ریاضیات مندسی

تمرین کامپیوتری شماره 1

[گزارش کار]

نام دانشجو: محمدمهدی عبدالحسینی

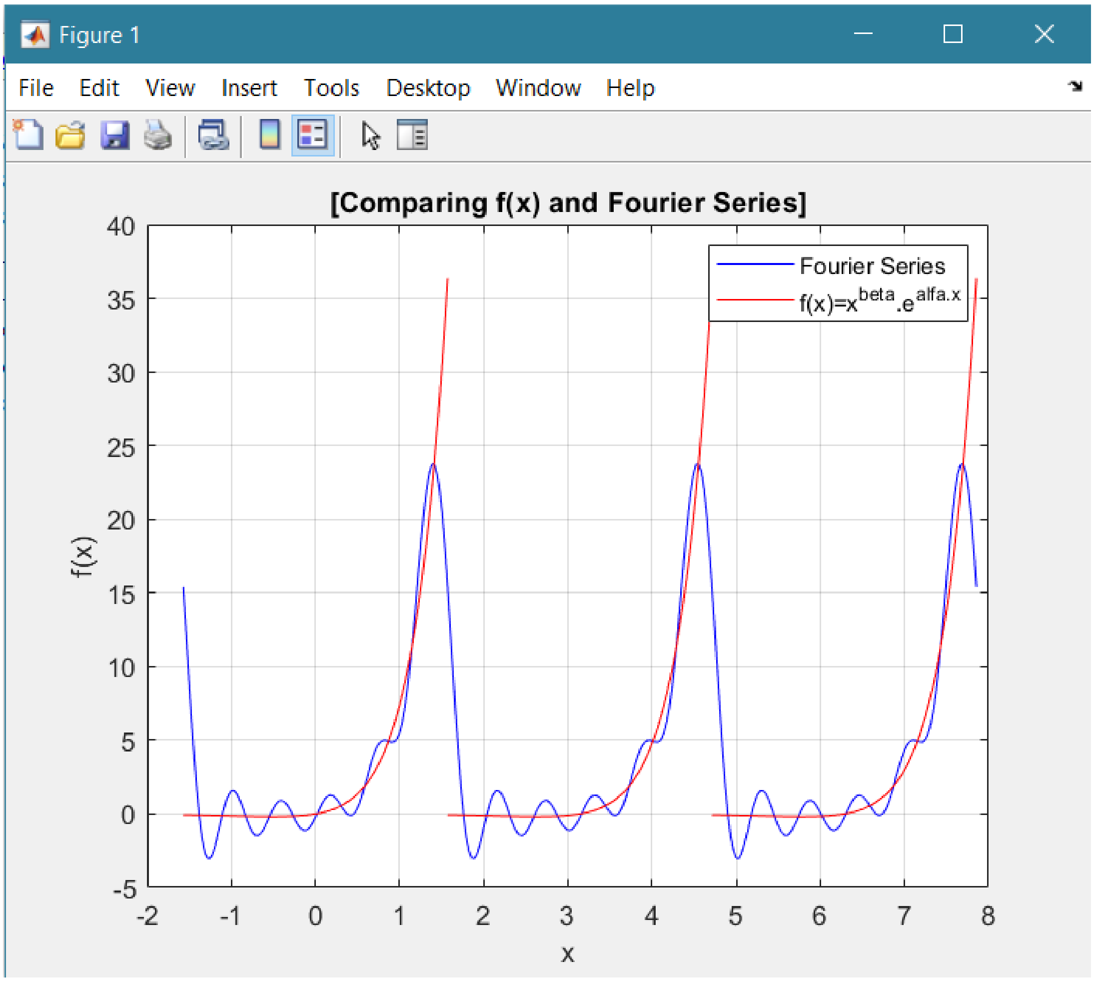
شماره دانشجویی: 810 198 434

استاد: دکتر کریم محمدپوراقدم

بخش اول:

