



محمد جواد رنجبر

۸۱۰۱۰۱۷۳

تمرین دوم پردازش گفتار دیجیتال

دکتر ویسی

بهار ۱۴۰۳

۱. ویژگی‌های سیستم‌ها

بررسی خواص علی بودن، خطی بودن، تغییرپذیری با زمان و حافظه دار بودن:
آ.

$$y(t) = 2 \cdot x\left(\frac{t}{2}\right) - 1$$

i. علی بودن:

برای $t = -2$ خروجی آن به ورودی $t = -1$ نیاز خواهد داشت، بنابراین این سیگنال علی نیست.

$$y(-2) = 2 \cdot x\left(\frac{-2}{2}\right) - 1 = 2 \cdot x(-1) - 1$$

ii. خطی بودن:

برای خطی بودن باید شرط زیر را چک کنیم:

$$\begin{aligned} T[a_1 \cdot x_1(t) + a_2 \cdot x_2(t)] &= T[a_1 \cdot x_1(t)] + T[a_2 \cdot x_2(t)] = a_1 \cdot T[x_1(t)] + a_2 \cdot T[x_2(t)] \\ &= a_1 \cdot y_1(t) + a_2 \cdot y_2(t) \end{aligned}$$

برای این سیستم داریم:

$$\begin{aligned} y(t) &= 2 \cdot (a_1 \cdot x_1\left(\frac{t}{2}\right) + a_2 \cdot x_2\left(\frac{t}{2}\right)) - 1 = 2 \cdot a_1 \cdot x_1\left(\frac{t}{2}\right) + 2 \cdot a_2 \cdot x_2\left(\frac{t}{2}\right) - 1 \\ &\neq y_1(t) + y_2(t) \end{aligned}$$

بنابراین این سیستم خطی نیست.

iii. تغییرپذیری با زمان:

برای تغییر ناپذیری زمان باید شرط زیر را چک کنیم:

$$y(t - t_0) = T[x(t - t_0)]$$

برای این سیستم داریم:

$$\begin{cases} T\{x(t - t_0)\} = 2 \cdot x\left(\frac{t}{2} - t_0\right) - 1 \\ y(t - t_0) = 2 \cdot x\left(\frac{t - t_0}{2}\right) - 1 \end{cases}$$

بنابراین این سیستم تغییرپذیر با زمان است.

iv. حافظه دار بودن:

برای حافظه دار نبودن، سیستم باید به هیچ لحظه‌ی قبل و بعدی وابسته نباشد، با این حال برای زمان t سیستم به ورودی $\frac{t}{2}$ وابسته است بنابراین این یک سیستم حافظه دار می‌باشد.

ب.

$$y[n] = n \cdot x[n]$$

i. علی بودن:

این سیستم فقط به زمان n وابسته است بنابراین این سیستم علی است.

ii. خطی بودن:

$$\begin{aligned} T[a_1 \cdot x_1[n] + a_2 \cdot x_2[n]] &= n(a_1 \cdot x_1[n] + a_2 \cdot x_2[n]) = n \cdot a_1 \cdot x_1[n] + n \cdot a_2 \cdot x_2[n] \\ &= a_1 \cdot y_1[n] + a_2 \cdot y_2[n] \end{aligned}$$

این سیستم خطی است.

iii. تغییری پذیری با زمان

$$\begin{cases} T\{x(n - n_0)\} = n \cdot x[n - n_0] \\ y(n - n_0) = (n - n_0) \cdot x[n - n_0] \end{cases}$$

این سیستم تغییر پذیر با زمان است.

iv. حافظه دار بودن

برای زمان n این سیستم فقط به زمان n وابسته می باشد بنابراین سیستم بدون حافظه است.

پ.

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

i. علی بودن:

این سیستم فقط به زمان قبل از t وابسته است بنابراین یک سیستم علی می باشد.

ii. خطی بودن:

$$\begin{aligned} T[a_1 \cdot x_1(t) + a_2 \cdot x_2(t)] &= \int_{-\infty}^t a_1 \cdot x_1(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t a_2 \cdot x_2(\tau) d\tau \\ &= a_1 \cdot \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau + a_2 \cdot \int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau = a_1 \cdot y_1(t) + a_2 \cdot y_2(t) \end{aligned}$$

این سیستم خطی است.

iii. تغییری پذیری با زمان

$$\begin{cases} T\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^t x(\tau - t_0) d\tau = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau) d\tau \\ y(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau) d\tau \end{cases}$$

این سیستم تغییر ناپذیر با زمان است.

iv. حافظه دار بودن

برای زمان t این سیستم به ورودی‌های قبل از t نیز وابسته است. بنابراین، این سیستم حافظه دار است.

ت.

$$y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-2) & t \geq 0 \\ 0 & \text{ow} \end{cases}$$

i. علی بودن:

این سیستم فقط به ورودی‌های زمان t و $t-2$ وابسته است، بنابراین خروجی آن به ورودی‌های آن در زمان آینده وابسته نیست و فقط به ورودی‌های حال و گذشته وابسته است. بنابراین علی است.

ii. خطی بودن:

$$\begin{aligned} T[a_1 \cdot x_1(t) + a_2 \cdot x_2(t)] &= \begin{cases} a_1 \cdot x_1(t) + a_1 \cdot x_1(t-2) + a_2 \cdot x_2(t) + a_2 \cdot x_2(t-2) & t \geq 0 \\ 0 & \text{ow} \end{cases} \\ &= a_1 \cdot y_1(t) + a_2 \cdot y_2(t) \end{aligned}$$

این سیستم خطی است.

iii. تغییری پذیری با زمان

$$\begin{cases} T\{x(t-t_0)\} = \begin{cases} x(t-t_0) + x(t-t_0-2) & t \geq 0 \\ 0 & \text{ow} \end{cases} \\ y(t-t_0) = \begin{cases} x(t-t_0) + x(t-t_0-2) & t-t_0 \geq 0 \\ 0 & \text{ow} \end{cases} \end{cases}$$

این سیستم تغییر پذیر با زمان است.

iv. حافظه دار بودن

برای زمان t این سیستم وابسته به ورودی $t-2$ نیز دارد. بنابراین، این سیستم حافظه دار است.

