80133-2 - אינפי 2 למדמ`ח - סמסטר ב' תש"ף - תרגול 7

1 הגדרות : אינטגרביליות ואינטגרל מסוים

תהי f פונקציה **חסומה** בקטע $[a,b]$. בהינתן חלוקה $P=\{x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b\}$ של $[a,b]$, נגדיר

$$m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x) \quad \text{-ו} \quad M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$$

- **סכום דרבו העליון** של f ביחס ל- P מוגדר על-ידי : $U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\left(x_i-x_{i-1}\right)$.
- **סכום דרבו התחתון** של f ביחס ל- P מוגדר על-ידי : $L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(x_i-x_{i-1}\right)$.
- **האינטגרל העליון** של f מוגדר על ידי : $\overline{\int_a^b}f(x)\,dx=\inf\{\,U(f,P)\;|\;P \text{ חלוקה של } [a,b]\,\}$.
- **האינטגרל התחתון** של f מוגדר על ידי : $\underline{\int_a^b}f(x)\,dx=\sup\{\,L(f,P)\;|\;P \text{ חלוקה של } [a,b]\,\}$.
- הפונקציה f תיקרא **אינטגרבילית** בקטע $[a,b]$ אם"ם $\overline{\int_a^b}f(x)\,dx=\underline{\int_a^b}f(x)\,dx$.

במקרה זה האינטגרל של f מוגדר כערך המשותף של האינטגרל העליון והתחתון ומסומן $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

שאלה : בהרצאה הוכח כי לכל חלוקה P מתקיים $L(f,P)\leqslant U(f,P)$. האם יתכן ש- $L(f,P)=U(f,P)$?

טענה : תהי f פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$ ותהי P חלוקה **כלשהי** של $[a,b]$.

אזי $L(f,P)=U(f,P)$ **אם"ם** f **קבועה** בקטע $[a,b]$.

הוכחה :

תהי $P=\{x_0,...,x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$. נסמן כרגיל : $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$ ו- $m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$.

" $\Rightarrow$ " : אם f קבועה בקטע $[a,b]$, אז $M_i=m_i$ עבור $i=1,\ldots,n$ ולכן $L(f,P)=U(f,P)$.

" $\Leftarrow$ " : נניח שמתקיים $U(f,P)=L(f,P)$:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}M_i\left(x_i-x_{i-1}\right)}_{U(f,P)}=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}m_i\left(x_i-x_{i-1}\right)}_{L(f,P)} \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{i=1}^{n}\left(M_i-m_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)=0$$

נשים לב ש- $x_i-x_{i-1}>0$, וכן $M_i-m_i\geqslant 0$ לכל i . לכן כל המחוברים אי-שליליים.

על מנת שהסכום יתאפס, לא יתכן שהוא מכיל מחובר חיובי, ולכן נקבל כי לכל i

$$\sup\left(\{\,f\left(x\right)\;|\;x\in[x_i,x_{i+1}]\,\}\right)=M_i=m_i=\inf\left(\{\,f\left(x\right)\;|\;x\in[x_i,x_{i+1}]\,\}\right)$$

ולכן בכל קטע $[x_i,x_{i+1}]$ מתקיים כי f קבועה. מכיוון שהקטעים אינם זרים (כי $x_i\in[x_{i-1},x_i]\cap[x_i,x_{i+1}]$)
נקבל כי הערך ש- f מקבלת בכל הקטעים זהה ולכן f קבועה בכל הקטע $[a,b]$. $\blacksquare$

מסקנה: אם f חסומה ולא קבועה אזי $L(f,P)<U(f,P)$ **לכל** חלוקה P .

באופן כללי, גם כאשר f אינטרגרבילית, **לא** מתקיים $L(f,P)=U(f,P)$, וזאת גם אם ניקח חלוקה מאוד עדינה של הקטע $[a,b]$!

הערה : בהרצאה הוכחתם ש**לכל** שתי חלוקות P ו- Q מתקיים $L(f,P)\leqslant U(f,Q)$, ולכן $\underline{\int_a^b}f(x)\,dx\leqslant\overline{\int_a^b}f(x)\,dx$.

2 חישוב אינטגרל ישירות מההגדרה

תרגיל 1

תהי $f:[0,5]\to\mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי $f(x)=\begin{cases}2 & 0\leqslant x\leqslant 3\\ 5 & 3<x\leqslant 5\end{cases}$.

הוכיחו ש־ f אינטגרבילית ב־ $[0,5]$ וחשבו את $\int\limits_0^5 f(x)\,dx$.

פתרון :

אינטואטיבית, התחום המישורי שחסום על ידי הגרף של f וציר x בקטע נראה כמו איחוד של שני מלבנים: מלבן אחד עם גובה 2 ורוחב 3 (הקטע $[0,3]$), ומלבן שני ללא צלעו השמאלית עם גובה 5 ורוחב 2 (הקטע $(3,5]$).

לכן מתקבל על הדעת ש ־ f אינטגרבילית ב־ $[0,5]$ ושהאינטגרל שווה לסכום שטחי המלבנים, דהיינו: $2\cdot 3+5\cdot 2=16$.

נראה פורמלית וישירות מההגדרה שאכן כך הדבר:

תהי $0<\delta<2$ שערכה יקבע בהמשך. נגדיר את החלוקה P_δ הבאה של הקטע $[0,5]$:

$$P_\delta=\{x_0=0\,,\,x_1=3-\delta\,,\,x_2=3+\delta\,,\,x_3=5\}$$

אזי מתקיים (עם הסימונים לעיל): $m_1=2\ ,\ m_2=2\ ,\ m_3=5 \qquad M_1=2\ ,\ M_2=5\ ,\ M_3=5$

נחשב את הסכום העליון ואת הסכום התחתון של f ביחס ל־ P_δ :

$$\begin{aligned}U(f,P_\delta) &= M_1\,(x_1-x_0)+M_2\,(x_2-x_1)+M_3\,(x_3-x_2)\\ &= 2\cdot(3-\delta)\ +\ 5\cdot(2\delta)\ +\ 5\cdot(2-\delta)\ =\ 16+3\delta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L(f,P_\delta) &= m_1\,(x_1-x_0)+m_2\,(x_2-x_1)+m_3\,(x_3-x_2)\\ &= 2\cdot(3-\delta)\ +\ 2\cdot(2\delta)\ +\ 5\cdot(2-\delta)\ =\ 16-3\delta\end{aligned}$$

יהי $\varepsilon>0$ נתון. נבחר $\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{3},1\}$ ונקבל

$$16-\varepsilon\ \leqslant\ 16-3\delta\ =\ L(f,P_\delta)\ \leqslant\ \underline{\int_0^5} f(x)\,dx\ \leqslant\ \overline{\int_0^5} f(x)\,dx\ \leqslant\ U(f,P_\delta)\ =\ 16+3\delta\ \leqslant\ 16+\varepsilon$$

היות ו־ $\varepsilon>0$ שרירותי, נובע מכאן ש־ $\underline{\int_0^5} f(x)\,dx=\overline{\int_0^5} f(x)\,dx=16$.

לפי ההגדרה, זה אומר ש־ f אינטגרבילית ב־ $[0,5]$ ומתקיים $\int\limits_0^5 f(x)\,dx=16$.

תרגיל 2

יהי $0<b$, ותהי $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי $f(x)=x^2$. חשבו את $\int_0^b f(x)\,dx$ לפי ההגדרה.

פתרון :

ראשית, נציין שחישוב אינטגרל מההגדרה (ובכלל) איננו תהליך פשוט ולפעמים הוא במובן מסוים בלתי אפשרי. לכן, חישוב כזה ישתמש בדרך כלל בכל מיני טריקים מתוחכמים כפי שנראה שקורה גם במקרה זה.

תהי $P_n=\{x_0=0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ חלוקה של הקטע $[0,b]$.

f מונוטונית עולה ב־ $[0,b]$ ולכן : $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)=x_i^2 \quad , \quad m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)=x_{i-1}^2$.

מכאן, שסכום דרבו העליון והתחתון של f ביחס ל־ P הם:

$$U(f,P_n)=\sum_{i=1}^n M_i\,(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^n x_i^2\,(x_i-x_{i-1}) \quad , \quad L(f,P_n)=\sum_{i=1}^n m_i\,(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^n x_{i-1}^2(x_i-x_{i-1})$$

מה עושים עכשיו? לא ברור איך לקבל ביטוי חלופי בלי סכימה עבור $L(f,P_n)$ ו־ $U(f,P_n)$.

למרות אי־היכולת שלנו לפשט את סכומי דרבו, אפשר כבר עכשיו להפעיל שיקולים שאמנם לא מספקים את ערך האינטגרל, אך כן המוכיחים כי הפונקציה $f\left(x\right)=x^2$ אינטגרבילית בקטע $[0,b]$.

לשם כך נשתמש ב**תנאי דרבו לאינטגרביליות** :

תהי $f\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה. אזי f אינטגרבילית ב־ $[a,b]$ אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P של $[a,b]$ כך ש־ $U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)<\varepsilon$.

מתקיים:

$$\begin{aligned}U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right) &= \sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\left(x_i-x_{i-1}\right)-\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}^2\cdot\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-x_{i-1}^2\right)\cdot\left(x_i-x_{i-1}\right)\\ &\leqslant \Delta\left(P\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-x_{i-1}^2\right) = \Delta\left(P\right)\cdot\left(x_n^2-x_0^2\right) = \Delta\left(P\right)\cdot b^2\end{aligned}$$

(הסכום $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-x_{i-1}^2\right)$ הוא סכום טלסקופי)

אם כך, בהינתן $\varepsilon>0$ ניקח חלוקה P של הקטע $[0,b]$ עבורה $\Delta\left(P\right)<\varepsilon/b^2$, ואז יתקיים $U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)<\varepsilon$, ונסיק כי f אינטגרבילית ב־ $[0,b]$.

כעת נרצה לחשב את ערכו של האינטגרל.

במקרה הפרטי של חלוקה של הקטע $[0,b]$ ל־ n קטעים שווים, שבה $x_k=k\cdot\dfrac{b}{n}$ עבור $0\leqslant k\leqslant n$, אנו מקבלים ש־ :

$x_k^2=\left(k\cdot\frac{b}{n}\right)^2$ ו־ $x_k-x_{k-1} = k\cdot\frac{b}{n}-(k-1)\cdot\frac{b}{n} = \frac{b}{n}$, ובהתאם לכך:

$$\begin{aligned}U(f,P_n) &= \sum_{k=1}^{n}\left(k\cdot\tfrac{b}{n}\right)^2\tfrac{b}{n} = \left(\tfrac{b}{n}\right)^3\sum_{k=1}^{n}k^2\\ L(f,P_n) &= \sum_{k=1}^{n}\left((k-1)\cdot\tfrac{b}{n}\right)^2\tfrac{b}{n} = \left(\tfrac{b}{n}\right)^3\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 = \left(\tfrac{b}{n}\right)^3\sum_{k=0}^{n-1}k^2\end{aligned}$$

והביטויים הללו כבר קצת יותר פשוטים.

נגדיר כעת : $S(n)=\sum_{k=1}^{n}k^2$. נשתמש ללא הוכחה בזהות: $S\left(n\right)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

הערה: ניתן להוכיח זאת באינדוקציה, אך יש דרך עדיפה בעזרת הבינום של ניוטון. היא כתובה בסוף סיכום התרגול הזה.

מהזהות הנ`ל נקבל : $U(f,P_n) = \left(\dfrac{b}{n}\right)^3S(n) = \dfrac{b^3}{n^3}\,\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{b^3}{6}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right)$.

הסדרה $\left(\frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת ומתכנסת ל־ $\frac{b^3}{6}\cdot1\cdot2 = \frac{b^3}{3}$, ולכן מתקיים:

$$\inf\left\{U(f,P_n)\ \mid\ n\in\mathbb{N}\right\} = \inf\left\{\frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\ \mid\ n\in\mathbb{N}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{b^3}{3}$$

באותו אופן, על ידי החלפת n ב־ $n-1$, מקבלים :

$$\sup\left\{L(f,P_n)\ \mid\ n\in\mathbb{N}\right\} = \sup\left\{\frac{b^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\ \mid\ n\in\mathbb{N}\right\} = \frac{b^3}{3}$$

סה`כ קיבלנו $\frac{b^3}{3}\leqslant\underline{\int_0^b}f(x)\,dx\leqslant\overline{\int_0^b}f(x)\,dx\leqslant\frac{b^3}{3}$, כלומר $\dfrac{b^3}{3} = \overline{\int_0^b}f(x)\,dx = \underline{\int_0^b}f(x)\,dx = \int_0^b f(x)dx$.

3 תכונת הירושה של האינטגרל

משפט : יהיו $a,b,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ כך ש־ $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$.

אם הפונקציה f אינטגרבילית ב־ $[a,b]$, אזי f גם אינטגרבילית ב־ $[\alpha,\beta]$.

הוכחה :

f אינטגרבילית ב־ $[a,b]$, ולכן f חסומה ב־ $[a,b]$. על אחת כמה וכמה f חסומה ב־ $[\alpha,\beta]$.

יהי $\varepsilon>0$ נתון.

f אינטגרבילית ב־ $[a,b]$, ולכן נובע מתנאי דרבו שקיימת חלוקה Q של $[a,b]$ כך ש־ $U(f,Q)-L(f,Q)<\varepsilon$.

נסמן: $P=Q\cup\{\alpha,\beta\}$. אזי P עידון של Q . על כן $L(f,Q)\leqslant L(f,P)\leqslant U(f,P)\leqslant U(f,Q)$

נסמן : $P_1=P\cap[a,\alpha] \quad , \quad P_2=P\cap[\alpha,\beta] \quad , \quad P_3=P\cap[\beta,b]$.

אזי : $U(f,P)\ =\ U(f,P_1)+U(f,P_2)+U(f,P_3)$ ו־ $L(f,P)\ =\ L(f,P_1)+L(f,P_2)+L(f,P_3)$.

מכאן : $U(f,P)-L(f,P)\ =\ (U(f,P_1)-L(f,P_1))\ +\ (U(f,P_2)-L(f,P_2))\ +\ (U(f,P_3)-L(f,P_3))$

ולכן : $0\ \leqslant\ U(f,P_2)-L(f,P_2)\ \leqslant\ U(f,P)-L(f,P)\ <\ \varepsilon$

הראינו ש־ f מקיימת את תנאי דרבו ב־ $[\alpha,\beta]$ ולכן f אינטגרבילית ב־ $[\alpha,\beta]$, כנדרש. ■

4 אדיטיביות האינטגרל

תזכורת מאינפי 1 :

במהלך הדיון בפרק הזה ניעזר בשלוש הטענות הבאות שהוכחו בתחילת הקורס "אינפי 1":

יהיו A ו־ B תת־קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של $\mathbb{R}$. אזי מתקיים:

(א) אם $A\subseteq B$ אזי $\sup(A)\ \leqslant\ \sup(B)$.

(ב) $\sup(A+B)\ =\ \sup(A)+\sup(B)$, כאשר $A+B=\{\,a+b\mid a\in A\ ,\ b\in B\,\}$.

(ג) $(\,\forall a\in A\quad\exists b\in B\quad a\leqslant b\,)\quad\Rightarrow\quad\sup(A)\ \leqslant\ \sup(B)$.

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש־ $a<b$ ויהיו f ו־ g שתי פונקציות חסומות המוגדרות בקטע $[a,b]$.

1. הוכיחו שלכל קטע $[c,d]\subseteq[a,b]$ מתקיים

$$\inf_{[c,d]} f(x)+\inf_{[c,d]} g(x)\ \leqslant\ \inf_{[c,d]}\,(f(x)+g(x)) \qquad , \qquad \sup_{[c,d]}\,(f(x)+g(x))\ \leqslant\ \sup_{[c,d]} f(x)+\sup_{[c,d]} g(x)$$

פתרון :

נוכיח רק את אי־השוויון הימני. את השני ניתן להוכיח באופן דומה.

ראשית נשים לב ש־ $f+g$ חסומה מלרע בקטע $[c,d]$ על ידי $\inf\limits_{[c,d]} f(x)+\inf\limits_{[c,d]} g(x)$ (השלימו את הפרטים החסרים).

בהינתן $\varepsilon>0$, קיים $x_0\in[c,d]$ כך ש־ $f(x_0)+g(x_0)\ <\ \inf\limits_{[c,d]}\,(f(x)+g(x))\ +\ \varepsilon$.

מתקיים $\inf\limits_{[c,d]} f(x)\ \leqslant\ f(x_0)$ ו־ $\inf\limits_{[c,d]} g(x)\ \leqslant\ g(x_0)$, ולכן

$$\inf_{[c,d]} f(x)+\inf_{[c,d]} g(x)\ <\ \inf_{[c,d]}\,(f(x)+g(x))\ +\ \varepsilon$$

זה נכון לכל $\varepsilon>0$, ולכן אי־השוויון הרצוי מתקיים.

2. הסיקו שעבור כל חלוקה P של $[a,b]$ מתקיים:

$$L(f,P)+L(g,P)\leqslant L(f+g,P) \qquad \text{ו־} \qquad U(f+g,P)\leqslant U(f,P)+U(g,P) \ .$$

פתרון : נוכיח רק את אי־השוויון הימני. את השני ניתן להוכיח באופן דומה.

תהי $P=\{x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b\}$.

נסמן : $m_i^f=\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $m_i^g=\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} g(x)$ ו־ $m_i^{f+g}=\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} (f(x)+g(x))$

מסעיף 1 נובע שלכל תת־קטע $[x_{i-1},x_i]$ מתקיים : $m_i^f + m_i^g \leqslant m_i^{f+g}$.

נכפול את אי־השוויון הזה ב־ (x_i-x_{i-1}) ונסכם : $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(m_i^f + m_i^g\right)(x_i-x_{i-1}) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} m_i^{f+g}(x_i-x_{i-1})$

כלומר : $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i^f(x_i-x_{i-1}) + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i^g(x_i-x_{i-1}) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} m_i^{f+g}(x_i-x_{i-1})$,

וזהו אי־השוויון המבוקש.

3. הוכיחו ישירות מההגדרה שמתקיים אי־השיויון $\underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_a^b} g(x)dx \leqslant \underline{\int_a^b}(f(x)+g(x))dx$.

פתרון :

נסמן : $\mathscr{L}_f=\{\,L(f,P)\mid P \text{ חלוקה של } [a,b]\,\}$ ו־ $\mathscr{L}_g=\{\,L(g,P)\mid P \text{ חלוקה של } [a,b]\,\}$.

לפי ההגדרה : $\underline{\int_a^b} f(x)dx+\underline{\int_a^b} g(x)dx = \sup(\mathscr{L}_f)+\sup(\mathscr{L}_g) = \sup(\mathscr{L}_f+\mathscr{L}_g)$

ניזכר כי אם P,Q שתי חלוקות של $[a,b]$ כך ש־ $P\subseteq Q$, אז $L(f,P)\leqslant L(f,Q)$.

לכן לכל שתי חלוקות P_1,P_2 של $[a,b]$ מתקיים

$$L(f,P_1) + L(g,P_2) \leqslant L(f,P_1\cup P_2) + L(g,P_1\cup P_2) \leqslant L(f+g,P_1\cup P_2) \ .$$

כלומר, לכל איבר $L(f,P_1)+L(g,P_2)$ ב־ $\mathscr{L}_f+\mathscr{L}_g$ קיים איבר $L(f+g,P_3)$ ב־ $\mathscr{L}_{f+g}$ הגדול או שווה ממנו.

לכן נובע מסעיף (ג) בתזכורת לעיל ש־ $\sup(\mathscr{L}_f+\mathscr{L}_g)\leqslant\sup(\mathscr{L}_{f+g})$, וזהו אי־השוויון המבוקש.

4. לשם הקריאות בשורות הבאות נסמן האינטגרל התחתון והאינטגרל העליון ב־ $\underline{\int_a^b} f$ וב־ $\overline{\int_a^b} f$ בהתאמה.

בתרגיל הבית תוכיחו כי $\overline{\int_a^b}(f+g) \leqslant \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g$.

5. הסיקו מהסעיפים הקודמים שאם f ו־ g אינטגרביליות ב־ $[a,b]$ אז $f+g$ אינטגרבילית ב־ $[a,b]$ ומתקיים:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

פתרון :

f ו־ g אינטגרביליות ב־ $[a,b]$, ולכן $\int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ ו־ $\int_a^b g = \overline{\int_a^b} g = \underline{\int_a^b} g$.

בנוסף, לכל פונקציה אינטגרל דרבו תחתון קטן או שווה מאינטגרל דרבו עליון, אז גם $\underline{\int_a^b}(f+g) \leqslant \overline{\int_a^b}(f+g)$.

בצירוף סעיפים 3 ו־ 4 נקבל

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leqslant \underline{\int_a^b}(f+g) \leqslant \overline{\int_a^b}(f+g) \leqslant \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

קיבלנו ביטויים שווים בקצוות, ולכן כל אי־השיוויונים באמצע הם בהכרח שיוויונים.

בפרט $\underline{\int_a^b}(f+g)=\overline{\int_a^b}(f+g)$, כלומר גם $f+g$ אינטגרבילית בקטע ומתקיים $\int_a^b(f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

5 תכונת החיוביות של האינטגרל

ראיתם בכיתה שאם f אינטגרבילית ב־ $[a,b]$, ו־ $f \geqslant 0$ אז $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ (כי $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant m(b-a) \geqslant 0$) .

הערה : באופן כללי, אם f ו־ g אינטגרביליות ב־ $[a,b]$ ו־ $f(x) \geqslant g(x)$ לכל $x \in [a,b]$, אז $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

תרגיל : תנו דוגמה לפונקציה $f \geqslant 0$ אינטגרבילית ב־ $[a,b]$ שהיא לא זהותית אפס עם $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

פתרון :

ניקח פונקציית גורד שחקים: נבחר $t_0 \in (a,b)$ ונגדיר $f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq t_0 \\ 1 & x = t_0 \end{cases}$.

f בבירור אי־שלילית. נראה ש־ $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

בהינתן $\varepsilon > 0$ נבחר $0 < \delta < \min\{t_0 - a, b - t_0, \frac{\varepsilon}{2}\}$ ונסמן $P_\delta = \{x_0 = a\,,\, x_1 = t_0 - \delta\,,\, x_2 = t_0 + \delta\,,\, x_3 = b\}$.

מתקיים $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ $\quad M_1 = 0\,,\ M_2 = 1\,,\ M_3 = 0$ ולכן $U(f, P_\delta) = 2\delta$ ו־ $L(f, P_\delta) = 0$. מכאן:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \ \leqslant\ U(f,P_\delta) - L(f,P_\delta) \ =\ 2\delta\ < \varepsilon.$$

זה נכון לכל $\varepsilon > 0$, ולכן $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, כלומר f אינטגרבילית ב־ $[a,b]$.

כמו כן $L(f,P) = 0$ עבור כל חלוקה P של $[a,b]$ (למה?) , ולכן $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$, ועל כן $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

6 מחסנית ראשונה : עוד חישוב אינטגרל ישירות מההגדרה

האם הפונקציה $f\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f\,(x) := \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ אינטגרבילית ב־ $[0,1]$?

פתרון :

תהי $D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקצית דיריכלה $D\,(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. לכל x בקטע $[0,1]$ מתקיים $f\,(x) = x \cdot D\,(x)$.

תהי $P = \{\, 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1 \,\}$ חלוקה כלשהי של הקטע $[0,1]$.

ראשית, $f \geqslant 0$ בכל הקטע, ובכל אחד מבין הקטעים $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ יש נקודה אי־ראציונלית t , בה מתקיים $f\,(t) = 0$, ולכן מתקיים $m_i = 0$.

לפיכך $L\,(f,P) = 0$ לכל חלוקה P , ומכאן : $\underline{\int_0^1} f\,(x)\,dx = 0$.

כעת, $x \cdot D\,(x) \leqslant x = \mathrm{id}(x)$ בכל אחד מבין הקטעים $[x_{i-1}, x_i]$, ולכן $M_i \leqslant x_i$ לכל $i = 1, \ldots, n$.

מצד שני : $$M_i \ =\ \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{x \cdot D\,(x)\} \ \geqslant\ \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i] \cap \mathbb{Q}} \{\, x \cdot \underbrace{D\,(x)}_{\uparrow \atop =1} \} \ =\ \sup\{\, [x_{i-1}, x_i] \cap \mathbb{Q} \,\} \ =\ x_i$$

ולכן $M_i = x_i$, והסכום העליון המתקבל הינו:

$$U\,(f,P) \ =\ \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \ =\ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \ =\ U\,(id, P) \ \geqslant\ \int_0^1 x\,dx \ =\ \frac{1}{2}$$

(ראינו בהרצאה שהפונקציה $id(x) = x$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$, וכי ערך האינטגרל שלה הינו $\frac{1}{2}$).

מכאן נובע : $\underline{\int_0^1} f\,(x)\,dx \ =\ 0 \ <\ \frac{1}{2} \ \leqslant\ \overline{\int_0^1} f\,(x)\,dx$, ולכן הפונקציה f **איננה** אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

7 מחסנית שנייה : הוכחת הזהות $S\left(n\right):=\sum_{k=1}^{n}k^{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

על פי הבינום של ניוטון, לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים: $(k+1)^{3}-k^{3}=3k^{2}+3k+1$

נסכום שיוויון זה עבור $k=1,\ldots,n$, כלומר, נסכום אגף אגף את n המשוואות הבאות:

$$\begin{aligned}(n+1)^{3}-n^{3} &= 3n^{2}+3n+1\\ n^{3}-(n-1)^{3} &= 3(n-1)^{2}+3(n-1)+1\\ &\vdots\\ 2^{3}-1^{3} &= 3\cdot1^{2}+3\cdot1+1\end{aligned}$$

הסכימה באגף שמאל היא טור טלסקופי ולכן נקבל:

$$(n+1)^{3}-1=3(n^{2}+(n-1)^{2}+\ldots+1^{2})+3(n+\ldots+2+1)+n$$

כעת, על ידי הנוסחה לסכימת סדרה חשבונית $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ נקבל כי:

$$(n+1)^{3}-1=3S(n)+3\frac{n(n+1)}{2}+n$$

נבודד את $S\left(n\right)$ ונקבל : $S\left(n\right)=\frac{1}{3}\left[(n+1)^{3}-1-3\frac{n(n+1)}{2}-n\right]=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

80133-2 אינפי למדמ"ח - סמסטר ב' תש"פ - תרגול 4

פולינום טיילור

0.1 הגדרה ודוגמאות

הגדרה : יהיה $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ותהיה f פונקציה הגזירה n פעמים בנקודה a . פולינום טיילור מסדר n של f הוא הפולינום

$$P(x) = P_{n,f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

דוגמה 1 : נחשב את פולינום טיילור של הפונקציה $\cos$ מסדר $n=4$ סביב $a = \frac{\pi}{2}$.

נחשב את הנגזרות

$$\begin{aligned}
\cos(\frac{\pi}{2}) &= 0 \\
\cos'(\frac{\pi}{2}) &= -\sin(\frac{\pi}{2}) = -1 \\
\cos''(\frac{\pi}{2}) &= -\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \\
\cos^{(3)}(\frac{\pi}{2}) &= \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \\
\cos^{(4)}(\frac{\pi}{2}) &= \cos(\frac{\pi}{2}) = 0
\end{aligned}$$

נציב בנוסחה ונקבל:

$$\begin{aligned}
P(x) &= P_{4,\cos,\frac{\pi}{2}}(x) = 0 + \frac{-1}{1!}(x-\frac{\pi}{2}) + \frac{0}{2!}(x-\frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{2})^3 + \frac{0}{4!}(x-\frac{\pi}{2})^4 \\
&= (-1)(x-\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{2})^3 = -(x-\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{6}(x-\frac{\pi}{2})^3
\end{aligned}$$

הערה : שימו לב שבמקרה הספציפי הזה מתקיים : $P_{4,\cos(x),\frac{\pi}{2}}(x) = P_{3,\cos(x),\frac{\pi}{2}}(x)$.

דוגמה 2 : נחשב את פולינום טיילור של הפונקציה $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ מסדר $n=3$ סביב $a=1$.

בחישוב ישיר זה לא קשה מדי

$$\begin{aligned}
&f(1) = 0 \\
&f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 2 \\
&f''(x) = 6x - 2 \quad \Rightarrow \quad f''(1) = 4 \\
&f'''(x) = 6 \quad \Rightarrow \quad f'''(1) = 6
\end{aligned}$$

נציב ונקבל שסביב 1

$$\begin{aligned}
P_{3,f,1}(x) &= 0 + 2(x-1) + \frac{4}{2}(x-1)^2 + \frac{6}{6}(x-1)^3 \\
&= 2(x-1) + 2(x-1)^2 + (x-1)^3
\end{aligned}$$

הערה :

f הינו פולינום מדרגה 3 ולכן $f^{(k)}(x) \equiv 0$ עבור כל $3 < k \in \mathbb{N}$. לכן $P_{n,f,a}(x) = P_{3,f,a}(x)$ עבור כל $3 < n \in \mathbb{N}$ וכל $a \in \mathbb{R}$.

חדי העין והחישוב ביניכם ישימו לב שאם פותחים את הסוגריים מקבלים את $f(x)$ חזרה, כלומר $P_{3,f,1}(x) = f(x)$.

היינו יכולים להגיע לתוצאה זו גם בדרך אחרת, בעזרת נוסחת הבינום של ניוטון.

$$\begin{aligned}
f(x) = f((x-1)+1) &= [(x-1)+1]^3 - [(x-1)+1]^2 + [(x-1)+1] - 1 \\
\underset{x-1=t}{\Rsh} &= (t+1)^3 - (t+1)^2 + (t+1) - 1 \\
&= (t^3 + 3t^2 + 3t + 1) - (t^2 + 2t + 1) + t \\
&= t^3 + 2t^2 + 2t \\
\underset{x-1=t}{\Rsh} &= (x-1)^3 + 2(x-1)^2 + 2(x-1)
\end{aligned}$$

דוגמה 3 : נחשב את פולינום טיילור של הפונקציה $f(x)=e^x$ מסדר $n=3$ סביב $a=0$ וסביב $a=1$.
הנגזרת מכל סדר $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ של $f(x)=e^x$ היא פשוט $f^{(k)}(x)=e^x$.
לכן $f^{(k)}(0)=1$ ו־ $f^{(k)}(1)=e$ לכל $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.
אי לכך פולינום טיילור מסדר 3 של $f(x)=e^x$ סביב 0 הוא

$$P_{3,\exp,0}(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$$

פולינום טיילור של $f(x)=e^x$ מסדר 3 סביב 1 הוא

$$P_{3,\exp,1}(x)=e+e\,(x-1)+\frac{e}{2}\,(x-1)^2+\frac{e}{6}\,(x-1)^3$$

שימו לב: שני הפולונים הינם שונים זה מזה. נחסוך לעצמנו את פתיחת הסוגריים : $P_{3,\exp,1}(1)=e<2\frac{2}{3}=P_{3,\exp,0}(1)$.
דוגמה זו ממחישה את היחודיות של הדוגמה הקודמת: בהנתן פולינום טיילור של פונקציה, שינוי נקודת הבסיס לא נותן בדרך כלל את פולינום טיילור סביב הנקודה החדשה.

0.2 השארית ויחידות הקירוב

הגדרה : תהי f גזירה n פעמים בנקודה a . אנו מגדירים את השארית של פיתוח טיילור מסדר n של f סביב a להיות הפונקציה

$$R_{n,f,a}(x)=f(x)-P_{n,f,a}(x)=f(x)-\left(f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right)$$

משפט (!) : השארית מקיימת $0=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}$.

משפט (!) : תהי f גזירה n פעמים ב־ a , ויהי Q פולינום ממעלה קטנה או שווה n המקיים

$$(\clubsuit)\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n}=0$$

אזי $Q=P_{n,f,a}$, כלומר פולינום טיילור מסדר n של f בנקודה a הוא הפולינום היחיד ממעלה קטנה או שווה n המקיים את $(\clubsuit)$.

דוגמה :
יהי $a\in\mathbb{R}$ ויהי Q פולינום ממעלה קטנה או שווה n . אזי $Q=P_{n,Q,a}$, כלומר $Q(x)$ הוא גם פולינום טיילור מסדר n (וגם מכל סדר $\leq n$) של עצמו סביב כל נקודה a , כי

$$\lim_{x\to a}\frac{Q(x)-Q(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{0}{(x-a)^n}=0$$

ולכן על פי המשפט הנ"ל $Q=P_{n,Q,a}$.

הערה : $Q(x)=-5+3x$ הוא פולינום טיילור מסדר 1 של עצמו סביב למשל $a=2$, אבל הוא לא כתוב בצורה המתאימה להגדרה. צורת ההגדרה תתקבל אם נכתוב

$$Q(x)=-5+3(x-2+2)=1+3(x-2)$$

הגדרה :
יהיו m ו־ n מספרים שלמים כך ש־ $0\leqslant m\leqslant n$.
בהינתן פולינום Q ממעלה n שהצגתו סביב הנקודה a נתונה על ידי $Q(x)=\sum_{i=0}^{n}b_i(x-a)^i$,
נגדיר את **הקטימה** $[Q]_{m,a}$ **של** Q **מסדר** m **סביב** a באופן הבא: $[Q]_{m,a}(x)=\sum_{i=0}^{m}b_i(x-a)^i$.
כלומר, $[Q]_{m,a}$ הוא הפולינום המתקבל מסכום המחוברים של ההצגה של $Q(x)$ סביב a שמעלתם $\geqslant m$.

דוגמה : $Q(x)=x^3-x^2+x-1$.

$[Q]_{0,0}(x)=-1$, $[Q]_{1,0}(x)=x-1$, $[Q]_{2,0}(x)=-x^2+x-1$, $[Q]_{3,0}(x)=x^3-x^2+x-1$.

ראינו מקודם ש־ $Q(x)=(x-1)^3+2(x-1)^2+2(x-1)$, לכן

$[Q]_{0,1}(x)=0$, $[Q]_{1,1}(x)=2(x-1)$, $[Q]_{2,1}(x)=2(x-1)^2+2(x-1)$, $[Q]_{3,1}(x)=(x-1)^3+2(x-1)^2+2(x-1)$.

טענה: יהיו m ו־ n מספרים שלמים כך ש־ $0\leqslant m\leqslant n$, ותהי f פונקציה הגזירה n פעמים בנקודה a .
יהיו $P_m=P_{m,f,a}$ ו־ $P_n=P_{n,f,a}$ פולינומי טיילור מסדר m ו־ n בהתאמה של f סביב a .
אזי $P_m(x)=[P_n]_{m,a}(x)$.

