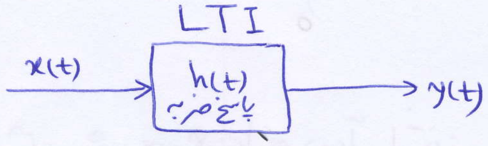
درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها، دومین جلسه‌ی آنلاین، دوشنبه 99.1.25

در سیستم‌های LTI (خطی و تغییرناپذیر با زمان)، اگر پاسخ ضربه $h(t)$ را داشته باشیم، می‌توانیم خروجی $y(t)$ به ازای هر ورودی دلخواه $x(t)$ را با استفاده از انتگرال کانولوشن بیابیم.

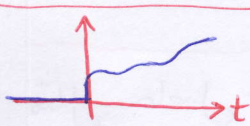
$$h(t) = y_{in}(t)\Big|_{x(t)=\delta(t)}$$

که یعنی خروجی با حالت اولیه صفر

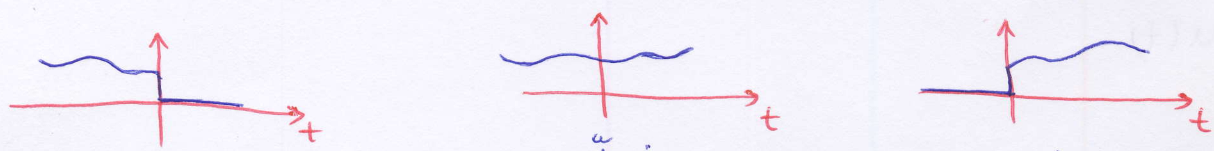


$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) . h(t-\tau) . d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) . x(t-\tau) . d\tau$$

فرم‌های مختلف کانولوشن:



یادآوری از گذشته: سیگنال علّی، سیگنالی است که به ازای مقادیر منفی t، صفر است:



حالت اول: اگر x و h هر دو غیر علّی باشند:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) . h(t-\tau) . d\tau$$

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) . x(t-\tau) . d\tau$$

حالت دوم: اگر x علّی و h غیر علّی باشد:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) . h(t-\tau) . d\tau = \int_{0}^{+\infty} x(\tau) . h(t-\tau) . d\tau$$

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) . x(t-\tau) . d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) . x(t-\tau) . d\tau$$

حالت سوم: اگر x غیرعلّی و h علّی باشد:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau).d\tau=\int_{-\infty}^{t} x(\tau).h(t-\tau).d\tau$$

$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau).x(t-\tau).d\tau=\int_{0}^{+\infty} h(\tau).x(t-\tau).d\tau$$

حالت چهارم: هم x و هم h هر دو علّی باشند:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau).d\tau=\int_{0}^{t} x(\tau).h(t-\tau).d\tau$$

$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau).x(t-\tau).d\tau=\int_{0}^{t} h(\tau).x(t-\tau).d\tau$$

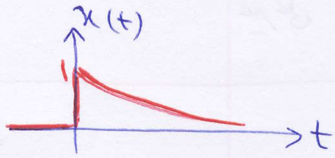
مثال: حاصل $x(t)*h(t)$ را برای سیگنال‌های زیر محاسبه کنید.

$x(t)=e^{-at}.u(t) \quad ; a>0$

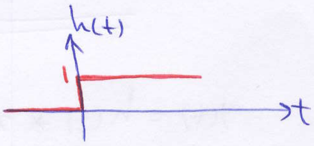
$h(t)=u(t)$

حل:

$x(t)=e^{-at}.u(t)$



$h(t)=u(t)$



$$u(\tau)=\begin{cases}1 & ; \tau\geq 0\\ 0 & ; \tau<0\end{cases}$$

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau).d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\tau}.u(\tau).u(t-\tau)\,d\tau$$

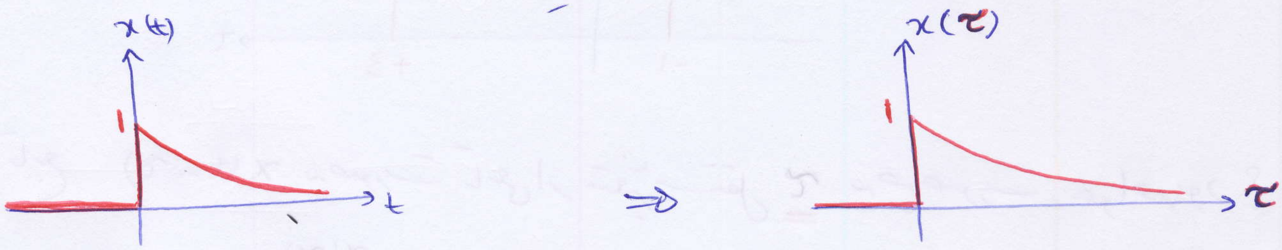
$$=\int_{0}^{+\infty} e^{-a\tau}.u(t-\tau).d\tau=\int_{0}^{t} e^{-a\tau}.d\tau=\frac{e^{-a\tau}}{-a}\Big]_{0}^{t}=\boxed{\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right) \quad ; t>0}$$

