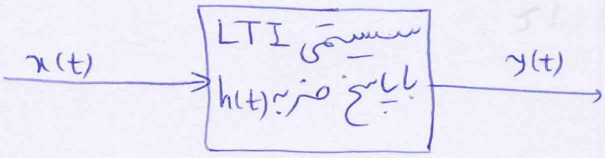
ششمین جلسه آنلاین درس سیگنال 99.1.26

به سادگی می‌توان ثابت کرد که در یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$، اگر بخواهیم پاسخ یا همان خروجی $y(t)$ به ازای ورودی دلخواه $x(t)$ را بیابیم، کافیست ورودی را در پاسخ ضربه convolve کنیم. یعنی

$$y(t) = h(t) * x(t)$$
$$= x(t) * h(t)$$



یادآوری: $x(t) * \delta(t) = x(t)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).\delta(t-\tau).d\tau = x(t)$$

ما می‌دانیم که $y(t)$، پاسخ سیستم به ورودی $x(t)$ است و با به صورت نمادین می‌توان نوشت:

$$y(t) = T\{x(t)\}$$

از طرفی هم می‌دانیم که $h(t)$، پاسخ سیستم به ورودی ضربه است یعنی: $h(t) = T\{\delta(t)\}$

چون سیستم ما LTI است پس تغییرناپذیر با زمان است یعنی هر شیفتی در ورودی منجر به همان شیفت در خروجی خواهد شد یعنی داریم:

$$h(t-\tau) = T\{\delta(t-\tau)\}$$

و حالا اثبات

$$y(t) = T\{x(t)\} = T\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).\delta(t-\tau).d\tau\right\}$$

و حالا با استفاده از خاصیت خطی بودن سیستم و خطی بودن تبدیل T

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).T\{\delta(t-\tau)\}.d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau).d\tau = x(t) * h(t)$$

پس در سیستم‌ها LTI داریم:

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t)}$$

می‌توانید روابط زیر را به سادگی اثبات کنید:

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,.\,d\tau$$

$$f(t) * u(t-t_0) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau - t_0)\,.\,d\tau$$

$$f(t) * \delta'(t) = f'(t)$$

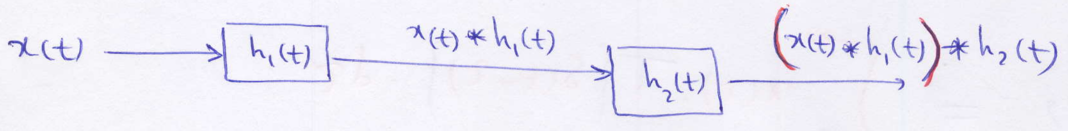
$$f(t) * \delta'(t-t_0) = f'(t-t_0)$$

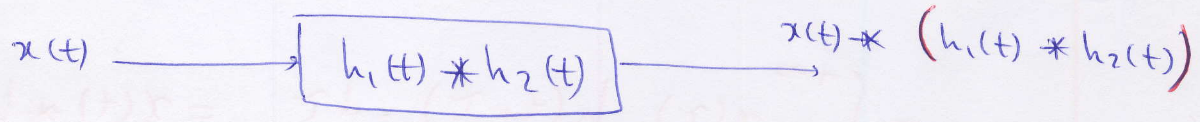
خواص کانولوشن: جابجائی پذیری - شرکت پذیری - پخش پذیری

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \longrightarrow$$ خاصیت جابجائی

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) \longrightarrow$$ خاصیت شرکت پذیری

تعبیر دیگری از خاصیت شرکت پذیری:





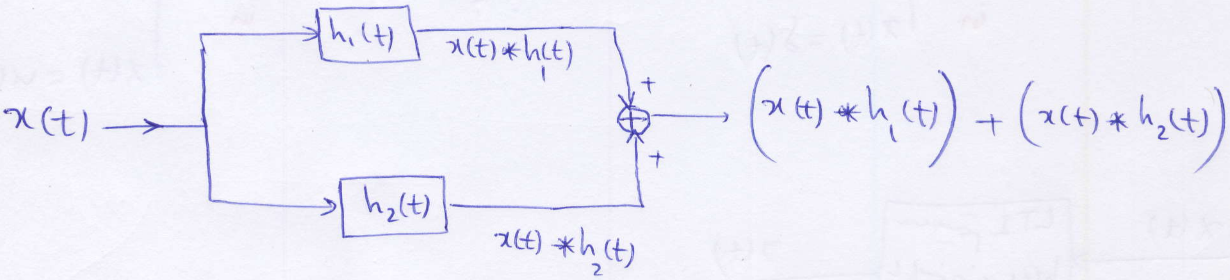
پس پاسخ ضربه یک سیستم LTI که از دو سیستم LTI سری تشکیل شده است، برابر است

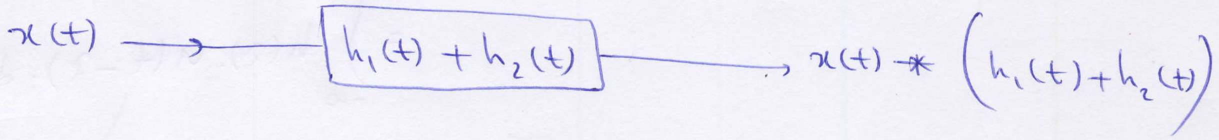
با کانولوشن پاسخ ضربه های دو سیستم سری شده.

