *involutive*, which means that $c(c(a)) = a$ for each $a \in [0, 1]$.




$$c(a) = \begin{cases} 1 & \text{for } a \leq t \\ 0 & \text{for } a > t, \end{cases}$$

where $a \in [0, 1]$ and $t \in [0, 1)$;
$t$ is called the threshold of $c$.

# مجموعه فازی: مکمل . . .

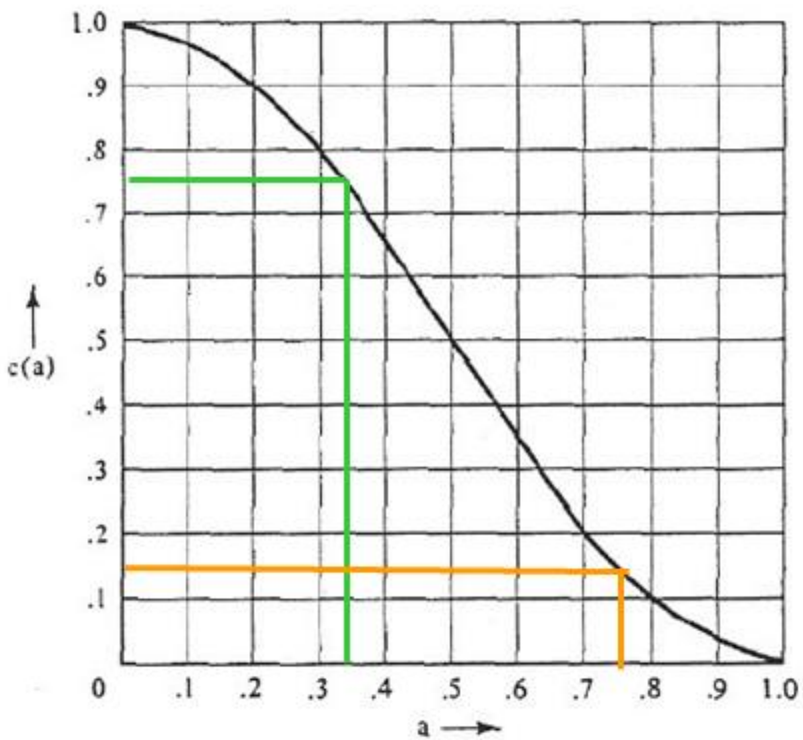
- مثال: فقط اصل سوم دارد و اصل چهار ندارد

**Axiom c1.** $c(0) = 1$ and $c(1) = 0$ (*boundary conditions*).

**Axiom c2.** For all $a, b \in [0, 1]$, if $a \leq b$, then $c(a) \geq c(b)$ (*monotonicity*).

**Axiom c3.** $c$ is a continuous function.

**Axiom c4.** $c$ is *involutive*, which means that $c(c(a)) = a$ for each $a \in [0, 1]$.




$$c(a) = \frac{1}{2}(1 + \cos \pi a),$$

- داریم: c(0.33)=0.75
- اما: c(0.75) = 0.15 ~= 0.33

# مجموعه فازی: مکمل . . .

**Axiom c1.** $c(0) = 1$ and $c(1) = 0$ (*boundary conditions*).

**Axiom c2.** For all $a, b \in [0, 1]$, if $a \le b$, then $c(a) \ge c(b)$ (*monotonicity*).

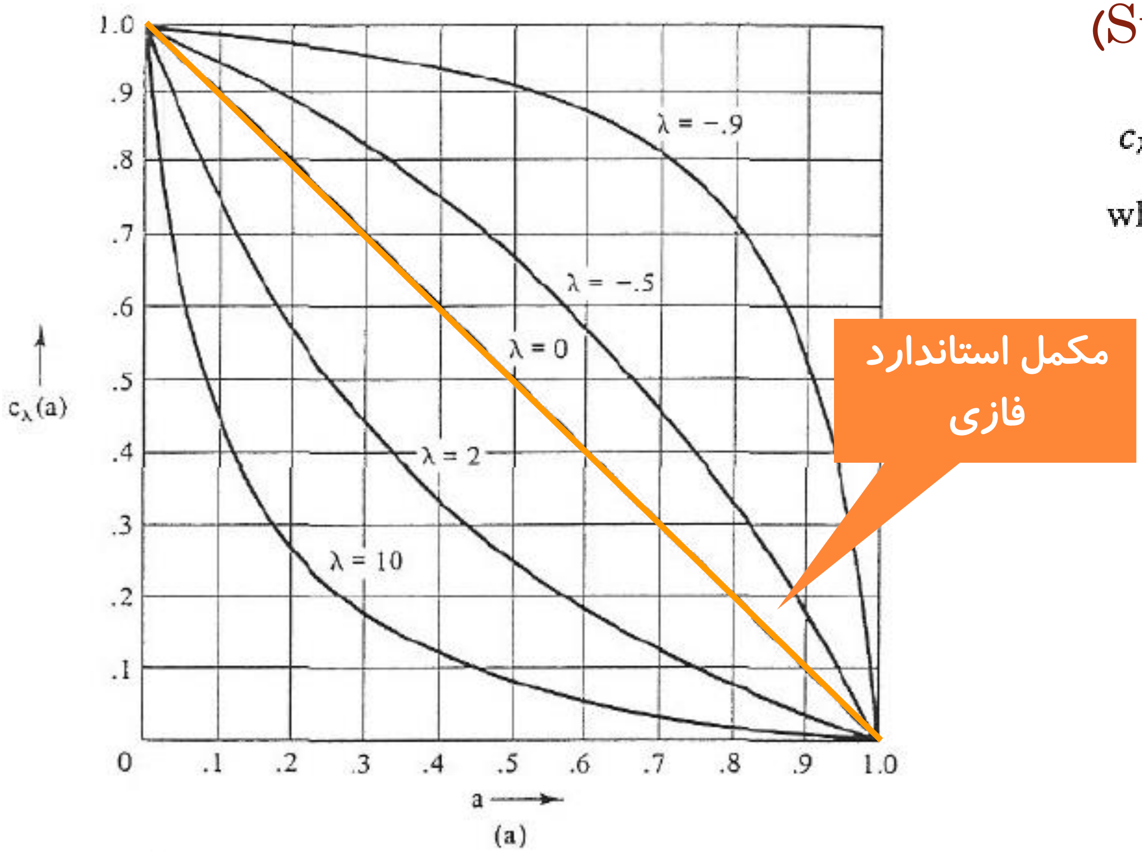
**Axiom c3.** $c$ is a continuous function.

**Axiom c4.** $c$ is *involutive*, which means that $c(c(a)) = a$ for each $a \in [0, 1]$.

- مثال: چهار اصل را دارد
  - کلاس سوگنو (Sugeno)

$$c_\lambda(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a},$$

where $\lambda \in (-1, \infty)$.




- برای $\lambda=0$
  - مکمل استاندارد فازی

# مجموعه فازی: مکمل . . .

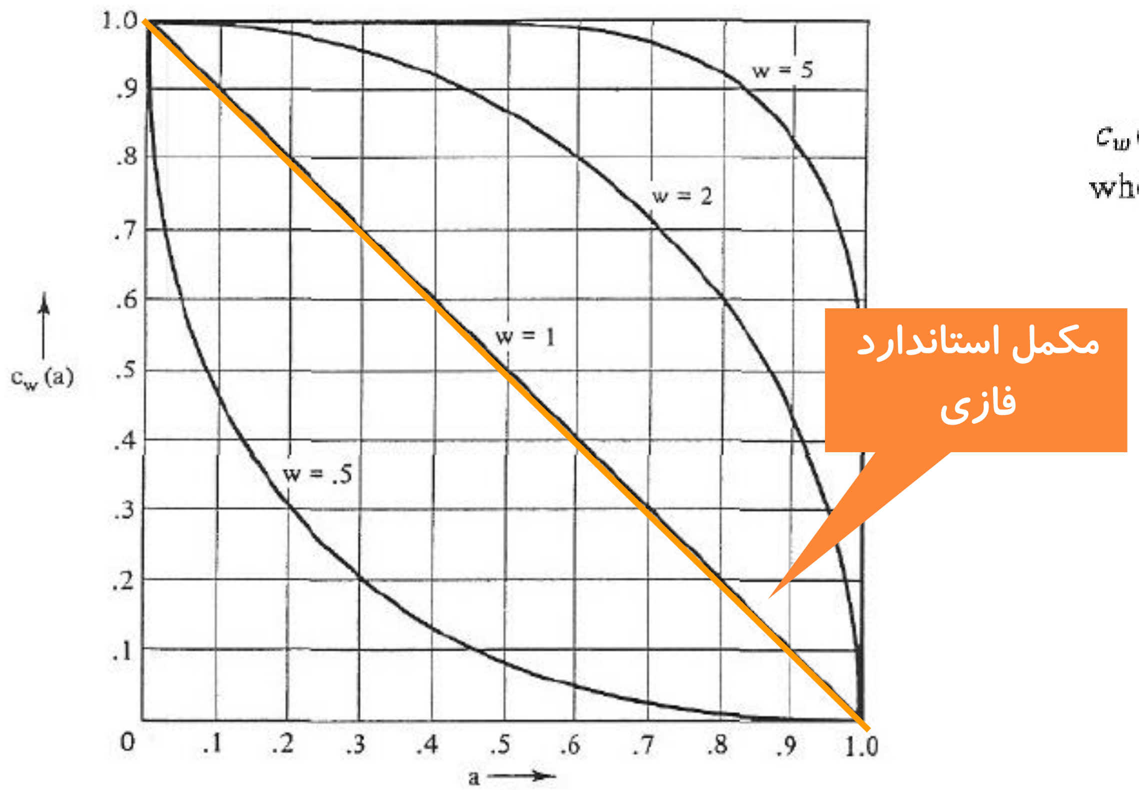
- مثال: چهار اصل را دارد

**Axiom c1.** $c(0) = 1$ and $c(1) = 0$ (*boundary conditions*).
**Axiom c2.** For all $a, b \in [0, 1]$, if $a \leq b$, then $c(a) \geq c(b)$ (*monotonicity*).
**Axiom c3.** $c$ is a continuous function.
**Axiom c4.** $c$ is *involutive*, which means that $c(c(a)) = a$ for each $a \in [0, 1]$.

