

در این تمرین به حل معادلات point\_wise میپردازیم.

در ابتدا حل دستی این معادلات را میبینیم:

برای حل معادلات point\_wise در مقایسه آن با دیگر حالتها، چیزی که ضرور است، ثابت بودن نقطه جابجایی و انتقال است. تعبیر معادلاتی  
 به معادلاتی که بین هم اشتراک نقطه جابجایی و انتقال را اختیار می‌کنیم.

① برای یک global polynomial در حالت خطی:

$$\begin{aligned} X &= a_0 + a_1 x + a_2 y \\ Y &= b_0 + b_1 x + b_2 y \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & \dots & 1 & 2 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 299 & 69 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a} = (A^T A)^{-1} A^T \Rightarrow \hat{a} = \begin{pmatrix} 5.4135 & 1.3294 \\ \vdots & \vdots \\ -39.16 & 9.41 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X = -39.16x + 9.41y \\ Y = -39.16x + 9.41y + 299.6943 \end{cases}$$

② Global Polynomial  $\leftarrow$  GP,  $dX$ ,  $dY$ , RMSE.

$\Rightarrow RMSE \rightarrow RMSE = 51.3916$

$\begin{cases} dX_{GP} = X_{GP} - X^{GP} \\ dY_{GP} = Y_{GP} - Y^{GP} \end{cases} \rightarrow dX_{GP}, dY_{GP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

### ۳) نقاط مؤثر:

← ابتدا ماتریس  $F(1 \times 3)$  را تکمیل می‌کنیم که نشان دهنده  $G$  مد  $G$  از  $CP$  است.

← با دستور  $Save [B, I]$  این ماتریس را اگر بخواهیم، بزرگ مرتب می‌کنیم.

weighte d distance  $n=1:10$  ⇒ RMSE

$$w_i = \frac{1}{d_i^2}, \quad dX_u = \frac{\sum_{i=1}^n w_i dX_i}{\sum_{i=1}^n w_i}, \quad dY_u = \frac{\sum_{i=1}^n w_i dY_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

$$\begin{cases} X_u^{final} = X_u^{GP} + dX_u \\ Y_u^{final} = Y_u^{GP} + dY_u \end{cases}$$

→ not moving average

$$\begin{cases} dX_i = A_0 + A_1 X_i + A_2 Y_i \\ dY_i = B_0 + B_1 X_i + B_2 Y_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dX_u = A_0 + A_1 X_u^{GP} + A_2 Y_u^{GP} \\ dY_u = B_0 + B_1 X_u^{GP} + B_2 Y_u^{GP} \end{cases}$$

☆ حال با استفاده از حلقه‌ای با  $10$  بار تکرار، برای هر نقطه جدید،  $10$  شرط می‌نویسیم که نشان دهنده هر منطقه باشد و در هر مرحله این شرط‌ها، آن‌ها را محاسبه می‌کنیم و کمتر متغیر شود. شرط‌های  $10$  شرط  $2$  و  $10$  شرط  $1$  و  $10$  شرط  $3$  بودن است.

پس اگر کافی باشد، چون ماتریس  $Salt$  است، آن خود به خود بهترین مقدار را انتخاب می‌کند و بقیه چیزها را حذف می‌کند. اما اگر در  $10$  بار تکرار، مقدار  $10$  را تغییر می‌دهیم.

Scanned with CamScanner

از فواصل مختلف و ~~Weighted distance~~ →  $X, Y_{final}$

$$w_i = \frac{1}{d_i^2}, \quad dX_u = \frac{\sum_{i=1}^n w_i dX_i}{\sum_{i=1}^n w_i}, \quad dY_u = \frac{\sum_{i=1}^n w_i dY_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

