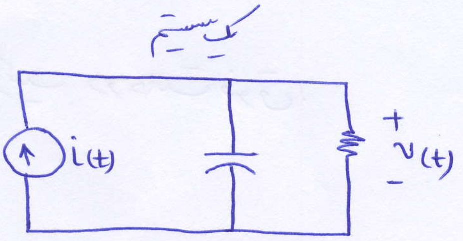
دانشگاه ایلام

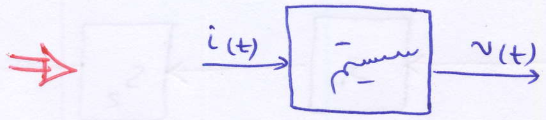
جلسه چهارم درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها - رستگار   آشنایی با خواص سیستم‌ها

تعریف سیستم: یک سیستم می‌تواند به صورت هر فرایندی که باعث تبدیل سیگنال می‌شود، در نظر گرفته شود.

به عنوان مثال در مدار الکتریکی زیر، جریان $i(t)$ را به عنوان ورودی و ولتاژ $v(t)$ را به عنوان خروجی سیستم در نظر بگیریم

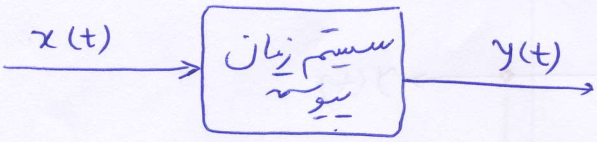
این مدار، یک سیستم است که ورودی آن $i(t)$ و خروجی آن $v(t)$ است.





یک اتومبیل هم یک سیستم است.

تعریف یک سیستم زمان پیوسته: یک سیستم زمان پیوسته، سیستمی است که سیگنال‌های ورودی زمان پیوسته را به سیگنال‌های خروجی زمان پیوسته، تبدیل می‌کند



قرارداد می‌کنیم که x نماد ورودی و y نماد خروجی باشند.

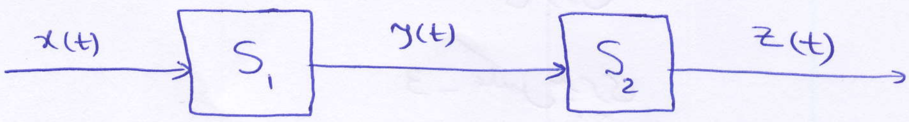
$x(t)$ ← ورودی زمان پیوسته

$y(t)$ ← خروجی زمان پیوسته

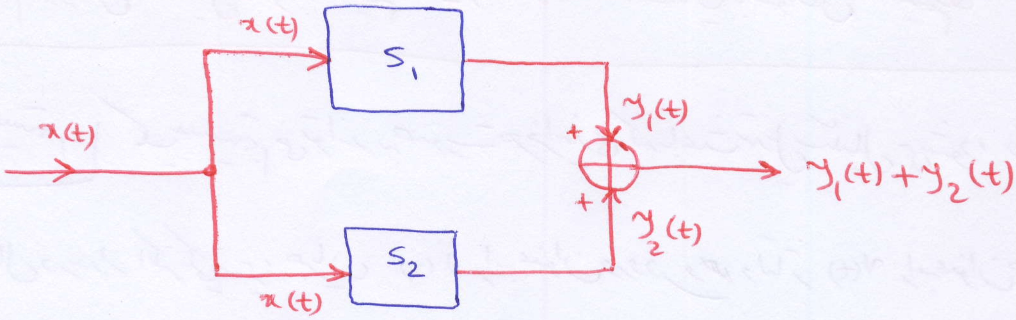
توجه داشته باشید که برای هر سیستمی، حتماً باید ورودی و خروجی مشخص تعریف کنیم.

روش‌های اتصال سیستم‌ها:

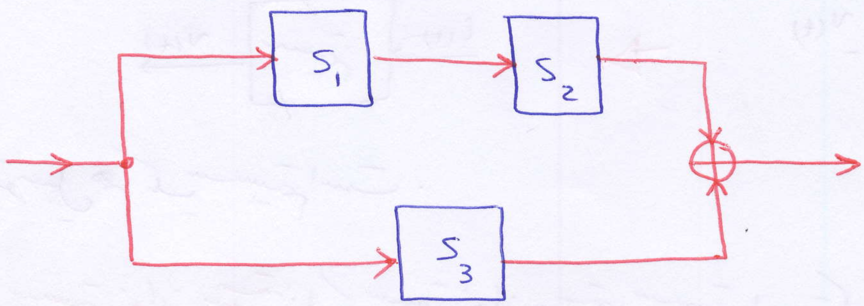
۱- اتصال سری (Tandom یا cascade)