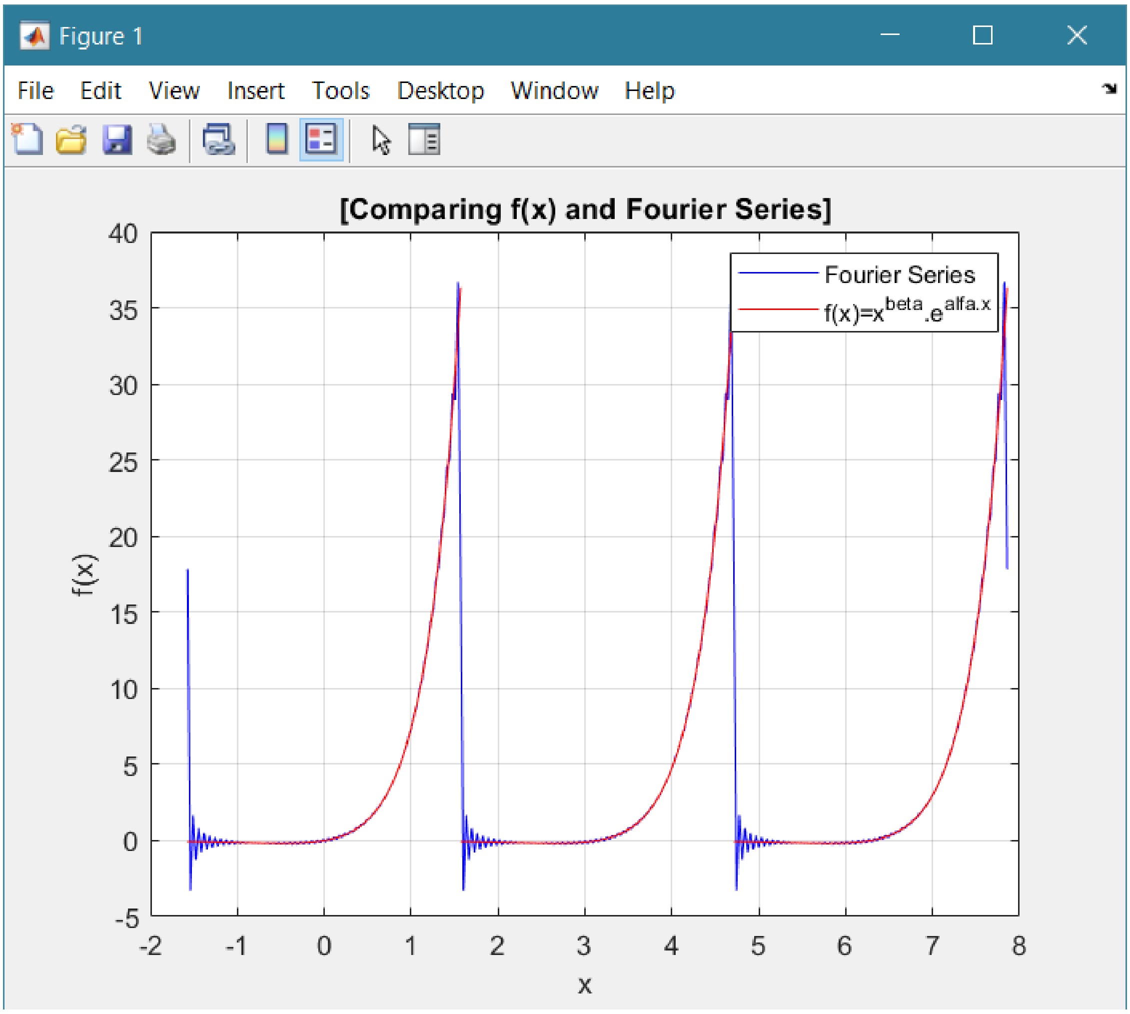
سری فوریه $f(x)=x^{\beta}e^{\alpha x}$ به ازای $\alpha = 2$ و $\beta = 1$ با تقریب N=5 و همچنین k=3 جمله اول آن بصورت زیر خواهد بود.

```
>> Part1
Enter The Value of N: 5
Enter The Value of m: 3
Enter The Value of k: 3
Enter The Value of beta: 1
Enter The Value of alfa: 2
Enter The Value of T: pi
The first 3 sentences of Fourier Series f(x):
 f(x) = 3.96 + -5.80Cos(2.00x) + 3.96Sin(2.00x) + 2.76Cos(4.00x) + -4.05Sin(4.00x)
fx >>
```



