

شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات

کانولوشن‌های یکسان نسبت به ایزومنتری و پیمانه روی منیفلدهای ریمانی

موریس وایلر^۱ پاتریک فوره^۱ اریک ورلیند^۲ مکس ولینگ^۱

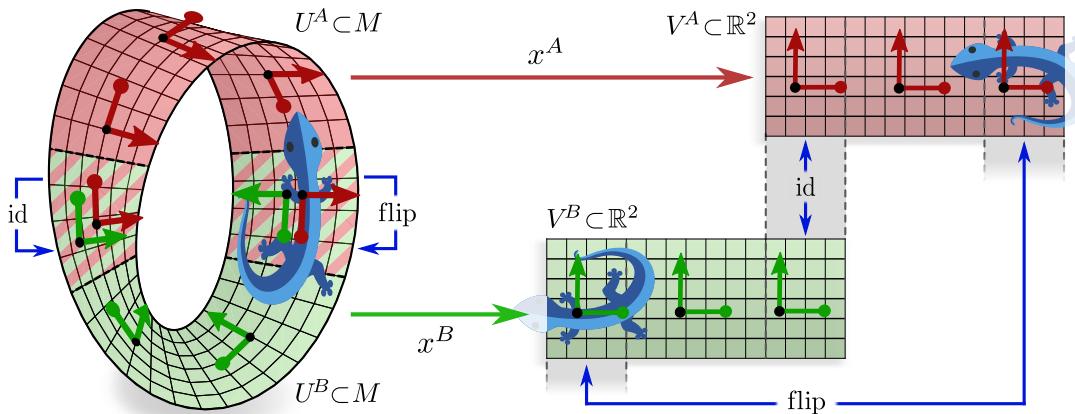
^۱دانشگاه آمستردام

^۲پژوهشگاه هوش مصنوعی کوالکام

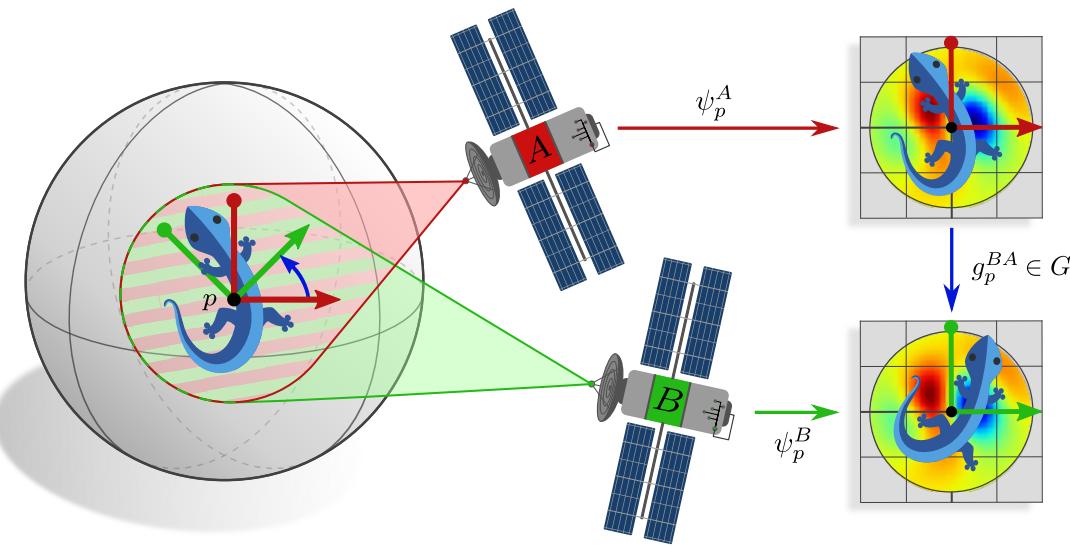
p.d.forre@uva.nl m.weiler.ml@gmail.com
m.welling@uva.nl e.p.verlinde@uva.nl

مقدمه

انگیزه‌ای از موقیت گسترده شبکه‌های عمیق کانولوشنی، علاقه زیادی برای تعمیم کانولوشن‌ها به منیفلدهای غیراقلیدسی وجود دارد. یک پیچیدگی عمده در مقایسه با فضاهای مسطح این است که مشخص نیست کرمل کانولوشن باید در کدام تراز روی یک منیفلد اعمال شود. دلیل اساسی این ابهام آن است که منیفلدهای عمومی دارای انتخاب متعارف چارچوب‌های مرجع (گیج) نیستند. بنابراین کرنل‌ها و ویژگی‌ها باید نسبت به مختصات دلخواه بیان شوند. ما استدلال می‌کنیم که انتخاب خاص مختصات‌بندی باید بر استنتاج شبکه تأثیر بگذارد آن باید مستقل از مختصات باشد. تقاضای همزمان برای استقلال مختصات و اشتراک وزن منجر به الزامی روی شبکه می‌شود تا تحت تبدیل‌های گیج محلی (تغییرات چارچوب‌های مرجع محلی) تناوب پذیر باشد. ابهام چارچوب‌های مرجع بدین گونه به G -ساختار منیفلد بستگی دارد، به طوری که سطح لازم تناوب پذیری گیج توسط گروه ساختار G متناظر تجویز می‌شود. کانولوشن‌های مستقل از مختصات ثابت می‌شوند که نسبت به آن ایزومنتری‌هایی که تقارن‌های G -ساختار هستند تناوب پذیر باشند. نظریه حاصل به شکل آزاد از مختصات بر حسب بندل‌های فیبر فرمول بندی می‌شود. برای نمونه‌سازی طراحی کانولوشن‌های مستقل از مختصات، ما شبکه کانولوشنی روی نوار مویوس پیاده‌سازی می‌کنیم. عمومیت فرمول بندی هنوز دیفرانسیل ما از شبکه‌های کانولوشنی با بررسی گسترده ادبیات نشان داده می‌شود که تعداد زیادی از شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی، شبکه‌های کانولوشنی کروی و شبکه‌های کانولوشنی روی سطوح عمومی را به عنوان نمونه‌های خاص کانولوشن‌های مستقل از مختصات توضیح می‌دهد.



شکل ۱: نمایش کانولوشن روی نوار مویوس با گیج‌های مختلف



شکل ۲: ناظران مختلف \square و \square ممکن است یک الگوی ویژگی را از « نقطه دید » متفاوتی در کاربرد ما، کرنل های کانولوشنی هستند که میدان دید محلی خود در اطراف p را در یک بردار ویژگی در p خلاصه می کنند. « نقطه دید » آنها انتخابی از یک چارچوب مرجع محلی (گیج) در \square است که کرنل در امتداد آن همتراز می شود. از آنجا که مشاهدات از هر دو نقطه دید یک الگوی یکسان را نشان می دهند، پاسخ های کرنل باشد حاوی اطلاعات معادلی باشند، یعنی استنتاج باید مستقل از مختصات باشد. این امر کرنل های کانولوشن را ملزم می کند که تحت تبدیلات گیج محلی هموردا باشند، یعنی تغییرات چارچوب های مرجع. سطح همودایی گیج توسط گروه ساختار G تعیین می شود که هم به خمینه و هم به کاربرد بستگی دارد.
(امولکل های با مجوز [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/) با تشکر از توییتر اقتباس شده اند.)

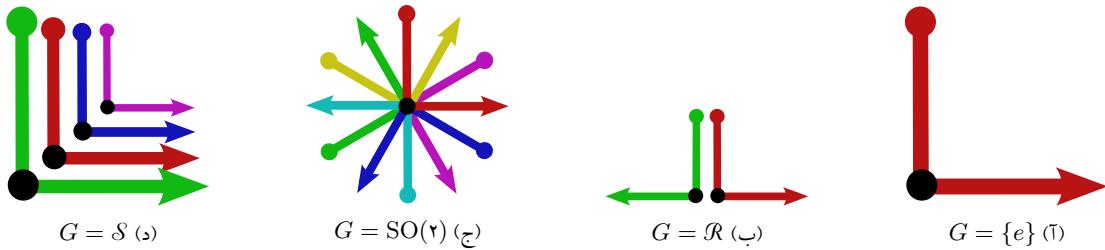
۱ مقدمه

در سال های اخیر، شبکه های عصبی عمیق به مدل های منتخب برای طیف گسترده ای از وظایف در یادگیری ماشین تبدیل شده اند. موقوفیت مدل های عمیق اغلب ریشه در طراحی خاص وظیفه دارد که اساختار ریاضی داده های مورد پردازش را منعکس می کند. یک مثال بر جسته، شبکه های عصبی کانولوشنی (CNN) هستند که از ساختار فضایی داده ها از طریق اتصال محلی و اشتراک گذاری وزن فضایی بهره برداری می کنند. از آنجا که کرنل یکسانی در هر نقطه از فضای اعمال می شود، شبکه های کانولوشنی نسبت به انتقال همودار است. به این معنی که الگوهای آموخته شده را به طور خود کار در سراسر موقعیت های مکانی تعیین می دهند. با توجه به موقوفیت چشمگیر تجزیی CNN های اقلیدسی، علاقه زیادی به گسترش مدل های کانولوشنی برای پردازش سیگنال ها در دامنه های عمومی تر و همودار ساختن آنها تحت گروه های تقارن بزرگ تر وجود دارد.

این کار به بررسی تعیین شبکه های کانولوشنی به خمینه های ریمانی می پردازد. یک پیچیدگی عده در تعیین شبکه های کانولوشنی از فضاهای اقلیدسی \mathbb{R}^d به خمینه های ریمانی عمومی این است که خمینه ها با انتخاب ارجحی از جهت مرتع همراه نیستند، که بتوان یک کرنل کانولوشن را در امتداد آن برای اندازه گیری ویژگی ها همتراز کرد. از آنجا که هیچ جهت مرتعی ارجح نیست، کرنل باید به صورت دلخواه روی خمینه هم تراز شود. موضوع اصلی این کار، تنظیم این دلخواهی بودن با مستقل ساختن استنتاج شبکه های از همترازی خاص کرنل های کانولوشن است. مشخص می شود که این امر نیازمند آن است که کرنل ها همودایی گیج باشند، یعنی همودار تحت تبدیلات همترازی کرنل. پاسخ یک کرنل همودایی گیج هنگام تغییر همترازی اش به طور قابل پیش بینی تبدیل می شود \square بنابراین تضمین می شود که محتوای اطلاعات استخراج شده برای هر انتخاب (دلخواه) همترازی یکسان باشد.

ما همترازی یک کرنل در نقطه ای p از یک خمینه M را به عنوان انتخابی از یک چارچوب مرجع محلی \square یا گیج \square از فضای مماس متانظر $T_p M$ فرمول بندی می کنیم. تبدیلات گیج بنابراین تبدیلات بین انتخاب های چارچوب های مرجع هستند. شکل ۵ مفهوم همتراز کردن کرنل ها در امتداد چارچوب های مرجع را به تصویر می کشد. همتراز کردن کرنل نسبت به میدان چارچوب کانونی (که به طور منحصر به فرد ارجح است) صفحه اقلیدسی \mathbb{R}^2 ، همانطور که در بالا نشان داده شده، منجر به میدان کرنل معمول CNN های اقلیدسی می شود. یک میدان چارچوب متفاوت، همانطور که در پایین نشان داده شده، به یک میدان کرنل جایگزین و در نتیجه یک شبکه جایگزین دلالت دارد. همانطور که در بالا بیان شد، در بیشتر خمینه ها انتخاب چارچوب ها ذاتاً میهم است به طوری که هیچ همترازی کرنل خاصی ارجح نیست. شکل ۲ این موضوع را برای کره S^2 به تصویر می کشد، جایی که چارچوب ها تنها تا حد دوران ها منحصر به فرد هستند.

سطح ابهام در انتخاب چارچوب های مرجع به ساختار هندسی خمینه بستگی دارد. چنین ساختاری اغلب امکان رفع ابهام چارچوب های مرجع تا حد تبدیلات تقارنی معین (تبدیلات گیج) را فراهم می کند؛ به شکل ۳ مراجعه کنید. این بیانیه با چند مثال بهتر توضیح داده می شود:



شکل ۳: انتخاب چارچوب‌های مرجع یک فضای مماس $T_p M$ همیشه منحصر به فرد نیست. ساختار هندسی G یک خمینه، زیرمجموعه‌ای ارجح از چارچوب‌های مرجع را ایجاد می‌کند به طوری که تبدیلات گیج بین این چارچوب‌ها در گروه ساختار $G \leq \text{GL}(d)$ قرار می‌گیرند. شکل‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ چنین زیرمجموعه‌هایی از چارچوب‌های را ترتیب برای گروه بدیهی $\{e\}$ دارند، گروه بازتاب $G = \mathcal{R}$ ، گروه دوران $G = \text{SO}(2)$ و گروه مفیاس پذیری $G = \mathcal{S}$ نشان می‌دهند. ویژگی‌ها اندازه‌گیری‌ها را نسبت به هر یک از چارچوب‌های متمایز که گذاری می‌کنند. ضرایب عددی آن‌ها نسبت به چارچوب‌های مختلف، توسط عمل یک نمایش گروهی ρ از G به هم مرتبط می‌شوند.

- یک خمینه هموار خام هیچ ترجیحی در انتخاب چارچوب‌ها ندارد. تبدیلات گیج بین چارچوب‌های عمومی، نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر دلخواه هستند، یعنی مقادیری در گروه خطی عمومی $G = \text{GL}(d)$ می‌گیرند.
- یک جهت‌گیری از خمینه امکان تمایز چارچوب‌های چپ‌گرد از راست‌گرد را فراهم می‌کند. تبدیلات گیج بین چارچوب‌های هر یک از دو دست، حافظ جهت‌گیری هستند، یعنی عناصری از $G = \text{GL}^+$ هستند. نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر با دترمینان مثبت.
- یک فرم حجم امکان تمایز چارچوب‌های با حجم واحد را فراهم می‌کند. در این صورت، تبدیلات گیج حافظ حجم هستند، یعنی مقادیری در گروه خطی ویژه $G = \text{SL}(d)$ می‌گیرند.
- ساختار متربیک یک خمینه ریمانی امکان اندازه‌گیری فواصل و زوایا را در فضاهای مماس فراهم می‌کند و بنابراین امکان تمایز چارچوب‌های متعامد را می‌دهد. تبدیلات گیج بین چارچوب‌های متعامد، دوران‌ها و بازتاب‌ها در گروه متعامد $G = d$ هستند.
- با هم، یک جهت‌گیری و متربیک به چارچوب‌های متعامد جهت‌دار دلالت دارند. در این صورت، تبدیلات گیج فقط دوران‌ها در گروه متعامد ویژه $G = \text{SO}(d)$ هستند.
- یک میدان چارچوب روی خمینه شامل یک چارچوب منحصر به فرد در هر نقطه از خمینه است. در این حالت، تبدیلات گیج بدیهی هستند که توسط گروه بدیهی $\{e\} = G$ توصیف می‌شوند.

همه این ساختارهای هندسی مشترک‌آیکی زیرمجموعه ارجح (زیربندل) از چارچوب‌ها را تعریف می‌کنند به طوری که تبدیلات گیج مقادیری در یک گروه ساختار $G \leq \text{GL}(d)$ می‌گیرند. برای تأکید بر نقش محوری گروه ساختار G ، چنین ساختارهایی به عنوان GM -ساختار نامیده می‌شوند. مثال‌های بصری از G -ساختارهای ساختار G و خمینه‌های M مختلف در شکل ۴ آورده شده است.

از آنجا که انتخاب چارچوب‌های مرجع ذاتاً مهم است، هر کیت هندسی و عملیات شبکه باید به طور مساوی نسبت به چارچوب‌های دلخواه $-G$ ساختار GM قابل نمایش باشد، یعنی باید GM -مستقل از مختصات باشد. بردارهای ویژگی بنابراین با یک نمایش گروهی (عمل گروهی خطی) از گروه ساختار G مرتبط هستند که قانون تبدیل آنها را تحت تبدیلات گیج (گذارهای با مقادیر G بین چارچوب‌های مرجع) تعیین می‌کند. انتخاب خاص نمایش گروهی، نوع هندسی یک میدان بردار ویژگی را تعیین می‌کند. مثال‌های معمول میدان‌های اسکالار، بردار یا تانسور هستند، با این حال، انواع میدان عمومی تری نیز در عمل استفاده می‌شوند. شکل ۶ استقلال از مختصات کمیت‌های هندسی را در مثال شناخته شده بردارهای مماس به تصویر می‌کشد.

هر لایه شبکه ملزم به رعایت قوانین تبدیل ویژگی‌های است، یعنی باید تضمین کند که خروجی‌هایش همانطور که انتظار می‌رود تبدیل می‌شوند. به طور خاص برای کانولوشن‌ها، استقلال از مختصات GM ایجاد می‌کند که اعمال کرنل مشترک نسبت به چارچوب‌های مختلف $-G$ -ساختار در یک نقطه $p \in M$ باید پاسخ یکسانی را تا حدی یک تبدیل گیج برانگیزد. مانشان می‌دهیم که این امر نیازمند G -راهبری (همورادی ۸۶)، کرنل‌های کانولوشن است. به طور شهودی، می‌توان کرنل‌های G -راهبر را به عنوان اندازه‌گیری ویژگی‌ها به صورت نسبی نسبت به چارچوب‌های مرجع تصور کرد، که این امر ضروری است زیرا هیچ انتخاب چارچوب، یعنی همترازی کرنل مطلق، ارجح نیست.^۱ مثال‌هایی از کرنل‌های G -راهبر برای گروه بازتاب $G = \mathcal{R}$ در شکل ۷ نشان داده شده است. شکل ۷ اشتراک گذاری چنین کرنل‌هایی را نسبت به چارچوب‌های مختلف یک ساختار \mathcal{R} به تصویر می‌کشد. قید \mathcal{R} -راهبری نوعی تقارن را بر کرنل‌ها تحمیل می‌کند، به طوری که همترازی‌های مختلف واقعاً منجر به پاسخ‌هایی می‌شوند که دقیقاً با تبدیلات گیج (g) متفاوت هستند. ما در ادامه کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM را به عنوان کانولوشن‌های GM مخفف می‌کنیم.

علاوه بر اعمال کرنل‌های همورادی گیج، کانولوشن‌های GM ممکن است همورادی ایزومنتری باشند، به این معنی که با عمل ایزومنتری‌ها بر روی میدان‌های ویژگی جایجا می‌شوند، همانطور که در شکل ۸ نشان داده شده است. فرض کنید $\phi \in \text{Isom}(M)$ یک ایزومنتری (تقارن) از خمینه M

^۱ به شباهت با اصل نسبیت خاص اینشتین توجه کنید، که به جای چارچوب‌های G -ساختار، برابری چارچوب‌های لخت تکیه دارد.

باشد. یک شبکه عصبی دقیقاً زمانی نسبت به عمل این ایزومنتری همودردا است که الگوها در $p \in M$ به همان روشنی پردازش شوند که الگوها در $(p)\phi$ پردازش می‌شوند. بنابراین همودردا بی ایزومنتری یک شبکه در تناظر یک به یک با ناوردای ایزومنتری اتصال عصبی آن (میدان کرنل) است؛ به شکل ؟؟ مراجعه کنید. از آنجا که کانولوشن‌های ما کرنل‌ها را نسبت به چارچوب‌های (دلخواه) G -ساختار GM اعمال می‌کنند، تقارن‌های میدان کرنل با تقارن‌های G -ساختار مطابق هستند. با نشان دادن تقارن‌های (حافظ فاصله) یک G -ساختار GM با $\text{Isom}_{GM} \leq \text{Isom}(M)$ که کانولوشن‌های ما دقیقاً GM -هموردا هستند. شکل ؟؟ این واقعیت را که G -ساختارها و میدان‌های کرنل متناظر تقارن‌های یکسانی دارند، به تصویر می‌کشد. خواننده تشویق می‌شود که G -ساختارها را در شکل ؟؟ با توجه به تقارن‌هایشان و ویژگی‌های همودرایی ضمنی کانولوشن‌های GM متناظر بررسی کند.

طراحی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات GM بر روی خمینه‌های ریمانی نیازمند انتخاب یک G -ساختار است که به ملاحظات متعددی بستگی دارد. اولاً، انتخاب گروه ساختار G همودرایی گیج محلی کانولوشن را تعیین می‌کند: یک کرنل G -راهبر به طور خود کار الگوهای آموخته شده را بر روی تمام ژست‌های مرتبط با G از الگوها تعمیم می‌دهد؛ به شکل ؟؟ مراجعه کنید. ثانیاً، انتخاب خاص G -ساختار همودرایی ایزومنتری سراسری کانولوشن را تعیین می‌کند. در کاربردهای تصویربرداری پیشکی، الگوها اغلب در دوران‌ها، بازتاب‌ها و موقعیت‌های دلخواه رخ می‌دهند □ بنابراین باید یک ساختار d ناوردای $\text{Isom}_{GM} = E(d)$ را روی \mathbb{R}^d انتخاب کرد، مشابه ساختار (۲) که در شکل ؟؟ نشان داده شده است. تصاویری مانند عکس‌های پرتره یک محور عمودی متمایز دارند، با این حال، بازتاب‌ها حول این محور آمار تصویر را ناوردای می‌گذارند □ این امر نیازمند یک ساختار R مانند شکل ؟؟ است.علاوه بر چنین ملاحظات تقارنی، توجه به این نکته مهم است که هر خمینه‌ای (توپولوژی) ساختارهای G هموار را برای هر انتخاب گروه ساختار G نمی‌پذیرد. یک مثال نوار موبیوس است که توپولوژی ییچ خورده آن (عدم جهت‌گیری) مانع از تخصیص مسوار متغیر جهت‌گیری‌های چارچوب می‌شود. بنابراین یک عملیات کانولوشن مستقل از مختصات هموار بر روی نوار موبیوس لزوماً بر کرنل‌های راهبر-بازتابی تکیه دارد.

این کار شامل یک مرور ادبیات گسترده بر روی شبکه‌های کانولوشنی است که عمومیت نظریه ما را نشان می‌دهد. این بخش انواع مختلفی از CNN‌ها در فضاهای اقلیدسی، G -ساختارها کروی و کانولوشن‌ها را بر روی سطوح عمومی (مانند مساحت‌های سطحی) پوشش می‌دهد. ما انتخاب‌های خاص جدول ؟؟ یک نمای کلی از طبقه‌بندی حاصل از شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات GM ارائه می‌دهد.

برای ارائه یک مثال دقیق در مورد چگونگی نمونه‌سازی کانولوشن‌های GM را بر روی نوار موبیوس برای $G = R$ مورد بحث قرار می‌دهیم. این شامل استخراج کرنل‌های راهبر-بازتابی برای انواع میدان مختلف (نمایش‌های گروهی) و ارزیابی تجربی همودرایی ایزومنتری پیش‌بینی شده نظری است. همانطور که انتظار می‌رود، کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM از پیاده‌سازی وابسته به مختصات ساده بهتر عمل می‌کنند. کد در آدرس <https://github.com/mauriceweiler/MobiusCNNs> موجود است.

یک فرمول‌بندی بدون مختصات از نظریه مادر زبان فیبر ابداع شده است. G -ساختارها اصلی Z -بندل چارچوب FM بر روی M هستند. میدان‌های ویژگی برش‌هایی از بندل‌های بردار ویژگی مرتبط با G هستند. گیج‌ها تسمیه‌های بندل محلی هستند، در حالی که تبدیلات گیج نگاشتهای گذار بین چنین تسمیه‌هایی هستند. ایزومنتری‌هایی که یک کانولوشن GM نسبت به آنها همودرا است، اتومorfیسم‌های بندل اصلی از G -ساختار هستند.

CNN‌های مستقل از مختصات ما تعیین‌هایی از CNN ‌های راهبر [؟ ؟ ؟ ؟ ؟] از فضاهای اقلیدسی (یا همگن) به خمینه‌های ریمانی هستند. در حالی که CNN‌های راهبر بر تبدیلات فعل و سراسری میدان‌های ویژگی تمرکز دارند، CNN‌های مستقل از مختصات تبدیلات غیرفعال و محلی بین چارچوب‌های مرجع را در نظر می‌گیرند.² مانسخه‌های اولیه‌ای از نظریه CNN‌های همودرایی گیج ("راد کارهای قابلی [؟ ؟] پیشنهاد گردید. برخلاف این انتشارات، کار حاضر نظریه را با جزئیات بسیار بیشتری توسعه می‌دهد، آن را بر حسب بندل‌های فیبر فرمول‌بندی می‌کند، همودرایی تحت عمل ایزومنتری‌ها را اثبات می‌کند و یک مرور ادبیات ارائه می‌دهد.

فهرست مطالب

این کار در قالب یک مقدمه، سه بخش اصلی و یک پیوست سازماندهی شده است.

بخش ۱.۱.۲ تلاش می‌کند شبکه‌های عصبی مستقل از مختصات را با زبانی آسان معرفی کند. میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه نسبت به مختصات محلی (تسمیه‌های بندل) بیان می‌شوند. استقلال مختصات مورد نیاز، مستلزم آن است که ویژگی‌ها با یک قانون تبدیل خاصی مرتبط باشند. لایه‌های شبکه ملزم به تضمین رفتار تبدیل صحیح ویژگی‌ها هستند.

بخش ۲.۵ نظریه شبکه‌های عصبی مستقل از مختصات را بر حسب بندل‌های فیبر رسمی‌سازی می‌کند. این امر امکان فرمول‌بندی سراسری و مستقل از مختصات را فراهم می‌کند، که به ویژه هنگام بررسی تاوب‌پذیری ایزومنتری شبکه‌ها مفید است. تعاریف از بخش ۱.۱.۲ با بیان عملیات مستقل از مختصات در تسمیه‌های بندل محلی (مختصات) بازیابی می‌شوند.

² این شیوه به تغییر تمرکز از کوواریانس لورنتس سراسری در نسبیت خاص به کوواریانس لورنتس محلی در نسبیت عام است.

بخش ۲۵ نظریه ما را در کارهای مرتبط جای می‌دهد. این بخش بررسی‌های مفصلی از معماهای شبكه کانولوشنی بر روی هندسه‌های مختلف ارائه می‌دهد و آن‌ها را به عنوان شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مخصوصات فرمول‌بندی مجدد می‌کند. برای تسهیل توسعه معماهای شبکه جدید، ما ویژگی‌های مربوط به هندسه‌های خاص را قل از بررسی شبکه‌هایی که بر روی آن‌ها عمل می‌کنند، مورد بحث قرار می‌دهیم.

خواننده می‌تواند بخش ۲۵ را در مرحله اول نادیده بگیرد \square فرمول‌بندی از بخش ۱.۱.۲ برای خواندن مروارید بخش ۲۵ کاملاً کافی است. مرواری بر مفاهیم و نتایج اصلی کار ما در بخش ۲ زیر ارائه شده است. این مروار از معادلات پرهیز می‌کند و بر شهود هندسی از طریق بصری‌سازی‌ها تکیه دارد. امیدواریم این بخش به مخاطبان غیرتخصصی کمک کند تا ایده‌ای از محتواهی کار ما به دست آورند.

مروار کلی جزئیات

بخش ۱.۱.۲: هدف بخش ۳ ابداع فضاهای ویژگی مستقل از مختصات است. به طور خاص، بخش ۱.۳ گیج‌ها، تبدیل‌های گیج و G -ساختارها را معرفی می‌کند. گیج‌ها روشی رسمی برای بیان بردارهای مماس (مستقل از مخصوصات) و توابع روی فضاهای مماس نسبت به چارچوب‌های مرجع هستند. تبدیل‌های گیج بین این عبارات مخصوصاتی در گیج‌های مختلف ترجمه می‌کنند. بخش ۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی مستقل از مختصات را معرفی می‌کند. همانند مورد بردارهای مماس، ضرایب عددی بردارهای ویژگی هنگام انتقال بین چارچوب‌های مرجع تغییر می‌کنند. قوانین تبدیل بردارهای ویژگی به ویژه انتقال موازی آن‌ها و پیش‌برداری آن‌ها هنگام عمل توسط ایزومنتری‌ها را تعیین می‌کنند، که به ترتیب در بخش‌های ۴.۳ و ۴.۴ توضیح داده شده‌اند.

بخش ۴ شبکه‌های عصبی را که بین میدان‌های ویژگی نگاشت می‌کنند، توسعه می‌دهد. عملیات نقطه‌ای، مانند جمع بایاس، کانولوشن‌های 1×1 و غیرخطی‌ها، در بخش ۱.۴ مورد بحث قرار می‌گیرند. بخش ۲.۴ بر روی کانولوشن‌ها با کرnel‌های گستردۀ فضایی تمرکز می‌کند. هر یک از این عملیات در ابتدا بدون فرض اشتراک وزن معروفی می‌شوند، یعنی به عنوان مثال، اجازه یک کرnel متفاوت در هر نقطه از مفهول را می‌دهند. این کرnel‌ها (یا بایاس‌ها یا غیرخطی‌ها) به هیچ وجه محدود نمی‌شوند. با این حال، هنگام نیاز به اشتراک وزن فضایی، آن‌ها مجبور می‌شوند که تناوب پذیر گیج باشند زیرا تنها مقادیر تناوب پذیر می‌توانند به صورت مستقل از مختصات به اشتراک گذاشته شوند. بخش ۳.۴ یک اثبات مختصر از تناوب پذیری ایزومنتری کانولوشن‌های GM را بر حسب عبارات مخصوصاتی محلی ارائه می‌دهد. ایده اصلی در اینجا این است که ایزومنتری‌ها را می‌توان به عنوان الفاکتنه تبدیل‌های گیج (تفسیر منفعل) در نظر گرفت، که با تناوب پذیری گیج کرnel‌ها توضیح داده می‌شود.

بخش ۵ پیاده‌سازی کانولوشن‌های مستقل از جهت گیری بر روی نوار موبیوس را توصیف می‌کند. پس از بررسی هندسه نوار موبیوس در بخش ۱.۵، انواع مختلفی از میدان‌های ویژگی در بخش ۲.۵ تعریف می‌شوند. بخش ۲.۶ بعدی، شبکه‌های کانولوشنی مستقل از جهت گیری را به صورت تحلیلی توصیف می‌کند. به طور خاص، ما کرnel‌های کانولوشنی تناوب پذیر گیج، بایاس‌ها و غیرخطی‌ها را برای هر یک از انواع میدان استخراج می‌کنیم. بخش ۴.۴ با یک پیاده‌سازی و ارزیابی عددی مدل‌های مربوطه به پایان می‌رسد.

بخش ۲.۵: بخش ۶ محتواهی بخش ۳ را بازتاب می‌دهد، با این حال، به صورت سراسری و بر حسب بندلهای فیر. مقدمه‌ای کلی بر بندلهای فیر در بخش ۱.۶ ارائه شده است. بخش‌های ۲.۶ و ۳.۶ بندل مماس TM ، بندل چارچوب FM و ساختارها G -ساختارها را معرفی می‌کنند. میدان‌های ویژگی به صورت سراسری به عنوان برش‌هایی از بندلهای بردار ویژگی مرتبط با (A) هستند. می‌دان‌های ویژگی به عنوان برش‌هایی از بندلهای بردار ویژگی تعریف می‌شوند. تمهیم‌های بندل محلی (گیج‌ها)، که در بخش ۴.۶ مورد بحث قرار گرفته‌اند، این بندل‌ها را در مختصات بیان می‌کنند و بدین ترتیب تعاریف ما از بخش ۳ را بازیابی می‌کنند. ما به طور خاص نشان می‌دهیم که چگونه تمهیم‌های محلی بندلهای مختلف یکدیگر را لقا می‌کنند، به طوری که تبدیل‌های گیج (نگاشت‌های انتقال) آن‌ها همگام‌سازی می‌شوند. بخش ۵.۶ انتقال دهندهای موازی در G -بندل‌ها را مورد بحث قرار می‌دهد.

بخش ۷ شبکه‌های مستقل از مختصات از بخش ۴ را بر حسب بندلهای فیر بازتاب می‌کند. کانولوشن‌های 1×1 در بخش ۱.۷ به عنوان مورفیسم‌های M توصیف می‌شوند. به طور جایگزین، آن‌ها را می‌توان به عنوان برش‌هایی از یک بندل همومورفیسم مشاهده کرد. بخش ۲.۷ مشخص بندل برداری می‌شوند. همچنان که بندل مستقل از مخصوصات و تبدیل‌های بینان GM را معرفی می‌کند. این عملیات مشابه کانولوشن‌های GM هستند اما نیازی به اشتراک وزن ندارند، یعنی ممکن است در هر مکان فضایی یک کرnel متفاوت اعمال کنند. یک میدان کرnel کانولوشنی GM با اشتراک یک کرnel G -استریبل (تناوب پذیر گیج) منفرد در سراسر مفهول ساخته می‌شود. سپس کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM به عنوان تبدیل‌های میدان کرnel با میدان‌های GM -کانولوشنی تعریف می‌شوند. هنگام پیان فرمول‌بندی مستقل از مختصات کانولوشن‌های GM نسبت به تمهیم‌های محلی (گیج‌ها)، عبارات مختصاتی کانولوشن‌های GM را از بخش ۲.۴ بازیابی می‌کنیم.

تناوب پذیری ایزومنتری کانولوشن‌های GM در بخش ۸ بررسی می‌شود. پس از معرفی ایزومنتری‌ها، بخش ۱.۸ عمل پیش‌برنده آن‌ها را بر روی بندلهای فیر مورد بحث قرار می‌دهد. این عمل نیز می‌تواند در تمهیم‌های محلی بیان شود، که منجر به فرمول‌بندی از بخش ۴.۳ می‌شود. بخش ۲.۸ عمل ایزومنتری‌ها بر روی میدان‌های کرnel را تعریف می‌کند و ثابت می‌کند که تناوب پذیری ایزومنتری یک تبدیل میدان کرnel، ناوردایی ایزومنتری میدان کرnel آن را نتیجه می‌دهد و بالعکس. کانولوشن‌های GM ثابت شده‌اند که تحت عمل آن ایزومنتری‌هایی که اتمومورفیسم‌های بندلی (تقارن‌ها) از G -ساختار GM هستند، تناوب پذیر می‌باشد. بخش ۳.۸ میدان‌های کرnel ناوردا با ایزومنتری را با جزئیات پیشتری بررسی می‌کند و ثابت می‌کند که آن‌ها معادل میدان‌های کرnel در فضاهای خارج قسمتی از عمل ایزومنتری هستند \square به طور شهودی، میدان‌های کرnel ناوردا با ایزومنتری ملزم به اشتراک کرnel‌ها بر روی مدارات ایزومنتری هستند. این نتیجه به ویژه دلالت دارد که تبدیل‌های میدان کرnel تناوب پذیر ایزومنتری در فضاهای همگن لزوماً کانولوشن‌های GM هستند.

بخش ۳: بخش سوم این کار نشان می‌دهد که تعداد زیادی از شبکه‌های کانولوشنی از ادبیات را می‌توان به عنوان اعمال کانولوشن‌های GM برای انتخاب خاصی از G -ساختار و انواع میدان تفسیر کرد. این بخش با بحثی کلی در مورد انتخاب‌های طراحی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات آغاز می‌شود. جدول ۲۱ مروجی و طبقه‌بندی از مدل‌های مورد بررسی را ارائه می‌دهد. خواننده دعوت می‌شود که به G -ساختارهای بصری سازی شده در بخش ۲۱ نگاهی بیندازد زیرا اینها ایده شهودی در مورد ویژگی‌های کانولوشن‌های GM مربوطه ارائه می‌دهند.

شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی که نه تنها تناوب‌پذیر ایزومنتری هستند بلکه به طور کلی تر تحت عمل گروه‌های آفین تناوب‌پذیر هستند، در بخش ۲۱ پررسی می‌شوند. این مدل‌ها اساساً معادل شبکه‌های کانولوشنی استیریبل در فضاهای برداری اقلیدسی \mathbb{R}^d هستند. بخش ۲۱ شبکه‌های کانولوشنی استیریبل را بررسی می‌کند و ارتباط آن‌ها با کانولوشن‌های GM را مورد بحث قرار می‌دهد. این رویکرد تا حدی نامطلوب است زیرا با یک میدان چارچوب کانونی (ساختمان e) همراه است، که به طور ضمیم توسط مدل‌های تناوب‌پذیر نادیده گرفته می‌شود. بخش ۲۱ رویکردی اصولی ترا در پیش می‌گیرد و فضاهای آفین اقلیدسی d را تعریف می‌کند که دقیقاً با G -ساختارهایی مجهز شده‌اند که منجر به کانولوشن‌های GM تناوب‌پذیر $\text{Aff}(G)$ می‌شوند. کانولوشن‌های واقعی GM در بخش ۲۱ تعریف می‌شوند. بخش ۲۱ شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی تناوب‌پذیر آفین را که در ادبیات یافت می‌شوند، بررسی می‌کند. آن‌ها عمدتاً در انتخاب‌های مفروض گروه‌های ساختار و نمایش‌های گروهی متفاوت هستند.

بخش ۲۱ شبکه‌های کانولوشنی را در فضاهای اقلیدسی سوراخ دارد $\{\cdot\}_{d,\mathbb{R}}$ ، که مبدأ $\{\cdot\}_{d,\mathbb{R}}$ آن‌ها حذف شده است، پوشش می‌دهد. این مدل‌ها نسبت به چرخش حول مبدأ تناوب‌پذیر هستند، با این حال، نسبت به انتقال تناوب‌پذیر نیستند. آن‌ها بر اساس G -ساختارهایی هستند که با مختصات قطبی، مختصات لگاریتمی-قطبی با مختصات کروی مطابقت دارند.

شبکه‌های کانولوشنی کروی در بخش ۲۱ پوشش داده می‌شوند. بخش ۲۱ هندسه ۲-کره (جاسازی شده) S^3 را مورد بحث قرار می‌دهد. با تفسیر فضاهای مماس به عنوان زیرفضاهای دو بعدی یک فضای جاسازی \mathbb{R}^3 ، عبارات فرم بسته نگاشت‌های نمایی و لگاریتمی، چارچوب‌ها، گنجی‌ها، انتقال‌دهنده‌ها و عمل ایزومنتری را استخراج می‌کنیم. بخش ۲۱ شبکه‌های کانولوشنی کروی توسعه \mathbb{R} را به عنوان یک حالت خاص شامل می‌شود. شبکه‌های کانولوشنی کروی که فقط نسبت به نظریه ما فرمول‌بندی عمومی کانولوشن‌های کروی توسعه \mathbb{R} را به عنوان یک حالت خاص شامل می‌شود. شبکه‌های کانولوشنی کروی که فقط نسبت به چرخش (\mathbb{R}^3, SO) حول یک محور ثابت تناوب‌پذیر هستند در بخش ۲۱ توصیف می‌شوند. بخش ۲۱ شبکه‌های کانولوشنی بیست وجهی را بررسی می‌کند. بیست وجهی کره را تقریب می‌زند اما از وجود محلی مسطح تشکیل شده است که امکان پیاده‌سازی کارآمد عملیات کانولوشن را فراهم می‌کند.

یک بررسی از شبکه‌های کانولوشنی بر روی سطوح دو بعدی عمومی در بخش ۲۱ یافته می‌شود. بخش ۲۱ مقدمه‌ای کوتاه بر هندسه دیفرانسیل کلامیسک سطوح جاسازی شده و گسسته‌سازی آن‌ها بر حسب شبکه‌های مثلثی ارائه می‌دهد. کانولوشن‌های سطحی در ادبیات به دو دسته طبقه‌بندی می‌شوند: دسته اول، که در بخش ۲۱ پوشش داده شده است، بر اساس کرنل‌های $(\mathbb{R}^3, G = SO)$ -استیریبل است. این مدل‌ها مستقل از انتخاب خاص چارچوب متعامد راست گرد هستند. بخش ۲۱ دسته دوم مدل‌ها را بررسی می‌کند که بر اساس کرنل‌های $\{e\}_{d,\mathbb{R}}$ -استیریبل، یعنی غیرتناوب‌پذیر هستند. این مدل‌ها به صراحت بر انتخاب یک میدان چارچوب تکیه دارند. بنابراین آن‌ها عمدتاً در روش‌های اکتشافی که برای تعیین چارچوب‌های مرتع استفاده می‌شوند، تفاوت دارند. توجه داشته باشید که چنین مدل‌هایی نزدیکاً در مینیفلد‌های غیرقابل موازی سازی مانند کره‌های توپولوژیکی ناپیوسته هستند.

پیوست: پیوست شامل اطلاعات اضافی و اثبات‌های طولانی است.

گچی‌ها به صورت رسمی تخصیص فوری چارچوب‌های مرتع به فضاهای مماس را انجام می‌دهند اما به نقاط روى منقوص به صورت مستقل از مختصات اشاره دارند. یک جایگزین محبوب انتخاب چارت‌های مختصاتی است که به اصطلاح پایه‌های مختصاتی (پایه‌های هولونومیک) فضاهای مماس را القا می‌کنند. پیوست ۲۱ مقدمه‌ای بر فرمالیسم چارت‌های ارائه می‌دهد و آن را با فرمالیسم گچی کلی تر مرتبط می‌کند.

پیوست ۲۱ درباره استقلال مختصات کرنل‌ها و اشتراک وزن در امتداد چارچوب‌های مرتع توضیح می‌دهد. اشتراک وزن مستقل از مختصات GM فقط برای کرنل‌های G -استیریبل امکان‌پذیر است.

کانولوشن‌های GM با بیان میدان‌های ویژگی در مختصات نرمال ژئودزیک محاسبه می‌شوند، جایی که آن‌ها با کرنل‌های کانولوشنی G -استیریبل مطابقت داده می‌شوند. این فرآیند شامل یک انتگرال گیری بر روی فضاهای مماس است که در پیوست ۲۱ توصیف شده است.

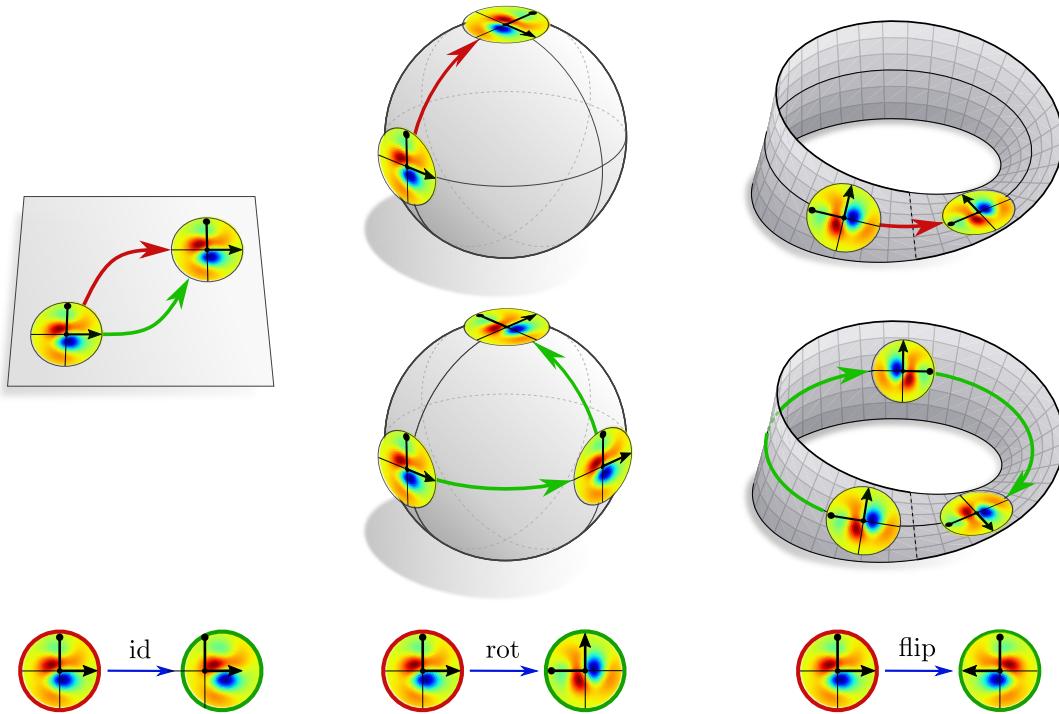
؟ [] ؟ [] ؟ [] ظریه‌های نسبتاً عمومی از کانولوشن‌ها بر روی فضاهای همگن را پیشنهاد کردند. از آنجا که این مدل‌ها وزن‌ها را از طریق عمل یک گروه تقارنی به اشتراک می‌گذارند، آن‌ها بسیار شبیه به تبدیل‌های میدان کرنل تناوب‌پذیر ایزومنتری ما از بخش‌های ۲۸ و ۳۸ هستند. پیوست ۲۱ این مدل‌ها را بررسی می‌کند و توضیح می‌دهد که چگونه آن‌ها با کانولوشن‌های GM مرتبط هستند.

پیوست ۲۱ ثابت می‌کند که میدان‌های کرنل ناوردا با ایزومنتری در مینیفوولد معادل میدان‌های کرنل در فضاهای خارج‌قسمتی از عمل ایزومنتری هستند. حالت خاص فضاهای همگن، که در آن‌ها تبدیل‌های میدان کرنل تناوب‌پذیر ایزومنتری معادل کانولوشن‌های GM هستند، در پیوست ۲۱ پوشش داده شده است.

کانولوشن‌های کروی ؟ [] در پیوست ۲۱ ثابت شده‌اند که یک حالت خاص از کانولوشن‌های GM کروی ما هستند □ بنابراین هر شبکه کانولوشنی کروی که توسط نظریه آن‌ها پوشش داده می‌شود، توسط نظریه ما نیز توضیح داده می‌شود.

پیوست ۲۱ تأکید می‌کند که تبدیل‌های میدان کرنل و کانولوشن‌های GM ما به خوبی تعریف شده‌اند اگر میدان کرنل هموار باشد و شامل کرنل‌های با پیش‌تیبانی فشرده باشد. "به خوبی تعریف شده" در اینجا به این معنی است که انتگرال‌ها وجود دارند و میدان‌های ویژگی حاصل هموار هستند.

در نهایت، پیوست ؟؟ استدلال می کند که میدان های ویژگی که مطابق با نمایش منظم گروه ساختار G تبدیل می شوند، معادل میدان های اسکالر بر روی G -ساختار هستند. این موضوع از آن جهت اهمیت دارد که برخی مدل ها، به ویژه کانولوشن های گروهی، این دیدگاه را اتخاذ می کنند.



شکل ۴: شهودی در مورد ابهام ذاتی اشتراک وزن در منیفلدهایی. چپ: یک تفسیر رایج از اشتراک وزن در صفحه، جایجاًی یک کرنل در کل فضاست. از آنجا که انتقال موازی در فضاهای مسطح مستقل از مسیر است، این امر بدون ابهام است. وسط: در فضاهای خمیده، مانند کره، انتقال موازی وابسته به مسیر است. مسیرهای مختلف منجر به کرنل‌های می‌شوند که نسبت به یکدیگر چرخانده شده‌اند. راست: نوار مویوس یک منیفلد غرقابل جهت‌گیری است. بنابراین، مسیرهای مختلف می‌توانند منجر به کرنل‌های می‌شوند که نسبت به یکدیگر بازتاب یافته‌اند. پایین: ما ترازهای مختلف کرنل را با انتخاب‌های مختلف چارچوب‌های مرتع محلی از فضاهای مماس مربوطه رسمی‌سازی می‌کنیم. به خوبی شناخته شده است که هیچ انتخابی از چارچوب‌های مرتع (گچ) در منیفلدهای عمومی ارجح نیست. مختصات‌بندی‌های مختلف با تبدیلهای گیج مرتب هستند، که مقادیری در گروه ساختار G منیفلد (گروه بدیهی) $\{e\}$ برای صفحه، گروه چرخش (2) برای کره و گروه بازتاب $R = \mathcal{R}$ برای نوار مویوس می‌گیرند. شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات، ابهام چارچوب‌های مرتع را با اعمال کرنل‌های کانولوشنی G -استریبل (باتواب پذیر گیج) برطرف می‌کنند.

۲ معرف کلی و شهود بصری

فرمول‌بندی جبری شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات نیازمند آشنایی با نظریه گروه‌ها، نظریه نمایش‌ها و هندسه دیفرانسیل است که ممکن است برای مخاطبان غیرتخصصی مانع ایجاد کند. با این حال، بیشتر ساختارها و نتایج ما از نظر هندسه سیار شهودی هستند و می‌توان آن‌ها را با چند مثال بصری توضیح داد. این بخش تلاش می‌کند تا معرفی کلی و شهود بصری در مورد شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات را ارائه دهد.

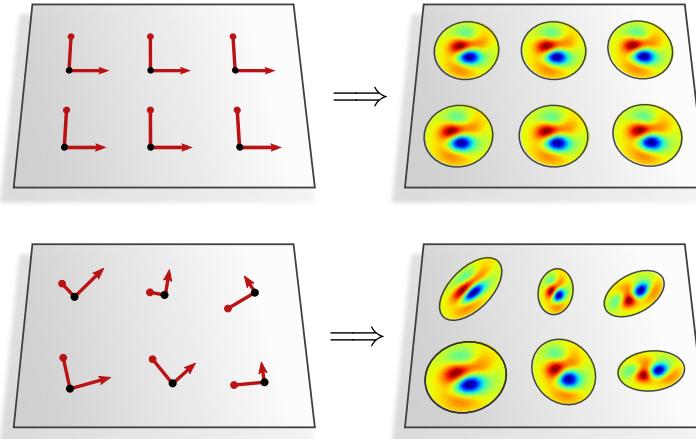
بخش ۱.۲ زیر، کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM را در منیفلدهای ریمانی معرفی می‌کند. تاتاوب پذیری آن‌ها تحت عمل ایزو متري ها در بخش ۱.۲ در مورد بحث قرار می‌گیرد. بخش ۱.۲ در مورد عواملی که بر انتخاب G -ساختار در طراحی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات تأثیر می‌گذارند، توضیح می‌دهد.

۱.۲ ساختارها و کانولوشن‌های مستقل از مختصات

از آنجا که کانولوشن‌ها اساساً با خاصیت اشتراک وزن خود مشخص می‌شوند، یک سؤال اصلی در این کار این است: چگونه باید کرنل‌های کانولوشن بر روی منیفلدهای ریمانی به اشتراک گذاشته شوند؟^۳

یک رویکرد رایج به اشتراک گذاشتن وزن‌ها از طریق عمل یک گروه تقارنی از فضای زیرین است [۴]. به عنوان مثال، شبکه‌های کانولوشنی سنتی وزن‌ها را با جایجاًی کرنل‌ها روی صفحه به اشتراک می‌گذارند، در حالی که شبکه‌های کانولوشنی کروی وزن‌ها را با چرخش کرنل‌ها روی کره تقارن‌ها

^۳ این سؤال به طور کلی تر برای هر تابع قالب محلی، به عنوان مثال بایاس‌ها یا غیرخطی‌های نقطه‌ای نیز کاربرد دارد.



شکل ۵: یک ویژگی کلیدی کانولوشن‌ها این است که آنها وزن‌ها را در سراسر منفولد به اشتراک می‌گذارند. ما تراز یک کرنل در $p \in M$ را با انتخاب یک چارچوب مرجع \square یا گیج \square از فضای مماس مربوطه $T_p M$ شناسایی می‌کیم. بنابراین میدان‌های چارچوب مختلف دلالت بر میدان‌های کرنل (کانولوشنی) متفاوتی دارند.

انتخاب چارچوب‌ها اغلب منحصر به فرد است. ابهام در این انتخاب با G -ساختارها رسی‌سازی می‌شود؛ به شکل ۴ مراجعه کنید. برای در نظر گرفتن اختیاری بودن چارچوب‌ها، کرنل‌ها ملزم می‌شوند که G -استبریل (تناوب‌پذیر) باشند، همانطور که در اشکال ۴ و ۵ بصری‌سازی شده است.

به اشتراک گذاشتن یک کرنل در کل فضای عمل گروه تقارنی باید متعددی باشد. از آنجا که این امر به طور کلی برای ایزومنتری‌های منیفلدهای ریمانی صادق نیست، این استراتژی برای هدف ما رد می‌شود.

اشتراک وزن از طریق انتقال اشتراک اکثر می‌شود؛ به شکل ۴ (چپ) مراجعه کنید. با این حال، در فضاهای مسطح انتقال موازی مستقل از مسیر انتخاب شده است، این امر منجر به تراز بدون ابهام کرنل‌ها می‌شود؛ به شکل ۴ (چپ) مراجعه کنید. با این حال، در فضاهای خمیده یا غیرقابل جهت‌گیری، انتقال موازی وابسته به مسیر می‌شود و بنابراین برای اشتراک وزن نامناسب است. شکل ۴ (وسط و راست) این مشکل را برای کره و نوار مویوس مثال می‌زند، جایی که مسیرهای مختلف منجر به تراز متفاوتی از کرنل می‌شوند.

از آنجا که مفهوم "ترازهای کرنل" تا حدی مبهم است ابتدا باید آن را از نظر ریاضی دقیق کنیم:

ما انتخاب تراز کرنل در نقطه‌ای $p \in M$

را به عنوان انتخاب یک چارچوب مرجع محلی (گیج) از فضای مماس مربوطه $T_p M$ رسی‌سازی می‌کنیم.

یک چارچوب مرجع در $p \in M$ یک تاپل مرتب $[e_1, e_2, \dots, e_d]$ با $\dim(M) = d$ است که به عنوان محورهای چارچوب نامیده می‌شوند. از آنجا که چارچوب‌های مختلف در p با تبدیل‌های خطی مرتبط هستند، انتخاب‌های مختلف چارچوب‌ها با تغییر شکل‌های کرنل خطی مطابقت دارند. شکل ۵ دو انتخاب مختلف از میدان‌های چارچوب را در \mathbb{R}^3 نشان می‌دهد. به اشتراک گذاشتن یک کرنل کانولوشنی در امتداد این میدان‌های چارچوب منجر به میدان‌های کرنل (کانولوشنی) مربوطه می‌شود.

شناسایی ترازهای کرنل با چارچوب‌های مرجع این سؤال را مطرح می‌کند:

انتخاب چارچوب‌های مرجع محلی بر روی یک منیفوولد (ریمانی) تا چه حد مبهم است؟

همانطور که در ادامه توضیح داده می‌شود، ابهام چارچوب‌های مرجع توسط یک G -ساختار که منیفوولد به آن مجهز است، تعیین می‌شود.

۱.۱.۲ \square -ساختارها

فضای همه چارچوب‌های ممکن $F_p M$ با عنوان $T_p M$ نشان داده می‌شود. با هم، چارچوب‌های همه فضاهای مماس، بندل چارچوب FM را تشکیل می‌دهند؛ به شکل ۲۴ مراجعه کنید. هیچ انتخاب خاصی از چارچوب‌ها در FM بر روی یک منیفوولد هموار "عربان" (بدون ساختار هندسی اضافی) ترجیح داده نمی‌شود، که ابهام تراز کرنل‌ها را حداکثری می‌کند. برای رفع ابهام چارچوب‌ها و ترازهای کرنل، منیفوولد باید با ساختار هندسی اضافی مجهز شود.

یک منیفوولد ریمانی یا ساختار متریک مجهز شده است. با ارائه یک حاصل ضرب داخلی (متریک ریمانی) بر روی فضاهای مماس، این ساختار امکان شناسایی چارچوب‌های خاصی را می‌دهد که محورهای آنها متعادل با یکدیگر هستند. تبدیل‌های گیج، یعنی تبدیل‌ها بین انتخاب‌های چارچوب‌های مرجع (به اشکال ۴ و ۶ مراجعه کنید)، سپس مقادیری در گروه متعادل d می‌گیرند. در منیفلدهای ریمانی، تراز کرنل‌ها همیشه تا چرخش‌ها و بازتاب‌ها بدون ابهام است.

شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی کرنل‌های کانولوشن (و در نتیجه چارچوب‌ها) را تراز می‌کنند موازی با یکدیگر همانطور که در شکل ۵ (بالا) بصری‌سازی شده است. شبکه‌های کانولوشنی کروی معمولاً ترازهای کرنل را تا چرخش‌ها بدون ابهام می‌کنند، یعنی آنها یک دست پری ترجیحی از چارچوب‌های مرجع را فرض می‌کنند. ساختار متریک به تنهایی برای توصیف این تنظیمات کافی نیست، که نشان می‌دهد این منیفلدهایی با ساختار هندسی اضافی علاوه بر ساختار متریک مجهز شده‌اند. ما پیشنهاد می‌کنیم که چارچوب ریاضی مناسب، G -ساختارها است و فرض می‌کنیم:

ابهام در انتخاب چارچوب‌های مرجع (و در نتیجه ترازهای کرنل)
بر روی یک منیفولد M با G -ساختار GM

G -ساختارها بندل‌هایی از چارچوب‌های مرجع متماز بر روی M هستند به طوری که تبدیل‌های گیج بین چارچوب‌های یک فضای مماس واحد، مقادیری در گروه ساختار $(d) \leq GL(d)$ می‌گیرند. به طور شهودی، می‌توان مجموعه $G_p M$ چارچوب‌های $T_p M$ را "شیوه" G دانست، با این حال، بدون یک مبدأ متماز.^۴

بندل چارچوب FM خود یک G -ساختار با $(d) = GL(d)$ است، در حالی که بندل چارچوب‌های متعامد OM یک G -ساختار (ساختار متریک) با $d = G$ است. شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی سنتی بر روی میدان چارچوب کانونی در \mathbb{R}^d که در شکل ۲ نشان داده شده است، تکیه دارند که یک G -ساختار برای گروه بدینهی $\{e\}$ است. شکل ۳ $G = \{e\}$ -ساختارها را برای منیفلدهای بیشتر و گروه‌های ساختار دیگر بصری‌سازی می‌کند. مروری بر گروه‌های ساختار رایج در جدول ۱ در بخش ۳.۱.۳ یافت می‌شود.

ما در ادامه همیشه منیفلدهای ریمانی را مجهرز به یک G -ساختار اضافی در کنار ساختار متریک خود فرض خواهیم کرد.^۵ انتخاب خاص G -ساختار خواص شبکه عصبی را تعیین می‌کند؛ ما در مورد این انتخاب در بخش ۳.۲ زیر توضیح خواهیم داد.

^۴ یک فضای همگن اصلی از G (با G)- $\square\square\square\square\square$ -است.

^۵ G -ساختار باید با ساختار متریک سازگار باشد به این صورت که چارچوب‌های متماز در GM زیرمجموعه‌ای از چارچوب‌های متعامد در OM باشند زمانی که $d < G$. به طور خاص برای $G = d$ ، G -ساختار GM با ساختار متریک OM مطابق است و اطلاعات هندسی اضافی را اضافه نمی‌کند.

شبکه‌های کانولوشنی سلسله‌مراتبی از میدان‌های ویژگی را از یک سیگنال ورودی بر روی یک منیفولد استخراج می‌کنند. ویژگی‌ها از طریق کرنل‌ها محاسبه می‌شوند، که برای شناسایی الگوهای فضایی مشخص در ویژگی‌های سطح پایین تر بهینه شده‌اند. ما تقاضا می‌کنیم که این فرآیند استنتاج صرفاً بر اساس آرایش نسبی ویژگی‌ها باشد و مستقل از انتخاب خاص مختصات بنده باشد. بنابراین ویژگی‌ها باید کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات باشند، مشابه اسکالارها، بردارها یا تانسورها. در حالی که چنین کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات وجود دارند، یک پیاده‌سازی کامپیوترا (غیرنمادین) نیازمند آن است که آن‌ها بر حسب ضرایب عددی در برخی گیج، یعنی نسبت به برخی انتخاب از چارچوب مرجع، بیان شوند. انتخاب خاص مختصات بی‌اهمیت است □ این تنها یکی از چندین توصیف ممکن برای تنظیم چنین درجات آزادی اضافی، نظریه‌های گیج هستند. یک نظریه گیج، برابری گیج‌های مختلف را با مرتبط کردن سازگار آن‌ها با یکدیگر از طریق تبدیل‌های گیج در نظر می‌گیرد. میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات بنابراین با یک قانون تبدیل خاص، یعنی یک عمل گروهی از گروه ساختار که توصیف می‌کند ویژگی‌ها چگونه تحت تبدیل‌های گیج تبدیل می‌شوند، مرتبط هستند. هر لایه شبکه عصبی که چنین میدان‌های ویژگی را پردازش می‌کند، ملزم به رعایت قوانین تبدیل آن‌ها برای حفظ استقلال از مختصات‌اشان است.

هدف این بخش اول از کار ما، معرفی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات با زبانی آسان است. بنابراین، شهود هندسی و بصری‌سازی‌ها بر فرمالیسم ریاضی ترجیح داده می‌شوند. یک تبیین رسمی تر از تعاریف و نتایج ارائه شده در بخش ۲.۵ آورده شده است.

بخش ۳ گیج‌ها و تبدیل‌های گیج را معرفی می‌کند که بر اساس آن‌ها میدان‌های بردارهای ویژگی مستقل از مختصات تعریف می‌شوند. شبکه‌های عصبی که بین چنین میدان‌های ویژگی نگاشت می‌کنند، در بخش ۴ توسعه یافته‌اند. بخش ۵ یک نمونه پیاده‌سازی از میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را در نوار موبیوس ارائه می‌دهد.

۳ مقدمه‌ای بر شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات

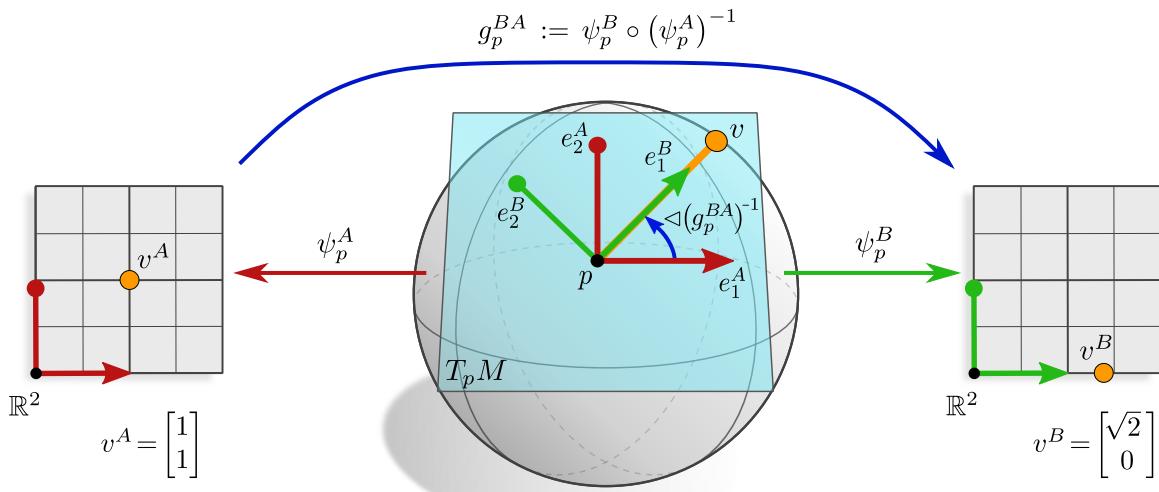
شبکه‌های کانولوشنی سلسله‌مراتبی از میدان‌های ویژگی را از یک سیگنال ورودی بر روی یک منیفولد استخراج می‌کنند. ویژگی‌ها از طریق کرنل‌ها محاسبه می‌شوند، که برای شناسایی الگوهای فضایی مشخص در ویژگی‌های سطح پایین تر بهینه شده‌اند. ما تقاضا می‌کنیم که این فرآیند استنتاج صرفاً بر اساس آرایش نسبی ویژگی‌ها باشد و مستقل از انتخاب خاص مختصات بنده باشد. بنابراین ویژگی‌ها باید کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات باشند، مشابه اسکالارها، بردارها یا تانسورها. در حالی که چنین کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات وجود دارند، یک پیاده‌سازی کامپیوترا (غیرنمادین) نیازمند آن است که آن‌ها بر حسب ضرایب عددی در برخی گیج، یعنی نسبت به برخی انتخاب از چارچوب مرجع، بیان شوند. انتخاب خاص مختصات بی‌اهمیت است □ این تنها یکی از چندین توصیف ممکن برای تنظیم چنین درجات آزادی اضافی، نظریه‌های گیج هستند. یک نظریه گیج، برابری گیج‌های مختلف را با مرتبط کردن سازگار آن‌ها با یکدیگر از طریق تبدیل‌های گیج در نظر می‌گیرد. بنابراین میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات با یک قانون تبدیل خاص، یعنی یک عمل گروهی از گروه ساختار که توصیف می‌کند ویژگی‌ها چگونه تحت تبدیل‌های گیج تبدیل می‌شوند، مرتبط هستند. هر لایه شبکه عصبی که چنین میدان‌های ویژگی را پردازش می‌کند، ملزم به رعایت قوانین تبدیل آن‌ها برای حفظ استقلال از مختصات‌اشان است. هدف این بخش اول از کار ما، معرفی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات با زبانی آسان است. بنابراین، شهود هندسی و بصری‌سازی‌ها بر فرمالیسم ریاضی ترجیح داده می‌شوند. یک تبیین رسمی تر از تعاریف و نتایج ارائه شده در بخش ۲.۵ آورده شده است.

بخش ۳ گیج‌ها و تبدیل‌های گیج را معرفی می‌کند که بر اساس آن‌ها میدان‌های بردارهای ویژگی مستقل از مختصات تعریف می‌شوند. شبکه‌های عصبی که بین چنین میدان‌های ویژگی نگاشت می‌کنند، در بخش ۴ توسعه یافته‌اند. بخش ۵ یک نمونه پیاده‌سازی از میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را در نوار موبیوس ارائه می‌دهد.

۱.۳ گیج‌ها، تبدیل‌های گیج و G -ساختارها

۱.۱.۳ فضاهای مماس و چارچوب‌های مرجع

یک منیفولد هموار d -بعدی M دارای یک فضای مماس، فضاهای برداری d -بعدی $T_p M \cong \mathbb{R}^d$ متصول به هر نقطه $p \in M$ است. فضاهای مماس، فضاهای برداری d -بعدی هستند، با این حال، برخلاف \mathbb{R}^d ، آن‌ها به طور کلی با هیچ انتخاب ارجح چارچوب مرجع همراه نیستند. یک بردار مماس $v \in T_p M$ یک شی مستقل از مختصات است و بنابراین بلافصله به صورت عددی با یک تاپل مختصاتی $(v_1, v_2, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$ نمایش داده نمی‌شود. به طور انتزاعی تر، هر



شکل ۶: شناسایی $T_p M \cong \mathbb{R}^d$ از طریق گیج‌های مختلف. یک بردار مماس (مستقل از مختصات) $v \in T_p M$ (نارنجی) را می‌توان به صورت عددی با یک تابع مخصوصی $\psi_p^A(v) = (1, 1)^\top$ نسبت به گیج ψ_p^A (قرمز) یا، به طور معادل، با $\psi_p^B(v) = (\sqrt{2}, 0)^\top$ نسبت به گیج ψ_p^B (سیاه) نمایش داد. انتخاب یک گیج مربوط به انتخاب $[e_1^A, e_2^A]$ یا $[e_1^B, e_2^B]$ از چارچوب مرجع است. در یک منفول عمومی هیچ انتخابی از گیج یا مختصات بنده پیش‌فرض ارجح نیست. گیج‌های مختلف، و در نتیجه چارچوب‌های مرجع، با تبدیل‌های گیج $\psi_p^B \circ \psi_p^A$ (آبی) مرتب هستند که مقادیری در گروه ساختار G تعریف شده می‌گیرند. این شکل ۶ نمودار گرافیکی از نمودارهای جابجایی در معادله (۸) و شکل ۲۵ آ است. توجه داشته باشید که گیج‌ها بلا فاصله به فضاهای مماس مختصات می‌دهند. شکل ۶ در بخش ۳.۲ یک نمودار مشابه برای چارت‌های (آفین) را نشان می‌دهد که به منفول مختصات می‌دهند و بدین ترتیب گیج‌ها ("پایه‌های مختصات") را القا می‌کنند.

فضای مماس $T_p M$ با \mathbb{R}^d هم‌ریخت است اما به طور کلی هیچ هم‌ریختی کانونی بین آنها وجود ندارد. بنابراین هر دو فضا از نظر ساختاری معادل هستند اما به هیچ روش ارجح به یکدیگر شناسایی نمی‌شوند.

یک گیج (تسهیم محلی بندل مماس) بر روی M به عنوان مجموعه‌ای از نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر که به صورت هموار وابسته به موقعیت هستند، تعریف می‌شود:

$$\psi_p^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad p \in U^A, \quad (1)$$

که هم‌ریختی‌های فضای برداری گشته بین $T_p M$ و \mathbb{R}^d را مشخص می‌کند. همانطور که در شکل ۶ بصری‌سازی شده است، آنها با تخصیص یک بردار ضریب به فضاهای مماس مختصات می‌دهند:

$$v^A := \psi_p^A(v) \in \mathbb{R}^d \quad (2)$$

به هر بردار مماس مستقل از مختصات $v \in T_p M$. معکوس این رابطه می‌دهد:

$$v = (\psi_p^A)^{-1}(v^A) = (\psi_p^A)^{-1}\left(\sum_i v_i^A \epsilon_i\right) = \sum_i v_i^A (\psi_p^A)^{-1}(\epsilon_i) =: \sum_i v_i^A e_i^A, \quad (3)$$

که در آن $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_d\}$ را پایانه استاندارد \mathbb{R}^d نامگذاری کردایم و از خطی بودن گیج برای بیرون کشیدن جمع استفاده کردایم. این نشان می‌دهد که گیج را می‌توان به عنوان مجهر کردن هر فضای مماس $T_p M$ با یک چارچوب مرجع در نظر گرفت:

$$[e_1^A, \dots, e_d^A] := \left[(\psi_p^A)^{-1}(\epsilon_1), \dots, (\psi_p^A)^{-1}(\epsilon_d) \right], \quad (4)$$

که به عنوان یک d -تالی از بردارهای مماس خطی مستقل تعریف می‌شود که با نگاشت پایه استاندارد \mathbb{R}^d به عقب از طریق نگاشت معکوس گیج به دست می‌آید. برای اختصار، ما در ادامه از نماد کوتاه‌شده $[e_i^A]_{i=1}^d$ برای چارچوب‌ها استفاده خواهیم کرد. ضرایب v^A مختصات v نسبت به این چارچوب هستند. مجموعه‌ای از چارچوب‌های القا شده توسط ψ_p^A (هموار) میدان چارچوب نامیده می‌شود؛ برای بصری‌سازی به شکل ۷ مراجعه کنید.

گیج‌های ψ^X فضاهای مماس را تنها در همسایگی‌های محلی M مختصات می‌دهند، و به دلیل موانع توپولوژیکی به طور کلی نمی‌توانند به کل مینفولد بدون نقض فرض همواری گسترش یابند. بنابراین یک اطلس در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathcal{A} = \{(U^X, \psi^X)\}_{X \in \mathfrak{X}}, \quad (5)$$

مشکل از گیج‌های هموار بر روی مجموعه‌ای از همسایگی‌های U^X که مینفولد را پوشش می‌دهند، یعنی شرط $\bigcup_{X \in \mathfrak{X}} U^X = M$ را برآورده می‌کند، که در آن \mathfrak{X} یک مجموعه اندیس است.^۶ در نواحی همپوشانی $U^A \cap U^B \neq \emptyset$ از همسایگی‌ها، گیج‌های مختلف ψ_p^A و ψ_p^B توسط توابع گذار هموار به هم متصل می‌شوند:

$$g^{BA} : U^A \cap U^B \rightarrow \mathrm{GL}(d), \quad p \mapsto g_p^{BA} := \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}. \quad (6)$$

در اینجا ما دامنه مشترک (فعلاً) را با گروه خطی عمومی $\mathrm{GL}(d)$ در نظر می‌گیریم، مشکل از همه ماتریس‌های معکوس‌پذیر در $\mathbb{R}^{d \times d}$ ، که رابطه بین هر جفت از هم‌ریختی‌های فضای برداری (گیج‌ها) یا چارچوب‌های مرجع را توضیح می‌دهند. عمل چنین تابع گذاری بر روی یک گیج داده شده یک تبدیل گیج را تعریف می‌کند:

$$\psi_p^B = g_p^{BA} \cdot \psi_p^A. \quad (7)$$

از نظر یک نمودار جابجایی، رابطه بین گیج‌های مختلف به صورت زیر بصری‌سازی می‌شود:^۷

$$\begin{array}{ccccc} & & \psi_p^A & & \\ & \leftarrow & T_p M & \rightarrow & \downarrow \\ \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\psi_p^A} & T_p M & \xrightarrow{\psi_p^B} & \mathbb{R}^d \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ g_p^{AB} \cdot & = & (g_p^{BA})^{-1}. & & \end{array} \quad (8)$$

این نمودار را با تفسیر گرافیکی آن در شکل ۶ مقایسه کنید.

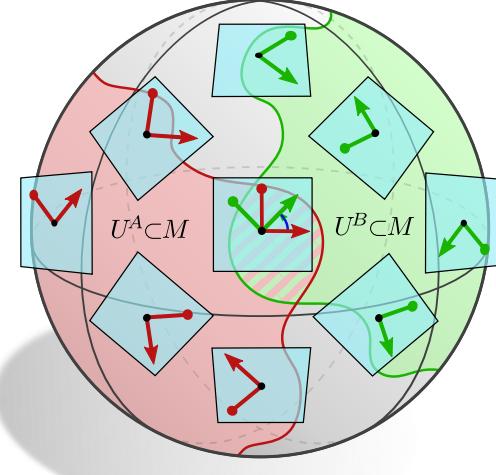
یک تبدیل گیج، مختصات‌بندی فضاهای مماس را تغییر می‌دهد به طوری که همان بردار مماس مستقل از مختصات v با یک بردار مولفه‌ای متفاوت نمایش داده می‌شود:

$$v^B = g_p^{BA} v^A. \quad (9)$$

^۶ اطلس گیج‌ها بسیار شبیه به اطلس‌های معمول چارت‌های یک مینفولد است (پیوست ۲۲). تفاوت این است که اطلس‌های مورد نظر در اینجا مستقیماً به بندل مماس TM مختصات می‌دهند به جای مینفولد M .

^۷ نمودارها یک نمای کلی بصری از توابع و فضاهایی را که بین آن‌ها نگاشت می‌کنند، ارائه می‌دهند. به عنوان مثال، نمودار

به این معنی است که توابع $Y \rightarrow X$ و $Z \rightarrow X$ را که بین آن‌ها نگاشت می‌کنند، ارائه می‌دهند. اگر ترکیبات توابع در امتداد همه مسیرهایی با شروع و پایان یکسان مطابقت داشته باشند، نمودار جابجایی نامیده می‌شود. نمودار مثال ما اگر (و تنها اگر) $h = g \circ f$ صادق باشد، جابجایی است.



شکل ۷ هر نقطه p از یک منفولد ریمانی M دارای یک فضای مماس $T_p M$ متصل است. یک گیج هموار ψ^A بر روی یک زیرمجموعه مناسب انتخاب شده $U^A \subseteq M$ (قرمز) تمام ضمایر مماس $T_p M$ را برای p در U^A مخصوص می‌دهد همانطور که در شکل ۶ نشان داده شده است. این معادل انتخاب یک میدان چارچوب هموار بر روی U^A است. از آنجا که به طور کلی امکان گسترش یک گیج به صورت سراسری بر روی کل منفولد وجود ندارد، لازم است که یک G -اطلس در نظر گرفته شود، مشکل از گیج‌هایی که M را پوشش می‌دهند. مخصوصات بندی‌های مختلف ψ^A بر روی U^B (سیاه) از طریق تبدیل‌های گیج (یا نگاشتهای گذار) $g^{BA} : U^A \cap U^B \rightarrow G$ به هم متصل می‌شوند که بر روی همپوشانی $U^A \cap U^B$ (خطدار) تعریف شده‌اند و مقادیری در گروه ساختار $G \leq \text{GL}(d)$ می‌گیرند.

از آنجا که یک گیج مربوط به انتخاب یک میدان چارچوب است، یک تبدیل گیج مربوط به تبدیل بین میدان‌های چارچوب است. به طور خاص، یک چارچوب $p \in M$ در $[e_i^A]_{i=1}^d = [e_1^A, \dots, e_d^A]$ می‌شود:

$$\begin{aligned}
[e_i^B]_{i=1}^d &:= \left[(\psi_p^B)^{-1}(\epsilon_i) \right]_{i=1}^d && \text{(چارچوب القا شده توسط گیج, (۴))} \\
&= \left[(g_p^{BA} \cdot \psi_p^A)^{-1}(\epsilon_i) \right]_{i=1}^d && \text{(تبدیل گیج, (۷))} \\
&= \left[(\psi_p^A)^{-1}((g_p^{BA})^{-1}\epsilon_i) \right]_{i=1}^d && \text{(معکوس گسترش یافته)} \\
&= \left[(\psi_p^A)^{-1} \left(\sum_j \epsilon_j \epsilon_j^\top (g_p^{BA})^{-1} \epsilon_i \right) \right]_{i=1}^d && \text{(۱ = \sum_j \epsilon_j \epsilon_j^\top)} \\
&= \left[(\psi_p^A)^{-1} \left(\sum_j \epsilon_j \left((g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \right) \right]_{i=1}^d && \text{(عناصر ماتریس (g_p^{BA})^{-1} شناسایی شده)} \\
&= \left[\sum_j (\psi_p^A)^{-1}(\epsilon_j) \left((g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \right]_{i=1}^d && \text{(خطی بودن \psi_p^A)} \\
&= \left[\sum_j e_j^A \left((g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \right]_{i=1}^d && \text{(چارچوب القا شده توسط گیج, (۴))} \\
&=: [e_i^A]_{i=1}^d \blacktriangleright (g_p^{BA})^{-1} && \text{(۱۰)}
\end{aligned}$$

از طریق عمل راست تعریف شده:

$$\blacktriangleright : ([e_i]_{i=1}^d, g) \mapsto [e_i]_{i=1}^d \blacktriangleright g := \left[\sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \quad (11)$$

از عناصر گروه بر روی چارچوب‌ها. توجه داشته باشید که معکوس در این عمل در معادله (۱۰) به دلیل تعریف معادله (۷) بدون معکوس است.^۸ معمولاً به رفتار تبدیل چارچوب‌های مرجع، تبدیل کوواریانت گفته می‌شود در حالی که تبدیل گیج‌ها و ضرایب برداری به عنوان تبدیل کونتروواریانت نامیده می‌شود؛ به پیوست ۲۲ مراجعه کنید.

^۸ قراردادهای دیگر ممکن است انتخاب معکوس‌ها را در ψ^A تغییر دهند. یک معکوس در هر یک از معادله برای سازگاری عمل چپ \blacktriangleright بر روی گیج‌ها و عمل راست \blacktriangleright بر روی چارچوب‌ها ضروری است.

از آنجا که رفتار تبدیل ضرایب در معادله (۹) و یا به در معادله (۱۰) معکوس یکدیگر هستند، آن‌ها یکدیگر را خنثی می‌کنند، یعنی بردار مماس $v = \sum_i v_i^A e_i^A = \sum_i v_i^B e_i^B$ را ناوردا می‌گذارند:

$$\begin{aligned} v &= \sum_i v_i^B e_i^B = \sum_i v_i^B \sum_j e_j^A \left((g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \\ &= \sum_j \left(\sum_i \left((g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} v_i^B \right) e_j^A \\ &= \sum_j v_j^A e_j^A. \end{aligned} \quad (12)$$

این ساختار تضمین می‌کند که هر محاسبه‌ای در نهایت مستقل از گیج انتخاب شده است، که معمولاً به آن استقلال از مختصات گفته می‌شود. به طور کلی، هر نمایش مختصاتی از یک شی یا تابع مستقل از مختصات برای سازگاری باید مستقل از مختصات باشد.

برای کامل بودن می‌خواهیم اشاره کنیم که فرمالیسم ارائه شده در اینجا پایه‌های عمومی فضاهای مماس را تعریف می‌کند، که گاهی اوقات به عنوان پایه‌های غیرمختصاتی (پایه‌های غیرهولونومیک) از نظر گیج‌های محلی نامیده می‌شوند. یک جایگزین بسیار محبوب اما کمتر عمومی پایه‌های مختصاتی (پایه‌های هولونومیک) هستند:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1^A} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d^A} \Big|_p \right], \quad (13)$$

که توسط چارت‌های مختصاتی منفولد القا می‌شوند [۴]:

$$x^A : U^A \rightarrow V^A \subseteq \mathbb{R}^d \quad (14)$$

گیج‌های مربوطه توسط دیفرانسیل‌های چارت داده می‌شوند، یعنی:

$$\psi_p^A = \hat{dx}_p^A = (\hat{dx}_{p,1}^A, \dots, \hat{dx}_{p,d}^A)^\top : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d. \quad (15)$$

تبدیل‌های گیج در این تنظیم با ژاکویان‌ها مطابقت دارند:

$$g_p^{BA} = \left. \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right|_{x^A(p)} \in \text{GL}(d) \quad (16)$$

از نگاشت‌های گذار چارت. یک چارت نمونه و پایه‌های مختصاتی القا شده آن در شکل ۸ بصری‌سازی شده‌اند. پیوست ۲؟ رابطه بین هر دو فرمالیسم را با جزئیات مورد بحث قرار می‌دهد؛ یک مرور کلی در جدول ۲؟ ارائه شده است.

در ادامه این مقاله ما عمدتاً در فرمالیسم گیج کار خواهیم کرد، که چارچوب‌های مرجع را مستقیماً به فضاهای مماس تخصیص می‌دهد به جای اینکه آن‌ها را از چارت‌ها القا کنند. استثنایاً عبارتند از کانولوشن‌های موبیوس در بخش ۵ CNN‌های اقلیدسی در بخش ۲؟، مختصات لگاریتمی-قطبی در بخش ۲؟ و CNN‌های بیست و چهار در بخش ۲؟. در همه این موارد، متفاوت‌هایی به صورت محلی مسطح هستند و چارت‌ها ایزوگریک هستند، به طوری که چارچوب‌های متعدد را القا می‌کنند. کانولوشن‌های GM در U^A سپس می‌توانند به روشنی کارآمد با اجرای کانولوشن‌های اقلیدسی با کرنل‌های G -استریبل در دامنه‌های مشترک چارت‌ها V^A محاسبه شوند.

