page 4

جلسه ۳ یکشنبه
۹۹/۲/۲۱

سری فوریه و سیستم های LTI: پاسخ فرکانسی - فیلترینگ

توابع سینوسی، توابع ویژه سیستم های LTI هستند:

$$e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow H(\omega)\cdot e^{j\omega t}$$

$H(\omega)$: گین در فرکانس ω

← پاسخ فرکانسی سیستم LTI (Frequency Response)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

اگر هر ورودی پریودیک دیگر بدهیم:

$$\Rightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot H(n\omega_0)\cdot e^{jn\omega_0 t}$$

و همینطور در مورد سیستم های LTI زمان گسسته:

$$e^{j\Omega n} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow H(\Omega)\cdot e^{j\Omega n}$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \cdot e^{jk\Omega_0 n} \Rightarrow y[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \cdot H(k\Omega_0)\cdot e^{jk\Omega_0 n}$$

اثبات این خاصیت چگونه بود؟ از طریق کانولوشن

$$x(t) = e^{j\omega t} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot x(t-\tau)\cdot d\tau$$

$$\rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot e^{j\omega(t-\tau)}\cdot d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot e^{j\omega t}\cdot e^{-j\omega\tau}\cdot d\tau$$

$$\rightarrow y(t) = e^{j\omega t}\cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\cdot d\tau}_{H(\omega)} \Rightarrow H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt$$

page5

اگر ضرایب سری فوریه ورودی سیستم LTI این باشد

$$x(t) \longleftrightarrow C_n$$

آنگاه ضرایب سری فوریه خروجی خواهد بود

$$y(t) \longleftrightarrow H(n\omega_0)\cdot C_n$$

پاسخ فرکانسی در سیستم های دینامیکی که با یک معادله دیفرانسیل توصیف می شوند، به راحتی به دست می آید:

می دانیم که در یک سیستم LTI اگر ورودی $x(t)=e^{j\omega t}$ باشد، خروجی $y(t)=H(\omega).e^{j\omega t}$ خواهد بود. پس همین را در معادله دیفرانسیل قرار می دهیم.

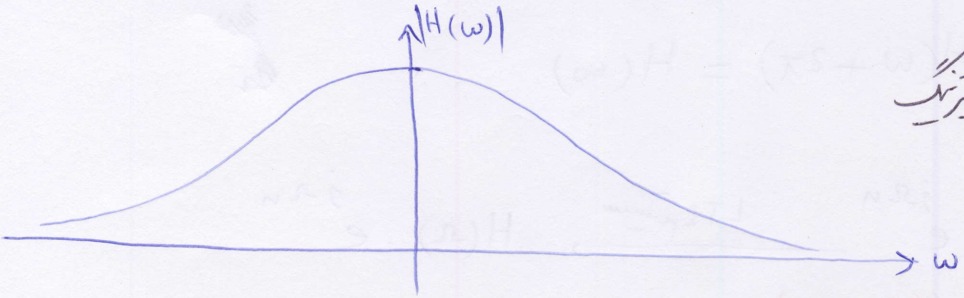
مثلاً $$y'' + 5y' + 6y = x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\left\{H(\omega).e^{j\omega t}\right\} + 5\frac{d}{dt}\left\{H(\omega).e^{j\omega t}\right\} + 6H(\omega).e^{j\omega t} = e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow H(\omega).(j\omega)^2.\cancel{e^{j\omega t}} + 5H(\omega).j\omega.\cancel{e^{j\omega t}} + 6H(\omega).\cancel{e^{j\omega t}} = \cancel{e^{j\omega t}}$$