זה נובע בקלות מההגדרה של פולינום טיילור.

0.3 חישוב גבולות באמצעות פולינום טיילור

דוגמה 1 : נחשב את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}$ בעזרת פולינומי טיילור.
מהחישובים לעיל כשמצאנו את פולינום טיילור של הפונקציה קוסינוס סביב $a=0$ נובע ש־

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+R(x)$$

עבור $R\left(x\right)=R_{4,\cos,0}(x)$. כמו כן מתקיים

$$\lim_{x\to 0}\frac{R(x)}{x^4}=0$$

לכן:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+R(x)-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4!}+R(x)}{x^4}=\frac{1}{24}$$

דוגמה 2 : נחשב את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^4\right)}{\arcsin^4\left(x\right)}$ בעזרת פולינומי טיילור.

מ־ $\sin\left(0\right)=0$ ו־ $\sin'\left(0\right)=\cos(0)=1$ נובע ש־ $P_{1,\sin,0}\left(x\right)=0+\dfrac{1}{1!}x=x$.

נסמן $R_1\left(x\right)=R_{1,\sin,0}\left(x\right)$. אנחנו יודעים שמתקיים: $\sin\left(x\right)=P_{1,\sin,0}\left(x\right)+R_{1,\sin,0}\left(x\right)=x+R_1\left(x\right)$.

ולכן לכל $u\in\mathbb{R}$ מתקיים: $\sin\left(u^4\right)=u^4+R_1\left(u^4\right)$.

מ־ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{R_1(x)}{x}=0$ ומכלל ההצבה בגבולות נובע ש־ $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{R_1(u^4)}{u^4}=0$.

חישבנו בתרגול הקודם את הנגזרת של arcsin : $\arcsin'\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad\forall x\in(-1,1)$.

מ־ $\arcsin\left(0\right)=0$ ו־ $\arcsin'\left(0\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1-0^2}}=1$ נובע ש־ $P_{1,\arcsin,0}\left(x\right)=0+\dfrac{1}{1!}x=x$.

נסמן $\widehat{R}_1\left(x\right)=R_{1,\arcsin,0}(x)$. כמקודם מתקיים: $\arcsin\left(x\right)=P_{1,\arcsin,0}\left(x\right)+R_{1,\arcsin,0}(x)=x+\widehat{R}_1\left(x\right)$

כמו כן $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\widehat{R}_1(x)}{x}=0$, ולכן:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^4\right)}{\arcsin^4\left(x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+R_1\left(x^4\right)}{\left(x+\widehat{R}_1\left(x\right)\right)^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4\left(1+\frac{R_1(x^4)}{x^4}\right)}{x^4\left(1+\frac{\widehat{R}_1(x)}{x}\right)^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{R_1(x^4)}{x^4}}{\left(1+\frac{\widehat{R}_1(x)}{x}\right)^4}=\frac{1+0}{(1+0)^4}=1$$

0.4 צורה חלופית של השארית והערכת השארית

משפט: עבור $x > a$ (ניסוח מקביל קיים גם עבור $x < a$), אם הנגזרת מסדר n קיימת ורציפה בקטע הסגור $[a,x]$, והנגזרת מסדר $n+1$ קיימת בקטע הפתוח (a,x) , אז ניתן לבטא את השארית בדרך הבאה (ובדרכים נוספות):

- השארית בצורת לגרנז' - קיימת $c \in (a,x)$ כך ש- $R_n(x) = f\left(x\right) - P_{n,f,a}\left(x\right) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

דוגמה :

נשתמש בפולינום טיילור כדי לחשב את $\cos(1)$ עד כדי טעות של 10^{-4} . הערה: שימו לב שמדובר ב־1 ברדיאנים, כלומר בערך $57°$.
הפונקציה שלנו תהיה $f(x) = \cos(x)$, ונמצא פולינום טיילור שלה בסביבת $a = 0$.

נחשב נגזרות:
$$\begin{array}{ccccc}\cos(0) & = & 1 & & \\ \cos'(0) & = & -\sin(0) & = & 0 \\ \cos''(0) & = & -\cos(0) & = & -1 \\ \cos^{(3)}(0) & = & \sin(0) & = & 0\end{array}$$

ההמשך הוא מחזורי (כי $\cos^{(4)}(x) = \cos(x)$) , ולכן נקבל את סדרת הערכים: $1,0,-1,0,1,0-1,...$ (להוכיח פורמלית באינדוקציה).

לכן פולינום טיילור מסדר $n = 2m$ הוא: $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{(-x^2)^k}{(2k)!}$.

מ- $\cos^{(2m+1)}\left(0\right) = 0$ לכל $m \in \mathbb{N}$, נובע כי $P_{2m+1,\cos,0}\left(x\right) = P_{2m,\cos,0}\left(x\right) + \dfrac{\left(x-0\right)^{2m+1}}{(2m+1)!}\cos^{(2m+1)}\left(0\right) = P_{2m,\cos,0}\left(x\right)$.

אנו מתעניינים בשארית ב- $x = 1$. לפי משפט טיילור עם שארית לגרנז', קיימת $c \in (0,1)$ שעבורה:

$$R_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}1^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

$f^{(n+1)}(c)$ הוא $\pm\sin(c)$ או $\pm\cos(c)$, ולכן $\left|f^{(n+1)}(c)\right| \leqslant 1$. נסיק ש- $|R_n(1)| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$, ומכאן ש- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

אם ניקח $n = 7$ נקבל ש- $\dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{1}{8!} = \dfrac{1}{40320} < 10^{-4}$. לכן פולינום טיילור מסדר 7 ייתן את הקירוב הרצוי. נציב בו 1 ונקבל:

$$P_7(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} = \frac{389}{720} = 0.540...$$

<u>הערות</u>

א) מדוע בחרנו להשתמש בפיתוח מסביב לנקודה $a = 0$? תשובה: אנו מעוניינים בנקודה שבה ערכי הנגזרות נוחים לחישוב.
יכולנו לכאורה לבחור את הנקודה $a = \dfrac{\pi}{3}$, שגם בה ערכי הנגזרות ידועים והיא הרבה יותר קרובה ל- $x = 1$, אבל אז היינו נתקלים בבעיה בחישוב מדויק של $\sqrt{3}$ שמופיע בערכי הנגזרות, וגם בחישוב מדויק של $(x-a) = (1-\dfrac{\pi}{3})$.
שימו לב שכל המקדמים של $P_{n,\cos,0}\left(x\right)$ רציונליים.

ב) כפי שהערנו קודם, בפועל הפולינום $P_7\left(x\right)$ והפולינום $P_6\left(x\right)$ זהים. מדוע בחרנו דווקא ב- $n = 7$, למרות ש- $P_7\left(1\right) = P_6\left(1\right)$?
תשובה: $P_6\left(1\right)$ אכן מספק קירוב זהה ל- $P_7\left(1\right)$, אבל הערכת השגיאה משתפרת עבור $P_7\left(1\right)$.
כפי שראינו, הפיתוח מסדר n סביב 0 של $\cos$ מבטיח לנו שגיאה $|R_n\left(1\right)| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$.
עבור $n = 6$, $(n+1)! = 7! = 5040$, כלומר אגף ימין של אי השוויון מבטיח לנו שגיאה קטנה מ- $\dfrac{1}{5040}$.
אולם זה לא מספיק שכן $\dfrac{1}{5040} > 10^{-4}$. לעומת זאת $n = 7$ מבטיח שגיאה קטנה יותר - למרות שמדובר באותו פולינום.

0.5 אריתמטיקה של פולינומי טיילור

כשאנחנו גוזרים, הפונקציות נוטות להסתבך מאוד מהר, בייחוד אם יש מכפלות והרכבות. למרבה המזל יש לפולינום טיילור גם כללי אריתמטיקה.

משפט (אריתמטיקה של פולינומי טיילור)

1. יהיו $f,g:D\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות n פעמים בנקודה $a\in D$. <u>אזי</u> $P_{n,f+g,a}(x)=P_{n,f,a}(x)+P_{n,g,a}(x)$.
2. יהיו $f,g:D\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות n פעמים בנקודה $a\in D$. <u>אזי</u> $P_{n,fg,a}(x)=\left[P_{n,f,a}\cdot P_{n,g,a}\right]_{n,a}(x)$.
3. תהי $f:D\to\mathbb{R}$ גזירה n פעמים ב־ $a\in D$. תהי $g:E\to\mathbb{R}$ גזירה n פעמים ב־ $f(a)\in E$.
<u>אזי</u> $P_{n,g\circ f,a}(x)=\left[P_{n,g,f(a)}\circ P_{n,f,a}\right]_{n,a}(x)$.

יפה. עכשיו אנחנו רוצים להשתמש בטענות אלו ע`מ לחשב פולינומי טיילור של דברים מתוך פולינומים שאנו מכירים.

דוגמה 1 : חשבו את פולינום טיילור מסדר n של $h(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ סביב $x_0=0$.

אזי $h(x)=f(x)+g(x)$ כאשר $f(x)=\dfrac{e^x}{2}$ ו־ $g(x)=\dfrac{e^{-x}}{2}$. ראינו שפולינום טיילור מסדר n של e^x הוא $P_{n,\exp,0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}$.

לכן $P_{n,f,0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{2\cdot k!}$ ו־ $P_{n,g,0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-x)^k}{2\cdot k!}=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{2\cdot k!}x^k$, ומכלל החיבור של פולינומי טיילור נקבל

$$P_{n,f+g,0}(x)=P_{n,f,0}(x)+P_{n,g,0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{2\cdot k!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-x)^k}{2\cdot k!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{1+(-1)^n}{2}\frac{x^n}{n!}$$

דוגמה 2 : חשבו את פולינום טיילור מסדר n של $h(x)=\dfrac{e^x}{1+x}$ סביב $x_0=0$. פה נשתמש בכלל המכפלה. $h(x)=f(x)g(x)$ כאשר $f(x)=e^x$ ו־ $g(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

בהרצאה ראינו ש־$P_{n,g,0}(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k$ ואנו כבר אמורים לזכור ש־$P_{n,f,0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}$.

בהינתן שני פולינום קנונים ממעלה n $\sum_{i=0}^{n}a_i x^i$ ו־ $\sum_{j=0}^{n}b_j x^j$, המקדם ה־k של פולינום המכפלה שלהם שווה ל־ $\sum_{l=0}^{k}a_l b_{k-l}$.

לכן נקבל שלכל $0\leqslant k\leqslant n$ מתקיים שהמקדם ה־k של $P_{n,fg,0}$ הוא

$$\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!}\cdot(-1)^{k-l}$$

דוגמה 3 : חשבו את פולינום טיילור מסדר 10 של $h(x)=\sin(x^2)$ סביב $x_0=0$.

נשתמש בפולינום טיילור של ההרכבה של $g(y)=\sin y$ עם $f(x)=x^2$. נשים לב ששתי הפונקציות גזירות ∞ פעמים ב־0. לכל $2\leqslant n\in\mathbb{N}$ פולינום טיילור $P_{n,x^2,0}$ של f סביב אפס הוא פשוט $P_{n,x^2,0}(x)=f(x)=x^2$ (מכיוון ש־f היא פולינום היא כבר פולינום טיילור של עצמה מכל סדר ≤ 2 סביב כל נקודה). לכן, ע`פ המשפט, פולינום טיילור של $\sin(x^2)$ ניתן ע`י:

$$P_{10,h,0}(x)=[P_{10,\sin,0}(x^2)]_{10}$$

אבל למעשה, כיוון שאנחנו מציבים x^2 וקוטמים את הפולינומים לדרגה 10, מספיק להשתמש בפולינום של g לסדר 5 בלבד (שאר האיברים ייקטמו). מתקיים

$$P_{5,\sin,0}(y)=y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}$$

ולכן

$$P_{10,h,0}(x)=P_{5,\sin,0}(x^2)=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}$$

80133-2 תש"פ – 2019-2020 – תרגול 13

תוכן עניינים

1 נגזרות כיווניות

נשתמש רבות במהלך התרגול ב**מכפלה סקלרית**.

הגדרה: המכפלה הסקלרית היא פונקציה המתאימה לכל שני וקטורים ב-$\mathbb{R}^2$ מספר ממשי (סקלר) באופן הבא. אם $\vec{u}=\left[\begin{array}{c}u_1\\u_2\end{array}\right],\vec{v}=\left[\begin{array}{c}v_1\\v_2\end{array}\right]$ וקטורים ב-$\mathbb{R}^2$, **המכפלה הסקלרית** שלהם מוגדרת על ידי

$$\left[\begin{array}{c}u_1\\u_2\end{array}\right]^t\left[\begin{array}{c}v_1\\v_2\end{array}\right]=u_1v_1+u_2v_2.$$

אנחנו נסמן את המכפלה הסקלרית על ידי $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ או $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

הגדרה: תהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בקבוצה $U\subset\mathbb{R}^2$, תהי $P_0\in U$ נקודה פנימית ויהי $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$ וקטור יחידה (כלומר $\|\vec{u}\|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}=1$). **הנגזרת הכיוונית** של f בנקודה P_0 בכיוון הווקטור $\vec{u}$ מוגדרת על ידי הגבול

$$\lim_{t\to0}\frac{f\left(P_0+t\vec{u}\right)-f\left(P_0\right)}{t}$$

במידה שגבול זה אכן קיים. אם זה המצב, נסמן את הגבול הזה על ידי $\frac{\partial f}{\partial\vec{u}}\left(P_0\right)$ או $D_{\vec{u}}f\left(P_0\right)$.

דוגמה 1: חשבו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה $f\binom{x}{y}=3x^2y+y^2$ בנקודה $P_0=\binom{x_0}{y_0}$ בכיוון וקטור יחידה כלשהו $\vec{u}=\left[\begin{array}{c}u_1\\u_2\end{array}\right]$.

חישוב מפורש של הגבול יהיה מייגע ולכן נשתמש בטענה שכבר ראינו לגבי נגזרות חלקיות ונכונה גם בגרסה כללית יותר עבור נגזרות כיווניות, שאת ההוכחה לה תראו בתרגיל הבית.

טענה 1: תהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בקבוצה $U\subset\mathbb{R}^2$, תהי $P_0\in U$ נקודה פנימית ויהי $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$ וקטור יחידה. נגדיר פונקציה חדשה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על ידי $g\left(t\right)=f\left(P_0+t\vec{u}\right)$. אזי f גזירה בנקודה P_0 בכיוון הווקטור $\vec{u}$ אם ורק אם g גזירה (כפונקציה של משתנה אחד) בנקודה 0, ובמקרה זה מתקיים

$$D_{\vec{u}}f\left(P_0\right)=g'\left(0\right).$$

נשוב לדוגמה 1. עבור $P_0=\binom{x_0}{y_0}$ כלשהי ועבור וקטור יחידה $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$ כלשהו, נגדיר את הפונקציה

$$g\left(t\right)=f\left(P_0+t\vec{u}\right)=f\begin{pmatrix}x_0+tu_1\\y_0+tu_2\end{pmatrix}=3\left(x_0+tu_1\right)^2\left(y_0+tu_2\right)+\left(y_0+tu_2\right)^2.$$

כעת x_0,y_0,u_1,u_2 הם מבחינתנו ערכים קבועים שאינם משתנים, ואנחנו מתבוננים ב-t כמשתנה הגזירה שלנו. בהתאם לכלל השרשרת של פונקציות במשתנה אחד ולכללי הגזירה של פולינומים אנחנו מקבלים כי לכל $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}g'\left(t\right)&=3\left[\left(x_0+tu_1\right)^2\left(y_0+tu_2\right)\right]'+\left[\left(y_0+tu_2\right)^2\right]'\\&=3\left[2\left(x_0+tu_1\right)u_1\left(y_0+tu_2\right)+\left(x_0+tu_1\right)^2u_2\right]+\left[2\left(y_0+tu_2\right)u_2\right]\end{aligned}$$

ואם נציב $t=0$ נקבל

$$D_{\vec{u}}f\left(P_0\right)=g'\left(0\right)=6x_0y_0u_1+\left(3x_0^2+2y_0\right)u_2.$$

הגדרה: תהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בקבוצה $U\subset\mathbb{R}^2$ ותהי $P_0\in U$ נקודה פנימית. יהיו $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ וקטורי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$ המסמנים

$$\vec{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ \vec{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

הגדרנו את **הנגזרת החלקית** של f בנקודה P_0 לפי המשתנה ה־i על ידי הגבול

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\left(P_0+t\vec{e}_i\right)-f\left(P_0\right)}{t}$$

במידה שגבול זה אכן קיים. אם זה המצב, סימנו את הגבול הזה על ידי $\frac{\partial f}{\partial x}\left(P_0\right),\frac{\partial f}{\partial y}\left(P_0\right)$ או על ידי $D_i f\left(P_0\right)$ (כקיצור ל־$D_{\vec{e}_i}f\left(P_0\right)$) עבור $i=1,2$.

הגדרה: אם שתי הנגזרות החלקיות קיימות נגדיר את **הגרדיאנט** של f בנקודה P_0 להיות הווקטור

$$\vec{\nabla}f\left(P_0\right)=\begin{bmatrix}D_1 f\left(P_0\right)\\D_2 f\left(P_0\right)\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2.$$

דוגמה 1: (המשך) נשים לב כי הנגזרות החלקיות של f בנקודה P_0 הן

$$D_1 f\left(P_0\right)=6x_0y_0\,,\ \ D_2 f\left(P_0\right)=3x_0^2 2y_0\,,$$

ולכן הגרדיאנט בנקודה P_0 הוא

$$\vec{\nabla}f\left(P_0\right)=\begin{bmatrix}6x_0y_0\\3x_0^2+2y_0\end{bmatrix}.$$

נבחין כי ניתן לכתוב את הביטוי שקיבלנו עבור הנגזרת הכיוונית על ידי המכפלה הסקלרית של הגרדיאנט עם וקטור היחידה הנתון,

$$D_{\vec{u}}f\left(P_0\right)=6x_0y_0u_1+\left(3x_0^2+2y_0\right)u_2=\vec{\nabla}f\left(P_0\right)\cdot\vec{u}.$$

זה לא מקרי ואנחנו נראה בהמשך בטענה 2 כי בהרבה מהמקרים הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בכיוון וקטור יחידה כלשהו הוא המכפלה הסקלרית של הגרדיאנט בווקטור היחידה.

דוגמה 2: תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הפונקציה

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\\ 0 & \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}.$$

הראיתם בתרגיל בית כי פונקציה זו (או פונקציה דומה לה) רציפה בנקודה $P_0=\binom{0}{0}$. נבדוק האם הנגזרות הכיווניות קיימות ב־P_0. יהי $\vec{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ וקטור יחידה כלשהו. נגדיר

$$g\left(t\right)=f\left(P_0+t\vec{u}\right)=f\begin{pmatrix}tu_1\\tu_2\end{pmatrix}=\begin{cases}\frac{t^2u_1^2tu_2}{t^2u_1^2+t^2u_2^2} & t\neq 0\\ 0 & t=0\end{cases}.$$

כלומר, לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$g\left(t\right)=t\frac{u_1^2u_2}{u_1^2+u_2^2}.$$

לפי כללי הגזירה של פונקציות במשתנה אחד אנחנו מקבלים מייד כי לכל $t\in\mathbb{R}$,

$$g'\left(t\right)=\frac{u_1^2u_2}{u_1^2+u_2^2}$$

ולכן בפרט עבור $t=0$,

$$D_{\vec{u}}f\left(P_0\right)=g'\left(0\right)=\frac{u_1^2u_2}{u_1^2+u_2^2}.$$

כלומר, מצאנו כי קיימות כל הנגזרות הכיווניות של f בנקודה $P_0=\binom{0}{0}$. בפרט הנגזרות החלקיות שתיהן מתאפסות:

$$D_1 f\left(P_0\right)=D_2 f\left(P_0\right)=0.$$

2 דיפרנציאביליות

נזכיר כי **העתקה לינארית** $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ היא פונקציה מהצורה $L\left(\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}\right)=Ah+Bk$ כאשר $A,B\in\mathbb{R}$ קבועים כלשהם.

הגדרה: תהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בקבוצה $U\subset\mathbb{R}^2$ ותהי $P_0\in U$ נקודה פנימית. נאמר כי f **דיפרנציאבילית** בנקודה P_0 אם קיימת העתקה לינארית $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ כך שקיים הגבול

$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)-f(P_0)-L(P-P_0)}{\|P-P_0\|}=0.$$

במקרה שגבול זה קיים ביחס להעתקה לינארית L, נקרא ל-L **הדיפרנציאל** של f בנקודה P_0 ונסמנו על ידי

$$L=Df(P_0).$$

(לא להתבלבל עם הסימון לנגזרות כיווניות).

בהרצאה תראו כי בכל מקרה שקיים הדיפרנציאל הוא יחיד. הטענה הבאה מאפשרת לנו לקבוע דיפרנציאביליות ולחשב את הדיפרנציאל.

טענה 2: תהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בקבוצה $U\subset\mathbb{R}^2$ ותהי $P_0\in U$ נקודה פנימית. נניח כי f דיפרנציאלית ב-P_0. אזי:

1. כל הנגזרות הכיווניות (ובפרט שתי הנגזרות החלקיות) של f בנקודה P_0 קיימות. כלומר, דיפרנציאביליות גוררת גזירות כיוונית בכל כיוון.
2. ההעתקה הלינארית $Df(P_0)$ מתקבלת על ידי המכפלה הסקלרית

$$Df(P_0)\left(\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}\right)=\vec{\nabla}f(P_0)\cdot\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}=D_1f(P_0)h+D_2f(P_0)k.$$

כלומר, הקבועים A,B של ההעתקה הלינארית $Df(P_0)\left(\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}\right)=Ah+Bk$ הם

$$A=D_1f(P_0),\ B=D_2f(P_0).$$

3. יתרה מזאת, לכל וקטור יחידה $\vec{u}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ יש לנו נוסחה לנגזרת הכיוונית על ידי

$$D_{\vec{u}}f(P_0)=Df(P_0)(\vec{u})=\vec{\nabla}f(P_0)\cdot\vec{u}=D_1f(P_0)u_1+D_2f(P_0)u_2.$$

דוגמה 3: הראינו כי הפונקציה

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\\ 0 & \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}.$$

שבדוגמה 2 לעיל גזירה בכל כיוון בנקודה $P_0=\binom{0}{0}$ והנגזרת הכיוונית היא

$$D_{\vec{u}}f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{u_1^2u_2}{u_1^2+u_2^2}.$$

נבדוק האם היא דיפרנציאבילית בנקודה $P_0=\binom{0}{0}$. לפי טענה 2, אם היא הייתה דיפרנציאבילית בנקודה $P_0=\binom{0}{0}$ אז הדיפרנציאל שלה בנקודה זו היה

$$Df\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\left(\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}\right)=\vec{\nabla}f(P_0)\cdot\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}=0,$$

ואז היה צריך להתקיים הגבול

$$0=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{f\binom{x}{y}-f\binom{0}{0}-Df\binom{0}{0}\left(\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right)}{\left\|\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right\|}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{f\binom{x}{y}-f\binom{0}{0}-Df\binom{0}{0}\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)}{\left\|\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right\|}$$

$$=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{f\binom{x}{y}-0-0}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{\frac{x^2y}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)}$$

אולם נראה כי גבול זה אינו קיים. נבחר למשל את הסדרה $(x_n,y_n)=(1/n,1/n)$ (או למעשה כל סדרה (x_n,y_n) שעבורה $x_n=y_n\neq 0$ תיתן לנו את הסתירה המבוקשת) ונקבל כי

$$\frac{\frac{1}{n^2}\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)^{3/2}}=\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{2^{3/2}}{n^3}}=\frac{1}{2^{3/2}},$$

וביטוי זה בבירור לא מתכנס לאפס, וקיבלנו סתירה להנחה כי f דיפרנציאבילית ב־$P_0=\binom{0}{0}$. המשמעות הגאומטרית היא שלפונקציה f לא קיים מישור משיק בראשית.

דוגמה 4: תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הפונקציה $f\binom{x}{y}=xy$. הראו כי f דיפרנציאבילית בכל נקודה.

בכל פעם שאנחנו מעוניינים להראות כי פונקציה כלשהי היא דיפרנציאבילית, עלינו לחשב את המועמד הטבעי לדיפרנציאל על ידי הנגזרות החלקיות בהתאם לחלק 2 בטענה 2. עבור $P_0=\binom{x_0}{y_0}$ נקודה כלשהי מתקיים

$$D_1f(P_0)=y\mid_{\binom{x}{y}=\binom{x_0}{y_0}}=y_0$$

$$D_2f(P_0)=x\mid_{\binom{x}{y}=\binom{x_0}{y_0}}=x_0.$$

אם כך הגרדיאנט הוא

$$\vec{\nabla}f\binom{x_0}{y_0}=\begin{bmatrix}y_0\\x_0\end{bmatrix},$$

והמועמדת לדיפרנציאל של f בנקודה P_0 היא ההעתקה הלינארית

$$L\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\vec{\nabla}f\binom{x_0}{y_0}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_0\\x_0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=y_0x+x_0y.$$

נבדוק האם זה אכן דיפרנציאל. עבור $P=\binom{x}{y}$ כלשהו מתקיים

$$\begin{aligned}f(P)-f(P_0)-L(P-P_0)&=xy-x_0y_0-(y_0(x-x_0)+x_0(y-y_0))\\&=(x-x_0)(y-y_0)\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\frac{|f(P)-f(P_0)-L(P-P_0)|}{\|P-P_0\|}&=\frac{|(x-x_0)(y-y_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\\&\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\\&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\frac{1}{2}\|P-P_0\|\end{aligned}.$$

(כאשר השתמשנו באי השוויון $ab\leq\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$) ומעצם ההגדרה ביטוי זה שואף לאפס כאשר $P\to P_0$.

המסקנה שלנו היא כי $L\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)$ שהגדרנו לעיל היא הדיפרנציאל של f בנקודה P_0. לפיכך אנחנו יכולים לקבוע כי f דיפרנציאבילית בנקודה P_0 וכי הדיפרנציאל הוא

$$Df(P_0)\left(\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}\right)=L\left(\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}\right)=\vec{\nabla}f(P_0)\cdot\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}=hy_0+kx_0.$$

הטענה הבאה מקלה עלינו בקביעת דיפרנציאביליות של פונקציה בכך שהיא נותנת תנאי מספיק לדיפרנציאביליות.

טענה 3: תהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בקבוצה $U\subset\mathbb{R}^2$ ותהי $P_0\in U$ נקודה פנימית. אם הנגזרות החלקיות של f מקיימות כי הן (1) **קיימות בסביבה** של הנקודה P_0 (2) **ורציפות בנקודה** P_0, אזי f דיפרנציאבילית בנקודה P_0.

דוגמה 5: נראה כיצד טענה 3 מאפשרת לנו לפתור את דוגמה 4 בקלות. כפי שחישבנו כבר לעיל, לכל $P=\binom{x}{y}\in\mathbb{R}^2$ מתקיים

$$D_1f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=y\,,\quad D_2f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x,$$

ואלה בבירור פונקציות מוגדרות ורציפות בכל מקום. לכן מטענה 3 נובע מיידית כי $f\binom{x}{y}=xy$ דיפרנציאבילית בכל מקום.

נחשב למשל את הנגזרת הכיוונית של f בנקודה $P_0=\binom{2}{1}$ בכיוון וקטור היחידה $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$. בהתאם לטענה 2 לעיל אנחנו מקבלים כי

$$\begin{aligned}D_{\vec{u}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}&=\vec{\nabla}f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{u}=\vec{\nabla}f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}.\\&=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}=1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+2\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

3 כלל השרשרת

תזכורת: (**כלל השרשרת לפונקציות במשתנה אחד**) יהיו פונקציות $I\xrightarrow{\gamma}\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ עבור קטע פתוח $I\subset\mathbb{R}$ (כלומר $\gamma:I\to\mathbb{R}$ ו–$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$). אם γ גזירה בנקודה $t_0\in I$ ו–f גזירה בנקודה $\gamma(t_0)$, אזי $f\circ\gamma$ גזירה בנקודה t_0 ומתקיים

$$(f\circ\gamma)'(t_0)=f'(\gamma(t_0))\cdot\gamma'(t_0)\,.$$

טענה 4: (**כלל השרשרת לדיפרנציאלים**) יהיו פונקציות $I\xrightarrow{\gamma}\mathbb{R}^2\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ עבור קטע פתוח $I\subset\mathbb{R}$ (כלומר $\gamma:I\to\mathbb{R}^2$ ו–$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$). אם γ גזירה בנקודה $t_0\in I$ ו–f דיפרנציאבילית בנקודה $\gamma(t_0)$, אזי $f\circ\gamma$ גזירה בנקודה t_0 ומתקיים

$$(f\circ\gamma)'(t_0)=Df(\gamma(t_0))(\gamma'(t_0))=\vec{\nabla}f(P_0)\cdot\gamma'(t_0)\,.$$

השימוש שלנו בכלל השרשרת יהיה כדלהלן. נניח כי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית בתחום פתוח $U\subset\mathbb{R}^2$, ויהי $\left\{\binom{x}{y}\in U:f\binom{x}{y}=c\right\}$ קו גובה של הפונקציה. נניח כי אנחנו יכולים למצוא פרמטריזציה לקו הגובה הזה, כלומר מסילה $\gamma:I\to\mathbb{R}^2$ שהמסלול שלה מוכל בקו הגובה, ונניח כי המסילה גזירה. תהי $P_0\in U$ נקודה בקו הגובה הנ"ל ונקבע $t_0\in I$ שעבורה $\gamma(t_0)=P_0$.
כעת הווקטור $\gamma'(t_0)$ הוא וקטור שמשיק לנקודה $f(P_0)$. באמצעות כלל השרשרת אנחנו יכולים לדעת שווקטור הגרדיאנט $\vec{\nabla}f(P_0)$ הוא תמיד וקטור ניצב לווקטור המשיק $\gamma'(t_0)$, ללא תלות בבחירת המסילה γ.
לשם כך נבחין כי $f(\gamma(t))=c$ לכל $t\in I$, ולכן מכלל השרשרת אנחנו מקבלים כי

$$0=(f\circ\gamma)'(t_0)=\vec{\nabla}f(\gamma(t_0))\cdot\gamma'(t_0)=\vec{\nabla}f(P_0)\cdot\gamma'(t_0).$$

דוגמה 6: תהי $f\binom{x}{y}=x^2+y^2$. לכל $c>0$ נתבונן בקו הגובה $f\binom{x}{y}=1$ (מעגל היחידה). נבחר את המסילה $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי $\gamma(t)=\binom{\cos t}{\sin t}$ שעבורה $\gamma'(t)=\begin{bmatrix}-\sin t\\\cos t\end{bmatrix}$. עבור כל נקודה $P_0=\binom{x_0}{y_0}$ בקו הגובה, הגרדיאנט הוא

$$\vec{\nabla}f(P_0)=\begin{bmatrix}2x_0\\2y_0\end{bmatrix}$$

ולכן מייד אנחנו יודעים שעבור $t_0\in[0,2\pi]$ המקיימת $\gamma(t_0)=P_0$, הווקטורים $\vec{\nabla}f(P_0)\,,\gamma'(t_0)$ ניצבים זה לזה. נראה זאת גם על ידי חישוב מפורש. נבחין כי אם $\gamma(t_0)=P_0=\binom{x_0}{y_0}$ זה אומר כי $\cos t_0=x_0$ וכי $\sin t_0=y_0$. אם כך

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}f(P_0)\cdot\gamma'(t_0)&=\begin{bmatrix}2x_0\\2y_0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\sin t_0\\\cos t_0\end{bmatrix}.\\&=\begin{bmatrix}2x_0\\2y_0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-y_0\\x_0\end{bmatrix}=-2x_0y_0+2x_0y_0=0\end{aligned}$$

4 מחסנית

תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה נתונה ויהיו $\varphi,\psi:U\to\mathbb{R}$ פונקציות המוגדרות בקבוצה פתוחה $U\subset\mathbb{R}^2$. נתבונן בפונקציה $F:U\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי

$$F\binom{x}{y}=f\binom{\varphi\binom{x}{y}}{\psi\binom{x}{y}}.$$

נראה כיצד להשתמש בטענה 4 כדי לחשב את הנגזרות החלקיות של F בנקודה כלשהי $P_0=\binom{x_0}{y_0}\in U$. נסמן $Q_0=\binom{\varphi(P_0)}{\psi(P_0)}$. כדי לחשב את הנגזרת החלקית לפי x אנחנו קובעים את y_0 ומגדירים את הפונקציה

$$g\left(t\right)=F\left(P_0+t\vec{e}_1\right)=F\binom{x_0+t}{y_0}=f\binom{\varphi\binom{x_0+t}{y_0}}{\psi\binom{x_0+t}{y_0}}.$$

נבחין כי קיבלנו פונקציה מהצורה שהייתה בטענה 4: נגדיר את המסילה $\gamma\left(t\right)=\binom{\varphi\binom{x_0+t}{y_0}}{\psi\binom{x_0+t}{y_0}}$ עבור t בקטע פתוח כלשהו סביב 0, שעבורה $g\left(t\right)=f\left(\gamma\left(t\right)\right)$ וכן $g\left(0\right)=f\left(Q_0\right)$. מיידית מההגדרה אנחנו רואים כי

$$\gamma'\left(0\right)=\begin{bmatrix}D_1\varphi\left(P_0\right)\\D_1\psi\left(P_0\right)\end{bmatrix}.$$

לפי טענה 4 נקבל כי הנגזרת החלקית לפי x היא

$$\begin{aligned}D_1F\left(P_0\right)&=g'\left(0\right)=\left(f\circ\gamma\right)'\left(0\right)=Df\left(\gamma\left(0\right)\right)\cdot\gamma'\left(0\right)\\&=\vec{\nabla}f\left(Q_0\right)\cdot\begin{bmatrix}D_1\varphi\left(P_0\right)\\D_1\psi\left(P_0\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_1f\left(Q_0\right)\\D_2f\left(Q_0\right)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}D_1\varphi\left(P_0\right)\\D_1\psi\left(P_0\right)\end{bmatrix}\\&=D_1f\left(Q_0\right)D_1\varphi\left(P_0\right)+D_2f\left(Q_0\right)D_1\psi\left(P_0\right)\end{aligned}$$

חישוב זהה מראה לנו נוסחה דומה עבור הנגזרת החלקית השנייה,

$$D_2F\left(P_0\right)=\begin{bmatrix}D_1f\left(Q_0\right)\\D_2f\left(Q_0\right)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}D_2\varphi\left(P_0\right)\\D_2\psi\left(P_0\right)\end{bmatrix}=D_1f\left(Q_0\right)D_2\varphi\left(P_0\right)+D_2f\left(Q_0\right)D_2\psi\left(P_0\right).$$

את שני השוויונים האלה אנחנו יכולים לארגן באמצעות כפל מטריצות ולכתוב

$$\vec{\nabla}F\left(P_0\right)=\begin{bmatrix}D_1F\left(P_0\right)\\D_2F\left(P_0\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_1f\left(Q_0\right)\\D_2f\left(P_0\right)\end{bmatrix}^t\begin{bmatrix}D_1\varphi\left(P_0\right)&D_2\varphi\left(P_0\right)\\D_1\psi\left(P_0\right)&D_2\psi\left(P_0\right)\end{bmatrix}$$

80133-2 תש"פ – 2019-2020 – תרגול 14

תוכן עניינים

1 נגזרות חלקיות מעורבות

תהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בקבוצה $U\subset\mathbb{R}^2$ ונניח כי $B\subset U$ כדור פתוח כלשהו.
ייתכן כי הנגזרות החלקיות $D_1f(P),D_2f(P)$ קיימות לכל $P\in B$. במקרה זה אנחנו מקבלים פונקציות $D_1f,D_2f:B\to\mathbb{R}$.
ייתכן כי הנגזרות החלקיות של הפונקציות D_1f,D_2f קיימות לכל $P\in B$. במקרה זה נסמן אותן על ידי $D_i(D_jf)(P)$ או $D_{ij}f(P)$.

