

جبر خطی

گروه مؤلفان:

دکتر محمدحسن بیژنزاده، دکتر شهریار
فرهمندراد، دکتر چاپچی، دکتر احمد خاکساری،
دکتر مهدی صحبتخواه، خانم دکتر خدیجه
احمدی آملی، فلکی، دکتر خسرو پور

ویراستاران علمی
دکتر محمدحسن بیژنزاده و دکتر شهریار
فرهمندراد



Www.iepnu.com

١٣٨٩



فهرست مطالب

	فصل اول	دستگاه‌های معادلات خطی
۱	۱-۱	متریس‌ها و دستگاه‌های معادلات خطی
۱۱.....	۲-۱	تمرین
۱۳.....	۳-۱	روش حذفی گاوس - جردن
۱۸.....	۴-۱	روش حذفی گاوس - جردن
۱۹.....	۵-۱	دستگاه‌های همگن معادلات خطی
۲۶.....	۶-۱	مجموعه‌ی تمرین‌ها
۲۷.....	۷-۱	Curve Fitting، شبکه‌های الکترونیکی، و جریان ترافیک
۳۶.....	۸-۱	تحلیل شبکه الکترونیکی
۳۹.....	۹-۱	جریان ترافیک
۴۲.....	۱۰-۱	مجموعه تمرینات
۴۶.....	۱۱-۱	تمرین‌های دوره‌ای فصل اول
۵۰.....		

ج



۵۶

فصل دوم ماتریس‌ها

۱-۲	جمع، ضرب عددی، و ضرب ماتریس‌ها	۵۶
۲-۲	جمع ماتریس‌ها	۵۸
۳-۲	ضرب اسکالار (عددی) ماتریس‌ها	۵۸
۴-۲	قرینه‌سازی و تفریق	۵۹
۵-۲	ضرب ماتریس‌ها	۵۹
۶-۲	اندازه ماتریس حاصل ضرب	۶۲
۷-۲	علامت‌گذاری ماتریس و دستگاه معادلات	۶۴
۸-۲	ضرب سریع ماتریس	۶۵
۹-۲	تمرین‌ها	۶۷
۱۰-۲	ویژگی‌های اعمال ماتریس‌ها	۷۱
۱۱-۲	توان ماتریس‌ها	۷۷
۱۲-۲	تمرینات	۷۸
۱۳-۲	ماتریس‌های متقارن و مجموعه‌ای در باستان‌شناسی	۸۴
۱۴-۲	ماتریس‌ها با درایه‌های اعداد مختلط	۸۹
	سری‌ها و مجموعه‌ها در باستان‌شناسی	۹۱
۱۶-۲	تمرینات	۹۴
۱۷-۲	ماتریس معکوس و رمز نویسی	۹۹
۱۸-۲	تمرینات	۱۰۹
۱۹-۲	مدل ورودی - خروجی لینتیف در اقتصاد	۱۱۵
۲۰-۲	نکته محاسباتی	۱۱۹
۲۱-۲	تمرینات	۱۲۰
۲۲-۲	جنبیش‌های آماری و رئتیکی - زنجیره مارکوف	۱۲۲
۲۳-۲	تمرینات	۱۳۱
۲۴-۲	یک مدل ارتباطی و ارتباطات گروهی در جامعه	۱۳۵
۲۵-۲	تمرین‌های دوره‌ای فصل دوم	۱۵۱



<p>۱۵۶</p> <p>۱۵۶ مقدمه‌ای بر دترمینان‌ها ۱۶۷ خواص دترمینان‌ها ۱۷۶ ارزیابی عددی یک دترمینان ۱۸۱ دترمینان‌ها، معکوس ماتریس و دستگاه معادلات خطی</p>	<p>فصل سوم دترمینان‌ها ۱-۳ ۲-۳ ۳-۳ ۴-۳</p>
<p>۱۹۴</p> <p>۱۹۴ مقدمه بر بردارها ۲۰۵ حاصل ضرب نقطه‌ای، نرم، زاویه و فاصله ۲۱۶ تمرین ۲۱۸ مقدمه‌ای بر نگاشت‌های خطی ۲۲۷ نگاشت‌های ماتریسی، گرافیک‌های کامپیوتري و فراکتال‌ها ۲۴۳ تمرینات</p>	<p>فصل چهارم فضای برداری \mathbb{R}^n ۱-۴ ۲-۴ ۳-۴ ۴-۴ ۵-۴ ۶-۴</p>
<p>۲۵۱</p> <p>۲۵۱ فضاهای برداری ۲۵۳ فضاهای برداری ماتریس‌ها ۲۵۴ فضاهای برداری تابع‌ها ۲۵۶ فضای برداری مختلط \mathbb{C}^n ۲۵۸ زیرفضاهای ۲۶۷ ترکیبات خطی بردارها ۲۸۰ استقلال و وابستگی خطی ۲۸۹ پایه و بعد ۲۹۷ بعد برخی فضاهای ۲۹۹ رتبه ماتریس‌ها ۳۰۶ بردارهای متعامد و تصاویر ۳۱۰ تصویر یک بردار روی بردار دیگر ۳۱۲ قضیه فرآیند گرام-اشمیت یک متعامدسازی</p>	<p>فصل پنجم فضاهای برداری عمومی ۱-۵ ۲-۵ ۳-۵ ۴-۵ ۵-۵ ۶-۵ ۷-۵ ۸-۵ ۹-۵ ۱۰-۵ ۱۱-۵ ۱۲-۵ ۱۳-۵</p>



۳۱۴	تصویر یک بردار روی یک زیرفضا	۱۴-۵
۳۱۸	فاصله یک نقطه از یک زیرفضا	۱۵-۵
۳۲۰	ماتریس‌های متعامد	۱۶-۵
۳۲۹	مسئله‌های مختلفه فصل پنج	۱۷-۵

۳۳۴	مقادیر ویژه و بردارهای ویژه	فصل ششم
۳۳۸	بررسی مقادیر ویژه حقیقی و بردارهای ویژه ماتریس‌های 2×2	۱-۶
۳۴۰	بررسی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس‌های 3×3	۲-۶
۳۴۹	مقادیر ویژه مختلط	۳-۶
۳۵۱	قسمت‌های حقیقی و موهومی بردارها	۴-۶
۳۵۲	مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریسی حقیقی که روی \mathbb{C}^n عمل می‌کند	۵-۶
۳۵۵	قضیه‌گرشگورین	۶-۶
۳۵۸	نکاتی در مورد مقادیر ویژه و بردارهای ویژه	۷-۶
۳۶۹	قضیه کیلی-هامیلتون	۸-۶
۳۷۱	محاسبه‌ی $A^k X$	۹-۶
۳۷۲	جمعیت‌شناسی	۱۰-۶
۳۷۵	معادلات تفاضلی	۱۱-۶
۳۸۲	قطری کردن ماتریس‌ها	۱۲-۶
۳۸۴	کاربرد قطری کردن ماتریس‌ها	۱۳-۶
۳۸۵	قطری‌سازی متعامد	۱۴-۶
۳۸۶	فرم‌های درجه دوم	۱۵-۶
۳۸۶	دوران محورهای مختصات	۱۶-۶
۳۸۷	تعريف فرم‌های درجه دوم	۱۷-۶
۳۸۷	شناخت مقاطع مخروطی	۱۸-۶

۳۹۴	نگاشت‌های خطی	فصل هفتم
۳۹۴	نگاشت‌های خطی، هسته و برد	۱-۷
۴۱۱	نگاشت‌ها و دستگاه معادلات خطی	۲-۷



۴۱۲	معادلات همگن	۳-۷
۴۱۳	معادلات ناهمگن	۴-۷
۴۱۶	چند دستگاه	۵-۷
۴۲۲	بردار مختصات	۶-۷
۴۲۵	تغییر پایه	۷-۷
۴۲۸	یکریختی ها	۸-۷
۴۳۲	نمایش ماتریسی نگاشتهای خطی	۹-۷
۴۳۷	اهمیت نمایش ماتریسی	۱۰-۷
۴۴۰	ارتباط بین نمایش های ماتریسی	۱۱-۷

فصل هشتم		فضاهای ضرب داخلی	
	۴۵۲	فضاهای ضرب داخلی	۱-۸
	۴۵۶	نرم یک بردار	۲-۸
	۴۵۷	زوایه	۳-۸
	۴۵۸	بردارهای متعامد	۴-۸
	۴۵۸	فاصله	۵-۸
	۴۶۵	اتحاد قطبی B	۶-۸
	۴۶۵	هندرسه ناقلیدسی و نسبیت خاص	۷-۸
	۴۶۸	نسبیت خاص	۸-۸
	۴۷۵	تقریب توابع و تئوری کدنگاری	۹-۸
	۴۷۸	تقریب های فوریه	۱۰-۸
	۴۸۰	نظریه کدنگاری	۱۱-۸
	۴۸۴	منحنی کمترین مربعات	۱۲-۸
	۴۸۸	منحنی های کمترین مربعات	۱۳-۸
	۵۰۱	تمرین های دوره ای فصل ۸	۱۴-۸
	۵۰۳	مرجع ها	



به نام خدا

پیشگفتار

ویژگی‌های کتاب. در این کتاب ریاضیات، محاسبات و کاربردها به طریقی انعطاف‌پذیر با هم درآمیخته است. هم چنان که قبل‌گفته شد، در عین حال که جبرخطی درسی مجرد بوده و مفاهیم آن در نهایت به گونه‌ای محض ارائه می‌گردد، هیچ مبحثی بدون کاربرد رها نشده است. اصولاً، هیچ بخشی از ریاضیات امروزه به لحاظ فلسفه آموزشی نباید بدون کاربرد در دانشگاه‌ها، و مدارس ارائه گردد. دانشجویان این درس کاربردهای آن را در محیطی طبیعی ملاحظه خواهند کرد. راهبرد کار از این قرار است که ابتدا ریاضیات مربوطه را توسعه داده و سپس کاربردهای آن ارائه می‌گردد. با این حال مدرسین این درس می‌توانند به منظور انگیزه‌بخشی به دانشجویان ابتدا اشاره‌ای به کاربردهای هر مبحث کرده و سپس شروع به مفهوم‌سازی و توسعه درس نمایند. از نظر آموزشی و تاریخی، ریاضیات از طریق تعامل و کار روی کاربردها توسعه یافته است.

موضوعات کتاب شامل مباحث کلاسیک و رسمی جبرخطی است که در دانشگاه‌های ایران و دانشگاه‌های معتبر جهان تدریس می‌گردد. از دستگاه‌های معادلات خطی گرفته، حساب ماتریس‌ها و دترمینان‌ها تا فضاهای برداری ملموس (\mathbb{R}^n) و مجرد و نگاشت‌های خطی و بالاخره بردارها و مقادیر ویژه را شامل می‌شود. بدین ترتیب این کتاب، که براساس کتاب مشهور گارت ویلیام [1] تألیف گردیده است، در هشت فصل به رشته تحریر درآمده است.

گروه مؤلفین پیش‌پیش از هر نظر و نقدی که همکاران گرامی و دانشجویان عزیز در خصوص این درس مباحث آن و نحوه ارائه مطالب داشته باشند استقبال می‌نمایند.

گروه مؤلفان جبرخطی
اعضای هیأت علمی دانشگاه پیام نور

ح



هدف‌های رفتاری فصل یک

دانشجو پس از پایان این فصل باید بتواند

- روش حذفی گاوس - جردن را در حل دستگاه معادلات خطی بكار گیرد.
- عملیات سطحی مقدماتی را درک کرده و تطابق مفهومی آن را با تبدیلات مقدماتی روی یک دستگاه معادلات بشناسد.
- مفهوم دستگاه معادلات خطی همگن را درک کرده و تعداد جواب‌های چنین دستگاهی را وقتی که تعداد متغیرها بیش از تعداد معادلات است بداند.
- کاربرد حل دستگاه معادلات خطی را در رسم نمودارها، شبکه‌های الکتریکی و جریان‌های ترافیکی بداند. در مواردی این چنین بتواند به مدل‌سازی دستگاه معادلات خطی براساس داده‌های مساله بپردازد.
- مساله‌های پایان هر بخش و پایان فصل را به راحتی حل کند.

ط



Www.iepnu.com

۹



فصل اول

دستگاه‌های معادلات خطی

۱-۱ ماتریس‌ها و دستگاه‌های معادلات خطی

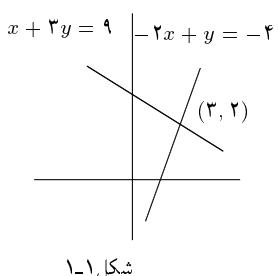
معادله‌ای به صورت $x + 3y = 9$ یک معادله خطی نامیده می‌شود. نمودار این معادله یک خط مستقیم در صفحه $y - x$ است. دستگاه دو معادله خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x + 3y = 9$$

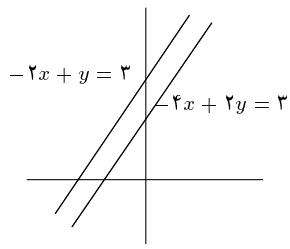
$$-2x + y = -4$$

به هر دو زوج x و y که در هر دو معادله صدق کنند یک جواب می‌گوئیم. با جایگزینی می‌توان دید که $x = 3$ ، $y = 2$ یک جواب این دستگاه می‌باشد. یک جواب برای یک چنین دستگاهی نقطه‌ای در صفحه است که از محل تلاقی دو نمودار معادله به وجود می‌آید. مثال‌های زیر سه حالتی را که ممکن است برای چنین دستگاه‌هایی از معادلات رخ دهد، نمایش می‌دهد. این حالات عبارتند از: زمانی که یک جواب منحصر به فرد، هیچ جواب، و یا تعداد زیادی جواب وجود دارند.

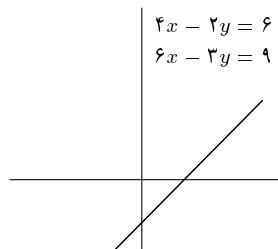




شکل ۱-۱



شکل ۲-۱



شکل ۳-۱

جواب منحصر به فرد

$$x + 3y = 9$$

$$-2x + y = -4$$

خطوط در $(3, 2)$ یکدیگر را قطع می‌کنند.

جواب منحصر به فرد، $x = 3$ و $y = 2$ است.

هیچ جواب

$$-2x + y = 3$$

$$-4x + 2y = 2$$

هر دو معادله دارای یک نمودارند. خطوط موازی‌اند.

هر نقطه روی نمودار یک جواب نقطه اشتراک ندارند.

چند جواب

$$4x - 2y = 6$$

$$6x - 3y = 9$$

تعداد جواب‌ها زیاد است.

هیچ جواب وجود ندارد.

هدف اصلی مان در این فصل بررسی دستگاه‌های بزرگتری از معادلات خطی است.

یک معادله‌ی خطی از n متغیر $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ به فرم

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

می‌باشد که در آن ضرایب a_1, a_2, \dots, a_n و b اعداد حقیقی‌اند. مثال زیر نمونه‌ای از یک دستگاه از ۳ معادله‌ی خطی است.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$

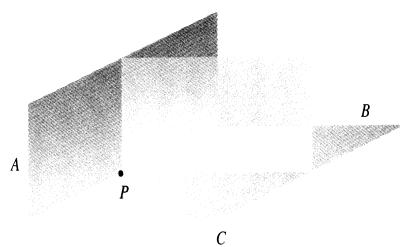
$$x_1 - x_2 - 2x_3 = -6$$

هر معادله‌ی خطی برحسب سه متغیر متناظر با صفحه‌ای در فضای سه بعدی است. جواب‌ها نیز نقاطی هستند که روی هر سه صفحه قرار دارند.

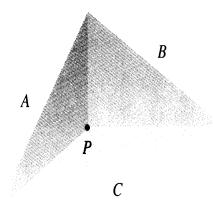
در مورد وجود جواب نیز همانند دستگاه دو معادله، سه حالت وجود دارد: یک جواب منحصر به فرد، تعداد زیادی جواب و یا هیچ جواب. در شکل ۴-۱ چند نوع از این حالات نمایش داده شده است.



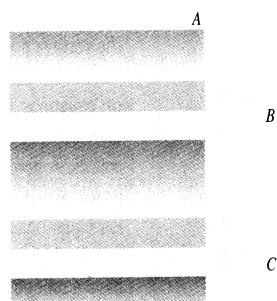
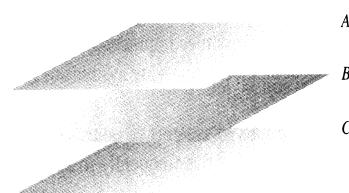
Unique solution



Three planes A , B , and C intersect at a single point P .
 P corresponds to a unique solution.

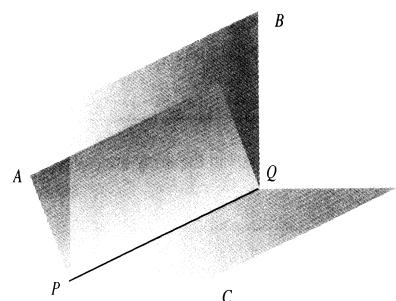


No solutions

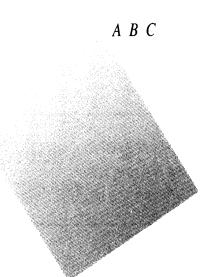


Planes A , B , and C have no points in common.
There are no solutions.

Many solutions



Three planes A , B , and C intersect
in a line PQ . Any point on a line
is a solution.



Three equations represent the same
plane. Any point on the plane is
a solution.

شکل ۱-۱

هرچه تعداد متغیرها افزوده شود، تعبیر هندسی چنین دستگاهی از معادلات پیچیده‌تر خواهد شد. هر معادله نمایانگر یک فضا است که در فضای بزرگتری قرار دارد. جواب‌ها نیز نقاطی هستند که بر تمامی فضاهای نشانده شده قرار دارند. تعبیر هندسی‌ای برای تصور جواب‌ها عملاً وجود ندارد. برای همین به روش‌های



جبری متوسل می شویم. در بخش ۱-۳ روشی را برای حل دستگاههای معادلات خطی تحت عنوان روش حدزی گاوس - جردن معرفی خواهیم کرد.

در این بخش چگونگی کاربرد این روش را برای دستگاه‌های معادلاتی که تنها یک جواب دارند، خواهیم دید. دستگاه‌هایی که تنها یک جواب منحصر‌فرد دارند به کار می‌روند. بنابراین چنین دستگاه‌هایی توجه خاصی را می‌طلبند. اغلب به خاطر موقعیتی که یک دستگاه معادلات توصیف می‌کند، از پیش فرض می‌شود که یک دستگاه معادلات دارای یک جواب منحصر‌فرد است؛ برای مثال، خواهیم دید که در یک شبکه الکتریکی شدت جریان‌ها از طریق حل یک چنین دستگاه معادلات خطی پیدا می‌شوند. روش حدفی گاووس - جردن مرتباً با حذف متغیرها از معادلات درگیر می‌باشد. در بخش بعدی این روش را به دستگاه‌های معادلات خطی کلی تری توسعه خواهیم داد.

برای توصیف کردن دستگاههای معادلات خطی از آرایه‌های مستطیلی از اعداد به نام ماتریس استفاده خواهیم کرد.

۱-۱-۱ تعریف. یک ماتریس عبارت است از آرایه‌ای مستطیلی از اعداد. اعداد واقع در آرایه‌ها

درایه ماتریس، نامیده می شوند.

معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ نمایش می‌دهند. برای مثال به ماتریس‌های زیر توجه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

سطرها و ستون‌ها. ماتریس‌ها از سطرها و ستون‌های تشکیل شده‌اند. سطرها از بالای ماتریس و ستون‌ها از سمت جنب شماره‌گذاری می‌شوند. ماتریس زیر دارای دو سطر و سه ستون می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

سط، ها عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ \text{سطر ۱} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ \text{سطر ۲} \end{bmatrix}$$

ستون‌ها عبارتند از:

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{c} 2 \\ 7 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} 4 \\ 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} -3 \\ -1 \end{array} \right] \\ ١ سنتون & ٢ سنتون & ٣ سنتون \end{array}$$



زیرماتریس‌ها. یک زیرماتریس از یک ماتریس مفروض، یک آرایه به دست آمده از حذف سطرها و ستون‌های مشخصی از آن ماتریس می‌باشد. برای نمونه، ماتریس A در زیر را در نظر بگیرید. ماتریس‌های P, Q ، و R زیرماتریس‌های A هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

A ماتریس معمولی ; P ماتریس های علاوه بر معمولی ; Q ماتریس های معمولی ; R ماتریس های معمولی .

اندازه و نوع. اندازه‌ی یک ماتریس با مشخص کردن تعداد سطرها و ستون‌های ماتریس تعیین می‌شود. برای مثال، ماتریسی با دو سطر و سه ستون را یک ماتریس 3×2 می‌نامند؛ عدد اول تعداد سطرها و عدد دوم تعداد ستون‌ها را بیان می‌کند. زمانی که تعداد سطرها و تعداد ستون‌ها با هم برابر باشند، ماتریس را یک ماتریس مربعی می‌نامند. ماتریسی که تنها یک سطر دارد، ماتریس سطروی نامیده می‌شود. ماتریسی که تنها یک ستون داشته باشد یک ماتریس سطونی، نام دارد.

مثال: به ماتریس‌های زیر با اندازه‌ها و نوع‌های داده شده توجه کنید.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 1 & \times 4 \end{bmatrix}_{1 \times 4} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

ماتریس سطری ۴
ماتریس سمعکی ۳

مکان. مکان یک درایه در یک ماتریس با داشتن سطرو و ستونی که آن عنصر در آن قرارگرفته مشخص می‌شود. برای مثال ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

در سطر ۱، ستون ۲ قرار گرفته است. می‌گوئیم این درایه در مکان (۱، ۲) قرار دارد. درایه‌ای که در مکان (۲، ۳) قرار دارد، ۵ است. توجه کنید که بنایه قرارداد ابتدا سطrix که عنصر در آن قرار دارد را می‌آوریم و سپس ستون را.

ماتریس‌های همانی. یک ماتریس همانی، ماتریسی مربعی با قطر ۱ در مکان‌های $(1, 1)$, $(2, 2)$ و $(3, 3)$ و غیره و صفر در بقیه جاها می‌باشد. ماتریس $n \times n$ را با نماد I_n نشان می‌دهیم.



مثال. ماتریس‌های زیر همانی هستند.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اینک بحث روی دستگاه‌های معادلات خطی را ادامه می‌دهیم. از ماتریس‌ها برای توصیف دستگاه‌های معادلات خطی استفاده می‌کنیم. در رابطه با هر دستگاه معادلات خطی دو ماتریس مهم وجود دارند: ضرایب متغیرها تشکیل ماتریسی می‌دهد که آن را ماتریس ضرایب دستگاه می‌نامند. ضرایب، به همراه جملات ثابت، تشکیل ماتریسی به نام ماتریس افزوده دستگاه می‌دهد.

مثال. ماتریس ضرایب و ماتریس افزوده دستگاه معادلات خطی زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -6 \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \\ \text{ماتریس ضرایب} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix} \\ \text{ماتریس افزوده} \end{array}$$

توجه کنید که ماتریس ضرایب یک زیرماتریس از ماتریس افزوده است. ماتریس افزوده کاملاً دستگاه را توصیف می‌کند.

تبديلات مقدماتی ناميده می‌شوند می‌توانند یک دستگاه معادلات خطی را به دستگاه معادلات خطی دیگری با جواب يكسان تبدیل کنند. اين تبدیلات برای حل دستگاه‌های معادلات خطی با حذف متغیرها به کار برده می‌شوند. در عمل کار کردن بر حسب ماتریس‌هایی ساده‌تر است که با تبدیلات خطی معادل به نام اعمال سط्रی مقدماتی به دست می‌آیند. در هر مرحله نیازی به نوشتن متغیرهای x_1, x_2, x_3 نمی‌باشد. دستگاه‌های معادلات خطی اغلب با رایانه‌ها بر حسب چنین ماتریس‌هایی توصیف و انجام می‌پذیرند. این تبدیلات به شرح زیر می‌باشند.

تبديلات مقدماتی	اعمال سطري مقدماتي
۱. تعويض دو معادله	۱. تعويض دو سطر يك ماتریس
۲. ضرب دو طرف يك معادله در يك عدد	۲. ضرب درایه‌های یک سطر در یک عدد ثابت
ثابت ناصر	ناصر
۳. افزودن مضربی از يك معادله به معادله ديگر درایه‌های متاظر سطر ديگر	۳. افزودن مضربی از يك معادله به معادله ديگر



تبديلات مقدماتی جواب‌ها را حفظ می‌کنند زیرا ترتیب معادلات روی جواب اثر نمی‌گذارد، ضرب یک معادله در یک عدد ثابت ناصف، تغییری در یک تساوی ایجاد نمی‌کند، و جمع یک مقدار مساوی به طرفین یک تساوی نیز یک تساوی به دست می‌دهد.

دستگاه‌های معادلاتی که مربوط به تبدیلات مقدماتی می‌شوند، و لذا دارای جواب‌های یکسان هستند، دستگاه‌های هم‌ارز نامیده می‌شوند. نماد \approx را برای نشان دادن دستگاه‌های معادلات هم‌ارز به کار می‌بریم. در روش حذفی گاوس-جردن از تبدیلات مقدماتی برای حذف متغیرها استفاده می‌شود. از آنجا که هر دستگاه معادلات جدید دارای جواب یکسان با دستگاه اولیه می‌باشد، می‌توانیم این روش را به کار گیریم. روش حذفی گاوس-جردن را با به کار بردن معادلات و ماتریس متشابه در مثال زیر ملاحظه خواهیم کرد. خواننده می‌بایست به روش اصولی که در آن متغیرها در معادلات ستون چپ حذف می‌گردند، دقت کند. هم‌زمان ملاحظه شود که چگونه بر حسب ماتریس‌های ستون راست با ایجاد کردن صفر در مکان‌های معین انجام می‌گیرد و از آن به بعد از ماتریس به دست آمده استفاده می‌کنیم.

مثال. دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = -6$$

حل.



روش ماتریس متناسبه	روش معادله‌ای
ماتریس متناسبه:	دستگاه ابتدایی:
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix}$	$x_1 + x_2 + x_3 = 2$ $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$ $x_1 - x_2 - 2x_3 = -6$
صفر در ستون ۱ ایجاد کنید:	از معادلات دوم و سوم را حذف کنید:
$\approx R_2 + (-2)R_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix}$	$\approx x_1 + x_2 + x_3 = 2$ $Eq_2 + (-2)Eq_1 \quad x_1 - x_2 = -1$ $Eq_3 + (-1)Eq_1 \quad -2x_2 - 2x_3 = -8$
صفرهای مناسب دو ستون ۲ ایجاد کنید:	از معادلات اول و سوم را حذف کنید:
$\approx R_1 + (-1)R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix}$	$\approx x_1 + 2x_3 = 3$ $Eq_1 + (-1)Eq_2 \quad x_1 - x_2 = -1$ $Eq_3 + (2)Eq_2 \quad -5x_3 = -10$
عنصر (۳, ۳) را ۱ کنید:	ضریب x_3 در معادله‌ای سوم را ۱ کنید:
$\approx (-\frac{1}{5})Eq_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\approx x_1 + 2x_3 = 3$ $x_2 - x_3 = -1$ $(-\frac{1}{5})Eq_3 \quad x_3 = 2$
در ستون ۳ صفر ایجاد کنید:	از معادلات اول و دوم را حذف کنید:
$\approx R_1 + (-2)R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\approx x_1 = -1$ $Eq_1 + (-2)Eq_3 \quad x_2 = 1$ $Eq_2 + Eq_3 \quad x_2 = 2$
این ماتریس متناظر با دستگاه زیر است:	جواب عبارت است از:
$x_1 = -1$ $x_2 = 1$ $x_3 = 2$	$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$
جواب عبارت است از:	
$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$	

از نظر هندسی، هر یک از معادلات ابتدایی در این مثال نمایان‌گر یک صفحه در فضای سه-بعدی است.

این که یک جواب منحصر‌بفرد وجود دارد به این معناست که این سه صفحه در یک نقطه هم‌دیگر را قطع می‌کنند. جواب $(-1, 1, 2)$ مؤلفه‌های این نقطه‌ی مشترک را نشان می‌دهد. مثال دیگری از این روش می‌آوریم تا این روش را به خوبی یاد بگیرید.

مثال. دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید:

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12$$



$$2x_1 - x_2 + 5x_3 = 18$$

$$-x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -8$$

حل. با ماتریس افزوده شروع کنید و از اولین سطر برای ایجاد صفر در اولین ستون استفاده نمایید. (این کار متناظر با استفاده‌ی اولین معادله برای حذف x_1 از دومین و سومین معادلات می‌باشد).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 2 & -1 & 5 & 18 \\ -1 & 3 & -3 & -8 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

$$R_2 + (-2)R_1 \quad R_3 + R_1$$

سپس، سطر ۲ را در $\frac{1}{3}$ ضرب کنید تا عنصر (۳, ۲) را ۱ نماید. (این عمل متناظر با تبدیل ضریب x_2 در معادله‌ی دوم به ۱ است).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right]$$

$$(\frac{1}{2})R_2$$

در ستون دوم به صورت زیر صفر ایجاد کنید. (این عمل متناظر با به کارگیری معادله‌ی دوم برای حذف x_2 از معادلات اول و سوم است).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right]$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$R_1 + (-2)R_2$$

$$R_3 + (-1)R_2$$

سطر ۳ را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنید. (این عمل متناظر با تبدیل ضریب x_3 در معادله سوم به ۱ است).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$(\frac{1}{2})R_3$$

در آخر، در ستون سوم صفر ایجاد کنید. (این عمل متناظر با به کارگیری معادله سوم برای حذف x_3 از معادلات اول و دوم است).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$R_1 + (-2)R_3$$

$$R_2 + R_3$$



این ماتریس متناظر با دستگاه زیر است:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 3$$

جواب عبارت است از $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3$.

روش گاوس - جردن برای حل دستگاه معادلات خطی به کمک ماتریس‌ها با ایجاد کردن اعداد ۱ و ۰ در مکان‌های معینی از ماتریس‌ها درگیر است. این اعداد به یک روش اصولی ستون به ستون ایجاد می‌شوند. مثال زیر نشان می‌دهد که گاهی لازم است دو سطر را در مرحله‌ای، به منظور پیشروی در روش فوق، با هم عوض کرد.

مثال. دستگاه زیر را حل کنید:

$$4x_1 + 8x_2 - 12x_3 = 44$$

$$3x_1 + 6x_2 - 8x_3 = 32$$

$$-2x_1 - x_2 = -7$$

حل. با ماتریس افزوده شروع کرده و به صورت زیر پیش می‌رویم. (توجه شود که در ماتریس افزوده از صفر به عنوان ضریب متغیر x_3 در معادله سوم که وجود ندارد، استفاده می‌کنیم).

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & -12 & 44 \\ 3 & 6 & -8 & 32 \\ -2 & -1 & 0 & -7 \end{bmatrix} \underset{(\frac{1}{4})R1}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 3 & 6 & -8 & 32 \\ -2 & -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R2 + (-3)R1}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R3 + 2R1}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 15 \end{bmatrix}$$

در این مرحله به عنصری ناصرف در مکان (۲، ۲) نیاز داریم تا بتوانیم ادامه دهیم. برای به دست آوردن چنین عنصری، سطر دوم را با سطر سوم (یک سطر عقب‌تر) عوض کرده و سپس پیش می‌رویم.

$$R2 \longleftrightarrow R3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 3 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \underset{(\frac{1}{3})R2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$



$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_1 + (-2)R_2 \\ R_2 + 2R_3 \end{array} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

جواب عبارت است از: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$.

اکنون روش گاوس - جردن را برای حل یک دستگاه n معادله n مجهول که دارای یک جواب منحصر بفرد است، به طور خلاصه بیان می‌کنیم. ماتریس افزوده از یک ماتریس ضرایب A و یک ماتریس ستونی از جملات ثابت B بوجود می‌آید. از نماد $[A : B]$ برای نمایش این ماتریس استفاده می‌کنیم. از عملیات سطحی استفاده کنید تا به تدریج این ماتریس را ستون به ستون، به یک ماتریس به فرم $[I_n : X]$ تبدیل کنید، که در آن I_n ماتریس $n \times n$ همانی است.

$$[A : B] \approx \dots \approx [I_n : X]$$

این ماتریس آخری $[I_n : X]$ را فرم پلکانی تحویل یافته‌ی ماتریس افزوده ابتداً می‌نامند. ماتریس ضرایب دستگاه معادلات آخری I_n و X ماتریس ستونی جملات ثابت است. در نتیجه عناصر X جواب منحصر بفرد دستگاه هستند. ملاحظه کنید که در حین تبدیل $[B : A]$ به $[I_n : X]$ ، ماتریس A به I_n تغییر می‌کند. بنابراین

«اگر A ماتریس ضرایب یک دستگاه n معادله n مجهول باشد که دارای جواب منحصر بفرد است، آنگاه A با I_n هم‌ارز سطحی است.»

اگر به این روش $[A : B]$ به ماتریسی به شکل $[I_n : X]$ قابل تبدیل نباشد، آنگاه دستگاه معادلات یک جواب منحصر بفرد نخواهد داشت. در بخش بعدی درباره‌ی این چنین دستگاه‌هایی بیشتر صحبت خواهیم کرد.

دستگاه‌های بیشتر

کاربردهای مشخصی در رابطه با حل تعدادی از دستگاه معادلات خطی، که همگی دارای ماتریس مربع ضرایب یکسان A هستند وجود دارد. فرض کنید دستگاه‌ها عبارتند از:

$$[A : B_1], [A : B_2], \dots, [A : B_k].$$



جملات ثابت B_1, B_2, \dots, B_k ممکن است، برای مثال، داده‌های آزمایشی باشند، که می‌خواهیم بدانیم جواب‌هایی که ممکن است منجر به چنین نتیجه‌ی شده باشند، چیست؟ غالباً وضعیت ایجاب می‌کند که جواب‌ها منحصر‌فرد باشند. اگر برای هر دستگاه روش گاوس - جردن انجام شود و هر دستگاه به طور مستقل حل گردد، روند کار منجر به فرم‌های پلکانی تحویل یافته‌ای به صورت زیر خواهد شد:

$$[I_n : X_1], [I_n : X_2], \dots, [I_n : X_k]$$

و جواب‌ها X_1, X_2, \dots, X_k خواهند بود. به هر حال، مشابه تبدیل A به I_n برای هر دستگاه تکرار می‌گردد، این کار منجر به انجام تعداد زیادی کار تکراری غیرازوم می‌شود. دستگاه‌ها می‌توانند با یک ماتریس افزوده‌ی بزرگ به صورت $[A : B_1, B_2, \dots, B_k]$ نمایش داده شوند، و روش گاوس - جردن می‌تواند برای این یک ماتریس به کار گرفته شود. در این صورت خواهیم داشت:

$$[A : B_1, B_2, \dots, B_k] \approx \dots \approx [I_n : X_1, X_2, \dots, X_k]$$

که از آنجا جواب‌ها عبارت خواهند بود از: X_1, X_2, \dots, X_k .

مثال: سه دستگاه معادلات خطی زیر را، که تمامی آنها دارای یک ماتریس ضرایب هستند، حل کنید.

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = b_1$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = b_2$$

$$-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = b_3$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 11 \\ -4 & 2 & -11 \end{array} \right] \text{ و } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \end{array} \right] \text{ به ترتیب برابر با} \\ \left[\begin{array}{cc|c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \right] \end{array}$$

حل. ابتدا ماتریس افزوده بزرگی که هر سه دستگاه را مشخص می‌کند، بسازید و فرم پلکانی تحویل یافته را به صورت زیر به دست آورید.

$$\begin{array}{ccccccc} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 2 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 11 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & -11 & 2 & -4 \end{array} \right] & \approx & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 2 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & -1 \end{array} \right] \\ R2 + (-2)R1 & & \\ R3 + R1 & & \\ & \approx & \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right] \\ R1 + R2 & & \\ R3 + (-1)R2 & & \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc} & \approx & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ R_1 + (-1)R_3 & & \\ R_2 + 2R_3 & & \end{array}$$

جواب‌های سه دستگاه معادلات، در سه ستون فرم پلکانی تجویل یافته داده شده است. آنها عبارتند از:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 1$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2$$

در این بخش بحث خود را به دستگاه‌های n معادله‌ی خطی n مجهول، که یک جواب منحصر‌بفرد دارند محدود می‌کنیم. در بخش بعدی روش حذفی گاوس - جردن را به منظور راه دادن به دیگر دستگاه‌هایی که دارای یک جواب منحصر‌بفردن توسعه خواهیم داد. همچنین با این کار دستگاه‌هایی که دارای جواب‌های بسیار یا بدون جواب هستند نیز مشمول این روش خواهند شد.

تمرین

۱) اندازه ماتریس‌های زیر را به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \text{ ب) } \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ الف) }$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ د) } \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ ج) }$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ و) } \quad \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ ه) }$$

۲) درایه‌هایی که در مکان (۱, ۲)، (۲, ۱)، (۳, ۳)، (۱, ۵)، (۲, ۴) و (۳, ۲) در ماتریس زیر قرار

دارند را به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 9 & -1 & 0 & -5 \\ 4 & -7 & 0 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$



۳) عناصر $(2, 3)$, $(1, 2)$, $(3, 2)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(4, 4)$ و $(1, 3)$ از ماتریس زیر را به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ 9 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

۴) ماتریس همانی I_4 را بنویسید.

۵) ماتریس ضرایب و ماتریس افزوده‌ی هر یک از دستگاه‌های معادلات زیر را مشخص کنید.

(الف)

$$-3x_1 + 4x_2 = 7$$

$$-2x_1 - 5x_2 = -2$$

(ب)

$$6x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2$$

$$-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 5$$

$$3x_1 - x_2 + 6x_3 = 4$$

(ج)

$$2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -1$$

$$5x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5$$

$$6x_1 + x_2 = -7$$

(د)

$$-x_1 + x_2 = 3$$

$$3x_1 + 4x_2 = 5$$

$$2x_1 - 3x_2 = -1$$



(۵)

$$2x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 4$$

$$3x_1 + 2x_2 = 0$$

$$-x_1 - 2x_3 = -7$$

(۶)

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 5$$

۶) ماتریس‌های زیر را به عنوان ماتریس‌های افزوده‌ی دستگاه‌های معادلاتی درنظر بگیرید. هر یک از

دستگاه‌های معادلات متناظر را بنویسید:

$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	ب)	$\begin{bmatrix} 5 & 6 & -8 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$	الف)
$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ -1 & 9 & 5 & 4 \\ 9 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$	د)	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$	ج)
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	و)	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	ه)

۷) در تمرین‌های زیر یک ماتریس به همراه یک عمل سطیری مقدماتی داده شده است. ماتریس حاصل

را به دست آورید.

$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \\ 8 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$	$\underset{(\frac{1}{8})R_1}{\approx}$	الف)
$\begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 9 \\ 5 & -9 & 6 & 1 \end{bmatrix}$	$\underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\approx}$	ب)



$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 5 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow[R^2 + (-1)R^1]{R^3 + R^1} \text{(ج)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 3 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[R^1 + (-\frac{1}{3})R^2]{R^3 + 2R^2} \text{(د)}$$

۸) هر یک از اعمال سط्रی زیر را به عنوان مرحله‌ای برای رسیدن به فرم پلکانی تحویل یافته در نظر بگیرید. به چه دلیل اعمالی که به آن اشاره شده، انتخاب شده است؟ چه اهداف خاصی برحسب

دستگاه‌های معادلات خطی که توسط این ماتریس‌ها توصیف می‌شود، انجام گرفته است؟

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -4 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 0 & -3 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow[R^2 + 2R^1]{R^3 + (-\frac{1}{2})R^1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & 13 & 15 \\ 0 & 16 & -15 & -14 \end{array} \right] \text{(الف)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 9 & -6 \\ 0 & 4 & 7 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow[(\frac{1}{3})R^2]{R^3} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 7 & -8 \end{array} \right] \text{(ب)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow[R^2 \leftrightarrow R^3]{R^3} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array} \right] \text{(ج)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow[R^1 + (-2)R^2]{R^3 + 2R^2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -11 \end{array} \right] \text{(ج)}$$

۹) هر یک از اعمال سط्रی زیر را به عنوان مرحله‌ای برای رسیدن به فرم پلکانی تحویل یافته‌ی یک

ماتریس درنظر بگیرید. چرا این اعمال انتخاب شده‌اند؟

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[R^1 + (-1)R^2]{R^3 + R^1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \text{(الف)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & -8 \\ 5 & -7 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[R^1 \leftrightarrow R^2]{R^3} \left[\begin{array}{cccc} 4 & 3 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 5 & -7 & 1 & 2 \end{array} \right] \text{(ب)}$$



$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \underset{\left(\frac{1}{2} \right) R_3}{\approx} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right] \underset{\substack{R_1 + 2R_3 \\ R_2 + (-3)R_3}}{\approx} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(ج)} \\ \text{(د)} \end{array}$$

۱۰) دستگاه‌های معادلات زیر همگی دارای جواب‌های منحصر‌بفرد هستند. این دستگاه‌ها را با به کار بردن روش حذفی گاوس - جردن با ماتریس‌ها حل کنید.

$$3x_1 + 2x_2 = 4 \quad \text{(ب)}$$

$$x_1 - 2x_2 = -8 \quad \text{(الف)}$$

$$2x_1 + 2x_2 = 3$$

$$2x_1 - 3x_2 = -11$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 6$$

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9 \quad \text{(د)}$$

$$2x_2 - 2x_3 = -4 \quad \text{(ج)}$$

$$2x_1 + x_2 + 8x_3 = 11$$

$$x_2 - 2x_3 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 11$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 14 \quad \text{(و)}$$

$$2x_1 + 5x_2 + 8x_4 = 36 \quad \text{(ه)}$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 19$$

$$x_1 - x_2 = -4$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 11$$

$$-3x_1 - 6x_2 - 15x_3 = -3$$

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 19x_4 = 36 \quad \text{(ز)}$$

$$x_1 + \frac{5}{7}x_2 + \frac{9}{7}x_3 = \frac{1}{7} \quad \text{(ح)}$$

$$3x_2 + 4x_3 + 15x_4 = 28$$

$$-2x_1 - \frac{5}{7}x_2 - \frac{19}{7}x_3 = -2$$

$$x_1 - x_2 - x_3 - 6x_4 = -12$$

۱۱) در تمرین‌های زیر هر یک از دستگاه‌های معادلات خطی با جواب‌های منحصر‌بفرد، دارای ماتریس‌های



ضرایب یکسان می‌باشند. دستگاه‌ها را روش حذفی گاوس - جردن بر یک ماتریس افزوده بزرگ که هر یک از دستگاه‌ها را توصیف می‌کند، حل کنید.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{برای } \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = b_1 \\ 3x_1 + 5x_2 = b_2 \end{array} \quad \text{(الف)}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{برای } \begin{array}{l} x_1 + x_2 = b_1 \\ 4x_1 + 3x_2 = b_2 \end{array} \quad \text{(ب)}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \text{برای } \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = b_1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = b_2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = b_3 \end{array} \quad \text{(ج)}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{برای } \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = b_1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = b_2 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 = b_3 \end{array} \quad \text{(د)}$$

۲-۱ روش حذفی گاوس - جردن

در بخش قبل روش حذفی گاوس - جردن را برای حل دستگاه‌های n معادله در n مجهول که دارای یک جواب منحصر بفرد بودند، به کار بردیم. اکنون این روش را در حالت کلی تری به کار می‌گیریم. در این حالت تعداد معادلات می‌توانند متفاوت با تعداد متغیرها باشند و تعداد جواب‌ها نیز می‌توانند منحصر بفرد، زیاد، یا هیچ باشند. دوباره روشی را که در پیش می‌گیریم چنین خواهد بود که از ماتریس افزوده دستگاه داده شده شروع می‌کنیم و با انجام یک سری اعمال سطری مقدماتی که تبدیل به ماتریس ساده‌تر (فرم پلکانی تحویل یافته) خواهد شد، مستقیماً به جواب خواهیم رسید.

اکنون تعریف کلی فرم پلکانی تحویل یافته را می‌آوریم. خواننده ملاحظه خواهد کرد که فرم‌های پلکانی تحویل یافته که در بخش قبل مورد بحث قرار گرفت همگی با این تعریف مطابقت دارند.

۱-۲-۱ تعریف. یک ماتریس به فرم پلکانی تحویل یافته است هرگاه:

- (۱) هر سطری که کاملاً شامل صفر است در پایین ماتریس قرار گیرد.
- (۲) اولین عنصر ناصفر هر سطر دیگر برابر ۱ باشد. (این عنصر یک پیشرو ۱ نامیده می‌شود.)
- (۳) پیشرو ۱ هر سطر، در سمت راست پیشرو ۱ سطر قبلی قرار گیرد.
- (۴) تمام درایه‌های دیگر در ستونی که شامل پیشرو ۱ است، صفرند.



مثال. ماتریس‌های زیر به فرم پلکانی تحویل یافته هستند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال. ماتریس‌های زیر به فرم پلکانی تحویل یافته نیستند:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

اولین عنصر ناصلف در سطر ۲ برابر نیست.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پیش رو ۱ در سطر ۳ سمت راست پیش رو ۱ در سطر ۲ نیست.

عنصر ناصلف بالای پیش رو ۱ در سطر ۲

معمولًاً بسیاری از سری عملیات سطروی که می‌توانند برای تبدیل یک ماتریس داده شده به فرم پلکانی تحویل یافته به کار گرفته شوند، همگی به یک فرم پلکانی تحویل یافته یکسان منتج می‌گردند. به همین دلیل، می‌گوئیم که فرم پلکانی تحویل یافته یک ماتریس منحصر بفرد است. روش حذفی گاوس - جردن یک راه اصولی مهم (که یک الگوریتم نامیده می‌شود) برای رسیدن به فرم پلکانی تحویل یافته است. این کار قابل برنامه‌ریزی روی یک رایانه است. اکنون این روش را خلاصه کرده، سپس مثال‌هایی از اجرای آن می‌آوریم.

۳-۱ روش حذفی گاوس - جردن

۱) ماتریس افزوده‌ی دستگاه معادلات خطی را بنویسید.

۲) با به کار بردن عملیات سطروی مقدماتی فرم پلکانی تحویل یافته‌ی ماتریس افزوده را به دست آورید.

این کار با ایجاد کردن پیش رو های ۱ و سپس صفر در بالا و پایین هر پیش رو ۱، ستون به ستون با شروع

از اولین ستون قابل انجام است.



(۳) دستگاه معادلات متناظر با فرم پلکانی تحویل یافته را بنویسید. این دستگاه جواب را می‌دهد.
بر اهمیت ماهر شدن براین الگوریتم تأکید می‌کنیم، نه تنها به دست آوردن جواب صحیح مهم است بلکه روش بدست آوردن جواب نیز مهم است. برای مثال، بر کارایی این الگوریتم (تعداد جمع‌ها و ضرب‌های به کار رفته) و مقایسه‌ی آن با دیگر الگوریتم‌ها که می‌توانند برای حل دستگاه‌های معادلات خطی به کار گرفته شوند، علاقه‌مند خواهیم بود.

مثال. روش حذفی گاوس - جردن را برای یافتن فرم پلکانی تحویل یافته ماتریس زیر به کار برد.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 & 9 & 12 \\ 4 & 4 & -2 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

حل. مرحله ۱. اگر لازم است، سطرها را عوض کنید تا یک درایه‌ی ناصرف در بالای اولین ستون ناصرف به دست آید. این عنصر ناصرف پاشنه نامیده می‌شود.

$$R1 \xrightarrow{\approx} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

مرحله ۲. یک ۱ در مکان پاشنه با ضرب سطر پاشنه در $\frac{1}{3}$ ایجاد کنید.

$$(\frac{1}{3}) R1 \xrightarrow{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

مرحله ۳. در جاهای دیگر ستون پاشنه با جمع مضرب مناسبی از سطر پاشنه به سطرهای دیگر ماتریس صفر ایجاد کنید.

$$R3 + (-4)R1 \xrightarrow{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

مرحله ۴. سطر پاشنه و تمام سطرهای بالای آن را بپوشانید. مرحله ۱ و ۲ را برای زیرماتریس‌های باقیمانده تکرار کنید. مرحله‌ی ۳ را برای کل ماتریس تکرار کنید. تا جایی که به فرم پلکانی تحویل یافته برسید کار را



تکرار کنید.

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{array} \right] \\
 \text{اولین ستون ناصلفر زیرماتریس} \\
 \approx \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{array} \right] \\
 \approx \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -6 \end{array} \right] \\
 R^3 + (-2)R^2 \quad \approx \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{array} \right] \\
 R^1 + (-2)R^3 \quad R^2 + R^3
 \end{array}$$

این ماتریس فرم پلکانی تحویل یافته ماتریس داده شده است.

اکنون چگونگی به کارگیری این روش را برای حل دستگاه‌های معادلات متنوع شرح می‌دهیم. مثل زیر چگونگی حل یک دستگاه معادلات خطی که دارای تعداد زیادی جواب است را نشان می‌دهد. ابتدا فرم پلکانی تحویل یافته به دست می‌آید. سپس لازم است که فرم پلکانی تحویل یافته را برای بیان روشی از تعداد زیاد جواب تفسیر کنیم.

مثال. دستگاه معادلات زیر را، در صورت امکان، حل کنید.

$$3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 9$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7$$

$$3x_1 - 5x_2 - x_3 = 7$$

حل. با ماتریس افزوده شروع کرده و الگوریتم گاوس - جردن را پی می‌گیریم. دور پاشنه‌ها و پیشروهای ۱ دایره کشیده شده‌اند.

$$\left[\begin{array}{cccc} \boxed{3} & -3 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & 7 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & 7 \end{array} \right]$$



$$\begin{array}{lcl} \approx & \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{array} \right] & \approx \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ R_2 + (-2)R_1 & & R_1 + R_2 \\ R_3 + (-3)R_1 & & R_3 + 2R_2 \end{array}$$

به ماتریس پلکانی تحویل یافته رسیدیم. دستگاه معادلات متناظر عبارت است از:

$$x_1 + 3x_2 = 4$$

$$x_2 + 2x_3 = 1$$

مقادیر بسیاری برای x_1 , x_2 و x_3 وجود دارند که در این معادلات صدق کنند. این دستگاهی از معادلات است که جواب‌های بسیاری دارد. x_1 را متغیر پیش رو معادله‌ای اول می‌نامیم و x_2 و x_3 متغیر پیش رو معادله دوم می‌باشد. برای بیان این جواب‌های بسیار، متغیرهای پیش رو در هر معادله را برحسب متغیرهای باقیمانده می‌نویسیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$x_1 = -3x_2 + 4$$

$$x_2 = -2x_3 + 1$$

فرض می‌کنیم x_3 مقدار دلخواه r باشد. جواب عمومی دستگاه عبارت است از:

$$x_1 = -3r + 4, \quad x_2 = -2r + 1, \quad x_3 = r$$

باتغییر r در مجموعه‌ی اعداد حقیقی جواب‌های بسیاری به دست می‌آید. r را یک پارامتر می‌نامیم. با دادن مقادیر مختلف به r جواب‌های مشخصی به دست می‌آید. برای مثال:

$$\text{بهارای ۱}, x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1 \text{ داریم}$$

$$\text{بهارای ۲}, x_1 = 10, x_2 = 5, x_3 = -2 \text{ داریم}$$

مثال ۳. دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$2x_1 - 4x_2 + 12x_3 - 10x_4 = 58$$

$$-x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -14$$

$$2x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 6x_4 = 44$$



حل. با ماتریس افزوده شروع می‌کنیم. داریم:

$$\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{ccccc} 2 & -4 & 12 & -10 & 58 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & -14 \\ 2 & -4 & 9 & -6 & 44 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 6 & -5 & 29 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & -14 \\ 2 & -4 & 9 & -6 & 44 \end{array} \right] \\
 \approx R_2 + R_1 \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 6 & -5 & 29 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -14 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 6 & -5 & 29 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -14 \end{array} \right] \\
 R_3 + (-2)R_1 \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \approx R_1 + (-1)R_3 \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\
 R_3 + (3)R_2 \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \quad R_2 + R_3 \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}$$

به ماتریس پلکانی تحویل یافته رسیدیم. دستگاه معادلات متناظر عبارت است از:

$$x_1 - 2x_2 = -2$$

$$x_2 = 6$$

$$x_4 = 1$$

تعداد جواب‌ها بسیار زیاد است. بار دیگر، متغیرهای پیشرو را بر حسب متغیرهای باقیمانده می‌نویسیم. داریم

$$x_1 = 2x_2 - 2, \quad x_2 = 6, \quad x_4 = 1$$

x_2 را مقدار دلخواه r می‌گیریم. جواب عمومی عبارت است از:

$$x_1 = 2r - 2, \quad x_2 = r, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 1$$

جواب‌ها را می‌توانید با دادن مقادیر مختلف به r به دست آورید.

مثال ۴. مثال زیر لزوم تعویض سطرها را در مرحله‌ای، نشان می‌دهد. دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 2$$

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_4 + 3x_5 = 6$$

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 4$$



با به کار بردن الگوریتم گاوس - جردن خواهیم داشت:

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R2 + (-2)R1 \\ R3 + R1}} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{\substack{R2 \longleftrightarrow R3 \\ R1 + (-3)R2}} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R2} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{R1 + 5R3} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R1 + 5R3 \\ R2 + (-2)R3}} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]
 \end{array}$$

به ماتریس پلکانی تحویل یافته رسیدیم. دستگاه معادلات متناظر عبارت است از:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$$

$$x_4 = -1$$

$$x_5 = 2$$

متغیرهای پیش رو را بر حسب متغیرهای باقیمانده به دست می‌آوریم:

$$x_1 = -2x_2 + x_3 + 3, \quad x_4 = -1, \quad x_5 = 2$$

مقادیر دلخواه r و s را به ترتیب برای x_2 و x_3 در نظر می‌گیریم. جواب کلی عبارت است از

$$x_1 = -2r + s + 3, \quad x_2 = r, \quad x_3 = r, \quad x_4 = -1, \quad x_5 = 2$$

مثال ۵. در این مثال دستگاهی را ملاحظه خواهید کرد که هیچ جوابی ندارد. دستگاه زیر را حل کنید.

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$$

$$2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = -3$$

$$2x_2 + 2x_3 = 1$$

حل. با ماتریس افزوده شروع می‌کنیم. داریم:

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R2 + (-2)R1 \\ R3 + (-1)R1}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}$$



$$R^2 \longleftrightarrow R^3 \quad \begin{array}{c} \cong \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{3} & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\left(\frac{1}{3} \right) R^2 \quad \begin{array}{c} \cong \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

$$R^1 + R^2 \quad \begin{array}{c} \approx \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

$$R^1 + (-1)R^3 \quad \begin{array}{c} \approx \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{13} \end{array} \right] \end{array}$$

$$\left(\frac{1}{13} \right) R^4 \quad \begin{array}{c} \approx \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array} \right] \end{array}$$

این ماتریس هنوز به شکل پلکانی تحویل یافته در نیامده است؛ هنوز می‌باشد صفرهایی را در بالای ۱ در سطر آخر ایجاد نمائیم. به هر حال، در چنین وضعیتی، زمانی که آخرین سطر ناصرف یک ماتریس به فرم $(1 \ 0 \ \dots \ 0)$ می‌باشد، دیگر نیازی به ادامه‌ی روند نیست. دستگاه جواب ندارد. زیرا اگر معادله متناظر با سطر آخر ماتریس را بنویسیم خواهیم داشت:

$${}^0 x_1 + {}^0 x_2 + {}^0 x_3 = 1$$

این معادله به ازای هیچ یک از مقادیر x_1, x_2 و x_3 برقرار نمی‌باشد. بنابراین دستگاه معادلات جواب ندارد.



۴-۱ دستگاه‌های همگن معادلات خطی

یک دستگاه معادلات خطی را همگن نامیم هرگاه تمامی جملات ثابت صفر باشند. دستگاه زیر یک دستگاه معادلات خطی همگن است.

$$x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0$$

$$-2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0$$

ملاحظه نمائید که $x_1 = 0, x_2 = 0$ و $x_3 = 0$ یک جواب از این دستگاه است. واضح است که چنین نتیجه‌ای را می‌توان به صورت زیر به هر دستگاه معادلات همگن تعمیم داد.

۱-۴-۱ قضیه. یک دستگاه معادلات خطی همگن n متغیره همواره دارای جواب می‌باشد. این جواب را جواب بدیهی می‌نامند.
حال فرض کنیم دستگاه بالا دارای جواب‌های دیگری باشد. دستگاه بالا را به روش حذفی گاوس - جردن حل می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R1 + (-2)R2$$

از این ماتریس پلکانی تحويل یافته، دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$x_1 + 3x_3 = 0$$

$$x_2 - 4x_3 = 0$$

متغیرهای پیش رو را بر حسب متغیرهای باقیمانده بیان می‌کنیم. داریم:

$$x_1 = -3x_3$$

$$x_2 = 4x_3$$

فرض کنیم $x_3 = r$ ، در این صورت ملاحظه می‌شود که دستگاه دارای جواب‌های بسیار است،

$$x_1 = -3r, \quad x_2 = 4r, \quad x_3 = r$$



ملاحظه می‌کنیم که جواب $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ با قرار دادن $r = 0$ به دست می‌آید.
ماتریس افزوده‌ی هر دستگاه همگن از معادلات خطی که تعداد متغیرهای آن از تعداد معادلات بیشتر است، دارای فرم پلکانی تحویل یافته‌ای خواهد شد که در آن تعداد ستون‌ها از سطرهایش و ستون آخر صفر است. دستگاه معادلات متناظر، و در نتیجه دستگاه اول موردنظر، دارای جواب‌های بسیاری خواهد بود، که یکی از آنها جواب بدینه می‌باشد. این مطلب را در قضیه‌ی زیر بیان می‌نماییم.

۲-۴-۱ قضیه.

یک دستگاه همگن از معادلات خطی که تعداد متغیرهایش بیشتر از معادلات

است، دارای تعداد بسیاری جواب است.

در این بخش، بحث‌مان را راجع به حل دستگاه‌های معادلات خطی به روش حذفی گاووس - جردن کامل کرده‌ایم. روش حذفی معروف دیگری برای حل دستگاه‌های معادلات خطی وجود دارد که به آن روش گاووسی می‌گویند. این روش را در بخش ۱-۹ معرفی می‌کنیم و این دو روش را در آنجا مقایسه خواهیم کرد.

۵-۱ مجموعه‌ی تمرین‌ها

۱) مشخص کنید که کدامیک از ماتریس‌های زیر به فرم پلکانی تحویل یافته است. اگر ماتریسی به این

فرم نبیست، دلیل آن را بیاورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \text{ ب) }$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{bmatrix} \text{ د) }$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و) }$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ ح) }$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ الف) }$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \end{bmatrix} \text{ ج) }$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ه) }$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \text{ ز) }$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ط) }$$

۲) مشخص کنید که کدامیک از ماتریس‌های زیر به فرم پلکانی تحویل یافته است. اگر ماتریسی به این



فرم نیست، دلیل آن را بیاورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(د)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(و)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(ح)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(الف)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(ج)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(ه)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{(ز)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(ط)}$$

۳) هر یک از ماتریس‌های زیر فرم پلکانی تحویل یافته از ماتریس افزوده‌ی یک دستگاه معادلات خطی

است. جواب را (در صورت وجود) برای هر یک از دستگاه معادلات به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(د)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{(و)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{(الف)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(ج)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{(ه)}$$

۴) هر یک از ماتریس‌های زیر فرم پلکانی تحویل یافته از ماتریس افزوده‌ی یک دستگاه معادلات خطی

است. جواب را (در صورت وجود) برای هر یک از دستگاه معادلات به دست آورید:



$$\begin{array}{ll} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \text{(ب)} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \text{(الف)} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array} \right] & \text{(د)} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \text{(ج)} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \text{(ه)} \end{array}$$

۵) هر یک از دستگاه‌های سه معادله سه مجهولی زیر را (در صورت امکان) با به کار بردن روش حذفی گاووس - جردن حل کنید.

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \quad (\text{الف})$$

$$2x_1 + 8x_2 + 11x_3 = 7$$

$$x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15 \quad (\text{ب})$$

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 33$$

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 20$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4 \quad (\text{ج})$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 18$$

$$-x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \quad (\text{د})$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 + 6x_2 = 3$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 3 \quad (\text{ه})$$



$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7$$

$$3x_1 - 5x_2 - x_3 = 4$$

$$3x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 24 \quad (\omega)$$

$$2x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 17$$

$$-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -11$$

۶) هر یک از دستگاه‌های سه معادله سه مجهولی زیر را (در صورت امکان) با به کار بردن روش حذفی گاوس - جردن حل کنید.

$$3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 9 \quad (\alpha)$$

$$-2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1$$

$$3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 10$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \quad (\beta)$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11$$

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 18$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \quad (\gamma)$$

$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6$$

$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = -1$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \quad (\delta)$$

$$3x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 26$$

$$2x_1 + 6x_2 = 11$$



$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 & (a) \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 13 \\ x_1 &\quad + 2x_2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 7 & (b) \\ 2x_1 + 4x_2 + 16x_3 &= 14 \\ x_1 + 3x_2 &= 4 \end{aligned}$$

۷) هر یک از دستگاه‌های معادلات زیر را با به کار بردن روش حذفی گاووس-جردن (در صورت امکان) حل نمایید.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= 10 & (\text{الف}) \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= -24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 - 14x_3 &= 38 & (\text{ب}) \\ -3x_1 + 7x_2 + 15x_3 &= -37 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 &= 0 & (\text{ج}) \\ x_1 + 2x_2 &\quad + x_4 = 4 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 0 \quad (\text{د})$$



$$-2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0$$

(یک دستگاه همگن)

$$x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \quad (\omega)$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0$$

$$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0$$

(یک دستگاه همگن)

- ۸) هر یک از دستگاه‌های معادلات زیر را با به کار بردن روش حذفی گاؤس - جردن (در صورت امکان) حل نمایید.

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -2 \quad (\text{الف})$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = -9$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 - 8x_4 = -7$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 7 \quad (\text{ب})$$

$$x_1 - 2x_2 - 6x_3 = -18$$

$$-x_1 - x_2 - 2x_3 = -5$$

$$2x_1 - 5x_2 - 15x_3 = -46$$

$$2x_1 - 4x_2 + 16x_3 - 14x_4 = 10 \quad (\text{ج})$$

$$-x_1 + 5x_2 - 17x_3 + 19x_4 = -2$$



$$x_1 - 2x_2 + 11x_3 - 11x_4 = 4$$

$$2x_1 - 4x_2 + 18x_3 - 14x_4 = 17$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \quad (d)$$

$$2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 12$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -4$$

$$-3x_1 + x_2 - 8x_3 - 10x_4 = -29$$

$$x_1 + 6x_2 - x_3 - 4x_4 = 0 \quad (e)$$

$$-4x_1 - 12x_2 + 5x_3 + 17x_4 = 0$$

$$2x_1 + 18x_2 - x_3 - 6x_4 = 0$$

(یک دستگاه همگن)

$$4x_1 + 8x_2 - 12x_3 = 28 \quad (f)$$

$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7$$

$$-3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = -21$$

$$x_1 + 2x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 2 \quad (g)$$

$$2x_1 + 3x_2 = 3$$

$$x_1 + 3x_2 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 = 1$$



۹) در هر یک از موارد زیر مثال‌هایی بسازید.

الف) یک دستگاه معادلات خطی با تعداد متغیرهای بیشتر از تعداد معادلات که دارای هیچ جوابی نباشد.

ب) یک دستگاه معادلات خطی با تعداد معادلات بیشتر از تعداد متغیرها که دارای جواب منحصر بفرد باشد.

۱۰) فرم‌های پلکانی تحویل یافته‌ی ماتریس‌های دستگاه‌های دو معادله دو مجهولی و انواع جواب‌هایی که وجود دارد را می‌توان به صورت زیر دسته‌بندی کرد. • نمایانگر عناصری است که ممکن است ناصلف باشند).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

جواب‌های بسیار بدون جواب جواب منحصر بفرد

به طور مشابه، فرم‌های پلکانی تحویل یافته ماتریس‌ها و انواع جواب‌هایی که وجود دارد را برای موارد زیر دسته‌بندی کنید.

الف) دستگاه‌های سه معادله دو مجهولی

ب) دستگاه‌های سه معادله سه مجهولی

۱۱) شرایطی را روی a, b, c و d برای ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ مشخص نمایید به طوری که این ماتریس دارای فرم پلکانی تحویل یافته به صورت زیر باشد:

$$\text{الف)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ب)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۲) دستگاه معادلات خطی همگن زیر را درنظر بگیرید:

$$ax + by = 0$$

$$cx + dy = 0$$

الف) اگر $x = 0, y = 0$ یک جواب باشد، نشان دهید $x = ky, y = ky$ برای هر مقدار ثابت k نیز یک جواب است.

ب) اگر $x = x_1, y = y_1$ و $x = x_2, y = y_2$ دو جواب باشند، نشان دهید $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2$ نیز یک جواب می‌باشد.



۱۳) نشان دهید $x = 0, y = 0$ یک جواب برای دستگاه همگن از معادلات خطی

$$ax + by = 0$$

$$cx + dy = 0$$

است. ثابت کنید این جواب تنها جواب است اگر و تنها اگر $ad - bc \neq 0$.

۱۴) دو دستگاه معادلات خطی با ماتریس‌های افزوده‌ی $[A : B_1]$ و $[A : B_2]$ را درنظر بگیرید که در

آن ماتریس ضرایب هر دو دستگاه، ماتریس یکسان 3×3 می‌باشد.

الف) آیا امکان دارد که $[A : B_1]$ یک جواب منحصر‌فرد داشته باشد و $[A : B_2]$ دارای جواب‌های

بسیار باشد؟

ب) آیا امکان دارد که $[A : B_1]$ یک جواب منحصر‌فرد داشته باشد و $[A : B_2]$ دارای هیچ جوابی نباشد؟

ج) آیا امکان دارد که $[A : B_1]$ دارای جواب‌های بسیاری باشد و $[A : B_2]$ هیچ جوابی نداشته باشد؟

۱۵) دستگاه‌های زیر از معادلات خطی را به کار بردن روش حذفی گاوس - جردن روی یک ماتریس افزوده‌ی بزرگ که نمایانگر دو دستگاه با یک ماتریس ضرایب یکسان‌اند، حل کنید.

الف)

$$x_1 + x_2 + 5x_3 = b_1$$

$$x_1 + 2x_2 + 8x_3 = b_2$$

$$2x_1 + 4x_2 + 16x_3 = b_3$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} \text{ به ترتیب.}$$

برای $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ ب) (

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = b_1$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = b_2$$



$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = b_2$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix} \text{ به ازای } \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ برای}$$

۱۶) یک ماتریس 3×3 به طور تصادفی بنویسید. فرم پلکانی تحويل یافته‌ی آن را پیدا کنید. فرم پلکانی تحويل یافته احتمالاً ماتریس همانی I_3 است! این را توضیح دهید. [راهنمایی: به هندسه فکر کنید].

۱۷) اگر یک ماتریس 4×3 را به طور تصادفی بنویسید، چه نوع فرم پلکانی تحويل یافته‌ی را احتمال می‌دهید که به دست آید و چرا؟

۱۸) رایانه‌ها تنها تعداد متناهی از ارقام را می‌توانند حمل کنند. این محدودیت، زمانی که انتهای اعداد کوتاه می‌شود، موجب خطایی به نام خطاهای گرد کردن^۱ می‌شود. به خاطر این اتفاق، رایانه‌ها می‌توانند نتایج نادرستی را بدهند. بسیاری از تحقیقات برای توسعه‌ی الگوریتم‌هایی است که چنین خطاهای گرد کردن را به حداقل خود برسانند. (خوانندگانی که علاقه‌مند به چنین الگوریتم‌هایی هستند، می‌بایست بخش ۲-۹ را مطالعه نمایند). یک رایانه برای مشخص کردن فرم پلکانی تحويل یافته‌ی یک ماتریس افزوده از یک دستگاه معادلات خطی به کار گرفته شده است. کدام یک از موارد زیر احتمال دارد رخ دهد؟

الف) رایانه یک جواب برای دستگاه ارائه می‌دهد در حالی که جوابی موجود نیست.

ب) رایانه می‌گوید جوابی وجود ندارد در حالی که یک جواب وجود دارد.

۶-۱ Curve Fitting، شبکه‌های الکترونیکی، و جریان ترافیک

دستگاه‌های معادلات خطی در چنین زمینه‌های متنوعی از قبیل مهندسی الکترونیک، علم اقتصاد، و تحلیل ترافیک استفاده می‌شوند. اکنون کاربردهایی از آن را در چند زمینه مورد بحث قرار خواهیم داد.

مسئله‌ی زیر در شاخه‌های مختلفی از علوم رخ می‌دهد. مجموعه‌ای از نقاط به Curve Fitting صورت داده‌ها به صورت زیر مفروض است.

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

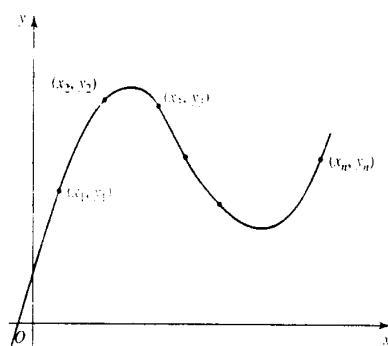
¹⁾ round-off



می‌بایست چندجمله‌ای بیاپیم که نمودارش از این نقاط عبور کند. مؤلفه‌های x ، نقاط پایه نامیده می‌شوند. می‌توان نشان داد که اگر نقاط پایه همه دو به دو مجزا باشند، آنگاه یک چندجمله‌ای منحصر بفرد از درجه‌ی $n - 1$ (یا کمتر)

$$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-1}$$

به این نقاط قابل تطبیق است. شکل ۵-۱ را ببینید.



شکل ۵-۱

ضرایب $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ که در چندجمله‌ای ظاهر شده‌اند با جایگذاری نقاط در معادله چندجمله‌ای و سپس حل یک دستگاه معادلات خطی به دست می‌آیند. (غالباً چندجمله‌ای را بر حسب توانهای صعودی x می‌نویسیم تا این ضرایب به دست آیند. ستون‌های ماتریس ضرایب دستگاه معادلات یک الگوریتم خاص را تعیین می‌کنند که در این باره بعداً بحث خواهیم کرد). اکنون روند کار را با یافتن یک چندجمله‌ای از درجه‌ی ۲، یک سهمی، برای مجموعه‌ای از سه نقطه داده شده نشان خواهیم داد.

مثال ۱. معادله چندجمله‌ای از درجه‌ی ۲ را چنان تعیین کنید که نمودارش از نقاط (۱, ۶)، (۲, ۳)، (۳, ۲) بگذرد.

حل. ملاحظه می‌کنیم که در این مثال سه نقطه داده شده و می‌خواهیم یک چندجمله‌ای از درجه‌ی ۲ (یکی کمتر از تعداد نقاط داده شده) بیاپیم. فرض کنیم چندجمله‌ای

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$



باشد. به ما سه نقطه داده شده و از این سه نقطه برای تعیین مجهولات a_0 , a_1 و a_2 استفاده خواهیم کرد.
با جایگذاری

$$x_1 = 1, y = 6; \quad x = 2, y = 3; \quad x = 3, y = 2$$

به ترتیب در چندجمله‌ای، دستگاه سه معادله با سه مجهول a_0 , a_1 و a_2 زیر به دست می‌آید.

$$a_0 + a_1 + a_2 = 6$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 3$$

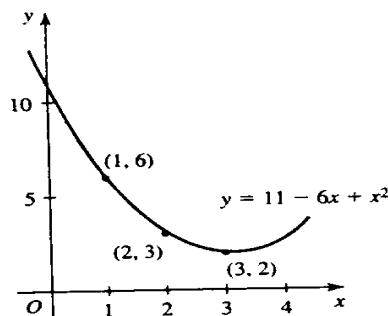
$$a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 2$$

این دستگاه را به روش حذفی گاوس - جردن برحسب a_0 , a_1 و a_2 حل می‌کنیم.

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 2 \end{array} \right] & \approx & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & -4 \end{array} \right] \\ R2 + (-1)R1 & & \\ R3 + (-1)R1 & & \\ & \approx & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \\ R1 + (-1)R2 & & \\ R3 + (-1)R2 & & \\ & \approx & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ (\frac{1}{2})R3 & & \\ & \approx & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ R1 + 2R3 & & \\ R2 + (-3)R3 & & \end{array}$$

از آنجا $a_0 = 11$, $a_1 = -6$, $a_2 = 1$ به دست می‌آید. سه‌می که از این نقاط می‌گذرد عبارت است از
از اینجا $y = 11 - 6x + x^2$. (شکل ۱-۶) را ببینید.





شکل ٦-١

٧-١ تحلیل شبکه الکتریکی

دستگاه‌های معادلات خطی برای مشخص کردن شدت جریان‌هایی که از انشعابات شبکه‌های الکتریکی می‌گذرد استفاده می‌شود. دو قانون زیر، که براساس تحقیقات به عمل آمده در آزمایشگاه حاصل شده، ما را به معادلات رهنما می‌کنند.

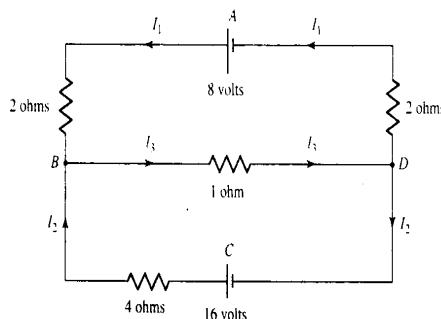
قوانين کیرشهف

۱) اتصالات. تمام جریانات که به یک اتصال وارد می‌شوند می‌بایست از آن بگذرند.

۲) مسیرها. مجموع عبارات IR (I نمایانگر جریان، R نمایانگر مقاومت) در هر جهت در اطراف یک مسیر بسته مساوی با ولتاژ کل در مسیر در آن جهت است.

مثال ۲. شبکه الکتریکی شکل ٧-١ را درنظر بگیرید. شدت جریاناتی را که از هر شاخه از این شبکه می‌گذرد را تعیین می‌کنیم.





شکل ۷_۱

حل. باتری‌ها (که با || نشان داده شده‌اند) ۸ ولت و ۱۶ ولت می‌باشند. قرارداد زیر در مهندسی برق به کار می‌رود.

|| مقدار مقاومت‌ها (که با ~ نشان داده می‌شود) که یکی ۱- اهم، یکی ۴- اهم و دو تا ۲- اهم هستند. جریان ورودی به هر باتری برابر خروجی آن است.

فرض کنیم جریان‌ها در انشعابات مختلف در مدار بالا، I_1 ، I_2 و I_3 باشند. قوانین کیرشهف به اتصالات و مسیرهای بسته اشاره می‌کنند. در این مدار دو اتصال به نام‌های نقاط B و D وجود دارند. سه مسیر بسته به نام‌های $ABCDA$ ، $CBDA$ و $ABDA$ وجود دارند. قوانین را برای اتصالات و مسیرها به کار می‌گیریم.

اتصالات

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad : B$$

$$I_2 = I_1 + I_4 \quad : D$$

این دو معادله در یک معادله خطی منفرد صدق می‌کنند.

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

مسیرها

$$2I_1 + 1I_2 + 2I_3 = 8 : ABDA$$

$$4I_2 + 1I_3 = 16 : CBDC$$



نیازی به مسیر $ABCPA$ نمی‌باشد. یک دستگاه از سه معادله خطی و سه مجھول I_1 , I_2 و I_3 خواهیم داشت. در واقع مسیر $ABCPA$ به یک معادله که ترکیبی از دو معادله‌ی آخر است می‌انجامد. مساله به حل دستگاه زیر از سه معادله و سه مجھول تحويل می‌یابد:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$4I_1 + I_2 = 8$$

$$4I_2 + I_3 = 16$$

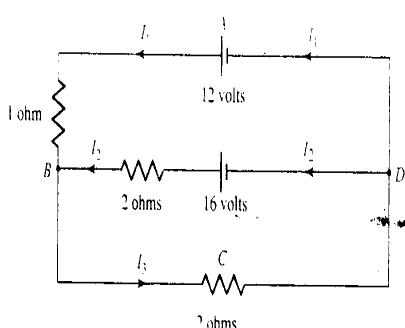
این روش را با به کار بردن حذفی روش گاووس - جردن، به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 16 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 16 \end{array} \right] \\ \approx \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 16 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \end{array} \right] \\ \approx \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \end{array}$$

$$R2 + (-4)R1 \quad R1 + (-1)R2 \quad R3 + (-4)R2 \quad R1 - \frac{1}{4}R3 \quad R2 + \frac{5}{4}R3$$

شدت جریان‌ها عبارت‌اند از $I_1 = 1$, $I_2 = 3$, $I_3 = 4$ و $I_4 = 2$ آمپر است. جواب‌ها همان‌طور که از قبل انتظار داشتیم، منحصر بفردند.

مثال ۳. شدت جریان‌هایی که از انشعابات مختلف شبکه‌ی الکتریکی در شکل ۸-۱ می‌گذرد را تعیین کنید.



۸-۱ شکل

حل.

اتصالات

$$I_1 + I_2 = I_3 : \quad B \text{ اتصال}$$

$$I_3 = I_1 + I_2 : \quad D \text{ اتصال}$$

$$\text{از آنجا داریم: } I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

مسیرها

$$1I_1 + 2I_2 = 12 : ABCDA \text{ مسیر}$$

$$1I_1 + 2(-I_2) = 12 + (-16) : ABDA \text{ مسیر}$$

ملحوظه می‌کنیم که جهت $ABDA$ به دور مسیر آخر را انتخاب کرده‌ایم. شدت جریان در طول انشعاب BD در این جهت برابر $I_2 - I_1 = 16 - 12 = 4$ می‌باشد. اکنون سه معادله با سه مجهول I_1, I_2 و I_3 داریم:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$I_1 + 2I_2 = 12$$

$$I_1 - 2I_2 = -4$$

با حل این معادلات، به دست می‌آوریم $I_1 = 5, I_2 = 3$ و $I_3 = 2$ اهم.

در عمل، شبکه‌های الکتریکی با مقاومت‌ها و مدارهای جریان زیادی سروکار دارند؛ تعیین شدت جریان گذرا از انشعابات به حل دستگاه‌های معادلات بزرگی بتوسط رایانه برمی‌گردد.

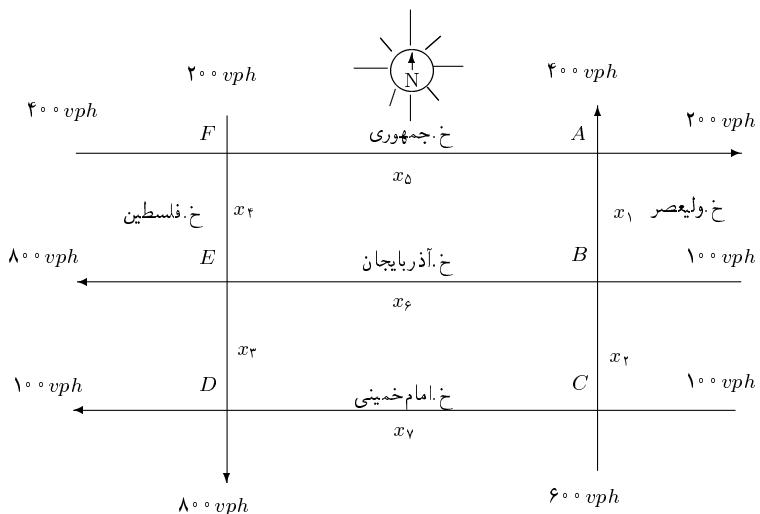
۸-۱ جریان ترافیک

همان طور که در مباحث گذشته اشاره شد، تحلیل شبکه نقش مهمی در مهندسی برق ایفا می‌کند. در سال‌های اخیر، مفاهیم و ابزارهای تحلیل شبکه در زمینه‌های زیاد دیگری مفید واقع شده است، از قبیل نظریه اطلاعات و مطالعه‌ی دستگاه‌های حمل و نقل. تحلیل زیر از جریان ترافیک از یک شبکه جاده‌ای



در زمان نقطه اوج خود، چگونگی کارایی دستگاههای معادلات خطی با جوابهای بسیار زیاد را در عمل نشان می‌دهد.

در شکل ۱-۹ یک شبکه جاده‌ای نمونه‌ای نشان داده شده است. این ناحیه‌ای در مرکز شهر تهران، می‌باشد. خیابانها همه یک طرفه و با پیکان‌هایی که جهت حرکت ترافیک را نشان می‌دهند، می‌باشند. جریان ترافیک در داخل و خارج شبکه بر حسب وسایل نقلیه در هر ساعت (vph) اندازه‌گیری می‌شوند. اشکالی که در زیر نشان داده شده است، براساس اوج نقطه ترافیک در وسط هفته، ۷ صبح تا ۹ صبح و ۴ بعدازظهر تا ۶ بعدازظهر داده شده است. یک افزایش ۲ درصدی در جریان کل برای جریان ترافیک بعدازظهر جمعه را می‌بایست پذیرفت. یک مدل ریاضی که بتوان برای تحلیل این شبکه به کار برد را می‌سازیم.



شکل ۱-۹: مرکز شهر تهران

فرض می‌کنیم جریانات ترافیکی در طول ساخه‌های مختلف x_1, \dots, x_8 مطابق با شکل ۱-۹ باشد. فرض کنیم قانون ترافیکی زیر اعمال گردد.
تمامی ورودی ترافیکی به یک اتصال می‌بایست از آن اتصال خارج شوند. دستگاه معادلات خطی زیر را خواهیم داشت:

$$\text{اتصال } A: \text{ورود ترافیک} = 200 + 400. x_1 + x_5 = 400.$$

$$\text{بنابراین } x_1 + x_5 = 600.$$

$$\text{اتصال } B: \text{ورود ترافیک} = x_1 + x_2 + 100. x_6 = 100.$$

$$\text{بنابراین } x_1 + x_2 + x_6 = 100.$$



با ادامه، برای هر اتصال و نوشتن معادلات منتج به فرم مناسب به صورت متغیرها در سمت چپ و ثابت‌ها در سمت راست، دستگاه معادلات خطی زیر به دست می‌آید.

$$\text{اتصال } A \quad x_1 + x_5 = 600$$

$$\text{اتصال } B \quad x_1 - x_2 + x_6 = 100$$

$$\text{اتصال } C \quad x_2 - x_7 = 500$$

$$\text{اتصال } D \quad -x_2 + x_7 = 200$$

$$\text{اتصال } E \quad -x_2 + x_4 + x_6 = 800$$

$$\text{اتصال } F \quad x_4 + x_5 = 600$$

روش حذفی گاوس - جردن برای حل این دستگاه معادلات به کار گرفته می‌شود. ملاحظه می‌کنیم که ماتریس افزوده حاوی تعداد زیادی صفر است. این صفرها در حد زیادی مقدار محاسبات را تقلیل می‌دهند. فرم پلکانی تحويل یافته را ارائه می‌دهیم و نحوه محاسبه‌ی آن را به صورت تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. در عمل، شبکه‌ها بسیار بزرگتر از آن چیزی است که در اینجا نمایش داده‌ایم، و دستگاه‌های معادلات خطی نیز خیلی بزرگتر از آن است که آن‌ها را توصیف کرده‌ایم. چنین دستگاه‌هایی توسط ریانه‌ها حل می‌شوند. به هر حال ماتریس‌های افزوده کلیه‌ی چنین دستگاه‌هایی شامل تعداد زیادی صفر می‌باشند. بسیاری از تحقیقات به سمت پیشرفت‌تر کردن الگوریتم‌های کارآمد برای حل چنین دستگاه‌های معادلات پراکنده به طور اثربخشی پیش می‌رود. ماتریس افزوده و فرم پلکانی تحويل یافته دستگاه فوق به صورت زیر می‌باشند:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 600 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 500 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 800 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 600 \end{array} \right] \approx \dots \approx$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 500 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

دستگاه معادلات متناظر با این فرم پلکانی تحول یافته عبارت است از:



$$\begin{array}{ll}
 x_1 & +x_6 -x_7 = 60^\circ \\
 x_2 & -x_7 = 50^\circ \\
 x_3 & -x_7 = -20^\circ \\
 x_4 & +x_6 -x_7 = 60^\circ \\
 x_5 & -x_6 +x_7 = 0
 \end{array}$$

با بیان هر متغیر پیش رو برحسب متغیرهای باقی مانده، به دست می آوریم،

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -x_6 + x_7 + 60^\circ \\
 x_2 &= x_7 + 50^\circ \\
 x_3 &= x_7 - 20^\circ \\
 x_4 &= -x_6 + x_7 + 60^\circ \\
 x_5 &= x_6 - x_7
 \end{aligned}$$

همان طور که انتظار می رفت، دستگاه معادلات دارای تعداد زیادی جواب است. تعداد زیادی جریان ترافیکی ممکن، وجود دارد.

اکنون این مدل ریاضی را برای رسیدن به اطلاعات به کار می بریم. فرض کنید که می خواهیم در طول خیابان امام خمینی بین ولیعصر و خیابان فلسطین اجرا نماییم. حالت مطلوب، حالتی است که تا حد امکان جریان ترافیکی کمی در طول این خیابان داشته باشیم. جریان ها در طول انشعابات مختلف به وسیله‌ی چراغ‌های راهنمایی در اتصالات قابل کنترل می باشند. می نیم جریان ممکن در طول خیابان امام خمینی که موجب ازدحام ترافیکی نمی شود، چیست؟ جریان ها در طول دیگر انشعابات وقتی که به انتهای می رستند، چیست؟ این مدل ما را قادر به پاسخ به این سوالات می کند.

می نیم کردن جریان در طول خیابان امام خمینی متناظر با می نیم کردن x_7 می باشد. از آنجاکه تمام جریان های ترافیکی می باشد بزرگتر یا مساوی صفر باشند، معادله‌ی سوم ایجاب می کند که می نیم مقدار x_7 برابر 20° باشد، زیرا در غیر این صورت x_3 منفی می شود. (یک جریان منفی به عنوان حرکت ترافیکی در جهت خلاف جهتی که روی خیابان یک طرفه مشخص شده، توجیه می شود). بنابراین در دوره‌ی زمانی اوچ ترافیک، در انشعباب CD، می باشد حداقل به 20° ماشین در هر ساعت اجازه‌ی حرکت داده شود. اکنون اجازه دهید جریان های دیگر انشعابات را در حالتی که در طول خیابان امام خمینی می نیم جریان را داریم، آزمایش کنیم. از $x_7 = 20^\circ$ خواهیم داشت:

$$x_1 = -x_6 + 80^\circ$$



$$x_2 = 700$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = -x_6 + 800$$

$$x_5 = x_6 - 200$$

چون $x_7 = 200$ داریم $x_2 = 0$ و بر عکس، می‌بینیم که می‌نیم جریان در انشعاب x_7 را می‌توان با قرار دادن $x_3 = 0$ ، یعنی با بستن DE به روی ترافیک، به دست آورد.

مجموعه تمرینات

در تمرینات ۱ الی ۵، معادلات چندجمله‌ای درجه‌ی دو را به گونه‌ای تعیین کنید که نمودارشان از نقاط داده شده عبور کنند.

$$\cdot (3, 4), (2, 2), (1, 2) \quad (1)$$

$$\cdot (3, 32), (2, 22), (1, 14) \quad (2)$$

$$\cdot (3, 9), (2, 7), (1, 5) \quad (3)$$

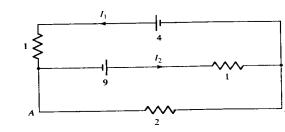
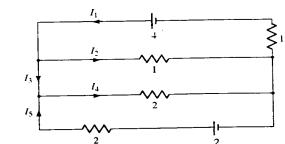
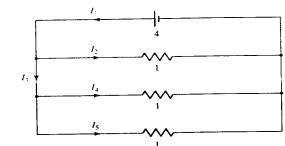
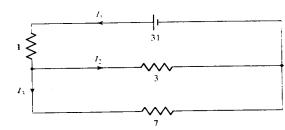
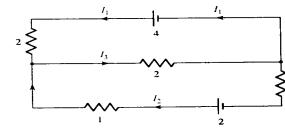
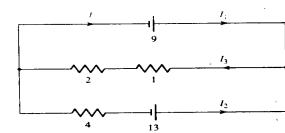
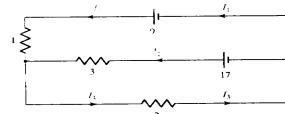
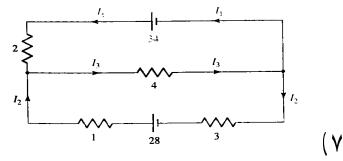
$$\cdot (5, 60), (3, 26), (1, 8) \quad (4)$$

$$\cdot (1, -3), (0, 1), (-1, 1) \quad (5)$$

۶) معادله چندجمله‌ای درجه‌ی سه را چنان بیابید که نمودارش از نقاط $(1, -3), (2, -1), (3, 9), (4, 33)$ بگذرد.

در تمرینات ۷ الی ۱۴ شدت جریانات در انشعابات مختلف شبکه‌های الکتریکی را تعیین کنید. واحد شدت جریان، آمپر و واحد مقاومت‌ها اهم می‌باشد. (راهنمایی: در تمرین ۱۴ یافتن جهت شدت جریان در طول AB مشکل است. یک حدس بزنید. نتیجه‌ی منفی برای شدت جریان به مفهوم این است که حدستان غلط بوده است و جهت عکس جهتی است که گرفته بوده‌اید. به هر حال مقدار به دست آمده صحیح است و نیازی به حل دوباره مسئله نمی‌باشد).





(۷)

(۸)

(۹)

۱۰) شدت جریاناتی را که از شاخه‌های مختلف شبکه الکتریکی شکل ۱-۱ می‌گذرد را تعیین کنید.

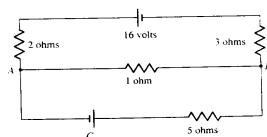
الف) زمانی که باتری C , ۹۰ ولت است.

ب) زمانی که باتری C , ۲۳ ولت است.

توجه کنید که چگونه شدت جریانی که از انشعاب AB می‌گذرد در (الف) عکس می‌شود. ولتاژ

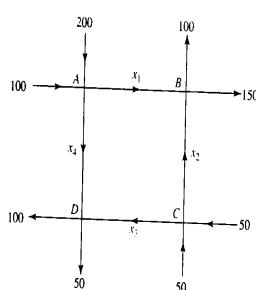


برای زمانی که هیچ جریانی از AB نمی‌گذرد، چه خواهد بود؟



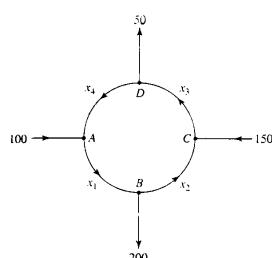
شکل ۱۰-۱

۱۱) مدل ریاضی بسازید که جریان ترافیک در شبکه جاده‌ای شکل ۱۱-۱ را توصیف کند. تمام خیابان‌ها در جهتی که نشان داده است یک طرفه می‌باشند. واحدها بر حسب وسایط نقلیه در هر ساعت می‌باشند. دو جریان ترافیکی ممکن مجزا را بدھید. کمترین جریان ممکن که در طول شاخه AB انتظار می‌رود چیست؟



شکل ۱۱-۱

۱۲) شکل ۱۲-۱ نمایانگر یک ترافیک وارد و خارج شده از یک چهار راه میدانی می‌باشد. چنین اتصالاتی در ایران زیاد است. یک مدل ریاضی بسازید که جریان ترافیکی در طول اتصالات مختلف را توصیف کند. می‌نیمیم جریان ممکن در طول انسعباب BC ، به طور نظری، چیست؟ آیا این جریان در عمل قابل درک است؟



۱۲-۱ شکل

(۱۳) چندجمله‌ای‌های درجه دو بسیاری وجود دارند که از نقاط (۱, ۲) و (۳, ۴) می‌گذرند. این وضعیت را می‌توان به وسیله‌ی یک دستگاه دو معادله خطی برحسب سه متغیر که جواب‌های بسیاری دارد، توصیف کرد. معادله‌ای (پارامتری) پیدا کنید که این خانواده از چندجمله‌ای‌ها را نمایش دهد.

(۱۴) چندجمله‌ای‌های درجه سه بسیاری وجود دارند که از نقاط (۱, ۲)، (۳, ۴) و (۴, ۸) می‌گذرند. این وضعیت را می‌توان به وسیله‌ی یک دستگاه سه معادله خطی برحسب چهار متغیر که جواب‌های بسیار دارد، توصیف کرد. معادله‌ای (پارامتری) پیدا کنید که این خانواده از چندجمله‌ای‌ها را نمایش دهد. چندجمله‌ای منحصر‌بفرد از درجه ۳ که ضریب x^3 در آن برابر ۱ و از این نقاط می‌گذرد را تعیین کنید.

تمرین‌های دوره‌ای فصل اول

(۱) اندازه‌ی ماتریس‌های زیر را به دست آورید:

$$\text{ب)} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{الف)} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{د)} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{ج)} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{ه)} \begin{bmatrix} 8 & 5 & 3 & -7 & 5 & 9 \\ -2 & 3 & 5 & 7 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -1 & 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

(۲) درایه‌هایی که در مکان (۱, ۳)، (۲, ۱)، (۳, ۳)، (۲, ۵) و (۳, ۶) در ماتریس زیر قرار دارد را به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 7 & 8 & 4 \\ 6 & 7 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

(۳) ماتریس همانی I_5 را بنویسید.

(۴) ماتریس ضرایب و ماتریس افزوده هر یک از دستگاه‌های معادلات زیر را مشخص کنید.



(الف)

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

$$4x_1 - 3x_2 = -1$$

(ب)

$$2x_1 + x_2 - 4x_3 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 0$$

$$3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -3$$

(ج)

$$-x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -2$$

$$3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 = 5$$

(د)

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 5$$

$$x_3 = -3$$

(ه)

$$-2x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 5x_4 = -2$$

$$x_1 + 5x_2 - 6x_4 = 0$$

$$-x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5$$

- ۵) ماتریس‌های زیر را به صورت ماتریس‌های افزوده‌ی دستگاه‌های معادلات تفسیر کنید. هر یک از دستگاه معادلات را بنویسید:



$$\begin{array}{ll}
 \begin{matrix} 1 & 9 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{matrix} & \text{ب)} \\
 \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix} & \text{د)} \\
 \begin{matrix} 4 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{matrix} & \text{الف)} \quad \text{ج)} \quad \text{ه)} \\
 & \text{الف)} \quad \text{ج)} \quad \text{ه)}
 \end{array}$$

۶) مشخص کنید که آیا ماتریس‌های زیر به فرم پلکانی تحويل یافته هستند یا خیر؟ اگر ماتریسی به فرم پلکانی تحويل یافته نیست، دلیل آورید.

$$\begin{array}{ll}
 \begin{matrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \text{ب)} \\
 \begin{matrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{matrix} & \text{د)} \\
 \begin{matrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{matrix} & \text{الف)} \\
 \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{matrix} & \text{ج)} \\
 \begin{matrix} 1 & 8 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{matrix} & \text{د)}
 \end{array}$$

۷) دستگاه‌های معادلات زیر دارای جواب منحصر بفردند. این دستگاه‌ها را به کمک روش حذفی گاوس-جردن حل کنید.

الف)

$$2x_1 + 4x_2 = 2$$

$$3x_1 + 7x_2 = 2$$

ب)

$$x_1 - 2x_2 - 8x_3 = -17$$

$$2x_1 - 6x_2 - 16x_3 = -46$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = -5$$



(ج)

$$x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 21$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 12$$

$$x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = -9$$

$$3x_1 - 2x_2 - 6x_4 = -4$$

۸) دستگاه‌های معادلات زیر را (در صورت امکان) با کمک روش حذفی گاووس - جردن حل کنید.

(الف)

$$x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 + x_3 = -8$$

$$4x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 10$$

(ب)

$$x_1 + 3x_2 + 8x_3 - 2x_4 = -7$$

$$-2x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 3x_4 = 10$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -10$$

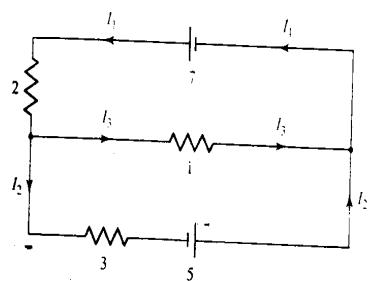
۹) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ به فرم پلکانی تحویل یافته باشد. نشان دهید اگر $A \neq I_n$ باشد، آنگاه A دارای یک سطر منتشر از صفر است.

۱۰) فرض کنید A و B ماتریس‌های هم‌ارز سطربالی باشند. نشان دهید A و B دارای فرم پلکانی تحویل یافته‌ی یکسان هستند.

۱۱) معادله‌ی چندجمله‌ای از درجه‌ی ۲ را که از نقاط $(1, 3)$ ، $(2, 6)$ و $(3, 13)$ بگذرد مشخص نمائید.

۱۲) جریاناتی که از انشعابات شبکه‌ی زیر می‌گذرد را تعیین کنید.





شکل ۱۳-۱



هدف‌های رفتاری فصل دو

دانشجو پس از پایان این فصل باید بتواند:

- اعمال بر ماتریس‌ها را مرور کرده و ویژگی‌های آن را تشریح کند.
- در محاسبات با ضرب ماتریس‌ها، با استفاده از ویژگی شرکت‌پذیری تشخیص دهد که در محاسبه حاصل ضرب‌های

$$((AB)C)D$$

$$A(BC)D$$

$$(AB)(CD)$$

$$A(B(CD))$$

کدامیک به تعداد عملیات کمتری نیاز دارد.

- مفهوم و تعریف ماتریس متقابلن را توضیح دهد.
- ویژگی‌های ترانهاده را توضیح دهد.
- مفهوم ماتریس و ویژگی‌های آن را توضیح داده و از عهده استدلال و برهان آن برآید.
- مفهوم مزدوج و مزدوج ترانهاده را درک کرده و ویژگی‌های آن را بیان کند.
- طریقه پیدا کردن وارون یک ماتریس را توضیح داده و این طریقه را در محاسبات عملی پیاده کند.
- همچنین وارون را در رمزگاری به کار گیرد.
- با استفاده از روش حذف گاووس - جردن وارون یک ماتریس را محاسبه کند.
- ماتریس متشکل از داده‌های ورودی و خروجی را شناخته و در مدل‌های اقتصادی از آن استفاده کند.
- ماتریس‌های استوشاستیک¹⁾ را شناخته و نقش آن‌ها در پدیده‌ها و فرآیندهای تصادفی را دریابد.
- مفهوم دیگراف را توضیح داده و ماتریس وابسته آن را تعریف کند.
- ماتریس فاصله را تعریف کند و مدل ارتباطی را در ارتباط با روابط گروهی در جامعه شناسی توضیح دهد.
- از عهده حل تمرین‌ها و مسائل پایان فصل به راحتی برآید.

1) Stochastic



فصل دوم

ماتریس‌ها

در این فصل نظریه‌ی مربوط به ماتریس‌ها را توسعه می‌دهیم و چگونگی دید این مفاهیم را که در توسعه کاربردهایی از باستان‌شناسی تا اقتصاد استفاده می‌شوند، می‌بینیم. برای مثال ما قوانینی را ارائه می‌دهیم که در رابطه با جمع و ضرب ماتریس‌ها می‌باشند و خواهیم فهمید که چگونه این عملیات برای مشخص نمودن ترتیب رویدادهای مصنوعی در علم باستان‌شناسی و وابستگی در صنایع مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱-۲ جمع، ضرب عددی، و ضرب ماتریس‌ها

برای کارکردن با ماتریس‌ها یک نمادگذاری مناسب توسعه یافته است. محل یک درایه در ماتریس با ارائه سطر و ستونی که در آن ماتریس قرار دارد مشخص می‌شود. درایه موجود در سطر i ، ستون j در ماتریس A با a_{ij} نمایش داده می‌شود.

$$a_{ij} \quad \begin{array}{c} \text{1st subscript} \\ \text{indicates row} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{2nd subscript} \\ \text{indicates column} \end{array}$$

دومین زیرنوشت شماره ستون را نشان می‌دهد اولین زیرنوشت شماره سطر را نشان می‌دهد. ما به a_{ij} به عنوان (j, i) امین درایه ماتریس A اشاره می‌کنیم. می‌توانیم ماتریس دلخواه $A, m \times n$ را مانند شکل ۱-۲ نشان دهیم. اگر تعداد سطرها و ستون‌های ماتریس A برابر باشند آن را ماتریس مربعی می‌نامیم.



درایه‌های ماتریس مربعی A که در آن زیرنوشت‌ها مساوی می‌باشند، یعنی درایه‌های $a_{11}, \dots, a_{22}, \dots, a_{nn}$ می‌باشد، یعنی قطر اصلی ماتریس می‌باشد. (شکل ۲-۲ را ببینید).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ماتریس A مربعی

شکل ۱-۲

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ماتریس A مربعی

شکل ۲-۲

مثال ۱) درایه‌های a_{12}, a_{21} و a_{23} را برای ماتریس زیر تعیین کنید. قطر اصلی ماتریس A را مشخص کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

حل: چون a_{12} درایه‌ای از سطر ۱ و ستون ۲ است $a_{12} = -2$. می‌بینیم که $a_{21} = 2$ و $a_{22} = 3$. قطر اصلی A شامل درایه‌های $a_{11} = 1, a_{22} = -3, a_{33} = 5$ می‌باشد. برای توسعه نظریه جیری ماتریس‌ها، با تعاریفی مفهومی از تساوی ماتریس‌ها شروع می‌کنیم.

۱-۱-۲ تعریف: دو ماتریس را برابرگویند در صورتی که درایه‌های نظیر به نظیر با هم برابر و دارای سطر و ستون مساوی باشند. بنابراین $A = B$ در صورتی که $a_{ij} = b_{ij}$ باشد.

این تعریف ما را قادر می‌سازد تا معادلاتی را که شامل ماتریس‌ها می‌شوند معرفی کنیم و همچنین به ما این اجزاء را می‌دهد که عمل جمع ماتریس‌ها را تعریف کنیم.



جمع ماتریس‌ها

۲-۱-۲ تعریف: فرض کنیم A و B ماتریس‌هایی با اندازه مساوی باشند. جمع این دو ماتریس یعنی $(A + B)$ از طریق جمع درایه‌های نظیر به نظیر آنها به دست می‌آید. ماتریس $A + B$ نیز همان‌اندازه ماتریس‌های A و B می‌باشد. اگر A و B از اندازه‌های مساوی برخوردار نباشند، نمی‌توانند با یکدیگر جمع شوند و می‌گوئیم عمل جمع امکان‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین اگر $C = A + B$, آنگاه $b_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

مثال ۲ فرض کنید $C = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ -3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. حاصل $A + C$ و $A + B$ را در صورت وجود بیابید.

حل: ماتریس‌های A و B هر دو 3×2 می‌باشند. لذا از اندازه‌های مساوی برخوردار هستند. پس جمع آنها موجود و یک ماتریس 3×2 می‌باشد. با جمع نظیر به نظیر درایه‌ها به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ -3 & 1 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+2 & 4+5 & 7-6 \\ 0-3 & -2+1 & 3+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 1 \\ -3 & -1 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ماتریس A ماتریسی است 3×2 در حالی که ماتریس C , 2×2 می‌باشد. لذا A و C از اندازه‌های مساوی برخوردار نمی‌باشند. بنابراین $A + C$ امکان‌پذیر نمی‌باشد.

ضرب اسکالار (عددی) ماتریس‌ها

هنگام کار با ماتریس‌ها، به طور معمول به جای اعداد از اسکالارها نام برده می‌شود. از حروف بزرگ برای نمایش دادن ماتریس‌ها و از حروف کوچک برای نشان دادن اسکالارها استفاده می‌کنیم. قدم بعدی در توسعه نظریه ماتریس‌ها معرفی کردن قانونی برای اسکالارها در ماتریس‌ها می‌باشد.

۳-۱-۲ تعریف: فرض کنید A یک ماتریس و c یک اسکالار باشد. ضرب اسکالار c در A به صورت cA نمایش داده می‌شود. که ماتریسی است از ضرب هر مؤلفه A در اسکالار c به دست می‌آید، ماتریس cA همان‌اندازه ماتریس A می‌باشد. بنابراین اگر $B = cA$, آنگاه $b_{ij} = ca_{ij}$.

مثال ۳ فرض کنید $3A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. A را تعیین کنید؟



حل: هر مؤلفه A را در 3 ضرب می‌کنیم:

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 21 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌کنید که A و $3A$ هر دو ماتریس‌هایی 2×3 هستند.

۲-۲ قرینه‌سازی و تفریق

ماتریس $-C$ را به صورت (-1) تعریف می‌کنیم. قرینه‌سازی ماتریس، یعنی این که هر مؤلفه از ماتریس

$$-C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 3 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

۱-۲-۲ تعریف: اگرچه تفریق ماتریس‌ها را با روشی که آن را سازگار با جمع، ضرب اسکالر و قرینه‌سازی می‌نماید، بیان می‌کنیم:

$$A - B = A + (-1)B$$

این تعریف بر این نکته دارد که عمل تفریق بین ماتریس‌هایی با اندازه برابر توسط تفریق مؤلفه‌های

نظیر به نظیر انجام می‌پذیرد. بنابراین اگر $C = A - B$ ، آنگاه $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ فرض کنید.

فرض کنید $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ می‌خواهیم $A - B$ را معین کنیم.

داریم:

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} 3 - 2 & 0 - 8 & -2 - (-1) \\ 3 - 0 & 6 - 4 & -5 - 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & -11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ضرب ماتریس‌ها

قوانين جمع ماتریس‌ها و ضرب ماتریس‌ها با اسکالارها را معرفی کردیم. اگرچه یک نگاه اجمالی به متداولترین

ضرب ماتریس‌ها خواهیم انداخت. ضرب دو ماتریس A و B مانند ضرب مؤلفه‌های نظیر به نظیر A و B

به نظر می‌رسد. اما این راه مفیدترین راه برای ضرب ماتریس‌ها نمی‌باشد.



ریاضی دانان قانون دیگری را معرفی می‌کنند که شامل ضرب سطرهای اولین ماتریس A در ستون‌های دومین ماتریس B در یک سیستم می‌باشد. ما این قانون را با وارد کردن یک عضو دلخواه از ماتریس به عنوان ماتریس حاصل‌ضرب AB بیان می‌کنیم.

۲-۲-۲ تعریف: فرض کنیم تعداد ستون‌ها در ماتریس A مساوی با تعداد سطرهای در ماتریس B باشد در این صورت حاصل‌ضرب AB موجود می‌باشد. و مؤلفه موجود در سطر i ام و ستون j ام با ضرب مؤلفه‌های نظیر به نظیر سطر i ام از A و ستون j ام از B و جمع حاصل به دست می‌آید.

اگر تعداد ستون‌ها در A با تعداد سطرهای در B برابر نباشد. می‌گوئیم عمل ضرب وجود ندارد. فرض

$$\begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

کنیم A , n ستون و B , n سطر دارد. سطر i ام از A $[a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}]$ است و ستون j ام از B ,

است. بنابراین اگر آنگاه $C = AB$ باشد.

مثال ۴) فرض کنید BA , AB , $C = [6 \ -2 \ 5]$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و AC را تعیین کنید اگر ضرب‌ها موجود باشند؟

حل: A دارای ۲ ستون و B دارای ۲ سطر است. بنابراین AB وجود دارد. A را بحسب سطرهای آن و B را بحسب ستون‌ها آن تعبیر می‌کنیم و سطرهای A را در ستون‌ها مطابق سیستم زیر ضرب می‌کنیم.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

اولین سطر A در هر ستون از B ضرب می‌شود.

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} \right]$$

سطر دوم از A در هر ستون از B ضرب می‌شود.

$$AB = \begin{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} \right] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ((1 \times 5) + (3 \times 2)) & ((1 \times 0) + (3 \times (-2))) & ((1 \times 1) + (3 \times 6)) \\ ((2 \times 5) + (0 \times 2)) & ((2 \times 0) + (0 \times (-2))) & ((2 \times 1) + (0 \times 6)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & -6 & 21 \\ 10 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



اکنون می‌خواهیم تا به حاصلضرب‌های باقیمانده یعنی BA و AC نگاهی بیندازیم. ماتریس B دارای ۳ ستون می‌باشد در حالی که A دارای ۲ سطر است بنابراین BA وجود ندارد. ماتریس A دارای ۲ ستون می‌باشد در حالی که ماتریس C یک سطر دارد. لذا AC نیز وجود ندارد.

مشاهده می‌شود که در مثال قبل AB وجود دارد اما BA وجود ندارد. ترتیب ضرب در ۲ ماتریس اهمیت بسزایی دارد. برخلاف ضرب اعداد حقیقی، ضرب در ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ندارد. در حالت کلی برای ۲ ماتریس AB داریم $AB \neq BA$. بعضی اوقات AB و BA هر دو موجود هستند. اما در حالت کلی برابر نیستند.

$$\text{مثال ۵) اگر } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ را تعیین کنید.}$$

حل: چون A دارای ۲ ستون و B دارای ۲ سطر است AB وجود دارد. ضرب سطرهای A در ستون‌ها در یک حالت مناسب به شرح زیر است:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

اولین سطر از A در هر ستون از B ضرب می‌شود:

$$\left[[2 \ 1] \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} [2 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right]$$

دومین سطر از A در هر ستون از B ضرب می‌شود:

$$\left[[7 \ 0] \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} [7 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right]$$

سومین سطر از A در هر ستون از B ضرب می‌شود:

$$AB = \begin{bmatrix} [-3 \ -2] \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} [-3 \ -2] \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2+2 & 0+5 \\ -7+0 & 0+0 \\ 3-6 & 0-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -7 & 0 \\ -3 & -10 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

مثال زیر نشان می‌دهد که ما می‌توانیم هر مؤلفه دلخواه در ضرب دو ماتریس را بدون محاسبه کردن کل ضرب تخمین بزنیم.



مثال ۶) $C = AB$ را برای ماتریس‌های A و B که در زیر آمده‌اند در نظر بگیرید. مؤلفه c_{22} از C را

تعیین کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -7 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: c_{22} مؤلفه موجود در سطر ۲ و ستون ۳ از ماتریس C می‌باشد. این ضرب، ضرب سطر ۲ از A و ستون ۳ از B می‌باشد. خواهیم داشت:

$$c_{22} = [-3 \ 4] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-3 \times 2) + (4 \times 1) = -2$$

۳-۲ اندازه ماتریس حاصل ضرب

اکنون در مورد اندازه ماتریس حاصل ضرب بحث می‌کنیم. فرض کنیم A یک ماتریس $m \times r$ و B یک ماتریس $r \times n$ باشد. A دارای r ستون و B دارای r سطر است. بنابراین AB وجود دارد. اولین سطر از AB با ضرب سطر اول از A با هر یک از ستون B به دست می‌آید. بنابراین تعداد ستون‌ها در AB با تعداد ستون‌ها در B برابر می‌باشد. همچنین تعداد سطرهای AB با تعداد سطرهای A برابر می‌باشد. بنابراین ماتریس AB یک ماتریس $n \times m$ است.

اگر A یک ماتریس $m \times r$ و B یک ماتریس $r \times n$ باشد آنگاه AB یک ماتریس $m \times n$ می‌باشد.

می‌توانیم نتیجه فوق را مانند زیر به تصویر بکشانیم:

$$\begin{array}{ccc} A & & B = AB \\ m \times r & & r \times n \quad m \times n \\ \text{insides match} & & \text{out sides give size of } AB \end{array}$$

مثال ۷: اگر A یک ماتریس 6×5 و B یک ماتریس 7×6 باشد، اندازه ماتریس حاصل ضرب AB چقدر است؟

$$A_{6 \times 6} \cdot B_{6 \times 7} = AB_{6 \times 7}$$



$$A \quad \quad \quad B = AB$$

5×6 6×7 5×7

۱-۳-۲ تعریف: ماتریس صفر ماتریسی است که تمام مؤلفه‌های آن صفر می‌باشند. ماتریس قطری ماتریسی است که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی همگی صفر هستند. یک ماتریس همانی، ماتریسی است قطری و اعضای قطر اصلی آن عدد یک است. (شکل ۳-۲ را ببینید).

ماتریس‌های صفر در نظریه‌ی ماتریس‌ها نقش عدد صفر در اعداد حقیقی را اینا می‌کنند و ماتریس‌های همانی مانند عدد ۱ عمل می‌کنند. این نقشه‌ها در قضیهٔ زیر توصیف می‌شوند که به وسیلهٔ یک مثال آن را نشان می‌دهیم.

۲-۳-۲ قضیه: فرض کنیم A یک ماتریس $m \times n$ و O_{mn} یک ماتریس صفر $m \times n$ باشد. فرض کنیم B یک ماتریس مربعی $n \times n$, O_n و I_n به ترتیب ماتریس‌های صفر و همانی $n \times n$ باشند.

$$A + O_{m,n} = O_{m,n} + A = A$$

$$BO_n \equiv O_n B = O_n$$

$$BI_n \equiv I_n B \equiv B$$



مثال ۸) فرض کنید $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ ملاحظه می‌کنیم که:

$$A + O_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix} = A$$

$$BO_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_2$$

$$BI_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = B$$

و به طور مشابه:

$$O_{22} + A = A \quad \text{و} \quad O_2 B = O_2 \quad \text{و} \quad I_2 B = B$$

۴-۲ علامت‌گذاری ماتریس و دستگاه معادلات

علامت‌گذاری در ماتریس‌ها برای سهولت در بیان و توصیف دستگاه معادلات خطی دلخواه استفاده می‌شود.

ما می‌توانیم دستگاه m معادله خطی n مجهولی را به صورت زیر بنویسیم:

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

در این صورت طبق ضرب ماتریس‌ها دستگاه معادلات خطی بالا را به صورت ماتریس زیر می‌توانیم

بنویسیم:

$$AX = B$$



بنابراین، برای مثال از

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & -8 & 4 \\ 2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}$$

می‌توان نوشت:

$$3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 7, \quad x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 9, \quad 2x_1 + 6x_2 - 7x_3 = -2$$

این مدل از نمایش ماتریس برای دستگاه معادلات خطی می‌تواند در قسمت‌های بعدی بسیار مورد استفاده قرار گیرد.

۵-۲ ضرب سریع ماتریس

محاسبات ضربه ماتریس‌های بزرگ در کامپیوتراها انجام می‌شود. تحقیقات و مطالعات زیادی روی پیدا کردن و انجام دادن محاسبات ماتریسی به طور سریع در کامپیوترا انجام شده است. در سال ۱۹۶۹ شخصی به نام استراسن یک الگوریتم و روشی برای ضرب سریع دو ماتریس مربعی با اندازه‌های یکسان به دست آورده است. این الگوریتم و روش امروزه در کامپیوتراها برای ضرب ماتریس‌های بزرگ استفاده می‌شود. ما ایده‌های استراسن را برای نشان دادن این موضوع مهم از جنبهٔ جبر خطی عددی ارایه می‌دهیم. تعداد اعمال ریاضی (اعمال ضرب و جمع) را که برای ضرب دو ماتریس 2×2 ، A و B مورد نیاز است، در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

محاسبهٔ هر داریه از AB شامل دو ضرب عددی (اسکالار) یک عمل جمع است. چون در ماتریس AB چهار داریه وجود دارد لذا تعداد کل اعمال ریاضی که لازم است برای ضرب دو ماتریس 2×2 انجام پذیرد، هشت عمل ضرب و چهار عمل جمع است.

استراسن روشی را به دست آورد که در آن تعداد کمتری عمل ضرب اما تعداد بیشتری عمل جمع لازم است. تساویهای زیر را در نظر بگیرید:

$$m_1 = (a_{12} - a_{22})(b_{21} - b_{22})$$



$$m_1 = (a_{11} - a_{22})(b_{11} + b_{22})$$

$$m_2 = (a_{11} - a_{21})(b_{11} + b_{12})$$

$$m_3 = (a_{11} + a_{12})b_{22}$$

$$m_4 = (b_{12} - b_{22})a_{11}$$

$$m_5 = (b_{21} - b_{11})a_{22}$$

$$m_6 = (a_{21} + a_{22})b_{11}$$

خواننده می‌تواند مشاهده کند که:

$$AB = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 - m_3 + m_4 & m_4 + m_5 \\ m_6 + m_7 & m_3 - m_2 + m_5 - m_7 \end{bmatrix}$$

می‌توان مشاهده کرد که برای محاسبه AB هفت عمل ضرب عددی و هجده عمل جمع نیاز است. تعداد ضرب‌ها به یک عمل کاهش یافته اما تعداد جمع‌ها به چهارده تا افزایش یافته است. این یک عمل ضرب ذخیره شده در نتیجه فوق العاده مهم است. ما اکنون می‌توانیم به خواننده این آموزش را دهیم که این الگوریتم و روش برای ضرب ماتریس‌ها به خصوص ماتریس‌های بزرگ از روش استاندارد بهتر و سریعتر است. فرض کنید A و B ماتریس‌های $n \times n$ باشند که در آن n توانی از ۲ است، A و B را برحسب زیرماتریس‌هایی که در زیر می‌آیند بنویسید.

$$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, \quad B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$$

ضرب AB با روش استاندارد معادل ضرب کردن این ماتریس‌ها می‌باشد، اگر آنها ماتریس‌های 2×2 باشند که در آیه‌هایشان زیرماتریس‌ها باشند.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

در اینجا ۸ ضرب ماتریس از زیرماتریس‌های شامل شده وجود دارد. به هر حال می‌توانیم این تعداد ضرب را کاهش دهیم، اگر از الگوریتم استراسن به شرح زیر استفاده کنیم.

در الگوریتم استراسن اعداد اسکالار $a_{11} \dots b_{22}$ با ماتریس‌های $A_{11} \dots B_{22}$ جایگزین می‌شوند. در این الگوریتم اینک می‌توان برای محاسبه AB از انجام هفت ضرب ماتریس‌های $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ استفاده کرد. هر



ماتریس $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ به جای زیرماتریس‌های $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ می‌نشینند و الگوریتم ادامه می‌باید تا زمانی که جواب به دست آید.

در هر مرحله یک ضرب ماتریس کم می‌شود. که این کمتر شدن تعداد ضرب‌ها با افزایش یافتن تعداد جمع‌ها جبران می‌شود و n را به اندازه کافی بزرگ و مناسب می‌نماید. این روش به طور مکرر و متناوب برای عمل ضرب ماتریس‌های کوچک‌تر و کوچک‌تر در صنعت و تکنیک برنامه‌ریزی کامپیوتر ارایه می‌شود که برنامه تکرار نامیده می‌شود (الگوریتم بازگشتی نامیده می‌شود). این روش هنوز هم مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر ماتریس اصلی مربع نباشد با گذاشتن صفر به جای درایه‌ها و توسعه ماتریس به سطر و ستون آن مربع باشد. در این مرحله ما روش‌های استاندارد راگسترش می‌دهیم و از روش استاندارد ضرب ماتریسی استفاده خواهیم کرد. مرجع کار اصلی و کلی استراسن روش حذفی گاوس است.

تمرین‌ها

۱) فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$D = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ و مطلوب است محاسبه عبارتهای زیر در صورت وجود.

الف) $A + B$ (ب) $2B$ (ج) $-D$ (د) $C + D$

.(ه) $A + D$ (و) $2A + B$ (ز) $B - A$

۲) فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 6 & -8 & 2 & -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -4 & 9 & 3 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$D = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ و مطلوب است محاسبه عبارتهای زیر در صورت وجود.

الف) $A + B$ (ب) $4B$ (ج) $-3D$ (د) $2C - 3B$

.(ه) $-A$ (و) $2D + 3A$ (ز) $A + D$



۳) فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبه عبارتهای زیر در صورت وجود.
 الف) AB ب) BA ج) AC د) CA .
 (تذکر: $A^2 = AA$).
 ح) BD ز) DC و) AD ه) B^2 .

۴) فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبه عبارتهای زیر در صورت وجود.
 الف) BA ب) AB ج) CB د) AC .
 (تذکر: $B^2 = BB$).
 ح) DB ز) DA و) AC ه) CD .

۵) فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

د) $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$. عبارات زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.
 الف) $2A - 3(BC)$ ب) AB ج) $AC - BD$ د) $CD - 2D$.
 (نکته: $C^3 = CCC$, $C^2 = 2(D^2)$, $(C^2)^2 = 4(D^4)$, $(CD)^2 = CD + 2(DC)$, $(AB)^2 = BA$).

۶) فرض کنید A یک ماتریس 5×3 و B یک ماتریس 2×5 و C یک ماتریس 4×3 و D یک ماتریس 2×4 و E یک ماتریس 5×4 باشند. مشخص کنید کدامیک از عبارت‌های ماتریسی زیر وجود دارند و در صورت وجود اندازه آنها را به دست آورید.

الف) $AB + CD$ ب) EB ج) AC د) DA .
 (تذکر: $(CD)^2 = CD + 2(CD)$, $(EB)^2 = EB + 2(EB)$, $(AC)^2 = AC + 2(AC)$, $(AB)^2 = BA$).



۷) فرض کنید A یک ماتریس 2×2 و B یک ماتریس 2×2 و C یک ماتریس 2×3 و E یک ماتریس 1×3 باشند. تعیین کنید کدامیک از عبارتهای ماتریسی زیر وجود دارد و در صورت وجود اندازه هر یک از ماتریس‌های نتیجه شده را مشخص کنید.

$$DC + BA \quad B^T + 3(CD) \quad (A^T)C \quad AB \quad \text{الف) (ب) (ج) (د) (ه)}$$

$$.3(BA)(CD) + (4A)(BC)D \quad (j) \quad C = 3D \quad (و) \quad DA - 2(DB) \quad (ه)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & 6 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 5 & -6 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{۸) فرض کنید } O_2 \text{ و } I_3 \text{ به ترتیب}$$

ماتریس‌های صفر و همانی باشند نشان دهید:

$$A + O_2 = O_2 + A = A, \quad BI_3 = I_3 B = B, \quad BO_2 = O_2 B = O_2$$

۹) فرض کنید $D = BA$ و $C = AB$ و ماتریس‌های A و B به صورت زیر می‌باشند:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{درایه‌های خواسته شده ماتریس‌های } C \text{ و } D$$

را بدون محاسبه کل ماتریس به دست آورید.

$$\text{الف) (ب) (ج) (د) (ه) } .d_{22} \quad c_{21} \quad c_{22} \quad d_{12} \quad r_{21} \quad r_{22} \quad s_{11} \quad s_{22}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{۱۰) فرض کنید } S = QR \text{ و } R = PQ \text{ که در آنها}$$

درایه‌های زیر را در صورت وجود R و S بدون محاسبه کل ماتریس‌ها، تعیین کنید.

$$\text{الف) (ب) (ج) (د) (ه) } .r_{21} \quad r_{22} \quad s_{11} \quad s_{22}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{۱۱) اگر درایه‌هایی که در زیر}$$

داده شده‌اند را برای $D = AB + 2C$ بدون محاسبه کامل ماتریس به دست آورید.

$$\text{الف) (ب) (ج) (د) (ه) } .d_{22} \quad d_{12}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 7 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{۱۲) اگر}$$

در زیر داده شده‌اند را برای $D = C^T(AB)$ بدون محاسبه کامل ماتریس به دست آورید.

$$\text{الف) (ب) (ج) (د) (ه) } .d_{21} \quad d_{11} \quad d_{22}$$



۱۳) هر کدام از دستگاه معادلات خطی زیر را به صورت یک معادله ماتریسی منفرد $AX = B$ بنویسید.

$$3x_1 - 8x_2 = 4 \quad \text{الف)$$

$$-2x_1 + 3x_2 = -4 \quad \text{ب)}$$

$$6x_1 - 2x_2 = 7 \quad \text{ج)}$$

۱۴) هر کدام از دستگاه معادلات خطی زیر را به صورت یک معادله ماتریسی منفرد $AX = B$ بنویسید:

$$-x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 1 \quad \text{الف)$$

$$4x_1 - 7x_2 + x_3 = -3 \quad \text{ب)}$$

$$3x_1 + x_2 = 6 \quad \text{ج)}$$

$$4x_1 - 3x_2 = -2 \quad \text{د)}$$

$$5x_2 + 2x_3 = 6$$

$$7x_1 + 5x_2 + x_3 = -9$$

$$x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 2$$

$$2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12$$

۱۵) ماتریس A را به گونه‌ای درنظر بگیرید که سطر سوم آن همگی صفر هستند و B را ماتریسی درنظر بگیرید که حاصل ضرب AB وجود داشته باشد سپس ثابت کنید که سطر سوم AB همگی صفر می‌باشد.

