به نام خدا

دانشگاه تهران

پردیس دانشکده‌های فنی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

اصول سیستم‌های مخابراتی

پاییز 1400

استاد: دکتر مریم صباغیان

تمرین کامپیوتری شماره 4

Statistics, Random Process and Quantization

محمدمهدی عبدالحسینی

810 198 434

Communication Systems

فهرست مطالب

بخش اول : آمار و احتمالات (Statistics) :

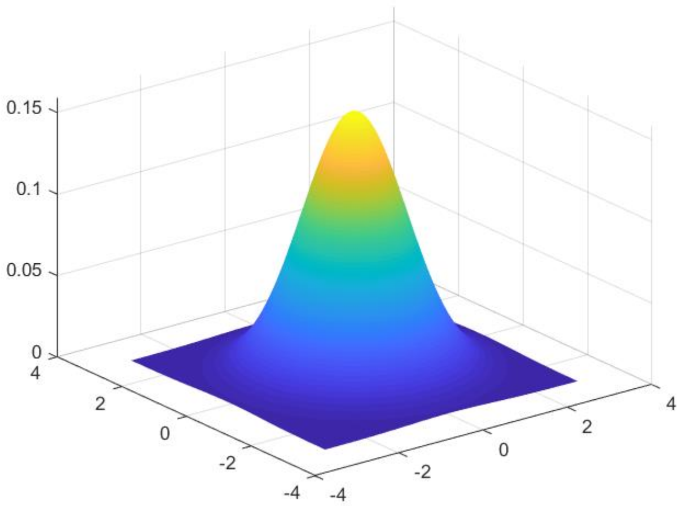
Part 1:

متغیرهای تصادفی X و Y را با توزیع گوسی با میانگین صفر و واریانس یک، بصورت زیر تعریف میکنیم:

```
n = 3000;
t = linspace(-3,3,n);
X = normpdf(t,0,1); % X = 1/(sqrt(2*pi)) * exp(-t.^2/2)
Y = normpdf(t,0,1); % Y = 1/(sqrt(2*pi)) * exp(-t.^2/2)
```

منحنی تابع همبستگی متغیرهای تصادفی X و Y ، بصورت زیر خواهد بود.

```
s = surf(t,t,Y'*X);
set(s,'LineStyle','none');
grid on
```

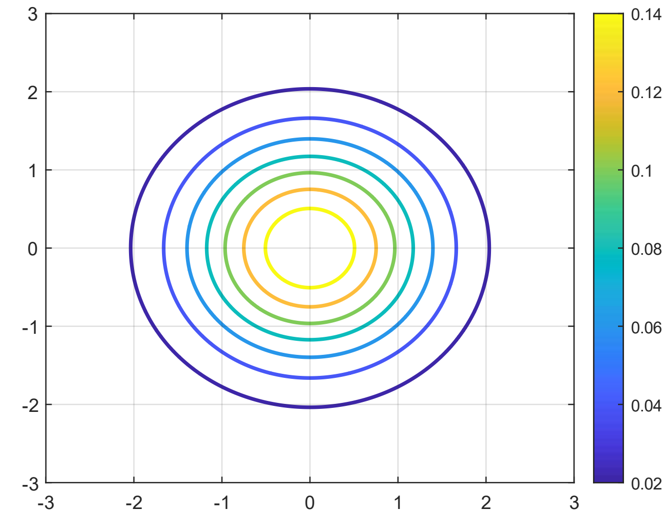


تابع نوشته شده برای رسم منحنی‌های هم‌احتمال بصورت کانتوری، بصورت زیر میباشد:

```
function  RContour(X,Y,t1,t2)
    contour(t1,t2,Y'*X,'linewidth', 2);
    grid on;
end
```

خروجی این تابع برای متغیرهای تصادفی X و Y به شکل زیر خواهد بود:

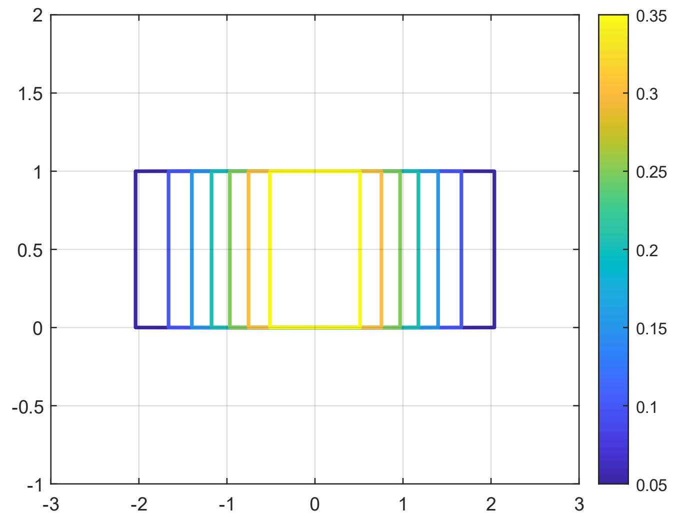
```
RContour(X,Y,t,t);
```



Part 2:

