به نام خدا

دانشگاه تهران

پردیس دانشکده‌های فنی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

سیستم‌های کنترل خطی

زمستان 1400

استاد: دکتر ارس ادهمی

پروژه نهایی (اختیاری-امتیازی)

FINAL PROJECT

اعضای گروه :

محمدمهدی عبدالحسینی

810 198 434

امیرحسین عرفانی منفرد

810 198 440

سیدمحمد وزیری چیمه

810 198 482

Linear Control Systems

فهرست مطالب

سیستم کنترلی پیشنهادی

نام سیستم کنترلی: رفتار سلول‌های فیتوپلانکتون در یک راکتور پیوسته

حالت‌ها و ورودی(های) کنترلی سیستم

سیستم کنترلی پیشنهادی 3 متغیر حالت و 1 ورودی کنترلی دارد که در ادامه معرفی شده‌اند:

x_1 : غلظت زیست توده

x_2 : سهمیه سلولی ماده مغذی جذب شده را نشان می‌دهد که بصورت مقدار ماده مغذی داخل سلولی در واحد زیست توده بیان می‌شود.

x_3 : غلظت ماده مغذی داخل راکتور

u : نرخ رقیق‌سازی

y : تابعی از میزان غلظت زیست توده

دینامیک سیستم غیرخطی

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x_1) \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} f(x) = \begin{bmatrix} a_2\left(1 - \dfrac{1}{x_2}\right)x_1 - D_0 x_1 \\ a_3 \dfrac{x_3}{a_1 + x_3} - a_2(x_2 - 1) \\ D_0(1 - x_3) - \dfrac{x_1 x_3}{a_1 + x_3} \end{bmatrix} \\ g(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ 0 \\ 1 - x_3 \end{bmatrix} \\ h(x_1) = x_1 \end{cases}$$

پارامترها

مجموع شماره دانشجویی اعضای گروه عددی زوج است، بنابراین از پارامترهای دسته دوم استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} a_1 = 0.02 \\ a_2 = 3.64 \\ a_3 = 7.21 \\ D_0 = 1.2 \end{cases}$$

سوالات

در ابتدا سیستم را با مشخصات گفته شده در محیط متلب به شکل زیر پیاده‌سازی می‌کنیم.

```
syms x1 x2 x3 u;
a1 = 0.02; a2 = 3.64; a3 = 7.21; D0 = 1.2;
fx(x1,x2,x3,u) = [a2*(1-1/x2)*x1-D0*x1;
    a3*(x3/(a1+x3))-a2*(x2-1);
    D0*(1-x3)-x1*x3/(a1+x3)]
gx(x1,x2,x3,u) = [-x1; 0; 1-x3]
hx(x1,x2,x3,u) = x1
xdot = fx + gx*u
y = hx;
```

fx(x1, x2, x3, u) =

$$\begin{pmatrix} -\frac{6\,x_1}{5} - x_1\left(\frac{91}{25\,x_2} - \frac{91}{25}\right) \\ \frac{721\,x_3}{100\left(x_3+\frac{1}{50}\right)} - \frac{91\,x_2}{25} + \frac{91}{25} \\ \frac{6}{5} - \frac{x_1\,x_3}{x_3+\frac{1}{50}} - \frac{6\,x_3}{5} \end{pmatrix}$$

gx(x1, x2, x3, u) =

$$\begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \\ 1-x_3 \end{pmatrix}$$

hx(x1, x2, x3, u) = x_1

xdot(x1, x2, x3, u) =

$$\begin{pmatrix} -\frac{6\,x_1}{5} - u\,x_1 - x_1\left(\frac{91}{25\,x_2} - \frac{91}{25}\right) \\ \frac{721\,x_3}{100\left(x_3+\frac{1}{50}\right)} - \frac{91\,x_2}{25} + \frac{91}{25} \\ \frac{6}{5} - u\,(x_3-1) - \frac{x_1\,x_3}{x_3+\frac{1}{50}} - \frac{6\,x_3}{5} \end{pmatrix}$$

