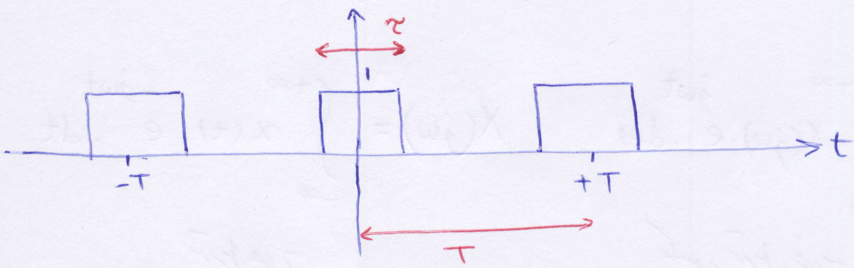
سه‌شنبه ۹۹.۲.۲۳

فصل چهارم: تبدیل فوریه



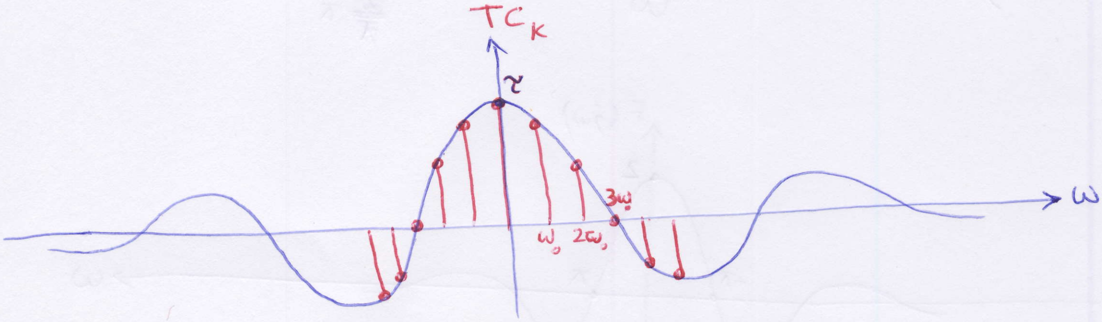
$d = \frac{\tau}{T}$ $\qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

می‌دانیم که اگر $T \to \infty$ میل کند، این سیگنال یک پالس تکی خواهد بود.

$$\Rightarrow C_k = d \operatorname{sinc}(kd) = \frac{\tau}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\tau}{T}\right)$$

$$\Rightarrow T C_k = \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{k\tau}{T}\right) = \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau (k\omega_0)}{2\pi}\right) = \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)\Bigg|_{\omega = k\omega_0}$$

می‌بینیم که تابع فوق، مستقل از T و ω_0 است. یعنی مستقل از پریود تابع است و فقط بستگی دارد که از این تابع در چه نقاطی نمونه‌برداری می‌کنیم. اگر T کوچک باشد، ω_0 بزرگ خواهد بود و اگر T بزرگ باشد، ω_0 کوچک خواهد بود.



اگر $T \to \infty$ میل کند، ω_0 به سمت صفر میل می‌کند.

page 2

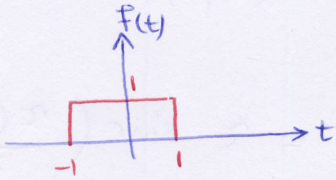
$x(t)$ سری فوریه تابع متناوب $\Rightarrow \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot e^{+jn\omega_0 t} \qquad C_n = \frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}\cdot dt$

$x(t)$ تبدیل فوریه تابع غیرمتناوب $\Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\cdot e^{j\omega t}\cdot d\omega \qquad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt$

عکس تبدیل فوریه   تبدیل فوریه

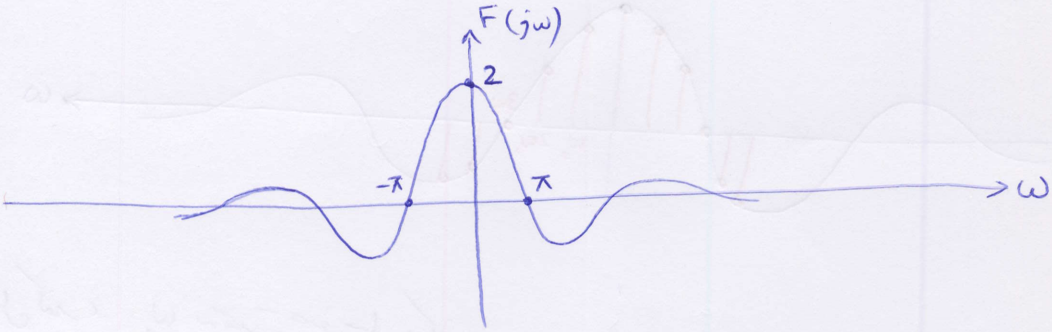
مثال: تبدیل فوریه تابع زیر را محاسبه کنید:

$f(t) = \pi(t) = \mathrm{rect}\,(t)$



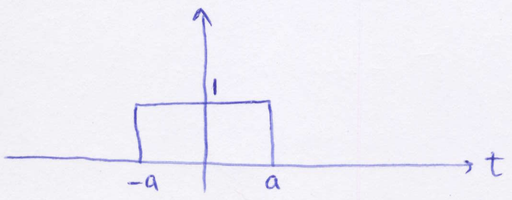
$$\Rightarrow F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt = \int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}\cdot dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-1}^{+1} = \frac{e^{-j\omega} - e^{+j\omega}}{-j\omega}$$

