

شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات

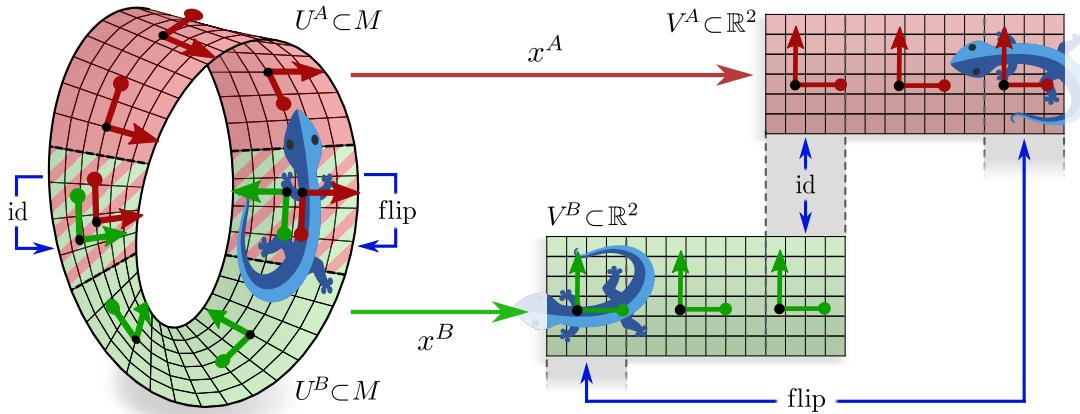
کانولوشن‌های یکسان نسبت به ایزومتری و پیمانه روی منیفلدهای ریمانی

موریس وایلر^۱ پاتریک فوره^۱ اریک ولینگ^{۱,۲}

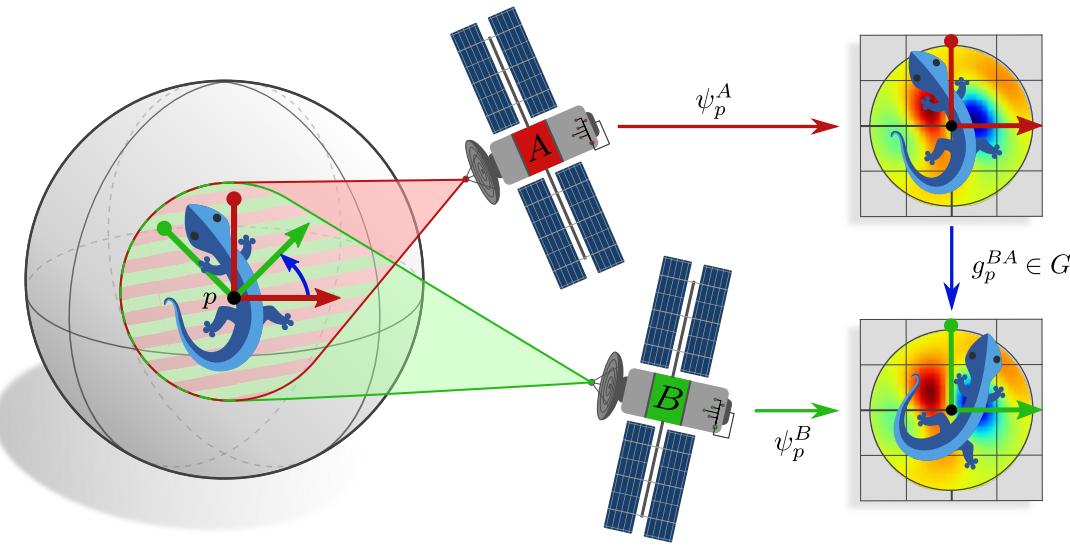
^۱دانشگاه آمستردام
 پژوهشگاه هوش مصنوعی کوالکام
 p.d.forre@uva.nl m.weiler.ml@gmail.com
 m.welling@uva.nl e.p.verlinde@uva.nl

مقدمه

انگیزه‌ای از موفقیت گسترده شبکه‌های عمیق کانولوشنی، علاقه زیادی برای تعمیم کانولوشن‌ها به منیفلدهای غیراقلیدسی وجود دارد. یک پیچیدگی عمده در مقایسه با فضاهای مسطح این است که مشخص نیست کرنل کانولوشن باید در کدام تراز روی یک منیفلولد اعمال شود. دلیل اساسی این ابهام آن است که منیفلولددهای عمومی دارای انتخاب متعارف چارچوب‌های مرجع (گیج) نیستند. بنابراین کرنل‌ها و یوزگی‌ها باید نسبت به مختصات دلخواه بیان شوند. ما استدلال می‌کنیم که انتخاب خاص مختصات‌بندی باید بر استنتاج شبکه تأثیر بگذارد آن باید مستقل از مختصات باشد. تقاضای همزمان برای استقلال مختصات و اشتراک وزن منجر به الزامی روی شبکه می‌شود تا تحت تبدیل‌های گیج محلی (تفییرات چارچوب‌های مرجع محلی) تناوب‌پذیر باشد. ابهام چارچوب‌های مرجع بدین‌گونه به G -ساختار منیفلولد بستگی دارد، به طوری که سطح لازم تناوب‌پذیری گیج نوسط گروه ساختار G متناظر تجویز می‌شود. کانولوشن‌های مستقل از مختصات ثابت می‌شوند که نسبت به آن ایزومتری‌هایی که تقارن‌های G -ساختار هستند تناوب‌پذیر باشند. نظریه حاصل به شکل آزاد از مختصات بر حسب بندل‌های فیبر فرمول‌بندی می‌شود. برای نمونه‌سازی طراحی کانولوشن‌های مستقل از مختصات، ما شبکه کانولوشنی روی نوار موبیوس پیاده‌سازی می‌کنیم. عمومیت فرمول‌بندی هندسه دیفرانسیل ما از شبکه‌های کانولوشنی با بررسی گسترده ادبیات نشان داده می‌شود که تعداد زیادی از شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی، شبکه‌های کانولوشنی کروی و شبکه‌های کانولوشنی روی سطوح عمومی را به عنوان نمونه‌های خاص کانولوشن‌های مستقل از مختصات توضیح می‌دهد.



شکل ۱: نمایش کانولوشن روی نوار موبیوس با گیج‌های مختلف



شکل ۲: ناظران مختلف \square ممکن است یک الگوی ویژگی را از « نقطه دید » متفاوتی درک کنند. کرنل‌های کانولوشنی هستند که میدان دید محلی خود در اطراف p را در یک پرداز ویژگی در p خلاصه می‌کنند. « نقطه دید » آن‌ها انتخابی از یک چارچوب مرجع محلی (گیج) در \square است که کرنل در امتداد آن همتراز می‌شود. از آنجا که مشاهدات از هر دو نقطه دید یک الگوی یکسان را نشان می‌دهند، پاسخ‌های کرنل باید حاوی اطلاعات معادل باشند، یعنی استنتاج باید مستقل از مختصات باشد. این امر کرنل‌های کانولوشن را ملزم می‌کند که تحت تبدیلات گیج محلی هموردا باشند، یعنی تعییرات چارچوب‌های مرجع. سطح هموردای گیج توسط گروه ساختار G تعیین می‌شود که هم به خمینه و هم به کاربرد بستگی دارد. (مارمولک‌ها با جوزا تعیین می‌شوند) با تشكر از توپيتر اقتباس شده‌اند.

۱ مقدمه

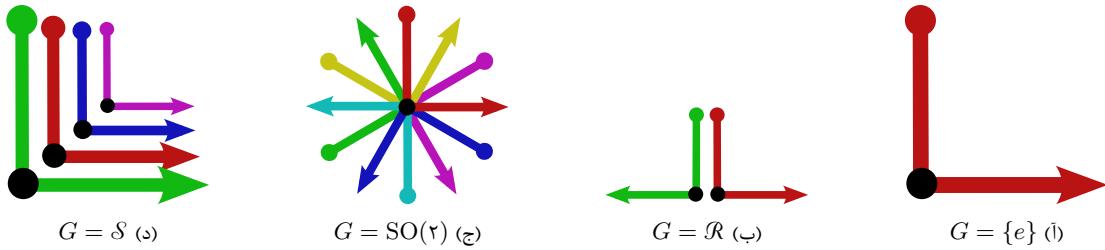
در سال‌های اخیر، شبکه‌های عصبی عمیق به مدل‌های منتخب برای طیف گسترده‌ای از وظایف در یادگیری ماشین تبدیل شده‌اند. موفقیت مدل‌های عمیق اغلب ریشه در طراحی خاص-وظیفه دارد که ساختار ریاضی داده‌های مورد پردازش را منعکس می‌کند. یک مثال برجسته، شبکه‌های عصبی کانولوشنی (CNN) هستند که از ساختار فضایی داده‌ها از طریق اتصال محلی و اشتراک‌گذاری وزن فضایی بهره‌برداری می‌کنند. از آنجا که کرنل یکسانی در هر نقطه از فضای اعمال می‌شود، شبکه‌های کانولوشنی نسبت به انتقال هموردا هستند، به این معنی که الگوهای آموخته شده را به طور خودکار در سراسر موقعیت‌های مکانی تعمیم می‌دهند. با توجه به موفقیت چشمگیر تجربی CNN‌های اقلیدسی، علاقه زیادی به گسترش مدل‌های کانولوشنی برای پردازش سیگنال‌ها در دامنه‌های عمومی‌تر و هموردا ساختن آنها تحت گروه‌های تقارن بزرگ‌تر وجود دارد.

این کار به بررسی تعیین شبکه‌های کانولوشنی به خمینه‌های ریمانی می‌پردازد. یک پیچیدگی عمده در تعیین شبکه‌های کانولوشنی از فضاهای اقلیدسی \mathbb{R}^d به خمینه‌های ریمانی عمومی این است که خمینه‌ها با انتخاب ارجحی از جهت مرجع همراه نیستند، که بتوان یک کرنل کانولوشن را در امتداد آن برای اندازه‌گیری ویژگی‌ها همتراز کرد. از آنجا که هیچ جهت مرجع ارجح نیست، کرنل باید به صورت دلخواه روی خمینه همتراز شود. موضوع اصلی این کار، تنظیم این دلخواهی بودن با مستقل ساختن انتخاب شبکه‌ها از همترازی خاص کرنل‌های کانولوشن است. مشخص می‌شود که این امر نیازمند آن است که کرنل‌ها هموردای گیج باشند، یعنی هموردا تحت تبدیلات همترازی کرنل. پاسخ یک کرنل هموردای گیج هنگام تعییر همترازی اش به طور قابل پیش‌بینی تبدیل می‌شود \square بنابراین تضمین می‌شود که محتوای اطلاعات استخراج شده برای هر انتخاب (دلخواه) همترازی یکسان باشد.

ما همترازی یک کرنل در نقطه‌ای p از یک خمینه M را به عنوان انتخابی از یک چارچوب مرجع محلی یا گیج از فضای مماس متاظر $T_p M$ فرمول بندی می‌کنیم. تبدیلات گیج بنابراین تبدیلات بین انتخاب‌های چارچوب‌های مرجع هستند. شکل ۵ مفهوم همتراز کرنل‌ها در امتداد چارچوب‌های مرجع را به تصویر می‌کشد. همتراز کرنل نسبت به میدان چارچوب کانونی (که به طور منحصر به فرد ارجح است) صفحه اقلیدسی \mathbb{R}^n ، همانطور که در بالا نشان داده شده، منجر به میدان کرنل معمول CNN های اقلیدسی می‌شود. یک میدان چارچوب متفاوت، همانطور که در پایین نشان داده شده، به یک میدان کرنل جایگزین و در نتیجه یک شبکه جایگزین دلالت دارد. همانطور که در بالا بیان شد، در بیشتر خمینه‌ها انتخاب چارچوب‌ها ذاتاً مبهم است به طوری که هیچ همترازی کرنل خاصی ارجح نیست. شکل ۲ این موضوع را برای کره S^2 به تصویر می‌کشد، جایی که چارچوب‌ها تنها تا حد دوران‌ها منحصر به فرد هستند.