y(x1, x2, x3, u) = x_1

3) یافتن نقاط تعادل سیستم

با حل معادله $\dot{x} = 0$ میتوان نقاط تعادل سیستم را به شکل زیر محاسبه کرد.

```
EQe = xdot == 0;
solve_EQe = solve(EQe,[x1,x2,x3,u]);
x1e = solve_EQe.x1
x2e = solve_EQe.x2
x3e = solve_EQe.x3
ue = solve_EQe.u
```

x1e =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{147392897}{30699500} \\ 0 \end{pmatrix}$$

x2e =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{91}{61} \\ \frac{3901}{1326} \end{pmatrix}$$

x3e =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{156}{23615} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ue =

$$\begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4) انتخاب نقطه تعادل کاربردی سیستم

با توجه به اینکه خروجی سیستم $y = h(x_1)$ تنها تابعی از x_1 می‌باشد، بنابراین نقطه تعادل کاربردی سیستم را در جایی درنظر میگیریم که این مقدار غیر صفر باشد. $(x_{1e} \neq 0)$ از لحاظ فیزیکی میتوان گفت با توجه به اینکه خروجی سیستم نشان دهنده غلظت زیست توده می‌باشد، غلظت زیست توده صفر، در واقع از لحاظ کاربردی اهمیت ندارد، لذا باید این مقدار غیر صفر باشد. از طرفی دیگر در نقاط تعادل بدست آمده مقادیر از لحاظ فیزیکی نامعتبر هستند، مثلا نرخ رقیق‌سازی منفی.

$$x_{1e} \approx 4.80115 \quad , \quad x_{2e} \approx 1.4918 \quad , \quad x_{3e} \approx 0.00661 \quad , \quad u_e = 0$$

5) خطی‌سازی حول نقطه تعادل

$$\begin{cases}\dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x,u)\end{cases} \xrightarrow{\text{خطی سازی}} \begin{cases}\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} \\ \bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u}\end{cases} \;;\; \begin{cases}\bar{x} = x - x_e \\ \bar{u} = u - u_e \\ \bar{y} = y - y_e\end{cases}$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x_e \\ u_e}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x_e \\ u_e}}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{\substack{x_e \\ u_e}} \qquad C = \frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{\substack{x_e \\ u_e}} \qquad D = \frac{\partial h}{\partial u}\Big|_{\substack{x_e \\ u_e}}$$

```
A = [diff(xdot,x1) diff(xdot,x2) diff(xdot,x3)]
B = diff(xdot,u)
C = [diff(hx,x1) diff(hx,x2) diff(hx,x3)]
D = diff(hx,u)
```

A(x1, x2, x3, u) =

$$\begin{pmatrix} \frac{61}{25} - \frac{91}{25\,x_2} - u & \frac{91\,x_1}{25\,x_2^2} & 0 \\ 0 & -\frac{91}{25} & \frac{721}{100\left(x_3 + \frac{1}{50}\right)} - \frac{721\,x_3}{100\,\sigma_1} \\ -\frac{x_3}{x_3 + \frac{1}{50}} & 0 & \frac{x_1\,x_3}{\sigma_1} - \frac{x_1}{x_3 + \frac{1}{50}} - u - \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \left(x_3 + \frac{1}{50}\right)^2$$

B(x1, x2, x3, u) =

$$\begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \\ 1 - x_3 \end{pmatrix}$$

C(x1, x2, x3, u) = $(1 \quad 0 \quad 0)$

D(x1, x2, x3, u) = 0

```
Alin = A(x1e(2),x2e(2),x3e(2),ue(2))
Blin = B(x1e(2),x2e(2),x3e(2),ue(2))
Clin = C(x1e(2),x2e(2),x3e(2),ue(2))
```

```
Dlin = D(x1e(2),x2e(2),x3e(2),ue(2))
```

Alin =

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{548448969737}{69841362500} & 0 \\ 0 & -\frac{91}{25} & \frac{156147103}{766526} \\ -\frac{1560}{6283} & 0 & -\frac{22355401}{163358} \end{pmatrix}$$

Blin =

$$\begin{pmatrix} -\frac{147392897}{30699500} \\ 0 \\ \frac{23459}{23615} \end{pmatrix}$$