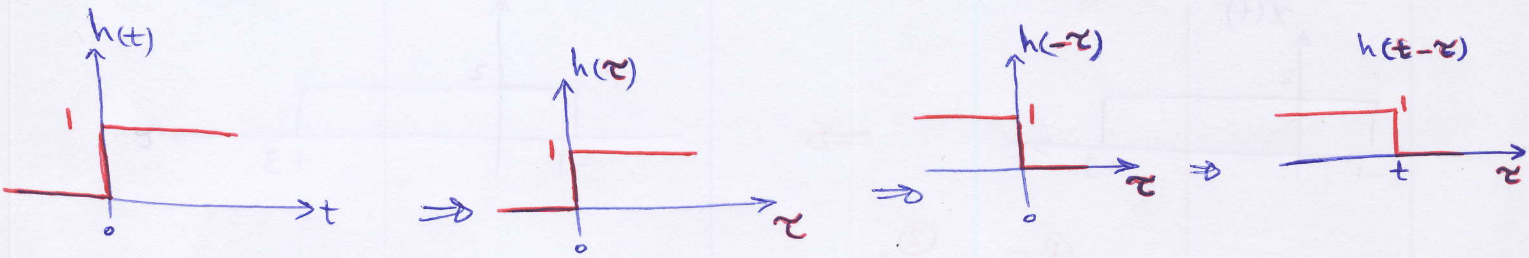
$$u(t-\tau)=\begin{cases}1 & ; \tau<t\\ 0 & ; \tau>t\end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right).u(t)$$

کانولوشن نیمه ترسیمی:

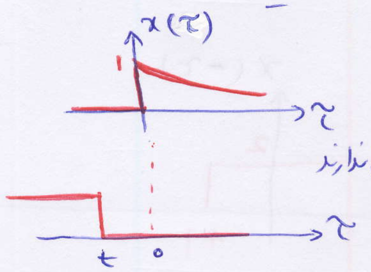
حل مثال ساده قبلی با استفاده از روش نیمه ترسیمی:





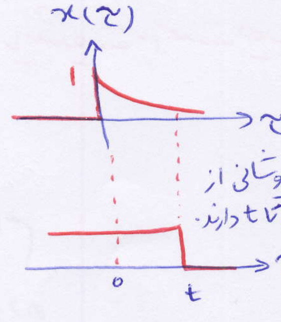
یعنی از روی $x(t)$، سیگنال $x(\tau)$ را یافتیم. از روی $h(t)$ هم سیگنال $h(t-\tau)$ را یافتیم (البته با دقت به اینکه در اینجا، τ متغیر مستقل است و t فقط یک پارامتر است). حال $x(\tau)$ و $h(t-\tau)$ را زیر هم رسم می‌کنیم و حاصلضرب آنها را یابیم و انتگرال زیر سطح این حاصلضرب را محاسبه می‌کنیم.

حالت اول ⟵ اگر $t<0$ ⟸



هم‌پوشانی ندارند ⟸ $\boxed{y(t)=0}$

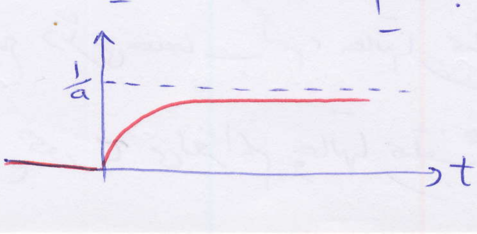
حالت دوم ⟵ $t>0$ ⟵



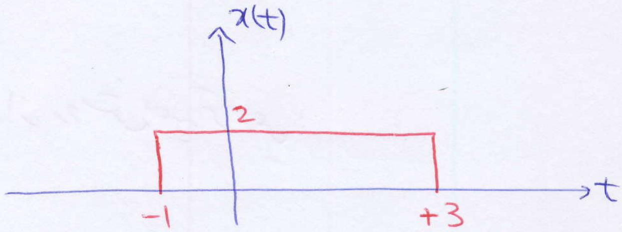
هم‌پوشانی از صفر تا t دارند ⟸ $y(t)=\int_0^t 1 * e^{-a\tau}\cdot d\tau = \frac{1}{a}(1-e^{-at})$

در واقع تابع $h(t-\tau)$ را می‌لغزانیم و حالت‌های مختلف هم‌پوشانی $x(\tau)$ و $h(t-\tau)$ را بررسی می‌کنیم و برای هر یک $y(t)$ را محاسبه می‌کنیم. جواب نهایی $y(t)$:

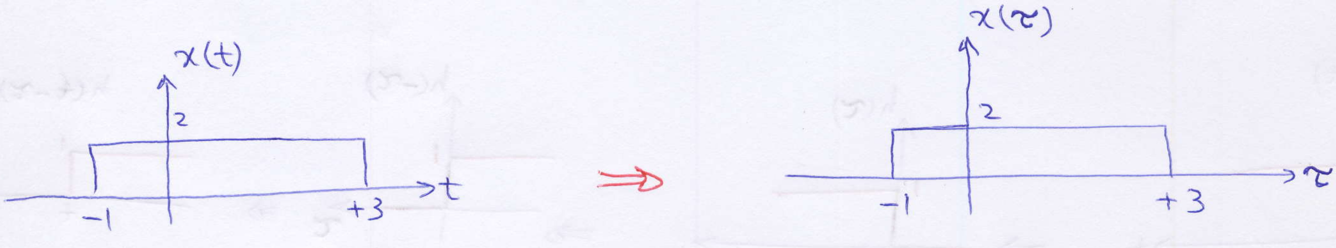
$$y(t)=\begin{cases}\frac{1}{a}(1-e^{-at}) & ; \ t>0\\ 0 & ; \ t<0\end{cases}$$