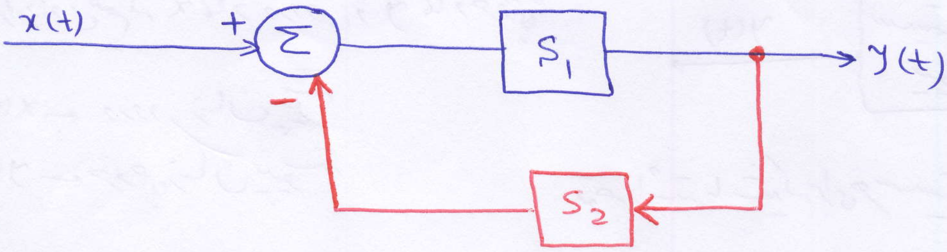
2- اتصال موازی:



3- ترکیب دو حالت فوق:



4- بازخورد یا پسخور (Feedback)



خواص سیستم ها:

1- حافظه

2- علّی بودن

3- عکس پذیری

4- پایداری

5- تغییرناپذیری با زمان

6- خطّی بودن

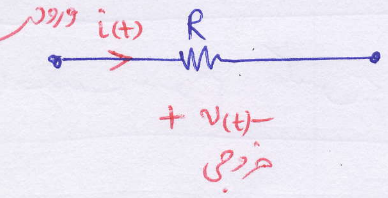
page 3

خاصیت اوّل: حافظه

یک سیستم می‌تواند با حافظه (حافظه‌دار) یا بدون حافظه باشد.

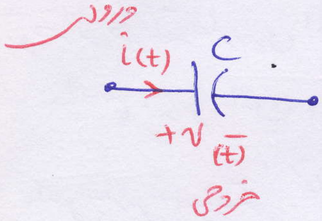
تعریف سیستم بدون حافظه: سیستم بدون حافظه، سیستمی است که خروجی آن در هر لحظه از زمان، **فقط** به ورودی در همان لحظه بستگی داشته باشد.

مثلاً یک مقاومت الکتریکی را می‌توان بصورت یک سیستم بدون حافظه درنظر گرفت، زیرا:



$$v(t) = R \cdot i(t)$$

امّا یک خازن و همینطور سلف، حافظه‌دار هستند.



$$\Rightarrow i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \xrightarrow{\text{و یا اینکه}} v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau$$

$y(t) = 5x(t-2) \longrightarrow$ یک سیستم با حافظه

$y(t) = 4x(t+1) \longrightarrow$ یک سیستم با حافظه

خاصیت دوم: علّی بودن

سیستم علّی (causal) سیستمی است که خروجی آن در هر لحظه، **فقط** به مقادیر حال و یا گذشته‌ی ورودی بستگی دارد و به مقادیر آینده‌ی ورودی بستگی ندارد. سیستم علّی، پیشگو نیست و از مقادیر آینده‌ی ورودی خبر ندارد.

سیستم علّی می‌تواند حافظه‌دار یا بدون حافظه باشد. امّا سیستم بدون حافظه، حتماً علّی است. $\Leftarrow$ سیستم غیرعلّی، حتماً حافظه‌دار است.

$y(t) = x(t-1) \longrightarrow$ علّی و حافظه‌دار

$y(t) = x(t) \longrightarrow$ علّی و بدون حافظه

$y(t) = x(t+1) \longrightarrow$ غیرعلّی و حافظه‌دار

page 4

سؤال: آیا سیستم مشتق گیر، علّی است یا غیرعلّی؟ می‌دانیم که مشتق را می‌توانیم به دو صورت تعریف کنیم.

$$x'(t) = \lim_{a \to 0} \frac{x(t) - x(t-a)}{a}$$

سیستم مشتق گیر علّی است.

$$x'(t) = \lim_{a \to 0} \frac{x(t+a) - x(t)}{a}$$

خاصیت سوم: عکس پذیری: سیستم عکس پذیر سیستمی است که:

1- به ازای ورودی های مستقل و مجزّا خروجی های مستقل و مجزّا بدهد.

2- با داشتن خروجی بتوانیم ورودی را بیابیم.

توجّه به دو نکته ضروری است: 1- درصورتیکه ثابت کنیم یک سیستم عکس پذیر است، می‌توانیم سیستم معکوس را بیابیم. زیرا این، یکی از شرایط اصلی معکوس پذیری سیستم است. 2- برای اینکه ثابت کنیم یک سیستم عکس پذیر نیست کافیست که دو ورودی مجزّا بدهیم و ثابت کنیم که این دو ورودی مجزّا، منجر به خروجی یکسانی می‌شوند.

* مثال: سیستم $y = \cos(x)$ عکس پذیر نیست زیرا دو ورودی مجزّای

$$\begin{cases} x_1(t) \\ x_2(t) = x_1(t) + 2\pi \end{cases}$$

منجر به خروجی یکسانی می‌شوند.