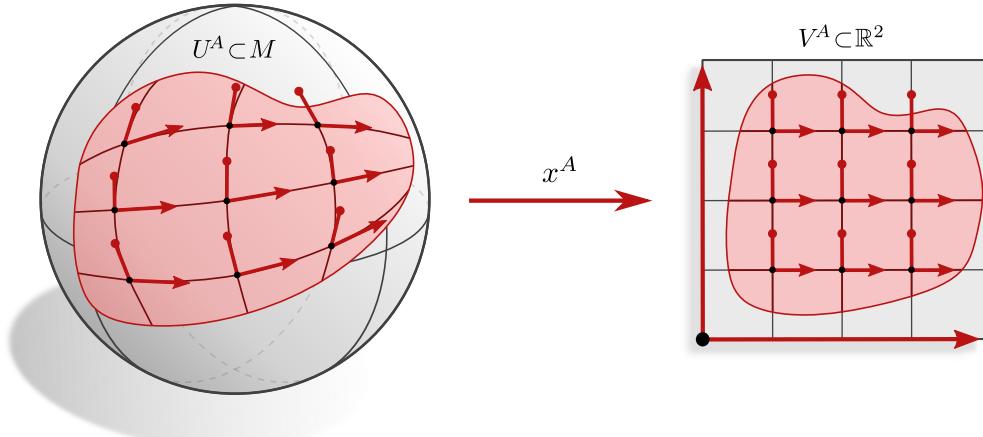
۲.۱.۳ توابع مستقل از مختصات در فضاهای مماس

همانطور که بردارهای مماس مستقل از مختصات هستند، یعنی بدون اشاره به هیچ چارچوب مرجع تعریف می‌شوند. یک گیج انتخاب شده امکان نمایش چنین نگاشت‌های مستقل از مختصات را توسط توابعی فراهم می‌کند که بر روی بردارهای ضریب در \mathbb{R}^d عمل می‌کنند. مشابه بردارهای ضریب، مختصات‌بندی توابع باید به روشنی خاص تحت تبدیل‌های گیج تبدیل شوند تا به طور سازگار تعریف شوند، یعنی برای رعایت استقلال از مختصات. ما بعداً مفهوم ارائه شده در اینجا را از بین نگاشت‌های مستقل از مختصات بر حسب مختصات محلی برای تعریف کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM به کار خواهیم برد.

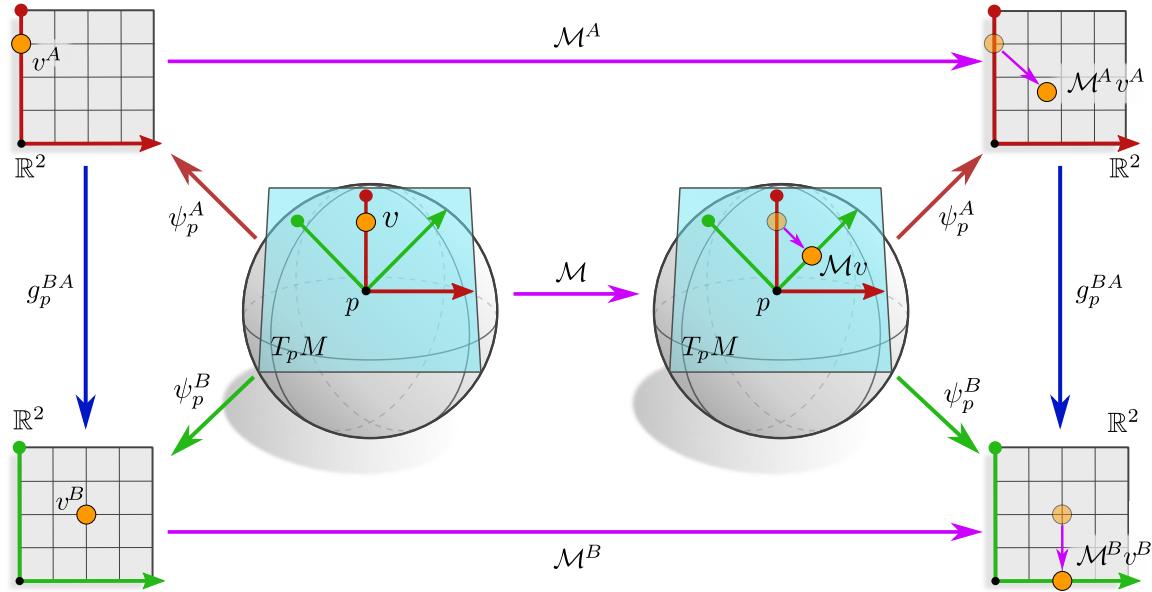
به عنوان یک مثال ساده برای یک عملیات مستقل از مختصات، باید حالت یک نگاشت خطی را در نظر بگیریم:

$$\mathcal{M} : T_p M \rightarrow T_p M. \quad (17)$$

فرض کنید $v \in T_p M$ یک بردار مماس باشد که توسط \mathcal{M} به $\mathcal{M}v \in T_p M$ نگاشت می‌شود. نگاشت‌های خطی در پیاده‌سازی‌های عددی معمولاً توسط ماتریس‌های ضریب مدل می‌شوند که بین بردارهای ضریب نسبت به یک انتخاب از چارچوب مرجع نگاشت می‌کنند. برای دقیق



شکل ۸: یک چارت $x^A : U^A \rightarrow V^A \subseteq \mathbb{R}^d$ را به نواحی $U^A \subseteq M$ از منیفولد تخصیص می‌دهد. این چارت پایه‌های مختصاتی $\psi_p^A = \hat{dx}_p^A, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d^A}|_p$ و گیج‌های مربوطه $\left[\frac{\partial}{\partial x_i^A} \right]_p$ را برای فضاهای مماس $T_p M$ در القا می‌کند. معمدتاً با چارت‌ها کار نخواهیم کرد بلکه به نقاط $p \in M$ به صورت مستقل از مختصات ارجاع خواهیم داد. گیج‌ها (چارچوب‌ها) سپس مستقیماً به فضاهای مماس تخصیص داده می‌شوند به جای اینکه از چارت‌ها القا شوند.



شکل ۹: تفسیر گرافیکی نمودار جابجایی در معادله (۲۳). یک نگاشت مستقل از مختصات $\mathcal{M} : T_p M \rightarrow T_p M$ را می‌توان به طور معادل با توابع $\mathcal{M}^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ یا $\mathcal{M}^B : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ نسبت به گیج‌های مختلف ψ_p^A یا ψ_p^B نمایش داد. این مختصات‌بندی‌های \mathcal{M} با پیش و پس ترکیب با گیج‌ها در دامنه و دامنه مشترک تعريف می‌شوند، به عنوان مثال، با دنبال کردن فلاش‌ها، $\mathcal{M}^A := \psi_p^A \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^A)^{-1}$. در نتیجه، تبدیل‌های گیج $\mathcal{M}^B = g_p^{BA} \mathcal{M}^A (g_p^{BA})^{-1}$ بین مختصات‌بندی‌ها توسط یک پیش و پس ترکیب با نگاشت‌های گذار g_p^{BA} در دامنه و دامنه مشترک داده می‌شوند. همه کیت‌ها و نگاشت‌ها در این کار یا مستقل از مختصات خواهد بود (مانند \mathcal{M}) یا به رویی مستقل از مختصات در گیج‌های مختلف بیان خواهد شد (مانند \mathcal{M}^A و \mathcal{M}^B). مثلاً برای تبدیل قوانین کمیت و تابع تعريف (یا استخراج) کنیم:

کردن این موضوع، فرض کنید گچ ψ_p^A داده شده باشد به طوری که بردارهای مستقل از مختصات $v_{\square\square}$ و $v_{\square\square\square}$ در $T_p M$ با بردارهای ضریب $v_{\square\square} = \psi_p^A(v_{\square\square})$ و $v_{\square\square\square} = \psi_p^A(v_{\square\square\square})$ نگاشت خطی \mathcal{M} در این گچ توسط ماتریس نمایش داده می‌شود:

$$\mathcal{M}^A := \psi_p^A \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^A)^{-1} \in \mathbb{R}^{d \times d} \quad (18)$$

که تعریف آن توسط نمودار جابجایی زیر بصری سازی شده است:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\psi_p^A} & T_p M & \xrightarrow{\mathcal{M}} & T_p M & \xrightarrow{\psi_p^A} & \mathbb{R}^d \\ & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\mathcal{M}^A} & & & & & \uparrow \end{array} \quad (19)$$

ماتریس با نگاشت مستقل از مختصات سازگار است زیرا هر دو یکدیگر را نتیجه می‌دهند:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^A v_{\square\square}^A &= [\psi_p^A \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^A)^{-1}] \circ [\psi_p^A(v_{\square\square})] \\ &= \psi_p^A(\mathcal{M} v_{\square\square}) \\ &= \psi_p^A(v_{\square\square\square}) \\ &= v_{\square\square\square}^A \end{aligned} \quad (20)$$

البته می‌توان \mathcal{M} را نسبت به هر انتخاب دیگری از گچ ψ_p^B نیز نمایش داد. ما از معادله (۹) می‌دانیم که بردارهای ضریب در گچ‌های مختلف با \mathcal{M}^A و \mathcal{M}^B مرتبه هستند. به طور مشابه، $v^B = g_p^{BA} v^A$ توسط تبدیل گچ مرتب است:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^B &= \psi_p^B \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^B)^{-1} \\ &= \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1} \circ \mathcal{M}^A \circ \psi_p^A \circ (\psi_p^B)^{-1} \\ &= g_p^{BA} \mathcal{M}^A (g_p^{BA})^{-1}, \end{aligned} \quad (21)$$

که در اینجا هم بر دامنه و هم بر رامنه مشترک عمل می‌کند.^۹ این قانون تبدیل دوباره سازگار است زیرا تبدیل‌های متقابل یکدیگر را خنثی می‌کنند:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^B v_{\square\square}^B &= [g_p^{BA} \mathcal{M}^A (g_p^{BA})^{-1}] [g_p^{BA} v_{\square\square}^A] \\ &= g_p^{BA} \mathcal{M}^A v_{\square\square}^A \\ &= g_p^{BA} v_{\square\square\square}^A \\ &= v_{\square\square\square}^B \end{aligned} \quad (22)$$

تبدیل‌های گچ استخراج شده بنابراین تأیید می‌کنند که تمام محاسبات مختصات‌بندی شده در نهایت مستقل از مختصات هستند. روابط بین نگاشت مستقل از مختصات و مختصات‌بندی‌های آن توسط نمودار جابجایی زیر خلاصه می‌شود:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\psi_p^A} & T_p M & \xrightarrow{\mathcal{M}} & T_p M & \xrightarrow{\psi_p^B} & \mathbb{R}^d \\ & \downarrow g_p^{BA} & & & & \downarrow g_p^{BA} & \\ \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\psi_p^B} & T_p M & \xrightarrow{\mathcal{M}} & T_p M & \xleftarrow{\psi_p^A} & \mathbb{R}^d \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \quad (23)$$

که در شکل ۹ به صورت گرافیکی تفسیر شده است.

در عمل نمی‌توان نگاشت خطی مستقل از مختصات \mathcal{M} را به صورت عددی بدون اشاره به یک انتخاب مختصات‌بندی پیاده‌سازی کرد. با این حال، وجود آن تنها در صورتی (و تنها در صورتی) دلالت دارد که مختصات‌بندی‌های آن همانطور که در معادله (۲۱) مشخص شده است به یکدیگر مربوط باشند، که تضمین می‌کند رفتار تبدیل صحیح ضرایب بردار ورودی و خروجی در معادله (۹) حفظ می‌شود.

^۹ تبدیل ضرایب ماتریس از طریق ضرب چپ و راست با $(g^{BA})^{-1}$ و g^{BA} به ترتیب، نگاشت خطی را به عنوان یک تانسور از نوع $(1, 1)$ شناسایی می‌کند.

۳.۱.۳ گروه‌های ساختار، G -ساختارها و G -اطلس‌ها

ما بعداً از شبکه‌های عصی می‌خواهیم که به روشنی مستقل از مختصات عمل کنند، یعنی ما تقاضا می‌کنیم که استنتاج آن‌ها مستقل از انتخاب‌های دلخواه چارچوب‌های مرجع باشد. این سؤال را مطرح می‌کند که انتخاب چارچوب‌های مرجع در یک منيفولد تا چه حد دلخواه است. در بخش‌های ۱.۱.۳ و ۱.۱.۴ قبلي ما هر انتخاب ممکن از گیج یا چارچوب مرجع را مجاز می‌دانستیم، که بنابراین توسط تبدیل‌های گیج با مقدار کلی $GL(d)$ مرتبط بودند. با این حال، در بسیاری از کاربردها، منيفولد دارای ساختار اضافی است که امکان تشخیص یک زیرمجموعه ارجح از چارچوب‌های مرجع یا گیج‌ها را می‌دهد که توابع گذار آن‌ها مقادیری در یک گروه ساختار کاهش یافته $G \leq GL(d)$ می‌گیرند. چنین ساختارهای هندسی \square یا بلکه خود زیرمجموعه‌های چارچوب‌های مرجع ترجیحی، که اطلاعات معادل را گذاری می‌کنند \square به عنوان G -ساختارها نامیده می‌شوند.

G -ساختارها با در نظر گرفتن چند مثال خاص بهتر درک می‌شوند. لیست زیر چنین مثال‌هایی را ارائه می‌دهد که براساس گروه ساختار $(d) \leq GL$ طبقه‌بندی شده‌اند:

d : ساختار متریک یک منيفولد ریمانی را در نظر بگیرید، که امکان اندازه‌گیری فواصل و زوایا را می‌دهد، و بنابراین تشخیص چارچوب‌های متعماد را، یعنی آن چارچوب‌هایی که شرط $\delta_{ij} = \delta_{ij}, i, j = 1, \dots, d$ را برآورده می‌کنند. به طور متأثر، یک متریک ریمانی امکان صحبت در مورد گیج‌های ایزو‌متریک ψ^A_p را با متریک $T_p M$ شناسایی می‌کنند، یعنی شرط $\langle \psi^A(v), \psi^A(w) \rangle_{T_p M} = \langle v, w \rangle$ را برای هر $v, w \in T_p M$ برآورده می‌کنند. از آنجا که چارچوب‌های متعماد و گیج‌های ایزو‌متریک تا چرخش‌ها و بازتاب‌ها تعریف می‌شوند، هر تبدیل گیجی بین آن‌ها مقادیری در گروه متعماد d خواهد گرفت، که آن زیر گروه از $GL(d)$ است که زوایا و فواصل را حفظ می‌کند.

GL^+ : به طور مشابه، یک جهت‌گیری منيفولد چارچوب‌های راست گرد را از چپ گرد و گیج‌های حفظ کننده جهت‌گیری را از گیج‌های معکوس کنند. جهت‌گیری متمایز می‌کند. تبدیل‌های گیج بین چارچوب‌های یک دست پری داده شده مقادیری در $GL^+(d)$ می‌گیرند، یعنی آن زیر گروه از $GL(d)$ که جهت‌گیری‌ها را حفظ می‌کند.

$SO(d)$: با هم، یک متریک و جهت‌گیری داده شده، چارچوب‌های متعماد با جهت‌گیری خاصی را مشخص می‌کنند. تبدیل‌های گیج بین چنین چارچوب‌هایی تضمین شده‌اند که در زیر گروه $SO(d)$ از $GL(d)$ قرار گیرند.

e : یک میدان چارچوب هموار سراسری یک $\{e\}$ -ساختار را در M تعریف می‌کند. در این حالت تنها یک چارچوب متمایز در هر موقعیت وجود دارد، به طوری که تبدیل‌های گیج در گروه بدیهی $\{e\}$ قرار می‌گیرند.

$GL(d)$: اگر هیچ ساختار اضافی تحمیل شود، هر چارچوب مرجع فضاهای مماس به همان اندازه معین است. تبدیل‌های گیج در این حالت نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر عمومی در $GL(d)$ هستند و G -ساختار مربوطه فقط بندل چارچوب FM است.

موضوع مشترک در این مثال‌های انگیزشی این است که همه آن‌ها با موارد زیر تعریف می‌شوند:

۱. یک زیرمجموعه (که به صورت فضایی هموار تغییر می‌کند) از چارچوب‌های مرجع متمایز،

۲. یک زیرمجموعه مربوطه از گیج‌های ترجیحی و

۳. یک زیر گروه $(d) \leq GL$ از تبدیل‌های گیج که مفهوم متمایز چارچوب‌ها و گیج‌ها را حفظ می‌کند.

چنین زیرمجموعه‌هایی از چارچوب‌های مرجع که به صورت هموار تغییر می‌کنند به عنوان G -ساختارها GM بر روی M نامیده می‌شوند و گروه G به عنوان گروه ساختار (کاهش یافته) نامیده می‌شود \square . برای تعریف دقیق تر به بخش ۳.۶ مراجعه کنید.^{۱۰} فآن‌یند مشخص کردن یک G -ساختار به عنوان کاهش گروه ساختار از $GL(d)$ به G شناخته می‌شود. یک اطلس $\mathcal{A}^G = \{(U^X, \psi^X)\}_{X \in \mathfrak{X}}$ به عنوان G -اطلس نامیده می‌شود اگر تمام توابع گذار آن:

$$g^{BA}: U^A \cap U^B \rightarrow G, \quad p \mapsto g_p^{BA} := \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1} \quad (24)$$

در یک گروه ساختار کاهش یافته $G \leq GL(d)$ قرار گیرند (مقایسه کنید با معادله (۴)). رابطه بین چارچوب‌های مرجع و گیج‌ها در معادله (۴) دلالت دارد بر اینکه هر G -اطلس یک G -ساختار مربوطه را گذاری می‌کند.

انتخاب‌های متعددی از G -ساختارها ممکن است برای یک گروه ساختار G داده شده وجود داشته باشند. برای ارتباط با مثال‌های بالا: متریک‌های ریمانی مختلف، زیرمجموعه‌های متفاوتی از چارچوب‌های مرجع را به عنوان متعماد مشخص می‌کنند، یعنی آن‌ها با ساختارهای d مختلف OM مطابقت دارند. بنابراین انتخاب یک متریک معادل انتخاب یک ساختار d است. به طور مشابه، انتخاب‌های مختلف جهت‌گیری یک منيفولد قابل جهت‌گیری، مجموعه متفاوتی از چارچوب‌ها را به عنوان راست گرد مشخص می‌کنند. بنابراین دو انتخاب ممکن جهت‌گیری با دو انتخاب ممکن از ساختارهای $(GL^+M) GL^+$ مطابقت دارند. ساختارهای $SO(d)$ ممکن است در انتخاب جهت‌گیری و متریک هر دو متفاوت باشند. مثال دیگر ساختار $\{e\}M$ است. آن‌ها اجازه تبدیل‌های گیج (غیربدیهی) را نمی‌دهند و بنابراین با انتخاب میدان‌های چارچوب هموار سراسری در M مطابقت دارند. جدول ۱ مثال‌های بیشتری از گروه‌های ساختار G و G -ساختارهای مربوطه را ارائه می‌دهد.

^{۱۰} به طور رسمی، GM به عنوان یک زیربندل اصلی G از بندل چارچوب FM تعریف می‌شود، که یک بندل اصلی $(d) GL$ است.

structure group $G \leq \mathrm{GL}(d)$	G -structure GM	equivalent structure on M
$\mathrm{GL}^+(d)$	positively oriented frames	orientation of M
$\mathrm{SL}(d)$	unit volume frames	volume form
$\mathrm{CO}(d)$	conformal frames	—
$\mathrm{Sp}(d)$	symplectic frames	—
$\mathrm{O}(d)$	orthonormal frames	Riemannian metric
$\mathrm{O}(d-n, n)$	pseudo-orthonormal frames	pseudo-Riemannian metric
$\mathrm{SO}(d)$	positively oriented orthonormal frames	Riemannian metric + orientation
$\{e\}$	parallelization (global frame field)	—

جدول ۱: مثال‌هایی از G -ساختارها GM بر روی M و گروه‌های ساختار کاهش‌یافته مربوطه $(\mathrm{GL}(d) \leq G)$. یک G -ساختار به عنوان یک زیرمجموعه هموار متغیر از چارچوب‌های مرچ (یک زیرتبدیل اصلی G از بندل چارچوب (FM)) تعریف می‌شود، که در آن چارچوب‌های هر فضای مماس به صورت متقابل توسط تبدیل‌های گیج با مقادیر G مرتبط هستند. در حالی که این تعریف نسبتاً انتزاعی است، امکان مشاهده بسیاری از ساختارهای هندسی در M را به روشنی یکپارچه فراهم می‌کند. به عنوان مثال، یک متریک ریمانی در M امکان تشخیص چارچوب‌های معتمد را می‌دهد. بر عکس، مشخص کردن معتمد بودن به طور منحصر به فرد یک متریک را نتیجه می‌دهد. بنابراین یک متریک ریمانی و یک ساختار معتمد با یکدیگر معادل هستند. به طور مشابه، یک تناظر یکی به یک بین فرم‌های حجم و چارچوب‌های واحد حجم وجود دارد. توجه داشته باشید که انتخاب یک گروه ساختار G به طور منحصر به فرد یک G -ساختار را مشخص نمی‌کند. به عنوان مثال، متریک‌های ریمانی مختلف می‌توانند به عنوان ساختار d ، فرم‌های حجم مختلف به عنوان ساختار $\{e\}$ انتخاب شوند. CNN‌های مستقل از مختصات برای رعایت یک G -ساختار داده شده طراحی شده‌اند □ اینکه کدام ساختار خاص است به وظیفه یادگیری بستگی دارد.

کاهش گروه ساختار به G ، یعنی وجود یک G -ساختار، ممکن است توسط توپولوژی منيفولد مسدود شود. این دلالت دارد بر اینکه یک "گروه ساختار کاهش‌نایپذیر" وجود دارد که فراتر از آن ابهام چارچوب‌های مرچ را نمی‌توان بدون نقض فرض همواری (یا حتی پیوستگی) G -ساختار برطرف کرد. به عنوان مثال، نوار موبیوس در شکل ۲۰ غیرقابل جهت‌گیری است، این بدان معنی است که یک تعریف هموار و سراسری سازگار از دست پری چارچوب و در نتیجه ساختار $\{e\}$ (میدان چارچوب هموار سراسری) را نمی‌پذیرد. همانطور که در شکل ۲۰ بصری‌سازی شده است، یک G -اطلس از گیج‌ها که نوار موبیوس را پوشش می‌دهد، به طور ناگزیر نیازمند یک بازتاب در یکی از نگاشت‌های گذار خواهد بود، که به معنای یک گروه ساختار کاهش‌نایپذیر CNN‌های مستقل از مختصات بر روی نوار موبیوس بنابراین حداقل یا بد تناوب پذیر بازتابی باشند. به طور مشابه، گروه ساختار کره $G = \mathcal{R}$ را نمی‌توان فراتر از CNN‌های کروی هموار بنابراین لزو مانند پذیر بازتابی چرخش هستند. توجه داشته باشید که هر منيفولد (دیفرانسیل پذیر) با برخی G -ساختار همراه است. به عنوان مثال، یک منيفولد دیفرانسیل پذیر خام دارای یک G -ساختار $(\mathrm{GL}(d)$ (حاوی هر چارچوب ممکن) است، یک منيفولد ریمانی یک ساختار d دارد و \mathbb{R}^d به طور کانونی یا یک ساختار $\{e\}$ مجهز شده است که در شکل ۱۳۳ بصری‌سازی شده است. ما بنابراین بدون از دست دادن کلیت، اصطلاح "استقلال از مختصات" را به استقلال از مختصات GM تصحیح خواهیم کرد، یعنی استقلال نسبت به انتخاب چارچوب‌های مرچ در G -ساختار داده شده در M . در طول این کار ما فرض خواهیم کرد که گیج‌ها بخشی از یک G -اطلس هستند:

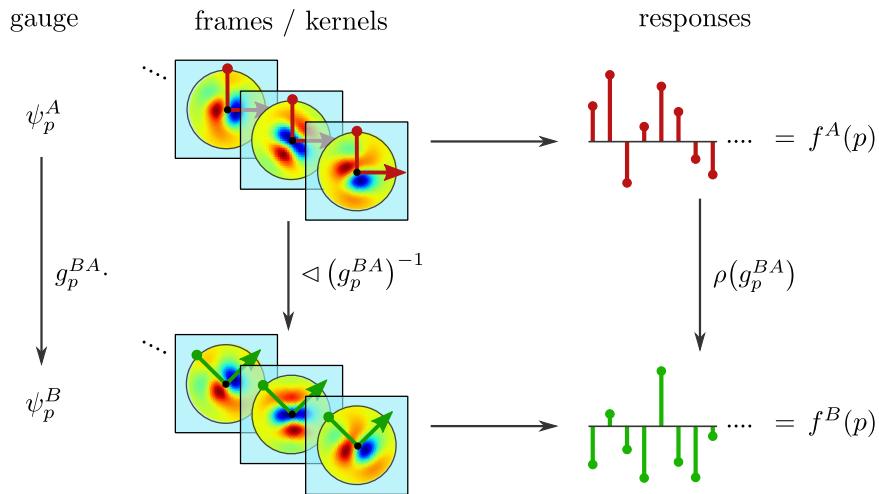
$$\mathcal{A}^G = \{(U^X, \psi^X)\}_{X \in \mathfrak{X}} \quad \square\square\square\square\square\square \quad g_p^{BA} \in G \quad \square\square\square\square\square \quad \psi_p^A, \psi_p^B \in \mathcal{A}^G, \quad p \in U^A \cap U^B, \quad (25)$$

مطابق با G -ساختار داده شده. هر کمیت یاتابع می‌تواند نسبت به هر گیجی از این اطلس بیان شود^{۱۱}، و مختصات‌بندی‌ها در گیج‌ها مختلف به طور منحصر به فرد توسط یک تبدیل گیج با مقدار G مرتبط هستند. با تضمین استقلال از مختصات همه ساختارها، آن‌ها همیشه با همتایان مستقل از مختصات خود مطابقت خواهند داشت، که مانظیره سراسری را بر حسب آن‌ها در بخش‌های ۶، ۷ و ۸ فرمول‌بندی خواهیم کرد.

۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی مستقل از مختصات

فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات، فضاهای میدان‌های بردار ویژگی هستند. مشابه مورد ضرایب بردارهای مماس، ضرایب عددی بردارهای ویژگی ملزم به تبدیل سازگار تحت تبدیل‌های گیج هستند. قانون تبدیل خاص (نمایش گروهی) یک میدان ویژگی در اینجا نوع میدان آن را مشخص می‌کند □ مثال‌های معمول شامل میدان‌های اسکالار، میدان‌های بردار مماس، میدان‌های تانسور عمومی، میدان‌های ویژگی منظم یا میدان‌های $\square\square\square\square\square$ هستند. بخش ۱.۲.۳ چنین میدان‌های ویژگی و قوانین تبدیل آن‌ها را معرفی می‌کند. در بخش ۲.۲.۳، ما به طور منحصر فضاهای ویژگی مستقل از مختصات را تعریف می‌کنیم. مشابه تعریف فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی معمولی به عنوان ابانتی از چندین نقشه ویژگی، فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات شامل چندین میدان ویژگی مستقل هستند.

^{۱۱} این یک گزاره غیربدیهی است زیرا هر کمیت را نمی‌توان نسبت به چارچوب‌های مرچ دلخواه مرتبط با $(\mathrm{GL}(d)$ یان کرد. به عنوان مثال، میدان‌های ویژگی که در بخش ۲.۳ معرفی شده‌اند، تنها تبدیل‌های گیج با مقدار G را می‌پذیرند و بنابراین تنها نسبت به چارچوب‌های ترجیحی در GM تعریف می‌شوند. به عنوان یک مثال شهودی، CNN‌های سنتی (غیرتناوب پذیر) در \mathbb{R}^d را در نظر بگیرید که نسبت به ساختار $\{e\}$ کانونی استخراج می‌شوند و اطلاعاتی در مورد پاسخ‌های کرنل نسبت به سایر چارچوب‌های مرچ را حمل نمی‌کنند.



شکل ۱۰: پاسخ‌های عددی $f^A(p) \in \mathbb{R}^c$ و $f^B(p) \in \mathbb{R}^c$ که بر اساس چارچوب‌های مختلف جهت‌گیری شده‌اند، به طور کلی منطقی نیستند. به منظور نمایش ضرایب عددی یکسان بردار ویژگی مستقل از مختصات نسبت به گیج انتخاب شده، آن‌ها ملزم به ارتباط توسعه تبدیل‌های گیج $(g_p^{BA})\rho$ هستند اگر گیج‌ها توسعه g_p^{BA} مرتبط باشند. همانطور که در بخش ۴ استخراج شده است، این الزام یک قید تابع پذیری گیج را بر کرنل‌های کانولوشن تحمیل می‌کند.

۱.۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی منفرد

میدان‌های ویژگی کانولوشنی یک بردار ویژگی، که اطلاعات استیباط شده از یک همسایگی محلی از سیگنال ورودی را کدگذاری می‌کند، به هر نقطه از منیفولد تخصیص می‌دهند. ایناشت فضایی اطلاعات توسعه یک کرنل کانولوشنی انجام می‌شود که میدان‌های ویژگی را در محیط خود نسبت به چارچوب مرجع محلی خود اندازه گیری می‌کند. بنابراین ما گیج A را فرض می‌کنیم که ترازهای کرنل را در یک همسایگی U^A مشخص می‌کند. نسبت به این گیج، کرنل یک میدان محلی هموار از پاسخ‌ها (مشاهدات) تولید خواهد کرد:

$$f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad (26)$$

که توسعه یک بردار ویژگی عددی C -بعدی $f^A(p)$ در هر موقعیت $p \in U^A$ داده می‌شود. فرض کنید یک میدان پاسخ دوم $f^B : U^B \rightarrow \mathbb{R}^c$ در U^B استیباط شده است. از آنجا که پاسخ یک کرنل به طور کلی به تراز آن بستگی دارد، انتظار می‌رود که f^A و f^B در همپوشانی $U^A \cap U^B$ مطابقت نداشته باشند. بدون محدودیت‌های بیشتر، پاسخ‌های یک کرنل کانولوشن به طور دلخواه وابسته به گیج خواهند بود.

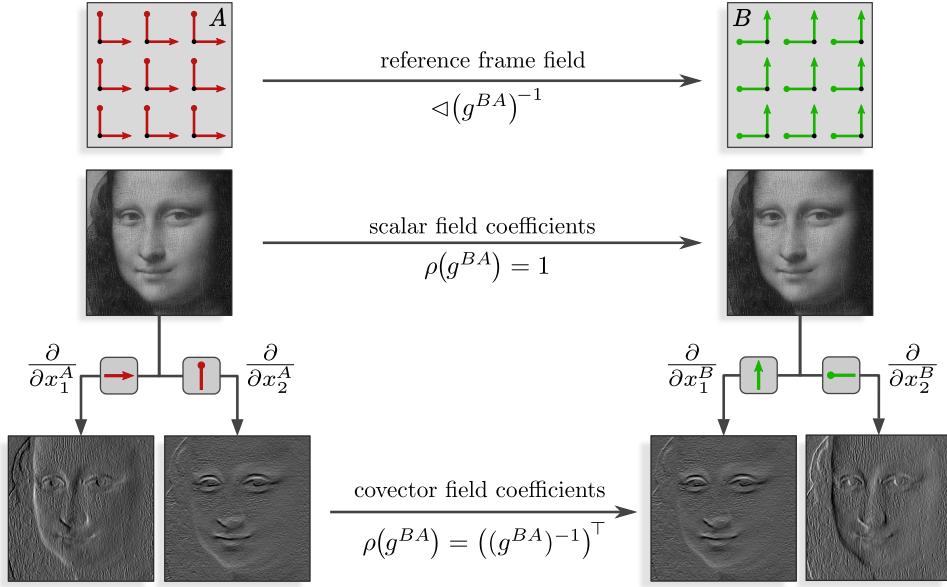
اصل کوواریانس، که توسعه آلبرت اینشتین پیشنهاد شد [۲۷]، بیان می‌کند که:

«قوانين جهان‌شمول طبیعت باید توسعه معادلاتی بیان شوند که برای همه سیستم‌های مختصات صادق باشند، یعنی نسبت به هر جایگزینی کوواریانت باشند.»

ما معتقدیم که اصل مشابهی باید در یادگیری عمیق هندسی نیز صادق باشد، یعنی استنتاج باید مستقل از هر دلخواهی در انتخاب چارچوب‌های مرجع باشد. با توجه به اینکه این دلخواهی در مختصات‌بندی‌ها دقیقاً توسعه G -ساختار داده شده GM پوشش داده می‌شود، این امر به ویژه ایجاب می‌کند که ویژگی‌ها باید اشیاء هندسی مستقل از مختصات GM باشند.^{۱۷} بنابراین ما کرنل‌های کانولوشن را طوری طراحی می‌کنیم که پاسخ‌های آن‌ها f^A و f^B میدان‌هایی از ضرایب بردار ویژگی را کدگذاری کنند که یک میدان بردار ویژگی آزاد از مختصات \mathcal{F} را به صورت محلی در گیج‌های مختلف نمایش می‌دهند. مجموعه‌ای از چنین میدان‌های ضریب عددی X ، که نسبت به G -اطلس گیج‌های ψ^X در همسایگی‌های U^X که M را پوشش می‌دهند بیان شده‌اند، معادل میدان ویژگی سراسری و آزاد از مختصات \mathcal{F} در M است.

برای اینکه این میدان ویژگی آزاد از مختصات به خوبی تعریف شود، یعنی مستقل از مختصات GM باشد، میدان‌های ضریب محلی (یا پاسخ‌های کرنل) ملزم به دوخته شدن سازگار از طریق نگاشت‌های گذار با مقدار G هستند. بنابراین آن‌ها باید به روشهای اصولی تحت تبدیل‌های گیج تبدیل شوند. از آنجا که ما با فضاهای بردار ویژگی سر و کار داریم، این تبدیل‌ها معمولاً خطی در نظر گرفته می‌شوند، یعنی آن‌ها توسعه نمایش‌های گروهی خطی مدل

^{۱۷} در این نکته ما از کوواریانس عمومی اینشتین منحرف می‌شویم، که همیشه تبدیل‌های گیج با مقدار (d) GL(d) را در نظر می‌گیرد (متناظر با کوواریانس دیفرموفیسم). تنظیم او در فرمول‌بندی ما برای $G = GL(d)$ شامل شده است، با این حال، ما گروه ساختار فرضی را انعطاف‌پذیر نگه می‌داریم زیرا اکثر کاربردها گروه ساختار کاهش یافته را فرض خواهند کرد.



شکل ۱۱: مثال‌هایی از میدان‌های ضرب ویژگی در \mathbb{R}^M از پردازش کلاسیک تصویر. بالا: برای سادگی ما یک میدان چارچوب «موازی» فرض می‌کیم و همان تبدیل گیج، چرخش به میزان $\pi/2$ را در هر نقطه $p \in M$ در نظر می‌گیریم. وسط: مقادیر شدت یک تصویر خاکستری مستقل از انتخاب چارچوب‌های مرجع هستند. بنابراین آن‌ها توسط میدان‌های اسکالر مدل می‌شوند که با نمایش بدیهی $G = \forall g \in G \rho(g)$ مشخص می‌شوند. پایین: دو کanal ضرب یک تصویر گرادیان نسبت به گیج‌های مختلف از یک تصویر اسکالر با گرفتن منتهی‌ها در امداد محورهای چارچوب محسوسه می‌شوند. بنابراین آن‌ها وابسته به گیج هستند. تصاویر گرادیان نسبت به گیج‌های مختلف توسط نمایش گروهی $(g^{-1})^\top \rho(g) = \rho(g)$ مرتب می‌شوند و بنابراین به عنوان میدان‌های کوپردار (میدان‌های تانسور از نوع $(1, 1)$ یا 1 -فرم‌ها) شناسایی می‌شوند. برای چرخش نمایش داده شده به میزان $\pi/2$ این منجر به کانال اول جدید $(\partial/\partial x_1^B)$ (معادل کانال دوم قدیمی $(\partial/\partial x_1^A)$) و کانال دوم جدید $(\partial/\partial x_2^B)$ (معادل منفی کانال اول قدیمی $(\partial/\partial x_2^A)$ می‌شود. نسبت به چارچوب‌های مرجع مربوطه، هر دو میدان ضرب یکسان میدان گرادیان (آزاد از مختصات) را کدکناری می‌کنند. بنابراین توصیف به طور خودکار مستقل از مختصات است.

می‌شوند:

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(c) \quad (27)$$

از گروه ساختار $G \leq \text{GL}(c)$, که بر \mathbb{R}^c عمل می‌کند و شرط $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h) \forall g, h \in G$ را برآورده می‌کند.^{۱۳} مشابه تبدیل ضرایب بردار مماس در معادله (۹)، ضرایب بردار ویژگی سپس تعریف می‌شوند که تحت یک تبدیل گیج با مقدار $g_p^{BA} = \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}$ مانند تبدیل

$$f^B(p) := \rho(g_p^{BA}) f^A(p), \quad (28)$$

که در آن $p \in U^A \cap U^B$; برای بصری‌سازی به شکل ۱۰ مراجعه کنید. با ساخته شدن برای تبدیل همگام، فضاهای چارچوب‌های مرجع، ضرایب بردار مماس و ضرایب بردار ویژگی گفته می‌شود که با یکدیگر G -مرتبه هستند. توجه داشته باشید که ساخت از طریق یک G -نمایش ρ به طور کلی تبدیل‌های گیج با مقدار $\text{GL}(d)$ را توصیف نمی‌کند، یعنی ویژگی‌های کاملاً مستقل از مختصات. بنابراین بردارهای ویژگی استخراج شده تنها بخوبی تعریف شده‌ای نسبت به چارچوب‌ها در G -ساختار در نظر گرفته شده GM خواهد داشت، که توسط اصطلاح «استقلال از مختصات GM » پوشش داده می‌شود.

انتخاب‌های مختلف نمایش‌ها ρ انواع مختلفی از میدان‌های ویژگی را تولید می‌کنند همانطور که در شکل ۱۱ نمونه‌سازی شده است. به عنوان مثال، نمایش بدیهی، $\rho(g) = \forall g \in G \rho(g)$, رفتار تبدیل میدان‌های اسکالر $s^A(p) \mapsto s^B(p) = 1 \cdot s^A(p)$ را توصیف می‌کند، که ضرایب عددی آن‌ها تحت تبدیل‌های گیج ناوردا هستند. مثال‌هایی از میدان‌های اسکالر شامل تصاویر خاکستری، میدان‌های دما، میدان‌های فشار یا توزیع‌های احتمال در M هستند. ضرایب میدان‌های بردار مماس مانند $v^A(p) \mapsto v^B(p) = g_p^{BA} v^A(p)$ تبدیل می‌شوند و بنابراین با نمایش گروهی $\rho(g) = g$ مطابقت دارند. مثال‌هایی برای میدان‌های بردار شامل جریان نوری یا میدان‌های سرعت باد هستند. میدان‌های تانسور عمومی‌تر از نوع (r, s) توسط نمایش‌های حاصل ضرب تانسوری $\rho(g) = \otimes^s (g^{-1})^\top \otimes^r g$ توصیف می‌شوند. آن‌ها به عنوان مثال تصاویر تانسور انتشار، تانسورهای میدان

^{۱۳} این شرط تضمین می‌کند که نمایش‌ها هموارفیسم‌های گروهی هستند، یعنی نگاشت‌هایی که ساختار گروهی G را رعایت می‌کنند. بنابراین عمل‌های گروه ساختار بر فضای مماس و فضاهای ضرب بردار ویژگی سازگار هستند.

الکترومغناطیسی یا تانسورهای تنش را مدل می‌کنند. انتخاب رایج برای گروههای ساختار گسته نمایش‌های منظم هستند که مجموعه محدود عملیات گروهی را توسط ماتریس‌های جایگشت تحقق می‌بخشد. نمایش‌های منظم به عنوان تقارن‌های دقیق شبکه‌های کریستالی، شبکه‌های اسپین یا شبکه‌های پیکسل ظاهر می‌شوند [؟ ？ ？ ？ ？]. علاوه بر این، آن‌ها معمولاً به عنوان ترتیب گسته گروههای ساختار پیوسته استفاده می‌شوند، به عنوان مثال گروههای چرخشی $C_N \leq \text{SO}(2)$ برای ترتیب چرخش‌های پیوسته [؟ ？ ？ ？]. آن‌ها از اهمیت عملی زیادی برخوردارند زیرا تبدیل ویژگی‌های شبکه‌های کانولوشنی گروهی را توصیف می‌کنند [؟]. میدان‌های ویژگی که تحت نمایش‌های کاهش‌ناپذیر (CNN) تبدیل می‌شوند در [؟ ？ ？] بررسی شدند.^{۱۴} مروری دقیق‌تر و معیاری گسترده از انواع میدان یا نمایش‌های مختلف در یادگیری عمیق در [؟] ارائه شد.

برای کامل بودن می‌خواهیم اشاره کنیم که میدان‌های بردار ویژگی آزاد از مختصات به طور رسمی به عنوان برش‌های هموار ($\mathcal{A} \in \Gamma$) از یک بندل بردار ویژگی $M \xrightarrow{\pi_A}$ تعریف می‌شوند که با G مرتبط است و فضاهای ضربه بردار ویژگی \mathbb{R}^c را به عنوان فیبرهای معمول دارد. بردارهای ضربه $f^A(p)$ در \mathbb{R}^c تمهیمات محلی از یک بردار ویژگی آزاد از مختصات $f(p) \in \mathcal{A}_p \cong \mathbb{R}^c$ هستند، و مشابه ضربه $v^B = \psi_p^B(v)$ از یک بردار مimas $v \in T_p M$ تعریف می‌شوند. توجه داشته باشید که، در حالی که هم‌ریخت هستند، فضاهای ویژگی $A_p \cong A_q$ در نقاط مختلف $p \neq q$ از M از یکدیگر متمایز هستند، به طوری که عناصر آن‌ها نمی‌توانند با هم جمع شوند. انتقال‌دهنده‌های موازی، که در بخش‌های ۳.۳ و ۵.۶ مورد بحث قرار گرفته‌اند، هم‌ریختی‌هایی بین فضاهای بردار ویژگی مختلف فراهم می‌کنند، که امکان جمع ویژگی‌ها را (پس از انتقال آن‌ها به همان فضای برداری) فراهم می‌کنند. از آنجا که این تعاریف کاملاً فنی هستند، ما جزئیات آن‌ها را غالباً رد می‌کنیم و خواندن علاقمند را به بخش ۳.۶ ارجاع می‌دهیم.

۲.۲.۳ میدان‌های ویژگی انباسته و فضاهای ویژگی مستقل از مختصات

فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی معمولی شامل چندین نقشه ویژگی هستند. به طور مشابه، ما فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات را تعریف می‌کنیم که شامل چندین میدان ویژگی f_i از انواع بالقوه متفاوت ρ_i و ابعاد c_i باشند. بنابراین یک میدان کامل از فعالسازی‌های یک فضای ویژگی از یک شبکه کانولوشنی مستقل از مختصات به عنوان مجموع مستقیم تعریف می‌شود^{۱۵}

$$f = \bigoplus_i f_i \quad (29)$$

از میدان‌های منفرد، هر نقشه ویژگی از یک شبکه کانولوشنی معمولی موقعیت یک ویژگی خاص را کدگذاری می‌کند و به طور مستقل تبدیل می‌شود هنگامی که ورودی شبکه جابجا می‌شود. میدان‌های ویژگی منفرد f_i شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات $G M$ هم موقعیت و هم G -پوزیک ویژگی را کدگذاری می‌کنند. در مقابل نقشه‌های ویژگی معمولی، میدان‌های ضربه آن‌ها، به عنوان مثال f_i^A ، علاوه بر این تضمین شده‌اند که به طور مستقل از یکدیگر تحت تبدیل‌های گیج همانطور که توسط نوع آنها (c_i) $G \rightarrow \text{GL}(c_i)$: ρ_i مشخص شده است، تبدیل شوند. یک نمایش عددی محلی $f^A = \bigoplus_i f_i^A$ از میدان ویژگی کامل در معادله (۲۹) بنابراین طبق مجموع مستقیم نمایش‌های منفرد تبدیل می‌شود، یعنی:

$$\rho = \bigoplus_i \rho_i. \quad (30)$$

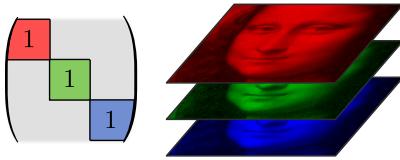
تبدیل مستقل میدان‌های منفرد تحت ρ ، که در شکل ۱۳ بصری‌سازی شده است، از ساخت روشن است:

$$\rho(g)f^A = (\bigoplus_i \rho_i(g))(\bigoplus_i f_i^A) = \bigoplus_i (\rho_i(g)f_i^A) \quad (31)$$

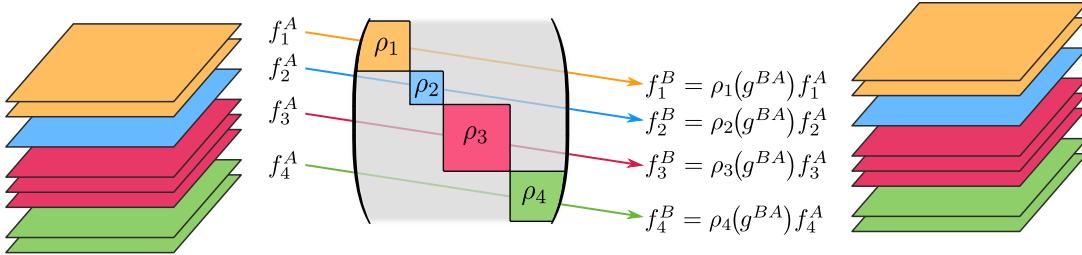
به عنوان یک مثال عملی از فضای ویژگی مستقل از چندین میدان، تصویر \mathbb{R}^{11} را همانطور که در شکل ۱۲ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. مانند تصویر خاکستری در شکل ۱۱، کانال‌های رنگی منفرد مقابله شدت را کدگذاری می‌کنند که تحت تبدیل‌های گیج ناوردا هستند. بنابراین تصویر \mathbb{R}^{11} کامل باید با سه میدان اسکالر شناسایی شود که هر کدام به طور مستقل تحت نمایش بدیهی «تبدیل» ρ می‌شوند. همه میدان‌های ویژگی منفرد نیازی نیست که از همان نوع ρ_i باشند. به عنوان مثال، در یک کاربرد پیش‌بینی آب و هوای سیگال ورودی ممکن است شامل میدان‌های اسکالار کدگذاری کننده ویژگی‌هایی مانند دما یا فشار و میدان‌های برداری مانند سرعت‌های باد باشد. توصیف به عنوان میدان‌های ρ_i از انواع مربوطه، پردازش هندسی صحیح چنین داده‌هایی را تضمین می‌کند. در حالی که انواع میدان ρ_i ورودی و خروجی یک شبکه معمولاً توسط وظیفه یادگیری داده می‌شوند، انواع میدان استفاده شده در لایه‌های مخفی توسط کاربر به عنوان یک فرآپارامتر مشابه انتخاب کانال‌ها برای یک شبکه کانولوشنی معمولی انتخاب می‌شوند.

^{۱۴} توسط قضیه، هر نمایش یکانی از یک گروه فشرده می‌تواند از طریق تغییر پایه به مجموع مستقیم $\mathbb{R}^{11 \times 11}$ تجزیه شود. این دلالت دارد بر اینکه هر عملیات شبکه عصبی خطی بین نمایش‌های عمومی می‌تواند (پس از تغییر پایه) بر حسب عملیات بین $\mathbb{R}^{11 \times 11}$ در کشود [؟ ？]. در مقابل، انتخاب خاص نمایش، یعنی تغییر پایه نسبت به $\mathbb{R}^{11 \times 11}$ موجود در آن، برای هر لایه شبکه غیرخطی اهمیت دارد.

^{۱۵} مجموع مستقیم $\bigoplus_i \rho_i(f_i)$ را می‌توان به عنوان «انباسته» آن‌ها در یک بردار پیوسته در نظر گرفت. به طور سازگار با این، مجموع مستقیم نمایش‌های ρ_i را می‌توان به عنوان ساخت یک ماتریس قطری بلوکی حاوی ρ_i به عنوان بلوک‌ها در نظر گرفت؛ به اشکال ۱۲ و ۱۳ مراجعه کنید.



شکل ۱۲: سه کانال رنگی یک تصویر $\mathbb{R}^{11 \times 11}$ به عنوان میدان‌های اسکالار شناسایی می‌شوند، بنابراین فضای ویژگی کامل طبق (۱) $(\bigoplus_i \rho_i)(f) = \rho(f)$ تبدیل می‌شود.



شکل ۱۳: یک فضای ویژگی کامل شامل چندین میدان ویژگی منفرد ρ_i از انواع بالقوه متفاوت c_i و ابعاد p_i است. از طریق گیج g^{AB} ، به صورت محلی توسط میدان‌های ضرب $f_i^A \rightarrow U^A \rightarrow \mathbb{R}^{c_i}$ نمایش داده می‌شود. میدان‌های ضرب در گیج دیگر ψ از طریق تبدیل گیج $f_i^B = \rho_i(g^{BA})f_i^A$ مرتبط هستند. ضرب هر میدان منفرد به طور مستقل تبدیل می‌شوند، بنابراین نمایش مدل سازی کل فضای ویژگی توسط مجموع مستقیم داده می‌شود، در اینجا $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \rho_3 \oplus \rho_4$ می‌شود:

۳.۳ انتقال موازی بردارهای ویژگی

کرنل‌های شبکه‌های کانولوشنی ویژگی‌ها را از تمام نقاط p از منيفولد جمع‌آوری می‌کنند. از آنجا که ویژگی‌ها در نقاط مختلف در فضاهای بردار مختلف بیان می‌شوند، باید قبل از پردازش بیشتر، در امتداد یک مسیر γ از p به q به صورت موازی منتقل شوند. ما ابتدا انتقال بردارهای مماس را مورد بحث قرار می‌دهیم، که توسط یک نگاشت انتقال موازی رسمی سازی می‌شود:

$$\mathcal{P}_\gamma : T_q M \rightarrow T_p M. \quad (32)$$

این انتقال دهنده اغلب از اتصال کانونی لوی-چویتا منيفولد محاسبه می‌شود، با این حال، ممکن است در برخی کاربردها مربوط به یک اتصال جایگزین (سازگار با G) باشد، همانطور که در ادامه و در مرور ادبیات ما در بخش \S بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد. انتقال دهنده بردارهای ویژگی (مربوط با G) از انتقال دهنده بردارهای مماس تعیت می‌کند اگر انتقال سازگار با G باشد.

۳.۳.۳ انتقال دهنده‌های بردار مماس

از نظر آموزشی معقول است که ابتدا با حالت خاص انتقال دهنده‌های لوی-چویتا در فضاهای اقلیدسی که در شکل ۱۴ به تصویر کشیده شده‌اند، شروع کنیم، قبل از پرداختن به انتقال دهنده‌ها و منيفلهای عمومی‌تر. در این حالت انتقال موازی مستقل از مسیر انتخاب شده γ است و بردار منتقل شده را به معنای معمول در فضاهای اقلیدسی موازی نگه می‌دارد. توجه داشته باشید که انتقال دهنده γ بین فضاهای مماس $T_p M$ و $T_q M$ نگاشت می‌کند و بنابراین مستقل از مختصات است. با این حال، می‌توان آن را نسبت به مختصات بیان کرد، سپس به جای بردارهای مماس بر روی بردارهای ضرب عددی عمل می‌کند. شهودی در شکل ۱۴ آورده شده است، جایی که چارچوب‌ها در q و p موازی نیستند^{۱۶} به طوری که ضرایب $(1, 0, 0, \sqrt{2})$ در q و $(0, 0, \sqrt{2}, 1)$ در p متفاوت هستند، حتی اگر بردارهای مماس (مستقل از مختصات) مربوطه با یکدیگر موازی باشند. برای دقیق تر کردن این موضوع، گیج‌های ψ_q^A و ψ_p^A را در همسایگی‌های $U^{\tilde{A}}$ از q و U^A از p (قرمز) و (سبز) در نظر بگیرید. فرض کنید یک بردار $v \in T_q M$ با ضرایب $v = (\psi_q^{\tilde{A}})^{-1}(v^{\tilde{A}}) \in \mathbb{R}^d$ داده شده باشد. ضرایب بردار منتقل شده v در سپس توسط: $\mathcal{P}_\gamma(v) = \psi_p^A \circ \mathcal{P}_\gamma \circ (\psi_q^{\tilde{A}})^{-1}(v^{\tilde{A}}) \in \mathbb{R}^d$ می‌شود. نتیجه می‌شود که بیان مختصاتی یک انتقال دهنده نسبت به گیج‌های \tilde{A} و A به صورت زیر است:^{۱۷}

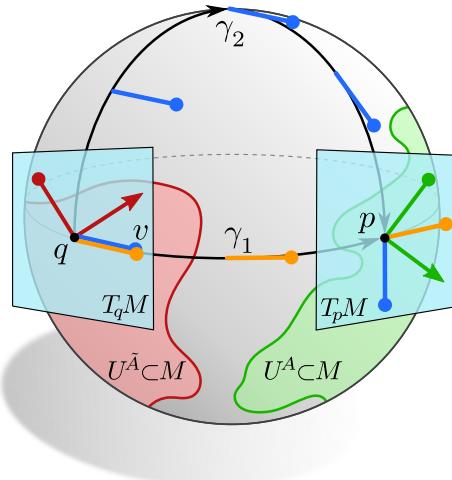
$$g_\gamma^{A\tilde{A}} := \psi_p^A \circ \mathcal{P}_\gamma \circ (\psi_q^{\tilde{A}})^{-1} \in \mathrm{GL}(d) \quad (33)$$

عنصر گروهی $g_\gamma^{A\tilde{A}}$ انتقال های غیرموازی چارچوب‌های مرجع در q و p را در نظر می‌گیرد. در \mathbb{R}^d ، معمولاً فرض می‌شود که تمام چارچوب‌ها موازی هستند به طوری که تمام مختصات بندی‌های انتقال دهنده‌های لوی-چویتا بدیهی می‌شوند.^{۱۸}

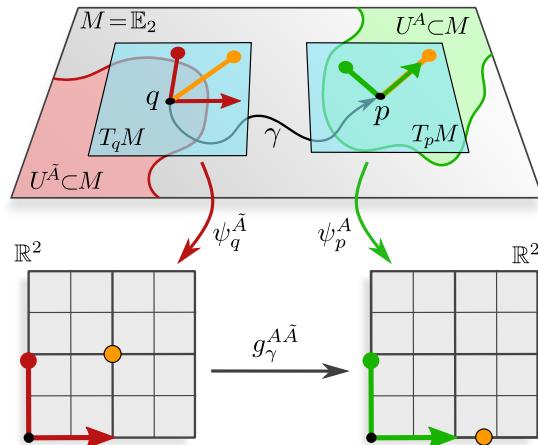
^{۱۶} برخلاف منيفلهای عمومی، \mathbb{R}^d با مفهوم کانونی موازی بودن چارچوب‌های مرجع همراه است.

^{۱۷} مقدار $g_\gamma^{A\tilde{A}}$ ممکن است از $\mathrm{GL}(d)$ بزرگ‌تر باشد اگر ما اتصال‌های دلخواه (با مقدار $d(d)$) و گروه‌های ساختار عمومی (d) را فرض کنیم. برای اتصال لوى-چویتا با مقدار $d(d)$ و چارچوب‌های معتمد، معنی $d = d$ است.

^{۱۸} CNN‌های سنتی در \mathbb{R}^d به طور ضمنی این فرض را از چارچوب‌های موازی (شکل \S) و انتقال دهنده‌های بدیهی می‌کنند.



(ب) انتقال موازی در کره S^2



(ت) انتقال موازی و مختصات بندی آن در یک فضای مسطح

شکل ۱۴: انتقال موازی بردارهای مماس $v \in T_q M$ در $q \in \mathcal{P}_\gamma v \in T_p M$ در p . شکل ۱۴ آنالت خاص انتقال دهنده‌های لوی-چویتا را در فضاهای اقلیدسی $M = \mathbb{E}_d$ بصری‌سازی می‌کند. مستقل از مسیر انتخاب شده γ انتقال لوی-چویتا بردار (نازنجی) را به معنای معمول در فضاهای اقلیدسی موازی نگه می‌دارد. گیج‌های $\psi_q^{\tilde{A}}$ (قرمز) و ψ_p^A (سبز) امکان بیان انتقال دهنده مستقل از مختصات را توسط یک عنصر گروهی $g_\gamma^{A\tilde{A}} = \psi_p^A \circ \mathcal{P}_\gamma \circ (\psi_q^{\tilde{A}})^{-1} \in \text{GL}(d)$ فراهم می‌کند که تغییر ضرایب بردار را در نظر می‌گیرد اگر چارچوب هدف با چارچوب منع منتقل شده مطابقت نداشته باشد. شکل ۱۴ اب انتقال لوی-چویتا در ۲-کره S^2 نشان می‌دهد، مقایسه کنید با معادله (۲۳). انتقال دهنده‌های \mathcal{P}_{γ_1} و \mathcal{P}_{γ_2} در امتداد مسیرهای مختلف، ۶۱ و ۶۴ به طور کلی با یکدیگر اختلاف دارند. همانند فضاهای مسطح، انتقال دهنده‌های مستقل از مختصات را می‌توان توسط عناصر گروهی که بر روی ضرایب نسبت به چارچوب‌های مختصاتی در q و p عمل می‌کنند، بیان کرد.

از آنجا که انتقال دهنده در معادله (۳۳) وابسته به مختصات است، ما علاقه‌مند به تبدیل‌های گیج آن هستیم. گیج‌های $\psi_q^{\tilde{B}}$ و ψ_p^B را دو گیج جایگزین در همسایگی‌های q و p در نظر بگیرید. از نمودار جابجاگی:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & g_\gamma^{A\tilde{A}}. & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 \mathbb{R}^d & & T_q M & & \mathbb{R}^d \\
 & \downarrow \psi_q^{\tilde{A}} & \xrightarrow{\mathcal{P}_\gamma} & \downarrow \psi_p^A & \\
 & & T_p M & & \\
 & \uparrow \psi_q^{\tilde{B}} & & \uparrow \psi_p^B & \\
 & & \mathbb{R}^d & & \mathbb{R}^d \\
 & & g_\gamma^{B\tilde{B}}. & &
 \end{array} \tag{۳۴}$$

می‌توان خواند که انتقال دهنده‌ها در گیج‌های مختلف توسط:

$$g_\gamma^{B\tilde{B}} = g_p^{BA} g_\gamma^{A\tilde{A}} (g_q^{\tilde{B}\tilde{A}})^{-1} \tag{۳۵}$$

مربط هستند. توجه داشته باشید که شباهت این قانون تبدیل و نمودار جابجاگی به آنچه در معادلات (۲۱) و (۲۳) آمده است. تفاوت بین هر دو این است که انتقال دهنده دارای دامنه $T_q M$ و دامنه مشترک $T_p M$ متفاوتی است که توسط گیج‌های مختلف و مستقل از یکدیگر تسهیم شده‌اند و بنابراین به طور مستقل تبدیل می‌شوند.

به طور کلی، انتقال موازی بردارهای مماس توسط یک انتخاب اتصال تعیین می‌شود، به عنوان مثال (اما نه لزوماً) توسط اتصال کاتونی لوی-چویتا یک منيفولد ریمانی. یک اتصال را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای از انتقال دهنده‌های بین‌نهایت کوچک بین فضاهای مماس مجاور در نظر گرفت، به طوری که انتقال دهنده کامل \mathcal{P}_γ با انتگرال کیری اتصال در امتداد مسیر γ به دست می‌آید. انتقال دهنده‌ها در امتداد مسیرهای مختلف مطابقت ندارند، که در شکل ۱۴ اب با انتقال دهنده‌های لوی-چویتا در ۲-کره S^2 مثال زده شده است، مقایسه کنید با معادله (۲۳). همانند فضاهای مسطح، انتقال دهنده‌های مستقل از مختصات را می‌توان توسط معادله (۳۳) نسبت به گیج‌ها بیان کرد. تبدیل‌های گیج چنین انتقال دهنده‌های مختصات بندی شده دوباره توسط معادله (۳۵) داده می‌شوند. انتقال دهنده‌ها در اصل به صورت تحلیلی از اتصال محاسبه شوند [۲] و گاهی اوقات می‌توانند به صورت فرم بسته بیان شوند، به عنوان مثال برای کره S^2 ، معادله (۲۳). چندین الگوریتم عددی محاسبه انتقال دهنده‌های

موازی در مسیرها وجود دارد؛ به بخش \mathbb{P}_γ مراجعه کنید. ما به جزئیات بیشتر در مورد نحوه محاسبه انتقال‌دهنده‌های بردار مماس \mathcal{P}_γ نخواهیم پرداخت بلکه به سادگی آن‌ها را داده شده فرض می‌کنیم.

۲.۳.۳ انتقال‌دهنده‌های بردار ویژگی

معادله (۲۸) قانون تبدیل ضرایب بردار ویژگی را توسط نوع میدان آن‌ها (ρ) تعریف می‌کند. انتقال‌دهنده موازی آن‌ها، که نسبت به گنجی‌های ψ_q^A و ψ_p^A بیان می‌شود، به طور مشابه با پیچیدن انتقال‌دهنده ضریب بردار مماس در این نمایش میدان داده می‌شود، یعنی توسط:

$$\rho(g_\gamma^{A\tilde{A}}). \quad (36)$$

توجه داشته باشید که از آنجا که $G : \rho$ یک نمایش G است $\rightarrow G \in \text{GL}(c)$ این ساختار تنها زمانی به خوبی تعریف می‌شود که تمام انتقال‌دهنده‌ها $g_\gamma^{A\tilde{A}}$ (برای مسیرهای دلخواه γ و چارچوب‌های A, \tilde{A}) واقعاً مقادیری در گروه ساختار انتخاب شده G بگیرند. اینکه آیا این حالت صادق است یا خیر هم به انتخاب خاص G -ساختار (یا G -اطلس) و هم به انتقال‌دهنده‌ها (یا اتصال) مورد نظر بستگی دارد آن‌ها باید سازگار باشند [؟].

تمام شبکه‌های کاتولوشنی (بنابراین انتقال می‌دهند) بردارهای ویژگی را به نحوی جمع آوری می‌کنند، و بنابراین برخی انتخاب از اتصال و G -ساختار را فرض می‌کنند. اگر G -ساختار انتخاب شده با اتصال لوی-چویتا ناسازگار باشد، این به معنای آن است که این مدل‌ها \rightarrow اغلب به طور ضمنی \rightarrow یک اتصال جایگزین و سازگار با G را برای جمع آوری ویژگی‌ها فرض می‌کنند. خواننده فعلانباً نباید نگران انتخاب‌های خاص اتصال‌ها باشد، که در مرور ادبیات ما در بخش \mathbb{P}_γ روشن تر خواهد شد. در ادامه این بخش، ما بیشتر در مورد سازگاری G -اتصال‌ها و G -ساختارها توضیح خواهیم داد. با فرض اینکه انتقال‌دهنده‌های ویژگی در ادامه همیشه به خوبی تعریف خواهند شد، این بخش را می‌توان با خیال راحت در اولین مطالعه نادیده گرفت.

بحث دقیق‌تر و مستقل از مختصات انتقال‌دهنده‌ها در بندهای بردار ویژگی مرتبط را می‌توان در بخش ۵.۶ یافت.

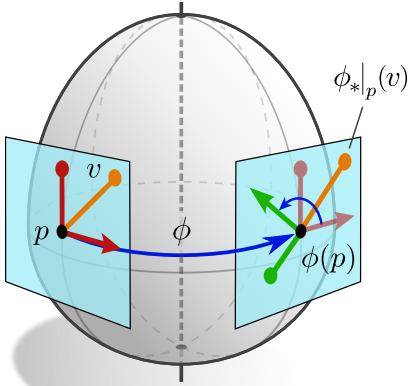
۲.۳.۳.۱ سازگاری اتصال‌ها و G -ساختارها

یک اتصال با یک G -ساختار سازگار با G نامیده می‌شود اگر عبارات مختصاتی $g_\gamma^{A\tilde{A}}$ انتقال‌دهنده‌های \mathcal{P}_γ نسبت به هر چارچوب A, \tilde{A} از GM مقادیری در گروه ساختار G بگیرند [۱۹]. یک اتصال سازگار با G منجر به انتقال‌دهنده‌های بردارهای ویژگی مرتبط با G می‌شود. برای روشن کردن این شرط سازگاری تا حدی انتزاعی، چند مثال ساده، اتصال لوی-چویتا در \mathbb{R}^n است، شکل ۱۱۴. دو ساختار $\{e\}$ در \mathbb{R}^n که در اشکال \mathbb{R}^3 و \mathbb{R}^3 بـ \mathbb{R}^3 نشان داده شده‌اند را در نظر بگیرید. در اینجا $\{e\} \rightarrow GL(c)$ است، به این معنی که نوع میدان c است: $\rho : \{e\} \rightarrow GL(c)$ است، به طوری که انتقال موازی بردارهای ویژگی‌ها در صورتی می‌تواند تعریف شود که عبارات مختصاتی $g_\gamma^{A\tilde{A}}$ مقادیری در $\{e\}$ بگیرند، یعنی بدیهی باشند. از آنجا که ساختار $\{e\}$ در شکل ۱۱۴ از چارچوب‌های "موازی" تشکیل شده است، این امر واقعاً همینطور است بنابراین اتصال لوی-چویتا با این ساختار $\{e\}$ در شکل ۱۱۴ بـ \mathbb{R}^3 نسبت به یکدیگر "چرخانه شده‌اند"، که منجر به عبارات مختصاتی غیربدیهی $g_\gamma^{A\tilde{A}}$ می‌شود که مقادیری در (2) $SO(2)$ می‌گیرند (در شکل ۱۱۴ آبصري سازی شده است). از آنجا که نوع میدان $c \rightarrow GL(c)$ است: $\rho : \{e\} \rightarrow GL(c)$ است، امکان تعریف انتقال لوی-چویتا ویژگی‌های مرتبط با این ساختار $\{e\}$ وجود ندارد آن‌ها ناسازگار هستند. به عنوان مثال دوم، اتصال لوی-چویتا در S^3 را در نظر بگیرید، که در شکل ۱۱۴ نشان داده شده است. انتقال در این حالت همیشه وابسته به مسیر خواهد بود و منجر به بردارهای چرخانه شده متفاوت خواهد شد، که دلالت دارد بر اینکه $g_\gamma^{A\tilde{A}}$ مقادیری در (2) $SO(2)$ خواهد گرفت. بردارهای ویژگی که باید مطابق با اتصال لوی-چویتا منتقل شوند، بنابراین باید از نوع $c \rightarrow GL(c)$ باشند که یک نمایش (2) $SO(2)$ است. این امر حداقل نیازمند ساختار (2) $SO(2)$ در S^3 است که در شکل ۱۱۴ نشان داده شده است. ساختار $\{e\}$ در S^3 از شکل ۱۱۴ با اتصال لوی-چویتا ناسازگار است.

از آنجا که اتصال لوی-چویتا یک اتصال متریک است، طول و زاویه بین بردارهای مماس را حفظ می‌کند، و بنابراین چارچوب‌های متعامد را به چارچوب‌های متعامد منتقل می‌کند. نتیجه می‌شود که اتصال لوی-چویتا همیشه با اتصال d چارچوب‌های متعامد سازگار است، که نسبت به آن $g_\gamma^{A\tilde{A}}$ مقادیری در d می‌گیرد. اگر متفاولد قابل جهت‌گیری باشد، دست‌سازی چارچوب توسط انتقال‌دهنده‌های لوی-چویتا حفظ می‌شود، به این معنی که آن‌ها تضمین شده‌اند که با ساختارهای $SO(d)$ چارچوب‌های متعامد راست گرد در M سازگار باشند. تمام شبکه‌های کاتولوشنی در مرور ادبیات ما در بخش \mathbb{P}_γ که بر اساس ساختارهای (d) هستند، ویژگی‌ها را از طریق انتقال‌دهنده‌های لوی-چویتا جمع آوری می‌کنند.

اگر یک G -ساختار داده شده با اتصال لوی-چویتا ناسازگار باشد، باید یک اتصال جایگزین و سازگار با G را برای انتقال بردارهای ویژگی تعریف کرد. بر جسته‌ترین مثال در مرور ادبیات ما، اتصال‌های بدیهی در ساختارهای $\{e\}$ است. یک اتصال بدیهی با خاصیت مستقل از مسیر بودن انتقال آن

^{۱۹} به طور معادل، فرم ۱-اتصال اتصال، که نسبت به چارچوب‌های GM بـ \mathbb{R}^n می‌شود، ملزم به داشتن مقدار ρ است، که در آن \mathbb{R}^n نشان دهنده جبر لی G است. به طور انتزاعی تر، ما به اتصال‌های اصلی اهرسمن در بنده اصلی GM علاقه‌مندیم.



شکل ۱۵: بصری‌سازی پیش‌برنده آزاد از مختصات بردارهای مماس و بیان مختصاتی آن نسبت به چارچوب‌های مرجع داده شده در موقعیت منع و هدف. پیش‌برنده آزاد از مختصات $\phi_*|_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} M$ بردارهای مماس $v \in T_p M$ را به $\phi_*|_p(v) \in T_{\phi(p)} M$ (نارنجی) منتقل می‌کند. فرض کنید $\psi_p^{\tilde{A}}$ گیج در p که متناظر با چارچوب مرجع قرمز است و $\psi_{\phi(p)}^A$ گیج در $\phi(p)$ که متناظر با چارچوب مرجع سبز است. آنها بردارها را قبل و بعد از پیش‌برنده توسط ضرایب عددی $(1, 1)^T$ و $(0, -\sqrt{2})^T$ ضرایب بردار توسط تبدیل گیج القا شده توسط ایزومتری $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in \text{GL}(d)$ توصیف می‌شود، یعنی $\psi_p^{\tilde{A}}(v) = g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \cdot \psi_{\phi(p)}^A(\phi_*|_p(v)) = g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \cdot \psi_{\phi(p)}^A(v)$. ضرایب بردارهای ویژگی به طور مشابه طبق $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in G$ تبدیل می‌شوند اگر $\rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)) = 1$.

مشخص می‌شود [؟]. هر ساختار $\{e\}$ یک اتصال بدیهی منحصر به فرد را نتیجه می‌دهد، که بردارهای مماس را به گونه‌ای منتقل می‌کند که زاویه یکسانی را با چارچوب‌های مرجع ساختار $\{e\}$ حفظ کند. این امر دلالت دارد بر اینکه $g_{\gamma}^{A\tilde{A}} = e$ یعنی آنها بردارهای ضریب را در \mathbb{R}^c (نسبت به چارچوب‌های ساختار $\{e\}$) بدون تغییر مقادیر عددی آنها منتقل می‌کنند. چنین انتقال‌دهنده‌هایی در شبکه‌های کانولوشنی استفاده می‌شوند که انتقال‌دهنده‌های غیربدیهی را به صراحت مدل نمی‌کنند [？] که در مورد تمام شبکه‌های دارای $\{e\}$ در جدول ۲ صادق است، به ویژه آن‌هایی که در بخش‌های ۲ و ۳ هستند. توجه داشته باشید که اتصال بدیهی تنها اتصالی است که با یک ساختار $\{e\}$ سازگار است.

همانطور که در بالا ذکر شد، هر شبکه کانولوشنی برخی انتخاب از G -ساختار و اتصال سازگار را فرض می‌کند، اغلب اتصال‌های لوی-چویتا یا اتصال‌های بدیهی.

بخش ۵.۶ به طور مفصل در مورد سازگاری انتقال‌دهنده‌ها و G -ساختارها از دیدگاه مستقل از مختصات توضیح می‌دهد.

۴.۳ عمل ایزومتری‌ها و تبدیل‌های گیج القا شده

تا کنون بحث ما منحصرآ بر تقارن‌های گیج محلی در مختصات‌بندی فضاهای مماس متمرکز بوده است. یک منیفولد ممکن است، با این حال، خود دارای تقارن‌های غیربدیهی باشد، که در مورد یک منیفولد ریمانی M گروه ایزومتری آن $\text{Isom}(M)$ را تشکیل می‌دهند. این بخش ایزومتری‌ها و عمل آنها بر منیفلدها، بردارهای مماس، چارچوب‌های مرجع و میدان‌های ویژگی را به طور خلاصه مورد بحث قرار می‌دهد، نتایجی را خلاصه می‌کند که به طور دقیق‌تری در بخش ۱.۸ استخراج شده‌اند. ما بدین ترتیب معادلی بین عمل‌های فعل ایزومتری و تفسیر منفعل آنها بر حسب تبدیل‌های گیج القا شده توسط ایزومتری را بر جسته خواهیم کرد. این معادلی بعداً امکان توصیف تناوب پذیری ایزومتری GM -کانولوشن‌ها را فراهم خواهد کرد.

ایزومتری‌ها به عنوان تقارن‌های منیفلدهای ریمانی تعریف می‌شوند، یعنی آن نگاشت‌ها (دیفتومورفیسم‌ها)

$$\phi : M \rightarrow M, \quad (37)$$

که متریک و در نتیجه فواصل روی M را حفظ می‌کنند. مجموعه همه ایزومتری‌های یک منیفولد ریمانی M گروه ایزومتری آن را تشکیل می‌دهد، که ما آن را با $\text{Isom}(M)$ نشان می‌دهیم. به عنوان مثال، گروه اقلیدسی $E(d)$ گروه ایزومتری فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d است. این گروه شامل انتقال‌ها، چرخش‌ها و بازتاب‌ها است، که همه آن‌ها متریک استاندارد \mathbb{E}_d را حفظ می‌کنند. گروه ایزومتری S^1 -کره S^1 توسط گروه متعمد $\text{SO}(2)$ داده می‌شود، که شامل چرخش‌ها و بازتاب‌ها است. شکل ۱۵ منیفولد تخم مرغی شبکی را نشان می‌دهد که ایزومتری‌های آن چرخش‌ها و بازتاب‌ها در ۲ حول محور عمودی هستند.

۱.۴.۳ پیش‌برنده بردارهای مماس

هر ایزومتری $\phi \in \text{Isom}(M)$ از طریق پیش‌برنده (یا دیفرانسیل) آن

$$\phi_*|_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} M, \quad (38)$$

به طور طبیعی بردارهای مماس عمل می‌کند. همانطور که در شکل ۲ (وسط) بصری‌سازی شده است، پیش‌برنده را می‌توان به طور شهودی به عنوان حمل بردارهای مماس همراه با عمل ایزومتری بر منیفولد زیرین M در نظر گرفت. تعریف رسمی پیش‌برنده بر روی TM در پیوست ۲ آورده شده است، با این حال، شهود ارائه شده برای هدف ما کافی است. از آنجا که پیش‌برنده یک نگاشت خطی آزاد از مختصات بین فضاهای مماس است، عمل

آن در مختصات توسط ماتریس $d \times d$ نمایش داده می‌شود. با فرض گیج‌های ψ_p^A و $\psi_{\phi(p)}^{\tilde{A}}$ در موقعیت منبع و هدف، به ترتیب، این ماتریس توسط

$$g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) := \psi_{\phi(p)}^A \circ \phi_*|_p \circ (\psi_p^{\tilde{A}})^{-1} \in \mathrm{GL}(d). \quad (49)$$

داده می‌شود. این ماتریس تبدیل از ضرایب عددی یک بردار اصلی $v \in T_p M$ در گیج منبع و پیش‌برنده آن $\phi_*|_p(v) \in T_{\phi(p)} M$ در گیج هدف را توضیح می‌دهد، یعنی $(\psi_{\phi(p)}^A(\phi_*|_p(v))) = g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \cdot \psi_p^{\tilde{A}}(v)$. نمودار جابجایی

$$\begin{array}{ccccc} & & g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \cdot & & \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\psi_p^{\tilde{A}}} & T_p M & \xrightarrow{\phi_*|_p} & T_{\phi(p)} M \\ \downarrow g_p^{\tilde{B}\tilde{A}} \cdot & & \downarrow & & \downarrow \psi_{\phi(p)}^A \\ & \psi_p^{\tilde{B}} \swarrow & & \searrow \psi_{\phi(p)}^B & \\ \mathbb{R}^d & & g_{\phi}^{B\tilde{B}}(p) \cdot & & \mathbb{R}^d \end{array}, \quad (40)$$

که از نظر مفهومی شبیه آن در معادله (۳۴) است، تعریف بیان مختصاتی پیش‌برنده بردار مماس را بصری‌سازی می‌کند. علاوه بر این دلالت دارد بر اینکه تبدیل‌های گیج بین مختصات‌بندی‌های مختلف توسط

$$g_{\phi}^{B\tilde{B}} = g_{\phi(p)}^{BA} g_{\phi}^{A\tilde{A}} (g_p^{\tilde{B}\tilde{A}})^{-1}, \quad (41)$$

داده می‌شوند، که معادل مفهومی معادله (۳۵) است.

۲.۴.۳ پیش‌برنده چارچوب‌های مرجع و تقارن‌های G -ساختار

از آنجا که چارچوب‌های مرجع فقط d -تاپل‌هایی از بردارهای چارچوب خطی مستقل هستند، پیش‌برنده بردارهای مماس پیش‌برنده‌ای از چارچوب‌های مرجع را با پیش‌بردن محورهای چارچوب منفرد القا می‌کند. به طور خاص، پیش‌برنده یک چارچوب $[e_i]_{i=1}^d$ در p به عنوان چارچوب $\phi_*|_p(e_i)$ در $\phi(p)$ تعریف می‌شود.

این پیش‌برنده چارچوب‌ها همیشه به خوبی تعریف شده است، با این حال، ممکن است با G -ساختار سازگار نباشد، یعنی به طور کلی تضمینی وجود ندارد که چارچوب‌ها در GM هنگام پیش‌برده شدن در GM باقی بمانند. به عنوان مثال $\{e_i\}$ -ساختار در شکل ۱۵ (بالا چپ) را در نظر بگیرید، که توسط انتقال‌های افقی حفظ می‌شود اما توسط انتقال‌های عمودی یا هر ایزومنتری دیگر از \mathbb{R}^d حفظ نمی‌شود. به طور مشابه، \mathcal{R} -ساختار در شکل ۱۵ (پایین چپ) توسط انتقال‌ها و بازتاب‌های افقی حفظ می‌شود، اما توسط چرخششان نه. بنا بر این مازیرگروه

$$\mathrm{Isom}_{GM} := \left\{ \phi \in \mathrm{Isom}(M) \mid [\phi_*(e_i)]_{i=1}^d \in GM \quad \forall [e_i]_{i=1}^d \in GM \right\} \leq \mathrm{Isom}(M) \quad (42)$$

ایزومنتری‌هایی که تقارن‌های G -ساختار هستند را در نظر می‌گیریم، یعنی آن‌هایی که تضمین شده‌اند هر چارچوب در GM را به چارچوب دیگری که نیز در GM موجود است، نگاشت کنند.^{۲۰} توجه داشته باشید که Isom_{GM} به طور کلی به انتخاب خاص G -ساختار GM بستگی دارد، نه فقط به گروه ساختار G . برای حالت خاص که $G \geq d$ ، تضمین شده است که $\mathrm{Isom}_{GM} = \mathrm{Isom}(M)$ مطابقت داشته باشد زیرا ایزومنتری‌ها تضمین شده‌اند که چارچوب‌های متعماد را به چارچوب‌های متعماد نگاشت کنند. ممکن است Isom_{GM} به زیرگروه Isom_{GM} هستیم زیرا تنها آن ایزومنتری‌ها پیش‌برنده به خوبی تعریف شده‌ای از بردارهای ویژگی مستقل از مختصات GM را القا خواهند کرد، همانطور که در بخش بعدی بیشتر مورد بحث قرار گرفته است.

پیش از ادامه به عمل ایزومنتری بردارهای ویژگی، ما آنچه را که تبدیل‌های گیج القا شده توسط ایزومنتری می‌نامیم، مورد بحث قرار می‌دهیم. برای این منظور، فرض کنید $[e_i^{\tilde{A}}]_{i=1}^d$ آن چارچوب در p باشد که متناظر با گیج منبع $\psi_p^{\tilde{A}}$ است و فرض کنید $[e_i^A]_{i=1}^d$ آن چارچوب در $\phi(p)$ باشد که متناظر با گیج هدف $\psi_{\phi(p)}^A$ است، همانطور که در شکل ۱۵ به ترتیب در قرمز (چپ) و سبز (راست) نشان داده شده است. پیش‌برنده $[\phi_*|_p(e_i^{\tilde{A}})]_{i=1}^d$ چارچوب منع از p به $\phi(p)$ (قرمز شفاف، راست) به طور کلی با چارچوب هدف مطابقت ندارد. با این حال، همانطور که در بخش ۳.۱.۸ اثبات شده است، دو چارچوب توسط تبدیل گیج القا شده توسط ایزومنتری مرتبط هستند:

$$[\phi_*|_p(e_i^{\tilde{A}})]_{i=1}^d = [e_i^A]_{i=1}^d \triangleleft g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p), \quad (43)$$

^{۲۰} به طور رسمی تری بیان شود، چنین ایزومنتری‌هایی اتومورفیسم‌های بندل اصلی G -ساختار هستند (یا القا می‌کنند).