به عنوان مثال اگر سیگنال $x(t)$ به صورت تابعی از متغیر مستقل t به صورت زیر باشد:



آنگاه تابع $x(t-\tau)$ به صورت تابعی از متغیر مستقل τ به چه صورت خواهد بود؟

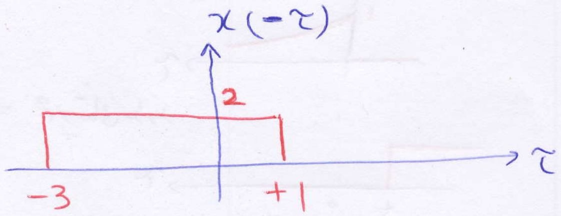


و اما $x(t-\tau)$ چه خواهد بود؟

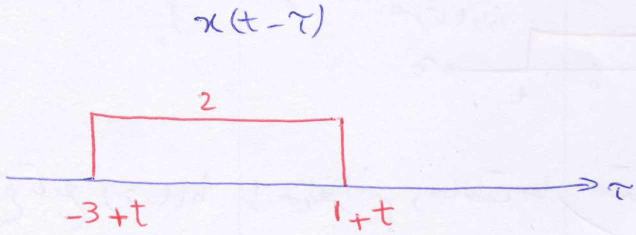
① انعکاس ② شیفت

$$x(t-\tau) = x\left(-(\tau-t)\right)$$

یعنی اول، $x(\tau)$ را نسبت به محور عمودی، انعکاس می دهیم و در مرحلهٔ دوم آن را به اندازهٔ t در طول محور τ شیفت می دهیم.



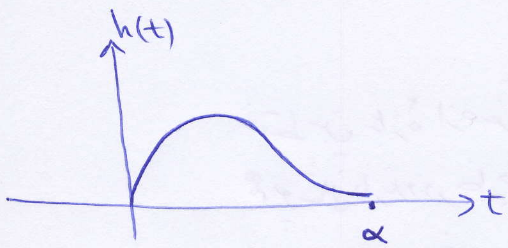
حالا همین را به اندازهٔ t شیفت می دهیم. اما نمی دانیم t چند است نمی دانیم آیا مثبت است و یا منفی و آیا شیفت به سمت چپ و یا راست خواهد بود.

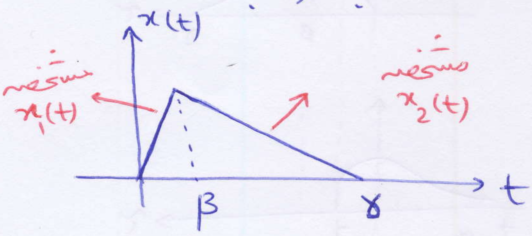


به این دلیل محور عمودی را نکشیده ام که نمی دانم t مثبت بوده و یا منفی بوده و نمی دانم سیگنال به سمت راست شیفت پیدا کرده و یا به سمت چپ.

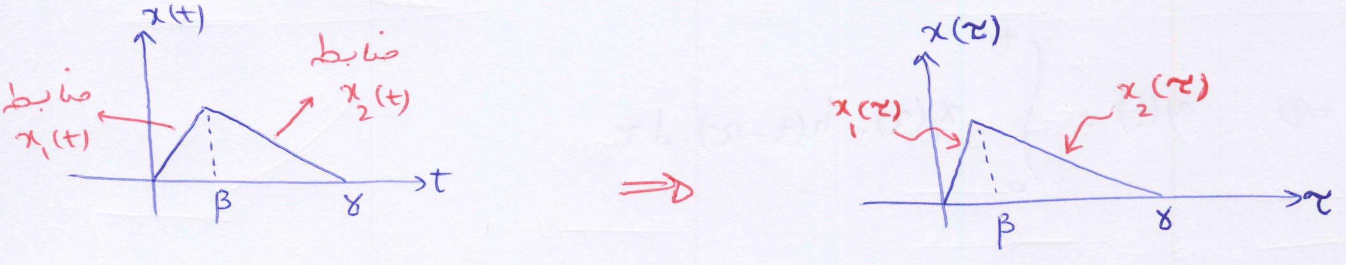
حال اگر بخواهم حاصلضرب این تابع را با هر تابع دیگری حساب کنم، حالتهای مختلف t را باید درنظر بگیرم. به عبارتی این سیگنال را در طول محور τ می لغزانم و حالتهای مختلف هم پوشانی را حساب می کنم

یک مثال کلی: اگر $x(t)$ و $h(t)$ به فرم زیر باشند، انتگرال کانولوشن آنها را باید به چه صورت محاسبه نمود؟