خاصیت پخش پذیری:

$$x(t) * \left[h_1(t) + h_2(t)\right] = \left[x(t) * h_1(t)\right] + \left[x(t) * h_2(t)\right]$$

تعبیر دیگر خاصیت پخش پذیری در مورد سیستم های LTI:





یعنی وقتی دو تا سیستم، موازی می شوند، پاسخ ضربه های آنها جمع می شود.

در صفحه قبل دیدیم که وقتی دو تا سیستم سری می شوند، پاسخ ضربه های آنها کانوالو می شوند.

و اما همبستگی متقابل (cross correlation) بین دو تا سیگنال $x(t)$ و $h(t)$ بصورت زیر تعریف می شود

$$R_{xh}(t) \triangleq x(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) . h(\tau - t) . d\tau$$

و خودبستگی (auto-correlation) سیگنال $x(t)$ هم بصورت زیر تعریف می شود:

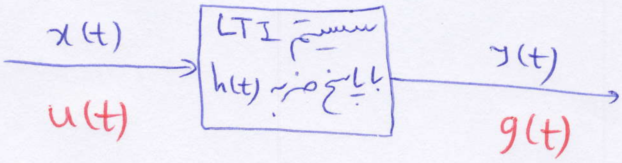
$$R_{xx}(t) \triangleq x(t) \star x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) . x(\tau - t) . d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau + t) . x(\tau) . d\tau$$

رابطه بین پاسخ ضربه و پاسخ پله در سیستم های LTI:

پاسخ ضربه $h(t) = y_{in}\Big|_{x(t)=\delta(t)}$

پاسخ پله $g(t) = y_{in}(t)\Big|_{x(t)=u(t)}$



$$g(t) = u(t) * h(t) = h(t) * u(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau).\,u(t-\tau).\,d\tau$$

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \tau<t \\ 0 & \tau>t \end{cases}$$

$$\boxed{g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau).\,d\tau}$$

حال اگر سیستم LTI علّی هم باشد

$$\begin{cases} g(t) = \int_{0}^{t} h(\tau).\,d\tau \\ h(t) = \dfrac{d}{dt}\, g(t) \end{cases}$$

فرم دیگر انتگرال کانولوشن:

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) = x'(t) * g(t)}$$

خواص سیستم‌ها LTI :

اگر خواص یک سیستم LTI را می‌توان از روی پاسخ ضربه آن یعنی $h(t)$، تشخیص داد.

۱- حافظه : می‌دانیم که در سیستم‌های LTI داریم:

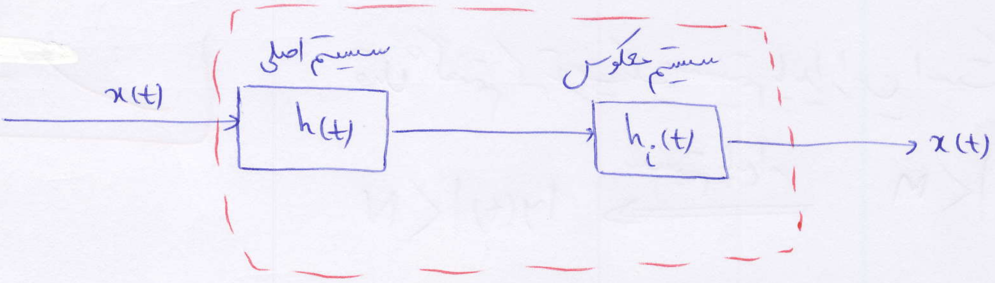
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) . h(t-\tau) . d\tau$$

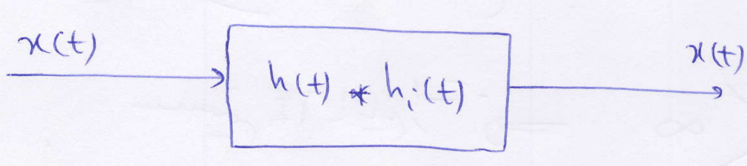
برای اینکه یک سیستم LTI، بدون حافظه باشد باید خروجی فقط تابع ورودی حال حاضر باشد یعنی

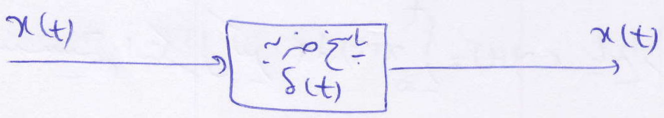
$$y(t) = k x(t)$$

بنابراین $h(t) = k\delta(t) \rightarrow$ تنها در صورتیکه پاسخ ضربه، خود ضربه باشد سیستم بدون حافظه است.

