به نام خدا

دانشگاه تهران

پردیس دانشکده‌های فنی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

# سیگنال‌ها و سیستم‌ها

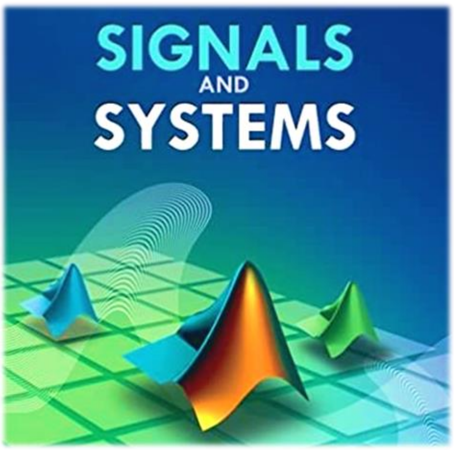
نیمسال دوم (00-99)

## استاد: دکتر سعید اخوان

## تمرین کامپیوتری چهارم

**محمدمهدی عبدالحسینی**

**810 198 434**

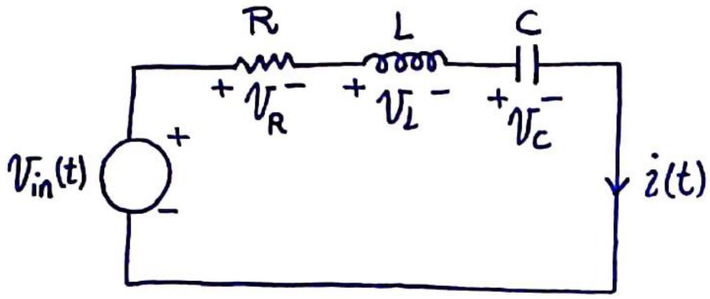



Signals and Systems

# فهرست مطالب

## تمرین شماره اول :

یک مدار RLC سری را با فرض وجود شرایط initial rest مطابق شکل 1-1 درنظر بگیرید.




**شکل 1-1 : مدار RLC سری**

با استفاده از قانون KVL ، رابطه زیر برای مدار شکل 1-1 برقرار خواهد بود:

$$KVL: \quad V_{in}(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$$

که در این رابطه داریم:

$$V_R(t) = R\,i(t) \;;\; V_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \;;\; V_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau$$

### الف)

ابتدا این مقادیر ولتاژ را در رابطه KVL جایگذاری میکنیم:

$$V_{in}(t) = R\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau$$

با مشتق گرفتن از طرفین خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{\frac{d}{dt}} \quad \frac{dV_{in}(t)}{dt} = R\frac{di(t)}{dt} + L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}i(t)$$

**ب)**

از طرفین معادله دیفرانسیل بدست آمده در قسمت الف تبدیل لاپلاس میگیریم:

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \quad s\,V_{in}(s) = R\,s\,I(s) + L\,s^2\,I(s) + \frac{1}{C}\,I(s)$$

با توجه به تساوی بالا، $I(s)$ برحسب $Vin(s)$ بصورت زیر بدست میاید:

$$\longrightarrow \quad I(s) = \frac{s}{Rs + Ls^2 + \frac{1}{C}}\,V_{in}(s)$$

**ج)**

فرض کنید ولتاژ خازن را به عنوان خروجی این سیستم [$y(t)=V_C(t)$] و ولتاژ منبع تغذیه را به عنوان ورودی درنظر بگیریم. [$x(t)=V_{in}(t)$]

$$y(t) = V_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad Y(s) = \frac{1}{Cs}\,I(s)$$

$$x(t) = V_{in}(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad X(s) = V_{in}(s)$$

با توجه به روابط بالا، $Y(s)$ برحسب $X(s)$ بصورت زیر بدست میاید:

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{X(s)}{LCs^2 + RCs + 1}$$

**د)**

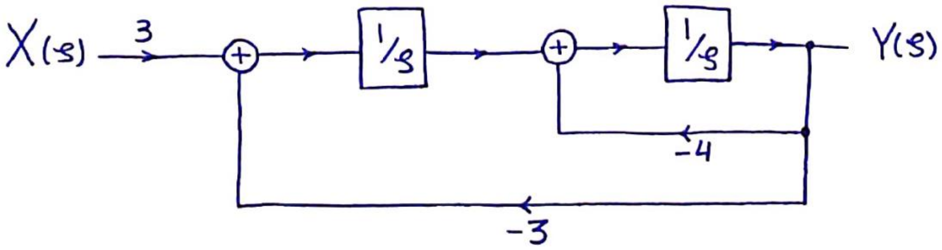
با فرض $R = 1\Omega$ ، $L = \frac{1}{4}H$ و $C = \frac{4}{3}F$ داریم:

$$R = 1 \,,\; L = \frac{1}{4} \,,\; C = \frac{4}{3}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{1}{3}s^2\,Y(s) + \frac{4}{3}s\,Y(s) + Y(s) = X(s)$$

$$\longrightarrow \quad Y(s) = \frac{3}{s^2}X(s) - \frac{3}{s^2}Y(s) - \frac{4}{s}Y(s)$$

بلاک دیاگرام تابع تبدیلی که ورودی را به خروجی ربط میدهد مطابق شکل 2-1 رسم میشود.




**شکل 2-1 : بلاک دیاگرام**

## و)

در این قسمت میخواهیم پاسخ پله سیستم را با توجه به مقادیر گفته شده در قسمت د بدست آوریم.

$$x(t) = u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{X(s)}{\frac{s^2}{3} + \frac{4s}{3} + 1} = \frac{3 \times \frac{1}{s}}{s^2 + 4s + 3} = \frac{3}{s(s+1)(s+3)}$$

اکنون که پاسخ پله در حوزه لاپلاس بدست آمده است، میخواهیم با عکس لاپلاس گرفتن از تساوی بالا، پاسخ پله را در حوزه زمان بدست آوریم.

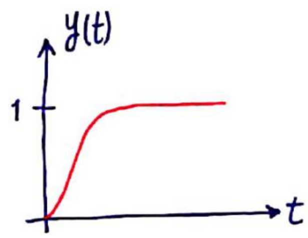
ابتدا تساوی بالا را به شکل زیر ساده میکنیم:

$$\longrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{-3/2}{s+1} + \frac{1/2}{s+3}$$

سپس با عکس لاپلاس گرفتن از طرفین خواهیم داشت:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \left(1 - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)$$

با توجه به رابطه بدست آمده، خروجی را برحسب زمان رسم میکنیم.

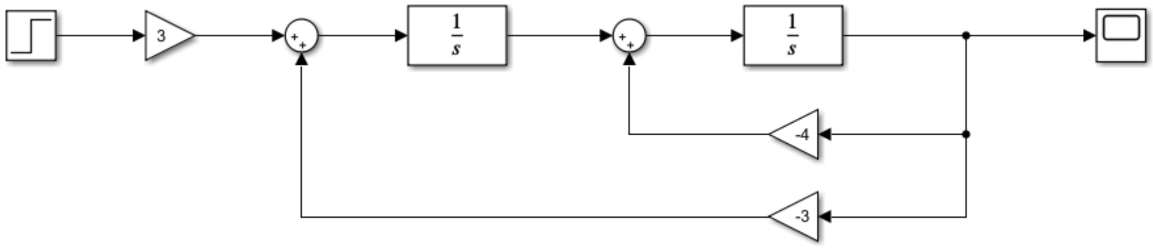



**شکل 3-1 : خروجی بصورت تئوری**

ه)

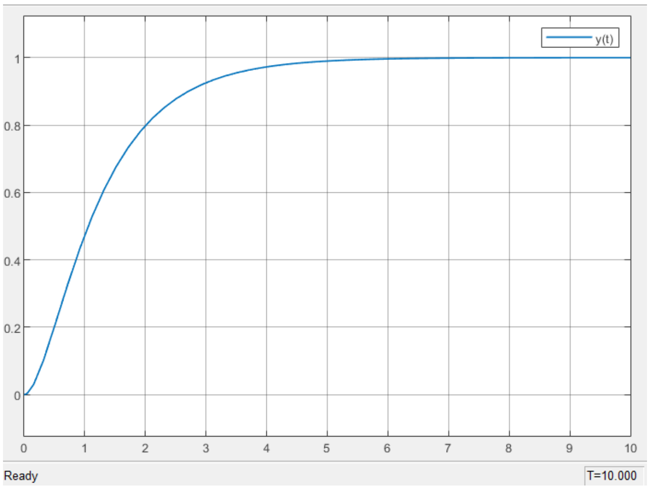
حال میخواهیم بلاک دیاگرام بدست آمده در قسمت د را در محیط Simulink پیاده سازی کنیم.

