

Subject:

جلد ۶

Year. | f: Month. v Date. | ۱۸ ()

موضوع: قضیه اصل و روش بای تقسیم و غلبه

$$T_1 = C_1$$

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + C_2 n^k \quad \text{قضیه:}$$

$$k < \log_b a \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

$$k = \log_b a \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$$

$$k > \log_b a \rightarrow T(n) = \Theta(n^k)$$

تقسیم و غلبه

اندازه مسئله اصلی n

1 divide - مسئله را به a مسئله با اندازه $\frac{n}{b}$ تقسیم می کند

2 conquer - هر کدام از زیر مسئله ها را با استفاده از تقسیم و غلبه به صورت بازگشتی حل می کند $aT(\frac{n}{b})$

3 combine - مسئله اصلی را با استفاده از ترکیب زیر مسئله ها حل می کند $f(n)$

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

مثال ۱) آرایه A شامل n عدد داده شده است. هدف: عضو بیشینه A را پیدا کنید.

۱- آرایه را به دو زیر آرایه A_1 و A_2 تقسیم کنیم.

۲- عضو بیشینه در A_1 و A_2 را به صورت بازگشتی پیدا کنید (ماکزیمم m_1 و m_2)

۳- m_1 و m_2 را مقایسه و مقدار بیشینه را برگردانیم

$$O(n) \quad \begin{cases} T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \\ T(2) = 1 \end{cases}$$

تعداد مقایسه ها:
 فرض n توان ۲ است

تعداد مقایسه ها = $n-1$

استقرا: پایه $n=2 \rightarrow$ تعداد مقایسه ها $2-1=1$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

$$2\left[\frac{n}{2} - 1\right] + 1 = n - 1$$

مثال ۲) آرایه A داده شده است (شامل n عدد). مقدار کمینه و بیشینه A را پیدا کنید.

روش تقسیم و غلبه

۱- آرایه A را به دو کایس A_1 و A_2 با دو اندازه n برابر تقسیم کنید

۲- مقدار کمینه و بیشینه در A_1 و A_2 را به طور بازگشتی محاسب کنید $[min1, min2]$ و $[max1, max2]$

$$min = \min[min1, min2] \quad \text{و} \quad max = \max[max1, max2]$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 2$$

$$T(2) = 1$$

رغم n خوان از ۲ است

$$T(n) = \frac{3n}{2} - 2$$

اثبات با استرا

$$T(2) = \frac{3 \times 2}{2} - 2 = 1$$

طالت با به $n=2$

$$T(n) = 2 \left[\frac{3n}{2} - 2 \right] + 2$$

رغم بران کمتر از n برتر است

$$= \frac{3n}{2} - 2$$

مثله ۳) ضرب اعداد: آرایه A و B هر کدام شامل n رقم که ختال دهنده یک عدد n رقمی هستند مثال دهنده یک عدد n رقمی هستند داده شده است. $A \times B$ را محاسبه کنید.

$$n=2 \quad A \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \quad B \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$25 \times 42$$

برای نمایش اعداد بزرگ استفاده می شود → ضرب

* ضرب ۲ عدد n رقمی: حداکثر $2n$ رقم

* جمع ۲ عدد n رقمی: حداکثر $n+1$ رقم

$$\begin{array}{r} 258 \\ + 425 \\ \hline 683 \end{array}$$

* جمع ۲ عدد n رقمی در چه زمانی انجام می شود؟ $O(n)$ \rightarrow carry: 1

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 42 \\ \hline 50 \\ + 1000 \\ \hline 1050 \end{array}$$

carry: 1 \rightarrow 2

$$\times \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

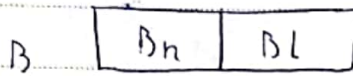
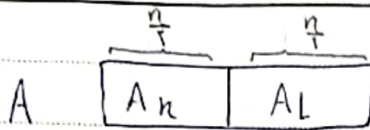
* زمان اجرای ضرب ۲ عدد n رقمی؟ $O(n^2)$

n جمع
 $O(n)$ هر جمع
 $O(n^2)$ لک

$O(n) = \left. \begin{array}{l} \text{هر ضرب} \\ n \text{ ضرب} \end{array} \right\} O(n^2)$

لک الگوریتم $O(n^2)$

روش تقسیم در حل:



$$A = A_n \times 10^{\frac{n}{2}} + A_L \quad B = B_n \times 10^{\frac{n}{2}} + B_L$$

$$A \times B = A_n B_n \times 10^n + A_L B_n \times 10^{\frac{n}{2}} + A_n B_L \times 10^{\frac{n}{2}} + A_L B_L \quad *$$

۱- A را به A_n و A_L و B را به B_n و B_L تقسیم کنید.

