אלגברה ליניארית 2

סיכמה מפי ד"ר קלואי פרין: גלינה יפרמוב

12 בנובמבר 2019

27.10.19

חלק I

פולינומים

1 פולינום מעל שדה

הגדרה

יהיה $\mathbb{F}$ שדה

פולינום P מעל $\mathbb{F}$ במשתנה x הוא ביטוי פורמלי :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

כאשר $a_j \in \mathbb{F}$ $\forall j \in [0,n]$, $n \in \mathbb{N}$

$a_0, ..., a_n$ הם המקדמים של P

נגדיר שלכל $m > n$, $a_m = 0$

אוסף כל הפולינומים במשתנה x מעל $\mathbb{F}$ הוא $\mathbb{F}[x]$

הגדרה

אם $P, Q \in \mathbb{F}[x]$ עם

$$P(x) = a_0 + ... + a_nx^n$$

$$Q(x) = b_0 + ... + b_mx^m$$

הסכום של P ו־Q הוא

$$(P+Q)(x) = \sum_{j=0}^{max(m,n)} (a_j + b_j)x^j$$

יהיה $\lambda \in \mathbb{F}$ סקלר, מכפלה של P ע"י סקלר היא

$$(\lambda P)(x) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + ... + (\lambda a_n)x^n$$

תזכורת

$\mathbb{F}[x]$ עם הסכום והמכפלה ע"י סקלר הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$

הפולינומים $1, x, x^2, ...$ הם בת"ל ומהווים בסיס ל־ $\mathbb{F}[x]$

בפרט $dim(\mathbb{F}[x]) = \infty$

וקטור ה־0 של מרחב וקטורי זה הוא פולינום ה־0 שכל המקדמים שלו הם 0

הגדרה

אם $P,Q \in \mathbb{F}[x]$ עם

$$P(x) = a_0 + ... + a_n x^n$$

$$Q(x) = b_0 + ... + b_m x^m$$

המכפלה של P עם Q היא

$$(PQ)(x) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i,j \; s.t \; i+j=k} a_i b_j \right) x^k$$

תכונות של המכפלה

קומוטטיביות : $PQ = QP$

אדיטיביות : $P(Q+R) = PQ + PR$

הערה

המכפלה של P עם Q אינה מהווה שדה מכיוון שלכל איבר בשדה חייב להיות הופכי כפלי

הגדרה

יהיה פולינום P מעל שדה $\mathbb{F}$

נסמן את המעלה של P : $deg(P)$

המעלה של $P \neq 0$ היא האינדקס המקסימלי j כך ש־ $a_j \neq 0$ כאשר a_j הינו המקדם של x^j

המעלה של $P = 0$ אזי $deg(P) = -\infty$

הערה

נתון פולינום P מעל שדה $\mathbb{F}$ בצורה הבאה

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

נשים לב כי המעלה של P הינה בהכרח שווהל־n כי ייתכן ש־ $a_n = 0$

למה

יהיו $P,Q \in \mathbb{F}[x]$ עם

$$P(x) = a_0 + ... + a_n x^n \quad a_n \neq 0$$

$$Q(x) = b_0 + ... + b_m x^m \quad b_m \neq 0$$

אזי :

$$deg(PQ) = degP + degQ$$

$$deg(P+Q) \leq max(degP, degQ) \; :$$

עבור $deg(P+Q)$ מתקיים שיוון במקרים הבאים:

$$deg(P+Q) = max(degP, degQ)\ iff\ degP \neq degQ$$

$$deg(P+Q) = max(degP, degQ)\ iff\ (degP = degQ = n \wedge a_n \neq b_n)$$

הגדרה

יהיה $P \in \mathbb{F}[x]$ עם $P(x) = a_0 + ... + a_n x^n$ כך ש־ $degP = n$, אזי :

- a_n הוא המקדם המוביל
- אם $a_n = 1$ נאמר ש־ P מתוקן
- $a_n x^n$ הוא הגורם המוביל
- אם $P(x) = a_0$ נאמר ש־ P פולינום קבוע ומתקיים $degP = 0$ או $degP = -\infty$

2 חילוק פולינומים

יש דמיון בין חילוק פולינומים לבין חילוק של המספרים השלמים:
ב־$\mathbb{Z}$ יש חיבור וכפל אבל לא לכל איבר יש הופכי
אומרים ש־ $d \in \mathbb{Z}$ מחלק את $p \in \mathbb{Z}$ אם קיים $q \in \mathbb{Z}$ כך ש־ $p = qd$
אם ל־d היה הופכי,נסמנו d^{-1}, אזי היה ניתן לרשום $p = (p \cdot d^{-1})d$ (כלומר אכן היה ניתן לחלק)

הגדרה

יהיו $P, D \in \mathbb{F}[x]$
נאמר ש־ D מחלק את P, ונסמן $D|P$,
אם קיים $Q \in \mathbb{F}[x]$ כך ש־ $P = QD$
נאמר גם ש־ D הוא גורם של P או ש־ P הוא כפל של D

הערות

- P מחלק את עצמו כי $P = 1 \cdot P$
- הפולינום הקבוע השווה ל־ 1 מחלק את כולם
- כל פולינום ממעלה 0 מחלק את כולם :