که در آن $(p) \phi^{A\tilde{A}}$ عنصر گروهی از معادله (۳۹) و \triangleleft عمل راست از معادله (۱۱) است. اصطلاح «تبدیل گیج القا شده توسط ایزو متري» تا آنجا معنا دارد که هندسه های اطراف p و $\phi(p)$ غیر قابل تشخیص هستند زیرا ϕ یک ایزو متري، یعنی یک تقارن از M است. با شناسایی دو نقطه با یکدیگر، بنابراین می توان عمل فعال ϕ بر یک کمیت هندسی را به عنوان یک تبدیل گیج منفعل، یعنی یک تغییر القا شده از چارچوب منبع به چارچوب هدف، تفسیر مجدد کرد.

تفسیه ۸.۳ در بخش ۱۸ اثبات می کند که ایزو متري های حفظ کننده G -ساختر در $Isom_{GM}$ و تبدیل های گیج القا شده با مقدار G یکدیگر را نتیجه می دهند، یعنی

$$\phi \in Isom_{GM} \iff g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in G \quad \forall p \in M \quad (44)$$

برای گیج های دلخواه $\psi_p^{\tilde{A}}$ و $\psi_{\phi(p)}^A$ از G -اطلس برقرار است. خواننده باید این ادعاهای ما در شکل ۴۹ تأیید کند.

۳.۶.۳ پیشبرنده بردارهای ویژگی

اگر (و تنها اگر) یک ایزو متري تقارنی از G -ساختر باشد، منجر به پیشبرنده بردارهای ویژگی می شود. به طور شهودی، این پیشبرنده بردارهای ویژگی را از نقاط p به $\phi(p)$ منتقل می کند. هنگامی که نسبت به دو چارچوب مرجع در p و $\phi(p)$ بیان شود، توسط تبدیل گیج القا شده

$$\rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)) . \quad (45)$$

داده می شود. توجه داشته باشید که این تبدیل برای $\phi \in Isom_{GM}$ به خوبی تعریف شده است، زیرا تبدیل های گیج القا شده (p) در این حال مقادیری در G خواهد گرفت و ρ یک G -نمایش است. در مقابل، اگر ϕ تقارنی از G -ساختر نباشد، تعریف پیشبرنده بردار ویژگی متناظر غیرممکن است. این گزاره با این واقعیت مرتبط است که ویژگی های های $\square\square\square\square\square\square$ معمولی هیچ رفتار تبدیل مشخصی تحت چرخش ها یا بازتاب ها در گروه اقلیدسی $E(d)$ ندارند.

پیشبرنده بردارهای ویژگی منفرد عملی بر کل میدان ویژگی f را دلالت می کند، که ما آن را با $f \triangleright \phi$ نشان می دهیم. نسبت به مختصات، این عمل به صورت

$$[\phi \triangleright f]^A(\phi(p)) = \rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)) f^{\tilde{A}}(p) . \quad (46)$$

بیان می شود. ما بعداً اثبات خواهیم کرد که های $\square\square\square\square\square\square$ مستقل از مختصات نسبت به عمل ایزو متري ها در $Isom_{GM}$ بر میدان های ویژگی تناوب پذیر هستند؛ به شکل ۱۹ مراجعه کنید. این ویژگی بر این واقعیت تکیه دارد که عمل فعل ایزو متري بر میدان های ویژگی می تواند توسط معادله (۴۶) به عنوان یک تبدیل گیج منفعل صرف ضرایب بردار ویژگی در ک شود.

۴ شبکه های مستقل از مختصات و $\square\square\square\square\square\square$ -کانولوشن ها

شبکه های داده را با اعمال مجموعه ای از نگاشت های پارامتری (لایه ها) به یک سیگنال ورودی پردازش می کنند \square در مورد ما به مجموعه ای از میدان های ویژگی بر روی یک مینیولد ریمانی. اصل کوواریانس بدین ترتیب ایجاد می کند که لایه های منفرد شبکه باید عملیات مستقل از مختصات GM باشند. نمایش های مختصاتی چنین لایه هایی بنابراین باید طوری تبدیل شوند که قوانین تبدیل میدان های ویژگی ورودی و خروجی خود را رعایت کنند. به جز این الزام سازگاری، لایه های مستقل از مختصات عمومی بدون محدودیت باقی می مانند.

یک اصل طراحی رایج شبکه های عصبی که بر روی سیگنال های فضایی (میدان های ویژگی) عمل می کند این است که آن ها به معنای تعیین یافته ای کانولوشنی هستند. ویژگی اصلی که اکثر تعیین های عملیات کانولوشن در آن مشترک هستند این است که استنتاج آن ها مستقل از موقعیت است. این امر با اشتراک توابع قالب، به عنوان مثال کرنل های کانولوشن یا بایاس ها، بین مکان های مختلف حاصل می شود. هر زمان که گروه ساختار G غیربدیده باشد، فرآیند اشتراک وزن مبهم است زیرا توابع قالب می توانند نسبت به چارچوب های مرجع مختلف به اشتراک گذاشته شوند. همانطور که در ادامه استدلال خواهیم کرد، این ابهام با طراحی توابع قالب مشترک برای تناوب پذیر بودن تحت تبدیل های گیج با مقدار G حل می شود. توابع قالب تناوب پذیر گیج نسبت به چارچوب مرجع خاصی که در آن اعمال می شوند بی تفاوت خواهد بود و بنابراین امکان اشتراک وزن مستقل از مختصات را فراهم می کنند.

در این بخش ما لایه های شبکه ای را در نظر خواهیم گرفت که میدان های f از نوع ρ را به عنوان ورودی می گیرند و میدان $\square\square\square\square\square\square$ از نوع ρ را به عنوان خروجی تولید می کنند. بخش ۱.۴.۱ حالت خاص لایه هایی را که به صورت نقطه ای عمل می کنند مورد بحث قرار می دهد، یعنی آن هایی که خروجی آن ها $(p) f$ در هر $p \in M$ به بردار ویژگی ورودی منفرد $(p) f$ در همان مکان بستگی دارد. مثال های عملی مرتبط که در اینجا در نظر گرفته شده اند عبارتند از 1×1 -تناوب پذیر گیج در بخش ۱.۱.۴، جمع بایاس در بخش ۲.۱.۴ و غیرخطی ها در بخش ۳.۱.۴. حالت پیچیده تر کانولوشن ها با کرنل های گسترده فضایی در بخش ۲.۴ بررسی شده است. به عنوان آماده سازی، بخش ۱.۲.۴ میدان های ویژگی را همانطور که از دیدگاه مشاهده گران محلی (چارچوب های مرجع) دیده می شوند مورد بحث قرار می دهد، که کرنل های (کانولوشن) نسبت به آن ها اعمال خواهند

شد. چنین مشاهداتی به عنوان پس کشی میدان ویژگی به فضای مماس یک مشاهده گر رسمی سازی می شوند؛ به شکل ۱۶ مراجعه کنید. بخش ۲.۲.۴ به اصطلاح تبدیل های میدان کرنل را معرفی می کند، که شیوه کانولوشن ها مستند اما اشتراک وزن فضایی را فرض نمی کند و بنابراین توسط یک میدان کرنل (به صورت هموار متغیر) بر روی M پارامتری می شوند. $-GM$ -کانولوشن های واقعی در بخش ۳.۲.۴ به عنوان آن تبدیل های میدان کرنل تعریف می شوند که توسط یک کرنل قالب مفرد متنزه که پارامتری می شوند. به منظور تضمین استقلال از مختصات فرآیند اشتراک وزن، کرنل های کانولوشن مطالبه می شوند که G -استریبل باشند، یعنی قید تناوب پذیری گیج را برآورده کنند. بخش ۳.۴ نشان می دهد که $-GM$ -کانولوشن ها به طور خودکار تحت آن ایزومنتری هایی که تقارن های G -ساختار هستند. این بدان معنی است که $-GM$ -کانولوشن ها با عمل ایزومنتری ها بر میدان های ویژگی همانظور که در شکل ۱۹ بصری سازی شده است، جابجا می شوند.

۱.۴ عملیات نقطه‌ای تناوب‌پذیر گیج

برای شروع، ما برخی عملیات شبکه عصبی را در نظر می گیریم که محدودیت های ناشی از استقلال از مختصات مورد نیاز و اشتراک وزن به ویژه ساده قابل استخراج هستند. همه این عملیات این ویژگی مشترک را دارند که به صورت نقطه‌ای بر بردارهای ویژگی عمل می کنند، یعنی بردارهای ویژگی خروجی (p) در M را صرفاً بر اساس بردارهای ویژگی ورودی (p) در همان مکان محاسبه می کنند. به منظور ارضای اصل کوواریانس، مختصات بندی های این عملیات همگی مطالبه می شوند که مطابق پیش ترکیب با ρ و پس ترکیب با ρ تبدیل شوند. هنگام تقاضای اینکه عملیات بر حسب وزن های مشترک تعیین شوند، این قوانین تبدیل الزاماً برای تناوب پذیری گیج (با ناوردادی) عملیات را دلالت می کنند.

استخراج ها برای عملیات نقطه‌ای مختلف در بخش های بعدی ۱.۱.۴، ۲.۱.۴ و ۳.۱.۴ در گام های اول عمده ای مشابه هستند و به محدودیت های کوواریانس و تناوب پذیری اساساً یکسانی بر توابع قالب منجر می شوند. بنابراین آن ها می توانند با هم بررسی شوند، عملیات خاص (یا تابع قالب) را انتزاعی نگه داشته. با این حال، از آنجا که مفاهیم محدودیت های حاصل برای نمونه سازی های خاص مقاومت است، و از آنجا که می خواهیم بحث را زندیک به کاربرد نگه داریم، چنین فرمول بندی انتزاعی را حذف خواهیم کرد و مستقیماً نمونه سازی های خاص را در نظر خواهیم گرفت.

۱.۱.۴ کانولوشن های 1×1 تناوب‌پذیر گیج

به عنوان اولین مثال از عملیات نقطه‌ای، ما عمل خانواده ای از نگاشت های خطی \mathcal{C}_p را در نظر می گیریم، که بردار ویژگی ورودی (p) را در هر $p \in M$ به بردار ویژگی خروجی

$$f_{\square\square}(p) := \mathcal{C}_p f_{\square\square}(p). \quad (47)$$

ارسال می کنند. اگر فرض اشتراک وزن فضایی را اضافه کنیم، نگاشت های خطی \mathcal{C}_p و \mathcal{C}_q در مکان های مختلف p و q جفت خواهند شد، و عملیات را می توان به عنوان کانولوشنی با کرنل دلتای دیراک با مقدار عملکر خطی دید. این عملیات در بینایی کامپیوتر سیار رایج است، جایی که معمولاً به عنوان کانولوشن 1×1 نشان داده می شود، زیرا گستره سازی فضایی یک کرنل دیراک خطی که بر روی تصاویر دو بعدی عمل می کند توسط کرنل (با مقدار ماتریس) با گستره فضایی 1×1 پیکسل داده می شود. ما در ادامه استخراج خواهیم کرد که تقاضای اشتراک وزن فضایی منجر به محدودیتی خواهد شد که کرنل های قالب با مقدار ماتریس را مجبور می کند که در هم تنیده باشند، یعنی ماتریس های تناوب پذیر گیج.

پیش از فرض اشتراک وزن، بیان های مختصاتی نگاشت های خطی \mathcal{C}_p و تبدیل های گیج بین آن ها بسیار شیوه آن هایی از نگاشت های خطی بر روی $T_p M$ رفتار می کنند، که در بخش ۲.۱.۳ مورد بحث قرار دادیم. از آنجا که بردارهای ویژگی ورودی و خروجی در مختصات توسط بردارهای $f_{\square\square}^A(p) \in \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}}$ و $f_{\square\square}^B(p) \in \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}}$ نمایش داده می شوند، نگاشت خطی به طور طبیعی توسط آن ماتریس $\mathcal{C}_p^A \in \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}}$ نمایش داده می شود که

$$f_{\square\square}^A(p) = \mathcal{C}_p^A \cdot f_{\square\square}(p). \quad (48)$$

را برآورده می کند. این رابطه البته برای مختصات بندی های دلخواه برقرار است، به طوری که برای هر گیج دیگری که با B برچسب گذاری شده است، $f_{\square\square}^B(p) = \mathcal{C}_p^B \cdot f_{\square\square}^B(p) = \mathcal{C}_p^B \cdot \mathcal{C}_p^B$ مرتبط می کند از اصل کوواریانس از قوانین تبدیل ویژگی های ورودی و خروجی پیروی می کند. از آنجا که این ها توسط $f_{\square\square}^B(p) = \rho_{\square\square}(g_p^{BA}) f_{\square\square}^A(p)$ و $f_{\square\square}^A(p) = \rho_{\square\square}(g_p^{BA}) f_{\square\square}^B(p)$ داده می شوند، داریم:

$$\begin{aligned} f_{\square\square}^B(p) &= \mathcal{C}_p^B \cdot f_{\square\square}^B(p) \\ \Leftrightarrow \rho_{\square\square}(g_p^{BA}) f_{\square\square}^A(p) &= \mathcal{C}_p^B \rho_{\square\square}(g_p^{BA}) f_{\square\square}^A(p) \\ \Leftrightarrow f_{\square\square}^A(p) &= \rho_{\square\square}(g_p^{BA})^{-1} \mathcal{C}_p^B \rho_{\square\square}(g_p^{BA}) f_{\square\square}^A(p). \end{aligned} \quad (49)$$

مقایسه با معادله (۴۸) دلالت دارد بر اینکه دو بیان مختصاتی \mathcal{C}_p لزوماً با

$$\mathcal{C}_p^B = \rho_{\square\square}(g_p^{BA}) \mathcal{C}_p^A \rho_{\square\square}(g_p^{BA})^{-1} \quad (50)$$

مرتبط هستند اگر قرار باشد قوانین تبدیل بردارهای ویژگی را رعایت کنند. همانطور که معمول است، این ملاحظات به طور مختصر توسط نمودار جابجایی ضبط می‌شوند:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{c_{\square\square}} & \xrightarrow{\mathcal{C}_p^A} & \mathbb{R}^{c_{\square\square\square}} \\ \rho_{\square\square}(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho_{\square\square\square}(g_p^{BA}) \\ \mathbb{R}^{c_{\square\square}} & \xrightarrow{\mathcal{C}_p^B} & \mathbb{R}^{c_{\square\square\square}} \end{array} \quad (51)$$

مفهوم عملی مهم این نتیجه تا کنون این است که نگاشت خطی \mathcal{C}_p به هیچ وجه محدود نیست. به بیان دیگر: تا زمانی که بیان‌های مختصاتی در گیج‌های مختلف توسط معادله (۵۰) مرتبط باشند، آزاد هستیم که A را در یک گیج دلخواه ثابت T توسط ماتریس بدون محدودیت \mathcal{C}_p^A پارامتری کنیم. همانطور که خواهیم دید، وضعیت زمانی تغییر می‌کند که نگاشت‌های خطی اشتراک وزن داشته باشند.

حال حالی را در نظر بگیرید که نگاشت‌های خطی \mathcal{C}_q و \mathcal{C}_p وزن‌ها را به اشتراک می‌گذارند. این بدان معنی است که فرض می‌کنیم آن‌ها توسط مجموعه مشترکی از پارامترها پارامتری شوند، که توسط کرنل قالب $K_{1 \times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}}$ داده می‌شود. سؤال باز این است که دقیقاً چگونه نگاشت‌های آزاد از مختصات باید بر حسب این کرنل قالب پارامتری شوند. الزام ما برای استقلال از مختصات GM تقاضاً می‌کند که هیچ چارچوب مرجع خاصی را در فرآیند اشتراک وزن ترجیح ندهیم، یعنی همه مختصات‌بندی‌ها را به همان شیوه درمان کنیم. بنابراین لازم است که کرنل قالب را با همه مختصات‌بندی‌ها به طور همزمان به اشتراک بگذاریم، یعنی

$$\mathcal{C}_p^X = K_{1 \times 1} \quad (U^X, \psi^X) \in \mathcal{A}^G \quad \text{برای هر گیج } p \in U^X, \quad (52)$$

تنظيم کنیم، که در آن (\mathcal{A}^G, G) -اطلس متناظر با G -ساختر در نظر گرفته شده است؛ به معادله (۲۵) مراجعه کنید. از آنجا که محدودیت کوواریانس در معادله (۵) نیاز دارد که برای گیج‌های دلخواه مرتبط با G برقرار باشد، و مختصات‌بندی‌های خطی $\mathcal{C}_p^A = \mathcal{C}_p^B = K_{1 \times 1}$ همگی مطابقت دارند، تقاضای مشترک برای اشتراک وزن و استقلال از مختصات GM منجر به محدودیت

$$K_{1 \times 1} = \rho_{\square\square}(g) K_{1 \times 1} \rho_{\square\square}(g)^{-1} \quad \forall g \in G \quad (53)$$

بر کرنل قالب می‌شود. تطبیق متناظر نمودار جابجایی در معادله (۵۱) با اشتراک وزن توسط:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{c_{\square\square}} & \xrightarrow{K_{1 \times 1}} & \mathbb{R}^{c_{\square\square\square}} \\ \rho_{\square\square}(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho_{\square\square\square}(g_p^{BA}) \\ \mathbb{R}^{c_{\square\square}} & \xrightarrow{K_{1 \times 1}} & \mathbb{R}^{c_{\square\square\square}} \end{array} \quad (54)$$

داده می‌شود.

نتیجه‌گیری این تحلیل این است که کرنل‌های قالبی که می‌توانند بدون ابهام به اشتراک گذاشته شوند دقیقاً آن‌هایی هستند که تحت عمل گیج ناوردا هستند. فضای برداری چین کرنل‌های 1×1 ناوردا گیج ساده فضای نگاشت‌های درهم‌تیده بین نمایش‌های $\rho_{\square\square}$ و $\rho_{\square\square\square}$ است، یعنی

$$\text{Hom}_G(\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square\square}) := \left\{ K_{1 \times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square\square}} \mid K_{1 \times 1} = \rho_{\square\square}(g) K_{1 \times 1} \rho_{\square\square}(g)^{-1} \quad \forall g \in G \right\} \subseteq \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square\square}}. \quad (55)$$

توجه داشته باشید که، طبق لم شور [۴]، الزام بر $K_{1 \times 1}$ برای درهم‌تیده بودن مانع از نگاشت بین میدان‌هایی که تحت نمایش‌های کاهش‌ناپذیر غیرهم‌ریخت تبدیل می‌شوند از طریق کانولوشن‌های 1×1 می‌شود. این محدودیت شدید با کرنل‌های 1×1 اجتناب‌ناپذیر است اما بعداً هنگام اجازه دادن به کرنل‌های گسترده فضایی حل خواهد شد.

در این نقطه می‌خواهیم اشاره کنیم که اصطلاحات «تابع قالب تناوب‌پذیر گیج» و «تابع قالب ناوردا گیج» را به طور متقابل استفاده می‌کنیم. این با مشاهده توجیه می‌شود که محدودیت ناوردا بیی در معادله (۵۳) می‌تواند به عنوان محدودیت تناوب‌پذیری $K_{1 \times 1} \rho_{\square\square}(g) = \rho_{\square\square\square}(g) \rho_{\square\square}(g)$ نوشته شود. به طور کلی امکان مشاهده توابعی که نسبت به عمل گروهی در دامنه و دامنه مشترک آن‌ها تناوب‌پذیر هستند به عنوان ناوردای عمل متناظر بر خود تابع وجود دارد. در کاربرد ما، دیدگاه تناوب‌پذیری بر جسته می‌کند که تبدیل میدان و روودی منجر به تبدیل متناظر میدان خروجی خواهد شد، که تضمین می‌کند همه کمیت‌های در گیر به طور کوواریانت با یکدیگر تبدیل شوند. از طرف دیگر، دیدگاه ناوردا بیی تأکید می‌کند که تابع قالب می‌تواند در گیج دلخواه به اشتراک گذاشته شود.

۲.۱.۴ جمع بایاس تناوب پذیر گیج

پس از اعمال عملیات کانولوشن، رایج است که بردار بایاس (مشترک) به بردارهای ویژگی منفرد جمع شود. همراه با الزام استقلال از مختصات، اشتراک وزن دوباره منجر به محدودیت خطی خواهد شد. این محدودیت تنها اجازه جمع شدن بایاس‌ها به زیرفضاهای ناوردا عمل گیج بر میدان ویژگی ورودی را خواهد داد.

همانند قبل، ابتدا جمع بایاس را بدون اشتراک وزن در نظر می‌گیریم. بنابراین بایاس‌های b_p^A داریم، که به موقعیت p بر روی منیفولد بستگی دارند، که به بردار ویژگی ورودی جمع می‌شوند تا بردار ویژگی خروجی

$$f_{\text{من}}(p) = f_{\text{من}}(p) + b_p^A. \quad (56)$$

تولید کنند. نسبت به گیج‌های ψ_p^A و ψ_p^B ، بایاس توسط آن بردارهای ضریب β_p^A و β_p^B در \mathbb{R}^c نمایش داده می‌شود که $f_{\text{من}}^A(p) = f_{\text{من}}^A(p) + \beta_p^A$ و $f_{\text{من}}^B(p) = f_{\text{من}}^B(p) + \beta_p^B$ را برآورده می‌کنند. از آنجا که جمع بردارها اجازه تغییر قوانین تبدیل آن‌ها را نمی‌دهد، نمایش‌های گروهی مرتبط با ویژگی‌های ورودی و خروجی لزوماً مطابقت دارند، یعنی

$$\rho_{\text{من}} = \rho_{\text{من}} =: \rho. \quad (57)$$

همراه با الزام برای استقلال از مختصات، این دلالت دارد بر اینکه نمودار

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+b_p^A} & \mathbb{R}^c \\ \rho(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho(g_p^{BA}) \cdot \\ \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+b_p^B} & \mathbb{R}^c \end{array}, \quad (58)$$

که معادل آن در معادله (۵۱) است، نیاز دارد که جایجاً شود. به صورت معادله نوشته شده، این رابطه $\rho(g_p^{BA}) f_p^A + b_p^B = \rho(g_p^{BA}) (f_p^A + b_p^A)$ را تلقاً می‌کند که برقرار باشد. از آنجا که خطی بودن $\rho(g_p^{BA})$ امکان بازنویسی سمت راست را به عنوان $\rho(g_p^{BA}) f_p^A + \rho(g_p^{BA}) b_p^A$ می‌دهد، تغییری بردار ویژگی ورودی منجر به

$$b_p^B = \rho(g_p^{BA}) b_p^A. \quad (59)$$

می‌شود. بردارهای ضریبی که یک بایاس مستقل از مختصات را نسبت به گیج‌های مختلف نمایش می‌دهند بنابراین نیاز دارند که دقیقاً مانند بردارهای ویژگی که به آن‌ها جمع می‌شوند تبدیل شوند. همانند مورد کانولوشن‌های 1×1 استقلال از مختصات بایاس b_p را به هیچ وجه محدود نمی‌کند، بلکه فقط مختصات‌بندی‌های مختلف همان بایاس را مطالبه می‌کند که با یکدیگر سازگار باشند. یک پیاده‌سازی بنابراین می‌تواند گیج دلخواه انتخاب کند و بایاس را در آن گیج آزادانه توسط پارامترهایی در \mathbb{R}^c پارامتری کند.

وضعیت دوباره زمانی تغییر می‌کند که اشتراک وزن فضایی تقاضا شود. فرض کنید $b \in \mathbb{R}^c$ بردار بایاس قالبی باشد که بر روی منیفولد به اشتراک گذاشته شود. از آنجا که تنها راه انجام این کار بدون ترجیح دلخواه هر مختصات‌بندی، اشتراک بردار بایاس در همه گیج‌ها به طور همزمان است، باید

$$b_p^X = b \quad (\text{برای هر گیج } U^X, \psi^X \in \mathcal{A}^G \text{ با } p \in U^X). \quad (60)$$

را در قیاس با معادله (۵۲) مطالبه کنیم. ترکیب محدودیت کوواریانس در معادله (۵۹) با این اشتراک وزن مستقل از گیج سپس منجر به محدودیت ناوردایی می‌شود.

$$b = \rho(g) b \quad \forall g \in G \quad (61)$$

بر قالب بردار بایاس می‌شود. برای تکمیل قیاس با مورد کانولوشن‌های 1×1 سخنه تطبیق یافته نمودار جایجاً در معادله (۵۸) با وزن‌های مشترک را نشان می‌دهیم:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+b} & \mathbb{R}^c \\ \rho(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho(g_p^{BA}) \cdot \\ \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+b} & \mathbb{R}^c \end{array}. \quad (62)$$

برای بصیرت در مفاهیم محدودیت ناوردایی در معادله (۶۱)، فرض کنید برای بردار قالب داده شده b برآورده شود. به دلیل خطی بودن محدودیت، هر بردار مقیاس شده $a \cdot b$ برای $a \in \mathbb{R}$ نیز آن را برآورده خواهد کرد، یعنی هر حل زیرفضای یک بعدی از \mathbb{R}^c را پوشش می‌دهد که تحت عمل

ناوردا است. چنین زیرفضای ناوردا به عنوان زیرنمايش ρ نشان داده می شود. از آنجا که زیرفضاهای در نظر گرفته شده یک بعدی هستند، خودشان هیچ زیرفضای مناسب ندارند و بنابراین زیرنمايش های کاهش ناپذیر بدیهی هستند. نتیجه می شود که فضای برداری

$$\mathcal{B}_\rho^G := \{b \in \mathbb{R}^c \mid b = \rho(g)b \quad \forall g \in G\} \quad (63)$$

بايس های تناوب پذیر گیج با (زیرفضاهای) زیرنمايش های بدیهی ρ مطابقت دارد. ابعاد \mathcal{B}_ρ^G و بنابراین تعداد پارامترهای قبل باد گیری \square با کثرت زیرنمايش های بدیهی موجود در ρ مطابقت دارد. برای گروه های فشرده G ، روابط متعدد شور دلالت دارند بر اینکه این ابعاد توسط $\dim(\mathcal{B}_\rho^G) = \int_G \text{tr}(\rho(g)) dg$ داده می شود. این گزاره مواد معملى گروه های متعدد $G = d$ و همه زیر گروه های آن را پوشش می دهد.

دو مثال ساده از میدان های ویژگی که ممکن است بخواهیم بایاس های مشترک به آن ها جمع کنیم، میدان های اسکالر و میدان های بردار مماس هستند. بر اساس تعریف، میدان ضربی یک میدان اسکالر تحت تبدیل های گیج ناوردا است، یعنی طبق نمايش بدیهی $b \in \mathbb{R}$ می شود. بنابراین می توان بایاس (اسکالر) \mathbb{R} به آن ها جمع کرد. در مقابل، میدان ضربی یک میدان بردار مماس طبق نمايش گروهی غیر بدیهی، کاهش ناپذیر ρ تبدیل می شود. از آنجا که این نمايش هیچ زیرنمايش بدیهی ندارد، جمع بردار بایاس مشترک به میدان های بردار مماس با حفظ استقلال از مختصات غیرممکن است. به عنوان مثال سوم، نمايش های منظم گروه های فشرده را در نظر بگیرید، که به عنوان مثال میدان های ویژگی شبکه های کانولوشنی گروهی را توصیف می کنند. توسط قضیه پیتر-ولیل، شناخته شده است که نمايش های منظم دقیقاً یک زیرنمايش بدیهی دارند [؟]. بنابراین بایاس که به میدان های ویژگی منظم جمع می شود توسط یک پارامتر منفرد توصیف می شود.

۲.۱.۴ غیرخطی های تناوب پذیر گیج

به جز عملیات خطی (کانولوشن) و جمع بایاس، اساسی ترین عملیات استفاده شده در هر شبکه عصبی غیرخطی ها استند. ما در اینجا حالت معمول غیرخطی های σ_p را در نظر بخواهیم گرفت که به روی محلی فضایی عمل می کنند، یعنی بردارهای ویژگی خروجی را به عنوان $f_{\square\square\square}(p) = (\sigma_p(f_{\square\square}(p)))$ محاسبه می کنند. یک غیرخطی مشترک دوباره مطالبه می شود که تناوب پذیر گیج باشد. از آنجا که استدلای که به این نتیجه گیری منجر می شود شبیه آن در موارد قبلی است، تنها به طور خلاصه آن را خلاصه خواهیم کرد. به دلیل عدمیت نگاشت های غیرخطی استخراج فضاهای حل خطی همانند معادلات (۵۵) و (۶۳) غیرممکن است، با این حال، برخی مثال های خاص را مورد بحث قرار خواهیم داد.

مشابه قبیل، هر غیرخطی آزاد از مختصات σ_p نسبت به گیج های A و B توسط یان های مختصاتی $\rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square\square}}$ و $\sigma_p^A : \mathbb{R}^{c_{\square\square}} \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square\square}}$ داده می شود، که توسط تقاضای استقلال از مختصات مطالبه می شوند که با $\sigma_p^B = \rho_{\square\square\square}(g_p^{BA}) \circ \sigma_p^A \circ \rho_{\square\square}(g_p^{BA})^{-1}$ مرتبط باشند. یک تابع قالب غیرخطی $\mathbb{R}^{c_{\square\square}} \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square\square}}$ است که تنها زمانی می تواند به روی مستقل از مختصات به اشتراک گذاشته شود که به طور همزمان با همه گیج ها به اشتراک گذاشته شود. این محدودیت کوواریانس را به محدودیت ناوردايی $G = \rho_{\square\square\square}(g) \circ \rho_{\square\square}(g) \circ \rho_{\square\square}(g)^{-1} \forall g \in G$ برای قابل تبدیل می کند، یا، به طور معادل، به محدودیت تناوب پذیری متناظر

$$\rho_{\square\square\square}(g) \circ s = s \circ \rho_{\square\square}(g)^{-1} \quad \forall g \in G. \quad (64)$$

به دلیل غیرخطی بودن این محدودیت مجبور هستیم آن را مورد به مورد بررسی کنیم \square بنابراین بحث خود را به چند مثال خاص محدود خواهیم کرد. بحث برانگیزترین ساده ترین حالت، غیرخطی هایی است که بین میدان های اسکالر نگاشت می کنند، یعنی برای آن ها $\rho_{\square\square\square}(g) = \rho_{\square\square\square\square}(g)$ برای $g \in G$ ناوردا هستند. در این حالت محدودیت تناوب پذیری در معادله (۶۴) به $\square = \square$ تبدیل می شود که به طور بدیهی برای هر غیرخطی $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ برآورده می شود. مثال جالب تری نمايش یکانی $\rho_{\square\square}$ است. یک غیرخطی ممکن برای این حالت توسط نرم بردارهای ویژگی داده می شود. از آنجا که $\|f_{\square\square}^A(p)\| = \|f_{\square\square}^A(p)\| \rho_{\square\square}(f_{\square\square}^A(p))$ به دلیل یکانی بودن $\rho_{\square\square}$ ناوردا است، $\rho_{\square\square}$ نمايش بدیهی خواهد بود. گرفتن نرم بنابراین به عنوان عملیات غیرخطی، تناوب پذیر گیج دیده می شود که هر میدان یکانی را به میدان اسکالر نگاشت می کند. یک نگاشت غیرخطی که نوع میدان را حفظ می کند، یعنی $\rho_{\square\square} = \rho_{\square\square\square}$ را برآورده می کند، می تواند به طور مشابه به عنوان $f_{\square\square}^A(p) \mapsto f_{\square\square}^A(p) \cdot f_{\square\square}^A(p)$ تعریف شود. گزینه دیگر، که ممکن است در باد گیری تعاملات فیزیکی نقش داشته باشد و در [؟] مورد بررسی قرار گرفته است، غیرخطی های حاصل ضرب تansوری هستند. با داشتن دو میدان $(p, f_{\square\square}^A)$ و $(p, f_{\square\square}^B)$ ، که به ترتیب طبق $\rho_{\square\square,1}$ و $\rho_{\square\square,2}$ تبدیل می شوند، چنین غیرخطی هایی ویژگی حاصل ضرب تansوری $f_{\square\square}^A \otimes f_{\square\square}^B = f_{\square\square}^A(p) \otimes f_{\square\square}^B(p)$ را محاسبه می کنند، که به طور تناوب پذیر طبق نمايش حاصل ضرب تansوری $\rho_{\square\square,1} \otimes \rho_{\square\square,2} = \rho_{\square\square,1 \otimes 2}(p)$ تبدیل می شود. همه این مثال ها محدودیت تناوب پذیری گیج در معادله (۶۴) را برآورده می کنند. اینکه کدام غیرخطی خاص در عمل خوب کار می کند، با این حال، هنوز سوال تحقیقاتی بازی است که نیازمند بررسی تجربی بسیار بیشتر قبیل از پاسخ دادن است. اولین تلاش در این جهت در [؟] انجام شده است.

۲.۴ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن های GM

عملیات اصلی شبکه های کانولوشنی، عملگر کانولوشن است که الگوهای مشخصه ویژگی ها را از یک همسایگی محلی در اطراف هر نقطه $p \in M$ به صورت خطی در یک بردار ویژگی جدید $(p, f_{\square\square}^A)$ جمع می کند. یک کرنل کانولوشن گستره فضایی، جزئیات این انشاست را تعیین می کند. اصل

کوواریانس نیازمند استقلال از مختصات و در نتیجه یک قانون تبدیل خاص برای کرنل‌ها تحت تبدیلات پیمانه است. همانند مثال‌های قبلی، یک تقاضای اضافی برای اشتراک‌گذاری وزن منجر به الزامی برای کرنل‌الگو می‌شود تا نسبت به پیمانه هموردا (G -راهن) باشد.

مطابق با بخش قل، ما بهوضوح بین الزامات استقلال از مختصات و اشتراک‌گذاری وزن تمايز قائل می‌شویم. بنابراین، بخش ۲.۲.۴ با بحث در مورد میدان‌های کرنل و قوانین تبدیل آن‌ها بدون الزام به اینکه کرنل‌ها در موقعیت‌های جداگانه به هم مرتبط باشند، شروع می‌شود. چنین میدان‌های کرنل نامحدودی منجر به تبدیلات میدان کرنل می‌شوند که تبدیلات انگرالی هستند و می‌توان آن‌ها را به عنوان پیش‌درآمد‌های کانولوشن‌ها در نظر گرفت. کانولوشن‌های واقعی GM که توسط یک کرنل الگوی مشترک و لزوماً همودای پیمانه‌ای پارامتری می‌شوند، در بخش ۳.۲.۴ تعریف شده‌اند. به عنوان یک آماده‌سازی، در بخش بعدی ۱.۲.۴، تمايش‌های محلی میدان‌های ویژگی را بر روی فضاهای مماس توصیف خواهیم کرد، جایی که آن‌ها با کرنل‌های کانولوشن تطبیق داده می‌شوند.

۱.۲.۴ دیدگاه یک ناظر محلی به میدان‌های ویژگی

برخلاف فضاهای اقلیدسی یا فضاهای همگن کلی تر مانند کره، هندسه محلی یک خمینه ریمانی کلی از نقطه‌ای به نقطه دیگر متفاوت است. بنابراین، بالاً فاصله مشخص نیست که یک کرنل کانولوشن چگونه باشد روی M تعریف شود و چگونه می‌توان آن را بین مکان‌های مختلف به اشتراک گذاشت. یک راه حل رایج این است که کرنل را طبق معمول روی یک فضای برداری مسطح و اقلیدسی \mathbb{R}^d تعریف کرده و آن را به جای خود خمینه، روی فضاهای مماس به اشتراک‌بگذاریم؛ به بخش‌های ۲.۲.۴ و ۲.۳.۴ با کارهای قبلی [؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟] مراجعه کنید. سپس، کرنل را می‌توان از طریق نگاشت نمایی ریمانی به روی خمینه نگاشت. می‌توان آن را به گونه‌ای تصور کرد که توسط یک ناظر محلی اعمال می‌شود که ویژگی‌ها را در محیط اطراف خود نسبت به چارچوب مرجع محلی خود اندازه‌گیری می‌کند. در این بخش به طور خلاصه به چگونگی درک میدان‌های ویژگی از دیدگاه ناظر محلی مختلف خواهیم پرداخت. از نظر ریاضی، این موضوع به عنوان پس‌کش ($\square\square\square\square\square\square$) و انتقال موازی میدان ویژگی به فضاهای مماس فرمول‌بندی می‌شود؛ برای تجسم به شکل ۱۶ مراجعه کنید.

برای نگاشت بین فضاهای مماس و خمینه، ما نگاشت نمایی ریمانی (مرتبط با اتصال لوی-چیوینتا) را در نظر می‌گیریم.^{۲۱} با فرض اینکه خمینه برای سادگی کامل از نظر ژئودزیکی باشد^{۲۲}، نگاشت نمایی در یک نقطه خاص $p \in M$ نگاشتی است به صورت

$$\exp_p : T_p M \rightarrow M. \quad (65)$$

این نگاشت، بردارهای $v \in T_p M$ را با نقاطی $\exp_p(v) \in M$ می‌داند که با دنبال کردن ژئودزیک گذرنده از p با سرعت اولیه v برای یک واحد زمان به دست می‌آیند. نگاشت نمایی با اینکه فواصل شعاعی را حفظ می‌کند، به طور کلی زوایا را تغییر می‌دهد و یک‌به یک نیست. به عنوان مثال، اگر خمینه یک کره باشد، نگاشت‌های نمایی فضای مماس مربوطه را بی‌نهایت بار دور آن می‌پیچندند. با این حال، تضمین می‌شود که نگاشت نمایی یک دیفرنیویرفیسم محلی است اگر دامنه آن به فواصلی کوتاه‌تر از فاصله تا مکان پُرش (جایی که یک‌به یک بودن از دست می‌رود) محدود شود.

با داشتن نگاشت‌های نمایی، می‌توان میدان‌های ویژگی روی خمینه را به فضاهای مماس پس‌کش کرد. به طور خاص، اگر f یک میدان ویژگی روی M باشد، پس f کش $f := f \circ \exp_p$ به عنوان نگاشتشی تعریف می‌شود که بردار ویژگی $(\exp_p(v))$ از $f(\exp_p(v))$ را به $v \in T_p M$ می‌دهد. توجه داشته باشید که به دلیل عدم یک‌به یک بودن نگاشت نمایی، هر بردار ویژگی ممکن است به چندین بردار مماس v_1 و v_2 اختصاص یابد اگر $(v_1) = \exp_p(v_2)$ باشد^{۲۳} این پدیده تا حدودی شبیه به اثرات عدسی گرانشی در فیزیک است. در صورتی که نگاشت نمایی یک‌به یک باشد، یا زمانی که آن را به شعاع یک‌به یک بودن آن محدود کنیم، پس f کش معادل بیان میدان ژئودزیکی است [؟].

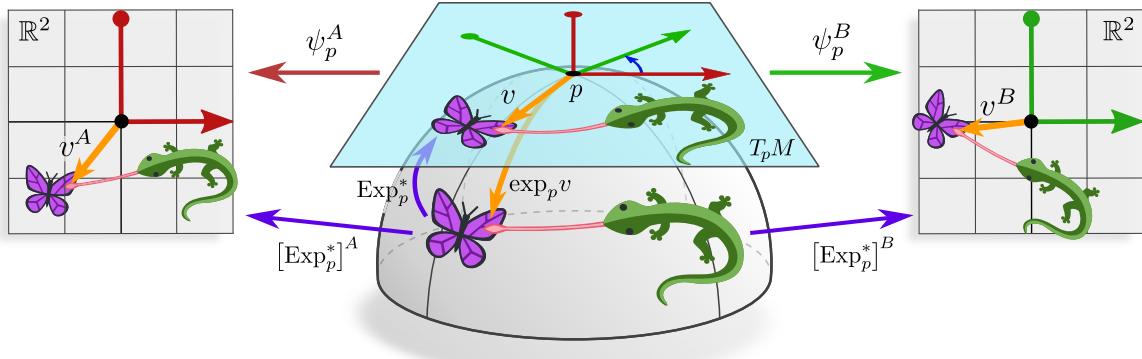
به یاد بیاورید که هدف از p کش بردارهای ویژگی به فضاهای مماس این است که بتوان آن‌ها را توسط یک کرنل کانولوشن جمع‌آوری کرد. متأسفانه، این کار بالاً فاصله امکان‌بندیر نیست زیرا بردارهای ویژگی در مکان‌های مختلف در فضاهای برداری متفاوتی قرار دارند و نسبت به پیمانه‌های متفاوتی بیان می‌شوند.^{۲۴} بنابراین لازم است تمام بردارهای ویژگی $[f](v)$ در یک فضای برداری و نسبت به یک پیمانه یکسان بیان شوند. یک ایده طبیعی که توسط [؟] پیشنهاد شد، انجام این کار با انتقال موازی Exp_p ایجاد شده است که نگاشت نمایی را از (v) به $T_p M$ تأثیرگذارد.^{۲۵} ما این p کش f را با انتقال اضافی با Exp_p^* نشان می‌دهیم تا بر ارتباط نزدیک آن با p کش معمولی f به Exp_p^* تأثیرگذارد.^{۲۶} شکل ۱۶ یک ایده بصری از این p کش انتقال‌دهنده میدان‌های ویژگی به فضای مماس و نمایش‌های آن A و B را در روش Exp_p^* نسبت به مختصات دهی‌های مختلف ارائه می‌دهد.

^{۲۱} حتی مدل‌هایی که یک اتصال جایگزین (سازگار با G) برای انتقال ویژگی‌ها فرض می‌کنند، معمولاً از اتصال کانونی لوی-چیوینتا برای محاسبه ژئودزیک‌ها و نگاشت‌های نمایی استفاده می‌کنند.

^{۲۲} فرض کامل بودن ژئودزیکی M به این معناست که نگاشت‌های نمایی \exp_p برای هر $p \in M$ روی کل فضای مماس $T_p M$ تعریف شده‌اند. در مواردی که این فرض برقرار نباشد، می‌توان به پر کردن با صفر متولی شد، که معمولاً در شبکهای کانولوشنی برای تصاویر با تکیه‌گاه متاتحری استفاده می‌شود.

^{۲۳} یک وضعیت بسیار مشابه، تعریف مشتقات کوواریانت را انگیزه‌مند می‌کند، که آن نیز نیاز به ترکیب اشیاء هندسی دارد که در فضاهای متفاوتی زندگی می‌کنند.

^{۲۴} انتقال موازی در امتداد هر مسیر دیگری نیز به همان اندازه معتبر خواهد بود.



شکل ۱۶: یک میدان ویژگی f روی M و نمایش محلی آن $T_p M$ روی $\text{Exp}_p^* f$. درست مانند پس کش معمولی $\exp_p^* f$ از f در امتداد نگاشت نمایی $T_p M \rightarrow M$ است، $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ ، پس کش انتقال دهنده بردارهای ویژگی $f(\exp_p(v))$ را به بردارهای مماس $v \in T_p M$ نسبت می‌دهد. با این حال، از آنچهایی که هدف ما نیاشت، پس کش شده با استفاده از یک کرnel کاتولوشن است، آن‌ها باید در یک فضای یکسان و نسبت به یک پیمانه یکسان در p داده شوند. بنابراین، پس کش انتقال دهنده علاوه بر این، انتقال دهنده موازی (سازگار با G) را در امتداد ژودزیک (v) به p $\exp_p(v)$ به اعمال می‌کند. از طریق یک پیمانه ψ_p^X ، پس کش انتقال دهنده f روی $T_p M$ را می‌توان روی $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c$ $[\text{Exp}_p^* f]^X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c$ بصورت $[\text{Exp}_p^* f]^X(p) = \psi_p^X(\exp_p(v))$ یابان کرد. انتخاب‌های مختلف چارچوب‌های مرجع (ناظران) در اینجا با تغییر شکل‌های خطی مختلف میدان ویژگی مطابقت دارد. تبدیلات میدان کرnel و کاتولوشن‌های GM یک ویژگی خروجی (p) را در p با تطبیق یک کرnel K_p روی $\text{Exp}_p^* f$ با $\text{Exp}_p^* f(T_p M)$ محاسبه می‌کنند (یعنی انگرال حاصلضرب آنها را روی فضای مماس می‌گیرند؛ به معادله (۷۶) مراجعه کنید).
 مارمولک‌ها و پروانه‌ها با مجوز Creative Commons Attribution 4.0 International از توییتر اقتباس شده‌اند.

ما $\text{Exp}_p^* f$ را با تعریف آن بر حسب عبارت مختصاتی اش نسبت به یک انتخاب پیمانه فرمول‌بندی می‌کنیم. برای این منظور، فرض کنید ψ_p^A یک پیمانه در p باشد که ویژگی‌های منتقل شده نهایتاً نسبت به آن بیان می‌شوند و $\psi_{\exp_p(v)}^{\tilde{A}}$ یک پیمانه دلخواه در (v) باشد که بردار ویژگی در آن مکان را با یک بردار ضربی $f^{\tilde{A}}(\exp_p(v)) \in \mathbb{R}^c$ نشان می‌دهد. فرض کنید

$$\rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{A \tilde{A}}) \quad (66)$$

انتقال دهنده موازی سازگار با G برای ضرایب بردار ویژگی در امتداد ژودزیک (v) به p باشد. سپس ما پس کش انتقال دهنده را در مختصات به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} [\text{Exp}_p^* f]^A : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R}^c, \quad v^A \mapsto [\text{Exp}_p^* f]^A(v^A) \\ &:= \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(\psi_p^A)^{-1}(v^A)}^{A \tilde{A}}) \cdot f^{\tilde{A}}(\exp_p(\psi_p^A)^{-1}(v^A)), \end{aligned} \quad (67)$$

که در آن $v = (\psi_p^A)^{-1}(v^A) \in T_p M$ بردار مماس بدون مختصات است که توسط ضرایب v^A از طریق ψ_p^A به آن ارجاع داده می‌شود. همانطور که قبلاً ادعا شد، انتخاب پیمانه $\psi_{\exp_p(v)}^{\tilde{A}}$ در $\exp_p(v)$ به دلیل استقلال مختصات تمام معادلات، بی‌ربط است و حذف می‌شود. به طور خاص، می‌توانستیم از هر پیمانه دیگری مانند $\psi_{\exp_p(v)}^{\tilde{B}}$ در $\exp_p(v)$ استفاده کنیم، که منجر به تبدیلات پیمانه $\rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{A \tilde{B}}) = \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{A \tilde{A}}) \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{\tilde{A} \tilde{B}}) = \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{\tilde{B} \tilde{A}}) \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{\tilde{A} \tilde{B}}) = \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{\tilde{B} \tilde{A}})$ برابر باشد. برای ضرایب بردار ویژگی طبق معادله (۲۸) می‌شود، که هنگام ترکیب هر دو عبارت، یکدیگر را خشی می‌کنند.

با این حال، پس کش انتقال دهنده $[\text{Exp}_p^* f]^A$ همچنان به پیمانه در p بستگی دارد و بنابراین تحت تبدیلات پیمانه g_p^{BA} در p تبدیل می‌شود. مانند هر تابع مختصاتی، قانون تبدیل آن توسط تبدیلات پیمانه بر روی دامنه \mathbb{R}^d و هم‌دامنه \mathbb{R}^c تعیین می‌شود. بنابراین به صورت زیر داده می‌شود:

$$[\text{Exp}_p^* f]^B = \rho(g_p^{BA}) \circ [\text{Exp}_p^* f]^A \circ (g_p^{BA})^{-1}, \quad (68)$$

که توسط نمودار جایگایی زیر خلاصه می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{[\text{Exp}_p^* f]^A} & \mathbb{R}^c \\ g_p^{BA} \downarrow & & \downarrow \rho(g_p^{BA}) \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{[\text{Exp}_p^* f]^B} & \mathbb{R}^c \end{array} \quad (69)$$

همانطور که در شکل ۱۶ به تصویر کشیده شده است، $[\text{Exp}_p^* f]^B$ و $[\text{Exp}_p^* f]^A$ باید به عنوان دیدگاه ناظران محلی (چارچوب‌های مرجع) مختلف به میدان ویژگی در نظر گرفته شوند.

در اصل، می‌توان ساختارهای جایگزینی را برای پس‌کش میدان‌های ویژگی از M به $T_p M$ در نظر گرفت. تعریف ما از تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM در بخش‌های ۲.۲.۴ و ۳.۲.۴ در آدامه، مستقل از این انتخاب خاص است.

۲.۲.۴ کرنل‌های مستقل از مختصات و تبدیلات میدان کرنل

کانولوشن‌های GM عملیات مستقلی از مختصات هستند که کرنل مشترک و یکسانی را در هر نقطه از خمینه اعمال می‌کنند. برای تفکیک واضح فرضیات، ابتدا تبدیلات میدان کرنل عمومی تری را مورد بحث قرار می‌دهیم که عملیات مستقلی از مختصات هستند اما الزام اشتراک‌گذاری وزن را کنار می‌گذارند. بنابراین، آن‌ها شیوه به کانولوشن‌های GM هستند اما در هر نقطه p از خمینه، کرنل بالقوه متفاوتی \mathcal{K}_p اعمال می‌کنند. به منظور رعایت اصل کوواریانس، عبارات مختصاتی این کرنل‌ها باید به شیوه‌ای اصولی تبدیل شوند، با این حال، خود کرنل‌ها بدون محدودیت باقی می‌مانند.

کرنل‌های مستقل از مختصات: از آنجایی که کانولوشن‌ها در یادگیری عمیق بین میدان‌های برداری ویژگی با ابعاد $\mathbb{R}^{c_{\text{out}}}$ و $\mathbb{R}^{c_{\text{in}}}$ نگاشت برقرار می‌کنند، کرنل‌های کانولوشن ماتریس-مقدار $C_{\text{out}} \times C_{\text{in}}$ هستند. پیاده‌سازی‌های گسسته کانولوشن‌های d -بعدی روی فضاهای اقلیدسی معمولاً چنین کرنل‌هایی را به صورت آرایه‌هایی با شکل $(s_1, \dots, s_d, c_{\text{out}}, c_{\text{in}})$ نمایش می‌دهند. محور اول یک شبکه فضایی از $s_1 \times \dots \times s_d$ اختصاص داده شده است که در دو محور آخر کدگذاری شده است.^{۲۵} در محيط پیکسل را نشان می‌دهند، که به هر کدام یک ماتریس $C_{\text{out}} \times C_{\text{in}}$ اختصاص داده شده است که در عنوان آنرا آخر کدگذاری شده است. در محيط اقلیدسی، چنین کرنل‌هایی را می‌توان به عنوان نگاشت‌هایی توصیف کرد

$$K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}, \quad (70)$$

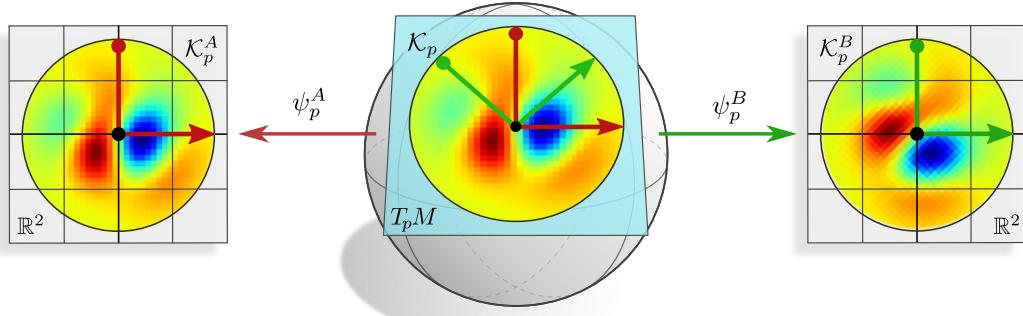
که یک ماتریس $C_{\text{out}} \times C_{\text{in}}$ را به هر نقطه از \mathbb{R}^d اختصاص می‌دهد. همانطور که در بخش قبلی ۱.۲.۴ ذکر شد، ما کانولوشن‌های GM را به عنوان $T_p M$ روی فضای مماس $\text{Exp}_p^* f$ انتقال دهنده \mathcal{K}_p تعریف می‌کنیم. از آنجایی که فضاهای مماس مسطح هستند، طبیعی است که این تطبیق را مانند حالت کاملاً اقلیدسی معمول تعریف کنیم. بنابراین، ما کرنل‌های \mathcal{K}_p را از طریق عبارات مختصاتی شان تعریف می‌کنیم که شکل معادله (۷۰) را دارند، یعنی،

$$\mathcal{K}_p^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}. \quad (71)$$

شکل ۱۷ یک کرنل داده‌شده بدون مختصات را روی $T_p M$ و تمايش‌های آن را روی \mathbb{R}^d نسبت به چارچوب‌های مرجع مختلف نشان می‌دهد.^{۲۶}

^{۲۵} چیدمان واقعی حافظه به چارچوب یادگیری عمیق خاص مورد نظر بستگی دارد.

^{۲۶} ما تأکید می‌کنیم که در اینجا یک کرنل بدون مختصات \mathcal{K}_p را که روی $T_p M$ داده شده است فرض می‌کنیم و عبارات مختصاتی آن \mathcal{K}_p^X را روی \mathbb{R}^d به چارچوب‌های مرجع X در نظر می‌گیریم. اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی بعداً ما را با این سؤال مواجه خواهد کرد که چگونه یک کرنل بدون مختصات \mathcal{K}_p را روی $T_p M$ با توجه به یک کرنل الگوریتم K روی \mathbb{R}^d تعریف کنیم. پیوست؟؟ این دو مفهوم و ارتباط آنها را با G -راهنمایی کرنل توضیح می‌دهد.



شکل ۷: یک کرنل بدون مختصات K_p روی $T_p M$ و عبارات مختصاتی آن $\psi_p^X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{000} \times c_{000}}$ نسبت به پیمانه های ψ_p^X (فقط یکی از کانال های کرنل $\mathbb{R}^{c_{000} \times c_{000}}$ نشان داده شده است). تبدیلات پیمانه ای که مختصات دهی های مختلف یک کرنل را به هم مرتبط می کنند، از قوانین تبدیل دامنه و همدامنه آنها پیروی می کنند. بنابراین برای هر $v \in \mathbb{R}^d$ به صورت $\psi_p^B(v) = \rho_{000}(g_p^{BA})^{-1} K_p^A(v) \rho_{000}(g_p^{BA})$ داده می شوند. یک میدان کرنل K روی M یک تخصیص هموار از کرنل ها بر روی فضاهای مماس است (تعزیز ۷.۲).
توجه داشته باشید که ما در اینجا فرض می کنیم کرنل روی $T_p M$ داده شده است و سپس آن را نسبت به پیمانه های مختلف روی \mathbb{R}^d بیان می کنیم. این از نظر مفهومی با وضعیت نشان داده شده در شکل های ۲، ۵ و ۱۰ و ۱۱ متفاوت است، که در آنها فرض می کنیم یک کرنل الگو K روی \mathbb{R}^d داده شده است و سپس K_p را روی $T_p M$ از طریق اشتراک گذاری وزن کانولوشنی نسبت به یک چارچوب مرجع تعریف می کنیم. برای حفظ اسقلال از مختصات در طول فرآیند اشتراک گذاری وزن، کرنل مشترک باید تحت تبدیلات پیمانه پایا (یا هموردا) باشد؛ به بخش ۲.۴ و پیوست ۴۴ مراجعه کنید.

قانون تبدیل بین نمایش های مختصاتی K_p^B و K_p^A یک کرنل K_p روی $T_p M$ طبق معمول از قوانین تبدیل دامنه و همدامنه آنها پیروی می کند.
در دامنه \mathbb{R}^d قانون تبدیل توسط g_p^{BA} داده می شود، در حالی که قانون تبدیل $(\rho_{000}(g_p^{BA})^{-1}, \text{توسط یک ضرب همزمان از چپ با } g_p^{BA})$ داده می شود. بنابراین، دو مختصات دهی کرنل K_p برای هر $v \in \mathbb{R}^d$ به صورت زیر با هم ارتباط دارند:

$$K_p^B(g_p^{BA}v) = \rho_{000}(g_p^{BA}) \cdot K_p^A(v) \cdot \rho_{000}(g_p^{BA})^{-1}, \quad (72)$$

که توسط نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{K_p^A} & \mathbb{R}^{c_{000} \times c_{000}} \\ g_p^{BA} \downarrow & & \downarrow \rho_{000}(g_p^{BA}) [\cdot] \rho_{000}(g_p^{BA})^{-1} \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{K_p^B} & \mathbb{R}^{c_{000} \times c_{000}} \end{array} \quad (73)$$

همانند مثال های بخش ۱.۴، اصل کوواریانس تنها نیازمند یک رفتار تبدیل ساز گار بین مختصات دهی های مختلف کرنل است اما محدودیتی بر خود کرنل اعمال نمی کند. بنابراین می توان کرنل های K_p را برای هر $p \in M$ و یک پیمانه دلخواه در p با یک کرنل ماتریس-مقدار نامحدود پارامتری کرد. ما میدان های هموار چنین کرنل هایی را به عنوان میدان های کرنل نشان می دهیم که نقش عمده ای در تحلیل ما از همودایی ایزو متري کانولوشن های GM در بخش ۸ ایفا می کنند.

تبدیلات میدان کرنل مستقل از مختصات: با داشتن یک میدان کرنل هموار K می توانیم تبدیلات میدان کرنل را تعریف کنیم، که شبیه به کانولوشن ها هستند اما از این جهت متفاوتند که ممکن است در هر موقعیت مکانی یک کرنل متفاوت اعمال کنند. آنها یک میدان از بردارهای ویژگی خروجی $f(p)$ را با انتگرال گیری از حاصلضرب کرنل مربوطه K_p و پس کش انتقال دهنده f_p از $T_p M$ روی f محاسبه می کنند، یعنی،

$$f(p) = \int_{T_p M} K_p(v) \operatorname{Exp}_p^* f(v) dv. \quad (74)$$

برای بیان این تعریف بدون مختصات بر حسب مختصات، باید تمام کمیت ها را با عبارات مختصاتی شان جایگزین کرده و انتگرال گیری را از طریق پیمانه انتخاب شده از $T_p M$ به \mathbb{R}^d متنقل کرد. همانطور که در پیوست ۴۴ توضیح داده شده است، عنصر حجم ریمانی مناسب (پایا نسبت به پیمانه) برای یک پیمانه ψ_p^A به صورت زیر داده می شود:

$$\sqrt{|\eta_p^A|} dv^A, \quad (75)$$

که در آن ضریب $\sqrt{|\eta_p^A|}$ ، تعریف شده در معادله (۴۹)، حجم (مثبت) پوشیده شده توسط چارچوب مرجع $[e_i^A]_{i=1}^d$ در p است. بنابراین، عبارت مختصاتی تبدیل میدان کرنل به صورت زیر است:

$$f_{\square\Box}^A(p) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) [\text{Exp}_p^* f_{\square\Box}]^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A. \quad (76)$$

استقلال از مختصات تبدیل میدان کرنل با بیان آن نسبت به یک پیمانه جایگزین ψ^B و نشان دادن اینکه میدان خروجی حاصل همانطور که انتظار می‌رود تبدیل می‌شود، تأیید می‌شود، که در واقع چنین است:

$$\begin{aligned} f_{\square\Box}^B(p) &\stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^B(v^B) [\text{Exp}_p^* f_{\square\Box}]^B(v^B) \sqrt{|\eta_p^B|} dv^B \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \left[\rho_{\square\Box}(g_p^{BA}) \mathcal{K}_p^A((g_p^{BA})^{-1} v^B) \right] \left[\text{Exp}_p^* f_{\square\Box} \right]^B(g_p^{BA}) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &\stackrel{(3)}{=} \rho_{\square\Box}(g_p^{BA}) \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) \left[\rho_{\square\Box}(g_p^{BA})^{-1} [\text{Exp}_p^* f_{\square\Box}]^B(g_p^{BA} v^A) \right] \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &\stackrel{(4)}{=} \rho_{\square\Box}(g_p^{BA}) \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) [\text{Exp}_p^* f_{\square\Box}]^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &\stackrel{(5)}{=} \rho_{\square\Box}(g_p^{BA}) f_{\square\Box}^A(p) \end{aligned} \quad (77)$$

در اینجا ما از تعریف تبدیلات میدان کرنل و قانون تبدیل کرنل‌ها (معادله (۷۲)) در دو مرحله اول استفاده کردیم. مرحله سوم با بیرون کشیدن $\rho_{\square\Box}$ از انتگرال و جایگزینی v^B با $v^A = (g_p^{BA})^{-1} v^B$ به دست می‌آید، با استفاده از اینکه عنصر حجم $\sqrt{|\eta_p^A|} dv^A = \sqrt{|\eta_p^B|} dv^B$ به طور طراحی شده پایا نسبت به پیمانه است. دو مرحله آخر با شناسایی قانون تبدیل پس کش انتقال‌دهنده میدان ویژگی در معادله (۶۸) و تعریف تبدیل میدان کرنل در پیمانه ψ^A به دست می‌آیند. توجه داشته باشید که استقلال از مختصات تبدیل میدان کرنل، صحت قانون تبدیل کرنل در معادله (۷۲) را تأیید می‌کند.

یک تبدیل میدان کرنل تنها زمانی به خوبی تعریف می‌شود که انتگرال‌ها روی فضاهای مماس همگرا باشند، که به طور دقیق تر در بخش ۲.۷ و پیوست ۴ مورد بحث قرار گرفته است. قضیه ۷.۷ ثابت می‌کند که یک تکیه گاه فشرده برای کرنل‌های \mathcal{K} برای تضمین این خوش‌تعریفی کافی است. این قضیه همچنین ثابت می‌کند که تبدیلات میدان کرنل که بر اساس میدان‌های کرنل هموار هستند، میدان‌های ویژگی ورودی هموار را به میدان‌های ویژگی خروجی هموار نگاشت می‌کنند.

۳.۲.۴ کانولوشن‌های $\square\Box$ و کرنل‌های $\square\Box$ -راهنبر

آزادی تبدیلات میدان کرنل در اعمال یک کرنل متفاوت در هر مکان، به آنها اجازه تعیین استنتاج آموخته شده را بر روی مکان‌های مختلف نمی‌دهد و بنابراین آنها را از نظر داده ناکارآمد می‌سازد. بنابراین، معمولاً کانولوشن‌ها در نظر گرفته می‌شوند، که می‌توان آن‌ها را به عنوان آن دسته از تبدیلات میدان کرنل خاصی دید که بر اساس میدان‌های کرنل کانولوشنی هستند، یعنی میدان‌های کرنل که توسط یک کرنل الگوی واحد و مشترک پارامتری شده‌اند. همانند قبل، یک اشتراک‌گذاری وزن مستقل از مختصات ییازمند آن است که کرنل‌های الگو نسبت به پیمانه همودرا (G -راهنبر) باشند. این همودادایی پیمانه‌ای کرنل‌های الگو تضمین می‌کند که الگوهایی که در ژست‌های هندسی مختلف و مرتبط با G ظاهر می‌شوند، تا یک تبدیل متناظر بردار ویژگی از طریق $\rho_{\square\Box}$ پاسخ یکسانی را برانگیزند.

اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی: فرض کنید $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square\Box} \times c_{\square\Box}}$ یک کرنل الگو باشد که باید روی تمام فضاهای مماس به اشتراک گذاشته شود. برای اینکه هیچ پیمانه خاصی را ترجیح ندهیم $\square\Box$ که با نیاز ما به استقلال از مختصات در تضاد است $\square\Box$ مجبوریم کرنل را با قرار دادن $K_p^X = K$ در تمام پیمانه‌ها به طور همزمان به اشتراک بگذاریم. به طور ساده‌انگارانه، این به نظر می‌رسد که پیشنهاد می‌کند کرنل الگو را با قرار دادن K_p^X برای هر نقطه $p \in M$ و هر پیمانه ψ^X در p به اشتراک بگذاریم. در حالی که چنین تعریفی از اشتراک‌گذاری کرنل معقول به نظر می‌رسد، از اصل ما برای اشتراک‌گذاری توابع الگوی محلی به معنای دقیق پیروی نمی‌کند: به جای اشتراک‌گذاری مستقیم کرنل، مهم است که کل عملیات محلی را به اشتراک بگذاریم $\square\Box$ که در اینجا کل تبدیل انتگرالی در معادله (۷۶) است. از آنجایی که این عملیات بر حسب میدان کرنل \mathcal{K} پارامتری می‌شود، این به طور غیرمستقیم منجر به اشتراک‌گذاری کرنل الگو می‌شود، با این حال، با نتیجه‌ای کمی متفاوت از اشتراک‌گذاری ساده‌انگارانه در نظر گرفته شده در بالا.

برای یافتن تعریف صحیح میدان‌های کرنل کانولوشنی GM طبق اصل ما برای اشتراک‌گذاری توابع الگوی محلی، ابتدا باید این عملیات محلی را شناسایی کنیم. ما این کار را با انتزاع تبدیلات میدان کرنل (در مختصات) به عنوان مجموعه‌ای از عملگرهای انتگرالی محلی به شکل زیر انجام می‌دهیم:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{K}, p}^A : C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c) \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad F \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v) F(v) \sqrt{|\eta_p^A|} dv, \quad (78)$$

که در آن $C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c)$ فضای نگاشت‌های هموار از \mathbb{R}^d به \mathbb{R}^c را نشان می‌دهد. در کاربرد ما، این نگاشت‌های هموار صرفاً نمایش‌های میدان ویژگی محلی $[Exp_p^* f]^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c$ هستند که از فضاهای مماس در p دیده می‌شوند و توسط تبدیل میدان کرنل به یک بردار ویژگی خروجی $f_{\mathcal{K},p}^A(p) = \mathcal{G}_{\mathcal{K},p}^A([Exp_p^* f]^A)$ در $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{من}} \times c_{\text{من}}}$ می‌شوند. با توجه به کرنل الگوی ما $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{من}} \times c_{\text{من}}}$ ، ما یک الگوی عملگر انتگرالی متناظر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathfrak{I}_K : C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c) \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad F \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} K(\mathfrak{v}) F(\mathfrak{v}) d\mathfrak{v}, \quad (79)$$

که نمایش میدان محلی F را در کرنل الگو K ضرب کرده و سپس حاصلضرب آنها را انتگرال می‌گیرد. توجه داشته باشد که \mathfrak{I}_K به عنوان یک تابع الگو نزوماً نسبت به انتخاب‌های خاص پیمانه‌ها بی‌تفاوت است و بنابراین شامل ضریب حجم چارچوب نمی‌شود. یک طرح اشتراک گذاری وزن کاتولوشنی مستقل از مختصات GM با الزام به اینکه این تابعک الگو با تمام عملگرهای انتگرالی منفرد در هر نقطه و در هر پیمانه موافق باشد، تحمیل می‌شود، یعنی:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{K},p}^X = \mathfrak{I}_K \quad \text{برای هر پیمانه } p \in U^X, \quad (80)$$

که در آن \mathcal{A}^G اطلاع G (ماکسیمال) متناظر با ساختار G در نظر گرفته شده است؛ به معادله (۲۵) مراجعه کنید. این معادل اشتراک گذاری مستقیم کرنل الگوی محلی طبق زیر است:

$$\mathcal{K}_p^X = \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^X|}} \quad \text{برای هر پیمانه } p \in U^X, \quad (81)$$

که در آن ضریب نرمال‌سازی «چگالی کرنل» را به اندازه حجم چارچوب مرجع $\sqrt{|\eta_p^X|}$ کاهش می‌دهد. همانطور که در ادامه بحث می‌شود، این نرمال‌سازی برای همودایی تحت گروه‌های تقارن غیر حافظ حجم مهم است.

ما میدان‌های کرنلی را که توسط یک کرنل مشترک K طبق معادله (۸۱) پارامتری شده‌اند، به عنوان میدان‌های کرنل کاتولوشنی GM می‌نامیم. الزام همزمان برای اشتراک گذاری وزن و استقلال از مختصات منجر به یک قید همودایی بر روی کرنل‌های الگو می‌شود. برای استخراج این قید، اشتراک گذاری کرنل در معادله (۸۱) را در قانون تبدیل کرنل در معادله (۷۲) $(G \text{-راهبری دهیم})$ ، که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{1}{\sqrt{|\eta_p^B|}} K(g_p^{BA} \mathfrak{v}) = \frac{1}{\sqrt{|\eta_p^A|}} \rho_{\text{من}}(g_p^{BA}) \cdot K(\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\text{من}}(g_p^{BA})^{-1}. \quad (82)$$

از آنجایی که حجم‌های چارچوب‌های مرجع مختلف با $\sqrt{|\eta_p^A|}$ مرتبط هستند و از آنجایی که قانون تبدیل باید برای پیمانه‌های دلخواه مرتبط با G برقرار باشد، این قید G -راهبری را ایجاد می‌کند^{۷۷}

$$K(g \mathfrak{v}) = \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{من}}(g) \cdot K(\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\text{من}}(g)^{-1} \quad \forall \mathfrak{v} \in \mathbb{R}^d, g \in G. \quad (83)$$

بر روی کرنل‌های الگو، همانطور که توسط [۶] ثابت شده است، این قید نیازمند آن است که کرنل‌های الگو عملگرهای نمایش [۶] باشند (تعیین‌هایی از عملگرهای تانسوری کروی در مکانیک کواترномی)، از نظر نموداری، یک کرنل G -راهبری K باید جایجاً زیر را برآورده کند:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{K} & \mathbb{R}^{c_{\text{من}} \times c_{\text{من}}} \\ g \downarrow & & \downarrow \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{من}}(g) [\cdot] \rho_{\text{من}}(g)^{-1} \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{K} & \mathbb{R}^{c_{\text{من}} \times c_{\text{من}}} \end{array} \quad (84)$$

برای هر $g \in G$. توجه داشته باشید که ضریب دترمینان معکوس $|\det g|$ در قانون تبدیل کرنل باعث می‌شود که آن مانند یک (۱)-چگالی ماتریس-مقدار تبدیل شود؛ برای جزئیات بیشتر به جدول ۲ مراجعه کنید. به طور شهودی، کرنل‌های G -راهبری دقیقاً آن کرنل‌هایی هستند که می‌توانند نسبت به چارچوب‌های مرجع دلخواه مرتبط با G به اشتراک گذاشته شوند بدون اینکه انتخاب خاص پیمانه بر نتیجه تأثیر بگذارد.^{۷۸} بنابراین، ابهام

^{۷۷} برخلاف کارهای قلبی [۶]، این قید شامل ضریب $|\det g|$ است. این ضریب در آن کارها ظاهر نشد زیرا همه آنها گروه‌های ساختاری متعامد d (یا زیرگروه‌های آن) را در نظر گرفته بودند که برای آنها ضریب دترمینان صفر می‌شود.

^{۷۸} قید G -راهبری را در می‌توان به صورت $\rho_{\text{من}}(g)^{-1} \cdot \rho_{\text{من}}(g) \cdot K(g^{-1} \mathfrak{v}) = |\det g|^{-1} \rho_{\text{من}}(g) \cdot \rho_{\text{من}}(g) \cdot K(g^{-1} \mathfrak{v})$ با $\mathfrak{v} \in \mathbb{R}^d, g \in G$ تبدیل کرنل‌های G -راهبری پایاها تحت عمل پیمانه در سمت راست مستند. یک کرنل G -راهبری، با پایا بودن تحت تبدیلات پیمانه، منجر به همان کرنل بدون مختصات \mathcal{K}_p می‌شود، زمانی که نسبت به هر چارچوب مرجعی در $G_p M$ به اشتراک گذاشته شود.

هم ترازی کرnel‌ها \square که انگیزه اصلی این کار بود \square با اشتراک گذاری وزن اضافی بر روی تمام چارچوب‌های مرجع معادل (تمام پیمانه‌ها) در ساختار G در نظر گرفته شده GM حل می‌شود.

	\mathcal{K}_p^X	K	\mathcal{K}_p^X	شیء
	$\sqrt{ \eta^X }$	$F \left[\text{Exp}_p^* f \right]^X$		
	$d\mathfrak{v} \wedge dv^X$			
چگالی	۱	-۱	۰	
				۸

جدول ۲: مروی بر توانهای چگالی s برای اشیاء مختلف در گیر در تبدیلات میدان کرnel عمومی و کانولوشن‌های GM . عبارت مختصاتی یک s -چگالی با ضرب $| \det g |^s$ تبدیل می‌شود و قی مختصات از طریق $G \in$ تبدیل شوند. یک کرnel ماتریس-مقدار عمومی \mathcal{K}_p^X طبق معادله (۷۶) یک s -چگالی است. همین امر برای میدان‌های ویزگی و پس‌کش‌های آنها نیز صادق است که قوانین تبدیل آنها در معادلات (۲۸) و (۶۸) داده شده است. کل انتگرال‌ده $\int_K \mathcal{K}_p^X(v^X) [\text{Exp}_p^* f]^X (v^X) \sqrt{|\eta^X|} dv^X$ از یک تبدیل میدان کرnel عمومی در معادله (۷۶) نیز یک s -چگالی دیده می‌شود \square توجه داشته باشد که این برای استقلال آن از مختصات، همانطور که در معادله (۷۷) نشان داده شده، ضروری است. از آنجایی که الگوی عملگر انتگرالی \int_K در معادله (۷۹) نسبت به هر انتخاب پیمانه بی‌تفاوت است، شامل ضرب حجم چارچوب $\sqrt{|\eta^X|}$ نمی‌شود. از آنجایی که با این وجود باید مانند عملگرها ای انتگرالی $\mathcal{I}_{\mathcal{K}_p^X}$ که زیربنای تبدیلات میدان کرnel هستند رفتار کند، کل انتگرال‌ده $\int_K K(\mathfrak{v}) F(\mathfrak{v}) d\mathfrak{v}$ از (F) ملزم به بودن یک s -چگالی است. این امر مستلزم آن است که خود کرnel‌های الگوی مشترک K مانند $(1)-\mathcal{K}_p^X$ را تبدیل شوند، که در قید G -راهبری در معادله (۸۳) معنکس شده است. توجه داشته باشد که این قانون تبدیل کرnel‌های الگو برای G محظی کانولوشن‌های GM اکیداً صروری است اگر ویزگی‌های خروجی باید مانند چگالی‌های با وزن \mathfrak{v} تبدیل شوند؛ به معادله (۸۹) مراجعه کنید. برای دیدگاهی جایگزین، خواننده علاقه‌مند را به نتیجه ۱ در [۴] ارجاع می‌دهیم، جایی که ضرب در مینیان از اندازه‌های هار روی گروه‌های لی استخراج می‌شود.

قبل از پرداختن به کانولوشن‌های GM ، در مورد فضای کرnel‌های G -راهبر توضیح می‌دهیم. توجه داشته باشد که مجموعه

$$\mathcal{K} := \left\{ K: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \right\}. \quad (85)$$

کرnel‌های عمومی، یعنی نه لزوماً هموردا، با مجهر شدن به جمع و ضرب اسکالار استاندارد روی $\mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ یک فضای برداری تشکیل می‌دهد. از آنجایی که قید G -راهبری در معادله (۸۳) خطی است، فضای کرnel را به یک زیرفضای خطی محدود می‌کند:

$$\mathcal{K}_{\rho_{\text{out}}, \rho_{\text{in}}}^G := \left\{ K: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \mid K(g\mathfrak{v}) = \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{out}}(g) \cdot K(\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\text{in}}(g)^{-1} \quad \forall \mathfrak{v} \in \mathbb{R}^d, g \in G \right\}. \quad (86)$$

بنابراین می‌توان برای یک پایه از کرnel‌های G -راهبر راه حلی یافت که کانولوشن GM را می‌توان بر حسب آن پارامتری کرد. در حالی که این فضا در ثئوری معمولاً بی‌نهایت بعدی است، در عمل اغلب گستره می‌شود، به طوری که در نهایت با یک پایه متأثی $\{K_1, K_2, \dots, K_N\}$ از کرnel‌های G -راهبر مواجه می‌شویم. سپس یک مجموعه از وزن‌های با مقادیر حقیقی $\{w_1, \dots, w_N\}$ که در طول فرآیند آموزش بهینه‌سازی می‌شوند، کانولوشن را با $w_i K_i = \sum_{i=1}^N w_i K_i$ پارامتری می‌کنند. توجه داشته باشد که ابعاد کاهاش‌یافته (زیر) فضای کرnel‌های G -راهبر به معنای بهبود کارایی پارامتر در مقایسه با کانولوشن‌های معمولی است.

بخش ?? به بحث در مورد راه حل‌های تحلیلی نمونه‌ای از فضاهای کرnel همودرای بازتابی برای نمایش‌های گروهی مختلف گروه بازتاب \mathcal{R} می‌پردازد. کرnel‌های حاصل که با انواع مختلفی از تقارن‌های بازتابی مشخص می‌شوند، در جدول ?? به تصویر کشیده شده‌اند.

مثال‌های بیشتری را می‌توان در ادبیات مربوط به شبکه‌های عصبی کانولوشنی راهبر یافت: یک راه حل تحلیلی برای قید فضای کرnel برای گروه ساختاری متعدد خاص $\text{SO}(3)$ در سه بعد و نمایش‌های تحویل‌نپذیر آن توسعه ؟ [ارائه شد. ؟] این رویکرد را برای پوشش نمایش‌های گروهی دلخواه G دادند و قید فضای کرnel را برای هر نمایشی از ۲ و تمام زیرگروه‌های آن $\leq G$ حل کردند \square یک پیاده‌سازی در <https://quva-lab.github.io/e2cnn/api/e2cnn.kernels.html> نیز حل کرد، همانطور که توسعه ؟ [توضیح داده شده است. یک استراتژی راه حل کلی تر، که برای گروه‌های ساختاری دلخواه G (و بنابراین همه موارد ذکر شده در بالا) کاربرد دارد، توسعه ؟ [پیشنهاد شد. این راه حل قضیه کلاسیک ویگنر-اکارت ؟ ؟ ؟ ؟] را به یک قضیه ویگنر-اکارت برای کرnel‌های G -راهبر تعیین می‌دهد، که کرnel‌ها را بر حسب توابع پایه هارمونیک، ضرایب کلیش-گوردان و اندومورفیسم‌های نمایش‌ها (عناصر ماتریسی کاهاش‌یافته تعیین یافته) بیان می‌کند. ما برای مروی دقيق‌تر بر کارهای قبلی و مرتبط با کرnel‌های راهبر به [؟] ارجاع می‌دهیم.

کانولوشن‌های مستقل از مختصات \square : با داشتن یک کرnel الگوی G -راهبر $K \star GM$ با این کرnel به عنوان $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{out}}, \rho_{\text{in}}}^G$ کانولوشن GM متاخر تعریف می‌شود، که برای هر نقطه $p \in M$ و هر پیمانه ψ در $\mathcal{K}_p^X = K / \sqrt{|\eta^X|}$ صدق می‌کند. با قرار دادن میدان کرnel کانولوشنی GM در معادله (۷۶)، یعنی تبدیل میدان کرnel، عبارت مختصاتی کانولوشن GM به صورت زیر ساده می‌شود:

$$f_{\text{out}}^A(p) = [K \star f_{\text{in}}]^A(p) := \int_{\mathbb{R}^d} K(\mathfrak{v}) [\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^A(\mathfrak{v}) d\mathfrak{v} = \mathcal{I}_K([\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^A). \quad (87)$$

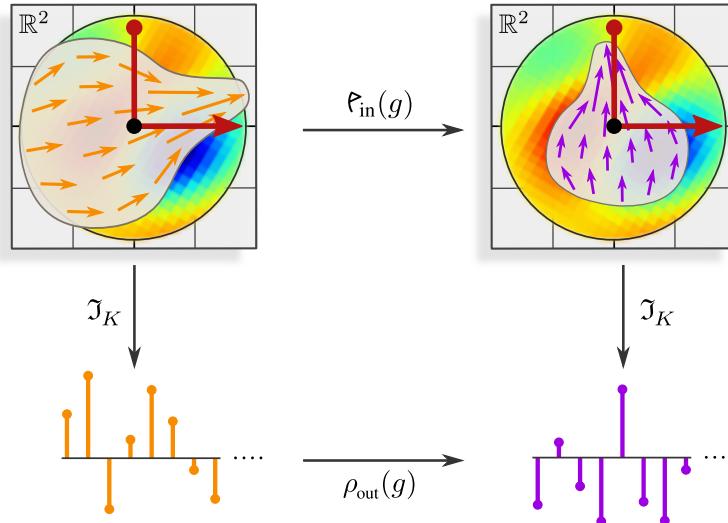
بنابراین، این به سادگی با تطبیق پس کش انتقال دهنده $\text{Exp}_p^* f_{00}^A$ از میدان ویژگی در یک پیمانه دلخواه انتخاب شده ψ با کرنل کانولوشن مستقل از پیمانه K به دست می آید. بنابراین کانولوشن های مستقل از مختصات GM به راحتی با ۱) انتخاب چارچوب های مرجع دلخواه، ۲) پس کش (و انتقال) میدان های ویژگی به مختصات دهی های فضای مماس و ۳) انقباض آنها در آنجا با یک کرنل G -راهبر (قابل آموزش) پیاده سازی می شوند.

کانولوشن های GM چندین ویژگی تقارنی مربوط را از خود نشان می دهند:

استقلال از مختصات: به عنوان موارد خاصی از تبدیلات میدان کرنل، کانولوشن های GM به طور (غیرفعال) مستقل از مختصات هستند، یعنی معادله (۷۷) در مورد آنها صدق می کند.

هموردایی ایزومنتری سراسری: آنها تحت عمل فعال و سراسری ایزومنتری های حافظ ساختار G در Isom_{GM} بر روی میدان های ویژگی هموردا هستند. بخش های ۳.۴ و به ویژه ۸ این ویژگی را به تفصیل موردن بحث قرار می دهد.

هموردایی G محلی: الگوی عملگر انتگرالی \mathcal{J}_K به دلیل G -راهبری K خود G -هموردا است. بنابراین، هر تبدیل یک نمایش ییدان ویژگی محلی روی \mathbb{R}^d منجر به تبدیل متناظر بردار ویژگی حاصل خواهد شد؛ به شکل ۱۸ مراجعه کنید. بنابراین، تبدیلات G مستقل الگوهایی که در نقاط مختلف $p_i \in M$ متغیر شده اند، منجر به تبدیلات ویژگی خروجی مستقل در این نقاط می شوند (این فقط در این نقاط برقرار است و نیازمند کرنل هایی با تکیه گاه فشرده است که کل میدان دید آنها طبق تبدیل G تبدیل شود).



