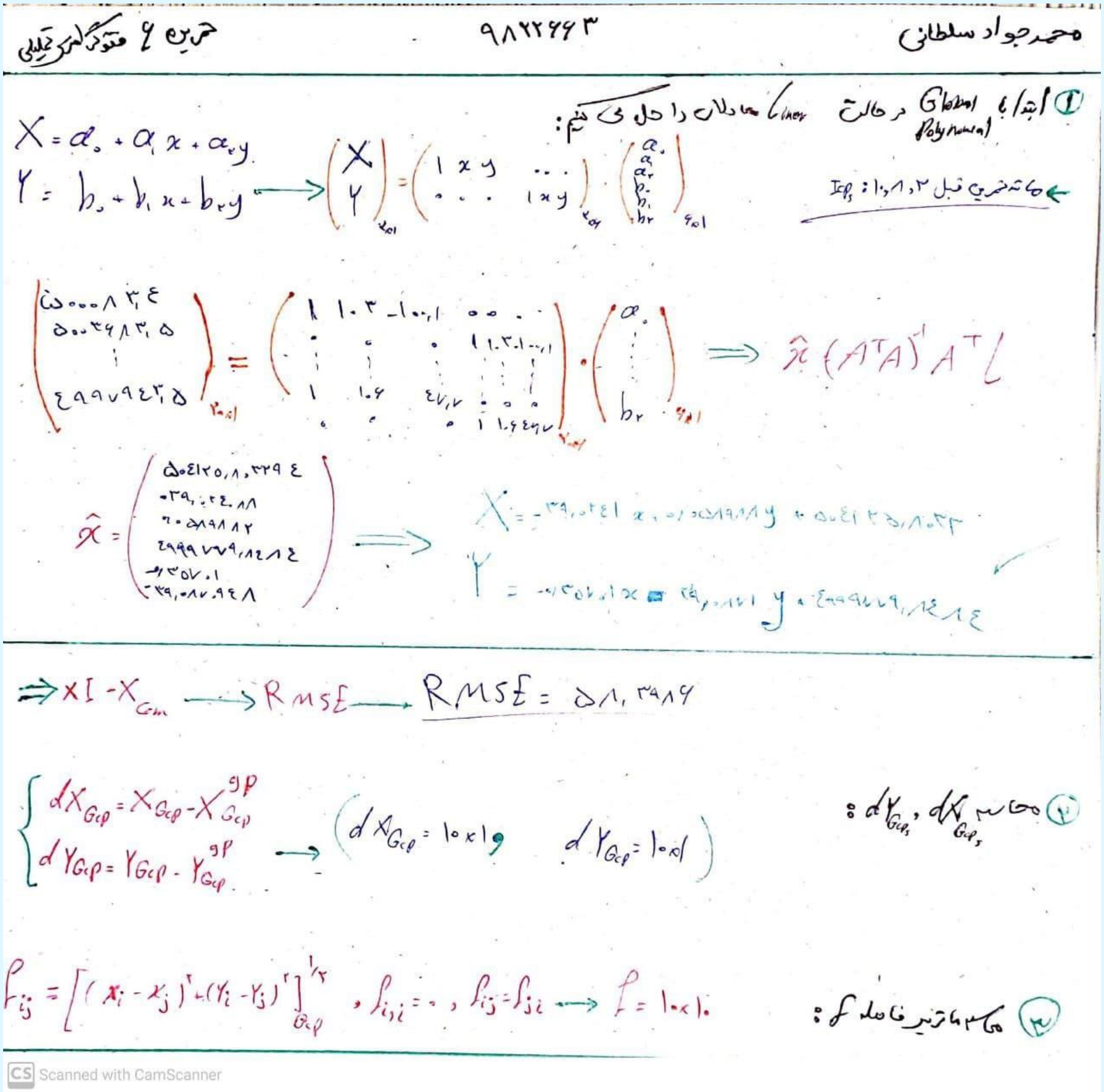
در این تمرین به حل معادلات multi_quadric میپردازیم.

