

# شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات

کانولوشن‌های یکسان نسبت به ایزومنتری و پیمانه روی منیفلدهای ریمانی

موریس وایلر<sup>۱</sup> پاتریک فوره<sup>۱</sup> اریک ورلیند<sup>۲</sup> مکس ولینگ<sup>۱</sup>

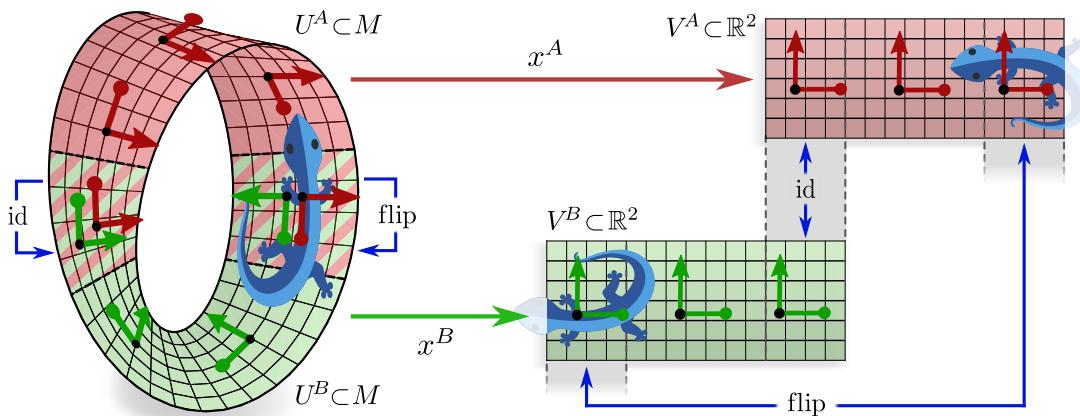
<sup>۱</sup>دانشگاه آمستردام

<sup>۲</sup>پژوهشگاه هوش مصنوعی کوالکام

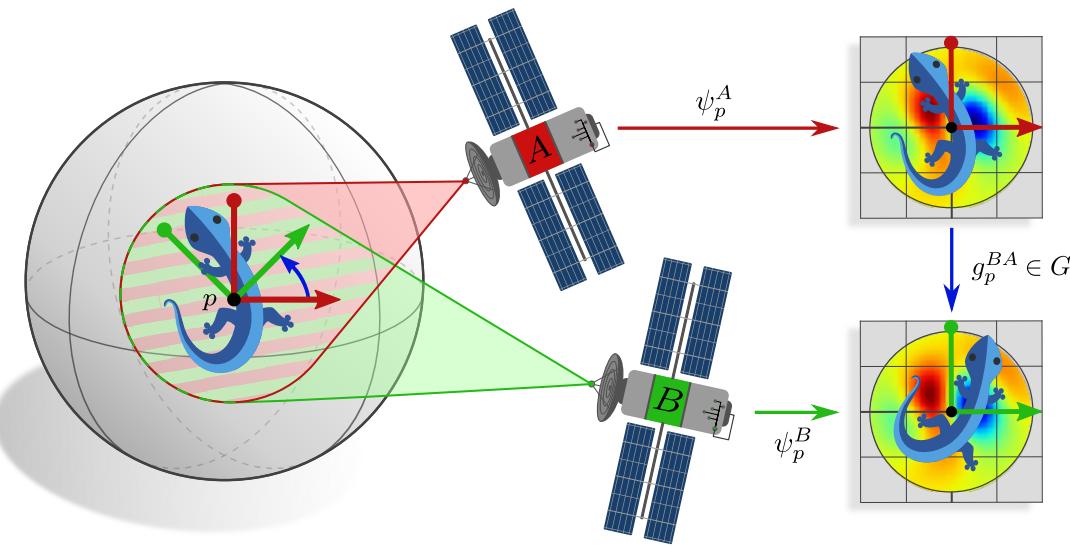
p.d.forre@uva.nl m.weiler.ml@gmail.com  
m.welling@uva.nl e.p.verlinde@uva.nl

## مقدمه

انگیزه‌ای از موقیت گسترده شبکه‌های عمیق کانولوشنی، علاقه زیادی برای تعمیم کانولوشن‌ها به منیفلدهای غیراقلیدسی وجود دارد. یک پیچیدگی عمده در مقایسه با فضاهای مسطح این است که مشخص نیست کرمل کانولوشن باید در کدام تراز روی یک منیفلد اعمال شود. دلیل اساسی این ابهام آن است که منیفلدهای عمومی دارای انتخاب متعارف چارچوب‌های مرجع (گیج) نیستند. بنابراین کرنل‌ها و ویژگی‌ها باید نسبت به مختصات دلخواه بیان شوند. ما استدلال می‌کنیم که انتخاب خاص مختصات‌بندی باید بر استنتاج شبکه تأثیر بگذارد آن باید مستقل از مختصات باشد. تقاضای همزمان برای استقلال مختصات و اشتراک وزن منجر به الزامی روی شبکه می‌شود تا تحت تبدیل‌های گیج محلی (تغییرات چارچوب‌های مرجع محلی) تناوب پذیر باشد. ابهام چارچوب‌های مرجع بدین گونه به  $G$ -ساختار منیفلد بستگی دارد، به طوری که سطح لازم تناوب پذیری گیج توسط گروه ساختار  $G$  متناظر تجویز می‌شود. کانولوشن‌های مستقل از مختصات ثابت می‌شوند که نسبت به آن ایزومنتری‌هایی که تقارن‌های  $G$ -ساختار هستند تناوب پذیر باشند. نظریه حاصل به شکل آزاد از مختصات بر حسب بندل‌های فیبر فرمول بندی می‌شود. برای نمونه‌سازی طراحی کانولوشن‌های مستقل از مختصات، ما شبکه کانولوشنی روی نوار مویوس پیاده‌سازی می‌کنیم. عمومیت فرمول بندی هنوز دیفرانسیل ما از شبکه‌های کانولوشنی با بررسی گسترده ادبیات نشان داده می‌شود که تعداد زیادی از شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی، شبکه‌های کانولوشنی کروی و شبکه‌های کانولوشنی روی سطوح عمومی را به عنوان نمونه‌های خاص کانولوشن‌های مستقل از مختصات توضیح می‌دهد.



شکل ۱: نمایش کانولوشن روی نوار مویوس با گیج‌های مختلف



شکل ۲: ناظران مختلف  $\square$  و  $\square$  ممکن است یک الگوی ویژگی را از « نقطه دید » متفاوتی در کاربرد ما، کرنل های کانولوشنی هستند که میدان دید محلی خود در اطراف  $p$  را در یک بردار ویژگی در  $p$  خلاصه می کنند. « نقطه دید » آنها انتخابی از یک چارچوب مرجع محلی (گیج) در  $\square$  است که کرنل در امتداد آن همتراز می شود. از آنجا که مشاهدات از هر دو نقطه دید یک الگوی یکسان را نشان می دهند، پاسخ های کرنل باشد حاوی اطلاعات معادلی باشند، یعنی استنتاج باید مستقل از مختصات باشد. این امر کرنل های کانولوشن را ملزم می کند که تحت تبدیلات گیج محلی هموردا باشند، یعنی تغییرات چارچوب های مرجع. سطح همودایی گیج توسط گروه ساختار  $G$  تعیین می شود که هم به خمینه و هم به کاربرد بستگی دارد.  
(امولکولها با مجوز [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/) با تشکر از توییتر اقتباس شده‌اند.)

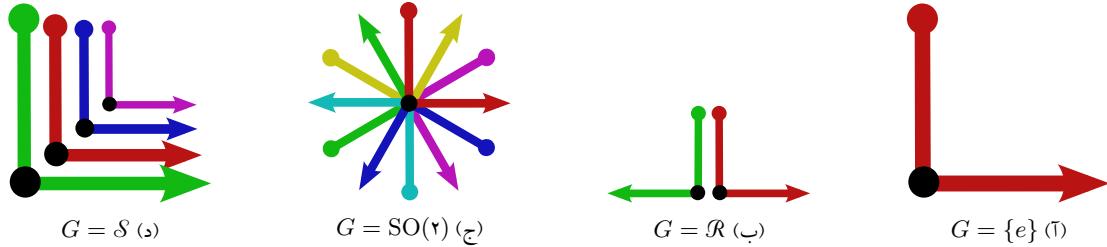
## ۱ مقدمه

در سالهای اخیر، شبکه های عصبی عمیق به مدل های منتخب برای طیف گسترده ای از وظایف در یادگیری ماشین تبدیل شده اند. موقوفیت مدل های عمیق اغلب ریشه در طراحی خاص وظیفه دارد که اساختار ریاضی داده های مورد پردازش را منعکس می کند. یک مثال بر جسته، شبکه های عصبی کانولوشنی (CNN) هستند که از اساختار فضایی داده ها از طریق اتصال محلی و اشتراک گذاری وزن فضایی بهره برداری می کنند. از آنجا که کرنل یکسانی در هر نقطه از فضای اعمال می شود، شبکه های کانولوشنی نسبت به انتقال همودار است. به این معنی که الگوهای آموخته شده را به طور خود کار در سراسر موقعیت های مکانی تعیین می دهند. با توجه به موقوفیت چشمگیر تجزیی CNN های اقلیدسی، علاقه زیادی به گسترش مدل های کانولوشنی برای پردازش سیگنال ها در دامنه های عمومی تر و همودار ساختن آنها تحت گروه های تقارن بزرگ تر وجود دارد.

این کار به بررسی تعیین شبکه های کانولوشنی به خمینه های ریمانی می پردازد. یک پیچیدگی عده در تعیین شبکه های کانولوشنی از فضاهای اقلیدسی  $\mathbb{R}^d$  به خمینه های ریمانی عمومی این است که خمینه ها با انتخاب ارجحی از جهت مرتع همراه نیستند، که بتوان یک کرنل کانولوشن را در امتداد آن برای اندازه گیری ویژگی ها همتراز کرد. از آنجا که هیچ جهت مرتعی ارجح نیست، کرنل باید به صورت دلخواه روی خمینه هم تراز شود. موضوع اصلی این کار، تنظیم این دلخواهی بودن با مستقل ساختن استنتاج شبکه های از همترازی خاص کرنل های کانولوشن است. مشخص می شود که این امر نیازمند آن است که کرنل ها همودایی گیج باشند، یعنی همودار تحت تبدیلات همترازی کرنل. پاسخ یک کرنل همودایی گیج هنگام تغییر همترازی اش به طور قابل پیش بینی تبدیل می شود  $\square$  بنابراین تضمین می شود که محتوای اطلاعات استخراج شده برای هر انتخاب (دلخواه) همترازی یکسان باشد.

ما همترازی یک کرنل در نقطه ای  $p$  از یک خمینه  $M$  را به عنوان انتخابی از یک چارچوب مرجع محلی  $\square$  یا گیج  $\square$  از فضای مماس متانظر  $T_p M$  فرمول بندی می کنیم. تبدیلات گیج بنابراین تبدیلات بین انتخاب های چارچوب های مرجع هستند. شکل ۵ مفهوم همتراز کردن کرنل ها در امتداد چارچوب های مرجع را به تصویر می کشد. همتراز کردن کرنل نسبت به میدان چارچوب کانونی (که به طور منحصر به فرد ارجح است) صفحه اقلیدسی  $\mathbb{R}^2$ ، همانطور که در بالا نشان داده شده، منجر به میدان کرنل معمول CNN های اقلیدسی می شود. یک میدان چارچوب متفاوت، همانطور که در پایین نشان داده شده، به یک میدان کرنل جایگزین و در نتیجه یک شبکه جایگزین دلالت دارد. همانطور که در بالا بیان شد، در بیشتر خمینه ها انتخاب چارچوب ها ذاتاً میهم است به طوری که هیچ همترازی کرنل خاصی ارجح نیست. شکل ۲ این موضوع را برای کره  $S^2$  به تصویر می کشد، جایی که چارچوب ها تنها تا حد دوران ها منحصر به فرد هستند.

سطح ابهام در انتخاب چارچوب های مرجع به ساختار هندسی خمینه بستگی دارد. چنین ساختاری اغلب امکان رفع ابهام چارچوب های مرجع تا حد تبدیلات تقارنی معین (تبدیلات گیج) را فراهم می کند؛ به شکل ۳ مراجعه کنید. این بیانیه با چند مثال بهتر توضیح داده می شود:



شکل ۳: انتخاب چارچوب‌های مرجع یک فضای مماس  $T_p M$  همیشه منحصر به فرد نیست. ساختار هندسی  $G$  یک خمینه، زیرمجموعه‌ای ارجح از چارچوب‌های مرجع را ایجاد می‌کند به طوری که تبدیلات گیج بین این چارچوب‌ها در گروه ساختار  $G \leq \text{GL}(d)$  قرار می‌گیرند. شکل‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ چنین زیرمجموعه‌هایی از چارچوب‌های را ترتیب برای گروه بدیهی  $\{e\}$  دارند،  $G = \{e\}$ ، گروه بازتاب  $G = \mathcal{R}$ ، گروه دوران  $G = \text{SO}(2)$  و  $G = \text{SL}(d)$ . ویژگی‌ها اندازه‌گیری‌ها را نسبت به هر یک از چارچوب‌های متمایز که گذاری می‌کنند. ضرایب عددی آن‌ها نسبت به چارچوب‌های مختلف، توسط عمل یک نمایش گروهی  $\rho$  از  $G$  به هم مرتبط می‌شوند.

- یک خمینه هموار خام هیچ ترجیحی در انتخاب چارچوب‌ها ندارد. تبدیلات گیج بین چارچوب‌های عمومی، نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر دلخواه هستند، یعنی مقادیری در گروه خطی عمومی  $G = \text{GL}(d)$  می‌گیرند.
- یک جهت‌گیری از خمینه امکان تمایز چارچوب‌های چپ‌گرد از راست‌گرد را فراهم می‌کند. تبدیلات گیج بین چارچوب‌های هر یک از دو دست، حافظ جهت‌گیری هستند، یعنی عناصری از  $G = \text{GL}^+$  هستند. نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر با دترمینان مثبت.
- یک فرم حجم امکان تمایز چارچوب‌های با حجم واحد را فراهم می‌کند. در این صورت، تبدیلات گیج حافظ حجم هستند، یعنی مقادیری در گروه خطی ویژه  $G = \text{SL}(d)$  می‌گیرند.
- ساختار متربیک یک خمینه ریمانی امکان اندازه‌گیری فواصل و زوایا را در فضاهای مماس فراهم می‌کند و بنابراین امکان تمایز چارچوب‌های متعامد را می‌دهد. تبدیلات گیج بین چارچوب‌های متعامد، دوران‌ها و بازتاب‌ها در گروه متعامد  $G = d$  هستند.
- با هم، یک جهت‌گیری و متربیک به چارچوب‌های متعامد جهت‌دار دلالت دارند. در این صورت، تبدیلات گیج فقط دوران‌ها در گروه متعامد ویژه  $G = \text{SO}(d)$  هستند.
- یک میدان چارچوب روی خمینه شامل یک چارچوب منحصر به فرد در هر نقطه از خمینه است. در این حالت، تبدیلات گیج بدیهی هستند که توسط گروه بدیهی  $\{e\} = G$  توصیف می‌شوند.

همه این ساختارهای هندسی مشترک‌کاریکاری زیرمجموعه ارجح (زیربندل) از چارچوب‌ها را تعریف می‌کنند به طوری که تبدیلات گیج مقادیری در یک گروه ساختار  $G \leq \text{GL}(d)$  می‌گیرند. برای تأکید بر نقش محوری گروه ساختار  $G$ ، چنین ساختارهایی به عنوان  $GM$ -ساختار نامیده می‌شوند. مثال‌های بصری از  $G$ -ساختارهای ساختار  $G$  و خمینه‌های  $M$  مختلف در شکل ۴ آورده شده است.

از آنجاکه انتخاب چارچوب‌های مرجع ذاتاً مهم است، هر کیت هندسی و عملیات شبکه باید به طور مساوی نسبت به چارچوب‌های دلخواه  $-G$  ساختار  $GM$  قابل نمایش باشد، یعنی باید  $GM$ -مستقل از مختصات باشد. بردارهای ویژگی بنابراین با یک نمایش گروهی (عمل گروهی خطی) از گروه ساختار  $G$  مرتبط هستند که قانون تبدیل آنها را تحت تبدیلات گیج (گذارهای با مقادیر  $G$  بین چارچوب‌های مرجع) تعیین می‌کند. انتخاب خاص نمایش گروهی، نوع هندسی یک میدان بردار ویژگی را تعیین می‌کند. مثال‌های معمول میدان‌های اسکالار، بردار یا تانسور هستند، با این حال، انواع میدان عمومی تری نیز در عمل استفاده می‌شوند. شکل ۶ استقلال از مختصات کمیت‌های هندسی را در مثال شناخته شده بردارهای مماس به تصویر می‌کشد.

هر لایه شبکه ملزم به رعایت قوانین تبدیل ویژگی‌های است، یعنی باید تضمین کند که خروجی‌هایش همانطور که انتظار می‌رود تبدیل می‌شوند. به طور خاص برای کانولوشن‌ها، استقلال از مختصات  $GM$  ایجاد می‌کند که اعمال کرنل مشترک نسبت به چارچوب‌های مختلف  $-G$ -ساختار در یک نقطه  $p \in M$  باید پاسخ یکسانی را تا حدیکه تبدیل گیج برانگیزد. مانشان می‌دهیم که این امر نیازمند  $G$ -راهبری (همورادی گیج، معادله (۸۶)) کرنل‌های کانولوشن است. به طور شهودی، می‌توان کرنل‌های  $G$ -راهبر را به عنوان اندازه‌گیری ویژگی‌ها به صورت نسبی نسبت به چارچوب‌های مرجع تصور کرد، که این امر ضروری است زیرا هیچ انتخاب چارچوب، یعنی همترازی کرنل مطلق، ارجح نیست.<sup>۱</sup> مثال‌هایی از کرنل‌های  $G$ -راهبر برای گروه بازتاب  $G = \mathcal{R}$  در شکل ۷ نشان داده شده است. شکل ۷ اشتراک گذاری چنین کرنل‌هایی را نسبت به چارچوب‌های مختلف یک ساختار  $\mathcal{R}$  به تصویر می‌کشد. قید  $\mathcal{R}$ -راهبری نوعی تقارن را بر کرنل‌ها تحمیل می‌کند، به طوری که همترازی‌های مختلف واقعاً منجر به پاسخ‌هایی می‌شوند که دقیقاً با تبدیلات گیج  $(g)$  متفاوت هستند. ما در ادامه کانولوشن‌های مستقل از مختصات  $GM$  را به عنوان کانولوشن‌های  $GM$  مخفف می‌کنیم.

علاوه بر اعمال کرنل‌های همورادی گیج، کانولوشن‌های  $GM$  ممکن است همورادی ایزومنتری باشند، به این معنی که با عمل ایزومنتری‌ها بر روی میدان‌های ویژگی جا بجا می‌شوند، همانطور که در شکل ۸ نشان داده شده است. فرض کنید  $\phi \in \text{Isom}(M)$  یک ایزومنتری (تقارن) از خمینه  $M$

<sup>۱</sup> به شباهت با اصل نسبیت خاص اینشیتن توجه کنید، که به جای چارچوب‌های  $G$ -ساختار، برابری چارچوب‌های لخت تکیه دارد.

باشد. یک شبکه عصبی دقیقاً زمانی نسبت به عمل این ایزومنتری همودردا است که الگوها در  $p \in M$  به همان روشنی پردازش شوند که الگوها در  $(p)\phi$  پردازش می‌شوند. بنابراین همودردا بی ایزومنتری یک شبکه در تناظر یک به یک با ناوردای ایزومنتری اتصال عصبی آن (میدان کرنل) است؛ به شکل ؟؟ مراجعه کنید. از آنجا که کانولوشن‌های ما کرنل‌ها را نسبت به چارچوب‌های (دلخواه)  $G$ -ساختار  $GM$  اعمال می‌کنند، تقارن‌های میدان کرنل با تقارن‌های  $G$ -ساختار مطابق هستند. با نشان دادن تقارن‌های (حافظ فاصله) یک  $G$ -ساختار  $GM$  با  $\text{Isom}_{GM} \leq \text{Isom}(M)$  که کانولوشن‌های ما دقیقاً  $GM$ -هموردا هستند. شکل ؟؟ این واقعیت را که  $G$ -ساختارها و میدان‌های کرنل متناظر تقارن‌های یکسانی دارند، به تصویر می‌کشد. خواننده تشویق می‌شود که  $G$ -ساختارها را در شکل ؟؟ با توجه به تقارن‌هایشان و ویژگی‌های همودرایی ضمنی کانولوشن‌های  $GM$  متناظر بررسی کند.

طراحی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات  $GM$  بر روی خمینه‌های ریمانی نیازمند انتخاب یک  $G$ -ساختار است که به ملاحظات متعددی بستگی دارد. اولاً، انتخاب گروه ساختار  $G$  همودرایی گیج محلی کانولوشن را تعیین می‌کند: یک کرنل  $G$ -راهبر به طور خود کار الگوهای آموخته شده را بر روی تمام ژست‌های مرتبط با  $G$  از الگوها تعمیم می‌دهد؛ به شکل ؟؟ مراجعه کنید. ثانیاً، انتخاب خاص  $G$ -ساختار همودرایی ایزومنتری سراسری کانولوشن را تعیین می‌کند. در کاربردهای تصویربرداری پیشکی، الگوها اغلب در دوران‌ها، بازتاب‌ها و موقعیت‌های دلخواه رخ می‌دهند □ بنابراین باید یک ساختار  $d$  ناوردای  $\text{Isom}_{GM} = E(d)$  را روی  $\mathbb{R}^d$  انتخاب کرد، مشابه ساختار (۲) که در شکل ؟؟ نشان داده شده است. تصاویری مانند عکس‌های پرتره یک محور عمودی متمایز دارند، با این حال، بازتاب‌ها حول این محور آمار تصویر را ناوردای می‌گذارند □ این امر نیازمند یک ساختار  $R$  مانند شکل ؟؟ است.علاوه بر چنین ملاحظات تقارنی، توجه به این نکته مهم است که هر خمینه‌ای (توپولوژی) ساختارهای  $G$  هموار را برای هر انتخاب گروه ساختار  $G$  نمی‌پذیرد. یک مثال نوار موبیوس است که توپولوژی ییچ خورده آن (عدم جهت‌گیری) مانع از تخصیص مسوار متغیر جهت‌گیری‌های چارچوب می‌شود. بنابراین یک عملیات کانولوشن مستقل از مختصات هموار بر روی نوار موبیوس لزوماً بر کرنل‌های راهبر-بازتابی تکیه دارد.

این کار شامل یک مرور ادبیات گسترده بر روی شبکه‌های کانولوشنی است که عمومیت نظریه ما را نشان می‌دهد. این بخش انواع مختلفی از CNN‌ها در فضاهای اقلیدسی،  $G$ -ساختارها کروی و کانولوشن‌ها را بر روی سطوح عمومی (مانند مساحت‌های سطحی) پوشش می‌دهد. ما انتخاب‌های خاص جدول ؟؟ یک نمای کلی از طبقه‌بندی حاصل از شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات  $GM$  ارائه می‌دهد.

برای ارائه یک مثال دقیق در مورد چگونگی نمونه‌سازی کانولوشن‌های  $GM$  را بر روی نوار موبیوس برای  $G = R$  مورد بحث قرار می‌دهیم. این شامل استخراج کرنل‌های راهبر-بازتابی برای انواع میدان مختلف (نمایش‌های گروهی) و ارزیابی تجربی همودرایی ایزومنتری پیش‌بینی شده نظری است. همانطور که انتظار می‌رود، کانولوشن‌های مستقل از مختصات  $GM$  از پیاده‌سازی وابسته به مختصات ساده بهتر عمل می‌کنند. کد در آدرس <https://github.com/mauriceweiler/MobiusCNNs> موجود است.

یک فرمول‌بندی بدون مختصات از نظریه مادر زبان فیبر ابداع شده است.  $G$ -ساختارها اصلی  $Z$ -بندل چارچوب  $FM$  بر روی  $M$  هستند. میدان‌های ویژگی برش‌هایی از بندل‌های بردار ویژگی مرتبط با  $G$  هستند. گیج‌ها تسمیه‌های بندل محلی هستند، در حالی که تبدیلات گیج نگاشت‌های گذار بین چنین تسمیه‌هایی هستند. ایزومنتری‌هایی که یک کانولوشن  $GM$  نسبت به آنها همودرا است، اتومorfیسم‌های بندل اصلی از  $G$ -ساختار هستند.

CNN‌های مستقل از مختصات ما تعیین‌هایی از  $CNN$ ‌های راهبر [؟ ؟ ؟ ؟ ؟] از فضاهای اقلیدسی (یا همگن) به خمینه‌های ریمانی هستند. در حالی که CNN‌های راهبر بر تبدیلات فعل و سراسری میدان‌های ویژگی تمرکز دارند، CNN‌های مستقل از مختصات تبدیلات غیرفعال و محلی بین چارچوب‌های مرجع را در نظر می‌گیرند.<sup>2</sup> مانند  $G$ -ساختارها از نظریه CNN‌های همودرایی گیج ("را در کارهای قبلی [؟ ؟] پیشنهاد گردید. برخلاف این انتشارات، کار حاضر نظریه را با جزئیات بسیار بیشتری توسعه می‌دهد، آن را بر حسب بندل‌های فیبر فرمول‌بندی می‌کند، همودرایی تحت عمل ایزومنتری‌ها را اثبات می‌کند و یک مرور ادبیات ارائه می‌دهد.

## فهرست مطالب

این کار در قالب یک مقدمه، سه بخش اصلی و یک پیوست سازماندهی شده است.

بخش ۱.۱.۲ تلاش می‌کند شبکه‌های عصبی مستقل از مختصات را با زبانی آسان معرفی کند. میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه نسبت به مختصات محلی (تسمیه‌های بندل) بیان می‌شوند. استقلال مختصات مورد نیاز، مستلزم آن است که ویژگی‌ها با یک قانون تبدیل خاصی مرتبط باشند. لایه‌های شبکه ملزم به تضمین رفتار تبدیل صحیح ویژگی‌ها هستند.

بخش ۲.۵ نظریه شبکه‌های عصبی مستقل از مختصات را بر حسب بندل‌های فیبر رسمی‌سازی می‌کند. این امر امکان فرمول‌بندی سراسری و مستقل از مختصات را فراهم می‌کند، که به ویژه هنگام بررسی تاوب‌پذیری ایزومنتری شبکه‌ها مفید است. تعاریف از بخش ۱.۱.۲ با بیان عملیات مستقل از مختصات در تسمیه‌های بندل محلی (مختصات) بازیابی می‌شوند.

<sup>2</sup> این شیوه به تغییر تمرکز از کوواریانس لورنتس سراسری در نسبیت خاص به کوواریانس لورنتس محلی در نسبیت عام است.

بخش ۲۵ نظریه ما را در کارهای مرتبط جای می‌دهد. این بخش بررسی‌های مفصلی از معماهی‌های شبکه کانولوشنی بر روی هندسه‌های مختلف ارائه می‌دهد و آن‌ها را به عنوان شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مخصوصات فرمول‌بندی مجدد می‌کند. برای تسهیل توسعه معماهی‌های شبکه جدید، ما ویژگی‌های مربوط به هندسه‌های خاص را قل از بررسی شبکه‌هایی که بر روی آن‌ها عمل می‌کنند، مورد بحث قرار می‌دهیم.

خواننده می‌تواند بخش ۲۵ را در مرحله اول نادیده بگیرد  $\square$  فرمول‌بندی از بخش ۱.۱.۲ برای خواندن مروارید بخش ۲۵ کاملاً کافی است. مرواری بر مفاهیم و نتایج اصلی کار ما در بخش ۲ زیر ارائه شده است. این مروار از معادلات پرهیز می‌کند و بر شهود هندسی از طریق بصری‌سازی‌ها تکیه دارد. امیدواریم این بخش به مخاطبان غیرتخصصی کمک کند تا ایده‌ای از محتواهی کار ما به دست آورند.

## مروار کلی جزئیات

**بخش ۱.۱.۲:** هدف بخش ۳ ابداع فضاهای ویژگی مستقل از مختصات است. به طور خاص، بخش ۱.۳ گیج‌ها، تبدیل‌های گیج و  $G$ -ساختارها را معرفی می‌کند. گیج‌ها روشی رسمی برای بیان بردارهای مماس (مستقل از مخصوصات) و توابع روی فضاهای مماس نسبت به چارچوب‌های مرجع هستند. تبدیل‌های گیج بین این عبارات مخصوصاتی در گیج‌های مختلف ترجمه می‌کنند. بخش ۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی مستقل از مختصات را معرفی می‌کند. همانند مورد بردارهای مماس، ضرایب عددی بردارهای ویژگی هنگام انتقال بین چارچوب‌های مرجع تغییر می‌کنند. قوانین تبدیل بردارهای ویژگی به ویژه انتقال موازی آن‌ها و پیش‌برداری آن‌ها هنگام عمل توسط ایزومنتری‌ها را تعیین می‌کنند، که به ترتیب در بخش‌های ۳.۳ و ۴.۳ توضیح داده شده‌اند.

بخش ۴ شبکه‌های عصبی را که بین میدان‌های ویژگی نگاشت می‌کنند، توسعه می‌دهد. عملیات نقطه‌ای، مانند جمع بایاس، کانولوشن‌های  $1 \times 1$  و غیرخطی‌ها، در بخش ۱.۴ مورد بحث قرار می‌گیرند. بخش ۲.۴ بر روی کانولوشن‌ها با کرnel‌های گستردۀ فضایی تمرکز می‌کند. هر یک از این عملیات در ابتدا بدون فرض اشتراک وزن معروفی می‌شوند، یعنی به عنوان مثال، اجازه یک کرnel متفاوت در هر نقطه از مفهول را می‌دهن. این کرnel‌ها (یا بایاس‌ها یا غیرخطی‌ها) به هیچ وجه محدود نمی‌شوند. با این حال، هنگام نیاز به اشتراک وزن فضایی، آن‌ها مجبور می‌شوند که تناوب پذیر گیج باشند زیرا تنها مقادیر تناوب پذیر می‌توانند به صورت مستقل از مختصات به اشتراک گذاشته شوند. بخش ۳.۴ یک اثبات مختصر از تناوب پذیری ایزومنتری کانولوشن‌های  $GM$  را بر حسب عبارات مخصوصاتی محلی ارائه می‌دهد. ایده اصلی در اینجا این است که ایزومنتری‌ها را می‌توان به عنوان الفاکتنه تبدیل‌های گیج (تفسیر منفعل) در نظر گرفت، که با تناوب پذیری گیج کرnel‌ها توضیح داده می‌شود.

بخش ۵ پیاده‌سازی کانولوشن‌های مستقل از جهت گیری بر روی نوار موبیوس را توصیف می‌کند. پس از بررسی هندسه نوار موبیوس در بخش ۱.۵، انواع مختلفی از میدان‌های ویژگی در بخش ۲.۵ تعریف می‌شوند. بخش ۲.۶ بعدی، شبکه‌های کانولوشنی مستقل از جهت گیری را به صورت تحلیلی توصیف می‌کند. به طور خاص، ما کرnel‌های کانولوشنی تناوب پذیر گیج، بایاس‌ها و غیرخطی‌ها را برای هر یک از انواع میدان استخراج می‌کنیم. بخش ۴.۴ با یک پیاده‌سازی و ارزیابی عددی مدل‌های مربوطه به پایان می‌رسد.

**بخش ۲.۵:** بخش ۶ محتواهی بخش ۳ را بازتاب می‌دهد، با این حال، به صورت سراسری و بر حسب بندلهای فیر. مقدمه‌ای کلی بر بندلهای فیر در بخش ۱.۶ ارائه شده است. بخش‌های ۲.۶ و ۳.۶ بندل مماس  $TM$ ، بندل چارچوب  $G$ - $FM$  و ساختارها  $G$  را معرفی می‌کنند. میدان‌های ویژگی به صورت سراسری به عنوان برش‌هایی از بندلهای بردار ویژگی معرفی شوند. تمهیم‌های بندل محلی (گیج‌ها)، که در بخش ۴.۶ مورد بحث قرار گرفته‌اند، این بندل‌ها را در مختصات بیان می‌کنند و بدین ترتیب تعاریف ما از بخش ۳ را بازیابی می‌کنند. ما به طور خاص شناس می‌دهیم که چگونه تمهیم‌های محلی بندلهای مختلف یکدیگر را لقا می‌کنند، به طوری که تبدیل‌های گیج (نگاشت‌های انتقال) آن‌ها همگام‌سازی می‌شوند. بخش ۵.۶ انتقال دهنده‌های موازی در  $G$ -بندل‌ها را مورد بحث قرار می‌دهد.

بخش ۴.۶ شبکه‌های مستقل از مختصات از بخش ۴ را بر حسب بندلهای فیر بازنویسی می‌کند. کانولوشن‌های  $1 \times 1$  در بخش ۴ به عنوان مورفیسم‌های مشخص بندل برداری  $M$  توصیف می‌شوند. به طور جایگزین، آن‌ها را می‌توان به عنوان برش‌هایی از یک بندل همومورفیسم مشاهده کرد. بخش ۴.۷ میدان‌های کرnel مستقل از مخصوصات و تبدیل‌های بینان کرnel را معرفی می‌کند. این عملیات مشابه کانولوشن‌های  $GM$  هستند اما نیازی به اشتراک وزن ندارند، یعنی ممکن است در هر مکان فضایی یک کرnel متفاوت اعمال کنند. یک میدان کرnel کانولوشنی  $GM$  با اشتراک یک کرnel  $G$ -استریبل (تناوب پذیر گیج) منفرد در سراسر مفهول ساخته می‌شود. سپس کانولوشن‌های مستقل از مختصات  $GM$  به عنوان تبدیل‌های بینان کرnel با میدان‌های  $G$ -کانولوشنی تعریف می‌شوند. هنگام بیان فرمول‌بندی مستقل از مختصات کانولوشن‌های  $GM$  نسبت به تمهیم‌های محلی (گیج‌ها)، عبارات مختصاتی کانولوشن‌های  $GM$  را از بخش ۲.۶ بازیابی می‌کنیم.

تناوب پذیری ایزومنتری کانولوشن‌های  $GM$  در بخش ۴.۶ عمل پیش‌برنامه آن‌ها را بر روی بندلهای فیر مورد بحث قرار می‌دهد. این عمل نیز می‌تواند در تمهیم‌های محلی بیان شود، که منجر به فرمول‌بندی از بخش ۴.۳ می‌شود. بخش ۴.۷ عمل ایزومنتری‌ها بر روی میدان‌های کرnel را تعریف می‌کند و ثابت می‌کند که تناوب پذیری ایزومنتری یک تبدیل میدان کرnel، ناوردایی ایزومنتری میدان کرnel آن را نتیجه می‌دهد و بالعکس. کانولوشن‌های  $GM$  ثابت شده‌اند که تحت عمل آن ایزومنتری‌هایی که اتمومورفیسم‌های بندلی (تقارن‌ها) از  $G$ -ساختار  $GM$  هستند، تناوب پذیر می‌باشد. بخش ۴.۸ میدان‌های کرnel ناوردا با ایزومنتری را با جزئیات پیشتری بررسی می‌کند و ثابت می‌کند که آن‌ها معادل میدان‌های کرnel در فضاهای خارج قسمتی از عمل ایزومنتری هستند  $\square$  به طور شهودی، میدان‌های کرnel ناوردا با ایزومنتری ملزم به اشتراک کرnel‌ها بر روی مدارات ایزومنتری هستند. این نتیجه به ویژه دلالت دارد که تبدیل‌های میدان کرnel تناوب پذیر ایزومنتری در فضاهای همگن لزوماً کانولوشن‌های  $GM$  هستند.

**بخش ۹۹:** بخش سوم این کار نشان می دهد که تعداد زیادی از شبکه های کانولوشنی از ادبیات را می توان به عنوان اعمال کانولوشن های  $GM$  برای ساختار و انواع میدان تفسیر کرد. این بخش با بحثی کلی در مورد انتخاب های طراحی شبکه های کانولوشنی مستقل از مخصوصات آغاز می شود. جدول ۹۹ مروری و طبقه بندی از مدل های مورد بررسی را راهنمایی می دهد. خواننده دعوت می شود که به جدول ۹۹ ساختارهای بصیر سازی شده در در بخش ۹۹ تکمیل شده ویژگی های کانولوشن های  $GM$  مربوطه ارائه می دهد.

کانولوشنی اقليدسي که نه تنها تناوب پذير ايزوموري هستند بلکه به طور کلي تر تحت عمل گروه های آفين تناوب پذير هستند، در بخش ۴۴ بررسی می شوند. اين مدل ها اساساً معادل شبکه های کانولوشنی استریبل در فضاهای برداری اقليدسي  $\mathbb{R}^d$  هستند. يخش ؟! شبکه های کانولوشنی استریبل را بررسی می کند و ارتباط آنها با کانولوشن های  $GM$  را مورد بحث قرار می دهد. اين رویکرد تا حدی نامطلوب است زیرا  $d$  با يك میدان چارچوب کانوني (ساختار  $e$ ) همراه است، که به طور ضمني توسط مدل های تناوب پذير ناديده گرفته می شود. يخش ؟! رویکرد اصولي تر را در پيش می گيرد و فضاهای آفين اقليدسي  $\mathbb{E}_d$  راتعريف می کند که دقیقاً با  $G$ -ساختار هایي مجهز شده اند که منجر به کانولوشن های  $GM$  تناوب پذير  $Aff(G)$  می شوند. کانولوشن های واقعی  $GM$  در بخش ۴۵ تعریف می شوند. يخش ؟! شبکه های کانولوشنی اقليدسي تناوب پذير آفين را که در ادبيات يافت می شوند، بررسی می کند. آنها عمدتاً در انتخاب های مفروض گروه های ساختار و نمایش های گروهی متفاوت هستند.

؟؟ شبکه‌های کانولوشنی را در فضاهای اقلیدسی سوراخ دار  $\{d\}$ ، که مبدأ آن‌ها حذف شده است، پوشش می‌دهد. این مدل‌ها نسبت به چرخ‌شوح حول مبدأ تابع پذیر هستند، با این حال، نسبت به انتقال تابع پذیر نیستند. آن‌ها بر اساس  $G$ -ساختارهایی هستند که با مختصات قطبی، مختصات لگاریتمی، قطبی یا مختصات کروی مطابقت دارند.

شیوه‌های کانولوشنی کروی در بخش ۲ پوشش داده می‌شوند. بخش ۳ هندسه ۲-کره (جاسازی شده) S<sup>3</sup> را مورد بحث قرار می‌دهد. با تفسیر فضاهای مماس به عنوان زیرفضاهای دو بعدی یک فضای جاسازی  $\mathbb{R}^3$  عبارت فرم بسته نگاشتهای نمایی و لگاریتمی، چارچوب‌ها، گیج‌ها، انتقال‌دهنده‌ها و عمل ایزومتری را استخراج می‌کنیم. بخش ۴ شبکه‌های کانولوشنی کروی تناوب‌پذیر  $(SO_3 \text{ و } SO_4)$  را بررسی می‌کند. مابه طور خاص ثابت می‌کنیم که فقط نسبت به  $SO(2)$  چرخش محور ثابت تناوب‌پذیر هستند در بخش ۵ توصیف می‌شوند. بخش ۶ شبکه‌های کانولوشنی بیست و چهار را بررسی می‌کند.

یک بررسی از شبکه‌های کانولوشنی بر روی سطوح دو بعدی عمومی در بخش ۹۰ یافته می‌شود. بخش ۹۰ مقدمه‌ای کوتاه بر هندسه دیفرانسیل کلاسیک سطوح جاسازی شده و گسترش سازی آن‌ها بر حسب شبکه‌های مثلثی ارائه می‌دهد. کانولوشن‌های سطحی در ادبیات به دو دسته طبقه‌بندی می‌شوند: در بخش ۹۰ پوشش داده شده است، بر اساس کرnel‌های  $G = SO(2)$ -استریلین. این مدل‌ها مستقل از انتخاب خاص چارچوب متعامل راست گرد هستند. بخش ۹۰ دسته دوم مدل‌ها را بررسی می‌کند که بر اساس کرnel‌های  $\{e\}$ -استریلین، یعنی غیرتاوب پذیر هستند. این مدل‌ها به صراحت بر انتخاب یک میدان چارچوب تکیه دارند. بنابراین آن‌ها عمدتاً در روش‌های اکتشافی که برای تعیین چارچوب‌های مرجع استفاده می‌شوند، تفاوت دارند. توجه داشته باشید که چنین مدل‌هایی لزوماً در منیفلد‌های غیرقابل موازی سازی مانند کره‌های توپولوژیکی ناپیوسته هستند.

**پیوست:** پیوست شامل اطلاعات اضافی و اثبات‌های طولانی است.

گچیگ ها به صورت رسمی تخصیص فوری چارچوب های مرعج به فضاهای مماس را انجام می دهند اما به نقاط روی منیفولد به صورت مستقل از مختصات یک جایگزین محبوب انتخاب چارت های مختصاتی است که به اصطلاح پایه های مختصاتی (پایه های هولونومیک) فضاهای مماس را القا اشاره دارند.

دریاره استقلال مختصات کرنلها و اشتراک وزن در امتداد چارچوب‌های مرجع توضیح می‌دهد. اشتراک وزن مستقل از مختصات  $G$  فقط برای کرنل‌های استریل امکان‌پذیر است.

*G*-استریل کانولوشن‌های *GM* با بیان میدان‌های ویژگی در مختصات نرم‌افزار ژئوپرس محسوسه می‌شوند، جایی که آن‌ها با کرنل‌های کانولوشنی مطابقت داده می‌شوند. این فرآیند شامل یک انتگرال گیری بر روی فضاهای مماس است که در پیوست ۲۲ توصیف شده است.

[۸] و [۹] نظریه‌های نسبتاً عمومی از کاتولوشن‌ها بر روی فضاهای همگن را پیشنهاد کردند. از آنچا که این مدل‌ها وزن‌ها را از طریق عمل یک گروه تلقانی به اشتراک می‌گذارند، آن‌ها سیار شیوه به تدبیر‌های میدان کردن تابع پذیر ایزو-ومتری ما از بخش‌های [۱۰] و [۱۱] هستند. پیوست [۱۲] این مدل‌ها را بررسی می‌کند و توضیح می‌دهد که جگونه‌های آن‌ها کاتولوشن‌های  $GM$  را مرتبط هستند.

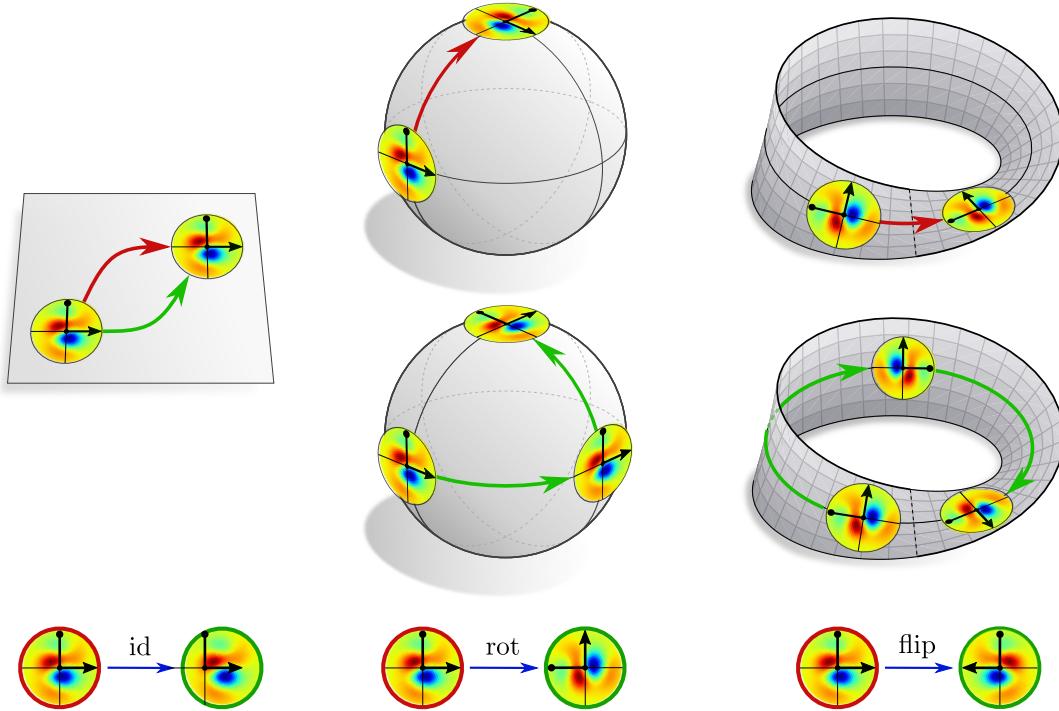
پیوست؟ ثابت می کند که میدان های کرنل ناوردا با ایزومتری در منفول میانگین کرنل در فضاهای خارج قسمتی از عمل ایزومتری هستند. حالت خاص فضاهای همگن، که در آن ها تبدیل های میدان کرنل تناوب پذیر ایزومتری معادل کانولوشن های  $GM$  هستند، در پیوست؟ پوشش داده شده است.

کانولوشن های کروی [۶] در پیوست ۲ ثابت شده اند که یک حالت خاص از کانولوشن های  $GM$  کروی ما هستند □ بنابراین هر شبکه کانولوشنی که تو سط نظر به آن ها بود شیش داده می شود توسط نظر به ماتریس تو پیچ داده می شود.

تائید می کند که تبدیل های میدان کرنل و کانولوشن های  $GM$  ما به خوبی تعریف شده اند اگر میدان کرنل هموار باشد و شامل کرنل های می باشند. "به خوبی، تعریف شده" در اینجا به این معنی است که انگک ال ها وجود دارند و میدان های وینگ، حاصل، هموار هستند.

---

در نهایت، پیوست ؟؟ استدلال می کند که میدان های ویژگی که مطابق با نمایش منظم گروه ساختار  $G$  تبدیل می شوند، معادل میدان های اسکالر بر روی  $G$ -ساختار هستند. این موضوع از آن جهت اهمیت دارد که برخی مدل ها، به ویژه کانولوشن های گروهی، این دیدگاه را اتخاذ می کنند.



شکل ۴: شهودی در مورد ابهام ذاتی اشتراک وزن در منیفلدهایی. چپ: یک تفسیر رایج از اشتراک وزن در صفحه، جایجاًی یک کرنل در کل فضاست. از آنجا که انتقال موازی در فضاهای مسطح مستقل از مسیر است، این امر بدون ابهام است. وسط: در فضاهای خمیده، مانند کره، انتقال موازی وابسته به مسیر است. مسیرهای مختلف منجر به کرنل‌های می‌شوند که نسبت به یکدیگر چرخانده شده‌اند. راست: نوار مویوس یک منیفلد غرقابل جهت‌گیری است. بنابراین، مسیرهای مختلف می‌توانند منجر به کرنل‌های می‌شوند که نسبت به یکدیگر بازتاب یافته‌اند. پایین: ما ترازهای مختلف کرنل را با انتخاب‌های مختلف چارچوب‌هایی مرجع محلی از فضاهای مماس مربوطه رسمی‌سازی می‌کنیم. به خوبی شناخته شده است که هیچ انتخابی از چارچوب‌های مرجع (گیج) در منیفلدهای عمومی ارجح نیست. مختصات بندی‌های مختلف با تبدیلهای گیج مرتبط هستند، که مقادیری در گروه ساختار  $G$  منیفلد (گروه بدیهی)  $\{e\}$  برای صفحه، گروه چرخش  $(2)$  برای کره و گروه بازتاب  $R = \mathcal{R}$  برای نوار مویوس می‌گیرند. شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات، ابهام چارچوب‌های مرجع را با اعمال کرنل‌های کانولوشنی  $G$ -استریبل (باتواب پذیر گیج) برطرف می‌کنند.

## ۲ مرور کلی و شهود بصری

فرمول‌بندی جبری شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات نیازمند آشنایی با نظریه گروه‌ها، نظریه نمایش‌ها و هندسه دیفرانسیل است که ممکن است برای مخاطبان غیرتخصصی مانع ایجاد کند. با این حال، بیشتر ساختارها و نتایج ما از نظر هندسه سیار شهودی هستند و می‌توان آن‌ها را با چند مثال بصری توضیح داد. این بخش تلاش می‌کند تا مرواری کلی و شهود بصری در مورد شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات را ارائه دهد.

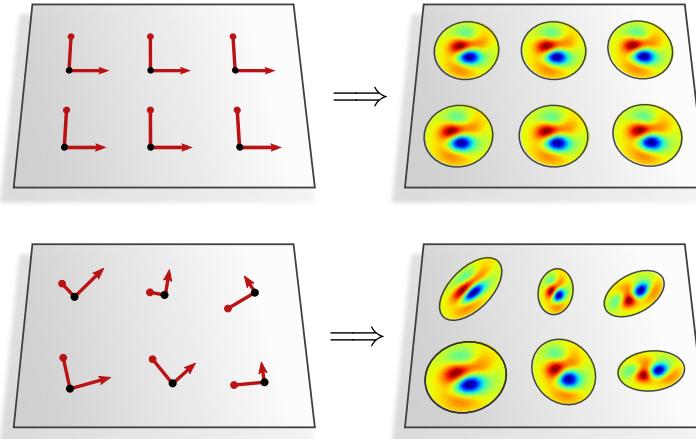
بخش ۱.۲ زیر، کانولوشن‌های مستقل از مختصات  $GM$  را در منیفلدهای ریمانی معرفی می‌کند. تاتاوب پذیری آن‌ها تحت عمل ایزو متري‌ها در بخش ۱.۲ در مورد بحث قرار می‌گیرد. بخش ۱.۲ در مورد عواملی که بر انتخاب  $G$ -ساختار در طراحی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات تأثیر می‌گذارند، توضیح می‌دهد.

### ۱.۲ ساختارها و کانولوشن‌های مستقل از مختصات

از آنجا که کانولوشن‌ها اساساً با خاصیت اشتراک وزن خود مشخص می‌شوند، یک سؤال اصلی در این کار این است: چگونه باید کرنل‌های کانولوشن بر روی منیفلدهای ریمانی به اشتراک گذاشته شوند؟<sup>۳</sup>

یک رویکرد رایج به اشتراک گذاشتن وزن‌ها از طریق عمل یک گروه تقارنی از فضای زیرین است [4]. به عنوان مثال، شبکه‌های کانولوشنی سنتی وزن‌ها را با جایجاًی کرنل‌ها روی صفحه به اشتراک می‌گذارند، در حالی که شبکه‌های کانولوشنی کروی وزن‌ها را با چرخش کرنل‌ها روی کره تقارن‌ها

<sup>۳</sup> این سؤال به طور کلی تر برای هر تابع قالب محلی، به عنوان مثال بایاس‌ها یا غیرخطی‌های نقطه‌ای نیز کاربرد دارد.



شکل ۵: یک ویژگی کلیدی کانولوشن‌ها این است که آنها وزن‌ها را در سراسر منفولد به اشتراک می‌گذارند. ما تراز یک کرنل در  $p \in M$  را با انتخاب یک چارچوب مرجع  $\square$  یا گیج  $\square$  از فضای مماس مربوطه  $T_p M$  شناسایی می‌کیم. بنابراین میدان‌های چارچوب مختلف دلالت بر میدان‌های کرنل (کانولوشنی) متفاوتی دارند.

انتخاب چارچوب‌ها اغلب منحصر به فرد است. ابهام در این انتخاب با  $G$ -ساختارها رسی‌سازی می‌شود؛ به شکل ۴ مراجعه کنید. برای در نظر گرفتن اختیاری بودن چارچوب‌ها، کرنل‌ها ملزم می‌شوند که  $G$ -استبریل (تناوب‌پذیر) باشند، همانطور که در اشکال ۴ و ۵ بصری‌سازی شده است.

به اشتراک‌گذارند. برای به اشتراک‌گذاشتن یک کرنل در کل فضای عمل گروه تقارنی باید متعددی باشد. از آنجا که این امر به طور کلی برای ایزومنتری‌های منیفلدهای ریمانی صادق نیست، این استراتژی برای هدف ما رد می‌شود.

اشتراک وزن از طریق انتقال اشتراک‌کردن در فضاهای اقلیدسی اغلب به عنوان "جایجایی" یک کرنل در فضای در نظر گرفته می‌شود. از آنجا که در فضاهای مسطح انتقال موازی مستقل از مسیر انتخاب شده است، این امر منجر به تراز بدون ابهام کرنل‌ها می‌شود؛ به شکل ۴ (چپ) مراجعه کنید. با این حال، در فضاهای خمیده یا غیرقابل جهت‌گیری، انتقال موازی وابسته به مسیر می‌شود و بنابراین برای اشتراک وزن نامناسب است. شکل ۴ (وسط و راست) این مشکل را برای کره و نوار مویوس مثال می‌زند، جایی که مسیرهای مختلف منجر به تراز متفاوتی از کرنل می‌شوند.

از آنجا که مفهوم "ترازهای کرنل" تا حدی مبهم است ابتدا باید آن را از نظر ریاضی دقیق کنیم:

ما انتخاب تراز کرنل در نقطه‌ای  $p \in M$

را به عنوان انتخاب یک چارچوب مرجع محلی (گیج) از فضای مماس مربوطه  $T_p M$  رسی‌سازی می‌کنیم.

یک چارچوب مرجع در  $p \in M$  یک تاپل مرتب  $[e_1, e_2, \dots, e_d]$  با  $\dim(M) = d$  است که به عنوان محورهای چارچوب نامیده می‌شوند. از آنجا که چارچوب‌های مختلف در  $p$  با تبدیل‌های خطی مرتبط هستند، انتخاب‌های مختلف چارچوب‌ها با تغییر شکل‌های کرنل خطی مطابقت دارند. شکل ۵ دو انتخاب مختلف از میدان‌های چارچوب را در  $\mathbb{R}^3$  نشان می‌دهد. به اشتراک گذاشتن یک کرنل کانولوشنی در امتداد این میدان‌های چارچوب منجر به میدان‌های کرنل (کانولوشنی) مربوطه می‌شود.

شناسایی ترازهای کرنل با چارچوب‌های مرجع این سؤال را مطرح می‌کند:

انتخاب چارچوب‌های مرجع محلی بر روی یک منفولد (ریمانی) تا چه حد مبهم است؟

همانطور که در ادامه توضیح داده می‌شود، ابهام چارچوب‌های مرجع توسط یک  $G$ -ساختار که منفولد به آن مجهز است، تعیین می‌شود.