۱۶) D را ماتریسی درنظر بگیرید که ستون دوم آن همگی صفر باشد، C را ماتریسی فرض کرده که حاصل ضرب CD وجود داشته باشد. ثابت کنید که ستون دوم CD همگی صفر هستند.

۱۷) را یک ماتریس $r \times m$, B را یک ماتریس $n \times r$ و $C = AB$ درنظر بگیرید. زیرماتریس‌های ستونی ماتریس B را B_1, B_2, \dots, B_n و زیرماتریس‌های ستونی ماتریس C را C_1, C_2, \dots, C_n بنویسید. می‌توانیم B را به شکل $[B_1, B_2, \dots, B_n]$ و C را به شکل $[C_1, C_2, \dots, C_n]$ فرض نماییم. ثابت کنید که $C_j = AB_j$.

۱۸) A و B را به صورت ماتریس‌های زیر درنظر بگیرید. از نتیجه تمرین ۱۷ برای محاسبه ستون سوم ماتریس AB , بدون محاسبه کل حاصل ضرب استفاده نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

۱۹) ماتریس‌های A و B را به صورت زیر درنظر بگیرید. سطر ۲ ماتریس AB را بدون محاسبه کل



حاصل ضرب ماتریس محاسبه نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

۲۰) با لیست کردن کلیه ضرب‌ها و جمع‌ها نشان دهید که الگوریتم استراسن برای محاسبه حاصل ضرب دو ماتریس 2×2 به 7 ضرب و 18 جمع نیاز دارد.

۲۱) با استفاده از الگوریتم استراسن حاصل ضرب AB ، ماتریس‌های 2×2 زیر را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{(الف)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(ج)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{(د)}$$

۲۲) با استفاده از الگوریتم استراسن حاصل ضرب AB ، ماتریس‌های 3×3 زیر را تعیین کنید.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(الف)}$$

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)}$$

۶-۲ ویژگی‌های اعمال ماتریس‌ها

ما اعمال جمع، ضرب اسکالر (عددی یا نرده‌ای) و ضرب ماتریس‌ها را تعریف کردی‌ایم. در این قسمت در مورد ویژگی‌های جبری این عملیات بحث می‌کنیم. تاکنون دیده‌ایم که ماتریس‌ها دارای بعضی خصوصیات جبری اعداد حقیقی می‌باشند «اما همگی این خصوصیات را ندارند». برای مثال دیده‌ایم که ماتریس‌های همانی نقش مشابه به 1 را در عبارت $AI_n = I_n A = A$ به عنده دارند. (بازی می‌کند). همچنین دیدیم که ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ندارند در حالی که ضرب اعداد حقیقی دارای خاصیت جابجایی است.



۱-۶-۲ قضیه: فرض کنیم A , B و C سه ماتریس و a , b و c اسکالارهای دلخواه باشند. همچنین

فرض کنیم اندازه ماتریس‌ها به گونه‌ای باشند که عملیات زیر قابل اجرا باشند:

ویژگی‌های جمع ماتریس‌ها و ضرب اسکالار

۱) خاصیت جابجایی عمل جمع

$$A + B = B + A$$

۲) خاصیت شرکت‌پذیری

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

۳) در اینجا \circ ماتریس صفر می‌باشد.

$$A + \circ = \circ + A = A$$

۴) خاصیت توزیع‌پذیری جمع

$$c(A + B) = cA + cB$$

۵) خاصیت توزیع‌پذیری جمع

$$(a + b)C = aC + bC$$

(۶)

$$(ab)C = a(bC)$$

ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها

۱) خاصیت شرکت‌پذیری

$$A(BC) = (AB)C$$



۲) خاصیت توزیع‌پذیری ضرب

$$A(B + C) = AB + AC$$

۳) خاصیت توزیع‌پذیری ضرب

$$(A + B)C = AC + BC$$

۴) در اینجا I_n ماتریس واحد مناسب می‌باشد.

$$I_n = I_n A = A$$

نکته: به طور کلی $AB \neq BA$ (ضرب ماتریس‌ها تعویض‌پذیر نمی‌باشد).

هر کدام از این نتایج یک تساوی بین ماتریس‌ها را بیان می‌کند. می‌دانیم که دو ماتریس زمانی با یکدیگر برابر هستند که دارای اندازه مساوی باشند و درایه‌های نظیر به نظیر آنها با هم یکی باشند. این روش را برای خاصیت شرکت‌پذیر عمل جمع توضیف می‌کنیم.

از خواننده خواسته می‌شود تا از یک روش یکسان برای اثبات بعضی از نتایج دیگر در تمرین‌هایی که در ادامه می‌یابد استفاده نماید. با توجه به قانون جمع ماتریس $A + B = B + A$ می‌دانیم که $A + B$ و $B + A$ دو ماتریس هم اندازه می‌باشند. لذا کافی است نشان دهیم که درایه‌های نظیر به نظیر (منتظر) آنها با هم برابرند. درایه (i, j) ام هر ماتریس را در نظر بگیرید:

$$A + B = \text{درایه } (i, j) \text{ ام از } a_{ij} + b_{ij}$$

$$B + A = \text{درایه } (i, j) \text{ ام از } b_{ij} + a_{ij}$$

جمع اعداد حقیقی تعویض‌پذیر هستند. $(a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij})$.

درایه‌های نظیر به نظیر $A + B$ و $B + A$ مساوی هستند. بنابراین $A + B = B + A$. خاصیت‌های شرکت‌پذیری جمع و ضرب ماتریس‌ها به ما این فرصت را می‌دهد که ضرب و جمع را به بیش از ۲ ماتریس گسترش دهیم. می‌توانیم حاصل جمع‌ها و حاصل ضرب‌های نظیر ABC , $A + B + C$ بدون پرانتز بنویسیم، زیرا نتایج یکسانی به دست می‌آید و این که چگونه این ماتریس‌ها دسته‌بندی می‌شوند مهم نیست. مثال‌های زیر نشان دهنده این مفهوم‌هاست.

مثال ۱: $A + B + C$ را برای سه ماتریس زیر تعیین نمایید. فرض کنید که

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$



حل: A, B و C را با اضافه کردن درایه‌های متناظر اضافه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A + B + C &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+3+0 & 3-7-2 \\ -4+8+5 & 5+1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

طمیناً حاصل ضرب های ماتریس‌های $ABCD$ در حالی بوجود می‌آیند که حاصل ضرب های دیگر ایجاد نخواهد شد. می‌توانیم با استفاده از مقایسه تعداد سطرها و ستون‌ها در ماتریس‌های کنار هم قرار گرفته در حاصل ضرب تعیین کنیم که آیا یک حاصل ضرب وجود دارد یا نه؟

مثال ۲: ABC را برای سه ماتریس داده شده زیر را محاسبه نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حل: قبل از شروع به ضرب ماتریس‌ها باید بررسی کنیم که آیا حاصل ضرب ABC موجود می‌باشد. به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & & C \\ 2 \times 2 & & 2 \times 3 & & 3 \times 1 \\ \downarrow \text{match} & & \downarrow \text{match} & & \downarrow \\ \text{size of product is } 2 \times 1 & & & & \end{array} = ABC$$

حاصل ضرب موجود می‌باشد و یک ماتریس 1×2 خواهد بود. از آنجا که ضرب ماتریس‌ها شرکت‌پذیر خواهد بود، ماتریس‌ها در حاصل ضرب ABC را می‌توان در هر حالتی برای حاصل ضرب طبقه‌بندی کرد. البته مدامی که ترتیب حفظ گردد. به ما اجازه دهدیم که از دسته‌بندی یا گروه‌بندی $(AB)C$ استفاده نماییم.

احتمالاً این روش طبیعی‌ترین روش خواهد بود. اکنون داریم:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 11 \end{bmatrix} \\ (AB)C &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



از آنجا که ضرب ماتریسی شرکت‌پذیر می‌باشد، ما در تقسیم‌بندی ماتریس‌ها با یکدیگر یک انتخاب داریم که آن حاصل ضرب زنجیری از ماتریس‌های است. زمانی که ماتریس‌های زیادی در یک عمل ضرب وجود داشته باشند (چند ماتریس در یکدیگر ضرب شوند) توالی انتخاب شده برای ضرب می‌تواند تا حد زیادی بر میزان (ضرب زنجیری ماتریس‌ها) اثر بگذارد. مثال زیر مفاهیم فوق را توضیح می‌دهد.

مثال ۳: ماتریس‌های A , B و C مثال قبل را در یکدیگر ضرب نمایید. از توالی (ترتیب) حاصل‌ضرب‌ها استفاده نمایید. تعداد حاصل‌ضرب‌هایی که شامل دو روش $C(AB)$ و $(BC)A$ که از محاسبه ABC به دست می‌آیند را با یکدیگر مقایسه نمایید.

حل: داریم:

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

و

با توجه به خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها، به جواب مشابه با جواب قبلی رسیدیم. هر چند اگر خواننده از هر دو روش برای مقایسه استفاده نماید، احساس خواهد کرد که روش دوم از روش اول بهتر و سریعتر است. محاسبه این روشها در کامپیوترها انجام می‌پذیرد. زیرا ضرب نسبت به جمع توسط کامپیوتر زمان بیشتری را مصرف می‌کند. تحلیل، آنالیز و کارایی و بازده معمولاً بر حسب ضرب‌ها صورت می‌گیرد. اجازه دهید که تعداد ضرب‌هایی که شامل هر دو روش است را بشماریم. با چشم‌بودن کردن از جمعها، تعداد عمل ضرب به اندازه ماتریس‌ها بستگی دارد نه به درایه‌های آنها. می‌توان نتیجه‌گیری زیر را نشان داد (تمرین ۸ ملاحظه شود).

اگر A یک ماتریس $m \times r$ و B یک ماتریس $r \times n$ باشد، تعداد ضرب‌های اسکالار موجود در محاسبه حاصل‌ضرب AB برابر با mnr می‌باشد. اندازه ماتریس‌های ما عبارتند از:

$$A_{2 \times 2}, B_{2 \times 2}, C_{2 \times 1} = D_{2 \times 1}$$

اکنون به دو روش جدا از هم به $A(BC)$ و $(AB)C$ نگاهی می‌اندازیم:

F : محاسبه $AB(C)$ در دو مرحله انجام می‌پذیرد با استفاده از ماتریس میانی F

- فرض کنیم $F, FC = D, AB = F$ ماتریس 3×2 است.



- تعداد عمل ضرب برای محاسبه F , $F = 2 \times 2 \times 3 = 12$ است.

- تعداد عمل ضرب برای محاسبه D , $D = 2 \times 3 \times 1 = 6$ است.

- بنابراین تعداد کل ضرب‌ها برای محاسبه $(AB)C$, 18 است.

محاسبه $A(BC)$ در دو مرحله انجام می‌پذیرد. $G \cdot AG = D$ و $BC = G$. یک ماتریس 1×2 است.

- تعداد ضرب‌ها برای محاسبه G , $G = 1 \times 3 \times 2 = 6$ است.

- تعداد ضرب‌ها برای محاسبه D , $D = 4 \times 2 \times 1 = 4$ است.

- بنابراین تعداد کل ضرب‌ها برای محاسبه $(AB)C$, مقدار 10 است.

مشاهده می‌کنیم که حتی برای این مسئله کوچک، تعداد ضرب‌های موجود در محاسبه ABC از 18 تا برای استفاده از ترتیب $(AB)C$ تا 10 تا برای استفاده از ترتیب $A(BC)$ تغییر می‌یابد. روش دوم برای ضرب ماتریس‌ها نیز تقریباً دو برابر سریعتر از روش اول می‌باشد. اکنون این ضرب را در ماتریس‌های بزرگتر مشاهده می‌کنیم. فرض کنیم که می‌خواهیم حاصل ضرب $ABCD$ را برای ماتریس‌هایی با سایزهای زیر محاسبه کنیم:

$$A_{5 \times 12} \cdot B_{12 \times 87} \cdot C_{87 \times 2} \cdot D_{2 \times 12} = E_{5 \times 42}$$

۵ روش متفاوت برای محاسبه این حاصل ضرب وجود دارد. تعداد ضرب‌های موردنیاز برای هر روش از قرار

زیر می‌باشد:

روش	تعداد ضرب‌ها
$((AB)C)D$	$1,025$
$(A(BC))D$	$4,494$
$(AB)(CD)$	$35,322$
$A((BC)D)$	$8,358$
$A(B(CD))$	$65,058$

مؤثرترین روش 14 بار سریعتر از کندترین روش می‌باشد. (برای استخراج این اعداد، تمرین‌های زیر را ببینید).

برای ضرب زنجیره‌ای از ماتریس‌ها به مؤثرترین روش، یک الگوریتم به کار رفته است، این الگوریتم از تکنیکی به نام برنامه‌نویسی پویا استفاده می‌نماید. می‌دانیم که در جبر از قوانین حذف استفاده می‌شود:

- اگر $a \neq b$ و $c = ab$ آنگاه $c = ac$.



- اگر $p = pq = ۰$ آنگاه $۰ = q = p$.

هرچند نتایج متناظر بالا برای ماتریس‌ها صادق نمی‌باشند، به عبارتی در حالت کلی:

$$B = C \quad AB = AC \quad \bullet$$

$$PQ = QP = ۰ \quad \bullet$$

این عبارتها را با استفاده از چندین مثال روش‌نمی‌سازیم:

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -24 \end{bmatrix} \quad \text{ماتریس‌های } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و ماتریس‌های } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

را درنظر بگیرید. مشاهده می‌کنید که $AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ اما $B \neq C$. ماتریس‌های

$$P \neq Q = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

۷-۲ توان ماتریس‌ها

علاوه بر کار رفته برای توان ماتریس‌ها مشابه علاماتی هستند که برای توان اعداد حقیقی به کار گرفته می‌شوند. اگر A یک ماتریس مربعی باشد آنگاه A ، که k بار (مرتبه) در خودش ضرب می‌شود به صورت A^k نوشته می‌شود:

$$A^k = AA \dots A \quad \text{مرتبه (برابر) } k$$

قوانين آشنای توانهای اعداد حقیقی برای ماتریس‌ها نیز کاربرد دارد.

۱-۷-۲ قضیه: اگر A یک ماتریس مربعی $n \times n$ و r و s اعداد صحیح غیرمنفی باشد آنگاه (بنابر تعريف):

$$1) A^r A^s = A^{r+s} \quad 2) (A^r)^s = A^{rs} \quad 3) A^\circ = I_n$$

قانون اول را بررسی و اثبات می‌کنیم، اثبات قانون دوم و سوم نیز مشابه قانون اول است.

$$A^r A^s = \underbrace{A \dots A}_{r \text{ بار}} \cdot \underbrace{A \dots A}_{s \text{ بار}} = \underbrace{A \dots A}_{r + s \text{ بار}} = A^{r+s}$$



مثال ٤: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

حل: این مثال نشان می‌دهد که چطور از قوانین بالا برای کاهش دادن میزان ضرب ماتریس‌ها می‌توان استفاده کرد. می‌دانیم که $A^4 = AAAA$. ما می‌توانستیم ۳ نوع حاصل ضرب برای ماتریس انجام دهیم که به A^4 برسیم. اما ما می‌توانیم از قانون ۲ در بالا برای محاسبه $(A^2)^2 = A^4$ استفاده نماییم و سپس به این نتیجه می‌رسیم که از دو حاصل ضرب می‌توان استفاده کرد. پس داریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -19 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

مثال زیر این مطلب را توصیف می‌کند که ویژگی‌های اعمال ماتریسی می‌تواند برای ساده کردن عبارت‌های ماتریسی و به طریق مشابه برای ساده کردن عبارت‌های جبری معمولی مورد استفاده قرار بگیرند.

مثال ۵: عبارت ماتریسی زیر را ساده کنید:

$$A(A + 2B) + 2B(2A - B) - A^2 + 2B^2 - 5AB$$

حل: با استفاده از ویژگی‌های اعمال ماتریس داریم:

$$\begin{aligned} A(A + 2B) + 2B(2A - B) - A^2 + 2B^2 - 5AB &= A^2 + 2AB - 6BA - 2B^2 - A^2 \\ &\quad + 2B^2 - 5AB \\ &= -3AB + 6BA + 4B^2 \end{aligned}$$

دو ساده‌سازی $-3AB + 6BA$ ، ضرب ماتریسی تعویض پذیر نمی‌باشد.

تمرینات

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

۱) فرض کنید

حال در صورت امکان حساب کنید:



الف) AB و DA ، ج) AC و CA ، ب) BA و AB

مشاهده می‌کنیم که $AD \neq DA$ و $AC \neq CA$ و $BA \neq AB$ وجود ندارد. تمامی حالت‌های ممکن را هنگامی که مرتبه در ضرب ماتریسی وارونه می‌گردد در حال نمایش است.

(۲) $A(BC)$ و $(AB)C$ را برای ماتریس‌های زیر حساب کنید:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

مشاهده می‌کنیم که این حاصل‌ضرب‌ها مساوی می‌باشند، خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریسی در حال نمایش است.

(۳) به دو روش مختلف حاصل ضرب ABC را برای سه ماتریس زیر محاسبه کنید.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

هر کدام از عبارتهای زیر را محاسبه کنید.
 (۴) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

الف) AC^t

ب) $A^t - 3B$

ج) $BC^t + B^t$

د) $3A^t + 2A - I_2$

هر کدام از عبارتهای زیر را محاسبه کنید.
 (۵) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

الف) $(AB)^t$

ب) $A - 3B^t$

ج) $A^t B = 2C^t$

د) $2A^t - 2A + 3I_2$



- ٦) اگر اندازه ماتریس‌های A , B , C و D به ترتیب 2×2 , 4×6 , 2×4 , 3×3 و 6×3 باشند در این صورت اندازه ماتریس‌های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف) ABC

ب) ABD

ج) CAB

د) $DCAB$

ه) $A^T BDC$

- ٧) اگر اندازه ماتریس‌های P , R , S , Q , T به ترتیب 3×3 , 1×3 , 2×1 , 3×2 و 1×1 باشند در این صورت اندازه ماتریس‌های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف) PQR

ب) $PQ + TPQ$

ج) $5QP - 2TPR$

د) $4SPQ + 2PQ$

ه) $QRSR + QR$

- ٨) اگر A یک ماتریس $m \times r$ و B یک ماتریس $r \times n$ باشد، آنگاه تعداد ضرب‌های عددی موجود در محاسبه ضرب AB برابر است با mnr . فرض کنید C یک ماتریس $m \times s$ باشد. فرمولی را برای تعداد ضرب‌های ماتریسی موجود در محاسبه $C(AB)$ و $(BC)A$ به دست آورید.

- ٩) اگر A و B دو ماتریس همان‌اندازه باشند، تعداد ضرب‌های اسکالر موردنیاز برای محاسبه AB را محاسبه کنید.

الف) $A_{2 \times 2}$ و $B_{3 \times 7}$

ب) $A_{5 \times 2}$ و $B_{2 \times 8}$

ج) $A_{1 \times 9}$ و $B_{9 \times 27}$

د) $A_{8 \times 5}$ و $B_{5 \times 12}$

- ١٠) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. تعداد ضرب‌های اسکالر موردنیاز برای محاسبه A^3 , A^2 و A^m را محاسبه کنید.



۱۱) تعداد ضربهای موردنیاز برای محاسبه ضربهای $(AB)C$ و $A(BC)$ زمانی که A ، B و C دارای اندازه‌های زیر باشند را به دست آورید.

$$\text{الف) } A_{2 \times 4} \text{ و } B_{4 \times 2} \text{ و } C_{2 \times 1}$$

$$\text{ب) } A_{3 \times 7} \text{ و } B_{7 \times 5} \text{ و } C_{5 \times 2}$$

$$\text{ج) } A_{6 \times 2} \text{ و } B_{2 \times 5} \text{ و } C_{5 \times 2 \times 5}$$

$$\text{د) } A_{2 \times 5} \text{ و } B_{5 \times 4} \text{ و } C_{4 \times 2}$$

$$\text{ه) } A_{7 \times 9} \text{ و } B_{9 \times 2} \text{ و } C_{2 \times 2}$$

۱۲) تعداد ضربهای موردنیاز برای محاسبه ضربهای $D((AB)C)$ و $((AB)CD)$ و $(A((BC)D))$ زمانی که A ، B ، C و D دارای اندازه‌های زیر می‌باشند را به دست آورید.

$$A_{5 \times 12}, B_{12 \times 87}, C_{87 \times 7}, D_{7 \times 42}$$

(مثالی در این بخش داده شده بود).

۱۳) فرض کنید A یک ماتریس $m \times r$ و B یک ماتریس $r \times n$ باشند. فرمولی برای تعداد جمع‌های اسکالارکه شامل محاسبه ضرب AB می‌باشد را استخراج کنید. فرض کنید C یک ماتریس $s \times n$ باشند. فرمولی برای تعداد جمع‌های اسکالارکه شامل محاسبه $(AB)C$ و $A(BC)$ است را به دست آورید. فرمول‌های خود را برای ماتریس‌های $A_{2 \times 2}$ و $B_{2 \times 1}$ و $C_{2 \times 2}$ امتحان کنید.

جمع، ضرب اسکالار و ضرب ماتریس‌ها

۱۴) فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. ثابت کنید AB و BA هر دو وجود دارند به شرطی که اگر B یک ماتریس $n \times m$ باشد.

۱۵) ویژگی‌های ماتریسی زیر که در این بخش آمده است بررسی کنید.

الف) خاصیت شرکت‌پذیر جمع ماتریس‌ها

$$C(A + B) = CA + CB$$

$$AI_n = I_n A = A \quad \text{باشد } n \times n \text{ ماتریس}$$

$$. AI_n = A \quad \text{فرض کنید } A \text{ یک ماتریس } n \times n \text{ باشد. نشان دهید که}$$



۱۷) فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ و O_{mn} یک ماتریس $m \times n$ صفر باشند. فرض کنید A یک ماتریس $n \times m$ باشد. نشان دهید اگر $c = 0$ آنگاه، $cA = O_{mn}$ یا $A = O_{mn}$ یک اسکالر باشد.

۱۸) عبارت‌های ماتریسی زیر را ساده کنید.

$$A(A - 4B) - 2B(A + B) - A^2 + 4B^2 + 3AB \quad \text{(الف)}$$

$$B(2I_n - BA) + B(4I_n + 5A)B - 3BAB + 4B^2A \quad \text{(ب)}$$

$$(A - B)(A + B) - (A + B)^2 \quad \text{(ج)}$$

۱۹) عبارت‌های ماتریسی زیر را ساده کنید.

$$A - (A + B) - B(A + B) \quad \text{(الف)}$$

$$A(A - B)B + B^2AB - 3A^2 \quad \text{(ب)}$$

$$(A + B)^3 - 2A^3 - 3ABA - A^3B^2 - B^3 \quad \text{(ج)}$$

۲۰) تمام ماتریس‌هایی که با ماتریس‌های زیر جابجا می‌شوند را پیدا کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(الف)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(ج)}$$

۲۱) نادرستی اثبات زیر در چیست؟

فرض کنید $AX = B$ یک دستگاه معادلات خطی با ریشه‌های X_1 و X_2 باشد. بنابراین:

$$AX_1 = B, AX_2 = B \quad AX_1 = AX_2 \quad X_1 = X_2$$

توان ماتریس‌ها

۲۲) الف) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. ثابت کنید A^2 نیز یک ماتریس $n \times n$ است.

ب) فرض کنید A ماتریس $n \times n$ باشد $m \neq n$. ثابت کنید A^2 وجود ندارد. بنابراین ما فقط در

مورد توان ماتریس‌های مربعی صحبت می‌کنیم.



۲۳) اگر A و B ماتریس‌های مربعی با اندازه‌های مساوی باشند، ثابت کنید:

$$(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

تحت چه شرایطی این تساوی برقرار است؟

۲۴) اگر A و B ماتریس‌های مربعی با اندازه‌های مساوی باشند به طوری که $AB = BA$ آنگاه ثابت کنید $(AB)^2 = A^2B^2$. مثالی بیاورید که نشان دهد این نتیجه برای همه ماتریس‌های مربعی با اندازه‌های یکسان درست نمی‌باشد.

۲۵) اگر n عدد صحیح غیرمنفی باشد و A و B ماتریس‌های مربعی با اندازه یکسان باشد به طوری که آنگاه ثابت کنید که $(AB)^n = A^nB^n$. با یک مثال نشان دهید که این ویژگی برای همه ماتریس‌های مربعی با اندازه مساوی در حالت کلی صادق نمی‌باشد.

۲۶) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ مربعی باشد. در این صورت نشان دهید که برای هر دو عدد صحیح مثبت r, s داریم $(A^r)^s = (A^s)^r$.

ماتریس‌های قطری

۲۷) فرض کنید A و B ماتریس‌های قطری با اندازه‌های مساوی و c یک اسکالر باشد.

الف) ثابت کنید $A + B$ قطری است.

ب) cA قطری است.

ج) AB قطری است.

۲۸) اگر A و B ماتریس‌های قطری با اندازه‌های برابر باشند ثابت کنید $AB = BA$.

۲۹) فرض کنید که ماتریس A با ماتریس قطری که دارای دو درایه غیریکسان باشند جابجا شود. در این صورت نشان دهید که ماتریس A یک ماتریس قطری است.

ماتریس‌های خودتوان و پوچ توان

ماتریس مربعی A را خودتوان گوئیم هرگاه $A^2 = A \cdot A$ باشد. ماتریس مربعی A را پوچ توان گوئیم هرگاه عدد صحیح مثبت p وجود داشته باشد به طوری که $A^p = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ ، کوچکترین عدد صحیح در درجه پوچ توان ماتریس نامیده می‌شود.

۳۰) تعیین کنید که آیا ماتریس‌های زیر خودتوان هستند؟



$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{ب)} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{الف)} \\ \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} & \text{د)} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ج)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{و)} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ه)} \end{array}$$

۳۱) c, b و d را چنان بیابید که $\begin{bmatrix} 1 & b \\ c & d \end{bmatrix}$ خودتوان باشد.

۳۲) a, c و d را چنان بیابید که $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$ خودتوان باشد.

۳۳) ثابت کنید اگر A و B خودتوان باشند و $AB = BA$ آنگاه AB نیز خودتوان می‌باشد.

۳۴) نشان دهید که اگر A خودتوان باشد و n عدد صحیح مثبت باشد آنگاه $A^n = A$

۳۵) نشان دهید که ماتریس‌های زیر پوچ توان، با درجهٔ پوچ توانی ۲ می‌باشند.

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} & \text{ج)} & \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ب)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{الف)} & & \end{array}$$

۳۶) نشان دهید که ماتریس زیر پوچ توان، با درجهٔ پوچ توانی ۳ می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۸-۲ ماتریس‌های متقارن و مجموعه‌ای در باستان‌شناسی

در این بخش اعمال جبری روی ماتریس‌ها را توسعه داده و ملاحظه می‌کنیم که چطور باستان‌شناسان ماتریس‌ها را برای تعیین نظم و ترتیب زمانی مصنوعات دست‌ساز استفاده می‌کنند.

۱-۸-۲ تعریف: ترانهاده ماتریس A که با A^t نشان داده می‌شود ماتریسی است که از جایجا کردن سطر و ستون A به صورت زیر دست می‌آید.

سطر اول A , اولین ستون A^t می‌شود. سطر دوم, دومین ستون و همین طوراً دامه می‌یابد. درایه (j, i) ام از A می‌شود درایه (i, j) ام از A^t , اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد پس A^t یک ماتریس $n \times m$ است.



مثال ۱: ترانهاده هر یک از ماتریس‌های زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad C = [-1 \ 3 \ 4]$$

حل: سطرها را به عنوان ستون می‌نویسیم. داریم:

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \quad B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} \quad C^t = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌کنیم که $(1, 3)$ امین درایه که -7 است می‌شود. $(1, 3)$ امین درایه از B^t . همچنان توجه کنید که ماتریس 3×2 , B , به ماتریس 2×3 , B^t , تبدیل می‌گردد و ماتریس 3×1 , C , به ماتریس 1×3 , C^t , تبدیل می‌گردد.

ما سه عمل برای ماتریس‌ها بیان کردیم که جمع، ضرب اسکالار و ضرب نامیده می‌شد. قضیه زیر معرف این مطلب است که چطور ماتریس ترانهاده با این عملیات‌ها در ارتباط می‌باشد.

۲-۸-۲ قضیه (خواص ترانهاده)

فرض کنیم A و B دو ماتریس و c یک اسکالار باشد.

همچنان فرض کنیم که اندازه ماتریس‌ها طوری هستند که عملیات را می‌توان اجرا نمود در این صورت داریم

$$(A + B)^t = A^t + B^t \quad (1)$$

$$(cA)^t = cA^t \quad (2)$$

$$(AB)^t = B^t A^t \quad (3)$$

$$(A^t)^r = (A^r)^t \quad (4)$$

$$(A^t)^t = A \quad (5)$$

ما تکنیک‌هایی را ارائه می‌دهیم که در اثبات نتایج شامل ترانهاده‌ها از بازبینی خاصیت سوم استفاده می‌شوند. از خواننده تقاضا می‌شود که نتایج دیگری را که در تمرین‌های زیر می‌آید، استخراج نماید.

برای اثبات $(AB)^t = B^t A^t$ کافی است نشان دهیم که درایه‌های متناظر با هم، برابرند. داریم:

(i, j) امین درایه از ماتریس t (AB) برابر است با (i, j) امین درایه از AB که برابر است با:

$$a_{j1}b_{1i} + \cdots + a_{jn}b_{ni}$$

همچنان، (i, j) امین درایه از $B^t A^t$ برابر است با:

(ستون j از A^t) \times (سطر i از B^t)



که مساوی است با

$$(B^t \text{ زام از } A) \times (\text{ستون } i \text{ نام از } A)$$

و در نتیجه برابر است با

$$b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{ni}a_{jn} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jn}b_{ni}$$

و این نشان می‌دهد که $(AB)^t = B^t A^t$

۳-۸-۲ تعریف: ماتریس A را متقارن گوئیم هرگاه $A^t = A$. به عنوان مثال ماتریس‌های زیر

متقارن می‌باشند:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 7 & 8 \\ -4 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

مثال ۲) ماتریس زیر که نشان دهنده فاصله به مایل بین شهرهای مختلف آمریکا می‌باشد در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{c} \text{Chicago} \begin{bmatrix} \text{Chicago} & LA & Miami & NY \\ 0 & 2092 & 1374 & 841 \end{bmatrix} \\ \text{Los-Angeles} \begin{bmatrix} \text{Chicago} & LA & Miami & NY \\ 2092 & 0 & 2723 & 2797 \end{bmatrix} \\ \text{Miami} \begin{bmatrix} \text{Chicago} & LA & Miami & NY \\ 1374 & 2733 & 0 & 1336 \end{bmatrix} \\ \text{New York} \begin{bmatrix} \text{Chicago} & LA & Miami & NY \\ 841 & 2797 & 1229 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

مشاهده خواهیم کرد که این ماتریس متقارن می‌باشد. تمام عضوهای آن به صورت زوج ظاهر و به صورت متقارن در کنار قطر اصلی قرار گرفته‌اند. دلیلی برای این مطلب وجود دارد که مسافت از شهر x تا شهر y مانند مسافت از شهر y تا شهر x می‌باشد. برای مثال فاصله از شیکاگو تا میامی، حدود ۱۳۷۴ است (سطر اول - ستون سوم) که مانند فاصله و مسافت از میامی تا شیکاگو خواهد بود (سطر سوم - ستون اول). تمام این ماتریس‌ها متقارن خواهند بود.

اصطلاح و گزاره اگر و تنها اگر و شرط لازم و کافی به طور متناول در ریاضیات به کار می‌روند و ما به طور متناول و مکرر در این قسمت از آنها استفاده خواهیم کرد. این اصطلاحات معنی یکسانی می‌دهند. فرض



کنید p و q عبارت هستند. می‌نویسیم $q \rightarrow p$ و همچنین $p \rightarrow q$ گزاره دومی، گزاره عکس نامیده می‌شود. ما می‌گوئیم p اگرونهای q یا p لازم و کافی است برای q ، مثال زیر بیانگر این مطلب است.

مثال ۳) اگر A و B ماتریس‌های متقارن و هماندازه باشند آنگاه ضرب AB متقارن است اگرونهای $AB = BA$.

هر مسئله «اگر و تنها اگر» شامل دو بخش است که ما آن را نشان می‌دهیم.

الف) اگر $AB = BA$ متقارن باشد آنگاه $AB = BA$

ب) اگر $AB = BA$ آنگاه $AB = BA$ متقارن است.

اثبات الف) فرض کنیم $AB = BA$ متقارن باشد آنگاه :

$$AB = (AB)^t \quad \text{با استفاده از تعریف ماتریس متقارن}$$

$$= B^t A^t \quad \text{با استفاده از ترانهاده ضرب}$$

$$= BA \quad \text{چون } B \text{ و } A \text{ ماتریس‌های متقارن می‌باشند.}$$

اثبات ب) فرض کنیم $AB = BA$ آنگاه:

$$(AB)^t = (BA)^t \quad \text{با استفاده از ترانهاده ضرب}$$

$$= A^t B^t \quad \text{با استفاده از ترانهاده ضرب}$$

$$= AB \quad \text{چون } B \text{ و } A \text{ ماتریس‌های متقارن هستند.}$$

بنابراین AB متقارن می‌باشد. بنابراین برای دو ماتریس متقارن هماندازه A و B ، ضرب AB متقارن است اگرونهای $AB = BA$. یا این که برای دو ماتریس متقارن و هماندازه B و A ، شرط لازم و کافی برای این که ضرب AB متقارن باشد این است که $AB = BA$.

ما در اینجا عددی را معرفی می‌کنیم که مربوط به ماتریس‌های مربعی می‌باشد که اثر (رد)^{۱)} ماتریس نام دارد.

۴-۸-۲ تعریف: فرض کنید A یک ماتریس مربعی است اثر (رد) ماتریس A با $\text{tr}(A)$ نشان داده می‌شود و برابر مجموع درایه‌های روی قطر اصلی A می‌باشد. بنابراین اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد.

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

1) trace



مثال ۴) اثر (trace) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 6 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ را تعیین کنید.

حل: داریم:

$$\text{tr}(A) = 4 + (-5) + 0 = -1$$

اثر ماتریس نقش مهمی در نظریه ماتریس و کاربرد آن دارد. به دلیل این که این عدد دارای خواص قابل توجهی است قبل ارزیابی است. این عدد در رشته‌هایی مانند مکانیک آماری، نسبت عام و مکانیک کوانتومی استفاده می‌شود.

قضیه زیر نشان می‌دهد که اثر (trace) چه رابطه‌ای با اعمال جمع ماتریس، ضرب اسکالر ماتریس، ضرب ماتریس و ترانهاده دارد.

۵-۸-۲ قضیه (خواص اثرا). فرض کنیم A و B دو ماتریس و c یک عدد اسکالر باشد، فرض کنیم اندازه‌های ماتریس‌ها طوری باشد که اعمال زیر قابل اجرا باشد:

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \quad (1)$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad (2)$$

$$\text{tr}(cA) = c \text{tr}(A) \quad (3)$$

$$\text{tr}(A^t) = \text{tr}(A) \quad (4)$$

نشان می‌دهیم که اثر $(A + B)$ برابر است با اثر A به اضافه اثر B . فرض کنیم درایه‌های قطر اصلی $A + B$ به صورت زیر باشد:

$$(a_{11} + b_{11}), (a_{22} + b_{22}), \dots, (a_{nn} + b_{nn})$$

آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A + B) &= (a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) + \dots + (a_{nn} + b_{nn}) \\ &= (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) + (b_{11} + b_{22} + \dots + b_{nn}) \\ &= \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \end{aligned}$$



۹-۲ ماتریس‌ها با درایه‌های اعداد مختلط

درایه‌های یک ماتریس ممکن است اعداد مختلط باشد. یک عدد مختلط به فرم زیر می‌باشد.

$$z = a + bi$$

که در آن a و b اعداد حقیقی هستند و $\sqrt{-1} = i$. a را قسمت حقیقی و b را قسمت موهومی z گویند.
فرض کنید $z_1 = a + bi$ و $z_2 = c + di$ اعداد مختلط باشند. قوانین زیر برای آنها صادق است:

تساوی: $z_1 = z_2$ اگر و فقط اگر $a = c$ و $b = d$

جمع: $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

تفریق: $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

ضرب:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a + bi)(c + di) = a(c + di) + bi(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi \\ &= ac + bdi + (ad + cb)i \\ &= (ac - bd) + (ad + cd)i \end{aligned}$$

مزوج عدد مختلط z به صورت $z = a - bi$ تعریف می‌شود.

مثال ۵) دو عدد مختلط زیر را در نظر بگیرید. $z_1 = 2 + 3i$ و $z_2 = 1 - 2i$ و $\bar{z}_1 = z_1 z_2$ را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2 + 3i) + (1 - 2i) \\ &= (2 + 1) + (3 - 2)i = 3 + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2 + 3i)(1 - 2i) = 2(1 - 2i) + 3i(1 - 2i) \\ &= 2 - 4i + 3i - 6i^2 \\ &= 8 - i \end{aligned}$$



ماتریس‌هایی که دارای اعداد مختلط هستند شبیه قوانین ماتریس‌ها با درایه‌های اعداد حقیقی با یکدیگر جمع ضرب و تغزیق می‌گردند.

مثال ۶ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 2+i & 3-2i \\ 4 & 5i \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2i \\ 1-i & 2+3i \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

حل: داریم:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 2+i & 3-2i \\ 4 & 5i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2i \\ 1+i & 2+3i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2+i+3 & 3+2i+2i \\ 4+1+i & 5i+2+3i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5+i & 3 \\ 5+i & 2+8i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB &= 2 \begin{bmatrix} 2+i & 3+2i \\ 4 & 5i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2i & 6-4i \\ 8 & 10i \end{bmatrix} \\ AB &= \begin{bmatrix} 2+i & 3-2i \\ 4 & 5i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2i \\ 1+i & 2+3i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2+i)2 + (3-2i)(1+i) & (2+i)(2i) + (3-2i)(2+3i) \\ (4)(2) + (5i)(1+i) & 4(2i) + (5i)(2+3i) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11+4i & 10+9i \\ 7+5i & -15+18i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

مزدوج ماتریس A با \bar{A} نشان داده می‌شود که با مزدوج کردن هر یک از درایه‌های ماتریس A حاصل می‌شود. همچنین ترانهاده مزدوج ماتریس A به صورت زیر تعریف و نوشته می‌شود:

$$A^* = \bar{A}^t$$

برای مثال اگر $A = \begin{bmatrix} 2+3i & 1-4i \\ 6 & 7i \end{bmatrix}$ باشد بنابراین:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2-3i & 1+4i \\ 6 & -7i \end{bmatrix}, \quad A^* = \bar{A}^t = \begin{bmatrix} 2-3i & 6 \\ 1+4i & -7i \end{bmatrix}$$

ماتریس مربعی C را هرمیتی گویند هرگاه $C = C^*$. به عنوان مثال ماتریس زیر هرمیتی است.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3-4i \\ 3+4i & 6 \end{bmatrix}$$



زیرا:

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3+4i \\ 3+4i & 6 \end{bmatrix} \quad C^* = \bar{C}^t = \begin{bmatrix} 2 & 3+4i \\ 3+4i & 6 \end{bmatrix} = C$$

برای ماتریس‌هایی که دارای درایه‌های اعداد مختلط هستند ماتریس‌های هرمیتی مهمتر از ماتریس‌های متقارن است. ویژگی‌های ترانهاده مزدوج شبیه ویژگی‌های قبلی ترانهاده است. این ویژگی‌ها را در قضیه زیر لیست می‌کنیم. اثبات تمرین‌ها به عهده خواننده می‌باشد.

۱-۹-۲ قضیه (خواص ترانهاده مزدوج) اگر A و B ماتریس‌هایی با درایه‌هایی از اعداد مختلط و \bar{z} یک عدد مختلط باشد آنگاه داریم

$$(A + B)^* = A^* + B^* \quad (1)$$

$$(zA)^* = \bar{z}A^* \quad (2)$$

$$(AB)^* = B^*A^* \quad (3)$$

$$(A^*)^* = A \quad (4)$$

اکنون وقت آن است که کار برد خوبی از ماتریس جبری ارایه دهیم.

۱۵ - ۲* سری‌ها و مجموعه‌ها در باستان‌شناسی

مسئله‌ای که باستان‌شناسان با آن روبرو هستند مکانها و آثار هنری در جایگاه ترتیب تاریخ و زمان آنها است. این شاخه از باستان‌شناسی در قرن ۱۹ توسط آقای فلیندر پیتر به نام ترتیب و نظم و تقویم اطلاعات آغاز شد. پیتری در مورد آرامگاه‌های ناگادا، بالاس و هوال که در مصر باستان بود مطالعاتی را به عمل آورد. (اطلاعات کربنی اخیر نشان می‌دهد که تمام قبرها از سال ۶۰۰ قبل از میلاد تا ۲۵۰۰ سال قبل از میلاد قرار گرفته است) پیتری از اطلاعات ۹۰۰ قبر برای نظم بخشیدن به آنها استفاده کرد و برای هر کدام از آنها دوره زمانی مشخصی را با استفاده از سفال پیدا کرد.

نگاهی اجمالی به مسئله اساسی مجموعه قبرها و تغییرات انجام شده خاکها و سفال به دست آمده خواهیم انداخت. یک فرض در باستان‌شناسی وجود دارد که دو قبر محتويات یکسان در یک زمان مشخص وجود دارد که از حد عادی کوچکتر می‌باشد. مدل ریاضی ساخته شده باعث می‌شود که اطلاعات مربوط به محتويات قبرها را در اختیار ما قرار دهد و بنابراین نظم قبرهای باستان را پیدا می‌کنیم. ماتریس A را به



گونه زیر می‌سازیم که تمام مؤلفه‌های آن ۱ یا ۰ می‌باشد که محتوی سفال قبرها را توصیف می‌کند. قبرها را ۱ و ۲ و ۳ و ... نوع سفالها را ۱ و ۲ و ۳ و ... ماتریس A را این گونه تعریف می‌کنیم:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر قبر } A \text{ شامل نوع سفال } j \text{ باشد} \\ 0 & \text{اگر قبر } A \text{ شامل نوع سفال } j \text{ نباشد} \end{cases}$$

ماتریس A شامل تمام اطلاعات درباره سفال و خاک قبرهای مختلف و متفاوت می‌باشد. حال مثال زیر این اطلاعات را در مورد ماتریس A به ما می‌دهد. مؤلفه g_{ij} از ماتریس $G = AA^t$ مساوی تعدادی انواع سفالی رایج برای هر دو قبر i و j می‌باشد. بنابراین بزرگترین g_{ij} نزدیکترین قبر i و قبر j در یک زمان معین می‌باشد. با امتحان درایه‌های G ، باستان‌شناس می‌تواند به ترتیب قبرها برسد. این نتیجه را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= G_{ij} = \text{درایه موجود در سطر } i \text{ و ستون } j \text{ از } G \\ &= (A^t)_{i\cdot} \times A_{j\cdot} \\ &= [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}] \begin{bmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{bmatrix} \\ &= a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \dots + a_{in}a_{jn} \end{aligned}$$

هر جمله از این جمع ۱ یا ۰ خواهد بود. برای مثال جمله $a_{iz}a_{jz}$ یک خواهد بود. اگر a_{iz} و a_{jz} هر دو یک باشند. اگر سفال نوع ۲ رایج باشد i و j قبرهای موردنظر هستند و صفر خواهند بود اگر سفال نوع ۲ از قبرهای i و j رایج نباشد. بنابراین تعداد یک‌ها در عبارت (g_{ij}) تعداد نمونه‌های سفال رایج برای قبرها i و j می‌باشد. ماتریس $P = A^t A$ به دو روش آنالوگ اطلاعاتی درباره اطلاعات ترتیبی و تقدیمی ظروف سفالی منتهی می‌شود.

فرض براین است که بزرگترین عدد قبرها در ۲ نمونه سفالهای پدید آمده می‌باشد. نزدیکترین آنها تاریخی است. مؤلفه p_{ij} از ماتریس $P = A^t A$ که تعداد قبرهای آن نمونه‌ای از سفال به دست آمده از مؤلفه‌های نام و زام می‌باشد. نزدیکترین نمونه‌های سفالی، i و j در زمان هستند با امتحان مؤلفه‌های P می‌توانیم به یک ترتیب سفالی تاریخی برسیم. به طور ریاضی می‌توان نشان داد که ماتریس‌های $P = A^t A$ و $G = AA^t$ ماتریس‌های متقابن هستند. علاوه بر آن می‌توان از نظر فیزیکی هنگامی که $P = A^t A$ و $G = AA^t$ ماتریس‌های متقابن هستند بحث و گفتگو شود (تمرین زیر را ببینید) که این موضوع نشان دهنده تطابق



و هماهنگی ریاضی با این بحث می‌باشد. این هماهنگی و تقارن نشان می‌دهد که تمامی این اطلاعات شامل درایه‌های بالایی قطر اصلی این ماتریس‌ها هستند. اطلاعات در زیر قطر اصلی کاملاً وارون درایه‌های دیگر است.

اکنون این روش را با یک مثال توضیح می‌دهیم. فرض کنید ماتریس A نشان دهنده ۳ سفال که شامل ۴ قبر می‌باشد، است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین برای مثال $a_{13} = 1$ بر قبر ۱ که شامل ۳ نوع سفال است دلالت دارد. (درایه‌های سازنده سطر اول و ستون سوم دلالت می‌کند) $a_{22} = 0$ براین نکته دلالت می‌کند که سطر دوم معادل ستون سوم نیست.

$$G = AA^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ضروری است که G کاملاً متقارن باشد، اطلاعات درایه‌های بالای قطر اصلی معادل درایه‌های زیر آن است. درایه‌های بالای قطر اصلی را به صورت سیستماتیک بررسی می‌کنیم.

رقم مشترک سطر اول و ستون دوم یک است. $g_{12} = 1$

رقم مشترک سطر اول و ستون سوم یک است. $g_{13} = 1$

رقم مشترک سطر اول و ستون چهارم صفر است. $g_{14} = 0$

رقم مشترک سطر دوم و ستون سوم صفر است. $g_{23} = 0$

رقم مشترک سطر دوم و ستون چهارم صفر است. $g_{24} = 0$

رقم مشترک سطر سوم و ستون چهارم یک است. $g_{34} = 1$

رقم مشترک سطر اول و ستون دوم اکثر اوقات به هم پیوسته‌اند. فرض می‌کنیم نمودار با ترکیب سطر اول و دوم شروع شود. $1 - 2$.

سپس سطر سوم به این نمودار اضافه می‌کنیم $1 = g_{12}$ زمانی که $0 = g_{22}$ بنابراین سطر سوم با سطر اول ترکیب می‌شود اما با سطر دوم ترکیب نمی‌شود. $1 - 2 - 3$.

سرانجام سطر چهارم را به نمودار اضافه می‌کنیم. $1 = g_{14}$ و $0 = g_{24}$. سطر چهارم با



سطر سوم ترکیب می‌شود با سطر ۱ و ۲ ترکیب نمی‌شود. (به یکدیگر نزدیک نیستند) داریم:

$$4 - 3 - 2$$

ریاضیات روش رسم این نمودار را به ما نمی‌گوید. دو امکان وجود دارد:

$$4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \quad \text{و} \quad 4 \longleftarrow 3 \longleftarrow 1 \longleftarrow 2$$

bastan shenasan معمولاً از منابع دیگر که در دو طرف سطر آمده آگاهند. بنابراین قدمت تاریخی سطرا را می‌دانستند ماتریس‌های G و P شامل اطلاعاتی درباره قدمت تاریخی سطرا و ستون‌ها و اهمیت نسبی اعضای آنها با هم می‌باشند.

این ماتریس‌ها متدالاً بزرگ می‌باشند و اطلاعات نمی‌توانند به آسانی ذخیره شوند یا اطلاعات را به صورت مبهم در قسمت بالای نمودار می‌دهند. ماتریس G , 900×900 می‌باشد. تکنیک‌های ریاضی خاص برای استخراج اطلاعات از این ماتریس‌ها توسعه یافته است، اکنون این روشها در کامپیوترها اجرا می‌شوند. خواننده‌هایی که به این موضوع علاقه بیشتری دارند می‌توانند با موضوع «بعضی مشکلات و روشها در باستان‌شناسی آماری» که اثر دیوید ج. کنزال، دنیای باستان‌شناسی در سال ۱۹۶۹ میلادی است مراجعه کنند. در این بخش نظریه جبری ماتریس‌ها را توسعه خواهیم داد. این نظریه به صورت گسترده در فعالیت ریاضی است. ما باید از ماتریس‌ها در ارتباط با مدل‌های ریاضی و بخش جمعیت‌های آماری استفاده نمائیم. آلبرت انشتین از معادله ماتریس برای توصیف ارتباط میان هندسه و مادره در نظریه نسبیت عامش استفاده کرد:

$$T = R - \frac{1}{c} r G$$

که در آن T یک ماتریس که نشان دهنده هندسه است، R یک ماتریس، r یک اسکالر است. و G یک ماتریس است که گرانش‌ها را توصیف می‌کند. تمام ماتریس‌های 4×4 متقابن هستند. نظریه عمومی نسبیت شامل حل معادلات ماتریس برای تعیین میدان گرانشی است. فیزیکدان آلمانی به نام ورنر هسن برگ از ماتریس‌ها برای توسعه مکانیک کوانتومی استفاده کرد که جایزه نوبل را دریافت کرد. نظریه ماتریس‌ها اساس دو نظریه مهم فیزیکی در قرن بیستم است که همان نظریه عمومی نسبیت و نظریه کوانتومی است.

تمرینات

محاسبه



۱) ترانهاده هر کدام از ماتریس‌های زیر را بیابید. نشان دهید که آیا ماتریس داده شده متقابله است یا خیر؟

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(ب) A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

الف)

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(د) C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ج)

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(و) E = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ه)

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(ح) G = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

ز)

$$K = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

ط)

۲) در ماتریس‌های زیر، به جای * اعداد مناسب انتخاب نمایید تا هر یک از ماتریس‌ها، متقابله گردند.

$$\begin{bmatrix} -3 & * & 8 & 9 \\ -4 & 7 & * & 7 \\ * & 2 & 6 & 4 \\ * & 7 & * & 9 \end{bmatrix}$$

ج)

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & * \\ * & 8 & 4 \\ -3 & * & 3 \end{bmatrix}$$

ب)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ * & 6 & * \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

الف)

۳) اگر A یک ماتریس 1×4 و B یک ماتریس 3×2 و C یک ماتریس 4×2 و D یک ماتریس

3×1 باشد اندازه ماتریس‌های زیر را در صورت وجود مشخص کنید.

$$ADB^t \text{ (الف)}$$

$$CB - 5AD \text{ (ب)}$$

$$4CA - (CA)^2 \text{ (ج)}$$

$$(ADB^t C)^2 + I_4 \text{ (د)}$$

$$.(B^t C)^t - AB \text{ (ه)}$$

۴) با استفاده از قضیه ۲-۴ هر کدام از خصیت‌های ترانهاده زیر را ثابت کنید.

$$(A + B)^t = A^t + B^t \text{ (الف)}$$



$$(CA)^t = CA^t \quad (\text{ب})$$

$$(A^t)^t = A \quad (\text{ج})$$

۵) با استفاده از قضیه ۴-۲ خاصیت‌های ترانهاده زیر را ثابت کنید.

$$(A + B + C)^r = A^r + B^r + C^r \quad (\text{الف})$$

$$(ABC)^r = C^r B^r A^r \quad (\text{ب})$$

۶) اگر A یک ماتریس قطری باشد ثابت کنید $A = A^t$.

۷) اگر A یک ماتریس مربعی باشد ثابت کنید $(A^n)^t = (A^t)^n$.

۸) ثابت کنید یک ماتریس متقارن لزوماً مربعی است.

۹) اگر A یک ماتریس متقارن باشد ثابت کنید A^t نیز متقارن می‌باشد.

۱۰) فرض کنید A و B ماتریس‌های متقارن با اندازه‌های مساوی و c یک اسکالر می‌باشد. ثابت کنید:

الف) $A + B$ متقارن است.

ب) cA متقارن است.

۱۱) ماتریس A را پادمتقارن گویند هرگاه $.A = -A^t$

الف) مثالی برای ماتریس پادمتقارن ارایه دهید.

ب) ثابت کنید یک ماتریس پادمتقارن مربعی است و درایه‌های قطر اصلی آن صفر است.

ج) ثابت کنید مجموع دو ماتریس پادمتقارن با اندازه‌های مساوی یک ماتریس پادمتقارن است.

د) ثابت کنید که ضرب اسکالار یک ماتریس پادمتقارن، پادمتقارن است.

۱۲) اگر A ماتریس مربعی باشد ثابت کنید

الف) $A + A^t$ متقارن است.

ب) $A - A^t$ پادمتقارن است.

۱۳) ثابت کنید هر ماتریس مربعی A می‌تواند به مجموع ماتریس متقارن B و ماتریس پادمتقارن C

$.A = B + C$ تجزیه شود به طوری که

۱۴) الف) ثابت کنید اگر A یک ماتریس خودتوان باشد آنگاه A^t نیز خودتوان است.

ب) ثابت کنید اگر A^t یک ماتریس خودتوان باشد آنگاه A نیز خودتوان است.



۱۵) اثر (trace) هر کدام از ماتریس‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 6-7 & 2 \\ 3 & 9 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(ج)}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{(الف)}$$

ثابت کنید خواص زیر در مورد اثر با استفاده از ویژگی‌های زیر از قضیه ۵-۲ مشخص می‌شود.

$$\text{الله)} \quad \text{tr}(cA) = c \text{tr}(A)$$

$$\text{ب)} \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

$$\text{ج)} \quad \text{tr}(A^t) = \text{tr}(A)$$

۱۶) با استفاده از نتایج قضیه ۵-۲ ویژگی اثر زیر را ثابت کنید.

$$\text{tr}(A + B + C) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) + \text{tr}(C)$$

۱۷) فرض کنید دو ماتریس A و B با اندازه‌های یکسان داده شده باشد. ثابت کنید B اگر وظایف آن $A = B$ باشد.

$$A^t = B^t$$

۱۸) ثابت کنید ماتریس حاصل‌ضرب AB وجود دارد اگر تعداد ستون‌ها در A با تعداد سطرها در B برابر باشد.

۱۹) ثابت کنید $AB = O_n$ برای تمام ماتریس‌های $n \times n$. اگر وظایف آن $A = O_n$ باشد.

۲۰) AB و BA را برای ماتریس‌های زیر محاسبه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3-i \\ 2+3i & -5i \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2+i & 5+2i \\ 3-i & 4+3i \end{bmatrix}$$

۲۱) AB و BA را برای ماتریس‌های زیر محاسبه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 4+i & 2+3i \\ 6+2i & 1+i \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2+i & -3 \\ 2 & 4-5i \end{bmatrix}$$

۲۲) مزدوج و ترانهاده مزدوج هر یک از ماتریس‌های زیر را پیدا کنید، تعیین کنید کدام ماتریس هرمیتی است.

$$A = \begin{bmatrix} 2-3i & 5i \\ 2 & 5-4i \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 5-i \\ 5+i & 6 \end{bmatrix}$$



$$C = \begin{bmatrix} 7i & 4 - 3i \\ 6 + 8i & 1 - i \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 3 - 5i \\ 3 + 5i & 9 \end{bmatrix}$$

۲۳) مزدوج و ترانهاده مزدوج هر یک از ماتریس‌های زیر را پیدا کنید. تعیین کنید کدام ماتریس هرمیتی است.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 + 2i \\ 7 - 2i & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 + 5i & 1 - 2i \\ 1 + 2i & 5 + 6i \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 9 & -3i \\ 3i & 8 \end{bmatrix}$$

۲۴) چهار خاصیت ترانهاده مزدوج زیر را ثابت کنید:

(الف) $(A + B)^* = A^* + B^*$

(ب) $(zA)^* = \bar{z}A^*$

(ج) $(AB)^* = B^* A^*$

(د) $(A^*)^* = A$

۲۵) نشان دهید ماتریس هرمیتی لزوماً مربعی است. ثابت کنید که درایه‌های روی قطر اصلی، بایستی اعداد حقیقی باشند.

۲۶) فرض کنید $P = A^t A$ و $G = AA^t$ برای هر ماتریس دلخواه A .

(الف) ثابت کنید G و P هر دو ماتریس‌های متقارن هستند.

(ب) G و P هر دو دارای یک تعبیر در مدل تاریخی هستند. از این تعبیر برای متقارن بودن G و P استفاده کنید. نتیجه‌ی ریاضی و تعبیر فیزیکی هر دو با یکدیگر سازگارند.

۲۷) این ماتریس‌ها محتویات سفالگری و حفاری گوناگون را شرح می‌دهند برای هر مورد امکان و ترتیب



سفارش گودال و سپس مدل سفالگری را تعیین کنید.

$$\begin{array}{lll}
 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & 2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & 3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 4) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & 5) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & 6) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

۲۸) نتیجه تحلیل سفالگری در حفاری را نتیجه بگیرید. فرض کنید A محتويات سفالگری، حفاری‌های گوناگون را توصیف کند و $P = A^t A$ از ماتریس P_{ij} درایه P تعداد حفاری در هر i و j در یک زمان هستند. باستان‌شناس می‌تواند به این ترتیب به سفالگری برسد.

۲۹) مدلی که از باستان‌شناسی در اینجا معرفی شد مدلی است که برای تجزیه و تحلیل کردن روابط گروه انسانها استفاده می‌شود برای مثال رابطه دوستی در یک گروه را درنظر بگیرید. فرض کنید همه دوستی‌ها دوطرفه باشد. طبقه‌بندی مردم از $1, \dots, n$ و تعریف ماتریس مربعی A در زیرآمده است.
 (درایه‌های قطر اصلی A صفر هستند) برای همه i, j $a_{ii} = 0$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i \text{ و } j \text{ دوست باشند} \\ 0 & \text{اگر } i \text{ و } j \text{ دوست نباشند} \end{cases}$$

الف) ثابت کنید اگر $F = AA^t$ آنگاه f_{ij} تعداد دوستی‌هایی که به طور معمول شامل i و j هستند می‌باشد.

ب) فرض کنید روابط دوستی متقابل نباشد تأثیر این مدل چگونه است؟

۱۱-۲ ماتریس معکوس و رمز نویسی

در این بخش مفهوم ماتریس معکوس را معرفی می‌کنیم. خواهیم دید که چگونه ماتریس معکوس می‌تواند در حل برخی دستگاه‌های معادلات خطی استفاده شود و کاربرد ماتریس معکوس در رمزنویسی و مطالعه



کدها را خواهیم دید. ما نظریه ماتریس معکوس همراه با نگاهی به ضرب معکوس اعداد حقیقی را بررسی می‌کنیم. اگر عدد b معکوس a باشد آنگاه:

$$ab = 1 \quad , \quad ba = 1$$

برای مثال $\frac{1}{4}$ معکوس 4 است و داریم:

$$4\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)4 = 1$$

این یک نظریه است که به ماتریس‌ها تعمیم می‌دهیم.

۱-۱۱-۲ تعریف: فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد. اگر ماتریس B , $n \times n$ وجود داشته باشد که $AB = BA = I_n$ آنگاه می‌گوئیم A معکوس پذیر است و B معکوس ماتریس A می‌نامیم. اگر ماتریس B وجود نداشته باشد آنگاه ماتریس A معکوس ندارد.

مثال ۱) ثابت کنید ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ دارای معکوس می‌باشد.

حل: داریم

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2,$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

بنابراین $AB = BA = I_2$ و این نشان می‌دهد که ماتریس A دارای معکوس B می‌باشد. می‌دانیم که اعداد حقیقی نمی‌توانند بیشتر از یک معکوس داشته باشند این قضیه برای یک ماتریس نیز صادق است.

۲-۱۱-۲ قضیه: معکوس یک ماتریس در صورت وجود، منحصر به فرد است (یکتاست).

اثبات: فرض کنید B و C معکوس‌های A هستند بنابراین $AC = CA = I_n$ و $AB = BA = I_n$ دو طرف تساوی $AB = I_n$ را در C ضرب کرده و از خواص جبری ماتریس‌ها استفاده کنید.

$$C(AB) = CI_n$$

$$(CA)B = C$$



$$I_n B = C$$

$$B = C$$

بنابراین یک ماتریس معکوس‌پذیر تنها یک معکوس دارد.

توجه: فرض کنید A یک ماتریس معکوس‌پذیر باشد. معکوس A را با A^{-1} نشان می‌دهیم و داریم:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}A^{-1}\dots A^{(-1)}$$

اکنون با روش الگوریتم گوس جردن روشی برای پیدا کردن معکوس ماتریس ارایه می‌دهیم. فرض کنید A معکوس‌پذیر باشد. حال فرض کنید ستون‌های ماتریس $A^{-1}, X_1, X_2, \dots, X_n$ باشد و ستون‌های ماتریس $C_1, C_2, \dots, C_n, I_n$ باشد. حال ماتریس‌های A^{-1} و I_n را براساس ستون‌هایشان به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A^{-1} = [X_1 X_2 \dots X_n], \quad I_n = [C_1 C_2 \dots C_n]$$

باید $A^{-1} A$ را با پیدا کردن $X_1 \dots X_n$ بیابیم. چون $AA^{-1} = I_n$ آنگاه:

$$A[X_1, \dots, X_n] = [C_1 C_2 \dots C_n]$$

از انجام دادن ضرب ماتریس‌ها بر حسب ستون‌هایش نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$[AX_1 AX_2 \dots AX_n] = [C_1 C_2 \dots C_n]$$

بنابراین:

$$AX_1 = C_1, \quad AX_2 = C_2, \dots, \quad AX_n = C_n$$

بنابراین $AX = C_n \dots AX = C_2, AX = C_1$ ریشه‌هایی برای تساویهای X_1, X_2, \dots, X_n و می‌باشند که در آن A ضرایب حد معادلات می‌باشد. حل این دستگاه‌ها با استفاده از روش حذفی گوس - جردن در ماتریس افزوده‌ای به صورت زیر است:

$$[A : C_1 C_2 \dots C_n] \approx \dots \approx [I_n : X_1 X_2 \dots X_n]$$



بنابراین:

$$[A : I_n] \approx \dots \approx [I_n : A^{-1}]$$

بنابراین اگر شکل سطری پلکانی ماتریس $[A : I_n]$ را محاسبه کنیم و ماتریس به فرم $[I_n : B]$ به دست آوریم آنگاه $B = A^{-1}$.

به عبارت دیگر، اگر فرم تحويل شده سطری پلکانی را محاسبه کنیم و متوجه شویم که به فرم $[I_n : B]$ نیست آنگاه A معکوس پذیر نخواهد بود.
اگر با خلاصه ای از نتیجه بحث را مرور می کنیم.

روش حذفی گاؤس برای پیدا کردن معکوس ماتریس

فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد:

۱) ماتریس همانی $n \times n$, I_n را به ماتریس A وصل می کنیم تا ماتریسی به فرم $[A : I_n]$ به وجود آید.

۲) شکل تحويل شده سطری پلکانی $[A : I_n]$ را محاسبه می کنیم. اگر فرم ماتریس به دست آمده شبیه ماتریس به فرم $[I_n : B]$ بود در آن صورت B معکوس ماتریس A خواهد بود. اگر شکل تحويل شده سطری پلکانی به فرم $[I_n : B]$ نبود در این صورت اولین ماتریس $n \times n$ در ماتریس به دست آمده برابر با I_n نبوده پس می گوییم که ماتریس A معکوس ندارد مثالهای زیر روش بیان شده را نشان می دهد.

مثال ۲) معکوس ماتریس A را معین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

حل: با استفاده از روش حذفی گاؤس جردن خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} [A : I_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{R_2 + (-2)R_1}{R_2 + R_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{(-1)R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$



$$\begin{array}{c} \frac{R_1 + R_2}{R_1 + (-2)R_2} \\ \frac{R_1 + R_2}{R_1 + (-1)R_2} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

بنابراین:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال زیر استفاده از روش گوس جردن را برای محاسبه ماتریسی که معکوس ندارد نشان می‌دهد.

مثال ۳) معکوس ماتریس زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

حل: با استفاده از روش حذفی گاوس جردن خواهیم داشت:

$$\begin{array}{c} [A : I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} ccc1 & 1 & 5 & ccc1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \frac{R_2 + (-2)R_1}{R_2 + R_1} \\ \frac{R_1 + (-1)R_3}{R_1 + 3R_2} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ccc1 & 1 & 5 & ccc1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} ccc1 & 0 & 3 & ccc2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 3 & 1 \end{array} \right]$$

نیاز نیست که بیشتر ادامه دهیم چون اولین ماتریس 3×3 در ماتریس نهایی به دست آمده یک ماتریس همانی نمی‌باشد و به عبارتی ماتریس به دست آمده به فرم $[I_n : B]$ نمی‌باشد. پس A^{-1} وجود ندارد. روش گوس جردن برای محاسبه معکوس یک ماتریس به مانند A یک ماتریس معکوس پذیر است اگر و تنها اگر تحویل شده سطحی پلکانی $[A : I_n]$ باشد و ماتریس A نیز به ماتریس I_n تبدیل می‌شود و این مشاهده منجر به نتیجه زیر می‌شود:



۳-۱۱-۲ قضیه: ماتریس A که یک ماتریس $n \times n$ می‌باشد معکوس پذیر است اگر و تنها اگر فرم تحولی شده سطحی پلکانی آن I_n باشد.

اگر ماتریس ضرایب یک دستگاه معادلات خطی معکوس پذیر باشد آنگاه معکوس ماتریس می‌تواند قابل بحث در مورد جواهای دستگاه باشد. قضیه زیر یک نتیجه کلیدی در این بحث می‌باشد.

۴-۱۱-۲ قضیه: فرض کنید $AX = B$ یک دستگاه معادلات خطی با n متغیر باشد اگر^۱ وجود داشته باشد جواب دستگاه منحصر بفرد است و به صورت $X = A^{-1}B$ می‌باشد.

اثبات: ابتدا ثابت می‌کنیم $X = A^{-1}B$ یک جواب است. $X = A^{-1}B$ را در معادله ماتریس جایگزین می‌کنیم. با استفاده از خواص ماتریس خواهیم داشت:

$$AX = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = I_n B = B$$

چون $X = A^{-1}B$ در معادله صدق می‌کند بنابراین یک جواب است.
اکنون ثابت می‌کنیم جواب دستگاه یکتاست. فرض کنیم $X_1 = B$ جواب باشد پس $AX_1 = B$ ، با ضرب کردن دو طرف معادله در A^{-1} داریم:

$$A^{-1}AX_1 = A^{-1}B \implies I_n X_1 = A^{-1}B \implies X_1 = A^{-1}B$$

بنابراین $X_1 = A^{-1}B$ یک جواب یکتا می‌باشد.

حال نشان می‌دهیم که چگونه این نتیجه می‌تواند برای حل یک دستگاه معادلات استفاده گردد.

مثال ۴) دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 3$$

$$-x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -2$$

حل: این دستگاه را می‌توان به فرم ماتریس زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$



اگر ماتریس ضرایب معکوس پذیر باشد جواب منحصر‌بفرد دستگاه عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

معکوس ماتریس بالا در مثال ۲ به دست آمده است بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

جواب منحصر‌بفرد دستگاه عبارت است از:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 1$$

دانستن این مسئله که اگر ماتریس A معکوس پذیر باشد آنگاه حل دستگاه معادلات $AX = B$ به صورت $X = A^{-1}B$ می‌باشد اصولاً از لحاظ نظری اهمیت دارد. یک عبارت جبری برای حل دستگاه به ما می‌دهد، که معمولاً در حل دستگاه معادلات خاص استفاده نمی‌شود. روش حذفی گاوس - جردن که در بخش ۹-۱ معرفی شد برای حل دستگاه معادلات خطی مؤثرتر می‌باشد. اکثر دستگاه معادلات توسط کامپیوتر حل می‌شوند.

دو عامل مهم هنگام استفاده از کامپیوتر عبارتند از: کارایی و دقت. برای حل یک دستگاه n معادله و n مجهولی روش معکوس ماتریس به $n^2 + n^3$ عمل ضرب و $n^2 - n^3$ عمل جمع نیاز داریم. در حالی که روش حذفی گاوس - جردن به $n^2 - \frac{1}{n^2} n^3 + n^2 - \frac{1}{n^2} n^3 + \frac{1}{n^2} n^3$ عمل ضرب و $n^2 - \frac{5}{n^2} n^3 + \frac{1}{n^2} n^3$ عمل جمع نیاز خواهد داشت. بنابراین به عنوان مثال برای یک دستگاه ۴ معادله و ۴ مجهولی روش معکوس ماتریس شامل 8^0 عمل ضرب و 48 عمل جمع می‌باشد در حالی که روش مؤثرتر حذفی گاوس شامل 36 عمل ضرب و 26 عمل جمع خواهد بود. به علاوه وقتی محاسبات بیشتری انجام می‌گیرد خطای گرد کردن نیز افزایش می‌یابد. بنابراین روش حذفی گاوس (و گاوس - جردن) دقت بیشتری نسبت به روش معکوس ماتریس دارند.

ممکن است شخصی دچار اشتباه شود و فرض کند که بهترین روش حل چند دستگاه معادلات خطی که به شکل $AX_1 = B_1, AX_2 = B_2, AX_k = B_k$ و ... و به این صورت است که چون ماتریس A در همه آنها مشترک است لازم است فقط یک بار A^{-1} محاسبه شود و سپس جواب



دستگاه به صورت $x_k = A^{-1}B_k$ و $x_2 = A^{-1}B_2$ و $x_1 = A^{-1}B_1$ و ... دستگاه خواهد شد ولی به طور رایج، دقیق‌ترین و کارآمدترین روش حل چنین دستگاه‌هایی استفاده از یک ماتریس الحاقی بزرگ که بیانگر تمام دستگاه‌ها می‌باشد و سپس استفاده از یک روش حذفی مثل گاوس-جردن خواهد بود.

در مثال‌های معینی روش معکوس ماتریس از حل دستگاه معادلات خطی برای رسیدن به جوابهای ویژه و معینی استفاده می‌شود. در بخش زیر این شرایط را نشان خواهیم داد (یک مدل برای تحلیل و بررسی وابستگی متقابل صنایع). درایه‌های ماتریس ضرایب در آن مثال برای محاسبه یک الگوریتم مؤثر برای محاسبه معکوس ماتریس مناسب می‌باشد.

اکنون بعضی از خواص جبری ماتریس‌های معکوس را مرور می‌کنیم.

خواص ماتریس معکوس

فرض کنیم A و B معکوس پذیر و c یک اسکالر غیرصفر باشد. آنگاه:

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad (1)$$

$$(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1} \quad (2)$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (3)$$

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n \quad (4)$$

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \quad (5)$$

نتایج ۱ و ۳ را بررسی می‌کنیم. اثبات بقیه نتایج را به عنوان تمرین به عهده خواننده واگذار می‌کنیم.
 $(A^{-1})^{-1} = A$ این نتیجه مستقیم با استفاده از تعریف معکوس ماتریس به دست می‌آید. از آنجا که A^{-1} معکوس ماتریس A می‌باشد خواهیم داشت:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

این بیان هم چنین می‌گوید که A معکوس ماتریس A^{-1} می‌باشد بنابراین:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ نشان می‌دهیم که AB معکوس ماتریس $B^{-1}A^{-1}$ می‌باشد. با استفاده از



خواص ماتریس‌ها خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ &= AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n\end{aligned}$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد که $B^{-1}A^{-1}(AB) = I_n$ معکوس ماتریس AB است.

مثال ۵: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, آنگاه می‌توان نشان داد A^{-1} . با استفاده از این مطلب $(A^t)^{-1}$ را محاسبه کنید.

حل: نتیجه ۵ از بالا این نکته را بیان می‌کند که اگر معکوس ماتریس را بدانیم همچنین معکوس ترانهاده آن ماتریس را نیز می‌دانیم، داریم:

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

رمزنویسی

رمزنویسی فرایند کدنویسی و از کد خارج کردن پیام‌ها است. این کلمه از کلمه یونانی Krqptos به معنای مخفی می‌آید. این تکنیک به یونانیان باستان برمی‌گردد. امروزه دولتها روش‌های پیچیده و پیشرفته‌ای برای کدگذاری و از حالت کد خارج کردن پیام‌ها استفاده می‌کنند و یک نوع از این کدها که شکستن آن خیلی دشوار است موجب استفاده از ماتریس بزرگ برای از حالت کد خارج کردن یک پیام می‌باشد. گیرنده پیام با استفاده از ماتریس معکوس بزرگ آن را از حالت کد خارج می‌کند. ماتریس اول، ماتریس رمزگذاری و معکوس آن ماتریس رمزگشایی است. این روش را برای یک ماتریس 3×3 توضیح می‌دهیم.

فرض کنید که پیام به صورت زیر باشد:

PREPARE TO ATTACK (آماده برای جنگ)

و ماتریس رمزگذاری به صورت $\begin{bmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ باشد. برای سهولت کار به هر کدام از حروف الفبا

یک شماره اختصاص می‌دهیم مثلاً برای A , ۱ و برای B , ۲ وغیره. فرض کنیم فاصله بین دو کلمه با



شماره ۲۷ نشان داده شود بنابراین پیام به شکل زیر درمی‌آید:

$$P R E P A R E * T O * A T T A C K$$

$$16 \ 18 \ 5 \ 16 \ 1 \ 18 \ 5 \ 27 \ 20 \ 15 \ 27 \ 1 \ 20 \ 20 \ 13 \ 11$$

از آنجا که می‌خواهیم از یک ماتریس 3×3 برای کدگذاری پیام استفاده کنیم بنابراین پیام شماره‌گذاری شده را به ترتیب به صورت ماتریس‌های 1×3 ستونی به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 16 \\ 18 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 1 \\ 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 27 \\ 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 27 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 27 \end{bmatrix}$$

ضروری است که یک فاصله در آخر پیام برای کامل کردن آخرین ماتریس اضافه کنیم. حال با ضرب کردن هر کدام از ماتریس‌های ستونی بالا در ماتریس رمزگذاری پیام به صورت رمز درمی‌آوریم. این مرحله می‌تواند به راحتی با نوشتن ماتریس‌های ستونی به عنوان ستون‌های ماتریس و ضرب مجدد ماتریس در ماتریس کدگذاری انجام شود. داریم

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 16 & 5 & 15 & 20 & 3 \\ 18 & 1 & 27 & 27 & 20 & 11 \\ 15 & 18 & 20 & 1 & 1 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -122 & -123 & -176 & -130 & -124 & -150 \\ 23 & 19 & 47 & 28 & 21 & 28 \\ 128 & 139 & 181 & 145 & 144 & 153 \end{bmatrix}$$

ستون‌های این ماتریس پیام رمزگذاری شده را می‌دهد. پیام را به فرم‌های خطی زیر منتقل می‌کند.

$$-122, 23, 128, -123, 19, 139, -176, 47, 181,$$

$$-130, 28, 145, -124, 21, 144, -150, 38, 153.$$

برای گشودن رمز پیام، گیرنده رشته‌ای را به عنوان یک ردیف از ماتریس‌های ستونی 1×3 می‌نویسد و با استفاده از معکوس ماتریس کدگذاری شده تکنیک را تکرار می‌کند. معکوس ماتریس کدگذاری شده به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$



برای کشف کردن رمز ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccccccc} -122 & -123 & -176 & -130 & -124 & -150 \\ 23 & 19 & 47 & 28 & 21 & 38 \\ 128 & 139 & 181 & 145 & 144 & 153 \end{array} \right] \\
 = & \left[\begin{array}{cccccc} 16 & 16 & 5 & 15 & 20 & 3 \\ 18 & 1 & 27 & 27 & 20 & 11 \\ 15 & 18 & 20 & 1 & 1 & 27 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

ستون‌های ماتریس نهایی به فرم خطی زیر نوشته می‌شود، که پیام اصلی را می‌دهد:

۱۶ ۱۸ ۵ ۱۶ ۱ ۱۸ ۵ ۲۷ ۲۰ ۱۵ ۲۷ ۱ ۲۰ ۲۰ ۱ ۳ ۱۱

P R E P A R E * T O * A T T A C K

تمرینات

۱) با استفاده از معکوس $AB = BA = I_2$ برسی کنید که آیا B معکوس A برای هر کدام از

ماتریس‌های 2×2 و A, B زیرین است یا خیر؟

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ (ب)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \text{ (ج)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 7 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \text{ (د)}$$

۲) با استفاده از تعریف معکوس $AB = BA = I_2$ برای هر کدام از ماتریس‌های 3×3 و B و A برسی کنید که آیا B معکوس A است یا خیر؟

زیر برسی کنید که آیا B معکوس A است یا خیر؟



$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \text{ (ب)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \text{ (ج)}$$

۳) معکوس هر کدام از ماتریس‌های 2×2 زیر را در صورت وجود معین کنید. از روش حذفی گوس جردن استفاده نمایید.

$$\begin{array}{ll} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} \text{ (الف)} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ب)} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ (د)} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ (ج)} \\ \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \text{ (و)} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ (ه)} \end{array}$$

۴) معکوس هر کدام از ماتریس‌های 3×3 زیر را در صورت وجود پیدا کنید. از روش حذفی گوس جردن استفاده نمایید.

$$\begin{array}{ll} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ (ب)} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ (الف)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ (د)} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ (ج)} \end{array}$$

۵) معکوس هر کدام از ماتریس‌های 3×3 زیر را در صورت وجود معین کنید. از روش حذفی گوس جردن استفاده نمایید.



$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \text{ ب) } \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \text{ الف) } \\ \left[\begin{array}{ccc} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{array} \right] \text{ د) } \left[\begin{array}{ccc} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{array} \right] \text{ ج) } \end{array}$$

۶) معکوس هر کدام از ماتریس‌های 4×4 زیر را در صورت وجود پیدا کنید. از روش حذفی گوس

جردن استفاده نمایید.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \text{ ب) } \left[\begin{array}{cccc} -3 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right] \text{ الف) } \\ \left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right] \text{ ج) } \end{array}$$

۷) دستگاه‌های دو معادله و دو مجهول زیر را با تعیین معکوس ماتریس ضرایب و سپس با استفاده از

ضرب ماتریس‌ها حل کنید.

$$\text{الف) } x_1 + 2x_2 = 2 \quad 3x_1 + 5x_2 = 4$$

$$\text{ب) } x_1 + 5x_2 = -1 \quad 2x_1 + 9x_2 = 3$$

$$\text{ج) } x_1 + 3x_2 = 5 \quad 2x_1 + x_2 = 10$$

$$\text{د) } 2x_1 + x_2 = 4 \quad 4x_1 + 3x_2 = 6$$

$$\text{ه) } 2x_1 + 4x_2 = 6 \quad 3x_1 + 8x_2 = 1$$

$$\text{و) } 3x_1 + 9x_2 = 9 \quad 2x_1 + 7x_2 = 4$$

۸) دستگاه‌های سه معادله و سه مجهول زیر را با تعیین معکوس ماتریس ضرایب و سپس با استفاده از

ضرب ماتریس‌ها حل کنید.

$$\text{الف) } x_1 - x_2 - x_3 = 1 \quad x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad x_1 + 2x_2 - x_3 = 2,$$

$$\text{ب) } x_1 - x_2 = 1 \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$\text{ج) } x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \quad 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \quad x_1 + 8x_2 = 15$$



$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \quad -x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \quad x_1 - x_2 - 4x_3 = 1 \quad (۱)$$

$$-x_1 + x_2 = 5 \quad -x_1 + x_2 = -2 \quad 6x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 \quad (۲)$$

۹) دستگاه‌های چهار معادله و چهار مجهول زیر را با تعیین معکوس ماتریس ضرایب و سپس با استفاده از ضرب ماتریس‌ها حل کنید.

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$$

$$2x_1 + 2x_3 + x_4 = 6$$

$$x_2 + 3x_3 - x_4 = 1$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 7$$

۱۰) دستگاه معادلات زیر را که همگی دارای ماتریس ضرایب یکسان هستند با استفاده از روش معکوس ماتریس حل کنید.

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = b_1$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = b_1$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = b_2$$

برای

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \circ \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (۱۱)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

برای محاسبه معکوس ماتریس 2×2 این فرمول می‌تواند سریعتر از روش حذفی گاوس جردن باشد. معکوس ماتریس‌های 2×2 زیر را با استفاده از هر دو روش محاسبه کنید. شما کدامیک را ترجیح می‌دهید؟



$$\begin{array}{ll} \text{(ب)} & \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ \text{(الف)} & \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \text{(د)} & \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \\ \text{(ج)} & \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

این فرمول را در مباحثت بعد نیز خواهیم دید و به عنوان تئوری عمومی ماتریس معکوس ثابت می‌شود).

۱۲) هر کدام از ویژگی‌های معکوس ماتریس زیر را که در پایان بخش لیست شده است ثابت کنید.

$$\text{(الف)} (cA)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1}$$

$$\text{(ب)} (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

$$\text{(ج)} (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

۱۳) اگر $A, A^{-1} = [21]$ را بیابید.

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{اگر آنگاه } A \text{ را بیابید.} \quad ۱۴)$$

$$\begin{array}{ll} \text{باشد. تعیین کنید:} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ دارای معکوس } A = \\ \text{(الف)} (A^t)^{-1} & \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \\ \text{(ج)} (3A)^{-1} & \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -9 & 5 \end{bmatrix} \\ \text{(ب)} (A^2)^{-1} & \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \quad ۱۵)$$

(نکته: از خاصیت‌های جبری معکوس ماتریس استفاده کنید).

$$\begin{array}{ll} \text{اگر } A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}, \text{ با استفاده از این اطلاعات تعیین کنید.} & \\ \text{(الف)} (2A^t)^{-1} & (AA^t)^{-1} \\ \text{(ب)} (A^{-2})^{-1} & A^{-3} \end{array} \quad ۱۶)$$

$$\begin{bmatrix} 2x & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{در } x \text{ را بیابید.} \quad ۱۷)$$

$$2 \begin{bmatrix} 2x & x \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{در } x \text{ را بیابید.} \quad ۱۸)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{در } A \text{ را بیابید.} \quad ۱۹)$$

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1} \quad ۲۰)$$



۲۱) ثابت کنید $(A^t B^t)^{-1} = (A^{-1} B^{-1})^t$.

۲۲) ثابت کنید که به طور کلی $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.

۲۳) ثابت کنید که اگر A معکوس نداشته باشد A^t نیز معکوس ندارد.

۲۴) فرض کنید A یک ماتریس معکوس پذیر است در این صورت:

$$AB = AC \implies B = C \quad (\text{الف})$$

$$AB = \mathbb{O} \implies B = \mathbb{O} \quad (\text{ب})$$

۲۵) ثابت کنید که یک ماتریس معکوس ندارد هرگاه:

الف) دو سطر آن مساوی باشد.

ب) دو ستون آن مساوی باشد (نکته: از تراهناده استفاده کنید).

۲۶) ثابت کنید که ماتریس قطری معکوس پذیر است اگر و تنها اگر تمامی درایه های قطری آن غیر صفر باشد.

آیا می توانید راه سریعتری را برای تعیین معکوس ماتریس قطری معکوس پذیر بیابید.

۲۷) فرض کنید که $AX = B$ یک دستگاه ۵ معادله و ۵ مجهولی باشد. وقتی که A معکوس پذیر است.

تعداد ضرب ها و جمع هایی را که برای حل این معادله نیاز است بیابید. با استفاده از

الف) روش حذفی گاوس ب) روش معکوس ماتریس

۲۸) فرض کنید A یک ماتریس معکوس پذیر باشد. نشان دهید که میزان محاسبه حل دستگاه $AX = B$

با استفاده از روش حذفی گاوس جردن همان پیدا کردن ستون اول معکوس A می باشد. این تمرین

این حقیقت را بیان می کند که برای حل دستگاه معادلات روش حذفی گاوس جردن مؤثرتر از روش

معکوس ماتریس ضرایب است.

تمرینهای رمزگذاری

در تمرین های ۲۹ - ۳۲ هر حروف را با موفقیت در الفبا ارتباط دهید.

۲۹) پیام RETREAT را با استفاده از ماتریس $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ کدگذاری نمایید.

۳۰) پیام The British Are Coming را با استفاده از ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ کدگذاری نمایید.



(۳۱) پیام -۳۹ و -۶۱ و -۳ و -۵ و -۴۹ و -۳۸ را به رمز درآورید. با استفاده از ماتریس تمرین ۲۹ کدگذاری شده است.

(۳۲) پیام -۲۷ و -۹۸ و -۹۶ و -۱۱ و -۱۲۲ و -۸۴ و -۵ و -۴۳ و -۲۸ و -۱ و -۱۰۰ و -۷۱ را کدگذاری نمایید با استفاده از ماتریس تمرین ۳۰ کدگذاری شده است.

۱۲-۲ مدل ورودی - خروجی لینتیف در اقتصاد

در این بخش، مدل ورودی - خروجی لینتیف که در آنالیز کردن وابستگی اقتصادی به کار می‌رود را معرفی می‌کنیم. واژه لینتیف در سال ۱۹۷۳ برای این کارش در این رشتہ جایزه نوبل را اخذ کرده است. استفاده کاربردی از این روش اکنون به عنوان ابزار استاندارد برای درآمد ساختارهای اقتصاد از شهرها و همکاری‌های ایالتها و کشورها توسعه یافته است. یک موقعیت اقتصادی که شامل n صنایع وابسته است را در نظر بگیرید. خروجی هر صنعت نیازمند ورودی توسط صنعت‌های دیگر است و حتی در صورت امکان خود صنعت. خواهیم فهمید که چطور یک مدل ریاضی که شامل یک دستگاه معادلات خطی است می‌تواند این موقعیت را پایه‌گذاری سازد. برای سادگی کار فرض کنیم هر کدام از محصولات صنعتی یک کالا باشد. فرض کنید a_{ij} میزان ورودی یک کالای معین i برای تولید خروجی واحد کالای j اختصاص داده شود. در مدل ما فرض می‌کنیم میزان ورودی و خروجی کالا با دلار اندازه‌گیری می‌شود. بنابراین برای مثال $a_{11} = ۰, ۴۵$ به $a_{23} = ۰, ۰۵$ این معناست که ۴۵٪ ارزش کالای ۳ برای تولید ۱ دلار از کالای ۴ فراهم شده است.

$$\text{میزان کالای } i \text{ در یک دلار از کالای } j = a_{ij}$$

درایه‌های a_{ij} ضرایب ورودی نامیده می‌شوند که ماتریس A را تعریف می‌کنند، ماتریس ورودی - خروجی نامیده می‌شود که وابستگی صنایع را توصیف می‌کند.

مثال ۱) ماتریس‌های ورودی - خروجی بین‌المللی برای توصیف کردن صنایع وابسته که جایگزین محصول اقتصاد کشورهای استفاده می‌شوند. اکنون قسمتی از ماتریس را که برای توصیف وابستگی اقتصاد ایالت متحده آمریکا در سال ۱۹۷۲ است را توصیف می‌کنیم. ساختار اقتصاد در حقیقت در میان ۷۹ محصول قرار دارد. بنابراین یک ماتریس 79×79 است. البته ما نمی‌توانیم کل ماتریس را نشان دهیم. ما ۱۰ بخش را در اختیار خواشند که با طبقه‌بندی این ساختار کمی آشنا شود.

(۱) محصولات دائمی



- ۲) محصولات کشاورزی
- ۳) محصولات دریایی و جنگلی
- ۴) خدمات کشاورزی، جنگلی و دریایی
- ۵) استخراج آهن، سنگ معدن‌های آلیاژ آهن‌دار
- ۶) استخراج سنگ معدن‌های فلزات غیرآهنی
- ۷) استخراج ذغال سنگ
- ۸) بنزین خام و سخت طبیعی
- ۹) استخراج خاک رس و سنگ و معدن سنگ
- ۱۰) استخراج آب معدنی حاصلخیز و شیمیایی

ماتریس A براساس این طبقه‌بندی‌ها عبارت است از

ردیف	۱	۲	۳	۴
۱	۰,۲۶۱۱۰	۰,۰۲۴۸۱	۰	۰,۰۵۲۷۸
۲	۰,۲۳۲۷۷	۰,۰۳۲۱۸	۰	۰,۰۱۴۴۴
۳	۰	۰	۰,۰۰۴۶۷	۰,۰۰۲۹۴
۴	۰,۰۲۸۲۱	۰,۰۰۳۶۷۳	۰,۲۵۰۲	۰,۰۲۹۵۹
۵	۰	۰	۰	۰
۶	۰	۰	۰	۰
۷	۰	۰,۰۰۰۰۲	۰	۰
۸	۰	۰	۰	۰
۹	۰,۰۰۰۰۱	۰,۰۰۲۵۱	۰	۰,۰۰۰۳۴
۱۰	۰	۰,۰۰۱۳۰	۰	۰
...

بنابراین، برای مثال $a_{72} = 0,00002$ برای نکته دلالت دارد که ۰,۰۰۰۰۲ دلار از بخش استخراج معدن زغال سنگ (بخش ۷) به هر بخش از محصولات کشاورزی (بخش ۲)، یک دلار اختصاص یافته است. اکنون مدلی که شامل یک بخش باز است را توسعه می‌دهیم. محصولات صنایع منجر به صنایع تولیدی دیگر می‌شوند، بلکه بخش‌هایی از اقتصاد غیرتولیدی از قبیل مصرف‌کننده‌ها و دولتها را شامل می‌شوند. تمامی چنین بخش‌هایی غیرتولیدی طبقه‌بندی می‌شوند به آنچه که بخش باز نامیده می‌شود. بخش باز اقتصادی در مدل بالا در سال ۱۹۷۲ در ایالات متحده آمریکا شامل خریدهای فدرال، ایالات و دولت مرکزی (محلي) می‌باشد.



تقاضای باز از صنعت i

کل خرجی صنعتی i برای برخورد کردن با تقاضاهای تمامی n صنایع و باش بخشن باز $x_i = a_{ij}x_j$ میزان موردنیاز از صنعت j برای تولید خروجی واحد در صنعت j است. بنابراین $a_{ij}x_j$ می‌تواند میزان موردنیاز برای تولید x_j واحدهای خروجی در صنعت j می‌باشد. داریم:

$$\underbrace{x_i}_{\text{تقاضای صنعتی باز}} = \underbrace{a_{i1}x_1}_{\text{تقاضای صنعتی ۱}} + \underbrace{a_{i2}x_2}_{\text{تقاضای صنعتی ۲}} + \cdots + \underbrace{a_{in}x_n}_{\text{تقاضای صنعتی } n} + \underbrace{d_i}_{\text{کل محصول صنعتی } i}$$

این فرایند را به صورت یک دستگاه معادلات خطی نشان می‌دهیم:

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + d_1$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + d_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + d_n$$

این دستگاه معادلات را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

اجازه دهید به ما که نمادهای زیر را این چنین معرفی کنیم:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

اکنون دستگاه معادلات را می‌توان به عنوان یک ماتریس منفرد همراه با یک نتیجه‌گیری مهم نوشت:

$$X = AX + D$$

زمانی که این مدل برای صنعت یک کشور به کار گرفته می‌شود، X نشان دهنده کل خروجی هر کدام از بخش‌های تولیدی اقتصادی و AX نیازمندی‌های ورودی اقتصادی را توصیف می‌کند. D مساوی است با



($X - AX$). یعنی اختلاف میان خروجی کل و معادله صنعتی AX . بنابراین D ناچالصی محصولات ملی اقتصادی است در عمل معادله $X = AX + D$ به روش‌های مختلفی به کارگرفته می‌شود که به متغیرهای شناخته شده (معلوم) و شناخته نشده (مجهول) مستگی دارد. برای مثال یک محقق که جویای تعیین کردن دلیل و مفهوم تغییر در خریدهای دولتی یا تقاضاهای مصرف کننده است با توجیه اقتصادی A و D ، حل معادله برای X را ارائه می‌دهد. این معادله می‌تواند در این روش استفاده شود از طریق پیش‌بینی مقدار خروجی از هر بخش که نیازمند به دست‌یابی GNP ‌های مختلف می‌باشد. (مثال ۲، که در پایین می‌آید کاربرد این مدل را شناسان می‌دهد) از سوی دیگر، یک اقتصاد دادن می‌داند محدودیت ظرفیت تولیدی یک دستگاه اقتصادی توصیف شده با A و X را معلوم فرض خواهد کرد و پیش‌بینی مقدار ماکزیمم GNP حل دستگاه معادله برای D را امکان‌پذیر می‌کند.

مثال ۲) یک اقتصاد شامل سه صنعت که دارای ورودی - خروجی ماتریس A است را ملاحظه کنید (فرض کنیم) ترازهای خروجی موردنیاز این صنایع برای مواجه شدن با نیازها و تقاضاهای صنایع دیگر و همچنان بخش باز در هر وضعیت را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ 32 \end{bmatrix}$$

هر واحد D یک میلیون دلار است.

حل: می‌خواهیم تراهای خروجی X متناظر با تقاضاهای بخش‌های باز مختلف D را محاسبه نماییم. با معادله $X = AX + D$ مشخص می‌شود که به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$X - AX = D$$

$$(1 - A)X = D$$

برای حل معادله X می‌توانیم از روش حذف گاوس جردن و یا روش ماتریس معکوس استفاده کنیم. در حل تمرین از روش ماتریس معکوس استفاده می‌شود. داریم:

$$X = (1 - A)^{-1}D$$



از این رابطه برای تعیین X وقتی A و D معلوم هستند استفاده می‌کنیم. برای ماتریس A چنین به دست می‌آید:

$$I - XA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

(۱) با استفاده از روش حذفی گاوس - جردن محاسبه می‌شود.

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{2} & \frac{8}{5} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

می‌توانیم به طور مؤثری $X = (I - A)^{-1}D$ را برای هر سه مقدار D با تشکیل دادن ماتریسی که شامل سه مقدار D به عنوان ستون است محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{2} & \frac{8}{5} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 6 & 12 \\ 12 & 9 & 18 \\ 16 & 8 & 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 21 & 52 \\ 57 & 39 & 88 \\ 20 & 10 & 40 \end{bmatrix} \\ &= (I - A)^{-1} \end{aligned}$$

ترازهای خروجی لازم با تقاضاها به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ 32 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 23 \\ 57 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 21 \\ 39 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 52 \\ 88 \\ 40 \end{bmatrix}$$

که این واحدها میلیونها دلار هستند.

۱۳-۲ نکته محاسباتی

آنالیز کردن این نوع معمولاً شامل بخش‌های زیادی می‌شود که ماتریس‌های خروجی و ورودی را نشان می‌دهد. معمولاً قسمتی از محاسبات بزرگ شامل پیاده کردن مدل و نیازمند یک الگوریتم کارآمد است. (درایه‌های ماتریس ورودی - خروجی A معمولاً صفر یا خیلی ناچیز هستند).

این مشخصه A منجر به یک روش عددی مناسب برای محاسبه $(I - A)^{-1}$ می‌شود که باعث می‌شود روش ماتریس معکوس برای حل معادله دستگاه $(I - A)X = D$ کارآمدتر از روش گاوس - جردن شود استفاده کنیم، نتیجه بهتری نسبت به حل گاوس - جردن می‌دهد.



حال این روش را برای محاسبه $(I - A)^{-1}$ توضیح می‌دهیم. ضرب ماتریسی زیر را برای هر عدد صحیح و مثبت m در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} (I - A)(I + A + A^t + \cdots + A^m) &= I(I + A + A^t + \cdots + A^m) \\ &\quad - A(I + A + A^t + \cdots + A^m) \\ &= (I + A + A^t + \cdots + A^m) \\ &\quad - (A + A^t + \cdots + A^m + A^{m+1}) \\ &= I - A^{m+1} \end{aligned}$$

مؤلفه‌های توانهای متولی A سریعاً کوچک شده و A^{m+1} به ماتریس صفر نزدیک می‌شود بنابراین برای مدل مناسب بزرگ m :

$$(I - A)(I + A + A^t + \cdots + A^m) = I$$

که این نتیجه می‌دهد

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^t + \cdots + A^m$$

از این عبارت در محاسبه کامپیوتری $(I - A)^{-1}$ استفاده می‌شود.

خوانندگانی که علاقمند به یافتن کاربردهای بیشتر این مدل هستند باید مقاله‌ی اقتصاد جهانی سال ۲۰۰۰ نوشتۀ واسلی را بخوانند. این مقاله کاربرد این مدل در اقتصاد جهان را توضیح می‌دهد. این مدل، در آمریکا با پیشتوانه‌های مخصوص مالی در دست اجرا بود.

در این مدل جهان به ۱۵ منطقه یا ناحیه جغرافیایی مجزا که هر یک را یک ماتریس ورودی و خروجی یکتا می‌نامند تقسیم می‌شود. هر یک از این نواحی به یک ماتریس بزرگتر که برای این کار از مدل ورودی و خروجی استفاده می‌شود، مرتبط می‌شود. کلاً بیشتر از ۲۰۰۰ بخش اقتصادی این مدل را شامل می‌شوند. از میان مقدارهای مختلف ورودی، اقتصاددان‌ها می‌توانند وضعیت اقتصادی آینده را حدس بزنند یا بسازند.

تمرینات

۱) ماتریس ورودی - خروجی زیر را که وابسته به ۵ صنعت است در نظر بگیرید:



	۱	۲	۳	۴	۵
(۱)	۱۰	۱۰	۰,۰۵	۰,۰۵	۰,۱۵
(۲)	۱۰	۱۰	۰,۲۰	۰,۲۰	۰,۴۰
(۳)	۲۰	۲۰	۰,۱۰	۰,۱۰	۰,۱۰
(۴)	۱۰	۱۰	۰,۲۰	۰,۳۰	۰,۱۵
(۵)	۰,۰۵	۰,۰۵	۰,۱۰	۰,۲۰	۰,۰۵

تعیین کنید:

الف) میزان الکتریسیته مصرفی برای تولید یک دلار از فولاد

ب) میزان قولاد مصرفی در تولید یک دلار خودکار صنعتی

ج) بزرگترین مصرف کننده زغال سنگ

د) بزرگترین مصرف کننده الکتریسیته

ه) صنعتی که در صنعت خودکار بزرگترین وابسته است.

در تمرین‌های ۲ تا ۶ اقتصادهایی را درنظر بگیرید که شامل ۲ یا ۳ صنعت باشند. ترازهای خروجی موردنیاز برای هر کدام از صنعت‌ها برای مواجه شدن با مطالعات دیگر صنایع و بخش باز را محاسبه کنید.

)۲ درگردش

$$A = \begin{bmatrix} 0,20 & 0,60 \\ 0,40 & 0,10 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 24 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

)۳ درگردش

$$A = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,40 \\ 0,30 & 0,20 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 18 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 24 \\ 12 \end{bmatrix}$$

)۴

$$A = \begin{bmatrix} 0,30 & 0,60 \\ 0,35 & 0,10 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 42 \\ 84 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 43 \\ 42 \end{bmatrix}$$

)۵

$$A = \begin{bmatrix} 0,20 & 0,20 & 0,10 \\ 0 & 0,40 & 0,20 \\ 0 & 0,20 & 0,60 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 16 \end{bmatrix}$$



$$\text{درگردش} \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0,20 & 0,20 & 0 \\ 0,40 & 0,40 & 0,60 \\ 0,40 & 0,10 & 0,40 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 36 \\ 72 \\ 36 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 36 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 36 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{درگردش.} \begin{bmatrix} 0 \\ 18 \\ 18 \end{bmatrix}$$

در تمرین‌های ۷ تا ۹ اقتصادهایی را درنظر بگیرید که شامل ۲ یا ۳ صنایع باشند. ترازهای خروجی صنایع داده شده‌اند. میزان دسترسی برای بخش بازار هر صنعت را معین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0,20 & 0,40 \\ 0,50 & 0,10 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,20 & 0,30 \\ 0 & 0,10 & 0,40 \\ 0,50 & 0,40 & 0,20 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,10 & 0,20 \\ 0,20 & 0,10 & 0,30 \\ 0,40 & 0,30 & 0,15 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (8)$$

۹) فرض کنید a_{ij} درایه دلخواه از ماتریس ورودی - خروجی باشد. چرا شما انتظار دارید a_{ij} باید در شرط $1 \leq a_{ij} \leq 0$ صدق کند؟

۱۰) در اقتصاد این احتمال وجود دارد که مجموع درایه‌های هر ستون از ماتریس ورودی - خروجی کمتر یا مساوی یک شود. علت این مورد را توضیح دهید.

۱۴-۲ جنبش‌های آماری و ژنتیکی - زنجیره مارکوف

ماتریس‌های خاصی، که ماتریس‌های تصادفی نامیده می‌شود در مطالعه پدیده تصادفی مهم می‌باشند به طوری که این پیامد دقیقاً شناخته شده نیست بلکه احتمالات می‌توانند تعیین شوند. در این بخش، ما ماتریس‌های تصادفی را معرفی می‌کنیم و بعضی از خواص شان را استخراج می‌نماییم و مثالهایی از



کاربردهای ایشان را می‌آوریم. یک مثال تحلیلی از جنبش جمعیت میان شهرها و حومه شهرها در ایالات متحده می‌باشد. مثال دوم بیانگر استفاده از ماتریس‌های تصادفی در زنگیک می‌باشد.

در این زمان، ما به خواننده بعضی از ایده‌های احتمالاتی را یادآور می‌شویم. اگر پیامد هر واقعه این باشد که مطمئناً رخ دهد، ما می‌گوئیم که احتمال این پیامد ۱ است. از طرف دیگر، اگر آن واقعه رخ ندهد، ما می‌گوئیم احتمال آن ۰ است. احتمالات دیگر توسط کسرهایی میان ۰ و ۱ نمایش داده می‌شود: بزرگتر سر، بزرگترین احتمال P از رخ دادن پیامد را دارد. بنابراین احتمال P به فاصله $0 \leq P \leq 1$ محدود می‌شود.

اگر هر یک از n پیامدهای به طور کامل مستقل از هم به نسبت مساوی رخ دهنند، و اگر m تا از این پیامدها مطلوب ما باشد، آنگاه احتمال P که یکی از این پیامدها رخ خواهد داد با کسر $\frac{m}{n}$ تعریف می‌شود.

به عنوان یک مثال، واقعه کشیدن یک ورق تکی از ۵۲ ورق بازی را در نظر بگیرید. احتمال این که نتیجه این پیامد یک آس یا شاه باشد چقدر است؟ اول از همه می‌بینیم که ۵۲ پیامد ممکن وجود دارد. ۴ آس و ۴ شاه در بسته وجود دارند: ۸ پیامد جالب وجود دارد. بنابراین احتمال کشیدن یک آس یا یک شاه برابر است با $\frac{8}{52}$ یا $\frac{2}{13}$. ما اینکه ماتریس‌هایی را معرفی می‌کنیم که درایه‌های ایشان احتمالات می‌باشند.

۱-۱۴-۲ تعریف: یک ماتریس تصادفی یک ماتریس مربعی است که درایه‌های ایشان احتمالات می‌باشند و جمع ستون‌های ایشان ۱ می‌شوند. ماتریس‌های زیر ماتریس‌های تصادفی هستند.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های زیر ماتریس‌های تصادفی نیستند.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌ها در اولین ستون برابر ۱ نیست.

۲ موجود در اولین ردیف یک احتمال نیست زیرا از ۱ بزرگتر است.

یک ماتریس 2×2 تصادفی به طور کلی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 1-x & 1-y \end{bmatrix}$$

که در آن $0 \leq y \leq 1$ ، $0 \leq x \leq 1$.



ماتریس‌های تصادفی دارای خواص مفید زیر هستند (خواننده این نتیجه را برای ماتریس‌های 2×2 تصادفی در تمرینات اثبات می‌کند).

۲-۱۴-۲ قضیه: اگر A و B ماتریس‌های تصادفی هماندازه باشند (یکسان باشند) آنگاه AB نیز ماتریس تصادفی است. بنابراین اگر A تصادفی باشند آنگاه $\dots, A^2, A^3, A^4, \dots$ همگی تصادفی هستند.

مثال ۱: این مثال یک ماتریس تصادفی را توصیف می‌کند که در آنالیز کردن سطح مرکزی شهر تورنتو در دوره زمانی ۱۹۵۲-۱۹۶۲ استفاده شده است.

محققان داده‌ها و اطلاعات را به فرم ماتریس تصادفی P جمع‌آوری و سپس نوشتند. سطرها و ستون‌های P نمایانگر استفاده‌های زمینی هستند. مؤلفه p_{ij} احتمال سطحی است که در ز در سال ۱۹۵۲ استفاده می‌شده است و یا احتمال i است که در سال ۱۹۶۲ استفاده شده است.



استفاده در سال ۱۹۵۲

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	استفاده
۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	تراکم پایین محلی
۳	۲	۰	۲	۰	۸	۱	۱	۱	۵	
۰/۳	۰/۴	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۱	۰/۰	تراکم بالای محلی
۴	۱	۷	۱	۰	۵	۳	۲	۸	۸	
۰/۱	۰/۰	۰/۴	۰/۰	۰/۱	۰/۱	۰/۰	۰/۰	۰/۱	۰/۰	اداری
۰	۵	۳	۹	۱	۴	۲	۲	۴	۳	
۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۳	۰/۰	۰/۰	۰/۱	۰/۰	۰/۰	۰/۰	تجارت اصلی
۱	۴	۵	۰	۷	۸	۲	۳	۴	۳	
۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۷	۰/۱	۰/۰	۰/۰	۰/۱	۰/۰	تجارت خودکار
۱	۰	۱	۹	۰	۲	۳	۳	۰	۵	
۰/۲	۰/۰	۰/۲	۰/۲	۰/۰۶	۰/۳	۰/۱	۰/۰	۰/۳	۰/۱	پارکینگ
۲	۴	۸	۷		۹	۱	۸	۹	۵	
۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۱	۰/۰	۰/۰	۰/۳	۰/۱	۰/۰	۰/۲	خانه‌های فروشی
۳	۰	۴	۵	۰	۴	۸	۸	۳	۲	
۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۲	۰/۶۱	۰/۰	۰/۱	صنعت
۲	۰	۰	۸	۱	۰	۱		۳	۳	
۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	انتقال
۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۱	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۱	۰/۰	۰/۰۸	۰/۰۰	حمل و نقل
۰/۰	۰/۴	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰۸	۰/۰۶	بیکار
۸	۴	۲	۸	۵	۹	۸	۲	۸		اشغال نشده

یکی از اطلاعات به دست آمده از این ماتریس را تفسیر می‌کنیم. برای مثال $p_{62} = 0,28$ این احتمال بیانگر این است که سطح فضای دفتر در سال ۱۹۵۲ دارای احتمال ۰,۲۸ از ناحیه پارک شده در سال ۱۹۶۲ است.

حال ماتریس‌های احتمالی را مشخص می‌کنیم و تعدادی از مشخصه‌های آن را ثابت می‌کنیم. حال برای کاربردهای آن مثالهایی را بیان می‌کنیم.



مثال ۱) آنالیز جنبش آماری بین شهرها و حومه آنها در آمریکا

مثال ۲) استفاده از ماتریس‌های احتمالی در ژنتیک.

حال تعداد نظریه‌های پایه‌ای احتمال را بیان می‌کنیم. اگر نتیجه یک رخداد مطمئناً اتفاق بیفتد می‌گوییم احتمال اتفادن آن یک می‌باشد. از سوی دیگر اگر اتفاق نیفتند می‌گوییم احتمال آن صفر است. احتمالات دیگر بین صفر و یک هستند. بنابراین برای احتمال P داریم $0 \leq P \leq 1$.

اگر تعداد کل احتمالهای موجود n باشد و m تا از آنها اتفاق بیفتد احتمال P را به صورت جز $\frac{m}{n}$ تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال فرض کنیم احتمال کشیدن یک کارت واحد از یک جعبه بازی ۵۲ کارتی را داریم. چقدر احتمال دارد که کارت خارج شده تک (آس) یا شاه باشد؟

ابتدا می‌بینیم که ۵۲ حالت برای خارج کردن کارت داریم. ۴ حالت برای تک کارتها و ۴ حالت برای شاه‌ها داریم ۸ حالت داریم. بنابراین احتمال تک آمدن یا شاه آمدن $\frac{4}{52}$ یا $\frac{1}{13}$ است.

حال ماتریس را می‌سازیم که عناصرش این احتمالات باشد.

سطر ششم احتمال نواحی مختلف شهر که دارای نواحی پارکینگ هستند. در سال ۱۹۶۲ نشان می‌دهد.

این وابستگی ارقام بزرگ افزایش متقابل نقش پارکینگ در سطح را آشکار می‌سازد.

درایه‌های قطری سطح مورد استفاده باقیمانده در طبقه یکسان را می‌دهد. برای مثال $P_{77} = 0,38$ احتمال خانه‌های فروشی باقیمانده در سطح هستند. نسبت اعداد بزرگ این مؤلفه‌های قطری تمایل برای باقیمانده همان طبقه عریض مورد استفاده را معکس می‌کند. حمل و نقل و فاضلاب‌های خالی استثنایات هستند.

نکته جالب توجه این است که $P_{44} = 0,44$ این عدد، احتمال سطحی است که تراکم مراکز مسکونی در سال ۱۹۵۲ است که در سال ۱۹۶۲ این سطح اشغال شده است. این سطح برای مرکز شهر تورنتو مفید است ولی دیر کاربرد است.

خوانندگانی که بر ادامه‌ی این آنالیز علاقه دارند تشویق به خواندن مقاله‌ای که این ماتریس از آن سرچشمه گرفته است می‌شوند که نام آن «مراحل تطبیقی فیزیکی و سطح جانشینی (در تورنتو)» تالیف لاری اس بورنی جغرافیای اقتصاد ۴۷ - شماره ۱ ژانویه ۱۹۷۱ صفحات ۱۵۱ است.

مثال ۲) در این مثال یک مدل جنبش جمعیت بین شهرها و حومه شهرهای آمریکا را توسعه می‌دهیم فرض می‌کنیم تعداد جمعیت در شهر آمریکا در سال ۲۰۰۰ ۵۸ میلیون است و جمعیت در حومه‌ی این شهر ۱۴۲ میلیون است. این اطلاعات را با ماتریس $X = \begin{bmatrix} 58 \\ 142 \end{bmatrix}$ نشان می‌دهیم. فرض کنید جمعیت



از سمت شهرها به حومه‌های اطراف سرازیر می‌شود. در طول سال ۲۰۰۰ احتمال شخص باقی مانده در شهر ۹۶٪ بود. بنابراین مهاجرت به حومه‌ها ۴٪ بوده است. (فرض کنید تمام این مهاجرتها به سوی حومه‌ها باشد.)

اگر فرض کنید معکوس جمعیت از حومه به شهر سرازیر شده است. احتمال شخص آمده به شهر ۱٪ و احتمال باقیمانده به حومه ۹۹٪ است. این احتمال به عنوان درایه‌های تصادفی ماتریس P به صورت زیر نوشته شود:

$$P = \begin{bmatrix} \text{حومه} & \text{شهر} \\ \text{شهر} & 0,96 \\ \text{حومه} & 0,04 \end{bmatrix}$$

احتمال رفتن از محل A به محل B با درایه ستون A و سطر B داده شده است. این مورد از ماتریس تصادفی احتمال تغییر وضعیت نامیده می‌شود.

اگر توسعه جمعیت در سال ۲۰۰۱ یک سال بعد را در نظر بگیرید.

افرادی که به حومه‌ها رفتند + افرادی که از سال ۲۰۰۰ باقی ماندند = جمعیت شهر در سال ۲۰۰۱

$$= (0,96 \times 58) + (0,04 \times 142) = 57,1 \text{ میلیون}$$

افرادی که در سال ۲۰۰۰ ماندند + افرادی که از شهر آمدند = جمعیت حومه در سال ۲۰۰۱

$$= (0,99 \times 142) + (0,04 \times 58) = 142,9 \text{ میلیون}$$

توجه کنید که ما می‌توانیم با استفاده از ماتریس حاصلضرب به این ارقام دست یابیم:

$$\begin{bmatrix} 0,96 & 0,01 \\ 0,04 & 0,99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 58 \\ 142 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57,1 \\ 142,9 \end{bmatrix}$$

از سال ۲۰۰۰ به عنوان پایه استفاده می‌کنیم. فرض کنید X_1 جمعیت در سال ۲۰۰۱ باشد یک سال بعد.

$$X_1 = P X_0$$

فرض کنید جمعیت نشان داده شده با ماتریس P بالای چند سال غیرقابل تغییر باشد.

$$X_2 = P X_1$$

بعد از سه سال توسعه جمعیت این چنین است.



بعد از n سال داریم: $X_n = P X_{n-1}$

پیش‌گویی‌های این مدل (تا چهار رقم اعشار) به صورت زیر هستند و به همین ترتیب

$$X_0 = \begin{bmatrix} 58 \\ 142 \end{bmatrix} \quad X_1 = \begin{bmatrix} 57,1 \\ 142,9 \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 56,245 \\ 143,755 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 55,4327 \\ 144,5672 \end{bmatrix} \quad X_4 = \begin{bmatrix} 54,6611 \\ 145,3389 \end{bmatrix}$$

و غیره.

مشاهده می‌کنیم که چگونه جمعیت شهرها سالانه رو به کاهش است. در حالی که جمعیت افراد در حومه‌ها رو به افزایش است. به این مدل در بخش ۶-۲ رجوع می‌کنیم. بنابراین دنباله‌ای X_0, X_1, X_2, \dots را یافته‌یم که به سمت $\begin{bmatrix} 40 \\ 160 \end{bmatrix}$ میل می‌کند. اگر شرایط تغییر نکند، جمعیت شهر به تدریج به 40 میلیون می‌رسد و جمعیت حومه به 160 میلیون می‌رسد. به علاوه توجه کنید که دنباله $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ به طور مستقیم از X_0 محاسبه می‌شود مانند زیر:

$$X_1 = P X_0, \quad X_2 = P^2 X_0, \quad X_3 = P^3 X_0, \dots, X_n = P^n X_0.$$

ماتریس P^n یک ماتریس تصادفی از X_0 به سوی X_n در مرحله است. این نتیجه می‌تواند کلی باشد که در این حالت برای توزیع n مرحله بعد از هر توزیع داده شده و نیز پیش‌بینی شود.

$$X_{i+n} = P^n X_i$$

ماتریس تغییر وضعیت n مرحله‌ای نامیده می‌شود. (j, i) مؤلفه‌ای از P^n می‌باشد که احتمال به دست آمده از مرحله j ام به مرحله i ام در n مرحله است. به عنوان مثال می‌توانیم 2 رقم اعشار در نظر بگیریم:

حومه	شهر
$P^4 = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,15 & 0,95 \end{bmatrix}$	شهر
حومه	حومه

بنابراین، احتمال زندگی در شهر در سال 2000 و احتمال بودن در حومه‌ها 4 سال بعد $/15\%$ می‌باشد. احتمالات در این مدل فقط به ثابت بودن تکرار افرادی که در شهر و حومه زندگی می‌کنند بستگی دارد. این مدل که احتمالاتش یکی پس از دیگری است مدلی رایج‌تر نسبت به نسخه تاریخی کامل آن است، و



زنجیره مارکوف نامیده می‌شود. یک تغییر و تحول که برای آمار سالانه رشد یا کاهش جمعیت است به طور تخمینی از توزیع آماری آینده توسعه می‌باید. خواننده ساخت این عامل را در تمرینها اثبات می‌کند. این مفهوم می‌تواند مراحل نظریه مارکوف را بیشتر از دو بیانیه توسعه دهد. مثال زیر زنجیره مارکوف را در سه بیانیه توضیح می‌دهد.

مثال ۳) زنجیره مارکوف ابزار مهمی برای داشمندان در بسیاری از رشته‌ها مانند ژنتیک است. ژنتیک شاخه‌ای از زیست‌شناسی است که با وراثت سروکار دارد. ژنتیک مطالعه واحدهای ژنی است که تعیین کننده صفات موجودات زنده که از والدین به ارث رسیده است می‌باشد. وراثت این گونه صفات مثل جنسیت، قد، رنگ چشم، رنگ موی انسانها به وسیله ژنها مدیریت می‌شود. به دلیل این که بسیاری از بیماریها ارثی هستند. ژنتیک در پزشکی و نیز در علم کشاورزی اهمیت دارد، تولید مثل کردن براساس ژنهای مهمی است که هم در گیاهان و هم در تولید مثل حیوانات وجود دارد صورت می‌گیرد. دانه گیاهان پیوندی به عنوان مهمترین کمک کننده به ژنها برای افزایش محصول (مواد) غذایی است. در مورد یک مدل ریاضی برای آنالیز کردن رفتار اختصاصی یک جفت از ژنها بحث می‌کنیم. مفاهیمی را که شامل یک جفت خوک گینه‌ای است را شرح می‌دهیم. رفتارهای که می‌باشد در خوکهای گینه‌ای مطالعه کنیم آنها اند که دارای خصوصیت مو بلندی و مو کوتاهی‌اند. طول مو متوسط یک جفت ژن که با علامت A و a مشخص می‌شود هدایت می‌شود. یک خوک گینه‌ای ممکن است دارای یکی از ترکیبات AA ، AO و یا aa باشد هر کدام از این حالت‌ها به ژنتایپ (معرف و نماینده یک جنس از موجودات دارای صفات مشابه ارثی) معروفند. انواع خوکهای گینه‌ای که حاوی ژن A می‌باشند. از نظر ظاهری از انواع Aa قابل تمایز نیستند در صورتی که خوکهایی که از نوع aa هستند با موهای کوتاه می‌باشند ژن A گفته می‌شود که به ژن a غالب است یک حیوان را زمانی غالب گویند که دارای ژن AA باشد و هیبرید (دوتاپی) به آنها گفته می‌شود که ژن a را دارند و آنها ای که قد aa دارند مغلوب‌اند یک جمعیت خوک گینه‌ای را در نظر بگیرید. پس با AA ، Aa ، aa و با AA آمیزش می‌دهیم احتمال نتیجه زاد و ولد Aa ، aa ، یا AA در کدام از حالت‌ها چیست؟ آمیزش AA را با AA در نظر بگیرید، بنابراین باید از نوع AA باشد. بنابراین احتمالات AA ، Aa ، aa به ترتیب به صورت 1 ، 0 ، 0 خواهد بود. همه زاد و ولدها دارای موی بلند هستند. در مرحله بعد آمیزش Aa را با AA تصور کنید، که یک ژن از هر والد احتمال A را می‌گیرد، (A با گرفتن A از والد اول و هر A به نوبت از والد دوم).

aa و Aa (با گرفتن a از والد اول و هر A به نوبت از والد دوم). بنابراین احتمالات AA ، Aa ، aa به ترتیب برابر با $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ می‌باشند. دوباره، تمام زاد و ولدها با موهای بلند هستند. سرانجام آمیزش aa و



فقط با یک احتمال وجود دارد که آن aA نام دارد. بنابراین احتمالات AA , Aa , aa به ترتیب برابر با 100% و 0% باشند. همه نتایج حاصل از این آزمایشها دارای موهای بلند هستند و این سری از آزمایشها زنجیره مارکوف که دارای ماتریس جابه‌جایی است می‌باشد و به شکل زیر است:

$$P = \begin{bmatrix} AA & Aa & aa \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فرض کنید جمعیت اولیه خوک‌های گینه‌ای از عددی مساوی با هر ژنتایپ ساخته شده باشد. فرض کنید توزیع اولیه برابر با $x_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ باشد، کسر خوک‌های گینه‌ای از هر نوع اولیه را دوباره نمایش می‌دهیم. اجزا x_1, x_2, x_3, \dots به ترتیب کسرهایی از نسل‌های زیر را خواهند داد که از نوع AA , Aa و aa می‌باشند. داریم:

$$x_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad x_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{1}{8} \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_4 = \begin{bmatrix} \frac{15}{16} \\ \frac{1}{16} \\ 0 \end{bmatrix}$$

و غیره. مشاهده می‌کنید که نوع aa بعد از نسل اول ظاهر می‌شود و آن که نوع Aa کسر کوچکتر و کوچکتر از هر نسل بعدی می‌شود. این دنباله را در حقیقت به صورت یک ماتریس نمایش می‌دهیم: $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. ژنتایپ AA در این مدل حالت جذبی نامیده می‌شود.

ملاحظه کردید که حالتی از زاد و ولد یک حیوان چیره دست را ارائه کردیم. خواننده در این قسمت مدلی مشابه با مدل قبلی با یک هیبرید در تمرین‌هایی که در زیر می‌آید را توصیف می‌کند. در این سری از آزمایشها بعضی از زاد و ولدها با موهای بلند و بعضی از آنها با موهای کوتاه می‌باشند.



تمرینات

۱) با ذکر دلیل ماتریس‌های تصادفی و غیرتصادفی را مشخص کنید.

$$\begin{array}{ll} \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 12 \end{array} \right] & \text{ب)} \quad \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 \end{array} \right] \text{الف)} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \text{د)} \quad \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{7} \end{array} \right] \text{ج)} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{2}{5} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{2} \end{array} \right] & \text{و)} \quad \left[\begin{array}{ccc} 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right] \text{ه)} \end{array}$$

۲) ثابت کنید که ضرب دو ماتریس 2×2 تصادفی یک ماتریس تصادفی است.

۳) یک ماتریس تصادفی که مجموع سطرهای آن یک است ماتریس تصادفی دوبل نامیده می‌شود.

مثالی برای ماتریس‌های تصادفی دوبل 2×2 , 3×3 , 2×3 بیاورید آیا ضرب در ماتریس‌های تصادفی دوبل ماتریس تصادفی دوبل است؟

۴) با استفاده از ماتریس تصادفی مثال ۱ در این بخش سوالهای زیر را پاسخ دهید.