سطح ابهام در انتخاب چارچوب‌های مرجع به ساختار هندسی خمینه بستگی دارد. چنین ساختاری اغلب امکان رفع ابهام چارچوب‌های مرجع تا حد تبدیلات تقارنی معین (تبدیلات گیج) را فراهم می‌کند؛ به شکل ۳ مراجعه کنید. این بیانیه با چند مثال بهتر توضیح داده می‌شود:

- یک خمینه هموار خام هیچ ترجیحی در انتخاب چارچوب‌ها ندارد. تبدیلات گیج بین چارچوب‌های عمومی، نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر دلخواه هستند، یعنی مقادیری در گروه خطی عمومی $G = \text{GL}(d)$ می‌گیرند.



شکل ۳: انتخاب چارچوب‌های مرجع یک فضای مماس $T_p M$ همیشه منحصر به فرد نیست. ساختار هندسی (G) یک خمینه، زیرمجموعه‌ای ارجح از چارچوب‌های مرجع را ایجاد می‌کند به طوری که تبدیلات گیج بین این چارچوب‌ها در گروه ساختار $G \leq \text{GL}(d)$ قرار می‌گیرند. شکل‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چنین زیرمجموعه‌هایی از چارچوب‌های را به ترتیب برای گروه بدینهی $G = \{e\}$ ، گروه بازتاب $G = \mathcal{R}$ ، گروه دوران $G = \text{SO}(2)$ و گروه مقایس‌پذیری $G = \mathcal{S}$ نشان می‌دهند. ویژگی‌ها اندازه‌گیری‌ها را نسبت به یک از چارچوب‌های متمازی که دارای مختصات متفاوت، توسعه عمل یک نمایش گروهی ρ از G به هم مرتبط می‌شوند.

- یک جهت‌گیری از خمینه امکان تمایز چارچوب‌های چپ‌گرد از راست‌گرد را فراهم می‌کند. تبدیلات گیج بین چارچوب‌های هر یک از دو دست، حافظه جهت‌گیری هستند، یعنی عناصری از $G = \text{GL}^+(d)$ هستند (نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر با دترمینان مثبت).
- یک فرم حجم امکان تمایز چارچوب‌های با حجم واحد را فراهم می‌کند. در این صورت، تبدیلات گیج حافظ حجم هستند، یعنی مقادیری در گروه خطی ویژه $G = \text{SL}(d)$ می‌گیرند.
- ساختار متریک یک خمینه ریمانی امکان اندازه‌گیری فواصل و زوایا را در فضاهای مماس فراهم می‌کند و بنابراین امکان تمایز چارچوب‌های متعامد را می‌دهد. تبدیلات گیج بین چارچوب‌های متعامد، دوران‌ها و بازتاب‌ها در گروه متعامد $G = \text{O}(d)$ هستند.
- با هم، یک جهت‌گیری و متریک به چارچوب‌های متعامد جهت‌دار دلالت دارند. در این صورت، تبدیلات گیج فقط دوران‌ها در گروه متعامد ویژه $G = \text{SO}(d)$ هستند.
- یک میدان چارچوب روی خمینه شامل یک چارچوب منحصر به فرد در هر نقطه از خمینه است. در این حالت، تبدیلات گیج بدینهی هستند که توسعه گروه بدینهی $\{e\} = G$ توصیف می‌شوند.

همه این ساختارهای هندسی مشترکاً یک زیرمجموعه ارجح (زیربندل) از چارچوب‌ها را تعريف می‌کنند به طوری که تبدیلات گیج مقادیری در یک گروه ساختار $G \leq \text{GL}(d)$ می‌گیرند. برای تأکید بر نقش محوری گروه ساختار G ، چنین ساختارهایی به عنوان G -ساختار GM نامیده می‌شوند. مثال‌های بصری از G -ساختارها برای گروه‌های ساختار G و خمینه‌های M مختلف در شکل ۷ آورده شده است.

از آنجا که انتخاب چارچوب‌های مرجع ذاتاً مفهم است، هر کمیت هندسی و عملیات شبکه باید به طور مساوی نسبت به چارچوب‌های دلخواه G -ساختار GM قابل نمایش باشد، یعنی باید GM -مستقل از مختصات باشد. بردارهای ویژگی بنابراین با یک نمایش گروهی (عمل گروهی خطی) ρ از گروه ساختار G مرتبط هستند که قانون تبدیل آنها را تحت تبدیلات گیج (گذارهای با مقدار G بین چارچوب‌های معرف) تعیین می‌کند. انتخاب خاص نمایش گروهی، نوع هندسی یک میدان بردار ویژگی را تعیین می‌کند. مثال‌های معقول شامل میدان‌های استکالر، بردار یا تانسور هستند، با این حال، انواع میدان عمومی تری نیز در عمل استفاده می‌شوند. شکل ۱۴ استقلال از مختصات کمیت‌های هندسی را در مثال شناخته‌شده بردارهای مماس به تصویر می‌کشد.

هر لایه شبکه ملزم به رعایت قوانین تبدیل ویژگی‌هاست، یعنی باید تضمین کند که خروجی‌هایش همانطور که انتظار می‌رود تبدیل می‌شوند. به طور خاص برای کانولوشن‌ها، استقلال از مختصات GM ایجاد می‌کند که اعمال کرنل مشترک نسبت به چارچوب‌های مختلف G -ساختار در یک نقطه $p \in M$ باید پاسخ یکسانی را تا حد یک تبدیل گیج برانگیزد. ما نشان می‌دهیم که این امر نیازمند G -راهبری (هموردایی گیج، معادله (۸۶)) کرنل‌های کانولوشن است. به طور شهودی، می‌توان کرنل‌های G -راهبری را به عنوان اندازه‌گیری ویژگی‌ها به صورت نسی نسبت به چارچوب‌های مرجع تصور کرد، که این امر ضروری است زیرا هیچ انتخاب چارچوب، یعنی همترازی کرنل مطلق، ارجح نیست. مثال‌هایی از کرنل‌های G -راهبری برای گروه بازتاب $G = \mathcal{R}$ در شکل ۶ نشان داده شده است. شکل ۸ اشتراک‌گذاری چنین کرنل‌هایی را نسبت به چارچوب‌های مختلف یک ساختار \mathcal{R} به تصویر می‌کشد. قید \mathcal{R} -راهبری نوعی تقارن را بر کرنل‌ها تحمیل می‌کند، به طوری که همترازی‌های مختلف واقعاً منجر به پاسخ‌هایی می‌شوند که دقیقاً با تبدیلات گیج (g) متفاوت هستند. ما در ادامه کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM را به عنوان کانولوشن‌های GM مخفف می‌کیم.

علاوه بر اعمال کرنل‌های هموردای گیج، کانولوشن‌های GM ممکن است هموردای ایزومنتری باشند، به این معنی که با عمل ایزومنتری‌ها بر روی میدان‌های ویژگی جابجا می‌شوند، همانطور که در شکل ۹ نشان داده شده است. فرض کنید $\phi : \text{Isom}(M) \rightarrow \text{Isom}(M)$ یک ایزومنتری (تقارن) از خمینه M باشد. یک شبکه عصبی دقیقاً زمانی نسبت به عمل این ایزومنتری هموردا است که الگوها در هر نقطه $p \in M$ به همان روشی پردازش شوند که الگوها در $(p)\phi$ پردازش می‌شوند. بنابراین هموردای ایزومنتری یک شبکه در تناظر یک به یک با ناوردادی ایزومنتری اتصال عصبی آن (میدان کرنل) است؛ به شکل ۱۰ مراجعه کنید. از آنجا که کانولوشن‌های ما کرنل‌ها را نسبت به چارچوب‌های (دلخواه) G -ساختار GM می‌کنند، تقارن‌های میدان کرنل با تقارن‌های G -ساختار منطبق هستند. با نشان دادن تقارن‌های (حافظ فاصله) یک G -ساختار با GM

^۱ به شباهت با اصل نسبیت خاص ایشتین توجه کنید، که به جای چارچوب‌های G -ساختار، برای چارچوب‌های لخت تکیه دارد.

$\text{Isom}_{GM} \leq \text{Isom}(M)$ این دلالت دارد که کانولوشن‌های ما دقیقاً Isom_{GM} -هموردا هستند. شکل ۱۱ این واقعیت را که G -ساختارها و میدان‌های کرنل متناظر تقارن‌های یکسانی دارند، به تصویر می‌کشد. خواننده تشویق می‌شود که G -ساختارها را در شکل ۷ با توجه به تقارن‌هایشان و ویژگی‌های هموردایی ضمنی کانولوشن‌های GM متناظر بررسی کند.

طراحی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات GM بر روی خمینه‌های ریمانی نیازمند انتخاب یک G -ساختار است که به ملاحظات متعددی بستگی دارد. اولاً، انتخاب گروه ساختار G هموردایی گیج محلی کانولوشن را تعیین می‌کند: یک کرنل G -راهبر به طور خودکار الگوهای آموخته شده را بر روی تمام ژست‌های مرتبط با G از الگوها تعمیم می‌دهد؛ به شکل ۱۳ مراجعة کنید. ثانیاً، انتخاب خاص G -ساختار هموردایی ایزومنتری سراسری کانولوشن را تعیین می‌کند. در کاربردهای تصویربرداری پزشکی، الگوها اغلب در دوران‌ها، بازتاب‌ها و موقعیت‌های دلخواه رخ می‌دهند بنابراین باید یک ساختار (d) $\text{Isom}_{GM} = \text{E}(d)$ را روی \mathbb{R}^d انتخاب کرد، مشابه ساختار (2) $\text{SO}(d)$ که در شکل ۷ نشان داده شده است. تصاویری مانند عکس‌های پرتره یک محور عمودی متمایز دارند، با این حال، بازتاب‌ها حول این محور آمار تصویر را ناوردا می‌گذارند این امر نیازمند یک ساختار \mathcal{R} مانند شکل ۷ است. علاوه بر چنین ملاحظات تقارنی، توجه به این نکته مهم است که هر خمینه‌ای (توبولوژی) ساختارهای G هموار را برای هر انتخاب گروه ساختار G نمی‌پذیرد. یک مثال نوار موبیوس است که توبولوژی پیچ خورده آن (عدم جهت‌گیری) مانع از تخصیص هموار متغیر چهت‌گیری‌های چارچوب می‌شود. بنابراین یک عملیات کانولوشن مستقل از مختصات هموار بر روی نوار موبیوس لزوماً بر کرنل‌های راهبر-بازتابی تکیه دارد.

این کار شامل یک مرور ادبیات گسترده بر روی شبکه‌های کانولوشنی است که عمومیت نظریه ما را نشان می‌دهد. این بخش انواع مختلفی از CNN‌ها را در فضاهای اقلیدسی، کرنل‌های کروی و کانولوشن‌ها را بر روی سطوح عمومی (مانند مش‌های سطحی) پوشش می‌دهد. ما انتخاب‌های خاص G -ساختارها را که به طور ضمنی توسط نوبسندگان انجام شده است، با تحلیل ویژگی‌های هموردایی سراسری و محلی مدل‌هایشان شناسایی می‌کنیم. جدول ۶ یک نمای کلی از طبقه‌بندی حاصل از شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات GM ارائه می‌دهد.

برای ارائه یک دقیق در مورد چگونگی نمونه‌سازی نظریه ما در عمل، ما پیاده‌سازی کانولوشن‌های GM را بر روی نوار موبیوس برای $G = \mathcal{R}$ مورد بحث قرار می‌دهیم. این شامل استخراج کرنل‌های راهبر-بازتابی برای انواع میدان مختلف (نمایش‌های گروهی) و ارزیابی تجربی هموردایی ایزومنتری پیش‌بینی شده نظری است. همانطور که انتظار می‌رود، کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM از پیاده‌سازی وابسته به مختصات ساده بهتر عمل می‌کنند. کد در آدرس <https://github.com/mauriceweiler/MobiusCNNs> موجود است.

یک فرمول‌بندی بدون مختصات از نظریه ما در زبان بندل‌های فیبر ابداع شده است. G -ساختارها GM زیربندل‌های اصلی G از بندل چارچوب FM بر روی M هستند. میدان‌های ویژگی برش‌هایی از بندل‌های بردار ویژگی مرتبط با G هستند. گیج‌ها تشهیم‌های بندل محلی هستند، در حالی که تبدیلات گیج نگاشته‌های گذار بین چنین تشهیم‌هایی هستند. ایزومنتری‌هایی که یک کانولوشن GM نسبت به آنها هموردا است، اтомورفیسم‌های بندل اصلی از G -ساختار هستند.