  $D(x) = d \in \mathbb{F} \neq 0$ אזי לכל $P \in \mathbb{F}[x]$ מתקיים: $P = d(\frac{1}{d} \cdot P)$

נשים לב כי ב־ $\mathbb{Z}$ ניתן לחלק "עם שארית" , למשל: $37 = 5 \cdot 7 + 2$ כאשר 2 היא השארית
יש ב־$\mathbb{F}[x]$ פעולה דומה

טענה

יהיו $D, P \in \mathbb{F}[x]$ עם $D \neq 0$, אזי קיימים פולינומים יחידים $R, Q \in \mathbb{F}[x]$ כך ש:

$$(i)\, P = QD + R$$

$$(ii)\, degR < degD$$

הוכחה:

<u>יחידות</u>

נניח כי $P = Q_1D + R_1$ וגם $P = Q_2D + R_2$ כך ש־ $\forall i \in [1,2]\ degR_i < degD$

$$(*)\, P = Q_1D + R_1 = Q_2D + R_2$$

$$\Rightarrow (Q_1 - Q_2)D = R_1 - R_2$$

$$deg(R_1 - R_2) \leq max\{degR_1, deg(-R_2)\} < degD$$

$$deg((Q_1 - Q_2)D) = degD + deg(Q_1 - Q_2)$$

$$\Rightarrow deg(Q_1 - Q_2) = -\infty$$

$$\Rightarrow Q_1 = Q_2$$

ולכן מ־ $(*)$ נובע שגם $R_1 = R_2$

<u>קיום</u>

נגדיר באינדוקציה $Q_n, R_n \in \mathbb{F}[x]$ כך ש־ $P = Q_nD + R_n$(התכונה הראשונה (i)) ו־ $degR_{n+1} < gedR_n$ (התכונה השניה (ii))

בסיס: $Q_1 = 0, R_1 = P$ ואז: $P = Q_1D + R_1 = 0 \cdot D + P$

צעד: נניח כי הטענה נכונה עבור n,כלומר קיימים Q_n, R_n כך ש־ $P = Q_nD + R_n$ ונוכיח עבור $n+1$

הוכחה: אם $degR_n < degD$ סיימנו

אחרת,

$$P = Q_nD + R_n =$$

$$\overbrace{=}^{(1)} \underbrace{(Q_n + \square)}_{Q_{n+1}} \cdot D + \underbrace{(R_n - \square \cdot D)}_{R_{n+1}}$$

(1) מכיוון ש־ $degR_n \geq degD$, נוכל להוציא מ־ R_n כפולה של D ונקבל שארית חדשה R_{n+1}

נסמן:

$$R_n(x) = a_kx^k + ... + a_0 \quad (a_k \neq 0)$$

$$D(x) = d_lx^l + ... + d_0 \quad (d_l \neq 0)$$

כעת נוכל "להשלים את הריבועים הריקים" כך:

$$P = (Q_n + \frac{a_k}{d_l} \cdot x^{k-l})D + (R_n - \frac{a_k}{d_l} \cdot x^{k-l} \cdot D)$$

(נשים לב שאנחנו במקרה של $degR_n \geq degD$ ולכן $k \geq l$)

שארית R_{n+1} מקיימת: $degR_{n+1} < degR_n$ (כי "העלמנו" את הגורם a_kx^k) ולכן הוכחנו את האינדוקציה

נעשה בדיקת נכונות של התנאים :

$$(i)\ (Q_n + \frac{a_k}{d_l} \cdot x^{k-l})D + (R_n - \frac{a_k}{d_l} \cdot x^{k-l} \cdot D) = Q_nD + \cancel{\frac{a_k}{d_l} \cdot x^{k-l} \cdot D} + R_n - \cancel{\frac{a_k}{d_l} \cdot x^{k-l} \cdot D} = Q_nD + R_n = P$$

$$(ii)\ R_{n+1}(x) = R_n - \frac{a_k}{d_l} \cdot x^{k-l} \cdot D = a_kx^k \underbrace{+ ... + a_0}_{(**)} - \frac{a_k}{d_l} \cdot x^{k-l} \cdot d_lx^l - \underbrace{(...)}_{(***)} = \cancel{a_kx^k} + ... + a_0 - \cancel{\frac{a_k}{d_l} \cdot x^{k-l} \cdot d_lx^l} - (...)$$

$$\Rightarrow deg(R_{n+1}) < k = deg(R_n)$$

(**) - חזקות קטנות ממש מ־k

(***) - חזקות קטנות מ־k

(ניתן להמשיך באופן זה עד שמקבלים זוג Q_{n+l}, R_{n+m} אשר מקיימים את (i) ו־(ii))

30.10.19

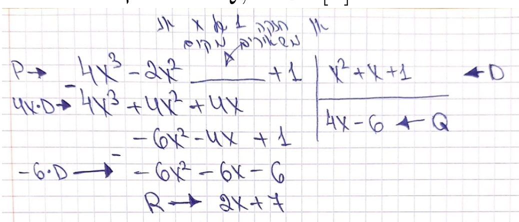
דוגמה

נתונים שני פולינומים:

$$P(x) = 4x^3 - 2x^2 + 1$$

$$D(x) = x^2 + x + 1$$

נרצה למצוא זוג $Q, R \in \mathbb{F}[x]$ אשר מקיימים את הטענה הקודמת



איך זה מתקשר להוכחה של הטענה הקודמת:

$$R_1 = P, Q_1 = 0$$

$$R_2 = -6x^2 - 6x - 6, Q_2 = 4x$$

$$R_3 = R, Q_3 = Q$$

3 שורשים של פולינומים

אם $P \in \mathbb{F}[x]$ פולינום אז מקבלים פונקציה (פולינומיאלית) $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$

$$\underset{b}{\mathbb{F}} \underset{\to}{\longrightarrow} \underset{a_0 + a_1b + ... + a_nb^n}{\mathbb{F}}$$

