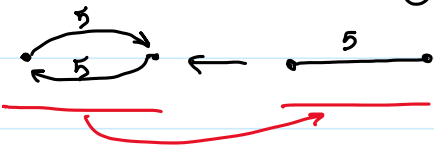


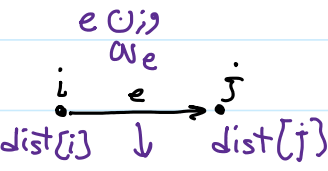
موضوع: کوتاهترین مسیر در گراف

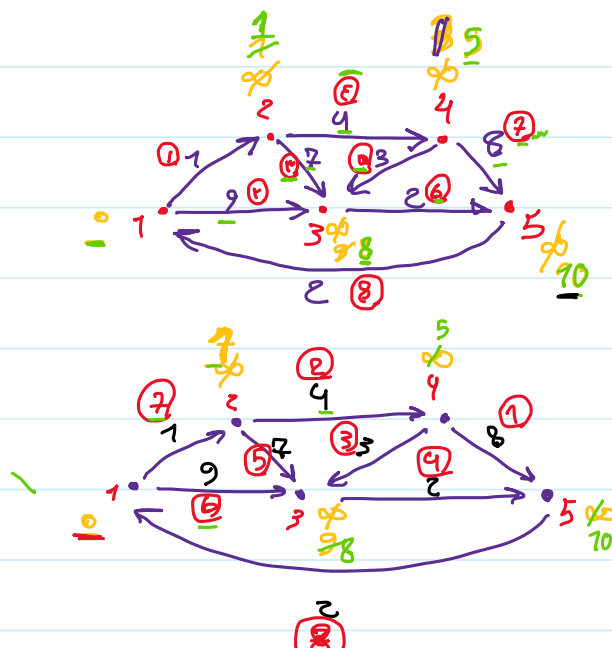
* الگوریتم دایکسترا برای یال با وزن منفی کار نمی‌کند.
 * گراف جهت دار: 
 * $O(m + n \log n)$
 ↓
 طایفه یال‌ها

* بلن‌فورد: Bellman-Ford : Alfonso-shimbel 1955

→ Bellman 1958
 → Ford 1956

←————→
 $dist[i] = 0$
 $dist[نیز راس‌ها] = \infty$
 → for (i: 1 → n-1)
 → for every edge e
 relax e

relax e: 
 $dist[i] + w_e < dist[j]$
 $dist[j] = dist[i] + w_e$



8

* زمان اجرا: $O(nm)$

* بلین فورد: برای یال منفی کاری کند ← دور منفی نداشته باشیم

* * درستی بلین فورد: بعد از k بار اجرای حلقه، به ازای هر رأس z ، $dist[k][z]$ کمترین میزان کوتاه‌ترین مسیر است که از رأس 1 تا z وجود دارد و حداکثر از k یال استفاده می‌کند.

$n-1$ ← کوتاه‌ترین مسیر پیدا شده.

اثبات استقرا: پایه $k=0$

کوتاه‌ترین مسیر از 1 به z با حداکثر $k-1$ یال
 برای اعداد k درست.
 برای k :
 $dist[z] \geq$ کوتاه‌ترین مسیر از 1 به z که از k یال می‌گذرد.

بعد از relax دوره $k+1$ ، $dist[i] + w_{ij} \geq dist[j]$
 ← مرحله $k+1$ ام

APSP

الگوریتم فلوید-وارشال:

$$n \left[m + n \log n \right]$$

پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر بین تمام رأس‌ها

$$= nm + n^2 \log n$$

$$\rightarrow n \left[nm \right] = n^2 m$$

for ($k=1 \rightarrow n$)

اول کار: $dist[i][i] = 0$
 $dist[i][j] = \infty$

\downarrow
 for ($k: 1 \rightarrow n$) $\left\{ \begin{array}{l} \text{dist}[i][i] = 0 \\ \infty = \text{dist}[i][j] \end{array} \right.$ اول کار:

for ($i: 1 \rightarrow n$)

for ($j: 1 \rightarrow n$)

if ($\text{dist}[i][j] > \text{dist}[i][k] + \text{dist}[k][j]$)

$\text{dist}[i][j] = \text{dist}[i][k] + \text{dist}[k][j]$

نی: $O(n^3)$

* بعد از k امین بار از اجرای حلقه اول، $\text{dist}[i][j]$ برابر کوتاهترین مسیر
 از راس i به راس j است که تنها از راس های $1, \dots, k$ به عنوان راس های
 میانی استفاده می کند.

$k = n \leftarrow$ کوتاهترین مسیر.

$O\left(\frac{n^3}{\text{polylog}}\right)$

* آیا الگوریتم با زمان اجرای $O(n^{3-\epsilon})$ به ازای $\epsilon > 0$ وجود دارد یا نه؟

↑

Fine grained complexity

. SETH