نظریه شبکه‌های کانولوشنی گیج

نویسنده

۱۹ خرداد ۱۴۰۴

چکیده

انگیزه‌ای از موفقیت گسترده شبکه‌های عمیق کانولوشنی، علاقه زیادی برای تعمیم کانولوشن‌ها به منیفولدهای غیراقلیدسی وجود دارد. یک پیچیدگی عمده در مقایسه با فضاهای مسطح این است که مشخص نیست کرنل کانولوشن باید در کدام تراز روی یک منیفولد اعمال شود. دلیل اساسی این ابهام آن است که منیفولدهای عمومی دارای انتخاب متعارف چارچوب‌های مرجع (گیج) نیستند. بنابراین کرنل‌ها و ویژگی‌ها باید نسبت به مختصات دلخواه بیان شوند. ما استدلال می‌کنیم که انتخاب خاص مختصات‌بندی نباید بر استنتاج شبکه تأثیر بگذارد □ آن باید مستقل از مختصات باشد. تقاضای همزمان برای استقلال مختصات و اشتراک وزن منجر به الزامی روی شبکه می‌شود تا تحت تبدیل‌های گیج محلی (تغییرات چارچوب‌های مرجع محلی) تناوب‌پذیر باشد. ابهام چارچوب‌های مرجع بدین‌گونه به G-ساختار منیفولد بستگی دارد، به طوری که سطح لازم تناوب‌پذیری گیج توسط گروه ساختار G متناظر تجویز می‌شود. کانولوشن‌های مستقل از مختصات ثابت می‌شوند که نسبت به آن ایزومتری‌هایی که تقارن‌های G-ساختار هستند تناوب‌پذیر باشند. نظریه حاصل به شکل آزاد از مختصات بر حسب بندل‌های فیبر فرمول‌بندی می‌شود. برای نمونه‌سازی طراحی کانولوشن‌های مستقل از مختصات، ما شبکه کانولوشنی روی نوار موبیوس پیاده‌سازی می‌کنیم. عمومیت فرمول‌بندی هندسه دیفرانسیل ما از شبکه‌های کانولوشنی با بررسی گسترده ادبیات نشان داده می‌شود که تعداد زیادی از های□□□ اقلیدسی، های□□□ کروی و ها□□□ روی سطوح عمومی را به عنوان نمونه‌های خاص کانولوشن‌های مستقل از مختصات توضیح می‌دهد.

شکل ۱: نمایش کانولوشن روی نوار موبیوس با گیج‌های مختلف

۱ مقدمه

در سال‌های اخیر، شبکه‌های عصبی کانولوشنی عمیق (□□□□ □□□□□□□□□□□□□ □□□□□□ □□□□□□□□) موفقیت‌های چشمگیری در زمینه‌های مختلف یادگیری ماشین از جمله بینایی کامپیوتر، پردازش زبان طبیعی و تشخیص الگو به دست آورده‌اند. این موفقیت‌ها عمدتاً در فضاهای اقلیدسی حاصل شده است که در آن‌ها ساختار منظم شبکه و ترانسلیشن اینواریانس عملیات کانولوشن به طور طبیعی تعریف می‌شود.

با این حال، بسیاری از داده‌های دنیای واقعی روی ساختارهای هندسی پیچیده‌تری مانند منیفولدها، گراف‌ها و سطوح منحنی قرار دارند. در چنین فضاهایی، تعمیم مستقیم عملیات کانولوشن با چالش‌های اساسی مواجه می‌شود.

۲ چالش‌های اساسی

۱.۲ عدم وجود چارچوب مرجع متعارف

یکی از اصلی‌ترین چالش‌ها در تعمیم کانولوشن به منیفولدهای عمومی، عدم وجود چارچوب مرجع (□□□□□□□□□ □□□□□) متعارف است. در فضاهای اقلیدسی، جهت‌ها و مختصات به طور طبیعی تعریف می‌شوند، اما در منیفولدهای عمومی این امکان وجود ندارد.

۲.۲ ابهام در تراز کرنل

بدون چارچوب مرجع ثابت، مشخص نیست که کرنل کانولوشن باید چگونه روی منیفولد تراز شود. این ابهام می‌تواند منجر به نتایج متفاوت بسته به انتخاب تصادفی تراز شود.

۳ راه‌حل پیشنهادی: تناوب‌پذیری گیج

ما راه‌حلی بر اساس مفهوم تناوب‌پذیری گیج (□□□□□ □□□□□□□□□□□□) پیشنهاد می‌دهیم. ایده اصلی این است که شبکه باید تحت تغییرات چارچوب مرجع محلی پایا باشد.

۱.۳ تعریف ریاضی

برای منیفولد M با G-ساختار، تناوب‌پذیری گیج عبارت است از:

$$f(g \cdot x) = \rho(g) \cdot f(x)$$

که در آن $g \in G$ یک تبدیل گیج، x نقطه‌ای روی منیفولد و ρ نمایش گروه است.

۴ پیاده‌سازی روی نوار موبیوس

به عنوان مثالی از کاربرد نظریه پیشنهادی، ما شبکه کانولوشنی روی نوار موبیوس پیاده‌سازی کرده‌ایم. نوار موبیوس به دلیل ویژگی‌های توپولوژیکی منحصر به فرد خود، نمونه جالبی از منیفولدهای غیرقابل جهت‌یابی است.

۵ نتایج تجربی

آزمایش‌های انجام شده روی مجموعه داده‌های مختلف نشان می‌دهد که رویکرد پیشنهادی عملکرد بهتری نسبت به روش‌های سنتی دارد، به خصوص در مواردی که ساختار هندسی داده مهم است.

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله، ما چارچوب نظری جامعی برای تعمیم شبکه‌های کانولوشنی به منیفولدهای عمومی ارائه دادیم. رویکرد ما بر اساس مفهوم تناوب‌پذیری گیج است که اطمینان می‌دهد شبکه تحت تغییرات چارچوب مرجع محلی پایا باقی می‌ماند.

کلیدواژه‌ها: شبکه‌های کانولوشنی، منیفولدهای ریمانی، تناوب‌پذیری گیج، هندسه دیفرانسیل، یادگیری عمیق