Clin = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dlin = 0

```
xbar = [x1;x2;x3] - [x1e(2);x2e(2);x3e(2)]
ubar = u - ue(2)
xbardot = Alin*xbar + Blin*ubar
ybar = Clin*xbar + Dlin*ubar
```

xbar =

$$\begin{pmatrix} x_1 - \frac{147392897}{30699500} \\ x_2 - \frac{91}{61} \\ x_3 - \frac{156}{23615} \end{pmatrix}$$

ubar = u

xbardot =

$$\begin{pmatrix} \frac{548448969737\, x_2}{69841362500} - \frac{147392897\, u}{30699500} - \frac{8990966717}{767487500} \\ \frac{156147103\, x_3}{766526} - \frac{91\, x_2}{25} + \frac{39135733}{9581575} \\ \frac{23459\, u}{23615} - \frac{1560\, x_1}{6283} - \frac{22355401\, x_3}{163358} + \frac{329244}{157075} \end{pmatrix}$$

ybar =

$$x_1 - \frac{147392897}{30699500}$$

6) چه بخشی از سیستم را میخواهیم کنترل کنیم؟

از آنجا که سیستم مورد نظر تنها یک ورودی و خروجی دارد، تنها یک انتخاب برای کنترل داریم.

7) یافتن تابع تبدیل سیستم

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)B + D$$

Transfer Function

```
syms s
G = Clin/(s*eye(3)-Alin) * Blin + Dlin
```

G =

$$\frac{210919088214103}{1300\ (102098750\, s^3 + 14343765075\, s^2 + 50858537275\, s + 40551649662)} - \frac{147392897\ (25\, s + 91)\ (163358\, s + 22355401)}{1227980\ (102098750\, s^3 + 14343765075\, s^2 + 50858537275\, s + 40551649662)}$$

```
ExpFun = matlabFunction(G);
ExpFun = str2func(regexprep(func2str(ExpFun), '\.([/^\\*])', '$1'));
TF = tf(ExpFun(tf('s')))     % closeloop
```

```
TF =

       -5.005e16 s^5 - 1.406e19 s^4 - 1.021e21 s^3 - 4.698e21 s^2 - 6.96e21 s - 3.323e21
  -----------------------------------------------------------------------------------------
  1.042e16 s^6 + 2.929e18 s^5 + 2.161e20 s^4 + 1.467e21 s^3 + 3.75e21 s^2 + 4.125e21 s + 1.644e21
```

با توجه به رابطه تابع تبدیل حلقه بسته، تابع تبدیل حلقه باز را بصورت زیر بدست می‌آوریم.

```
Gs = TF/(1-TF)              % openloop
```

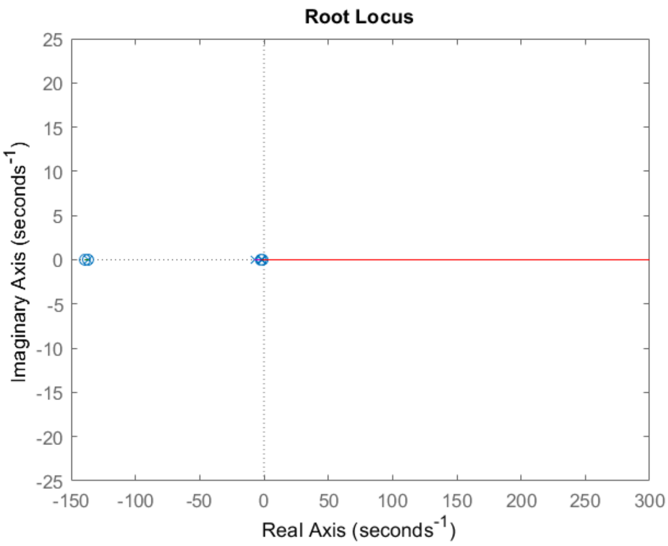
```
Gs =

  -5.217e32 s^11 - 2.932e35 s^10 - 6.265e37 s^9 - 6.152e39 s^8 - 2.553e41 s^7 - 2.587e42 s^6 - 1.229e43 s^5 - 3.278e43 s^4
                                                               - 5.203e43 s^3 - 4.889e43 s^2 - 2.515e43 s - 5.464e42

  -------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

  1.087e32 s^12 + 6.159e34 s^11 + 1.338e37 s^10 + 1.359e39 s^9 + 6.154e40 s^8 + 9.116e41 s^7 + 6.385e42 s^6 + 2.509e43 s^5
                                                  + 5.966e43 s^4 + 8.779e43 s^3 + 7.824e43 s^2 + 3.872e43 s + 8.168e42

Continuous-time transfer function.
```

* تابع TF همان تابع تبدیل حلقه بسته است و تابع Gs ، تابع تبدیل حلقه باز می‌باشد.