- کلاس یاگر (Yager)

$$c_w(a) = (1 - a^w)^{1/w},$$
where $w \in (0, \infty)$

- برای w=1
  - مکمل استاندارد فازی



(b)

# مجموعه فازی: مکمل . . .

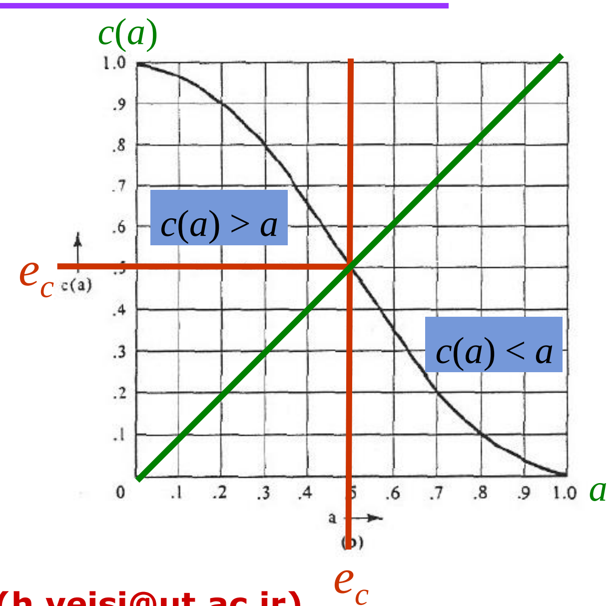
- ویژگی‌های مشترک . . .
  - نقطه تعادل (Equilibrium): نقطه‌ای که $c(a) = a$

**Theorem 3.2.** Every fuzzy complement has at most one equilibrium.

**Theorem 3.3.** Assume that a given fuzzy complement $c$ has an equilibrium $e_c$, which by Theorem 3.2 is unique. Then

$$a \le c(a) \text{ iff } a \le e_c \quad \text{and} \quad a \ge c(a) \text{ iff } a \ge e_c.$$

| | |
|---|---|
| Assume | $a < e_c$ |
| by Axiom c2 | $c(a) > c(e_c)$ |
| $\because c(e_c) = e_c$ | $c(a) > e_c (> a)$ |
| From assumption | $c(a) > a$ |
| | $\therefore a < c(a)$ |



# مجموعه فازی: مکمل . . .

- ویژگی‌های مشترک . . .

**Theorem 3.4.** If c is a continuous fuzzy complement, then c has a unique equilibrium.

By Axiom c1 $\quad c(0)-0=1, \quad c(1)-1=-1$

$\Rightarrow$ Let $c(a)-a=b$ where $b\in[-1,1]$

$\because c$ is continuous

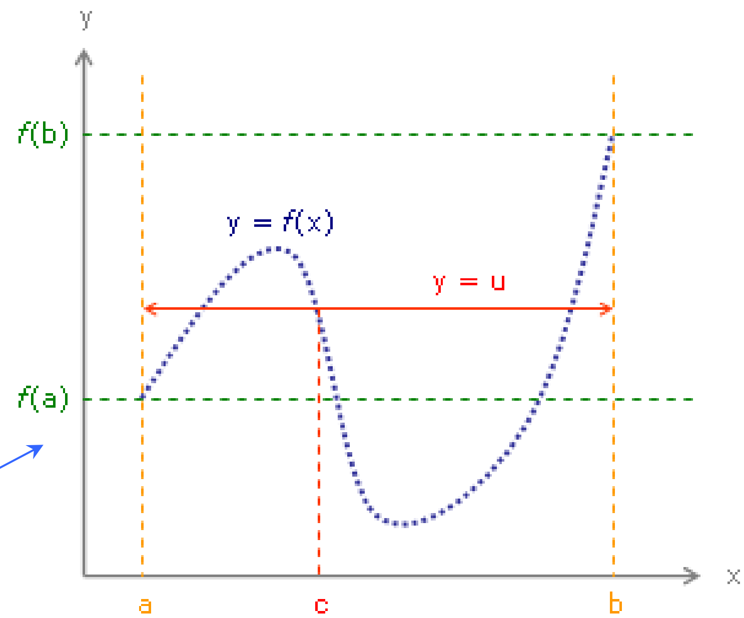
From the intermediate value theorem

$\forall b\in[-1,1]$, $\exists$ at least one $a$ such that $c(a)-a=b$,

Let $b=0$ then $a$ is equilibrium ($a$ exists)

From Theorem 3.2, $a$ is unique.

- **The intermediate value theorem:**
  - If the function $y = f(x)$ is continuous on the interval $[a, b]$, and $u$ is a number between $f(a)$ and $f(b)$, then there is a $c\in[a, b]$ such that $f(c) = u$.



# مجموعه فازی: مکمل . . .

## نقطه دوگان (Dual point)

- با فرض داشتن تابع مکمل فازی c و مقدار حقیقی $a \in [0,1]$ به عنوان درجه عضویت، آنگاه به ازای هر مقدار عضویتی مانند $d_a \in [0,1]$ که برای آن داشته باشیم

$$c(d_a) - d_a = a - c(a)$$

نقطه دوگان نامیده می‌شود.

- برای هر تابع مکمل فازی c و درجه عضویت a، **حداکثر یک نقطه دوگان وجود دارد.**

**Theorem 3.5.** If a complement $c$ has an equilibrium $e_c$, then

$$^{d}e_c = e_c.$$

**Theorem 3.6.** For each $a \in [0, 1]$, $^{d}a = c(a)$ iff $c(c(a)) = a$, that is, when the complement is involutive.

برای مکمل‌های involutive نقطه دوگان برای هر مقدار درجه عضویت با مکمل شده آن نقطه برابر است

# مجموعه فازی: مکمل . . .

- مولدهای صعودی (**increasing generators**) . . .

**Theorem 3.7 (First Characterization Theorem of Fuzzy Complements)** Let $c$ be a function from $[0, 1]$ to $[0, 1]$. Then, $c$ is a fuzzy complement (involutive) iff there exists a continuous function $g$ from $[0, 1]$ to $\mathbb{R}$ such that $g(0) = 0$, $g$ is strictly increasing, and

$$c(a) = g^{-1}(g(1) - g(a))$$

for all $a \in [0, 1]$.

- تولید مکمل‌های فازی با این توابع

- مثال
  - مولد مکمل استاندارد $g(a) = a.$
  - مولد مکمل سوگنو $g_\lambda(a) = \frac{1}{\lambda}\ln(1 + \lambda a)$ for $\lambda > -1.$

Note that we have to take $\lim_{\lambda \to 0} g_\lambda(a) = a$ for $\lambda = 0;$

  - مولد مکمل یاگر $g_w(a) = a^w$ for $w > 0.$

$$c_\lambda(a) = \frac{1 - a}{1 + \lambda a},$$

where $\lambda \in (-1, \infty).$

تولید مکمل استاندارد

$$c_w(a) = (1 - a^w)^{1/w},$$

where $w \in (0, \infty).$

$$g^{-1}(a) = a^{1/w}$$

# مجموعه فازی: مکمل . . .

- مولدهای صعودی (increasing generators) . . .
  - تابع مولد زیر با دو پارامتر

$$g_{\lambda,w}(a) = \frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda a^w) \qquad \lambda > -1 \text{ and } w > 0,$$

  - تابع مکمل فازی را نتیجه می‌دهد

$$c_{\lambda,w}(a) = \left(\frac{1-a^w}{1+\lambda a^w}\right)^{1/w} \quad (\lambda > -1,\ w > 0),$$

    - تابع فوق به ازای w=1 معادل مکمل سوگنو است
    - تابع فوق به ازای $\lambda$=0 معادل مکمل یاگر است

  - مثال دیگر – تابع مولد

$$g_\gamma(a) = \frac{a}{\gamma + (1-\gamma)a} \quad (\gamma > 0),$$

    - مکمل فازی معادل

$$c_\gamma(a) = \frac{\gamma^2(1-a)}{a+\gamma^2(1-a)} \quad (\gamma > 0).$$

# مجموعه فازی: مکمل . . .

## مولدهای نزولی (decreasing generators)

**Theorem 3.8 (Second Characterization Theorem of Fuzzy Complements).** Let $c$ be a function from [0, 1] to [0, 1]. Then $c$ is a fuzzy complement iff there exists a continuous function $f$ from [0, 1] to $\mathbb{R}$ such that $f(1) = 0$, $f$ is strictly decreasing, and

$$c(a) = f^{-1}(f(0) - f(a)) \quad \text{for all } a \in [0, 1]. \tag{3.15}$$

- تولید مکمل‌های فازی با این توابع

## مثال

- مولد مکمل استاندارد $f(a) = -ka + k, \text{ where } k > 0,$
- مولد مکمل یاگر $f(a) = 1 - a^w, \text{ where } w > 0,$

