جلسه 99.2.30

تبدیل لاپلاس: The Laplace Transform

$$\xrightarrow[e^{st}]{x(t)} \boxed{\begin{array}{c}\text{LTI سیستم} \\ \text{با پاسخ ضربه } h(t)\end{array}} \xrightarrow{y(t)}$$

$$x(t) = e^{st} \Rightarrow y(t) = ?$$

$$y(t) = h(t) * e^{st} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\, h(\tau) . d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s(t-\tau)} . h(\tau) . d\tau$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} . e^{-s\tau} . h(\tau) . d\tau = \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau} . h(\tau) . d\tau\right]}_{H(s)} . e^{st}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = e^{st} \xrightarrow{\text{LTI سیستم}} y(t) = H(s) . e^{st}$$

$$x(t) = e^{j\omega t} \longrightarrow y(t) = H(j\omega) . e^{j\omega t}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) . e^{-st} . dt \quad ; \quad S = \sigma + j\omega$$ فرکانس مختلط

تبدیل لاپلاس : $X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) . e^{-st} . dt$ $\qquad X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$

$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$

عکس تبدیل لاپلاس : $x(t) = \dfrac{1}{2\pi j} \displaystyle\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) . e^{+st} . ds$

page 2

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)=e^{-\alpha t}.u(t)$ و ناحیه همگرایی آن را به دست آورید.

$$x(t)=e^{-\alpha t}.u(t) \Rightarrow X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-st}.dt$$

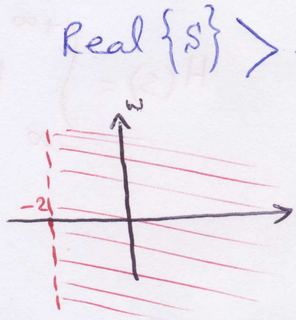
$$\Rightarrow X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}.u(t).e^{-st}.dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha+s)t}.dt$$

$$\Rightarrow X(s)=\left.\frac{e^{-(\alpha+s)t}}{-(\alpha+s)}\right]_{0}^{\infty}=\left(\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-(\alpha+s)t}}{-(\alpha+s)}\right)+\frac{1}{\alpha+s}$$

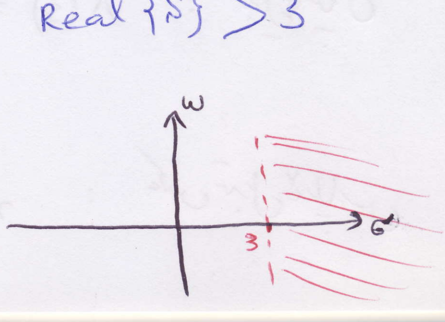
$$\text{if} \quad \mathrm{Real}\{\alpha+s\}>0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{e^{-(\alpha+s)t}}{-(\alpha+s)}=0$$

$$\Rightarrow X(s)=\frac{1}{\alpha+s} \quad ; \quad \mathrm{Real}\{\alpha+s\}>0$$

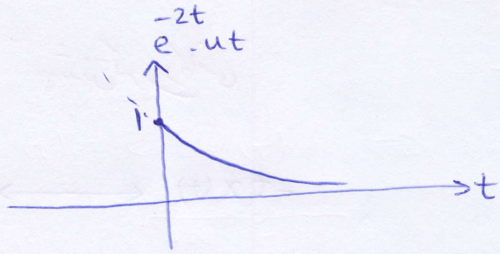
مثال: $x(t)=e^{-2t}.u(t) \longrightarrow X(s)=\frac{1}{s+2}$ و $\mathrm{Real}\{s\}>-2$

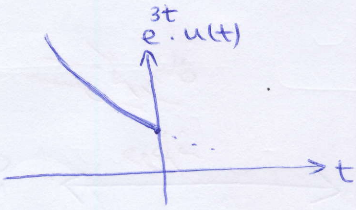


$x(t)=e^{3t}.u(t) \longrightarrow X(s)=\frac{1}{s-3}$ و $\mathrm{Real}\{s\}>3$



اگر ناحیه همگرایی یک سیگنال، محور $j\omega$ را در بر بگیرد، آن سیگنال پایدار خواهد بود و در غیر اینصورت ناپایدار است.





مثال:

$$x(t) = e^{-t}.u(t) + 2e^{-2t}.u(t)$$

$$\Rightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

و $\mathrm{Real}\{s\} = ROC_1 \cap ROC_2 = \mathrm{Re}\{s\} > 1$

$ROC_1: \ \mathrm{Real}\{s\} > -1$

$ROC_2: \ \mathrm{Real}\{s\} > -2$

تبدیل لاپلاس یکطرفه:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t).e^{-st}.dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s).e^{st}.ds$$

برای سیگنالهای علّی، تبدیل لاپلاس یکطرفه و دوطرفه به نتایج یکسانی منجر می‌شوند.

$$x(t) = e^{-\alpha t}.u(t) \Rightarrow X(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha t}.u(t).e^{-st}.dt = \frac{1}{s+\alpha}$$

خواص تبدیل لاپلاس:

$$x(t) \longleftrightarrow X(s)$$

مشتق‌گیری زمانی

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\text{دوطرفه}} sX(s)$$

مشتق‌گیری فرکانسی

$$-t\,x(t) \longleftrightarrow \frac{dX(s)}{ds}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\text{یکطرفه}} sX(s) - x(0^-)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{\text{دوطرفه}} s^2X(s)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{\text{یکطرفه}} s^2X(s) - s\,x(0^-) - x'(0^-)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\alpha).\,d\alpha \xleftrightarrow{\text{دوطرفه}} \frac{X(s)}{s}$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\alpha).\,d\alpha \xleftrightarrow{\text{یکطرفه}} \frac{X(s)}{s} + \frac{x^{-1}(0^-)}{s}$$

عدد ثابت $\quad x^{-1}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0^-} x(\alpha).\,d\alpha$

خطی بودن :

$$ax_1(t)+bx_2(t) \longleftrightarrow aX_1(s)+bX_2(s)$$

ناحیه همگرایی، اشتراک نواحی همگرایی X_1 و X_2 خواهد بود.

انتقال زمانی :

$$x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-st_0}X(s)$$

ناحیه همگرایی ثابت خواهد ماند.

انتقال در حوزه s :

$$e^{s_0t}\cdot x(t) \longleftrightarrow X(s-s_0)$$

ناحیه همگرایی به اندازه $Real\{s_0\}$ انتقال می یابد.

تغییر مقیاس زمانی :

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right)$$

ROC: $\frac{R}{a}$

مزدوج گیری :

$$x^*(t) \longleftrightarrow X^*(s^*)$$

ناحیه همگرایی تغییری نخواهد کرد.

کانولوشن :

$$x_1(t)*x_2(t) \longleftrightarrow X_1(s)\cdot X_2(s)$$

ناحیه همگرایی، اشتراک نواحی همگرایی X_1 و X_2 خواهد بود.

قضایای مقدار اولیه و نهایی :

$$\begin{cases} x(0^+) = \lim\limits_{s \to \infty} sX(s) \\ \\ x(\infty) = \lim\limits_{s \to 0} sX(s) \end{cases}$$