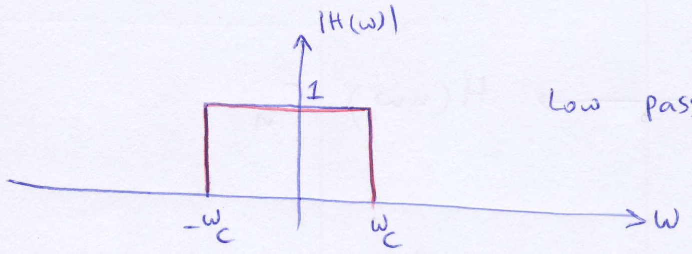
$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 5j\omega + 6} = \frac{1}{(6-\omega^2) + j5\omega}$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(6-\omega^2)^2 + 25\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^4 + 13\omega^2 + 36}}$$



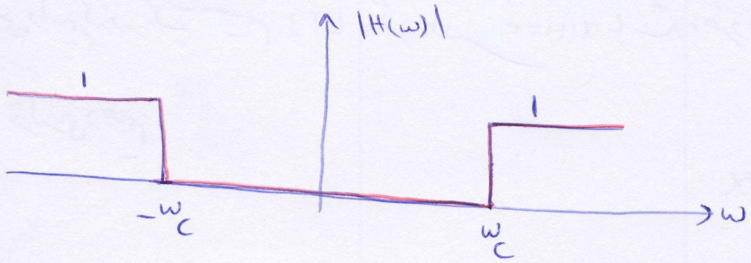
مفهوم فیلترینگ

فیلترینگ یعنی تغییر دامنهٔ نسبی فرکانس های مختلف ورودی و یا حذف کامل برخی فرکانس های ورودی.



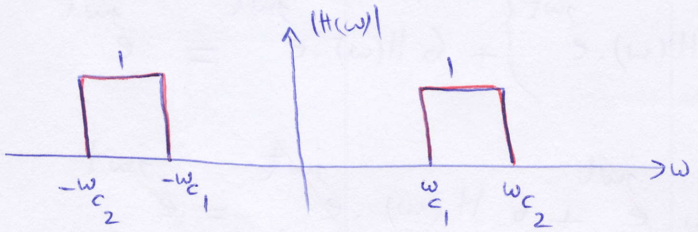
Low pass Filter (LPF)

فیلتر پایین گذر



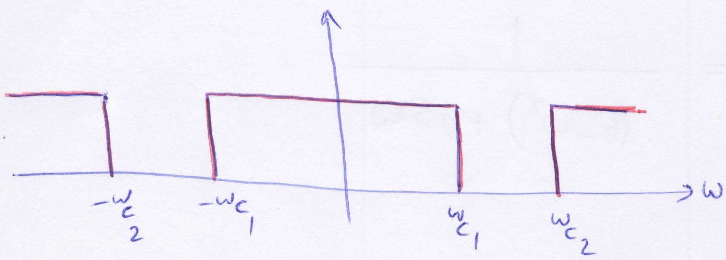
High pass Filter (HPF)

فیلتر بالا گذر



Band Pass Filter

فیلتر میان گذر



Band Stop Filter

فیلتر میان نگذر

و اما در مورد سیستم های LTI زمان گسسته :

پاسخ فرکانسی در اینجا، پریودیک خواهد بود.