$c_w(a) = (1 - a^w)^{1/w},$ where $w \in (0, \infty)$

# مجموعه فازی: اشتراک (t-norm) . . .

- اشتراک دو مجموعه فازی A و B

$$(A \cap B)(x) = i[A(x), B(x)] \quad \text{for all } x \in X.$$

$$i : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1].$$

- چارچوب اصولی (axiomatic skeleton) اشتراک

**Axiom i1.** $i(a, 1) = a$ (*boundary condition*).

**Axiom i2.** $b \leq d$ implies $i(a, b) \leq i(a, d)$ (*monotonicity*).

**Axiom i3.** $i(a, b) = i(b, a)$ (*commutativity*).

اشتراک فازی متقارن است

**Axiom i4.** $i(a, i(b, d)) = i(i(a, b), d)$ (*associativity*).

- سایر نیازمندی‌های عملگر اشتراک

**Axiom i5.** $i$ is a continuous function (*continuity*).

**Axiom i6.** $i(a, a) < a$ (*subidempotency*).

اشتراک فازی Archimedean

**Axiom i7.** $a_1 < a_2$ and $b_1 < b_2$ implies $i(a_1, b_1) < i(a_2, b_2)$ (*strict monotonicity*).

# مجموعه فازی: اشتراک (t-norm) . . .

- قضیه

$i(a, a) = a$

**Theorem 3.9.** The standard fuzzy intersection is the only idempotent $t$-norm.

- مثال

**Standard intersection** : $i(a, b) = \min(a, b)$.

**Algebraic product** : $i(a, b) = ab$.

**Bounded difference** : $i(a, b) = \max(0, a + b - 1)$.

**Drastic intersection** : $i(a, b) = \begin{cases} a & \text{when } b = 1 \\ b & \text{when } a = 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$

- داریم

Drastic

$$i_{\min}(a, b) \le \max(0, a + b - 1) \le ab \le \min(a, b)$$

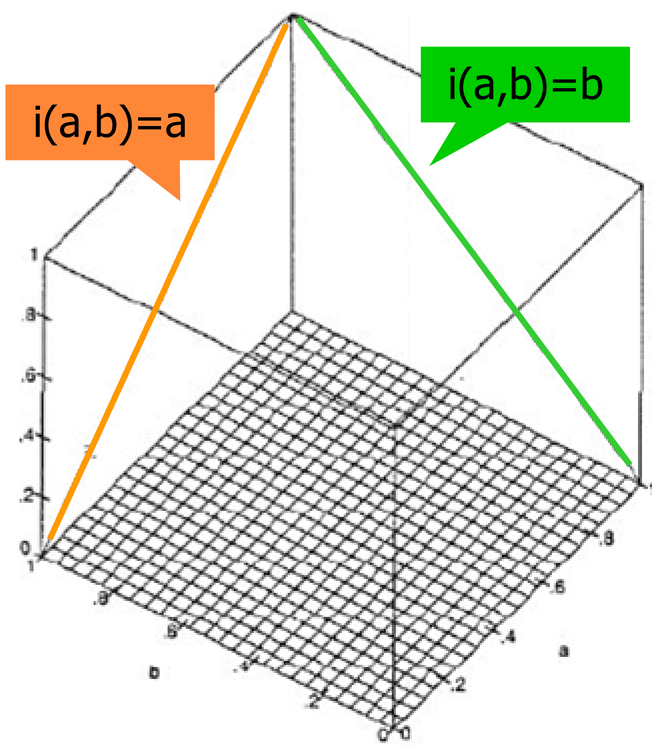
**Theorem 3.10.** For all $a, b \in [0, 1]$,

$$i_{\min}(a, b) \le i(a, b) \le \min(a, b),$$

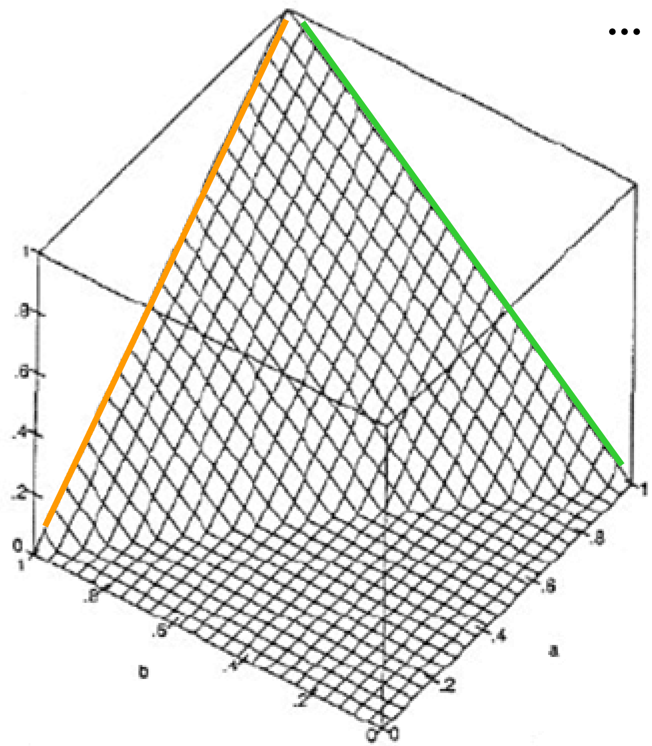
where $i_{\min}$ denotes the drastic intersection.

# مجموعه فازی: اشتراک (t-norm) . . .

- مثال …




$i_{min}$



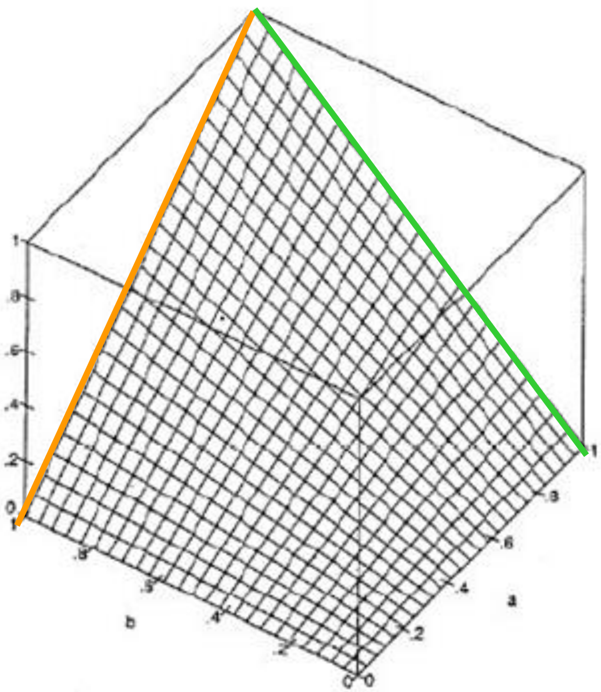

max (o,a+b-1)

$$\textbf{Drastic intersection}: i(a,b) = \begin{cases} a & \text{when } b = 1 \\ b & \text{when } a = 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

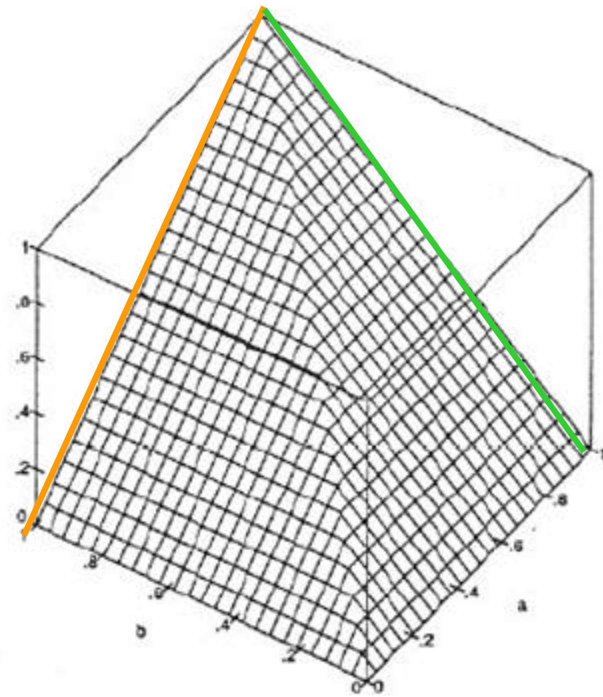
$$\textbf{Bounded difference}: i(a,b) = \max(0, a+b-1).$$

# مجموعه فازی: اشتراک (t-norm) . . .

- مثال



ab



min

Algebraic product : $i(a, b) = ab.$

Standard intersection : $i(a, b) = \min(a, b).$

# مجموعه فازی: اشتراک (t-norm) . . .

- نمونه عملگرهای اشتراک فازی
  - کلاس یاگر (Yager)

$$i_w(a, b) = 1 - \min(1, [(1-a)^w + (1-b)^w]^{1/w}) \quad (w > 0). \qquad (3.19)$$

**Theorem 3.12.** Let $i_w$ denote the class of Yager $t$-norms defined by (3.19). Then

$$i_{\min}(a, b) \leq i_w(a, b) \leq \min(a, b)$$

for all $a, b \in [0, 1]$.