الف) احتمال این که سطح مورد استفاده برای صنعت در سال ۱۹۵۲ مورد استفاده برای دفاتر در سال ۱۹۶۲ باشد چقدر است؟

ب) احتمال این که سطح مورد استفاده برای پارکینگ در سال ۱۹۵۲ در ناحیه تراکم بالانی محلی در سال ۱۹۶۲ باشد چیست؟

ج) سطوح اشغال نشده در سال ۱۹۵۲ بیشترین احتمال را داراست و دارای چه نوع سطحی در سال ۱۹۶۲ است؟

د) در دوره زمانی ۱۹۵۲-۱۹۶۲ بیشترین استفاده پایا از سطوح کدام است؟



۵) در مدل مثال ۲ عبارتهای زیر را معین کنید.

الف) احتمال رفتن از شهر به حومه در ۲ سال؟

ب) احتمال رفتن از حومه به شهر در ۳ سال؟

۶) مدلی از جمعیت بسازید که از نواحی مرکزی و غیرمرکزی آمریکا روانه می‌شوند. به طوری که جمعیت

آنها در ۲۰۰۰، به ترتیب ۲۰۰ میلیون و ۶۰ میلیون داده شده است. احتمالات با ماتریس زیر داده

شده است:

غیرمرکزی	مرکزی
[۰,۹۹ ۰,۰۲]	مرکزی
[۰,۰۱ ۰,۹۸]	غیرمرکزی

توزیعات جمعیتی از نواحی مرکزی و غیرمرکزی برای سالهای ۲۰۰۰ تا ۲۰۰۵ (برحسب میلیون تا

چهار رقم اعشار) پیشنهاد کنید. اگر شخصی در ناحیه مرکزی در حال زندگی کردن در سال ۲۰۰۰

باشد احتمال این که شخص هنوز در ناحیه مرکزی در سال ۲۰۰۵ زندگی کند چقدر است؟

۷) مدل از جمعیت که میان شهرها، حومه‌ها و نواحی غیرمرکزی آمریکا روانه می‌شوند را بسازید جمعیت

آنها در سال ۲۰۰۰، به ترتیب ۵۸ میلیون، ۱۴۲ میلیون و ۶۰ میلیون است.

ماتریس تصادفی احتمالات این مهاجرتها به صورت زیر است:

(به)	غیر مرکز حومه شهر
شهر	۰,۹۶ ۰,۰۱
حومه	۰,۰۵ ۰,۹۸
غیرمرکزی	۰,۰۱ ۰,۹۸

این مدل مناسب‌تر از مدل قبل در تمرین قبلی است که جمعیت مرکزی نیز داده شده بود. و هم‌چنین

این مدل کامل‌تر از مثال ۲ در این بخش است که برای هر جمعیت خارج از شهر و حومه کاربرد دارد.

جمعیت شهر، حومه و نواحی غیرمرکزی در سال ۱ ۲۰۰۰ و ۲ ۲۰۰۲ را پیشگویی کنید. اگر شخص در

سال ۲۰۰۰ در شهر زندگی کند احتمال این که این شخص در سال ۲۰۰۲ در نواحی غیرمرکزی

زندگی کند چقدر است؟



۸) در دوره زمانی ۱۹۹۵ تا ۲۰۰۰ کل جمعیت آمریکا یک درصد در سال افزایش می‌یافتد. فرض کنید جمعیت سالانه در طول ۱ درصد به سرعت افزایش یابد. عاملی از مدل مثل ۲ بسازید و جمعیت شهر و حومه را در سال ۲۰۰۵ پیشگویی کنید.

۹) فرض کنید جمعیت شهرها در آمریکا با توجه به تولدات، مرگها و مهاجرتها ۱/۲ درصد در دوره زمانی ۲۰۰۰ تا ۲۰۰۵ افزایش یابد و جمعیت حومه‌ها تا ۸ درصد که ناشی از این عاملهاست افزایش یابد. این افزایشها را در مدل مثل ۲ در نظر بگیرید و نیز جمعیت را برای ۲۰۰۵ پیشگویی کنید.

۱۰) مدل حرکت جمعیت بین شهرها و حومه‌های مثل ۲ در همین بخش را ملاحظه کنید. توزیع‌های جمعیت برای سال ۱۹۹۵ تا ۱۹۹۹ و از قبل برای سال ۲۰۰۰ تعیین کنید. آیا زنجیره از سال ۲۰۰۰ به زنجیره گذشته مارکوف می‌رود؟ خصوصیت‌های ماتریسی که از یک توزیع به توزیع گذشته می‌باشد چیست؟

۱۱) ماتریس تصادفی زیر که احتمالات گذار شغلی می‌باشد داده شده است:

نسل اولیه

دستی کارمند دفتری

نسل بعد کارمند دفتری ۰,۲

دستی ۰,۸

الف) اگر پدر کارمند دستی باشد احتمال این که پسر کارمند دفتری باشد چقدر است؟

ب) اگر ۱۰,۰۰۰ طبقه کارمند دفتری و ۲۰,۰۰۰ طبقه کارمند دستی وجود داشته باشند، توزیع احتمال نسل بعد چقدر خواهد بود.

۱۲) ماتریس زیر احتمالات گذار شغلی را نشان می‌دهد.

کشاورزی غیرکشاورزی

(نسل بعد) غیرکشاورزی ۰,۴

کشاورزی ۰,۶



الف) اگر پدر کشاورز باشد احتمال این که پسر کشاورز باشد چقدر است؟

ب) اگر 10000 طبقه غیرکشاورز و 10000 طبقه کشاورز از یک زمان معین وجود داشته باشد توزیع نسل بعد چقدر خواهد بود؟ چهار نسل بعد چطور؟

ج) اگر پدر کشاورز باشد احتمال این که نوه کشاورز باشد چقدر است؟

۱۳) یک بازار خرید ماشین در یک منطقه معین وجود دارد که خانواده‌ای به طور متوسط هر ۳ سال یک بار یک ماشین جدید از این بازار خریداری می‌کند الگوهای خرید به شکل ماتریس زیر است:

کوچک بزرگ

کوچک $\begin{matrix} \% & 40 \\ \% & 80 \end{matrix}$

$P =$

بزرگ $\begin{matrix} \% & 60 \\ \% & 20 \end{matrix}$

مؤلفه‌های P مانند زیر تعیین می‌شوند:

ستون اول نمایانگر ماشینهای کوچک رایج است. $\% 80$ قابل جایگزین کردن با ماشینهای کوچک است. $\% 20$ با ماشین بزرگ ستون دوم دلالت بر این نکته دارد که $\% 40$ از ماشینهای بزرگ رایج است، جایگزین با ماشینهای کوچک خواهد شد. در حالی که $\% 60$ قابل جایگزین شدن با ماشینهای بزرگ است. درایه‌های P به عنوان ماتریس تصادفی که در تعریف زنجیره مارکوف آمده است را بنویسند.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{80}{100} & \frac{40}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{60}{100} \end{bmatrix}$$

اگر 40000 ماشین کوچک و 50000 ماشین بزرگ در منطقه وجود داشته باشد پیش‌بینی شما در مورد توزیع 12 سال دیگر چیست؟

۱۴) نتیجه‌ای از تجزیه و تحلیل گرایشات رای دادن در یک منطقه معین الگوهای موفقیت‌آمیز نسلهاست که با ماتریس P در زیر توصیف می‌شود.

مستقل جمهوری خواه دموکرات

دموکرات $\begin{matrix} \% & 20 \\ \% & 80 \end{matrix}$

$$P = \begin{bmatrix} \% 15 & \% 70 \\ \% 5 & \% 10 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \% 30 \\ \% 60 \end{matrix}$$

جمهوری خواه مستقل

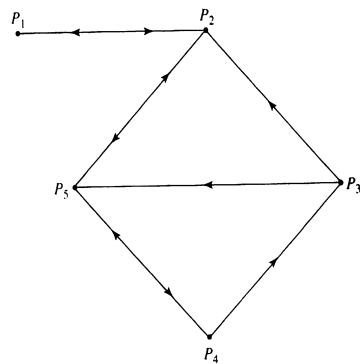


در میان دموکرات‌های یک نسل ۸۰٪ از نسل بعد نیز دموکرات هستند. ۵۰٪ جمهوریخواه، ۵۰٪ خودمختار هستند و به همین ترتیب P را به عنوان یک ماتریس تصادفی بیان می‌کنیم که الگوهای رای دادن مدل زنجیره‌ای مارکوف است. اگر ۲/۵ میلیون دموکرات ثبت‌نام شده، ۱/۵ میلیون جمهوریخواه ثبت‌نام شده و ۲۵٪ خودمختار ثبت‌شده در یک زمان معین وجود داشته باشند. توزیع احتمالی نسل آینده چیست؟

۱۵-۲ یک مدل ارتباطی و ارتباطات گروهی در جامعه

بسیاری از شاخه‌های علوم فیزیک، علوم اجتماعی و تجارت از نظریه گراف برای تجزیه و تحلیل ارتباطات استفاده می‌کنند. به خواننده، این قسمت مهم از ریاضیات را که در جبر خطی از آن استفاده می‌شود با یک مثال از رشته ارتباطات، معرفی می‌کنیم.

یک شبکه ارتباطی که از ۵ قسمت تشکیل شده است و با P_1, \dots, P_s نام‌گذاری شده است را درنظر بگیرید. خطوطی که ایستگاه‌ها را به هم متصل می‌کند به صورت ارتباطات مستقیم می‌باشد و فلشها جهت این ارتباطات را نشان می‌دهند. برای مثال، ایستگاه P_1 و P_2 دو راه ارتباطی مستقیم دارند.



شکل ۴-۲

ایستگاه P_4 می‌تواند به P_1 پیام بفرستد از طریق ایستگاه‌های P_2 و P_3 یا به وسیله ایستگاه‌های P_5 و P_2 . این شبکه ارتباطی یک مثال از یک دیگراف می‌باشد.

۱-۱۵-۲ تعریف: یک دیگراف مجموعه‌ای محدود از رأس‌های P_1, P_2, \dots, P_n می‌باشد که توسط کمان‌های مستقیم زوج‌هایی از رأس‌های مشخصی را به هم متصل می‌کند. مسیر بین رأسها حالتی



از کمان هاست که به این مسیرها اجازه می دهد از یک رأس به رأس دیگر حرکت کند. طول این مسیر برابر با تعداد کمانها می باشد. مسیری به طول n مسیر نامیده می شود.

در شبکه ارتباطی بالا ۵ رأس وجود دارد به نام های P_1, \dots, P_s . فرض کنیم علاقه مندیم تا پیامی را از P_1 به P_2 ارسال کنیم. از شکل می بینیم که مسیرهای مختلفی برای انتخاب وجود دارد. مسیر $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_5$ با طول ۲ (یک مسیر با طول ۱) وقتی که مسیر $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_5$ با طول ۳ است. (یک مسیر با طول ۲) مسیر $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_5$ با طول ۵ (یک مسیر با طول ۴) که از رأس ۳ دو بار استفاده شده است. این چنین مسیرها جالب خواهند بود اگر برای مثال P_2 بخواهد با P_5 و P_4 قبل از فرستادن پیام به P_1 هم فکر می کند. ما در این بخش کوتاه ترین مسیر را برای ارتباط برقرار کردن و فرستادن پیام از یک ایستگاه به ایستگاه دیگر انتخاب کنیم. شبکه های ارتباطی می توانند بسیار گسترده باشند و از ایستگاه های زیادی تشکیل شده باشند. این کار غیر عملی است برای این که اطلاعاتی را در مورد یک شبکه بزرگ از نمودارها به دست آوریم. همانند آنچه که در بالا انجام داده ایم. در این نظریه ریاضی که در حال حاضر ارائه می دهیم استفاده از نظریه گراف، می تواند اطلاعاتی را در مورد شبکه های بزرگ به ما بدهد. این ریاضیات به وسیله کامپیوتر می تواند اجرا شود. یک دیگراف می تواند توسط ماتریس A تعریف شود که به آن ماتریس مجاورتی گویند. این ماتریس از 0 و 1 تشکیل شده و به صورت ذیل تعریف می شود.

۲-۱۵-۲ تعریف:

به صورت زیر است:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر یک کمان از حلقه } P_i \text{ به } P_j \text{ داشته باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ماتریس مجاورتی از شبکه ارتباطی به این صورت می باشد:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

برای مثال $a_{12} = 1$ چون کمانی از P_1 به P_2 وجود دارد. $a_{13} = 0$ چون کمانی از P_1 به P_3 وجود ندارد. شبکه کاملاً توسط ماتریس مجاورت توصیف می شود. این ماتریس یک تصویر ریاضی از شبکه است که



به کامپیوترا داده می‌شود. می‌توانیم طرح خلاصه شبکه را که در شکل ۴-۲ داده شده است، مشاهده کنیم و در مورد بهترین فرستادن پیام از P_2 به P_1 تصمیم‌گیری نماییم. چطور می‌توانیم این اطلاعات را از ماتریس مجاورت استخراج کنیم؟

قضیه زیر از نظریه گراف اطلاعاتی در مورد مسیرهای داخل دیگراف به ما می‌دهد.

۳-۱۵-۲ قضیه: اگر A یک ماتریس مجاورت از یک دیگراف باشد. فرض کنید $(a_{ij})^m$ درایه‌ای در سطر i و ستون j از ماتریس A^m باشد.

$$P_j = \text{تعداد } m \text{ مسیر از } P_i \text{ به } P_j = (a_{ij})^m$$

اثبات: یک دیگراف با n رأس را در نظر بگیرید. a_{ii} تعداد کمانها از P_i تا P_i و a_{ij} تعداد کمانها از P_i تا P_j است. بنابراین $a_{ii} + a_{ij}$ تعداد دو مسیر عبور کرده از P_i تا P_j است. خواهیم دید که با جمع همه مسیرهای میانی، تعداد کل 2 -مسیرهای از P_i به P_j عبارت است از:

$$a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \cdots + a_{in}a_{nj}$$

این درایه موجود در سطر i و ستون j از ماتریس A^2 است. بنابراین $(a_{ij})^{(2)}$ تعداد 2 -مسیرهای از P_i به P_j است.

اکنون به سه مسیر توجه می‌کنیم. یک 3 -مسیر همانند یک 2 -مسیر با یک کمان تفسیر می‌کنیم. تعداد 2 -مسیرهای از P_i به یک کمان از P_1 به P_j برابر است با $(a_{ij})^{(2)}$. با جمع همه مسیرهای میانی خواهیم که کل تعداد 3 -مسیرهای از P_i به P_j به صورت زیر است:

$$(a_{i1}^2)a_j + (a_{i2}^2)a_{2j} + \cdots + (a_{in}^2)a_{nj}$$

این درایه در سطر i ، ستون j از ماتریس حاصلضرب A^3 است که از A^2 می‌باشد، بنابراین $(a_{ij})^{(3)}$ تعداد 3 -مسیرها از P_i به P_j می‌باشد.

با ادامه این روند، می‌توانیم به یک 4 -مسیر به عنوان یک 3 -مسیر با یک کمال بررسیم و به همین ترتیب. و در نهایت به نتیجه $(a_{ij})^{(4)}$ که تعداد m -مسیرهای از P_i به P_j است می‌رسیم. اکنون کاربرد این قضیه را در شبکه ارتباطی خودمان نشان می‌دهیم. توان‌های زنجیروار از ماتریس مجاورت در زیر نشان داده شده



است:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A^3 = \dots \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

اجازه دهدید به ما که از این ماتریس‌ها برای بحث بر روی مسیرهایی از P_4 تا P_1 استفاده کنیم.

ارتباط مستقیم وجود ندارد. A . $a_{41} = 0$ را می‌دهد. ۲-مسیرهایی از P_4 به P_1 وجود ندارد. A^2 .

$a_{41}^{(2)} = 0$ را می‌دهد. دو مسیر متمایز ۳-مسیرها از P_4 به P_1 وجود دارد. $a_{41}^{(3)} = 2$. A^3 را می‌دهد.

کوتاهترین مسیرها از P_4 به P_1 وجود دارند. اگر شکل ۲-۴ را بررسی کنیم به این مهم دست می‌یابیم: این دو مسیر با طول ۳ (۳-مسیرهای) عبارتند از:

$$P_4 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_1 \quad , \quad P_4 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_1$$

به عنوان دومین مثال اجازه دهدید به ما که طول کوتاهترین مسیر از P_1 به P_2 را تعیین کنیم.

ارتباط مستقیم وجود ندارد. A . $a_{12} = 0$ را می‌دهد.

۲-مسیرهایی از P_1 به P_2 وجود ندارد. A^2 . $a_{13}^{(2)} = 0$ را می‌دهد.

۳-مسیرهایی از P_1 به P_2 وجود ندارد. A^3 . $a_{13}^{(3)} = 0$ را می‌دهد.

یک ۴-مسیر منفرد از P_4 به P_2 وجود دارد. A^4 . $a_{13}^{(4)} = 1$ را می‌دهد.

این نتیجه تایید می‌شود زمانی که دیگراف را امتحان می‌کنیم، سریعترین راه برای فرستادن پیام از P_1 به P_2 مسیری با طول ۴ (۴-مسیر) است.

$$P_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_5 \longrightarrow P_4 \longrightarrow P_2$$

این مدل طول‌های کوتاهترین مسیرها را از دیگراف می‌دهد و ایستگاه‌های میانی ساخته شده در آن مسیر را نمی‌دهد. ریاضی‌دانان هنوز موفق به استخراج کردن این اطلاعات از ماتریس مجاورت نشده‌اند. یک



الگوریتم برای یافتن کوتاهترین مسیرها برای دیگراف ویژه با استفاده از فرآیند تحقیق، با کامپیوتر داج دانشمندی به نام دیجک اسکو توسعه یافته است. بحث زیر کاربردی است، جایی که طول‌های کوتاهترین مسیرها نه مسیرهای حقیقی بلکه مسیرهایی را که مهم هستند، منجر می‌شود.

فاصله در دیگراف

فاصله از رأس یک دیگراف تا رأس دیگری طول کوتاهترین مسیر از آن رأس تا رأس دیگر است. اگر مسیری از یک رأس به رأس دیگر وجود نداشت می‌گوییم آن فاصله تعريف شده است. فاصله‌های میان رأس‌های متفاوت از یک دیگراف، درایه‌های ماتریس را تشکیل می‌دهد. ماتریس فاصله D به صورت زیر تعريف می‌شود:

تعداد کمانها در کوتاهترین مسیر از رأس P_i تا رأس P_j

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ x & \text{اگر مسیری از } P_i \text{ به } P_j \text{ موجود نباشد} \end{cases}$$

اگر دیگراف کوچک باشد ماتریس فاصله D می‌تواند با مشاهده ساخته شود از توانهای ماتریس مجاورت برای ساخت ماتریس فاصله از یک دیگراف بزرگ، استفاده می‌شود. ماتریس فاصله شبکه ارتباطی بالا چنین است:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که نیازی نیست فاصله از P_i تا P_j با فاصله از P_j به P_i در دیگراف برابر باشد که این نکته بر این دلالت دارد که ماتریس فاصله در گراف نیازی ندارد که متقارن باشد.

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه یک دیگراف و یک ماتریس فاصله برای تحلیل ارتباطات گروهی در جامعه‌شناسی استفاده می‌شوند.



ارتباطات گروهی در جامعه‌شناسی

یک گروه ۵ نفره مردم را در نظر بگیرید. یک جامعه شناس علاقمند به شناخت و تسلط بر یکی از این ۵ نفر که پرتأثیرترین فرد نسبت به بقیه است را دارد. از گروه خواسته می‌شود که پرسشنامه زیر را تکمیل کنند.

- اسم

- شخصی که به نظرش بیشترین ارزش را می‌دهید.

سپس این پاسخها جدول‌بندی می‌شوند. اعضای گروه را با M_1, M_2, \dots, M_5 برچسب‌گذاری می‌کنیم.

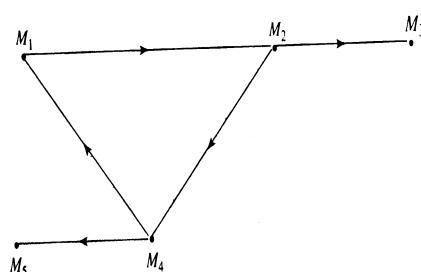
فرض کنید که نتایج به صورت زیر در جدول ۲-۱ مشخص شده باشد:

شخصی که نظرش با ارزش است عضو گروه

M_1	M_4
M_2	M_1
M_2	M_2
M_4	M_2
M_5	M_4

جدول ۲-۱

جامعه‌شناس فرضیه‌ای را می‌سازد که براساس آن شخصی که اعتقاد یا ایده‌اش بیشترین ارزش را در بین بقیه دارد، همان فردی است که بیشترین تأثیر را روی دیگر اعضا دارد. پس تأثیر (نفوذ) از ستون راست به ستون چپ در جدول بالا حرکت می‌کند. این نتایج را می‌توان با یک دیگراف نشان داد. اعضای گروه نشان دهنده رأسها، تأثیر مستقیم با یک کمان، جهت اثر، جهت کمان است. شکل ۲-۵ را نگاه کنید.



شکل ۲



ماتریس فاصله این دیگراف را تشکیل دهید و همه درایه‌ها در هر سطر را با یکدیگر جمع می‌کند.

$$D = \begin{bmatrix} \cdot & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & \cdot & 1 & 1 & 2 \\ x & x & \cdot & x & x \\ 1 & 2 & 3 & \cdot & 1 \\ x & x & x & x & \cdot \end{bmatrix}$$

در این گراف کمانها با اثر مستقیم متناظرند و مسیرهای ۲، مسیرهای ۳ و غیره با اثر غیرمستقیم متناظرند. بنابراین کوچکترین فاصله از M_i به M_j بزرگترین اثری است که M_i روی M_j دارد و مجموع درایه‌ها در سطر i کل فاصله از M_i به رأس‌های دیگر را می‌دهد و این موضوع منجر به تفسیر زیر از سطرها می‌شود.

کوچکترین مجموع سطر i ، بزرگترین تأثیر شخص i بر روی گروه است. می‌دانیم که جمع کوچکترین سطر برای سطر i ، σ_i می‌باشد. بنابراین σ_i پرتأثیرترین شخص در گروه است که از M_i و سپس از M_1 پیروی می‌کند. خوانندگانی که علاقمند به یادگیری بیشتر نظریه گرافها هستند به کتاب زیر رجوع کنند: معرفی نظریه گراف تألیف رابین جی ویلسون جان ویلی و پسران در سال ۱۹۸۷ و ساختارهای ریاضی گستته تألیف فرد اس رابرتز پرنیتک هال در سال ۱۹۷۶ است.

کتاب سابق (اولی) معرف زیبایی از ریاضیات نظریه گراف است، کتاب اخیر مجموعه باشکوهی از کاربردهای «پیشگویی شیمی توپولوژی» اثر دنیس روری دانشمند آمریکایی سپتمبر ۴۰ در سال ۱۹۸۶ است که شامل جذب میزان روش‌های نظریه گراف برای پیشگویی خاصیت‌های شیمیایی مولکول‌هایی که هنوز با هم ترکیب نشده‌اند می‌باشد.

تمرینات

- ۱) ماتریس مجاورت و ماتریس فاصله هر کدام از دیگراف‌ها در شکل ۶-۲ را معین کنید.
- ۲) قطر یک دیگراف بزرگترین فاصله میان رأس‌های است. قطرهای دیگراف‌های شکل ۶-۲ را تعیین کنید.
- ۳) طرح دیگراف‌هایی که دارای ماتریس‌های مجاورت زیر هستند را رسم کنید.



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ب)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الف)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

د)

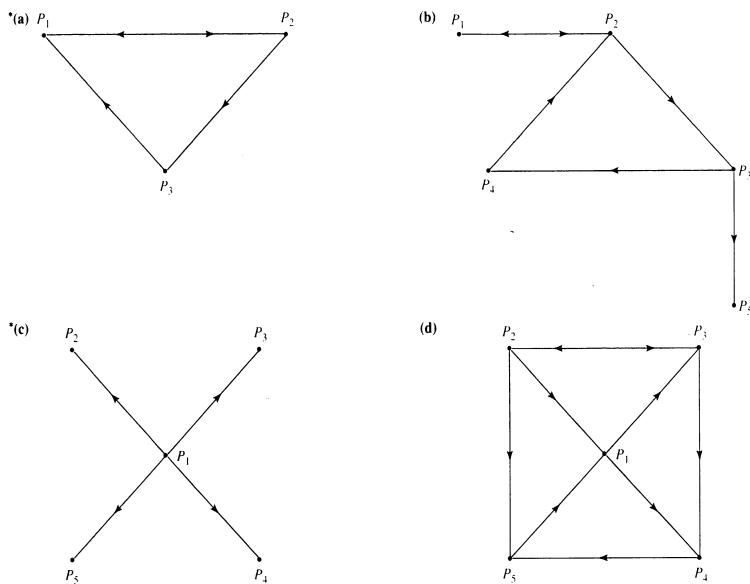
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ج)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

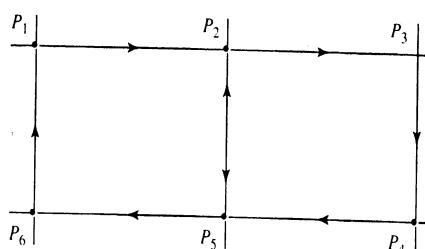
هـ)





شکل ۶-۲

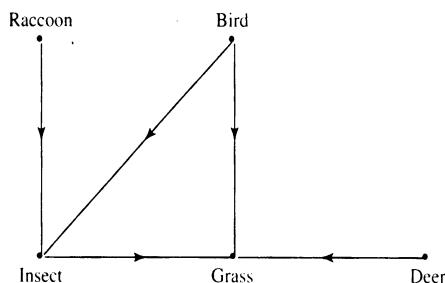
۴) شبکه داده شده در شکل ۷-۲ سیستمی از خیابانها را در منطقه پایین شهر نشان می‌دهد بسیاری از خیابانها یک طرفه هستند. شبکه را به عنوان یک دیگراف تفسیر کنید. ماتریس مجاورت و ماتریس فاصله را بیابید.



شکل ۷-۲

۵) از نظریه گراف در مدل‌های ریاضی برای بهتر فهمیدن تعادل دقیق و ظریف طبیعت استفاده می‌شود. شکل ۸-۲ دیگرافی را از این دهد که شبکه غذایی یک جامعه محیط زیست را در یک جنگل ملی آکلا نشان می‌دهد (در فلوریدای مرکزی) ماتریس مجاورت را تعیین کنید.



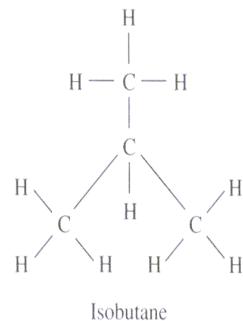
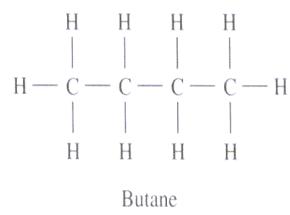


شکل ۸-۲

۶) وقتی که در یک شبکه تمامی کمانها دو طرفه باشند از پلکان یا فلشن استفاده نمی‌شود زیرا که آنها غیرضروری می‌باشند. پس از اصطلاح گراف استفاده می‌شود. دانشمندان از گرافها برای پیش‌بینی خواص شیمیابی مولکولها استفاده می‌کنند. گراف‌ها در شکل ۹-۲ ساختارهای مولکولی بوتان ایزو بوتان که هر دو ساختار شیمیابی مشابهی دارند، را نشان می‌دهد. ماتریس‌های مجاورت این گراف‌ها را تعیین کنید. توجه کنید که ماتریس‌ها متقاضن می‌باشند. آیا انتظار دارید که ماتریس مجاورت هر گراف متقاضن باشد؟

$$\begin{array}{cccccc}
 & H & H & H & H \\
 & | & | & | & | \\
 H - & -C & -C & -C & -C & -H \\
 & | & | & | & | \\
 & H & H & H & H
 \end{array}$$





شکل ۹-۲

- ۷) ماتریس زیر یک شبکه ارتباطی را تعریف می‌کند. طرح شبکه را رسم کنید. کوتاهترین مسیر برای فرستادن یک پیام (الف) P_5 به P_2 (ب) P_2 را معین کنید. ماتریس فاصله دیگراف را بیابید.

$$\begin{bmatrix}
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

- ۸) در هر کدام از تمرین‌های زیر، ماتریس A ماتریس مجاورت برای شبکه ارتباطی است، طرح شبکه را رسم کنید. توانهای ماتریس مجاورت داده شده است. مؤلفه‌هایی که پرنگ‌تر از بقیه است را بیابید.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^r = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ه})$$

۹) فرض کنید A یک ماتریس مجاورت از دیگراف باشد. در مورد دیگراف در هر یک از حالت‌های زیر

چه می‌دانید؟

الف) سومین سطر از A همگی صفرند.

ب) چهارمین سطر از A همگی صفرند.

ج) مجموع مؤلفه‌ها در سطر پنجم از A , ۳ است.

د) مجموع مؤلفه‌ها در ستون دوم از A , ۲ است.

ه) سطر دوم از A^r همگی صفر است.



و) ستون سوم از A^2 همگی صفرند.

۱۰) فرض کنید دیگراغهایی با ماتریس‌های مجاورت دارای مشخصات زیر باشند چه چیزی می‌توانید در مورد هر یک از دیگراغهای زیر بگویید؟

الف) سطر دوم همگی صفرند.

ب) ستون سوم همگی صفرند.

ج) سطر چهارم همگی یک دارند به جز صفر در موقعیت قطری

د) ستون پنجم همگی دارای یک هستند به جز صفر در موقعیت قطری

ه) مجموع درایه‌ها در سطر سوم، ۵ است.

وا) مجموع درایه‌ها در ستون دوم، ۴ است.

ح) تعداد یکها در ماتریس، ۷ است.

ط) مجموع درایه‌ها در سطر ۲ از توان چهارم برابر ۳ است.

ی) مجموع درایه‌ها در ستون ۳ از توان پنجم برابر ۴ است.

ک) سطر چهارم مریع ماتریس همگی صفر است.

ل) ستون سوم توان چهارم همگی صفر است.

۱۱) فرض کنید A ماتریس مجاورت یک دیگراف باشد. شکل دیگراف اگر A^2 مانند زیر باشد را رسم کنید. از دیگراف برای پیدا کردن A^3 استفاده نمایید.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(توجه: تمام مسیرهای به طول ۲ (۲-مسیرهای) در دیگراف دده شده است).

۱۲) فرض کنید A ماتریس مجاورت یک دیگراف باشد. تمام حالت‌های ممکن دیگراف توصیف شده به

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وسیله A را اگر باشد، رسم کنید.



۱۳) جداول زیر اطلاعات برگرفته از پرسشنامه های داده شده به گروه های مردم را نمایش می دهد. در هر مورد دیگرافی بسازید که ساختار رهبری در گروه را توضیح دهد. مؤلفه ها را براساس تأثیرشان روی گروه دسته بندی کنید.

شخصی که نظرش با ارزش است عضو گروه

M_1	M_4	
M_2	M_1	(الف)
M_2	M_2	
M_4	M_2	

شخصی که نظرش با ارزش است عضو گروه

M_1	M_5	
M_2	M_1	(ب)
M_2	M_2	
M_4	M_2	
M_5	M_4	

شخصی که نظرش با ارزش است عضو گروه

M_1	M_4	
M_2	M_4, M_5	
M_2	M_2	(ج)
M_4	M_2	
M_5	M_1	

شخصی که نظرش با ارزش است عضو گروه

M_1	M_5	
M_2	M_1	(د)
M_2	M_1, M_4	
M_4	M_5	
M_5	M_2	

۱۴) ماتریس زیر رابطه دوستی بین گروه های مردم را توصیف می کند $a_{ij} = 1$ اگر M_i دوست M_j باشد در غیر این صورت $a_{ij} = 0$ است. نمودارهایی بکشید که این روابط را توضیح دهید. توجه کنید که تمام ماتریس ها متقابن هستند. اهمیت این تقارن چیست؟ آیا ارتباط توصیف شده را می توان با یک ماتریس نامتقابن توصیف کرد؟



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(الف)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)}$$

۱۵) ساختار در دیگراف که مورد علاقه دانشمندان علوم اجتماعی است یک دسته است. یک دسته بزرگترین زیرمجموعه دیگراف است که از ۳ رأس یا بیشتر، که هر جفت از آنها به طور متقابل ارتباط دارند، تشکیل شده است. کاربرد این مفهوم برای ارتباطات دوستی سریع است. سه فرد یا بیشتر یک دسته را تشکیل می‌دهند اگر همگی با هم دوست باشند و اگر هیچ کدامشان دوستی متقابلي با هر فرد بیرون از دسته نداشته باشند. مثالی از یک دیگراف که شامل یک گروه است ارایه دهد.

۱۶) ثابت کنید که ماتریس مجاورت از یک دیگراف الزاماً مربعی است؟

۱۷) فرض کنید A ماتریس مجاورت از یک دیگراف باشد. ماتریس A^t ماتریس مربعی است که شامل صفرها و یکها است. و آن هم چنین ماتریس مجاورت از یک دیگراف است. چگونه دیگراف A و A^t به یکدیگر مرتبط‌اند.

۱۸) اگر ماتریس مجاورت یک دیگراف متقابله باشد. این مطلب چه چیزی در مورد دیگراف در اختیار شما می‌گذارد؟

۱۹) ثابت کنید که کوتاهترین مسیر از رأس دیگراف به رأس دیگر نمی‌تواند شامل رأسهای تکراری باشد.

۲۰) در یک گراف با n رأس، بزرگترین فاصله ممکن بین دو رأس چیست؟

۲۱) فرض کنید که A ماتریس مجاورت از یک دیگراف ارتباطی باشد. فرض کنید $C = AA^t$ نشان دهد تعداد ایستگاه‌هایی که می‌توانند یک پیام مستقیم از هر دو ایستگاه i و j دریافت کنند c_{ij} .



۲۲) ماتریس دستیابی R از دیگراف به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر یک مسیر از رأس } p_i \text{ به } p_j \text{ وجود داشته باشد} \\ 1 & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر مسیری از } p_i \text{ به } p_j \text{ موجود نباشد} \end{cases}$$

ماتریس‌های دستیابی دیگراف‌های تمرین ۸ را معین کنید.

۲۳) ماتریس‌های دستیابی از یک دیگراف می‌تواند با استفاده از اطلاعات ماتریس مجاورت و توانهای متفاوت آن ساخته شود. چه تعداد توانهای ماتریس مجاورت از یک دیگراف دارای n رأس بایستی محاسبه شوند تا تمام اطلاعات مورد نیاز را به دست آورند.

۲۴) الف) اگر ماتریس مجاورت یک دیگراف متقارن باشد. آیا بدان معناست که ماتریس دستیابی نیز متقارن است.

ب) اگر ماتریس دستیابی یک دیگراف متقارن باشد آیا بدان معناست که ماتریس مجاورت نیز متقارن است.

۲۵) فرض کنید R یک ماتریس دستیابی از یک دیگراف ارتباطی باشد فرض کنید (i) مجموع درایه‌های سطر i از R و $c(j)$ مجموع درایه‌های ستون j از R باشد چه اطلاعاتی در مورد $r(i)$ و $r(j)$ می‌دهید.

۲۶) فرض کنید که R یک ماتریس دستیابی از یک دیگراف باشد چه اطلاعاتی در مورد دیگراف درایه‌ها موجود در سطر i و ستون j از R^T می‌توانید ارایه دهید.

۲۷) فرض کنید که R ماتریس دستیابی دیگراف باشد چه اطلاعاتی درباره دیگراف R^t می‌دهید.

۲۸) ماتریس مجاورت A و ماتریس دستیابی R از یک دیگراف هر دو هم از درایه‌های صفر و هم از درایه‌های یک ساخته شده‌اند.

الف) آیا A و R عدد یکسان یک‌ها را دارا می‌باشند.

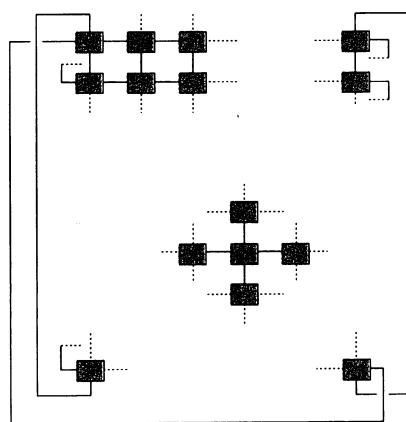
ب) آیا A می‌تواند یک‌های بیشتری نسبت به R داشته باشد.

ج) آیا A می‌تواند یک‌های کمتری نسبت به R داشته باشد.

۲۹) ابرکامپیوتر IV IhhIAC در مرکز تحقیقات افوناسا NASA، ۶۴ پردازنده، تحت کنترل واحد دارد. پردازنده‌ها با یکدیگر در یک شبکه‌اند. اگر پردازنده‌ها را به عنوان ماتریسی با درایه‌های 8×8 تصویر



کنید سپس هر پردازنده در موقعیت (i, j) می‌تواند با همسایگان ضروری خود پردازنده‌ها در موقعیت $(i, j - 1)$ و $(i, j + 1)$ ارتباط داشته باشد. پردازنده‌ها در سطر اول با آنهایی که در سطر آخر در مدل گردش پنهان هستند ارتباط برقرار می‌کنند آنهایی که در ستون اول هستند با آنهایی که در ستون آخر مدل گردش پنهان هستند ارتباط دارند. شکل ۱۰-۲ را ببینید. بیشترین فاصله بین پردازنده‌ها در این شبکه را مشخص کنید.



شکل ۱۰-۲

تمرین‌های دوره‌ای فصل دوم

$$D = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

۱) فرض کنید عبارت‌های زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $AB + AB$ ب) $AB + C$ ج) $2AB$

د) $2DA + B$ ه) $AC + BC$ و) $AD - 3D$

۲) فرض کنید A ماتریس 2×2 , B یک ماتریس 2×2 , C یک ماتریس 2×3 , D یک ماتریس 3×2 باشد و در صورت وجود اندازه نتایج ماتریس‌های حاصل را بیابید.

الف) AB	ب) $(A^T)C$
د) $DA - 2(DB)$	ج) $B^T + 3(CD)$
و) $C - 3D$	ه) $3(BA)(CD) + (4A)(BC)D$



درایه‌های عبارت
 $C = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ اگر ۳
 بدون محاسبه کل ماتریس معین کنید.

الف) d_{12} ب) d_{22}

۴) ضرب AB از ماتریس‌های 2×2 زیر را با استفاده از الگوریتم استراسن مشخص کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.
 $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ اگر ۵

الف) $(A^t)^2$ ب) B^2 ج) $AB^t - 2C^2$ د) $A^2 - A + 4I_2$

۶) اگر A و B ماتریس‌هایی با اندازه‌های داده شده باشند، تعداد ضرب‌های اسکالار لازم برای محاسبه AB را معین کنید.

الف) $A_{4 \times 2} \cdot B_{2 \times 2}$ ب) $A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 4}$

ج) $A_{9 \times 5} \cdot B_{5 \times 11}$ د) $A_{1 \times 7} \cdot B_{7 \times 25}$

۷) معکوس هر یک از ماتریس‌های زیر را در صورت وجود با استفاده از روش حذفی گاوس-جردن معین کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{ج) } \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{ب) } \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{الف)}$$

۸) با استفاده از روش معکوس ماتریس دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1$$

$$2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 5$$

$$-3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 7$$

۹) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ را بیابید در صورتی که $3A^{-1}$ باشد.

۱۰) خاصیت شرکت‌پذیری ضرب را بررسی کنید.

$$A(BC) = (AB)C$$



(۱۱) عبارت $A(AB + A^t) - B(A^t + AB) + 3ABA - 4AB^t$ را ساده کنید.

(۱۲) اگر n عدد صحیح نامنفی باشد و c اسکالر باشد عبارت $(cA)^n = c^n A^n$ را ثابت کنید.

(۱۳) فرض کنید A یک ماتریس باشد به طوری که $AA^t = 0$ نشان دهید که $A = 0$.

(۱۴) ماتریس A را نرمال گوییم اگر $AA^t = A^tA$ ، ثابت کنید که تمام ماتریس‌های متقارن نرمال هستند.

(۱۵) نشان دهید اگر A خودتوان باشد آنگاه A^t نیز خودتوان است.

(۱۶) نشان دهید اگر A پوچ توان باشد آنگاه A^t نیز با درجه یکسان از پوچ توانی، پوچ توان است.

(۱۷) ثابت کنید که اگر A متقارن و معکوس‌پذیر باشد آنگاه A^{-1} نیز متقارن است.

(۱۸) ثابت کنید که یک ماتریس با سطری از صفرها یا ستونی از صفرها معکوس ندارد.

(۱۹) $A + B$ و AB را برای ماتریس‌های زیر محاسبه کنید و نشان دهید که A هرمیتی است

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 - 3i \\ 4 + 3i & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3+i & 1-2i \\ 2+7i & -2+i \end{bmatrix}$$

(۲۰) ثابت کنید که تمام ماتریس‌های متقارن حقیقی، هرمیتی هستند؟

(۲۱) ماتریس A که در زیر آمده محتویات سفال قبرهای مختلف را توصیف می‌کند. ترتیب زمانی ممکن قبور و انواع سفالگری آنها را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(۲۲) ماتریس تصادفی P که در زیر می‌آید، احتمالات ممکن برای خانواده‌های تحصیل کرده دانشگاهی و تحصیل نکرده یک ناحیه معین که حداقل یک فرزند تحصیل کرده دانشگاهی دارند را می‌دهد. با تحصیل‌کرده‌های دانشگاهی به این مهم دست می‌یابیم که حداقل یکی از والدین تحصیل کرده دانشگاهی می‌باشند، همراه با درنظر گرفتن تحصیل نکرده دانشگاهی منظور این است که هیچ یک از والدین تحصیل نکرده‌اند.



خانواده‌ها

تحصیل نکرده تحصیل کرده

فرزند تحصیلات دانشگاهی °/۲۵ °/۹

$P =$

فرزند بدون تحصیلات دانشگاهی °/۷۵ °/۱

اگر به طور عادی ۳۰۰،۰۰۰ خانواده تحصیل کرده و ۷۵۰،۰۰۰ خانواده تحصیل نکرده وجود داشته

باشد توزیع پیش‌بینی شده برای این دو نسل چیست؟ احتمال این که یک زوج تحصیل نکرده باشد

و یکی از نوه‌هایشان تحصیل کرده باشد چقدر است؟

۲۳) فرض کنید A ماتریس مجاورت یک دیگراف باشد. در مورد هر یک از حالت‌های زیر چه چیزی می‌دانید.

الف) تمام درایه‌های ستون چهارم A صفرند.

ب) مجموع درایه‌های ستون سوم A ، ۲ است.

ج) مجموع درایه‌ها در سطر دوم از A^3 برابر ۴ است.

د) ستون سوم A^3 همگی صفر می‌باشند.

ه) مؤلفه موجود در مکان (۴، ۴) از A^3 برابر ۲ است.

و) تعداد درایه‌های غیرصفر در A^4 برابر ۳ است.



هدف‌های رفتاری فصل سه

دانشجو باید بتواند پس از مطالعه و کار روی این فصل

- مفهوم عددی دترمینان یک ماتریس مربعی را درک کرده و محاسبه آن را با استفاده از سط سطی
یا سط ستونی انجام دهد.
- جدول علامت‌های دترمینان را به خاطر بسپارد.
- ویژگی‌های دترمینان را توضیح دهد از جمله این که هرگاه دو سطر (ستون) یک دترمینان را تعویض
کنیم دترمینان آن قرینه می‌شود.
- مفاهیم ماتریس منفرد و ماتریس نامنفرد را بر حسب مقدار دترمینان توضیح دهد.
- نقش و رابطه دترمینان را در ارتباط با ماتریس وارون و حل دستگاه معادلات خطی توضیح دهد.
همچنین فرمول محاسبه وارون را بر حسب ماتریس واپسیه و دترمینان آن اثبات کرده و آن را به خاطر
داشته باشد.
- تعداد جوابها و یا فقدان آن را در یک معادله خطی ماتریس

$$AX = B$$

بر حسب دترمینان A ارتباط داده و از عهده‌ی اثبات آن برآید.

- سرازجام از عهده‌ی حل تمرین‌ها و مسائل پایان فصل به خوبی برآید.



فصل سوم

دترمینان‌ها

به هر ماتریس مربعی عددی نسبت داده می‌شود که آن را دترمینان آن ماتریس می‌نامیم، دترمینان یک ماتریس ابزاری است که در بیشتر شاخه‌های ریاضی، علوم و مهندسی به کارگرفته می‌شود. دترمینان را در این فصل تعریف کرده و خواص آن را گسترش خواهیم داد. مشاهده خواهیم کرد که این مفهوم اطلاعاتی در مورد حل دستگاه معادلات خطی به ما می‌دهد و به علاوه در فرمولی که برای به دست آوردن معکوس یک ماتریس مرربع به دست می‌آوریم استفاده می‌گردد.

۱-۳ مقدمه‌ای بر دترمینان‌ها

بحث دترمینان‌ها را با تعریف دترمینان یک ماتریس 2×2 آغاز می‌کنیم.

تعریف: دترمینان ماتریس 2×2 ، A را با $|A|$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

دققت کنید که دترمینان یک ماتریس 2×2 به وسیلهٔ تفاضل حاصل ضرب‌های دو قطر ماتریس بیان شده است، از نماد $\det(A)$ نیز برای دترمینان A استفاده می‌شود.

مثال ۱: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.



حل: با به کارگیری تعریف بالا داریم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = (2 \times 1) - (4 \times (-3)) = 2 + 12 = 14$$

دترمینان یک ماتریس 3×3 بر حسب دترمینان ماتریس‌های 2×2 تعریف می‌شود. دترمینان یک ماتریس 4×4 بر حسب دترمینان ماتریس‌های 3×3 تعریف می‌شود و به همین ترتیب دترمینان ماتریس‌های $n \times n$ بر حسب دترمینان ماتریس‌های $1 \times n - 1 \times n$ تعریف می‌شوند. برای این تعاریف به مفاهیم کهاد و همسازه که در زیر تعریف می‌شوند نیاز داریم.

تعریف: فرض کنیم A ماتریسی مربعی باشد.

کهاد: کهاد درایه a_{ij} را با M_{ij} نشان می‌دهیم و عبارت است از دترمینان ماتریس حاصل از حذف ردیف i ام و ستون j ام ماتریس A .

همسازه: همسازه درایه a_{ij} را با C_{ij} نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

توجه کنید که کهاد و همساز یک درایه حداکثر تفاوت‌شان در یک علامت است.

$$C_{ij} = +M_{ij} \quad \text{یا} \quad -M_{ij}$$

مثال ۲: کهاد و همساز درایه‌های a_{12} و a_{22} را از ماتریس زیر به دست آورید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

حل: با به کارگیری تعریف بالا داریم:

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = 0 \times (-2) - (4 \times 2) = -8$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -1 \times -8 = 8$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 2 \times 3 - (-1) \times 0 = 6$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 1 \times 6 = 6$$

حال با استفاده از مفاهیم فوق دترمینان ماتریس‌های $n \times n$ ($n \leq 3$) را تعریف می‌کنیم.



تعریف: دترمینان ماتریس مربعی A عبارت است از مجموع حاصل ضرب های درایه‌های سطر اول در همساز مربوط به آن درایه.
اگر A ماتریسی 3×3 باشد:

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

اگر A ماتریسی 4×4 باشد:

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14}$$

اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد:

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

معادلات بالا بسط دترمینان A نسبت به سطر اول نامیده می‌شوند.

مثال ۳: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

حل: با استفاده از درایه‌های سطر اول و همسازه‌های آن داریم:

$$\begin{aligned} |A| &= (-1) \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -[(1 \times -1) - (3 \times 5)] - 2[(1 \times -1) - (3 \times -2)] + 0[(1 \times 5) - (1 \times -2)] \\ &= 16 - 10 + 0 = 6 \end{aligned}$$

در بالا دترمینان A بر حسب درایه‌های سطر اول تعریف شده است. می‌توان ثابت کرد که دترمینان یک ماتریس مربعی A براساس قاعده زیر به وسیله هر سطر یا هر ستون از این ماتریس قابل تعریف است.

قضیه ۱-۳-۱: دترمینان ماتریس مربعی A برابر است با مجموع حاصل ضرب درایه‌های هر سطر یا هر ستون در همسازه مربوط به آن درایه.

دترمینان ماتریس A برحسب بسط سطر i ام برابر است با

$$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$



و برحسب بسط ستون زام برابر است با

$$|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{nj}C_{nj}$$

قاعده ساده و مفیدی وجود دارد که مقدار $|A|$ را در بسط $|A|$ بر حسب هر سطر یا هر ستون مشخص می‌سازد. این قاعده به وسیله آرایش علامت درایه‌های A به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \end{bmatrix}$$

اگر به عنوان مثال بخواهیم دترمینان ماتریسی مربعی A را برحسب سطر دوم بسط دهیم علامت‌ها به ترتیب $-$, $+$, $-$ و ... خواهد بود.

$$\text{مثال ۴: دترمینان ماتریس } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ به دست آورید.}$$

حل:

$$\begin{aligned} |A| &= -2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2 \times [(-1) \times 2 - (3 \times 0)] + 1 \times [(1 \times 2) - (3 \times (-5))] - 4 \times [(1 \times 0) - ((-1) \times (-5))] \\ &= 6 + 18 + 20 = 44 \end{aligned}$$

دترمینان این ماتریس را برحسب هر سطر و یا ستون دیگر نیز بسط دهید، خواهیم دید که مقدار به دست آمده همان عدد ۴۴ خواهد بود.

نکته: محاسبه دترمینان یک ماتریس مربعی برحسب سطر یا ستونی که بیشترین \circ را دارد به حداقل می‌رسد. مثال زیر، گویای این حقیقت است.



مثال ۵: دترمینان ماتریس 4×4 زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

حل: ستون سوم این ماتریس دارای بیشترین ۰ است. بنابراین $|A|$ را برحسب ستون سوم بسط می‌دهیم.

$$|A| = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + a_{43}C_{43}$$

$$= 0C_{13} + 5C_{23} + 0C_{33} + 0C_{43}$$

$$= 5 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

در این مرحله سطر سوم بیشترین صفر را داراست. پس ماتریس 3×3 حاصل را نسبت به سطر سوم بسط می‌دهیم.

$$|A| = -5 \times -2 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 10[(1 \times 1) - (3 \times (-1))] = 10 \times 4 = 40$$

درایه‌های یک ماتریس می‌توانند به صورت متغیرهای x, y, \dots باشند و معادلات می‌توانند به صورت دترمینان ماتریسها ظاهر شوند. مثال زیر یک چنین معادلاتی را نمایش می‌دهد.

مثال ۶: معادله زیر را برحسب x حل کنید.

$$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} = 7$$

حل: با استفاده از بسط دترمینان، معادله را به صورت طبیعی آن می‌توانیم بنویسیم:

$$x(x-2) - (x+1)(-1) = 7$$

با ساده کردن این معادله x را به دست می‌آوریم:

$$x^2 - 2x + x + 1 = 7$$



$$x^4 - x - 6 = 0$$

$$(x+2)(x-3) = 0$$

$$x = -2 \quad \text{یا} \quad 3$$

محاسبه دترمینان‌های ماتریس‌های 2×2 و 3×3

دترمینان ماتریس‌های 2×2 و 3×3 را می‌توان با استفاده از قطر ماتریس با صرف وقت کمتری به دست آورد. برای ماتریس‌های 2×2 از دو قطر اصلی ماتریس استفاده می‌کنیم و برای ماتریس‌های 3×3 اقطاری را مورد استفاده قرار خواهیم داد که با اضافه کردن ۲ ستون اول به ماتریس اولیه به دست می‌آیند. دترمینان یک ماتریس 2×2 و 3×3 عبارت خواهد بود از مجموع حاصل ضرب‌های اعضای قطرهایی که جهت‌شان از چپ به راست است منهای حاصل ضرب‌های اعضای قطرهایی که جهت‌شان از راست به چپ است.

$$A \qquad \qquad B$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$|B| = (a_{11}a_{22}a_{22} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{22}) - (a_{12}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{23})$$

اثبات این که دترمینان یک ماتریس 3×3 در واقع به صورت فوق می‌باشد، به عهده دانشجو است.

مثال ۷:

$$A \qquad \qquad B$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix}$$

$$|A| = 12 - 7 = 5$$



$$|B| = (5 + 8 + 0) - (-1 - 8 + 0) = 13 - (-9) = 22$$

برای ماتریس‌های $n \times n$ ($n \geq 3$) چنین قاعده‌ای وجود ندارد.

تعریف دیگری از دترمینان

در اینجا تعریف دیگری از دترمینان را با استفاده از مفهوم جایگشت‌ها بیان می‌کنیم. این تعریف جدید عمدتاً برای مقاصد نظری به کار گرفته می‌شود. ابتدا پیش زمینه‌های لازم را در مورد جایگشت‌ها ارایه می‌کنیم. فرض کنید $\{1, 2, \dots, n\} = S$ مجموعه اعداد صحیح از ۱ تا n باشد، هر ترتیبی مانند i_1, i_2, \dots, i_n از اعضای S را یک جایگشت روی S می‌نامیم. برای مثال $1, 2, 3, 4$ یک جایگشتی روی مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ است. منظور از یک تغییر روی یک جایگشت تغییر دو عدد متالی با یکدیگر است. مثلاً با یک تغییر می‌توان جایگشت $1, 2, 3, 4$ را تبدیل به $1, 2, 4, 3$ کرد و با دو تغییر می‌توان $1, 2, 3, 4$ را به $2, 1, 3, 4$ تبدیل کرد. با استفاده از این تعریف جایگشت i_1, \dots, i_n را یک جایگشت زوج می‌نامیم، اگر بتوان این جایگشت را با تعداد زوجی تغییر و تبدیل به جایگشت i_1, \dots, i_n کرد و آن را جایگشت فرد می‌نامیم اگر با تعداد فردی تغییر بتوان آن را به n تبدیل کرد. در این صورت n خود یک جایگشت زوج است زیرا با صفر تغییر تبدیل به n می‌شود و صفر عددی زوج است.

مثال ۸: نشان دهید 12425 یک جایگشت زوج و 13452 یک جایگشت فرد است.

حل: برای جایگشت 12425 داریم:

$$12425 \longrightarrow 13245 \longrightarrow 12345$$

و برای جایگشت 13452 داریم:

$$12452 \longrightarrow 13425 \longrightarrow 13245 \longrightarrow 12345$$

در اولین جایگشت دو تغییر و در دومین جایگشت سه تغییر مشاهده می‌کنیم. پس اولی زوج و دومی فرد است.

مثال ۹: تمام جایگشت‌های ممکن مجموعه $\{1, 2, 3\}$ را نوشته و زوج یا فرد بودن آن را مشخص کنید.



حل: ابتدا جایگشت‌های را در نظر می‌گیریم که با ۱ شروع می‌شود و سپس آنها بی که با ۲ و سرانجام آنها بی که با ۳ شروع می‌شوند.

۱	۲	۳	زوج
۱۳۲	→	۱۲۳	فرد
۲۱۳	→	۱۲۳	فرد
۲۳۱	→	۲۱۳	زوج
۳۱۲	→	۱۳۲	زوج
۳۲۱	→	۲۳۱	فرد

تذکر مهم: در جیر یک، جایگشت‌ها به صورت عمومی تری تعریف شده‌اند جایگشت‌هایی که در این کتاب از آن صحبت می‌کنیم در واقع جایگشت‌های بخصوصی در جیر یک هستند که آنها را جایگشت دوری از بعد n روی مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ می‌نامیم.

تعریف: فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد در این صورت:

$$\|A\| = \sum \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

– روی تمام جایگشت‌های $j_1 j_2 \dots j_n$ از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ تغییر می‌کند. علامت‌های + یا – به ترتیب برای جایگشت‌های زوج و فرد استفاده می‌شود.

مثال ۱۰: برای ماتریس 2×2 , A , ثابت کنید $|A| = \|A\|$.

حل: فرض کنید A ماتریس 2×2 , باشد در این صورت:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

و با توجه به این که جایگشت‌های روی $\{1, 2\}$ هستند پس:

$$\|A\| = \sum_{\text{جایگشت}} \pm a_{1j_1} a_{2j_2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

نکته: می‌توان ثابت کرد که بازی هر ماتریس $n \times n$, دو عدد $|A|$ و $\|A\|$ یکی هستند لذا تعریف $\|A\|$, را می‌توان تعریف دیگری از دترمینان ماتریس A دانست و از این پس $\|A\|$ را با علامت $|A|$ در نظر می‌گیریم.



۱-۱-۳ تمرین

۱) دترمینان ماتریس‌های زیر را پیدا کنید:

$$\begin{array}{ll} \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{array} \right] & \text{(د)} \quad \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right] & \text{(ج)} \quad \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{array} \right] & \text{(ب)} \quad \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{array} \right] & \text{(الف)} \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right] & \text{(ح)} \quad \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] & \text{(زا)} \quad \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 3 & 7 \end{array} \right] & \text{(وا)} \quad \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array} \right] & \text{(ه)} \end{array}$$

آیا می‌توانید حدس بزنید که چرا دترمینان‌ها در قسمت‌های (ه) و (وا) برابر صفر است (در قسمت (ه) به رابطه بین دو سطر توجه کنید).

۲) فرض کنید ماتریس A به صورت زیر تعریف شده است:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

در هر حالت کهاد و همسازهای داده شده را بیابید.

$$\text{(الف)} M_{21}, C_{21} \quad \text{(ب)} M_{12}, C_{12}$$

$$\text{(د)} M_{22}, C_{22} \quad \text{(ج)} M_{22}, C_{22}$$

۳) فرض کنید ماتریس B به صورت زیر داده شده است:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

در هر حالت کهاد و همسازهای داده شده را بیابید:

$$\text{(الف)} M_{21}, C_{21} \quad \text{(ب)} M_{22}, C_{22}$$

$$\text{(د)} M_{42}, C_{42} \quad \text{(ج)} M_{14}, C_{14}$$

۴) دترمینان ماتریس‌های زیر را یک بار از طریق بسط سطر اول و یک بار از طریق قطری به دست

آورید:



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ ج) } \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ ب) } \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ الف) }$$

می‌توانید حدس بزنید که چرا دترمینان قسمت (ج) صفر می‌شود.

۵) دترمینان ماتریس‌های زیر را طبق دستورالعمل ذکر شده در ذیل ماتریس به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ ب) } \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ الف) }$$

بسط سطر اول و ستون دوم بسط سطر دوم و ستون سوم

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ د) } \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \text{ ج) }$$

بسط سطر دوم و ردیف دوم بسط سطر سوم و ستون اول

۶) دترمینان ماتریس‌های زیر را با حداقل عملیات محاسباتی به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ج) } \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ب) } \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ الف) }$$

۷) معادلات زیر را بر حسب x حل کنید:

$$\begin{bmatrix} x+1 & 2 \\ -x & x \end{bmatrix} = 10 \text{ ب) } \quad \begin{bmatrix} x-1 & x \\ 4 & x+2 \end{bmatrix} = 5 \text{ الف) }$$



۸) x را طوری تعیین کنید که دترمینان ماتریس زیر صفر شود:

$$\begin{bmatrix} x & 3-x \\ 2 & 3x+1 \end{bmatrix}$$

۹) به ازای چه مقادیری از x دترمینان ماتریس زیر صفر می‌شود:

$$\begin{bmatrix} x+1 & 0 & 1 \\ 2 & 2x & 2x+2 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$$

۱۰) با چه استدلالی دترمینان دو ماتریس زیر برابر هستند، جواب‌تان را بدون محاسبه دترمینان این دو ماتریس ارایه دهید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & 5 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۱) با چه استدلالی دترمینان ماتریس زیر به ازای هر a و b یکسان است؟

$$\begin{bmatrix} a & 3 & 1 \\ b & -5 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۲) زوج و فرد بودن جایگشت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) ۴۲۱۳ ب) ۱۲۴۲

ج) ۲۴۱۳ د) ۴۳۲۱

۱۳) تمام جایگشت‌های $\{1, 2, 3, 4\}$ را مشخص کرده و زوج و فرد بودن آنها را تعیین کنید.

۱۴) برای یک ماتریس 3×3 مانند A ثابت کنید دو عدد $\|A\|$ و $|A|$ در واقع یکی هستند.



۲-۳ خواص دترمینان‌ها

در این بخش خواص جبری دترمینان‌ها را مورد بحث قرار می‌دهیم. بیشتر خواص دترمینان‌ها در مورد سطرهای یک ماتریس و ستون‌های آن یکی هستند. در یک چنین مواردی اغلب عبارت را به صورت سطر (ستون) می‌نویسیم تا نشان دهیم که می‌توان به جای کلمه سطر در بحث موردنظر کلمه ستون را قرار داد. اثبات قضایا فقط در مواردی در متن درس و یا به صورت تمرین به عهده دانشجو گذاشته می‌شود که احساس شود این اثبات تکنیک مفیدی را ارایه می‌کند.

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که چگونه اعمال مقدماتی روی سطرهای یک ماتریس بر دترمینان آن ماتریس اثر دارد. این قضیهٔ هم نین می‌گوید که این اعمال را روی ستون نیز می‌توان بسط داد.

۱-۲-۳ قضیه: فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ و c عددی غیرصفر باشد.

(الف) اگر ماتریس B با ضرب یک سطر (ستون) از A در عدد c به دست آمده باشد آنگاه $|B| = c|A|$.

(ب) اگر ماتریس B با جابجایی دو سطر (ستون) متواالی ماتریس A به دست آمده باشد آنگاه

$$|B| = -|A|$$

(ج) اگر ماتریس B با جمع جبری مضربی از یک سطر (ستون) با سطر (ستون) دیگر ماتریس A به دست آمده باشد آنگاه $|B| = |A|$.

اثبات: (الف) فرض کنیم درایه‌های ماتریس A به صورت a_{ij} بوده و ماتریس B ، با ضرب c در سطر k ام به دست آمده باشد در این صورت k امین سطر B عبارت است از:

$$ca_{k1}, ca_{k2}, \dots, ca_{kn}$$

$|B|$ را با بسط این سطر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} |B| &= ca_{k1}C_{k1} + ca_{k2}C_{k2} + \dots + ca_{kn}C_{kn} \\ &= c(a_{k1}C_{k1} + a_{k2}C_{k2} + \dots + a_{kn}C_{kn}) \\ &= c|A| \end{aligned}$$

نتیجه‌ی مشابه‌ای برای ستون‌ها از بسط k امین ستون ماتریس B به دست می‌آید، به شرطی که B ماتریسی باشد که از ضرب k امین ستون A در عدد c به دست آمده باشد. ■



مثال زیر نشان می‌دهد که چگونه عملیات سط्रی (ستونی) که در قضیه قبل بیان کردیم می‌توانند در ایجاد هر چه بیشتر عدد صفر در سطراها (ستونها)، محاسبه دترمینان یک ماتریس را ساده کنند.

مثال ۱: دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & -6 & 3 \\ 2 & 9 & -3 \end{vmatrix}$$

حل: با استفاده از اعمال سطري و ستونی در دترمینان فوق سعی می‌کنیم تا حد امکان درایه‌های یک سطر یا ستون را تبدیل به صفر کنیم. دقت کنیم که با جمع دو برابر ستون سوم با ستون دوم و جایگزینی آن در ستون دوم می‌توانیم دو درایه از این ستون را تبدیل به صفر کنیم.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & -6 & 3 \\ 2 & 9 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 + 2C_1} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

با بسط دترمینان روی ستون دوم ماتریس حاصل و این که صفرها محاسبه دترمینان را ساده می‌کنند خواهیم داشت:

$$(-3) \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = (-3)(9 - 2) = -21$$

مثال ۲: فرض کنید A ماتریس 3×3 زیر باشد:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & -4 & 10 \end{vmatrix}$$

با استفاده از بسط همسازها می‌توان نشان داد که $|A| = 12$ با استفاده از مقدار دترمینان A و خواص سطري و ستونی دترمینان، دترمینان ماتریس‌های زیر را به دست آورید:

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 16 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & -4 & 10 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 12 & 3 \\ 0 & 6 & 5 \\ -2 & -12 & 10 \end{bmatrix} \quad (الف)$$

حل: مشاهده می‌شود که B_1 می‌تواند با ضرب ستون دوم A در عدد ۳ به دست آید در این صورت

$$|B_1| = 3|A| = 36$$



مشاهده می‌شود که B_2 می‌تواند با تعویض سطر دوم و سوم از روی ماتریس A به دست آید در این صورت

$$|B_2| = -|A| = -12$$

مشاهده می‌شود که B_2 می‌تواند از جمع دو برابر سطر اول با سطر سوم و جایگزینی آن در سطر سوم از روی ماتریس A به دست آید در این صورت

$$|B_2| = |A| = 12$$

از آنچه که در زیر می‌آید متوجه خواهیم شد که ماتریس‌های با دترمینان صفر نقش مهمی در نظریه دترمینان‌ها بازی خواهند کرد.

تعریف: ماتریس مربعی A را منفرد می‌گوئیم اگر $|A| \neq 0$ در غیر این صورت A را نامنفرد می‌نامیم. قضیهٔ زیر شرایطی به دست می‌دهد که تحت آن شرایط می‌توان منفرد بودن ماتریس را تشخیص داد.

۲-۲-۳ قضیه: فرض کنیم A ماتریسی مربعی باشد در این صورت A منفرد است اگر

(الف) تمام اعضای یک سطر (ستون) صفر باشند.

(ب) دو سطر (ستون) از ماتریس A یکسان باشند.

(ج) یک سطر (ستون) از ماتریس A مضربی از سطر (ستون) دیگر باشد.

توجه کنید که (ب) حالت خاصی از (ج) است ولی به دلیل اهمیت این حالت خاص، آن را جداگانه ذکر کرده‌ایم.

اثبات: الف) فرض کنیم اعضای سطر k ام A همگی صفرند. در این صورت $|A|$ را با بسط سطر k ام به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{k1}C_{k1} + a_{k2}C_{k2} + \cdots + a_{kn}C_{kn} \\ &= {}^0C_{k1} + {}^0C_{k2} + \cdots + {}^0C_{kn} \\ &= {}^0 \end{aligned}$$

شرایط مشابه برای ماتریسی که یک ستون آن صفر است منجر به نتیجه مشابه می‌شود.

ب) فرض کنیم k امین و k این سطر ماتریس A با هم برابرند در این صورت با ضرب عدد -1 در سطر k ام و جمع آن با سطر l ام و جایگزینی حاصل در سطر l ام ماتریس B به دست می‌آید که $|B| = |A|$ و لی سطر l ام ماتریس B صفر است و طبق قسمت (الف)، $|B| = {}^0$ در نتیجه $|A| = {}^0$.



اثبات برای ستونها مشابه اثبات بالاست.

ج) مشابه قسمت (ب) اثبات می‌شود.

مثال ۳: نشان دهید که دو ماتریس زیر منفرد هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

حل: الف) تمام اعضای ستون سوم صفرند بنابراین $|A| = 0$.

ب) ردیف دوم -2 برابر ردیف سوم است پس طبق قسمت (ج) قضیه قبل $|B| = 0$.

قضیه بعدی رابطه بین دترمینان ماتریس‌های حاصل از روی دترمینان ماتریس‌های داده شده را مشخص می‌کند.

۳-۲-۳ قضیه: فرض کنیم A و B ماتریس‌های $n \times n$ و c عددی غیرصفر است.

الف) دترمینان ضرب عدد در ماتریس $|cA| = c^n |A|$

ب) دترمینان ضرب دو ماتریس $|AB| = |A||B|$

ج) دترمینان ترانهاده یک ماتریس $|A^t| = |A|$

د) دترمینان معکوس یک ماتریس $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

در صورتی که A^{-1} وجود داشته باشد.

مثال ۴: فرض کنید A ماتریسی 2×2 با $|A| = 4$ باشد با استفاده از قضیه ۳-۲-۳ دترمینان‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } |5A^t A^{-1}| \quad \text{ب) } |A^2| \quad \text{ج) } |3A|$$

در صورتی که A^{-1} وجود داشته باشد.

حل: با استفاده از قضیه فوق

$$\text{الف) } |3A| = (3^2)|A| = 9 \times 4 = 36$$

$$\text{ب) } |A^2| = |AA| = |A||A| = 4 \times 4 = 16$$

$$\text{ج) } |5A^t A^{-1}| = (5)^2 |A^t A^{-1}| = 25 |A^t| |A^{-1}| = 25 |A| \frac{1}{|A|} = 25$$

مثال ۵: ثابت کنید بهازی هر ماتریس مربعی A داریم $|A^{-1} A^t| = |A|$



حل: با استفاده از خواص ماتریس‌ها، دترمینان‌ها و اعداد حقیقی داریم:

$$|A^{-1}A^t A| = |(\bar{A}A^t)A| = |A^{-1}A^t||A| = |A^{-1}||A^t||A| = \frac{1}{|A|}|A||A| = |A|$$

از دانشجو انتظار می‌رود در هر مرحله تشخیص دهید که از چه خواصی از ماتریس‌ها، دترمینان‌ها و اعداد حقیقی استفاده شده است.

مثال ۶: ثابت کنید که اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ و A منفرد باشد آنگاه AB نیز منفرد است، آیا عکس مطلب نیز درست است؟

حل: چون A منفرد است. پس $|A| = 0$ ، با کاربرد خواص دترمینان داریم:

$$|AB| = |A||B| = 0 \cdot |B| = 0$$

پس ماتریس AB نیز منفرد است.

حال عکس این مطلب را بررسی می‌کنیم. می‌خواهیم بینیم اگر AB منفرد باشد آنگاه A نیز منفرد است.

$$|AB| = 0 \implies |A||B| = 0 \implies |A| = 0 \quad \text{یا} \quad |B| = 0$$

بنابراین منفرد بودن AB نتیجه می‌دهد که یا A منفرد است و یا B (و یا ممکن است هر دو منفرد باشند). پس عکس قضیه لزوماً درست نیست. می‌توان این مثال را به شکل زیر و به صورتی لازم و کافی نیز ارائه کرد.

شرط لازم و کافی برای آن که ماتریس AB منفرد باشد آن است که A یا B منفرد باشند.

۱-۲-۳ تمرین

- ۱) با استفاده از عملیات سطرنی (ستونی) و ایجاد حداکثر صفر در سطرها (ستونها) محاسبه دترمینان ماتریس‌های زیر را به صورت ساده انجام دهید.



$$\begin{array}{ccc}
 \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{array} \right] & \text{ج) } \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{array} \right] & \text{ب) } \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \\
 & & \text{الف) } \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \\
 \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ -6 & -3 & 0 \end{array} \right] & \text{د) } \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right] & \text{ه) } \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right] \\
 & & \text{د) } \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right]
 \end{array}$$

۲) فرض کنید A ماتریس زیر باشد:

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

با بسط همسازها می‌توان نشان داد که $|A| = -2$ با استفاده از این مطلب و خواص دترمینانها، دترمینان ماتریس‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{ccc}
 \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & -10 \\ -1 & 1 & 2 \end{array} \right] & \text{ج) } \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{array} \right] & \text{ب) } \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \end{array} \right] \\
 & & \text{الف) } \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \end{array} \right]
 \end{array}$$

۳) اگر A ماتریس 3×3 زیر باشد، آنگاه $|A| = 5$

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 8 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

با استفاده از این مطلب و با به کارگیری خواص سطری و ستونی دترمینانها، دترمینان ماتریس‌های



زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{ccc}
 \left[\begin{array}{ccc} 8 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{array} \right] & \text{(ج)} & \left[\begin{array}{ccc} 8 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{array} \right] & \text{(ب)} & \left[\begin{array}{ccc} 8 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{array} \right] & \text{(الف)} \\
 \end{array}$$

۴) در آنچه که در ذیل می‌آید دترمینان یک ماتریس به دو طریق با استفاده از عملیات سط्रی با دو مقدار مختلف به دست آمده است که یکی صحیح و دیگری غلط است. آیا می‌توانید مقدار صحیح را تشخیص دهید و ایراد عملیات سط्रی غلط را توضیح دهید؟

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & -2 \end{array} \right| \xrightarrow[R_1+R_2]{=} \left| \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & -2 \end{array} \right|$$

$$|A| = -1 \left| \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 3 & -6 \end{array} \right| = -1(-18 - 3) = 21$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & -2 \end{array} \right| \xrightarrow[R_2+R_3]{=} \left| \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

$$= 1 \left| \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{array} \right| = 6 + 1 = 7$$

۵) با استفاده از خواص سط्रی و ستونی دلیل این که چرا ماتریس‌های زیر منفرد هستند را بیان کنید.



$$\begin{array}{ll}
 \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{array} \right] & \text{ب)} \\
 \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{array} \right] & \text{الف)} \\
 \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \text{د)} \\
 \left[\begin{array}{ccc} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -4 & 8 & -2 \end{array} \right] & \text{ج)} \\
 \end{array}$$

۶) اگر A ماتریسی 2×2 باشد دترمینان‌های زیر را با استفاده از خواص دترمینان‌ها به دست آورید.

$$\begin{array}{llll}
 |(A^t)^2| & \text{د)} & |A^2| & \text{ج)} \\
 |6A^t| & \text{ب)} & |3A| & \text{الف)} \\
 |4A^{-1}| & \text{و)} & |(A^t)t| & \text{ه)} \\
 \end{array}$$

۷) اگر A و B ماتریس‌های 3×3 باشند به طوری که $|B| = -5$ و $|A| = 3$ ، دترمینان‌های زیر را به دست آورید:

$$\begin{array}{llll}
 |4A^tB^t| & \text{د)} & |AB^t| & \text{ج)} \\
 |AA^t| & \text{ب)} & |AB| & \text{الف)} \\
 |3AB^tA^{-1}B^{-1}| & \text{ز)} & |3A^tB^{-1}A^t| & \text{و)} \\
 |2AB^{-1}| & \text{ه)} & |(ABA^{-1})^t| & \text{ح)} \\
 \end{array}$$

۸) اگر A ماتریس 3×3 باشد و $|A| = 3$ دترمینان‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$



$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccc} d & a & g \\ e & b & h \\ f & c & i \end{array} \right] \quad \text{(ب)} \quad \left[\begin{array}{ccc} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{array} \right] \quad \text{(الف)} \\
 \left[\begin{array}{ccc} d & e & f \\ a & b & c \\ 2g & 2h & 2i \end{array} \right] \quad \text{(د)} \quad \left[\begin{array}{ccc} d & f & e \\ a & c & b \\ g & i & h \end{array} \right] \quad \text{(ج)}
 \end{array}$$

۹) معادله زیر را بدون به دست آوردن مستقیم دترمینان‌ها ثابت کنید.

$$\left| \begin{array}{ccc} a+b & c+d & e+f \\ p & q & r \\ u & v & w \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} a & c & e \\ p & q & r \\ u & v & w \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} b & d & f \\ p & q & r \\ u & v & w \end{array} \right|$$

۱۰) ثابت کنید دترمینان یک ماتریس قطری برابر حاصل ضرب درایه‌های قطر آن است.

۱۱) قسمت (ب) و (ج) قضیه ۳-۲-۱ را ثابت کنید.

۱۲) قسمت (ج) قضیه ۳-۲-۲ را ثابت کنید.

۱۳) ثابت کنید اگر جمع هر سطر (ستون) یک ماتریس مربعی A برابر صفر باشد آنگاه $|A| = 0$.

۱۴) فرض کنید A ماتریسی مربعی و n عددی طبیعی است به طوری که $A^n = 0$ ثابت کنید.

۱۵) ثابت کنید برای دو ماتریس $n \times n$ و B داریم $|AB| = |BA|$.

۱۶) اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند آیا معادله $|A+B| = |A| + |B|$ برقرار است. آن را ثابت کنید و یا مثال نقضی برای آن ارایه دهید.

۱۷) فرض کنید A ماتریس مربعی و B ماتریسی است که با عملیات سطروی (ستونی) از ماتریس A حاصل شده است ثابت کنید $|B| \neq 0$ اگر و فقط اگر $|A| \neq 0$.

۱۸) (الف) فرض کنید A ماتریسی 2×2 است نشان دهید که تنها ماتریس به فرم پلکانی که دارای سطر صفر نیست I_2 است.



ب) فرض کنید A ماتریسی 3×3 است نشان دهید که تنها ماتریسی به فرم پلکانی که دارای سطر صفر نیست I_3 است.

ج) فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ است نشان دهید که تنها ماتریس به فرم پلکانی که دارای سطر صفر نیست I_n است.

د) فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد که فرم پلکانی آن E است نشان دهید $\neq |A|$ اگر فقط اگر $E = I_n$.

۳-۳ ارزیابی عددی یک دترمینان

در بخش‌های قبلی برای تعیین دترمینان یک ماتریس مربعی از روش تعیین همسازها استفاده کردیم. آن روش که براساس تعریف کهاد و همسازها بنا شده بود ما را درگیر محاسبات زیادی می‌کرد. در این بخش روش عددی کارایی را معرفی می‌کنیم، که برای برنامه‌ریزی کامپیوتری نیز مناسب است، این روش مقدار دترمینان یک ماتریس را سریع‌تر در اختیار ما قرار می‌دهد.

در روش حذفی گاوس - جردن که برای حل دستگاه معادلات به کار می‌رفت از روش عملیات سطروی برای تبدیل یک دستگاه معادلات به دستگاه معادلات ساده‌تر استفاده کردیم و از این طریق جواب دستگاه معادلات را به دست آوردیم. برای محاسبه دترمینان یک ماتریس مربعی از روش مشابه استفاده خواهیم کرد. در بخش قبلی در مورد اثرات عملیات سطروی برای محاسبه دترمینان یک ماتریس بحث کردیم. در اینجا روش تبدیلات سطروی مقدماتی را برای تبدیل یک ماتریس به ماتریسی که آن را ماتریس بالا می‌نماییم به کار خواهیم برد. این شکل از ماتریس محاسبه دترمینان را بسیار ساده خواهد کرد.

تعریف: یک ماتریس مربعی را ماتریس بالا می‌نامیم اگر تمام درایه‌های زیر قطر صفر باشند. ماتریس مربعی، پایین میله نامیده می‌شود اگر تمام درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر باشند. ماتریس‌های زیر مثال‌هایی از ماتریس‌های میله هستند.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های میله بالا

ماتریس‌های میله پایین



قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که به دست آوردن دترمینان ماتریس‌های مثلثی تا چه اندازه ساده است.

۱-۳-۳ قضیه: دترمینان یک ماتریس مثلثی برابر حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی آن است.

اثبات: فرض کنیم ماتریس $n \times n$, A بالا مثلثی باشد. دترمینان آن را روی اولین ستون بسط می‌دهیم و

دترمینان به دست آمده از حاصل این بسط را نیز روی اولین ستون بسط داده و در مراحل بعدی نیز همین

عمل را انجام می‌دهیم، مراحل به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ O & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \\ O & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ a_{43} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & & \ddots & \\ O & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \dots = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$$

اثبات برای ماتریس‌های پایین مثلثی به طریقی مشابه است.

مثال ۱: دترمینان ماتریس زیر را به دست آورید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

حل: چون ماتریس یک ماتریس مثلثی است داریم:

$$|A| = 1 \times (-3) \times (-5) = 15$$

حال روش عددی برای محاسبه دترمینان یک ماتریس مربعی را به طور خلاصه بازگو می‌کنیم.

محاسبه عددی یک دترمینان

ماتریس داده شده را با استفاده از دو عمل سطرنی مقدماتی زیر به صورت ماتریس بالا مثلثی درمی‌آوریم.



۱) ضربی از یک سطر را به سطر دیگر اضافه می‌کنیم، این عمل تغییری در مقدار دترمینان ماتریس جدید نمی‌دهد.

۲) تعویض دو سطر با یکدیگر، در این صورت اگر دو سطر متواالی باشند یعنی فاصله دو سطر ۱ باشد و یا در حالت کلی اگر فاصله دو سطر k باشد دترمینان حاصل $(1 -)$ برابر دترمینان اولیه است. برای مثال اگر بخواهیم سطر اول و سطر سوم را با یکدیگر تعویض کنیم دترمینان ماتریس حاصل برابر دترمینان ماتریس اولیه است و اگر بخواهیم سطر اول و چهارم را تعویض کنیم دترمینان ماتریس حاصل -1 برابر دترمینان ماتریس اولیه است.

با این روش دترمینان ماتریس اولیه بسته به تعداد تعویض سطراها یا برابر حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس مثلثی حاصل و یا منفی این مقدار می‌باشد. مثال زیر روش کار را نشان می‌دهد.

مثال ۲: دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & 4 \\ 4 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

حل: با استفاده از الگوریتم بالا خواهیم داشت:

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & 4 \\ 4 & 9 & 10 \end{array} \xrightarrow{\substack{R_2 + R_1 \\ R_3 + (-2)R_1}} \begin{array}{c|ccc} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \end{array} \\ \xrightarrow{R_2 + R_3} \begin{array}{c|ccc} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 13 \end{array} = 2 \times (-1) \times 13 = -26$$

مثال ۳: دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$



حل: با به کارگیری الگوریتم بالا خواهیم داشت:

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right| \xrightarrow[R_1+(-1)R_3]{\substack{R_2-R_1 \\ R_3+R_1}} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array} \right| \\
 \xrightarrow[R_2+2R_3]{\substack{}} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right| = 1 \times (-1) \times (-2) \times 6 = 12
 \end{array}$$

برای به دست آوردن ماتریس مثلثی بالاگاهی لازم است که جای دو سطر را با یکدیگر عوض کنیم مثال زیر یکی از این موارد است در این حالت هر زمان که دو سطر متوالی را با یکدیگر عوض می‌کنیم دترمینان ماتریس حاصل از این عمل برابر منفی دترمینان ماتریس قبلی خواهد شد.

مثال ۴: دترمینان زیر را به دست آورید:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 11 \end{array} \right|$$

حل:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 11 \end{array} \right| \xrightarrow[R_1+R_3]{\substack{R_2+(-1)R_1 \\ R_3+(-2)R_1}} \left| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{array} \right|$$

در اینجا احساس می‌شود که درایه سطر دوم و ستون دوم باید غیرصفر باشد در این صورت سطر دوم را با سطر سوم تعویض کرده و به صورت زیر دترمینان را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{(-1)} \left| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right| = (-1) \times 1 \times 2 \times (-1) = 2$$

اگر در مرحله‌ای عضوی از قطر صفر باشد و تمام درایه‌های زیرستون مربوط به این صفر نیز صفر باشد در این صورت امکان این که با تعویض دو سطر درایه غیرصفری در قطر قرار دهیم وجود ندارد در این صورت ماتریس بالا مثلثی حاصل از عملیات سطري، ماتریسی خواهد بود که روی قطر اصلی آن صفر وجود دارد.



در این صورت عملیات بیشتر بی نتیجه است و دترمینان این ماتریس صفر خواهد بود. مثال زیر نمونه‌ای از این حالت است.

مثال ۵: دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \\ 6 & -6 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

حل: داریم

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \\ 6 & -6 & 5 & 1 \end{array} \xrightarrow{\substack{R_2 + R_1 \\ R_3 + (-2)R_1 \\ R_4 + (-6)R_1}} \begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -11 \end{array} = 0$$

درایه قطر صفر است و تمام درایه‌های زیر آن نیز صفر است.

۱-۳-۳ تمرین

۱) دترمینان ماتریس‌های مثلثی زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

۲) با استفاده از عملیات سطحی دترمینان ماتریس‌های 3×3 زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -2 & -3 & 4 \\ 4 & 6 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix},$$



$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

۳) با استفاده از عملیات سطیری، دترمینان ماتریس‌های 4×4 زیر را به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۴) ماتریس $n \times n$ واحد است، ثابت کنید $|I_n| = 1$

۵) نشان دهید اگر ماتریس A معکوس پذیر باشد آنگاه $|A||A^{-1}| = 1$

۶) ثابت کنید دترمینان یک ماتریس قطری برابر حاصل ضرب درایه‌های قطر آن ماتریس می‌باشد.

۷) ثابت کنید دترمینان یک ماتریس پایین مثلثی برابر حاصل ضرب درایه‌های قطر آن ماتریس است.

۸) نشان دهید:

الف) اگر $|A| = A^{-1}$, آنگاه $A = \pm 1$

ب) اگر $|A| = \pm 1$ آنگاه $A^t = A^{-1}$

۹) اگر A یک ماتریس باشد ثابت کنید، $0 \neq |A|$ اگر و فقط اگر $0 \neq |A^{-1}|$.

۱۰) اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ و I_n نشان دهید که، $0 \neq |A|$ و $0 \neq |B|$

۱۱) ثابت کنید هر ماتریس مثلثی متقابله یک ماتریس قطری است.

۴-۳ دترمینان‌ها، معکوس ماتریس و دستگاه معادلات خطی

در بخش‌های قبلی مفهوم دترمینان را تعریف کرده و روش‌های مختلف محاسبه آن را بحث کرده‌ایم و به خواص جبری آن نیز نظر افکنده‌ایم در اینجا می‌خواهیم بینیم که چگونه مفهوم دترمینان می‌تواند در مورد معکوس یک ماتریس به ما کمک کند و چگونه می‌تواند اطلاعاتی در مورد حل دستگاه معادلات خطی ارایه دهد.

برای به دست آوردن فرمولی که بتوان از آن معکوس یک ماتریس نامنفرد را به دست آورد احتیاج به معرفی ابزاری داریم که در زیر می‌آید:



تعریف: فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ و C_{ij} همسازه درایه a_{ij} باشد، ماتریسی که درایه سطر i ام و ستون j ام آن C_{ij} باشد ماتریس همساز A نامیده می‌شود و ترانهاده این ماتریس را ماتریس الحاقی می‌گوئیم و آن را با $\text{adj}(A)$ نشان می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}^t$$

ماتریس الحاقی A همساز ماتریس الحاقی A

مثال ۱: ماتریس همساز و الحاقی ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

حل:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 5 & C_{12} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3 & C_{13} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -1 \\ C_{21} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -6 & C_{22} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 & C_{23} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 4 \\ C_{31} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 3 & C_{32} &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -1 & C_{33} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 5 \end{aligned}$$

در این صورت ماتریس همساز عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -6 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

و ماتریس الحاقی که ترانهاده ماتریس فوق است عبارت است از:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

قضیهٔ زیر معکوس یک ماتریس نامنفرد را به صورت فرمول ارایه می‌دهد.



۱-۴-۳ قضیه: فرض کنید A ماتریسی مربعی است که $|A| \neq 0$. در این صورت A معکوس پذیر بوده و معکوس آن عبارت است از:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$$

اثبات: ماتریس حاصل ضربی $A \cdot \text{adj}(A)$ را در نظر بگیرید و b_{ij} را درایه سطر i ام و ستون j ام آن

فرض کنید در این صورت:

$$\text{ستون } j \text{ ام} = A_{\cdot i} \times \text{adj}(A) \text{ سطر } i$$

$$= [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}] \begin{bmatrix} c_{j1} \\ c_{j2} \\ \vdots \\ c_{jn} \end{bmatrix}$$

$$= a_{i1}c_{j1} + a_{i2}c_{j2} + \dots + a_{in}c_{jn}$$

حال اگر $j = i$ آنگاه b_{ij} روی سطر i ام است و اگر $j \neq i$ باشد b_{ij} بسط دترمینان ماتریسی است که از جایگزینی زامین سطر ماتریس A در سطر i ام به دست آمده است. یعنی ماتریسی که دارای دو سطر برابر است و به وضوح دترمینان یک چنین ماتریسی صفر است. پس

$$b_{ij} = \begin{cases} |A|, & \text{اگر } i = j \\ 0, & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$$

بنابراین ماتریس $A \cdot \text{adj}(A)$ ماتریسی است قطری که تمام درایه‌های قطر آن $|A|$ می‌باشد. با فاکتورگیری از عدد $|A|$ این ماتریس به صورت $|A|I_n$ درمی‌آید. بنابراین

$$A \cdot \text{adj}(A) = |A|I_n.$$

و چون می‌دانیم $|A| \neq 0$ معادله بالا را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$A \cdot \left(\frac{1}{|A|} \text{adj}(A) \right) = I_n$$

به طریق مشابه می‌توان نشان داد که

$$\left(\frac{1}{|A|} \text{adj}(A) \right) \cdot A = I_n$$



■ بنابراین $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$ و قضیه ثابت می‌گردد.

اهمیت این قضیه در این است که فرمولی برای محاسبه هر ماتریس مربعی نامنفرد در اختیار می‌گذارد که برای گسترش مفاهیم نظری مفید خواهد بود. الگاریتم گوس - جردن در فضول قبل معرفی شد روش کارتری را نسبت به این فرمول برای محاسبه معکوس یک ماتریس بخصوص ارایه می‌داد هر چند که روش حذفی گوس - جردن را نمی‌توان برای محاسبه معکوس هر ماتریس دلخواهی به کار گرفت. قضیه زیر که در واقع مکمل قضیه بالاست بیان می‌دارد که ماتریس‌های نامنفرد دقیقاً همان‌ها بی هستند که معکوس پذیرند.

۲-۴-۳ قضیه: یک ماتریس مربعی $n \times n$ معکوس پذیر است اگر و فقط اگر $|A| \neq 0$.

اثبات: فرض کنید A معکوس پذیر است در این صورت $AA^{-1} = I_n$ در نتیجه $|AA^{-1}| = |I_n|$ و با استفاده از خواص دترمینان $1 = |A||\bar{A}| = |A| |A| \neq 0$ و بنابراین $|A| \neq 0$. بالعکس فرض کنیم $|A| = 0$ ، بنابر قضیه ۱-۴-۳ A معکوس پذیر است.

مثال ۲: با کاربرد مفهوم دترمینان مشخص کنید که کدامیک از ماتریس‌های زیر معکوس پذیرند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ - & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & 12 & -7 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

حل: C منفرد است و معکوس پذیر نیست زیرا $|C| = 0$. A معکوس پذیر است چون که $|A| = 2 \neq 0$.

معکوس پذیر است زیرا $|B| = 27 \neq 0$. B منفرد است و معکوس پذیر نیست $|D| = 0$.

مثال ۳: با استفاده از فرمول معکوس یک ماتریس، معکوس ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$



حل: با محاسبه دترمینان این ماتریس می‌بینیم که $|A| = 14$ پس A معکوس‌پذیر است. $\text{adj}(A)$ قبل‌اً در مثال ۱ معین شده است و عبارت است از:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

در نتیجه داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \frac{5}{14} & -\frac{6}{14} & \frac{2}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{2}{14} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{14} & -\frac{4}{14} & \frac{5}{14} \end{bmatrix}$$

حال رابطه مابین وجود یکتاپی جواب یک دستگاه n معادله و n مجھول را با ماتریس ضرایب آن دستگاه بررسی می‌کنیم.

۳-۴-۳ قضیه: فرض کنیم $AX = b$ یک دستگاه معادله، n مجھولی با n معادله باشد. اگر $0 \neq |A|$ آنگاه یک جواب منحصر‌بفرد برای این دستگاه وجود دارد در صورتی که $0 = |A|$ دستگاه ممکن است هیچ جوابی نداشته باشد و یا دارای بی‌نهایت جواب باشد.

اثبات: اگر $0 \neq |A|$ طبق قضیه ۳-۴-۲ وجود دارد و طبق قضیه ۳-۴-۳ جواب منحصر‌بفرد عبارت خواهد بود از

$$X = A^{-1}b$$

اگر $0 = |A|$ هر ماتریسی که با عملیات سطّری از ماتریس A حاصل شود و بخصوص ماتریس فرم پلکانی A باید دارای دترمینان صفر باشد (۲-۳). بنابراین فرم پلکانی A برای I_n نیست پس جواب دستگاه معادلات $AX = b$ یکتا نیست. ■

مثال ۴: طی ارایه دو دستگاه معادلات زیر که ماتریس ضرایب‌شان منفرد است ملاحظه می‌کنیم که ممکن است این نوع دستگاه جوابی نداشته باشد و یا دارای بی‌نهایت جواب باشد.

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$

$$3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3 \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3$$

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 \quad x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$



ستون اول جواب ندارد و ستون دوم بی‌نهایت جواب دارد که عبارتند از:

$$x_2 = r \quad x_2 = 2r \quad x_1 = r + 1, \quad r \in \mathbb{R}$$

مثال ۵: مشخص کنید که آیا دستگاه معادله زیر دارای جواب منحصر‌بفرد است یا نه؟

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = -5 \\ 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

حل: دترمینان ماتریس ضرایب این دستگاه را محاسبه می‌کنیم و می‌بینیم که

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

بنابراین دستگاه معادله بالا دارای جوابی منحصر‌بفرد نیست.

حال روشی را معرفی می‌کنیم که به قاعده کرامر موسوم است و برای حل دستگاهی با n معادله و n مجهول به کار می‌رود که دارای یک جواب منحصر‌بفرد است. این قاعده از لحاظ نظری بدین جهت دارای اهمیت است که فرمولی برای حل دستگاههای معادلات به دست می‌دهد.

۴-۴-۳ قضیه (قاعده کرامر): فرض کنیم $AX = b$ دستگاهی با n معادله و n مجهول است به طوری که $\neq |A|$ در این صورت دستگاه دارای جوابی منحصر‌بفرد است که توسط فرمول زیر ارایه می‌شود:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad \dots \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

که به ازای هر i , A_i ماتریسی است که با جایگزینی ستون i ام A به وسیله B به دست آمده است.

اثبات: از آنجا که $\neq |A|$ دستگاه فوق دارای جواب منحصر‌بفرد است.

$$X = A^{-1}b = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)b$$



به طوری که x_i نامن عضو X به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{|A|} [\text{adj}(A) \text{ام} i] \times b \\ &= \frac{1}{|A|} [C_{1i}, C_{2i}, \dots, C_{ni}] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{|A|} (b_1 C_{1i} + b_2 C_{2i} + \dots + b_n C_{ni}) \end{aligned}$$

عبارت داخل پرانتز عبارت است از بسط همساز $|A_i|$ بر حسب ستون i آن و بنابراین

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

مثال ۶: با استفاده از قاعده کرامر دستگاه معادله زیر را حل کنید:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = -2$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

حل: ماتریس A ماتریس ضرایب و ماتریس b ماتریس مقادیر ثابت به صورت زیر هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

می‌توان به آسانی نشان داد که $|A| = -3 \neq 0$ و در نتیجه قاعده کرامر را می‌توان به کار گرفت.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

که با محاسبه‌ای ساده می‌بینیم که $|A_1| = -3$, $|A_2| = 6$, $|A_3| = -9$. و در این صورت قاعده کرامر

مجهولات را به صورت زیر مشخص می‌کند:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-3}{-3} = 1 \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{6}{-3} = -2 \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-9}{-3} = 3$$



و جواب منحصر‌بفرد عبارت است از $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ و $x_3 = 1$.

بسیار مهم است که داشنجو قاعده کرامر را با حل چندین دستگاه معادلات مختلف به خاطر بسپارد ولی تأکید بر این نکته کاملاً ضروری است که قاعده کرامر فقط برای حل دستگاه معادلاتی به کار می‌رود که دارای جواب منحصر‌بفرد هستند. البته در عمل برای حل یک دستگاه معادلات معمولاً از قاعده کرامر استفاده نمی‌شود. روش گوس - جردن و روش حذفی گوس که در بخش ۱-۹ معرفی شده‌اند برای حل یک دستگاه معادلات کارآمدتر هستند. غالباً است بدانید که برای حل یک دستگاه معادلات با n معادله و n مجھول روش حذفی گوس از $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n^3$ عمل ضرب و $n^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}n^3$ عمل جمع استفاده می‌کند در حالی که این مقادیر برای حل یک چنین دستگاه معادله‌ای با روش کرامر $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{3}n^2$ عمل ضرب و $n^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n^3$ عمل جمع می‌باشد. این بدان معناست که برای حل یک دستگاه معادلات با ۴ معادله و ۴ مجھول به روش قاعده حذفی گوس ۳۶ عمل ضرب و ۲۶ عمل جمع و ۲۶ عمل جمع به کار گرفته می‌شود و همین دستگاه به روش قاعده کرامر به ترتیب با ۱۵۵ عمل ضرب و ۷۰ عمل جمع حل می‌گردد. در نتیجه کامپیوترها ترجیح می‌دهند که از روش حذفی گوس - جردن استفاده کنند!

قضیه ۲-۸ نتیجه می‌دهد که حل یک دستگاه معادلات خطی با n معادله و n مجھول $AX = b$ دارای جوابی منحصر‌بفرد است اگر و فقط اگر $|A| \neq 0$. دستگاه همگن $AX = 0$ را در نظر بگیرید می‌بینیم که $X = 0$ یک جواب این دستگاه است، این جواب را یک جواب بدیهی می‌نامیم اگر قرار باشد که از این دستگاه انتظار جواب غیربدیهی داشته باشیم (همان طور که در اغلب موقع پیش می‌آید) باید $|A| = 0$. مثال زیر نمونه‌ای از این حالت است.

مثال ۷: مقادیر λ را طوری به دست آورید که دستگاه معادله زیر دارای جواب غیربدیهی باشد و به ازای هر λ ، جوابهای غیربدیهی را به دست آورید.

$$(\lambda + 2)x_1 + (\lambda + 4)x_2 = 0$$

$$2x_1 + (\lambda + 1)x_2 = 0$$

حل: دستگاه بالا یک دستگاه معادلات خطی همگن است و بنا بر این جواب بدیهی $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$ یک جواب این دستگاه است. قضیه ۳-۸ بیان می‌دارد که اگر دترمینان ماتریس ضرایب این دستگاه برابر صفر باشد ممکن است این دستگاه جواب غیربدیهی نیز داشته باشد پس دترمینان این دستگاه



را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2 & \lambda + 4 \\ 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(\lambda + 2)(\lambda + 1) - 2(\lambda + 4) = 0.$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \implies (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0.$$

بنابراین دترمینان ضرایب صفر است اگر $\lambda = -3$ و یا $\lambda = 2$ باشد، برای $\lambda = -3$ معادله به صورت زیر خواهد بود.

$$-x_1 + x_2 = 0.$$

$$2x_1 - 2x_2 = 0.$$

که بازی هر عدد حقیقی r ، $x_1 = r$ و $x_2 = r$ یک جواب است. همچنین اگر $\lambda = 2$ دستگاه معادله زیر را به دست می‌آوریم:

$$4x_1 + 6x_2 = 0.$$

$$2x_1 + 3x_2 = 0.$$

این دستگاه نیز بازی هر عدد حقیقی r دارای جواب $x_1 = r$ و $x_2 = \frac{r}{3}$ است.

۱-۴-۳ تمرین

۱) با استفاده از مفهوم دترمینان بدون محاسبه معکوس ماتریس‌های زیر، تعیین کنید کدام یک معکوس پذیرند.

د)	ج)	ب)	الف)
$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$
ح)	ز)	و)	ه)
$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$
		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
		ی)	ط)



۲) با استفاده از مفهوم دترمینان و بدون محاسبه معکوس ماتریس‌های زیر تعیین کنید کدام یک معکوس پذیرند.

$$\begin{array}{ll} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{array} \right] & \text{(د)} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 7 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{array} \right] & \text{(ج)} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{array} \right] & \text{(ب)} \\ \left[\begin{array}{ccc} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{array} \right] & \text{(الف)} \end{array}$$

۳) تعیین کنید کدام یک از ماتریس‌های زیر معکوس پذیرند و معکوس آنها بی را که معکوس پذیر هستند به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \right] & \text{(د)} \\ \left[\begin{array}{cc} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{array} \right] & \text{(ج)} \\ \left[\begin{array}{cc} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{array} \right] & \text{(ب)} \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{array} \right] & \text{(الف)} \end{array}$$

۴) تعیین کنید کدام یک از ماتریس‌های زیر معکوس پذیرند و معکوس آنها بی را که معکوس پذیر هستند به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{array} \right] & \text{(د)} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \\ 0 & 13 & 8 \end{array} \right] & \text{(ج)} \\ \left[\begin{array}{ccc} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & \text{(ب)} \\ \left[\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \end{array} \right] & \text{(الف)} \end{array}$$

۵) با استفاده از قاعده کرامر دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$x_1 - x_2 = 2, x_1 + 2x_2 = 11 \quad \text{(الف)}$$

$$2x_1 + x_2 = 15, x_1 - 5x_2 = 2 \quad \text{(ب)}$$

$$2x_1 + 3x_2 = 1, 3x_1 + 2x_2 = 0 \quad \text{(ج)}$$

۶) با استفاده از قاعده کرامر دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$x_1 + 3x_2 - x_4 = 9 \quad \text{(الف)} \quad x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \quad \text{(ب)}$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 5 \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$

$$x_1 - 2x_4 = 0 \quad x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$

$$8x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \quad \text{(د)} \quad x_1 + x_2 - x_3 = 20 \quad \text{(ج)}$$

$$2x_1 - x_2 + 6x_3 = 3 \quad 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0$$

$$6x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \quad 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0$$

۷) با محاسبه دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه معادلات زیر مشخص کنید کدام دستگاه دارای جواب منحصر بفرد است.

$$-6x_1 + 4x_2 = 1, 3x_1 - 2x_2 = 1 \quad \text{(الف)}$$

$$x_1 - 2x_2 = 5, x_1 + 2x_2 = 0 \quad \text{(ب)}$$



$$-3x_1 + 3x_2 = -6, \quad x_1 - x_2 = 2 \quad (ج)$$

۸) با محاسبه دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه معادلات زیر مشخص کنید کدام دستگاه دارای جواب منحصر بفرد است.

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \quad (ج) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad (ب) \quad x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \quad (الف)$$

$$x_1 - x_2 = 1 \quad x_1 - x_2 - x_3 = 1 \quad -x_1 + x_2 - 5x_3 = 1$$

$$2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0 \quad 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4 \quad 4x_1 - 2x_2 + 1.x_3 = -2$$

۹) به ازای چه مقادیری از λ دستگاه معادلات زیر دارای جواب غیربدیهی است. به ازای یک چنین λ ‌ای جوابهای غیربدیهی دستگاه را به دست آورید.

$$(1 - \lambda)x_1 + 6x_2 = 0$$

$$5x_1 + (2 - \lambda)x_2 = 0$$

۱۰) به ازای چه مقادیری از λ دستگاه معادلات زیر دارای جواب غیربدیهی است. به ازای یک چنین λ ‌ای جوابهای غیربدیهی دستگاه را به دست آورید.

$$(\lambda - 3)x_1 - 8x_2 = 0$$

$$2x_1 + (\lambda + 5)x_2 = 0$$

۱۱) به ازای چه مقداری از λ دستگاه معادلات زیر دارای جواب غیربدیهی است. به ازای یک چنین λ ‌ای جوابهای غیربدیهی دستگاه را به دست آورید.

$$(5 - \lambda)x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0$$

$$4x_1 + (5 - \lambda)x_2 + 2x_3 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 + (2 - \lambda)x_3 = 0$$

۱۲) فرض کنید $AX = \lambda X$ یک دستگاه معادلات با n معادله و n مجھول باشد. ثابت کنید این دستگاه دارای جوابهای غیربدیهی است اگر و فقط اگر $|A - \lambda I_n| = 0$.

۱۳) نشان دهید که اگر A ماتریس مربعی متقارن باشد آنگاه $\text{adj}(A)$ نیز متقارن است.

۱۴) نشان دهید که اگر ماتریس مربعی A معکوس پذیر نباشد $\text{adj}(A)$ نیز معکوس پذیر نیست.



۱۵) نشان دهید که اگر ماتریس مربعی A معکوس‌پذیر باشد $(\text{adj}(A))^{-1}$ نیز معکوس‌پذیر بوده و معکوس آن به صورت زیر است:

$$(\text{adj}(A))^{-1} = \frac{1}{|A|} A$$

۱۶) اگر A ماتریس مربعی معکوس‌پذیر باشد نشان دهید $(\text{adj}(A))^{-1} = \text{adj}(A^{-1})$

۱۷) نشان دهید که اگر A و B هر دو ماتریس‌های $n \times n$ باشند به طوری که AB معکوس‌پذیر باشد آنگاه A و B هر دو معکوس‌پذیرند. آیا عکس این مطلب صحیح است.

۱۸) نشان دهید که اگر ماتریس معکوس‌پذیر A و بالامنشی باشد A^{-1} نیز بالامنشی است.

۱۹) فرض کنید A ماتریس مربعی باشد که تمام درایه‌های آن عدد صحیح هستند و $|A| = \pm 1$ در این صورت ثابت کنید درایه‌های A^{-1} نیز اعداد صحیح هستند.

۲۰) فرض کنید $AX = 0$ دستگاه معادلات همگن با n معادله و n مجہول باشد به طوری که فقط جواب بدیهی دارد. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی k , $A^k X = 0$ نیز فقط دارای جواب بدیهی است.

۲۱) فرض کنید دو دستگاه معادلات $AX = b_1$ و $AX = b_2$ دستگاه‌های با n معادله و n مجہول باشند که ماتریس ضرایب هر دو A است. ثابت کنید $AX = b_1$ دارای جواب منحصر‌بفرد است اگر فقط اگر $AX = b_2$ دارای جواب منحصر‌بفرد باشد.



هدف‌های رفتاری فصل چهار

- معرفی \mathbb{R}^n به عنوان یک فضای برداری
- شناخت هندسه \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 و تعمیم مفاهیم هندسی آن به فضای کلی \mathbb{R}^n
- استفاده از مفاهیم ماتریس‌ها و دستگاه‌های معادلات خطی در مباحث مربوط به \mathbb{R}^n

هدف‌های آموزشی و رفتاری فصل

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند

- ماهیت برداری \mathbb{R}^n را شناخته و خواص جبری آنها را توضیح دهد.
- مفاهیم بردار سطری، بردار ستونی و نرم بردار را تعریف کرده و برای هر یک مثال‌هایی ارایه دهد.
- نامساوی کوشی - شوارتز را بیان کرده و از عهده‌ی اثبات آن برآید.
- مفاهیم زاویه بین دو بردار را بر حسب کسینوس آن تعریف کرده و دو بردار متعامد را تعریف کند.
- نامساوی مثلث و قضیه فیثاغورس را در \mathbb{R}^n بیان و اثبات کند.
- ویژگی‌های نرم و ویژگی‌های فاصله را ذکر کرده و با هم مقایسه کند.
- مفهوم تبدیل خطی را تعریف و برای آن مثال‌هایی ارایه دهد.
- شکل ماتریس یک تبدیل خطی را بنویسید.
- تبدیلات ماتریسی، گرافیک کامپیوترا و فرکتالها را توضیح دهد.
- تبدیلات نامنفرد را تعریف کرده و ویژگی‌های آن را به لحاظ هندسی بیان کند.
- از تصاویر هندسی فرکتالها در طبیعت درک و آشنایی داشته باشد.



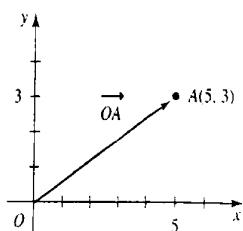
فصل چهارم

فضای برداری \mathbb{R}^n

در این قسمت درس ماهیت هندسی می‌گیرد فضاهای دو بعدی و سه بعدی را بررسی می‌کنیم که به فضاهای n بعدی منجر می‌شوند. ماتریس‌ها و دستگاه معادلات خطی ابزارهای بالرزشی برای این بررسی خواهند بود.

۱-۴ مقدمه بر بردارها

موقعیت نقاط در یک صفحه معمولاً بر حسب سیستم مختصات مورد بررسی قرار می‌گیرد. به عنوان مثال، در شکل ۱-۴، مکان هر نقطه در صفحه می‌تواند با استفاده از سیستم مختصات قائم بررسی شود. نقطه A ، نقطه $(5, 3)$ است.



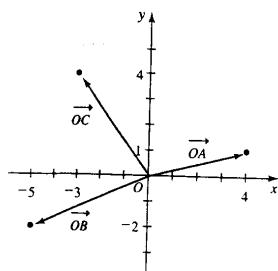
شکل ۱-۴



به علاوه، A به فاصله معینی از مبدأ ($0, 0$) و درجهت معینی از آن می‌باشد. فاصله و جهت، توسط درازا و جهت پاره خط از مبدأ O مشخص می‌شود. چنین پاره خط جهت‌دار را بردار مکان نامیده و آن را با \vec{OA} نشان می‌دهیم. O نقطه ابتدا و A نقطه انتهای \vec{OA} نامیده می‌شود. بنابراین دو نوع تعبیر برای (۳، ۵) وجود دارد، یکی این که مکان یک نقطه را در صفحه تعریف می‌کند، دوم آن که بردار مکان \vec{OA} را بیان می‌کند.

مثال ۱: بردارهای مکانی $(4, 1)$, $\vec{OC} = (-3, 4)$, $\vec{OB} = (-5, -2)$, $\vec{OA} = (4, -1)$ را رسم کنید.

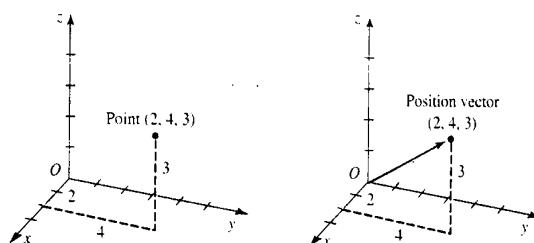
شکل ۲-۴ را ببینید.



شکل ۲-۴

مجموعه‌ی تمامی زوج‌های مرتب از اعداد حقیقی را با \mathbb{R}^2 نشان می‌دهیم. توجه داشته باشید که به عنوان مثال $(5, 3)$ همان بردار $(3, 5)$ نیست. ترتیب حائز اهمیت است.

این مفاهیم می‌تواند به آرایه‌های سه تایی از اعداد حقیقی مانند $(2, 4, 3)$ توسعه یابد که برای آن دو تعبیر ممکن بیان شود، به عنوان مکان یک نقطه در سه فضا نسبت به دستگاه مختصات x, y, z و یا به عنوان یک بردار مکان. این تعبیر در شکل ۳-۴ نشان داده شده‌اند. مجموعه‌ی تمامی سه تایی‌های مرتب از اعداد حقیقی را با \mathbb{R}^3 نشان می‌دهیم.



شکل ۳-۴



حال این مفاهیم را با تعریف زیر کلیت می‌دهیم.

۱-۱-۴ تعریف: فرض کنیم (u_1, u_2, \dots, u_n) دنباله‌ای از n عدد حقیقی باشد. مجموعه تمامی این چنین دنباله‌ها n -فضا نامیده و با R^n نشان می‌دهیم. u_1 مؤلفه اول، (u_1, u_2, \dots, u_n) ، u_2 ، مؤلفه دوم و به همین ترتیب نامیده می‌شود.

سیاری از نتایج و فنونی را که در حالت $3 > n$ برای R^n به دست می‌آوریم، صرف نظر از اهمیت مستقیم هندسی، ابزارهای مفید ریاضی خواهد بود. با وجود این، عناصر R^n می‌توانند به عنوان نقاط به عنوان بردارهای مکانی در n -فضا در نظر گرفته شوند. برای $3 > n$ ، تصور n -فضا مشکل است، اما خواننده تشویق می‌شود تا سعی کند یک تصویر ذاتی در ذهنش بسازد. یک «احساس» هندسی برای آن چه که اتفاق می‌افتد اغلب بحث جبری را برای ادامه آسان‌تر می‌کند. ریاضیاتی را که در R^n توسعه خواهیم داد از هندسه‌ای نشأت می‌گیرند که در R^2 و R^3 با آن آشنا هستیم. با این طرح، فرض کنیم که R نشانگر اعداد حقیقی باشد.

مثال ۲: R^4 گردایه تمامی مجموعه‌های ۴ عضوی مرتب از اعداد حقیقی است. به عنوان مثال $(1, 2, 3, 4)$ و $(5, 0, -1, \frac{3}{4})$ عضوهایی از R^4 می‌باشند. R^5 گردایه تمامی مجموعه‌های ۵ عضوی مرتب از اعداد حقیقی است. و به عنوان مثال $(\frac{9}{8}, -1, 2, 0, \frac{7}{4})$ در این گردایه قرار دارد.

۲-۱-۴ تعریف: فرض کنیم (u_1, \dots, u_n) و (v_1, \dots, v_n) دو عضو از R^n باشند. می‌گوییم u و v مساوی هستند اگر $u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n$. بنابراین دو عضو R^n مساوی هستند هرگاه مؤلفه‌های متناظر آن‌ها با هم برابر باشند.

حال ساختار جبری R^n را می‌سازیم. تعریف‌های زیر برای جمع و ضرب اسکالر، شبیه اعمال ماتریس‌ها هستند. همچنین خواهیم دید که ویژگی‌های جبری نیز مشابه هستند.

۳-۱-۴ تعریف: فرض کنیم (u_1, \dots, u_n) و (v_1, \dots, v_n) دو عضو R^n و c اسکالر باشد. جمع و ضرب اسکالر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \quad \text{جمع:}$$

$$cu = (cu_1, \dots, cu_n) \quad \text{ضرب اسکالر:}$$

در جمع دو عضو R^n ، مؤلفه‌های متناظر را با هم جمع می‌کنیم و برای ضرب عضوی از R^n در یک اسکالر، هر مؤلفه را در همان اسکالر ضرب می‌کنیم. توجه داشته باشید که عناصر به دست آمده در R^n هستند و



می‌گوییم که R^n نسبت به اعمال جمع و ضرب اسکالر بسته است. R^n با اعمال جمع مؤلفه‌وار و ضرب اسکالر مثالی از یک فضای برداری است و اعضای آن بردار نامیده می‌شوند. از این به بعد، R^n را به عنوان یک فضای برداری درنظر خواهیم گرفت.

مثال ۳: فرض کنیم $(-1, 4, 3, 7)$ و $(-2, -3, 1, 0)$ بردارهایی در \mathbb{R}^4 باشند. $u + v$ و $3u$ را بیابید.

حل: داریم:

$$u + v = (-1, 4, 3, 7) + (-2, -3, 1, 0) = (-3, 1, 4, 7)$$

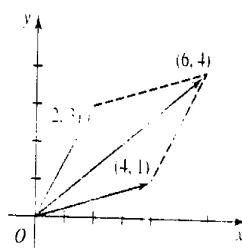
$$3u = 3(-1, 4, 3, 7) = (-3, 12, 9, 21)$$

توجه داشته باشید که بردارهای حاصل تحت هر یک از اعمال، بردارهایی از فضای برداری \mathbb{R}^4 می‌باشند. حال مثال‌هایی را برای بیان تعبیر هندسی این بردارها و اعمال آن می‌آوریم.

مثال ۴: این مثال تعبیری هندسی از جمع بردارها را بیان می‌کند. جمع بردارهای $(4, 1)$ و $(2, 3)$ را درنظر بگیرید. داریم:

$$(4, 1) + (2, 3) = (6, 4)$$

در شکل ۴-۴ این بردارها را به صورت بردارهای مکانی درنظر می‌گیریم. جمع دو بردار یعنی $(6, 4)$ ، قطر متوازی‌الاضلاعی است که بردارهای $(4, 1)$ و $(2, 3)$ دو ضلع مجاور آن می‌باشد.



شکل ۴-۴

در حالت کلی اگر u و v بردارهایی در یک فضای برداری باشند، آنگاه $v + u$ ، قطر متوازی‌الاضلاعی است که توسط u و v تعریف می‌شود. شکل ۴-۵ را ببینید. (از حروف پرنگ (boldface) برای نشان دادن بردارها و از حروف ساده (plain) برای نشان دادن اسکالرها استفاده خواهیم کرد.) این روش نشان دادن جمع بردارها، در تمامی فضاهای برداری سودمند است.





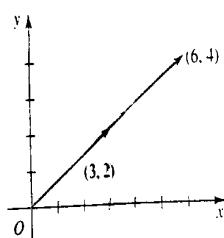
شکل ۵-۴

مثال ۵: این مثال تعبیری هندسی از ضرب اسکالر است. ضرب عدد ۲ در بردار $(3, 2)$ را در نظر بگیرید.

داریم:

$$2(2, 3) = (6, 4)$$

در شکل ۶-۴ ملاحظه می‌کنیم که $(6, 4)$ برداری هم‌جهت با بردار $(3, 2)$ بوده و طول آن ۲ برابر طول
بردار $(3, 2)$ است.

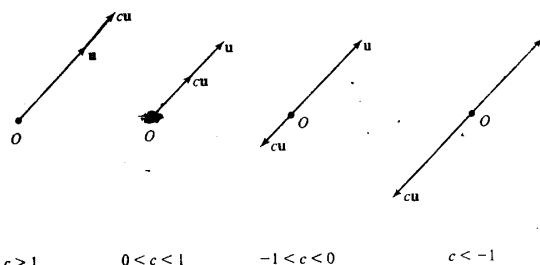


شکل ۶-۴

جهت بردار حاصل ضرب به علامت عدد بستگی دارد. نتیجه کلی به صورت زیر است.

فرض کنیم u یک بردار و c یک عدد باشد. اگر $c > 0$ هم‌جهت با بردار u و اگر $c < 0$ در خلاف جهت بردار u می‌باشد. طول بردار cu , $|cu|$ برابر طول بردار u است. شکل ۷-۴ را ببینید.





شکل ۷-۴

بردار صفر بردار ($0, 0, \dots, 0$) که n مؤلفه‌اش صفر می‌باشد، بردار صفر R^n نامیده و با 0 نشان داده می‌شود. برای مثال، $(0, 0, 0)$ بردار صفر R^3 می‌باشد. ملاحظه خواهیم کرد که بردار صفر نقش اساسی در توسعه فضاهای برداری خواهد داشت.

بردار قرینه^{۱)}: بردار $u(1)$ که به صورت $-u$ نوشته می‌شود، قرینه u نامیده می‌شود و برداری است که طول آن برابر با طول بردار u ولی جهت آن در خلاف جهت u می‌باشد.

تفاضل: تفاضل روی عناصر R^n با کم کردن مؤلفه‌های متناظر صورت می‌گیرد. برای مثال در R^3 $(3, 2, -9) - (5, 3, -6) = (2, 1, 3)$. توجه کنید که این عمل معادل است با

$$(5, 3, -6) + (-1)(2, 1, 3) = (3, 2, -9)$$

بنابراین تفاضل عمل جدیدی روی R^n نیست بلکه ترکیبی از جمع و ضرب اسکالر در -1 است. فقط دو عمل مستقل روی R^n داریم، جمع و ضرب اسکالر.

۴-۱-۴ فضیه: فرض کنیم u و v و w بردارهایی در R^n و c, d اسکالر باشند.

$$\text{الف) } u + v = v + u$$

$$\text{ب) } u + (v + w) = (u + v) + w$$

$$\text{پ) } u + 0 = 0 + u = u$$

$$\text{ت) } u + (-u) = 0$$

$$\text{ث) } c(u + v) = cu + cv$$

$$\text{ج) } (c + d)u = cu + du$$

1) Negative vector



$$c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$$

$$\lambda \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

درستی این نتایج با نوشتمن بردارها برحسب مؤلفه‌ها و با استفاده از تعاریف جمع و ضرب اسکالر بردارها و ویژگی‌های اعداد حقیقی، بررسی می‌شود. اثبات الف و پ را بیان می‌کنیم.

فرض کنیم $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ و $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$. در این صورت

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} :$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) \\ &= (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \\ &= (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$c(u + v) = cu + cv;$$

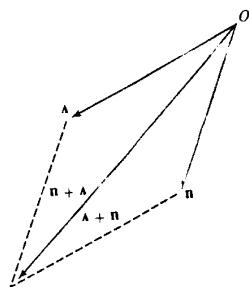
$$\begin{aligned} c(u + v) &= c((u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n)) \\ &= c((u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)) \\ &= (c(u_1 + v_1), \dots, c(u_n + v_n)) \\ &= (cu_1 + cv_1, \dots, cu_n + cv_n) \\ &= (cu_1, \dots, cu_n) + (cv_1, \dots, cv_n) \\ &= c\mathbf{u} + c\mathbf{v} \end{aligned}$$

برخی از احکام قضیه بالا می‌تواند به طور هندسی توسط شکل توضیح داده شود. ویژگی جابجاگی جمع بردارها در شکل ۸-۴ نشان داده شده است.

توجه داشته باشید که قطر متوازی‌الاضلاع در هر دو جمع بردار $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ و $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ یکی است. یکی از نکات (ب) در بالا، این است که در نوشتمن برخی از عبارت‌های جبری که شامل بردارها می‌باشند شبیه عبارت‌های ماتریس، می‌توانیم پارامترها را ننویسیم.

جابجاگی جمع بردارها





شکل ۸-۴

مثال ۶: فرض کنیم $(4, 0, 2)$ ، $v = (-4, 1, 9)$ و $w = (2, 5, -3)$. بردار $2u - 3v + w$ را تعیین کنید.

حل: داریم:

$$\begin{aligned} 2u - 3v + w &= 2(2, 5, -3) - 3(-4, 1, 9) + (4, 0, 2) \\ &= (4, 10, -6) - (-12, 3, 27) + (4, 0, 2) \\ &= (4 + 12 + 4, 10 - 3 + 0, -6 - 27 + 2) \\ &= (20, 7, -31) \end{aligned}$$

کمیت‌های فیزیکی مانند نیرو و سرعت که دارای مقدار و جهت هستند، بردار می‌باشند. و می‌توانند به وسیله‌ی عناصری از R^2 و R^3 به طور ریاضی نشان داده شوند. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۷: اگر همه نیروهایی که روی یک جسم اثر می‌کنند در یک صفحه قرار داشته باشند، می‌توانند توسط عناصری از R^2 نشان داده شوند و اگر در سه بعدی قرار داشته باشند، می‌توانند توسط عناصری از R^3 نشان داده شوند. دو نیرویی که به طور هم‌زمان روی یک جسم اثر می‌کنند معادل با یک نیرو هستند که نیروی برآیند نامیده می‌شود.

آزمایش‌ها نشان می‌دهد که اگر دو نیرو توسط عناصری از R^2 یا R^3 نشان داده شده باشند نیروی برآیند با جمع این دو بردار نشان داده می‌شود. این قانون، متوازی‌الاضلاع نیروها نامیده می‌شود. دیده‌ایم که این بردار حاصل جمع، قطر متوازی‌الاضلاعی است که بردارهای داده شده دو ضلع مجاور آن می‌باشند بنابراین اصطلاح متوازی‌الاضلاع نیروها با معنی است.

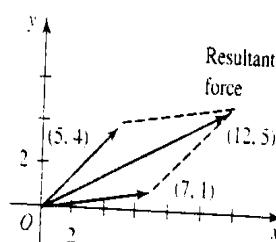


فرض کنیم که یک جسم در مبداء سیستم مختصات قائم قرار گرفته باشد، دو نیرو که توسط $(5, 4)$ و $(7, 1)$ نشان داده شده‌اند روی آن اثر کنند، شکل ۹-۴ را بینید. می‌خواهیم بردار برآیند و مقدار آن را بیابیم. با جمع $(5, 4)$ و $(7, 1)$ داریم:

$$(5, 4) + (7, 1) = (12, 5)$$

نیروی برآیند عبارت است از $(12, 5)$.

نیروی برآیند:



شکل ۹-۴

مقدار این نیرو توسط طول این بردار داده می‌شود و می‌تواند با استفاده از قضیه فیثاغورث محاسبه شود.