CNN‌های مستقل از تعمیم‌هایی از $\text{CNN}_{\text{اهب}}^{[1, 2, 3, 10, 19, 191]}$ از فضاهای اقلیدسی (یا همگن) به خمینه‌های ریمانی هستند. در حالی که $\text{CNN}_{\text{اهب}}$ بر تبدیلات فعال و سراسری میدان‌های ویژگی تمرکز دارند، $\text{CNN}_{\text{اهب}}$ های مستقل از مختصات تبدیلات غیرفعال و محلی بین چارچوب‌های مرجع را در نظر می‌گیرند.^۲ ما نسخه‌های اولیه‌ای از نظریه $\text{CNN}_{\text{اهب}}$ های مستقل از مختصات ("CNN_{اهب}" های هموردایی گیج") را در کارهای قبلی [۳۲، ۴۰] پیشنهاد کردیم. برخلاف این انتشارات، کار حاضر نظریه را با جزئیات بسیار بیشتری توسعه می‌دهد، آن را بر حسب بندل‌های فیبر فرمول‌بندی می‌کند، هموردایی تحت عمل ایزومنتری‌ها را اثبات می‌کند و یک مرور ادبیات ارائه می‌دهد.

^۲ این شبیه به تغییر تمرکز از کوواریانس لورنتس سراسری در نسبیت خاص به کوواریانس لورنتس محلی در نسبیت عام است.

فهرست مطالب

۱	مقدمه
۲	مرور کلی و شهود بصری
۱۰	
۲۱	بخش اول: مقدمه‌ای بر شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات
۲۲	۳ مقدمه‌ای بر شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات
۲۲	۱.۳ گیج‌ها، تبدیل‌های گیج و G -ساختارها
۳۰	۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی مستقل از مختصات
۳۳	۳.۳ انتقال موازی بردارهای ویژگی
۳۶	۴.۳ عمل ایزومتری‌ها و تبدیل‌های گیج القا شده
۳۸	۴ شبکه‌های مستقل از مختصات و GM -کانولوشن‌ها
۳۹	۱.۴ عملیات نقطه‌ای تناوب‌پذیر گیج
۴۳	۲.۴ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM
۵۱	۳.۴ تناوب‌پذیری ایزومتری
۵۴	۵ مدل اسباب‌بازی: کانولوشن‌های موبیوس هم‌متغیر انعکاس
۵۴	۱.۵ هندسه نوار موبیوس
۵۶	۲.۵ میدان‌های ویژگی مستقل از جهت‌گیری
۵۸	۳.۵ شبکه‌های کانولوشنی مستقل از جهت‌گیری
۶۱	۴.۵ پیاده‌سازی عددی و ارزیابی کانولوشن‌های موبیوس
۶۷	بخش دوم: نظریه شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات
۶۷	۶ بندل‌های مرتب و میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات
۶۸	۱.۶ مقدمه‌ای کوتاه بر کلاف‌های تاری
۷۳	۲.۶ کلاف مماس TM و کلاف چارچوب FM
۷۶	۳.۶ ساختارهای G و کلاف‌های برداری ویژگی وابسته \mathcal{A}
۷۸	۴.۶ بدیهی‌سازی‌های محلی کلاف TM , FM , TM , FM , TM , FM و \mathcal{A}
۸۴	۵.۶ منتقل‌کننده‌های موازی روی کلاف‌های الحقیقی
۸۷	۷ تبدیلات میدان کرنل مستقل از مختصات و کانولوشن‌های GM
۸۸	۱.۷ کانولوشن‌های GM با اندازه 1×1
۹۲	۲.۷ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM
۹۸	۸ هم‌متغیری ایزومتری
۱۰۰	۱.۸ ایزومتری‌ها و عمل آنها بر منیفلدها، کلاف‌ها و میدان‌ها

۱۱۲	۲.۸ هم‌متغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM
۱۱۷	۳.۸ میدان‌های کرنل خارج قسمتی
۱۲۷	بخش سوم: مروری بر مقالات مرتبط با شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات
۱۳۱	۹ شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات اقلیدسی
۱۳۳	۱.۹ فرمول‌بندی کلاسیک CNN‌های G -هدایت‌پذیر بر روی \mathbb{R}^d
۱۳۵	۲.۹ هندسه‌ی آفین فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d
۱۴۱	۳.۹ CNN‌های هموردای گروه آفین در فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d
۱۴۴	۴.۹ CNN‌های اقلیدسی در مقالات
۱۴۷	۱۰ CNN‌های هموردای دورانی در فضاهای اقلیدسی سوراخ‌دار
۱۵۳	۱۱ CNN‌های کروی مستقل از مختصات
۱۵۴	۱.۱۱ هندسه‌ی کره ۲-بعدی S^3
۱۵۸	۲.۱۱ CNN‌های کروی کاملاً هموردای دورانی
۱۶۳	۳.۱۱ CNN‌های کروی هموردای دوران سمتی در توپولوژی‌های استوانه‌ای
۱۶۷	۴.۱۱ تقریب‌های بیست‌وجهی از CNN‌های کروی
۱۷۱	۱۲ CNN‌های مستقل از مختصات روی سطوح عمومی
۱۷۲	۱.۱۲ هندسه‌ی سطوح جایگذاری شده
۱۸۰	۲.۱۲ کانولوشن‌های سطحی راهبری‌پذیر-دورانی
۱۸۶	۳.۱۲ کانولوشن‌های- $\{\mathbb{M}\}$ سطحی راهبری‌پذیر
۱۹۰	۴.۱۲ تقریب‌های بیست‌وجهی از CNN‌های کروی
۱۹۵	پیوست
۱۹۵	آ ارتباط با فرمالیسم چارت مختصاتی در هندسه دیفرانسیل
۱۹۶	آ.۱ فضاهای مماس، فضاهای هم‌مماس و پایه‌های دوگان
۱۹۷	آ.۲ دیفرانسیل‌ها، گرادیان‌ها و ژاکوبین‌ها
۱۹۹	آ.۳ پایه‌های مختصاتی تقاضه شده توسط چارت
۲۰۳	آ.۴ پایه‌های مختصاتی به عنوان تربیویالیزاسیون‌های محلی کلاف
۲۰۵	آ.۵ G -ساختارها و میدان‌های ویل‌باین
۲۰۸	ب اشتراک وزن مستقل از مختصات و کرنل‌های G -راهبری‌پذیر
۲۰۹	پ انگرال‌گیری روی فضاهای مماس
۲۱۰	ت کانولوشن‌های هموردا روی فضاهای همگن

ج کانولوشن‌های راهبری‌پذیر کروی به عنوان کانولوشن‌های □ □ اثبات‌ها

ج وجود و همواری تبدیلات میدان کرنل

ح میدان‌های ویژگی منظم به عنوان توابع اسکالار روی G -ساختار

این کار در قالب یک مقدمه، سه بخش اصلی و یک پیوست سازماندهی شده است.

بخش اول تلاش می‌کند شبکه‌های عصبی مستقل از مختصات را با زبانی آسان معرفی کند. میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه نسبت به مختصات محلی (تسهیم‌های بندل) بیان می‌شوند. استقلال مختصات مورد نیاز، مستلزم آن است که ویژگی‌ها با یک قانون تبدیل خاصی مرتبط باشند. لایه‌های شبکه ملزم به تضمین رفتار تبدیل صحیح ویژگی‌ها هستند.

بخش دوم نظریه شبکه‌های عصبی مستقل از مختصات را بر حسب بندل‌های فیبر رسمی‌سازی می‌کند. این امر امکان فرمول‌بندی سراسری و مستقل از مختصات را فراهم می‌کند، که به ویژه هنگام بررسی تناوب‌پذیری ایزومنتری شبکه‌ها مفید است. تعاریف از بخش اول با بیان عملیات مستقل از مختصات در تسهیم‌های بندل محلی (مختصات) بازیابی می‌شوند.

بخش سوم نظریه ما را در کارهای مرتبط جای می‌دهد. این بخش بررسی‌های مفصلی از معماری‌های شبکه کانولوشنی بر روی هندسه‌های مختلف ارائه می‌دهد و آن را به عنوان شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات فرمول‌بندی مجدد می‌کند. برای تسهیل توسعه معماری‌های شبکه جدید، ما ویژگی‌های مربوط به هندسه‌های خاص را قبل از بررسی شبکه‌هایی که بر روی آن‌ها عمل می‌کنند، مورد بحث قرار می‌دهیم.

خواننده می‌تواند بخش دوم را در مرحله اول نادیده بگیرد فرمول‌بندی از بخش اول برای خواندن مورور ادبیات در بخش سوم کاملاً کافی است. موروری بر مفاهیم و نتایج اصلی کار ما در بخش ۲ زیر ارائه شده است. این مورور از معادلات پرهیز می‌کند و بر شهود هندسی از طریق بصری‌سازی‌ها تکیه دارد. امیدواریم این بخش به مخاطبان غیرتخصصی کمک کند تا ایده‌ای از محتوا کار ما به دست آورند.

مورور کلی جزئیات

بخش اول: هدف بخش ۳ ابداع فضاهای ویژگی مستقل از مختصات است. به طور خاص، بخش ۱.۳ گیج‌ها، تبدیل‌های گیج و G -ساختارها را معرفی می‌کند. گیج‌ها روشی رسمی برای بیان بردارهای مماس (مستقل از مختصات) و توابع روی فضاهای مماس نسبت به چارچوب‌های مرجع هستند. تبدیل‌های گیج بین این عبارات مختصاتی در گیج‌های مختلف ترجمه می‌کنند. بخش ۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی مستقل از مختصات را معرفی می‌کند. همانند مورد بردارهای مماس، ضرایب عددی بردارهای ویژگی هنگام انتقال بین چارچوب‌های مرجع تغییر می‌کنند. قوانین تبدیل بردارهای ویژگی به ویژه انتقال موازی آن‌ها و پیش‌برداری آن‌ها هنگام عمل توسط ایزومنتری‌ها را تعیین می‌کنند، که به ترتیب در بخش‌های ۳.۲ و ۴.۳ توضیح داده شده‌اند.

بخش ۴ شبکه‌های عصبی را که بین میدان‌های ویژگی نگاشت می‌کنند، توسعه می‌دهد. عملیات نقطه‌ای، مانند جمع بایاس، کانولوشن‌های 1×1 و غیرخطی‌ها، در بخش ۱.۴ مورد بحث قرار می‌گیرند. بخش ۲.۴ بر روی کانولوشن‌ها با کرنل‌های گسترده فضایی تمرکز می‌کند. هر یک از این عملیات در ابتدای دون فرض اشتراک وزن معرفی می‌شوند، یعنی به عنوان مثال، اجازه یک کرنل متفاوت در هر نقطه از منیفولد را می‌دهند. این کرنل‌ها (با بایاس‌ها یا غیرخطی‌ها) به هیچ وجه محدود نمی‌شوند. با این حال، هنگام نیاز به اشتراک وزن فضایی، آن‌ها مجبور می‌شوند که تناوب‌پذیر گیج باشند زیرا تها مقادیر تناوب‌پذیر می‌توانند به صورت مستقل از مختصات به اشتراک گذاشته شوند. بخش ۳.۴ یک اثبات مختصر از تناوب‌پذیری ایزومنتری کانولوشن‌های GM را بر حسب عبارات مختصاتی محلی ارائه می‌دهد. ایده اصلی در اینجا این است که ایزومنتری‌ها را می‌توان به عنوان القاکنده تبدیل‌های گیج (تفسیر منفعل) در نظر گرفت، که با تناوب‌پذیری گیج کرنل‌ها توضیح داده می‌شود.

بخش ۵ پیاده‌سازی کانولوشن‌های مستقل از جهت‌گیری بر روی نوار موبیوس را توصیف می‌کند. پس از بررسی هندسه نوار موبیوس در بخش ۱.۵، انواع مختلفی از میدان‌های ویژگی در بخش ۲.۵ تعریف می‌شوند. بخش ۳.۵ بعدی، شبکه‌های کانولوشنی مستقل از جهت‌گیری را به صورت تحلیلی توصیف می‌کند. به طور خاص، ما کرنل‌های کانولوشنی تناوب‌پذیر گیج، بایاس‌ها و غیرخطی‌ها را برای هر یک از انواع میدان استخراج می‌کنیم. بخش ۴.۵ با یک پیاده‌سازی و ارزیابی عددی مدل‌های مربوطه به پایان می‌رسد.