۲- مقدار $A_n B_n$ و $A_L B_L$ و $A_n B_L$ و $A_L B_n$ را به صورت بازگشتی حساب کنید $\leftarrow fT\left(\frac{n}{2}\right)$

۳- $A \times B$ را با استفاده از فرمول \times حساب کنید $\leftarrow o(n)$

$$T(n) = fT\left(\frac{n}{2}\right) + o(n)$$

$$T(n) = o(n^2)$$

ضرب را با احتساب

ایده اصلی: اگر $(A_n + A_L)(B_n + B_L)$ را حساب کنیم $\overbrace{A_n B_n}^{P_1}$ و $\overbrace{A_L B_L}^{P_2}$ را هم حساب کنیم

می توانیم $A_n B_L + A_L B_n$ را حساب کنیم.

$$= P_1 - P_2 - P_2 \quad * * *$$

$$= (A_n + A_L)(B_n + B_L) - A_L B_L - A_n B_n = A_n B_L + A_L B_n$$

۱- A و B را به A_n و A_L و B_n و B_L تقسیم کنید.

۱.۵- $(A_n + A_L)$ و $(B_n + B_L)$ را حساب کنید $\leftarrow o(n)$

۲- $A_n B_n$ و $A_L B_L$ و $(A_n + A_L)(B_n + B_L)$ به طور بازگشتی حساب کنید $\leftarrow fT\left(\frac{n}{2}\right)$

۳- $A \times B$ را استفاده از * * * صاحب کنید $O(n)$

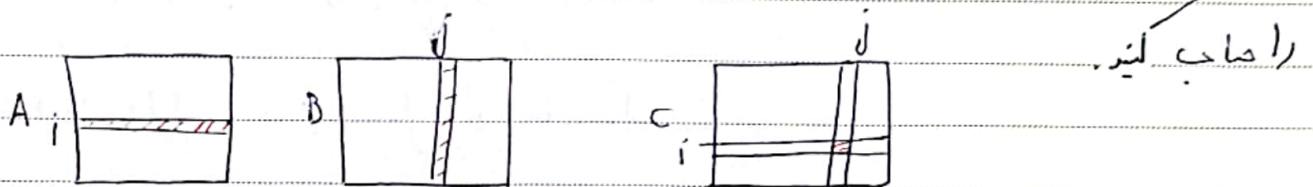
$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + O(n)$$

$$T(n) = n^{\log_3 3} = n^{1.8849}$$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_3 3}) = O(n^{\log_3 3})$$

* اگر $A_n + B_n$ دما داریم با $\frac{n}{3} + 1$ شد اول رتم آورد در ابتدا ضرب کنیم بین اول $\frac{n}{3}$ را ضرب کنیم و جبهه n را با نیم آل بدتم را هم ضرب کنیم.

مسئله ۴) ضرب ماتریس ها: دو ماتریس $A_{n \times n}$ و $B_{n \times n}$ داده شده است ماتریس $C = A \times B$



for $i: 1 \rightarrow n$

for $j: 1 \rightarrow n$

for $k: 1 \rightarrow n$

$$C[i][j] = A[i][k] \times B[k][j]$$

زمان: $O(n^3)$

Subject:

Algebra

Year: 1402 Month: V Date: 18 ()

روش تقسیم و حل:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A_{11} & A_{1r} \\ \hline A_{r1} & A_{rr} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline B_{11} & B_{1r} \\ \hline B_{r1} & B_{rr} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline A_{11} \times B_{11} & \\ \hline A_{11} \times B_{r1} & \\ \hline \end{array}$$

$$T(n) = 1 T\left(\frac{n}{r}\right) + O(n^r)$$

$$T(n) = O(n^{1 \cdot \log_r n}) = O(n^r)$$

روش استرassen:

$$P = (A_{11} + A_{rr})(B_{11} + B_{rr})$$

$$Q = (A_{r1} + A_{rr})B_{11}$$

$$R = A_{11}(B_{1r} - B_{rr})$$

$$S = A_{rr}(B_{r1} - B_{11})$$

$$C = \begin{bmatrix} P+S-T+V & R+T \\ \boxed{Q+S} & P-Q+R+U \end{bmatrix}$$

$$T = (A_{11} + A_{1r})B_{rr}$$

$$U = (A_{r1} - A_{11})(B_{11} + B_{1r})$$

$$V = (A_{1r} - A_{rr})(B_{r1} + B_{rr})$$

$$T(n) = 7 T\left(\frac{n}{r}\right) + O(n^r)$$

$$T(n) = O(n^{1 \cdot \log_r 7}) = O(n^{2.81})$$