سه‌شنبه ۹۹/۳/۶

ادامهٔ تبدیل لاپلاس:

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) \qquad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \qquad X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} \cdot dt \qquad s = \sigma + j\omega$$

$$\Rightarrow \quad X(j\omega) = X(s)\Big|_{s=j\omega} \qquad X(s) = \mathcal{F}\left\{ e^{-\sigma t} \cdot x(t) \right\}$$

مثال:

$$e^{-at} \cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega + a} \quad ; \quad a > 0$$

تبدیل فوریهٔ این تابع، تنها برای مقادیر $a>0$ همگرا می‌شود.

$$e^{-at} \cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a} \quad ; \quad Re\{s\} > -a$$

در این مثال، اگر عدد a یک عدد مثبت باشد در اینصورت ناحیهٔ همگرایی تبدیل لاپلاس شامل محور $j\omega$ یعنی شامل حالت $\sigma = 0$ نیز خواهد بود در اینصورت اجازه داریم بنویسیم:

$$X(j\omega) = X(0 + j\omega) = \frac{1}{0 + j\omega + a} = \frac{1}{j\omega + a} \xrightarrow{\text{یعنی}} X(s)\Big|_{\sigma=0} = X(j\omega)$$

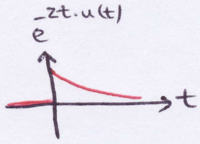
امّا اگر عدد a، صفر و یا منفی باشد، همچنان تبدیل لاپلاس وجود دارد در حالیکه تبدیل فوریه وجود ندارد.

$a=0$

$$\hookrightarrow \quad u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \qquad Re\{s\} > 0$$

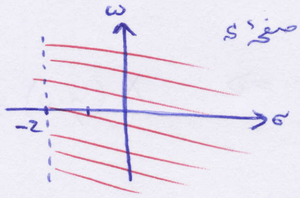
page 2

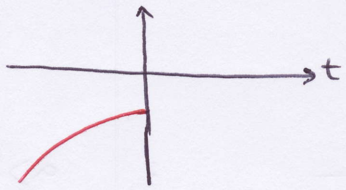
$$\begin{cases} e^{-at}.u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{1}{s+a} \quad ; \quad Re\{s\} > -a \\ \\ -e^{-at}.u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{1}{s+a} \quad \quad Re\{s\} < -a \end{cases}$$

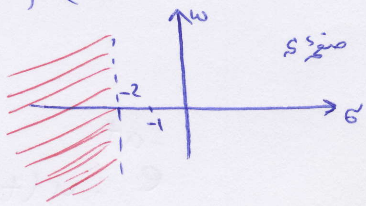


مثال:

$$\begin{cases} e^{-2t}.u(t) \longrightarrow \dfrac{1}{s+2} \quad ; \quad Re\{s\} > -2 \\ \\ -e^{-2t}.u(-t) \longrightarrow \dfrac{1}{s+2} \quad ; \quad Re\{s\} < -2 \end{cases}$$







مثال: $x(t) = 3\,e^{-2t}.u(t) - 2\,e^{-t}.u(t)$

$\Rightarrow \quad e^{-2t}.u(t) \longrightarrow \dfrac{1}{s+2} \qquad Re\{s\} > -2 \quad : ROC_1$

$\quad\quad e^{-t}.u(t) \longrightarrow \dfrac{1}{s+1} \qquad Re\{s\} > -1 \quad : ROC_2$

$\Rightarrow \quad X(s) = \dfrac{3}{s+2} + \dfrac{-2}{s+1} = \dfrac{s-1}{s^2+3s+2} \qquad \underbrace{Re\{s\} > -1}_{ROC_1 \cap ROC_2}$

page 3

مثال: $x(t) = e^{-2t}.u(t) + e^{-t}.\cos(3t).u(t)$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-2t}u(t) + \frac{1}{2}.e^{-t}\left[e^{j3t} + e^{-j3t}\right].u(t)$$