در ابتدا حل دستی این معادلات را میبینیم:



محمدجواد سلطانی ۹۸۲۲۶۶۳ تمرین ۶ فتوگرامتری تحلیلی

① ابتدا با Global Polynomial در حالت Linear معادلات را حل می‌کنیم:

$$X = a_0 + a_1 x + a_2 y$$
$$Y = b_0 + b_1 x + b_2 y \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{20\times1} = \begin{pmatrix} 1 & x & y & \cdots \\ \cdots & 1 & x & y \end{pmatrix}_{20\times6} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}_{6\times1}$$

← با تمرین قبل ICPs : ۱۰، ۸، ۳

$$\Longrightarrow \hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T L$$

[illegible]

$$\Rightarrow XI - X_{Gm} \longrightarrow RMSE \longrightarrow RMSE = ۵۸٫۳۹۸۶$$

② محاسبه dX_{GCP_s} , dY_{GCP_s} :

$$\begin{cases} dX_{Gcp} = X_{Gcp} - X^{gp}_{Gcp} \\ dY_{Gcp} = Y_{Gcp} - Y^{gp}_{Gcp} \end{cases} \longrightarrow (dX_{Gcp} : 10\times1 \text{ و } dY_{Gcp} : 10\times1)$$

③ محاسبه ماتریس فاصله f :

$$f_{ij} = \left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2\right]^{1/2}_{Gcp} , \quad f_{ii} = 0 , \quad f_{ij} = f_{ji} \longrightarrow f = 10\times10$$

Scanned with CamScanner

۴) محاسبه ماتریس‌های a و b:

درجه آزادی صفر

$$\begin{pmatrix} dX_{Gcp_1} \\ \vdots \\ dX_{Gcp_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad و \quad \begin{pmatrix} dY_{Gcp_1} \\ \vdots \\ dY_{Gcp_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{a} &= (F^T F)^{-1} F^T dX \\ \hat{b} &= (F^T F)^{-1} F^T dY \end{aligned}\right\} \longrightarrow \hat{a}, \hat{b} \checkmark$$

۵) حال برای نقاط مجهول (نقاط چک) باید عملکرد را چک کنیم. ۳ نقطه چک داریم؛ برای هر کدام از این نقاط یک ماتریس جدید F می‌سازیم که G مال این نقطه از سایر نقاط است.

← برای هر نقطه چک یک dX و یک dY داریم.

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \end{pmatrix}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \cdots & F_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & F_1 & F_2 \cdots & F_n \end{pmatrix}_{2\times 2n} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{2n\times 1}$$

۶) مختصات تصویری نقاط چک را در معادلات G.P گذاشته و این عدد بدست آمده را با dX و dY جمع می‌کنیم:

$$X^{MA}_{Icp} = X^{Gp}_{Icp} + dX_{Icp} \quad و \quad Y^{MA}_{Icp} = Y^{Gp}_{Icp} + dY_{Icp}$$