توزیع مشترک یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال و یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت، بصورت زیر میباشد:

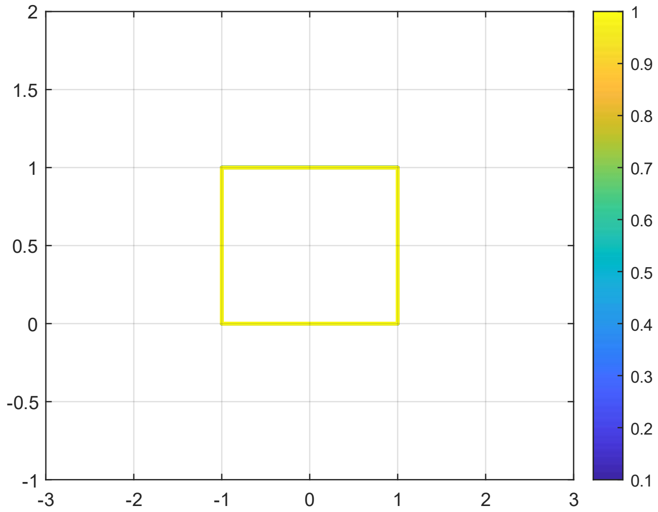
```
t2 = linspace(-1,2,n);
Y = unifpdf(t2);
RContour(X,Y,t,t2); % X = 1/(sqrt(2*pi)) * exp(-t.^2/2)
```



همانطور که انتظار داشتیم، توزیع مشترک در یک بُعد، توزیع گوسی و در بُعد دیگر، توزیع یکنواخت دارد.

توزیع مشترک دو متغیر تصادفی که هر دو توزیع یکنواخت دارند، بصورت زیر میباشد:

```
X = unifpdf(t2);
Y = unifpdf(t2);
RContour(X,Y,t,t2);
```



همانطور که میبینیم توزیع مشترک در هر دو بعد یکنواخت و برابر با یک میباشد.

Part 4:

$X \sim N(0,1)\ ,\ Y \sim N(0,1)\ ;\ Z = aX + \sqrt{1-a^2}\,Y\ ,\ (-1<a<1)\ ;$

$E\{Z\} = E\{ax + \sqrt{1-a^2}\,y\} = a.m_x + \sqrt{1-a^2}.m_y = \underline{0}\ ;\ \sigma_z^2 = E\{z^2\} - (E\{z\})^2 = E\{a^2x^2 + (1-a^2)y^2 + 2a\sqrt{1-a^2}\,xy\}$

$\rightarrow \sigma_z^2 = 1 + 2a\sqrt{1-a^2}\,E\{xy\} = \underline{1}$

بخش دوم : فرآیند تصادفی (Random Process) :

Part 1:

فرآیند تصادفی X1 ایستان میباشد، زیرا میانگین آن، ثابت است و تابعیت زمان ندارد و همبستگی آن، تابع اختلاف زمانی میباشد و به تنهایی به زمان وابسته نیست. اما فرآیند تصادفی X2 غیر ایستان میباشد.

$x_1(t) = \cos(2\pi t + \phi)\ ;\ \phi \sim U[-\pi, \pi]$

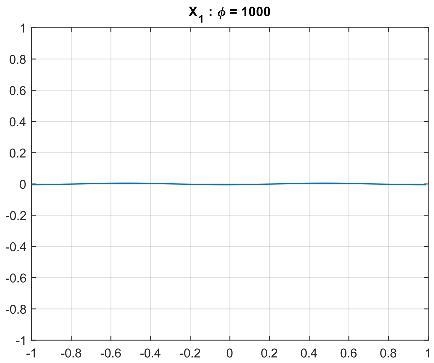
$x_2(t) = \cos(2\pi t + \phi)\ ;\ \phi \sim U[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