۲- عکس پذیری







اگر سیستم LTI معکوس پذیر باشد خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \quad h(t) * h_i(t) = \delta(t)$$

پس معادلهٔ طراحی سیستم معکوس این است $h(t) * h_i(t) = \delta(t)$

حلّ این معادله در حوزهٔ فرکانس راحت تر است.

$$H(j\omega) \cdot H_i(j\omega) = 1$$ فوریه

$$H(S) \cdot H_i(S) = 1$$ لاپلاس

3- علّی بودن:

اگر پاسخ ضربه یک سیستم LTI علّی باشد، سیستم علّی خواهد بود.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \underline{h(t-\tau)} \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau$$

اگر علّی باشد برای $t<\tau$ صفر خواهد بود.

4- پایداری:

قبلاً گفتیم که تعریف یک سیستم پایدار این است که اگر

$$|x(t)| < M \xRightarrow{\text{سیستم پایدار}} |y(t)| < N$$

در مورد سیستم‌های LTI، اگر پاسخ ضربه مطلقاً انتگرال پذیر باشد، سیستم پایدار است یعنی:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| \cdot dt < \infty \implies$$ سیستم LTI پایدار است.

مثلاً آیا سیستم انتگرال گیر $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) \cdot d\tau$، پایدار است؟ خیر زیرا $h(t)$ مطلقاً انتگرال پذیر نیست.

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) \cdot d\tau = u(t) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot dt = \int_{0}^{+\infty} dt \longrightarrow \infty$$

سیستم ناپایدار است.

پیداکردن پاسخ ضربه در سیستم‌های دینامیکی: یعنی سیستم‌هایی که با معادلات دیفرانسیل توصیف می‌شوند.

1- می‌توان مستقیماً از روی معادله دیفرانسیل، پاسخ ضربه را یافت.

2- از روی معادله دیفرانسیل، پاسخ پله $g(t)$ را می‌یابیم و سپس خواهیم داشت: $h(t) = \frac{d}{dt}g(t)$

3- با استفاده از تبدیل‌ها.

اشکال مختلف نوشتن مشتق‌ها: $y''(t)$, $\ddot{y}(t)$, $\frac{d^2y(t)}{dt^2}$, $y^{(2)}(t)$, $D^2y(t)$

با این حساب، معادله دیفرانسیل توصیف کننده سیستم دینامیکی بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \left(D^n + b_{n-1}D^{n-1} + b_{n-2}D^{n-2} + \cdots + b_2D^2 + b_1D + b_0\right)\left[y(t)\right] = x(t) \\ y(0) = y^{(1)}(0) = y^{(2)}(0) = \cdots = y^{(n-2)}(0) = y^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} L\left[y(t)\right] = x(t) \\ y(0) , y^{(1)}(0) , y^{(2)}(0) , \ldots , y^{(n-2)}(0) , y^{(n-1)}(0) \end{cases}$$

معادله دیفرانسیل داده شده اگر این باشد

دراینصورت با حل این معادله، می‌توانیم پاسخ ضربه را بیابیم.

$$\begin{cases} L\left[h(t)\right] = 0 \\ h(0) = h^{(1)}(0) = h^{(2)}(0) = \cdots = h^{(n-2)}(0) = 0 \;\&\; h^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases}$$

مثال: معادله دیفرانسیل توصیف کننده یک سیستم دینامیکی بصورت زیر است:

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = x(t) \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

حال پاسخ ضربه این سیستم را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} \ddot{h} + 2\dot{h} + 2h = 0 \\ h(0) = 0 \quad h'(0) = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} s^2 + 2s + 2 = 0 \quad s_{1,2} = -1 \mp j$$

$$\Rightarrow h(t) = e^{-t}(A\cos t + B\sin t)$$

وحالا شرایط اولیه، چون $h(0) = 0$ است پس $A = 0$ می باشد و داریم

$$\left.\begin{matrix} h(t) = B e^{-t} \sin t \\ h'(0) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B = 1$$

$$\Rightarrow h(t) = e^{-t} \sin t \,.\, u(t)$$

خیلی مهمه

مثال: $\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = \dot{x} + 5x \Longrightarrow h(t) = ?$

دراین شرایط نخست پاسخ ضربه معادله $\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = x$ را خواهیم یافت و آن را $\hat{h}(t)$ می نامیم. حال پاسخ ضربه معادله اصلی این خواهد بود:

$$(\hat{h})' + 5(\hat{h})$$