$$H(\omega + 2\pi) = H(\omega)$$

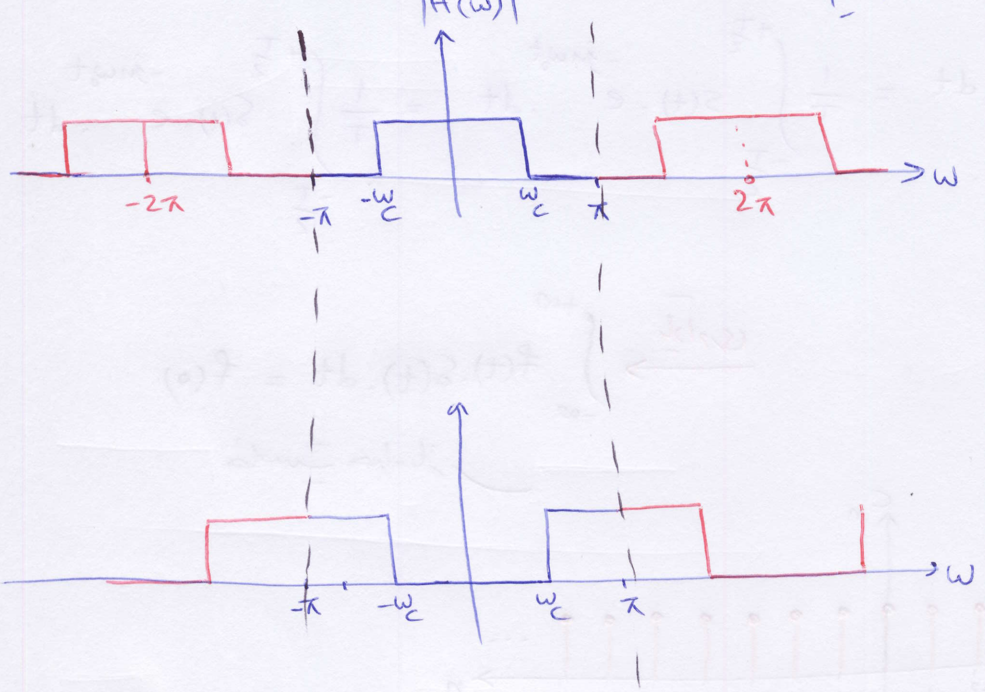
$$e^{j\Omega n} \xrightarrow{\text{سیستم LTI}} H(\Omega) \cdot e^{j\Omega n}$$

$$e^{j(\Omega + 2\pi)n}$$

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \cdot e^{-j\Omega n} \Rightarrow H(\omega) = H(\omega + 2\pi)$$

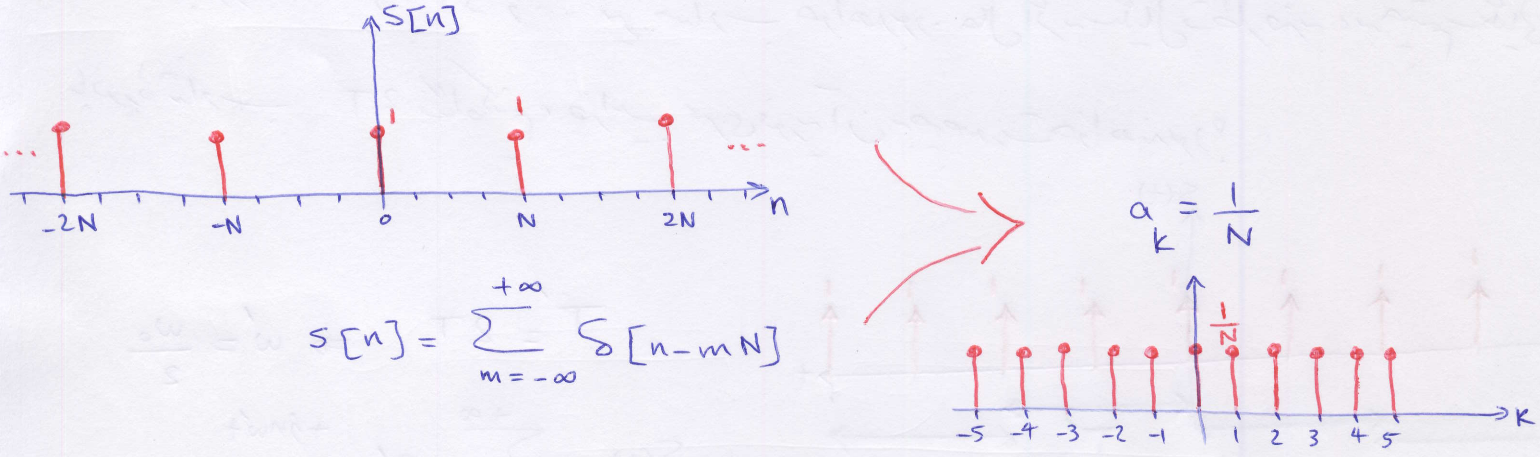
پاسخ زمانی

پس فیلترها را باید در فاصله [π و π-] رسم کنیم.