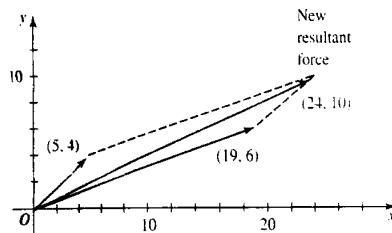
$$\text{مقدار نیرو} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13.$$

مقدار نیرو برآیند برابر ۱۳ است.

فرض کنیم می‌خواهیم که با ثابت نگه داشتن نیروی $(5, 4)$ و تغییر نیروی $(7, 1)$ ، مقدار نیروی برآیند را دو برابر کنیم، چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟ از ضرب اسکالر استفاده می‌شود. نیروی برآیند جدید برابر $(24, 10) = 2(12, 5)$ خواهد شد. این بردار هم جهت با $(12, 5)$ بوده و طولش دو برابر آن است. شکل ۹-۵ را بینید. ملاحظه می‌کنیم که:

$$(24, 10) = (5, 4) + (19, 6)$$





شکل ۴-۱۰

برای دو برابر کردن نیروی برآیند روی جسم، نیروی (۷, ۱) با نیروی (۱۹, ۶) جایگزین شود.

بردارهای ستوانی تا به حال فقط بردارهای سطحی را بررسی کرده‌ایم که بردارهایی هستند که مؤلفه‌های آن‌ها به صورت سطحی نوشته می‌شوند. خواهیم دید که گاهی اوقات استفاده از بردارهای ستوانی که مؤلفه‌ها به صورت ستوانی نوشته می‌شوند، مناسب‌تر است. مجدداً جمع و ضرب اسکالر بردارهای ستوانی در \mathbb{R}^n به روش مؤلفه‌ای تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}, \quad c \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ \vdots \\ cu_n \end{bmatrix}$$

به عنوان مثال در \mathbb{R}^2 :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad 4 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \end{bmatrix}$$

۵-۱-۴ تمرین

۱) بردارهای مکانی $(1, 0)$ و $(0, 1)$ را در \mathbb{R}^2 رسم کنید. در علوم اغلب نماد \vec{OZ} برای این بردارها به کار برده می‌شود.

۲) بردارهای مکانی $(1, 0, 0)$ و $(0, 1, 0)$ و $(0, 0, 1)$ را در \mathbb{R}^3 رسم کنید. در علوم اغلب نماد \vec{Oj} و \vec{Ok} برای این بردارها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۳) بردارهای مکانی زیر را در \mathbb{R}^2 رسم کنید.

$$\vec{OC} = (1, -3), \quad \vec{OB} = (-3, 2), \quad \vec{OA} = (5, 6)$$



$$\vec{OR} = (3, -3), \quad \vec{OQ} = (-4, 5), \quad \vec{OP} = (2, 4) \quad \text{(ب)}$$

$$\mathbf{w} = (5, 3), \quad \mathbf{v} = (-1, -4), \quad \mathbf{u} = (1, 1) \quad \text{(پ)}$$

۴) بردارهای مکانی زیر را در R^3 رسم کنید.

$$\vec{OC} = (-1, 3, 4), \quad \vec{OB} = (0, 5, -1), \quad (2, 3, 1) \quad \text{(الف)}$$

$$\mathbf{w} = (0, 0, -3), \quad \mathbf{v} = (-1, -2, -4), \quad \mathbf{u} = (1, 1, 1) \quad \text{(ب)}$$

۵) بردارها را با اعداد داده شده ضرب کنید:

$$-2 \cdot (1, 4) = (-1, 3) \quad \text{(الف)}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot (2, 4, 2) = \left(\frac{1}{2}, 2, 6 \right) \quad \text{(پ)}$$

$$4 \cdot (-1, 2, 3) = (-4, -2, 12) \quad \text{(ث)}$$

$$3 \cdot (3, 0, 4, 2, -1) = (9, 0, 12, 6, -3) \quad \text{(ج)}$$

$$5 \cdot (1, -4, 3, -2, 5) = (5, -20, 15, -10, 25) \quad \text{(ح)}$$

۶) عبارت‌های زیر را برای بردارهای $\mathbf{u} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{v} = (4, -1)$, $\mathbf{w} = (-3, 5)$ و محاسبه کنید.

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} \quad \text{(الف)}$$

$$2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} - \mathbf{w} \quad \text{(پ)}$$

$$-3\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w} \quad \text{(ث)}$$

۷) عبارت‌های زیر را برای بردارهای $\mathbf{u} = (2, 4, -2)$, $\mathbf{v} = (-1, 3, 2)$ و $\mathbf{w} = (2, 1, 3)$ محاسبه کنید.

کنید.

$$2\mathbf{u} + \mathbf{v} \quad \text{(الف)}$$

$$5\mathbf{u} - 2\mathbf{v} + 6\mathbf{w} \quad \text{(پ)}$$

$$2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} - 4\mathbf{w} \quad \text{(ث)}$$

۸) ویژگی‌های زیر را در مورد جمع و ضرب اسکالرها که در این بخش معرفی شدند. اثبات کنید.

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \text{(الف)}$$

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \text{(پ)}$$

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \quad \text{(الف)}$$

$$2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} - 8\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - 2\mathbf{v} + 4\mathbf{w} \quad \text{(پ)}$$

۱۰) برآیند نیروهای زیر را محاسبه کنید.

$$(4, -1), (-3, 2) \quad \text{(ب)} \quad (-1, 3), (-2, 3) \quad \text{(پ)} \quad (3, 2), (5, -5) \quad \text{(الف)}$$

۱۱) برآیند نیروهای زیر را محاسبه کنید.

$$(-2, 5, -1), (3, -1, 7) \quad \text{(ب)} \quad (2, 5, 1), (1, 4, 6) \quad \text{(الف)}$$



۱۲) برآیند نیروهای $(3, 0)$ و $(0, 3)$ را بباید. هرگاه $(1, 3)$ ثابت نگه داشته شود، $(3, 0)$ چگونه تغییر

کند تا برآیند دو برابر شود؟

۱۳) برآیند نیروهای $(2, 8)$ و $(-1, 3)$ را بباید. هرگاه برآیند به $(2, 5)$ تغییر یابد و $(-1, 3)$ ثابت نگه

داشته شود، $(2, 8)$ چگونه تغییر یابد؟

۱۴) کدام یک از کمیت‌های فیزیکی زیر بردار و کدام یک اسکالر است؟

الف) دما ب) شتاب پ) فشار ت) فرانس ث) نقل ج) مکان چ) زمان

ح) صوت خ) هزینه

۲-۴ حاصل ضرب نقطه‌ای، نرم، زاویه و فاصله

در حالی که هندسه‌ای برای فضای برداری R^n می‌سازیم، شما باید توجه دقیق به روشی که استفاده می‌کنیم داشته باشید. (البته ضمن آن که نتایج حاصله مهم هستند، روشی که به نتایج می‌رسیم مهم‌تر می‌باشند). مقدار، زاویه و فاصله برای R^n توسط تعمیم عبارت‌ها برای مقدار، زاویه و فاصله برای R^2 تعریف می‌شوند. قضیه فیثاغورث را به R^n توسعه می‌دهیم. این فرآیند توسعه مفاهیم آشنا به حالت‌های کلی‌تر در ریاضیات، اساسی است.

بحث را با تعریف حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار شروع می‌کنیم. حاصل ضرب نقطه‌ای ابزاری است که در ساختن هندسه‌ای برای R^n استفاده می‌شود.

تعریف: فرض کنیم $v = (v_1, \dots, v_n)$ و $u = (u_1, \dots, u_n)$ دو بردار در R^n باشند. حاصل ضرب نقطه‌ای u و v که با $u \cdot v$ نشان داده می‌شود توسط رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

حاصل ضرب نقطه‌ای هر زوج از بردارها یک عدد حقیقی است.

مثال ۱: حاصل ضرب نقطه‌ای بردارهای $u = (1, -2, 4)$ و $v = (3, 0, 2)$ را بباید.

حل: داریم:

$$u \cdot v = (1 \times 3) + (-2 \times 0) + (4 \times 2) = 2 + 0 + 8 = 11$$



ویژگی‌های حاصل ضرب نقطه‌ای : فرض کنید u, v و w بردارهایی در R^n و c یک عدد باشد. آنگاه

$$u \cdot v = v \cdot u \quad \text{(الف)}$$

$$(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w \quad \text{(ب)}$$

$$c(u \cdot v) = u \cdot (cv) = u \cdot (c v) \quad \text{(پ)}$$

$$u \cdot u = 0 \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad u = 0.$$

درستی بندهای الف و ت را بررسی کرده و بقیه را به تمرینات آتی واگذار می‌کنیم.

الف) فرض کنید $(v_1, \dots, v_n) = v$ و $(u_1, \dots, u_n) = u$. داریم:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

$$= v_1 u_1 + \dots + v_n u_n \quad \text{بنابراین خاصیت جابجایی اعداد حقیقی}$$

$$= v \cdot u$$

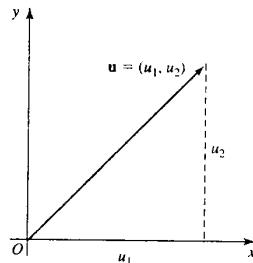
$$u \cdot u = u_1^2 + \dots + u_n^2 \geq 0. \quad \text{زیرا حاصل جمع}$$

مربعات است. بنابراین $u \cdot u \geq 0$. به علاوه، $u_1^2 + \dots + u_n^2 = 0$ اگر و تنها اگر $u_1 = \dots = u_n = 0$. لذا $u \cdot u = 0$ اگر و تنها اگر $u = 0$.

با استفاده از این ویژگی‌ها عبارت‌های شامل ضرب نقطه‌ای را ساده‌تر می‌کنیم. در این بخش، به عنوان مثال از این ویژگی‌ها برای به دست آوردن عبارت مناسبی برای زاویه بین دو بردار در R^n ، استفاده خواهیم کرد. در بخش‌های بعد این ویژگی‌ها را در تعمیم مفهوم ضرب نقطه‌ای به فضای ماتریس‌ها و توابع به کار خواهیم برد.

نرم یک بردار در R^n فرض کنیم $(u_1, u_2) = u$ برداری در R^2 باشد. می‌دانیم که طول این بردار $\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ می‌باشد. شکل ۱۱-۴ را ببینید. این نتیجه را برای تعریف طول (یا نام فنی نرم) یک بردار در R^n تعمیم می‌دهیم.





شکل ۱۱-۴

تعریف نرم (طول یا مقدار): نرم بردار (u_1, \dots, u_n) در R^n که با $\|u\|$ نشان داده می‌شود به صورت $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$ تعریف می‌شود.

توجه کنید که نرم یک بردار می‌تواند برحسب حاصل ضرب نقطه‌ای نیز نوشته شود.

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$$

تمرین ۲: نرم بردار R^3 و $v = (1, 3, 5)$ در R^4 را در $u = (1, 3, 0, 1)$ بیابید.

حل: با استفاده از تعریف بالا داریم:

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{35}$$

$$\|v\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{26}$$

تعریف: یک بردار یکه برداری است که نرم آن برابر ۱ باشد. اگر v یک بردار ناصرف باشد. آنگاه $u = \frac{1}{\|v\|}v$ برداری یکه در جهت v است. (تمرین زیر را ببینید).

روش ساختن بردار یکه هم جهت با بردار داده شده نرمال سازی بردار نامیده می‌شود.

تمرین ۳: الف) نشان دهید که بردار $(1, 0)$ یک بردار یکه است.

ب) نرم بردار $(3, -1, 2)$ را بیابید و آن را نرمال کنید.

حل: الف) $1 = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{(1, 0) \cdot (1, 0)}$. بنابراین $(1, 0)$ یک بردار یکه است. به طور مشابه می‌توان نشان داد که $(1, 0)$ نیز یک بردار یکه در R^3 است.



ب) $\| (2, -1, 3) \| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ و بردار نرمال شده $(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}})$ می‌باشد. این بردار می‌تواند به صورت $(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}})$ نیز نوشته شود، که برداری یکه در جهت بردار $(2, -1, 3)$ است.

بردارهای یکه زیر حائز اهمیت می‌باشند.

(۱) بردارهای یکه در R^2

(۲) بردارهای یکه در R^3

(۳) بردارهای یکه در R^n

حال یک نتیجه مهم ریاضی به نام نامساوی کوشی - شوارتز^۱ را معرفی می‌کنیم. این نامساوی به عنوان مثال ما را قادر خواهد ساخت که تعریف زاویه در R^n را به R^n تعمیم دهیم.

۱-۲-۴ قضیه (نامساوی کوشی شوارتز): اگر u و v دو بردار در R^n باشند آنگاه

$$|u.v| \leq \|u\| \|v\|$$

$|u.v|$ در اینجا نشان دهنده قدر مطلق عدد $u.v$ است.

برهان: ابتدا حالت خاص $u = v$ را در نظر می‌گیریم. اگر $u = v$ ، آنگاه $|u.v| = \|u\| \|v\|$ و $\|u\| \|v\|$ که تساوی برقرار است.

حال فرض کنیم $u \neq v$. اثبات نامساوی در این حالت شامل حالت بسیار جالبی از کاربرد فرمول درجه دوم می‌باشد. بردار $ru + v$ را در نظر بگیرید که در آن r عدد حقیقی دلخواهی می‌باشد. با استفاده از ویژگی‌های حاصل ضرب عددی داریم:

$$(ru + v).(ru + v) = r^2(u.u) + 2r(u.v) + v.v$$

(۱) آگوستین لوئیس کوشی (۱۸۵۷-۱۷۸۹) در پاریس تحصیل کرد و سپس قبل از این که برای تدریس به پاریس برگردد، مدتی به عنوان مهندس کار کرد. او یکی از بزرگترین و پرکارترین ریاضیدانان تا به امروز بوده است. او هفت جلد کتاب و بیش از هشتصد مقاله نوشته است. بیش از هر ریاضیدان دیگری مفاهیم و قضایای زیادی بعد از او اسماً گذاری شده‌اند. او زندگی متلاطمی داشت. بعد از انقلاب ۱۸۴۰، از بیعت با لوئیس فیلیپ خودداری نموده و به تورین تبعید شد. اما بعد توائست به پاریس برگردد. کوشی یک کاتولیک مذهبی و درگیر کارهای اجتماعی بود. او مشغول امور خیریه مادران ازدواج نکرده، کمک به گرسنگان ایرلند و توانبخشی و اسکان مجرمان بود. هنگام بخشش حقوق یک ساله به شهردار ساکنس او چنین گفت: «نگران نباشید، آن فقط حقوق من است، پول من نیست، پول امپراطور است». هرمان آماندوس شوارتز (۱۸۴۳-۱۹۲۱) در برلین تحصیل کرد و در زوریخ، گوتیگن و برلین تدریس کرد. بیشترین توانایی‌اش در نیوگ هندسی او بود او در مسائل تعریف شده طرفیت کار کرد. این روش کار او اهمیت مسائل واقعی را توسعه داد. تدریس و علاقمندی او به دانشجویان، فرucht زیادی را برای تألیف به او نداد.



همچنین بنابه خواص حاصل ضرب داخلی:

$$(ru + v) \cdot (ru + v) \geq 0.$$

با ترکیب این نتایج داریم:

$$r^*(u \cdot u) + 2r(u \cdot v) + v \cdot v \geq 0.$$

فرض کنیم $a = u \cdot u$, $b = v \cdot v$, $c = u \cdot v$. بنابراین

$$ar^* + br + c \geq 0.$$

این نشان می‌دهد که تابع درجه دوم $f(r) = ar^* + br + c$ هرگز منفی نیست. لذا $f(r)$, که نمودار آن یک سهمی است باید یک ریشه داشته باشد و یا ریشه‌ای نداشته باشد. ریشه‌های معادله $ar^* + br + c = 0$ می‌باشند.

دترمینان تعداد ریشه‌ها را تعیین می‌کند. هرگاه $b^* - 4ac < 0$, یک ریشه و اگر $b^* - 4ac = 0$, ریشه‌ای وجود نخواهد داشت. بنابراین

$$b^* - 4ac \leq 0.$$

$$b^* \leq 4ac$$

$$(2u \cdot v)^* \leq 4(u \cdot u)(v \cdot v)$$

$$(u \cdot v)^* \leq (u \cdot u)(v \cdot v)$$

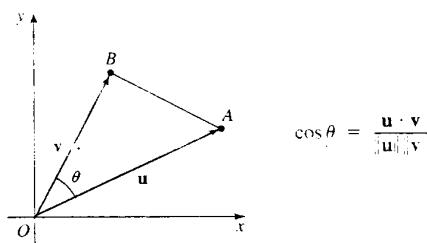
$$(u \cdot v)^* \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

با جذرگیری از طرفین، نامساوی کوشی - شوارتز را نتیجه می‌دهد.

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$$

زاویه بین بردارها فرض کنید $(a, b) = \theta$ و $v = (c, d)$ بردارهای مکانی در \mathbb{R}^2 باشند. شکل ۱۲-۴ را ببینید. می‌خواهیم عبارتی را برای کسینوس θ , زاویه بین بردارها به دست بیاوریم.





شکل ۱۲-۴

بنابراین قانون کسینوس داریم:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2(OA)(OB) \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2(OA)(OB)}$$

$$OA^2 + OB^2 - AB^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|v - u\|^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - [(c-a)^2 + cd - b)^2]$$

$$= 2ac + 2db = 2u.v$$

به علاوه

$$2(OA)(OB) = 2\|u\|\|v\|$$

بنابراین زاویه θ بین دو بردار در R^2 توسط رابطه زیر داده می‌شود.

$$\cos \theta = \frac{u.v}{\|u\|\|v\|}$$

می‌دانیم که کسینوس زاویه‌ای در شرط $|\cos \theta| \leq 1$ صدق می‌کند. نامساوی کوشی شوارتز تعیین می‌کند

$$|\frac{u.v}{\|u\|\|v\|}| \leq 1$$

می‌توانیم مفهوم زاویه بین دو بردار در R^n را به شرح زیر به R^n توسعه دهیم.

تعریف: فرض کنید u و v دو بردار ناصفر در R^n باشند. کسینوس زاویه θ بین این بردارها عبارت است

$$\cos \theta = \frac{u.v}{\|u\|\|v\|} \quad 0^\circ \leq \theta \leq \pi$$



مثال ۴: زاویه بین بردارهای $(1, 0, 0)$ و $(1, 0, 1)$ در \mathbb{R}^3 را تعیین کنید.

حل: داریم

$$u \cdot v = (1, 0, 0) \cdot (1, 0, 1) = 1, \quad \|u\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1, \quad \|v\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{لذا } \cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ و زاویه بین } u \text{ و } v \text{ برابر } 45^\circ \text{ است.}$$

دو بردار ناصفر را عمود برهم می‌گوییم اگر زاویه بین آنها قائم باشد. قضیه بعدی که از خواننده خواسته می‌شود در تمرین زیر ثابت کنید شرط عمود بودن را بیان می‌کند.

۲-۲-۴ قضیه: دو بردار ناصفر u و v بر هم عمودند اگر و تنها اگر $u \cdot v = 0$.

مثال ۵: نشان دهید که هر زوج از بردارهای زیر بر هم عمودند.

$$(a) (1, 0, 1), (0, 1, 1)$$

$$(b) (1, 2, 4), (2, -3, 1)$$

حل: با استفاده از ضرب نقطه‌ای داریم:

$$(a) (1, 0, 1) \cdot (0, 1, 1) = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 1. \text{ بردارها بر هم عمودند.}$$

$$(b) (1, 2, 4) \cdot (2, -3, 1) = 1 \times 2 + (-3 \times 2) + 1 \times 4 = 0. \text{ لذا بردارها بر هم عمودند.}$$

بردارهای زیر بردارهایی دو به دو عمود بر هم مهمند هستند.

$$(1, 0, 1), (0, 1, 1) \text{ در } \mathbb{R}^3 \text{ بر هم عمودند.}$$

$$(0, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1) \text{ در } \mathbb{R}^3 \text{ بر هم عمودند.}$$

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \text{ در } \mathbb{R}^3 \text{ بر هم عمود هستند.}$$

مثال ۶: در \mathbb{R}^3 , برداری را بیابید که بر $(1, -3, 3)$ عمود باشد. نشان دهید که بردارهای زیادی با این شرط

وجود دارند که همگی بر یک خط قرار دارند.

حل: فرض کنید که بردار (a, b) بر $(1, -3, 3)$ عمود باشد. داریم:

$$(a, b) \cdot (1, -3, 3) = 0$$

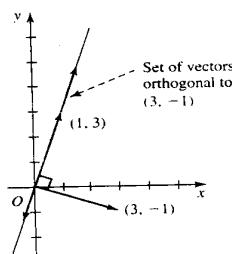
$$a \times 1 + b \times (-3) + 3a = 0$$



$$3a - b = \circ$$

$$b = 3a$$

بنابراین هر بردار به صورت $(a, 3a) - (1, 3)$ عمود است. چنین برداری به صورت $(1, 3) a$ نوشته می‌شود. مجموعه چنین بردارهایی روی خطی قرار دارند که توسط بردار $(1, 3)$ تعریف می‌شود. شکل ۱۳-۴ را ببینید.



شکل ۱۳-۴

حال دو نتیجه هندسی آشنا را از R^3 به R^n تعمیم می‌دهیم.

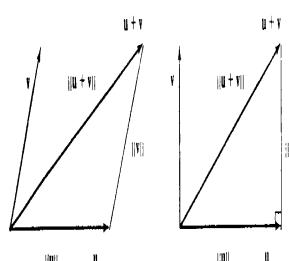
۳-۲-۴ قضیه: فرض کنید u و v بردارهایی در R^n باشند.

الف) نامساوی مثلثی:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

این نامساوی بیان می‌کند که اندازه یک ضلع مثلث نمی‌تواند از حاصل جمع اندازه‌های دو ضلع دیگر بیشتر باشد. شکل ۱۴-۴ الف را ببینید.

ب) قضیه فیثاغورث: اگر $\circ u \cdot v = 0$ آنگاه $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. مربع وتر یک مثلث قائم‌الزاویه برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر. شکل ۱۴-۴ ب را ببینید.



$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

ب الف

شكل ۱۴-۴

برهان: الف) بنابر ویژگی نرم

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v) \cdot (u + v) \\ &= u \cdot u + 2u \cdot v + v \cdot v \\ &= \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2|u \cdot v| + \|v\|^2 \end{aligned}$$

از نامساوی کوشی - شوارتر نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\ &\leq (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

با حذرگیری از طرفین نامساوی مثلثی حاصل می‌شود.

ب) بنابر ویژگی‌های نرم و این که $u \cdot v = 0$, داریم

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v) \cdot (u + v) \\ &= u \cdot u + 2u \cdot v + v \cdot v \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 \end{aligned}$$

که اثبات قضیه فیشاغورث می‌باشد.

فاصله بین نقاط: فاصله بین نقاط (x_1, x_2) و (y_1, y_2) در \mathbb{R}^2 برابر است با $d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. با تعیین این مطلب به شرح زیر فاصله را در \mathbb{R}^n تعریف می‌کنیم.

تعریف: فرض کنید (x_1, \dots, x_n) و (y_1, \dots, y_n) دو نقطه در \mathbb{R}^n باشند. فاصله بین X و Y که با $d(X, Y)$ نشان داده می‌شود توسط

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$



تعریف می‌شود.

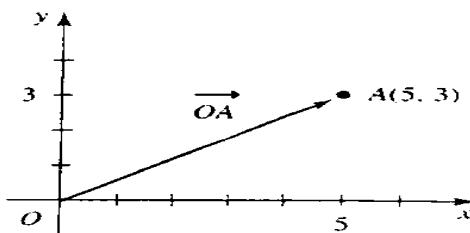
توجه داشته باشید که می‌توانیم این فاصله را به صورت $d(X, Y) = \|X - Y\|$ نیز بنویسیم. شکل

۱۵-۴ را برای فاصله در R^2 و R^n ببینید.

$$R^2 : d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$R^3 : d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

$$R^n : d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$



شکل ۱۵-۴

تمرین ۷: فاصله بین نقاط $(4, 0, -3, 5)$ و $(1, -2, 3, 0)$ در R^4 را دریابید.

حل: با استفاده از فرمول فاصله بالا، داریم:

$$\begin{aligned} d(X, Y) &= \sqrt{(1 - 4)^2 + (-2 - 0)^2 + (3 + 3)^2 + (0 - 5)^2} \\ &= \sqrt{9 + 4 + 36 + 25} \\ &= \sqrt{74} \end{aligned}$$

مثال ۸: نشان دهید که تابع فاصله در R^n دارای خاصیت تقارن زیر است:

$$d(X, Y) = d(Y, X)$$

حل: فرض کنیم $(Y = (y_1, \dots, y_n))$ و $(X = (x_1, \dots, x_n))$ داریم.

$$\begin{aligned} d(X, Y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} = d(Y, X) \end{aligned}$$



این نتیجه بیان می‌کند که فاصله X از Y همان فاصله Y از X است. این ویژگی آن چیزی است که می‌خواهیم تابع فاصله، به طور طبیعی آن را داشته باشد. در زیر مهتمرين ویژگی های نرم و فاصله را خلاصه می‌کنیم. در تمرینات آتی از شما خواسته می‌شود، آن ویژگی هایی را قبلًا بحث نشده‌اند ثابت کنید. نرم و فاصله‌ای که در این بخش معرفی شدند، از حاصل ضرب نقطه‌ای به دست آمده بودند. در کارهای عددی اغلب راحت‌تر است که نرم‌ها و فاصله‌های دیگری را تعریف می‌کنیم که در آن‌ها این ویژگیها به عنوان اصول یعنی خواص اساسی که هر نرم یا تابع فاصله‌ای باید دارا باشد، مورد استفاده قرار می‌گیرد. شما برخی از این مفاهیم را در قسمت‌های بعدی این بخش خواهید دید.

ویژگی‌های نرم	ویژگی‌های فاصله
$\ u\ \geq 0$	$d(X, Y) \geq 0$
(طول یک بردار نمی‌تواند منفی باشد)	فاصله بین دو نقطه نمی‌تواند منفی باشد.
$u = 0 \iff \ u\ = 0$	$X = Y \iff d(X, Y) = 0$
(فاصله بین دو نقطه برابر صفر است اگر و تنها اگر طول بردار برابر صفر است اگر و تنها اگر طول بردار صفر باشد).	(فاصله بین دو نقطه برابر صفر است اگر و تنها اگر طول بردار برابر صفر باشد).
$ cu = c \ u\ $	$d(X, Y) = d(Y, X)$ (ویژگی جابجایی)
(طول $ c $ برابر طول بردار u است.)	فاصله X از Y همان فاصله Y از X است
$\ u + v\ \leq \ u\ + \ v\ $	$d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z)$
(نامساوی مثلثی)	(نامساوی مثلثی)
	(حاصل جمع طول‌های دو ضلع یک مثلث بزرگتر یا مساوی ضلع سوم است.)

حال این ساختارهای هندسی R^n را خلاصه می‌کنیم. این هندسه، هندسی اقلیدسی نامیده می‌شود.

هندسه اقلیدسی: R^n

حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار u و v :
 $u \cdot v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$
 $\|U\| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$ نرم بردار U :



$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$$

زاویه بین بردارهای u و v :

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

فاصله بین نقاط X و Y :

تمرین

حاصل ضرب نقطه‌ای

۱) حاصل ضرب نقطه‌ای هر زوج بردارهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $(1, -4), (3, 0)$ ب) $(2, 1), (-4, 3)$

پ) $(5, -2), (-3, -4)$ ت) $(2, 0), (0, -1)$

۲) حاصل ضرب نقطه‌ای هر زوج بردارهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $(7, 1, -2), (3, -5, 8)$ ب) $(3, 4, -2), (5, 1, -1)$ (۱, ۲, ۳), (۴, ۱, ۰)

۳) نرم بردارهای زیر را بیابید.

الف) $(1, 3, -1), (0, 4, 1)$ ب) $(1, 1, 0), (-1, 3, 0)$

پ) $(5, 1, 1), (1, -2, 7)$ ت) $(1, 1, 5), (-3, 0, 2)$

۴) بردارهای زیر را نرمال نمایید.

الف) $(4, 2, 1), (1, 1, 0)$ ب) $(7, 2, 0), (0, 0, 1)$ ت) $(4, 0, 0), (0, 0, 7)$

۵) زاویه بین هر زوج از بردارهای زیر را بیابید:

الف) $(2, 3), (3, -2)$ ب) $(2, 0), (1, \sqrt{3})$ ت) $(-1, 1), (0, 1)$

۶) کسینوس زاویه بین هر زوج از بردارهای زیر را بیابید.

الف) $(1, 2, -1, 3, 1), (2, 0, 1, 0, 4)$ ب) $(2, -1, 0), (5, 3, 1)$ (۳, -۱, ۲), (۴, ۱, ۱)

۷) نشان دهید که زوج‌های زیر از بردارها بر هم عمودند:

الف) $(1, -1, 2, -5, 1), (4, 7, 4, 1, 0)$ ب) $(1, 2, -3), (4, 1, 2)$ ت) $(1, 3), (3, -1)$

۸) بردارهای ناصفری را بیابید که بر هر یک از بردارهای زیر عمود باشد:

الف) $(1, -2, 3, 1, 5)$ ب) $(5, 1, 5, 0, 1)$ ت) $(1, 5, -2, 3, 0)$



۹) فاصله بین هر زوج از بردارهای زیر را بیابید.

$$(5, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 3), (-3, 1, 2), (4, -1, 1), (4, 1, 2)$$

۱۰) ویژگی‌های زیر را از ضرب نقطه‌ای بردارها بیان کنید.

$$(u + v).w = u.w + v.w \quad \text{الف)$$

$$cu.v = c(u.v) = u + cv \quad \text{ب)$$

۱۱) ثابت کنید که اگر v برداری ناصفر باشد، آنگاه بردار $v = \frac{1}{\|v\|}v$ برداری یکه در جهت v است.

۱۲) ثابت کنید که دو بردار ناصفر u و v بر هم عمودند اگر و تنها اگر $u \cdot v = 0$.

۱۳) نشان دهید که اگر u و w دو بردار در فضای برداری U و برای تمامی بردارهای $u \in U$ آنگاه $v = w$

۱۴) فرض کنید $u, v_1, \dots, v_n, \dots, v$ بردارهایی در یک فضای برداری و a_1, \dots, a_n, b عدد باشد. ثابت کنید که

$$. u.(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 u.v_1 + \dots + a_n u.v_n$$

۱۵) فرض کنید u, v و w بردارهایی در یک فضای برداری و c و d دو عدد ناصفر باشد. تعیین کنید که کدام یک از عبارت‌های زیر یک عدد، یک بردار و یا ممکن است.

$$\text{الف) } u.v + cw \quad \text{ب) } (u.v).w \quad \text{پ) } (u.v)w$$

$$\text{ت) } \|u + cv\| + d \quad \text{ث) } c(u.v) + dw \quad \text{پ) } u.v + c$$

$$\text{ج) } \|u.v\| \quad \text{ج) } cu.dv + \|w\|v$$

$$. \quad ۱۶) \quad \|\mathbf{c}(3, 0, 4)\| = 15$$

۱۷) ثابت کنید u و v بردارهای عمود بر هم هستند اگر و تنها اگر $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

۱۸) فرض کنید (a, b) برداری در R^2 باشد. ثابت کنید که بردار $(-b, a)$ بر (a, b) عمود است.

۱۹) فرض کنید u و v بردارهایی در R^2 باشند. ثابت کنید که $\|u - v\| = \|v\|$ اگر و تنها اگر $u + v$ بر هم عمود باشند.

۲۰) فرض کنید u برداری در R^n و c یک عدد باشد. ثابت کنید که نرم یک بردار دارای ویژگی‌های زیر

است:

$$\|u\| \geq 0 \quad \text{الف)$$

$$u = 0 \quad \text{اگر و تنها اگر } \|u\| = 0 \quad \text{ب)$$



$$\|.cU\| = |c|\|U\| \quad \text{پ}$$

۲۱) فضای برداری R^n را درنظر بگیرید. فرض کنید $u = (a_1, \dots, a_n)$ برداری در R^n باشد. ثابت کنید هر یک از دو تابع زیر در ویژگی‌های نرم مساله ۱۹ صدق می‌کند. این توابع هر چند که به هندسه اقلیدسی رهنمون نمی‌شوند، تمامی ویژگی‌های جبری را که انتظار می‌رود یک نرم داشته باشد، دارند. و در ریاضیات عددی استفاده می‌شوند.

$$\text{الف)} \|u\| = |u_1| + \dots + |u_n| \quad \text{نرم حاصل جمع مقادیر}$$

$$\text{ب)} \|U\| = \max_{i=1, \dots, n} |u_i| \quad \text{نرم بیشترین مقدار}$$

این نرم‌ها را برای بردارهای $(1, 2, 4)$, $(-3, 4)$ و $(1, 2, -5)$ و $(0, 7, -2)$ محاسبه کنید.

۲۲) فرض کنید X , Y و Z نقاطی در R^n باشند. ثابت کنید که تابع فاصله دارای ویژگی‌های زیر است:

$$\text{الف)} d(X, Y) \geq 0$$

$$\text{ب)} X = Y \Rightarrow d(X, Y) = 0$$

$$\text{پ)} d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$$

این ویژگی‌ها به عنوان اصول در تعمیم مفهوم فاصله برای فضاهای معین مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۳-۴ مقدمه‌ای بر نگاشت‌های خطی

یک تابع قانونی است که بر هر یک از عناصر یک مجموعه، عنصری یکتا از مجموعه دیگری را نسبت می‌دهد. تابع در اغلب زمینه‌های ریاضی مورد استفاده قرار گرفته و در تعیین وابستگی یکی از متغیرها به دیگری در کاربرد، بالاهمیت می‌باشد. به عنوان مثال، ارتفاع یک Projectile تابعی از زمان است هزینه کل یک کالا تابعی از آیتم‌ها است و ... در این بخش، دستهٔ مهمی از توابع بین فضاهای برداری به نام نگاشت‌های خطی معرفی می‌کنیم. در بخش بعدی خواهیم دید که چگونه نگاشت‌های خطی در زمینه‌هایی مانند گرافیک کامپیوتری و هندسه فراكتالی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تعريف: یک نگاشت مانند T از R^n به R^m به صورت $T : R^n \longrightarrow R^m$ نوشته می‌شود، قانونی

است که به هر بردار u از R^n ، بردار یکتا v از R^m را نسبت می‌دهد.



دامنه و R^m هم دامنه T نامیده می‌شود. می‌نویسیم $v = T(u)$ و v را تصویر u تحت T مجموعه تمامی تصاویر، برد T نامیده می‌شود. برد ممکن است تمام R^m یا فقط قسمتی از آن باشد. اصطلاحات نگاشت و تابع نیز برای نگاشتهای به کار برد می‌شوند.

برای مثال، نگاشت $T : R^3 \rightarrow R^3$ با تعریف $T(x, y, z) = (2x, y - z)$ را در نظر بگیرید. دامنه T و هم دامنه آن R^3 است. تصویر هر بردار در R^3 می‌تواند توسط این تعریف تعیین شود. مثلاً تصویر بردار $(1, 4, 2)$ با فرض $x = 1, y = 4$ و $z = 2$ برابر $(2, 0, 0)$ است.

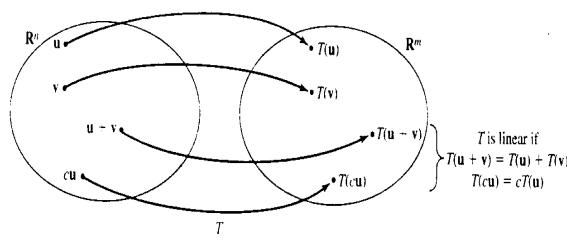
از هر فضای برداری دو عمل به نام‌های جمع و ضرب اسکالر تعریف می‌شود. مهم‌ترین نگاشتهای خطی بین فضاهای برداری آن‌ها بی‌هستند که این ساختارهای خطی را به مفهوم زیر حفظ می‌کنند.

تعریف: فرض کنیم u و v بردارهایی در R^n و c یک عدد باشد. نگاشت خطی $T : R^n \rightarrow R^m$ خطی نامیده می‌شود اگر

$$T(u + v) = T(u) + T(v)$$

$$T(cu) = cT(u)$$

اولین شرط به این معنی است که T حاصل جمع دو بردار را به جمع تصاویر آن دو برابر می‌نگارد دو میان شرط به این مطلب دلالت می‌کند که T ضریب عددی یک بردار را به همان ضریب عددی از تصویر آن بردار می‌نگارد. بنابراین اعمال جمع و ضرب تحت تبدیلات حفظ می‌شوند. این مفاهیم حفظ کردن ساختارهای نگاشتهای خطی در شکل ۱۶-۴ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۶-۴

مثال ۱: نشان دهید که نگاشت $T : R^2 \rightarrow R^2$ خطی است.

$$T(x, y) = (x - y, 3x)$$



حل: ابتدا نشان می‌دهیم که T جمع را حفظ می‌کند. فرض کنید (x_1, y_1) و (x_2, y_2) عناصری از \mathbb{R}^2 باشند. آنگاه

$$\begin{aligned} T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) && \text{بنابه جمع بردارها} \\ &= (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, 3x_1 + 3x_2) && \text{بنابه تعریف } T \\ &= (x_1 - y_1, 3x_1) + (x_2 - y_2, 3x_2) && \text{بنابه جمع بردارها} \\ &= T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) && \text{بنابه تعریف } T \end{aligned}$$

بنابراین T جمع بردارها را حفظ می‌کند.

حال نشان می‌دهیم که T ضرب اسکالار را حفظ می‌کند. فرض کنید c یک عدد باشد. بنابه ضرب اسکالار یک بردار

$$\begin{aligned} T(c(x_1, y_1)) &= T(cx_1, cy_1) && \text{بنابه ضرب اسکالار یک بردار} \\ &= (cx_1 - cy_1, 3cx_1) && \text{بنابه تعریف } T \\ &= c(x_1 - y_1, 3x_1) && \text{بنابه ضرب اسکالار یک بردار} \\ &= cT(x_1, y_1) && \text{بنابه تعریف } T \end{aligned}$$

لذا، T ضرب اسکالار را حفظ می‌کند و T خطی است.

یک نگاشت خطی از یک فضای برداری به خودش یک عملگر خطی نامیده می‌شود. $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ با تعریف $T(x, y) = (x - y, 3x)$ مثالی از یک عملگر خطی است. مثال زیر نگاشتی را نشان می‌دهد که خطی نیست.

مثال ۲: نشان دهید که نگاشت

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(x, y, z) = (xy, z)$$

خطی نیست.



حل: ابتدا شرط اول را آزمایش می‌کنیم. فرض کنید (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) عناصری از R^3 باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= ((x_1 + x_2)(y_1 + y_2), z_1 + z_2) \\ &= (x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_2, z_1 + z_2) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) &= (x_1 y_1, z_1) + (x_2 y_2, z_2) \\ &= (x_1 y_1 + x_2 y_2, z_1 + z_2) \end{aligned}$$

بنابراین در حالت کلی

$$T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) \neq T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2)$$

چون عمل جمع حفظ نمی‌شود، T خطی نیست.

حال در می‌باییم که هر ماتریس یک نگاشت را تعریف می‌کنند. به علاوه هر چنین نگاشتی خطی است.

به عنوان مثال، ماتریس 3×3 ، $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ و بردار سوتونی $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید. این ماتریس نگاشت خطی $T(X) = AX$ از R^3 به R^2 را با استفاده از ضرب ماتریسی به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$T(X) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y - 2z \\ 4y + z \end{bmatrix}$$

تصویر هر بردار مشخص با استفاده از مقادیر مناسب x , y و z محاسبه می‌شود. به عنوان مثال

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 17 \end{bmatrix}$$



۱-۳-۴ قضیه: فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ و X عضوی از R^n باشد که به صورت یک ماتریس ستونی در نظر گرفته می‌شود. تبدیل $T: R^n \rightarrow R^m$: T تعریف شده توسط خطی است. چنین تبدیل خطی، نگاشت ماتریسی نامیده می‌شود.

اثبات: توجه کنید که چون A ، ماتریس $m \times n$ و X ماتریسی $1 \times n$ بنا براین AX ماتریس $1 \times m$ است. بنا براین $T(X) = AX$ نگاشتی از R^n به R^m را تعریف می‌کند. خطی بودن T باقی مانده است. فرض کنید X و Y عناصری از R^n باشند که به صورت ماتریس‌های ستونی نوشته شده‌اند و c یک عدد باشد. بنابر تعریف T و خواص ماتریس‌ها داریم:

$$\begin{aligned} T(X + Y) &= A(X + Y) \\ &= AX + AY \\ &= T(X) + T(Y) \quad \text{جمع حفظ شده است} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(cX) &= A(cX) \\ &= cAX \\ &= cT(X) \quad \text{ضرب اسکالر حفظ شده است} \end{aligned}$$

بنابراین تبدیل، خطی است.

مثال ۳: نگاشت خطی T را در نظر بگیرید که توسط ماتریس 3×3 ، A تعریف شده است. تصویر برداری دلخواه را تحت T بیابید و این نتیجه را برای تعیین تصویر بردار داده شده X به کار ببرید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

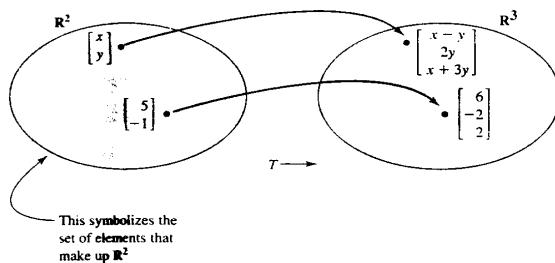
حل: چون A ماتریسی 2×3 است بنا براین تبدیل خطی $T: R^3 \rightarrow R^2$ را تعریف می‌کند.

داریم:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ 2y \\ x + 3y \end{bmatrix}$$



$$\text{با فرض } y = -1, x = 5 \text{ داریم} \\ T \left(\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$



شکل ۱۷-۴

تمرین ۴: فرض کنیم A ماتریسی 2×3 و B ماتریسی 3×6 باشد. دامنه و هم‌دامنه نگاشت‌های خطی را که توسط A و B تعریف می‌شوند، تعیین کنید.

حل: فرض می‌کنیم X برداری از دامنه نگاشت تعریف شده توسط A باشد، در این صورت X که ماتریسی 2×3 است. برای این که حاصل ضرب AX وجود داشته باشد، X باید ماتریس 1×2 یا یک بردار در R^2 باشد. تصویر AX ماتریس 1×3 یا برداری در R^3 خواهد بود. بنابراین دامنه نگاشت R^2 و هم‌دامنه آن R^3 است.

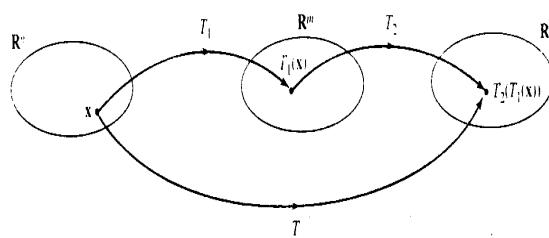
با استدلالی مشابه دامنه نگاشت تعریف شده توسط ماتریس 6×4 ، B برابر R^6 و هم‌دامنه آن R^4 است.

ترکیب نگاشت‌های ماتریسی

شما با مفهوم ترکیب توابع به یک تابع مرکب آشنا هستید. نگاشت‌های ماتریسی نیز به طور مشابه ترکیب می‌شوند. فرض کنید $T_2 : R^m \rightarrow R^s$ و $T_1 : R^n \rightarrow R^m$ نگاشت‌های ماتریسی تعریف شده توسط $T_2(Y) = A_2 Y$ و $T_1(X) = A_1 X$ باشند. این نگاشت‌های می‌توانند به طور طبیعی باز هم ترکیب شده و تبدیل T از R^n به R^s را بسازید. این تبدیل مرکب T ، نگاشتی است که از ترکیب T_1 با T_2 ساخته شده و به صورت $T(X) = T_2(T_1(X))$ تعریف می‌شود. شکل ۱۸-۴ را ببینید. نماد $T = T_2 \circ T_1$ برای ترکیب دو تبدیل به کار می‌رود.



حال ملاحظه می‌کنیم که نگاشت مرکب T یک نگاشت ماتریس است که توسط حاصل ضرب ماتریس‌های A_1, A_2 تعریف می‌شود.



شکل ۱۸-۴

۲-۳-۴ قضیه: نگاشت مرکب T از دو نگاشت ماتریس $T_1 : R^n \rightarrow R^m$ و $T_2 : R^m \rightarrow R^s$ تعریف شده‌اند، نگاشت ماتریس $A_1 : R^n \rightarrow R^m$ و $A_2 : R^m \rightarrow R^s$ که توسط ماتریس‌های A_1 و A_2 تعریف شده‌اند، نگاشت ماتریس $A_2 A_1$ تعریف شده است.

اثبات: با استفاده از تعریف T داریم $T(X) = T_2(T_1(X)) = T_2(A_1 X) = A_2(A_1 X) = A_2 A_1 X$ چون حاصل ضرب ماتریس شرکت‌پذیر است، نتیجه می‌شود $A_2 T(X) = (A_2 A_1)X$ ماتریسی $s \times m$ و $A_2 A_1$ ماتریس $m \times n$ است، ماتریس حاصل ضرب $A_2 A_1$ ماتریسی از مرتبه $s \times n$ است. بنابراین T نگاشتی از R^n به R^s تعریف شده توسط ماتریس $A_2 A_1$ است.

مثال ۵: فرض کنید X و $T_1(X) = A_1 X$ و $T_2(X) = A_2 X$ تعریف شده باشند. فرض کنید $T = T_2 \circ T_1$. تصویر بردار X را تحت T بیابید.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

حل: T توسط ماتریس حاصل ضرب $A_2 A_1$ تعریف شده است. داریم:

$$A_2 A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -4 & -1 \\ 12 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$



بنابراین

$$T(X) = \begin{bmatrix} -5 & -4 & -1 \\ 12 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

می‌توانیم نتایج این بخش را به طور طبیعی توسعه دهیم. فرض کنید T_1, \dots, T_n یک دنباله از نگاشت‌های خطی روی R^p, R^q, \dots, R^s باشند که با ماتریس‌های A_1, \dots, A_n تعریف شده‌اند ترکیب $T = T_1, \dots, T_n$ توسط ماتریس حاصل $A_n \dots A_1$ داده می‌شود. (در صورتی که حاصل ضرب موجود باشد).

۳-۳-۴ تمرین

۱) نشان دهید که نگاشت $T(x, y) = (2x, x - y)$ با تعریف $T : R^2 \rightarrow R^2$ خطی است.

تصاویر عناصر $(1, 2), (1, 4), (-1, 4)$ را تحت این نگاشت بیابید.

۲) نشان دهید که $T(x, y) = (3x + y, 2y, x - y)$ نگاشت خطی $T : R^3 \rightarrow R^3$ را تعریف می‌کند. تصاویر بردارهای $(1, 2), (2, -5)$ و $(0, 0, 1)$ را تحت T بیابید.

۳) نشان دهید که $T(x, y, z) = (0, y, 0)$ تعریف شده توسط $T : R^3 \rightarrow R^3$ خطی است. این نگاشت تصویری نیز نامیده می‌شود. چرا این نامگذاری مناسب است؟

۴) نشان دهید که نگاشت‌های زیر خطی نیستند.

$$T(x, y, z) = (x + y, y^2) \quad \text{(ب)} \quad T(x, y, z) = (3x, y^2) \quad \text{(الف)}$$

۵) نشان دهید که $T(x, y) = x + a$ که توسط $T : R^2 \rightarrow R$ تعریف شده است. در حالتی که a عددی ناصلف باشد، خطی نیست.

در تمرینات ۶ تا ۱۱ تعیین کنید که آیا نگاشت‌های داده شده خطی هستند؟

$$R^2 \ni (x, y) \mapsto T(x, y) = (2x, y) \quad (6)$$

$$R^2 \ni (x, y) \mapsto T(x, y) = x - y \quad (7)$$

$$R^3 \ni (x, y, z) \mapsto T(x, y, z) = (x, y, z) \quad (8)$$

$$z = 1 \quad \text{(ب)} \quad z = 0 \quad \text{(الف)}$$

$$R^3 \ni (x, y, z) \mapsto T(x, y, z) = (x, 2x, 3x) \quad (9)$$

$$R^2 \ni (x, y) \mapsto T(x, y) = (x^2, y) \quad (10)$$



$$. R^3 \ni R^3 \text{ به از } T(x, y, z) = (x + 2y, x + y + z, 3z) \quad (11)$$

(۱۲) نگاشت $T : R^3 \longrightarrow R^3$ تعریف شده توسط ماتریس A در زیر را در نظر بگیرید. تصاویر بردارهای X, Y, Z را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(۱۳) عملگر خطی T روی R^2 را که توسط ماتریس داده شده A در زیر تعریف شده است در نظر بگیرید. تصاویر بردارهای X, Y و Z را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(۱۴) فرض کنید A ماتریس $m \times n$ و c یک بردار ستونی در R^n باشد. نشان دهید که هرگاه $\circ \neq c$ آنگاه نگاشت $T(X) = AX + c$ با تعریف $T : R^n \longrightarrow R^m$ خطی نیست.

(۱۵) فرض کنید T یک نگاشت خطی با دامنه U باشد. اگر \mathbf{v} و \mathbf{w} بردارهایی در U باشند، ثابت کنید:

$$T(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w}) \quad \text{الف) } \quad T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v}) \quad \text{ب)}$$

(۱۶) فرض کنید X ماتریس $T_2(X) = A_2 X$ و $T_1(X) = A_1 X$ با ماتریس A_2, A_1 در زیر تعریف شده و $T = T_2 \circ T_1$. ماتریسی را که T تعریف می‌کند بیابید و توسط آن تصویر بردار X تحت T را تعیین کنید.

$$\begin{aligned} .X &= \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{الف)} \\ .X &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ب)} \\ .X &= \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{پ)} \end{aligned}$$

(۱۷) فرض کنید $T = T_2 \circ T_1$ و $T_2(x, y) = (\circ, x + y)$ و $T_1(x, y) = (2x, -y)$. معادله‌ای برای T بیابید و آن را برای تعیین تصویر $(2, -3)$ تحت T به کار ببرید.



۱۸) فرض کنید $T = T_2 \circ T_1$ و $T_2(x, y, z) = (x, x+y, 2x-z)$ و $T_1(x, y) = (x+y, 2x, 3y)$

معادله‌ای برای T بیابید و از آن برای تعیین تصویر $(2, 5)$ تحت T استفاده کنید.

۱۹) فرض کنید U و V و W سه بردار و T_1 یک نگاشت خطی از U به V و T_2 یک نگاشت خطی

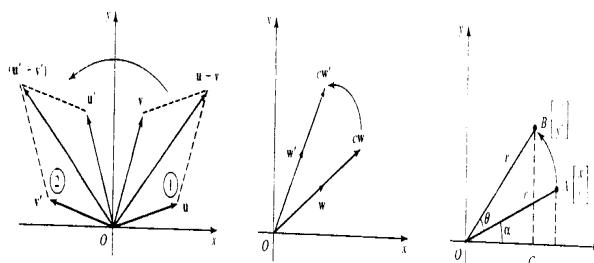
از V به W باشد. آیا $T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2 = T$ است؟

۴-۴ نگاشت‌های ماتریسی، گرافیک‌های کامپیوترا و فرآکتال‌ها

در بخش قبل دیدیم که هر ماتریس یک نگاشت خطی را تعریف می‌کند. در این بخش ملاحظه خواهیم کرد که هر نگاشت خطی $T : R^n \rightarrow R^m$ می‌تواند توسط یک ماتریس مانند A تعریف شود. این نمایش ماتریسی از نگاشت‌های خطی ابزاری مهم برای بررسی نگاشت‌های خطی است. ماتریس‌هایی را معین خواهیم کرد که تعدادی از نگاشت‌های خطی مهم مانند دوران و انبساط را توصیف می‌کنند. کاربردها در هندسه فرآکتالی دیده خواهند شد.

دوران حول مبداء

دورانی مانند $R^2 \rightarrow R^2$ ، حول مبداء را در نظر بگیرید. شکل ۴-۱۹ (الف) را بینید.



(ج)

(ب)

(الف)

شکل ۴-۱۹

فرض کنید $T(u) = u'$ و $T(v) = v'$. متوازی‌الاضلاع (۱) به متوازی‌الاضلاع (۲) تبدیل می‌شود. چون قطر متوازی‌الاضلاع (۱) به قطر متوازی‌الاضلاع (۲) نگاشته می‌شود.

$$T(u+v) = u' + v'$$



= $T(u) + T(v)$ جمع حفظ می‌شود.

به علاوه، در شکل ۱۹-۴ (ب). $T(\mathbf{w}) = \mathbf{w}'$ است. چون تصویر بردار $c\mathbf{w}$ ،

$$\begin{aligned} T(c\mathbf{w}) &= c\mathbf{w}' \\ &= cT(\mathbf{w}) \quad \text{ضرب اسکالار حفظ می‌شود.} \end{aligned}$$

بنابراین دوران حول مبداء یک عملگر خطی است.

برای ملاحظه این که دوران یک عملگر خطی است، یک عبارت عملی برای چنین دورانی می‌باشد، عبارتی که می‌تواند در تعیین مختصات تصویر هر نقطه داده شده تحت دوران مورد استفاده قرار گیرد. دورانی را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت تحت زاویه θ حول مبداء در نظر بگیرید. شکل ۱۹-۴ (پ) چنین دورانی نقطه A را به نقطه B خواهد نگاشت. فاصله OA برابر OB است. فرض کنید این فاصله برابر r و زاویه AOC برابر α باشد. داریم:

$$X' = OC = r \cos(\alpha + \theta) = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta$$

$$= x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$Y' = BC = r \sin(\alpha + \beta) = r \sin \alpha \cos \theta + r \cos \alpha \sin \theta$$

$$= y \cos \theta + x \sin \theta$$

$$= x \sin \theta + y \cos \theta$$

این عبارت‌ها برای X' و Y' می‌توانند به معادله ماتریسی به صورت زیر درآیند:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

لذا

$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

یک دوران حول مبداء توسط ضرب ماتریسی مشخص می‌شوند که در واقع تائید می‌شود که یک عملگر خطی است توجه داشته باشید که θ برای دوران در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت مثبت و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، منفی است.



به عنوان یک مثال تصویر نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ تحت دوران $\frac{\pi}{2}$ حول مبداء می‌باشیم. با استفاده از $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ و $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ در ماتریس دوران، داریم:

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

تصویر نقطه $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ تحت دوران $\frac{\pi}{2}$ حول مبداء عبارت است از

شبیه حالت دوران، هر تبدیل خطی می‌تواند توسط یک ماتریس تعریف شود. هر چند که ممکن است مثل دوران با استفاده از روش خاصی به نمایش ماتریس نگاشتهای خطی رسید، اما مطلوب‌تر است که از یک حالت استاندارد در تمامی حالات استفاده شود. چنین روشی را برای نگاشتهای خطی در R^n به دست می‌آوریم.

نمایش ماتریسی

فرض کنید $T : R^n \rightarrow R^m$ یک نگاشت خطی باشد. در این مبحث بردارهای ستونی در نظر گرفته و بردارهای e_1, e_2, \dots, e_n از R^n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید بردار u بردار دلخواهی باشد.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

بردارهای e_1, \dots, e_n مبنای استاندارد R^n نامیده می‌شود. این بردارها نقش مهمی در مبحث R^n دارند زیرا می‌توانیم هر بردار دلخواهی مانند u را به طور یکتا برحسب آن‌ها به صورت زیر بنویسیم:

$$u = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

چون T یک تبدیل خطی است،

$$\begin{aligned} T(u) &= T(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n) \\ &= a_1 T(e_1) + \dots + a_n T(e_n) \end{aligned}$$



$$= [T(e_1) \dots T(e_n)] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

که در آن $[T(e_1) \dots T(e_n)]$ ماتریس با ستون‌های $T(e_1), \dots, T(e_n)$ است. بنابراین تبدیل خطی T توسعه ماتریس $A = [T(e_1) \dots T(e_n)]$ تعریف می‌شود.

ماتریس استاندارد T نامیده می‌شود. توجه داشته باشید که بردارهای R^n باید به صورت ستونی نوشته شوند، تا بتوان از این روش بیان یک تبدیل خطی، استفاده نمود. در تمرینات زیر از خواننده خواسته می‌شود که ماتریس دوران را به این روش به دست آورد.

مثال ۱: ماتریس استاندارد $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 3y \end{bmatrix}$ را تعیین کنید.

حل: اثر T روی مبنای استاندارد را به دست می‌آوریم:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

این ماتریس‌ها ستون‌های ماتریس استاندارد A هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

می‌تواند به عنوان یک تبدیل ماتریس نوشته شود.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

حال ماتریس‌هایی را پیدا می‌کنیم که تعدادی از نگاشت‌های مهم را تعریف می‌کنند.

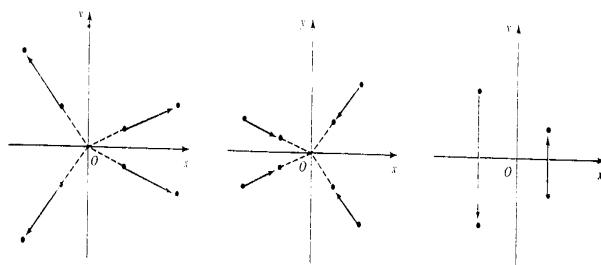
انبساط و انقباض^{۱)}

عملگر $r : R^2 \longrightarrow R^2$ را درنظر بگیرید که توسعه $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = r\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ تعریف شده است و r یک عدد است. اگر $r > 1$ ، آنگاه T نقاط را از مبدأ دور می‌کند و انبساطی با ضریب r نامیده می‌شود. اگر $0 < r < 1$ ، آنگاه T نقاط را به مبدأ می‌کشاند و انقباطی با ضریب r نامیده می‌شود. شکل ۴-۲۰ (الف) را ببینید.

به راحتی نشان داده می‌شود که T خطی است. حال ماتریس استاندارد T را پیدا می‌کنیم.

1) Dilation and Contraction





(الف) انعکاس نسبت به محور x (ب) انبساط $1 < r < \infty$

شکل ۴-۲۰

اثر T را روی مبنای استاندارد پیدا می‌کنیم:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$$

ماتریس استاندارد عبارت است از

$$A = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

می‌تواند به عنوان یک تبدیل ماتریس نوشته شود

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

به عنوان مثال، انبساط T را در نظر بگیرید که توسط ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ تعریف شده است. داریم

$$T \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$



بنابراین T نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ را به نقطه $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ می‌نگارد. تصویر در همان جهت نقطه داده شده از مبداء ولی فاصله‌اش تا مبداء سه برابر فاصله نقطه اولیه تا مبداء است.

انعکاس

عملگر $R^2 : R^2 \longrightarrow R^2$ را در نظر بگیرید که توسط $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ تعریف شده است و هر نقطه را به قرینه‌اش نسبت به محور x ‌ها می‌نگارد. شکل ۴-۲۰ (ب) را ببینید. T یک انعکاس نامیده می‌شود. نشان داده می‌شود که T خطی است و ماتریس استاندارد آن را پیدا می‌کنیم. اثر T روی مبنای استاندارد عبارت است از

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس استاندارد عبارت است از

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

لذا یک انعکاس نسبت به محور x ‌ها می‌تواند به صورت

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

نوشته شود.

کاربردها اغلب شامل دنباله‌ای از نگاشت‌های خطی می‌باشند. یک تبدیل مرکب $T = T_n \circ \dots \circ T_1$ توسط حاصل ضرب ماتریس‌های نگاشت‌های مؤلفه‌ای A_1, \dots, A_n توصیف می‌شود.

مثال ۲: ماتریسی را تعیین کنید که از اعمال زیر حاصل شده است. انعکاس نسبت به محور x ‌ها سپس دوران به اندازه $\frac{\pi}{4}$ و بعد انبساط با ضریب ۳. تصویر نقطه $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ را تحت این دنباله از نگاشت‌ها بیابید.

حل: ماتریس‌هایی که انعکاس، دوران و انبساط را تعریف می‌کند به ترتیب عبارتند از

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



بنابراین نگاشت مرکب توسط ماتریس حاصل ضرب تعريف می شود.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

تصویر نقطه $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ عبارت است از

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

اکنون به تبدیلاتی می پردازیم که توسط ماتریس های نامنفرد تعريف می شوند.

۱-۴-۴ قضیه: یک نگاشت خطی نامنفرد T

الف) خطوط را به خطوط می نگارد.

ب) پاره خط ها را به پاره خط ها می نگارد.

پ) خطوط موازی را به خطوط موازی می نگارد.

ت) خطوط گذرنده از مبداء را به خطوط گذرنده از مبداء می نگارد.

در تمریناتی که بعداً می آیند از خواننده می خواهیم که این نتایج را بررسی کنند.

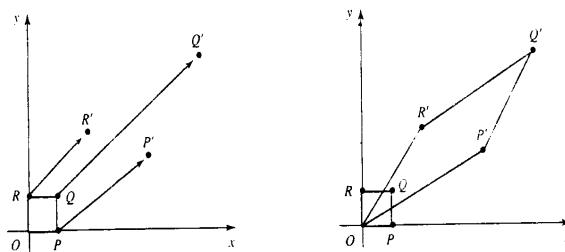
مثال ۳: عملگر $R^2 \rightarrow R^2$ تعریف شده توسط ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. تصویر

مربع واحد را تحت این نگاشت تعیین کنید.

حل: مربع واحد در R^2 , مربعی است که رؤوس آن به ترتیب عبارتند از:

$$P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad R \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad O \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$





شکل ۲۱-۴

شکل ۲۱-۴ را ببینید. تصاویر این نقاط را تحت تبدیل ماتریس می‌یابیم. استفاده از نماد $Au \rightarrow u$ برای بررسی تصاویر نقاط معین، مفید است. با ضرب هر یک از نقاط به ماتریس داریم:

$$\begin{bmatrix} P \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} P' \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} Q' \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} R' \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} O \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} O' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

به علاوه، $0 = 6 \neq 0$. ماتریس A نامنفرد است، بنابراین، پاره خط‌ها به پاره خط‌ها نگاشته می‌شوند. داریم:

$$OP \rightarrow OP', \quad PQ \rightarrow P'Q', \quad QR \rightarrow Q'R' \quad OR \rightarrow O'R'$$

مربع $PQRO$ به متوازی‌الاضلاع $P'Q'R'O'$ نگاشته می‌شود. شکل ۲۱-۴ (ب) را ببینید.

این عملگرها در R^2 نرم‌های کامپیوتری جهت دوران، منبسط یا منقبض نمودن اشکال به کار برده می‌شوند. بعداً در این بخش این کاربرد را بررسی خواهیم کرد.

اجسام جامد می‌توانند به طور هندسی بررسی شوند. وقتی که وزنه‌ها یا بارها به شکل اجسام را تغییر دهد، گوئیم تغییر شکل¹ روی داده است. به عنوان مثال، مربع $PQRO$ در شکل ۲۱-۴ می‌تواند جسم فیزیکی را نشان می‌دهد که به شکل $P'Q'R'O'$ تغییر یافته است. این نوع تغییر شکل‌ها می‌تواند با استفاده از تکنیک‌های ریاضی در کامپیوتر مدل‌بندی و تحلیل شود. آن قسمت از علوم که چنین مسئله‌ای را بررسی می‌کند، کشسانی² نامیده می‌شود.

نگاشت‌های نامنفرد نیز مهم هستند زیرا این نگاشت‌ها دارای نگاشت وارون هستند. فرض کنید که T یک نگاشت نامنفردی باشد که توسط ماتریس A تعریف شده و $AU = X$ چون A نامنفرد است،

1) deformation 2) plasticity, elasticity



وجود دارد و $A^{-1}V = UA^{-1}$ بنا براین دارای یک نگاشت وارون است که وارون نامیده شده و با T^{-1} نشان داده می‌شود.

دوران، انبساط، انقباض و انعکاس نگاشتهای نامنفرد هستند. آن‌ها دارای وارون هستند. حال نشان می‌دهیم که وارون یک انبساط با ضریب r ، یک انقباض با ضریب $\frac{1}{r}$ است. ماتریس انبساط A و وارون عبارتند از:

$$A = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

بنابراین A^{-1} یک انقباض با ضریب $\frac{1}{r}$ را تعریف می‌کند. در تمرینات زیر از شما می‌خواهیم که وارون‌های دوران و انعکاس را بررسی کنید.

نگاشتهای آفین

این بخش را با بحث در مورد نگاشتهایی به پایان می‌رسانیم که هر چند که خطی نیستند اما در ریاضیات و در کاربرد مهم هستند.

یک انتقال نگاشتی است مانند $R^n \rightarrow R^n : T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ تعریف می‌شود که توسط $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ در آن \mathbf{v} برداری ثابت است.

یک انتقال نقاط را در جهت و اندازه بردار \mathbf{v} می‌افزاید بنابراین به طور طبیعی، انتقال‌ها، خطوط، زوایا و فاصله‌ها را حفظ می‌کند. برای مثال، انتقال زیر را در \mathbb{R}^2 در نظر بگیرید.

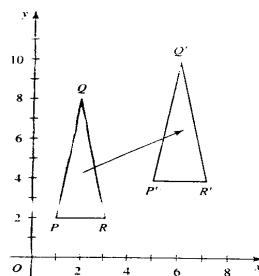
$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

اثر T را روی مثلث PQR با رأس‌های $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ بررسی می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{---}} \begin{bmatrix} P' \\ Q' \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} Q \\ R \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{---}} \begin{bmatrix} Q' \\ R' \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} R \\ P \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{---}} \begin{bmatrix} R' \\ P' \end{bmatrix}$$

در شکل ۲۲-۴، مثلث PQR به مثلث $P'Q'R'$ انتقال می‌یابد.





شکل ۲۲-۴

مثال ۴: معادله تصویر خط $y = 2x + 3$ را تحت انتقال $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ بیابید.

حل: معادله $y = 2x + 3$ نقاط خطی با شیب ۲ و عرض از مبدأ ۳ تعریف می‌کند. T این خط را به خط دیگری می‌لغزاند. می‌خواهیم معادله این خط تصویر شده را بیابیم.

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x+3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} x+2 \\ 2x+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ملاحظه می‌کنیم که در نقاط تصویری $x' = 2x + 2$ و $y' = 2x + 4$. بنابراین معادله خط تصویر شده عبارت است از $y = 2x + 2$. یک نگاشت آفینی^۱ نگاشت $R^n \rightarrow R^n$ است که در $T(u) = Au + v$ تعریف شده توسط A یک ماتریس و v یک بردار ثابت است. یک نگاشت آفینی می‌تواند به عنوان یک نگاشت ماتریس و یک انتقال در نظر گرفته شود. برای مثال، نگاشت آفینی زیر روی R^2 را در نظر بگیرید.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

می‌خواهیم تصویر مربع واحد در شکل ۲۲-۴ را پیدا کنیم. داریم:

$$\begin{bmatrix} P \\ O \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} P' \\ O' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q \\ O \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} Q' \\ O' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} R \\ O \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} R' \\ O' \end{bmatrix}$$

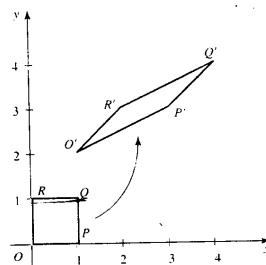
چون ماتریس نامنفرد است، پاره‌خط‌ها به پاره‌خط‌ها نگاشته می‌شوند. در نتیجه

$$OP \longrightarrow O'P', \quad PQ \longrightarrow P'Q', \quad QR \longrightarrow Q'R' \quad OR \longrightarrow O'R'$$

1) Affine transformation



مربع $PQRO$ به متوازیالاضلاع $P'Q'R'O'$ تبدیل می‌شود.



شکل ۲۳-۴

در تمرینات بعدی از شما خواسته می‌شود نشان دهید که انتقال‌ها و نگاشت‌های آفینی، نگاشت‌های خطی نیستند.

در این قسمت تعدادی تبدیل اساسی معرفی کرده‌ایم. نگاشت‌های دیگری مانند، تصویری^۱، مقیاسی^۲، چرخشی^۳ را در تمرینات بعدی خواهید دید. این نگاشت‌های پایه‌ای با استفاده از ترکیب توابع به مشابه بلوک‌های ساختمانی برای ایجاد نگاشت‌های جدید می‌باشند. حال کاربردهای این نگاشت‌های را در گرافیک‌های کامپیوتری بررسی می‌کنیم.

نگاشت‌های در گرافیک‌های کامپیوتری

گرافیک‌های کامپیوتری حوزه‌ای است که ایجاد و بررسی تصاویر را توسط کامپیوتر مطالعه می‌کند. تأثیر گرافیک‌های کامپیوتری در بسیاری از منازل از طریق بازی‌ها مشاهده می‌شود و استفاده آن در تحقیقات، صنعت تجارت وسیع و در حال توسعه است. برخی از کاربردهای آن عبارتند از، بیان طرح‌های توسعه در شیتک‌ها، نمایش و بررسی مولکول‌ها توسط زیست‌شناسان مولکولی به منظور کسب دید عمیق در ساختار آن‌ها، شبیه‌سازی پروازها در تعلیم خلبان‌ها و استفاده مهندسین حمل و نقل در تولید نگاشت‌های کامپیوتری در برنامه کاری.

کاربری تصاویر در گرافیک‌های کامپیوتری با استفاده از دنباله‌ای از تبدیلات انجام می‌شود. دوران‌ها، انعکاس‌ها، انبساط‌ها، انقباض‌ها توسط ماتریس‌ها تعریف شده و توسط ضرب ماتریس‌ها انجام می‌شود دنباله‌ای از چنین تبدیلات می‌تواند توسط یک ماتریس که با حاصل ضرب ماتریس‌ها تعریف شده است

1) projection 2) scaling 3) shear



عملی شود. متأسفانه، در انتقال‌ها از جمع ماتریس‌ها استفاده می‌شود و هر دنباله از تبدیلات که شامل انتقال‌ها باشد نمی‌تواند در یک ماتریس ترکیب شود.

با وجود این اگر از مختصاتی که مختصات همگن نامیده می‌شود برای تعریف نقاط در صفحه استفاده شود آنگاه انتقالات نیز می‌توانند بر حسب ضرب ماتریس‌ها انجام گیرد و هر دنباله از چنین تبدیلات می‌تواند بر حسب یک ماتریس تعریف شود. در مختصات همگن مؤلفه سوم ۱ به هر یک از مؤلفه‌ها اضافه می‌شود و دوران، انعکاس، انبساط، انقباض و انتقال به ترتیب R , E , D و T توسط ماتریس‌های زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{array}{c}
 X \\
 \begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{bmatrix} \\
 \text{نقطه}
 \end{array}
 A = \begin{bmatrix} R & & \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{دوران}
 \quad B = \begin{bmatrix} Rg & & \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{انعکاس}$$

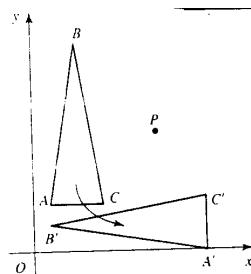
بنابراین برای مثال، انجام یک انبساط D ، بعد یک انتقال T و سپس یک دوران R می‌تواند توسط $RTD(X) = AEC(X)$ تعریف شود. تبدیل مرکب RTD توسط ماتریس AEC تعریف شود.

برخی زبان‌های برنامه‌ریزی روش‌های اجرایی برای دوران، انتقال و انبساط/انقباض (و هم‌چنین برای مقیاس و نمایش، تمرین ۱۵ و ۱۸ را که خواهد آمد ببینید). فراهم می‌کنند، که می‌تواند برای حرکت تصاویر روی صفحه نمایش استفاده شود. برای انجام این حرکت، روش اجرایی مختصات صفحه نمایش را به مختصات همگن تبدیل کرده و از ماتریس‌هایی استفاده می‌کند که این تبدیلات را در مختصات همگن تعريف می‌کند.

حال نشان می دهیم که چگونه تبدیلات برای دوران یک شکل هندسی حول نقطه ای غیر از مبدأ مورد استقاده قرار می گیرند.

مثال ۵: ماتریسی را تعیین کنید که دوران در یک صفحه به اندازه θ حول نقطه $P(h, k)$ را تعریف می‌کند. این نتیجه کلی را به کار برد و ماتریسی را بیابید که دوران در یک صفحه به اندازه زاویه $\frac{\pi}{2}$ حول نقطه $(4, 5)$ را تعریف می‌کند. تصویر مثلثی با رؤوس $A(1, 2)$, $B(2, 8)$ و $C(3, 2)$ را تحت این دوران بیابید. شکل ۴-۲۴ را بینشید.





شکل ۲۴-۴

حل: دوران حول P می‌تواند توسط دنباله‌ای از سه تبدیل زیر انجام یابد:

الف) انتقال T_1 در صفحه که نقطه P را به مبداء O می‌برد.

ب) دوران R در صفحه به اندازه θ حول مبداء

پ) انتقال T_2 در صفحه که P را به O برمی‌گرداند.

ماتریس‌هایی که این تبدیلات را تعریف می‌کنند، عبارتند از

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ 1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} R \\ \cos \theta & -\sin \theta & 1 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} T_2 \\ 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

دوران R_p حول P می‌تواند به شرح زیر صورت گیرد:

$$\begin{aligned} R_p \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} &= T_1 R T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & -h \cos \theta + k \sin \theta + h \\ \sin \theta & \cos \theta & -h \sin \theta - k \cos \theta + k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

به عنوان مثال برای به دست آوردن ماتریسی که دوران در صفحه به اندازه زاویه $\frac{\pi}{7}$ حول نقطه $(5, 4)$



فرض کنید $5 = h = 4$ و $\theta = \frac{\pi}{4}$. ماتریس دوران عبارت است از

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای پیدا کردن تصاویر رؤوس مثلث ABC، این مختصات را در مختصات همگن به صورت سنتونی نوشتند و آن‌ها را در M ضرب می‌کنیم. در نتیجه ضرب ماتریس داریم:

$$\begin{array}{cccccc} A & & A' & & B & & B' \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C & & C' & & D & & D' \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

مثلث یا رؤوس $C'(3, 2)$ ، $A'(1, 2)$ و $B'(2, 1)$ به مثلث با رؤوس $(A(1, 1), B(2, 1), C(3, 2))$ تبدیل می‌شود. شکل ۴-۴ را ببینید.

تصاویر فراکتال طبیعت

سیستم‌های گرافیک کامپیوتری که براساس هندسه اقلیدسی بنا شده‌اند برای ایجاد تصاویر اشیاء ساخته شده توسط انسان مانند ماشین‌آلات، ساختمان‌ها و هوایماها مناسب می‌باشند. تصاویر این اشیاء می‌توانند با استفاده از خطوط، دایره‌ها و غیره رسم شود. با وجود این، در ساختن اشکال اشیاء طبیعی مانند، حیوانات، درختان، سرزمین‌ها، این اشکال مناسب نیستند.

به گفته ریاضیدانی به نام Benoit B., Mandelbrot، ابرها کره نیستند. کره‌ها مخروط نیستند. سواحل دایره نیستند. و روز در خط مستقیم حرکت نمی‌کند. با وجود این، پوشش طبیعت به سبک غیرمنتظره‌ای مرتب است و پر از اشکالی است که در یک شی با مقیاس‌های مختلفی تکرار می‌شوند. در سال ۱۹۷۵، مندل بروت Mandelbrot، هندسه جدیدی به نام هندسه فراکتالی معرفی کرد که می‌تواند پدیده‌های طبیعی را بیان کند. فراکتال یک برصغیر ساده‌ای برای شکل‌های نامنظم و خرد شده، خودمنشابه است. اشیاء فراکتالی دارای ساختارهایی هستند که تودرتونی هم قرار گرفته و هر ساختار کوچکتر مینیاتوری از ساختار بزرگ است که لزوماً با آن یکی نیست. داستان پشت کلمه فراکتال جالب است مندل بروت با صفت لاتین fractus از فعل frangere به معنی شکستن در کتاب لاتین فرزندش بخورد کرد. طنین کلمات هم ریشه انگلیسی اصلی، شکستگی و فراک به نظر مناسب آمد و او کلمه فراکتال را برگردید.



حال روش‌هایی را بررسی می‌کنیم که توسط تیم تحقیقاتی انسٹیتو تکنولوژی جورجیا برای شکل‌بندی تصاویر اشیاء طبیعی با استفاده از فراکتال‌ها توسعه می‌یابند. این تصاویر فراکتالی از طبیعت با استفاده از نگاشت‌های آفین تولید می‌شوند. شکل ۲۵-۴ تصویر فراکتال سرخسی را نشان دهد که به تدریج تولید می‌شود. ببینیم که این امر چگونه صورت می‌گیرد.



شکل ۲۵-۴

چهار نگاشت آفینی T_1, T_2, T_3, T_4 زیر را در نظر بگیرید. احتمال‌های p_1, p_2, p_3, p_4 را به هر یک از این نگاشت‌ها نسبت دهید.

$$T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,03 \\ -0,03 & 0,85 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \end{bmatrix}, \quad p_1 = 0,85$$

$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 & -0,25 \\ 0,21 & 0,23 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \end{bmatrix}, \quad p_2 = 0,08$$

$$T_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -0,15 & 0,27 \\ 0,25 & 0,26 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,45 \end{bmatrix}, \quad p_3 = 0,08$$

$$T_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,17 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_4 = 0,01$$

الگوریتم زیر در کامپیوتر برای تولید تصویر سرخس استفاده می‌شود.

$$(1) \text{ فرض کنید } x = 0, y = 0$$

(2) یک مولد تصادفی را برای انتخاب یکی از تبدیلات آفین T_i نسبت به احتمالات داده شده به کار

بریم.

$$(3) \text{ فرض کنید } (x', y') = T_i(x, y)$$

$$(4) \text{ رسم } (x', y') \text{ را}$$

$$(5) \text{ فرض کنید } (x, y) = (x', y')$$



۶) مراحل ۲، ۳، ۴ و را پنج هزار مرتبه تکرار کنید.

با اجرای مرحله ۴ در هر ۵ هزار مرتبه، تصویر سرخس به تدریج ظاهر می‌شود. هر نگاشت آفین T_i شامل شش پارامتر a, b, c, d, e, f و یک احتمال P_i به شرح زیر است:

$$T_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}, \quad P_i$$

نگاشت‌های آفین و احتمالات متناظر که یک فراکتال را تولید می‌کنند در سطرهای یک ماتریس به نام سیستم تابع تکراری IFS نوشته می‌شوند. IFS سرخس به شرح زیر است:

T	a	b	c	d	e	f	p
۱	۰,۸۶	۰,۰۳	-۰,۰۳	۰,۸۶	۰	۱,۵	۰,۸۳
۲	۰,۲	-۰,۲۵	۰,۲۱	۰,۲۳	۰	۱,۵	۰,۸۳
۳	-۰,۱۵	۰,۲۷	۰,۲۵	۰,۲۶	۰	۰,۴۵	۰,۰۸
۴	۰	۰	۰	۰,۱۷	۰	۰	۰,۰۱

نگاشت‌های آفین مناسبی که شی فراکتال داده شده را تولید می‌کنند، با تعیین نگاشت‌هایی پیدا می‌شوند که شی (به نام جذب کننده^{۱)}) را به تصاویر مختلف مجزا می‌نگارد که اجتماع آن کل فراکتال است. قضیه‌ای به نام Collage، تضمین می‌کند که تبدیلات می‌توانند در یک IFS گروه‌بندی شوند که فراکتال را به وجود می‌آورد.

احتمالات مختلف در حالت کلی، به تصاویر متفاوت منجر نمی‌شوند اما در آهنگ تشکیل تصویر اثر می‌کنند. احتمالات مناسب برابرند با:

$$p_i = \frac{\text{مساحت تصویر تحت نگاشت } T_1}{\text{مساحت تصویر شی}}$$

خواننده‌ای که علاقمند به اطلاعات بیشتر در این موضوع جالب هستند می‌توانند به مقاله پژوهشی بر جسته مایکل بارنسی مراجعه کنند. روشنی که در انتیتو تکنولوژی جورجیا توسعه یافته است، بسیار مهم است زیرا می‌تواند با استفاده از داده‌های کمپرس شده، تصویری با هر دقت مطلوب تولید کند.

تصویر فراکتالی که شامل مقدار نامتناهی نقطه است که توصیف مستقیم مبداء آنها خیلی پیچیده است می‌تواند با استفاده از فرمول‌های ریاضی، مجددًا تولید شود. برای معرفی ریاضی‌وار بیشتر و عمیق هندسه فراکتالی که شامل جزئیات در مورد چگونگی ساخته شدن تبدیلات آفین است، مرج [۲] را پیشنهاد می‌کنیم. بسته نرم‌افزاری [۳] می‌تواند برای تولید فراکتال‌ها استفاده شود.

1) attractor



تمرینات

۱) ماتریس دوران در صفحه حول مبداء به اندازه زاویه‌های داده شده را بایابد. تصویر نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ را تحت هر یک از ماتریس‌ها تعیین کنید.

- (الف) $\frac{\pi}{4}$ (ب) $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ (ت) π
 (ث) $\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}$ (ج) $\frac{\pi}{6}$

۲) ماتریس دوران را به کمک اثر دوران روی مبنای استاندارد R^2 , بایابد.

۳) معادله تصویر بیضی $1 = \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2}$ را تحت دوران به اندازه $\frac{\pi}{4}$ بایابد.

۴) ماتریسی را بایابد که در صفحه، دوران حول مبداء به اندازه $\frac{\pi}{3}$ را انجام داده و همزمان نقاط را به اندازه دو برابر فاصله‌شان از مبداء حرکت دهد. (راهنمایی: نگاشت مرکب را بسازید).

۵) ماتریسی را معین کنید که دوران به اندازه θ حول مبداء و انبساط با ضریب r را تعریف کنید.

۶) معادله تصویر دایره واحد $1 = x^2 + y^2$ را تحت انبساط با ضریب ۳ بایابد.

۷) دنباله نگاشتهای $4, \dots, 1, T_n(u) = A^n u, n = 1, \dots, 4$ را درنظر بگیرید که در آن A یک ماتریس انبساط با ضریب $1/5$ است. تحت این دنباله از نگاشتهای تصویر دایره واحد را در یک سیستم مختصات رسم کنید.

۸) ماتریسی را تعیین کنید که انعکاس نسبت به محور y را تعریف کند. تصویر نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ را تحت این نگاشت بایابد.

۹) ماتریسی را بایابد که انعکاس نسبت به خط $x = y$ را تعریف کند.

۱۰) در R^2 تبدیلاتی را درنظر بگیرید که توسط هر یک از ماتریس‌های زیر تعریف شده است. تصویر مربع واحد را تحت هر یک از این نگاشتهای تعیین کنید.

- (الف) $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (ت) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
 (ث) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

۱۱) ماتریس استاندارد هر یک از عملگرهای زیر را در R^2 پیدا کنید.



$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} \quad (ب) \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x - y \end{pmatrix} \quad (الف)$$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ -3x \end{pmatrix} \quad (ت) \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 5y \\ 3y \end{pmatrix} \quad (پ)$$

۱۲) ماتریس استاندارد عملگر T را بیابید. توجه داشته باشید که این عملگر تمامی نقاط را به محور x ‌ها می‌نگارد و عملگر تصویری نامیده می‌شود.

۱۳) ماتریس تصویری روی محور y ‌ها را بیابید.

۱۴) ماتریس تصویری روی خط $x = y$ را تعیین کنید. تصویر بردار $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ را تحت این عملگر تصویری بیابید.

۱۵) ماتریس استاندارد عملگر T را بیابید که در آن a و b اعداد مثبتی می‌باشند. T مقیاس‌گذاری با ضریب a در جهت محور x ‌ها و ضریب b در جهت محور y ‌ها نامیده می‌شود. مقیاس‌گذاری شکل را به هم می‌ریزد زیرا، x و y به یک روش تعیین نمی‌کنند. تصویر مربع واحد را تحت تبدیلی که $a = 3$ و $b = 2$ است رسم کنید.

۱۶) معادله تصویر خط $2x = y$ را تحت مقیاس‌گذاری با ضریب ۲ در جهت محور x ‌ها و ضریب ۳ در جهت محور y ‌ها بیابید.

۱۷) معادله تصویر دایره واحد $x^2 + y^2 = 1$ را تحت مقیاس‌گذاری با ضریب ۴ در جهت محور x ‌ها و ضریب ۳ در جهت محور y ‌ها بیابید.

۱۸) ماتریس استاندارد عملگر T را بیابید که c یک عدد است. یک برش با ضریب c در جهت x نامیده می‌شود. تصویر مربع واحد را تحت برش با ضریب ۲ در جهت x رسم کنید. توجه کنید که چگونه مقدار x هر نقطه با ضریب y افزایش یافته و برشی در شکل ایجاد می‌شود.

۱۹) تصویر مربع واحد تحت برشی با ضریب 5° در جهت y را رسم کنید.

۲۰) معادله تصویر خط $3x = y$ را تحت برشی با ضریب ۵ در جهت x بیابید.



۲۱) نشان دهید که نگاشت تعریف شده توسط یک ماتریس نامنفرد 2×2 همیشه، خطوط مستقیم را به خطوط مستقیم می‌نگارد.

۲۲) نشان دهید که انتقال‌ها و نگاشت‌های آفینی خطی نیستند.

۲۳) تصویر خط $y = 3x + 1$ را تحت انتقال

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

در دو حالت بیابید.

$$\text{الف) } q = 1, p = -1 \quad \text{ب) } q = 5, p = 2$$

۲۴) تصویرهای مربع واحد را تحت نگاشت‌های آفینی $T(u) = Au + v$ تعریف شده توسط ماتریس‌ها

و بردارهای زیر پیدا کرده و رسم کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{الف) } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$3 A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} \quad \text{ب) } A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

۲۵) الف) نشان دهید که وارون یک دوران به اندازه زاویه θ ، دوران به اندازه زاویه $-\theta$ است.

ب) نشان دهید که وارون یک انعکاس در محور x ‌ها یک انعکاس در محور x است.

۲۶) وارون نگاشت آفین $T(U) = AU + V$ را بیابید که A ماتریس نامنفرد است.

۲۷) ماتریس‌های 2×2 را بسازید که نگاشت‌های زیر را روی R^2 تعریف کنند. تصویر نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ را تحت هر نگاشت بیابید.

الف) دوران به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در خلاف حرکت عقربه‌های ساعت و بعد انبساط با ضریب ۲.

ب) انبساط با ضریب ۴ و بعد انعکاس در محور x ‌ها.

۲۸) ماتریس‌های 2×2 را بسازید که نگاشت‌های زیر را در R^2 تعریف کنند. تصویر نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ را تحت هر نگاشت بیابید.

الف) انبساط با ضریب ۳ و سپس برش با ضریب ۲ در جهت x .

ب) مقیاس‌بندی با ضریب ۳ در جهت x با ضریب ۲ در جهت y و سپس انعکاس در خط

$$y = x$$



پ) انبساط با ضریب ۲ سپس برش با ضریب ۳ در جهت x و بعد دوران در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه $\frac{\pi}{3}$.

۲۹) نگاشت $T : R^n \rightarrow R^n$ را با تعریف $T(U) = AU$ درنظر بگیرید. هم چنین دارای ماتریس استاندارد A' است. نشان دهید که A و A' یکی هستند.

۳۰) فرض کنید A ماتریس دوران برای $\frac{\pi}{4}$ باشد. نشان دهید که $A^n = I$ ماتریس همانی 2×2 است. برای این نتیجه یک دلیل هندسی بیاورید.

۳۱) نشان دهید که برای ماتریس‌های A و B نیز $I = A^2BA^2$. برای این نتیجه یک برهان هندسی بیاورید.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

۳۲) دنباله نگاشت‌های $T_n(u) = (B, A)^n u$ را درنظر بگیرید که A یک ماتریس دوران به اندازه 1° ، B یک انبساط با ضریب 100.5 و u نقطه $x = 1$ و $y = 0$ است. وقتی n از 1 تا 720 تغییر کند، نقاط تصاویر چه شکلی خواهند بود؟ (اگر کامپیوتر دارید، استفاده کنید).

۳۳) تصاویر مربع واحد را تحت نگاشت‌های آفین $1, 2, 3$ و $n = 1, 2, 3$ و $v = n = 1$ تعریف شده توسط ماتریس‌ها و نقاط v در زیر بیابید و رسم کنید.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{(الف)}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)}$$

۳۴) تصویر مثلث با رؤوس $(1, 2)$, $(3, 4)$ و $(4, 6)$ را تحت انتقالی که نقطه $(1, 2)$ را به $(2, -3)$ می‌برد بیابید.

۳۵) نگاشت‌های T_1 و T_2 جابجایی هستند هرگاه برای هر بردار \mathbf{u}

$$T_2 \circ T_1(\mathbf{u}) = T_1 \circ T_2(\mathbf{u})$$

فرض کنید R یک دوران، D یک انبساط، F یک انعکاس، S یک مقیاس‌گذاری H یک برش و A یک نگاشت آفین باشد. کدام زوج از نگاشت‌های جابجایی هستند؟

۳۶) ماتریسی را بیابید که دوران سه بعدی به اندازه زاویه $\frac{\pi}{4}$ را حول محور z ‌ها تعریف می‌کند. (هر زوج دلخواهی را می‌توانید درنظر بگیرید).



۳۷) ماتریسی را بیابید که یک بسط از فضای سه بعدی به خارج از مبداء را چنان تعریف می‌کند که هر نقطه سه برابر فاصله‌اش از مبداء دور می‌شود.

۳۸) ماتریسی را معین کنید که می‌تواند برای تعریف یک دوران حول نقطه $(1, 5)$ به اندازه $\frac{\pi}{3}$ استفاده شود. تصویر مربع واحد تحت این دوران را بیابید.

۳۹) انتقال کلی را که توسط ماتریس T در زیر تعریف می‌شود در نظر بگیرید. آیا این نگاشت دارای وارون است؟ در صورت وجود آن را بیابید.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۴۰) ماتریس مقیاس‌گذاری کلی S را طبق تعریف زیر در نظر بگیرید. $(d \neq 0, c \neq 0)$ آیا این ماتریس وارون پذیر است؟ وارون آن را در صورت وجود بیابید.

$$S = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۴۱) تصویر مثلث با رؤوس A , B و C در زیر را (در مختصات همگن) تحت دنباله نگاشتهای T بعد و سپس S بیابید. تصاویر مثلث‌های اولیه و نهایی را رسم کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 \\ 16 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تمرین‌های دوره‌ای

۱) بردارهای مکانی زیر را در R^3 و R^2 رسم کنید.

$$\text{الف) } \vec{OA} = (1, 4) \text{ در } R^2$$

$$\text{ب) } R^3 \text{ در } (1, 4, 2), (0, -1, 0), (2, 0, 0)$$



۲) عبارت‌های زیر را برای $w = (0, 1, -3)$, $v = (2, 3, 7)$, $u = (3, -1, 5)$ و w محاسبه کنید.

$$4u - 2v + 3w \quad \text{ب)} \quad 2u - 5v - w \quad \text{الف)} \quad u + v$$

۳) حاصل ضرب نقطه‌ای زوج بردارهای زیر را تعیین کنید:

$$(1, 2), (3, -4)$$

$$(1, -2, 3), (4, 2, -7)$$

$$(3, 2, -1), (2, 2, -5)$$

۴) نرم بردارهای زیر را محاسبه کنید:

$$(1, -2, 3, 4) \quad \text{ب)} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{الف)} \quad (1, -4)$$

۵) کسینوس زاویه بین بردارهای زیر را بیابید:

$$(1, 2, -3), (4, 1, 2) \quad \text{ب)} \quad (-1, 1), (2, 3) \quad \text{الف)}$$

۶) برداری عمود بر بردار $(-2, 1, 5)$ را بیابید.

۷) فاصله بین زوج بردارهای زیر را بیابید.

$$(4, 1, 6, 2), (3, 1, -1, 2) \quad \text{ب)} \quad (3, 2, 1), (7, 1, 2) \quad (1, -2), (5, 3) \quad \text{الف)}$$

۸) تمام مقادیر c را بیابید به طوری که $\|c(1, 2, 3)\| = 196$

۹) تعیین کنید که نگاشت‌های زیر خطی هستند؟

$$\text{الف)} \quad R^1 \text{ از } R^1 \text{ به } R^1 \quad T(x, y) = (2x, y, y - x)$$

$$\text{ب)} \quad R^1 \text{ از } R^1 \text{ به } R^2 \quad T(x, y) = (x + y, 2y + 3)$$

۱۰) ماتریسی را پیدا کنید که R^2 را به R^2 می‌نگارد به طوری که

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۱۱) فرض کنید T یک نگاشت خطی بین فضاهای برداری، u و v بردارهایی در دامنه و a و b اعداد باشند. ثابت کنید T خطی است اگر و تنها اگر

$$T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$$

این نتیجه می‌تواند تعریف دیگری برای نگاشت خطی باشد.



۱۲) ماتریسی را بیابید که دوران به صفحه به اندازه $\frac{\pi}{6}$ حول مبداء را تعریف کرده و هم زمان نقاط را به سه برابر فاصله‌شان از مبداء منتقل می‌کند.

۱۳) ماتریسی را تعیین کنید که انعکاس نسبت به خط $x - y = 0$ را تعریف می‌کند.

۱۴) ماتریسی را تعیین کنید که تصویر روی خط $x - y = 0$ را تعریف می‌کند.

۱۵) معادله تصویر خط $1 = -5x + y$ را تحت مقیاس‌گذاری با ضریب ۵ در جهت x و با ضریب ۲ در جهت y بیابید.

۱۶) معادله تصویر خط $2 = 2x + 3y$ را تحت یک برش با ضریب ۳ در جهت y بیابید.

۱۷) یک ماتریس 2×2 بسازید که برش با ضریب ۳ در جهت y سپس مقیاس‌گذاری با ضریب ۲ در جهت x و بعد انعکاس نسبت به محور y را تعریف می‌کند.



هدف‌های رفتاری فصل ۵

دانشجویی پس از مطالعه و کاربردی این فصل باید بتواند:

- مفهوم فضای برداری را براساس پنداشت‌های آن تعریف کرده مثال‌های ملموس از آن ارائه دهد.
- مفهوم زیرفضا را درک کرده مثال‌های از آن ارائه دهد.
- مفاهیم کلیدی، استقلال خطی و وابستگی خطی مجموعه‌ای از بردارها را دقیقاً تعریف کرده و قضیه‌های مرتبط با آنها را بیان و اثبات کند.
- مفاهیم پایه، رتبه ماتریس، بردارهای متعامد، ماتریس وارون‌پذیر را تعریف کرده و ارتباط آنها را توضیح دهد.

هدف‌های کلی فصل ۵

در این فصل مفهوم قبلی فضای برداری \mathbb{R}^n را تعمیم می‌دهیم. ساختار زیربنایی و اساسی جبری \mathbb{R}^n را مورد بررسی قرار خواهیم داد. هر مجموعه‌ای که دارای چنین ساختاری باشد دارای همان ویژگی‌های ریاضی R^n بوده و یک فضای برداری نامیده می‌شود. نتیجه‌هایی که برای فضای برداری R^n توسعه یافته است در مورد چنین مجموعه‌هایی نیز به کار خواهد رفت. برای نمونه، خواهیم دید که مجموعه‌های معینی از تابع‌ها دارای همان ویژگی‌های ریاضی هستند که فضای برداری R^n دارا است.



فصل پنجم

فضاهای برداری عمومی

۱-۵ فضاهای برداری

فضاهای برداری R^n شامل مجموعه عناصری است که بردار نامیده شده که بر آنها دو عمل، یعنی جمع و ضرب اسکالر، تعریف شده است. در فصل قبل ملاحظه کردیم که فضای برداری R^n تحت این عمل‌ها بسته است؛ حاصل جمع دو بردار R^n در R^n قرار دارد و همچنین حاصل ضرب اسکالر در یک بردار R^n در R^n می‌باشد. همچنین فضای برداری R^n دارای ویژگی‌های جبری دیگری است. برای نمونه، ملاحظه کردیم که جمع بردارها جایی و شرکت‌پذیر است:

$$u + v = v + u$$

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

هدف‌مان در این بخش این است که بر این ویژگی‌ها و سایر ویژگی‌های جبری R^n تمرکز کنیم. ما مجموعه‌ای از بنداشت‌ها را که بر ویژگی‌های R^n استوار باشد استخراج می‌کنیم. هر مجموعه‌ای که در این بنداشت‌ها صدق کند ویژگی‌های جبری مشابه ویژگی‌های فضای برداری R^n خواهد داشت. چنین مجموعه‌ای یک فضای برداری و عناصر آن بردار نامیده می‌شوند. ارزش این رویکرد در این است که مفهوم‌ها و نتایجی که برای فضای برداری R^n به دست آمده‌اند برای سایر فضاهای برداری قابل اعمال هستند.

اینک تعریف رسمی فضای برداری را که بر پایه ویژگی‌های جبری R^n استوار است ارائه می‌کنیم. ویژگی‌هایی از R^n که در قضیه ۱-۴ عرضه شدند. ملاحظه می‌کنیم که این بنداشت‌ها را می‌توانیم به سه



گروه مناسب مجزا دسته‌بندی کنیم.

۱-۵ تعریف. یک فضای برداری مجموعه‌ای مانند V متشکل از عناصری است که بردار نامیده می‌شوند، که اعمال جمع و ضرب اسکالاری بر آن تعریف شده که در شرایط ذیل صدق می‌کنند (u ، v و w عناصر دلخواه V ، c و d اسکالار هستند).

بنداشت‌های بستاری ۱) حاصل جمع $v + u$ وجود دارد و متعلق به V است (V تحت جمع بسته است).

۲) عنصری از V است (V تحت ضرب اسکالار بسته است).

بنداشت‌های جمع $u + v = v + u$ (۳) (ویژگی جابه‌جایی).

$u + (v + w) = (u + v) + w$ (۴) (ویژگی شرکت‌پذیری).

۵) عنصری از V ، که بردار صفر نامیده می‌شود، به \circ نشان داده می‌شود، وجود دارد به قسمی که

$$. u + \circ = \circ$$

۶) متناظر هر عنصر u از V عنصری وجود دارد که قرینه u نامیده و به $-u$ نشان داده می‌شود، به قسمی که

$$. u + (-u) = \circ$$

بنداشت‌های ضرب اسکالار $c(u + v) = cu + cv$ (۷)

$$(c + d)u = cu + du$$
 (۸)

$$c(du) = cd$$
 (۹)

$$\circ u = u$$
 (۱۰)

معمول‌ترین مجموعه‌هایی که به عنوان مجموعه‌های اسکالار در فضاهای برداری استفاده می‌شود مجموعه عددهای حقیقی و مجموعه عددهای مختلط می‌باشد. در این صورت فضاهای برداری را به ترتیب فضای برداری حقیقی و فضای برداری مختلط می‌نامیم. در این مبحث کوششمان اساساً بر فضاهای برداری حقیقی متمرکز شده، هر جا مناسب باشد، به اختصار نتایج بدست آمده را در مورد فضاهای برداری مختلط مذکور می‌شویم.



۲-۵ فضاهای برداری ماتریس‌ها

مجموعه ماتریس‌های حقیقی (ماتریس‌های با درایه‌های اعداد حقیقی) 2×2 را در نظر می‌گیریم. تاکنون عمل‌های جمع و ضرب اسکالر را برای این ماتریس‌ها تعریف کرده‌ایم. این مجموعه در واقع یک فضای برداری تشکیل می‌دهد. ما بنداشت‌های ۱، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ را بررسی کرده و برقراری مابقی بنداشت‌ها را به دانشجو محل می‌کنیم.

نماد برداری را برای عناصر $M_{2 \times 2}$ به‌کار می‌بریم. فرض کنیم

$$u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

دو ماتریس 2×2 دلخواه باشند. داریم:

بنداشت:

$$u + v = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

پس $u + v$ یک ماتریس 2×2 است.

در نتیجه $M_{2 \times 2}$ جمع بسته است.

بنداشت‌های ۳ و ۴: بنابر بررسی‌های قبلی می‌دانیم که ماتریس‌های 2×2 تحت جمع جابه‌جایی و شرکت‌پذیرند (قضیه ۲-۲).

بنداشت ۵: ماتریس صفر 2×2 عبارت است از ماتریس

$$\mathbf{u} + 0 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

بنداشت ۶: اگر $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، آنگاه

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-a & b-b \\ c-c & d-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} = 0$$

مجموعه $M_{2 \times 2}$ متشکل از همه ماتریس‌های 2×2 که فضای برداری است. ویژگی‌های جبری 2×2 مشابه با ویژگی‌های R^n است. مشابه‌اً، داریم:



$M_{m \times n}$ ، مجموعه ماتریس‌های $n \times m$. یک فضای برداری است

۳-۵ فضاهای برداری تابعها

فرض کنیم V مجموعه همه تابع‌های حقیقی با دامنه عددهای حقیقی باشد. هر عنصر V همانند f ، خط حقیقی را به خط حقیقی می‌نگارد. اکنون عمل‌های جمع و ضرب اسکالاری را در V تعریف کرده و آن را به یک فضای برداری تبدیل می‌کنیم.

فرض کنیم f و g دو عنصر دلخواه V باشند. حاصل جمع این دو، $f + g$ را به عنوان تابعی با ضابطه

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

تعریف می‌کنیم. این امر $f + g$ را به عنوان تابعی با دامنه مجموعه عددهای حقیقی معرفی می‌نماید. برای یافتن مقدار $f + g$ به ازای هر عدد حقیقی x ، مقدار f را در x با مقدار g در x جمع می‌کنیم. این عمل را جمع نقطه‌ای می‌نامیم.

در مرحله بعد ضرب اسکالار را بر عناصر V تعریف می‌کنیم. فرض کنیم c یک اسکالار دلخواه باشد.

مضرب اسکالاری f ، cf تابعی است با ضابطه

$$(cf)(x) = c(f(x))$$

این امر cf را به عنوان تابعی با دامنه مجموعه عددهای حقیقی معرفی می‌کند. برای یافتن مقدار cf در هر عدد حقیقی دلخواه x ، مقدار f را در x یافته و آنرا در c ضرب می‌کنیم. این عمل اسکالار نقطه‌ای نامیده می‌شود.

برای آنکه احساسی هندسی از این دو عمل بر توابع داشته باشیم، دو تابع مشخص زیر را در نظر می‌گیریم

$$f(x) = x \quad , \quad g(x) = x^2$$

در این صورت $g + f$ تابعی است که با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود

$$(f + g)(x) = x + x^2$$



مضرب اسکالر f در اسکالاری مانند ε تابع εf است که با ضابطه

$$(\varepsilon f)(x) = \varepsilon x$$

تعریف می‌شود.

با تعریف عمل‌های جمع و ضرب اسکالار بر این فضای تابعی V اکنونی نوبت به این می‌رسد که نشان دهیم V یک فضای برداری است.

بمناشت ۱: $f + g$ تابعی است که با ضابطه $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ تعریف شده و لذا تابعی با دامنه مجموعه عددهای حقیقی بوده و بنابراین عنصری متعلق به V است. بنابراین V تحت جمع بسته است.

بمناشت ۲: cf با ضابطه $(cf)(x) = c(f(x))$ تعریف شده، در نتیجه cf نیز تابعی با دامنه مجموعه عددهای حقیقی بوده و بنابراین به V تعلق دارد. بنابراین V تحت ضرب اسکالار بسته است.

بمناشت ۳: فرض کنیم 0 تابعی باشد که در آن $0(x) = 0$ برای هر عدد حقیقی x , 0 تابع صفر نامیده می‌شود. در این صورت برای هر عدد حقیقی x :

$$(f + 0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

بنابراین مقدار 0 در هر x برابر مقدار f در x است، از این رو $f + 0 = f$ ، یعنی 0 بردار صفر است.

بمناشت ۴: تابع $-f$ را با ضابطه $(-f)(x) = -(f(x))$ در نظر می‌گیریم نشان می‌دهیم که $-f$ قرینه f است.

$$\begin{aligned} (f + (-f))(x) &= f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(f(x)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

یعنی در هر x مقدار $f + (-f)$ با مقدار 0 برابر است. بنابراین $-f$ قرینه f است. فضاهای برداری بسیاری وجود دارد که عناصر آنها تابع هستند. برای نمونه، مجموعه همه تابع‌هایی با دامنه $(-\pi, \pi)$ با جمع نقطه‌ای و ضرب اسکالار نقطه‌ای یک فضای برداری است. دانشجو ضمن تمرین‌هایی که در دنباله این بحث ارائه می‌گردد به بررسی فضاهای برداری تابعی دیگری خواهد پرداخت.



۴-۵ فضای برداری مختلط \mathbb{C}^n

اکنون مفهوم فضای برداری حقیقی \mathbb{R}^n را به فضای برداری مختلط \mathbb{C}^n تعمیم می‌دهیم. فرض کنیم (u_1, u_2, \dots, u_n) دنباله‌ای متشکل از n عدد مختلط باشد. مجموعه همه چنین دنباله‌هایی (n -تایی مرتب) را به \mathbb{C}^n نشان می‌دهیم. برای نمونه $(2 + 3i, 4 - 6i, 2 + 3i, 4 - 6i)$ عنصری از \mathbb{C}^4 است، در حالی که $(2i, 1 - 5i, 4)$ عنصری از \mathbb{C}^3 است.

فرض کنیم عمل‌های جمع و ضرب اسکالر (به وسیله اسکالر مختلط \mathbb{C}) را بر \mathbb{C}^n به روش زیر تعریف شده باشد:

$$(u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$$

$$c(u_1, \dots, u_n) = (cu_1, \dots, cu_n)$$

برای نمونه دو بردار $c = 4 + 3i$ و $\mathbf{v} = (1 - 3i, 5 + 2i)$ و $\mathbf{u} = (2 + i, 3 - 4i)$ از \mathbb{C}^2 و اسکالر $\mathbf{v} = (2 + i, 3 - 4i)$ را در نظر می‌گیریم

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2 + i, 3 - 4i) + (1 - 3i, 5 + 2i) = (3 - 2i, 8 - i)$$

$$c\mathbf{u} = (4 + 3i)(2 + i, 3 - 4i) = (5 + 10i, 24 - 7i)$$

می‌توان نشان داد که \mathbb{C}^n با این عمل یک فضای برداری مختلط می‌باشد (تمرین‌های بعدی ملاحظه شود). اکنون قضیه‌ای مطرح می‌کنیم که مشتمل بر ویژگی‌های مفید بردارها است. این‌ها ویژگی‌هایی هستند که در خصوص \mathbb{R}^n وضوح فوری داشتند و بنابراین تقریباً دانسته و معلوم فرض شده بودند. با این وجود، در مورد سایر فضاهای برداری وضوح آنها چندان آشکار نمی‌نماید.

۱-۴-۵ قضیه. فرض کنیم V یک فضای برداری، A_v برداری در V ، $A0$ بردار صفر V ،

اسکالری داخوه و 0 اسکالر صفر باشد. در این صورت

$$A0Av = A0$$

$$A0 = A0$$

$$(-1)Av = -Av$$

$$Av = 0 \text{ یا } c = 0 \text{ آنگاه } cAv = A0$$



برهان. (الف) و (ج) را اثبات می‌کنیم، برهان (ب) و (د) را به عنوان تمرین به دانشجو محو می‌کنیم.

$$0Av + 0Av = (0 + 0)Av \quad (\text{بنداشت ۸}) \quad (\text{الف})$$

$$= 0Av \quad (\text{ویژگی اسکالر ۰})$$

به دو طرف تساوی اخیر قرینه $-0Av$ را افزون می‌کنیم

$$0Av + 0Av + (-0Av) = 0Av + (-0Av)$$

$$0Av + [0Av + (-0Av)] = A0 \quad (\text{بنداشت ۴ و ۶})$$

$$0Av + A0 = A0 \quad (\text{بنداشت ۶})$$

$$0Av = 0 \quad (\text{بنداشت ۵})$$

$$(-1)Av + Av = (-1)Av + 1Av \quad (\text{بنداشت ۱۰}) \quad (\text{ج})$$

$$= [(-1) + 1]Av \quad (\text{بنداشت ۸})$$

$$= 0Av \quad (\text{ویژگی اسکالاره})$$

$$= A0 \quad (\text{قسمت الف فوق})$$

بنابراین $(-1)Av$ قرینه v است (بنداشت ۶).

۲-۴-۵ تمرین

۱) در درس ثابت کردیم که M_{22} ، مجموعه ماتریس‌های 2×2 ، با اعمال معمولی جمع و ضرب اسکالر ماتریس‌ها در بنداشت‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ صدق می‌کند. ثابت کنید M_{22} در مابقی بنداشت‌های فضای برداری نیز صدق کرده و لذا برهان اینکه M_{22} یک فضای برداری است را کامل کنید.

۲) در درس ثابت کردیم که مجموعه توابع با اعمال جمع نقطه‌ای و ضرب اسکالر، با دامنه اعداد حقیقی، در بنداشت‌های ۱، ۲، ۵ و ۶ از فضای برداری صدق می‌کند. ثابت کنید این مجموعه در مابقی بنداشت‌های فضای برداری نیز صدق کرده و لذا یک فضای برداری است.

۳) ثابت کنید مجموعه \mathbb{C}^n با اعمال جمع و ضرب اسکالر مشروط در ذیل یک فضای برداری است:

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$$



$$= (u_1, u_2 \dots u_n) = (cu_1, cu_2, \dots, cu_n)$$

و $c\mathbf{u}$ را برای برداری \mathbf{C}^3 , که ذیلاً ذکر می‌شوند, محاسبه کنید

$$\mathbf{u} = (2 - i, 3 + 4i), \mathbf{v} = (5, 1, 3i), c = 3 - 2i$$

$$\mathbf{u} = (1 + 5i, -2 - 3i), \mathbf{v} = (2i, 3 - 2i), c = 4 + i$$

۴) فرض کنیم \mathbf{V} یک فضای برداری, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ بردارهای در \mathbf{V} , a, b, c اسکالارهای باشند. با استفاده از بنداشتهای فضای برداری احکام ذیل را ثابت کنید.

$$c0 = 0$$

$$.0 = 0 \quad ۱$$

$$.-(\mathbf{-v}) = \mathbf{v} \quad ۲$$

$$.\mathbf{u} = \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \quad ۳$$

$$.a = b, au = bu \quad ۴$$

$$.a = b, au = bu \quad ۵$$

۵-۵ زیرفضاهای

زیرمجموعه‌های خاصی از فضاهای برداری خود تشکیل فضای برداری می‌دهند. برای آنکه این ایده را اثر بخشی ببخشیم بار دیگر به فضای برداری \mathbb{R}^n نظری می‌افکنیم. فضای \mathbb{R}^n مشتمل بر مجموعه بردارهای است که بر آنها عمل‌های جمع و ضرب اسکالر تعریف شده است. می‌دانیم \mathbb{R}^n تحت این عمل‌ها بسته است. هرگاه دو بردار \mathbb{R}^n را جمع کنیم برداری از \mathbb{R}^n به دست می‌آوریم. وانگهی، هرگاه عنصری از \mathbb{R}^n را در یک اسکالر ضرب کنیم عنصری از \mathbb{R}^n به دست می‌آوریم. برای نمونه، در \mathbb{R}^3 :

$$(1, 2, 5) + (3, 1, 7) = (4, 3, 12) \quad , \quad 5(1, -2, 5) = (5, -10, 25)$$

اکنون به زیرمجموعه‌های خاصی از \mathbb{R}^3 می‌نگریم که همین ویژگی‌های بستاری را دارا هستند.

زیرمجموعه V از \mathbb{R}^3 مشتمل از همه‌ی بردارهایی به فرم (a, a, b) را در نظر می‌گیریم. V مشتمل بر

همه بردارهایی از \mathbb{R}^3 است که مؤلفه‌های اول و دوم یکسان دارند. برای نمونه $(2, 2, 3)$ و $(-1, -1, 6)$

در V خواهند بود. مشاهده می‌کنیم که هرگاه دو عنصر V را با هم جمع کنیم عنصری از V به دست می‌آید:

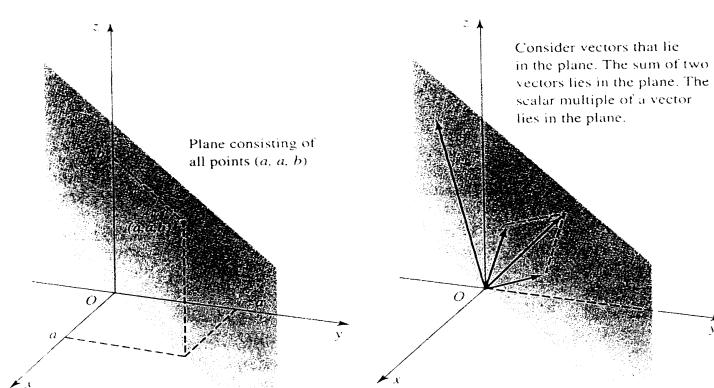


همچنین هرگاه یک عنصر V را در یک اسکالر ضرب کنیم باز عنصری از V حاصل می‌شود. فرض کنیم دو عنصر دلخواه V و k یک اسکالر باشد. در این صورت

$$(a, a, b) + (c, c, d) = (a + c, a + c, b + d) \in V$$

$$k(a, a, b) = (ka, ka, kb) \in V$$

V دارای جمع و ضرب اسکالری است که برآن تعریف شده‌اند. همین V تحت این عمل‌ها بسته است. V دارای ویژگی‌های جبری است که \mathbb{R}^3 دارد. بنابراین ما به V به مثابه یک فضای برداری می‌نگریم که در \mathbb{R}^3 محاط شده باشد. چنین فضای محاط شده در فضای بزرگ‌تر را یک زیرفضا می‌نامیم. اینک به تعبیر هندسی V می‌پردازیم. \mathbb{R}^3 مجموعه همه نقطه‌هایی است که در فضای سه‌بعدی معمولی واقع‌اند. V مجموعه همه نقطه‌هایی است که مؤلفه‌های x و y برابر دارند. این نقطه‌ها صفحه‌ای می‌سازند که عمود بر صفحه xy بوده و مار بر خط به معادله $x = y$ و $z = 0$ می‌باشد. شکل ۱-۵ ملاحظه شود. حاصل جمع هر دو بردار مکان که در این صفحه باشند نیز در این صفحه واقع است. همچنین ضرب اسکالر هر بردار که در این صفحه باشد متعلق به این صفحه است. این بررسی به ما امکان تعریف کلی یک زیرفضا از یک فضای برداری را به دست می‌دهد.



شکل ۱-۵

تعریف. فرض کنیم V یک فضای برداری و U یک زیرمجموعه ناتهی V باشد. U را یک زیرفضای V نامیم هرگاه تحت جمع و ضرب اسکالر بسته باشد. برای آنکه ملاحظه کنیم که U یک فضای برداری است. یادآور می‌شویم که U در بنداشت‌های بستاری ۱ و ۲ صدق می‌کند. همچنین U شرایط بنداشت‌های ۳ تا



۱۰ را از فضای بزرگتر برداری V به «ارت» می‌برد. یک زیرفضا، فضای برداری است که در یک فضای برداری بزرگتر محاط شده باشد.

مثال ۱: فرض کنیم U زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R}^3 متشکل از همه بردارهایی به فرم (u, \cdot, \cdot) (یعنی مؤلفه‌های دوم و سوم صفر) باشد. نشان دهید که U یک زیرفضای \mathbb{R}^3 است.

حل: فرض کنیم (u, \cdot, \cdot) و (b, \cdot, \cdot) دو بردار در U و k یک اسکالر باشد. داریم:

$$(a, \cdot, \cdot) + (b, \cdot, \cdot) = (a + \cdot, \cdot, \cdot) \in U$$

$$k(a, \cdot, \cdot) = (ka, \cdot, \cdot) \in U$$

حاصل جمع و ضرب اسکالر در U هستند. بنابراین یک زیرفضای \mathbb{R}^3 است.

از نظر هندسی، U مجموعه همه بردارهایی است که بر محور x واقع‌اند. مذکور می‌شوند که حاصل جمع و همچنین ضرب اسکالر هر دو بردار واقع بر محور x بر این محور واقع‌اند.

مثال ۲: فرض کنیم W مجموعه بردارهایی به فرم (a, a^\dagger, b) باشد، نشان دهید که W یک زیرفضای \mathbb{R}^3 نمی‌باشد.

حل: W مجموعه‌ی همه بردارهایی در \mathbb{R}^3 است که برای آن‌ها مؤلفه دوم، مرتع مؤلفه اول می‌باشد. برای نمونه بردار $(2, 4, 3)$ در W است در حالی که بردار $(1, 3, 5)$ در W نمی‌باشد.

فرض کنیم (a, a^\dagger, b) و (c, c^\dagger, d) دو بردار در W باشند. داریم

$$(a, a^\dagger, b) + (c, c^\dagger, d) = (a + c, a^\dagger + c^\dagger, b + d)$$

$$\neq (a + c, (a + c)^\dagger, b + d)$$

بنابراین $(a, a^\dagger, b) + (c, c^\dagger, d)$ عنصری از W نمی‌باشد. W تحت جمع بسته نمی‌باشد، در نتیجه یک زیرفضا نیست.

مثال ۳: ثابت کنید مجموعه U متشکل از ماتریس‌های قطری 2×2 یک زیرفضای فضای برداری $M_{2 \times 2}$ می‌باشد.

حل: باید نشان دهیم که U تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است. دو عنصر دلخواه زیر را از U در نظر می‌گیریم

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a & \cdot \\ \cdot & b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} p & \cdot \\ q & \cdot \end{bmatrix}$$



داریم

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & \circ \\ \circ & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & \circ \\ q & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+p & \circ \\ \circ & b+q \end{bmatrix}$$

مالحظه می‌کنیم که $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ یک ماتریس قطری 2×2 بوده و در این صورت عنصری از \underline{U} است. \underline{U} تحت جمع بسته است.

فرض کنیم c یک اسکالار باشد. داریم

$$c\mathbf{u} = c \begin{bmatrix} a & \circ \\ \circ & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca & \circ \\ \circ & cb \end{bmatrix}$$

$c\mathbf{u}$ یک ماتریس قطری 2×2 است. از این رو U تحت ضرب اسکالار بسته است. U یک زیرفضای $M_{2 \times 2}$ است. U یک فضای برداری ماتریس است. که در آن محاط شده است.

مثال ۴: فرض کنیم P_n نماش مجموعه تابع‌های چندجمله‌ای حقیقی (با ضرب عدد حقیقی) از درجه کوچکتر یا برابر n باشد. ثابت کنید P_n یک فضای برداری است که در آن جمع و ضرب اسکالار به شکل نقطه‌ای تعریف شده‌اند.

حل: می‌توانیم ثابت کنیم که P_n به همراه این دو عمل در همه بنداشت‌های فضای برداری صدق می‌کند. اما راه ساده‌تری وجود دارد. P_n یک زیرمجموعه از فضای برداری V متشكل از همه تابع‌هایی با دامنه عده‌های حقیقی است. نشان می‌دهیم که این زیرمجموعه یک زیرفضای V است؛ در آن صورت خود یک فضای برداری خواهد بود. نشان می‌دهیم که P_n تحت جمع و ضرب اسکالار بسته است.

فرض کنیم f و g دو عنصر P_n باشند:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

ابتدا حاصل جمع $f + g$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= [a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0] + [b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0] \\ &= (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0) \end{aligned}$$



P_n یک چندجمله‌ای با درجه حداقل برابر n است. بنابراین $f + g$ عنصری از P_n بوده و تحت جمع بسته است.

اکنون به حاصل ضرب اسکالاری می‌پردازیم، cf چنان تعریف شده است

$$\begin{aligned}(cf)(x) &= c[f(x)] \\ &= c[a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0] \\ &= ca_n x^n + ca_{n-1} x^{n-1} + \cdots + ca_1 x + ca_0.\end{aligned}$$

(cf) چندجمله‌ای از درجه حداقل n است. لذا cf عنصری از P_n بوده و تحت ضرب اسکالار بسته است.

بدینسان ثابت کردہ‌ایم که P_n زیرمجموعه‌ای از فضای برداری V از توابع است که تحت جمع و ضرب اسکالار بسته است. بنابراین P_n یک زیرفضای V بوده و خود یک فضای برداری است. قضیه‌ی زیر یک ویژگی مهم همه زیرفضاهای را بیان می‌کند

۱-۵-۵ قضیه. فرض کنیم U یک زیرفضای فضای برداری V باشد. U شامل بردار صفر V است.

برهان. فرض کنیم u یک بردار دلخواه U و 0 بردار صفر V باشد. همچنین فرض کنیم 0 اسکالار صفر باشد. بنابر قضیه ۱-۵ قسمت (الف) می‌دانیم که $0 = 0 \cdot u = 0u$. چون U تحت ضرب اسکالار بسته است، این بدان معنی است که 0 در U است.

از این قضیه نتیجه می‌گیریم که همه زیرفضاهای \mathbb{R}^3 شامل $(0, 0, 0)$ ‌اند. از نظر هندسی این بدان معنی است که همه زیرفضاهای فضای بسته سه‌بعدی از مبداء می‌گذرند. از این قضیه می‌توان به عنوان یک محک سریع بهره جست و در مواردی نشان داد که برخی از زیرمجموعه‌ها زیرفضا نمی‌باشند. هرگاه یک زیرمجموعه مفروض شامل بردار صفر نباشد نمی‌تواند یک زیرفضا بوده باشد. مثال زیر این رویکرد را به نمایش می‌گذارد.

مثال: فرض کنیم W مجموعه بردارهایی به فرم $(a, a, a+2)$ باشد نشان دهید که W یک زیرفضای \mathbb{R}^3 نمی‌باشد.



حل: چک می‌کنیم که آیا (\cdot, \cdot, \cdot) در W است. آیا مقداری از a هست که برای آن $(a, a, a + 2)$ برابر باشد؛ با تساوی کردن $(a, a, a + 2) = (\cdot, \cdot, \cdot)$ داریم

$$(a, a, a + 2) = (\cdot, \cdot, \cdot)$$

با مساوی قرار دادن مؤلفه‌های متناظر، به دست می‌آوریم:

$$a = \cdot, a + 2 = \cdot$$

این دستگاه معادلات فاقد جواب است. بنابراین (\cdot, \cdot, \cdot) عنصری از W نمی‌باشد و لذا W یک زیرفضا نیست.

در بخش‌های بعدی ابزاری به دست می‌آوریم که ما را قادر به شناخت بیشتر زیرفضاهای خواهد کرد.

۲-۵-۵ تمرین

۱) مجموعه‌ای از بردارها به فرم مفروض را در نظر بگیرید. ثابت کنید این مجموعه‌ها زیرفضاهای \mathbb{R}^2 هستند. هر زیرفضا را از نظر هندسی تعبیر کنید.

- | | |
|------------------|-------------------|
| ب) (a, a) | الف) (a, \cdot) |
| د) $(a, a + 3b)$ | ج) $(a, 2a)$ |

۲) مجموعه بردارهای به فرم مفروض را در نظر بگیرید. ثابت کنید این مجموعه‌ها زیر فضاهای \mathbb{R}^3 هستند. هر زیرفضا را از نظر هندسی تعبیر کنید.