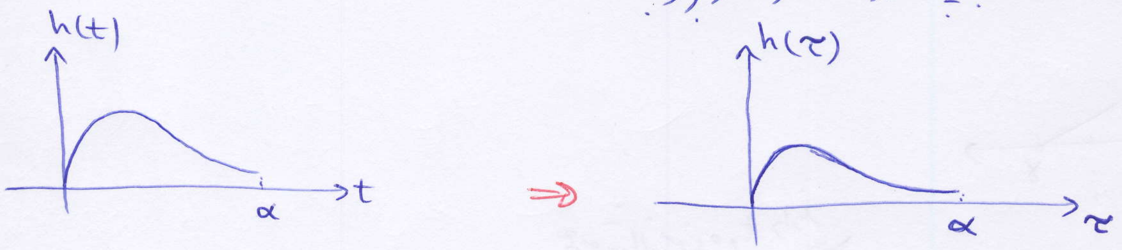


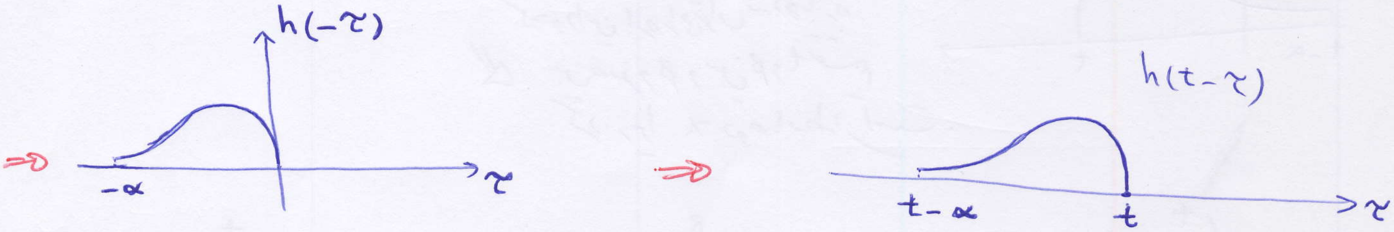


حل:



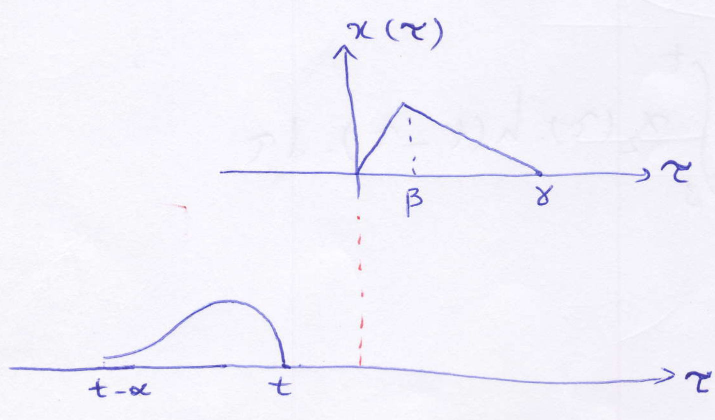
این از $x(\tau)$. اما $h(t-\tau)$ به چه صورت خواهد بود؟





این هم از $h(t-\tau)$. حال به ازای مقادیر مختلف t، حاصلضرب $x(\tau)$ و $h(t-\tau)$ را محاسبه و انتگرال می‌گیریم.

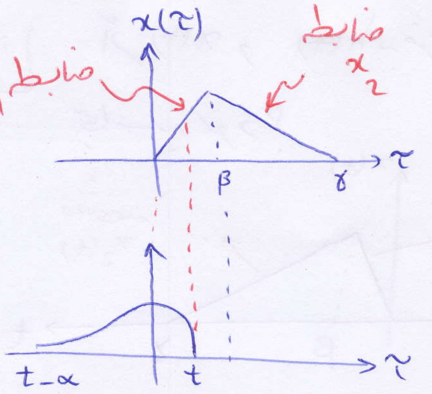
حالت اول: $t<0$



⇐ هم پوشانی ندارند ⇐ حاصلضرب آنها صفر می‌شود.

$$y(t) = 0$$

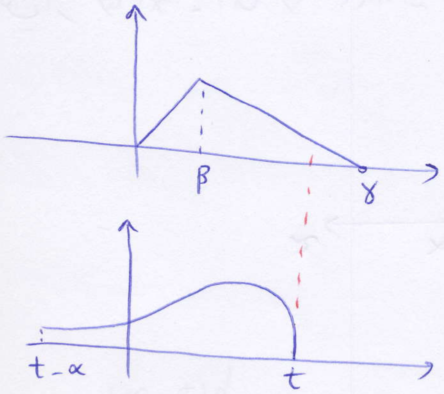
حالت دوم: اگر $\beta > t > 0$ باشد:



⇐ فقط بین بازهٔ از صفر تا t، هم پوشانی دارند و در خارج این بازه، حاصلضرب سیگنال‌ها صفر می‌شود.

$$\Rightarrow \quad y(t) = \int_0^t x_1(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau$$

حالت سوم: اگر $\beta < t < \gamma$ باشد



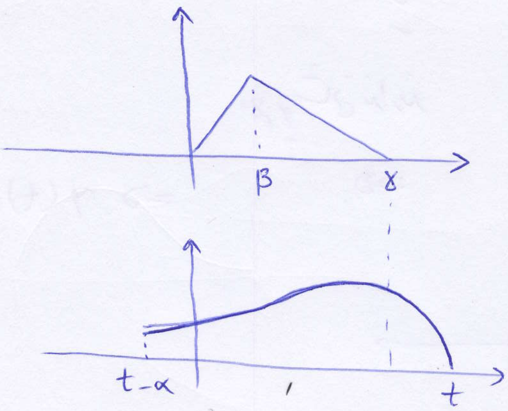
⇐ هم پوشانی بین ۰ و t دارند که خود این بازه را می‌توان به دو بازه بین صفر و β و بین β و t تقسیم کرد. زیرا x دو ضابطه‌ای است.