چند مثال از سری فوریه:

درجلسه‌ی گذشته، سری فوریه قطار ضربه گسسته را محاسبه کردیم و دیدیم که:

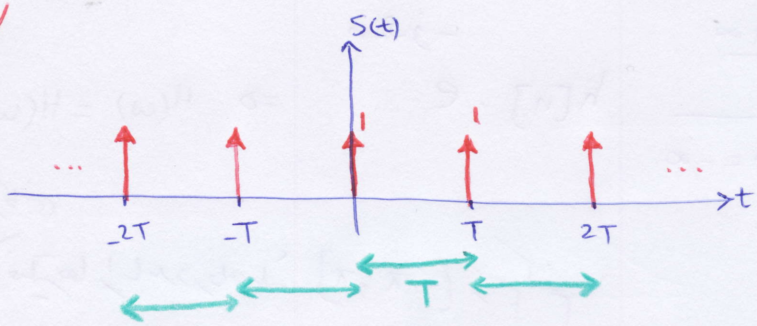


$$s[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta[n - mN]$$

حال ببینیم که سری فوریه قطار ضربه پیوسته چه خواهد بود؟

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT)$$

page 8



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

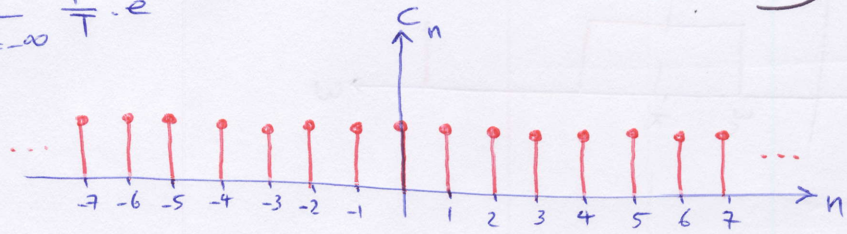
$$C_n = \frac{1}{T}\int_T S(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}\cdot dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} S(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}\cdot dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \delta(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}\cdot dt$$

$$\Rightarrow \boxed{C_n = \frac{1}{T}}$$

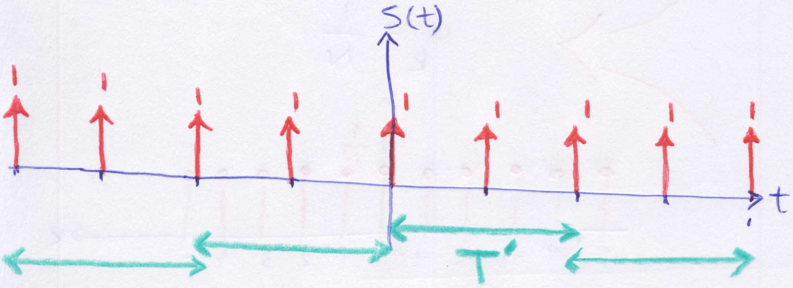
$\xrightarrow{\text{یادآوری}}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\delta(t)\cdot dt = f(0)$

خاصیت جداسازی

$$\Rightarrow S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\cdot e^{+jn\omega_0 t}$$



حال از زاویهٔ دیگری به مسألهٔ بالا نگاه می‌کنیم. در بالا دیدیم که قطار ضربه یک سیگنال متناوب با دورهٔ تناوب T است؛ یعنی ضربه‌هایی که با فاصلهٔ T از یکدیگر روی می‌دهند. از طرفی می‌دانیم اگر سیگنالی با دورهٔ تناوب T متناوب باشد، با دورهٔ 2T و 3T و ... نیز متناوب خواهد بود. حال اگر به سیگنال قطار ضربه، به چشم سیگنالی با دورهٔ تناوب 2T نگاه کنیم، ضرایب سری فوریه آن به چه صورت خواهند بود؟