- | | |
|------------------------|----------------------|
| ب) (\cdot, a, \cdot) | الف) (a, b, \cdot) |
| د) $(a, b, a + b)$ | ج) $(a, 2a, b)$ |

۳) مجموعه بردارهای به فرم مفروض را در نظر بگیرید. ثابت کنید این مجموعه‌ها زیر فضاهای \mathbb{R}^3 هستند. هر زیرفضا را از نظر هندسی تعبیر کنید.

- | | |
|-----------------------|---------------------|
| ب) $(\cdot, a, 2a)$ | الف) (a, a, a) |
| د) $(a, 2a, 3a + 5b)$ | ج) $(a, a + b, 3a)$ |

۴) مجموعه بردارهای به فرم مفروض را در نظر بگیرید. ثابت کنید این مجموعه‌ها زیرفضاهای \mathbb{R}^4 هستند.



الف) $(a, 2a, 3a, 4a)$ ب) $(a, 2a, b, 3b)$

ج) $(a, b, c, a + 2b + 3c)$ د) $(a, a^2, a + 2b)$

۵) فرض کنیم A مجموعه بردارهایی به فرم $(a, 2a)$ ، B مجموعه بردارهایی به فرم (a, a^2) و C مجموعه بردارهایی به فرم $(a, a^2 + 3)$ باشد. تعیین کنید که آیا A ، B یا C زیرفضاهای \mathbb{R}^3 هستند؟

۶) مجموعه بردارهایی به فرم زیر را در نظر بگیرید. با چک کردن شرایط بستاری جمع و ضرب اسکالر تعیین کنید که آیا این مجموعه‌ها زیرفضاهای \mathbb{R}^3 هستند؟

الف) $(a, b, a + 3)$ ب) $(a, 4a, -3a)$

ج) $(a, b, 2)$ د) $(a, b, 4a - 1)$

۷) مجموعه بردارهایی به فرم زیر را در نظر بگیرید. با چک کردن شرایط بستاری جمع و ضرب اسکالر تعیین کنید که آیا این مجموعه‌ها زیرفضاهایی از \mathbb{R}^3 هستند؟

الف) $(a, b, a - 4b)$

ج) $(a, 1, 1)$ د) $(a, a^2, 5a)$

۸) آیا مجموعه‌های زیر زیرفضاهای \mathbb{R}^3 هستند؟ مجموعه همه بردارهای (a, b, c) که در آن

الف) $a + b + c = 1$ ب) $a + b + c = 0$

ج) $ab = 0$ د) $ab = 5$

و) $a = b + c$ ه) $ab = ac$

۹) کدامیک از مجموعه‌های زیر زیرفضای \mathbb{R}^3 هستند؟ مجموعه همه بردارهایی به فرم (a, b, c) که در آن a و b در آن

الف) عددهایی صحیح‌اند

ج) عددهایی گویاند

۱۰) آیا مجموعه‌های زیر زیرفضای \mathbb{R}^2 هستند؟ مجموعه همه بردارهایی به فرم

الف) (a, b^2) ب) (a, b)

ج) (a, b) د) $ab < 0$ که در آن $0 < a, b$

۱۱) زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R}^3 ارائه دهید که تحت جمع بسته بوده اما تحت ضرب اسکالر بسته نباشد. همچنین زیرمجموعه‌ای ارائه دهید که تحت ضرب اسکالر بسته باشد اما، تحت جمع بسته نباشد.



۱۲) نشان دهید که زیرمجموعه‌های زیرزیرفضای \mathbb{R}^3 نیستند. (بردار صفر را در نظر بگیرید). مجموعه همه بردارهای به فرم

$$\begin{array}{ll} (a, 3, 2a) & \text{(الف)} (a, a+1, b) \\ a > 0 \quad \text{(د) که} & (a, b, a+b-4) \quad \text{(ج)} \end{array}$$

۱۳) زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R}^2 ارائه دهید که شامل بردار صفر باشد اما زیرفضا نباشد. نظیر این مثال را برای \mathbb{R}^3 بیان و حل کنید.

۱۴) فرض کنیم U مجموعه همه بردارهایی به فرم $(a, 3a, b)$ و V مجموعه بردارهایی به فرم $(p, 2p, q)$ باشند. آیا U و V یکسان‌اند؟ آیا آنها زیرفضا هستند؟

۱۵) فرض کنیم U مجموعه همه بردارهایی به فرم (a, b, c) و V مجموعه بردارهایی به فرم $(a, a+b, c)$ باشند. آیا $U = V$ است؟

۱۶) فرض کنیم U مجموعه بردارهایی به فرم $(a, 3a, b+2)$ و V مجموعه بردارهایی به فرم $(p, 3p, r^3)$ باشند. نشان دهید که U و V یکی هستند. آیا این مجموعه یک زیرفضای \mathbb{R}^3 است؟

۱۷) فرض کنیم $\mathbb{R}^3 \subset U$, u_1, u_2 بردارهایی در U و a, b دو اسکالر دلخواه باشند. ثابت کنید U یک زیرفضای \mathbb{R}^3 است اگر و فقط اگر برای هر a, b , $au_1 + bu_2$ برداری در U باشد.

۱۸) تعیین کنید کدامیک از زیرمجموعه‌های $M_{2 \times 2}$ تشکیل زیرفضا می‌دهند.

الف) زیرمجموعه‌ای از ماتریس‌ها که در آن عناصر قطری‌شان صفر باشد.

ب) زیرمجموعه‌ای از ماتریس‌ها که حاصل جمع عناصر آنها برابر باشد. (برای مثال ماتریس

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{چنین ماتریسی خواهد بود.}$$

ج) مجموعه ماتریس‌هایی به فرم

$$\begin{bmatrix} a & a^r \\ b & b^r \end{bmatrix}$$

د) مجموعه ماتریس‌هایی به فرم

$$\begin{bmatrix} a & a+2 \\ b & c \end{bmatrix}$$

ه) مجموعه ماتریس‌های متقابن 2×2



و) مجموعه ماتریس‌های وارون پذیر 2×2

۱۹) کدامیک از زیرمجموعه‌های ذیل از $M_{2 \times 2}$ تشکیل زیرفضا می‌دهند؟

الف) مجموعه ماتریس‌هایی به فرم

$$\begin{bmatrix} a & b & \cdot \\ c & d & \cdot \end{bmatrix}$$

ب) مجموعه ماتریس‌هایی به فرم

$$\begin{bmatrix} a & 2a & 3b & b & 2b & 3b \end{bmatrix}$$

۲۰) ثابت کنید P_2 یک زیرفضای P_3 است. (به خاطر داریم که P_n مجموعه چندجمله‌ای‌های با درجه حداقل n است).

۲۱) آیا \mathbb{R}^n یک زیرفضای \mathbb{C}^n است؟

۲۲) ثابت کنید

الف) مجموعه ماتریس‌هایی به فرم

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ b & c \end{bmatrix}$$

یک زیرفضای $M_{2 \times 2}$ نیست.

ب) مجموعه همه تابع‌هایی به فرم $f(x) = ax + 2$ یک زیرفضای P_2 نیست.

۲۳) فضای برداری تابعی را با تابع‌های دامنه عددهای حقیقی در نظر می‌گیریم. کدامیک از مجموعه‌های زیر زیرفضای این فضای برداری هستند؟

الف) زیرمجموعه متشکل از همه تابع‌های f که در آن $f(0) = 0$

ب) زیرمجموعه متشکل از همه تابع‌های f به قسمی که $f(0) = 3$

ج) زیرمجموعه متشکل از همه تابع‌های ثابت

۲۴) فرض کنیم U یک زیرفضای فضای برداری V باشد. همچنین u و v بردارهایی از U باشد؛ آیا ممکن است برای اسکالر غیرصفری مانند c ، $cu \in U$ در حالی که $U \neq \{u\}$ باشد؟



۲۵) فرض کنیم V یک فضای برداری و $V \subset U$. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه U زیرفضا باشد آن است که برای هر $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ و هر اسکالارهای a, b داشته باشیم $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \in U$.

۲۶) ثابت کنید

الف) اجتماع دو زیرفضا ممکن است زیرفضا نباشد.

ب) اشتراک دو زیرفضا یک زیرفضا است.

ج) اشتراک هر تعداد از زیرفضاهای یک فضای برداری، زیرفضاست.

۲۷) مجموعه تمام توابع پیوسته بر \mathbb{R} یعنی $c(\mathbb{R})$ زیرفضای $\text{map}(\mathbb{R})$ است.

۲۸) $\text{Diff}(\mathbb{R})$ زیرفضای $c(\mathbb{R})$ است.

۶-۵ ترکیبات خطی بردارها

در بخش قبلی زیرفضایی از \mathbb{R}^3 متشکل از همه بردارهایی به فرم (a, a, b) را مورد بررسی قرار دادیم. ملاحظه می‌کنیم که یک بردار دلخواه در این فضا را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$(a, a, b) = a(1, 1, 0) + b(0, 0, 1)$$

نتیجه این امر از این قرار است که هر بردار در این زیرفضا را می‌توان بر حسب بردارهایی $(1, 1, 0)$ و $(0, 0, 1)$ نوشت. برای مثال،

$$(2, 2, 3) = 2(1, 1, 0) + 3(0, 0, 1)$$

و

$$(-1, -1, 7) = -1(1, 1, 0) + 7(0, 0, 1)$$

بردارهای $(1, 1, 0)$ و $(0, 0, 1)$ به یک معنی مشخص کننده این زیرفضا هستند. در این بخش و بخش‌های بعدی این رویکرد را بیشتر بررسی کرده و از این امر برای درک بهتر فضاهای برداری بر حسب بردارهای خاصی که نمایشگر کل فضا هستند بهره خواهیم برد.



تعریف. فرض کنیم v_1, v_2, \dots, v_m بردارهایی در فضای برداری V باشند. گوییم v ، برداری در V ، یک ترکیب خطی از v_1, v_2, \dots, v_m است هرگاه اسکالارهایی چون c_1, c_2, \dots, c_m موجود باشند به قسمی که v را بتوان چنین نوشت:

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m$$

مثال ۱: بردار $(5, 4, 2)$ ترکیبی خطی از بردارهای $(1, 2, 0)$, $(3, 1, 4)$ و $(1, 0, 3)$ است زیرا می‌تواند چنین نوشته شود:

$$(5, 4, 2) = (1, 2, 0) + 2(3, 1, 4) - 2(1, 0, 3)$$

این مسئله که معین کنیم آیا یک بردار ترکیبی خطی از بردارهای دیگر است در واقع به حل یک دستگاه معادلات خطی منجر می‌شود.

مثال ۲: تعیین کنید که آیا بردار $(-1, 1, 5)$ ترکیبی خطی از بردارهای $(1, 2, 3)$, $(1, 0, 4)$ و $(2, 3, 6)$ است یا خیر.

حل: تساوی زیر را بررسی می‌کنیم

$$c_1(1, 2, 3) + c_2(1, 0, 4) + c_3(2, 3, 6) = (-1, 1, 5)$$

آیا می‌توانیم اسکالارهای c_1, c_2 و c_3 را چنان بیایم که تساوی برقرار باشد؟ با استفاده از جمع و ضرب اسکالار به دست می‌آوریم

$$(c_1, 2c_1, 3c_1) + (0, c_2, 4c_2) + (2c_3, 3c_3, 6c_3) = (-1, 1, 5)$$

$$(c_1 + 2c_3, 2c_1 + c_2 + 3c_3, 3c_1 + 4c_2 + 6c_3) = (-1, 1, 5)$$

با تساوی قرار دادن مؤلفه‌های متناظر هم به دستگاه معادلات خطی زیر می‌رسیم

$$c_1 + 2c_3 = -1$$

$$2c_1 + c_2 + 3c_3 = 1$$

$$3c_1 + 4c_2 + 6c_3 = 5$$



می‌توان نشان داد که این دستگاه معادلات دارای جواب منحصر به‌فرد زیر است

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 3, \quad c_3 = -1$$

بنابراین بردار $(1, 1, 5)$ به شکل ترکیب خطی زیر از بردارهای $(1, 2, 3)$, $(0, 1, 4)$, و $(2, 3, 6)$ نوشته می‌شود:

$$(0, 1, 1, 5) = (1, 2, 3) + 2(0, 1, 4) - 1(2, 3, 6)$$

مثال زیر نشان می‌دهد که ممکن است این اتفاق بیفتد که یک بردار را بتوان به بیش از یک راه به شکل ترکیبی خطی از دیگر بردارها نوشت.

مثال ۳: بردار $(4, 5, 5)$ را به صورت ترکیبی خطی از بردارهای $(1, 2, 3)$, $(0, 1, 4)$, و $(2, 3, 2)$ بنویسید.

حل: تساوی زیر را بحسب مقادیرهای مجهول c_1 , c_2 و c_3 بررسی می‌کنیم.

$$c_1(1, 2, 3) + c_2(-1, 1, 4) + c_3(2, 3, 2) = (4, 5, 5)$$

داریم:

$$(c_1, 2c_1, 3c_1) + (-c_2, c_2, 4c_2) + (2c_3, 3c_3, 2c_3) = (4, 5, 5)$$

$$(c_1 - c_2 + 2c_3, 2c_1 + c_2 + 3c_3, 3c_1 + 2c_2 + 2c_3) = (4, 5, 5)$$

تساوی قرار دادن مؤلفه‌های متناظر منجر به دستگاه معادلات خطی زیر می‌شود:

$$c_1 - c_2 + 2c_3 = 4$$

$$2c_1 + c_2 + 3c_3 = 5$$

$$3c_1 + 4c_2 + 2c_3 = 5$$

این دستگاه معادلات دارای جواب‌های بیشماری است،

$$c_1 = -2r + 3, \quad c_2 = r - 1, \quad c_3 = r$$

بنابراین بردار $(4, 5, 5)$ می‌تواند به راه‌های بسیاری به شکل ترکیبی خطی از بردارهای $(1, 2, 3)$, $(0, 1, 4)$, و $(2, 3, 2)$ نوشته شود:

$$(4, 5, 5) = (-2r + 3)(1, 2, 3) + (r - 1)(0, 1, 4) + r(2, 3, 2)$$



برای نمونه

$$(4, 5, 5) = -3(1, 2, 3) + 2(-1, 1, 4) + 3(3, 3, 2) \quad r = 3 \text{ بدهد}$$

$$(4, 5, 5) = 5(1, 2, 3) - 2(-1, 1, 4) - (3, 3, 2) \quad r = -1 \text{ بدهد}$$

مثال زیر نشانگر آن است که ممکن است یک بردار را نتوان به شکل ترکیبی خطی از بردارهای دیگر نوشت.

مثال ۴: نشان دهید که بردار $(3, -4, -6)$ را نمی‌توان به شکل ترکیبی خطی از بردارهای $(1, 2, 3)$ ، $(1, 4, 5)$ و $(-1, -1, -2)$ نوشت.

حل: تساوی زیر را بررسی می‌کنیم

$$c_1(1, 2, 3) + c_2(-1, -1, -2) + c_3(1, 4, 5) = (3, -4, -6)$$

این تساوی منجر به دستگاه معادلات زیر می‌شود

$$c_1 + c_2 + c_3 = 3$$

$$2c_1 - c_2 + 4c_3 = -4$$

$$3c_1 - 2c_2 + 5c_3 = -6$$

این دستگاه فاقد جواب است. بنابراین $(3, -4, -6)$ ترکیبی خطی از بردارهای $(1, 2, 3)$ ، $(1, 4, 5)$ و $(-1, -1, -2)$ نمی‌باشد.

مثال ۵: تعیین کنید که آیا ماتریس

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

ترکیبی خطی از ماتریس‌های

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

در فضای برداری $M_{2 \times 2}$ می‌باشد یا خیر؟



حل: تساوی زیر را بررسی می‌کنیم

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

آیا می‌توانیم اسکالرهاي c_1, c_2 و c_3 را چنان بیابیم که این تساوی برقرار باشد؟ با استفاده از جمع و ضرب اسکالر ماتریس‌ها به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} c_1 + 2c_2 & -3c_2 + c_3 + 2 \\ 2c_1 + 2c_2 & c_1 + 2c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

با تساوی قرار دادن مؤلفه‌های متناظر، دستگاه معادلات خطی زیر را به دست می‌آوریم

$$c_1 + 2c_2 = -1$$

$$-3c_2 + c_3 = 7$$

$$2c_1 + 2c_2 = 8$$

$$c_1 + 2c_2 = -1$$

می‌توان نشان داد که این دستگاه دارای جواب منحصر به فرد $c_1 = 3, c_2 = -2, c_3 = 1$ است. از این رو ماتریس مفروض ترکیبی خطی از سه ماتریس دیگر به شکل زیر می‌باشد

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف. مجموعه بردارهای v_1, v_2, \dots, v_m از یک فضای برداری را وقتی یک مولد این فضا می‌نامیم که هر بردار فضای ترکیبی خطی از این بردارها باشد. یک مجموعه مولد از بردارها به یک معنی فضای برداری مربوطه را معرفی می‌کند، زیرا هر بردار آن فضای را می‌توان از این بردارها به دست آورد.

مثال ۶: نشان دهید بردارهای $(1, 2, 0), (1, 1, 2)$ و $(0, 1, -1)$ مولد \mathbb{R}^3 هستند.

حل: فرض کنیم (x, y, z) برداری دلخواه در \mathbb{R}^3 باشد. باید مشخص کنیم که آیا می‌توانیم بنویسیم

$$(x, y, z) = c_1(1, 2, 0) + c_2(0, 1, -1) + c_3(1, 1, 2)$$

با ضرب اسکالرها و جمع بردارها به دست می‌آوریم

$$(x, y, z) = (c_1 + c_3, 2c_1 + c_2 + c_3, -c_2 + 2c_3)$$



در این صورت

$$c_1 + c_2 = x$$

$$2c_1 + c_2 + c_3 = y$$

$$-c_2 + 2c_3 = z$$

این دستگاه معادلات را در متغیرهای c_1, c_2 و c_3 با استفاده از روش حذفی گوس-جordan حل کرده و جواب زیر را به دست می‌آوریم

$$c_1 = 3x - y - z, \quad c_2 = -4x + 2y + z, \quad c_3 = -2x + y + z$$

در این صورت بردارهای $(1, 2, 0)$, $(0, 1, -1)$, $(1, 1, 2)$ را تولید می‌کنند. یک بردار دلخواه \mathbb{R}^3 را به صورت ترکیبی خطی از این بردارها به شکل زیر می‌توانیم بنویسیم

$$(x, y, z) = (3x - y - z)(1, 2, 0) + (-4x + 2y + z)(0, 1, -1) + (-2x + y + z)(1, 1, 2)$$

این فرمول برداری ما را قادر می‌سازد تا به فوریت بتوانیم هر بردار \mathbb{R}^3 را به عنوان ترکیبی خطی از $(1, 2, 0)$, $(0, 1, -1)$ و $(1, 1, 2)$ بنویسیم. برای نمونه، هرگاه بخواهیم دریابیم که بردار $(1, 2, 4)$ چگونه بر حسب این بردارها در می‌آید. $x = 2$, $y = 1$ و $z = -1$ در این معادله قرار می‌دهیم، به دست می‌آوریم

$$(2, 4, -1) = 3(1, 2, 0) - (0, 1, -1) - (1, 1, 2)$$

مثال ۷: نشان دهید که ماتریس‌های زیرفضای برداری $M_{2 \times 2}$ را تولید می‌کنند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: فرض کنیم $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ عنصری دلخواه از $M_{2 \times 2}$ باشد. می‌توانیم این ماتریس را به شکل زیر بیان کنیم

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که نتیجه مطلوب را ثابت می‌کنند.

تاکنون ریاضیاتی را توسعه داده‌ایم که به ما کمک می‌کند تا نگرش پیدا کنیم که به یک فضای برداری بر حسب بردارهای مولد در آن فضا بنگریم. همچنین توانایی انجام عکس این کار نیز مفید خواهد بود، بدین معنی با استفاده از مجموعه‌ای از بردارها یک فضای برداری تولید کنیم.



۱-۶-۵ قضیه. فرض کنیم v_1, v_2, \dots, v_m بردارهای در فضای برداری V باشند. همچنین

فرض کنیم U مجموعه همه ترکیبات خطی v_1, v_2, \dots, v_m باشد. در این صورت U یک زیرفضا بوده که به وسیله بردارهای v_1, v_2, \dots, v_m گسترش یافته است.

برهان. فرض کنیم

$$u_1 = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m, \quad u_2 = b_1 v_1 + \dots + b_m v_m)$$

$$v_1 + v_2 = (a_1 + b_1) v_1 + \dots + (a_m + b_m) v_m$$

یعنی $u_1 + u_2$ ترکیبی خطی از v_1, v_2, \dots, v_m است. بنابراین $u_1 + u_2$ در U بوده و U تحت جمع برداری بسته است.

فرض کنیم c اسکالاری دلخواه باشد، در این صورت

$$c u_1 = c(a_1 v_1 + \dots + a_m v_m)$$

$$= c a_1 v_1 + \dots + c a_m v_m$$

یعنی $c u_1$ ترکیبی خطی از v_1, v_2, \dots, v_m است. بنابراین $c u_1$ در U بوده و U تحت ضرب اسکالار بسته است. در این صورت U یک زیرفضای V است. بنابراین U هر بردار در U ترکیبی خطی از v_1, v_2, \dots, v_m است. از این رو U را تولید می‌کنند.

مثال ۸: فضای برداری \mathbb{R}^3 را در نظر می‌گیریم. بردارهای $(-1, 5, 3)$ و $(2, -3, 4)$ در \mathbb{R}^3 هستند.

فرض کنیم U زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R}^3 متشکل از همه بردارهای به فرم

$$c_1(-1, 5, 3) + c_2(2, -3, 4)$$

بوده باشد. در این صورت U زیرفضایی از \mathbb{R}^3 است و به وسیله $(-1, 5, 3)$ و $(2, -3, 4)$ گسترش یافته است.

در زیر نمونه‌هایی از بردارهای U را، که با مقداردهی‌های متفاوت به c_1 و c_2 بدست آمدند، نوشته شده‌اند

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0 \quad \text{بردار } (-1, 5, 3)$$

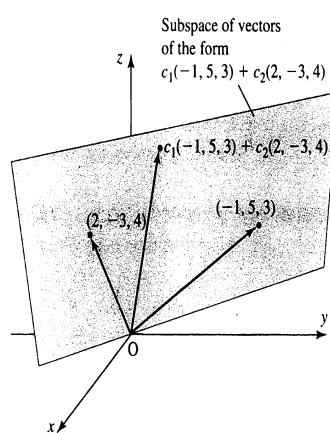
$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1 \quad \text{بردار } (2, -3, 4)$$



$$c_1 = 0, c_2 = 0 \quad \text{بردار } (0, 0, 0)$$

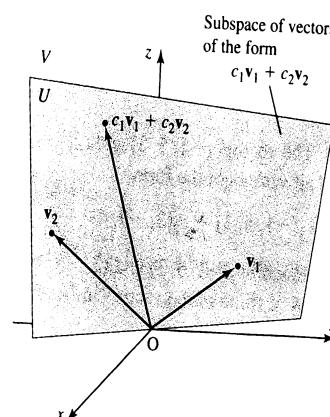
$$c_1 = 2, c_2 = 3 \quad \text{بردار } (4, 1, 18)$$

می‌توانیم U را ببینیم. U از بردارهایی ساخته شده در صفحه‌ای قرار دارد که به وسیله بردارهای $(-1, 5, 3)$ و $(2, -3, 4)$ تعریف می‌شود. شکل ۲-۵ ملاحظه شود.



شکل ۲-۵

می‌توانیم نتیجه فوق را تعمیم دهیم. فرض کنیم v_1 و v_2 بردارهایی در فضای برداری \mathbb{R}^3 باشند. زیرفضای U تولید شده به وسیله v_1 و v_2 مجموعه همه بردارهایی به فرم $c_1v_1 + c_2v_2$ است. هرگاه v_1 و v_2 هم راستا نباشند، آنگاه U صفحه‌ای است که به وسیله v_1 و v_2 به وجود می‌آید. شکل ۳-۵ ملاحظه شود.



شکل ۳-۵



مثال ۹: فرض کنیم v_1 و v_2 زیرفضای U از فضای برداری V را تولید کنند. همچنین k_1 و k_2 اسکالرهاي غیرصفر باشند. نشان دهید که بردارهای k_1v_1 و k_2v_2 نیز U را تولید می‌کنند.

حل: فرض کنیم v برداری در U باشد. چون v_1 و v_2 , U را تولید می‌کنند اسکالرهاي a و b وجود دارد به قسمی که

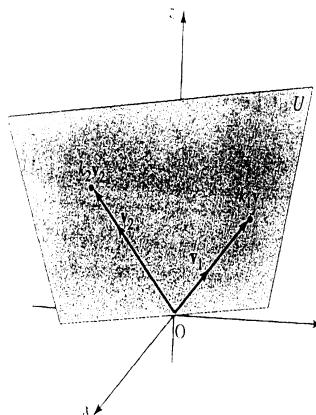
$$v = av_1 + bv_2$$

می‌توانیم بنویسیم

$$v = \frac{a}{k_1}(k_1v_1) + \frac{b}{k_2}(k_2v_2)$$

لذا بردارهای k_1v_1 و k_2v_2 مولد U هستند.

تبصره. هرگاه v_1 و v_2 دو بردار \mathbb{R}^3 و هم راستا نباشند. می‌توانیم به U به عنوان صفحه‌ای در فضای معمولی (سه جهت دار) بنگریم. k_1v_1 و k_2v_2 بردارهایی در همان راستای v_1 و v_2 می‌باشند. شکل ۴-۵ ملاحظه شود.



شکل ۴-۵

یادآوری می‌کنیم که دو مجموعه وقته مساوی هستند که دارای عناصر یکسان باشند. یک روش استاندارد که نشان می‌دهد دو مجموعه مانند A و B یکی هستند از این قرار است که نشان دهیم هر عنصر A در B است، و هر عنصر B در A است. ما از این روش برای نشان دادن اینکه دو زیرفضا برابرند استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۰: فرض کنیم U زیرفضایی از \mathbb{R}^3 باشد که بهوسیله بردارهای $(1, 2, 0)$ و $(2, -3, 1)$ تولید می‌شود. همچنین V زیرفضایی از \mathbb{R}^3 است که بهوسیله بردارهای $(2, 1, 5)$ و $(-3, 4, 1)$ تولید



می‌شود. نشان دهید که $U = V$.

حل: فرض کنیم \mathbf{u} برداری در U باشد. نشان می‌دهیم که $\mathbf{u} \in V$. چون $a, b \in U$, اسکالرها بی چون a و b هست به قسمی که

$$\mathbf{u} = a(1, 2, 0) + b(-3, 1, 2) = (a - 3b, 2a + b, 2b)$$

اکنون بررسی می‌کنیم که چگونه \mathbf{u} را می‌توانیم به شکل ترکیبی خطی از $(4, 1, -2)$ و $(-1, 5, 2)$ بنویسیم.

$$\mathbf{u} = p(-1, 5, 2) + q(4, 1, -2) = (-p + 4q, 5p + q, 2p - 2q)$$

چنین p و q هایی (مجهولات) باید در تساوی‌های زیر صدق کنند.

$$-p + 4q = a - 3b$$

$$5p + q = 2a + b$$

$$2p - 2q = 2b$$

این دستگاه معادلات دارای جواب منحصر به فرد $p = \frac{a - 2b}{3}$ و $q = \frac{a + b}{3}$ باشد. بنابراین \mathbf{u} را می‌توان نوشت:

$$\mathbf{u} = \frac{a + b}{3}(-1, 5, 2) + \frac{a - 2b}{3}(4, 1, -2)$$

از این رو \mathbf{u} برداری در V است.

بالعکس، فرض کنیم

$$\mathbf{v} = c(-1, 5, 2) + d(4, 1, -2)$$

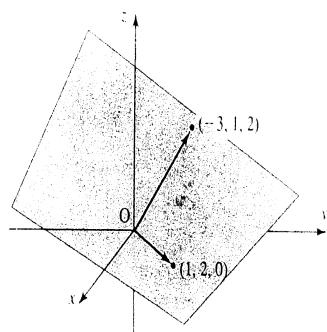
برداری در V باشد. \mathbf{v} را می‌توان چنین نوشت

$$\mathbf{v} = (2c + d)(1, 2, 0) + (c - d)(-3, 1, 2)$$

(چرا؟). در این صورت \mathbf{v} برداری در U است.

بنابراین $U = V$. این زیرفضا صفحه‌ای است که از مبداء گذشته و به وسیله بردارهای $(1, 2, 0)$ و $(-3, 1, 2)$ تعریف می‌گردد. شکل ۵-۵ ملاحظه شود.





شکل ۵-۵

مثال ۱۱: فرض کنیم U فضای برداری تولید شده به وسیله تابعهای 1 و $f(x) = x + 1$ و $g(x) = 2x^2 - 2x + 3$ باشد. نشان دهید که تابع $h(x) = 6x^2 - 10x + 5$ در U واقع است.

حل: تابع h وقتی در فضای تولید شده به وسیله f و g قرار دارد که اسکالرها بی چون a و b یافت شود به قسمی که

$$a(x+1) + b(2x^2 - 2x + 3) = 6x^2 - 10x + 5$$

از این به دست می آید

$$2bx^2 + (a - 2b)x + a + 3b = 6x^2 - 10x + 5$$

با مساوی قرار دادن ضرایب متناظر

$$2b = 6$$

$$a - 2b = -10$$

$$a + 3b = 5$$

این دستگاه دارای جواب منحصر به فرد $a = -4$ و $b = 3$ می باشد. در این صورت

$$-4(x+1) + 3(2x^2 - 2x + 3) = 6x^2 - 10x + 5$$

$g(x) = 2x^2 - 2x + 3$ و $f(x) = x + 1$ در فضای تولید شده به وسیله $h(x) = 6x^2 - 10x + 5$ یعنی تابع h در U قرار دارد.



۶-۵ تمرین

۱) در مجموعه بردارهای داده شده، تعیین کنید که آیا بردار اول ترکیبی خطی از دیگر بردارها می باشد

الف) $(2, 4), (-1, 7)$

ب) $(2, 3), (1, 2)$

ج) $(2, -8), (1, 15)$

د) $(4, 1), (1, 3)$

۲) در مجموعه بردارهای زیر تعیین کنید که آیا بردار نخست ترکیبی خطی از دیگر بردارها است یا خیر؟

الف) $(-1, 2, -3), (2, -4, 6), (1, 2, -3)$

ب) $(0, 1, 4), (1, 1, 1), (-1, 3, 1)$

ج) $(-1, 8, 5), (-1, 3, 2), (1, 2, 1)$

۳) نشان دهید که هر یک از مجموعه بردارهای زیر \mathbb{R}^3 را تولید می کنند. بردار $(3, 5)$ را به صورت

ترکیبی خطی از هر یک از مجموعه های مولد بنویسید.

الف) $(1, 1), (1, -1), (1, 1), (1, 4)$

ب) $(1, 3), (3, 10), (1, 0), (0, 1)$

۴) نشان دهید که هر یک از مجموعه های بردارهای زیر \mathbb{R}^3 را تولید می کنند. بردار $(1, 3, -2)$ را

به صورت ترکیبی خطی از هر یک مجموعه های مولد بنویسید.

الف) $(4, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 3, 1), (1, 2, 3)$

ب) $(2, 5, 4), (-1, -1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)$

ج) $(5, 1, 3), (-2, -3, -1), (2, 0, 1)$

۵) تعیین کنید که آیا مجموعه بردارها R^3 را تولید می کند؟

الف) $(1, -3), (2, -5)$

ب) $(1, 1), (-2, 1)$

ج) $(1, -1), (2, 3), (6, 2)$

۶) سه بردار در \mathbb{R}^3 ارائه دهید که به وسیله بردارهای $(1, 2, 3), (1, 2, 0), (1, 2, 0)$ تولید شوند.

۷) سه بردار در \mathbb{R}^2 ارائه دهید که به وسیله $(1, 2)$ تولید شوند.

۸) سه بردار در \mathbb{R}^4 ارائه دهید که به وسیله $(4, 1, 0, 0), (2, 1, -3, 0), (2, 1, 5, 0)$ و $(-3, 0, 1, 0)$ تولید شوند.



۹) فرض کنیم U زیرفضایی از R^3 باشد که با $(-1, 3, -)$ تولید شده در V زیرفضایی از R^3 باشد که با

$$U = V = (-2, 6, -)$$

۱۰) فرض کنیم U زیرفضایی از R^3 باشد که به وسیله $(1, 2, 3)$ و $(-1, 2, 5)$ تولید می‌شود و V

$$U = V = (2, 0, -2)$$

۱۱) فرض کنیم U زیرفضایی از R^3 باشد که به وسیله بردارهای $(2, -1, 3)$ و $(1, 0, 4)$ و همچنین

زیرفضایی از R^3 باشد که توسط $(4, -1, 6)$ و $(1, -1, -8)$ تولید شده باشند. ثابت کنید که V

$$U = V$$

۱۲) فرض کنیم $\mathbf{u} \in R^3 \neq 0$. نشان دهید زیرفضای تولید شده به وسیله \mathbf{u} مشتمل بر بردارهایی است

که بر خطی واقع‌اند که از مبدأ می‌گذرد.

۱۳) در هر مورد، تعیین کنید که آیا ماتریس نخست ترکیبی خطی از بقیه ماتریس‌ها است یا خیر؟

$$\begin{array}{ll} \text{(الف)} & \left[\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{matrix} \right]; \left[\begin{matrix} 5 & 7 \\ 5 & -10 \end{matrix} \right] \\ \text{(ب)} & \left[\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right]; \left[\begin{matrix} 7 & 6 \\ -5 & -2 \end{matrix} \right] \\ \text{(ج)} & \left[\begin{matrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right]; \left[\begin{matrix} 4 & 1 \\ 2 & 10 \end{matrix} \right] \end{array}$$

۱۴) در هر مورد، تعیین کنید که آیا تابع نخست ترکیبی خطی از بقیه قوابع است یا خیر؟

$$\text{(الف)} \quad h(x) = x + 3, \quad g(x) = x^3 + 1, \quad f(x) = 3x^3 + 2x + 9$$

$$\text{(ب)} \quad h(x) = x^3 + 2x - 2, \quad g(x) = x^3 - x + 1, \quad f(x) = 2x^3 + x - 3$$

$$\text{(ج)} \quad h(x) = x^3 + 2x + 1, \quad g(x) = x^3 + x - 1, \quad f(x) = x^3 + 4x + 5$$

۱۵) آیا تابع $f(x) = x + 5$ در فضای تولید شده به وسیله 1 و 3 قرار

دارد؟

۱۶) آیا تابع 1 در فضی تولید شده به وسیله 3 و $g(x) = 2x^3 + 3$ و $f(x) = 3x^3 + 5x + 1$ قرار دارد؟ سه تابع دیگر ارائه دهید که در فضای تولید شده به وسیله g و h واقع باشند.

۱۷) فرض کنیم v_1 و v_2 بردارهایی در فضای برداری V بوده باشند. همچنین فرض می‌کنیم

ترکیبی خطی از v_1 و v_2 بوده باشد. ثابت کنید برای هر دو اسکالر غیرصفر c_1 و c_2 ، v ترکیبی



خطی از $c_1 v_1$ و $c_2 v_2$ است.

(۱۸) فرض کنیم v_1 و v_2 بردارهایی در فضای برداری V و c_1 و c_2 اسکالرها غیرصفری باشند.
نشان دهید هرگاه v ترکیبی خطی از v_1 و v_2 نباشد، ترکیبی خطی از $c_1 v_1$ و $c_2 v_2$ نیز نخواهد بود.

(۱۹) فرض کنیم v_1 و v_2 بردارهایی در فضای برداری V و c_1 و c_2 اسکالرها غیرصفر باشند. ثابت کنید هرگاه v_1 و v_2 ، V را تولید نکنند، $c_1 v_1$ و $c_2 v_2$ نیز V را تولید نخواهند کرد.

(۲۰) فرض کنیم v_1 و v_2 فضای برداری V را تولید کنند و v_2 بردار دلخواه دیگری در V بوده باشد.
نشان دهید که v_1 ، v_2 و v_2 نیز V را تولید می‌کنند.

۷-۵ استقلال و وابستگی خطی

در این بخش به توسعه ساختاری فضاهای برداری ادامه می‌دهیم. در این رابطه مفهوم‌های استقلال و وابستگی بردارها را معرفی می‌کنیم. این مفهوم‌ها در ساختار مجموعه‌های مولد «کارا» برای فضاهای برداری مفید خواهند بود، مجموعه‌هایی که هیچ بردار مازادی باقی نخواهند ماند.

ابتدا ایده وابستگی بردارها را واکاوی می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که بردار $(4, -1, 0)$ ترکیبی خطی از بردارهای $(2, 1, 3)$ و $(0, 1, 2)$ است زیرا می‌توانیم بنویسیم

$$(4, -1, 0) = 2(2, 1, 3) - 2(0, 1, 2)$$

این تساوی را می‌توانیم به چندین راه دیگر نیز بنویسیم. هر یک از بردارهای آن را می‌توانیم بر حسب سایر بردارها بنویسیم:

$$(2, 1, 3) = \left(\frac{1}{2}\right)(4, -1, 0) + \left(\frac{3}{2}\right)(0, 1, 2)$$

$$(0, 1, 2) = \left(\frac{2}{3}\right)(2, 1, 3) - \left(\frac{1}{3}\right)(4, -1, 0)$$

هر یک از این سه بردار در واقع، وابسته به دو بردار دیگر است. این ایده را با نوشتن تساوی زیر می‌توانیم بیان کنیم

$$(4, -1, 0) - 2(2, 1, 3) + 3(0, 1, 2) = (0, 0, 0)$$



این مفهوم وابستگی بردارها را به طور رسمی با ارائه تعریف زیر دقیق‌تر بیان می‌کنیم.
تعریف. الف) مجموعه بردارهای $\{v_1, \dots, v_m\}$ در یک فضای برداری V را وابسته‌ی خطی نامیم
هرگاه اسکالارهایی چون c_1, \dots, c_m ، که همگی صفر نیستند، وجود داشته باشد به قسمی که

$$c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = 0$$

ب) مجموعه بردارهای $\{v_1, \dots, v_m\}$ را مستقل خطی گوییم، هرگاه از $c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = 0$
لازم آید که $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$

مثال ۱: نشان دهید که مجموعه بردارهای $\{(1, 2, 3), (-2, 1, 1), (8, 6, 10)\}$ در \mathbb{R}^3 وابسته‌ی خطی‌اند.

حل: تساوی زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم

$$c_1(1, 2, 3) + c_2(-2, 1, 1) + c_3(8, 6, 10) = 0$$

می‌خواهیم نشان دهید که حداقل یکی از c_i ‌ها غیر صفر است. داریم

$$(c_1, 2c_1, 3c_1) + (-2c_2, c_2, c_2) + (8c_3, 6c_3, 10c_3) = 0$$

$$(c_1 - 2c_2 + 8c_3, 2c_1 + c_2 + 6c_3, 3c_1c_2 + 10c_3) = 0$$

با مساوی قرار دادن مؤلفه‌های این بردار با صفر دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شود

$$c_1 - 2c_2 + 8c_3 = 0$$

$$2c_1 + c_2 + 6c_3 = 0$$

$$3c_1 + c_2 + 10c_3 = 0$$

این دستگاه دارای جواب $c_1 = 4, c_2 = -2, c_3 = 1$ است. چون حداقل یکی از c_i ‌ها غیر صفر است. پس بردارها وابسته‌ی خطی هستند. این وابستگی خطی به وسیله تساوی زیر بیان شده است

$$4(1, 2, 3) - 2(-2, 1, 1) - (8, 6, 10) = 0$$

مثال ۲: نشان دهید که بردارهای $(2, 1, 0), (3, -1, 4), (1, 0, 5)$ در \mathbb{R}^3 مستقل خطی هستند.



حل: تساوی زیر را بررسی می‌کنیم

$$c_1(3, -2, 2) + c_2(3, -1, 4) + c_3(1, 0, 5) = 0$$

باید نشان دهیم که این تساوی فقط وقتی برقرار است که c_1, c_2 و c_3 همگی صفر باشند. داریم

$$(3c_1, -2c_1, 2c_1) + (3c_2, -c_2, 4c_2) + (c_3, 0, 5c_3) = 0$$

$$(3c_1 + 3c_2 + c_3, -2c_1 - c_2, 2c_1 + 4c_2 + 5c_3) = 0$$

با صفر قرار دادن هر مؤلفه به دست می‌آوریم

$$3c_1 + 3c_2 + c_3 = 0$$

$$-2c_1 - c_2 = 0$$

$$2c_1 + 4c_2 + 5c_3 = 0$$

این دستگاه دارای جواب منحصر به فرد $c_1 = 0, c_2 = 0$ و $c_3 = 0$ می‌باشد. بنابراین مجموعه مورد بحث مستقل خطی است. مثال بعدی نشان‌گر آن است که چگونه وابستگی و استقلال خطی به فضاهای برداری تابعی اعمال می‌شوند.

مثال ۳: تابع‌های ۱. $f(x) = x^3 + 1$, ۲. $g(x) = 3x - 1$ و ۳. $h(x) = -4x + 1$ از فضای برداری P_2 متشکل از چندجمله‌ای با درجه حداکثر ۲ را در نظر می‌گیریم نشان دهید مجموعه تابع‌های $\{f, g, h\}$ مستقل خطی است.

حل: تساوی زیر را بررسی می‌کنیم

$$c_1 f + c_2 g + c_3 h = 0$$

در صورتی مستقل خطی است که از این تساوی بتوان نتیجه گرفت که $c_1 = 0, c_2 = 0$ و $c_3 = 0$. تساوی را به این صورت می‌نویسیم

$$c_1(x^3 + 1) + c_2(3x - 1) + c_3(-4x + 1) = 0$$

که در آن x عدد حقیقی دلخواهی است. سه مقدار مناسب برای x در نظر می‌گیریم. داریم

$$x = 0 ; \quad c_1 - c_2 + c_3 = 0$$



$$x = 1 \quad ; \quad 2c_1 + 2c_2 - 3c_3 = 0$$

$$x = -1 \quad ; \quad 2c_1 - 4c_2 + 5c_3 = 0$$

می‌توان نشان داد که این دستگاه معادلات دارای جواب منحصر به‌فرد

$$c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$$

است. در این صورت $c_1f + c_2g + c_3h = 0$ است. مجموعه $\{f, g, h\}$ مستقل خطی است.

اکنون به بیان نتیجه مهمی می‌پردازیم که مفهوم‌های وابستگی خطی را به‌هم مرتبط می‌سازد.

۱-۷-۵ قضیه. مجموعه‌ای شامل حداقل دو بردار در یک فضای برداری وابسته‌ی خطی است اگر و فقط اگر بتوان یک بردار آن را برحسب دیگر بردارهای این مجموعه نوشت.

برهان. فرض کنیم مجموعه $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ وابسته خطی باشد. بنابراین اسکالارهایی مانند c_1, c_2, \dots, c_m که حداقل یکی از آن‌ها غیرصفر است. وجود دارند، به قسمی که

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_mv_m = 0$$

فرض کنیم که $c_1 \neq 0$. تساوی فوق را می‌توانیم چنین بازنویسی کنیم

$$v_1 = \left(\frac{-c_2}{c_1}\right)v_2 + \dots + \left(\frac{-c_m}{c_1}\right)v_m$$

بنابراین v_1 ترکیبی خطی از v_2, \dots, v_m است.

برعکس، فرض کنیم v_1 ترکیبی خطی از v_m, v_2, \dots, v_1 باشد. بنابراین اسکالارهایی چون d_2, \dots, d_m هست که

$$v_1 = d_2v_2 + \dots + d_mv_m$$

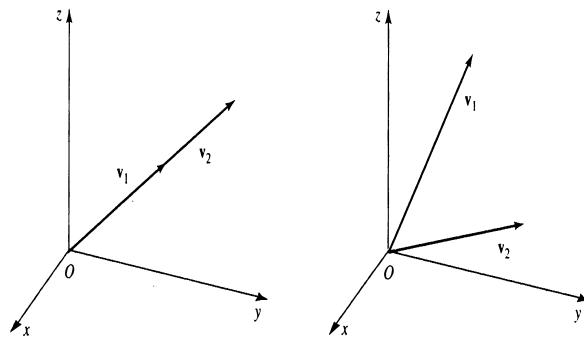
این تساوی را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$1v_1 + (-d_2)v_2 + \dots + (-d_m)v_m = 0$$

لذا مجموعه $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ وابسته‌ی خطی بوده و این برهان را کامل می‌کند. این قضیه به ما کمک می‌کند تا معنی وابستگی خطی را برای دو یا سه بردار از \mathbb{R}^3 مشاهده کنیم.



وابستگی خطی $\{v_1, v_2\}$ مجموعه $\{v_1, v_2\}$ وابسته خطی است اگر و فقط اگر بتوان یک بردار را بر حسب مضربی از بردار دیگر نوشت. فرض کنیم $c v_1 = v_2$. این به معنی آن است که v_1 و v_2 هم راستا هستند. شکل ۶-۵ ملاحظه شود.



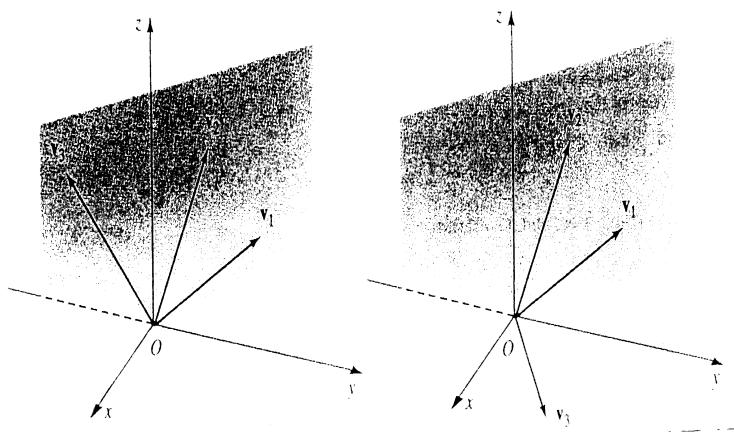
شکل ۶-۵

بردارها در یک خط قرار دارند
بردارها در یک خط مستقل خطی اند

استقلال و وابستگی خطی $\{v_1, v_2\}$ در \mathbb{R}^3

وابستگی خطی $\{v_1, v_2, v_3\}$ مجموعه $\{v_1, v_2, v_3\}$ وابسته خطی است اگر و فقط اگر بتوان یک بردار آن را بر حسب ترکیبی خطی از دیگر دو بردار نوشت. فرض کنیم مثلاً v_3 ترکیبی خطی از v_1 و v_2 باشد. پس $v_3 = c_1 v_1 + c_2 v_2$. در حالت کلی، وقتی که این بردارها مستقل خطی باشند v_3 در صفحه v_1 و v_2 قرار دارد. شکل ۷-۵ برای \mathbb{R}^3 ملاحظه شود. هرگاه v_1 و v_2 وابسته خطی باشند. آنگاه v_3 روی خطی گذرا از v_1 و v_2 قرار دارد.





شکل ۷-۵

$\{v_1, v_2, v_3\}$ وابسته خطی اند
بردارها در یک صفحه قرار دارند

ما این بخش را با دو نتیجه دیگر در باب فضاهای برداری به پایان می‌رسانیم.

۲-۷-۵ قضیه. فرض کنیم V یک فضای برداری باشد. هر مجموعه بردار V که شامل بردار صفر باشد وابسته‌ی خطی است.

برهان. به عهده دانشجو است.

نتیجه. اگر بردارهای $\{v_1, \dots, v_m\}$ مستقل خطی باشند، آنگاه $v_i \neq 0$ ($1 \leq i \leq m$)

۳-۷-۵ قضیه. فرض کنیم مجموعه $\{v_1, \dots, v_m\}$ در فضای برداری V وابسته‌ی خطی باشد. در این صورت هر مجموعه از بردارها در V که شامل این مجموعه باشد نیز وابسته‌ی خطی است.

برهان. چون $\{v_1, \dots, v_m\}$ وابسته‌ی خطی است، اسکالارهایی چون c_1, \dots, c_m هست که

$$c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = 0$$

و برای حداقل یک i . $c_i \neq 0$. مجموعه بردارهای $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ را که شامل مجموعه بردار مفروض وابسته است در نظر می‌گیریم. اسکالارهای $c_1, \dots, c_m, 0, \dots, 0$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$c_1 v_1 + \dots + c_m v_m + 0 v_{m+1} + \dots + 0 v_n = 0$$



و می‌دانیم برای حداقل یک i , $c_i \neq 0$. بنابراین مجموعه $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ وابسته خطی است.

مثال ۴: فرض کنیم مجموعه $\{v_1, v_2, v_1 - v_2\}$ مستقل خطی باشد. ثابت کنید $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$ نیز مستقل خطی است.

حل: تساوی زیر را بررسی می‌کنیم

$$\mathbf{a}(v_1 + v_2) + \mathbf{b}(v_1 - v_2) = 0$$

باید نشان دهیم که از این تساوی می‌توان نتیجه گرفت که $a = 0$ و $b = 0$. داریم

$$a\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_2 + b\mathbf{v}_1 - b\mathbf{v}_2 = 0$$

$$(a + b)\mathbf{v}_1 + (a - b)\mathbf{v}_2 = 0$$

چون $\{v_1, v_2\}$ مستقل خطی است:

$$a + b = 0$$

$$a - b = 0$$

این دستگاه دارای جواب منحصر به فرد $a = 0$, $b = 0$ می‌باشد. در این صورت $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$ مستقل خطی است.

۴-۷-۵ تمرین

۱) ثابت کنید مجموعه‌های زیر از بردارهای \mathbb{R}^2 وابسته خطی‌اند.

الف) $\{(-1, 2), (2, -4)\}$

ب) $\{(3, 1), (9, 3)\}$

ج) $\{(1, 5), (0, 0)\}$

۲) ثابت کنید مجموعه‌های زیر از بردارهای \mathbb{R}^2 مستقل خطی‌اند.

الف) $\{(1, 0), (0, 1)\}$

ب) $\{(1, 2), (3, 2)\}$



ج) $\{(2, -4), (5, 3)\}$

۳) ثابت کنید مجموعه های زیر از بردارهای \mathbb{R}^3 وابسته خطی اند. در هر مجموعه یک بردار را به صورت ترکیبی خطی از دیگر بردارها بنویسید.

الف) $\{(1, -2, 3), (-2, 4, 1), (-4, 8, 9)\}$

ب) $\{(3, 4, 1), (2, 1, 0), (9, 7, 1)\}$

۴) ثابت کنید هر مجموعه از بردارها مستقل خطی است.

الف) $\{(1, 2, 5), (1, -2, 1), (2, 1, 4)\}$

ب) $\{(1, 1, 1), (-4, 3, 2), (4, 1, 2)\}$

ج) $\{(1, 3, -4), (3, -1, 4), (1, 0, -2)\}$

د) $\{(3, 4, 7), (2, -1, 1), (4, 1, 3)\}$

۵) با استفاده از قضیه ۵-۹ ثابت کنید که هر مجموعه از بردارها وابسته خطی است.

الف) $\{(2, -1, 3), (-4, 2, -6), (8, 0, 1)\}$

ب) $\{5, 2, -3\}, (3, 0, 4), (-3, 0, -4)$

۶) تعیین کنید که کدامیک از مجموعه ها مستقل خطی و کدامیک وابسته خطی است.

الف) $\{(1, 2), (-1, 4), (-1, 16)\}$

ب) $\{(1, 3), (-2, 1)\}$

ج) $\{(1, 2, 8), (1, -1, -1), (1, 0, 3)\}$

د) $\{(1, 2, 8), (1, -1, -1), (1, 0, 3)\}$

۷) به ازای چه مقدار t هر مجموعه از بردارهای داده شده وابسته خطی است.

الف) $\{-1, 2\}, (t, -4)$

ب) $\{(3, t), (6, t - 1)\}$

ج) $\{2, -t\}, (2t + 6, 4t)$

۸) ثابت کنید



الف) مجموعه $\{(1, 2), (0, 2), (0, 1)\}$ در \mathbb{R}^2 مستقل خطی است.

ب) مجموعه $\{(1, 1, 2), (0, -1, 3), (0, 0, 5)\}$ در \mathbb{R}^3 مستقل خطی است.

ج) مجموعه $\{(3, -2, 4, 5), (0, 2, 2, -4), (0, 0, 2, 7), (0, 0, 0, 4)\}$ در \mathbb{R}^4 مستقل خطی است.

۹) ماتریس زیر را که به فرم پلکانی تحویل یافته است در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

نشان دهید که بردارهای سطیری آن تشکیل یک مجموعه مستقل خطی می‌دهند. آیا برای هر ماتریس پلکانی تحویل یافته می‌توان چنین نتیجه‌ای را ثابت کرد؟

۱۰) تعیین کنید کدامیک از مجموعه‌های زیر وابستهٔ خطی هستند. تابع‌های پرسش‌های (الف)، (ب) و

(ج) تابع‌هایی در فضای برداری P_2 و ماتریس‌های (د)، (ه) و (و) در فضای برداری $M_{2 \times 2}$ هستند.

الف) $h(x) = x^3 - 4x + 1$ و $g(x) = x^3 + 4x$, $f(x) = 2x^3 + 1$, $\{f, g, h\}$

ب) $h(x) = 2x^3 - 3x + 3$ و $g(x) = x + 1$, $f(x) = x^3 + 3$, $\{f, g, h\}$

ج) $h(x) = 2x^3 - x + 1$ و $g(x) = x + 3$, $f(x) = x^3 + 3x - 1$, $\{f, g, h\}$

د) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right\}$

ه) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right\}$

و) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \right\}$

۱۱) فرض کنیم مجموعه‌ی $\{v_1, v_2\}$ در فضای برداری V وابستهٔ خطی باشد. ثابت کنید که

$v_1 + v_2, v_1 - v_2$ نیز وابستهٔ خطی است.

۱۲) فرض کنیم مجموعه‌ی $\{v_1, v_2, v_3\}$ وابستهٔ خطی باشد. همچنین c یک اسکالر غیرصفر است.

ثابت کنید که مجموعه‌های زیر نیز وابستهٔ خطی اند

الف) $\{v_1, v_1 + v_2, v_3\}$



ب) $\{v_1, cv_2, v_3\}$

ج) $\{v_1, v_1 + cv_2, v_3\}$

۱۳) فرض کنیم مجموعه $\{v_1, v_2, v_3\}$ در فضای برداری V مستقل خطی باشد. همچنین c اسکالری غیرصفر باشد. ثابت کنید مجموعه‌های زیر نیز مستقل خطی هستند

الف) $\{v_1, v_1 + v_2, v_3\}$

ب) $\{v_1, cv_2, v_3\}$

ج) $\{v_1, v_1 + cv_2, v_3\}$

۱۴) فرض کنیم مجموعه S در فضای برداری V مستقل خطی باشد. ثابت کنید هر زیرمجموعه S نیز مستقل خطی است. آیا چنین حکم در مورد «وابسته‌ی خطی» به جای «مستقل خطی» نیز صادق است؟

۱۵) فرض کنیم $\{v_1, v_2\}$ مستقل خطی باشد. نشان دهید که هرگاه بردار v_3 به فرم $cv_1 + bv_2$ نباشد آنگاه $\{v_1, v_2, v_3\}$ نیز مستقل خطی است.

۱۶) ثابت کنید که در هر فضای برداری مجموعه‌ای مشتمل دو یا چند بردار مستقل خطی است «اگر و فقط اگر» هیچ یک از بردارهای آن ترکیبی خطی از دیگر بردارها نباشد.

۱۷) دو بردار در \mathbb{R}^3 به صورت تصادفی انتخاب کنید. آنکه این دو بردار وابسته‌ی خطی یا مستقل خطی نباشند احتمال کدامیک بیشتر است؟ اگر سه بردار به صورت تصادفی انتخاب کنیم چطور؟

۱۸) سه بردار به صورت تصادفی در \mathbb{R}^3 بنویسید. احتمال کدامیک بیشتر است. اینکه این بردارها وابسته خطی باشند یا مستقل خطی باشند؟

۸-۵ پایه و بعد

معمولًاً از خط به عنوان یک فضای یک بعدی و از صفحه به عنوان یک شی دو بعدی یاد می‌کنیم. در این بخش، ما به تعریف ریاضی مفهوم بعد می‌پردازیم. این مفهوم با درک شهودی ما از بعد مطابقت خواهد داشت. ابتدا مفهوم‌های مجموعه گسترش و استقلال خطی را با هم تلفیق می‌کنیم.



تعریف. مجموعه‌ای متناهی از بردارها همانند $\{v_1, \dots, v_m\}$ را یک پایه فضای برداری V نامیم هرگاه این مجموعه مولد V و مستقل خطی باشد.

از نظر شهودی، یک پایه یک مجموعه کارآ برای مشخص کردن یک فضای برداری است، بدین معنی که هر بردار فضا را می‌توان به صورت ترکیبی از بردارهای پایه بیان کرده، و بردارهای پایه مستقل از یکدیگر هستند.

مفهوم پایه استاندارد را قبلًا برای \mathbb{R}^n در بخش ۴-۴ در رابطه با تبدیلات ماتریسی معرفی کردیم. اکنون ملاحظه می‌کنیم که چنین پایه‌ای در واقع در شرایط پایه تعریف شده فوق صدق می‌کند.

تعریف. مجموعه بردارهای

$$\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1)\}$$

یک پایه برای \mathbb{R}^n است. این پایه را پایه استاندارد \mathbb{R}^n می‌نامیم. درستی این نتیجه را محقق می‌سازیم. باید نشان دهیم که این مجموعه \mathbb{R}^n مولد مستقل خطی نیز می‌باشد. فرض کنیم (x_1, x_2, \dots, x_n) عنصری دلخواه از \mathbb{R}^n باشد. می‌توانیم بنویسیم

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, \dots, 1)$$

از این رو مجموعه فوق \mathbb{R}^n را تولید می‌کند.

وانگهی، وقتی به بررسی استقلال خطی این مجموعه می‌پردازیم، به دست می‌آوریم

$$c_1(1, 0, \dots, 0) + c_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + c_n(0, \dots, 1) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$(c_1, 0, \dots, 0) + (0, c_2, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, c_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$(c_1, c_2, \dots, c_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

در نتیجه $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_n = 0$. پس مجموعه مستقل خطی است.

بنابراین مجموعه

$$\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$$

یک پایه \mathbb{R}^n است. پایه‌های بسیاری برای \mathbb{R}^n وجود دارد. لکن پایه استاندارد مهمترین آنها است.



مثال ۱: نشان دهید که مجموعه $\{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 2, 4)\}$ یک پایه \mathbb{R}^3 است.

حل: ابتدا نشان می‌دهیم که این مجموعه \mathbb{R}^n را گسترش می‌دهد. فرض کنیم (x_1, x_2, x_3) برداری دلخواه در \mathbb{R}^3 باشد. اسکالرهايی چون c_1, c_2 و c_3 پیدا می‌کنیم به قسمی که

$$c_1(1, 0, -1) + c_2(1, 1, 1) + c_3(1, 2, 4) = (x_1, x_2, x_3)$$

در می‌باییم که این تساوی منجر به دستگاه معادلات ذیل می‌شود:

$$c_1 + c_2 + c_3 = x_1$$

$$c_2 + 2c_3 = x_2$$

$$-c_1 + c_2 + 4c_3 = x_3$$

این دستگاه دارای جواب زیر است

$$c_1 = 2x_1 - 3x_2 + x_3, \quad c_2 = -2x_1 + 5x_2 - 2x_3, \quad c_3 = x_1 - 2x_2 + x_3$$

اکنون نشان می‌دهیم که این مجموعه، مستقل خطی است. تساوی زیر را بررسی می‌کنیم

$$b_1(1, 0, -1) + b_2(1, 1, 1) + b_3(1, 2, 4) = (0, 0, 0)$$

این تساوی منجر به دستگاه معادلات زیر می‌شود:

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0$$

$$b_2 + 2b_3 = 0$$

$$-b_1 + b_2 + 4b_3 = 0$$

این دستگاه دارای جواب منحصر به فرد $b_1 = 0, b_2 = 0$ و $b_3 = 0$ است. بنابراین مجموعه مورد بحث مستقل خطی است.

در نتیجه نشان داده‌ایم که مجموعه $\{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 2, 4)\}$ مولد \mathbb{R}^3 و مستقل خطی است. لذا تشکیل یک پایه‌ی برای \mathbb{R}^3 می‌دهد.

مثال ۲: نشان دهید $\{f, g, h\}$ ، که در آن $f(x) = x^2 + 1, g(x) = 3x - 1$ و $h(x) = 4x + 1$ ، یک پایه برای P_2 است.



حل: $\{f, g, h\}$ وقتی یک پایه P_2 است که این فضای راگسترش داده و مستقل خطی باشد. در مثال ۳ بخش قبل ملاحظه کردیم که این مجموعه مستقل خطی است. حال ثابت می‌کنیم این مجموعه مولد P_2 است. فرض کنیم p تابعی دلخواه در P_2 باشد. p یک چندجمله‌ای به فرم ذیل خواهد بود

$$p(x) = bx^4 + cx + d$$

تابع‌های f, g و h وقتی P_2 راگسترش می‌دهند که اسکالرهايی مانند a_1, a_2 و a_3 یافت شود به قسمی که

$$p(x) = a_1 f(x) + a_2 g(x) + a_3 h(x)$$

از این به دست می‌آید

$$\begin{aligned} bx^4 + cx + d &= a_1(x^4 + 1) + a_2(3x - 1) + a_3(-4x + 1) \\ &= a_1x^4 + (3a_2 - 4a_3)x + (a_1 - a_2 + a_3) \end{aligned}$$

که با مقایسه ضرایب منتظر منجر به دستگاه معادلات ذیل می‌شود

$$a_1 = b$$

$$3a_2 - 4a_3 = c$$

$$a_1 - a_2 + a_3 = d$$

می‌توان نشان داد که این دستگاه معادلات دارای جواب $b = 1, a_2 = -4, a_3 = 3$ و $a_1 = 1$ می‌باشد. در این صورت چندجمله‌ای p را می‌توان به شکل زیر بیان کرد.

$$p(x) = a_1 f(x) + a_2 g(x) + a_3 h(x)$$

یعنی تابع‌های f, g و h مولد P_2 هستند.

این تابع‌ها که P_2 راگسترش داده مستقل خطی می‌باشند تشکیل یک پایه P_2 می‌دهند. قضیه ذیل منجر به این نتیجه‌ی کلیه می‌شود که همه پایه‌ها دارای یک تعداد بزرگ هستند.

۱-۸-۵ قضیه. فرض کنیم $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V باشد. هرگاه مجموعه‌ای با بیش از n بردار V باشد، آنگاه این مجموعه وابسته خطی است.



برهان. تساوی زیر را بررسی می‌کنیم

$$c_1 w_1 + \cdots + c_m w_m = 0 \quad (1)$$

نشان می‌دهیم که مقادیر c_1, \dots, c_m برای برقراری این تساوی وجود داشته و حداقل یکی از آنها غیرصفر است. این امر نشانگر این خواهد بود که بردارهای مورد بحث وابسته خطی هستند.

بردارهای $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه V است. از این رو هر یک از بردارهای w_1, w_2, \dots, w_n را می‌توان به شکل ترکیبی خطی از v_1, \dots, v_n نوشت. فرض کنیم

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n$$

$$w_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n$$

⋮

$$w_m = a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n$$

با جایگزینی این مقادیر در تساوی (1) به دست می‌آوریم

$$c_1(a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n) + c_2(a_{21}v_1 + \cdots + a_{2n}v_n) + \cdots + c_m(a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mn}v_n) = 0$$

با جایه‌جایی ترتیب داریم

$$(c_1a_{11} + c_2a_{21} + \cdots + c_ma_{m1})v_1 + \cdots + (c_1a_{1n} + \cdots + c_ma_{mn})v_n = 0$$

چون v_1, \dots, v_n مستقل خطی‌اند از این تساوی نتیجه می‌گیریم که همه ضرایب آن برابر صفر باشند، در این صورت

$$a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \cdots + a_{m1}c_m = 0$$

$$a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{m2}c_m = 0$$

⋮

$$a_{1n}c_1 + a_{2n}c_2 + \cdots + a_{mn}c_m = 0$$

بنابراین یافتن c_i هایی که در معادله (1) صدق کنند به یافتن جواب‌های دستگاه معادلات اخیر با n معادله m مجهول تحویل می‌گردد. چون $n > m$ ، تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات است. که جواب‌های بیشماری برای چنین دستگاه همگنی وجود دارد. بنابراین جواب‌های غیرصفری از c_i ها وجود دارد که در معادله (1) صدق می‌کند. از این رو مجموعه $\{w_1, \dots, w_m\}$ وابسته‌ی خطی است.



۲-۸-۵ قضیه.

برهان. فرض کنیم $\{v_1, \dots, v_n\}$ و $\{w_1, \dots, w_m\}$ دو پایه V باشند. چنانچه $\{v_1, \dots, v_n\}$ را به عنوان یک پایه V و $\{w_1, \dots, w_m\}$ را به عنوان یک مجموعه مستقل خطی بینگاریم از قضیه قبل نتیجه می‌گیریم که $n \leq m$. بالعکس، هرگاه $\{w_1, \dots, w_m\}$ را یک پایه تلقی کرده و $\{v_1, \dots, v_n\}$ را به عنوان مجموعه‌ای مستقل خطی در نظر بگیریم نتیجه می‌گیریم که $m \leq n$. از این رو $m = n$ و این نشان می‌دهد که هر دو پایه مورد بحث مشتمل بر یک تعداد بردار هستند.

اکنون به جایی رسیده‌ایم که می‌توانیم به قولی که وعده داده بودیم وفاکرده و تعریفی برای بعد یک فضای برداری ارائه دهیم.

تعريف. هرگاه فضای برداری V دارای پایه‌ای مشتمل بر n بردار باشد. بعد V را برابر n می‌نامیم. بعد V را به $\dim V$ نشان می‌دهیم.

n بردار $\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0)\}$ یک پایه (پایه استاندارد) \mathbb{R}^n است. در نتیجه بعد فضای \mathbb{R}^n برابر n است.

تبصره. مذکور می‌شویم که پایه را به عنوان مجموعه‌ای متناهی از بردارهای فضا تعریف کردیم که مستقل خطی بوده و فضا را گسترش دهنده. چنین نیست که هر فضای برداری دارای چنین مجموعه‌ای (پایه متناهی) است. وقتی که چنین مجموعه‌ای وجود داشته باشد می‌گوییم فضا از بعد متناهی است، در غیراین صورت می‌گوییم فضا از بعد نامتناهی است.

در فصل بعدی به فضاهای برداری تابعی برحور خواهیم کرد که از بعد نامتناهی هستند، با این وجود در این درس ما اساساً علاقمند به مطالعه فضاهای برداری با بعد متناهی هستیم.

مثال ۳: مجموعه بردارهای $\{(1, 2, 3), (-2, 4, 1)\}$ را در \mathbb{R}^3 در نظر می‌گیریم. این بردارها یک زیرفضای \mathbb{R}^3 مانند V تولید می‌کنند که همه بردارهای آن به صورت زیر می‌باشند:

$$\mathbf{v} = c_1(1, 2, 3) + c_2(-2, 4, 1)$$

پس بردارهای $(1, 2, 3)$ و $(-2, 4, 1)$ این زیرفضا را تولید می‌کنند.

وانگهی از آنجا که بردار دوم مضرب اسکالری از بردار او نمی‌باشد، این بردارها مستقل خطی هستند.

بنابراین $\{(1, 2, 3), (-2, 4, 1)\}$ یک پایه برداری V است. در نتیجه $\dim(V) = 2$. در واقع می‌دانیم که V یک صفحه است که از مبداء می‌گذرد.



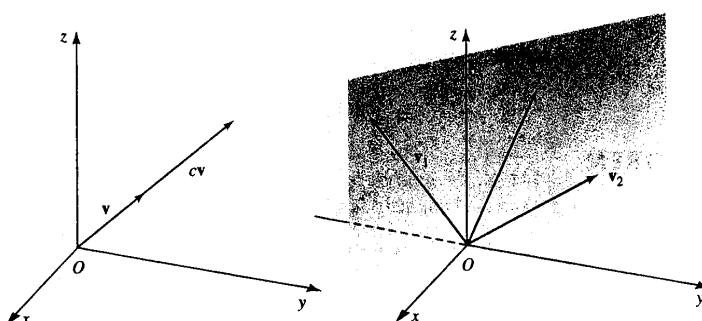
تبصره. در مثال اخیر ملاحظه کردیم که یک صفحه خاصی که از مبداء می‌گذشت یک زیرفضای دو بعدی \mathbb{R}^2 بود. قضیه بعدی اطلاعات بیشتری در رابطه زیرفضای \mathbb{R}^3 و بعد آنها به دست می‌دهد.

۳-۸-۵ قضیه. الف) مبداء یک زیرفضای \mathbb{R}^3 است. بعد این زیرفضا را برابر صفر تعریف می‌کنیم.

ب) زیرفضاهای یک بعدی \mathbb{R}^3 خط‌هایی هستند که از مبداء می‌گذرند.

ج) زیرفضاهای دو بعدی \mathbb{R}^3 صفحه‌هایی هستند که از مبداء می‌گذرند.

شکل ۸-۵ ملاحظه شود.



زیرفضای دو بعدی \mathbb{R}^3 صفحه‌ای است یک زیرفضای یک بعدی \mathbb{R}^3 با پایه

با پایه $\{v_1, v_2\}$ که از مبداء می‌گذرد. $\{v_1\}$ خطی است که از مبداء می‌گذرد.

شکل ۸-۵

برهان. الف) فرض کنیم V مجموعه یکانی $\{(0, 0, 0)\}$ مشتمل از بردار صفر \mathbb{R}^3 باشد. همچنین فرض کنیم c یک اسکالر دلخواه باشد. چون

$$(0, 0, 0) + (0, 0, 0) = (0, 0, 0), \quad c(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

V تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است. زیرا یک زیرفضای \mathbb{R}^3 است.

ب) فرض کنیم v یک پایه برای زیرفضای یک بعدی V از \mathbb{R}^3 باشد. بنابراین هر بردار V به فرم $c v$ به‌ازای اسکالری چون c است. می‌دانیم این بردارها تشکیل یک خط می‌دهند که از مبداء می‌گذرد.

ج) فرض کنیم $\{v_1, v_2\}$ یک پایه برای زیرفضای دو بعدی V از \mathbb{R}^3 باشد. هر بردار V به‌ازای $c_1 v_1 + c_2 v_2$ است. از این رو V یک صفحه گذرا از مبداء می‌باشد.

تبصره. گفتیم که یک مجموعه بردار که مولد یک فضای برداری است به یک معنی آن فضا را مشخص می‌سازد، بدین قرار که هر بردار فضا ترکیبی خطی از بردارهای این مجموعه می‌باشد. در حالت کلی، ممکن



است بیش از یک ترکیب خطی برای بیان یک بردار مفروض وجود داشته باشد. فضای مولد یافته به وسیله مجموعه $\{(1, 2, 3), (-1, 1, 4), (3, 3, 2)\}$ را در نظر می‌گیریم. بردار $(4, 5, 5)$ را می‌توان چنین بیان کرد:

$$(4, 5, 5) = -(1, 2, 3) + (-1, 1, 4) + 2(3, 3, 2)$$

همچنین

$$(4, 5, 5) = 5(1, 2, 3) - 2(-1, 1, 4) - (3, 3, 2)$$

قضیه آتی بیان می‌دارد که هرگاه مجموعه گسترش یک پایه باشد چنین ترکیبی منحصر به فرد خواهد بود. از این رو یک پایه بسیار بیشتر از یک مجموعه مولد یک فضای برداری را مشخص می‌کند.

۴-۸-۵ قضیه. فرض کنیم $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه فضای برداری V باشد. در این صورت هر بردار V به طریقی منحصر به فرد به صورت ترکیبی خطی از این بردارها نوشته می‌شود.

برهان. فرض کنیم v برداری در V باشد. چون $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک پایه است، می‌توانیم v را به صورت ترکیبی خطی از این بردارها بنویسیم. فرض کنیم داشته باشیم:

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \quad , \quad v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$$

در این صورت

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$$

که به نوبه خود منجر به تساوی زیر می‌شود.

$$(a_1 - b_1)v_1 + \dots + (a_n - b_n)v_n = 0$$

چون $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه است، این بردارها مستقل خطی هستند. از این رو $(a_1 - b_1) = \dots = (a_n - b_n) = 0$ و در نتیجه $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$. بنابراین فقط به یک طریق می‌توان v را به عنوان ترکیبی خطی از بردارهای پایه نوشت.

در اینجا به ذکر مسئله‌ای می‌پردازیم که به ما می‌گوید چه وقت یک مجموعه تشکیل یک پایه می‌دهد بدون آنکه نیاز داشته باشیم که استقلال خطی بردارها و یا ویژگی مولد آنها را نشان دهیم.



۵-۸-۵ مسئله. فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد n باشد. در این صورت ثابت کنید
 الف) هرگاه $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی از n بردار باشد، آنگاه S یک پایه V
 است.

ب) هرگاه $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ یک مجموعه شامل n بردار بوده که V را گسترش می‌دهد، آنگاه S
 یک پایه V است.

ج) نتیجه بگیرید که مجموعه

$$\{(1, 3, -1), (2, 1, 0), (4, 2, 1)\}$$

یک پایه \mathbb{R}^3 است. (راهنمایی: نشان دهید که این مجموعه مستقل خطی است).

۹-۵ بُعد برخی فضاهای

اکنون قادریم بعد فضاهایی را که در مثال‌های قبلی بررسی کردہ‌ایم محاسبه کنیم همچنانکه برای فضای
 برداری \mathbb{R}^n عمل کردیم.

الف) برای فضای برداری $M_{2 \times 2}$ از ماتریس‌های 2×2 چنین استدلال می‌کنیم. ماتریس‌های

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فضای $M_{2 \times 2}$ را گسترش داده و مستقل خطی هستند. این بردارها یک پایه $M_{2 \times 2}$ هستند. بنابراین بعد
 فضای برداری $M_{2 \times 2}$ برابر ۴ است. مشابهًا می‌توان نشان داد که بعد فضای برداری $M_{m \times n}$ برابر mn است.

ب) اکنون بعد P_2 ، فضای برداری چندجمله‌ای با درجه حداقل ۲ را محاسبه می‌کنیم. چندجمله‌ای
 x^2 و ۱ این فضا را گسترش می‌دهند، زیرا هر چندجمله‌ای $c + bx + ax^2$ را می‌توانیم به شکل

$$ax^2 + bx + c = a(x^2) + b(x) + c(1)$$

بنویسیم. x^2 ، x و ۱ مستقل خطی نیز می‌باشند، زیرا اگر

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{برای هر } x)$$



نتیجه می‌گیریم که $a = \circ$, $b = \circ$, $c = \circ$. از این رو $\{x^0, x, x^n\}$ یک پایه P_2 است. پس بعد فضای برداری P_2 برابر ۳ است. مشابهًاً، مجموعه $\{x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1\}$ یک پایه P_n است و بعد P_n برابر $n+1$ است. این پایه را پایه استاندارد P_n می‌نامیم.

ج) فضای برداری \mathbb{C}^2 را در نظر می‌گیریم. بردارهای $(1, \circ)$ و $(\circ, 1)$ فضای \mathbb{C}^2 را گسترش می‌دهند زیرا یک بردار دلخواه $(a + bi, c + di)$ را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$(a + bi, c + di) = (a + bi)(1, \circ) + (c + di)(\circ, 1)$$

وانگهی $(1, \circ)$ و $(\circ, 1)$ در \mathbb{C}^2 مستقل خطی هستند. لذا این بردارها یک پایه برای \mathbb{C}^2 بوده و در نتیجه بعد \mathbb{C}^2 برابر ۲ است. مشابهًاً $\{(1, \dots, \circ), \dots, (\circ, \dots, \circ)\}$ یک پایه \mathbb{C}^n بوده و بعد این فضا برابر n است. این پایه پایه استاندارد \mathbb{C}^n است.

مثال بعدی کلیه مفاهیم کلیدی را که در بخش‌های قبلی مطرح کردیم همه را یکجا در خود دارد.

مثال ۵: از احکام زیر کدامیک درست و کدامیک نادرست‌اند. توضیح دهید

الف) بردارهای $(1, 2), (1, 3), (-1, 3)$ و $(5, 2)$ در \mathbb{R}^2 وابسته‌ی خطی هستند.

ب) بردارهای $(0, 1, 0, 0), (0, 2, 0, 0)$ و $(1, 0, 0, 0)$ در \mathbb{R}^3 را گسترش می‌دهند.

ج) $\{(1, -3), (0, 1, 2), (0, 1, 0)\}$ یک پایه زیرفضای \mathbb{R}^3 است، زیرفضایی که متشکل از بردارهایی به‌فرم $(a, b, 2a - 3b)$ می‌باشد.

د) از هر مجموعه شامل دو بردار می‌توان یک زیرفضای با بعد دو از \mathbb{R}^3 گسترش داد.

حل: الف) درست است. بعد \mathbb{R}^2 برابر ۲ است. در نتیجه هر مجموعه شامل سه بردار وابسته‌ی خطی هستند.

ب) نادرست است. سه بردار داده شده وابسته‌ی خطی هستند. از این رو بردارها نمی‌توانند یک فضای سه‌بعدی گسترش دهند.

ج) درست است. بردارها یک فضای دو‌بعدی گسترش می‌دهند.

$$(a, b, 2a - 3b) = a(1, 0, 2) + b(1, 1, -3)$$

این بردارها مستقل خطی نیز هستند زیرا هم راستا نمی‌باشند.

د) نادرست است. دو بردار باید مستقل خطی باشند. پس حکم در حالت کلی درست نیست.



۱۰-۵ رتبه ماتریس‌ها

در این بخش دانشجویان با رتبه یک ماتریس آشنا می‌شوند. مفهوم رتبه ما را قادر می‌سازد تا ماتریس‌ها را با بردارها مرتبط سازیم. رتبه یک ابزار وحدت بخش است که به ما این امکان را می‌دهد تا همه‌ی مفهوم‌هایی را که در این درس مطرح کردیم با هم مرتبط سازیم. جواب دستگاه معادلات خطی، منفرد بودن یک ماتریس، معکوس پذیری یک ماتریس، همگی تحت تأثیر رتبه قرار می‌گیرند.

تعریف. فرض کنیم A یک ماتریس $m \times n$ باشد. سطرهای A را می‌توانیم به مثابه بردارهای سطروی r_1, r_2, \dots, r_m و ستون‌های آن را به مثابه بردارهای ستونی c_1, c_2, \dots, c_n بینگاریم. هر برداری سطروی شامل n مؤلفه هر بردار ستونی شامل m مؤلفه می‌باشد. بردارهای سطروی زیرفضایی از \mathbb{R}^n را گسترش می‌دهند که فضای سطروی A و بردارهای ستونی زیرفضایی از \mathbb{R}^n را گسترش می‌دهند که فضای ستونی A نامیده می‌شود.

مثال ۱: ماتریس زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

بردارهای سطروی A عبارتند از:

$$r_1 = (1 \ 1 \ -1 \ 2) \quad r_2 = (3 \ 4 \ 1 \ 6) \quad r_3 = (5 \ 4 \ 1 \ 0)$$

این بردارها زیرفضایی از \mathbb{R}^4 تولید می‌کنند که فضای سطروی A نامیده می‌شود. بردارهای ستونی A عبارتند از:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad c_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

این بردارها زیرفضایی از \mathbb{R}^3 تولید می‌کنند که فضای ستونی A نامیده می‌شود.

۱-۱۰-۵ قضیه. فضای سطروی و فضای ستونی ماتریس A دارای یک بعد هستند.

برهان. فرض کنیم u_1, u_2, \dots, u_n بردارهای سطروی A باشند. بردار $\mathbf{0}_m$ چنین است

$$\mathbf{u}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})$$



فرض کنیم بعد فضای سطري برابر s باشد. و همین طور v_1, \dots, v_s یک پايه فضای سطري باشند.
به علاوه فرض کنیم زامین بردار اين مجموعه چنین باشد

$$v_j = (b_{j1} b_{j2} \dots b_{jm})$$

هر بردار سطري A ترکيبي خطى از v_1, \dots, v_s است.

$$u_1 = c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + \dots + c_{1s}v_s$$

$$u_2 = c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + \dots + c_{2s}v_s$$

⋮

$$u_m = c_{m1}v_1 + c_{m2}v_2 + \dots + c_{ms}v_s$$

با مساوی قرار دادن زامین مؤلفه‌های بردارها در سمت چپ و راست اين تساوي‌ها بهدست می‌آوريم

$$a_{1i} = c_{11}b_{1i} + c_{12}b_{2i} + \dots + c_{1s}b_{si}$$

⋮

$$a_{mi} = c_{m1}b_{1i} + c_{m2}b_{2i} + \dots + c_{ms}b_{si}$$

و اين تساوي را می‌توانيم چنین بنويسیم

$$\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} = b_{1i} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} + b_{2i} \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{bmatrix} + \dots + b_{si} \begin{bmatrix} c_{1s} \\ c_{2s} \\ \vdots \\ c_{ms} \end{bmatrix}$$

اين نشان می‌دهد که هر بردار ستونی A در فضای گسترش يافته به وسیله مجموعه‌ای از بردارها قرار دارد.

چون s بعد فضای سطري A است، داريم

$$\dim(\text{فضای سطري } A) \leq \dim(\text{فضای ستونی } A)$$

با استدلالی مشابه، می‌توانیم نشان دهیم که

$$\dim(\text{فضای ستونی } A) \leq \dim(\text{فضای سطري } A)$$



بنابراین

$$\dim(\text{فضای سط्रی } A) = \dim(\text{فضای ستونی } A)$$

و این برهان قضیه را اثبات می‌نماید.

تعریف. بعد فضای سطری (ستونی) ماتریس A را رتبه A می‌نامیم. رتبه A را با $\text{rank}(A)$

نشان می‌دهیم.

خواهیم دید که رتبه یک ماتریس یک ابراز محاسباتی و هندسی مفید می‌باشد.

مثال ۲: رتبه ماتریس زیر را پیدا کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

حل: با بررسی در می‌باییم که سطر سوم این ماتریس ترکیبی خطی از دو سطر آن است:

$$(2, 5, 8) = 2(1, 2, 3) + (0, 1, 2)$$

در این صورت سه سطر این ماتریس وابسته‌ی خطی هستند. در نتیجه رتبه این ماتریس کوچکتر از ۳ است. چون $(1, 2, 3)$ مضرب اسکالری از $(0, 1, 2)$ نیست، این دو بردار مستقل خطی هستند. این دو بردار تشکیل یک پایه برای فضای سطری A می‌دهند. از این رو $\text{rank}(A) = 2$

این روش، که بر پایه تعریف استوار است، برای محاسبه رتبه ماتریس‌های بزرگ عملی نمی‌باشد. در آینده یک روش سیستماتیک‌تری برای یافتن رتبه یک ماتریس ارائه خواهیم داد. قضیه بعدی، که راه را برای این هدف هموار می‌کند، بیان می‌دارد که تعیین رتبه ماتریسی که به‌فرم پلکانی تحویل یافته است به فوریت قابل تشخیص است.

۲-۱۰-۵ قضیه. سطرهای غیرصفر ماتریس A که به‌فرم پلکانی تحویل یافته باشد تشکیل یک پایه برای فضای سطری A می‌دهند. رتبه A برابر تعداد بردارهای سطری غیرصفر آن است.

برهان. فرض کنیم A یک ماتریس $m \times n$ با سطرهای غیرصفر r_1, r_2, \dots, r_s باشد. فرض کنیم

$$k_1 r_1 + k_2 r_2 + \dots + k_s r_s = 0$$

که در آن k_1, \dots, k_s اسکالرهايی هستند.



اولین درایه غیرصفر r_1 برابر ۱ است؛ اولین برداری سط्रی است که درایه ۱ در این مؤلفه دارد. در نتیجه وقتی بردارهای $k_1 r_1, k_2 r_2, \dots, k_s r_s$ را جمع می‌کنیم برداری به دست می‌آوریم که اولین مؤلفه‌های آن k_1 است. با تساوی قرار دادن این بردار با بردار صفر به دست می‌آوریم که $k_1 = 0$. از این روش تساوی فوق به شکل تساوی ذیل در می‌آید

$$k_1 r_1 + \dots + k_s r_s = 0$$

اولین درایه غیرصفر r_2 برابر ۱ است و r_2 تنها برداری در بین بردارهای باقی مانده است که عده ۱ را در این مؤلفه دارا است. در نتیجه $k_2 = 0$. مشابهًا، k_3, \dots, k_s همگی برابر صفرند. بنابراین بردارهای r_1, r_2, \dots, r_s مستقل خطی هستند. این بردارها، طبق تعریف فضای سطري A را گسترش می‌دهند و همین‌طور تشکیل یک پایه برای این فضای دهنده. بعد فضای سطري برابر ۵ است. در نتیجه رتبه A برابر ۵، یعنی تعداد بردارهای غیرصفر A است.

مثال ۳: رتبه ماتریس زیر را پیدا کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

این ماتریس به فرم پلکانی تحويل یافته است. دارای سه بردار سطري غیرصفر (سه سطر اول) است. بنابر قضيه پیش، این سه بردار یک پایه فضای سطري هستند. از این رو $\text{rank}(A) = 3$. قضيه بعدی فضاهای سطري را با ماتریس‌های سطري معادل مرتبط می‌سازد.

۳-۱۰-۵ قضيه. فرض کیم A و B دو ماتریس سطري معادل باشند. در این صورت A و B دارای یک فضای سطري هستند و $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ برهان. چون A و B سطري معادل هستند. سطرهای B با اعمال عملیات سطري مقدماتي از سطرهای A حاصل می‌شوند. بنابراین هر سطر B ترکیبی خطی از سطرهای A است. و همین‌طور فضای سطري B جزء فضای سطري A است.

به طریق مشابه، فضای سطري A را با اعمال عملیات سطري مقدماتي می‌توان از سطرهای B به دست آورد. در نتیجه فضای سطري A نیز جزء فضای سطري B است.



بنابراین نتیجه می‌گیریم که فضاهای سط्रی A و B یکی هستند. چون A و B دارای فضاهای سطري مساوی هستند، رتبه‌ی آنها برابر است.
نتیجه‌ی بعدی دو نتیجه قبلی را بهم آمیخته و روشنی برای یافتن یک پایه برای فضای سطري یک ماتریس و در نتیجه رتبه‌ی آن ارائه می‌دهد.

۴-۱۰-۵ قضیه. فرض کنیم E فرم سطري پلکانی تحویل یافته ماتریس A باشد. بردارهای سطري غیرصفرا E تشکیل یک پایه برای فضای سطري A می‌دهد. رتبه‌ی A برابر تعداد بردارهای سطري غیرصفرا E است.

مثال ۴: پایه‌ای برای فضای سطري ماتریس مفروض زیر یافته و رتبه آن را تعیین کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

حل: از عملگرهای سطري مقدماتی استفاده کرده و یک فرم پلکانی تحویل یافته برای A به دست می‌آوریم.
داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بردارهای $(1, 0, 7)$, $(0, 1, -2)$, $(1, 0, -2)$ یک پایه برای فضای سطري A تشکیل می‌دهند، 2 بردارهای سطري ماتریس A همان بردارهای سطري ماتریس A^t هستند. در این صورت فضای سطري A همان فضای سطري A^t است. بدین‌گونه می‌توانیم یک پایه برای فضای سطري ماتریس A با به دست آوردن یک پایه برای فضای سطري A^t به دست آوریم.

مثال ۵: یک پایه برای فضای سطري ماتریس مفروض زیر به دست آورید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

حل: ترانهاده A عبارت است از:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$



فضای ستونی A تبدیل به فضای سطحی A^t می‌شود. اینک پایه‌ای برای فضای سطحی A^t می‌باشد. یک فرم سطحی پلکانی تحول یافته برای A^t به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & +6 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بردارهای غیرصفر سطحی این ماتریس، یعنی $(1, 0, 5)$, $(0, 1, -3)$ یک پایه برای فضای سطحی A^t هستند. این بردارها را به صورت ستونی نوشتند تا یک پایه برای فضای ستونی A به دست آید. بردارهای زیر یک پایه برای فضای ستونی A هستند.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

قضیه اخیر را برای تعیین یک پایه برای زیرفضای V که توسط یک مجموعه بردار تولید شده است نیز می‌توان بکار گرفت. بردارها را به صورت بردارهای سطحی یک ماتریس نوشتند، و فرم پلکانی تحول یافته آن را محاسبه می‌کنیم. بردارهای غیرصفر این فرم پلکانی تحول یافته یک پایه برای V به دست می‌دهد. مثال بعدی روش کار را روشن می‌کند.

مثال ۶: پایه‌ای برای زیرفضای V از \mathbb{R}^n که توسط بردارهای زیر تولید می‌شود به دست آورید

$$(1, 2, 3, 4), (-1, -1, -4, -2), (3, 4, 11, 8)$$

حل: ماتریس A را چنان می‌سازیم که بردارهای فوق بردارهای سطحی آن باشند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 11 & 8 \end{bmatrix}$$

یک فرم پلکانی تحول یافته برای A به دست می‌آوریم. داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 11 & 8 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بردارهای غیرصفر این فرم پلکانی تحول یافته، یعنی $(1, 0, 5, 0)$ و $(0, 1, -1, 2)$ پایه‌ای برای زیرفضای V هستند.

قضیه بعدی نتایج و مفاهیم جبری را که در این درس در مناسبات‌هایی آمده‌اند یکجا ارائه می‌کند.



۵-۱۰-۵ قضیه فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد. گزاره‌های زیر معادلند.

الف) A وارون پذیر است.

ب) $|A| = 0$ (ا) نامنفرد است.

ج) دستگاه معادلات $AX = B$ دارای جواب منحصر به فرد است.

د) با A همارز سطیری است.

ه) $\text{rank}(A) = n$

برهان. قبل از دیده ایم که (الف)، (ب)، (ج) و (د) معادلند. در تمرین‌ها از شما خواسته شده است تا ثابت کنید که (د) و (ه) نیز معادلند. این نشان می‌دهد که همه احکام معادلند.

قضیه قبلی به ما می‌گوید که چگونه رتبه‌ی یک ماتریس اطلاعاتی در خصوص یکتایی جواب یک دستگاه n معادله خطی در n مجهول به دست می‌دهد. مفهوم رتبه نقش مهمی در شناخت رفتار دستگاه‌های معادلات خطی از هر اندازه‌ای به دست می‌دهد. تاکنون ملاحظه کرده‌ایم که چگونه دستگاه‌های معادلات خطی می‌توانند دارای جواب منحصر به فرد، جواب‌های بیشمار، و یا فاقد جواب باشند. چنین اوضاعی را می‌توان بر حسب رتبه‌های ماتریس افزوده و ماتریس ضرایب دسته‌بندی کرد.

۵-۱۰-۶ قضیه. یک دستگاه m معادله با n مجهول را در نظر می‌گیریم.

۱) هرگاه ماتریس افزوده و ماتریس ضرایب دارای رتبه برابر r بوده و $n = r$ ، جواب منحصر به فرد است.

۲) هرگاه ماتریس افزوده و ماتریس ضرایب دارای رتبه برابر r بوده و $n > r$ جواب‌های زیادی وجود دارد.

۳) هرگاه ماتریس افزوده و ماتریس ضرایب دارای رتبه‌های مخالف باشند. جوابی وجود ندارد.

برهان. فرض کنیم دستگاه مورد نظر به صورت زیر بوده باشد

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$



این دستگاه را می‌توان چنین نوشت:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

و یا

$$x_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b} \quad (1)$$

اکنون به سه حالت ممکنه توجه می‌کنیم

- (۱) چون رتبه‌ی ماتریس ضرایب و ماتریس افزوده یکی است، باید \mathbf{b} ترکیبی خطی از $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ باشد. به علاوه، چون این رتبه برابر n است، بردارهای $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ مستقل خطی بوده از این رو پایه‌ای برای فضای سنتوئی ماتریس افزوده تشکیل می‌دهند. بنابراین معادله (۱) دارای جواب منحصر به‌فرد بوده و جواب دستگاه یکتا است.
- (۲) چون رتبه ماتریس‌های ضرایب و افزوده یکسان است، \mathbf{b} باید وابسته‌ی خطی از بردارهای $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ باشد. با این حال چون این رتبه کوچکتر از n است، بردارهای $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ وابسته‌ی خطی‌اند. بنابراین \mathbf{b} را می‌توان به بیش از یک طریق به صورت ترکیبی خطی از $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ نوشت. در این صورت معادله (۱) دارای جواب‌های زیادی است؛ جواب دستگاه وجود داشته اما منحصر به‌فرد نمی‌باشد.
- (۳) چون رتبه ماتریس افزوده برابر رتبه ماتریس ضرایب نمی‌باشد، \mathbf{b} مستقل خطی از بردارهای $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ می‌باشد. در این صورت معادله (۱) جواب ندارد؛ و جوابی برای دستگاه وجود ندارد.

۷-۱۰-۵ تمرین (صفحه ۲۵۶ و ۲۵۷)

۱۱-۵ بردارهای متعامد و تصاویر

اکنون توجه خود را به مجموعه بردارهای متعامد که یکه نیز می‌باشند معطوف می‌داریم. روشی برای ساختن اینگونه بردارها در \mathbb{R}^n معرفی می‌کنیم. ویژگی‌های خاص این مجموعه بردارها نیز مورد بحث قرار می‌گیرد. تعریف. مجموعه برداری را در فضای برداری V یک مجموعه متعامد نامیم هرگاه هر زوج بردار این مجموعه متعامد باشند چنین مجموعه را یکه متعامد نامیم هرگاه متعامد بوده و هر بردار آن برداری یکه باشد.



مثال ۱: نشان دهید مجموعه $\{(1, 0, 0), (0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}), (0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5})\}$ یک مجموعه یکه متعامد است.

حل: ابتدا نشان می‌دهیم که هر زوج بردار این مجموعه متعامد است. داریم:

$$(1, 0, 0) \cdot (0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = 0; (1, 0, 0) \cdot (0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) = 0; (0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}) \cdot (0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) = 0$$

در این صورت این بردارها دو به دو متعامدند. حال نشان می‌دهیم که هر بردار یکه است. داریم:

$$\begin{aligned} \|(1, 0, 0)\| &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1 \\ \|(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5})\| &= \sqrt{0^2 + (\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2} = 1 \\ \|(0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5})\| &= \sqrt{0^2 + (\frac{4}{5})^2 + (-\frac{3}{5})^2} = 1 \end{aligned}$$

بردارها بردارهای یکه بوده و متعامدند. از این رو مجموعه مورد نظر یک مجموعه یکه متعامد است.

۱-۱-۵ قضیه یک مجموعه یکه متعامد (از بردارهای غیرصفر) در یک فضای برداری مستقل خطی است.

برهان. فرض کنیم $\{v_1, \dots, v_m\}$ یک مجموعه یکه متعامد از بردارهای غیرصفر در فضای برداری V باشد. تساوی زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m = 0$$

نشان می‌دهیم که $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_m = 0$ که ثابت می‌کند این بردارها مستقل خطی‌اند. فرض کنیم v_i خارج از مجموعه یکه متعامد باشد. حاصل ضرب نقطه‌ای این بردار را در دو طرف تساوی گرفته و از خواص حاصل ضرب نقطه‌ای استفاده می‌کنیم. داریم

$$(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m) \cdot v_i = 0 \cdot v_i$$

$$c_1 v_1 \cdot v_i + c_2 v_2 \cdot v_i + \dots + c_m v_m \cdot v_i = 0$$

چون این بردارها دو به دو متعامدند، $v_j \cdot v_i = 0$ مگر آنکه $i = j$ بنابراین

$$c_i v_i \cdot v_i = 0$$



چون v_i برداری غیرصفر است، $v_i \neq 0$. بنابراین $c_i = 0$. با قرار دادن $m = 1, 2, \dots, n$ ، حاصل

می‌شود که

$$c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_m = 0$$

و این ثابت می‌کند که بردارها مستقل خطی هستند.

برای یک فضای برداری ممکن است پایه‌های چیزی وجود داشته باشد. اینکه از چه پایه‌ای استفاده کنیم بستگی به مسئله مورد بحث دارد. پایه‌ای انتخاب می‌شود که به بهترین وجهی به موقعیت مربوطه بکار می‌آید.

غالباً مناسب‌ترین پایه یک پایه متعامد و یا یک مجموعه یکه متعامد می‌باشد.

تعریف. یک پایه را که یک مجموعه متعامد باشد یک پایه پایه متعامد می‌نامیم. پایه‌ای را که یک مجموعه یکه متعامد باشد یک پایه یکه متعامد می‌نامیم.

متذکر می‌شویم که پایه‌های استاندارد پایه‌های یکه متعامد هستند. پایه‌های استاندارد

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{R}^1 : \{(1, 0), (0, 1)\} \\ \mathbf{R}^2 : \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \\ \mathbf{R}^n : \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)\} \end{array} \right\} \text{پایه‌های یکه متعامد}$$

می‌دانیم که هر یک بردار فضای برداری را می‌توان به گونه‌ای منحصر به فرد به شکل ترکیبی خطی از بردارهای پایه نوشت. قضیه‌ی بعدی می‌بین آن است که ک پایه یکه متعامد در بحث و بررسی یک فضای برداری از ویژگی مفیدتری برخوردار است زیرا ترکیبات خطی را ساده‌تر می‌توان یافت.

۲-۱۱-۵ قضیه. فرض کنیم $\{u_1, \dots, u_n\}$ یک پایه یکه متعامد برای فضای برداری V باشد.

همچنین فرض کنیم v یک بردار در V باشد. v را به صورت زیر به شکل ترکیبی خطی از این بردارهای پایه می‌توان نوشت

$$v = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2 + \dots + (v \cdot u_n)u_n$$

برهان. چون $\{u_1, \dots, u_n\}$ یک پایه است، اسکالارهایی مانند c_1, \dots, c_n هست به قسمی که

$$v = c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n$$

نشان می‌دهیم که $c_n = v \cdot u_n, \dots, c_1 = v \cdot u_1$ و



فرض کنیم u_i ، i امین بردار پایه باشد. حاصل ضرب نقطه‌ای دو طرف این تساوی را با u_i گرفته و از خواص حاصل ضرب نقطه‌ای استفاده می‌کنیم به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} v \cdot u_i &= (c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n) \cdot u_i \\ &= c_1 u_1 \cdot u_i + (c_2 u_2) \cdot u_i + \cdots + (c_n u_n) \cdot u_i \end{aligned}$$

چون بردارهای u_1, u_2, \dots, u_n دو به دو متعامدند، $u_j \cdot u_i = 0$ مگر آنکه $i = j$ بنا براین

$$v \cdot u_i = c_i u_i \cdot u_i$$

به علاوه، چون پایه مورد بحث یکه متعامد است، $u_i \cdot u_i = 1$. بنابراین

$$v \cdot u_i = c_i$$

بدین ترتیب، با قرار دادن $i = 1, 2, \dots, n$ به دست می‌آوریم $c_1 = v \cdot u_1$ و $c_n = v \cdot u_n$. در نتیجه می‌توانیم بنویسیم

$$v = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2 + \cdots + (v \cdot u_n)u_n$$

مثال ۲: بردارهای u_1, u_2 و u_3 ارائه شده در زیر یک پایه یکه متعامد \mathbb{R}^3 هستند. بردار $(7, -5, 10)$ را به صورت ترکیبی از این بردارها بنویسید.

$$u_1 = (1, 0, 0), \quad u_2 = (0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}), \quad u_3 = (0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$$

حل: داریم

$$v \cdot u_1 = (7, -5, 10) \cdot (1, 0, 0) = 7$$

$$v \cdot u_2 = (7, -5, 10) \cdot (0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = 5$$

$$v \cdot u_3 = (7, -5, 10) \cdot (0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) = -10$$

بنابراین

$$(7, -5, 10) = 7(1, 0, 0) + 5(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}) - 10(0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$$

اکنون مفهوم تصویر یک بردار را روی بردار دیگر معرفی می‌کنیم. از نظر شهودی، مفهوم تصویر مبین است که «چه مقدار» از یک بردار همسو در راستای بردار دیگری است. این مفهوم بهویژه در بررسی و تحلیل نیروها مفید می‌باشد، و آن وقتی است که بخواهیم اثر فیزیکی یک نیرو را در جهت خاصی بدانیم. ما از تصاویر به منظور ساختن بردارهای یکه متعامد استفاده می‌بریم.



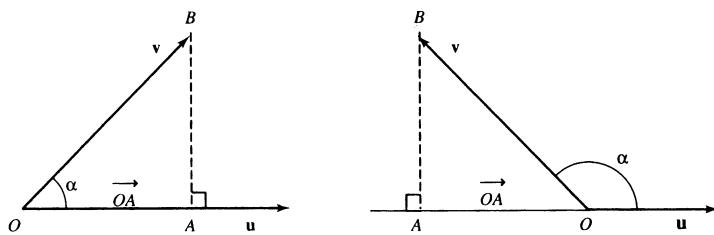
۱۲-۵ تصویر یک بردار روی بردار دیگر

فرض کنیم v و u بردارهایی در \mathbb{R}^n با زاویه بین α باشند. شکل ۹-۵ ملاحظه شود. بردار $\overrightarrow{0A}$ میان آن است که «چه مقدار» از v همسو در راستای u است. $\overrightarrow{0A}$ را تصویر v روی u می‌نامیم. اینک عبارتی برای $\overrightarrow{0A}$ می‌یابیم. ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} 0A &= 0B \cos \alpha \\ &= \|v\| \cos \alpha \\ &= \|v\| \left(\frac{v}{\|v\|} \cdot \frac{u}{\|u\|} \right) \\ &= v \cdot \frac{u}{\|u\|} \end{aligned}$$

جهت بردار $\overrightarrow{0A}$ را برابر بردار واحد $\frac{u}{\|u\|}$ تعریف می‌کنیم. بنابراین

$$\overrightarrow{0A} = \left(v \cdot \frac{u}{\|u\|} \right) \frac{u}{\|u\|} = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$$



(a)

Projection of v onto u

$$\overrightarrow{OA} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u}$$

(b)

تصویر v روی u

$$\overrightarrow{0A} = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$$

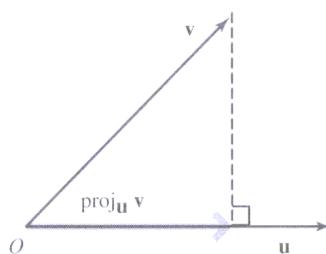
شکل ۹-۵



تعریف. تصویر بردار v روی بردار غیرصفر u در v , که به proj_u^v نشان داده می‌شود, چنین تعریف می‌گردد:

$$\text{proj}_u^v = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$$

شکل ۵-۱۰ ملاحظه شود. اصطلاح مؤلفه v در جهت u نیز برای proj_u^v به کار می‌رود



$$\text{proj}_u v = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$$

شکل ۵-۱۰

مثال ۳: تصویر بردار $v = (6, 7)$ روی بردار $u = (1, 4)$ پیدا کنید

حل: برای این بردارها داریم

$$v \cdot u = (6, 7) \cdot (1, 4) = 6 + 28 = 34$$

$$u \cdot u = (1, 4) \cdot (1, 4) = 1 + 16 = 17$$

لذا

$$\text{proj}_u^v = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u = \frac{34}{17} (1, 4) = (2, 8)$$

پس تصویر بردار v روی u برابر $(2, 8)$ است.

فرض کنیم بردار $v = (6, 7)$ نمایشگر نیروی باشد که بر یک جسم واقع در مبداء اثر می‌کند. در این صورت $\text{proj}_u^v = (2, 8)$ مؤلفه‌ای از نیرو است که در جهت بردار $u = (1, 4)$ می‌باشد. از نظر فیزیکی $(2, 8)$ اثر این نیرو در جهت بردار u می‌باشد.

اینک روشی برای ساختن یک پایه یکه متعامد براساس یک پایه مفروض ارائه می‌کنیم در این روش از بردارهای تصویر استفاده می‌شود.



۱۳-۵ قضیه فرآیند گرام-اشمیت یکه متعامدسازی

فرض کنیم $\{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای فضای برداری V باشد. مجموعه بردارهای $\{u_1, \dots, u_n\}$ که به طریق ذیل تعریف می‌شوند متعامدند. برای به دست آوردن یک پایه یکه متعامد V , هریک از بردارهای u_1, \dots, u_n را یکه سازی می‌کنیم.

$$u_1 = v_1$$

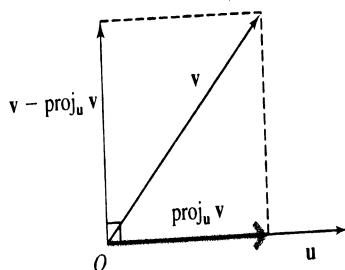
$$u_2 = v_2 - \text{proj}_{u_1}^{v_2}$$

$$u_3 = v_3 - \text{proj}_{u_1}^{v_3} - \text{proj}_{u_2}^{v_3}$$

⋮

$$u_n = v_n - \text{proj}_{u_1}^{v_n} - \dots - \text{proj}_{u_{n-1}}^{v_n}$$

برهان. اگر u و v بردارهایی در V باشند، آنگاه بنا بر جمع برداری $v - \text{proj}_u v$ برع u عمود است. شکل ۱۱-۵ ملاحظه شود. از این نتیجه برای اثبات قضیه استفاده می‌کنیم. ساختار بردار u_i را در نظر می‌گیریم. با تقریق $\text{proj}_{u_i}^{v_j}$ از v_i برداری به دست می‌آید که u_1 عمود است یا تقریق $\text{proj}_{u_i}^{v_j}$ از بردار حاصله برداری به دست می‌دهد که بر u_2 عمود است، در حالی که هنوز عمودیت بر u_1 محفوظ می‌ماند و با ادامه این منجر به برداری مانند u_j می‌شود که بر هر یک از بردارهای قبلی u_1, u_2, \dots, u_{j-1} عمود است.



$$(v - \text{proj}_u v) \perp u$$

شکل ۱۱-۵

مثال ۴: مجموعه $\{(1, 2, 0, 3), (4, 0, 5, 8), (8, 1, 5, 6)\}$ در \mathbb{R}^4 مستقل خطی است. از این رو بردارها یک پایه برای یک زیرفضای سه-بعدی مانند V از \mathbb{R}^4 تشکیل می‌دهند. یک پایه یکه متعامد برای V بسازید.



حل: فرض کنیم $(\lambda, 1, 5, 6)$ و $v_1 = (1, 2, 0, 3)$ اینک از فرایند گرام-اشمیت استفاده می‌کنیم و یک مجموعه‌ی متعامد $\{u_1, u_2, u_3\}$ از این بردارها می‌سازیم.

$$\begin{aligned}
 u_1 &= v_1 = (1, 2, 0, 3) \\
 u_2 &= v_2 - \text{proj}_{u_1}^{v_2} = v_2 - \frac{(v_2 \cdot u_1)}{u_1 \cdot u_1} u_1 \\
 &= (4, 0, 5, 8) - \frac{(4, 0, 5, 8) \cdot (1, 2, 0, 3)}{(1, 2, 0, 3) \cdot (1, 2, 0, 3)} (1, 2, 0, 3) \\
 &= (4, 0, 5, 8) - 2(1, 2, 0, 3) \\
 &= (2, -4, 5, 2) \\
 u_3 &= v_3 - \text{proj}_{u_1}^{v_3} - \text{proj}_{u_2}^{v_3} = v_3 - \frac{v_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{v_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 \\
 &= (8, 1, 5, 6) - \frac{(8, 1, 5, 6) \cdot (1, 2, 0, 3)}{(1, 2, 0, 3) \cdot (1, 2, 0, 3)} (1, 2, 0, 3) \\
 &\quad - \frac{(8, 1, 5, 6) \cdot (2, -4, 5, 2)}{(2, -4, 5, 2) \cdot (2, -4, 5, 2)} (2, -4, 5, 2) \\
 &= (8, 1, 5, 6) - 2(1, 2, 0, 3) - 1(2, -4, 5, 2) \\
 &= (4, 1, 0, -2)
 \end{aligned}$$

مجموعه $\{(1, 2, 0, 3), (2, -4, 5, 2), (4, 1, 0, -2)\}$ یک مجموعه‌ی متعامد برای V است.

این واقعیت را که حاصل ضرب نقطه‌ای هر زوج از این بردارها برابر صفر است می‌توانید چک کنید.

اکنون فرم هر یک از این بردارها را محاسبه کرده و از آنجا بردارها را یک‌سازی کرده تا یک پایه متعامد

به دست آوریم. داریم:

$$\begin{aligned}
 \|(1, 2, 0, 3)\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{14} \\
 \|(2, -4, 5, 2)\| &= \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 5^2 + 2^2} = 7 \\
 \|(4, 1, 0, -2)\| &= \sqrt{4^2 + 1^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}
 \end{aligned}$$

از این مقدارها استفاده کرده و بردارها را یک‌های می‌کنیم، در نهایت به پایه یک‌های متعامدی برای V دست می‌یابیم:

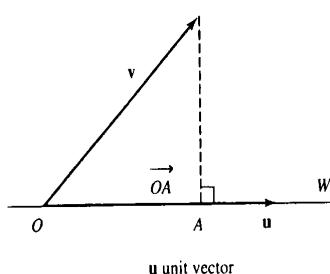
$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, 0, \frac{3}{\sqrt{14}} \right), \left(\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{2}{7} \right), \left(\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{21}} \right) \right\}$$



۱۴-۵ تصویر یک بردار روی یک زیرفضا

تاکنون تصویر یک بردار را بر روی بردار دیگر تعریف کردہ ایم. اینک این مفهوم را به تصویر یک بردار بر روی یک زیرفضا تعمیم می‌دهیم. از نظر شهودی، تصویر یک بردار روی یک زیرفضا مبین آن است که «چه مقدار» از یک بردار در آن زیرفضا واقع است.

فرض کنیم \overrightarrow{OA} تصویر بردار v روی بردار u در \mathbb{R}^n باشد. شکل ۱۲-۵ ملاحظه شود. فرض کنیم W زیرفضای یک بعدی باشد که متشكل از همه بردارهایی است که بر خط تعریف شده به وسیله u واقع‌اند. یادآوری می‌شود که تصویر v روی هر بردار دیگر u که در این زیرفضا واقع باشد همان \overrightarrow{OA} است. بنابراین می‌توانیم تصویر برداری بردار v روی زیرفضای W را، که با نماد proj_W^v نشان داده می‌شود، برابر \overrightarrow{OA} تعریف کنیم. ساده‌ترین بیان \overrightarrow{OA} وقتی به دست می‌آید که u را بردار



$$\text{proj}_W^v = \overrightarrow{OA} = (v \cdot u)u$$

u بردار واحد است.

$$\text{proj}_W^v = \overrightarrow{OA} = (v \cdot u)u$$

شکل ۱۲-۵

یک اختیار کنیم. در این صورت به دست می‌آوریم

$$\text{proj}_W^v = \overrightarrow{OA} = (v \cdot u)u \quad \text{یک بردار یکه}$$

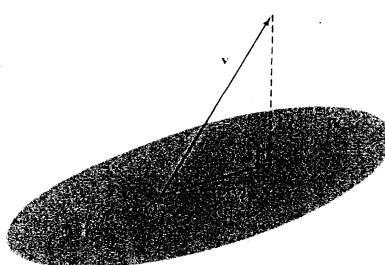
هرگاه W زیرفضایی از بعد n بوده باشد، آنگاه این مفهوم تصویر را می‌توانیم به شکلی طبیعی تعمیم دهیم. تصویر v روی W ترکیبی خطی از بردارهایی یکه متعامد از W می‌باشد که در ذیل تعریف می‌گردد.



تعریف. فرض کنیم W زیرفضایی از \mathbb{R}^n (و یا فضای کلی V) باشد. همچنین فرض کنیم $\{u_1, \dots, u_n\}$ یک پایه یک متعامد W باشد. هرگاه v برداری در \mathbb{R}^n (یعنی V) باشد، تصویر v روی W که با proj_W^v نشان داده می‌شود، چنین تعریف می‌گردد.

$$\text{proj}_W^v = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2 + \dots + (v \cdot u_n)u_n$$

شکل ۱۳-۵ ملاحظه شود



$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\} \text{ orthonormal basis for } W$$

$$\text{proj}_W \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \dots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_m)\mathbf{u}_m$$

یک پایه یک متعامد W است و $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

$$\text{proj}_W^v = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2 + \dots + (v \cdot u_n)u_n$$

شکل ۱۳-۵

گوییم بردار v بر زیرفضای W عمود است هرگاه v بر هر بردار W عمود باشد. قضیه بعدی می‌بین آن است که هرگاه v برداری در \mathbb{R}^n (یعنی V) و W زیرفضایی از \mathbb{R}^n باشد، آنگاه می‌توانیم v را به صورت برداری واقع در W و برداری عمود بر W تجزیه کنیم و این حقیقی است که از نظر شهودی برای وقتی که V فضاهای ملموس \mathbb{R}^n ($n \leq 3$) است قابل ملموس می‌باشد.

۱-۱۴-۵ قضیه. فرض کنیم W زیرفضایی از \mathbb{R}^n باشد. هر بردار v در \mathbb{R}^n را می‌توان به صورتی

منحصر به فرد به شکل

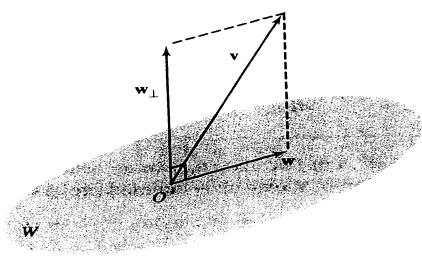
$$v = w_1 + w_2$$

نوشت که در آن $w_1 \in W$ و $w_2 \in W$ عمود است. بردارهای w_1 و w_2 عبارتند از:

$$w_1 = \text{proj}_W^v \quad , \quad w_2 = v - \text{proj}_W^v$$



شکل ۱۴-۵ ملاحظه شود.



$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}_{\perp}, \text{ where } \\ \mathbf{w} = \text{proj}_W \mathbf{v} \text{ and } \mathbf{w}_{\perp} = \mathbf{v} - \text{proj}_W \mathbf{v}$$

$$v = w_1 + w_{\perp}$$

$$w_1 = \text{proj}_W^v, \quad w_{\perp} = v - \text{proj}_W^v$$

شکل ۱۴-۵

برهان. ملاحظه می‌کنیم که

$$w_1 + w_{\perp} = \text{proj}_W^v + (v - \text{proj}_W^v)$$

به علاوه w_1 در W است (چرا؟) باقی می‌ماند اثبات اینکه $v - \text{proj}_W^v$ عمود است. ابتدا نشان می‌دهیم که proj_W^v بر هر بردار پایه W عمود است. سپس به آسانی می‌توانیم نتیجه بگیریم که $v - \text{proj}_W^v$ بر هر بردار دلخواه W عمود است، داریم:

$$\begin{aligned} u_j \cdot (v - \text{proj}_W^v) &= u_j \cdot (v - (v \cdot u_1)u_1 - \cdots - (v \cdot u_n)u_n) \\ &= u_j \cdot v - u_j \cdot (v \cdot u_1)u_1 - \cdots - u_j \cdot (v \cdot u_n)u_n \\ &= u_j \cdot v - (v \cdot u_1)u_j \cdot u_1 - \cdots - (v \cdot u_n)u_j \cdot u_n \\ &= u_j \cdot v - v \cdot u_j \quad u_j \cdot u_i = 0 \text{ زیرا} \\ &= 0 \end{aligned}$$

اکنون فرض کنیم $w^{\perp} = c_1u_1 + \cdots + c_nu_n$ برداری دلخواه از W باشد. داریم

$$w^{\perp} \cdot (v - \text{proj}_W^v) = (c_1u_1 + \cdots + c_nu_n) \cdot (v - \text{proj}_W^v)$$



$$= c_1 u_1 \cdot (v - \text{proj}_W^v) + \cdots + c_n u_n \cdot (v - \text{proj}_W^v)$$

$$= 0$$

از این رو $v - \text{proj}_W^v$ عمود است.

اثبات یکتایی تجزیه آسان بوده و به دانشجو واگذار می‌شود.

مثال ۵: بردار $(3, 2, 6)$ را در \mathbb{R}^3 در نظر می‌گیریم. فرض کنیم W زیرفضایی از \mathbb{R}^3 متشکل از همه بردارهایی به صورت (a, b, b) باشد. بردار v را به صورت حاصل جمع برداری در W و برداری عمود بر W تجزیه کنید.

حل: ابتدا محتاج یک پایه یکم متعامد از W هستیم. هر بردار دلخواه W را به صورت زیر می‌توانیم بنویسیم

$$(a, b, b) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 1)$$

مجموعه $\{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ زیرفضای W را تولید کرده و مستقل خطی نیز می‌باشد. این بردارها متعامدند. بردارها را نرمال کرده و به یک پایه یکم متعامد $\{u_1, u_2\}$ برای W می‌رسیم:

$$u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

داریم

$$\begin{aligned} w_1 &= \text{proj}_W^v = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2 \\ &= ((3, 2, 6) \cdot (1, 0, 0))(1, 0, 0) + ((3, 2, 6) \cdot (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}))(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ &= (3, 0, 0) + (0, 4, 4) = (3, 4, 4) \end{aligned}$$

همچنین

$$w_2 = v - w_1 = (3, 2, 6) - (3, 4, 4) = (0, -2, 2)$$

در این صورت تجزیه مطلوب v عبارت است از:

$$(3, 2, 6) = (3, 4, 4) + (0, -2, 2)$$

در این تجزیه بردار $(4, 2, 0)$ در W واقع بوده و بردار $(0, -2, 2)$ بر W عمود است.



۱۵-۵ فاصله یک نقطه از یک زیرفضا

فاصله یک نقطه از نقطه‌ای دیگر را در \mathbb{R}^n مورد بررسی قرار داده‌ایم. اکنون قادریم تا فاصله یک نقطه از یک زیرفضا را در \mathbb{R}^n مورد بحث و بررسی قرار دهیم. فرض کنیم $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ نقطه‌ای در \mathbb{R}^n و W زیرفضایی از \mathbb{R}^n باشد. همچنین فرض کنیم $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ نقطه‌ای در W باشد. طبیعت‌ترین راه برای تعریف فاصله x از W , که به $d(\mathbf{x}, W)$ نشان داده می‌شود، آن است که آن را به عنوان مینیمم فاصله‌های \mathbf{x} از نقاط W بینگاریم.

$$d(\mathbf{x}, W) = \min\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in W\}$$

اکنون سعی می‌کنیم فرمولی برای $d(\mathbf{x}, W)$ بیابیم. می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x \text{proj}_W^{\mathbf{x}}) + (\text{proj}_W^{\mathbf{x}} - y)$$

این عبارت تجزیه‌ای از بردار $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ به حاصل جمع بردار $(\mathbf{x} - \text{proj}_W^{\mathbf{x}})$ که عمود بر W و بردار $(\text{proj}_W^{\mathbf{x}} - y)$ که واقع در W است می‌باشد.

از این رو بنابر قضیه فیثاغورس داریم

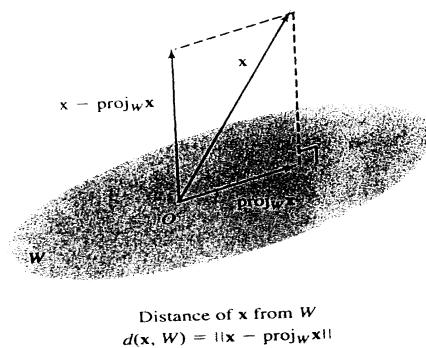
$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} - \text{proj}_W^{\mathbf{x}}\|^2 + \|\text{proj}_W^{\mathbf{x}} - y\|^2$$

بنابراین $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, که برابر $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ است, وقتی دارای مینیممی برابر $\|\mathbf{x} - \text{proj}_W^{\mathbf{x}}\|$ است که $\text{proj}_W^{\mathbf{x}} - y = 0$. لذا

$$d(\mathbf{x}, W) = \|\mathbf{x} - \text{proj}_W^{\mathbf{x}}\|$$

و این عبارت برای هر فضای برداری کلی‌تری مانند V نیز قابل تعریف است. به عبارت دیگر فاصله یک نقطه از یک زیرفضا همان فاصله آن نقطه از تصویر (بردار نقطه) در این زیرفضا است. شکل ۱۵-۵ ملاحظه شود.





فاصله \mathbf{x} از W

$$d(\mathbf{x}, W) = \|\mathbf{x} - \text{proj}_W \mathbf{x}\|$$

شکل ۱۵-۵

مثال ۶: فاصله نقطه $(4, 1, -2)$ در \mathbb{R}^3 را از زیرفضای W متشکل از بردارهای به فرم (a, b, b) پیدا کنید.

حل: از مثال قبلی می‌دانیم که مجموعه $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ که در آن

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

یک پایه یکه متعامد برای W است. اکنون $\text{proj}_W^{\mathbf{x}}$ را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \text{proj}_W^{\mathbf{x}} &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 \\ &= ((4, 1, -2) \cdot (1, 0, 0)) (1, 0, 0) + ((4, 1, -2) \cdot (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})) (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ &= (4, 0, 0) + (0, -2, -2) = (4, -2, -2) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\|\mathbf{x} - \text{proj}_W^{\mathbf{x}}\| = \|(4, 1, -2) - (4, -2, -2)\| = \|(0, 4, -4)\| = \sqrt{32}$$

در نتیجه فاصله \mathbf{x} از W برابر $\sqrt{32}$ است.

قبل از این ملاحظه کردیم که وقتی نگاهمان را به ماتریس‌ها به شکلی از ستون‌ها و یا سطرها تشکیل شده‌اند تعبیر می‌کنیم به مفهوم مهم رتبه ماتریس دست یازیدیم. اکنون رده مهمی از ماتریس‌ها را معرفی



می‌کنیم که ستون‌ها و سطرهای آنها تشکیل مجموعه‌های یکه متعامد می‌دهند. خواهیم دید که این‌گونه ماتریس‌ها نقش محاسباتی مهمی ایفا می‌کنند. در فصل بعدی ملاحظه خواهیم کرد که این‌گونه ماتریس‌ها خواص هندسی ویژه‌ای داشته و برای تعریف توابع بر یک فضای برداری به کار می‌آیند.

۱۶-۵ ماتریس‌های متعامد

تعریف. یک ماتریس مربعی را که ستون‌های آن تشکیل یک مجموعه یکه متعامد می‌دهند یک ماتریس متعامد می‌نامیم.

مثال ۷: نشان دهید که ماتریس A یک ماتریس متعامد است

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

حل: بردارهای ستونی A عبارتند از:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

$$\|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

بنابراین بردارهای ستونی A بردارهای یکه بوده و متعامد هستند. در نتیجه A یک ماتریس متعامد است.

اینک چهار ویژگی مهم ماتریس‌های متعامد را شرح می‌دهیم.

۱-۱۶-۵ قضیه. فرض کنیم A یک ماتریس متعامد باشد. در این صورت

(۱) بردارهای سطری A تشکیل یک مجموعه یکه متعامد می‌دهند.