ث.

$$y(t) = \sin(x(t))$$

i. علی بودن:

این سیستم فقط به ورودی زمان t وابسته است، بنابراین خروجی آن به ورودی‌های آن در زمان آینده وابسته نیست و فقط به ورودی‌های حال و گذشته وابسته است. بنابراین علی است.

ii. خطی بودن:

$$T[a_1 \cdot x_1(t) + a_2 \cdot x_2(t)] = \sin(a_1 \cdot x_1(t) + a_2 \cdot x_2(t)) \neq a_1 \cdot y_1(t) + a_2 \cdot y_2(t)$$

این سیستم خطی نیست.

iii. تغییری پذیری با زمان

$$\begin{cases} T\{x(t - t_0)\} = \sin(x(t - t_0)) \\ y(t - t_0) = \sin(x(t - t_0)) \end{cases}$$

این سیستم تغییرناپذیر با زمان است.

iv. حافظه دار بودن

برای زمان t این سیستم فقط به زمان t وابسته می باشد بنابراین سیستم بدون حافظه است.

ج.

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{+M} x[n-k]$$

i. علی بودن

این سیستم علی نیست و برای زمان n به ورودی های $n+M$ وابسته است.

ii. خطی بودن

$$\begin{aligned} T[a_1 \cdot x_1[n] + a_2 \cdot x_2[n]] &= \frac{1}{2M+1} \left(\sum_{k=-M}^{+M} a_1 \cdot x_1[n-k] + a_2 \cdot x_2[n-k] \right) \\ &= \frac{1}{2M+1} \left(\sum_{k=-M}^{+M} a_1 \cdot x_1[n-k] + \sum_{k=-M}^{+M} a_2 \cdot x_2[n-k] \right) \\ &= \frac{1}{2M+1} \left(a_1 \cdot \sum_{k=-M}^{+M} x_1[n-k] + a_2 \cdot \sum_{k=-M}^{+M} x_2[n-k] \right) \\ &= a_1 \cdot \frac{1}{2M+1} \cdot \sum_{k=-M}^{+M} x_1[n-k] + a_2 \cdot \frac{1}{2M+1} \cdot \sum_{k=-M}^{+M} x_2[n-k] \\ &= a_1 \cdot y_1[n] + a_2 \cdot y_2[n] \end{aligned}$$

این سیستم خطی است.

iii. تغییری پذیری با زمان

$$\begin{cases} T\{x[n - n_0]\} = \frac{1}{2M + 1} \sum_{k=-M}^{+M} x[n - n_0 - k] \\ y[n - n_0] = \frac{1}{2M + 1} \sum_{k=-M}^{+M} x[n - n_0 - k] \end{cases}$$

این سیستم تغییر ناپذیر با زمان است.

iv. حافظه دار بودن

برای زمان n این سیستم به ورودی $n - M$ نیز، نیاز دارد. بنابراین، سیستمی حافظه دار است.

۲. سیستم‌های LTI و کانولوشن

آ. پاسخ سیستم LTI بدون استفاده از کانولوشن

برای سیستم LTI و پاسخ ضربه‌ی زیر داریم:

- خروجی در کدام بازه‌ها دقیقاً برابر با صفر است؟
در بازه‌های زیر خروجی دقیقاً برابر با صفر خواهد بود:

$$t \leq -3, t \geq 2$$

- خروجی در کدام t بشینه است؟

خروجی در $t = -1$ بشینه خواهد بود.

- خروجی در $t = 1$ چه مقداری دارد؟

$$y(1) = \frac{-2 \cdot 4}{2} = -4 \quad \text{خروجی در } t = 1 \text{ برابر خواهد بود با } -4$$

ب. پاسخ ضربه سیستم علی

پاسخ ضربه کلی سیستم به شکل زیر است:

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] * h_3[n] \xrightarrow{h_3[n] * h_3[n]} h[n] = h_1[n] * h_2[n] * h_2[n] = h[n] \\ = h_1[n] * h_2[n] * h_2[n]$$

حال داریم:

$$h_2[n] * h_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n - 1] + \delta[n - 2]$$

پس:

$$h[n] = h_1[n] * (\delta[n] + 2\delta[n - 1] + \delta[n - 2]) = h_1[n] + 2h_1[n - 1] + h_1[n - 2]$$

حال با توجه به نمودار برای مقادیر مختلف داریم:

$$h[0] = h_1[0] + 2h_1[-1] + h_1[-2] = 1$$

$$h[1] = h_1[1] + 2h_1[0] + h_1[-1] = 5$$

$$h[2] = h_1[2] + 2h_1[1] + h_1[0] = 10$$

$$h[3] = h_1[3] + 2h_1[2] + h_1[1] = 11$$

$$h[4] = h_1[4] + 2h_1[3] + h_1[2] = 8$$

$$h[5] = h_1[5] + 2h_1[4] + h_1[3] = 4$$

$$h[6] = h_1[6] + 2h_1[5] + h_1[4] = 1$$

از آنجا که سیستم کلی علی است همه‌ی زیر سیستم‌ها نیز علی هستند بنابراین:

$$h_1[n] = 0 \text{ for all } n < 0$$

بنابراین داریم:

$$h[0] = h_1[0] + 0 + 0 = 1 \Rightarrow h_1[0] = 1$$

$$h[1] = h_1[1] + 2 + 0 = 5 \Rightarrow h_1[1] = 3$$

$$h[2] = h_1[2] + 6 + 1 = 10 \Rightarrow h_1[2] = 3$$

$$h[3] = h_1[3] + 6 + 3 = 11 \Rightarrow h_1[3] = 2$$

$$h[4] = h_1[4] + 4 + 3 = 8 \Rightarrow h_1[4] = 1$$

$$h[5] = h_1[5] + 2 + 2 = 4 \Rightarrow h_1[5] = 0$$

$$h[6] = h_1[6] + 0 + 1 = 1 \Rightarrow h_1[6] = 0$$

در ادامه نیز داریم:

$$h[7] = h_1[7] + 0 + 0 = 0$$

پس باقی مقادیر h_1 نیز صفر خواهد بود. پس داریم:

$$h_1[n] = \delta[n] + 3\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4]$$

$$x[n] = u[n] - 2u[n-1] + u[n-2] \quad \text{- پاسخ سیستم به ورودی}$$

پاسخ ضربه کل سیستم را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$h_1[n] = \delta[n] + 5\delta[n-1] + 10\delta[n-2] + 11\delta[n-3] + 8\delta[n-4] + 4\delta[n-5] + \delta[n-6]$$