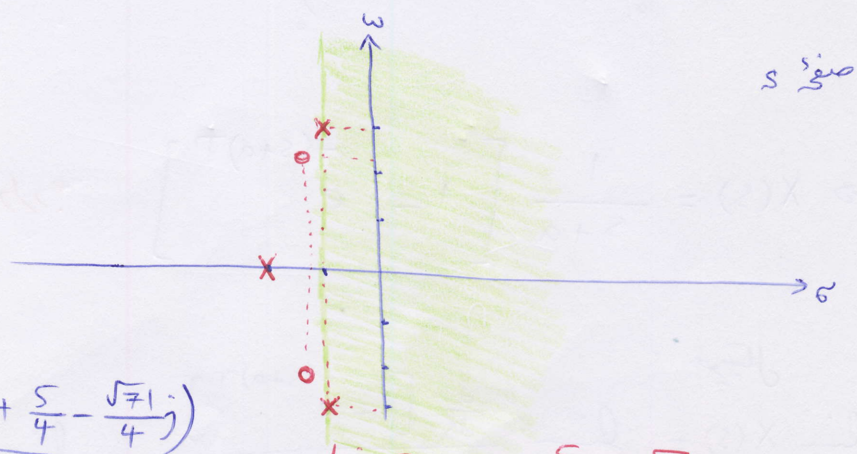
$$\Rightarrow x(t) = \underbrace{e^{-2t}.u(t)}_{ROC_1:\ Re\{s\}>-2} + \frac{1}{2}.\underbrace{e^{-(1-3j)t}.u(t)}_{ROC_2:\ Re\{s\}>-1} + \frac{1}{2}\underbrace{e^{-(1+3j)t}.u(t)}_{ROC_3:\ Re\{s\}>-1}$$

$$ROC_1 \cap ROC_2 \cap ROC_3 : \quad Re\{s\} > -1$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{s+(1-3j)} + \frac{\frac{1}{2}}{s+(1+3j)}$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{2s^2+5s+12}{(s+2)(s^2+2s+10)} \quad ; \quad Re\{s\} > -1$$

گویا $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ $\Rightarrow$ قطبها و صفرها



در این مثال:
یک صفر در بی نهایت داریم.

$$X(s) = \frac{2\left(s+\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{71}}{4}j\right)\left(s+\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{71}}{4}j\right)}{(s+2)(s+1-3j)(s+1+3j)}$$

صفرها $z_{1,2} = -\frac{5}{4} \mp \frac{\sqrt{71}}{4}j$

قطبها $P_1 = -2 \quad P_{2,3} = -1 \mp 3j$

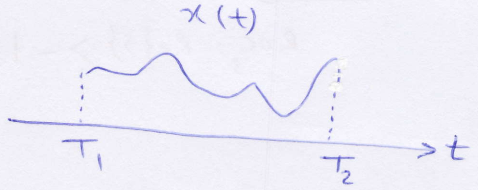
ROC

ناحیهٔ همگرایی برای تبدیل لاپلاس :

۱- ROC برای $X(s)$، متشکل از نوارهایی موازی محور $j\omega$ است.

2- برای تبدیل‌های لاپلاس گویا، ROC شامل هیچ قطبی نیست.

3- اگر $x(t)$ دارای طول محدود بوده و مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه ROC کل صفحهٔ s است.

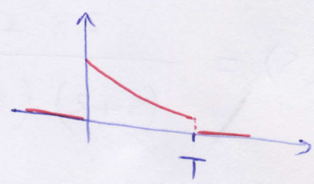


$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)|\, dt < \infty$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-st}.dt = \int_{T_1}^{T_2} x(t).e^{-st}.dt = \int_{T_1}^{T_2} x(t).e^{-\sigma t}.e^{-j\omega t}.dt$$

مثال :

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & ; \quad 0<t<T \\ 0 & ; \quad \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$



$$\Rightarrow X(s) = \int_0^T e^{-at}.e^{-st}.dt = \int_0^T e^{-(a+s)t}.dt = \left.\frac{e^{-(a+s).t}}{-(a+s)}\right]_0^T$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s+a}\left[1 - e^{-(s+a)T}\right]$$

آیا این تابع، در $s=-a$ یک قطب دارد؟

هوپیتال

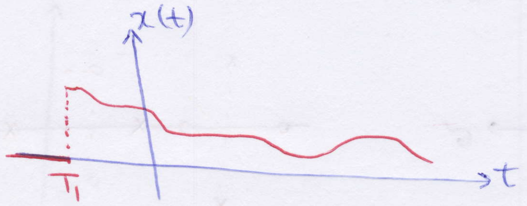
$$\lim_{s\to -a} X(s) = \lim_{s\to -a} \frac{\frac{d}{ds}\left[1-e^{-(s+a)T}\right]}{\frac{d}{ds}(s+a)} = \lim_{s\to -a} T.e^{-aT}.e^{-sT} = T$$