برای  $n$  نقاط نشان می‌دهد

→ moving average

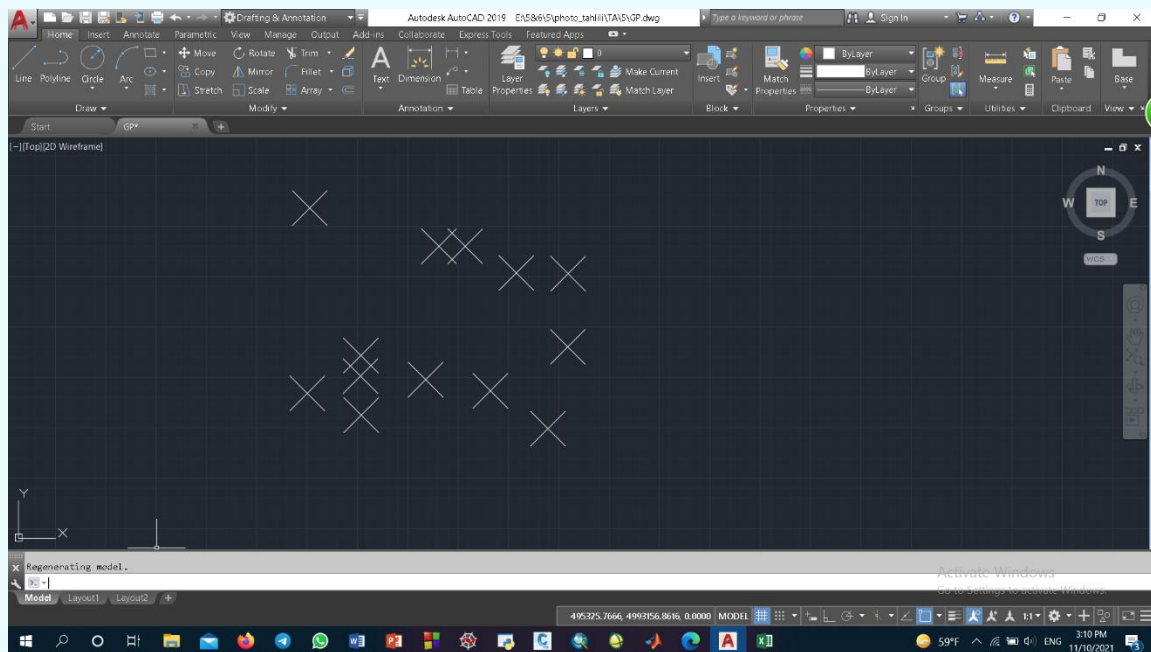
باز هم با توجه به  $10$  نقطه، این محاسبات را تکرار می‌کنیم.

$$\begin{cases} dX_i = A_0 + A_1 X_i + A_2 Y_i \\ dY_i = B_0 + B_1 X_i + B_2 Y_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dX_u = A_0 + A_1 X_u^{GP} + A_2 Y_u^{GP} \\ dY_u = B_0 + B_1 X_u^{GP} + B_2 Y_u^{GP} \end{cases} \rightarrow Y, X_{final}$$

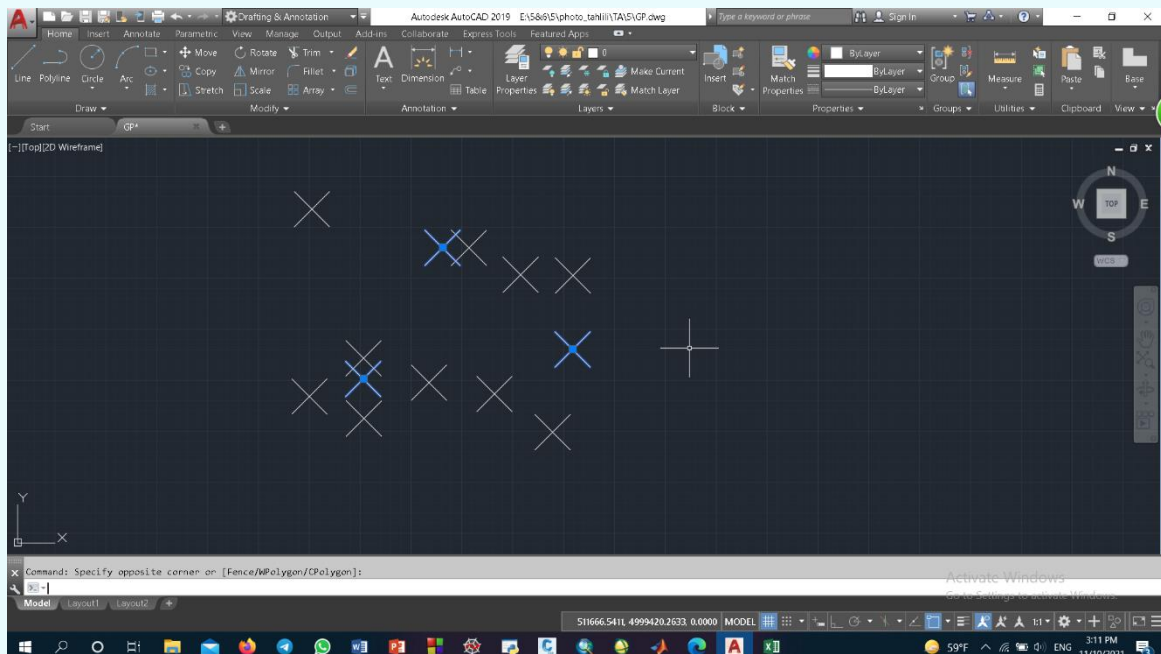
برای هر نقطه جدید، این کار را تکرار می‌کنیم.