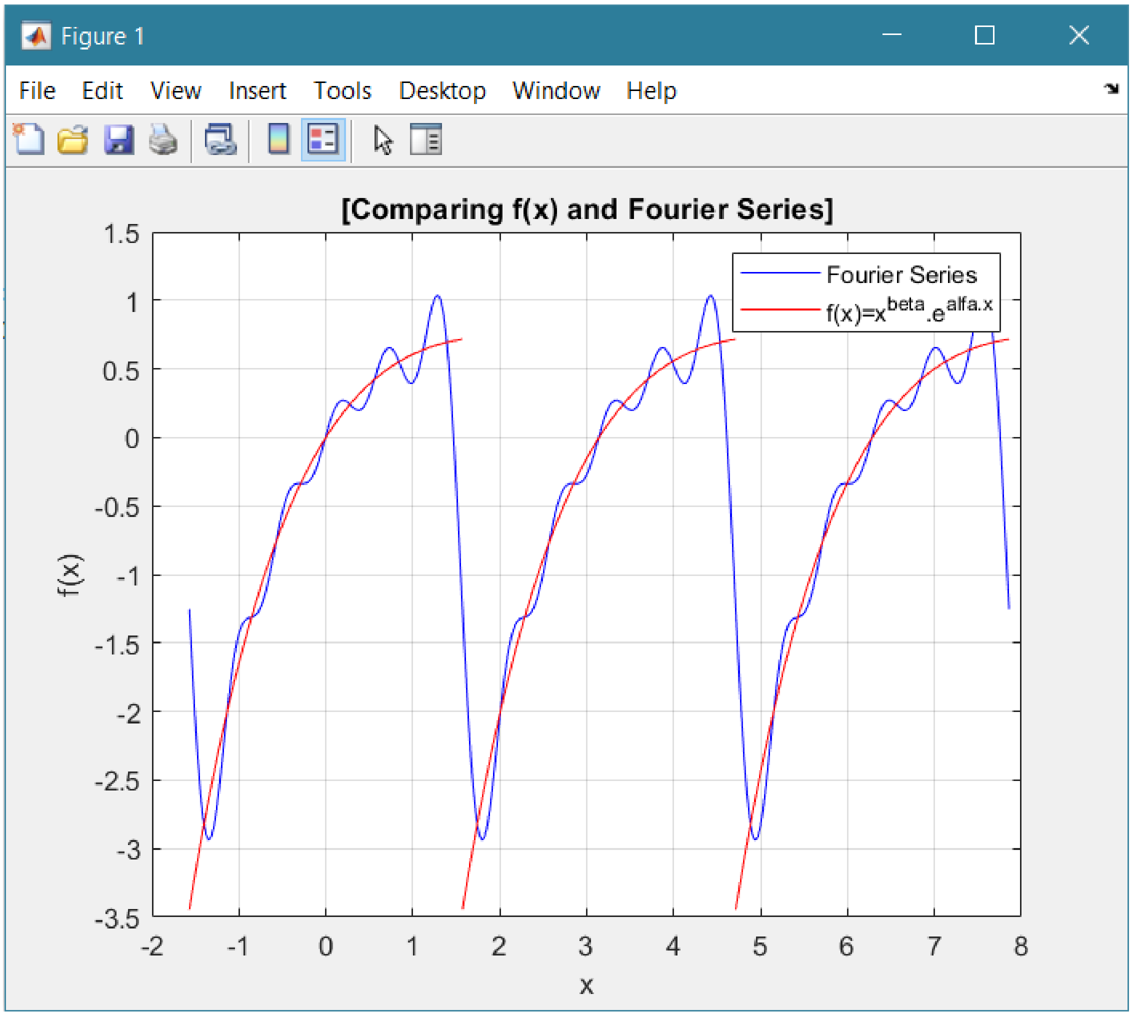
سری فوریه f(x)=$x^{\beta}e^{\alpha x}$ به ازای $\alpha = 2$ و $\beta = 1$ با تقریب N=50 و همچنین k=3 جمله اول آن بصورت زیر خواهد بود.

```
>> Part1
Enter The Value of N: 50
Enter The Value of m: 3
Enter The Value of k: 3
Enter The Value of beta: 1
Enter The Value of alfa: 2
Enter The Value of T: pi
The first 3 sentences of Fourier Series f(x):
 f(x) = 3.96 + -5.80Cos(2.00x) + 3.96Sin(2.00x) + 2.76Cos(4.00x) + -4.05Sin(4.00x)
fx >>
```