משפט: (הלמה של שוורץ) בתנאים לעיל, אם הנגזרות החלקיות מסדר שני $D_{ij}f:B\to\mathbb{R}$ הן פונקציות רציפות בנקודה $P_0\in B$ כלשהי, אזי

$$D_{12}f(P_0)=D_{21}f(P_0).$$

כלומר, תחת תנאי המשפט מתקיימת תכונה מפתיעה: לא משנה אם אנחנו גוזרים את הפונקציה קודם לפי המשתנה x ואז לפי המשתנה y, או קודם לפי המשתנה y ואז לפי המשתנה x.
נשים לב כי הלמה של שוורץ תקפה רק כאשר הנגזרות החלקיות המעורבות קיימות ורציפות בנקודה פנימית $P\in U$. להלן נראה דוגמה נגדית כאשר תנאי זה אינו מתקיים.

דוגמה: נתבונן בפונקציה

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{cases}\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\\ 0 & \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}.$$

- נחשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון.
  - נסמן $P_0=\binom{0}{0}$. נבדוק האם קיימות הנגזרות החלקיות ב-P_0. נגדיר

$$g_1(t)=f(P_0+t\vec{e}_1)=f\begin{pmatrix}0+t\\0\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}=\begin{cases}\frac{t^3\cdot0-t\cdot0}{t^2+0} & t\neq0\\ 0 & t=0\end{cases}$$

$$g_2(t)=f(P_0+t\vec{e}_2)=f\begin{pmatrix}0\\0+t\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix}=\begin{cases}\frac{0\cdot t-0\cdot t^3}{0+t^2} & t\neq0\\ 0 & t=0\end{cases}.$$

ולכן בכל מקרה, מתקיים לכל t כי

$$g_1(t)=0,\ g_2(t)=0.$$

נובע כי

$$D_1f(P_0)=g_1'(0)=0$$

$$D_2f(P_0)=g_2'(0)=0.$$

– עבור כל נקודה $P=\binom{x}{y}\neq P_0$ לא קשה לראות כי הנגזרת החלקיות $D_1f\left(P\right),D_2f\left(P\right)$ קיימות. תוך שימוש בכללי גזירה אלמנטריים אנחנו מקבלים כי

$$\begin{aligned}D_1f\binom{x}{y}&=\frac{\left(3x^2y-y^3\right)\left(x^2+y^2\right)-2x\left(x^3y-xy^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\&=\frac{3x^4y-x^2y^3+3x^2y^3-y^5-2x^4y+2x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\&=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{aligned}$$

וכן משיקולי סימטריה (שימו לב כי $f\binom{x}{y}=-f\binom{y}{x}$, אתם מוזמנים לוודא),

$$D_2f\binom{x}{y}=-\frac{y^4x+4y^2x^3-x^5}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^5-4y^2x^3-y^4x}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

- נחשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני $D_{21}f,D_{12}f$.

– נחשב את $D_{21}f$ בנקודה P_0. נגדיר עבור $t\neq0$,

$$g\left(t\right)=D_1f\left(P_0+t\vec{e}_2\right)=D_1f\binom{0}{t}=\frac{-t^5}{\left(t^2\right)^2}=-t$$

ונובע כי

$$D_{21}f\left(P_0\right)=D_2\left(D_1f\right)\left(P_0\right)=g'\left(0\right)=-1.$$

– נחשב את $D_{12}f$ בנקודה P_0. נגדיר עבור $t\neq0$,

$$h\left(t\right)=D_2f\left(P_0+t\vec{e}_1\right)=D_2f\binom{t}{0}=\frac{t^5}{\left(t^2\right)^2}=t$$

ונובע כי

$$D_{21}f\left(P_0\right)=D_2\left(D_1f\right)\left(P_0\right)=h'\left(0\right)=1.$$

- בסיכום, מצאנו כי

$$D_{21}f\left(P_0\right)=-1\neq1=D_{12}f\left(P_0\right).$$

נבחין כי בבירור הנגזרות המעורבות $D_{12}f\binom{x}{y},D_{21}f\binom{x}{y}$ קיימות עבור כל $P=\binom{x}{y}\neq P_0$ כי f פונקציה רציונלית עם מכנה שאינו מתאפס בנקודה P כנ"ל. למרות שלא חישבנו בכלל את הנוסחאות לנגזרות המעורבות $D_{12}f\binom{x}{y},D_{21}f\binom{y}{x}$ עבור נקודות $P=\binom{x}{y}\neq P_0$, אנחנו יודעים מהמשפט כי לא ייתכן ששתיהן רציפות בנקודה P_0.

2 תרגול חזרה

2.0.1 כלל לופיטל

דוגמה: נגדיר את הפונקציות $f\left(x\right)=\frac{x^2}{1+x^2}$, $g\left(x\right)=\sin\left(x\right)$. חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to0}f\left(x\right)^{g\left(x\right)}.$$

פתרון: כזכור הגדרנו את $\alpha^{\beta}=\mathrm{e}^{\beta\ln\alpha}$ עבור $\alpha>0$ ו־$\beta\in\mathbb{R}$. לפיכך $f(x)^{g(x)}$ מוגדרת בכל $x\in\mathbb{R}$ כי $f(x)>0$ לכל $x\in\mathbb{R}$. מתקיים

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0,\ \lim_{x\to 0}g(x)=\sin(0)=0 .$$

לכן הגבול הוא מהצורה "0^0" וזהו מקרה אי־ודאות מהצורה "$0\cdot\infty$" מהשיקול הבא. נשים לב כי $\ln f(x)$ מוגדר היטב. אם כך אנחנו יכולים לכתוב באופן כללי עבור x בסביבה של 1,

$$f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} .$$

כעת אנחנו יכולים לקוות שנוכל לחשב את הגבול $\lim_{x\to 0}(g(x)\ln f(x))$, ולהשתמש ברציפות של פונקציית האקספוננט. נבחין כי

$$\lim_{x\to 0}g(x)=0,\ \lim_{x\to 0}\ln f(x)=-\infty$$

ולכן זה אינו גבול מיידי. אבל אנחנו יכולים לכתוב

$$g(x)\ln f(x)=\frac{\ln f(x)}{1/g(x)}=-\frac{\ln f(x)}{1/g(x)}$$

ולהבחין כי הגבול $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln f(x)}{1/g(x)}$ הוא מהצורה "$\frac{-\infty}{\infty}$" וכי הגבול $\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{1/g(x)}$ הוא מהצורה "$\frac{-\infty}{-\infty}$", ואם כך נרצה להשתמש בכלל לופיטל. הפונקציות $\ln f(x)\,,1/g(x)$ גזירות ונגזרותיהן הן

$$(\ln f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{\frac{x^2}{1+x^2}}=\frac{2}{x(1+x^2)}$$

$$(1/g(x))'=-\frac{g'(x)}{g(x)^2}=-\frac{\cos(x)}{\sin(x)^2} .$$

קיבלנו כי

$$\frac{(\ln f(x))'}{(1/g(x))'}=\frac{2}{x(1+x^2)}\left(-\frac{\sin(x)^2}{\cos(x)}\right)=-\frac{2}{\cos(x)(1+x^2)}\frac{\sin(x)^2}{x} .$$

כעת נקבל מאריתמטיקה של גבולות ושימוש בגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ כי

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(-\ln f(x))'}{(1/g(x))'}=\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{\cos(x)(1+x^2)}\right)\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0^+}\sin(x)\right)$$
$$=2\cdot 1\cdot 0=0 ,$$

ומכלל לופיטל ואריתמטיקה של גבולות אנחנו רואים כי

$$\lim_{x\to 0^+}(g(x)\ln f(x))=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln f(x)}{1/g(x)}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln f(x))'}{(1/g(x))'}=0 .$$

על ידי הפעלת אותם השיקולים אנחנו גם רואים כי $\lim_{x\to 0^-}(g(x)\ln f(x))=0$ ולכן נובע כי

$$\lim_{x\to 0}(g(x)\ln f(x))=0 .$$

לבסוף, מרציפות פונקציית האקספוננט אנחנו מקבלים כי

$$\lim_{x\to 0}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}(g(x)\ln f(x))}=\mathrm{e}^0=1 .$$

בדוגמה הקודמת ובתרגיל בית 4 ראיתם דוגמאות לגבולות מהצורה "0^0" שכולם יצאו 1. זה לא במקרה, אבל שימו לב שזה לא קורה תמיד כפי שנראה בדוגמה הבאה.

דוגמה: נתבונן בפונקציות $f(x)=\mathrm{e}^{-1/x^2}$, $g(x)=x$. קל לראות כי

$$\lim_{x\to 0} g(x)=0,\ \lim_{x\to 0} f(x)=0\ .$$

מתקיים כי הפונקציה $f(x)^{g(x)}$ מוגדרת היטב והיא ניתנת על ידי הנוסחה

$$f(x)^{g(x)}=\left(\mathrm{e}^{-1/x^2}\right)^x=\mathrm{e}^{-x/x^2}=\mathrm{e}^{-1/x}\ ,$$

ולא קשה לראות כי מצד אחד

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{-1/x}=0\ ,$$

אבל מצד שני,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{-1/x}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{1/x}=\infty\ .$$

2.0.2 פולינום טיילור

דוגמה: חשבו קירוב רציונלי למספר $\ln(9/10)$ כך שהשגיאה לא תעלה על 10^{-3}.

נגדיר את הפונקציה $f(x)=\ln(1+x)$ ונבחין כי $\ln(9/10)=f(-1/10)$. אם כך ניעזר בפיתוח טיילור של $f(x)$ סביב 0. נחשב את פולינומי טיילור של $f(x)$. מתקיים כי

$$f(x)=\ln(1+x)\implies f(0)=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}\implies f'(0)=1$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}\implies f''(0)=-1$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{2}{(1+x)^3}\implies f^{(3)}(0)=2$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{6}{(1+x)^4}\implies f^{(4)}(0)=-6$$

ובאופן כללי לא קשה לראות כי עבור $k\geq 1$,

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}\implies f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$$

ומכאן כי

$$P_{n,f,0}(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\ .$$

אם כך נקבל כי לכל $x\in(-1,1)$ (כדי שיתקיים $1+x>0$ בחרנו סביבה מתאימה) מתקיים

$$\ln(1+x)=f(x)=P_{n,f,0}(x)+R_{n,f,0}(x)\ .$$

אנחנו רוצים להעריך את

$$\ln(9/10)=f(-1/10)=P_{n,f,0}(-1/10)+R_{n,f,0}(-1/10)\ .$$

נחפש n שעבורו

$$|R_{n,f,0}(-1/10)|\leq 10^{-3}\ .$$

נבחין כי לפי משפט טיילור ניתן להעריך את השארית בצורת לגראנז' על ידי $c \in (-1/10, 0)$ שעבורה

$$R_{n,f,0}(-1/10) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(-1/10)^{n+1} = \frac{(-1)^n \frac{n!}{(1+c)^{n+1}}}{n!}(-1/10)^{n+1} = \frac{(-1)^n}{(1+c)^{n+1}}(-1/10)^{n+1} = -\frac{1}{(1+c)^{n+1}}\frac{1}{10^{n+1}}.$$

נשים לב כי היות ש-$c \in (-1/10, 0)$ כלומר $c > -1/10$ ולכן $1 > 1+c > 9/10$ ולכן $1 < \frac{1}{1+c} < \frac{10}{9}$. לכן בערך מוחלט אנחנו מקבלים את ההערכה

$$|R_{n,f,0}(-1/10)| = \frac{1}{(1+c)^{n+1}}\frac{1}{10^{n+1}} \le \frac{1}{(9/10)^{n+1}}\frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{9^{n+1}}.$$

אם כך עלינו לחפש n שעבורו $9^{-(n+1)} < 10^{-3}$, או באופן שקול $10^3 < 9^{n+1}$. זה מתקיים עבור $n = 3$. כלומר $|R_{3,f,0}(-1/10)| < 10^{-3}$ ולכן נובע כי הקירוב המבוקש הוא

$$P_{3,f,0}(-1/10) = \sum_{k=1}^{3}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(-\frac{1}{10}\right)^k = -\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k\cdot 10^k} = -\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{2\cdot 100}+\frac{1}{3\cdot 1000}\right) = -0.1053333\ldots$$

מחשבון נותן את הערך $\ln(9/10) = -0.10536051\ldots$.

2.0.3 טורים

תרגיל: יהיו $P(x), Q(x) \neq 0$ פולינומים ונניח כי $\deg Q = \deg P + 2$. הראו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}$ מתכנס בהחלט.

פתרון: נבחין כי לכל זוג פולינומים P, Q אנחנו יכולים לכתוב

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x^{\deg P - \deg Q}\cdot f(x)$$

כאשר $f(x)$ פונקציה רציונלית שעבורה קיים הגבול

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0.$$

באופן מפורש, אם $\deg P = k, \deg Q = m$ אז אפשר לכתוב

$$P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

עם a_k, b_m שניהם לא אפס . ולכן

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{x^k\left(a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \frac{a_0}{x^k}\right)}{x^m\left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{b_1}{x^{k-1}} + \frac{b_0}{x^m}\right)} = x^{k-m}\cdot\frac{a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \frac{a_0}{x^k}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{b_1}{x^{k-1}} + \frac{b_0}{x^m}}$$

וברור כי

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \frac{a_0}{x^k}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{b_1}{x^{k-1}} + \frac{b_0}{x^m}} = \frac{a_k}{b_m},$$

וגבול זה מוגדר היטב ואינו אפס כי a_k, b_m שניהם לא אפס.

לכן במקרה שלנו אם נסמן $\deg P = d, \deg Q = d+2$ אנחנו יכולים לכתוב

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x^{\deg P - (\deg P + 2)} f(x) = \frac{1}{x^2} f(x),$$

כאשר $L = \lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$. לכן על ידי מבחן ההשוואה עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ אנחנו מקבלים בקלות כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ מתכנס.

תרגיל: תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים המקיימת $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$. הוכיחו כי הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול.

פתרון: נשתמש בתנאי קושי. נבחין כי לכל k, m עם $k > m$ ניתן לכתוב

$$|a_k - a_m| = \left| \sum_{n=m}^{k-1} (a_{n+1} - a_n) \right| \leqslant \sum_{n=m}^{k-1} |a_{n+1} - a_n|.$$

לכן קיבלנו כי הביטוי $|a_k - a_m|$ חסום על ידי זנב של טור מתכנס. אם כך אנחנו מקבלים את תנאי קושי להתכנסות באופן הבא.

יהי $\varepsilon > 0$. נבחר n_0 כך שלכל $k, m > n_0$ מתקיים $\sum_{n=m}^{k-1} |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$. אזי בכל פעם ש- $k, m > n_0$, אם למשל $k > m$ אז מתקיים

$$|a_k - a_m| \leqslant \sum_{n=m}^{k-1} |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon.$$

לכן הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את תנאי קושי ומכאן כי היא מתכנסת.

הערה: זה אולי מפתה להגיד כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$ אז נובע כי $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$ ואולי לכן הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול, אבל טענה זו אינה נכונה. אתם מוזמנים לחשוב על דוגמה לסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$ אבל <u>אינה</u> מתכנסת לגבול.

2.0.4 רציפות במידה־שווה

תרגיל: תהי $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ומחזורית (כלומר, קיים $T > 0$ שעבורו $f(x+T) = f(x)$ לכל $x \in [0, \infty)$) . הוכיחו כי f רציפה במידה שווה על כל $[0, \infty)$.

פתרון: נתבונן בקטע $[0, T]$. מהנתון נובע כי f רציפה על קטע זה ולכן ממשפט קנטור היא רציפה במידה שווה בקטע זה. יהי $\varepsilon > 0$. מרציפות f במידה שווה על $[0, T]$ נובע שקיים $\delta_1 > 0$ המקיים

$$\forall x, y \in [0, T] \quad |x - y| < \delta_1 \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

נתבונן בקטע $[T/2, 3T/2]$, ומאותו הנימוק קיים $\delta_2 > 0$ המתאים לקטע זה שעבורו

$$\forall x, y \in [T/2, 3T/2] \quad |x - y| < \delta_2 \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

נטען כי $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, T/2\}$ מקיים את הנדרש.

יהיו $x, y \in [0, \infty)$ נקודות המקיימות $|x - y| < \delta$. הדרישה כי $\delta \leqslant T/2$ אומרת בפרט כי $|x - y| \leqslant T/2$ ולכן או ששתי הנקודות x, y בקטע מהצורה $[nT, (n+1)T]$ או ששתי הנקודות x, y בקטע מהצורה $[nT/2, (n+1)T/2]$, כאשר $n = \lfloor x/T \rfloor$ (כדאי לצייר). נראה כי בכל אחד מהמקרים $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ובזאת נוכיח את הנדרש.

1. במקרה הראשון, נתבונן בנקודות $x - nT, y - nT \in [0, T]$. נקודות אלה מקיימות

   $$|(x - nT) - (y - nT)| = |x - y| < \delta \leqslant \delta_1,$$

   ולכן נובע ממחזוריות f כי

   $$|f(x) - f(y)| = |f(x - nT) - f(y - nT)| \leqslant \varepsilon.$$

2. במקרה השני, נתבונן בנקודות $x-nT, y-nT \in [T/2, 3T/2]$. נקודות אלה מקיימות
$$|(x-nT)-(y-nT)| = |x-y| < \delta \leqslant \delta_2,$$
ולכן נובע ממחזוריות f כי
$$|f(x)-f(y)| = |f(x-nT)-f(y-nT)| \leqslant \varepsilon.$$

2.0.5 האינטגרל הלא־מסוים

דוגמה: חשבו את האינטגרל הלא־מסוים של הפונקציה $\sqrt{a^2-x^2}$ כאשר $a>0$ הוא פרמטר.

פתרון 1: נציב $x = a\sin(t)$ עבור $-\pi/2 \le t \le \pi/2$, ואז $dx = a\cos(t)\,dt$. היות ש־$\cos(t) \ge 0$ בתחום זה, אנחנו מקבלים כי
$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2\left(1-\sin^2(t)\right)} = \sqrt{a^2\cos^2(t)} = a\cos(t).$$
לכן האינטגרל הוא
$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int a\cos(t)\,a\cos(t)\,dt = a^2\int \cos^2(t)\,dt.$$
נחשב את האינטגרל של $\cos^2(t)$. לפי הזהות של זווית כפולה מתקיים $\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$. כמו כן מאותה הזהות מתקיים $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$. לכן
$$\begin{aligned}\int \cos^2(t)\,dt &= \int \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}+C\\ &= \frac{t}{2}+\frac{\sin(t)\cos(t)}{2}+C = \frac{t}{2}+\frac{\sin(t)\sqrt{1-\sin^2(t)}}{2}+C\\ &= \frac{\arcsin(x/a)}{2}+\frac{\frac{x}{a}\sqrt{1-(x/a)^2}}{2}+C = \frac{\arcsin(x/a)+\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}}{2}+C\end{aligned}$$

אם כך אנחנו מקבלים כי
$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\int \cos^2(t)\,d = \frac{a^2\arcsin(x/a)+x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+C$$

פתרון 2: נשתמש באינטגרציה בחלקים ביחס לפונקציות $u'(x)=1, v(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ ונקבל כי
$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-x^2}dx &= \int u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)\,dx\\ &= x\sqrt{a^2-x^2} - \int x\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}dx = x\sqrt{a^2-x^2}+\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\end{aligned}$$
נשים לב שניתן לכתוב את האינטגרל האחרון שקיבלנו על ידי
$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx &= \int \frac{x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx + a^2\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\\ &= -\int \sqrt{a^2-x^2}dx + a^2\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\end{aligned}$$
וקיבלנו בביטוי האחרון את האינטגרל המקורי, כלומר יש לנו משוואה
$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \left(-\int \sqrt{a^2-x^2}dx + a^2\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\right)$$

ובהעברת אגפים

$$2\int\sqrt{a^2-x^2}dx=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx.$$

האינטגרל האחרון אמור להיות מוכר לנו, כי

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin(x)+C.$$

אכן נוכל להביא את זה לצורה דומה, כי

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx&=\int\frac{1}{\sqrt{a^2\left(1-(x/a)^2\right)}}dx=\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}dx\\ {\scriptstyle(t=x/a,dt=dx/a)}&=\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}adt=\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt\\ &=\arcsin(t)+C=\arcsin(x/a)+C\end{aligned}$$

בסך הכל נקבל כי

$$2\int\sqrt{a^2-x^2}dx=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin(x/a)+C$$

ואם נחלק ב–2 נקבל את התשובה.

מסקנה: נחשב את שטחו של עיגול בעל רדיוס a סביב הראשית. משיקולי סימטריה מספיק לחשב את שטחו של חציו העליון של העיגול ולהכפיל ב–2.

נבחין כי חציו העליון של העיגול הוא התחום שבין ציר ה–x לבין גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$, שאת הפונקציה הקדומה שלה מצאנו בתרגיל האחרון, ונסמנה $F(x)=\int f(x)\,dx=\int\sqrt{a^2-x^2}dx$. אם כך מהמשפט היסודי אנחנו מקבלים כי שטחו של חציו העליון של העיגול ברדיוס a סביב הראשית הוא

$$\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=F(a)-F(-a)$$

$$\begin{aligned}&=\frac{a\sqrt{a^2-a^2}+a^2\arcsin(1)}{2}-\frac{a\sqrt{a^2-(-a)^2}+a^2\arcsin(-1)}{2}\\&=\frac{a^2\left(\arcsin(1)-\arcsin(-1)\right)}{2}=\frac{a^2\left(\pi/2-(-\pi/2)\right)}{2}=\frac{a^2\pi}{2}\end{aligned}$$

נובע כי שטחו של העיגול ברדיוס a הוא

$$\frac{a^2\pi}{2}+\frac{a^2\pi}{2}=a^2\pi.$$

אינפי 2 למדמ"ח תש"ף 2019-2020 - תרגול 2

הגדרה

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ נקראת זוגית אם $f(-x)=f(x)$ עבור כל $x\in\mathbb{R}$.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ נקראת אי־זוגית אם $f(-x)=-f(x)$ עבור כל $x\in\mathbb{R}$.

תרגיל 1

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה ב־ $\mathbb{R}$. הוכיחו שאם f זוגית אזי נגזרתה f' היא פונקציה אי־זוגית .

<u>פתרון</u>

נגדיר את הפונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על ידי $g(x)=-x$. אזי g גזירה ב־ $\mathbb{R}$ ו־ $g'(x)=-1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

f זוגית , ז"א $f(x)=f(-x)=f(g(x))$ עבור כל $x\in\mathbb{R}$, כלומר $f=f\circ g$.

כעת, נובע מכלל השרשרת שלכל x ב־ $\mathbb{R}$ מתקיים:

$$f'(x)=(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)=f'(-x)\cdot(-1)=-f'(-x)$$

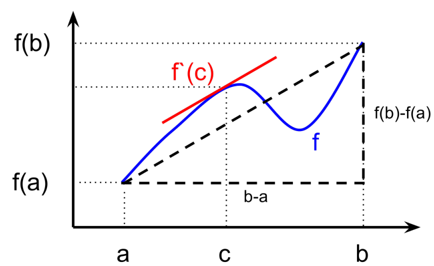
קיבלנו שפונקציית הנגזרת f' של הפונקציה הזוגית f היא אכן אי־זוגית.

מסקנה: אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ זוגית וגזירה, אזי $f'(0)=0$.

1 משפטי הנגזרות

משפט לגרנז' (משפט הערך הממוצע):

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש־ $a<b$. אם f רציפה ב־ $[a,b]$ וגזירה ב־ (a,b) , אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש־ $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



טענה

תהי f פונקציה רציפה ב־ $[a,b]$ וגזירה ב־ (a,b) המקיימת $f'(x)\geqslant 0$ ($f'(x)>0$) לכל $x\in(a,b)$.

אז f מונוטונית עולה (ממש) בקטע $[a,b]$.

מסקנה : יהי I מרווח. אם לפונקציה יש נגזרת חיובית בכל הנקודות הפנימיות של I , אז היא מונוטונית עולה <u>ממש</u> ב־ I .

תרגיל 2 : יהיו $f,g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ רציפות ב־ $[0,\infty)$ וגזירות ב־ $(0,\infty)$.

הוכיחו שאם $f(0)\leqslant g(0)$ וגם $f'(x)\leqslant g'(x)$ עבור כל $x>0$, אזי $f(x)\leqslant g(x)$ לכל $x\geqslant 0$.

<u>הוכחה</u> :

נסתכל על הפונקציה $h(x)=g(x)-f(x)$ ב־ $[0,\infty)$.

h רציפה ב־ $[0,\infty)$ כהפרש של פונקציות רציפות, וגזירה ב־ $(0,\infty)$ כהפרש של פונקציות גזירות.

בנוסף נובע מכללי הגזירה ש־ $h'(x)=g'(x)-f'(x)\geqslant 0$ עבור כל x ב־ $(0,\infty)$. לכן h מונוטונית עולה ב־ $[0,\infty)$.

בפרט מתקיים $h(x)\geqslant h(0)$ עבור כל $x\geqslant 0$, כלומר $g(x)-f(x)\geqslant g(0)-f(0)\geqslant 0$, כנדרש.

תרגיל 3 : הוכיחו שלפולינום $p(x)=x^5-\frac{8}{3}x^3+4x+2$ יש בדיוק שורש ממשי אחד. (שורש = נק' התאפסות)

<u>פתרון</u>

הוכחתם בהרצאה שלכל פולינום ממעלה אי־זוגית יש לפחות שורש אחד.

היות ו־ $p'(x)=5x^4-8x^2+4=4(x^2-1)^2+x^4>0$ עבור כל $x\in\mathbb{R}$, הפונקציה p עולה <u>ממש</u> ב־ $\mathbb{R}$.

יחידות השורש נובעת כעת מהעובדה שמונוטוניות ממש גוררת חד־חד־ערכיות.

תרגיל 4

טענה

תהי f רציפה בקטע I וגזירה בפנים הקטע (כלומר גזירה בכל נקודה פנימית של הקטע) ומקיימת $|f'(x)| \leqslant M$ לכל x בפנים הקטע.
אזי f היא M־ליפשיצית בקטע I , כלומר לכל $x_1, x_2 \in I$ מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|$.

<u>הוכחה</u> :

יהיו $x_1, x_2 \in I$. אם $x_1 = x_2$, אז הטענה נכונה כי שני האגפים של אי־השוויון מתאפסים.
אחרת, בה`כ $x_1 < x_2$. $[x_1, x_2] \subseteq I$, כי I קטע (ובפרט I מרווח).
f רציפה בקטע I ולכן f רציפה בקטע $[x_1, x_2]$ המוכל ב־ I . f גזירה בכל נקודה פנימית של I ולכן f גזירה ב־ (x_1, x_2) .
על כן f מקיימת בקטע $[x_1, x_2]$ את תנאי ממשפט לגרנז' , לפיו יש נקודה $c \in (x_1, x_2)$ שעבורה $f'(c) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$.

מכאן ש־ $\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right| = |f'(c)| \leqslant M$, ולכן $|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(c)| \cdot |x_1 - x_2| \leqslant M|x_1 - x_2|$, כנדרש.

<u>דוגמה</u> : הפונקציה $f(x) = \sin(x)$ היא 1־ליפשיצית ב־ $\mathbb{R}$, ז"א לכל $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ מתקיים $|\sin(x_1) - \sin(x_2)| \leqslant |x_1 - x_2|$.
(כי $\sin'(c) = \cos(c)$ ו־ $|\cos(c)| \leqslant 1$)

תרגיל 5

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירה ונניח כי $f(0) = 0$ ו־ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. אזי יש $x_0 \in (0, \infty)$ כך ש־ $f'(x_0) = 0$.

<u>פתרון</u>

אם יש נקודה $x_1 > 0$ כך ש־ $f(x_1) = 0$, אז f רציפה בקטע הסגור $[0, x_1]$, גזירה בקטע הפתוח $(0, x_1)$ ומקיימת
$f(0) = 0 = f(x_1)$, ולכן נובע ממשפט רול שקיימת $x_0 \in (0, x_1)$ כך ש־ $f'(x_0) = 0$.
אחרת נובע ממשפט ערך הביניים ש־ fשומרת על סימן קבוע ב־ $(0, \infty)$. (מדוע?).
אז נניח בה`כ ש־ $f(x) > 0$ לכל $x > 0$.
נסמן $\lambda = \frac{1}{2} f(1) > 0$.
ממשפט ערך הביניים עבור f בקטע $[0, 1]$, יש $a \in (0, 1)$ כך ש־ $f(a) = \lambda$.
כעת $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, בפרט יש M כך שלכל $x > M$ מתקיים $f(x) < \lambda$.
בקטע $[1, M+1]$ מתקיים $f(M+1) < \lambda < f(1)$, ולכן יש $b \in (1, M+1)$ כך ש־ $f(b) = \lambda$.
עכשיו בקטע $[a, b]$ מתקיים $f(a) = f(b) = \lambda$. כמו כן f רציפה בקטע הסגור $[a, b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a, b) . לכן נובע ממשפט רול שקיים $x_0 \in (a, b)$ כך ש־ $f'(x_0) = 0$.

2 פונקציות טריגונומטריות הפוכות

משפט (תזכורת מההרצאה):

יהי I קטע ב־ $\mathbb{R}$, ותהי $f : I \to J$ פונקציה חח"ע, על וגזירה.
אם $f'(x) \neq 0$ עבור כל $x \in I$, אזי הפונקציה ההפכית f^{-1} גזירה בכל נקודה $y \in J$ ומתקיים $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

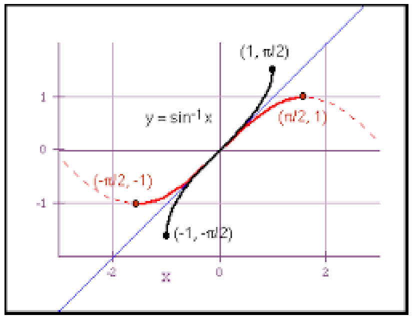
תרגיל 6 ־ נציג את הפונקציה הטריגונומטרית ההפוכה $\arcsin$ (ארק־סינוס).
נגדיר $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ ע"י $f(x) = \sin(x)$.
נראה ש־ f `על`. f רציפה ב־ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ולכן תמונתה היא הקטע סגור.
מ־ $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ ו־ $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ נובע ש־ $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$, כלומר f `על`.
נראה ש־ f חח`ע. ראיתם בהרצאה ש־ f גזירה וש־ $f'(x) = \cos x$.
מהגדרת הפונקציות הטריגונומטריות באמצעות מעגל היחידה נובע שבתחום $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ מתקיים $\cos x > 0$.
לכן הפונקציה $f(x) = \sin(x)$ עולה ממש בקטע $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. (עם סימוני תרגיל 7 : $\frac{\sin(x_1)-\sin(x_2)}{x_1-x_2} = \sin'(c) = \cos(c) > 0$)
משאלה 3 בתרגיל 10 נובע ש־ $f(x) = \sin(x)$ עולה ממש בקטע $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
לכן היא חח`ע.
לכן f מקיימת את תנאי המשפט: $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ והיא חח`ע, על וגזירה, וכן $f'(x) \neq 0$ לכל $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
כלומר קיימת $f^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ והיא גזירה בקטע $(-1, 1)$. נחשב את הביטוי לנגזרתה לפי הנוסחא הנ`ל.
תהי $y \in (-1, 1)$. אז $y = \sin x$ עבור $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ כלשהו.
לפי הנוסחא מתקיים $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(\sin x))} = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{\cos x}$.

מכיוון ש־ $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, הערך של $\cos x$ הוא חיובי.

לכן מתקיים $\cos(x)=|\cos(x)|=\sqrt{\cos^2(x)}=\sqrt{1-\sin^2(x)}=\sqrt{1-y^2}$.

כלומר, f^{-1} מוגדרת היטב על $[-1,1]$, גזירה ב־ $(-1,1)$ ונגזרתה נתונה ע"י $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

הפונקציה $f^{-1}\colon[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ מסומנת $\arcsin$ (ארק־סינוס).



תרגיל 7

תהי f גזירה ב־ $\mathbb{R}$ ומקיימת $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=L>0$. הוכיחו ש־ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$.

<u>פתרון</u>

אנחנו מכירים פונקציה שנגזרתה היא L , והיא הפונקציה $g(x)=Lx$, ולכן ננסה להראות ש־ f דומה לפונקציה של ישר עם שיפוע L , ואז נוכל להשתמש בסוג של משפט פרוסה בשביל לסכם את השאיפה לאינסוף.

יהי $M\in\mathbb{R}$. צריך למצוא N כך שלכל $x>N$ מתקיים $f(x)>M$.