بخش ۶ محتوای بخش ۳ را بازتاب می‌دهد، با این حال، به صورت سراسری و بر حسب بندل‌های فیبر. مقدمه‌ای کلی بر بندل‌های فیبر در بخش ۱.۶ ارائه شده است. بخش‌های ۲.۶ و ۳.۶ بندل مماس TM , FM و بندل‌های بردار ویژگی مرتبه با G (A) را معرفی می‌کنند. میدان‌های ویژگی به صورت سراسری به عنوان برش‌هایی از بندل‌های بردار ویژگی تعریف می‌شوند. تسهیم‌های بندل محلی (گیج‌ها)، که در بخش ۴.۶ مورد بحث قرار گرفته‌اند، این بندل‌ها را در مختصات بیان می‌کنند و بدین ترتیب تعاریف ما از بخش ۳ را بازیابی می‌کنند. ما به طور خاص نشان می‌دهیم که چگونه تسهیم‌های محلی بندل‌های مختلف یکدیگر را القا می‌کنند، به طوری که تبدیل‌های گیج (نگاشت‌های انتقال) آن‌ها همگام‌سازی می‌شوند. بخش ۵.۶ انتقال دهنده‌های موازی در G -بندل‌ها را مورد بحث قرار می‌دهد.

بخش ۷ شبکه‌های مستقل از مختصات از بخش ۴ را بر حسب بندل‌های فیبر بازنویسی می‌کند. کانولوشن‌های 1×1 در بخش ۱.۷ به عنوان مورفیسم‌های بندل برداری M توصیف می‌شوند. به طور جایگزین، آن‌ها را می‌توان به عنوان برش‌هایی از یک بندل همومورفیسم مشاهده کرد. بخش ۲.۷ میدان‌های کرنل مستقل از مختصات و تبدیل‌های میدان کرنل را معرفی می‌کند. این عملیات مشابه کانولوشن‌های GM هستند اما نیازی به اشتراک وزن ندارند، یعنی ممکن است در هر مکان فضایی یک کرنل متفاوت اعمال کنند. یک میدان کرنل کانولوشنی GM با اشتراک یک کرنل (تนาوب‌پذیر گیج) منفرد در سراسر منفولد ساخته می‌شود. سپس کانولوشن‌هایی مستقل از مختصات GM به عنوان تبدیل‌های میدان کرنل با میدان‌های کرنل $-GM$ -کانولوشنی تعریف می‌شوند. هنگام بیان فرمول‌بندی مستقل از مختصات کانولوشن‌های GM نسبت به تسهیم‌های محلی (گیج‌ها)، عبارات مختصاتی کانولوشن‌های GM را از بخش ۲.۴ بازیابی می‌کنیم.

تناوب‌پذیری ایزومنتری کانولوشن‌های GM در بخش ۸ بررسی می‌شود. پس از معرفی ایزومنتری‌ها، بخش ۱.۸ عمل پیش‌برنده آن‌ها را بر روی بندل‌های فیبر مورد بحث قرار می‌دهد. این عمل نیز می‌تواند در تسهیم‌های محلی بیان شود، که منجر به فرمول‌بندی از بخش ۴.۳ می‌شود. بخش ۲.۸ عمل ایزومنتری‌ها بر روی میدان‌های کرنل را تعریف می‌کند و ثابت می‌کند که تناوب‌پذیری ایزومنتری یک تبدیل میدان کرنل، ناوردای ایزومنتری میدان کرنل آن را نتیجه می‌دهد و بالعکس. کانولوشن‌های GM ثابت شده‌اند که تحت عمل آن ایزومنتری‌هایی که اتومورفیسم‌های بندلی (تقارن‌ها) از G -ساختار GM هستند، تناوب‌پذیر می‌باشند. بخش ۳.۸ میدان‌های کرنل ناوردا با ایزومنتری را جزئیات بیشتری بررسی می‌کند و ثابت می‌کند که آن‌ها معادل میدان‌های کرنل در فضاهای خارج‌قسمتی از عمل ایزومنتری هستند \square به طور شهودی، میدان‌های کرنل ناوردا با ایزومنتری ملزم به اشتراک کرنل‌ها بر روی مدارات ایزومنتری هستند. این نتیجه به ویژه دلالت دارد که تبدیل‌های میدان کرنل تناوب‌پذیر ایزومنتری در فضاهای همگن لزوماً کانولوشن‌های GM هستند.

بخش سوم: بخش سوم این کار نشان می‌دهد که تعداد زیادی از شبکه‌های کانولوشنی از ادبیات را می‌توان به عنوان اعمال کانولوشن‌های GM برای انتخاب خاصی از G -ساختار و انواع میدان تفسیر کرد. این بخش با بحثی کلی در مورد انتخاب‌های طراحی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات آغاز می‌شود. جدول ۶ موروری و طبقه‌بندی از مدل‌های مورد بررسی را ارائه می‌دهد. خواننده دعوت می‌شود که به G -ساختارهای بصری‌سازی شده در بخش سوم تکاها بیندازد زیرا اینها ایده شهودی در مورد ویژگی‌های کانولوشن‌های GM مربوطه ارائه می‌دهند.

شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی که نه تنها تناوب‌پذیر ایزومنتری هستند بلکه به طور کلی تحت عمل گروه‌های آفین تناوب عمل می‌شوند. این مدل‌ها اساساً معادل شبکه‌های کانولوشنی استیریل در فضاهای برداری اقلیدسی \mathbb{R}^d هستند. بخش ۱.۹ شبکه‌های کانولوشنی استیریل را بررسی می‌کند و ارتباط آن‌ها با کانولوشن‌های GM را مورد بحث قرار می‌دهد. این رویکرد تا حدی نامطلوب است زیرا \mathbb{R}^d با یک میدان چارچوب کانونی (ساختار \mathcal{C}) همراه است، که به طور ضمیمی توسط مدل‌های تناوب‌پذیر نادیده گرفته می‌شود. بخش ۲.۹ رویکردی اصولی تر را در پیش می‌گیرد و فضاهای آفین اقلیدسی d \mathbb{E} را تعریف می‌کند که دقیقاً با G -ساختارهایی مجهز شده‌اند که منجر به کانولوشن‌های GM تناوب‌پذیر $Aff(G)$ می‌شوند. کانولوشن‌های GM در بخش ۳.۹ تعریف می‌شوند. بخش ۴.۹ شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی تناوب‌پذیر آفین را که در ادبیات یافت می‌شوند، بررسی می‌کند. آن‌ها عمدتاً در انتخاب‌های مفروض گروه‌های ساختار و نمایش‌های گروهی متفاوت هستند.

بخش ۱۰ شبکه‌های کانولوشنی را در فضاهای اقلیدسی سوراخ‌دار $\{\cdot\}_{d=0}$ می‌بدآ $\{\cdot\}_{d=0}$ آن‌ها حذف شده است، پوشش می‌دهد. این مدل‌ها نسبت به چرخش حول مبدأ تناوب‌پذیر هستند، با این حال، نسبت به انتقال تناوب‌پذیر نیستند. آن‌ها بر اساس G -ساختارهایی هستند که با مختصات قطبی، مختصات لگاریتمی-قطبی یا مختصات کروی مطابقت دارند.

شبکه‌های کانولوشنی کروی در بخش ۱۱ پوشش داده می‌شوند. بخش ۱.۱۱ هندسه ۲-کره (جاسازی شده) S^3 را مورد بحث قرار می‌دهد. با تفسیر فضاهای مماس به عنوان زیرفضاهای دو بعدی یک فضای جاسازی \mathbb{R}^3 ، عبارات فرم بسته نگاشته‌های نمایی و لگاریتمی، چارچوب‌ها، گیج‌ها، انتقال‌دهنده‌ها و عمل ایزومنتری را استخراج می‌کنیم. بخش ۲.۱۱ شبکه‌های کانولوشنی کروی تناوب‌پذیر $(SO(3))^{(2)}$ را بررسی می‌کند. ما به طور خاص ثابت می‌کنیم که نظریه ما فرمول‌بندی عمومی کانولوشن‌های کروی توسط کوهن و همکاران [۳۱] را به عنوان یک حالت خاص شامل می‌شود. شبکه‌های کانولوشنی کروی که فقط نسبت به چرخش $SO(2)$ حل یک محور ثابت تناوب‌پذیر هستند در بخش ۳.۱۱ توصیف می‌شوند. بخش ۴.۱۲ شبکه‌های کانولوشنی بیست‌وجهی را بررسی می‌کند. بیست‌وجهی کره را تقریب می‌زند اما از وجود محلی مسطح تشکیل شده است که امکان پیاده‌سازی کارآمد عملیات کانولوشن را فراهم می‌کند.

یک بررسی از شبکه‌های کانولوشنی بر روی سطوح دو بعدی عمومی در بخش ۱.۱۲ یافت می‌شود. بخش ۱.۱۲ مقدمه‌ای کوتاه بر هندسه دیفرانسیل کلاسیک سطوح جاسازی شده و گستره‌سازی آن‌ها بر حسب شبکه‌های مثلثی ارائه می‌دهد. کانولوشن‌های سطحی در ادبیات به دو دسته طبقه‌بندی می‌شوند: دسته اول، که در بخش ۲.۱۲ پوشش داده شده است، بر اساس کرنل‌های $(2) = SO(2)$ استیریل است. این مدل‌ها مستقل از انتخاب خاص چارچوب متعامد راست‌گرد هستند. بخش ۳.۱۲ دسته دوم که بر اساس کرنل‌های $\{\mathcal{C}\}$ -استیریل، یعنی غیرتناوب‌پذیر هستند. این مدل‌ها به صراحت بر انتخاب یک میدان چارچوب تکیه دارند. بنابراین آن‌ها عمدتاً در روش‌های اکتشافی که برای تعیین چارچوب‌های مرجع استفاده می‌شوند، تفاوت دارند. توجه داشته باشید که چنین مدل‌هایی لزوماً در منیفلدهای غیرقابل موازی‌سازی مانند کره‌های توپولوژیکی ناپیوسته هستند.

پیوست: پیوست شامل اطلاعات اضافی و اثبات‌های طولانی است.

گیج‌ها به صورت رسمی تخصیص فوری چارچوب‌های مرجع به فضاهای مماس را انجام می‌دهند اما به نقاط روی منفولد به صورت مستقل از مختصات اشاره دارند. یک جایگزین محبوب انتخاب چارت‌های مختصاتی است که به اصطلاح پایه‌های مختصاتی (پایه‌های هولونومیک) فضاهای مماس را القا می‌کنند. پیوست آ مقدمه‌ای بر فرمالیسم چارت‌ها ارائه می‌دهد و آن را با فرمالیسم گیج کلی تر مرتبط می‌کند.

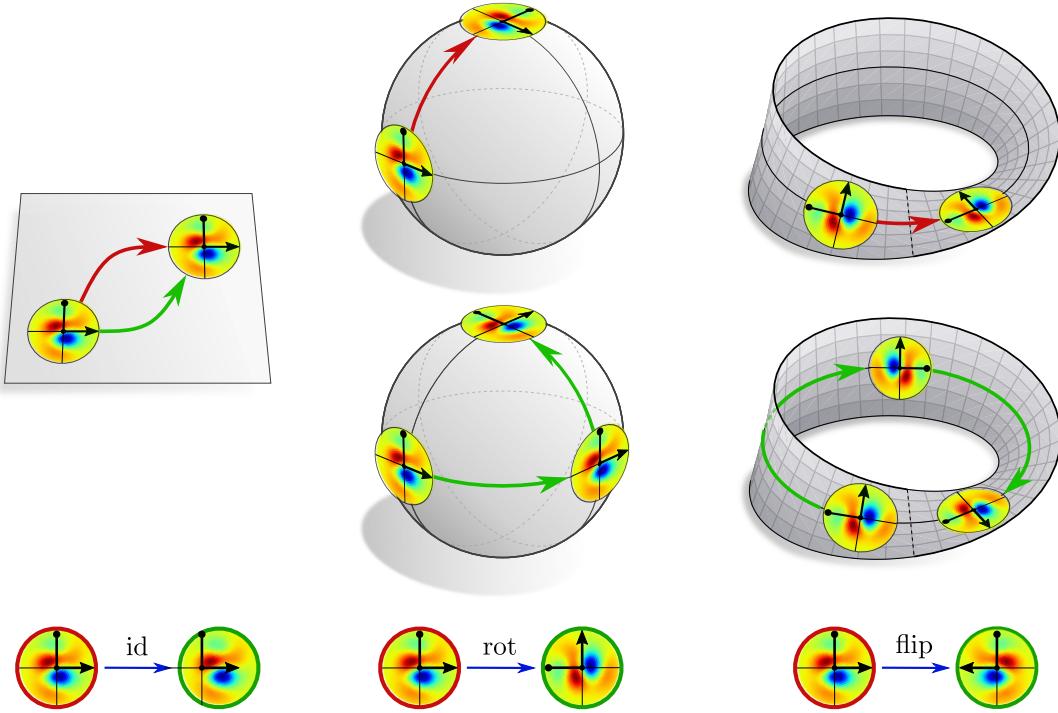
پیوست ب درباره استقلال مختصات کرنل‌ها و اشتراک وزن در امتداد چارچوب‌های مرجع توضیح می‌دهد. اشتراک وزن مستقل از مختصات GM فقط برای کرنل‌های G -استیریبل امکان‌پذیر است.