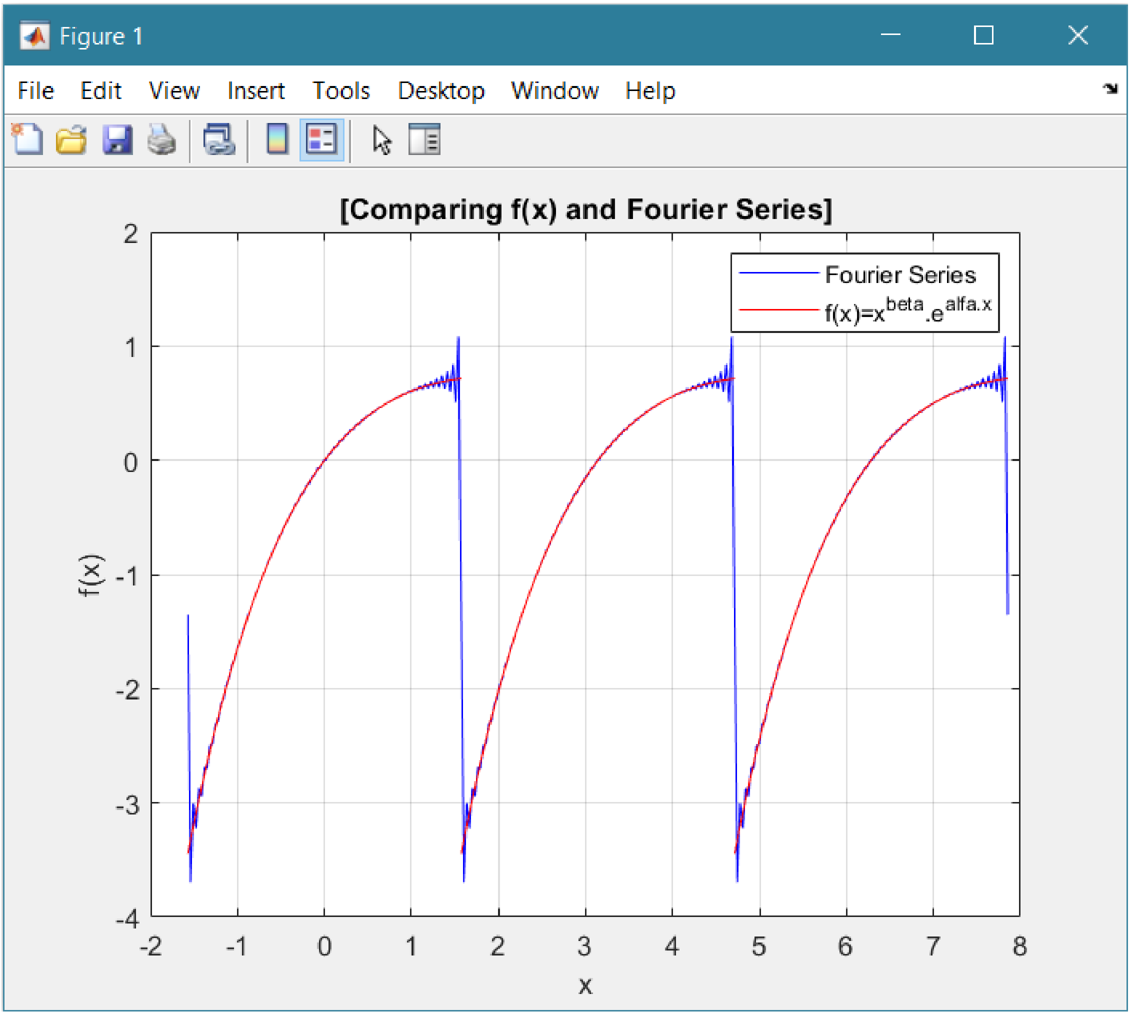
سری فوریه $f(x)=x^{\beta}e^{\alpha x}$ به ازای $\alpha = -1/2$ و $\beta = 1$ با تقریب N=5 و همچنین k=3 جمله اول آن بصورت زیر خواهد بود.

```
>> Part1
Enter The Value of N: 5
Enter The Value of m: 3
Enter The Value of k: 3
Enter The Value of beta: 1
Enter The Value of alfa: -1/2
Enter The Value of T: pi
The first 3 sentences of Fourier Series f(x):
 f(x) = -0.44 + 0.54Cos(2.00x) + 1.12Sin(2.00x) + -0.15Cos(4.00x) + -0.64Sin(4.00x)
>>
```