و همچنین ورودی را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x[n] = u[n] - 2u[n-1] + u[n-2] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

$$y[n] = h_1[n] * x[n]$$

$$\begin{aligned} &= \delta[n] + 5\delta[n-1] + 10\delta[n-2] + 11\delta[n-3] + 8\delta[n-4] + 4\delta[n-5] \\ &+ \delta[n-6] - (\delta[n-1] + 5\delta[n-2] + 10\delta[n-3] + 11\delta[n-4] + 8\delta[n-5] \\ &+ 4\delta[n-6] + \delta[n-7]) \\ &= \delta[n] + 4\delta[n-1] + 5\delta[n-2] + \delta[n-3] - 3\delta[n-4] - 4\delta[n-5] \\ &- 3\delta[n-6] - \delta[n-7] \end{aligned}$$

۳. تبدیل فوریه
بخش ۱) تبدیل فوریه گسسته

a) $x[n] = 3 \cdot (5)^{-|n-2|}$

به دو معادله برای $n \geq 2$ و $n \leq 1$ بازنویسی می‌کنیم:

$$x[n] = 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-2} \cdot u[n-2] + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2-n} \cdot u[-n+1]$$

حال برای هر دو معادله تبدیل فوریه را محاسبه می‌کنیم:

- $3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-2} \cdot u[n-2] \Rightarrow \frac{3e^{-2j\omega}}{1 - \frac{1}{5}e^{-j\omega}}$
- $3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2-n} \cdot u[-n+1] = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{1-n} \cdot u[-n+1] \Rightarrow \frac{3}{5} \cdot \frac{e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{5}e^{+j\omega}}$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{3e^{-2j\omega}}{1 - \frac{1}{5}e^{-j\omega}} + \frac{3}{5} \cdot \frac{e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{5}e^{+j\omega}}$$

b) $x[n] = \alpha^n \cdot \cos(\omega_0 \cdot n + \varphi) \cdot u[n], \quad |\alpha| < 1$

به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x[n] &= \alpha^n \cdot \left(\frac{e^{j(\omega_0 n + \varphi)}}{2} + \frac{e^{-j(\omega_0 n + \varphi)}}{2} \right) \cdot u[n] = \alpha^n \cdot \left(\frac{e^{j(\omega_0 n + \varphi)}}{2} + \frac{e^{-j(\omega_0 n + \varphi)}}{2} \right) \cdot u[n] \\ &= \underbrace{\alpha^n \cdot u[n]}_{x_1[n]} \cdot \underbrace{\left(\frac{e^{j(\omega_0 n + \varphi)}}{2} + \frac{e^{-j(\omega_0 n + \varphi)}}{2} \right)}_{x_2[n]} \end{aligned}$$

$$x_1[n] \cdot x_2[n] \Rightarrow X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})$$

$$x_1[n] = \alpha^n \cdot u[n] \Rightarrow \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} = X_1(e^{j\omega})$$

$$x_2[n] = \frac{e^{j(\omega_0 n + \varphi)}}{2} + \frac{e^{-j(\omega_0 n + \varphi)}}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \cdot (e^{j\varphi} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) + e^{-j\varphi} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k)) = X_2(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{j\varphi}}{1 - \alpha e^{-j(\omega - \omega_0 - 2\pi k)}} + \frac{e^{-j\varphi}}{1 - \alpha e^{-j(\omega + \omega_0 - 2\pi k)}} \right)$$

c) $x[n] = 7$

$$X(e^{j\omega}) = 7 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \sigma(\omega - 2\pi k)$$

d) $x[n] = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot n + \varphi)$

$$x[n] = A \cdot \left(\frac{e^{j(\omega_0 n + \varphi)}}{2} + \frac{e^{-j(\omega_0 n + \varphi)}}{2} \right) \Rightarrow \frac{A}{2} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \cdot (\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k))$$

e) $x[n] = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot n + \varphi)(u[n] - u[n - 9])$

$$x[n] = \underbrace{A \cdot \cos(\omega_0 \cdot n + \varphi)}_{x_1[n]} \underbrace{(u[n] - u[n - 9])}_{x_2[n]} \Rightarrow X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})$$

$$x_1[n] = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot n + \varphi) \Rightarrow \frac{A}{2j} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \cdot (\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k))$$

$$= X_1(e^{j\omega})$$

$$x_2[n] = (u[n] - u[n - 9]) \Rightarrow \sum_{n=2}^8 e^{-j\omega n} = e^{-2j\omega} \cdot \sum_{n=0}^6 e^{-j\omega n} = e^{-2j\omega} \cdot \frac{1 - e^{-7j\omega}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$= e^{-5j\omega} \cdot \frac{\sin(\frac{7\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} = X_2(e^{j\omega})$$

$$x[n] \Rightarrow X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})$$

$$= \frac{Ae^{-5j\omega}}{2j} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(\frac{7}{2}(\omega - \omega_0 - 2\pi k))}{\sin(\omega - \omega_0 - 2\pi k)} - \frac{\sin(\frac{7}{2}(\omega + \omega_0 - 2\pi k))}{\sin(\omega + \omega_0 - 2\pi k)} \right)$$

