درس سیگنال، ۹۹/۲/۱۶، رستگار

سنتز $x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \cdot e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

آنالیز $a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n] \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

خواص سری فوریه:

۱- خطی بودن:

$x[n] \longleftrightarrow a_k$

$x(t) \longleftrightarrow c_n$

$y[n] \longleftrightarrow b_k$

$y(t) \longleftrightarrow d_n$

$\alpha x[n] + \beta y[n] \longleftrightarrow \alpha a_k + \beta b_k$

$\alpha x(t) + \beta y(t) \longleftrightarrow \alpha c_n + \beta d_n$

2- شیفت (انتقال):

$x[n-n_0] \longleftrightarrow e^{-jk\Omega_0 n_0} \cdot a_k = e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0} \cdot a_k$

$x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-jn\omega_0 t_0} \cdot c_n$

$x(t) \longleftrightarrow c_n$

3- معکوس شدن زمانی:

$x[-n] \longleftrightarrow a_{-k}$

$x(-t) \longleftrightarrow c_{-n}$

اگر سیگنال زوج باشد ← ضرایب سری فوریه زوج هستند.

اگر سیگنال فرد باشد ← ضرایب سری فوریه فرد هستند.

4-

$x^*[n] \longleftrightarrow a^*_{-k}$

$x^*(t) \longleftrightarrow c^*_{-n}$

$\Longrightarrow$ نتیجه می‌گیریم برای $x[n]$ سیگنالهای حقیقی

$x^*[n] = x[n] \longleftrightarrow a^*_{-k} = a_k$

سیگنال حقیقی $\Longleftrightarrow$ $\boxed{a_{-k} = a^*_k}$

سیگنال حقیقی $\Longleftrightarrow$ $\boxed{c_{-n} = c^*_n}$

هم گسسته ها، هم پیوسته ها

نتیجه دیگر ←
- اگر سیگنال حقیقی و زوج باشد ← ضرایب سری فوریه حقیقی و زوج خواهند بود.
- اگر سیگنال حقیقی و فرد باشد ← ضرایب سری فوریه موهومی خالص و فرد خواهند بود.

(5) خاصیت ضرب:

$$x(t)\cdot y(t) \longleftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l} = a_k * b_k$$

$$x[n]\cdot y[n] \longleftrightarrow \sum_{l=\langle N\rangle} a_l\cdot b_{k-l} = a_k \circledast b_k$$

← کانولوشن دایروی (کانولوشن پریودیک)

(6) مشتق گیری (تفاضل در حوزه زمان گسسته ها):

$$x[n]-x[n-1] \longleftrightarrow \left(1-e^{-jk\Omega_0}\right)a_k$$

$$x'(t) \longleftrightarrow jn\omega_0 C_n$$

(7) انتگرال گیری (جمع در حوزه زمان گسسته ها) (به شرط آنکه $\underbrace{a_0}_{DC}=0$ باشد):

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longleftrightarrow \frac{a}{1-e^{-jk\Omega_0}}$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(t')\,dt' \longleftrightarrow \frac{C_n}{j\omega_0 n}$$

page 3

8. رابطه‌ی پارسوال :

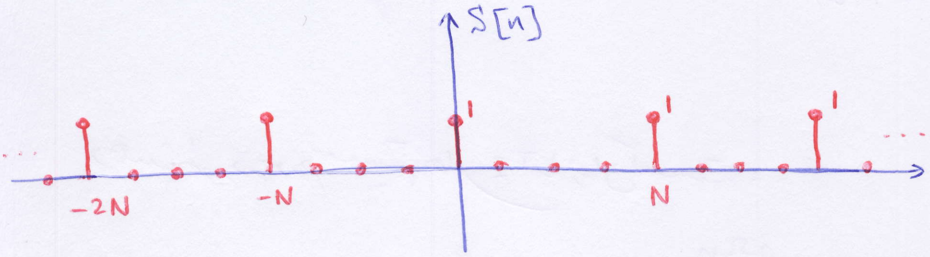
$$\text{توان متوسط سیگنال} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N\rangle} |a_k|^2$$

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 . dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

توان متوسط سیگنال = جمع توان‌های هارمونیک‌های مختلف

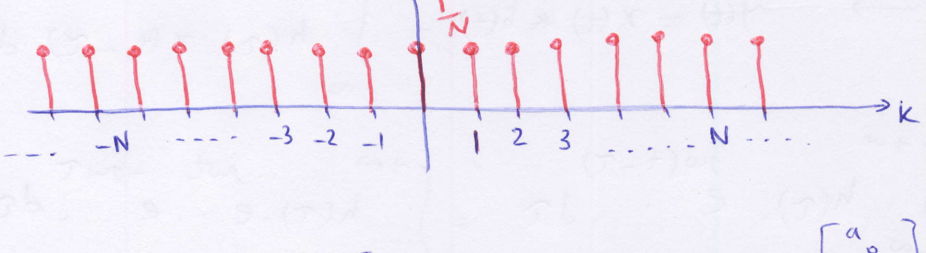
با استفاده از این خواص و همینطور سری فوریه موج مربعی (جلسه‌ی گذشته) و قطار ضربه‌ها، سری فوریه بسیاری از سیگنال‌ها را می‌توان یافت.