## ۱.۱.۲ $\square$ -ساختارها

فضای همه چارچوب‌های ممکن  $F_p M$  با عنوان  $T_p M$  نشان داده می‌شود. با هم، چارچوب‌های همه فضاهای مماس، بندل چارچوب  $FM$  را تشکیل می‌دهند؛ به شکل ۲۴ مراجعه کنید. هیچ انتخاب خاصی از چارچوب‌ها در  $FM$  بر روی یک منفولد هموار "عربان" (بدون ساختار هندسی اضافی) ترجیح داده نمی‌شود، که ابهام تراز کرنل‌ها را حداکثری می‌کند. برای رفع ابهام چارچوب‌ها و ترازهای کرنل، منفولد، منیفلد، بندل با ساختار هندسی اضافی مجهز شود.

یک منیفلد ریمانی یا ساختار متریک مجهز شده است. با ارائه یک حاصل ضرب داخلی (متریک ریمانی) بر روی فضاهای مماس، این ساختار امکان شناسایی چارچوب‌های خاصی را می‌دهد که محورهای آنها متعادل با یکدیگر هستند. تبدیل‌های گیج، یعنی تبدیل‌ها بین انتخاب‌های چارچوب‌های مرجع (به اشکال ۴ و ۶ مراجعه کنید)، سپس مقادیری در گروه متعادل  $d$  می‌گیرند. در منیفلدهای ریمانی، تراز کرنل‌ها همیشه تا چرخش‌ها و بازتاب‌ها بدون ابهام است.

شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی کرنل‌های کانولوشن (و در نتیجه چارچوب‌ها) را تراز می‌کنند موازی با یکدیگر همانطور که در شکل ۵ (بالا) بصری‌سازی شده است. شبکه‌های کانولوشنی کروی معمولاً ترازهای کرنل را تا چرخش‌ها بدون ابهام می‌کنند، یعنی آنها یک دست پری ترجیحی از چارچوب‌های مرجع را فرض می‌کنند. ساختار متریک به تنهایی برای توصیف این تنظیمات کافی نیست، که نشان می‌دهد این منیفلدهایی با ساختار هندسی اضافی علاوه بر ساختار متریک مجهز شده‌اند. ما پیشنهاد می‌کنیم که چارچوب ریاضی مناسب،  $G$ -ساختارها است و فرض می‌کنیم:

ابهام در انتخاب چارچوب‌های مرجع (و در نتیجه ترازهای کرنل)  
بر روی یک منیفولد  $M$  با  $G$ -ساختار  $GM$

$G$ -ساختارها بندل‌هایی از چارچوب‌های مرجع متماز بر روی  $M$  هستند به طوری که تبدیل‌های گیج بین چارچوب‌های یک فضای مماس واحد، مقادیری در گروه ساختار  $(d) \leq GL(d)$  می‌گیرند. به طور شهودی، می‌توان مجموعه  $G_p M$  چارچوب‌های  $T_p M$  را "شیوه"  $G$  دانست، با این حال، بدون یک مبدأ متماز.<sup>۴</sup>

بندل چارچوب  $FM$  خود یک  $G$ -ساختار با  $(d) = GL(d)$  است، در حالی که بندل چارچوب‌های متعامد  $OM$  یک  $G$ -ساختار (ساختار متریک) با  $d = G = d$  است. شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی سنتی بر روی میدان چارچوب کانونی در  $\mathbb{R}^d$  که در شکل ۲ نشان داده شده است، تکیه دارند که یک  $G$ -ساختار برای گروه بدینهی  $\{e\}$  است. شکل ۳  $G = \{e\}$ -ساختارها را برای منیفلدهای بیشتر و گروه‌های ساختار دیگر بصری‌سازی می‌کند. مروری بر گروه‌های ساختار رایج در جدول ۱ در بخش ۳.۱.۳ یافت می‌شود.

ما در ادامه همیشه منیفلدهای ریمانی را مجهرز به یک  $G$ -ساختار اضافی در کنار ساختار متریک خود فرض خواهیم کرد.<sup>۵</sup> انتخاب خاص  $G$ -ساختار خواص شبکه عصبی را تعیین می‌کند؛ ما در مورد این انتخاب در بخش ۳.۲ زیر توضیح خواهیم داد.

---

<sup>۴</sup> یک فضای همگن اصلی از  $G$  (با  $G$ )- $\square\square\square\square\square$ -است.

<sup>۵</sup>  $G$ -ساختار باید با ساختار متریک سازگار باشد به این صورت که چارچوب‌های متماز در  $GM$  زیرمجموعه‌ای از چارچوب‌های متعامد در  $OM$  باشند زمانی که  $d < G$ . به طور خاص برای  $G = d$ ،  $G$ -ساختار  $GM$  با ساختار متریک  $OM$  مطابق است و اطلاعات هندسی اضافی را اضافه نمی‌کند.

شبکه‌های کانولوشنی سلسله‌مراتبی از میدان‌های ویژگی را از یک سیگنال ورودی بر روی یک منیفولد استخراج می‌کنند. ویژگی‌ها از طریق کرنل‌ها محاسبه می‌شوند، که برای شناسایی الگوهای فضایی مشخص در ویژگی‌های سطح پایین تر بهینه شده‌اند. ما تقاضا می‌کنیم که این فرآیند استنتاج صرفاً بر اساس آرایش نسبی ویژگی‌ها باشد و مستقل از انتخاب خاص مختصات بنده باشد. بنابراین ویژگی‌ها باید کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات باشند، مشابه اسکالارها، بردارها یا تانسورها. در حالی که چنین کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات وجود دارند، یک پیاده‌سازی کامپیوترا (غیرنمادین) نیازمند آن است که آن‌ها بر حسب ضرایب عددی در برخی گیج، یعنی نسبت به برخی انتخاب از چارچوب مرجع، بیان شوند. انتخاب خاص مختصات بی‌اهمیت است □ این تنها یکی از چندین توصیف ممکن برای تنظیم چنین درجات آزادی اضافی، نظریه‌های گیج هستند. یک نظریه گیج، برابری گیج‌های مختلف را با مرتبط کردن سازگار آن‌ها با یکدیگر از طریق تبدیل‌های گیج در نظر می‌گیرد. میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات بنابراین با یک قانون تبدیل خاص، یعنی یک عمل گروهی از گروه ساختار که توصیف می‌کند ویژگی‌ها چگونه تحت تبدیل‌های گیج تبدیل می‌شوند، مرتبط هستند. هر لایه شبکه عصبی که چنین میدان‌های ویژگی را پردازش می‌کند، ملزم به رعایت قوانین تبدیل آن‌ها برای حفظ استقلال از مختصات‌اشان است.

هدف این بخش اول از کار ما، معرفی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات با زبانی آسان است. بنابراین، شهود هندسی و بصری‌سازی‌ها بر فرمالیسم ریاضی ترجیح داده می‌شوند. یک تبیین رسمی تر از تعاریف و نتایج ارائه شده در بخش ۲.۵ آورده شده است.

بخش ۳ گیج‌ها و تبدیل‌های گیج را معرفی می‌کند که بر اساس آن‌ها میدان‌های بردارهای ویژگی مستقل از مختصات تعریف می‌شوند. شبکه‌های عصبی که بین چنین میدان‌های ویژگی نگاشت می‌کنند، در بخش ۴ توسعه یافته‌اند. بخش ۵ یک نمونه پیاده‌سازی از میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را در نوار موبیوس ارائه می‌دهد.

### ۳ مقدمه‌ای بر شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات

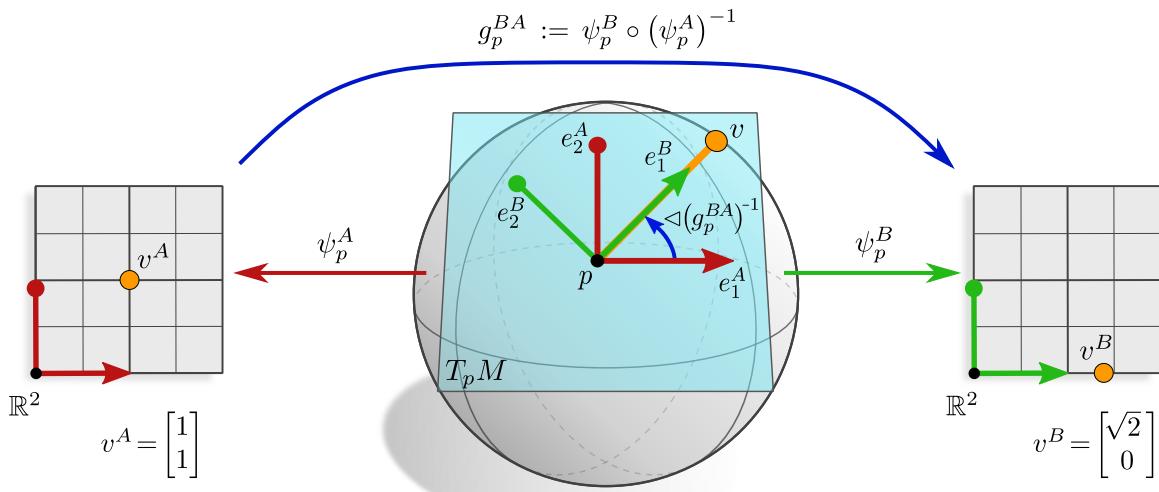
شبکه‌های کانولوشنی سلسله‌مراتبی از میدان‌های ویژگی را از یک سیگنال ورودی بر روی یک منیفولد استخراج می‌کنند. ویژگی‌ها از طریق کرنل‌ها محاسبه می‌شوند، که برای شناسایی الگوهای فضایی مشخص در ویژگی‌های سطح پایین تر بهینه شده‌اند. ما تقاضا می‌کنیم که این فرآیند استنتاج صرفاً بر اساس آرایش نسبی ویژگی‌ها باشد و مستقل از انتخاب خاص مختصات بنده باشد. بنابراین ویژگی‌ها باید کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات باشند، مشابه اسکالارها، بردارها یا تانسورها. در حالی که چنین کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات وجود دارند، یک پیاده‌سازی کامپیوترا (غیرنمادین) نیازمند آن است که آن‌ها بر حسب ضرایب عددی در برخی گیج، یعنی نسبت به برخی انتخاب از چارچوب مرجع، بیان شوند. انتخاب خاص مختصات بی‌اهمیت است □ این تنها یکی از چندین توصیف ممکن برای تنظیم چنین درجات آزادی اضافی، نظریه‌های گیج هستند. یک نظریه گیج، برابری گیج‌های مختلف را با مرتبط کردن سازگار آن‌ها با یکدیگر از طریق تبدیل‌های گیج در نظر می‌گیرد. بنابراین میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات با یک قانون تبدیل خاص، یعنی یک عمل گروهی از گروه ساختار که توصیف می‌کند ویژگی‌ها چگونه تحت تبدیل‌های گیج تبدیل می‌شوند، مرتبط هستند. هر لایه شبکه عصبی که چنین میدان‌های ویژگی را پردازش می‌کند، ملزم به رعایت قوانین تبدیل آن‌ها برای حفظ استقلال از مختصات‌اشان است. هدف این بخش اول از کار ما، معرفی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات با زبانی آسان است. بنابراین، شهود هندسی و بصری‌سازی‌ها بر فرمالیسم ریاضی ترجیح داده می‌شوند. یک تبیین رسمی تر از تعاریف و نتایج ارائه شده در بخش ۲.۵ آورده شده است.

بخش ۳ گیج‌ها و تبدیل‌های گیج را معرفی می‌کند که بر اساس آن‌ها میدان‌های بردارهای ویژگی مستقل از مختصات تعریف می‌شوند. شبکه‌های عصبی که بین چنین میدان‌های ویژگی نگاشت می‌کنند، در بخش ۴ توسعه یافته‌اند. بخش ۵ یک نمونه پیاده‌سازی از میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را در نوار موبیوس ارائه می‌دهد.

#### ۱.۳ گیج‌ها، تبدیل‌های گیج و $G$ -ساختارها

##### ۱.۱.۳ فضاهای مماس و چارچوب‌های مرجع

یک منیفولد هموار  $d$ -بعدی  $M$  دارای یک فضای مماس، فضاهای برداری  $d$ -بعدی  $T_p M \cong \mathbb{R}^d$  متصول به هر نقطه  $p \in M$  است. فضاهای مماس، فضاهای برداری  $d$ -بعدی هستند، با این حال، برخلاف  $\mathbb{R}^d$ ، آن‌ها به طور کلی با هیچ انتخاب ارجح چارچوب مرجع همراه نیستند. یک بردار مماس  $v \in T_p M$  یک شی مستقل از مختصات است و بنابراین بلافصله به صورت عددی با یک تاپل مختصاتی  $(v_1, v_2, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$  نمایش داده نمی‌شود. به طور انتزاعی تر، هر



شکل ۶: شناسایی  $T_p M \cong \mathbb{R}^d$  از طریق گیج‌های مختلف. یک بردار مماس (مستقل از مختصات)  $v \in T_p M$  (نارنجی) را می‌توان به صورت عددی با یک تابع مخصوصی  $\psi_p^A(v) = (1, 1)^\top$  نسبت به گیج  $\psi_p^A$  (قرمز) یا، به طور معادل، با  $\psi_p^B(v) = (\sqrt{2}, 0)^\top$  نسبت به گیج  $\psi_p^B$  (سیاه) نمایش داد. انتخاب یک گیج مربوط به انتخاب  $[e_1^A, e_2^A]$  یا  $[e_1^B, e_2^B]$  از چارچوب مرجع است. در یک منفول عمومی هیچ انتخابی از گیج یا مختصات بنده پیش‌فرض ارجح نیست. گیج‌های مختلف، و در نتیجه چارچوب‌های مرجع، با تبدیل‌های گیج  $\psi_p^B \circ \psi_p^A$  (آبی) مرتب هستند که مقادیری در گروه ساختار  $G$  تعریف شده می‌گیرند. این شکل ۶ نمودار گرافیکی از نمودارهای جابجایی در معادله (۸) و شکل ۲۵ آ است. توجه داشته باشید که گیج‌ها بلا فاصله به فضاهای مماس مختصات می‌دهند. شکل ۶ در بخش ۴.۲ یک نمودار مشابه برای چارت‌های (آفین) را نشان می‌دهد که به منفول مختصات می‌دهند و بدین ترتیب گیج‌ها ("پایه‌های مختصات") را القا می‌کنند.

فضای مماس  $T_p M$  با  $\mathbb{R}^d$  هم‌ریخت است اما به طور کلی هیچ هم‌ریختی کانونی بین آنها وجود ندارد. بنابراین هر دو فضا از نظر ساختاری معادل هستند اما به هیچ روش ارجح به یکدیگر شناسایی نمی‌شوند.

یک گیج (تسهیم محلی بندل مماس) بر روی  $M$  به عنوان مجموعه‌ای از نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر که به صورت هموار وابسته به موقعیت هستند، تعریف می‌شود:

$$\psi_p^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad p \in U^A, \quad (1)$$

که هم‌ریختی‌های فضای برداری گشته بین  $T_p M$  و  $\mathbb{R}^d$  را مشخص می‌کند. همانطور که در شکل ۶ بصری‌سازی شده است، آنها با تخصیص یک بردار ضریب به فضاهای مماس مختصات می‌دهند:

$$v^A := \psi_p^A(v) \in \mathbb{R}^d \quad (2)$$

به هر بردار مماس مستقل از مختصات  $v \in T_p M$ . معکوس این رابطه می‌دهد:

$$v = (\psi_p^A)^{-1}(v^A) = (\psi_p^A)^{-1}\left(\sum_i v_i^A \epsilon_i\right) = \sum_i v_i^A (\psi_p^A)^{-1}(\epsilon_i) =: \sum_i v_i^A e_i^A, \quad (3)$$

که در آن  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_d\}$  را پایانه استاندارد  $\mathbb{R}^d$  نامگذاری کردایم و از خطی بودن گیج برای بیرون کشیدن جمع استفاده کردایم. این نشان می‌دهد که گیج را می‌توان به عنوان مجهر کردن هر فضای مماس  $T_p M$  با یک چارچوب مرجع در نظر گرفت:

$$[e_1^A, \dots, e_d^A] := \left[ (\psi_p^A)^{-1}(\epsilon_1), \dots, (\psi_p^A)^{-1}(\epsilon_d) \right], \quad (4)$$

که به عنوان یک  $d$ -تالی از بردارهای مماس خطی مستقل تعریف می‌شود که با نگاشت پایه استاندارد  $\mathbb{R}^d$  به عقب از طریق نگاشت معکوس گیج به دست می‌آید. برای اختصار، ما در ادامه از نماد کوتاه‌شده  $[e_i^A]_{i=1}^d$  برای چارچوب‌ها استفاده خواهیم کرد. ضرایب  $v^A$  مختصات  $v$  نسبت به این چارچوب هستند. مجموعه‌ای از چارچوب‌های القا شده توسط  $\psi_p^A$  (هموار) میدان چارچوب نامیده می‌شود؛ برای بصری‌سازی به شکل ۷ مراجعه کنید.

گیج‌های  $\psi^X$  فضاهای مماس را تنها در همسایگی‌های محلی  $M$  مختصات می‌دهند، و به دلیل موانع توپولوژیکی به طور کلی نمی‌توانند به کل مینفولد بدون نقض فرض همواری گسترش یابند. بنابراین یک اطلس در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathcal{A} = \{(U^X, \psi^X)\}_{X \in \mathfrak{X}}, \quad (5)$$

مشکل از گیج‌های هموار بر روی مجموعه‌ای از همسایگی‌های  $U^X$  که مینفولد را پوشش می‌دهند، یعنی شرط  $\bigcup_{X \in \mathfrak{X}} U^X = M$  را برآورده می‌کند، که در آن  $\mathfrak{X}$  یک مجموعه اندیس است.<sup>۶</sup> در نواحی همپوشانی  $U^A \cap U^B \neq \emptyset$  از همسایگی‌ها، گیج‌های مختلف  $\psi_p^A$  و  $\psi_p^B$  توسط توابع گذار هموار به هم متصل می‌شوند:

$$g^{BA} : U^A \cap U^B \rightarrow \text{GL}(d), \quad p \mapsto g_p^{BA} := \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}. \quad (6)$$

در اینجا ما دامنه مشترک (فعلاً) را با گروه خطی عمومی  $\text{GL}(d)$  در نظر می‌گیریم، مشکل از همه ماتریس‌های معکوس‌پذیر در  $\mathbb{R}^{d \times d}$ ، که رابطه بین هر جفت از هم‌ریختی‌های فضای برداری (گیج‌ها) یا چارچوب‌های مرجع را توضیح می‌دهند. عمل چنین تابع گذاری بر روی یک گیج داده شده یک تبدیل گیج را تعریف می‌کند:

$$\psi_p^B = g_p^{BA} \cdot \psi_p^A. \quad (7)$$

از نظر یک نمودار جابجایی، رابطه بین گیج‌های مختلف به صورت زیر بصری‌سازی می‌شود:<sup>۷</sup>

$$\begin{array}{ccc} & \psi_p^A & \\ \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\quad} & T_p M & \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}^d \\ & \uparrow & & \downarrow \\ & g_p^{AB} \cdot & = (g_p^{BA})^{-1}. & \end{array} \quad (8)$$

این نمودار را با تفسیر گرافیکی آن در شکل ۶ مقایسه کنید.

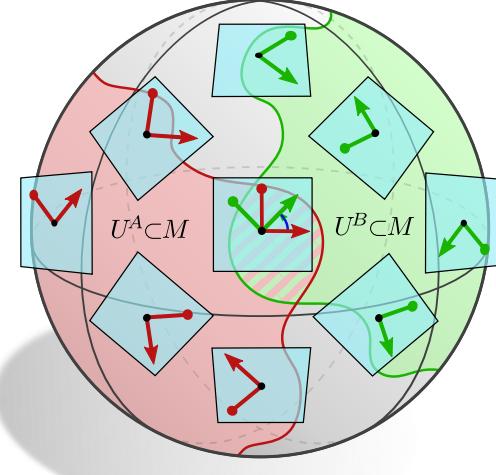
یک تبدیل گیج، مختصات‌بندی فضاهای مماس را تغییر می‌دهد به طوری که همان بردار مماس مستقل از مختصات  $v$  با یک بردار مولفه‌ای متفاوت نمایش داده می‌شود:

$$v^B = g_p^{BA} v^A. \quad (9)$$

<sup>۶</sup> اطلس گیج‌ها بسیار شبیه به اطلس‌های معمول چارت‌های یک مینفولد است (پیوست ۲). تفاوت این است که اطلس‌های مورد نظر در اینجا مستقیماً به بندل مماس  $TM$  مختصات می‌دهند به جای مینفولد  $M$ .

<sup>۷</sup> نمودارها یک نمای کلی بصری از توابع و فضاهایی را که بین آن‌ها نگاشت می‌کنند، ارائه می‌دهند. به عنوان مثال، نمودار

به این معنی است که توابع  $Y \rightarrow X$  و  $Z \rightarrow X$  را که بین آن‌ها نگاشت می‌کنند، ارائه می‌دهند. اگر ترکیبات توابع در امتداد همه مسیرهایی با شروع و پایان یکسان مطابقت داشته باشند، نمودار جابجایی نامیده می‌شود. نمودار مثال ما اگر (و تنها اگر)  $h = g \circ f$  صادق باشد، جابجایی است.



شکل ۷ هر نقطه  $p$  از یک منفولد ریمانی  $M$  دارای یک فضای مماس  $T_p M$  متصل است. یک گیج هموار  $\psi^A$  بر روی یک زیرمجموعه مناسب انتخاب شده  $U^A \subseteq M$  (قرمز) تمام ضمایر مماس  $T_p M$  را برای  $p$  در  $U^A$  مخصوص می‌دهد همانطور که در شکل ۶ نشان داده شده است. این معادل انتخاب یک میدان چارچوب هموار بر روی  $U^A$  است. از آنجا که به طور کلی امکان گسترش یک گیج به صورت سراسری بر روی کل منفولد وجود ندارد، لازم است که یک  $G$ -اطلس در نظر گرفته شود، مشکل از گیج‌هایی که  $M$  را پوشش می‌دهند. مخصوصات بندی‌های مختلف  $\psi^A$  بر روی  $U^B$  (سیاه) از طریق تبدیل‌های گیج (یا نگاشتهای گذار)  $g^{BA} : U^A \cap U^B \rightarrow G$  به هم متصل می‌شوند که بر روی همپوشانی  $U^A \cap U^B$  (خطدار) تعریف شده‌اند و مقادیری در گروه ساختار  $G \leq \text{GL}(d)$  می‌گیرند.

از آنجا که یک گیج مربوط به انتخاب یک میدان چارچوب است، یک تبدیل گیج مربوط به تبدیل بین میدان‌های چارچوب است. به طور خاص، یک چارچوب  $p \in M$  در  $[e_i^A]_{i=1}^d = [e_1^A, \dots, e_d^A]$  می‌شود:

$$\begin{aligned}
[e_i^B]_{i=1}^d &:= \left[ (\psi_p^B)^{-1}(\epsilon_i) \right]_{i=1}^d && \text{(چارچوب القا شده توسط گیج, (۴))} \\
&= \left[ (g_p^{BA} \cdot \psi_p^A)^{-1}(\epsilon_i) \right]_{i=1}^d && \text{(تبدیل گیج, (۷))} \\
&= \left[ (\psi_p^A)^{-1}((g_p^{BA})^{-1}\epsilon_i) \right]_{i=1}^d && \text{(معکوس گسترش یافته)} \\
&= \left[ (\psi_p^A)^{-1} \left( \sum_j \epsilon_j \epsilon_j^\top (g_p^{BA})^{-1} \epsilon_i \right) \right]_{i=1}^d && \text{(۱ = \sum_j \epsilon_j \epsilon_j^\top)} \\
&= \left[ (\psi_p^A)^{-1} \left( \sum_j \epsilon_j \left( (g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \right) \right]_{i=1}^d && \text{(عناصر ماتریس (g_p^{BA})^{-1} شناسایی شده)} \\
&= \left[ \sum_j (\psi_p^A)^{-1}(\epsilon_j) \left( (g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \right]_{i=1}^d && \text{(خطی بودن \psi_p^A)} \\
&= \left[ \sum_j e_j^A \left( (g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \right]_{i=1}^d && \text{(چارچوب القا شده توسط گیج, (۴))} \\
&=: [e_i^A]_{i=1}^d \blacktriangleright (g_p^{BA})^{-1} && \text{(۱۰)}
\end{aligned}$$

از طریق عمل راست تعریف شده:

$$\blacktriangleright : ([e_i]_{i=1}^d, g) \mapsto [e_i]_{i=1}^d \blacktriangleright g := \left[ \sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \quad (11)$$

از عناصر گروه بر روی چارچوب‌ها. توجه داشته باشید که معکوس در این عمل در معادله (۱۰) به دلیل تعریف معادله (۷) بدون معکوس است.<sup>۸</sup> معمولاً به رفتار تبدیل چارچوب‌های مرجع، تبدیل کوواریانت گفته می‌شود در حالی که تبدیل گیج‌ها و ضرایب برداری به عنوان تبدیل کونتروواریانت نامیده می‌شود؛ به پیوست ۲۲ مراجعه کنید.

<sup>۸</sup> قراردادهای دیگر ممکن است انتخاب معکوس‌ها را در  $\psi^A$  تغییر دهند. یک معکوس در هر یک از معادله برای سازگاری عمل چپ  $\blacktriangleright$  بر روی گیج‌ها و عمل راست  $\blacktriangleright$  بر روی چارچوب‌ها ضروری است.

از آنجا که رفتار تبدیل ضرایب در معادله (۹) و یا به در معادله (۱۰) معکوس یکدیگر هستند، آن‌ها یکدیگر را خنثی می‌کنند، یعنی بردار مماس  $v = \sum_i v_i^A e_i^A = \sum_i v_i^B e_i^B$  را ناوردا می‌گذارند:

$$\begin{aligned} v &= \sum_i v_i^B e_i^B = \sum_i v_i^B \sum_j e_j^A \left( (g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \\ &= \sum_j \left( \sum_i \left( (g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} v_i^B \right) e_j^A \\ &= \sum_j v_j^A e_j^A. \end{aligned} \quad (12)$$

این ساختار تضمین می‌کند که هر محاسبه‌ای در نهایت مستقل از گیج انتخاب شده است، که معمولاً به آن استقلال از مختصات گفته می‌شود. به طور کلی، هر نمایش مختصاتی از یک شی یا تابع مستقل از مختصات برای سازگاری باید مستقل از مختصات باشد.

برای کامل بودن می‌خواهیم اشاره کنیم که فرمالیسم ارائه شده در اینجا پایه‌های عمومی فضاهای مماس را تعریف می‌کند، که گاهی اوقات به عنوان پایه‌های غیرمختصاتی (پایه‌های غیرهولونومیک) از نظر گیج‌های محلی نامیده می‌شوند. یک جایگزین بسیار محبوب اما کمتر عمومی پایه‌های مختصاتی (پایه‌های هولونومیک) هستند:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_1^A} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d^A} \Big|_p \right], \quad (13)$$

که توسط چارت‌های مختصاتی منفولد القا می‌شوند [۴]:

$$x^A : U^A \rightarrow V^A \subseteq \mathbb{R}^d \quad (14)$$

گیج‌های مربوطه توسط دیفرانسیل‌های چارت داده می‌شوند، یعنی:

$$\psi_p^A = \hat{dx}_p^A = (\hat{dx}_{p,1}^A, \dots, \hat{dx}_{p,d}^A)^\top : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d. \quad (15)$$

تبدیل‌های گیج در این تنظیم با ژاکویان‌ها مطابقت دارند:

$$g_p^{BA} = \left. \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right|_{x^A(p)} \in \text{GL}(d) \quad (16)$$

از نگاشت‌های گذار چارت. یک چارت نمونه و پایه‌های مختصاتی القا شده آن در شکل ۸ بصری‌سازی شده‌اند. پیوست ۲؟ رابطه بین هر دو فرمالیسم را با جزئیات مورد بحث قرار می‌دهد؛ یک مرور کلی در جدول ۲؟ ارائه شده است.

در ادامه این مقاله ما عمدتاً در فرمالیسم گیج کار خواهیم کرد، که چارچوب‌های مرجع را مستقیماً به فضاهای مماس تخصیص می‌دهد به جای اینکه آن‌ها را از چارت‌ها القا کنند. استثنایاً عبارتند از کانولوشن‌های موبیوس در بخش ۵ CNN‌های اقلیدسی در بخش ۲؟، مختصات لگاریتمی-قطبی در بخش ۲؟ و CNN‌های بیست و چهار در بخش ۲؟. در همه این موارد، متفاوت‌هایی به صورت محلی مسطح هستند و چارت‌ها ایزوگریک هستند، به طوری که چارچوب‌های متعدد را القا می‌کنند. کانولوشن‌های  $GM$  در  $U^A$  سپس می‌توانند به روشنی کارآمد با اجرای کانولوشن‌های اقلیدسی با کرنل‌های  $G$ -استریبل در دامنه‌های مشترک چارت‌ها  $V^A$  محاسبه شوند.

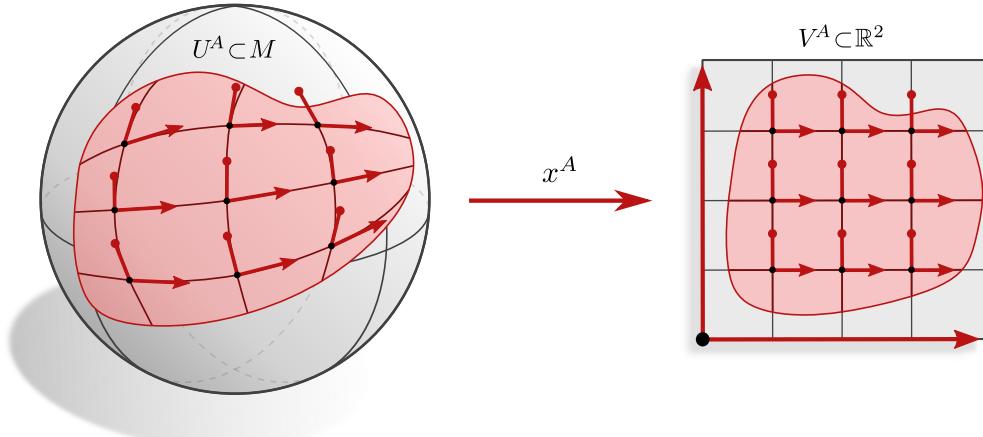
### ۲.۱.۳ توابع مستقل از مختصات در فضاهای مماس

همانطور که بردارهای مماس مستقل از مختصات هستند، یعنی بدون اشاره به هیچ چارچوب مرجع تعریف می‌شوند. یک گیج انتخاب شده امکان نمایش چنین نگاشت‌های مستقل از مختصات را توسط توابعی فراهم می‌کند که بر روی بردارهای ضریب در  $\mathbb{R}^d$  عمل می‌کنند. مشابه بردارهای ضریب، مختصات‌بندی توابع باید به روشنی خاص تحت تبدیل‌های گیج تبدیل شوند تا به طور سازگار تعریف شوند، یعنی برای رعایت استقلال از مختصات. ما بعداً مفهوم ارائه شده در اینجا را از بین نگاشت‌های مستقل از مختصات بر حسب مختصات محلی برای تعریف کانولوشن‌های مستقل از مختصات  $GM$  به کار خواهیم برد.

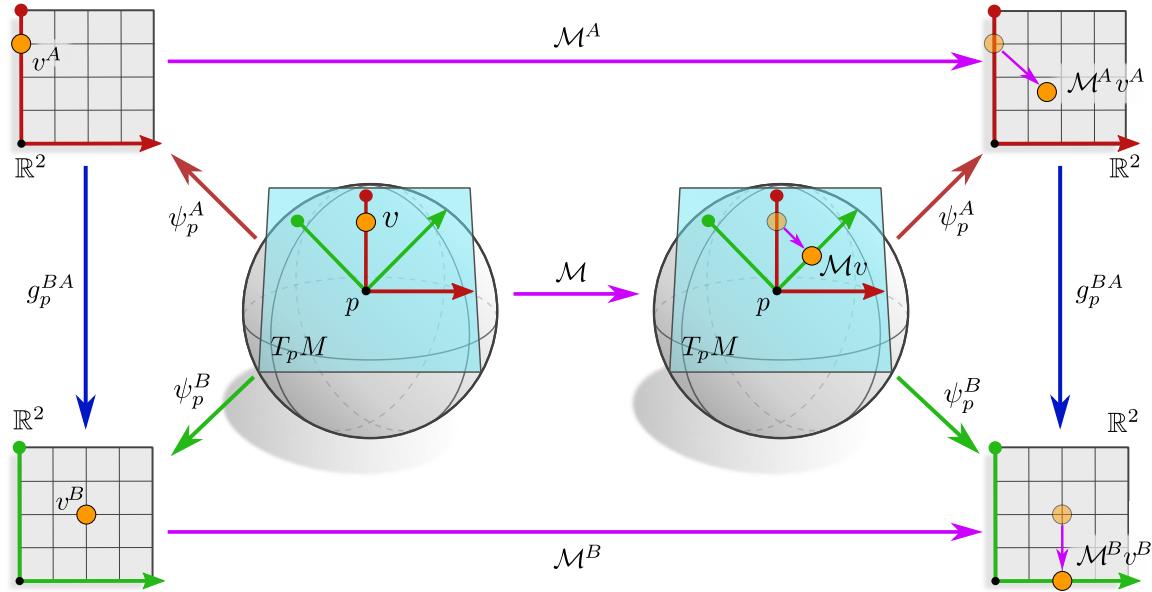
به عنوان یک مثال ساده برای یک عملیات مستقل از مختصات، باید حالت یک نگاشت خطی را در نظر بگیریم:

$$\mathcal{M} : T_p M \rightarrow T_p M. \quad (17)$$

فرض کنید  $v \in T_p M$  یک بردار مماس باشد که توسط  $\mathcal{M}$  به  $\mathcal{M}v \in T_p M$  نگاشت می‌شود. نگاشت‌های خطی در پیاده‌سازی‌های عددی معمولاً توسط ماتریس‌های ضریب مدل می‌شوند که بین بردارهای ضریب نسبت به یک انتخاب از چارچوب مرجع نگاشت می‌کنند. برای دقیق



شکل ۸: یک چارت  $x^A : U^A \rightarrow V^A \subseteq \mathbb{R}^d$  را به نواحی  $U^A \subseteq M$  از منیفولد تخصیص می‌دهد. این چارت پایه‌های مختصاتی  $\psi_p^A = \hat{dx}_p^A = \left[ \frac{\partial}{\partial x_1^A}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d^A}|_p \right]$  و گیج‌های مربوطه مرتبه‌ی مماس  $T_p M$  در القا می‌کند. معمدتاً با چارت‌ها کار نخواهیم کرد بلکه به نقاط  $p \in M$  به صورت مستقل از مختصات ارجاع خواهیم داد. گیج‌ها (چارچوب‌ها) سپس مستقیماً به فضاهای مماس تخصیص داده می‌شوند به جای اینکه از چارت‌ها القا شوند.



شکل ۹: تفسیر گرافیکی نمودار جابجایی در معادله (۲۳). یک نگاشت مستقل از مختصات  $\mathcal{M} : T_p M \rightarrow T_p M$  را می‌توان به طور معادل با توابع  $\mathcal{M}^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  یا  $\mathcal{M}^B : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  نسبت به گیج‌های مختلف  $\psi_p^A$  یا  $\psi_p^B$  نمایش داد. این مختصات‌بندی‌های  $\mathcal{M}$  با پیش و پس ترکیب با گیج‌ها در دامنه و دامنه مشترک تعريف می‌شوند، به عنوان مثال، با دنبال کردن فلاش‌ها،  $\mathcal{M}^A := \psi_p^A \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^A)^{-1}$ . در نتیجه، تبدیل‌های گیج  $\mathcal{M}^B = g_p^{BA} \mathcal{M}^A (g_p^{BA})^{-1}$  بین مختصات‌بندی‌ها توسط یک پیش و پس ترکیب با نگاشت‌های گذار  $g_p^{BA}$  در دامنه و دامنه مشترک داده می‌شوند. همه کیت‌ها و نگاشت‌ها در این کار یا مستقل از مختصات خواهد بود (مانند  $\mathcal{M}$ ) یا به رویی مستقل از مختصات در گیج‌های مختلف بیان خواهد شد (مانند  $\mathcal{M}^A$  و  $\mathcal{M}^B$ ). مثلاً برای تبدیل قوانین کمیت و تابع تعريف (یا استخراج) کنیم:

کردن این موضوع، فرض کنید گچ  $\psi_p^A$  داده شده باشد به طوری که بردارهای مستقل از مختصات  $v_{\square\square}$  و  $v_{\square\square\square}$  در  $T_p M$  با بردارهای ضریب  $v_{\square\square} = \psi_p^A(v_{\square\square})$  و  $v_{\square\square\square} = \psi_p^A(v_{\square\square\square})$  نگاشت خطی  $\mathcal{M}$  در این گچ توسط ماتریس نمایش داده می‌شود:

$$\mathcal{M}^A := \psi_p^A \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^A)^{-1} \in \mathbb{R}^{d \times d} \quad (18)$$

که تعریف آن توسط نمودار جابجایی زیر بصری سازی شده است:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\psi_p^A} & T_p M & \xrightarrow{\mathcal{M}} & T_p M & \xrightarrow{\psi_p^A} & \mathbb{R}^d \\ & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\mathcal{M}^A} & & & & & \uparrow \end{array} \quad (19)$$

ماتریس با نگاشت مستقل از مختصات سازگار است زیرا هر دو یکدیگر را نتیجه می‌دهند:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^A v_{\square\square}^A &= [\psi_p^A \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^A)^{-1}] \circ [\psi_p^A(v_{\square\square})] \\ &= \psi_p^A(\mathcal{M} v_{\square\square}) \\ &= \psi_p^A(v_{\square\square\square}) \\ &= v_{\square\square\square}^A \end{aligned} \quad (20)$$

البته می‌توان  $\mathcal{M}$  را نسبت به هر انتخاب دیگری از گچ  $\psi_p^B$  نیز نمایش داد. ما از معادله (۹) می‌دانیم که بردارهای ضریب در گچ‌های مختلف با  $\mathcal{M}^A$  و  $\mathcal{M}^B$  مرتبه هستند. به طور مشابه،  $v^B = g_p^{BA} v^A$  توسط تبدیل گچ مرتب است:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^B &= \psi_p^B \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^B)^{-1} \\ &= \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1} \circ \mathcal{M}^A \circ \psi_p^A \circ (\psi_p^B)^{-1} \\ &= g_p^{BA} \mathcal{M}^A (g_p^{BA})^{-1}, \end{aligned} \quad (21)$$

که در اینجا هم بر دامنه و هم بر رامنه مشترک عمل می‌کند.<sup>۹</sup> این قانون تبدیل دوباره سازگار است زیرا تبدیل‌های متقابل یکدیگر را خنثی می‌کنند:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^B v_{\square\square}^B &= [g_p^{BA} \mathcal{M}^A (g_p^{BA})^{-1}] [g_p^{BA} v_{\square\square}^A] \\ &= g_p^{BA} \mathcal{M}^A v_{\square\square}^A \\ &= g_p^{BA} v_{\square\square\square}^A \\ &= v_{\square\square\square}^B \end{aligned} \quad (22)$$

تبدیل‌های گچ استخراج شده بنابراین تأیید می‌کنند که تمام محاسبات مختصات‌بندی شده در نهایت مستقل از مختصات هستند. روابط بین نگاشت مستقل از مختصات و مختصات‌بندی‌های آن توسط نمودار جابجایی زیر خلاصه می‌شود:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\psi_p^A} & T_p M & \xrightarrow{\mathcal{M}} & T_p M & \xrightarrow{\psi_p^B} & \mathbb{R}^d \\ & \downarrow g_p^{BA} & & & & \downarrow g_p^{BA} & \\ & \xleftarrow{\psi_p^B} & & & \xrightarrow{\psi_p^B} & & \mathbb{R}^d \\ & & \mathcal{M}^A & & & & \\ & & \searrow & & \swarrow & & \\ & & & & & & \end{array} \quad (23)$$

که در شکل ۹ به صورت گرافیکی تفسیر شده است.

در عمل نمی‌توان نگاشت خطی مستقل از مختصات  $\mathcal{M}$  را به صورت عددی بدون اشاره به یک انتخاب مختصات‌بندی پیاده‌سازی کرد. با این حال، وجود آن تنها در صورتی (و تنها در صورتی) دلالت دارد که مختصات‌بندی‌های آن همانطور که در معادله (۲۱) مشخص شده است به یکدیگر مربوط باشند، که تضمین می‌کند رفتار تبدیل صحیح ضرایب بردار ورودی و خروجی در معادله (۹) حفظ می‌شود.

<sup>۹</sup> تبدیل ضرایب ماتریس از طریق ضرب چپ و راست با  $(g^{BA})^{-1}$  و  $g^{BA}$  به ترتیب، نگاشت خطی را به عنوان یک تانسور از نوع  $(1, 1)$  شناسایی می‌کند.

### ۳.۱.۳ گروه‌های ساختار، $G$ -ساختارها و $G$ -اطلس‌ها

ما بعداً از شبکه‌های عصی می‌خواهیم که به روشنی مستقل از مختصات عمل کنند، یعنی ما تقاضا می‌کنیم که استنتاج آن‌ها مستقل از انتخاب‌های دلخواه چارچوب‌های مرجع باشد. این سؤال را مطرح می‌کند که انتخاب چارچوب‌های مرجع در یک منيفولد تا چه حد دلخواه است. در بخش‌های ۱.۱.۳ و ۱.۱.۴ قبلي ما هر انتخاب ممکن از گیج یا چارچوب مرجع را مجاز می‌دانستیم، که بنابراین توسط تبدیل‌های گیج با مقدار کلی  $GL(d)$  مرتبط بودند. با این حال، در بسیاری از کاربردها، منيفولد دارای ساختار اضافی است که امکان تشخیص یک زیرمجموعه ارجح از چارچوب‌های مرجع یا گیج‌ها را می‌دهد که توابع گذار آن‌ها مقادیری در یک گروه ساختار کاهش یافته  $G \leq GL(d)$  می‌گیرند. چنین ساختارهای هندسی  $\square$  یا بلکه خود زیرمجموعه‌های چارچوب‌های مرجع ترجیحی، که اطلاعات معادل را گذاری می‌کنند  $\square$  به عنوان  $G$ -ساختارها نامیده می‌شوند.

$G$ -ساختارها با در نظر گرفتن چند مثال خاص بهتر درک می‌شوند. لیست زیر چنین مثال‌هایی را ارائه می‌دهد که براساس گروه ساختار  $(d) \leq GL$  طبقه‌بندی شده‌اند:

$d$ : ساختار متریک یک منيفولد ریمانی را در نظر بگیرید، که امکان اندازه‌گیری فواصل و زوایا را می‌دهد، و بنابراین تشخیص چارچوب‌های متعماد را، یعنی آن چارچوب‌هایی که شرط  $i,j = 1,\dots,d$  برآورده می‌کنند. به طور متأثر، یک متریک ریمانی امکان صحبت در مورد گیج‌های ایزو‌متریک  $\psi^A_p$  را با متریک  $T_p M$  شناسایی می‌کنند، یعنی شرط  $\langle \psi^A(v), \psi^A(w) \rangle_{T_p M} = \langle v, w \rangle$  را برای هر  $v, w \in T_p M$  برآورده می‌کنند. از آنجا که چارچوب‌های متعماد و گیج‌های ایزو‌متریک تا چرخش‌ها و بازتاب‌ها تعریف می‌شوند، هر تبدیل گیجی بین آن‌ها مقادیری در گروه متعماد  $d$  خواهد گرفت، که آن زیر گروه از  $GL(d)$  است که زوایا و فواصل را حفظ می‌کند.

$GL^+$ : به طور مشابه، یک جهت‌گیری منيفولد چارچوب‌های راست گرد را از گیج‌های معکوس کنند. جهت‌گیری متمایز می‌کند. تبدیل‌های گیج بین چارچوب‌های یک دست پری داده شده مقادیری در  $GL^+(d)$  می‌گیرند، یعنی آن زیر گروه از  $GL(d)$  که جهت‌گیری‌ها را حفظ می‌کند.

$SO(d)$ : با هم، یک متریک و جهت‌گیری داده شده، چارچوب‌های متعماد با جهت‌گیری خاصی را مشخص می‌کنند. تبدیل‌های گیج بین چنین چارچوب‌هایی تضمین شده‌اند که در زیر گروه  $SO(d)$  از  $GL(d)$  قرار گیرند.

$e\{e\}$ : یک میدان چارچوب هموار سراسری یک  $e\{e\}$ -ساختار را در  $M$  تعریف می‌کند. در این حالت تنها یک چارچوب متمایز در هر موقعیت وجود دارد، به طوری که تبدیل‌های گیج در گروه بدیهی  $GL(d)$  از  $\{e\}$  قرار می‌گیرند.

$GL(d)$ : اگر هیچ ساختار اضافی تحمیل نشود، هر چارچوب مرجع فضاهای مماس به همان اندازه معتبر است. تبدیل‌های گیج در این حالت نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر عمومی در  $GL(d)$  هستند و  $G$ -ساختار مربوطه فقط بندل چارچوب  $FM$  است.

موضوع مشترک در این مثال‌های انگیزشی این است که همه آن‌ها با موارد زیر تعریف می‌شوند:

۱. یک زیرمجموعه (که به صورت فضایی هموار تغییر می‌کند) از چارچوب‌های مرجع متمایز،

۲. یک زیرمجموعه مربوطه از گیج‌های ترجیحی و

۳. یک زیر گروه  $(d) \leq GL$  از تبدیل‌های گیج که مفهوم متمایز چارچوب‌ها و گیج‌ها را حفظ می‌کند.

چنین زیرمجموعه‌هایی از چارچوب‌های مرجع که به صورت هموار تغییر می‌کنند به عنوان  $G$ -ساختارها  $GM$  بر روی  $M$  نامیده می‌شوند و گروه  $G$  به عنوان گروه ساختار (کاهش یافته) نامیده می‌شود  $\square$ . برای تعریف دقیق تر به بخش ۳.۶ مراجعه کنید.<sup>۱۰</sup> فآن‌یند مشخص کردن یک  $G$ -ساختار به عنوان کاهش گروه ساختار از  $GL(d)$  به  $G$  شناخته می‌شود. یک اطلس  $\mathcal{A}^G = \{(U^X, \psi^X)\}_{X \in \mathfrak{X}}$  به عنوان  $G$ -اطلس نامیده می‌شود اگر تمام توابع گذار آن:

$$g^{BA} : U^A \cap U^B \rightarrow G, \quad p \mapsto g_p^{BA} := \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1} \quad (24)$$

در یک گروه ساختار کاهش یافته  $G \leq GL(d)$  قرار گیرند (مقایسه کنید با معادله (۴)). رابطه بین چارچوب‌های مرجع و گیج‌ها در معادله (۴) دلالت دارد بر اینکه هر  $G$ -اطلس یک  $G$ -ساختار مربوطه را گذاری می‌کند.

انتخاب‌های متعددی از  $G$ -ساختارها ممکن است برای یک گروه ساختار  $G$  داده شده وجود داشته باشند. برای ارتباط با مثال‌های بالا: متریک‌های ریمانی مختلف، زیرمجموعه‌های متفاوتی از چارچوب‌های مرجع را به عنوان متعماد مشخص می‌کنند، یعنی آن‌ها با ساختارهای  $d$  مختلف  $OM$  مطابقت دارند. بنابراین انتخاب یک متریک معادل انتخاب یک ساختار  $d$  است. به طور مشابه، انتخاب‌های مختلف جهت‌گیری یک منيفولد قابل جهت‌گیری، مجموعه متفاوتی از چارچوب‌ها را به عنوان راست گرد مشخص می‌کنند. بنابراین دو انتخاب ممکن جهت‌گیری با دو انتخاب ممکن از ساختارهای  $(GL^+M) GL^+$  مطابقت دارند. ساختارهای  $SOM$   $SO(d)$  ممکن است در انتخاب جهت‌گیری و متریک هر دو متفاوت باشند. مثال دیگر ساختار  $e\{e\}M$  است. آن‌ها اجازه تبدیل‌های گیج (غیربدیهی) را نمی‌دهند و بنابراین با انتخاب میدان‌های چارچوب هموار سراسری در  $M$  مطابقت دارند. جدول ۱ مثال‌های بیشتری از گروه‌های ساختار  $G$  و  $G$ -ساختارهای مربوطه را ارائه می‌دهد.

<sup>۱۰</sup> به طور رسمی،  $GM$  به عنوان یک زیربندل اصلی  $G$  از بندل چارچوب  $FM$  تعریف می‌شود، که یک بندل اصلی  $(d) GL$  است.

structure group $G \leq \mathrm{GL}(d)$	$G$ -structure $GM$	equivalent structure on $M$
$\mathrm{GL}^+(d)$	positively oriented frames	orientation of $M$
$\mathrm{SL}(d)$	unit volume frames	volume form
$\mathrm{CO}(d)$	conformal frames	—
$\mathrm{Sp}(d)$	symplectic frames	—
$\mathrm{O}(d)$	orthonormal frames	Riemannian metric
$\mathrm{O}(d-n, n)$	pseudo-orthonormal frames	pseudo-Riemannian metric
$\mathrm{SO}(d)$	positively oriented orthonormal frames	Riemannian metric + orientation
$\{e\}$	parallelization (global frame field)	—

جدول ۱: مثال‌هایی از  $G$ -ساختارها  $GM$  بر روی  $M$  و گروه‌های ساختار کاهش‌یافته مربوطه  $(d) \leq \mathrm{GL}(d)$ . یک  $G$ -ساختار به عنوان یک زیرمجموعه هموار متغیر از چارچوب‌های مرچ (یک زیرتبدیل اصلی  $G$  از بندل چارچوب  $(FM)$ ) تعریف می‌شود، که در آن چارچوب‌های هر فضای مماس به صورت متقابل توسط تبدیل‌های گیج با مقادیر  $G$  مرتبط هستند. در حالی که این تعریف نسبتاً انتزاعی است، امکان مشاهده بسیاری از ساختارهای هندسی در  $M$  را به روشنی یکپارچه فراهم می‌کند. به عنوان مثال، یک متریک ریمانی در  $M$  امکان تشخیص چارچوب‌های معتمد را می‌دهد. بر عکس، مشخص کردن معتمد بودن به طور منحصر به فرد یک متریک را نتیجه می‌دهد. بنابراین یک متریک ریمانی و یک ساختار معتمد با یکدیگر معادل هستند. به طور مشابه، یک تناظر یکی به یک بین فرم‌های حجم و چارچوب‌های واحد حجم وجود دارد. توجه داشته باشید که انتخاب یک گروه ساختار  $G$  به طور منحصر به فرد یک  $G$ -ساختار را مشخص نمی‌کند. به عنوان مثال، متریک‌های ریمانی مختلف می‌توانند به عنوان ساختار  $d$ ، فرم‌های حجم مختلف به عنوان ساختار  $\{e\}$  انتخاب شوند. CNN‌های مستقل از مختصات برای رعایت یک  $G$ -ساختار داده شده طراحی شده‌اند □ اینکه کدام ساختار خاص است به وظیفه یادگیری بستگی دارد.

کاهش گروه ساختار به  $G$ ، یعنی وجود یک  $G$ -ساختار، ممکن است توسط توپولوژی منيفولد مسدود شود. این دلالت دارد بر اینکه یک "گروه ساختار کاهش‌نایپذیر" وجود دارد که فراتر از آن ابهام چارچوب‌های مرچ را نمی‌توان بدون نقض فرض همواری (یا حتی پیوستگی)  $G$ -ساختار برطرف کرد. به عنوان مثال، نوار موبیوس در شکل ۲۰ غیرقابل جهت‌گیری است، این بدان معنی است که یک تعریف هموار و سراسری سازگار از دست پری چارچوب و در نتیجه ساختار  $\{e\}$  (میدان چارچوب هموار سراسری) را نمی‌پذیرد. همانطور که در شکل ۲۰ بصری‌سازی شده است، یک  $G$ -اطلس از گیج‌ها که نوار موبیوس را پوشش می‌دهد، به طور ناگزیر نیازمند یک بازتاب در یکی از نگاشت‌های گذار خواهد بود، که به معنای یک گروه ساختار کاهش‌نایپذیر CNN‌های مستقل از مختصات بر روی نوار موبیوس بنابراین حداقل یا بد تناوب پذیر بازتابی باشند. به طور مشابه، گروه ساختار کره  $G = \mathcal{R}$  را نمی‌توان فراتر از CNN‌های کروی هموار بنابراین لزو مانند پذیر بازتابی چرخش هستند. توجه داشته باشید که هر منيفولد (دیفرانسیل پذیر) با برخی  $G$ -ساختار همراه است. به عنوان مثال، یک منيفولد دیفرانسیل پذیر خام دارای یک  $G$ -ساختار  $(GL(d)$  (حاوی هر چارچوب ممکن) است، یک منيفولد ریمانی یک ساختار  $d$  دارد و  $\mathbb{R}^d$  به طور کانونی یا یک ساختار  $\{e\}$  مجهز شده است که در شکل ۲۰ بصری‌سازی شده است. ما بنابراین بدون از دست دادن کلیت، اصطلاح "استقلال از مختصات" را به استقلال از مختصات  $GM$  تصحیح خواهیم کرد، یعنی استقلال نسبت به انتخاب چارچوب‌های مرچ در  $G$ -ساختار داده شده در  $M$ . در طول این کار ما فرض خواهیم کرد که گیج‌ها بخشی از یک  $G$ -اطلس هستند:

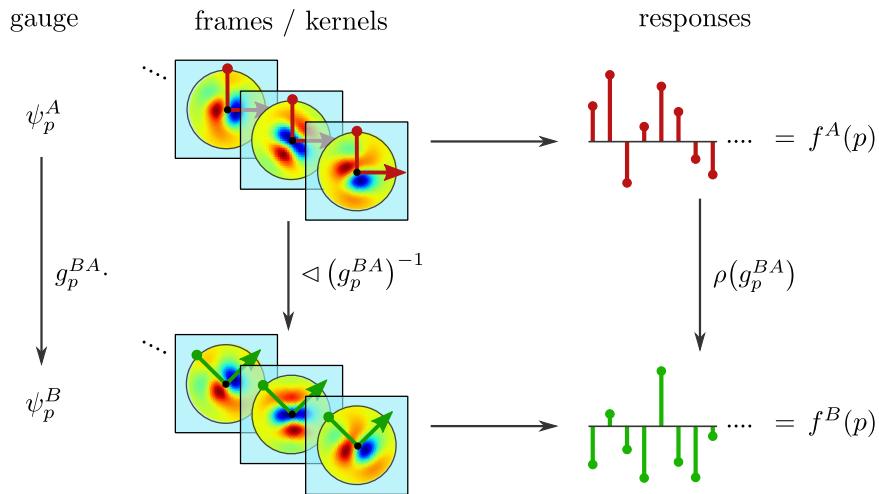
$$\mathcal{A}^G = \{(U^X, \psi^X)\}_{X \in \mathfrak{X}} \quad \text{و} \quad g_p^{BA} \in G \quad \text{و} \quad \psi_p^A, \psi_p^B \in \mathcal{A}^G, \quad p \in U^A \cap U^B, \quad (25)$$

مطابق با  $G$ -ساختار داده شده. هر کمیت یاتابع می‌تواند نسبت به هر گیجی از این اطلس بیان شود<sup>۱۱</sup>، و مختصات‌بندی‌ها در گیج‌ها مختلف به طور منحصر به فرد توسط یک تبدیل گیج با مقادیر  $G$  مرتبط هستند. با تضمین استقلال از مختصات همه ساختارها، آن‌ها همشه با همتایان مستقل از مختصات خود مطابقت خواهند داشت، که مانظیره سراسری را بر حسب آن‌ها در بخش‌های ۶، ۷ و ۸ فرمول‌بندی خواهیم کرد.

### ۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی مستقل از مختصات

فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات، فضاهای میدان‌های بردار ویژگی هستند. مشابه مورد ضرایب بردارهای مماس، ضرایب عددی بردارهای ویژگی ملزم به تبدیل سازگار تحت تبدیل‌های گیج هستند. قانون تبدیل خاص (نمایش گروهی) یک میدان ویژگی در اینجا نوع میدان آن را مشخص می‌کند □ مثال‌های معمول شامل میدان‌های اسکالار، میدان‌های بردار مماس، میدان‌های تانسور عمومی، میدان‌های ویژگی منظم یا میدان‌های  $\mathbb{R}^m$  هستند. بخش ۱.۲.۳ چنین میدان‌های ویژگی و قوانین تبدیل آن‌ها را معرفی می‌کند. در بخش ۲.۲.۳، ما به طور منحصر فضاهای ویژگی مستقل از مختصات را تعریف می‌کنیم. مشابه تعریف فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی معمولی به عنوان ابانتی از چندین نقشه ویژگی، فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات شامل چندین میدان ویژگی مستقل هستند.

<sup>۱۱</sup> این یک گزاره غیربدیهی است زیرا هر کمیت را نمی‌توان نسبت به چارچوب‌های مرچ دلخواه مرتبط با  $(d) \leq \mathrm{GL}(d)$  بیان کرد. به عنوان مثال، میدان‌های ویژگی که در بخش ۲.۳ معرفی شده‌اند، تنها تبدیل‌های گیج با مقادیر  $G$  را می‌پذیرند و بنابراین تنها نسبت به چارچوب‌های ترجیحی در  $GM$  تعریف می‌شوند. به عنوان یک مثال شهودی، CNN‌های سنتی (غیرتناوب پذیر) در  $\mathbb{R}^d$  را در نظر بگیرید که نسبت به ساختار  $\{e\}$  کانونی استخراج می‌شوند و اطلاعاتی در مورد پاسخ‌های کرنل نسبت به سایر چارچوب‌های مرچ را حمل نمی‌کنند.



شکل ۱۰: پاسخ‌های عددی  $f^A(p) \in \mathbb{R}^c$  و  $f^B(p) \in \mathbb{R}^c$  که بر اساس چارچوب‌های مختلف جهت‌گیری شده‌اند، به طور کلی منطقی نیستند. به منظور نمایش ضرایب عددی یکسان بردار ویژگی مستقل از مختصات نسبت به گیج انتخاب شده، آن‌ها ملزم به ارتباط توسعه تبدیل‌های گیج  $(g_p^{BA})\rho$  هستند اگر گیج‌ها توسعه  $g_p^{BA}$  مرتبط باشند. همانطور که در بخش ۴ استخراج شده است، این الزام یک قید تابع پذیری گیج را بر کرنل‌های کانولوشن تحمیل می‌کند.

### ۱.۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی منفرد

میدان‌های ویژگی کانولوشنی یک بردار ویژگی، که اطلاعات استیباط شده از یک همسایگی محلی از سیگنال ورودی را کدگذاری می‌کند، به هر نقطه از منیفولد تخصیص می‌دهند. ایناشت فضایی اطلاعات توسعه یک کرنل کانولوشنی انجام می‌شود که میدان‌های ویژگی را در محیط خود نسبت به چارچوب مرجع محلی خود اندازه گیری می‌کند. بنابراین ما گیج  $A$  را فرض می‌کنیم که ترازهای کرنل را در یک همسایگی  $U^A$  مشخص می‌کند. نسبت به این گیج، کرنل یک میدان محلی هموار از پاسخ‌ها (مشاهدات) تولید خواهد کرد:

$$f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad (26)$$

که توسعه یک بردار ویژگی عددی  $C$ -بعدی  $f^A(p)$  در هر موقعیت  $p \in U^A$  داده می‌شود. فرض کنید یک میدان پاسخ دوم  $f^B : U^B \rightarrow \mathbb{R}^c$  در  $U^B$  استیباط شده است. از آنجا که پاسخ یک کرنل به طور کلی به تراز آن بستگی دارد، انتظار می‌رود که  $f^A$  و  $f^B$  در همپوشانی  $U^A \cap U^B$  مطابقت نداشته باشند. بدون محدودیت‌های بیشتر، پاسخ‌های یک کرنل کانولوشن به طور دلخواه وابسته به گیج خواهند بود.

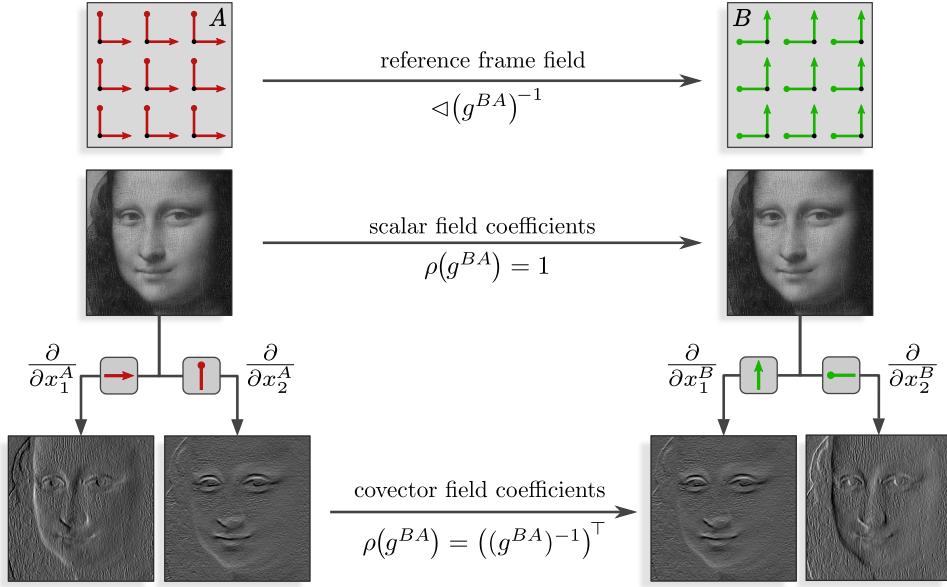
اصل کوواریانس، که توسعه آلبرت اینشتین پیشنهاد شد [۲۷]، بیان می‌کند که:

«قوانين جهان‌شمول طبیعت باید توسعه معادلاتی بیان شوند که برای همه سیستم‌های مختصات صادق باشند، یعنی نسبت به هر جایگزینی کوواریانت باشند.»

ما معتقدیم که اصل مشابهی باید در یادگیری عمیق هندسی نیز صادق باشد، یعنی استنتاج باید مستقل از هر دلخواهی در انتخاب چارچوب‌های مرجع باشد. با توجه به اینکه این دلخواهی در مختصات‌بندی‌ها دقیقاً توسعه  $G$ -ساختار داده شده  $GM$  پوشش داده می‌شود، این امر به ویژه ایجاب می‌کند که ویژگی‌ها باید اشیاء هندسی مستقل از مختصات  $GM$  باشند.<sup>۱۷</sup> بنابراین ما کرنل‌های کانولوشن را طوری طراحی می‌کنیم که پاسخ‌های آن‌ها  $f^A$  و  $f^B$  میدان‌هایی از ضرایب بردار ویژگی را کدگذاری کنند که یک میدان بردار ویژگی آزاد از مختصات  $\mathcal{F}$  را به صورت محلی در گیج‌های مختلف نمایش می‌دهند. مجموعه‌ای از چنین میدان‌های ضریب عددی  $X$ ، که نسبت به  $G$ -اطلس گیج‌های  $\psi^X$  در همسایگی‌های  $U^X$  که  $M$  را پوشش می‌دهند بیان شده‌اند، معادل میدان ویژگی سراسری و آزاد از مختصات  $\mathcal{F}$  در  $M$  است.

برای اینکه این میدان ویژگی آزاد از مختصات به خوبی تعریف شود، یعنی مستقل از مختصات  $GM$  باشد، میدان‌های ضریب محلی (یا پاسخ‌های کرنل) ملزم به دوخته شدن سازگار از طریق نگاشت‌های گذار با مقدار  $G$  هستند. بنابراین آن‌ها باید به روشهای اصولی تحت تبدیل‌های گیج تبدیل شوند. از آنجا که ما با فضاهای بردار ویژگی سر و کار داریم، این تبدیل‌ها معمولاً خطی در نظر گرفته می‌شوند، یعنی آن‌ها توسعه نمایش‌های گروهی خطی مدل

<sup>۱۷</sup> در این نکته ما از کوواریانس عمومی اینشتین منحرف می‌شویم، که همیشه تبدیل‌های گیج با مقدار  $(d)$  GL( $d$ ) را در نظر می‌گیرد (متناظر با کوواریانس دیفرموفیسم). تنظیم او در فرمول‌بندی ما برای  $G = GL(d)$  شامل شده است، با این حال، ما گروه ساختار فرضی را انعطاف‌پذیر نگه می‌داریم زیرا اکثر کاربردها گروه ساختار کاهش یافته را فرض خواهند کرد.



شکل ۱۱: مثال‌هایی از میدان‌های ضرب ویژگی در  $\mathbb{R}^M$  از پردازش کلاسیک تصویر. بالا: برای سادگی ما یک میدان چارچوب «موازی» فرض می‌کیم و همان تبدیل گیج، چرخش به میزان  $\pi/2$  را در هر نقطه  $p \in M$  در نظر می‌گیریم. وسط: مقادیر شدت یک تصویر خاکستری مستقل از انتخاب چارچوب‌های مرجع هستند. بنابراین آن‌ها توسط میدان‌های اسکالر مدل می‌شوند که با نمایش بدیهی  $G$   $\forall g \in G$  مشخص می‌شوند. پایین: دو کanal ضرب یک تصویر گرادیان از یک تصویر اسکالر با گرفتن منتهی‌ها در امداد محورهای چارچوب محسوسه می‌شوند. بنابراین آن‌ها وابسته به گیج هستند. تصاویر گرادیان نسبت به گیج‌های مختلف توسط نمایش گروهی  $(g^{-1})^\top \rho(g)$  مرتب می‌شوند و بنابراین به عنوان میدان‌های کوپردار (میدان‌های تانسور از نوع  $(1, 0)$  یا  $1$ -فرم‌ها) شناسایی می‌شوند. برای چرخش نمایش داده شده به میزان  $\pi/2$  این منجر به کانال اول جدید  $(\partial/\partial x_1^B)$  (معادل کانال دوم قدیمی  $(\partial/\partial x_1^A)$ ) و کانال دوم جدید  $(\partial/\partial x_2^B)$  (معادل منفی کانال اول قدیمی  $(\partial/\partial x_2^A)$  می‌شود. نسبت به چارچوب‌های مرجع مربوطه، هر دو میدان ضرب یکسان میدان گرادیان (آزاد از مختصات) را کدگذاری می‌کنند. بنابراین توصیف به طور خودکار مستقل از مختصات است.

می‌شوند:

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(c) \quad (27)$$

از گروه ساختار  $G \leq \text{GL}(c)$ , که بر  $\mathbb{R}^c$  عمل می‌کند و شرط  $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h) \forall g, h \in G$  را برآورده می‌کند.<sup>۱۳</sup> مشابه تبدیل ضرایب بردار مماس در معادله (۹)، ضرایب بردار ویژگی سپس تعریف می‌شوند که تحت یک تبدیل گیج با مقدار  $g_p^{BA} = \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}$  مانند تبدیل

شوند:

$$f^B(p) := \rho(g_p^{BA}) f^A(p), \quad (28)$$

که در آن  $p \in U^A \cap U^B$ ; برای بصری‌سازی به شکل ۱۰ مراجعه کنید. با ساخته شدن برای تبدیل همگام، فضاهای چارچوب‌های مرجع، ضرایب بردار مماس و ضرایب بردار ویژگی گفته می‌شود که با یکدیگر  $G$ -مرتبه هستند. توجه داشته باشید که ساخت از طریق یک  $G$ -نمایش  $\rho$  به طور کلی تبدیل‌های گیج با مقدار  $\text{GL}(d)$  را توصیف نمی‌کند، یعنی ویژگی‌های کاملاً مستقل از مختصات. بنابراین بردارهای ویژگی استخراج شده تنها بخوبی تعریف شده‌ای نسبت به چارچوب‌ها در  $G$ -ساختار در نظر گرفته شده  $GM$  خواهد داشت، که توسط اصطلاح «استقلال از مختصات  $GM$ » پوشش داده می‌شود.

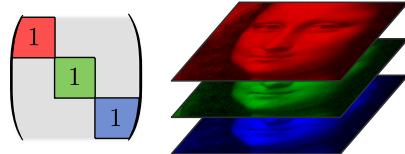
انتخاب‌های مختلف نمایش‌ها  $\rho$  انواع مختلفی از میدان‌های ویژگی را تولید می‌کنند همانطور که در شکل ۱۱ نمونه‌سازی شده است. به عنوان مثال، نمایش بدیهی،  $\rho(g) = \forall g \in G$ , رفتار تبدیل میدان‌های اسکالر  $s^A(p) \mapsto s^B(p) = 1 \cdot s^A(p)$  را توصیف می‌کند، که ضرایب عددی آن‌ها تحت تبدیل‌های گیج ناوردا هستند. مثال‌هایی از میدان‌های اسکالر شامل تصاویر خاکستری، میدان‌های دما، میدان‌های فشار یا توزیع‌های احتمال در  $M$  هستند. ضرایب میدان‌های بردار مماس مانند  $v^A(p) \mapsto v^B(p) = g_p^{BA} v^A(p)$  تبدیل می‌شوند و بنابراین با نمایش گروهی  $\rho(g) = g$  مطابقت دارند. مثال‌هایی برای میدان‌های بردار شامل جریان نوری یا میدان‌های سرعت باد هستند. میدان‌های تانسور عمومی‌تر از نوع  $(r, s)$  توسط نمایش‌های حاصل ضرب تانسوری  $\rho(g) = \otimes^s (g^{-1})^\top \otimes^r g$  توصیف می‌شوند. آن‌ها به عنوان مثال تصاویر تانسور انتشار، تانسورهای میدان

<sup>۱۳</sup> این شرط تضمین می‌کند که نمایش‌ها همواره فرم‌های گروهی هستند، یعنی نگاشت‌هایی که ساختار گروهی  $G$  را رعایت می‌کنند. بنابراین عمل‌های گروه ساختار بر فضای مماس و فضاهای ضرب بردار ویژگی سازگار هستند.

برای کامل بودن می خواهیم اشاره کنیم که میدان های بردار ویژگی آزاد از مختصات به طور رسمی به عنوان برش های هموار ( $\mathcal{A}$ )  $f \in \Gamma$  از یک  $\mathcal{A}$  تعریف می شوند که با  $G$ -ساختار  $GM$  مرتبط است و فضاهای ضریب بردار ویژگی  $\mathbb{R}^c$  را به عنوان فیبرهای معمول دارد. بردارهای ضریب  $f^A(p)$  و  $f^B(p)$  در  $\mathbb{R}^c$  تمهیمات محلی از یک بردار ویژگی آزاد از مختصات  $f(p) \in \mathcal{A}_p \cong \mathbb{R}^c$  هستند، و مشابه ضرایب  $v^A = \psi_p^A(v)$  و  $v^B = \psi_p^B(v)$  از یک بردار مماس  $v \in T_p M$  تعریف می شوند. توجه داشته باشید که، در حالی که هم ریخت هستند، فضاهای ویژگی  $\mathcal{A}_p \cong \mathcal{A}_q$  در نقاط مختلف  $p \neq q$  از  $M$  ایکدیگر متمایز هستند، به طوری که عناصر آنها نمی توانند با هم جمع شوند. انتقال دهنده های موازی، که در بخش های ۳.۳ و ۵.۶ مورد بحث قرار گرفته اند، هم ریختی هایی بین فضاهای بردار ویژگی مختلف فراهم می کنند، که امکان جمع ویژگی ها را (پس از انتقال آنها به ممان فضای برداری) فراهم می کنند. از آنجا که این تعاریف کاملاً فنی هستند، ما جزئیات آنها را فعلاً رد می کیم و خواننده علاقه مند را به بخش ۳.۶ ارجاع می دهیم.

## ۲.۲.۳ میدان‌های ویژگی انباسته و فضاهای ویژگی مستقل از مختصات

فضایی‌های ویزگی شبکه‌ای کانولوشنی معمولی شامل چندین نشانه ویزگی هستند. به طور مشابه، ما فضایی‌های ویزگی شبکه‌ای کانولوشنی مستقل از مختصات را تعریف می‌کنیم که شامل چندین میدان ویزگی  $\mathbf{z}_i$  از انواع بالقوه متفاوت  $\rho_i$  و ابعاد  $C_i$  باشند. بنابراین یک میدان کامل از فضایی‌های یک شبکه کانولوشنی مستقل از مختصات به عنوان مجموع مستقیم تعریف می‌شود<sup>۱۵</sup>



شکل ۱۲: سه کانال رنگ یک تصویر  $\mathbb{R}^3$  به عنوان میدان‌های اسکالر شناسایی می‌شوند، بنابراین فضای ویژگی کامل طبق  $(1) \oplus (1) \oplus (1) = \rho(g)$  تبدیل می‌شود.

$$f = \bigoplus_i f_i \quad (29)$$

میدان های ضریب آنها، به عنوان مثال  $A_i^f$ ، علاوه بر این تضمین شده اند که به طور مستقل از یکدیگر تحت تبدیل های گیج همانطور که توسط نوع آنها  $G \rightarrow \text{GL}(c_i)$  :  $\rho_i$  مشخص شده است، تبدیل شوند. یک نمایش عددی محلی  $f_i^A = \bigoplus_i f_i^A$  از میدان ویژگی کامل در معادله (۲۹) بنابراین طبق مجموع مستقیم نمایش های منفرد تبدیل می شود، یعنی:

$$\rho = \bigoplus_i \rho_i . \quad (\P^+)$$

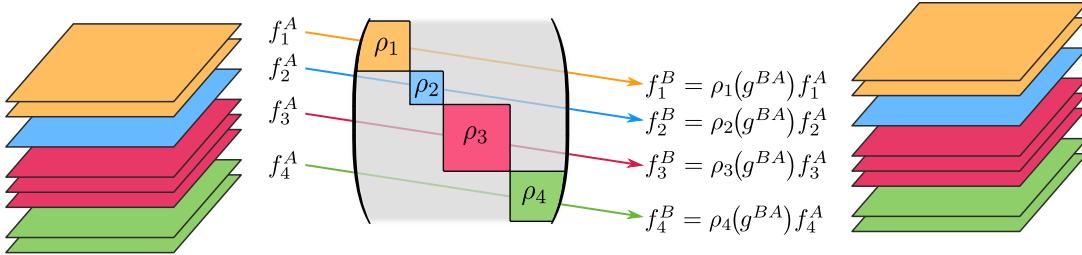
تبديل مستقل میدان‌های منفرد تحت  $\mu$ ، که در شکل ۱۳ بصری‌سازی شده است، از ساخت روشن است:

$$\rho(g)f^A = \left(\bigoplus_i \rho_i(g)\right) \left(\bigoplus_i f_i^A\right) = \bigoplus_i (\rho_i(g) f_i^A) \quad (31)$$

به عنوان یک مثال عملی از فضای ویژگی مستقل از مخصوصات مشکل از چندین میدان، تصویر ۱۲ را همانطور که در شکل ۱۲ نشان داده است، در نظر بگیرید. مانند تصویر خاکستری در شکل ۱۱، کانال‌های رنگ منفرد مقادیر شدت را کدگذاری می‌کنند که تحت تبدیل‌های گیج ناوردا هستند. بنابراین تصویر ۱۳ کامل باشد با سه میدان اسکالر شناسایی شود که هر کدام به طور مستقل تحت نمایش بدیهی (تبدیل) می‌شوند. همه میدان‌های ویژگی منفرد بیازی نیست که از همان نوع باشند. به عنوان مثال، در یک کاربرد پیش‌بینی آب و هوای سیگنال ورودی ممکن است شامل میدان‌های اسکالار کدگذاری کننده ویژگی‌هایی مانند دما یا فشار و میدان‌های برداری مانند سرعت‌های باد باشد. توصیف به عنوان میدان‌های پردازش هندسی صحیح چنین داده‌هایی را تضمین می‌کند. در حالی که انواع میدان ورودی و خروجی یک شبکه معمولاً توسط وظیفه یادگیری داده می‌شوند، انواع میدان استفاده شده در لایه‌های مخفی توسط کاربر به عنوان یک فرآپارامتر مشابه انتخاب کانال‌ها برای یک شبکه کانولوشنی معمولی انتخاب می‌شوند.

<sup>۱۴</sup> توسط قصبه، هر نمایش یکانی از یک گروه فشرده می تواند از طریق تغیر پایه به مجموع مستقیم تجزیه شود. این دلالت دارد بر اینکه هر عملیات شکله عصی خطی بین نمایش های عمومی می تواند (پس از تغیر پایه) بر حسب عملیات بین در ک شود [؟]. در مقابل، انتخاب خاص نمایش، یعنی تغیر پایه نسبت به موجود در آن، برای هر لایه شکله غیرخطی اهمیت دارد.

<sup>۱۵</sup> مجموع مستقیم  $\oplus$  بردارهای  $(p)$  را می‌توان به عنوان «بیانش» آن‌ها در یک بردار پوسته در نظر گرفت. به طور سازگار با این، مجموع مستقیم نمایش‌های  $\rho$  را می‌توان به عنوان ساخت یک ماتریس قطعی بلوکی حاوی  $p_i$  به عنوان بلوک‌ها در نظر گرفت؛ به اشکال ۱۲ و ۱۳ مراجعه کنید.



شکل ۱۳: یک فضای ویژگی کامل شامل چندین میدان ویژگی منفرد  $\rho_i$  از انواع بالقوه متفاوت  $c_i$  و ابعاد  $p_i$  است. از طریق گیج  $g^{AB}$ ، به صورت محلی توسط میدان‌های ضرب  $f_i^A \rightarrow U^A \rightarrow \mathbb{R}^{c_i}$  نمایش داده می‌شود. میدان‌های ضرب در گیج دیگر  $\psi$  از طریق تبدیل گیج  $f_i^B = \rho_i(g^{BA})f_i^A$  مرتبط هستند. ضرب هر میدان منفرد به طور مستقل تبدیل می‌شوند، بنابراین نمایش مدل سازی کل فضای ویژگی توسط مجموع مستقیم داده می‌شود، در اینجا  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = \rho$ .

### ۳.۳ انتقال موازی بردارهای ویژگی

کرنل‌های شبکه‌های کانولوشنی ویژگی‌ها را از تمام نقاط  $p$  از منيفولد جمع‌آوری می‌کنند. از آنجا که ویژگی‌ها در نقاط مختلف در فضاهای بردار مختلف بیان می‌شوند، باید قبل از پردازش بیشتر، در امتداد یک مسیر  $\gamma$  از  $p$  به  $q$  به صورت موازی منتقل شوند. ما ابتدا انتقال بردارهای مماس را مورد بحث قرار می‌دهیم، که توسط یک نگاشت انتقال موازی رسمی سازی می‌شود:

$$\mathcal{P}_\gamma : T_q M \rightarrow T_p M. \quad (32)$$

این انتقال دهنده اغلب از اتصال کانونی لوی-چویتا منيفولد محاسبه می‌شود، با این حال، ممکن است در برخی کاربردها مربوط به یک اتصال جایگزین (سازگار با  $G$ ) باشد، همانطور که در ادامه و در مرور ادبیات ما در بخش  $\S$  بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد. انتقال دهنده بردارهای ویژگی (مربوط با  $G$ ) از انتقال دهنده بردارهای مماس تعیت می‌کند اگر انتقال سازگار با  $G$  باشد.

#### ۳.۳.۳ انتقال دهنده‌های بردار مماس

از نظر آموزشی معقول است که ابتدا با حالت خاص انتقال دهنده‌های لوی-چویتا در فضاهای اقلیدسی که در شکل ۱۴ به تصویر کشیده شده‌اند، شروع کنیم، قبل از پرداختن به انتقال دهنده‌ها و منيفلهای عمومی‌تر. در این حالت انتقال موازی مستقل از مسیر انتخاب شده  $\gamma$  است و بردار منتقل شده را به معنای معمول در فضاهای اقلیدسی موازی نگه می‌دارد. توجه داشته باشید که انتقال دهنده  $\mathcal{P}_\gamma$  بین فضاهای مماس  $T_p M$  و  $T_q M$  نگاشت می‌کند و بنابراین مستقل از مختصات است. با این حال، می‌توان آن را نسبت به مختصات بیان کرد، سپس به جای بردارهای مماس بر روی بردارهای ضرب عددی عمل می‌کند. شهودی در شکل ۱۴ آورده شده است، جایی که چارچوب‌ها در  $q$  و  $p$  موازی نیستند<sup>۱۶</sup> به طوری که ضرایب  $(1, 0, 0, \sqrt{2})$  در  $q$  و  $(0, 0, \sqrt{2}, 1)$  در  $p$  متفاوت هستند، حتی اگر بردارهای مماس (مستقل از مختصات) مربوطه با یکدیگر موازی باشند. برای دقیق‌تر کردن این موضوع، گیج‌های  $\psi_q^A$  و  $\psi_p^A$  را در همسایگی‌های  $U^{\tilde{A}}$  از  $q$  و  $U^A$  از  $p$  (قرمز) در نظر بگیرید. فرض کنید یک بردار  $v \in T_q M$  با ضرایب  $v = (\psi_q^{\tilde{A}})^{-1}(v^{\tilde{A}}) \in \mathbb{R}^d$  داده شده باشد. ضرایب بردار منتقل شده  $v$  در سپس توسط:  $\mathcal{P}_\gamma(v) = \psi_p^A \circ \mathcal{P}_\gamma \circ (\psi_q^{\tilde{A}})^{-1}(v^{\tilde{A}}) \in \mathbb{R}^d$  می‌شود. نتیجه می‌شود که بیان مختصاتی یک انتقال دهنده نسبت به گیج‌های  $\tilde{A}$  و  $A$  به صورت زیر است:<sup>۱۷</sup>

$$g_\gamma^{A\tilde{A}} := \psi_p^A \circ \mathcal{P}_\gamma \circ (\psi_q^{\tilde{A}})^{-1} \in \text{GL}(d) \quad (33)$$

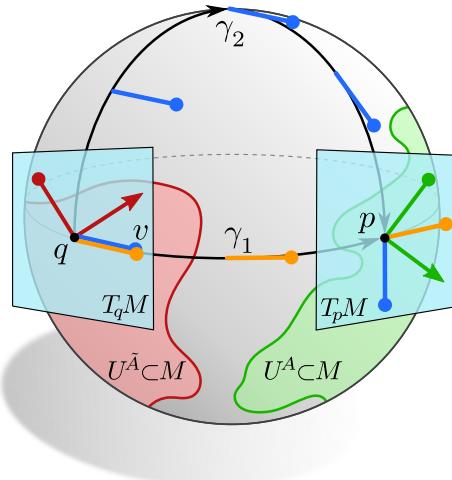
عنصر گروهی  $g_\gamma^{A\tilde{A}}$  انتقال دهنده‌ای غیرموازی چارچوب‌های مرجع در  $q$  و  $p$  را در نظر می‌گیرد. در  $\mathbb{R}^d$ ، معمولاً فرض می‌شود که تمام چارچوب‌ها موازی هستند به طوری که تمام مختصات بندی‌های انتقال دهنده‌های لوی-چویتا بدیهی می‌شوند.<sup>۱۸</sup>

<sup>۱۶</sup> برخلاف منيفلهای عمومی،  $\mathbb{R}^d$  با مفهوم کانونی موازی بودن چارچوب‌های مرجع همراه است.

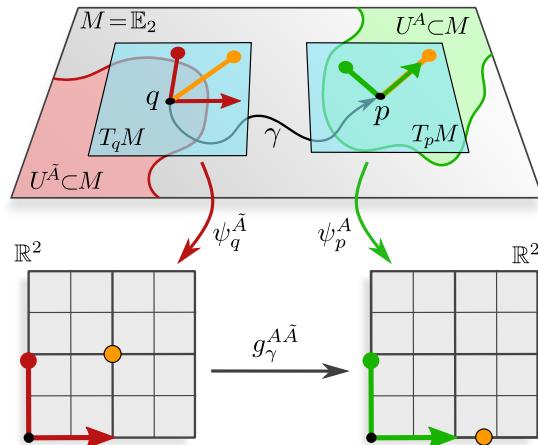
<sup>۱۷</sup> مقدار  $g_\gamma^{A\tilde{A}}$  ممکن است اگر ما اتصال‌های دلخواه (با مقدار  $d(\mathfrak{gl}(d))$ ) و گروه‌های ساختار عمومی  $G \leq \text{GL}(d)$  را فرض کنیم. برای اتصال

لوی-چویتا با مقدار  $d(\mathfrak{gl}(d))$  و چارچوب‌های معتمد، یعنی  $d = d(\mathfrak{gl}(d))$ ، ما  $d(\mathfrak{gl}(d))$  را داریم.

<sup>۱۸</sup> CNN‌های سنتی در  $\mathbb{R}^d$  به طور ضمنی این فرض را از چارچوب‌های موازی (شکل  $\S$ ) و انتقال دهنده‌های بدیهی می‌کنند.



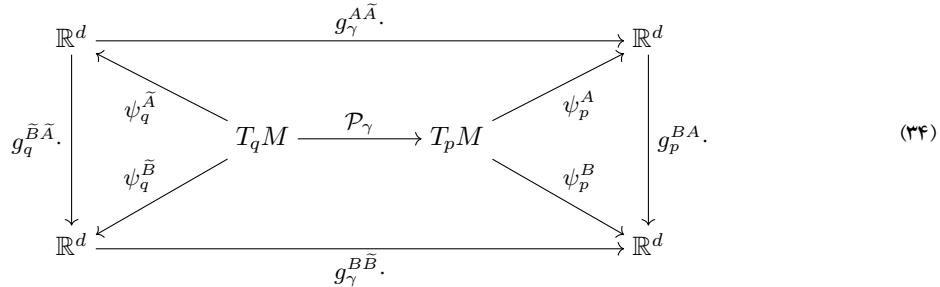
(ب) انتقال موازی در کره  $S^2$



(c) انتقال موازی و مختصات بندی آن در یک فضای مسطح

شکل ۱۴: انتقال موازی بردارهای مماس  $v \in T_q M$  در  $p \in T_p M$  به  $\gamma$  شکل ۱۴ آالت خاص انتقال دهنده‌های لوی-چویتا را در فضاهای اقلیدسی مسطح  $M = \mathbb{E}_d$  بصری‌سازی می‌کند. مستقل از مسیر انتخاب شده  $\gamma$  انتقال لوی-چویتا بردار (نازنجی) را به معنای معمول در فضاهای اقلیدسی موازی نگه می‌دارد. گیج‌های  $\psi_q^{\tilde{A}}$  (قرمز) و  $\psi_p^A$  (سبز) امکان بیان انتقال دهنده مستقل از مختصات را توسط یک عنصر گروهی  $g_\gamma^{A\tilde{A}} = \psi_p^A \circ \mathcal{P}_\gamma \circ (\psi_q^{\tilde{A}})^{-1} \in \text{GL}(d)$  فراهم می‌کند که تغییر ضرایب بردار را در نظر می‌گیرد اگر چارچوب هدف با چارچوب منع منتقل شده مطابقت نداشته باشد. شکل ۱۴ اب انتقال لوی-چویتا در ۲-کره  $S^2$  نشان می‌دهد، مقایسه کنید با معادله (۲۳). انتقال دهنده‌های  $\mathcal{P}_{\gamma,1}$  و  $\mathcal{P}_{\gamma,2}$  در امتداد مسیرهای مختلف، ۶۱ و ۶۴ به طور کلی با یکدیگر اختلاف دارند. همانند فضاهای مسطح، انتقال دهنده‌های مستقل از مختصات را می‌توان توسط عناصر گروهی که بر روی ضرایب نسبت به چارچوب‌های مختصاتی در  $q$  و  $p$  عمل می‌کنند، بیان کرد.

از آنجا که انتقال دهنده در معادله (۳۳) وابسته به مختصات است، ما علاقه‌مند به تبدیل‌های گیج آن هستیم. گیج‌های  $\psi_q^{\tilde{B}}$  و  $\psi_p^B$  را دو گیج جایگزین در همسایگی‌های  $q$  و  $p$  در نظر بگیرید. از نمودار جابجاگی:



می‌توان خواند که انتقال دهنده‌ها در گیج‌های مختلف توسط:

$$g_\gamma^{B\tilde{B}} = g_p^{BA} g_\gamma^{A\tilde{A}} (g_q^{\tilde{B}\tilde{A}})^{-1} \quad (35)$$

مربط هستند. توجه داشته باشید که شباهت این قانون تبدیل و نمودار جابجاگی به آنچه در معادلات (۲۱) و (۲۳) آمده است. تفاوت بین هر دو این است که انتقال دهنده دارای دامنه  $T_q M$  و دامنه مشترک  $T_p M$  متفاوتی است که توسط گیج‌های مختلف و مستقل از یکدیگر تسهیم شده‌اند و بنابراین به طور مستقل تبدیل می‌شوند.

به طور کلی، انتقال موازی بردارهای مماس توسط یک انتخاب اتصال تعیین می‌شود، به عنوان مثال (اما نه لزوماً) توسط اتصال کاتونی لوی-چویتا یک منيفولد ریمانی. یک اتصال را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای از انتقال دهنده‌های بین‌نهایت کوچک بین فضاهای مماس مجاور در نظر گرفت، به طوری که انتقال دهنده کامل  $\mathcal{P}_\gamma$  با انتگرال کیری اتصال در امتداد مسیر  $\gamma$  به دست می‌آید. انتقال دهنده‌ها در امتداد مسیرهای مختلف مطابقت ندارند، که در شکل ۱۴ اب با انتقال دهنده‌های لوی-چویتا در ۲-کره  $S^2$  مثال زده شده است، مقایسه کنید با معادله (۲۳). همانند فضاهای مسطح، انتقال دهنده‌های مستقل از مختصات را می‌توان توسط معادله (۳۳) نسبت به گیج‌ها بیان کرد. تبدیل‌های گیج چنین انتقال دهنده‌های مختصات بندی شده دوباره توسط معادله (۳۵) داده می‌شوند. انتقال دهنده‌ها در یک منيفولد داده شده می‌توانند در اصل به صورت تحلیلی از اتصال محاسبه شوند [۲] و گاهی اوقات می‌توانند به صورت فرم بسته بیان شوند، به عنوان مثال برای کره  $S^2$ ، معادله (۲۳). چندین الگوریتم عددی برای محاسبه انتقال دهنده‌های

موازی در مسیرها وجود دارد؛ به بخش ۲۸ مراجعه کنید. ما به جزئیات بیشتر در مورد نحوه محاسبه انتقال‌دهنده‌های بردار مماس  $\mathcal{P}_\gamma$  نخواهیم پرداخت بلکه به سادگی آن‌ها را داده شده فرض می‌کنیم.

### ۲.۳.۳ انتقال‌دهنده‌های بردار ویژگی

معادله (۲۸) قانون تبدیل ضرایب بردار ویژگی را توسط نوع میدان آن‌ها ( $\rho$ ) تعریف می‌کند. انتقال‌دهنده موازی آن‌ها، که نسبت به گنجی‌های  $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$  و  $g_p^{A\tilde{A}}$  بیان می‌شود، به طور مشابه با پیچیدن انتقال‌دهنده ضریب بردار مماس در این نمایش میدان داده می‌شود، یعنی توسط:

$$\rho(g_\gamma^{A\tilde{A}}). \quad (36)$$

توجه داشته باشید که □ از آنجا که  $G \rightarrow \text{GL}(c)$  است □ این ساختار تنها زمانی به خوبی تعریف می‌شود که تمام انتقال‌دهنده‌ها  $g_\gamma^{A\tilde{A}}$  (برای مسیرهای دلخواه  $\gamma$  و چارچوب‌های  $A, \tilde{A}$ ) واقعاً مقادیری در گروه ساختار انتخاب شده  $G$  بگیرند. اینکه آیا این حالت صادق است یا خیر هم به انتخاب خاص  $G$ -ساختار (یا اتصال) موردنظر بستگی دارد □ آن‌ها باید سازگار باشند [۲].

تمام شبکه‌های کانولوشنی (بنابراین انتقال می‌دهند) بردارهای ویژگی را به نحوی جمع‌آوری می‌کنند، و بنابراین برخی انتخاب از اتصال و  $G$ -ساختار را فرض می‌کنند. اگر  $G$ -ساختار انتخاب شده با اتصال لوی-چویتا ناسازگار باشد، این به معنای آن است که این مدل‌ها □ اغلب به طور ضمنی □ یک اتصال جایگزین و سازگار با  $G$  برای جمع‌آوری ویژگی‌ها فرض می‌کنند. خواننده فعلاً نباید نگران انتخاب‌های خاص اتصال‌ها باشد، که در مرور ادبیات ما در بخش ۲۸ روش ترجیح‌داده شد. در ادامه این بخش، ما پیشتر در مورد سازگاری  $G$ -ساختارها و اتصال‌ها و  $G$ -ساختارها را ترجیح‌داده‌ایم. با فرض اینکه انتقال‌دهنده‌های ویژگی در ادامه همیشه به خوبی تعریف خواهند شد، این بخش را می‌توان با خیال راحت در اولین مطالعه نادیده گرفت.

بحث دقیق‌تر و مستقل از مختصات انتقال‌دهنده‌ها در بندل‌های بردار ویژگی مرتبط را می‌توان در بخش ۵.۶ یافت.

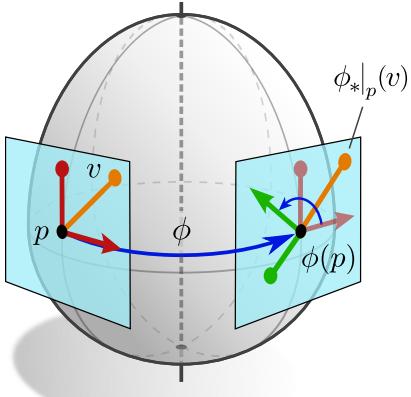
### ۲.۳.۴ سازگاری اتصال‌ها و $G$ -ساختارها

یک اتصال با یک  $G$ -ساختار  $GM$  سازگار با  $\mathcal{P}_\gamma$  نامیده می‌شود اگر عبارات مختصاتی  $g_\gamma^{A\tilde{A}}$  انتقال‌دهنده‌های آن نسبت به هر چارچوب  $A, \tilde{A}$  از  $GM$  مقادیری در گروه ساختار  $G$  بگیرند [۱۹]. یک اتصال سازگار با  $G$  منجر به انتقال‌دهنده‌های بردارهای ویژگی مرتبط با  $G$  می‌شود. برای روش کردن این شرط سازگاری تا حدی انتزاعی، چند مثال خاص را موردنظر بحث قرار می‌دهیم. یک مثال ساده، اتصال لوی-چویتا در  $\mathbb{R}^n$  است، شکل ۱۱۴. دو ساختار  $\{e\}$  در  $\mathbb{R}^n$  که در اشکال ۲۸ و ۲۹ نشان داده شده‌اند را در نظر بگیرید. در اینجا  $\{e\} = G$  است، به این معنی که نوع میدان  $\{e\} \rightarrow \text{GL}(c)$  یک نمایش است، به طوری که انتقال موازی بردارهای ویژگی تها در صورتی می‌تواند تعریف شود که عبارات مختصاتی  $g_\gamma^{A\tilde{A}}$  مقادیری در  $\{e\}$  بگیرند، یعنی بدیهی باشند. از آنجا که ساختار  $\{e\}$  در شکل ۲۸ از چارچوب‌های "موازی" تشکیل شده است، این امر واقعاً همینطور است □ بنابراین اتصال لوی-چویتا با این ساختار  $\{e\}$  سازگار است. در مقابل، چارچوب‌های ساختار  $\{e\}$  در شکل ۲۹ نسبت به یکدیگر "چرخانده شده‌اند"، که منجر به عبارات مختصاتی غیربدیهی  $g_\gamma^{A\tilde{A}}$  می‌شود که مقادیری در  $(\text{SO}(4))$  می‌گیرند (در شکل ۲۸ بصری سازی شده است). از آنجا که نوع میدان  $\{e\} \rightarrow \text{GL}(c)$  است:  $\rho : \text{چرخش‌ها را مدیریت نمی‌کند، امکان تعریف انتقال لوی-چویتا ویژگی‌های مرتبط با این ساختار } \{e\} \text{ وجود ندارد} \square \text{ آن‌ها ناسازگار هستند. به عنوان مثال دوم، اتصال لوی-چویتا در } S^3 \text{ را در نظر بگیرید، که در شکل ۱۴ ب نشان داده است. انتقال در این حالت همیشه وابسته به مسیر خواهد بود و منجر به بردارهای چرخانده شده متفاوت خواهد شد، که دلالت دارد بر اینکه } g_\gamma^{A\tilde{A}} \text{ مقادیری در } (\text{SO}(2))^2 \text{ خواهد گرفت. بردارهای ویژگی که باید مطابق با اتصال لوی-چویتا منتقل شوند، بنابراین باید از نوع } (\text{SO}(2))^2 \rightarrow \text{GL}(c) \text{ باشند که یک نمایش } (\text{SO}(2))^2 \text{ است. این امر حداقل نیازمند ساختار } (\text{SO}(2))^2 \text{ در } S^3 \text{ است که در شکل ۲۹ نشان داده شده است. ساختار } \{e\} \text{ در } S^3 \text{ از شکل ۲۹ با اتصال لوی-چویتا ناسازگار است.}$

از آنجا که اتصال لوی-چویتا یک اتصال متریک است، طول و زاویه بین بردارهای مماس را حفظ می‌کند، و بنابراین چارچوب‌های متعامد را به چارچوب‌های متعامد منتقل می‌کند. نتیجه می‌شود که اتصال لوی-چویتا همیشه با ساختار  $d$  چارچوب‌های سازگار است، که نسبت به آن  $g_\gamma^{A\tilde{A}}$  مقادیری در  $d$  می‌گیرد. اگر متفاوله قابل جهت‌گیری باشد، دست‌سازی چارچوب توسط انتقال‌دهنده‌های لوی-چویتا حفظ می‌شود، به این معنی که آن‌ها تضمین شده‌اند که با ساختارهای  $\text{SO}(d)$  چارچوب‌های متعامد راست‌گرد در  $M$  سازگار باشند. تمام شبکه‌های کانولوشنی در مرور ادبیات ما در بخش ۲۸ که بر اساس ساختارهای  $\text{SO}(d)$  هستند، ویژگی‌ها را از طریق انتقال‌دهنده‌های لوی-چویتا جمع‌آوری می‌کنند.

اگر یک  $G$ -ساختار داده شده با اتصال لوی-چویتا ناسازگار باشد، باید یک اتصال جایگزین و سازگار با  $G$  را برای انتقال بردارهای ویژگی تعریف کرد. بر جسته ترین مثال در مرور ادبیات ما، اتصال‌های بدیهی در ساختارهای  $\{e\}$  است. یک اتصال بدیهی با خاصیت مستقل از مسیر بودن انتقال آن مشخص می‌شود [۲۰]. هر ساختار  $\{e\}$  یک اتصال بدیهی منحصر به فرد را نتیجه می‌دهد، که بردارهای مماس را به گونه‌ای منتقل می‌کند که زاویه

<sup>۱۹</sup> به طور معادل، فرم ۱-اتصال اتصال، که نسبت به چارچوب‌های  $GM$  بیان می‌شود، ملزم به داشتن مقدار  $\rho$  است، که در آن  $\rho$  نشان دهنده جبر لی  $G$  است. به طور انتزاعی تر، ما به اتصال‌های اصلی اهرسمن در بندل اصلی  $G$  ( $GM$ ) علاقه‌مندیم.



شکل ۱۵: بصری‌سازی پیش‌برنده آزاد از مختصات بردارهای مماس و بیان مختصاتی آن نسبت به چارچوب‌های مرجع داده شده در موقعیت منبع و هدف. پیش‌برنده آزاد از مختصات  $\phi_*|_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} M$  به چارچوب‌های مماس  $\phi_*|_p(v) \in T_{\phi(p)} M$  را به  $v \in T_p M$  در نظر گرفت. فرض کنید  $\psi_p^{\tilde{A}}$  گیج در  $p$  که متناظر با چارچوب مرجع قرمز است و  $\psi_{\phi(p)}^{\tilde{A}}$  گیج در  $\phi(p)$  که متناظر با چارچوب مرجع سبز است. آنها بردارها را قبل و بعد از پیش‌برنده توسط ضرایب عددی  $(1, 1)^T$  و  $(0, -\sqrt{2})^T$  توضیح می‌دهند. این تبدیل ضرایب بردار توسط تبدیل گیج القا شده توسط ایزومتری  $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in \text{GL}(d)$  توصیف می‌شود، یعنی  $(\phi_*|_p(v)) = g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \cdot \psi_p^{\tilde{A}}(v)$ . ضرایب بردارهای ویژگی به طور مشابه  $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in G$  تبدیل می‌شوند اگر طبق

یکسانی را با چارچوب‌های مرجع ساختار  $\{e\}$  حفظ کنند. این امر دلالت دارد بر اینکه  $e$  به چارچوب‌های ساختار  $\{e\}$  بدون تغییر مقادیر عددی آنها منتقل می‌کنند. چنین انتقال‌دهنده‌هایی در شبکه‌های کانولوشنی استفاده می‌شوند که انتقال‌دهنده‌های غیربدیهی را به صراحت مدل نمی‌کنند  $G = \{e\}$  در جدول ۲ صادق است، به ویژه آن‌هایی که در بخش‌های ۲ و ۳ هستند. توجه داشته باشید که اتصال بدیهی تها اتصالی است که با یک ساختار  $\{e\}$  سازگار است. همانطور که در بالا ذکر شد، هر شبکه کانولوشنی برخی انتخاب از  $G$ -ساختار و اتصال سازگار را فرض می‌کند، اغلب اتصال‌های لوی-چوینتا اتصال‌های بدیهی.

بخش ۵.۶ به طور مفصل در مورد سازگاری انتقال‌دهنده‌ها و  $G$ -ساختارها از دیدگاه مستقل از مختصات توضیح می‌دهد.

### ۴.۳ عمل ایزومتری‌ها و تبدیل‌های گیج القا شده

تا کنون بحث ما منحصرآ بر تقارن‌های گیج محلی در مختصات‌بندی فضاهای مماس متمرکر بوده است. یک منیفولد ممکن است، با این حال، خود دارای تقارن‌های غیربدیهی باشد، که در مورد یک منیفولد ریمانی  $M$  گروه ایزومتری آن  $\text{Isom}(M)$  را تشکیل می‌دهند. این بخش ایزومتری‌ها و عمل آنها بر منیفلدها، بردارهای مماس، چارچوب‌های مرجع و میدان‌های ویژگی را به طور خلاصه مورد بحث قرار می‌دهد، نتایجی را خلاصه می‌کند که به طور دقیق‌تری در بخش ۲ استخراج شده‌اند. ما بدین ترتیب معادلی بین عمل‌های فعل ایزومتری و تفسیر منفعل آنها بر حسب تبدیل‌های گیج القا شده توسط ایزومتری را بر جسته خواهیم کرد. این معادلی بعد امکان توصیف تناوب پذیری ایزومتری  $GM$ -کانولوشن‌ها را فراهم خواهد کرد.

ایزومتری‌ها به عنوان تقارن‌های منیفلدهای ریمانی تعریف می‌شوند، یعنی آن نگاشت‌ها (دیفنتور فیسم‌ها)

$$\phi : M \rightarrow M, \quad (37)$$

که متريک و در نتیجه فواصل روی  $M$  را حفظ می‌کنند. مجموعه همه ایزومتری‌های یک منیفولد ریمانی  $M$  گروه ایزومتری آن را تشکیل می‌دهد، که ما آن را با  $\text{Isom}(M)$  نشان می‌دهیم. به عنوان مثال، گروه اقلیدسی  $E(d)$  گروه ایزومتری فضاهای اقلیدسی  $\mathbb{E}_d$  است. این گروه شامل انتقال‌ها، چرخش‌ها و بازتاب‌ها است، که همه آن‌ها متريک استاندارد  $\mathbb{E}_d$  را حفظ می‌کنند. گروه ایزومتری  $S^1$ -کره  $S^1$ ، توسط گروه متعمد  $\mathbb{Z}$  داده می‌شود، که شامل چرخش‌ها و بازتاب‌ها است. شکل ۱۵ منیفولد تخم مرغی شکلی را نگاشت خطی آزاد از مختصات بین فضاهای مماس است، عمل عمودی هستند.

### ۱.۴.۳ پیش‌برنده بردارهای مماس

هر ایزومتری  $\phi \in \text{Isom}(M)$  از طریق پیش‌برنده (یا دیفرانسیل) آن

$$\phi_*|_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} M, \quad (38)$$

به طور طبیعی بردارهای مماس عمل می‌کند. همانطور که در شکل ۲ (وسط) بصری‌سازی شده است، پیش‌برنده را می‌توان به طور شهودی به عنوان حمل بردارهای مماس همراه با عمل ایزومتری بر منیفولد زیرین  $M$  در نظر گرفت. تعریف رسمی پیش‌برنده بر روی  $TM$  در پیوست ۲ آورده شده است، با این حال، شهود ارائه شده برای هدف ما کافی است. از آنجا که پیش‌برنده یک نگاشت خطی آزاد از مختصات بین فضاهای مماس است، عمل آن در مختصات توسط ماتریس  $d \times d$  نمایش داده می‌شود. با فرض گیج‌های  $\psi_p^{\tilde{A}}$  و  $\psi_{\phi(p)}^{\tilde{A}}$  در موقعیت منبع و هدف، به ترتیب، این ماتریس توسط

$$g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) := \psi_{\phi(p)}^{\tilde{A}} \circ \phi_*|_p \circ (\psi_p^{\tilde{A}})^{-1} \in \text{GL}(d). \quad (39)$$

داده می شود. این ماتریس تبدیل از ضرایب عددی یک بردار اصلی  $v \in T_p M$  در گنج هدف را توضیح می دهد، یعنی  $(\phi_*|_p(v)) = g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \cdot \psi_p^{\tilde{A}}(\phi_*|_p(v)) = g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \cdot \psi_p^{\tilde{A}}(v)$ . نمودار جابجایی

$$\begin{array}{ccccc} & & g_\phi^{A\tilde{A}}(p). & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathbb{R}^d & & T_p M & & \mathbb{R}^d \\ \downarrow & \psi_p^{\tilde{A}} & \xrightarrow{\phi_*|_p} & \psi_{\phi(p)}^A & \downarrow \\ g_p^{\tilde{B}\tilde{A}}. & & & & g_{\phi(p)}^{BA}. \\ \downarrow & \psi_p^{\tilde{B}} & & \psi_{\phi(p)}^B & \downarrow \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \mathbb{R}^d & & \mathbb{R}^d \\ & & g_\phi^{B\tilde{B}}(p). & & \end{array}, \quad (40)$$

که از نظر مفهومی شبیه آن در معادله (۳۴) است، تعریف بیان مختصاتی پیش برنده بردار مماس را بصری سازی می کند. علاوه بر این دلالت دارد بر اینکه تبدیل های گنج بین مختصات بندی های مختلف تو سط

$$g_\phi^{B\tilde{B}} = g_{\phi(p)}^{BA} g_\phi^{A\tilde{A}} (g_p^{\tilde{B}\tilde{A}})^{-1}, \quad (41)$$

داده می شوند، که معادل مفهومی معادله (۳۵) است.

### ۲.۴.۳ پیش برنده چارچوب های مرجع و تقارن های $G$ -ساختار

از آنجا که چارچوب های مرجع فقط  $d$ -تاپل هایی از بردارهای چارچوب خطی مستقل هستند، پیش برنده بردارهای مماس پیش برنده ای از چارچوب های مرجع را با پیش بردن محورهای چارچوب منفرد القا می کند. به طور خاص، پیش برنده یک چارچوب  $[e_i]_{i=1}^d$  در  $p$  به عنوان چارچوب  $\phi_*|_p(e_i)]_{i=1}^d$  در  $\phi(p)$  تعریف می شود.