8) رسم نمودار مکان هندسی ریشه‌ها

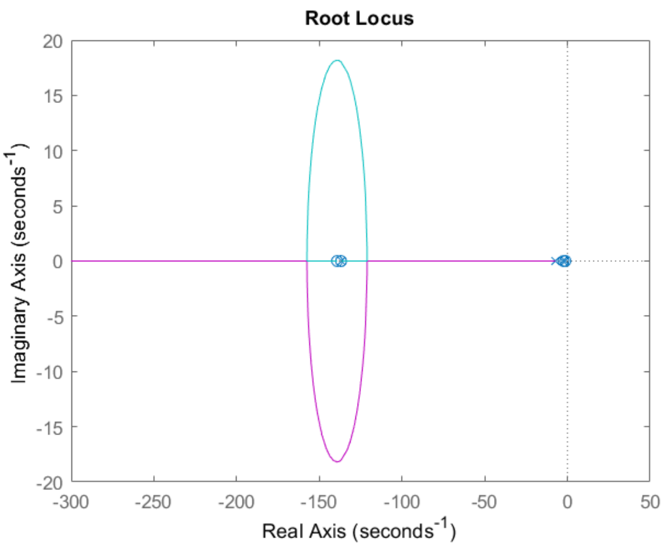
به ازای مقادیر بهره مثبت در تابع تبدیل حلقه باز :

```
rlocus(Gs)
```



به ازای مقادیر بهره منفی در تابع تبدیل حلقه بسته :

```
rlocus(-Gs)
```



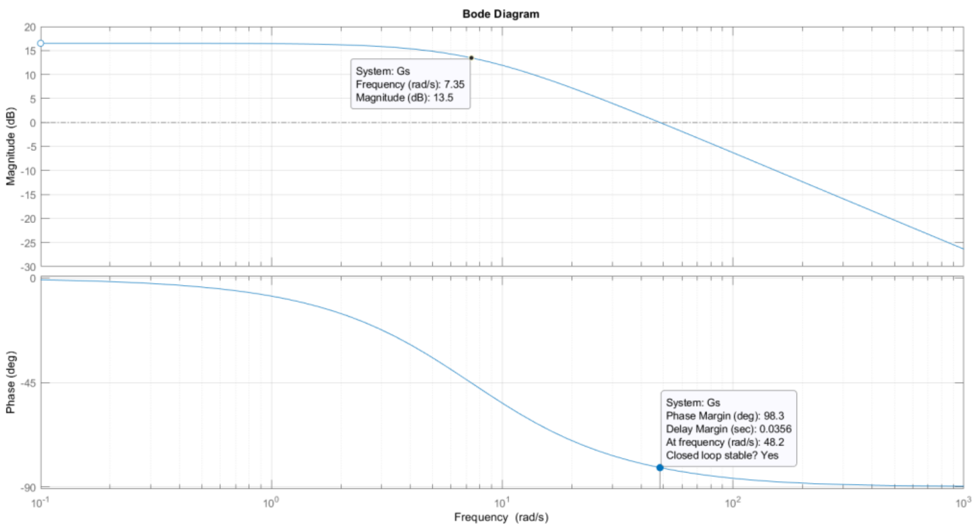
همانطور که مشاهده می‌شود، سیستم به ازای مقادیر بهره کوچکتر از صفر، پایدار است.