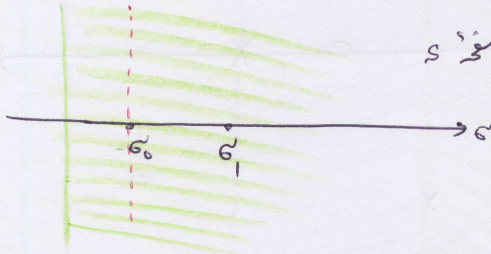
خیر، این تابع در $s=-a$، قطبی ندارد. این تابع در هیچ جا قطبی ندارد.

page5

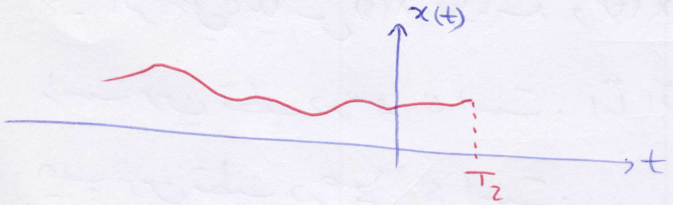
4- اگر x(t) راست سو باشد و همچنین خط $Re\{s\}=\sigma_0$ جزو ROC باشد، آنگاه تمامی مقادیر s که برای آنها داشته باشیم $Re\{s\}>\sigma_0$ نیز جزو ROC خواهند بود.

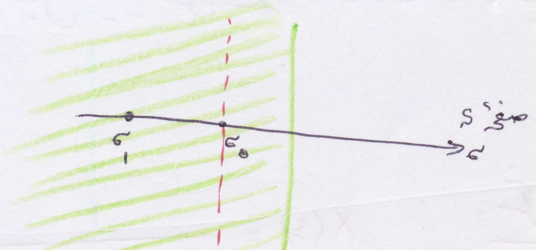
به عبارت دیگر: برای سیگنال راست سوی x(t) ، ROC یک نیم صفحهٔ راست خواهد بود.



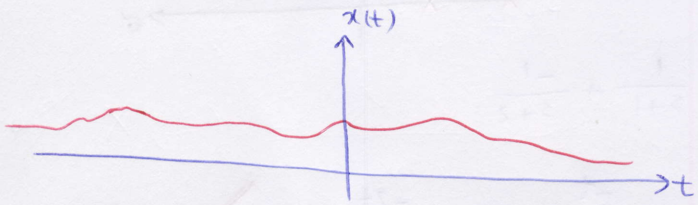


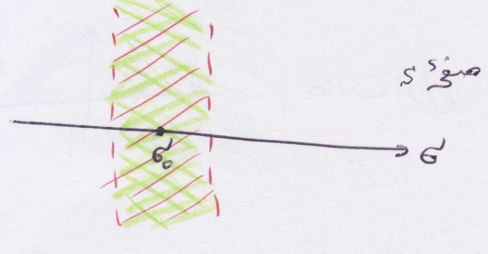
5- اگر x(t) چپ سو باشد و همینطور خط $Re\{s\}=\sigma_0$ جزو ROC آن باشد، آنگاه تمامی مقادیر s که برای آنها داشته باشیم $Re\{s\}<\sigma_0$ نیز، در ROC خواهند بود. به عبارت دیگر، برای یک سیگنال چپ سوی x(t) ، ROC یک نیم صفحهٔ چپ خواهد بود.



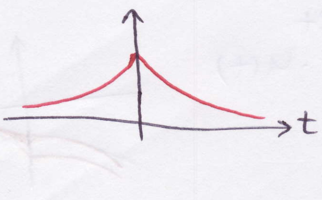


6- اگر سیگنال x(t) ، دوسو باشد و اگر خط $Re\{s\}=\sigma_0$ نیز در ROC آن قرار گرفته باشد در اینصورت ROC متشکل از نواری در صفحهٔ s خواهد بود که شامل خط $Re\{s\}=\sigma_0$ می باشد.