| $a$ \ $b$ | 0 | .25 | .5 | .75 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ = 1 | 0 | .25 | .5 | .75 | 1 |
| .75 | 0 | 0 | .25 | .5 | .75 |
| .5 | 0 | 0 | 0 | .25 | .5 |
| .25 | 0 | 0 | 0 | 0 | .25 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$w$ = 1 (strong)

| $a$ \ $b$ | 0 | .25 | .5 | .75 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ = 1 | 0 | .25 | .5 | .75 | 1 |
| .75 | 0 | .21 | .44 | .65 | .75 |
| .5 | 0 | .1 | .29 | .44 | .5 |
| .25 | 0 | 0 | .1 | .21 | .25 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$w$ = 2

| $a$ \ $b$ | 0 | .25 | .5 | .75 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ = 1 | 0 | .25 | .5 | .75 | 1 |
| .75 | 0 | .25 | .5 | .73 | .75 |
| .5 | 0 | .25 | .46 | .5 | .5 |
| .25 | 0 | .20 | .25 | .25 | .25 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$w$ = 10

| $a$ \ $b$ | 0 | .25 | .5 | .75 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ = 1 | 0 | .25 | .5 | .75 | 1 |
| .75 | 0 | .25 | .5 | .75 | .75 |
| .5 | 0 | .25 | .5 | .5 | .5 |
| .25 | 0 | .25 | .25 | .25 | .25 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$w \to \infty$ (weak)

# مجموعه فازی: اشتراک (t-norm) . . .

- معکوس (شبه معکوس) تابع مولد نزولی . . .
  - تابعی از R به [0,1]

$$f^{(-1)}(a) = \begin{cases} 1 & \text{for } a \in (-\infty, 0) \\ f^{-1}(a) & \text{for } a \in [0, f(0)] \\ 0 & \text{for } a \in (f(0), \infty) \end{cases}$$

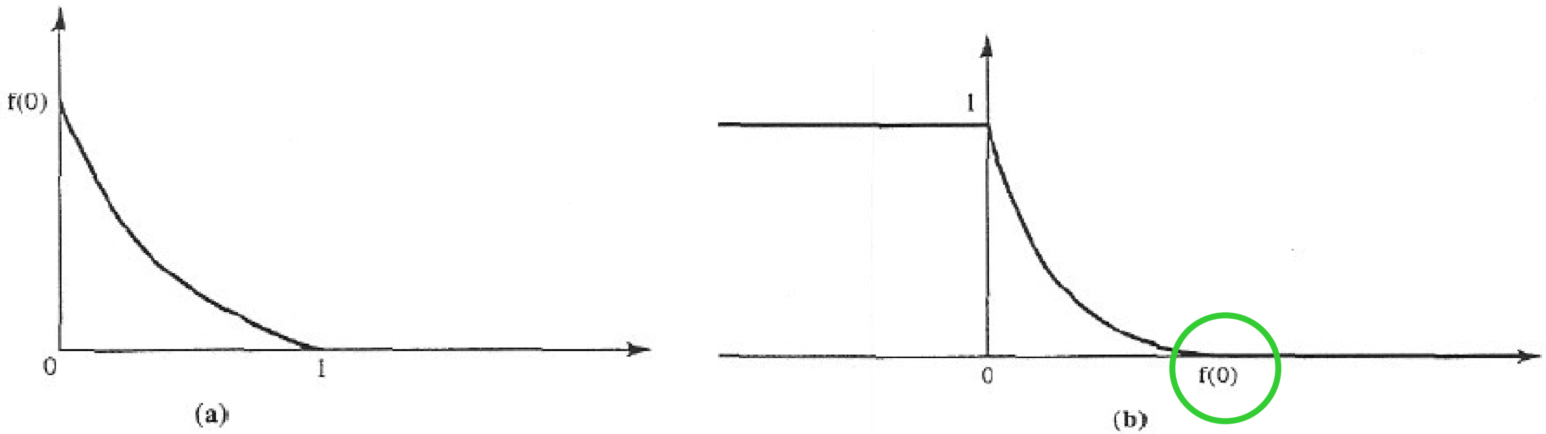



**Figure 3.7** Example of (a) a decreasing generator and (b) its pseudo-inverse.

# مجموعه فازی: اشتراک (t-norm) . . .

- معکوس (شبه معکوس) تابع مولد نزولی
  - مثال

$f_1(a) = 1 - a^p, \text{ for any } a \in [0, 1] \quad (p > 0),$

$f_2(a) = -\ln a \text{ for any } a \in [0, 1] \text{ with } f_2(0) = \infty.$

$$f_1^{(-1)}(a) = \begin{cases} 1 & \text{for } a \in (-\infty, 0) \\ (1-a)^{1/p} & \text{for } a \in [0, 1] \\ 0 & \text{for } a \in (1, \infty), \end{cases}$$

$$f_2^{(-1)}(a) = \begin{cases} 1 & \text{for } a \in (-\infty, 0) \\ e^{-a} & \text{for } a \in [0, \infty). \end{cases}$$

A decreasing generator $f$ and its pseudo-inverse $f^{(-1)}$ satisfy $f^{(-1)}(f(a)) = a$ for any $a \in [0, 1]$, and

$$f(f^{(-1)}(a)) = \begin{cases} 0 & \text{for } a \in (-\infty, 0) \\ a & \text{for } a \in [0, f(0)] \\ f(0) & \text{for } a \in (f(0), \infty). \end{cases}$$

# مجموعه فازی: اشتراک (t-norm) . . .

- معکوس (شبه معکوس) تابع مولد صعودی

An *increasing generator*, introduced in Theorem 3.7, is a continuous and strictly increasing function $g$ from $[0, 1]$ to $\mathbb{R}$ such that $g(0) = 0$. The pseudo-inverse of an increasing generator $g$, denoted by $g^{(-1)}$, is a function from $\mathbb{R}$ to $[0, 1]$ defined by

$$g^{(-1)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{for } a \in (-\infty, 0) \\ g^{-1}(a) & \text{for } a \in [0, g(1)] \\ 1 & \text{for } a \in (g(1), \infty) \end{cases}$$

where $g^{-1}$ is the ordinary inverse of $g$.

- مثال

$g_1(a) = a^p \quad (p > 0)$ for any $a \in [0, 1]$.

$g_2(a) = -\ln(1 - a)$ for any $a \in [0, 1]$ with $g_2(1) = \infty$.

$$g_1^{(-1)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{for } a \in (-\infty, 0) \\ a^{1/p} & \text{for } a \in [0, 1] \\ 1 & \text{for } a \in (1, \infty), \end{cases}$$

$$g_2^{(-1)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{for } a \in (-\infty, 0) \\ 1 - e^{-a} & \text{for } a \in (0, \infty). \end{cases}$$

An increasing generator $g$ and its pseudo-inverse $g^{(-1)}$ satisfy $g^{(-1)}(g(a)) = a$ for any $a \in [0, 1]$ and

$$g(g^{(-1)}(a)) = \begin{cases} 0 & \text{for } a \in (-\infty, 0) \\ a & \text{for } a \in [0, g(1)] \\ g(1) & \text{for } a \in (g(1), \infty). \end{cases}$$

# مجموعه فازی: اشتراک (t-norm) . . .

- تابع مولد صعودی و تابع مولد نزولی

**Lemma 3.1.** Let $f$ be a decreasing generator. Then a function $g$ defined by

$$g(a) = f(0) - f(a)$$

for any $a \in [0, 1]$ is an increasing generator with $g(1) = f(0)$, and its pseudo-inverse $g^{(-1)}$ is given by

$$g^{(-1)}(a) = f^{(-1)}(f(0) - a)$$

for any $a \in \mathbb{R}$.

---

**Lemma 3.2.** Let $g$ be an increasing generator. Then the function $f$ defined by

$$f(a) = g(1) - g(a)$$

for any $a \in [0, 1]$ is a decreasing generator with $f(0) = g(1)$ and its pseudo-inverse $f^{(-1)}$ is given by

$$f^{(-1)}(a) = g^{(-1)}(g(1) - a)$$

for any $a \in \mathbb{R}$.

# مجموعه فازی: اشتراک (t-norm) . . .

- قضیه مشخصه‌سازی اشتراک فازی . . .

**Theorem 3.11 (Characterization Theorem of $t$-Norms).** Let $i$ be a binary operation on the unit interval. Then, $i$ is an Archimedean $t$-norm iff there exists a decreasing generator $f$ such that

$$i(a, b) = f^{(-1)}(f(a) + f(b)) \tag{3.18}$$

for all $a, b \in [0, 1]$.