بخش ۲) محاسبه فوریه در پایتون

الف) تبدیل فوریه گسسته

برای محاسبه تبدیل فوریه گسسته از تابع زیر کمک می‌گیریم:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

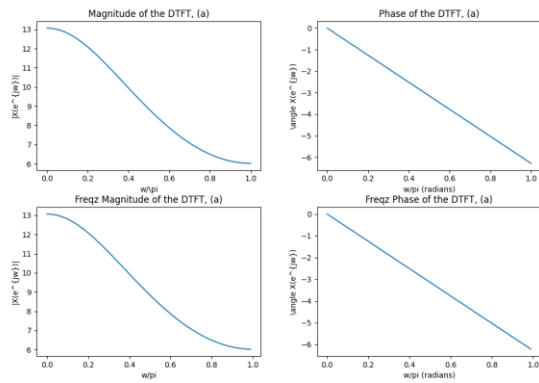
پیاده‌سازی این تبدیل در پایتون با حلقه‌ی زیر امکان‌پذیر است:

```
X = np.zeros_like(w, dtype=complex)
for k, wk in enumerate(w):
    X[k] = np.sum(x * np.exp(-1j * wk * n))
```

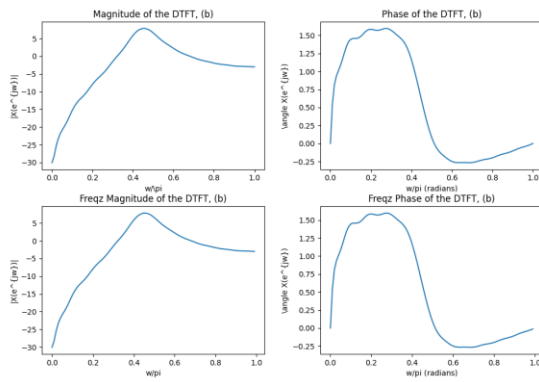
ب و پ) پیاده‌سازی برای سیگنال‌های بخش ۱

برای پیاده‌سازی هریک از سیگنال‌های تعدادی نمونه برمی‌داریم و تبدیل فوریه آن را محاسبه می‌کنیم.

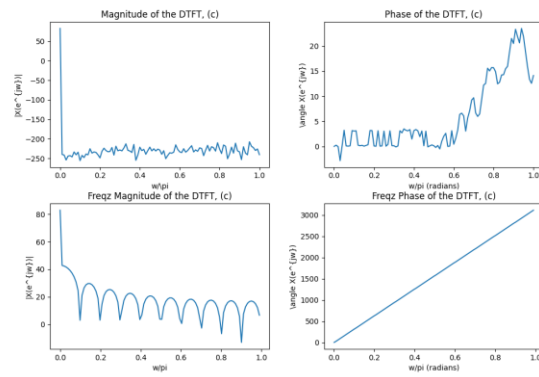
a) $x[n] = 3 \cdot (5)^{-|n-2|}$



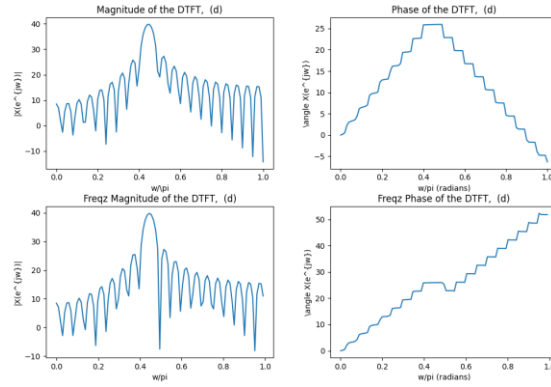
b) $x[n] = \alpha^n \cdot \cos(\omega_0 \cdot n + \varphi) \cdot u[n], \quad |\alpha| < 1$



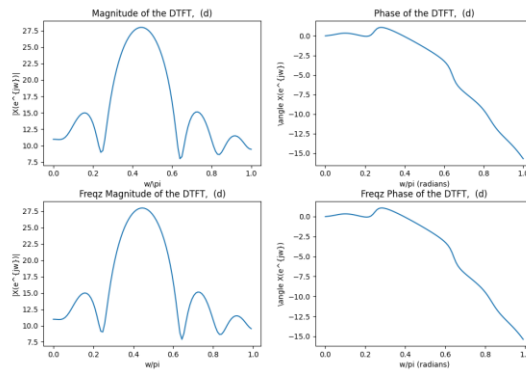
c) $x[n] = 7$



d) $x[n] = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot n + \varphi)$



e) $x[n] = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot n + \varphi)(u[n] - u[n - 9])$



۴. پاسخ فرکانس با فیلتر پایین‌گذر/بالاگذر

بخش ۱

الف) محاسبه پاسخ ضربه

مشخص است که:

$$H_{HP}(e^{j\omega}) = 1 - H_{LP}(e^{j\omega})$$

بنابراین تبدیل آن به صورت زیر خواهد بود:

$$H_{HP}(e^{j\omega}) \Rightarrow h_{HP}[n] = \delta[n] - \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

ب) محاسبه پاسخ ضربه

$$H_{BP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\omega| \leq \omega_1 \\ 1, & \omega_1 < |\omega| < \omega_2 \\ 0, & \omega_2 \leq |\omega| < \pi \end{cases}$$

۱. ساخت فیلتر پایین‌گذر از دو فیلتر بالا
برای ساخت فیلتر بالا پاسخ دو فیلتر پایین‌گذر را از یکدیگر کم می‌کنیم:

$$H_{HP}(e^{j\omega}) \Rightarrow h_{HP_1}[n] = \frac{\sin(w_2 n)}{\pi n} - \frac{\sin(w_1 n)}{\pi n}$$

