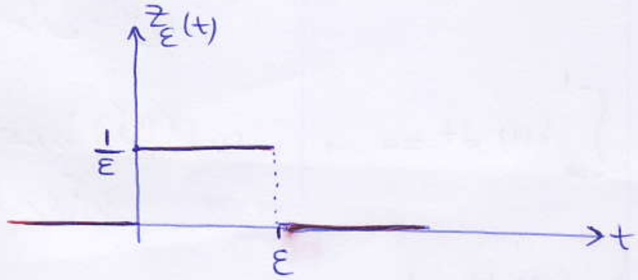
جلسه سوم درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها: دکتر رستگار

تابع ضربه: تابع ضربه یا تابع دلتای دیراک که با نمادهای $u_0(t)$ و یا $\delta(t)$ نمایش داده می‌شود، تابعی است بدرفتار و تعریف نشده که با خصوصیاتش معرفی می‌شود: Dirac Delta Function

سه خصوصیت اصلی تابع دلتای دیراک: ۱- تابع $\delta(t)$ در $t=0$، تعریف نشده و ویژه است. 2- تابع $\delta(t)$ در $t\neq 0$، برابر با صفر است. 3- داریم: $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t).dt=1$ و این یعنی اینکه انتگرال زیر سطح تابع دلتا، از منهای بی‌نهایت تا مثبت بی‌نهایت، برابر با یک می‌باشد.

به علت اینکه نمی‌توان مقادیر تابع ضربه را نقطه به نقطه تعریف کرد باید تابع ضربه را به صورت یک تابع تعمیم یافته که با خواصش معرفی می‌شود، در نظر گرفت. بنابراین، فرض می‌کنیم که $Z_\varepsilon(t)$ کلاسی و یا گروهی از توابعی باشد که دارای مساحت واحد هستند و در خارج از بازه $[0,\varepsilon]$ برابر با صفر می‌باشند.



$$Z_\varepsilon(t)=\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon} & 0<t<\varepsilon\\ 0 & t<0 \ \& \ t>\varepsilon\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Z_\varepsilon(t).dt=\int_0^{\varepsilon} Z_\varepsilon(t).dt=\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}.dt=1$$

در اینصورت تابع $\delta(t)$ را می‌توان به صورت حدی به صورت زیر بیان کرد:

$$\delta(t)=\lim_{\varepsilon\to 0} Z_\varepsilon(t)$$

می‌توان نشان داد که تابع $\delta(t)$، مشتق تابع پله واحد یعنی $u(t)$ است.

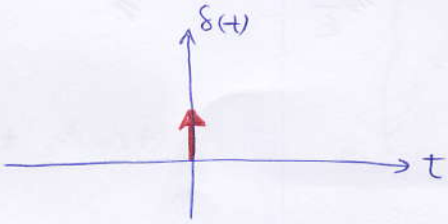
$$\boxed{\delta(t)=\frac{d}{dt}u(t)} \quad \& \quad \boxed{u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\alpha).d\alpha}$$

یعنی ضربه، مشتق پله است و پله انتگرال ضربه است.

تابع ضربه $\delta(t)$ را به اینصورت نمایش می‌دهیم. یک پیکان رو به بالا در مبداء مختصات که در کنار آن گاهی عدد $\underline{1}$ را می‌نویسیم. این عدد 1 به این معنی نیست که مقدار تابع ضربه، در مبداء برابر با یک است، زیرا قبلاً گفتیم که تابع ضربه در $t=0$، اصلاً تعریف نشده است. بلکه معنای این عدد $\underline{1}$ این است که انتگرال تابع ضربه و یا به عبارتی، مساحت زیر سطح نمودار آن، برابر با یک است.

به این نکته توجه کنید که انتگرال زیر سطح نمودار تابع ضربه، تنها در صورتی برابر با یک است که حدود انتگرال‌گیری، شامل تابع ضربه باشد و یا به عبارتی حدود انتگرال‌گیری، از کمی قبل از رخ دادن ضربه تا کمی بعد از آن را در بر بگیرد

به عنوان مثال:



$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{-1} \delta(t).dt = 0 \rightarrow \\ \int_{-1}^{+1} \delta(t).dt = 1 \\ \int_{+2}^{+\infty} \delta(t).dt = 0 \end{cases}$$

چون این محدودهٔ انتگرال‌گیری، مبدا را در بر نمی‌گیرد.