כלומר לקחנו איבר b בשדה והצבנו אותו בפונקציה פולינומיאלית

הערה

למה אנחנו מבדילים בין פולינום לפונקציה?
נניח כי $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ כלומר שדה עם האיברים $\{0,1\}$
ונגדיר שני פולינומים

$$P(x) = x$$

$$Q(x) = x^2$$

קל לראות כי אלה שני פולינומים שונים
אבל הפונקציות ששני הפולינומים הנ"ל מגדירים הן שונות :
(בשביל לדעת האם הפונקציות זהות צריך שהמקור והתמונה יהיו שווים)
בשני המקרים התמונה של 0 היא 0 והתמונה של 1 היא 1 ,כלומר זה לא אותן פונקציות

הגדרה
יהי $P \in \mathbb{F}[x]$
סקלר $a \in \mathbb{F}$ הוא שורש של P אם $P(a) = 0$
הערה
$P = x^2 + 1$
אם $P \in \mathbb{R}[x]$ אזי אין לו שורש
אם $P \in \mathbb{C}[x]$ אזי יש לו שורש

טענה
יהי $P \in \mathbb{F}[x]$
a שורש של $P \iff (x-a)$ מחלקת את P
$\Longrightarrow$ נניח ש־ $(x-a)|P$
אזי קיים $Q \in \mathbb{F}[x]$ כך ש־ $P(x) = (x-a) \cdot Q(x)$
ואז:

$$P(a) = (a-a)Q(a) = 0$$

ולכן לפי ההגדרה, a הוא שורש של P
הערה
יהי $R \in \mathbb{F}[x]$
אם $R|P$ אזי כל שורש של R הוא גם שורש של P :
יהי b שורש של R,כלומר $R(b) = 0$ אזי:

$$P(b) = R(b)Q(b) = 0 \cdot Q(b) = 0$$

$\Longleftarrow$נניח ש־a שורש של P
נחלק את P ע"י $(x-a)$ עם שארית
כלומר קיימים $Q, R \in \mathbb{F}[x]$ כך ש:

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R(x)\ ,\ degR < deg(x-a) \underbrace{=}_{(*)} 1$$

לכן נובע מ (*) ש־ $R(x) = r \in \mathbb{F}$
נרצה להוכיח ש $R(x) = 0$:

נתון ש־a שורש של P ולכן:

$$0 = P(a) = \underbrace{(a-a)}_{=0}Q(a) + R(a) = R(a) = r$$

$$\Rightarrow r = 0$$

ולכן R הוא הפולינום הקבוע שווה ל־0
כלומר

$$P(x) = (x-a)Q(x)$$

ולכן $(x-a)$ מחלק את P

טענה
יהי $0 \neq P \in \mathbb{F}[x]$
אזי יש ל־P לכל היותר $degP$ שורשים
הוכחה
באינדוקציה על $degP$
בסיס: $degP = 0$ אזי $P(x) = a$ כאשר $0 \neq a \in \mathbb{F}$ (פולינום קבוע)
לכל $b \in \mathbb{F}$ $P(b) = a \neq 0$ לכן ל־P יש 0 שורשים
הנחת האינדוקציה: נניח כי לכל פולינום ממעלה $n-1$ יש לכל היותר $n-1$ שורשים
הוכחה: יהי $P \in \mathbb{F}[x]$ עם $degP = n$
קיימות שתי אפשרויות:
1.אם ל־P אין שורשים אז סיימנו
2.נניח ש־ $a \in \mathbb{F}$שורש של P
אזי לפי הטענה הקודמת :קיים $Q \in \mathbb{F}[x]$: $\underbrace{P(x)}_{deg=n} = \underbrace{(x-a)}_{deg=1}Q(x)$
לכן נקבל $degQ = n-1$
לפי הנחת האינדוקציה יש ל־Q לכל היותר $n-1$ שורשים
(הערה: יש לנו את a שהוא שורש של P ואת השורשים של Q.רוצים לוודא שאין עוד שורשים)
נניח ש־$a \neq b$ הינו שורש של P :
(נראה שהוא גם שורש של Q)

$$0 = P(b) = \underbrace{(b-a)}_{\neq 0}Q(b)$$

$$\Rightarrow 0 = Q(b)$$

ולכן b הינו שורש של Q,נקבל:

$$\underbrace{\{a\}}_{=1} \cup \underbrace{\{roots\, of\, Q\}}_{=n-1} = \{roots\, of\, P\}$$

לכן ל־P יש לכל היותר n שורשים

המשפט היסודי של אלגברה (ללא הוכחה)
לכל פולינום $P \in \mathbb{C}[x]$ לא קבוע יש שורש
(קבוע=פולינום האפס או $degP = 0$)