(۲) وارون پذیر است که در آن $A^{-1} = A^t$

(۳) A^{-1} نیز یک ماتریس متعامد است.

(۴) $|A| = \pm 1$



برهان. ابتدا قسمت (۲) را ثابت می‌کنیم. قسمت‌های دیگر از آن حاصل می‌شود.

(۲) حاصل ضرب $P = A^t A$ را در نظر می‌گیریم. محاسبه این حاصل ضرب مستلزم محاسبه ضرب نقطه‌ای هر سطر A^t در ستون‌های ماتریس A می‌باشد. چون سطرهای A^t همان ستون‌های A هستند، و این سطرهای یک مجموعه یک‌متعامدند، نتیجه می‌گیریم که $p_{ij} = 1$ هرگاه $j = i$ و $p_{ij} = 0$ هرگاه $i \neq j$. لذا $A^t A = I$ ماتریس همانی است.

فرض کنیم یک ماتریس A $n \times n$ باشد، چون ستون‌های A یک مجموعه یک‌متعامدند، این ستون‌ها مستقل خطی بوده و از این رو رتبه A برابر n است. در نتیجه A^{-1} وجود دارد. حاصل ضرب دو طرف $A^t A = I$ را در A^{-1} ضرب می‌کیم و $A^t = A^{-1}$ بدست می‌آید. از این نتیجه $AA^t = I$ و $AA^{-1} = I$ پس $A^{-1} = A^t$. از این نتیجه می‌شود که بردارهای سطروی A تشکیل یک مجموعه متعامد می‌دهند.

(۳) چون بردارهای سطروی A تشکیل یک مجموعه یک‌متعامد می‌دهند. ستون‌های A^t نیز یک مجموعه یک‌متعامد هستند. بنابراین A^t یک ماتریس متعامد است، یعنی A^{-1} یک‌متعامد است.

(۴) چون $AA^t = I$ ، از ویژگی‌های دترمینان‌ها به دست می‌آید که

$$|AA^t| = 1, |A||A^t| = 1, |A||A| = 1, |A|^2 = 1$$

در نتیجه $|A| = \pm 1$

۲-۱۶-۵ تمرین

(۱) کدامیک از دسته بردارهای زیر یک مجموعه متعامد است؟

ب) $\{(3, -1), (0, 5)\}$

د) $\{(4, 1), (2, -3)\}$

الف) $\{(1, 2), (2, -1)\}$

ج) $\{0, -2\}, (3, 0)$

(۲) کدامیک از دسته بردارهای زیر یک مجموعه متعامد است؟

الف) $\{(1, 2, 1), (4, -2, 0), (2, 4, -1, 0)\}$

ب) $\{(3, -1, 1), (2, 0, 1), (1, 1, -2)\}$

ج) $\{(1, 4, 2), (-2, -1, 3), (6, -1, -1)\}$

د) $\{(1, 2, -1, 1), (3, 1, 4, -1), (0, 1, -1, -3)\}$



۳) کدامیک از مجموعه‌های زیر یک مجموعهٔ یکه متعامد است؟

الف) $\left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right) \right\}$

ب) $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}} \right), \left(\frac{-2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right) \right\}$

ج) $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(0, 1, 0 \right) \right\}$

د) $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right), \left(0, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$

۴) بردارهای u_1 , u_2 و u_3 مشروح در ذیل یک پایهٔ یکه متعامد \mathbb{R}^3 می‌باشند. بردار $v = (2, -3, 1)$

را به صورت ترکیبی خطی از این بردارها بنویسید.

$$u_1 = (0, -1, 0), \quad u_2 = \left(\frac{2}{\delta}, 0, -\frac{1}{\delta} \right), \quad u_3 = \left(\frac{4}{\delta}, 0, \frac{2}{\delta} \right)$$

۵) بردارهای u_1 , u_2 و u_3 ذیل یک پایهٔ یکه متعامد \mathbb{R}^3 هستند. بردار $v = (7, 5, -1)$ را به صورت

ترکیبی از بردارها بنویسید.

$$u_1 = (1, 0, 0), \quad u_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad u_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right)$$

۶) تصویر بردار v را روی بردار u در هر مورد پیدا کنید.

الف) $u = (1, 2)$ و $v = (7, 4)$

ب) $u = (3, -2)$ و $v = (-1, 5)$

ج) $u = (1, 2, 3)$ و $v = (4, 6, 4)$

د) $u = (-1, 3, 0)$ و $v = (6, -8, 7)$

۷) تصویر بردار v را روی بردار u در هر مورد پیدا کنید.

الف) $u = (2, 5)$ و $v = (1, 2)$

ب) $u = (2, 4)$ و $v = (-1, 3)$

ج) $u = (-1, 3, 2)$ و $v = (1, 2, 3)$

۸) بردارهای زیر یک پایهٔ \mathbb{R}^2 هستند. با استفاده از فرایند گرام-اشمیت از این بردارها یک مجموعهٔ یکه

متعامد برای \mathbb{R}^2 بسازید.



$$\text{ب) } (1, 1, 2) \text{ و } (1, 2, 6) \quad \text{الف) } (-1, 3, 1) \text{ و } (1, 2, 1)$$

$$\text{ج) } (-1, 4, 2) \text{ و } (1, -1, 2)$$

۹) بردارهای زیر یک پایه \mathbb{R}^3 هستند. با استفاده از فرایند گرام-اشمیت از این بردارها یک مجموعه یکه متعامد بسازید.

$$\text{الف) } (1, 1, 1), (2, 0, 1), (2, 4, 5)$$

$$\text{ب) } (3, 2, 0), (1, 5, -1), (5, -1, 2)$$

۱۰) یک پایه یکه متعامد برای زیرفضای \mathbb{R}^3 که با بردارهای زیر تولید می‌شود بسازید.

$$\text{الف) } (1, 0, 2), (-1, 0, 1)$$

$$\text{ب) } (1, 2, -1), (1, -1, 1)$$

۱۱) یک پایه یکه متعامد برای زیرفضای \mathbb{R}^3 ، که توسط بردارهای زیر تولید می‌شود، بسازید.

$$\text{الف) } (-1, 1, 0) \text{ و } (1, 2, 3, 4)$$

$$\text{ب) } (0, -1, 3, 2), (3, 0, 0, 1) \text{ و } (0, 1, 2, 0)$$

۱۲) برداری در \mathbb{R}^4 ارائه دهید که بر بردار $(1, 2, -1, 1)$ عمود باشد.

۱۳) برداری در \mathbb{R}^4 ارائه دهید که بر بردار $(2, 0, 1, 1)$ عمود باشد.

۱۴) فرض کنیم W زیرفضایی از \mathbb{R}^3 باشد که دارای پایه $(1, 1, 2)$ و $(1, 3, 0)$ می‌باشد. تصویر بردارهای زیر را بر W بیابید.

$$\text{الف) } (4, 2, 1) \quad \text{ب) } (1, 1, 1) \quad \text{ج) } (1, -1, 2)$$

۱۵) فرض کنیم W زیرفضایی از \mathbb{R}^4 باشد که دارای پایه $(1, 0, 2, 1)$ و $(3, 0, 1, 1)$ می‌باشد. تصویر بردارهای زیر را بر W بیابید. الف) $(1, -1, 1, 1)$ ب) $(1, 1, -1, 1)$ ج) $(2, 0, 1, 1)$

$$(3, 2, 1, 0)$$

۱۶) بردار $(1, -1, z) = v$ را در \mathbb{R}^3 در نظر می‌گیریم. فرض کنیم V زیرفضایی از \mathbb{R}^3 باشد که از بردارهایی به‌فرم (a, a, b) تشکیل می‌شود. v را به صورت حاصل جمع برداری در V و برداری عمود بر V بنویسید (تجزیه کنید).



۱۷) بردار $v = (1, -2, 4)$ را در \mathbb{R}^3 در نظر می‌گیریم. فرض کنیم V زیرفضایی از \mathbb{R}^3 باشد که متشکل از بردارهایی به فرم $(a, 2a, b)$ است. v را به صورت حاصل جمع برداری در V و برداری عمودی بر V بنویسید.

۱۸) فاصله نقطه $x = (-1, 3, 1)$ در \mathbb{R}^3 را از زیرفضای W مشتمل بر همه بردارهایی به فرم (a, a, b) پیدا کنید.

۱۹) فاصله نقطه $x = (-1, 4, 2)$ از زیرفضای W مشتمل بر همه بردارهایی به فرم $(a, -2a, b)$ پیدا کنید.

۲۰) فاصله نقطه $x = (-2, 3, 1)$ از زیرفضای مشتمل بر همه بردارهایی به فرم $(a, 2a, 3a)$ پیدا کنید (فاصله یک نقطه از یک خط).

۲۱) یک پایه متعامد برای \mathbb{R}^3 پیدا کنید که مشتمل بر بردارهای $(1, -2, 4)$ و $(4, 1, 6)$ باشد.

۲۲) فرض کنیم $\{u_1, \dots, u_n\}$ یک پایه یکه متعامد برای فضای برداری V باشد. همچنین فرض کنیم $v \in V$. نشان دهید که $\|v\|$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\|v\| = \sqrt{(v.u_1)^2 + (v.u_2)^2 + \dots + (v.u_n)^2}$$

۲۳) فرض کنیم $\{u_1, \dots, u_n\}$ یک مجموعه یکه متعامد V باشد. ثابت کنید که این مجموعه یک پایه V است.

۲۴) فرض کنیم u و v بردارهایی در $\mathbb{R}^n(V)$ باشند. در برخان قضیه گرام-اشمیت گفته شد که proj_u^v بر u عمود است. با نشان دادن اینکه

$$(v - \text{proj}_u^v).u = 0$$

و استفاده از تعریف proj_u^v این حقیقت را رسماً ثابت کنید.

۲۵) ثابت کنید ماتریس‌های زیر ماتریس‌های متعامد هستند:



$$\begin{array}{ll}
 \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] & \text{(ب)} \\
 \left[\begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right] & \text{(د)} \\
 \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] & \text{(الف)} \\
 \left[\begin{array}{cc} \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right] & \text{(ج)}
 \end{array}$$

۲۶) ماتریس‌های زیر متعامد هستند. ثابت کنید این ماتریس‌ها همه ویژگی‌های مندرج در قضیه ص ۲۷ را دارا هستند:

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{array} \right] \text{ (ب)} \quad \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right] \text{ (الف)}$$

۲۷) فرض کنیم A و B ماتریس‌های متعامد و از یک اندازه باشند. ثابت کنید ماتریس AB نیز متعامد است.

۲۸) فرض کنیم \mathbf{u} یک ماتریس یکه باشد. \mathbf{u} را به صورت یک ماتریس ستونی در نظر می‌گیریم. نشان دهید $A = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^t$ متعامد است.

۲۹) ثابت کنید ماتریس A متعامد است اگر و فقط اگر $A^{-1} = A^t$

۳۰) ماتریس مختلط A را یک ماتریس یکانی^۱ نامیم هرگاه

$$A^{-1} = \bar{A}^t$$

این تعریف تعمیم مفهوم ماتریس متعامد در فضای مختلط می‌باشد (چرا؟).

ثابت کنید هرگاه A یکانی باشد، A^{-1} نیز یکانی است.

۳۱) ثابت کنید ماتریس A یکانی است اگر و فقط اگر ستون‌های آن مجموعه‌ای از بردارهای یکه بوده که دو به دو متعامدند.

۳-۱۶-۵ تمرین‌های دوره‌ای فصل ۵

۱) مجموعه بردارهایی به فرم دلیل را (در هر مورد) در نظر می‌گیریم. تعیین کنید که کدام مجموعه زیرفضای \mathbb{R}^3 است.

1) unitary matrix



(ب) $(a, -2a, 3a)$

(الف) $(a, b, a - 2)$

(ج) $(a, b, 2a - 3b)$

۲) کدامیک از زیرمجموعه‌های زیر از \mathbb{R}^3 زیرفضا هستند؟ مجموعه همه بردارهایی به فرم $(1, 2, 3)$ که در آن p عبارت است از:

ب) یک عدد صحیح

الف) یک عدد حقیقی

د) یک عدد گویا

ج) یک عدد حقیقی نامنفی

۳) کدامیک از زیرمجموعه‌های زیر از M_{22} تشکیل زیرفضا می‌دهند؟

الف) زیرمجموعه‌ای که شامل قطر اصلی با درایه‌های غیرصفر است.

ب) زیرمجموعه‌ای مشتمل بر ماتریس‌هایی که حاصل جمع درایه‌های آن صفر است.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{برای مثال چنین ماتریسی می‌باشد}).$$

$$\cdot \begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix} \quad (\text{ج) زیرمجموعه‌ای مشتمل بر ماتریس‌هایی به فرم } \begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix \text{ می‌باشد.})$$

$$\cdot \begin{bmatrix} a & 3 \\ b & c \end{bmatrix} \quad (\text{د) زیرمجموعه‌ای از ماتریس‌هایی به فرم } \begin{bmatrix} a & 3 \\ b & c \end{bmatrix \text{ می‌باشد.})$$

ه) زیرمجموعه‌ای از ماتریس‌های 2×2 که در ترminan آن‌ها برابر صفر است.

۴) فرض کنیم S مجموعه همه تابع‌هایی به فرم $f(x) = 3x^2 + ax - b$ باشد، که در آن a و b اعدادی حقیقی‌اند. آیا S یک زیرفضای P_2 است؟

۵) آیا شرط آنکه یک زیرمجموعه از یک فضای برداری شامل بردار صفر باشد یک شرط لازم و کافی برای زیرفضا بودن آن زیرمجموعه است؟

۶) در هر مورد از مجموعه بردارهای زیر، تعیین کنید که آیا بردار نخست ترکیبی خطی از مابقی بردارها است.

الف) $(0, 1, 2, 3), (-2, 4, 1)$ و $(0, 6, 4)$

ب) $(-1, 8, -3), (1, 2, -1)$ و $(-2, 1, 0)$

۷) نشان دهید که $f(x) = 13x^2 + 8x - 2$ ترکیبی خطی از $g(x) = 2x^2 + x - 3$ و $h(x) = -3x^2 - 2x + 5$ است.



۸) در هر مورد تعیین کنید که مجموعه بردارهای داده شده وابستهٔ خطی یا مستقل خطی‌اند.

الف) $\{(2, 0, 12), (0, 1, 3), (1, -2, 0)\}$

ب) $\{(-1, 18, 7), (-1, 4, 1), (1, 3, 2)\}$

ج) $\{(5, -1, 3), (2, 1, 0), (3, -2, 2)\}$

۹) ثابت کنید که مجموعه بردارها یک پایه برای \mathbb{R}^2 یا \mathbb{R}^3 است.

الف) $\{(-1, 2), (3, 1)\}$

ب) $\{(4, 2), (1, -1)\}$

ج) $\{(1, 2, 3), (-1, 0, 5), (0, 2, 7)\}$

د) $\{(8, 1, 0), (4, -1, 3), (5, 2 - 3)\}$

۱۰) نشان دهید که بردار $(0, 1, 3, 1), (4, 1, 2)$ در فضای برداری تولید شده به وسیله $\{(0, 1, 3, 1), (4, 1, 2)\}$ قرار دارد.

۱۱) نشان دهید که تابع 2 $h(x) = -x^3$, $g(x) = -2x$, $f(x) = -3x$ تولیدکننده P_3 هستند.

۱۲) یک پایه برای \mathbb{R}^3 پیدا کنید که شامل بردارهای $(3, -2, 1)$ و $(1, -1, 4)$ باشد.

۱۳) پایه‌ای برای زیرفضایی از \mathbb{R}^4 پیدا کنید که شامل بردارهایی به فرم $(a, b, c, a - 2b + 3c)$ باشد.

۱۴) یک پایه برای فضای برداری ماتریس‌های بالا متنشی^۱ 3×3 پیدا کنید.

۱۵) نشان دهید $\{x^3 + 2x - 3, 3x^2 + 2 - 1, 4x^3 + 3x - 3\}$ یک پایه برای P_3 است.

۱۶) رتبه ماتریس‌های زیر را پیدا کنید.

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & -8 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{ب)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{الف)} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ج)}$$

1) upper trianguler



۱۷) فرض کنیم v ترکیبی خطی از v_1 و v_2 باشد. همچنین فرض کنیم v_3 برداری دیگر در همان فضای v_1 و v_2 باشد. نشان دهید که v ترکیبی خطی از v_1 , v_2 و v_3 نیز می‌باشد.

۱۸) فرض کنیم $\{v_1, v_2, v_3\}$ در V مستقل خطی باشد. ثابت کنید که هر یک از زیرمجموعه‌های زیر نیز مستقل خطی است.

$$\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}$$

این مسئله را تعمیم دهید.

۱۹) فرض کنیم $\{v_1, v_2\}$ وابسته خطی باشد. ثابت کنید $\{v_1 + 2v_2, 3v_1 - v_2\}$ نیز وابسته خطی است.

۲۰) با توضیحی مختصر تعیین کنید که احکام ذیل درست یا نادرست است.

الف) $\{(1, 0, 1), (2, 1, 5)\}$ یک پایه برای زیرفضایی از \mathbb{R}^3 مشتمل از بردارهایی به فرم $(a, b, a + 3b)$ است.

ب) سه بردار مستقل خطی در \mathbb{R}^3 وجود دارد.

ج) هر مجموعه از سه بردار \mathbb{R}^3 که مستقل خطی باشند این فضا را تولید می‌کنند.

د) هر دو بردار غیرصفر \mathbb{R}^2 که پایه تشکیل ندهند هم خط^{۱)} هستند.

ه) فرض کنیم v_1, v_2 و v_3 سه بردار در \mathbb{R}^3 باشند که به صورت تصادفی انتخاب می‌شوند. این بردارها احتمالاً وابسته خطی هستند.

۲۱) فرض کنیم V یک فضای برداری از بعد n باشد. تعیین کنید که کدام حکم درست و کدامیک نادرست است.

الف) n بزرگترین عددی از تعداد بردارهای وابسته خطی است.

ب) n برابر بزرگترین عددی از تعداد بردارهای مستقل خطی است.

ج) هیچ تعداد کمتری از n بردار مولد V نمی‌باشد.

د) هر مجموعه مشتمل از بیش از n بردار باید وابسته خطی باشد.

ه) هر مجموعه با بیش از n بردار می‌تواند V را تولید کند اماً وابسته خطی نمی‌باشد.

1) colinear



۲۲) ثابت کنید ماتریس $A \in n \times n$ هم ارز سط्रی I_n است اگر و فقط اگر $\text{rank}(A) = n$

۲۳) تصویر بردار v را بر بردار u در هر مورد پیدا کنید.

$$\mathbf{u} = (2, 4) \text{ و } \mathbf{v} = (1, 3)$$

$$\mathbf{u} = (-1, 2, 4) \text{ و } \mathbf{v} = (-1, 3, 4)$$

۲۴) یک پایه یکه متعامد برای زیرفضای \mathbb{R}^4 که به وسیله $(1, 2, 3, -1), (1, 2, 0, -1, 1), (2, 0, 1, 1)$ و $(3, 2, 0, 1, 1)$

تولید می شود بسازید.

۲۵) یک پایه یکه متعامد برای زیرفضای \mathbb{R}^3 مشکل از بردارهایی به فرم $(x, y, x + 2y)$ بسازید.

۲۶) فرض کنیم W زیرفضای از \mathbb{R}^3 باشد که دارای پایه $\{(1, 1, 3), (2, 1, 1)\}$ است. تصویر بردار $(3, 1, -2)$ را روی W بیابید.

۲۷) فاصله نقطه $(-4, -1, 2)$ را از زیرفضای بردارهایی به فرم $(a, 3a, b)$ پیدا کنید.

۲۸) ثابت کنید یک ماتریس مربعی A متعامد است اگر و فقط اگر A^t متعامد باشد.

۲۹) بردار $(1, 3, -1) = v$ را در نظر می گیریم. فرض کنیم W زیرفضای \mathbb{R}^3 مشکل از بردارهای $(a, b, a - 2b)$ باشد. v را به صورت حاصل جمع برداری در W و برداری عمود بر W بنویسید.

۳۰) ثابت کنید که هرگاه دو بردار u و v متعامد باشند، مستقل خطی هستند.

۳۱) ثابت کنید هرگاه u بر دو بردار v و w عمود باشند، بر بردار واقع در زیرفضای تولید شده به وسیله v و w نیز عمود است.

۱۷-۵ مسئله های مختلفه فصل پنجم

۱) فرض کنیم V یک فضای برداری و U_1 و U_2 دو زیرفضای V باشند. حاصل جمع U_1 و U_2 ، که با نماد $U_1 + U_2$ نشان داده می شود، چنین تعریف می گردد

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

. ثابت کنید $U_1 + U_2$ نیز یک زیرفضای V است و $U_i \subset U_1 + U_2$ (۱، ۲) است.



۲) تعریف گفته شده در مسأله (۱) را برای وقتی که n زیرفضای V ، یعنی U_1, U_2, \dots و U_n در دست است تعمیم دهید. سپس ثابت کنید که $U_n + U_2 + \dots + U_1$ کوچکترین زیرفضایی از V است که همه U_i ‌ها را در بردارد.

۳) (تعریف) فرض کنیم U_1, U_2, \dots و U_n زیرفضای V باشند و

$$V = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

بنابراین هر عنصر V را می‌توان به‌فرم

$$u_1 + \dots + u_n$$

نوشت که $(1 \leq j \leq n)$ $u_j \in U_j$.

تعریف. هرگاه $V = U_1 + \dots + U_n$

و هر بردار V مانند v را به‌شکل منحصر به‌فردی به صورت

$$v = u_1 + \dots + u_n$$

بتوان نوشت که در آن $u_j \in U_j$ ($1 \leq j \leq n$) می‌گوییم V حاصل جمع مستقیم زیرفضاهای U_1, \dots و U_n است و می‌نویسیم

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$$

۴) فرض کنیم

$$U = \{(x, y, \circ) | x, y \in \mathbb{R}\}, V = \{(\circ, \circ, z) | z \in R\}$$

ثابت کنید که

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus V$$

۵) فرض کنیم U و W دو زیرفضای V باشند. ثابت کنید $V = U \oplus W$ اگر و فقط اگر $U \cap W = \{\circ\}$.

۶) از احکام ذیل آنهاستی را که فکر می‌کنید درست‌اند ثابت کنید و آنهاستی را که فکر می‌کنید نادرست‌اند با مثال نقض رد کنید.



الف) فرض کنیم U_1, U_2 و W زیرفضاهای V باشند به قسمی که

$$U_1 + W = U_2 + W$$

در این صورت $U_1 = U_2$

ب) فرض کنیم U زیرفضایی از $P(R)$ (فضای چندجمله‌ای‌ها روی \mathbb{R}) متشكل از همه چندجمله‌ای‌هایی به فرم

$$p(z) = az^4 + bz^5$$

باشد که $a, b \in R$. زیرفضایی مانند W از $P(R)$ هست به قسمی که

$$P(R) = U \oplus W$$

ج) فرض کنیم U_1, U_2 و W زیرفضاهای V باشند به قسمی که

$$V = U_1 \oplus W \quad , \quad V = U_2 \oplus W$$

در این صورت $U_1 = U_2$

۷) فرض کنیم U و W زیرفضاهایی از \mathbb{R}^4 باشند به قسمی که $\dim W = 5$ ، $\dim U = 3$ و $U \cap W = \{0\}$. ثابت کنید $U + W = \mathbb{R}^4$

۸) فرض کنیم U و W هر دو زیرفضای \mathbb{R}^4 و از بعد ۵ باشند. ثابت کنید

$$U \cap W \neq \{0\}$$

۹) هرگاه U_1 و U_2 زیرفضاهایی از V با بعد متناهی باشند، آنگاه

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

۱۰) مسئله ۸ را تعمیم دهید.

۱۱) مسئله ۸ را برای وقتی که $+ \oplus$ را با جایگزین کنیم، بیان و اثبات کنید.



هدفهای آموزشی-رفتاری

خواننده بعد از مطالعه‌ی این فصل باید بتواند:

- ۱) تعاریف را دانسته و چگونگی محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بلد باشد.
- ۲) توصیفی هندسی از رابطه‌ی $Ax = \lambda x$ را برای λ حقیقی و λ موهومی ارائه دهد.
- ۳) دلیل یکی بودن مقادیر ویژه نگاشت خطی نسبت به هر پایه دلخواه را تحلیل کند.
- ۴) صورت کلی معادله‌ی مفسر و دلیل درستی آن را بیان کند.
- ۵) زیرفضای ویژه‌ی هر مقدار ویژه را تحلیل و توصیف کند.
- ۶) نوع عمل ماتریس حقیقی 2×2 با مقادیر ویژه مختصات را روی بردار ویژه شرح دهد.
- ۷) قضایای گرشکوئین را به کار برد و آنها را ثابت کند.
- ۸) به سرعت مقادیر ویژه ماتریس‌های اسکالر، قطری، بالا مثلثی و پایین مثلثی را ارائه دهد.
- ۹) اثبات کند که شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری مخالف صفر بودن همه‌ی مقادیر، ویژه است.
- ۱۰) همراه با دلیل بیان کند که مقادیر ویژه ماتریس‌های A^{-1} , A^t , A^m , KA , A^m و $A + mI$ را از روی A مشخص کنند.
- ۱۱) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ را ارائه دهد.
- ۱۲) با دلیل بیان کند که چرا هم علامت بودن b و c در ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ وجود مقادیر ویژه حقیقی متمایز را نتیجه می‌دهد.
- ۱۳) فرمولی برای زاویه بین راستای بردارهای ویژه ماتریس 2×2 ارائه دهد.
- ۱۴) وجود مقادیر ویژه حقیقی برای هر ماتریس متقارن و عمود بودن بردارهای ویژه را برای این ماتریس‌ها ثابت کند.
- ۱۵) بردارهای ویژه ماتریس‌های قطری و اسکالر را بشناسد.
- ۱۶) همراه با دلیل بیان کند که اگر مجموع درایه‌های هر سطر یا ستون ماتریس مساوی s باشد یکی از مقادیر ویژه برابر s است.



- ۱۷) مقادیر ویژه ماتریس‌های قطر فرعی از مرتبه‌ی فرد را به سرعت ارائه دهد.
- ۱۸) چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس‌های بلوکی مثلثی را به‌دست آورد.
- ۱۹) دلایل برابری مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های AB و BA را بیان کند.
- ۲۰) ارتباطی بین چندجمله‌ای‌های مشخصه‌ی AB و BA به‌دست آورد.
- ۲۱) ماتریس همراه هر چندجمله‌ای دلخواه را به‌دست آورد.
- ۲۲) چندگانگی هندسی و جبری مقادیر ویژه و نامساوی بین آنها را همراه با دلیل ارائه دهد.
- ۲۳) قضیه‌ی کیلی-هامیلتون را بیان و اثبات کرده و آن را در پیدا کردن وارون ماتریس‌ها مورد استفاده قرار دهد.
- ۲۴) روشی را برای محاسبه‌ی $A^k X$ بیان کند.
- ۲۵) توضیح دهد چگونه از مفهوم مقدار ویژه و بردار ویژه در جمعیت‌شناسی و پیش‌بینی هوا استفاده می‌شود.
- ۲۶) از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه در حل معادلات تفاضلی مرتبه اول استفاده کنند.
- ۲۷) ماتریس‌های متشابه را تعریف و طریقه قطری کردن ماتریس‌ها را همراه با شرایط لازم بیان کند.
- ۲۸) از قطری کردن ماتریس‌ها در توان رساندن ماتریس‌ها استفاده کنند.
- ۲۹) قطری‌سازی متعامد را تشریح کنند.
- ۳۰) کاربرد قطری کردن را در شناخت نوع مقاطع مخروطی شرح دهد.



فصل ششم

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه از مفیدترین عناوین جبرخطی بوده، در بسیاری از سطوح ریاضیات مانند فیزیک، مکانیک، مهندسی الکترونیک، فیزیک اتمی، هیدرودینامیک و آئرودینامیک استفاده می‌شوند. در واقع بعید است بتوان شاخه‌ای کابردی از علوم یافت که در آن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه هرگز مورد استفاده واقع نشوند. هر چند شاید عجیب به نظر آید مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌ها قبل از ماتریس‌ها مطرح شده است، زیرا به تعبیر کیلی^۱ بعید است که تئوری ماتریس‌ها (از خلال تئوری دترمینان‌ها) قبل از آنکه تعریف شده باشند توسعه یافته مقادیر ویژه تعریف شده باشند. بنا به نظریه‌ی موریس کلاین^۲ مقادیر ویژه اساساً در مفهوم فرم‌های درجه دوم و مکانیک عالی (حرکت سیارات) ارائه شده به عنوان ریشه‌های مشخصه‌ی معادله‌ی عام شناخته شده‌اند. قبل از آن در سال ۱۷۴۰ اویلر^۳ به صراحت مقادیر ویژه را برای توصیف هندسه‌ی فرم‌های درجه دوم سه متغیره به کار برد. در سال ۱۷۶۰ لاغرانژ^۴ دستگاهی از شش معادله دیفرانسیل را برای حرکت شش سیاره مطالعه کرده از آن معادله‌ای چندجمله‌ای و از درجه‌ی شش به دست آورد که ریشه‌های آن مقادیر ویژه‌ی ماتریسی 6×6 بودند. کوشی^۵ در سال ۱۸۲۰ به اهمیت مقادیر ویژه در تعیین محورهای اصلی و فرعی یک فرم ۷-متغیره‌ی درجه دوم پی برد. وی همچنین از کشفیات خود در تئوری حرک سیارات استفاده کرد. اولین کسی که عبارات «مقادیر مشخصه» و «معادله‌ی مشخصه» را برای مقادیر ویژه و معادله اصلی که مقادیر ویژه در آن صدق می‌کنند، به کار برد، کوشی در سال ۱۸۴۰ بود. در مطالعه‌ی نگاشت‌های خطی روی فضاهای برداری با بعد متناهی از پایه‌های مرتب برای نمایش ماتریسی این نوع از نگاشت‌ها استفاده کردیم. بدینهی است که این نوع نمایش سهم مهمی در مورد شناخت

1) Cayley 2) Morris Kline 3) Euler 4) Lagrange 5) Cauchy



رفتار آنها به خصوص ترکیب‌های متوالی این نگاشت‌ها خواهد داشت.

در آنچه که خواهد آمد هدف آن است که فقط یک نگاشت خطی روی فضای برداری با بعد متناهی V را انتخاب کرده و با جدایکردن آن از بقیه بررسی کنیم که در درون آن چه می‌گذرد. ساده‌ترین راه، بیان این هدف به زبان ماتریس‌هاست:

می‌خواهیم برای نگاشت خطی مفروض T پایه مرتبی در V پیدا کنیم که نسبت به این پایه ماتریس T شکل ساده‌ی منتخبی داشته باشد.

شاید ساده‌ترین ماتریس‌ها از نظر انجام کار روی آنها به‌غیراز ماتریس همانی، ماتریس‌های قطری

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

هستند. اگر T نگاشتی خطی روی فضای n بعدی V باشد و بتوانیم پایه‌ی مرتبی مانند:

$$B = \{x_1, \dots, x_n\}$$

در V بیاییم که در آن T توسط ماتریس قطری بالا نمایش داده شود مسلماً اطلاعات مهمی در مورد T مانند رتبه‌ی آن یا دترمینان T را با یک نگاه به ماتریس D به دست می‌آوریم. در ضمن برد و $\ker T$ نیز به‌آسانی به دست می‌آید، زیرا ماتریس T نسبت به پایه‌ی مرتب B , D است اگر و تنها اگر

$$T(x_k) = \lambda_k x_k \quad k = 1, \dots, n$$

و برد مساوی زیرفضای تولید شده توسط x_k ‌ها بی است که به‌ازای آنها $0 \neq \lambda$ و $\ker T$ زیرفضای تولید شده به‌وسیله‌ی بقیه‌ی x_k ‌هاست.

از آنچه گذشت در می‌باییم که اگر پایه‌ای مرتب چون B و ماتریسی قطری چون D می‌شناختیم که ماتریس T نسبت به پایه‌ی B ماتریس D می‌شد می‌توانیم به سؤالات احتمالی در مورد T به‌آسانی پاسخ بدیم.

برخی سؤالاتی که در پی پاسخ آنها هستیم عبارت‌اند از:

آیا هر نگاشت خطی T می‌تواند توسط ماتریسی قطری در پایه‌ای مرتب نمایش داده شود؟ اگر چنین نیست برای کدام عملگرهای T چنین پایه‌ای وجود دارد؟ در صورت وجود چطور می‌توایم چنین پایه‌ای



نمایش دهیم کدام است؟

مقدمات فوق پیشنهاد می‌کند بردارهای را در V مطالعه کنیم که توسط T به مضرب‌های اسکالر خودشان نگاشته می‌شوند.

تعریف. فرض کنیم V فضایی برداری روی میدان \mathbb{F} و T نگاشتی خطی روی V باشد. یک مقدار ویژه $T(X) = \lambda X$ اسکالاری مانند λ در \mathbb{F} است که برای آن بردار غیرصفری مانند X در V با خاصیت λ وحود داشته باشد.

اگر λ یک مقدار ویژه T باشد آنگاه هر X با خاصیت $T(X) = \lambda X$ یک بردار ویژه T وابسته‌ی به مقدار ویژه λ نامیده می‌شود.

مقادیر ویژه، مقادیر سرشیت‌نما، ریشه‌های سرشیت‌نما، ریشه‌های راکد، مقادیر سره یا مقادیر طیفی هم تأمینده می‌شوند.

اگر T نگاشتی خطی و λ اسکالاری دلخواه باشد به آسانی می‌توان نشان داد که مجموعه‌ی بردارهای X به طوری که $T(X) = \lambda X$ همراه اجتماع با $\{\cdot\}$ زیرفضایی از V است. از طرفی این زیرفضا، فضای پوچ نگاشت خطی $(T - \lambda I)$ است. λ را یک مقدار ویژه‌ی T می‌نامیم هرگاه این زیرفضا، زیرفضای صفر نباشد یعنی هرگاه $(T - \lambda I)$ یک به یک نباشد. اگر فضای زمینه‌ی V با بعد متناهی باشد $(T - \lambda I)$ دقیقاً زمانی یک به یک نیست که دترمینان آن صفر باشد. خلاصه‌ی این مطلب قضیه‌ی زیر را نتیجه می‌دهد.

۱-۵-۶ قضیه. فرض کنیم T نگاشتی خطی روی فضای با بعد متناهی V و λ اسکالاری دلخواه است. احکام زیر هم ارزند:

(۱) λ یک مقدار ویژه T است.

۲) نگاشت $(T - \lambda I)$ معکوس‌یزدیر نیست.

$$\det(T - \lambda I) = \circ \quad (\text{3})$$

معیار دترمینانی (۳) نشان می‌دهد که مقادیر ویژه چگونه جستجو شوند. اگر B پایه‌ی مرتبی برای V بوده A ماتریس T نسبت به این پایه‌ی مرتب باشد آنگاه $(T - \lambda I)$ معکوس پذیر است اگر و تنها اگر ماتریس $(A - \lambda I)$ معکوس پذیر باشد در نتیجه تعریف زیر طبیعی، می‌نماید:



تعریف. اگر A ماتریسی $n \times n$ روی میدان \mathbb{F} باشد یک مقدار ویژه A در میدان \mathbb{F} ، اسکالری مانند λ از \mathbb{F} است که ماتریس $(A - \lambda I)$ معکوس نپذیر باشد.

چون λ یک مقدار ویژه A است اگر و تنها اگر $\det(A - \lambda I) = 0$ یا به طور هم ارز اگر و تنها اگر $\det(\lambda I - A) = 0$ ، پس ماتریس $(xI - A)$ را تشکیل داده چندجمله‌ای

$$f(x) = \det(xI - A)$$

را در نظر می‌گیریم. بهوضوح مقادیر ویژه A در \mathbb{F} دقیقاً اسکالرهایی چون λ در \mathbb{F} هستند که $f(\lambda) = 0$ باشد.

با استفاده از سط دترمینان‌ها به کمک مفهوم جایگشت‌ها به آسانی ملاحظه می‌کنیم که $f(x)$ چندجمله‌ای تکینی است که دقیقاً از درجه n است. این چندجمله‌ای را چندجمله‌ای مفسر یا سرشت‌نمای A می‌نامیم.

لم بعدی ما را قادر می‌سازد که چندجمله‌ای سرشت‌نمای T را به عنوان چندجمله‌ای سرشت‌نمای هر ماتریس $n \times n$ دلخواهی که T را در پایه‌ی مرتبی از V نمایش می‌دهد تعریف کنیم، در واقع ماتریس T نسبت به هر پایه‌ی دلخواهی که به دست آید مقادیر ویژه‌ای یکسان نتیجه خواهد داد. این مطلب نشان می‌دهد که T نمی‌تواند بیش از n مقدار ویژه متمایز داشته باشد. البته ممکن است T هیچ مقدار ویژه حقیقی نداشته باشد.

لم. ماتریس متشابه، چندجمله‌ای سرشت‌نمای مساوی دارند.

برهان. اگر $B = P^{-1}AP$ باشد آنگاه

$$\begin{aligned} \det(xI - B) &= \det(xI - P^{-1}AP) = \det(xIP^{-1}P - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(xI - A)P) \\ &= \det P^{-1} \times \det(xI - A) \times \det P = \det(xI - A). \end{aligned} \quad \square$$



۱-۶ برسی مقادیر ویژه حقیقی و بردارهای ویژه ماتریس‌های

2×2

فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داریم؛ و درایه‌ها حقیقی‌اند، با تشکیل معادله سرشت‌نمای $\det(\lambda I - A) = 0$ می‌شوند.

$$\begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = 0 \implies (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = 0 \implies \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

$$\implies \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det A = 0$$

اگر این معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی λ_1 و λ_2 باشد داریم:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(A) \\ \lambda_1 \lambda_2 = \det A \end{cases}$$

در صورتی که از معادله سرشت‌نمایی بتوان λ ای حقیقی به دست آورد با توجه به تساوی $Ax = \lambda x$ برای بردار ناصفر x ، می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{cases} (\lambda - a)x - by = 0 \\ -cx + (\lambda - d)y = 0 \end{cases}$$

حال λ به دست آمده را در یکی از معادلات دستگاه همگن بالا قرار داده به ازای مقادیر دلخواه x, y را محاسبه کرده X ای غیرصفر برمی‌گریم. در این صورت یکی از بردارهای ویژه متناظر با λ به دست می‌آید.

هر ضرب اسکالر این بردار ویژه، برداری ویژه خواهد بود زیرا در حالت کلی اگر $0 \neq k$ و $x = \lambda x$

آنگاه داریم

$$A(kx) = kAx = k(\lambda x) = \lambda(kx)$$

مثال: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

حل:

$$\lambda^2 - (\text{tr} A)\lambda + \det A = 0 \implies \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \implies \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$$



$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda - 4)x - y = 0 \quad \lambda_1 = 2 \implies 2x + y = 0 \xrightarrow{x=1} y = -2 \\ \implies \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \implies m \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ -2x + (\lambda - 3)y = 0 \quad \lambda_2 = 5 \implies -x + y = 0 \xrightarrow{x=1} y = 1 \\ \implies \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

مثال: فرض کنیم T نگاشتی خطی روی \mathbb{R}^2 باشد که در پایه مرتب متعارف با ماتریس A نمایش داده می‌شود. مقادیر ویژه T را مشخص کنید.

حل:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

چون معادله‌ی مفسر دارای ریشه‌ی حقیقی نیست، T هیچ مقدار ویژه‌ی دقیق ندارد.
اگر U نگاشتی خطی روی \mathbb{C}^2 باشد که در پایه مرتب متعارف بهوسیله‌ی A نمایش داده شود، آنگاه U دارای دو مقدار ویژه‌ی i و $-i$ است.

پس در بحث مربوط به مقادیر ویژه‌ی نگاشت خطی T (یا ماتریس A از آن) تصریح میدان مورد نظر الزامی است. مثلاً در مثال بالا هیچ مقدار ویژه در \mathbb{R} ندارد اما دو مقدار ویژه i و $-i$ در \mathbb{C} دارد.

تذکر: با توجه به آنکه ماتریس هر تبدیل T در صفحه ماتریسی دوردو است تساوی $X = \lambda X$ یا $AX = \lambda X$ با $\lambda \in \mathbb{R}$ در صفحه به این معنی است که T راستای (بردار ویژه) X را تغییر نمی‌دهد. پس اگر ماتریسی با درایه‌های حقیقی راستای همه‌ی بردارهای صفحه را تغییر دهد فاقد مقدار ویژه حقیقی و بردار ویژه است و بالعکس. این بحث در حالت کلی نیز صحیح است، در حالت کلی راستای X متفاوت است اما اگر AX و X بردارهای موازی باشند عدد حقیقی λ وجود دارد به‌طوری که $AX = \lambda X$

نتیجه. در بین ماتریس‌های دوران، فقط ماتریس دوران به اندازه‌ی $K\pi$ دارای مقدار ویژه‌ی حقیقی و بردار ویژه است.



مثال: حدود m را به قسمی تعیین کنید که ماتریس زیر راستای همهٔ بردارهای صفحه را تغییر دهد.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ m & 3 \end{bmatrix}$$

حل: ماتریس A باید فاقد مقدار ویژهٔ حقیقی باشد

$$\lambda^2 - (tr A)\lambda + |A| = 0 \implies \lambda^2 - 2\lambda - 3 + 2m = 0$$

$$\Delta' < 0 \implies 1 + 3 - 2m < 0 \implies m > 2$$

ایده‌ی نگاشتی که برداری مفروض را به برداری موازی با آن می‌نگارد در حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل، در مورد مدل‌های فیزیکی مانند انرژی اتم سهم مهمی دارد.

۲-۶ بررسی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس‌های 3×3

فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ داریم:

$$\begin{vmatrix} \lambda - a & -b & -c \\ -d & \lambda - e & -f \\ -g & -h & \lambda - i \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies (\lambda - a) \begin{vmatrix} \lambda - e & -f \\ -h & \lambda - i \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} -d & -f \\ -g & \lambda - i \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} -d & \lambda - e \\ -g & -h \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - a)[\lambda^2 - (e+i)\lambda + ei - hf] + b(-d\lambda + di - gf) - c(dh + g\lambda - gc) = 0$$

$$\lambda^2 - (e+i)\lambda^2 + ei\lambda - hf\lambda - a\lambda^2 + ae\lambda + ai\lambda - aei + ahf$$

$$-bd\lambda + bdi - bgf - cdh - cg\lambda + cge = 0$$

$$\lambda^2 - (a+e+i)\lambda^2 + (ci-hf+ae+ai-bd-cg)\lambda - |A| = 0$$



در نتیجه:

$$\lambda^3 - (|a| + |e| + |i|)\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} \right) \lambda - |A| = 0$$

که در آن منظور از $|a|$ و $|e|$ و $|i|$ دترمینان ماتریس‌های یک‌دیریک است. توجه داریم که ضریب λ مجموع دترمینان‌های ماتریس‌هایی 2×2 است که قطر اصلی آنها تعدادی از عناصر قطر اصلی ماتریس A می‌باشد. (دو عنصر از میان سه عنصر قطر اصلی A).

بنابراین معادله سرشت‌نمایی هر ماتریس 3×3 , A به صورت کلی زیر است:

$$\lambda^3 - (tr A)\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} \right) \lambda - |A| = 0$$

با توجه به آنکه هر معادله از درجه‌ی سه لاقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد، در نتیجه هر ماتریس سه در سه با درایه‌های حقیقی در میدان \mathbb{R} لاقل یک مقدار ویژه‌ی حقیقی دارد. حالات دیگر سه مقدار ویژه‌ی حقیقی متمایز یا یک مقدار ویژه‌ی حقیقی مضاعف، یک مقدار ویژه‌ی حقیقی ساده می‌باشند.

در هر یک از حالت‌های ذکر شده مقدار ویژه‌ی حقیقی به دست آمده را در دستگاه همگن $AX = \lambda X$

یعنی دستگاه مقابل قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} (\lambda - a)x - by - cz = 0 \\ -dx + (\lambda - c)y - fz = 0 \\ -gx - hy + (\lambda - i)z = 0 \end{cases}$$

حال کافی است جواب‌های غیرصفر این دستگاه همگن را در هر حالت جستجو کنیم تا بردارهای ویژه وابسته به مقدار ویژه‌ی متناظر به دست آیند.

مثال: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ را مشخص کنید.

حل:

$$tr A = 5, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad |A| = 0$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 0\lambda + 0 = 0 \implies \lambda^3 - 5\lambda^2 = 0$$



$$\Rightarrow \lambda^2(\lambda - 5) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ یا } \lambda = 5$$

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x + 2z = 0 \\ \lambda y = 0 \\ 2x + (\lambda - 4)z = 0 \end{cases}$$

صورت کلی بردار ویژه $\lambda = 0 \Rightarrow x = 2z \Rightarrow (2k, m, k)$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بردارهای ویژه (مستقل خطی)

$$\lambda = 5 \Rightarrow \begin{cases} -2x = z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (a, 0, -2a) \Rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

بردار ویژه

قضیه بعد با استفاده از حکم کلی $\det(\lambda I - A) = 0$ برای به دست آوردن معادله‌ی مفسر، فرم آن را برای

هر ماتریس دلخواه $n \times n$ نتیجه می‌دهد. فرض کنیم

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

با استفاده از بسط جایگشتی متناوب دترمینان‌ها (مجموع متناوب جملاتی که هر جمله حاصل ضرب درایه‌هایی است که از هر سطر و ستون انتخاب می‌شوند) جمله‌ای از $f(\lambda)$ که بزرگترین درجه را برای λ دارد از عبارت

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \dots (\lambda - a_{nn})$$

به دست آمده مساوی λ^n است. جملات با درجه‌ی $1 - n$ نیز از همان عبارت بالا به دست می‌آیند. بنابراین ضریب λ^{n-1} برابر است با

$$-(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) = -\text{tr}(A)$$



جمله‌ی ثابت $f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ نیز با قرار دادن $f(x) = \det(\lambda I - A)$ به دست می‌آید که برابر $(-1)^n |A|$ است و در نتیجه

$$f(\lambda) = \lambda^n - \text{tr} A \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|$$

توصیف بقیه ضرایب در چند جمله‌ای مشخصه آسان نیست، این ضرایب در واقع بحسب زیر ترمینان‌های $\det A$ قابل بیان هستند. به عنوان مثال جمله‌های شامل λ^{n-2} را در نظر می‌گیریم. این جمله‌ها به دو صورت پدید می‌آیند: از عبارت $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \dots (\lambda - a_{nn})$ و یا از حاصل ضرب‌هایی شبیه

$$-a_{12}a_{21}(\lambda - a_{22}) \dots (\lambda - a_{nn})$$

بنابراین ضرایب λ^{n-2} از نوع $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ بوده در نتیجه این ضرایب، مجموع همه‌ی دترمینان‌های 2×2 به فرم $\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}$ با $i < j$ می‌باشد.

۱-۲-۶ قضیه. اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد معادله‌ی مشخصه‌ی آن به فرم ذیل است

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + s_1 \lambda^{n-1} + s_2 \lambda^{n-2} + \cdots + s_{n-1} \lambda + (-1)^n |A| = 0$$

کد در آن s_m (برای $m = 1, 2, \dots, n-1$) برابر است با حاصل ضرب $(-1)^m$ در مجموع همه‌ی کهادهای اصلی $m \times m$ ماتریس A (کهاد اصلی کهادی است که درایه‌های روی قطر آن بخشی از عناصر روی قطر A هستند یعنی در کهادهای $m \times m$ ماتریس A ، m عنصر از میان n عنصر روی قطر A انتخاب می‌شوند).

برهان. $f(\lambda)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & \circ - a_{12} & \dots & \circ - a_{1n} \\ \circ - a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & \circ - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \circ - a_{n1} & \circ - a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}_{n \times n}$$

هر درایه یک دو جمله‌ای می‌شود. بنابراین خواص دترمینان حاصل دترمینان بالا مجموع 2^n دترمینان $n \times n$ است. یکی از آنها λ را روی قطر اصلی داشته بقیه درایه‌هایش صفر هستند مقدار آن λ^n می‌باشد. یکی دیگر از این دترمینان‌ها مستقل از λ بوده مقدار آن $(-1)^n |A|$ است. باقی دترمینان‌ها شامل m ستون



ستون دیگر است صورتی که هر یک از ستون‌ها شامل دقیقاً یک λ ناصلفر می‌باشد. یکی از این دترمینان‌ها را در نظر گرفته ستون‌هایی از آن را که مساوی ستون‌های $(-A)$ هستند با i_1, i_2, \dots, i_m شماره‌گذاری می‌کنیم. بعد از جابه‌جایی سطرهای مجاور و ستون‌های مجاور به دفعات زوج، دترمینان ذکر شده به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$(-1)^m \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \dots & a_{i_1 i_m} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \dots & a_{i_2 i_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_m i_1} & a_{i_m i_2} & \dots & a_{i_m i_m} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & \vdots & \lambda & \circ & \dots & \circ \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \lambda & \circ & \dots & \circ \\ & & & & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_n i_1} & a_{i_n i_2} & \dots & a_{i_n i_m} \\ \end{vmatrix} = (-1)^m \left| A_{i_1 i_2 \dots i_m}^{i_1 i_2 \dots i_m} \right| \lambda^{n-m}$$

که در آن $\left| A_{i_1 i_2 \dots i_m}^{i_1 i_2 \dots i_m} \right|$ یک کهاد اصلی $m \times m$ از A است. حال می‌توان نوشت

$$S_m = (-1)^m \sum_{\rho} \left| A_{i_1 i_2 \dots i_m}^{i_1 i_2 \dots i_m} \right| \lambda^{n-m}$$

در این تساوی $\rho = C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \times 2 \times \dots \times m}$ ترکیب m حرف از میان (i_1, i_2, \dots, i_m) در n حرف تغییر می‌کند.

مثال: با استفاده از قضیه‌ی قبل $\det(\lambda I - A)$ را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & \circ & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

حل: داریم:

$$s_1 = 1 + \circ - 2 + 6 = 5$$

$$s_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$$



$$= 8 - 3 + 2 - 5 + 16 - 9 = 9$$

$$s_2 = \text{تعداد کهادهای } C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

$$s_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -3 + 16 - 8 + 2 = 7$$

$$s_2 = \text{تعداد کهادهای } C_4^3 = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$|A| = 2$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 9\lambda^1 - 7\lambda + 2$$

مثال: فرض کنیم A ماتریسی 3×3 و $f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ باشد. با استفاده از دستور مشتق دترمینان $(\lambda), f'(\lambda), f''(\lambda)$ و $f'''(\lambda)$ را به دست آورده و نتایج را ساده کنید. در مورد مشتقات مراتب بالاتر $f(\lambda)$ چه می‌توان گفت؟

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}$$

حل: چون

$$f'(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{11} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{22} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} & \lambda - a_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{22} & \lambda - a_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\text{مجموع همهی کهادهای } 2 \times 2 \text{ اصلی ماتریس } (\lambda I - A)$$

$$f''(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{31} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{11} & \lambda - a_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$



$$= 2[(\lambda - a_{11}) + (\lambda - a_{22}) + (\lambda - a_{33})] \\ = 2! \times (\lambda I - A) \text{ کهادهای } 1 \times 1 \text{ اصلی ماتریس}$$

$$f'''(\lambda) = 3! \implies f^{(4)}(\lambda) = f^{(5)}(\lambda) = \dots = 0$$

مثال: ثابت کنید اگر λ مقدار ویژه ناصرفی از ماتریس نامنفرد $n \times n$, A , باشد آنگاه $\frac{\det}{\lambda}$ مقدار ویژه ای از $\text{adj}A$ است.

حل: بنابر قضیه قابل

$$\lambda^n + \xi_1 \lambda^{n-1} + \dots + \xi_{n-1} \lambda + (-1)^n \det A = 0 \quad (*)$$

که در آن s_i مساوی $(-1)^i$ ضربدر مجموع همه کهادهای اصلی $i \times i$ ماتریس A است و

$$(\mu I - \text{adj}A) = \mu^n + s_1 \mu^{n-1} + \dots + s_{n-1} \mu + (-1)^n |\text{adj}A|$$

که در آن s_j مساوی $(-1)^j$ ضربدر مجموع همه کهادهای اصلی $j \times j$ ماتریس A است. می‌دانیم $|\text{adj}A| = |A|^{n-1}$ و بنا به تعریف ξ_i و s_j داریم:

$$s_1 = (-1)^n \xi_{n-1}, s_2 = (-1)^n |A| \xi_{n-2}, \dots, s_{n-1} = (-1)^n |A|^{n-2} \xi_1$$

در نتیجه

$$|\mu I - \text{adj}A| = (-1)^n \left\{ (-1)^n \mu^n + \xi_{n-1} \mu^{n-1} + \xi_{n-2} |A| \mu^{n-2} + \dots + \xi_1 |A|^{n-2} \mu^2 + \xi_1 |A|^{n-1} \mu + |A|^{n-1} \right\}$$

و

$$|A|^{1-n} |\mu I - \text{adj}A| = (-1)^n \left\{ 1 + \xi_1 \frac{\mu}{|A|} + \dots + \xi_{n-1} \left(\frac{\mu}{|A|} \right)^{n-1} + (-1)^n \left(\frac{\mu}{|A|} \right)^n |A| \right\} \\ = f(\mu)$$

حال می‌توان نوشت

$$f\left(\frac{|A|}{\lambda}\right) = (-1)^n \left\{ 1 + \xi_1 \frac{1}{\lambda} + \dots + \xi_{n-1} \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{n-1} + (-1)^n \left(\frac{1}{\lambda} \right)^n |A| \right\}$$



$$\lambda^n f\left(\frac{|A|}{\lambda}\right) = (-1)^n \left\{ \lambda^n + \xi_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \xi_{n-1} \lambda + (-1)^n \det A \right\} \stackrel{*}{=} (-1)^n \times 0 = 0.$$

بنابراین $\frac{|A|}{\lambda}$ مقدار ویژه ای از $\text{adj } A$ است.

مثال: ابتدا ثابت کنید معادله‌ی مفسر هر ماتریس متعامد معادله‌ای معکوسه است سپس با استفاده از آن نشان دهید مقادیر ویژه ماتریس‌های متعامد قدرمطلقی مساوی یک دارند.

حل: فرض کنیم p ماتریسی متعامد باشد در این صورت $I = pp^t$ و $|p| = \pm 1$ است و می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= |\lambda I - p| = |\lambda p I p^t - p| = |-p\lambda\left(\frac{1}{\lambda}I - p^t\right)| = \lambda^n |-p|\left|\frac{1}{\lambda}I - p^t\right| \\ &= \pm \lambda^n \left|\frac{1}{\lambda}I - p\right| = \pm \lambda^n f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

پس معادله مفسر معادله‌ای معکوسه است و در نتیجه بنا به خواص معادلات معکوسه ریشه‌هایش قدرمطلقی مساوی یک دارند.

۲-۲-۶ قضیه. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ و λ مقدار ویژه‌ای از A باشد. مجموعه‌ی همه بردارهای ویژه متناظر با λ همراه با بردار صفر، زیرفضایی از \mathbb{R}^n است. این زیرفضا را فضای ویژه λ می‌نامیم.

برهان. برای آنکه نشان دهیم فضای ویژه، زیرفضای برداری است باید ثابت کنیم نسبت به ضرب اسکالر و جمع بردارها بسته است.

فرض کنیم X_1 و X_2 بردارهایی از فضای ویژه λ و c یک اسکالر باشد. در این صورت

$$AX_1 = \lambda X_1, \quad AX_2 = \lambda X_2$$

در نتیجه:

$$AX_1 + AX_2 = \lambda X_1 + \lambda X_2 \implies A(x_1 + x_2) = \lambda(x_1 + x_2)$$

پس $x_1 + x_2$ عنصری از فضای ویژه است.

$$Ax_1 = \lambda x_1 \implies cAx_1 = c\lambda x_1 \implies A(cx_1) = \lambda(cx_1)$$

□

یعنی فضای ویژه نسبت به ضرب اسکالر نیز بسته است.



مثال: پایه‌ای از فضاهای ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ به دست آورید.

حل:

$$\begin{aligned} |A - \lambda I_3| &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{-r_1+r_1} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2} \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 9-\lambda & 2 \\ 2 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(9-\lambda)(2-\lambda) - 8] \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 10) = (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 10) \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda - 10)^2 \end{aligned}$$

پس مقادیر ویژه A عبارتند از: $\lambda = 1$ یا $\lambda = 10$. با جایگذاری این مقادیر در معادله $(A - \lambda I_3)x = 0$ عبارتند از:

داریم:

$$(A - 10 I_3)x = 0 \implies \begin{bmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \implies x_1 = x_2 = 2r, x_3 = 2$$

پس فضای ویژه $\lambda = 10$ فضایی تکبعده از بردارهایی به فرم $r \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ است.

$$(A - 1I_3)x = 0 \implies \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \implies x_1 = -s - t, x_2 = s, x_3 = 2t$$

$$\implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s - t \\ s \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ 2t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

در نتیجه فضای ویژه $\lambda = 1$ فضایی دوبعده با پایه $B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ است.



تذکر: اگر مقدار ویژه k بار به عنوان ریشه معادله مشخصه تکراری باشد می‌گوییم چندگانگی k دارد. در مثال قبل $\lambda = 1^0$ و $\lambda = 1^0$ به ترتیب چندگانگی یک و دو دارند.

۳-۶ مقادیر ویژه مختلط

چون معادله‌ی مشخصه‌ی ماتریس $n \times n$ معادله‌ی درجه n است با محسوب کردن ریشه‌های احتمالی مختلط و شمارش ریشه‌های مکرر، دقیقاً n ریشه خواهد داشت. نشان می‌دهیم که اگر معادله‌ی مشخصه‌ی ماتریس A عددی ریشه‌ی مختلط داشته باشد این ریشه‌ها اطلاعاتی مهم در مورد A مطرح می‌سازند. فرض کنیم A روی فضای \mathbb{C}^n از n -تایی‌های مختلط عمل کند. منظور تعمیم نتایج قبلی نیست (هر چند از خواصی از قبیل $A(cx + dy) = cAx + dAy$ برای ماتریس $m \times n$ با داریه‌های مختلط و $c, d \in \mathbb{C}$ و $x, y \in \mathbb{C}^n$ استفاده خواهیم کرد). مطالعه مقادیر ویژه مختلط از این نقطه نظر اساسی است که اطلاعات پنهان و غیرآشکار در مورد ماتریس‌های با درایه‌های حقیقی پوشش داده نمی‌شوند. این مطالعات در بررسی سیستم‌های دینامیکی حقیقی و بعضی دوران‌ها در فضا مورد استفاده قرار می‌گیرند. مشابه تعاریف حالت حقیقی، اسکالار مختلط λ در $\det(A - \lambda I) = 0$ صدق می‌کند اگر و تنها اگر بردار ناصرف X در \mathbb{C}^n وجود داشته باشد به‌طوری که $\lambda X = \lambda X$ را مقادیر ویژه مختلط و X را بردار ویژه مختلط متناظر با λ می‌نامیم.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ آنگاه معادله‌ی مشخصه‌ی A ، $\lambda^2 + 1 = 0$ است که ریشه‌ای حقیقی ندارد. تنها ریشه‌های مختلط i و $-i$ هستند و اگر A روی \mathbb{C}^2 عمل کند آنگاه

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

پس i و $-i$ مقادیر ویژه و $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ بردارهای ویژه هستند.

مثال: فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,6 \\ 0,75 & 1,1 \end{bmatrix}$ مقادیر ویژه‌ی A را به دست آورده باشد برای هر فضای ویژه مشخص کنید.



حل: معادله مشخصه عبارت است از $\lambda^2 - 1,6\lambda + 1 = 0$ و در نتیجه

$$\lambda = \frac{1}{2}[1,6 \pm \sqrt{(-1,6)^2 - 4}] = 0,8 \pm 0,6i$$

برای $i = 0,8 - 0,6i$ داریم:

$$A - (0,8 - 0,6i)I = \begin{bmatrix} -0,3 + 0,6i & -0,6 \\ 0,75 & 0,3 + 0,6i \end{bmatrix}$$

این ماتریس معکوس پذیر نیست بنابراین سطراها به عنوان بردارهای در \mathbb{C}^2 وابسته خطی‌اند و در نتیجه یک سطر مضربی (مختلط) از دیگری است:

$$\begin{cases} (-0,3 + 0,6i)x - 0,6y = 0 \\ 0,75x + (0,3 + 0,6i)y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 0,75x = (-0,3 - 0,6i)y \\ x = (-0,4 - 0,8i)y \end{cases}$$

فرض کنیم: $y = 5$ در این صورت $x = -2 - 4i$ و از آنجا پایه‌ای برای فضای بردار ویژه وابسته به

$$\lambda = 0,8 - 0,6i \text{ عبارت است از } v_1 = \begin{bmatrix} -2 - 4i \\ 5 \end{bmatrix} \text{ محاسبه‌ای مشابه برای } 0,8 + 0,6i \text{ نیز}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -2 + 4i \\ 5 \end{bmatrix} \text{ نتیجه می‌دهد} \\ \text{به عنوان یک بررسی ساده داریم:}$$

$$Av_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,6 \\ 0,75 & 1,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 + 4i \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 + 2i \\ 4 + 3i \end{bmatrix} = (0,8 + 0,6i)v_2$$

با اندکی توجه، ماتریس A در مثال بالا نگاشت $X \mapsto AX$ را ارائه می‌دهد که اساساً یک دوران است.

این واقعیت هنگامی که نقاط مقتضی رسم شوند بدیهی به نظر می‌آید.

مثال: یک راه مشاهده‌ی تأثیر چگونگی ضرب A در مثال قبل، در نظر گرفتن نقطه اولیه‌ای دلخواه مانند $X = (2, 0)$ و رسم نقاط حاصل از اثر کردن پی در پی A روی هر نقطه حاصل از تأثیر است. یعنی:

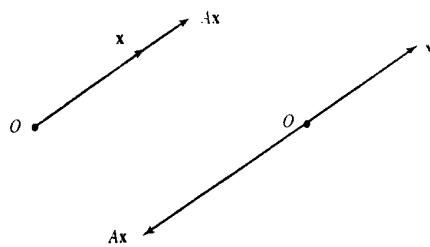
$$X_1 = AX_0 = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,6 \\ 0,75 & 1,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = AX_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,6 \\ 0,75 & 1,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,4 \\ 2,4 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = AX_2 = \dots$$

با رسم این نقاط مداری بیضی شکل به دست می‌آید:





شکل ۱-۶

البته این شکل دلیل دوران را نشان نمی‌دهد. راز دوران در قسمت‌های حقیقی و آموهومی مقدار ویژهای مختلط نهفته است.

۴-۶ قسمت‌های حقیقی و آموهومی بردارها

مزدوج مختلط بردار مختلط X در \mathbb{C}^n بردار \bar{X} در \mathbb{C}^n است که مؤلفه‌های آن مزدوج مختلط درایه‌های X هستند. قسمت‌های حقیقی و آموهومی بردار مختلط X بردارهای $\text{Re } X$ و $\text{Im } X$ هستند که از قسمت‌های حقیقی و آموهومی مؤلفه‌های X ساخته می‌شوند.

$$\text{مثال: اگر } X = \begin{bmatrix} 3-i \\ i \\ 2+5i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Re } X = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{Im } X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+i \\ -i \\ 2-5i \end{bmatrix}$$

اگر B ماتریسی $n \times m$ با درایه‌های مختلط احتمالی باشد آنگاه \bar{B} نشان دهنده‌ی ماتریسی است که درایه‌ایش مزدوج مختلط درایه‌های B هستند. خواص مزدوج اعداد مختلط به مزدوج ماتریس‌ها القا می‌شود و داریم:

$$\overline{rX} = \bar{r}\bar{X}, \quad \overline{BX} = \bar{B}\bar{X}, \quad \overline{BC} = \bar{B}\bar{C}, \quad \overline{rB} = \bar{r}\bar{B}$$

$$(\bar{B})' = \overline{(B')}$$



۵-۶ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریسی حقیقی که روی

\mathbb{C}^n عمل می‌کند

فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ است که درایه‌هایش حقیقی می‌باشند، داریم $\bar{A}\bar{X} = A\bar{X}$ باشد آنگاه λ مقدار ویژه‌ای از A و X بردار ویژه متناظرش در \mathbb{C}^n باشد آنگاه

$$A\bar{X} = \bar{A}\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$$

در نتیجه $\bar{\lambda}$ نیز مقدار ویژه‌ای از A بوده \bar{X} بردار ویژه متناظرش است. بنابراین وقتی A حقیقی است مقادیر ویژه مختلط آن در جفت‌های مزدوج ظاهر می‌شود.

مثال: همان‌طور که دیدیم مقادیر ویژه ماتریس حقیقی $A = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,6 \\ 0,75 & 1,1 \end{bmatrix}$ اعداد $0,8 + 0,6i$ و $0,8 - 0,6i$ بوده مزدوج یکدیگرند. بردارهای ویژه متناظر به دست آمده نیز:

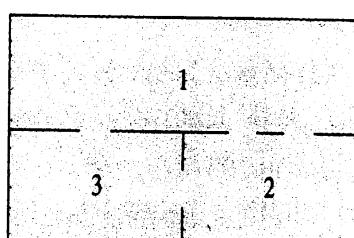
$$v_1 = \begin{bmatrix} -2 - 4i \\ 5 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -2 + 4i \\ 5 \end{bmatrix} = \bar{v}_1$$

هستند که بازهم مزدوج می‌باشند.

مثال: اگر a, b حقیقی و هر دو صفر نباشد آنگاه مقادیر ویژه $c = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ هستند. همچنین اگر $r = |\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$ باشد آنگاه

$$C = r \begin{bmatrix} \frac{a}{r} & \frac{-b}{r} \\ \frac{b}{r} & \frac{a}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

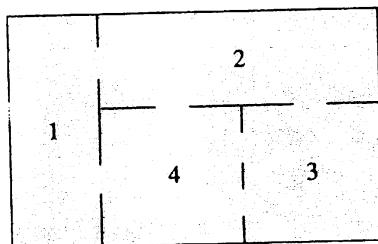
است که در آن φ زاویه بین جهت مثبت محور x ها و شعاع وصل شده از (a, b) به $(0, 0)$ می‌باشد.



شکل ۲-۶



زاویه‌ی φ شناسه‌ی $a + ib = \lambda$ نامیده می‌شود. بنابراین تبدیل $X \mapsto CX$ می‌تواند ترکیب یک دوران به اندازه‌ی زاویه‌ی φ و سپس ضرب در $|\lambda|$ فرض شود.



شکل ۳-۶

مثال: فرض کنیم $v_1 = \begin{bmatrix} -2 - 4i \\ 5 \end{bmatrix}$ و $\lambda = 0,8 - 0,6i$ در ضمن $A = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,6 \\ 0,75 & 1,1 \end{bmatrix}$ و $P = [\operatorname{Re} v_1 \ \operatorname{Im} v_1] = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس 2×2 حقیقی

$$C = P^{-1}AP = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & -0,6 \\ 0,75 & 1,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix}$$

باشد. بنابراین C یک دوران است زیرا $1 = (0,8)^2 + (0,6)^2 = (0,8)^2$. از $|\lambda|^2 = (0,8)^2 + (0,6)^2 = 1$

داریم:

$$A = PCP^{-1} = P \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} P^{-1}$$

اینجا دورانی درون A است! ماتریس P تعویض متغیری مانند $X = Pu$ می‌باشد. عمل A را می‌توان یک تعویض متغیر از X به u و سپس یک دوران و درنهایت برگشت به متغیر اولیه به حساب آورد.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{A} & AX \\ & \downarrow P^{-1} & \uparrow \text{تعویض متغیر} \\ u & \xrightarrow[C]{\text{دوران}} & Cu \end{array}$$

قضیه بعدی نشان می‌دهد که محاسبات مثال قبل را می‌توان به هر ماتریس حقیقی 2×2 , A , که دارای مقدار ویژه‌ای مختلط مانند λ است تعمیم داد. از جزئیات اثبات صرف نظر کرده خاطر نشان می‌سازیم که در برخان قضیه از این واقعیت که اگر A درایه‌های حقیقی داشته باشد آنگاه

$$A(\operatorname{Re} X) = \operatorname{Re} AX$$



$$A(\text{Im } X) = \text{Im } AX$$

است، استفاده می‌شود. ضمناً اگر X برداری ویژه برای مقدار ویژه مختلط باشد آنگاه $\text{Re}X$ و $\text{Im } X$ در \mathbb{R}^2 مستقل خطی‌اند.

۱-۵-۶ قضیه. فرض کنیم A ماتریسی حقیقی 2×2 با مقدار ویژه مختلط $a - ib$

و بردار ویژه متناظر $\mathbb{C}^2 \neq v$ باشد. در این صورت $A = PCP^{-1}$ است که در آن $P = [\text{Re } v \ \text{Im } v]$ و

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

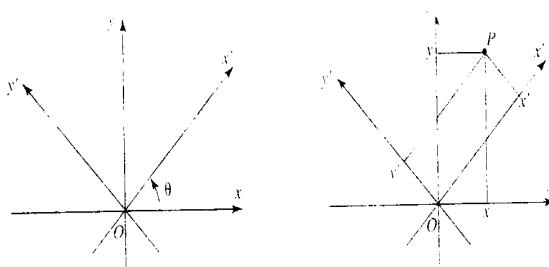
آنچه که در مثال قبل وقوع یافت در بعدهای بزرگتر نیز صحیح است. برای مثال اگر A ماتریسی 3×3 با مقدار ویژه‌ای مختلط باشد آنگاه صفحه‌ای در \mathbb{R}^3 وجود دارد که در آن A به عنوان یک دوران (احتمالاً با ضرب در یک اسکالر) عمل می‌کند. هر بردار در این صفحه به نقطه‌ای دیگر روی همین صفحه دوران می‌باید. می‌گوییم صفحه تحت A پایدار است.

$$\text{مثال: ماتریس } A = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0 \end{bmatrix} \text{ دارای مقدار ویژه } i\sqrt{0,64 - 0,36} = i\sqrt{0,28} \text{ است. هر}$$

بردار در صفحه‌ی xoy (با سومین مؤلفه‌ی صفر) به وسیله‌ی A به نقطه‌ای دیگر در این صفحه دوران می‌باید.

هر بردار غیرواقع در این صفحه با مؤلفه‌ی سوم z در $1,0\pi$ ضرب می‌شود. نقاط حاصل از تأثیر A

روی نقاط $(2, 0, 0)$ و $(0, 0, 1)$ در شکل زیر نشان داده شده‌اند:



شکل ۴-۶

تذکر: اگر A ماتریسی با درایه‌های حقیقی و بردارهای ویژه متمایز باشد ممکن است مقادیر ویژه‌ی A موهومی باشند.



هم چنان که تاکنون دیده‌ایم یافتن مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس معادل پیدا کردن ریشه‌های معادله‌ای از درجه n است، در حالت $3 \geq n$ ممکن است بدست آوردن این ریشه‌ها مشکل باشد. به خاطر اهمیت مقادیر ویژه در بسیاری از مباحث ریاضیات، روش‌های عددی و برنامه‌های کامپیوتی زیادی برای تقریب آنها وجود دارد. معمولاً این روش‌ها کوششی برای حل معادله‌ی مشخصه نیست؛ بلکه به جای آن ماتریس را به صورتی تبدیل می‌کند که مقادیر ویژه به راحتی قابل محاسبه باشند. قضیه‌ی بعد ما را قادر می‌سازد که به سرعت تقریب‌های سطحی مقادیر ویژه را بدست آوریم. مقادیر ویژه را نقاط صفحه در نظر خواهیم گرفت. یادآوری می‌کنیم که عدد مختلط $a + bi$ می‌تواند نقطه‌ی (a, b) فرض شود.

۶-۶ قضیه گرشگورین^{۱)}

فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های حقیقی یا مختلط باشد. برای $n = 1, 2, \dots, n$ گیریم

$$r_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|$$

فرض کنیم C_k دایره به شعاع r_k و به مرکز (α_k, β_k) است که در آن $a_{kk} = \alpha_k + \beta_k i$ می‌باشد. در این صورت هر مقدار ویژه A وقتی به عنوان نقطه‌ای از صفحه در نظر گرفته شود روی مرز یا داخل یکی از دایره‌های C_1, \dots, C_n قرار می‌گیرد.

توضیح دایره‌های گرشگورین A نامیده می‌شوند. شعاع k امین دایره مجموع قدرمطلق‌های درایه‌های سطر k از A به جز a_{kk} است. یعنی

$$r_k = |a_{k1}| + \dots + |a_{k(k-1)}| + |a_{kk+1}| + \dots + |a_{kn}|$$

مرکز k امین دایره عدد مختلط a_{kk} است که به عنوان نقطه‌ای در صفحه فرض می‌شود. (اگر a_{kk} حقیقی باشد مرکز این دایره روی محور طول هاست). اگر دایره‌های گرشگورین رسم شده درون آنها هاشور زده شود، مقادیر ویژه A به عنوان نقاط صفحه باید در ناحیه سایه‌خورده یا روی مرز یکی از دایره‌ها قرار گیرد.

برهان: فرض کنیم λ مقدار ویژه‌ای از A و $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ بردار ویژه متناظر است. گیریم مؤلفه‌ای از

X که دارای بزرگترین مقدار قدرمطلق است X_k باشد. (اگر دو یا تعداد بیشتری از مؤلفه‌ها این بزرگترین

¹⁾ Gershgorin



قدر مطلق را داشته باشد، یکی را انتخاب می‌کنیم). چون $AX = \lambda X$ داریم:

$$(\lambda - a_{kk})x_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj}x_j$$

و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$|(\lambda - a_{kk})x_k| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| |x_j| \leq |x_k| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \Rightarrow$$

$$|\lambda - a_{kk}| |x_k| \leq |x_k| r_k \Rightarrow |\lambda - a_{kk}| \leq r_k$$

یعنی λ درون یا روی دایره‌ای گرشگورین قرار دارد.

مثال: فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 12i & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -6 & 2+i & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2i \\ 0 & -3 & 1 & 4-7i \end{bmatrix}$ پیدا کردن مقادیر ویژه‌ی این ماتریس دشوار است. دایره‌های گرشگورین عبارتند از:

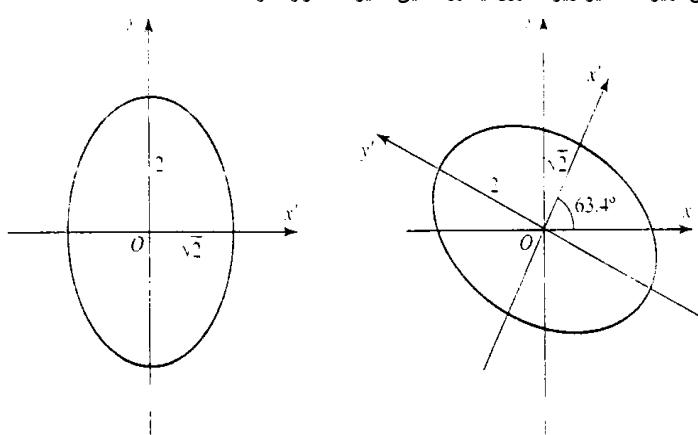
$$r_1 = 1 + |-2| = 3 : C_1$$

$$r_2 = 1 + |2+i| = 1 + \sqrt{5} : C_2$$

$$r_3 = 2 + 1 + |2i| = 5 : C_3$$

$$r_4 = |-3| + 1 = 4 : C_4$$

با توجه به شکل زیر، مقادیر ویژه درون یا روی این دایره‌ها قرار دارند:



شکل ۶-۶

با تشکیل معادله مشخصه‌ی A داریم

$$\lambda^3 + (3 - 5i)\lambda^2 + (59 + 10i)\lambda^1 + (534 + 211i)\lambda + 41 + 143i = 0.$$

مقدار ریشه‌ها به کمک رایانه تقریباً برابر هستند با

$$0, 0.65 + 11.9071i, -0.7355 + 0.1753i, -6.1892 - 2.7722i, 3.9182 - 6.8053i$$

می‌توان بررسی نمود که ریشه‌ها درون دایره‌های گرشگورین ماتریس A قرار می‌گیرند.

۱-۶-۶ قضیه. اگر s دایره گرشگورین حوزه‌ای یکپارچه تشکیل دهنده طوری که این حوزه از بقیه دایره‌ها مجزا می‌باشد آنگاه دقیقاً مقدار ویژه A در این حوزه یکپارچه قرار می‌گیرند.
برهان: اثبات به پیوستگی بستگی دارد. قرار می‌دهیم $C = \text{diag}(a_{ii}) + C = D + C$ که در آن $A = \text{diag}(a_{ii}) + C$ است و r_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

ماتریس‌های $D + \varepsilon C$ را با خاصیت $1 \leq \varepsilon \leq 0$ در نظر می‌گیریم. برای $\varepsilon = 0$ ماتریس D و برای $\varepsilon = 1$ ماتریس A به دست خواهد آمد. ضریب‌های چندجمله‌ای مشخصه‌ی $D + \varepsilon C$ چندجمله‌ای‌هایی بر حسب ε هستند و بنا به تئوری توابع جبری ریشه‌های معادله مشخصه مفسر توابع پیوسته‌ای از ε می‌باشند. بنابر قضیه قبل برای هر مقدار ε ، مقادیر ویژه همه درون دایره‌های به مرکز a_{ii} و شعاع εr_i قرار می‌گیرند و اگر ε را به طور یکنواخت از صفر تا یک تغییر دهیم مقادیر ویژه همگی از مسیرهای پیوسته عبور می‌کنند.
بدون آنکه خللی به کلیت استلال وارد شود، می‌توانیم فرض کنیم اولین s دایره تشکیل حوزه‌ای یکپارچه می‌دهند. در این صورت چون $s - n$ دایری با شعاع‌های $r_n, r_{n+1}, r_{n+2}, \dots$ از بقیه دایره‌های با شعاع r_1, r_2, \dots و r_s مجزا هستند همان برای دایره‌های با شعاع εr_i برای هر $1 \leq i \leq s$ نیز صحیح است. حال اگر $\varepsilon = 0$ مقادیر ویژه $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ هستند و از این‌ها اولین s تا در حوزه متناظر با اولین s دایری و $s - n$ تای بقیه در بیرون حوزه قرار می‌گیرند. این مطلب برای هر ε بیشتر و $1 = \varepsilon$ نیز صحیح است.

به خصوص اگر یکی از دایره‌های گرشگورین مجزا باشد دقیقاً شامل یک مقدار ویژه خواهد بود. توجه می‌کنیم که نتایج متناظر برای ترانهاده A به جای A نیز قابل بررسی هستند.



۷-۶ نکاتی در مورد مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

(۱) با توجه به آنکه دترمینان هر ماتریس اسکالر، قطری، بالا مثلثی یا پایین مثلثی مساوی حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی است، اگر A ماتریسی اسکالر یا قطری یا بالا مثلثی یا پایین مثلثی باشد درایه‌های واقع بر قطر اصلی مقادیر ویژه A خواهند بود.

$$\text{مثال: مقادیر ویژه ماتریس } A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ کدامند؟}$$

حل: چون ماتریس بالا مثلثی است مقادیر ویژه آن درایه‌های روی قطر اصلی یعنی 1 و $\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{2}$ هستند.

مثال: فرض کنیم V فضای برداری n بعدی روی میدان \mathbb{F} باشد. معادله‌ی مفسر نگاشت همانی روی V و ریشه‌های آن چیست؟ معادله‌ی مفسر نگاشت صفر و ریشه‌های آن چیست؟

حل: ماتریس نگاشت همانی روی V ماتریس همانی و ماتریس نگاشت صفر ماتریس صفر است بنابراین داریم:

$$\det(I - \lambda I) = 0 \implies \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\implies (\lambda - 1)^n = 0 \implies \lambda = 1^n$$

$$\det(Z - \lambda I) = 0 \implies \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\implies \lambda^n = 0 \implies \lambda = 0$$

(۲) برای آنکه ماتریس $n \times n$, A مقدار ویژه‌ای مساوی صفر داشته باشد لازم و کافی است که معادله‌ی $AX = 0$ جوابی نابدیهی داشته باشد ولی تساوی قبل معادل $AX = 0$ است و جوابی نابدیهی دارد اگر و تنها اگر A معکوس نپذیر باشد. بنابراین عدد صفر مقدار ویژه‌ای از A است اگر و تنها اگر A معکوس پذیر نباشد.



(۳) اگر مقادیر ویژه A را λ_i فرض کنیم و A وارونپذیر باشد (در نتیجه $\circ \neq \lambda_i$) مقادیر ویژه ماتریس A^{-1} برابر $\frac{1}{\lambda_i}$ هستند اما بردارهای ویژه A و A^{-1} یکسان هستند زیرا:

$$AX = \lambda_i X \implies A^{-1}AX = A^{-1}\lambda_i X \implies X = \lambda_i A^{-1}X \implies \frac{1}{\lambda_i}X = A^{-1}X$$

(۴) با توجه به تساوی‌های زیر

$$\circ = \det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A)' = \det(\lambda I - A')$$

نتیجه می‌گیریم A و ترانهاده آن یعنی A' معادله‌ی مفسر یکسان و در نتیجه مقادیر ویژه‌ای برابر دارند. (اما بردارهای ویژه لزوماً برابر نیستند).

(۵) اگر ماتریس A در اسکالر k ضرب شود مقادیر ویژه آن نیز در k ضرب می‌شوند اما بردارهای ویژه تغییر نمی‌کنند زیرا بنا به خواص ماتریس‌ها داریم:

$$AX = \lambda X \implies k(AX) = k(\lambda X) \implies (kA)X = (k\lambda)X$$

(۶) اگر ماتریس A به توان m برسد مقادیر ویژه آن نیز به توان m می‌رسند اما بردارهای ویژه تغییر نمی‌کنند زیرا می‌توان نوشت:

$$AX = \lambda X \implies A(AX) = A(\lambda X) \implies A^r X = \lambda(AX) = \lambda(\lambda X) = \lambda^r X$$

و حکم با استقرار روی m به دست می‌آید.
 (۷) در ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ مقادیر ویژه $a - b$ و $a + b$ را بدست ایجاد کنید. زیرا $y \pm x$ است.

$$\begin{aligned} \lambda^r - (a + b) + a^r - b^r &= \circ \implies \lambda^r - (a + b + a - b)\lambda + (a + b)(a - b) = \circ \\ &\implies (\lambda - (a + b))(\lambda - (a - b)) = \circ \\ &\implies \lambda_1 = a + b, \quad \lambda_2 = a - b \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (\lambda - a)x - by = \circ & \lambda_1 = a + b \implies (a + b - a)x - by = \circ \implies x = y \\ -bx + (\lambda - a)y = \circ & \lambda_2 = a - b \implies (a - b - a)x - by = \circ \implies -x = y \end{cases}$$



مثال: بردار ویژه‌ی نظری کوچکترین مقدار ویژه‌ی ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ کدام است؟
 (الف) (۱, ۱) (ب) (۱, -۱) (ج) (۱, ۲) (د) (۲, ۱)

حل:

$$\lambda_1 = a + b = 3, \lambda_2 = a - b = 1$$

گزینه‌ی (ب) صحیح است $(\lambda - 2)x - y = 0 \xrightarrow{\lambda=1} -x - y = 0 \Rightarrow x = y$

۸) اگر مقدار ویژه‌ی ماتریس A برابر λ باشد مقدار ویژه‌ی ماتریس $A + mI$ برابر $\lambda + m$ است زیرا

$$AX = \lambda X \Rightarrow AX + mIX = \lambda X + mIX \xrightarrow{IX=X} (A + mI)X = (\lambda + m)X$$

اما بردارهای ویژه یکسان هستند.

مثال: هرگاه $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ را به دست $A^T + 3I$ ، $(A^{-1})^T$ ، $3A^T$ و $A^T + 3I$ مقدار ویژه‌ی ماتریس‌های A را بدست آورید.

حل: ماتریس پایین مثلثی است بنابراین؛ مقادیر روی قطر مقادیر ویژه هستند.

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$$

$$\lambda_{A^T} = 9, 4, 4 \Rightarrow \lambda_{(A^T)^T} = 27, 12, 12$$

$$\lambda_{(A^{-1})^T} = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2} \Rightarrow \lambda_{(A^{-1})^T} = \frac{1}{27}, \frac{1}{12}, \frac{-1}{12}$$

$$\lambda_{A^T + 3I} = \lambda_{A^T} + 3 = 12, 7, 7$$

۹) اگر در ماتریس با درایه‌های حقیقی $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ درایه‌های b و c هم علامت باشند ماتریس دارای دو مقادیر ویژه‌ی حقیقی متمایز است (عکس مطلب همیشه درست نیست) زیرا می‌بین معادله‌ی مفسر اکیداً مثبت می‌شود:

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

$$\Delta = (a+d)^2 - 4ad + 4bc = \underbrace{(a-d)^2}_{\geq 0} + \underbrace{4bc}_{>0} > 0$$



$$\text{اگر } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ مقدار ویژه } \lambda_1, \lambda_2 \text{ و } \alpha \text{ زاویه بین راستای بردارهای } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ باشد آنگاه} \\ \tan \alpha = \left| \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{b - c} \right|$$

برهان. معادله‌ی مفسر را تشکیل داده مقادیر ویژه حاصل را در یکی از معادلات دستگاه همگن $(\lambda I - A)X = 0$ قرار می‌دهیم تا بردارهای ویژه به دست آیند. ضریب زاویه این دو بردار را m_1 و m_2 نامیده تأثیرات زاویه‌ی بین آنها را به دست می‌آوریم:

$$\lambda^2 = (a+d)\lambda + ad - bc = 0 \implies \lambda = \frac{1}{2}(a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc})$$

$$\begin{cases} (\lambda - a)x - by = 0 \implies y = \frac{\lambda - a}{b}x \\ -cx + (\lambda - d)y = 0 \end{cases}$$

$$m_1 = \frac{-a + d + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2b} \\ m_2 = \frac{-a + d - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2b}$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{\frac{\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{b}}{1 + \frac{(-a+d)^2 - (a-d)^2 - 4bc}{4b^2}} \right| = \left| \frac{\frac{\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{b}}{1 - \frac{c}{b}} \right| \\ = \left| \frac{\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{b - c} \right| = \left| \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{b - c} \right|$$

نتیجه. اگر مقادیر ویژه‌ی ماتریس دودردو A متمایز بوده و ماتریس متقارن باشد راستای بردارهای ویژه برهمنمودند.

مثال: کدامیک از دسته بردارهای زیر می‌توانند بردارهای ویژه یک ماتریس متقارن 2×2 با مقادیر ویژه غیرمساوی باشند؟

$$(a) m_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, m_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (b) m_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, m_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\text{الف}) \\ (c) m_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, m_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (d) m_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

حل: فقط در گزینه‌ی (ب) راستای بردارهای ویژه برهمنمودند زیرا ضرب اسکالر آنها برابر صفر است.
تذکر: مقادیر ویژه‌ی هر ماتریس متقارن حقیقی اعدادی حقیقی هستند.



برهان. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ متقارن حقیقی و λ مقدار ویژه‌ای دلخواه از آن باشد. می‌خواهیم نشان دهیم λ حقیقی است.

فرض کنیم $E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$ بردار ویژه‌ای متناظر با λ باشد، در این صورت $AE = \lambda E$. طرفین این رابطه را از چپ در ماتریس $n \times 1$ ضرب می‌کنیم، داریم:

$$\bar{E}' AE = \bar{E}' \lambda E = \lambda \bar{E}' E = \lambda [\bar{e}_1 \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \lambda [\bar{e}_1 e_1 + \bar{e}_2 e_2 + \dots + \bar{e}_n e_n] \quad (1)$$

ملاحظه می‌کنیم آخرین مقدار داخل ماتریس 1×1 عددی حقیقی است. چون A ماتریسی حقیقی است می‌توان نوشت:

$$\overline{\bar{E}' AE} = \bar{E}' \overline{AE} = \bar{E}' \bar{A} \bar{E} = E' A \bar{E} \quad (2)$$

E' ماتریسی 1×1 بوده ترانهاده آن نیز 1×1 خواهد بود و داریم:

$$E' A \bar{E} = (E' A \bar{E})' = \bar{E}' A' E = \bar{E}' AE \quad (3)$$

$$(2), (3) \implies \overline{\bar{E}' AE} = \bar{E}' AE$$

یعنی ماتریس 1×1 $\bar{E}' AE$ حقیقی است. حال به رابطه (1) برمی‌گردیم. نشان داده‌ایم که سمت چپ این رابطه عددی حقیقی است و می‌دانیم سمت راست نیز حاصل ضرب λ در عددی حقیقی است پس λ باید حقیقی بوده اثبات تمام است.

تذکر: اگر A ماتریسی حقیقی و متقارن $n \times n$ باشد بردارهای ویژه‌ای متناظر با مقادیر ویژه متمایز برهمنمودند.



برهان. فرض کنیم λ و μ دو مقدار ویژه متمايز و
 $G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$ بردارهای ویژه
 $E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$

متناظر با آنها باشند. نشان می‌دهیم این بردارها برهمن عمودند یعنی $e_1g_1 + e_2g_2 + \dots + e_ng_n = 0$ است. داریم:

$$E'G = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n] \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = [e_1g_1 + e_2g_2 + \dots + e_ng_n]$$

چون $AG = \mu G$ و $AE = \lambda E$ می‌توان نوشت:

$$\lambda E'G = (\lambda E)'G = (AE)'G = E'A'G = E'(AG) = E'(AG) = E'(\mu G) = \mu E'G$$

در نتیجه $(\lambda - \mu)E'G = 0$ است پس ماتریس 1×1 دارای عضو صفر است.

(۱۱) اگر A ماتریسی 2×2 یا 3×3 قطری با درایه‌های روی قطر متمايز باشد راستای بردارهای ویژه محورهای مختصات است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = a_{11}, \lambda_2 = a_{22}, \lambda_3 = a_{33}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (\lambda - a_{11})x = 0 \\ (\lambda - a_{22})y = 0 \\ (\lambda - a_{33})z = 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{lcl} \text{محور } x \text{ دلخواه } x, y = 0, z = 0 \implies \text{محور } x \\ \text{محور } y \text{ دلخواه } y, x = 0, z = 0 \implies \text{محور } y \\ \text{محور } z \text{ دلخواه } z, x = 0, y = 0 \implies \text{محور } z \end{array} \right.$$

(۱۲) اگر A ماتریسی $n \times n$ اسکالر باشد هر بردار دلخواه بردار ویژه این ماتریس است.

$$A = \begin{bmatrix} k & & & \\ & k & 0 & \\ & & k & \\ 0 & & \ddots & k \end{bmatrix} \implies \begin{vmatrix} \lambda - k & & & \\ & \lambda - k & 0 & \\ & & \lambda - k & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & \lambda - k \end{vmatrix} = 0$$



$$\Rightarrow (\lambda - k)^n = 0 \Rightarrow \lambda = k$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda - k)x_1 = 0 \\ (\lambda - k)x_2 = 0 \\ (\lambda - k)x_3 = 0 \xrightarrow{\lambda=k} x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, \dots, x_n = 0 \Rightarrow \text{دلخواه} \\ \vdots \\ (\lambda - k)x_n = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

(۱۳) اگر در ماتریس $n \times n$, A مجموع درایه‌های هر سطر (و یا مجموع درایه‌های هر ستون) دلخواه

برابر عددی مانند s باشد آنگاه یکی از مقادیر ویژه ماتریس A برابر s است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \sum_{j=1}^n a_{1j} = \sum_{j=1}^n a_{2j} = \cdots = \sum_{j=1}^n a_{nj} = s$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

مجموع ستون‌های دوم به بعد را به ستون اول دترمینان اضافه می‌کنیم (مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند):

$$A = \begin{vmatrix} \lambda - \sum_{j=1}^n a_{1j} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \lambda - \sum_{j=1}^n a_{2j} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda - \sum_{j=1}^n a_{nj} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$



$$\Rightarrow A = \begin{vmatrix} \lambda - S & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ \lambda - S & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda - S & -a_{n2} & \dots & -a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - S) \begin{vmatrix} 1 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 1 & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -a_{n2} & \dots & -a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = S \text{ یکی از مقادیر ویژه است}$$

(۱۴) در ماتریس‌های قطر فرعی از مرتبه‌ی فرد همواره درایه‌ی وسط یکی از مقادیر ویژه‌ی ماتریس است. به طور مثال در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}$ یکی از مقادیر ویژه برابر b (و با تجزیه معادله مفسر و یا تقسیم آن بر $b - \lambda$) دو مقدار ویژه دیگر آن $\pm\sqrt{ac}$ هستند.

مثال: ریشه‌های مشخصه‌ی ماتریس کدامند؟

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2, \lambda_3 = \pm\sqrt{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \pm 2 \end{cases}$$

(۱۵) اگر $M = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ ماتریس‌های مربع باشند چندجمله‌ای مشخصه‌ی مساوی حاصل ضرب چندجمله‌ای مشخصه‌ی A_1 و A_2 است. زیرا

$$\lambda I - M = \begin{bmatrix} \lambda I - A_1 & -B \\ 0 & \lambda I - A_2 \end{bmatrix}$$

چون دترمینان ماتریس بلوکی مثلثی حاصل ضرب دترمینان‌های بلوک‌های قطری است در نتیجه

$$|\lambda I - M| = \begin{vmatrix} \lambda I - A_1 & -B \\ 0 & \lambda I - A_2 \end{vmatrix} = |\lambda I - A_1| |\lambda I - A_2|$$



با تعمیم مطلب بالا می‌توان نتیجه گرفت چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس بلوکی مثلثی

که در آن A_1, A_2, \dots, A_n ماتریس‌های مربع هستند و مساوی حاصل ضرب چندجمله‌ای‌های مشخصه‌ی A_1, A_2, \dots, A_n است.

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & B & \cdots & C \\ 0 & A_2 & \cdots & D \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix}$$

مثال: چندجمله‌ای مشخصه‌ی $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & -9 \\ 1 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

حل: چون A بلوکی مثلثی با بلوک‌های قطری است، داریم:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ و } A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = |\lambda I_2 - A_1| |\lambda I_2 - A_2| = (\lambda^2 - 6\lambda + 3)(\lambda^2 - 9\lambda + 28)$$

(۱۶) اگر A و B ماتریس‌های $n \times n$ باشند مقادیر ویژه‌ی AB و BA مساویند.

حل: می‌دانیم حاصل ضرب ماتریس‌های نامنفرد ماتریسی نامنفرد است. ابتدا ثابت می‌کنیم که احکام زیر هم‌ارزند:

(i) عدد صفر مقدار ویژه AB است.

(ii) AB منفرد است.

(iii) B یا A منفرد است.

(iv) BA منفرد است.

(v) عدد صفر مقدار ویژه‌ی از BA است.

حال فرض می‌کنیم λ مقدار ویژه‌ی ناصفری است، در این صورت بردار ناصفر v وجود دارد به‌طوری که $ABv = \lambda v$. قرار می‌دهیم $w = Bv$ ، چون $w = Bv$ و $Aw = ABv = \lambda v \neq 0$ در نتیجه w بردار ویژه‌ی از BA متناظر با λ است زیرا بنابراین $w \neq 0$ است. ولی w بردار ویژه‌ی از BA متناظر با λ است زیرا

$$BAw = BABv = B\lambda v = \lambda Bv = \lambda w$$

در نتیجه λ مقدار ویژه‌ی از BA است. به‌طور مشابه هر مقدار ویژه‌ی ناصفر BA مقدار ویژه‌ی از AB است.



۱۷) اگر A و B ماتریس‌های $n \times m$ و $m \times n$ باشند چندجمله‌های مشخصه AB و BA در

تساوی زیر صدق می‌کنند:

$$\lambda^n |\lambda I_m - AB| = \lambda^m |\lambda I_n - BA|$$

به خصوص اگر $m = n$ باشد A, B و BA شده مقادیر ویژه AB و A به دلیل یکی شدن چندجمله‌ای مشخصه برابر می‌شوند.

حل: می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} I_m & : & \circ \\ \dots & & \\ -B & : & \mu I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu I_m & : & A \\ \dots & & \\ B & : & \mu I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu I_m & : & A \\ \dots & & \\ \circ & : & \mu^* I_n - BA \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mu I_m & : & -A \\ \dots & & \\ \circ & : & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu I_m & : & A \\ \dots & & \\ B & : & \mu I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^* I_m - AB & : & \circ \\ \dots & & \\ B & : & \mu I_n \end{bmatrix}$$

از طرفین تساوی‌های بالا دترمینان می‌گیریم. با فرض داریم:

$$\begin{bmatrix} \mu I_m & : & A \\ \dots & & \\ B & : & \mu I_n \end{bmatrix} = X$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu^n \det X = \mu^m \det(\mu^* I_n - BA) \xrightarrow{\text{ضرب}} \mu^{m+n} \det X = \mu^m |\mu^* I_n - BA| \\ \mu^n \det X = \mu^n \det(\mu^* I_m - AB) \xrightarrow{\text{ضرب}} \mu^{m+n} \det X = \mu^n |\mu^* I_m - AB| \end{array} \right.$$

طرف چپ تساوی‌های اخیر مساویند پس طرف راست آنها برابر است و اگر قرار دهیم $\lambda = \mu^*$ داریم:

$$\lambda^n |\lambda I_m - AB| = \lambda^m |\lambda I_n - BA|$$

حال اگر $m = n$ و $\lambda \neq 0$ آنگاه $|\lambda I_m - AB| = |\lambda I_n - BA|$ یعنی چندجمله‌ای‌های مشخصه AB و BA یکی هستند و در نتیجه مقادیر ویژه AB و BA مساوی است.

۱۸) برای یک ماتریس مفروض $n \times n$ همان‌طور که دیدیم همواره می‌توان چندجمله‌ای مشخصه تشکیل داد، برعکس آیا برای یک چندجمله‌ای مانند

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a.$$



می‌توان ماتریسی یافت که $(x) p$ چندجمله‌ای مشخصه‌ی آن باشد؟

پاسخ به این سؤال مثبت است در واقع هر یک از ماتریس‌های زیر یا ترانهاده‌ی آنها جواب مسئله هستند.

و کافی است چندجمله‌ای مشخصه‌ی آنها را به دست آورده ملاحظه نمود که همان $(x) p$ می‌شود:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

این ماتریس‌ها را ماتریس همراه چندجمله‌ای $(x) p$ (یا ماتریس فربونیوس) می‌نامند.

تعریف. فرض کنیم λ مقدار ویژه‌ای از ماتریس $A, n \times n$ باشد. چندگانگی جبری λ همان چندگانگی

λ به عنوان ریشه‌ای از معادله‌ی مفسر تعریف می‌شود.

چندگانگی هندسی λ بعد زیرفضای ویژه تولید شده به وسیله‌ی بردارهای ویژه متناظر به λ در نظر گرفته

می‌شود.

۱-۷-۶ قضیه. فرض کنیم λ مقدار ویژه‌ای از نگاشت خطی $v : T : v \rightarrow v$ فضای n بعدی

باشد. در این صورت چندگانگی هندسی λ از چندگانگی جبری آن تجاوز نمی‌کند.

برهان. فرض کنیم چندگانگی هندسی λ برابر r باشد. در این صورت λ شامل r بردار ویژه مستقل خطی

$\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ است. مجموعه‌ی $\{v_1, \dots, v_r\}$ را به پایه شامل n بردار $\{w_1, \dots, w_s\}$

از فضای v توسعه می‌دهیم. داریم:

$$T(v_1) = \lambda v_1$$

$$T(v_2) = \lambda v_2$$

.....

$$T(v_r) = \lambda v_r$$

$$T(w_1) = a_{11}v_1 + \dots + a_{1r}v_r + b_{11}w_1 + \dots + b_{1s}w_s$$

$$T(w_r) = a_{r1}v_1 + \dots + a_{rr}v_r + b_{r1}w_1 + \dots + b_{rs}w_s$$

.....



$$T(w_s) = a_{s1}v_1 + \cdots + a_{sr}v_r + b_{s1}w_1 + \cdots + b_{ss}w_s$$

ماتریس T نسبت به پایه‌ی فوق‌الذکر عبارت است از:

$$M = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & : & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{s1} \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & : & a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & : & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & : & a_{1r} & a_{1r} & \cdots & a_{sr} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & : & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & : & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{r1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & : & b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & : & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & : & b_{1s} & b_{1s} & \cdots & b_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda I_r & : & A \\ \cdots & : & \cdots \\ 0 & : & B \end{bmatrix}$$

که در آن $B = [b_{ij}]'$ و $A = [a_{ij}]'$ است. چون M ماتریس بلوکی مثلثی است، چندجمله‌ای مفسر λI_r که باید چند جمله‌ای مفسر M و در نتیجه T را عاد کند. بنابراین چندگانگی جبری برای نگاشت T حداقل r است.

۸-۶ قضیه کیلی^۱-هامیلتون^۲

هر ماتریس مربع در معادله مشخصه‌اش صدق می‌کند. (یعنی اگر A ماتریسی $n \times n$ و معادله مشخصه‌اش $A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_0I = 0$ باشد آنگاه $\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$ می‌شود).

برهان. اگر $\Delta(\lambda)$ چندجمله‌ای مشخصه‌ی A باشد داریم؛

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

فرض کنیم λ الحاقی کلاسیک ماتریس $B(\lambda) = \lambda I - A$ همسازه‌های ماتریس $B(\lambda)$ باشد، عناصر $B(\lambda)$ هستند و لذا چندجمله‌ای‌هایی بر حسب λ و با درجه ناییشتر از $n-1$ می‌باشند، بنابراین

$$B(\lambda) = B_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0$$

2) Cayley

2) Hamilton



که در آن B_i ها ماتریس های $n \times n$ روی \mathbb{R} هستند که مستقل از λ می باشند. می توان نوشت:

$$(\lambda I - A)B(\lambda) = |\lambda I - A|I$$

و از آنجا

$$(\lambda I - A)(B_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + B_1\lambda + B_0) = (\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0)I$$

با متحده گرفتن ضرایب توان های نظیر λ خواهیم داشت:

$$B_{n-1} = I$$

$$B_{n-2} - AB_{n-1} = c_{n-1}I$$

$$B_{n-3} - AB_{n-2} = c_{n-2}I$$

.....

$$B_1 - AB_0 = c_1I$$

$$- AB_1 = c_0I$$

از ضرب معادلات ماتریسی بالا به ترتیب در I و A و A^n و A^{n-1} و A^{n-2} و \dots به دست می آوریم

$$A^n B_{n-1} = A^n$$

$$A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1} = c_{n-1} A^{n-1}$$

$$A^{n-2} B_{n-3} - A^{n-1} B_{n-2} = c_{n-2} A^{n-2}$$

.....

$$AB_1 - A^1 B_0 = c_1 A$$

$$- AB_1 = c_0 I$$

مجموع روابط بالا نتیجه می دهد

$$= A^n + c_{n-1} A^{n-1} + c_{n-2} A^{n-2} + \dots + c_1 A + c_0 I$$

\square یعنی $\Delta(A)$ یعنی A در معادله مشخصه اش صدق می کند.

یکی از کاربردهای قضیه کیلی-هامیلتون پیدا کردن وارون ماتریس ها است.



مثال: نشان دهید ماتریس زیر در معادله‌ی مشخصه‌اش صدق می‌کند

حل:

$$\lambda^2 - (tr A)\lambda + |A| = 0 \implies A^2 - (0 + 3)A + (0 + 2)I \stackrel{?}{=} 0$$

$$A^2 - 3A + 2I \stackrel{?}{=} 0 \quad (*)$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(*) \implies \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+2 & 6-6 \\ -2+3 & 7-9+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال: ماتریس B را وارون A می‌نامیم هرگاه $AB = I$ با استفاده از قضیه‌ی کیلی-هامیلتون وارون ماتریس مثال قبل را به دست آورید.

حل:

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} &\implies \dots \implies A^2 - 3A + 2I = 0 \\ &\implies A(A - 2I) = -2I \implies A\left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I\right) = I \\ &\implies A = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

حال کاربردی بسیار جالب را ارائه می‌دهیم که در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات، فیزیک و مسائل مهندسی، معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی دارای محمل است.

۹-۶ محاسبه‌ی $A^k X$

می‌خواهیم $A^k X$ را برای ماتریس $A, n \times n$ و بردار n مؤلفه‌ای X به دست آوریم. بدیهی است این محاسبه برای مقادیر بزرگ k یا n مشکل خواهد بود. فرض کنیم X بتواند ترکیب خطی بردارهای ویژه‌ی



اگر $X = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m$ نوشته شود مثلاً $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ از A مقادیر ویژه و v_1, v_2, \dots, v_m متناظر باشند آنگاه

$$AX = A(c_1 v_1 + \dots + c_m v_m) = c_1 A v_1 + \dots + c_m A v_m = c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_m \lambda_m v_m$$

این عمل را با به کار بردن Ax به جای X . $1 - k$ دفعه تکرار کرده به دست می آوریم:

$$A^k X = c_1 \lambda_1^k v_1 + \dots + c_m \lambda_m^k v_m$$

دقت می کنیم که با شناخت مقادیر c_i ها و λ_i ها و سپس دانستن v_i ها محاسبه $A^k X$ بسیار ساده می شود، زیرا سمت راست رابطه‌ی بالا شامل ضربی ماتریسی نیست.

مثال: مطلوب است محاسبه‌ی

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^8 \begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix}$$

حل: $(1, 2)$ و $(2, 1)$ بردارهای ویژه ماتریس و -2 و 3 مقادیر ویژه هستند. داریم

$$\begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$2 \times (-2)^8 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - 4 \times 3^8 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -51976 \\ -27268 \end{bmatrix}$$

تذکر: روش فوق وقتی قابل استفاده است که X بتواند ترکیبی خطی از بردارهای ویژه A نوشته شود.

۱۰-۶ جمعیت شناسی

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه در بررسی و پیش‌بینی رفتار زنجیرهای مارکوف در جمله‌های دور مورد استفاده قرار می‌گیرند این کاربرد در جمعیت‌شناسی ارائه خواهد شد.

در بخش ۲.۶ جابجایی‌های جمعیت مورد مطالعه قرار گرفت. ملاحظه کردیم که توزیع جمعیت سالانه P می‌تواند با دنباله‌ای از بردارهای $\dots, x_0, x_1 (= Px_0), x_2 (= Px_1), \dots$ تشریح شود. ماتریس احتمال‌های تغییر وضعیت است که ما از برداری در دنباله به بردار دیگر می‌برد. این نوع دنباله‌ها یا زنجیرهای متسلسل از بردارها، زنجیر مارکوف نامیده می‌شوند. زنجیرهای مارکوف ای بیشتر مورد توجه‌اند که



دنباله‌ی x_0, x_1, x_2, \dots به بردار ثابت x همگراست و در آن $Px = x$. پس از آن کوچ جمعیت «حالات پایا» به خود گرفته و جمعیت کل شهرها و حومه آنها ثابت باقی می‌ماند و می‌توانیم بنویسیم

$$x_0, x_1, x_2, \dots \longrightarrow x$$

از آنجا که هر بردار x در $Px = x$ صدق می‌کند، باید بردار ویژه‌ای از P متناظر با مقدار ویژه ۱ باشد. اگر بدانیم که چنین برداری وجود دارد اطلاعات مفیدی در مورد توزیع جمعیت بعد از گذشت سال‌های طولانی خواهیم داشت.

رده‌ی خاصی از زنجیرهای مارکوف دارای این خواص ذکر شده می‌باشد. این رده را تعریف کرده خواص آنها را بررسی می‌کنیم و نتایج حاصل را در مدل کوچ جمعیت به منظور پیش‌بینی وضعیت سال‌های دورآینده به کار می‌بریم.

تعریف. ماتریس تغییر وضعیت P از یک زنجیر مارکوف، منتظم نامیده می‌شود هرگاه توانی از P وجود داشته باشد که در آن همه‌ی درایه‌ها اکیداً مثبت باشند. در این حالت، زنجیر را یک زنجیر مارکوف منتظم می‌نامیم.

مثال: کدامیک از ماتریس‌های زیر منتظم هستند؟

$$C = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 \\ 0,6 & 1 \end{bmatrix} \quad (ج) \quad B = \begin{bmatrix} 0,7 & 1 \\ 0,3 & 0 \end{bmatrix} \quad (ب) \quad A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,7 & 0,4 \end{bmatrix} \quad (الف)$$

حل: همه‌ی درایه‌های A مثبت هستند پس A منتظم است.

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0,79 & 0,7 \\ 0,21 & 0,3 \end{bmatrix} \Rightarrow B \text{ منتظم است}$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0,16 & 0 \\ 0,84 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^3 = \begin{bmatrix} 0,064 & 0 \\ 0,936 & 1 \end{bmatrix}, \dots$$

عنصر واقع در سطر اول ستون دوم همیشه صفر باقی می‌ماند، پس نتیجه می‌گیریم، C منتظم نیست. قضیه‌ی زیر، که آن را بدون اثبات می‌پذیریم اطلاعاتی در مورد رفتار زنجیرهای مارکوف منتظم در جمله‌های دور ارائه می‌دهد.

۱-۱۰-۶ قضیه. زنجیر مارکوفی با بردار اولیه x_0 و ماتریس تغییر وضعیت P را در نظر می‌گیریم. در این صورت $Px = x$ در آن $x_0, x_1, x_2, \dots \longrightarrow x$ (۱) صدق می‌کند.



(۲) $P, P^2, P^3, \dots \rightarrow Q$ که در آن Q ماتریسی تصادفی است.

ستون ای Q با هم برابرند و همه بردارهای ویژه P متناظر با $\lambda = 1$ هستند. این قضیه را برای تحلیل کوچ جمعیت به کار می‌بریم.

مثال: پیشرفت‌های کوچ جمعیت بین شهرها و حومه‌های آمریکا را بعد از گذشت سال‌های متتمادی مشخص کنید.

حل: مدلی را که قبلاً بررسی کردیم یادآوری می‌کنیم. جمعیت شهرها و حومه‌های آمریکا در سال ۲۰۰۰ با بردار x به صورت زیر (برحسب واحد یک میلیون) و جمعیت در سال‌های بعدی با زنجیر مارکوف با ماتریس تغییر وضعیت P به شکل زیر داده می‌شود

$$x_0 = \begin{bmatrix} 58 \\ 14242 \end{bmatrix} \quad \text{جمعیت‌های اولیه} \quad \text{شهر} \quad \text{حومه}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,96 & 0,01 \\ 0,04 & 0,99 \end{bmatrix} \quad \text{از} \quad \text{شهر} \quad \text{حومه}$$

تمام درایه‌های P اکیداً مثبت هستند، زنجیر منظم است و قضیه‌ی قبل را می‌توانیم برای پیشرفت در سال‌های طولانی بعدی مورد استفاده قرار دهیم. مطابق این قضیه P مقدار ویژه‌ای برابر ۱ داشته و بردار «حالت پایا» بردار ویژه متناظر است. بنابراین

$$Px = x \implies (P - I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0,96 - 1 & 0,01 \\ 0,04 & 0,99 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \implies \begin{cases} -0,04x_1 + 0,01x_2 = 0 \\ 0,04x_1 - 0,01x_2 = 0 \end{cases}$$

داریم $x_2 = 4x_1$. جواب‌های این دستگاه معادلات عبارتند از: $x_1 = r$ و $x_2 = 4r$ که در آن است. بنابراین بردارهای ویژه P متناظر با $\lambda = 1$ بردارهای غیرصفر به فرم $\begin{bmatrix} r \\ 4r \end{bmatrix}$ هستند. بردار حالت پایا x به صورت ذکر شده است. فرض کنیم کل جمعیت سالیانه طی سال‌ها تغییر نکند. در نتیجه مجموع اعضایی x و x_0 مساویند.

$$r + 4r = 58 + 142 \implies r = 40 \implies x = \begin{bmatrix} 40 \\ 160 \end{bmatrix}$$

و بنابراین پیش‌بینی‌ها عبارتند از:

میلیون ۴۰ → جمعیت شهرهای آمریکا



میلیون ۱۶۰ → جمعیت حومه‌ها

قضیه‌ی ذکر شده در مورد پیشرفت‌های سال‌های بعد اطلاعات مفیدی نتیجه می‌دهد. هر ستون از ماتریس Q بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی ۱ است. فرض کنیم Q ماتریسی تصادفی است مجموع درایه‌های هر ستون مساوی یک است، پس

$$S + 4S = 1 \implies S = 0,2$$

و در نتیجه

$$\begin{bmatrix} P & & & & Q \\ \begin{bmatrix} 0,96 & 0,01 \\ 0,04 & 0,99 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,92 & 0,02 \\ 0,08 & 0,98 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,89 & 0,03 \\ 0,11 & 0,97 \end{bmatrix} \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,8 & 0,8 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

اگر روی درایه‌ی واقع در سطر دوم و ستون اول دقت کنیم (به طور مثال)، دنباله‌ی زیر به دست می‌آید

$$0,04, 0,08, 0,11, \dots \rightarrow 0,8$$

این‌ها احتمال‌های کوچ از شهر به حومه در یکسال، دو سال، سه سال و ... هستند.

$$Q = \begin{bmatrix} \text{شهر}^{(از)} & \text{حومه} \\ \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,8 & 0,8 \end{bmatrix} & \text{شهر} \\ \text{حومه} & \end{bmatrix}$$

این احتمال‌ها مستقل از وضعیت ابتدایی هستند و این خود مشخصه‌ای از زنجیره‌ای مارکوف منتظم است.

۱۱-۶ معادلات تفاضلی

فرض کنیم $\dots, a_1, a_2, a_3, \dots$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. این دنباله می‌تواند با جمله‌ی n ام خود ارائه شود.

به طور مثال: $a_n = n^2 + 1$ که با قراردادن $n = 1, 2, 3, \dots$ جملات دنباله را به صورت $\dots, 2, 5, 10, 17, \dots$

خواهیم داشت، به علاوه هر جمله‌ی خاص نیز به آسانی به دست می‌آید.

به طور مثال: اگر $a_2 = 0$ را بخواهیم داریم:

$$n = 2 \implies a_2 = (2)^2 + 1 = 4 + 1$$



عموماً در بحث دنباله‌ها جمله‌هایی از ابتداء همراه با ارتباطی بین چندجمله دنباله داده می‌شوند. به طور مثال

$$\begin{cases} a_1 = 0, a_2 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}; \quad n = 3, 4, 5, \dots \end{cases}$$

چنین معادله‌ای را معادله‌ی تفاضلی (یا رابطه‌ای بازگشتی) نامیده و جملات داده شده را شرط‌های آغازی می‌گویند. بقیه جملات را می‌توان از روی شرط‌های آغازی و معادله‌ی تفاضلی به دست آورد. به طور مثال:

$$n = 3 \implies a_3 = 2a_2 + 3a_1 = 2(1) + 3(0) = 2$$

$$n = 4 \implies a_4 = 2a_3 + 3a_2 = 2(2) + 3(1) = 7$$

$$n = 5 \implies a_5 = 2a_4 + 3a_3 = 2(7) + 3(2) = 20$$

ولی نمی‌توان با روش بالا به آسانی و به سرعت جمله‌ی خاصی مانند a_{20} را به دست آورد و باید جمله‌ی عمومی یا a_n را به دست آورد. جمله‌ی a_n را جواب معادله تفاضلی می‌نامیم.

معادله‌ی تفاضلی $a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}$ را با $n = 3, 4, 5, \dots$ و $p, q \in \mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم. جملات a_1 و a_2 را نیز معلوم فرض می‌کنیم (جملات آغازی). این معادله را خطی می‌نامیم زیرا a_i ‌ها با توان یک ظاهر شده‌اند. مرتبه معادله نیز دو است زیرا a_n بر حسب دو جمله‌ی a_{n-1} و a_{n-2} بیان شده است. رابطه‌ی دومی ایجاد می‌کنیم $b_n = a_{n-1}$ و در نتیجه روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} a_n = pa_{n-1} + qb_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} \end{cases} \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

در فرم ماتریسی

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

$$X_n = AX_{n-1} \quad \text{داریم } A = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و } X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$$

اگر فرض کنیم

$$X_n = AX_{n-1} = A^r X_{n-r} = A^r X_{n-2} = \cdots = A^{n-1} X_1, \quad X_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \end{bmatrix}$$



در بسیاری از کاربردها A مقادیر ویژه متمایز λ_1 و λ_2 دارد و در نتیجه دو بردار ویژه مستقل خطی خواهد داشت. لذا می‌تواند قطری شود. فرض کنیم C ماتریسی است که ستون‌هایش بردارهای ویژه مستقل خطی A هستند و

$$D = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\implies A^{n-1} = (CDC^{-1})^{n-1} = (CDC^{-1})(CDC^{-1})\dots(CDC^{-1})$$

$$\implies A^{n-1} = CD^{n-1}C^{-1} = C \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{n-1} C^{-1} = C \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix} C^{-1}$$

و در نتیجه

$$X_n = C \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix} C^{-1} X_1$$

مثال: معادله‌ی تفاضلی $a_1 = 0$ با شرط‌های اولیه $a_n = 2, 4, 5, \dots$ را برای $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ حل کنید. در نهایت a_{15} را مشخص کنید.

حل: فرض کنیم

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \\ b_n = a_{n-1} \end{cases} \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

در نتیجه

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = -1, v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 3, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \implies C^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\implies \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix} C^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



زیرا $b_2 = a_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1)^{n-1} + 3(-3)^{n-1} \\ (-1)(-1)^{n-1} + 3^{n-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1)^{n-1} + 3^{n-1} \\ (-1)^{n-1} + 3^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{4} [(-1)^{n-1} + 3^{n-1}] \quad ; \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

$$n = 15 \Rightarrow a_{15} = \frac{1}{4} [(-1)^{13} + 3^{14}]$$

مثال: دنباله‌ی فیبوناچی^{۱)} تعریف شده به طور بازگشتی به‌وسیله $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ و برای $n \geq 2$ داریم $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. جمله‌ی عمومی این دنباله را بدست آورید.

حل: فرض می‌کنیم

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} \\ b_{n+2} = a_{n+1} \end{cases}$$

در این صورت با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ داریم $X_{n+2} = AX_{n+1}$. مقادیر ویژه‌ی $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ و $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ یعنی $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ هستند. بردارهای ویژه می‌باشند. در نتیجه $\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} X_n = \lambda^n X_0 \Rightarrow \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} &= \left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right)^n \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\right)^n \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \end{bmatrix} \\ \Rightarrow a_n &= \alpha \frac{1}{\sqrt{5}}(1 + \sqrt{5})^n + \beta \frac{1}{\sqrt{5}}(1 - \sqrt{5})^n \end{aligned}$$

$$\begin{cases} n = 0 \Rightarrow 0 = a_0 = \alpha + \beta \\ n = 1 \Rightarrow 1 = a_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}(1 + \sqrt{5}) + \frac{\beta}{\sqrt{5}}(1 - \sqrt{5}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \alpha\sqrt{5} + \beta - \beta\sqrt{5} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \beta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

1) Fibonacci



$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) \right]^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{2} (1 - \sqrt{5}) \right]^n$$

مثال: دنباله‌ای از کسرهای به فرم

$$2, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \dots$$

را در نظر می‌گیریم. جمله‌ی عمومی این دنباله را به دست آورید.

حل: جمله‌ی عمومی دنباله را با $\frac{a_n}{b_n}$ نشان می‌دهیم در این صورت داریم

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = 2 + \frac{1}{\frac{a_n}{b_n}} = \frac{2a_n + b_n}{a_n}$$

و از آنجا

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases} \quad X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X_{n+1} = AX_n$$

مقادیر ویژه‌ی A جواب‌های معادله‌ی $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ یعنی $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ و $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ هستند. در نتیجه

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ و } X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$X_n = \lambda^n X_0 \Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = (1 + \sqrt{2})^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = (1 - \sqrt{2})^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$a_n = \alpha(1 + \sqrt{2})^n + \beta(1 - \sqrt{2})^n = b_{n+1}$$

$$\begin{cases} n = 1 \Rightarrow 2 = a_1 = \alpha + \alpha\sqrt{2} + \beta - \beta\sqrt{2} \\ n = 2 \Rightarrow 4 = a_2 = \alpha + 2\alpha + 2\alpha\sqrt{2} + \beta + 2\beta - 2\beta\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{2} - 2}{\lambda}, \quad \beta = \frac{-\sqrt{2} - 2}{\lambda}$$

از آنجا a_n در نتیجه $b_n = a_{n-1}$ به دست آمده و $\frac{a_n}{b_n}$ مشخص می‌شود.



تذکر: اگر در مطالب بالا به طور مثال، $X_n = AX_{n-1}$ ، $X_n = AX_{n-2}$ ، چون $X_n = AX_{n-1} = A(AX_{n-2}) = A^2X_{n-2}$ و ... می‌توان نتیجه گرفت:

$$X_n = A^{n-1}X_2$$

تذکر: پس از شکل معادله مشخصه A اگر ریشه‌ها متمایز نباشند از تذکر قبل استفاده کرده X_n را به دست می‌آوریم. این خود مستلزم به دست آوردن توان‌های بالای A است. برای آنکه بتوانیم توان‌های بالای A را به دست آوریم فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این صورت چندجمله‌ای مشخصه A عبارت است از:

$$f(X) = X^2 - (a+b)X + ad - bc$$

از طرفی

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{bmatrix} = (a+b) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - (ad-bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (a+d)A - (ad-bc)I_2 \end{aligned}$$

یعنی $f(A) = \alpha_1 A + \alpha_2 I_2$. برای $n \geq 2$ عبارت تقسیم X^n را بر $f(X)$ در نظر می‌گیریم. چون f از درجه‌ی دو است داریم $X^n = f(X)q(X) + \alpha_1 X + \alpha_2$ با قرار دادن A در این رابطه و توجه به آنکه $f(A) = \alpha_1 A + \alpha_2 I_2$ داریم:

$$A^n = \alpha_1 A + \alpha_2 I_2$$

α_1 و α_2 را به روش زیر محاسبه می‌کنیم. اگر از طرفین رابطه $A^n = f(X)q(X) + \alpha_1 X + \alpha_2$ مشتق گرفته و λ یعنی تنها مقدار ویژه‌ی A را جایگزین X نماییم چون $\alpha_1 = f(\lambda)$ است می‌توان نوشت

$$n\lambda^{n-1} = \alpha_1$$

حال λ را به جای X در $A^n = f(X)q(X) + \alpha_1 X + \alpha_2$ قرار داده با توجه به $\alpha_2 = f(\lambda)$ داریم:

$$\lambda^n = \alpha_1 \lambda + \alpha_2 = n\lambda^{n-1} \lambda + \alpha_2 \implies \alpha_2 = (\lambda - n)\lambda^n$$

و در نهایت نتیجه می‌شود

$$A^n = n\lambda^{n-1} A + (\lambda - n)\lambda^n I_2$$



مثال: دترمینان ماتریس $n \times n$ زیر را به دست آورید:

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

حل: فرض کنیم $a_n = \det A_n$ و نسبت به سطر اول بسط می‌دهیم

$$a_n = 2a_{n-1} - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix} = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

حال می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} \end{cases}, X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X_n = AX_{n-1}$$

معادله‌ی مفسر A به صورت $(\lambda - 1)^n = 0$ بوده فقط یک مقدار ویژه‌ی مساوی با یک دارد. حال می‌توان

نوشت:

$$A^n = n\lambda^{n-1}A + (1-n)\lambda^n I_2 \xrightarrow{\lambda=1} A^n = nA + (1-n)I_2 = \begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & 1-n \end{bmatrix}$$

$$X_n = A^{n-1}X_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 & -n+2 \\ n-1 & 2-n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \text{ در نتیجه مشاهده می‌شود (ست)}$$

$$\det A_n = a_n = n+1$$



۱۲-۶ قطعی کردن ماتریس‌ها

فرض کنیم A و B ماتریس‌های مربع هم اندازه باشند. می‌گوییم B متشابه با A است هرگاه ماتریس $.B = C^{-1}AC$ وجود داشته باشد به‌طوری که

مثال: ماتریس‌های A و C زیر را در نظر می‌گیریم. C وارون‌پذیر است. تبدیل تشابه $C^{-1}AC$ را برای تبدیل A به کار ببرید.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

حل:

$$\begin{aligned} B = C^{-1}AC &= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -10 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

تعریف. ماتریس مربع A قطعی شدنی نامیده می‌شود هرگاه ماتریس C وجود داشته باشد به‌طوری که $D = C^{-1}AC$ ماتریسی قطعی باشد.