این پیش برنده چارچوب ها همیشه به خوبی تعریف شده است، با این حال، ممکن است با  $G$ -ساختار سازگار نباشد، یعنی به طور کلی تضمینی وجود ندارد که چارچوب ها در  $GM$  هنگام پیش برده شدن در  $GM$  باقی بمانند. به عنوان مثال  $\{e_i\}$ -ساختار در شکل ۲۰ (بالا چپ) را در نظر بگیرید، که تو سط انتقال های افقی حفظ می شود اما تو سط انتقال های عمودی یا هر ایزو متری دیگر از  $\mathbb{R}^n$  حفظ نمی شود. به طور مشابه،  $R$ -ساختار در شکل ۲۰ (پایین چپ) تو سط انتقال ها و بازتاب های افقی حفظ می شود، اما تو سط چرخش ها نه. بنابراین مازیر گروه

$$\text{Isom}_{GM} := \left\{ \phi \in \text{Isom}(M) \mid [\phi_*|_p(e_i)]_{i=1}^d \in GM \quad \forall [e_i]_{i=1}^d \in GM \right\} \leq \text{Isom}(M) \quad (42)$$

ایزو متری هایی که تقارن های  $G$ -ساختار هستند را در نظر می گیریم، یعنی آن هایی که تضمین شده اند هر چارچوب در  $GM$  را به چارچوب دیگری که نیز در  $GM$  موجود است، نگاشت کنند.<sup>۲۰</sup> توجه داشته باشید که  $\text{Isom}_{GM}$  به طور کلی به انتخاب خاص  $G$ -ساختار  $GM$  بستگی دارد، نه فقط به گروه ساختار  $G$ . برای حالت خاص که  $G \geq d$ ، تضمین شده است که  $\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M)$  مطابقت داشته باشد زیرا ایزو متری ها تضمین شده اند که چارچوب های متعامد را به چارچوب های متعامد نگاشت کنند. ما علاوه ممند به زیر گروه  $GM$  هستیم زیرا تنها آن ایزو متری ها پیش برنده به خوبی تعریف شده اند از بردارهای ویژگی مستقل از مختصات  $GM$  را الفا خواهند کرد، همانطور که در بخش بعدی بیشتر مورد بحث قرار گرفته است.

پیش از ادامه به عمل ایزو متری بر بردارهای ویژگی، ما آنچه را که تبدیل های گنج القا شده تو سط ایزو متری می نامیم، مورد بحث قرار می دهیم. برای این منظور، فرض کنید  $[e_i^{\tilde{A}}]_{i=1}^d$  آن چارچوب در  $p$  باشد که متناظر با گنج منبع  $\psi_p^{\tilde{A}}$  است و فرض کنید  $[e_i^A]_{i=1}^d$  آن چارچوب در  $(p)$  باشد که متناظر با گنج هدف  $\psi_{\phi(p)}^A$  است، همانطور که در شکل ۱۵ به ترتیب در قرمز (چپ) و سبز (راست) نشان داده شده است. پیش برنده  $(e_i^{\tilde{A}})_{i=1}^d$  چارچوب منع از  $p$  به  $\phi(p)$  (قرمز شفاف، راست) به طور کلی با چارچوب هدف مطابقت ندارد. با این حال، همانطور که در بخش ۲۰ اثبات شده است، دو چارچوب تو سط تبدیل گنج القا شده تو سط ایزو متری مرتبط هستند:

$$[\phi_*|_p(e_i^{\tilde{A}})]_{i=1}^d = [e_i^A]_{i=1}^d \triangleleft g_\phi^{A\tilde{A}}(p), \quad (43)$$

که در آن  $g_\phi^{A\tilde{A}}(p)$  عنصر گروهی از معادله (۳۹) و  $\triangleleft$  عمل راست از معادله (۱۱) است. اصطلاح «تبدیل گنج القا شده تو سط ایزو متری» تا آنجا معنا دارد که هندسه های اطراف  $p$  و  $\phi(p)$  غیر قابل تشخیص هستند زیرا  $\phi$  یک ایزو متری، یعنی یک تقارن از  $M$  است. با شناسایی دو نقطه با یکدیگر،

<sup>۲۰</sup> به طور رسمی تری بیان شود، چنین ایزو متری هایی اتومorfیسم های بندل اصلی  $G$ -ساختار هستند (یا القا می کنند).

بنابراین می‌توان عمل فعال  $\phi$  بر یک کمیت هندسی را به عنوان یک تبدیل گیج منفعل، یعنی یک تغییر القا شده از چارچوب منبع به چارچوب هدف، تفسیر مجدد کرد.

قضیه ۴۶ در بخش ۴۵ اثبات می‌کند که ایزومنتری‌های حفظ‌کننده  $G$ -ساختار در  $\text{Isom}_{GM}$  و تبدیل‌های گیج القا شده با مقدار  $G$  یکدیگر را نتیجه می‌دهند، یعنی

$$\phi \in \text{Isom}_{GM} \iff g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in G \quad \forall p \in M \quad (44)$$

برای گیج‌های دلخواه  $\tilde{A}$  و  $\psi_p^A$  از  $G$ -اطلس برقرار است. خواننده باید این ادعاهای ما در شکل ۴۶ تأیید کند.

### ۳.۴.۳ پیش‌برنده بردارهای ویژگی

اگر (و تنها اگر) یک ایزومنتری تقارنی از  $G$ -ساختار باشد، منجر به پیش‌برنده بردارهای ویژگی می‌شود. به طور شهودی، این پیش‌برنده بردارهای ویژگی را از نقاط  $p$  به  $\phi(p)$  منتقل می‌کند. هنگامی که نسبت به دو چارچوب مرجع در  $p$  و  $\phi(p)$  بیان شود، توسط تبدیل گیج القا شده

$$\rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)). \quad (45)$$

داده می‌شود. توجه داشته باشید که این تبدیل برای هر  $\phi \in \text{Isom}_{GM}$  به خوبی تعریف شده است، زیرا تبدیل‌های گیج القا شده  $(p)$  در این حالت مقادیری در  $G$ -خواهند گرفت و  $\rho$  یک  $G$ -نمایش است. در مقابل، اگر  $\phi$  تقارنی از  $G$ -ساختار نباشد، تعریف پیش‌برنده بردار ویژگی ممکن است. این گزاره با این واقعیت مرتبط است که ویژگی‌های های  $\square$  معمولی هیچ رفتار تبدیل مشخصی تحت چرخش‌ها یا ازتاب‌ها در گروه اقیلیدسی  $E(d)$  ندارند.

پیش‌برنده بردارهای ویژگی منفرد عملی بر کل میدان ویژگی  $f$  را دلالت می‌کند، که ما آن را با  $f \triangleright \phi$  نشان می‌دهیم. نسبت به مختصات، این عمل به صورت

$$[\phi \triangleright f]^A(\phi(p)) = \rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)) f^{\tilde{A}}(p). \quad (46)$$

بیان می‌شود. ما بعداً اثبات خواهیم کرد که های  $\square$  مستقل از مختصات نسبت به عمل ایزومنتری‌ها در  $\text{Isom}_{GM}$  بر میدان‌های ویژگی تناوب‌پذیر هستند؛ به شکل ۱۹ مراجعه کنید. این ویژگی بر این واقعیت تکیه دارد که عمل فعال ایزومنتری بر میدان‌های ویژگی می‌تواند توسعه معادله (۴۶) به عنوان یک تبدیل گیج منفعل صرف ضرایب بردار ویژگی در ک شود.

## ۴ شبکه‌های مستقل از مختصات و $\square$ -کانولوشن‌ها

شبکه‌های عصبی داده‌ها را با اعمال مجموعه‌ای از نگاشت‌های پارامتری (ایها) به یک سیگنال ورودی پردازش می‌کنند  $\square$  در مورد ما به مجموعه‌ای از میدان‌های ویژگی بروی یک متفاوت ریاضی. اصل کوواریانس بدین ترتیب ایجاد می‌کند که لایه‌های منفرد شبکه باید عملیات مستقل از مختصات  $GM$  باشند. نمایش‌های مختصاتی چنین لایه‌هایی بنابراین باید طوری تبدیل شوند که قوانین تبدیل میدان‌های ویژگی ورودی و خروجی خود را رعایت کنند. به جز این الزام سازگاری، لایه‌های مستقل از مختصات عمومی بدون محدودیت باقی می‌مانند.

یک اصل طراحی رایج شبکه‌های عصبی که بر روی سیگنال‌های فضایی (میدان‌های ویژگی) عمل می‌کنند این است که آن‌ها به معنای تعیین یافته‌ای کانولوشنی هستند. ویژگی اصلی که اکثر تعیین‌های عملیات کانولوشن در آن مشترک هستند این است که استنتاج آن‌ها مستقل از موقعیت است. این امر با اشتراک توابع قالب، به عنوان مثال کرنل‌های کانولوشن یا بایاس‌ها، بین مکان‌های مختلف حاصل می‌شود. هر زمان که گروه ساختار  $G$  غیربدپیهی باشد، فرآیند اشتراک وزن مهم است زیرا توابع قالب می‌توانند نسبت به چارچوب‌های مرجع مختلف به اشتراک گذاشته شوند. همانطور که در ادامه استدلال خواهیم کرد، این ابهام با طراحی توابع قالب می‌تواند بزرگ شود. توابع قالب تناوب‌پذیر گیج نسبت به چارچوب مرجع خاصی که در آن اعمال می‌شوند بی‌تفاوت خواهد بود و بنابراین امکان اشتراک وزن مستقل از مختصات را فراهم می‌کنند.

در این بخش ما لایه‌های شبکه‌ای را در نظر خواهیم گرفت که میدان‌های  $\square$  از نوع  $m^f$  را به عنوان ورودی می‌گیرند و میدان  $\square$  از نوع  $m^{\tilde{A}}$  را به عنوان خروجی تولید می‌کنند. بخش ۱.۴.۱ حالت خاص لایه‌هایی را که به صورت نقطه‌ای عمل می‌کنند مورد بحث قرار می‌دهد، یعنی آن‌هایی که خروجی آن‌ها  $(p)$  در هر  $p \in M$  در همان مکان بستگی دارد. مثال‌های عملی مرتبط که در اینجا در نظر گرفته شده‌اند عبارتند از  $1 \times 1$ -توابع پذیر گیج در بخش ۱.۱.۴، جمع بایاس در بخش ۲.۱.۴ و غیرخطی‌ها در بخش ۳.۱.۴. حالت پیچیده‌تر کانولوشن‌ها با کرنل‌های گسترده فضایی در بخش ۲.۴ بررسی شده است. به عنوان آماده‌سازی، بخش ۱.۲.۴ میدان‌های ویژگی را همانطور که از دیدگاه مشاهده‌گران محلی (چارچوب‌های مرجع) دیده می‌شوند مورد بحث قرار می‌دهد، که کرنل‌های (کانولوشن) نسبت به آن‌ها اعمال خواهند شد. چنین مشاهداتی به عنوان پس‌کشی میدان ویژگی به فضای مماس یک مشاهده‌گر رسمی سازی می‌شوند؛ به شکل ۱۶ مراجعه کنید. بخش ۲.۲.۴ اصطلاح تبدیل‌های میدان کرنل را معرفی می‌کند، که شبیه کانولوشن‌ها هستند اما اشتراک وزن فضایی را فرض نمی‌کنند و بنابراین توسعه یک میدان

کرنل (به صورت هموار متغیر) بر روی  $M$  پارامتری می‌شوند.  $GM$ -کانولوشن‌های واقعی در بخش ۳.۲.۴ به عنوان آن تبدیل‌های میدان کرنل تعریف می‌شوند که توسط یک کرنل قالب منفرد مشترک پارامتری می‌شوند. به منظور تضمین استقلال از مختصات فرآیند اشتراک وزن، کرنل‌های کانولوشن مطالبه می‌شوند که  $G$ -استیریبل باشند، یعنی قید تناوب پذیری گیج را برآورده کنند. بخش ۳.۴ نشان می‌دهد که  $GM$ -کانولوشن‌ها به طور خودکار تحت آن ایزومنتری‌هایی که تقارن‌های  $G$ -ساختار هستند (Isom $GM$ ) تناوب پذیر مستند. این بدان معنی است که  $GM$ -کانولوشن‌ها با عمل ایزومنتری‌های بر میدان‌های ویژگی همانطور که در شکل ۱۹ بصری‌سازی شده است، جایجا می‌شوند.

## ۱.۴ عملیات نقطه‌ای تناوب‌پذیر گیج

برای شروع، ما برخی عملیات شبکه عصبی را در نظر می‌گیریم که محدودیت‌های ناشی از استقلال از مختصات مورد نیاز و اشتراک وزن به ویژه ساده قابل استخراج هستند. همه این عملیات این ویژگی مشترک را دارند که به صورت نقطه‌ای بر بردارهای ویژگی عمل می‌کنند، یعنی بردارهای ویژگی خروجی  $(p)_M \in M$  در  $p \in M$  صرفاً بر اساس بردارهای ویژگی ورودی  $(p)_0$  در ممان مکان محاسبه می‌کنند. به منظور ارضای اصل کوواریانس، مختصات‌بندی‌های این عملیات همگی مطالبه می‌شوند که مطابق پیش‌ترکیب با  $\rho_0$  و پس ترکیب با  $\rho$  تبدیل شوند. هنگام تقاضای اینکه عملیات حسب وزن‌های مشترک تعیین شوند، این قوانین تبدیل الزاماً برای تناوب‌پذیری گیج (با ناوردادی) عملیات را دلالت می‌کنند.

استخراج‌ها برای عملیات نقطه‌ای مختلف در بخش‌های بعدی ۱.۱.۴، ۲.۱.۴ و ۳.۱.۴ در گام‌های اول عمده‌تاً مشابه هستند و به محدودیت‌های کوواریانس و تناوب‌پذیری اساساً یکسانی بر توابع قالب منجر می‌شوند. بنابراین آن‌ها می‌توانند با هم بررسی شوند، عملیات خاص (با تابع قالب) را انتزاعی نگه داشته. با این حال، از آنجا که مفاهیم محدودیت‌های حاصل برای نمونه‌سازی‌های خاص متفاوت است، و از آنجا که می‌خواهیم بحث را نزدیک به کاربرد نگه داریم، چنین فرمول‌بندی انتزاعی را حذف خواهیم کرد و مستقیماً نمونه‌سازی‌های خاص را در نظر خواهیم گرفت.

### ۱.۱.۴ کانولوشن‌های $1 \times 1$ تناوب‌پذیر گیج

به عنوان اولین مثال از عملیات نقطه‌ای، ما عمل خانواده‌ای از نگاشت‌های خطی  $\mathcal{C}_p$  را در نظر می‌گیریم، که بردار ویژگی ورودی  $(p)_0 \in M$  به بردار ویژگی خروجی  $p \in M$

$$f_{000}(p) := \mathcal{C}_p f_{00}(p). \quad (47)$$

ارسال می‌کنند. اگر فرض اشتراک وزن فضایی را اضافه کنیم، نگاشت‌های خطی  $p$  و  $q$  در مکان‌های مختلف  $\mathcal{C}_p$  و  $\mathcal{C}_q$  را می‌توان به عنوان کانولوشنی با کرنل دلایل دیراک با مقدار عملکرگ خطی دید. این عملیات در بینایی کامپیوتربیار رایج است، جایی که معمولاً به عنوان کانولوشن  $1 \times 1$  نشان داده می‌شود، زیرا گسته‌سازی فضایی یک کرنل دیراک خطی که بر روی تصاویر دو بعدی عمل می‌کند توسعه کردن (با مقدار ماتریس) با گستره فضایی  $1 \times 1$  پیکسل داده می‌شود. ما در ادامه استخراج خواهیم کرد که تقاضای اشتراک وزن فضایی منجر به محدودیتی خواهد شد که کرنل‌های قالب با مقدار ماتریس را مجبور می‌کند که در هم تنیده باشند، یعنی ماتریس‌های تناوب‌پذیر گیج.

پیش از فرض اشتراک وزن، بیان‌های مختصاتی نگاشت‌های خطی  $\mathcal{C}_p$  و تبدیل‌های گیج بین آن‌ها بسیار شبیه آن‌هایی از نگاشت‌های خطی بر روی  $T_p M$  رفتار می‌کنند، که در بخش ۲.۱.۳ مورد بحث قرار دادیم. از آنجا که بردارهای ویژگی ورودی و خروجی در مختصات توسط بردارهای ضربی پیروی می‌کنند. از آنجا که این‌ها توسط  $f_{00}^A(p) \in \mathbb{R}^{c_{00} \times c_0}$  و  $f_{00}^A(p) \in \mathbb{R}^{c_{00} \times c_0}$  نمایش داده می‌شوند، داریم می‌شود که

$$f_{000}^A(p) = \mathcal{C}_p^A \cdot f_{00}^A(p). \quad (48)$$

را برآورده می‌کند. این رابطه البته برای مختصات‌بندی‌های دلخواه برقرار است، به طوری که برای هر گیج دیگری که با  $B$  برقسب گذاری شده است،  $f_{00}^B(p) = \mathcal{C}_p^B \cdot f_{00}^B(p)$  داریم. قانون تبدیلی که کند از اصل کوواریانس از قوانین تبدیل ویژگی‌های ورودی و خروجی پیروی می‌کند. از آنجا که این‌ها توسط  $f_{00}^B(p) = \rho_{00}(g_p^{BA}) f_{00}^A(p) = \rho_{00}(g_p^{BA}) f_{00}^A(p) = \rho_{00}(g_p^{BA}) f_{00}^A(p)$  داده می‌شوند، داریم:

$$\begin{aligned} f_{000}^B(p) &= \mathcal{C}_p^B \cdot f_{00}^B(p) \\ \Leftrightarrow \rho_{00}(g_p^{BA}) f_{00}^A(p) &= \mathcal{C}_p^B \rho_{00}(g_p^{BA}) f_{00}^A(p) \\ \Leftrightarrow f_{000}^A(p) &= \rho_{00}(g_p^{BA})^{-1} \mathcal{C}_p^B \rho_{00}(g_p^{BA}) f_{00}^A(p). \end{aligned} \quad (49)$$

مقایسه با معادله (۴۸) دلالت دارد بر اینکه دو مختصاتی  $\mathcal{C}_p$  لزوماً با

$$\mathcal{C}_p^B = \rho_{00}(g_p^{BA}) \mathcal{C}_p^A \rho_{00}(g_p^{BA})^{-1} \quad (50)$$

مرتبط هستند اگر قرار باشد قوانین تبدیل بردارهای ویژگی را رعایت کنند. همانطور که معمول است، این ملاحظات به طور مختصر توسط نمودار جابجایی ضبط می‌شوند:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{c_{\square\square}} & \xrightarrow{\mathcal{C}_p^A} & \mathbb{R}^{c_{\square\square\square}} \\ \rho_{\square\square}(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho_{\square\square\square}(g_p^{BA}) \\ \mathbb{R}^{c_{\square\square}} & \xrightarrow{\mathcal{C}_p^B} & \mathbb{R}^{c_{\square\square\square}} \end{array} \quad (51)$$

مفهوم عملی مهم این نتیجه تا کنون این است که نگاشت خطی  $\mathcal{C}_p$  به هیچ وجه محدود نیست. به بیان دیگر: تا زمانی که بیان‌های مختصاتی در گیج‌های مختلف توسط معادله (۵۰) مرتبط باشند، آزاد هستیم که  $\mathcal{C}_p$  را در یک گیج دلخواه ثابت  $A$  توسط ماتریس بدون محدودیت  $\mathcal{C}_p^A$  پارامتری کنیم. همانطور که خواهیم دید، وضعیت زمانی تغییر می‌کند که نگاشت‌های خطی اشتراک وزن داشته باشند.

حال حالی را در نظر بگیرید که نگاشت‌های خطی  $\mathcal{C}_q$  و  $\mathcal{C}_q$  وزن‌ها را به اشتراک می‌گذارند. این بدان معنی است که فرض می‌کنیم آن‌ها توسط مجموعه مشترکی از پارامترها پارامتری شوند، که توسط کرنل قالب  $1 \times 1 \times K_{1 \times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}}$  داده می‌شود. سؤال باز این است که دقیقاً چگونه نگاشت‌های آزاد از مختصات باید بر حسب این کرنل قالب پارامتری شوند. الزام ما برای استقلال از مختصات  $GM$  تقاضاً می‌کند که هیچ چارچوب مرجع خاصی را در فرآیند اشتراک وزن ترجیح ندهیم، یعنی همه مختصات‌بندی‌ها را به همان شیوه درمان کنیم. بنابراین لازم است که کرنل قالب را با همه مختصات‌بندی‌ها به طور همزمان به اشتراک بگذاریم، یعنی

$$\mathcal{C}_p^X = K_{1 \times 1} \quad (U^X, \psi^X) \in \mathcal{A}^G \quad \text{برای هر گیج } p \in U^X, \quad (52)$$

تنظيم کنیم، که در آن  $\mathcal{A}^G$  (حداکثر)  $G$ -اطلس متناظر با  $G$ -ساختر در نظر گرفته شده است؛ به معادله (۲۵) مراجعه کنید. از آنجا که محدودیت کوواریانس در معادله (۵) نیاز دارد که برای گیج‌های دلخواه مرتبط با  $G$  برقرار باشد، و مختصات‌بندی‌های خطی  $\mathcal{C}_p^A = \mathcal{C}_p^B = K_{1 \times 1}$  همگی مطابقت دارند، تقاضای مشترک برای اشتراک وزن و استقلال از مختصات  $GM$  منجر به محدودیت

$$K_{1 \times 1} = \rho_{\square\square}(g) K_{1 \times 1} \rho_{\square\square}(g)^{-1} \quad \forall g \in G \quad (53)$$

بر کرنل قالب می‌شود. تطبیق متناظر نمودار جابجایی در معادله (۵۱) با اشتراک وزن توسط:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{c_{\square\square}} & \xrightarrow{K_{1 \times 1}} & \mathbb{R}^{c_{\square\square\square}} \\ \rho_{\square\square}(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho_{\square\square\square}(g_p^{BA}) \\ \mathbb{R}^{c_{\square\square}} & \xrightarrow{K_{1 \times 1}} & \mathbb{R}^{c_{\square\square\square}} \end{array} \quad (54)$$

داده می‌شود.

نتیجه‌گیری این تحلیل این است که کرنل‌های قالبی که می‌توانند بدون ابهام به اشتراک گذاشته شوند دقیقاً آن‌هایی هستند که تحت عمل گیج ناوردا هستند. فضای برداری چین کرنل‌های  $1 \times 1$  ناوردا گیج ساده فضای نگاشت‌های درهم‌تیده بین نمایش‌های  $\rho_{\square\square}$  و  $\rho_{\square\square\square}$  است، یعنی

$$\text{Hom}_G(\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square\square}) := \left\{ K_{1 \times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square\square}} \mid K_{1 \times 1} = \rho_{\square\square}(g) K_{1 \times 1} \rho_{\square\square}(g)^{-1} \quad \forall g \in G \right\} \subseteq \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square\square}}. \quad (55)$$

توجه داشته باشید که، طبق لم شور [۴]، الزام بر  $K_{1 \times 1}$  برای درهم‌تیده بودن مانع از نگاشت بین میدان‌هایی که تحت نمایش‌های کاهش‌ناپذیر غیرهم‌ریخت تبدیل می‌شوند از طریق کانولوشن‌های  $1 \times 1$  می‌شود. این محدودیت شدید با کرنل‌های  $1 \times 1$  اجتناب‌ناپذیر است اما بعداً هنگام اجازه دادن به کرنل‌های گسترده فضایی حل خواهد شد.

در این نقطه می‌خواهیم اشاره کنیم که اصطلاحات «تابع قالب تناوب‌پذیر گیج» و «تابع قالب ناوردا گیج» را به طور متقابل استفاده می‌کنیم. این با مشاهده توجیه می‌شود که محدودیت ناوردا بیی در معادله (۵۳) می‌تواند به عنوان محدودیت تناوب‌پذیری  $K_{1 \times 1} \rho_{\square\square}(g) = \rho_{\square\square\square}(g) \rho_{\square\square}(g)$  نوشته شود. به طور کلی امکان مشاهده توابعی که نسبت به عمل گروهی در دامنه و دامنه مشترک آن‌ها تناوب‌پذیر هستند به عنوان ناوردای عمل متناظر بر خود تابع وجود دارد. در کاربرد ما، دیدگاه تناوب‌پذیری بر جسته می‌کند که تبدیل میدان ورودی منجر به تبدیل متناظر میدان خروجی خواهد شد، که تضمین می‌کند همه کمیت‌های در گیر به طور کوواریانت با یکدیگر تبدیل شوند. از طرف دیگر، دیدگاه ناوردا بیی تأکید می‌کند که تابع قالب می‌تواند در گیج دلخواه به اشتراک گذاشته شود.

## ۲.۱.۴ جمع بایاس تناوب پذیر گیج

پس از اعمال عملیات کانولوشن، رایج است که بردار بایاس (مشترک) به بردارهای ویژگی منفرد جمع شود. همراه با الزام استقلال از مختصات، اشتراک وزن دوباره منجر به محدودیت خطی خواهد شد. این محدودیت تنها اجازه جمع شدن بایاس‌ها به زیرفضاهای ناوردا عمل گیج بر میدان ویژگی ورودی را خواهد داد.

همانند قبل، ابتدا جمع بایاس را بدون اشتراک وزن در نظر می‌گیریم. بنابراین بایاس‌های  $b_p^A$  داریم، که به موقعیت  $p$  بر روی منیفولد بستگی دارند، که به بردار ویژگی ورودی جمع می‌شوند تا بردار ویژگی خروجی

$$f_{\text{من}}(p) = f_{\text{من}}(p) + b_p^A. \quad (56)$$

تولید کنند. نسبت به گیج‌های  $\psi_p^A$  و  $\psi_p^B$ ، بایاس توسط آن بردارهای ضریب  $\beta_p^A$  و  $\beta_p^B$  در  $\mathbb{R}^c$  نمایش داده می‌شود که  $f_{\text{من}}^A(p) = f_{\text{من}}^A(p) + \beta_p^A$  و  $f_{\text{من}}^B(p) = f_{\text{من}}^B(p) + \beta_p^B$  را برآورده می‌کنند. از آنجا که جمع بردارها اجازه تغییر قوانین تبدیل آن‌ها را نمی‌دهد، نمایش‌های گروهی مرتبط با ویژگی‌های ورودی و خروجی لزوماً مطابقت دارند، یعنی

$$\rho_{\text{من}} = \rho_{\text{من}} =: \rho. \quad (57)$$

همراه با الزام برای استقلال از مختصات، این دلالت دارد بر اینکه نمودار

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+b_p^A} & \mathbb{R}^c \\ \rho(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho(g_p^{BA}) \cdot \\ \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+b_p^B} & \mathbb{R}^c \end{array}, \quad (58)$$

که معادل آن در معادله (۵۱) است، نیاز دارد که جایجاً شود. به صورت معادله نوشته شده، این رابطه  $\rho(g_p^{BA}) f_p^A + \beta_p^B = \rho(g_p^{BA}) (f_p^A + \beta_p^A)$  را تلقیاً می‌کند که برقرار باشد. از آنجا که خطی بودن  $(g_p^{BA})$  امکان بازنویسی سمت راست را به عنوان  $\rho(g_p^{BA}) f_p^A + \rho(g_p^{BA}) \beta_p^A$  می‌دهد، تغییری بردار ویژگی ورودی منجر به

$$\beta_p^B = \rho(g_p^{BA}) \beta_p^A. \quad (59)$$

می‌شود. بردارهای ضریبی که یک بایاس مستقل از مختصات را نسبت به گیج‌های مختلف نمایش می‌دهند بنابراین نیاز دارند که دقیقاً مانند بردارهای ویژگی که به آن‌ها جمع می‌شوند تبدیل شوند. همانند مورد کانولوشن‌های  $1 \times 1$  استقلال از مختصات بایاس  $b_p$  را به هیچ وجه محدود نمی‌کند، بلکه فقط مختصات‌بندی‌های مختلف همان بایاس را مطالبه می‌کند که با یکدیگر سازگار باشند. یک پیاده‌سازی بنابراین می‌تواند گیج دلخواه انتخاب کند و بایاس را در آن گیج آزادانه توسط پارامترهایی در  $\mathbb{R}^c$  پارامتری کند.

وضعیت دوباره زمانی تغییر می‌کند که اشتراک وزن فضایی تقاضا شود. فرض کنید  $b \in \mathbb{R}^c$  بردار بایاس قالبی باشد که بر روی منیفولد به اشتراک گذاشته شود. از آنجا که تنها راه انجام این کار بدون ترجیح دلخواه هر مختصات‌بندی، اشتراک بردار بایاس در همه گیج‌ها به طور همزمان است، باید

$$\beta_p^X = b \quad (\text{برای هر گیج } U^X, \psi^X \in \mathcal{A}^G \text{ با } p \in U^X). \quad (60)$$

را در قیاس با معادله (۵۲) مطالبه کنیم. ترکیب محدودیت کوواریانس در معادله (۵۹) با این اشتراک وزن مستقل از گیج سپس منجر به محدودیت ناوردایی می‌شود.

$$b = \rho(g) b \quad \forall g \in G \quad (61)$$

بر قالب بردار بایاس می‌شود. برای تکمیل قیاس با مورد کانولوشن‌های  $1 \times 1$  سخنه تطبیق یافته نمودار جایجاً در معادله (۵۸) با وزن‌های مشترک را نشان می‌دهیم:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+b} & \mathbb{R}^c \\ \rho(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho(g_p^{BA}) \cdot \\ \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+b} & \mathbb{R}^c \end{array}. \quad (62)$$

برای بصیرت در مفاهیم محدودیت ناوردایی در معادله (۶۱)، فرض کنید برای بردار قالب داده شده  $b$  برآورده شود. به دلیل خطی بودن محدودیت، هر بردار مقیاس شده  $a \cdot b$  برای  $a \in \mathbb{R}$  نیز آن را برآورده خواهد کرد، یعنی هر حل زیرفضای یک بعدی از  $\mathbb{R}^c$  را پوشش می‌دهد که تحت عمل

ناوردا است. چنین زیرفضای ناوردا به عنوان زیرنماش  $\rho$  نشان داده می‌شود. از آنجا که زیرفضاهای در نظر گرفته شده یک بعدی هستند، خودشان هیچ زیرفضای مناسب ندارند و بنابراین زیرنماش‌های کاهش ناپذیر بدیهی هستند. نتیجه می‌شود که فضای برداری

$$\mathcal{B}_\rho^G := \{b \in \mathbb{R}^c \mid b = \rho(g)b \quad \forall g \in G\} \quad (63)$$

بایاس‌های تناوب‌پذیر گیج با (زیرفضاهای) زیرنماش‌های بدیهی  $\rho$  مطابقت دارد. ابعاد  $\mathcal{B}_\rho^G$  و بنابراین تعداد پارامترهای قابل بادگیری  $\square$  با کثرت زیرنماش‌های بدیهی موجود در  $\rho$  مطابقت دارد. برای گروه‌های فشرده  $G$ ، روابط متعدد شور دلالت دارند بر اینکه این ابعاد توسط  $\dim(\mathcal{B}_\rho^G)$  داده می‌شود. این گزاره مواد معملى گروه‌های متعدد  $G = d$  و همه زیرگروه‌های آن را پوشش می‌دهد.

دو مثال ساده از میدان‌های ویژگی که ممکن است بخواهیم بایاس‌های مشترک به آن‌ها جمع کنیم، میدان‌های اسکالر و میدان‌های بردار مماس هستند. بر اساس تعریف، میدان ضربی یک میدان اسکالر تحت تبدیل‌های گیج ناوردا است، یعنی طبق نماش بدیهی  $b \in \mathbb{R}$  به آن‌ها جمع کرد. در مقابل، میدان ضربی یک میدان بردار مماس طبق نماش گروهی غیربدیهی، کاهش ناپذیر  $g = (g)$  تبدیل می‌شود. از آنجا که این نماش هیچ زیرنماش بدیهی ندارد، جمع بردار بایاس مشترک به میدان‌های بردار مماس با حفظ استقلال از مختصات غیرممکن است. به عنوان مثال سوم، نماش‌های منظم گروه‌های فشرده را در نظر بگیرید، که به عنوان مثال میدان‌های ویژگی شبکه‌های کانولوشنی گروهی را توصیف می‌کنند. توسط قضیه پیتر-ولیل، شناخته شده است که نماش‌های منظم دقیقاً یک زیرنماش بدیهی دارند [؟]. بنابراین بایاس که به میدان‌های ویژگی منظم جمع می‌شود توسط یک پارامتر منفرد توصیف می‌شود.

#### ۲.۱.۴ غیرخطی‌های تناوب‌پذیر گیج

به جز عملیات خطی (کانولوشن) و جمع بایاس، اساسی‌ترین عملیات استفاده شده در هر شبکه عصبی غیرخطی‌هاست. ما در اینجا حالت معمول غیرخطی‌های  $\sigma_p$  را در نظر خواهیم گرفت که به روی محلی فضایی عمل می‌کنند، یعنی بردارهای ویژگی خروجی را به عنوان  $f_{\square\square\square}(p) = (\sigma_p(f_{\square\square}(p))$  محاسبه می‌کنند. یک غیرخطی مشترک دوباره مطالبه می‌شود که تناوب‌پذیر گیج باشد. از آنجا که استدلای که به این نتیجه گیری منجر می‌شود شبیه آن در موارد قبلی است، تنها به طور خلاصه آن را خلاصه خواهیم کرد. به دلیل عدمیت نگاشت های غیرخطی استخراج فضاهای حل خطی همانند معادلات (۵۵) و (۶۳) غیرممکن است، با این حال، برخی مثال‌های خاص را مورد بحث قرار خواهیم داد.

مشابه قبیل، هر غیرخطی آزاد از مختصات  $\sigma_p$  نسبت به گیج‌های  $A$  و  $B$  توسط یان‌های مختصاتی  $\rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square\square}}$  و  $\sigma_p^A : \mathbb{R}^{c_{\square\square}} \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square\square}}$  داده می‌شود، که توسط تقاضای استقلال از مختصات مطالبه می‌شوند که با  $\sigma_p^B = \rho_{\square\square\square}(g_p^{BA}) \circ \sigma_p^A \circ \rho_{\square\square}(g_p^{BA})^{-1}$  مرتبط باشند. یک تابع قالب غیرخطی  $\mathbb{R}^{c_{\square\square}} \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square\square}}$  است که تنها زمانی می‌تواند به روی مستقل از مختصات به اشتراک گذاشته شود که به طور همزمان با همه گیج‌ها به اشتراک گذاشته شود. این محدودیت کوواریانس را به محدودیت ناورداشی  $G = \rho_{\square\square\square}(g) \circ \rho_{\square\square}(g) \circ \rho_{\square\square}(g)^{-1} \forall g \in G$  برابر می‌کند، برای تابع قالب تبدیل می‌شود. یا، به طور معادل، به محدودیت تناوب‌پذیری متناظر

$$\rho_{\square\square\square}(g) \circ s = s \circ \rho_{\square\square}(g)^{-1} \quad \forall g \in G. \quad (64)$$

به دلیل غیرخطی بودن این محدودیت مجبور هستیم آن را مورد به مورد بررسی کنیم  $\square$  بنابراین بحث خود را به چند مثال خاص محدود خواهیم کرد. بحث برانگیزترین ساده‌ترین حالت، غیرخطی‌هایی است که بین میدان‌های اسکالر نگاشت می‌کنند، یعنی برای آن‌ها  $1 = \rho_{\square\square\square}(g) = \rho_{\square\square\square}(g)$  برای  $g \in G$  ناوردا هستند. در این حالت محدودیت تناوب‌پذیری در معادله (۶۴) به  $s = \square$  تبدیل می‌شود، که به طور بدیهی برای هر غیرخطی  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  برآورده می‌شود. مثال جالب‌تری نمایش یکانی  $\square$  است. یک غیرخطی ممکن برای این حالت توسط نرم بردارهای ویژگی داده می‌شود. از آنجا که  $\|f_{\square\square}(p)\| = \|f_{\square\square\square}(p)\| \circ \rho_{\square\square}(f_{\square\square}(p))$  به دلیل یکانی بودن  $\rho_{\square\square}$  ناوردا است،  $\rho_{\square\square}$  نمایش بدیهی خواهد بود. گرفتن نرم بنابراین به عنوان عملیات غیرخطی، تناوب‌پذیر گیج دیده می‌شود که هر میدان یکانی را به میدان اسکالر نگاشت می‌کند. یک نگاشت غیرخطی که نوع میدان را حفظ می‌کند، یعنی  $\rho_{\square\square} = \rho_{\square\square\square}$  را برآورده می‌کند، می‌تواند به طور مشابه به عنوان  $f_{\square\square}(p) \mapsto f_{\square\square\square}(p) \circ f_{\square\square}(p)$  تعریف شود. گزینه دیگر، که ممکن است در بادگیری تعاملات فیزیکی نقش داشته باشد و در [؟] مورد بررسی قرار گرفته است، غیرخطی‌های حاصل ضرب تansوری هستند. با داشتن دو میدان  $(p, f_{\square\square}^A)$  و  $(p, f_{\square\square\square}^A)$ ، که به ترتیب طبق  $\rho_{\square\square}$  و  $\rho_{\square\square\square}$  تبدیل می‌شوند، چنین غیرخطی‌هایی ویژگی حاصل ضرب تansوری  $f_{\square\square\square}^A(p) \otimes f_{\square\square}^A(p) = f_{\square\square\square\square}^A(p)$  را محاسبه می‌کنند، که به طور تناوب‌پذیر طبق نمایش حاصل ضرب تansوری  $\rho_{\square\square\square\square} = \rho_{\square\square\square} \circ \rho_{\square\square}$  تبدیل می‌شود. همه این مثال‌ها محدودیت تناوب‌پذیری گیج در معادله (۶۴) را برآورده می‌کنند. اینکه کدام غیرخطی خاص در عمل خوب کار می‌کند، با این حال، هنوز سوال تحقیقاتی بازی است که نیازمند بررسی تجربی بسیار بیشتری قبل از پاسخ دادن است. اولین تلاش در این جهت در [؟] انجام شده است.

#### ۲.۴ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های $GM$

عملیات اصلی شبکه‌های کانولوشنی، عملگر کانولوشن است که الگوهای مشخصه ویژگی‌ها را از یک همسایگی محلی در اطراف هر نقطه  $p \in M$  به صورت خطی در یک بردار ویژگی جدید  $(p, f_{\square\square\square}^A)$  جمع می‌کند. یک کرنل کانولوشن گستره فضایی، جزئیات این انشاست را تعیین می‌کند. اصل

کوواریانس نیازمند استقلال از مختصات و در نتیجه یک قانون تبدیل خاص برای کرنل‌ها تحت تبدیلات پیمانه است. همانند مثال‌های قبلی، یک تقاضای اضافی برای اشتراک‌گذاری وزن منجر به الزامی برای کرنل‌الگو می‌شود تا نسبت به پیمانه هموردا ( $G$ -راهن) باشد.

مطابق با بخش قل، ما بهوضوح بین الزامات استقلال از مختصات و اشتراک‌گذاری وزن تمايز قائل می‌شویم. بنابراین، بخش ۲.۲.۴ با بحث در مورد میدان‌های کرنل و قوانین تبدیل آن‌ها بدون الزام به اینکه کرنل‌ها در موقعیت‌های جداگانه به هم مرتبط باشند، شروع می‌شود. چنین میدان‌های کرنل نامحدودی منجر به تبدیلات میدان کرنل می‌شوند که تبدیلات انگرالی هستند و می‌توان آن‌ها را به عنوان پیش‌درآمد‌های کانولوشن‌ها در نظر گرفت. کانولوشن‌های واقعی  $GM$  که توسط یک کرنل الگوی مشترک و لزوماً همودای پیمانه‌ای پارامتری می‌شوند، در بخش ۳.۲.۴ تعریف شده‌اند. به عنوان یک آماده‌سازی، در بخش بعدی ۱.۲.۴، تمايش‌های محلی میدان‌های ویژگی را بر روی فضاهای مماس توصیف خواهیم کرد، جایی که آن‌ها با کرنل‌های کانولوشن تطبیق داده می‌شوند.

#### ۱.۲.۴ دیدگاه یک ناظر محلی به میدان‌های ویژگی

برخلاف فضاهای اقلیدسی یا فضاهای همگن کلی تر مانند کره، هندسه محلی یک خمینه ریمانی کلی از نقطه‌ای به نقطه دیگر متفاوت است. بنابراین، بالاً فاصله مشخص نیست که یک کرنل کانولوشن چگونه باشد روی  $M$  تعریف شود و چگونه می‌توان آن را بین مکان‌های مختلف به اشتراک گذاشت. یک راه حل رایج این است که کرنل را طبق معمول روی یک فضای برداری مسطح و اقلیدسی  $\mathbb{R}^d$  تعریف کرده و آن را به جای خود خمینه، روی فضاهای مماس به اشتراک‌بگذاریم؛ به بخش‌های ۲.۲.۴ و ۲.۳.۴ با کارهای قبلی [؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟] مراجعه کنید. سپس، کرنل را می‌توان از طریق نگاشت نمایی ریمانی به روی خمینه نگاشت. می‌توان آن را به گونه‌ای تصور کرد که توسط یک ناظر محلی اعمال می‌شود که ویژگی‌ها را در محیط اطراف خود نسبت به چارچوب مرجع محلی خود اندازه‌گیری می‌کند. در این بخش به طور خلاصه به چگونگی درک میدان‌های ویژگی از دیدگاه ناظر محلی مختلف خواهیم پرداخت. از نظر ریاضی، این موضوع به عنوان پس‌کش ( $\square\square\square\square\square\square$ ) و انتقال موازی میدان ویژگی به فضاهای مماس فرمول‌بندی می‌شود؛ برای تجسم به شکل ۱۶ مراجعه کنید.

برای نگاشت بین فضاهای مماس و خمینه، ما نگاشت نمایی ریمانی (مرتبط با اتصال لوی-چیوینتا) را در نظر می‌گیریم.<sup>۲۱</sup> با فرض اینکه خمینه برای سادگی کامل از نظر ژئودزیکی باشد<sup>۲۲</sup>، نگاشت نمایی در یک نقطه خاص  $p \in M$  نگاشتی است به صورت

$$\exp_p : T_p M \rightarrow M. \quad (65)$$

این نگاشت، بردارهای  $v \in T_p M$  را با نقاطی  $\exp_p(v) \in M$  می‌داند که با دنبال کردن ژئودزیک گذرنده از  $p$  با سرعت اولیه  $v$  برای یک واحد زمان به دست می‌آیند. نگاشت نمایی با اینکه فواصل شعاعی را حفظ می‌کند، به طور کلی زوایا را تغییر می‌دهد و یک‌به یک نیست. به عنوان مثال، اگر خمینه یک کره باشد، نگاشت‌های نمایی فضای مماس مربوطه را بی‌نهایت بار دور آن می‌پیچندند. با این حال، تضمین می‌شود که نگاشت نمایی یک دیفرنیویرفیسم محلی است اگر دامنه آن به فواصلی کوتاه‌تر از فاصله تا مکان پُرش (جایی که یک‌به یک بودن از دست می‌رود) محدود شود.

با داشتن نگاشت‌های نمایی، می‌توان میدان‌های ویژگی روی خمینه را به فضاهای مماس پس‌کش کرد. به طور خاص، اگر  $f$  یک میدان ویژگی روی  $M$  باشد، پس  $f$  کش  $f := f \circ \exp_p$  به عنوان نگاشتشی تعریف می‌شود که بردار ویژگی  $(\exp_p(v))$  از  $f(\exp_p(v))$  را به  $v \in T_p M$  می‌دهد. توجه داشته باشید که به دلیل عدم یک‌به یک بودن نگاشت نمایی، هر بردار ویژگی ممکن است به چندین بردار مماس  $v_1$  و  $v_2$  اختصاص یابد اگر  $(v_1) = \exp_p(v_2)$  باشد<sup>۲۳</sup> این پدیده تا حدودی شبیه به اثرات عدسی گرانشی در فیزیک است. در صورتی که نگاشت نمایی یک‌به یک باشد، یا زمانی که آن را به شعاع یک‌به یک بودن آن محدود کنیم، پس  $f$  کش معادل بیان میدان ژئودزیکی است [؟].

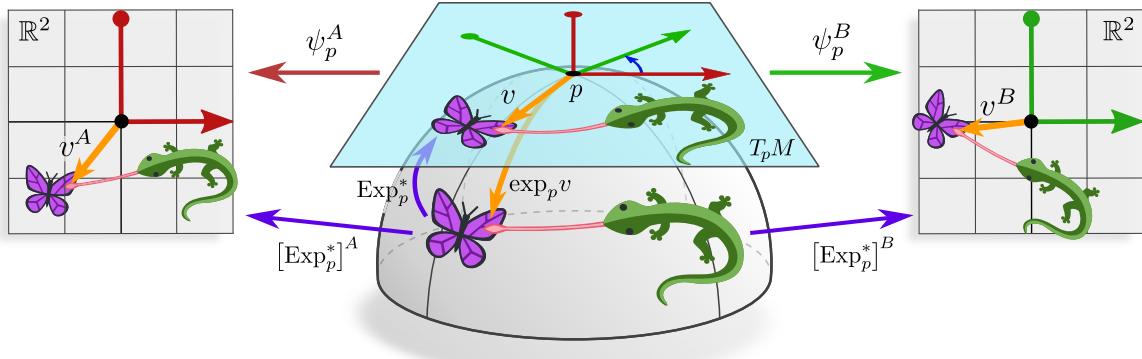
به یاد بیاورید که هدف از  $p$  کش بردارهای ویژگی به فضاهای مماس این است که بتوان آن‌ها را توسط یک کرنل کانولوشن جمع آوری کرد. متأسفانه، این کار بالاً فاصله امکان‌بندیر نیست زیرا بردارهای ویژگی در مکان‌های مختلف در فضاهای برداری متفاوتی قرار دارند و نسبت به پیمانه‌های متفاوتی بیان می‌شوند.<sup>۲۴</sup> بنابراین لازم است تمام بردارهای ویژگی  $[f](v)$  در یک فضای برداری و نسبت به یک پیمانه یکسان بیان شوند. یک ایده طبیعی که توسط [؟] پیشنهاد شد، انجام این کار با انتقال موازی شیوه به اثرات عدسی گرانشی در فیزیک است. در نگاشت نمایی را از  $(v)$  به  $v$  تعریف می‌کنند.<sup>۲۵</sup> ما این  $p$  کش  $f$  را با انتقال اضافی با  $\text{Exp}_p^*$  نشان می‌دهیم تا بر ارتباط ژئودزیک آن با  $p$  کش معمولی  $f$  به  $T_p M$  تأثید کنیم. شکل ۱۶ یک ایده بصری از این  $p$  کش انتقال‌دهنده میدان‌های ویژگی به فضای مماس و نمایش‌های آن  $A$ <sup>۲۶</sup> و  $\text{Exp}_p^*[B]$  را روی  $\mathbb{R}^d$  نسبت به مختصات دهی‌های مختلف ارائه می‌دهد.

<sup>۲۱</sup> حتی مدل‌هایی که یک اتصال جایگزین (سازگار با  $G$ ) برای انتقال ویژگی‌ها فرض می‌کنند، معمولاً از اتصال کانونی لوی-چیوینتا برای محاسبه ژئودزیک‌ها و نگاشت‌های نمایی استفاده می‌کنند.

<sup>۲۲</sup> فرض کامل بودن ژئودزیکی  $M$  به این معناست که نگاشت‌های نمایی  $\exp_p$  برای هر  $p \in M$  روی کل فضای مماس  $T_p M$  تعریف شده‌اند. در مواردی که این فرض برقرار نباشد، می‌توان به پر کردن با صفر متولی شد، که معمولاً در شبکهای کانولوشنی برای تصاویر با تکیه‌گاه متاتحری استفاده می‌شود.

<sup>۲۳</sup> یک وضعیت بسیار مشابه، تعریف مشتقات کوواریانت را انگیزه‌مند می‌کند، که آن نیز نیاز به ترکیب اشیاء هندسی دارد که در فضاهای متفاوتی زندگی می‌کنند.

<sup>۲۴</sup> انتقال موازی در امتداد هر مسیر دیگری نیز به همان اندازه معتبر خواهد بود.



شکل ۱۶: یک میدان ویژگی  $f$  روی  $M$  و نمایش محلی آن  $T_p M$  روی  $\text{Exp}_p^* f$ . درست مانند پس کش معمولی  $\exp_p^* f$  از  $f$  در امتداد نگاشت نمایی  $T_p M \rightarrow M$  است،  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ ، پس کش انتقال دهنده بردارهای ویژگی  $f(\exp_p(v))$  را به بردارهای مماس  $v \in T_p M$  نسبت می‌دهد. با این حال، از آنچهایی که هدف ما نیاشت، پس کش شده با استفاده از یک کرnel کاتولوشن است، آن‌ها باید در یک فضای یکسان و نسبت به یک پیمانه یکسان در  $p$  داده شوند. بنابراین، پس کش انتقال دهنده علاوه بر این، انتقال دهنده موازی (سازگار با  $G$ ) را در امتداد ژودزیک  $(v)$  به  $p$   $\exp_p(v)$  به اعمال می‌کند. از طریق یک پیمانه  $\psi_p^X$ ، پس کش انتقال دهنده  $f$  روی  $T_p M$  را می‌توان روی  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c$   $[\text{Exp}_p^* f]^X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c$  بصورت  $[\text{Exp}_p^* f]^X(p) = \text{Exp}_p^* f(\exp_p(v))$  یان کرد. انتخاب‌های مختلف چارچوب‌های مرجع (ناظران) در اینجا با تغییر شکل‌های خطی مختلف میدان ویژگی مطابقت دارد. تبدیلات میدان کرnel و کاتولوشن‌های  $GM$  یک ویژگی خروجی  $(p)$  را در  $p$  با تطبیق یک کرnel  $K_p$  روی  $\text{Exp}_p^* f$  با  $\text{Exp}_p^* f(T_p M)$  محاسبه می‌کنند (یعنی انگرال حاصلضرب آنها را روی فضای مماس می‌گیرند؛ به معادله (۷۶) مراجعه کنید).  
مارمولک‌ها و پروانه‌ها با مجوز Creative Commons Attribution 4.0 International از توییتر اقتباس شده‌اند.

ما  $\text{Exp}_p^* f$  را با تعریف آن بر حسب عبارت مختصاتی اش نسبت به یک انتخاب پیمانه فرمول‌بندی می‌کنیم. برای این منظور، فرض کنید  $\psi_p^A$  یک پیمانه در  $p$  باشد که ویژگی‌های منتقل شده نهایتاً نسبت به آن بیان می‌شوند و  $\psi_{\exp_p(v)}^{\tilde{A}}$  یک پیمانه دلخواه در  $(v)$  باشد که بردار ویژگی در آن مکان را با یک بردار ضربی  $f^{\tilde{A}}(\exp_p(v)) \in \mathbb{R}^c$  نشان می‌دهد. فرض کنید

$$\rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{A \tilde{A}}) \quad (66)$$

انتقال دهنده موازی سازگار با  $G$  برای ضرایب بردار ویژگی در امتداد ژودزیک  $(v)$  به  $p$  باشد. سپس ما پس کش انتقال دهنده را در مختصات به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[\text{Exp}_p^* f]^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad v^A \mapsto [\text{Exp}_p^* f]^A(v^A) \\ := \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(\psi_p^A)^{-1}(v^A)}^{A \tilde{A}}) \cdot f^{\tilde{A}}(\exp_p(\psi_p^A)^{-1}(v^A)), \quad (67)$$

که در آن  $v = (\psi_p^A)^{-1}(v^A) \in T_p M$  بردار مماس بدون مختصات است که توسط ضرایب  $v^A$  از طریق  $\psi_p^A$  به آن ارجاع داده می‌شود. همانطور که قبلاً ادعا شد، انتخاب پیمانه  $\psi_{\exp_p(v)}^{\tilde{A}}$  در  $\exp_p(v)$  به دلیل استقلال مختصات تمام معادلات، بی‌ربط است و حذف می‌شود. به طور خاص، می‌توانستیم از هر پیمانه دیگری مانند  $\psi_{\exp_p(v)}^{\tilde{B}}$  در  $\exp_p(v)$  استفاده کنیم، که منجر به تبدیلات پیمانه  $\rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{A \tilde{B}}) = \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{A \tilde{A}}) \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{\tilde{A} \tilde{B}}) = \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{\tilde{B} \tilde{A}}) \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{\tilde{A} \tilde{B}}) = \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{\tilde{B} \tilde{A}})$  برابر باشد. برای ضرایب بردار ویژگی طبق معادله (۲۸) می‌شود، که هنگام ترکیب هر دو عبارت، یکدیگر را خشی می‌کنند.

با این حال، پس کش انتقال دهنده  $[\text{Exp}_p^* f]^A$  همچنان به پیمانه در  $p$  بستگی دارد و بنابراین تحت تبدیلات پیمانه  $g_p^{BA}$  در  $p$  تبدیل می‌شود. مانند هر تابع مختصاتی، قانون تبدیل آن توسط تبدیلات پیمانه بر روی دامنه  $\mathbb{R}^d$  و هم‌دامنه  $\mathbb{R}^c$  تعیین می‌شود. بنابراین به صورت زیر داده می‌شود:

$$[\text{Exp}_p^* f]^B = \rho(g_p^{BA}) \circ [\text{Exp}_p^* f]^A \circ (g_p^{BA})^{-1}, \quad (68)$$

که توسط نمودار جایگایی زیر خلاصه می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{[\text{Exp}_p^* f]^A} & \mathbb{R}^c \\ g_p^{BA} \downarrow & & \downarrow \rho(g_p^{BA}) \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{[\text{Exp}_p^* f]^B} & \mathbb{R}^c \end{array} \quad (69)$$

همانطور که در شکل ۱۶ به تصویر کشیده شده است،  $[\text{Exp}_p^* f]^B$  و  $[\text{Exp}_p^* f]^A$  باید به عنوان دیدگاه ناظران محلی (چارچوب‌های مرجع) مختلف به میدان ویژگی در نظر گرفته شوند.

در اصل، می‌توان ساختارهای جایگزینی را برای پس‌کش میدان‌های ویژگی از  $M$  به  $T_p M$  در نظر گرفت. تعریف ما از تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های  $GM$  در بخش‌های ۲.۲.۴ و ۳.۲.۴ در آدامه، مستقل از این انتخاب خاص است.

#### ۲.۲.۴ کرنل‌های مستقل از مختصات و تبدیلات میدان کرنل

کانولوشن‌های  $GM$  عملیات مستقلی از مختصات هستند که کرنل مشترک و یکسانی را در هر نقطه از خمینه اعمال می‌کنند. برای تفکیک واضح فرضیات، ابتدا تبدیلات میدان کرنل عمومی تری را مورد بحث قرار می‌دهیم که عملیات مستقلی از مختصات هستند اما الزام اشتراک‌گذاری وزن را کنار می‌گذارند. بنابراین، آن‌ها شیوه به کانولوشن‌های  $GM$  هستند اما در هر نقطه  $p$  از خمینه، کرنل بالقوه متفاوتی  $\mathcal{K}_p$  اعمال می‌کنند. به منظور رعایت اصل کوواریانس، عبارات مختصاتی این کرنل‌ها باید به شیوه‌ای اصولی تبدیل شوند، با این حال، خود کرنل‌ها بدون محدودیت باقی می‌مانند.