Scanned with CamScanner

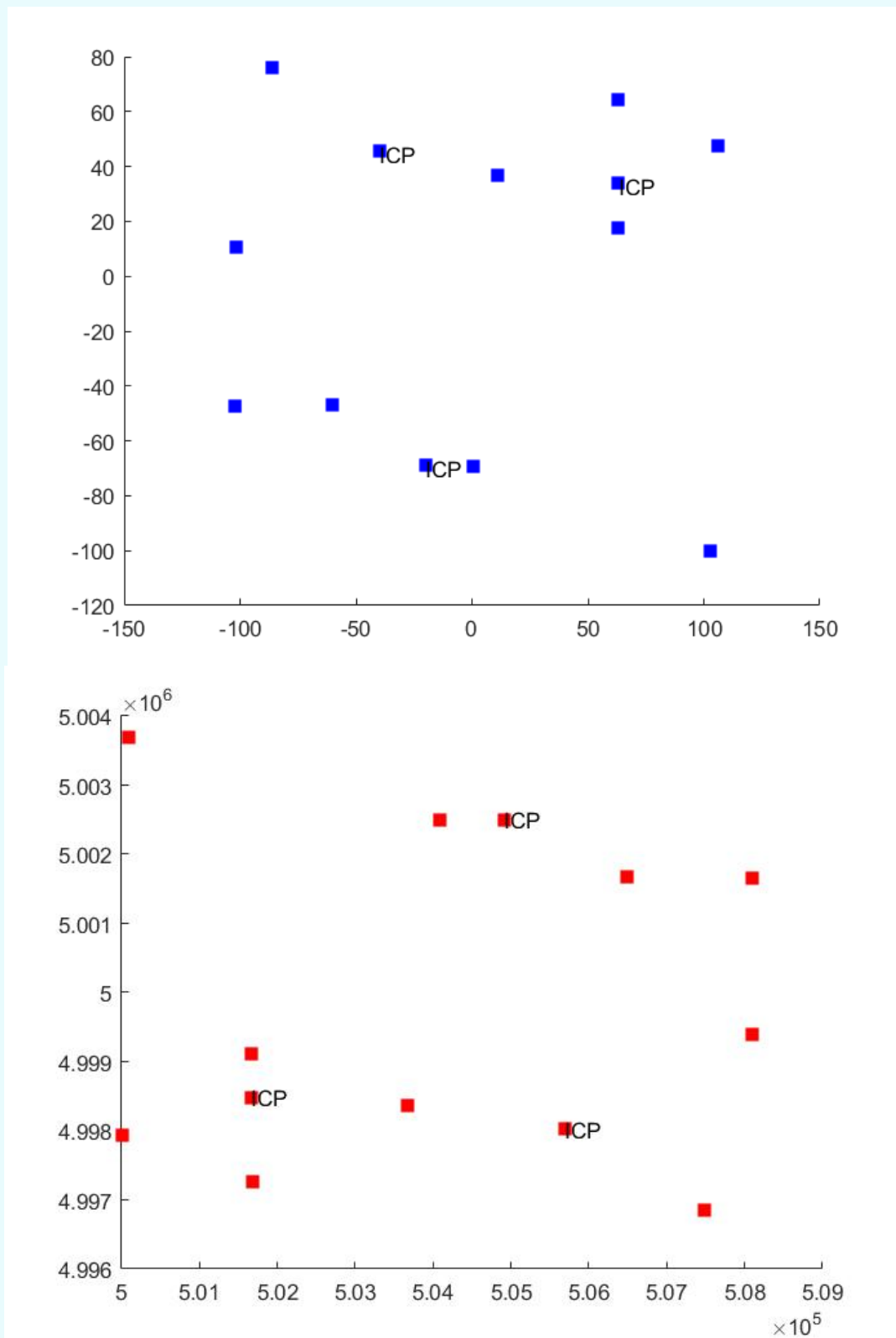
حال که حل دستی را دیدیم، ابتدا عا بهتر است نقاط چک را با توجه به توضیح مناسب، بدست بیاوریم.