۲. ساخت فیلتر با استفاده از کوسینوس
برای ساخت فیلتر بالا از پاسخ ضربه واحد یک فیلتر پایین‌گذر در کوسینوس استفاده می‌کنیم:

$$H_{HP}(e^{j\omega}) \Rightarrow h_{HP_2}[n] = 2 \cdot \frac{\sin(w_B n)}{\pi n} - \sin(w_c n)$$

فرکانس قطع و فرکانس کسینوس آن به ترتیب برابر هستند با:

$$w_B = \frac{w_2 - w_1}{2}$$

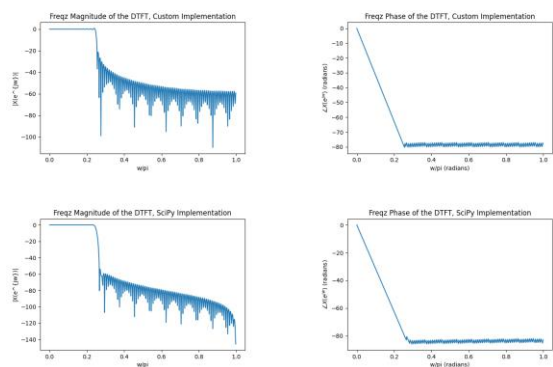
$$w_c = \frac{w_2 + w_1}{2}$$

۳. اثبات برابری
از h_{HP_2} شروع می‌کنیم تا به h_{HP_1} برسیم:

$$\begin{aligned} h_{HP_2}[n] &= 2 \cdot \frac{\sin(w_B n)}{\pi n} - \sin(w_c n) = 2 \left(\frac{e^{jw_c n}}{2} + \frac{e^{-jw_c n}}{2} \right) \left(\frac{e^{jw_B n}}{2} + \frac{e^{-jw_B n}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} (e^{j(w_c + w_B)n} + e^{-j(w_B - w_c)n} + e^{j(w_B - w_c)n} + e^{-j(w_c + w_B)n}) \\ &\xrightarrow{w_B + w_c = w_2, w_B - w_c = w_1} h_{HP_2}[n] = \frac{1}{2\pi} (e^{jw_2 n} + e^{-jw_1 n} + e^{jw_1 n} + e^{-jw_2 n}) \\ &= \frac{\sin(w_2 n)}{\pi n} - \frac{\sin(w_1 n)}{\pi n} = h_{HP_1}[n] \end{aligned}$$

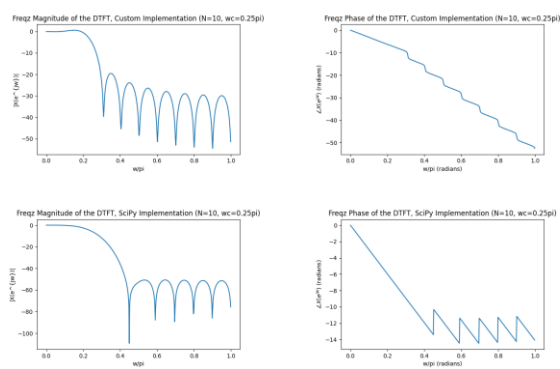
بخش ۲
الف)

۱. پاسخ فرکانسی برای مقادیر $N = 100$ و $\omega_c = \frac{\pi}{4}$ به صورت زیر می‌باشد:

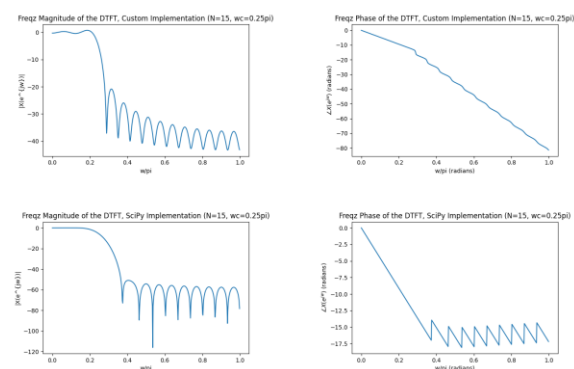


۲. پارامتر ω_c فرکانس قطع را تعیین می کند و پارامتر N شیب انتقال را بین باند عبور و توقف تعیین می کند. با افزایش N این فیلتر با شدت بیشتر فرکانس های بالا را حذف می کند. همچنین مشخص است که با تغییر ω_c فرکانس قطع تغییر خواهد کرد، چند نمونه برای N و ω_c به شکل زیر می باشد.

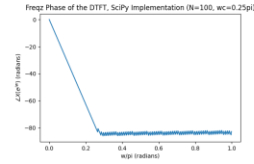
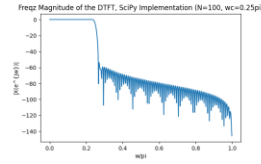
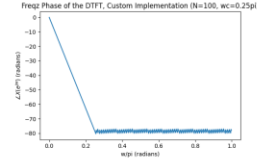
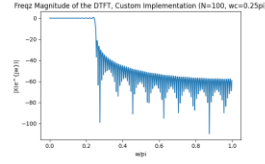
- $N = 10, \omega_c = \frac{\pi}{4}$



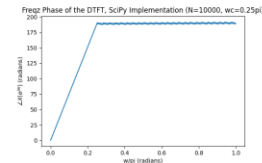
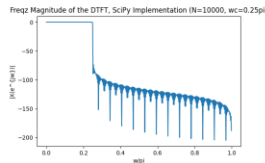
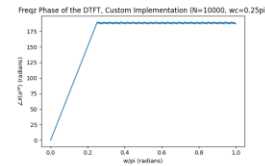
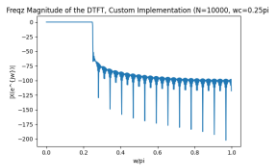
- $N = 15, \omega_c = \frac{\pi}{4}$