מסקנה

אם $P\in\mathbb{C}[x]$ לא קבוע ויש לו שורש a אזי קיים $Q\in\mathbb{C}[x]$ כך ש: $P(x)=(x-a)Q(x)$
אם Q לא קבוע אזי יש לו שורש b ואז קיים $R\in\mathbb{C}[x]$ כך ש:

$$P(x)=(x-a)\underbrace{(x-b)R(x)}_{=Q(x)}$$

נמשיך באופן זה עד שמגיעים לפולינום קבוע ונקבל:

$$P(x)=(x-a)(x-b)\cdot...\cdot(x-c)\cdot\lambda$$

(למה החילוק אינו אינסופי?
כי המעלה של P היא n וכאשר מתבצע חילוק , המעלה של פולינום שנשאר היא קטנה ממש מ־n
ולכן לאחר בדיוק n צעדים נעצור ונשאר עם פולינום קבוע שהדרגה שלו היא 0)
<u>אזי המסקנה מכך היא:</u>
אם $P\in\mathbb{C}[x]$ עם $degP=n$ אזי קיימים $a_1,...a_n\in\mathbb{C}$ ו־ $c\in\mathbb{C}$ כך ש:

$$P(x)=c\cdot(x-a_1)(x-a_2)\cdot...\cdot(x-a_n)$$

ומתקיים: $a_1,...,a_n$ הם השורשים של P

4 פולינומים אי פריקים

הגדרה

$0\neq P\in\mathbb{F}[x]$ נקרא אי־פריק אם לכל $A,B\in\mathbb{F}[x]$ כך ש: $P=A\cdot B$ מתקיים:

$$degB=0\ or\ degA=0$$

הערה

אם $degP=1$ אזי P אי פריק
הוכחת ההערה:

$$\underbrace{P}_{degP=1}=\underbrace{A\cdot B}_{degA+degB}$$

ולכן $degA=0$ או $degB=0$ ולכן לפי ההגדרה P אי־פריק

3.11.19

שאלה

מה הם הפולינומים האי־פריקים ב־ $\mathbb{C}[x]$?
ב־$\mathbb{C}$ לכל פולינום לא קבוע יש שורש
אם $P\in\mathbb{C}[x], degP\geq 2$ אז קיים $\alpha\in\mathbb{C}$ כך ש: $P(\alpha)=0$
לכן $P=\underbrace{(x-\alpha)}_{deg=1}\underbrace{Q}_{deg\geq1}$ לאיזשהו $Q\in\mathbb{C}[x]$
לכן P פריק
<u>מסקנה :</u>
הפולינומים האי־פריקים ב־ $\mathbb{C}[x]$ הם בדיוק הפולינומים ממעלה 1

שאלה

מה הם הפולינומים האי־פריקים ב־ $\mathbb{R}[x]$?
טענה (נוכיח בתרגול)
$P\in\mathbb{R}[x]$ לא קבוע,אזי :

1) P אי־פריק אם"ם $degP=1$
2) P אי־פריק אם"ם $degP=2$ ו־P מהצורה: $P(x)=ax^2+bx+c$ כאשר $\triangle=b^2-4ac<0$
(כלומר השורשים של P הם ב־$\mathbb{C}$ ולא ב־$\mathbb{R}$)
שאלה
האם הפירוק של פולינומים הוא יחיד? לא בדיוק
דוגמה:

$$P(x)=(2x+4)(x-1)=(x+2)(2x-2)$$

לכן אם P הינו פירוק של פולינומים אי־פריקים מתוקנים אזי הפירוק הוא יחיד עד כדי סדר מכפלת הפולינומים.נוכיח זאת:

משפט (ללא הוכחה)
$P\in\mathbb{F}[x]$ אזי קיימת קבוצה יחידה $A_1,...A_n$ של פולינומים אי־פריקים ומתוקנים וקבוע $a\in\mathbb{F}$ יחיד כך ש:

$$P=a\cdot A_1\cdot...\cdot A_n$$

הערה
הקשר שבין יחידות הפירוק לבין חילוק הפולינומים
$Q,P\in\mathbb{F}[x]$ כך ש: $Q|P$ ונניח

$$P(x)=a\cdot A_1(x)\cdot...\cdot A_n(x)$$

$$Q(x)=b\cdot B_1(x)\cdot...\cdot B_m(x)$$

כאשר A_i,B_j הם פולינומים אי־פריקים מתוקנים ו־ $a,b\in\mathbb{F}$
$Q|P$ ולכן קיים $R\in\mathbb{F}[x]$ כך ש: $P=QR$
נכתוב: $R(x)=c\cdot C_1(x)\cdot...\cdot C_l(x)$ עם C_k אי־פריקים ומתוקנים
לכן

$$P(x)=bc\cdot B_1(x)\cdot...\cdot B_m(x)\cdot C_1(x)\cdot...\cdot C_l(x)$$

מיחידות הפירוק(עד כדי שינוי באינדקסים) נקבל:

$$B_1=A_1,...,B_m=A_m,C_1=A_{m+1},...,C_l=A_n\ \ ,\ \ bc=a$$

ובפרט $n\geq m$
למה זה טוב? ברגע שיודעים את החלוקה של P לגורמים מתוקנים אי־פריקים אזי ניתן לדעת איך נראים הפולינומים שמחלקים את P (הם פשוט תתי־קבוצות של הגורמים הנ"ל של P)