**کرنل‌های مستقل از مختصات:** از آنجایی که کانولوشن‌ها در یادگیری عمیق بین میدان‌های برداری ویژگی با ابعاد  $\mathbb{R}^{c_{\text{out}}}$  و  $\mathbb{R}^{c_{\text{in}}}$  نگاشت برقرار می‌کنند، کرنل‌های کانولوشن ماتریس-مقدار  $C_{\text{out}} \times C_{\text{in}}$  هستند. پیاده‌سازی‌های گسسته کانولوشن‌های  $d$ -بعدی روی فضاهای اقلیدسی معمولاً چنین کرنل‌هایی را به صورت آرایه‌هایی با شکل  $(s_1, \dots, s_d, c_{\text{out}}, c_{\text{in}})$  نمایش می‌دهند. محور اول یک شبکه فضایی از  $s_1 \times \dots \times s_d$  اختصاص داده شده است که در دو محور آخر کدگذاری شده است.<sup>۲۵</sup> در محيط پیکسل را نشان می‌دهند، که به هر کدام یک ماتریس  $C_{\text{out}} \times C_{\text{in}}$  اختصاص داده شده است که در عنوان آنرا آخر کدگذاری شده است. در محيط اقلیدسی، چنین کرنل‌هایی را می‌توان به عنوان نگاشت‌هایی توصیف کرد

$$K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}, \quad (70)$$

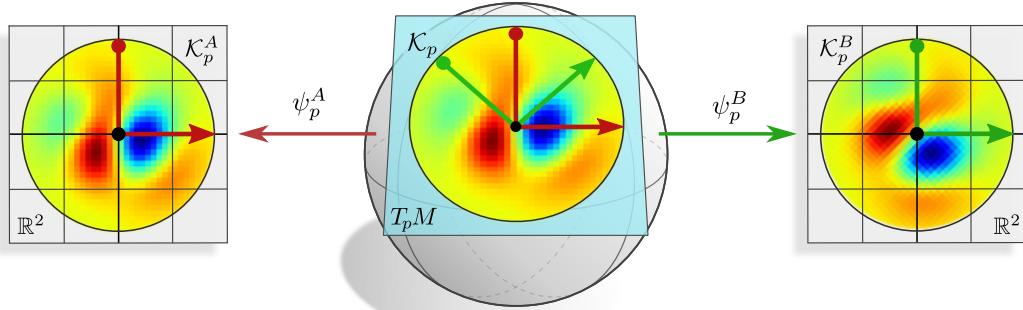
که یک ماتریس  $C_{\text{out}} \times C_{\text{in}}$  را به هر نقطه از  $\mathbb{R}^d$  اختصاص می‌دهد. همانطور که در بخش قبلی ۱.۲.۴ ذکر شد، ما کانولوشن‌های  $GM$  را به عنوان  $T_p M$  روی فضای مماس  $\text{Exp}_p^* f_{\text{out}}(T_p M)$  تطبیق پس‌کش انتقال‌دهنده  $\mathcal{K}_p$  که فضاهای مماس  $\mathbb{R}^d$  تعريف می‌کنیم. از آنجایی که فضاهای مماس مسطح هستند، طبیعی است که این تطبیق را مانند حالت کاملاً اقلیدسی معمول تعريف کنیم. بنابراین، ما کرنل‌های  $\mathcal{K}_p$  را از طریق عبارات مختصاتی شان تعريف می‌کنیم که شکل معادله (۷۰) را دارند، یعنی،

$$\mathcal{K}_p^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}. \quad (71)$$

شکل ۱۷ یک کرنل داده‌شده بدون مختصات را روی  $T_p M$  و تمايش‌های آن را روی  $\mathbb{R}^d$  نسبت به چارچوب‌های مرجع مختلف نشان می‌دهد.<sup>۲۶</sup>

<sup>۲۵</sup> چیدمان واقعی حافظه به چارچوب یادگیری عمیق خاص مورد نظر بستگی دارد.

<sup>۲۶</sup> ما تأکید می‌کنیم که در اینجا یک کرنل بدون مختصات  $\mathcal{K}_p$  را که روی  $T_p M$  داده شده است فرض می‌کنیم و عبارات مختصاتی آن  $\mathcal{K}_p^X$  را روی  $\mathbb{R}^d$  به چارچوب‌های مرجع  $X$  در نظر می‌گیریم. اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی بعداً ما را با این سؤال مواجه خواهد کرد که چگونه یک کرنل بدون مختصات  $\mathcal{K}_p$  را روی  $T_p M$  با توجه به یک کرنل الگوریتم  $K$  روی  $\mathbb{R}^d$  تعريف کنیم. پیوست؟! این دو مفهوم و ارتباط آنها را با  $G$ -راهنمایی کرنل توضیح می‌دهد.



شکل ۷: یک کرنل بدون مختصات  $K_p$  روی  $T_p M$  و عبارات مختصاتی آن  $\psi_p^X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{дане}} \times c_{\text{дане}}}$  نسبت به پیمانه‌های  $\psi_p^X$  (فقط یکی از کانال‌های کرنل  $\mathbb{R}^{c_{\text{дане}} \times c_{\text{дане}}}$  نشان داده شده است). تبدیلات پیمانه‌ای که مختصات دهی‌های مختلف یک کرنل را به هم مرتبط می‌کنند، از قوانین تبدیل دامنه و هم‌دامنه آنها پیروی می‌کنند. بنابراین برای هر  $v \in \mathbb{R}^d$  به صورت  $\psi_p^B(v) = \rho_{\text{дане}}(g_p^{BA}) K_p^A(v) \rho_{\text{дане}}(g_p^{BA})^{-1}$  داده می‌شوند. یک میدان کرنل  $K$  روی  $M$  یک تخصیص هموار از کرنل‌ها بر روی فضاهای مماس است (تعزیز ۴۹).

توجه داشته باشید که ما در اینجا فرض می‌کنیم کرنل روی  $T_p M$  داده شده است و سپس آن را نسبت به پیمانه‌های مختلف روی  $\mathbb{R}^d$  بیان می‌کنیم. این از نظر مفهومی با وضعیت نشان داده شده در شکل‌های ۲، ۵ و ۱۰ و ۴۹ متفاوت است، که در آنها فرض می‌کنیم یک کرنل الگو  $K$  روی  $\mathbb{R}^d$  داده شده است و سپس  $K_p$  را روی  $T_p M$  از طریق اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی نسبت به یک چارچوب مرجع تعریف می‌کنیم. برای حفظ اسقلال از مختصات در طول فرآیند اشتراک‌گذاری وزن، کرنل مشترک باید تحت تبدیلات پیمانه پایا (یا هموردا) باشد؛ به بخش ۲.۴ پیوست ۴۹ مراجعه کنید.

قانون تبدیل بین نمایش‌های مختصاتی  $K_p^B$  و  $K_p^A$  یک کرنل  $K_p$  روی  $T_p M$  طبق معمول از قوانین تبدیل دامنه و هم‌دامنه آنها پیروی می‌کند. در دامنه  $\mathbb{R}^d$  قانون تبدیل توسط  $g_p^{BA}$  داده می‌شود، در حالی که قانون تبدیل  $\mathbb{R}^{c_{\text{дане}} \times c_{\text{дане}}}$ ، همانند معادله (۵۰)، توسط یک ضرب همزمان از چپ با  $\rho_{\text{дане}}(g_p^{BA})$  داده می‌شود. بنابراین، دو مختصات دهی کرنل  $K_p$  برای هر  $v \in \mathbb{R}^d$  به صورت زیر با هم ارتباط دارند:

$$K_p^B(g_p^{BA}v) = \rho_{\text{дане}}(g_p^{BA}) \cdot K_p^A(v) \cdot \rho_{\text{дане}}(g_p^{BA})^{-1}, \quad (72)$$

که توسط نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{K_p^A} & \mathbb{R}^{c_{\text{дане}} \times c_{\text{дане}}} \\ g_p^{BA} \downarrow & & \downarrow \rho_{\text{дане}}(g_p^{BA}) [\cdot] \rho_{\text{дане}}(g_p^{BA})^{-1} \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{K_p^B} & \mathbb{R}^{c_{\text{дане}} \times c_{\text{дане}}} \end{array} \quad (73)$$

همانند مثال‌های بخش ۱.۴، اصل کوواریانس تنها نیازمند یک رفتار تبدیل سازگار بین مختصات دهی‌های مختلف کرنل است اما محدودیتی بر خود کرنل اعمال نمی‌کند. بنابراین می‌توان کرنل‌های  $K_p$  را برای هر  $p \in M$  و یک پیمانه دلخواه در  $p$  با یک کرنل ماتریس-مقدار نامحدود پارامتری کرد. میدان‌های هموار چنین کرنل‌هایی را به عنوان میدان‌های کرنل نشان می‌دهیم که نقش عمده‌ای در تحلیل ما از همودایی ایزومنتری کانولوشن‌های  $GM$  در بخش ۴۹ ایفا می‌کنند.

**تبدیلات میدان کرنل مستقل از مختصات:** با داشتن یک میدان کرنل هموار  $K$ ، می‌توانیم تبدیلات میدان کرنل را تعریف کنیم، که شبیه به کانولوشن‌ها هستند اما از این جهت متفاوتند که ممکن است در هر موقعیت مکانی یک کرنل متفاوت اعمال کنند. آنها یک میدان از بردارهای ویژگی خروجی  $(f(p))$  را با انتگرال‌گیری از حاصلضرب کرنل مربوطه  $K_p$  و پس‌کش انتقال‌دهنده  $f_p^*$  از  $T_p M$  روی  $f$  محاسبه می‌کنند، یعنی،

$$f(p) = \int_{T_p M} K_p(v) \operatorname{Exp}_p^* f(v) dv. \quad (74)$$

برای بیان این تعریف بدون مختصات، باید تمام کمیت‌ها را با عبارات مختصاتی شان جایگزین کرده و انتگرال‌گیری را از طریق پیمانه انتخاب شده از  $T_p M$  به  $\mathbb{R}^d$  متنقل کرد. همانطور که در پیوست ۴۹ توضیح داده شده است، عنصر حجم ریمانی مناسب (پایا نسبت به پیمانه) برای یک پیمانه  $\psi_p^A$  به صورت زیر داده می‌شود:

$$\sqrt{|\eta_p^A|} dv^A, \quad (75)$$

که در آن ضریب  $\sqrt{|\eta_p^A|}$ ، تعریف شده در معادله (۴۹)، حجم (مثبت) پوشیده شده توسط چارچوب مرجع  $[e_i^A]_{i=1}^d$  در  $p$  است. بنابراین، عبارت مختصاتی تبدیل میدان کرنل به صورت زیر است:

$$f_{\square\Box}(p) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) [\text{Exp}_p^* f_{\square\Box}]^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A. \quad (76)$$

استقلال از مختصات تبدیل میدان کرنل با بیان آن نسبت به یک پیمانه جایگزین  $\psi^B_p$  و نشان دادن اینکه میدان خروجی حاصل همانطور که انتظار می‌رود تبدیل می‌شود، تأیید می‌شود، که در واقع چنین است:

$$\begin{aligned} f_{\square\Box}(p) &\stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^B(v^B) [\text{Exp}_p^* f_{\square\Box}]^B(v^B) \sqrt{|\eta_p^B|} dv^B \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \rho_{\square\Box}(g_p^{BA}) \mathcal{K}_p^A((g_p^{BA})^{-1} v^B) \right] \left[ \text{Exp}_p^* f_{\square\Box} \right]^B(g_p^{BA}) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &\stackrel{(3)}{=} \rho_{\square\Box}(g_p^{BA}) \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) \left[ \rho_{\square\Box}(g_p^{BA})^{-1} [\text{Exp}_p^* f_{\square\Box}]^B(g_p^{BA} v^A) \right] \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &\stackrel{(4)}{=} \rho_{\square\Box}(g_p^{BA}) \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) [\text{Exp}_p^* f_{\square\Box}]^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &\stackrel{(5)}{=} \rho_{\square\Box}(g_p^{BA}) f_{\square\Box}^A(p) \end{aligned} \quad (77)$$

در اینجا ما از تعریف تبدیلات میدان کرنل و قانون تبدیل کرنل‌ها (معادله (۷۲)) در دو مرحله اول استفاده کردیم. مرحله سوم با بیرون کشیدن  $\rho_{\square\Box}$  از انتگرال و جایگزینی  $v^B = (g_p^{BA})^{-1} v^A$  به دست می‌آید، با استفاده از اینکه عنصر حجم  $\sqrt{|\eta_p^B|} dv^B = \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A$  به طور طراحی شده پایا نسبت به پیمانه است. دو مرحله آخر با شناسایی قانون تبدیل پس کش انتقال‌دهنده میدان ویژگی در معادله (۶۸) و تعریف تبدیل میدان کرنل در پیمانه  $\psi^B_p$  به دست می‌آیند. توجه داشته باشید که استقلال از مختصات تبدیل میدان کرنل، صحت قانون تبدیل کرنل در معادله (۷۲) را تأیید می‌کند.

یک تبدیل میدان کرنل تنها زمانی به خوبی تعریف می‌شود که انتگرال‌ها روی فضاهای مماس همگرا باشند، که به طور دقیق‌تر در بخش ۳.۲ و پیوست ۳.۲ ثابت می‌کند که توپولوژی کاغذ شرده برای کرنل‌های  $\mathcal{K}$  برای تضمین این خوش‌تعریفی کافی است. این قضیه همچنین ثابت می‌کند که تبدیلات میدان کرنل که بر اساس میدان‌های کرنل هموار هستند، میدان‌های ویژگی ورودی هموار را به میدان‌های ویژگی خروجی هموار نگاشت می‌کنند.

### ۳.۲.۴ کانولوشن‌های $\square\Box$ و کرنل‌های $\square\Box$ -راهبر

آزادی تبدیلات میدان کرنل در اعمال یک کرنل متفاوت در هر مکان، به آنها اجازه تعیین استنتاج آموخته شده را بر روی مکان‌های مختلف نمی‌دهد و بنابراین آنها را از نظر داده ناکارآمد می‌سازد. بنابراین، معمولاً کانولوشن‌ها در نظر گرفته می‌شوند، که می‌توان آن‌ها را به عنوان آن دسته از تبدیلات میدان کرنل خاصی دید که بر اساس میدان‌های کرنل کانولوشنی هستند، یعنی میدان‌های کرنل که توسط یک کرنل الگوی واحد و مشترک پارامتری شده‌اند. همانند قبل، یک اشتراک‌گذاری وزن مستقل از مختصات ییازمند آن است که کرنل‌های الگو نسبت به پیمانه همودرا ( $G$ -راهبر) باشند. این هموداری پیمانه‌ای کرنل‌های الگو تضمین می‌کند که الگوهایی که در ژست‌های هندسی مختلف و مرتبط با  $G$  ظاهر می‌شوند، تا یک تبدیل متناظر بردار ویژگی از طریق  $\rho_{\square\Box}$  پاسخ یکسانی را برانگیزند.

**اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی:** فرض کنید  $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square\Box} \times c_{\square\Box}}$  یک کرنل الگو باشد که باید روی تمام فضاهای مماس به اشتراک گذاشته شود. برای اینکه هیچ پیمانه خاصی را ترجیح ندهیم  $\square\Box$  که با نیاز ما به استقلال از مختصات در تضاد است  $\square\Box$  مجبوریم کرنل را با قرار دادن  $K_p^X = K$  در تمام پیمانه‌ها به طور همزمان به اشتراک بگذاریم. به طور ساده‌انگارانه، این به نظر می‌رسد که پیشنهاد می‌کند کرنل الگو را با قرار دادن  $K_p^X$  برای هر نقطه  $p \in M$  و هر پیمانه  $\psi^X$  در  $p$  به اشتراک بگذاریم. در حالی که چنین تعریفی از اشتراک‌گذاری کرنل معقول به نظر می‌رسد، از اصل ما برای اشتراک‌گذاری توابع الگوی محلی به معنای دقیق پیروی نمی‌کند: به جای اشتراک‌گذاری مستقیم کرنل، مهم است که کل عملیات محلی را به اشتراک بگذاریم  $\square\Box$  که در اینجا کل تبدیل انتگرالی در معادله (۷۶) است. از آنجایی که این عملیات بر حسب میدان کرنل  $\mathcal{K}$  پارامتری می‌شود، این به طور غیرمستقیم منجر به اشتراک‌گذاری کرنل الگو می‌شود، با این حال، با نتیجه‌ای کمی متفاوت از اشتراک‌گذاری ساده‌انگارانه در نظر گرفته شده در بالا.

برای یافتن تعریف صحیح میدان‌های کرنل کانولوشنی  $GM$  طبق اصل ما برای اشتراک‌گذاری توابع الگوی محلی، ابتدا باید این عملیات محلی را شناسایی کنیم. ما این کار را با انتزاع تبدیلات میدان کرنل (در مختصات) به عنوان مجموعه‌ای از عملگرهای انتگرالی محلی به شکل زیر انجام می‌دهیم:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{K}, p}^A : C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c) \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad F \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v) F(v) \sqrt{|\eta_p^A|} dv, \quad (78)$$

که در آن  $C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c)$  فضای نگاشت‌های هموار از  $\mathbb{R}^d$  به  $\mathbb{R}^c$  را نشان می‌دهد. در کاربرد ما، این نگاشت‌های هموار صرفاً نمایش‌های میدان ویژگی محلی  $[Exp_p^* f]^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c$  هستند که از فضاهای مماس در  $p$  دیده می‌شوند و توسط تبدیل میدان کرنل به یک بردار ویژگی خروجی  $f_{\mathcal{K},p}^A(p) = \mathcal{G}_{\mathcal{K},p}^A([Exp_p^* f]^A)$  در  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{من}} \times c_{\text{من}}}$  می‌شوند. با توجه به کرنل الگوی ما  $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{من}} \times c_{\text{من}}}$ ، ما یک الگوی عملگر انتگرالی متناظر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathfrak{I}_K : C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c) \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad F \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} K(\mathfrak{v}) F(\mathfrak{v}) d\mathfrak{v}, \quad (79)$$

که نمایش میدان محلی  $F$  را در کرنل الگو  $K$  ضرب کرده و سپس حاصلضرب آنها را انتگرال می‌گیرد. توجه داشته باشد که  $\mathfrak{I}_K$  به عنوان یک تابع الگو نزوماً نسبت به انتخاب‌های خاص پیمانه‌ها بی‌تفاوت است و بنابراین شامل ضریب حجم چارچوب نمی‌شود. یک طرح اشتراک گذاری وزن کاتولوشنی مستقل از مختصات  $G$  با الزام به اینکه این تابعک الگو با تمام عملگرهای انتگرالی منفرد در هر نقطه و در هر پیمانه موافق باشد، تحمیل می‌شود، یعنی:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{K},p}^X = \mathfrak{I}_K \quad \text{برای هر پیمانه } p \in U^X, \quad (80)$$

که در آن  $\mathcal{A}^G$  اطلاع  $G$  (ماکسیمال) متناظر با ساختار  $G$  در نظر گرفته شده است؛ به معادله (۲۵) مراجعه کنید. این معادل اشتراک گذاری مستقیم کرنل الگوی محلی طبق زیر است:

$$\mathcal{K}_p^X = \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^X|}} \quad \text{برای هر پیمانه } p \in U^X, \quad (81)$$

که در آن ضریب نرمال‌سازی «چگالی کرنل» را به اندازه حجم چارچوب مرجع  $\sqrt{|\eta_p^X|}$  کاهش می‌دهد. همانطور که در ادامه بحث می‌شود، این نرمال‌سازی برای همودایی تحت گروه‌های تقارن غیر حافظ حجم مهم است.

ما میدان‌های کرنلی را که توسط یک کرنل مشترک  $K$  طبق معادله (۸۱) پaramتری شده‌اند، به عنوان میدان‌های کرنل کاتولوشنی  $GM$  می‌نامیم. الزام همزمان برای اشتراک گذاری وزن و استقلال از مختصات منجر به یک قید همودایی بر روی کرنل‌های الگو می‌شود. برای استخراج این قید، اشتراک گذاری کرنل در معادله (۸۱) را در قانون تبدیل کرنل در معادله (۷۲)  $(G \text{-راهبری} \Rightarrow \text{قرار می‌دهیم})$ ، که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{1}{\sqrt{|\eta_p^B|}} K(g_p^{BA} \mathfrak{v}) = \frac{1}{\sqrt{|\eta_p^A|}} \rho_{\text{من}}(g_p^{BA}) \cdot K(\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\text{من}}(g_p^{BA})^{-1}. \quad (82)$$

از آنجایی که حجم‌های چارچوب‌های مرجع مختلف با  $\sqrt{|\eta_p^A|}$  مرتبط هستند و از آنجایی که قانون تبدیل باید برای پیمانه‌های دلخواه مرتبط با  $G$  برقرار باشد، این قید  $G$ -راهبری را ایجاد می‌کند<sup>۷۷</sup>

$$K(g \mathfrak{v}) = \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{من}}(g) \cdot K(\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\text{من}}(g)^{-1} \quad \forall \mathfrak{v} \in \mathbb{R}^d, g \in G. \quad (83)$$

بر روی کرنل‌های الگو، همانطور که توسط [۶] ثابت شده است، این قید نیازمند آن است که کرنل‌های الگو عملگرهای نمایش [۶] باشند (تعیین‌هایی از عملگرهای تانسوری کروی در مکانیک کواترونی)، از نظر نموداری، یک کرنل  $G$ -راهبری  $K$  باید جایجاً زیر را برآورده کند:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{K} & \mathbb{R}^{c_{\text{من}} \times c_{\text{من}}} \\ g \downarrow & & \downarrow \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{من}}(g) [\cdot] \rho_{\text{من}}(g)^{-1} \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{K} & \mathbb{R}^{c_{\text{من}} \times c_{\text{من}}} \end{array} \quad (84)$$

برای هر  $g \in G$ . توجه داشته باشد که ضریب دترمینان معکوس  $|\det g|$  در قانون تبدیل کرنل باعث می‌شود که آن مانند یک (۱)-چگالی ماتریس-مقدار تبدیل شود؛ برای جزئیات بیشتر به جدول ۲ مراجعه کنید. به طور شهودی، کرنل‌های  $G$ -راهبری دقیقاً آن کرنل‌هایی هستند که می‌توانند نسبت به چارچوب‌های مرجع دلخواه مرتبط با  $G$  به اشتراک گذاشته شوند بدون اینکه انتخاب خاص پیمانه بر نتیجه تأثیر بگذارد.<sup>۷۸</sup> بنابراین، ابهام

<sup>۷۷</sup> برخلاف کارهای قلبی [۶]، این قید شامل ضریب  $|\det g|$  است. این ضریب در آن کارها ظاهر نشد زیرا همه آنها گروه‌های ساختاری متعامد  $d$  (یا زیرگروه‌های آن) را در نظر گرفته بودند که برای آنها ضریب دترمینان صفر می‌شود.

<sup>۷۸</sup> قید  $G$ -راهبری را در می‌توان به صورت  $\rho_{\text{من}}(g)^{-1} \cdot \rho_{\text{من}}(g) \cdot K(g^{-1} \mathfrak{v}) = |\det g|^{-1} \rho_{\text{من}}(g) \cdot \rho_{\text{من}}(g) \cdot K(g^{-1} \mathfrak{v})$  با  $\mathfrak{v} \in \mathbb{R}^d, g \in G$  تعریف کرد، که تأکید می‌کند کرنل‌های  $G$ -راهبری پایاها تحت عمل پیمانه در سمت راست مستند. یک کرنل  $G$ -راهبری، با پایا بودن تحت تبدیلات پیمانه، منجر به همان کرنل بدون مختصات  $\mathcal{K}_p$  می‌شود، زمانی که نسبت به هر چارچوب مرجعی در  $G_p M$  به اشتراک گذاشته شود.

هم ترازی کرnel‌ها  $\square$  که انگیزه اصلی این کار بود  $\square$  با اشتراک گذاری وزن اضافی بر روی تمام چارچوب‌های مرجع معادل (تمام پیمانه‌ها) در ساختار  $G$  در نظر گرفته شده  $GM$  حل می‌شود.

	$\mathcal{K}_p^X$	$K$	$\mathcal{K}_p^X$	شیء
چگالی	۸	۰	-۱	۱

جدول ۲: مروی بر توانهای چگالی  $s$  برای اشیاء مختلف در گیر در تبدیلات میدان کرnel عمومی و کانولوشن‌های  $GM$ . عبارت مختصاتی یک  $s$ -چگالی با ضرب  $| \det g |^s$  تبدیل می‌شود و قی مختصات از طریق  $G \in$  تبدیل شوند. یک کرnel ماتریس-مقدار عمومی  $\mathcal{K}_p^X$  طبق معادله (۷۶) یک  $s$ -چگالی است. همین امر برای میدان‌های ویزگی و پس‌کش‌های آنها نیز صادق است که قوانین تبدیل آنها در معادلات (۲۸) و (۶۸) داده شده است. کل انتگرال‌ده  $\mathcal{K}_p^X$  از یک تبدیل میدان کرnel عمومی در معادله (۷۶) نیز یک  $s$ -چگالی دیده می‌شود  $\square$  توجه داشته باشد که این برای استقلال آن از مختصات، همانطور که در معادله (۷۷) نشان داده شده، ضروری است. از آنجایی که الگوی عملگر انتگرالی  $\mathcal{K}$  در معادله (۷۹) نسبت به هر انتخاب پیمانه بی‌تفاوت است، شامل ضرب حجم چارچوب  $\sqrt{|\eta^X|}$  نمی‌شود. از آنجایی که با این وجود باید مانند عملگرها ای انتگرالی  $\mathcal{G}_{\mathcal{K}, p}^X$  که زیربنای تبدیلات میدان کرnel هستند رفتار کند، کل انتگرال‌ده  $\mathcal{K}$  از  $(F(v))_{\mathcal{K}} \cdot \mathcal{G}_{\mathcal{K}, p}^X$  ملزم به بودن یک  $s$ -چگالی است. این امر مستلزم آن است که خود کرnel‌های الگوی مشترک  $K$  مانند  $(-1)^{-s}$ -چگالی‌ها تبدیل شوند، که در قید  $G$ -راهبری در معادله (۸۳) معنکس شده است. توجه داشته باشد که این قانون تبدیل کرnel‌های الگوی برای  $GM$  محظی کانولوشن‌های  $GM$  اکیداً صروری است اگر ویزگی‌های خروجی باید مانند چگالی‌های با وزن  $\square$  تبدیل شوند؛ به معادله (۸۹) مراجعه کنید. برای دیدگاهی جایگزین، خواننده علاقه‌مند را به نتیجه ۱ در [۴] ارجاع می‌دهیم، جایی که ضرب در مینیان از اندازه‌های هار روی گروه‌های لی استخراج می‌شود.

قبل از پرداختن به کانولوشن‌های  $GM$ ، در مورد فضای کرnel‌های  $G$ -راهبر توضیح می‌دهیم. توجه داشته باشد که مجموعه

$$\mathcal{K} := \left\{ K: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \mid K(gv) = \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{out}}(g) \cdot K(v) \cdot \rho_{\text{in}}(g)^{-1} \quad \forall v \in \mathbb{R}^d, g \in G \right\}. \quad (85)$$

کرnel‌های عمومی، یعنی نه لزوماً هموردا، با مجهر شدن به جمع و ضرب اسکالار استاندارد روی  $\mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$  یک فضای برداری تشکیل می‌دهد. از آنجایی که قید  $G$ -راهبری در معادله (۸۳) خطی است، فضای کرnel را به یک زیرفضای خطی محدود می‌کند:

$$\mathcal{K}_{\rho_{\text{out}}, \rho_{\text{in}}}^G := \left\{ K: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \mid K(gv) = \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{out}}(g) \cdot K(v) \cdot \rho_{\text{in}}(g)^{-1} \quad \forall v \in \mathbb{R}^d, g \in G \right\}. \quad (86)$$

بنابراین می‌توان برای یک پایه از کرnel‌های  $G$ -راهبر راه حلی یافت که کانولوشن  $GM$  را می‌توان بر حسب آن پارامتری کرد. در حالی که این فضای در تئوری معمولاً بی‌نهایت بعدی است، در عمل اغلب گستره می‌شود، به طوری که در نهایت با یک پایه متأثی  $\{K_1, K_2, \dots, K_N\}$  از کرnel‌های  $G$ -راهبر مواجه می‌شویم. سپس یک مجموعه از وزن‌های با مقادیر حقیقی  $\{w_1, \dots, w_N\}$  که در طول فرآیند آموزش بهینه‌سازی می‌شوند، کانولوشن را با  $w_i K_i = \sum_{i=1}^N w_i K_i$  پارامتری می‌کنند. توجه داشته باشد که ابعاد کاهاش یافته (زیر) فضای کرnel‌های  $G$ -راهبر به معنای بهبود کارایی پارامتر در مقایسه با کانولوشن‌های معمولی است.

بخش ?? به بحث در مورد راه حل‌های تحلیلی از فضاهای کرnel همودرای بازتابی برای نمایش‌های گروهی مختلف گروه بازتاب  $\mathcal{R}$  می‌پردازد. کرnel‌های حاصل که با انواع مختلفی از تقارن‌های بازتابی مشخص می‌شوند، در جدول ?? به تصویر کشیده شده‌اند.

مثال‌های بیشتری را می‌توان در ادبیات مربوط به شبکه‌های عصبی کانولوشنی راهبر یافت: یک راه حل تحلیلی برای قید فضای کرnel برای گروه ساختاری متعدد خاص  $\text{SO}(3)$  در سه بعد و نمایش‌های تحویل‌نپذیر آن توسط [۴] ارائه شد. [۴] این روش را برای پوشش نمایش‌های گروهی دلخواه  $G$  دادند و قید فضای کرnel را برای هر نمایشی از ۲ و تمام زیرگروه‌های آن  $\leq G$  حل کردند  $\square$  یک پیاده‌سازی در <https://quva-lab.github.io/e2cnn/api/e2cnn.kernels.html> موجود است. برای گروههای ساختاری متناهی، قید را می‌توان به صورت عددی نیز حل کرد، همانطور که توسط [۴] توضیح داده شده است. یک استراتژی راه حل کلی تر، که برای گروههای ساختاری فشرده دلخواه  $G$  (و بنابراین همه موارد ذکر شده در بالا) کاربرد دارد، توسط [۴] پیشنهاد شد. این راه حل قضیه کلاسیک ویگنر-اکارت [۴] را به یک قضیه ویگنر-اکارت برای کرnel‌های  $G$ -راهبر تعیین می‌دهد، که کرnel‌ها را بر حسب توابع پایه هارمونیک، ضرایب کلیش-گوردان و اندومورفیسم‌های نمایش‌ها (عناصر ماتریسی کاهاش یافته تعیین یافته) بیان می‌کند. ما برای مروی دقیق‌تر بر کارهای قبلی و مرتبط با کرnel‌های راهبر به [۴] ارجاع می‌دهیم.

**کانولوشن‌های مستقل از مختصات  $\square$ :** با داشتن یک کرnel الگوی  $G$ -راهبر  $K \star GM$  با این کرnel به عنوان  $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{out}}, \rho_{\text{in}}}^G$  کانولوشن  $GM$  متغیر تعیین شود، که برای هر نقطه  $p \in M$  و هر پیمانه  $\psi_p^X$  در  $GM$  در معادله (۷۶)، یعنی تبدیل میدان کرnel کانولوشنی  $GM$  به صورت زیر صدق می‌کند. با قرار دادن میدان کرnel کانولوشنی  $GM$  در معادله (۷۶)، عبارت مختصاتی کانولوشن  $GM$  به صورت زیر ساده می‌شود:

$$f_{\text{out}}^A(p) = [K \star f_{\text{in}}]^A(p) := \int_{\mathbb{R}^d} K(v) [\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^A(v) dv = \mathcal{I}_K([\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^A). \quad (87)$$

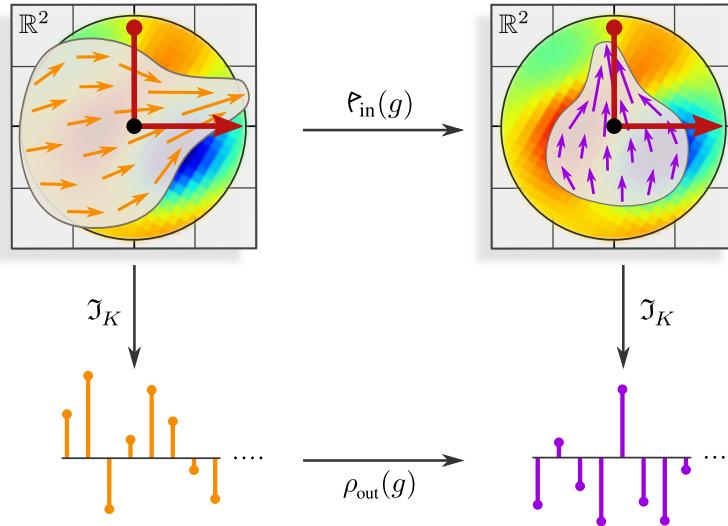
بنابراین، این به سادگی با تطبیق پس کش انتقال دهنده  $\text{Exp}_p^* f_{00}^A$  از میدان ویژگی در یک پیمانه دلخواه انتخاب شده  $\psi$  با کرنل کانولوشن مستقل از پیمانه  $K$  به دست می آید. بنابراین کانولوشن های مستقل از مختصات  $GM$  به راحتی با ۱) انتخاب چارچوب های مرجع دلخواه، ۲) پس کش (و انتقال) میدان های ویژگی به مختصات دهی های فضای مماس و ۳) انقباض آنها در آنجا با یک کرنل  $G$ -راهبر (قابل آموزش) پیاده سازی می شوند.

کانولوشن های  $GM$  چندین ویژگی تقارنی مربوط را از خود نشان می دهند:

استقلال از مختصات: به عنوان موارد خاصی از تبدیلات میدان کرنل، کانولوشن های  $GM$  به طور (غیرفعال) مستقل از مختصات هستند، یعنی معادله (۷۷) در مورد آنها صدق می کند.

هموردایی ایزومنتری سراسری: آنها تحت عمل فعال و سراسری ایزومنتری های حافظ ساختار  $G$  در  $\text{Isom}_{GM}$  بر روی میدان های ویژگی هموردا هستند. بخش های ۳.۴ و به ویژه ۴۴ این ویژگی را به تفصیل مورد بحث قرار می دهند.

هموردایی  $G$  محلی: الگوی عملگر انتگرالی  $\mathcal{J}_K$  به دلیل  $G$ -راهبری  $K$  خود  $G$ -هموردا است. بنابراین، هر تبدیل یک نمایش ییدان ویژگی محلی روی  $\mathbb{R}^d$  منجر به تبدیل متناظر بردار ویژگی حاصل خواهد شد؛ به شکل ۱۸ مراجعه کنید. بنابراین، تبدیلات  $G$  مستقل الگوهایی که در نقاط مختلف  $p_i \in M$  متتمرکز شده اند، منجر به تبدیلات ویژگی خروجی مستقل در این نقاط می شوند (این فقط در این نقاط برقرار است و نیازمند کرنل هایی با تکیه گاه فشرده است که کل میدان دید آنها طبق تبدیل  $G$  تبدیل شود).



شکل ۱۸: هموردایی  $G$  محلی الگوی عملگر انتگرالی مشترک  $\mathcal{J}_K$  که زیربنای یک کانولوشن  $K \star GM$  است. یک تبدیل  $G$  از یک نمایش میدان محلی روی  $\mathbb{R}^d$  بردارهای ویژگی را از  $g^{-1}\mathbb{R}^d$  به ۷ منطقه می کند و آنها را علاوه بر این از طریق  $(g)\rho_{000}g^{-1}$  تبدیل می کند. در حالی که اولی ویژگی ها را به صورت فضایی جابجا می کند، دومی ضرائب عددی آنها را تبدیل می کند (که در شکل به صورت چرخش و مقیاس بندی بردارهای (مماس) منفرد به تصویر کشیده شده است). اعمال  $\mathcal{J}_K$  به هر دو ورودی منجر به بردارهای ویژگی خروجی متفاوتی می شود. با این حال، به دلیل هموردایی  $G$  از  $\mathcal{J}_K$ ، تضمین می شود که پاسخ های  $\rho_{000}(g)$  مربوط هستند؛ به معادله (۸۹) مراجعه کنید. بنابراین، یک تبدیل  $G$  فعال متناظر از بردار ویژگی خروجی می شود. توجه داشته باشید که هموردایی  $G$  از  $\mathcal{J}_K$  یک نتیجه مستقیم از  $G$ -راهبری  $K$  است.

برای دقیق تر کردن نکته آخر، ما تبدیلات  $G$  فعال نمایش های میدان ویژگی محلی را در  $C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c)$  به صورت زیر تعریف می کنیم<sup>۶۹</sup>

$$\mathfrak{h}_{00}: G \times C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c), \quad F \mapsto \mathfrak{h}_{00}(g)F := \rho_{00}(g) \circ F \circ g^{-1}, \quad (88)$$

که در آن فرض می کیم  $F$  از نوع  $\rho_{00}$  است. به طور شهودی،  $\mathfrak{h}_{00}$  با انتقال فعال بردارهای ویژگی  $\rho(g^{-1}\mathbb{R}^d)$  از  $F(g^{-1}\mathbb{R}^d)$  به ۷ و تبدیل آنها با  $\rho_{00}(g)$  بر روی میدان های  $F$  عمل می کند<sup>۷۰</sup> این تعریف «معمولی» تبدیلات فعال میدان های ویژگی  $F$  بر روی فضاهای اقلیدسی  $\mathbb{R}^d$  است. هموردایی

$\mathfrak{b} = \text{Res}_G^{\mathbb{R}^d \times G} \text{Ind}_G^{\mathbb{R}^d \times G} \rho$  به طور رسمی با القای نمایش  $G$   $\rho$  به یک نمایش  $(\mathbb{R}^d \times G) \rho$  محدود کردن آن به  $G$  داده می شود. یک توضیح شهودی از نمایش های القایی و محدود شده را می توان در پیوست ۴۱ از [۴] یافت در حالی که [۴] این موضوع را به طور رسمی تر بررسی می کند.

ادعا شده برای  $\mathfrak{I}_K$  به راحتی با اعمال آن به یک ورودی تبدیل شده، و سپس جایگزینی و استفاده از  $G$ -راهبری  $K$  دیده می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{I}_K(\mathfrak{f}_{\square}(g)F) &= \mathfrak{I}_K(\rho_{\square}(g) \circ F \circ g^{-1}) && (\text{تعريف } \mathfrak{I}_K, \text{ معادله (88)}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \rho_{\square}(g) F(g^{-1}v) dv && (\text{تعريف } K, \text{ معادله (79)}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} K(g\tilde{v}) \rho_{\square}(g) F(\tilde{v}) |\det g| d\tilde{v} && (\tilde{v} = g^{-1}v) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_{\square\square}(g) K(\tilde{v}) F(\tilde{v}) d\tilde{v} && (\text{ـراهبری } K, \text{ معادله (83)}) \\
 &= \rho_{\square\square}(g) \mathfrak{I}_K(F) && (\text{تعريف } K, \text{ معادله (79)}) \tag{89}
 \end{aligned}$$

بنابراین، یک تبدیل فعال یک نمایش میدان ویژگی محلی  $F$  روی یک مختصات دهی فضای مماس با  $(g)$ <sup>۱۰</sup> تضمین می‌کند که منجر به تبدیل بردار ویژگی خروجی حاصل با  $(g)$  می‌شود. به عبارت دیگر، ویژگی‌هایی که در ژسته‌های هندسی مختلف مرتبط با  $G$  ظاهر می‌شوند، تا یک تبدیل از طریق  $\rho_{\square\square}$  پاسخ یکسانی را برمی‌انگیرند. این به طور خلاصه در قالب یک نمودار جابجایی به صورت زیر است:

$$\begin{array}{ccc}
 C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{c\square}) & \xrightarrow{\mathfrak{f}_{\square}(g)} & C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{c\square}) \\
 \downarrow \mathfrak{I}_K & & \downarrow \mathfrak{I}_K \\
 \mathbb{R}^{c\square\square} & \xrightarrow{\rho_{\square\square}(g)} & \mathbb{R}^{c\square\square} \tag{90}
 \end{array}$$

شکل ۱۸ یک تفسیر بصری از این ویژگی همودایی  $\mathfrak{I}$  ارائه می‌دهد.

توجه داشته باشد که همودایی تحت تبدیلات  $G$  محلی در معادله (۸۹) دقیقاً به قید  $G$ -راهبری همانطور که در معادله (۸۳) است، یعنی به طور خاص، با ضریب دترمینان<sup>۱۱</sup>  $|\det g|$  که باعث می‌شود کرنل مانند یک  $(-)$ -چگالی تبدیل شود، نیاز دارد. این ضریب به تعریف ما از اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی در معادله (۸۱) با نرمال‌سازی با حجم‌های چارچوب مرجع  $\sqrt{|\eta_p^X|}$  برمی‌گردد. بنابراین، اشتراک‌گذاری وزن ساده‌انگارانه‌ای که در ابتدای این بخش ذکر شد، به رفتار تبدیل مطلوب منجر نمی‌شود. به عبارت دیگر: هر دو نسخه ساده‌انگارانه و نرمال‌شده اشتراک‌گذاری کرنل مستقل از مختصات هستند و بنابراین هر دو تحت تبدیلات پیمانه غیرفعال  $\square$  به ویژه آنها که حجم چارچوب را تغییر می‌دهند  $\square$  به طور سازگار رفتار می‌کنند. با این حال، در مورد اشتراک‌گذاری کرنل ساده‌انگارانه، این امر توسط پایابی عنصر حجم ریمانی  $\sqrt{|\eta_p^A|} dv^A = \sqrt{|\eta_p^B|} dv^B$  مراجعت می‌شود. با حذف این ضریب در اشتراک‌گذاری وزن نرمال شده، سازگاری رفتار تبدیل دیگر توسط خود اندازه انتگرال‌گیری تضمین نمی‌شود  $\square$  که مستلزم آن است که خود کرنل‌های  $G$ -راهبر تغییرات حجم را از طریق ضریب دترمینان توضیح دهد. فقط دومی به تبدیلات فعل تعیین می‌یابد، جایی که فقط میدان ویژگی تبدیل می‌شود، در حالی که اندازه انتگرال‌گیری پایا می‌ماند.

از آنجایی که تعریف ما از کانولوشن‌های  $GM$  امکان خمینه‌های ریمانی، ساختارهای  $\square$  و انواع میدان دلخواه را فراهم می‌کند، بسیار عمومی است و طیف گسترده‌ای از کارهای مرتبط را پوشش می‌دهد. ما این ادعا در بخش<sup>۱۲</sup> اثبات می‌کنیم، جایی که بسیاری از CNN‌ها را روی فضاهای آفین اقلیدسی  $d$ ، کره  $S^d$  و خمینه‌ها یا مشاهی عمومی به عنوان نمونه‌های خاصی از معادله (۸۷) توضیح می‌دهیم. برای یک نمای کلی و طبقه‌بندی این مدل‌ها، به جدول<sup>۱۳</sup> مراجعه کنید.

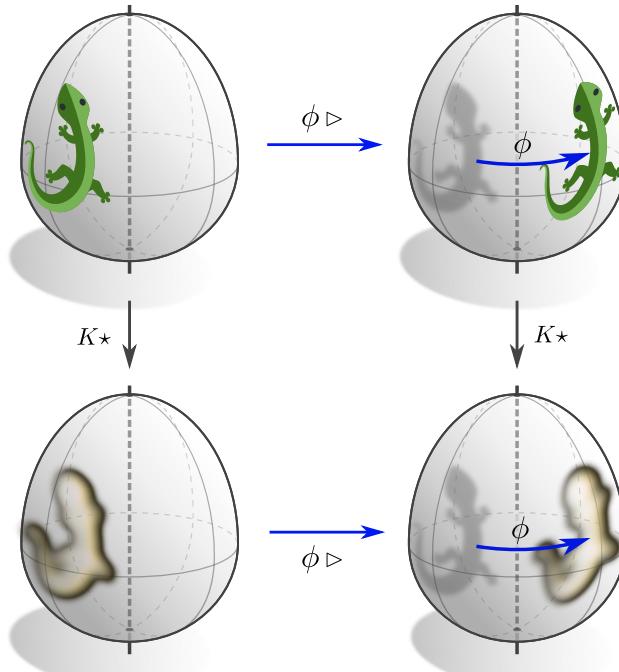
### ۳.۴ تناوب‌پذیری ایزومتری

با توجه به اینکه یک منفولد تقارن‌های نشان می‌دهد، معمولاً مطلوب است که شبکه‌های عصبی این تقارن‌ها را رعایت کنند، یعنی تحت عمل آن‌ها بر میدان‌های ویژگی تناوب‌پذیر باشد.  $GM$ -کانولوشن‌ها طراحی شده‌اند تا  $\text{Isom}_{GM}$ -تناوب‌پذیر باشند، که به این معنی است که آن‌ها با عمل ایزومتری‌ها در  $\text{Isom}_{GM}$  بر میدان‌های ویژگی جابجا می‌شوند، همانطور که در شکل ۱۹ بصری‌سازی شده است.<sup>۱۴</sup> در معادلات،  $G$ -کانولوشن  $K^*$  تناوب‌پذیر است زمانی که رابطه

$$K \star (\phi \triangleright f_{\square}) = \phi \triangleright (K \star f_{\square}) \quad \forall \phi \in \text{Isom}_{GM} \tag{91}$$

را برای هر میدان ورودی ممکن  $\square$  برآورده کند، یعنی زمانی که نمودار زیر جابجا باشد:

<sup>۱۰</sup> به یاد داشته باشد که عمل بر میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات  $GM$  تنها برای ایزومتری‌های حفظ‌کننده  $G$ -ساختار در  $\text{Isom}_{GM}$  قابل تعریف است. بنابراین حتی امکان تعریف مفهوم تناوب‌پذیری ایزومتری برای ایزومتری‌هایی که تقارن‌های  $G$ -ساختار نیستند وجود ندارد. توجه داشته باشد که این بدون از دست دادن کلیت است زیرا همیشه می‌توان گروه ساختار  $d$  را انتخاب کرد که برای آن  $\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M)$  با کل گروه ایزومتری منطبق می‌شود.



شکل ۱۹: گفته می شود یک لایه شبکه تحت ایزومتری‌ها تناوب‌پذیر است زمانی که با عمل آن‌ها بر میدان‌های ویژگی جابجا می‌شود.  $-GM$ -کانولوشن‌ها طراحی شده‌اند تا نسبت به آن ایزومتری‌های  $\phi \in \text{Isom}_{GM}$  که تقارن‌های  $K^*$  تحت عمل ایزومتری  $\phi$  تناوب‌پذیر است زمانی که رابطه  $(\phi \triangleright f_{\square\square}) = \phi \triangleright (K^* \star f_{\square\square})$  برآورده کند. این رابطه توسط انتخابی از میدان ورودی  $f_{\square\square}$  برآورده کند. این رابطه توسعه نمودار جابجایی در معادله (۹۲) بصری‌سازی شده است که تفسیر گرافیکی آن در این شکل نشان داده شده است.

اینکه  $-GM$ -کانولوشن‌ها  $\text{Isom}_{GM}$ -تناوب‌پذیر هستند بر این حقایق تکیه دارد که ۱) کرنل‌ها در کل منفولد به اشتراک گذاشته می‌شوند، ۲) ایزومتری‌ها عقب‌کشی انتقال‌دهنده میدان‌های ویژگی را حفظ می‌کنند و ۳) اینکه  $\text{Isom}_{GM}$ -تبدیل‌های گیج با مقدار  $G$  را القا می‌کند که توسط  $-G$ -استیریبل بودن کرنل در نظر گرفته می‌شود.

(مارمولک‌ها تحت مجوز Creative Commons Attribution 4.0 International) اقتباس شده با مجوز Twitter

$$\begin{array}{ccccc}
 & f_{\square\square} & \xrightarrow{\phi \triangleright} & \phi \triangleright f_{\square\square} & \\
 & \downarrow K^* & & \downarrow K^* & \\
 f_{\square\square} & \xrightarrow{\phi \triangleright} & \phi \triangleright f_{\square\square} & &
 \end{array} \quad (92)$$

به عنوان اولین قدم به سوی اثبات تناوب‌پذیری ایزومتری  $-GM$ -کانولوشن‌ها، به یاد بیاورید که آن‌ها به صورت نقطه‌ای به عنوان انقباض یک کرنل  $K$  با عقب‌کشی انتقال‌دهنده  $[Exp_p^* f_{\square\square}]^A$  از میدان ورودی  $f_{\square\square}$  تعریف می‌شوند. از آنجا که ایزومتری‌ها به طور تعریف هندسه ریمانی  $M$  را حفظ می‌کنند، به ویژه نگاشت نمایی ریمانی و انتقال‌دهنده‌های لوی-چیویتا را حفظ می‌کنند؛ به بخش ۴۰ و شکل ۴۰ مراجعه کنید.<sup>۳۱</sup> این امر دلالت دارد بر اینکه عقب‌کشی انتقال‌دهنده میدان پیش‌برده  $f_{\square\square} \triangleright \phi$  در  $(p) \phi$  تها با تبدیل گیج القا شده توسط ایزومتری از عقب‌کشی انتقال‌دهنده میدان اصلی  $f_{\square\square}$  در  $p$  متفاوت خواهد بود، یعنی:

$$[Exp_{\phi(p)}^*(\phi \triangleright f_{\square\square})]^A = \rho_{\square\square}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) \circ [Exp_p^* f_{\square\square}]^{\tilde{A}} \circ g_\phi^{A\tilde{A}}(p)^{-1}; \quad (93)$$

مقایسه کنید با معادله (۶۸) و، برای فرمول‌بندی مستقل از مختصات، قصیه ۴۰.

با توجه به این همانی، تناوب‌پذیری ایزومتری  $-GM$ -کانولوشن‌ها توسط محاسبه ساده زیر اثبات می‌شود که به طور اساسی از  $G$ -استیریبل بودن کرنل قالب  $K$  برای توضیح عمل گیج القا شده توسط ایزومتری استفاده می‌کند:

<sup>۳۱</sup> به طور کلی تر، هر زمان که یک اتصال جایگزین  $G$ -سازگار برای انتقال بردارهای ویژگی انتخاب شود، فرض می‌کنیم این اتصال تحت عمل  $\text{Isom}_{GM}$  ناورداد باشد؛ به بخش ۴۰ مراجعه کنید. این فرض برای همه مدل‌هایی که در برسی ادبیات در بخش ۴۰ پوشش داده شده‌اند، برآورده می‌شود.

$$\begin{aligned}
[K \star (\phi \triangleright f_{\square})]^A(\phi(p)) &\stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} K(v) [\text{Exp}_{\phi(p)}^*(\phi \triangleright f_{\square})]^A(v) dv \\
&\stackrel{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \left[ \rho_{\square}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) [\text{Exp}_p^* f_{\square}]^{\tilde{A}}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)^{-1}v) \right] dv \\
&\stackrel{(3)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \left[ K(g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \tilde{v}) \rho_{\square}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) \right] [\text{Exp}_p^* f_{\square}]^{\tilde{A}}(\tilde{v}) |\det g_\phi^{A\tilde{A}}(p)| d\tilde{v} \\
&\stackrel{(4)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \rho_{\square}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) K(\tilde{v}) \right] [\text{Exp}_p^* f_{\square}]^{\tilde{A}}(\tilde{v}) d\tilde{v} \\
&\stackrel{(5)}{=} \rho_{\square}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) \cdot f_{\square}^{\tilde{A}}(p) \\
&\stackrel{(6)}{=} [\phi \triangleright f_{\square}]^A(\phi(p)) \\
&\stackrel{(7)}{=} [\phi \triangleright (K \star f_{\square})]^A(\phi(p))
\end{aligned} \tag{94}$$

قدم اول از تعریف  $GM$ -کانولوشن‌ها در معادله (۸۷) پیروی می‌کند در حالی که قدم دوم تبدیل گیج القا شده را طبق معادله (۹۳) وارد کرد. جایگزینی از  $\tilde{v}$  به  $v = g_\phi^{A\tilde{A}}(p)^{-1}\tilde{v}$  قدم سوم را توجیه می‌کند. در قدم چهارم  $G$ -استیریبل بودن کرnel قالب، یعنی معادله (۸۳)، اعمال می‌شود (معادله (۴۴)) را به پاد بیاورید که بیان می‌کند تبدیل‌های گیج القا شده توسط  $\text{Isom}_{GM}$  دارای مقدار  $G$  هستند. نتیجه این است که بردار ویژگی خروجی حاصل توسط تبدیل گیج القا شده تبدیل می‌شود. پس از شناسایی این به عنوان بیان مختصاتی پیش‌برد میدان خروجی در معادله (۴۶)، گزاره پیروی می‌کند. از آنجا که همه قسمها برای ایزومنتری‌های دلخواه در  $\text{Isom}_{GM}$  معتبر هستند، می‌بینیم که  $GM$ -کانولوشن‌ها به طور خودکار نسبت به هر ایزومنتری حفظ کننده  $G$ -ساختار تناوب‌پذیر هستند. آن‌ها لزوماً نسبت به ایزومنتری‌های عمومی در  $(G, \text{Isom}(M))$  که ممکن است  $G$ -ساختار را رعایت نکنند تناوب‌پذیر نیستند، با این حال، تناوب‌پذیری کامل ایزومنتری برای گروه‌های ساختار متعممد  $d$  (یا ابرگروه‌های آن) تضمین شده است.