X^{MA}_{Icp} ، Y^{MA}_{Icp} برسیم. {برای نقاط چک.}

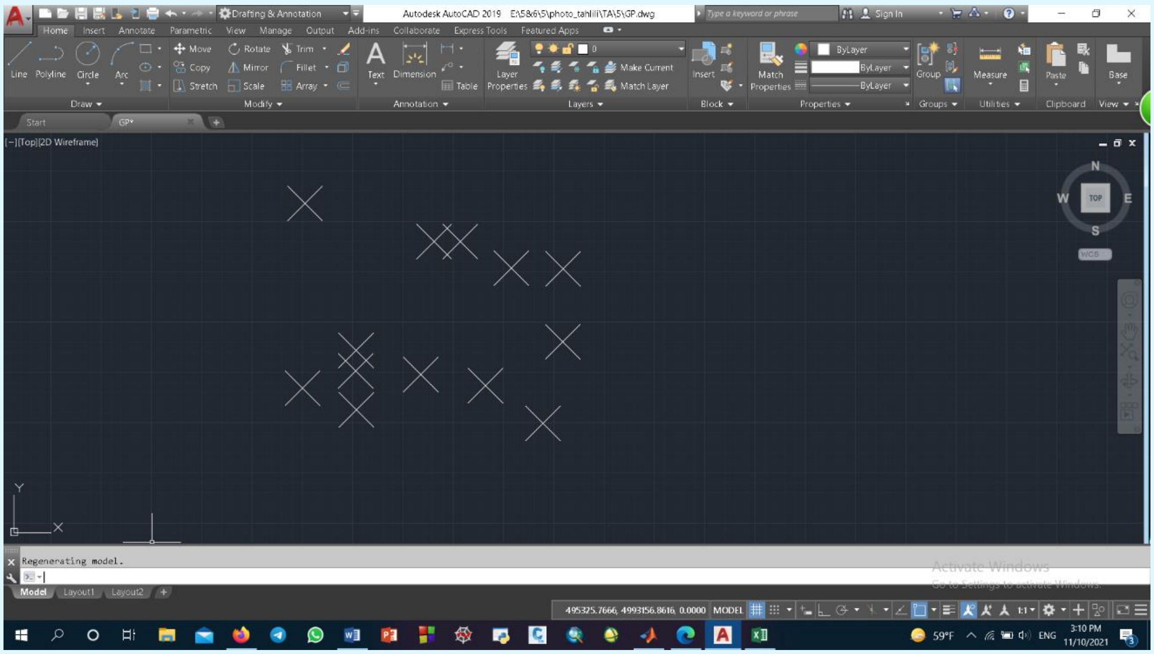
۷) در این مرحله dX, dY را با توجه به X^{obs}, X^{MA} و Y^{obs}, Y^{MA} در نقاط چک بدست می‌آوریم.

$$dX_i^{MA} = X_{Icp} - X^{MA}_{Icp} \quad , \quad dY_i^{MA} = \cancel{X}_{Icp} - Y^{MA}_{Icp}$$

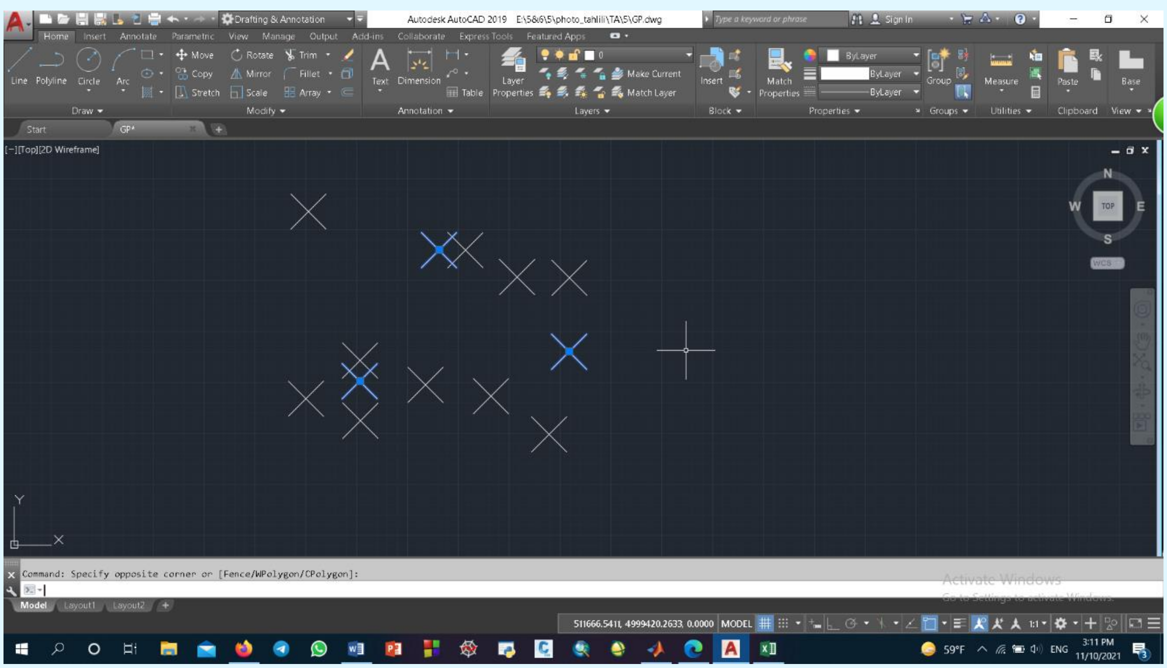
۸) در مرحله آخر با فرمول RMSE این مقادیر را محاسبه می‌کنیم.