مثال: قطار ضربه گسسته :



$$S[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n - rN]$$ متناوب با دوره‌ی تناوب اصلی N

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} x[n].\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \Rightarrow a_k = \frac{1}{N}$$ متناوب با دوره‌ی تناوب اصلی N



متناوب با دوره‌ی تناوب N

$$x[n] = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \longrightarrow a[k] = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix}$$

یک تبدیل خطی از فضای بردارهای N بعدی به فضای بردارهای N بعدی

سری فوریه سیستم های LTI: پاسخ فرکانسی - فیلترینگ

توابع سینوسی، توابع ویژه سیستم های LTI هستند:

$$e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow H(\omega)\cdot e^{j\omega t}$$

$H(\omega)$: گین در فرکانس ω

← پاسخ فرکانسی سیستم LTI (Frequency Response)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

اگر ورودی پریودیک دیگر بدهیم:

$$\Rightarrow \quad y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot H(n\omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

و همینطور در مورد سیستم های LTI زمان گسسته:

$$e^{j\Omega n} \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow H(\Omega)\cdot e^{j\Omega n}$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \cdot e^{jk\Omega_0 n} \quad \Rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \cdot H(k\Omega_0)\cdot e^{jk\Omega_0 n}$$

اثبات این خاصیت چگونه بود؟ از طریق کانولوشن

$$x(t) = e^{j\omega t} \longrightarrow \quad y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot x(t-\tau)\cdot d\tau$$

$$\rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot e^{j\omega(t-\tau)}\cdot d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot e^{j\omega t}\cdot e^{-j\omega\tau}\cdot d\tau$$

$$\rightarrow y(t) = e^{j\omega t}\cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\cdot d\tau}_{H(\omega)} \quad \Rightarrow \quad H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt$$

page5

اگر ضرایب سری فوریه ورودی سیستم LTI این باشد
$$x(t) \longleftrightarrow C_n$$

آنگاه ضرایب سری فوریه خروجی خواهد بود
$$y(t) \longleftrightarrow H(n\omega_0)\cdot C_n$$

پاسخ فرکانسی در سیستم‌های دینامیکی که با یک معادله دیفرانسیل توصیف می‌شوند، به راحتی به دست می‌آید:

می‌دانیم که در یک سیستم LTI اگر ورودی $x(t)=e^{j\omega t}$ باشد، خروجی $y(t)=H(\omega).e^{j\omega t}$ خواهد بود. پس همین را در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم.

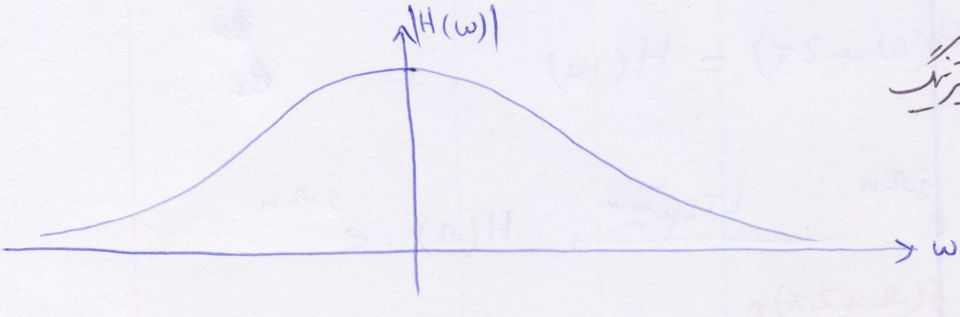
مثال: $y''+5y'+6y=x$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\left\{H(\omega).e^{j\omega t}\right\}+5\frac{d}{dt}\left\{H(\omega).e^{j\omega t}\right\}+6H(\omega).e^{j\omega t}=e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow H(\omega).(j\omega)^2.\cancel{e^{j\omega t}}+5H(\omega).j\omega.\cancel{e^{j\omega t}}+6H(\omega).\cancel{e^{j\omega t}}=\cancel{e^{j\omega t}}$$

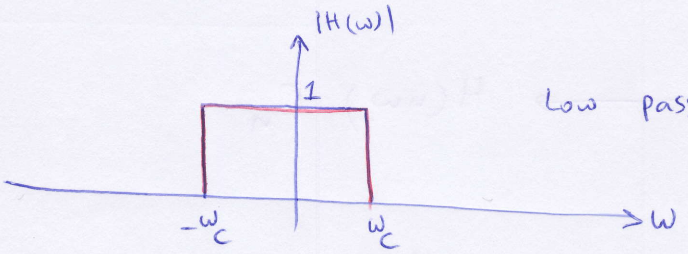
$$\Rightarrow H(\omega)=\frac{1}{-\omega^2+5j\omega+6}=\frac{1}{(6-\omega^2)+j5\omega}$$

$$|H(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(6-\omega^2)^2+25\omega^2}}=\frac{1}{\sqrt{\omega^4+13\omega^2+36}}$$