**میدان‌های کرnel ناوردایی:** تحلیل عمیق‌تری از تناوب‌پذیری ایزومنتری تبدیل‌های میدان کرnel عمومی را می‌توان در بخش‌های (۲) و (۱) یافت. نتیجه اصلی این برورسی قصبه (۱) است که بیان می‌کند تناوب‌پذیری ایزومنتری یک تبدیل میدان کرnel، ناوردایی ایزومنتری میدان کرnel آن را نتیجه می‌دهد و بالعکس. شکل (۱) چنین میدان کرnel ناوردایی را بصری‌سازی می‌کند که ملزم به اشتراک وزن‌ها بر روی مدارات عمل ایزومنتری است. ناوردایی مورد نیاز میدان کرnel از نظر شهودی قابل فهم است زیرا تناوب‌پذیری ایزومنتری مطمئناً یازماند ثابت بودن استنتاج شبکه بر روی هر مدار است. این نتیجه انتزاعی تناوب‌پذیری ایزومنتری  $GM$ -کانولوشن‌ها را با مشاهده اینکه میدان‌های کرnel  $GM$ -کانولوشنی که توسط یک کرnel قالب منفرد و مشترک که تعیین می‌شوند تحت ایزومنتری‌ها در  $\text{Isom}_{GM}$  ناوردایی هستند، نتیجه می‌دهد؛ به قصبه (۱) و شکل (۱) مراجعه کنید.  $G$ -استیریبل بودن کرnel قالب بدین ترتیب ناوردایی کرnel‌ها تحت عمل زیرگروه‌های پایدار کننده گروه ایزومنتری را توضیح می‌دهد.

**فضاهای همگن:** در حالی که تقاضای تناوب‌پذیری ایزومنتری نیازمند آن است که کرnel‌ها بر روی مدارات گروه ایزومنتری به اشتراک گذاشته شوند، به طور کلی نیازمند اشتراک وزن کانولوشنی در کل منیفوولد نیست. یک استثنای مهم حالت منیفلد‌هایی است که فضاهای همگن گروه ایزومنتری خود هستند، مانند  $\mathbb{R}^d$  یا کره  $S^d$ . به طور تعریف، عمل ایزومنتری در چنین فضاهایی متعدد است، یعنی تنها یک مدار منفرد وجود دارد. در نتیجه، تنها یک کرnel مستقل وجود خواهد داشت که از طریق عمل گروه ایزومنتری در کل فضای اشتراک گذاشته می‌شود. قصبه (۱) در بخش (۱) ثابت می‌کند که تبدیل‌های میدان کرnel تناوب‌پذیر ایزومنتری در فضاهای همگن لزوماً کانولوشن‌های مستقل از مختصات هستند. این مشاهده پیوند رسمی بین نظریه ما و کارهای قبلی در مورد شبکه‌های کانولوشنی در فضاهای همگن توسط (۱) و (۲) برقرار می‌کند که کانولوشن‌ها را از طریق تناوب‌پذیری آن‌ها نسبت به تقارن‌های سراسری فضای زیرین تعریف می‌کنند.

**تناوب‌پذیری دیفُومورفیسم:** خواننده ممکن است تعجب کند که آیا امکان کاملاً دیفُومورفیسم تناوب‌پذیر کردن های  $\square$  مستقل از مختصات ما وجود دارد یا نه. همانطور که به راحتی می‌توان دید، عملیات نقطه‌ای از بخش (۱)، یعنی  $\square \times \square \times \square \times \dots \times \square$ ، یا میاس‌ها و غیرخطی‌ها، از قبل دیفُومورفیسم تناوب‌پذیر هستند. به طور خاص، بگذرید

$$\text{Diff}_{GM} := \left\{ \phi \in \text{Diff}(M) \mid [\phi_*(e_i)]_{i=1}^d \in GM \quad \forall [e_i]_{i=1}^d \in GM \right\} \leq \text{Diff}(M) \tag{95}$$

زیرگروه دیفُومورفیسم‌های حفظ کننده  $G$ -ساختار باشد، یعنی آنالوگ معادله (۴۲) بدون نیاز به اینکه  $\phi$  ایزومنتری باشد. مشابه معادله (۴۴) و قصبه (۱)، بیان‌های مختصاتی (تبدیل‌های گیج القا شده) دیفُومورفیسم‌های حفظ کننده  $G$ -ساختار تضمین شده‌اند که مقادیری در  $G$  بگیرند، یعنی:

$$\phi \in \text{Diff}_{GM} \iff g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \in G \quad \forall p \in M. \tag{96}$$

$G$ -تناوب پذیری توابع قالب نقطه‌ای مشترک تضمین خواهد کرد که آن‌ها با این تبدیل‌های گیج القا شده توسط  $\text{Diff}_{GM}$  جابجا شوند  $\square$  و بنابراین با خود عمل دیفیوورفیسم فعال.

از طرف دیگر،  $GM$ -کانولوشن‌ها با کرنل‌های گسترده فضایی، به طور کلی نسبت به دیفیوورفیسم‌ها تناوب پذیر نیستند. دلیل این امر آن است که عقب کشی انتقال‌دهنده  $f$  بر نگاشت‌های نمایی تکیه می‌کند که ذاتاً ساختارهای ریمانی هستند که با دیفیوورفیسم‌ها جابجا نمی‌شوند. با اینکه حال، از آنجا که کرنل‌ها  $G$ -استریبل هستند، تناوب پذیری  $\text{Diff}_{GM}$  باید در حد صفر رفن پشتیانی کرنل همچنان برقرار باشد. با توجه به اینکه کرنل‌های کانولوشن در کاربردهای معمول یادگیری عمیق کاملاً کوچک هستند، تناوب پذیری دیفیوورفیسم باید در عمل تقریباً برقرار باشد.

**تناوب پذیری آفین:** فضاهای اقلیدسی حالت خاصی را تشکیل می‌دهند  $\square$  زیرا امکان  $GM$ -کانولوشن‌هایی را فراهم می‌کنند که تحت عمل گروه‌های آفین  $\text{Aff}(G)$  تناوب پذیر هستند. اینکه چنین است به این حقیقت تکیه دارد که نگاشت نمایی در فضاهای اقلیدسی نه تنها با عمل ایزومنتری ها بلکه به طور کلی تر با تبدیل‌های آفین جابجا می‌شود. تناوب پذیری گروه آفین  $GM$ -کانولوشن‌های اقلیدسی در بخش  $\square$  ثابت شده است.

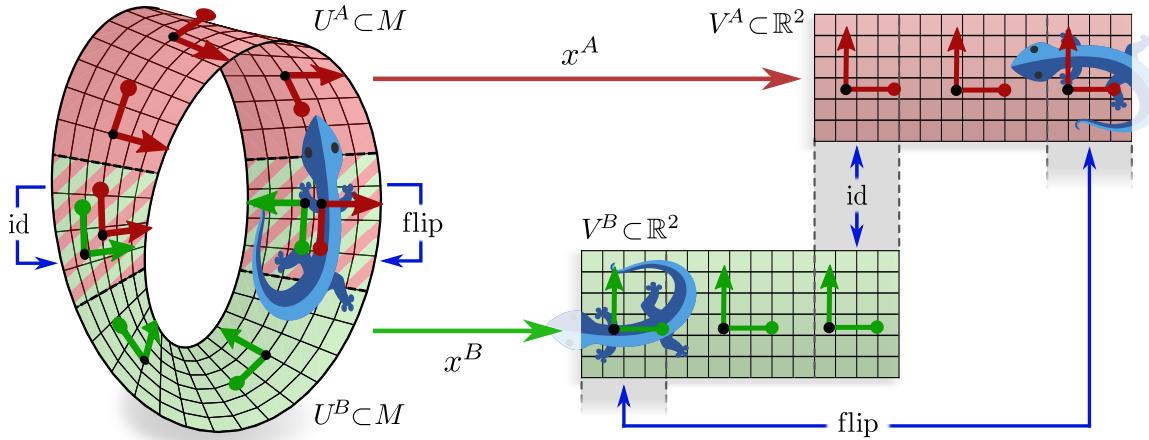
## ۵ مدل اسباب بازی: کانولوشن‌های موبیوس هموردای بازتابی

برای ملموس تر کردن ملاحظات نظری در بخش‌های قبل، آنکوون به یک کاربرد نمونه می‌پردازیم. کانولوشن‌های  $GM$  روی نوار موبیوس، با اینکه اهمیت عملی فوری ندارند، یک مدل اسباب بازی مناسب هستند زیرا هندسه و نظریه نمایش در گیر در آن به طور خاص ساده هستند. به دلیل عدم جهت‌گیری آن، چار چوب‌های مرچ را فقط می‌توان تا حد بازتاب‌ها به صورت (هموار) ارجح دانست. همانطور که انتظار می‌رود، CNN‌های مستقل از مختصات، که توابع الگوی هموردای بازتابی را اعمال می‌کنند، از یک پیاده‌سازی ساده و ابسطه به مختصات بهتر عمل می‌کنند. علاوه بر این، نشان داده می‌شود که آنها تحت عمل گروه ایزومنتری نوار موبیوس هموردا هستند.

بعش بعدی ۱.۵ به بحث در مورد هندسه نوار موبیوس مسطح می‌پردازد. به دلیل پیچش آن، گروه ساختار آن را نمی‌توان بیشتر از گروه بازتاب  $G = \mathcal{R}$  کاهش داد، به طوری که باید یک اطلس  $\mathcal{R}$  از گیج‌ها را همانطور که در شکل ۲۰ به تصویر کشیده شده است، در نظر گرفت. گروه ایزومنتری توسط دوران‌ها در امتداد نوار داده می‌شود و تبدیلات گیج  $\mathcal{R}$ -مقدار را القا می‌کند. میدان‌های ویژگی  $\mathcal{R}M$ -مستقل از مختصات که برخی از آنها در بخش ۲.۵ معرفی شده‌اند، لزوماً باید مطابق با نمایشی از گروه بازتاب تبدیل شوند. بخش  $\square$  عملیات شبکه کانولوشنی مستقل از جهت‌گیری را مورد بحث قرار می‌دهد. این بخش به طور خاص مفهوم کرنل‌های  $G$ -راهبر را روشن می‌کند اما بایاس‌ها و غیرخطی‌های هموردای بازتابی را نیز پوشش می‌دهد. یک پیاده‌سازی عددی از خانواده مدل پیشنهادی در بخش  $\square$  مورد بحث و ارزیابی قرار می‌گیرد. کد به صورت عمومی در آدرس <https://github.com/mauriceweiler/MobiusCNNs> در دسترس است.

### ۱.۵ هندسه نوار موبیوس

خمینه  $M$  مورد نظر، نوار موبیوس مسطح با مرز است که در شکل ۴ (راست) نشان داده شده است. می‌توان آن را به گونه‌ای تصور کرد که با گرفتن یک زیرمجموعه مستطیلی  $[0, Y] \times [0, X]$  از  $\mathbb{R}^2$  و چیزی‌اند دو انتهای متقابل به روی پیچ خورده ساخته شده است. نوار موبیوس که این‌گونه تعریف شده، متريک کانوني  $\mathbb{R}^2$  را به اirth می‌برد که به آن یک ساختار ریمانی می‌بخشد. این متريک به طور خاص یک اتصال لوی-چبیتا و در نتیجه نگاشت‌های نمایی و انتقال‌دهنده‌های موازی را مشخص می‌کند که در ادامه بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرند.



شکل ۲۰: هندسه مسطح نوار موبیوس امکان وجود زیرمجموعه‌های محلی را فراهم می‌کند که می‌تواند به صورت ایزومنتریک با زیرمجموعه‌های متاظر  $\mathbb{R}^2$  شناسایی شوند. ما یک اطلس ایزومنتریک را ثابت می‌کنیم که شامل دو چارت  $x^A$  و  $x^B$  روی  $U^A$  (قمز) و  $U^B$  (سبز) است که کل نوار را پوشش می‌دهند. گیج‌های  $\psi_p^X := \hat{dx}_p^X : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d$  به عنوان دیفرانسیل‌های چارت القا می‌شوند. به دلیل پیچش نوار موبیوس، تابع گذار  $g_p^{BA}$  در یکی از نواحی همپوشانی بدینهی خواهد بود، در حالی که ناحیه دیگر لزوماً بین گیج‌ها از طریق بازتاب‌ها  $s$  گذار خواهد کرد. بنابراین، اطلس انتخاب‌شده از چارت‌ها یک اطلس  $\mathcal{R}$  را ایجاد می‌کند که شامل دو چارچوب بازتاب شده در هر نقطه از  $M$  است. هر یک از چارت‌های یک میدان چارچوب هموار محلی را القا می‌کند که توسط پایه‌های مخصوصی  $x^i$   $i=1, \dots, d$  داده می‌شود. بازتاب در تابع گذار در یک همپوشانی، به صورت بازتاب چارچوب‌ها نشان داده می‌شود.

(مارمولک‌ها با مجوز Creative Commons Attribution 4.0 International با تشکر از توییتر اقبال‌شده‌اند.)

اولین سوالی که هنگام ساخت یک CNN مستقل از مختصات باید به آن پاسخ داد این است که انتخاب چارچوب‌های مرتع تا چه حد مبهم است. با توجه به متريک ريماني روی نوار، می‌توانيم توجه خود را به چارچوب‌های معتماد محدود کنیم. علاوه بر اين، می‌توان یکی از دو جهت در امتداد نوار را برای رفع ابهام (هموار) دوران چارچوب‌های مرتع با هم تراز کردن محورهای اول آنها با اين جهت، مشخص کرد. اين کار ما را با ابهام دست‌ساني چارچوب مواجه می‌کند، که دو جهت گيری آن متاظر با دو جهت ممکن محور دوم چارچوب عمود بر نوار است. نوار موبیوس به عنوان یک خمينه غرقاً جهت گيری، يك انتخاب هموار (يا حتى پيوسته) سراسري از چارچوب را نمي‌پذيرد. برای به دست آوردن شهودی از اين گزاره، تلاش برای ساخت يك میدان چارچوب هموار را با انتخاب يك چارچوب دلخواه در يك موقعیت تصادفی و گسترش هموار اين انتخاب بر روی کل نوار در نظر بگيريد. پس از يك دور كامل حول نوار، چارچوب‌های ساخته شده به ناچار نیست به چارچوب‌های اولیه بازتاب خواهد شد و بنابراین با همواري مورد نظر در تضاد خواهد بود. بنابراین از نظر توپولوژيکي غيرممکن است که يك ساختار  $\{e\}$ ، يعني يك میدان چارچوب هموار سراسري، بر روی نوار موبیوس تعریف کنیم. بنابراین ما يك گروه ساختار کاهش ناپذير باقی می‌مانیم:

$$G = \mathcal{R} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad (97)$$

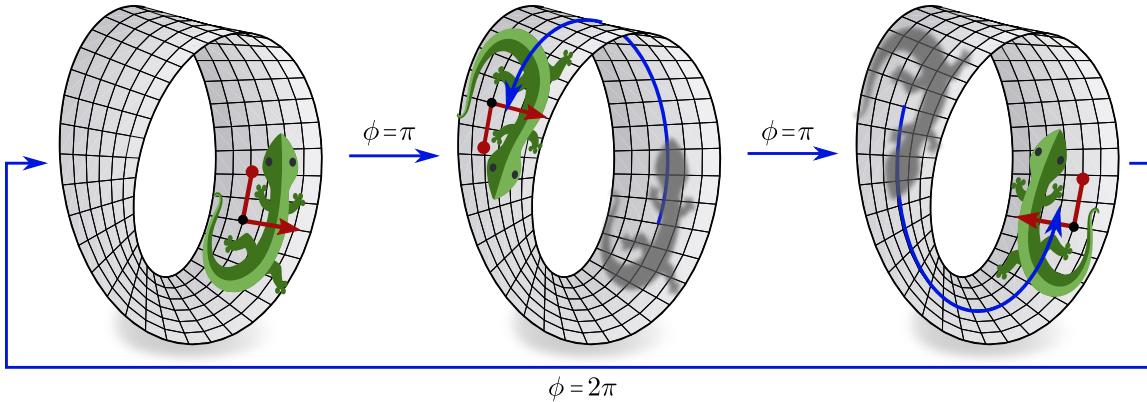
که بازتاب چارچوب‌ها را مدل می‌کند. گروه بازتاب تنها شامل دو عنصر است، همانی  $e$  و بازتاب (回転)  $s$ ، که طبق جدول ضرب ساده زیر ترکیب می‌شوند:

$$\begin{array}{c|cc} s & e \\ \hline s & e & e \\ e & s & s \end{array} \quad (98)$$

تنها گزاره غیربدینهی در این جدول این است که دو بازتاب یکدیگر را ختنی می‌کنند، يعني  $e = e^{-1} = s^{-1}$ . با توجه به کاهش ناپذيری گروه ساختار  $\mathcal{R}$ ، ما در ادامه باید ساختار  $\mathcal{R}$  متاظر  $\mathcal{RM}$  را در نظر بگیریم که شامل دو چارچوب با دست‌ساني مخالف در هر نقطه از نوار موبیوس است.

برای کد گذاري میدان‌های ویژگی  $\mathcal{RM}$ -مستقل از مختصات هموار روی  $M$ ، باید یک اطلس  $\mathcal{R}$  مشخص کرد که شامل گیج‌های  $\mathcal{R}$ -مرتب است که کل نوار را پوشش می‌دهند. ما انتخاب می‌کنیم که این کار را با ثابت کردن یک اطلس از چارت‌ها انجام دهیم:

$$x^X : U^X \rightarrow V^X \subset \mathbb{R}^4 \quad (99)$$



شکل ۲۱: تصویری از گروه ایزومنتری‌های حافظ ساختار  $\mathcal{R}$  از نوار موبیوس، که با  $(2)$   $\text{Isom}_{\mathcal{RM}}$  ایزومنور است. این گروه شامل تمام دوران‌ها در امتداد نوار است. به دلیل پیچش، یک دوران به اندازه  $2\pi$  یعنی یک بار به دور نوار، هنوز آن را به خودش باز نمی‌گرداند بلکه منجر به یک بازتاب می‌شود. پس از یک دور دوم، یعنی یک دوران کلی  $4\pi$ ، نوار به خودش باز می‌گردد. تبدیلات گیج القا شده مقادیری در  $\mathcal{R}$  می‌گیرند.  
 (مارمولک‌ها با مجوز Creative Commons Attribution 4.0 International با تشکر از توپیتر افیاس شده‌اند).

که نوار را پوشش می‌دهند، و سپس گیج‌ها را از آن القا می‌کنیم. شکل ۲۰ چنین اطلاعی را به تصویر می‌کشد که شامل دو چارت  $x^A$  و  $x^B$  روی  $U^A$  (قرمز) و  $U^B$  (سبز) است که دو نیمه همپوشان نوار را به صورت ایزومنتریک به نواحی مستطیلی متناظر از  $\mathbb{R}^2$  نگاشت می‌کنند. همانطور که در پیوست  $\S$  توضیح داده شده است، چارت‌ها گیج‌های را القا می‌کنند که توسط دیفرانسیل‌های چارت داده می‌شوند، یعنی:

$$\psi_p^X := \hat{d}x_p^X : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{and} \quad p \in U^X \quad X = A, B. \quad (100)$$

در این صورت توابع گذار با ژاکوبیان  $g^{BA} = \frac{\partial x^B}{\partial x^A}$  منطبق هستند. به دلیل پیچش، نگاشت‌های گذار در یکی از دو ناحیه همپوشان همگی بدیهی هستند، یعنی  $e = g_p^{BA} = e$  و در انتهای دیگر لزوماً بازتاب شده هستند، یعنی  $g_p^{BA} = s$ . بنابراین اطلاع القا شده از گیج‌ها در واقع به عنوان یک اطلاع  $\mathcal{R}$  شناسایی می‌شود. میدان‌های چارچوب هموار محلی متناظر با گیج‌ها، که از چارت‌های مختصاتی مشتق شده‌اند، فقط پایه‌های مختصاتی معمول هستند، یعنی چارت‌چوب‌های  $[e_i^X]_{i=1}^d$  در  $p \in U^X$  توسط  $\left[ \frac{\partial}{\partial x_i^X} \right]_{|p}^d$  داده می‌شوند. از آنجا که چارت‌ها ایزومنتریک هستند، میدان چارچوب القا شده به طور خودکار متuumad است. با این حال، دو ناحیه مستطیلی  $V^A$  و  $V^B$  در  $\mathbb{R}^2$  باید نسبت به یکدیگر چرخانده شوند تا یک اطلاع  $\mathcal{R}$  و یک ساختار متناظر  $\mathcal{RM}$  را القا کنند.

باید تأکید کنیم که رویکرد القای گیج‌ها از طریق چارت‌های مختصاتی اکیداً ضروری نیست  $\square$  این فقط یک گزینه مناسب است زیرا نوار موبیوس مسطح به صورت محلی با نواحی از  $\mathbb{R}^2$  به روشنی ایزومنتریک شناسایی می‌شود. این امر بعداً به ما امکان می‌دهد تا شبکه‌های نمونه برداری منظم را از  $\mathbb{R}^2$  مانند شبکه پیکسلی  $\mathbb{Z}^2$  به شبکه‌های نمونه برداری منظم روی نوار منتقل کنیم. از آنجا که این کار برای خمینه‌هایی که به صورت محلی مسطح نیستند، مانند مش‌ها در گرافیک کامپیوترا، امکان پذیر نیست، بیشتر پیاده‌سازی‌ها روی خمینه‌های عمومی (یا مش‌ها) مختصات را بالافاصله به فضاهای مماس تخصیص می‌دهند؛ به بخش  $\S$  مراجعه کنید.

اتصال کانونی لوی-چیویتا روی نوار موبیوس یک مفهوم انتقال موازی بردارهای مماس را تعریف می‌کند. از آنجا که نوار به صورت محلی با صفحه ایزومنتریک است، این انتقال را می‌توان در تکه‌های محلی به عنوان مسطح کردن این تکه‌ها به یک صفحه و حرکت دادن بردارها طبق معمول روی  $\mathbb{R}^2$  در ک کرد. اگر هیچ تکه واحدی نتواند مسیری  $\gamma$  را پوشش دهد، یک روش باز وجود خواهد داشت به طوری که انتقال کامل با دنباله‌ای از انتقال دهنده‌ها بر روی تکه‌های محلی توضیح داده می‌شود. به راحتی می‌توان دید که انتقال نسبت به چارت‌چوب‌های اطلاع  $\mathcal{R}$  انتخاب شده، مقادیری  $g_{\gamma}^{A\bar{A}}$  در گروه بازتاب  $\mathcal{R}$  خواهد گرفت. این بدان معنی است که اتصال لوی-چیویتا با  $\mathcal{RM}$  سازگار با  $\mathcal{R}$  است. بنابراین، انتقال دهنده‌های خوش تعریف  $(g_{\gamma}^{A\bar{A}})$  از بردارهای ویژگی  $\mathcal{R}$ -مربط را ایجاد می‌کند.

گروه ایزومنتری‌هایی که ساختار  $\mathcal{R}$  را حفظ می‌کنند، شامل تمام دوران‌هایی است که نوار را در امتداد خودش جابجا می‌کنند. توجه داشته باشید که یک دوران به اندازه  $2\pi$  به دور نوار، با همانی مطابقت ندارد بلکه نوار را به صورت بازتاب شده روی خودش نگاشت می‌کند. تنها یک دوران به اندازه  $4\pi$  یعنی دو دور کامل، نوار را به خودش باز می‌گرداند.<sup>۳۳</sup> عمل گروه ایزومنتری بر روی خمینه و بر روی چارت‌چوب‌های مرجع در شکل ۲۱ به تصویر کشیده شده است. نسبت به مختصات، عمل ایزومنتری تبدیلات گیج  $\mathcal{R}$ -مقدار را القا خواهد کرد.

<sup>۳۳</sup> بنابراین دیده می‌شود که نوار موبیوس استوانه را به عنوان پوشش مضاعف خود دارد.

## ۲.۵ میدان‌های ویژگی مستقل از جهت‌گیری

اصل کوواریانس ایجاد می‌کند که میدان‌های ویژگی روی نوار موبیوس  $\mathcal{R}$ -مستقل از مختصات باشند، یعنی باید به طور معادل نسبت به چارچوب‌های هر یک از دو دست‌سانی قابل بیان باشند. بنابراین آنها با انتخابی از یک نمایش گروهی  $(c) : \mathcal{R} \rightarrow \text{GL}(1)$  مشخص می‌شوند، که تبدیل بردارهای ویژگی عددی را هنگام جابجایی بین دو جهت گیری مشخص می‌کند. ما در ادامه چند انتخاب ممکن از چنین انواع میدانی را مورد بحث قرار خواهیم داد. خواندن ممکن است بخواهد بررسی کند که نمایش‌های پیشنهادی در واقع همومورفیسم‌های گروهی هستند و در  $\rho(g)\rho(h) = \rho(g)\rho(h)$ ,  $\forall g, h \in \mathcal{R}$  صدق می‌کنند، همانطور که در بخش ۲.۳ و پانوشت ۱۳ خواسته شده است.

پایه‌ای ترین مثال، که برای هر گروه ساختاری وجود دارد، نمایش بدیهی است:

$$\rho_{\text{id}} : \mathcal{R} \rightarrow \text{GL}(1), \quad \begin{aligned} e &\mapsto [1] \\ s &\mapsto [1] \end{aligned} \quad (101)$$

که ماتریس همانی  $1 \times 1$  را به هر دو عنصر گروه اختصاص می‌دهد. این نمایش، میدان‌های اسکالار  $f^A(p) \in \mathbb{R}^1$  را مدل می‌کند که شامل بردارهای ویژگی یک بعدی هستند که مختصات بندی آنها تحت  $f^A(p)$  بازتاب‌ها علامت خود را تغییر می‌دهند، یعنی،  $\rho_{\text{id}}(s) \cdot f^A(p) = f^A(s \cdot p)$ . از آنجا که نمایش بدیهی و نمایش علامت-معکوس یک بعدی هستند، هر دو نمایش‌های تحويل‌ناپذیر  $\mathcal{R}$  گروه بازتاب هستند.<sup>۳۳</sup> در واقع، این دو تنها نمایش‌های تحويل‌ناپذیر گروه بازتاب هستند.

$$\rho_{\text{id}} : \mathcal{R} \rightarrow \text{GL}(1), \quad \begin{aligned} e &\mapsto [1] \\ s &\mapsto [-1] \end{aligned} \quad (102)$$

این نمایش، ماتریس همانی منفی  $1 \times 1$  را به بازتاب‌ها اختصاص می‌دهد و بنابراین میدان‌های شباهنگال را توصیف می‌کند، یعنی میدان‌های ویژگی یک بعدی هستند که ضرایب عددی آنها  $f^A(p) \in \mathbb{R}^1$  تحت بازتاب‌ها علامت خود را تغییر می‌دهند، یعنی،  $\rho_{\text{id}}(s) \cdot f^A(p) = f^A(s \cdot p)$ . از آنجا که نمایش بدیهی و نمایش علامت-معکوس یک بعدی هستند، هر دو نمایش‌های تحويل‌ناپذیر  $\mathcal{R}$  گروه بازتاب هستند.

از آنجا که  $\mathcal{R}$  یک گروه متناهی است، دارای یک نمایش منظم متناهی-بعدی (دو-بعدی) است:

$$\rho_{\text{id}} : \mathcal{R} \rightarrow \text{GL}(2), \quad \begin{aligned} e &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ s &\mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (103)$$

که عناصر گروه را با ماتریس‌های جایگشت نمایش می‌دهد. بنا به تعریف، نمایش منظم جایگشت عناصر گروه در  $\mathcal{R}$  را هنگام عمل بر روی خودشان مدل می‌کند. این را با ستون‌های جدول ضرب در معادله (۹۸) مقایسه کنید: ستون میانی را می‌توان ناشی از عمل  $(e) \rho_{\text{id}}$  بر روی ستون سمت چپ در نظر گرفت، در حالی که عناصر جایجا شده گروه در ستون راست با جایگشت توصیف شده توسط عمل  $(s) \rho_{\text{id}}$  بر روی ستون چپ مطابقت دارد. میدان‌های ویژگی منظم  $\mathcal{R}$  از  $f^A(p) \in \mathbb{R}^2$  به صورت عددی با بردارهای ویژگی دو-بعدی  $\rho_{\text{id}}(s) \cdot f^A(p) = \begin{bmatrix} f^A_{1,1}(p) \\ f^A_{2,1}(p) \end{bmatrix}$  نمایش داده می‌شوند که دو کانال آنها تحت

$$\text{بازتاب‌ها جایجا می‌شوند، یعنی: } \rho_{\text{id}}(s) \cdot f^A(p) = \begin{bmatrix} f^A_{1,1}(p) \\ f^A_{2,2}(p) \end{bmatrix}$$

نمایش منظم تحويل‌ناپذیر است، یعنی شامل دو زیرفضای ناوردای سره است که در این مورد با نمایش بدیهی و علامت-معکوس مطابقت دارند. بنابراین می‌توان آن را به طور معادل به صورت ساخته شده از جمع مستقیم  $\rho_{\text{id}} \oplus \rho_{\text{id}}$  از آن دو نمایش تحويل‌ناپذیر و یک تغییر پایه  $Q$  در نظر گرفت:

$$\rho_{\text{id}}(g) = Q (\rho_{\text{id}} \oplus \rho_{\text{id}})(g) Q^\top \quad \text{می‌توان} \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (104)$$

اعتبار این گزاره به راحتی با قرار دادن سمت راست برای هر دو عنصر گروه تأیید می‌شود:

$$Q (\rho_{\text{id}} \oplus \rho_{\text{id}})(e) Q^\top = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \rho_{\text{id}}(e) \quad (105)$$

<sup>۳۳</sup> گروه بازتاب با گروه دوری  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  از مرتبه دو ایزومنورف است. به خوبی شناخته شده است که نمایش‌های تحويل‌ناپذیر گروه‌های دوری از مرتبه  $N$  با ریشه‌های  $N$  واحد مطابقت دارند، که برای  $2 = N$  فقط  $+1$  (بدیهی) و  $-1$  (علامت-معکوس) هستند.

$$Q(\rho_{\text{}} \oplus \rho_{\text{}})(s) Q^\top = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} = \rho_{\text{}}(s) \quad (106)$$

به طور کلی تر، هر نمایش متناهی-بعدی از گروه‌های فشرده (شامل گروه‌های متناهی) به طور کامل قابل تحويل به یک جمع مستقیم از نمایش‌های تحويل ناپذیر است [؟؟؟]. این شان می‌دهد که هر بردار ویژگی کروواریانت، که تحت یک گروه ساختار فشرده تبدیل می‌شود، تا یک تغییر پایه می‌تواند از ویژگی‌های نمایش تحويل ناپذیر ساخته شود. همانطور که در [؟؟] استدلال شده است، در این مورد در واقع امکان کاهش هر عملیات شبکه خطی به عملیات معادل بین میدان‌های نمایش تحويل ناپذیر وجود دارد، که ساخت فضای کرنل‌های  $G$ -راهبر را در معادله (۸۶) و بایاس‌های ناوردا را در معادله (۶۳) ساده می‌کند. با این حال، همانطور که در ادامه خواهیم دید، انتخاب خاص پایه از انواع میدان معادل، تأثیر کاملاً قابل توجهی بر عملکرد مدل دارد. دلیل این است که عملیات شبکه غیرخطی به پایه انتخاب شده حساس هستند، یعنی به یک انتخاب خاص از انواع میدان معادل.

بخش ۱۱.۲ میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را بر حسب عبارات مختصاتی آن‌ها نسبت به انتخابی از گیج روی محله‌های محلی  $U \subseteq M$  معرفی کرد. از آنجا که وجود گیج‌های سراسری به طور کلی از نظر توبولوژیکی مانع دارد، نمایش‌های مختصاتی سراسری میدان‌های ویژگی به طور کلی وجود ندارند. بخش ۱۱.۲ این مسئله را با تجمع محتوای سراسری میدان‌های ویژگی از عبارات مختصاتی محلی آن‌ها نسبت به اطلاعی از گیج‌های  $M$  را پوشش می‌دهند، برطرف کرد. یک جایگزین ظرفیت، تعریف میدان‌های ویژگی سراسری در یک فرمالیسم انتزاعی و مستقل از مختصات بر حسب بندل‌های فیر است. تسهیم‌های بندل امکان بازیابی عبارات مختصاتی محلی میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را فراهم می‌کنند.

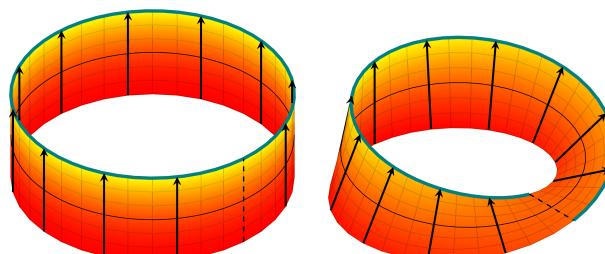
بخش‌های زیر توصیف سراسری و مستقل از مختصات شبکه‌های عصبی و فضاهای ویژگی از بخش ۱۱.۲ را توسعه می‌دهند. بخش ۶ بندل‌های فیر، به ویژه بندل مماس،  $G$ -ساختارها و بندل‌های بردار ویژگی  $G$ -مرتبه را معرفی می‌کند. عملیات شبکه عصبی مانند تبدیل‌های میدان کرنل و کانولوشن‌های  $GM$  در بخش ۶ تعریف می‌شوند. بخش ۶ همودایی ایزومنتری این عملیات را بررسی می‌کند.

## ۶ بندل‌های مرتبه و میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات

میدان‌های کمیت‌های هندسی بر روی خمینه‌ها به عنوان برش‌هایی از بندل‌های فیر رسمی سازی می‌شوند (معادله (۱۲۵)). هر خمینه هموار به طور طبیعی مجهز به بندل مماس و بندل چارچوب خود است. انتخاب یک  $G$ -بندل از چارچوب‌های مرتع است، امکان تعریف بندل‌های بردار ویژگی  $G$ -مرتبه را فراهم می‌کند. فضاهای ویژگی شبکه‌های عصبی مستقل از مختصات ما فضاهایی از میدان‌های ویژگی هستند، یعنی برش‌هایی از این بندل‌های بردار ویژگی. بندل‌های فیر به طور کلی در بخش ۱۶ مورخ می‌شوند. بخش ۲۶ بندل مماس  $TM$  و بندل چارچوب  $FM$  را مورد بحث قرار می‌دهد.  $G$ -ساختارها، که زیرمجموعه‌هایی از چارچوب‌های مرتع هستند که توسط ساختار هندسی داده شده بر روی خمینه متمایز می‌شوند، در بخش ۳۶ معرفی می‌شوند.  $G$ -بندل‌های مرتبه، از جمله بندل‌های بردار ویژگی  $A$ ، از  $G$ -ساختار ساخته می‌شوند. بخش ۴۶ جزئیات تسهیم‌های محلی (گیج‌ها)  $TM$ ،  $FM$  و  $GM$  را ارائه می‌دهد، که مختصات را دوباره معرفی می‌کند و فرمول‌بندی بخش ۳ را بازیابی می‌کند. تبدیل مقابله میدان‌های ویژگی تسهیم شده با ضرایب بردار مماس و چارچوب‌های مرتع تمهیم شده از این رواز فرمول‌بندی مستقل از مختصات از طریق  $G$ -بندل‌های مرتبه به دست می‌آید. بخش ۵۶ انتقال‌دهنده‌های موازی بر روی بندل‌های مرتبه را مورد بحث قرار می‌دهد، به ویژه اینکه چگونه آن‌ها یکدیگر را القا می‌کنند. تمام مفاهیم ارائه شده در اینجا در هندسه دیفرانسیل به خوبی ثبت شده‌اند و به راحتی در ادبیات یافت می‌شوند [۴۴-۴۷]. سهم ما ارائه یک توضیح جامع است که بین نظریه ریاضی و کاربرد آن در یادگیری عمیق هندسی پل می‌زنند.

### ۱.۶ مقدمه‌ای کوتاه بر کلاف‌های تاری

به طور شهودی، یک کلاف تاری را می‌توان فضایی در نظر گرفت که با گرفتن یک فضای دیگر موسوم به فضای پایه، در مورد ما خمینه  $M$ ،  $F$ ،  $S^1$  چسباندن فضای دیگری  $F$  موسوم به تار، به هر یک از نقاط آن ساخته می‌شود. یک مثال بدینهی، حاصلضرب مستقیم  $F \times M$  خواهد بود. با این حال، تارها به طور کلی می‌توانند به روشهای پیچ خورده به هم متصل شوند، به طوری که کلاف حاصل از نظر توبولوژیکی با یک حاصلضرب متفاوت باشد. به عنوان مثال، فرض کنید فضای پایه دایره  $S^1 = M$  و تار، پاره خط  $F = [-1, 1]$  باشد. حاصلضرب مستقیم آنها  $S^1 \times F = [-1, 1]$  یک استوانه را تشکیل می‌دهد؛ به شکل (۲۲) (چپ) مراجعه کنید. در مقابل، اگر تارها به گونه‌ای چسبانده شوند که پس از یک دور کامل حول دایره، "وارونه" شوند، نوار موبیوس به دست می‌آید که یک کلاف تاری غیربدینهی است و از نظر توبولوژیکی با استوانه تقاضوت دارد؛ به شکل (۲۲) (راست) مراجعه کنید. ۳۵۳۴ توجه داشته باشید که نوار موبیوس به صورت محلی شبیه به حاصلضرب مستقیم  $F \times U$  از یک جزء خطی  $S^1 \subseteq U$  با تار  $F$  است. همانطور که در ادامه بحث می‌شود، کلاف‌های تاری طبق تعریف همیشه می‌توانند به صورت محلی به حاصلضرب‌های مستقیم بدینهی سازی شوند.



شکل ۲۲: یک استوانه و یک نوار موبیوس. هر دو کلاف، دایره  $S^1$  را به عنوان فضای پایه و پاره خط‌های  $[-1, 1]$  را به عنوان تار مشترک دارند، با این حال، ساختار توبولوژیکی آنها به واسطه یک پیچش در تارها متفاوت است.

(شکل ۲۲) برای جلوگیری از تأکید می‌کنیم که این مثال، نوار موبیوس را به عنوان یک کلاف تاری با فضای پایه (خمینه)  $S^1$  در نظر می‌گیرد. در مقابل، تمام شکل‌های قبلی که شامل نوار موبیوس بودند، آن را به عنوان فضای پایه (خمینه)  $M$  برای کانولوشن در نظر می‌گرفتند.

<sup>۳۵</sup> علاوه بر این، باید اشاره کنیم که پیکان‌های نشان داده شده در شکل فقط برای تأکید بر پیچش در نوار موبیوس هستند. آنها به معنای جهت چسباندن مانند نمودارهای چسباندن نیستند.

ما به کلافهای تاری علاقه مندیم زیرا آنها امکان توصیف سراسری

میدان‌ها روی خمینه‌ها را فراهم می‌کنند. به عنوان مثال، یک میدان باد روی کره  $M = S^2$  یک میدان برداری مماس است که به هر نقطه  $p$  از  $M$  یک بردار مماس در  $T_p M$  نسبت می‌دهد. کلاف تاری متناظر، کلاف مماس  $TM$  است که تمام فضاهای مماس را به هم متصل می‌کند و بنابراین به عنوان یک کلاف تاری با فضای پایه  $M = S^2$  و تار  $\mathbb{R}^d \cong T_p M$  شناسایی می‌شود. مشابه تارهای نوار موبیوس، فضاهای مماس یک خمینه خمیده به طور کلی به روشی کانونی به هم متصل نیستند، بلکه ذاتاً نسبت به یکدیگر پیچ خورده‌اند. بنابراین، کلاف مماس به طور کلی از نظر توپولوژیکی با یک حاصل‌ضرب متایز است، یعنی  $TM \times \mathbb{R}^d \not\cong M \times \mathbb{R}^d$ . به منظور تعریف میدان‌های برداری ویژگی  $C$ -بعدی، ما بعداً کلافهایی با فضای پایه  $M$  و فضاهای برداری ویژگی  $\mathbb{R}^c$  به عنوان تار در نظر خواهیم گرفت.

**کلافهای تاری به طور کلی:** به طور رسمی، یک کلاف تاری ساختاری  $(E, M, \pi, F)$  است که از فضاهای توپولوژیکی  $E$  (فضای کلی)،  $M$  (فضای پایه) و  $F$  (تار نوعی) و یک نگاشت تصویر پیوسته و پوشاننده  $E \rightarrow M$  :  $\pi$  تشکیل شده است. یک کلاف تاری به صورت محلی بدیهی شدنی است، به این معنی که برای هر نقطه  $p \in M$  یک همسایگی محلی  $U \subseteq M$  از  $p$  وجود دارد که کلاف، محدود به آن، شبیه به یک حاصل‌ضرب مستقیم  $F \times U$  است. بدیهی بودن محلی توسط همسان‌ریختی  $\pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  :  $\Psi$  فرمول‌بندی می‌شود که نمودار جابجایی زیر را برابر ورده می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Psi} & U \times F \\ \pi \downarrow & \nearrow \text{proj}_1 & \\ M & \xrightarrow{\pi} & U \end{array}, \quad (107)$$

یعنی،

$$\pi = \text{proj}_1 \circ \Psi, \quad (108)$$

که در آن  $U \times F \rightarrow U$  :  $\text{proj}_1$  نگاشت تصویر طبیعی روی عامل اول را نشان می‌دهد. کلافی که به صورت سراسری با حاصل‌ضرب  $H \times F$  همسان‌ریخت باشد، بدیهی نامیده می‌شود. کلاف‌ها اغلب به طور خلاصه به صورت  $E \xrightarrow{\pi} M$  یا فقط  $E$  نوشته می‌شوند و تار نوعی و فضای پایه به طور ضمنی فرض می‌شوند. از آنجا که میدان‌های چارچوب هموار را در نظر می‌گیریم، فرض می‌کنیم  $E, M$  و  $F$  هموار و  $\pi$  و  $\Psi$  نگاشت‌های هموار (دیفنتومورفیسم) باشند.

بدیهی بودن محلی  $E \xrightarrow{\pi} M$  ایجاب می‌کند که تصویر معکوس  $E_p := \pi^{-1}(p)$  که تار روی  $p$  نامیده می‌شود، با تار نوعی  $F$  دیفنتومورف باشد. همانند بخش ۳ ماده دیفنتومورفیسم‌هایی را که تارها روی نقاط مختلف را با تار نوعی یکی می‌دانند با  $F$  :  $E_p \rightarrow F$  نشاند. بدیهی سازی‌های محلی در این صورت بر حسب این دیفنتومورفیسم‌ها به صورت زیر داده می‌شوند:

$$\Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F, \quad e \mapsto (\pi(e), \psi_{\pi(e)}(e)). \quad (109)$$

اگر تار نوعی  $F$  و تارهای  $E_p$  روی ساختار اضافی داشته باشند، لازم است که دیفنتومورفیسم‌های  $E_p \rightarrow F$  :  $\psi_p$  این ساختار را حفظ کنند، یعنی یکریختی باشند.<sup>۳۷</sup> به عنوان مثال، اگر  $F$  و  $E_p$  ساختار فضای برداری داشته باشند، آنگاه  $\psi_p$  باید خطی باشد.

به طور کلی، انتخاب خاص بدیهی سازی‌های محلی (یا دیفنتومورفیسم‌ها) روی  $U$  به طور کانونی توسط کلاف مشخص نمی‌شود. بنابراین باید انتخاب‌های مختلف (پیمانه‌ها) و توابع گذار (تبدیلات پیمانه) بین آنها در نظر گرفت. برای دقیق کردن این موضوع، دو همسایگی بدیهی سازی  $U^A$  و  $U^B$  را با بدیهی سازی‌های محلی  $\Psi^A$  و  $\Psi^B$  در نظر بگیرید. از معادله (۱۰۹) نتیجه می‌شود که گذار بین هر دو بدیهی سازی محلی روی  $=$   $U^A \cap U^B \neq \emptyset$  به صورت زیر داده می‌شود:

$$\Psi^B \circ (\Psi^A)^{-1} : U^{AB} \times F \rightarrow U^{AB} \times F, \quad (p, f) \mapsto \left( p, [\psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}](f) \right) =: (p, g_p^{BA} \triangleright f) \quad (110)$$

که در آن ما به طور ضمنی توابع گذار هموار را تعریف کردیم:<sup>۳۸</sup>

$$g^{BA} : U^{AB} \rightarrow \text{Aut}(F), \quad p \mapsto g_p^{BA} := \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1} \quad (111)$$

<sup>۳۶</sup> یک همسان‌ریختی یک یکریختی توپولوژیکی است، یعنی یک نگاشت پیوسته و معکوس‌پذیر بین فضاهای توپولوژیکی با معکوس پیوسته.

<sup>۳۷</sup> به طور جایگزین، فرض کنید  $F$  ساختاری دارد که توسط توابع گذار  $F$  :  $\psi_p^X = g^{BA}(p) \in \text{Aut}(F)$  حفظ می‌شود (پاراگراف بعدی را بینید). سپس بدیهی سازی‌های  $E_p \rightarrow F$  :  $\psi_p^X$  به طور سازگار ساختار  $F$  را روی  $E_p$  القا می‌کند و به طور خود کار یکریختی هستند.

<sup>۳۸</sup> گروه خودریختی های  $\text{Aut}(F)$  یک فضای  $F$  از تمام نگاشت‌های معکوس‌پذیر و حافظ ساختار (یکریختی) از  $F$  به خودش تشکیل شده است. به عنوان مثال، اگر  $F = \mathbb{R}^n$  یک فضای برداری باشد، گروه خودریختی، گروه خطی  $\text{GL}(n)$  است که از تمام ماتریس‌های معکوس‌پذیر  $n \times n$  تشکیل شده است.

$$\blacktriangleright : \text{Aut}(F) \times F \rightarrow F, \quad (g_p^{BA}, f) \mapsto g_p^{BA} \blacktriangleright f := [\psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}](f). \quad (112)$$

روی تار نوعی  $F$ ؛ مقایسه کنید با معادلات (۷) و (۶). برای اینکه بینیم عامل اول در معادله (۱۱۰) در واقع با همانی داده می‌شود، توجه داشته باشید که برای  $[\text{proj}_1 \circ \Psi^B \circ (\Psi^A)^{-1}](p, f) = [\pi \circ (\Psi^A)^{-1}](p, f)$  ایجاب می‌کند: هر  $f \in F$  و  $p \in U^{AB}$  اعمال مکرر معادله (۱۰۸) است. گذار بین بدیهی‌سازی‌های مختلف توسعه بسط (جابجایی) زیر از نمودار جابجایی در معادله (۱۰۷) به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id} \times g^{BA} \blacktriangleright & & \\ & \swarrow & \downarrow \pi^{-1}(U^{AB}) & \searrow & \\ U^{AB} \times F & \xleftarrow{\Psi^A} & & \xrightarrow{\Psi^B} & U^{AB} \times F \\ \text{proj}_1 \searrow & & \pi \downarrow & & \text{proj}_1 \swarrow \\ & & U^{AB} & & \end{array} \quad (113)$$

محدود به یک نقطه  $\varphi \in U^{AB}$  و برای حالت خاص کلاف مماس (که در ادامه تعریف می‌شود)، این نمودار با نمودار در معادله (۸) و نسخه گرافیکی آن در شکل ۶ مطابقت دارد.

طبق تعریف، توابع گذار در معادله (۱۱۱) سه شرط زیر را برآورده می‌کنند:<sup>۳۹</sup>

$$i) \quad g_p^{AA} = e \quad \forall p \in U^A \quad (114)$$

$$ii) \quad g_p^{BA} = (g_p^{AB})^{-1} \quad \forall p \in U^A \cap U^B \quad (115)$$

$$iii) \quad g_p^{CB} g_p^{BA} = g_p^{CA} \quad \forall p \in U^A \cap U^B \cap U^C \quad (\text{شرط همزنجیر}) \quad (116)$$

طبق قضیه ساخت کلاف تاری، هر کلاف تاری را می‌توان به طور کامل و سراسری بر حسب یک اطلس  $\mathcal{A} = \{(U^X, \Psi^X) \mid X \in \mathfrak{X}\}$  از بدیهی‌سازی‌های محلی  $(U^X, \Psi^X)$  مشخص کرد که  $M$  را می‌پوشاند و توابع گذار آنها معادلات (۱۱۴)، (۱۱۵) و (۱۱۶) را برآورده می‌کنند (در اینجا  $\mathfrak{X}$  یک مجموعه اندیس را نشان می‌دهد). می‌توان بدیهی‌سازی‌های منفرد را به گونه‌ای تصور کرد که توسط نگاشت‌های گذار "به هم چسبیده‌اند"؛ که در شکل ۲۳ به تصویر کشیده شده است. توجه داشته باشید که این مشابه توصیف سراسری یک خمینه بر حسب یک اطلس از چارت‌های محلی است.

**کلاف‌های برداری:** چندین مفهوم خاص تر از کلاف‌های تاری وجود دارد که ساختار ریاضی اضافی دارند. یک مثال مهم کلاف‌های برداری هستند که همانطور که از نامشان پیداست، کلاف‌هایی هستند که از فضاهای برداری متصل به یک خمینه تشکیل شده‌اند. به طور رسمی، یک کلاف برداری (حقیقی) از رتبه  $k$  یک کلاف  $(E, M, \pi, \mathbb{R}^k)$  با تار نوعی  $E_p \cong \mathbb{R}^k$  و تارهای  $\mathbb{R}^k$  روی  $p$  است، به طوری که بدیهی‌سازی‌های محلی به ازی هر تار، یکریختی‌های فضای برداری (نگاشت‌های خطی) هستند. توابع گذار  $\psi_p^B = \text{GL}(k)$  در این صورت مقادیری در گروه خطی عام می‌گیرند.

به طور جایگزین، با داشتن تار  $\mathbb{R}^k$  و یک اطلس از بدیهی‌سازی‌های محلی که توابع گذار آن مقادیری در  $\text{GL}(k) = \text{Aut}(\mathbb{R}^k)$  می‌گیرند، یک ساختار فضای برداری برای  $E_p$  با قرار دادن

$$\alpha v + \beta w := (\psi_p^A)^{-1}(\alpha \psi_p^A(v) + \beta \psi_p^A(w)) \quad \forall v, w \in E_p, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (117)$$

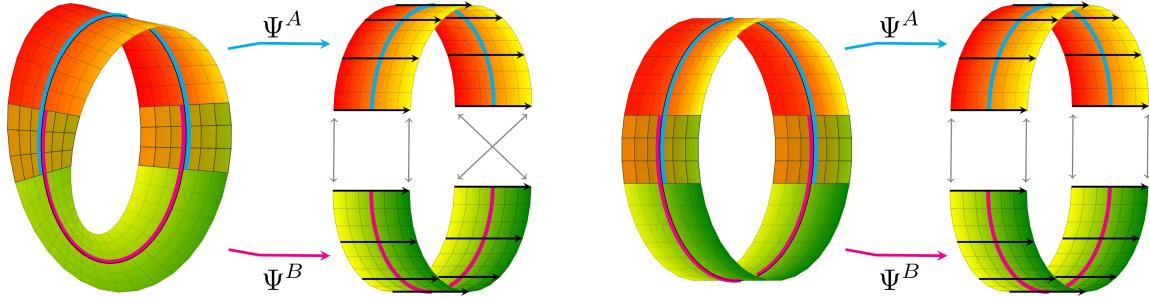
برای یک پیمانه دلخواه  $\psi_p^A : E_p \rightarrow \mathbb{R}^k$  از اطلس  $\text{GL}(k)$  القا می‌شود. اینکه ساختار فضای برداری به طور سازگار تعریف شده است واضح است زیرا

$$\begin{aligned} & (\psi_p^B)^{-1}(\alpha \psi_p^B(v) + \beta \psi_p^B(w)) \\ &= (\psi_p^A)^{-1}((g_p^{BA})^{-1}(\alpha g_p^{BA} \psi_p^A(v) + \beta g_p^{BA} \psi_p^A(w))) \\ &= (\psi_p^A)^{-1}(\alpha \psi_p^A(v) + \beta \psi_p^A(w)) \end{aligned} \quad (118)$$

همان نتیجه را به دست می‌دهد. توجه داشته باشید که مرحله آخر نیازمند خطی بودن  $g_p^{BA} \in \text{GL}(d)$  بود. پیمانه‌های  $\psi_p^A$  یا  $\psi_p^B$  در این صورت به طور خود کار یکریختی‌های فضای برداری هستند.

مهم‌ترین مثال‌ها برای ما کلاف مماس و کلاف‌های برداری ویژگی هستند که در بخش‌های بعدی معرفی می‌شوند.

<sup>۳۹</sup> شرایط (i) و (ii) از شرط همزنجیر (iii) نتیجه می‌شوند اما اغلب به طور صریح بیان می‌شوند.



شکل ۳۳: توصیف استوانه و نوار موبیوس بر حسب اطلاس های  $G$  که هر کدام از دو بدیهی سازی محلی تشکیل شده اند. چپ: از آنجا که استوانه یک کلاف بدیهی است، تمام توابع گذار را می توان به عنوان نگاشت های همانی انتخاب کرد به طوری که گروه ساختار به گروه بدیهی  $\{e\} = G$  کاهش یابد. برخلاف وضعیت به تصویر کشیده شده، امکان انتخاب یک بدیهی سازی سراسری و واحد وجود دارد. راست: توپولوژی نوار موبیوس توابع گذار را در یکی از همپوشانی ها مجبور می کند که تارها را به روشنی وارونه به مه بچسبانند. بنابراین گروه ساختار را نمی توان بیشتر از گروه  $R = G$  که با زتاب تارها را مدل می کند، کاهش داد. بنابراین بدیهی سازی های سراسری برای نوار موبیوس وجود ندارد. توجه داشته باشید که پیکان های روی نوار موبیوس را نباید با پیکان های نمودارهای چسباندن اشتباہ گرفت، یعنی پیچش، بردارها را در یکی از برها در جهت مخالف می چسبانند.

**G-کلافها** سسته به توپولوژی کلاف، ممکن است بتوان یک اطلس از بدیهی سازی های محلی  $\{\mathcal{X}\}$  تعریف کرد که توابع گذار آن به یک زیرگروه  $G \leq \text{Aut}(F)$  محدود شده اند، یعنی برآورده می کنند:

$$g_p^{BA} \in G \quad \text{برای تمام } A, B \in \mathfrak{X} \text{ و تمام } p \in U^A \cap U^B. \quad (119)$$

هر چنین اطلسی، اطلس  $G$  نامیده می‌شود و  $G$  به عنوان گروه ساختار کلاف شناخته می‌شود. دو اطلس  $G$  مختلف معادل (یا سازگار) هستند، اگر  $G$ -کلاف شناخته می‌شود.<sup>۴</sup>

توپولوژی یک کلاف تعیین می کند که گروه ساختار آن تا چه حد قابل کاهش است. به عنوان مثال، استوانه در شکل ۲۳ یا هر کلاف بدیهی دیگر را می توان با یک اطلس  $\{e\}$  توصیف کرد که فقط از بدیهی سازی های محلی با تابع گذار همانی تشکیل شده است. این متناظر با کاهش به یک گروه ساختار بدیهی  $\{e\} = G$  است. در مقابل، توپولوژی پیچ خورده نوار موبیوس ایجاد می کند که هر اطلس  $G$  شامل تابع گذاری باشد که تارها را با چهت گیری وارونه به هم بچسباند؛ به شکل ۲۳ (راست) مراجعه کنید. بنابراین گروه ساختار نوار موبیوس را نمی توان بیشتر از گروه  $\mathcal{R}$  بازتاب تارها را مدل می کند، محدود کرد. روی خمینه های ریمانی، گروه ساختار کلاف مماس  $TM$  و در نتیجه کلاف های برداری ویژگی وابسته، به طور کلی نمی توانند بیشتر از یک گروه ساختار متعامد  $d$  کاهش یابند، که این کار روی های ۱۰۰ مستقل از مختصات را در وهله اول انگیزه مند کرد.