- ساخت توابع t-norm با استفاده از مولدهای نزولی

# مجموعه فازی: اشتراک (t-norm) . . .

- قضیه مشخصه‌سازی اشتراک فازی (مثال) . . .
  - مثال: اشتراک فازی Schweizer

1. [Schweizer and Sklar, 1963]: The class of decreasing generators distinguished by parameter $p$ is defined by

$$f_p(a) = 1 - a^p \quad (p \neq 0).$$

Then

$$f_p^{(-1)}(z) = \begin{cases} 1 & \text{when } z \in (-\infty, 0) \\ (1-z)^{1/p} & \text{when } z \in [0, 1] \\ 0 & \text{when } z \in (1, \infty) \end{cases}$$

and we obtain the corresponding class of $t$-norms by applying (3.18):

$$i(a, b) = f^{(-1)}(f(a) + f(b))$$

$$\begin{aligned} i_p(a, b) &= f_p^{(-1)}(f_p(a) + f_p(b)) \\ &= f_p^{(-1)}(2 - a^p - b^p) \\ &= \begin{cases} (a^p + b^p - 1)^{1/p} & \text{when } 2 - a^p - b^p \in [0, 1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ &= (\max(0, a^p + b^p - 1))^{1/p}. \end{aligned}$$

# مجموعه فازی: اشتراک (t-norm) . . .

- قضیه مشخصه‌سازی اشتراک فازی (مثال) . . .
  - مثال: اشتراک فازی Yager

2. [Yager, 1980f]: Given a class of decreasing generators

$$f_w(a) = (1-a)^w \quad (w > 0),$$

we obtain

$$f_w^{(-1)}(z) = \begin{cases} 1 - z^{1/w} & \text{when } z \in [0, 1] \\ 0 & \text{when } z \in (1, \infty) \end{cases}$$

and

$$\begin{aligned} i_w(a, b) &= f_w^{(-1)}(f_w(a) + f_w(b)) \\ &= f_w^{(-1)}((1-a)^w + (1-b)^w) \\ &= \begin{cases} 1 - ((1-a)^w + (1-b)^w)^{1/w} & \text{when } (1-a)^w + (1-b)^w \in [0, 1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ &= 1 - \min(1, [(1-a)^w + (1-b)^w]^{1/w}). \end{aligned}$$

$$\boxed{i(a, b) = f^{(-1)}(f(a) + f(b))}$$

# مجموعه فازی: اشتراک (t-norm) . . .

- قضیه مشخصه‌سازی اشتراک فازی (مثال)
  - مثال: اشتراک فازی Frank

3. [Frank, 1979]: This class of $t$-norms is based on the class of decreasing generators

$$f_s(a) = -\ln \frac{s^a - 1}{s - 1} \quad (s > 0, s \neq 1),$$

whose pseudo-inverses are given by

$$f_s^{(-1)}(z) = \log_s(1 + (s-1)e^{-z}).$$

Employing (3.18), we obtain

$$\boxed{i(a,b) = f^{(-1)}(f(a) + f(b))}$$

$$\begin{aligned} i_s(a,b) &= f_s^{(-1)}(f_s(a) + f_s(b)) \\ &= f_s^{(-1)}\left[-\ln \frac{(s^a-1)(s^b-1)}{(s-1)^2}\right] \\ &= \log_s\left[1 + (s-1)\frac{(s^a-1)(s^b-1)}{(s-1)^2}\right] \\ &= \log_s\left[1 + \frac{(s^a-1)(s^b-1)}{s-1}\right]. \end{aligned}$$

# مجموعه فازی: اشتراک (t-norm)

**TABLE 3.2** SOME CLASSES OF FUZZY INTERSECTIONS ($t$-NORMS)

| Reference | Formula $i(a, b)$ | Decreasing generator $f(a)$ | Parameter range | As parameter converges to 0 | As parameter converges to 1 or −1 | As parameter converges to ∞ or −∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Dombi [1982] | $\left\{1+\left[\left(\frac{1}{a}-1\right)^{\lambda}+\left(\frac{1}{b}-1\right)^{\lambda}\right]^{\frac{1}{\lambda}}\right\}^{-1}$ | $\left(\frac{1}{a}-1\right)^{\lambda}$ | $\lambda > 0$ | $i_{\min}(a, b)$ | $\frac{ab}{a+b-ab}$ when $\lambda = 1$ | $\min(a, b)$ |
| Frank [1979] | $\log_s\left[1+\frac{(s^a-1)(s^b-1)}{s-1}\right]$ | $-\ln\left(\frac{s^a-1}{s-1}\right)$ | $s > 0, s \neq 1$ | $\min(a, b)$ | $ab$ as $s \to 1$ | $\max(0, a+b-1)$ |
| Hamacher [1978] | $\frac{ab}{r+(1-r)(a+b-ab)}$ | $-\ln\left(\frac{a}{r+(1-r)a}\right)$ | $r > 0$ | $\frac{ab}{a+b-ab}$ | $ab$ when $r = 1$ | $i_{\min}(a, b)$ |
| Schweizer & Sklar 1 [1963] | $(\max(0, a^p+b^p-1))^{\frac{1}{p}}$ | $1-a^p$ | $p \neq 0$ | $ab$ | $\max(0, a+b-1)$, when $p = 1$; $\frac{ab}{a+b-ab}$, when $p = -1$. | $i_{\min}(a, b)$ as $p \to \infty$; $\min(a, b)$ as $p \to -\infty$. |
| Schweizer & Sklar 2 | $1-[(1-a)^p+(1-b)^p-(1-a)^p(1-b)^p]^{\frac{1}{p}}$ | $\ln[1-(1-a)^p]^{\frac{1}{p}}$ | $p > 0$ | $i_{\min}(a, b)$ | $ab$ when $p = 1$ | $\min(a, b)$ |
| Schweizer & Sklar 3 | $\exp(-(\lvert\ln a\rvert^p+\lvert\ln b\rvert^p)^{\frac{1}{p}})$ | $\lvert\ln a\rvert^p$ | $p > 0$ | $i_{\min}(a, b)$ | $ab$ when $p = 1$ | $\min(a, b)$ |
| Schweizer & Sklar 4 | $\frac{ab}{[a^p+b^p-a^pb^p]^{\frac{1}{p}}}$ | $a^{-p}-1$ | $p > 0$ | $ab$ | $\frac{ab}{a+b-ab}$, when $p = 1$ | $\min(a, b)$ |
| Yager [1980f] | $1-\min\left\{1, [(1-a)^w+(1-b)^w]^{\frac{1}{w}}\right\}$ | $(1-a)^w$ | $w > 0$ | $i_{\min}(a, b)$ | $\max(0, a+b-1)$ when $w = 1$ | $\min(a, b)$ |
| Dubois & Prade [1980] | $\frac{ab}{\max(a, b, \alpha)}$ | | $\alpha \in [0, 1]$ | $\min(a, b)$ | $ab$ when $\alpha = 1$ | |
| Weber [1983] | $\max\left(0, \frac{a+b+\lambda ab-1}{1+\lambda}\right)$ | $\frac{1}{\lambda}\ln[1+\lambda(1-a)]$ | $\lambda > -1$ | $\max(0, a+b-1)$ | $i_{\min}(a, b)$ as $\lambda \to -1$; $\max[0, (a+b+ab-1)/2]$ when $\lambda = 1$. | $ab$ |
| Yu [1985] | $\max[0, (1+\lambda)(a+b-1)-\lambda ab]$ | $\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1+\lambda}{1+\lambda a}$ | $\lambda > -1$ | $\max(0, a+b-1)$ | $ab$ as $\lambda \to -1$; $\max[0, 2(a+b-ab/2-1)]$ when $\lambda = 1$. | $i_{\min}(a, b)$ |

# مجموعه فازی: اجتماع (t-conorm) . . .

- اجتماع روی دو مجموعه A و B

$$(A \cup B)(x) = u[A(x), B(x)] \quad \text{for all } x \in X.$$

$$u : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1].$$

- چارچوب اصولی (axiomatic skeleton) اجتماع

**Axiom u1.** $u(a, 0) = a$ (*boundary condition*).

**Axiom u2.** $b \leq d$ implies $u(a, b) \leq u(a, d)$ (*monotonicity*).

**Axiom u3.** $u(a, b) = u(b, a)$ (*commutativity*).

**Axiom u4.** $u(a, u(b, d)) = u(u(a, b), d)$ (*associativity*).

مشابه اصول اشتراک به جز در مرزها

- سایر نیازمندی‌های عملگر اجتماع

**Axiom u5.** $u$ is a continuous function (*continuity*).

**Axiom u6.** $u(a, a) > a$ (*superidempotency*).

اجتماع فازی Archimedean

**Axiom u7.** $a_1 < a_2$ and $b_1 < b_2$ implies $u(a_1, b_1) < u(a_2, b_2)$ (*strict monotonicity*).



H. Veisi (h.veisi@ut.ac.ir)

# مجموعه فازی: اجتماع (t-conorm) . . .

- قضیه

**Theorem 3.14.** The standard fuzzy union is the only idempotent $t$-conorm.

$u(a, a) = a$

- مثال

Standard union: $u(a, b) = \max(a, b)$.
Algebraic sum: $u(a, b) = a + b - ab$.
Bounded sum: $u(a, b) = \min(1, a + b)$.
Drastic union: $u(a, b) = \begin{cases} a & \text{when } b = 0 \\ b & \text{when } a = 0 \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$