מהנתון על השאיפה לאינסוף, יש $N_1\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x>N_1$ מתקיים $|f'(x)-L|<L/2$ ובפרט $f'(x)>L/2$ לכל $x>N_1$.

כעת נסתכל בקרן (N_1,∞). נקבע נקודת בסיס $x_0=N_1+1$ כלשהו, ואז יהי $t>x_0$ בקרן. נחשב את השיפוע הממוצע של הפונקציה בין x_0 ל־ t . $\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}=f'(c)$ לאיזשהו $c\in(x_0,t)$, ממשפט לגרנז.

כלומר $f(t)=f(x_0)+f'(c)(t-x_0)$ הוא הישר שעובר בין הנקודות הללו.

ולכן $f(t)>f(x_0)+\frac{L}{2}(t-x_0)$.

צד ימין הוא ישר, עם שיפוע חיובי, ולכן הולך לאינסוף. זהו למעשה משפט הפרוסה לפונקציות.

בצורה יותר מפורשת, עבור M, נראה שיש N_2 כך שלכל $x>N_2$ מתקיים $f(x_0)+\frac{L}{2}(x-x_0)>M$.

נבחר $N_2>\frac{2}{L}(M-f(x_0))+x_0$ ועבור $x>N_2$ מתקיים $f(x_0)+\frac{L}{2}(x-x_0)>M$.

כעת נבחר בסה"כ $N>(N_1+1,N_2)$ ונקבל את הדרוש כי בתחום $x>N$ מתקיים $f(x)\geq f(x_0)+\frac{L}{2}(x-x_0)>M$.

תרגיל 8

תהי $g:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ גזירה כך ש־ $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=K\in\mathbb{R}$.

א. הוכיחו או הפריכו : אם קיים הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}g'(x)=L\in\mathbb{R}$, אזי $L=0$, כלומר $\lim\limits_{x\to\infty}g'(x)=0$.

ב. הוכיחו או הפריכו : קיים הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}g'(x)=L\in\mathbb{R}$.

<u>פתרון</u>

א. ראינו בתרגיל 7 שאם $L>0$ אזי $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$. אם $L<0$, אזמראים באותו אופן ש־ $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=-\infty$.

לכן $L=0$ הוא הערך היחיד שלא סותר את הנתון $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=K\in\mathbb{R}$.

ב. תהי $g:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $g(x)=\frac{1}{x}\sin(x^2)$. מתקיים : $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ (חסומה כפול אפסה).

לפי חוקי הגזירה : $g'(x)=-\frac{1}{x^2}\sin(x^2)+\frac{1}{x}\cos(x^2)\cdot 2x=-\frac{1}{x^2}\sin(x^2)+2\cos(x^2)$.

מכאן : $\cos(x^2)=\frac{1}{2}g'(x)+\frac{1}{2x^2}\sin(x^2)$.

מתקיים : $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}\sin(x^2)=0$ (שוב חסומה כפול אפסה).

אילו $\lim\limits_{x\to\infty}g'(x)=L\in\mathbb{R}$, היה נובע מאריתמטיקה של גבולות ש־ $\lim\limits_{x\to\infty}\cos(x^2)=\frac{1}{2}L+0=\frac{1}{2}L$. אבל $\lim\limits_{x\to\infty}\cos(x^2)$ לא קיים.

3 מחסנית

תרגיל 9

ראינו מה קורה כשהנגזרת חיובית (אי־שלילית) בקטע. מה אפשר להסיק אם ידוע רק שהנגזרת חיובית בנקודה אחת?

<u>טענה</u> : נניח ש־ f גזירה ב־x_0 עם $f'(x_0) > 0$. אזי קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x_0 < x < x_0 + \delta$ מתקיים $f(x) > f(x_0)$, ולכל $x_0 - \delta < x < x_0$ מתקיים $f(x) < f(x_0)$.

(אפשר להמחיש זאת בציור שבו הנקודה $(x_0, f(x_0))$ מצוירת כראשית הצירים, והגרף בסביבה של x_0 נמצא כולו ברביע הראשון והשלישי.) כמובן מתקיימת טענה דומה לגבי נגזרת שלילית.

הוכחה: נתון ש־ $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$. לכן קיים $\delta > 0$ כך שלכל

$0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים: $|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)| < \frac{f'(x_0)}{2}$

מכאן נובע: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > \frac{f'(x_0)}{2} > 0$

לכן אם $0 < x - x_0 < \delta$ אז $f(x) - f(x_0) > 0$, ואם $-\delta < x - x_0 < 0$ אז $f(x) - f(x_0) < 0$, כנדרש.

<u>**שימו לב**</u>: **לא נובע מכאן ש־ f היא מונוטונית באיזושהי סביבה של** x_0 .

דוגמה לפונקציה עם נגזרת חיובית בנקודה שאינה מונוטונית באף סביבה של הנקודה:

<u>דוגמה</u>: נתונה הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

נראה ש־ f גזירה בכל נקודה.

נגדיר $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ על ידי $g(x) = \frac{1}{2}x$ ו־ $h(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. אזי $f = g + h$.

g גזירה ב־ $\mathbb{R}$ ו־ $g'(x) = \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

ראינו בתרגול הקודם ובהרצאה ש־ h גזירה ב־ $\mathbb{R}$ ו־ $h'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

לכן f גזירה ב־ $\mathbb{R}$ ו־ $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$.

ראינו בתרגול הקודם ש־h' איננה רציפה ב־ 0 , ולכן f' איננה רציפה ב־ 0

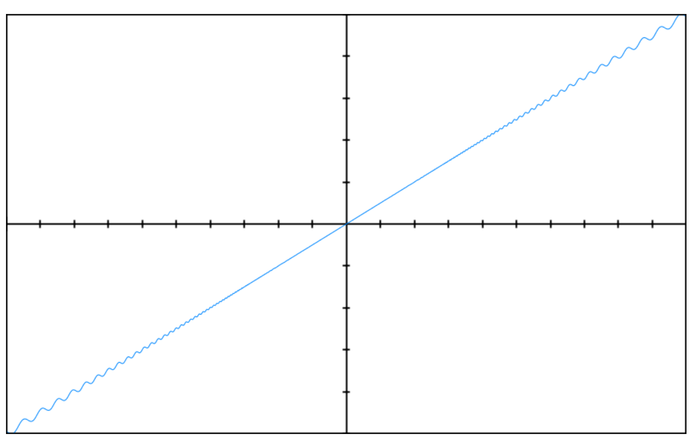
אנו רוצים כעת להראות שלמרות ש־ $f'(0) = \frac{1}{2}$, לא קיימת סביבה של 0 שבה f מונוטונית עולה.

נגדיר: $u_n = \frac{1}{2\pi n}$. מתקיים $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ וכן $\lim_{n\to\infty} f'(u_n) = -\frac{1}{2}$. לכן בהינתן $\delta > 0$, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־ $0 < u_n < \delta$ ו־ $f'(u_n) < 0$. אילו f הייתה מונוטונית עולה על $(0, \delta)$ אז הנגזרת שם הייתה אי־שלילית בכל נקודה, ולכן הגענו לסתירה.

<u>הערה</u>: נניח ש־ f גזירה <u>בסביבה</u> של x_0 וש־ f' <u>רציפה</u> בנקודה x_0 .

אם $f'(x_0) > 0$ אז f כן מונוטונית עולה ממש באיזושהי סביבה של x_0 !

(כי הרציפות גוררת את החיוביות של f' ב־ x_0 לחיוביות של f' בסביבה של x_0 .)



אינפי 2 למדמ"ח תש"ף 2020-2019 - תרגול 3

1 כלל לופיטל (L'Hôpital)

דוגמה 1 : האם קיים הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\arctan(x)}$? אם כן, מהו ערכו ?

<u>פתרון</u>

נגדיר $f(x)=\sin(x)$, $g(x)=\arctan(x)$.

f ו- g רציפות ב- $\mathbb{R}$ ו- $f(0)=g(0)=0$, ועל כן $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} g(x)=0$.

לכן לא נוכל לחשב את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\arctan(x)}$ ע`י אריתמטיקה של גבולות, כי זהו מקרה אי-ודאות של $\frac{0}{0}$.

משפט (כלל לופיטל)

תהי $a\in\mathbb{R}$ ויהיו f,g פונקציות המקיימות:

1. $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$ <u>**או**</u> $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty$.
2. f ו- g גזירות בסביבה **מנוקבת** U של a .
3. $g'(x)\neq 0$ עבור כל x ב- U .
4. $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים במובן הרחב (כלומר $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\mathbb{R}$ או $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$ או $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=-\infty$).

אזי קיים הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ומתקיים $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

<u>הערות</u> :

- המשפט נכון גם עבור גבולות חד צדדיים: $x\to a^+$ או $x\to a^-$ (במקום $x\to a$).
- המשפט נכון גם כאשר מחליפים את a ב- ∞ או ב- $-\infty$, כלומר $x\to\infty$ או $x\to-\infty$ (במקום $x\to a$).

במקרה שלנו $f(x)=\sin(x)$, $g(x)=\arctan(x)$ גזירות ב- $\mathbb{R}$ ו- $g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $f'(x)=\cos(x)$.

g' לא מתאפסת כלל. היות ו- $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}(1+x^2)\cos(x)=1$, נובע מכלל לופיטל ש- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\arctan(x)}=1$.

דוגמה 2 : האם קיים הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\sqrt{\cos(x^2)}}{\sqrt[3]{8-x}\,\arctan(x)}$? אם כן, מהו ערכו ?

<u>פתרון</u> :

זהו שוב מקרה אי-ודאות $\frac{0}{0}$. אבל במקום "להסתער" עליו עם כלל לופיטל ולגזור את המונה ואת המכנה שבו (נסו!), עדיף בהרבה לבחון את הביטוי ולסמן $f(x)=\sin(x)$, $g(x)=\arctan(x)$ ו- $h(x)=\frac{\sqrt{\cos(x^2)}}{\sqrt[3]{1-x}}$.

מאריתמטיקה של פונקציות רציפות מתקיים $\lim_{x\to 0} h(x)=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{2}\neq 0$, ולכן הגבול הנתון $\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}h(x)\right)$ קיים **אם ורק אם** הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים, ובמקרה זה $\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}h(x)\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ **(נמקו את האמירה הזו!)**.

כעת נובע מדוגמה 1 לעיל ש- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\sqrt{\cos(x^2)}}{\sqrt[3]{8-x}\,\arctan(x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}h(x)\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$.

דוגמה 3 : האם קיים הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\arctan^2(x)}$? אם כן, מהו ערכו ?

<u>פתרון</u> :

נסמן $f(x)=1-\cos(x)$ ו- $g(x)=\arctan^2(x)$. f ו- g רציפות ב- $\mathbb{R}$ ו- $f(0)=g(0)=0$, ועל כן $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} g(x)=0$.

לכן זהו שוב מקרה אי-ודאות $\frac{0}{0}$, ולא נוכל לחשב את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\arctan^2(x)}$ ע`י אריתמטיקה של גבולות.

f ו- g גזירות ב- $\mathbb{R}$ ו- $g'(x)=2\cdot\arctan(x)\frac{1}{1+x^2}$, $f'(x)=\sin(x)$. g' לא מתאפסת בסביבה מנוקבת של 0 .

ננסה להפעיל את כלל לופיטל : $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2\cdot\arctan(x)\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)(1+x^2)}{2\cdot\arctan(x)}=\text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

היות וקיבלנו שוב גבול מהצורה `$\frac{0}{0}$` , הנטייה הטבעית היא לנסות להפעיל את כלל לופיטל עליו ולחשב את $\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$.

אבל שיקולים דומים לאלו שבדוגמה 2 מאפשרים לנו לכתוב :

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)\,(1+x^2)}{2\cdot\arctan(x)}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x^2)}{2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{\arctan(x)}=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$$

לכן נובע מכלל לופיטל ש־ $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{\arctan^2(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1}{2}$.

דוגמה 4 : האם קיים הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sin(x)}{2x-1}$? אם כן, מהו ערכו ?

<u>פתרון</u> :

נסמן $f(x)=3x+\sin(x)$ ו־ $g(x)=2x-1$. f ו־ g רציפות ב־ $\mathbb{R}$, ומתקיים $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$.

לכן זהו מקרה אי־ודראות $\frac{\infty}{\infty}$, ולא נוכל לחשב את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sin(x)}{2x-1}$ ע״י אריתמטיקה של גבולות.

f ו־ g גזירות ב־ $\mathbb{R}$ ו־ $g'(x)=2$, $f'(x)=3+\cos(x)$. g' לא מתאפסת כלל.

אבל הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{3+\cos(x)}{2}$ לא קיים (גם לא במובן הרחב !), ולכן תנאי משפט לופיטל לא מתקיימים ולא ניתן להשתמש בו.

זה לא אומר שהגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sin(x)}{2x-1}$ לא קיים!

הגבול דווקא כן קיים, כי $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ ולכן נקבל מארימטיקה של גבולות ומהמשפט "חסומה כפול אפסה" ש־

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sin(x)}{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{3x+\sin(x)}{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}\sin(x)}{2-\frac{1}{x}}=\frac{3+0}{2-0}=\frac{3}{2}$$

2 הפונקציה האקספוננציאלית

תזכורת

נקבע $x\in\mathbb{R}$. נסמן : $e_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

טענה : עבור כל x ממשי הסדרה $(e_n(x))_{n=1}^{\infty}$ חסומה ומונוטונית עולה ממש החל ממקום מסוים, ולכן היא מתכנסת.

הגדרה : עבור כל x ממשי נסמן : $\exp(x)=\lim_{n\to\infty}e_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

מתקיים : $\exp(0)=1$, $\exp(1)=e=2.71\ldots$,

טענה : $1+x\leqslant\exp(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

משפט : לכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים : $\exp(x+y)=\exp(x)\,\exp(y)$.

מסקנה : $\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)} \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

סוף התזכורת

בעזרת אינדוקציה קלה על $m\in\mathbb{N}$ מכלילים את המשפט הקודם ומוכיחים שלכל $x_1,x_2,\ldots,x_m\in\mathbb{R}$ מתקיים :

$$(\nabla_m) \quad \exp\left(\sum_{j=1}^{m}x_k\right)=\exp(x_1+x_2+\ldots+x_m)=\exp(x_1)\cdot\exp(x_2)\cdot\ldots\cdot\exp(x_m)=\prod_{j=1}^{m}\exp(x_j)$$

טענה : עבור כל x <u>רציונלי</u> מתקיים : $\exp(x)=e^x \quad (\diamondsuit)$.

<u>הוכחה</u>

זה נכון עבור מ־ $x=0$, כי $\exp(0)=1=e^0$.

יהי m מספר טבעי. נציב $x_1=x_2=\ldots=x_m=1$ ב־ (∇_m) ונקבל $\exp(m)=(\exp(1))^m=e^m$.

כעת נובע מ־ $\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$ ש־ $\exp(-m)=\frac{1}{\exp(m)}=\frac{1}{e^m}=e^{-m}$.

בכך הוכחנו ש־ $(\diamondsuit)$ מתקיים עבור כל x שלם.

נציב $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = \frac{1}{m}$ ב־ (∇_m) ונקבל $\exp(1) = \left(\exp(\frac{1}{m})\right)^m$, כלומר $\left(\exp(\frac{1}{m})\right)^m = e$.

מכאן נובע ש־ $y = \exp(\frac{1}{m})$ הוא פתרון חיובי של המשוואה $y^m = e$.

אבל הוכחנו שלמשוואה הזו יש פתרון חיובי **יחיד**, אותו סימנו $y = \sqrt[m]{e} = e^{\frac{1}{m}}$. לכן $\exp(\frac{1}{m}) = e^{\frac{1}{m}}$ עבור כל m טבעי.

יהיו m ו־ n מספרים טבעיים. נציב $x_1 = x_2 = \ldots, = x_m = \frac{1}{n}$ ב־ (∇_m) ונקבל

$$\exp\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\exp(\frac{1}{n})\right)^m = \left(\sqrt[n]{e}\right)^m = e^{\frac{m}{n}}$$

לבסוף נציב $x = \frac{m}{n}$ ב־ $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ ונקבל : $\exp(-\frac{m}{n}) = \left(\exp(\frac{m}{n})\right)^{-1} = \left(e^{\frac{m}{n}}\right)^{-1} = e^{-\frac{m}{n}}$. ■

הגדרה : $e^x := \exp(x)$ עבור כל x ממשי.

הערה : שימו לב שזו הפעם הראשונה שאנו מגדירים חזקה עם מעריך שיכול להיות לא רציונלי !

3 הפונקציה הלוגריתמית

טענה : הפונקציה $\exp$ גזירה ב־ $\mathbb{R}$ ולכל x ממשי מתקיים : $(\exp)'(x) = \exp(x)$.

מסקנה : הפונקציה $\exp$ רציפה ומונוטונית עולה ממש ב־ $\mathbb{R}$.

טענה : $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ ו־ $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

מסקנה : הפונקציה $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ היא חד־חד ערכית ו־`על`, ולכן הפיכה .

---------------------------- **סוף התזכורת** ----------------------------

הגדרה : הפונקציה $\exp^{-1} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ נקראת פונקצית הלוגריתם הטבעי , ומסמנים : $\exp^{-1}(y) = \ln(y)$ לכל $y > 0$.

טענה

א. $\ln$ מונוטונית עולה ממש ב־ $(0,\infty)$ ומקיימת $\lim\limits_{y\to\infty} \ln(y) = \infty$ ו־ $\lim\limits_{y\to 0^+} \ln(y) = -\infty$.

ב. $\ln$ גזירה ברציפות ב־ $(0,\infty)$, ומתקיים $\ln'(y_0) = \frac{1}{y_0}$ לכל $y_0 > 0$.

ג. לכל $y_1, y_2 \in (0,\infty)$ מתקיים : $\ln(y_1 \cdot y_2) = \ln(y_1) + \ln(y_2)$.

הוכחה :

א. כפונקציה הפוכה של פונקציה מונוטונית עולה ממש, $\ln$ מונוטונית עולה ממש ב־ $(0,\infty)$.
הגבולות בקצוות התחום נובעים מ־ $\mathrm{Im}(\ln) = \mathbb{R}$.

ב. נסמן $f(x) = \exp(x)$ ו־ $f^{-1}(y) = \ln(y)$.
f גזירה ב־ $\mathbb{R}$ ו־ $f'(x) = \exp(x) \neq 0$ לכל x ממשי, ולכן כל התנאים של המשפט על הנגזרת של הפונקציה ההפוכה מתקיימים.
לכן $\frac{1}{y} = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)} = (f^{-1})'(y)$ $\qquad \forall y \in (0,\infty)$.

ג. לכל $y_1, y_2 \in (0,\infty)$ קיימים $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ כך ש־ $y_1 = \exp(x_1)$ ו־ $y_2 = \exp(x_2)$.
מכאן נקבל : $\ln(y_1 \cdot y_2) = \ln(\exp(x_1)\cdot\exp(x_2)) = \ln(\exp(x_1 + x_2)) = x_1 + x_2 = \ln(y_1) + \ln(y_2)$. ■

הגדרה : יהי $0 < a \in \mathbb{R}$. עבור כל x ממשי נגדיר : $a^x = \exp(x \cdot \ln(a)) = e^{x\cdot\ln(a)}$.

הערות : (א) עבור $a = e$, ההגדרה הזו מתלכדת כמובן עם הקודמת כי אז $\ln(a) = \ln(e) = 1$.

(ב) בתרגיל תוכיחו ש־ $\ln(a^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}\cdot\ln(a)$, ולכן $e^{\frac{m}{n}\cdot\ln(a)} = e^{\ln(a^{\frac{m}{n}})} = a^{\frac{m}{n}}$.
ז`א שעבור $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, ההגדרה הזו של $a^{\frac{m}{n}}$ מתלכדת עם ההגדרה המקורית $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$.

טענה

יהי $0 < a \in \mathbb{R}$. אזי מתקיים :

(א) $0 < a^x$ עבור כל x ממשי .

(ב) $a^1 = a$.

(ג) $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$ עבור כל $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

(ד) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ עבור כל $x, y \in \mathbb{R}$.

<u>הוכחה</u>

(א) עבור כל x ממשי מתקיים : $a^x = \exp(x \cdot \ln(a)) > 0$, כי $\mathrm{Im}(\exp) = (0, \infty)$.

(ב) $a^1 = \exp(1 \cdot \ln(a)) = \exp(\ln(a)) = a$, כי $\exp$ ו־ $\ln$ פונקציות הפוכות זו לזו.

(ג) עבור כל $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ מתקיים :

$$a^{x_1+x_2} = \exp\left((x_1 + x_2) \cdot \ln(a)\right) = \exp\left(x_1 \cdot \ln(a) \ + \ x_2 \cdot \ln(a)\right) = \exp\left(x_1 \cdot \ln(a)\right) \cdot \exp\left(x_2 \cdot \ln(a)\right) = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$$

(ד) נעיר תחילה שעבור כל $x, y \in \mathbb{R}$ הביטוי $(a^x)^y$ מוגדר כי $0 < a^x$ (סעיף א'). כעת מתקיים :

$$(a^x)^y = \exp(y \cdot \ln(a^x)) = \exp(y \cdot \ln(\exp(x \cdot \ln(a)))) = \exp(y \cdot (x \cdot \ln(a))) = \exp((x \cdot y) \cdot \ln(a)) = a^{x \cdot y}$$

כנדרש. ■

טענה

יהי $0 < a \in \mathbb{R}$, ותהי $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ הפונקציה המוגדרת על ידי $f(x) = a^x$.

(א) f גזירה ב־ $\mathbb{R}$ ומתקיים : $f^{'}(x) = a^x \cdot \ln(a)$ עבור כל x ממשי .

(ב) אם $1 < a$ אז f היא פונקציה חד־חד ערכית ו־`על`, ומונוטוניות עולה ממש ב־ $\mathbb{R}$.

(ג) אם $0 < a < 1$ אז f היא פונקציה חד־חד ערכית ו־`על`, ומונוטוניות יורדת ממש ב־ $\mathbb{R}$.

<u>הוכחה</u> : תרגיל.

הגדרה

יהי $0 < a \neq 1$.

הפונקציה ההפוכה $f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ של הפונקציה $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ המוגדרת על ידי $f(x) = a^x$ נקראת פונקצית הלוגריתם בבסיס a , ומסומנת $\log_a$.

במילים אחרות : עבור $0 < a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$ ו־ $0 < y \in \mathbb{R}$ מתקיים : $x = \log_a(y) \ \Leftrightarrow \ y = a^x$.

טענה

עבור כל $0 < a \neq 1$ וכל $0 < y \in \mathbb{R}$ מתקיים : $\log_a(y) = \dfrac{\ln(y)}{\ln(a)}$.

<u>הוכחה</u> :

$$x = \log_a(y) \ \Leftrightarrow \ y = a^x \ \Leftrightarrow \ y = e^{x \cdot \ln(a)} = \exp\left(x \cdot \ln(a)\right) \ \Leftrightarrow \ x \cdot \ln(a) = \ln(y) \ \Leftrightarrow \ x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$$ ■

חשבון אינפיניטיסימלי 2 למדמ`ח - סמסטר ב' תש"ף - תרגול 6

1 השלמה על טורים חיוביים : מבחן העיבוי

טענה (מבחן העיבוי)

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה אי־שלילית מונוטונית יורדת. אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס **אם ורק אם** הטור $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנס.

תרגיל 1 : האם הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$ מתכנס?

פתרון :

נסמן $a_n = \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$. ראשית נשים לב ש־ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)} = 0$, ולכן לא ניתן לפסול התכנסות על הסף.

שנית, אם נסמן $b_n = \frac{1}{n^\beta}$, אזי $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1/(n\ln(n))}{1/n^\beta} = \frac{n^{\beta-1}}{\ln(n)}$.

אם נבחר $\beta = 1$, אז הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$ מראה ש־ $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ שואפת לאפס "מהר יותר" מהאיבר הכללי של הטור ההרמוני המתבדר, ולכן יש ל־ $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ סיכוי להתכנס.

אם נבחר $\beta > 1$, אז הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\beta-1}}{\ln(n)} = \infty$ מראה ש־ $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ שואפת לאפס "לאט יותר" מהאיבר הכללי של הטור המכנס $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$, ולכן האופציה ש־ $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ מתבדר לא נפסלת.

לכן מבחני המנה והשורש, שלא מכריעים את שאלת ההתכנסות של $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$, גם לא מסייעים לנו כאן. (בדקו זאת!)

$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{n \cdot \ln(n)}\right)_{n=2}^{\infty}$ היא כמובן אי־שלילית ומונוטונית יורדת. לכן ננסה להיעזר במבחן העיבוי:

לכל n טבעי מתקיים: $2^n \cdot a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n \cdot \ln(2^n)} = \frac{1}{\ln(2^n)} = \frac{1}{\ln(2) \cdot n}$.

הטור $\frac{1}{\ln(2)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(2) \cdot n} = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ מתבדר, משום שמדובר בכפולה של זנב של הטור ההרמוני המתבדר.

לכן נובע ממבחן העיבוי שהטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$ מתבדר אף הוא.

תרגיל 2 : האם הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2(n)}$ מתכנס?

פתרון :

נסמן $a_n = \frac{1}{n \cdot \ln^2(n)}$. נשים לב ש־ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. אנא בדקו שכל השיקולים שהוצגו בתחילת תרגיל 1 לגבי "מהירות השאיפה לאפס" של $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ לעומת זו של $(b_n)_{n=2}^{\infty} = \left(\frac{1}{n^\beta}\right)_{n=2}^{\infty}$ תקפים גם כאן.

גם כאן $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{n \cdot \ln(n)}\right)_{n=2}^{\infty}$ אי־שלילית ומונוטונית יורדת לאפס. לכן ננסה להיעזר במבחן העיבוי.

לכל n טבעי מתקיים: $2^n \cdot a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n \ln^2(2^n)} = \frac{1}{\ln^2(2^n)} = \frac{1}{(\ln(2) \cdot n)^2} = \frac{1}{\ln^2(2) \cdot n^2}$.

הטור $\frac{1}{\ln^2(2)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2(2) \cdot n^2} = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנס משום שמדובר בכפולה של זנב של הטור המתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

לכן נובע ממבחן העיבוי שהטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n)}$ מתכנס אף הוא.

2 טורים עם סימנים מתחלפים

הגדרה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים אי־ שליליים שיורדת מונוטונית ($0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$) כך ש־ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

טור מהצורה $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \;=\; a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

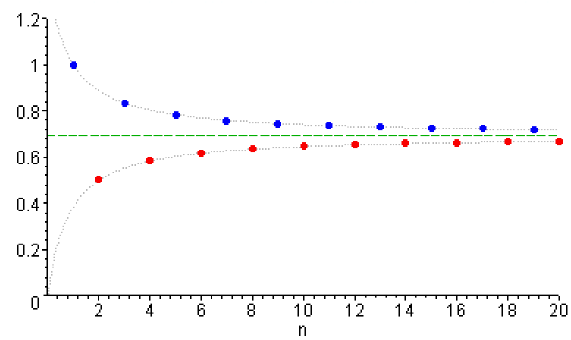
או מהצורה $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n \;=\; -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots$$

נקרא **טור לייבניץ**.

דוגמה פשוטה לטור לייבניץ היא הטור ההרמוני עם סימנים מתחלפים: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

משפט : טורי לייבניץ הם טורים מתכנסים.

מה מיוחד בטורי לייבניץ? נסמן ב־ $S_k = \sum\limits_{n=1}^{k}(-1)^{n+1}a_n$ את סדרת הסכומים החלקיים של הטור. נסמן גם ב־ L את סכום הטור.
הסכומים החלקיים מתנהגים כמו בציור הבא :



הסכומים החלקיים האי־זוגיים $(S_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$ מתאימים לנקודות הכחולות הציור. הם יורדים מונוטונית ל־ L .
הסכומים החלקיים האי־זוגיים $(S_{2k})_{k=1}^{\infty}$ מתאימים לנקודות האדומות בציור ועולים מונוטונית ל־ L .
סך הכל, הסכומים החלקיים מזגזגים מעלה, מטה והגבול L של הטור נמצא כל הזמן בין S_n ל־ S_{n+1} .
סדרת הקטעים $([S_{2k}, S_{2k-1}])_{k=1}^{\infty}$ מקיימת את התנאים של הלמה של קנטור, וזאת הסיבה שטורי לייבניץ מתכנסים.

הערות:

1. בטורי לייבניץ מהצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n$, התפקידים של הסכומים הזוגיים והאי־זוגיים מתהפכים וסכום הטור L הוא $L \leqslant 0$.
   טורי לייבניץ מהצורה הזאת מתקבלים מטורי לייבניץ מהצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ על־ידי הכפלה ב־ -1 .
2. זנב של טור לייבניץ הוא גם כן טור לייבניץ.

לטורי לייבניץ יש גם קרטריון פשוט להערכת מספר המחוברים שיש לקחת בטור בשביל לקבל קירוב טוב לסכום L :
לכל $N \in \mathbb{N}$ נסמן ב־ r_N את ה־N־זנב של הטור, כלומר $r_N = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$. מתקיים

$$|r_N| \;=\; |\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \;-\; \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}a_n| \;=\; |L - S_N| \;=\; |S_N - L| \;\leqslant\; a_{N+1}.$$

בהתאם לזוגיות של N אנחנו גם יכולים לדעת אם הערכנו יתר על המידה מלמעלה או מלמטה.

אם הסדרה a_n מונוטונית יורדת ממש ($0 < a_{n+1} < a_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$) אז מתקיים $|r_N| = |S_N - L| < a_{N+1}$.

תרגיל 3 : נסמן $L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. מצאו קירוב רציונלי ל־ L שמדוייק עד כדי 10^{-2} .

פתרון : זהו טור לייבניץ עם $a_n = \frac{1}{n}$. אנחנו רוצים למצוא $\frac{m}{n}$ כך ש־ $|L - \frac{m}{n}| < \frac{1}{10^2}$. אם ניקח $N = 99$, נקבל כי

$$|L - S_{99}| < a_{100} = \frac{1}{100}$$

כלומר, אנחנו יכולים לקחת

$$\frac{m}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{98} + \frac{1}{99} = \frac{97353652632905823380247894258032042316 37}{139440750459424954329067617870624607113 60} \approx 0.698172$$

לקחנו $N = 99$ אי־זוגי ולכן ההערכה שלנו היא מלמעלה.

בהמשך הקורס אתם תראו ש־ $L = \ln(2)$ ובאמצעות ההערכה שלנו מצאנו (על פניו לפחות, אבל בעצם גם בדיוק) את שתי הספרות הראשונות אחרי הנקודות העשרונית של $\ln(2) \approx 0.693147$. למרבה הצער, היינו צריכים לקחת 99 מחוברים בשביל לקבל 2 ספרות אחרי הנקודה (וזה לא שקיבלנו במקרה יותר ספרות).

יש שיטות שמאפשרות להאיץ התכנסות של טורים בשביל שיהיה אפשר לקבל קירובים נומריים יעילים יותר לגבול.

תרגיל 4 : האם הטור $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$ מתכנס ?

פתרון :

נשים לב שהחל ממקום מסויים, הסדרה $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת ע״י $b_n = \sqrt[n]{n}$ היא מונוטונית יורדת מכיוון ש־

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} < 1 \Longleftrightarrow \sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n} \Longleftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n$$

וזה בוודאי קורה עבור n גדול מספיק מאחר ו־ $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$.

הסדרה $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת ע״י $c_n = \frac{1}{\ln(n)}$ מונוטונית יורדת ושואפת לאפס ולכן גם המכפלה $a_n = b_n c_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln(n)}$ מגדירה סדרה שהיא מונוטונית יורדת החל ממקום מסויים ושואפת לאפס . לכן, ממשפט לייבניץ עבור הזנב המתאים, הזנב מתכנס ולכן הטור המקורי מתכנס.

הערה : אפשר להראות שהטור $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$ הוא טור לייבניץ אמיתי ־ כלומר, שהסדרה $\left(\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}\right)_{n=2}^{\infty}$ היא מונוטונית יורדת ממש ולא רק החל ממקום מסויים. זה לא רלוונטי לקביעת ההתכנסות או ההתבדרות של התור, אבל כן רלוונטי להערכות של עד כמה הסכומים החלקיים קרובים לגבול.

תרגיל 5 : האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n)}{n}$ מתכנס ?

פתרון :

נסמן $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$.

ברור שהסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אי־שלילית, אבל לא ברור אם היא מונוטונית יורדת (כי גם המונה וגם המכנה של a_n גדלים עם n).

נסתכל על הפונקציה $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ בקרן $(0, \infty)$. f גזירה שם, וחישוב מהיר מראה ש־ $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$.

לכן f יורדת ממש בקרן (e, ∞) ומכאן $\frac{\ln(n)}{n} = f(n) > f(n+1) = \frac{\ln(n+1)}{n+1}$.

ז״א שהסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת ממש החל מ־ $N = 3$.

בנוסף נובע מכלל לופיטל ש־ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ולכן נקבל מאיפיון היינה ש־ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f(n) = 0$.

מסקנה : 3־הזנב של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n)}{n}$ הוא טור לייבניץ , ועל כן הוא מתכנס, ולכן הטור מתכנס.

3 טורים כלליים

הגדרה

טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נקרא **מתכנס בהחלט** אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס .

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר, אומרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **מתכנס בתנאי.**

דוגמה : הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ מתכנס בתנאי. הוא מתכנס כטור לייבניץ אבל $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right|$ הוא הטור ההרמוני שמתבדר.

ראיתם בהרצאה את **המשפט** : התכנסות בהחלט גוררת התכנסות , כלומר אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

המשפט הזה יכול לסייע לנו להוכיח את התכנסותו של טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ שאיננו טור חיובי על ידי כך שננסה להראות שהוא מתכנס בהחלט.

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ הוא טור חיובי, ולכן נוכל ליישם עליו את קריטריוני ההתכנסות שעומדים לרשותינו (השוואה, שורש, מנה,...), **שכזכור תקפים לטורים חיוביים בלבד.**

תרגיל 6 : האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(e^n)}{n^2}$ מתכנס?

נשים לב שמדובר בטור שלא ברור כלל אם איבריו שווי סימן (או לפחות החל ממקום מסויים).