$$RMSE_i = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \frac{dv_j^2}{m-1}}$$ ⇐ در نهایت مقادیر را با یک دیگر مقایسه می‌کنیم.

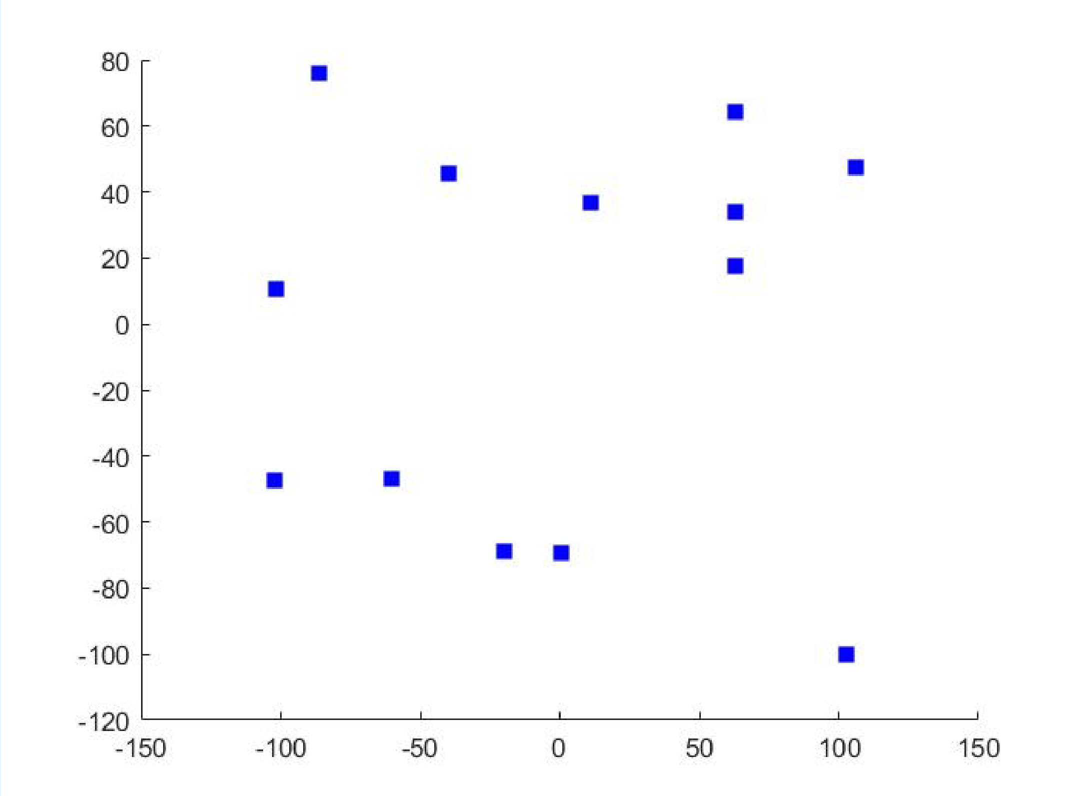
حال که حل دستی را دیدیم،ابتداعا بهتر است نقاط چک را با توجه به توضیع مناسب،بدست بیاوریم.