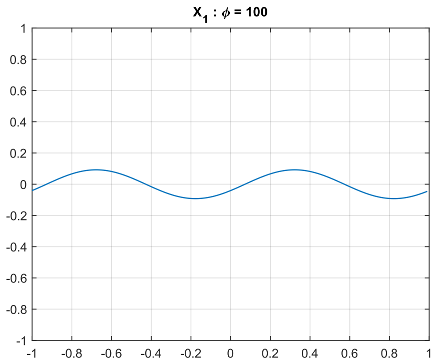
$E\{x_1(t)\} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t + \phi_1)\, d\phi_1 = 0\ \checkmark\ ;\ E\{x_2(t)\} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{2}{\pi} \cos(2\pi t + \phi_2)\, d\phi_2 = \frac{2}{\pi}\left[\sin(2\pi t + \frac{\pi}{4}) - \sin(2\pi t - \frac{\pi}{4})\right]\ \times$

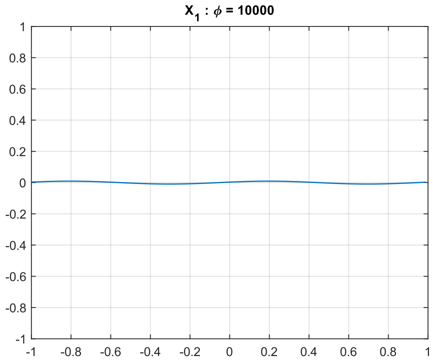
$R_{x_1} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t + \phi_1)\cos(2\pi(t+\tau) + \phi_1)\, d\phi_1 = \frac{1}{2}\cos(2\pi\tau)\ \checkmark\ ;\ R_{x_2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\pi} \cos(2\pi t + \phi_2)\cos(2\pi(t+\tau) + \phi_2)\, d\phi_2 = \frac{1}{2}\cos(2\pi\tau) + \frac{1}{\pi}\cos(2\pi(2t+\tau))$

Part 2:3:

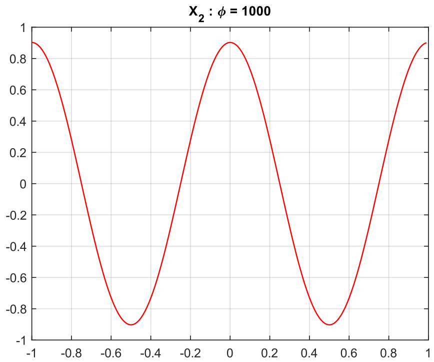
به ازای مقادیر مختلف phi ، میانگین X1 و X2 را رسم میکنیم.

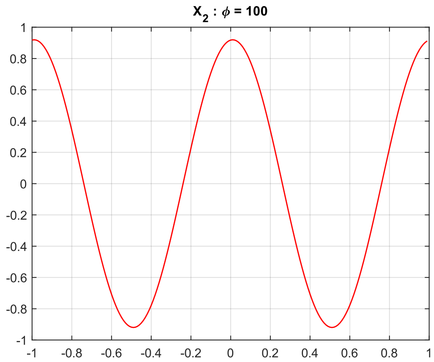


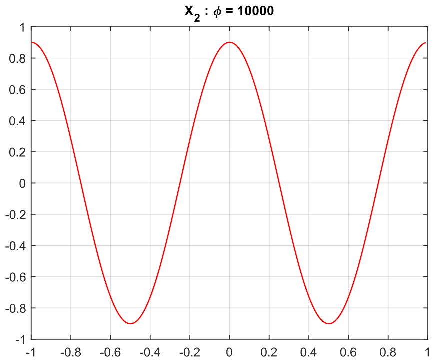




همانطور که مشاهده میکنیم، میانگین‌های بدست آمده برای فرآیند تصادفی X1 بسیار به صفر نزدیک هستند و با محاسبات دستی همخوانی دارد. همچنین با افزایش phi به سمت بینهایت، خروجی به واقعیت نزدیکتر میشود. در نهایت میتوان گفت مشابه تحلیل دستی، شرط ایستان بودن برقرار است.