נבדוק אם הטור מתכנס בהחלט. נסמן $a_n = \frac{\sin(e^n)}{n^2}$. אזי $|a_n| = \frac{|\sin(e^n)|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס, ולכן נובע ממבחן ההשוואה ש־ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס. על כן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

4 תת־קבוצות שימושיות של המישור

בפרק זה נדון בתת־קבוצות של $A^2(\mathbb{R})$, כלומר של המישור האפיני. לרוב נסמן $A^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$ ו־ $V^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$, ונשאיר לקורא להבחין מתי מדובר במבנה האפיני ומתי במבנה הווקטורי. המושגים שיובאו כאן שישמשו אותנו בהמשך הקורס.

הגדרה

בהינתן $P \in \mathbb{R}^2$ ו־ $\vec{0} \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, תת־הקבוצה $L = \{ P + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R} \}$ של $\mathbb{R}^2$ נקראת **הישר שעובר דרך** P **בכיוון הוקטור** $\vec{v}$.

משפט

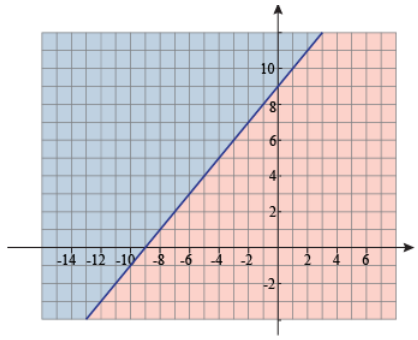
תהי L תת־קבוצה של $\mathbb{R}^2$. אזי L הוא קו ישר **אם ורק אם** קיימים $a, b, c \in \mathbb{R}$, עם $(a,b) \neq (0,0)$ (כלומר, לפחות אחד מבין a ו־ b שונה מ־ 0), כך ש־ $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; ax + by + c = 0 \right\}$.

יהי L הוא קו ישר נתון ב־ $\mathbb{R}^2$ ויהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$, עם $(a,b) \neq (0,0)$ כך ש־ $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; ax + by + c = 0 \right\}$.

אזי L משרה חלוקה של המישור $\mathbb{R}^2 = H_1 \cup L \cup H_2$, כאשר

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; ax + by + c < 0 \right\} \quad , \quad H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; ax + by + c > 0 \right\}$$

H_1 ו־ H_2 נקראים חצי־ המישור המוגבלים על ידי L .



תרגיל 7 : יהי $L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$ קיו ישר במישור. האם הנקודות $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו־ $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ נמצאות באותו חצי־מישור המוגבל על ידי L ?

<u>פתרון</u> :

נעזר במשפט לעיל על מנת למצוא משוואה המתארת הישר: תהי $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in L$ נקודה שנמצאת על הישר L . אזי קיים $t \in \mathbb{R}$ כך ש־ $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 + t \end{cases}$.

נכפיל את המשוואה השניה ב־ -2 ונחבר למשאווה העליונה כך ש־ t יצטמצם.

נעביר את הקבוע 1 לאגף של המשתנים ונקבל המשוואה $x - 2y - 1 = 0$, כלומר L מתואר על ידי המשוואה $x - 2y - 1 = 0$:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x - 2y - 1 = 0 \right\}$$

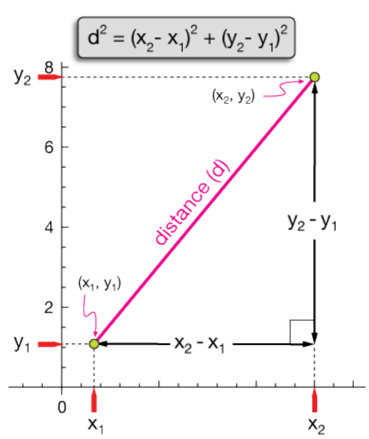
נבדוק מה קורה כאשר מציבים את הנקודות $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו־ $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ בביטוי $x - 2y - 1$:

עבור הנקודה $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ נקבל המספר השלילי -1, כלומר $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ שייכת ל־ $H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x - 2y - 1 < 0 \right\}$.

ואילו עבור הנקודה $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ נקבל המספר החיובי 16, כלומר $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ שייכת ל־ $H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x - 2y - 1 > 0 \right\}$.

לכן כל אחת מהנקודות שייכת לחצי־ מישור אחר.

בהינתן שתי נקודות $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ו־ $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ במישור $\mathbb{R}^2$, משפט פיתגורס מאפשר לנו להיסתכל על הגודל $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ כעל המרחק בין שתי הנקודות הללו.

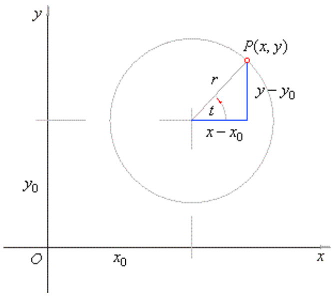


הגדרה

בהינתן $0 < r \in \mathbb{R}$ ונקודה $M \in \mathbb{R}^2$, האוסף C של כל הנקודות במישור שמרחקן מ־ M שווה r נקרא **מעגל שמרכזו** M **ורדיוסו** r .

אם $M = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, אזי נוסחת המרחק הנ"ל בין שתי נקודות מאפשרת לנו לכתוב ש־ $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ שייכת ל־ C **אם ורק אם** $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r$, ולכן

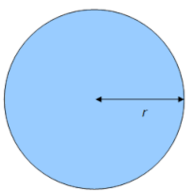
$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 \right\}$$



המשוואה $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ נקראת **משוואת המעגל**.

הגדרה : העיגול במישור שמרכזו $M = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ **ורדיוסו** r הוא האוסף D של כל הנקודות במישור שמרחקן מ־ M קטן או שווה r .

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leqslant r^2 \right\}$$



כלומר, המעגל יחד עם ה"פנים" שלו.

נקודה במישור $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ נמצאת **מחוץ לעיגול** D אם"ם $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 > r^2$.

על העיגול הנ"ל נאמר שהוא **נוצר על ידי המעגל שמשוואתו** $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$.

תרגיל 8 : הוכיחו שהקבוצה $C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0 \right\}$ היא מעגל וקבעו אם הנקודה $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ נמצאת בתוך העיגול שנוצר על ידי המעגל או מחוצה לו.

<u>פתרון</u> :

נראה באמצעות השלמה לריבוע שהמשוואה שרשומה לעיל למעשה מתארת משוואת מעגל על פי ההגדרה.

המקדם של x במשוואה הנתונה הוא -2 . עבור הביטוי הרבועי הבא $(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$, המקדם של x באגף ימין שווה ל -2 אם"ם $a = -1$, ואז $a^2 = 1$, לכן נוסיף 1 לשני האגפים של המשוואה של C ונקבל.

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2 - 2x + 1) + y^2 - 8y - 8 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 - 8y - 8 = 1$$

על פי עקרון זהה נעשה השלמה לריבוע עבור הביטויים של משתנה y : הפעם $a = -4$ ונוסיף 16 לשני האגפים ונקבל

$$(x-1)^2 + y^2 - 8y - 8 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 - 8y - 8 + 16 = 17$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + (y-4)^2 - 8 = 17 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + (y-4)^2 = 25$$

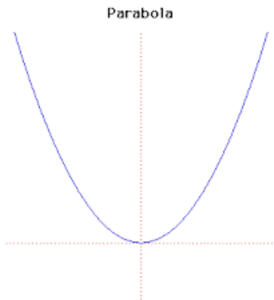
כלומר המשוואה המקורית של C שקולה למשוואה הבאה: $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 25$.

על פי ההגדרה, הקבוצה C היא מעגל שמרכזו ב־ $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ורדיוסו 5 .

נציב הנקודה $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ בביטוי $(x-1)^2 + (y-4)^2$ ונקבל $4 + 25 = 29 > 25$.

לכן הנקודה $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ נמצאת מחוץ לעיגול שנוצר על ידי המעגל.

הגדרה

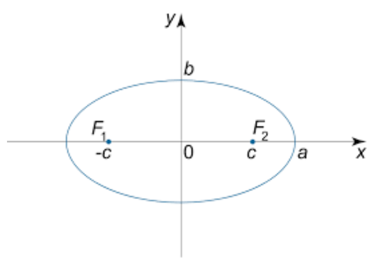


יהיו $a,b,c \in \mathbb{R}$ כך ש־ $a \neq 0$, ותהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הפונקציה $f(x) = ax^2 + bx + c$.
הגרף של f, כלומר הקבוצה $\Gamma_f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = f(x) \right\}$, נקראת **פרבולה במישור**.

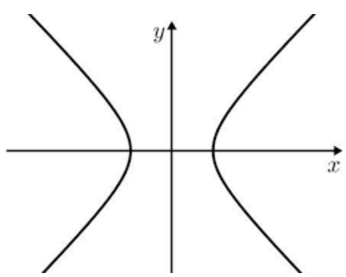
כמו מקודם, קבוצה זו מחלקת המישור לשלושה חלקים זרים.
באיור המצורף נראה גרף של פרבולה עם $a > 0$, $b = 0$ ו־ $c = 0$.

וכמו מקודם, ניתן לבצע באמצעות Γ_f חלוקה של $\mathbb{R}^2$ על ידי הגדרת הקבוצות $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y > f(x) \right\}$ ו־ $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y < f(x) \right\}$.

הגדרה : יהיו a ו־ b קבועים ממשיים חיוביים. הקבוצה $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$ נקראת **אליפסה.**



הגדרה : יהיו a ו־ b קבועים ממשיים חיוביים. הקבוצה $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$ נקראת **היפרבולה**.



5 מחסנית

תרגיל 9 : האם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+1}}{n} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \dots$$

מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר ?

פתרון : טור הערכים המוחלטים של הטור שלנו הוא הטור ההרמוני ולכן הטור לא מתכנס בהחלט. נשים לב **שלא** מדובר בטור לייבניץ ־ החוקיות בסימנים היא שניים חיוביים ושניים שליליים. אנחנו נוכיח שהטור מתכנס ישירות מההגדרה. נסמן ב־ $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ את סדרת הסכומים החלקיים של הטור. הסדרה $(S_{4n})_{n=1}^{\infty}$ היא מונוטונית עולה

מאחר ו־

$$S_{4n+4}-S_{4n}=\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{4n+4}>0.$$

הסדרה $(S_{4n+2})_{n=0}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית יורדת כי מתקיים

$$S_{4n+6}-S_{4n+2}=-\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{4n+4}+\frac{1}{4n+5}+\frac{1}{4n+6}<0.$$

כמו כן, מתקיים

$$0<S_{4n+2}-S_{4n}=\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

ולכן אנחנו נמצאים בדיוק בתנאים של הלמה של קנטור. הלמה של קנטור על סדרת הקטעים $[S_{4n},S_{4n+2}]$ אומרת שהסדרות $(S_{4n})_{n=1}^{\infty}$ ו־$(S_{4n+2})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות לגבול משותף L. מכך ש־ $S_{4n+1}=S_{4n}+\frac{1}{4n+1}$ נובע כי גם S_{4n+1} מתכנסת לגבול L ובדומה גם S_{4n+3}. ראיתם באינפי (1) שאם יש אוסף סופי של תתי סדרות ששואפות לגבול **משותף** ואוסף האינדקסים שלהן `מכסה` את הטבעיים אזי גם הסדרה כולה מתכנסת לאותו הגבול.

80133-2 - אינפי 2 למדמ`ח - סמסטר ב' תש"ף - תרגול 8

1 אי־רגישות האינטגרל לשינוי מספר סופי של ערכי הפונקציה

טענה (הוכחה בתרגול הקודם)

יהי $t_0 \in [a,b]$ ותהי f הפונקציה המוגדרת בקטע $[a,b]$ באופן הבא : $f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq t_0 \\ 1 & x = t_0 \end{cases}$.

אז f אינטגרבילית ב־ $[a,b]$ ו־ $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

טענה

יהי $m \in \mathbb{N}$. נתונים $t_1, \ldots, t_m \in [a,b]$ כך ש־ $t_i \neq t_j$, ו־ $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

תהי f הפונקציה המוגדרת בקטע $[a,b]$ באופן הבא : $f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \{t_1, \ldots, t_m\} \\ \lambda_i & x = t_i \end{cases}$.

אז f אינטגרבילית ב־ $[a,b]$ ו־ $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

הוכחה

לכל $i = 1, \ldots, m$ נסמן ב־ f_i את הפונקציה שמוגדרת באופן הבא $f_i(x) = \begin{cases} 0 & x \neq t_i \\ 1 & x = t_i \end{cases}$.

אז נובע מהטענה הקודמת ש־ f_i אינטגרבילית ב־ $[a,b]$ וש־ $\int_a^b f_i(x)\,dx = 0$. נשים לב כי $f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i$.

לכן נובע מליניאריות האינטגרל כי f אינטגרבילית ב־ $[a,b]$ ו־ $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int_a^b f_i(x)\,dx = 0$. ■

משפט (אי־רגישות האינטגרל לשינוי ערך האינטגרנד במספר סופי של נקודות)

תהי g פונקציה אינטגרבילית ב־ $[a,b]$ ותהי h פונקציה המתקבלת מ־ g ע"י שינוי תמונתה במספר סופי של נקודות (כלומר $\{x \in [a,b] \mid h(x) \neq g(x)\}$ היא קבוצה סופית). אז h אינטגרבילית ב־ $[a,b]$ ו־ $\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$.

הוכחה

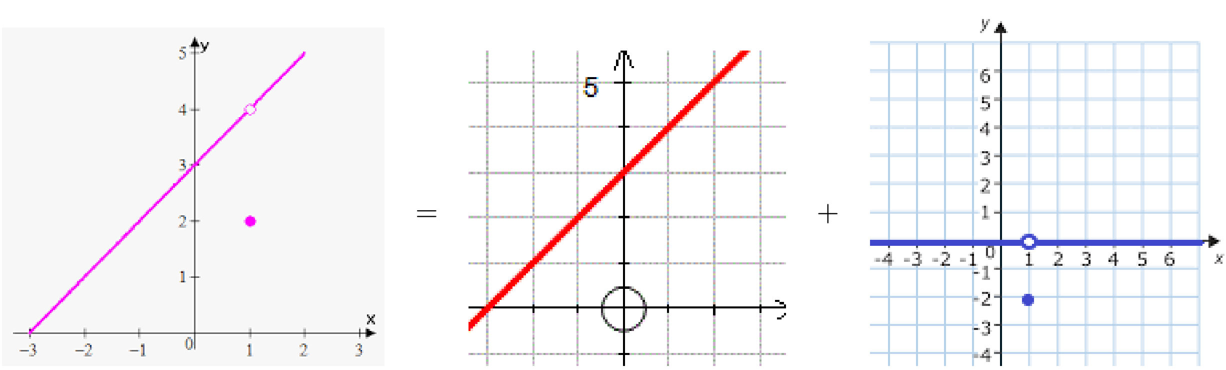
יהיו $t_1, \ldots, t_m \in [a,b]$ הנקודות בהן h נבדלת מ־ g . נסמן : $h(t_i) - g(t_i) = \lambda_i$ ($\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$) .

נשים לב ש־ $h - g = f$, כאשר f היא הפונקציה מהטענה הקודמת.

נכתוב : $h = g + (h - g) = g + f$.

f ו־ g אינטגרביליות ב־ $[a,b]$, ולכן נובע מליניאריות האינטגרל ש־ h אינטגרבילית ב־ $[a,b]$.

בנוסף מתקיים : $\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ (כי $\int_a^b f(x)\,dx = 0$). ■



2 מתי האינטגרל של פונקציה אי־שלילית הוא חיובי?

ראינו בהרצאה שאם f אינטגרבילית ב־ $[a,b]$ ו־ $f \geqslant 0$ (כלומר $f(x) \geqslant 0$ עבור כל x ב־ $[a,b]$) אז $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

ראינו לעיל פונקציה אי־שלילית ב־ $[a,b]$ שהאינטגרל שלה מתאפס למרות שקיימת $t_0 \in [a,b]$ כך ש־ $f(t_0) > 0$.

תרגיל : תהי f אינטגרבילית ואי־שלילית ב־ $[a,b]$ ותהי $x_0 \in [a,b]$ נקודה בה f רציפה ו־ $f(x_0) > 0$.

הראו כי $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

פתרון :

הרעיון הוא לפצל את תחום ההגדרה לשניים או שלושה קטעים ולהשתמש במונוטוניות החלשה של האינטגרל.

נניח תחילה כי x_0 נקודה פנימית של $[a,b]$.

ניקח $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$. מכיוון ש־ f רציפה בנקודה x_0 , הרי שקיים $\delta > 0$ כך שאם $|x - x_0| \leqslant \delta$ אזי

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2}$$

מותר להניח כי δ קטנה מספיק כך שסביבת δ של x_0 מוכלת ב־ $[a,b]$.

נציג את הקטע $[a,b]$ כאיחוד $[a,b] = [a, x_0 - \delta] \cup [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cup [x_0 + \delta, b]$.

הפונקציה f אינטגרבילית על כל אחד מתתי הקטעים ומתקיים

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\,dx \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx$$

אי־השוויון הימני נובע מכך ש־ $f \geqslant 0$ על $[a, x_0 - \delta]$ ו־ $[x_0 - \delta, b]$.

על הקטע $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ מתקיים $f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$ ולכן $f(x) - \frac{f(x_0)}{2} \geqslant 0$ ומתקיים

$$\begin{aligned}
\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx &= \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left(f(x) - \frac{f(x_0)}{2} + \frac{f(x_0)}{2} \right) dx \\
&= \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left(f(x) - \frac{f(x_0)}{2} \right) dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2}\,dx \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2}\,dx = 2\delta\,\frac{f(x_0)}{2} > 0
\end{aligned}$$

כנדרש.

אם x_0 איננה נקודה פנימית, אפשר לקחת סביבה שמאלית או ימנית ולחלק את $[a,b]$ לשני קטעים.

3 רציפות במידה שווה (Uniform Continuity)

דוגמה 1

תהי $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $f(x) = \frac{1}{x}$. נביט פעם נוספת בהוכחה של הטענה " f רציפה ב־ $(0,1)$ ", כלומר שלכל $x_0 \in (0,1)$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (0,1)$ המקיים $|x - x_0| < \delta$ יתקיים $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

יהי $x_0 \in (0,1)$ נתון. לכל $x \in (0,1)$ מתקיים : $|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \left| \frac{x_0 - x}{x_0\,x} \right| = \frac{|x_0 - x|}{|x_0\,x|} = \frac{|x - x_0|}{x_0\,x}$.

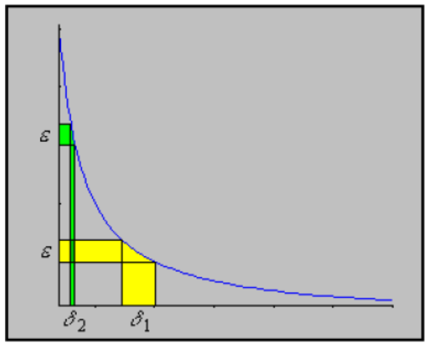
כעת, אם $|x - x_0| < \frac{1}{2}\,x_0$, כלומר אם $\frac{1}{2}\,x_0 < x < \frac{3}{2}\,x_0$, אזי $\frac{1}{x} < \frac{2}{x_0}$ ואז $\frac{|x-x_0|}{x_0\,x} \leqslant \frac{2|x-x_0|}{x_0^2}$.

נסמן $\delta = \min\left\{ \frac{1}{2}\,x_0, \frac{\varepsilon\,x_0^2}{2} \right\}$ ואז מתקיים :

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |x - x_0| < \frac{1}{2}\,x_0 \;\Rightarrow\; \frac{|x - x_0|}{x_0\,x} \leqslant \frac{2\,|x - x_0|}{x_0^2} < \frac{2\delta}{x_0^2} \leqslant \frac{2}{x_0^2}\,\frac{\varepsilon\,x_0^2}{2} = \varepsilon$$

כנדרש.

ה־ δ שהגדרנו לעיל קטן ככל ש־ x_0 קרוב יותר לראשית. הציור הבא נותן לעובדה האלגברית הזו גושפנקה גיאומטרית.



בהינתן פונקציה f , לפעמים זה שימושי לדעת שלכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ שעובד **לכל ה־x־ים בתחום ההגדרה בו־זמנית**. פונקציות כאלה נקראות **רציפות במידה שווה בתחום**. פורמלית:

הגדרה

נאמר שפונקציה $f : D \to \mathbb{R}$ היא **רציפה במידה שווה** ב־ D אם ורק אם

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in D \qquad |x_1 - x_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

בעוד ש־f רציפה ב־ D אם ורק אם

$$\forall x_1 \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_2 \in D \qquad |x_1 - x_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

שאלה: מהו ההבדל בין שני המושגים?

תשובה: ברציפות במ`ש בחירת ה־$\delta$ איננה תלויה ב־$x_1$ . לכן, רציפות במ`ש אומרת שעבור כל זוג נקודות קרובות, הערכים שהפונקציה תקבל עליהן יהיו קרובים, **כך שמידת הקירבה לא תלויה במיקום הנקודות**. רציפות במידה שווה של פונקציה היא תכונה **גלובאלית** שתלויה בתחום ההגדרה של הפונקציה.

בחזרה לדוגמה : הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ בקטע $(0,1)$

למרות החיזוק שקיבלנו מההתבוננות בגרף ומהנוסחא שלנו $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}x_0, \frac{\varepsilon x_0^2}{2}\right\}$ ($\delta \to 0$ כאשר $x_0 \to 0$) , **לא הוכחנו** ש־ $f(x) = \frac{1}{x}$ איננה רציפה במ`ש ב־ $(0,1)$. כי כאשר מוכיחים רציפות ונותנים ביטוי מפורש ל־δ_{x_1} כתלות ב־ x_1 ו־ ε , יש תמיד אינסוף δ־ות שעובדות עבור x_1 ו־ ε נתונים.

אולי הבחירה שלנו של δ_{x_1} הייתה רעה ואם היינו בוחרים אחרת, היינו יכולים להימנע מהמצב הזה? נראה שלא, ושבאמת $f(x) = \frac{1}{x}$ איננה רציפה במידה שווה ב־ $(0,1)$.

טענה (תוכח בהרצאה)

$f\colon D \to \mathbb{R}$ איננה רציפה במ"ש ב־ D אם ורק אם קיים $\varepsilon > 0$ וקיימות שתי סדרות $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (\tilde{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימות את שלושת התנאים הבאים: א) $x_n, \tilde{x}_n \in D \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ב) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - \tilde{x}_n) = 0$ ג) $|f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \geqslant \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ לא רציפה במידה שווה על הקטע $(0,1)$, כי אם ניקח $\varepsilon = 1$, $x_n = \frac{1}{n}$ ו־ $\tilde{x}_n = \frac{1}{n+1}$ נקבל

$$|f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| = |n - (n+1)| = 1 = \varepsilon$$

בעוד ש־ $0 \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{n(n+1)} = |\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}| = |x_n - \tilde{x}_n|$.

דוגמה 2 : תהי $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $f(x) = x^2$. ראיתם בהרצאה ש־ f לא רציפה במידה שווה ב־ $[0,\infty)$.

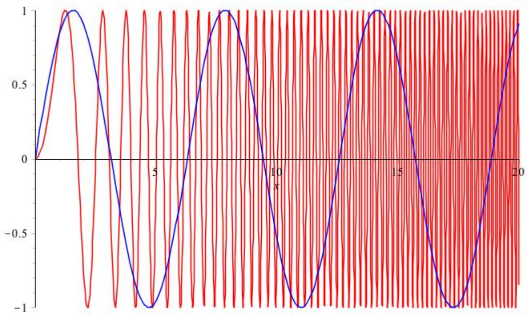
בשתי הדוגמאות הללו היה גידול מהיר לאינסוף, אבל גם פונקציה חסומה עלולה לא להיות רציפה במידה שווה בתחומה.

דוגמה 3 (תנודות מהירות): נגדיר $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ע`י $f(x) = \sin(x^2)$.

גרף הפונקציה מבצע תנודות בין 1 ל־-1 בתדירות הולכת וגדלה כשמתרחקים מהראשית. הגרף של הפונקציה נראה כך:

בכחול : $y=\sin(x)$

באדום : $y=\sin(x^2)$



לכן, אם אנחנו מתרחקים "מספיק" מהראשית, נוכל למצוא נקודות קרובות כרצוננו כך ש־ f מבצעת תנודה מלאה בינהן.

לכן ננחש ש־ f לא רציפה במ"ש ב־ $[0,\infty)$.

אכן, נגדיר $\tilde{x}_n=\sqrt{2\pi n}$ ו־ $x_n=\sqrt{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$. נשים לב ש־ f עוברת מהערך 0 ל־1 בין הנקודה $\tilde{x}_n$ לנקודה x_n.

מתקיים : $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-\tilde{x}_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(x_n-\tilde{x}_n)(x_n+\tilde{x}_n)}{(x_n+\tilde{x}_n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n^2-\tilde{x}_n^2}{(x_n+\tilde{x}_n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{(x_n+\tilde{x}_n)}=0$.

מצד שני : $|f(x_n)-f(\tilde{x}_n)|=|\sin(2\pi n+\frac{\pi}{2})-\sin(2\pi n)|=1$.

לכן הקריטריון לשלילת רציפות במ"ש מתקיים עבור $\varepsilon=1$.

טענה : אם $f:I\to\mathbb{R}$ היא רציפה במידה שווה בקטע I , אזי f רציפה ב־ I .

טענה : אם $f\colon D\to\mathbb{R}$ רציפה במידה שווה ב־ D ו־ $D'\subseteq D$, אז f רציפה במידה שווה ב־ D' .

בהרצאה ראיתם:

משפט (קנטור): אם פונקציה f רציפה על קטע סגור וחסום $[a,b]$, אזי f רציפה במידה שווה ב־ $[a,b]$.

דוגמה 4 : נראה שהפונקציה $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=\sqrt{x}$ הינה רציפה במ`ש ב־ $[0,\infty)$.

לשם כך נשתמש בטענה הבאה, אותה תוכיחו בתרגיל הבית :

למה :

אם הפונקציה f רציפה ב־ $[a,\infty)$ וקיים $c\in[a,\infty)$ כך ש־ f רציפה במ`ש ב־ $[c,\infty)$ , אזי $f$ רציפה במ`ש ב־ $[a,\infty)$.

זה מאפשר לחלק תחום ההגדרה לשני חלקים ולבחון את התנאי בנפרד בכל אחד מהם. ראשית נסתכל על קרן: לכל $x_1,x_2\in[1,\infty)$

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\frac{|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}=\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\leqslant\frac{|x_1-x_2|}{1+1}=\frac{1}{2}|x_1-x_2|$$

ולכן בהינתן $\varepsilon>0$ נוכל לבחור $\delta=2\varepsilon$ ויתקיים שאם $|x_1-x_2|<\delta$ אז $\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|<\varepsilon$.

מרציפות f נובע שהיא רציפה במ`ש בקטע הסגור והחסום $[0,1]$ . מהלמה האחרונה נובע ש־ $f$ רציפה במ`ש ב־ $[0,\infty)$.

4 הכנה למשפט היסודי

תרגיל:

בכל סעיף נתונה פונקציה $f\colon[0,6]\to\mathbb{R}$. וודאו ש־ f אינטגרבילית ב־ $[0,6]$ וקבלו ביטוי מפורש (ללא סימן האינטגרל) לפונקציה $\tilde{F}\colon[0,6]\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $\tilde{F}(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. מצאו את תחום הגזירות של $\tilde{F}$ וחשבו את $\tilde{F}'$ שם.

(1) $f\equiv 0$ (2) $f(t)=t^2$ (3) $f(t)=\begin{cases}0 & 0\leqslant t<4\\ 1 & 4=t\\ 0 & 4<t\leqslant 6\end{cases}$ (4) $f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0\leqslant t<4\\ 3 & 4\leqslant t\leqslant 6\end{cases}$

פתרון :

1. $\tilde{F}(x)=\int_0^x 0\,dt\equiv 0$. $\tilde{F}$ גזירה ב־ $[0,6]$ ומתקיים $\tilde{F}'(x)=0$ $\forall x\in[0,6]$.

2. בתרגול הקודם ראינו ש־ $\int_0^b t^2dt=\frac{b^3}{3}$. לכן $\tilde{F}(x)=\displaystyle\int_0^x t^2dt=\frac{x^3}{3}$ עבור כל x ב־ $[0,6]$.

   גם במקרה הזה $\tilde{F}$ גזירה בכל הקטע $[0,6]$ ומתקיים $\tilde{F}'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2=f(x)$ $\forall x\in[0,6]$.

3. $\tilde{F}\equiv 0$, כי f נבדלת מפונקצית האפס רק בנקודה אחת. גם הפעם $\tilde{F}$ גזירה ב־ $[0,6]$ ומתקיים $\tilde{F}'\equiv 0$.

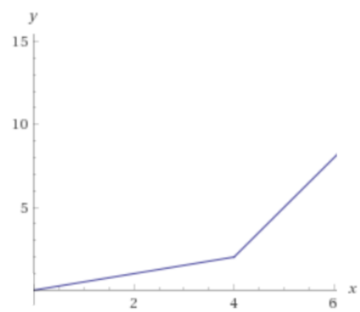
   שימו לב ש־ $\tilde{F}'(x)=0=f(x)$ $\forall x\in[0,6]\setminus\{4\}$, אבל $f(4)=1\neq\tilde{F}'(4)=0$.

4. נחלק למקרים :

   עבור $0\leqslant x<4$ מתקיים : $\tilde{F}(x)=\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}(x-0) = \frac{x}{2}$.

   עבור $4\leqslant x\leqslant 6$ מתקיים :

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x)=\int_0^x f(t)\,dt &= \int_0^4 f(t)\,dt+\int_4^x f(t)\,dt\\ &= \int_0^4 \tfrac{1}{2}\,dt+\int_4^x 3\,dt\\ &= 2+3(x-4)\end{aligned}$$



לסיכום :
$$\widetilde{F}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0\leqslant x<4\\ 3x-10 & 4\leqslant x\leqslant 6\end{cases}$$

מתקיים : $\tilde{F}'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0\leqslant x<4\\ 3 & 4<x\leqslant 6\end{cases}$. $\tilde{F}$ גזירה מימין ומשמאל ב־ $x=4$ אך הנגזרות החד־צדדיות שונות זו מזו.

תחום הגזירות של $\widetilde{F}$ הוא $[0,6]\setminus\{4\}$, ולכל x בתחום הגזירות מתקיים $\tilde{F}'(x)=f(x)$.

בכל הסעיפים הפונקציה $\tilde{F}(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ רציפה, גם כאשר f איננה רציפה.

שימו לב שדוגמאות 1 ו־3 מראות שבדרך כלל לא ניתן לשחזר את f מתוך $\tilde{F}$. למעשה, אנחנו למדים מהחלק הראשון של התרגול שניתן לשנות את f במספר סופי של נקודות בלי ש־ $\tilde{F}$ תשתנה.

אתם תראו בהרצאה שבתחום הרציפות של f כן ניתן לשחזר את f מתוך $\tilde{F}$.

5 מחסנית : תחום ההגדרה של פונקציה של שני משתנים

בקורס אינפי 1 התעניינו בפונקציות ממשיות במשתנה ממשי יחיד - כלומר, פונקציות $f:D\to\mathbb{R}$, כאשר $D\subseteq\mathbb{R}$.

בקורס אינפי 2 מתעניינים גם בפונקציות ממשיות בשניים או שלושה משתנים ממשי - כלומר, פונקציות $f:D\to\mathbb{R}$, כאשר $D\subseteq\mathbb{R}^2$ או $D\subseteq\mathbb{R}^3$.

דוגמאות

- $f:[0,\infty)\times(\mathbb{R}\setminus\{2\})\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x}}{y-2}$.
- $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x,y,z)=3x-2y+5z$.

לפעמים, כמו באינפי 1 , נהוג גם כאן להתרשל קצת, ולתאר פונקציה על־ידי מתן נוסחה המהווה את כלל ההתאמה , מבלי לציין במפורש את תחום ההגדרה ואת הטווח. נוהג זה מבוסס על שתי מוסכמות:

מוסכמת **הטווח המקסימלי**, שאומרת שניקח את הטווח של הפונקציה להיות הקבוצה $\mathbb{R}$ כולה.

מוסכמת **התחום המקסימלי**, שאומרת שניקח את התחום הפונקציה להיות הקבוצה $D \subseteq \mathbb{R}$ של כל המספרים הממשיים עבורם הנוסחה מוגדרת היטב, כלומר את התחום המקסימלי שעבורו יש לביטוי משמעות.

תרגיל

שרטטו סקיצה של תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות הבאות :

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x-y-2}}{\sqrt{3x+y-5}} \; (i) \qquad .. \qquad f(x,y) = \sqrt{\frac{x-y-2}{3x+y-5}} \; (ii)$$

<u>פתרון</u>

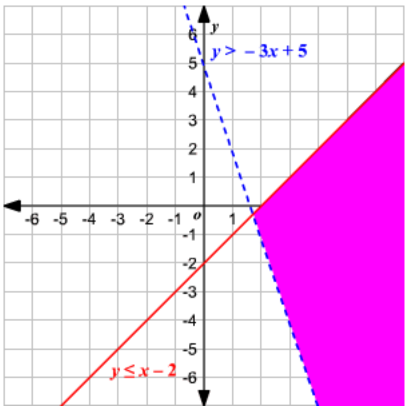
(i) הביטוי $\frac{\sqrt{x-y-2}}{\sqrt{3x+y-5}}$הוא מוגדר אם"ם $x-y-2 \geqslant 0$ וגם $3x+y-5>0$ (אסור שהמכנה יתאפס).

לכן תחום ההגדרה במקרה הזה הוא הקבוצה :

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} y \leqslant x-2 \\ y > -3x+5 \end{array} \right\}$$

כלומר, כל הנקודות במישור שנמצאות על ומתחת לישר $l_1(x) = x-2$ וגם מעל הישר $l_2(x) = -3x+5$.