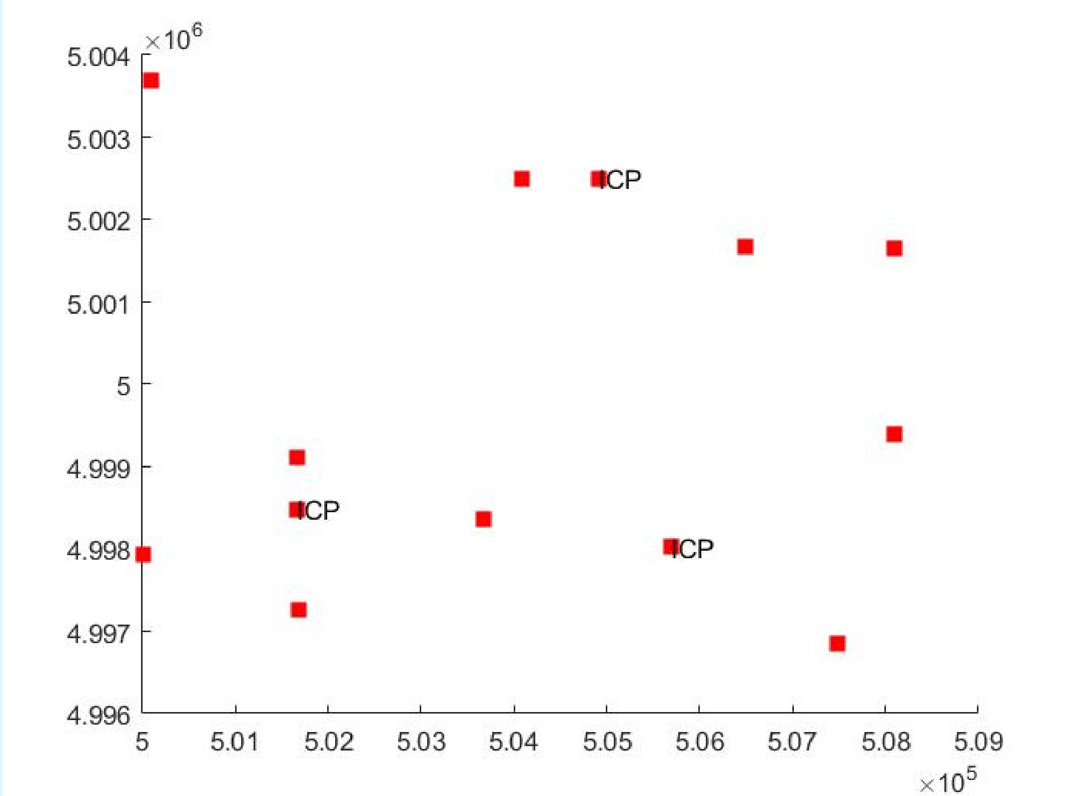


حال با توجه به این توضیع نقاط زمینی ، ۳ نقطه را که دارای توضیع مناسبی باشند را انتخاب و مختصات آنها را یادداشت میکنیم.



plots:


80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-150
-100
-50
0
50
100
150


×10^6
5.004
5.003
5.002
5.001
5
4.999
4.998
4.997
4.996
ICP
ICP
ICP
5
5.01
5.02
5.03
5.04
5.05
5.06
5.07
5.08
5.09
×10^5

نقاط رو به رو نقاط انتخابی هستند.

504907.5,5002499.5
501675.9,4998479.5
501657.9,4998479.5

بخش اول :

پس از مقدار دهی به ماتریس ضرایب و ماتریس مشاهدات(A,L) با روش کمترین مربعات ضرایب مجهول را محاسبه میکنیم.