کانولوشن‌های GM با بیان میدان‌های ویژگی در مختصات نرمال ژئودزیک محاسبه می‌شوند، جایی که آن‌ها با کرنل‌های کانولوشنی G -استیریبل مطابقت داده می‌شوند. این فرآیند شامل یک انتگرال گیری بر روی فضاهای مماس است که در پیوست پ توصیف شده است.

کوندور و تریودی [۹۶]، کوهن و همکاران [۳۱] و بکرز [۶] نظریه‌های نسبتاً عمومی از کانولوشن‌ها بر روی فضاهای همگن را پیشنهاد کردند. از آنجا که این مدل‌ها وزن‌ها را از طریق عمل یک گروه تقارنی به اشتراک می‌گذارند، آن‌ها بسیار شبیه به تبدیل‌های میدان کرنل تناوب‌پذیر ایزومنتری ما از بخش‌های ۲.۸ و ۳.۸ هستند. پیوست ت این مدل‌ها را بررسی می‌کند و توضیح می‌دهد که چگونه آن‌ها با کانولوشن‌های GM ما مرتبط هستند.

پیوست ث. ۱ ثابت می‌کند که میدان‌های کرنل ناوردا با ایزومنتری در منیفولد معادل میدان‌های کرنل در فضاهای خارج‌قسمتی از عمل ایزومنتری هستند. حالت خاص فضاهای همگن، که در آن‌ها تبدیل‌های میدان کرنل تناوب‌پذیر ایزومنتری معادل کانولوشن‌های GM هستند، در پیوست ث. ۲ پیوست شده است. کانولوشن‌های کروی کوهن و همکاران [۳۱] در پیوست چ ثابت شده‌اند که یک حالت خاص از کانولوشن‌های GM کروی پوشش داده شده است. بنابراین هر شبکه کانولوشنی کروی که توسط نظریه آن‌ها پوشش داده می‌شود، توسط نظریه ما نیز توضیح داده می‌شود.

پیوست چ تأکید می‌کند که تبدیل‌های میدان کرنل و کانولوشن‌های GM ما به خوبی تعریف شده‌اند اگر میدان کرنل هموار باشد و شامل کرنل‌های با پشتیبانی فشرده باشد. ”به خوبی تعریف شده“ در اینجا به این معنی است که انتگرال‌ها وجود دارند و میدان‌های ویژگی حاصل هموار هستند. در نهایت، پیوست چ استدلال می‌کند که میدان‌های ویژگی که مطابق با نمایش منظم گروه ساختار G تبدیل می‌شوند، معادل میدان‌های اسکالر G -ساختار هستند. این موضوع از آن جهت اهمیت دارد که برخی مدل‌ها، به ویژه کانولوشن‌های گروهی، این دیدگاه را اتخاذ می‌کنند.



شکل ۴: درک شهودی از اهمیت ذاتی اشتراک وزن روی صفحه، جایگایی یک کرنل روی کل فضا است. از آنجا که انتقال موازی روی فضاهای مسطح مستقل از مسیر است، این امر مهم نیست. وسط: روی فضاهای خمیده، مانند کره، انتقال موازی وابسته به مسیر است. مسیرهای مختلف منجر به کرنل‌هایی می‌شوند که نسبت به یکدیگر چرخیده هستند. راست: نوار موبیوس منیفولدی غیرقابل جهت‌بیانی است. بنابراین مسیرهای مختلف می‌توانند منجر به کرنل‌هایی می‌شوند که نسبت به یکدیگر منعکس هستند. پایین: ما تراز مختلف کرنل‌ها را با انتخاب‌های مختلف چارچوب‌های مرجع محلی فضاهای مماس متناظر رسمی می‌کنیم. معلوم است که هیچ انتخابی از چارچوب‌های مرجع (گیج) روی منیفولد‌های عمومی ترجیح داده نمی‌شود. مختصاتی سازی‌های مختلف توسط تبدیل‌های گیج مرتبط هستند که مقاییری در گروه ساختار G منیفولد می‌گیرند (گروه بدیهی $\{e\}$ برای صفحه، گروه چرخش $G = \text{SO}(2)$ برای کره و گروه انعکاس $G = \mathcal{R}$ برای نوار موبیوس). CNN‌های مستقل از مختصات ابهام چارچوب‌های مرجع را با اعمال کرنل‌های کانولوشن قابل هدایت (هم‌متغیر گیج) مورد توجه قرار می‌دهند.

۲ مرور کلی و شهود بصری

فرمول‌بندی جبری CNN‌های مستقل از مختصات نیاز به آشنایی با نظریه گروه، نظریه نمایش و هندسه دیفرانسیل دارد که ممکن است مانعی برای مخاطب غیرفنی باشد. با این حال، اکثر ساختارها و نتایج ما از لحاظ هندسی بسیار شهودی هستند و می‌توانند با چند نمونه بصری توضیح داده شوند. این بخش سعی می‌کند مروری کلی و شهود بصری در مورد CNN‌های مستقل از مختصات را ارائه دهد.

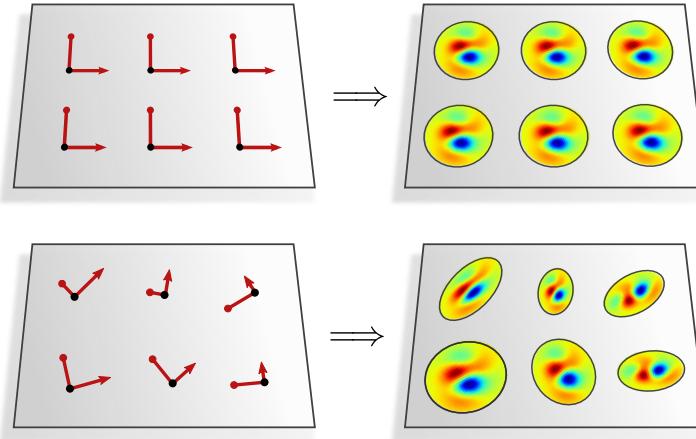
بخش ۱.۲ کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM روی منیفولد‌های ریمانی را معرفی می‌کند. هم‌متغیری آنها تحت عمل ایزومتری‌ها در بخش ۲.۲ بحث می‌شود. بخش ۳.۲ در مورد عواملی که بر انتخاب ساختار G در طراحی CNN‌های مستقل از مختصات تأثیر می‌گذارند، نظر می‌دهد.

۱.۲ ساختارهای G و کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM

از آنجا که کانولوشن‌ها اساساً با خاصیت اشتراک وزن خود مشخص می‌شوند، سؤال اصلی در این کار این است: کرنل‌های کانولوشن چگونه باید روی منیفولد‌های ریمانی به اشتراک گذاشته شوند؟^۳

یک رویکرد رایج اشتراک وزن‌ها از طریق عمل گروه تقارن فضای زیربنایی است [۲۷، ۹۶]. برای مثال، CNN‌های مرسوم وزن‌ها را با جایگایی کرنل‌ها روی صفحه به اشتراک می‌گذارند، در حالی که CNN‌های کروی وزن‌ها را با چرخاندن کرنل‌ها روی کره به اشتراک می‌گذارند. برای اشتراک گذاری یک کرنل روی کل فضای تقارن باید متعدد باشد. از آنجا که این امر به طور کلی برای ایزومتری‌های منیفولد‌های ریمانی صادق نیست، این استراتژی برای هدف ما رد می‌شود.

^۳ این سؤال به طور کلی تر به هرتابع قالب محلی، برای مثال بایاس‌ها یا غیرخطی‌های نقطه‌ای، اعمال می‌شود.



شکل ۵: خاصیت کلیدی کانولوشن‌ها این است که آنها وزن‌ها را روی منیفولد به انتخاب می‌گذارند. ما تراز یک کرنل در $p \in M$ را با انتخاب چارچوب $T_p M$ مرجع - یا گیج - فضای مماس متانظر شناسایی می‌کیم. بنابراین میدان‌های چارچوب مختلف میدان‌های کرنل (کانولوشن) متفاوتی را دربر می‌گیرند.

انتخاب چارچوب‌ها اغلب یکتا نیست. ابهام در این انتخاب توسط ساختارهای G رسمی می‌شود؛ شکل ۷ را ببینید. برای در نظر گیری اختیاری بودن چارچوب‌ها، کرنل‌ها سپس نیاز دارند که قابل هدایت G (هم‌متغیر) باشند همان‌طور که در شکل‌های ۶ و ۸ تجسم شده است.

اشتراک وزن روى فضاهاي اقليدسي اغلب به عنوان «جابجايی» يك کرنل روى فضا در نظر گرفته مى‌شود. از آنجا که روى فضاهاي مسطح انتقال موازي مستقل از مسیر انتخابی است، اين امر منجر به تراز مبهم کرنل‌ها مى‌شود؛ شکل ۴ (چپ) را ببینید. با اين حال، روى فضاهاي خميده يا غيرقابل جهت‌يابي، انتقال موازي وابسته به مسیر مى‌شود و بنابراین برای اشتراک وزن‌ها نامناسب است. شکل ۴ (وسط و راست) اين مسئله را براي کره و نوار موبیوس نمونه مى‌زند، جايی که مسیرهای مختلف منجر به تراز متفاوت کرنل مى‌شوند.

از آنجا که مفهوم «تراز کرنل‌ها» تا حدودی مبهم است ابتدا باید آن را از لحاظ رياضي دقیق کنيم:

ما انتخاب تراز کرنل در نقطه $p \in M$ را

به عنوان انتخاب چارچوب مرجع محلی (گیج) فضای مماس متانظر $T_p M$ رسمی می‌کنيم.

يک چارچوب مرجع در M چندتایی مرتب $[e_1, \dots, e_d]$ از $T_p M$ بردار مماس مستقل خطی $e_i \in T_p M$ به عنوان محورهای چارچوب ناميده مى‌شوند. از آنجا که چارچوب‌های مختلف در p توسط تبدیل‌های خطی مرتبط هستند، انتخاب‌های مختلف چارچوب‌ها مطابق با تعیير شکل‌های خطی کرنل هستند. شکل ۵ دو انتخاب مختلف از میدان‌های چارچوب روى $M = \mathbb{R}^2$ را نشان مى‌دهد. اشتراک گذاري برخی کرنل کانولوشن در امتداد اين میدان‌های چارچوب منجر به میدان‌های کرنل (کانولوشن) متانظر مى‌شود.

شناسایي تراز کرنل‌ها با چارچوب‌های مرجع اين سؤال را مطرح مى‌كند:

انتخاب چارچوب‌های مرجع محلی روى يك منیفولد (ريمانی) تا چه حد مبهم است؟

همان‌طور که در ادامه تفصيل داده مى‌شود، ابهام چارچوب‌های مرجع توسط ساختار G که منیفولد با آن مجهر است، تعبيين مى‌شود.

۱.۱.۲ ساختارهای G

فضای تمام چارچوب‌های ممکن $T_p M$ به عنوان $F_p M$ نشان داده مى‌شود. در کنار هم، چارچوب‌های تمام فضاهاي مماس بسته چارچوب FM را تشکيل مى‌دهند؛ شکل ۳۳ را ببینید. هرچه انتخاب خاصی از چارچوب‌ها در FM روی منیفولد هموار «برهنه» (بدون ساختار هندسى بيشتر) نسبت به يكديگر ترجيح داده نمى‌شود، که تراز کرنل‌ها را حداکثر مبهم مى‌گذارد. برای رفع ابهام چارچوب‌ها و تراز کرنل‌ها، منیفولد باید به ساختار هندسى اضافي مجهر شود.