شکل ۱۸: هموردایی G محلی الگوی عملگر انتگرالی مشترک \mathcal{J}_K که زیربنای یک کانولوشن $K \star GM$ است. یک تبدیل G از یک نمایش میدان محلی روی \mathbb{R}^d بردارهای ویژگی را از $g^{-1}\mathbb{R}^d$ به \mathbb{R}^d منتقل می کند و آنها را علاوه بر این از طریق (g) تبدیل می کند. در حالی که اولی ویژگی ها را به صورت فضایی جابجا می کند، دومی ضرایب عددی آنها را تبدیل می کند (که در شکل به صورت چرخش و مقیاس بندی بردارهای (مماس) منفرد به تصویر کشیده شده است). اعمال \mathcal{J}_K به هر دو ورودی منجر به بردارهای ویژگی خروجی متفاوتی می شود. با این حال، به دلیل هموردایی G از K ، تضمین می شود که پاسخ های (g) از $\rho_{000}(g)$ مرتبط هستند؛ به معادله (۸۹) مراجعه کنید. بنابراین، یک تبدیل G فعال متناظر از بردار ویژگی خروجی می شود. توجه داشته باشید که هموردایی G از \mathcal{J}_K یک نتیجه مستقیم از G -راهبری K است.

برای دقیق تر کردن نکته آخر، ما تبدیلات G فعال نمایش های میدان ویژگی محلی را در $C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c)$ به صورت زیر تعریف می کنیم^{۶۹}

$$\mathfrak{h}_0 : G \times C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c), \quad F \mapsto \mathfrak{h}_0(g)F := \rho_0(g) \circ F \circ g^{-1}, \quad (88)$$

که در آن فرض می کیم F از نوع ρ_0 است. به طور شهودی، \mathfrak{h}_0 با انتقال فعال بردارهای ویژگی $\rho(g^{-1}\mathbb{R}^d)$ از \mathbb{R}^d به \mathbb{R}^d و تبدیل آنها با $\rho(g)$ بر روی میدان های F عمل می کند^{۷۰} این تعریف «معمولی» تبدیلات فعال میدان های ویژگی F بر روی فضاهای اقلیدسی \mathbb{R}^d است. هموردایی

^{۶۹} $b = \text{Res}_G^{\mathbb{R}^d \times G} \text{Ind}_G^{\mathbb{R}^d \times G} \rho$ به طور رسمی با القای نمایش G ρ به یک نمایش $(\mathbb{R}^d \times G)$ محدود کردن آن به G داده می شود. یک توضیح شهودی از نمایش های القایی و محدود شده را می توان در پیوست ۷۰ از [۶] این موضوع را به طور رسمی تر بررسی می کند.

ادعا شده برای \mathfrak{I}_K به راحتی با اعمال آن به یک ورودی تبدیل شده، و سپس جایگزینی و استفاده از G -راهبری K دیده می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{I}_K(\mathfrak{f}_{\square}(g)F) &= \mathfrak{I}_K(\rho_{\square}(g) \circ F \circ g^{-1}) && (\text{تعريف } \mathfrak{I}_K, \text{ معادله (88)}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \rho_{\square}(g) F(g^{-1}v) dv && (\text{تعريف } K, \text{ معادله (79)}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} K(g\tilde{v}) \rho_{\square}(g) F(\tilde{v}) |\det g| d\tilde{v} && (\tilde{v} = g^{-1}v) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_{\square\square}(g) K(\tilde{v}) F(\tilde{v}) d\tilde{v} && (\text{ـراهبری } K, \text{ معادله (83)}) \\
 &= \rho_{\square\square}(g) \mathfrak{I}_K(F) && (\text{تعريف } K, \text{ معادله (79)}) \tag{89}
 \end{aligned}$$

بنابراین، یک تبدیل فعال یک نمایش میدان ویژگی محلی F روی یک مختصات دهی فضای مماس با (g) ^{۱۰} تضمین می‌کند که منجر به تبدیل بردار ویژگی خروجی حاصل با (g) می‌شود. به عبارت دیگر، ویژگی‌هایی که در ژسته‌های هندسی مختلف مرتبط با G ظاهر می‌شوند، تا یک تبدیل از طریق $\rho_{\square\square}$ پاسخ یکسانی را برمی‌انگیرند. این به طور خلاصه در قالب یک نمودار جابجایی به صورت زیر است:

$$\begin{array}{ccc}
 C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{c\square}) & \xrightarrow{\mathfrak{f}_{\square}(g)} & C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{c\square}) \\
 \downarrow \mathfrak{I}_K & & \downarrow \mathfrak{I}_K \\
 \mathbb{R}^{c\square\square} & \xrightarrow{\rho_{\square\square}(g)} & \mathbb{R}^{c\square\square} \tag{90}
 \end{array}$$

شکل ۱۸ یک تفسیر بصری از این ویژگی همودایی \mathfrak{I} ارائه می‌دهد.

توجه داشته باشد که همودایی تحت تبدیلات G محلی در معادله (۸۹) دقیقاً به قید G -راهبری همانطور که در معادله (۸۳) است، یعنی به طور خاص، با ضریب دترمینان^{۱۱} $|\det g|$ که باعث می‌شود کرنل مانند یک $(-)$ -چگالی تبدیل شود، نیاز دارد. این ضریب به تعریف ما از اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی در معادله (۸۱) با نرمال‌سازی با حجم‌های چارچوب مرجع $\sqrt{|\eta_p^X|}$ برمی‌گردد. بنابراین، اشتراک‌گذاری وزن ساده‌انگارانه‌ای که در ابتدای این بخش ذکر شد، به رفتار تبدیل مطلوب منجر نمی‌شود. به عبارت دیگر: هر دو نسخه ساده‌انگارانه و نرمال‌شده اشتراک‌گذاری کرنل مستقل از مختصات هستند و بنابراین هر دو تحت تبدیلات پیمانه غیرفعال \square به ویژه آنها که حجم چارچوب را تغییر می‌دهند \square به طور سازگار رفتار می‌کنند. با این حال، در مورد اشتراک‌گذاری کرنل ساده‌انگارانه، این امر توسط پایابی عنصر حجم ریمانی $\sqrt{|\eta_p^A|} dv^A = \sqrt{|\eta_p^B|} dv^B$ مراجعت می‌شود. با حذف این ضریب در اشتراک‌گذاری وزن نرمال شده، سازگاری رفتار تبدیل دیگر توسط خود اندازه انتگرال‌گیری تضمین نمی‌شود \square که مستلزم آن است که خود کرنل‌های G -راهبر تغییرات حجم را از طریق ضریب دترمینان توضیح دهد. فقط دومی به تبدیلات فعل تعیین می‌یابد، جایی که فقط میدان ویژگی تبدیل می‌شود، در حالی که اندازه انتگرال‌گیری پایا می‌ماند.

از آنجایی که تعریف ما از کانولوشن‌های GM امکان خمینه‌های ریمانی، ساختارهای \square و انواع میدان دلخواه را فراهم می‌کند، بسیار عمومی است و طیف گسترده‌ای از کارهای مرتبط را پوشش می‌دهد. ما این ادعا در بخش^{۱۲} اثبات می‌کنیم، جایی که بسیاری از CNN‌ها را روی فضاهای آفین اقلیدسی d ، کره S^d و خمینه‌ها یا مشاهی عمومی به عنوان نمونه‌های خاصی از معادله (۸۷) توضیح می‌دهیم. برای یک نمای کلی و طبقه‌بندی این مدل‌ها، به جدول^{۱۳} مراجعه کنید.

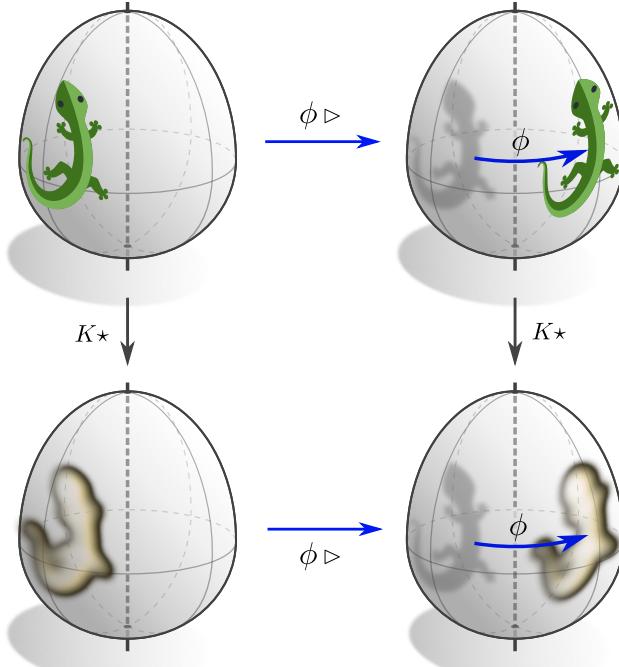
۳.۴ تناوب‌پذیری ایزومتری

با توجه به اینکه یک منفولد تقارن‌های نشان می‌دهد، معمولاً مطلوب است که شبکه‌های عصبی این تقارن‌ها را رعایت کنند، یعنی تحت عمل آن‌ها بر میدان‌های ویژگی تناوب‌پذیر باشد. GM -کانولوشن‌ها طراحی شده‌اند تا Isom_{GM} -تناوب‌پذیر باشند، که به این معنی است که آن‌ها با عمل ایزومتری‌ها در Isom_{GM} بر میدان‌های ویژگی جابجا می‌شوند، همانطور که در شکل ۱۹ بصری‌سازی شده است.^{۱۴} در معادلات، G -کانولوشن K^* تناوب‌پذیر است زمانی که رابطه

$$K \star (\phi \triangleright f_{\square}) = \phi \triangleright (K \star f_{\square}) \quad \forall \phi \in \text{Isom}_{GM} \tag{91}$$

را برای هر میدان ورودی ممکن \square برآورده کند، یعنی زمانی که نمودار زیر جابجا باشد:

^{۱۰} به یاد داشته باشد که عمل بر میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات GM تنها برای ایزومتری‌های حفظ‌کننده G -ساختار در Isom_{GM} قابل تعریف است. بنابراین حتی امکان تعریف مفهوم تناوب‌پذیری ایزومتری برای ایزومتری‌هایی که تقارن‌های G -ساختار نیستند وجود ندارد. توجه داشته باشد که این بدون از دست دادن کلیت است زیرا همیشه می‌توان گروه ساختار $d = G$ را انتخاب کرد که برای آن $\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M)$ با کل گروه ایزومتری منطبق می‌شود.



شکل ۱۹: گفته می شود یک لایه شبکه تحت ایزومتری تناوب پذیر است زمانی که با عمل آنها بر میدان های ویژگی جابجا می شود. $-GM$ -کانولوشن ها طراحی شده اند تا نسبت به آن ایزومتری های $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ که تقارن های $-G$ -ساختار هستند، تناوب پذیر باشند. در معادلات، کانولوشن K^* تحت عمل ایزومتری ϕ تناوب پذیر است زمانی که رابطه $(\phi \triangleright f_{\square\square}) = \phi \triangleright (K^* \star f_{\square\square})$ برآورده کند. این رابطه توسط انتخابی از میدان ورودی $f_{\square\square}$ برآورده کند. این رابطه توسعه نمودار جابجایی در معادله (۹۲) بصری سازی شده است که تفسیر گرافیکی آن در این شکل نشان داده شده است.

اینکه $-GM$ -کانولوشن ها Isom_{GM} -تناوب پذیر هستند بر این حقایق تکیه دارد که ۱) کرنل ها در کل منفولد به اشتراک گذاشته می شوند، ۲) ایزومتری ها عقب کشی انتقال دهنده میدان های ویژگی را حفظ می کنند و ۳) اینکه Isom_{GM} -تبدیل های گیج با مقدار G را القا می کند که توسط $-G$ -استیریبل بودن کرنل در نظر گرفته می شود.

Creative Commons Attribution 4.0 International
(مارمولک ها تحت مجوز Twitter از اینکه اقتباس شده با مجوز International)

$$\begin{array}{ccccc}
 & f_{\square\square} & \xrightarrow{\phi \triangleright} & \phi \triangleright f_{\square\square} & \\
 \downarrow K^* & & & & \downarrow K^* \\
 f_{\square\square} & \xrightarrow{\phi \triangleright} & \phi \triangleright f_{\square\square} & &
 \end{array} \tag{۹۲}$$

به عنوان اولین قدم به سوی اثبات تناوب پذیری ایزومتری $-GM$ -کانولوشن ها، به یاد بیاورید که آنها به صورت نقطه ای به عنوان انقباض یک کرنل K با عقب کشی انتقال دهنده A $[\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]$ از میدان ورودی $f_{\square\square}$ تعریف می شوند. از آنجا که ایزومتری ها به طور تعریف هندسه ریمانی M را حفظ می کنند، به ویژه نگاشت نمایی ریمانی و انتقال دهنده های لوی-چیویتا را حفظ می کنند؛ به بخش ۴.۱.۸ و شکل ۳۵ مراجعه کنید.^{۳۱} این امر دلالت دارد بر اینکه عقب کشی انتقال دهنده میدان پیش برده $f_{\square\square} \triangleright \phi$ در (p) $\phi \triangleright f_{\square\square}$ با تبدیل گیج القا شده توسعه ایزومتری از عقب کشی انتقال دهنده میدان اصلی $f_{\square\square}$ در p متفاوت خواهد بود، یعنی:

$$[\text{Exp}_{\phi(p)}^*(\phi \triangleright f_{\square\square})]^A = \rho_{\square\square}(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)) \circ [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^{\tilde{A}} \circ g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)^{-1}; \tag{۹۳}$$

مقایسه کنید با معادله (۶۸) و برای فرمول بندی مستقل از مختصات، قضیه ۸.۴

با توجه به این همانی، تناوب پذیری ایزومتری $-GM$ -کانولوشن ها توسعه محاسبه ساده زیر اثبات می شود که به طور اساسی از G -استیریبل بودن کرنل قالب K برای توضیح عمل گیج القا شده توسعه ایزومتری استفاده می کند:

^{۳۱} به طور کلی تر، هر زمان که یک اتصال جایگزین G -سازگار برای انتقال بردارهای ویژگی انتخاب شود، فرض می کنیم این اتصال تحت عمل Isom_{GM} ناوردا باشد؛ به بخش ۴.۱.۸ مراجعه کنید. این فرض برای همه مدل هایی که در بررسی ادبیات در بخش ۴.۱.۸ پوشش داده شده اند، برآورده می شود.

$$\begin{aligned}
[K \star (\phi \triangleright f_{\square\square})]^A(\phi(p)) &\stackrel{(\textcircled{1})}{=} \int_{\mathbb{R}^d} K(v) [\text{Exp}_{\phi(p)}^*(\phi \triangleright f_{\square\square})]^A(v) dv \\
&\stackrel{(\textcircled{2})}{=} \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \left[\rho_{\square\square}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^{\tilde{A}}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)^{-1}v) \right] dv \\
&\stackrel{(\textcircled{3})}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \left[K(g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \tilde{v}) \rho_{\square\square}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) \right] [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^{\tilde{A}}(\tilde{v}) |\det g_\phi^{A\tilde{A}}(p)| d\tilde{v} \\
&\stackrel{(\textcircled{4})}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \left[\rho_{\square\square\square}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) K(\tilde{v}) \right] [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^{\tilde{A}}(\tilde{v}) d\tilde{v} \\
&\stackrel{(\textcircled{5})}{=} \rho_{\square\square\square}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) \cdot f_{\square\square\square}^{\tilde{A}}(p) \\
&\stackrel{(\textcircled{6})}{=} [\phi \triangleright f_{\square\square\square}]^A(\phi(p)) \\
&\stackrel{(\textcircled{7})}{=} [\phi \triangleright (K \star f_{\square\square})]^A(\phi(p))
\end{aligned} \tag{44}$$

قدم اول از تعریف GM -کانولوشن‌ها در معادله (۸۷) پیروی می‌کند در حالی که قدم دوم تبدیل گیج القا شده را طبق معادله (۹۳) وارد کرد. جایگزینی از \mathbb{G}^{ϕ} به $(p)^{-1}\mathbb{G}$ قسم سوم را توجیه می‌کند. در قسم چهارم G -استیریبل بودن کرنل قالب، یعنی معادله (۸۳)، اعمال می‌شود (معادله (۴۴)) را به یاد یاورید که بیان می‌کند تبدیل‌های گیج القا شده توسط $Isom_{GM}$ دارای مقدار G هستند. نتیجه این است که بردار ویژگی خروجی حاصل توسط تبدیل گیج القا شده تبدیل می‌شود. پس از شناسایی این امر به عنوان ییان مختصاتی پیش‌برد میدان خروجی در معادله (۴۶)، گزگاره پیروی می‌کند. آنچه که همه قدمها برای ایزوومتری‌های دلخواه در GM معتبر هستند، می‌بینیم که GM -کانولوشن‌ها به طور خودکار نسبت به هر ایزوومتری حفظ کننده G -ساختار تناوب‌پذیر هستند. آن‌ها لزوماً نسبت به ایزوومتری‌های عمومی در $Isom(M)$ که ممکن است G -ساختار را رعایت نکنند تناوب‌پذیر نیستند، با این حال، تناوب‌پذیری کامل ایزوومتری برای گروه‌های ساختار متعماد $d = G$ (یا ابر-گروه‌های آن) تضمین شده است.

میدان‌های کرنل ناوردا: تحلیل عمیق تری از تناوب پذیری تبدیل‌های میدان کرنل عمومی را می‌توان در بخش‌های ۲۸ و ۳۸ یافته. نتیجه اصلی این برسی قضیه ۸۸ است که بیان می‌کند تناوب پذیری ایزومنتری یک تبدیل میدان کرنل، ناوردایی ایزومنتری میدان کرنل آن را نتیجه می‌دهد و بالعکس. شکل ۳۶ چنین میدان کرنل ناوردایی را بصری‌سازی می‌کند که ملزم به اشتراک وزن‌ها بر روی مدارات عمل ایزومنتری است. ناوردایی مورد نیاز میدان کرنل از نظر شهرهودی قابل فهم است زیرا تناوب پذیری ایزومنتری مطمئناً نازمند ثابت بودن استنتاج شکله بر روی هر مدار است. این نتیجه انتزاعی تناوب پذیری ایزومنتری GM -کاتولوشن[□] که توسط یک کرنل قالب منفرد و مشترک تعیین می‌شوند[□] تحت ایزومنتری‌ها در $Isom_{GM}$ ناوردا هستند، نتیجه می‌دهد؛ به قضیه ۸.۹ و شکل ۳۶ مراجعه کنید. G -استریبل بودن کرنل قالب بدین ترتیب ناوردایی کرنل‌ها تحت عمل زیرگرهای پایدار کننده گروه ایزومنتری را توضیح می‌دهد.

فضاهاي همگن: در حالی که تفاصیل تناوب پذیری ايزومتری نيازمند آن است که كرnelها بر روی مدارات گروه ايزومتری به اشتراک گذاشته شوند، به طور کلی نيازمند اشتراک وزن کانولوشنی در كل منيفولد نیست. يك استثنای مهم حالت منيفلد هایی است که فضاهاي همگن گروه ايزومتری خود هستند، مانند \mathbb{R}^d یا کره S^d . به طور تعريف، عمل ايزومتری در چنین فضاهاي متعدی است، يعني تنها يك مدار منفرد وجود دارد. در نتيجه، تنها يك كرnel مستقل وجود خواهد داشت که از طريق عمل گروه ايزومتری در كل فضا به اشتراک گذاشته می شود. قضيه ۳۸ ثابت می کند که تبديل های ميدان كرnel تناوب پذير ايزومتری در فضاهاي همگن لزوماً کانولوشن های مستقل از مختصات هستند. اين مشاهده پيوند رسمي بین نظر به ما و كارهای قبلی در مورد شبکه های کانولوشنی در فضاهاي همگن توسيط ؟، ؟ و ؟ بقرار می کند که کانولوشن ها را از طريق تناوب پذيری آنها نسبت به تقارن های سراسری فضا زيرين تعريف می کنند.

تناوب پذیری دیفئومورفیسم: خواننده ممکن است تعجب کند که آیا امکان کاملاً دیفئومورفیسم تناوب پذیر کردن های ۱۰۰٪ مستقل از مختصات ما موجود دارد یا نه. همانطور که به راحتی می توان دید، عملیات نقطه‌ای از بخش ۱.۴، یعنی $\text{_____} \times 1$ ، بایاس‌ها و غیرخطی‌ها، از قبل دیفئومورفیسم تناوب پذیر هستند. به طور خاص، بگذراید

$$\text{Diff}_{GM} := \left\{ \phi \in \text{Diff}(M) \mid [\phi_*(e_i)]_{i=1}^d \in GM \quad \forall [e_i]_{i=1}^d \in GM \right\} \leq \text{Diff}(M) \quad (45)$$

زیرگروه دیفیومورفیسم‌های حفظ کننده G -ساختر باشد، یعنی آنالوگ معادله (۴۲) بدون نیاز به اینکه ϕ ایزو-متری باشد. مشابه معادله (۴۴) و قضیه ۸.۳:

$$\phi \in \text{Diff}_{GM} \iff g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \in G \quad \forall p \in M. \quad (46)$$

G -تناوب پذیری توابع قالب نقطه‌ای مشترک تضمین خواهد کرد که آن‌ها با این تبدیل‌های گیج القا شده توسط Diff_{GM} جابجا شوند \square و بنابراین با خود عمل دیفیوورفیسم فعال.

از طرف دیگر، GM -کانولوشن‌ها با کرنل‌های گسترده فضایی، به طور کلی نسبت به دیفیوورفیسم‌ها تناوب پذیر نیستند. دلیل این امر آن است که عقب کشی انتقال‌دهنده f بر نگاشت‌های نمایی تکیه می‌کند که ذاتاً ساختارهای ریمانی هستند که با دیفیوورفیسم‌ها جابجا نمی‌شوند. با اینکه حال، از آنجا که کرنل‌ها G -استریل هستند، تناوب پذیری Diff_{GM} باید در حد صفر رفن رشته‌یانی کرنل همچنان برقرار باشد. با توجه به اینکه کرنل‌های کانولوشن در کاربردهای معمول یادگیری عمیق کاملاً کوچک هستند، تناوب پذیری دیفیوورفیسم باید در عمل تقریباً برقرار باشد.

تناوب پذیری آفین: فضاهای اقلیدسی حالت خاصی را تشکیل می‌دهند \square زیرا امکان GM -کانولوشن‌هایی را فراهم می‌کنند که تحت عمل گروه‌های آفین $\text{Aff}(G)$ تناوب پذیر هستند. اینکه چنین است به این حقیقت تکیه دارد که نگاشت نمایی در فضاهای اقلیدسی نه تنها با عمل ایزومنتری ها بلکه به طور کلی تر با تبدیل‌های آفین جابجا می‌شود. تناوب پذیری گروه آفین GM -کانولوشن‌های اقلیدسی در بخش \square ثابت شده است.

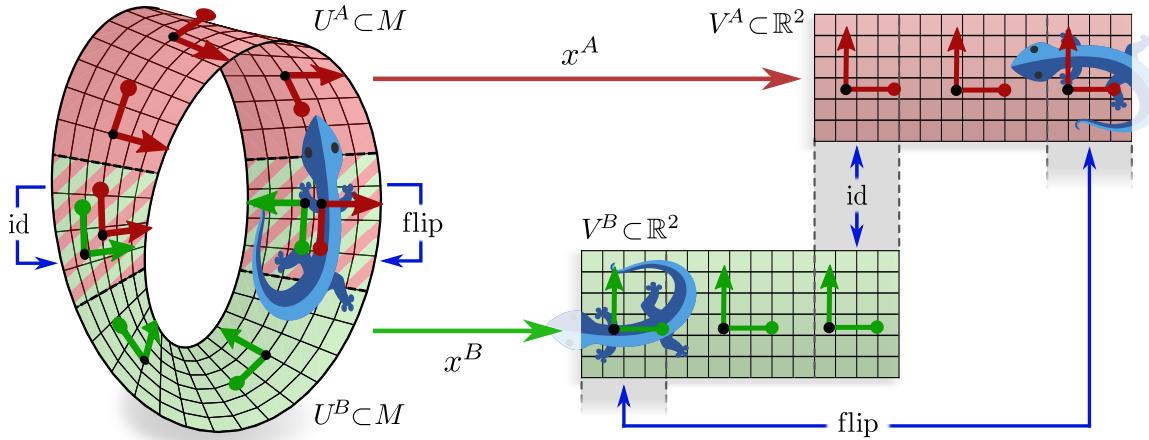
۵ مدل اسباب بازی: کانولوشن‌های موبیوس هموردای بازتابی

برای ملموس تر کردن ملاحظات نظری در بخش‌های قبل، آنکوون به یک کاربرد نمونه می‌پردازیم. کانولوشن‌های GM روی نوار موبیوس، با اینکه اهمیت عملی فوری ندارند، یک مدل اسباب بازی مناسب هستند زیرا هندسه و نظریه نمایش در گیر در آن به طور خاص ساده هستند. به دلیل عدم جهت‌گیری آن، چار چوب‌های مرچ را فقط می‌توان تا حد بازتاب‌ها به صورت (هموار) ارجح دانست. همانطور که انتظار می‌رود، CNN‌های مستقل از مختصات، که توابع الگوی هموردای بازتابی را اعمال می‌کنند، از یک پیاده‌سازی ساده و ابسطه به مختصات بهتر عمل می‌کنند. علاوه بر این، نشان داده می‌شود که آنها تحت عمل گروه ایزومنتری نوار موبیوس هموردا هستند.

بعش بعدی ۱.۵ به بحث در مورد هندسه نوار موبیوس مسطح می‌پردازد. به دلیل پیچش آن، گروه ساختار آن را نمی‌توان بیشتر از گروه بازتاب $G = \mathcal{R}$ کاهش داد، به طوری که باید یک اطلس \mathcal{R} از گیج‌ها را همانطور که در شکل ۲۰ به تصویر کشیده شده است، در نظر گرفت. گروه ایزومنتری توسط دوران‌ها در امتداد نوار داده می‌شود و تبدیلات گیج \mathcal{R} -مقدار را القا می‌کند. میدان‌های ویژگی $\mathcal{R}M$ -مستقل از مختصات که برخی از آنها در بخش ۲.۵ معرفی شده‌اند، لزوماً باید مطابق با نمایشی از گروه بازتاب تبدیل شوند. بخش \square عملیات شبکه کانولوشنی مستقل از جهت‌گیری را مورد بحث قرار می‌دهد. این بخش به طور خاص مفهوم کرنل‌های G -راهنر را روشن می‌کند اما بایاس‌ها و غیرخطی‌های هموردای بازتابی را نیز پوشش می‌دهد. یک پیاده‌سازی عددی از خانواده مدل پیشنهادی در بخش \square مورد بحث و ارزیابی قرار می‌گیرد. کد به صورت عمومی در آدرس <https://github.com/mauriceweiler/MobiusCNNs> در دسترس است.

۱.۵ هندسه نوار موبیوس

خمینه M مورد نظر، نوار موبیوس مسطح با مرز است که در شکل ۴ (راست) نشان داده شده است. می‌توان آن را به گونه‌ای تصور کرد که با گرفتن یک زیرمجموعه مستطیلی $[0, Y] \times [0, X]$ از \mathbb{R}^2 و چیزی‌اند دو انتهای متقابل به روی پیچ خورده ساخته شده است. نوار موبیوس که این‌گونه تعریف شده، متريک کانوني \mathbb{R}^2 را به اirth می‌برد که به آن یک ساختار ریمانی می‌بخشد. این متريک به طور خاص یک اتصال لوی-چبیتا و در نتیجه نگاشت‌های نمایی و انتقال‌دهنده‌های موازی را مشخص می‌کند که در ادامه بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرند.



شکل ۲۰: هندسه مسطح نوار موبیوس امکان وجود زیرمجموعه‌های محلی را فراهم می‌کند که می‌تواند به صورت ایزومنتریک با زیرمجموعه‌های متاظر \mathbb{R}^2 شناسایی شوند. ما یک اطلس ایزومنتریک را ثابت می‌کنیم که شامل دو چارت x^A و x^B روی U^A (قمز) و U^B (سبز) است که کل نوار را پوشش می‌دهند. گیج‌های $\psi_p^X := \hat{dx}_p^X : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d$ به عنوان دیفرانسیل‌های چارت القا می‌شوند. به دلیل پیچش نوار موبیوس، تابع گذار g_p^{BA} در یکی از نواحی همپوشانی بدینهی خواهد بود، در حالی که ناحیه دیگر لزوماً بین گیج‌ها از طریق بازتاب‌ها s گذار خواهد کرد. بنابراین، اطلس انتخاب‌شده از چارت‌ها یک اطلس \mathcal{R} را ایجاد می‌کند که شامل دو چارچوب بازتاب شده در هر نقطه از M است. هر یک از چارت‌های یک میدان چارچوب هموار محلی را القا می‌کند که توسط پایه‌های مخصوصی x^i $i=1, \dots, d$ داده می‌شود. بازتاب در تابع گذار در یک همپوشانی، به صورت بازتاب چارچوب‌ها نشان داده می‌شود.

(مارمولک‌ها با مجوز Creative Commons Attribution 4.0 International با تشکر از توییتر اقبال‌شده‌اند.)

اولین سوالی که هنگام ساخت یک CNN مستقل از مختصات باید به آن پاسخ داد این است که انتخاب چارچوب‌های مرتع تا چه حد مبهم است. با توجه به متريک ريماني روی نوار، می‌توانيم توجه خود را به چارچوب‌های معتماد محدود کنیم. علاوه بر اين، می‌توان یکی از دو جهت در امتداد نوار را برای رفع ابهام (هموار) دوران چارچوب‌های مرتع با هم تراز کردن محورهای اول آنها با اين جهت، مشخص کرد. اين کار ما را با ابهام دست‌ساني چارچوب مواجه می‌کند، که دو جهت گيری آن متاظر با دو جهت ممکن محور دوم چارچوب عمود بر نوار است. نوار موبیوس به عنوان یک خمينه غرقاً جهت گيری، يك انتخاب هموار (يا حتى پيوسته) سراسري از چارچوب را نمي‌پذيرد. برای به دست آوردن شهودی از اين گزاره، تلاش برای ساخت يك میدان چارچوب هموار را با انتخاب يك چارچوب دلخواه در يك موقعیت تصادفی و گسترش هموار اين انتخاب بر روی کل نوار در نظر بگيريد. پس از يك دور كامل حول نوار، چارچوب‌های ساخته شده به ناچار نیست به چارچوب‌های اولیه بازتاب خواهد شد و بنابراین با همواري مورد نظر در تضاد خواهد بود. بنابراین از نظر توپولوژيکي غيرممکن است که يك ساختار $\{e\}$ ، يعني يك میدان چارچوب هموار سراسري، بر روی نوار موبیوس تعریف کنیم. بنابراین ما يك گروه ساختار کاهش ناپذير باقی می‌مانیم:

$$G = \mathcal{R} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad (97)$$

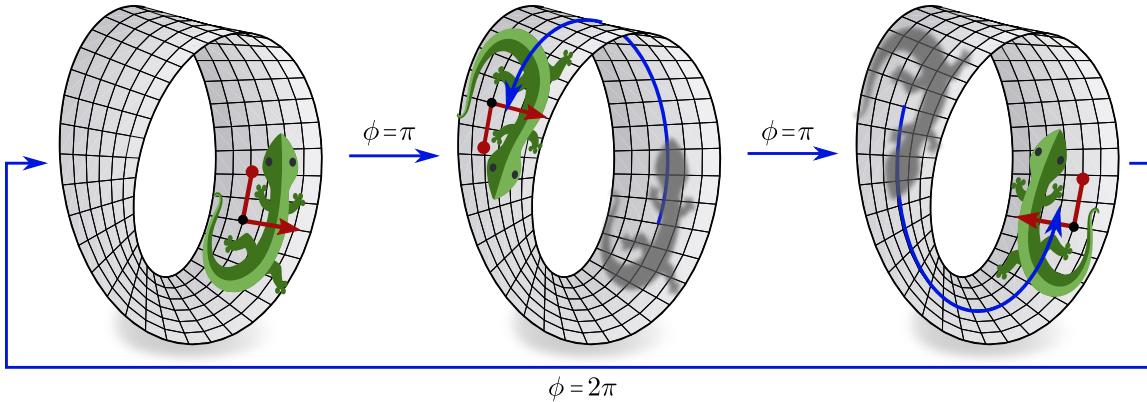
که بازتاب چارچوب‌ها را مدل می‌کند. گروه بازتاب تنها شامل دو عنصر است، همانی e و بازتاب (回転) s ، که طبق جدول ضرب ساده زیر ترکیب می‌شوند:

$$\begin{array}{c|cc} s & e \\ \hline s & e & e \\ e & s & s \end{array} \quad (98)$$

تنها گزاره غیربدینهی در این جدول این است که دو بازتاب یکدیگر را ختنی می‌کنند، يعني $e = e^{-1} = s^{-1}$. با توجه به کاهش ناپذيری گروه ساختار \mathcal{R} ، ما در ادامه باید ساختار \mathcal{R} -متاظر \mathcal{RM} را در نظر بگیریم که شامل دو چارچوب با دست‌ساني مخالف در هر نقطه از نوار موبیوس است.

برای کد گذاري میدان‌های ویژگی \mathcal{RM} -مستقل از مختصات هموار روی M ، باید یک اطلس \mathcal{R} مشخص کرد که شامل گیج‌های \mathcal{R} -مرتب است که کل نوار را پوشش می‌دهند. ما انتخاب می‌کنیم که این کار را با ثابت کردن یک اطلس از چارت‌ها انجام دهیم:

$$x^X : U^X \rightarrow V^X \subset \mathbb{R}^4 \quad (99)$$



شکل ۲۱: تصویری از گروه ایزومنتری‌های حافظ ساختار \mathcal{R} از نوار موبیوس، که با (2) $\text{Isom}_{\mathcal{RM}}$ ایزومنور است. این گروه شامل تمام دوران‌ها در امتداد نوار است. به دلیل پیچش، یک دوران به اندازه 2π یعنی یک بار به دور نوار، هنوز آن را به خودش باز نمی‌گرداند بلکه منجر به یک بازتاب می‌شود. پس از یک دور دوم، یعنی یک دوران کلی 4π ، نوار به خودش باز می‌گردد. تبدیلات گیج القا شده مقادیری در \mathcal{R} می‌گیرند.
 (مارمولک‌ها با مجوز Creative Commons Attribution 4.0 International با تشکر از توپیتر افیاس شده‌اند).

که نوار را پوشش می‌دهند، و سپس گیج‌ها را از آن القا می‌کنیم. شکل ۲۰ چنین اطلاعی را به تصویر می‌کشد که شامل دو چارت x^A و x^B روی U^A (قرمز) و U^B (سبز) است که دو نیمه همپوشان نوار را به صورت ایزومنتریک به نواحی مستطیلی متناظر از \mathbb{R}^2 نگاشت می‌کنند. همانطور که در پیوست \S توضیح داده شده است، چارت‌ها گیج‌های را القا می‌کنند که توسط دیفرانسیل‌های چارت داده می‌شوند، یعنی:

$$\psi_p^X := \hat{d}x_p^X : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{and} \quad p \in U^X \quad X = A, B. \quad (100)$$

در این صورت توابع گذار با ژاکوبیان $g^{BA} = \frac{\partial x^B}{\partial x^A}$ منطبق هستند. به دلیل پیچش، نگاشت‌های گذار در یکی از دو ناحیه همپوشان همگی بدیهی هستند، یعنی $e = g_p^{BA} = e$ و در انتهای دیگر لزوماً بازتاب شده هستند، یعنی $g_p^{BA} = s$. بنابراین اطلاع القا شده از گیج‌ها در واقع به عنوان یک اطلاع \mathcal{R} شناسایی می‌شود. میدان‌های چارچوب هموار محلی متناظر با گیج‌ها، که از چارت‌های مختصاتی مشتق شده‌اند، فقط پایه‌های مختصاتی معمول هستند، یعنی چارت‌چوب‌های $[e_i^X]_{i=1}^d$ در $p \in U^X$ توسط $\left[\frac{\partial}{\partial x_i^X} \right]_{|p}^d$ داده می‌شوند. از آنجا که چارت‌ها ایزومنتریک هستند، میدان چارچوب القا شده به طور خودکار متuumad است. با این حال، دو ناحیه مستطیلی V^A و V^B در \mathbb{R}^2 باید نسبت به یکدیگر چرخانده شوند تا یک اطلاع \mathcal{R} و یک ساختار متناظر \mathcal{RM} را القا کنند.

باید تأکید کنیم که رویکرد القای گیج‌ها از طریق چارت‌های مختصاتی اکیداً ضروری نیست \square این فقط یک گزینه مناسب است زیرا نوار موبیوس مسطح به صورت محلی با نواحی از \mathbb{R}^2 به روشنی ایزومنتریک شناسایی می‌شود. این امر بعداً به ما امکان می‌دهد تا شبکه‌های نمونه برداری منظم را از \mathbb{R}^2 مانند شبکه پیکسلی \mathbb{Z}^2 به شبکه‌های نمونه برداری منظم روی نوار منتقل کنیم. از آنجا که این کار برای خمینه‌هایی که به صورت محلی مسطح نیستند، مانند مش‌ها در گرافیک کامپیوترا، امکان پذیر نیست، بیشتر پیاده‌سازی‌ها روی خمینه‌های عمومی (یا مش‌ها) مختصات را بالافاصله به فضاهای مماس تخصیص می‌دهند؛ به بخش \S مراجعه کنید.

اتصال کانونی لوی-چیویتا روی نوار موبیوس یک مفهوم انتقال موازی بردارهای مماس را تعریف می‌کند. از آنجا که نوار به صورت محلی با صفحه \mathbb{R}^2 ایزومنتریک است، این انتقال را می‌توان در تکه‌های محلی به عنوان مسطح کردن این تکه‌ها به یک صفحه و حرکت دادن بردارها طبق معمول روی \mathbb{R}^2 در ک کرد. اگر هیچ تکه واحدی نتواند مسیری γ را پوشش دهد، یک روش باز وجود خواهد داشت به طوری که انتقال کامل با دنباله‌ای از انتقال دهنده‌ها بر روی تکه‌های محلی توضیح داده می‌شود. به راحتی می‌توان دید که انتقال نسبت به چارت‌چوب‌های اطلاع \mathcal{R} انتخاب شده، مقادیری $g_\gamma^{A\bar{A}}$ در گروه بازتاب \mathcal{R} خواهد گرفت. این بدان معنی است که اتصال لوی-چیویتا با \mathcal{RM} سازگار با \mathcal{R} است. بنابراین، انتقال دهنده‌های خوش تعریف $(g_\gamma^{A\bar{A}})$ از بردارهای ویژگی \mathcal{R} -مربط را ایجاد می‌کند.

گروه ایزومنتری‌هایی که ساختار \mathcal{R} را حفظ می‌کنند، شامل تمام دوران‌هایی است که نوار را در امتداد خودش جابجا می‌کنند. توجه داشته باشید که یک دوران به اندازه 2π به دور نوار، با همانی مطابقت ندارد بلکه نوار را به صورت بازتاب شده روی خودش نگاشت می‌کند. تنها یک دوران به اندازه 4π یعنی دو دور کامل، نوار را به خودش باز می‌گرداند.^{۳۳} عمل گروه ایزومنتری بر روی خمینه و بر روی چارت‌چوب‌های مرجع در شکل ۲۱ به تصویر کشیده شده است. نسبت به مختصات، عمل ایزومنتری تبدیلات گیج \mathcal{R} -مقدار را القا خواهد کرد.

^{۳۳} بنابراین دیده می‌شود که نوار موبیوس استوانه را به عنوان پوشش مضاعف خود دارد.

۲.۵ میدان‌های ویژگی مستقل از جهت‌گیری

اصل کوواریانس ایجاد می‌کند که میدان‌های ویژگی روی نوار موبیوس \mathcal{R} -مستقل از مختصات باشند، یعنی باید به طور معادل نسبت به چارچوب‌های هر یک از دو دست‌سانی قابل بیان باشند. بنابراین آنها با انتخابی از یک نمایش گروهی $(c) : \mathcal{R} \rightarrow \text{GL}(1)$ مشخص می‌شوند، که تبدیل بردارهای ویژگی عددی را هنگام جابجایی بین دو جهت گیری مشخص می‌کند. ما در ادامه چند انتخاب ممکن از چنین انواع میدانی را مورد بحث قرار خواهیم داد. خواندن ممکن است بخواهد بررسی کند که نمایش‌های پیشنهادی در واقع همومورفیسم‌های گروهی هستند و در $\rho(g)\rho(h) = \rho(g)\rho(h)$, $\forall g, h \in \mathcal{R}$ صدق می‌کنند، همانطور که در بخش ۲.۳ و پانوشت ۱۳ خواسته شده است.

پایه‌ای ترین مثال، که برای هر گروه ساختاری وجود دارد، نمایش بدیهی است:

$$\rho_{\text{id}} : \mathcal{R} \rightarrow \text{GL}(1), \quad \begin{aligned} e &\mapsto [1] \\ s &\mapsto [1] \end{aligned} \quad (101)$$

که ماتریس همانی 1×1 را به هر دو عنصر گروه اختصاص می‌دهد. این نمایش، میدان‌های اسکالار $f^A(p) \in \mathbb{R}^1$ را مدل می‌کند که شامل بردارهای ویژگی یک بعدی هستند که مختصات بندی آنها تحت $f^A(p)$ بازتاب‌ها علامت خود را تغییر می‌دهند، یعنی $= \rho_{\text{id}}(s) \cdot f^A(p)$. از آنجا که نمایش بدیهی و نمایش علامت-معکوس یک بعدی هستند، هر دو نمایش‌های تحويل‌ناپذیر \mathcal{R} گروه بازتاب هستند. در واقع، این دو تنها نمایش‌های تحويل‌ناپذیر گروه بازتاب هستند.^{۳۳}

$$\rho_{\text{id}} : \mathcal{R} \rightarrow \text{GL}(1), \quad \begin{aligned} e &\mapsto [1] \\ s &\mapsto [-1] \end{aligned} \quad (102)$$

این نمایش، ماتریس همانی منفی 1×1 را به بازتاب‌ها اختصاص می‌دهد و بنابراین میدان‌های شباهنگال را توصیف می‌کند، یعنی میدان‌های ویژگی یک بعدی $f^A(p) \in \mathbb{R}^1$ که ضرایب عددی آنها تحت بازتاب‌ها علامت خود را تغییر می‌دهند، یعنی $= \rho_{\text{id}}(s) \cdot f^A(p)$. از آنجا که نمایش بدیهی و نمایش علامت-معکوس یک بعدی هستند، هر دو نمایش‌های تحويل‌ناپذیر \mathcal{R} گروه بازتاب هستند. در واقع، این دو تنها نمایش‌های تحويل‌ناپذیر گروه بازتاب هستند.

از آنجا که \mathcal{R} یک گروه متناهی است، دارای یک نمایش منظم متناهی-بعدی (دو-بعدی) است:

$$\rho_{\text{id}} : \mathcal{R} \rightarrow \text{GL}(2), \quad \begin{aligned} e &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ s &\mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (103)$$

که عناصر گروه را با ماتریس‌های جایگشت نمایش می‌دهد. بنا به تعریف، نمایش منظم جایگشت عناصر گروه در \mathcal{R} را هنگام عمل بر روی خودشان مدل می‌کند. این را با ستون‌های جدول ضرب در معادله (۹۸) مقایسه کنید: ستون میانی را می‌توان ناشی از عمل (e) بر روی ستون سمت چپ در نظر گرفت، در حالی که عناصر جایجا شده گروه در ستون راست با جایگشت توصیف شده توسط عمل (s) بر روی ستون چپ مطابقت دارد. میدان‌های ویژگی منظم $f^A(p) \in \mathbb{R}^2$ از \mathcal{R} به صورت عددی با بردارهای ویژگی دو-بعدی $\rho_{\text{id}}(s) \cdot f^A(p)$ نمایش داده می‌شوند که دو کانال آنها تحت

$$\text{بازتاب‌ها جایجا می‌شوند، یعنی: } \rho_{\text{id}}(s) \cdot f^A(p) = \begin{bmatrix} f^A_{1,1}(p) \\ f^A_{2,1}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^A_{1,2}(p) \\ f^A_{2,2}(p) \end{bmatrix}$$

نمایش منظم تحويل‌ناپذیر است، یعنی شامل دو زیرفضای ناوردای سره است که در این مورد با نمایش بدیهی و علامت-معکوس مطابقت دارند. بنابراین می‌توان آن را به طور معادل به صورت ساخته شده از جمجم مسئتم $\rho_{\text{id}} \oplus \rho_{\text{id}}$ از آن دو نمایش تحويل‌ناپذیر و یک تغییر پایه Q در نظر گرفت:

$$\rho_{\text{id}}(g) = Q (\rho_{\text{id}} \oplus \rho_{\text{id}})(g) Q^\top \quad \text{می‌توان} \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (104)$$

اعتبار این گزاره به راحتی با قرار دادن سمت راست برای هر دو عنصر گروه تأیید می‌شود:

$$Q (\rho_{\text{id}} \oplus \rho_{\text{id}})(e) Q^\top = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \rho_{\text{id}}(e) \quad (105)$$

^{۳۳} گروه بازتاب با گروه دوری $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ از مرتبه دو ایزومنورف است. به خوبی شناخته شده است که نمایش‌های تحويل‌ناپذیر گروه‌های دوری از مرتبه N با ریشه‌های N واحد مطابقت دارند، که برای $2 = N$ فقط $+1$ (بدیهی) و -1 (علامت-معکوس) هستند.

$$Q(\rho_{\text{}} \oplus \rho_{\text{}})(s) Q^\top = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} = \rho_{\text{}}(s) \quad (106)$$

به طور کلی تر، هر نمایش متناهی-بعدی از گروه‌های فشرده (شامل گروه‌های متناهی) به طور کامل قابل تحويل به یک جمع مستقیم از نمایش‌های تحويل ناپذیر است [؟؟؟]. این شان می‌دهد که هر بردار ویژگی کروواریانت، که تحت یک گروه ساختار فشرده تبدیل می‌شود، تا یک تغییر پایه می‌تواند از ویژگی‌های نمایش تحويل ناپذیر ساخته شود. همانطور که در [؟؟] استدلال شده است، در این مورد در واقع امکان کاهش هر عملیات شبکه خطی به عملیات معادل بین میدان‌های نمایش تحويل ناپذیر وجود دارد، که ساخت فضای کرنل‌های G -راهبر را در معادله (۸۶) و بایاس‌های ناوردا را در معادله (۶۳) ساده می‌کند. با این حال، همانطور که در ادامه خواهیم دید، انتخاب خاص پایه از انواع میدان معادل، تأثیر کاملاً قابل توجهی بر عملکرد مدل دارد. دلیل این است که عملیات شبکه غیرخطی به پایه انتخاب شده حساس هستند، یعنی به یک انتخاب خاص از انواع میدان معادل.

بخش ۱۱.۲ میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را بر حسب عبارات مختصاتی آن‌ها نسبت به انتخابی از گیج روی محله‌های محلی $U \subseteq M$ معرفی کرد. از آنجا که وجود گیج‌های سراسری به طور کلی از نظر توبولوژیکی مانع دارد، نمایش‌های مختصاتی سراسری میدان‌های ویژگی به طور کلی وجود ندارند. بخش ۱۱.۲ این مسئله را با تجمع محتوای سراسری میدان‌های ویژگی از عبارات مختصاتی محلی آن‌ها نسبت به اطلاعی از گیج‌های M را پوشش می‌دهند، برطرف کرد. یک جایگزین ظرفیت، تعریف میدان‌های ویژگی سراسری در یک فرمالیسم انتزاعی و مستقل از مختصات بر حسب بندل‌های فیر است. تسهیم‌های بندل امکان بازیابی عبارات مختصاتی محلی میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را فراهم می‌کنند.

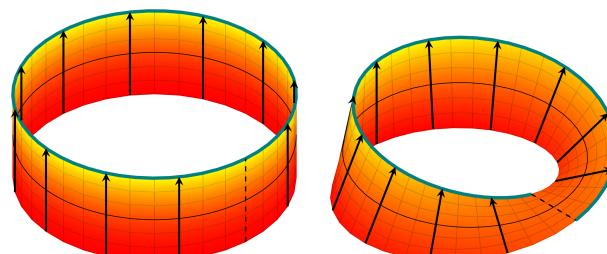
بخش‌های زیر توصیف سراسری و مستقل از مختصات شبکه‌های عصبی و فضاهای ویژگی از بخش ۱۱.۲ را توسعه می‌دهند. بخش ۶ بندل‌های فیر، به ویژه بندل مماس، G -ساختارها و بندل‌های بردار ویژگی G -مرتبه را معرفی می‌کند. عملیات شبکه عصبی مانند تبدیل‌های میدان کرنل و کانولوشن‌های GM در بخش ۷ تعریف می‌شوند. بخش ۸ همودایی ایزومنتری این عملیات را بررسی می‌کند.

۶ بندل‌های مرتبه و میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات

میدان‌های کمیت‌های هندسی بر روی خمینه‌ها به عنوان برش‌هایی از بندل‌های فیر رسمی سازی می‌شوند (معادله (۱۲۵)). هر خمینه هموار به طور طبیعی مجهز به بندل مماس و بندل چارچوب خود است. انتخاب یک G -بندل از چارچوب‌های مرتع است، امکان تعریف بندل‌های بردار ویژگی G -مرتبه را فراهم می‌کند. فضاهای ویژگی شبکه‌های عصبی مستقل از مختصات ما فضاهایی از میدان‌های ویژگی هستند، یعنی برش‌هایی از این بندل‌های بردار ویژگی. بندل‌های فیر به طور کلی در بخش ۱۶ مروء می‌شوند. بخش ۲۶ بندل مماس TM و بندل چارچوب FM را مورد بحث قرار می‌دهد. G -ساختارها، که زیرمجموعه‌هایی از چارچوب‌های مرتع هستند که توسط ساختار هندسی داده شده بر روی خمینه متمایز می‌شوند، در بخش ۳۶ معرفی می‌شوند. G -بندل‌های مرتبه، از جمله بندل‌های بردار ویژگی A ، از G -ساختار ساخته می‌شوند. بخش ۴۶ جزئیات تسهیم‌های محلی (گیج‌ها) TM , FM و A , را ارائه می‌دهد، که مختصات را دوباره معرفی می‌کند و فرمول‌بندی بخش ۳ را بازیابی می‌کند. تبدیل مقابله میدان‌های ویژگی تسهیم شده با ضرایب بردار مماس و چارچوب‌های مرتع تمهیم شده از این رواز فرمول‌بندی مستقل از مختصات از طریق G -بندل‌های مرتبه به دست می‌آید. بخش ۵۶ انتقال‌دهنده‌های موازی بر روی بندل‌های مرتبه را مورد بحث قرار می‌دهد، به ویژه اینکه چگونه آن‌ها یکدیگر را القا می‌کنند. تمام مفاهیم ارائه شده در اینجا در هندسه دیفرانسیل به خوبی ثبت شده‌اند و به راحتی در ادبیات یافت می‌شوند [؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟]. سهم ما ارائه یک توضیح جامع است که بین نظریه ریاضی و کاربرد آن در یادگیری عمیق هندسی پل می‌زنند.

۱.۶ مقدمه‌ای کوتاه بر کلاف‌های تاری

به طور شهودی، یک کلاف تاری را می‌توان فضایی در نظر گرفت که با گرفتن یک فضای دیگر موسوم به فضای پایه، در مورد ما خمینه M ، F ، چسباندن فضای دیگری F موسوم به تار، به هر یک از نقاط آن ساخته می‌شود. یک مثال بدینه، حاصلضرب مستقیم $F \times M$ خواهد بود. با این حال، تارها به طور کلی می‌توانند به روی پیچ خورده به هم متصل شوند، به طوری که کلاف حاصل از نظر توبولوژیکی با یک حاصلضرب متفاوت باشد. به عنوان مثال، فرض کنید فضای پایه دایره $S^1 = M$ و تار، پاره خط $F = [-1, 1]$ باشد. حاصلضرب مستقیم آنها $S^1 \times F = [-1, 1]$ یک استوانه را تشکیل می‌دهد؛ به شکل (۲۲) (چپ) مراجعه کنید. در مقابل، اگر تارها به گونه‌ای چسبانده شوند که پس از یک دور کامل حول دایره، "وارونه" شوند، نوار موبیوس به دست می‌آید که یک کلاف تاری غیربدینه است و از نظر توبولوژیکی با استوانه تفاوت دارد؛ به شکل (۲۲) (راست) مراجعه کنید. ۳۵۳۴ توجه داشته باشید که نوار موبیوس به صورت محلی شبیه به حاصلضرب مستقیم $F \times U$ از یک جزء خطی $S^1 \subseteq U$ با تار F است. همانطور که در ادامه بحث می‌شود، کلاف‌های تاری طبق تعریف همیشه می‌توانند به صورت محلی به حاصلضرب‌های مستقیم بدینه سازی شوند.



شکل ۲۲: یک استوانه و یک نوار موبیوس. هر دو کلاف، دایره S^1 را به عنوان فضای پایه و پاره خط‌های $[-1, 1]$ را به عنوان تار مشترک دارند، با این حال، ساختار توبولوژیکی آنها به واسطه یک پیچش در تارها متفاوت است.

(شکل پایه جلوگیری از تاکله) می‌کنیم که این مثال، نوار موبیوس را به عنوان یک کلاف تاری با فضای پایه (خمینه) S^1 در نظر می‌گیرد. در مقابل، تمام شکل‌های قبلی که شامل نوار موبیوس بودند، آن را به عنوان فضای پایه (خمینه) M برای کانولوشن در نظر می‌گرفتند.

^{۳۵} علاوه بر این، باید اشاره کنیم که پیکان‌های نشان داده شده در شکل فقط برای تأکید بر پیچش در نوار موبیوس هستند. آنها به معنای جهت چسباندن مانند نمودارهای چسباندن نیستند.

ما به کلافهای تاری علاقه مندیم زیرا آنها امکان توصیف سراسری

میدان‌ها روی خمینه‌ها را فراهم می‌کنند. به عنوان مثال، یک میدان باد روی کره $M = S^2$ یک میدان برداری مماس است که به هر نقطه p از M یک بردار مماس در $T_p M$ نسبت می‌دهد. کلاف تاری متناظر، کلاف مماس TM است که تمام فضاهای مماس را به هم متصل می‌کند و بنابراین به عنوان یک کلاف تاری با فضای پایه $M = S^2$ و تار $\mathbb{R}^d \cong T_p M$ شناسایی می‌شود. مشابه تارهای نوار موبیوس، فضاهای مماس یک خمینه خمیده به طور کلی به روشی کانونی به هم متصل نیستند، بلکه ذاتاً نسبت به یکدیگر پیچ خورده‌اند. بنابراین، کلاف مماس به طور کلی از نظر توپولوژیکی با یک حاصل‌ضرب متایز است، یعنی $TM \times \mathbb{R}^d \not\cong M \times \mathbb{R}^d$. به منظور تعریف میدان‌های برداری ویژگی C -بعدی، ما بعداً کلافهایی با فضای پایه M و فضاهای برداری ویژگی \mathbb{R}^c به عنوان تار در نظر خواهیم گرفت.

کلافهای تاری به طور کلی: به طور رسمی، یک کلاف تاری ساختاری (E, M, π, F) است که از فضاهای توپولوژیکی E (فضای کلی)، M (فضای پایه) و F (تار نوعی) و یک نگاشت تصویر پیوسته و پوشاننده $E \rightarrow M$: π تشکیل شده است. یک کلاف تاری به صورت محلی بدیهی شدنی است، به این معنی که برای هر نقطه $p \in M$ یک همسایگی محلی $U \subseteq M$ از p وجود دارد که کلاف، محدود به آن، شبیه به یک حاصل‌ضرب مستقیم $F \times U$ است. بدیهی بودن محلی توسط همسان‌ریختی $\pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$: Ψ فرمول‌بندی می‌شود که نمودار جابجایی زیر را برابر ورده می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Psi} & U \times F \\ \pi \downarrow & \nearrow \text{proj}_1 & \\ M & \xrightarrow{\pi} & U \end{array}, \quad (107)$$

یعنی،

$$\pi = \text{proj}_1 \circ \Psi, \quad (108)$$

که در آن $U \times F \rightarrow U$: proj_1 نگاشت تصویر طبیعی روی عامل اول را نشان می‌دهد. کلافی که به صورت سراسری با حاصل‌ضرب $H \times F$ همسان‌ریخت باشد، بدیهی نامیده می‌شود. کلاف‌ها اغلب به طور خلاصه به صورت $E \xrightarrow{\pi} M$ یا فقط E نوشته می‌شوند و تار نوعی و فضای پایه به طور ضمنی فرض می‌شوند. از آنجا که میدان‌های چارچوب هموار را در نظر می‌گیریم، فرض می‌کنیم E, M و F هموار و π و Ψ نگاشت‌های هموار (دیفنتومورفیسم) باشند.

بدیهی بودن محلی $E \xrightarrow{\pi} M$ ایجاب می‌کند که تصویر معکوس $E_p := \pi^{-1}(p)$ که تار روی p نامیده می‌شود، با تار نوعی F دیفنتومورف باشد. همانند بخش ۳ ماده دیفنتومورفیسم‌هایی را که تارها روی نقاط مختلف را با تار نوعی یکی می‌دانند با F : $E_p \rightarrow F$ نشاند. بدیهی سازی‌های محلی در این صورت بر حسب این دیفنتومورفیسم‌ها به صورت زیر داده می‌شوند:

$$\Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F, \quad e \mapsto (\pi(e), \psi_{\pi(e)}(e)). \quad (109)$$

اگر تار نوعی F و تارهای E_p روی ساختار اضافی داشته باشند، لازم است که دیفنتومورفیسم‌های $E_p \rightarrow F$: ψ_p این ساختار را حفظ کنند، یعنی یکریختی باشند.^{۳۷} به عنوان مثال، اگر F و E_p ساختار فضای برداری داشته باشند، آنگاه ψ_p باید خطی باشد.

به طور کلی، انتخاب خاص بدیهی سازی‌های محلی (یا دیفنتومورفیسم‌ها) روی U به طور کانونی توسط کلاف مشخص نمی‌شود. بنابراین باید انتخاب‌های مختلف (پیمانه‌ها) و توابع گذار (تبدیلات پیمانه) بین آنها در نظر گرفت. برای دقیق کردن این موضوع، دو همسایگی بدیهی سازی U^A و U^B را با بدیهی سازی‌های محلی Ψ^A و Ψ^B در نظر بگیرید. از معادله (۱۰۹) نتیجه می‌شود که گذار بین هر دو بدیهی سازی محلی روی $=$ $U^A \cap U^B \neq \emptyset$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\Psi^B \circ (\Psi^A)^{-1} : U^{AB} \times F \rightarrow U^{AB} \times F, \quad (p, f) \mapsto \left(p, [\psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}](f) \right) =: (p, g_p^{BA} \triangleright f) \quad (110)$$

که در آن ما به طور ضمنی توابع گذار هموار را تعریف کردیم:^{۳۸}

$$g^{BA} : U^{AB} \rightarrow \text{Aut}(F), \quad p \mapsto g_p^{BA} := \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1} \quad (111)$$

^{۳۶} یک همسان‌ریختی یک یکریختی توپولوژیکی است، یعنی یک نگاشت پیوسته و معکوس‌پذیر بین فضاهای توپولوژیکی با معکوس پیوسته.

^{۳۷} به طور جایگزین، فرض کنید F ساختاری دارد که توسط توابع گذار F : $\psi_p^X = g^{BA}(p) \in \text{Aut}(F)$ حفظ می‌شود (پاراگراف بعدی را بینید). سپس بدیهی سازی‌های $E_p \rightarrow F$: ψ_p^X به طور سازگار ساختار F را روی E_p القا می‌کند و به طور خود کار یکریختی هستند.

^{۳۸} گروه خودریختی های $\text{Aut}(F)$ یک فضای F از تمام نگاشت‌های معکوس‌پذیر و حافظ ساختار (یکریختی) از F به خودش تشکیل شده است. به عنوان مثال، اگر $F = \mathbb{R}^n$ یک فضای برداری باشد، گروه خودریختی، گروه خطی $\text{GL}(n)$ است که از تمام ماتریس‌های معکوس‌پذیر $n \times n$ تشکیل شده است.

$$\blacktriangleright : \text{Aut}(F) \times F \rightarrow F, \quad (g_p^{BA}, f) \mapsto g_p^{BA} \blacktriangleright f := [\psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}](f). \quad (112)$$

روی تار نوعی F ؛ مقایسه کنید با معادلات (۷) و (۶). برای اینکه بینیم عامل اول در معادله (۱۱۰) در واقع با همانی داده می‌شود، توجه داشته باشید که برای $[\text{proj}_1 \circ \Psi^B \circ (\Psi^A)^{-1}](p, f) = [\pi \circ (\Psi^A)^{-1}](p, f)$ ایجاب می‌کند: هر $f \in F$ و $p \in U^{AB}$ اعمال مکرر معادله (۱۰۸) است. گذار بین بدیهی‌سازی‌های مختلف توسط بسط (جابجایی) زیر از نمودار جابجایی در معادله (۱۰۷) به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id} \times g^{BA} \blacktriangleright & & \\ & \swarrow & \downarrow \pi^{-1}(U^{AB}) & \searrow & \\ U^{AB} \times F & \xleftarrow{\Psi^A} & & \xrightarrow{\Psi^B} & U^{AB} \times F \\ \text{proj}_1 \searrow & & \pi \downarrow & & \text{proj}_1 \swarrow \\ & & U^{AB} & & \end{array} \quad (113)$$

محدود به یک نقطه $\varphi \in U^{AB}$ و برای حالت خاص کلاف مماس (که در ادامه تعریف می‌شود)، این نمودار با نمودار در معادله (۸) و نسخه گرافیکی آن در شکل ۶ مطابقت دارد.

طبق تعریف، توابع گذار در معادله (۱۱۱) سه شرط زیر را برآورده می‌کنند:^{۳۹}

$$i) \quad g_p^{AA} = e \quad \forall p \in U^A \quad (114)$$

$$ii) \quad g_p^{BA} = (g_p^{AB})^{-1} \quad \forall p \in U^A \cap U^B \quad (115)$$

$$iii) \quad g_p^{CB} g_p^{BA} = g_p^{CA} \quad \forall p \in U^A \cap U^B \cap U^C \quad (\text{شرط همزنجیر}) \quad (116)$$

طبق قضیه ساخت کلاف تاری، هر کلاف تاری را می‌توان به طور کامل و سراسری بر حسب یک اطلس $\mathcal{A} = \{(U^X, \Psi^X) \mid X \in \mathfrak{X}\}$ از بدیهی‌سازی‌های محلی (U^X, Ψ^X) مشخص کرد که M را می‌پوشاند و توابع گذار آنها معادلات (۱۱۴)، (۱۱۵) و (۱۱۶) را برآورده می‌کنند (در اینجا \mathfrak{X} یک مجموعه اندیس را نشان می‌دهد). می‌توان بدیهی‌سازی‌های منفرد را به گونه‌ای تصور کرد که توسط نگاشت‌های گذار "به هم چسبیده‌اند"؛ که در شکل ۲۳ به تصویر کشیده شده است. توجه داشته باشید که این مشابه توصیف سراسری یک خمینه بر حسب یک اطلس از چارت‌های محلی است.

کلاف‌های برداری: چندین مفهوم خاص تر از کلاف‌های تاری وجود دارد که ساختار ریاضی اضافی دارند. یک مثال مهم کلاف‌های برداری هستند که همانطور که از نامشان پیداست، کلاف‌هایی هستند که از فضاهای برداری متصل به یک خمینه تشکیل شده‌اند. به طور رسمی، یک کلاف برداری (حقیقی) از رتبه k یک کلاف $(E, M, \pi, \mathbb{R}^k)$ با تار نوعی $E_p \cong \mathbb{R}^k$ و تارهای \mathbb{R}^k روی p است، به طوری که بدیهی‌سازی‌های محلی به ازی هر تار، یکریختی‌های فضای برداری (نگاشت‌های خطی) هستند. توابع گذار $\psi_p^B = \text{GL}(k)$ در این صورت مقادیری در گروه خطی عام می‌گیرند.

به طور جایگزین، با داشتن تار \mathbb{R}^k و یک اطلس از بدیهی‌سازی‌های محلی که توابع گذار آن مقادیری در $\text{GL}(k) = \text{Aut}(\mathbb{R}^k)$ می‌گیرند، یک ساختار فضای برداری برای E_p با قرار دادن

$$\alpha v + \beta w := (\psi_p^A)^{-1}(\alpha \psi_p^A(v) + \beta \psi_p^A(w)) \quad \forall v, w \in E_p, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (117)$$

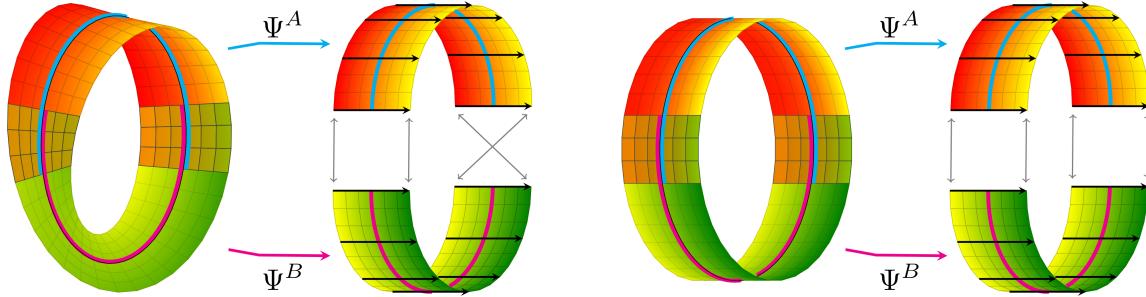
برای یک پیمانه دلخواه $\psi_p^A : E_p \rightarrow \mathbb{R}^k$ از اطلس $\text{GL}(k)$ القا می‌شود. اینکه ساختار فضای برداری به طور سازگار تعریف شده است واضح است زیرا

$$\begin{aligned} & (\psi_p^B)^{-1}(\alpha \psi_p^B(v) + \beta \psi_p^B(w)) \\ &= (\psi_p^A)^{-1}((g_p^{BA})^{-1}(\alpha g_p^{BA} \psi_p^A(v) + \beta g_p^{BA} \psi_p^A(w))) \\ &= (\psi_p^A)^{-1}(\alpha \psi_p^A(v) + \beta \psi_p^A(w)) \end{aligned} \quad (118)$$

همان نتیجه را به دست می‌دهد. توجه داشته باشید که مرحله آخر نیازمند خطی بودن $g_p^{BA} \in \text{GL}(d)$ بود. پیمانه‌های ψ_p^A یا ψ_p^B در این صورت به طور خود کار یکریختی‌های فضای برداری هستند.

مهم‌ترین مثال‌ها برای ما کلاف مماس و کلاف‌های برداری ویژگی هستند که در بخش‌های بعدی معرفی می‌شوند.

^{۳۹} شرایط (i) و (ii) از شرط همزنجیر (iii) نتیجه می‌شوند اما اغلب به طور صریح بیان می‌شوند.



شکل ۲۳: توصیف استوانه و نوار موبیوس بر حسب اطلس‌های G که هر کدام از دو بدیهی سازی محلی تشکیل شده‌اند. چپ: از آنجا که استوانه یک کلاف بدیهی است، تمام توابع گذار را می‌توان به عنوان نگاشت‌های همانی انتخاب کرد به طوری که گروه ساختار به گروه بدیهی $G = \{e\}$ کاهش یابد. برخلاف وضیت به تصویر کشیده شده، امکان انتخاب یک بدیهی سازی سراسری و واحد وجود دارد. راست: توبولوژی نوار موبیوس توابع گذار را در یکی از همپوشانی‌ها مجبور می‌کند که تارها را به روشنی وارونه به هم بچسبانند. بنابراین گروه ساختار را نمی‌توان بیشتر از گروه $G = \mathcal{R}$ که بازتاب تارها را مدل می‌کند، کاهش داد. بنابراین بدیهی سازی‌های سراسری برای نوار موبیوس وجود ندارد. توجه داشته باشید که پیکان‌های روی نوار موبیوس را باید با پیکان‌های نمودارهای چسباندن اشیاه گرفت، یعنی پیچش، برداشناخته باشند، اگر دو تار را در یکی از برش‌ها در جهت مخالف می‌چسباند.

-کلاف‌ها بسته به توبولوژی کلاف، ممکن است بتوان یک اطلس از بدیهی سازی‌های محلی \mathcal{X} تعریف G کرد که توابع گذار آن به یک زیرگروه $G \leq \text{Aut}(F)$ محدود شده‌اند، یعنی برآورده می‌کنند:

$$g_p^{BA} \in G \quad \text{برای تمام } A, B \in U^A \cap U^B. \quad (119)$$

هر چنین اطلسی، اطلس G نامده می‌شود و G به عنوان گروه ساختار کلاف شناخته می‌شود. دو اطلس G مختلف معادل (یا سازگار) هستند، اگر اجتماع آنها دوباره یک اطلس G باشد. کلافی که به یک کلاس همارزی از اطلس‌های G مجهز شده باشد، به عنوان یک G -کلاف شناخته می‌شود.^{۴۰}

توبولوژی یک کلاف تعیین می‌کند که گروه ساختار آن تا چه حد قابل کاهش است. به عنوان مثال، استوانه در شکل ۲۳ (یا هر کلاف بدیهی دیگر) را می‌توان با یک اطلس $\{e\}$ توصیف کرد که فقط از بدیهی سازی‌های محلی با توابع گذار همانی تشکیل شده است. این متناظر با کاهش به یک گروه ساختار بدیهی $G = \{e\}$ است. در مقابل، توبولوژی پیچ خورده نوار موبیوس ایجاد می‌کند که هر اطلس G شامل توابع گذاری باشد که تارها را با جهت‌گیری وارونه به هم بچسبانند؛ به شکل ۲۳ (راست) مراجعه کنید. بنابراین گروه ساختار نوار موبیوس را نمی‌توان بیشتر از گروه $G = \mathcal{R}$ که بازتاب تارها را مدل می‌کند، محدود کرد. روی خمینه‌های ریمانی، گروه ساختار کلاف مimas TM و در نتیجه کلاف‌های برداری ویژگی وابسته، به طور کلی نمی‌تواند بیشتر از یک گروه ساختار متعممد d کاهش یابد، که این کار روی های ۱۰۰ مستقل از مختصات را در وهله اول انجام‌مند کرد.

کلاف‌های G وابسته: دو G -کلاف را وابسته به یکدیگر می‌نامند اگر دارای فضای پایه، گروه ساختار و مهمتر از همه، توابع گذار یکسان باشند. کلاف‌های وابسته (E, M, π, F) و $(\tilde{E}, M, \tilde{\pi}, \tilde{F})$ با گروه ساختار G ممکن است در تارهای نوعی خود F و \tilde{F} و بنابراین در عمل چپ \blacktriangleright و گروه G بر روی تار مربوطه متفاوت باشند. با داشتن دو اطلس $G \times F \rightarrow F$ و $G \times \tilde{F} \rightarrow \tilde{F}$ و $\tilde{G}: G \times F \rightarrow F$ و $\tilde{G}: G \times \tilde{F} \rightarrow \tilde{F}$ باشند. با این داشتن دو اطلس $\{U^X, \Psi^X\} | X \in \mathcal{X}$ از کلاف‌ها روی همان پوشش باز از M ، شرط همارزی توابع گذار (تا حد عمل‌های چپ مختلف) به این معنی است:

$$\Psi^B \circ (\Psi^A)^{-1} = (\text{id} \times g^{BA} \blacktriangleright) \iff \tilde{\Psi}^B \circ (\tilde{\Psi}^A)^{-1} = (\text{id} \times g^{BA} \tilde{\blacktriangleright}) \quad (120)$$

به طور شهودی، تارهای نوعی F و \tilde{F} از E و \tilde{E} به روشنی یکسان روی M به هم چسیده‌اند.

یک مثال مهم از کلاف‌هایی که به صورت $(GL(d), \text{id})$ -وابسته به یکدیگر هستند، کلاف مimas TM . هر کلاف تانسوری دیگر $T_s^r M$ و کلاف چارچوب مimas FM هستند (اولی و آخری در بخش ۲.۶ معرفی شده‌اند). وابستگی این کلاف‌ها در این واقعیت منعکس می‌شود که مؤلفه‌های آنها نسبت به پایه‌های انتخاب شده مطابق با همان تبدیل پیمانه تبدیل می‌شوند (مثالاً $\tilde{z}_\mu z_\nu$ به پیوست $\tilde{z}_\mu z_\nu$ مراجعه کنید). عمل‌های مختلف یک تبدیل پیمانه بر روی تارهای مربوطه در این مثال به عنوان تبدیل پادروردا (TM ، تبدیل هموردا (T^*M)، تبدیل r -بار پادروردا ($T_g^r M$) و دوباره، تبدیل هموردا (FM))، به ترتیب، مشخص می‌شوند. مابعداً ساختار G ، کلاف مimas GM و کلاف‌های برداری ویژگی \mathcal{A} را به عنوان کلاف‌های G وابسته معرفی خواهیم کرد. وابستگی در این مورد از این واقعیت ناشی می‌شود که تغییرات چارچوب‌های GM منجر به تبدیل همزمان ضرایب بردار مimas و ضرایب بردار ویژگی می‌شود.

^{۴۰} کلاس همارزی تضمین می‌کند که هیچ یک از اطلس‌های G معادل، برتری ندارند. به طور معادل، می‌توان اطلس G ماکسیمال را در نظر گرفت که به عنوان اطلس G منحصر به فرد تعریف می‌شود که هر اطلس G سازگار دیگری در آن موجود است. توجه داشته باشید که یک کلاس همارزی از اطلس‌های G به طور منحصر به فرد توسط یک اطلس G داده شده، ایجاد می‌شود.

می خواهیم اشاره کنیم که هر کلاف وابسته‌ای علاوه بر این به یک کلاف اصلی G منحصر به فرد (که در پاراگراف بعدی تعریف می‌شود) وابسته است. در مقابل، هر کلاف وابسته را می‌توان از کلاف اصلی وابسته مربوطه ساخت \square مانند این ساختار به طور گسترده برای تعریف کلاف‌های برداری ویژگی در بخش ۳.۶ استفاده خواهیم کرد.

کلاف‌های اصلی G : یک کلاف تاری $(P, M, \pi, G, \triangleleft)$ را یک کلاف اصلی (هموار) (P, M, π, G) می‌نامند اگر ۱) تار نوعی آن با گروه ساختار آن G منطبق باشد و ۲) به یک عمل راست (هموار) G

$$\triangleleft : P \times G \rightarrow G, (p, g) \mapsto p \triangleleft g \quad (121)$$

تجهیز باشد که تارها را حفظ می‌کند، یعنی،

$$\pi(p \triangleleft g) = \pi(p) \quad \forall p \in P, g \in G \quad (122)$$

و به صورت تعدی پذیر و آزاد روی آنها عمل می‌کند.^{۴۱} دو شرط آخر (تعدی پذیری و آزادی) با هم ایجاب می‌کنند که تارهای یک کلاف اصلی G ، G -تورسور (یا فضاهای همگن اصلی G) باشند، که به طور شهودی به این معناست که آنها "شیوه به G " هستند اما بدون هیچ مبدأ یا عنصر همانی مشخصی ارائه می‌شوند.^{۴۲} بدینهی سازی‌های محلی $\pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ باید عمل راست G را حفظ کنند، یعنی هموردای راست G باشند:

$$\Psi(p \triangleleft g) = \Psi(p)(\text{id} \times \cdot \cdot g) \quad \forall p \in P, g \in G, \quad (123)$$

که در آن g -ضرب راست کانونی با عناصر گروه روی تار نوعی G را نشان می‌دهد. این، نمودار در معادله (۱۰۷) را به نمودار زیر بسط می‌دهد:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi} & U \times G \\ \downarrow \triangleleft g & & \uparrow (\text{id} \times \cdot \cdot g) \\ \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi} & U \times G \\ \downarrow \pi & \nearrow \text{proj.} & \\ U & & \end{array}, \quad (124)$$

که لازم است برای هر $g \in G$ جابجا باشد.

کلاف‌های اصلی G برای مطالعه کلاف‌های عمومی G از اهمیت زیادی برخوردارند. به طور خاص، هر کلاف (E, M, π_E, F) با یک کلاف اصلی G (منحصر به فرد) $(P, M, \pi_P, G, \triangleleft)$ را می‌توان از P ساخت. در بخش‌های بعدی، ما کلاف چارچوب GM و GFM را به عنوان نمونه‌های خاصی از کلاف‌های اصلی ارائه خواهیم داد، که ادعاهای مطرح شده در اینجا را کمتر انتزاعی کرده و برخی از پیامدهای آنها را آشکار می‌سازد.

برش‌ها و میدان‌ها: میدان‌های هموار با مقدار F روی M به عنوان برش‌های هموار σ از یک کلاف E با تار $F \xrightarrow{\pi} M$ باشند. یک برش هموار در این صورت به عنوان یک نگاشت هموار $\sigma : M \rightarrow E$ تعریف می‌شود که به هر نقطه p از M بپوشد که به هر نقطه p از E بپوشد، یعنی شرط $p \circ \sigma = \text{id}_M$ می‌کند، که نمودار جابجاگایی زیر آن را به تصویر می‌کشد:

$$M \xrightarrow{\sigma} E \xrightarrow{\pi} M \quad \underbrace{\qquad}_{\text{id}_M} \quad (125)$$

یک مثال مهم میدان‌های برداری مماس هستند که به عنوان برش‌های $v : M \rightarrow TM$ مدل می‌شوند که هر نقطه p در M یک بردار مماس $v(p) \in T_p M$ نسبت می‌دهند. توجه داشته باشید که نگاشت تصویر، به طبیعت خود، معکوس ناپذیر است، به طوری که $\text{id}_E \circ \pi \neq \text{id}_M$. بنابراین نمودار زیر به طور کلی جابجا نمی‌شود:

$$E \xrightarrow{\pi} M \xrightarrow{\sigma} E \quad \underbrace{\qquad}_{\text{id}_E} \quad (126)$$

^{۴۱} یک عمل گروهی (راست) $x \cdot g \mapsto x.g$ را تعدی پذیر می‌نامند اگر هر نقطه از $X \times G \rightarrow X$ را بتوان به هر نقطه دیگر نگاشت، یعنی اگر برای هر $x, y \in X$ یک وجود داشته باشد به طوری که $y = x.g$. آن را (نقطه تابت) آزاد می‌نامند اگر برای هر $x \in X$ معادله $x = x.g$ ایجاب کند $g = e$ باشد، یعنی اگر تنها عمل عنصر همانی p را ناواردا باقی بگذارد. توجه داشته باشید که همین گزاره‌ها را می‌توان برای عمل‌های چپ نیز بیان کرد.

^{۴۲} به طور رسمی، یک G -تورسور (راست) P شرط $P \times G \cong P \times P$ دارد که در آن $(p, g) \mapsto (p, p \cdot g)$ داده می‌شود. این شرط ایجاب می‌کند که یک عنصر گروهی منحصر به فرد وجود داشته باشد که هر دو نقطه در تورسور را به هم متصل کند.

در مواردی که در ادامه یک نمودار جابجا نباشد، که بیشتر در مورد برش‌ها صدق می‌کند، ما این موضوع را با افزودن نماد \otimes به صورت بصری تأکید می‌کیم. برش‌های هموار لزوماً به صورت سراسری وجود ندارند اما همیشه می‌توانند روی همسایگی‌های بدیهی ساز $M \subseteq U$ تعریف شوند. از طریق یک بدیهی سازی محلی، یک برش محلی را می‌توان با یک تابع $s : U \rightarrow F$ با قرار دادن $(\sigma(p)) = \psi_p(s(p))$ برای $p \in U$ یکی دانست. ما فضای برش‌های سراسری را با (E, Γ) نشان می‌دهیم در حالی که فضای برش‌های محلی به صورت (U, E, Γ) نوشته می‌شود.

ریخت‌های کلاف: ریخت‌ها (نگاشت‌ها) در رده کلاف‌های تاری، ریخت‌های کلاف یا نگاشت‌های کلاف نامیده می‌شوند. آنها با دیفوگورفیسم‌های صرف بین فضاهای کلی تفاوت دارند، زیرا علاوه بر آن ملزم به حفظ ساختار کلاف هستند، یعنی تارها را به تارها نگاشت کنند. به طور کلی، یک نگاشت کلاف هموار بین دو کلاف تاری هموار (E, M, π, F) و $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{F})$ یک نگاشت هموار $\phi : E \rightarrow \tilde{E}$ است، به طوری که یک نگاشت هموار دوم $\hat{\phi} : M \rightarrow \tilde{M}$ بین فضاهای پایه وجود دارد که شرط $\hat{\phi} \circ \pi = \tilde{\pi} \circ \phi$ را برآورده می‌کند، یعنی نمودار زیر باید جابجا باشد:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & \tilde{E} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\ M & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \tilde{M} \end{array} \quad (127)$$

نگاشت روی فضای پایه تضمین می‌کند که ریخت کلاف، تارها در $p \in M$ را به تارهایی در $\phi(p) \in \tilde{M}$ نگاشت می‌کند به جای اینکه آنها را "از هم بگسلند". تعیین‌های واضح به یکریختی‌های کلاف و خودریختی‌های کلاف وجود دارد. به عنوان مثال، یکریختی‌های کلاف ایجاب می‌کنند که ϕ و $\hat{\phi}$ معکوس‌پذیر باشند، یعنی دیفوگورفیسم باشند (و ساختارهای دیگر را در صورت تعریف حفظ کنند).