سری فوریه f(x)=$x^{\beta}e^{\alpha x}$ به ازای $\alpha = -1/2$ و $\beta = 1$ با تقریب N=50 و همچنین k=3 جمله اول آن بصورت زیر خواهد بود.

```
>> Part1
Enter The Value of N: 50
Enter The Value of m: 3
Enter The Value of k: 3
Enter The Value of beta: 1
Enter The Value of alfa: -1/2
Enter The Value of T: pi
The first 3 sentences of Fourier Series f(x):
 f(x) = -0.44 + 0.54Cos(2.00x) + 1.12Sin(2.00x) + -0.15Cos(4.00x) + -0.64Sin(4.00x)
>>
```



بخش اول :

$$f(x) = x^{\beta} e^{\alpha x} \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

if $\beta = 1$, $\alpha = 2$: $f(x) = x e^{2x}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int x e^{2x} dx = \frac{\pi \cosh(\pi) - \sinh(\pi)}{2\pi} \approx 3.96$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int x e^{2x} \cos 2nx \, dx = \frac{\left((-1)^n \left((n^2-1)\sinh(\pi) + \pi (n^2+1) \cosh(\pi) \right)\right.}{\pi (n^2+1)^2}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int x e^{2x} \cos 2nx \, dx = \frac{\left(-n (-1)^n \left(\pi (n^2+1) \cosh(\pi) - 2\sinh(\pi) \right) \right)}{\pi (n^2+1)^2}$$

if $\beta = 1$, $\alpha = -\frac{1}{2}$: $f(x) = x e^{-\frac{1}{2}x}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int x e^{-\frac{1}{2}x} dx = -e^{\frac{x}{2}} (x+2) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \approx -0.44$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int x e^{-\frac{1}{2}x} \cos_{2nx} dx = \frac{2e^{-\pi/4} \left((-1)^n \left(16(\pi-4)n^2 + e^{\pi/2} \left(16(4+\pi)n^2 + \pi - 4 \right) + \pi + 4 \right) \right)}{\pi (16n^2+1)^2}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int x e^{-\frac{1}{2}x} \sin 2nx \, dx = \frac{2e^{-\pi/4} \left(4n (-1)^n \left(16\pi n^2 + e^{\pi/2} \left(16\pi n^2 + \pi - 8 \right) + \pi + 8 \right) \right)}{\pi (16n^2+1)^2}$$

بخش دوم:

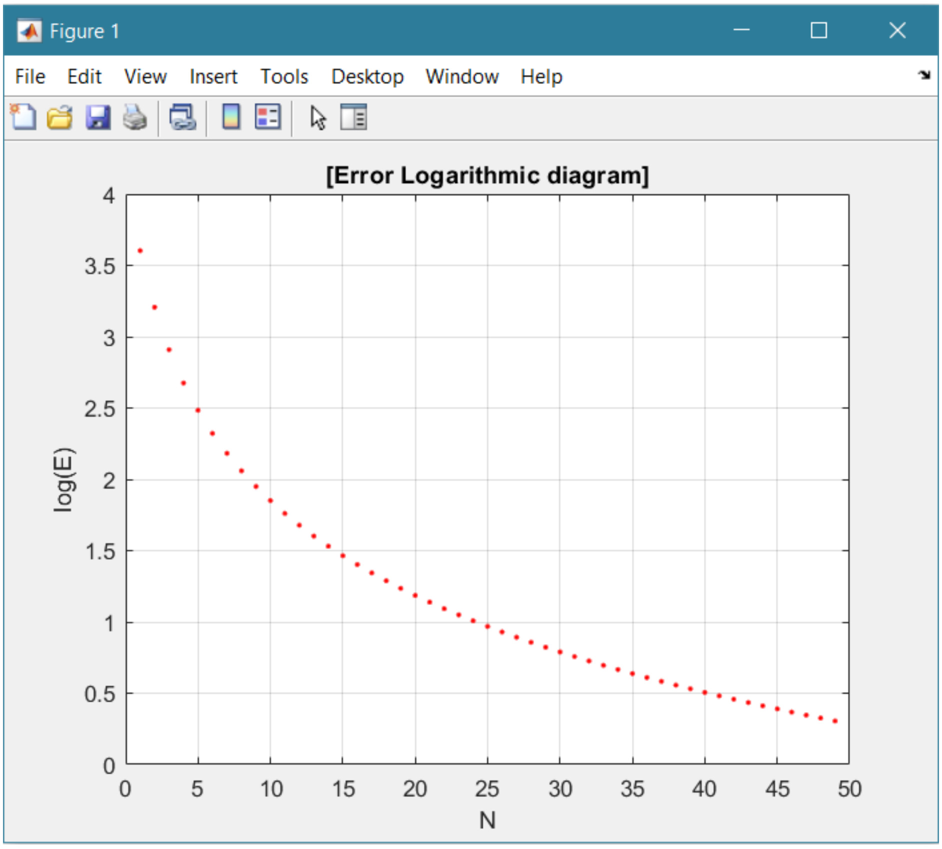
مقدار خطای سری فوریه $f(x)=x^{\beta}e^{\alpha x}$ به ازای $\alpha = 2$ و $\beta = 1$ برای N=5,50,100 بصورت زیر خواهد بود.

```
>> Part2
Enter The Value of N: 5
Enter The Value of beta: 1
Enter The Value of alfa: 2
Enter The Value of T: pi
E = 11.9845
>> Part2
Enter The Value of N: 50
Enter The Value of beta: 1
Enter The Value of alfa: 2
Enter The Value of T: pi
E = 1.3301
>> Part2
Enter The Value of N: 100
Enter The Value of beta: 1
Enter The Value of alfa: 2
Enter The Value of T: pi
E = 0.6685
>>
```