חלק II

אופרטורים

1 אופרטור על מרחב וקטורי

הגדרה
יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$
אופרטור ליניארי מעל V הוא העתקה ליניארית $f:V\to V$
ז"א f הינו איבר של $hom(V,V)$
הערה: בקורס שלנו כל האופרטורים יהיו ליניאריים , א"ל=אופרטור ליניארי

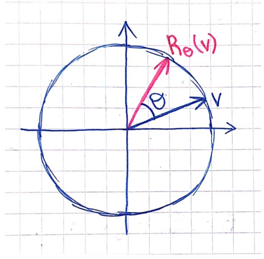
דוגמאות

1) אופרטור הזהות $Id:\underset{v}{V}\underset{\to}{\longrightarrow}\underset{v}{V}$

2) אופרטור האפס $0:\underset{v}{V}\underset{\to}{\longrightarrow}\underset{0}{V}$

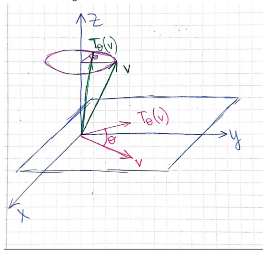
3) $V=\mathbb{R}^2$, $0<\theta<\pi$

אופרטור הסיבוב R_θ מעל V (זהו סיבוב בזווית θ)



4) $V=\mathbb{R}^3$, $0<\theta<\pi$

אופרטור הסיבוב T_θ מעל V (זהו סיבוב בזווית θ סביב ציר ה־z)



5) $V=C^\infty$ - מ"ו מעל $\mathbb{R}$ (מרחב כל הפונקציות הגזרות אינסוף פעמים)

אופרטור הגזירה $D:\underset{\varphi}{V}\underset{\to}{\longrightarrow}\underset{\varphi`}{V}$

D אכן העתקה ליניארית:

$$D(\varphi+\psi)=(\varphi+\psi)`=\varphi`+\psi`=D(\varphi)+D(\psi)$$

$$a\in\mathbb{R}\ ,\ \ D(a\varphi)=aD(\varphi)$$

6) $V=\mathbb{F}^n_{col}$, $\mathbb{F}$־שדה (זה מרחב העמודות כאשר כל עמודת מכילה n סקלרים)

יהי $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{F}$,אזי f_A הינו א"ל כאשר :

$$\begin{array}{cccc} f_A: & V & \longrightarrow & V \\ & \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} & \to & A\cdot\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \end{array}$$

1.1 פעולות על אופרטורים

V מ"ו מעל $\mathbb{F}$

$f:V\to V$, $g:V\to V$ - אופרטורים

<u>סכום</u>

$$(f+g):\underset{v}{V}\underset{\to}{\longrightarrow}\underset{f(v)+g(v)}{V}$$

$(f+g)$ - אופרטור ליניאי (סכום של שתי העתקות ליניאריות)

<u>מכפלה ע"י סקלר</u>

$$a\in\mathbb{F}\ \ ,\ \ (af):\underset{v}{V}\underset{\to}{\longrightarrow}\underset{af(v)}{V}$$

af - אופרטור ליניאי (מכפלה ע"י סקלר של העתקה ליניארית)

הערה

שתי הפעולות סכום ומכפלה ע"י סקלר נותנים ל- $hom(V,V)$ מבנה של מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$

(וזהו מקרה פרטי של טענה מליניארית 1 : $hom(V,W)$ הינו מ"ו מעל $\mathbb{F}$)

<u>הרכבה</u>

$$(f\circ g):\underset{v}{V}\underset{\to}{\longrightarrow}\underset{f(g(v))}{V}$$

שאלה

מה קורה בפעולות אלה כאשר $f=Id$ או $f=0$?

$f=Id$ הינו איבר ניטרלי להרכבה

$f=0$ הינו איבר ניטרלי לסכום

הערה

ניתן להרכיב את f עם עצמו: $f, f\circ f, f\circ f\circ f, ...$

נסמן: $f^k=\underset{k\,times}{f\circ ...\circ f}$

בנוסף, $Id=f^0$ (כי זה כמו להפעיל את f על v 0 פעמים)

$\cancel{f^2(v)=f(v)f(v)} \leftarrow f^2(v)=f(f(v))$

1.2 הצבת אופרטור בפולינום

הגדרה

אם $P\in\mathbb{F}[x]$ פולינום , $P(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$

נגדיר את $P(f)$ להיות :

$$P(f)=a_0Id+a_1f+...+a_nf^n$$

$P(f)$ הינו אופרטור על V :

$$P(f):\underset{v}{V}\underset{\to}{\longrightarrow}\underset{(a_0Id+a_1f+...+a_nf^n)(v)=a_0v+a_1f(v)+...+a_nf^n(v)}{V}$$

דוגמה

$V=\mathbb{R}^2$, $0<\theta<\pi$

אופרטור הסיבוב $R_{\pi/2}$ מעל V (סיבוב בזווית $\pi/2$)