بنابراین مقدار دلخواه 10- را برای بهره تابع تبدیل حلقه باز سیستم درنظر میگیریم. این انتخاب به پایداری سیستم منجر میشود.

```
k = -10;
Gs = k*Gs;
TF = Gs/(1+Gs);
```

9) نمودار بود

```
bode(Gs)
```



با توجه به نمودار بود رسم شده و مقادیر مشخص شده در آن، حاشیه بهره بی‌نهایت، حاشیه فاز برابر با 98.3 و پهنای باند برابر با 7.35 خواهد بود.

10) طراحی جبران‌ساز

از آنجا سیستم مورد نظر دارای حد بهره و حد فاز قابل قبولی است، برای ما مقاومت سیستم در برابر نویز اهمیت دارد. بنابراین از جبران‌ساز پس‌فاز استفاده می‌کنیم.

$$k_p = \lim_{s \to 0} G_s = \frac{-5.464}{8.168} \approx -0.67$$

$$K = \frac{\hat{k}_p}{k_p} = \frac{-67}{-0.67} = 100 \longrightarrow G_1 = 100\, G_s$$

$$\measuredangle G_1(j\hat{\omega}_g) = -180^\circ + \hat{\gamma} + 5^\circ{:}12^\circ \xrightarrow{\hat{\gamma} = 120^\circ} \hat{\omega}_g \approx 10$$

$$\frac{1}{T} \approx \frac{\hat{\omega}_g}{10} \longrightarrow T = 1$$

$$-20 \log \beta + |G_1(j\hat{\omega}_g)|_{dB} = 0 \longrightarrow \beta \approx 400$$

```
G1 = 100*Gs
syms b
eq = -20*log10(b) + 20*log10(abs(evalfr(G1,1j*10))) == 0;
beta = vpasolve(eq,b)
```

beta = 394.68613503727770014117696272 73

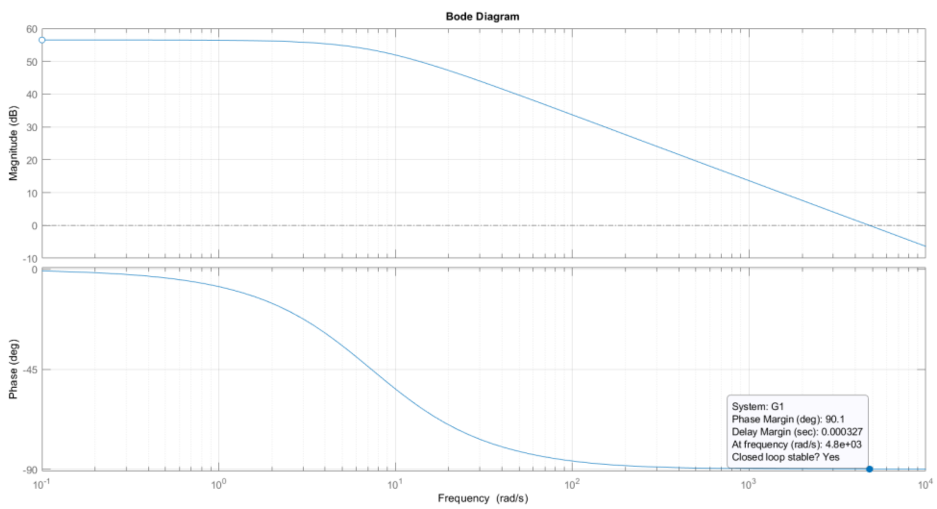
با توجه به مقادیر بدست آمده، تابع تبدیل Cs بصورت زیر خواهد بود:

```
s = tf('s')
Cs = 100 * (s+1)/(400*s+1)
```

```
Cs =

  100 s + 100
  -----------
   400 s + 1
```