حال با توجه به این توضیح نقاط زمینی، ۳ نقطه را که دارای توضیح مناسبی باشند را انتخاب و مختصات آنها را یادداشت میکنیم.



## plots:



504907.5,5002499.5

501675.9,4998479.5

501657.9,4998479.5

نقاط رو به رو نقاط انتخابی هستند.

## بخش اول :

پس از مقدار دهی به ماتریس ضرایب و ماتریس مشاهدات (A,L) با روش کمترین مربعات ضرایب مجهول را محاسبه میکنیم.

نمونه کد این مرحله:

```
A1 = zeros(numberofpoint
*2, numberofunknown1);
for i=1:numberofpoint
    A1(2*i-1,2) =UG(i);
    A1(2*i,5) =UG(i);
    A1(2*i-1,1) =1;
    A1(2*i-1,3) =VG(i);
    A1(2*i,6) =VG(i);
    A1(2*i,4) =1;
end
```

---


$$x_{cap1} = \text{inv}(A1' * A1) * A1' * L1 ;$$


---

$$X = -39.0241 x + 0.058988 y + 504125.8033$$

$$Y = -0.35701 x + -39.0871 y + 4999779.8484$$

حال برای محاسبه RMSE باید ابتدا مختصات نقاط چک را در فرمول های بدست آمده قرار داد و مختصات جدیدی را محاسبه کنیم.

با کم کردن آن از مقدار واقعی و بدست آوردن فاصله و قرار دادن آن در فرمول RMSE میتوان این مقدار را محاسبه کرد.

```

for i=1:numberofcheak
    Xcom1(i,1) = xcap1(2)*UI(i)+xcap1(3)*VI(i)+xcap1(1);
    Ycom1(i,1) = xcap1(5)*UI(i)+xcap1(6)*VI(i)+xcap1(4);
end

```

---

```

for i=1:numberofcheak
    Xrem1(i,1) = XI(i) - Xcom1(i);
    Yrem1(i,1) = YI(i) - Ycom1(i);
end

```

---

```

for i=1:numberofcheak
    teta1(i,1) = atand(Yrem1(i)/Xrem1(i));
    dr1(i,1) = sqrt( (Xrem1(i))^2 + (Yrem1(i))^2 );
end

```

---

```

RMSE1 = 0;
for i=1:numberofcheak
    RMSE1 = RMSE1 + sqrt( (dr1(i)^2) / (numberofcheak-1) );
end
RMSE1

```

---

RMSE1 =

58.3985914079285

## بخش دوم:

ابتدا اختلاف مقدار محاسبه شده با GP را با مقدار واقعی نقاط GCPs بدست می آوریم.

نمونه کد این مرحله:

```
%dX,dY for GCPs in GP:
dX=zeros(length(XG),1);
dY=zeros(length(YG),1);
dX_icp=zeros(length(XI),1);
dY_icp=zeros(length(YI),1);
for i=1:10
    dX(i)=XG(i)-(xcap1(2)*UG(i)+xcap1(3)*VG(i)+xcap1(1));
    dY(i)=YG(i)-(xcap1(5)*UG(i)+xcap1(6)*VG(i)+xcap1(4));
end
for i=1:3
    dX_icp(i)=XI(i)-(xcap1(2)*UI(i)+xcap1(3)*VI(i)+xcap1(1));
    dY_icp(i)=YI(i)-(xcap1(5)*UI(i)+xcap1(6)*VI(i)+xcap1(4));
end
```

---

## بخش سوم:

در اینجا ماتریس فاصله را محاسبه میکنیم و آن را مرتب میکنیم.

```
F=zeros(length(UG),3);%distance of cheak1
for i=1:10
    F(i,1)=sqrt( (XI(1)-XG(i))^2+(YI(1)-YG(i))^2 );
    F(i,2)=sqrt( (XI(2)-XG(i))^2+(YI(2)-YG(i))^2 );
    F(i,3)=sqrt( (XI(3)-XG(i))^2+(YI(3)-YG(i))^2 );
end
[B,I] = sort(F);
```