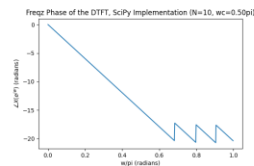
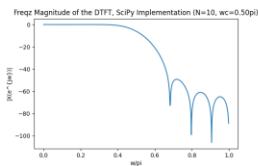
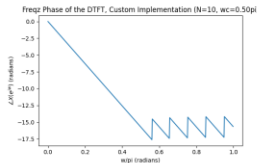
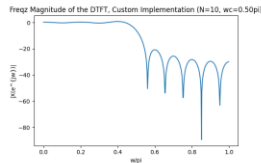
- $N = 100, \omega_c = \frac{\pi}{4}$



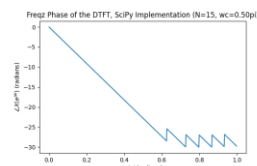
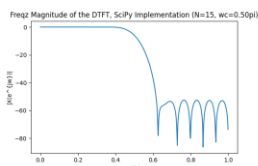
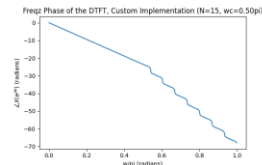
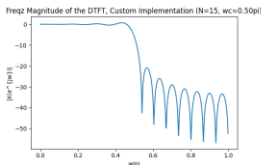
- $N = 10000, \omega_c = \frac{\pi}{4}$



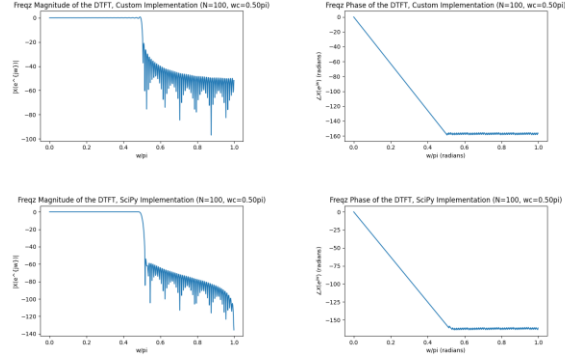
- $N = 10, \omega_c = \frac{\pi}{2}$



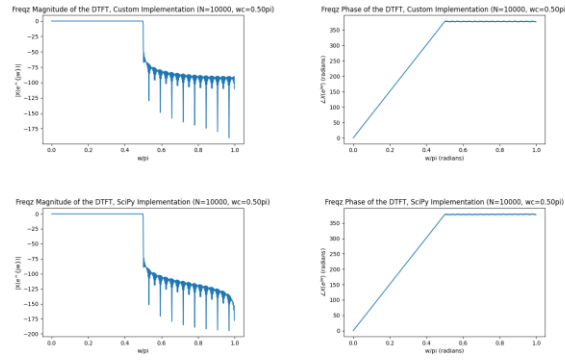
- $N = 15, \omega_c = \frac{\pi}{2}$



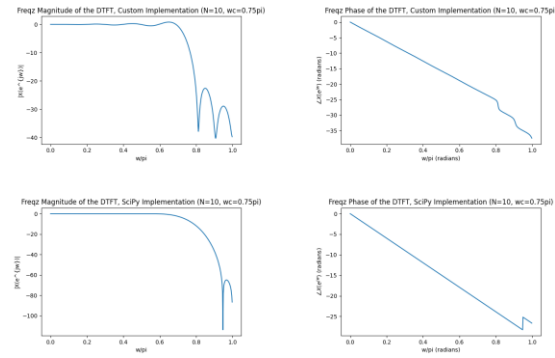
- $N = 100, \omega_c = \frac{\pi}{2}$



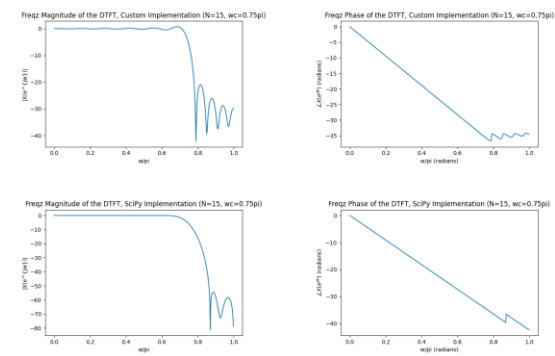
- $N = 10000, \omega_c = \frac{\pi}{2}$



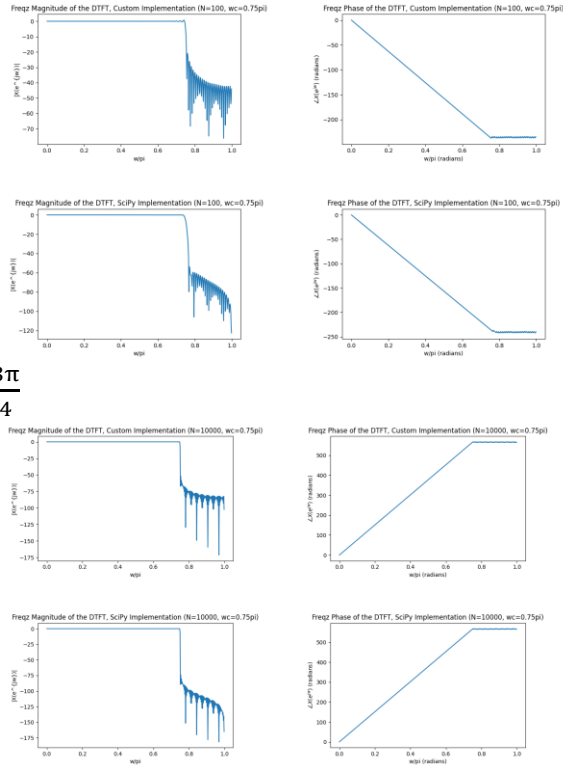
- $N = 10, \omega_c = \frac{3\pi}{4}$



- $N = 15, \omega_c = \frac{3\pi}{4}$



- $N = 100, \omega_c = \frac{3\pi}{4}$



- $N = 10000$, $\omega_c = \frac{3\pi}{4}$

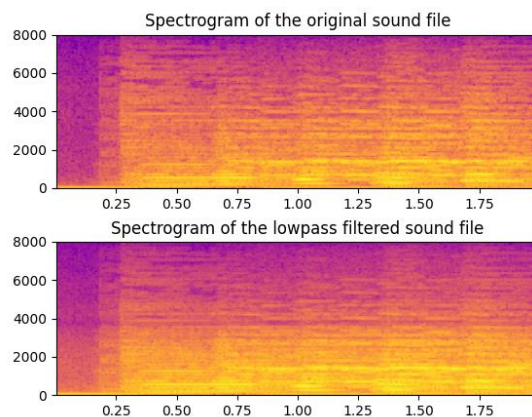
با افزایش مقدار N مدت زمان محاسبه نیز افزایش پیدا می‌کند و انتخاب مقادیر N و ω_c به کاربرد ما بستگی دارد، با این حال با توجه به نمودارها مقادیر $N = 50$ برای اینکار نتایج مناسبی را می‌دهد.

