



## ریاضی مهندسی

تاریخ تحویل  
۱۳۹۹/۰۹/۲۹

تمرین کامپیوتری شماره ۲

نیم سال اول  
۱۴۰۰-۱۳۹۹

### معادلات با مشتقات جزئی

مقدمه:

تا به اینجا با اصول اولیه معادلات PDE آشنا شده‌اید.

هدف از انجام این پروژه در وهله نخست حصول درک عمیق تر نسبت به مفهوم معادلات PDE و در وهله بعد ارتقا توانایی شما در حل این معادلات به کمک نرم افزار MATLAB است.

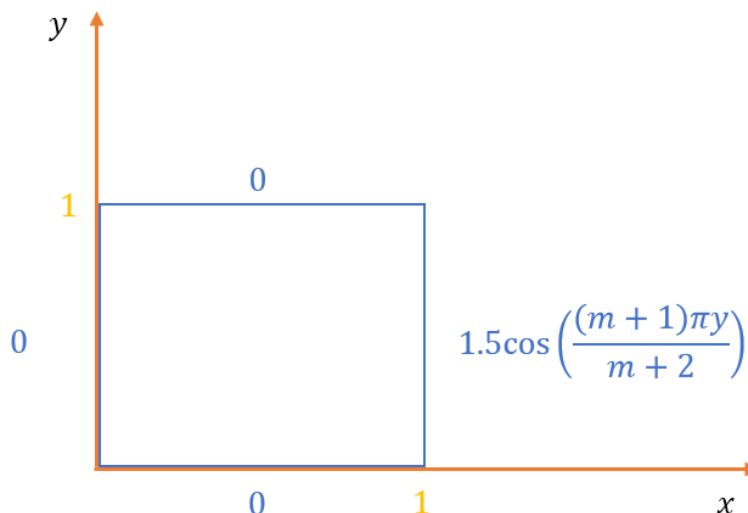
❖ بخش اول: حل معادله لاپلاس

یک ناحیه مربعی به اضلاع ۱ متر داریم. اضلاع فلزی هستند و ضلع سمت راست دارای ولتاژی به صورت

$$1.5 \cos\left(\frac{(m+1)\pi y}{m+2}\right)$$

است و بقیه اضلاع به ولتاژ صفر ولت متصل شده اند. قصد داریم مقادیر ولتاژ را در نقاط مختلف به کمک

MATLAB به دست بیاوریم. (دقت شود  $m$  برابر با رقم راست شماره دانشجویی شما می‌باشد).



قصد داریم در این قسمت با استفاده از MATLAB به حل معادله لاپلاس بپردازیم.

ابتدا در قسمت Command Window عبارت pdeModeler را وارد کنید، پنجره جدیدی مانند تصویر زیر برای شما باز خواهد شد.