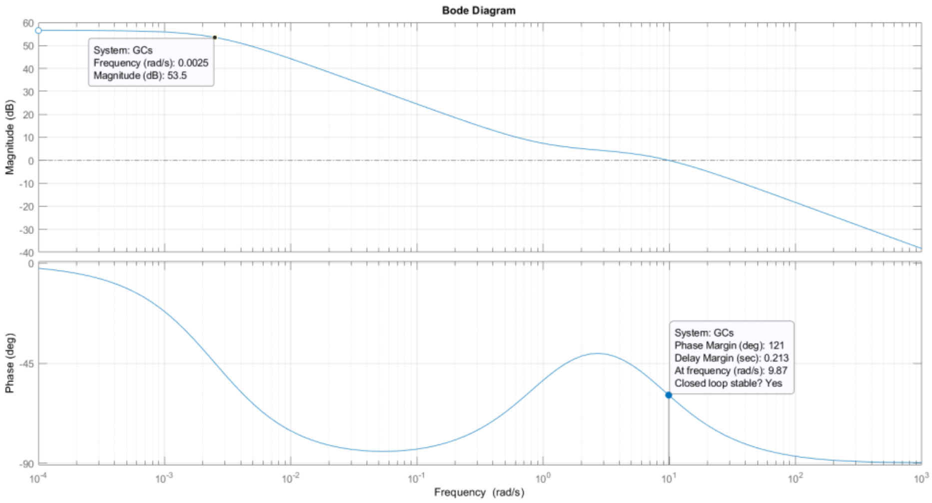
```
GCs = Gs*Cs
TFc = GCs/(1+GCs)
```

برای محاسبه $\hat{\omega}_g$ از نمودار بود G1 استفاده میکنیم که بصورت زیر میباشد:



11) بررسی صحت عملکرد جبران‌ساز

نمودار بود GCs بصورت زیر خواهد بود:

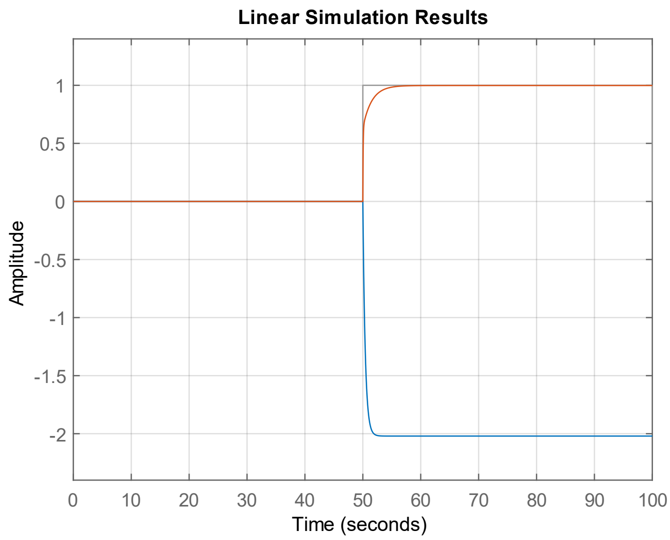


همانطور که مشاهده میشود، با اضافه شدن کنترل کننده، حاشیه فاز به 121 درجه افزایش پیدا کرده است (مطابق فرض $\hat{\gamma} = 120$) و همچنین پهنای باند کاهش یافته و فرکانس قطع به 0.0025 میرسد، هرچند سیستم کندتر میشود اما انتظار میرود دربرابر نویز مقاومت بیشتری داشته باشد.

12)13) ورودی اغتشاش

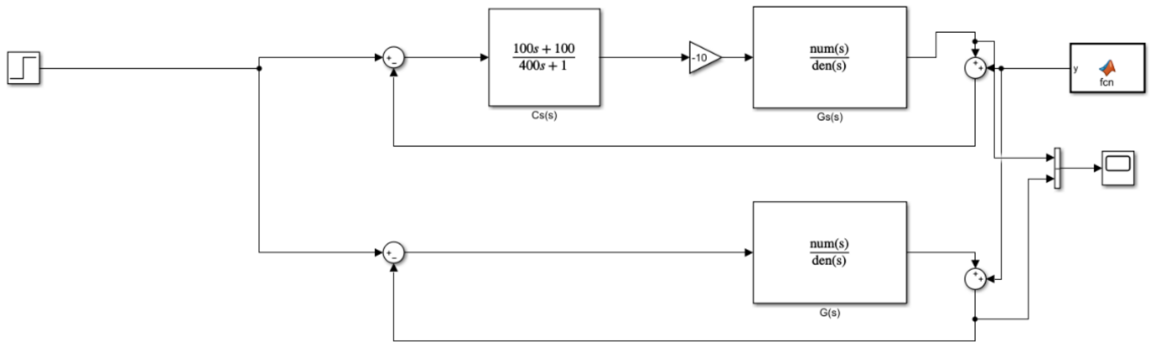
ابتدا خروجی سیستم را به ازای یک سیگنال ورودی مربعی بدون ورودی اغتشاش رسم میکنیم.

```
[x,t] = gensig('square',100,100,0.01);
TForiginal = (-Gs/10)/(1 - Gs/10);
lsim(TForiginal,TFc,x,t)
set(gca,'xtick', 0 : 10 : 100, 'xlim', [0,100]);
set(gca,'ytick', -3 : 0.5 : 2, 'ylim', [-2.4,1.4]);
grid on;
```