---

## بخش چهارم:

حالت اول را که از ۱ تا ۱۰ نقطه باید انتخاب کنیم را در حالت weighted distance حل میکنیم


```
for i=1:10
    %weighted distance:
    for j=1:i
        dists(j,1)=B(j,1);
        dists(j,2)=B(j,2);
        dists(j,3)=B(j,3);
        W(j,1)=1/F(j,1)^2;
        W(j,2)=1/F(j,2)^2;
        W(j,3)=1/F(j,3)^2;
        sum1=sum1+W(j,1)*dX(j);
        sum2=sum2+W(j,1)*dY(j);
        sum3=sum3+W(j,1);
        sum4=sum4+W(j,2)*dX(j);
        sum5=sum5+W(j,2)*dY(j);
        sum6=sum6+W(j,2);
        sum7=sum7+W(j,3)*dX(j);
        sum8=sum8+W(j,3)*dY(j);
        sum9=sum9+W(j,3);
    end
```

---

```
sum=zeros(3,3);
sum(1,1)=sum1;sum(1,2)=sum2;sum(1,3)=sum3;
sum(2,1)=sum4;sum(2,2)=sum5;sum(2,3)=sum6;
sum(3,1)=sum7;sum(3,2)=sum8;sum(3,3)=sum9;
for o=1:3
    dX_u(o,1)=sum(o,1)/sum(o,3);
    dY_u(o,1)=sum(o,2)/sum(o,3);
    X_F(o,1)=dX_u(o,1)+Xcom1(o,1);
    Y_F(o,1)=dY_u(o,1)+Ycom1(o,1);
    Xrem11(o,1) = XI(o) - X_F(o,1);
    Yrem11(o,1) = YI(o) - Y_F(o,1);
    dr11(o,1) = sqrt( (Xrem11(o,1))^2 + (Yrem11(o,1))^2 );
    RMSE_AA(i,1) = RMSE_AA(i,1) + sqrt( (dr11(o,1)^2) / (numberofcheak-1) );
end
disp(['RMSE_wieghted_',num2str(i),' is : ',num2str(RMSE_AA(i,1))]);
end
```

---





RMSE\_WIEGHTED\_1 is : 58.4722  
RMSE\_WIEGHTED\_2 is : 34.8899  
RMSE\_WIEGHTED\_3 is : 34.5624  
RMSE\_WIEGHTED\_4 is : 33.0011  
RMSE\_WIEGHTED\_5 is : 30.3422  
RMSE\_WIEGHTED\_6 is : 30.3011  
RMSE\_WIEGHTED\_7 is : 29.306  
RMSE\_WIEGHTED\_8 is : 130.6918  
RMSE\_WIEGHTED\_9 is : 134.6435  
RMSE\_WIEGHTED\_10 is : 132.1031

با توجه به نقاط چکی که در نظر گرفتیم با انتخاب ۷ نقطه به کمترین خطا رسیده ایم. به طبع با تغییر نقاط چک لسن مقدار کمتر یا بیشتر خواهد شد و در تمرین های بعدی سعی میشود نقاط چک را نقطای اختیار کنیم که به مرکز نزدیک تر باشند تا تفاوت مقدار خطا را مشاهده کنیم.

## بخش پنجم:

استفاده از روش moving average و انتخاب ۱۰ نقطه ای که در تمرین گفته شد.

```
A1 = zeros(numberofpoint,3);
RMSE_A2=0;
for i =1:10
    A1(i,1)=1;
    A1(i,2)=UG(i);
    A1(i,3)=VG(i);
end
xcap11 = inv(A1'*A1)*A1'*dX;%Ai
xcap12 = inv(A1'*A1)*A1'*dY;%Bi
```

```
for i=1:3
    dX_MA(i,1)=(xcap11(2)*Xcom1(i)+xcap11(3)*Ycom1(i)+xcap11(1));
    dY_MA(i,1)=(xcap12(2)*Xcom1(i)+xcap12(3)*Ycom1(i)+xcap12(1));

    XFM(i,1)=(xcap1(2)*UI(i)+xcap1(3)*VI(i)+xcap1(1))+dX_MA(i);%XFM=X FINAL MOVING
    YFM(i,1)=(xcap1(5)*UI(i)+xcap1(6)*VI(i)+xcap1(4))+dY_MA(i);%YFM=Y FINAL MOVING

    Xrem12(i,1) = XI(i) - XFM(i,1);
    Yrem12(i,1) = YI(i) - YFM(i,1);
    dr12(i,1) = sqrt( (Xrem12(i,1))^2 + (Yrem12(i,1))^2 );
    RMSE_A2 = RMSE_A2 + sqrt( (dr12(i,1)^2) / (numberofcheak-1) );
end
disp(['RMSE_MOVING is : ',num2str(RMSE_A2)]);
```