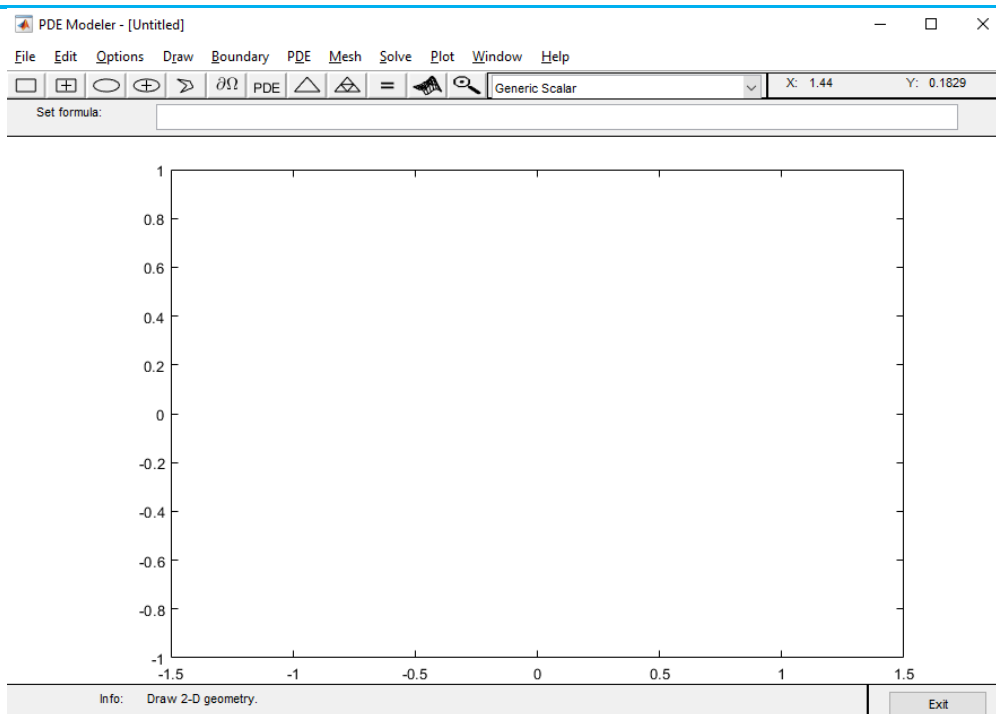



## ریاضی مهندسی

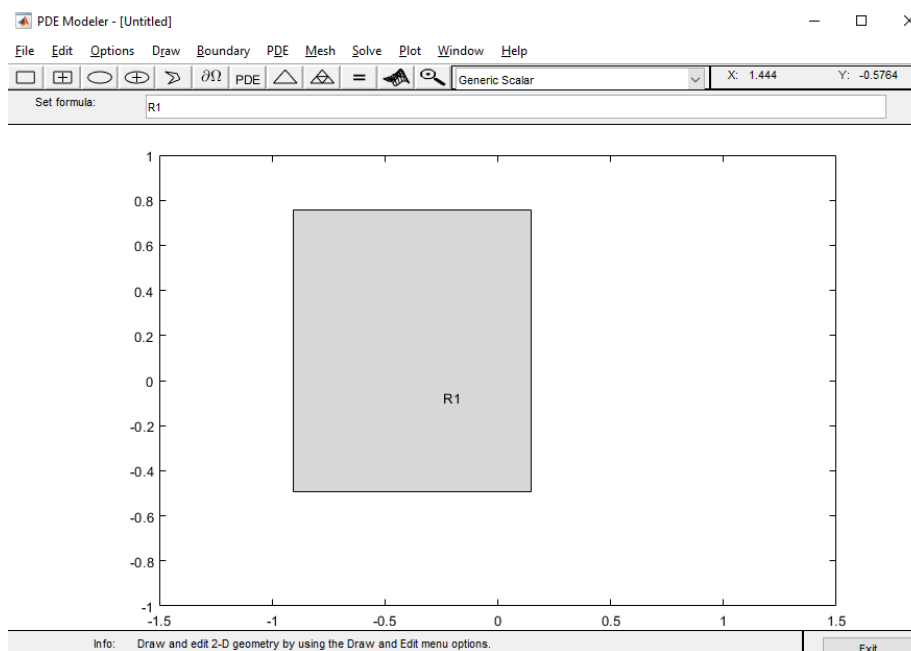
تاریخ تحویل  
۱۳۹۹/۰۹/۲۹

تمرین کامپیوتری شماره ۲

نیم سال اول  
۱۴۰۰-۱۳۹۹



از نوار بالا گزینه رسم مستطیل که با  نشان داده شده است را انتخاب کنید و به دلخواه مستطیلی را در صفحه مشخصه رسم کنید، مانند شکل زیر:





## ریاضی مهندسی

تاریخ تحویل  
۱۳۹۹/۰۹/۲۹

تمرین کامپیوتری شماره ۲

نیم سال اول  
۱۴۰۰-۱۳۹۹

نشانگر خود را روی مستطیل رسم شده قرار داده سپس دو بار کلیک راست کنید، خواهید دید که پنجره **Object Dialog** به صورت زیر برای شما باز خواهد شد:

Object Dialog

Object type: Rectangle

Left: -0.88425925925919

Bottom: -0.39120370370416

Width: 1.4953703703702

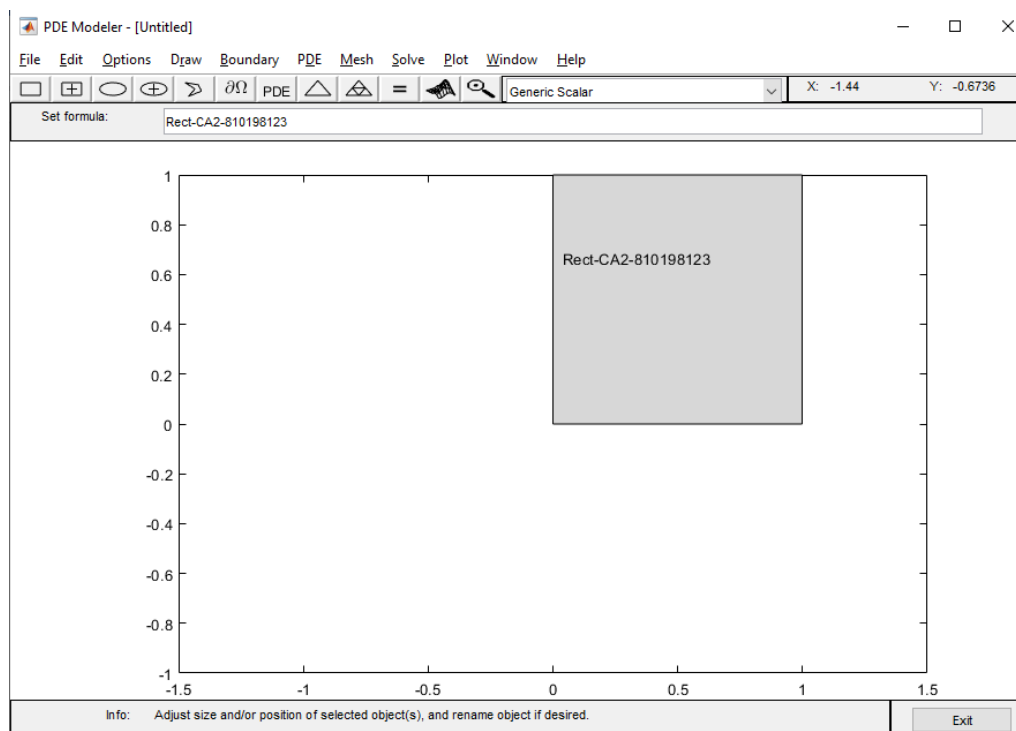
Height: 1.14351851851819

Name: R1

OK Cancel

در نظر داریم مستطیل از نقطه  $(0,0)$  کشیده شود پس مقادیر **Left** و **Bottom** را برابر با 0 می گذاریم، همچنین چون شکل مربعی با طول 1 است مقادیر **Width** و **Height** را برابر با 1 قرار داده و قسمت **Name** را **Rect-Ca2-StudentNum** بگذارید. ( **StudentNum** برابر با شماره دانشجویی شما می باشد).

با فرض شماره دانشجویی ۸۱۰۱۱۹۸۱۲۳، نتیجه زیر حاصل خواهد شد:





## ریاضی مهندسی

تاریخ تحویل  
۱۳۹۹/۰۹/۲۹

### تمرین کامپیوتری شماره ۲

نیم سال اول  
۱۴۰۰-۱۳۹۹

حال می بایست شرایط مرزی مسئله را تعیین کرد، برای این منظور ابتدا لازم است مشخص کنیم که حل چه نوع مسئله ای مدنظر است. در اینجا قصد داریم تا مسئله الکترواستاتیک را حل کنیم. از نوار ابزار، روی این گزینه کلیک کنید:

Generic Scalar

سپس زیر منوی **Electrostatics** را انتخاب کنید.

حال از نوار **Boundary Mode** آیتم  $\partial\Omega$  را انتخاب کنید سپس روی ضلع های مربوطه شرط را وارد نمایید.

راهنمایی:

هنگام ۲ بار کلیک کردن روی ضلع، صفحه ای مانند شکل زیر ظاهر خواهد شد.

Boundary Condition

Boundary condition equation:  $h \cdot V = r$

Condition type:	Coefficient	Value	Description
<input type="radio"/> Neumann	g	0	Surface charge
<input checked="" type="radio"/> Dirichlet	q	0	
	h	1	Weight
	r	0	Electric potential

OK Cancel

رابطه ای که ولتاژ روی مرز، از آن حاصل می شود به صورت مقابل است:

$$V \times h = r$$

پس کفایت  $h$  را برابر با 1 نگه دارید و  $r$  را برابر با شرط ولتاژ قرار دهید.

پس از تعیین شرایط مرزی کفایت از نوار بالا  $=$  را انتخاب کرده و نتیجه را مشاهده کنید.

نتایج تمامی مراحل فوق را در گزارش خود آورده و فایل نتیجه نهایی را با نام **Q1\_Final\_Result** ذخیره کنید و همراه با گزارش خود، ارائه دهید.