$$T' = 2T \Rightarrow \omega' = \frac{\omega_0}{2}$$

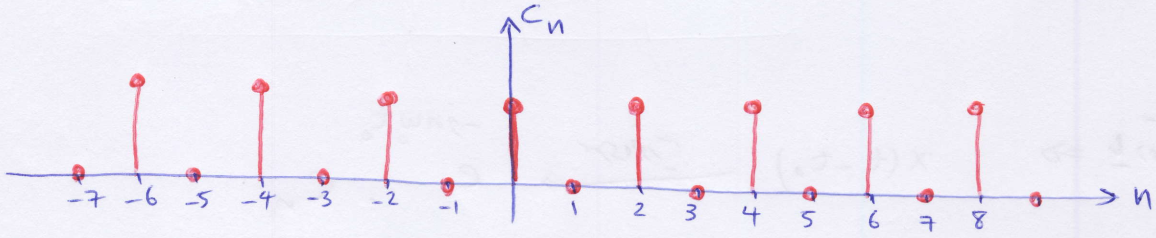
$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C'_n\cdot e^{+jn\omega' t}$$

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C'_n\cdot e^{+jn\frac{\omega_0}{2}t}$$

$$C'_n = \frac{1}{T'}\int_{T'} S(t)\cdot e^{-jn\omega' t}\cdot dt$$

$$C'_n = \frac{1}{2T}\int_{-\varepsilon}^{2T-\varepsilon} \left[\delta(t)+\delta(t-T)\right]\cdot e^{-jn\omega' t}\cdot dt = \frac{1}{2T} + \frac{e^{-jn\pi}}{2T} = \frac{1}{2T}\left(1+e^{-jn\pi}\right)$$

$$\Rightarrow C'_n = \frac{1}{2T}\left[1 + e^{-jn\pi}\right] = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{زوج } n \\ 0 & \text{فرد } n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C'_{2k} = \frac{1}{T} \\ C'_{2k+1} = 0 \end{cases}$$

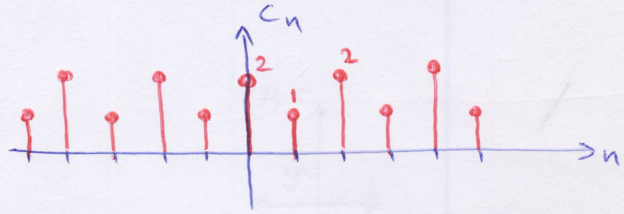


$$\Rightarrow S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C'_n \cdot e^{+jn\omega' t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C'_n \cdot e^{+jn\frac{\omega_0}{2}t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C'_{2k} \cdot e^{+j2k\frac{\omega_0}{2}t}$$

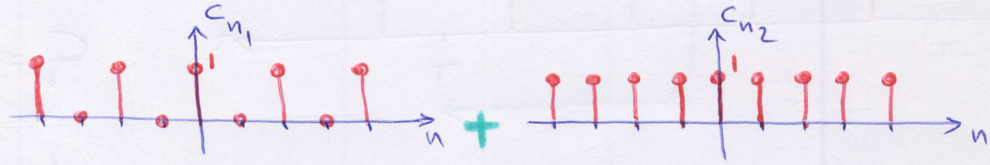
$$\Rightarrow S(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \cdot e^{+jk\omega_0 t}$$

مثال: ضرایب سری فوریه یک تابع پیوسته زمان به صورت زیر هستند. آن تابع ($x(t)$) را تعیین کنید.