امّا همین سیستم، اگر ورودی $x(t)$ آن را به بازهٔ $[0, \pi]$ محدود کنیم، عکس پذیر خواهد بود.

* مثال: سیستم $y(t) = \frac{1}{2} x(t)$ یک سیستم عکس پذیر است و سیستم معکوس آن این است: $y(t) = 2x(t)$

$x(t) \to$ [سیستم اصلی] $\to$ [سیستم معکوس] $\to x(t)$

اگر یک سیستم را با سیستم معکوس آن سری کنیم، خروجی نهایی، همان ورودی اولیه خواهد بود.

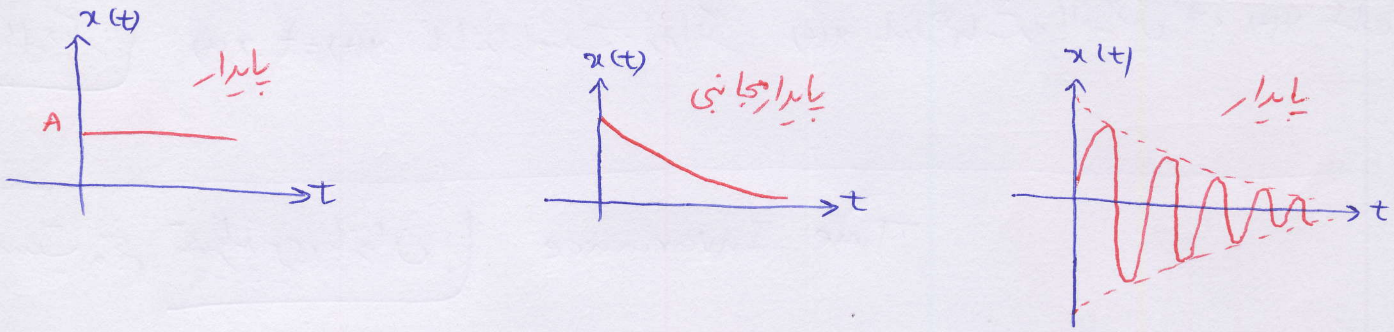
* مثال: سیستم $y(t) = x^2(t)$ عکس پذیر نیست.

page5

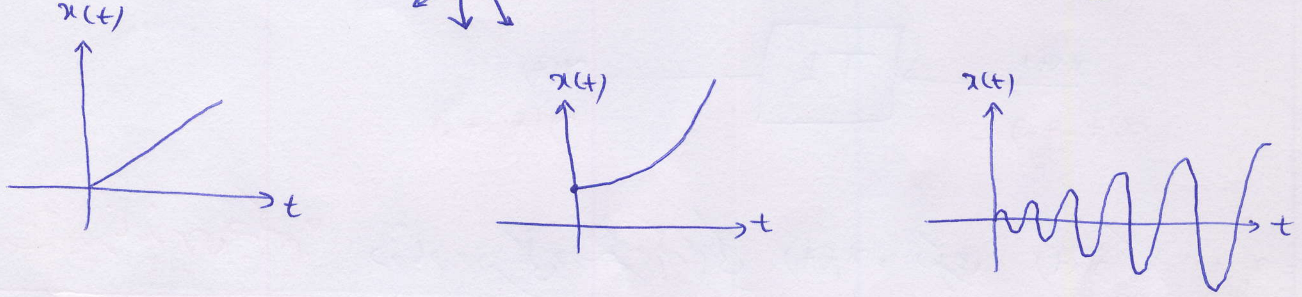
خاصیت چهارم: پایداری

قبل از اینکه راجع به پایداری سیستم‌ها صحبت کنیم، کمی به بحث پایداری سیگنال‌ها می‌پردازیم.

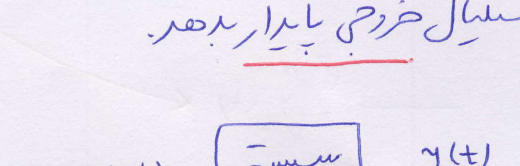
پایداری سیگنال‌ها: سیگنال ناپایدار سیگنالی است که با افزایش t (و یا کاهش t)، بدون کران افزایش یابد. اما سیگنال پایدار، همواره کراندار است.



هر سه سیگنال فوق، پایدار هستند. اما هر سه سیگنال ذیل ناپایدار هستند.

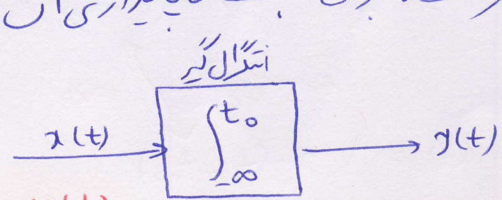


و اما بحث پایداری سیستم‌ها: سیستم پایدار سیستمی است که به ازای هر سیگنال ورودی پایدار، یک سیگنال خروجی پایدار بدهد.