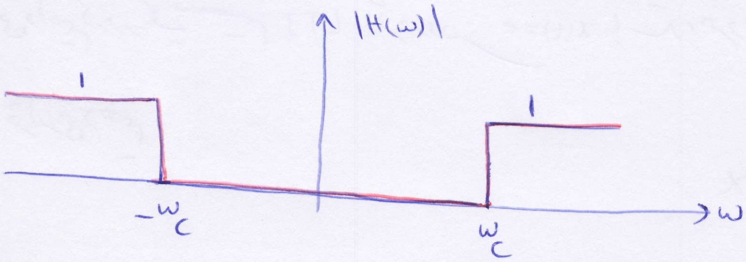
مفهوم فیلترینگ

فیلتر یعنی تغییر دامنه نسبی فرکانس‌های مختلف ورودی و یا حذف کامل برخی فرکانس‌های ورودی.



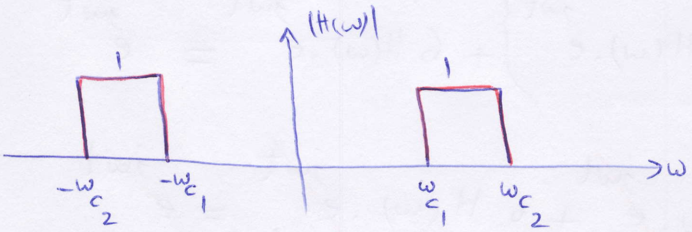
Low pass Filter (LPF)

فیلتر پایین گذر



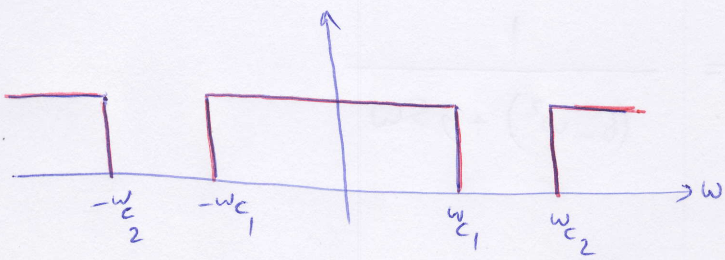
High pass Filter (HPF)

فیلتر بالا گذر



Band Pass Filter

فیلتر میان گذر



Band Stop Filter

فیلتر میان نگذر

و اما در مورد سیستم‌ها LTI زمان گسسته:

پاسخ فرکانسی در اینجا، پریودیک خواهد بود.

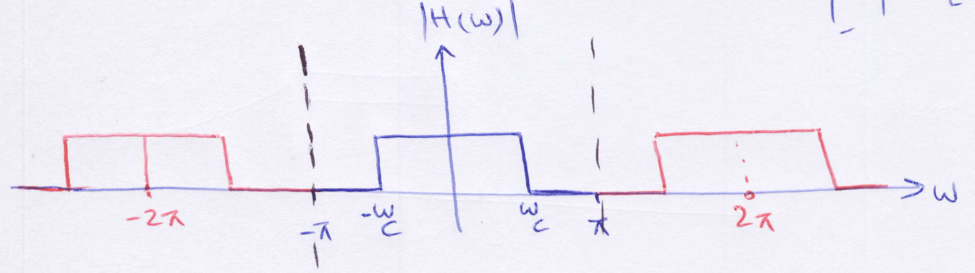
$$H(\omega + 2\pi) = H(\omega)$$

$$e^{j\Omega n} \xrightarrow{\text{LTI سیستم}} H(\Omega) \cdot e^{j\Omega n}$$

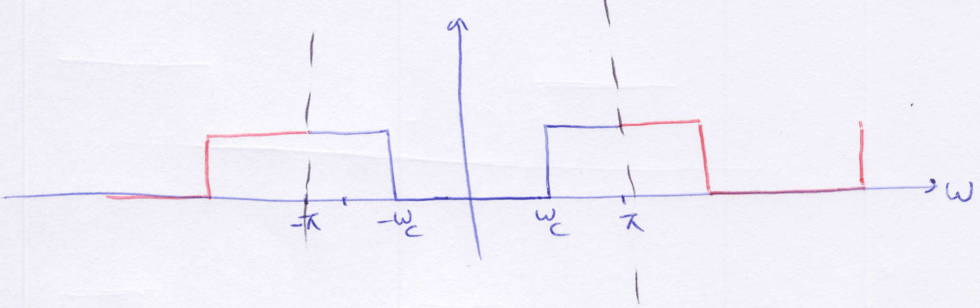
$$e^{j(\Omega + 2\pi)n}$$

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \cdot e^{-j\Omega n} \Rightarrow H(\omega) = H(\omega + 2\pi)$$

سپس (پاسخ زمانی) فیلترها را باید در فاصله $[-\pi , \pi]$ رسم کنیم.



LPF



HPF