$$\boxed{\max(a, b) \leq a + b - ab \leq \min(1, a + b) \leq u_{\max}(a, b)}$$

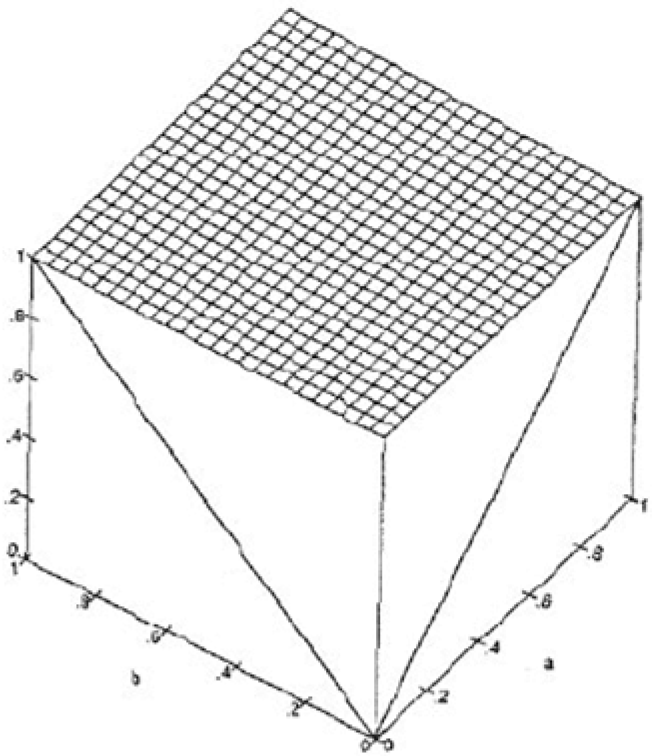
Drastic

**Theorem 3.15.** For all $a, b \in [0, 1]$,

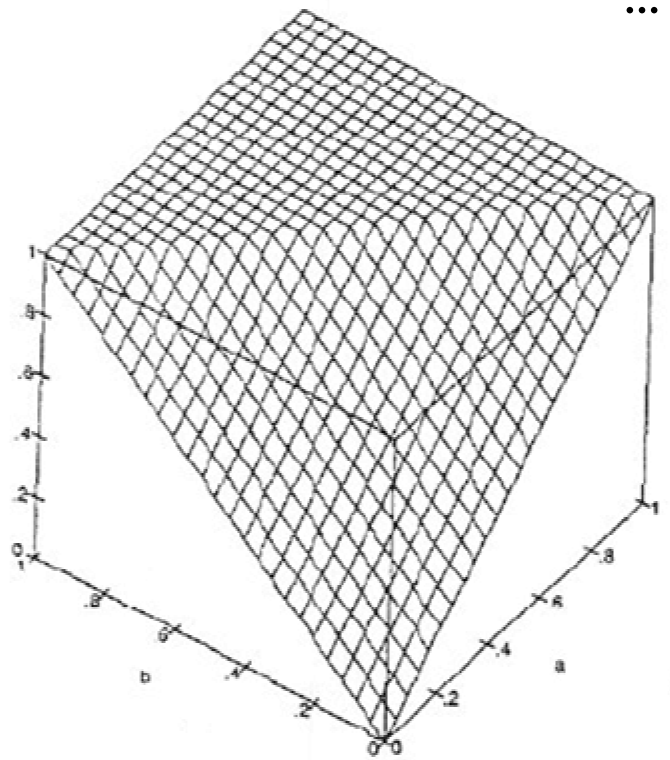
$$\max(a, b) \leq u(a, b) \leq u_{\max}(a, b).$$

# مجموعه فازی: اجتماع (t-conorm) . . .

- مثال ...



$u_{max}$



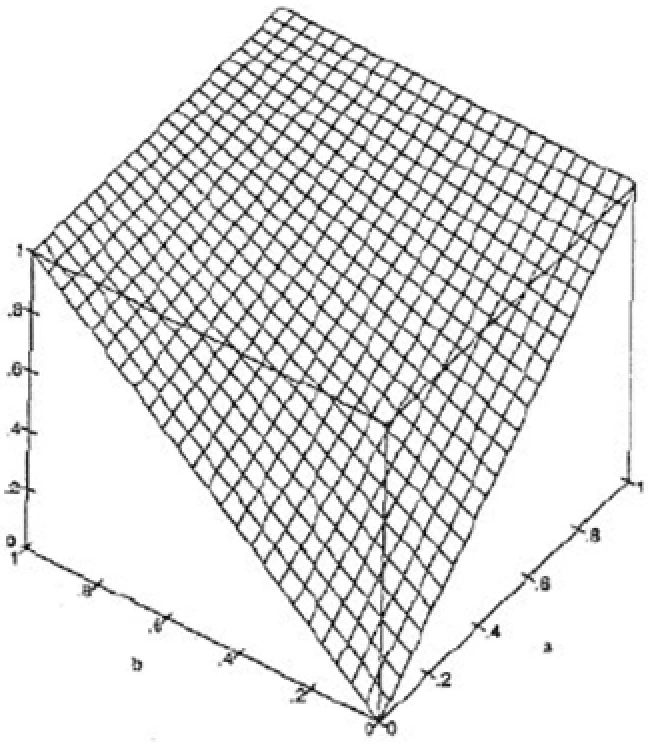
min (1,a+b)

Drastic union: $u(a,b) = \begin{cases} a & \text{when } b = 0 \\ b & \text{when } a = 0 \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$

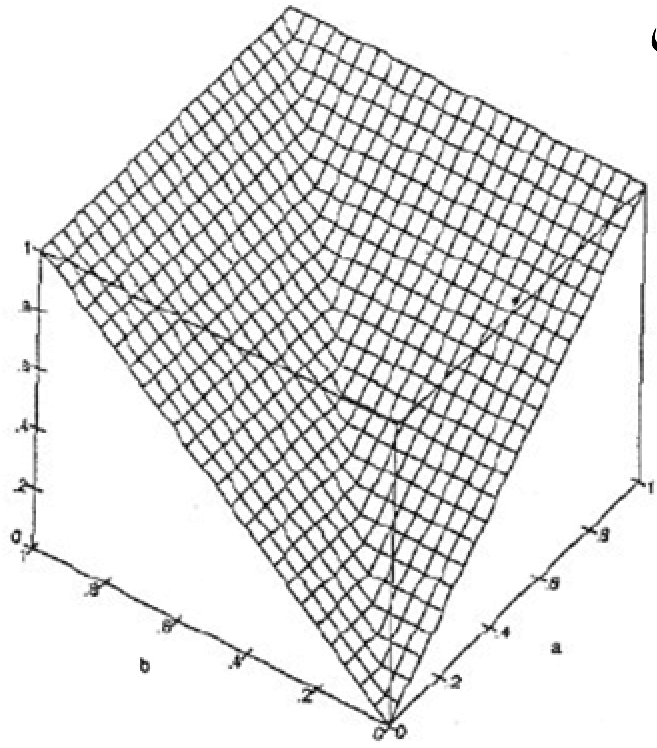
Bounded sum: $u(a,b) = \min(1, a+b)$.

# مجموعه فازی: اجتماع (t-conorm) . . .

- مثال



a+b-ab



max

$\boxed{\text{Algebraic sum: } u(a, b) = a + b - ab.}$

$\boxed{\text{Standard union: } u(a, b) = \max(a, b).}$

# مجموعه فازی: اجتماع (t-conorm) . . .

- قضیه مشخصه‌سازی اجتماع فازی . . .

**Theorem 3.16 (Characterization Theorem of $t$-Conorms).** Let $u$ be a binary operation on the unit interval. Then, $u$ is an Archimedean $t$-conorm iff there exists an increasing generator such that

$$u(a, b) = g^{(-1)}(g(a) + g(b)) \tag{3.23}$$

for all $a, b \in [0, 1]$.

- ساخت توابع t-conorm با استفاده از مولدهای صعودی

# مجموعه فازی: اجتماع (t-conorm) . . .

- قضیه مشخصه‌سازی اجتماع فازی . . .
  - مثال: اجتماع فازی Schweizer

**1.** [Schweizer and Sklar, 1963]: The class of increasing generators is defined by

$$g_p(a) = 1 - (1-a)^p \quad (p \neq 0).$$

Then,

$$g_p^{(-1)}(z) = \begin{cases} 1-(1-z)^{1/p} & \text{when } z \in [0,1] \\ 1 & \text{when } z \in (1,\infty) \end{cases}$$

and we obtain the corresponding class of $t$-conorms by applying (3.23):

$$u(a,b) = g^{(-1)}(g(a)+g(b))$$

$$\begin{aligned} u_p(a,b) &= g_p^{(-1)}(1-(1-a)^p + 1 - (1-b)^p) \\ &= \begin{cases} 1-[(1-a)^p + (1-b)^p - 1]^{1/p} & \text{when } 2-(1-a)^p-(1-b)^p \in [0,1] \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \\ &= 1 - \{\max(0, (1-a)^p + (1-b)^p - 1)\}^{1/p}. \end{aligned}$$

$$u(a,b) = g^{(-1)}(g(a)+g(b)) \qquad (3.23)$$

# مجموعه فازی: اجتماع (t-conorm) . . .

- قضیه مشخصه‌سازی اجتماع فازی
  - مثال: اجتماع فازی Yager

$$u(a, b) = g^{(-1)}(g(a) + g(b))$$

**2.** [Yager, 1980f]: Given a class of increasing generators

$$g_w(a) = a^w \quad (w > 0),$$

we obtain

$$g_w^{(-1)}(z) = \begin{cases} z^{1/w} & \text{when } z \in [0, 1] \\ 1 & \text{when } z \in (1, \infty) \end{cases}$$

and

$$\begin{aligned} u_w(a, b) &= g_w^{(-1)}(a^w + b^w) \\ &= \min(1, (a^w + b^w)^{1/w}). \end{aligned}$$

- مثال: اجتماع فازی Frank

**3.** [Frank, 1979]: Using the class of increasing generators

$$g_s(a) = -\ln \frac{s^{1-a} - 1}{s - 1} \quad (s > 0, s \neq 1)$$

whose pseudo-inverses are

$$g_s^{(-1)}(z) = 1 - \log_s(1 + (s - 1)e^{-z}),$$

we obtain

$$u_s(a, b) = 1 - \log_s \left[1 + \frac{(s^{1-a} - 1)(s^{1-b} - 1)}{s - 1}\right]$$

# مجموعه فازی: اجتماع (t-conorm) . . .

- کلاس یاگر (Yager) . . .

$$u_w(a,b) = \min(1, (a^w + b^w)^{1/w}) \quad (w > 0). \tag{3.24}$$

**Theorem 3.17.** Let $u_w$ denote the class of Yager $t$-conorms defined by (3.24). Then,

$$\max(a,b) \le u_w(a,b) \le u_{\max}(a,b)$$

for all $a, b \in [0, 1]$.