**کلاف‌های  $G$  وابسته:** دو  $G$ -کلاف را وابسته به یکدیگر می‌نامند اگر دارای فضای پایه، گروه ساختار و مهمتر از همه، توابع گذار یکسان باشند. کلاف‌های وابسته  $(E, M, \pi, F)$  و  $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{F})$  با گروه ساختار  $G$  ممکن است در تارهای نوعی خود  $F$  و  $\tilde{F}$  و بنابراین در عمل چپ  $F$  بر روی  $\tilde{F}$   $\blacktriangleright : G \times F \rightarrow \tilde{F}$  و  $\blacktriangleleft : G \times \tilde{F} \rightarrow F$  تعریف شوند. با داشتن دو اطلس  $G = \{U^X, \Psi^X \mid X \in \mathfrak{X}\}$  و  $\tilde{G} = \{U^{\tilde{X}}, \tilde{\Psi}^{\tilde{X}} \mid \tilde{X} \in \tilde{\mathfrak{X}}\}$  از کلاف‌ها روی همان پوشش باز از  $M$ ، شرط هم ارزی توابع گذار  $(\text{تاحد عمل} \circ \text{چپ مختلف})$  به این معنی است:

$$\Psi^B \circ (\Psi^A)^{-1} = (\text{id} \times g^{BA} \blacktriangleright) \iff \widetilde{\Psi}^B \circ (\widetilde{\Psi}^A)^{-1} = (\text{id} \times g^{BA} \widetilde{\blacktriangleright}) \quad (12)$$

به طور شهودی، تارهای نوعی  $F$  و  $\tilde{F}$  از  $E$  و  $\tilde{E}$  به روشی یکسان روی  $M$  "به هم چسیده‌اند".

یک مثال مهم از کلافهایی که به صورت  $(d\text{-GL})$ -وابسته به یکدیگر هستند، کلاف هم‌ماس  $TM$ ، کلاف هم‌ماس  $T^*M$  و کلاف چارچوب مماس  $TM$  هستند (اولی و آخری در بخش ۲.۶ معرفی شده‌اند). وابستگی این کلاف‌ها در این واقعیت منعکس می‌شود که مؤلفه‌های آنها نسبت به پایه‌های انتخاب شده مطابق با همان تبدیل پیمانه تبدیل می‌شوند (مثلاً  $\tilde{z}^{BA}$  که مذکور شد،  $= \frac{\partial z^B}{\partial x^\mu} g^{AB}_{\mu\nu}$ ، به پیوست ۲۰ مراجعه کنید).

عمل‌های مختلف یک تبدیل پیمانه بر روی تارهای مربوطه در این مثال به عنوان تبدیل پادردا ( $TM$ )، تبدیل هموردا ( $T^*M$ )، تبدیل ۲-بار پادردا و ۸-بار هموردا ( $T_s^M$ ) و دوباره، تبدیل هموردا ( $FM$ )، به ترتیب، مشخص می‌شوند. ما بعداً ساختار  $G$ ، کلاف مماس  $TM$  و کلاف‌های برداری ویژگی  $A$  را به عنوان کلاف‌های  $G$  وابسته معرفی خواهیم کرد. وابستگی در این مورد از این واقعیت ناشی می‌شود که تغیرات چارچوب‌های  $GM$  منجر به تبدیل همزمان ضرایب بردار و ضرایب بردار ویژگی می‌شود.

<sup>۴</sup> کلاس هماری تضمین می کند که هچ یک از اطلس های  $G$  معادل، برتری ندارند. به طور معادل، می توان اطلس  $G$  ماکسیمال را در نظر گرفت که به عنوان اطلس  $G$  منحصر به فردی تعریف می شود که هر اطلس  $G$  سازگار دیگری در آن موجود است. توجه داشته باشید که یک کلاس هماری از اطلس های  $G$  به طور منحصر به فرد توسط یک اطلس  $G$  داده شده، ایجاب می شود.

می خواهیم اشاره کنیم که هر کلاف وابسته‌ای علاوه بر این به یک کلاف اصلی  $G$  منحصر به فرد (که در پاراگراف بعدی تعریف می‌شود) وابسته است. در مقابل، هر کلاف وابسته را می‌توان از کلاف اصلی وابسته مربوطه ساخت  $\square$  مانند این ساختار به طور گسترده برای تعریف کلاف‌های برداری ویژگی در بخش ۳.۶ استفاده خواهیم کرد.

**کلاف‌های اصلی  $G$ :** یک کلاف تاری  $(P, M, \pi, G, \triangleleft)$  را یک کلاف اصلی (هموار)  $(P, M, \pi, G)$  می‌نامند اگر ۱) تار نوعی آن با گروه ساختار آن  $G$  منطبق باشد و ۲) به یک عمل راست (هموار)  $G$

$$\triangleleft : P \times G \rightarrow G, (p, g) \mapsto p \triangleleft g \quad (121)$$

تجهیز باشد که تارها را حفظ می‌کند، یعنی،

$$\pi(p \triangleleft g) = \pi(p) \quad \forall p \in P, g \in G \quad (122)$$

و به صورت تعدی پذیر و آزاد روی آنها عمل می‌کند.<sup>۴۱</sup> دو شرط آخر (تعدی پذیری و آزادی) با هم ایجاب می‌کنند که تارهای یک کلاف اصلی  $G$ ،  $G$ -تورسور (یا فضاهای همگن اصلی  $G$ ) باشند، که به طور شهودی به این معناست که آنها "شیوه به  $G$ " هستند اما بدون هیچ مبدأ یا عنصر همانی مشخصی ارائه می‌شوند.<sup>۴۲</sup> بدینهی سازی‌های محلی  $\pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$  باید عمل راست  $G$  را حفظ کنند، یعنی هموردای راست  $G$  باشند:

$$\Psi(p \triangleleft g) = \Psi(p)(\text{id} \times \cdot \cdot g) \quad \forall p \in P, g \in G, \quad (123)$$

که در آن  $g$ -ضرب راست کانونی با عناصر گروه روی تار نوعی  $G$  را نشان می‌دهد. این، نمودار در معادله (۱۰۷) را به نمودار زیر بسط می‌دهد:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi} & U \times G \\ \downarrow \triangleleft g & & \uparrow (\text{id} \times \cdot \cdot g) \\ \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi} & U \times G \\ \downarrow \pi & \nearrow \text{proj.} & \\ U & & \end{array}, \quad (124)$$

که لازم است برای هر  $g \in G$  جابجا باشد.

کلاف‌های اصلی  $G$  برای مطالعه کلاف‌های عمومی  $G$  از اهمیت زیادی برخوردارند. به طور خاص، هر کلاف  $(E, M, \pi_E, F)$  با یک کلاف اصلی  $G$  (منحصر به فرد)  $(P, M, \pi_P, G, \triangleleft)$  را می‌توان از  $P$  ساخت. در بخش‌های بعدی، ما کلاف چارچوب  $GM$  و  $GFM$  را به عنوان نمونه‌های خاصی از کلاف‌های اصلی ارائه خواهیم داد، که ادعاهای مطرح شده در اینجا را کمتر انتزاعی کرده و برخی از پیامدهای آنها را آشکار می‌سازد.

**برش‌ها و میدان‌ها:** میدان‌های هموار با مقدار  $F$  روی  $M$  به عنوان برش‌های هموار  $\sigma$  از یک کلاف  $E$  با تار  $F \xrightarrow{\pi} M$  باشند. یک برش هموار در این صورت به عنوان یک نگاشت هموار  $\sigma : M \rightarrow E$  تعریف می‌شود که به هر نقطه  $p$  از  $M$  بپوشد که به هر نقطه  $p$  از  $E$  بپوشد، یعنی شرط  $p \circ \sigma = \text{id}_M$  می‌کند، که نمودار جابجاگایی زیر آن را به تصویر می‌کشد:

$$M \xrightarrow{\sigma} E \xrightarrow{\pi} M \quad \underbrace{\qquad}_{\text{id}_M} \quad (125)$$

یک مثال مهم میدان‌های برداری مماس هستند که به عنوان برش‌های  $v : M \rightarrow TM$  مدل می‌شوند که هر نقطه  $p$  در  $M$  یک بردار مماس  $v(p) \in T_p M$  نسبت می‌دهند. توجه داشته باشید که نگاشت تصویر، به طبیعت خود، معکوس ناپذیر است، به طوری که  $\text{id}_E \circ \pi \neq \text{id}_M$ . بنابراین نمودار زیر به طور کلی جابجا نمی‌شود:

$$E \xrightarrow{\pi} M \xrightarrow{\sigma} E \quad \underbrace{\qquad}_{\text{id}_E} \quad (126)$$

<sup>۴۱</sup> یک عمل گروهی (راست)  $x \cdot g \mapsto x.g$  را تعدی پذیر می‌نامند اگر هر نقطه از  $X \times G \rightarrow X$  را بتوان به هر نقطه دیگر نگاشت، یعنی اگر برای هر  $x, y \in X$  یک وجود داشته باشد به طوری که  $y = x.g$ . آن را (نقطه تابت) آزاد می‌نامند اگر برای هر  $x \in X$  معادله  $x = x.g$  ایجاب کند  $g = e$  باشد، یعنی اگر تنها عمل عنصر همانی  $p$  را ناواردا باقی بگذارد. توجه داشته باشید که همین گزاره‌ها را می‌توان برای عمل‌های چپ نیز بیان کرد.

<sup>۴۲</sup> به طور رسمی، یک  $G$ -تورسور (راست)  $P$  شرط  $P \times G \cong P \times P$  دارد که در آن  $(p, g) \mapsto (p, p \cdot g)$  داده می‌شود. این شرط ایجاب می‌کند که یک عنصر گروهی منحصر به فرد وجود داشته باشد که هر دو نقطه در تورسور را به هم متصل کند.

در مواردی که در ادامه یک نمودار جابجا نباشد، که بیشتر در مورد برش‌ها صدق می‌کند، ما این موضوع را با افزودن نماد  $\otimes$  به صورت بصری تأکید می‌کیم. برش‌های هموار لزوماً به صورت سراسری وجود ندارند اما همیشه می‌توانند روی همسایگی‌های بدیهی ساز  $M \subseteq U$  تعریف شوند. از طریق یک بدیهی سازی محلی، یک برش محلی را می‌توان با یک تابع  $s : U \rightarrow F$  با قرار دادن  $(\psi_p(\sigma(p)) = \psi_p(s(p))$  برای  $p \in U$  یکی دانست. ما فضای برش‌های سراسری را با  $(E, \Gamma)$  نشان می‌دهیم در حالی که فضای برش‌های محلی به صورت  $(U, E)$  نوشته می‌شود.

**ریخت‌های کلاف:** ریخت‌ها (نگاشت‌ها) در رده کلاف‌های تاری، ریخت‌های کلاف یا نگاشت‌های کلاف نامیده می‌شوند. آنها با دیفوگورفیسم‌های صرف بین فضاهای کلی تفاوت دارند، زیرا علاوه بر آن ملزم به حفظ ساختار کلاف هستند، یعنی تارها را به تارها نگاشت کنند. به طور کلی، یک نگاشت کلاف هموار بین دو کلاف تاری هموار  $(E, M, \pi, F)$  و  $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{F})$  یک نگاشت هموار  $\phi : E \rightarrow \tilde{E}$  است، به طوری که یک نگاشت هموار دوم  $\hat{\phi} : M \rightarrow \tilde{M}$  بین فضاهای پایه وجود دارد که شرط  $\hat{\phi} \circ \pi = \tilde{\pi} \circ \phi$  را برآورده می‌کند، یعنی نمودار زیر باید جابجا باشد:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & \tilde{E} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\ M & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \tilde{M} \end{array} \quad (127)$$

نگاشت روی فضای پایه تضمین می‌کند که ریخت کلاف، تارها در  $p \in M$  را به تارهایی در  $\phi(p) \in \tilde{M}$  نگاشت می‌کند به جای اینکه آنها را "از هم بگسلند". تعیین‌های واضح به یکریختی‌های کلاف و خودریختی‌های کلاف وجود دارد. به عنوان مثال، یکریختی‌های کلاف ایجاب می‌کنند که  $\phi$  و  $\hat{\phi}$  معکوس‌پذیر باشند، یعنی دیفوگورفیسم باشند (و ساختارهای دیگر را در صورت تعریف حفظ کنند).

نوع خاص نگاشت کلاف تحت بررسی را می‌توان با خواستن الزامات اضافی محدودتر کرد. یک ریخت  $M$  کلاف بین دو کلاف  $(E, M, \pi, F)$  و  $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{F})$  روی همان فضای پایه  $M$  ملزم است که تارهای  $E_p$  روی  $p \in M$  را به تارهای  $\tilde{E}_p$  روی همان نقطه  $p$  نگاشت کند، یعنی  $\hat{\phi} = \text{id}_M$ . بر حسب یک نمودار جابجایی این به صورت زیر خوانده می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & \tilde{E} \\ \pi \searrow & & \swarrow \tilde{\pi} \\ & M & \end{array} \quad (128)$$

از این دیدگاه، ما بدیهی‌سازی کلاف در نمودار (107) را به عنوان یک ریخت  $U$  کلاف  $\Psi$  بین کلاف‌های بدیهی  $(U)^{-1}$  و  $U$  روی  $U \times F$  روی  $U$  شناسایی می‌کیم.

اگر تارها ساختار اضافی داشته باشند، معمولاً لازم است که این ساختار توسط نگاشت کلاف حفظ شود. به عنوان مثال، ریخت‌های کلاف برداری  $\phi$  بین  $(E, M, \pi, \mathbb{R}^k)$  و  $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \mathbb{R}^{\tilde{k}})$  ملزم به حفظ ساختار فضای برداری روی تارها هستند و بنابراین به نگاشت‌های خطی به ازای هر تار  $\phi|_{E_p}$  محدود می‌شوند. مشابهًا، ریخت‌های کلاف اصلی ملزم به حفظ ویژگی تارها به عنوان تورسورهای راست  $G$  هستند، یعنی هموردای راست  $G$  باشند. با داشتن دو کلاف اصلی  $(P, M, \pi, G, \triangleleft)$  و  $(\tilde{P}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{G}, \triangleleft)$  و یک هم‌ریختی گروهی  $\theta : G \rightarrow \tilde{G}$ ، یک ریخت کلاف اصلی ملزم است که نمودار زیر را برای هر  $g \in G$  جابجا کند:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\phi} & \tilde{P} \\ \triangleleft g \uparrow & & \uparrow \triangleleft \theta(g) \\ P & \xrightarrow{\phi} & \tilde{P} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\ M & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \tilde{M} \end{array} \quad (129)$$

بدیهی‌سازی محلی کلاف‌های اصلی در نمودار (124) بدین ترتیب به عنوان یک ریخت  $U$  کلاف اصلی  $\Psi$  بین  $(U)^{-1}$  و  $U$  دیده می‌شود که در آن هم‌ریختی گروهی  $\theta : G \rightarrow G$ ،  $g \mapsto g$  داده می‌شود.

ریخت‌های کلاف از اهمیت ویژه‌ای در بخش  $\S$  برخوردارند، جایی که آنها تبدیل کلاف‌ها و میدان‌های ویژگی را تحت عمل ایزوومتری‌ها توصیف می‌کنند. ثابت می‌شود که های  $\square$  مستقل از مختصات نسبت به این عمل‌ها بر روی کلاف‌ها و برش‌هایشان همودا هستند. برای پیش‌زمینه بیشتر در مورد کلاف‌های تاری به طور کلی به مراجع [؟ ？ ？ ？ ？] مراجعه می‌کنیم.

## ۲.۶ کلاف مماس $TM$ و کلاف چارچوب $FM$

هر خمینه دیفرانسیل پذیر (و بنابراین هر خمینه ریمانی)  $M$  به طور کانونی به کلاف مماس خود  $TM$  و کلاف چارچوب (عام)  $FM$  مجهر است، که از تمام چارچوب‌های مرجع محلی فضاهای مماس تشکیل شده است. این دو کلاف به طور طبیعی به یکدیگر وابسته‌اند و گروه ساختار آنها به طور پیش‌نمایش توسط  $\text{Aut}(\mathbb{R}^d) = \text{GL}(d)$  داده می‌شود. این واقعیت با "بازسازی"  $TM$  از  $FM$  از طریق یک ساختار کلاف وابسته تأثیر خواهد شد که بعداً به ما امکان می‌دهد کلاف‌های برداری ویژگی وابسته را تعریف کنیم. برای جدا کردن واضح مفاهیم معزوف شده و فرضیات انجام شده، ما در اینجا  $TM$  و  $FM$  را به عنوان کلاف‌های  $\text{GL}(d)$  توصیف خواهیم کرد. بخش بعدی  $3.6$  علاوه بر این یک  $G$ -ساختار را بر  $TM$  و  $FM$  تحمیل خواهد کرد که آنها را به عنوان  $G$ -کلاف‌ها تثیت می‌کنند. در حالی که کلاف‌ها طبق تعریف به صورت محلی بدیهی شدنی هستند، ما در حال حاضر بدیهی‌سازی‌های خاص را مسلم فرض می‌کنیم و تعریف دقیق آنها را به بخش  $4.6$  موقول می‌کنیم.

**کلاف مماس  $TM$ :** هر خمینه هموار  $M$  با مجموعه‌ای از فضاهای مماس  $T_p M \cong \mathbb{R}^d$  همراه است. اجتماع مجزای آنها  $\S^{**}$

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M, \quad (130)$$

به همراه یک ساختار هموار و نگاشت تصویر داده شده به طور کانونی، یک کلاف تاری هموار را تعریف می‌کند که به عنوان کلاف مماس شناخته می‌شود. نگاشت تصویر  $M \rightarrow TM \rightarrow \pi_{TM}^{-1}(v)$  در این صورت با انتخاب بدیهی  $p \in T_p M$  برای  $v \in \pi_{TM}^{-1}(v)$  داده می‌شود. همانطور که در پیوست  $\S$  استنتاج شده است، بدیهی‌سازی‌های محلی در  $\mathbb{R}^d$  داده می‌شود. همانطور که از کلاف مماس به طور کانونی توسط چارت‌های  $\Psi_{TM} : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^d$  از خمینه  $\alpha$  می‌شوند. بنابراین می‌توانیم بدیهی شدنی بودن  $TM$  را مسلم فرض کرده و بحث در مورد آنها را به بخش  $4.6$  موقول کنیم. یک ساختار هموار روی  $TM$  از ساختار هموار  $M$  از طریق بدیهی‌سازی‌های فوق الذکر از چارت‌ها  $\alpha$  می‌شود. ما از جزئیات فنی این ساختار صرف نظر کرده و خوانته علاقمند را به مراجع [؟ ？] ارجاع می‌دهیم.

کلاف مماس تعریف شده بدین ترتیب یک کلاف برداری است زیرا تار نوعی آن  $\mathbb{R}^d$  یک فضای برداری مماس، که به عنوان مثال یک جریان روی  $M$  را توصیف می‌کنند، به عنوان برش‌های  $M \rightarrow TM \rightarrow \sigma$  از کلاف مماس فرمول بندی می‌شوند. برش‌های سراسری هموار از کلاف‌های برداری همیشه وجود دارند؛ یک مثال استاندارد برش صفر است که بردار صفر از  $T_p M$  را به هر  $p \in M$  نسبت می‌دهد. می‌خواهیم تأثیر کنیم که فضاهای مماس  $\square$  و بنابراین کلاف مماس  $\square$  بدون ارجاع به چارچوب‌های مختصاتی تعریف می‌شوند، به طوری که برش‌ها میدان‌های برداری را به روشی مستقل از مختصات توصیف می‌کنند.

پس از معرفی کلاف چارچوب مماس  $FM$  در ادامه، به کلاف مماس و ساختار صریح آن به عنوان کلاف  $(\text{GL}(d), \text{GL}(d))$ -وابسته باز خواهیم گشت که بر ماهیت مستقل از مختصات آن تأثیر می‌کند. در بخش  $3.6$  ماهیت مشابه  $TM$  را به عنوان یک  $G$ -ساختار  $GM$  خواهیم ساخت.

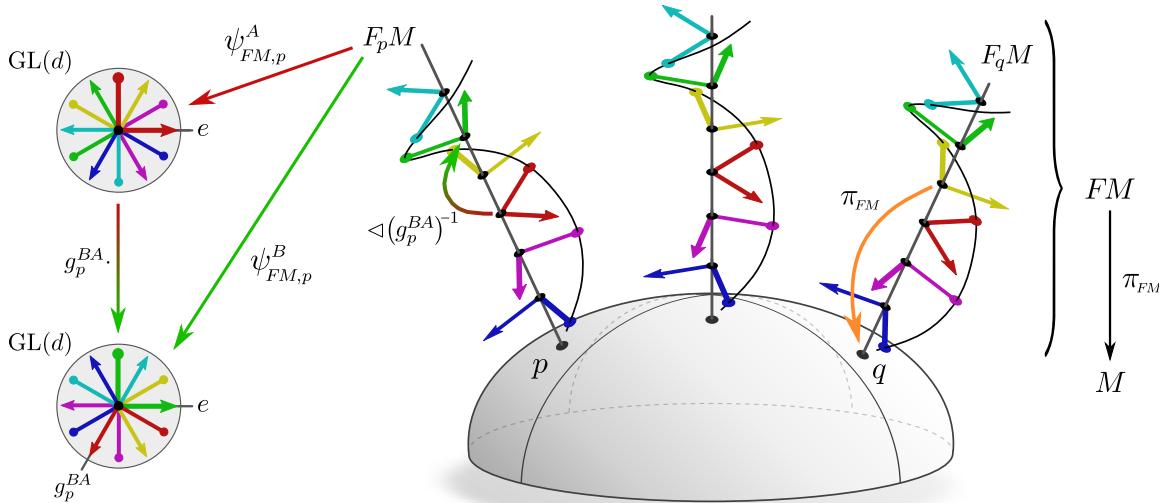
**کلاف چارچوب  $FM$ :** فضای چارچوب‌های مرجع محلی تمام فضاهای مماس  $T_p M$ ، (کلاف) چارچوب (مماس) را تشکیل می‌دهد. فضاهای چارچوب‌های مرجع (پایه‌های مربوط) فضاهای مماس منفرد  $T_p M$  را در نظر بگیرید:

$$F_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ است } T_p M \text{ یک پایه از } \right\} \quad (131)$$

کلاف چارچوب به عنوان اجتماع مجزای آنها  $F_p M = \coprod_{p \in M} F_p M$  که چارچوب‌ها در  $F_p M$  به همراه نگاشت تصویر  $\pi_{FM} : FM \rightarrow M$  از  $F_p M$  می‌فرستد و یک ساختار هموار القا شده از  $TM$  تعریف می‌شود. تار نوعی کلاف چارچوب، گروه خطی عام  $\text{GL}(d) \cong F_p M$  است، یعنی گروه ماتریس‌های معکوس‌پذیر  $d \times d$  که سطون‌های مستقل خطی آن را می‌توان به عنوان تعریف کننده یک چارچوب از  $\mathbb{R}^d$  در نظر گرفت. از آنجا که کلاف چارچوب از کلاف مماس ساخته شده است، بدیهی‌سازی‌های محلی آن  $\Psi_{FM} : \pi_{FM}^{-1}(U) \rightarrow U \times \text{GL}(d)$  بلافاصله از بدیهی‌سازی‌های  $TM$  القا می‌شوند؛ به بخش  $4.6$  مراجعه کنید. شکل  $24$  تفسیری گرافیکی از کلاف چارچوب را نشان می‌دهد.

برش‌های هموار محلی  $U \subseteq FM$  از کلاف چارچوب، نقاط  $p \in U$  را به چارچوب‌هایی در  $F_p M$  نگاشت می‌کنند. آنها میدان‌های چارچوب هموار محلی را تعریف می‌کنند، یعنی انتخاب‌های هموار متغیر از چارچوب‌های مرجع برای  $T_p M$ ،  $p \in U$  که در شکل  $7$  به

اجتماع مجزای  $\coprod_{p \in M} T_p M = \bigcup_{p \in M} \{(p, v) \mid v \in T_p M\}$  از فضاهای مماس را می‌توان به گونه‌ای تصور کرد که "به یاد می‌آورد" یک بردار سرچشم می‌گیرد، که برای تعریف نگاشت تصویر  $\pi_{TM}$  ضروری است.



شکل ۲۴: تفسیری گرافیکی از کلاف چارچوب  $FM$  روی  $M$  و بدینهی سازی های آن. تار  $F_p M$  روی  $p$  به عنوان فضای تمام چارچوب های مرجع ممکن  $T_p M$  تعریف می شود. تمام چارچوب ها در  $F_p M$  توسط نگاشت تصویر  $\pi_{FM}$  به ممان نقطه  $p$  در  $M$  نگاشته می شوند که تار به آن متصل است. تارهای  $F_p M$  با  $GL(d)$  یکریخت هستند، اما بدون مبدأی ارائه می شوند که یک انتخاب مرجع از چارچوب مرجع را متمایز کند. پیمانه های  $(GL(d), F_p M \rightarrow GL(d))$  یا  $\psi_{FM,p}^A$  یا  $\psi_{FM,p}^B$  که در بخش ۴.۶ در ادامه معرفی می شوند، تارها را با  $GL(d)$  یکی می دانند و در نتیجه یک چارچوب مرجع را مشخص می کنند. پیمانه های مختلف با تبدیلات پیمانه  $g_p^{BA} \in GL(d)$  به هم مرتبط هستند. با خواندن را در مورد دو تصور غلط احتمالی هشدار دهیم؛ اولاً، چارچوب ها در تارهای مختلف به طور پیشینی به روی کانونی با یکدیگر یکی داشته نمی شوند، چیزی که ممکن است رنگ های اضافی نشان دهد. ثانیاً، برای به حداقل رساندن شلوغی، تصویر فقط چارچوب های راست گرد و متعامد را به جای تمام چارچوب های مرجع ممکن نشان می دهد. همانطور که در بخش بعدی ۳.۶ بحث خواهیم کرد، چارچوب های متعامد و راست گرد شان داده شده، متناظر با یک  $G$ -ساختار  $GM$  (یک زیرکلاف اصلی  $G$  از  $FM$ ) برای گروه ساختار  $(G = SO(2))$  خواهد بود.

تصویر کشیده شده است. همانطور که در معادله (۴) استدلال شد، یک انتخاب از میدان چارچوب روی  $U$  یا یک انتخاب از پیمانه یا بدینهی سازی محلی روی  $U$  معادل است. این ایجاد می کند که میدان های چارچوب سراسری تنها در صورتی وجود داشته باشد که  $\bar{F}M$  و در نتیجه  $TM$  بدینهی باشند. ما این همارزی را با عمق بیشتری در بخش ۴.۶ مورد بحث قرار خواهیم داد.

یک عمل راست تعدی پذیر و آزاد بر روی تارهای منفرد  $F_p M \cong GL(d)$  از کلاف چارچوب به طور طبیعی توسط تغییر چارچوب ها که در معادله (۱۰) تعریف شده است، داده می شود [۴]. عمل متناظر

$$\triangleleft : FM \times GL(d) \rightarrow FM, \quad ([e_i]_{i=1}^d, g) \mapsto [e_i]_{i=1}^d \triangleleft g := \left[ \sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \quad (132)$$

روی  $FM$  به عنوان یک کل، کلاف چارچوب را به یک کلاف اصلی  $GL(d)$  تبدیل می کند. فقدان مبدأ یا عنصر همانی مرجع در تارهای  $F_p M$  به عنوان  $GL(d)$ -تورسورها، ابهام ذاتی چارچوب های مرجع را منعکس می کند.

**کلاف  $TM$  به عنوان کلاف برداری وابسته به  $(GL(d), (FM \times \mathbb{R}^d)/)$ :** در بخش ۱.۱.۳ مادرهای مماس در  $T_p M$  را بر حسب ضرایب آنها در  $\mathbb{R}^d$  نسبت به یک چارچوب مرجع بیان کردیم. انتخاب خاص چارچوب ها در آنجا بی ربط بود زیرا تبدیل ضرایب در معادله (۹) با تبدیل چارچوب های مرجع در معادله (۱۰) خنثی می شود به طوری که  $v = \sum_i v_i^A e_i^A = \sum_i v_i^B e_i^B$  نمایش های مختصاتی معادل از همان بردار مستقل از مختصات  $v \in T_p M$  هستند. با پیروی از این ایده، می توان کلاف مماس را از کلاف چارچوب با جفت کردن چارچوب های مرجع با بردارهای ضربی و گرفتن یک خارج قسمت برای فروکاستن توصیفات اضافی حاصل از بردارهای مماس نسبت به چارچوب های مختلف به یک عنصر منحصر به فرد، ساخت.

برای ساختن کلاف مماس به این روش، حاصل ضرب  $FM \times \mathbb{R}^d$  را در نظر بگیرید که می توان آن را به عنوان یک کلاف تاری با فضای پایه  $M$  یک تار نوعی  $GL(d) \times \mathbb{R}^d$  دید. این کلاف از جفت های چارچوب های مرجع و ضرایب (متقابل نامرتب) تشکیل شده است. با انگیزه از بیان معادل

بردارهای مماس در چارچوب‌های مرجع مختلف، ما رابطه همارزی را تعریف می‌کنیم:<sup>۴۴</sup>

$$([e_i]_{i=1}^d, v) \sim_{\text{GL}(d)} ([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}, g \cdot v) \quad \forall g \in \text{GL}(d) \quad (133)$$

روی  $FM \times \mathbb{R}^d$ . به عنوان یک رابطه همارزی، این رابطه  $[e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}$  را به کلاس‌های همارزی  $v$  افزایش می‌کند. فضای این کلاس‌های همارزی، فضای خارج قسمتی  $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$  است. نگاشت تصویر

$$\pi_{\sim_{\text{GL}(d)}} : (FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d) \rightarrow M, \quad [e_i]_{i=1}^d, v \mapsto \pi_{FM}([e_i]_{i=1}^d), \quad (134)$$

که از کلاف چارچوب القا شده است،  $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$  را به یک کلاف تاری با فضای پایه  $M$  و تار نوعی  $\mathbb{R}^d$  می‌کند. توجه داشته باشید که نگاشت تصویر در معادله (134) خوش‌تعیف است زیرا مستقل از نماینده کلاس همارزی است، یعنی  $\pi_{\sim_{\text{GL}(d)}}([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}) = \pi_{FM}([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}) = \pi_{FM}([e_i]_{i=1}^d)$  که در آن ما از این واقعیت استفاده کردیم که عمل راست  $\triangleleft$  تارهای  $FM \times \mathbb{R}^d$  را حفظ می‌کند. ساختار فضای برداری  $\mathbb{R}^d$  را به یک کلاف برداری تبدیل می‌کند که ترکیبات خطی در همان تار توسط

$$\alpha[e_i]_{i=1}^d + \beta[e_i]_{i=1}^d, w := [e_i]_{i=1}^d, \alpha v + \beta w, \quad (135)$$

برای مقادیر دلخواه  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  و  $v, w \in \mathbb{R}^d$  تعریف می‌شود. به راحتی می‌توان بررسی کرد که این تعریف مستقل از انتخاب نماینده در هر دو جمله جمع است.

کلاف تعریف شده بدین ترتیب با کلاف مماس یک‌ریخت است،

$$TM \cong (FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d), \quad (136)$$

که در آن یک‌ریختی  $M$ -کلاف برداری توسط نگاشت خطی به ازای هر تار

$$\chi : (FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d) \rightarrow TM, \quad [e_i]_{i=1}^d, v \mapsto \sum_{i=1}^d v_i e_i \quad (137)$$

داده می‌شود که یک تاپل نماینده از چارچوب و بردار ضرب را از کلاس همارزی گرفته و آنها را به بردار مماس متاظر نگاشت می‌کند. طبق تعریف رابطه همارزی  $\sim_{\text{GL}(d)}$ ، این تابع مستقل از انتخاب نماینده است، یعنی،  $\chi(([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}, g \cdot v)) = \chi(([e_j]_{j=1}^d \triangleleft g^{-1}, (g \cdot v)_i)$ ؛ مساویه کنید با معادله (12). همانطور که در [۹] بحث شد، معکوس این نگاشت با گرفتن یک بردار مماس، تصویر کردن آن بر روی یک چارچوب دلخواه و گرفتن کلاس همارزی به دست می‌آید.

کلاف  $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$  (طبق ساختار، به عنوان یک کلاف  $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$ -وابسته، وابسته است، یعنی همان توابع گذار رادر  $\text{GL}(d)$  دارد که  $FM$  دارد، همانطور که در بخش ۴.۶ استنتاج خواهیم کرد. ساختار  $TM$  به عنوان خارج قسمت  $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$  بر ماهیت مستقل از مختصات کلاف مماس به روی سیار شهودی تأکید می‌کند: این ساختار تمام انتخاب‌های ممکن از مختصات دهی‌های فضاهای مماس را در نظر گرفته و با گرفتن یک خارج قسمت، آنها را معادل تلقی می‌کند.

### ۳.۶ ساختارهای برداری و یزگی وابسته $\mathcal{A}$

اکنون ما  $G$ -ساختارها  $GM$  را به عنوان زیرمجموعه‌های متمایزی از چارچوب‌ها در  $FM$  معرفی می‌کنیم که ساختار هندسی اضافی روی  $M$  را کدگذاری می‌کنند که باید توسط CNN‌های مستقل از مختصات رعایت شود. کلاف مماس از طریق یک ساختار کلاف وابسته مشابه با بخش قبل، به عنوان یک  $G$ -کلاف وابسته بازمعروفی می‌شود. این رویکرد را می‌توان برای ساخت هر کلاف  $G$ -وابسته دیگر تعیین داد، که ما از آن برای تعریف کلاف‌های برداری و یزگی  $\mathcal{A}$  استفاده می‌کنیم. تمام چنین کلاف‌های ساخته شده‌ای به یکدیگر وابسته‌اند، یعنی فقط در تار خود  $F$  تفاوت دارند اما فضای پایه  $M$ ، گروه ساختار  $G$  و توابع گذار  $g^{BA}$  بین همسایگی‌های بدیهی ساز را مشترکاً دارند. بدیهی سازی‌های محلی کلاف‌ها و تبدیلات پیمانه متقابل آنها در بخش بعدی ۴.۶ به تفصیل مورد بحث قرار می‌گیرد.

<sup>۴۴</sup> یک رابطه همارزی روی یک مجموعه  $X$  یک رابطه دوتایی  $\sim$  است که بازتابی  $(x \sim x)$ ، متقارن  $(y \sim x) \Leftrightarrow (x \sim y)$  و تراگذری  $(x \sim z \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim y)$  را دارد. این رابطه یک افزای از  $X$  به کلاس‌های همارزی  $\{y \sim x | x \in X\}$  از عناصر  $x \in X$  تعریف می‌کند. فضای کلاس‌های همارزی  $X/\sim$  را مجموعه خارج قسمتی  $X/\sim := \{[x] | x \in X\}$  نامند.

**G-ساختارها GM:** همانطور که در بخش ۱.۳ و جدول ۱ بحث شد، اغلب ممکن است با یک زیرمجموعه متمایز از چارچوب‌های مرجع کار کرد که توسط عمل یک گروه ساختار کاهش‌یافته  $G \leq \text{GL}(d)$  به هم مرتبط هستند. این موضوع با بحث در مورد چند مثال قبل از رسیدن به یک تعریف فنی در ادامه، به بهترین وجه قابل درک است. به عنوان مثال، یک محدودیت به چارچوب‌های متعامد

$$O_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ متعامد از } \{e_1, \dots, e_d\} \right\} \quad (138)$$

منجر به یک زیرکلاف اصلی  $OM$  از  $FM$  با گروه ساختار  $d$  می‌شود. توجه داشته باشید که متعامد چارچوب‌های مرجع توسط متريک  $\eta$  روی  $M$  قضاوت می‌شود  $\square$  بنابراین انتخاب‌های مختلف متريک روى یک خمينه متناظر با زيرمجموعه‌های مختلفی از چارچوب‌های مرجح برای همان گروه ساختار  $d$  است. به عنوان مثال دوم، یک انتخاب جهت‌گيري روى یک خمينه جهت‌پذير را در نظر بگيريد، که امكان مشخص کردن یک مفهوم مرجح از چارچوب‌ها را فراهم می‌کند<sup>۴۵</sup>

$$\text{GL}_p^+ M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ مثبت از } \{e_1, \dots, e_d\} \right\} \quad (139)$$

و یک زیرکلاف اصلی متناظر  $GL^+(d)M$  از  $FM$  با گروه ساختار  $(d)$ . باز هم، دو انتخاب مختلف از جهت‌گيري‌ها متناظر با دو انتخاب مختلف از زيرکلاف‌های چارچوب‌های جهت‌دار متناسب است. ترکیب هر دو شرط برای تعامل و راست‌گردی چارچوب‌ها منجر به یک  $\text{SO}(d)$ -ساختار با تارهای زير می‌شود:

$$\text{SO}_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ مثبت و متعامد از } \{e_1, \dots, e_d\} \right\} \quad (140)$$

مي توان شکل ۲۴ را به عنوان نمایش دهنده یک  $(2)$ -ساختار در نظر گرفت زیرا تنها چارچوب‌های راست‌گرد و متعامد نشان داده شده‌اند (در اين صورت تار نوعی  $\text{SO}(d)$  باید با  $\text{GL}(d)$  برجسب گذاري شود). انتخاب‌های مختلف از  $\text{SO}(d)$ -ساختارها يا متناظر با یک دست‌سانی مخالف از چارچوب‌ها، با پايindندي به همان مفهوم تعامل، يا متناظر با یک انتخاب متفاوت از متريک (يا هر دو) است. دقيقا همين الگو برای فرم‌های فرم  $\omega$  (روي خمينه‌های جهت‌پذير  $M$ ) تکرار می‌شود: آنها امكان مشخص کردن یک مفهوم مرجح از چارچوب‌ها را فراهم می‌کنند

$$\text{SL}_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ یک پایه از } T_p M \right\} \quad (141)$$

و در نتيجه زيرکلاف‌های اصلی  $SLM$  از  $FM$  با گروه ساختار  $(d)$  مجموعه خاص چارچوب‌هایی که مرجح هستند در اينجا به انتخاب خاص فرم حجم بستگي دارد. به عنوان آخرین مثال،  $\{e\}$ -ساختارها را در نظر بگيريد که متناظر با یک گروه ساختار بدبيهي  $\{e\}$  هستند و بنابراین در هر نقطه  $p$  از یک چارچوب واحد تشکيل شده‌اند. طبق تعريف،  $\{e\}$ -ساختارها با ميدان‌های چارچوب (هموار) سراسري  $\sigma \in \Gamma(FM)$  معادل هستند:

$$\{e\}_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] = \sigma(p) \right\} \quad (142)$$

بنابراین آنها فقط روی خمينه‌های بدبيهي وجود دارند. شکل‌های  $\mathbb{R}^n$  و  $\mathbb{R}^m$  دو انتخاب مختلف از  $\{e\}$ -ساختارها روی  $M = \mathbb{R}^n$  را به تصویر می‌کشند.

تمام اين مثال‌ها انتخاب‌های خاصی از  $G$ -ساختارها  $GM$  روی  $M$  را نشان می‌دهند. به طور کلي، یک  $G$ -ساختار روی  $M$  یک زيرکلاف اصلی  $G$  است، يعني یک انتخاب "هموار متغير" از زيرمجموعه‌های  $G_p M \subseteq F_p M$  که نسبت به  $\triangleleft$  برای هر  $p \in M$  هستند<sup>۴۶</sup>. همواری در اينجا می‌تواند با اين شرط فرمول بندی شود که در اطراف هر چارچوب  $[e_i]_{i=1}^d \in G_p M$  یک همسایگي  $U$  از  $p$  وجود داشته باشد که روی آن یک برش هموار  $\pi_{GM}^{-1}(U) \subseteq GM$  وجود  $\sigma(p) = [e_i]_{i=1}^d$  باشد. تصویر

$$\pi_{GM} := \pi_{FM}|_{GM} : GM \rightarrow M \quad (143)$$

از  $GM$  در اينجا به سادگي با محدود کردن نگاشت تصویر  $FM$  به  $GM$  داده می‌شود. به همراه محدودیت

$$\triangleleft : GM \times G \rightarrow GM, \quad ([e_i]_{i=1}^d, g) \mapsto [e_i]_{i=1}^d \triangleleft g := \left[ \sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \quad (144)$$

از عمل راست  $(d)$  روی  $FM$  در معادله (۱۳۲) به یک عمل  $GL(d)$ ، اين  $G$ -ساختار را به یک کلاف اصلی  $GM \xrightarrow{\pi_{GM}} M$  تبدیل می‌کند. با اين حال، مهم است توجه داشته باشید که چندین انتخاب از چنین زيرکلاف‌هایی وجود دارد، که متناظر با  $G$ -ساختارهای مختلف برای همان گروه ساختار  $G$  است؛ اين ادعاء را با مثال‌های بالا مقایسه کنيد. همانطور که قبل بحث شد، توپولوژي یک کلاف ممکن است مانع از کاهش به یک گروه ساختار  $G$  و در نتيجه وجود یک  $G$ -ساختار متناظر  $GM$  شود.

در حالی که تعريف بالا از  $G$ -ساختارها کافی خواهد بود، مفید است که به طور خلاصه برخی از تعريفات معادل جایگزین را مرور کييم. ادعای اينکه یک زيرکلاف اصلی  $GM$  از  $FM$  است، با تعريف آن به عنوان یک تاپل  $(P, \mathcal{E})$  مشکل از یک انتخاب از یک کلاف اصلی  $G$  (همچين

<sup>۴۵</sup> بر عکس، خمينه‌های غيرجهت‌پذير اجازه کاهش گروه ساختار به  $GL^+(d)$  را نمي دهند.  
<sup>۴۶</sup> از آنجا که یک  $F_p M$ -تورسور راست است، هر  $G$ -مدار  $G_p M$  در  $F_p M$  به طور خودکار تضمين می‌شود که یک  $G$ -تورسور راست باشد.

غیر منحصر به فرد)  $P$  روی  $M$  به همراه یک نشاندن هموردای راست  $G$  و هموار  $\mathcal{E} : P \rightarrow FM$  (روی  $M$ ) دقیق می شود.<sup>۴۷</sup> این موضوع توسط نمودار زیر به تصویر کشیده شده است، که لازم است برای هر  $g \in G$  جابجا باشد:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P & & \\
 & \swarrow \lhd_P g & & \searrow \lhd g & \\
 & & P & \xleftarrow{\mathcal{E}} & FM \\
 & & \searrow \pi_P & & \swarrow \pi_{FM} \\
 & & & & M
 \end{array} \tag{۱۴۵}$$

زیر مجموعه های مختلف از چارچوب های مرجح در این دیدگاه متناظر با انتخاب های مختلف از نشاندن های  $GM = \mathcal{E}(P)$  از  $P$  در  $FM$  است.  $G$ -ساختارها علاوه بر این با برش هایی به شکل  $s(M) \mapsto FM/G$  معادل هستند، که تأکید می کند  $s(p) \in (P : M)$  با  $G$  در واقع یک انتخاب از  $G$ -مدار در  $F_p M$  است همانطور که در پانوشت ۴۶ شد. تعریف دیگری از  $G$ -ساختارها بر حسب (کلاس های همارزی) اطلس های  $G$  است [۴]. از آنجا که یک دیدگاهی است در یک پاده سازی از کانولوشن های  $GM$  اتخاذ شود، ما آن را با جزئیات بیشتری در بخش بعدی ۴.۶ مورد بحث قرار می دهیم. برای خواننده علاقه مند می خواهیم اشاره کنیم که  $G$ -ساختارها یک مورد خاص از مفهوم کلی تر کاہش (یا لیفت) گروه های ساختار هستند [۴].

$G$ -ساختارها برای نظریه کانولوشن های  $GM$  از اهمیت محوری برخوردارند. انتخاب خاص  $G$ -ساختار، مجموعه خاصی از چارچوب های مرجح را تعیین می کند که کرنل الگوی  $G$ -را بهر بر روی آن اشتراک گذاشته می شود. با توجه به هموردایی پیمانه ای کرنل ها، تضمین می شود که کانولوشن های  $G$ - $GM$ ،  $G$ -ساختار را رعایت کنند، یعنی مستقل از مختصات  $GM$  باشند. همانطور که در بخش ۴.۶ استنتاج شده است، ایزو متري هایی که یک کانولوشن  $GM$  نسبت به آنها هموردا است، دقیقاً آنها ب  $G$ -ساختار را حفظ می کنند (یعنی آنها ب  $GM$  که خود ریختنی های  $GM$  را القا می کنند).

**کلاف به عنوان کلاف برداری  $G$ -وابسته**: با داشتن یک  $G$ -ساختار  $GM$ ، می توان ساختار کلاف  $GL(d)$ - $TM$  از  $TM$  در بخش ۲.۶ را به یک ساختار کلاف  $G$ -وابسته مشابه  $TM$  بر اساس  $GM$  تطبیق داد. به جای بیان بردارهای مماس نسبت به چارچوب های عمومی در  $TM$ ، آنها در اینجا نسبت به چارچوب های متمایز در  $GM$  (یعنی می شوند و خارج قسمت نسبت به گروه ساختار کاہش یافته  $G$  به جای  $GL(d)$  گرفته می شود). کلاف حاصل طبق طراحی به  $GM$  وابسته است (یا به  $FM$  با یک اطلس  $G$ ، که معادل است همانطور که در بخش بعدی توضیح داده می شود) و بنابراین دارای توابع گذاری است که مقادیری در  $G$  می گیرند. محدودیت  $\chi$  در معادله  $(GM \times \mathbb{R}^d)/G$  به (۱۳۷) یک یکریختی کلاف برداری به دست می دهد:

$$TM \cong (GM \times \mathbb{R}^d)/G. \tag{۱۴۶}$$

در حالی که هر سه کلاف  $TM$ ،  $TM$  و  $(GM \times \mathbb{R}^d)/G$  و  $(FM \times \mathbb{R}^d)/GL(d)$  بنا براین به عنوان کلاف های برداری یکریخت هستند، آنها تنها در صورتی به عنوان کلاف های  $G$ -وابسته یکریخت هستند که  $TM$  و  $(FM \times \mathbb{R}^d)/GL(d)$  به یک  $G$ -ساختار (یا اطلس  $G$ ) مجهز شوند، که به طور پیشینی اینطور نیست. در مقابل، کلاف  $(GM \times \mathbb{R}^d)/G$  طبق طراحی با یک  $G$ -ساختار هماره است. برای تعریف دقیق یکریختی های کلاف  $G$ -وابسته، ما به [۴] ارجاع می دهیم.

**کلاف های برداری ویژگی وابسته**: ساختار کلاف  $G$ -وابسته  $GM \times \mathbb{R}^d/G$  را می توان برای چسباندن تارهای دیگر با عمل های گروهی دیگر به  $G$ -ساختار  $GM$  تعمیم داد. در واقع، هر کلاف وابسته به  $GM$  را می توان به این روش ساخت. مثال های مهم در هندسه دیفرانسیل عبارتند از کلاف هم مماس  $T^*M$  با تار نوعی آن که دو گان  $\mathbb{R}^{d*}$  از  $\mathbb{R}^d$  است و عمل دو گان بر آن اثر می گذارد، یا کلاف های تانسوری  $T_s^r M$  با تارهای  $(\mathbb{R}^d)^{\otimes r} \otimes (\mathbb{R}^{d*})^{\otimes s}$  که نمایش حاصل ضرب تانسوری متناظر  $G$  بر آن عمل می کند.

در ادامه ما کلاف های برداری ویژگی وابسته با ضرایب بردار ویژگی  $\mathbb{R}^c$  به عنوان تارهای نوعی را در نظر می گیریم. تحت تبدیلات پیمانه، این تارها از چپ توسط یک ضرب با یک نمایش گروهی  $GL(c)$  به  $G$  می شوند، یعنی معادله (۱۱۲) با  $\rho : G \rightarrow \mathbb{R}^c$ ،  $(g, f) \mapsto \rho(g)f$  نمونه سازی می شود. مشابه قبل، کلاف های برداری ویژگی در این صورت به عنوان یک خارج قسمت

$$\mathcal{A} := (GM \times \mathbb{R}^c)/\sim_\rho \tag{۱۴۷}$$

ساخته می شوند که در آن رابطه همارزی  $\sim$  توسط

$$([e_i]_{i=1}^d, f) \sim_\rho ([e_i]_{i=1}^d \lhd g^{-1}, \rho(g)f) \quad \forall g \in G. \tag{۱۴۸}$$

<sup>۴۷</sup> این نشاندن یک ریخت  $M$ -کلاف اصلی  $G$  است همانطور که در بخش ۱.۶ با هم ریختنی گروهی  $GL(d)$  به  $G$  :  $\theta$  که الحاق کانونی زیر گروه  $GL(d)$  است، معرفی شد.

داده می شود. عناصر  $\mathcal{A}$  کلاس های همارزی  $[e_i]_{i=1}^d, f]$  از ضرایب بردار ویژگی نسبت به چارچوب های مرجع هستند و بنابراین مستقل از مختصات هستند. یک نگاشت تصویر (خوش تعریف) دوباره از تصویر  $G$ -ساختار القا می شود:

$$\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow M, [[e_i]_{i=1}^d, f] \mapsto \pi_{GM}([e_i]_{i=1}^d)$$
 (۱۴۹)

ترکیبات خطی روی تارها به قیاس با معادله (۱۳۵) تعریف می شوند. از آنجا که چنین کلاف های برداری ویژگی تعریف شده ای به  $GM$  وابسته است،  $GL(d) \leq GL(d)$  است، همانطور که به طور صریح در بخش بعدی ۴.۶ استنتاج خواهیم کرد.<sup>۴۸</sup> توجه داشته باشید که این تعریف شامل میدان های برداری مماس و میدان های اسکالر، که البته می توانند به عنوان میدان های ویژگی پردازش شوند، به ترتیب برای  $g = \rho(g) = 1$  می شود.

ساختار  $\mathcal{A}$  به عنوان یک کلاف  $G$ -وابسته، بردار های ویژگی مستقل از مختصات  $M$  روی  $GM$  را مدل می کند: ویژگی های  $f_p \in \mathcal{A}$  نسبت به چارچوب های دلخواه در  $GM$  بیان می شوند، با ضرایب ویژگی در مختصات دهی های مختلف که از طریق معادله (۱۴۸) به هم مرتبط هستند، اما بیان مختصاتی خوش تعریفی نسبت به چارچوب های دیگر ندارند. از دید گاه مهندسی، این موضوع در  $G$ -راهنری کرنل های کانولوشن منعکس می شود که تضمین می کند اندازه گیری های ویژگی ها به صورت نسبی به چارچوب ها در  $GM$  انجام شود اما امکان تمایز بین الگوهایی را فراهم می کند که ژست های آنها با یک تبدیل پیمانه  $G$ -مقدار به هم مرتبط نیستند، به معنای مطلق.

**میدان برداری ویژگی وابسته و فضاهای ویژگی:** میدان های ویژگی هموار و مستقل از مختصات به عنوان برش های سراسری هموار  $f$  از کلاف های برداری ویژگی تعریف می شوند، یعنی به عنوان نگاشت های هموار  $\mathcal{A} \rightarrow M$  که شرط  $\pi_{\mathcal{A}} \circ f = id_M$  است:  $f$  که همانطور که قبل بحث شد، وجود چنین میدان های ویژگی تضمین شده است زیرا کلاف های برداری همیشه برش های سراسری هموار را می کنند. همانطور که چارچوب های ویژگی تضمین می دهد، وجود چنین میدان های ویژگی تضمین شده است زیرا کلاف محلی روی  $U^A$  امکان نمایش  $f$  توسط یک میدان  $f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^A$  از ضرایب بردار ویژگی را فراهم می کند. یک بدیهی سازی متفاوت روی  $U^B \rightarrow \mathbb{R}^B$  منجر به یک میدان ضریب متفاوت  $f^B : U^B \rightarrow \mathbb{R}^B$  می شود که  $f$  را به صورت محلی نمایش می دهد. از نگاشت های گذار بین بدیهی سازی های کلاف نتیجه خواهد شد که هر دو میدان ضریب روی همپوشانی  $U^{AB} = U^A \cap U^B$  از دامنه های خود با  $f^B(p) = \rho(g_{pA}^B)f^A(p)$  به هم مرتبط هستند. نمودار جایجایی در شکل ۲۷ روابط بین میدان های برداری ویژگی و بدیهی سازی های محلی آنها را به تصویر می کشد.

فضاهای ویژگی های  $\mathcal{A}$  مستقل از مختصات معمولاً از چندین میدان ویژگی مستقل روی همان فضای پایه تشکیل شده اند. کلاف توصیف کننده یک فضای ویژگی به عنوان یک کل، مجموع ویتنی  $\bigoplus_i \mathcal{A}_i$  از کلاف های برداری ویژگی  $M \xrightarrow{\pi_{\mathcal{A}_i}}$  است که زیرنای میدان های منفرد آن هستند. به این ترتیب، این کلاف همان فضای پایه  $M$  را دارد، یک تار نوعی  $\mathbb{R}^{\sum_i c_i} \cong \bigoplus_i \mathbb{R}^{c_i}$  که به عنوان مجموع مستقیم تارهای میدان های منفرد تعریف شده و به نگاشت تصویر بدیهی مججهز است. این کلاف به  $TM$ ،  $TM$  و  $\mathcal{A}_i$  به عنوان  $G$ -کلاف ها وابسته است و بنابراین می تواند به طور معادل به صورت

$$\bigoplus_i \mathcal{A}_i \cong (GM \times \mathbb{R}^{\sum_i c_i}) / \sim_{\oplus_i \rho_i}$$
 (۱۵۰)

تعریف شود. توجه داشته باشید که مجموع مستقیم  $\bigoplus_i \rho_i$  از نمایش های  $\mathcal{A}_i$  را تعریف می کند که نگاشت های گذار  $\bigoplus_i \mathcal{A}_i$  هر میدان منفرد را به طور مستقل تبدیل کنند. فضاهای ویژگی در این صورت به عنوان فضاهای  $(\bigoplus_i \mathcal{A}_i)$  از برش های سراسری کلاف مجموع ویتنی تعریف می شوند.