## ریاضی مهندسی

تاریخ تحویل  
۱۳۹۹/۰۹/۲۹

تمرین کامپیوتری شماره ۲

نیم سال اول  
۱۴۰۰-۱۳۹۹

❖ بخش دوم: حل معادله حرارت

در این قسمت قصد داریم معادله حرارت را به کمک MATLAB حل کنیم.

فرض کنید که میله ای به طول  $L$  داریم. ابتدای میله در مکان  $x = 0$  و در دمای  $0$  درجه سانتی گراد ثابت نگه داشته شده است و انتهای میله در دمای  $25$  درجه. می خواهیم دمای میله را در نقاط مختلف و لحظات متفاوت به دست آوریم.



$$\frac{1}{p^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

در معادله حرارت ضریب  $\frac{1}{p^2}$  را برابر ۱۰۰ در نظر بگیرید.

شرایط اولیه را به صورت مقابل در نظر بگیرید.

$$u(x, 0) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

شرایط مرزی را به صورت مقابل در نظر بگیرید.

$$u(0, t) = 0$$

$$u(L, t) = 35$$

آموزش حل PDE به کمک MATLAB و تابع pdepe

فرض کنید که قصد داریم تا یک معادله PDE را حل کنیم. برای حل، به این موارد نیاز داریم:

(۱) فرم معادله

(۲) شرایط اولیه

(۳) شرایط مرزی

نرم افزار MATLAB هم برای حل معادله PDE نیاز به موارد بالا دارد. ابتدا به بررسی فرم معادله می پردازیم.



## ریاضی مهندسی

تاریخ تحویل  
۱۳۹۹/۰۹/۲۹

تمرین کامپیوتری شماره ۲

نیم سال اول  
۱۴۰۰-۱۳۹۹

### فرم معادله

فرم کلی معادله حرارت به صورت زیر است:

$$\frac{1}{p^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

فرم کلی معادله در MATLAB به شکل زیر است:

$$c\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^m f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \right) + s\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

باید ضرایب را طوری تعیین کنیم تا به معادله حرارت برسیم.

ضریب  $\frac{\partial u}{\partial t}$  در معادله حرارت، برابر  $\frac{1}{p^2}$  است. در فرم کلی MATLAB، ضریب عبارت  $\frac{\partial u}{\partial t}$  برابر  $c\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$  است بنابراین ضریب  $c$  برابر  $\frac{1}{p^2}$  خواهد بود.

می خواهیم عبارت  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  را بسازیم. در معادله کلی MATLAB مقدار  $m$  را برابر صفر قرار می دهیم. بنابراین عبارت میانی به شکل زیر خواهد شد:

$$\frac{\partial}{\partial x} f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

حال اگر مقدار  $f$  را برابر  $\frac{\partial u}{\partial x}$  قرار دهیم، به عبارت  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  می رسیم.

برای مشخص کردن فرم کلی معادله در MATLAB یک تابع به شکل زیر تعریف کنید و ضرایب را مقداردهی کنید.

```
function [c,f,s]=Equation(x,t,u,DuDx)
    c= ? ;
    f= ? ;
    s= ? ;
end
```



## ریاضی مهندسی

تاریخ تحویل  
۱۳۹۹/۰۹/۲۹

تمرین کامپیوتری شماره ۲

نیم سال اول  
۱۴۰۰-۱۳۹۹

### شرایط اولیه

مشخص کردن شرایط اولیه بسیار ساده است. به دلیل اینکه شرایط اولیه توصیف در لحظه  $t = 0$  است، بنابراین نیازی به متغیر  $t$  نداریم. فقط کافی است تا مقدار خروجی را بر حسب  $x$  مشخص کنید. تابع را به صورت مقابل پیاده سازی کنید:

```
function value=Init(x)
value= ? ;
end
```

### شرایط مرزی

فرض کنید که شرایط مرزی به صورت زیر است:

$$u(0, t) = 35$$

$$u(L, t) = 0$$

فرم کلی شرایط مرزی در MATLAB نیز به صورت زیر می باشد:

$$p(x, t, u) + q(x, t) f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

برای مشخص کردن ضرایب، تابع زیر را تعریف می کنیم:

```
function [pl,ql,pr,qr]=BC(xl,ul,xr,ur,t)
pl= ? ;
ql= ? ;
pr= ? ;
qr= ? ;
end
```