تعریف پایداری سیستم: اگر $|x(t)| < M \Longrightarrow |y(t)| < N$

به عنوان مثال، سیستم انتگرال گیر، یک سیستم ناپایدار است. برای اثبات ناپایداری آن کافیست فقط یک مثال نقض بیاوریم.



$r(t)$ شیب واحد ناپایدار است

$u(t)$ پله واحد پایدار است.

page 6

سیستم مشتق‌گیر هم ناپایدار است:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\underset{\text{مشتق‌گیر}}{\frac{d}{dt}(\;)}} \longrightarrow y(t)$$

$u(t)$ پله واحد پایدار است. $\delta(t)$ ضربه واحد ناپایدار است.

* کوئیز: سیستم $y(t) = e^{x(t)}$ پایدار است یا ناپایدار؟!

مثال دیگر: $y(t) = t.x(t)$ ناپایدار است. زیرا اگر $x(t)$ پایدار هم باشد، با افزایش t، $y(t)$ بی‌کران افزایش می‌یابد.

خاصیت پنجم: تغییرناپذیری با زمان: Time Invariance

تعریف: سیستم تغییرناپذیر با زمان، سیستمی است که یک شیفت در ورودی، باعث شیفت یکسانی در خروجی شود.

$$\underset{x(t-t_0)}{x(t)} \longrightarrow \boxed{TI} \longrightarrow \underset{y(t-t_0)}{y(t)}$$

برای تست تغییرناپذیری چه کنیم؟

دو تا ورودی کلی در نظر می‌گیریم یکی $x_1(t)$ و دیگری $x_2(t)$ که $x_2(t) = x_1(t-t_0)$

$$\begin{cases} x_1(t) \longrightarrow \text{به سیستم می‌دهیم} \longrightarrow \text{خروجی } y_1(t) \xrightarrow[\text{شیفت می‌دهیم}]{\text{به اندازه } t_0} y_1(t-t_0) \\ x_2(t) = x_1(t-t_0) \longrightarrow \text{به سیستم می‌دهیم} \longrightarrow \text{خروجی } y_2(t) \end{cases}$$

اگر $y_2(t) = y_1(t-t_0)$ ← سیستم تغییرناپذیر با زمان و در غیر اینصورت سیستم تغییرپذیر با زمان داریم.

به عنوان مثال: آیا سیستم $y(t) = tx(t)$ تغییرپذیر با زمان است یا تغییرناپذیر با زمان؟

تست می‌کنیم

$$\begin{cases} x_1(t) \xrightarrow{S} y_1(t) = t\,x_1(t) \xrightarrow{\text{شیفت}} y_1(t-t_0) = (t-t_0)\,x_1(t-t_0) \\ x_2(t) = x_1(t-t_0) \xrightarrow{S} y_2(t) = t\,x_2(t) = t\,x_1(t-t_0) \end{cases}$$

مساوی نیستند ⇐ سیستم تغییرپذیر با زمان است.

خاصیت ششم: خطی بودن:

Linearity

سیستم خطی سیستمی است که خاصیت جمع آثار را داشته باشد. (یعنی هم خاصیت جمع پذیری و هم خاصیت همگنی

سیستم خطی

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \xrightarrow{\text{سیستم خطی}} \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

خاصیت مهم سیستم های خطی: ورودی صفر، خروجی صفر می‌دهد. البته توجه داشته باشید که اگر سیستمی این خاصیت را داشت لزوماً خطی نیست. اما اگر خطی بود حتماً این خاصیت را دارد.

مثال: $y(t) = ax(t) + b$ یک سیستم خطی نیست.

این سیستم، غیرخطی است.

هر چند این سیستم، کاملاً جزء دسته‌ی سیستم های غیرخطی است، گاهی آن را سیستم خطی نموّی هم می‌خوانند. زیرا خودش غیرخطی است اما نموّش خطی است.

$$\begin{cases} y_1(t) = ax_1(t) + b \\ y_2(t) = ax_2(t) + b \end{cases} \Rightarrow \left[y_2(t) - y_1(t)\right] = a\left[x_2(t) - x_1(t)\right]$$

page 8

مهمترین سیستمها، سیستم های LTI هستند.

یعنی سیستم های خطی و تغییر ناپذیر با زمان که در آنها هم خاصیت خطی بودن را داریم و هم خاصیت تغییر ناپذیر با زمان

می توانیم این دو خاصیت را بصورت جداگانه در مورد سیستم بررسی کنیم و یا اینکه با این رابطه، هر دو را یکجا بررسی کنیم.

سیستم LTI

$$\alpha x_1(t-t_0)+\beta x_2(t-t_0) \xrightarrow{S} \alpha y_1(t-t_0)+\beta y_2(t-t_0)$$