(ب) تولید طیف‌نگار

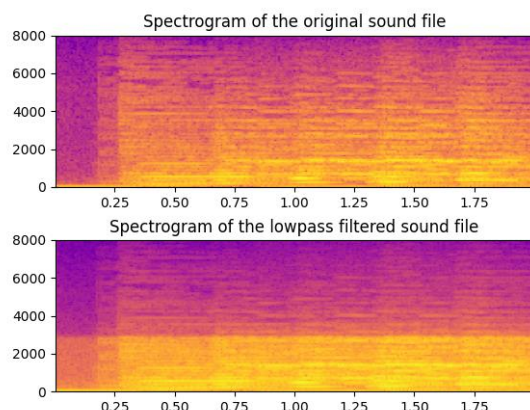
شماره دانشجویی من ۸۱۰۱۰۱۱۷۳ هست که میانگین دو رقم آخر آن برابر با ۵ خواهد بود بنابراین $N = 5$ قرار می‌دهیم.

۱. با توجه به دو ثانیه اول صوت، متوجه می‌شویم که این فیلتر تا حدی کار لازم را انجام می‌دهد. با این وجود این فیلتر به صورت کامل تمام صوت‌ها با فرکانس بالا را از بین نمی‌برد که هم در صوت پخش شده و هم در طیف نگار قابل مشاهده است.

۲. طیف نگار با مقدار $N = 5$ به شکل زیر خواهد بود.



همچنین با N ها دیگر مانند N=100 طیف‌نگار نیز به شکل زیر خواهد بود:



۵. پیاده‌سازی کاربردی: چت‌بات صوتی فارسی

دو کد مربوط به این بخش وجود دارد:

۱- chatbot.py

که بخش اصلی این تمرین است و بخش‌های خواسته شده به صورت کامل پیاده‌سازی شده است.

۲- chatbot_improved.py

شامل بخش امتیازی این تمرین نیز می‌باشد و به صورت کامل پیاده‌سازی شده است.

توجه: سرعت کار g4f و hezar پایین بود بنابراین از api مربوط به Chatgpt و Whisper برای این پیاده‌سازی استفاده کردیم، برای اجرای کد، مقدار OPENAI_API_KEY برابر با key اکانت open-ai خود بگذارید (در صورت نیاز به api_key لطفاً تلگرام یا ایمیل به من پیام بدهید). یا مدل‌ها را با مدل‌های g4f و hezar جایگزین کنید.

الف) چت‌بات ساده

مراحل کار برنامه:

۱. **ضبط صوت:** کاربر دعوت می‌شود که یک ورودی صوتی جدید ضبط کند یا برنامه را قطع کند. اگر کاربر تصمیم به ضبط ('r') داشته باشد، سیستم ضبط صدای کاربر را برای ۳ ثانیه آغاز می‌کند.
۲. **تبدیل به متن:** صدای ضبط شده با استفاده از OpenAI API (Whisper) به متن تبدیل می‌شود. سپس متن تبدیل شده پردازش می‌شود و ذخیره می‌شود.
۳. **تولید پاسخ چت:** متن تبدیل شده به عنوان ورودی برای چت‌بات استفاده می‌شود. چت‌بات با استفاده از مدل GPT-3.5 از OpenAI یک پاسخ بر اساس متن ورودی تولید می‌کند.
۴. **ثبت مکالمه:** ورودی کاربر و پاسخ چت‌بات هر دو به عنوان متغیر conversation در یک لیست ثبت می‌شود تا مکالمه را پیگیری کند.
۵. **ادامه یا قطع:** کاربر امکان ضبط یک ورودی صوتی دیگر را دارد یا می‌تواند برنامه را با فشردن کلید 'q' قطع کند.
۶. **ذخیره مکالمه:** پس از اینکه کاربر تصمیم به قطع کردن مکالمه می‌گیرد ('q')، تمامی مکالمه در یک فایل متنی به نام "conversation.txt" ذخیره می‌شود.

دقت کنید مدل ما در بخش الف به صورت single turn کار می‌کند و مکالمات فقط ذخیره می‌شوند و history کاربر استفاده‌ای ندارد. در بخش ب مدل multi turn پیاده‌سازی شده است و در هر مرحله مدل با توجه به history مخاطب پاسخ می‌دهد.

پارامترهای دیفالت مورد استفاده شده در ضبط صدا به صورت زیر می‌باشد:

```
seconds=3, fs=44100, chunk=1024, channels=2, sample_format=pyaudio.paInt16
```

با توجه به اینکه از مدل قدرتمند whisper برای ضبط صوت استفاده می‌کنیم، توقع داریم که با تغییرات این پارامترها لزوماً مدل دچار مشکل نشود. با این وجود مدل whisper به صورت multilingual آموزش دیده‌است و گاهی وقت‌ها در صورت پایین بودن کیفیت صدا امکان دارد آن را با زبان‌های دیگر اشتباه بگیرد.