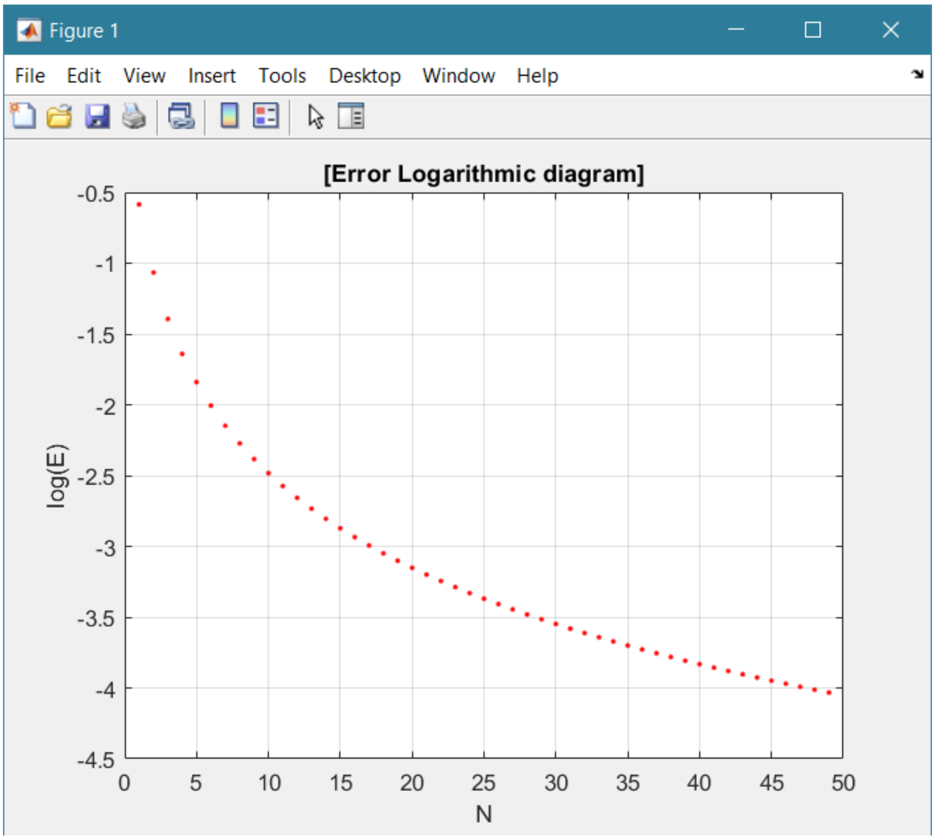
مقدار خطای سری فوریه $f(x)=x^{\beta}e^{\alpha x}$ به ازای $\alpha = -1/2$ و $\beta = 1$ برای N=5,50,100 بصورت زیر خواهد بود.

```
>> Part2
Enter The Value of N: 5
Enter The Value of beta: 1
Enter The Value of alfa: -1/2
Enter The Value of T: pi
E = 0.1589
>> Part2
Enter The Value of N: 50
Enter The Value of beta: 1
Enter The Value of alfa: -1/2
Enter The Value of T: pi
E = 0.0174
>> Part2
Enter The Value of N: 100
Enter The Value of beta: 1
Enter The Value of alfa: -1/2
Enter The Value of T: pi
E = 0.0087
```

نمودار لگاریتم خطای سری فوریه $f(x)=x^{\beta}e^{\alpha x}$ به ازای $\alpha = 2$ و $\beta = 1$ برحسب N بصورت زیر خواهد بود.



نمودار لگاریتم خطای سری فوریه $f(x)=x^{\beta}e^{\alpha x}$ به ازای $\alpha = -1/2$ و $\beta = 1$ برحسب N بصورت زیر خواهد بود.



بخش 2 :

$$E = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(x)-g(x)]^2 dx = \frac{1}{T}\int f^2(x)dx - (2a_0\alpha_0 - \alpha_0^2) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} 2a_n\alpha_n - \alpha_n^2 + 2b_n\beta_n - \beta_n^2$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sin nx \quad ; \quad g(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx$$

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_0} = -2a_0 + 2\alpha_0 \Rightarrow$$ کمترین خطا $\Rightarrow$ بهترین تقریب : $-2a_0 + 2\alpha_0 = 0 \rightarrow a_0 = \alpha_0$

به طریق مشابه $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial \alpha_n} = -\frac{1}{2}\sum 2a_n - 2\alpha_n = 0 \Rightarrow a_n = \alpha_n \\ \dfrac{\partial E}{\partial \beta_n} = -\frac{1}{2}\sum 2b_n - 2\beta_n = 0 \Rightarrow b_n = \beta_n \end{cases}$$

بخش سوم:

به طور مثال حداقل مقدار N برای آنکه خطای سری فوریه f(x)=$x^{\beta}e^{\alpha x}$ به ازای $\alpha = 2$ و $\beta = 1$ ، کمتر از 2 باشد ، بصورت زیر خواهد بود.

```
>> Part3
Enter The Value of E: 2
Enter The Value of beta: 1
Enter The Value of alfa: 2
Enter The Value of T: pi
min N = { 34 }
>>
```