❄ m-file مربوط به این قسمت با نام Ch1.slx پیوست شده است.




**شکل 1-4 : بلاک دیاگرام در محیط Simulink**

نتیجه شبیه سازی برای بازه‌ی زمانی $t_{start}=0s$ تا $t_{end}=10s$ بصورت زیر خواهد بود:

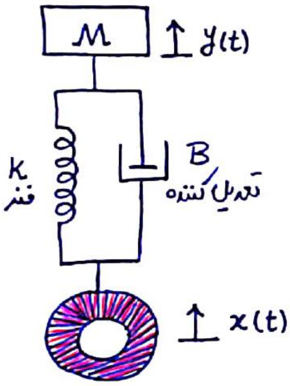



**شکل 1-5 : خروجی بدست آمده از شبیه سازی در Simulink**

همانطور که انتظار داشتیم پاسخ بدست آمده در قسمت و (**شکل 1-3**) با نتایج شبیه سازی (**شکل 1-5**) تطابق دارد.

## تمرین شماره دوم :

یک سیستم تعلیق را مطابق شکل 1-2 درنظر بگیرید.




شکل 1-2 : سیستم تعلیق

با استفاده از قوانین دینامیک میتوان نشان داد رابطه بین $x(t)$ و $y(t)$ بصورت زیر است:

$$K\left(x(t)-y(t)\right)+B\left(\frac{dx(t)}{dt}-\frac{dy(t)}{dt}\right)=M\,\frac{d^2y(t)}{dt}$$

### الف)

با فرض $M = K = 1$ ، رابطه بالا را به فرم یک معادله دیفرانسیل بصورت زیر بازنویسی میکنیم:

$$\rightarrow \quad \frac{d^2y(t)}{dt}+B\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=B\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$$

### ب)

برای یافتن تابع تبدیل بین ورودی $X(s)$ و خروجی $Y(s)$ ابتدا از طرفین رابطه بالا تبدیل لاپلاس میگیریم.

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \quad s^2Y(s)+BsY(s)+Y(s)=BsX(s)+X(s)$$

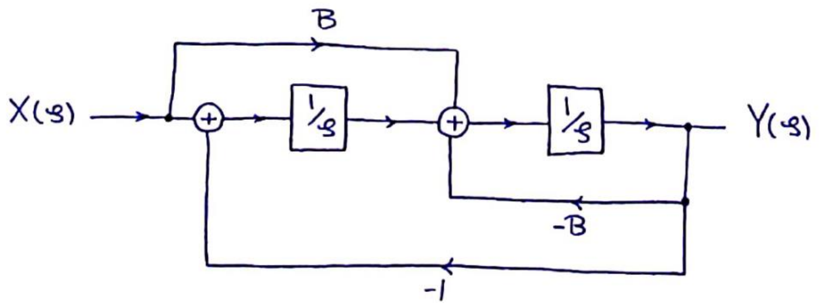
با توجه به تساوی بالا، $Y(s)$ برحسب $X(s)$ بصورت زیر بدست میاید:

$$\rightarrow \quad Y(s)=\frac{Bs+1}{s^2+Bs+1}X(s)$$

از اینجا به بعد محاسبات خود را برای یافتن بلاک دیاگرام تابع تبدیل بدست آمده آغاز میکنیم.

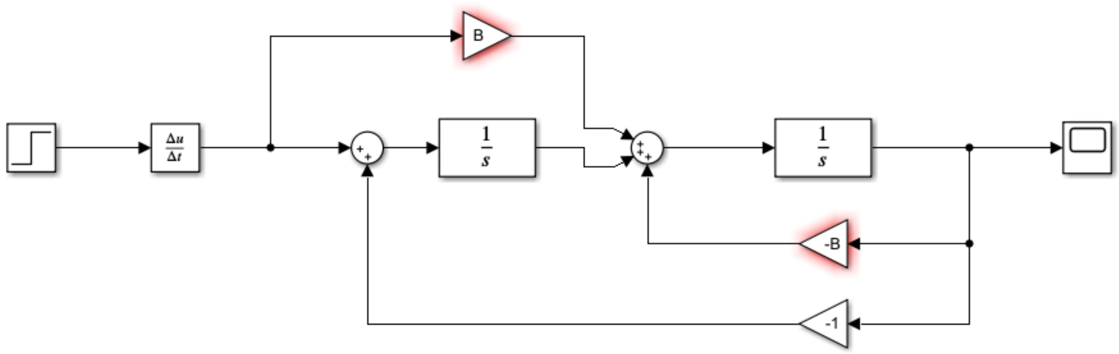
$$\longrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s^2}X(s) - \frac{1}{s^2}Y(s) + \frac{B}{s}X(s) - \frac{B}{s}Y(s)$$

بلاک دیاگرام تابع تبدیلی که ورودی را به خروجی ربط میدهد مطابق شکل 2-2 رسم میشود.