Drastic

$$\text{Drastic union: } u(a,b) = \begin{cases} a & \text{when } b = 0 \\ b & \text{when } a = 0 \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

| $b =$ | 0 | .25 | .5 | .75 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a = 1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| .75 | .75 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| .5 | .5 | .75 | 1 | 1 | 1 |
| .25 | .25 | .5 | .75 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | .25 | .5 | .75 | 1 |

$w = 1$ (weak)

| $b =$ | 0 | .25 | .5 | .75 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a = 1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| .75 | .75 | .79 | .9 | 1 | 1 |
| .5 | .5 | .56 | .71 | .9 | 1 |
| .25 | .25 | .35 | .56 | .79 | 1 |
| 0 | 0 | .25 | .5 | .75 | 1 |

$w = 2$

| $b =$ | 0 | .25 | .5 | .75 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a = 1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| .75 | .75 | .75 | .75 | .8 | 1 |
| .5 | .5 | .5 | .54 | .75 | 1 |
| .25 | .25 | .27 | .5 | .75 | 1 |
| 0 | 0 | .25 | .5 | .75 | 1 |

$w = 10$

| $b =$ | 0 | .25 | .5 | .75 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a = 1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| .75 | .75 | .75 | .75 | .75 | 1 |
| .5 | .5 | .5 | .5 | .75 | 1 |
| .25 | .25 | .25 | .5 | .75 | 1 |
| 0 | 0 | .25 | .5 | .75 | 1 |

$w \to \infty$ (strong)

اجتماع استاندارد فازی

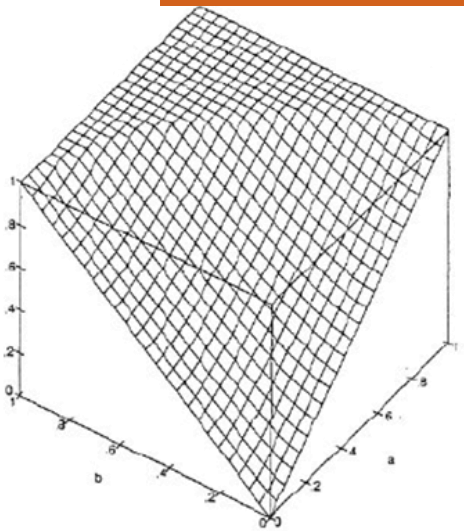


H. Veisi (h.veisi@ut.ac.ir)

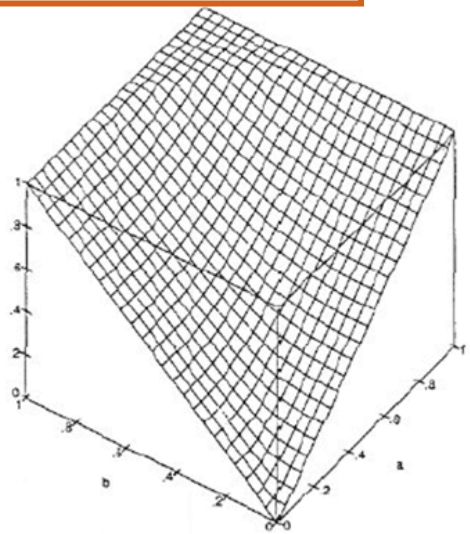
# مجموعه فازی: اجتماع (t-conorm) . . .

- کلاس یاگر (Yager)

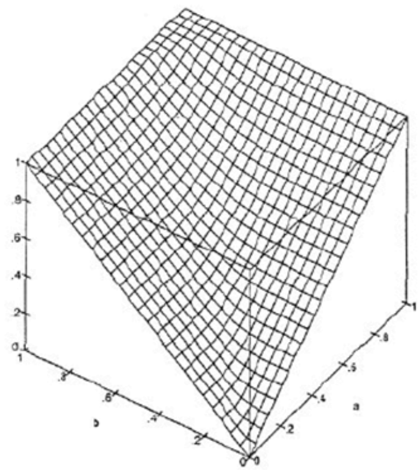
$$u_w(a,b) = \min(1, (a^w + b^w)^{1/w}) \quad (w > 0).$$



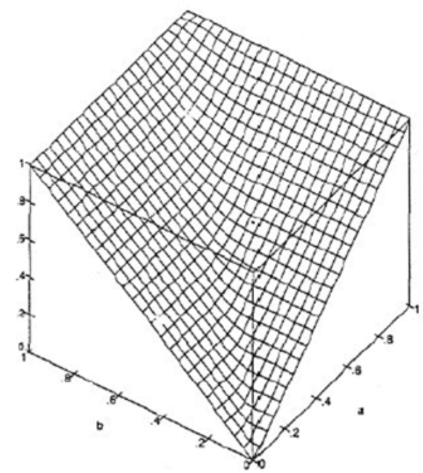
$u_w$: w=1.5



$u_w$: w=3



$u_w$: w=5



$u_w$: w=10

# مجموعه فازی: اجتماع (t-conorm)

**TABLE 3.3** SOME CLASSES OF FUZZY UNIONS ($t$-CONORMS)

| Reference | Formula $u(a,b)$ | Increasing generator $g(a)$ | Parameter range | As parameter converges to 0 | As parameter converges to 1 or $-1$ | As parameter converges to $\infty$ or $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Dombi [1982] | $\left\{1+\left[\left(\frac{1}{a}-1\right)^{-\lambda}+\left(\frac{1}{b}-1\right)^{-\lambda}\right]^{-\frac{1}{\lambda}}\right\}^{-1}$ | $\left(\frac{1}{a}-1\right)^{-\lambda}$ | $\lambda>0$ | $u_{\max}(a,b)$ | $\frac{a+b-2ab}{1-ab}$ when $\lambda=1$ | $\max(a,b)$ |
| Frank [1979] | $1-\log_s\left[1+\frac{(s^{1-a}-1)(s^{1-b}-1)}{s-1}\right]$ | $-\ln\left(\frac{s^{1-a}-1}{s-1}\right)$ | $s>0, s\neq 1$ | $\max(a,b)$ | $a+b-ab$ as $s\to 1$ | $\min(1,a+b)$ |
| Hamacher [1978] | $\frac{a+b+(r-2)ab}{r+(r-1)ab}$ | $-\ln\left(\frac{1-a}{r+(1-r)(1-a)}\right)$ | $r>0$ | $\frac{a+b-2ab}{1-ab}$ | $a+b-ab$ when $r=1$ | $u_{\max}(a,b)$ |
| Schweizer & Sklar 1 [1963] | $1-(\max(0,(1-a)^p+(1-b)^p-1))^{\frac{1}{p}}$ | $1-(1-a)^p$ | $p\neq 0$ | $a+b-ab$ | $\min(1,a+b)$, when $p=1$; $\frac{a+b-2ab}{1-ab}$, when $p=-1$. | $u_{\max}(a,b)$ as $p\to\infty$; $\min(a,b)$ as $p\to-\infty$. |
| Schweizer & Sklar 2 | $[a^p+b^p-a^pb^p]^{\frac{1}{p}}$ | $\ln[1-a^p]^{\frac{1}{p}}$ | $p>0$ | $u_{\max}(a,b)$ | $a+b-ab$ when $p=1$ | $\max(a,b)$ |
| Schweizer & Sklar 3 | $1-\exp(-(\lvert\ln(1-a)\rvert^p+\lvert\ln(1-b)\rvert^p)^{\frac{1}{p}})$ | $\lvert\ln(1-a)\rvert^p$ | $p>0$ | $u_{\max}(a,b)$ | $a+b-ab$ when $p=1$ | $\max(a,b)$ |
| Schweizer & Sklar 4 | $1-\frac{(1-a)(1-b)}{[(1-a)^p+(1-b)^p-(1-a)^p(1-b)^p]^{\frac{1}{p}}}$ | $(1-a)^{-p}-1$ | $p>0$ | $a+b-ab$ | $\min\left(1,\frac{a+b}{1-ab}\right)$ when $p=1$ | $\max(a,b)$ |
| Yager [1980f] | $\min\left[1,(a^w+b^w)^{\frac{1}{w}}\right]$ | $a^w$ | $w>0$ | $u_{\max}(a,b)$ | $\min(1,a+b)$ when $w=1$ | $\max(a,b)$ |
| Dubois & Prade [1980] | $1-\frac{(1-a)(1-b)}{\max((1-a),(1-b),\alpha)}$ | | $\alpha\in[0,1]$ | $\max(a,b)$ | $a+b-ab$ when $\alpha=1$ | |
| Weber [1983] | $\min\left(1,a+b-\frac{\lambda}{1-\lambda}ab\right)$ | $\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1+\lambda}{1+\lambda(1-a)}$ | $\lambda>-1$ | $\min(1,a+b)$ | $u_{\max}(a,b)$ as $\lambda\to-1$; $\min(1,(a+b-ab/2)$ when $\lambda=1$. | $a+b-ab$ |
| Yu [1985] | $\min(1,a+b+\lambda ab)$ | $\frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda a)$ | $\lambda>-1$ | $\min(1,a+b)$ | $a+b-ab$ as $\lambda\to-1$; $\min(1,a+b+ab)$ when $\lambda=1$. | $u_{\max}(a,b)$ |



H. Veisi (h.veisi@ut.ac.ir)

# مجموعه فازی: ترکیب عملگرها ...

- قانون دمورگان (دوگان)
  - حالت کلاسیک $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ and $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
  - حالت فازی
    - اشتراک فازی i و اجتماع فازی u نسبت به مکمل فازی c دوگان هم هستند اگر و فقط اگر

$$c(i(a,b)) = u(c(a), c(b)) \tag{3.27}$$

and

$$c(u(a,b)) = i(c(a), c(b)). \tag{3.28}$$

- فقط تعدادی از ترکیب‌های مختلف اشتراک، اجتماع و مکمل فازی شرایط دوگان بودن را دارند
- مثال: سه‌تایی های دوگان

$\langle \min(a,b), \max(a,b), c_s \rangle$

$\langle ab, a+b-ab, c_s \rangle$

$\langle \max(0, a+b-1), \min(1, a+b), c_s \rangle$

$\langle i_{\min}(a,b), u_{\max}(a,b), c_s \rangle$

مکمل استاندارد فازی

**Theorem 3.19.** The triples $\langle \min, \max, c \rangle$ and $\langle i_{\min}, u_{\max}, c \rangle$ are dual with respect to any fuzzy complement $c$.