▪  $ql, pl$  ضرایب مربوط به شرایط مرزی در  $x = xl$

▪  $qr, pr$  ضرایب مربوط به شرایط مرزی در  $x = xr$

▪  $ul$  ضریب مربوط به دما در  $x = xl$

▪  $ur$  ضریب مربوط به دما در  $x = xr$

در فرم کلی شرایط مرزی، تابع  $f$  در واقع همان  $\frac{\partial u}{\partial x}$  است. به دلیل اینکه در شرایط مرزی مسئله،  $\frac{\partial u}{\partial x}$  ظاهر نشده است. بنابراین  $q(x, t)$  برابر صفر خواهد بود.



## ریاضی مهندسی

تاریخ تحویل  
۱۳۹۹/۰۹/۲۹

تمرین کامپیوتری شماره ۲

نیم سال اول  
۱۴۰۰-۱۳۹۹

با تعاریف بالا شرایط مرزی در  $x$  به این صورت خواهد بود.

$$ul = 35$$

با جابجایی خواهیم داشت:

$$ul - 35 = 0$$

با تطبیق این معادله و فرم کلی شرایط مرزی در MATLAB ضریب  $p(x, t, u)$  به دست می آید.

$$p(x, t, u) = ul - 35;$$

$$pl = ul \quad \& \quad pr = ur - 35$$

حالا آماده ایم تا PDE را حل کنیم.

برای این کار از `pdepe()` استفاده می کنیم. این دستور را به شکل زیر به کار می بریم:

$$\text{sol} = \text{pdepe}(m, \text{Equation\_Function}, \text{Init\_Function}, \text{BC\_Function}, \text{xmesh}, \text{tspan})$$

که در رابطه با پارامتر  $m$  قبلاً توضیح داده ایم.  $x$  و  $t$  نیز همان بردارهای مکانی و زمانی هستند.

### شرح سؤالات:

الف) سه تابع خواسته شده در بالا با نام های `Equation`, `Init`, `BC` را پیاده سازی کنید و آن را در گزارش کار خود بیاورید.

ب) با استفاده از تابع `pdepe` معادله را حل کنید، برای این امر  $0 \leq x \leq 1$  که به ۱۰۰ قسمت شکسته شده و  $0 \leq t \leq 10$  که به ۱۰۱ قسمت شکسته شده است را در نظر بگیرید. نمودار دمای میله ۱ متری را در زمان های  $t = 0, t = 5, t = 10$  در یک محور نمودار نمایش دهید، برای این منظور میتوانید از دستور `hold on` در MATLAB استفاده کنید. گراف های بدست آمده در نمودار را به همراه تحلیل و نتیجه گیری خود در گزارش کار بیاورید.

پ) با استفاده از دستور `imagesc()` و `colormap()` دیاگرام تغییرات دمایی را در طول زمان و مکان به صورت دو بعدی مشاهده کنید و آن را تحلیل کرده و در گزارش کار خود بیاورید. حال  $x$  و  $t$  را به ترتیب به ۵۰ و ۵۱ قسمت بشکنید، چه اتفاقی می افتد؟ نتیجه گیری خود را در گزارش کار مکتوب کنید.

ت) با استفاده از دستور `surf(sol)` دیاگرام تغییرات دمایی را در طول زمان و مکان به صورت سه بعدی مشاهده کنید و تصویر آن را در گزارش کار خود بیاورید.





## ریاضی مهندسی

### تمرین کامپیوتری شماره ۲

تاریخ تحویل  
۱۳۹۹/۰۹/۲۹

نیم سال اول  
۱۴۰۰-۱۳۹۹

به نکات زیر توجه داشته باشید:

- گزارش کار باید در قالب یک فایل pdf با فرمت CA2-StudentID باشد.
- فایل های مربوط به قسمت اول در پوشه ای به نام Q1 و فایل های مربوط به قسمت دوم در پوشه ای به نام Q2 می بایست قرار گیرد. این دو پوشه را به همراه گزارش کار خود در یک فایل zip به فرمت CA2-Surname-StudentID قرار داده و در سایت درس بارگذاری نمایید.

هرگونه سوال و ابهام خود را می توانید از طریق ایمیل [Shaker.ma98@gmail.com](mailto:Shaker.ma98@gmail.com) در میان بگذارید.

موفق باشید