לכן התחום D הוא האיזור הוורוד בציור ליד:



(ii) הביטוי $\sqrt{\frac{x-y-2}{3x+y-5}}$ הוא מוגדר אם"ם $\frac{x-y-2}{3x+y-5} \geqslant 0$ וגם $3x+y-5 \neq 0$, זה שקול לפסוק הבא

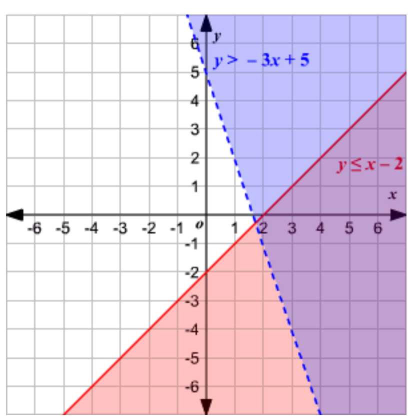
$$((x-y-2 \geqslant 0) \wedge (3x+y-5>0)) \quad \vee \quad ((x-y-2 \leqslant 0) \wedge (3x+y-5<0))$$

לכן התחום D מוגדר כדלקמן

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} y \leqslant x-2 \\ y > -3x+5 \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} y \geqslant x-2 \\ y < -3x+5 \end{array} \right\}$$

מדובר בכל הנקודות במישור שנמצאות על ומתחת לישר $l_1(x) = x-2$ וגם מעל הישר $l_2(x) = -3x+5$, או על ומעל הישר $l_1(x) = x-2$ וגם מתחת לישר $l_2(x) = -3x+5$.

לכן תחום ההגדרה יראה כך (האזור הלבן יחד עם האזור הסגול מימין, ללא האזורים בכחול ובאדום)



אינפי 2 למדמ"ח - 2019-2020 - תרגול 9

1 פונקציות קדומות (האינטגרל הלא מסויים)

הנוסחה היסודית אומרת שאם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה ו-f' אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אזי $\int_a^b f'(x)dx = f(b)-f(a)$.

הנוסחה היסודית למעשה ממירה את בעיית חישוב האינטגרל המסויים בבעיה אחרת שבמקרים רבים היא פשוטה בהרבה ובאופן ניכר- מציאת **פונקציה קדומה** : כלומר מציאת פונקציה גזירה F כך ש-$F'(x)=f(x)$ עבור כל x בתחום ההגדרה של f .

מציאת **האינטגרל הלא מסויים** של פונקציה f זה למצוא את אוסף כל הפונקציות הקדומות של f בתחום הגדרתה.

תהי $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה ויהי $I\subseteq D$ **קטע** . נסמן ב- $\int f(x)\,dx$ את אוסף כל הפונקציות הקדומות של f בקטע I .

הערה: למרבה הצער הקטע I לא מופיע בסימון $\int f(x)\,dx$. זהו פגם מהותי בסימון המאוד מקובל הזה.

הוכחתם בהרצאה שאם F פונקציה קדומה ספציפית של f בקטע I , אז כל פונקציה קדומה אחרת של f ב- I נבדלת מ- F בקבוע.

לכן, עבור קטע I מתקיים : $\int f(x)\,dx = \{F(x)+C \mid C\in\mathbb{R}\}$.

לרוב נסמן זאת פשוט : $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, כאשר מוסכם ש- $C\in\mathbb{R}$ קבוע שרירותי.

הערה: מאחר ופונקציה קדומה נקבעת על קטע עד-כדי קבוע חיבורי, אין משמעות לאמירה `$F$ היא **ה**פונקציה **ה**קדומה של $f$`.
אין שום דרך `טבעית` להעדיף קבוע אחד על אחר.

יש ארבע שיטות מרכזיות לחישוב פונקציות קדומות:

1. **קריאה "הפוכה" של טבלת נגזרות (פונקציות קדומות `מיידיות`).**

למשל, מכיוון ש- $(\tan(x))' = \frac{d}{dx}(\tan(x)) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, נקבל מיד את הנוסחה $\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan(x)+C$.

מתרגלים : **(א)** הסבירו ש- $\frac{df}{dx}(x_0)$ סימון חילופי (של לייבניץ) ל- $f'(x_0)$ ו- $\frac{df}{dx}$ סימון חילופי ל- f' .

(ב) אל תעברו על הטבלה הבאה במהלך התרגול! היא כלולה לנוחות הסטודנטים:

$$\begin{array}{lcll}
\int \sin x\,dx &=& -\cos x + C & \\
\int \cos x\,dx &=& \sin x + C & \\
\int \tan x\,dx &=& -\ln|\cos x| + C & \\
\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx &=& \tan x + C & \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &=& \arcsin(x) + C & \\
\int x^\alpha dx &=& \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C & ,\ \alpha\neq -1 \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln|x|+C & \\
\int e^x dx &=& e^x + C & \\
\int a^x dx &=& \frac{1}{\ln a}a^x + C & ,\ 0<a\in\mathbb{R} \\
\int \frac{1}{x^2+1}\,dx &=& \arctan(x)+C &
\end{array}$$

2. **לינאריות האינטגרל.**

השיטה מגיעה מלינאריות הגזירה. אם f,g פונקציות שיש להן פונקציה קדומה ו- $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ קבועים אז

$$\int (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \alpha\int f(x)\,dx + \beta\int g(x)\,dx$$

הערה: זהו למעשה שוויון בין קבוצות , או לחילופין, שוויון עד כדי קבוע חיבורי.

3. **אינטגרציה בחלקים.**

שיטה זו מגיעה מכלל הנגזרת של מכפלה : $(UV)' = U'V+UV'$.

זה מתרגם לכלל : אם u ו- v גזירות כך ש- $u'\cdot v$ בעלת פונקציה קדומה, אז גם $u\cdot v'$ בעלת פונקציה קדומה ו-

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

הערה: זהו למעשה שוויון בין קבוצות , או לחילופין, שוויון עד כדי קבוע חיבורי.

4. **אינטגרציה בהצבה (שינוי משתנה).**

השיטה מגיעה מכלל השרשרת לגזירה ־ $(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x))\varphi'(x)$. זה מתרגם לכך שאם $F' = f$ אז

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C$$

מתרגלים: בפועל האינטגרציה בהצבה תבוצע בעזרת כתיב דיפרנציאלי (שניתן להצדיקו ע`י המשפט הנ`ל). יש להסביר במהלך הדוגמאות 2 , 3 , 5 ו־ 7 שלהלן (**<u>לא כאן!!</u>**) שבה עושים הצבה בעזרת כתיב דיפרנציאלי שאם למשל $u = u(x) = x^2$, אז $du = (2x)dx$, לפחות פורמלית, מכיוון ש־ $du = \frac{du}{dx}dx = 2x\,dx$. אמרו לסטודנטים להסתכל על זה כעל דרך לזכור את שיטת האינטגרציה בהצבה .

מקרה פרטי , פשוט אך מאוד שימושי , של אינטגרציה בהצבה הוא המקרה בו $\varphi(x) = \alpha x + \beta$, כאשר $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$:
אם $F' = f$ אז $\int f(\alpha x + \beta)\,dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C$

דוגמה 1 : $\int x\cos(x)\,dx$.

נבצע אינטגרציה בחלקים. נסמן $u(x) = x$ ו־ $v'(x) = \cos(x)$ ולכן $u'(x) = 1$ ו־ $v(x) = \sin(x)$. נקבל

$$\int \underset{u}{\underset{\uparrow}{x}}\,\underset{v'}{\underset{\uparrow}{\cos(x)}}\,dx \;=\; \underset{u}{\underset{\uparrow}{x}}\,\underset{v}{\underset{\uparrow}{\sin(x)}} \;-\; \int \underset{u'}{\underset{\uparrow}{1}}\,\underset{v}{\underset{\uparrow}{\sin(x)}}\,dx \;=\; x\sin(x) + \cos(x) + C$$

דוגמה 2 : $\int \frac{1}{x^2+k^2}\,dx$, $0 < k$

המקרה $k = 1$ מיידי: $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x) + C$. נראה שבאמצעות הצבה ניתן לצמצם את המקרה הכללי למקרה הפרטי.

$$\int \frac{1}{x^2+k^2}\,dx \;=\; \int \frac{1}{k^2\left((\frac{x}{k})^2+1\right)}\,dx \;=\; \frac{1}{k^2}\int \frac{1}{(\frac{x}{k})^2+1}\,dx$$

נבצע את ההצבה $u = \varphi(x) = \frac{x}{k} = \frac{1}{k}x$. נקבל $\frac{du}{dx} = u' = \varphi'(x) = \frac{1}{k}$ ומכאן $du = \varphi'(x)dx = \frac{1}{k}\,dx$

$$\int \frac{1}{x^2+k^2}\,dx = \frac{1}{k^2}\int \frac{1}{u^2+1}\,k\,du = \frac{1}{k}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{k}\,\arctan u\, + C = \frac{1}{k}\arctan\left(\frac{x}{k}\right) + C$$

באותה דרך מוכיחים ש־ $\int \frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x}{k}\right) + C$.

אם נפעיל את הנוסחה : $\int f(\alpha x+\beta)\,dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta) + C$ למקרה הפרטי בו $f(x) = \frac{1}{x^2+k^2}$ ו־ $F(x) = \frac{1}{k}\arctan\left(\frac{x}{k}\right)$, נקבל

$$\int \frac{1}{(\alpha x+\beta)^2+k^2}\,dx = \frac{1}{\alpha k}\,\arctan\left(\frac{\alpha x+\beta}{k}\right) + C$$

דוגמה 3 : $\int \frac{1}{9x^2-6x+5}\,dx$.

על ידי **השלמה לריבוע**, אנחנו מקבלים $9x^2-6x+5 \;=\; (3x-1)^2+2^2$ ולכן $\displaystyle\int \frac{1}{9x^2-6x+5}\,dx = \int \frac{1}{(3x-1)^2+2^2}\,dx$.

נבצע אתת **ההצבה** $u = 3x-1$. כלומר $x = \frac{1}{3}(u+1)$. נקבל $\frac{dx}{du} = x' = \frac{1}{3}$ ומכאן $dx = \frac{1}{3}\,du$:

$$\int \frac{1}{(3x-1)^2+2^2}\,dx \;=\; \int \frac{1}{u^2+2^2}\,\frac{1}{3}\,du \;=\; \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+2^2}\,du \;=\; \frac{1}{6}\,\arctan\left(\frac{u}{2}\right) + C \;=\; \frac{1}{6}\,\arctan\left(\frac{3x-1}{2}\right) + C$$

באופן כללי, בהינתן פולינום $p(x)$ מדרגה 2 אפשר להעביר אינטגרלים מהצורה $\int \frac{1}{p(x)}dx$ ע`י **השלמה לריבוע והצבה** לצורה $\int \frac{du}{\pm u^2 \pm k^2}$ לאיזה $k \in \mathbb{R}$. אם סימני המקדמים של u^2 ו־ k^2 מתאימים (הפולינום במכנה הוא **אי־פריק** ־ ללא שורשים), האינטגרל יוצא $\arctan$.
אם הסימנים של u^2 ו־ k^2 שונים, אז לפולינום במכנה יש שורשים . הדוגמה הבאה תראה לנו איך להתמודד עם המצב הזה .

דוגמה 4 : $\displaystyle\int \frac{7x+6}{x^2+3x+2}\,dx$.

כאן ההשלמה לריבוע מובילה למסקנה שהמכנה מתפרק לגורמים : $(x+1)(x+2) \;=\; (x+\frac{3}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 \;=\; x^2+3x+2$.

כלומר ניתן לכתוב האינטגרנד $\dfrac{7x+6}{x^2+3x+2}$ בתור $\dfrac{7x+6}{(x+1)(x+2)}$. כעת ננסה לפרק את $\dfrac{7x+6}{(x+1)(x+2)}$ **לשברים חלקיים** :

$$\frac{7x+6}{x^2+3x+2} \;=\; \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

כאשר A ו־ B **קבועים** ממשיים. באמצעות מכנה משותף באגף ימין נקבל

$$\frac{7x+6}{x^2+3x+2} \;=\; \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2} \;=\; \frac{A(x+2)+B(x+1)}{x^2+3x+2}$$

נכפיל את כל האגפים במכנה ונקבל : $7x+6 \;=\; A(x+2)+B(x+1) \;=\; (A+B)\,x+(2A+B) \quad (*)$.

שני אגפיו של $(*)$ הם פולינומים ממעלה אחד. שני פולינומים שווים אם"ם המקדמים שווים בהתאמה. לכן $(*)$ שקול למערכת של שתי משוואות בשני נעלמים $\left\{\begin{array}{l} A+B=7 \\ 2A+B=6 \end{array}\right.$. נפתור ונגלה ש־ $A=-1$ ו־ $B=8$ ולכן

$$\frac{7x+6}{x^2+3x+2} = -\frac{1}{x+1}+\frac{8}{x+2}$$

עתה, בעזרת לינאריות, קל לחשב את האינטגרל:

$$\int \frac{7x+6}{x^2+3x+2}\,dx \;=\; \int \left(\frac{-1}{x+1}+\frac{8}{x+2}\right) dx \;=\; -\int \frac{1}{x+1}\,dx + 8\int \frac{1}{x+2}\,dx \;=\; -\ln|x+1|+8\ln|x+2|+C$$

דוגמה 5 : $\displaystyle\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx \;,\; a\neq 0$.

כאן המונה הוא הנגזרת של המכנה. נציב $u=ax^2+bx+c$ ואז $du=(2ax+b)\,dx$. נקבל:

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx \;=\; \int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,(2ax+b)\,dx \;=\; \int \frac{1}{u}\,du \;=\; \ln|u|+C \;=\; \ln|ax^2+bx+c|+C$$

דוגמה 6 : $\displaystyle\int \frac{2x-1}{4x^2-4x+5}\,dx$.

נרשום $\displaystyle\int \frac{2x-1}{4x^2-4x+5}\,dx \;=\; \int \frac{\frac{1}{4}(8x-4)}{4x^2-4x+5}\,dx \;=\; \frac{1}{4}\int \frac{8x-4}{4x^2-4x+5}\,dx$.

כעת המונה הוא הנגזרת של המכנה. לאור הדוגמה הקודמת נציב $u=4x^2-4x+5$. אז $du=(8x-4)dx$ ונקבל

$$\int \frac{2x-1}{4x^2-4x+5}\,dx \;=\; \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\,du \;=\; \frac{\ln|u|}{4}+C \;=\; \frac{\ln|4x^2-4x+5|}{4}+C$$

דוגמה 7 : $\int \sin^6\theta\,\cos^5\theta\,d\theta$. **(מתרגלים: דלגו לדוגמה 8 אם אתם לחוצים בזמן!)**

נשים לב שהחזקה של $\cos\theta$ היא אי־זוגית. נשתמש בזהות הטריגונומטרית $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$ כדי לכתוב :

$$\sin^6\theta\cos^5\theta \;=\; \sin^6\theta\,\cos^4\theta\,\cos\theta \;=\; \sin^6\theta\,\left(\cos^2\theta\right)^2\,\cos\theta \;=\; \sin^6\theta\,(1-\sin^2\theta)^2\cos\theta$$

נציב $u=\sin(\theta)$ אז $du=\cos(\theta)\,d\theta$ ולכן

$$\begin{aligned}\int \sin^6\theta\,\cos^5\theta\,d\theta \;&=\; \int \sin^6\theta(1-\sin^2\theta)^2\cos\theta\,d\theta \;=\; \int u^6(1-u^2)^2\,du \;=\; \int \left(u^6-2u^8+u^{10}\right)\,du \\ &=\; \frac{u^7}{7}-\frac{2u^9}{9}+\frac{u^{11}}{11}+C \;=\; \frac{\sin^7(\theta)}{7}-\frac{2\sin^9(\theta)}{9}+\frac{\sin^{11}(\theta)}{11}+C\end{aligned}$$

הערה: ההצבה $u=\sin(\theta)$ או $u=\cos(\theta)$ שעשינו פה עובדת באופן כללי יותר לאינטגרלים מהצורה

$$\int \sin^m(\theta)\cos^n(\theta)\,d\theta \qquad m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

כאשר **לפחות אחד מבין** m **ו־** n **אי־זוגיים**. בפרט, זה מאפשר לחשב פונקציות קדומות מהצורה $\int \sin^m(\theta)\,d\theta$, כאשר m אי־זוגי.

דוגמה 10 במחסנית של התרגול הזה מדגימה איך אפשר לטפל במקרה הנותר כאשר m **ו־** n **שניהם זוגיים.**

דגשים:

1. מבחן התוצאה. בסופו של דבר, לא משנה באיזו שיטה השתמשנו והאם ההצבה שלנו `מוצדקת` או לא, תמיד צריך לבדוק אם התשובה שקיבלנו היא פונקציה קדומה לפונקציה הנתונה **על ידי גזירה**.

בדוגמה 7 למשל קיבלנו $\int \sin^6\theta\cos^5\theta\,d\theta = \frac{\sin^7(\theta)}{7} - \frac{2\sin^9(\theta)}{9} + \frac{\sin^{11}(\theta)}{11} + C$. נוודא באמצעות גזירה שאכן קיבלנו פונקציה קדומה:

$$\left(\frac{\sin^7(\theta)}{7} - \frac{2\sin^9(\theta)}{9} + \frac{\sin^{11}(\theta)}{11} + C\right)' = \sin^6(\theta)\cos(\theta) - 2\sin^8(\theta)\cos(\theta) + \sin^{10}(\theta)\cos(\theta)$$

בשלב זה לא ברור שמדובר באותה פונקציה $\sin^6\theta\cos^5\theta$ שאיתה התחלנו.

אבל עיון בפתרון של דוגמה 7 (למעשה היפוך של חלק משלביו) מוביל לכתיבה:

$$\begin{aligned}
\sin^6(\theta)\cos(\theta) - 2\sin^8(\theta)\cos(\theta) + \sin^{10}(\theta)\cos(\theta) &= \sin^6(\theta)\cos(\theta)\left(1+\sin^4(\theta)-2\sin^2(\theta)\right)\\
&= \sin^6(\theta)\cos(\theta)\left(1-\sin^2(\theta)\right)^2\\
&= \sin^6(\theta)\cos(\theta)\left(\cos^2(\theta)\right)^2\\
&= \sin^6\theta\ \cos^5\theta
\end{aligned}$$

2. אפשר להוסיף קבועי חיבורי בכל שלב בו מחליפים ביטוי מהצורה $\int f(x)\,dx$ ב־ $F(x)$, אך בסוף `שורד` רק קבוע אחד.

2 חישוב אינטגרלים מסויימים

דוגמה 8 : נחשב את $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta\ \cos^5\theta\,d\theta$.

בדוגמה 7 חישבנו פונקציה קדומה של $\sin^6\theta\cos^5\theta$, ואפשר כמובן לנצל זאת כאן. במקום זאת נחזור פעם נוספת על החישוב על מנת להדגים מדוע החישוב מהיר יותר כשאשר מדובר באינטגרל מסויים.

נשתמש שוב בהצבה $u=\sin(\theta)$ ביחד עם זהויות טריגונומטריות. אם $u=\sin(\theta)$ אז $du=\cos(\theta)\,d\theta$, ולכן

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta\ \cos^5\theta\,d\theta &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta(1-\sin^2\theta)^2\cos\theta\,d\theta = \int\limits_0^1 u^6(1-u^2)^2\,du\\
&= \int\limits_0^1 \left(u^6-2u^8+u^{10}\right)\,du = \left(\frac{u^7}{7}-\frac{2u^9}{9}+\frac{u^{11}}{11}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{7}-\frac{2}{9}+\frac{1}{11}
\end{aligned}$$

שימו לב שלא "חזרנו" למשתנה המקורי θ .

כאשר משתמשים בשיטות ההצבה לחישוב אינטגרל מסוים אין צורך `לחזור` למשתנה המקורי. זאת בניגוד לשימוש בשיטת ההצבה כדי לחשב אינטגרל לא מסוים.

דוגמה 9 : חשבו את השטח של החצי העליון של עיגול בעל רדיוס $r>0$ עם מרכז בראשית הצירים.

משוואת העיגול הנ"ל היא $x^2+y^2=r^2$ ומדובר בשטח הקבוצה $D=\left\{\,(x,y)\ \Big|\ -r\leqslant x\leqslant r\ ,\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{r^2-x^2}\,\right\}$

כאן $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, והאינטגרל המבטא את השטח המבוקש הנו $\int\limits_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$. f רציפה ב־ $[-r,r]$ ולכן אינטגרבילית.

נבצע את ההצבה /חילוף המשתנה $x=\varphi(t)=r\sin(t)$, עם $\varphi\colon\ \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-r,r]$.

כל הנחות המשפט מתקיימות כי $-r\leqslant r\sin(t)\leqslant r$ עבור כל $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ו־ $r\sin(-\frac{\pi}{2})=-r$ ו־ $r\sin(\frac{\pi}{2})=r$. לכן מתקיים :

$$\int\limits_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2-r^2\sin^2(t)}\ r\cos(t)\,dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2\left(1-\sin^2(t)\right)}\ r\cos(t)\,dt = r^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos(t)|\ \cos(t)\,dt\ .$$

(זכרו שעבור כל $z\in\mathbb{R}$ מתקיים $\sqrt{z^2}=|z|$) . אבל כל $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ מתקיים $0\leqslant\cos(t)$, ולכן $|\cos(t)|=\cos(t)$.

מכאן נובע ש־

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,dx = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)|\,\cos(t)\,dt = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \cos^2 z = \\ \frac{1}{2}(\cos(2z)+1)}}{=} \frac{r^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2t)+1)\ dt = \frac{r^2}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2t)+t\right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} = \frac{\pi r^2}{2}$$

3 מחסנית : דוגמה 10 : $\int \sin^2(x)\cos^4(x)\,dx$.

ניעזר בנוסחאות $\sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}$, $\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}$ ובליניאריות : **(מתרגלים: דלגו על החישוב אם אתם לחוצים בזמן!)**

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(x)\cos^4(x)\,dx &= \int \tfrac{1-\cos(2x)}{2}\left(\tfrac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \tfrac{1}{8}\int\left(1+\cos(2x)-\cos^2(2x)-\cos^3(2x)\right)\,dx \\
&= \tfrac{1}{8}\left(\int 1\,dx+\int\cos(2x)\,dx-\int\cos^2(2x)\,dx-\int\cos^3(2x)\,dx\right) \\
&= \tfrac{1}{8}\left(x+\tfrac{1}{2}\sin(2x)-\int\tfrac{1+\cos(4x)}{2}\,dx-\int\cos^2(2x)\cos(2x)\,dx\right) \\
&= \tfrac{1}{8}\left(x+\tfrac{1}{2}\sin(2x)-\tfrac{1}{2}\int 1\,dx-\tfrac{1}{2}\int\cos(4x)\,dx-\int\left(1-\sin^2(2x)\right)\cos(2x)\,dx\right) \\
u=\sin(2x)\quad &\underset{\hookleftarrow}{=} \tfrac{1}{8}\left(x+\tfrac{1}{2}\sin(2x)-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}\sin(4x)-\int\left(1-u^2\right)\tfrac{1}{2}\,du\right) \\
&= \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\sin(2x)-\tfrac{1}{8}\sin(4x)-\tfrac{1}{2}u+\tfrac{1}{6}u^3+C\right) \\
&= \tfrac{1}{16}x+\tfrac{1}{16}\sin(2x)-\tfrac{1}{64}\sin(4x)-\tfrac{1}{16}\sin(2x)+\tfrac{1}{48}\sin(2x)^3+C
\end{aligned}$$

4 פונקציות קדומות על תחומים מורכבים + הערות

שאלה: האם קיימת לפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ פונקציה קדומה $F\colon\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ (כלומר, לכל $x\neq 0$ מתקיים $F'(x)=f(x)=\frac{1}{x}$) שמתקיימת $F(1)=0$ ו־ $F(-1)=2$?

תשובה`:

מתקיים : $\int\frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C$. נסמן $F(x)=\ln|x|+C$, ואז F צריכה לקיים

$$0=F(1) = \ln|1|+C=C$$

כלומר $C=0$. מצד שני $2=F(-1)=\ln|-1|+C=C$ ולכן $C=2$. סתירה.

אבל קל לראות ש־ $F(x)=\begin{cases}\ln(x) & ,\ x>0\\ \ln(-x)+2 & ,\ x<0\end{cases}$ הינה פונקציה קדומה של $f(x)=\frac{1}{x}$ על $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ שמקיימת את הנדרש!

הבעיה היא שברגע שמחפשים ל־f פונקציה קדומה על איחוד זר של קטעים, אז פונקציה קדומה F כזו כבר לא נקבעת רק עד כדי קבוע חיבורי אלא עד כדי קבוע חיבורי **בכל קטע**.

כאשר רושמים $\displaystyle\int\frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C$ מתכוונים בעצם ש־ $\ln|x|+C$ מהווה **תבנית** תקיפה לפונקציה קדומה של $f(x)=\frac{1}{x}$ על כל אחד מהקטעים $(-\infty,0)$ ו־ $(0,\infty)$, כלומר ש־

$$F(x)=\begin{cases}\ln|x|+C_1 & ,\ x>0\\ \ln|x|+C_2 & ,\ x<0\end{cases}=\begin{cases}\ln(x)+C_1 & ,\ x>0\\ \ln(-x)+C_2 & ,\ x<0\end{cases}$$

פונקציה קדומה ל־ $f(x)=\frac{1}{x}$ ב־ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ עבור כל בחירה של הקבועים C_1 ו־ C_2 .

למרבה הצער הקטע I לא מופיע בסימון $\int f(x)\,dx$. יש הרבה פונקציות אלמנטריות שתחום ההגדרה (המקסימלי) שלהן איננו קטע אלא איחוד זר של קטעים. אפשר לנסות להגדיר פונקציות קדומות על איחוד זר של קטעים פתוחים, אבל במקרה הזה צריך להיזהר.

הערות

לא לכל פונקציה קיימת פונקציה קדומה (תרגיל).

ייתכן שיש ל־f פונקציה קדומה אבל לא ניתן לרשום אותה כביטוי סופי באמצעות סכום, כפל, חילוק והרכבה של פונקציות אלמנטריות. זה למשל המצב עבור הפונקציה $f(x)=e^{-x^2}$ (משפט ליוביל).

בהינתן פונקציה אלמנטרית, זאת משימה ממש לא טריוויאלית לקבוע האם אפשר למצוא לה פונקציה קדומה אלמנטרית או לא. ועל כך נאמר : "Differentiation is a science. Integration is an art."

אינפי 2 למדמ"ח - 2019-2020 - תרגול 10

1 אינטגרל עם גבולות משתנים

טענה (נגזרת של אינטגרל עם גבולות משתנים)

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב- $[a,b]$ ונניח ש- $\varphi,\psi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ פונקציות גזירות ב- $[\alpha,\beta]$.

נתבונן בפונקציה $G:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $G(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt$.

אז G גזירה ב- $[\alpha,\beta]$ ומתקיים לכל x בקטע:

$$G'(x)=f(\psi(x))\cdot\psi'(x)-f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

<u>הוכחה</u> :

תהי $\tilde{F}(x):=\int_a^x f(t)\,dt$ הפונקציה הצוברת של f בקטע $[a,b]$. נשים לב שמתקיים

$$G(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt=\int_{\varphi(x)}^{a} f(t)dt+\int_{a}^{\psi(x)} f(t)dt=-\int_{a}^{\varphi(x)} f(t)dt+\int_{a}^{\psi(x)} f(t)dt=\tilde{F}(\psi(x))-\tilde{F}(\varphi(x))$$

היות ונתון ש- f רציפה ב- $[a,b]$ נובע מהמשפט היסודי ש- $\tilde{F}$ גזירה ב- $[a,b]$ וכן ש- $\tilde{F}'=f$. לכן $G(x)$ מהווה צירוף של פונקציות גזירות ועל כן היא גזירה ומתקיים מכלל השרשרת, לכל x_0 בקטע,

$$G'(x_0)=F'(\psi(x_0))\cdot\psi'(x_0)-F'(\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0)=f(\psi(x_0))\cdot\psi'(x_0)-f(\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0)$$

כנדרש. ■

תרגיל: חשבו את הנגזרת של $G(x)=\int\limits_{-\cos x}^{\sin x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ בתחום $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$.

פתרון:

הפונקציה מוגדרת כאינטגרל אמיתי לכל x עבורו $|\sin x|\neq 1$ וגם $|\cos x|\neq 1$. זה קורה לכל $x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. נשים לב ש- $\sin x>0$ ו- $\cos x>0$ כאשר $0<x<\frac{\pi}{2}$. כעת, היות ו- $f(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ רציפה ב-$[-\cos x\,,\sin x]$, נובע ש- $G(x)=\int\limits_{-\cos x}^{\sin x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ גזירה שם, ומתקיים:

$$G^{'}(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(\sin x)^2}}\cdot\sin'(x)-\frac{1}{\sqrt{1-(-\cos x)^2}}(-\cos)^{'}(x)=\frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}}\cdot\cos(x)-\frac{1}{\sqrt{\sin^2 x}}\sin x=1-1=0$$

ולכן G קבועה ב- $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$.

2 אינטגרלים לא אמיתיים

כל תורת האינטגרציה של רימן ודרבו שראינו עד כה מטפלת אך ורק בפונקציות חסומות המוגדרות בקטע סגור וחסום. על מנת להצמיד לפונקציה f את התואר `אינטגרבילית`, הגרף של f חייב להיות חסום במלבן $[a,b]\times[m,M]$.

נרצה לבדוק אם אפשר להרחיב את ההגדרה למקרים אחרים. אינטגרל לא אמיתי הוא אינטגרל בו הגרף של f לאו דווקא חסום במלבן. למשל הגרף של f יכול להיות חסום ברצועה אופקית אינסופית $[a,\infty)\times[m,M]$, כלומר תחום האינטגרציה איננו חסום. לחילופין יתכן שהתמונה של הפונקציה איננה חסומה, ואז הגרף של f חסום ברצועה אינסופית אנכית $[a,b]\times[m,\infty)$ או $[a,b]\times(-\infty,M]$. זה קורה למשל כאשר ל- f יש אסימפטוטה אנכית בנקודת הקצה.

נחלק אם כך את האינטגרלים הלא אמיתיים לסוגים:

הגדרה של אינטגרל לא אמיתי מסוג 1

תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ כך שעבור כל $a<N\in\mathbb{R}$, הפונקציה f אינטגרבילית בקטע $[a,N]$.

אם קיים הגבול **במובן הצר** $\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_a^N f(x)\,dx=L$, אזי נאמר כי האינטגרל הלא אמיתי $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס,

או כי f אינטגרבילית ב־ $[a,\infty)$.

במקרה זה נסמן $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = L$. אחרת, נאמר ש־ $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ מתבדר או לא קיים .

נגדיר את $\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx$ בצורה סימטרית.

דוגמה : האם האינטגרל הלא אמיתי $\int\limits_e^\infty \frac{1}{x\,\ln^2(x)}\,dx$ מתכנס ?

יהי $e<N\in\mathbb{R}$. עלינו להכריע אם קיים הגבול $\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_e^N \frac{dx}{x\,\ln^2(x)}$. נציב $u=\ln(x)$ ונקבל :

$$\int\limits_e^N \frac{1}{x\,\ln^2(x)}\,dx \;=\; \int\limits_{\ln(e)}^{\ln(N)} \frac{1}{u^2}\,du \;=\; \left[-u^{-1}\right]_1^{\ln(N)} \;=\; 1-\frac{1}{\ln(N)}$$

מכאן נובע ש־ $\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_e^N \frac{dx}{x\,\ln^2(x)} = \lim\limits_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{\ln(N)}\right)=1$, כלומר $\int\limits_e^\infty \frac{1}{x\,\ln^2(x)}\,dx = 1$.

הגדרה של אינטגרל לא אמיתי מסוג 2

תהי $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ כך שלכל $0<\delta<b-a$, הפונקציה f אינטגרבילית בקטע $[a+\delta,b]$, אולם f איננה חסומה באף סביבה ימנית של a (למשל כאשר $\lim\limits_{\delta\to0^+} f(a+\delta)=\pm\infty$).

אם קיים הגבול $\lim\limits_{\delta\to0^+}\int\limits_{a+\delta}^b f(x)\,dx = L$ **במובן הצר**, אזי נאמר כי האינטגרל הלא אמיתי $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ מתכנס,

או כי f אינטגרבילית ב־ $(a,b]$, ונסמן $\int\limits_a^b f(x)\,dx = L$.

בצורה דומה, תהי $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה כך שלכל $b-a>\delta>0$ הפונקציה f אינטגרבילית בקטע $[a,b-\delta]$ אולם f איננה חסומה באף סביבה שמאלית של b (למשל כאשר $\lim\limits_{\delta\to0^+} f(b-\delta)=\pm\infty$).

אם קיים הגבול **במובן הצר** $\lim\limits_{\delta\to0^+}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx = L$, אזי נאמר כי f אינטגרבילית ב־ $[a,b)$ ונסמן $\int\limits_a^b f(x)\,dx = L$.

שימו לב: מעכשיו לסימון $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ישנן שתי משמעויות אפשריות ־ אחת, כמקודם, כש־ f אינטגרבילית רימן ב־ $[a,b]$, והשניה כאשר האינטגרל הוא לא אמיתי מסוג 2. כאשר f אינטגרבילית רימן ב־ $[a,b]$, הגבולות $\lim\limits_{\delta\to0^+}\int\limits_{a+\delta}^b f(x)\,dx$ ו־ $\lim\limits_{\delta\to0^+}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$ קיימים ושווים ל־ $\int_a^b f(x)\,dx$ (למה?).

דוגמה: $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

נשים לב שהפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ מוגדרת בקטע החצי פתוח $[0,1)$, ומתקיים $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\infty$.

כלומר f איננה חסומה ב־ $[0,1)$ ובפרט **איננה** אינטגרבילית רימן ב־ $[0,1]$.

מאידך, עבור $0<\delta<1$ הפונקציה f אינטגרבילית בכל קטע סגור מהצורה $[0,1-\delta]$, כי f רציפה שם.

לכן האינטגרל $\int_0^{1-\delta}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ מוגדר לכל δ כנ"ל, ולפי ההגדרה מתקיים:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{def}{=} \lim\limits_{\delta\to0^+}\int\limits_0^{1-\delta}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim\limits_{\delta\to0^+}\left[\arcsin(x)\right]_0^{1-\delta} = \lim\limits_{\delta\to0^+}\left(\arcsin(1-\delta)-0\right)=\frac{\pi}{2}$$

מבחני השוואה להתכנסות

בד"כ אנחנו לא מכירים פונקציה קדומה עבור f, ולכן יהיה לנו בעייתי להוכיח את התכנסות האינטגרל ע"י חישוב מפורש. דבר זה יכול לקרות גם כשאנחנו מכירים פונקציה קדומה, אולם היא מסובכת והמעבר לגבול לא פשוט. נרצה אפוא למצוא דרך נוחה להוכיח שהאינטגרל מתכנס. **שימו לב:** אנו מפרידים פה בין שני שלבים שונים: ראשית ההוכחה של ההתכנסות, ואז ־ אולי ־ את חישוב הערך.