**شکل 2-2 :** بلاک دیاگرام

❄ m-file مربوط به این قسمت با نام Ch2.slx پیوست شده است.




**شکل 2-3 :** بلاک دیاگرام در محیط **Simulink**

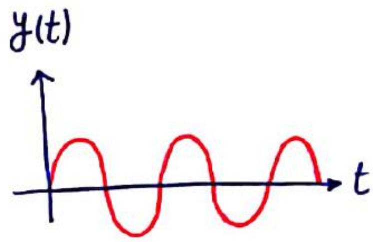
## ج)

در این قسمت پاسخ ضربه سیستم را به ازای $B = 0$ (عدم وجود تعدیل کننده) بدست میاوریم.

$$B = 0 \longrightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2+1}X(s)$$

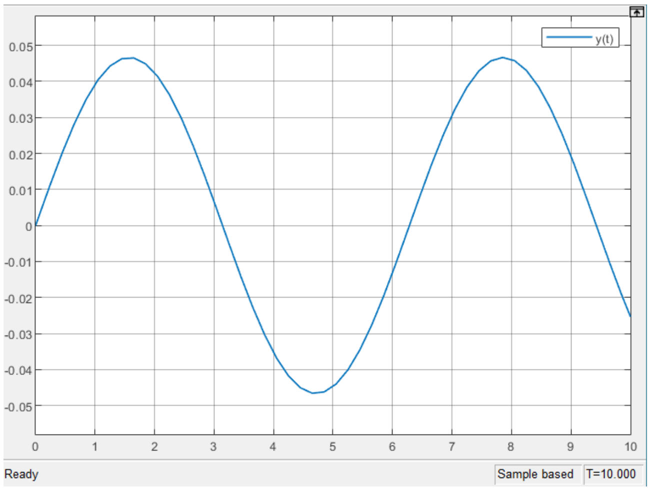
$$x(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = 1$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \sin(t)\,u(t)$$




**شکل 2-4 : خروجی بصورت تئوری**

نتیجه شبیه سازی برای بازه‌ی زمانی $t_{start}$=0s تا $t_{end}$=10s بصورت زیر خواهد بود:




**شکل 2-5 : خروجی بدست آمده از شبیه سازی در Simulink**

با توجه به نتایج بدست آمده اگر بخواهیم رفتار اتومبیل را بعد از رد شدن از دست انداز (ورودی ضربه) توصیف کنیم، در حالتی که $B = 0$ باشد، اتومبیل بصورت سینوسی بالا پایین میشود.

---

## د)

در این قسمت میخواهیم کوچکترین مقدار $B$ را که باعث میشود قطب های تابع تبدیل حقیقی شوند را بدست آوریم.

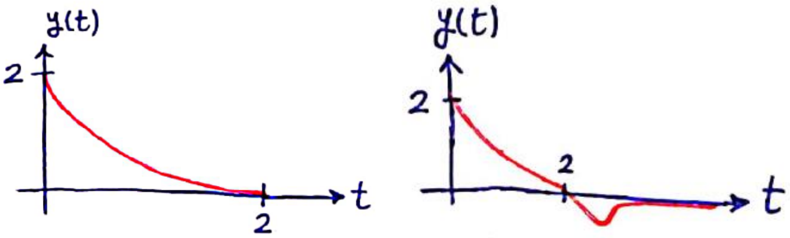
$$s^2 + Bs + 1 = 0 \longrightarrow \Delta = B^2 - 4 > 0 \longrightarrow |B| > 2 \xrightarrow{B>0} B > 2$$

$$B = 2 \longrightarrow Y(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+1} X(s)$$