يک منیفولد ريماني به ساختار متریک مجهر است. با فراهم کردن ضرب داخلی (متریک ريماني) روی فضاهاي مماس، اين ساختار امكان جدا کردن آن چارچوب‌های خاص که محورهایشان نسبت به يكديگر متعامد نرماء هستند را فراهم مى‌کند. تبدیل‌های گیج، يعني تبدیل‌ها بين انتخاب‌های چارچوب‌های مرجع (شکل‌های ۱۲ (چپ) و ۱۴ را ببینید)، سپس مقادیری در گروه متعامد $O(d)$ مى‌گيرند. روی منیفولدهای ريماني تراز کرنل‌ها بنابراین همواره تا چرخش‌ها و انعکاس‌ها رفع ابهام مى‌شود.

CNN‌های اقلیدسی کرنل‌های کانولوشن (بنابراین چارچوب‌ها) را موازي با يكديگر تراز مى‌کنند همان‌طور که در شکل ۵ (بالا) تجسم شده است. CNN‌های کروي تراز کرنل‌ها را معمولاً تا چرخش‌ها رفع ابهام مى‌کنند، يعني آنها دست‌چيني ترجيحي چارچوب‌های رفع را فرض مى‌کنند. ساختار متریک به تنهائي برای توصيف اين تنظيمات ناكافی است، که نشان مى‌دهد اين منیفولد‌ها به ساختار هندسى بيشتری علاوه بر ساختار متریک مجهر هستند. ما پيشنهاد مى‌کنيم که چارچوب رياضي مناسب، چارچوب ساختارهای G است و فرض مى‌کنيم:

ابهام در انتخاب چارچوب‌های مرجع (بنابراین تراز کرنل‌ها)

روي منیفولد M توسط ساختار G آن به نام GM رسمی مى‌شود.

ساختمان‌های G به نام GM بسته‌هایی از چارچوب‌های مرجع متمایز روی M هستند به طوری که تبدیل‌های گیج بین چارچوب‌های همان فضای مماس مقادیری در گروه ساختار $\text{GL}(d) \leq G$ می‌گیرند. به طور شهودی، می‌توان در مورد مجموعه $G_p M$ چارچوب‌های $T_p M$ به عنوان «شیوه به» G فکر کرد، با این حال، بدون مبدأ متمایز.⁴

بسته چارچوب خودش یک ساختار $G = \text{GL}(d)$ با (ساختار OM) است، در حالی که بسته چارچوب‌های معتمد نرمال G است. $G = O(d)$ است. CNN ‌های اقلیدسی مرسوم بر میدان چارچوب متقارف روی \mathbb{R}^d نشان داده شده در شکل ۷ آنکه می‌کنند، که یک ساختار G برای گروه بدیهی $G = \{e\}$ است. شکل ۷ ساختارهای G را برای منیفولدها و گروه‌های ساختار بیشتر تجسم می‌کند. مروری بر گروه‌های ساختار رابط در جدول ۱ در بخش ۳.۱.۳ یافته می‌شود.

ما در ادامه همواره فرض می‌کنیم که منیفولدهای ریمانی علاوه بر ساختار متریک خود به ساختار G اضافی مجهز هستند.⁵ انتخاب خاص ساختار G خواص شبکه عصبی را تعیین می‌کند؛ ما در بخش ۳.۲ در زیر در مورد این انتخاب نظر خواهیم داد.

۲.۱.۲ شبکه‌های مستقل از مختصات GM

استقلال از مختصات
(کوواریانس) GM

هدف ما طراحی شبکه‌های عصبی روی منیفولدهای ریمانی با ساختار اضافی G است. اگر گروه ساختار G غیر بدیهی باشد، هیچ انتخاب متقارف برای چارچوب‌های مرجع (گیج) وجود ندارد طبق تعریف. با این حال، برای انجام محاسبات عددی، برخی گیج، که نسبت به آن کرنل‌ها و ویژگی‌ها بیان می‌شوند، باید انتخاب شود. از آنجا که این انتخاب ذاتاً اختیاری است، ما تقاضا می‌کنیم که استنتاج شبکه‌ها در نهایت به آن وابسته نباشد، یعنی ما نیاز داریم:

شبکه‌های عصبی روی منیفولد ریمانی با ساختار G به نام GM
باید بر پایه عملیات «مستقل از مختصات GM » باشند.

«استقلال از مختصات GM » به این معنی است که تمام کمیت‌های هندسی و توابع بین آنها باید به طور مساوی در هر گیجی قابل بیان باشند، یعنی نسبت به هر انتخابی از چارچوب‌های مرجع ساختار G . مورد خاص ضرایب بردار مماس و تبدیل‌های گیج بین آنها در شکل ۱۴ نمایش داده شده است. شکل ۲.۱.۳ نمونه‌ای از نگاشت خطی و نمایش مستقل از مختصات آن در قالب ماتریس‌های سبک است که بجزئیات مختلف را نشان می‌دهد.

توجه کنید که نیاز به استقلال از مختصات GM کاملاً انعطاف‌پذیر است: برای $G = FM$ و بنابراین حداکثر سطح استقلال از مختصات. در انتهای دیگر طیف گروه‌های ساختار، $G = \{e\}$ یک میدان چارچوب ثابت است و استقلال از مختصات GM به واستگی صریح مختصات تقلیل می‌یابد. آزادی انتخاب ساختارهای G اختیاری امکان کنترل دقیق استقلال از مختصات شبکه‌ها را فراهم می‌کند، که در عمل به طور گسترده متفاوت است؛ برای مثال جدول ۶ در بخش سوم را ببینید.

میدان‌های بردار ویژگی مرتبط با G

شبکه‌های میدان‌های بردار ویژگی روی منیفولد را پردازش می‌کنند. بردارهای ویژگی کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات هستند مانند مثلاً بردارهای مماس. نسبت به چارچوب انتخابی (گیج) ممکن است توسط بردارهای ضریب عددی نمایش داده شوند. تقاضا برای استقلال از مختصات GM نیاز دارد که ضرایب عددی در گیج‌های مختلف همان محتوای اطلاعاتی را کدگذاری کنند. این امر به طور طبیعی با مرتبط کردن ویژگی‌ها با نمایش گروهی ρ از گروه ساختار G که رفتار تبدیل ضرایب آنها را تحت تبدیل‌های گیج تعیین می‌کند، حاصل می‌شود:

میدان‌های بردار ویژگی با نمایش G به نام ρ مرتبط هستند که
قانون تبدیل ضرایب عددی آنها را هنگام تبدیل بین چارچوب‌های مرجع مشخص می‌کند.
از لحاظ فنی، میدان‌های ویژگی بخش‌هایی از بسته‌های بردار ویژگی مرتبط با G هستند.

نمونه‌های معمول شامل میدان‌های اسکالر، میدان‌های بردار مماس یا سایر میدان‌های تانسوری هستند، اما هر قانون تبدیلی قابل قبول است و می‌تواند توسط کاربر انتخاب شود. سایر انتخاب‌های رابط برای ρ در زمینه یادگیری عمیق شامل نمایش‌های غیرقابل تقلیل یا منظم است؛ نمونه‌های بیشتر در جدول ۶ در بخش سوم فهرست شده‌اند.

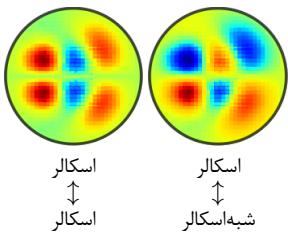
ما می‌خواهیم تأکید کنیم که نیاز به استقلال از مختصات GM صرفاً یک شرط سازگاری است که تضمین می‌کند ناظران مختلف (چارچوب‌ها) روی همان مشاهده هندسی مستقل از مختصات توافق دارند. این امر مجموعه توابع قابل قبول را به هیچ وجه محدود نمی‌کند، بلکه تنها نحوه ارتباط بین‌های آنها نسبت به چارچوب‌های مختلف را مشخص می‌کند. به طور خاص، شبکه‌های عصبی مستقل از مختصات GM به طور کلی مجبور به همتغیر گیج بودن نیستند. نیاز به همتغیر گیج زمانی پیروی می‌کند که همزمان تقاضای اشتراک وزن و استقلال از مختصات شود، یعنی کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM بر کرنل‌های همتغیر گیج تکیه می‌کنند.

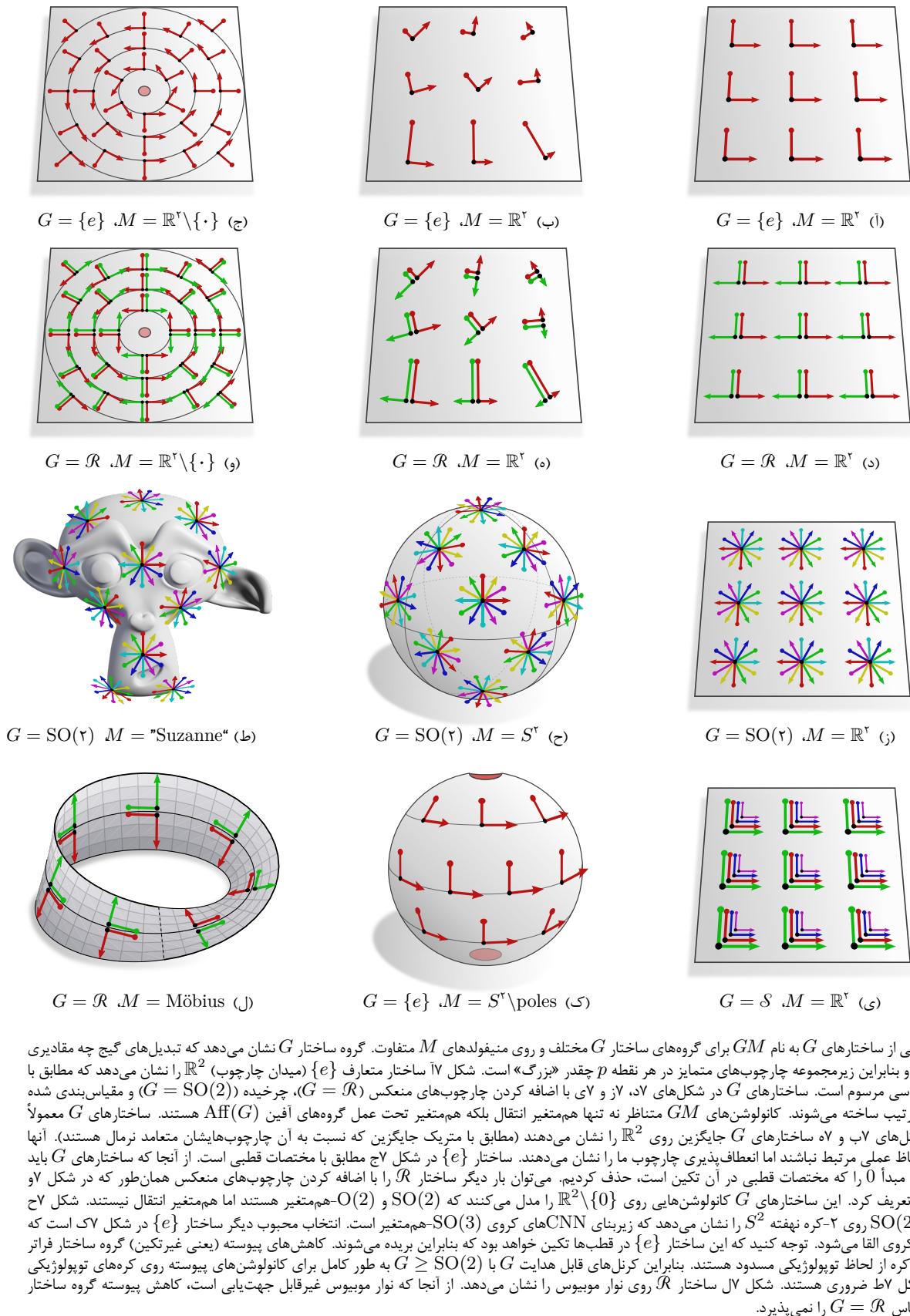
⁴ یک فضای همگن اصلی از G - G -تورسسور است.