# مجموعه فازی: ترکیب عملگرها . . .

## عملگرهای تجمیع

- عملگرهایی که چند مجموعه فازی را با هم ترکیب کرده و به یک مجموعه فازی تبدیل می‌کنند

Formally, any *aggregation operation* on $n$ fuzzy sets ($n \geq 2$) is defined by a function

$$h : [0, 1]^n \to [0, 1].$$

When applied to fuzzy sets $A_1, A_2, \ldots, A_n$ defined on $X$, function $h$ produces an aggregate fuzzy set $A$ by operating on the membership grades of these sets for each $x \in X$. Thus,

$$A(x) = h(A_1(x), A_2(x), \ldots, A_n(x))$$

for each $x \in X$.

- مثال: اجتماع، اشتراک، میانگین

# مجموعه فازی: ترکیب عملگرها . . .

- اصول مورد نیاز عملگرهای تجمیع

**Axiom h1.** $h(0, 0, \ldots, 0) = 0$ and $h(1, 1, \ldots, 1) = 1$ (*boundary conditions*).

**Axiom h2.** For any pair $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ and $\langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ of $n$-tuples such that $a_i, b_i \in [0, 1]$ for all $i \in \mathbb{N}_n$, if $a_i \leq b_i$ for all $i \in \mathbb{N}_n$, then

$$h(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq h(b_1, b_2, \ldots, b_n);$$

that is, $h$ is *monotonic increasing* in all its arguments.

**Axiom h3.** $h$ is a *continuous* function.

**Axiom h4.** $h$ is a *symmetric* function in all its arguments; that is,

$$h(a_1, a_2, \ldots, a_n) = h(a_{p(1)}, a_{p(2)}, \ldots, a_{p(n)})$$

for any permutation $p$ on $\mathbb{N}_n$.

**Axiom h5.** $h$ is an *idempotent* function; that is, $h(a, a, \ldots, a) = a$ for all $a \in [0, 1]$.

- اجتماع و اشتراک فازی عملگرهای تجمیع هستنند اما به غیر از اجتماع و اشتراک استاندارد فازی (min و max)، بقیه اصل h5 را ندارند



H. Veisi (h.veisi@ut.ac.ir)

# مجموعه فازی: ترکیب عملگرها . . .

- برای عملگرهای تجمیعی h که اصول h2 (یکنوا صعودی) و h5 (idempotent) را دارند، داریم

$$\min(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le h(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le \max(a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad (3.31)$$

for all $n$-tuples $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \in [0, 1]^n$.

عملگرهایی که بین اجتماع و اشتراک استاندارد قرار دارند

- عملگرهای تجمیعی idempotent را عملگرهای میانگین می‌گویند
  - میانگین‌های گسترش یافته (generalized means)

$$h_\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha},$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha \neq 0)$ and $a_i \neq 0$ for all $i \in \mathbb{N}_n$



H. Veisi (h.veisi@ut.ac.ir)

# مجموعه فازی: ترکیب عملگرها . . .

- میانگین‌های گسترش یافته (generalized means)

$$h_\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha},$$

- کران پایین

$$h_{-\infty}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \lim_{\alpha \to -\infty} h_\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

- کران بالا

$$h_{\infty}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \lim_{\alpha \to \infty} h_\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \max(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

- میانگین حسابی (arithmetic)

$$\text{For } \alpha = 1, \ h_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n),$$

- میانگین هارمونیک ( harmonic)

$$\text{For } \alpha = -1, \ h_{-1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}},$$


H. Veisi (h.veisi@ut.ac.ir)

# مجموعه فازی: ترکیب عملگرها . . .

- دسته دیگری از عملگرهای تجمیعی: میانگین‌گیری وزن‌دار ترتیبی
  - ordered weighted averaging (OWA)

Let
$$\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, \ldots, w_n \rangle$$
be a *weighting vector* such that $w_i \in [0, 1]$ for all $i \in \mathbb{N}_n$ and
$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$
Then, an *OWA operation* associated with $\mathbf{w}$ is the function
$$h_{\mathbf{w}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = w_1 b_1 + w_2 b_2 + \ldots + w_n b_n,$$
where $b_i$ for any $i \in \mathbb{N}_n$ is the $i$th largest element in $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

$\langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ is a permutation of vector $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ in which the elements are ordered: $b_i \geq b_j$ if $i < j$ for any pair $i, j \in \mathbb{N}_n$.

- مثال

$$\mathbf{w} = \langle .3, .1, .2, .4 \rangle,$$
$$h_{\mathbf{w}}(.6, .9, .2, .7) = .3 \times .9 + .1 \times .7 + .2 \times .6 + .4 \times .2 = .54.$$



H. Veisi (h.veisi@ut.ac.ir)

# مجموعه فازی: ترکیب عملگرها . . .

- میانگین‌گیری وزن‌دار ترتیبی
  - ارضا کردن پنج اصل h1 تا h5 و نامساوی

$$\min(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq h(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq \max(a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad (3.31)$$

for all $n$-tuples $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \in [0, 1]^n$.

- کران پایین

$$\mathbf{w}_* = \langle 0, 0, \ldots, 1 \rangle \text{ and } h_{\mathbf{w}_*}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \min(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

- کران بالا

$$\mathbf{w}^* = \langle 1, 0, \ldots, 0 \rangle \text{ and } h_{\mathbf{w}^*}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \max(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

- میانگین حسابی

For $\mathbf{w} = \langle 1/n, 1/n, \ldots, 1/n \rangle$, $h_{\mathbf{w}}$ is the arithmetic mean.

# مجموعه فازی: ترکیب عملگرها

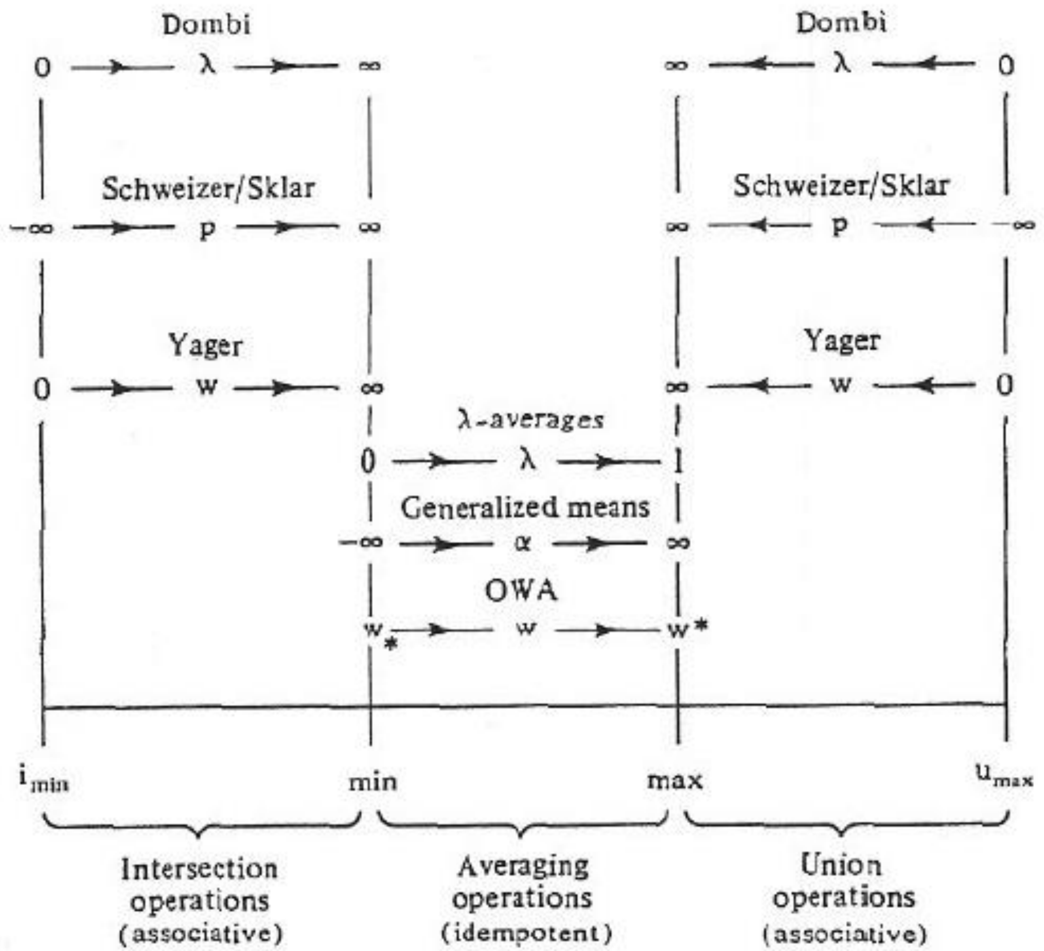



**Figure 3.11** The full scope of fuzzy aggregation operations.