יהיו שני פולינומים : $Q(x)=x^2+1$, $P(x)=x^2$

מהם $P(R_{\pi/2}),Q(R_{\pi/2})$:

$$P(R_{\pi/2})=R_{\pi/2}^2=R_{\pi/2}\circ R_{\pi/2}\underbrace{=}_{(*)}-Id$$

$$Q(R_{\pi/2})=R_{\pi/2}^2+Id=-Id+Id\underbrace{=}_{(**)}0$$

(*) - לוקחים וקטור ומסובבים אותו ב-90 מעלות ואז שוב ב-90 מעלות

(**) - 0 שהתקבל הינו <u>אופרטור</u> האפס

6.11.19

1.3 הצגה מטריציאלית של אופרטורים

יהיו V,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $dimV,dimW<\infty$, $f:V\to W$ הע"ל

אם B בסיס ל-V ו- C בסיס ל-W , יש מטריצה $[f]_C^B$ שמייצגת את f יחסית ל-B ו-C

במקרה ש-$V=W$, ז"א f אופרטור על V, נרצה לקחת בסיס <u>אחד</u> B ל-V ולהתבונן ב- $[f]_B^B$ שנסמנה $[f]_B$

שאלה

מה זה אומר ש־ $A=[f]_B$ מייצגת את f בבסיס B ?

אם $B=(b_1,...b_n)$, לכל $v\in V$ קיימים $v_1,...,v_n\in\mathbb{F}$ יחידים כך ש: $v=\sum_{i=1}^n v_ib_i$ ואז: $[v]_b=\begin{bmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}$

$A=[f]_B$ היא המטריצה שמקיימת :

$$(*)\ \forall v\in V\ \ [f(v)]_B=A\,[v]_B$$

איך מחשבים את A ?

(*) $\Leftarrow$אם $v=b_i$, אזי

$$[f(b_i)]_B=A\,[b_i]_B=A\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\leftarrow i$$

ה־1 מופיע בעמודה ה־i־ית

ולכן:

$$A=\begin{bmatrix} | & | & & | \\ [f(b_1)]_B & [f(b_2)]_B & \cdots & [f(b_n)]_B \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

נשים לב ש־A ריבועית כי f אופרטור

מעבר בסיס

V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $dimV<\infty$, $f:V\to V$ אופרטור

$B=(b_1,...b_n)$ ו־ $C=(c_1,...c_n)$ בסיסים של V

מטריצת מעבר M_C^B מקיימת :

לכל $v\in V$: $[v]_C=M_C^B\,[v]_B$

יודעים ש M_C^B הפיכה ו ההופכית שלה : $(M_C^B)^{-1}=M_B^C$

כעת בהנתן $[f]_B$ נרצה לחשב את $[f]_C$ המקיימת: $[f(v)]_C=[f]_C\,[v]_C$

מתקיים:

$$[f(v)]_C=M_C^B\,\underbrace{[f]_B\,\underbrace{M_B^C\,[v]_C}_{[v]_B}}_{[f(v)]_B}$$

ולכן: המטריצה $M_C^B\,[f]_B\,M_B^C$ מקיימת את מה ש־ $[f]_C$ צריכה לקיים

ומיחידות : $[f]_C=M_C^B\,[f]_B\,M_B^C=M_C^B\,[f]_B\,(M_C^B)^{-1}$

הגדרה

$A,B\in M_n(\mathbb{F})$ נקראות דומות אם קיימת $M\in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה כך ש:

$$(M^{-1}BM=A\Leftrightarrow)\,B=MAM^{-1}$$

יחס דמיון של מטריצות הוא יחס שקילות (רפלקסיבי,סימטרי וטרנזטיבי)

הערה

השיוויון שהראנו מקודם $[f]_C = M_C^B [f]_B (M_C^B)^{-1}$ מראה:

אם שתי מטריצות A, B מייצגות אותו אופרטור $f: V \to V$ (אולי ביחס לבסיסים שונים), אזי A, B דומות

הערה

V מ"ו מימד סופי , $B = (b_1, ...b_n)$ בסיס ל־V

f, g אופרטורים על V אזי

$$[f+g]_B = [f]_B + [g]_B$$

$$\lambda \in \mathbb{F} \quad [\lambda f]_B = \lambda [f]_B$$

$$[f \circ g]_B \underbrace{=}_{(*)} [f]_B [g]_B$$

(*) ־ מכפלה של מטריצות

$$\left[f^k\right]_B = ([f]_B)^k$$

אם $P \in \mathbb{F}[x]$: $P(X) = a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k$ ו־ $[f]_B = A$ אזי:

$$[P(f)]_B = \left[a_0 Id + a_1 f + ... + a_k f^k\right]_B = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_k A^k = P(A)$$

2 תתי מרחב אינווריאנטים

קצת אינטואיציה :

נרצה למצוא בסיס "הכי טוב" כך שהמטריצה $[f]_B$ היא הכי פשוטה עבור $f: V \to V$ נתון ו־ $dimV < \infty$

מה הכוונה בהכי פשוטה: כמה שיותר אפסים

הגדרה

V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $f: V \to V$ אופרטור

U תת מ"ו של V הוא f־אינווריאנטי אם

$$\forall u \in U \;\; f(u) \in U$$

באופן שקול: $f(U) \subseteq U$

דוגמאות:

1) V ו־ $\{\underline{0}\}$ הם תתי מ"ו f־אינווריאנטים עבור כל אופרטור f

2) $V = \mathbb{R}^2$, $f - R_\theta$ סיבוב בזווית θ, $0 < \theta < \pi$

V ו־$\{\underline{0}\}$ f ־ אינווריאנטים

<u>הערה</u>: $kerf$ הוא f ־אינווריאנטי כי אם $u \in kerf$ אזי $f(u) = 0 \in kerf$

כל תת מרחב וקטורי אחר הוא ממימד 1 והוא לא f־אינווריאנטי

3) $V = \mathbb{R}^3$, $f - R_\theta$ סיבוב בזווית θ, $0 < \theta < \pi$,סביב ציר ה־z

ציר ה־z הינו תת מ"ו ממימד 1

המישור xy

4) $V=C^\infty$ - מרחב הפונקציות $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הגזירות אינסוף פעמים

$\begin{array}{c} D:V\to V \\ \varphi\to\varphi' \end{array}$ אופרטור הגזירה. נגדיר:

$$U=\left\{\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,|\,\varphi(x)=\alpha_0+\alpha_1x+...+\alpha_kx^k\ ,\alpha_0,...,\alpha_k\in\mathbb{R}\,,k\in\mathbb{N}\right\}$$

U הינו תת מ"ו D-אינווריאנטי של V (אם $\varphi\in U$ אזי גם $\varphi'\in U$)

הערה

אם U תת מ"ו f-אינווריאנטי של V, אז הצמצום $f|_U$ הוא אופרטור על U, סימון: $\begin{array}{c} f|_U:U\to U \\ u\to f(u) \end{array}$

מטריצה בבסיס מתאים לתת מ"ו f-אינווריאנטי

נניח f אופרטור על V, $dimV<\infty$

U תת מ"ו f-אינווריאנטי

נקח $B_U=(b_1,...,b_k)$ בסיס ל-U ונרחיב אותו לבסיס $B=(b_1,...,b_k,b_{k+1},...,b_n)$ של V

שאלה

מה היא $[f]_B$?

יהיה עמודה i במטריצה, נבדור מהי $[f(b_i)]_B$:

1)אם $i\leq k$: אז $b_i\in U$ ולכן $f(b_i)\in U$

$$[f(b_i)]_B=\begin{bmatrix} \underline{[f(b_i)]_{B_U}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\begin{array}{c} \\ \leftarrow k+1 \\ \\ \\ \end{array}$$

2)אם $k<i<n$ אז לא ניתן לדעת איך תראה $[f(b_i)]_B$

לכן נקבל:

$$[f]_B=\left[\begin{array}{ccc|c} & [f|_U]_B & & A \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & B \\ 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right]$$

כאשר A,B הן מטריצות שאנו לא יודעים לגביהן כלום וגם :

$$[f|_U]_B=\begin{bmatrix} | & & | \\ [f(b_1)]_B & \cdots & [f(b_k)]_B \\ | & & | \end{bmatrix}$$

הגודל של $[f]_B$ הינו $n\times n$ והגודל של $[f|_U]_B$ הינו $k\times k$

טענה (ללא הוכחה)

V מ"ו , f,g אופרטורים על V, $\lambda\in\mathbb{F}$

אם U תת מ"ו של V גם f-אינווריאנטי וגם g-אינווריאנטי אזי U גם:

$(f+g)$-אינווריאנטי

$(f\circ g)$-אינווריאנטי

(λf)-אינווריאנטי

$P(f)$- אינווריאנטי לכל $P\in\mathbb{F}[x]$

10.11.19

3 מרחבים ציקליים

3.1 מסלול של וקטור. פולינום מינימלי של וקטור

יהיה $f:V\to V$ אופרטור, $v\in V$

הגדרה

הקבוצה $v,f(v),f^2(v),...$ נקראת המסלול של v יחסית ל־f

דוגמאות

1. $V=\mathbb{R}^2$, f ־ סיבוב בזווית $\theta=\pi/2$, $V\ni v=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

המסלול של v הינו : $v,f(v),f^2(v),f^3(v)$ ובנוסף:

לכל $w\in V$ המסלול של w : $w,f(w),f^2(w),f^3(w)$

2. $V=\mathbb{R}^2$, g ־ סיבוב בזווית $\theta=1$(קצת פחות מ־$\pi/2$)

יהיה $v\in V$, המסלול של v הינו : $v,g(v),g^2(v),g^3(v),...$ ־ מסלול אינסופי

הערה

אם $dimV<\infty$ אז הקבוצה $v,f(v),f^2(v),...$ לא בת"ל, כלומר קיים אינדקס k מקסימלי כך ש:

(i) $v,f(v),f^2(v),...,f^k(v)$ בת"ל

(ii) $v,f(v),f^2(v),...,f^k(v),f^{k+1}(v)$ ת"ל

נשים לב ש $dimV=n\geq k$

מ־(ii) נובע שקיימים $\alpha_0,...,\alpha_{k+1}$ סקלרים שלא כולם 0 כך ש:

$$\alpha_0v+\alpha_1f(v)+...+\alpha_kf^k(v)+\alpha_{k+1}f^{k+1}(v)=0$$

ניתן להניח כי $\alpha_{k+1}\neq 0$ כי $v,f(v),f^2(v),...,f^k(v)$ בת"ל. נחלק את כל הסקלרים ב־α_{k+1} :

$$\underbrace{\frac{\alpha_0}{\alpha_{k+1}}}_{a_0}v+\underbrace{\frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}}}_{a_1}f(v)+...+\underbrace{\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}}_{a_k}f^k(v)+f^{k+1}(v)=0$$