نوع خاص نگاشت کلاف تحت بررسی را می‌توان با خواستن الزامات اضافی محدودتر کرد. یک ریخت M کلاف بین دو کلاف (E, M, π, F) و $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{F})$ روی همان فضای پایه M ملزم است که تارهای E_p روی $p \in M$ را به تارهای \tilde{E}_p روی همان نقطه p نگاشت کند، یعنی $\hat{\phi} = \text{id}_M$. بر حسب یک نمودار جابجایی این به صورت زیر خوانده می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & \tilde{E} \\ \pi \searrow & & \swarrow \tilde{\pi} \\ & M & \end{array} \quad (128)$$

از این دیدگاه، ما بدیهی‌سازی کلاف در نمودار (107) را به عنوان یک ریخت U بین کلاف‌های بدیهی (U, Γ) و (U, π^{-1}, F) روی U شناسایی می‌کیم.

اگر تارها ساختار اضافی داشته باشند، معمولاً لازم است که این ساختار توسط نگاشت کلاف حفظ شود. به عنوان مثال، ریخت‌های کلاف برداری ϕ بین $(E, M, \pi, \mathbb{R}^k)$ و $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \mathbb{R}^{\tilde{k}})$ ملزم به حفظ ساختار فضای برداری روی تارها هستند و بنابراین به نگاشت‌های خطی به ازای هر تار $\phi|_{E_p}$ محدود می‌شوند. مشابهًا، ریخت‌های کلاف اصلی ملزم به حفظ ویژگی تارها به عنوان تورسورهای راست G هستند، یعنی هموردای راست G باشند. با داشتن دو کلاف اصلی $(P, M, \pi, G, \triangleleft)$ و $(\tilde{P}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{G}, \triangleleft)$ و یک هم‌ریختی گروهی $\theta : G \rightarrow \tilde{G}$ ، یک ریخت کلاف اصلی ملزم است که نمودار زیر را برای هر $g \in G$ جابجا کند:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\phi} & \tilde{P} \\ \triangleleft g \uparrow & & \uparrow \triangleleft \theta(g) \\ P & \xrightarrow{\phi} & \tilde{P} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\ M & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \tilde{M} \end{array} \quad (129)$$

بدیهی‌سازی محلی کلاف‌های اصلی در نمودار (124) بدین ترتیب به عنوان یک ریخت U کلاف اصلی Ψ بین (U, Γ) و (U, π^{-1}, G) دیده می‌شود که در آن هم‌ریختی گروهی $\theta : G \rightarrow G$ ، $g \mapsto \theta(g)$ با همانی روی G داده می‌شود.

برای پیش‌زنیه بیشتر در مورد کلاف‌های تاریخ به طور کلی به مراجع [؟؟؟؟؟؟؟] مراجعه می‌کنیم.

۲.۶ کلاف مماس TM و کلاف چارچوب

هر خمینه دیفرانسیل پذیر (و بنابراین هر خمینه ریمانی) M به طور کانونی به کلاف مماس خود TM و کلاف چارچوب (عام) FM مجهز است، که از تمام چارچوب‌های مرتع محلی فضاهای مماس تشکیل شده است. این دو کلاف به طور طبیعی به یکدیگر وابسته‌اند و گروه ساختار آنها به طور پیشینی توسط $\text{Aut}(\mathbb{R}^d) = \text{GL}(d)$ داده می‌شود. این واقعیت با "بازسازی" TM از طریق یک ساختار کلاف وابسته تأثیرگذارد که بعداً به ما امکان می‌دهد کلاف‌های برداری ویژگی وابسته را تعریف کنیم. برای جدا کردن واضح مفاهیم معرفی شده و فرضیات انجام شده، ما در اینجا TM و FM را به عنوان کلاف‌های $\text{GL}(d)$ توصیف خواهیم کرد. بخش بعدی ۳.۶ علاوه بر این یک G -ساختار را بر TM و FM تحمیل خواهد کرد که آنها را به عنوان G -کلاف‌ها ثبت می‌کند. در حالی که کلاف‌ها طبق تعریف به صورت محلی بدینهی شدنی هستند، ما در حال حاضر بدینهی خاص را مسلم فرض می‌کنیم و تعریف دقیق آنها را به بخش ۴.۶ موکول می‌کنیم.

کلاف مماس TM : هر خمینه هموار M با مجموعه‌ای از فضاهای مماس $T_p M \cong \mathbb{R}^d$ همراه است. اجتماع مجزای آنها ^{۴۳}

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M, \quad (\text{Def.})$$

به همراه یک ساختار هموار و نگااشت تصویر داده شده به طور کانونی، یک کلاف تاری هموار را تعریف می کند که به عنوان کلاف ماس شناخته می شود. نگااشت تصویر $\pi_{TM} : TM \rightarrow M$ در این صورت با انتخاب بدیهی $v = p|_{T_p M}$ برای $v \in T_p M$ در پیوست $\Psi_{TM} : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^d$ است، بدیهی سازی های محلی از کلاف ماس به طور کانونی توسط چارت های $x : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^d$ از خمینه اقا می شوند. بنابراین می توانیم بدیهی شدنی بودن TM را مسلم فرض کرده و بحث در مورد آنها را به بخش ۴.۶ موکول کنیم. یک ساختار هموار روی TM از ساختار هموار M از طریق بدیهی سازی های فوق الذکر از چارت ها القا می شود. ما از جزئیات فنی این ساختار صرف نظر کرده و خواسته علاقه مند را به مراجع [۱-۳] ارجاع می دهیم.

کلاف مماس تعریف شده بدین ترتیب یک کلاف برداری است زیرا تار نوعی آن \mathbb{R}^d یک فضای برداری مماس، که به عنوان مثال یک جریان روی M را توصیف می‌کنند، به عنوان برش های $M \rightarrow TM$: σ از کلاف مماس فرمول بندی می‌شوند. برش های سراسری هموار از کلاف های برداری همیشه وجود دارند؛ یک مثال استاندارد برش صفر از $T_p M$ را به هر $p \in M$ نسبت می‌دهد. می خواهیم تأکید کنیم که فضاهای مماس \mathbb{E} و بنابراین کلاف مماس \mathbb{E} بدون ارجاع به چارچوب های مختصاتی تعریف می‌شوند، به طوری که برش ها میدان های برداری را به روش مستقل از مختصات توصیف می‌کنند.

پس از معرفی کلاف FM در ادامه، به کلاف مماس و ساختار صریح آن به عنوان کلاف (d) -GL-وابسته باز خواهیم گشت که بر ماهیت مستقل از مختصات آن تأکید می‌کند. در بخش ۳.۶ مابه طور مشابه TM را به عنوان یک G -کلاف وابسته به یک G -ساختار خواهیم ساخت.

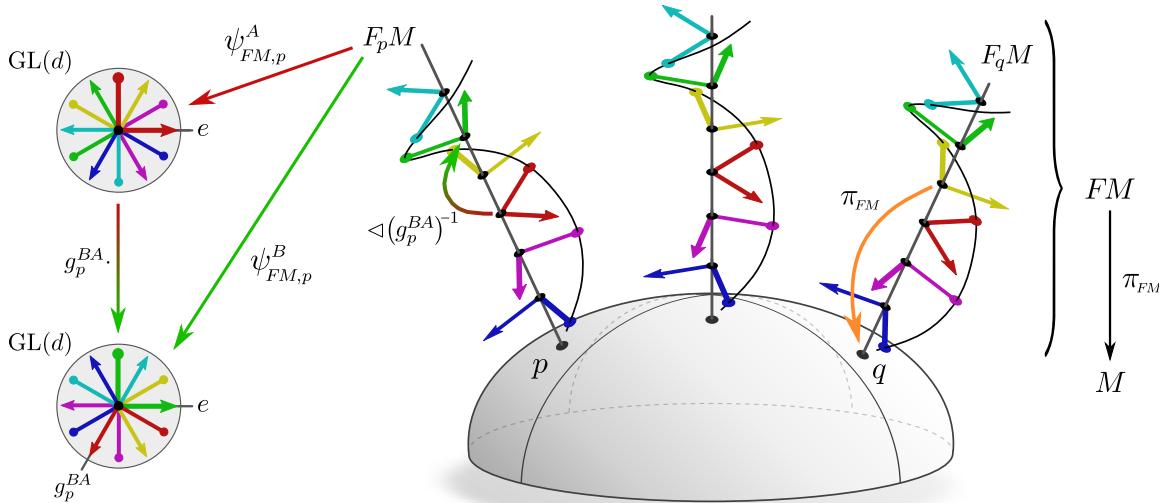
کلاف چارچوب FM : فضای چارچوب‌های مرجع محلی تمام فضاهای مماس $T_p M$ ، (کلاف) چارچوب (مماس) را تشکیل می‌دهد. فضاهای چارچوب‌های مرجع (پایه‌های متری) فضاهای مماس منفرد $T_p M$ را در نظر بگیرید:

$$F_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ یک پایه از } T_p M \right\} \quad (131)$$

کلاف چارچوب به عنوان اجتماع مجزای آنها $FM := \coprod_{p \in M} F_p M$ است، که چارچوب‌های در رابه p می‌فرستد و یک ساختار هموار القا شده از TM تعریف می‌شود. تار نوعی کلاف چارچوب، گروه خطی عام $GL(d) \cong F_p M$ است، یعنی گروه ماتریس‌های معکوس پذیر $d \times d$ که ستون‌های مستقل خطی آن را می‌توان به عنوان تعریف کننده یک چارچوب از \mathbb{R}^d در نظر گرفت. از آنجا که کلاف چارچوب از کلاف مماس ساخته شده است، بدینهی سازی‌های محلی آن $(U \times GL(d)) \rightarrow U$ با Ψ_{FM} بلافاصله از بدینهی سازی‌های TM القا می‌شوند؛ به عرضی 4.6 مراجعت کنید. شکل ۲۴ تفسیری گرافیکی از کلاف چارچوب را نشان می‌دهد.

برش‌های هموار محلی $\pi_{FM}^{-1}(U) \subseteq FM$ از کلاف چارچوب، نقاط $p \in U$ را به چارچوب‌هایی در $F_p M$ نگاشت می‌کنند. آنها میدان‌های چارچوب هموار محلی را تعریف می‌کنند، یعنی انتخاب‌های هموار متغیر از چارچوب‌های مرجم برای $T_p M$ ، $p \in U$ که در شکل ۷ به

۴۳ اجتماع مجازی $\{ (p, v) \mid v \in T_p M \} = \bigcup_{p \in M} T_p M$ از فضاهای مماس را می‌توان به گونه‌ای تصور کرد که "به یاد می‌آورد" یک بردار خاص $v \in TM$ از کدام فضای مماس خاص $T_p M$ سرچشمه می‌گیرد، که برای تعريف نگاشت تصویر π_{TM} ضروری است.



شکل ۲۴: تفسیری گرافیکی از کلاف چارچوب FM روی M و بدینهی سازی های آن. تار $F_p M$ روی p به عنوان فضای تمام چارچوب های مرجع ممکن $T_p M$ تعریف می شود. تمام چارچوب ها در $F_p M$ توسط نگاشت تصویر π_{FM} به ممان نقطه p در M نگاشته می شوند که تار به آن متصل است. تارهای $F_p M$ با $GL(d)$ یکریخت هستند، اما بدون مبدأی ارائه می شوند که یک انتخاب مرجع از چارچوب مرجع را متمایز کند. پیمانه های $(GL(d), F_p M \rightarrow GL(d))$ یا $\psi_{FM,p}^A$ یا $\psi_{FM,p}^B$ که در بخش ۴.۶ در ادامه معرفی می شوند، تارها را با $GL(d)$ یکی می دانند و در نتیجه یک چارچوب مرجع را مشخص می کنند. پیمانه های مختلف با تبدیلات پیمانه $g_p^{BA} \in GL(d)$ به هم مرتبط هستند. با خواندن را در مورد دو تصور غلط احتمالی هشدار دهیم؛ اولاً، چارچوب ها در تارهای مختلف به طور پیشینی به روی کانونی با یکدیگر یکی داشته نمی شوند، چیزی که ممکن است رنگ های اضافی نشان دهد. ثانیاً، برای به حداقل رساندن شلوغی، تصویر فقط چارچوب های راست گرد و متعامد را به جای تمام چارچوب های مرجع ممکن نشان می دهد. همانطور که در بخش بعدی ۳.۶ بحث خواهیم کرد، چارچوب های متعامد و راست گرد شان داده شده، متناظر با یک G -ساختار GM (یک زیرکلاف اصلی G از FM) برای گروه ساختار $(G = SO(2))$ خواهد بود.

تصویر کشیده شده است. همانطور که در معادله (۴) استدلال شد، یک انتخاب از میدان چارچوب روی U یا یک انتخاب از پیمانه یا بدینهی سازی محلی روی U معادل است. این ایجاد می کند که میدان های چارچوب سراسری تنها در صورتی وجود داشته باشد که $\bar{F}M$ و در نتیجه TM بدینهی باشند. ما این همارزی را با عمق بیشتری در بخش ۴.۶ موردن بحث قرار خواهیم داد.

یک عمل راست تعدی پذیر و آزاد بر روی تارهای منفرد $F_p M \cong GL(d)$ از کلاف چارچوب به طور طبیعی توسط تغییر چارچوب ها که در معادله (۱۰) تعریف شده است، داده می شود [۴]. عمل متناظر

$$\triangleleft : FM \times GL(d) \rightarrow FM, \quad ([e_i]_{i=1}^d, g) \mapsto [e_i]_{i=1}^d \triangleleft g := \left[\sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \quad (132)$$

روی $F_p M$ به عنوان یک کلاف چارچوب را به یک کلاف اصلی $GL(d)$ تبدیل می کند. فقدان مبدأ یا عنصر همانی مرجع در تارهای $F_p M$ به عنوان $GL(d)$ -تورسورها، ابهام ذاتی چارچوب های مرجع را منعکس می کند.

کلاف TM به عنوان کلاف برداری وابسته به $(GL(d), (FM \times \mathbb{R}^d)/)$: در بخش ۱.۱.۳ مادرهای مماس در TM را بر حسب ضرایب آنها در \mathbb{R}^d نسبت به یک چارچوب مرجع بیان کردیم. انتخاب خاص چارچوب ها در آنجا بی ربط بود زیرا تبدیل ضرایب در معادله (۹) با تبدیل چارچوب های مرجع در معادله (۱۰) خنثی می شود به طوری که $v = \sum_i v_i^A e_i^A = \sum_i v_i^B e_i^B$ نمایش های مختصاتی معادل از همان بردار مستقل از مختصات $v \in T_p M$ هستند. با پیروی از این ایده، می توان کلاف مماس را از کلاف چارچوب با جفت کردن چارچوب های مرجع با بردارهای ضربی و گرفتن یک خارج قسمت برای فروکاستن توصیفات اضافی حاصل از بردارهای مماس نسبت به چارچوب های مختلف به یک عنصر منحصر به فرد، ساخت.

برای ساختن کلاف مماس به این روش، حاصل ضرب $FM \times \mathbb{R}^d$ را در نظر بگیرید که می توان آن را به عنوان یک کلاف تاری با فضای پایه M یک تار نوعی $GL(d) \times \mathbb{R}^d$ دید. این کلاف از جفت های چارچوب های مرجع و ضرایب (متقابل نامرتب) تشکیل شده است. با انگیزه از بیان معادل

بردارهای مماس در چارچوب‌های مرجع مختلف، ما رابطه همارزی را تعریف می‌کنیم:^{۴۴}

$$([e_i]_{i=1}^d, v) \sim_{\text{GL}(d)} ([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}, g \cdot v) \quad \forall g \in \text{GL}(d) \quad (133)$$

روی $FM \times \mathbb{R}^d$. به عنوان یک رابطه همارزی، این رابطه $[e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}$ را به کلاس‌های همارزی v افزایش می‌کند. فضای این کلاس‌های همارزی، فضای خارج قسمتی $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$ است. نگاشت تصویر

$$\pi_{\sim_{\text{GL}(d)}} : (FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d) \rightarrow M, \quad [e_i]_{i=1}^d, v \mapsto \pi_{FM}([e_i]_{i=1}^d), \quad (134)$$

که از کلاف چارچوب القا شده است، $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$ را به یک کلاف تاری با فضای پایه M و تار نوعی \mathbb{R}^d می‌کند. توجه داشته باشید که نگاشت تصویر در معادله (134) خوش‌تعیف است زیرا مستقل از نماینده کلاس همارزی است، یعنی $\pi_{\sim_{\text{GL}(d)}}([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}) = \pi_{FM}([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}) = \pi_{FM}([e_i]_{i=1}^d)$ که در آن ما از این واقعیت استفاده کردیم که عمل راست \triangleleft تارهای $FM \times \mathbb{R}^d$ را حفظ می‌کند. ساختار فضای برداری \mathbb{R}^d را به یک کلاف برداری تبدیل می‌کند که ترکیبات خطی در همان تار توسط

$$\alpha[e_i]_{i=1}^d + \beta[e_i]_{i=1}^d, w := [e_i]_{i=1}^d, \alpha v + \beta w, \quad (135)$$

برای مقادیر دلخواه $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ و $v, w \in \mathbb{R}^d$ تعریف می‌شود. به راحتی می‌توان بررسی کرد که این تعریف مستقل از انتخاب نماینده در هر دو جمله جمع است.

کلاف تعریف شده بدین ترتیب با کلاف مماس یک‌ریخت است،

$$TM \cong (FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d), \quad (136)$$

که در آن یک‌ریختی M -کلاف برداری توسط نگاشت خطی به ازای هر تار

$$\chi : (FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d) \rightarrow TM, \quad [e_i]_{i=1}^d, v \mapsto \sum_{i=1}^d v_i e_i \quad (137)$$

داده می‌شود که یک تاپل نماینده از چارچوب و بردار ضرب را از کلاس همارزی گرفته و آنها را به بردار مماس متاظر نگاشت می‌کند. طبق تعریف رابطه همارزی $\sim_{\text{GL}(d)}$ ، این تابع مستقل از انتخاب نماینده است، یعنی، $\chi(([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}, g \cdot v)) = \chi(([e_j]_{j=1}^d \triangleleft g^{-1}, (g \cdot v)_i)$ ؛ مساویه کنید با معادله (12). همانطور که در [۹] بحث شد، معکوس این نگاشت با گرفتن یک بردار مماس، تصویر کردن آن بر روی یک چارچوب دلخواه و گرفتن کلاس همارزی به دست می‌آید.

کلاف $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$ (طبق ساختار، به عنوان یک کلاف $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$ -وابسته، وابسته است، یعنی همان توابع گذار رادر $\text{GL}(d)$ دارد که FM دارد، همانطور که در بخش ۴.۶ استنتاج خواهیم کرد. ساختار TM به عنوان خارج قسمت $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$ بر ماهیت مستقل از مختصات کلاف مماس به روی سیار شهودی تأکید می‌کند: این ساختار تمام انتخاب‌های ممکن از مختصات دهی‌های فضاهای مماس را در نظر گرفته و با گرفتن یک خارج قسمت، آنها را معادل تلقی می‌کند.

۳.۶ ساختارهای برداری و یزگی وابسته \mathcal{A}

اکنون ما G -ساختارها GM را به عنوان زیرمجموعه‌های متمایزی از چارچوب‌ها در FM معرفی می‌کنیم که ساختار هندسی اضافی روی M را کدگذاری می‌کنند که باید توسط CNN‌های مستقل از مختصات رعایت شود. کلاف مماس از طریق یک ساختار کلاف وابسته مشابه با بخش قبل، به عنوان یک G -کلاف وابسته بازمعروفی می‌شود. این رویکرد را می‌توان برای ساخت هر کلاف G -وابسته دیگر تعیین داد، که ما از آن برای تعریف کلاف‌های برداری و یزگی \mathcal{A} استفاده می‌کنیم. تمام چنین کلاف‌های ساخته شده‌ای به یکدیگر وابسته‌اند، یعنی فقط در تار خود F تفاوت دارند اما فضای پایه M ، گروه ساختار G و توابع گذار g^{BA} بین همسایگی‌های بدیهی ساز را مشترکاً دارند. بدیهی سازی‌های محلی کلاف‌ها و تبدیلات پیمانه متقابل آنها در بخش بعدی ۴.۶ به تفصیل مورد بحث قرار می‌گیرد.

^{۴۴} یک رابطه همارزی روی یک مجموعه X یک رابطه دوتایی \sim است که بازتابی $(x \sim x)$ ، متقارن $(y \sim x \Leftrightarrow x \sim y)$ و تراگذری $(x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z)$ است. این رابطه یک افزای از X به کلاس‌های همارزی $\{y \sim x | x \in X\}$ از عناصر $x \in X$ تعریف می‌کند. فضای کلاس‌های همارزی X/\sim را مجموعه خارج قسمتی $X/\sim := \{[x] | x \in X\}$ نامند.

G-ساختارها GM: همانطور که در بخش ۱.۳ و جدول ۱ بحث شد، اغلب ممکن است با یک زیرمجموعه متمایز از چارچوب‌های مرجع کار کرد که توسط عمل یک گروه ساختار کاهش‌یافته $G \leq \text{GL}(d)$ به هم مرتبط هستند. این موضوع با بحث در مورد چند مثال قبل از رسیدن به یک تعریف فنی در ادامه، به بهترین وجه قابل درک است. به عنوان مثال، یک محدودیت به چارچوب‌های متعامد

$$O_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ متعامد از } \{e_1, \dots, e_d\} \right\} \quad (138)$$

منجر به یک زیرکلاف اصلی OM از FM با گروه ساختار d می‌شود. توجه داشته باشید که متعامد چارچوب‌های مرجع توسط متريک η روی M قضاوت می‌شود \square بنابراین انتخاب‌های مختلف متريک روى یک خمينه متناظر با زيرمجموعه‌های مختلفی از چارچوب‌های مرجح برای همان گروه ساختار d است. به عنوان مثال دوم، یک انتخاب جهت‌گيري روى یک خمينه جهت‌پذير را در نظر بگيريد، که امكان مشخص کردن یک مفهوم مرجح از چارچوب‌ها را فراهم می‌کند^{۴۵}

$$\text{GL}_p^+ M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ مثبت از } \{e_1, \dots, e_d\} \right\} \quad (139)$$

و یک زیرکلاف اصلی متناظر $GL^+(d)M$ از FM با گروه ساختار (d) . باز هم، دو انتخاب مختلف از جهت‌گيري‌ها متناظر با دو انتخاب مختلف از زيرکلاف‌های چارچوب‌های جهت‌دار متناسب است. ترکیب هر دو شرط برای تعامل و راست‌گردی چارچوب‌ها منجر به یک $\text{SO}(d)$ -ساختار با تارهای زير می‌شود:

$$\text{SO}_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ مثبت و متعامد از } \{e_1, \dots, e_d\} \right\} \quad (140)$$

مي توان شکل ۲۴ را به عنوان نمایش دهنده یک (2) -ساختار در نظر گرفت زیرا تنها چارچوب‌های راست‌گرد و متعامد نشان داده شده‌اند (در اين صورت تار نوعی $\text{SO}(d)$ باید با $\text{GL}(d)$ برجسب گذاري شود). انتخاب‌های مختلف از $\text{SO}(d)$ -ساختارها يا متناظر با یک دست‌سانی مخالف از چارچوب‌ها، با پايindندي به همان مفهوم تعامل، يا متناظر با یک انتخاب متفاوت از متريک (يا هر دو) است. دقيقا همين الگو برای فرم‌های فرم (روي خمينه‌های جهت‌پذير M) تکرار می‌شود: آنها امكان مشخص کردن یک مفهوم مرجح از چارچوب‌ها را فراهم می‌کنند

$$\text{SL}_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ مثبت از } T_p M \right\} \quad (141)$$

و در نتيجه زيرکلاف‌های اصلی SLM از FM با گروه ساختار (d) مجموعه خاص چارچوب‌هایي که مرجح هستند در اينجا به انتخاب خاص فرم حجم بستگي دارد. به عنوان آخرین مثال، $\{e\}$ -ساختارها را در نظر بگيريد که متناظر با یک گروه ساختار بدبيهي $\{e\}$ هستند و بنابراین در هر نقطه p از یک چارچوب واحد تشکيل شده‌اند. طبق تعریف، $\{e\}$ -ساختارها با ميدان‌های چارچوب (هموار) سراسري $\sigma \in \Gamma(FM)$ معادل هستند:

$$\{e\}_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] = \sigma(p) \right\} \quad (142)$$

بنابراین آنها فقط روی خمينه‌های بدبيهي وجود دارند. شکل‌های ۱۳۳ و ۱۳۴ دو انتخاب مختلف از $\{e\}$ -ساختارها روی \mathbb{R}^n را به تصوير می‌کشنند.

تمام اين مثال‌ها انتخاب‌های خاصی از G -ساختارها GM روی M را نشان می‌دهند. به طور کلي، یک G -ساختار روی M یک زيرکلاف اصلی G - GM است، يعني یک انتخاب "هموار متغير" از زيرمجموعه‌های $G_p M \subseteq F_p M$ که نسبت به \triangleleft برای هر $p \in M$ هستند^{۴۶}. همواری در اينجا می‌تواند با اين شرط فرمول‌بندی شود که در اطراف هر چارچوب $[e_i]_{i=1}^d \in G_p M$ يک همسایگی U از G - GM وجود داشته باشد که روی آن يک برش هموار $= [e_i]_{i=1}^d : U \mapsto \pi_{GM}^{-1}(U) \subseteq GM$ وجود داشته باشد. تصوير

$$\pi_{GM} := \pi_{FM}|_{GM} : GM \rightarrow M \quad (143)$$

از GM در اينجا به سادگي با محدود کردن نگاشت تصوير GM به M داده می‌شود. به همراه محدودیت

$$\triangleleft : GM \times G \rightarrow GM, \quad ([e_i]_{i=1}^d, g) \mapsto [e_i]_{i=1}^d \triangleleft g := \left[\sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \quad (144)$$

از عمل راست (d) روی FM در معادله (۱۳۲) به یک عمل (d) روی $GM \subseteq FM$ ، اين G -ساختار را به یک کلاف اصلی G - GM تبدیل می‌کند. با اين حال، مهم است توجه داشته باشید که چندین انتخاب از چنین زيرکلاف‌هایي وجود دارد، که متناظر با G -ساختارهای مختلف برای همان گروه ساختار G است؛ اين ادعاء را با مثال‌های بالا مقایسه کنيد. همانطور که قبل بحث شد، توپولوژي يک کلاف ممکن است مانع از کاهش به یک گروه ساختار G و در نتيجه وجود يک G -ساختار متناظر GM شود.

در حالی که تعریف بالا از G -ساختارها کافی خواهد بود، مفید است که به طور خلاصه برخی از تعاریف معادل جایگزین را مرور کنیم. ادعای اينکه يک زيرکلاف اصلی GM از FM است، با تعریف آن به عنوان يک تاپل (P, \mathcal{E}) مشکل از يک انتخاب از يک کلاف اصلی G (همچين

^{۴۵} برعکس، خمينه‌های غيرجهت‌پذير اجازه کاهش گروه ساختار به $GL^+(d)$ را نمي‌دهند.
^{۴۶} از آنجا که يک $F_p M$ -تورسور راست است، هر G -مدار $G_p M$ در $F_p M$ به طور خودکار تضمین می‌شود که يک G -تورسور راست باشد.

غیر منحصر به فرد) P روی M به همراه یک نشاندن هموردای راست G و هموار $\mathcal{E} : P \rightarrow FM$ (روی M) دقیق می شود.^{۴۷} این موضوع توسط نمودار زیر به تصویر کشیده شده است، که لازم است برای هر $g \in G$ جابجا باشد:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P & & \\
 & \swarrow \lhd_P g & & \searrow \lhd g & \\
 & & P & \xleftarrow{\mathcal{E}} & FM \\
 & & \searrow \pi_P & & \swarrow \pi_{FM} \\
 & & & & M
 \end{array} \tag{۱۴۵}$$

زیر مجموعه های مختلف از چارچوب های مرجح در این دیدگاه متناظر با انتخاب های مختلف از نشاندن های $GM = \mathcal{E}(P)$ از P در FM است. G -ساختارها علاوه بر این با برش هایی به شکل $s(M) \mapsto FM/G$ معادل هستند، که تأکید می کند $(s(p) \in G)$ با $s(M) \mapsto FM$ در واقع یک انتخاب از G -مدار در FPM است همانطور که در پانشت ۴۶ شد. تعریف دیگری از G -ساختارها بر حسب (کلاس های همارزی) اطلس های G است [۴]. از آنجا که یک دیدگاهی است در یک پاده سازی از کانولوشن های GM اتخاذ شود، ما آن را با جزئیات بیشتری در بخش بعدی ۴.۶ مورد بحث قرار می دهیم. برای خواننده علاقه مند می خواهیم اشاره کنیم که G -ساختارها یک مورد خاص از مفهوم کلی تر کاهش (یا لیفت) گروه های ساختار هستند [۴].

G -ساختارها برای نظریه کانولوشن های GM از اهمیت محوری برخوردارند. انتخاب خاص G -ساختار، مجموعه خاصی از چارچوب های مرجح را تعیین می کند که کرنل الگوی G -را بهر بر روی آن اشتراک گذاشته می شود. با توجه به هموردایی پیمانه ای کرنل ها، تضمین می شود که کانولوشن های G - GM ، G -ساختار را رعایت کنند، یعنی مستقل از مختصات GM باشند. همانطور که در بخش ۸ استنتاج شده است، ایزو متري هایی که یک کانولوشن GM نسبت به آنها هموردا است، دقیقاً آنها ب G -ساختار را حفظ می کنند (یعنی آنها ب GM که خود ریختنی های GM را القا می کنند).

کلاف به عنوان کلاف برداری G -وابسته: با داشتن یک G -ساختار GM ، می توان ساختار کلاف $GL(d)$ - TM از TM در بخش ۲.۶ را به یک ساختار کلاف G -وابسته مشابه TM بر اساس GM تطبیق داد. به جای بیان بردارهای مماس نسبت به چارچوب های عمومی در TM ، آنها در اینجا نسبت به چارچوب های متمایز در GM (یعنی می شوند و خارج قسمت نسبت به گروه ساختار کاهش یافته G به جای $GL(d)$ گرفته می شود). کلاف حاصل طبق طراحی به GM وابسته است (یا به FM با یک اطلس G ، که معادل است همانطور که در بخش بعدی توضیح داده می شود) و بنابراین دارای توابع گذاری است که مقادیری در G می گیرند. محدودیت χ در معادله (۱۳۷) به یک یکریختی کلاف برداری به دست می دهد:

$$TM \cong (GM \times \mathbb{R}^d)/G. \tag{۱۴۶}$$

در حالی که هر سه کلاف TM ، TM و $(GM \times \mathbb{R}^d)/G$ و $(FM \times \mathbb{R}^d)/GL(d)$ بنا براین به عنوان کلاف های برداری یکریخت هستند، آنها تنها در صورتی به عنوان کلاف های G -وابسته یکریخت هستند که TM و $(FM \times \mathbb{R}^d)/GL(d)$ به یک G -ساختار (یا اطلس G) مجهز شوند، که به طور پیشینی اینطور نیست. در مقابل، کلاف طراحی $(GM \times \mathbb{R}^d)/G$ با یک G -ساختار همراه است. برای تعریف دقیق یکریختی های کلاف G -وابسته، ما به [۴] ارجاع می دهیم.

کلاف های برداری ویژگی وابسته \mathcal{A} : ساختار کلاف G -وابسته $(GM \times \mathbb{R}^d)/G$ را می توان برای چسباندن تارهای دیگر با عمل های گروهی دیگر به G -ساختار GM تعمیم داد. در واقع، هر کلاف وابسته به GM را می توان به این روش ساخت. مثال های مهم در هندسه دیفرانسیل عبارتند از کلاف هم مماس T^*M با تار نوعی آن که دو گان \mathbb{R}^{d*} از \mathbb{R}^d است و عمل دو گان بر آن اثر می گذارد، یا کلاف های تانسوری $T_s^r M$ با تارهای $(\mathbb{R}^d)^{\otimes r} \otimes (\mathbb{R}^{d*})^{\otimes s}$ که نمایش حاصل ضرب تانسوری متناظر G بر آن عمل می کند.

در ادامه ما کلاف های برداری ویژگی وابسته با ضرایب بردار ویژگی \mathbb{R}^c به عنوان تارهای نوعی را در نظر می گیریم. تحت تبدیلات پیمانه، این تارها از چپ توسط یک ضرب با یک نمایش گروهی $GL(c)$ به G می شوند، یعنی معادله (۱۱۲) با $\rho : \mathbb{R}^c \rightarrow GL(c)$ با $\rho(g)f \mapsto \rho(g)f$ نمونه سازی می شود. مشابه قبل، کلاف های برداری ویژگی در این صورت به عنوان یک خارج قسمت

$$\mathcal{A} := (GM \times \mathbb{R}^c)/\sim_\rho \tag{۱۴۷}$$

ساخته می شوند که در آن رابطه همارزی \sim توسط

$$([e_i]_{i=1}^d, f) \sim_\rho ([e_i]_{i=1}^d \lhd g^{-1}, \rho(g)f) \quad \forall g \in G. \tag{۱۴۸}$$

^{۴۷} این نشاندن یک ریخت M -کلاف اصلی G است همانطور که در بخش ۱.۶ با هم ریختنی گروهی $GL(d)$ به G : θ که الحاق کانونی زیر گروه $GL(d)$ است، معرفی شد.

داده می شود. عناصر \mathcal{A} کلاس های همارزی $[e_i]_{i=1}^d, f]$ از ضرایب بردار ویژگی نسبت به چارچوب های مرجع هستند و بنابراین مستقل از مختصات هستند. یک نگاشت تصویر (خوش تعریف) دوباره از تصویر G -ساختار القا می شود:

$$\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow M, [[e_i]_{i=1}^d, f] \mapsto \pi_{GM}([e_i]_{i=1}^d)$$
 (۱۴۹)

ترکیبات خطی روی تارها به قیاس با معادله (۱۳۵) تعریف می شوند. از آنجا که چنین کلاف های برداری ویژگی تعریف شده ای به GM وابسته است، $GL(d) \leq GL(d)$ است، همانطور که به طور صریح در بخش بعدی ۴.۶ استنتاج خواهیم کرد.^{۴۸} توجه داشته باشید که این تعریف شامل میدان های برداری مماس و میدان های اسکالر، که البته می توانند به عنوان میدان های ویژگی پردازش شوند، به ترتیب برای $g = \rho(g) = 1$ می شود.

ساختار \mathcal{A} به عنوان یک کلاف G -وابسته، بردار های ویژگی مستقل از مختصات M روی GM را مدل می کند: ویژگی های $f_p \in \mathcal{A}$ نسبت به چارچوب های دلخواه در GM بیان می شوند، با ضرایب ویژگی در مختصات دهی های مختلف که از طریق معادله (۱۴۸) به هم مرتبط هستند، اما بیان مختصاتی خوش تعریفی نسبت به چارچوب های دیگر ندارند. از دید گاه مهندسی، این موضوع در G -راهنری کرنل های کانولوشن منعکس می شود که تضمین می کند اندازه گیری های ویژگی ها به صورت نسبی به چارچوب ها در GM انجام شود اما امکان تمایز بین الگوهایی را فراهم می کند که ژست های آنها با یک تبدیل پیمانه G -مقدار به هم مرتبط نیستند، به معنای مطلق.

میدان برداری ویژگی وابسته و فضاهای ویژگی: میدان های ویژگی هموار و مستقل از مختصات به عنوان برش های سراسری هموار f از کلاف های برداری ویژگی تعریف می شوند، یعنی به عنوان نگاشت های هموار $\mathcal{A} \rightarrow M$ که شرط $\pi_{\mathcal{A}} \circ f = id_M$ است: f که همانطور که قبل بحث شد، وجود چنین میدان های ویژگی تضمین شده است زیرا کلاف های برداری همیشه برش های سراسری هموار را می کنند. در بخش بعدی ۴.۶ نشان می دهیم که چگونه یک بدیهی سازی کلاف محلی روی U^A امکان نمایش f توسط یک میدان $f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c$ از ضرایب بردار ویژگی را فراهم می کند. یک بدیهی سازی متفاوت روی $U^B \rightarrow \mathbb{R}^c$ منجر به یک میدان ضریب متفاوت $f^B : U^B \rightarrow \mathbb{R}^c$ می شود که f را به صورت محلی نمایش می دهد. از نگاشت های گذار بین بدیهی سازی های کلاف نتیجه خواهد شد که هر دو میدان ضریب روی همپوشانی $U^{AB} = U^A \cap U^B$ از دامنه های خود با $f^B(p) = \rho(g_p^{BA})f^A(p)$ به هم مرتبط هستند. نمودار جایجا بی در شکل ۲۷ روابط بین میدان های برداری ویژگی و بدیهی سازی های محلی آنها را به تصویر می کشد.

فضاهای ویژگی های \mathcal{A} مستقل از مختصات معمولاً از چندین میدان ویژگی مستقل روی همان فضای پایه تشکیل شده اند. کلاف توصیف کننده یک \mathcal{A}_i است که زیرنای میدان های منفرد آن هستند. به این ترتیب، این کلاف همان فضای پایه M را دارد، یک تار نوعی $\mathcal{A}_i \rightarrow \mathbb{R}^{\sum_i c_i} \cong \mathbb{R}^{\sum_i c_i}$ که به عنوان مجموع مستقیم تارهای میدان های منفرد تعریف شده و به نگاشت تصویر بدیهی مججهز است. این کلاف به TM ، TM و \mathcal{A}_i به عنوان G -کلاف ها وابسته است و بنابراین می تواند به طور معادل به صورت

$$\bigoplus_i \mathcal{A}_i \cong (GM \times \mathbb{R}^{\sum_i c_i}) / \sim_{\oplus_i \rho_i}$$
 (۱۵۰)

تعريف شود. توجه داشته باشید که مجموع مستقیم $\bigoplus_i \mathcal{A}_i$ از نمایش های ρ_i که \mathcal{A}_i را تعریف می کنند، تضمین می کند که نگاشت های گذار $\bigoplus_i \mathcal{A}_i$ هر میدان منفرد را به طور مستقل تبدیل کنند. فضاهای ویژگی در این صورت به عنوان فضاهای $(\bigoplus_i \mathcal{A}_i) \Gamma$ از برش های سراسری کلاف مجموع ویتنی تعریف می شوند.

۴.۶ بدیهی سازی های محلی کلاف TM ، FM و GM

در حالی که نظریه سراسری شکه های کانولوشنی مستقل از مختصات به شیوه ای بر حسب کلاف های تاری مستقل از مختصات فرمول بندی می شود، پیاده سازی عددی نیازمند آن است که بردار های ویژگی مستقل از مختصات $\mathcal{A}_p \in \mathcal{A}$ را تعریف کنیم. برای حفظ سازگاری با بخش ۲.۳ شرح داده $f^A(p) := \psi_{\mathcal{A}, p}^A(f(p))$ نسبت به یک انتخاب قاب مرجع $[e_i^A]_{i=1}^d \in G_p M$ از $f^A(p)$ بیان شوند، همانطور که در بخش ۲.۳ شرح داده شد. در زبان کلاف های تاری، این معادل با انتخاب بدیهی سازی های محلی یا پیمانه های Ψ_{GM}^A ، Ψ_{TM}^A و Ψ_{FM}^A است که اگر \mathcal{A} به صورت G -الحقیقی با یکدیگر در نظر گرفته شوند، همگی به طور همزمان تبدیل می شوند. به اید بیاورید که توصیف محلی و در نتیجه پیاده سازی از طریق یک G -اطلس، متشکل از بدیهی سازی های محلی که M را می پوشانند و سه شرط (۱۱۴)، (۱۱۵) و (۱۱۶) را برآورده می کنند، کاملاً معادل با نظریه سراسری و مستقل از مختصات است.

در این بخش، ما بدیهی سازی های الحقیقی TM ، TM و \mathcal{A} و تبدیلات پیمانه هم زمان آنها را بررسی می کنیم. برای حفظ سازگاری با بخش ۲.۳ با فرض داده شده بودن بدیهی سازی های TM شروع کرده و بحث می کنیم که چگونه آنها بدیهی سازی های TM و FM و میدان های قاب محلی متناظر را القا می کنند. اگر یک G -اطلس برای TM و در نتیجه برای FM انتخاب شود، این به یک G -ساختار GM منجر می شود که G -اطلس آن با

^{۴۸} به طور دقیق، توابع گذار مقادیری در $(c) \leq GL(c) \leq GL(d)$ به جای G خواهند گرفت، با این حال، از آنجا که گذارهای حاصل هنوز با G هستند، اصطلاح "G-مقدار" معمولاً برای شامل شدن چنین مواردی تطبیق داده می شود [۱].

G-اطلس FM منطبق است. بدیهی سازی‌های محلی هر کلاف G-الحاقی، به ویژه کلاف‌های بردار ویژگی \mathcal{A} ، از بدیهی سازی‌های GM به دست می‌آیند. این بدیهی سازی‌ها قانون تبدیل میدان‌های ویژگی از بخش ۲.۳ را بازیابی می‌کنند.

بدیهی سازی‌های TM : از آنجا که کلاف مماس، \mathbb{R}^d را به عنوان تار نمونه‌ای خود دارد، بدیهی سازی‌های محلی آن توسط نگاشت‌هایی به شکل زیر داده می‌شوند:

$$\Psi_{TM} : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^d. \quad (151)$$

این بدیهی سازی‌ها با پیمانه‌های نقطه‌ای (که به صورت هموار در فضای تغییر می‌کنند)

$$\psi_{TM,p} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (152)$$

از معادله (۱) با شناسایی $(\pi_{TM}(v), \psi_{TM,p}(v)) = (\pi_{TM}(v), \psi_{TM,p}(v))$ مطابقت دارند. به منظور رعایت ساختارهای فضای برداری تار \mathbb{R}^d و فضاهای مماس $T_p M$ ، بدیهی سازی‌های Ψ_{TM} به عنوان ایزومورفیسم‌های کلاف برداری بین $U \times \mathbb{R}^d$ و $\pi_{TM}^{-1}(U)$ تعریف می‌شوند، یعنی نگاشت‌های $\psi_{TM,p}$ باید خطی و معکوس‌پذیر باشند (یعنی ایزومورفیسم‌های فضای برداری باشند). نگاشت‌های گذار بین بدیهی سازی‌های مختلف TM به طور کلی در گروه خطی عام $GL(d)$ ، یعنی گروه خودریختی‌های (خطی) \mathbb{R}^d ، مقدار می‌گیرند.

اگر ساختار بیشتری روی کلاف مماس مشخص شود، بدیهی سازی‌ها باید این ساختار را رعایت کنند. به عنوان مثال، اگر یک متريک روی M و در نتیجه روی TM تعریف شود، نگاشت‌های $\psi_{TM,p}$ باید ایزومتريک باشند، یعنی بردارها را در $T_p M$ به گونه‌ای به بردارهای در \mathbb{R}^d نگاشت کنند که نرمه‌ها و زوایا حفظ شوند. از آنجا که در این حالت بدیهی سازی‌ها فقط در جهت و سوگیری خود می‌توانند متفاوت باشند، تضمین می‌شود که بدیهی سازی‌های مختلف توسط یک گروه ساختار کاوش باشند که متناظر با متريک به عنوان یک $O(d)$ -ساختار است. به طور کلی تر، یک G -ساختار روی TM نیازمند - یا القا شده توسط - یک انتخاب از G -اطلس $\{\Psi_{TM}^X\}_{X \in \mathfrak{X}}$ است. دو بدیهی سازی مختلف Ψ_{TM}^A و Ψ_{TM}^B از چنین G -اطلسی روی $U^A \cap U^B$ توسط $\Psi_{TM}^B \circ (\Psi_{TM}^A)^{-1}$ همان‌طور که در معادله (۱۱۰) تعریف شده است، با توابع گذار با مقدار در G به یکدیگر مرتبط می‌شوند:

$$g^{BA} : U^A \cap U^B \rightarrow G, \quad p \mapsto \psi_{TM,p}^B \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}, \quad (153)$$

که عمل چپ \triangleright و \triangleleft را روی تار نمونه‌ای تعریف می‌کنند. برای درک شهودی گرافیکی از عمل نقطه‌ای توابع گذار بر روی تارهای منفرد، به شکل ۶ بازمی‌گردیم. یک نمایش نموداری از بدیهی سازی‌های محلی TM و گذارهای آنها در شکل ۲۵ آورده شده است.

بدیهی سازی‌های الایایی FM و میدان‌های قاب: هر اطلس $\{\Psi_{TM}^X\}_{X \in \mathfrak{X}}$ از کلاف مماس در تناظر یک به یک با یک اطلس $\{\Psi_{FM}^A\}_{X \in \mathfrak{X}}$ از کلاف قاب است. به طور خاص، با داشتن یک بدیهی سازی محلی Ψ_{TM}^A از TM ، یک بدیهی سازی محلی متناظر

$$\Psi_{FM}^A : \pi_{FM}^{-1}(U^A) \rightarrow U^A \times GL(d), \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto (p, \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d)), \quad (154)$$

از FM ، که در آن $p = \pi_{FM}([e_i]_{i=1}^d)$ را به اختصار آورده‌ایم، با تعریف زیر الایایی شود:

$$\psi_{FM,p}^A : F_p M \rightarrow GL(d), \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) := (\psi_{TM,p}^A(e_i))_{i=1}^d \quad (155)$$

به عنوان یک نگاشت از قاب‌های مماس به ماتریس‌های $d \times d$ معکوس‌پذیر که ستون \square -ام آن توسط $\psi_{TM,p}^A(e_i) \in \mathbb{R}^d$ داده شده است. همان‌طور که برای کلاف‌های الحاقی لازم است، بدیهی سازی‌های TM و FM از توابع گذار یکسانی استفاده می‌کنند،

$$\begin{aligned} \psi_{FM,p}^B([e_i]_{i=1}^d) &= (\psi_{TM,p}^B(e_i))_{i=1}^d \\ &= (g_p^{BA} \psi_{TM,p}^A(e_i))_{i=1}^d \\ &= g_p^{BA} (\psi_{TM,p}^A(e_i))_{i=1}^d \\ &= g_p^{BA} \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d), \end{aligned} \quad (156)$$

زیرا عمل g^{BA} روی محورهای قاب بدیهی شده منفرد در خط دوم با عمل آن روی ماتریس قاب بدیهی شده در خط سوم یکسان است. علاوه بر این، همان‌طور که برای کلاف‌های اصلی در معادله (۱۲۳) ادعا شد، بدیهی سازی‌های کلاف قاب راست- $GL(d)$ -هم‌متغیر هستند، یعنی برای هر

(ب) بدیهی‌سازی‌های $FM \xrightarrow{\pi_{FM}} M$

(ج) بدیهی‌سازی‌های $GM \xrightarrow{\pi_{GM}} M$

(د) بدیهی‌سازی‌های $\mathcal{A} \xrightarrow{\pi_A} M$

شکل ۲۵: نمایش تصویری بدیهی‌سازی‌های محلی کلاف‌های G -الحاقی FM , TM , GM و \mathcal{A} در قالب نمودارهای جابجاگی که در آن‌ها را به اختصار نشان می‌دهیم. یک G -اطلس $\{U^X, \Psi_{TM}^X\}$ از کلاف مماس با نگاشتهای گذار GM را G -القا می‌کند و G -اطلس‌هایی برای FM , TM و \mathcal{A} نمودارهای جابجاگی دقیق‌تری که مقاطع $U \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U)$ و σ و عمل راست \triangleleft روی کلاف قاب را نشان می‌دهند در شکل‌های ۲۶ و ۲۷ آورده شده‌اند. میدان‌های ویژگی، که به عنوان مقاطع $f : M \rightarrow \mathcal{A}$ از کلاف بردار ویژگی \mathcal{A} مدل‌سازی شده‌اند، و بدیهی‌سازی‌های محلی آن‌ها $f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c$ در شکل ۲۷ نشان داده شده‌اند. تفسیری گرافیکی از نمودار جابجاگی برای TM ، که به یک فضای مماس منفرد $T_p M$ محدود شده است، در شکل ۶ ارائه شده است.

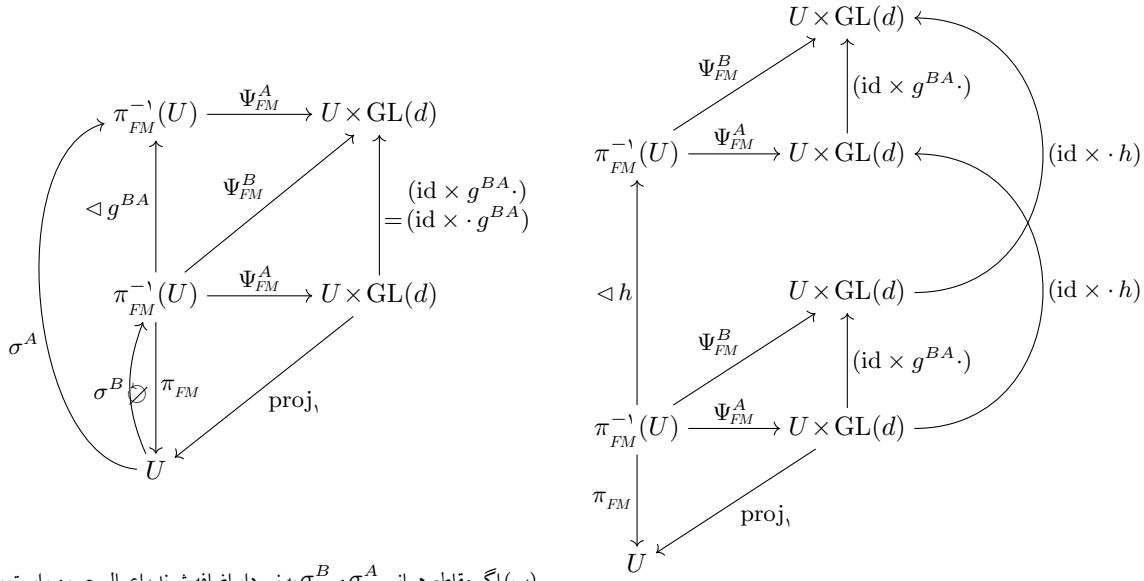
داریم: $h \in \mathrm{GL}(d)$

$$\begin{aligned}
 \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d \triangleleft h) &= \psi_{FM,p}^A \left(\left(\sum_j e_j h_{ji} \right)_{i=1}^d \right) \\
 &= \left(\psi_{TM,p}^A \left(\sum_j e_j h_{ji} \right) \right)_{i=1}^d \\
 &= \left(\sum_j \psi_{TM,p}^A(e_j) h_{ji} \right)_{i=1}^d \\
 &= \left(\psi_{TM,p}^A(e_i) \right)_{i=1}^d \cdot h \\
 &= \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) \cdot h
 \end{aligned} \tag{۱۵۷}$$

در اینجا از خطی بودن $\psi_{TM,p}^A$ در مرحله سوم استفاده کردیم و عبارت اندیسی را به عنوان ضرب ماتریسی از راست در مرحله چهارم شناسایی کردیم. شکل ۲۶ عمل چپ روی بدیهی‌سازی را از طریق توابع گذار $\Psi_{FM}^B \circ (\Psi_{FM}^A)^{-1} = (\mathrm{id} \times g^{BA})$ که در معادله (۱۵۶) مشتق شده و هم‌متغیری راست $\triangleleft h = (\mathrm{id} \times \cdot \cdot h) \circ \Psi_{FM}^A$ در معادله (۱۵۷) مشتق شده، خلاصه می‌کند.

همان‌طور که در معادله (۴) اشاره شد و در شکل‌های ۶ و ۷ نمایش داده شد، یک بدیهی‌سازی محلی هموار Ψ_{TM}^A از کلاف مماس یک میدان قاب را روی U^A القا می‌کند. این به عنوان یک مقطع محلی هموار

$$\sigma^A : U^A \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^A), \quad p \mapsto \left[(\psi_{TM,p}^A)^{-1}(e_i) \right]_{i=1}^d \tag{۱۵۸}$$



(ب) اگر مقاطع همانی σ^A و σ^B به نمودار اضافه شوند، اعمال چپ و راست با $g \cdot e = e \cdot g \forall g \in \psi_{FM,p}^A \circ \sigma^A(p) = e$ یکدیگر منطبق می‌شوند زیرا $\sigma^B \circ \pi_{FM} = \text{id}_{GL(d)}$

(ت) بدیهی سازی‌های کلاف قاب راست-هم‌متغیر هستند، یعنی برای هر $h \in U \times GL(d)$ در رابطه $\Psi_{FM,p} \triangleleft h = (\text{id} \times h) \circ \Psi_{FM}$ صدق می‌کنند.

شکل ۲۶: نمودارهای گسترش‌یافته بدیهی سازی‌های کلاف قاب که تعامل توابع گذار g^{BA} ، اعمال راست \triangleleft و \triangleright و مقاطع همانی σ^A و σ^B را نشان می‌دهند. اگر مانند قبل، $U = U^{AB} = U^A \cap U^B$ را به اختصار نشان می‌دهیم. به جز $\sigma^B \circ \pi_{FM} \neq \text{id}_{FM}$ و $\sigma^A \circ \pi_{FM} \neq \text{id}_{FM}$ نمودارها جایجا می‌شوند. اگر بدیهی سازی‌ها بخشی از یک G-اطلس باشند، نمودارهای مشابهی، با جایگزینی FM و GM با G و $GL(d)$ برای G-ساختار متناظر اعمال می‌شوند.

از کلاف قاب فرمول‌بندی می‌شود که با نگاشت بردارهای قاب استاندارد ϵ_i از \mathbb{R}^d به فضاهای مماس در $\pi_{TM}^{-1}(U^A) \subseteq TM$ تعریف می‌شود. پیرو معادله ۱۰، یک تبدیل پیمانه از $\Psi_{TM}^B = (\text{id} \times g^{BA}) \circ \Psi_{TM}^A$ به $\sigma^B(p) = \sigma^A(p) \triangleleft (g_p^{BA})^{-1}$ متناظر است با یک تبدیل

$$\sigma^B(p) = \sigma^A(p) \triangleleft (g_p^{BA})^{-1} \quad (159)$$

از مقاطع روی U^{AB} بدیهی سازی‌های Ψ_{FM}^A از FM که بر حسب Ψ_{TM}^A تعریف شده‌اند، این ویژگی خوب را دارند که مقاطع متناظر σ^A را به قاب همانی نگاشت می‌کنند، که با جایگذاری هر دو تعریف می‌توان آن را مشاهده کرد:

$$\psi_{FM,p}^A \circ \sigma^A(p) = \psi_{FM,p}^A \left(\left[(\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i) \right]_{i=1}^d \right) = \left(\psi_{TM,p}^A \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i) \right)_{i=1}^d = (\epsilon_i)_{i=1}^d = e \quad (160)$$

این ویژگی اغلب برای تعریف مقاطع FM با داشتن بدیهی سازی‌های Ψ_{FM}^A به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\sigma^A: U^A \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^A), \quad p \mapsto (\Psi_{FM}^A)^{-1}(p, e) = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(e), \quad (161)$$

که در نهایت با تعریف ما در معادله (۱۵۸) منطبق است. از آنجا که Ψ_{FM}^A که به این روش ساخته شده‌اند یکدیگر را القا می‌کنند، گاهی اوقات به آن‌ها مقاطع های همانی و بدیهی سازی‌های محلی کانونی گفته می‌شود. گسترش نمودار در شکل ۲۶ با مقاطع همانی σ^A و σ^B که با معادله ۱۵۹ مرتبه هستند، $h = g^{BA}$ را ثابت می‌کند و بنابراین به نمودار جایجا باید در شکل ۲۶ ۲ ب منجر می‌شود. ضرب‌های چپ و راست با $g^{BA} \cdot e = g^{BA} = e \cdot g^{BA} = \psi_{FM,p}^B \circ \sigma^B$ در اینجا فقط به این دلیل منطبق هستند که e برای آن $GL(d)$ نمونه‌ای است. شکل ۲۶ را با شکل ۲۴ مقایسه کنید که عمل پیمانه چپ $\triangleleft (g_p^{BA})^{-1}$ و عمل راست $(g_p^{BA})^{-1} \triangleleft$ از عنصر گروه معکوس را نشان می‌دهد که بین قاب‌های مقاطع همانی متناظر تبدیل می‌کند.

G-اطلس الگاکننده GM-Sاختار G: انطباق توابع گذار کلاف مماس و کلاف قاب در معادله (۱۵۶) نشان می‌دهد که یک G-اطلس از TM یک G-اطلس برای FM القا می‌کند. همانطور که در ادامه استنتاج خواهیم کرد، چنین G-اطلس‌هایی یک G-ساختار متناظر GM را مشخص می‌کنند، یعنی یک زیرکلاف اصلی G از FM که از قاب‌های ممتاز تشکیل شده است.

برای توجیه تعریف GM بر اساس یک G-اطلس داده شده $\{(U^X, \Psi_{FM}^X)\}_{X \in \mathfrak{X}}$ از FM ، دو بدیهی سازی محلی آن Ψ_{FM}^A و Ψ_{FM}^B را با دامنه‌های $F_p M$ در نظر بگیرید و فرض کنید $p \in U^A \cap U^B$. بدیهی سازی‌ها قاب‌های مرجع $\sigma^A(p)$ و $\sigma^B(p)$ را در $F_p M$ تعریف می‌کنند که طبق همپوشان در نظر بگیرید.

معادله (۱۵۹) توسط عمل راست عنصری مانند g_p^{BA} از گروه ساختار کاهش یافته $G \leq \text{GL}(d)$ به یکدیگر مرتبط هستند. بنابراین، هر قاب تعريف شده به این شکل، عنصری از یک G-مدار $G_pM \cong \text{GL}(d)$ در $G_pM \cong \text{GL}(d)$ است. به طور خاص، با این مقاطع همانی از طریق معادله (۱۶۱) به صورت $\sigma^B(p) = (\psi_{FM,p}^B)^{-1}(e) = (g_p^{BA}\psi_{FM,p}^A)^{-1}(e) = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}((g_p^{BA})^{-1})\sigma^A(p) = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(G)$ تعريف نقطه‌ای G-ساختار بر اساس تصاویر معکوس G توسط نگاشت‌های پیمانه (دلخواه) پیشنهاد می‌شود:

$$G_pM := \left\{ (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(g) \mid g \in G \right\} = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(G) \quad (162)$$

استقلال از پیمانه انتخاب شده از G-اطلس واضح است زیرا هر انتخاب دیگری $(\psi_{FM,p}^A)^{-1}(G)$ نتیجه یکسانی به دست می‌دهد. همانطور که به راحتی می‌توان بررسی کرد، G_pM در واقع یک تورسور راست G است زیرا یک تورسور راست G است و $\psi_{FM,p}^A$ طبق معادله (۱۵۷) یک ایزو‌مورفیسم راست-GL(d)-هم‌متغیر و بنابراین به طور خاص راست-G-هم‌متغیر است. همواری مورد نیاز $GM = \coprod_{p \in M} G_pM$ از همواری بدیهی‌سازی‌های Ψ_{FM}^A ناشی می‌شود.

یک G-اطلس از بدیهی‌سازی‌های محلی GM با محدود کردن بدیهی‌سازی‌ها در G-اطلس FM به قاب‌های موجود در GM به دست می‌آید، یعنی،

$$\Psi_{GM}^A := \Psi_{FM}^A|_{\pi_{GM}^{-1}(U^A)} : \pi_{GM}^{-1}(U^A) \rightarrow U^A \times G, \quad (163)$$

یا، به صورت محلی،

$$\psi_{GM,p}^A := \psi_{FM,p}^A|_{G_pM} : G_pM \rightarrow G. \quad (164)$$

بلافاصله نتیجه می‌شود که توابع گذار با مقدار در G با توابع گذار TM و TM منطبق هستند، یعنی،

$$\psi_{GM,p}^B([e_i]_{i=1}^d) = g_p^{BA}\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d), \quad (165)$$

و اینکه بدیهی‌سازی‌ها راست-G-هم‌متغیر هستند:

$$\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d \triangleleft h) = \psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) \cdot h \quad \forall h \in G \quad (166)$$

میدان‌های قاب نیز با یک عبارت معادل

$$\sigma^A(p) = (\psi_{GM,p}^A)^{-1}(e) \quad (167)$$

با عبارت معادله (۱۶۱) داده می‌شوند. نمودارهای جابجایی در شکل‌های ۲۶ آ و ۲۶ ب نیز هنگام جایگزینی FM با GM و $GL(d)$ با G معتبر هستند.

بدیهی‌سازی‌های القایی کلاف‌های الحاقی A: یک G-اطلس $\Psi_A^X : \{\{U^X, \Psi_A^X\}_{X \in \mathfrak{X}}\}$ شامل بدیهی‌سازی‌های محلی Ψ_{GM}^X از کلاف‌های بردار ویژگی الحاقی ρ از $A = (GM \times \mathbb{R}^c)/\sim$ از بدیهی‌سازی‌های متناظر G-ساختار القایی شود. برای ساختن این بدیهی‌سازی‌ها، به یاد بیاورید که بر اساس کلاس‌های همارزی $[e_i]_{i=1}^d, f$ Ψ_{GM}^X تعريف می‌شود که شامل زوج‌هایی از قاب‌های مرجع و بردارهای ضربی ویژگی است که توسط رابطه همارزی $\rho \sim$ تعريف شده در معادله (۱۴۸) به هم مرتبط هستند. یک ایده طبیعی این است که $[e_i]_{i=1}^d, f \in \mathcal{A}_p$ را با انتخاب یک نماینده از بردارهای ضربی همارز آن در \mathbb{R}^c بدیهی‌سازی کنیم. یک انتخاب ممتاز از نماینده در اینجا توسط آن بردار ضربی داده می‌شود که به قاب مقطع همانی $\sigma^A(p)$ متناظر با Ψ_{GM}^A تعلق دارد.

فرض کنید $\sigma^A(p) \triangleleft h \in G_pM$ باشد که توسط یک جابجایی $h \in G$ نسبت به مقطع σ^A تعريف شده است. این جابجایی را می‌توان با بدیهی‌سازی G-ساختار بازیابی کرد:

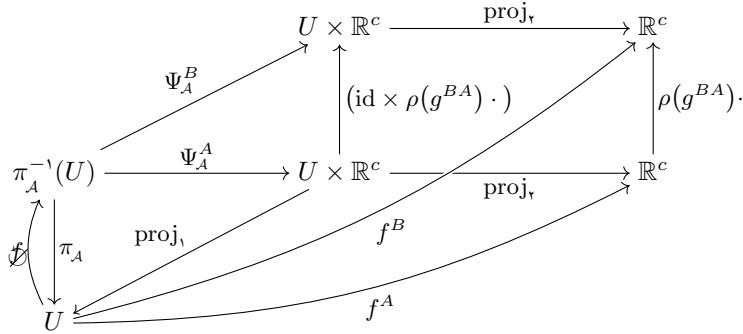
$$\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) = \psi_{GM,p}^A(\sigma^A(p) \triangleleft h) = \psi_{GM,p}^A(\sigma^A(p)) \cdot h = h \quad (168)$$

در اینجا از هم‌متغیری راست-G- $\psi_{GM,p}^A$ و اینکه σ^A به عنوان مقطع همانی تعريف شده است، استفاده کردیم؛ به معادلات (۱۶۶) و (۱۶۰) که دومی برای $\psi_{GM,p}^A$ تطبیق داده شده است، مراجعه کنید. بنابراین می‌توانیم هر قاب را از طریق جابجایی آن بازنویسی کنیم:

$$[e_i]_{i=1}^d = \sigma^A(p) \triangleleft \psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) \quad (169)$$

به طور مشابه، می‌توانیم هر بردار ویژگی $[e_i]_{i=1}^d, f \in \mathcal{A}_p$ را با نماینده‌گان مختلف کلاس همارزی بازنویسی کنیم:

$$[[e_i]_{i=1}^d, f] = [\sigma^A(p) \triangleleft \psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d), f] = [\sigma^A(p), \rho(\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d))]f \quad (170)$$



شکل ۲۷: میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات به عنوان مقاطع سراسری (\mathcal{A}) در Γ تعریف می‌شوند. در همسایگی‌های محلی U^A و U^B ، آن‌ها به میدان‌های $f^B(p) = \rho(g_p^{BA})f^A(p)$ بردارهای ضرب ویژگی $f^B : U^B \mapsto \mathbb{R}^c$ و $f^A : U^A \cap U^B \mapsto \mathbb{R}^c$ بدبینی سازی می‌شوند که روی U با رابطه f^B و f^A برابر باشد. بدین معنی f^A و f^B نمودار جابجایی پذیر است.

بر اساس این بیانش‌ها، بدیهی سازی‌های القابی A را با قرار دادن زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Psi_{\mathcal{A}}^A : \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(U^A) \rightarrow U^A \times \mathbb{R}^c, \quad [[e_i]_{i=1}^d, f] \mapsto \left(\pi_{GM}([e_i]_{i=1}^d), \psi_{\mathcal{A}, p}^A([e_i]_{i=1}^d, f) \right), \quad (17)$$

$$\psi_{A,p}^A : \mathcal{A}_p \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad \left[[e_i]_{i=1}^d, f \right] = \left[\sigma^A(p), \rho\left(\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d)\right) f \right] \mapsto \rho\left(\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d)\right) f, \quad (\text{174})$$

که آن بردار ضریب نماینده خاص $f^A = \rho(\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d))$ را انتخاب می‌کند که توسط قاب مرجع (p) σ^A متاظر با پیمانه انتخاب شده، متمایز می‌شود. برای راحتی در آینده، توجه می‌کیم که این به طور خاص دلالت بر این دارد که معکوس معادله (۱۷۲) توسط

$$(\psi_{\mathcal{A},p}^A)^{-1}: \mathbb{R}^c \rightarrow \mathcal{A}_p: f \mapsto [\sigma^A(p), f]. \quad (173)$$

داده می‌شود. بدیهی سازی تعریف شده به این شکل مستقل از نماینده انتخاب شده است زیرا برای هر $k \in G$:

$$\begin{aligned}
\psi_{A,p}^A \left([[e_i]_{i=1}^d \triangleleft k^{-1}, \rho(k)f] \right) &= \rho(\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d \triangleleft k^{-1})) \rho(k)f \\
&= \rho(\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) \cdot k^{-1}) \rho(k)f \\
&= \rho(\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d))f \\
&= \psi_{A,p}^A \left([[e_i]_{i=1}^d, f] \right)
\end{aligned} \tag{144}$$

بر اساس ساختار، توابع گذار توسط (g_p^{BA}) داده می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\psi_{A,p}^B([e_i]_{i=1}^d, f) &= \rho(\psi_{GM,p}^B([e_i]_{i=1}^d))f \\
&= \rho(g_p^{BA}\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d))f \\
&= \rho(g_p^{BA})\rho(\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d))f \\
&= \rho(g_p^{BA})\psi_{A,p}^A([e_i]_{i=1}^d, f)
\end{aligned} \tag{15}$$

اگر کلاف مماس به عنوان یک کلاف برداری G -الحقیقی $(GM \times \mathbb{R}^d)/G$ در نظر گرفته شود، بدینهی سازی‌های آن از معادله (۱۷۱) برای انتخاب خاص $g = (g)^{\rho}$ بازیابی می‌شوند.

فرض کنید یک میدان ویژگی مستقل از مختصات $(A) \in \Gamma(A)$ داده شده باشد. نسبت به پیمانه Ψ_A^A , می‌توان آن را به صورت محلی به عنوان یک میدان بردار ضریب $U^A \rightarrow \mathbb{R}^c$ با تعریف زیر نمایش داد:

$$f^A := \text{proj}_\gamma \circ \Psi_A^A \circ f \quad (176)$$

که معادل با تعریف نقطه‌ای زیر است:

$$f^A(p) = \psi_{\mathcal{A},p}^A \circ f(p). \quad (\text{1W})$$

همانطور که از نمودار جایجاوی در شکل ۲۷ پیداست، توابع گذار در معادله (۱۷۵) به میدان‌های خصیب محلی منتقل می‌شوند به طوری که داریم:

$$f^B(p) = \rho(g_p^{BA}) f^A(p) \quad (17\lambda)$$

برای $U^A \cap U^B \in p$. این با تعریف ما از تبدیلات پیمانه بردارهای ضربی و بیژگی در معادله (۲۸) موافق است و آن را توجیه می‌کند.

ملاحظات پایانی: بدیهی سازی‌های محلی و توابع گذار تعریف شده در اینجا، تعاریف پیمانه‌ها و تبدیلات پیمانه از بخش ۲.۳ را رسمی سازی و توجه می‌کنند. نشان داده شد که بدیهی سازی‌های محلی TM و FM یکدیگر را القا می‌کنند. اگر یک G -اطلس برای هر یک از این دو انتخاب شود، یک G -ساختار GM تعریف می‌کند که G -اطلس آن اساساً با G -اطلس FM منطبق است. علاوه بر این، یک G -اطلس برای هر کلاف الحاقی دیگر، از جمله A ، القا می‌کند. همانطور که در شکل ۲۵ به تصویر کشیده شده است، توابع گذار تمام G -اطلس‌ها برای GM ، TM و FM با هم منطبق مستند، که این کلاف‌ها را G -الحاقی با یکدیگر می‌سازند. به طور خاص، هنگام تغییر از پیمانه A به پیمانه B ، بدیهی سازی‌های FM ، TM و GM مطابق با یک ضرب چپ با g^{BA} تبدیل می‌شوند در حالی که بدیهی سازی‌های کلاف بردار ویژگی مطابق با یک ضرب چپ با $(g^{BA})^{-1}$ تبدیل می‌شوند؛ به معادلات (۱۵۳)، (۱۵۶) و (معادله ۱۷۵) مراجعه کنید. در عین حال، میدان‌های قاب مطابق با عمل راست $(g^{BA})^{-1}$ (معادله ۱۵۹) تبدیل می‌شوند.

۵.۶ منتقل کننده‌های موازی روی کلاف‌های الحاقی

بعضی ۳.۳ مقدمه‌ای شهودی بر انتقال موازی بردارهای مماس و بردارهای ویژگی در امتداد یک مسیر γ از $p \in M$ به $q \in M$ ارائه داد. در اینجا به طور خلاصه بحث می‌کنیم که چگونه منتقل کننده‌های موازی مستقل از مختصات روی کلاف‌های تاری یکدیگر را القا می‌کنند و عبارات مختصاتی آن‌ها را نسبت به بدیهی سازی‌های داده شده استخراج می‌کنیم. ما با فرض داده شده یوdon منتقل کننده‌های مستقل از مختصات

$$\mathcal{P}_{TM,\gamma} : T_q M \rightarrow T_p M \quad (179)$$

روی کلاف مماس TM شروع می‌کنیم و توضیح می‌دهیم که چگونه آن‌ها منتقل کننده‌های

$$\mathcal{P}_{FM,\gamma} : F_q M \rightarrow F_p M \quad (180)$$

روی کلاف قاب FM را القا می‌کنند. اگر این منتقل کننده‌ها، همانطور که در ادامه بحث می‌شود، با G -ساختار انتخاب شده G -سازگار باشند، در ادامه منتقل کننده‌های

$$\mathcal{P}_{GM,\gamma} : G_q M \rightarrow G_p M \quad (181)$$

$$\mathcal{P}_{A,\gamma} : A_q \rightarrow A_p \quad (182)$$

را روی کلاف‌های G -الحاقی GM و A -الحاقی GA می‌کنند. در عمل، یعنی در مرور ادبیات ما در بخش ۲.۳، اکثر شبکه‌های کانولوشنی یا منتقل کننده‌هایی را فرض می‌کنند که بر اساس اتصال لوی-چیوینتا هستند یا یک اتصال بدیهی.

یک تعریف رسمی تر از منتقل کننده‌های کلاف ممکن است مسیر متفاوتی را در پیش بگیرد، که با معرفی یک اتصال به اصطلاح اصلی ارسمان روی کلاف اصلی G یعنی در GM شروع می‌شود (که بنا به تعریف، G -سازگار خواهد بود). چنین اتصال ارسمنی می‌تواند یا با انتخاب یک زیر کلاف افقی TGM از کلاف مماس HGM از GM تعريف شود یا، به طور معادل، با یک ۱-فرم اتصال با مقدار در جبر لی $g : \mathcal{G}$ روی GM . انتقال روی GM متعاقباً از طریق بالابرافقی $GM \rightarrow [1, \gamma]$ را فضای پایه تعريف می‌شود، به طوری که بردارهای مماس بالابر در GM افقی هستند، یعنی $\gamma \in HGM$. سپس تمام منتقل کننده‌ها روی TM و FA به عنوان کلاف‌های G -الحاقی از منتقل کننده‌های روی G -ساختار القا می‌شوند. به جای دنبال کردن این رویکرد رسمی، که نسبتاً فنی خواهد بود و می‌توان آن را در ادبیات یافت [؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟]، ما بر چگونگی ارتباط منتقل کننده‌های مختلف از طریق القای یکدیگر تمرکز می‌کنیم.

انتقال روی TM : برای این منظور، با فرض داده شده یوdon منتقل کننده‌های مستقل از مختصات $\mathcal{P}_{TM,\gamma}$ روی TM ، یک راه میان بر را انتخاب می‌کنیم. به یاد بیاورید که، با داشتن پیمانه‌های $\tilde{U}_q^{\tilde{A}}$ روی یک همسایگی $U_q^{\tilde{A}}$ از q و یک همسایگی U_p^A از p ، منتقل کننده بردار مماس طبق معادله (۳۳) مختصاتی می‌شود، یعنی،

$$g_{\gamma}^{A\tilde{A}} := \psi_{TM,p}^A \circ \mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1} \in \text{GL}(d), \quad (183)$$

و اینکه مختصاتی سازی‌های آن تحت تبدیلات پیمانه در q و p طبق معادله (۳۵) تبدیل می‌شوند:

$$g_{\gamma}^{B\tilde{B}} = g_p^{BA} g_{\gamma}^{A\tilde{A}} (g_q^{\tilde{B}\tilde{A}})^{-1} \quad (184)$$

برای نمایش تصویری این تعریف در قالب یک نمودار جاوجایی، به معادله (۳۴) بازمی‌گردیم.

انتقال روی FM : با داشتن منتقل کننده روی کلاف مماس، منتقل کننده از انتقال محورهای قاب منفرد به دست می‌آید. در معادلات، فرض کنید $C_i \in F_q M$ یک قاب در q باشد، سپس محورهای منفرد e_i برای $i = 1, \dots, d$ بردارهای مماس در $T_q M$ هستند

که می‌تواند از طریق $\mathcal{P}_{TM,\gamma}$ منتقل شوند. بنابراین منتقل کننده روی کلاف قاب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:^{۴۹}

$$\mathcal{P}_{FM,\gamma}: F_qM \rightarrow F_pM, \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto \mathcal{P}_{FM,\gamma}([e_i]_{i=1}^d) := [\mathcal{P}_{TM,\gamma}(e_i)]_{i=1}^d \quad (185)$$

برای استخراج شکل صریح مختصاتی سازی آن را بروی یک عنصر گروهی $(\psi_{FM,p}^A \circ \mathcal{P}_{FM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1}) \in GL(d)$ در $GL(d)$ عمل آن را بروی یک عنصر گروهی $(\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1} \in GL(d)$ در نظر بگیرید که نماینده یک قاب بدیهی شده از \mathbb{R}^d است که توسط ستون‌های ماتریس $h_{:,i} \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \dots, d$ تولید می‌شود:

$$\begin{aligned} [\psi_{FM,p}^A \circ \mathcal{P}_{FM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1}] (h) &= [\psi_{FM,p}^A \circ \mathcal{P}_{FM,\gamma}] \left([(\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(h_{:,i})]_{i=1}^d \right) && \text{(تعريف } \psi_{FM,p}^A, \text{ معادله ۱۵۵)} \\ &= \psi_{FM,p}^A \left([\mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(h_{:,i})]_{i=1}^d \right) && \text{(تعريف } \mathcal{P}_{FM,\gamma}, \text{ معادله ۱۸۵)} \\ &= \left(\psi_{TM,p}^A \circ \mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(h_{:,i}) \right)_{i=1}^d && \text{(تعريف } \psi_{TM,p}^A, \text{ معادله ۱۵۵)} \\ &= \left(g_\gamma^{A\tilde{A}}(h_{:,i}) \right)_{i=1}^d && \text{(بدیهی سازی } \mathcal{P}_{TM,\gamma}, \text{ معادله ۱۸۳)} \\ &= g_\gamma^{A\tilde{A}} h && \text{(۱۸۶)} \end{aligned}$$

بنابراین، مختصاتی سازی‌های منتقل کننده‌های قاب معادل با مختصاتی سازی‌های منتقل کننده‌های بردار مماس در معادله (۱۸۳) هستند اما به جای عمل بر روی بردارهای ضرب در \mathbb{R}^d , بر روی قاب‌های بدیهی شده در $GL(d)$ عمل می‌کنند. تبدیلات پیمانه آن‌ها را نمودار جابجایی

$$\begin{array}{ccccc} & & g_\gamma^{A\tilde{A}}. & & \\ GL(d) & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & GL(d) \\ & \downarrow & & \uparrow & \\ & \psi_{FM,q}^{\tilde{A}} & & & \psi_{FM,p}^A \\ & \downarrow & & \uparrow & \\ & g_q^{\tilde{B}\tilde{A}}. & F_qM & \xrightarrow{\mathcal{P}_{FM,\gamma}} & F_pM \\ & \downarrow & & & \downarrow \\ & \psi_{FM,q}^{\tilde{B}} & & & \psi_{FM,p}^B \\ & \downarrow & & \uparrow & \\ GL(d) & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & GL(d) \\ & & g_\gamma^{B\tilde{B}}. & & \end{array} \quad (187)$$

دیده می‌شود که با تبدیلات پیمانه منتقل کننده‌های مختصاتی شده روی TM در معادله (۱۸۴) منطبق هستند.

سازگاری اتصالات و G -ساختارها: هر انتخابی از اتصال یا تعریف منتقل کننده‌ها روی کلاف‌های TM و FM با هر G -ساختاری سازگار نیست. به طور خاص، یک G -ساختار ممکن است تحت انتقال قاب‌ها بسته نباشد، یعنی، در حالی که یک قاب در $G_qM \subseteq F_qM$ قرار ندارد.^{۵۰} نسبت به بدیهی سازی‌های GM ، چنین ناسازگاری در توسعه کننده‌های مختصاتی شده G ممکن است.^{۵۱} $g_\gamma^{A\tilde{A}} \notin G$ ضرب چپ آن‌ها روی تارهای \mathbb{R}^d و $GL(d)$ از کلاف‌های TM و FM خوش تعریف است، اما روی تار G از GM خوش تعریف نیست. اگر زیرکلاف TM تحت انتقال موازی روی FM بسته نباشد، این به معنای آن است که هیچ انتقال متناظر خوش تعریفی روی GM و در نتیجه روی هیچ کلاف G -الحاقی A وجود ندارد.

به عنوان مثال، اتصال لوی-چیوینتا را در فضاهای اقليدی در نظر بگیرید، که منتقل کننده‌های آن بردارهای مماس و قاب‌ها را به معنای معمول در d -موزای نگه می‌دارند. $\{e\}$ -ساختار (میدان قاب) در شکل ۱۳۳ تحت این انتقال بسته است و بنابراین سازگار است. از سوی دیگر، $\{e\}$ -ساختار در شکل ۳۳ تحت این انتقال بسته نیست و بنابراین با اتصال لوی-چیوینتا ناسازگار است. به طور مشابه، (2) -SO-ساختار روی S^3 در شکل ۳۳ با اتصال لوی-چیوینتا روی کره سازگار است، در حالی که $\{e\}$ -ساختار در شکل ۳۳ سازگار نیست.

خواننده ممکن است پرسد چه گزاره‌های کلی در مورد سازگاری اتصالات (یا منتقل کننده‌ها) و G -ساختارها می‌توان بیان کرد. به طور کلی، اتصال لوی-چیوینتا، یا هر اتصال متريک ديجيگري، با d -ساختار OM که متناظر با متريک است، سازگار هستند.^{۵۲} اگر منيفله جهت پذير باشد، اتصال لوی-چیوینتا علاوه بر اين با هر (2) -SO-ساختاری که متناظر با متريک باشد، سازگار است. يك مثال، (2) -SO-ساختار روی S^3 در شکل ۳۳ است. يك

^{۴۹} انتقال یک قاب در امتداد F یک منحنی γ (بالاً افقی) را در TFM توصیف می‌کند. فضای تولید شده توسط تمام بردارهای مماس γ' در امتداد TFM در TFM چنین منحنی‌هایی، زیرکلاف افقی HFM از TFM است که در بالا ذکر شد.^{۵۰} بر حسب یک اتصال اصلی ارسمن روی FM ، این حالت زمانی رخ می‌دهد که زیرکلاف افقی $TGM \subseteq TFM$ در $HFM \subseteq TFM$ قرار نداشته باشد. يك تعريف فوری از انتقال موازی بر حسب انتخاب يك زیرکلاف افقی HGM روی G -ساختار، هميشه (بنا به تعريف) منجر به يك انتقال خوش تعریف روی GM خواهد شد.

^{۵۱} اين گزاره بنا به تعريف برقرار است زيرا اتصالات متريک زوايا و طول‌ها بين بردارها و در نتیجه اورتونمال بودن قاب‌ها را حفظ می‌کنند. علاوه بر اين، می‌توان اتصالات متريک را به عنوان اتصالات اصلی ارسمن روی \bar{OM} تعريف کرد.