پارامترهای قابل تغییر ما به شرح زیر می‌باشند (مشخص است که با افزایش این پارامترها سیستم به دلیل کیفیت بالاتر صوت بهتر کار خواهد کرد):

نرخ نمونه‌برداری (fs): نرخ نمونه‌برداری تعداد نمونه‌های صوتی است که در هر ثانیه گرفته می‌شود. افزایش نرخ نمونه‌برداری می‌تواند منجر به ضبط صدا با کیفیت‌تر شود و جزئیات بیشتری از صدا را ضبط کند. با کاهش نرخ نمونه‌برداری به ۵۰۰۰ سیستم همچنان قابلیت پاسخگویی را تا حد خوبی داشت ولی از ۲۰۰۰ به پایین دیگر صداهای ضبط شده قابل شنیدن نبود.

chunk: اندازه تکه به تعداد فریم‌های هر بافر اشاره دارد. این پارامتر بر تأخیر سیستم ضبط تأثیر می‌گذارد. اندازه‌های chunk بزرگتر ممکن است باعث افزایش تأخیر شود اما می‌تواند به ضبط‌های پایدارتری منجر شود. اندازه‌های chunk کوچکتر تأخیر را کاهش می‌دهند اما ممکن است باعث بروز نویز یا از دست رفتن صداها شود. تغییر این پارامتر زیاد تأثیری در پاسخگویی سیستم نداشت و در با تعداد chunk، ۱۲۸ نیز همچنان سیستم خوب جواب می‌داد.

کانال‌ها (channels): این پارامتر تعداد کانال‌های صوتی را برای ضبط مشخص می‌کند. برای ضبط استریو، این را به ۲ تنظیم می‌کنید. افزایش تعداد کانال‌ها امکان ضبط در فرمت‌های صدای چندکاناله (مانند صدای فراگیر) را فراهم می‌کند. کاهش تعداد کانال‌ها می‌تواند پیچیدگی فرآیند ضبط را کاهش دهد و منجر به حجم کوچکتری از فایل شود. در اینجا چون فقط میکروفون به صورت mono داشتیم، تغییری برای این پارامتر ندادیم.

فرمت نمونه (sample_format): این پارامتر فرمت هر نمونه صوتی را مشخص می‌کند. فرمت‌های مختلف با سطوح مختلف دقت صوتی نمایش داده می‌شوند. به عنوان مثال، pyaudio.paInt16 هر نمونه را به عنوان یک عدد صحیح ۱۶ بیتی نشان می‌دهد، که یک فرمت معمول برای صداهای PCM بدون فشرده‌سازی است. تغییر فرمت نمونه می‌تواند کیفیت و اندازه فایل صوتی ضبط شده را تحت تأثیر قرار دهد. استفاده از عمق بیت بالاتر (مانند pyaudio.paInt32) می‌تواند دامنه پویایی و کیفیت ضبط را افزایش دهد. پایین‌ترین کیفیتی که در pyaudio پشتیبانی می‌شود فرمت pyaudio.paInt8 است. با کاهش دقت به این مقدار تقریباً هیچکدام از صوت‌ها را تشخیص نمی‌دهد سیستم کار نمی‌کند.

ب) چت‌بات حافظه‌دار

برنامه شبیه بخش بالا کار می‌کند، ولی فقط ویژگی‌های مربوط به حافظه و پایگاه داده کاربر را به آن اضافه شده است.

مراحل کار برنامه:

- شروع و احراز هویت:

کاربر دعوت می‌شود تا اعلام کند آیا حساب کاربری دارد یا خیر. (Y/N/Q)

اگر کاربر "N" را انتخاب کند، دعوت می‌شود تا یک حساب جدید با ارائه نام کاربری و رمز عبور ایجاد کند. پس از ایجاد موفقیت‌آمیز، اطلاع رسانی می‌شود و دعوت می‌شود تا وارد سیستم شود.

اگر کاربر "Y" را انتخاب کند، دعوت می‌شود تا نام کاربری و رمز عبور خود را وارد کند. اگر احراز هویت ناموفق باشد، دوباره دعوت می‌شود تا تا احراز هویت موفقیت‌آمیز انجام شود.

- حلقه تعامل:

پس از احراز هویت، کاربر وارد یک حلقه تعامل می‌شود که می‌تواند از طریق آن:

- دکمه 'r' را برای ضبط ورودی صوتی جدید فشار دهند

اگر کاربر انتخاب کند تا ورودی صوتی ضبط کند، برنامه ورودی صوتی را برای مدت زمان ۳ ثانیه ضبط می‌کند.

- دکمه 'q' را برای خروج از برنامه فشار دهند.

ورودی صوتی به متن تبدیل می‌شود با استفاده از مدل whisper به متن تبدیل شده سپس با استفاده از ChatGPT پاسخ تولید و ارسال می‌شود. تاریخچه مکالمه با ورودی کاربر و پاسخ ChatGPT به‌روزرسانی می‌شود. همچنین تاریخچه مکالمه به فایلی با نام کاربر مربوطه ذخیره می‌شود.

- پردازش ورودی‌های نامعتبر:

اگر کاربر در هر نقطه‌ای ورودی نامعتبری را ارائه دهد، به او اعلام خطا می‌شود و او دعوت می‌شود تا ورودی معتبری را ارائه دهد.

- خروج از برنامه:

اگر کاربر تصمیم به خروج از برنامه ('q') داشته باشد، به وی "Bye!" گفته شده و برنامه متوقف می‌شود.

- پایگاه‌داده:

اطلاعات کاربران، از جمله نام‌های کاربری و رمزهای عبور، در یک فایل JSON با نام 'user_database.json' ذخیره می‌شوند. تاریخچه مکالمات در فایل‌های متنی با نام‌هایی بر اساس کاربران نیز با فرمت {username}_conversation.txt ذخیره می‌شود.

این برنامه به صورت multi turn کار می‌کند و در هر مرحله مدل به مکالمات قبلی کاربر دسترسی دارد. در مکالمات قرار داده شده هم مشخص است که نام من را به خاطر دارد در حالی که در بخش قبل این مدل نمی‌توانست این سوال را پاسخ دهد.