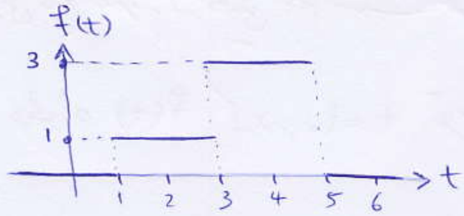
البته این در مورد انتگرال معین تابع ضربه بود. یعنی انتگرالی با حدود معین.

وگرنه میدانیم که انتگرال نامعین تابع ضربه، همان تابع پله واحد یعنی $u(t)$ است.

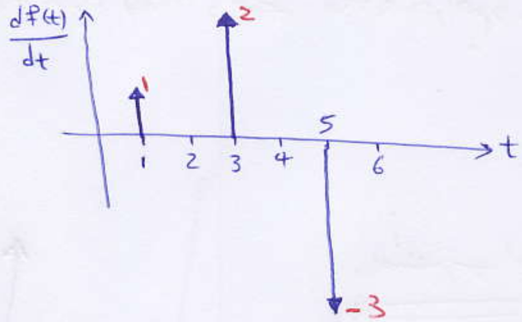
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau).d\tau \qquad \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$\delta(t-t_0) = \frac{du(t-t_0)}{dt}$$

مثال: مشتق تابع $f(t)$ را رسم کنید:



مشتق گیری ⇓



مشتق این تابع در همه جا صفر است به جز نقاطی که جهش ارتفاع داریم یعنی در $t=1$ که یک واحد جهش ارتفاع داریم و در $t=3$ که دو واحد جهش ارتفاع داریم و در $t=5$ که -3 واحد جهش ارتفاع داریم.

پس در هنگام مشتق گیری، سه ضربه در $t=1$ و $t=3$ و $t=5$ داریم.

البته به روش دیگری هم می توانستیم این مسأله را حل کنیم. به اینصورت که تابع $f(t)$ را برحسب توابع پله بنویسیم و سپس مشتق بگیریم. لطفاً پیش از نگاه کردن به راه حل من، سعی کنید خودتان $f(t)$ را بصورت مجموع توابع پله بنویسید و از آن مشتق بگیرید: راه حل:

$$f(t) = u(t-1) + 2u(t-3) - 3u(t-5)$$

$$\to \quad f'(t) = \delta(t-1) + 2\delta(t-3) - 3\delta(t-5)$$

تابع $\delta(t-t_0)$ که در واقع انتقال یافته تابع ضربه واحد است دارای خواص زیر می باشد:

1- $\delta(t-t_0) = 0 \quad \& \quad t \neq t_0$

2- $\delta(t-t_0)$ تعریف نشده $\quad \& \quad t = t_0$

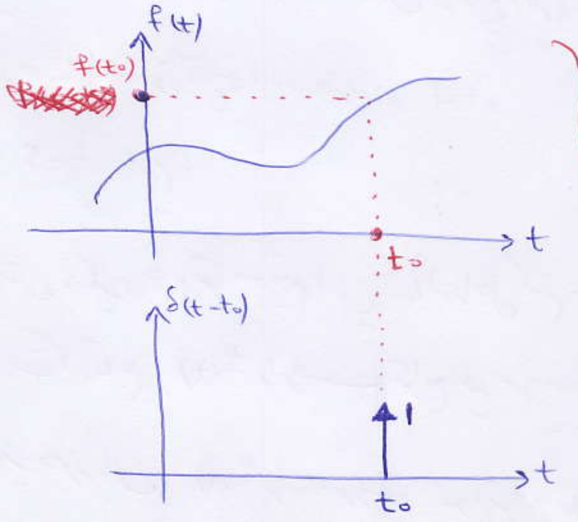
3- $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \delta(t-t_0)\,dt = 1 \xrightarrow{\text{اگر}} t_1 < t_0 < t_2$

خاصیت عجیب تابع ضربه که خیلی مهم است:

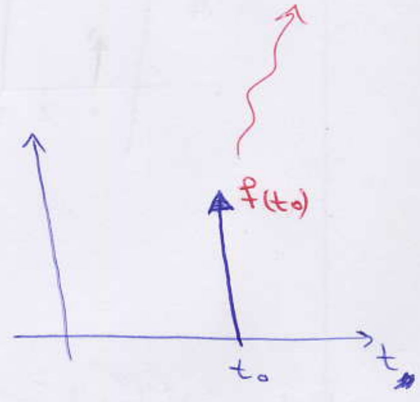
برای تابع دلخواه $f(t)$ که در $t=t_0$ تعریف شده است و مقدار مشخصی دارد، داریم:

$$f(t).\,\delta(t-t_0) = f(t_0).\,\delta(t-t_0)$$

یعنی ضربه‌ای به اندازهٔ $f(t_0)$ در نقطهٔ $t=t_0$ خواهیم داشت.



حاصلضرب این دو تابع خواهد بود



خاصیت بسیار مهم عجیب تابع ضربه ⟸ خاصیت جداسازی

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\,\delta(t-t_0).\,dt = f(t_0)}$$

واضح است زیرا طبق خاصیت بالا داریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\,\delta(t-t_0).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_0).\,\delta(t-t_0).dt$$

$$= f(t_0).\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0).dt = f(t_0)$$

تمامی خواص تابع ضربه :

1- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).dt = 1$

2- $\delta(t)=0 \; ; \; \forall t \neq 0$ یعنی ضربه در همه جا برابر با صفر است به جز در $t=0$ که تعریف نشده است.

3- $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$

4- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\delta(t).dt = f(0)$

5- $\delta(t) = \delta(-t)$ یعنی تابع ضربه، تابعی زوج است.

6- $\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t)$ مثلاً: $\delta(3t) = \frac{1}{3}\delta(t)$

7-

$$\int_a^b f(t).\delta(t).dt = \begin{cases} f(0) & \text{اگر } ab<0 \\ 0 & \text{اگر } ab>0 \\ \text{تعریف نشده} & \text{اگر } ab=0 \end{cases}$$

خیلی واضح است و چندبار آن را گفته‌ام، کمی به آن فکر کنید!!

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\delta(t-t_0).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+t_0).\delta(t).dt = f(t_0) \qquad -8$$

تغییر متغیر

۹ـ خاصیت بسیار مهم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\delta^{(n)}(t-t_0).dt = (-1)^n f^{(n)}(t_0)$$

مشتق n ام تابع ضربه

مشتق n ام تابع f در $t=t_0$

این رابطه را می‌توان به سادگی با استفاده از استقرای ریاضی اثبات کرد. کافیست اثبات کنیم که برای $n=1$ برقرار است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\delta'(t).dt = -f'(0)$$

اثبات

داریم $\left(f(t).\delta(t)\right)' = f'(t).\delta(t) + f(t)\,\delta'(t)$

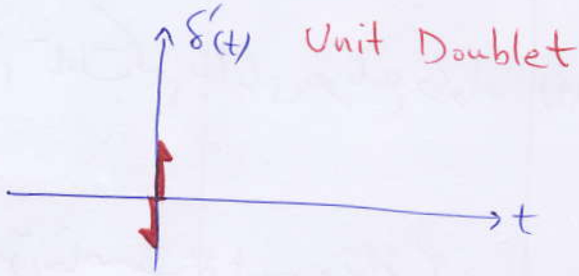
پس $\int f(t).\delta'(t) = \int \left(f(t).\delta(t)\right)' - \int f'(t).\delta(t)$

طبق خاصیت شمارهٔ 7,8

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\delta'(t).dt = \overset{0}{\cancel{f(t).\delta(t)\Big]_{-\infty}^{+\infty}}} - \overset{=f'(0)}{\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t).\delta(t).dt}}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\delta'(t).dt = -f'(0)$$

توجه داشته باشید که مشتق تابع ضربه، تابع دوبلت $\delta'(t)$ نامیده می‌شود که خود مانند تابع ضربه، تابعی بدرفتار است، و جزء توابع فرد می‌باشد و به این شکل نمایش داده می‌شود.