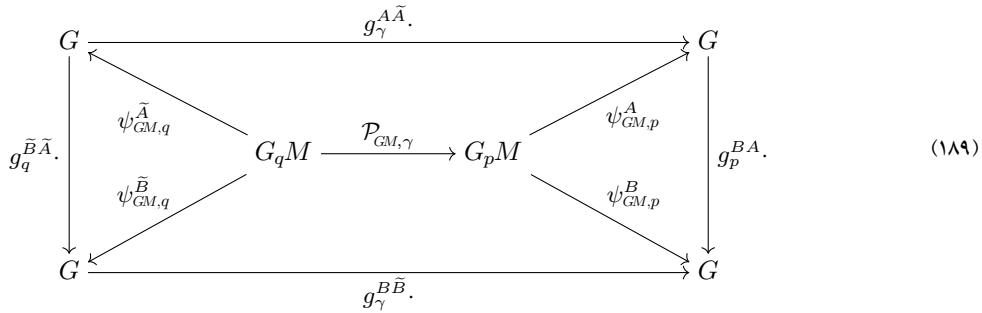
شرط لازم (اما نه کافی) برای اینکه یک G -ساختار باشد این است که گروه هولونومی اتصال، زیرگروهی از گروه ساختار G باشد.

یک مورد خاص مهم، $\{e\}$ -ساختارها هستند، زیرا آن‌ها یک اتصال بدیهی منحصر به فرد را القا می‌کنند.^{۵۲} منتقل کننده‌های متناظر، قاب‌ها را به گونه‌ای حرکت می‌دهند که با قاب‌های $\{e\}$ -ساختار موازی باقی بمانند. اتصالات بدیهی ممکن است برای نظریه کانولوشن‌های GM اهمیت خاصی نداشته باشند، با این حال، در واقع توسط بسیاری از شبکه‌های کانولوشنی استفاده می‌شوند. به طور خاص، هر شبکه‌ای که به یک $\{e\}$ -ساختار متناظر است، به طور ضمنی یک اتصال بدیهی را فرض می‌کند. این شامل تمام مدل‌های جدول $\{e\}$ با $G = \{e\}$ می‌شود، به ویژه آن‌هایی که در بخش‌های $\{e\}$ بررسی شده‌اند.^{۵۳} توجه داشته باشید که این مدل‌ها اتصال بدیهی را فقط برای انتقال بردار ویژگی خود فرض می‌کنند اما ژئودزیک‌ها را برای پول‌بک منتقل کنند، معادله (۱۸۷)، بر اساس اتصال اصلی لوی–چیویتا محاسبه می‌کند:

انتقال روی GM : با فرض اینکه GM با انتقال روی FM سازگار است (یعنی تحت آن بسته است)، یک منتقل کننده خوش تعریف با محدود کردن منتقل کننده کلاف قاب به G -ساختار داده می‌شود:

$$\mathcal{P}_{GM,\gamma} := \mathcal{P}_{FM,\gamma}|_{GM} : G_q M \rightarrow G_p M \quad (188)$$

توابع گذار بین مختصاتی سازی‌های مختلف $\mathcal{P}_{GM,\gamma}$ سپس با توابع گذار $\mathcal{P}_{TM,\gamma}$ و در نتیجه با $\mathcal{P}_{TM,\gamma}$ نیز متنطبق خواهد بود. ما نمودار جابجایی زیر را به دست می‌آوریم که محدودسازی نمودار در معادله (۱۸۷) از $G_q M$ ، $G_p M$ و $GL(d)$ به G و $G_q M$ و $G_p M$ را به تصویر می‌کشد:



ما در ادامه این کار فرض می‌کنیم که انتقال روی GM خوش تعریف است.

انتقال روی A : اگر منتقل کننده‌های یک اتصال روی GM خوش تعریف باشند، آن‌ها منتقل کننده‌های را روی هر کلاف G -الحاقی، از جمله کلاف‌های بردار ویژگی $\rho \sim \rho$ ($GM \times \mathbb{R}^c$) / \sim می‌کنند. فرض کنید $[e_i]_{i=1}^d, f := [f_q]$ یک بردار ویژگی مستقل از مختصات در A_q باشد. انتقال موازی آن توسط آن کلاس همارزی داده می‌شود که با ثابت نگه داشتن برخی ضرایب نماینده $f \in \mathbb{R}^c$ و انتقال قاب متناظر $[e_i]_{i=1}^d$ تعريف می‌شود:

$$\mathcal{P}_{A,\gamma} : A_q \rightarrow A_p, \quad f_q \mapsto \mathcal{P}_{A,\gamma}(f_q) := [\mathcal{P}_{GM,\gamma}([e_i]_{i=1}^d), f] \quad (189)$$

در بخش ۳.۳.۳ ما ادعا کردیم که منتقل کننده ضرایب عددی بردار ویژگی توسط $g_\gamma^{A\tilde{A}}$ داده می‌شود به شرطی که این حالت زمانی است که انتقال روی GM خوش تعریف باشد. این عبارت مختصاتی از $\mathcal{P}_{A,\gamma}$ را می‌توان با ارزیابی گام به گام عمل $\psi_{A,p}^A \circ \mathcal{P}_{A,\gamma} \circ (\psi_{A,q}^{\tilde{A}})^{-1}$ بردار ویژگی ρ روی $f \in \mathbb{R}^c$ استخراج کرد:

$$\begin{aligned} [\psi_{A,p}^A \circ \mathcal{P}_{A,\gamma} \circ (\psi_{A,q}^{\tilde{A}})^{-1}](f) &= [\psi_{A,p}^A \circ \mathcal{P}_{A,\gamma}]([\sigma^{\tilde{A}}(q), f]) && \text{(تعريف } (\psi_{A,p}^{\tilde{A}})^{-1}, \text{ معادله (۱۷۳))} \\ &= \psi_{A,p}^A([\mathcal{P}_{GM,\gamma}(\sigma^{\tilde{A}}(q)), f]) && \text{(تعريف } \mathcal{P}_{A,\gamma}, \text{ معادله (۱۹۰))} \\ &= \rho(\psi_{GM,p}^A \circ \mathcal{P}_{GM,\gamma} \circ \sigma^{\tilde{A}}(q)) \cdot f && \text{(تعريف } \psi_{A,p}^A, \text{ معادله (۱۷۲))} \\ &= \rho(\psi_{GM,p}^A \circ \mathcal{P}_{GM,\gamma} \circ (\psi_{GM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(e)) \cdot f && \text{(تعريف مقطع همانی } \sigma^{\tilde{A}}, \text{ معادله (۱۶۱))} \\ &= \rho(g_\gamma^{A\tilde{A}}) \cdot f && \text{(در مختصات, معادله (۱۸۹))} \end{aligned} \quad (191)$$

^{۵۲} یک اتصال بدیهی است اگر گروه هولونومی آن، یعنی انتقال موازی آن حول هر حلقه بسته، بدیهی باشد [۴].
^{۵۳} فقط یک اتصال اصلی ارسمن $H\{e\}M = T\{e\}M$ را می‌توان روی $\{e\}M$ انتخاب کرد زیرا کلاف عمودی $V\{e\}M$ مقطع صفر از $T\{e\}M$ است.
^{۵۴} این مدل‌ها با مدل‌سازی نکردن منتقل کننده‌های غیربدیهی بردارهای ویژگی، به طور ضمنی یک اتصال بدیهی را فرض می‌کنند: آن‌ها ضرایب بردار ویژگی را بدون تبدیل آن‌ها ایاشت می‌کنند.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \rho(g_{\gamma}^{A\tilde{A}}) & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 \mathbb{R}^c & & & & \mathbb{R}^c \\
 & \downarrow & \psi_{A,q}^{\tilde{A}} & & \downarrow \psi_{A,p}^A \\
 \rho(g_q^{B\tilde{A}}) & & A_q & \xrightarrow{P_{A,\gamma}} & \rho(g_p^{BA}) \\
 & \nearrow & \psi_{A,q}^{\tilde{B}} & & \searrow \psi_{A,p}^B \\
 & & & & \mathbb{R}^c \\
 & & \rho(g_{\gamma}^{B\tilde{B}}) & &
 \end{array} \quad (192)$$

نشان می دهد که تبدیلات پیمانه منتقل کننده های بردار ویژگی مختصاتی شده به صورت زیر است:

$$\rho(g_{\gamma}^{B\tilde{B}}) = \rho(g_p^{BA}) \rho(g_{\gamma}^{A\tilde{A}}) \rho(g_q^{B\tilde{A}})^{-1} \quad (193)$$

توجه داشته باشید که این قانون تبدیل با قانون تبدیل در معادله (۱۸۴) سازگار است.

۷ تبدیلات میدان کرnel مستقل از مختصات و کانولوشن های GM

کلاف های G-الحاقی معرفی شده در بخش ۶ امکان توصیف میدان های ویژگی - و در نتیجه شبکه های کانولوشنی - را در سطح سراسری فراهم می کنند. با داشتن دنباله ای از کلاف های بردار ویژگی G-الحاقی روی $A_1, \dots, A_N \xrightarrow{\pi_{A_1}} M, \dots, M \xrightarrow{\pi_{A_N}}$ ، ما شبکه های کانولوشنی مستقل از مختصات را به عنوان دنباله هایی

$$\Gamma(A_1) \xrightarrow{L_1} \Gamma(A_2) \xrightarrow{L_2} \dots \xrightarrow{L_N} \Gamma(A_N) \quad (194)$$

از لایه های پارامتری شده L_1, \dots, L_N توصیف می کیم که بین فضاهای میدان های ویژگی $\Gamma(A_1), \dots, \Gamma(A_N)$ ، یعنی بین فضاهای میدان های ویژگی مدل شده توسط کلاف های متناظر، نگاشت می کنند. در حالی که انواع میدان (یا قوانین تبدیل) $G \rightarrow GL(c_i)$ برای کلاف های میانی $\rho_i : A_i \sim_{\rho_i} GM \times \mathbb{R}^{c_i}$ (برای $i = 1, \dots, N-1$) باید توسط کاربر به عنوان یک آبزار اتمت مشخص شوند، انواع میدان (c_i) و $\rho_i : G \rightarrow GL(c_i)$ برای $\rho_N : G \rightarrow GL(c_N)$ تا توجه را به لایه های منفرد محدود کنیم که بین فضاهای ویژگی $\Gamma(A_1), \dots, \Gamma(A_N)$ و $\Gamma(A_{N+1}), \dots, \Gamma(A_M)$ با ابعاد c_1, \dots, c_N و c_{N+1}, \dots, c_M نگاشت انجام می دهنند.

هدف اصلی این بخش، معرفی کانولوشن های مستقل از مختصات GM است که بلوک های اصلی شبکه های مستقل از مختصات GM را معرفی کانولوشن های ریمانی هستند. برای شروع، و برای معرفی مقاومیتی که بعداً مورد نیاز خواهد بود، ما در بخش ۱.۷ ابتدا بر روی مورد ساده تر $GM \times \mathbb{R}^{c_1}$ -تعمیم کرخواهیم کرد که کرnel های نقطه مانند را به کار می برد. بخش ۲.۷ تعمیم را به کانولوشن های GM و تبدیلات میدان کرnel با کرnel های با گستره فضایی متنقل می کنند. آن ها بر حسب میدان های کرnel سراسری و هموار پارامتری می شوند که در بخش ۱.۲.۷ معرفی شده اند. میدان های کرnel کانولوشنی GM ملزم با اشتراک گذاری وزن ها بین موقعیت های مکانی مختلف هستند. برای اینکه این اشتراک گذاری وزن شده اند. میدان های کرnel کانولوشنی GM باشد، کرnel های الگو که میدان های کرnel کانولوشنی GM را پارامتری می کنند، باید G -هدایت پذیر باشند (معادله (۲۲۰)). تبدیلات واقعی میدان کرnel و کانولوشن های GM در بخش ۲.۷ معرفی می شوند. تعریف سراسری آن ها با جایگزینی عبارات مختصاتی محلی از بخش ۲.۴ با همتا های سراسری و مستقل از مختصات شان هدایت می شود. همانطور که در بخش ۲.۷ نشان داده شده است، این تعاریف مستقل از مختصات در بدیهی سازی های محلی به عبارات مختصاتی از بخش ۲.۴ کاملاً می یابند.

۱.۷ کانولوشن های GM با اندازه 1×1

هر بردار ویژگی وروودی مفرد $f \in \Gamma(A_{\text{rod}})$ میدان های ویژگی خروجی (یا $f \in \Gamma(A_{\text{out}})$) را به میدان های ویژگی خروجی (یا $f \in \Gamma(A_{\text{out}})$) در همان مکان $p \in M$ با نگاشت خطی $f(p) \in \mathbb{R}^{c_{\text{out}}}$ به یک بردار ویژگی خروجی $f(p) \in \mathcal{A}_{\text{out},p} \cong \mathbb{R}^{c_{\text{out}}}$ نگاشت می کنند. ویژگی کانولوشنی با اشتراک گذاری نگاشت خطی از $A_{\text{out},p}$ به $A_{\text{in},p}$ بین مکان های فضایی مختلف پیاده سازی می شود. با این حال، در حالی که فضاهای ویژگی $A_{\text{out},p}$ و $A_{\text{in},p}$ همچنین $A_{\text{out},q}$ و $A_{\text{in},q}$ برای $p, q \in M$ مختلف با یکدیگر ایزو مورف هستند، اگر گروه ساختار G در نظر گرفته شده غیربدیهی باشد، هیچ ایزو مورفیسم کانونی بین آنها وجود ندارد. بنابراین، مشخص نیست که چگونه نگاشت خطی می تواند بین مکان های مختلف به اشتراک گذاشته شود. همانطور که قبل از مقدمه این بخش اشاره شد، این مسئله با در نظر گرفتن کرnel های G-هم تغیر که نسبت به انتخاب خاص ایزو مورفیسم یا پیمانه بی تفاوت هستند، حل می شود. اختیاری بودن بدیهی سازی که از G-اطلس انتخاب می شود، استقلال از مختصات GM را در 1×1 -منعکس می کند.

از نظر ریاضی، $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square}, \mathcal{A}_{\square\square})$ -را می‌توان یا به عنوان $GM_{1\times 1}$ -مورفیسم‌های کلاف برداری خاص یا از طریق مقاطع متناظر کلاف‌های فرمول‌بندی کرد. از آنجایی که بعداً هر دو مفهوم نیاز داریم، هر دو دیدگاه را در بخش‌های بعدی $1.1.7$ و $2.1.7$ معرفی خواهیم کرد.

۱.۱.۷ کانولوشن‌های $GM_{1\times 1}$ به عنوان M -مورفیسم‌های کلاف برداری

$GM_{1\times 1}$ -را می‌توان بر حسب M -مورفیسم‌های کلاف برداری هموار خاصی که وزن‌ها را در موقعیت‌های مکانی به اشتراک می‌گذارند، رسمی‌سازی کرد. با تابیده گرفتن الزام به اشتراک‌گذاری وزن‌ها در حال حاضر، چنین M -مورفیسم کلاف برداری \mathcal{C} یک نگاشت کلاف هموار است که نمودار جابجایی زیر را برآورده می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\square} & \xrightarrow{\mathcal{C}} & \mathcal{A}_{\square\square} \\ & \searrow \pi_{\mathcal{A}_{\square}} & \swarrow \pi_{\mathcal{A}_{\square\square}} \\ & M & \end{array} \quad (195)$$

جابجایی‌پذیری \mathcal{C} تضمین می‌کند که هر تار $\mathcal{A}_{\square, p}$ به تار $\mathcal{A}_{\square\square, p}$ روی همان نقطه $p \in M$ نگاشت می‌شود (که باعث پیدایش M در عبارت M -مورفیسم می‌شود). به عنوان یک مورفیسم کلاف برداری، محدودیت $\mathcal{C}|_p : \mathcal{A}_{\square, p} \rightarrow \mathcal{A}_{\square\square, p}$ به یک تار منفرد، علاوه بر این، به صورت خطی تعریف می‌شود. نسبت به یک بدیهی سازی محلی $\Psi_{\mathcal{A}_{\square}}^A$ از \mathcal{A}_{\square} و $\Psi_{\mathcal{A}_{\square\square}}^A$ از $\mathcal{A}_{\square\square}$ ، نگاشت کلاف در هر نقطه $p \in U^A$ توسط یک ماتریس نمایش داده می‌شود:

$$\mathcal{C}^A|_p := \psi_{\mathcal{A}_{\square, p}}^A \circ \mathcal{C}|_p \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\square, p}}^A)^{-1} \in \mathbb{R}^{c_{\square} \times c_{\square}}. \quad (196)$$

ارتباط آن با یک مختصاتی‌سازی دوم $p \in U^A \cap U^B$ در \mathcal{C}^B در صورت زیر داده می‌شود:

$$\mathcal{C}^B|_p = \rho_{\square}(g_p^{BA}) \mathcal{C}^A|_p \rho_{\square}(g_p^{BA})^{-1}, \quad (197)$$

که از نمودار جابجایی زیر مشهود است:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{C}^A|_p & & \\ & \swarrow \psi_{\mathcal{A}_{\square}, p}^A & & \nearrow \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^A & \\ \mathbb{R}^{c_{\square}} & & \mathcal{A}_{\square, p} & & \mathbb{R}^{c_{\square\square}} \\ & \downarrow \rho_{\square}(g_p^{BA}) & \xrightarrow{\mathcal{C}|_p} & & \downarrow \rho_{\square\square}(g_p^{BA}) \\ & \swarrow \psi_{\mathcal{A}_{\square}, p}^B & & \nearrow \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^B & \\ & \mathbb{R}^{c_{\square}} & & \mathbb{R}^{c_{\square\square}} & \end{array} \quad (198)$$

نگاشت کلاف \mathcal{C} بر روی میدان‌های ویژگی ورودی $(\mathcal{A}_{\square}) \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square})$ عمل می‌کند تا میدان‌های ویژگی خروجی تولید کند:

$$f_{\square\square} = \mathcal{C} \circ f_{\square} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}). \quad (199)$$

بر حسب یک نمودار جابجایی، این نگاشت به صورت زیر به تصویر کشیده می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\square} & \xrightarrow{\mathcal{C}} & \mathcal{A}_{\square\square} \\ & \searrow f_{\square} & \swarrow f_{\square\square} \\ & M & \end{array}, \quad (200)$$

برای اینکه یک M -مورفیسم کلاف برداری $\mathcal{C}_{K_{\times 1}}$ نماینده یک $GM_{1\times 1}$ -باشد، باید بر حسب یک الگوی کرنل $K_{\times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\square} \times c_{\square}}$ -یعنی پارامتری شود که با مختصاتی‌سازی‌ها در تمام موقعیت‌های مکانی به اشتراک گذاشته

شده است. همانطور که قبلاً بحث شد، برای تضمین استقلال از مختصات GM ، هیچ پیمانه خاصی نباید ترجیح داده شود. بنابراین لازم است که وزن‌ها با تمام بدیهی‌سازی‌های $X \in \mathfrak{X}$ از G -اطلس \mathcal{A}^G به طور همزمان به اشتراک گذاشته شوند، یعنی لازم است:

$$\mathcal{C}_{K_{1 \times 1}}|_p = K_{1 \times 1} \quad \text{برای هر پیمانه } X \in \mathfrak{X} \text{ با } p \in U^X. \quad (201)$$

از رفتار تبدیل بین مختصاتی سازی‌های مختلف در معادله (۱۹۷) نتیجه می‌شود که الگوی کرنل باید قید خطی زیر را برابر آورده کند:

$$\rho_{\square\square}(g) K_{1 \times 1} \rho_{\square\square}(g)^{-1} = K_{1 \times 1} \quad \forall g \in G, \quad (202)$$

یعنی، باید یک درهم تنnde (یک نگاشت خطی هم‌متغیر) باشد. فضای برداری

$$\text{Hom}_G(\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square}) := \left\{ K_{1 \times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}} \mid K_{1 \times 1} \rho_{\square\square}(g) = \rho_{\square\square}(g) K_{1 \times 1} \quad \forall g \in G \right\} \quad (203)$$

نگاشت‌های درهم تنnde، فضای کرنل‌های 1×1 -مستقل از مختصات GM را به طور کامل مشخص می‌کند. همانطور که قبلاً در بخش ۱.۱.۴ ذکر شد، لم شور [۶] ایجاد می‌کند که الزام به اینکه $K_{1 \times 1}$ یک درهم تنnde باشد، از نگاشت بین میدان‌هایی که تحت نمایش‌های کاهش‌ناپذیر غیرایزوورف تبدیل می‌شوند، از طریق 1×1 -GM-جلوگیری می‌کند. کانولوشن‌های عمومی تر GM با کرنل‌های با گستره فضایی، که در بخش ۲.۷ تعریف شده‌اند، این مسئله را حل خواهند کرد.

با این مقدمات، آمده‌ایم تا تعریف دقیقی از 1×1 -GM-ارائه دهیم:

تعریف ۲.۱ 1×1 -GM-یک نگاشت است

$$K_{1 \times 1} \otimes : \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}), \quad f_{\square\square} \mapsto K_{1 \times 1} \otimes f_{\square\square} := \mathcal{C}_{K_{1 \times 1}} \circ f_{\square\square} \quad (204)$$

که توسط یک کرنل درهم تنnde 1×1 -GM-یعنی $K_{1 \times 1} \in \text{Hom}_G(\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square})$ پارامتری می‌شود. در اینجا $M\mathcal{C}_{K_{1 \times 1}}$ مورفیسم کلاف برداری هموار منحصر به فرد بین $\mathcal{A}_{\square\square}$ و $\mathcal{A}_{\square\square}$ است که در پیمانه‌های دلخواه $\psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}$ و $\psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}$ از G -اطلس مورد نظر به صورت نقطه‌ای تعریف می‌شود:

$$\mathcal{C}_{K_{1 \times 1}}|_p := \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^{-1} \circ K_{1 \times 1} \circ \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}. \quad (205)$$

استقلال از پیمانه‌های انتخاب شده (استقلال از مختصات GM) با درهم تنnde بودن $K_{1 \times 1}$ تضمین می‌شود.

برای نشان دادن صریح استقلال از پیمانه انتخاب شده، هر بدیهی‌سازی مرتبه با G یعنی $\psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}(g) \rho_{\square\square}(g) \rho_{\square\square}(g)$ را برای یک عنصر گروه ساختار دلخواه $g \in G$ در نظر بگیرید، که ساختار

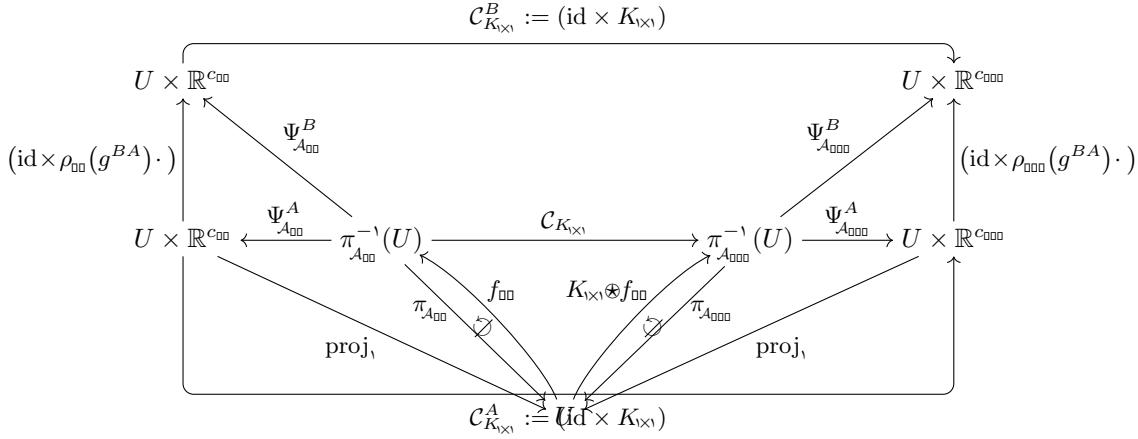
$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{K_{1 \times 1}}|_p &= (\rho_{\square\square}(g) \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p})^{-1} \circ K_{1 \times 1} \circ (\rho_{\square\square}(g) \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}) \\ &= \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^{-1} \circ (\rho_{\square\square}(g)^{-1} K_{1 \times 1} \rho_{\square\square}(g)) \circ \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p} \\ &= \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^{-1} \circ K_{1 \times 1} \circ \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p} \end{aligned} \quad (206)$$

را نامتفاوت باقی می‌گذارد. اینکه 1×1 -تعریف شده به این شکل واقعاً به مقاطعی در $(\mathcal{A}_{\square\square}, \Gamma)$ نگاشت می‌شوند، از این واقعیت ناشی می‌شود که $\mathcal{C}_{K_{1 \times 1}}$ یک نگاشت کلاف است. یک نمای کلی از مختصاتی سازی‌های محلی 1×1 -GM-در شکل ۲۸ در شکل آورده شده است.

۲.۱.۷ کانولوشن‌های GM با اندازه 1×1 به عنوان مقاطع کلاف هومومورفیسم

در حالی که M -مورفیسم کلاف برداری با مختصاتی سازی‌های مستقل از پیمانه از تعریف ۲.۱ و شکل ۲۸ یک 1×1 -GM-را به طور کامل مشخص می‌کند، اکنون دیدگاه جایگزینی را اتخاذ می‌کنیم که 1×1 -GM-را بر حسب کلاف هومومورفیسم $\pi_{\square\square} : \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow M$ توصیف می‌کند. برای این منظور، به یاد بیاورید که مورفیسم کلاف برداری \mathcal{C} در معادله (۱۹۵) به نگاشت‌های خطی $\mathcal{C}|_p : \mathcal{A}_{\square\square, p} \rightarrow \mathcal{A}_{\square\square, p}$ روی هر $p \in M$ محدود می‌شود. مجموعه چنین نگاشت‌های خطی (یا هومومورفیسم‌های فضای برداری) بین فضای برداری $\mathcal{A}_{\square\square, p}$ به صورت $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square, p}, \mathcal{A}_{\square\square, p})$ نشان داده می‌شود. از آنجایی که این مجموعه تحت ترکیب‌های خطی بسته است، خود یک

$$\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square}) := \coprod_{p \in M} \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square, p}, \mathcal{A}_{\square\square, p}) \quad (207)$$



شکل ۲۸: مختصاتی سازی یک $\Gamma(\mathcal{A}_{\text{obj}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\text{obj}})$ - GM با اشتراک گذاری یک ماتریس کرنل $K_{\times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\text{obj}} \times c_{\text{obj}}}$ در موقعیت‌های مکانی مختلف $p \in M$ در مورفیسم کد گذاری می‌شود. از آنجایی که هیچ پیمانه‌ای نباید ترجیح داده شود، کرنل علاوه بر این در بدیهی سازی‌های مختلف $C_{K_{\times 1}}^B$ و $C_{K_{\times 1}}^A$ به اشتراک گذاشته می‌شود. بنابراین، جابجایی پذیری نمودار برای هر انتخاب $\Psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}}^A$ ، $\Psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}}^B$ و $\Psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}}^A$ قید $\rho_{\text{obj}}(g)K_{\times 1}\rho_{\text{obj}}(g)^{-1} = K_{\times 1} \forall g \in G$ را اعمال می‌کند که ماتریس کرنل را به یک درهم تنده (یک نگاشت خطی هم‌متغیر) محدود می‌کند، یعنی $\Psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}}^A \circ \pi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}} \neq \text{id}_{\mathcal{A}_{\text{obj}}}$ و $f_{\text{obj}} \circ \pi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}} \neq \text{id}_{\mathcal{A}_{\text{obj}}}$. به جز $K_{\times 1} \in \text{Hom}_G(\rho_{\text{obj}}, \rho_{\text{obj}}) \subseteq \mathbb{R}^{c_{\text{obj}} \times c_{\text{obj}}}$ با مقادیر حقیقی در نظر بگیریم. بدیهی سازی‌های نمودار جابجایی پذیر است.

این فضاهای هومومورفیسم، هنگامی که با نگاشت تصویر M را به $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{obj}}, \mathcal{A}_{\text{obj}})$ می‌فرستد و یک ساختار هموار القا شده از ساختار \mathcal{A}_{obj} و \mathcal{A}_{obj} مجهز شود، یک کلاف برداری، یعنی کلاف هومومورفیسم بین \mathcal{A}_{obj} و \mathcal{A}_{obj} را تشکیل می‌دهد [؟]. تارهای روی p در رابطه $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{obj}}, \mathcal{A}_{\text{obj}}, p) \cong \text{Hom}(\mathbb{R}^{c_{\text{obj}}}, \mathbb{R}^{c_{\text{obj}}}) \cong \text{Hom}(\mathbb{R}^{c_{\text{obj}} \times c_{\text{obj}}}, \mathbb{R}^{c_{\text{obj}} \times c_{\text{obj}}})$ می‌توانیم تار نمونه‌ای را فضای برداری ماتریس‌های $c_{\text{obj}} \times c_{\text{obj}}$ با مقادیر حقیقی در نظر بگیریم. بدیهی سازی‌های

$$\Psi_{\text{obj}}: \pi_{\text{obj}}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^{c_{\text{obj}} \times c_{\text{obj}}}, H \mapsto (p, \psi_{\text{obj}, p}(H)), \quad (208)$$

که در آن $(H) = \pi_{\text{obj}}(H) = p$ را به اختصار آورده‌ایم، از بدیهی سازی‌های \mathcal{A}_{obj} و \mathcal{A}_{obj} با تعریف

$$\psi_{\text{obj}, p}: \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{obj}}, \mathcal{A}_{\text{obj}}, p) \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{obj}} \times c_{\text{obj}}}, H \mapsto \psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}, p} \circ H \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}, p})^{-1} \quad (209)$$

به قیاس با معادلات (۱۹۶) و (۱۸۱) القا می‌شوند. این به معنای نگاشتهای گذار

$$\begin{aligned} H^B &= \psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}, p}^B \circ H \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}, p}^B)^{-1} \\ &= \psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}, p}^B \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}, p}^A)^{-1} H^A \psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}, p}^A \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}, p}^B)^{-1} \\ &= \rho_{\text{obj}}(g^{BA}) H^A \rho_{\text{obj}}(g^{BA})^{-1} \\ &=: \rho_{\text{obj}}(g^{BA}) H^A \end{aligned} \quad (210)$$

بین پیمانه‌های Ψ_{obj}^A و Ψ_{obj}^B روی $U^A \cap U^B$ است، که در آن برای راحتی نوشتنی، نمایش گروهی هومومورفیسم $\rho_{\text{obj}}: G \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^{c_{\text{obj}} \times c_{\text{obj}}})$ را به عنوان ضرب چپ و راست با ρ_{obj} و ρ_{obj} معرفی کردیم.^{۵۵} کلاف هومومورفیسم ($\mathcal{A}_{\text{obj}}, \mathcal{A}_{\text{obj}}$) $-GM$ بنا به ساختار، به \mathcal{A}_{obj} الحاقی است، یعنی بدیهی سازی‌های آن به طور همزمان با بدیهی سازی‌های کلاف‌هایی دیگر تبدیل می‌شوند. به عنوان یک کلاف برداری \mathcal{A}_{obj} الحاقی، می‌توان آن را با $\sim_{\rho_{\text{obj}}}/\sim_{\rho_{\text{obj}}}$ ($GM \times \mathbb{R}^{c_{\text{obj}} \times c_{\text{obj}}}$) شناسایی کرد. شکل ۲۹ یک نمای کلی از بدیهی سازی‌های محلی ($\mathcal{A}_{\text{obj}}, \mathcal{A}_{\text{obj}}$) را نشان می‌دهد. به شواهد با بدیهی سازی‌های دیگر کلاف‌های G -الحاقی در شکل ۲۵ توجه کنید.

از دیدگاه کلاف‌های هومومورفیسم، نگاشتهای کلاف بدون قید مانند معادله (۱۹۵) متناظر با عمل مقاطع کلاف هومومورفیسم هموار بدون قید هستند

$$\sigma_{\text{Hom}}: M \mapsto \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{obj}}, \mathcal{A}_{\text{obj}}) \quad \text{به طوری که } \pi_{\text{obj}} \circ \sigma_{\text{Hom}} = \text{id}_M \quad (211)$$

^{۵۵} به طور کلی، یک کلاف هومومورفیسم بین دو کلاف برداری غیرالحاقی با گروه‌های ساختار G_1 و G_2 یک گروه ساختار $G_1 \times G_2$ خواهد داشت. از آنجایی که \mathcal{A}_{obj} و \mathcal{A}_{obj} الحاقی هستند، آنها به طور همزمان تحت همان گروه ساختار $G = G_1 \times G_2 = G_2 \times G_1$ تبدیل می‌شوند به طوری که نگاشتهای گذار آنها در زیرگروه قطری G از $G \times G$ مقدار می‌گیرند.

$$\begin{array}{ccc}
& & (\text{id} \times \rho_{\square\square}(g^{BA}) \cdot) \\
& \xrightarrow{\Psi_{\square\square}^B} & \downarrow \text{loop} \\
\pi_{\square\square}^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi_{\square\square}^A} & U \times \underbrace{\text{Hom}_G(\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square})}_{\subseteq \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}}} \\
& \swarrow \text{proj}, & \uparrow \text{id} \times \rho_{\square\square}(g^{BA}) \cdot \\
& \sigma_{K_{1\times 1}} \circ \pi_{\square\square} & U \\
& \uparrow & \downarrow \pi_{\square\square} \\
& U &
\end{array}$$

(T) بدیهی سازی ($\text{Hom}(A_{\square\square}, A_{\square\square})$) از آنجایی که به $A_{\square\square}$, GM , TM نگاشته‌های گذار کلاف هومورفیسم و $A_{\square\square}$ الحاقی است، نگاشته‌های گذار کلاف هومورفیسم توسعه همان $\text{Hom}(A_{\square\square}, A_{\square\square})$ -هستند، دقیقاً آنهاست که به عنصر گروهی g^{BA} از گروه ساختار مشترک G تعین می‌شوند (این را با شکل ۲۵ مقایسه کنید). مورفیسم‌های کلاف برداری بدون قید همانطور که در معادله (۱۹۵) نشان داده شده است، متاظر با مقاطع هموار بدون قید از $\text{Hom}(A_{\square\square}, A_{\square\square})$ هستند.

شکل ۲۹: بدیهی سازی‌های محلی کلاف هومورفیسم ($\text{Hom}(A_{\square\square}, A_{\square\square})$), کلاف برداری نگاشته‌های خطی بین فضاهای $A_{\square\square, p}$ و $A_{\square\square, p}$ برای هر $p \in M$. کلاف برداری نگاشته‌های خطی $\text{Hom}(A_{\square\square}, A_{\square\square})$ ، که در آن $\text{Hom}(A_{\square\square}, A_{\square\square}) = U^A \cap U^B$ را به اختصار می‌نویسیم. به جز $\sigma_{K_{1\times 1}} \circ \pi_{\square\square} \neq \text{id}_{\text{Hom}(A_{\square\square}, A_{\square\square})}$ ، نمودارها جابجایی پذیر هستند.

که می‌توان آنها را به عنوان میدان‌های کرنل 1×1 تفسیر کرد که وزن‌ها را به اشتراک نمی‌گذارند. وجود سراسری آنها با این واقعیت که $\text{Hom}(A_{\square\square}, A_{\square\square})$ یک کلاف برداری است تضمین می‌شود. مقاطع متاظر با 1×1 GM -علوه بر این نیاز دارند که تبدیلات خطی $(\sigma_{\text{Hom}}(p) \in \text{Hom}(A_{\square\square, p}, A_{\square\square, p})$ توسعه یک کرنل الگو $K_{1\times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}}$ تعین شوند که در موقعیت‌های مختلف M و $p \in M$ هر انتخاب پیمانه به اشتراک گذاشته شده است. بنابراین آنها را می‌توان برای هر $p \in M$ به صورت زیر تعریف کرد

$$\sigma_{K_{1\times 1}}(p) := \psi_{\square\square, p}^{-1}(K_{1\times 1}), \quad K_{1\times 1} \in \text{Hom}_G(\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square}), \quad (212)$$

که در آن بدیهی سازی انتخاب شده Ψ دلخواه است اگر (و تنها اگر) $K_{1\times 1}$ قید درهم تنnde را برآورده کند

$$\rho_{\square\square}(g)K_{1\times 1} = K_{1\times 1} \quad \forall g \in G, \quad (213)$$

که معادل با معادله (۲۰۲) است.^{۵۶} بی‌اهمیت بودن پیمانه در چنین مقاطعی در نمودار جابجایی در شکل ۲۹ ب به تصویر کشیده شده است (این را با بدیهی سازی نگاشت کلاف معادل در شکل ۲۸ مقایسه کنید).

ملاحظات پایانی: یک لایه هموار 1×1 GM را می‌توان به طور معادل از طریق یک نگاشت کلاف هموار به صورت $f_{\square\square} : \Gamma(A_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(A_{\square\square})$, $f_{\square\square} \mapsto f_{\square\square} - \text{Hom}(A_{\square\square}, A_{\square\square})$ یا از طریق یک مقطع کلاف هومورفیسم هموار به صورت $f_{\square\square} : \mathcal{C}_{K_{1\times 1}} \circ f_{\square\square}(p) := \sigma_{K_{1\times 1}}(p) \circ f_{\square\square}(p)$ تعریف کرد. بنا به تعریف، هر دو در یک پیمانه دلخواه $\Psi_{\square\square}^A(p) = K_{1\times 1} f_{\square\square}^A(p)$ بدیهی سازی می‌شوند. استقلال از مختصات GM این تعریف با خاصیت درهم تنnde کرنل در معادله (۲۰۲) یا، به طور معادل، معادله (۲۱۳) تضمین می‌شود. این را می‌توان با در نظر گرفتن یک بدیهی سازی مقطع $\Psi_{\square\square}^B$ مشاهده کرد:

$$\begin{aligned}
K_{1\times 1} f_{\square\square}^B(p) &= K_{1\times 1} (\rho_p(g^{BA}) f_{\square\square}^A(p)) \\
&= \rho_{\square\square}(g_p^{BA}) K_{1\times 1} f_{\square\square}^A(p) \\
&= \rho_{\square\square}(g_p^{BA}) f_{\square\square}^A(p) \\
&= f_{\square\square}^B(p)
\end{aligned} \quad (214)$$

۲.۷ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM

اکنون به سراغ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM با کرنل‌های (کانولوشنی) با گستره فضایی می‌رویم. بخش ۱.۲.۷ میدان‌های کرنل عمومی و بدون قید و میدان‌های کرنل کانولوشنی GM خاص‌تری را معرفی می‌کند که بر اساس یک کرنل الگوی مشترک و G -هدایت پذیر تعریف می‌شوند.

^{۵۶} همواری مورد نیاز مقطع از همواری بدیهی سازی‌های محلی ناشی می‌شود.

تبدیلات میدان کرnel عمومی و کانولوشن‌های GM در بخش ۲.۲.۷ معرفی می‌شوند. از آنجایی که هر دو به صورت سراسری تعریف شده‌اند، فرمول‌بندی آنها لزوماً مستقل از مختصات است. بخش ۳.۲.۷ هر دو عمل را نسبت به بدیهی‌سازی‌های محلی بیان می‌کند و تعاریف محلی ما را از بخش ۲.۴ بازیابی می‌کند.

۱.۲.۷ میدان‌های کرnel مستقل از مختصات و کرnel‌های G -هدایت‌پذیر

برای تشخیص الگوهای فضایی در میدان‌های ویژگی، شبکه‌های کانولوشنی از کرnel‌های با گستره فضایی استفاده می‌کنند که به صورت خطی ویژگی‌ها را از یک همسایگی محلی در اطراف هر نقطه جمع‌آوری می‌کنند. در معادله (۷۰) ما کرnel‌های الگوی (بدون قید) را برای یک منفرد d -بعدی و میدان‌های ویژگی ورودی و خروجی با ابعاد $c_{\text{م}} \times c_{\text{م}}$ و $c_{\text{م}} \times c_{\text{م}} \times c_{\text{م}}$ به عنوان نگاشتهای $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{م}} \times c_{\text{م}}}$ تعریف کردیم که به هر نقطه از دامنه خود یک ماتریس $c_{\text{م}} \times c_{\text{م}}$ اختصاص می‌دهند. تعریف کرnel‌های کانولوشن به عنوان نگاشتهایی با دامنه $\mathbb{R}^d \cong T_p M$ یک تعریف مستقل از مختصات برای کرnel‌ها به عنوان نگاشتهایی بین فضاهای مماس و فضاهای هومومorfیسم متناظر پیشنهاد می‌کند:

تعریف ۷.۲ (میدان کرnel). ما میدان‌های کرnel (بدون قید) از نوع $\rho_{\text{م}} : T_p M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{م}}, \mathcal{A}_{\text{م}})$ به عنوان M -مورفیسم‌های کلاف هموار بین کلاف مماس $T_p M$ و کلاف هومومorfیسم بردار ویژگی ($\text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{م}}, \mathcal{A}_{\text{م}})$) تعریف می‌کنیم. بر اساس تعریفش به عنوان یک M -مورفیسم، یک میدان کرnel \mathcal{K} باعث جایجاوی نمودار زیر می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\mathcal{K}} & \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{م}}, \mathcal{A}_{\text{م}}) \\ \pi_{TM} \searrow & & \swarrow \pi_{\text{م}} \\ & M & \end{array} \quad (215)$$

با وجود نگاشت هموار بین دو کلاف برداری، فرض نمی‌شود که \mathcal{K} یک مورفیسم کلاف برداری باشد، یعنی، فرض نمی‌شود که محدودیت‌های $\mathcal{K}_p : T_p M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{م}}, \mathcal{A}_{\text{م}})$ خطی باشند.^{۵۷}

نام میدان کرnel از این واقعیت ناشی می‌شود که نگاشتهای کلاف تعریف شده به این شکل \mathcal{K} یک کرnel مستقل از مختصات (بالقوه متفاوت) : \mathcal{K}_p را به هر نقطه p از منفرد انتخاب می‌دهند.^{۵۸} در عمل، کرnel‌های \mathcal{K}_p اغلب برای تشخیص الگوهای محلی در اطراف p طراحی می‌شوند و بنابراین فرض می‌شود که در اطراف مبدأ $T_p M$ دارای تکیه‌گاه فشرده باشند.

یک کرnel مستقل از مختصات \mathcal{K}_p در p نسبت به پیمانه‌های $\psi_{TM,p}^A$ و $\psi_{\text{م},p}^A$ از G -اطلس‌ها توسط نگاشت زیر داده می‌شود:

$$\mathcal{K}_p^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{م}} \times c_{\text{م}}}, \quad \mathcal{K}_p^A := \psi_{\text{م},p}^A \circ \mathcal{K}_p \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}. \quad (216)$$

شکل ۱۷ یک کرnel مستقل از مختصات روی $T_p M$ و مختصات‌سازی‌های آن روی \mathbb{R}^d را نسبت به پیمانه‌های مختلف به تصویر می‌کشد. از نمودار جایجاوی

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\mathcal{K}_p^A} & \mathbb{R}^{c_{\text{م}} \times c_{\text{م}}} & & \\ \downarrow g_p^{BA} & \nearrow \psi_{TM,p}^A & \downarrow \psi_{\text{م},p}^A & \nearrow \rho_{\text{م}}(g_p^{BA}) & \\ T_p M & \xrightarrow{\mathcal{K}_p} & \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{م}}|_p, \mathcal{A}_{\text{م}}|_p) & & \\ \downarrow \psi_{TM,p}^B & \nearrow g_p^{BA} & \downarrow \psi_{\text{م},p}^B & \nearrow & \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\mathcal{K}_p^B} & \mathbb{R}^{c_{\text{م}} \times c_{\text{م}}} & & \end{array} \quad (217)$$

نتیجه می‌شود که مختصات‌سازی‌های مختلف کرnel با رابطه زیر به هم مرتبط هستند:

$$\mathcal{K}_p^B = \rho_{\text{م}}(g_p^{BA}) \circ \mathcal{K}_p^A \circ (g_p^{BA})^{-1}. \quad (218)$$

^{۵۷} این نشان می‌دهد که کرnel‌های کانولوشن به طور کلی به عنوان نگاشتهای $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{م}} \times c_{\text{م}}}$ (به عنوان $\mathcal{K}(v) \in \mathbb{R}^{c_{\text{م}} \times c_{\text{م}}}$ برای هر $v \in \mathbb{R}^{c_{\text{م}}}$) نیستند. توجه داشته باشید که این با خطی بودن $\mathcal{K}_p(v) \in \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{م}}, \mathcal{A}_{\text{م}})$ برای هر $v \in T_p M$ تداخلی ندارد.

^{۵۸} ما انتظار داریم که بتوان یک مفهوم خوش تعریف از کلاف‌های کرnel را تدوین کرد که مقاطع آنها در تناظر یک به یک با تعریف ما از میدان‌های کرnel به عنوان نگاشتهای کلاف باشند (این فرمول‌بندی مجدد، گذار از معادله (۲۱۱) به معادله (۲۱۵) را منعکس می‌کند).

توجه داشته باشد که این رابطه فقط استقلال از مختصات GM را ایجاد می‌کند اما کرنل مستقل از مختصات را به هیچ وجه محدود نمی‌کند. مانند قبل، وضعیت با اشتراک‌گذاری وزن‌ها در موقعیت‌های مکانی تغییر می‌کند.

برای اینکه یک میدان کرنل \mathcal{K}_K متناظر با یک کانولوشن باشد، باید به طور کامل توسط یک کرنل الگوی واحد $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ مشخص شود که در تمام موقعیت‌های مکانی به اشتراک‌گذاشته شده است. ما دوباره مجبوریم وزن‌ها را با تمام پیمانه‌های $X \in \mathfrak{X}$ به طور همزمان به اشتراک‌گذاریم تا همارزی آنها و در نتیجه استقلال از مختصات GM را حفظ کنیم. همانطور که در بخش ۳.۲.۴ استدلال شد، روش مناسب برای اشتراک‌گذاری K با مختصاتی سازی‌های کرنل $\mathcal{K}_{K,p}^X$ شامل نرم‌السازی با حجم قاب مرتع می‌شود:

$$\mathcal{K}_{K,p}^X = \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^X|}} \quad \text{برای هر پیمانه } X \in \mathfrak{X} \text{ با } p \in U^X. \quad (219)$$

دلیل وجود ضریب نرم‌السازی قاب این است که کانولوشن‌ها بعداً بر حسب انتگرال روی فضاهای مماس تعریف خواهند شد. بنابراین ما در واقع ملزم به اشتراک‌گذاری خود عملگر انتگرال در مختصاتی سازی‌های مختلف هستیم، که معادل با شناسایی معیارهای انتگرال‌گیری متریسی است. شکل اشتراک‌گذاری کرنل در معادله (۲۱۹) با $\sqrt{|\eta_p^X|} dv$ برای هر پیمانه $X \in \mathfrak{X}$ در M با یک معیار الگو (v) است. شکل اشتراک‌گذاری کرنل در معادله (۲۱۸) با برابر قرار دادن هر دو عبارت به دست می‌آید.

همراه با رابطه $\sqrt{|\eta_p^A|} = |\det(g_p^{BA})| \sqrt{|\eta_p^B|}$ بین حجم‌های قاب مختلف، قانون تبدیل کرنل در معادله (۲۱۸) و اشتراک‌گذاری وزن در معادله (۲۱۹) قید کرنل G -هدایت‌پذیر را ایجاد می‌کند:

$$\frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{out}}(g) \circ K \circ g^{-1} = K \quad \forall g \in G. \quad (220)$$

بنابراین کرنل‌های الگوی معتبر توسط نامتغیرهای تحت عمل پیمانه همزمان $\rho_{\text{out}}(g)$ و $\rho_{\text{out}}(g)^{-1}$ داده می‌شوند. با نوشتند نمایش ρ_{out} که بر روی $\mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ از طریق ضرب با ρ_{out}^T و ρ_{out}^{-1} به ترتیب از چپ و راست عمل می‌کند، دیده می‌شود که قید در معادله (۲۲۰) معادل با قید در معادله (۸۳) است، یعنی $K(gv) = |\det g|^{-1} \rho_{\text{out}}(g) K(v) \rho_{\text{out}}(g)^{-1} \forall g \in G, v \in \mathbb{R}^d$.

ما این بینش‌ها را در قالب تعاریف زیر بیان می‌کنیم:

تعریف ۷.۳ (کرنل G -هدایت‌پذیر). کرنل‌های G -هدایت‌پذیر با نامتغیر بودنشان تحت عمل پیمانه مشخص می‌شوند. فضای برداری کرنل‌های G -هدایت‌پذیر که بین انواع میدان ρ_{out} و ρ_{out}^{-1} نگاشت می‌کنند، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{K}_{\rho_{\text{out}}, \rho_{\text{out}}}^G := \left\{ K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \mid \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{out}}(g) \circ K \circ g^{-1} = K \quad \forall g \in G \right\}, \quad (221)$$

$$= \left\{ K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \mid \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{out}}(g) K(g^{-1}v) \rho_{\text{out}}(g)^{-1} = K(v) \quad \forall g \in G, v \in \mathbb{R}^d \right\}, \quad (222)$$

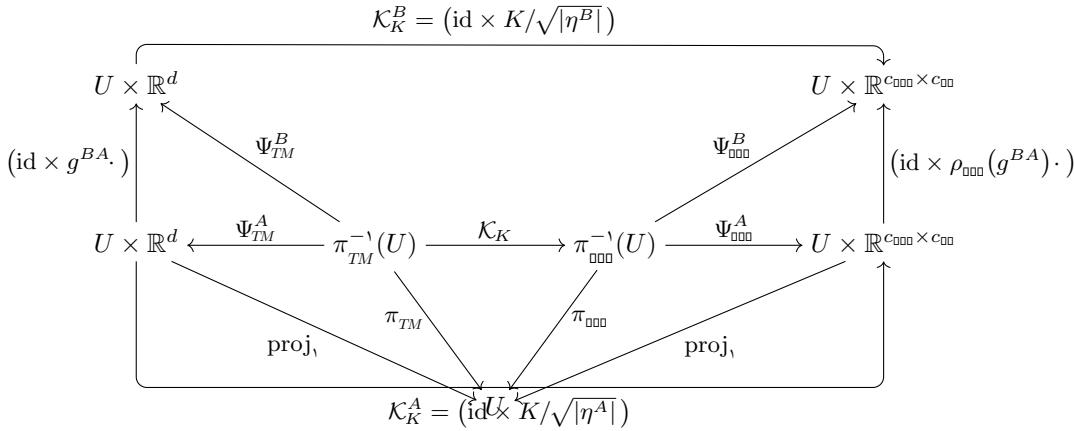
که در آن $\rho_{\text{out}}(g)H\rho_{\text{out}}(g)^{-1} = H$ است. نامتغیر بودن پیمانه‌ای کرنل‌های G در $\text{GL}(d)$ و $H \in \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ هدایت‌پذیر امکان اشتراک‌گذاری وزن مستقل از مختصات GM را فراهم می‌کند.

کرنل‌های G -هدایت‌پذیر در [۸] به یادگیری عمیق هم‌متغیر معرفی شدند، جایی که گروه‌های متناهی فرض شده بودند. فرمول بندی فعلی در تعریف ۷.۳ در [۸] پیشنهاد شد. یک راه حل کامل برای فضاهای کرنل G -هدایت‌پذیر برای نمایش‌های دلخواه ρ_{out} و ρ_{out}^{-1} از گروه‌های ساختار ۲ در [۸] در استخراج شده است، یک پیاده‌سازی به صورت عمومی در <https://quva-lab.github.io/e2cnn/api/e2cnn.kernels.html> در دسترس است. از نظر ریاضی، کرنل‌های هدایت‌پذیر معادل با عملگرهای نمایشی مانند عملگرهای تانسور کروی از مکائیک کواتومی هستند. یک تعیین از قضیه ویکنر-اکارت کرنل‌های G -هدایت‌پذیر را به عنوان ترکیبی از توابع پایه هارمونیک، ضرایب کلیش-گوردان و اندومورفیسم‌های نمایش‌های کاهش‌نایدیر توصیف می‌کند [۸].

تعریف ۷.۴ (میدان کرنل کانولوشنی GM). یک میدان کرنل کانولوشنی $\mathcal{K}_K GM$ از نوع ρ_{out} یک میدان کرنل است که توسط یک کرنل الگوی G -هدایت‌پذیر و مشترک $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{out}}, \rho_{\text{out}}}^G$ تعیین می‌شود. این میدان در پیمانه‌های دلخواه $\psi_{TM,p}^X$ و $\psi_{TM,p}^X$ از G -اطلس مورد نظر به صورت نقطه‌ای تعریف می‌شود:

$$\mathcal{K}_{K,p} := (\psi_{TM,p}^X)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^X|}} \circ \psi_{TM,p}^X \quad (223)$$

همواری \mathcal{K}_K از همواری پیمانه‌ها، متریک و کرنل الگو ناشی می‌شود.



شکل ۳۰: نمودار جابجایی که بدینهی سازی‌های محلی یک میدان کرنل کانولوشنی GM یعنی \mathcal{K}_K را همانطور که در تعریف ۷.۴ تعریف شده است، نشان می‌دهد. اشتراک گذاری وزن کانولوشنی مستلزم آن است که عبارت مختصاتی میدان کرنل K_K در هر نقطه $x \in M$ و هر پیمانه X در p توسط کرنل الگوی مشترک $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ به صورت $K = K / \sqrt{|\eta_p^X|}$ تعیین شود. جابجایی پذیری نمودار سپس قید G-هدایت‌پذیری $\rho_{\text{out}, \rho_{\text{out}}} \circ K \circ g^{-1} = K \forall g \in G$ است که نگاشتهای خطی در کلاف همومورفیسم از طریق $(\mathcal{A}_{\text{out}}, \mathcal{A}_{\text{out}}) : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{out}}, \mathcal{A}_{\text{out}})$ به جای مقطع شیاهت به نمودار در شکل ۲۸ نمودار در این شکل باید به عنوان مشابه نمودار در شکل ۲۹ دیده شود. تفاوت بین نمودار فعلی و نمودار در شکل ۲۹ این است که نگاشتهای خطی در کلاف همومورفیسم از طریق $(\mathcal{A}_{\text{out}}, \mathcal{A}_{\text{out}}) : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{out}}, \mathcal{A}_{\text{out}})$ به جای مقطع $\sigma_{K_{\text{out}}} : M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{out}}, \mathcal{A}_{\text{out}})$ تعیین می‌شوند.

همانند مورد 1×1 - GM ، اختیاری بودن انتخاب خاص پیمانه در معادله (۲۲۳) \square و بنابراین استقلال از مختصات GM تعریف \square با G-هدایت‌پذیری $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{out}}, \rho_{\text{out}}}^G$ تعیین می‌شود. برای نشان دادن این موضوع به طور صریح، می‌توان میدان کرنل را نسبت به یک پیمانه B تعریف کرد و سپس یک تبدیل به هر پیمانه دیگر A اعمال کرد، که حذف می‌شود و بنابراین به یک عبارت معادل منجر می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_{K,p} &= (\psi_{\text{out},p}^B)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta^B|}} \circ \psi_{TM,p}^B \\
 &= (\rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) \psi_{\text{out},p}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta^A|} / |\det(g_p^{BA})|} \circ (g_p^{BA} \cdot \psi_{TM,p}^A) \\
 &= (\psi_{\text{out},p}^A)^{-1} \circ \frac{|\det(g_p^{BA})| \rho_{\text{out}}(g_p^{BA})^{-1} \circ K \circ g_p^{BA}}{\sqrt{|\eta^A|}} \circ \psi_{TM,p}^A \\
 &= (\psi_{\text{out},p}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta^A|}} \circ \psi_{TM,p}^A
 \end{aligned} \tag{۲۲۴}$$

شکل ۳۰ یک نمای کلی از بدینهی سازی‌های محلی میدان‌های کرنل کانولوشنی GM را در قالب یک نمودار جابجایی ارائه می‌دهد. توجه داشته باشید که قید G-هدایت‌پذیری در معادله (۲۲۱) یا (۲۲۲) هنگام ارزیابی در مبدأ $= 0$ از \mathbb{R}^d که تحت عمل هر $g \in G$ نامتغیر است، به قید روی کرنل‌های 1×1 - GM در معادله (۲۰۲) یا (۲۱۳) کاهش می‌یابد. بنابراین، نتایج مربوط به 1×1 - GM که در بخش قبل استخراج شدند، به عنوان یک مورد خاص برای انتخاب کرنل‌های نقطه‌مانند دیده می‌شوند.^{۵۹} ما همچنین می‌خواهیم ذکر کنیم که قید روی کرنل‌های با گستره فضایی به طور کلی نیازی ندارد که هم‌دانه آنها به $\text{Hom}_G(\rho_{\text{out}}, \rho_{\text{out}})$ باشد. برخلاف 1×1 - GM ، این به کانولوشن‌های GM با کرنل‌های با گستره فضایی اجازه می‌دهد تا بین میدان‌هایی که طبق نمایش‌های کاهش ناپذیر غیرایزومنوف تبدیل می‌شوند، نگاشت انجام دهنند.

^{۵۹} برای دقیق کردن این گزاره، باید تعریف ۷.۳ را به توزیع‌های با مقدار عملگری تعیین داد و کرنل‌های 1×1 - GM را به عنوان دلتهای دیراک با مقدار عملگری تعریف کرد. ما در اینجا برای اختصار از این تعیین صرف نظر می‌کنیم.

۲.۲.۷ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM

با تعریف هر دو میدان ویژگی و میدان کرنل، آماده معرفی تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM هستیم. آنها به صورت نقطه‌ای بر حسب عملگرهای انتگرالی تعریف می‌شوند که بردارهای ویژگی خروجی $(p) f_{\text{exp}}(p)$ را در نقاط $M \in p$ با تطبیق کرنل \mathcal{K}_p در p با میدان ویژگی f_{exp} «همانطور که از p دیده می‌شود» محاسبه می‌کنند.

نمایش محلی یک میدان ورودی «همانطور که از p دیده می‌شود» به طور رسمی توسط پول‌بک منتقل کننده آن داده می‌شود که در شکل ۱۶ به تصویر کشیده شده است. این به عنوان پول‌بک معمول از M به TM از طریق نگاشت نمایی ریمانی تعریف می‌شود^{۶۰}. با کاربرد اضافی یک منتقل کننده موازی (معادله (۱۹۰))، که برای بیان ویژگی‌های پول‌بک شده در $\mathcal{A}_{\text{exp}(v)}$ به عنوان ویژگی $\mathcal{A}_{\text{exp}(v)}$ ضروری است. با نشان دادن این منتقل کننده موازی در امتداد مسیر ژئودزیک $v = \gamma(t)$ با $\gamma'(t) = \exp(v)$ بین $\gamma(0) = p$ و $\gamma(1) = \exp(v)$ با:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}, p \leftarrow \exp(v)} : \mathcal{A}_{\exp(v)} \rightarrow \mathcal{A}_p, \quad (225)$$

ما نمایش‌های میدان ویژگی پول‌بک شده را روی فضاهای مماس به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۷.۵ (پول‌بک منتقل کننده میدان ویژگی به TM). با داشتن یک میدان ویژگی $\mathcal{A} \in \Gamma(\mathcal{A})$ ، ما نمایش (f, \mathcal{A}) آن را روی کلاف مماس به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{Exp}^* f : TM \rightarrow \mathcal{A}, \quad v \mapsto \mathcal{P}_{\mathcal{A}, \pi_{TM}(v) \leftarrow \exp(v)} \circ f \circ \exp(v). \quad (226)$$

نگاشت نمایی ریمانی Exp در اینجا متاظر با اتصال لوی-چوینتا است، در حالی که منتقل کننده $\mathcal{P}_{\mathcal{A}, \pi_{TM}(v) \leftarrow \exp(v)}$ به یک اتصال G -سازگار متکی است؛ به بخش‌های ۳.۳ و ۵.۶ مراجعه کنید.

از ساختار مشخص است که $\text{Exp}^* f(v) \in \mathcal{A}_p$ یک M -مورفیسم کلاف است که نمودار جابجایی زیر را برآورده می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\text{Exp}^* f} & \mathcal{A} \\ \pi_{TM} \searrow & & \swarrow \pi_{\mathcal{A}} \\ M & & \end{array} \quad (227)$$

با وجود نگاشت هموار بین دو کلاف برداری، فرض نمی‌شود که $\text{Exp}^* f$ یک مورفیسم کلاف برداری باشد، یعنی، محدودیت‌های $\text{Exp}_p^* f : T_p M \rightarrow \mathcal{A}_p$ معمولاً خطی نیستند.

محدودیت $\text{Exp}_p^* f := \text{Exp}^* f|_{T_p M}$ دامنه پول‌بک منتقل کننده به $T_p M$ میدان ویژگی را از دیدگاه یک ناظر در p همانطور که در شکل ۱۶ نشان داده شده است، ثبت می‌کند. توجه داشته باشید که این تعریف شبیه به یک نمایش محلی از میدان ویژگی بر حسب مختصات نرمال ژئودزیک است، با این تفاوت که به شاعر یکنواخت نمایی محدود نمی‌شود^{۶۱}. ما همچنین می‌خواهیم ذکر کنیم که منتقل کننده ممکن است با هر ایزومورفیسم دیگری بین \mathcal{A}_p و $\mathcal{A}_{\text{exp}(v)}$ شود، همانطور که به عنوان مثال در [۴] انجام شده است.

همانطور که قبلاً بیان شد، تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM به عنوان تطبیق نمایش‌های میدان ویژگی محلی روی فضاهای مماس با کرنل‌ها تعریف می‌شوند. در راستای این تعاریف، توجه داشته باشید که M -مورفیسم‌های کلاف کرنل‌ها \mathcal{A}_{exp} و $\mathcal{A}_{\text{exp}(v)}$ می‌دان محلی $TM \rightarrow \mathcal{A}_{\text{exp}}$ را می‌توان برای ایجاد یک M -مورفیسم (غیرخطی) دیگر از \mathcal{A}_{exp} ترکیب کرد،

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\mathcal{K} \times \text{Exp}^* f_{\text{exp}}} & \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{exp}}, \mathcal{A}_{\text{exp}}) \times \mathcal{A}_{\text{exp}} & \xrightarrow{\text{ev}} & \mathcal{A}_{\text{exp}} \\ & \searrow \pi_{TM} & & & \swarrow \pi_{\mathcal{A}_{\text{exp}}} \\ & M & & & \end{array}, \quad (228)$$

که در آن $(\mathcal{K}(v), \text{Exp}^* f_{\text{exp}}(v)) \mapsto \mathcal{K}(v)$ نگاشت ارزیابی روی \mathcal{A}_{exp} است. تبدیلات میدان کرنل بردارهای ویژگی خروجی را در p با انتگرال‌گیری از این حاصلضرب کرنل‌ها و میدان‌های ورودی روی فضای مماس مربوطه $T_p M$ محاسبه می‌کنند:

^{۶۰} ما نگاشت نمایی را روی کل کلاف مماس به صورت $\text{exp}_{\pi_{TM}(v)}(v)$ تعریف می‌کنیم. به این بیاورید که ما فرض کردیم منفرد از نظر ژئودزیکی کامل است، به طوری که نگاشت نمایی روی کل کلاف مماس خوش تعریف است (و اگر این فرض برقرار نباشد به صفر-پوشانی متول می‌شود).

^{۶۱} بنابراین هر بردار ویژگی $(q) f$ ممکن است چندین بار در همان فضای مماس $T_p M$ نمایش داده شود، یک بار برای هر $v \in T_p M$ $\text{exp}(v) = q$ با $v \in T_p M$. اگر این مطلوب نباشد، می‌توان تکیه‌گاه کرنل را به شاعر یکنواخت نگاشت نمایی محدود کرد، به طوری که فقط نزدیکترین رخداد از نظر ژئودزیکی اندازه گیری شود.

تعريف ۷.۶ (تبدیل میدان کرنل). فرض کنید \mathcal{K} هر میدان کرنل همواری باشد. تبدیل میدان کرنل متاظر، یک تبدیل انتگرالی هموار است

$$\mathcal{T}_{\mathcal{K}} : \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square\square}) \quad (229)$$

که به صورت نقطه‌ای تعریف می‌شود:^{۶۲}

$$[\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f_{\square\square})](p) := \int_{T_p M} \mathcal{K}(v) \text{Exp}^* f_{\square\square}(v) dv = \int_{T_p M} \mathcal{K}(v) \mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\square\square}, p \leftarrow \exp_p v} f_{\square\square}(\exp_p v) dv. \quad (230)$$

برای خوش تعریف بودن، انتگرال باید وجود داشته باشد و میدان خروجی حاصل $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f)$ باید هموار باشد. این مستلزم آن است که \mathcal{K} به طور مناسب انتخاب شود، به عنوان مثال، با فرض اینکه به سرعت کاهش باید یا دارای تکیه گاه فشرده باشد.

توجه داشته باشید که تبدیلات میدان کرنل عمومی لزوماً کانولوشن‌ها را مدل نمی‌کنند زیرا فرض نمی‌کنند که وزن‌ها (کرنل‌ها) بین موقعیت‌های مکانی به اشتراک گذاشته شوند. چنین تبدیلات میدان کرنل عمومی در بخش ۸ مفید خواهد بود، جایی که ما یک الزام برای اشتراک گذاری وزن مکانی را از الزام به هم‌متغیری ایزو‌متریک استخراج می‌کیم.

پیوست ۲۲ وجود و همواری تبدیلات میدان کرنل را مورد بحث قرار می‌دهد. یک شرط کافی برای خوش تعریف بودن تبدیلات میدان کرنل، محدود کردن تکیه گاه‌های کرنل به گوی‌هایی با شعاع ثابت $R > 0$ است:

قضیه ۷.۷ (وجود تبدیل میدان کرنل برای کرنل‌های با تکیه گاه فشرده). فرض کنید \mathcal{K} یک میدان کرنل باشد که کرنل‌های منفرد آن $T_p M$ در هر $p \in M$ (حداکثر) روی یک گوی بسته با شعاع $> R$ در اطراف مبدأ تکیه گاه دارند، یعنی،

$$\text{supp}(\mathcal{K}_p) \subseteq \{v \in T_p M \mid \|v\| \leq R\} \quad \forall p \in M. \quad (231)$$

سپس تضمین می‌شود که تبدیل میدان کرنل متاظر $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ خوش تعریف است، یعنی انتگرال در معادله (۲۳۰) وجود دارد و میدان خروجی $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f) \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square\square})$ برای هر میدان ورودی هموار $f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square})$ هموار است.

اثبات: به پیوست‌های ۲۲ و ۲۳ مراجعه کنید. \square

الزام به محدود کردن تکیه گاه کرنل به یک گوی بسته با شعاع معین، یک رویه معمول در یادگیری عمیق است. با این حال، توجه داشته باشید که یک کرنل با تکیه گاه فشرده با کانولوشن‌های هم‌متغیر نسبت به مقیاس در تضاد است، که طبق قیود کرنل G -هدایت‌پذیر مربوطه، به کرنل‌هایی با گستره بی‌نهایت نیاز دارند. پیاده‌سازی‌های فلی کانولوشن‌های هم‌متغیر نسبت به مقیاس معمولاً فضاهای کرنل هم‌متغیر نسبت به مقیاس را با محدود کردن تکیه گاه آنها تقریب می‌زنند [۴۴] و بنابراین تحت پوشش قضیه ۷.۷ قرار می‌گیرند.

بر اساس تبدیلات میدان کرنل عمومی، ما کانولوشن‌های GM مستقل از مختصات را با افزودن فرض اشتراک گذاری وزن مکانی تعریف می‌کیم، یعنی با فرض میدان‌های کرنل کانولوشنی GM :

تعريف ۷.۸ (کانولوشن GM). فرض کنید $\mathcal{A}_{\square\square}$ و $\mathcal{A}_{\square\square\square\square}$ کلاف‌های بردار ویژگی G -الحاقی با انواع $\rho_{\square\square}$ و $\rho_{\square\square\square\square}$ باشند. ما کانولوشن GM را با یک کرنل G -هدایت‌پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square\square\square}}^G$ به عنوان تبدیل میدان کرنل با میدان کانولوشنی \mathcal{K}_K متاظر GM تعریف می‌کیم:

$$K \star : \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square\square}), \quad f_{\square\square} \mapsto K \star f_{\square\square} := \mathcal{T}_{\mathcal{K}_K}(f_{\square\square}) = \int_{T_p M} \mathcal{K}_K(v) \text{Exp}^* f_{\square\square}(v) dv \quad (232)$$

از آنجایی که کانولوشن‌های GM هیچ قاب مرجعی را در G -ساختار ترجیح نمی‌دهند، تضمین می‌شود که استنتاج خود را بروی تمام «وضعیت‌های گوی‌هایی که با عمل گروه ساختار G مرتبط هستند، تعیین دهنده؛ به معادله (۸۹) و شکل ۱۸ مراجعه کنید.

۳.۲.۷ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM در مختصات محلی

آنچه باقی مانده است این است که نشان دهیم تعاریف مستقل از مختصات پول‌بک‌های منتقل کننده، تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM در این بخش معرفی شدند، هنگام بیان نسبت به یک بدیهی سازی محلی، به عبارات مختصاتی از بخش ۲.۴ کاهش می‌یابند.

عبارت مختصاتی محلی پول‌بک منتقل کننده $f^* \text{Exp}^* f$ از یک میدان ویژگی G ، طبق معمول، با پیش- و پس-ترکیب آن با بدیهی سازی‌های محلی کلاف‌های متاظر تعریف می‌شود، یعنی:

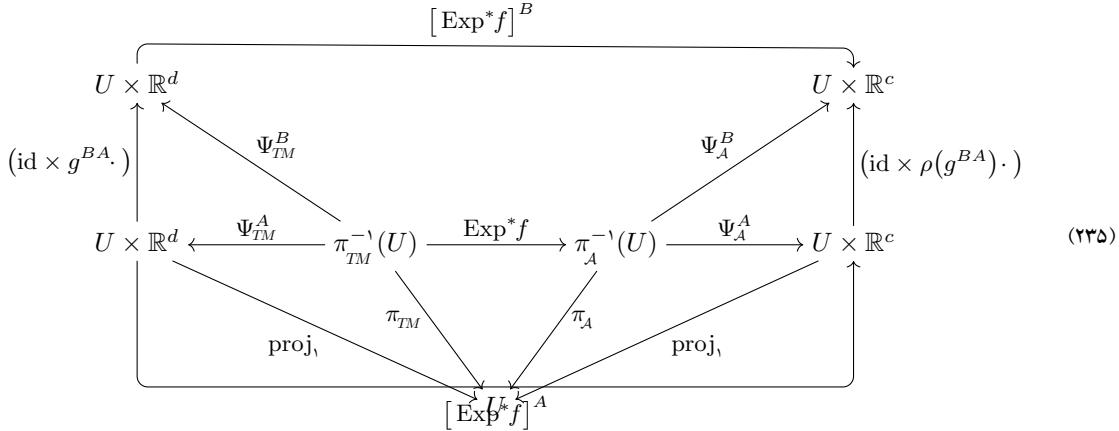
$$\begin{aligned} [\text{Exp}^* f]^A : U \times \mathbb{R}^d &\rightarrow U \times \mathbb{R}^c, \quad (p, v) \mapsto \Psi_{\mathcal{A}}^A \circ \text{Exp}^* f \circ (\Psi_{TM}^A)^{-1}(p, v) \\ &= (p, \psi_{\mathcal{A}, p}^A \circ \text{Exp}_p^* f \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v)) \end{aligned} \quad (233)$$

^{۶۲} انتگرال گیری روی $T_p M$ از طریق چگالی حجم ریمانی dv در پیوست ۲۲ بحث شده است.

از این تعریف دیده می‌شود که تبدیلات پیمانه محلی در $p \in M$ به صورت زیر داده می‌شوند:

$$[\text{Exp}_p^* f]^B = \rho(g_p^{BA}) \circ [\text{Exp}_p^* f]^A \circ (g_p^{BA})^{-1}. \quad (234)$$

ما این عبارات مختصاتی را در قالب یک نمودار جابجایی به تصویر می‌کشیم، که بسیار شبیه به نمودار بدیهی‌سازی‌های محلی میدان‌های کرنل در شکل ۳۰ است:



برای پیاده‌سازی، مفید است که عبارت مختصاتی پول‌بک منتقل کننده را به اجزای منفرد آن، یعنی منتقل کننده $\mathcal{P}_{\mathcal{A}, p \leftarrow \exp(v)}$ ، میدان ویژگی f و نگاشت نمایی \exp ، تجزیه کنیم. این کار با سط دادن آن با یک همانی به شکل $\text{id}_{\mathcal{A}_{\exp(v)}} = (\psi_{\mathcal{A}, \exp(v)}^{\tilde{A}})^{-1} \circ \psi_{\mathcal{A}, \exp(v)}^{\tilde{A}}$ انجام می‌شود، که در آن انتخاب پیمانه \tilde{A} در $\exp(v)$ بی‌همیت است زیرا در نهایت حذف می‌شود:

$$\begin{aligned} [\text{Exp}_p^* f]^A(v) &= [\psi_{\mathcal{A}, p}^A \circ \text{Exp}_p^* f \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}](v) \\ &= \psi_{\mathcal{A}, p}^A \circ \mathcal{P}_{\mathcal{A}, p \leftarrow \exp(v)} \circ f(\exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v)) \\ &= \psi_{\mathcal{A}, p}^A \circ \mathcal{P}_{\mathcal{A}, p \leftarrow \exp(v)} \circ (\psi_{\mathcal{A}, \exp(v)}^{\tilde{A}})^{-1} \circ \psi_{\mathcal{A}, \exp(v)}^{\tilde{A}} \circ f(\exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v)) \\ &= \rho(g_{p \leftarrow \exp(v)}^{A \tilde{A}}) \cdot f^{\tilde{A}}(\exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v)) \end{aligned} \quad (236)$$

همانطور که انتظار می‌رفت، ما تعریف خود را از معادله (۶۷) در بخش ۱۲.۴ بازیابی می‌کنیم، که تأیید می‌کند تعریف ۷.۵ در واقع همتای مستقل از مختصات آن است.

عبارت مختصاتی یک تبدیل میدان کرنل، که با معادله (۷۶) در بخش ۱۲.۴ مرتبط است، توسط قضیه زیر داده می‌شود: **قضیه ۷.۹ (تبدیل میدان کرنل در مختصات).** نسبت به یک پیمانه $A \in U^A$ ، تبدیل میدان کرنل با عبارت مختصاتی زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} [\mathcal{J}_{\mathcal{K}}(f_{\square\square})]^A(p) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) \rho(g_{p \leftarrow \exp(v)}^{A \tilde{A}}) \cdot f^{\tilde{A}}(\exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v^A)) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A, \end{aligned} \quad (237)$$

که در آن پیمانه‌های \tilde{A} در $\exp(v)$ به طور دلخواه انتخاب می‌شوند زیرا حذف می‌شوند.^{۶۳}

^{۶۳} توجه داشته باشید که پیمانه‌ها در $\exp(v)$ ممکن است برای $v \in T_p M$ مختلف متفاوت باشند و باید به طور صحیح‌تر با \tilde{A}_v برچسب گذاری شوند. ما برای اختصار از این وابستگی چشم‌پوشی می‌کنیم.

اثبات: عبارت اول با پک محاسبه ساده که تمام مقادیر در گیر را به عبارات مختصاتی متناظر شان ترجمه می کند، استخراج می شود:

$$\begin{aligned}
& [\mathcal{T}_K(f_{\square})]^A(p) \\
& \stackrel{(1)}{=} \psi_{A_{\square}, p}^A [\mathcal{T}_K(f_{\square})](p) \\
& \stackrel{(2)}{=} \psi_{A_{\square}, p}^A \int_{T_p M} \mathcal{K}_p(v) [\text{Exp}_p^* f_{\square}](v) dv \\
& \stackrel{(3)}{=} \psi_{A_{\square}, p}^A \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p((\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v^A)) [\text{Exp}_p^* f_{\square}](\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\
& \stackrel{(4)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} [\psi_{A_{\square}, p}^A \circ \mathcal{K}_p((\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v^A)) \circ (\psi_{A_{\square}, p}^A)^{-1}] [\psi_{A_{\square}, p}^A \circ [\text{Exp}_p^* f_{\square}] \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}](v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\
& \stackrel{(5)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} [\psi_{A_{\square}, p}^A \circ \mathcal{K}_p \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}](v^A) [\psi_{A_{\square}, p}^A \circ [\text{Exp}_p^* f_{\square}] \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}](v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\
& \stackrel{(6)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) [\text{Exp}_p^* f_{\square}]^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \tag{۲۳۸}
\end{aligned}$$

مرحله (۱) بردار ویژگی خروجی در p را به طور صریح بر حسب پیمانه $\psi_{A_{\square}, p}^A$ بیان می کند که بر روی تبدیل میدان کرنل مستقل از مختصات عمل می کند. این عبارت مستقل از مختصات در مرحله (۲) همانطور که در تعریف شده ۷.۶ تعریف شده است، بسط داده می شود. مرحله (۳) انتگرال روی $T_p M$ را از طریق پیمانه انتخاب شده به \mathbb{R}^d بازمی گرداند، که با جزئیات بیشتر در پیوست ۲۲ توصیف شده است. مرحله (۴) یک نگاشت همانی به شکل $\psi_{A_{\square}, p}^A \circ \psi_{A_{\square}, p}^A = \text{id}$ را وارد می کند و $\psi_{A_{\square}, p}^A$ را به داخل انتگرال می برد در حالی که مرحله (۵) تعریف $\psi_{A_{\square}, p}^A$ را از معادله (۲۰۹) شناسایی می کند. در نهایت، ما عبارات مختصاتی \mathcal{K}_p^G را از معادلات (۲۱۶) و (۲۳۳) شناسایی می کیم.

□ عبارت دوم از عبارت اول با بسط دادن عبارت مختصاتی پول بک منتقل کننده طبق معادله (۲۳۶) به دست می آید.

عبارت مختصاتی برای کانولوشن های GM مستقل از مختصات بالاصله به دست می آید:

۷.۱۰ (کانولوشن های GM در مختصات). یک کانولوشن GM مستقل از مختصات $(A_{\square}) \rightarrow \Gamma(A_{\square})$ با یک کرنل $K \star : \Gamma(A_{\square}) \rightarrow \Gamma(A_{\square})$ هدایت پذیر $K \in \mathcal{K}_{p_{\square}, \rho_{\square}}^G$ نسبت به یک پیمانه A در U^A به صورت زیر داده می شود:

$$[K \star f]^A(p) = [\mathcal{T}_{K_K}(f)]^A(p) = \int_{\mathbb{R}^d} K(v^A) [\text{Exp}_p^* f]^A(v^A) dv^A, \tag{۲۳۹}$$

یعنی، با عبارت مختصاتی که در معادله (۸۷) معرفی شد. این عبارت ممکن است همانطور که برای تبدیلات میدان کرنل عمومی در معادله (۲۳۷) انجام شد، بیشتر بسط داده شود.

اثبات: نتیجه از قضیه ۷.۹ با مشاهده اینکه کانولوشن GM مستقل از مختصات $K \star$ فقط یک تبدیل میدان کرنل کانولوشنی GM متناظر K_K است، به دست می آید؛ به تعریف ۷.۸ مراجعه کنید. به طور خاص، عبارت مختصاتی یک میدان کرنل کانولوشنی GM یعنی K_K طبق تعریف ۷.۴ با کرنل G هدایت پذیر K نزمال شده با حجم قاب داده می شود، یعنی $\mathcal{K}_{K, p}^A = K / \sqrt{|\eta_p^A|}$. جایگذاری این همانی در معادله (۲۳۷) به عبارت مختصاتی ادعا شده برای کانولوشن های GM منجر می شود.

□

این نتیجه اطمینان می دهد که یک کانولوشن GM سراسری و مستقل از مختصات می تواند بر حسب عبارات مختصاتی محلی آن نسبت به یک G -اطلس از بدیهی سازی های محلی که M را می پوشاند، پیاده سازی شود.

۸ هم‌متغیری ایزوومتری

یک ویژگی اصلی عمل کانولوشن و تعیین های مختلف آن، هم‌متغیری آنها نسبت به تقارن های منیفلد زیربنایی است. به عنوان مثال، کانولوشن مرسوم در فضاهای اقلیدسی نسبت به انتقال هم‌متغیر است در حالی که کانولوشن های کروی نسبت به دوران هم‌متغیر هستند. به طور کلی تر، هر گروه فشرده

موضوعی و فضاهای همگن آنها، کانولوشن‌های گروهی را می‌پذیرند [۴۴۴۴۴۴]، که اخیراً توسط جامعه بادگیری عمیق برای تعمیم شبکه‌های کانولوشنی به چنین فضاهایی مورد توجه قرار گرفته‌اند [۴۴۴۴۴۴]. با این حال، از آنجایی که این رویکردها اساساً به تقارن‌های سراسری و تعدی پذیر فضای همگن متکی هستند، بلافضله برای مبنیلهای ریمانی عمومی قابل اعمال نیستند.

از سوی دیگر، کانولوشن‌های GM تمرکز را از تقارن‌های سراسری خود فضا به تقارن‌های محلی در مختصاتی سازی فضا منتقل می‌کنند. همانطور که مشخص می‌شود، هم‌متغیری پیمانه محلی کانولوشن‌های GM ، همراه با اشتراک گذاری وزن کانولوشنی، هم‌متغیری آنها را تحت عمل تقارن‌های سراسری القا می‌کند. به این دقیق‌تر، کانولوشن‌های GM تحت عمل ایزومنتری‌های حافظ G -ساختار (تعریف ۸.۱) هم‌متغیر هستند، که زیرگروهی $Isom_{GM} \leq Isom(M)$ از گروه کامل ایزومنتری را تشکیل می‌دهند. الزام به اینکه تقارن یک ایزومنتری باشد (یعنی متربیک را حفظ کند) در اینجا از استفاده از نگاشت‌های نمایی ناشی می‌شود، که به اتصال لوی-چیویتا در نتیجه به متربیک ریمانی متکی هستند. الزام اضافی بر این ایزومنتری‌ها برای حفظ G -ساختار، نتیجه تعريف کلاف‌های بردار ویژگی به عنوان کلاف‌های G -الحقیق است، که عناصر آنها تنها نسبت به آن قاب‌های مرجعی که در GM قرار دارند، معنای خوش‌تعريفی دارند. توجه داشته باشید که مورد دوم واقعاً یک محدودیت نیست، زیرا همیشه می‌توان گروه‌های ساختار $d \geq G$ را انتخاب کرد، که برای آنها هر ایزومنتری به G -ساختار متناظر احتمام می‌گذارد. برعکس، این طراحی امکان کنترل دقیق سطح هم‌متغیری ایزومنتری را فراهم می‌کند. به عنوان مثال، کانولوشن مرسمون در فضاهای برداری اقلیدسی به $\{e\}$ -ساختار کانونی \mathbb{R}^d متکی است که در شکل ۲۳۳ به تصویر کشیده شده است، و بنابراین تنها نسبت به انتقال $SO(d)$ - \mathbb{R}^d ، یک $SE(d)$ -هم‌متغیر است. یک d -ساختار روی \mathbb{R}^d ، که در شکل ۲۳۴ به تصویر کشیده شده است، علاوه بر این توسط دوران‌ها نیز حفظ می‌شود، و بنابراین متناظر با کانولوشن‌های $E(d)$ -هم‌متغیر است. هم‌متغیری تحت گروه کامل ایزومنتری $E(d)$ از \mathbb{R}^d هنگام انتخاب یک d -ساختار روی \mathbb{R}^d ایجاد می‌شود.