RMSE\_MOVING is : 58.3985

همانطور که مشاهده شد در این روش مقدار خطا بیشتر از حالت قبل شد . با توجه به متد استفاده شده در این دو روش همین انتظار هم میرفت زیرا در این روش از تقریب خطی استفاده شده است و در برابر روش اول در بسیاری از حالت ها احتمال دارد که نامناسب تر

عمل کند. البته همچنان به طور قطع نمیتوان نظر داد و با توجه به منطقه ممکن است متفاوت عمل کند.

#### بخش ششم:

در اینجا باید برای هر نقطه صفحه را به ۴ بخش تقسیم کنیم و از هر بخش نزدیک ترین نقطه را به نقطه مجهول انتخاب کنیم.

```
dists_secound = zeros(4,3);
for j=1:3
    for i=1:10
        if ((XG(i)-XI(j)>0) & (YG(i)-YI(j)>0))
            dists_secound(1,j) = B(i);
        end
        if ((XG(i)-XI(j)<0) & (YG(i)-YI(j)>0))
            dists_secound(2,j) = B(i);
        end
        if ((XG(i)-XI(j)<0) & (YG(i)-YI(j)<0))
            dists_secound(3,j) = B(i);
        end
        if ((XG(i)-XI(j)>0) & (YG(i)-YI(j)<0))
            dists_secound(4,j) = B(i);
        end
    end
end
```

---

#### بخش هفتم:

در اینجا باید برای از روش **weighted distance** برای این ۴ نقطه انتخابی معادلات را حل کنیم که پس از حل به **RMSE** زیر میرسیم.

**RMSE\_WIEGHTED\_2 is : 33.0031**

این عدد به نسبت عدد خوبی میباشد ولی در مقایسه با حالتی که ۷ نقطه انتخاب شده بود همچنان بالاتر است.

### بخش هشتم :

همین کار را با روش `moving average` هم انجام میدهیم.

در این روش به خطای بالای زیر میرسیم.

`RMSE_MOVING_2 is : 15530871.4439`

در این بخش به دلیل برخورد به `rmse` خیلی بالا، در ابتدا حلقه هایی که با استفاده از آنها نقاط نزدیک محاسبه میشد را بررسی کرده و پس از نتیجه نگرفتن، تصمیم به حذف آنها و ورودی دستی تک تک نقاط نزدیک به معادلات شد؛ اما همچنان `RMSE` بسیار بالایی دارد. دلیل این حجم خطای بالا را در کد هم پیدا نکردم.

### تحلیل:

در کل متد `moving average` نسبت به `weighted distance` بهتر جواب میداد و با انتخاب ۷ نقطه، به کمترین `RMSE` رسیدیم.

البته قطعاً با انتخاب نقاط دیگر این خطاها دستخوش تغییر شده و ممکن است کمتر یا بیشتر شود.

در مقایسه با روش های قبلی، اگر بهترین جواب این تمرین (29.306) را انتخاب کنیم؛ در global polynomial، در linear مقدار RMSE برابر (58.3985914079285)، در برابر (32.1190033364934) و در برابر (28.7775235647932) است. در multiquadric هم RMSE برابر (125.004196147165) بدست آمد.

در مقایسه RMSE برای MQ, GP میتوان گفت :

ما با توجه به نقاط چک بدست می آید . پس اینکه در این حالت خطا بیشتر شده است میتوان گفت مدل برای نقاط چک بسیار خوب عمل کرده است، و تقریباً همه را با خطایی بسیار کم به منطقه ما fit کرده است اما در خصوص نقاط چک در این معادالت این اصل به خوبی صادق نیست و این مقدار نسبت به مقدار مشابه در quadric, quibic بیش تر میباشد.

اما در این تمرین عددی که بدست آمد از MQ بهتر بود و حتی از GP تا درجه ۲ هم بهتر بود. پس اگر یک GP درجه بالاتر را در ابتدا برازش دهیم و از weighted distance هم استفاده و تعداد مناسبی نقطه را انتخاب کنیم، احتمال مینیمال شدن RME را بیشتر از آن خود میکند.