مثال: $x(t)=e^{-2|t|}$

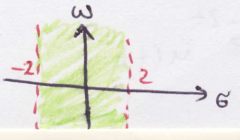


$$\Rightarrow x(t)=e^{-2|t|}=e^{2t}.u(-t)+e^{-2t}.u(t)$$

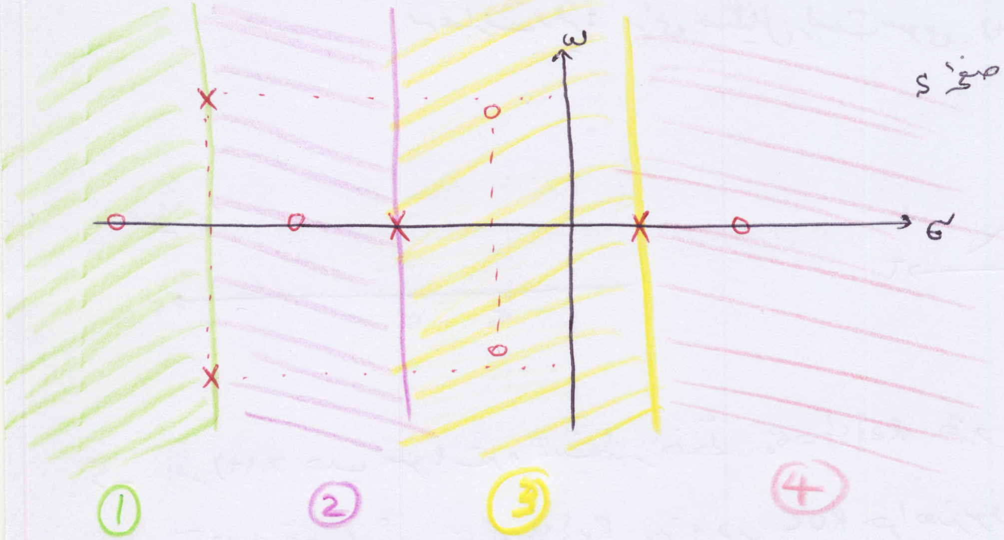
$$e^{2t}.u(-t)\longrightarrow\frac{-1}{s-2}\ ;\quad Re\{s\}<2$$

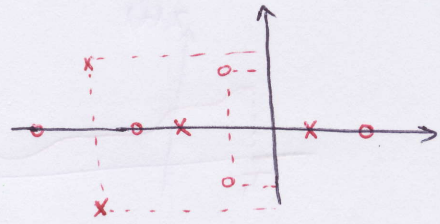
$$e^{-2t}.u(t)\longrightarrow\frac{1}{s+2}\ ;\quad Re\{s\}>-2$$

$$\Rightarrow X(s)=\frac{-4}{s^2-4}$$



7- اگر تبدیل لاپلاس $X(s)$ مربوط به سیگنال $x(t)$، گویا باشد، آنگاه ROC آن یا به وسیلهٔ قطبها محدود می‌شود و یا آنکه تا بی‌نهایت گسترش می‌یابد. به علاوه، ROC هیچ قطبی از $X(s)$ را در بر ندارد.

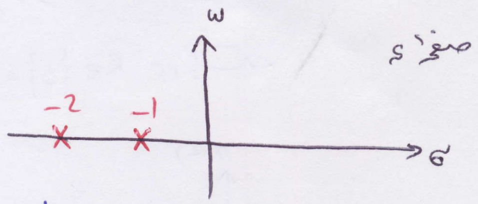




8- اگر تبدیل لاپلاس $X(s)$ گویا باشد و $x(t)$ نیز یک سیگنال راست سو باشد، آنگاه ROC ناحیهٔ سمت راست راست‌ترین قطب در صفحهٔ s است. اما اگر $x(t)$ یک سیگنال چپ سو باشد، آنگاه ROC ناحیهٔ سمت چپ چپ‌ترین قطب در صفحهٔ s است.

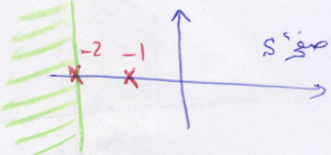
مثال: $X(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \Rightarrow x(t) = ?$

$\Rightarrow$ دو تا قطب داریم $P_1 = -1 \quad P_2 = -2$

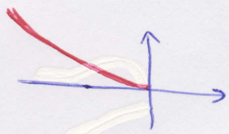


$X(s) = \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{-1}{s+2}$

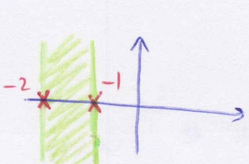
حالت اول



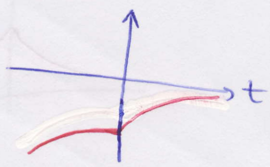
$x(t) = -e^{-t}\cdot u(-t) + e^{-2t}u(-t)$



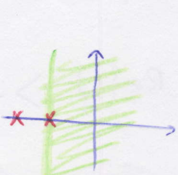
حالت دوم



$x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}\cdot u(t)$



حالت سوم



$x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$