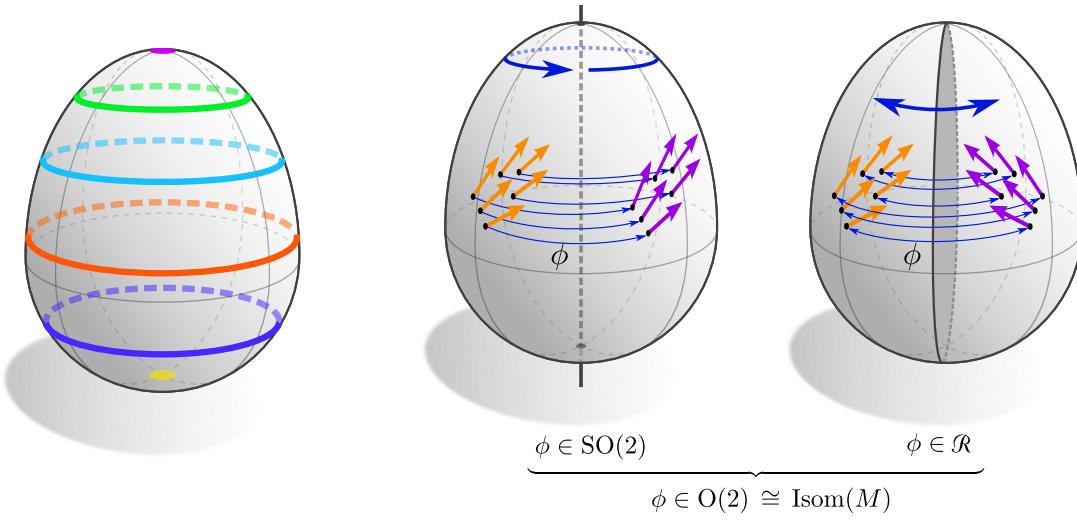
هدف این بخش استخراج قضایایی است که به طور رسمی هم‌متغیری ایزومنتری کانولوشن‌های GM و تبدیلات میدان کرنل را مشخص می‌کنند. بخش ۱۸ با معرفی گروه‌های ایزومنتری مبنیلهای ریمانی و بحث در مورد طبیعت ریاضی و ساختارهای شناخته‌شده‌ای که آنها القا می‌کنند، پایه‌های این تحقیق را بنا می‌نمهد. به طور خاص، بخش ۱۸.۱ ایزومنتری‌ها و گروه‌های ایزومنتری را معرفی می‌کند در حالی که بخش ۲۱.۸ عمل القابی آنها («پیش‌ران‌ها») را بر روی کلاف‌های الحقیق در یک محیط مستقل از مختصات تعريف می‌کند. در بخش ۲۱.۸ ما این اعمال روی کلاف‌ها را نسبت به بدیهی‌سازی‌های محلی بیان می‌کنیم و تفسیر غیرفعال آنها را به عنوان تبدیلات پیمانه القا شده از ایزومنتری، که در شکل ۲۳۴ (راست) و ۱۵ به تصویر کشیده شده‌اند، مورد بحث قرار می‌دهیم. بخش ۴.۱۸ به طور خلاصه بیان می‌کند که مقادیر در گیر در تبدیلات میدان کرنل تحت عمل ایزومنتری OM به هر ایزومنتری هم‌متغیر هستند. چگونه رفتار می‌کنند.

بر اساس این ویژگی‌ها، ما هم‌متغیری ایزومنتری تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM را در بخش ۲۸ مطالعه می‌کنیم. پس از تعريف رسمی عبارت «هم‌متغیری ایزومنتری»، بخش ۱۸.۱ یک نتیجه مرکزی را اثبات می‌کند که تأکید می‌کند تقاضا برای هم‌متغیری ایزومنتری مستلزم نامتفاوت بودن میدان کرنل تحت ایزومنتری‌ها است؛ به شکل ۲۳۶ مراجعت کنید. بخش ۲۲.۸ کانولوشن‌های خاص تر GM را در نظر می‌گیرد و اثبات می‌کند که آنها بنا به طراحی، تحت هر ایزومنتری که G -ساختار را حفظ می‌کنند، هم‌متغیر هستند. این نتیجه به طور خاص ایجاد می‌کند که کانولوشن‌های OM نسبت به هر ایزومنتری هم‌متغیر هستند.

قید نامتفاوت بودن بر روی میدان‌های کرنل ایجاد می‌کند که آنها وزن‌ها را بر روی مدارهای گروه ایزومنتری به اشتراک بگذارند. این نشان می‌دهد که میدان‌های کرنل نامتفاوت را می‌توان به طور معادل با کرنل‌های نماینده روی نماینده‌گان مدار توصیف کرد، که ما آن را در بخش ۲۸ رسمی می‌کنیم. بخش ۱۳.۸ فضاهای خارج قسمتی القا شده از ایزومنتری و نماینده‌گان مدار بحث قرار می‌دهد. در بخش ۲۰.۸ ما از این تعريف ریاضی برای اثبات این موضوع استفاده می‌کنیم که فضای میدان‌های کرنل نامتفاوت نسبت به ایزومنتری در واقع با میدان‌های کرنل روی نماینده‌گان خارج قسمتی ایزومنتری است. این به طور خاص ایجاد می‌کند که تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزومنتری در فضاهای همگن لزوماً کانولوشن هستند، که حلقه را به کارهای پیشین متصل می‌کند.

۱.۸ ایزومنتری‌ها و عمل آنها بر مبنیلهای، کلاف‌ها و میدان‌ها

در این بخش، ما بیشتر مفاهیم ریاضی مورد نیاز برای مطالعه هم‌متغیری ایزومنتری تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM را معرفی می‌کنیم. پس از تعريف ایزومنتری‌ها در بخش ۱۱.۸، در بخش ۱۸.۲ بحث می‌کنیم که چگونه آنها اعمال طبیعی را بر روی بردارهای مماس و قاب‌های مرجع القا می‌کنند. برای گروه‌های ساختار $d < G$, هر ایزومنتری با هر G -ساختاری سازگار نیست. ما زیرگروه $Isom_{GM} \leq Isom(M)$ از آن ایزومنتری‌هایی را تعريف می‌کنیم که بر روی یک G -کلاف‌های ویژگی G -الحقیق آن عمل می‌کنند (خودریختی‌های را القا می‌کنند). در حالی که این ساختارها مستقل از مختصات نگه داشته می‌شوند، بخش ۳.۱۸ عمل ایزومنتری‌ها را بر روی کلاف‌های تاری نسبت به بدیهی‌سازی‌های محلی بیان می‌کند. به عنوان مقدمه‌ای برای بررسی تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزومنتری در ادامه، بخش ۴.۱۸ بحث می‌کند که چگونه ایزومنتری‌ها با نگاشت نمایی و با منتقل کننده‌های موازی جایجا می‌شوند، که به ما اجازه می‌دهد تا نحوه عمل ایزومنتری‌ها را بر روی پول‌بک منتقل کننده f Exp_p^* میدان‌های ویژگی f استخراج کنیم. در حالی که عمدتاً ریاضی باقی می‌مانیم، سعی می‌کنیم تا حد امکان ارتباطاتی با کاربرد برقرار کنیم.



(ب) مدارهای گروه ایزومتری.

(ت) عمل زیرگروههای مختلف گروه ایزومتری بر روی میدانها.

شکل ۳۶: تصاویری از گروه ایزومتری $\text{Isom}(M) \cong \mathbb{SO}(2)$ یک تخم مرغ که در سراسر این بخش برای نمونه‌سازی مفاهیم و ساختارهای مختلف مربوط به ایزومتری‌ها از آن استفاده خواهیم کرد. شکل ۳۶ا عمل گروه ایزومتری را بر روی میدان‌های برداری (سماس یا ویژگی) نشان می‌دهد. می‌توان آن را مشکل از زیرگروههای دوران‌ها در $\mathbb{SO}(2)$ و بازتابها در \mathcal{R} در نظر گرفت. عمل گروه ایزومتری، تخم مرغ را به مدارهای $\{p \in \text{Isom}(M) \cdot p = \{\phi(p) \mid \phi \in \text{Isom}(M)\}$ افزایی کند که در شکل ۳۶ب بارگذاری مختلف نشان داده شده‌اند. توجه داشته باشید که همه مدارهای با یکدیگر همسان‌ریخت نیستند - مدارهای قطب‌ها نقاط منفرد هستند در حالی که هر مدار دیگر یک دایره را در اطراف تخم مرغ به صورت غیرتعاضت نشان می‌کند. گروه ایزومتری تخم مرغ به ایزومتری نیستند. مدارهای قطب‌ها نقاط منفرد نمی‌توان از هر نقطه‌ای به هر نقطه دیگر رسید. یک تبدیل میدان کرنل زمانی هم متغیر نسبت به ایزومتری است که با عمل ایزومتری بر روی میدان‌های ویژگی جایجا شود. مانشان می‌دهیم که همتغیر ایزومتری تنها و تنها در صورتی تضمین می‌شود که میدان کرنل تحت عمل ایزومتری‌ها نامغایر باشد. این به طور خاص ایجاب می‌کند که همتغیر ایزومتری نیازمند اشتراک‌گذاری وزن در امتداد مدارهای ایزومتری است؛ به شکل ۳۶ مراجعه کنید.

۱.۱.۸ گروههای ایزومتری

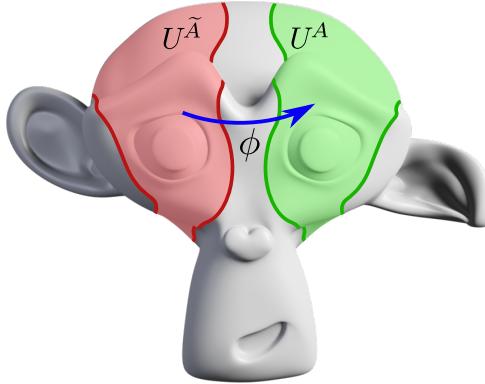
یک ایزومتری (سراسری) $M \rightarrow \hat{M} : \phi$ یک دیفیوژن فیسیم بین منیفلدهای ریمانی $(\hat{M}, \hat{\eta})$ و (M, η) است که متريک را حفظ می‌کند. بر حسب پيش‌ران (ديفرانسيل) $\phi_{*,TM} : TM \rightarrow T\hat{M}$ در زير معرفی می‌كيم، اين گزاره با الزام به اينکه ایزومتری‌ها برآورده کنند، دقیق می‌شود:

$$\eta_p(v, w) = \hat{\eta}_{\phi(p)}(\phi_{*,TM}v, \phi_{*,TM}w) \quad \forall p \in M, v, w \in T_p M \quad (240)$$

يعني، آنها فاصله‌ها و زوایای بین بردارهای مسas را حفظ می‌کنند. به طور شهودی، یک ایزومتری به عنوان یک نگاشت حافظ فاصله بین منیفلدها در نظر گرفته می‌شود. توجه داشته باشید که معکوس یک ایزومتری لزوماً یک ایزومتری نیز هست. از آنجایی که ایزومتری‌ها (و معکوس‌ها) به متريک احترام می‌گذارند، آنها ایزومورفیسم‌ها در رده منیفلدهای ریمانی را تشکیل می‌دهند.

مجموعه تمام ایزومتری‌های $M \rightarrow M : \phi$ از یک منیفلد ریمانی به خودش، که با ترکیب معقول توابع $\phi_1 \circ \phi_2 \mapsto \phi_1 \circ (\phi_2)$ مجهز شده است، یک گروه را تعریف می‌کند که به عنوان گروه ایزومتری $\text{Isom}(M)$ از شناخته می‌شود. این گروه، گروه خودريختی یک منیفلد ریمانی است که شامل تمام «تقارن‌های» (متريکي) آن است. اين یک زيرگروه از گروه دیفیوژن فیسیم $\text{Diff}(M)$ از M است. گروه كامل ایزومتری ممکن است زيرگروه‌های غيربدپهی باشد، که ما در ادامه با $\mathcal{I} \leq \text{Isom}(M)$ نشان خواهیم داد. یک مثال در شکل ۳۶آورده شده است، که گروه ایزومتری $\text{Isom}(M) \cong \mathbb{SO}(2)$ یک تخم مرغ را به تصویر می‌کشد. گروه كامل ایزومتری (به عنوان مثال) به زيرگروههای دوران‌ها در $\mathcal{I}_1 \cong \mathbb{SO}(2)$ و $\mathcal{I}_2 \cong \mathcal{R}$ تقسیم می‌شود.

به طور کلی، گروه ایزومتری یک منیفلد غيرتعاضت است، يعني، هر نقطه‌ای از M را نمی‌توان از هر نقطه دیگری با عمل آن رسید. سپس منیفلد به مدارهای مجزا افزایی شود که برای مثال M به عنوان یک تخم مرغ (عید پاک) در شکل ۳۶ب به تصویر کشیده شده است. گروه ایزومتری یک منیفلد M ممکن است بدپهی باشد، به شرطی که M به اندازه کافی نامتقارن باشد. در اين حالت، ممکن است هنوز ایزومتری‌های غيربدپهی بين زيرمجموعه‌های باز U^A و $U^{\bar{A}}$ از M وجود داشته باشد، که معادله (240) به آنها محدود می‌شود. شکل ۳۶نمونه‌ای از یک منیفلد را نشان می‌دهد که به صورت سراسری نامتقارن است اما ایزومتری‌های غيربدپهی بين زيرمجموعه‌های محلی خود دارد. ما در ادامه فقط ایزومتری‌های سراسری M را در نظر خواهیم گرفت، با اين حال، تمام مفاهیم بخش فعلی ۱۸ به روشي آشکار به ایزومتری‌ها بين زيرمجموعه‌های محلی تعمیم می‌یابند. بدون اثبات، ما



شکل ۳۲. یک مینیفلد نامتقارن، که گروه ایزوومتری سراسری آن بدیهی است. از آنجایی که عدم تقارن به گوش‌ها و دهان «سوزان»، میمون، محدود می‌شود، تقارن‌های موضعی غیربدیهی باقی مانده‌اند. به عنوان مثال، نگاشت هموار $\phi : U^{\tilde{A}} \rightarrow U^A$ بین زیرمجموعه‌های برجسته شده با رنگ قرمز و سبز، متريک را به صورت محلی حفظ می‌کند. تمام مقاهمی توسعه یافته در بخش ۱۸ و همچنین همتغیری ایزوومتری عملیات نقطه‌ای مانند 1×1 -بلافاصله به چنین ایزوومتری‌هایی بین زیرمجموعه‌های محلی تعیین می‌یابد. همتغیری ایزوومتری تبدیلات میدان کرnel با کرنل‌های با گستره فضایی تا اثرات مرزی تعیین می‌یابد.

ادعا می‌کنیم که همین امر برای همتغیری ایزوومتری هر عمل شبکه عصبی که به صورت نقطه‌ای عمل می‌کند، به عنوان مثال 1×1 -بلافاصله، غیرخطی‌ها یا جمع بایاس، صادق است. همتغیری تبدیلات میدان کرnel با کرنل‌های با گستره فضایی تا اثرات مرزی برقرار است.

۲.۱.۸ عمل ایزوومتری بر روی کلاف‌های تاری

ایزوومتری‌ها به طور طبیعی بر روی بردارهای مماس در TM و قاب‌های مرجع در FM با «حمل کردن آنها» با عمل گروهی همانطور که در شکل ۳۱ به تصویر کشیده شده است، عمل می‌کنند. اگر یک ایزوومتری علاوه بر این با G -ساختار سازگار باشد، یعنی اگر یک خودریختی از GM ایجاد کند، علاوه بر این بر روی هر کلاف G -الحاقی، به ویژه کلاف‌های بردار ویژگی A عمل می‌کند. ما این اعمال ایزوومتری‌ها را بر روی کلاف‌های الحاقی و بر روی میدان‌های ویژگی در ادامه مورد بحث قرار می‌دهیم.

عمل ایزوومتری بر روی کلاف مماس: هر ایزوومتری $\phi \in \text{Isom}(M)$ یک پیش‌ران را ایجاد می‌کند
 $\phi_{*,TM} : TM \rightarrow TM, \quad \phi \in \text{Isom}(M)$ (۲۴۱)

روی کلاف مماس، که فقط دیفرانسیل ϕ است همانطور که در پیوست ۲۲ معرفی شده است. در هر نقطه $p \in M$ می‌توان آن را به عنوان یک تقریب خطی از ϕ در نظر گرفت که بردارها $v \in T_p M$ را به $\phi_{*,TM}(v) \in T_{\phi(p)} M$ نگاشت می‌کند، یعنی برآورده می‌کند:

$$\pi_{TM} \circ \phi_{*,TM} = \phi \circ \pi_{TM}. \quad (242)$$

همانطور که در پیوست ۲۲ استدلال شد، پیش‌ران با $\phi_{*,TM}^{-1}$ معکوس پذیر است، که ما به طور بدون ابهام آن را با $\phi_{*,TM}^{-1}$ خواهیم نوشت.^{۶۴} بنابراین دیده می‌شود که پیش‌ران یک عنصر ϕ از گروه ایزوومتری یک خودریختی کلاف برداری (ایزوومتریک) از TM روی ϕ است که نمودار جابجایی زیر را برآورده می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightleftharpoons[\phi_{*,TM}^{-1}]{\phi_{*,TM}} & TM \\ \pi_{TM} \downarrow & & \downarrow \pi_{TM} \\ M & \xrightleftharpoons[\phi^{-1}]{\phi} & M \end{array} \quad (243)$$

بنابراین، پیش‌ران آنها فاصله‌ها و زوایا را حفظ می‌کند، یعنی،

$$\eta_{\phi(p)}(\phi_{*,TM}v, \phi_{*,TM}w) = \eta_p(v, w) \quad \forall p \in M, v, w \in T_p M, \phi \in \text{Isom}(M). \quad (244)$$

جزئیات بیشتر در مورد پیش‌ران‌ها بین کلاف‌های مماس به راحتی در ادبیات، به عنوان مثال در [۲۲]، یافت می‌شود.

عمل ایزوومتری بر روی کلاف قاب: پیش‌ران روی TM بلافاصله یک خودریختی کلاف اصلی متناظر $\phi_{*,TM}$ را بر روی FM با پیش‌ران کردن بردارهای قاب منفرد القا می‌کند:

$$\phi_{*,FM} : FM \rightarrow FM, \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto \phi_{*,FM}([e_i]_{i=1}^d) := [\phi_{*,TM}(e_i)]_{i=1}^d, \quad \phi \in \text{Isom}(M) \quad (245)$$

^{۶۴} معکوس پذیری به طور کلی برای پیش‌ران‌ها برقرار نیست بلکه فقط برای پیش‌ران‌های دیگنومورفیسم‌ها و در نتیجه ایزوومتری‌ها برقرار است.

این نگاشت قاب‌ها را در $p \in M$ دلخواه به قاب‌ها در $F_{\phi(p)}M$ برای هر $\pi_{FM} \circ \phi_{*,FM} = \phi \circ \pi_{FM}$ نگاشت می‌کند، یعنی $F_{\phi(p)}M$ نگاشت می‌کند، یعنی $\pi_{FM} \circ \phi_{*,FM}([e_i]_{i=1}^d) = \pi_{FM}([\phi_{*,TM}(e_i)]_{i=1}^d) = \phi(p)$. برای دیدن این، فرض کنید $\pi_{TM} \circ \phi_{*,TM}(e_j) = \phi \circ \pi_{TM}(e_j) = \phi(p)$ برای هر $j = 1, \dots, d$. علاوه بر این می‌توان بررسی کرد که با $(\phi_{*,FM})^{-1} = (\phi^{-1})_{*,FM}$ است، که باز هم با $\phi_{*,FM}^{-1}$ به اختصار نوشته می‌شود. عمل چب ϕ بر روی کلاف قاب با عمل راست \triangleleft بر روی تارهای آن جابجا می‌شود، یعنی برای هر $\phi \in \text{Isom}(M)$ و $g \in \text{GL}(d)$ دلخواه داریم:

$$\begin{aligned} \left(\phi_{*,FM}([e_i]_{i=1}^d) \right) \triangleleft g &= [\phi_{*,TM}(e_i)]_{i=1}^d \triangleleft g && \text{(تعريف } \phi_{*,FM}, \text{ معادله (۲۴۵))} \\ &= \left[\sum_j \phi_{*,TM}(e_j) g_{ji} \right]_{i=1}^d && \text{(تعريف } \triangleleft, \text{ معادله (۱۳۲))} \\ &= \left[\phi_{*,TM} \left(\sum_j e_j g_{ji} \right) \right]_{i=1}^d && \text{(خطی بودن } \phi_{*,TM} \text{)} \\ &= \phi_{*,FM} \left(\left[\sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \right) && \text{(تعريف } \phi_{*,FM}, \text{ معادله (۲۴۵))} \\ &= \phi_{*,FM}([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) && \text{(تعريف } \triangleleft, \text{ معادله (۱۳۲))} \end{aligned} \quad (246)$$

یک تبدیل پیمانه یک قاب در M با $p \in \text{GL}(d)$ ، و به دنبال آن یک پیش‌ران به (p) ، بنابراین برابر است با یک پیش‌ران قاب تبدیل نشده، و به دنبال آن یک تبدیل پیمانه با همان عنصر گروهی g اما در (p) . از این رو قاب‌های مختلف در تار F_pM به گونه‌ای به قاب‌ها در $F_{\phi(p)}M$ نگاشت می‌شوند که جابجایی نسبی آنها حفظ شود. ویژگی‌های استخراج شده از $\phi_{*,FM}$ با این گزاره خلاصه می‌شود که نمودار

$$\begin{array}{ccc} FM & \xrightarrow{\phi_{*,FM}} & FM \\ \triangleleft g \downarrow & & \downarrow \triangleleft g \\ FM & \xrightarrow{\phi_{*,FM}} & FM \\ \pi_{FM} \downarrow & & \downarrow \pi_{FM} \\ M & \xrightarrow{\phi} & M \end{array} \quad (247)$$

برای هر $\phi \in \text{Isom}(M)$ و هر $g \in \text{GL}(d)$ و جابجا می‌شود. با برآورده کردن جابجایی این نمودار، پیش‌ران $\phi_{*,FM}$ بر روی کلاف قاب به عنوان یک خودریختی کلاف اصلی شناسایی می‌شود^{۶۵} روی ϕ . توجه داشته باشید که معکوس‌ها، که به طور صریح در نمودار (۲۴۳) نشان داده شده‌اند، برای کاهش شلوغی حذف شده‌اند.

عمل ایزومتری بر روی G-ساختارها: از آنجایی که G-ساختارها زیر کلاف‌های اصلی از کلاف قاب هستند، می‌توان محدودیت دامنه پیش‌ران روی GM را به GM در نظر گرفت، یعنی،

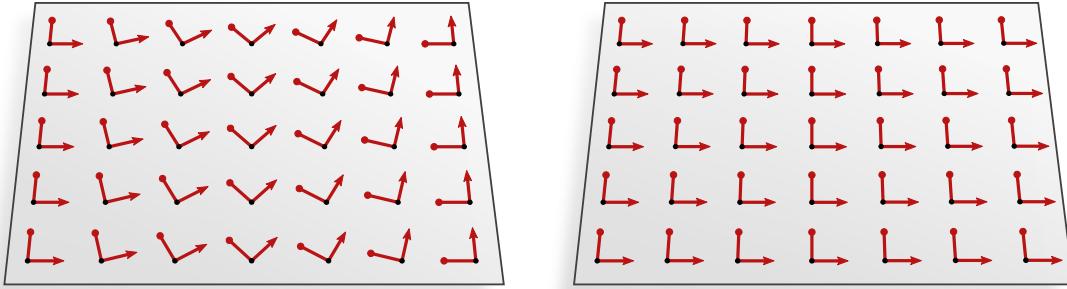
$$\phi_{*,FM}|_{GM} : GM \rightarrow FM, \quad \phi \in \text{Isom}(M). \quad (248)$$

در اینجا لازم است که کل کلاف قاب FM به عنوان همدامنه حفظ شود زیرا به طور کلی هیچ تضمینی وجود ندارد که قاب‌ها در G_pM نگاشت شوند بلکه فقط به $F_{\phi(p)}M$ نگاشت می‌شوند. از آنجایی که G-Sاختارها به طور کلی تحت عمل ایزومتری‌ها بر روی FM بسته نیستند، ممکن است تعریف یک عمل گروهی از گروه کامل ایزومتری بر روی GM یا هر کلاف G-الحقیقی دیگر غیرممکن باشد. برای رفع این نقصه، ما در ادامه زیر گروهی از آن ایزومتری‌ها را در نظر خواهیم گرفت که به G-Sاختار احترام می‌گذارند، یعنی قاب‌های ممتاز در GM را به قاب‌ها در GM نگاشت می‌کنند.

تعریف ۸.۱ (ایزومتری‌های حافظ G-ساختار). با داشتن یک G-Sاختار GM ، ما زیرگروه متناظر از ایزومتری‌های حافظ G-Sاختار GM را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{Isom}_{GM} := \left\{ \phi \in \text{Isom}(M) \mid \phi_{*,FM}(G_pM) = G_{\phi(p)}M \quad \forall p \in M \right\} \leq \text{Isom}(M) \quad (249)$$

^{۶۵} یعنی، یک ایزومorfیسم کلاف اصلی از کلاف قاب به خودش؛ مقایسه کنید با معادله ۱۲۹.

(b) یک $\{e\}$ -ساختار جایگزین بر روی \mathbb{R}^n (T) $\{e\}$ -ساختار کانوونی

شکل ۳۳: دو انتخاب خاص از $\{e\}$ -ساختارها (میدان‌های قاب سراسری) $M = \mathbb{R}^n$ که ما برای به تصویر کشیدن مفهوم ایزومنtri های حافظ G استفاده می‌کنیم. گروه کامل ایزومنtri M گروه اقلیدسی $E(\mathbb{R})$ است که از انتقال‌ها، دوران‌ها و بازتاب‌ها تشکیل شده است. ساختار از آنها استفاده می‌کنیم. \mathbb{R}^n را نشان می‌دهد که تحت انتقال‌ها نامتفاوت است اما تحت دوران‌ها یا بازتاب‌ها نامتفاوت نیست. به بیان انتزاعی‌تر، انتقال‌ها زیرگروه $\{e\}$ -ساختار کانوونی \mathbb{R}^n را تشکیل می‌دهند که خودریختی‌های $\{e\}_M$ را القا می‌کنند. در مقابل، دوران‌ها یا بازتاب‌ها قاب‌ها را در $\{e\}_p M = T_p := (\mathbb{R}^n, +)$ نگاشت می‌کنند اما موقعیت فرستادن آنها به $\{e\}_{(p)} M$ نمی‌شوند. بنابراین آنها خودریختی‌های $\{e\}_p M$ به قاب‌ها در $F_{\phi(p)} M$ نگاشت می‌کنند که فرستادن آنها به $\{e\}_{(p)} M$ نمی‌شوند. بایان انتزاعی‌تر، انتقال‌ها زیرگروه را القا نمی‌کنند و بخشی از $\text{Isom}_{\{e\}} M$ نیستند. اعمال گروهی چنین ایزومنtri هایی بر روی $\{e\}_M$ یا هر یک از کلافت‌های $\{e\}$ -الحاقی آن تعریف نشده است. شکل ۳۳ ب یک انتخاب جایگزین از $\{e\}$ -ساختار را بر روی $M = \mathbb{E}_n$ (یا $M = \mathbb{R}^n$) فقط تحت انتقال‌ها در چهت «بالا-پایین» نامتفاوت است، یعنی $\text{Isom}_{\{e\}} M \cong T_p = (\mathbb{R}, +)$. مثال‌های موجود در شکل‌های ۳۳ و ۳۴ نمونه‌ای از این هستند که خودریختی‌های $\{e\}$ -ساختار را تهیه گروه ساختار G بلکه به انتخاب خاص G -ساختار GM سنتگی دارند. مورد کلی برای G غیربدیهی سخت‌تر به تصویر کشیده می‌شود زیرا $G_p M$ در آن صورت یک قاب منفرد نخواهد بود بلکه مجموعه‌ای از قاب‌ها خواهد بود.

برای چنین ایزومنtri هایی، ما عمل القابی بر روی GM را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi_{*,GM} := \phi_{*,FM}|_{GM} : GM \rightarrow GM, \quad \phi \in \text{Isom}_{GM}. \quad (250)$$

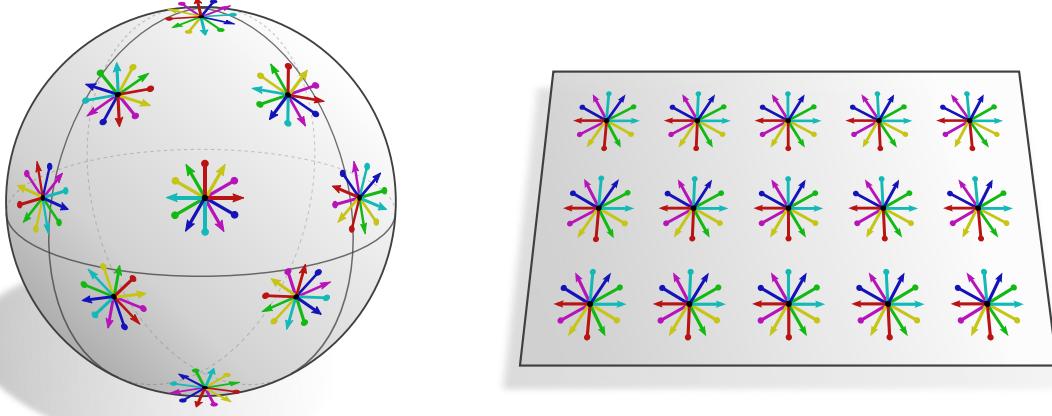
اعمال تعریف شده به این شکل برای $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ خودریختی‌های $\{e\}$ -ساختار هستند، یعنی باعث می‌شوند نمودار زیر برای هر $g \in G$ جابجا شود (که با محدود کردن معادله (۲۴۷) از GM و از FM به دست می‌آید):

$$\begin{array}{ccc} GM & \xrightarrow{\phi_{*,GM}} & GM \\ \uparrow \triangleleft g & & \uparrow \triangleleft g \\ GM & \xrightarrow{\phi_{*,GM}} & GM \\ \downarrow \pi_{GM} & & \downarrow \pi_{GM} \\ M & \xrightarrow{\phi} & M \end{array} \quad (251)$$

شکل ۳۳ دو نمونه از $\{e\}$ -ساختارها را روی $M = \mathbb{R}^n$ نشان می‌دهد، یعنی میدان‌های قاب سراسری. از این مثال‌ها مشخص است که زیرگروه‌های Isom_{GM} واقعاً به انتخاب خاص G -ساختار GM بستگی دارند، نه فقط به گروه G . در شکل ۳۴ ما یک $(\text{SO}(2), \text{SE}(2))$ -ساختار را روی $M = \mathbb{R}^n$ به تصویر می‌کشیم. گروه ایزومنtri آن $\text{Isom}_{SOM} = \text{SE}(2)$ بزرگتر از گروه‌های $\{e\}$ -ساختارها در شکل ۳۳ است. یک $(\text{SO}(2), \text{SOM})$ -ساختار روی کره S^2 که توسط تمام دوران‌ها $\text{Isom}_{SOM} = \text{SO}(3)$ حفظ می‌شود، در شکل ۳۴ نشان داده شده است.

برای انتخاب‌های خاص از گروه‌های ساختار G می‌توان گراوهای کلی‌تری در مورد اینکه کدام ایزومنtri‌ها در زیرگروه Isom_{GM} قرار دارند، بیان کرد. مهم‌تر از همه، برای گروه‌های ساختار اورتونرمال $G = d$ (که با γ سازگار هستند) هر ایزومنtri یک خودریختی از OM را القا می‌کند، یعنی همیشه داریم $\text{Isom}_{OM} = \text{Isom}(M)$. برای اثبات این ادعای فرض کنید $[e_i]_{i=1}^d \in O_p M \subset F_p M$ یک قاب اورتونرمال باشد که توسط یک ایزومنtri دلخواه $\phi \in \text{Isom}(M)$ به معادله (۲۴۵) مراجعت کنید. اعمال معادله (۲۴۴) بر روی محورهای منفرد قاب پیش‌ران به دست می‌دهد:

$$\eta(\phi_{*,TM} e_i, \phi_{*,TM} e_j) = \eta(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in 1, \dots, d, \quad (252)$$



(۲) ساختار SOM نامتغیر روی S^* و (۳) ساختار SOM نامتغیر روی \mathbb{R}^*

شکل ۳۴ دو نمونه از (۲)-ساختارها SOM روی صفحه $M = \mathbb{R}^*$ و کره $M = S^*$ که در شکل ۳۴ آن شان داده است، (۲)-SOM را معرفی کرد. آنجایی که فقط از قاب‌های راست گرد تشکیل شده است (به نوک پیکان‌ها روی محورهای اول و نوک دایره‌ها روی محورهای دوم توجه کنید) تحت بازتاب‌ها نامتغیر است. بنابراین ایزومنتری‌هایی که SOM را حفظ می‌کنند گروه $\text{SO}(2)$ است. Isom_{SOM} = SE(2) را تشکیل می‌دهند که زیرگروهی از گروه کامل ایزومنتری $E(2)$ است. در شکل ۳۴ $M = S^*$ که در مورد Isom(M) = E(2) است. در شکل ۳۴ $M = \mathbb{R}^*$ که در اینجا Isom_{SOM} = SO(2)-ساختار در اینجا Isom_{SOM} = SO(3) است. اما تحت بازتاب‌ها نامتغیر نیست. خودریختی‌های $\text{SO}(2)$ -ساختار در حالی که گروه کامل ایلومنتری نامتغیر است اما تحت بازتاب‌ها نامتغیر نیست. هستند در حالی که گروه کامل ایلومنتری Isom(M) = ۳ است.

که اورتونرمال بودن قاب پیش‌ران $\phi_{*,FM}|_{OM}[e_i]_{i=1}^d \in O_{\phi(p)}M$ را ایجاب می‌کند و بنابراین اجازه می‌دهد تا $\phi_{*,OM}$ را برابر با $\phi \in \text{Isom}(M)$ تعریف کنیم. به طور کلی‌تر، این نتیجه ایجاب می‌کند:

$$\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M) \quad \forall G \geq d \quad (253)$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد:

$$\text{Isom}_{SOM} = \text{Isom}_+(M), \quad (254)$$

یعنی، هر ایزومنتری حافظ جهت در (2)-SOM₊(M) ایک خودریختی از یک d -SOM را القا می‌کند. توجه داشته باشید که این گزاره‌ها همه فقط به گروه ساختار G است که دارند اما از انتخاب خاص G -ساختار مستقل هستند. این در نهایت نتیجه در نظر گرفتن فقط ایزومنتری‌ها است که بنابراین با d -ساختارها سازگار هستند، به جای در نظر گرفتن دیفیومورفیسم‌های عمومی‌تر. همانطور که قبلاً ذکر شد، زیرگروه Isom_{GM} به طور کلی به انتخاب خاص G -ساختار GM بستگی دارد، نه فقط به گروه ساختار G .

عمل ایزومنتری بر روی کلاف‌های برداری الحقیقی \mathcal{A} : از پیش‌ران ایزومنتری‌ها در GM بر روی Isom_{GM} می‌توان یک پیش‌ران $\phi_{*,\mathcal{A}}$ را برابر با $\text{Isom}_{G-\text{حقیقی}}/\sim_\rho = \mathcal{A}$ تعریف زیر ساخت:

$$\phi_{*,\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad [[e_i]_{i=1}^d, f] \mapsto \phi_{*,\mathcal{A}}\left([[e_i]_{i=1}^d, f]\right) := [\phi_{*,GM}([e_i]_{i=1}^d), f], \quad \phi \in \text{Isom}_{GM}. \quad (255)$$

این عمل خوش‌تعریف است زیرا ساختار به دلیل هم‌متغیری راست G - $\text{Isom}_{*,GM}$ در معادله (۲۵۱) از نماینده انتخاب شده کلاس همارزی مستقل است. مشابه قبل، داریم $\phi \circ \pi_{\mathcal{A}} = \phi \circ \phi_{*,\mathcal{A}} \circ \pi_{\mathcal{A}}$ ، یعنی ϕ بردارهای ویژگی را در \mathcal{A} به بردارهای ویژگی در (p) - \mathcal{A}_{ϕ} نگاشت می‌کند، که می‌توان با عمل بر روی یک بردار ویژگی و استفاده از ویژگی متناظر $\phi_{*,GM}$ آن را برسی کرد. از آنجایی که $\phi_{*,\mathcal{A}}$ با عمل $\phi_{*,GM}$ بر روی عامل اول در $(GM \times \mathbb{R}^c)/\sim_\rho$ تعریف می‌شود، با ترکیب‌های خطی که بر روی عامل دوم Isom_{GM} را در معادله (۱۳۵) تعریف شده است، عمل می‌کنند، تداخلی ندارد. این ایجاد می‌کند که پیش‌ران روی کلاف‌های الحقیقی به صورت خطی بین تارهای آنها نگاشت کند. معکوس‌پذیری $\phi_{*,\mathcal{A}}$ از معکوس‌پذیری $\phi_{*,GM}$ نتیجه می‌شود به طوری که دوباره داریم $(\phi^{-1})_{*,\mathcal{A}} = (\phi_{*,\mathcal{A}})^{-1}$ ، که آن را به صورت $\phi_{*,\mathcal{A}}^{-1}$ می‌نویسیم. این ویژگی‌ها، همراه با این واقعیت که $\phi_{*,GM} \in \text{Aut}(GM)$ باشند، باعث می‌شوند که $\phi_{*,\mathcal{A}}$ یک خودریختی کلاف اصلی است.

شناسایی می کند که نمودار جابجایی زیر را برآورده می کند:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\phi_{*,\mathcal{A}}} & \mathcal{A} \\ \pi_{\mathcal{A}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{A}} \\ M & \xrightarrow{\phi} & M \end{array} \quad (256)$$

کلاف الحاقی حاصل از انتخاب های خاص نمایش گروهی $g = (g(\rho))$ و \mathbb{R}^d به عنوان تار نمونه ای از طریق هموفریسم کلاف \sim / \sim در TM → از معادله (۱۳۷) با کلاف مماس (به عنوان یک G-کلاف) ایزو مورف است. تعریف ما از پیش رانها بر روی کلاف های G- \mathcal{A} با این شناسایی سازگار است زیرا $\chi \circ \phi_{*,\mathcal{A}} = \phi_{*,TM} \circ \chi \circ \phi_{*,\mathcal{A}}$. برای دیدن این، فرض کنید $[[e_i]_{i=1}^d, v] \in (GM \times \mathbb{R}^d) / \sim$ عصری از کلاف الحاقی ایزو مورف باشد که به $\chi([[e_i]_{i=1}^d, v]) = \sum_i e_i v_i$ نگاشت می شود. آنگاه داریم $(\chi \circ \phi_{*,\mathcal{A}})([[e_i]_{i=1}^d, v]) = \sum_i \phi_{*,TM}(e_i)v_i = \sum_i \phi_{*,TM}(e_i)v_i = \phi_{*,TM}(\sum_i e_i v_i) = \phi_{*,TM} \circ \chi([[e_i]_{i=1}^d, v])$ که سازگاری تعاریف را نشان می دهد.

به عنوان یک کلاف الحاقی، پیش ران ϕ بر روی کلاف هموفریسم $\sim_{\rho_{\mathcal{A},\mathcal{B}}}$ نیز با معادله (۲۵۵) مشخص می شود. با این حال، ما بعداً به عبارتی از ϕ بر حسب پیش ران های $\phi_{*,\mathcal{A}_{\mathcal{B}}}$ و $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ و $\mathcal{A}_{\mathcal{A}}$ نیاز خواهیم داشت، که آن را به زودی در اینجا استخراج خواهیم کرد. برای این منظور، فرض کنید $H \in \text{Hom}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}|_p, \mathcal{A}_{\mathcal{A}}|_p)$ یک هموفریسم در p و $f_p \in \mathcal{A}_{\mathcal{B},p}$ یک بردار ویژگی در p باشد. آنگاه $H(f_p)$ بنا به تعریف یک بردار ویژگی در p است. برای اینکه به طور سازگار تعریف شود، پیش ران بردار ویژگی ورودی f_p که توسط پیش ران هموفریسم H بر آن عمل می شود، باید با پیش ران بردار ویژگی خروجی ($H(f_p)$) موافق باشد. این ایجاد می کند:

$$\phi_{*,\mathcal{A}_{\mathcal{B}}}[H(f_p)] = [\phi_{*,\mathcal{A}_{\mathcal{B}}} H \phi_{*,\mathcal{A}_{\mathcal{B}}}^{-1}](\phi_{*,\mathcal{A}_{\mathcal{B}}} f_p) =: [\phi_{*,\mathcal{A}_{\mathcal{B}}}, H](\phi_{*,\mathcal{A}_{\mathcal{B}}} f_p), \quad (257)$$

که در آن پیش ران روی کلاف هموفریسم را به صورت زیر تعریف کردیم:

$$\phi_{*,\mathcal{A}_{\mathcal{B}}} : \text{Hom}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}, \mathcal{A}_{\mathcal{B}}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}, \mathcal{A}_{\mathcal{B}}), \quad H \mapsto \phi_{*,\mathcal{A}_{\mathcal{B}}} H \phi_{*,\mathcal{A}_{\mathcal{B}}}^{-1}, \quad \phi \in \text{Isom}_{GM} \quad (258)$$

توجه داشته باشید که ترکیب یک عنصر $H \in \text{Hom}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}, \mathcal{A}_{\mathcal{B}})$ با $\phi_{*,\mathcal{A}_{\mathcal{B}}}^{-1}$ از چپ و با $\phi_{*,\mathcal{A}_{\mathcal{B}}}$ از راست، سبک معادله (۲۰۹) را معکس می کند.

عمل ایزو متری بر روی میدان های ویژگی: اعمال ایزو متری ها در Isom_{GM} بر روی کلاف های الحاقی، اعمالی را بر روی مقاطع آنها، به ویژه بر روی میدان های ویژگی، ایجاد می کنند. این پیش ران مقاطع به صورت زیر تعریف می شود:

تعریف ۸.۲ (پیش ران ایزو متری میدان ویژگی): فرض کنید $f \in \Gamma(\mathcal{A})$ یک میدان ویژگی و $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ یک ایزو متری حافظ G-ساختار باشد. ایزو متری از طریق پیش ران بر روی میدان ویژگی عمل می کند

$$\triangleright : \text{Isom}_{GM} \times \Gamma(\mathcal{A}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}), \quad (\phi, f) \mapsto \phi \triangleright f := \phi_{*,\mathcal{A}} \circ f \circ \phi^{-1}. \quad (259)$$

بر حسب یک نمودار جابجایی، این تعریف به صورت زیر به تصویر کشیده می شود:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\phi_{*,\mathcal{A}}} & \mathcal{A} \\ f \uparrow & & \uparrow \phi \triangleright f := \phi_{*,\mathcal{A}} \circ f \circ \phi^{-1} \\ M & \xrightarrow{\phi} & M \end{array} \quad (260)$$

به طور شهودی، این تعریف بیان می کند که مقطع پیش ران $f \triangleright \phi$ که در $p \in M$ ارزیابی می شود، بردار ویژگی f را از (p) از طریق $\phi_{*,\mathcal{A}}$ به p پیش ران شده است، برمی گرداند. توجه داشته باشید که چنین پیش ران هایی در واقع مقاطع خوش تعریفی را به دست می دهند که برآورده می کنند:

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{A}} \circ (\phi \triangleright f) &= \pi_{\mathcal{A}} \circ \phi_{*,\mathcal{A}} \circ f \circ \phi^{-1} \\ &= \phi \circ \pi_{\mathcal{A}} \circ f \circ \phi^{-1} \\ &= \phi \circ \text{id}_M \circ \phi^{-1} \\ &= \text{id}_M \end{aligned} \quad (261)$$

^{۶۶} به شیاهت این تعریف با تعریف نمایش القایی توجه کنید، که عمل گروهی است که شبکه های CNN هدایت بذیر طوری طراحی شده اند که نسبت به آن هم متغیر باشند [۴ ۴ ۴].

همانطور که در معادله (۱۲۵) لازم است. شکل ۳۱ آعمل ایزومتری‌ها را بر روی میدان‌ها به تصویر می‌کشد. عمل ایزومتری‌ها بر روی پول‌بک منتقل کننده از میدان‌های f در بخش ۴.۱.۸ در زیر استخراج می‌شود.

۳.۱.۸ عمل ایزومتری در مختصات محلی

بیشتر استخراج‌ها در مورد همتغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرnel در بخش‌های ۲.۸ و ۳.۸ در یک محیط مستقل از مختصات نگه داشته خواهد شد. با این حال، از آنجایی که کانولوشن‌های GM نسبت به یک انتخاب از G -اطلس‌های کلاف‌های الحاقی تعريف می‌شوند، بررسی همتغیری ایزومتری آنها مستلزم مطالعه عبارات مختصاتی پیش‌ران‌های ایزومتری $\phi_{*,TM}$ ، $\phi_{*,FM}$ و $\phi_{*,GM}$ نسبت به بدیهی سازی‌های محلی کلاف است. عبارات مختصاتی عمل ایزومتری علاوه بر این در پیاده‌سازی‌های عددی مفید هستند، که لزوماً میدان‌های ویژگی را نسبت به میدان‌های قاب‌های مرجع کدگذاری می‌کنند.

در ادامه، ما پیمانه‌های $\Psi_{TM}^{\tilde{A}}$ و Ψ_{TM}^A را به ترتیب در همسایگی‌های $U^{\tilde{A}}$ از p و U^A از (p) داده شده فرض می‌کنیم. برای راحتی، فرض کنید

$$\text{درادمه، ما} \quad \Psi_{TM}^{\tilde{A}} = \phi(U^{\tilde{A}}) \quad \text{تحت ایزومتری منطبق باشد، که همیشه بدون از دست دادن کلیت امکان‌پذیر است.}$$

پیش‌ران روی TM در مختصات: به یاد بیاورید که پیش‌ران روی کلاف مماس یک نگاشت خطی از بردارها $v \in T_p M$ به بردارها $\phi_{*,TM} v \in T_{\phi(p)} M$ است. نسبت به پیمانه‌های داده شده، پیش‌ران بنابراین توسط یک میدان از ماتریس‌ها مختصاتی می‌شود

$$g_{\phi}^{A\tilde{A}} : U^{\tilde{A}} \rightarrow \text{GL}(d), \quad p \mapsto g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) := \psi_{TM,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,TM} \circ (\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1}, \quad \phi \in \text{Isom}(M), \quad (262)$$

که بین ضرایب عددی متناظر (v) از p و $\psi_{TM,\phi(p)}^A(v)$ از $\phi_{*,TM} v$ در $\phi(p)$ تبدیل می‌کند. دقیق‌تر، $g_{\phi}^{A\tilde{A}}$ در زیرگروه $\langle G \cup d \rangle$ از $\text{GL}(d)$ مقدار می‌گیرد، که توسط عناصر d (به دلیل اینکه $\phi_{*,TM}$ متریک را حفظ می‌کند) و G (زیرا توابع گذار ممکن است یک ابرگروه از d تشکیل دهنده) تولید می‌شود. تعريف پیش‌ران در مختصات محلی با نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده می‌شود:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\psi_{TM,p}^{\tilde{A}}} & T_p M & \xrightarrow{\phi_{*,TM}} & T_{\phi(p)} M & \xrightarrow{\psi_{TM,\phi(p)}^A} & \mathbb{R}^d \\ & & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)}. & & & & \end{array} \quad (263)$$

شکل ۱۵ یک تفسیر گرافیکی از پیش‌ران در مختصات ارائه می‌دهد.

پیش‌ران روی FM در مختصات: مختصات‌سازی پیش‌ران روی کلاف قاب به قیاس با معادله (۲۶۲) تعريف می‌شود. مشخص می‌شود که این با عمل چپ همان عنصر گروهی $g_{\phi}^{A\tilde{A}}$ بر روی قاب‌های بدیهی شده داده می‌شود همانطور که در نمودار جابجایی زیر نشان داده شده است:

$$\begin{array}{ccccc} \text{GL}(d) & \xleftarrow{\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}} & F_p M & \xrightarrow{\phi_{*,FM}} & F_{\phi(p)} M & \xrightarrow{\psi_{FM,\phi(p)}^A} & \text{GL}(d) \\ & & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)}. & & & & \end{array} \quad (264)$$

با داشتن چارت‌های $x^A : U^A \rightarrow x^A(U^A) \subseteq \mathbb{R}^d$ و $x^{\tilde{A}} : U^{\tilde{A}} \rightarrow x^{\tilde{A}}(U^{\tilde{A}}) \subseteq \mathbb{R}^d$ باشد، یک ایزومتری ϕ را می‌توان به صورت محلی با یک نگاشت $x^A \circ \phi \circ (x^{\tilde{A}})^{-1} : x^{\tilde{A}}(U^{\tilde{A}}) \rightarrow x^A(U^A)$ بین مختصات نمایش داد. برای حالت خاصی که پیمانه‌ها در p و (p) متناظر با پایه‌های مختصاتی آن چارت‌ها هستند، $g_{\phi}^{A\tilde{A}}$ به سادگی توسط ژاکوبین $x^A \circ \phi \circ (x^{\tilde{A}})^{-1}$ داده می‌شود.

برای اثبات این ادعا، ما عمل را بروی یک قاب بدیهی شده، که با یک ماتریس $h \in \text{GL}(d)$ آن $h_{:,i}$ نماینده بردار قاب i -ام است، محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
& \left[\psi_{FM,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,FM} \circ (\psi_{FM,p}^{\tilde{A}})^{-1} \right] (h) \\
&= \left[\psi_{FM,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,FM} \right] \left(\left((\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1} (h_{:,i}) \right)_{i=1}^d \right) && \text{(تعریف } \psi_{FM,p}^{\tilde{A}}, \text{ معادله (۱۵۵))} \\
&= \psi_{FM,\phi(p)}^A \left(\left(\phi_{*,TM} \circ (\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1} (h_{:,i}) \right)_{i=1}^d \right) && \text{(تعریف } \phi_{*,FM}, \text{ معادله (۲۴۵))} \\
&= \left(\left(\psi_{TM,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,TM} \circ (\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1} (h_{:,i}) \right)_{i=1}^d \right) && \text{(تعریف } \psi_{TM,p}^{\tilde{A}}, \text{ معادله (۱۵۵))} \\
&= \left(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \cdot h_{:,i} \right)_{i=1}^d && \text{(تعریف } g_{\phi}^{A\tilde{A}}, \text{ معادله (۲۶۲))} \\
&= g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \cdot h && \text{(۲۶۵)}
\end{aligned}$$

عمل پیش‌ران بر روی بدیهی‌سازی‌های محلی را می‌توان به عنوان القا کردن یک تبدیل پیمانه در نظر گرفت. یک شهود گرافیکی برای این گزاره در شکل ۱۵ داده شد که در آن پیمانه‌های اولیه در p و $\phi(p)$ با انتخاب‌های قاب‌های مرجع به تصویر کشیده شده‌اند. یک پیش‌ران از قاب در p به $\phi(p)$ (قرمز) به طور کلی با قاب اصلی در $\phi(p)$ (سبز) موافق نیست. گذار بین این دو قاب، تبدیل پیمانه القا شده در $\phi(p)$ است. ما در ادامه این تبدیل را می‌سازیم؛ ابتدا بر حسب بدیهی‌سازی‌های محلی، سپس بر حسب میدان‌های قاب متناظر.

از نمودار جایجاوی در معادله (۲۶۴) مشخص است که پیمانه $(\psi_{FM,p}^{\tilde{A}})^{-1}$ به یک پیمانه در $\phi(p)$ برابر باشد، که به صورت زیر داده می‌شود:

$$\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,FM}^{-1} = (g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{FM,\phi(p)}^A : F_{\phi(p)}M \rightarrow \text{GL}(d). \quad (266)$$

گسترش متناظر نمودار جایجاوی در معادله (۲۶۴) هم ارزی هر دو عبارت را به تصویر می‌کشد و یک اثبات جبری را زائد می‌کند:

$$\begin{array}{ccccccc}
& \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,FM}^{-1} = (g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{FM,\phi(p)}^A & & & & & \\
& \downarrow & & & & & \\
& \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} & F_pM & \xrightarrow{\phi_{*,FM}} & F_{\phi(p)}M & \xrightarrow{\psi_{FM,\phi(p)}^A} & \text{GL}(d) \\
& \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)} & & & & & \\
& & & & & & \uparrow
\end{array} \quad (267)$$

نگاشت گذار (تبدیل پیمانه) بین پیمانه القا شده از ایزومتری $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ و پیمانه اصلی $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$ در $\phi(p)$ مشخص می‌شود که توسط عنصر گروهی معکوس داده می‌شود^{۶۸}:

$$(\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,FM}^{-1}) \circ (\psi_{FM,\phi(p)}^A)^{-1} = (g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \in \langle G \cup d \rangle \leq \text{GL}(d). \quad (268)$$

توجه داشته باشید که این عنصر گروهی برای d لزوماً در گروه ساختار قرار نمی‌گیرد، یعنی پیمانه القا شده از ایزومتری ممکن است G -سازگار نباشد (نمی‌توان آن را به یک G -اطلس موجود از FM اضافه کرد). در پاراگراف بعدی در مورد G -ساختارها نشان خواهیم داد که این دقیقاً زمانی اتفاق می‌افتد که $\phi \notin \text{Isom}_{GM}$ باشد، یعنی برای ایزومتری‌هایی که به G -ساختار احترام نمی‌گذارند.

برای استخراج عمل ایزومتری بر روی میدان‌های قاب، مقاطع همانی ($U^A \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^{\tilde{A}})$ را در نظر بگیرید. این مقاطع میدان‌های قاب اصلی را از شکل ۱۵ مدل می‌کنند. سپس میدان قاب جدید با مقطع پیش‌ران داده می‌شود:

$$\phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}} := \phi_{*,FM} \circ \sigma^{\tilde{A}} \circ \phi^{-1} : U^A \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^{\tilde{A}}), \quad (269)$$

^{۶۸} معکوس یک موضوع قراردادی است. در اینجا به این دلیل به وجود می‌آید که ما $g_{\phi}^{A\tilde{A}}$ را به عنوان عبارت مختصاتی پیش‌ران هموردای قاب‌ها تعریف کردیم در حالی که پیمانه‌ها به صورت پادردا تبدیل می‌شوند.

که به طور معادل با تعریف در معادله ۲۵۹ تعریف شده است. یک عبارت جایگزین برای میدان قاب پیش‌ران بر حسب عمل راست $g_{\phi}^{A\tilde{A}}$ با اعمال $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ یافت می‌شود:

$$\begin{aligned}
 & \psi_{FM,\phi(p)}^A \left([\phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}}] (\phi(p)) \right) \\
 &= \psi_{FM,\phi(p)}^A \phi_{*,FM} \sigma^{\tilde{A}}(p) && \text{(تعريف } \phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}} \text{، معادله ۲۶۹)} \\
 &= g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \sigma^{\tilde{A}}(p) && \text{(عبارات معادل در معادله ۲۶۶)} \\
 &= g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) && \text{(قطع همانی } \sigma^{\tilde{A}} \text{، معادله ۱۶۰)} \\
 &= \psi_{FM,\phi(p)}^A \left(\sigma^A(\phi(p)) \right) g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) && \text{(قطع همانی } \sigma^A \text{، معادله ۱۶۰)} \\
 &= \psi_{FM,\phi(p)}^A \left(\sigma^A(\phi(p)) \triangleleft g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \right) && \text{(هم‌معنی‌ر است-GL(d)، معادله ۱۵۷)} \tag{۲۷۰}
 \end{aligned}$$

از آنجایی که $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ یک ایزو‌مورفیسم است، نتیجه می‌شود که:

$$(\phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}})(\phi(p)) = \phi_{*,FM} \sigma^{\tilde{A}}(p) = \sigma^A(\phi(p)) \triangleleft g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p), \tag{۲۷۱}$$

یعنی، $(\phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}})(p)$ همانطور که انتظار می‌رفت تبدیل بین مقاطع همانی را توصیف می‌کند. این تبدیل القا شده از ایزو‌متری بین قاب‌های مرجع در شکل ۱۵ با فلش آبی بین قاب قرمز (شفاف) و سبز به تصویر کشیده شده است.

پیمانه تبدیل شده با ایزو‌متری $\phi_{*,FM}^{-1} \psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$ و قطع پیش‌ران $\sigma^{\tilde{A}} \triangleright \phi$ به این ترتیب با یکدیگر مطابقت دارند که دومی قطع همانی اولی است:

$$\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1} [\phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}}](\phi(p)) = \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1} \phi_{*,FM} \sigma^{\tilde{A}}(p) = \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \sigma^{\tilde{A}}(p) = e \tag{۲۷۲}$$

پیش‌ران روی GM در مختصات: همانطور که در بخش قبلی ۲.۱.۸ استدلال شد، پیش‌ران روی GM فقط برای ایزو‌متری‌های ϕ در یک G -ساختار است. جای تعجب نیست که تبدیلات پیمانه القا شده از ایزو‌متری متناظر در گروه ساختار G مقدار می‌گیرند: قضیه ۸.۳ در بدیهی‌سازی‌های محلی). فرض کرد $\phi \in \text{Isom}(M)$ هر ایزو‌متری از M باشد. آنگاه سه گزاره زیر معادل هستند:

۱. ϕ حافظ G -ساختار است، یعنی $\phi \in \text{Isom}_{GM}$.

۲. پول‌بک ایزو‌متری $\phi_{*,FM}^{-1} \psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$ از هر پیمانه G -اطلس FM که GM را تعریف می‌کند، با آن G -اطلس G -سازگار است.

۳. عبارت مختصاتی $\phi_{*,FM}$ نسبت به هر پیمانه $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$ و $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ از G -اطلس FM در گروه ساختار مقدار می‌گیرد، یعنی $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in G \quad \forall p \in M$

اثبات: ویژگی تعریف کننده یک ایزو‌متری حافظ G -ساختار $G_{\phi(p)}M = G_{\phi(p)}M$ این است که $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ برآورده می‌کند؛ به معادله (۲۴۹) مراجعه کنید. بر حسب یک G -اطلس داده شده از G (معادله ۱۶۲) ساختار را در $p \in M$ به صورت $G_pM := (\psi_{FM,p}^{\tilde{A}})^{-1}(G)$ تعریف کرد که در آن $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$ یک پیمانه دلخواه از G -اطلس است. با این عبارت ما سمت چپ ویژگی تعریف کننده Isom_{GM} را بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
 \phi_{*,FM}(G_pM) &= \phi_{*,FM} (\psi_{FM,p}^{\tilde{A}})^{-1}(G) \\
 &= (\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1})^{-1}(G) \tag{۲۷۳}
 \end{aligned}$$

نسبت به هر پیمانه $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ از G -اطلس در $(\phi(p))$ ، این را می‌توان بیشتر به صورت زیر دستکاری کرد

$$\begin{aligned}
 \phi_{*,FM}(G_pM) &= ((g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{FM,\phi(p)}^A)^{-1}(G) \\
 &= (\psi_{FM,\phi(p)}^A)^{-1} (g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) G). \tag{۲۷۴}
 \end{aligned}$$

سمت راست ویژگی تعریف کننده Isom_{GM} بر حسب $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$G_{\phi(p)}M = (\psi_{FM,\phi(p)}^A)^{-1}(G). \tag{۲۷۵}$$

با برابر قرار دادن هر دو طرف و استفاده از اینکه $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ یک ایزو مورفیسم است، نتیجه می شود $G = g_\phi^{A\tilde{A}}(p) G$ که به همارزی ادعا شده منجر می شود:

$$\phi_{*,FM}(G_p M) = G_{\phi(p)} M \iff g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \in G \quad (276)$$

از گزاره های ۱ و ۳ برای اثبات همارزی با گزاره ۲، به یاد بیاورید که (268) طبق معادله $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1} g_\phi^{A\tilde{A}}(p)$ برابر با تبدیل پیمانه از $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ است. از آنجایی که G -اطلس ها با به تعریف توابع گذار در گروه ساختار G دارند، پیامدهای (268) نتیجه می شوند، به طوری که هر سه گزاره معادل دیده می شوند. \square

این نتایج برای مطالعه بعدی ما در مورد هم متغیری ایزو متری کانولوشن های GM اهمیت مرکزی دارند. ما قادر خواهیم بود نشان دهیم که چنین کانولوشن هایی تحت عمل $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ بر روی میدان های ویژگی هم متغیر هستند، که به این واقعیت ممکن است که G -هدایت پذیری کرنل های کانولوشن، تبدیلات پیمانه القا شده از ایزو متری G $g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \in G$ را در نظر می گیرد.

برای ایزو متری های الگاکننده خودریختی G -ساختار FM در معادله (267) را به همتای آن برای GM تطبیق دهیم:

$$\begin{array}{ccccccc} \psi_{GM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,GM}^{-1} & = & (g_\phi^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \cdot \psi_{GM,\phi(p)}^A \\ \downarrow & \psi_{GM,p}^{\tilde{A}} & & \overbrace{G \xleftarrow{\psi_{GM,p}^{\tilde{A}}} G_p M \xrightarrow{\phi_{*,GM}} G_{\phi(p)} M \xrightarrow{\psi_{GM,\phi(p)}^A} G} & & \uparrow \\ & & & g_\phi^{A\tilde{A}}(p). & & & \end{array} \quad (277)$$

پیش ران روی A در مختصات: پیش ران $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ بر روی کلاف های G -الحاقی به طور مشابه با پیش ران های دیگر کلاف ها مختصاتی می شود. بر حسب یک نمودار جابجایی، ما به طور غیرمنتظره ای به دست می آوریم:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^c & \xleftarrow{\psi_{A,p}^{\tilde{A}}} & \mathcal{A}_p & \xrightarrow{\phi_{*,A}} & \mathcal{A}_{\phi(p)} & \xrightarrow{\psi_{A,\phi(p)}^A} & \mathbb{R}^c \\ \downarrow & & & & & & \uparrow \\ & & & & \rho(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) & & \end{array}, \quad (278)$$

که وقتی بر روی ضرایب بردار ویژگی $f \in \mathbb{R}^c$ عمل می کنیم به دست می آید:

$$\begin{aligned} & [\psi_{A,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,A} \circ (\psi_{A,p}^{\tilde{A}})^{-1}](f) \\ &= [\psi_{A,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,A}]([\sigma^{\tilde{A}}(p), f]) && \text{(تعريف } \psi_{A,p}^{\tilde{A}} \text{، معادله (173))} \\ &= \psi_{A,\phi(p)}^A([\phi_{*,FM}(\sigma^{\tilde{A}}(p)), f]) && \text{(تعريف } \phi_{*,A} \text{، معادله (255))} \\ &= \psi_{A,\phi(p)}^A([\sigma^A(\phi(p)) \triangleleft g_\phi^{A\tilde{A}}(p), f]) && \text{(تبدیل پیمانه القابی، معادله (271))} \\ &= \psi_{A,\phi(p)}^A([\sigma^A(\phi(p)), \rho(g_\phi^{A\tilde{A}}(p))f]) && \text{(تعريف } \rho \text{، معادله (148))} \\ &= \rho(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) \cdot f && \text{(تعريف } \psi_{A,p}^{\tilde{A}} \text{، معادله (172))} \end{aligned} \quad (279)$$

توجه داشته باشید که عبارت $(g_\phi^{A\tilde{A}}(p))$ مستلزم آن است که $\rho(g_\phi^{A\tilde{A}}(p))$ یک عنصر گروه ساختار باشد زیرا ρ یک نمایش G است. این یک بار دیگر از دیدگاه دیگری نشان می دهد که پیش ران ها بر روی A فقط می توانند برای ایزو متری ها در Isom_{GM} تعریف شوند.

برای کامل بودن، ما بدیهی سازی محلی زیر از نمودار جابجایی از معادله (۲۶۰) را ارائه می‌دهیم، که ممکن است هنگام پیاده‌سازی CNN‌های مستقل از مختصات و آزمایش هم‌متغیری Isom_{GM} آنها مفید باشد:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \phi \times \rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}) \cdot & & & & \\
 & \swarrow & & \searrow & & & \\
 U^{\tilde{A}} \times \mathbb{R}^c & \xleftarrow{\Psi_{\mathcal{A}}^{\tilde{A}}} & \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(U^{\tilde{A}}) & \xrightarrow{\phi_{*,\mathcal{A}}} & \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(U^A) & \xrightarrow{\Psi_{\mathcal{A}}^A} & U^A \times \mathbb{R}^c \\
 & \searrow & \pi_{\mathcal{A}} \circ f \downarrow & \swarrow & \phi \triangleright f \downarrow \pi_{\mathcal{A}} & \nearrow & \text{proj}_c \\
 & & U^{\tilde{A}} & \xrightarrow{\phi} & U^A & &
 \end{array} \quad (280)$$

۴.۱.۸ جابجایی‌پذیری اعمال ایزومنتری با نگاشت نمایی و منتقل کننده‌ها

در بخش بعدی ما به عبارتی برای عمل ایزومنتری‌ها بر روی پول‌بک‌های منتقل کننده f_p^* از میدان‌های ویژگی f نیاز خواهیم داشت، که آن را در اینجا استخراج می‌کنیم. برای این منظور، ما رفتار نگاشت نمایی و منتقل کننده‌های موازی را تحت عمل ایزومنتری‌ها مورد بحث قرار می‌دهیم.

ایزومنتری‌ها و نگاشت نمایی: همانطور که در [؟] اثبات شده است، ایزومنتری‌ها ژئودزیک‌ها را به ژئودزیک‌ها نگاشت می‌کنند و بنابراین به طور خاص با نگاشت نمایی جابجا می‌شوند.^{۶۹} به طور خاص، همانی

$$\exp_{\phi(p)} \circ \phi_{*,TM}(v) = \phi \circ \exp_p(v) \quad \forall v \in T_p M, \phi \in \text{Isom}(M), \quad (281)$$

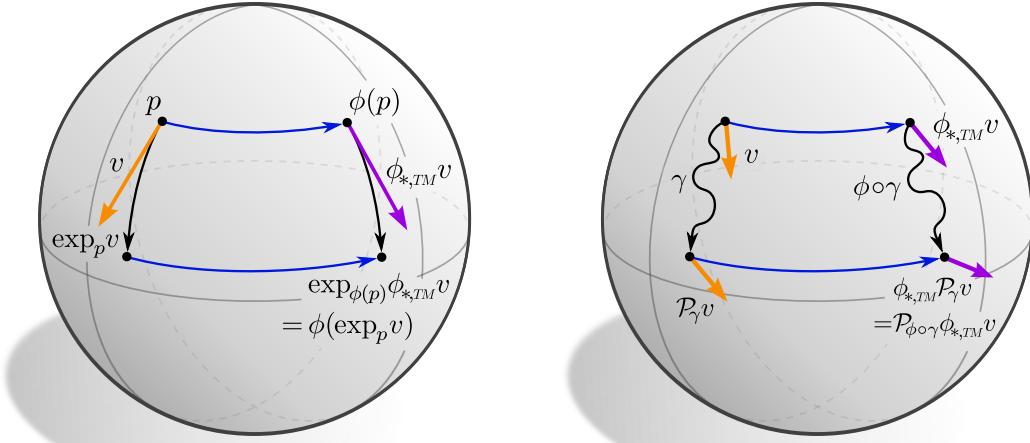
برای هر ایزومنتری و هر بردار مماس در p برقرار است (هنوز یک منیفلد از نظر ژئودزیکی کامل را فرض می‌کنیم). این بیان می‌کند که نتیجه نگاشت نمایی در p که با یک بردار v ارزیابی شده و سپس از طریق ایزومنتری نگاشت می‌شود، برابر با نگاشت نمایی در $(p)\phi$ است که با پیش‌ران v ارزیابی می‌شود، همانطور که در شکل ۳۵ (چپ) به تصویر کشیده شده است. این گزاره به صورت نموداری با جابجایی‌پذیری (مریع بالایی) نمودار زیر بیان می‌شود:

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{\phi} & M & & \\
 \uparrow \exp & & \uparrow \exp & & \\
 TM & \xrightarrow{\phi_{*,TM}} & TM & & \\
 \pi_{TM} \downarrow & & \downarrow \pi_{TM} & & \\
 M & \xrightarrow{\phi} & M & &
 \end{array} \quad (282)$$

ایزومنتری‌ها و منتقل کننده‌های موازی: پیش‌ران روی کلاف مماس در [؟] علاوه بر این استدلال شد که با منتقل کننده‌های متاظر لوى-چیویتا جابجا می‌شود، همانطور که در شکل ۳۵ (راست) به تصویر کشیده شده است. اگر یک اتصال جایگزین و G-سازگار برای انتقال بردارهای ویژگی انتخاب شود، ما می‌خواهیم که آن نیز با عمل ایزومنتری‌ها جابجا شود. از آنجایی که منتقل کننده‌ها و پیش‌ران‌ها بر روی TM ، FM و GM از آنها بیکار ϕ بر روی TM هستند (القا می‌شوند)، می‌توان به راحتی نشان داد که این خاصیت به آنها نیز منتقل می‌شود. به طور خاص برای کلاف‌های بردار ویژگی الحاقی این به این معنی است که برای ایزومنتری‌های دلخواه γ ما رابطه $\phi \circ \text{Isom}_{GM}(\phi \triangleright \gamma) = \phi \circ \text{Isom}_{GM}(\gamma)$ برقرار است.

$$\phi_{*,\mathcal{A}} \circ \mathcal{P}_{\mathcal{A},\gamma} = \mathcal{P}_{\mathcal{A},\phi \circ \gamma} \circ \phi_{*,\mathcal{A}} \quad (283)$$

^{۶۹} اثبات به این واقعیت متنکی است که اتصال لوى-چیویتا $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ ، $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ ، که نگاشت نمایی ریمانی بر اساس آن است، با ایزومنتری‌ها جابجا می‌شود: $\nabla_{\phi \triangleright X} (\phi \triangleright Y) = \nabla_{\phi \triangleright X} Y$; به [؟] مراجعه کنید.



شکل ۳.۵: چپ: ایزومتری‌ها با نگاشت نمایی جابجا می‌شوند، یعنی، $\exp_{\phi(p)} \circ \phi_{*,TM}(v) = \phi \circ \exp_p(v)$ برای هر بردار $v \in T_p M$ و ایزومتری $\phi \in \text{Isom}(M)$. راست: ایزومتری‌ها همچنین با انتقال لوی-چیویتا بردارهای مماس و بردارهای ویژگی جابجا می‌شوند، یعنی، $\phi_{*,A} \circ \mathcal{P}_{A,\gamma} = \mathcal{P}_{A,\phi \circ \gamma} \circ \phi_{*,A}$ برای مسیرهای دلخواه $M \rightarrow [1, 0]$: γ و ایزومتری‌های $\phi \in \text{Isom}(M)$. اگر یک اتصال جایگزین و G -سازگار استفاده شود، ما می‌خواهیم که همان خاصیت جابجا بای پذیری برای آنها نیز برقرار باشد. نامنیزبردن نگاشتهای نمایی و منتقل کننده‌ها نسبت به ایزومتری به کانولوشن‌های GM اجازه می‌دهد تا تحت عمل ایزومتری‌ها هم متغیر باشند.

را فرض می‌کنیم، به طوری که نمودار زیر جابجا می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\gamma(\cdot)} & \xrightarrow{\phi_{*,A}} & \mathcal{A}_{\phi \circ \gamma(\cdot)} \\ \mathcal{P}_{A,\gamma} \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}_{A,\phi \circ \gamma} \\ \mathcal{A}_{\gamma(1)} & \xrightarrow{\phi_{*,A}} & \mathcal{A}_{\phi \circ \gamma(1)} \end{array} \quad (284)$$

ایزومتری‌ها و پولبک‌های منتقل کننده میدان‌های ویژگی: با دانستن قوانین تبدیل نگاشتهای نمایی و منتقل کننده‌ها تحت عمل ایزومتری‌ها، ما همه چیز لازم را برای استخراج قانون تبدیل پولبک‌های منتقل کننده میدان‌های ویژگی f از $\text{Exp}_p^* f$ در دست داریم:

قضیه ۸.۴ (عمل ایزومتری بر روی پولبک‌های منتقل کننده میدان‌های ویژگی): فرض کنید $f \in \Gamma(\mathcal{A})$ هر میدان ویژگی و $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ هر ایزومتری حافظ G -ساختار باشد. فرض کنید منتقل کننده‌های بردار ویژگی با عمل $\text{Exp}_p^* f$ جابجا شوند، یعنی معادله (۲۸۳) برقرار باشد (که به طور خودکار برای اتصال لوی-چیویتا تضمین می‌شود). سپس پولبک منتقل کننده (تعریف ۷.۵) از میدان پیش‌ران $f \triangleright f$ تعریف ۸.۲ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f) = \phi_{*,A_{000}} \circ [\text{Exp}_{\phi^{-1}(p)}^* f] \circ \phi_{*,TM}^{-1} \quad (285)$$

اثبات: ما با اعمال سمت راست بر روی یک بردار دلخواه $v \in T_p M$ شروع می‌کنیم و با استفاده از ویژگی‌های استخراج شده در این بخش به تدریج به سمت چپ می‌رسیم:

$$\begin{aligned}
& \phi_{*, A_{\square\square}} [\text{Exp}_{\phi^{-1}(p)}^* f] \phi_{*, TM}^{-1} (v) \\
&= \phi_{*, A_{\square\square}} \mathcal{P}_{A_{\square\square}, \phi^{-1}(p) \leftarrow \exp_{\phi^{-1}(p)} \circ \phi_{*, TM}^{-1} (v)} \circ f \circ \exp_{\phi^{-1}(p)} \circ \phi_{*, TM}^{-1} (v) && (\text{پولبک منتقل کننده، تعریف ۷.۵}) \\
&= \phi_{*, A_{\square\square}} \mathcal{P}_{A_{\square\square}, \phi^{-1}(p) \leftarrow \phi^{-1} \circ \exp_p (v)} \circ f \circ \phi^{-1} \circ \exp_p (v) && (\text{عمل ایزومتری بر } \exp, \text{ معادله ۲۸۱}) \\
&= \mathcal{P}_{A_{\square\square}, p \leftarrow \exp_p (v)} \circ \phi_{*, A_{\square\square}} \circ f \circ \phi^{-1} \circ \exp_p (v) && (\text{عمل ایزومتری بر } \mathcal{P}_{A_{\square\square}}, \text{ معادله ۲۸۳}) \\
&= \mathcal{P}_{A_{\square\square}, p \leftarrow \exp_p (v)} \circ (\phi \triangleright f) \circ \exp_p (v) && (\text{پیش‌ران میدان‌ها، معادله ۲۵۹}) \\
&= [\text{Exp}_p^* (\phi \triangleright f)] (v) && (\text{پولبک منتقل کننده، تعریف ۷.۵}) \quad \square
\end{aligned} \tag{۲۸۶}$$

به طور شهودی، این نتیجه فقط بیان می‌کند که پولبک منتقل کننده یک میدان پیش‌ران برابر با پیش‌ران پولبک منتقل کننده میدان اصلی است. نسبت به بدیهی‌سازی‌های محلی، این پیش‌ران را می‌توان به عنوان یک تبدیل پیمانه القا شده از ایزومتری تفسیر کرد، که در معادله (۹۳) بیان شد. ما در ادامه فرض خواهیم کرد که اتصال G -سازگاری که برای انتقال بردارهای ویژگی انتخاب می‌شود، همیشه نسبت به Isom_{GM} نامتغیر خواهد بود و بنابراین معادله (۲۸۵) برقرار است.

اینکه پولبک منتقل کننده و پیش‌ران ایزومتری جابجا می‌شوند، نتیجه جابجا پذیری نگاشت نمایی و منتقل کننده موازی است، که پولبک منتقل کننده بر حسب آنها تعریف می‌شود. توجه داشته باشید که دیفیومورفیسم‌های عمومی متريک و در نتیجه نگاشت نمایی و پولبک منتقل کننده میدان‌های ویژگی را حفظ نمی‌کنند. با تکیه بر این ساختارها، تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM فقط می‌توانند نسبت به ایزومتری هم‌متغیر باشند اما نه کاملاً نسبت به دیفیومورفیسم.

۲.۸ هم‌متغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM

اکنون به بررسی این موضوع می‌پردازیم که تحت چه شرایطی تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM نسبت به عمل ایزومتری‌ها بر روی میدان‌های ویژگی هم‌متغیر هستند. از آنجایی که عمل بر روی کلاف‌های بردار ویژگی G -الحاقی فقط برای ایزومتری‌های حافظ G -ساختار تعریف شده است، ما تمام گزاره‌ها را برای زیرگروه‌های \mathcal{I} با $\text{Isom}_{GM} \leq \text{Isom}(M)$ یا زیرگروه‌های \mathcal{I} با $\text{Isom}_{GM} \leq \text{Isom}(M)$ فرمول بندی خواهیم کرد. البته همیشه می‌توان گروه‌های ساختار G را در نظر گرفت که برای آنها $\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M)$ است.

هم‌متغیری یک تبدیل میدان کرنل، و در نتیجه کانولوشن‌های GM ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۸.۵ (تبدیل میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزومتری). فرض کنید $(\Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}), \mathcal{T}_{\mathcal{K}} : \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}))$ یک تبدیل میدان کرنل باشد. آنگاه گفته می‌شود که $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ نسبت به عمل ایزومتری‌ها در یک زیرگروه \mathcal{I} هم‌متغیر است اگر با این عمل جابجا شود، یعنی اگر ویژگی زیر برقرار باشد:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(\phi \triangleright f) = \phi \triangleright (\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f)) \quad \forall f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}), \phi \in \mathcal{I} \tag{۲۸۷}$$

بر حسب یک نمودار، $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ نسبت به ایزومتری‌ها در \mathcal{I} هم‌متغیر است اگر

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) & \xrightarrow{\mathcal{T}_{\mathcal{K}}} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \\
\phi \triangleright \downarrow & & \downarrow \phi \triangleright \\
\Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) & \xrightarrow{\mathcal{T}_{\mathcal{K}}} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square})
\end{array} \tag{۲۸۸}$$

برای همه $\phi \in \mathcal{I}$ جابجا شود.

یک نمایش تصویری از این تعریف در شکل ۱۹ آورده شده است. در بخش بعدی ۱.۲.۸ ما یک قید بر روی میدان‌های کرنل استخراج خواهیم کرد تا تبدیل میدان کرنل متناظر نسبت به ایزومتری هم‌متغیر باشد. نتیجه‌ای که از نظر هندسی شهودی است و به دست می‌آوریم این است که خود میدان کرنل باید تحت عمل ایزومتری‌ها نامتغیر باشد، که این به معنای نوعی اشتراک‌گذاری وزن بر روی مدارهای ایزومتری است؛ به شکل ۳۶ مراجعه کنید. بخش ۱.۲.۸ این بیان‌ها را به مورد خاص تر کانولوشن‌های GM و میدان‌های کرنل کانولوشنی GM اعمال می‌کند. مشخص می‌شود که کانولوشن‌های GM به دلیل G -هدایت‌پذیری کرنل الگوی خود، به طور خودکار نسبت به هر ایزومتری در Isom_{GM} هم‌متغیر هستند.

۱.۲.۸ هممتغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرنل عمومی

نتیجه اصلی این بخش، قضیه ۸.۸ بیان می‌کند که یک تبدیل میدان کرنل \mathcal{T}_K نسبت به ایزومتری هممتغیر است اگر و تنها اگر میدان کرنل زیربنایی آن K تحت ایزومتری‌ها نامتغیر باشد. برای معنادار کردن این گزاره، ما با تعریف رفتار تبدیلی میدان‌های کرنل هنگام عمل ایزومتری‌ها بر آنها شروع می‌کنیم.

تعریف ۸.۶ (عمل ایزومتری بر روی میدان‌های کرنل). فرض کنید $(\mathcal{K} : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square}, \mathcal{A}_{\square}))$ یک میدان کرنل باشد. یک ایزومتری $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ از طریق پیش‌ران میدان کرنل بر روی \mathcal{K} عمل می‌کند:

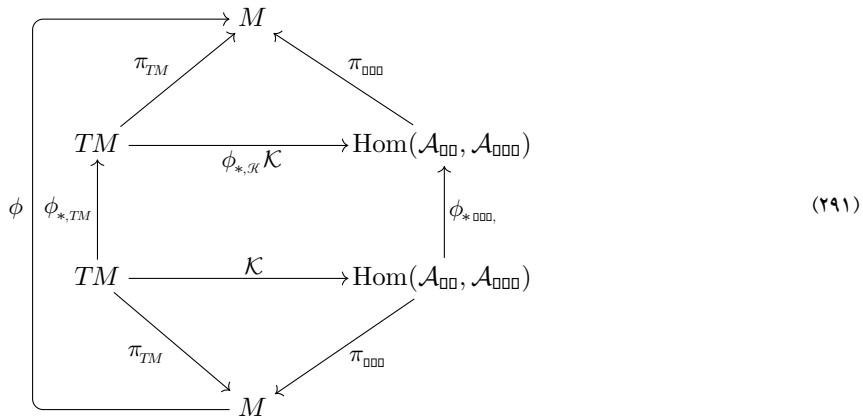
$$\phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K} := \phi_{*,\square} \circ \mathcal{K} \circ \phi_{*,TM}^{-1}. \quad (289)$$

به طور شهودی، این پیش‌ران میدان‌های کرنل را می‌توان به عنوان حرکت دادن کرنل‌های منفرد \mathcal{K}_p در نقاط $p \in M$ در امتداد مدارهای گروه ایزومتری به $\phi(p)$ در نظر گرفت.