۱-۱۲-۶ قضیه. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ باشد.

الف) اگر A دارای n بردار ویژه‌ی مستقل خطی باشد، قطعی شدنی است. ماتریس C که ستون‌هایش n بردار مستقل خطی ویژه هستند در $C^{-1}AC$ به کار رفته، ماتریس قطعی D را نتیجه می‌دهد. درایه‌های قطعی D همان مقادیر ویژه‌ی A هستند.

ب) اگر A قطعی شدنی باشد آنگاه n بردار ویژه‌ی مستقل خطی خواهد داشت.

برهان. فرض کنیم $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه‌ی A باشند که متناظر با آنها بردارهای ویژه‌ی مستقل خطی v_1, v_2, \dots, v_n هستند. اگر C ماتریسی باشد که v_1, v_2, \dots, v_n ستون‌هایش هستند. چون $Av_n = \lambda_n v_n$ با فرض $AC = A[v_1 \dots v_n] = [Av_1 \dots Av_n] = [\lambda_1 v_1 \dots \lambda_n v_n]$

$$AC = A[v_1 \dots v_n] = [Av_1 \dots Av_n] = [\lambda_1 v_1 \dots \lambda_n v_n]$$



$$= [v_1 \dots v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

چون ستون‌های C ، بردارهای مستقل خطی هستند پس C وارون‌پذیر است و در نتیجه

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

بنابراین اگر ماتریس $n \times n$ دارای A بردار ویژه مستقل خطی باشد این بردارها می‌توانند ستون‌های ماتریسی مانند C قرار بگیرند تا A را قطری کند. در ماتریسی که قطری است درایه‌های روی قطر اصلی، مقادیر ویژه‌ی A هستند.

ب) عکس مطلب نیز صحیح است. فرض کنیم $C = [v_1 \dots v_n]$ ماتریسی باشد که A را قطری می‌کند پس اسکالارهای $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ وجود دارند به‌طوری که

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \gamma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_n \end{bmatrix}$$

با استدلالی، در طی عکس مراحل حالت قبل داریم:

$$Av_1 = \gamma_1 v_1, \dots, Av_n = \gamma_n v_n$$

v_1, \dots, v_n بردارهای ویژه‌ی A هستند. چون C وارون‌پذیر است این بردارها (یعنی ستون‌های C) مستقل خطی‌اند. در نتیجه ماتریس A قطری شدنی است و دارای n بردار ویژه‌ی مستقل خطی است. \square

مثال: نشان دهید ماتریس $A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ قطری شدنی است.
ماتریس قطری D متشابه با A را پیدا کنید. تبدیلی را که A را قطری می‌سازد به‌دست آورید.

حل:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \implies \lambda_1 = 2, v_1 = r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_2 = -1, v_2 = S \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



چون ماتریس A دو بردار ویژه‌ی مستقل خطی دارد پس قطری شدنی است.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ با ماتریس } A \text{ مشابه است.}$$

$$\begin{aligned} C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1}AC &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = D \end{aligned}$$

۱۳-۶ کاربرد قطری کردن ماتریس‌ها

از قطری کردن ماتریس‌ها می‌توان در محاسبه‌ی توان‌های ماتریس‌ها استفاده کرد. اگر A مشابه با ماتریس قطری تجت تبدیل $C^{-1}AC$ باشد داریم:

$$\begin{aligned} D = C^{-1}AC \Rightarrow D^k &= (C^{-1}AC)^k = \underbrace{C^{-1}ACC^{-1}AC \dots C^{-1}AC}_\text{k بار} = C^{-1}A^kC \\ \Rightarrow D^k &= C^{-1}A^kC \Rightarrow A^k = CD^kC^{-1} \end{aligned}$$

یادآور می‌شویم محاسبه توان‌های قطری D آسان است و فقط کافی است درایه‌های روی قطرش را به آن توان برسانیم.

مثال: فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ است مطلوب است A^4 .

حل: در این مثال کافیست C و D را به دست آوریم. از مثال‌های قبل

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = CD^4C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 512 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -514 & -1026 \\ 513 & 1025 \end{bmatrix}$$

مثال: ثابت کنید ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ قطری‌پذیر نیست.



حل:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \implies (\lambda - 2)^2 = 0 \implies \lambda = 2$$

$$(A - 2I_2)x = 0 \implies \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies 3x_1 - 3x_2 = 0 \implies x_1 = x_2 = r \implies r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

فضای ویژه یک فضای تک بعدی است در حالی که A ماتریسی 2×2 است و دو بردار ویژه مستقل خطی ندارد، در نتیجه A قطری شدنی نیست.

۱۴-۶ قطری‌سازی متعامد

در حالتی که C ماتریسی متعامد است می‌دانیم $C^{-1} = C^t$ پس اگر چنین ماتریسی در تبدیل تشابه‌ای مورد استفاده قرار گرفت به صورت $D = C^t AC$ خواهد بود. محاسبه با این نوع از تبدیل‌های تشابه به صورت طبیعی آسان‌تر از محاسبه $D = C^{-1}AC$ است. تبدیل‌های تشابه متعامد در تبدیل سیستم از مختصات به سیستم دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند. تعریف. ماتریس مربع A را قطری شدنی متعامد می‌نامیم، هرگاه ماتریس متعامد C وجود داشته باشد به‌طوری که $D = C^t AC$ ماتریسی قطری شود.

۱-۱۴-۶ قضیه. فرض کنیم A ماتریسی مربع است، A قطری شدنی متعامد است، اگر و تنها اگر ماتریسی متقارن باشد.

برهان. فرض کنیم A متقارن باشد. مراحل ساخت ماتریس متعامد C به قسمی که قطری باشد به شرح ذیل است:

۱) پایه‌ای برای فضای ویژه A به دست می‌آوریم.

۲) پایه‌ای متعامد برای هر فضای ویژه به دست می‌آوریم (در صورت لزوم با استفاده از فرآیند گرام-اشمیت).

۳) فرض کنیم C ماتریسی است که این بردارهای متعامد ستون‌هایش هستند.

۴) ماتریس $D = C^t AC$ ماتریسی قطری خواهد بود.



برعکس اگر A قطری‌شدنی متعامد باشد آنگاه ماتریسی متعامد مانند C وجود دارد به قسمی که

$$D = CDC^t \quad \text{و} \quad A = C^t AC$$

$$A^t = (CDC^t)^t = (C^t)^t(CD)^t = CDC^t = A$$

پس A متقارن است.

مثال: ماتریس متقارن $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ را به طور متعامد قطری کنید.

حل: مشاهده می‌کنیم که

$$\lambda_1 = -1, v_1 = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 3, v_2 = r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

چون A متقارن است قطری‌پذیر بوده و $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ می‌شود. فضای ویژه v_1 و v_2 متعامد است. با یکهای کردن و قرار دادن آنها در ستون‌های C داریم:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \implies C^t AC = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

۱۵-۶ فرم‌های درجه دوم

در این بخش چگونگی کاربرد قطری کردن را در هندسه خواهیم دید. ابتدا ایده‌ی تبدیل مختصات را بیان خواهیم کرد.

دوران محورهای مختصات

فرض کنیم سیستم مختصات xy داده شده و سیستم متعامد $x'y'$ از روی آن با دوران به میزان زاویه‌ی θ حول مبدأ به دست آمده باشد. می‌دانیم ارتباط بین x, y و x', y' به صورت زیر است

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$



در فرم ماتریسی نیز داریم

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

به طور مثال، در دوران به اندازه‌ی 45° حول مبدأ محورهای مختصات، نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ به صورت زیر تبدیل می‌گردد

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

۱۶-۶ تعریف فرم‌های درجه دوم

عبارت جبری $ax^2 + bxy + cy^2$ که در آن a, b, c مقادیر ثابت هستند و فرم درجه دوم نامیده می‌شود.

این عبارت جبری را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X^t AX$$

مثال: عبارت درجه دوم $5x^2 + 6xy - 4y^2$ را به فرم ماتریسی بنویسید.

حل:

$$5x^2 + 6xy - 4y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & +3 \\ +3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X^t AX$$

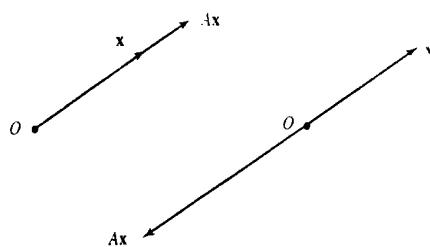
۱۷-۶ شناخت مقاطع مخروطی

می‌خواهیم تحلیلی از نمودار معادلات به فرم $ax^2 + bxy + cy^2 + d = 0$ داشته باشیم. این معادله شامل

فرم درجه دوم $ax^2 + bxy + cy^2$ است. به فرم ماتریسی می‌توان نوشت

$$X^t AX + d = 0$$





شکل ۶-۶

چون A ماتریسی متقابن است، ماتریس معتمد C وجود دارد به طوری که $C^t AC$ ماتریس قطری D است. به علاوه C معتمد است و $C^t C = I$ و $C^{-1} = C^t$ در نتیجه

$$X^T AX + d = 0 \implies X^T (CC^t) A (CC^t) X + d = 0$$

$$X^T C (C^t AC) C^t X + d = 0 \implies X^T C D C^t X + d = 0$$

ماتریس C^t ماتریسی معتمد است و دوران محورهای $X^t = C^t X$ معتمد را به سیستم معتمد $X'Y'$ تعریف می‌کند. در سیستم $X'Y'$ داریم:

$$(X'^t)^t D X^t + d = 0$$

$$X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \text{ باشد آنگاه } D = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \text{ اگر}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + d = 0 \implies px'^2 + qy'^2 + d = 0$$

$$\xrightarrow{d \neq 0} \frac{x'^2}{\frac{-d}{p}} + \frac{y'^2}{\frac{-d}{q}} = 1$$

و این خود معادله یک مقطع مخروطی است.

مثال: فرم زیر را بررسی و نمودار آن را مشخص کنید.

$$6x^2 + 4xy + 9y^2 - 20 = 0$$



حل:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 2^{\circ} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 10, v_1 = r \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 5, v_2 = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} - 2^{\circ} = 0$$

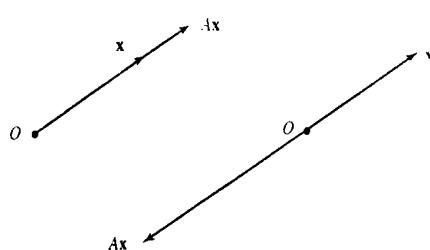
و با تبدیل مختصات

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{4} = 1 \quad a = 2, b = \sqrt{2}$$

و این یک بیضی در مختصات $x'y'$ است.

برای تعیین میزان دوران می‌توان نوشت

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \theta \approx 63,5^{\circ}$$



شکل ۷-۶

۱-۱۷-۶ تمرین

- ۱) ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه همه مقادیر ویژه ماتریس A صفر باشند آن است که پوچ توان باشد.



۲) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه نگاشت خطی مشتق را که روی فضای برداری چندجمله‌ای‌های حداقل از درجه‌ی n عمل می‌کند به دست آورید.

۳) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ زیر را به دست آورید:

$$\begin{matrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots \\ b & b & b & \cdots & a \end{matrix} \quad (ب)$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{matrix} \quad (الف)$$

۴) می‌دانیم که همواره مقادیر ویژه‌ی دو ماتریس متشابه مساویند، چه ارتباطی بین بردارهای ویژه‌ی آنها برقرار است؟

۵) چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس‌های زیر را به دست آورده در صورت امکان مقادیر ویژه و بردارهای

ویژه را مشخص کنید:

$$\begin{matrix} \circ & \circ & \cdots & \circ & b_1 \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & b_2 \\ \dots & \dots & \cdots & \cdots & \dots \\ \dots & \dots & \cdots & \cdots & \dots \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & b_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & a \end{matrix} \quad (ب)$$

$$\begin{matrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ x_3y_1 & x_3y_2 & \cdots & x_3y_n \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{matrix} \quad (الف)$$

۶) اگر A ماتریسی $n \times n$ وارون‌پذیر بوده و چندجمله‌ای‌های مشخصه‌ی ماتریس‌های A و A^{-1} را

$f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ بنامیم ثابت کنید:

$$g(\lambda) = \frac{(-\lambda)^n}{\det A} \times f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

۷) اگر A ماتریسی $n \times n$ و $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ مقادیر ویژه‌ی آن باشند چگونه می‌توان مقادیر ویژه λ_n از آن را به دست آورد؟

۸) اگر $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ و λ_4 ریشه‌های متمایز چندجمله‌ای (با ضریب بزرگترین درجه یک) $f(\lambda)$ باشند،

بردارهای ویژه‌ی ماتریس همراه این چندجمله‌ای را به دست آورید.



۹) فرض کنیم v بردار ویژه از نگاشتهای خطی f و g باشد نشان دهید v بردار ویژه از $f + g$ است.

۱۰) ثابت کنید اگر A و B ماتریس‌های متشابه باشند آنگاه

$$|A| = |B| \quad (\text{الف})$$

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(B) \quad (\text{ب})$$

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(B) \quad (\text{ج})$$

د) A^t و B^t متشابه هستند

ه) A وارون پذیر است اگر و تنها اگر B وارون پذیر باشد

و) اگر A وارون پذیر باشد آنگاه A^{-1} و B^{-1} متشابه هستند

۱۱) اگر A ماتریسی متقارن باشد با ماتریسی قطری متشابه است. آیا این ماتریس قطری یکتا است؟ چرا؟

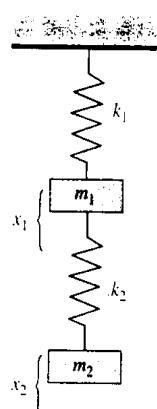
۱۲) نشان دهید اگر A ماتریسی متقارن باشد که فقط یک مقدار ویژه λ دارد آنگاه $A = \lambda I$ است.

$$13) \text{نمودار } x^2 - 16xy + 11y^2 - 3 = 0 \text{ را بررسی کنید.}$$

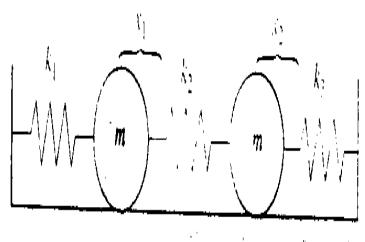
۱۴) معادله تفاضلی $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$ را با شرط‌های اولیه $a_1 = 3, a_2 = 2$ حل کنید.

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ A & \xrightarrow[m]{} & \xrightarrow[m]{} B \end{array}$$

شکل ۸-۶



شكل ٩-٦



شكل ١٠-٦



هدف‌های رفتاری و آموزشی پس از مطالعه این فصل دانشجو باید بتواند:

- تبدیل خطی را تعریف و ویژگی‌های آن را بیان کند.
- هسته و برد تبدیل خطی و هسته را بیان و آنها را به دست آورد.
- قضیه بعد را بیان و آن را ثابت کند.
- رابطه بین نگاشت‌ها و دستگاه معادلات خطی را بداند.
- رابطه بین نگاشت‌ها و دستگاه معادلات خطی را بداند.
- حل دستگاه معادلات خطی همگن و ناهمگن را بداند.
- بردار مختصات را بتواند به دست آورد.
- ماتریس نمایش نگاشت‌های خطی را تعیین کند.
- ماتریس تبدیل پایه‌ها به یکدیگر را به دست آورد.



فصل هفتم

نگاشت‌های خطی

در فصل ششم، مفهوم یک نگاشت خطی را معرفی کردیم. در آن جا نگاشت خطی تعریف شده روی \mathbb{R}^n را به عنوان یک ماتریس در نظر گرفتیم. اکنون این ایده را روی هر فضای برداری تعمیم می‌دهیم. برای مقایسه فضاهای برداری نگاشت‌های خطی را مورد استفاده قرار خواهیم داد. به نظر می‌رسد، در یک جمله ریاضی بتوان گفت، هر فضای برداری، با بعد متناهی برای n ، همان \mathbb{R}^n است. در نتیجه غالباً می‌توانیم یک فضای برداری کلی را با در نظر گرفتن \mathbb{R}^n مورد بحث قرار دهیم.

۱-۷ نگاشت‌های خطی، هسته و برد

یک فضای برداری دارای دو عمل تعریف شده روی آن است که آنها را جمع برداری و ضرب اسکالار می‌نامیم. نگاشت‌های خطی بین دو فضای برداری نگاشت‌هایی هستند که ساختار خطی را به معنی زیر حفظ می‌کنند. تعریف. فرض کنیم U و V فضاهای برداری باشند، همچنین u_1 و u_2 بردارهایی در U و c یک اسکالار باشند. یک نگاشت $T : U \rightarrow V$ خطی گفته می‌شود اگر:

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$$

$$T(cu) = cT(u)$$

شرط اول بدین معنی است که T مجموع دو بردار را به روی مجموع تصویرهای آن دو بردار می‌نگارد. شرط



دوم مستلزم آن است که T مضرب اسکالر یک بردار را به همان مضرب اسکالر تصویر بردار می‌نگارد.
بنابراین اعمال جمع و ضرب اسکالار تحت نگاشت خطی حفظ می‌شوند.

مثال ۱: ثابت کنید نگاشت $T(x, y) = (2x, x+y)$ یک نگاشت خطی است.

حل: اول نشان می‌دهیم T جمع را حفظ می‌کند فرض کنیم (x_1, y_1) و (x_2, y_2) اعضای \mathbb{R}^2 باشند، در این صورت

$$\begin{aligned} T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) && \text{(با توجه به جمع بردارها)} \\ &= T(2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2) && \text{(با توجه به تعریف } T\text{)} \\ &= (2x_1, x_1 + y_1) + (2x_2, x_2 + y_2) && \text{(جمع بردارها)} \\ &= T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) && \text{(با توجه به تعریف)} \end{aligned}$$

بنابراین T جمع برداری را حفظ می‌کند.

اکنون نشان می‌دهیم T ضرب اسکالار را حفظ می‌کند. فرض کنیم c یک اسکالار باشد:

$$\begin{aligned} T(c(x_1, y_1)) &= T(cx_1, cy_1) && \text{(با توجه به ضرب اسکالار در بردار)} \\ &= (2cx_1, cx_1 + cy_1) && \text{(با توجه به تعریف } T\text{)} \\ &= c(2x_1, x_1 + y_1) && \text{(ضرب اسکالار در بردار)} \\ &= cT(x_1, y_1) && \text{(با توجه به تعریف)} \end{aligned}$$

بنابراین T ضرب اسکالار را حفظ می‌کند. در نتیجه T خطی است. مثال بعدی نفاوت بین نگاشت‌های خطی فضاهای برداری و توابع را نشان می‌دهد.

مثال ۲: فرض کنید P فضای برداری متشکل از چندجمله‌ای‌های حقیقی از درجه نابیشتر از n باشد
نشان می‌دهیم تبدیل

$$T : P \longrightarrow F$$

$$T(ax^r + bx + c) = (a+b)x + c$$

یک نگاشت خطی است.



حل: فرض کنیم $ax^{\alpha} + bx + c$ و $px^{\alpha} + qx + r$ اعضای دلخواهی از P^{α} باشند.

$$\begin{aligned} T((ax^{\alpha} + bx + c) + (px^{\alpha} + qx + r)) \\ = T((a+p)x^{\alpha} + (b+q)x + (c+r)) & \quad (\text{با توجه به جمع برداری}) \\ = ((a+p+b+q)x + (c+r)) & = (a+b)x + c + (p+q)x + r \\ = T(ax^{\alpha} + bx + c) + T(px^{\alpha} + qx + r) \end{aligned}$$

پس T جمع را حفظ می‌کند.

اکنون نشان می‌دهیم T ضرب اسکالر را حفظ می‌کند. فرض کنیم k یک اسکالر باشد، پس:

$$\begin{aligned} T(k(ax^{\alpha} + bx + c)) &= T(kax^{\alpha} + kbx + kc) & (\text{تعريف } T) \\ &= (ka + kb)x + kc & (\text{با توجه به ضرب اسکالر}) \\ &= k((a+b)x + c) \\ &= kT(ax^{\alpha} + bx + c) & (\text{تعريف } T) \end{aligned}$$

T ضرب اسکالر را حفظ می‌کند، بنابراین T یک نگاشت خطی است اکنون با توجه به خواص مشتق که خواننده در درس حساب با آن آشناست نتیجه می‌گیریم مشتق یک نگاشت خطی می‌سازد.

مثال ۳: فرض کنیم D عملگر مشتق باشد، D همان $\frac{d}{dx}$ است که این علامت بیشتر در این متن مورد استفاده قرار می‌گیرد) برای مثال

$$D(4x^3 - 3x^2 + 2x + 1) = 12x^2 - 6x + 2$$

D عضو ۱ از p_2 را به روی عضو ۲ از p_2 می‌نگارد. حال نشان می‌دهیم D یک عملگر خطی روی p_n است. (یک نگاشت خطی از یک فضای برداری به روی خودش است) فرض کنید g و f اعضای p_n و c یک اسکالر باشند، خواص مشتق به آسانی نتیجه می‌دهد که D عملگر خطی است:

$$D(f + g) = Df + Dg$$

$$D(cf) = cD(f)$$

می‌دانیم یک نگاشت خطی عبارت است از تابعی از یک فضای برداری (دامنه) به توی فضای برداری دیگر (هم دامنه بنامید) است. برای هر نگاشت خطی دو فضای برداری که هسته و تصویر نامیده می‌شوند وجود



دارد. که در این بخش معرفی می‌کنیم و خواص این فضاهای را مورد بررسی قرار می‌دهیم.
قضیه زیر یک خاصیت مهم از تبدیلات خطی می‌دهد.

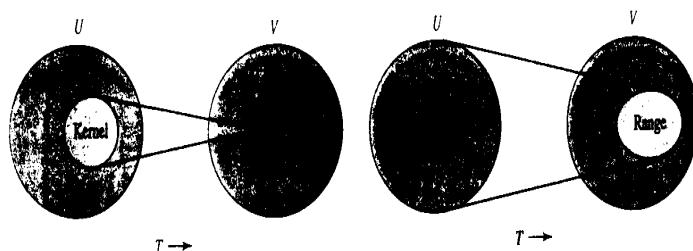
۱-۱-۷ قضیه. فرض کنیم $V \rightarrow U$ یک نگاشت خطی باشد. همچنین فرض کنیم O_u و O_v بردارهای صفر U و V باشند در این صورت $T(O_u) = O_v$ یعنی یک نگاشت خطی بردار صفر را به بردار صفر تصویر می‌کند.

اثبات. فرض کنیم u یک بردار در U و $v = T(u)$ باشند، همچنین فرض کنیم o یک اسکالر صفر باشد. از آنجا که $ov = O_v$ و $ou = O_u$ و T خطی است داریم:

$$T(ou) = T(ov) = oT(u) = ov = O_v$$

تعريف. فرض کنید $V \rightarrow U$ یک نگاشت خطی باشد.

مجموعه بردارهای از U که به صفر فضای برداری V تصویر می‌شوند هسته T نامیده می‌شوند. هسته با $\ker(T)$ نمایش داده می‌شود. مجموعه بردارهای در V که تصویر بردارهایی در U می‌باشند بر T نامیده می‌شود. بر T با $\text{rang}(T)$ نمایش داده می‌شود. این مجموعه‌ها به طرز شهودی در شکل ۱-۷ نشان داده شده‌اند. وقتی یک مجموعه در جبر خطی معرفی می‌شود، بایستی قادر باشیم بدانیم که آنها فضای برداری هستند یا خیر، اکنون نشان می‌دهیم هسته و بر T فضاهای برداری هستند.



شکل ۱-۷

۲-۱-۷ قضیه. فرض کنیم $V \rightarrow U$ یک نگاشت خطی باشد:

الف) هسته T زیرفضایی از U است.

ب) بر T زیرفضایی از V است.



اثبات. الف) از قضیه قبلی ما می‌دانیم که هسته ناتهی است زیرا شامل بردار صفر U است، برای اثبات اینکه هسته زیرفضایی از U است. نشان می‌دهیم که تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است.

ابتدا ثابت می‌کنیم تحت جمع بسته است. فرض کنیم u_1 و u_2 دو عضو از هسته T باشند بنابراین $T(u_1) = \circ$ و $T(u_2) = \circ$ با استفاده از خطی بودن T داریم:

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = \circ + \circ = \circ$$

بردار $u_2 + u_1$ به روی \circ تصویر می‌شود. بنابراین $u_1 + u_2$ در $\ker(T)$ است حال نشان می‌دهیم تحت ضرب اسکالر همیشه بسته است، فرض کنیم c یک اسکالر باشد. دوباره با استفاده از خطی بودن T داریم:

$$T(cu_1) = cT(u_1) = c\circ = \circ$$

بنابراین cu_1 در $\ker(T)$ است و هسته تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است، در نتیجه یک زیرفضای از U است.

ب) بنابر قضیه قبل برد ناتهی است، زیرا این برد شامل بردار صفر V است. برای اثبات اینکه برد یک زیرفضای V است، نشان می‌دهیم که تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است. فرض کنیم v_1 و v_2 اعضای $\text{range}(T)$ باشند. بنابراین بردارهای w_1 و w_2 در قلمرو U وجود دارند که $T(w_1) = v_1$ و $T(w_2) = v_2$ با استفاده از خطی بودن T .

$$T(w_1 + w_2) = T(w_1) + T(w_2) = v_1 + v_2$$

بنابراین $v_1 + v_2$ در برد است. فرض کنیم c یک اسکالر باشد. با استفاده از خطی بودن T :

$$T(cw_1) = cT(w_1) = cv_1$$

بردار cv_1 تصویر cw_1 است. بنابراین cv_1 در برد قرار می‌گیرد. برد تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است از آنجا زیرفضایی از V است.

مثال ۴: هسته و برد عملگر خطی $(x, y, z) = (x, y, \circ)$ را بیابید.

حل: از آنجا که عملگر خطی T فضای برداری \mathbb{R}^3 را به توی \mathbb{R}^3 تصویر می‌کند، هسته و برد هر دو زیرفضاهای برداری از \mathbb{R}^3 می‌باشند.

هسته: $\ker(T)$ زیرمجموعه‌ای است که به روی بردار (\circ, \circ, \circ) نگاشته می‌شود. می‌دانیم که:



اگر و فقط اگر $x = 0$ و $y = 0$. بنابراین $\ker(T) = \{(x, y, z) \mid x = 0, y = 0\}$ مجموعه

همه بردارهایی به شکل $(z, 0, 0)$ می‌باشد. این مجموعه را به این صورت بیان می‌کنیم:

$$\ker(T) = \{(0, 0, z)\}$$

به طور هندسی $\ker(T)$ مجموعه همه بردارهایی که روی محور z ها واقع هستند می‌باشد. برد T مجموعه‌ی

همه بردارهایی به شکل $(x, y, 0)$ می‌باشد. بنابراین

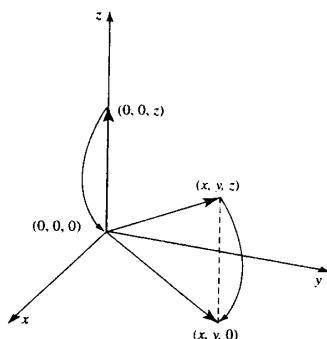
$$\text{range}(T) = \{(x, y, 0)\}$$

$\text{range}(T)$ مجموعه‌ی همه بردارهایی که در صفحه xy قرار دارند می‌باشد.

مشخصات این تبدیل خطی را در شکل ۲-۷ نشان داده‌ایم. مشاهده می‌کنیم T بردار (x, y, z) را

به روی بردار $(x, y, 0)$ در صفحه xy می‌نگارد. T همه بردارها را به روی صفحه xy می‌نگارد. T یک

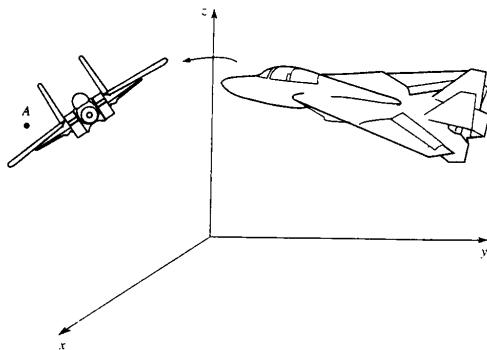
مثال از عملگر تصویری است.



شکل ۲-۷

تصاویر در کاربردها مهم هستند. در جهانی که ما زندگی می‌کنیم سه بعد دارد. وقتی که ما یک شئ را مشاهده می‌کنیم ما نقش دو بعدی از یک جسم را می‌گیریم، چشم انداز جای‌جا تغییر می‌کند. تصویر می‌تواند آنچه اشیای سه بعدی از جای‌جایی گوناگون آنها دیده می‌شود در معماری و به طور جدی در هر فضا مورد استفاده قرار می‌گیرد. خطوط خارجی یک شئ جالب در ارتباط با دستگاه مختصات مناسی بی کامپیوتر مرکزی ارتباط دارند. برنامه‌های کامپیوتر شامل یک تبدیل تصویری است که اشیاء را روی یک صفحه تصویر می‌کند. خروجی چشم انداز دو بعدی اجسام است، که توسط تصاویر به کامپیوتر رسیده است. در این روش از تبدیلات گوناگونی می‌تواند استفاده شود که منجر به پرسپکتیو گوناگون جسم شوند.





شکل ۳-۷

اکنون هسته و برد ماتریس تبدیلات را توصیف می‌کنیم. قضیه بعد اطلاعاتی در مورد برد یک تبدیل ماتریس به ما نشان می‌دهد.

۳-۱-۷ قضیه. برد $T : R^n \rightarrow R^m$ تعریف شده با $T(u) = Au$ توسط بردارهای ستونی A پدید می‌آید.

اثبات. فرض کنیم v یک بردار از برد T باشد، بردار u وجود دارد که $v = T(u)$ را برحسب پایه استاندارد R^n بیان می‌کنیم.

$$u = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

بنابراین

$$v = T(a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n) = a_1 T(e_1) + \cdots + a_n T(e_n)$$

در نتیجه بردارهای ستونی A به صورت $T(e_1), \dots, T(e_n)$ برد A را پدید می‌آورند.

مثال: هسته و برد تبدیل خطی توصیف شده توسط ماتریس زیر را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

حل: A یک ماتریس 3×3 است. بنابراین یک عملگر خطی $T : R^3 \rightarrow R^3$ است. اعضای R^3 به شکل ستونی نوشته می‌شوند که در ماتریس A ضرب می‌شوند.



هسته شامل همه بردارهای $x = (x_1, x_2, x_3)$ در \mathbb{R}^3 است به طوری که $T(x) = 0$ بنا براین

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

این تساوی ماتریس‌ها متناظر با دستگاه معادلات خطی زیر است:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$-x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$$

برای حل این دستگاه مجموعه جواب‌ها را در نظر می‌گیریم، $x_1 = -5r$, $x_2 = r$, $x_3 = r$. در نتیجه هسته بردارهایی به شکل $(-5r, r, r)$ می‌باشد.

$$\ker(T) = \{(-5r, r, r)\}$$

یک زیرفضای یک بعدی از \mathbb{R}^3 با پایه $(-5, 1, 1)$ می‌باشد.

برد: برد توسط بردارهای ستونی A تولید می‌شود. این بردارهای ستونی به عنوان سطرهای یک ماتریس نوشته می‌شوند و به شکل ماتریس تحويل یافته سطري تبدیل می‌شود. بردارهای سطري غیرصفر یک پایه برای برد تشکیل می‌دهند، داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بردارهای $(1, 0, 1)$ و $(0, 1, 1)$ برد T را پیدا می‌آورند. یک بردار دلخواه در برد ترکیب خطی از این بردارهای پایه خواهد بود.

$$s(1, 0, 1) + r(0, 1, 1)$$

بنابراین برد T چنین است.

$$\text{range}(T) = \{(s, t, s+t)\}$$

زیرفضای دو بعدی از \mathbb{R}^3 با پایه $(1, 0, 1)$ و $(0, 1, 1)$ است. قضیه‌ی زیر ارتباط مهم بین بعد هسته و برد یک تبدیل خطی را بیان می‌کند.



قضیه. فرض کنیم $V \rightarrow U$ یک نگاشت خطی باشد، در این صورت

$$\dim \ker(T) + \dim \text{range}(T) = \dim \dim(U)$$

مشاهده کنید این نتیجه برای نگاشت خطی T در مثال بالا برقرار است.

$$\dim \ker(T) = 1, \dim \text{range}(T) = 2, \dim \dim(U) = 3$$

اثبات. فرض کنیم هسته شامل بیش از بردار صفر باشد و بدین معنی که یک سوراخ از U نیست (شما

در حالت خاصی در تمرینات بعد این را ثابت می‌کنید).

فرض کنید u_1, u_2, \dots, u_m یک پایه برای $\ker(T)$ باشند با اضافه کردن بردارهای $u_n, u_{n+1}, \dots, u_{m+1}$ به این

مجموعه پایه‌ی u_1, u_2, \dots, u_n برای U حاصل می‌شود. نشان می‌دهیم $T(u_{m+1}), \dots, T(u_n)$ تشکیل

یک پایه برای برد می‌دهد و در نتیجه قضیه اثبات می‌شود. فرض کنیم u برداری در U باشد، u می‌تواند

به صورت ترکیب خطی از بردارهای پایه به صورت زیر بیان شود.

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m + a_{m+1} u_{m+1} + \dots + a_n u_n$$

خطی بودن T نتیجه می‌دهد:

$$T(u) = a_1 T(u_1) + a_m T(u_m) + a_{m+1} T(u_{m+1}) + \dots + a_n T(u_n)$$

از آنجا که u_1, u_2, \dots, u_n در هسته می‌باشند، به دست می‌آوریم:

$$T(u) = a_{m+1} T(u_{m+1}) + \dots + a_n T(u_n)$$

$T(u)$ بردار دلخواهی از برد T است. بنابراین بردارهای $T(u_{m+1}), \dots, T(u_n)$ برد را پدید می‌آورند.

اکنون ثابت می‌کنیم این بردارها مستقل خطی هستند، فرض کنیم

$$b_{m+1} T(u_{m+1}) + \dots + b_n T(u_n) = 0 \quad (1)$$

که در آن اسکالارها جهت آسانی دارای اندیس‌های مناسب شده‌اند. خطی بودن T نتیجه می‌دهد که

$$T(b_{m+1} u_{m+1} + \dots + b_n u_n) = 0$$

این بدین معنی است که بردار $b_{m+1} u_{m+1} + \dots + b_n u_n$ در هسته است. بنابراین به صورت یک ترکیب

خطی از اعضای پایه بیان می‌شود. فرض کنیم

$$b_{m+1} u_{m+1} + \dots + b_n u_n = c_1 u_1 + \dots + c_m u_m$$



بنابراین

$$c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m - b_{m+1} u_{m+1} - \cdots - b_n u_n = 0.$$

از آنجا که بردارهای u_1, \dots, u_m و $u_1, \dots, u_{m+1}, \dots, u_n$ یک پایه می‌باشند پس مستقل خطی هستند. بنابراین ضرایب همگنی صفر هستند. $c_1 = 0, \dots, c_m = 0, b_{m+1} = 0, \dots, b_n = 0$. با توجه به رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم $T(u_{m+1}), \dots, T(u_n)$ مستقل خطی هستند. مجموعه بردارهای $T(u_{m+1}), \dots, T(u_n)$ پایه‌ای برای برد هستند. بنابراین قضیه اثبات شد.

به خواننده یادآوری می‌کنیم که فضای تولید شده توسط بردارهای ستونی ماتریس فضای ستونی ماتریس نامیده می‌شوند و بعد فضای ستونی را رتبه ماتریس می‌نامیم. در نتیجه می‌توانیم بگوییم: بعد برد یک ماتریس نگاشت خطی رتبه ماتریس است.

مثال ۶: بعد هسته و برد نگاشت خطی T تعریف شده توسط ماتریس زیر را بباید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حل: مشاهده می‌کنیم که ماتریس A به شکل تحویل یافته است. بردارهای سطری مستقل خطی هستند بنابراین $\text{rank}(A) = 2$ در نتیجه $\text{dimrange}(T) = 2$.

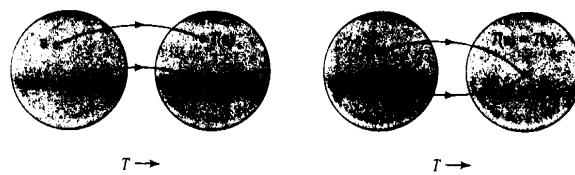
دامنه T برابر \mathbb{R}^3 است پس $\text{dimdomain}(T) = 3$ $\text{dimker}(T) = 1$ هسته یک نگاشت خطی T اغلب فضای پوج نامیده می‌شود. $\text{dimker}(T) = 1$ بعد هسته و $\text{dimrange}(T) = 2$ رتبه نگاشت خطی نامیده می‌شود. از آنچه مشاهده شد چنین برمی‌آید که بعد یک ماتریس نگاشت رتبه ماتریس است. قضیه قبلی اغلب به عنوان قضیه رتبه/پوچی بیان می‌گردد و به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\text{rank}(T) + \text{nullity}(T) = \text{dimdomain}(T)$$

این بخش را با ارتباط دادن بین هسته و یک به یک بودن تبدیل خطی به بیان می‌بریم و کاربرد تئوری این ارتباط را ملاحظه خواهیم کرد.

تعریف. یک نگاشت T یک به یک نامیده می‌شود اگر هر عضو در برد T متناظر با تصویر دقیقاً یک عضو از دامنه T باشد. شکل ۷-۴ را ببینید. این بدین معنی است که T یک به یک است اگر $T(v) = T(u)$ نتیجه می‌دهد $v = u$.





شکل ۴-۷

۵-۱-۷ قضیه. یک نگاشت خطی T یک به یک است اگر و تنها اگر هسته آن بردار صفر باشد.

برهان. ابتدا فرض کنیم T یک به یک باشد. هسته شامل همه بردارهایی که به توی بردار صفر نگاشته می‌شوند، می‌باشد. از آنجا که T یک به یک است هسته باید شامل یک بردار باشد. اما می‌دانیم بردار صفر در هسته بایستی باشد بنابراین هسته بردار صفر است. بر عکس فرض کنیم هسته بردار صفر باشد. فرض کنیم u و v بردارهایی باشند که $T(u) = T(v)$. عملکر خطی T را به کار برد، داریم:

$$T(u) - T(v) = \circ$$

$$T(u - v) = \circ$$

بنابراین $v - u$ در هسته است. اما هسته بردار صفر است. بنابراین

$$u - v = \circ$$

$$u = v$$

در نتیجه نگاشت یک به یک است.

۶-۱-۷ قضیه. تبدیل $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ یک به یک است اگر و تنها اگر A نامنفرد باشد.

اثبات: فرض کنیم T یک به یک باشد بنابراین $\ker(T) = \{0\}$ قضیه رتبه/پوچی نتیجه می‌دهد که $\dim \text{range}(T) = n$ است. بنابراین n ستون بردار A مستقل خطی هستند. نتیجه می‌گیریم که رتبه برابر n است و $|A| \neq 0$.



بر عکس فرض کنیم که A نامنفرد باشد بنابراین رتبه A برابر n است و n بردار ستونی آن مستقل خطی هستند. از قضیه رتبه/پوچی این نتیجه لازم به دست می‌آید که $\text{dimrange}(T) = n$ یعنی $\text{ker}(T) = \{0\}$ یعنی T یک به یک است.

مثال ۷: تعیین کنید که نگاشت‌های خطی T_A و T_B تعریف شده با ماتریس‌های زیر یک به یک هستند.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(الف)}$$

حل: الف) از آنجا که سطرهای A مستقل خطی هستند $\text{rank}(A) = 3$ نتیجه می‌گیریم $\text{dimrange}(T_A) = 3$ است بنابراین T در \mathbb{R}^4 دامنه $\text{dimdomain}(T_A) = 4$ است. به عبارت دیگر $\text{dimker}(T_A) = 1$ از آنجایی که $\text{dimker}(T_A) \neq 0$ بردار ناصرف است، نگاشت یک به یک نیست.

ب) می‌توان نشان داد که $|B| \neq 0$ ماتریس B نامنفرد است. بنابراین نگاشت T_B یک به یک است.

۷-۱-۷ قضیه. فرض کنیم $T : U \rightarrow V$ یک نگاشت خطی یک به یک باشد. اگر مجموعه $\{u_1, \dots, u_n\}$ در U مستقل خطی باشد، $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ در V مستقل خطی است. به عبارت دیگر که یک نگاشت خطی یک به یک، استقلال خطی را حفظ می‌کند.

اثبات. فرض کنیم

$$a_1 T(u_1) + \dots + a_n T(u_n) = 0 \quad (2)$$

برای اسکالرهاي a_1, \dots, a_n از آنجایی که T خطی است می‌توان نوشت $0 = T(a_1 u_1 + \dots + a_n u_n)$. اما $a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = 0$ یک به یک است، بنابراین هسته بردار صفر است. در نتیجه $a_1 = \dots = a_n = 0$ مجموعه $\{u_1, \dots, u_n\}$ مستقل خطی است بنابراین

$$a_1 = \dots = a_n = 0$$

با توجه به معادله (2)، $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ مستقل خطی است.

۸-۱-۷ تمرین

۱) ثابت کنید که نگاشت $T : R^2 \rightarrow R^2$ تعریف شده توسط $T(x, y) = (3x, x + y)$ خطی است تصویر بردارهای $(1, 2)$ و $(2, -1)$ تحت این عملگر را بیابید.



۲) ثابت کنید $T : R^2 \rightarrow R^3$ یک نگاشت خطی $T(x, y) = (x + 2y, 3y, x - y)$ تعریف می‌کند. تصویر $(1, 1)$ و $(4, 0)$ را پیدا کنید.

۳) ثابت کنید عملگرهای $R \rightarrow R^2$ زیر خطی نیستند.

$$\text{الف)} T(x, y) = y - 2$$

$$\text{ب)} T(x, y) = x - 3$$

۴) نشان دهید عملگر $p_2 : T(ax^2 + bx + c) = cx^2 + a$ تعریف شده در زیر خطی است. تصویر $2 - 3x^2 - x$ را پیدا کنید. عضو دیگری از p_2 را بیابید که همان تصویر را داشته باشد.

۵) نشان دهید که عملگر c از $T(ax^2 + bx + c) = bx + c$ خطی است. تصویر $2 - 3x^2 - x$ را بیابید. عضو دیگری از c که دارای همان تصویر است را تعیین کنید.

۶) ثابت کنید عملگر p_1 از $T(ax + b) = x + a$ خطی نیست.

۷) نگاشت‌های خطی T تعریف شده توسط ماتریس‌های زیر را در نظر گرفته، هسته و برد هر نگاشت خطی را تعیین کنید. نشان دهید برای هر نگاشت $\dim \ker(T) + \dim \text{range}(T) = \dim \text{domain}(T)$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ر)	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ د)	$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ ج)	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ب)	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ الف)
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ی)	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ه)	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ و)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ز)	

۸) هسته و برد هر کدام از نگاشت‌های زیر را تعیین کنید. نشان دهید برای هر نگاشت

$$\dim \ker(T) + \dim \text{range}(T) = \dim \text{domain}(T)$$

$$R^3 \rightarrow R^3 \text{ از } T(x, y, z) = (x, 0, 0) \quad \text{الف)}$$

$$R^3 \rightarrow R^3 \text{ از } T(x, y, z) = (x + y, z) \quad \text{ب)}$$

$$R^3 \rightarrow R^3 \text{ از } T(x, y, z) = (x + y + z) \quad \text{ج)$$

$$R^3 \rightarrow R^3 \text{ از } T(x, y, z) = (3x, x - y, y) \quad \text{د)$$

۹) فرض کنید $V \rightarrow U$ و U بردار دلخواهی در U باشد، v بردار ثابت در U و 0 بردار صفر U باشند، ثابت کنید نگاشت‌های زیر خطی هستند. هسته و برد هر نگاشت خطی را بیابید.



الف) $T(u) = 5u$

ب) $T(u) = 2u + 3v$

ج) $T(u) = u$ (نگاشت همانی روی u نامیده می‌شود)

د) $T(u) = o$ (نگاشت صفر روی u نامیده می‌شود)

۱۰) قضیه رتبه/ریچی را به کار ببرید و بعد هسته و برد هر کدام از نگاشت‌های خطی تعریف شده توسط

ماتریس‌ها را تعیین کنید. کدام یک از نگاشت‌های یک‌به‌یک هستند؟

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(ج)} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(الف)}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(ز)} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 8 & 7 \\ 2 & -4 & 6 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{(ر)} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(د)}$$

۱۱) با استفاده از دترمینان در مورد نگاشت خطی تعریف شده به توسط ماتریس‌های زیر تعیین کنید

یک‌به‌یک هستند یا خیر؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{(ج)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{(الف)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(ز)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{(ر)} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{(د)}$$

۱۲) فرض کنید $V : U \rightarrow T$ یک بردار u نقطه ثابت از T است اگر $T(u) = u$ نقاط ثابت (در

صورت وجود) هر کدام از نگاشت‌های زیر را بیابید.

الف) $T(x, y) = (x, 3y)$

ب) $T(x, y) = (x, 2)$

ج) $T(x, y) = (x, y + 1)$

د) $T(x, y) = (x, y)$



$$T(x, y) = (y, x) \quad (\text{ه})$$

$$T(x, y) = (x + y, x - y) \quad (\text{و})$$

ز) ثابت کنید اگر T خطی باشد مجموعه همه نقاط ثابت یک زیرفضا می‌باشد.

(۱۳) فرض کنیم $V : U \longrightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد ثابت کنید که

$$\dim \ker(T) + \dim \text{range}(T) = \dim \text{domain}(T)$$

الف) وقتی که $\ker(T) = \{0\}$

ب) وقتی که $\ker(T) = U$

(اینها دو حالت خاص در اثبات قضیه ۴-۷ می‌باشد).

(۱۴) فرض کنید $V : U \longrightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد

الف) ثابت کنید وقتی $\text{range}(T) = V$ آنگاه $\dim(U) = \dim(V)$ اگر و تنها اگر $\text{range}(T) = \{0\}$

ب) ثابت کنید $\ker(T) = U$ اگر و تنها اگر $\ker(T) = \{0\}$

(۱۵) فرض کنید $V : U \longrightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد ثابت کنید بعد برد T هرگز نمی‌تواند از بعد دامنه بیشتر باشد.

(۱۶) فرض کنید A ماتریس $m \times n$ یک نگاشت $T : R^n \longrightarrow R^m$ تعریف می‌کند. یک ماتریس باشد که یک نگاشت $T^t : R^m \longrightarrow R^n$ تعریف می‌کند. نشان دهید:

$$\dim \text{range}(T) = \dim \text{range}(T^t)$$

(۱۷) نگاشت تصویری در $R^3 \longrightarrow R^3$ را در نظر بگیرید مجموعه همه بردارهای در R^3 که توسط T به روی بردار $(1, 2, 0)$ تصویر می‌شوند را بیابید این مجموعه رارسم کنید.

(۱۸) عملگر خطی $T(x, y) = (x - y, 2y - 2x)$ را در نظر بگیرید مجموعه همه بردارهای در R^3 که توسط T به روی بردار $(2, -4)$ تصویر می‌شوند را پیدا ورسم کنید.

(۱۹) فرض کنیم عملگر خطی $T : R^3 \longrightarrow R^3$ تعریف شده توسط $T(x, y) = (2x, 3x)$ باشد همه بردارهایی را که توسط T به روی بردار $(4, 6)$ تصویر می‌شوند یافته ورسم کنید. آیا این مجموعه زیرفضایی از R^3 است.



۲۰) اگر نگاشت خطی $T : R^3 \rightarrow R^2$ تعریف شده توسط $T(x, y, z) = (x - y, x + z)$ باشد، مجموعه همه بردارهای را که توسط T به روی بردار $(1, 4)$ تصویر می‌شود را پیدا و رسم کنید. آیا این مجموعه یک زیرفضا است؟

۲۱) فرض کنید $V : U \rightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد، هم‌نین فرض کنید v یک بردار ناصرف در V باشد همچنین W مجموعه بردارهایی در U باشد که $v \in W$. آیا $T(W) = v$ یک زیرفضایی از U است؟

۲۲) ثابت کنید $P_2 \rightarrow P_2$ تعریف شده در زیر خطی است هسته و برد T را بباید.

$$T(a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_2 + a_1)x^2 + a_1x + 2a_0$$

۲۳) ثابت کنید $P_2 \rightarrow P_2$ تعریف شده در زیر خطی است هسته و برد T و برای این زیرفضا پایه‌ای بباید.

$$T(a_2x^2 + a_1x^2 + a_1x + a_0) = a_2x^2 + (-a_0)$$

۲۴) ثابت کنید $p_2 \rightarrow g$ تعریف شده در زیر خطی است، هسته و برد g را بباید پایه‌ای برای این زیرفضا بباید.

$$g(a_2x^2 + a_1x^2 + a_1x + a_0) = 2a_2x^2 + a_1x + 3a_0$$

۲۵) فرض کنید D عملگر مشتق باشد، D را به عنوان یک عملگر خطی روی p_n در نظر بگیرید. تصویر $x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ تحت D را بباید هسته و برد D را بباید.

۲۶) فرض کنید D^2 مشتق دوم باشد.

الف) تصویر $4x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ تحت D^2 را بدست آورید. ثابت کنید D^2 یک عملگر خطی روی p_n است، هسته و برد D^2 را بباید.

ب) نگاشت $x^3 - 2x^2 + 6x + 6$ از p_n به روی خودش را در نظر گرفته و تصویر 1 تحت این عملگر را بباید. ثابت کنید این نگاشت خطی است؛ هسته و برد این نگاشت را بباید.

۲۷) فرض کنید D عملگر مشتق‌گیری باشد D را به عنوان یک عملگر روی p_n در نظر بگیرید. مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌هایی را که توسط D به روی $7 - 4x + 2x^2$ نگاشته می‌شوند بباید.



۲۸) فرض کنید D^3 عملگر مشتق‌گیری مرتبه دوم باشد و عملگر D^2 را روی p_n در نظر بگیرید مجموعه چندجمله‌ای‌هایی که توسط D^2 به روی $3x^3 - 6x^2 + 2x + 3$ نگاشته می‌شوند را بیابید.

۲۹) فرض کنید g عملگری باشد که یک انتگرال از \int_0^1 به روی 1 تعریف می‌کند، g می‌تواند یک نگاشت از P_n به روی R تعریف کند. برای مثال

$$g(4x^3 - 6x^2 + 2x + 3) = \int_0^1 (4x^3 - 6x^2 + 2x + 3) dx = [x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x]_0^1 = 3$$

عضو 3 از P_2 را به روی عضو 3 از R می‌نگارد نشان دهد g یک نگاشت خطی است. $P_n \rightarrow R$

۳۰) فرض کنید p یک چندجمله‌ای در p_n و p_n به توی R باشد $T(p) = \int_0^1 p(x) dx$ نگاشت خطی p_n را بدست آورید. هسته و برد $T(\lambda x^3 + 6x^2 + 4x + 1)$ به روی 2 تصویر می‌شوند را بیابید.

۳۱) فرض کنید U فضای برداری ماتریس‌های 2×2 باشد و A و B ماتریس‌های 2×2 باشند. تعیین کنید کدامیک از نگاشت‌های زیر خطی هستند هسته و برد هر کدام از نگاشت‌های خطی را بیابید.

الف) $T(A) = A'$	ب) $T(A) = A $	ج) $T(A) = \text{trac}(A)$
د) $T(A) = A^\top$	ر) $T(A) = A + B$	ز) $T(A) = a_{11}$
و) $T(A) = 0$	ه) $T(A) = I$	ای) $T(A) = \text{تحویل یافته } A$

۳۲) فرض کنید $V \rightarrow U$: یک نگاشت خطی باشد ثابت کنید که اگر و تنها اگر T یک‌به‌یک باشد.

۳۳) نشان دهید که هیچ نگاشت خطی از $R^3 \rightarrow R^3$ که یک‌به‌یک باشد وجود ندارد. به طور کلی نشان دهید هیچ نگاشت خطی یک‌به‌یک از $V \rightarrow U$ وجود ندارد هرگاه بعد U بزرگتر از بعد V باشد.

۳۴) فرض کنید $V \rightarrow U$: یک نگاشت خطی باشد ثابت کنید که T یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر مستقل خطی بودن را حفظ کند.

۳۵) فرض کنید T یک تبدیل خطی با دامنه U باشد فرض کنید v_1, \dots, v_m بردارهایی در U و a_1, \dots, a_m اسکالار باشد ثابت کنید که

$$T(a_1v_1 + \dots + a_mv_m) = a_1T(v_1) + \dots + a_mT(v_m)$$



این نتیجه را می‌توانید توسط استقرا ثابت کنید.

(۳۶) فرض کنید X یک بردار دلخواه در R^n و Y یک بردار ثابت باشد ثابت کنید تبدیل $T(X) = X \cdot Y$ یک نگاشت خطی از $R^n \rightarrow R$ است. ($X \cdot Y$ ضرب درونی X و Y نامیده می‌شود)

(۳۷) فرض کنید T_1 و T_2 دو تبدیل خطی $V \rightarrow U$ و c یک اسکالر باشند تبدیل‌های $T_1 + T_2$ و cT_1 تعریف شده توسط $(T_1 + T_2)(u) = T_1(u) + T_2(u)$ و $(cT_1)(u) = cT_1(u)$ را در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید $T_1 + T_2$ و cT_1 هر دو نگاشت خطی هستند.

ب) ثابت کنید اگر T_1 و T_2 نگاشت‌های تعریف شده توسط ماتریس‌های A_1 و A_2 باشند، آنگاه $T_1 + T_2$ توسط ماتریس $A_1 + A_2$ و cT_1 توسط ماتریس cA_1 تعریف می‌شوند.

ج) ثابت کنید که مجموعه نگاشت‌های تحت این عملگرهای جمع و ضرب اسکالر یک فضای برداری است.

۲-۷ نگاشت‌ها و دستگاه معادلات خطی

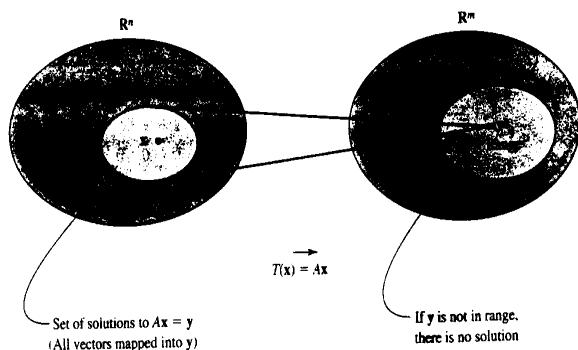
نگاشت خطی و مفهوم هسته و برد نقش مهمی در تجزیه و تحلیل معادلات خطی بازی می‌کند خواهیم دید که اینها ابزاری هستند که به ما در پیدا کردن مجموعه جواب‌های معادلات کمک می‌کنند می‌دانیم که یک دستگاه m معادله خطی با n متغیر را به صورت ماتریسی $AX = Y$ می‌توان نوشت.

یک ماتریس $n \times m$ است که ماتریس ضرایب نامیده می‌شود مجموعه جواب‌ها مجموعه همه X است که در معادله صدق می‌کنند. اکنون یک راه برای این مجموعه جواب‌ها داریم. فرض کنیم $T : R^n \rightarrow R^m$ یک نگاشت خطی تعریف شده توسط A باشد دستگاه معادلات می‌تواند به این صورت نوشته شود $.T(x) = y$

بنابراین مجموعه جواب مجموعه بردارهای x در R^n است که توسط T به روی بردار y تصویر می‌شوند.

اگر y در برد T نباشد چنین جوابی وجود نخواهد داشت. شکل ۵-۷ را ملاحظه شود.





شکل ۵-۷

۳-۷ معادلات همگن

راه قبلی برای دستگاه معادلات خطی ما را برای ترتیجه زیر راهنمایی می‌کند.

۱-۳-۷ قضیه. مجموعه جواب‌های یک دستگاه همگن از m معادله خطی با n متغیر $\circ AX = 0$ زیرفضایی از R^n است.

اثبات. فرض کنیم T نگاشت خطی از R^n به R^m تعریف شده توسط A باشد مجموعه جواب، مجموعه بردارهایی در R^n است که توسط T به روی بردار صفر نگاشته می‌شوند. مجموعه جواب هسته نگاشت است و بنابراین یک زیرفضا است.

مثال ۱: دستگاه همگن معادلات خطی زیر را حل کنید. مجموعه جواب را به صورت زیرفضا بیان کنید، شکل این زیرفضا را رسم کنید.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$-x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$$



حل: روش حذفی گوس-جردن را به کار می‌بریم داریم:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

بنابراین

$$x_1 + 5x_2 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

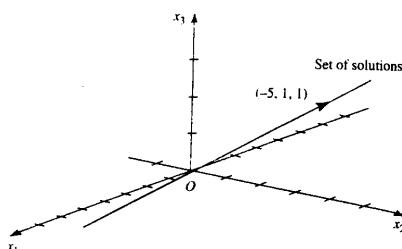
در نتیجه

$$x_2 = x_3, \quad x_1 = -5x_3$$

مقدار x_2 را r فرض می‌کنیم بنابراین یک جواب دلخواه برابر است با: $x_2 = r, x_3 = r, x_1 = -5r$ و $x_2 = r$, $x_3 = r, x_1 = -5r$ می‌باشند.

این بردارها تشکیل یک زیرفضای یک بعدی از \mathbb{R}^3 با پایه $(1, 1, -5)$ می‌دهند. شکل ۶-۷ ملاحظه

کنید. این زیرفضا برابر هسته تعریف شده توسط ماتریس ضرباب دستگاه می‌باشد.



شکل ۶-۷

۴-۷ معادلات ناهمگن

اگرور مجموعه جواب‌های یک دستگاه معادلات خطی ناهمگن را پیدا می‌کنیم که تشکیل یک زیرفضا را نمی‌دهند.



فرض کنیم $AX = Y$ یک دستگاه معادلات خطی ناهمگن باشد. همچنین فرض کنیم X_1 و X_2 جواب‌های آن باشند بنابراین $AX_1 = Y$ و $AX_2 = Y$ از جمع این معادلات نتیجه می‌شود

$$AX_1 + AX_2 = 2Y$$

$$A(X_1 + X_2) = 2Y$$

بنابراین $X_1 + X_2$ در معادله $AX = Y$ صدق نمی‌کند. پس جوابی از آن نیست مجموعه جواب‌ها تحت جمع بسته نیست در نتیجه یک زیرفضا نخواهد بود. معذالک ما می‌خواهیم مجموعه جواب یک دستگاه ناهمگن که خود زیرفضا نیست را بیابیم. این مجموعه می‌تواند توسط یک زیرفضا تعیین شود. قضیه بعد ما را در پیدا کردن مجموعه جواب قادر می‌سازد.

۱-۴-۷ قضیه. فرض کنیم $AX = Y$ یک دستگاه ناهمگن از n معادله خطی با متغیر باشد همچنین فرض می‌کنیم X_1 یک جواب خصوصی باشد هر جواب دیگر می‌تواند به شکل $X = Z + X_1$ نوشته شود که در آن Z یک عضو از هسته T تعریف شده توسط A است. چنین جوابی منحصر به‌فرد است هرگاه هسته شامل تنها بردار صفر باشد.

برهان. یک جواب است بنابراین $AX_1 = Y$ فرض کنیم X یک جواب دلخواه باشد بنابراین $AX_1 = AX$ تساوی $AX = Y$ داریم:

$$AX_1 = AX$$

$$AX - AX_1 = 0$$

$$A(X - X_1) = 0$$

$$T(X - X_1) = 0$$

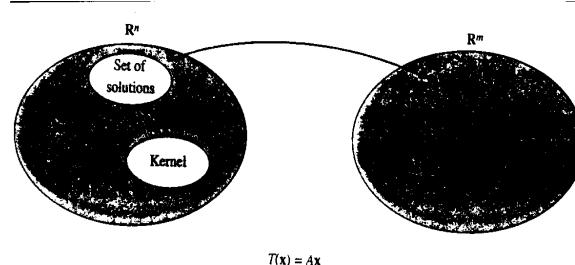
بنابراین $X - X_1$ یک عضو از هسته T است آن را Z می‌نامیم: $X - X_1 = Z$. بنابراین می‌توانیم $X = Z + X_1$ بنویسیم.

توجه کنید که جواب منحصر به‌فرد است اگر و تنها اگر ارزش Z برابر 0 باشد اگر هسته بردار صفر باشد این نتیجه حاصل می‌شود که مجموعه جواب یک دستگاه خطی ناهمگن $AX = Y$ می‌تواند از هسته نگاشت خطی تعریف شده توسط ماتریس ضرایب و یک جواب خصوصی X_1 تولید شود. اگر هر بردار Z در هسته را در نظر بگیریم و با X_1 جمع کنیم جوابی از معادله به‌دست می‌آید. به‌طور هندسی چنین



معنی می‌دهد که مجموعه جواب به وسیله محاسبه هسته و در راستا و امتداد بردار X_1 می‌تواند تعیین شود.

شکل ۷-۷ را بینید.



شکل ۷-۷ صفحه ۳۲

مثال ۲ دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید مجموعه جواب را رسم کنید.

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = -2$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 9$$

حل: روش حذفی گوس-جردن را به کار می‌بریم. داریم:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

بنابراین

$$x_1 + 5x_2 = 7$$

$$x_2 - x_3 = 2$$

در نتیجه

$$x_2 = x_3 + 2$$

$$x_1 = -5x_3 + 7$$

برای x_3 مقدار r در نظر می‌گیریم. بنابراین یک جواب دلخواه چنین است:

$$x_1 = -5r + 7 \quad x_2 = r + 2 \quad x_3 = r$$



جواب‌ها بردارهایی به شکل

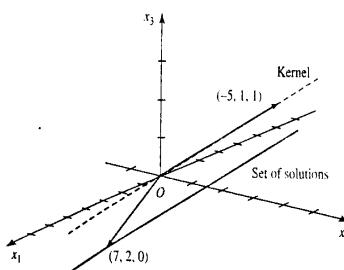
$$(-5r + 7, r + 2, r)$$

هستند. ما قسمت‌هایی که پارامتر r دارند از این قسمت ثابت جدا می‌کنیم. قسمت شامل r در هسته نگاشت تعریف شده توسط A است و قسمت ثابت جواب خصوصی X_1 برای $AX = Y$ می‌باشد.

$$(-5r + 7, r + 2, r) = r(-5, 1, 1) + (7, 2, 0)$$

در مثال بالا هسته نگاشت تعریف شده توسط ماتریس ضرایب را پیدا کردیم که مجموعه بردارهای به شکل $(1, 1, -5)$ هستند خواننده می‌تواند با جایگذاری تحقیق کند که $(0, 2, 7)$ در واقع یک جواب خصوصی دستگاه داده شده می‌باشد.

به طور هندسی مجموعه جواب می‌تواند بهوسیله محاسبه هسته و خط تعریف شده توسط بردار $(1, 1, -5)$ در راستا و فاصله تعریف شده توسط بردار $(0, 2, 7)$ نشان داده شود شکل ۸-۷ را ملاحظه کنید.



شکل ۸-۷

۵-۷ چند دستگاه

فرض کنیم یک تعداد از دستگاه خطی $AX = Y_1, AX = Y_2, AX = Y_3, \dots$ همه دارای ماتریس ضرایب A باشند. فرض کنیم T نگاشت خطی تعریف شده توسط A باشد. همچنین فرض کیم X_1, X_2, \dots جواب‌های خصوصی این دستگاه‌ها باشند در این صورت مجموعه جواب برای این دستگاه‌ها چنین هستند.

$$\ker(T) + X_1, \ker(T) + X_2, \ker(T) + X_3, \dots$$



این مجموعه‌ها مجموعه‌های موازی هستند، هر کدام با انتقال $\ker(T)$ توسط بردارهای X_1, X_2, X_3, \dots به وجود می‌آیند. برای مثال جواب دستگاه

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a_1$$

$$-x_1 + x_2 = a_2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = a_3$$

خطی موازی با خط تعریف شده توسط بردار $(-5, 1, 1)$ است.

مثال ۳: جواب‌های دستگاه معادلات زیر را حل و بحث کنید.

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1$$

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4$$

$$3x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 5$$

$$x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 2$$

حل: با اعمال روش حل حذفی گوس-جordan داریم:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & -5 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 2 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 2 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

در نتیجه

$$x_1 - 5x_2 - 5x_3 = 5$$

$$x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 2$$

متغیرهای پیش رو را برحسب متغیرهای باقی مانده بیان می‌کنیم:

$$x_1 = 5x_2 + 5x_3 + 5 \quad x_2 = 4x_3 + 3x_4 + 2$$

جواب دلخواه چنین است

$$(5r + 5s + 5, 4r + 3s + 2, r, s)$$



قسمت‌های این بردار را به شکل زیر جدا می‌کنیم:

$$Ax = y \quad \text{جواب دلخواه} \quad Ax = y \quad \text{همسته نگاشت تعریف شده به وسیله} \\ (5r + 5s + 5, 4r + 3s + 2, r, s) = r(5, 4, 1, 0) + s(5, 3, 0, 1) + (5, 2, 0, 0)$$

مشاهده می‌کنیم که هسته زیرفضای دو بعدی از R^4 با پایه $(5, 4, 1, 0)$ و $(1, 0, 3, 5)$ است و آن صفحه‌ای است که از مبدا می‌گذرد. مجموعه جواب برای دستگاه داده شده انتقال یافته این صفحه توسط بردار $(5, 2, 0, 0)$ است.

برای دانشجویانی که تاکنون معادلات دیفرانسیل را گذرانده‌اند جالب خواهد بود که ملاحظه کنند این مفاهیم با حل معادلات دیفرانسیل و روش‌های آن در ارتباط هستند. مثال زیر این ایده‌ها را توضیح می‌دهد.

مثال ۴: معادله دیفرانسیل $2x - 9y = d^2y/dx^2$ را حل کنید.

حل: فرض کنیم D عملگر مشتق باشد می‌توانیم معادله دیفرانسیل را به شکل

$$D^2y - 9y = 2x$$

و یا

$$(D^2 - 9)y = 2x$$

بنویسیم.

فرض کنیم V فضای توابعی باشد که مشتق دوم دارند باشد. $-D^2$ یک نگاشت خطی از V به توی خودش است جواب معادله دیفرانسیل تابعی است مانند y که تحت نگاشت $D^2 - 9$ به توی $2x$ نگاشته می‌شود. وضعیت شبیه حل یک دستگاه معادلات خطی ناهمگن است. در نتیجه داریم:

$$\text{جواب خصوصی } 2x = (D^2 - 9)y + (\text{عضو دلخواهی از هسته}) = \text{جواب دلخواه}$$

فرض می‌کنیم هسته $D^2 - 9$ را پیدا کردیم قضیه عمومی به ما می‌گوید از آنجا که عملگر از مرتبه دوم است هسته بایستی دو بعدی باشد یا بردارهای پایه‌ای به شکل e^{mx} . از آنجا که بردارها در هسته هستند:

$$(D^2 - 9)e^{mx} = 0$$

$$(m^2 - 9)e^{mx} = 0$$

$$(m - 3)(m + 3)e^{mx} = 0$$

$$m = -3 \quad \text{یا} \quad m = 3$$



بنابراین بردارهای پایه هسته بردارهای e^{-3x} و e^{3x} می‌باشند بردار دلخواه در هسته می‌تواند به صورت $re^{3x} + se^{-3x}$ باشد.

باقی می‌ماند اینکه یک جواب خصوصی برای $D^2y - 9y = 2x$ را پیدا کنیم ساده‌ترین جواب جوابی است که مشتق دوم آن صفر باشد داریم $y = -2x/9$ و $y = -2x/9$ بنابراین یک جواب دلخواه از معادله دیفرانسیل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y = re^{3x} + se^{-3x} - \frac{2x}{9}$$

۱-۵-۷ تمرین دستگاه‌های معادلات خطی زیر را در نظر گرفته برای جواب‌های داده شده جواب‌ها را به صورت جمع دو جواب به عنوان هسته نگاشت خطی تعریف شده توسط ماتریس ضرایب و جواب خصوصی تجزیه کنید.

(۱)

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = -1$$

$$x_2 = r \quad x_3 = 2r \quad x_1 = r + 1 \quad \text{جواب‌ها}$$

(۲)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$$

$$x_2 = 2 \quad x_3 = 1 \quad x_1 = 0 \quad \text{جواب‌ها}$$

(۳)

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1$$

$$2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3$$

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2$$

$$x_2 = r \quad x_3 = 2r \quad x_1 = r + 1 \quad \text{جواب‌ها}$$



(۴)

$$x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$-2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6$$

$$x_2 = s \quad x_3 = r \quad x_1 = r - s + 3 \quad \text{جواب‌ها}$$

(۵)

$$x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 4$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 2$$

$$x_3 = r \quad x_2 = -5r + 5s - 6 \quad x_1 = -4r + 2s - 2 \quad \text{جواب‌ها}$$

$$x_4 = s$$

(۶)

$$x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 2$$

$$x_3 + 5x_4 + 3x_5 = -3$$

$$x_3 = -5r - 3s - 3 \quad x_2 = 13r + 9s + 8 \quad x_1 = -32r - 23s - 19 \quad \text{جواب‌ها}$$

$$x_5 = s \quad x_4 = r$$

۷) نگاشت خطی $T : R^3 \longrightarrow R^3$ تعریف شده توسط ماتریس A را در نظر بگیرید. برد این نگاشت خطی مجموعه بردارهای به شکل $(x, y, x+y)$ که صفحه $y = x + y$ را مشخص می‌کند، می‌باشد این نگاشت را به کار ببرید و تعیین کنید چه موقع جواب‌های دستگاه معادلات $AX = Y$ وجود دارد Y روی متغیرهای خودش تغییر می‌کند (اگر جواب‌ها وجود دارند نیازی به تعیین آنها نیست)

$$\text{الف) } y = (-1, 2, 3) \quad \text{ب) } y = (1, 1, 2)$$

$$\text{ج) } y = (2, 4, 5) \quad \text{د) } y = (3, 2, 5)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$



۸) در این بخش دستگاه معادلات ناهمگن را حل کردیم که جواب‌های دلخواه به دست آمده جواب به دو قسمت هسته نگاشت خطی تعریف شده براساس ماتریس ضرایب و یک جواب خصوصی دستگاه بود آیا جواب خصوصی X_1 منحصر به فرد است؟ اگر X_1 یکتا نیست، برداری غیر از $(7, 2, 0)$ تعیین کنید که برای مسئله ۲ این بخش می‌تواند به کار رود.

۹) یک برداری به جزء $(5, 0, 0, 0)$ تعیین کنید که می‌تواند به عنوان یک جواب خصوصی در تجزیه مجموعه جواب برای مثال ۳ این بخش به کار رود.

۱۰) یک دستگاه معادلات خطی ناهمگن $Y = AX$ بسازید که ماتریس ضرایب A و جواب خصوصی X_1 داشته باشد که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad x_1 = (1, -1, 4)$$

۱۱) یک دستگاه معادلات خطی ناهمگن $y = Ax$ بسازید که ماتریس ضرایب A و جواب خصوصی x_1 داشته باشد که

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_1 = (2, 0, 3)$$

۱۲) ثابت کنید جواب یک دستگاه معادلات خطی ناهمگن یکتاست اگر و تنها اگر هسته نگاشت تعریف شده توسط ماتریس ضرایب بردار صفر باشد.

تمرینات ۱۳ و ۱۴ برای دانشجویانی که اطلاعاتی از معادلات دیفرانسیل دارند طرح شده است.

۱۳) یک پایه برای هسته هر کدام از عملگرهای زیر را پیدا کنید. یک تابع دلخواه در هسته بیاورید.

$$\text{الف) } D^2 + 2D - 8 \quad \text{ب) } D^2 + 4D + 3 \quad \text{ج) } D^2 + D - 2$$

۱۴) معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} - 3\frac{dy}{dx^2} &= 8 & \text{الف) } \frac{dy}{dx} + 5\frac{dy}{dx^2} + 6y &= 8 \\ \frac{dy}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} &= 3e^{2x} & \text{د) } \frac{dy}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 12y &= 24 \end{aligned}$$



۶-۷ بردار مختصات

تاکنون در مورد انواع فضاهای برداری همانند فضای برداری R^n فضای ماتریس‌ها و فضای توابع، بحث کرده‌ایم در این بخش راهی پیدا می‌کنیم که چگونه می‌توانیم بردارها را در R^n به‌کار ببریم بردارها در هر فضای برداری با بعد متناهی مختصات برداری نامیده می‌شوند این توضیح راهنمایی می‌کند برای این نتیجه‌گیری که، همه فضاهای برداری با بعد متناهی در یک جمله ریاضی همان R^n هستند.

تعریف. فرض کنیم U یک فضای برداری با پایه $\{u_1, \dots, u_n\}$ باشد و u یک بردار در U ، می‌دانیم اسکالارهای یکتاً وجود دارد که

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$$

بردار ستوانی $u_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ بردار مختصات u در رابطه با این پایه نامیده می‌شود. اسکالارهای a_1, \dots, a_n مختصات u در ارتباط با این پایه نامیده می‌شوند.

توجه کنید که شکل بردار ستوانی برای بردار مختصات به‌کار برده‌ایم نه ماتریس سطروی را.

مثال ۱: بردار مختصات $(4, 5) = u$ در ارتباط با پایه‌های B و B' زیر را از R^2 پیدا کنید.

الف) پایه استاندارد $\{(1, 0), (0, 1)\}$ و $B = \{(1, 0), (-1, 1)\}$

حل الف): می‌بینیم که $(1, 0) = 4(1, 0) + 5(0, 1)$ بنابراین $u_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ که نمایش داده شده u در ارتباط با پایه استاندارد است.

ب) اکنون بردار مختصات u در ارتباط با B' را پیدا می‌کنیم که یک پایه استاندارد نیست. فرض کنیم

$$(4, 5) = a_1(2, 1) + a_2(-1, 1)$$

بنابراین

$$(4, 5) = (2a_1, a_1) + (-a_2, a_2) \implies (4, 5) = (2a_1 - a_2, a_1 + a_2)$$

با مقایسه مؤلفه‌ها به دستگاه‌های زیر می‌رسیم

$$2a_1 - a_2 = 4$$

$$a_1 + a_2 = 5$$



این دستگاه جواب‌های یکتایی $a_1 = 3$ و $a_2 = 2$ دارد. بنابراین $u'_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ هندسی دارند. بردارهای پایه همانند زیر نشان داده شده‌اند.

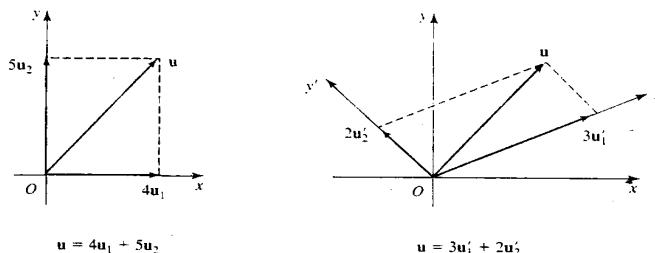
$$u_1 = (1, 0) \quad u'_1 = (2, 1)$$

$$u_2 = (0, 1) \quad u'_2 = (-1, 1)$$

می‌توانیم بنویسیم

$$u = 3u_1 + 5u_2 \quad , \quad u = 3u_1 + 2u_2$$

شکل ۹-۷ را ببینید.



شکل ۹-۷

مثال ۲: بردار مختصات $u = 5x^3 + 5$ در ارتباط با پایه‌های B و B' از \mathbb{P}^2 را پیدا کنید.

$$B = \{x^3, x, 1\}$$

$$B' = \{x^3 - x + 5, 3x^3 - 1, 2x^3 + 4x + 2\}$$

حل الف): مشاهده می‌کنیم که $5x^3 + x - 3 = 5(x^3) + (x) - 3(1)$ بنابراین $u_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

مختصات u در ارتباط با پایه استاندارد، ضرایب $5x^3 + x - 3$ می‌باشند.

حل ب): اگر بخواهیم بردار مختصات u در ارتباط با پایه B' که پایه استاندارد نیست. پیدا کنیم، مشکل تر خواهد بود.

$$5(x^3 + x - 3) = (a_1 + 3a_2 + 2a_3)x^3 + (-a_1 + 4a_2)x_2 + (-a + 4a_3)x + (5a_1 - a_2 - 2a_3)$$

با مقایسه ضرایب به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

$$-a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 5$$



$$-a_1 + 4a_2 = 1$$

$$5a_1 - a_2 - 2a_3 = -3$$

این دستگاه جواب‌های منحصر به فرد

$$a_1 = -\frac{1}{5}, \quad a_2 = \frac{1}{5}, \quad a_3 = \frac{1}{5}$$

$$\cdot u_{B'} = \begin{bmatrix} -1,5 \\ 1,5 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$

دارد بنابراین

مثال‌های بالا نشان دهنده است که چگونه پایه‌ها که، اغلب پایه‌ها استاندارد هستند، برای بیان یک بردار استفاده می‌شوند. به طور کلی یک دستگاه معادلات خطی برای پیدا کردن مختصات در ارتباط با پایه‌ی دیگری حل می‌شوند. معذلك بردار مختصات می‌تواند به آسانی در ارتباط با یک پایه‌ی متعامد به دست آید. خواننده را به نتیجه‌ی قضیه ۱۹-۵ یادآوری می‌کنیم. اگر $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ یک پایه نرمال برای فضای برداری U باشد. آنگاه یک بردار دلخواه v در U می‌تواند به صورت

$$v = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2 + \dots + (v \cdot u_n)u_n$$

بیان شود. بنابراین

$$V_B = \begin{bmatrix} v \cdot u_1 \\ \vdots \\ v \cdot u_n \end{bmatrix}$$

بردار مختصات v است.

مثال ۳: بردار مختصات $v = (2, -5, 10)$ در ارتباط با پایه‌ی متعامد

$$B = \{(1, 0, 0), (0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}), (0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5})\}$$

را پیدا کنید.

حل: داریم

$$(2, -5, 10) \cdot (1, 0, 0) = 2$$

$$(2, -5, 10) \cdot (0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = 5$$



$$(2, -5, 10) \cdot \left(0, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right) = -10$$

بنابراین

$$V_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}$$

این مثال روش می‌کند که چگونه پایه‌های متعامد بهتر از پایه‌های دیگر است. این که بدانیم چگونه بردار مختصات در ارتباط با پایه‌های مختلف ارتباط دارد امری ضروری است. موضوع مبحث بعدی است.

۷-۷ تغییر پایه

فرض کنیم $\{u_1, \dots, u_n\}$ و $B' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$ پایه‌هایی برای فضای برداری U باشند. یک بردار u در U بردارهای مختصات u_B و $u'_{B'}$ در ارتباط با این پایه‌ها خواهد داشت. اکنون ما رابطه بین u و $u'_{B'}$ را توضیح می‌دهیم. فرض کنیم بردارهای مختصات u_1, \dots, u_n در ارتباط با پایه $B = \{u'_1, \dots, u'_n\}$ باشند ماتریس p که این بردارها را به عنوان ستون‌ها دارد، نقش اساسی در این بحث بازی می‌کن، چنان‌مانند ماتریس تبدیلات از پایه B به پایه B' نامیده می‌شود.

$$p = [(u_1)_B, \dots, (u_n)_B]$$

قضیه. فرض کنیم $B = \{u'_1, \dots, u'_n\}$ و $B' = \{u_1, \dots, u_n\}$ پایه‌هایی برای فضای برداری U باشد اگر u برداری در U باشد که بردارهای مختصات u_B و $u'_{B'}$ در ارتباط با این پایه‌ها داشته باشد، آنگاه $p u_B = p u'_{B'}$ که در آن p ماتریس انتقال از B به B' است

$$p = [(u_1)_{B'}, \dots, (u_n)_{B'}]$$

اثبات. از آنجا که $\{u_1, \dots, u_n\}$ پایه‌ای برای U است هرکدام از بردارهای u_1, \dots, u_n می‌تواند به صورت ترکیب خطی از این بردارها بیان شود. گیریم

$$u_1 = c_{11}u'_1 + \dots + c_{n1}u'_n$$

⋮

$$u_n = c_{1n}u'_1 + \dots + c_{nn}u'_n$$



اگر $u_1 = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$ داریم:

$$\begin{aligned} u &= a_1 u_1 + \dots + a_n u_n \\ &= a_1(c_{11}u'_1 + \dots + c_{n1}u'_n) + \dots + a_n(c_{1n}u'_1 + \dots + c_{nn}u'_n) \\ &= (a_1c_{11} + \dots + a_nc_{1n})u'_1 + \dots + (a_1c_{n1} + \dots + a_nc_{nn})u'_n \end{aligned}$$

بردار مختصات در ارتباط با B' به صورت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$u'_B = \begin{cases} a_1c_{11} + \dots + a_nc_{1n} \\ \vdots \\ a_1c_{n1} + \dots + a_nc_{nn} \end{cases}$$

یک تغییر پایه برای یک فضای برداری از یک پایه غیراستاندارد به پایه استاندارد واضح و سرراست به دست می‌آید.

مثال بعدی مثالی است که با ماتریس تبدیل پیدا شده است. ستون‌های p در حقیقت بردارهای پایه اولی هستند.

مثال ۴: فرض کنیم پایه‌های $\{(1, 0), (0, 1)\}$ و $B = \{(1, 2), (3, -1)\}$ از R^2 باشند اگر برداری باشد به طوری که $u_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ آنگاه u'_B را پیدا کنید.

حل: بردارهای B را برحسب B' بیان می‌کنیم با استفاده از ماتریس تبدیل داریم

$$(1, 2) = 1(1, 0) + 2(0, 1)$$

$$(3, -1) = 3(1, 0) - 1(0, 1)$$

بردارهای مختصات $(1, 2)$ و $(3, -1)$ براین ماتریس تبدیل p عبارت است از:

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

و مشاهده می‌کنیم که ستون‌های p بردارهای پایه B هستند داریم:

$$u'_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 2 \end{bmatrix}$$



فرض کنیم B و B' پایه‌هایی برای فضای برداری باشند. ملاحظه می‌کنیم که ماتریس‌های تبدیل از B به B' و از B' به B با هم مرتبط هستند.

۲-۷-۷ قضیه. فرض کنیم B و B' پایه‌هایی برای فضای برداری U باشند و p ماتریس تبدیل از B' به B باشد. در این صورت p وارون پذیر است و ماتریس تبدیل از B به B' برابر p^{-1} است. اثبات. فرض کنیم u برداری در U با بردارهای مختصات ستونی u_B و $u_{B'}$ در رابطه با پایه‌های B و B' داده شده باشد و ماتریس تبدیل p از B به B' باشد. فرض کنیم Q ماتریس تبدیل از B' به B باشد، می‌دانیم که

$$u_{B'} = p u_B \quad , \quad u_B = Q u_{B'}$$

حال این دو معادله را به دو روش ترکیب می‌کنیم. u_B از معادله دوم را در اولی جانشین می‌کنیم. سپس به جای $u_{B'}$ از اولی به توی دومی جانشین می‌کنیم داریم

$$u_{B'} = P Q u_B \quad , \quad u_B = Q P u_{B'}$$

از آنجا که این نتایج برای همه بردارهای u_B و $u_{B'}$ برقرار است داریم:

$$P Q = Q P = I$$

بنابراین

$$Q = P^{-1}$$

مثال بعدی روش مفیدی را برای پیدا کردن ماتریس تبدیل از یک پایه به پایه دیگری که هیچ‌کدام پایه استاندارد نیستند معرفی می‌کند. در اینجا به سبب ساده‌تر بودن هر کدام از تبدیلات به پایه استاندارد، پایه استاندارد را به عنوان یک پایه مینای به کار می‌بریم.

مثال ۵: پایه‌های $\{(3, 1), (3, -1)\}$ و $B = \{(1, 2), (1, 0)\}$ از \mathbb{R}^2 در نظر بگیرید ماتریس تبدیل از B به B' را پیدا کنید. اگر u یک برداری باشد که $u_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ سپس $u_{B'}$ را پیدا کنید.

حل: فرض کنیم پایه استاندارد $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$ به عنوان یک پایه مینای باشد ماتریس تبدیل p از S به B' و ماتریس تبدیل p' از B' به S چنین هستند.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad P' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



ماتریس تبدیل خطی از S به B برابر (p') خواهد بود ماتریس از B' به B برابر $p'^{-1}(p')$ است بنابراین ماتریس تبدیل از B به B' چنین است

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 11 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$u_{B'} = \begin{bmatrix} -8 & 11 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

۸-۷ یک ریختی ها

فرض کنیم $V \rightarrow U$ یک نگاشت خطی باشد. یک به یک گفته می شود اگر برای هر عضو در بر T دقیقاً یک عضو از دامنه T متناظر با آن باشد. اگر هر عضو V تصویر یک عضو از U باشد نگاشت T را یک نگاشت پوشانمی نامیم.

تعریف بعد مفهوم یک به یک و پوشانمی همراه خطی بودن یک نگاشت آورده می شود

تعریف. فرض کنیم T یک نگاشت خطی یک به یک و پوشانمی U به W باشد در این صورت T یک ریختی نامیده می شود و U و W را فضاهای برداری یک ریخت می گویند. مفهوم فضاهای برداری یک ریخت این است که آنها از نقطه نظر ریاضی همانند هستند، از آنجا که یک ریخت یک به یک و پوشانمی است اعضای دوفضا با یکدیگر همانند می شوند. به علاوه یک ریختی یک نگاشت خطی است بنابراین چنین فضاهای خواص جمع برداری و ضرب اسکالر مشابه دارند. ظاهر فیزیکی اعضای دو فضای برداری ممکن است متفاوت باشد اما به طور ریاضی آنها ممکن است از یک فضای برداری آمده باشند. عمل واپسیه به بردار مختصات به هر بردار در یک فضای برداری حقیقی یک نگاشت از فضای برداری به R^n تعریف می کند. این نگاشت خطی است به علاوه ملاحظه می کنیم که یک به یک و پوشانمی است.

۱-۸-۷ قضیه. فرض کنیم U یک فضای برداری حقیقی یا پایه $\{u_1, \dots, u_n\}$ باشد. فرض

کنیم u عضو دلخواهی از U یا بردار مختصات $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ در ارتباط با این پایه باشد در این صورت نگاشت



T با ضابطه زیر یک یک‌ریختی از R^n به روی U است:

$$T(u) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

اثبات. نگاشت T یک‌به‌یک است یعنی اگر $T(u) = T(v)$ آنگاه $u = v$. فرض کنیم

$$T(u) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad T(v) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$u = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n, \quad v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

در نتیجه $u = v$ پس T یک‌به‌یک است.

اکنون با نشان دادن اینکه هر عضو از R^n تصویر عضوی از U است ثابت می‌کنیم T پوشای است.

$$\text{فرض کنیم } \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ عضوی از } R^n \text{ باشد در این صورت}$$

$$T(b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n) = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\text{بنابراین } \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ تصویر بردار } b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n \text{ است در نتیجه } T \text{ پوشای است. این را به عهده خواننده}$$

وآگذار می‌کنیم که نشان دهد T خطی است. یک نتیجه مهم که از قضیه قبل به دست می‌آید این است که هر فضای برداری با بعد متناهی مانند U یک‌ریخت با R^n برای بعضی n ها است. بنابراین هر فضای برداری با بعد متناهی از یک دید جبری با R^n یکسان است.

۲-۸-۷ تمرین‌ها در تمرینات ۱ تا ۴ بردار مختصات u را در رابطه یا پایه داده شده B در R^2 بیابید.



$$B = \{(1, 0), (0, 1)\} , \quad u = (2, 3) \quad (1)$$

$$B = \{(3, -1), (2, 1)\} , \quad u = (1, -1) \quad (2)$$

$$B = \{(1, 1), (0, 1)\} , \quad u = (5, 1) \quad (3)$$

$$B = \{(1, -1), (3, 1)\} , \quad u = (-7, -5) \quad (4)$$

تمرینات ۵ تا ۸ بردار مختصات u در رابطه با پایه داده شده در R^3 را بیابید.

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} , \quad u = (4, 0, -2) \quad (5)$$

$$B = \{(1, -1, 0), (2, 1, -1), (2, 0, 0)\} , \quad u = (6, -3, 1) \quad (6)$$

$$B = \{(2, 0, 1), (0, 1, 2), (1, 1, 1)\} , \quad u = (3, -1, 7) \quad (7)$$

$$B = \{(1, 2, 3), (1, -1, 0), (0, 1, -2)\} , \quad u = (1, -6, -8) \quad (8)$$

در تمرین های ۹ تا ۱۲ بردار مختصات u در رابطه با پایه داده شده برای P_n را پیدا کنید.

$$B = \{X, 1\} , \quad u = 7X - 3 \quad (9)$$

$$B = \{3X - 5, X - 1\} , \quad u = 2X - 6 \quad (10)$$

$$B = \{X^2, X, 1\} , \quad u = 4X^2 - 5X + 2 \quad (11)$$

$$B = \{X^2, X - 1, 2X\} , \quad u = 3X^2 - 6X - 2 \quad (12)$$

در تمرین های ۱۳ تا ۱۵ بردار مختصات u در رابطه با پایه متعامد B داده شده را پیدا کنید.

$$B = \{(0, 1, 0), (\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}), (\frac{2}{5}, 0, \frac{3}{5})\} , \quad u = (5, 0, -10) \quad (13)$$

$$B = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})\} , \quad u = (1, 2, 3) \quad (14)$$

$$B = \left\{(1, 0, 0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\right\} , \quad u = (2, 1, 4) \quad (15)$$

در تمرین های ۱۶ تا ۲۰ ماتریس تبدیل P از پایه داده شده B به پایه استاندارد B' از R^2 پیدا

کنید. این ماتریس را برای پیدا کردن بردار مختصات u , v و w در رابطه با B' به کار ببرید.

$$B = \{(2, 3)(1, 2)\} , \quad B' = \{(1, 0)(0, 1)\} \quad (16)$$

$$u_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} , \quad v_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} , \quad w_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \{(4, 1)(3, -1)\} , \quad B' = \{(1, 0)(0, 1)\} \quad (17)$$

$$u_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad v_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad w_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$B = \{(1, 1)(2, -2)\}, \quad B' = \{(1, 0)(0, 1)\} \quad (18)$$

$$u_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad w_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \{(3, 2)(2, 1)\}, \quad B' = \{(1, 0)(0, 1)\} \quad (19)$$

$$u_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \{(2, -3)(-3, 4)\}, \quad B' = \{(1, 0)(0, 1)\} \quad (20)$$

$$u_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(۲۱) پایه‌های $\{(1, 0), (0, 1)\}$ از R^2 را در نظر بگیرید اگر u یک

بردار باشد به طوری که $U_{B'} u_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ سپس $U_{B'}$ را پیدا کنید (راهنمایی: ماتریس تبدیل از B به B' وارون از B به B' است).

(۲۲) پایه‌های $\{(1, 0), (0, 1)\}$ از R^2 را در نظر بگیرید اگر u

برداری باشد به طوری که $u_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ سپس $u_{B'}$ را پیدا کنید.

(۲۳) ماتریس تبدیل P از پایه $\{(1, 2), (3, 2)\}$ از R^2 به پایه $\{(2, 1), (3, 0)\}$ را پیدا

کنید اگر $u_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ سپس $u_{B'}$ را پیدا کنید.

(۲۴) فضای برداری P_2 را در نظر بگیرید $\{X^3, X - 1, 4\}$ پایه‌های $B' = \{3X^3, X - 1, 4\}$ و $B = \{X^2, X, 1\}$ برای

P_2 هستند. ماتریس تبدیل از B به B' را پیدا کنید این ماتریس را به کار ببرید و بردارهای

مختصات $4x^3 + 4x + 4, 3x^2 + 4x + 4, 8x^2 + 4x + 12$ و $3x^3 + 4x + 6$ را در رابطه با پایه B' پیدا

کنید (راهنمایی: ماتریس تبدیل B به B' وارون ماتریس از B' به B است).

(۲۵) فضای برداری P_1 را در نظر بگیرید $\{1, X, X + 2, 3\}$ پایه‌های برای

P_1 هستند. ماتریس تبدیل از B به B' را بباید. این ماتریس را برای پیدا کردن بردارهای مختصات

در ارتباط با پایه B' به کار ببرید.

(۲۶) یک یک‌ریختی از فضای برداری ماتریس‌های قطری 2×2 به روی R^2 بسازید.

(۲۷) یک یک‌ریختی از فضای برداری ماتریس‌های متقان 2×2 به روی R^3 بسازید.

(۲۸) فرض کنید T یک ماتریس تبدیل تعریف شده به وسیله یک ماتریس مربع A باشد. ثابت کنید

یک یک‌ریختی است اگر و تنها اگر A نامنفرد باشد.



۲۹) فرض کنید A یک ماتریس نامنفرد باشد که یک یک ریختی از R^n به روی R^n تعریف می‌کند. (تمرین قبل را ببینید) ثابت کنید A^{-1} همچنین یک یک ریختی از R^n به روی خودش تعریف می‌کند.

۹-۷ نمایش ماتریسی نگاشت‌های خطی

دیدیم که یک نگاشت خطی $T : R^m \rightarrow R^n$ توسط یک ماتریس A تعریف می‌شود. در این بخش ما یک روش نمایش‌گر یک نگاشت خطی بین دوفضای برداری کلی به وسیله یک ماتریس معرفی می‌کنیم. این بحث را با توجه به اطلاعاتی برای تعریف یک نگاشت خطی لازم است به سرانجام می‌رسانیم.

فرض کنیم f یک تابع دلخواه باشد، می‌دانیم f تعریف شده است هرگاه اثر آن روی هر عضو از دامنه‌اش مشخص باشد. معمولاً ضابطه توسط یک معادله معین می‌شود که اثر تابع روی هر عضو دلخواه در دامنه آن را به دست می‌دهد. برای مثال فرض کنید تابع f تعریف شده به وسیله ضابطه زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = \sqrt{x - 3}$$

دامنه f ، مجموعه x ‌هایی است که $x \geq 3$. معادله بالا اثر f روی هر x در این بازه را می‌دهد. برای مثال $f(7) = 2$ متشابهً یک نگاشت خطی T تعریف می‌شود اگر ارزش آن برای هر بردار از دامنه مشخص شود. معذالک متفاوت با یک تابع کلی، خواهیم دید که اگر اثر تبدیل خطی را روی یک زیرمجموعه متناهی از دامنه (یک پایه) بدانیم اثر آن به طور خودکار روی همه اعضای دامنه تعریف می‌شود.

۱-۹-۷ قضیه. فرض کنیم $V \rightarrow U$ یک نگاشت خطی باشد. فرض کنیم $\{u_1, \dots, u_n\}$ یک پایه برای U باشد T توسط اثرش روی بردارهای پایه یعنی $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ تعریف می‌شود. برد T توسط $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ پید می‌آید.

بنابراین با تعریف یک نگاشت خطی روی یک پایه روی همه دامنه آن تعریف می‌شود.

اثبات. فرض کنیم u یک عضو از U باشد از آنجاکه $\{u_1, \dots, u_n\}$ یک پایه برای U است. اسکالرهای a_1, \dots, a_n وجود دارند به طوری که

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$$



با توجه به خطی بودن T

$$T(u) = T(a_1 u_1 + \dots + a_n u_n) = a_1 T(u_1) + \dots + a_n T(u_n)$$

بنابراین $T(u)$ شناخته شده است اگر $(T(u_1), \dots, T(u_n))$ تعریف شده باشند به علاوه $T(u)$ ممکن یک عضو دلخواهی از برد T باشد. البته می‌تواند به عنوان ترکیب خطی از $(T(u_1), \dots, T(u_n))$ بیان شود بنابراین $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ برد T را پدید می‌آورند.

مثال ۱: تبدیل خطی $T : R^3 \rightarrow R^2$ تعریف شده به صورت زیر به روی بردارهای پایه از R^3 را در نظر بگیرید، $(1, -2, 3) T(1, -2, 3) = (1, 1, -2)$ را پیدا کنید.

$$T(1, 0, 0) = (3, -1) \quad T(0, 1, 0) = (2, 1) \quad T(0, 0, 1) = (3, 0)$$

حل: از آنجا که T روی بردارهای پایه از R^3 تعریف شده است روی تمام فضا تعریف می‌شود. برای پیدا کردن $T(1, -2, 3)$ بردار $(1, -2, 3) = 1(1, 0, 0) - 2(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1)$ را به صورت ترکیب خطی از بردارهای پایه بیان می‌کنیم و خطی بودن T را به کار می‌بریم.

$$\begin{aligned} T(1, -2, 3) &= T\left(1(1, 0, 0) - 2(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1)\right) \\ &= 1T(1, 0, 0) - 2T(0, 1, 0) + 3T(0, 0, 1) \\ &= 1(3, -1) - 2(2, 1) + 3(3, 0) = (1, -3) \end{aligned}$$

دیدیم که تبدیل خطی $T : R^n \rightarrow R^m$ می‌تواند تعریف شود

$$T(u) = Au$$

وقتی که $[T(e_1) \dots T(e_n)] = A$ ، توجه کنید A به وسیله پیدا کردن اثر T روی هر بردار پایه استاندارد از R^n ساخته می‌شود. این ایده می‌تواند یک نگاشت خطی از $T : U \rightarrow V$ بین دو فضای برداری کلی را تعریف کند. ما اعضای U و V را به وسیله بردار مختصات نمایش خواهیم داد و R^n را توسط ماتریس A که یک تبدیل از بردار مختصات تعریف می‌کند، مشخص می‌کنیم؛ همچنانکه برای R^n ماتریس A به وسیله پیدا کردن اثر T روی بردارهای پایه ساخته می‌شود.

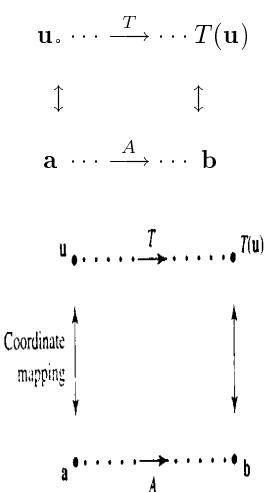
۲-۹-۷ قضیه. فرض کنیم U و V فضاهای برداری یا پایه‌های $\{u_1, \dots, u_n\}$ و $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ باشند و $T : U \rightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد. اگر v_i یک بردار در V با



تصویر $T(\mathbf{u})$ باشد، که بردارهای مختصات \mathbf{a} و \mathbf{b} در ارتباط با این پایه‌ها داشته باشند آنگاه

$$\mathbf{b} = A\mathbf{a}$$

که در آن $A = [T(\mathbf{u}_1)_{B'}, \dots, T(\mathbf{u}_n)'_B]$ در این صورت A ماتریس نمایش‌گر T با در نظر گرفتن پایه‌های B و B' نامیده می‌شود. شکل ۹-۷ را ببینید.



شکل ۹-۷

اثبات. فرض کنیم $\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_n\mathbf{u}_n$ خطی بودن T را به کار ببرید می‌توانیم بنویسیم

$$T(\mathbf{u}) = T(a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_n\mathbf{u}_n) = a_1T(\mathbf{u}_1) + \dots + a_nT(\mathbf{u}_n)$$

همچنین فرض کنیم اثر T روی بردارهای پایه U به این صورت باشد

$$T(\mathbf{u}_1) = c_{11}\mathbf{v}_1 + \dots + c_{1m}\mathbf{v}_m$$

⋮

$$T(\mathbf{u}_n) = c_{n1}\mathbf{v}_1 + \dots + c_{nm}\mathbf{v}_m$$

بنابراین:

$$T(\mathbf{u}) = a_1(c_{11}\mathbf{v}_1 + \dots + c_{1m}\mathbf{v}_m) + \dots + a_n(c_{n1}\mathbf{v}_1 + \dots + c_{nm}\mathbf{v}_m)$$



$$= (a_1 c_{11} + \cdots + a_n c_{n1}) v_1 + \cdots + (a_1 c_{1m} + \cdots + a_n c_{nm}) v_m$$

بنابراین بردار مختصات $T(\mathbf{u})$ چنین است

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= \begin{bmatrix} (a_1 c_{11} + \cdots + a_n c_{n1}) \\ \vdots \\ (a_1 c_{1m} + \cdots + a_n c_{nm}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{1m} & \cdots & c_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T(u_1)_{B'} & \cdots & T(u_n)_{B'} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

پس قضیه ثابت شده است.

مثال ۲: فرض کنید $T : U \rightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد T در ارتباط با پایه‌های $\{u_1, u_2, u_3\}$ و $B' = \{v_1, v_2\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T(u_1) = 2v_1 - v_2$$

$$T(u_2) = 3v_1 + 2v_2$$

$$T(u_3) = v_1 - 4v_2$$

نمایش ماتریس T را با در نظر گرفتن این پایه‌ها پیدا کنید و با استفاده از این ماتریس تصویر بردار $\mathbf{u} = 3u_1 + 2u_2 - u_3$ را بیابید.

حل: بردار مختصات $T(u_1), T(u_2)$ و $T(u_3)$ چنین هستند.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

این بردارها ستون‌های ماتریس T را تشکیل می‌دهند.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

اکنون تصویر $\mathbf{u} = 3u_1 + 2u_2 - u_3$ را با استفاده از این ماتریس پیدا می‌کنیم بردار مختصات \mathbf{u} برابر

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

است داریم:

$$Aa = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$



$$T(\mathbf{u}) = 11\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 \quad \text{دارد، بنابراین} \quad T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

مثال ۳: تبدیل خطی $T: R^3 \rightarrow R^2$ تعریف شده توسط $T(x, y, z) = (x + y, 2z)$ را در نظر می‌گیریم ماتریس T با در نظر گرفتن پایه‌های $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ و $\{u'_1, u'_2\}$ از R^3 به R^2 را پیدا کنید که در آن

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0) \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 4) \quad \mathbf{u}_3 = (1, 2, 3) \quad \mathbf{u}'_1 = (1, 0) \quad \mathbf{u}'_2 = (2, 0)$$

این ماتریس را به کار برد و تصویر بردار $(2, 3, 5)$ را بیابید.

حل: ما اثر T روی بردارهای پایه از R^3 را پیدا می‌کنیم.

$$T(\mathbf{u}_1) = T(1, 1, 0) = (2, 0) = 2(1, 0) + 0(0, 2) = 2u'_1 + 0u'_2$$

$$T(\mathbf{u}_2) = T(0, 1, 4) = (1, 8) = 1(1, 0) + 4(0, 2) = 1u'_1 + 4u'_2$$

$$T(\mathbf{u}_3) = T(1, 2, 3) = (3, 6) = 3(1, 0) + 3(0, 2) = 3u'_1 + 3u'_2$$

بنابراین بردار مختصات $T(\mathbf{u}_1), T(\mathbf{u}_2)$ و $T(\mathbf{u}_3)$ برابر هستند. این بردارها ستون‌های ماتریس T را تشکیل می‌دهند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس A را برای پیدا کردن تصویر بردار $(2, 3, 5)$ به کار می‌بریم. بردار مختصات u را تعیین می‌کنیم که این بردار می‌تواند چنین نشان داده شود.

$$u = (2, 3, 5) = 3(1, 1, 0) + 2(0, 1, 4) - (1, 2, 3) = 3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + (-1)\mathbf{u}_3$$

بنابراین بردار مختصات u می‌باشد. بردار مختصات $T(u)$ چنین است:

$$b = Aa = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$T(\mathbf{u}) = 5\mathbf{u}'_1 + 5\mathbf{u}'_2 = 5(1, 0) + 5(0, 2) = (5, 10)$$



می‌توانیم این نتیجه را با استفاده از تعریف $T(x, y, z) = (x+y, 2z)$ امتحان کنیم. برای $(2, 3, 5)$

داریم:

$$T(u) = T(2, 3, 5) = (2+3, 2 \times 5) = (5, 10)$$

مثال قبلی به ما کمک می‌کند ایده نمایش ماتریسی را بهتر بفهمیم. اهمیت مفهوم نمایش ماتریسی در استفاده از آن برای پیدا کردن $T(\mathbf{u})$ است ما اکنون ارتباط آن را بحث می‌کنیم.

۱۰-۷ اهمیت نمایش ماتریسی

در بخش گذشته دیدیم هر فضای برداری متناهی حقیقی یک ریخت با R^n است. این بدان معنی است که هر چنین فضایی برداری را می‌توان بر حسب R^n مناسبی مورد بحث قرار داد. در حقیقت هر نگاشت خطی می‌تواند توسط یک ماتریس نمایش داده شود. که بدین معنی است همه قضایای ریاضی از این فضاهای برداری و نگاشت‌های خطی آنها می‌تواند به صورت مناسبی از فضاهای برداری R^n و ماتریس‌ها پذیرفته شود.

نتیجه دوم کامپیوتراست. اعضای R^n و ماتریس‌ها را می‌توان در کامپیوترا محاسبه کرد. بنابراین فضاهای برداری کلی و نگاشت‌های خطی آنها می‌تواند براساس این نمایش‌ها و به کمک کامپیوترا مورد بحث قرار گیرند. تعدادی کاربردهای ویژه نمایش ماتریسی وجود دارد ما به طور مثال می‌بینیم که عمل‌های سطری مقدماتی نگاشت‌های خطی هستند که نمایش ماتریسی دارند که ماتریس مقدماتی نامیده می‌شود. خواهیم دید که چگونه این نمایش‌ها برای یک روش که تجزیه U نامیده می‌شود و برای حل دستگاه معادلات از طریق کامپیوت به طور گسترشده استفاده می‌شود.

مثال ۴: تبدیل خطی $T(ax^r + bx + c) = (a+b)x - c$ تعریف شده توسط $p_2 : p_1$ را

در نظر می‌گیریم. ماتریس T با در نظر گرفتن پایه‌های $\{u_1, u_2, u_3\}$ و $\{u'_1, u'_2\}$ از p_1 به p_2 را پیدا کنید

هرگاه:

$$u_1 = x^r \quad u_2 = x \quad u_3 = 1, \quad u'_1 = x \quad u'_2 = 1$$

این ماتریس را به کار ببرید و تصویر 1 $u = 2x^2 + 2x - 1$ را بیابید.

حل: اثر T را روی هر بردار پایه p_2 در نظر بگیرید.

$$T(u_1) = T(x^r) = x = 1x + 0(1) = 1u'_1 + 0u'_2$$



$$T(u_1) = T(x) = 1x + 0(1) = 1u'_1 + 0u'_2$$

$$T(u_2) = T(1) = -1 = 0x + -1(1) = 0u'_1 + (-1)u'_2$$

بردارهای مختصات $T(x^1)$ و $T(x^2)$ برابر $T(x)$ و $T(1)$ ماتریس T چنین است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

حال T را به کار می‌بریم و تصویر $1 = 3x^1 + 2x^2 - u = 3x^1 + 2x^2 - 5u$ را به دست می‌آوریم. بردار مختصات u در ارتباط

$$\text{با پایه } \{1, x^1, x^2\} \text{ برابر} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ است داریم:}$$

$$b = Aa = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{بنابراین } 1 = 5u'_1 + 1u'_2 = 5x + 1$$

روش این نمایش ماتریسی را در شکل ۱۱-۷ تجسم کرده‌ایم. نیمه بالایی شکل نشان می‌دهد تبدیل خطی

از T از p_1 به p_2 است. نیمه پایینی که در ارتباط با نیمه بالایی است با A یک تبدیل از بردار مختصات از

p_2 به روی بردار مختصات از p_1 تعریف می‌کند، با توجه به اینکه:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ -c \end{bmatrix}$$

نیمه پایینی نمایش مختصات نیمه بالایی است.

$$\begin{array}{ccc} ax^1 + bx^2 + c \cdots & \xrightarrow{T} & \cdots(a+b)x - c \\ \downarrow & & \downarrow \\ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} a+b \\ -c \end{bmatrix} \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc}
 ax^2 + bx + c & \xrightarrow{T} & (a+b)x + c \\
 \uparrow & & \downarrow \\
 \left[\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} a+b \\ -c \end{matrix} \right]
 \end{array}$$

شکل ۱۱-۷

وقتی که یک نگاشت خطی از فضای برداری به تو خودش باشد نمایش ماتریسی معمولاً براساس یک پایه یکتا پیدا می‌شود. مثال بعدی نتیجه این ایده است.

مثال ۵: فرض کنیم $D = \frac{d}{dx}$ عملگر مشتق‌گیری باشد. D یک عملگر خطی روی p_2 است ماتریس D را با در نظر گرفتن پایه $\{x^2, x, 1\}$ از p_2 بیابید.

حل: ما اثر D روی بردارهای پایه را به دست می‌آوریم

$$D(x^2) = 2x = \circ x^2 + \circ x + \circ(1)$$

$$D(x) = 1 = \circ x^2 + \circ x + \circ(1)$$

$$D(1) = 0 = \circ x^2 + \circ x + \circ(1)$$

بنابراین ماتریس D چنین است

$$A = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ 2 & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ \end{bmatrix}$$

ماتریس A یک عملگر خطی روی R^3 بوده که هم تراز با D روی p_2 است. داریم:

$$D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b, \quad \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ 2 & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 2a \\ b \end{bmatrix}$$

شکل ۱۲-۷ را ببینید.

$$\begin{array}{ccc}
 ax^2 + bx + c & \xrightarrow{D} & 2ax + b \\
 \downarrow & & \downarrow
 \end{array}$$



$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdots \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \cdot \\ 2a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} ax^2 + bx + c & \xrightarrow{D} & 2ax + b \\ \downarrow & & \downarrow \\ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} & \xrightarrow{\quad} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 2a \\ b \end{bmatrix} \end{array}$$

شکل ۱۲-۷

۱۱-۷ ارتباط بین نمایش‌های ماتریسی

تاکنون ملاحظه کردایم که نمایش ماتریسی یک نگاشت خطی وابسته به پایه‌های انتخابی است. وقتی نگاشت خطی کاربردی می‌شود، هدف اصلی تعیین یک نمایش ماتریسی ساده است بعداً خواننده می‌بیند که به طور مثال چگونه پایه‌ها می‌توانند انتخاب شوند به‌گونه‌ای که نمایش نگاشت خطی قطعی باشد. در اینجا این امر که چگونه نمایش‌های ماتریسی یک نگاشت خطی بر حسب پایه‌های متفاوت در ارتباط با هم هستند مورد بحث قرار می‌گیرد.

برای خواننده یادآوری می‌شود که اگر A و B ماتریس‌های مربع از یک اندازه باشند آنگاه B مشابه با A گفته می‌شود اگر ماتریس p موجود باشد به‌طوری که $B = p^{-1}Ap$ تبدیل ماتریسی A به ماتریس B تبدیل مشابه نامیده می‌شود. اکنون نمایش ماتریسی یک عملگر خطی را در ارتباط با دو پایه ماتریس‌های مشابه پیدا می‌کنیم.

۱-۱۱-۷ قضیه. فرض کنیم U یک فضای برداری با پایه‌های B و B' باشد فرض کنیم نمایش ماتریسی از B به B' باشد. اگر T یک عملگر خطی روی U باشد ماتریس داده شده A با در



نظر گرفتن پایه اول و A' با در نظر گرفتن پایه دوم باشند در این صورت

$$A' = p^{-1}Ap$$

اثبات. بردار u در U را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم بردارهای مختصات در رابطه با B و B' برابر a و

a' باشند بردارهای مختصات Aa' و Aa هستند از آنجا p ماتریس نمایشی از B' به B است

می‌دانیم که

$$a = pa' \quad , \quad Aa = p(A'a')$$

معادله دوم به صورت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$p^{-1}Aa = A'a'$$

با جانشینی $a = pa'$ در این معادله چنین به دست می‌آید:

$$p^{-1}Apa' = A'a'$$

اثر ماتریس‌های $p^{-1}Ap$ و A' به عنوان نگاشت خطی روی هر بردار مختصات a' برابرند پس این ماتریس‌ها

مساوی‌اند.

مثال ۶: عملگر خطی $T(x, y) = (2x, x+y)$ را در نظر بگیرید ماتریس T با در نظر گرفتن

پایه $\{(1, 0), (0, 1)\}$ از R^2 را بیابید. تبدیل $A' = p^{-1}Ap$ را به کار ببرید و ماتریس A' با در

نظر گرفتن پایه $\{(-2, 3), (1, -1)\}$ را تعیین کنید.

حل: اثر T روی بردارهای پایه استاندارد برابر است

$$T(1, 0) = (2, 1) = 2(1, 0) + 1(0, 1)$$

$$T(0, 1) = (0, 1) = 0(1, 0) + 1(0, 1)$$

ماتریس T در ارتباط با پایه استاندارد چنین است:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون P نمایش ماتریسی از B به B' را پیدا می‌کنیم بردارهای B' را بحسب بردارهای B می‌نویسیم.

$$(-2, 3) = -2(1, 0) + 3(0, 1)$$



$$(1, -1) = 1(1, 0) - (0, 1)$$

ماتریس تبدیل برابر است با $P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ بنابراین

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

نمایش ماتریس قطری یک عملگر خطی

اکنون می‌بینیم چگونه نمایش یک ماتریس یک نگاشت خطی T را پیدا می‌کنیم، ماتریس قطری در صورت وجود معمولاً بیشتر از انواع دیگر کاربرد دارد.

فرض کنیم T یک عملگر خطی روی فضای برداری V از بعد n باشد. فرض کنیم B یک پایه برای V و A یک نمایش ماتریسی T متناظر با پایه B باشد نمایش ماتریسی T در رابطه با پایه دیگر B' می‌تواند به شکل تبدیل تشابه‌ی $A' = p^{-1}Ap$ مشاهده شود که در آن p نمایش ماتریسی از پایه B' به پایه B باشد، فرض می‌کنیم A مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ با n بردار متناظر مستقل خطی v_1, \dots, v_n داشته باشد اگر $\{v_1, \dots, v_n\} = p$ آنگاه می‌دانیم (قضیه ۶-۳ بخش ۶-۴) که A' یک ماتریس قطری است.

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \circ \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \circ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

بردار مختصات B' در رابطه با B بردارهای ویژه v_1, \dots, v_n هستند.

مثال: عملگر خطی $T(x, y) = (3x + y, x + 3y)$ را در نظر بگیرید یک نمایش ماتریسی قطری T را پیدا کنید. برای این نمایش برداری، پایه را تعیین کنید و یک نمایش هندسی ارائه دهید.

حل: با نمایش ماتریسی A در رابطه با پایه $\{(1, 0), (0, 1)\}$ از R^2 شروع می‌کنیم. این نمایش برای پیدا کردن ساده‌تر است داریم:

$$T(1, 0) = (3, 1) = 3(1, 0) + 1(0, 1)$$

$$T(0, 1) = (1, 3) = 1(1, 0) + 3(0, 1)$$



بردارهای مختصات $(1, 0)$ و $(0, 1)$ در رابطه با B هستند. بنابراین نمایش ماتریسی T در رابطه با پایه استاندارد B چنین است.

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix}$$

خواننده می‌تواند تحقیق کند ماتریس A مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه زیر را دارد.

$$\lambda_1 = 4 \quad v_1 = r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 2 \quad v_2 = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس A' زیر نمایش ماتریسی قطری T است.

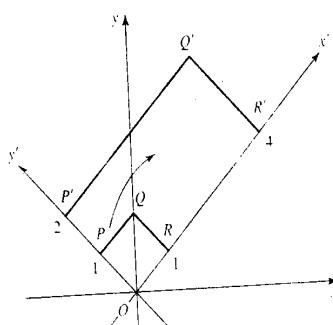
$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

حال پایه B' را که نمایش A' را می‌دهد به دست می‌آوریم. ماتریس تغییر وضعیت از B به B' متعامد خواهد بود فرض کنیم:

$$B' = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

توجه کنید که پایه B' از دوران پایه B به اندازه $\frac{\pi}{4}$ به دست می‌آید.

اکنون به طور هندسی عملگر T را تغییر می‌دهیم پایه استاندارد B یک دستگاه مختصات xy را تعریف می‌کند شکل ۱۳-۷ را ببینید.



شکل ۱۳-۷



این مثال‌ها وضعیتی است که اغلب در فیزیک و مهندسی با آن برخورد می‌شود یکی در دستگاه مختصات xy شرح ریاضی داده می‌شود سپس برای دستگاه مختصات $x'y'$ دوم که وضعیت بهتر و مناسب برای تجزیه و تحلیل در آن دستگاه مختصات دارد بررسی می‌کند. تبدیل از یک دستگاه به دیگری معمولاً یک تبدیل تشابه‌ی متعامد است.

۲-۱۱-۷ تمرین‌ها

۱) فرض کنیم $T : R^3 \rightarrow R^3$ یک نگاشت خطی تعریف شده به صورت زیر روی پایه استاندارد R^3 باشد. $T(1, 0, 0) = (2, 1)$, $T(0, 1, 0) = (0, 2)$, $T(0, 0, 1) = (-1, 1)$

$$T(1, 0, 0) = (2, 1) \quad T(0, 1, 0) = (0, 2) \quad T(0, 0, 1) = (-1, 1)$$

۲) فرض کنیم $T : R^3 \rightarrow R^3$ یک نگاشت خطی تعریف شده به صورت زیر روی پایه استاندارد R^3 باشد. $T(3, -2) = (1, 0, 0)$, $T(-1, 1) = (0, 1, 0)$, $T(1, 1) = (0, 0, 1)$

$$T(1, 0, 0) = (1, 1) \quad T(0, 1, 0) = (-1, 1) \quad T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$$

۳) فرض کنیم T یک عملگر خطی روی R^3 تعریف شده به صورت زیر روی پایه استاندارد R^3 باشد. $T(2, 1) = (1, 0, 0)$, $T(1, 1) = (0, 1, 0)$, $T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$

$$T(1, 0, 0) = (2, 1) \quad T(0, 1, 0) = (0, 2) \quad T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$$

۴) فرض کنیم $p_1 : p_2 \rightarrow R^3$ یک نگاشت خطی تعریف شده به صورت زیر روی پایه استاندارد R^3 باشد. $T(3x^2 - 2x + 1) = (x^2, x, 1)$

$$T(x^2) = 3x^2 - 2x + 1 \quad T(x) = x \quad T(1) = 1$$

۵) فرض کنیم T یک عملگر روی p_2 تعریف شده به صورت زیر روی پایه استاندارد $\{x^2, x, 1\}$ باشد. $T(x^2 + 3x - 2) = (x^2 + 2x + 1)$

$$T(x^2) = x^2 + 3 \quad T(x) = 2x + 1 \quad T(1) = 1$$

۶) فرض کنیم $V : U \rightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد. همچنین فرض کنید T در ارتباط با پایه‌های $\{v_1, v_2\}$ و $\{u_1, u_2\}$ از U و V به صورت زیر باشد:

$$T(u) = 2v_1 + 3v_2 \quad T(u_2) = 4v_1 - v_2$$



ماتریس T را با در نظر گرفتن این پایه‌ها بیابید. این ماتریس را به کار ببرید و تصویر بردار $u = 2u_1 + 5u_2$ را پیدا کنید.

۷) فرض کنیم $V \rightarrow U$: یک نگاشت خطی باشد، همچنین فرض کنید T تعریف شده در ارتباط با پایه‌های $\{u_1, u_2\}$ و $\{v_1, v_2\}$ از U و V به صورت زیر باشد:

$$T(u_1) = 2v_1 + v_2 - 3v_3 \quad T(u_2) = v_1 - 2v_2 + v_3$$

ماتریس T را با در نظر گرفتن این پایه‌ها بیابید. این ماتریس را به کار ببرید و تصویر بردار $u = 4u_1 - 7u_2$ را پیدا کنید.

۸) فرض کنیم $V \rightarrow U$: یک نگاشت خطی باشد، همچنین فرض کنید T تعریف شده در ارتباط با پایه‌های $\{u_1, u_2, u_3\}$ و $\{v_1, v_2, v_3\}$ از U و V به صورت زیر باشد:

$$T(u_1) = v_1 + v_2 \quad T(u_2) = 3v_1 - 2v_2 \quad T(u_3) = v_1 + 2v_2 - v_3$$

ماتریس T را بیابید و تصویر بردار $u = 3u_1 + 2u_2 - 5u_3$ را بیابید.

۹) ماتریس نگاشت‌های خطی زیر از $R^3 \rightarrow R^3$ با در نظر گرفتن پایه‌های استاندارد این فضاهای را بیابید و تصویر بردار (۱، ۲، ۳) را پیدا کنید.

$$(الف) \quad T(y, z) = (x, z)$$

$$(ب) \quad T(x, y, z) = (3x, y = z)$$

$$(ج) \quad T(x, y, z) = (x + y, 2x - y)$$

۱۰) ماتریس عملکردهای زیر را در فضای R^3 به دست آورید. این ماتریس را برای پیدا کردن تصویر بردار $(-1/5, 2)$ بیابید.

$$(الف) \quad T(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$$

$$(ب) \quad T(x, y, z) = (x, y, z)$$

$$(ج) \quad T(x, y, z) = (x, \circ, \circ)$$

$$(د) \quad T(x, y, z) = (x + y, 3y, x + 2y - 4z)$$

۱۱) نگاشت خطی T را در نظر $T(x, y, z) = (x - y, x + z)$ تعریف شده توسط $R^3 \rightarrow R^3$ بگیرید. ماتریس T را با در نظر گرفتن این پایه‌های $\{u_1, u_2, u_3\}$ و $\{u'_1, u'_2, u'_3\}$ از R^3 و R^3 را پیدا



کنید.

$$u_1 = (1, -1, 0) \quad u_2 = (2, 0, 1) \quad u_3 = (1, 2, 1)$$

$$u'_1 = (-1, 0) \quad u'_2 = (0, 1)$$

این ماتریس را برای پیدا کردن تصویر $u = (3, -4, 0)$ به کار ببرید.