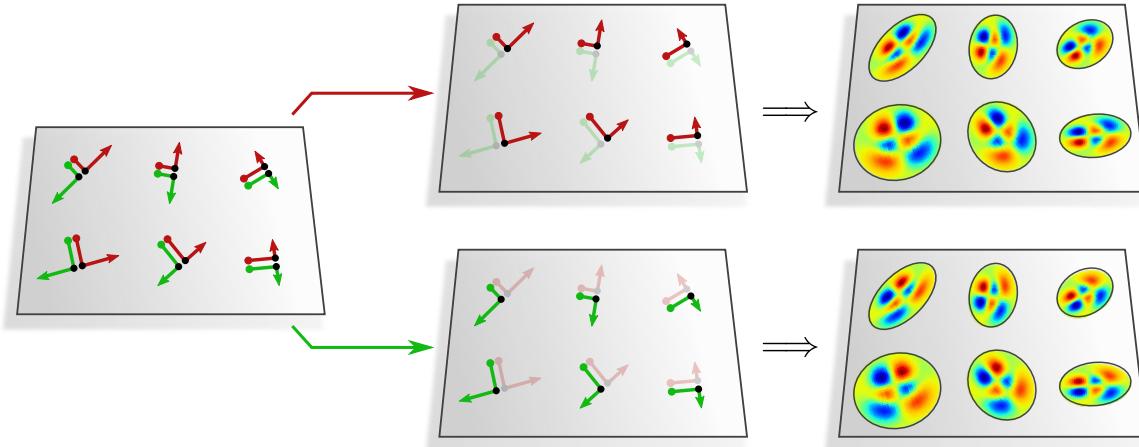
⁵ ساختار G باید با ساختار متریک سازگار باشد به این معنی که چارچوب‌های متمایز در GM زیرمجموعه‌ای از چارچوب‌های متمایز در OM هستند و قتنی $O(d) < G$ است. ساختار $G = O(d)$ به طور خاص برای GM با ساختار متریک OM منطبق است و هیچ اطلاعات هندسی اضافی اضافه نمی‌کند.

شکل ۶. کرنل‌های G -هدایت‌پذیر نمونه برای گروه $G = \mathbb{R}$ از بازتاب‌ها در امتداد محور اول قاب (تبديلات تقارن). قیدهای همواریانس کرنل‌ها به انواع میدان ρ_{in} و ρ_{out} و ورودی و خروجی کانولوشن بستگی دارد. میدان‌های اسکالار و شبه‌اسکالار به ترتیب توسط نمایش بدیهی و نمایش تغییر علامت \mathbb{R} توصیف می‌شوند. کرنل‌های هدایت‌پذیر که بین چنین میدان‌هایی نگاشت می‌کنند، محدود به متقارن یا نامتقارن بودن هستند.

توجه کنید که کرنل‌های هدایت‌پذیر عموماً مقدار اسکالار ندارند بلکه مقدار ماتریس $C_{\text{out}} \times C_{\text{in}}$ دارند، که ابعاد بردارهای ویژگی خروجی و ورودی هستند. استخراج و مثال‌های بیشتر برای سایر انواع میدان (با ابعاد بالاتر) $G = \mathbb{R}^n$ در بخش ۳.۵ و جدول ۳ یافت می‌شود. کرنل‌های هدایت‌پذیر برای $G = \text{SO}(2)$ یا $G = \text{SO}(3)$ از هارمونیک‌های دایره‌ای [۱۹۰، ۲۰۰، ۱۹۲] یا کروی [۱۹۱، ۱۸۱] یا [۱۰۲، ۱۰۴] ساخته می‌شوند. اگر G فشرده باشد، کرنل‌های G -هدایت‌پذیر توسط تعمیم قضیه ویگنر-اکارت [۱۰۲] توصیف می‌شوند.







شکل ۸ اشتراک یک کرnel قابل هدایت \mathcal{R} بر اساس ساختار \mathcal{R} داده شده به نام \mathcal{RM} روی منیفولد $M = \mathbb{R}^2$. دو گیج پیوسته (قمز و سیر) وجود دارد که کرnel می‌تواند در امتداد آنها به اشتراک گذاشته شود. به دلیل همتغیری \mathcal{R} آن، انتخاب خاص در نهایت بی‌ربط است. کرnel تجسم شده نامترانه است و بنابراین بین میدان‌های اسکالار و شبیه‌اسکالار نگاشته می‌کند. به راحتی می‌توان تأیید کرد که واقعاً چنین است: ضرایب عددی یک میدان ورودی اسکالار تحت تبدیل‌های گیج ثابت باقی می‌مانند اما کرnel‌ها منعکس می‌شوند. از آنجا که آنها نامترانه هستند، پاسخ‌هایشان منفی خواهد شد - که قانون تبدیل ضرایب عددی یک میدان شبیه‌اسکالار است. استدلال مشابهی برای نگاشتها از شبیه‌اسکالارها به اسکالارها برقرار است. چگونه می‌توانستیم از اسکالارها به اسکالارها نگاشت کنیم؟ در این مورد هم ورودی و هم خروجی باید ثابت گیج باشند، که نیاز دارد کرnel به جای نامترانه، مترانه باشد. کرnel‌های مترانه علاوه بر این بین میدان‌های شبیه‌اسکالار نگاشته می‌کنند.

۳.۱.۲ کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM

ما به سؤال اولیه خود بازمی‌گردیم در مورد اینکه چگونه یک کرnel کانولوشن را به اشتراک بگذاریم با توجه به اینکه تراز آن ذاتاً مهم است وقتی گروه ساختار G غیر بدینهی است. از آنجا که عملیات کانولوشن باشد، روش اشتراک وزن زیربنایی نیز باید مستقل از انتخاب‌های اختیاری چارچوب‌های مرجع باشد. تراز کرnel در امتداد چارچوب‌های مختلف ساختار G در نقطه‌ای p بنابراین همواره باید نتایج معادلی به دست دهد. ما نشان می‌دهیم که استقلال از مختصات GM فرآیند اشتراک وزن محدودیت همتغیری گیج (قابلیت هدایت G) را بر کرnel‌های کانولوشن تحمیل می‌کند:

$$\left. \begin{array}{c} \text{قابلیت هدایت } G \text{ (هم‌متغیری گیج)} \\ \text{استقلال از مختصات } GM \\ \text{اشتراک وزن} \end{array} \right\} \longleftrightarrow G$$

شکل ۶ و جدول ۳ نمونه‌هایی از کرnel‌های قابل هدایت انکاس را نشان می‌دهند. محدودیت همتغیری (قابلیت هدایت) نوعی از تقارن G را اعمال می‌کند که تضمین می‌کند پاسخ‌های کرnel به طور قابل پیش‌بینی تحت تبدیل‌های گیج تبدیل شوند. یک نمایش بصری از اینکه چگونه کرnel‌های قابل هدایت G ابهام چارچوب‌های مرجع را حل می‌کنند در شکل ۸ ارائه شده است.

کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM (یا به اختصار کانولوشن‌های GM) به عنوان کانولوشن‌هایی با کرnel‌های قابل هدایت G تعریف می‌شوند:

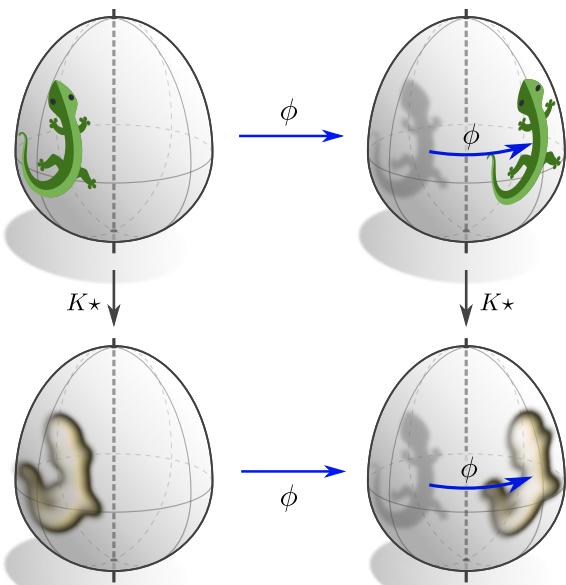
یک کانولوشن GM با کرnel قابل هدایت G به نام K ویژگی‌ها را با اعمال این کرnel در هر نقطه $p \in M$ نسبت به انتخاب اختیاری چارچوب مرجع در $G_p M$ پردازش می‌کند.

اختیاری بودن گیج انتخابی بین ترتیب توسط قابلیت هدایت G کرnel تضمین می‌شود. در حالی که در مختصات محلی ساخته می‌شوند، کانولوشن‌های GM مطابق با عملیات کانولوشن مستقل از مختصات به خوبی تعریف شده روی منیفولد هستند.

نه تنها کرnel‌های کانولوشن بلکه هر تابع قالب مشترک نیاز به همتغیر گیج بودن دارد تا استقلال از مختصات GM را حفظ کند. بخش ۱.۴ محدودیت‌های همتغیری روی بایاس‌های مشترک، کرnel‌های کانولوشن 1×1 و غیرخطی‌ها را مشتق می‌کند. توجه کنید که محدودیت‌های همتغیری روی توابع قالب مشترک می‌توانند به عنوان شکلی از اشتراک وزن روی چارچوب‌های مرجع مرتبط با G در نظر گرفته شوند - ابهام اشتراک وزن روی منیفولد M بنابراین با گسترش اشتراک وزن کل ساختار G به نام GM حل می‌شود.

۲.۲ همتغیری تحت تقارن‌های سراسری منیفولد

عملیات کانولوشن اغلب طراحی می‌شوند تا نسبت به تقارن‌های فضای زیربنایی همتغیر باشند [۹۶، ۲۷]. تقارن‌های یک منیفولد ریمانی گروه ایزومتری آن به نام $\text{Isom}(M)$ را تشکیل می‌دهند، که گروه تمام نگاشته‌های حافظ فاصله $M \rightarrow M : \phi$ است. ایزومتری‌ها به طور طبیعی



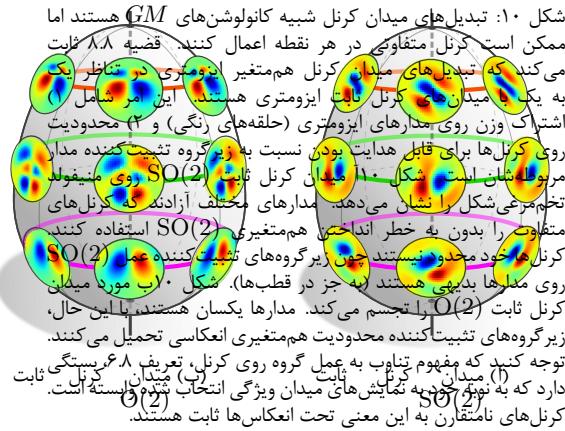
شکل ۹: تجسم یک کانولوشن GM هممتغیر ایزومتری. یک ایزومتری ϕ از طریق انتقال به جلو روی میدان‌های ویژگی عمل می‌کند. کانولوشن GM به نام K^* با کرنل قابل هدایت G به نام K هممتغیر نسبت به این ایزومتری گفته می‌شود وقتی پاسخ کانولوشن یک ورودی تبدیل شده (\downarrow, \rightarrow) با انتقال به جلو پاسخ ورودی تبدیل نشده (\rightarrow, \downarrow) موافق باشد.

کانولوشن‌های GM نسبت به (زیر)گروه Isom_G ایزومتری‌هایی که تقارن‌های ساختار G هستند، هممتغیر هستند. هممتغیری چرخش آریوتال تجسم شده بنابراین نیاز به ساختار G دارد که تحت چرخش‌ها حول محور قطبی ثابت باشد - این شرط برای مثال توسط مشابه ساختارهای G کروی در شکل‌های ۷ و ۷ک رکو روی تعمیر مبلغ برآورده می‌شود. گروه ایزومتری منيفولد تخم مرغی شکل نه تنها شامل چرخش‌ها بلکه انعکاس‌ها نیز هست. برای دستیابی به هممتغیر انعکاس، ساختارهای G علاوه بر این باید شامل چارچوب‌های منعکس باشند و کانولوشن GM باید کرنل‌های قابل هدایت انعکاس اعمال کند.