از آنجایی که میدان‌های کرنل به عنوان M -مورفیسم‌های کلاف تعریف می‌شوند، یعنی $\mathcal{K} = \pi_{TM} \circ \pi_{\square} \mathcal{K} = \pi_{TM} \circ \phi_{*,TM} \circ \mathcal{K} \circ \phi_{*,TM}^{-1}$ را برآورده می‌کنند، پیش‌ران آنها تنها در صورتی خوش تعریف است که این ویژگی را حفظ کند. این تضمین می‌شود زیرا پیش‌ران روی کلاف مماس و کلاف هومومorfیسم نگاشت‌های کلاف هستند که به ترتیب $\pi_{TM} \circ \phi_{*,TM} = \phi \circ \pi_{\square} \circ \phi_{*,TM}$ (معادله (۲۴۳)) و $\pi_{TM} \circ \phi_{*,TM} = \phi \circ \pi_{TM} \circ \phi_{*,TM}^{-1}$ (معادله (۲۵۶)) را برآورده می‌کنند:

$$\begin{aligned} \pi_{\square} \phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K} &= \pi_{\square} \phi_{*,\square} \mathcal{K} \phi_{*,TM}^{-1} \\ &= \phi \pi_{\square} \mathcal{K} \phi_{*,TM}^{-1} \\ &= \phi \pi_{TM} \phi_{*,TM}^{-1} \\ &= \phi \phi^{-1} \pi_{TM} \\ &= \pi_{TM} \end{aligned} \quad (290)$$

ما تعریف عمل ایزومتری را بر روی میدان‌های کرنل با یک نمودار جابجایی به تصویر می‌کشیم:



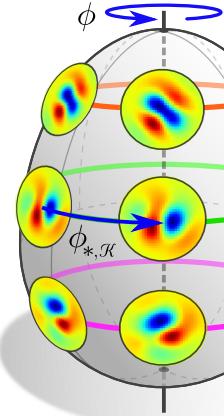
بخش پایینی این نمودار میدان کرنل مستقل از مختصات K را از نمودار در معادله (۲۱۵) نشان می‌دهد در حالی که بخش بالایی پیش‌ران آن $\phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K} = \phi_{*,\square} \circ \mathcal{K} \circ \phi_{*,\square}^{-1}$ را توسط $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ نشان می‌دهد. جابجایی پذیری فلش سمت چپ، که تأیید می‌کند $\phi_{*,\mathcal{K}}$ کرنل‌ها را از p به $\phi(p)$ منتقل می‌کند، از این واقعیت ناشی می‌شود که $\phi_{*,TM} \circ \mathcal{K} \circ \phi_{*,TM}^{-1}$ هر دو نگاشت‌های کلاف روی ϕ هستند.

ما با تعریف میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری ادامه می‌دهیم – یک نمایش تصویری در شکل ۳۶ یافت می‌شود.

تعریف ۸.۷ (میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری). گفته می‌شود یک میدان کرنل K نامتغیر^۷ تحت ایزومتری‌ها در $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$ است اگر قید $\mathcal{K} = \mathcal{K} \circ \phi_{*,\mathcal{K}}$ را برای همه $\phi \in \mathcal{I}$ برآورده کند. ما فضای میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری را با

$$\mathcal{K}_{\square}^{\mathcal{I}} := \left\{ \mathcal{K} : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square}, \mathcal{A}_{\square}) \mid \pi_{TM} \circ \mathcal{K} = \pi_{TM}, \quad \phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K} = \mathcal{K} \quad \forall \phi \in \mathcal{I} \right\}. \quad (292)$$

^۷ به جای گفتن اینکه K نامتغیر است، می‌توان آن را هم‌متغیر نامید زیرا $\mathcal{K} \circ \phi_{*,TM} \circ \mathcal{K} = \mathcal{K} \circ \phi_{*,TM}$ $\forall \phi \in \mathcal{I}$ را برآورده می‌کند. به طور کلی، هر تابعی که نسبت به اعمال گروهی معینی بر روی دامنه و هم‌دامنه‌اش هم‌متغیر باشد، خودش تحت پیش‌ترکیب و پس‌ترکیب با اعمال روی دامنه و هم‌دامنه‌اش مانند معادله (۲۹۳) نامتغیر است.



شکل ۸.۶: نمایش تصویری یک میدان کرنل نامتغیر \mathcal{K} برای حالت یک (زیر)گروه ایزومتری $\mathcal{I} = \text{SO}(2)$. قید نامتغیر بودن مستلزم $\phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K} := \mathcal{K}$ است. این ایجاب می‌کند که کرنل‌ها بر روی مدارهای ϕ در \mathcal{I} است. این عمل به اشتراک گذاشته شوند اما اجازه می‌دهد کرنل‌های متقاضی بر روی مدارهای مختلف وجود داشته باشند. قضیه ۸.۸ اثبات می‌کند که میدان‌های کرنل نامتغیر و تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر بکار راهی جای خواهند گردید. این به طور شهودی روشن است زیرا یک الگوی خاص در میدان ویژگی در $p \in M$ همان پاسخی را هنگامی که به $(\phi(p))$ منتقل می‌شود برمی‌انگیزد، اگر و تنها اگر کرنل‌ها در هر دو نقطه متنطبق باشند. برای انتخاب \mathcal{I} به عنوان گروه ایزومتری، کرنل‌ها علاوه بر این باید یک قید بازتابی را برآورده کنند؛ به شکل ۳۸ مراجعه کنید.

با نوشتن $\phi_{{*,\mathcal{K}}}$ ، قید نامتغیر بودن به صورت زیر خوانده می‌شود:

$$\phi_{*,\mathbb{A}_{\square\square}} \circ \mathcal{K} \circ \phi_{*,TM}^{-1} = \mathcal{K} \quad \forall \phi \in \mathcal{I}, \quad (293)$$

که پس از سطح بیشتر $\phi_{{*,\mathbb{A}_{\square\square}}}$ همانطور که در معادله (۲۵۸) تعریف شده است، به صورت زیر در می‌آید:

$$\phi_{*,\mathbb{A}_{\square\square}} \mathcal{K}(\phi_{*,TM}^{-1} v) \phi_{*,\mathbb{A}_{\square\square}}^{-1} = \mathcal{K}(v) \quad \forall v \in TM, \quad \forall \phi \in \mathcal{I} \quad (294)$$

به شباهت این قیود میدان کرنل در معادلات (۲۹۳) و (۲۹۴) با قید G-هایات پذیری بر روی کرنل‌های الگو در معادلات (۲۲۱) و (۲۲۲) توجه کنید. در واقع، هر دو قید ارتباط نزدیکی باهم دارند و تا حدی یکدیگر را ایجاد می‌کنند، همانطور که در بخش بعدی ۲.۲.۸ در مورد کانولوشن‌های GM هم‌متغیر نسبت به ایزومتری نشان خواهیم داد.

قضیه زیر اثبات می‌کند که میدان‌های کرنلی که تحت ایزومتری‌ها نامتغیر هستند، در واقع متناظر با تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزومتری هستند:

قضیه ۸.۸ (تبدیل میدان کرنل هم‌متغیر \Leftrightarrow میدان کرنل نامتغیر). یک تبدیل میدان کرنل $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} : \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square\square})$ ایزومتری‌ها در GM طبق تعریف ۸.۵ هم‌متغیر است اگر و تنها اگر میدان کرنل زیربنایی \mathcal{K} تحت ایزومتری‌ها طبق تعریف ۸.۷ نامتغیر باشد، یعنی،

$$\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(\phi \triangleright f) = \phi \triangleright \mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f) \quad \forall \phi \in \mathcal{I}, f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \iff \phi_{{*,\mathcal{K}}} \mathcal{K} = \mathcal{K} \quad \forall \phi \in \mathcal{I} \quad (295)$$

اثبات: برای اثبات این قضیه، ما تبدیلات میدان کرنل و پیش‌رانه‌های میدان ویژگی را در هر دو طرف شرط هم‌متغیری ایزومتری در معادله (۲۸۷) می‌نویسیم. گزاره پس از چند دستکاری جبری از مقایسه هر دو طرف به دست می‌آید.

ما با سمت راست معادله (۲۸۷) شروع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} [\phi \triangleright \mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f)](p) &\stackrel{(1)}{=} \phi_{*,\mathbb{A}_{\square\square}} [\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f)](\phi^{-1}(p)) \\ &\stackrel{(2)}{=} \phi_{*,\mathbb{A}_{\square\square}} \int_{T_{\phi^{-1}(p)}M} \mathcal{K}(v) [\text{Exp}_{\phi^{-1}(p)}^* f](v) dv \\ &\stackrel{(3)}{=} \phi_{*,\mathbb{A}_{\square\square}} \int_{T_{\phi^{-1}(p)}M} \mathcal{K}(v) \phi_{*,\mathbb{A}_{\square\square}}^{-1} [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](\phi_{*,TM}(v)) dv \\ &\stackrel{(4)}{=} \int_{T_p M} \phi_{*,\mathbb{A}_{\square\square}} \mathcal{K}(\phi_{*,TM}^{-1} \tilde{v}) \phi_{*,\mathbb{A}_{\square\square}}^{-1} [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](\tilde{v}) d\tilde{v} \\ &\stackrel{(5)}{=} \int_{T_p M} [\phi_{*,\mathbb{A}_{\square\square}} \mathcal{K} \phi_{*,TM}^{-1}](\tilde{v}) [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](\tilde{v}) d\tilde{v} \\ &\stackrel{(6)}{=} \int_{T_p M} [\phi_{{*,\mathcal{K}}} \mathcal{K}](\tilde{v}) [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](\tilde{v}) d\tilde{v} \end{aligned} \quad (296)$$

مراحل (۱) و (۲) عمل ایزومتری \triangleright را بر روی میدان‌های ویژگی (تعریف ۷.۶) و تبدیل میدان کرنل (تعریف ۷.۶) بسط می‌دهند. قانون تبدیل پولیک منتقل کننده میدان در قضیه ۸.۴ که به نامتغیر بودن اتصال G -سازگار نسبت به $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ متنکی است، مرحله (۳) را توجیه می‌کند. مرحله (۴) v را با $\phi_{*,TM}v = \tilde{v}$ جایگزین می‌کند. از آنجایی که ϕ یک ایزومتری است، تغییر حجم برابر با ۱ است. مراحل (۵) و (۶) عمل پیش‌ران کرنل ϕ را شناسایی می‌کنند، تعریف ۸.۶ گزاره حاصل کاملاً شهودی است: یک تبدیل خروجی تبدیل میدان کرنل متاظر با یک تبدیل همزمان ورودی و میدان کرنل آن است.

نوشتن سمت چپ به دست می‌دهد:

$$[\mathcal{T}_K(\phi \triangleright f)](p) = \int_{T_p M} \mathcal{K}(v) [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](v) dv, \quad (297)$$

که تا تبدیل میدان کرنل با سمت راست معادل است.

هم‌متغیری ایزومتری مستلزم آن است که هر دو عبارت برای میدان‌های دلخواه $(A_{\square\square}, f) \in \Gamma(A_{\square\square})$ و $p \in M$ و ایزومتری‌های $\phi \in \mathcal{I}$ موافق باشند. این حالت اگر و تنها اگر $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{*,\mathcal{K}}$ برای هر $\phi \in \mathcal{I}$ برقرار باشد، یعنی اگر میدان کرنل تحت عمل ایزومتری‌ها نامتغیر باشد، برقرار است. \square

توجه داشته باشید که این اثبات در (یک-اطلس از) بدیهی سازی‌های محلی سیار دشوار بود. توصیف سراسری و مستقل از مخصوصات تبدیلات میدان کرنل امکان یک اثبات ساده را بدون نگرانی از اینکه ایزومتری‌ها ویژگی‌ها را بین بدیهی سازی‌های محلی مختلف منتقل کنند، فراهم می‌کند.

در این مرحله ما می‌توانستیم با بررسی بیشتر میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری ادامه دهیم: از آنجایی که ایزومتری بودن ایجاد می‌کند که کرنل‌ها بر روی مدارهای گروه ایزومتری به اشتراک گذاشته شوند، توصیف کل میدان کرنل بر روی کل منیفلد زائد است. بنابراین امکان کاهش توصیف چنین میدان‌های کرنلی به میدان‌های کرنل بر روی فضاهای خارج قسمتی وجود دارد. از آنجایی که این تحلیل برای اثبات هم‌متغیری ایزومتری کانولوشن‌های GM لازم نیست و به برخی تعاریف فنی نیاز دارد، ما آن را به بخش ۳.۸ موکول می‌کنیم.

۲.۲.۸ هم‌متغیری ایزومتری کانولوشن‌های GM

به یاد بیاورید که کانولوشن‌های GM (تعریف ۷.۸) به عنوان تبدیلات میدان کرنل خاص با میدان‌های کرنل کانولوشنی GM (تعریف ۷.۴) تعریف شدند. بنابراین نتایج مربوط به هم‌متغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرنل بالاً فاصله به کانولوشن‌های GM نیز اعمال می‌شود. با این حال، علاوه بر قید نامتغیر بودن ایزومتری در معادله (۲۹۳)، میدان‌های کرنل کانولوشنی GM باید قید G -هدایت‌پذیری را بر روی کرنل \mathbf{g} از معادله (۲۲۱) برآورده کنند و وزن‌ها را طبق معادله (۲۲۳) بر روی G -ساختار به اشتراک گذاشته باشند. برای اینکه کانولوشن GM نسبت به ایزومتری هم‌متغیر باشد، همه این قیود باید به طور همزمان برآورده شوند. به طور شهودی، این ایجاد می‌کند که اشتراک گذاشته از ایزومتری بر روی مدارها موافق باشد. خوشبختانه مشخص می‌شود که این به طور خود کار برای ایزومتری‌های مورد نظر صادق است: کانولوشن‌های GM وزن‌ها را بر روی G -ساختار به اشتراک گذاشته باشند و ایزومتری‌ها در Isom_{GM} به اشتراک گذاشته باشند. در مخصوصات، این در تبدیلات پیمانه القا شده از Isom_{GM} (یعنی $(p) \circ g^{A\bar{A}}$) که در گروه ساختار G مقدار می‌گیرند، منعکس می‌شود، به طوری که آنها توسط G -هدایت‌پذیری کرنل‌های \mathbf{g} حذف می‌شوند.

برای دقیق‌تر کردن این استدلال‌ها، یک کانولوشن GM (یعنی $(A_{\square\square}, K) \in \Gamma(A_{\square\square})$) را بایک کرنل G -هدایت‌پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square}}^G$ در نظر بگیرید، که طبق تعریف ۷.۸ فقط تبدیل میدان کرنل کانولوشنی GM یعنی \mathcal{K}_K است. طبق قضیه ۸.۸ کانولوشن GM بنابراین دقیقاً زمانی نسبت به Isom_{GM} هم‌متغیر است که $\mathcal{K}_K = \phi_{*,\square\square}^{-1} \circ \mathcal{K}_K \circ \phi_{*,TM}^{-1}$ باشد، یعنی زمانی که $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ را برای هر $K \in \mathcal{K}_K$ را برآورده کند. این قید بر روی کل میدان کرنل به طور معادل با مجموعه‌ای از قیود بر روی کرنل‌های کانولوشن منفرد که میدان را تشکیل می‌دهند، بیان می‌شود:

$$\phi_{*,\square\square} \circ \mathcal{K}_{K,p} \circ \phi_{*,TM}^{-1} = \mathcal{K}_{K,\phi(p)} \quad \forall p \in M, \phi \in \text{Isom}_{GM} \quad (298)$$

با در نظر گرفتن یک نقطه خاص $p \in M$ ، ما پیمانه‌های دلخواه \tilde{A} را در p و A را در (p) از G -اطلس انتخاب می‌کنیم. میدان کرنل کانولوشنی GM طبق تعریف ۷.۴ در p و (p) به صورت زیر داده می‌شود:

$$\mathcal{K}_{K,p} := (\psi_{\square\square,p}^{\tilde{A}})^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^{\tilde{A}}|}} \circ \psi_{TM,p}^{\tilde{A}} \quad \text{و} \quad \mathcal{K}_{K,\phi(p)} := (\psi_{\square\square,\phi(p)}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_{\phi(p)}^A|}} \circ \psi_{TM,\phi(p)}^A. \quad (299)$$

با جایگذاری این عبارات در قید در معادله (۲۹۸) برای p ثابت و شناسایی $(\psi_{\square\square,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,\square\square}^{-1})^{-1}$ (به دست می‌آوریم):

$$(\psi_{\square\square,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,\square\square}^{-1})^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^{\tilde{A}}|}} \circ \psi_{TM,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,TM}^{-1} = (\psi_{\square\square,\phi(p)}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_{\phi(p)}^A|}} \circ \psi_{TM,\phi(p)}^A \quad \forall \phi \in \text{Isom}_{GM} \quad (300)$$

بنابراین هم متغیری ایزومتری برقرار خواهد بود اگر اشتراک گذاری وزن از طریق پیمانه‌های اصلی $\psi_{*,(p)}^A$ با اشتراک گذاری وزن از طریق پیمانه‌های $\phi_{*,(p)}$ موافق باشد. به یاد بیاورید که پیمانه‌های القا شده از ایزومتری ϕ برای ایزومتری ψ با اشتراک گذاری وزن از Isom_{GM} تضمین شده‌اند که با G -اطلس‌ها (از کلاف متناظر) سازگار باشند. همانطور که در معادله (۲۲۴) نشان داده شده است، انتخاب خاص پیمانه، که کرنل الگوی G -های پذیر نسبت به آن جهت‌دهی می‌شود، بی‌همیت است، تا زمانی که پیمانه‌ها G -سازگار باشند. از آنجایی که همه استخراج‌ها از نقطه انتخاب شده p و انتخاب خاص پیمانه‌ها مستقل بودند، این ایجاب می‌کند که کانولوشن‌های GM بنا به طراحی تضمین شده‌اند که نسبت به Isom_{GM} هم متغیر باشند.

برای به دست آوردن شهود بهتر برای این نتیجه، ارزش دارد که تبدیلات پیمانه القایی و با مقدار در G یعنی (p) را صریح کنیم. برای این منظور، توجه داشته باشید که جابجایی‌پذیر نمودارها در معادلات (۲۸۰) و (۲۶۳) ایجاب می‌کند $(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1}\psi_{*,\phi(p)}^A = \rho_{\phi}(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1}\psi_{*,\phi(p)}^A$. با جایگذاری این عبارات مختصاتی در قید در معادله (۳۰۰) به این الزام می‌رسیم که

$$\left(\rho_{\phi}(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1}\psi_{*,\phi(p)}^A\right)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^{\tilde{A}}|}} \circ (g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1}\psi_{TM,\phi(p)}^A = (\psi_{*,\phi(p)}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_{\phi(p)}^A|}} \circ \psi_{TM,\phi(p)}^A \quad (301)$$

باید برای هر ایزومتری ϕ در Isom_{GM} برقرار باشد. با بسط دادن معکوس در سمت چپ، با استفاده از اینکه $\sqrt{|\eta_p^{\tilde{A}}|} = \sqrt{|\eta_{\phi(p)}^A|} \cdot |\det g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)|$ نسبت به $\sqrt{|\eta_{\phi(p)}^A|}$ و حذف پیمانه‌ها، که ممکن است زیرا آنها ایزومورفیسم هستند، ما به قید زیر می‌رسیم:

$$\frac{1}{|\det g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)|} \rho_{\phi}(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)) \circ K \circ (g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} = K \quad \forall \phi \in \text{Isom}_{GM}, \quad (302)$$

که دقیقاً شیوه قید کرنل G -های پذیر بر روی K از تعریف ۷.۳ است. به یاد بیاورید که تبدیلات پیمانه القا شده از ایزومتری ϕ را طبق قضیه ۸.۳ تضمین شده‌اند که اگر ϕ عنصری از Isom_{GM} باشد، با مقدار در G باشند. بنابراین قید در معادله (۳۰۲) همیشه با G -های پذیر K برآورده می‌شود.

نتایج استخراج شده در مورد نامتغير بودن میدان‌های کرنل کانولوشنی GM یعنی \mathcal{K}_K نسبت به Isom_{GM} به طور خلاصه با این گزاره خلاصه می‌شوند که نمودار زیر تضمین شده است که اگر K G -های پذیر باشد و اگر $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ حافظ G -ساختار باشد، جابجایی‌پذیر است:

$$\begin{array}{c} \text{id} \times \left(\rho_{\phi}(g_{\phi}^{A\tilde{A}}) \circ K / \sqrt{|\eta^{\tilde{A}}|} \circ (g_{\phi}^{A\tilde{A}})^{-1} \right) \\ \boxed{\begin{array}{ccccc} U^A & & & & U^A \times \mathbb{R}^{c_{\phi} \times c_{\phi}} \\ \uparrow \pi_{TM} & \nearrow \pi_{TM} & & \downarrow \pi_{TM} & \uparrow \Psi_{\phi}^A \\ \pi_{TM}^{-1}(U^A) & \xrightarrow{\phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K}_K} & \pi_{\phi}^{-1}(U^A) & \xrightarrow{\Psi_{\phi}^A} & U^A \times \mathbb{R}^{c_{\phi} \times c_{\phi}} \\ \uparrow \phi \times g_{\phi}^{A\tilde{A}} & \uparrow \phi_{*,TM} & \uparrow \phi_{*,\phi} & \uparrow \phi \times \rho_{\phi}(g_{\phi}^{A\tilde{A}}) & \uparrow \text{id} \times K / \sqrt{|\eta^{\tilde{A}}|} \\ U^{\tilde{A}} \times \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\Psi_{\tilde{A}}^A} & \pi_{TM}^{-1}(U^{\tilde{A}}) & \xrightarrow{\mathcal{K}_K} & \pi_{\phi}^{-1}(U^{\tilde{A}}) \xrightarrow{\Psi_{\phi}^{\tilde{A}}} U^{\tilde{A}} \times \mathbb{R}^{c_{\phi} \times c_{\phi}} \\ \uparrow \pi_{TM} & & \uparrow \pi_{TM} & & \uparrow \pi_{TM} \\ U^{\tilde{A}} & & & & U^{\tilde{A}} \end{array}} \end{array} \quad (303)$$

در اینجا ما پول بک $U^A \rightarrow G$: $U^A \rightarrow U^{\tilde{A}}$ به $U^{\tilde{A}}$ برای راحتی نوشتاری تعریف کردیم.

هرماه با قضیه ۸.۸ نامتغير بودن میدان‌های کرنل کانولوشنی GM نسبت به Isom_{GM} هم متغیری کانولوشن‌های GM نسبت به Isom_{GM} را ایجاب می‌کند:

قضیه ۸.۹ (هم متغیری ایزومتری کانولوشن‌های GM). یک کانولوشن GM یعنی $\Gamma(\mathcal{A}_{\phi}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\phi})$ با یک کرنل G -های پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\phi}, \rho_{\phi}}^G$ نسبت به تمام ایزومتری‌های حافظ G -ساختار است، یعنی،

$$K \star (\phi \triangleright f) = \phi \triangleright (K \star f) \quad \forall f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\phi}), \phi \in \text{Isom}_{GM}. \quad (304)$$

بنابراین نمودار زیر برای هر $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) & \xrightarrow{K^*} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}) \\ \phi \triangleright \downarrow & & \downarrow \phi \triangleright \\ \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) & \xrightarrow{K^*} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}) \end{array} \quad (305)$$

اثبات: اثبات در بحث قبل از قضیه ارائه شد. \square

با استخراج این نتیجه کلی در مورد کانولوشن‌های GM , ما اکنون برخی موارد خاص را برای انتخاب‌های خاص از گروه‌های ساختار G مورد بحث قرار می‌دهیم. اولاً، برای گروه‌های ساختار متعامد $d = G$ (یا ابرگروه‌های آن)، کانولوشن با هر ایزومنتری جابجا می‌شود:

قضیه ۸.۱۰ (هممتغیری کامل ایزومنتری کانولوشن‌های OM). کانولوشن‌های OM نسبت به عمل هر ایزومنتری $\phi \in \text{Isom}(M)$ بر روی میدان‌های ویژگی هم‌متغیر هستند. به طور کلی‌تر، هر کانولوشن GM برای G -ساختارها با گروه‌های ساختار $d \geq G$ کاملاً نسبت به ایزومنتری هم‌متغیر است.

اثبات: گزاره از قضیه (۸.۹) با مشاهده اینکه $\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M)$ برای گروه‌های ساختار $d \geq G$ تضمین شده است، به دست می‌آید. دومی در معادله (۲۵۳) مورد بحث قرار گرفت. \square

این نتیجه اساساً به این واقعیت مตکی است که ایزومنتری‌ها به عنوان آن زیرگروهی از دیفیومورفیسم‌ها بر روی M تعریف می‌شوند که خودریختی‌های d -ساختار را القا می‌کنند. به بیان کمتر انتزاعی، $\text{Isom}(M)$ بنا به تعریف آن زیرگروهی از دیفیومورفیسم‌ها است که به متريک ريماني γ از M احترام می‌گذارد و d -ساختار متناظر OM اطلاعاتی معادل با متريک است.

بر روی مينفلدهای ريماني جهت‌پذير، می‌توان علاوه بر اين يك جهت (دست‌گرددی قاب) را انتخاب کرد، که همراه با متريک يك $\text{SO}(d)$ -ساختار $ISOM$ را تعریف می‌کند. ایزومنتری‌های متناظر که به خودریختی‌های ساختار $\text{SO}(d)$ بالا بر می‌شوند، ایزومنتری‌های حافظ جهت در $\text{Isom}_+(M)$ هستند.

قضیه ۸.۱۱ (هممتغیری $ISOM_+(M)$ کانولوشن‌های SOM). کانولوشن‌های SOM نسبت به عمل ایزومنتری‌های حافظ جهت $\phi \in \text{Isom}_+(M)$ بر روی میدان‌های ویژگی هم‌متغیر هستند.

اثبات: این نتیجه از قضیه (۸.۹) با مشاهده اینکه $\text{Isom}_{SOM} = \text{Isom}_+(M)$ به دست می‌آید. \square

به عنوان مثال، يك کانولوشن SOM برای $M = \mathbb{R}^4$ که متناظر با شکل ۳۴ است، نسبت به عمل گروه اقلیدسی ویژه $(\mathbb{R}^4, +)$ هم‌متغیر است. به طور مشابه، يك کانولوشن SOM برای $M = S^3$ که متناظر با شکل ۳۴ است، نسبت به دوران با $(S^3, +)$ هم‌متغیر است.

توجه داشته باشید که نتایج قضایای ۸.۱۰ و ۸.۱۱ فقط به گروه ساختار G بستگی دارند اما به انتخاب خاص G -ساختار پستگی ندارند. برای زیرگروه‌های G از d (یا $\text{SO}(d)$) مسائل پیچیده‌تر می‌شوند. در این موارد، زیرگروه‌های Isom_{GM} از $\text{Isom}(M)$ به نشاندن خاص G -ساختار FM در GM درستگی دارند. این برای $\{e\} = \{e\}$ است: $G = \{e\}$ در شکل ۳۳ به تصویر کشیده شد. به طور خاص، شکل ۳۳ ساختار کاتونی \mathbb{R}^4 را نشان می‌دهد که کاملاً نسبت به انتقال هم‌متغیر است، یعنی $(\mathbb{R}^4, +)$ در مقابل، شکل ۳۳ ب يك $\{e\}$ ساختار از \mathbb{R}^4 را نشان می‌دهد که فقط در امتداد يك محور نسبت به انتقال هم‌متغیر است به طوری که $\text{Isom}_{\{e\}M} = \mathcal{T}_2 = (\mathbb{R}, +)$. از دیدگاه شبکه‌های کانولوشنی این نتیجه بسیار شهودی است: کرnel‌های $\{e\}$ -هدايت‌پذير در این مثال‌ها بدون قيد هستند، یعنی کرnel‌های کانولوشن مرسم هستند. بنابراین آنها به طور کلی هیچ اطلاعاتی در مورد پاسخ‌های خود هنگام اعمال نسبت به قاب‌های مرجع تبدیل شده با پیمانه حمل کنند. از آنجایی که قاب‌ها، و بنابراین کرnel‌ها، در شکل ۳۳ ب در جهت «چپ-راست» به طور متفاوتی چرخانده شده‌اند، پاسخ‌های کرnel هنگام انتقال يك سیگنال در آن جهت به طور غیرقابل پیش‌بینی تغییر می‌کنند. اگر کرnel‌های الگو، با این حال، $(\mathbb{R}^4, +)$ -هدايت‌پذير بودند، می‌توانستند چرخش قاب‌ها را در نظر بگیرند. این حالت متناظر با وضعیت در شکل ۳۴ است، یعنی يك کانولوشن SOM .

۳.۸ میدان‌های کرnel خارج قسمتی

قضیه ۸.۸ نشان داد که هم‌متغیری ایزومنتری يك تبدیل میدان کرnel، نیازمند نامتغیر بودن میدان کرnel متناظر است. از آنجایی که قيد نامتغیر بودن ایجاب می‌کند که کرnel‌ها بر روی مدارها به اشتراک گذاشته شوند، همانطور که در شکل ۳۶ به تصویر کشیده شده است، توصیف ریاضی چنین میدان‌های کرnel نامتغیری زائد است: يك کرnel منفرد در يك نماینده مدار برای بازسازی میدان کرnel بر روی کل مدار کافی است. در بخش ۲.۳.۸ ما توصیف‌های معادل و کاهش‌یافته‌ای از میدان‌های کرnel نامتغیر را بر حسب کرnel‌ها بر روی نماینده‌گان مدار استخراج می‌کنیم. این کرnel‌های نماینده خود توسعه عمل زیرگروه پایدارساز نماینده مدار محدود می‌شوند. ما يك بالابر (منحصر به فرد) از کرnel‌های نماینده به میدان‌های کرnel نامتغیر پیشنهاد می‌کنیم که

یک ایزومورفیسم بین هر دو توصیف برقرار می‌کند. این ایزومورفیسم بالابر راهی برای پارامترسازی و ساخت تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزومنتری در یک پیاده‌سازی پیشنهاد می‌کند. قبل از استخراج این نتایج در بخش ۲.۳.۸، بخش بعدی ۱.۳.۸ چارچوب ریاضی را تنظیم می‌کند.

استخراج‌ها و نتایج این بخش از نظر روحی به نظریه CNN ‌های هدایت‌پذیر در فضاهای همگن نزدیک است [؟؟]، با این حال، ما نتایج آنها را از فضاهای همگن به منیفلدهای عمومی تعیین می‌دهیم. هنگامی که به فضاهای همگن M پایبند باشیم، ثابت می‌کنیم که تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزومنتری با کانولوشن‌های GM معادل هستند.

۱.۳.۸ فضاهای خارج‌قسمتی القا شده از ایزومنتری

عمل یک گروه تقارن بر روی یک فضای مدارهایی افزای می‌کند که به عنوان مجموعه‌هایی از تمام نقاطی که با عمل گروه به هم متصل هستند، تعریف می‌شوند. فضای چنین مدارهایی، فضای خارج‌قسمتی نسبت به این عمل گروهی است. در ادامه ما فضاهای خارج‌قسمتی ناشی از اعمال یک گروه ایزومنتری $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$ را هم بر روی منیفلد و هم بر روی کلاف‌های تاری مورد بحث قرار خواهیم داد. این تعاریف بعداً به ما اجازه می‌دهند تا با عمل ایزومنتری‌ها بر روی کرنل‌ها، وزن‌ها را بر روی مدارها به اشتراک بگذاریم.

خارج‌قسمت‌های منیفلد: هر نقطه $p \in M$ یک مدار را ترسیم می‌کند

$$\mathcal{I}.p := \{\phi(p) \mid \phi \in \mathcal{I}\} \subseteq M, \quad (306)$$

که به عنوان مجموعه تمام نقاطی که با عمل بر روی p با هر ایزومنتری در $\mathcal{I} \leq \text{Isom}(M)$ به دست می‌آیند، تعریف می‌شود. می‌توان به راحتی بررسی کرد که رابطه « p و q عناصری از یک مدار هستند» یک رابطه همارزی است (به پاورقی ۴۴ مراجعه کنید) و بنابراین منیفلد را همانطور که در شکل ۱۳۷ به تصویر کشیده شده است، افزای می‌کند. فضای خارج‌قسمتی

$$\mathcal{I} \setminus M := \{\mathcal{I}.p \mid p \in M\} \quad (307)$$

نسبت به این رابطه همارزی، فضای تمام مدارها است، یعنی هر عنصر از $\mathcal{I} \setminus M$ متناظر با یک مدار کامل در M است.^{۷۱} نگاشت خارج‌قسمتی متناظر

$$Q_M : M \rightarrow \mathcal{I} \setminus M, \quad p \mapsto \mathcal{I}.p \quad (308)$$

یک نقطه $p \in M$ را با مدارش $\mathcal{I}.p \in \mathcal{I} \setminus M$ شناسایی می‌کند. برای هر مدار می‌توان یک نماینده مدار دلخواه را انتخاب کرد که به طور رسمی توسط یک مقطع تعیین می‌شود

$$r_M : \mathcal{I} \setminus M \rightarrow M \quad Q_M \circ r_M = \text{id}_{\mathcal{I} \setminus M}, \quad (309)$$

که در آن شرط آخر تضمین می‌کند که نماینده $(\mathcal{I}.p)$ در واقع عنصری از مدار $\mathcal{I}.p$ است. اغلب به مقاطع پیوسته (یا هموار) علاقه‌مند هستیم، با این حال، اینها به طور کلی وجود ندارند. بنابراین ما در ادامه نمی‌خواهیم که نماینده‌گان مدار به طور پیوسته انتخاب شوند و در صورت لزوم این نقصه را بعداً جبران خواهیم کرد. طبق معمول برای مقاطع، آنها به طور کلی فقط وارون راست نگاشت خارج‌قسمتی هستند اما وارون چپ نیستند، یعنی

$$r_M \circ Q_M \neq \text{id}_M$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{I} \setminus M & \xrightarrow{r_M} & M & \xrightarrow{Q_M} & \mathcal{I} \setminus M \\ & & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{id}_{\mathcal{I} \setminus M}} & & \uparrow \\ & & & & \end{array} \quad (310)$$

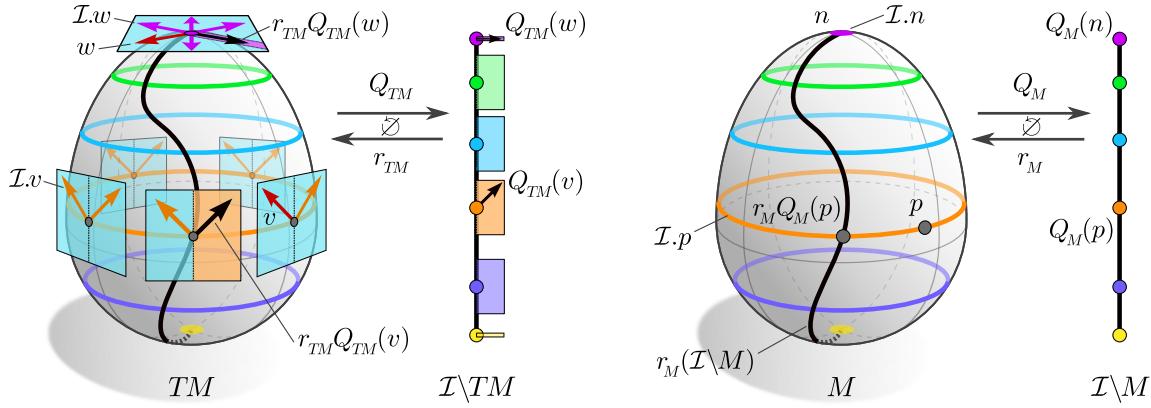
مشابه با معادله (۱۲۵) و یک نمودار غیرجایجایی

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{Q_M} & \mathcal{I} \setminus M & \xrightarrow{r_M} & M \\ & \underbrace{\hspace{4em}}_{\text{id}_M} & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & \end{array} \quad (311)$$

مشابه با معادله (۱۲۶) به تصویر کشیده می‌شود. تارهای منفرد $\text{preim}_{Q_M}(\mathcal{I}.p) = \mathcal{I}.p \subseteq M$ از نگاشت خارج‌قسمتی Q_M توسط خود مدارها داده می‌شوند. توجه داشته باشید که M به طور کلی یک کلاف تاری نیست زیرا مدارها لزوماً با یکدیگر همسان‌ریخت نیستند و بنابراین نمی‌توان آنها را به صورت محلی با یک تار نمونه‌ای مشترک F بدیهی سازی کرد، همانطور که در نمودار جایجایی در معادله (۱۰۷) لازم است. بنابراین هر مدار نوع خاص خود را دارد که در ارتباط نزدیک با زیر‌گروه‌های پایدارساز نقاط روى آن مدار خاص است. زیر‌گروه پایدارساز

$$\text{Stab}_p := \{\xi \in \mathcal{I} \mid \xi(p) = p\} \leq \mathcal{I} \quad (312)$$

^{۷۱} ما $\mathcal{I} \setminus M$ را به عنوان یک خارج‌قسمت چپ می‌نویسیم زیرا از چپ بر روی M عمل می‌کند.

(ب) نگاشت خارج قسمتی و نمایندگان مدار برای TM (آ) نگاشت خارج قسمتی و نمایندگان مدار برای M

شکل ۳.۳۷: نگاشتهای خارج قسمتی Q_M و Q_{TM} و نمایندگان مدار (مقاطع) r_M و r_{TM} برای اعمال گروه ایزومتری $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\circ}$ بر روی منیفلد M در شکل ۳۷آ و بر روی کلاف مماس TM در شکل ۳۷ب. توصیف دقیقی از هر دو تصویر در متن اصلی آورده شده است.

یک نقطه $p \in M$ به عنوان آن زیرگروهی از گروه ایزومتری که p را ثابت نگه می‌دارد، تعریف می‌شود. بر حسب زیرگروه پایدارساز، برقرار است که مدار یک نقطه با

$$\mathcal{I}.p \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_p. \quad (313)$$

شناسایی می‌شود. برای دیدن این ادعا، فرض کنید $f_p : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}.p$, $\phi \mapsto \phi(p)$ برای یک $p \in M$ و مشاهده کنید که $\phi \circ \xi(p) = \phi(p) = f_p(\phi)$. به راحتی می‌توان نشان داد که در واقع $\text{preim}_{f_p}(\phi(p)) = \phi$. $\text{Stab}_p(\phi(p)) = \text{Stab}_p(\phi)$ یک هم‌دسته از زیرگروه پایدارساز p است و بنابراین f_p ایزومورفیسم ادعا شده $\mathcal{I}.p \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_p$ را برقرار می‌کند.

برای شهودی تر کردن این ساختارها، مثال در شکل ۳۷آ را با ۲ در نظر بگیرید. مدارهای $\mathcal{I}.n = \{n\}$ و $\mathcal{I}.s = \{s\}$ در نقطه n و s قطب شمال و جنوب فقط نقاطی هستند که توسط \mathcal{I} ثابت می‌شوند. این با، به عنوان مثال، $\mathcal{I}.n \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_n = \mathcal{I}/\mathcal{I} \cong \{n\}$ موافق است زیرا \mathcal{I} گروه کامل ایزومتری منطبق است. برای هر نقطه دیگر $p \in M$ ، مدارهای $\mathcal{I}.p$ دایره هستند. ما بازتابهای $\mathcal{I}.p \cong \mathcal{R}$ هستند. نگاشت خارج قسمتی $\mathcal{I}/\text{Stab}_p \cong \mathcal{S}^1$ را به عنوان نوع مدار به دست می‌آوریم. نگاشت خارج قسمتی نقاط $q \in M$ را به مدارهایشان $\mathcal{I}.q = \mathcal{I}/\text{Stab}_q$ در فضای خارج قسمتی \mathcal{I}/M که در سمت راست نشان داده شده است، می‌فرستد. از آنجایی که مدارها را می‌توان از قطب شمال تا قطب جنوب پیمود، فضای خارج قسمتی \mathcal{I}/M توپولوژی یک پاره خط را دارد. مقطع $\mathcal{I}/M \rightarrow M$ یک نقطه نماینده $r_M(o) \in M$ را برای هر مدار $o \in \mathcal{I}/M$ انتخاب می‌کند. به طور کلی، این نماینده مدار یک نقطه تصویر شده را بازیابی نمی‌کند. به عنوان مثال، داریم $r_M(Q_M(p)) \neq p$. می‌توان مقطع را به عنوان نشاندن فضای خارج قسمتی \mathcal{I}/M در منیفلد، که به صورت خط سیاه \mathcal{I}/M از قطب شمال تا قطب جنوب نشان داده شده است، تفسیر کرد.

خارج قسمت‌های کلاف: از آنجایی که گروه ایزومتری \mathcal{I} نه تنها بر روی کلاف‌های الحاقی نیز عمل می‌کند، این کلاف‌ها به روشنی مشابه به مدارهایی افزایش می‌شوند. برای کلی نگه داشتن بحث، ما در ادامه یک کلاف الحاقی عمومی $E \xrightarrow{\pi_E} M$ را در نظر می‌گیریم که می‌تواند نماینده TM, FM, GM باشد. ما عناصر فضای کل را با $e \in E$ نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم $\phi_{*,E}$ پیش‌ران ϕ بر روی E باشد همانطور که در بخش ۲.۱.۸ معرفی شد. مدار یک عنصر از کلاف سپس به قیاس با معادله (۳۰۶) به صورت زیر داده می‌شود:

$$\mathcal{I}.e = \{\phi_{*,E}(e) \mid \phi \in \mathcal{I}\} \quad (314)$$

در حالی که فضای خارج قسمتی، که از مدارهای کلاف تشکیل شده است، به طور مشابه با معادله (۳۰۷) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{I}\setminus E = \{\mathcal{I}.e \mid e \in E\}. \quad (315)$$

مشابه قبل، نگاشت خارج قسمتی (کانونی) عناصر کلاف را به مدارشان می‌فرستد:

$$Q_E : E \mapsto \mathcal{I}\setminus E, \quad e \mapsto \mathcal{I}.e \quad (316)$$

ما یک نگاشت تصویر (منحصر به فرد) را تعریف می‌کنیم

$$\pi_{\mathcal{I}\setminus E} : \mathcal{I}\setminus E \rightarrow \mathcal{I}\setminus M, \quad Q_E(e) \mapsto Q_M \circ \pi_E(e) \quad (317)$$

بین خارج قسمت‌های کلاف و خارج قسمت منیفلد همانظور که در نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} \setminus E & \xleftarrow{Q_E} & E \\ \pi_{\mathcal{I} \setminus E} \downarrow & & \downarrow \pi_E \\ \mathcal{I} \setminus M & \xleftarrow{Q_M} & M \end{array} \quad (318)$$

توجه داشته باشید که تعریف در معادله (۳۱۷) به انتخاب خاص نماینده مدار استگی ندارد زیرا برای هر $e \in Q_E(e) \in Q_{*,E}$ دیگر نتیجه یکسانی به دست می‌آوریم: $Q_M \circ \pi_E \circ \phi_{*,E}(e) = Q_M \circ \phi \circ \pi_E(e) = Q_M(e)$. نمایندگان مدار به طور رسمی توسعه یک انتخاب از مقطع تعیین می‌شوند

$$r_E : \mathcal{I} \setminus E \rightarrow E \quad Q_E \circ r_E = \text{id}_{\mathcal{I} \setminus E}, \quad (319)$$

که ما دوباره نمی‌خواهیم پیوسته باشد. با این حال، برای راحتی، ما می‌خواهیم که نمایندگان مدارهای کلاف بالای نمایندگان $(\mathcal{I} \setminus M)_M$ در فضای پایه قرار گیرند، یعنی برآورده کنند:

$$\pi_E \circ r_E = r_M \circ \pi_{\mathcal{I} \setminus E} \quad (320)$$

همانظور که در نمودار جابجایی زیر نشان داده شده است:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} \setminus E & \xrightarrow{r_E} & E \\ \pi_{\mathcal{I} \setminus E} \downarrow & & \downarrow \pi_E \\ \mathcal{I} \setminus M & \xrightarrow{r_M} & M \end{array} \quad (321)$$

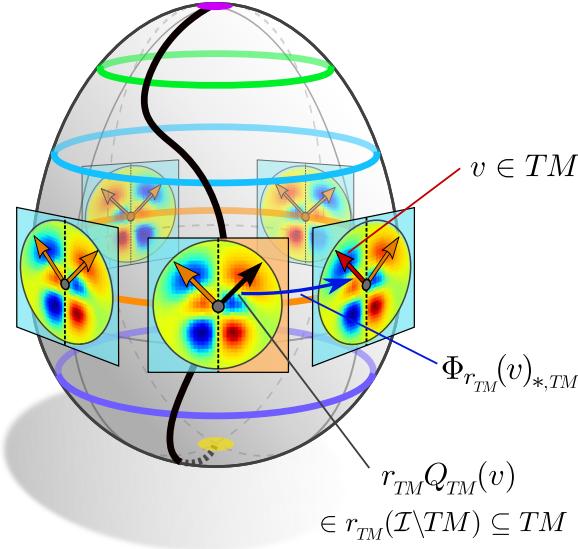
زیرگروه پایدارساز یک عنصر کلاف $e \in E$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Stab}_e := \{\xi \in \mathcal{I} \mid \xi_{*,E} e = e\} \leq \text{Stab}_{\pi_E(e)} \leq \mathcal{I}. \quad (322)$$

این لزوماً یک زیرگروه از زیرگروه پایدارساز $\text{Stab}_{\pi_E(e)}$ در فضای پایه است، که به راحتی با نقطه $\pi_E(e)$ در قطب شمال n یک دایره را در $T_n M$ توصیف می‌کند. این با $\mathcal{I}.w \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_w \cong \mathbb{R}/\mathcal{R} \cong S^1$ مطابقت دارد. مانند قبل، رابطه $\mathcal{I}.e \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_e$ برقرار است.

ما مثال خود را از شکل ۳۷ با در نظر گرفتن عمل ۲ بر روی کلاف مماس TM در شکل ۳۷ بگسترش می‌دهیم. مدار (بنفس) یک بردار غیر صفر $w \in T_n M$ یک دایره را در $T_n M$ توصیف می‌کند. این با $\mathcal{I}.w \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_w \cong \mathbb{R}/\mathcal{R} \cong S^1$ مطابقت دارد. سازگار است زیرا چنین برداری با بازتاب‌های \mathcal{R} در امتداد محور خود پایدار می‌شود. مدار $v \in T_p M$ یک نقطه منفرد در TM است که توسط هر ایزومنتری پایدار می‌شود. هر بردار دیگر $v \in T_p M$ (قرمز)، که در یک فضای مماس در نقطه‌ای $p \in M$ متفاوت از قطب‌ها زندگی می‌کند، با عمل گروه ایزومنتری به فضاهای مماس دیگر M از p چرخانده و بازتاب می‌شود. مدار v (نارنجی) از هر چنین برداری، اگر دقیقاً به سمت شمال یا جنوب اشاره نکند، با یک کپی از بردار به سمت شرق و یک کپی به سمت غرب در هر یک از فضاهای مماس روی $\mathcal{I}.p$ داده می‌شود. ما برای چنین بردارهایی $\{e\} = \text{Stab}_v = \mathcal{I}/\text{Stab}_v \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ با $\mathcal{I}.v \cong \mathcal{I}/\{e\}$ (یا دایره) همسان‌ریخت است. بردارهای $v' \in T_p M$ که دقیقاً به سمت شمال یا جنوب اشاره می‌کنند بازتاب‌ها را روی محوری که تعریف می‌کنند پایدار می‌شوند، یعنی $\text{Stab}_{v'} \cong \mathcal{R}$. مدار آنها با یک دایره $\mathcal{I}.v' \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_{v'} \cong \mathbb{R}/\mathcal{R} \cong S^1$ همسان‌ریخت است.

نگاشت خارج قسمتی $\mathcal{I} \setminus TM : TM \rightarrow \mathcal{I} \setminus TM$ که در نیمه راست شکل ۳۷ نشان داده شده است، تصویر می‌کند. برای درک ساختار آن، ما تمام موارد کیفی متفاوت را در نظر می‌گیریم: اولاً، توجه داشته باشید که مدارهای بردارها در قطب‌ها متاظر با دایره‌هایی با شعاع معین هستند، به طوری که مجموعه چنین مدارهایی یک خط $\mathcal{I}.n \cong \mathbb{R}^+$ (پرتو صورتی زیر فلش سیاه) را تشکیل می‌دهد. به طور مشابه، مدارهای بردارها در هر نقطه دیگر M تمام فضاهای مماس $p \in M$ را روی $T_{\phi(p)} M$ در دو بازتاب قطع می‌کنند و بنابراین یک نیم صفحه $\pi_{\mathcal{I} \setminus E}^{-1}(\mathcal{I}.p) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ (نارنجی) را تشکیل می‌دهند. مقطع $\mathcal{I} \setminus TM \rightarrow TM$ در $r_{TM} : \mathcal{I} \setminus TM \rightarrow TM$ هر عنصر خارج قسمت کلاف را به یک نماینده در TM می‌فرستد. طبق الزام در معادله (۳۲۰)، این نمایندگان باید در همان تار روی نمایندگان $(\mathcal{I} \setminus M)$ از خارج قسمت منیفلد، که به صورت خط سیاه نشان داده است، قرار گیرند. به عنوان مثال، $v \in T_p M$ به عنوان $r_{TM} Q_{TM}(v) \in \mathcal{I} \setminus TM$ با نگاشت خارج قسمتی به $(Q_{TM}(v) \in \mathcal{I} \setminus TM)$ (همچنین سیاه) نمایش می‌دهد، که عنصری از M است و به طور کلی با v متفاوت است.



شکل ۳۸: نمایش تصویری یک میدان کرnel نامتغیر نسبت به ایزومنتری، تعریف ۸.۷ و بازسازی کامل آن فقط از کرnel‌ها بر روی نماینده گان خارج قسمتی. برخلاف شکل ۳۶، ما در اینجا یک گروه ایزومنتری $\mathcal{I} = \text{SO}(2)$ را به جای \mathcal{I} فرض می‌کنیم. بنابراین کرnel‌های به تصویر کشیده شده دارای تقارن بازتابی هستند که توسط زیرگروه‌های پایدارساز $\text{Stab}_p \cong \mathcal{R}$ از نقاط روی مدار (v) در $\mathcal{I} \cdot p$ اعمال می‌شود. به دلیل تقارنش، میدان کرnel کامل $(\mathcal{I} \cdot p)$ را $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square})$ می‌دانیم: $\mathcal{K}: TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square})$ محدودیت آن به نماینده خارج قسمتی کلاف $r_{TM}(\mathcal{I}\backslash TM) \subseteq TM$ باشد. می‌دانیم \mathcal{K} را می‌توان از $r_{TM}(\mathcal{I}\backslash TM) \subseteq TM$ محدودیت \mathcal{I} به فضای $v \in TM$ بازسازی کرد: به قصیه ۸.۱۲ مراجعه کنید. به عنوان مثال، کرnel‌های نشان داده شده به طور کامل توسط کرnel جزئی روی نیم فضای نارنجی تعیین می‌شوند. بازسازی در M با ایزومنتری کرnel نماینده خارج قسمتی در $(\mathcal{I}\backslash TM) \subseteq r_{TM}(\mathcal{I}\backslash TM) \subseteq TM$ و $r_{TM}Q_{TM}(v) \in r_{TM}(\mathcal{I}\backslash TM)$ و پیش‌ران کرnel از طریق ایزومنتری بازسازی $\Phi_{r_{TM}}(v) \in \mathcal{I}$ که در معادله (۳۴۵) تعریف شده است، به v انجام می‌شود. ما می‌خواهیم ذکر کنیم که کرnel‌های پادتقارن به تصویر کشیده شده هنگام نگاشت بین میدان‌های ویژگی با پاریته زوج و فرد حاصل می‌شوند، در حالی که کرnel‌ها بین میدان‌های ویژگی با پاریته یکسان متناظر خواهند بود.

۲.۳.۸ میدان‌های کرnel نماینده خارج قسمتی و قیود پایدارساز

برای توجیه ساخت میدان‌های کرnel نماینده خارج قسمتی و قیود پایدارساز، فرمول‌بندی صریح تر

$$\phi_{*,\square\square} \circ \mathcal{K}_p \circ \phi_{*,TM}^{-1} = \mathcal{K}_{\phi(p)} \quad \forall p \in M, \phi \in \mathcal{I}. \quad (323)$$

از قید نامتغیر بودن ایزومنتری از تعریف ۸.۷ را در نظر بگیرید، که با نوشتن معادله (۲۹۳) برای هر نقطه $p \in M$ به طور جداگانه به دست می‌آید. این فرمول‌بندی تأکید می‌کند که قید منجر به اشتراک گذاری وزن در امتداد مدارهای منیفلد $\mathcal{I} \cdot p \in \mathcal{I} \backslash M$ می‌شود همانطور که در شکل‌های ۳۶ و ۳۸ به تصویر کشیده شده است. این ایجاد می‌کند که کرnel \mathcal{K}_r در یک نقطه نماینده r لذخواه $\mathcal{K}_r(o) = \mathcal{I} \cdot r$ از هر مدار $o = r$ به طور کامل میدان کرnel را در بقیه مدار، یعنی در تمام نقاط $\phi(r)$ که $\mathcal{I} \in \mathcal{K}$ است، مشخص می‌کند. کرnel \mathcal{K}_r در نقطه نماینده r خود توسط زیرگروه پایدارساز r محدود می‌شود:

$$\xi_{*,\square\square} \circ \mathcal{K}_r \circ \xi_{*,TM}^{-1} = \mathcal{K}_r \quad \forall \xi \in \text{Stab}_r. \quad (324)$$

این ایجاد می‌کند که هر میدان کرnel نامتغیر نسبت به ایزومنتری را می‌توان بر حسب یک میدان از کرnel‌ها بر روی نماینده گان مدار منیفلد $r \in r_{TM}(\mathcal{I} \backslash M)$ که معادله (۳۲۴) را برآورده می‌کنند، پارامترسازی کرد.

در صورتی که زیرگروه پایدارساز در r غیربدپنه باشد، قید پایدارساز در معادله (۳۲۴) تقارن‌های بیشتری را برای خود کرnel \mathcal{K}_r در r ایجاد می‌کند. به عنوان مثال، در مثال شکل ۳۸ زیرگروه پایدارساز $\text{Stab}_r \cong \mathcal{R}$ بر روی مدار بر جسته شده وجود دارد که تقارن بازتابی کرnel‌ها را اعمال می‌کند. چنین تقارن‌های پایدارسازی امکان فشرده سازی توصیف میدان‌های کرnel نامتغیر نسبت به ایزومنتری را فراهم می‌کند: مشخص می‌شود که دانستن مقادیر $w \in r_{TM}(\mathcal{I} \backslash TM) \subseteq TM$ میدان کرnel فقط بر روی نماینده گان خارج قسمتی کلاف مimas $\mathcal{K}_r(w)$ کافی است. در شکل ۳۸ این متناظر با دانستن مقادیر کرnel بر روی نیم فضای بر جسته شده با رنگ نارنجی است، که از آن می‌توان میدان کامل بر روی مدار را با تقارن‌های بازتابی و دورانی در $\mathcal{I} \cong \mathcal{R}$ بازسازی کرد.

قصیه ۸.۱۲ در زیر ادعای اخیر را دقیق می‌کند با اثبات اینکه فضای $\mathcal{K}_{\square\square}^{\mathcal{I}}$ از میدان‌های کرnel نامتغیر نسبت به ایزومنتری با یک فضای $\mathcal{K}_{\square\square}^{\mathcal{I}}$ میدان‌های کرnel بر روی نماینده گان مدار کلاف مimas $\mathcal{K}_{\square\square}^{\mathcal{I}} \cong \mathcal{R}$ ایزومنتری است. با قید حداقل کاهش یافته مشخص می‌شود و بنابراین $\mathcal{K}_{\square\square}^{\mathcal{I}}$ بازسازی می‌شود. میدان‌های کرnel را در $\mathcal{I} \cong \mathcal{R}$ به روی غیرزايد کدگذاری می‌کند. در قصیه ۸.۱۳ ما یک فضای ایزومنتری سوم $\mathcal{K}_{\square\square}^{\mathcal{I}}$ را فرمول‌بندی می‌کنیم که به طور معادل میدان‌های کرnel نامتغیر نسبت به ایزومنتری را بر حسب کرnel‌های \mathcal{K}_r با قید زیرگروه پایدارساز از معادله (۳۲۴) توصیف می‌کند. در حالی که فرمول‌بندی میدان‌های کرnel نامتغیر نسبت به ایزومنتری بر حسب $\hat{\mathcal{K}}^{\mathcal{I}}$ شامل قیود قوی تری نسبت به فرمول‌بندی بر حسب $\mathcal{K}_{\square\square}^{\mathcal{I}}$ است، ممکن است برای پایدارسازی ها راحت‌تر باشد، زیرا کرnel‌ها را بر روی فضاهای مimas کامل به جای کرnel‌ها بر روی خارج قسمتی های فضاهای مimas توسعه می‌کند.

ایزومنتری‌های بازسازی: برای بازسازی میدان‌های کرnel نامتغیر کامل در $\mathcal{K}_{\square\square}^{\mathcal{I}}$ از کرnel‌های منفرد بر روی نماینده گان مدار، کرnel‌های نماینده باید با اعمال پیش‌ران کرnel در معادله (۳۲۳) با $p = r$ ثابت برای نقاط نماینده انتخاب شده، بر روی کل منیفلد توزیع شوند. برای بازسازی کرnel در یک نقطه $q \in M$ ، $r_M Q_M(q) \in r_M(\mathcal{I} \backslash M) \subseteq M$ را به q بازگرداند، یعنی

$\mathcal{K} : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square\square})$ به عنوان $\phi(r_M Q_M(q)) = q$ نگاشت هایی با دامنه TM تعریف می شوند، که علاوه بر موقعیتشان، ترازهای کرنل را نیز کد گذاری می کنند. بنابراین ما باید ایزوومتری های خاص تری را در نظر بگیریم که نمایندگان مدار کلاف مماس $r_{TM}(I \setminus TM) \subseteq TM$ را به بردارها $v \in TM$ بازمی گردانند. این ایزوومتری های بازسازی به صورت زیر تعریف می شوند:^{۷۲}

$$\Phi_{r_{TM}} : TM \rightarrow I \quad \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = v \quad \forall v \in TM \quad (۳۲۵)$$

ما توصیه می کنیم برای به دست آوردن شهودی از ایزوومتری های بازسازی به شکل ۳۸ مراجعه کنید: از نظر گرافیکی، $\Phi_{r_{TM}}(v)$ به عنوان هر ایزوومتری تعریف می شود که بردار سیاه $r_{TM} Q_{TM}(v)$ را را روی مدار نارنجی I . v به بردار قرمز $r_{TM} Q_{TM}(v)$ روی همان مدار بازمی گرداند. توجه داشته باشید که $\Phi_{r_{TM}}$ تنها تا زیر گروه های پایدار ساز نمایندگان مدار منحصر به فرد است زیرا برای هر $v \in \text{Stab}_{r_{TM} Q_{TM}}(v)$ نتیجه می شود که $\Phi_{r_{TM}}(v)$ $\in \text{Stab}_{r_{TM} Q_{TM}}(v)$ است. در معادله (۳۲۵) را برآورده می کنند: $[\Phi_{r_{TM}}(v)]_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = v$.^{۷۳} نشان داده می شود که تمام ساختارهای بعدی از این ابهام مستقل هستند. عمل ایزوومتری های بازسازی بر روی فضای پایه M با اعمال تصویر کلاف مماس بر هر دو طرف قید تعریف کننده در معادله (۳۲۵) به دست می آید:

$$\begin{aligned} \pi_{TM}(v) &= \pi_{TM} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) && (\text{تعريف } \Phi_{r_{TM}}, \text{ معادله } (۳۲۵)) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v) \pi_{TM} r_{TM} Q_{TM}(v) && (\text{پیش ران یک نگاشت کلاف است, معادله } (۲۴۴)) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v) r_M \pi_{I \setminus TM} Q_{TM}(v) && (\text{تعريف مقاطع کلاف, معادله } (۳۲۰)) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v) r_M Q_M \pi_{TM}(v) && (\text{تعريف } \pi_{I \setminus E}, \text{ معادله } (۳۱۸)) \end{aligned} \quad (۳۲۶)$$

یک خلاصه بصری از ویژگی های $\Phi_{r_{TM}}$ یعنی اعمال آن بر روی TM و M در نمودار جابجایی زیر آورده شده است:

$$\begin{array}{ccc} & \text{id}_{TM} & \\ \begin{array}{c} TM \xrightarrow{\Phi_{r_{TM}} \times r_{TM} \circ Q_{TM}} I \times r_{TM}(I \setminus TM) \xrightarrow{\text{ev}} TM \\ \downarrow \pi_{TM} \qquad \downarrow \text{id}_I \times \pi_{TM} \qquad \downarrow \pi_{TM} \\ M \xrightarrow{\text{id}_M} I \times r_M(I \setminus M) \xrightarrow{\text{ev}} M \end{array} & \xrightarrow{\text{ev}} & \end{array} \quad (۳۲۷)$$

که در آن نگاشت های ارزیابی ev با استفاده بیش از حد از نماد گذاری، به ترتیب با $\text{ev} : I \times M \rightarrow M$, $(\phi, p) \mapsto \phi(p)$ و $\text{ev} : I \times TM \rightarrow TM$, $(\phi, v) \mapsto \phi_{*,TM}(v)$ می شوند.

میدان های کرنل نماینده خارج قسمتی: همانطور که در بالا استدلال شد، تقارن های موجود در یک میدان ویژگی نامغایر نسبت به ایزوومتری $\mathcal{K} \in \mathcal{K}_{\square\square\square\square\square}$ باید امکان بازسازی کامل آن را از محدودیتش ($r_{TM}(I \setminus TM) \rightarrow r_{\text{Hom}}(I \setminus \text{Hom})$)^{۷۴} مماس $\mathcal{K}|_{r_{TM}(I \setminus TM)} \subseteq TM$ فراهم کنند. برای ساخت یک بالابر (منحصر به فرد) Λ که $\mathcal{K}|_{r_{TM}(I \setminus TM)} = \Lambda(\mathcal{K}|_{r_{TM}(I \setminus TM)})$ را از \mathcal{K} بازیابی می کند، ما بردارهای مماس v را در دامنه \mathcal{K} از طریق ایزوومتری بازسازی $\Phi_{r_{TM}}$ از معادله (۳۲۵) بسط می دهیم و از نامغایر بودن (هم متغیر بودن) میدان کرنل در معادله (۲۹۳) استفاده می کنیم. این منجر به موارد زیر می شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(v) &= \mathcal{K} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{K} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{K}|_{r_{TM}(I \setminus TM)} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &=: [\Lambda(\mathcal{K}|_{r_{TM}(I \setminus TM)})](v) \end{aligned} \quad (۳۲۸)$$

از آنجایی که مقاطع r_{TM} به طور کلی پیوسته نیستند، $\Phi_{r_{TM}}$ نیز به طور کلی نمی تواند پیوسته خواسته شود.^{۷۵}

علاوه بر این، قید تعریف کننده بر روی $\Phi_{r_{TM}}$ هنگام ضرب چپ ζ با $v \in \text{Stab}_v$ با هر $\zeta \in \text{Stab}_v$ می شود. این، با این حال، هیچ درجه آزادی جدیدی اضافه نمی کند زیرا $\zeta \Phi_{r_{TM}}(v) = \Phi_{r_{TM}}(v)[\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1} \zeta \Phi_{r_{TM}}(v)] =: \Phi_{r_{TM}}(v) \zeta$ و $\text{Stab}_v \cong \text{Stab}_{r_{TM} Q_{TM}}(v)$ با ζ در ادامه ممکن است $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square\square})$ و $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square\square})$ را به ترتیب با $I \setminus \text{Hom}$ و $I \setminus \text{Hom}$ به اختصار بتوسیم.^{۷۶}

توجه داشته باشید که این ساختار با وجود اهمیت $\Phi_{r_{TM}Q_{TM}(v)}$ نسبت به ضرب راست با عناصر در (v) خوش تعریف است. این به راحتی با مشاهده اینکه برای هر $w \in TM$ داریم $\mathcal{K} \in \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ و $\mathcal{K}(w) = \mathcal{K}(\xi_{*,TM}w) = \mathcal{K}(w)$ که ایجاب می‌کند $\Phi_{r_{TM}} \geq \text{Stab}_{\mathcal{K}(w)}$ و بنابراین نتیجه نهایی به انتخاب خاص $\Phi_{r_{TM}}$ بهستگی ندارد، دیده می‌شود.

از آنجایی که بالابر Λ میدان‌های کرنل ناتغیر را از محدودیت آنها به نمایندگان مدار کلاف مماس بازیابی می‌کند، می‌توان آن را به عنوان نگاشت معکوس محدودیت (از میدان‌های کرنل ناتغیر) در نظر گرفت. این دیدگاه ایجاب می‌کند که بالابر یک ایزومورفیسم $\mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ بین تصویر محدودیت $\mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ که هنوز باید آن را مشخص کنیم و $\mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ برقرار می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} & \Lambda & \\ \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} \\ & \Lambda^{-1} = (\cdot)|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)} & \end{array} \quad (329)$$

برای مشخص کردن فضای $\mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ که Λ را به یک ایزومورفیسم تبدیل می‌کند، کافی است ویژگی‌های میدان‌های محدود شده $=: \mathcal{Q}$ را برای $\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)} \in \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ فهرست کیم:

- اول از همه، از آنجایی که Λ^{-1} با محدودیت دامنه به $r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$ داده می‌شود، واضح است که هر $\mathcal{Q} \in \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ باید به شکل: $\mathcal{Q} \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus Hom) \rightarrow r_{Hom}(\mathcal{I}\setminus Hom)$ باشد.

- دوم، ویژگی میدان‌های کرنل برای اینکه M مورفیسم‌های کلاف باشند، تحت محدودیت Λ^{-1} به این الزام برای \mathcal{Q} ترجمه می‌شود که $\circ \pi_{TM}$ برآورده کند.

- سوم، \mathcal{Q} باید قید پایدارساز (برداری) $\mathcal{Q}(w) = \mathcal{Q}(w)$ را برای هر بردار نماینده $w \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$ و هر $\phi \in Stab_w$ برآورده کند. این الزام با قیماندهای از قید ناتغیر بودن در معادله (۲۹۳) است که پس از محدودیت باقی می‌ماند. این را می‌توان با در نظر گرفتن قید کامل $\mathcal{Q}\phi_{*,TM}^{-1}(w) = \mathcal{Q}(w)$ و هر ایزومتری $\phi \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$ که علاوه بر این برآورده می‌کند $\phi_{*,TM}(w) \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$ ، یعنی پیش‌ران $\phi_{*,TM}(w)$ در دامنه محدود شده \mathcal{Q} باقی می‌ماند، استنتاج کرد. توجه داشته باشید که $\mathcal{Q}(w) \in \mathcal{I}.w$ و اینکه $r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$ هر مدار را دقیقاً یک بار قطع می‌کند. این ایجاب می‌کند که $\mathcal{Q}(w) = \{w\}$ باشد. این ایجاب می‌کند $\mathcal{Q}(w) \cap r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM) = \{w\}$. قید پایدارساز (برداری) ادعا شده از این ملاحظات نتیجه می‌شود.

برای شهود به شکل ۳۸ بازمی‌گردیم که در آن بردار نماینده سیاه $v = r_{TM}Q_{TM}(v)$ فقط با ایزومتری بدیهی $\{e\} = \{e\}$ پایدار می‌شود، که ایجاب می‌کند مقدار متناظر Q بدون قید باشد. بردارهای $w' \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$ که دقیقاً به سمت شمال یا جنوب اشاره می‌کنند، یعنی روی محور بازتابی خط‌چین قرار دارند، با بازتاب‌ها در $\mathcal{R} \cong Stab_{w'} \times r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$ پایدار می‌شوند، که قیدی را بر روی مقدار کرنل متناظر ایجاب می‌کند.^{۷۵}

- به عنوان آخرین الزام، \mathcal{Q} باید به یک میدان کرنل هموار بالابر شود، یعنی $\Lambda(\mathcal{Q}) = \Lambda$ باشد. متأسفانه، همواری (یا حتی پیوستگی) \mathcal{Q} به طور خودکار از همواری (پیوستگی) \mathcal{Q} نتیجه نمی‌شود زیرا Λ بر حسب r_{TM} و $\Phi_{r_{TM}}$ تعریف می‌شود، که به طور کلی نمی‌توان آنها را هموار (پیوسته) خواست.

قبل از خلاصه کردن و اثبات دقیق این ادعاهای در قضیه ۱۲.۸ در زیر، ما یک نمای کلی بصری از رابطه بین $\mathcal{Q} = \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)} \in \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ و بالابر $\mathcal{K} = \Lambda(\mathcal{Q}) \in \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ را در قالب نمودارهای جابجایی ارائه می‌دهیم:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{K} = \Lambda(\mathcal{Q}) & & & \\ & \downarrow & & & \\ TM & \xrightarrow{\Phi_{r_{TM}} \times \mathcal{Q} \circ r_{TM} \circ Q_{TM}} & \mathcal{I} \times r_{Hom}(\mathcal{I}\setminus Hom) & \xrightarrow{\text{ev}} & \text{Hom} \\ & & & & \downarrow \end{array} \quad (330)$$

^{۷۵} قید دقیق به عمل $\Phi_{r_{TM}} \times \mathcal{Q} \circ r_{TM} \circ Q_{TM}$ بر روی $Hom(\mathcal{A}_{\square\square\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square\square\square})$ بستگی دارد، که به $\rho_{\square\square\square\square}$ و $\rho_{\square\square\square\square}$ و بنابراین به $\rho_{\square\square\square\square}$ و $\rho_{\square\square\square\square}$ بستگی دارد. کرنل به تصویر کشیده شده در شکل (۲۸) متناظر با $\rho_{\square\square\square\square}$ به عنوان نمایش بازتاب-علامت (پاریته فرد) گروه بازتابی خواهد بود، که کرنل‌های پادمتقارن را اعمال می‌کند. پادمتقارن بودن مستلزم آن است که \mathcal{Q} به $\mathcal{Q}(w')$ برای w' روی محور بازتابی محدود شود؛ مقایسه کنید با جدول؟؟

$$\begin{array}{ccccc}
& & \mathcal{K} = \Lambda(\mathcal{Q}) & & \\
& \swarrow r_{TM} \circ Q_{TM} & & \searrow r_{Hom} \circ Q_{Hom} & \\
TM & & r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) & \xrightarrow{\mathcal{Q}} & Hom \\
& \downarrow \pi_{TM} & \downarrow \pi_{TM} & \downarrow \pi_{Hom} & \downarrow \pi_{Hom} \\
& & r_M(\mathcal{I} \setminus M) & & \\
& \uparrow r_M \circ Q_M & & & \\
& M & & &
\end{array} \tag{۳۳۱}$$

در نمودار آخوند، جایگزینی پذیری مربوط بالا بی با جایگزینی اعریف بالا بر به دست می آید، که نتیجه می دهد $r_{Hom} Q_{Hom} \Lambda(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}$. جایگزینی پذیری مربوط های پایین چپ و راست از معادلات ۳۲۰ و ۳۱۷ نتیجه می شود.

قضیه ۸.۱۲ (میدان های کرnel نماینده خارج قسمتی مماس). فضای میدان های کرnel نامتغیر نسبت به ایزومتری $\mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}}$ از تعريف ۸.۷ با فضای $\mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}}$ از میدان های کرnel با قید زیر گروه پایدار ساز (برداری) بر روی نماینده گان خارج قسمتی کلاف مماس، که به صورت زیر تعریف می شود، ایزومورف است:^{۷۶}

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}} := \left\{ \mathcal{Q}: r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) \rightarrow r_{Hom}(\mathcal{I} \setminus Hom) \mid \pi_{Hom} \circ \mathcal{Q} = \pi_{TM}, \quad \text{هموار,} \right. \\
\left. \xi_{*_{Hom}} \mathcal{Q}(w) = \mathcal{Q}(w) \quad \forall w \in r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM), \quad \xi \in \text{Stab}_w \right\} \tag{۳۳۲}
\end{aligned}$$

ایزومورفیسم بالا بر (منحصر به فرد) $\Lambda: \mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}}$ بین هر دو فضای در اینجا به صورت زیر داده می شود:

$$\Lambda(\mathcal{Q}): TM \rightarrow Hom(\mathcal{A}_{Hom}, \mathcal{A}_{Hom}), \quad v \mapsto [\Lambda(\mathcal{Q})](v) := \Phi_{r_{TM}}(v)_{*, Hom} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v). \tag{۳۳۳}$$

معکوس آن $\Lambda^{-1}: \mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}}$ با محدودیت میدان های کرnel نامتغیر به نماینده گان خارج قسمتی کلاف داده می شود:

$$\Lambda^{-1}(\mathcal{K}): r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) \rightarrow r_{Hom}(\mathcal{I} \setminus Hom), \quad w \mapsto [\Lambda^{-1}(\mathcal{K})](w) := \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)}(w) \tag{۳۳۴}$$

اثبات: برای اثبات اینکه $\mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}}$ یک ایزومورفیسم است، باید نشان دهیم که (۱) $\Lambda \circ \Lambda^{-1}$ در واقع معکوس Λ است، که (۲) ویژگی های تعریف کننده $\mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}}$ پس از بالا بر و محدود کردن برآورده می شوند و اینکه (۳) ساختارها به انتخاب های دلخواه بستگی ندارند. برای اینکه این بخش بیش از حد سنگین نشود، ما اثبات کامل را به بیوست^{۷۷} موقول می کنیم. مراحل منفرد اثبات در زیر فهرست شده اند:

$$\text{اثبات: برای اثبات اینکه } \mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}} \text{ یک ایزومورفیسم است، باید نشان دهیم که (۱) } \Lambda \circ \Lambda^{-1} = \text{id}_{\mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}}} \text{ است.} \tag{۱}$$

$$\text{اثبات: برای اثبات اینکه } \Lambda^{-1} \circ \Lambda = \text{id}_{\mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}}} \text{ است.} \tag{۲}$$

$$\text{اثبات: برای اثبات اینکه } \mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}} \text{ در وایستگی دوری با تعریف } \Lambda \text{ در معادله (۳۳۳) است. این را می توان با هزینه (۱) تعریف فضاهای } \widetilde{\mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}}} \text{ و } \widetilde{\mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}}} \text{ بدون الزامات} \tag{۳}$$

^{۷۶} این تعریف از $\mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}}$ در وایستگی دوری با تعریف Λ در معادله (۳۳۳) است. این را می توان با هزینه (۱) تعریف فضاهای $\widetilde{\mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}}}$ و $\widetilde{\mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}}}$ بدون الزامات همواری، که بر حسب آنها (۲) $\widetilde{\mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}}}$ را می توان تعریف کرد، که (۳) اجازه می دهد الزامات همواری را در $\widetilde{\mathcal{K}_{Hom}^{\mathcal{I}}}$ بر حسب $\widetilde{\Lambda}$ بخواهیم، اجتناب کرد.

قید کامل نامتغیر بودن (هم متغیر بودن) ایزو متری را برآورده می کند

$\Lambda^{-1}(\mathcal{K})(w) = [\Lambda^{-1}(\mathcal{K})](w) \quad \forall w \in r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM), \xi \in \text{Stab}_w$ قید پایدار ساز را
برآورده می کند

(۳) تمام ساختارها و اثباتها از انتخاب خاص $\Phi_{r_{TM}}$ مستقل هستند

□

همواری میدان های کرنل نماینده خارج قسمتی بالابر شده بنا به تعریف برقرار است.

اختیاری بودن در انتخاب مقطع r_{TM} به میدان های کرنل خارج قسمتی متفاوت اما ایزو مورف، که بر روی نماینده گان خارج قسمتی کلاف مختلف بیان شده اند، اجازه می دهد.

به جای محدود کردن حداکثری میدان کرنل به نماینده گان مدار کلاف در $(r_M(\mathcal{I} \setminus M))^{-1} \pi_{TM}^{-1}$ محدود کرد، یعنی به فضاهای مماس کامل $T_r M$ برای هر $r \in r_M(\mathcal{I} \setminus M)$ ، این متناظر با مدل سازی کرنل (متقارن بازتابی) بر روی کل فضای مماس نشان داده در جلو به جای فقط یک نیمه است. الزامات بر روی چنین کرنل های محدود شده ای را می توان با دنبال کردن همان منطق قبلی استخراج کرد و به قید در معادله (۳۲۴) منجر می شود. ما یک قضیه مشابه با قضیه (۸.۱۲) به دست می آوریم:

قضیه ۸.۱۳ (میدان های کرنل نماینده خارج قسمتی منیفلد). فضای میدان های کرنل نامتغیر نسبت به ایزو متری $\mathcal{K}_{\square \square \square}^{\mathcal{I}}$ از تعریف ۸.۷ با $\widehat{\mathcal{K}}_{\square \square \square}^{\mathcal{I}}$ از میدان های کرنل با قید زیر گروه پایدار ساز (منیفلد) بر روی فضاهای مماس روی نماینده گان خارج قسمتی منیفلد $(r_M(\mathcal{I} \setminus M))^{-1} \pi_{TM}^{-1}$ که به صورت زیر تعریف می شود، ایزو مورف است:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{K}}_{\square \square \square}^{\mathcal{I}} := \left\{ \widehat{\mathcal{Q}} : \pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)) \rightarrow \pi_{\square \square \square}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)) \mid \pi_{\square \square \square} \circ \widehat{\mathcal{Q}} = \pi_{TM}, \quad \text{هموار } \widehat{\mathcal{Q}}, \right. \\ \left. \xi_{*,TM} \circ \widehat{\mathcal{Q}}|_r \xi_{*,TM}^{-1} = \widehat{\mathcal{Q}}|_r \quad \forall r \in r_M(\mathcal{I} \setminus M), \xi \in \text{Stab}_r \right\} \end{aligned} \quad (335)$$

ایزو مورفیسم بالابر $\widehat{\Lambda} : \widehat{\mathcal{K}}_{\square \square \square}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\square \square \square}^{\mathcal{I}}$ بر حسب Λ و یک محدودیت به صورت زیر تعریف می شود:

$$\widehat{\Lambda} := \Lambda \circ (\cdot)|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} \quad (336)$$

و بنابراین اساساً با Λ موافق است:

$$\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathcal{Q}}) : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square \square}, \mathcal{A}_{\square \square}), \quad v \mapsto [\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathcal{Q}})](v) := \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \widehat{\mathcal{Q}} r_{TM} Q_{TM}(v) \quad (337)$$

معکوس آن $\widehat{\Lambda}^{-1} : \mathcal{K}_{\square \square \square}^{\mathcal{I}} \rightarrow \widehat{\mathcal{K}}_{\square \square \square}^{\mathcal{I}}$ با محدودیت میدان های کرنل نامتغیر به فضاهای مماس روی نماینده گان خارج قسمتی منیفلد داده می شود: $\pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)) \subseteq TM$

$$\widehat{\Lambda}^{-1}(\mathcal{K}) : \pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)) \rightarrow \pi_{\square \square \square}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)), \quad \widehat{w} \mapsto [\widehat{\Lambda}^{-1}(\mathcal{K})](\widehat{w}) := \mathcal{K}|_{\pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M))}(\widehat{w}) \quad (338)$$

اثبات: اثبات اساساً مشابه اثبات قضیه ۸.۱۲ است با این تفاوت جزئی که قید قوی تر $\widehat{\Lambda}^{-1}(\mathcal{K})$ که اینجا بیان شده است. از آنجایی که چیز زیادی به آنچه در پیوست ۸.۱۲ اشاره شده اضافه نمی کند، ما از اثبات صرف نظر می کنیم.

نمودار جابجایی زیر ایزو مورفیسم ها را بین سه توصیف معادل از میدان های کرنل نامتغیر نشان می دهد:

$$\begin{array}{ccccc} & & \Lambda & & \\ & \swarrow \Omega & & \searrow \widehat{\Lambda} & \\ \mathcal{K}_{\square \square \square}^{\mathcal{I}} & & \widehat{\mathcal{K}}_{\square \square \square}^{\mathcal{I}} & & \mathcal{K}_{\square \square \square}^{\mathcal{I}} \\ \uparrow \Omega^{-1} = (\cdot)|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} & & & \downarrow \widehat{\Lambda}^{-1} = (\cdot)|_{\pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M))} & \\ & & \Lambda^{-1} = (\cdot)|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} & & \end{array} \quad (339)$$

رابطه با کانولوشن های GM : تفاوت بین کانولوشن های GM هم متغیر نسبت به Isom_{GM} و تبدیلات میدان کرنل عمومی هم متغیر نسبت از طریق میدان های کرنل نامتغیر نسبت به Isom_{GM} این است که اولی کرنل های G -هدایت پذیر را بر روی کل منیفلد به اشتراک $\text{Isom}_{GM} \cdot p \in \text{Isom}_{GM} \setminus M$ -هدایت پذیر بر روی مدار های Stab_p می گذارد در حالی که دومی فقط ملزم به اشتراک گذاری کرنل های G -هدایت پذیر است.