- (۱۲) نگاشت خطی $T : R^3 \rightarrow R^3$ تعریف شده توسط $T(x, y) = (x, x+y, 2y)$ را در نظر بگیرید. ماتریس T با در نظر گرفتن پایه‌های $\{u'_1, u'_2, u'_3\}$ از R^3 و $\{u_1, u_2, u_3\}$ از R^3 را به دست آورید که در آن

$$u_1 = (1, 3) \quad u_2 = (4, -1)$$

$$u'_1 = (1, 0, 0) \quad u'_2 = (0, 2, 0) \quad u'_3 = (0, 0, -1)$$

این ماتریس را برای پیدا کردن تصویر بردار $u = (9, 1)$ به کار ببرید.

- (۱۳) عملگر خطی $T : R^2 \rightarrow R^2$ تعریف شده توسط $T(x, y) = (2x, x+y)$ را در نظر بگیرید. ماتریس T با در نظر گرفتن پایه‌های $\{u_1, u_2\}$ از R^2 را پیدا کنید وقتی که

$$u_1 = (1, 2) \quad u_2 = (0, -1)$$

این ماتریس را برای پیدا کردن تصویر بردار $u = (-1, 3)$ به کار ببرید.

- (۱۴) ماتریس عملگر مشتق D را با در نظر گرفتن پایه $\{1 - 2x^2, x - 2x^3\}$ از p_2 را پیدا کنید این ماتریس را برای پیدا کردن تصویر $2x^4 + 2x^3 - 3x^2$ به کار ببرید.

- (۱۵) فرض کنید V فضای برداری توابع با دامنه $[0, \pi]$ تولید شده توسط توابع \sin و \cos باشد. همچنین فرض کنید D عملگر مشتق با در نظر گرفتن x و D^2 عملگر گرفتن مشتق دوم باشد. ماتریس عملگر خطی 1 از V با در نظر گرفتن پایه $\{\sin x, \cos x\}$ از V را بیابید. تصویر $3 \sin x + \cos x$ تحت این نگاشت را بیابید.

- (۱۶) ماتریس نگاشتهای زیر را با در نظر گرفتن پایه $\{1, x, x^2, x^3\}$ از p_3 و $\{1, x, x^2\}$ از p_2 را بیابید.

$$T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (b+c)x^3 + (b-d)x^2 + cx + d \quad (\text{الف})$$

$$p_2 \text{ از } p_1 \text{ به توی } T(ax + b) = bx^2 + ax + b \quad (\text{ب})$$



$$p_1 \text{ از } p_2 \text{ به توی } T(ax^t + bx + c) = cx + b - a \text{ ج}$$

۱۷) ماتریس تبدیل T از p_2 به توی p_1 را با در نظر گرفتن پایه $\{x^t + x, x, 1\}$ از $\{x, 1, x^t + x\}$ و پایه $\{1, x, x^t\}$ از p_1 پیدا کنید که در آن

$$T(ax^t + bx + c) = ax + c$$

تصویر $1 - 2x - 3x^2$ را تعیین کنید.

۱۸) ماتریس عملگر خطی T روی p_1 با در نظر گرفتن پایه $\{x+1, 2, x+1\}$ را پیدا کنید که a از p_1 باید که تصویر $3 - 4x$ را تعیین کند.

۱۹) ماتریس عملگر خطی زیر روی p_1 را با در نظر گرفتن پایه استاندارد $\{x, 1, x^t + x\}$ از p_1 باید که یک تبدیل تشابه‌ی بکار ببرید و سپس ماتریس T را با در نظر گرفتن پایه $\{1, x - 1, x + 1\}$ از p_1 پیدا کنید.

۲۰) عملگر خطی $T(x, y) = (2x, x+y)$ در R^2 را روی R^2 در نظر بگیرید. ماتریس T را با در نظر گرفتن پایه استاندارد برای R^2 پیدا کنید. یک تبدیل تشابه‌ی بکار ببرید سپس ماتریس آن را با در نظر گرفتن پایه $\{(1, 1), (2, 1)\}$ از R^2 پیدا کنید.

۲۱) عملگر خطی $T(x, y) = (x-y, x+y)$ در R^2 را روی R^2 در نظر بگیرید. ماتریس T را با در نظر گرفتن پایه استاندارد برای R^2 پیدا کنید یک تبدیل تشابه‌ی بکار ببرید سپس ماتریس را با در نظر گرفتن پایه $\{(1, 2), (-2, 1)\}$ از R^2 باید.

۲۲) فرض کنید

الف) V و W فضاهای برداری و U یک زیرفضای V باشد آیا همیشه ممکن است یک ساختار

نگاشت خطی از V به توی W که U را به عنوان هسته داشته باشد موجود باشد؟

ب) یک نگاشت خطی از R^2 به توی R^2 که زیرفضایی شامل همه بردارهایی به شکل $(r(4, 1) + s(1, 2), r(2, 1) - s(1, 2))$ به عنوان هسته داشته باشد بسازید.

ج) یک نگاشت خطی از R^3 به توی R^2 که زیرفضایی شامل همه بردارهایی به شکل $(r+s, 2r-s)$ به عنوان هسته داشته باشد بسازید.

۲۳) یک نگاشت خطی از R^3 به توی R^2 که زیرفضایی شامل همه بردارهایی به شکل $(2r-s, -r)$ به عنوان هسته داشته باشد بسازید.



۲۴) یک نگاشت خطی از R^2 به R^r که زیرفضایی شامل همه بردارهایی به شکل $(\begin{matrix} 1 & r \end{matrix})$ به عنوان هسته داشته باشد بسازید.

۲۵) فرض کنید $V : U \rightarrow U$ برای یک فضای برداری U تعریف شده توسط $T(u) = u$ باشد، ثابت کنید T خطی است. عملکردهای U نامیده می‌شود. فرض کنید B یک پایه برای U باشد، نشان دهید ماتریس T با در نظر گرفتن B یک ماتریس همانی است.

۲۶) فرض کنید $V : U \rightarrow V$ برای یک فضای برداری U تعریف شده توسط $T(u) = 0$ باشد. ثابت کنید T خطی است. عملکردهای U نامیده می‌شود. فرض کنید B یک پایه برای U باشد نشان دهید ماتریس T با در نظر گرفتن B ماتریس صفر است.

۲۷) فرض کنید U, V و W فضاهای برداری با پایه‌های $\{v_1, \dots, v_n\}$, $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, $L : V \rightarrow W$ و $T : U \rightarrow V$ و $B'' = \{w_1, \dots, w_n\}$ باشند همچنین فرض کنید Q نگاشتهای خطی باشند. فرض کنید P ماتریس T با در نظر گرفتن B و B' و B'' ماتریس نمایش گر QP با در نظر گرفتن $'$ و $''$ باشند. ثابت کنید ماتریس LOT با در نظر گرفتن B و B'' برابر L است.

۲۸) آیا امکان دارد برای دو نگاشت خطی متمایز $V \rightarrow U$ و $T_1 : U \rightarrow V$ و $T_2 : V \rightarrow U$ ماتریس‌های یکسان با در نظر گرفتن پایه‌های B' از U و V داشته باشند؟

۲۹) یک نمایش ماتریسی قطری برای هر کدام از عملکردهای زیر پیدا کنید یک پایه برای هر کدام از نمایش قطری پیدا کنید و یک تعبیر هندسی از T ارائه دهد.

$$(الف) T(x, y) = (4x + 2y, 2x + 4y)$$

$$(ب) T(x, y) = (5x + 3y, 3x + 5y)$$

$$(ج) T(x, y) = (9x + 2y, 2x + 6y)$$

$$(د) T(x, y) = (14x - 2y, 2x + 11y)$$

۳۰) یک نمایش ماتریسی قطری برای هر کدام از عملکردهای زیر بیابید. پایه‌ای برای هر کدام از نمایش‌های قطری تعیین کنید. یک تعبیر هندسی از T بیاورید. (ممکن نیست یک تبدیل متعامد در این مثالها پیدا کنید).

$$(الف) T(x, y) = (8x - 6y, 9x - 7y)$$



$$T(x, y) = (-2x + 2y, -10x + 4y) \quad (\text{ب})$$

$$T(x, y) = (3x - 4y, 2x - 3y) \quad (\text{ج})$$

$$T(x, y) = (4x + 5y, -10x - 8y) \quad (\text{د})$$

۳-۱۱-۷ تمرین‌های دوره‌ای فصل ۷

۱) هسته و برد نگاشت تعریف شده توسط ماتریس $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ را بیابید. نشان دهید که

$$\dim \ker(T) + \dim \text{range}(T) = \dim \text{dimain}(T)$$

۲) پایه‌ای برای هسته و برد نگاشت تعریف شده توسط ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

بیابید.

۳) تعیین کنید کدامیک از نگاشت‌های خطی تعریف شده توسط ماتریس‌های زیر یکبهیک و پوشاش استند.

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 8 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

۴) هسته و برد نگاشت خطی $T: R^3 \rightarrow R^3$ با $T(x, y, z) = (x, 2x, y - z)$ را تعیین کنید.

۵) ثابت کنید $p_3 \rightarrow p_2$: تعریف شده در زیر خطی است هسته و برد g را بیابید، پایه‌ای برای این زیرفضاهای به دست آورید.

$$g(a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_2 - a_1)x^2 - a_1x^2a_0.$$

۶) فرض کنید D عملگر مشتق‌گیری باشد D را به عنوان یک عملگر روی p_n در نظر بگیرید ثابت کنید $D^2 - 2D + 1$ عملگر خطی است مجموعه همه چندجمله‌ای‌هایی که توسط $1 - 2x - 4x^2$ شوند را بیابید.



۷) بردار مختصات $(-1, 8)$ در ارتباط با پایه $\{(1, 4), (1, 3)\}$ را پیدا کنید.

۸) بردار مختصات $x^2 + 2x - 13 + 3x^3$ را در رابطه با پایه $\{x^3, x^2, x, 1\}$ را پیدا کنید.

۹) بردار مختصات $(-15, 5, 0)$ را در رابطه با پایه متعامد $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0, 1, 0)$ و $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0, 0, 1)$ بیابید.

۱۰) ماتریس تبدیل p از پایه B زیر به پایه استاندارد B' از R^2 را بیابید. این ماتریس را برای پیدا کردن بردار مختصات u, v و w در رابطه با B' به کار ببرید.

$$B = \{(1, 3), (5, 2)\} \quad B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

$$u_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_B = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} \quad w_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۱۱) ماتریس تبدیل P از پایه $\{(4, 3), (-3, 2)\}$ از $B = \{(-1, 2), (2, 1)\}$ به پایه R^2 را پیدا کنید اگر آنگاه u_B را پیدا کنید.

۱۲) فرض کنید T یک نگاشت خطی روی R^2 تعریف شده به صورت زیر روی پایه استاندارد R^2 باشد $T(1, 0) = (3, 2)$ و $T(0, 1) = (-1, 4)$

۱۳) فرض کنید V یک نگاشت خطی باشد همچنین فرض کنید T در ارتباط با پایه های $\{u_1, u_2\}$ و $\{v_1, v_2, v_3\}$ از V و U به صورت زیر باشد $T(u_1) = v_1 - 5v_2 - 2v_3$ و $T(u_2) = 3v_1 - v_2 + 2v_3$. ماتریس T در ارتباط با این پایه ها را بیابید. این ماتریس را به کار ببرید و تصویر بردار $a = 2u_1 - 3u_2$ را پیدا کنید.

۱۴) ماتریس $T(x, y, z) = (2x, -3y)$ در ارتباط با پایه استاندارد را پیدا کنید این ماتریس را برای پیدا کردن تصویر $(1, 2, 3)$ به کار ببرید.

۱۵) ماتریس $T(ax^3 + bx + c) = (a - b)x^3 + cx$ با در نظر گرفتن پایه $\{1, x, x^2\}$ از P_2 را پیدا کنید این ماتریس را برای پیدا کردن تصویر $3x^3 - x + 2x^2$ به کار ببرید.

۱۶) نگاشت خطی $T(x, y) = (3x, x - y)$ را روی R^2 در نظر بگیرید ماتریس T را با در نظر گرفتن پایه های استاندارد برای R^2 پیدا کنید از یک ماتریس مشتابه استفاده کنید سپس این ماتریس را با در نظر گرفتن پایه های $\{(1, 2), (2, 3)\}$ از R^2 بیابید.



هدف‌های رفتاری فصل ۸

دانشجویی پس از مطالعه و کار روی این فصل باید بتواند

- مفاهیم ضرب نقطه‌ای دو بردار، نرم یک بردار، زاویه بین دو بردار و فاصله دو نقطه را در فضاهای برداری کلی تعریف کرده و مشابهت آنها را به صورت مفاهیم تعمیم یافته‌ای از فضاهای ملموس \mathbb{R}^n که در فصل ۵ مطالعه کرده است، درک کند.
- حاصل ضرب نقطه‌ای دوتابع (یا دوچندجمله‌ای) را تعریف کرده و به کمک آن نرم یک تابع را تعریف کنید.
- بداند که در چه صورتی دو بردار برهم عمودند (با استفاده از مفهوم حاصل ضرب نقطه‌ای)
- درکی از ارتباط حوزه‌ای مهمی چون تئوری نسبیت خاص و هندسه ناقلییدسی داشته باشد.
- تعریف دقیق تقریب بهوسیله کمترین مربعات را ارائه دهد.
- مفهوم تقریب فوریه را توضیح دهد.
- منحنی‌های کمترین مربعات را توضیح دهد.
- مفاهیم کدها، کد تصحیح خطأ و فاصله دو کد را تعریف کند.
- وبالآخره از عهده‌هی حل تمرین‌های پایان فصل به خوبی برآید.



فصل هشتم

فضاهای ضرب داخلی

فضای برداری R^n در فصل ۵ به طور قابل ملاحظه‌ای تعمیم داده شده. در آنجا مجموعه‌ای از اصول موضوعه را برای تبیین خواص R^n ارائه دادیم. به طوری که هر مجموعه‌ای که در این اصول موضوعه صدق می‌کرد فضای برداری نامیده می‌شد. چنین فضاهایی خواص جبری مشابهی با R^n دارند.

اینک یک قدم فراتر نهاده و مفاهیم فوق را به ضرب نقطه‌ای دو بردار، نرم یک بردار، زاویه بین بردارها و فاصله نقاط برای فضای برداری در حالت کلی تعمیم می‌دهیم.

۱-۸ فضاهای ضرب داخلی

ضرب نقطه‌ای یک مفهوم کلیدی در R^n برای تعیین نرم، زاویه و فاصله است. هدف ما تعمیم ضرب نقطه‌ای در R^n به فضاهای برداری با یک ساختار ریاضی موسوم به ضرب داخلی است. با این تعمیم می‌توانیم نرم، زاویه و فاصله را در فضاهای برداری دلخواه تعریف کیم. ضرب داخلی زیر براساس خواص بیان شده برای ضرب نقطه‌ای در بخش ۴-۲ ارائه شده است.

تعریف. یک ضرب داخلی روی یک فضای برداری v ، تابعی است که به هر زوج از بردارهای u و v از v عددی را با نماد $\langle u, v \rangle$ متضطرمی‌کند. این تابع برای هر بردار u ، v و w و هر اسکار c در خواص زیر صدق می‌کند.

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad (1)$$



$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad (2)$$

$$\langle cu, v \rangle = c \langle u, v \rangle \quad (3)$$

$$\langle u, u \rangle = 0, \quad \langle u, u \rangle \geq 0 \quad (4)$$

فضای برداری v که در آن ضرب داخلی تعریف شده باشد، یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود.
هر تابعی که در یک فضای برداری در اصول ضرب داخلی صدق کند، یک ضرب داخلی روی آن
فضا تعریف می‌کند. البته روی یک فضای برداری ضرب‌های داخلی زیادی می‌توان تعریف کرد. ضرب
 نقطه‌ای در R^2 ، یک ضرب داخلی در این فضا است. مثال‌های زیر ضرب‌های داخلی دیگری را در R^2
 ارائه می‌کنند.

مثال ۱: فرض کنید $w = (z_1, z_2)$ و $v = (y_1, y_2)$ ، $u = (x_1, x_2)$ بردارهای دلخواهی در R^2
 باشند. ثابت کنید $\langle u, v \rangle$ به شکل زیر تعریف می‌شود، یک ضرب داخلی در R^2 است.

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + 4 x_2 y_2$$

ضرب داخلی بردارهای (۱، ۵) و (۳، ۲) را با این ضرب داخلی بدست آورید.

حل: اصول چهارگانه ضرب داخلی را می‌آزمایم. از خواص جبری اعداد حقیقی و بردارها استفاده کنید و
 تعریف فوق را در جاهای مناسب به کار ببرید.

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + 4 x_2 y_2 \quad \text{اصل ۱:}$$

$$= y_1 x_1 + 4 y_2 x_2$$

$$= \langle v, u \rangle$$

$$\langle u + v, w \rangle = \langle (x_1, x_2) + (y_1, y_2), (z_1, z_2) \rangle \quad \text{اصل ۲:}$$

$$= \langle (x_1, y_1, x_2 + y_2), (z_1, z_2) \rangle$$

$$= (x_1, y_1) z_1 + 4 (x_2 + y_2) z_2$$

$$= x_1 z_1 + y_1 z_1 + 4 x_2 z_2 + 4 y_2 z_2$$

$$= x_1 z_1 + 4 x_2 z_2 + y_1 z_1 + 4 y_2 z_2$$

$$= \langle (x_1, x_2), (z_1, z_2) \rangle + \langle (y_1, y_2), (z_1, z_2) \rangle$$



$$= \langle u, v \rangle + \langle v, w \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle cu.v \rangle &= \langle c(x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = (cx_1, cx_2), (y_1, y_2) \\ &= cx_1y_1 + cx_2y_2 = c(x_1y_1 + x_2y_2) \\ &= c \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle &= \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle \\ &= x_1^2 + x_2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

به علاوه $\langle u, u \rangle \geq 0$. اگر و فقط اگر $x_1^2 + x_2^2 = 0$ باشد. بنابراین $u = 0$. در نتیجه $\langle u, u \rangle = 0$ ملاحظه می‌کنیم که اصول چهارگانه ضرب داخلی برقرارند، در این صورت $\langle x_1y_1 + x_2y_2, u, v \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$ یک ضرب داخلی در R^2 است.

ضربهای داخلی دیگری نیز در R^2 وجود دارند. با این حال ضرب نقطه‌ای در R^2 از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است زیرا زاویه و فاصله را در هندسه اقلیدسی به دست می‌دهد. بزودی هندسه ناقلیدسی را براساس ضرب داخلی که در بخش بعدی ارائه خواهیم کرد، مطالعه خواهیم کرد.

اینک ضرب داخلی را در فضای برداری ماتریس‌ها و توابع نمایش می‌دهیم.

مثال ۲: فضای برداری M_{22} متشکل از ماتریس‌های 2×2 را در نظر بگیرید. فرض کنید u و v دو ماتریس 2×2 به شکل زیر باشند.

$$u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

ثابت کنید تابع زیر یک ضرب داخلی روی M_{22} است

$$\langle u, v \rangle = ae + bf + cg + dh$$

(ضرب متناظر درایه‌ها و جمع آنها) ضرب داخلی ماتریس‌های زیر به دست آورید.

$$u = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$



حل: اصول موضوع ۱ و ۳ را بررسی و اصول موضوع ۲ و ۴ را به عنوان تمرین به خوانندگان واگذار می‌کنیم.

اصل موضوع ۱:

$$\langle u, v \rangle = ae + bf + cg + dh = ea + fb + gc + hd = \langle v, u \rangle$$

اصل موضوع ۳: فرض کنیم k یک اسکالر باشد

$$\begin{aligned} \langle ku, v \rangle &= kae + kbf + kcg + kdh \\ &= k(ae + bf + cg + dh) \\ &= k \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

و برای ضرب داخلی دو ماتریس داده شده داریم:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = (2 \times 5) + (-3 \times 2) + (0 \times 9) + (1 \times 0) = 4$$

مثال زیر یک ضرب داخلی روی فضای چندجمله‌ای‌ها است.

مثال ۳: P_n را فضای برداری چندجمله‌ای‌های از درجه نایشتر از n فرض می‌کنیم. f و g را دو عضو P_n در نظر می‌گیریم. ثابت کنید تابع زیر یک ضرب داخلی در P_n است.

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

ضرب داخلی توابع زیر را محاسبه کنید؟

$$f(x) = x^4 + 2x - 1 \quad , \quad g(x) = 4x + 1$$

حل: اصول موضوع ۱ و ۲ بررسی و دو اصل دیگر را به خواننده و امی‌گذاریم. خواص انتگرال را در بررسی اصول موضوع به کار می‌بریم.

اصل موضوع ۱:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 g(x)f(x)dx = \langle g, f \rangle$$



اصل موضوع ۲:

$$\begin{aligned} \langle f+g, h \rangle &= \int_0^1 [f(x) + g(x)]h(x)dx \\ &= \int_0^1 [f(x)h(x)] + [g(x)h(x)]dx \\ &= \int_0^1 f(x)h(x)dx + \int_0^1 g(x)h(x)dx \\ &= \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle \end{aligned}$$

و اینک ضرب داخلی توابع داده شده را می‌بایم

$$\langle x^3 + 2x - 1, 4x + 1 \rangle = \int_0^1 (4x^3 + 9x^2 - 2x - 1)dx = 2$$

۲-۸ نرم یک بردار

نرم برداری در R^n براساس ضرب نقطه‌ای به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_n)\| &= \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} \\ &= \sqrt{(x_1, \dots, x_n) \cdot (x_1, \dots, x_n)} \end{aligned}$$

این تعریف نرم، دقیقاً همان نرمی را که در فضاهای R^2 و R^3 انتظار داریم به دست می‌دهد. ما این تعریف را برای ضرب داخلی تعمیم خواهیم داد. نرمی که به این طریق به دست می‌آید لزوماً تغییر هندسی ندارد و لی در محاسبات عددی اهمیت ویژه‌ای دارد.

تعریف. فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی باشد. نرم بردار v که با $\|v\|$ مشخص می‌شود عبارت است از:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

مثال ۴: فضای برداری P_n را با ضرب داخلی

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$$

در نظر می‌گیریم. نرم تابع f تولید شده با این ضرب داخلی عبارت است از:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_0^1 [f(x)]^2 dx}$$



نرم تابع ۱ $f(x) = 5x^3 + 1$ را به دست آورید.

حل:

$$\begin{aligned}\|5x^3 + 1\| &= \sqrt{\int_0^1 (5x^3 + 1)^2 dx} \\ &= \sqrt{\frac{28}{3}}\end{aligned}$$

بنابراین نرم تابع ۱ $\sqrt{\frac{28}{3}}$, $f(x) = 5x^3 + 1$ است.

۳-۸ زوایه

ضرب نقطه‌ای در R^n برای تعیین زاویه بین بردارها به کار می‌رود و این زاویه θ بین دو بردار u و v در R^n عبارت است از:

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

مثال ۵: فضای ضرب داخلی چندجمله‌ای‌ها، P_n را با ضرب داخلی

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

در نظر بگیرید. زاویه بین دو تابع نا صفر f و g از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\cos \theta = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\| \|g\|} = \frac{\int_0^1 f(x)g(x)dx}{\|f\| \|g\|}$$

کسینوس زاویه بین توابع x و $3x$ را به دست آورید.

حل: ابتدا $\|f\|$ و $\|g\|$ را به دست می‌آوریم

$$\|5x^3\| = \sqrt{\int_0^1 [5x^3]^2 dx} = \sqrt{5} \quad , \quad \|3x\| = \sqrt{\int_0^1 [3x]^2 dx} = \sqrt{3}$$

حال

$$\cos \theta = \frac{\int_0^1 f(x)g(x)dx}{\|f\| \|g\|} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$



۴-۸ بردارهای متعامد

فرض کنید V یک فضای حاصل ضرب داخلی باشد. دو بردار ناصفر u و v در V متعامد نامیده می‌شود اگر

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

مثال ۶: نشان دهید توابع $f(x) = x$ و $g(x) = x^3 - 2x$ با ضرب داخلی $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ متعامدند.

حل:

$$\langle 3x - 2, x \rangle = \int_0^1 (3x - 2)(x) dx = x^3 - x^2 \Big|_0^1 = 0.$$

بنابراین توابع f و g متعامدند.

یادآوری. همان‌طور که قبلاً تذکر دادیم با این تعریف ضرب داخلی، تعامد دو بردار تعبیر هندسی ندارد. با رسم نمودار f و g این موضوع را بکاوید.

۵-۸ فاصله

هدف نهایی تعمیم مفهوم اقلیدسی به فضاهای برداری است. همانند نرم، در حالت کلی مفهوم فاصله دارای تعبیر هندسی نمی‌باشد، با این حال در محاسبات عددی ما را قادر می‌سازد فواصل توابع متفاوت را به دست آوریم.

تعریف. V را یک فضای ضرب داخلی با نرم

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

در نظر می‌گیریم. فاصله دو بردار (نقاط) \mathbf{u} و \mathbf{v} که با $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ نشان داده می‌شود از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad (= \sqrt{\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle})$$

مثال ۷: P_n را با ضرب داخلی بیان شده در نظر بگیرید. کدام یک از توابع $g(x) = x^5 - 3x + 5$ و $f(x) = x^3 - 3x + 5$ را با ضرب داخلی بیان شده در نظر بگیرید. $f(x)$ تابع $h(x) = x^5 + 4$ نزدیک است.



حل: فاصله f را از g و h به دست می‌آوریم. برای سهولت از مربع فواصل شروع می‌کنیم

$$\begin{aligned}[d(f,g)]^2 &= \langle f-g, f-g \rangle = (3x-5, 3x-5) \\ &= \int_0^1 (3x-5)^2 dx = 13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[d(f,h)]^2 &= \langle f-h, f-h \rangle = \langle -4, -4 \rangle \\ &= \int_0^1 (-4)^2 dx = 16\end{aligned}$$

بنابراین $d(f,g) = \sqrt{13}$ و $d(f,h) = 4$. پس f به g نزدیکتر از f به h است. در عمل فاصله نسبی توابع مهمتر از فاصله مطلق آنها است.

فضای برداری مختلط \mathbb{C}^n در بخش ۱-۵ تعریف شد، که در بسیاری از شاخه‌های ریاضی، فیزیک و مهندسی اهمیت ویژه‌ای دارد. اینک ضرب داخلی متداول \mathbb{C}^n را تعریف می‌کنیم:

تعریف. ضرب داخلی \mathbb{C}^n

برای فضای برداری مختلط اصل موضوع اول را بازنویسی کرده و به شکل

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

در می‌آوریم. این ضرب داخلی برای تعریف نرم، تعامد و فاصله همانند فضاهای برداری حقیقی به کار می‌رود.

فرض کنیم (y_1, \dots, y_n) و (x_1, \dots, x_n) دو عضو \mathbb{C}^n باشند. یک ضرب داخلی کار برای \mathbb{C}^n عبارت است از

$$\langle u, v \rangle = x_1\bar{y}_1 + \dots + x_n\bar{y}_n$$

می‌توان نشان داد این تعریف در اصول موضوع ضرب داخلی فضای برداری مختلط صدق می‌کند. (تمرین‌های زیر را مرور کنید). این ضرب داخلی تعاریف نرم، تعامد و فاصله را در \mathbb{C}^n به اشکال زیر در می‌آورد.

$$\langle u, v \rangle = 0 \quad \text{اگر} \quad u \perp v$$

$$\|u\| = \sqrt{x_1\bar{x}_1 + \dots + x_n\bar{x}_n}$$

$$d(u, v) = \|u - v\|$$



مثال ۸: بردارهای $(1+i, -i)$ و $(2+3i, -1+5i)$ را در C^2 در نظر بگیرید. مطلوب است

الف) $\langle u, v \rangle$ و نشان دهید u بر v عمود است

$$\|v\| = \|u\|$$

$$d(u, v)$$

حل: الف) $\langle u, v \rangle = (1+i)(1-i) + (-1+5i)(i) = 0$ بنابراین u بر v متعامدند.

$$\|v\| = \sqrt{3} \quad \text{و} \quad \|u\| = \sqrt{39}$$

$$d(u, v) = \|u - v\| = \|(-1+2i, -1+6i)\| = \sqrt{42}$$

۱-۵-۸ تمرین

۱) فرض کنید (y_1, y_2) و (x_1, x_2) دو عضو R^2 باشند. ثابت کنید تابع زیر یک ضرب داخلی در R^2 است.

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

۲) فرض کنید (y_1, y_2, y_3) و (x_1, x_2, x_3) دو عضو R^3 باشند. ثابت کنید تابع زیر یک ضرب داخلی در R^3 است.

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 4x_3 y_3$$

۳) فرض کنید (y_1, y_2) و (x_1, x_2) دو عضو R^2 باشند. ثابت کنید تابع زیر یک ضرب داخلی در R^2 نمی‌تواند باشد.

$$\langle u, v \rangle = 2x_1 y_1 - x_2 y_2$$

۴) فضای برداری ماتریس‌های M_{22} را در نظر بگیرید. u و v را دو ماتریس 2×2 فرض کنید

$$u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

ثابت کنید تابع زیر در اصول موضوع ۲ و ۴ ضرب داخلی صدق می‌کند.

$$\langle u, v \rangle = ae + bf + cg + dh$$

(این تمرین مثال ۲ این درس را تکمیل می‌کند).



۵) در تمرین ۴ ثابت کنید تابع

$$\langle u, v \rangle = ae + 2bf + 3cg + 4dh$$

یک ضرب داخلی در M_{22} است. ضرب داخلی ماتریس‌های زیر را به دست آورید.

$$v = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad u = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$v = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad u = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

۶) در فضای برداری P_n با تابع

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

ثابت کنید این تابع در اصول موضوع ۳ و ۴ صدق می‌کند. (این تمرین مثال ۳ را تکمیل می‌کند)

۷) فضای برداری P_n را با تابع

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

در نظر بگیرید ثابت کنید این تابع یک ضرب داخلی است اگر a و b اعداد حقیقی باشند و $\langle a, b \rangle = ab$. ثابت کنید این تابع یک ضرب داخلی نیست هرگاه $a \leq b$.

در تمرین‌های ۸ تا ۱۵ تمام توابع در فضای ضرب داخلی P_n با ضرب داخلی به شکل

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

می‌باشند.

۸) حاصل ضرب نقطه‌ای را در هر مورد پیدا کنید.

$$(\text{الف}) \quad g(x) = 2x - 2 \quad \text{و} \quad f(x) = 2x + 1$$

$$(\text{ب}) \quad g(x) = 3 \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 + 2$$

$$(\text{ج}) \quad g(x) = x + 1 \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 + 3x - 2$$

$$(\text{د}) \quad g(x) = 2x^2 - 4x + 2 \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 + 2x - 1$$

۹) نرم توابع زیر را به دست آورید.



$$f(x) = 4x - 2 \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = 7x^3 \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = 3x^3 + 2 \quad (\text{ج})$$

$$g(x) = x^4 + x + 1 \quad (\text{د})$$

۱۰) ثابت کنید توابع $g(x) = 4x - 3$ و $f(x) = x^4$ متعامدند.

۱۱) ثابت کنید توابع ۱ و $f(x) = \frac{1}{2} - x$ متعامدند.

۱۲) کسینوس زاویه بین توابع $g(x) = 9x$ و $f(x) = 5x^3$ را محاسبه کنید.

۱۳) تابعی متعامد بر تابع $f(x) = 6x + 12$ به دست آورید.

۱۴) فاصله بین توابع ۱ و $g(x) = x^3 + x - 3$ را به دست آورید.

۱۵) کدامیک از توابع $f(x) = x^3 - 3x + 4$ و $g(x) = x^3 + 2x - 3$ تابع $h(x) = x^3$ نزدیکتر است.

در تمرین های ۱۶ تا ۲۰ همه ماتریس ها عضو فضای ضرب داخلی M_{22} با ضرب داخلی

$$\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right\rangle = ae + bf + cg + dh$$

در نظر گرفته شده اند.

۱۶) ضرب داخلی ماتریس های زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -7 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

۱۷) نرم ماتریس های زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$



$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \text{ د)$$

۱۸) ثابت کنید زوج ماتریس‌های زیر متعامدند.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ الف)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ ب)$$

۱۹) ماتریس متعامد به ماتریس زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

۲۰) فاصله بین زوج ماتریس‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ الف)$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ ب)$$

۲۱) در فضای مختلط ضرب داخلی C^2 , بردارهای \mathbf{u} و \mathbf{v} زیر را در نظر بگیرید.

$\|\mathbf{u}\|$ و $\|\mathbf{v}\|$ را محاسبه کنید. تعیین کنید که آیا \mathbf{u} و \mathbf{v} متعامدند یا نه؟

$$\mathbf{v} = (3 - 2i, 2 + i) \text{ و } \mathbf{u} = (2 - i, 3 + 2i) \text{ الف)$$

$$\mathbf{v} = (2 + i, 4 - 5i) \text{ و } \mathbf{u} = (4 + 3i, 1 - i) \text{ ب)$$

$$\mathbf{v} = (-i, 3 + 2i) \text{ و } \mathbf{u} = (2 + 3i, -1) \text{ ج)$$

$$\mathbf{v} = (1, 1) \text{ و } \mathbf{u} = (2 - 3i, -2 + 3i) \text{ د)$$

۲۲) در فضای مختلط ضرب داخلی C^2 , بردارهای \mathbf{u} و \mathbf{v} زیر را در نظر بگیرید.

$\|\mathbf{u}\|$ و $\|\mathbf{v}\|$ را محاسبه کنید و تعیین کنید آیا \mathbf{u} و \mathbf{v} متعامدند یا نه؟

$$(\mathbf{v} = (1 + i, -4 - i) \text{ و } \mathbf{u} = (1 + 4i, 1 - i)) \text{ الف)$$

$$(\mathbf{v} = (3 - 4i, 2 + 5i) \text{ و } \mathbf{u} = (2 + 7i, 1 + i)) \text{ ب)$$

$$(\mathbf{v} = (2 - i, 5i) \text{ و } \mathbf{u} = (1 - 3i, 1 + i)) \text{ ج)$$



$$\mathbf{v} = (2+i, -2+\frac{1}{2}i) \text{ و } \mathbf{u} = (3+i, 2+2i) \text{ د)$$

۲۳) فرض کنید $\mathbf{v} = (y_1, \dots, y_n)$ و $\mathbf{u} = (x_1, \dots, x_n)$ عضوهای C^n باشند. ثابت کنید:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = x_1\bar{y}_1 + \dots + x_n\bar{y}_n$$

در اصول موضوعه ضرب داخلی فضای برداری مختلط صدق می‌کند.

۲۴) ثابت کنید اگر \mathbf{u} و \mathbf{v} بردارهای در فضای ضرب داخلی مختلط C^n و k یک اسکالر باشد، آنگاه

$$\langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle = \bar{k} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

۲۵) هرگاه \mathbf{u} و \mathbf{v} بردارهای در فضای داخلی حقیقی و c یک اسکالر باشد،

$$\langle \circ, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \circ \rangle = \circ \text{ (الف)}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \text{ (ب)}$$

$$\langle \mathbf{u}, c\mathbf{v} \rangle = c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \text{ (ج)}$$

۲۶) فرض کنید \mathbf{u} و \mathbf{v} بردارهای در R^n باشند. اگر A ماتریس متقارن $n \times n$ باشد که به ازای هر بردار

تا صفر \mathbf{w} در R^n $\mathbf{w}A\mathbf{w}^t = 0$. این ماتریس را مثبت معین می‌نامند.

الف) نشان دهید $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}A\mathbf{v}^t$ در تمام اصول موضوع ضرب داخلی صدق می‌کند، بنابراین یک ضرب داخلی در R^n است. در نتیجه هر ماتریس مثبت معین یک ضرب داخلی در R^n است.

ب) نشان دهید ماتریس همانی I_n یک ضرب نقطه‌ای در R^n تعریف می‌کند.

ج) فرض کنید $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ و $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$. مقدار $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ را برای هر یک از ضربهای داخلی تعریف شده به وسیله ماتریس‌های معین مثبت زیر بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

د) ضرب داخلی مثال ۱، این بخش می‌تواند با یک ماتریس مثبت مبین A تعریف شود. A را به دست آورید.

۲۷) \mathbf{v} را یک بردار ناصرف در فضای ضرب داخلی V در نظر بگیرید. فرض کنید W مجموعه بردارهای در V باشد که بر \mathbf{v} متعامدند. ثابت کنید W یک زیرفضای V است.



۶-۸ اتحاد قطبی B

در یک ضرب داخلی همواره خاصیت زیر برقرار است.

$$\|v \pm w\|^2 = \|v\|^2 \pm 2\operatorname{Re} \langle u, v \rangle + \|w\|^2$$

که در آن u و v برداری دلخواه و $\operatorname{Re} \langle u, v \rangle$ قسمت حقیقی ضرب داخلی u و v است. در حالت خاص در فضای برداری حقیقی داریم:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \|u + v\|^2 - \frac{1}{4} \|u - v\|^2 \quad (1)$$

حال با توجه به اینکه

$$\langle u, v \rangle = \operatorname{Re} \langle u, v \rangle + i \operatorname{Im} \langle u, v \rangle \quad (2)$$

$$\langle u, v \rangle = \operatorname{Re} \langle u, v \rangle + i \operatorname{Re} \langle u, iv \rangle \quad (2')$$

$\operatorname{Im}(v) = \operatorname{Re}(-iv)$ قسمت موهومی ضرب داخلی u و v است و توجه داشته باشید که $\operatorname{Im} \langle u, v \rangle = \operatorname{Re}[-i \langle u, v \rangle] = \operatorname{Re} \langle u, iv \rangle$ در حالت کلی فضای برداری مختلط داریم:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \|u + v\|^2 - \frac{1}{4} \|u - v\|^2 + \frac{i}{4} \|u + iv\|^2 - \frac{i}{4} \|u - iv\|^2 \quad (3)$$

روابط (۱) و (۳) را اتحادهای قطبی می نامند.

قانون دیگری موسوم به قانون متوازی الاصلع در مورد نرم بردارها به شکل زیر برقرار است

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

۷-۸ هندسه ناقلییدسی و نسبیت خاص

ضرب داخلی ابزاری توانا برای کنترل هندسه R^n است. این ضرب، نرم بردارها، زاویه بین بردارها و فاصله بین نقاط را کنترل می کند. در واقع این امر به کمک روابط زیر انجام می گیرد.

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad \cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|}, \quad d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$$



ضربهای داخلی متفاوت در R^n , فاصله‌های متفاوت، زوایای متفاوت و نرم‌های متفاوت را برای هندسه متفاوت به دست می‌دهند. ضریق نقطه‌ای، ضرب داخلی ویره‌ای است که به هندسه اقلیدسی منجر می‌شود. اینک می‌خواهیم ولو به اختصار برخی هندسه‌های دیگر را مرور کنیم که با قرار دادن ضربهای داخلی دیگری در R^n به وجود می‌آیند. چنین هندسه‌های نا-اقلیدسی که بوسیله ریاضیدانان مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، بوسیله دانشمندان به کار رفته‌اند. در اینجا می‌خواهیم نشان دهیم که چگونه یکی از این هندسه‌ها برای توصیف فضا-زمان در تئوری نسبیت خاص به کار رفته است. ابتدا به هندسه نا-اقلیدسی در R^2 نظری می‌اندازیم. در R^2 ضرب داخلی خاصی را که در مثال ۱ توصیف کردیم، در نظر می‌گیریم.

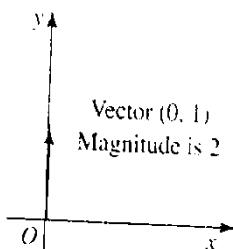
فرض کنیم (x_1, y_1) و (x_2, y_2) بردارهای دلخواهی در R^2 باشند و ضرب داخلی با ضابطه زیر تعریف شده باشد.

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 y_1 + 4 x_2 y_2$$

این ضرب داخلی با ضرب نقطه‌ای که در (الف ۴) ظاهر شد متفاوت است. در این فضا بردار $(1, 0)$ را در نظر بگیرید نرم این بردار عبارت است از:

$$\begin{aligned} \| (1, 0) \| &= \sqrt{\langle (1, 0), (1, 0) \rangle} \\ &= \sqrt{(1 \times 1) + 4(1 \times 1)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

این بردار را در شکل ۱-۸ نشان داده‌یم. نرم این بردار در هندسه اقلیدسی برابر ۱ است. در حالی که در هندسه جدید این نرم برابر ۲ است. (دانشجویانی که درس توپولوژی را گذرانده‌اند دیده‌اند که در آن مبحث نیز با تغییر توپولوژی فاصله‌ها و نرم‌ها تغییر پیدا می‌کند).



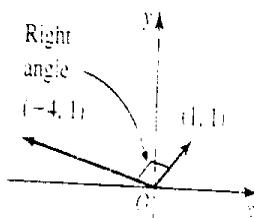
شکل ۱-۸



بردارهای $(1, 1)$ و $(-4, 1)$ را در نظر بگیرید. ضرب داخلی این بردارها عبارت است از:

$$\langle (1, 1), (-4, 1) \rangle = 0$$

بنابراین این دو بردار برهم عمودند. در شکل ۲-۸ این بردارها را تصویر کرده‌ایم. این بردارها در شکل متعامد به نظر نمی‌رسند و در هندسه اقلیدسی برهم عمود نیستند. با این حال زاویه بین این بردارها در هندسه جدید ما قائم است.

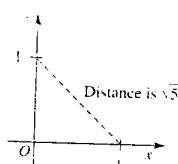


شکل ۲-۸

سرانجام با این ضرب داخلی، به کمک تعریف فاصله، فاصله نقاط $(1, 0)$ و $(0, 1)$ را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} d((1, 0), (0, 1)) &= \| (1, 0) - (0, 1) \| \\ &= \| (1, -1) \| \\ &= \sqrt{\langle (1, -1), (1, -1) \rangle} \\ &= \sqrt{(1 \times 1) + 4(-1 \times -1)} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

این مطلب در شکل ۳-۸ به تصویر کشیده شده است. توجه داشته باشید که فاصله این دو نقطه در فضای اقلیدسی (یعنی در هندسه اقلیدسی) با همگرایی قضیه فیثاغورس برابر $\sqrt{2}$ است.



شکل ۳-۸



شما باید بپذیرید که هندسه‌ای که اینک توصیف کردیم در اصول موضوعه ذکر شده کاملاً صدق می‌کند، گرچه جهانی را که در آن زندگی می‌کیم توصیف نمی‌کندا ریاضیات به عنوان یک دنیای زیبا صرفاً برای خودش وجود دارد بی‌آنکه کاربردی داشته باشد یا با سایر مفاهیم جهانی ارتباط داشته باشد.

گرچه هدف ما در این درس نشان دادن توسعی کاربردی ریاضیات است، اما باید خواننده این نکته را دریابد که برخی از شاخه‌های زیبای ریاضی *لزوماً* در مسیر کاربرد قرار ندارند. البته کسی نمی‌داند چه موقع این ریاضیات محض به کار خواهد رفت. این مورد برای مثال در مورد هندسه ناقلیدسی اتفاق افتاد. قسمت عمده هندسه ناقلیدسی توسط ریاضیدانان آلمانی برنهارد ریمان در اواسط قرن نوزدهم توسعه داده شد. در اوائل قرن بیستم آلبرت انیشتین دریافت که هندسه‌ای که برای توصیف فضای زمان نیاز دارد دقیقاً هندسه‌ای است که ریمان توصیف کرده است.

در هندسه فضای زمان، R^4 برای توصیف سه بعد مکان و یک بعد زمان به کار می‌رود. هندسه اقلیدسی برای تلفیق فضا و زمان، هندسه مناسبی نیست.

همچنین یادآوری می‌کنیم که ماتریس فضاهای ضرب داخلی و تابع فضاهای ضرب داخلی پیکرهای می‌ساوند که نظریه کوانتم مکانیک را بنا می‌نهند. کوانتم مکانیک یک مدل ریاضی است که در اوخر قرن بیستم توسط نیل بوهر، ماکس پلانک و ورنر هایزنبرگ برای توصیف رفتار اتم‌ها و الکترون‌ها توسعه داده شده است.

باید اذعان کنیم تئوری فضاهای ضرب داخلی، ستون‌های اصلی دو نظریه ارزنده فیزیک در قرن بیستم است. این نظریه‌ها تاثیری شگرف در زندگی ما دارند، مثلاً منجر به توسعه انرژی اتمی و سلاح اتمی شده‌اند.

۸-۸ نسبیت خاص

نسبیت خاص برای توصیف جهان فیزیکی اطراف ما توسط آلبرت انیشتین^۱ مطرح شد. در آن زمان مکانیک نیوتون برای حرکت اجسام به کار می‌رفت. با این حال آزمایش‌های مکرر نشان داد که در ابعاد بسیار بزرگ (۱) آلبرت انیشتین (۱۹۰۵-۱۸۷۹) یکی از بزرگترین دانشمندان تمام اعصار است. در زوریخ تحصیل کرد و در زوریخ، پراک، برلین و پرینسپتون درس داده. به خاطر تئوری‌های نسبیت معروف است که مفاهیم جدید علمی از زمان، فضا، ماده، حرکت و جاذبه را بیان می‌کند. جایزه نوبل را به خاطر اثر پدیده فتوالکتریک دریافت کرد. در زمان به کار آمدن هیتلر به آمریکا مهاجرت کرد، کشوری که اعتقاد داشت رژیم هیتلر باید با زور سرنگون شود. وی با مشارکت تلو و یگز نامه‌ای به روزولت نوشت که پروسه ساختن بمب اتمی را یاری می‌کرد. انیشتین موسیقی کلاسیک را به خوبی دریافت و با دیولنی می‌نوشت. وی گرچه مذهب رسمی نداشت، اما دارای طبیعتی مذهبی بود. وی هرگز باور نکرد که جهان یک پدیده تصادفی است.



نظیر حرکت سیارات، حرکت اشیاء توسط مکانیک نیوتونی از دقت کافی برخوردار نیست. یکی از هدایای نظریات اینشتین بر جهان علم، توسعه مدل‌های بسیار دقیق ریاضی بود.

وی ابتدا نظریه نسبیت خاص را مطرح کرد که جاذبه را در برنداشت، سپس جاذبه را در نظریه نسبیت عام به کار برد. در اینجا ما مدل‌های ریاضی نسبیت خاص را با توصیف نظریه و اینکه چگونه از ریاضیات الهام گرفته‌اند توضیح می‌دهیم.

نژدیکترین ستاره به کره زمین به جز خورشید، آلفا (قسطنطیوس آلفا) است که ۴ سال نوری با ما فاصله دارد. (یک سال نوری فاصله‌ای است که نور در مدت یکسال می‌پیماید، $10^{12} \times 5,88$ مایل)، یک جفت دوقلو را در نظر بگیرید که در یک زمان متولد می‌شوند یکی از دوقلوها در زمین باقی می‌ماند و دیگری بالفاصله پس از تولد توسط موشکی به طرف آلفا با $8/8$ سرعت نور پرتاب می‌شود و بالفاصله پس از رسیدن به آلفا با همان سرعت به طرف زمین برمی‌گردد. نظریه نسبیت خاص ادعا می‌کند دوقلویی که در کره زمین مانده است در این لحظه ۱۰ ساله شده است در حالی که دوقلویی که به آلفا رفته و بازگشته است بچه‌ای ۶ ساله می‌باشد. این پدیده را پدیده دوقلوها می‌نامند. بهوضوح پدیده رشد را در دوقلوها بیان می‌کند، این که یکی ۱۰ ساله و دیگری ۶ ساله می‌ماند. پدیده مشابه می‌تواند برای هر دو نفر رخ دهد که یکی در زمین می‌ماند و دیگری به ستاره‌های دور سفر می‌کند و برمی‌گردد. این اعداد بر حسب آنکه کجا و با چه سرعتی سفر می‌کند متفاوت است.

به عنوان مثال این پدیده برای فضانوردی که به کره ماه سفر می‌کند و بر می‌گردد به صورت کسری از زمان جوان‌تر از فردی که در زمین می‌ماند قابل محاسبه است. در ارتباط با نظریه نسبیت عددی برای تایید این پدیده که زمان ثبت شده در زمین با زمان ثبت شده با اشیاء متحرک نسبت به زمین، متفاوت است انجام یافته است. به یکی از این آزمایش‌ها که توسط پروفسور J.C. Hafele در دپارتمان فیزیک واشنگتن در ایالت سن‌لوییس و دکتر Richard E. Keatin در U.S. Naval observatory انجام یافته و در مجله Journal Science, Vol177, 1972 چاپ گردیده است اشاره می‌کنیم. در اکتبر ۱۹۷۱ چهار ساعت اتمی دوبار در یک فضایی‌پیمای جت آویخته شدند. تقارت انگکی بین زمان‌های ثبت شده این ساعتها و ساعت‌هایی که در زمین قرار داشتند ملاحظه شد. این اختلاف با نظریه نسبیت کاملاً تطبیق داشت. البته در آئینه‌ای نزدیک امکان ثبت این تفاوت برای مسافرت به آلفا امکان‌پذیر نیست، زیرا انژی لازم برای سفری با چنین سرعت برای موجودی زمینی امکان‌پذیر نیست. امکان تحقق این امر فقط از دیدگاه جامعه‌شناسی محتمل است. به عبارت نظری، فردی می‌تواند به سفری برود و در چنان سنی برگردد که بتواند با نوه خود همکلاس شود، هنگامی که از سفر برمی‌گردد!



اینک مدل ریاضی نظریه نسبیت را توضیح می‌دهیم.

نسبیت خاص دارای مدلی برای فضا-زمان و بنابراین شامل چهار مختصات: سه مختصات فضا (x_1, x_2 و x_3) و یک مختص زمان (x_4) است. از فضای برداری R^4 برای نمایش فضا-زمان استفاده می‌کنیم. ضرب‌های داخلی زیادی وجود دارند، که می‌توانیم در R^4 قرار دهیم و هر کدام به یک هندسه منجر می‌شوند. هیچ‌کدام از این ضرب‌های داخلی با نتایج آزمایش مورد نظر مطابقت ندارد. هرگاه چهارمین اصل موضوع ضرب داخلی را کنار بگذاریم، یک شبه ضرب داخلی به دست می‌وریم و این ضرب داخلی با نتایج هندسه مورد نظر ما تطابق خواهد داشت. این هندسه مختص نسبیت خاص، هندسه مینکوفسکی نامیده می‌شود که توسط هرمان مینکوفسکی^۱ برای اولین بار مطرح گردید و هندسه مینکوفسکی تبیین نسبیت خاص گردید.

فرض کنیم (x_4) $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ دو عضو دلخواه R^4 باشند. تابع $\langle X, Y \rangle$ ضرب داخلی این هندسه را تشکیل می‌دهد:

$$\langle X, Y \rangle = -x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 + x_4 y_4$$

البته $\langle X, Y \rangle$ به واقع یک ضرب داخلی نیست و علامات منفی اصل چهارم ضرب داخلی را نقض می‌کند. (به تمرین‌های بعدی توجه کنید)

این شبه ضرب داخلی برای تعریف نرم بردارها و فاصله نقاط به شکل زیر به کار می‌رود. به کاربرد قدر مطلق در این تعریف توجه کنید. مجاز بودن این تعاریف کاملاً محض و بسیار ساده است. این تعاریف دقیقاً همان جبرهایی هستند که برای توصیف فضا-زمان نیازمند هستیم!

$$|X| = \sqrt{|\langle X, X \rangle|}$$

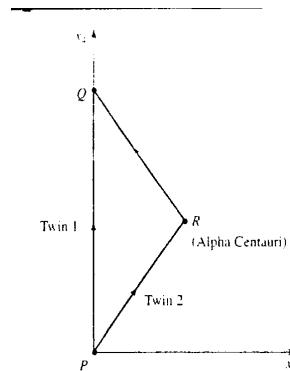
$$\begin{aligned} d(X, Y) &= \|X - Y\| = \|(x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, x_4 - y_4)\| \\ &= \sqrt{|(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2|} \end{aligned}$$

اینک ملاحظه می‌کنیم که چگونه این هندسه برای توصیف رفتار زمان برای سفر فضایی به ستاره آلفا به کار می‌رود. دیاگرام فضا-زمان را رسم می‌کنیم. برای سهولت، فرض می‌کنیم ستاره، آلفا در راستای محور x_1

^۱ هرمان مینکوفسکی (۱۸۶۴-۱۹۰۹) در کوینینگبورگ درس خواند و در بن، کوینینگبورگ، زوریخ و گوتینگن تدریس کرد. او به هندسه، نظریه اعداد و جبر علاقه‌مند بود. در اواخر عمر به نظریه نسبیت علاقه‌مند شد. نخستین کسی بود که تعبیر خاصی از اصول نسبیت به دست آورد که مفاهیم فضا-زمان را به طور مجزا به وسیله یک دستگاه چهار بعدی تبیین کرد. این تبیین کالبد، تحقیقات بعدی گردید و اینیشتین نظریه نسبیت عام را در این قالب توسعه داد.



زمین قرار دارد. دوقلوی زمینی در مسیر زمان، محور x_4 حرکت می‌کند در حالی که دوقلوی فضایی هم در محور زمان و هم در راستای صعودی محور x حرکت می‌کند در مسیر حرکت از مبدأ و در راستای کاهش محور x حرکت می‌کند در مسیر حرکت به سوی مبدأ دیاگرام فضا-زمان در شکل ۴-۸ نشان داده شده است. مسیر دوقلوی ۱، مسیر PQ است و مسیر دوقلوی ۲ یه سمت ستاره آلفا است و مسیر برگشت آن به زمین RQ است. هیچ حرکتی در محور x_2 یا x_3 وجود ندارد بنابراین این محورها را در دیاگرام حذف کرده‌ایم.



شکل ۴-۸

اینک به موقعیت‌ها از دیدگاه دوقلوها نگاه می‌کنیم.

دوکلوی ۱ : فاصله ستاره آلفا و برگشت از آن ستاره = ۸ سال نوری با سرعت فضایپما = $8,8^\circ$ سرعت

نور

بنابراین

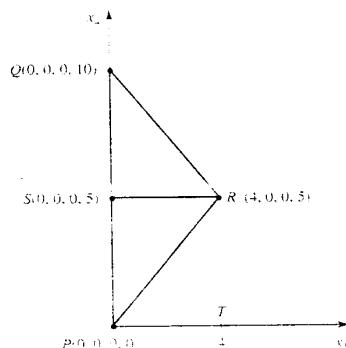
$$\text{سال } 10^\circ = \frac{8}{8,8} = \frac{\text{فاصله}}{\text{سرعت}} = \text{مسافت فضایپما نسبت به زمین}$$

از دیدگاه هندسی این طول برابر با PQ که 10° می‌باشد.

دوکلوی ۲ : در دیاگرام فوق مختصات را دقیقاً بررسی می‌کنیم.

به شکل ۵-۸ نگاه کنید. فرض کنید P مبدأ ($0, 0, 0, 0$) در R° باشد. چون $\angle QPR = 10^\circ$ نقطه Q , $PQ = 8$ می‌باشد و نقطه S ($0, 0, 0, 5$) می‌باشد.





شکل ۵-۸

PT فاصله فضایی ستاره آلفا از زمین است یعنی ۴ سال نوری. بنابراین R نقطه $(4, 0, 0, 5)$ است. اینک به کمک هندسه مینکوفسکی فاصله R و P را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} d(P, R) &= \|(4, 0, 0, 5) - (0, 0, 0, 0)\| \\ &= \sqrt{|-(4-0)^2 - (0-0)^2 - (0-0)^2 + (5-0)^2|} \\ &= \sqrt{|-16 + 25|} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

به روش مشابه در این هندسه

$$d(R, Q) = 3$$

محاسبات ریاضی در اینجا خاتمه یافته است. حال به جالب‌ترین قسمت یعنی ارتباط نتایج هندسی و موقعیت فیزیکی می‌پردازیم. عبارت زیر نتیجه منطقی نسبیت خاص است که مفاهیم هندسی فیزیکی زیر را در بردارد. فاصله بین دو نقطه از دیدگاه ناظری مانند دوقلوی ۲، در هندسه‌ی مینکوفسکی، متناظر است با زمان ثبت شده به وسیله‌ی ناظری که بین این دو نقطه سفر می‌کند.

بنابراین $d(R, P) = 3$ ایجاب می‌کند دوقلوی ۲ در سفری از P به R ، ۳ ساله باشد. به روش مشابه، $d(R, Q) = 3$ ایجاب می‌کند دوقلوی ۲ در سفری از R به Q ، ۳ ساله باشد، در سفر فضاییما مجموع زمان برای دوقلوی ۲، ۶ سال است.

در نتیجه وقتی دوقلوها هم‌دیگر را در نقطه Q ملاقات می‌کنند، دوقلوی ۱، ۱۰ ساله و دوقلوی ۲، ۶ ساله است.

توجه داشته باشید که این مدل هندسه جدیدی را معرفی می‌کند که در آن خط مستقیم کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه نمی‌باشد. در شکل ۵-۸ فاصله خط مستقیم PQ از P به Q ۱۰ می‌باشد،



در حالی که فاصله $PR + RQ$ از P به Q ، فاصله کوتاه‌تر است. بنابراین تعبیر فیزیکی مدل‌ها نه تنها مسحور‌کننده است، بلکه مزه‌های جدیدی از تفکر هندسی را بر مامی‌گشاید. این مشال انعطاف‌پذیری ریاضیات را در مسائل کاربردی نشان می‌دهد. هرگاه بدنه استاندارد ریاضیات (اصول موضوع ضرب داخلی در این مورد) با موقعیت خاصی سازگار نباشد، دوباره سازی آنکه ممکن است کارساز باشد. ریاضیدانان برای موقعیت‌های مورد نیاز ریاضیات را مدل‌سازی و توسعه می‌دهند.

ریاضیات یک علم خشک و مطلق همچنانکه غالباً فرض می‌شود، نمی‌باشد؛ بلکه حیطه‌ای است که منحصرًا توسعه می‌یابد و در پیکره‌ای که در اینجا ارائه کردیم اعمال می‌گردد.

۱-۸-۸ تمرین

(۱) R^* را با ضرب داخلی مثل ۱، در بخش قبیل در نظر بگیرید.

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + 4 x_2 y_2$$

معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ و به شعاع ۱ را بیابید. این دایره را رسم کنید.

(۲) R^* را با ضرب داخلی

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 4 x_1 y_1 + 9 x_2 y_2$$

الف) نرم بردارهای زیر را به دست آورید؟

$$(1, 0, 0, 1)(1, 1)(2, 3)$$

ب) ثابت کنید بردارهای $(2, 1)$ و $(-9, 8)$ متعامد هستند این بردارها را رسم کنید. نشان دهید

این بردارها در فضای اقلیدسی متعامد نیستند.

ج) فاصله نقاط $(1, 0)$ و $(0, 1)$ را در این فضا بیابید.

د) معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۱ را در این فضا بیابید. این دایره را رسم کنید.

(۳) R^* را با ضرب داخلی

$$\langle x_1, x_2 \rangle, (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + 16 x_2 y_2$$

در نظر می‌گیریم.



- الف) نرم بردارهای $(1, 0)$, $(0, 1)$ و $(1, 1)$ را در این فضا بیابید.
- ب) نشان دهید بردارهای $(1, 1)$ و $(-16, 1)$ متعامدند.
- ج) فاصله نقاط $(5, 0)$ و $(0, 4)$ را هم در این فضا و هم در فضای اقلیدسی بیابید.
- د) فاصله نقاط $(5, 0)$ و $(4, 0)$ را هم در این فضا و هم در فضای اقلیدسی بیابید.
- ه) معادله دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع ۱ را در این فضا بیابید. این دایره را رسم کنید.
- ۴) ضرب داخلی‌ای را بیابید که باید در R^2 جایگزین شود تا معادله‌ای به مرکز مبدا و شعاع ۱ $\frac{x}{4} + \frac{y}{25} = 1$ گردد.
- ۵) ثابت کنید شبه ضرب داخلی هندسه مینکوفسکی اصل چهارم ضرب داخلی را نقض می‌کند (راهنمایی). عضو ناصرف X از R^3 را چنان بیابید که $\langle X, Y \rangle = 0$.
- ۶) با استفاده از تعریف فاصله دو نقطه در فضای مینکوفسکی فاصله نقاط R و Q را در شکل ۵-۸ در ۳ بیابید.
- ۷) در هندسه مینکوفسکی فاصله نقاط $P(0, 0, 0)$ و $M(0, 0, 0)$ را بیابید. این مثال واقعیت جالب دیگری را در این هندسه آشکار می‌کند، اینکه نقاط غیرمنطبق می‌توانند فاصله صفر داشته باشند. نظریه نسبیت خاص تعبیری فیزیکی دارد که در آن خط PM دارای نقطی است که همگی با هم فاصله صفر دارند؛ این خط مسیر یک فوتون یا یک ذره نوری است.
- ۸) ثابت کنید بردارهای $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ و $(0, 0, 1)$ در هندسه مینکوفسکی متعامدند. این بردارها را رسم کرده و ملاحظه کنید که نسبت به بردار $(1, 0, 0)$ متقارنند. هر زوجی از بردارها که نسبت به بردار $(1, 0, 0)$ این چنین متقارن باشند، در هندسه مینکوفسکی متعامدند. این نتیجه را با نشان دادن تعامد بردارهای $(a, 0, 0)$ و $(0, b, 0)$ اثبات کنید.
- ۹) معادله دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع‌های ۲ و ۳ در صفحه x_1x_2 را در فضای مینکوفسکی به دست آورید. این دایره را رسم کنید.
- ۱۰) ستاره سیروس ۸ سال نوری از زمین فاصله دارد. بعد از خورشید ستاره سیروس نزدیکترین ستاره به زمین است که از قسمت‌های شمالی امریکا با چشم غیرمسلح قابل رویت است این ستاره پرنورترین ستاره قابل رویت است، نور خورشید در مدت ۸ دقیقه به زمین می‌رسد، در حالی که از ستاره سیروس در مدت ۸ سال نور به ما می‌رسد. فرض کنید یک فضایپما که ستاره سیروس را ترک کرده



است، پس از ۲ سال به زمین برسد. زمان سفر برای فردی که در فضایپما قرار دارد چقدر طول می‌کشد؟ سرعت فضایپما چقدر خواهد بود.

(۱۱) یک فضایپما سفری رفت و برگشتی به ستاره درخشنان کاپلا انجام می‌دهد که ۴۵ سال نوری از زمین فاصله دارد. اگر مدت سفر نسبت به زمین ۱۲۰ سال باشد، مدت زمان سفر از دیدگاه فضانورد داخل فضایپما چقدر خواهد بود.

(۱۲) ستاره خوشهپروین در صورت فلکی گاوگردن، ۱۴۰ سال نوری از زمین فاصله دارد. فضانوردی که در مسافت دو طرفه به ستاره خوشهپروین پس از برگشت ۴۰ ساله خواهد بود، از دیدگاهی زمینی این سفر چند قرن طول خواهد کشید؟

(۱۳) ستاره خوشه Praesepe در صورت فلکی سلطان ۵۱۵ سال نوری از زمین فاصله دارد. فضانوردی مسافرتی رفت و برگشتی از زمین به ستاره خوشه Praesepe با سرعت معادل ۹۹۹۹۹،۰ سرعت نور انجام می‌دهد. مدت سفر از دیدگاه فضانورد و از دیدگاه ناظر زمینی چقدر است؟

۹-۸ تقریب توابع و تئوری کدنگاری

مسائل متعددی در غلومن فیزیک و مهندسی با تقریب توابع بهوسیله چندجمله‌ها یا تابع مثلثاتی درگیر است. به عنوان مثال شاید ضروری باشد $f(x) = e^x$ را بهوسیله تابع خطی به شکل $g(x) = a + bx$ روی بازه $[0, \pi]$ یا تابع مثلثاتی به شکل $h(x) = a + b \sin(x) + c \cos(x)$ روی بازه $[-\pi, \pi]$ تقریب کنیم. به علاوه مسئله تقریب توابع بهوسیله چندجمله‌ای‌ها یک مسئله کلیدی برای توسعه نرم‌افزاری در علوم کامپیوتر است، زیرا کامپیوتراها ذاتاً برای کار با چندجمله‌ای‌ها طراحی شده‌اند و نه بیشتر. اینک روش‌های تقریب توابع را معرفی می‌کنیم.

فرض کنیم $c[a, b]$ فضای ضرب داخلی تابع پیوسته روی بازه $[a, b]$ با ضرب داخلی $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ و هندسه تعريف شده به کمک این ضرب داخلی باشد، فرض کنید W زیرفضای $c[a, b]$ باشد. همچنین f در $c[a, b]$ و خارج W باشد. می‌خواهیم بهترین تقریب f را در W به دست آوریم. بهترین تقریب، تابع g در w است به طوری که فاصله $\|f - g\|$ بین f و g مینیمم باشد.

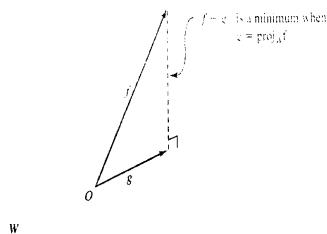


تعریف. فرض کنید $c[a, b]$ فضای برداری توابع پیوسته روی بازه $[a, b]$ باشد. f را عضو $c[a, b]$ و W را زیرفضای $c[a, b]$ در نظر بگیرید. تابع g در W به طوری که $\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx$ مینیمم گردد، تقریب کمترین مربعات f نامیده می‌شود.

این تقریب، تقریب کمترین مربعات نامیده می‌شود. زیرا فرمول فاصله براساس مربع فواصل تعریف شده است.

اینک روش پیدا کردن تقریب کمترین مربعات یعنی (x) g را به دست می‌آوریم. اینک می‌توانیم به عقب برگردیم و از فرایند توسعه ساختارهای هندسی و نتایج بیشتر بهره ببریم! قبلًا چنین موقعیتی را در R^n داشتیم، بنا به تجرب بخش ۵-۷، هرگاه W زیرفضای از R^n باشد و x نقطه‌ای در R^n باشد، نزدیک‌ترین عضو w به $\text{proj}_w x$ است. این نتیجه گرچه در یک فضای هندسی اخذ شده است، با این حال در فضای توابع نیز به کمک ضرب داخلی قابل توسعه است.

بسیار مفید است هرگاه تابع را به عنوان بردارهای هندسی تصویر کنیم. به شکل ۶-۸ نگاه کنید.



شکل ۶-۸: تقریب کمترین مربعات f در زیرفضای W عبارت است از $\text{proj}_w f = \langle f, g \rangle g$

اینک مجدداً می‌توانیم نتایج هندسی را برای محاسبه $\text{proj}_w f$ به کار ببریم. فرض کنید (g_1, \dots, g_n) یک پایه متعامد یکانی برای W باشد. بنا به نتایج بخش ۵-۷

$$\text{proj}_w f = \langle f, g_1 \rangle g_1 + \dots + \langle f, g_n \rangle g_n$$

مثال ۱: تقریب کمترین مربعات خطی تابع $f(x) = e^x$ را در بازه $[-1, 1]$ به دست آورید.

حل: فرض کنیم $g(x) = a + bx$ تقریب خطی باشد، همچنین f عضوی از $[-1, 1]$ و g عضوی از زیرفضای P_1 باشد، یعنی چندجمله‌ای‌های از درجه کمتر یا مساوی یک روی $[-1, 1]$. مجموعه



پایه‌ای برای $P_1[-1, 1]$ است. داریم:

$$\langle 1, x \rangle = \int_{-1}^1 (1 \cdot x) dx = 0$$

بنابراین توابع متعامدند. طول این بردارها

$$\|1\|^2 = \int_{-1}^1 (1 \cdot 1) dx = 2 \quad , \quad \|x\|^2 = \int_{-1}^1 (x \cdot x) dx = \frac{2}{3}$$

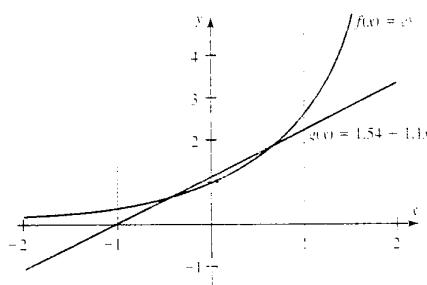
بنابراین مجموعه $\{\sqrt{\frac{1}{2}}x\}$ یک پایه متعامد یکانی برای $P_1[-1, 1]$ است. حال داریم

$$\begin{aligned} \text{proj}_w f &= \langle f, g \rangle g + \langle f, g_1 \rangle g_1 \\ &= \int_{-1}^1 (e^x \sqrt{\frac{1}{2}}) dx \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_{-1}^1 (e^x \sqrt{\frac{3}{2}}x) dx \sqrt{\frac{3}{2}}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e - e^{-1}) + 2e^{-1}x \end{aligned}$$

یعنی تقریب کمترین مربعات تابع $f(x) = e^x$ در بازه $[-1, 1]$ عبارت است از:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e + e^{-1}) + 2e^{-1}x + 2e^{-1}x$$

و این مقدار $g(x) = 1.54 + 1.1x$ را تا دو رقم اعشاری به دست می‌دهد. به شکل ۷-۸ نگاه کنید.



شکل ۷-۸

در مثال اخیر تقریب خطی f را در $P_1[-1, 1]$ به دست آوریم. تقریب‌های از درجات بالاتر چندجمله‌ای‌ها را می‌توان در فضای $P_n[-1, 1]$ با چندجمله‌ای‌هایی از درجه کوچکتر با مساوی n به دست آورد. برای به دست آوردن چنین تقریبی می‌بایست یک پایه متعامد در $P_n[-1, 1]$ به کمک متعامدسازی گرام‌اشمیت ساخته شود. توابع متعامدی که به این ترتیب به دست می‌آیند چندجمله‌ای‌های لزاندر نامیده می‌شوند.



نخستیم شش چندجمله‌ای لزاندر عبارتند از:

$$1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x, x^4 + \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}, x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x$$

اینک به تقریب توابع به کمک توابع مئلثاتی می‌پردازیم. چنین تقریبی به طور گسترشده در هدایت حرارتی، الکترومغناطیس، جریان‌های الکتریکی و ارتعاش‌های مکانیکی به کار می‌رود. اولین قدم در این زمینه توسط ریاضیدانان فرانسوی Jean Baptiste Fourier^۱ برداشته شد که روش‌هایی را برای آنالیز هدایت در یک بار ایزوله شده توسعه داد. تقریب‌ها غالباً برای حل معادلات با مشتقات جزئی به کار می‌رود که موقعیت‌های فیزیکی این پدیده‌ها را توصیف می‌کنند.

۱۰-۸ تقریب‌های فوریه

فرض کنید f یک تابع در $c[-\pi, \pi]$ با ضرب داخلی $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ و هندسه متناظر این ضرب داخلی باشد. اجازه دهید تقریب کمترین مربعات f را در فضای $T[-\pi, \pi]$ ، مشکل از چندجمله‌ای‌های مئلثاتی تولید شده به وسیله مجموعه

$$[1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx]$$

که در آن n یک عدد صحیح مثبت است، به دست آوریم. می‌توان نشان داد بردارهای $1, \cos x, \sin x, \cos nx, \sin nx, \dots$ دو به دو در این فضا متعامندند. (به ترتیب‌های بعدی نگاه کنید) طول این بردارها

$$\begin{aligned}\|1\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (1 \cdot 1) dx = 2\pi \\ \|\cos nx\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx \cdot \cos nx) dx - \pi \\ \|\sin nx\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx \cdot \sin nx) dx = \pi\end{aligned}$$

بنابراین مجموعه‌های زیر یک پایه متعامد یکانی برای $T[-\pi, \pi]$ تشکیل می‌دهند.

$$\{g_0, \dots, g_{2n}\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right\}$$

(۱) Jean Baptiste Fourier (۱۷۶۸-۱۸۳۰) در کردکی والدین خود را از دست داد. در یک مدرسه نظامی ثبت نام کرد. که اشتیاق وی را برای ریاضیات برازگشت. در انقلاب فرانسه به خاطر دفاع از قربانیان تبور به زندان افتاد. سپس یک پست دپلماتیک در زمان ناپلئون در مصر و فرانسه گرفت که او را یک بارون و یک کنت کرد. فوریه به خاطر توسعه روش‌های ریاضی که در توصیف انتشار حرارت به کار برده است مشهور گردید.



از این پایه متعامد یکانی در فرمول زیر برای پیدا کردن تقریب کمترین مربعات g برای f استفاده می‌کنیم

$$g(x) = \text{proj}_T f = \langle f, g_0 \rangle g_0 + \dots + \langle f, g_{1n} \rangle g_{1n}$$

داریم

$$\begin{aligned} g(x) &= \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x + \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x \\ &\quad + \dots + \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx + \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \end{aligned}$$

نمادهای زیر را برای ساده نگاری تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} a_0 &= \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \right) dx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \right) dx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \end{aligned}$$

تعریف. تقریب مثلثاتی تابع $f(x)$ به صورت

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

نوشته می‌شود، که $f(x)$ را تقریب فوریه مرتبه n می‌نامند. ضرایب $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ و b_1, b_2, \dots, b_n فوریه نامیده می‌شوند. با افزایش n ، به طور صعودی تقریب بهتر می‌شود و به این ترتیب $\|f - g\|$ کوچکتر می‌شود. مجموع نامتناهی

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

سری فوریه f در باره $(-\pi, \pi)$ نامیده می‌شود.



مثال ۲: تقریب فوریه مرتبه چهارم تابع $f(x) = e^x$ را در بازه $[-\pi, \pi]$ به دست آورید.

حل: با بهکارگیری ضرایب فوریه برای تابع $f(x) = x$ و انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) \cos kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x \cos kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{k} \sin kx + \frac{1}{k} \cos kx \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) \sin kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{k} \cos kx + \frac{1}{k} \sin kx \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \end{aligned}$$

تقریب فوریه f عبارت است از:

$$g(x) = \sum_{k=1}^n \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$$

و با قرار دادن $k = 1, \dots, 4$ تقریب مرتبه چهارم را به دست می‌آوریم.

$$g(x) = 2(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x)$$

تا به حال در این کتاب به فضاهای برداری حقیقی پرداخته‌ایم که در آن اسکالرها اعداد حقیقی بودند. گاهی نیز به فضاهای برداری مختلط اشاره کردیم که اسکالرها اعداد مختلط بودند. پر واضح است که این بحث خالی از لطف خواهد بود اگر به فضاهای برداری اشاره نکنیم که در آن اسکالرها نه اعداد حقیقی و نه اعداد مختلط هستند. به علاوه این مثال از این نظر جالب خواهد بود که تنها تعداد متناهی بردار در این فضا وجود دارد.

۱۱-۸ نظریه کدنگاری

پیام‌ها به صورت الکترونیکی به شکل دنباله‌ای از صفرها و یک‌ها فرستاده می‌شود. انتباها در ارسال پیام در صورت تداخل و اعوجاج می‌تواند رخ دهد. مثلاً پیام $(1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0)$ می‌تواند به صورت



(۱،۰،۰،۱،۰،۰) دریافت شود که یک اشتباه در درایه پنجم رخ داده است. می خواهیم روش هایی را بررسی کنیم که چنین اشتباهاتی را اصلاح کند.

اسکالارهای یک میدان برداری می تواند مجموعه ای به جزء اعداد صحیح و مختلط باشد. کافی است این اسکالارها یک میدان جبری بسازد. یک میدان مجموعه ای از اشیاء است که دارای دو عمل می باشد که در اصولی خاص صدق کند. دانشجویانی که در جبر مدرن درسی گذارنده باشند با مفهوم میدان آشنا هستند. در این مثال میدان $\{0, 1\}$ را عضو با اعمال جمع و ضرب زیر به کار می بریم:

$$\begin{array}{cccccc} 0 + 0 = 0 & 0 + 1 = 1 & 1 + 0 = 1 & 1 + 1 = 0 \\ 0 \cdot 0 = 0 & 0 \cdot 1 = 0 & 1 \cdot 0 = 0 & 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$$

V_7 را فضای برداری ۷-تایی های متشکل از 0 و 1 روی این میدان از اسکالارها در نظر می گیریم. که جمع و ضرب اسکالار به روش معمولی مؤلفهوار تعریف شده باشد. مثلاً

$$\begin{aligned} (1, 0, 0, 1, 1, 0, 1) + (0, 1, 1, 1, 0, 0, 1) &= (1 + 0, 0 + 1, 1 + 1, 1 + 0, 0 + 0, 1 + 1) \\ &= (1, 1, 1, 0, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0(1, 0, 0, 1, 1, 0, 1) &= (0 \cdot 1, 0 \cdot 0, 0 \cdot 0, 0 \cdot 1, 0 \cdot 1, 0 \cdot 0, 0 \cdot 1) \\ &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1(1, 0, 0, 1, 1, 0, 1) &= (1 \cdot 1, 1 \cdot 0, 1 \cdot 0, 1 \cdot 1, 1 \cdot 1, 1 \cdot 0, 1 \cdot 1) \\ &= (1, 0, 0, 1, 1, 0, 1) \end{aligned}$$

از آنجایی که هر بردار در V_7 دارای هفت مؤلفه است، و هر یک از این مؤلفه ها 0 و 1 است، 2^7 بردار در این فضا وجود دارد. زیرفضای برداری چهار بعدی V_7 دارای پایه

$$\{(1, 0, 0, 0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)\}$$

می باشد که کد هامینگ نامیده می شود و با $C_{7,4}$ نشان داده می شود. بردارهای $C_{7,4}$ به عنوان یک پیام به کار می روند. هر بردار در $C_{7,4}$ به صورت زیر نوشته می شود:

$$v_1 = a_1(1, 0, 0, 0, 0, 1, 1) + a_2(0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$$



$$+ a_2(0, 0, 1, 0, 1, 1, 0) + a_4(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$$

از آنجایی که هر یک از چهار اسکالر a_1, a_2, a_3 و a_4 می‌تواند بکی از مقادیر 0 یا 1 باشد، $-2^4 = 16$ – بردار در $C_{7,4}$ داریم. کدهامینگ برای ارسال 16 کد متفاوت v_1, \dots, v_{16} می‌تواند بهکار رود. از شما در تمرین‌های بعدی خواسته شده است، این بردارها را بنویسید.

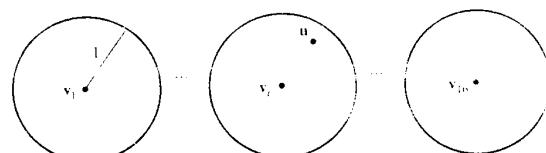
هنگامی که در یکی از مکان‌های پیام‌های ارسالی اشتباهی رخ دهد، برداری نادرست در V_7 و در خارج زیرفضای $C_{7,4}$ خواهد بود. می‌توان ثابت کرد دقیقاً یک بردار در $C_{7,4}$ وجود دارد که با این بردار نادرست در یک مکان نقاوت دارد. بنابراین این اشتباه قابل تشخیص و اصلاح است. مثلاً فرض کنیم بردار دریافت شده $(1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$ باشد. این بردار نمی‌تواند به صورت ترکیب خطی از بردارهای پایه فوق نوشته شود، و در $C_{7,4}$ قرار ندارد. تنها یک بردار در $C_{7,4}$ قرار دارد که با این بردار در یک دایره متفاوت است و این بردار $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$ است. پیام صحیح در واقع $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$ است.

کدهامینگ، کد اصلاح‌کننده خطأ نامیده می‌شود، زیرا معین‌کننده خطأ و اصلاح‌کننده خطأ است. اینک هندسه پایه این کد را بررسی می‌کنیم. فاصله بین دو بردار u و v از V_7 که با $d(u, v)$ نشان داده می‌شود، تعداد مؤلفه‌های متفاوت u و v تعريف می‌شود. مثلاً

$$d((1, 0, 0, 1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0, 1, 1, 1)) = 3$$

زیرا مؤلفه‌های دوم، چهارم و پنجم این بردارها متفاوتند. کره‌ای به شعاع 1 در حومه برداری در V_7 شامل تمام بردارهایی است که در یک مؤلفه از این بردار قرار دارند. می‌توان نشان داد که کره‌هایی به شعاع 1 و به مرکز بردارهای $C_{7,4}$ ، متمایز و مجزا بوده و هر عضو V_7 در یکی از این کره‌ها قرار دارد.

به شکل ۸-۸ نگاه کنید. بنابراین اگر برداری مانند u دریافت شود و از $C_{7,4}$ نباشد، در یک کره منفرد به مرکز v ، که همان پیام صحیح است، قرار دارد. عملاً مدارهای الکتریکی موسوم به گیت برای کنترل اینکه پیام دریافتی در $C_{7,4}$ قرار دارد بهکار می‌رود و در صورتی که در $C_{7,4}$ نباشد، برای معین کردن مرکز این کره و دریافت پیام صحیح بهکار می‌رودند.



شکل ۸-۸: کد هامینگ $\{v_1, \dots, v_n\}$, پیام نادرست u و پیام صحیح v

کدهای اصلاح‌کننده خطای دیگر نیز وجود دارند. کد گولای مثالی دیگر از زیرفضای V_{22}^{12} -بعدی $C_{22,12}$ نشان داده می‌شود. فضای کد دارای 2^{12} عضو، برای معرفی 4096 پیام می‌باشد. این کد می‌تواند خطاهایی را آشکار و اصلاح کند که در یک، دو یا سه مکان قرار دارند. می‌توان نشان داد که کره‌های به شعاع 3 ، به مرکز بردارهای $C_{22,12}$ ، مجزا بوده و هر عضو V_{22}^{12} در کره‌ای به مرکز این کره‌ها قرار دارند. هرگاه پیام دریافتی u ، دارای خطای در یک، دو یا سه مکان باشد، در کره‌ای به مرکز v_i بوده و v_i می‌تواند باز پس گرفته شود.

برای مطالعه بیشتر به مرجع [۱] مراجعه کنید.

۱-۱۱-۸ تمرین

تقریب کمترین مربعات در تمرین‌های ۱-۴ تقریب کمترین مربعات خطی $g(x) = bx + c$ را برای تابع‌های زیر در بازه داده شده بیابید.

$$[-1, 1] \text{ روی } f(x) = x^3 \quad (1)$$

$$[0, 1] \text{ روی } f(x) = e^x \quad (2)$$

$$[0, 1] \text{ روی } f(x) = \sqrt{x} \quad (3)$$

$$[0, \pi] \text{ روی } f(x) = \cos x \quad (4)$$

در تمرین‌های ۵-۸ تقریب کمترین مربعات درجه 2 ، $g(x) = ax^2 + bx + cx^3$ ، برای تابع داده شده در بازه‌های داده شده را بیابید.

$$[0, 1] \text{ روی (الف) } f(x) = e^x \quad (5)$$

$$[0, 1] \text{ روی } f(x) = \sqrt{x} \quad (6)$$

$$[0, 1] \text{ روی } f(x) = x^3 \quad (7)$$

$$[0, \pi] \text{ روی } f(x) = \sin x \quad (8)$$

در تمرین‌های ۹-۱۱ تقریب فوریه مرتبه چهارم تابع داده شده روی بازه‌های داده شده را بیابید.

$$[0, 2\pi] \text{ روی } f(x) = x \quad (9)$$

$$[-\pi, \pi] \text{ روی } f(x) = 1 + x \quad (10)$$



$$f(x) = x^2 \text{ روی } [0, 2\pi] \quad (11)$$

۱۲) نشان دهید بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ در فضای \mathbb{R}^n دو به دو متعامدند.

۱۳) کلیه بردارهای کد هامینگ $C_{7,4}$ را بنویسید.

۱۴) کلیه بردارهای V_7 را که در کره های به شعاع ۱ و مرکز زیر قرار دارند، بنویسید.

(الف) (۰, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰)

(ب) (۱, ۱, ۰, ۱, ۰, ۰)

(ج) (۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱)

(د) (۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰)

۱۵) پیام های زیر با به کار گیری کد هامینگ دریافت شده است. پیام های صحیح را در هر مورد بیابید.

(الف) (۰, ۰, ۰, ۰, ۱, ۰, ۰)

(ب) (۰, ۱, ۱, ۱, ۰, ۰, ۱)

(ج) (۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰)

(د) (۱, ۰, ۱, ۱, ۰, ۱, ۰)

۱۶) در فضای برداری V_{22} و زیرفضای کد گولیا $C_{22,12}$ ثابت کنید:

(الف) ۲۲۳) بردار در V_{22} قرار دارد.

(ب) ۴۰۹۶) بردار در $C_{22,12}$ قرار دارد.

(ج) ۲۰۴۸) بردار در هر کره به شعاع ۳ و مرکز برداری از $C_{22,12}$ قرار دارد (با ازای هر عضو V_{22}

یک کره وجود دارد). چند بردار به فاصله ۱، ۲ و ۳ در هر کره به شعاع ۳ وجود دارد؟

۱۲-۸ منحنی کمترین مربعات

این بخش احتمالاً جذاب ترین قسمت این کتاب است! ریاضیات را به بهترین نحو تصویر می‌کند. اخیراً نتایج نظری به زیباترین شکل به ابزاری قوی برای محاسبات منجر گردیده‌اند. در این قسمت روش یافتن



یک چندجمله‌ای که نقاط داده شده را به بهترین نحو برازنده کند، را ارائه می‌دهیم، روشی که به طور عمیق در علوم طبیعی، علوم اجتماعی و مهندسی به کار می‌رود.

قبلًاً ملاحظه کردہ ایم که دستگاه n -معادلات n متغیره $AX = Y$ ، که A یک ماتریس نامنفرد است، دارای جواب متحصر بفرد $X = A^{-1}Y$ است. با این حال اگر $AX = Y$ دستگاه m -معادلات m متغیره باشد که $m > n$ ، در حالت کلی این دستگاه جواب ندارد و این دستگاه را فوق معین می‌نامند. برای چنین دستگاهی ماتریس مرتع نیست و A^{-1} موجود نیست. بزودی ماتریسی موسوم به شبیه معکوس برای A که با $\text{pinv}(A)$ نشان داده می‌شود را معرفی می‌کنیم؛ این ماتریس برای کمترین مربعات حل $X = \text{pinv}(Y)$ دستگاه فوق معین به کار می‌رود.

البته این یک حل واقعی نیست، اما از دیدگاهی نزدیک‌ترین حل برای این دستگاه است. کاربردی از دستگاه‌های فوق معین را برای یافتن خم‌هایی که بهترین برازنگی را برای داده‌ها به دست می‌دهند نشان می‌دهیم.

تعریف. فرض کنید A یک ماتریس باشد. ماتریس $A^t A^{-1} A^t$ ، شبیه معکوس A نامیده می‌شود و با نماد $\text{pinv}(A)$ نشان داده می‌شود.

قبلًاً دیدیم که تمامی ماتریس‌ها معکوس ندارند. مشابهًا تمام ماتریس‌ها لزوماً شبیه معکوس ندارند. ماتریس A دارای شبیه معکوس است هرگاه $(A^t A)^{-1}$ موجود باشد.

$$\text{مثال ۱: شبیه معکس ماتریس } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ را به دست آورید.}$$

حل: مرحله به مرحله شبیه معکوس ماتریس A را حساب می‌کنیم

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 29 \end{bmatrix}$$

$$(A^t A)^{-1} = \frac{1}{|A^t A|} \text{adj}(A^t A) = \frac{1}{125} \begin{bmatrix} 29 & -7 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{pinv}(A) = (A^t A)^{-1} A^t = \frac{1}{125} \begin{bmatrix} 29 & -7 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 3 & -10 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$



اینک از مفهوم شبه معکوس در دستگاه معادلات خطی استفاده می‌کنیم. فرض کنید $AX = Y$ دستگاهی از n -معادله‌ی خطی از m متغیر با $m > n$ باشد، که از رتبه m است. طرفین تساوی را در A^t ضرب می‌کنیم و داریم

$$A^t A x = A^t y$$

ماتریس $A^t A$ برای این دستگاه معکوس پذیر بوده و با ضرب طرفین تساوی در $(A^t A)^{-1}$ داریم:

$$x = [(A^t A)^{-1} A^t] y$$

$$= \text{pinv}(A) y$$

مقدار به دست آمده x ، حل کمترین مربعات دستگاه معادلات نامیده می‌شود.

$$\begin{array}{ll} Ax = y & x = \text{pinv}(A) y \\ \text{دستگاه} & \text{دستگاه، کمترین مربعات} \end{array}$$

فرض کنیم $Ax = y$ دستگاه n -معادله m متغیره با $m > n$ باشد که A از رتبه m است. این دستگاه دارای جواب کمترین مربعات می‌باشد. اگر دستگاه دارای جواب منحصر به‌فردی باشد، جواب کمترین مربعات جواب منحصر به‌فرد است. اگر دستگاه فوق معین باشد، جواب کمترین مربعات نزدیکترین جواب به حل حقیقی است. دستگاه نمی‌تواند جواب‌های متفاوتی داشته باشد.

مثال ۲: حل کمترین مربعات دستگاه فوق معین زیر را به دست آورید. جواب را کنترل کنید.

$$x + y = 6$$

$$-x + y = 3$$

$$2x + 3y = 9$$

حل: ماتریس ضرایب عبارت است از:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$



بردارهای ستونی A مستقل خطی‌اند. بنابراین رتبه این ماتریس ۲ است. این دستگاه دارای جواب کمترین مربعات است. $\text{pinv}(A)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$$

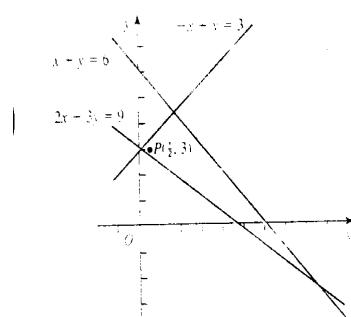
$$(A^t A)^{-1} = \frac{1}{|A^t A|} \text{adj}(A^t A) = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\text{pinv}(A) = (A^t A)^{-1} A^t = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 11 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 5 & -17 & 4 \\ 0 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

جواب کمترین مربعات عبارت است از:

$$\text{pinv}(A)y = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 5 & -17 & 4 \\ 0 & 12 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

حل کمترین مربعات، نقطه $(\frac{1}{2}, 3)$ است که در شکل ۹-۸ نشان داده شده است.



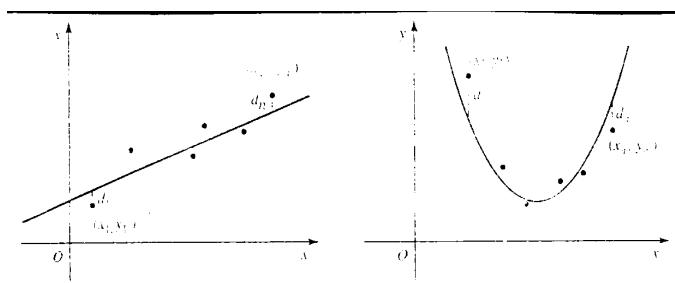
شکل ۹-۸

اکنون به بحث می‌پردازیم که جواب کمترین مربعات را چگونه می‌توان برای پیدا کردن منحنی‌های اعمال کرد که برای داده‌هایی دلخواه برآورده‌اند.



۱۳-۸ منحنی‌های کمترین مربعات

شاخه‌های بسیاری از علوم و تجارت از معادلاتی استفاده می‌کنند. که براساس اطلاعات نتایج عملی حاصل شده است. در بخش ۳-۱ مسئله یافتن چندجمله‌ای منحصر به فرد درجه ۲ ای که از سه نقطه داده شده می‌گذرد را بررسی کردیم. در کاربردهای زیادی اطلاعات بیشتری وجود دارد که به معادله‌ای که تمام داده‌ها را بازش می‌کند به کار می‌رود. می‌توان معادله‌ای از خط یا منحی به کار برد که از دیدگاهی بهترین بازش برای داده‌های دلخواه باشد. مثلاً فرض کنید داده‌ها نقاط $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ باشند، که در شکل ۱۰-۸ (الف) نشان داده شده است. به طور تقریبی این نقاط در یک خط قرار دارند. می‌خواهیم معادله‌ی خطی را که این نقاط را که به بهترین وجه بازش کند بیابیم. از طرفی این نقاط به یک سهمی نزدیک هستند، همان‌طور که در شکل ۱۰-۸ (ب) دیده می‌شود. می‌خواهیم نزدیکترین سهمی ب این نقاط را بیابیم. شیوه‌های متفاوتی برای بهترین بازش در چنین مواردی وجود دارد. معمول‌ترین آنها که در علم آمار به کار می‌رود منحنی یا خط کمترین مربعات نامیده می‌شود که با حل دستگاه معادلات فوق معین به دست می‌آید. خط و منحنی کمترین مربعات چنان است که $d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2$ در شکل ۱۰-۸، مینیمم گردد. در بخش قبل تقریب کمترین مربعات توابع را بحث کردیم. این مبحث تحلیل گسسته چنین مسئله‌ای است. در مورد توابع بایستی منحنی خاص را بیابیم که بهترین بازش دسته پیوسته از نقاط داده شده در بازه دلخواهی باشد (گراف یک تابع)، در اینجا می‌خواهیم بهترین بازش برای رده گسسته از نقاط داده شده روی بازه‌ای را به دست آوریم. گرچه شیوه‌های به کار رفته برای رسیدن به نتایج متفاوت است، با این حال بهتر است به مشابهت‌های خاص بین این موقعیت توجه کنیم. در هر دو موقعیت بهترین نتیجه با مینیمم کردن مربع‌های خاص به دست می‌آید و در نتیجه از واژه «کمترین مربعات» استفاده می‌کنیم.



شکل ۱۰-۸: مینیمم خط یا منحنی کمترین مربعات $d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2$



اینک نحوه برازش چندجمله‌ای کمترین مربعات داده‌های دلخواهی را بیان می‌کنیم. این شیوه متضمن ساختن دستگاهی از معادلات خطی است. جواب کمترین مربعات این دستگاه معادلات ضرایب چندجمله‌ای را به دست می‌دهد. پس از حصول نتایج این روش را تصدیق خواهیم کرد.

مثال ۳: خط کمترین مربعات داده‌های زیر را بیابید.

$$(1, 1), (2, 4), (3, 2), (4, 4)$$

حل: فرض کنیم معادله خط به صورت $y = a + bx$ باشد. با قرار دادن این نقاط در معادله خط، دستگاه فوق معین زیر را خواهیم داشت:

$$a + b = 1$$

$$a + 2b = 4$$

$$a + 3b = 2$$

$$a + 4b = 4$$

جواب کمترین مربعات را به دست می‌آوریم. ماتریس ضرایب A و بردار ستونی y به شکل زیر است

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

می‌توان نشان داد

$$\text{pinv}(A) = (A^t A)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 20 & 10 & 0 & -10 \\ -6 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

جواب کمترین مربعات عبارت است از:

$$[(A^t A)^{-1} A^t]y = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 20 & 10 & 0 & -10 \\ -6 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

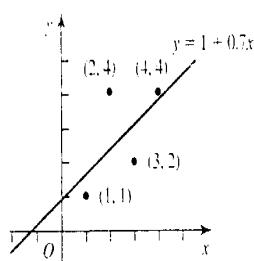
بنابراین $b = 7$ و $a = 1$.

معادله خط کمترین مربعات این داده‌ها عبارت است از:

$$y = 1 + 7x$$



این خطی است که بهترین بازش این نقاط است. به شکل ۱۱-۸ نگاه کنید.



شکل ۱۱-۸

مثال ۴: سهمی کمترین مربعات داده‌های زیر را بیابید.

$$(1, 7), (2, 2), (3, 1), (4, 2)$$

حل: فرض کنیم معادله سهمی $y = a + bx + cx^2$ باشد با قرار دادن نقاط داده شده در این معادله

داریم:

$$a + b + c = 7$$

$$a + 2b + 4c = 2$$

$$a + 3b + 9c = 1$$

$$a + 4b + 16c = 3$$

جواب کمترین مربعات را به دست می‌آوریم. ماتریس ضرایب A و بردار ستونی y عبارت است از:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

می‌توان نشان داد

$$\text{pinv}(A) = (A^t A)^{-1} A^t = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 45 & -15 & -25 & 15 \\ -31 & 23 & 27 & -19 \\ 5 & -5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$



جواب کمترین مربعات عبارت است از:

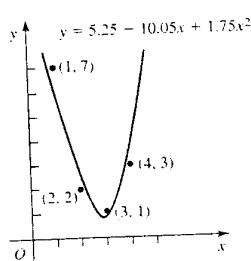
$$[(A^t A)^{-1} A^t]y = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 45 & -15 & -25 & 15 \\ -31 & 25 & 27 & -19 \\ 5 & -5 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15,25 \\ -10,05 \\ 1,75 \end{bmatrix}$$

بنابراین $c = 15,25$ معادله سه‌می کمترین مربعات این نقاط داده شده

عبارت است از:

$$y = 15,25 - 10,05x + 1,75x^2$$

در شکل ۱۲-۸ این سه‌می را رسم کرده‌ایم.



شکل ۱۲-۸

اینک برهان روشنی را که در مثال بالا برای یافتن چندجمله‌ای کمترین مربعات به کار بردیم، ارائه می‌دهیم. این برهان از مفهوم برداری روی برد یک ماتریس بهره می‌برد. در اینجا هندسه‌ای را ملاحظه خواهیم کرد که این نتیجه‌ی مهم را در بردارد. این برهان چالشی مهم و با ارزش است!

۱-۱۳-۸ قضیه. فرض کنیم $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ مجموعه n نقطه داده شده باشند.

فرض کنیم $y = a_0 + \dots + a_m x^m$ یک چندجمله‌ای درجه m ($n \geq m$) باشد که به این نقاط برابر باشد. با جایگذاری نقاط در این چندجمله‌ای دستگاه معادلات خطی $Ax = y$ به دست می‌آید که یک دستگاه از m متغیر a_0, \dots, a_m بوده که

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$



جواب کمترین مربعات این دستگاه ضرایب چندجمله‌ای کمترین مربعات این نقاط داده شده را به دست می‌دهد.

اثبات. دستگاه $Ax = y$ متشکل از n معادله خطی با m متغیر ($n > m$) در حالت کلی فوق معین است. این دستگاه جواب ندارد. (مثلاً این در حالتی اتفاق می‌افتد که تمام در یک خط عمودی قرار ندارند) بنابراین y در بر A قرار ندارد.

فرض کنید $(x_1, y'_1), \dots, (x_n, y'_n)$ نقاطی باشند که در منحنی کمترین مربعات قرار دارند. فرض کنید دستگاه معادلات متناظر $Ax' = y'$ باشد که

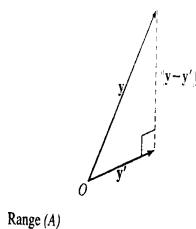
$$y' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix}$$

از آنجایی که منحنی از این نقاط می‌گذرد، دستگاه n معادله m متغیره مذبور دارای جواب منحصر به فرد x' است، که مؤلفه‌های x' ضرایب چندجمله‌ای کمترین مربعات هستند. بنابراین y' در بر A قرار دارند. شرط کمترین مربعات که $d_n^2 + d_{n-1}^2 + \dots + d_1^2$ مینیمم گردد، معادل با مینیمم گردیدن $\|y' - y\|$ است. بنابراین y' تصویر y به روی بر A است. به شکل ۱۳-۸ نگاه کنید. این موضوع ایجاب می‌کند $y' - y$ بر بر A متعامد باشد، یعنی $y' - y$ بر بردارهای ستونی A متعامد باشد. ضرب نقطه‌ای $y' - y$ بر هر یک از بردارهای ستونی A ، صفر است. با در نظر گرفتن بردارهای ستونی A به عنوان بردارهای سطحی A^t ، شرط تعامد اخیر به صورت ضرب ماتریسی $A^t(y' - y) = 0$ در می‌آید. از آنجایی که $Ax' = y'$ داریم:

$$\begin{aligned} A^t(y - Ax') &= 0 \implies -A^tAx' = -A^ty \\ &\implies x' = (A^tA)^{-1}A^ty \\ &\implies x' = \text{pinv}(A)y \end{aligned}$$

و به این ترتیب قضیه اثبات می‌شود.





شکل ۱۳-۸: y' تصویر y روی برد A است

مثال ۵: قانون هوك میگوید که وقتی نیرویی بر فنر اعمال میشود، طول فنر یک تابع خطی از نیروی وارد است. هرگاه طول فنر با اعمال نیروی F , L باشد، این به این معناست که ثابت های (فنر) a و b چنان وجود دارند که

$$L = a + bF$$

ملاحظه خواهیم کرد که ضرایب ثابت فنر و بنابراین رابطه بین طول و نیروی وارد بر فنر از نتایج تجربی به کارگیری روش کمترین مربعات بدست میآید. فرض کنید وزنه های متفاوتی از فنر آویزان شوند، و طول فنر در هر حالت اندازه گیری شود. فرض کنید نتایج به شرح زیر باشد

نیروی فنر (برحسب اینج)	۸	۶	۴	۲
طول فنر (برحسب اینج)	۱۷,۵	۱۴,۳	۱۱,۶	۸,۲

اطلاعات آماری فوق را به صورت نقاط درج میکنیم که مؤلفه اول F و مؤلفه دوم L است. داریم:

$$(2, 8, 2), (4, 11, 6), (6, 14, 3), (8, 17, 5)$$

به طور نظری این نقاط همگی میباید در خط راست قرار گیرند. بهویژه، با توجه به اندازه گیری های مکرر انجام یافته، نتایج عملی کاملاً دقیق نیستند. خط کمترین مربعات این نقاط سازگارترین معادله برای این خط است.

$$a + 2b = 8, 2$$

$$a + 4b = 11, 6$$

$$a + 6b = 14, 3$$



$$a + 8b = 17,5$$

ماتریس ضرایب A و ماتریس ستونی ثابت y به شکل زیر است

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 8,2 \\ 11,6 \\ 14,3 \\ 17,5 \end{bmatrix}$$

داریم:

$$\text{pinv}(A) = (A^t A)^{-1} A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 & -0,10 \\ -0,15 & -0,05 & 0,05 & 0,15 \end{bmatrix}$$

جواب کمترین مربعات عبارت است از:

$$[(A^t A)^{-1} A^t]y = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 & -0,10 \\ -0,15 & -0,05 & 0,05 & 0,15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8,2 \\ 11,6 \\ 14,3 \\ 17,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,25 \\ 1,53 \\ 1,53 \\ 1,53 \end{bmatrix}$$

بنابراین ضرایب فنر عبارتند از: $b = 1,53$ و $a = 5,25$.

معادلهٔ فنر نیز عبارت است از:

$$L = 5,25 + 1,53F$$

در نتیجهٔ مثلاً اگر وزنه‌ای 20 اونسی از فنر آویخته شود، انتظار داریم طول فنر به‌طور تقریبی $(20 \times 1,53) + 5,25 = 35,85$ اینچ گردد.

کاربرد زیر موقعیتی را بیان می‌کند که گاهی در تحلیل شامل برآش کمترین مربعات به‌کار می‌رود. می‌خواهیم نتایج دو دسته از نقاط داده شده را که دارای ماتریس ضرایب یکسان هستند مقایسه کنیم. روش‌های استعمال چندین دستگاه، که دارای ماتریس ضرایب یکسان هستند، ... مفید می‌نماید.

مثال ۶: اطلاعات آماری زیر هزینه آموزش عمومی را بر حسب دلار آمریکا نسبت به جمعیت در آمریکای شمالی و اروپا نشان می‌دهد.^۱

برای این اطلاعات آماری خطوط کمترین مربعات را ساخته و برخی نتایج را اخذ کنیم.

(۱) مرجع [۶] ملاحظه شود



	۱۹۷۰	۱۹۷۵	۱۹۸۰	۱۹۸۵
Europe	۹۰	۱۹۷	۲۲۵	۳۹۴
North America	۳۱۷	۴۷۴	۸۱۶	۱۱۰۱

حل: برای سهولت اندازه سال را از ۱۹۷۰ شروع کنیم، یعنی در سال ۱۹۷۵ صفر، و به همین ترتیب. نتایج آماری فوق نقاط زیر را بدست می‌دهد.

(۱۵, ۳۹۴), (۱۰, ۳۳۵), (۵, ۱۹۷), (۰, ۹۰) اروپا

(۱۵, ۱۱۰۱), (۱۰, ۸۱۶), (۵, ۴۷۴), (۰, ۳۱۷) آمریکا شمالی

دو دسته نقاط داده شده، دو دستگاه معادلات با ماتریس ضرایب A و بردارهای ثابت y_1 و y_2 را به شکل زیر بدست می‌دهد.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \\ 1 & 10 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}, \quad y_1 = \begin{bmatrix} 90 \\ 197 \\ 335 \\ 394 \end{bmatrix}, \quad y_2 = \begin{bmatrix} 317 \\ 474 \\ 816 \\ 1101 \end{bmatrix}$$

می‌توان نشان داد

$$\text{pinv}(A) = (A^t A)^{-1} = \frac{1}{5^0} \begin{bmatrix} 35 & 20 & 5 & -10 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

جواب کمترین مربعات عبارت است از:

$$[(A^t A)^{-1} A^t] [y_1 \ y_2] = \frac{1}{5^0} \begin{bmatrix} 35 & 20 & 5 & -10 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 90 & 317 \\ 197 & 474 \\ 335 & 816 \\ 394 & 1101 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96,5 & 272,9 \\ 21 & 53,88 \end{bmatrix}$$

خطوط کمترین مربعات عبارتند از:

$$y = 96,5 + 21x \quad \text{اروپا}$$

$$y = 272,9 + 53,88x \quad \text{امریکای شمالی}$$

این خطوط برای پیش‌بینی مخارج سال‌های بعد به کار رفته است. مثلاً برای سال ۲۰۰۰ (x = ۳۰) جواب ۷۲۶,۵ (اروپا) و ۱۸۸۹,۳ (برای آمریکای شمالی) بدست آمده است. با این حال نکته جالب این است



که شیب خط آمریکای شمالی یعنی $53/88$ بیش از دو برابر شیب خط اروپایی یعنی 21 است. و این نشان می‌دهد که شکاف بین مخارج در حال افزایش است.
این بخش را با چرخشی هندسی از برهان قضیه فوق به پایان می‌بریم. خواهیم دید که ماتریس شبه معکوس برای یافتن تصویر یک بردار روی یک زیرفضا چگونه بکار می‌رود.

۲-۱۳-۸ قضیه. فرض کنیم W زیرفضای R^n تولید شده به وسیله بردارهای مستقل خطی u_1, \dots, u_n باشد. فرض می‌کنیم $[u_1, \dots, u_m] = A$. تصویر بردار y روی w از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\text{proj}_w y = A \text{pinv}(A) y$$

که $A \text{pinv}(A) y$ ماتریس تصویری نامیده می‌شود.

اثبات. از آنجایی که بردارها مستقل خطی هستند، $\text{pinv}(A)$ موجود است. نتیجه مطلوب به طور مستقیم از اثبات قضیه قبلی حاصل می‌شود. فرض کنید x' جواب کمترین مربعات y باشد. در این صورت

$$x' = \text{pinv}(A) y$$

با ضرب طرفین تساوی در A داریم

$$Ax' = A \text{pinv}(A) y$$

اما Ax' تصویر y روی بردار (A) است. بنابراین

$$\text{proj}_w y = A \text{pinv}(A) y$$

مثال ۷: مطلوب است ماتریس تصویری صفحه $x - 2y - z = 0$ روی R^3 . از این ماتریس برای یافتن تصویر بردار $(1, 2, 3)$ روی این صفحه استفاده کنید.

حل: W را زیرفضای بردارهایی در نظر بگیرید که در این صفحه قرار دارند. W شامل بردارهایی به شکل (x, y, z) است که $x = 2y + z$. بنابراین $\{x, y, z\} = \{(2y + z, y, z)\} = \{y(2, 1, 1) + z(1, 0, 1)\}$. می‌توانیم W را به شکل $W = \{y(2, 1, 1) + z(1, 0, 1)\}$ نیز نمایش دهیم. فضای تولید شده به وسیله بردارهای $(2, 1, 1)$ و $(1, 0, 1)$ است. فرض کنید A ماتریسی شامل این بردارها به عنوان ستون‌های آن ماتریس باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



می‌توان نشان داد

$$\text{pinv}(A) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

ماتریس تصویری عبارت است از:

$$A\text{pinv}(A) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

تصویر (۳) روی W با ضرب این بردار به صورت ستونی در $\text{pinv}(A)$ به دست می‌آید که داریم:

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین تصویر (۳) روی صفحه $x - 2y - z = 0$ است.

۳-۱۳-۸ تمرین شبه معکوس ماتریس‌های تمرین‌ها ۱-۴ را در صورت وجود، بیابید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad (4)$$

شبه معکوس ماتریس‌های تمرین‌ها ۵-۸ را در صورت وجود، بیابید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5)$$



$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad (8)$$

خط کمترین مربعات نقاط داده شده در تمرین‌های ۱۴-۹ را بیابید (راهنمایی: توجه داشته باشید که شبه ماتریس‌های یکسان برای هر یک از داده‌ها وجود دارد).

$$(1, 0), (2, 4), (3, 7) \quad (9)$$

$$(1, 1), (2, 3), (3, 7) \quad (10)$$

$$(1, 1), (2, 5), (3, 9) \quad (11)$$

$$(1, 1), (2, 6), (3, 9) \quad (12)$$

$$(1, 7), (2, 2), (3, 0) \quad (13)$$

$$(1, 12), (2, 5), (3, 1) \quad (14)$$

برای هر یک از نقاط داده شده تمرین‌های ۱۵-۱۸، خط کمترین مربعات را به دست آورید. (راهنمایی: توجه داشته باشید که شبه ماتریس‌های یکسان برای هر یک از داده‌ها وجود دارد).

$$(1, 0), (2, 3), (3, 5), (4, 6) \quad (15)$$

$$(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 9) \quad (16)$$

$$(1, 9), (2, 7), (3, 3), (4, 2) \quad (17)$$

$$(1, 21), (2, 17), (3, 12), (4, 7) \quad (18)$$

خط کمترین مربعات را برای نقاط داده شده تمرین‌ها ۲۰-۱۹ به دست آورید.

$$(1, 0), (2, 1), (3, 4), (4, 7), (5, 9) \quad (19)$$

$$(1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 8), (5, 11) \quad (20)$$

سهمی کمترین مربعات را برای نقاط داده شده تمرینات ۲۱-۲۴ به دست آورید.

$$(1, 5), (2, 2), (3, 3), (4, 8) \quad (21)$$



(۱,۴), (۲,۰), (۳,۲), (۴,۵) (۲۲)

(۱,۲), (۲,۵), (۳,۷), (۴,۱) (۲۳)

(۱,۲۳), (۲,۴), (۳,۷), (۴,۱۷) (۲۴)

(۲۵) وزنهای زیر (برحسب اونس) از یک فنر آویزان شده است و طول حاصل (برحسب اینچ) به دست آمده است. ثابت فنر را به دست آورده و معادلهی فنر را بنویسید. طول فنر را هنگامی که وزنه ۱۵ اونسی آویزان می‌شود، پیش‌بینی کنید.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \text{نیروی } F \\ & ۲ & ۴ & ۶ & ۸ & & \text{(الف)} \\ \text{طول } L & ۵,۹ & ۸ & ۱۰,۳ & ۱۲,۲ & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \text{نیروی } F \\ & ۲ & ۴ & ۶ & ۸ & & \text{(ب)} \\ \text{طول } L & ۷,۴ & ۱۰,۳ & ۱۲,۷ & ۱۶,۷ & & \end{array}$$

(۲۶) مصرف بنزین یک اتومبیل به سرعت آن بستگی دارد. برای تعیین اثر سرعت بر مصرف سوخت مدیریت اتوبان، اتومبیل‌های مختلفی را با وزن‌های متفاوت در سرعت‌های متفاوت آزمایش می‌کند. اتومبیلی به وزن ۳۹۸ پوند دارای نتایج زیر است. خط کمترین مرباعات متناظر این اطلاعات را به دست آورید. از این معادله برای تخمین مسافت طی شده به وسیله یک گالن دارای این اتومبیل در سرعت ۵۵ mph به دست آورید. (سرعت برحسب مایل در ساعت و بنزین مصرفی برحسب مایل بر گالن است).

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \text{سرعت} \\ & ۷۰ & ۶۰ & ۵۰ & ۴۰ & ۳۰ & \\ \text{بنزین مصرفی} & ۱۳,۶۱ & ۱۸,۲۵ & ۲۰,۰۰ & ۱۶,۳۲ & ۱۵,۷۷ & \end{array}$$



(۲۷) یک شرکت بیمه درصد افرادی را که در سینم متفاوت فوت می کنند محاسبه کرده است (بین سینم ۲۵ تا ۵۰) درصد مرگ را در ۲۳ سالگی تخمین بزنید.

درصد مرگ	۱۸	۱۹	۲۱	۲۵	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰	سن بر حسب سال
----------	----	----	----	----	----	----	----	----	---------------

(۲۸) زیرفضای W تولید شده به وسیله بردارهای $(1, 1, 0)$ و $(2, 1, 0)$ را در نظر بگیرید. ماتریس تصویری را برای W بدست آورید. از این ماتریس برای یافتن تصویر بردار $(3, 0, 10)$ روی W استفاده کنید. نشان دهید تصویر $(6, 3, 0)$ روی W بردار $(6, 3, 0)$ است. این به چه معناست.

(۲۹) فرض کنید A یک ماتریس معکوس پذیر باشد. ثابت کنید $\text{pinv}(A) = A^{-1}$.

(۳۰) فرض کنید A و B دو ماتریس باشند که حاصل ضرب AB موجود باشد.

$$\text{(الف) آیا } \text{pinv}(AB) = \text{pinv}(A)\text{pinv}(B) \text{؟}$$

$$\text{(ب) آیا } \text{pinv}(AB) = \text{pinv}(B)\text{pinv}(A) \text{؟}$$

(۳۱) اتحادهای زیر را ثابت کنید.

$$\text{(الف) } \text{pinv}(cA) = (\frac{1}{c})\text{pinv}(A) \text{ و } c \neq 0.$$

$$\text{(ب) اگر } A \text{ یک ماتریس مریع باشد. } \text{pinv}(\text{pinv}(A)) = A.$$

$$\text{(ج) اگر } A \text{ یک ماتریس مریع باشد. } \text{pinv}(A^t) = (\text{pinv}(A))^t.$$

(۳۲) اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد، ثابت کنید $\text{pinv}(A)$ موجود است اگر و فقط اگر A از رتبه n باشد. نشان دهید یک نتیجه این مطلب آن است که $\text{pinv}(A)$ موجود نیست اگر $m < n$. (راهنمایی: از قضیه رتبه/روج استفاده کنید).

(۳۳) فرض کنی P یک ماتریس تصویری باشد ثابت کنید:

(الف) P متقارن است.

$$\text{(ب) } P^\dagger = P \text{ خودتوان است.}$$



تمرین‌های دوره‌ای فصل ۸

- ۱) فرض کنید (x_1, x_2) و $v = (y_1, y_2)$ عضوهای R^2 باشند. ثابت کنید تابع زیر یک ضرب داخلی روی R^2 تعریف می‌کند.

$$\langle u, v \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$$

- ۲) ضرب داخلی، نرم و فاصله بین توابع $g(x) = 5x + 3$ و $f(x) = 3x - 1$ را در فضای ضرب داخلی P_2 با ضرب داخلی

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

به دست آورید.

- ۳) R^3 را با ضرب داخلی

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$$

در نظر بگیرید. نرم و فاصله $(1, 2)$ و $(2, 3)$ را در این فضای به دست آورید.

- ۴) R^3 را با ضرب داخلی

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$$

- در نظر بگیرید. معادله دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع ۱ را در این فضای به دست آورید. این دایره را رسم کنید.

- ۵) تقریب کمترین مربعات $1 - x^2 - 2x$ را روی بازه $[-1, 1]$ به دست آورید.

- ۶) تقریب فوریه مرتبه چهارم را برای $1 - 2x$ روی $[0, 2\pi]$ به دست آورید.

- ۷) تمام بردارهای V_7 را که در کره‌ای به شعاع ۱ و مرکز $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ هستند به دست آورید.

- ۸) ماتریس شبیه معکوس $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

- ۹) سهمی کمترین مربعات $(1, 6), (3, 2), (3, 5), (4, 9)$ را به دست آورید.



۱۰) A را ماتریسی با شبه معکوس B بینگارید. نشان دهید.

الف) $.ABA = A$

ب) $.BAB = B$

ج) AB متقارن است.

د) BA متقارن است.





مراجع

- [1] Arazi, Benjamin; *A Common Space Approach to the Theory of Error Correcting Codes*, Mitpress, 1988.
- [2] Williams, Gareth; *Linear Algebra*, Jones and Bartlett Publishers, London 2001.
- [3] Barnsley, Michael F; *Fractal Everywhere*, Academic Press Inc., 1988.
- [4] Barnsley, Michael F; *The Desktop Fractal Design Handbook and Systems* (Software Package), Academic Press Inc., 1989.
- [5] Sheldon, Axler; *Linear Algebra Done Right*, 2nd edition, Springer, New York, 1997.
- [6] UNESCO Statistical Yearbook, 1987.

[7] کمپل و تورپ، جبر خطی با کاربرد در معادلات دیفرانسیل، ترجمه بیژن زاده، محمد حسن؛ عالم زاده، علی اکبر؛ انتشارات نشر علوم نوین، تهران ۱۳۸۹.



نمایه

بسته، ۱۹۹	آلبرت انیشتین، ۴۷۴
بعد، ۲۹۷	ابتدا، ۱۹۷
بعد متناهی، ۲۹۷	ام، ۴۷۴
بعد نامتناهی، ۲۹۸	اعمال سطری مقدماتی، ۶
پارامتر، ۲۳	الکترون‌ها، ۴۷۴
پاشنه، ۲۱	انتقال، ۲۳۷
پایه متعامد، ۳۱۱	انعکاس، ۲۳۴
پایه استاندارد، ۳۰۱	اویلر، ۳۳۸
پایه یک‌گه متعامد، ۳۱۱	برد، ۲۲۱
پایه‌های استاندارد، ۳۱۱	بردار، ۱۹۹
پیشرو، ۱۹	بردار صفر، ۲۰۱
تانزانت، ۳۶۵	بردار مکان، ۱۹۷
تبديلات مقدماتی، ۶	بردار یکه، ۲۰۹
تصویر، ۳۱۹، ۳۱۳	بردارهای ستونی، ۲۰۵
تصویری، ۲۴۶، ۲۲۷	بردارهای سطری، ۲۰۵



سرشت‌نمای <i>A</i> , ۳۴۱	تقارن، ۲۱۷
سری فوریه، ۴۸۵	تقریب فوریه مرتیه <i>n</i> ام، ۴۸۵
سطر، ۴	تولید شده، ۴۶۲
سه‌تایی‌های مرتب، ۱۹۷	جایگشت، ۱۶۴
سیستم تابع تکراری، ۲۴۴	جایگشت زوج، ۱۶۴
ضرب داخلی، ۴۵۸، ۴۵۹	جایگشت فرد، ۱۶۴
عملگر خطی، ۲۲۳	جواب، ۱
عمود، ۲۱۳	جواب بدینهی، ۲۸
فاصله فضایی، ۴۷۸	جواب عمومی، ۲۳
فرم پلکانی تحویل یافته، ۱۱	چندجمله‌ای‌های لواندر، ۴۸۴
فرم درجه دوم، ۳۹۲	حالت پویا، ۳۷۹
فروبنیوس، ۳۷۲	خطی، ۳۹۹، ۳۸۱
فضا-زمان، ۴۷۴، ۴۷۲	دامنه، ۲۲۱
فضای برداری، ۱۹۹	درازا، ۱۹۷
فوتون، ۴۸۰	دستگاه‌های همارز، ۷
فوق معین، ۴۹۱	دوبهدو متعامدند، ۳۱۰
فیبوناچی، ۳۸۳	دوقولوها، ۴۷۵
قانون هوک، ۴۹۹	دوقولوی فضایی، ۴۷۷
قرینه، ۲۰	دیاگرام فضا-زمان، ۴۷۷
قطري شدنی، ۳۸۷	رتبه <i>A</i> ، ۳۰۴
کد اصلاح‌کننده خطأ، ۴۸۸	روش حذفی گاووس - جردن، ۴
کد گولایی، ۴۸۹	ریمان، ۴۷۴
کد گولیا، <i>C</i> _{۲۲,۱۲} , ۴۹۰	زنジیر مارکوف، ۳۷۸
کد هامینگ، ۴۸۸، ۴۸۷	زنジیر مارکوفی، ۳۷۸
کمترین مربعات حل، ۴۹۱	زوج‌های مرتب، ۱۹۷
کوشی، ۳۳۸	زیرفضای <i>W</i> عمود، ۳۱۹
کهاد اصلی، ۳۴۷	ستون، ۴



مبدا، ۱۹۷	کیلی، ۳۳۸
مبنای استاندارد، ۲۳۲	کیلی-هامیلتون، ۳۷۵، ۳۳۷
متغیر پیشرو، ۲۳	گاوس - جردن، ۱۹
متهای، ۲۹۷	گاوسی، ۲۹
متوازی‌الاضلاع نیروها، ۲۰۳	گرام-اشمیت، ۳۱۷، ۳۲۶-۳۲۸، ۳۹۰
مجموعه متعامد، ۳۱۰	گرشنگورین، ۳۶۲، ۳۵۹، ۳۳۶
مختصات همگن، ۲۴۰	گوس-جردن، ۴۱۸
مساوی، ۱۹۸	لاگرانژ، ۳۳۸
معادله خطی، ۱	ماتریس، ۴
معادله خطی، ۲	ماتریس افزوده، ۶
معادله مشخصه، ۳۳۸	ماتریس شبے معکوس، ۵۰۸
مفسر، ۳۴۱	ماتریس استاندارد، ۲۳۲
مقادیر مشخصه، ۳۳۸	ماتریس الحاقی، ۱۸۴
منتظم، ۳۷۸	ماتریس بالا مثبتی ، ۱۷۹
منحنی یا خط کمترین مربعات، ۴۹۴	ماتریس تصویری، ۵۰۲
منفرد، ۱۷۱	ماتریس ستونی، ۵
موریس کلاین، ۳۳۸	ماتریس سطری، ۵
مؤلفه‌های متناظر، ۱۹۸	ماتریس شبے معکوس، ۵۰۷، ۵۰۱
میدان جبری، ۴۸۷	ماتریس ضرایب، ۶
نامساوی کوشی - شوارتز، ۲۱۰	ماتریس متعامد، ۳۲۴
نامنفرد، ۱۷۱	ماتریس مربعی، ۵
نرمال سازی، ۲۰۹	ماتریس مربعی، پایین مثبتی ، ۱۷۹
نقاط پایه، ۳۹	ماتریس همانی، ۳۲۵
نگاشت آفینی، ۲۳۹	ماتریس همساز، ۱۸۴
نگاشت ماتریسی، ۲۲۴	ماتریس یکانی، ۳۲۹
نیروی برآیند، ۲۰۳	مارکوف، ۳۷۷
نیل بوهر، ۴۷۴	ماکس پلانک، ۴۷۴



وارون، ۲۳۷

ورنر هایزبرگ، ۴۷۴

هرمان مینکوفسکی، ۴۷۶

هم خط، ۳۳۲

هم دامنه، ۲۲۱

همگن، ۲۷

هندسه مینکوفسکی، ۴۷۶

هندسه‌های ناقلیدسی، ۴۷۲

هندسی اقلیدسی، ۲۱۸

یک ذره نوری، ۴۸۰

یک ریختی، ۴۳۳

یکه معتمد، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۳، ۳۱۷، ۳۱۵-۳۱۷

۳۲۱