نمونه کد این مرحله:

```
A1 = zeros(numberofpoint
*2, numberofunknown1);
for i=1:numberofpoint
    A1(2*i-1,2) =UG(i);
    A1(2*i,5) =UG(i);
    A1(2*i-1,1) =1;
    A1(2*i-1,3) =VG(i);
    A1(2*i,6) =VG(i);
    A1(2*i,4) =1;
end
```

```
xcap1 = inv(A1' * A1) * A1' * L1 ;
```

X = -39.0241 x + 0.058988 y + 504125.8033

Y = -0.35701 x + -39.0871 y + 4999779.8484

حال برای محاسبه RMSEباید ابتدا مختصات نقاط چک را در فرمول های بدست آمده قرار داد و مختصات جدیدی را محاسبه کنیم.

با کم کردن آن از مقدار واقعی و بدست آوردن فاصله و قرار دادن آن در فرمول RMSEمیتوان این مقدار را محاسبه کرد.

```
for i=1:numberofcheak
    Xcom1(i,1) = xcap1(2)*UI(i)+xcap1(3)*VI(i)+xcap1(1);
    Ycom1(i,1) = xcap1(5)*UI(i)+xcap1(6)*VI(i)+xcap1(4);
end
```

```
for i=1:numberofcheak
    Xrem1(i,1) = XI(i) - Xcom1(i);
    Yrem1(i,1) = YI(i) - Ycom1(i);
end
```

```
for i=1:numberofcheak
    teta1(i,1) = atand(Yrem1(i)/Xrem1(i));
    dr1(i,1) = sqrt( (Xrem1(i))^2 + (Yrem1(i))^2 );
end
```

```
RMSE1 = 0;
for i=1:numberofcheak
    RMSE1 = RMSE1 + sqrt(   (dr1(i)^2) / (numberofcheak-1)   );
end
RMSE1
```

RMSE1 =

58.3985914079285

میبینیم که این مقدار در مقایسه با مقدار RMSEدر همین معادلات بسیار کمتر است.پس قطعا در تمرین قبل در ورود داده ها خطایی برای این حالت به وجود آمده بوده است که با خواندن فایل نقاط از طریق EXCELاین موضوع حل شده است.

حال به حل معادلات multiquadricمیپردازیم.

بخش دوم :

ابتدا اختلاف مقدار محاسبه شده با GPرا با مقدار واقعی نقاط GCPsبدست می آوریم.

نمونه کد این مرحله:

```
dX=zeros(length(XG),1);
dY=zeros(length(YG),1);
for i=1:10
    dX(i)=XG(i)-
(xcap1(2)*UG(i)+xcap1(3)*VG(i)+xcap1(1));
    dY(i)=YG(i)-
(xcap1(5)*UG(i)+xcap1(6)*VG(i)+xcap1(4));
end
```

بخش سوم :

در اینجا ماتریس فاصله را محاسبه میکینم.

```
F = zeros(length(UG),length(UG));
for i=1:10
    for j=1:10
        F(i,j)=sqrt( (XG(i)-XG(j))^2+(YG(i)-YG(j))^2 );
    end
end
```

بخش چهارم :

در اینجا ماتریس های a,bرا بدست ما آوریم.

```
a=zeros(length(UG),1);
b=zeros(length(UG),1);
a=inv(F'*F)*F'*dX;
b=inv(F'*F)*F'*dY;
```

بخش پنجم :

پس از محاسبه این ماتریس ها ،با کمک ماتریس های dX,dY بدست آمده،مقدار dX,dY را برای

```
F1=zeros(2,2*length(UG));
F2=zeros(2,2*length(UG));
F3=zeros(2,2*length(UG));

for i=1:10
    F1(1,i)=sqrt( (XI(1)-XG(i))^2+(YI(1)-YG(i))^2 );
end
for i=11:20
    F1(2,i)=sqrt( (XI(1)-XG(i-length(UG)))^2+(YI(1)-YG(i-length(UG)))^2 );
end

for i=1:10
    F2(1,i)=sqrt( (XI(2)-XG(i))^2+(YI(2)-YG(i))^2 );
end
for i=11:20
    F2(2,i)=sqrt( (XI(2)-XG(i-length(UG)))^2+(YI(2)-YG(i-length(UG)))^2 );
end

for i=1:10
    F3(1,i)=sqrt( (XI(3)-XG(i))^2+(YI(3)-YG(i))^2 );
end
for i=11:20
    F3(2,i)=sqrt( (XI(3)-XG(i-length(UG)))^2+(YI(3)-YG(i-length(UG)))^2 );
end
```

```
c=zeros(20,1);
for i=1:10
    c(i,1)=a(i);
end
for i=11:20
    c(i,1)=b(i-10);
end
d1=F1*c;
d2=F2*c;
d3=F3*c;
```

نقاط چک بدست می آوریم.