## ۴.۶ بدیهی سازی های محلی کلاف $TM$ ، $FM$ و $GM$

در حالی که نظریه سراسری شکه های کانولوشنی مستقل از مختصات به شیوه ای بر حسب کلاف های تاری مستقل از مختصات فرمول بندی می شود، پیاده سازی عددی نیازمند آن است که بردار های ویژگی مستقل از مختصات  $\mathcal{A}_p \in \mathcal{A}$  را تعریف کنیم. برای حفظ سازگاری با بخش ۲.۳ شرح داده  $f^A(p) := \psi_{\mathcal{A}, p}^A(f(p))$  نسبت به یک انتخاب قاب مرجع  $[e_i^A]_{i=1}^d \in G_p M$  از نمایش های  $\mathcal{A}_p$  بیان شوند، همانطور که در بخش ۲.۳ شرح داده شد. در زبان کلاف های تاری، این معادل با انتخاب بدیهی سازی های محلی یا پیمانه های  $\Psi_{GM}^A$ ،  $\Psi_{TM}^A$  و  $\Psi_{FM}^A$  است که اگر  $\mathcal{A}$  به صورت  $G$ -الحقیقی با یکدیگر در نظر گرفته شوند، همگی به طور همزمان تبدیل می شوند. به اید بیاورید که توصیف محلی و در نتیجه پیاده سازی از طریق یک  $G$ -اطلس، متشکل از بدیهی سازی های محلی که  $M$  را می پوشانند و سه شرط (۱۱۴)، (۱۱۵) و (۱۱۶) را برآورده می کنند، کاملاً معادل با نظریه سراسری و مستقل از مختصات است.

در این بخش، ما بدیهی سازی های الحقیقی  $TM$ ،  $TM$  و  $\mathcal{A}$  و تبدیلات پیمانه های آنها را بررسی می کنیم. برای حفظ سازگاری با بخش ۲.۳ با فرض داده شده بودن بدیهی سازی های  $TM$  شروع کرده و بحث می کنیم که چگونه آنها بدیهی سازی های  $TM$  و  $FM$  و میدان های قاب محلی متناظر را القا می کنند. اگر یک  $G$ -اطلس برای  $TM$  و در نتیجه برای  $FM$  انتخاب شود، این به یک  $G$ -ساختار  $GM$  منجر می شود که  $G$ -اطلس آن با

<sup>۴۸</sup> به طور دقیق، توابع گذار مقادیری در  $GL(c)$  به جای  $G$  خواهند گرفت، با این حال، از آنجا که گذارهای حاصل هنوز با  $G$  هستند، اصطلاح "G-مقدار" معمولاً برای شامل شدن چنین مواردی تطبیق داده می شود [۱].

G-اطلس  $FM$  منطبق است. بدیهی سازی‌های محلی هر کلاف G-الحاقی، به ویژه کلاف‌های بردار ویژگی  $\mathcal{A}$ ، از بدیهی سازی‌های  $GM$  به دست می‌آیند. این بدیهی سازی‌ها قانون تبدیل میدان‌های ویژگی از بخش ۲.۳ را بازیابی می‌کنند.

**بدیهی سازی‌های  $TM$ :** از آنجا که کلاف مماس،  $\mathbb{R}^d$  را به عنوان تار نمونه‌ای خود دارد، بدیهی سازی‌های محلی آن توسط نگاشت‌هایی به شکل زیر داده می‌شوند:

$$\Psi_{TM} : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^d. \quad (151)$$

این بدیهی سازی‌ها با پیمانه‌های نقطه‌ای (که به صورت هموار در فضای تغییر می‌کنند)

$$\psi_{TM,p} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (152)$$

از معادله (۱) با شناسایی  $(\pi_{TM}(v), \psi_{TM,p}(v)) = (\pi_{TM}(v), \psi_{TM,p}(v))$  مطابقت دارند. به منظور رعایت ساختارهای فضای برداری تار  $\mathbb{R}^d$  و فضاهای مماس  $T_p M$ ، بدیهی سازی‌های  $\Psi_{TM}$  به عنوان ایزومورفیسم‌های کلاف برداری بین  $U \times \mathbb{R}^d$  و  $\pi_{TM}^{-1}(U)$  تعریف می‌شوند، یعنی نگاشت‌های  $\psi_{TM,p}$  باید خطی و معکوس‌پذیر باشند (یعنی ایزومورفیسم‌های فضای برداری باشند). نگاشت‌های گذار بین بدیهی سازی‌های مختلف  $TM$  به طور کلی در گروه خطی عام  $GL(d)$ ، یعنی گروه خودریختی‌های (خطی)  $\mathbb{R}^d$ ، مقدار می‌گیرند.

اگر ساختار بیشتری روی کلاف مماس مشخص شود، بدیهی سازی‌ها باید این ساختار را رعایت کنند. به عنوان مثال، اگر یک متريک روی  $M$  و در نتیجه روی  $TM$  تعریف شود، نگاشت‌های  $\psi_{TM,p}$  باید ایزومتريک باشند، یعنی بردارها را در  $T_p M$  به گونه‌ای به بردارهای در  $\mathbb{R}^d$  نگاشت کنند که نرمه‌ها و زوایا حفظ شوند. از آنجا که در این حالت بدیهی سازی‌ها فقط در جهت و سوگیری خود می‌توانند متفاوت باشند، تضمین می‌شود که بدیهی سازی‌های مختلف توسط یک گروه ساختار کاوش باشند که متناظر با متريک به عنوان یک  $O(d)$ -ساختار است. به طور کلی تر، یک  $G$ -ساختار روی  $TM$  نیازمند - یا القا شده توسط - یک انتخاب از  $G$ -اطلس  $\{\Psi_{TM}^X\}_{X \in \mathfrak{X}}$  است. دو بدیهی سازی مختلف  $\Psi_{TM}^A$  و  $\Psi_{TM}^B$  از چنین  $G$ -اطلسی روی  $U^A \cap U^B$  توسط  $\Psi_{TM}^B \circ (\Psi_{TM}^A)^{-1}$  همان‌طور که در معادله (۱۱۰) تعریف شده است، با توابع گذار با مقدار در  $G$  به یکدیگر مرتبط می‌شوند:

$$g^{BA} : U^A \cap U^B \rightarrow G, \quad p \mapsto \psi_{TM,p}^B \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}, \quad (153)$$

که عمل چپ  $\triangleright$  و  $\triangleleft$  را روی تار نمونه‌ای تعریف می‌کنند. برای درک شهودی گرافیکی از عمل نقطه‌ای توابع گذار بر روی تارهای منفرد، به شکل ۶ بازمی‌گردیم. یک نمایش نموداری از بدیهی سازی‌های محلی  $TM$  و گذارهای آنها در شکل ۲۵ آورده شده است.

**بدیهی سازی‌های الایایی  $FM$  و میدان‌های قاب:** هر اطلس  $\{\Psi_{TM}^X\}_{X \in \mathfrak{X}}$  از کلاف مماس در تناظر یک به یک با یک اطلس  $\{\Psi_{FM}^A\}_{X \in \mathfrak{X}}$  از کلاف قاب است. به طور خاص، با داشتن یک بدیهی سازی محلی  $\Psi_{TM}^A$  از  $TM$ ، یک بدیهی سازی محلی متناظر

$$\Psi_{FM}^A : \pi_{FM}^{-1}(U^A) \rightarrow U^A \times GL(d), \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto (p, \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d)), \quad (154)$$

از  $FM$ ، که در آن  $p = \pi_{FM}([e_i]_{i=1}^d)$  را به اختصار آورده‌ایم، با تعریف زیر الایایی شود:

$$\psi_{FM,p}^A : F_p M \rightarrow GL(d), \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) := (\psi_{TM,p}^A(e_i))_{i=1}^d \quad (155)$$

به عنوان یک نگاشت از قاب‌های مماس به ماتریس‌های  $d \times d$  معکوس‌پذیر که ستون  $\square$ -ام آن توسط  $\psi_{TM,p}^A(e_i) \in \mathbb{R}^d$  داده شده است. همان‌طور که برای کلاف‌های الحاقی لازم است، بدیهی سازی‌های  $TM$  و  $FM$  از توابع گذار یکسانی استفاده می‌کنند،

$$\begin{aligned} \psi_{FM,p}^B([e_i]_{i=1}^d) &= (\psi_{TM,p}^B(e_i))_{i=1}^d \\ &= (g_p^{BA} \psi_{TM,p}^A(e_i))_{i=1}^d \\ &= g_p^{BA} (\psi_{TM,p}^A(e_i))_{i=1}^d \\ &= g_p^{BA} \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d), \end{aligned} \quad (156)$$

زیرا عمل  $g^{BA}$  روی محورهای قاب بدیهی شده منفرد در خط دوم با عمل آن روی ماتریس قاب بدیهی شده در خط سوم یکسان است. علاوه بر این، همان‌طور که برای کلاف‌های اصلی در معادله (۱۲۳) ادعا شد، بدیهی سازی‌های کلاف قاب راست- $GL(d)$ -هم‌متغیر هستند، یعنی برای هر

(ب) بدیهی‌سازی‌های  $FM \xrightarrow{\pi_{FM}} M$

(ج) بدیهی‌سازی‌های  $GM \xrightarrow{\pi_{GM}} M$

(د) بدیهی‌سازی‌های  $\mathcal{A} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{A}}} M$

شکل ۲۵: نمایش تصویری بدیهی‌سازی‌های محلی کلاف‌های  $G$ -الحاقی  $FM$ ,  $TM$ ,  $GM$  و  $\mathcal{A}$  در قالب نمودارهای جابجاگی که در آن‌ها را به اختصار نشان می‌دهیم. یک  $G$ -اطلس  $\{U^X, \Psi_{TM}^X\}$  از کلاف مماس با نگاشت‌های گذار  $G$  را  $G$ -القا می‌کند و  $G$ -اطلس‌هایی برای  $FM$ ,  $TM$  و  $\mathcal{A}$  نمودارهای جابجاگی دقیق‌تری که مقاطع  $(\text{id} \times g^{BA}) \cdot$  را  $\pi_{FM}^{-1}(U) \rightarrow U$  و  $\sigma$  و عمل راست  $\lhd$  روی کلاف قاب را نشان می‌دهند در شکل‌های ۲۶ و ۲۷ آورده شده‌اند. میدان‌های ویژگی، که به عنوان مقاطع  $f : M \rightarrow \mathcal{A}$  از کلاف بردار ویژگی  $\mathcal{A}$  مدل‌سازی شده‌اند، و بدیهی‌سازی‌های محلی آن‌ها  $f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c$  در شکل ۲۷ نشان داده شده‌اند. تفسیری گرافیکی از نمودار جابجاگی برای  $TM$ , که به یک فضای مماس منفرد  $T_p M$  محدود شده است، در شکل ۶ ارائه شده است.

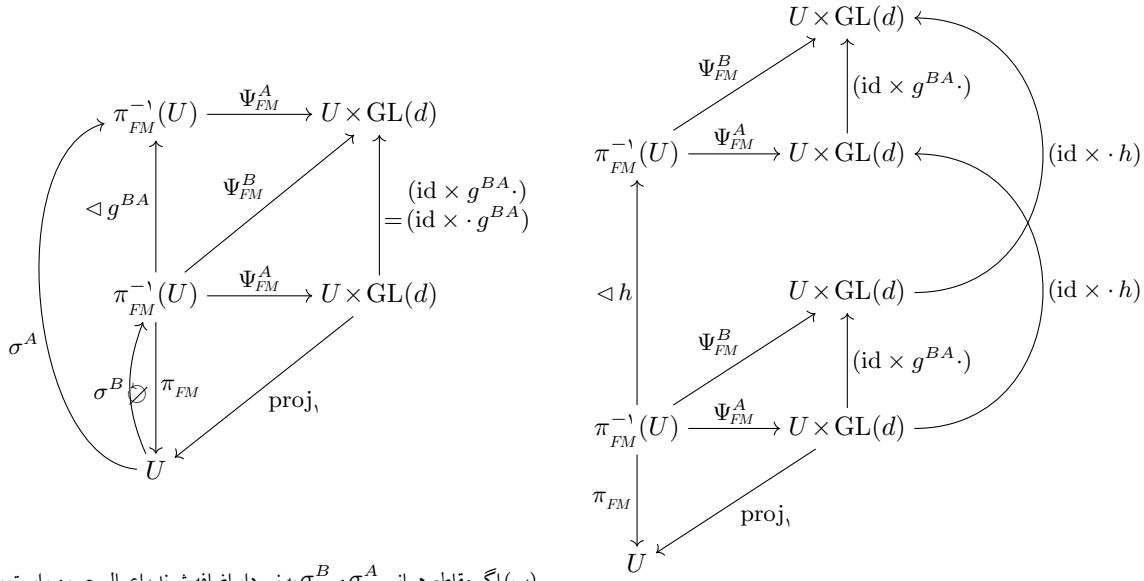
داریم:  $h \in \text{GL}(d)$

$$\begin{aligned}
 \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d \lhd h) &= \psi_{FM,p}^A \left( \left( \sum_j e_j h_{ji} \right)_{i=1}^d \right) \\
 &= \left( \psi_{TM,p}^A \left( \sum_j e_j h_{ji} \right) \right)_{i=1}^d \\
 &= \left( \sum_j \psi_{TM,p}^A(e_j) h_{ji} \right)_{i=1}^d \\
 &= (\psi_{TM,p}^A(e_i))_{i=1}^d \cdot h \\
 &= \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) \cdot h
 \end{aligned} \tag{157}$$

در اینجا از خطی بودن  $\psi_{TM,p}^A$  در مرحله سوم استفاده کردیم و عبارت اندیسی را به عنوان ضرب ماتریسی از راست در مرحله چهارم شناسایی کردیم. شکل ۲۶ عمل چپ روی بدیهی‌سازی را از طریق توابع گذار  $\Psi_{FM}^B \circ (\Psi_{FM}^A)^{-1} = (\text{id} \times g^{BA}) \cdot$  که در معادله (۱۵۶) مشتق شده و هم‌متغیری راست  $\lhd h = (\text{id} \times \cdot \cdot h) \circ \Psi_{FM}^A$  در معادله (۱۵۷) مشتق شده، خلاصه می‌کند.

همان‌طور که در معادله (۴) اشاره شد و در شکل‌های ۶ و ۷ نمایش داده شد، یک بدیهی‌سازی محلی هموار  $\Psi_{TM}^A$  از کلاف مماس یک میدان قاب را روی  $U^A$  القا می‌کند. این به عنوان یک مقطع محلی هموار

$$\sigma^A : U^A \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^A), \quad p \mapsto \left[ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(e_i) \right]_{i=1}^d \tag{158}$$



(ب) اگر مقاطع همانی  $\sigma^A$  و  $\sigma^B$  به نمودار اضافه شوند، اعمال چپ و راست با  $g \cdot e = e \cdot g \forall g \in \psi_{FM,p}^A \circ \sigma^A(p) = e$  یکدیگر منطبق می‌شوند زیرا  $\sigma^B \circ \pi_{FM} = \text{id}_{GL(d)}$

(ت) بدیهی سازی‌های کلاف قاب راست-هم‌متغیر هستند، یعنی برای هر  $h \in U \times GL(d)$  در رابطه  $\Psi_{FM,p} \triangleleft h = (\text{id} \times h) \circ \Psi_{FM}$  صدق می‌کنند.

شکل ۲۶: نمودارهای گسترش‌یافته بدیهی سازی‌های کلاف قاب که تعامل توابع گذار  $g^{BA}$ ، اعمال راست  $\triangleleft$  و  $\triangleright$  و مقاطع همانی  $\sigma^A$  و  $\sigma^B$  را نشان می‌دهند. مانند قبل،  $U = U^{AB} = U^A \cap U^B$  را به اختصار نشان می‌دهیم. به جز  $\pi_{FM}^B \circ \sigma^A \circ \pi_{FM}^A \neq \text{id}_{FM}$  نمودارها جایجا می‌شوند. اگر بدیهی سازی‌ها بخشی از یک G-اطلس باشند، نمودارهای مشابهی، با جایگزینی  $FM$  و  $GM$  با  $G$  و  $GL(d)$  برای G-ساختار متناظر اعمال می‌شوند.

از کلاف قاب فرمول‌بندی می‌شود که با نگاشت بردارهای قاب استاندارد  $\epsilon_i$  از  $\mathbb{R}^d$  به فضاهای مماس در  $\pi_{TM}^{-1}(U^A) \subseteq TM$  تعریف می‌شود. پیرو معادله ۱۰، یک تبدیل پیمانه از  $\Psi_{TM}^B = (\text{id} \times g^{BA}) \circ \Psi_{TM}^A$  به  $\sigma^B(p) = \sigma^A(p) \triangleleft (g_p^{BA})^{-1}$  متناظر است با یک تبدیل

$$\sigma^B(p) = \sigma^A(p) \triangleleft (g_p^{BA})^{-1} \quad (159)$$

از مقاطع روی  $U^{AB}$  بدیهی سازی‌های  $\Psi_{FM}^A$  از  $FM$  که بر حسب  $\Psi_{TM}^A$  تعریف شده‌اند، این ویژگی خوب را دارند که مقاطع متناظر  $\sigma^A$  را به قاب همانی نگاشت می‌کنند، که با جایگذاری هر دو تعریف می‌توان آن را مشاهده کرد:

$$\psi_{FM,p}^A \circ \sigma^A(p) = \psi_{FM,p}^A \left( \left[ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i) \right]_{i=1}^d \right) = \left( \psi_{TM,p}^A \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i) \right)_{i=1}^d = (\epsilon_i)_{i=1}^d = e \quad (160)$$

این ویژگی اغلب برای تعریف مقاطع  $FM$  با داشتن بدیهی سازی‌های  $\Psi_{FM}^A$  به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\sigma^A: U^A \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^A), \quad p \mapsto (\Psi_{FM}^A)^{-1}(p, e) = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(e), \quad (161)$$

که در نهایت با تعریف ما در معادله (۱۵۸) منطبق است. از آنجا که  $\Psi_{FM}^A$  که به این روش ساخته شده‌اند یکدیگر را القا می‌کنند، گاهی اوقات به آن‌ها مقاطع های همانی و بدیهی سازی‌های محلی کانونی گفته می‌شود. گسترش نمودار در شکل ۲۶ با مقاطع همانی  $\sigma^A$  و  $\sigma^B$  که با معادله ۱۵۹ مرتبه هستند،  $h = g^{BA}$  را ثابت می‌کند و بنابراین به نمودار جایجا بی در شکل ۲۶ ب منجر می‌شود. ضرب‌های چپ و راست با  $g^{BA} \cdot e = g^{BA} = e \cdot g^{BA} = \psi_{FM,p}^B \circ \sigma^B$  در اینجا فقط به این دلیل منطبق هستند که  $e$  برای آن  $GL(d)$  نمونه‌ای است. شکل ۲۶ را با شکل ۲۴ مقایسه کید که عمل پیمانه چپ  $\triangleleft (g_p^{BA})^{-1}$  و عمل راست  $(g_p^{BA})^{-1} \triangleleft$  از عنصر گروه معکوس را نشان می‌دهد که بین قاب‌های مقاطع همانی متناظر تبدیل می‌کند.

**G-اطلس الگاکننده GM-Sاختار G:** انطباق توابع گذار کلاف مماس و کلاف قاب در معادله (۱۵۶) نشان می‌دهد که یک G-اطلس از  $TM$  یک G-اطلس برای  $FM$  القا می‌کند. همانطور که در ادامه استنتاج خواهیم کرد، چنین G-اطلس‌هایی یک G-ساختار متناظر  $GM$  را مشخص می‌کنند، یعنی یک زیرکلاف اصلی  $G$  از  $FM$  که از قاب‌های ممتاز تشکیل شده است.

برای توجیه تعریف  $GM$  بر اساس یک G-اطلس داده شده  $\{(U^X, \Psi_{FM}^X)\}_{X \in \mathfrak{X}}$  از  $FM$ ، دو بدیهی سازی محلی آن  $\Psi_{FM}^A$  و  $\Psi_{FM}^B$  را با دامنه‌های  $F_p M$  در نظر بگیرید و فرض کنید  $p \in U^A \cap U^B$ . بدیهی سازی‌ها قاب‌های مرجع  $\sigma^A(p)$  و  $\sigma^B(p)$  را در  $F_p M$  تعریف می‌کنند که طبق همپوشان در نظر بگیرید.

معادله (۱۵۹) توسط عمل راست عنصری مانند  $g_p^{BA}$  از گروه ساختار کاهش یافته  $G \leq \text{GL}(d)$  به یکدیگر مرتبط هستند. بنابراین، هر قاب تعريف شده به این شکل، عنصری از یک G-مدار  $G_pM \cong \text{GL}(d)$  در  $G_pM \cong \text{GL}(d)$  است. به طور خاص، با این مقاطع همانی از طریق معادله (۱۶۱) به صورت  $\sigma^B(p) = (\psi_{FM,p}^B)^{-1}(e) = (g_p^{BA}\psi_{FM,p}^A)^{-1}(e) = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}((g_p^{BA})^{-1})\sigma^A(p) = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(G)$  تعريف نقطه‌ای G-ساختار بر اساس تصاویر معکوس  $G$  توسط نگاشت‌های پیمانه (دلخواه) پیشنهاد می‌شود:

$$G_pM := \left\{ (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(g) \mid g \in G \right\} = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(G) \quad (162)$$

استقلال از پیمانه انتخاب شده از G-اطلس واضح است زیرا هر انتخاب دیگری  $(\psi_{FM,p}^A)^{-1}(G)$  نتیجه یکسانی به دست می‌دهد. همانطور که به راحتی می‌توان بررسی کرد،  $G_pM$  در واقع یک تورسور راست G است زیرا یک تورسور راست G است و  $\psi_{FM,p}^A$  طبق معادله (۱۵۷) یک ایزو‌مورفیسم راست-GL( $d$ )-هم‌متغیر و بنابراین به طور خاص راست-G-هم‌متغیر است. همواری مورد نیاز  $GM = \coprod_{p \in M} G_pM$  از همواری بدیهی‌سازی‌های  $\Psi_{FM}^A$  ناشی می‌شود. یک G-اطلس از بدیهی‌سازی‌های محلی  $GM$  با محدود کردن بدیهی‌سازی‌ها در G-اطلس  $FM$  به قاب‌های موجود در  $GM$  به دست می‌آید، یعنی،

$$\Psi_{GM}^A := \Psi_{FM}^A|_{\pi_{GM}^{-1}(U^A)} : \pi_{GM}^{-1}(U^A) \rightarrow U^A \times G, \quad (163)$$

یا، به صورت محلی،

$$\psi_{GM,p}^A := \psi_{FM,p}^A|_{G_pM} : G_pM \rightarrow G. \quad (164)$$

بلافاصله نتیجه می‌شود که توابع گذار با مقدار در G با توابع گذار  $TM$  و  $TM$  منطبق هستند، یعنی،

$$\psi_{GM,p}^B([e_i]_{i=1}^d) = g_p^{BA}\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d), \quad (165)$$

و اینکه بدیهی‌سازی‌ها راست-G-هم‌متغیر هستند:

$$\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d \triangleleft h) = \psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) \cdot h \quad \forall h \in G \quad (166)$$

میدان‌های قاب نیز با یک عبارت معادل

$$\sigma^A(p) = (\psi_{GM,p}^A)^{-1}(e) \quad (167)$$

با عبارت معادله (۱۶۱) داده می‌شوند. نمودارهای جابجایی در شکل‌های ۲۶ آ و ۲۶ ب نیز هنگام جایگزینی  $FM$  با  $GM$  و  $GL(d)$  با G معتبر هستند.

**بدیهی‌سازی‌های القایی کلاف‌های الحاقی A:** یک G-اطلس  $\Psi_A^X : \{\{U^X, \Psi_A^X\}_{X \in \mathfrak{X}}\}$  شامل بدیهی‌سازی‌های محلی  $\Psi_{GM}^X \rightarrow U^X \times \mathbb{R}^c$  از کلاف‌های بردار ویژگی الحاقی  $\rho$  از  $A = (GM \times \mathbb{R}^c)/\sim$  از بدیهی‌سازی‌های متاظر  $\Psi_{GM}^X$  از G-ساختار القایی شود. برای ساختن این بدیهی‌سازی‌ها، به یاد بیاورید که بر اساس کلاس‌های همارزی  $[e_i]_{i=1}^d, f$   $\Psi_{GM}^X$  تعريف می‌شود که شامل زوج‌هایی از قاب‌های مرجع و بردارهای ضرب ویژگی است که توسط رابطه همارزی  $\rho \sim$  تعريف شده در معادله (۱۴۸) به هم مرتبط هستند. یک ایده طبیعی این است که  $[e_i]_{i=1}^d, f \in \mathcal{A}_p$  را با انتخاب یک نماینده از بردارهای ضرب همارز آن در  $\mathbb{R}^c$  بدیهی‌سازی کنیم. یک انتخاب ممتاز از نماینده در اینجا توسط آن بردار ضربی داده می‌شود که به قاب مقاطع همانی  $\sigma^A(p)$  متناظر با  $\Psi_{GM}^A$  تعیق دارد.

فرض کنید  $\sigma^A(p) \triangleleft h \in G_pM$  باشد که توسط یک جابجایی  $h \in G$  نسبت به مقاطع  $\sigma^A$  تعريف شده است. این جابجایی را می‌توان با بدیهی‌سازی G-ساختار بازیابی کرد:

$$\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) = \psi_{GM,p}^A(\sigma^A(p) \triangleleft h) = \psi_{GM,p}^A(\sigma^A(p)) \cdot h = h \quad (168)$$

در اینجا از هم‌متغیری راست- $\Psi_{GM,p}^A$  و اینکه  $\sigma^A$  به عنوان مقاطع همانی تعريف شده است، استفاده کردیم؛ به معادلات (۱۶۶) و (۱۶۰) که دومی برای  $\psi_{GM,p}^A$  تطبیق داده شده است، مراجعه کنید. بنابراین می‌توانیم هر قاب را از طریق جابجایی آن بازنویسی کنیم:

$$[e_i]_{i=1}^d = \sigma^A(p) \triangleleft \psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) \quad (169)$$

به طور مشابه، می‌توانیم هر بردار ویژگی  $[e_i]_{i=1}^d, f \in \mathcal{A}_p$  را با نماینده‌گان مختلف کلاس همارزی بازنویسی کنیم:

$$[[e_i]_{i=1}^d, f] = [\sigma^A(p) \triangleleft \psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d), f] = [\sigma^A(p), \rho(\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d))]f \quad (170)$$

$$\begin{array}{ccccc}
& & U \times \mathbb{R}^c & \xrightarrow{\text{proj}_r} & \mathbb{R}^c \\
& \swarrow \Psi_A^B & \uparrow (\text{id} \times \rho(g^{BA}) \cdot) & \nearrow & \uparrow \rho(g^{BA}) \\
\pi_A^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi_A^A} & U \times \mathbb{R}^c & \xrightarrow{\text{proj}_r} & \mathbb{R}^c \\
& \downarrow \pi_A & \nearrow f^B & \nearrow & \uparrow \\
U & \xrightarrow{f^A} & & &
\end{array}$$

شکل ۲۷: میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات به عنوان مقاطع سراسری  $\mathcal{A}$  در همسایگی‌های محلی  $U^A$  و  $U^B$ . آن‌ها به میدان‌های بردارهای ضرب ویژگی  $f^B : U^B \rightarrow \mathbb{R}^c$  و  $f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c$  بدبیهی سازی می‌شوند که روی  $f^B(p) = \rho(g_p^{BA})f^A(p)$  با رابطه  $U^A \cap U^B = U^A \cup U^B$  بروی  $f^B(p) = \rho(g_p^{BA})f^A(p)$  با پیمانه  $\rho(g^{BA})$  موافق است. به هم مرتبط هستند. به جز  $f \circ \pi_A^{-1} \neq \text{id}_{\mathcal{A}}$ , نمودار جابجایی پذیر است.

بر اساس این بیان‌ها، بدبیهی سازی‌های القایی  $\mathcal{A}$  را با قرار دادن زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Psi_{\mathcal{A}}^A : \pi_A^{-1}(U^A) \rightarrow U^A \times \mathbb{R}^c, \quad [[e_i]_{i=1}^d, f] \mapsto \left( \pi_{GM}([e_i]_{i=1}^d), \psi_{\mathcal{A}, p}^A([e_i]_{i=1}^d, f) \right), \quad (171)$$

با

$$\psi_{\mathcal{A}, p}^A : \mathcal{A}_p \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad [[e_i]_{i=1}^d, f] = [\sigma^A(p), \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d))f] \mapsto \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d))f, \quad (172)$$

که آن بردار ضرب نماینده خاص  $f^A = \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d))f \in \mathbb{R}^c$  را انتخاب می‌کند که توسط قاب مرجع  $\sigma^A(p)$  متاظر با پیمانه انتخاب شده، متمایز می‌شود. برای راحتی در آینده، توجه می‌کنیم که این به طور خاص دلالت بر این دارد که معکوس معادله (۱۷۲) توسط

$$(\psi_{\mathcal{A}, p}^A)^{-1} : \mathbb{R}^c \rightarrow \mathcal{A}_p : f \mapsto [\sigma^A(p), f]. \quad (173)$$

داده می‌شود. بدبیهی سازی تعریف شده به این شکل مستقل از نماینده انتخاب شده است زیرا برای هر  $k \in G$  داریم:

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathcal{A}, p}^A([e_i]_{i=1}^d \triangleleft k^{-1}, \rho(k)f) &= \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d \triangleleft k^{-1}))\rho(k)f \\
&= \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d) \cdot k^{-1})\rho(k)f \\
&= \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d))f \\
&= \psi_{\mathcal{A}, p}^A([e_i]_{i=1}^d, f)
\end{aligned} \quad (174)$$

بر اساس ساختار، توابع گذار توسط  $\rho(g_p^{BA})$  داده می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathcal{A}, p}^B([e_i]_{i=1}^d, f) &= \rho(\psi_{GM, p}^B([e_i]_{i=1}^d))f \\
&= \rho(g_p^{BA}\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d))f \\
&= \rho(g_p^{BA})\rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d))f \\
&= \rho(g_p^{BA})\psi_{\mathcal{A}, p}^A([e_i]_{i=1}^d, f)
\end{aligned} \quad (175)$$

اگر کلاف مماس به عنوان یک کلاف برداری  $G$ -الحاقی  $TM \cong (GM \times \mathbb{R}^d)/G$  در نظر گرفته شود، بدبیهی سازی‌های آن از معادله (۱۷۱) برای انتخاب خاص  $g = \rho(g)$  بازتابی می‌شوند.

فرض کنید یک میدان ویژگی مستقل از مختصات  $\Psi_{\mathcal{A}}^A \in \Gamma(\mathcal{A})$  داده شده باشد. نسبت به پیمانه  $\Psi_{\mathcal{A}}^A$ ، می‌توان آن را به صورت محلی به عنوان یک میدان بردار ضرب  $f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c$  با تعریف زیر نمایش داد:

$$f^A := \text{proj}_r \circ \Psi_{\mathcal{A}}^A \circ f \quad (176)$$

که معادل با تعریف نقطه‌ای زیر است:

$$f^A(p) = \psi_{\mathcal{A}, p}^A \circ f(p). \quad (177)$$

همانطور که از نمودار جابجایی در شکل ۲۷ پیداست، توابع گذار در معادله (۱۷۵) به میدان‌های ضرب محلی منتقل می‌شوند به طوری که داریم:

$$f^B(p) = \rho(g_p^{BA})f^A(p) \quad (178)$$

برای  $p \in U^A \cap U^B$  این با تعریف ما از تبدیلات پیمانه بردارهای ضرب ویژگی در معادله (۲۸) موافق است و آن را توجیه می‌کند.

**ملاحظات پایانی:** بدینهی سازی‌های محلی و توابع گذار تعریف شده در اینجا، تعاریف پیمانه‌ها و تبدیلات پیمانه از بخش ۲.۳ را رسمی سازی و توجه می‌کنند. نشان داده شد که بدینهی سازی‌های محلی  $TM$  و  $FM$  یکدیگر را القا می‌کنند. اگر یک  $G$ -اطلس برای هر یک از این دو انتخاب شود، یک  $G$ -ساختار  $GM$  تعریف می‌کند که  $G$ -اطلس آن اساساً با  $G$ -اطلس  $FM$  منطبق است. علاوه بر این، یک  $G$ -اطلس برای هر کلاف الحاقی دیگر، از جمله  $A$ ، القا می‌کند. همانطور که در شکل ۲۵ به تصویر کشیده شده است، توابع گذار تمام  $G$ -اطلس‌ها برای  $GM$ ،  $TM$  و  $FM$  با هم منطبق مستند، که این کلاف‌ها را  $G$ -الحاقی با یکدیگر می‌سازند. به طور خاص، هنگام تغییر از پیمانه  $A$  به پیمانه  $B$ ، بدینهی سازی‌های  $FM$ ،  $TM$  و  $GM$  مطابق با یک ضرب چپ با  $g^{BA}$  تبدیل می‌شوند در حالی که بدینهی سازی‌های کلاف بردار ویژگی مطابق با یک ضرب چپ با  $(g^{BA})^{-1} \cdot (g^{BA})$  تبدیل می‌شوند؛ به معادلات (۱۵۳)، (۱۵۶) و (۱۶۵) (معادله ۱۷۵) مراجعه کنید. در عین حال، میدان‌های قاب مطابق با عمل راست  $(g^{BA})^{-1} \cdot (g^{BA})$  تبدیل می‌شوند.

## ۵.۶ منتقل کننده‌های موازی روی کلاف‌های الحاقی

بعش ۳.۳ مقدمه‌ای شهودی بر انتقال موازی بردارهای مماس و بردارهای ویژگی در امتداد یک مسیر  $\gamma$  از  $p \in M$  به  $q \in M$  در اینجا به طور خلاصه بحث می‌کنیم که چگونه منتقل کننده‌های موازی منتقل از مختصات روی کلاف‌های تاری یکدیگر را القا می‌کنند و عبارات مختصاتی آنها را نسبت به بدینهی سازی‌های داده شده استخراج می‌کنیم. ما با فرض داده شده یوden منتقل کننده‌های منتقل از مختصات

$$\mathcal{P}_{TM,\gamma} : T_q M \rightarrow T_p M \quad (179)$$

روی کلاف مماس  $TM$  شروع می‌کنیم و توضیح می‌دهیم که چگونه آنها منتقل کننده‌های

$$\mathcal{P}_{FM,\gamma} : F_q M \rightarrow F_p M \quad (180)$$

روی کلاف قاب  $FM$  را القا می‌کنند. اگر این منتقل کننده‌ها، همانطور که در ادامه بحث می‌شود، با  $G$ -ساختار انتخاب شده  $G$ -سازگار باشند، در ادامه منتقل کننده‌های

$$\mathcal{P}_{GM,\gamma} : G_q M \rightarrow G_p M \quad (181)$$

$$\mathcal{P}_{A,\gamma} : A_q \rightarrow A_p \quad (182)$$

را روی کلاف‌های  $G$ -الحاقی  $GM$  و  $A$ -الحاقی  $GA$  می‌کنند. در عمل، یعنی در مرور ادبیات ما در بخش ۲.۳، اکثر شبکه‌های کانولوشنی یا منتقل کننده‌هایی را فرض می‌کنند که بر اساس اتصال لوی-چیوینا هستند یا یک اتصال بدینهی.

یک تعریف رسمی تر از منتقل کننده‌های کلاف ممکن است مسیر متفاوتی را در پیش بگیرد، که با معرفی یک اتصال به اصطلاح اصلی ارسامان روی کلاف اصلی  $G$  یعنی در  $GM$  شروع می‌شود (که بنا به تعریف،  $G$ -سازگار خواهد بود). چنین اتصال ارسامانی می‌تواند یا با انتخاب یک زیر کلاف افقی  $TGM$  از کلاف مماس  $HGM$  از  $GM$  تعریف شود یا، به طور معادل، با یک ۱-فرم اتصال با مقدار در جبر لی  $\mathfrak{g}$  →  $GM$ :  $w$  روی  $GM$  متعاقباً از طریق بالابر افقی  $GM \rightarrow [1, 0, 0]$ :  $\gamma$  را فضای پایه تعریف می‌شود، به طوری که بردارهای مماس بالابر در  $GM$  افقی هستند، یعنی  $v \in HGM \in \mathfrak{g}$ . سپس تمام منتقل کننده‌ها روی  $TM$ ،  $FM$  و  $A$ ، به عنوان کلاف‌های  $G$ -الحاقی از منتقل کننده‌های روی  $G$ -ساختار القا می‌شوند. به جای دنبال کردن این رویکرد رسمی، که نسبتاً فنی خواهد بود و می‌توان آن را در ادبیات یافت [؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟]، ما بر چگونگی ارتباط متقابل منتقل کننده‌های مختلف از طریق القای یکدیگر تمرکز می‌کنیم.

**انتقال روی  $TM$ :** برای این منظور، با فرض داده شده یوden منتقل کننده‌های منتقل از مختصات  $TM$  روی  $\mathcal{P}_{TM,\gamma}$ ، یک راه میان بر را انتخاب می‌کنیم. به یاد بیاورید که، با داشتن پیمانه‌های  $\tilde{\Psi}_{TM}^{\bar{A}}$  روی یک همسایگی  $U^{\bar{A}}$  از  $q$  و  $\Psi_{TM}^A$  روی یک همسایگی  $U^A$  از  $p$ ، منتقل کننده بردار مماس طبق معادله (۳۳) مختصاتی می‌شود، یعنی،

$$g_{\gamma}^{A\bar{A}} := \psi_{TM,p}^A \circ \mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\bar{A}})^{-1} \in \text{GL}(d), \quad (183)$$

و اینکه مختصاتی سازی‌های آن تحت تبدیلات پیمانه در  $q$  و  $p$  طبق معادله (۳۵) تبدیل می‌شوند:

$$g_{\gamma}^{B\bar{B}} = g_p^{BA} g_{\gamma}^{A\bar{A}} (g_q^{\bar{B}\bar{A}})^{-1} \quad (184)$$

برای نمایش تصویری این تعریف در قالب یک نمودار جابجایی، به معادله (۳۴) بازمی‌گردیم.

**انتقال روی  $FM$ :** با داشتن منتقل کننده روی کلاف مماس، منتقل کننده از انتقال محورهای قاب منفرد به دست می‌آید. در معادلات، فرض کنید  $C_i \in F_q M$  یک قاب در  $q$  باشد، سپس محورهای منفرد  $e_i$  برای  $i = 1, \dots, d$  بردارهای مماس در  $T_q M$  هستند.

که می‌تواند از طریق  $\mathcal{P}_{TM,\gamma}$  منتقل شوند. بنابراین منتقل کننده روی کلاف قاب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:<sup>۴۹</sup>

$$\mathcal{P}_{FM,\gamma}: F_qM \rightarrow F_pM, \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto \mathcal{P}_{FM,\gamma}([e_i]_{i=1}^d) := [\mathcal{P}_{TM,\gamma}(e_i)]_{i=1}^d \quad (185)$$

برای استخراج شکل صریح مختصاتی سازی آن را بروی یک عنصر گروهی  $(\psi_{FM,p}^A \circ \mathcal{P}_{FM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1}) \in GL(d)$  در  $GL(d)$  عمل آن را بروی یک عنصر گروهی  $(\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1} \in GL(d)$  در نظر بگیرید که نماینده یک قاب بدیهی شده از  $\mathbb{R}^d$  است که توسط ستون‌های ماتریس  $h_{:,i} \in \mathbb{R}^d$ ,  $i = 1, \dots, d$  تولید می‌شود:

$$\begin{aligned} [\psi_{FM,p}^A \circ \mathcal{P}_{FM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1}] (h) &= [\psi_{FM,p}^A \circ \mathcal{P}_{FM,\gamma}] \left( [(\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(h_{:,i})]_{i=1}^d \right) && \text{(تعريف } \psi_{FM,p}^A, \text{ معادله ۱۵۵)} \\ &= \psi_{FM,p}^A \left( [\mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(h_{:,i})]_{i=1}^d \right) && \text{(تعريف } \mathcal{P}_{FM,\gamma}, \text{ معادله ۱۸۵)} \\ &= \left( \psi_{TM,p}^A \circ \mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(h_{:,i}) \right)_{i=1}^d && \text{(تعريف } \psi_{TM,p}^A, \text{ معادله ۱۵۵)} \\ &= \left( g_\gamma^{A\tilde{A}}(h_{:,i}) \right)_{i=1}^d && \text{(بدیهی سازی } \mathcal{P}_{TM,\gamma}, \text{ معادله ۱۸۳)} \\ &= g_\gamma^{A\tilde{A}} h && \text{(۱۸۶)} \end{aligned}$$

بنابراین، مختصاتی سازی‌های منتقل کننده‌های قاب معادل با مختصاتی سازی‌های منتقل کننده‌های بردار مماس در معادله (۱۸۳) هستند اما به جای عمل بر روی بردارهای ضرب در  $\mathbb{R}^d$ , بر روی قاب‌های بدیهی شده در  $GL(d)$  عمل می‌کنند. تبدیلات پیمانه آن‌ها را نمودار جابجایی

$$\begin{array}{ccccc} & & g_\gamma^{A\tilde{A}}. & & \\ GL(d) & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & GL(d) \\ & \downarrow & & \uparrow & \\ & \psi_{FM,q}^{\tilde{A}} & & & \psi_{FM,p}^A \\ & \downarrow & & \uparrow & \\ & g_q^{\tilde{B}\tilde{A}}. & F_qM & \xrightarrow{\mathcal{P}_{FM,\gamma}} & F_pM \\ & \downarrow & & & \downarrow \\ & \psi_{FM,q}^{\tilde{B}} & & & \psi_{FM,p}^B \\ & \downarrow & & \uparrow & \\ GL(d) & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & GL(d) \\ & & g_\gamma^{B\tilde{B}}. & & \end{array} \quad (187)$$

دیده می‌شود که با تبدیلات پیمانه منتقل کننده‌های مختصاتی شده روی  $TM$  در معادله (۱۸۴) منطبق هستند.

**سازگاری اتصالات و  $G$ -ساختارها:** هر انتخابی از اتصال یا تعریف منتقل کننده‌ها روی کلاف‌های  $TM$  یعنی  $GL(d)$  با هر  $G$ -ساختاری سازگار نیست. به طور خاص، یک  $G$ -ساختار ممکن است تحت انتقال قاب‌ها بسته نباشد، یعنی، در حالی که یک قاب در  $G_qM \subseteq F_qM$  قرار ندارد.<sup>۵۰</sup> نسبت به بدیهی سازی‌های  $GM$ , چنین ناسازگاری در توسعه  $P_{FM,\gamma}$  به یک قاب در  $F_pM$  منتقل می‌شود، این قاب لزوماً در  $G_pM$  قرار ندارد.<sup>۵۱</sup> منعکس می‌شود، که ضرب چپ آن‌ها روی تارهای  $\mathbb{R}^d$  و  $GL(d)$  از کلاف‌های  $TM$  یعنی  $GL(d)$  منتقل کننده‌های مختصاتی شده  $G$   $g_\gamma^{A\tilde{A}} \notin G$  خوش تعریف نیست. اگر زیرکلاف  $GM$  تحت انتقال موازی روی  $TM$  خوش تعریف است، اما روی تار  $G$  از  $GM$  خوش تعریف نیست. اگر زیرکلاف  $GM$  تحت انتقال موازی روی  $TM$  خوش تعریف است، اما روی تار  $G$  از  $GM$  خوش تعریف نیست. آن به معنای آن است که هیچ انتقال متناظر خوش تعریفی روی  $GM$  و در نتیجه روی هیچ کلاف  $G$ -الحاقی  $A$  وجود ندارد.

به عنوان مثال، اتصال لوی-چیویتا را در فضاهای اقليدسي در نظر بگیرید، که منتقل کننده‌های آن بردارهای مماس و قاب‌ها را به معنای معمول در  $d$ -موزایی نگه می‌دارند. {e}-ساختار (میدان قاب) در شکل ۴۹ تحت این انتقال بسته است و بنابراین سازگار است. از سوی دیگر, {e}-ساختار در شکل ۴۹ تحت این انتقال بسته نیست و بنابراین با اتصال لوی-چیویتا ناسازگار است. به طور مشابه, (۲)-SO-ساختار روی  $S^3$  در شکل ۴۹ با اتصال لوی-چیویتا روی کره سازگار است، در حالی که {e}-ساختار در شکل ۴۹ سازگار نیست.

خواننده ممکن است پرسد چه گزاره‌های کلی در مورد سازگاری اتصالات (یا منتقل کننده‌ها) و  $G$ -ساختارها می‌توان بیان کرد. به طور کلی، اتصال لوی-چیویتا، یا هر اتصال متريک ديجيگري، با  $d$ -ساختار  $OM$  که متناظر با متريک است، سازگار هستند.<sup>۵۲</sup> اگر منيفلد جهت پذير باشد، اتصال لوی-چیویتا علاوه بر اين با هر  $(2)-SO(d)$ -ساختاری که متناظر با متريک باشد، سازگار است. يك مثال،  $(2)-SO(d)$ -ساختار روی  $S^3$  در شکل ۴۹ است. يك

<sup>۴۹</sup> انتقال یک قاب در امتداد  $FM$  یک منحنی  $\gamma$  (بالا برفقی) را در  $TFM$  توصیف می‌کند. فضای تولید شده توسط تمام بردارهای مماس  $\gamma'$  در امتداد  $TFM$  چنین منحنی‌هایی، زیرکلاف افقی  $HFM$  از  $TFM$  است که در بالا ذکر شد.<sup>۵۰</sup> بر حسب یک اتصال اصلی ارسمن روی  $FM$ ، این حالت زمانی رخ می‌دهد که زیرکلاف افقی  $TGM \subseteq TFM$  در  $HFM \subseteq TFM$  قرار نداشته باشد. يك تعريف فوری از انتقال موازی بر حسب انتخاب يك زیرکلاف افقی  $HGM$  روی  $G$ -ساختار، هميشه (بنا به تعريف) منجر به يك انتقال خوش تعریف روی  $GM$  خواهد شد.

<sup>۵۱</sup> اين گزاره بنا به تعريف برقرار است زيرا اتصالات متريک زوايا و طول‌ها بين بردارها و در نتیجه اورتونمال بودن قاب‌ها را حفظ می‌کنند. علاوه بر اين، می‌توان اتصالات متريک را به عنوان اتصالات اصلی ارسمن روی  $\bar{OM}$  تعريف کرد.

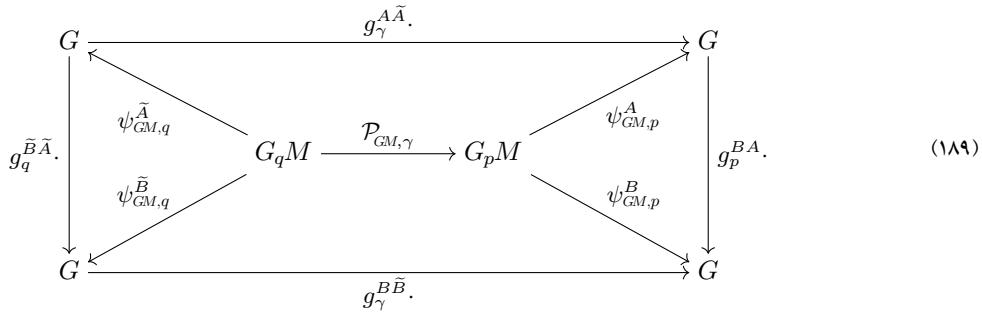
شرط لازم (اما نه کافی) برای اینکه یک  $G$ -ساختار باشد این است که گروه هولونومی اتصال، زیرگروهی از گروه ساختار  $G$  باشد.

یک مورد خاص مهم،  $\{e\}$ -ساختارها هستند، زیرا آن‌ها یک اتصال بدیهی منحصر به فرد را القا می‌کنند.<sup>۵۲</sup> منتقل کننده‌های متناظر، قاب‌ها را به گونه‌ای حرکت می‌دهند که با قاب‌های  $\{e\}$ -ساختار موازی باقی بمانند. اتصالات بدیهی ممکن است برای نظریه کانولوشن‌های  $GM$  اهمیت خاصی نداشته باشند، با این حال، در واقع توسط بسیاری از شبکه‌های کانولوشنی استفاده می‌شوند. به طور خاص، هر شبکه‌ای که به یک  $\{e\}$ -ساختار متناظر است، به طور ضمنی یک اتصال بدیهی را فرض می‌کند. این شامل تمام مدل‌های جدول  $\{e\}$  با  $G = \{e\}$  می‌شود، به ویژه آن‌هایی که در بخش‌های  $\{e\}$  بررسی شده‌اند.<sup>۵۳</sup> توجه داشته باشید که این مدل‌ها اتصال بدیهی را فقط برای انتقال بردار ویژگی خود فرض می‌کنند اما ژئودزیک‌ها را برای پول‌بک منتقل کنند، معادله (۱۸۷)، بر اساس اتصال اصلی لوی–چیویتا محاسبه می‌کند:

**انتقال روی  $GM$ :** با فرض اینکه  $GM$  با انتقال روی  $FM$  سازگار است (یعنی تحت آن بسته است)، یک منتقل کننده خوش تعریف با محدود کردن منتقل کننده کلاف قاب به  $G$ -ساختار داده می‌شود:

$$\mathcal{P}_{GM,\gamma} := \mathcal{P}_{FM,\gamma}|_{GM} : G_q M \rightarrow G_p M \quad (188)$$

توابع گذار بین مختصاتی سازی‌های مختلف  $\mathcal{P}_{GM,\gamma}$  سپس با توابع گذار  $\mathcal{P}_{TM,\gamma}$  و در نتیجه با  $\mathcal{P}_{TM,\gamma}$  نیز متنطبق خواهد بود. ما نمودار جابجایی زیر را به دست می‌آوریم که محدودسازی نمودار در معادله (۱۸۷) از  $G_q M$ ،  $G_p M$  و  $GL(d)$  به  $G$  و  $G_q M$  و  $G_p M$  را به تصویر می‌کشد:



ما در ادامه این کار فرض می‌کنیم که انتقال روی  $GM$  خوش تعریف است.

**انتقال روی  $A$ :** اگر منتقل کننده‌های یک اتصال روی  $GM$  خوش تعریف باشند، آن‌ها منتقل کننده‌های را روی هر کلاف  $G$ -الحاقی، از جمله کلاف‌های بردار ویژگی  $\rho \sim \rho$  ( $GM \times \mathbb{R}^c$ ) /  $\sim$  می‌کنند. فرض کنید  $[e_i]_{i=1}^d, f := [f_q]$  یک بردار ویژگی مستقل از مختصات در  $A_q$  باشد. انتقال موازی آن توسط آن کلاس همارزی داده می‌شود که با ثابت نگه داشتن برخی ضرایب نماینده  $f \in \mathbb{R}^c$  و انتقال قاب متناظر  $[e_i]_{i=1}^d$  تعريف می‌شود:

$$\mathcal{P}_{A,\gamma} : A_q \rightarrow A_p, \quad f_q \mapsto \mathcal{P}_{A,\gamma}(f_q) := [\mathcal{P}_{GM,\gamma}([e_i]_{i=1}^d), f] \quad (189)$$

در بخش ۳.۳.۳ ما ادعا کردیم که منتقل کننده ضرایب عددی بردار ویژگی  $(g_\gamma^{A\tilde{A}})^{-1}$  باشد، که این حالت زمانی است که انتقال روی  $GM$  خوش تعریف باشد. این عبارت مختصاتی از  $\mathcal{P}_{A,\gamma}$  را می‌توان با ارزیابی گام به گام عمل  $\psi_{A,p}^A \circ \mathcal{P}_{A,\gamma} \circ (\psi_{A,q}^{\tilde{A}})^{-1}$  در  $\rho(G) \leq GL(c)$  روی یک بردار ضریب ویژگی استخراج کرد:

$$\begin{aligned} [\psi_{A,p}^A \circ \mathcal{P}_{A,\gamma} \circ (\psi_{A,q}^{\tilde{A}})^{-1}](f) &= [\psi_{A,p}^A \circ \mathcal{P}_{A,\gamma}]([\sigma^{\tilde{A}}(q), f]) && \text{(تعريف } \psi_{A,p}^{\tilde{A}} \text{، معادله (۱۷۳))} \\ &= \psi_{A,p}^A([\mathcal{P}_{GM,\gamma}(\sigma^{\tilde{A}}(q)), f]) && \text{(تعريف } \mathcal{P}_{A,\gamma} \text{، معادله (۱۹۰))} \\ &= \rho(\psi_{GM,p}^A \circ \mathcal{P}_{GM,\gamma} \circ \sigma^{\tilde{A}}(q)) \cdot f && \text{(تعريف } \psi_{A,p}^A \text{، معادله (۱۷۲))} \\ &= \rho(\psi_{GM,p}^A \circ \mathcal{P}_{GM,\gamma} \circ (\psi_{GM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(e)) \cdot f && \text{(تعريف مقطع همانی } \sigma^{\tilde{A}} \text{، معادله (۱۶۱))} \\ &= \rho(g_\gamma^{A\tilde{A}}) \cdot f && \text{(در مختصات، معادله (۱۸۹))} \end{aligned} \quad (190)$$

<sup>۵۲</sup> یک اتصال بدیهی است اگر گروه هولونومی آن، یعنی انتقال موازی آن حول هر حلقه بسته، بدیهی باشد [۴].  
<sup>۵۳</sup> فقط یک اتصال اصلی ارسمن  $H\{e\}M = T\{e\}M$  را می‌توان روی  $\{e\}M$  انتخاب کرد زیرا کلاف عمودی  $V\{e\}M$  مقطع صفر از  $T\{e\}M$  است.  
<sup>۵۴</sup> این مدل‌ها با مدل‌سازی نکردن منتقل کننده‌های غیربدیهی بردارهای ویژگی، به طور ضمنی یک اتصال بدیهی را فرض می‌کنند: آن‌ها ضرایب بردار ویژگی را بدون تبدیل آن‌ها ایاشت می‌کنند.