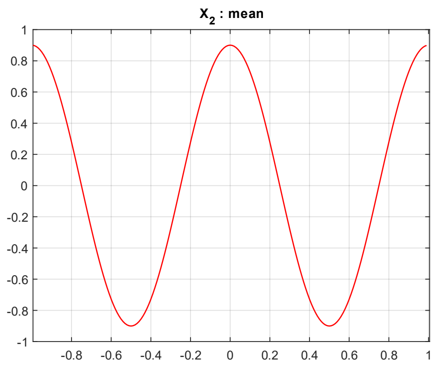


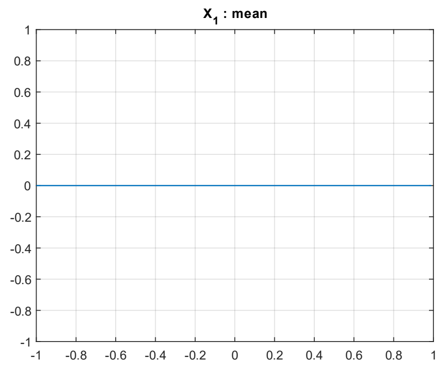


همانطور که مشاهده میکنیم، میانگین‌های بدست آمده برای فرآیند تصادفی X2 تابعیت زمان دارد، بنابراین این فرآیند تصادفی، ایستان نیست.

Part 4:

میانگین‌های محاسبه شده بصورت دستی را رسم میکنیم.

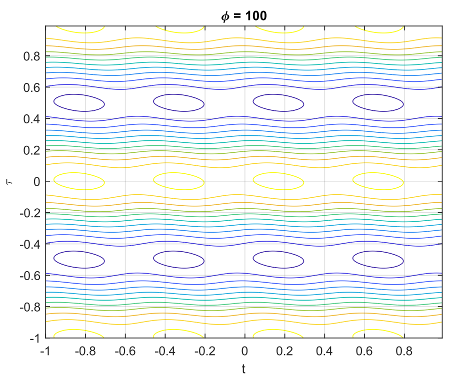


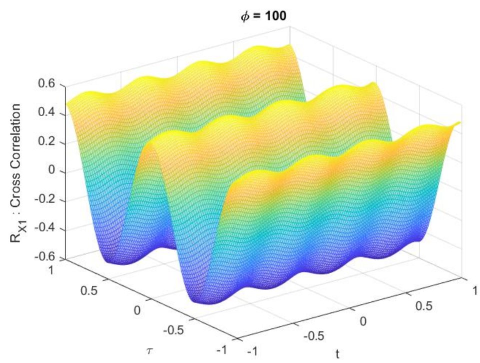


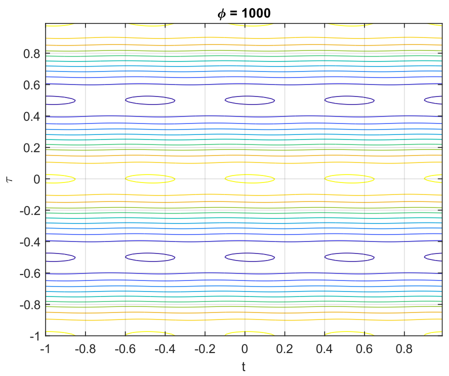
با مقایسه نتایج بدست آمده با بخش قبل، مشاهده میشود که نمودارها برهم منطبق هستند.

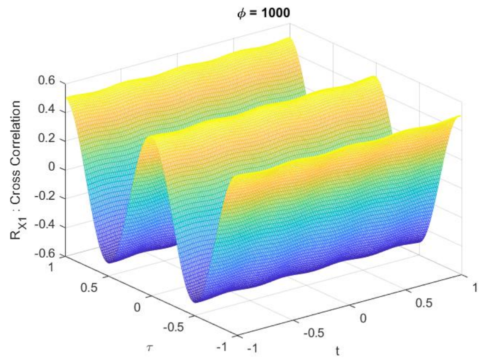
Part 5:

تابع همبستگی را برای دو فرآیند تصادفی X1 و X2 ، به ازای مقادیر 1000,100 برای phi ، بدست می‌آوریم.