بخش ششم :

در اینجا باید مختصات MQ را برای نقاط چی محاسبه کنیم.

```
XICP_GP=zeros(length(UI),1);
YICP_GP=zeros(length(UI),1);
for i=1:3
    XICP_GP(i)=xcap1(2)*UI(i)+xcap1(3)*VI(i)+xcap1(1);
    YICP_GP(i)=xcap1(5)*UI(i)+xcap1(6)*VI(i)+xcap1(4);
end
dX_ICP=zeros(3,1);
dY_ICP=zeros(3,1);
dX_ICP(1)=d1(1);
dX_ICP(2)=d2(1);
dX_ICP(3)=d3(1);
dY_ICP(1)=d1(2);
dY_ICP(2)=d2(2);
dY_ICP(3)=d3(2);
XMQ_ICP=zeros(length(UI),1);
YMQ_ICP=zeros(length(UI),1);
for i=1:3
    XMQ_ICP(i)=XICP_GP(i)+dX_ICP(i);
    YMQ_ICP(i)=YICP_GP(i)+dY_ICP(i);
end
```

بخش هفتم :

مقادیر بالا را از مقادیر حقیقی نقاط چک کم میکنیم و در فرمول RMSEقرار میدهیم تا مقدار خطا مدل را بدست آوریم.

```
Xrem2 = zeros(numberofcheak,1);
Yrem2 = zeros(numberofcheak,1);
for i=1:numberofcheak
    Xrem2(i,1) = XI(i) - XMQ_ICP(i);
    Yrem2(i,1) = YI(i) - YMQ_ICP(i);
end
```

```
teta2 = zeros(numberofcheak,1);
dr2 = zeros(numberofcheak,1);
for i=1:numberofcheak
    teta2(i,1) = atand(Yrem2(i)/Xrem2(i));
    dr2(i,1) = sqrt( (Xrem2(i))^2 + (Yrem2(i))^2 );
end

RMSE2 = 0;
for i=1:numberofcheak
    RMSE2 = RMSE2 + sqrt(    (dr2(i)^2) / (numberofcheak-1)    );
end
RMSE2
```

RMSE۲ =
125.004196147165

تحلیل:

میدانیم در معادلات multiquadricدر اصل ما از همه نقاط کنترل برای محاسبه مدل استفاده میکنیم که این قضیه باعث میشود fitبهتری را نسبت به global polynomial **در نقاط چک** داشته باشیم .

اما RMSEما با توجه به نقاط چک بدست می آید . پس اینکه در این حالت خطا بیشتر شده است میتوان گفت مدل برای نقاط چک بسیار خوب عمل کرده است ،و تقریبا همه را با خطایی بسیار

کم به منطقه ما fitکرده است اما در خصوص نقاط چک در این معادلات این اصل به خوبی صادق نیست و این مقدار نسبت به مقدار مشابه در quibic , quadricبیشتر میباشد.

حال باید این نکته را هم برای این مدل مقایسه کرد که آیا اگر در حالت اول از معادلات با درجه ای بیشتر از خطی استفاده کنیم، آیا همچنان این خطا زیاد خواهد بود یا کمتر خواهد شد.

از طرفی عوض کردن نقاط چک علاوه هم میتواند راه حل دیگری برای کم کردن RMSEباشد.

پس عوض کردن نقاط چک و استفاده از معادلات global polynomialهایی با درجات بالاتر ،ما را به دقت های بالاتری خواهد رساند.