$$x(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = 1$$

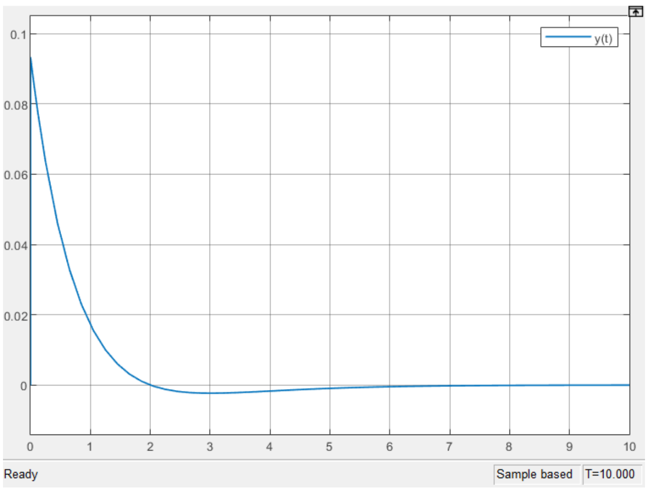
$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+1} = \frac{2s+1}{(s+1)^2} = \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = -e^{-t}(t-2)\,u(t)$$




**شکل 2-6 :** خروجی بصورت تئوری

نتیجه شبیه سازی برای بازه‌ی زمانی $t_{start}$=0s تا $t_{end}$=10s بصورت زیر خواهد بود:




**شکل 2-7 :** خروجی بدست آمده از شبیه سازی در **Simulink**

با توجه به نتایج بدست آمده اگر بخواهیم رفتار اتومبیل را بعد از رد شدن از دست انداز (ورودی ضربه) توصیف کنیم، در حالتی که $B = 2$ باشد، اتومبیل بصورت یک ضربه بالا میرود و سپس بعد از 2 ثانیه به حالت اولیه خود برمیگردد. بنابراین در این حالت برخلاف حالت قبلی حرکت میرا میباشد.

## و)

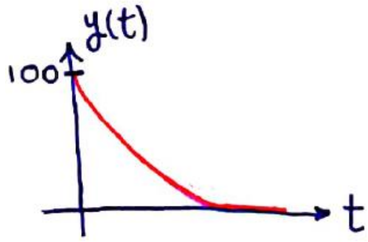
در این قسمت پاسخ ضربه سیستم را به ازای $B = 100$ بدست میاوریم.

$$B = 100 \longrightarrow Y(s) = \frac{100s+1}{s^2+100s+1} X(s) \approx \frac{100s+1}{(s+100)(s+0.01)} X(s)$$

$$x(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = 1$$

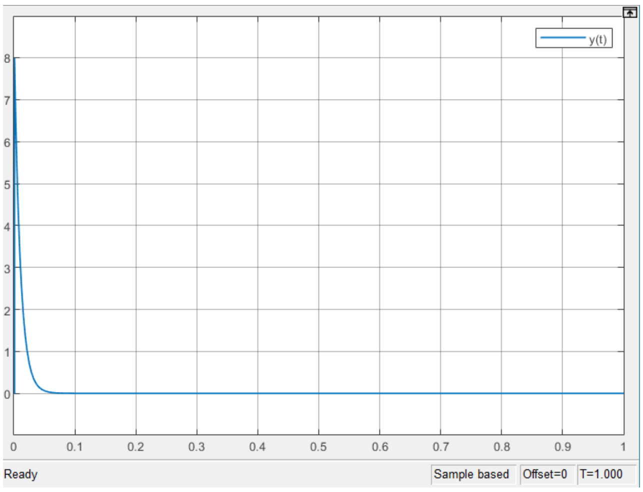
$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{100s+1}{(s+100)(s+0.01)} = \frac{100}{s+100} \quad (s \neq 0.01)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 100e^{-100t}u(t)$$




**شکل 2-8 :** خروجی بصورت تئوری

نتیجه شبیه سازی برای بازه‌ی زمانی $t_{start}$=0s تا $t_{end}$=1s بصورت زیر خواهد بود:




**شکل 2-9 :** خروجی بدست آمده از شبیه سازی در **Simulink**

با توجه به نتایج بدست آمده اگر بخواهیم رفتار اتومبیل را بعد از رد شدن از دست انداز (ورودی ضربه) توصیف کنیم، در حالتی که $B = 100$ باشد، اتومبیل بصورت یک ضربه بالا میرود و سپس بعد از چند صدم ثانیه به حالت اولیه خود برمیگردد.