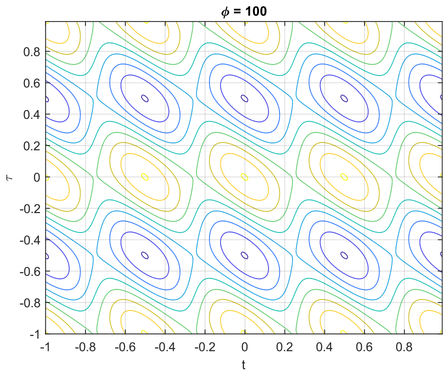


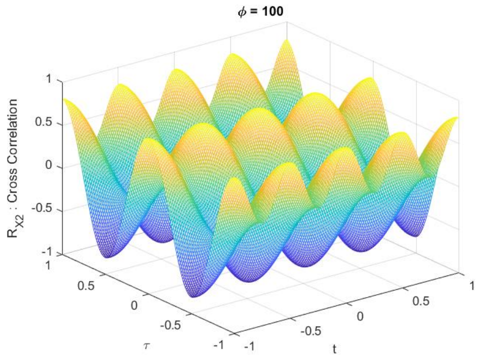


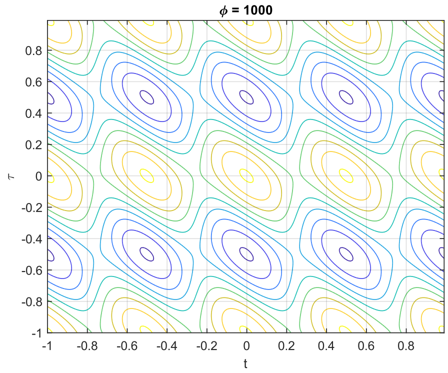


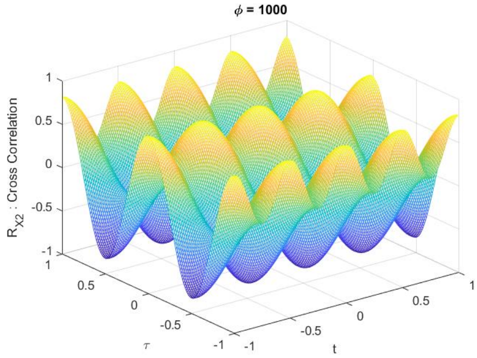


همانطور که انتظار داشتیم، Rx1 تابعیت t ندارد و تنها تابع tau است، بنابراین X1 فرآیندی ایستان میباشد.





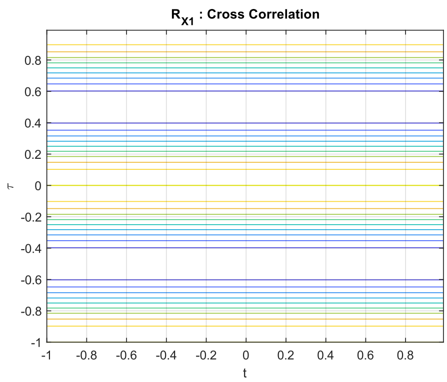


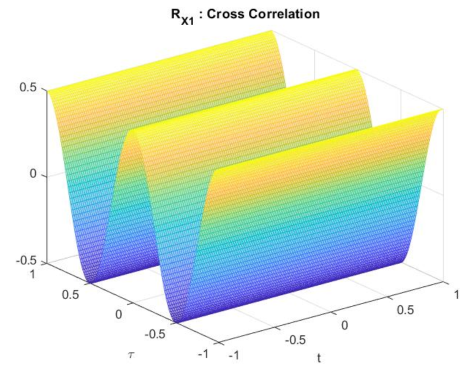


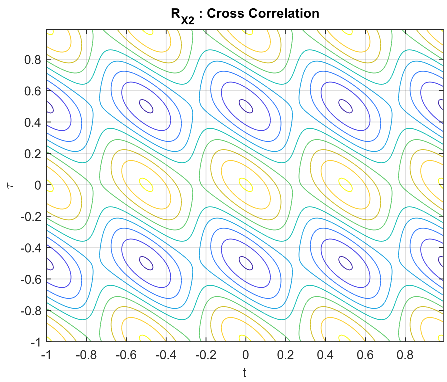
همانطور که انتظار داشتیم، Rx2 هم تابعیت t و هم تابعیت tau دارد، بنابراین X2 فرآیندی ایستان نمیباشد.

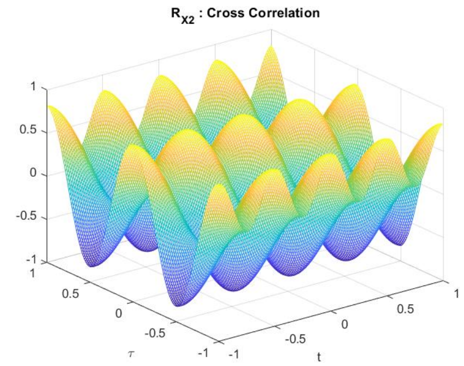
Part 6:

تابع همبستگی را برای دو فرآیند تصادفی X1 و X2 ، با استفاده از محاسبات دستی بدست می‌آوریم.









همانطور که انتظار داشتیم، نتایج بدست آمده با نتایج قسمت قبلی همخوانی دارد.