מקבלים שקיימים סקלרים $a_0,...,a_k$ כך ש:

$$a_0v+a_1f(v)+...+a_kf^k(v)+f^{k+1}(v)=0$$

אם נגדיר את $P\in\mathbb{F}[x]$ ע"י :

$$P(x)=a_0+a_1x+...+a_kx^k+x^{k+1}$$

ניתן לכתוב:

$$(*)\ \ P(f)(v)=0$$

הגדרה

P מההערה הקודמת הינו הפולינום המינימלי של v יחסית ל־f

נסמנו $min_v^f(x)$

(מההערה הקודמת ניתן לראות איך מוצאים את הפולינום המינימלי של v :

בודקים מהו המסלול של v : $v,f(v),f^2(v),...$ ומחפשים סקלרים $\alpha_0,...,\alpha_{k+1}$ כך ש :

$$\alpha_0v+\alpha_1f(v)+...+\alpha_kf^k(v)+f^{k+1}(v)=0$$

וזה יהיה הפולינום)

הערה

נניח כי $Q \in \mathbb{F}[x]$: $Q(x) = q_0 + q_1x + ... + q_mx^m + x^{m+1}$ המקיים $Q(f)(v) = 0$, ז"א :

$$q_0v + q_1f(v) + ... + q_mf^m(v) + f^{m+1}(v) = 0$$

לכן $m + 1 \geq k + 1$ (יש תלות ליניארית בין $(v, f(v), ..., f^{m+1}(v)$) ולכן $degQ \geq degP$
בעצם ניתן להוכיח ש P מחלק את Q (הוכחה בתרגול או בהמשך)

3.2 תת מרחב ציקלי

V מ"ו, $f : V \to V$ אופרטור , $0 \neq v \in V$
אם U תת מ"ו f־אינווריאנטי כך ש $v \in U$, אזי גם ... $f(v) \in U, f(f(v)) = f^2(v) \in U, ...$
ז"א כל מסלול של v נמצא ב־ U

הגדרה

תת מרחב הציקלי של v יחסית ל־ f הוא

$$Z(f, v) = span(v, f(v), f^2(v), ...) = \{u_0v + u_1f(v) + ... + u_nf^n(v)\,|\,\forall n \in \mathbb{N}\,, \forall u_0, ..., u_n \in \mathbb{F}\}$$

צירוף ליניארי של וקטורים תמיד סופי !

טענה

$Z(f, v)$ הוא f־ אינווריאנטי
הוכחה:
נקח $u \in Z(f, v)$ אזי קיימים $u_0, ..., u_n \in \mathbb{F}$, $n \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$u = u_0v + u_1f(v) + ... + u_nf^n(v)$$

$$f(u) = f(u_0v + u_1f(v) + ... + u_nf^n(v)) =$$

$$= u_o \underbrace{f(v)}_{\in Z(f,v)} + u_1 \underbrace{f^2(v)}_{\in Z(f,v)} + ... + u_n \underbrace{f^{n+1}(v)}_{\in Z(f,v)}$$

ולכן $f(u) \in Z(f, v)$

בסיס ל־ $Z(f, v)$
ראינו ש : $Z(f, v) = span(\underbrace{v, f(v), f^2(v), ...}_{(*)})$
הקבוצה (*) פורשת של $Z(f, v)$
נניח ש־ $dimV < \infty$, נרצה למצוא בסיס ל־ $Z(f, v)$

טענה

אם k האינדקס המקסימלי כך ש: $v, f(v), ..., f^k(v)$ בת"ל, אזי $v, f(v), ..., f^k(v)$ בסיס ל־ $Z(f, v)$
הוכחה:
$v, f(v), ..., f^k(v)$ בת"ל ולכן נוכיח שהיא פורשת את $Z(f, v)$
מספיק להוכיח שלכל $m > k$: $f^m(v) \in span(v, f(v), ..., f^k(v))$
נוכיח זאת באינדוקציה על m
בסיס: אם $m = k + 1$ אזי ראנו מקודם : $\alpha_0v + \alpha_1f(v) + ... + \alpha_kf^k(v) + f^{k+1}(v) = 0$
כלומר $f^{k+1}(v) = -\alpha_0v - \alpha_1f(v) - ... - \alpha_kf^k(v)$ וכל $f^{k+1}(v) \in span(v, f(v), ..., f^k(v))$
הנחת האינדוקציה : נניח נכונות עבור m ונוכיח עבור $m + 1$

הוכחה : מההנחה עבור m נובע $f^m(v) = u_0v + ... + u_kf^k(v)$ לאיזשהם $u_0, ..., u_k$.מתקיים :

$$f^{m+1}(v) = f(f^m(v)) = f(u_0v + ... + u_kf^k(v)) = \underbrace{u_0f(v) + ... + u_{k-1}f^k(v)}_{\in span(v,f(v),...,f^k(v))} + u_k \underbrace{f^{k+1}(v)}_{\in span(v,f(v),...,f^k(v))}$$

לכן $f^{m+1}(v) \in span(v, f(v), ..., f^k(v))$