בכיתה ראיתם את מבחן ההשוואה. נציג כעת עוד מבחן שימושי.

מבחן ההשוואה הגבולי

תהיינה $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות בכל קטע סגור $[a,N]$ עבור $a<N$.

נניח כי קיים $c\in[a,\infty)$ כך שלכל $c\leqslant x<\infty$ מתקיים $0<f(x)$ ו־ $0<g(x)$.

אם קיים הגבול במובן הצר $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ והוא שונה מאפס, אז האינטגרלים $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ו־ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתבדרים ומתכנסים יחדיו.

גירסא מקבילה קיימת עבור אינטגרלים לא אמיתיים מהסוג השני:

תהיינה $f,g:(a,b]$ פונקציות כך שלכל $0<\delta<b-a$, f ו־g שתיהן אינטגרביליות בקטע $[a+\delta,b]$.

נניח כי קיים $c\in(a,b)$ כך שלכל $c\leq x<\infty$ מתקיים $f(x)>0$ ו־$g(x)>0$.

אם קיים הגבול במובן הצר $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ והוא שונה מאפס, אזי האינטגרלים $\int_a^b f(x)dx$ ו־ $\int_a^b g(x)dx$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

ומה קורה כשהגבול שווה לאפס? ניתן להראות (מושאר כתרגיל לקורא) שכאשר הגבול שווה לאפס, התבדרות f גוררת את התבדרות g, והתכנסות g גוררת את התכנסות f.

דוגמה ־ אינטגרל אוילר $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(x))\,dx$.

נשים לב שהאינטגרנד קטן או שווה לאפס בקטע $(0,\frac{\pi}{2}]$. לכן, נתבונן ב־ $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(-\ln(\sin(x)))\,dx$.

האינטגרל לא אמיתי בגלל שהפונקציה לא חסומה באף סביבה ימנית של אפס.

ניעזר בעובדה שליד 0 , $\sin(x)$ מתנהג כמו x , ולכן נבחן האם יש קשר בין התנהגות הפונקציה שלנו להתנהגות הפונקציה $\ln(x)$.

מתקיים מכלל לופיטל כי $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{\sin(x)}\cos(x)=1$

כעת, מאינטגרציה בחלקים ($u'=1\,,\,v=-\ln(x)$), מתקיים $\int\limits_\delta^1-\ln(x)\,dx=[x-x\ln(x)]_\delta^1=(1-\delta)+\delta\ln(\delta)\xrightarrow[\delta\to0^+]{}1$

כי $\lim\limits_{\delta\to0^+}\delta\ln(\delta)=0$ (למשל מכלל לופיטל) ולכן האינטגרל הלא אמיתי $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(-\ln(x))\,dx$ מתכנס.

שימו לב שהשתמשנו בגבול הימני 1 כי הפונקציה $-\ln(x)$ אי־שלילית רק בקטע $(0,1]$, ושם אנחנו מפעילים את מבחן ההשוואה, אבל מאדיטיביות האינטגרל ביחס לאיחוד תחומים נקבל התכנסות בכל הקטע.

ממבחן ההשוואה הגבולי, נובע שגם $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(-\ln(\sin(x)))\,dx$ מתכנס ולכן גם $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(x))\,dx$.

בתרגיל הבית תראו איך משתמשים בידע על ההתכנסות כדי לחשב את ערך האינטגרל.

אינטגרלים לא אמיתיים מרובים

דוגמה: $\int\limits_0^\infty\frac{1}{x^p}\,dx$ עבור $0<p$. [מתרגלים ־ לצייר את הפונקציה]

נשים לב שמצד אחד יש לנו תחום לא חסום, ומהצד השני יש לנו פונקציה לא חסומה. אינטגרלים אלה מוגדרים כך שהם קיימים אסם קיימת נקודה בתחום עבורה שני האינטגרלים, מהסוגים הקודמים, קיימים. במקרה שלנו, אסם קיימת $x_0\in(0,\infty)$ כך שהאינטגרלים $\int\limits_0^{x_0}\frac{1}{x^p}\,dx$ ו־ $\int\limits_{x_0}^\infty\frac{1}{x^p}\,dx$ קיימים שניהם. בהרצאה ראיתם ש־$\int\limits_1^\infty\frac{1}{x^p}\,dx$ מתכנס אסם $1<p$ ואילו $\int\limits_0^1\frac{1}{x^p}\,dx$ מתכנס אסם $p<1$, לכן האיטגרל המרובה $\int\limits_0^\infty\frac{1}{x^p}\,dx$ אינו מתכנס לאף $0<p$.

ביקור חוזר קצר לטורים חיוביים : מבחן האינטגרל

תזכורת (מבחן האינטגרל): יהי N_0 מספר טבעי ו־ f פונקציה חיובית מונוטונית **יורדת** המוגדרת בקטע $[N_0,\infty)$.

אזי הטור $\sum\limits_{n=N_0}^{\infty} f(n)$ מתכנס אם ורק אם האינטגרל $\int\limits_{N_0}^{\infty} f(x)\,dx$ מתכנס.

דוגמה : מצאו את כל הזוגות $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ עבורם הטור $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}(\ln\ n)^{\beta}}$ מתכנס.

פתרון :]פתרתם כבר שאלה זו בתרגיל בית באמצעות מבחן העיבוי, נראה כעת איך לפתור אותה עם מבחן האינטגרל[

ראשית, מתקיים
$$\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}(n)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\begin{cases}0 & 0<\alpha\quad\vee\quad\alpha=0\,,\,\beta>0\\ \infty & \alpha<0\quad\vee\quad\alpha=0\,,\,\beta<0\\ 1 & \alpha=\beta=0\end{cases}$$

לכן המקרים היחידים בהם הטור יכול להתכנס הם עבור $0<\alpha$ או $(\alpha=0\ \wedge\ \beta>0)$.

נגדיר את הפונקציה $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ על־ידי $f(x)=x^{-\alpha}(\ln(x))^{-\beta}$. זוהי פונקציה חיובית.

נרצה להשתמש במבחן האינטגרל. לשם כך ראשית עלינו לבדוק שבמקרה הזה f מונוטונית יורדת.

המקרים $\alpha=0,\beta>0$ וגם $\alpha>0,\ \beta\geq 0$ מידיים. יש לבדוק עבור $\alpha>0,\ \beta<0$. נגזור:

$$f'(x)\quad=\quad(-\alpha)x^{-\alpha-1}(\ln x)^{-\beta}+x^{-\alpha}(-\beta)(\ln x)^{-\beta-1}x^{-1}=-x^{-\alpha-1}(\ln x)^{-\beta}\left(\alpha+\frac{\beta}{\ln x}\right)$$

לכן לכל $\alpha>0$ ולכל x גדול מספיק מתקיים $f'(x)<0$.

נבדוק את התכנסות האינטגרל באמצעות ההצבה $u=\ln x$, ואז $x=e^u$ ו־ $dx=e^u du$

לכן :
$$\int\limits_{2}^{N}\frac{dx}{x^{\alpha}\ln^{\beta}x}=\int\limits_{\ln 2}^{\ln N}\frac{e^u du}{(e^u)^{\alpha}u^{\beta}}=\int\limits_{\ln 2}^{\ln N}\frac{du}{e^{(\alpha-1)u}u^{\beta}}$$

עבור $\alpha=1$ זה האינטגרל של $1/u^{\beta}$ שמתכנס אם ורק אם $\beta>1$.

עבור $\alpha<1$ האינטגרנד עצמו מתבדר לאינסוף : $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{1}{e^{(\alpha-1)u}u^{\beta}}=\infty$, ולכן גם האינטגרל מתבדר.

עבור $\alpha>1$, אינטואיטיבית, מאחר שהגורם האקספוננציאלי שואף לאינסוף יותר מהר מכל פולינום, נצפה שהאינטגרל מתכנס.

מאחר שאנו יודעים שהאינטגרל של $1/u^2$ מתכנס, נשווה אליו : $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{1/e^{(\alpha-1)u}u^{\beta}}{1/u^2}=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{u^{2-\beta}}{e^{(\alpha-1)u}}=0$

ומהגרסא של מבחן ההשוואה הגבולי עבור גבול 0, נקבל שגם האינטגרל שלנו מתכנס.

כעת ממבחן האינטגרל נוכל להסיק שהטור הנתון מתכנס אם ורק אם $\alpha>1$ או $(\alpha=1\ \wedge\ \beta>1)$.

3 מחסנית ־ אינטגרל לא אמיתי מתכנס על הקרן $[1,\infty)$ כך ש־ $f(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$

נגדיר את הפונקציה $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ בצורה הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}n^4x+n-n^5 & x\in[n-\frac{1}{n^3},n]\ ,\ 2\leqslant n\in\mathbb{N}\\ -n^4x+n+n^5 & x\in[n,n+\frac{1}{n^3}]\ ,\ 2\leqslant n\in\mathbb{N}\\ 0 & else\end{cases}$$

במילים, הפונקציה f היא זהותית 0, פרט לקטעים מהצורה $[n-\frac{1}{n^3},n+\frac{1}{n^3}]$, בהם היא מטפסת מ־ 0 ל־ n בצורה לינארית בחצי השמאלי של הקטע, ויורדת מ־ n ל־ 0 בחצי הימני שלו.

על כל קטע כזה, השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה־x הוא שטחו של משולש עם גובה n ובסיס $\frac{2}{n^3}$. לכן, מתקיים:

$$.\int\limits_{n-\frac{1}{n^3}}^{n+\frac{1}{n^3}}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot n\cdot\frac{2}{n^3}=\frac{1}{n^2}$$

בנוסף, f רציפה ב־ $[1,\infty)$ ולכן אינטגרבילית על כל קטע מהצורה $[1,N]$. הפונקציה f היא אי־שלילית ולכן הפונקציה הצוברת $\widetilde{F}(N)=\int\limits_1^N f(x)\,dx$ מונוטונית עולה.

לכן, כדי לבדוק את התכנסות האינטגרל הלא אמיתי $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$, מספיק למצוא סדרה $(b_k)_{k=2}^\infty$ ששואפת לאינסוף כך ש־ $\widetilde{F}(b_k)=\int\limits_1^{b_k} f(x)\,dx$ מתכנס כאשר $k\to\infty$. נגדיר $b_k=k+\frac{1}{k^3}$, ומתקיים:

$$\int\limits_1^{b_k} f(x)\,dx=\sum_{n=2}^{k}\frac{1}{n^2}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$$

כאשר השוויון נובע מכך שפרט לקטעים מהצורה $[n-\frac{1}{n^3},n+\frac{1}{n^3}]$, הפונקציה היא זהותית 0 . כלומר, סה"כ קיבלנו שהאינטגרל $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ מתכנס.

זוהי דוגמה לפונקציה שלמרות שהיא איננה חסומה על קרן אינסופית, האינטגרל שלה מתכנס. ההתכנסות מתאפשרת מפני שלמרות שהפונקציה איננה חסומה, היא מקבלת ערכים גדולים על אורכי קטעים שהולכים וקטנים, מספיק מהר כדי שהתרומה של האזורים בהם הפונקציה "גדולה" תהיה זניחה. בנוסף, נשים לב שהטור $\sum\limits_{n=1}^\infty f(n)=\sum\limits_{n=2}^\infty n$ מתבדר, ולכן זוהי גם דוגמה למקרה שבו מבחן האינטגרל לא עובד. זה כמובן קורה כי הפונקציה f איננה מונוטונית יורדת.

4 מחסנית שניה ־ קריטריון קושי

קריטריון קושי להתכנסות אינטגרלים לא אמיתיים

טענה: תהי $f:[a,\infty)$ אינטגרבילית על כל קטע סגור וחסום.

אז האינטגרל $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס אם`ם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N>a$ כך שלכל $N<c<d$ מתקיים $\left|\int\limits_c^d f(x)\,dx\right|<\varepsilon$.

דוגמה : הראו שהאינטגרל $\int\limits_1^\infty x^\alpha\sin(x)\;dx$ מתבדר עבור $\alpha\geqslant 0$.

נעשה זאת באמצעות קריטריון קושי: אם כן, כדי להראות שאינטגרל כלשהו איננו מתכנס, צריך להראות שלא משנה כמה נתרחק, נוכל למצוא שתי נקודות שהאינטגרל ביניהן גדול מערך קבוע כלשהו.

כדי לפשט עניינים, נתמקד באזורים בהם $\sin(x)\geqslant 0$, כלומר עבור $x\in[2n\pi,(2n+1)\pi]$ ל־ $n\geqslant 1$. מאחר ש־ $\alpha\geqslant 0$, לכל x כנ`ל מתקיים $x^\alpha\sin(x)\geqslant\sin(x)$, לכן מספיק שנחפש ε שיספיק ל־ $\sin(x)$. בכל אחד מהקטעים לעיל, יש תת־קטע בו $\sin$ עובר את הנקודה $1/2$ ־ כאשר $x\in[2n\pi+\pi/6,2n\pi+5\pi/6]$. אם כן, לכל $n\geqslant 1$ נקבל

$$\left|\int\limits_{2n\pi+\pi/6}^{2n\pi+5\pi/6} x^\alpha\sin(x)\,dx\right|=\int\limits_{2n\pi+\pi/6}^{2n\pi+5\pi/6} x^\alpha\sin(x)\,dx\geqslant\int\limits_{2n\pi+\pi/6}^{2n\pi+5\pi/6}\sin(x)\,dx\geqslant\int\limits_{2n\pi+\pi/6}^{2n\pi+5\pi/6}\tfrac{1}{2}\,dx=\tfrac{1}{2}\,\tfrac{4\pi}{6}=\tfrac{\pi}{3}$$

לסיכום, עבור $\varepsilon=\pi/3$ נקבל שלכל N ניתן לבחור n גדול מספיק כך שהנקודות $c=2n\pi+\pi/6$ ו־ $d=2n\pi+5\pi/6$ גדולות מ־ N והאינטגרל גדול־שווה ε , ולכן האינטגרל מתבדר.

אינפי 2 למדמ"ח - 2019-2020 - תרגול 11

1 גרפים של פונקציות בכמה משתנים

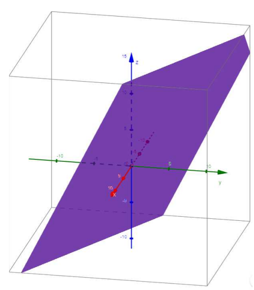
הגדרה: תהי $f: D \to \mathbb{R}$ פונקציה עם תחום הגדרה $D \subseteq \mathbb{R}^p$ (בקורס שלנו אנחנו נעסוק במקרה $p = 2, 3$). הגרף של f היא תת קבוצה של $D \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{p+1}$ המוגדרת ע"י

$$G_f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+1} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in D,\ y \in \mathbb{R},\ y = f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \right\}$$

דוגמה 1 : ציירו את הגרף של הפונקציה f_1 המוגדרת על ידי $f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 2y$.

הגרף של f_1 מוגדר ע"י

$$\begin{aligned} G_{f_1} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+2y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$



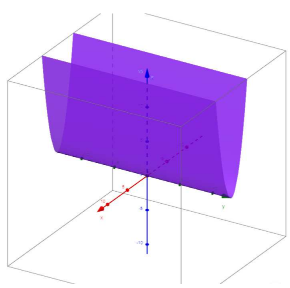
היינו מישור ב-$\mathbb{R}^3$:

דוגמה 2 : ציירו את הגרף של הפונקציה f_2 המוגדרת על ידי $f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2$.

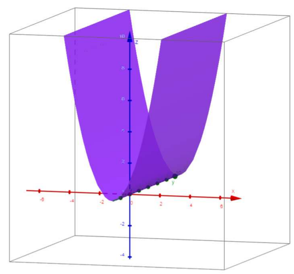
הגרף מוגדר ע"י

$$G_{f_2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

שימו לב שהעובדה ש-f אינה תלויה ב-y מתבטאת בגרף של f, בו ניתן לראות ש-f קבועה לאורך מסלולים שנעים במקביל לציר y:



מבחינה ויזואלית, נציג תמונה נוספת, קצת יותר ברורה, של אותו הגרף המתקבלת כאשר מסובבים את הגרף הקודם ב-90 מעלות סביב ציר z.



דוגמה 3 : ציירו את הגרף של הפונקציה f_3 המוגדרת על ידי $f_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2+y^2$.

1. הגרף הוא

$$G_{f_3} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = f_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} \mid x,y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

ננסה להבין מהי צורה זו - בשלבים.

2. מצאו את החיתוך של G_{f_3} עם המישור $y=0$:

$$G_{f_3} \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid z = x^2+y^2,\, y=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z = x^2 \right\}$$

זוהי פרבולה היושבת בתוך המישור $y=0$ (ציירו), והגרף G_{f_3} מכיל פרבולה זו.

3. באותה צורה החיתוך של G_{f_3} עם המישור $x=0$ הוא הפרבולה $z=y^2$ (ציירו).

4. נבחר מספר ממשי $c \in \mathbb{R}$ ונתבונן במישור $z=c$ (המישור האופקי בגובה c). מהו חיתוך G_{f_3} עם המישור $z=c$?

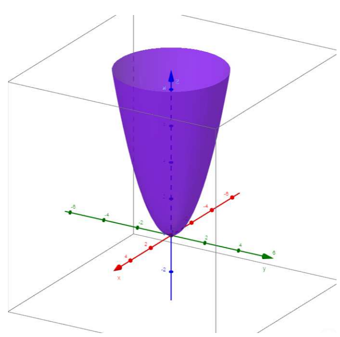
$$G_{f_3} \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x,y \in \mathbb{R},\, z=c \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ c \end{pmatrix} \mid x^2+y^2 = c \right\}$$

אם בחרנו $c>0$, קיבלנו את כל הנק' במישור $z=c$ שמרחקן מהנק' $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ הוא בדיוק $\sqrt{c}$ (ציירו). מה נקבל עבור $c<0$?

קב' ריקה. ועבור $c=0$? נקבל $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

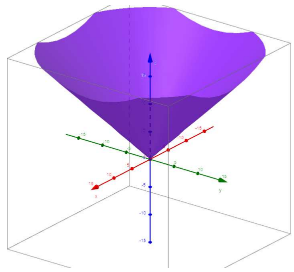
שימו לב: עם נעבור על כל $c \in \mathbb{R}$ ונצייר את החיתוך $G_{f_3} \cap \{z=c\}$ נקבל את הגרף כולו (כל נק' בגרף נמצאת באיזשהו גובה).

5. הצורה $G_{f_3} \subset \mathbb{R}^3$ שקיבלנו נקראת <u>פרבולואיד</u>, ומתקבלת מסיבוב הפרבולה $G_{f_3} \cap \{y=0\}$ סביב ציר z:



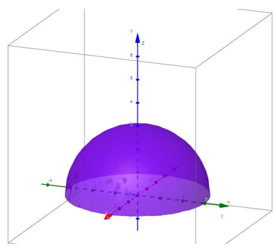
דוגמה 4 : ציירו את הגרף של הפונקציה f_4 המוגדרת על ידי $f_4\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\sqrt{x^2+y^2}$.

כל הגרף של f_4 נמצא בחצי המרחב העליון. לכל $c>0$ המישור $\{z=c\}$ חותך את G_{f_4} במעגל ברדיוס c סביב הנקודה $\begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix}$, כלומר ל־$G_{f_4}$ סימטריה סיבובית סביב ציר z. חיתוך עם המישור $\{y=0\}$ מראה כי G_{f_4} הוא קונוס שקודקודו בראשית וצירו החצי החיובי של ציר z:



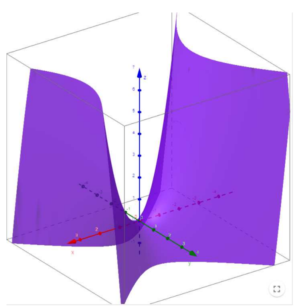
דוגמה 5 : ציירו את הגרף של הפונקציה f_5 המוגדרת על ידי $f_5\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\sqrt{9-x^2-y^2}$

הגרף של f_5 נמצא כולו בין המישור $\{z=0\}$למישור $\{z=3\}$. לכל $0\le c<3$ המישור $\{z=c\}$ חותך את G_{f_5} במעגל ברדיוס $\sqrt{9-c^2}$. מצד שני נשים לב שכל נק' $\begin{pmatrix}x\\y\\\sqrt{9-x^2-y^2}\end{pmatrix}\in G_{f_5}$ נמצאת במרחק 3 מהראשית, לכן G_{f_5} הוא החלק העליון של שפת הכדור ברדיוס 3 סביב הראשית.



דוגמה 6 : ציירו את הגרף של הפונקציה f_6 המוגדרת על ידי $f_6\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x^2-y^2$

החיתוכים עם המישורים $\{x=0\},\{y=0\}$ שניהם פרבולות. הגרף G_{f_6} נראה כמו אוכף:



דוגמה 7 : $f_7\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x^2+y^2+z^2$.

מהו הגרף של f? זוהי תת קבוצה של $\mathbb{R}^4$ המוגדרת ע״י

$$G_{f_7}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\x^2+y^2+z^2\end{pmatrix}\ \middle|\ x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$$

לא ננסה לצייר אותה...

2 קווי גובה

יהי $D \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום ההגדרה של פונקציה $f : D \to \mathbb{R}$. לכל $c \in \mathbb{R}$, **קו הגובה** c של הפונקציה f הוא אוסף הנקודות $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ המקיימות $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$. בסימון קבוצתי, קו הגובה c של f הוא הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \subseteq \mathbb{R}^2 : f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c \right\}.$$

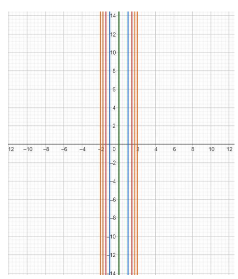
נשים לב שקו הגובה הוא לא תמיד קו. למשל, כאשר $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv 0$, קו הגובה 0 של f הוא כל המישור. נראה כעת כמה דוגמאות עם יותר עניין.

דוגמאות : תארו את קווי גובה עבור הפונקציות הבאות:

1. $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2$
2. $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y - x^2$
3. $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy$
4. $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
5. $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{x^2 + y^2}$

<u>פתרון</u> :

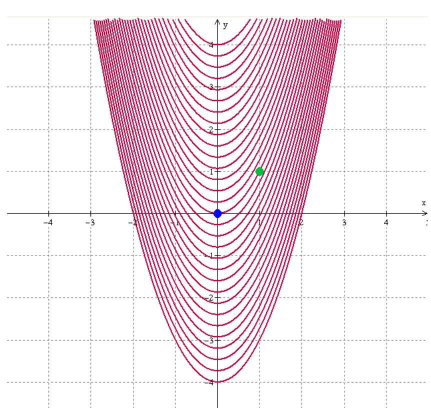
1. נשים לב שלכל $c < 0$, לא קיימים $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ כך ש־$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$. קו הגובה המתאים ל־$c = 0$ הוא ציר ה־y, שבו $x = 0$. לכל $c > 0$, קו הגובה המתאים ל־c הוא שני קווים מקבילים, בהם $x = \pm\sqrt{c}$. בתמונה מוצגים קווי הגובה עבור $c = 0, 1, 2, 3, 4$.



2. קו הגובה המתאים ל־ $c \in \mathbb{R}$ כולל את כל הנקודות $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ המקיימות את המשוואה $y - x^2 = c$.

   על כן זהו הגרף של הפרבולה $y = x^2 + c$.

הערה : קווי הגובה כולם מתקבלים מהזזת הגרף של הפונקציה $y = x^2$. באופן כללי, אם $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y - g(x)$ (עבור $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), קווי הגובה כולם יהיו הזזות אופקיות של הגרף של g .



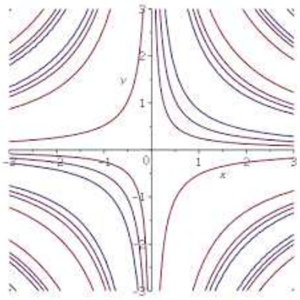
3. קו הגובה המתאים ל־ $c \in \mathbb{R}$ כולל את כל הנקודות $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ המקיימות את המשוואה $xy = c$.

עבור $c = 0$, המשוואה $xy = 0$ שקולה ל־ $x = 0 \ \vee \ y = 0$. על כן קו הגובה של $c = 0$ הוא איחוד ציר x וציר y (צורת +).

אם $c \neq 0$ אז נובע המשוואה $xy = c$ ש־ $x \neq 0$ ולכן $xy = c$ **שקול** ל־ $y = \dfrac{c}{x}$. זוהי משוואה של היפרבולה.

כאשר $c > 0$, ענף אחד של ההיפרבולה ברביע הראשון והענף השני ברביע השלישי.

כאשר $c < 0$, ענף אחד של ההיפרבולה ברביע השני והענף האחר ברביע הרביעי.



4. ראשית נשים לב שהפונקציה לא מוגדרת על כל המישור ־ תחום ההגדרה כולל רק את הנקודות המקיימות $x^2 + y^2 \leqslant 9$.

קו הגובה המתאים ל־ $c \in \mathbb{R}$ כולל את כל הנקודות $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ המקיימות את המשוואה $\sqrt{9 - x^2 - y^2} = c$.

לכל $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ בתחום ההגדרה מתקיים $\sqrt{9 - x^2 - y^2} \geqslant 0$, ולכן אין נקודות בקו הגובה אם $c < 0$.

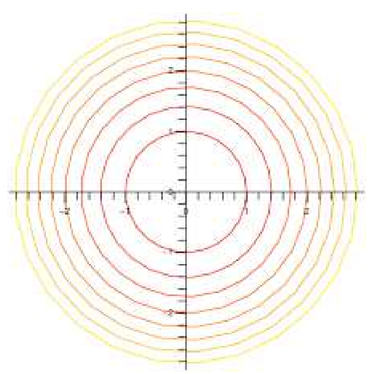
עבור $c \geqslant 0$, המשוואה $\sqrt{9 - x^2 - y^2} = c$ **שקולה** ל־ $x^2 + y^2 = 9 - c^2$.

לכל $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ מתקיים $x^2 + y^2 \geqslant 0$ ולכן אין נקודות בקו הגובה אם $9 - c^2 < 0$, כלומר אם $9 < c^2$.

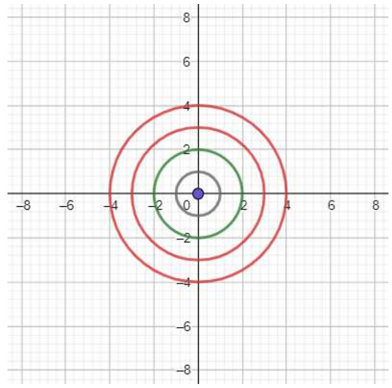
זה שקול ל־ $\sqrt{9} < \sqrt{c^2}$, ז`א ל־ $3 < |c|$. היות ו־ $c \geqslant 0$, קו הגובה המתאים ל־ c הוא ריק כאשר $3 < c$.

אם $0 \leqslant c \leqslant 3$ אז $0 \leqslant 9 - c^2$, והמשוואה $x^2 + y^2 = 9 - c^2$ של קו הגובה מתארת מעגל סביב הראשית, שרדיוסו $\sqrt{9 - c^2}$.

עבור $c = 3$, קו הגובה הוא למעשה נקודה יחידה ־ ראשית הצירים.



5. נשים לב שבשונה מהדוגמה הקודמת, הריווחים של קווי הגובה במקרה הזה יהיו שווים. כלומר, קו הגובה עבור $c = 1$ הוא המעגל ברדיוס 1 סביב הראשית, קו הגובה עבור $c = 2$ הוא המעגל ברדיוס 2 סביב הראשית, וכן הלאה:



הערה: שימו לב שקווי הגובה הם תת־קבוצה של המישור xy **ולא** החיתוך של הגרף עם המישור $\{z = c\}$. כלומר, קווי הגובה הם ההשלך של חיתוך הגרף עם המישור $\{z = c\}$ על מישור xy.

3 סדרות ב־$\mathbb{R}^p$

תזכורת: נאמר שסדרה $(\vec{x_n})_{n=1}^{\infty}$ של נקודות ב־$\mathbb{R}^p$ מתכנסת לנקודה $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^p$ אם`ם מתקיים : $\lim\limits_{n\to\infty} \|\vec{x_n} - \vec{x_0}\| = 0$.

תרגיל 1: קיבעו אילו מבין הסדרות $(\vec{x_n})_{n=1}^{\infty}$ הבאות מתכנסות, ומיצאו את הגבול של אלו שמתכנסות:

1. $\vec{x_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\, ,\, 1 + \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2$
2. $\vec{x_n} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\, ,\, e^{-n},\, \cos(\frac{1}{n})\, ,\, 2n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \in \mathbb{R}^4$
3. $\vec{x_n} = \left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right) \in \mathbb{R}^2$

פתרון: 1. ניקח $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ואז : $\|\vec{x_n} - \vec{x_0}\|^2 = \left(\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) - 1\right)^2 + \left(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - 1\right)^2 = \dfrac{2}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ולכן $\|\vec{x_n} - \vec{x_0}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, כלומר $\vec{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. גם פה כמובן אפשר לעבוד באותה הצורה, אבל זה יהיה מבאס מבחינה חישובית. במקום זה ניזכר שהראיתם שסדרה ב־$\mathbb{R}^n$ מתכנסת אם ורק אם היא מתכנסת לפי כל רכיב, ובמקרה זה מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} (\vec{x_n}(1), \ldots, \vec{x_n}(p)) = \left(\lim_{n\to\infty} \vec{x_n}(1), \ldots, \lim_{n\to\infty} \vec{x_n}(p)\right)$$

על כן נוכל לרשום:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \vec{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\, ,\, e^{-n},\, \cos(\frac{1}{n})\, ,\, 2n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \\ &= \left(\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\, ,\, \lim_{n\to\infty} e^{-n}\, ,\, \lim_{n\to\infty} \cos(\frac{1}{n})\, ,\, \lim_{n\to\infty} \left(2n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = (0, 0, 1, 2) \end{aligned}$$

3. גיאומטרית, זו סדרה ש־`מסתובבת` על מעגל היחידה ־ מתחילה מהנקודה $(1, 0)$ ובכל צעד עושה רבע סיבוב נגד כיוון השעון. לכן לא נצפה שהיא תתכנס לשום מקום. פורמלית, מספיק למצוא קואורדינטה אחת שבה היא לא מתכנסת, למשל בקואורדינטה השניה מקבלים את הסדרה $(0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots)$, שלא מתכנסת, וזה מסיים את ההוכחה. גיאומטרית, מה שעשינו הוא להסביר שההיטל של הסדרה על ציר ה־y לא מתכנס, ולכן הסדרה עצמה לא מתכנסת.

תרגיל 2: נתבונן בסדרה $\vec{x_n} = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot (-1)^n\, ,\, \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)\, ,\, \cos\left(\frac{\pi n}{5}\right)\right) \in \mathbb{R}^3$. מיצאו תת־סדרה מתכנסת שלה.

פתרון: זוהי סדרה חסומה, מפני שהיא חסומה לפי כל רכיב (כל אחת מהקואורדינטות חסומה בערך מוחלט ע"י 1). לחילופין :

$$\|\vec{x_n}\|^2 = \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \cdot ((-1)^n)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi n}{5}\right) \leqslant 1^2 \cdot 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$$

ולכן הסדרה מוכלת בכדור ברדיוס 3 סביב הראשית. בשיעור הראיתם שלכל סדרה חסומה ב־$\mathbb{R}^p$ יש תת־סדרה מתכנסת, ועל־כן אנחנו יכולים לדעת שאכן יש תת־סדרה כמבוקש.

כדי למצוא אחת ספציפית כזו, נשחזר את הוכחת הטענה הכללית במקרה הפרטי הנוכחי (למעשה, מטרתו הדידקטית של התרגיל הזה היא להבין טוב יותר את ההוכחה של הטענה הכללית דרך דוגמה).

ראשית, נמצא תת־סדרה כך שהקואורדינטה הראשונה מתכנסת: הסדרה בקואורדינטה הראשונה הינה $\vec{x_n}(1) = \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot (-1)^n$, ותת־סדרה מתכנסת שלה הינה למשל $\vec{x_{2n}}(1) = \left(1-\frac{1}{2n}\right)\cdot(-1)^{2n} = \left(1-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1$.

לכן ניקח את תת־הסדרה : $(\vec{x_{2n}})_{n=1}^{\infty} = \left(\left(1-\frac{1}{2n}, \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right), \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ של הסדרה המקורית.

כעת נמצא תת־סדרה של $(\vec{x_{2n}})_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת בקואורדינטה השניה. מתקיים $\vec{x_{2n}}(2) = \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$, ותת־סדרה מתכנסת שלה הינה למשל $\vec{x_{6n}}(2) = \sin(2\pi n) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

לכן ניקח את תת־הסדרה : $(\vec{x_{6n}})_{n=1}^{\infty} = \left(\left(1-\frac{1}{6n}, 0, \cos\left(\frac{6\pi n}{5}\right)\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ של $(\vec{x_n})_{n=1}^{\infty}$.

לבסוף, נמצא תת־סדרה של $(\vec{x_{6n}})_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת בקואורדינטה השלישית. מתקיים $\vec{x_{6n}}(3) = \cos\left(\frac{6\pi n}{5}\right)$, ותת־סדרה מתכנסת שלה הינה למשל $\vec{x_{30n}}(3) = \cos(6\pi n) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

לכן ניקח את תת־הסדרה : $(\vec{x_{30n}})_{n=1}^{\infty} = \left(\left(1-\frac{1}{30n}, 0, 1\right)\right)_{n=1}^{\infty}$, ואז מתקיים $\vec{x_{30n}} \xrightarrow{n\to\infty} (1,0,1)$.

ואכן מצאנו תת־סדרה מתכנסת של $(\vec{x_n})_{n=1}^{\infty}$.

4 מחסנית ־ המשך של סדרות ב־$\mathbb{R}^p$

תרגיל 3: תהי $\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in [0,2\pi] \right\}$ ותהי $(\vec{x_n})_{n=1}^{\infty} \subset \gamma$ סדרה המתכנסת לגבול $\vec{x_0}$. הראו כי $\vec{x_0} \in \gamma$.

פתרון: דרך א' : תהי $(\vec{x_n})_{n=1}^{\infty} = (\cos(t_n)\,,\,\sin(t_n))_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב־ γ , המתכנסת לנקודה $\vec{x_0} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $t_n \in [0,2\pi]$, כלומר הסדרה $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה.