$$\delta'(t) = -\delta'(-t)$$

خاصیت هم‌ارزی خاصیت بسیار مهمی است که همه خواص تابع ضربه را می‌توان با استفاده از آن اثبات کرد. خاصیت هم‌ارزی به اینصورت است که فرض کنیم دو تابع $f_1(t)$ و $f_2(t)$ داریم که اینها شامل توابع ضربه و توابع دیگری باشند. یعنی هم f_1 و هم f_2 باید شامل تعدادی ضربه باشند وگرنه خاصیت هم‌ارزی برقرار نخواهد بود. البته f_1 و f_2 می‌توانند توابع دیگری هم در دل خود داشته باشند ولی این اختیاری است امّا داشتن ضربه اجباری است وگرنه این خاصیت قابل استفاده نیست. پس در اینصورت خواهیم داشت:

$$f_1(t) \equiv f_2(t)$$

یعنی f_1 و f_2 هم‌ارز هستند

$\Longleftrightarrow$ اگر و تنها اگر

برای تمامی توابع تست دلخواه $\varphi(t)$ که این انتگرال وجود دارد داشته باشیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \cdot f_1(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \cdot f_2(t) \cdot dt$$

تابع $\varphi(t)$ تابع مشخصی نیست بلکه هر تابع دلخواهی می‌تواند باشد.

حالا چگونه می‌توان از خاصیت هم‌ارزی برای اثبات خواص ضربه استفاده کرد؟

مثال: می‌خواهم با استفاده از خاصیت هم ارزی ثابت کنم که تابع ضربه، زوج است یعنی

$$\delta(t)=\delta(-t)$$

اگر بتوانم ثابت کنم به ازای هر تابع دلخواه $\varphi(t)$ داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t).\delta(t).dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t).\delta(-t).dt$$

آنگاه طبق خاصیت هم ارزی می‌توانم بگویم $\delta(t)\equiv\delta(-t)$

پس باید این رابطه را اثبات کنم که

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t).\delta(t).dt}_{=\varphi(0)}=\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t).\delta(-t).dt}_{?}$$

طبق خاصیت چهارم

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t).\delta(-t).dt \overset{\text{تغییر متغیر}}{=} \int_{+\infty}^{-\infty}-\varphi(-u).\delta(u).du=\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}+\varphi(-u).\delta(u).du}_{=\varphi(0)}$$

$-t=u \Rightarrow -dt=du$

طبق خاصیت چهارم

پس هم انتگرال اول و هم انتگرال دوم برابر هستند با $\varphi(0)$ پس داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t).\delta(t).dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t).\delta(-t).dt=\varphi(0)\Longrightarrow\delta(t)\equiv\delta(-t)$$

یک خاصیت دیگر تابع ضربه که :

اگر تابع $f(t)$ یک چندجمله‌ای باشد که دارای $\underline{\underline{n}}$ ریشه‌ی $\underline{\underline{\text{مستقل}}}$ t_1 ، t_2 ، ... ، t_n باشد داریم:

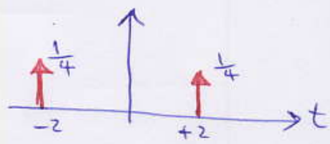
$$\delta\left(f(t)\right) = \frac{\delta(t-t_1)}{|f'(t_1)|} + \frac{\delta(t-t_2)}{|f'(t_2)|} + \cdots + \frac{\delta(t-t_n)}{|f'(t_n)|}$$

چند مثال:

$\delta(t^2-4) = ?$

$$f(t) = t^2-4 = (t-2)(t+2) \xrightarrow{\text{دو ریشه دارد}} \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = -2 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow f'(t) = 2t \longrightarrow \begin{cases} \text{در } t_1=2 \Rightarrow f'(t_1=2) = 4 \\ \text{در } t_2=-2 \Rightarrow f'(t_2=-2) = -4 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \delta(t^2-4) = \frac{\delta(t-t_1)}{|f'(t_1)|} + \frac{\delta(t-t_2)}{|f'(t_2)|} = \boxed{\frac{\delta(t-2)}{4} + \frac{\delta(t+2)}{4}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 . \delta(2t-1) . dt = ?$$

راجع به این مسأله فکر کنید و حل کنید و بعد با حل من مقایسه کنید.

تغییر متغیر می‌دهیم

$$2t-1 = u \Rightarrow 2dt = du \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 . \delta(2t-1) . dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u+1}{2}\right)^2 . \delta(u) . \frac{du}{2}$$

$$t = \frac{u+1}{2} \qquad dt = \frac{du}{2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(u+1)^2}{8} . \delta(u) . du = \boxed{\frac{1}{8}}$$