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)\, h(t-\tau) \cdot d\tau = \int_0^\beta x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau + \int_\beta^t x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau$$

$$= \int_0^\beta x_1(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau + \int_\beta^t x_2(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau$$

page 7

حالت چهارم: $t>\gamma$ باشد اما $t-\alpha<0$ باشد.
یعنی $\gamma<t<\alpha$ باشد.

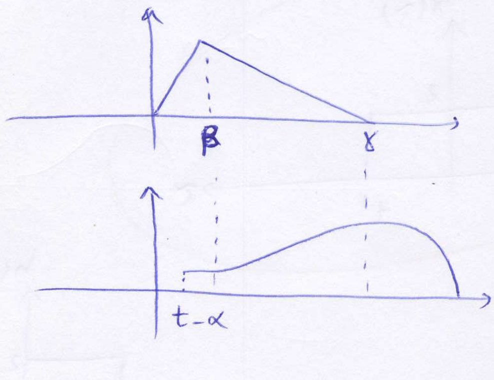


هم‌پوشانی بین ۰ و γ داریم $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y(t)=\int_0^{\gamma} x(\tau).h(t-\tau).d\tau=\int_0^{\beta} x(\tau).h(t-\tau).d\tau+\int_{\beta}^{\gamma} x(\tau).h(t-\tau).d\tau$$

$$=\int_0^{\beta} x_1(\tau).h(t-\tau).d\tau+\int_{\beta}^{\gamma} x_2(\tau).h(t-\tau).d\tau$$

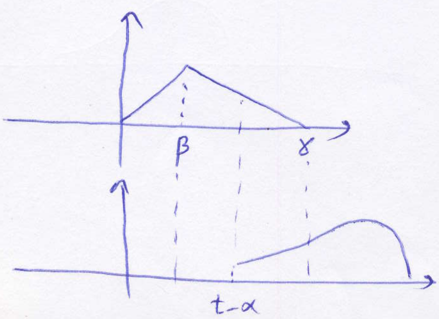
حالت پنجم: $0<t-\alpha<\beta$ باشد یعنی $\alpha<t<\alpha+\beta$ باشد.



هم‌پوشانی بین $t-\alpha$ تا γ خواهد بود $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y(t)=\int_{t-\alpha}^{\gamma} x(\tau)\overbrace{\cdot}^{h(t-\tau)}d\tau=\int_{t-\alpha}^{\beta} x_1(\tau)h(t-\tau).d\tau+\int_{\beta}^{\gamma} x_2(\tau).h(t-\tau).d\tau$$

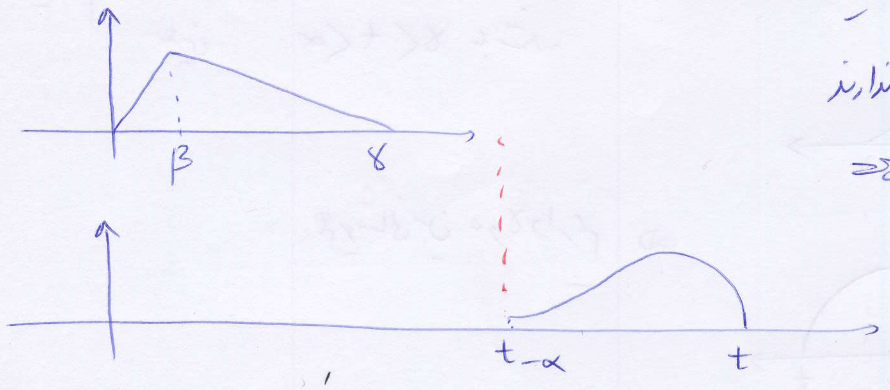
حالت ششم: $\beta<t-\alpha<\gamma$ باشد یعنی $\alpha+\beta<t<\alpha+\gamma$ باشد.



هم‌پوشانی بین $t-\alpha$ تا γ خواهد بود

$$y(t)=\int_{t-\alpha}^{\gamma} x_2(\tau).h(t-\tau).d\tau$$

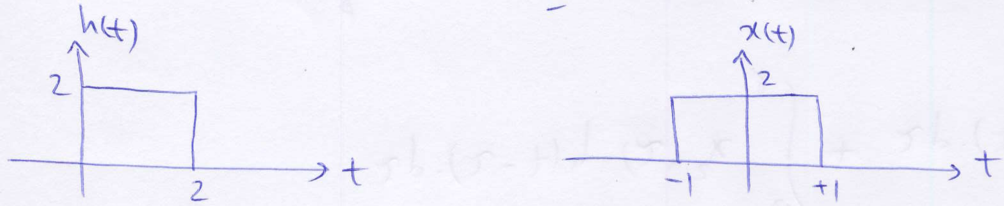
حالت هفتم: $\gamma < t-\alpha$ باشد یعنی $t > \gamma+\alpha$ باشد.