לכן יש לה תת־סדרה $(t_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת : $\lim\limits_{k\to\infty} t_{n_k} = t_0$. מ־ $0 \leqslant t_{n_k} \leqslant 2\pi$ נובע ש־ $0 \leqslant t_0 \leqslant 2\pi$.

מרציפות הפונקציות cos ו־ sin נובע ש־ $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x_{n_k}} = \lim\limits_{k\to\infty} (\cos(t_{n_k})\,,\,\sin(t_{n_k})) = (\cos(t_0)\,,\,\sin(t_0))$.

מצד שני נובע ממשפט הירושה ש־ $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x_{n_k}} = \vec{x_0} = (a,b)$, ולכן $(a,b) = (\cos(t_0)\,,\,\sin(t_0)) \in \gamma$, כנדרש.

דרך ב' : מתקיים $\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a^2+b^2=1 \right\}$.

תהי, אם כך, $(\vec{x_n})_{n=1}^{\infty} = (a_n, b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב־ γ , המתכנסת לנקודה $\vec{x_0} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

אזי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n^2 + b_n^2 = 1$, וכן $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, $b_n \xrightarrow{n\to\infty} b$, ומאריתמטיקה של גבולות:

$$a^2+b^2 = \lim_{n\to\infty} a_n^2 + \lim_{n\to\infty} b_n^2 = \lim_{n\to\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

ועל כן $\vec{x_0} \in \gamma$, והוכחנו את הדרוש. ■

הערה: תת־קבוצה של $\mathbb{R}^p$ המקיימת את התכונה הזו נקראת קבוצה סגורה.

טענה (מבחן קושי להתכנסות סדרות ב־$\mathbb{R}^p$):

תהי $(\vec{x_n})_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב־ $\mathbb{R}^p$.

אזי $(\vec{x_n})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n,m > N$ מתקיים $\|\vec{x_n} - \vec{x_m}\| < \epsilon$.

הוכחה: נראה את הכיוון $\Rightarrow$. את הכיוון ההפוך תראו בתרגיל הבית.

נניח שמתקיים תנאי קושי. יהי $1 \leqslant i \leqslant p$, ויהי $\epsilon > 0$. אזי קיים N כך שלכל $m, n > N$ מתקיים:

$$|\vec{x_n}(i) - \vec{x_m}(i)| \leqslant \|\vec{x_n} - \vec{x_m}\| < \epsilon$$

ולכן מתקיים תנאי קושי בקואורדינטה ה־ i . לפיכך סדרת המספרים $(\vec{x_n}(i))_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת. הוכחנו שהסדרה $(\vec{x_n})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לפי כל רכיב, ולכן היא מתכנסת.

אינפי 2 למדמ"ח - 2019-2020 - תרגול 12

1 מסילות

תזכורת: מסילה היא העתקה רציפה $\gamma : I \to \mathbb{R}^p$ כאשר $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע, ו־$2 \leq p \in \mathbb{N}$. בדוגמאות הבאות, עבור כל אחת מהמסילות נברר מהי התמונה שלה, האם היא גזירה, מהו וקטור המהירות שלה, התאוצה שלה ונמצא מסילה משיקה.

1.1 ישר וקטע

יהיו $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ו־ $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ שתי נקודות ב־$\mathbb{R}^2$. יהא L הישר העובר דרך A ו־B. אפשר לתאר את L בצורה הבאה:

$$y = y_0 + \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0)$$

(הצגה כזו נקראת הצגה סתומה). נשים לב שההצגה הזו אפשרית רק כאשר $x_0 \neq x_1$. כאשר $x_1 = x_0$, הישר L הוא הישר $x = x_0$.

ראינו שהמסילה $\gamma(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י

$$\gamma(t) = (1-t)A + tB = \begin{pmatrix} (1-t)x_0 + tx_1 \\ (1-t)y_0 + ty_1 \end{pmatrix}$$

היא מסילה שתמונתה היא L, וש־$\gamma([0,1]) = [A,B]$, כאשר $[A,B]$ מסמן את הקטע על L שמחבר את A עם B.

נראה עכשיו מסילה אחרת שתמונתה היא L.

נתבונן במסילה

$$\gamma_1(t) = (1-t^2)A + t^2 B = \begin{pmatrix} (1-t^2)x_0 + t^2 x_1 \\ (1-t^2)y_0 + t^2 y_1 \end{pmatrix}.$$

מהי התמונה של $[0,1]$ תחת γ_1?

$$\gamma_1([0,1]) = \gamma([0,1]) = [A,B],$$

שכן $\varphi(t) = t^2$ היא פונקציה חח"ע ועל מהקטע $[0,1]$ לעצמו.
מהי התמונה של $\mathbb{R}$ תחת γ_1?

$$\gamma_1(\mathbb{R}) = \gamma([0,\infty]),$$

שזו הקרן המוכלת ב־L שמתחילה ב־A ועוברת דרך B.
מהו וקטור המהירות?

$$\gamma_1'(t) = \begin{bmatrix} -2tx_0 + 2tx_1 \\ -2ty_0 + ty_1 \end{bmatrix} = 2t \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix} = 2t\vec{AB}$$

כאשר $\vec{AB} = (B - A)$.
הגדרה: תהי $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ מסילה, ותהי $t_0 \in I$. המסילה המשיקה ל־γ בנקודה t_0 היא המסילה המוגדרת ע"י

$$L_{\gamma,t_0}(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0)$$

מהי המסילה המשיקה ל־γ_1 ב־$t_0 \in \mathbb{R}$?

$$L_{\gamma,t_0}(t) = \gamma_1(t_0) + (t - t_0)\gamma_1'(t_0) = \gamma_1(t_0) + 2(t - t_0) \cdot t_0\vec{AB}.$$

הגדרה: תהי $\gamma : I \to \mathbb{R}$ $= \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ מסילה כך ש־$f, g : I \to \mathbb{R}$ גזירות פעמיים. וקטור התאוצה של γ בנקודה $t_0 \in I$ הוא הוקטור

$$\gamma''(t_0) = \begin{bmatrix} f''(t_0) \\ g''(t_0) \end{bmatrix}.$$

דוגמאות: וקטור התאוצה של γ לעיל הוא וקטור האפס:

$$.\gamma''(t) = \begin{bmatrix} ((1-t)x_0 + tx_1)'' \\ ((1-t)y_0 + ty_1)'' \end{bmatrix} = \vec{0}$$

מהו וקטור התאוצה של γ_1 ב־$t_0 \in \mathbb{R}$?

$$.\gamma_1''(t_0) = 2\vec{AB} \neq \vec{0}$$

1.2 גרף של פונקציה

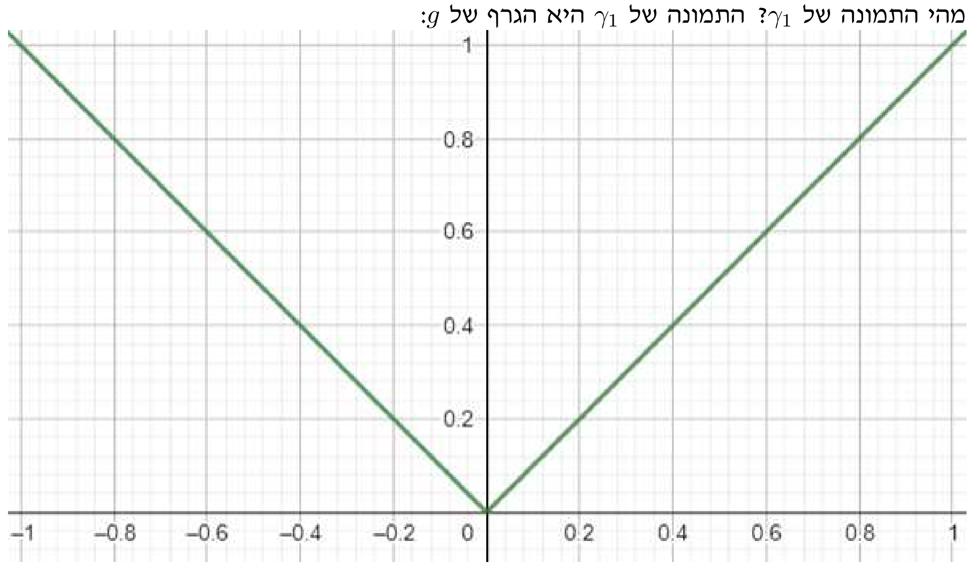
יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ותהי $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה. אזי קיימת מסילה ב־$\mathbb{R}^2$ שמסלולה הוא הגרף של g. למשל, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}$ היא מסילה כזו.

תהא $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ הפונקציה $g(t) = |t|$.

1. נתבונן במסילה $\gamma_1(t) : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י

$$.\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ |t| \end{pmatrix}$$

מהי התמונה של γ_1? התמונה של γ_1 היא הגרף של g:



האם γ_1 גזירה? γ_1 גזירה ב־$t_0 \in [-1,1]$ אמ"מ g גזירה ב־t_0. לכן, γ_1 גזירה בכל נקודה ב־$[-1,1]$ פרט לנקודה 0. הנגזרת היא:

$$.\gamma_1'(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} & t < 0 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & t > 0 \end{cases}$$

2. נגדיר $\gamma_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ ע"י

$$.\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ |t|^3 \end{pmatrix}$$

תמונתה של γ_2 גם היא הגרף של g שכן $\varphi(t) = t^3$ היא פונקציה חח"ע ועל מהקטע $[-1,1]$ לעצמו.
האם γ_2 גזירה? נשים לב שבקואורדינטה הראשונה, t^3 גזירה על כל $\mathbb{R}$ ובפרט גזירה ב־$[-1,1]$. בקואורדינטה השניה, הפונקציה

$|t|^3$ גם היא גזירה על כל $\mathbb{R}$ ולכן γ_2 גזירה בכל נקודה ב־$[-1,1]$, ומתקיים

$$\gamma_2'(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 3t^2 \\ -3t^2 \end{bmatrix} & t \le 0 \\ \begin{bmatrix} 3t^2 \\ 3t^2 \end{bmatrix} & t \ge 0 \end{cases}.$$

מסקנה: הגזירות של מסילה לא בהכרח ניכרת מהתמונה שלה. בדוגמה הזו רואים שאפילו אם לתמונה יש חוד, המסילה עדיין יכולה להיות גזירה. חודים שכאלו נמנעים בעזרת ההגדרה הבאה:

הגדרה: מסילה $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ נקראת חלקה אם לכל $t \in I$, γ גזירה ב־t ומתקיים $\gamma'(t) \neq \vec{0}$.

נשים לב שזה אינו המצב עבור γ_2, שכן $\gamma_2'(0) = \vec{0}$.

1.3 מעגל

מעגל היחידה ב־$\mathbb{R}^2$ הוא עקום הניתן ע"י ההצגה הסתומה

$$x^2 + y^2 = 1.$$

אפשר להציג אותו כתמונה של מסילה למשל בצורה הבאה:

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

וקטור המהירות הוא

$$\gamma_1'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}.$$

הגדרה: עבור וקטור $v \in \mathbb{R}^2 = v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, הנורמה של v, המסומנת $\|v\|$, היא המרחק של v מראשית הצירים. במילים אחרות,

$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

כשמחשבים את הנורמה (המרחק מראשית הצירים) של וקטור המהירות מקבלים שלכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים $\|\gamma_1(t)\| = 1$. נוכיח ש־$\gamma_1(t) \perp \gamma_1'(t)$ לכל $t \in \mathbb{R}$ ע"י טענה יותר כללית:

טענה: תהא $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ מסילה גזירה ב־$\mathbb{R}^2$ כך שלכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים $\|\gamma(t)\| = C$ לאיזשהו קבוע $C \in \mathbb{R}$. אזי לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים $\gamma(t) \perp \gamma'(t)$.

הוכחה: נגזור את השוויון $\|\gamma(t)\|^2 = C^2$ ונקבל:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\|\gamma(t)\|^2 = \\ &= \frac{d}{dt}(x(t)^2 + y(t)^2) = \\ &= 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = \\ &= 2\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle \end{aligned}$$

וזו ההגדרה של ניצבות ב־$\mathbb{R}^2$ (כאשר הסימון $\langle \cdot, \cdot \rangle$ הוא סימון המכפלה הפנימית).

תרגיל: מצאו מסילה שתמונתה היא מעגל ברדיוס R סביב $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

פתרון: ניתן לקחת $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix}.$$

תרגיל: האם ניתן להציג את אותו המעגל כתמונה של מסילה מהתחום $[0,\pi]$?

פתרון: נגדיר $\gamma:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$ ע"י

$$\gamma(t)=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} R\cos(2t) \\ R\sin(2t) \end{pmatrix}.$$

נשים לב שכעת, וקטור המהירות הוא

$$\gamma'(t)=2\begin{pmatrix} -R\sin(2t) \\ R\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

1.4 משולש

תרגיל: יהיו $A=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו־ $C=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. מצאו מסילה שתמונתה היא המשולש ABC.

פתרון: אפשר לקחת את המסילה הבאה:

$$\gamma(t)=\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 2-t \end{pmatrix} & 0\le t\le 2 \\ \begin{pmatrix} t-2 \\ 0 \end{pmatrix} & 2\le t\le 4 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}+(t-4)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 2-(t-4) \\ t-4 \end{pmatrix} & 4\le t\le 6 \end{cases}.$$

2 נגזרות חלקיות

2.1 נגזרות חלקיות

תזכורת: תהי $U\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה המכילה סביבה מלאה של הנקודה P_0, ותהי $f:U\to\mathbb{R}$. הנגזרת החלקית לפי x בנקודה $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=P_0\in U$ מוגדרת ע"י הגבול

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\begin{pmatrix} x_0+t \\ y_0 \end{pmatrix}-f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}{t}$$

או בקיצור,

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\left(P_0+t\cdot\vec{e_1}\right)-f\left(P_0\right)}{t}.$$

הנגזרת החלקית לפי y באותה נקודה מוגדרת ע"י הגבול

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0+t \end{pmatrix}-f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}{t}$$

או בקיצור,

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\left(P_0+t\cdot\vec{e_2}\right)-f\left(P_0\right)}{t}.$$

סימנו את הנגזרת החלקית לפי x ב־ P_0 ב־$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$, ואת הנגזרת החלקית לפי y בP_0 ב־$\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$.

הערה: זהו הסימון לפי לייבניץ. סימון נוסף שראינו לנגזרת החלקית לפי x, y בנקודה P_0 הוא $D_1f(P_0), D_2f(P_0)$ בהתאמה.
אינטואיטיבית, עבור פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, הנגזרת ב־ x_0 מדדה את קצב ההשתנות של הפונקציה בנקודה x_0 . כלומר, מהו קצב השינוי של f אם זזים מעט מ־ x_0 .

עבור פונקציה $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, הנגזרת החלקית לפי x או y בנקודה P_0 מודדת את קצב השינוי של f אם זזים מעט מ־P_0, <u>בכיוון הרלוונטי.</u>

דוגמה: חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3x^2y + y^2$$

בנקודה $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ כלשהי.

פתרון: נחשב את $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$ ישירות מההגדרה. מתקיים:

$$f\begin{pmatrix} x_0 + t \\ y_0 \end{pmatrix} = 3(x_0 + t)^2 y_0 + y_0^2 = 3x_0^2y_0 + 6x_0y_0t + 3t^2 + y_0^2$$

$$f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 3x_0^2y_0 + y_0^2$$

נחסיר:

$$f\begin{pmatrix} x_0 + t \\ y_0 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 6x_0y_0t + 3t^2$$

נחלק ב־ t ונשאיף את $t \to 0$:

$$\frac{f\begin{pmatrix} x_0 + t \\ y_0 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}{t} = 6x_0y_0 + 3t \xrightarrow[t \to 0]{} 6x_0y_0$$

ולכן הנגזרת החלקית לפי x קיימת, וערכה הוא

$$\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 6x_0y_0$$

באופן דומה, נחשב את הנגזרת החלקית לפי y (המשתנה השני של f):

$$f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + t \end{pmatrix} = 3x_0^2(y_0 + t) + (y_0 + t)^2 = 3x_0^2y_0 + 3x_0^2t + y_0^2 + 2y_0t + t^2$$

ולכן:

$$f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + t \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 3x_0^2t + 2y_0t + t^2$$

וכאשר נחשב את הגבול:

$$\frac{f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + t \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}{t} = 3x_0^2 + 2y_0 + t \xrightarrow[t \to 0]{} 3x_0^2 + 2y_0$$

ועל כן הנגזרת החלקית לפי y קיימת, וערכה הוא

$$\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 3x_0^2 + 2y_0$$

הערה: כמו בדוגמה זאת, פעמים רבות ניתקל בפונקציה שבה הנגזרות החלקיות קיימות ב`רוב` (או כל) תחום ההגדרה של הפונקציה המקורית. במקרים כאלה, נוכל לדבר על פונקציית הנגזרת החלקית של f, במשתנה הראשון / השני, וכן הלאה. (כמו שבמקרה של פונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, הגדרנו נגזרת בנקודה, ואז דיברנו על פונקציית הנגזרת f').
בדוגמה שלנו, עבור הפונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, הנגזרות החלקיות מוגדרות גם הן על כל המישור. נוכל לרשום מפורשות את שלושת הפונקציות:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3x^2y+y^2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x^1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=6xy \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3x^2+2y$$

האם בכל פעם שעלינו לחשב נגזרת חלקית, נצטרך לעבוד ישירות עם הגבול מההגדרה? כמובן שלא.
פעמים רבות, ניתקל בפונקציה שמוגדרת ע"י פעולות בסיסיות בין המשתנים, והרכבות עם פונקציות אלמנטריות - שעבורן כבר פיתחנו והוכחנו כללי גזירה שימושיים. נוכל להשתמש בכלים אלה גם לחישוב נגזרות חלקיות.
כאשר אנו מחשבים נגזרת חלקית, מה שאנחנו עושים הוא לבדוק איך הפונקציה מתנהגת ביחס לאחד מהמשתנים (ובפרט - מחשבים את הנגזרת של פונקציה זו).
ייתכן שחלקכן כבר רואות את הקשר בין f לבין הנגזרות החלקיות, בדוגמה למעלה:

טענה: בהינתן פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, הנזרת החלקית לפי x של f בנקודה $P_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$, מתקבלת באופן הבא:

1. נגזור את הפונקציה f ביחס למשתנה x, כאשר במהלך הגזירה נתייחס ליתר המשתנים כקבועים.
2. נציב בביטוי שהתקבל את P_0.

יתר על כן: פרט להצבה $x=x_0$, ניתן להציב את ערכי המשתנים האחרים לפני שגוזרים.

הוכחה: גם החישוב בטענה, וגם הגבול אשר מגדיר את הנגזרת החלקית, שווים לנגזרת של הפונקציה (במשתנה אחד):

$$\varphi(t)=f\begin{pmatrix}t\\y\end{pmatrix}$$

בנקודה $t=x_0$.

הערה: טענה דומה קיימת גם לנגזרת החלקית לפי y.

נשים לב שכאשר הנגזרות החלקיות קיימות בכל תחום ההגדרה, לכל נקודה P_0 ניתן להתאים את הוקטור

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\end{pmatrix}$$

ובעצם אנחנו מקבלים פונקציה מ-$\mathbb{R}^2$ ל-$\mathbb{R}^2$. כעת, ניתן לבדוק האם הפונקציה שקיבלנו היא גזירה לפי x או y.

דוגמא: נחזור לפונקציה שראינו מקודם, $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3x^2y+y^2$. כפי שראינו, הפונקציה הזו גזירה גם לפי x וגם לפי y בכל נקודה $P_0\in\mathbb{R}^2$. כעת, נשים לב שלכל $P_0\in\mathbb{R}^2$ מתקיים:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x_0y_0\\ 3x_0^2+2y_0\end{pmatrix}.$$

נבדוק האם הפוקנציה שקיבלנו גזירה לפי x ולפי y (בנקודה $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$). על מנת לעשות זאת, נסמן $G(P_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\\ \frac{\partial f}{\partial Y}(P_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(P_0)\\f_2(P_0)\end{pmatrix}$. כעת, ניתן לגזור חלקית את f_1 ואת f_2 כמו בטענה לעיל, ונקבל

$$\frac{\partial G}{\partial x}(P_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(P_0)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(P_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6y_0\\6x_0\end{pmatrix}.$$

באותו אופן, נקבל

$$\frac{\partial G}{\partial y}(P_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y}(P_0)\\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(P_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x_0\\2\end{pmatrix}$$

חשבון אינפיניטיסימלי 2 למדמ`ח - סמסטר ב' תש"ף - תרגול 5

1 טורים

הגדרה: תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים שלה $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ ע"י $s_k=\sum\limits_{n=1}^{k}a_n$.

אם קיים הגבול (במובן הצר) $\lim\limits_{k\to\infty}s_k=s\in\mathbb{R}$, נאמר כי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס ונגדיר $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=s$.

אחרת, נאמר כי הטור מתבדר. אם $\lim\limits_{k\to\infty}s_k=\infty$, נאמר שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר לאינסוף, וכנ"ל לגבי $-\infty$.

a_n נקרא האיבר הכללי של הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

משפט: אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ טור מתכנס, אזי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. כלומר, תנאי הכרחי להתכנסות טור הוא שהאיבר הכללי שלו יתכנס לאפס.

הערה : ראיתם בהרצאה שהתנאי הוא הכרחי אבל לא מספיק: הטור ההרמוני $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מהווה דוגמה נגדית.

תרגיל 1 : האם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$ מתכנס?

הטור איננו מתכנס משום ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\neq 0$. התנאי ההכרחי לא מתקיים ולכן הטור מתבדר.

תרגיל 2 : האם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$ מתכנס? אם כן, מה סכום הטור?

$\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה הנדסית, ולכן $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$ נקרא טור הנדסי (או גיאומטרי).

ראשית שימו לב ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=0$, כלומר התנאי ההכרחי להתכנסות טור מתקיים.

כאן יש כתיב חלופי לסדרת הסכומים החלקיים $(s_k)_{k=1}^{\infty}$:

$$s_k=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{3^{n-1}}=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{k-1}}=\frac{1-3^{-k}}{1-\frac{1}{3}}\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$$

טענה : באופן כללי, אם $q\in(-1,1)$ אז הטור הגיאומטרי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^{n-1}$ מתכנס ל- $\frac{1}{1-q}$. אם $|q|\geqslant 1$ אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^{n-1}$ מתבדר.

טענה (כלל הכפל בקבוע באריתמטיקה של טורים) : תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ויהא $c\in\mathbb{R}$ קבוע נתון. אזי מתקיים

(1) אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, אזי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c\cdot a_n)$ מתכנס , יתרה מכך $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c\cdot a_n)=c\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

(2) אם $c\neq 0$ ו- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c\cdot a_n)$ מתכנס, אזי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

הוכחה :

יהיו $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ ו־ $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת הסכומים החלקיים של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ושל $(c\cdot a_n)_{n=1}^{\infty}$ בהתאמה : $s_k=\sum_{n=1}^{k}a_n$ ו־ $t_k=\sum_{n=1}^{k}c\cdot a_n$.

עבור כל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $t_k = \sum_{n=1}^{k}(c\cdot a_n) = c\cdot\sum_{n=1}^{k}a_n = c\cdot s_k$. כלומר $(t_k)_{k=1}^{\infty}=(c\cdot s_k)_{k=1}^{\infty}$.

(1) נניח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס למספר ממשי s , כלומר סדרת הסכומים החלקיים $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־ s .

לכן נובע מאריתמטיקה של גבולות ש־$(t_k)_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ומתקיים $\lim_{k\to\infty}t_k = \lim_{k\to\infty}(c\cdot s_k) = c\cdot\lim_{k\to\infty}s_k = c\cdot s$.

במילים אחרות, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(c\cdot a_n)$ מתכנס ומתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c\cdot a_n) = \lim_{k\to\infty}t_k = c\cdot s = c\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

(2) $c\neq 0$ ולכן c^{-1} מוגדר. נתון ש־ $\sum_{n=1}^{\infty}(c\cdot a_n)$ מתכנס, ולכן נובע מ־ (1) ש־ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(c^{-1}(c\cdot a_n)\right)$ מתכנס, ז"א $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס. ■

מסקנה : אם $c\neq 0$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס <u>אם ורק אם</u> $\sum_{n=1}^{\infty}c\cdot a_n$ מתכנס.

הגדרה : בהינתן מספר טבעי m וסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, נסתכל על m־ הזנב שלה $(a_{m+n})_{n=1}^{\infty}=(a_{m+1},a_{m+2},a_{m+3},..)$.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_{m+n}$ המתאים ל־ m־ הזנב $(a_{m+n})_{n=1}^{\infty}$ נקרא m־ זנב של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, והוא יסומן גם $\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n$.

משפט : תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה נתונה. אזי שלוש הטענות הבאות שקולות:

(1) הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

(2) כל m ־זנב של $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

(3) קיים m־ זנב של הטור שמתכנס.

במקרה זה מתקיים : $\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1}^{m}a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty}a_n$

<u>הוכחה</u> : בסוף התרגול, **אם ישאר זמן.**

2 טורים חיובים

הגדרה : $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ יקרא טור חיובי אם $a_n\geqslant 0$ עבור כל $n\in\mathbb{N}$.

טענה : סדרת הסכומים החלקיים של טור חיובי היא מונוטונית עולה ולכן יש לה גבול במובן הרחב.

בפרט טור חיובי מתכנס אם"ם סדרת הסכומים החלקיים שלו חסומה.

טענה (מבחן ההשוואה) :

יהיו $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות אי־שליליות. נניח שקיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n \leqslant b_n$. אז:

(i) אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

(ii) אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

תרגיל 3 : האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^2+1}$ מתכנס?

ראשית שימו לב ש־ $\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n^2+1} = 0$, כלומר התנאי ההכרחי להתכנסות טור מתקיים.

עבור כל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\frac{1}{n} = \frac{2n}{2n^2} \geqslant \frac{3n-1}{n^2+1}$. נסמן $a_n = \frac{1}{n}$ ו־ $b_n = \frac{3n-1}{n^2+1}$. $b_n \geqslant a_n$ עבור כל $n \in \mathbb{N}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר משום שמדובר בטור ההרמוני,לכן ממשפט ההשוואה נובע ש־$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^2+1}$ מתבדר.

תרגיל 4 : האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ מתכנס?

נסמן : $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. במבט ראשון <u>לא ברור</u> אם $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = 0$.

נשים לב שמתקיים

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n^2} = \left(\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n}\right)^{n}$$

מתקיים : $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{1+n}\right)^{n} = \frac{1}{e}$. לכן החל ממקום $N \in \mathbb{N}$ מסויים האיבר הכללי חסום מלמעלה על ידי $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{1}{2^n}$.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ מתכנס משום שמדובר בטור גיאומטרי עם מנה חיובית קטנה מ־ 1 . לכן גם הזנב שלו $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ מתכנס.

כעת נובע ממבחן ההשוואה ש־ $\sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ מתכנס , ומכאן אנו מקבלים שלטור המקורי יש זנב מתכנס ולכן הטור המקורי מתכנס.

טענה (מבחן ההשוואה באמצעות מנה) יהיו $p, q \in \mathbb{R}$ כך ש־ $0 < p \leqslant q$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית ו־ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה אי שלילית.

אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $0 < p \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant q$, אז הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו־ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

טענה (מבחן ההשוואה הגבולי) תהי $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית ו־ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה אי שלילית.

אם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ קיים במובן הצר, אז הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו־ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

תרגיל 5 : האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos(\frac{1}{n}))$ מתכנס?

ראשית שימו לב ש־ $\lim_{n\to\infty} (1 - \cos(\frac{1}{n})) = 0$, כלומ התנאי ההכרחי להתכנסות טור מתקיים.

פולינום טיילור מסדר 2 סביב $a=0$ של הפונקציה $f(x)=\cos(x)$ הוא $P_2(x)=1-\frac{x^2}{2}$.

ומתקיים $\cos(x)=P_2(x)+R_2(x)=1-\frac{x^2}{2}+R_2(x)$, עם $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{R_2(x)}{x^2}=0$.

כלומר $1-\cos(x)=\frac{x^2}{2}-R_2(x)$, עם $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{R_2(x)}{x^2}=0$.

בפרט עבור $x=\frac{1}{n}$ נקבל : $\dfrac{1-\cos(\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})^2}=\dfrac{\frac{n^{-2}}{2}-R_2(n^{-1})}{n^{-2}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{R_2(n^{-1})}{n^{-2}}$, ולכן נובע מהיינה ש-

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos(\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{R_2(n^{-1})}{n^{-2}}\right)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$

אם נסמן $a_n=1-\cos(\frac{1}{n})$ ו- $b_n=n^{-2}$, אז הגבול אומר ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{2}>0$.

לכן נובע ממבחן ההשוואה הגבולי שהטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ ו- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

היות ו- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס, גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos(\frac{1}{n}))$ מתכנס.

תרגיל 6 : האם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ מתכנס?

מדובר בטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$. ראשית שימו לב ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}=0$, כלומ התנאי ההכרחי להתכנסות טור מתקיים.

היות ו- $\sqrt[n]{n}\geqslant 1$ עבור כל $n\in\mathbb{N}$, מתקיים $a_n=\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\leqslant\frac{1}{n}=b_n$. כלומר האיבר הכללי של הטור הנתון קטן או שווה מהאיבר הכללי של הטור ההרמוני.

זה <u>לא עוזר</u> לנו משום שהטור ההרמוני מתבדר ולכן לא ניתן להשתמש במבחן ההשוואה עם הטור ההרמוני בתפקיד של $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי עם הטור ההרמוני. מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\;=\;\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}}\;=\;\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\;=\;\frac{1}{1}\;=\;1$$

ולכן לפי מבחן ההשוואה הגבולי, הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ מתבדר.

תרגיל 7 : האם הטור $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{2020}(n)}$ מתכנס?

ראשית שימו לב ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln^{2020}(n)}=0$, כלומ התנאי ההכרחי להתכנסות טור מתקיים.

נשתמש במבחן השוואה הגבולי עם הטור ההרמוני. הוכחתם בתרגיל בית 3 שמתקיים :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\ln^{2020}(n)}}\;=\;\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^{2020}(n)}{n}\;=\;0$$

מבחן ההשוואה הגבולי לא תקף (כי הגבול שווה 0 !).

אך מכך שהגבול הוא 0 נוכל להסיק כי קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $\dfrac{\ln^{2020}(n)}{n}\leqslant 1$, כלומר $\dfrac{1}{n}\leqslant\dfrac{1}{\ln^{2020}(n)}$.

הטור $\sum\limits_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר, ולכן נובע ממבחן ההשוואה הרגיל שגם הטור $\sum\limits_{n=N}^{\infty}\frac{1}{\ln^{2020}(n)}$ מתבדר, ועל כן הטור $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{2020}(n)}$ מתבדר.

טענה (מבחן המנה הגבולי) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של איברים חיוביים.

- אם $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L<1$, אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.
- אם $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L>1$, אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.
- אם $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, אז <u>כשלעצמו</u> הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ איננו מכריע את שאלת ההתכנסות או ההתבדרות של $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

תרגיל 8 : האם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ מתכנס?

נסמן : $a_n=\frac{2^n n!}{n^n}$. במבט ראשון <u>לא ברור</u> אם $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n}=0$.

ננסה להשתמש במבחן המנה הגבולי:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}}=\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot n^n}{2^n\cdot n!\cdot(n+1)^{n+1}}=2\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=2\cdot\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$
$$=2\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}=2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=2\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n=\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

לכן $\frac{2}{e}<1=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, ולכן נובע ממבחן המנה הגבולי שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ מתכנס.

טענה (מבחן השורש הגבולי) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של איברים חיוביים.

- אם $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L<1$, אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.
- אם $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L>1$, אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.
- אם $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$, אז <u>כשלעצמו</u> הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ איננו מכריע את שאלת ההתכנסות או ההתבדרות של $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

תרגיל 9 : האם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ מתכנס?

נסמן : $a_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. במבט ראשון <u>לא ברור</u> אם $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}=0$.

נשים לב שמתקיים

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

לכן $\frac{1}{e}<1=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, ולכן נובע ממבחן השורש הגבולי שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ מתכנס.

3 מחסנית

משפט : תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה נתונה. אזי שלוש הטענות הבאות שקולות:

(1) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

(2) כל m ־זנב של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

(3) קיים m־ זנב של הטור שמתכנס.

במקרה זה מתקיים : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$

<u>הוכחה</u> :

נוכיח $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

תהי $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת הסכומים החלקיים של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$: $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$.

יהי $m \in \mathbb{N}$, ותהי $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת הסכומים החלקיים של m־ הזנב $(a_{m+n})_{n=1}^{\infty}$: $t_k = \sum_{n=1}^{k} a_{m+n} = \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n$.

שים לב ש־ $s_{m+k} = \sum_{n=1}^{m+k} a_n = \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n = s_m + t_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}$.

(בפרט $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ **איננה** זנב של $(s_k)_{k=1}^{\infty}$, כי בדרך כלל $s_m \neq 0$!)

$(2) \Leftarrow (1)$: נתון ש־ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, כלומר סדרת הסכומים החלקיים $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת.

מתקיים : $t_k = -s_m + s_{m+k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$.

$(s_k)_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ולכן זנבה $(s_{m+k})_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת (ולאותו גבול $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$).

s_m קבוע (לא תלוי ב־ k) , ולכן נובע מאריתמטיקה של גבולות ש־$(t)_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת וש־ $\lim_{k\to\infty} t_k = -s_m + \lim_{k\to\infty} s_{m+k}$.

ולכן על פי ההגדרה $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = -s_m + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$m \in \mathbb{N}$ שרירותי, ולכן כל m ־זנב של הטור המקורי מתכנס.

$(3) \Leftarrow (2)$: אם כל m ־זנב של$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז בפרט קיים m־ זנב שמתכנס.

$(1) \Leftarrow (3)$: נניח שקיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש־ m־ הזנב $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ מתכנס, כלומר $(t)_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת.

מ־ $s_{m+k} = s_m + t_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}$ ומאריתמטיקה של גבולות נקבל ש־ $(s_{m+k})_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת.

ל־ $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ יש זנב מתכנס ולכן $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ עצמה מתכנסת, ז"א על פי ההגדרה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. ■