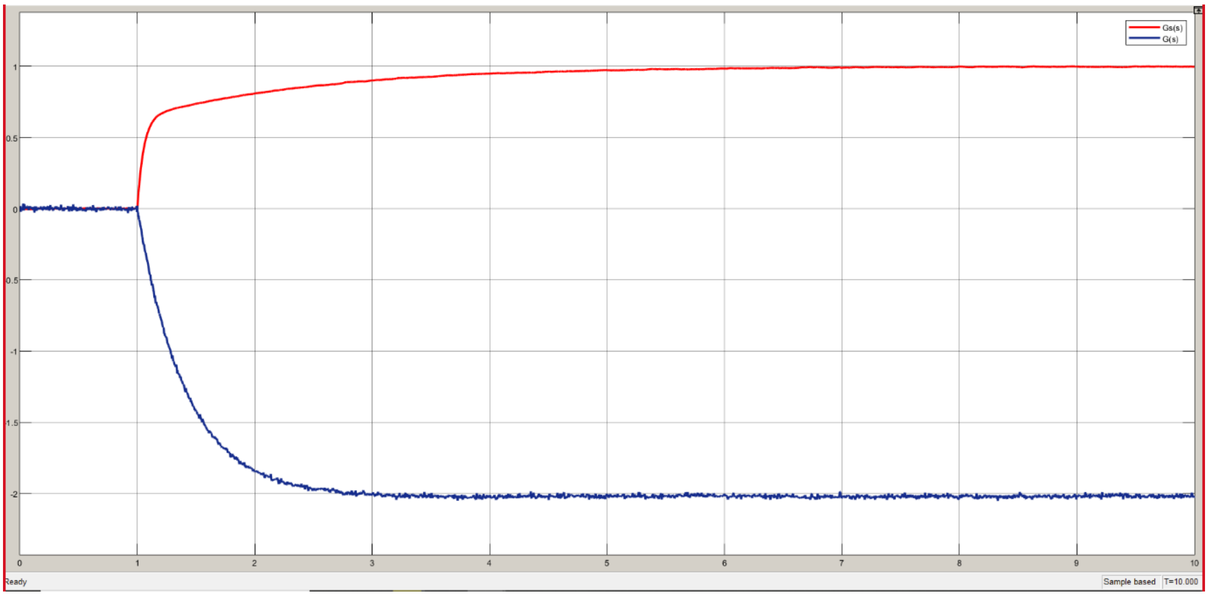


همانطور که از خروجی مشخص است، با اضافه شدن کنترلر، سیستم کندتر میشود اما انتظار میرود در مواجهه با نویز مقاومت بیشتری نسبت به سیستم بدون کنترلر داشته باشد.

در ادامه توابع تبدیل و جبران‌ساز در محیط سیمولینک متلب پیاده‌سازی میکنیم و اغتشاش جمع‌شونده در خروجی را برآن اعمال میکنیم.



خروجی سیستم با کنترل‌کننده (نمودار قرمز) و بدون کنترل‌کننده (نمودار آبی) بصورت زیر خواهد بود.



همانطور که مشاهده می‌شود، خروجی سیستم با کنترل‌کننده پس‌فاز، عملکرد بهتری در مواجهه با نویز دارد.

* سهم مشارکت تمام اعضای گروه در انجام پروژه یکسان میباشد. (با توجه به اینکه تمام بخشهای پروژه به صورت تماس اسکایپی و با مشارکت همه انجام شده است.)