**ه)**

با توجه به توضیحات قسمت های قبل، حالت د ، حالت بهتری برای سیستم تعلیق یک اتومبیل است. زیرا بر خلاف حالت ج میرا میباشد و همچنین اندازه و سرعت تغییرات آن نیز از حالت و کمتر است.

## تمرین شماره سوم :

* m-file مربوط به این قسمت با نام Ch3.m پیوست شده است.

معادله دیفرانسیل زیر را با شرایط اولیه داده شده درنظر بگیرید.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$y(0^-) = 1 \ , \quad y'(0^-) = 1 \ , \quad x(t) = 5u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{5}{s}$$

**الف)**

برای حل معادله دیفرانسیل بالا ابتدا از طرفین تبدیل لاپلاس میگیریم.

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 3sY(s) - 3y(0^-) + 2Y(s) = X(s)$$

با توجه به تساوی بالا، $Y(s)$ برحسب $X(s)$ بصورت زیر بدست میاید:

$$\longrightarrow Y(s) = \frac{X(s)}{s^2+3s+2} + \frac{(s+3)y(0^-) + y'(0^-)}{s^2+3s+2}$$

با جایگذاری ورودی و شرایط اولیه داریم:

$$\longrightarrow Y(s) = \frac{5}{s(s+1)(s+2)} + \frac{s+4}{(s+1)(s+2)}$$

پس از تجزیه و ساده سازی تساوی بالا خواهیم داشت:

$$\longrightarrow Y(s) = \left[\frac{\frac{5}{2}}{s} + \frac{-5}{s+1} + \frac{\frac{5}{2}}{s+2}\right] + \left[\frac{3}{s+1} + \frac{-2}{s+2}\right]$$

در نهایت از طرفین تساوی عکس تبدیل لاپلاس میگیریم تا خروجی در حوزه زمان بدست آید.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \underbrace{\left(\frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t}\right)u(t)}_{\text{پاسخ ناشی از ورودی}} + \underbrace{\left(3e^{-t} - 2e^{-2t}\right)u(t)}_{\text{پاسخ ناشی از شرایط اولیه}}$$

## ب)

در این قسمت معادله دیفرانسیل داده شده را با استفاده از MATLAB حل میکنیم.

کد زده شده برای این قسمت بصورت زیر میباشد:

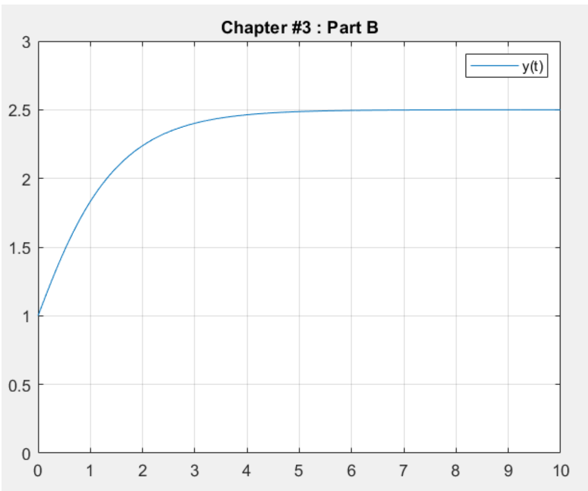
```
syms y(t);
Dy = diff(y);
D2y = diff(y,2);
ode = D2y + 3*Dy + 2*y == 5;
cond1 = y(0) == 1;
cond2 = Dy(0) == 1;
cond = [cond1 cond2];
sol(t) = dsolve(ode, cond);


disp('y(t) = ')
pretty (sol(t))

t = 0:0.01:10;
plot(t, sol(t))
title('Chapter #3 : Part B')
set(gca,'xtick', 0 : 1 : 10, 'xlim', [0,10])
set(gca,'ytick', 0 : 0.5 : 3, 'ylim', [0,3])
legend('y(t)')
grid on
```

خروجی قطعه کد بالا بصورت زیر خواهد بود.

```
y(t) =
exp(-2 t)                 5
--------- - 2 exp(-t) + -
    2                     2
```




همانطور که مشاهده میشود نتیجه بدست آمده از حل تئوری(مجموع پاسخ ناشی از ورودی و شرایط اولیه) با خروجی MATLAB تطابق دارد.