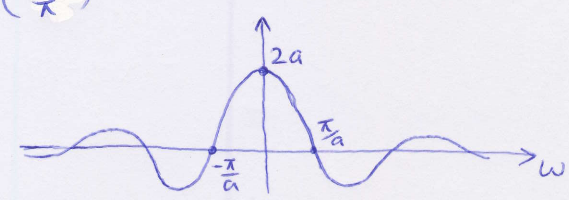
$$\Rightarrow F(j\omega) = \frac{2\left(e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right)}{2j\omega} = \frac{2\sin(\omega)}{\omega} = \frac{2\sin\left(\frac{\omega}{\pi}\pi\right)}{\frac{\omega}{\pi}\pi} = 2\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$



$f(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2a}\right) \quad \Rightarrow \quad F(j\omega) = \frac{2\sin(a\omega)}{\omega} = \frac{2\sin\left(\frac{a\omega}{\pi}\pi\right)}{\frac{\omega}{\pi}\pi} = \frac{2a\sin\left(\frac{a\omega}{\pi}\pi\right)}{\frac{a\omega}{\pi}\pi}$

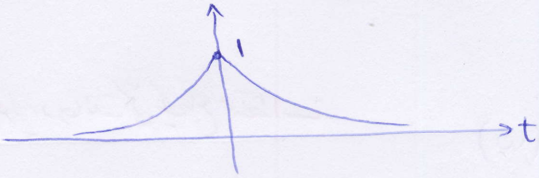
$= 2a\,\mathrm{sinc}\left(\frac{a\omega}{\pi}\right)$





مثال:

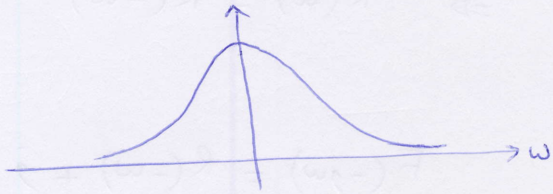
$$f(t) = e^{-\alpha|t|}$$



$$\Rightarrow F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

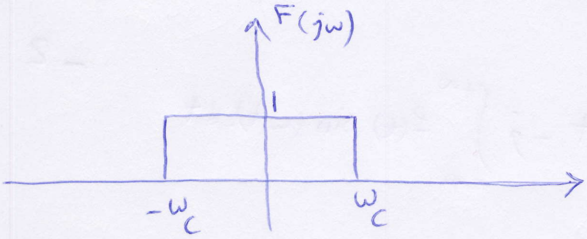
$$\Rightarrow F(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-j\omega)t} \cdot dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} \cdot dt = \left.\frac{e^{(\alpha-j\omega)t}}{(\alpha-j\omega)}\right]_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{-(\alpha+j\omega)}\right]_{0}^{\infty}$$

$$\Rightarrow F(j\omega) = \frac{1}{\alpha-j\omega} + \frac{1}{\alpha+j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}.$$



و حالا مثال از عکس تبدیل فوریه:

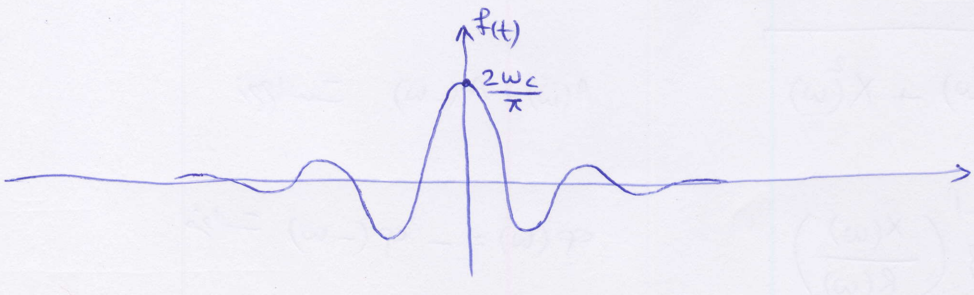
$$F(j\omega) = rect\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \Rightarrow f(t) = ?$$



$$\Rightarrow f(t) = ?$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \cdot e^{+j\omega t} \cdot d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{+\omega_c} e^{j\omega t} \cdot d\omega = \left.\frac{e^{j\omega t}}{2\pi j t}\right]_{-\omega_c}^{\omega_c}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{2\left(e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}\right)}{2jt\pi} = \frac{2\sin(\omega_c t)}{\pi t} = \frac{2\omega_c}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}t\right)$$



خواص تبدیل فوریه :

۱- تبدیل فوریه در حالت کلی یک تابع مختلط است.

$$F(j\omega) = R(\omega) + j\,X(\omega)$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \left[\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)\right] \cdot dt$$

$$\Rightarrow F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \cos \omega t \cdot dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \sin(\omega t) \cdot dt$$

زوج نسبت به ω — فرد نسبت به ω

$$\Rightarrow \quad R(\omega) = R(-\omega) \qquad X(-\omega) = -X(\omega)$$

$$F(-j\omega) = R(-\omega) + j\,X(-\omega) = R(\omega) - j\,X(\omega)$$

$$F^*(j\omega) = R(\omega) - j\,X(\omega) \qquad \Rightarrow \quad F^*(j\omega) = F(-j\omega)$$

2-

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) \cdot dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \sin(\omega t) \cdot dt$$

اگر $f(t)$ زوج $\Rightarrow$ $F(j\omega)$ حقیقی خالص

اگر $f(t)$ فرد $\Rightarrow$ $F(j\omega)$ موهومی خالص

3-

$$F(j\omega) = R(\omega) + j X(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \qquad A(\omega) = A(-\omega) \text{ زوج است}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right) \qquad \varphi(\omega) = -\varphi(-\omega) \text{ فرد است}$$