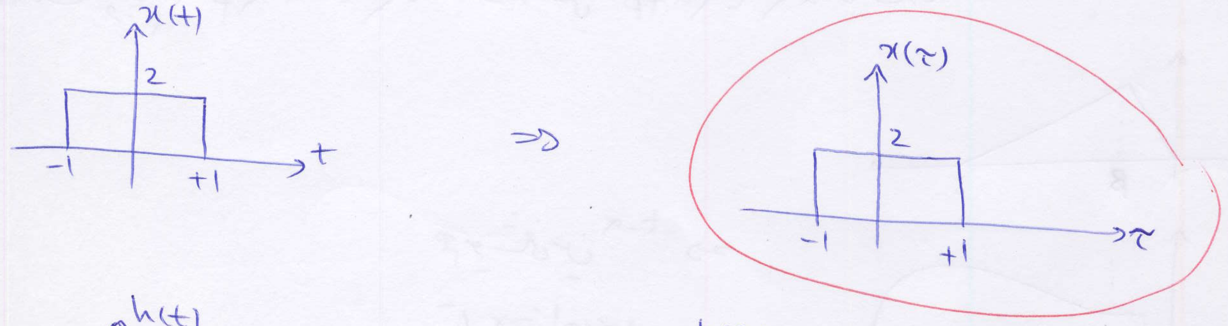
هم پوشانی ندارند $\Rightarrow \Rightarrow y(t)=0$

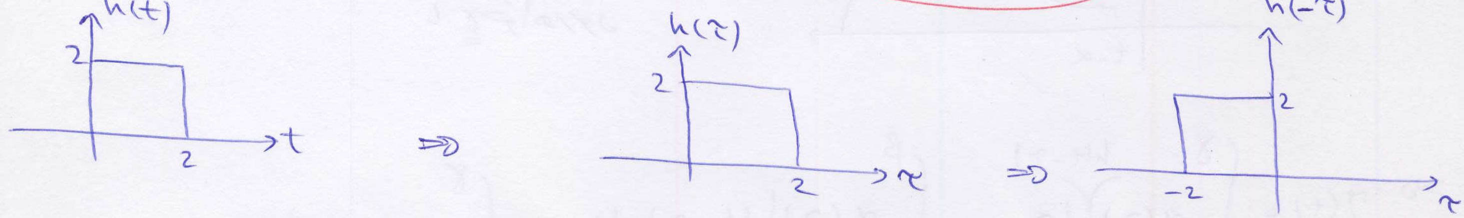
با این مثال به خوبی دیدیم که چطور یک تابع را ثابت نگه می داریم و دیگری را در طول محور τ می لغزانیم.

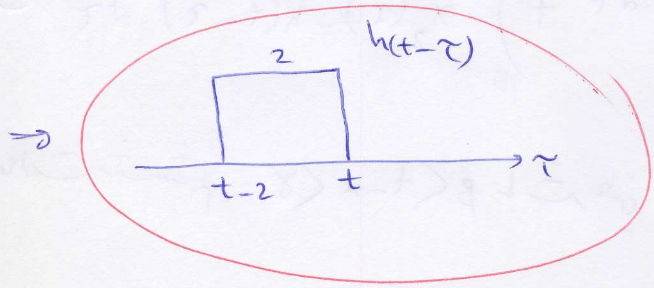
اما یک مثال عددی: کانولوشن $x(t)$ و $h(t)$ را بیابید.

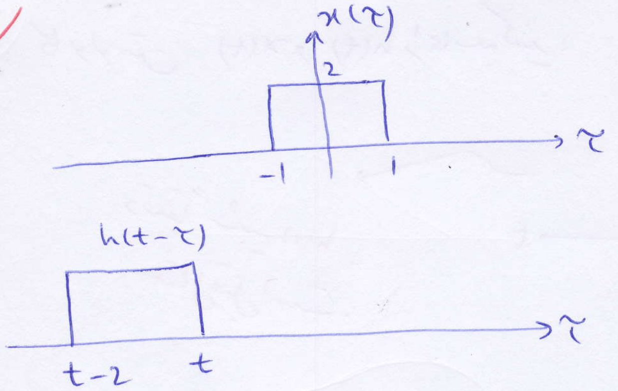


حل:



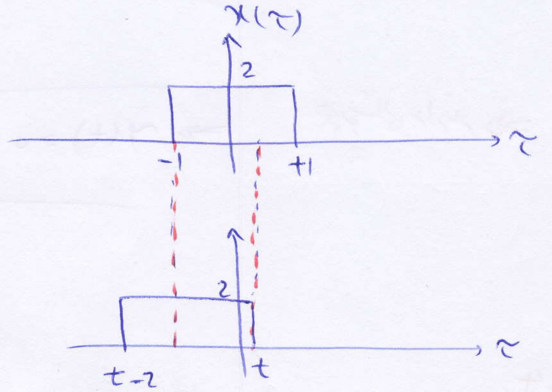






حالت اول: $t<-1$

$\Rightarrow$ هم‌پوشانی ندارند $\Rightarrow y(t)=0$

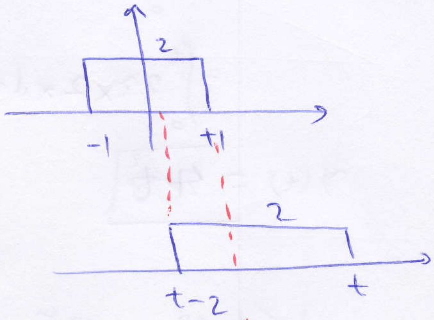


بازه هم‌پوشانی

حالت دوم: $-1<t<+1$

$$y(t)=\int_{-1}^{t} 2*2*d\tau = 4\tau\Big]_{-1}^{t} = 4t+4$$

حالت سوم: $-1<t-2<+1$ یعنی $1<t<3$

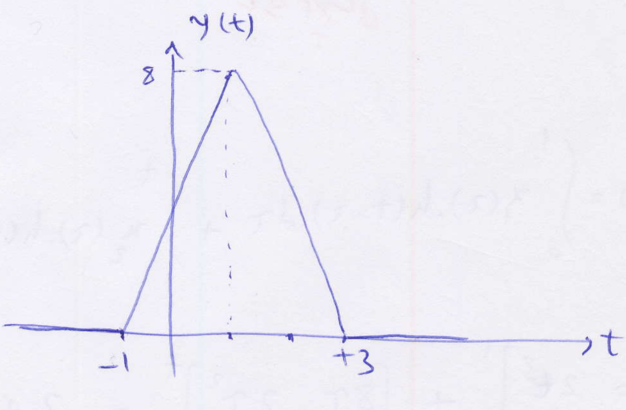


بازه هم‌پوشانی

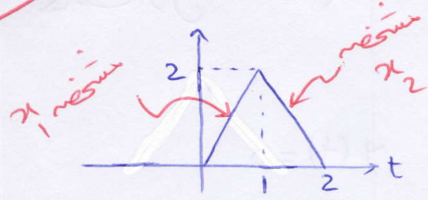
$$y(t)=\int_{t-2}^{+1} 4\,d\tau = 12-4t$$

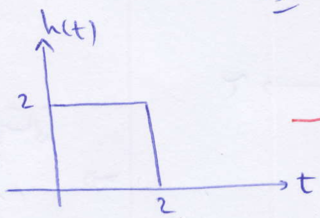
حالت چهارم: اگر $1<t-2$ یا همان $t>3$ باشد، هم‌پوشانی ندارند و $y(t)=0$ خواهد بود

$$\Rightarrow y(t)=\begin{cases} 0 & t<-1 \\ 4t+4 & -1<t<+1 \\ 12-4t & +1<t<+3 \\ 0 & t>3 \end{cases}$$



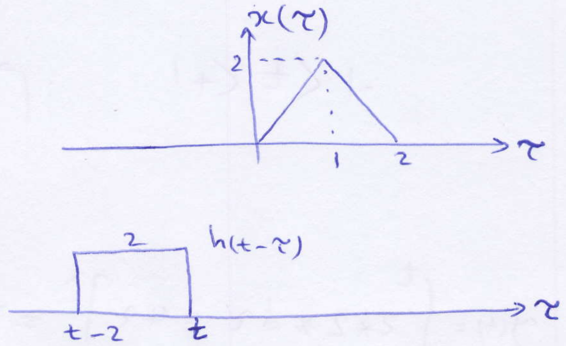
مثال: کانولوشن $x(t)$ و $h(t)$ را محاسبه کنید:





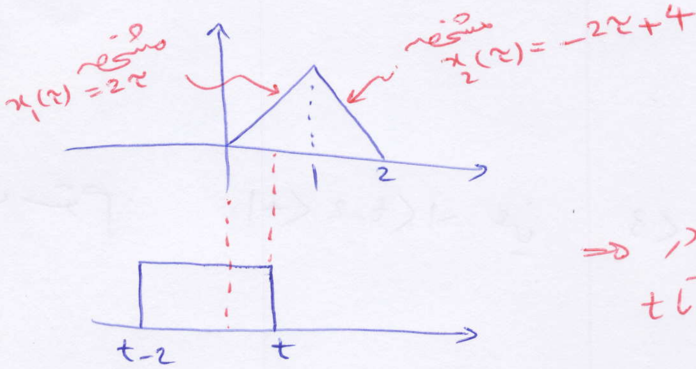
$h(t)$ دقیقاً شبیه مثال قبل است.

حالت اول: $t<0$



⇐ همپوشانی ندارند ⇐ $\boxed{y(t)=0}$

حالت دوم: $0<t<1$



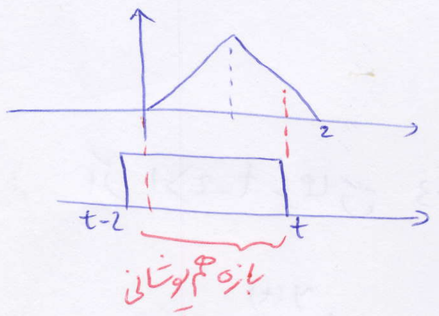
⇐ همپوشانی در بازه صفر تا t ⇐

$$y(t)=\int_0^t x(\tau).h(t-\tau).d\tau$$

$$=\int_0^t 2\tau\times 2\times d\tau=\int_0^t 4\tau.d\tau$$

$$y(t)=\boxed{2t^2}$$

حالت سوم: $1<t<2$

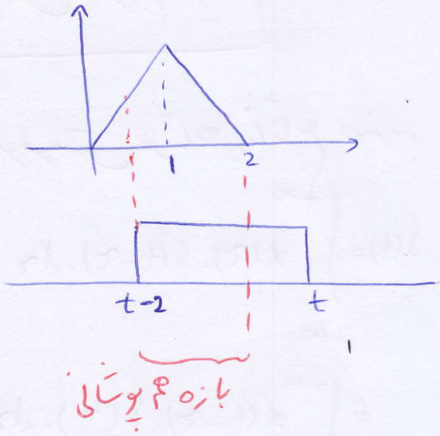


$$y(t)=\int_0^t x(\tau).h(t-\tau).d\tau$$

$$y(t)=\int_0^1 x_1(\tau).h(t-\tau).d\tau+\int_1^t x_2(\tau).h(t-\tau).d\tau=\int_0^1 4\tau.d\tau+\int_1^t(-2\tau+4)\times 2\,d\tau$$