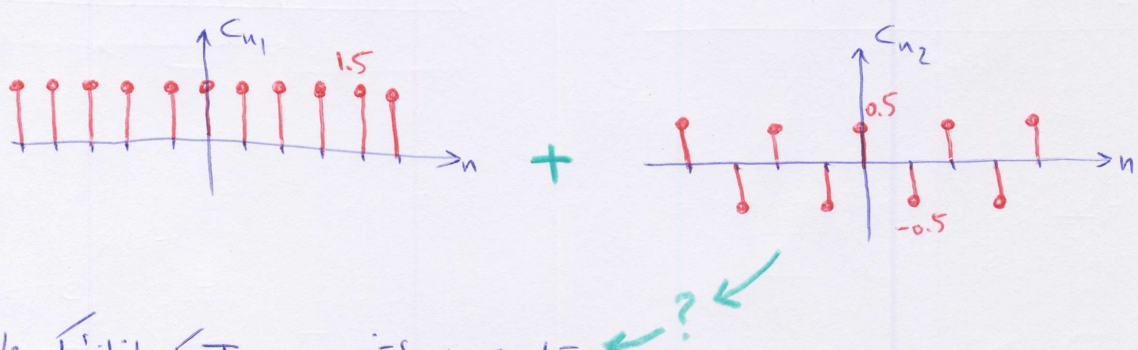
$$C_n = \begin{cases} 1 & ; \text{ n های فرد} \\ 2 & ; \text{ n های زوج} \end{cases}$$



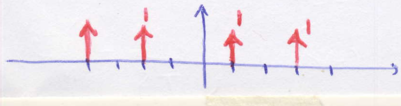
روش اول

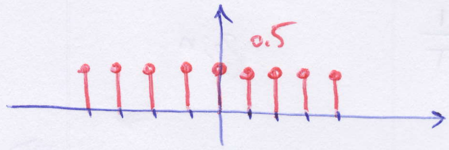


روش دوم



قطار ضربه با دوره تناوب $T=2$ که به اندازه یک واحد به سمت راست شیفت پیدا کرده است،



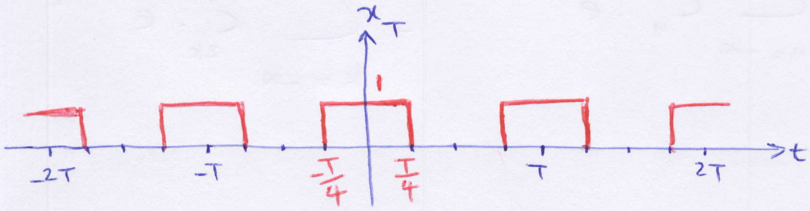
$(-1)^k *$ 

$0.5 = \frac{1}{T} \Rightarrow T = 2 \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$

$(-1)^k = e^{-jk\pi} \Rightarrow c_k = e^{-jk\pi} * 0.5 \rightsquigarrow t_0 = 1$

یادآوری $\Rightarrow$ $x(t - t_0) \xrightarrow{\text{سری فوریه}} e^{-jn\omega_0 t_0} \cdot c_n$

قبلاً با حل یک مثال به دست آوردیم که:

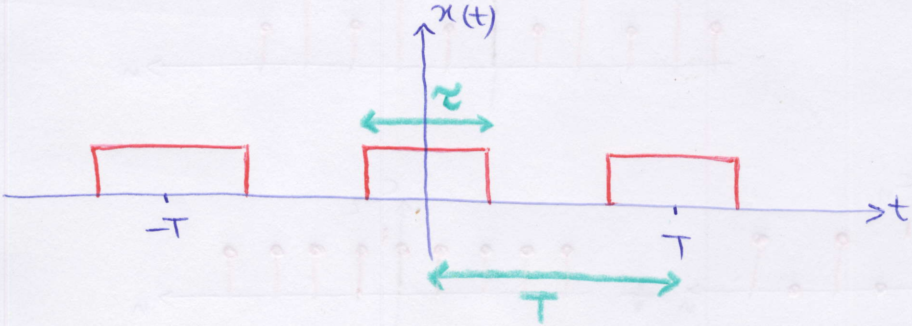


$$\Rightarrow c_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(n\pi)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

یادآوری $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

$$\Rightarrow \boxed{c_n = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)}$$

در حالت کلی می‌توان به راحتی نشان داد:



$$c_n = d\,\mathrm{sinc}(nd)$$

$$d = \frac{\tau}{T}$$