$$=2\tau^2\Big]_0^1+\Big[8\tau-2\tau^2\Big]_1^t=2+8t-2t^2-8+2=-2t^2+8t-4$$

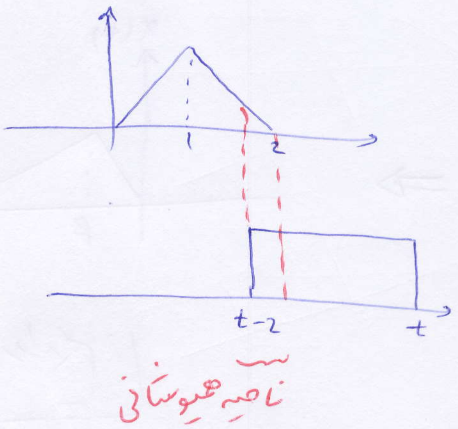
Page 11



حالت چهارم: $1 > t-2 > 0$ یعنی $2 < t < 3$

$$y(t) = \int_{t-2}^{2} x(\tau).h(t-\tau).d\tau = \int_{t-2}^{1} 2\tau \times 2 d\tau + \int_{1}^{2} (-2\tau+4) 2 d\tau$$

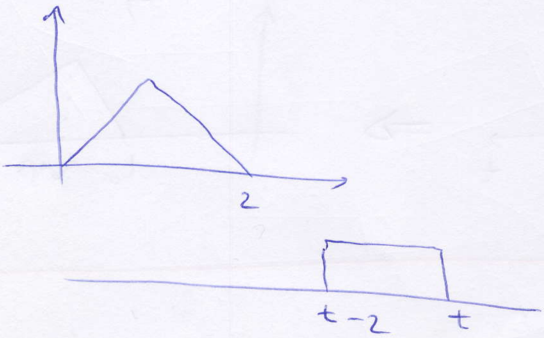
$$= 2\tau^2 \Big]_{t-2}^{1} + (8\tau - 2\tau^2) \Big]_{1}^{2} = -2t^2 + 8t - 4$$



حالت پنجم: $2 > t-2 > 1$ یعنی $3 < t < 4$

$$y(t) = \int_{t-2}^{2} x(\tau).h(t-\tau).d\tau = \int_{t-2}^{2} (-2\tau+4) \times 2 \, d\tau$$

$$= (8\tau - 2\tau^2) \Big]_{t-2}^{2} = 2t^2 - 16t + 32$$



حالت ششم: $t-2 > 2$ یعنی $t > 4$

$\Rightarrow$ همپوشانی ندارند $\Rightarrow y(t) = 0$

در نهایت:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t^2 & 0 < t < 1 \\ -2t^2 + 8t - 4 & 1 < t < 2 \\ -2t^2 + 8t - 4 & 2 < t < 3 \\ 2t^2 - 16t + 32 & 3 < t < 4 \\ 0 & t > 4 \end{cases}$$

کانولوشن با توابع ویژه :

کانولوشن هر تابعی با تابع ضربه $\delta(t)$، خود تابع را می‌دهد. یعنی

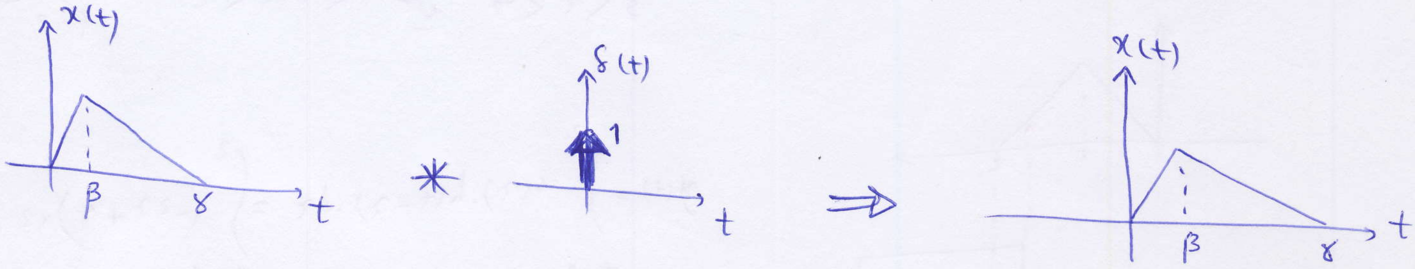
$$\boxed{x(t) * \delta(t) = x(t)}$$

زیرا با استفاده از خاصیت جداسازی تابع ضربه داریم

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).\delta(t-\tau).d\tau = x(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau).\delta(\tau).d\tau$$

همین رابطه به صورت گرافیکی



و همینطور داریم :

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$