(مارمولکها تحت مجوز Creative Commons Attribution 4.0 International اقتباس شده با تشکر از Twitter)

روی کمیت‌های هندسی مانند بردارهای ویژگی با «حرکت دادن آنها همراه با» عمل ایزومتری (انتقال به جلو) عمل می‌کنند؛ شکل ۱۲ (وسط) را ببینید. علی‌رغم اینکه تنها برای هممتغیر بودن تحت تبدیل‌های گیج محلی طراحی شده‌اند، کانولوشن‌های GM نسبت به عمل زیرگروه‌های ایزومتری خاص $\text{Isom}(M) \leq \text{Isom}_G$ روی میدان‌های ویژگی هممتغیر هستند. این زیرگروه‌ها Isom_G شامل آن ایزومتری‌هایی هستند که تقارن‌های ساختار G محسوب می‌شوند. طراحی کانولوشن‌های GM هممتغیر ایزومتری بنابراین با طراحی ساختارهای G ثابت مرتبط است. شکل ۹ ایده یک کانولوشن GM هممتغیر ایزومتری را به طور گرافیکی تجسم می‌کند.

ما در ادامه به طور مختصر محدودیت‌های تقارن که نیاز به هممتغیری ایزومتری بر میدان‌های کرنل، یعنی بر اتصال عصبی، تحمیل می‌کند را بحث خواهیم کرد. این شرایط روی میدان‌های کرنل مطابق با محدودیت‌های تقارن روی ساختارهای G است که کرنل‌های کانولوشن در امتداد آنها به اشتراک گذاشته می‌شوند. در نهایت در مورد اینکه چرا کانولوشن‌های GM تنها هممتغیر ایزومتری هستند و به طور کلی نسبت به دیفنتوفوریسم‌های عمومی‌تر هممتغیر نیستند، نظر خواهیم داد.



۱.۲.۲ میدان‌های کرنل ثابت ایزومتری

خواص هم‌متغیری یک شبکه عصبی در نهایت به تقارن‌ها در اتصال عصبی آن بستگی دارد [۱۴۶]. برای شبکه‌های کانولوشن این امر معادل محدودیت‌های تقارن روی میدان کرنل است. برای مطالعه این محدودیت‌ها در کلیت کامل، ما نیاز نداریم که میدان‌های کرنل کانولوشن باشند، یعنی توسط یک کرنل مشترک واحد تعیین شوند، بلکه میدان‌های کرنل عمومی را فرض می‌کنیم که ممکن است کرنل متغیری در هر نقطه از فضای اعمال کنند. ما لایه‌های شبکه متناظر را به عنوان «تبدیل‌های میدان کرنل» نشان می‌دهیم:

«تبدیل‌های میدان کرنل» شبیه کانولوشن‌های GM هستند اما ممکن است کرنل متغیری در هر نقطه اعمال کنند.
بنابراین آنها توسط میدان‌های کرنل عمومی پارامتری می‌شوند.

کانولوشن‌های GM تبدیل‌های میدان کرنل خاصی با میدان‌های کرنل کانولوشن GM هستند. نتایج کلی برای تبدیل‌های میدان کرنل هم‌متغیر ایزومتری بنابراین فوراً به کانولوشن‌های GM تعمیم می‌یابند.

قضیه ۸.۸ ثابت می‌کند که تناوب یک میدان کرنل تحت عمل ایزومتری و هم‌متغیری تبدیل میدان کرنل متناظر یکدیگر را نتیجه می‌دهند:
میدان کرنل ثابت ایزومتری \iff تبدیل میدان کرنل هم‌متغیر ایزومتری

میدان‌های کرنل ثابت به دو روش کیفیتاً متفاوت محدود می‌شوند: اولاً، کرنل‌ها باید روی مدارهای ایزومتری به اشتراک گذاشته شوند. ثانیاً، کرنل‌های مشترک خود توسط زیرگروه ثبیت‌کننده مدار متناظر محدود می‌شوند. توجه کنید که میدان کرنل کامل و متناظر می‌تواند از یک کرنل نماینده واحد برای هر مدار بازیابی شود [۷] قضیه‌های ۱۲.۸ و ۱۳.۸ این گزاره را با اثبات یکریختی‌هایی بین میدان‌های کرنل ثابت روی منیفولد و میدان‌های کرنل روی فضاهای خارج قسمت تحت عمل ایزومتری رسمی می‌کنند.

شکل ۱۰ و ۱۱ این نتایج را برای منیفولد تخم‌مرغی شکل که ایزومتری‌هاییش چرخش‌ها و انکاس‌ها حول محور عمودی هستند، نمونه می‌زنند. یک تبدیل میدان کرنل عمومی می‌تواند هر میدان کرنلی اعمال کند. اگر تنها هم‌متغیری ایزومتری (2) $SO(2)$ نیاز باشد (بدون انکاس‌ها)، مدارها حلقه‌هایی حول تخم‌مرغ هستند و زیرگروه ثبیت‌کننده عمل $SO(2)$ روی این مدارها بدینه است؛ شکل ۱۰ را بینید.^۷ میدان کرنل ثابت ایزومتری بنابراین کرنل‌های بدون محدودیت را روی این مدارها به اشتراک می‌گذارد. شکل ۱۱ اب میدان کرنل ثابت $SO(2)$ را نشان می‌دهد. مدارها، و بنابراین الگوی اشتراک وزن فضایی، در اینجا همانند مورد قبلی هستند. با این حال، زیرگروه ثبیت‌کننده عمل $SO(2)$ روی مدارها گروه انکاس است. کرنل‌ها بنابراین محدود به قابل هدایت انکاس بودن هستند، با محدودیت دقیق بسته به انواع ρ_{in} و ρ_{out} میدان ویژگی ورودی و خروجی.

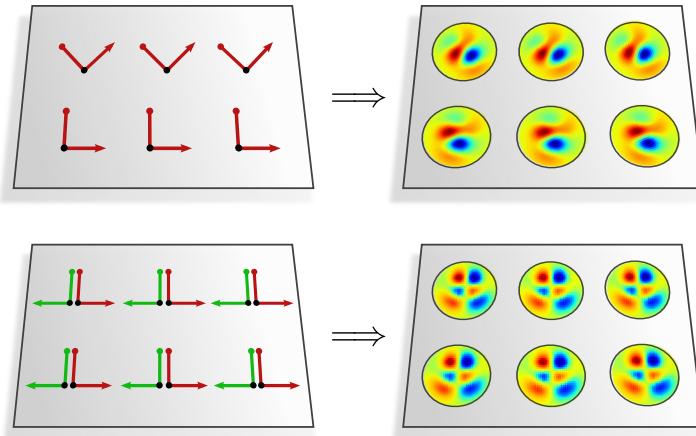
مورد جالب خاص منیفولد‌هایی است که فضاهای همگن گروه ایزومتری‌شان هستند. در این مورد تنها یک مدار واحد وجود دارد، به طوری که میدان کرنل ثابت توسط یک کرنل مشترک (کانولوشن) واحد تعیین می‌شود. قضیه ۱۴.۸ ثابت می‌کند:

تبدیل‌های میدان کرنل هم‌متغیر ایزومتری روی فضاهای همگن لزوماً کانولوشن هستند.

کرنل‌ها بار دیگر نیاز دارند که نسبت به زیرگروه ثبیت‌کننده عمل ایزومتری قابل هدایت باشند. این امر نتایج کوندور و ترودی [۹۶] و همکاران [۳۱] و بکرز [۶] را بازیابی می‌کند که CNN‌های هم‌متغیر گروه روی فضاهای همگن را بررسی کردند؛ پیوست را برای مقایسه عمیق بینید.

^۷ تبدیل‌های میدان کرنل در ادبیات بینایی کامپیوتر گاهی «شبکه‌های متصل محلی» نامیده می‌شوند.

^۸ ما برای اختصار قطب‌ها را نادیده می‌گیریم، جایی که زیرگروه ثبیت‌کننده در شکل ۱۰ آبرابر (2) $SO(2)$ و در شکل ۱۱ اب برابر $O(2)$ است.



شکل ۱۱: میدان‌های کرنل کانولوشن GM با اشتراک گذاری برخی کرنل قابل هدایت G در امتداد GM چارچوب‌های (اختیاری) ساختار G به نام $Isom_{GM}$ می‌شوند. تقارن‌های میدان‌های کرنل بنابراین با تقارن‌های ساختار G , یعنی با $Isom_G$, موفق هستند. ساختار $\{G\}$ که در بالا تجسم شده بنابراین مطابق با کانولوشن GM است که نسبت به انتقال‌ها در جهت افقی هم‌متغیر است اما در جهت عمودی نیست. از آنجا که ساختار G که در پایین تجسم شده تحت انتقال‌های اختیاری و انکاس‌های افقی ثابت است، کانولوشن GM هم‌متغیر انتقال و انکاس است.

۲.۲.۲ هم‌متغیری ایزومتری کانولوشن‌های GM

ساختارهای G ثابت ایزومتری: کانولوشن‌های GM تبدیل‌های میدان کرنل خاصی هستند که بر میدان‌های کرنل کانولوشن GM تکیه می‌کنند. بنابراین آنها هم‌متغیر ایزومتری هستند اگر میدان کرنل کانولوشن GM تحت عمل ایزومتری ثابت باشد. به یاد بیاورید که میدان‌های کرنل کانولوشن GM با اشتراک گذاری برخی کرنل قابل هدایت G در امتداد چارچوب‌های (اختیاری) ساختار G تعریف می‌شوند. تقارن‌های آنها (ایزومتری‌ها) بنابراین با تقارن‌های ساختار G منطبق هستند.

ما $Isom_{GM} \leq Isom(M)$ را به عنوان زیرگروه آن ایزومتری‌هایی تعریف می‌کیم که تقارن‌های ساختار G به نام GM هستند (خودریختی‌های بسته اصلی).

از این رو نتیجه می‌شود که

میدان‌های کرنل کانولوشن GM ثابت $Isom_{GM}$ هستند.

در نتیجه، که در قضیه ۹.۸ به طور دقیق اثبات شده، می‌باییم:

کانولوشن‌های GM هم‌متغیر $Isom_{GM}$ هستند.

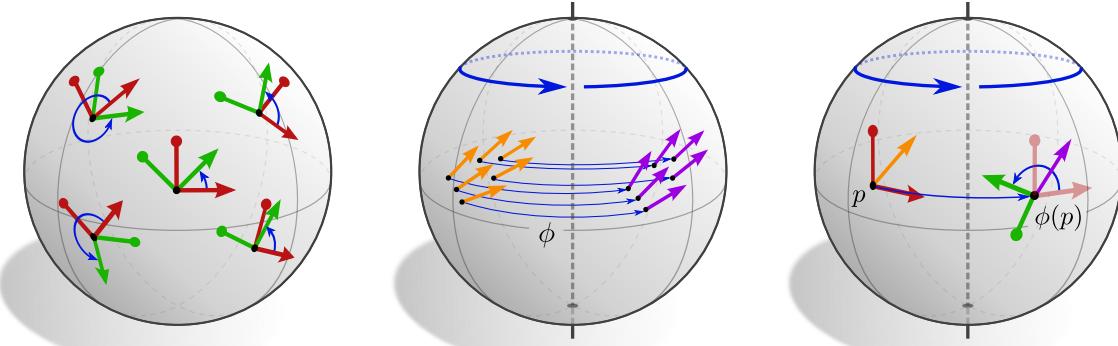
طرایی کانولوشن‌های GM هم‌متغیر ایزومتری بنابراین به طرایی ساختارهای G ثابت ایزومتری GM می‌باشد. شکل ۱۱ دو نمونه از ساختارهای G به نام GM و میدان‌های کرنل کانولوشن GM متناظر را نشان می‌دهد که همان تقارن‌ها را به اشتراک گذارند. برای نمونه‌های بیشتر به ساختارهای G در شکل ۷ مراجعه می‌کنیم. توجه کنید که $Isom_{GM}$ برای $G = O(d)$ (یا ابرگروه‌های آن) شامل تمام ایزومتری‌های ممکن است، که نتیجه می‌دهد کانولوشن‌های GM متناظر کاملاً $Isom(M)$ -هم‌متغیر هستند. گزاره مشابهی برای $G = SO(d)$ و ایزومتری‌های حافظ جهت‌یابی برقرار است.

تبدیل‌های گیج القا شده توسط ایزومتری: استدلال بر حسب میدان‌های کرنل ثابت و ساختارهای G ثابت بر هیچ انتخاب گیجی تکیه نمی‌کرد بلکه در تنظیم کاملاً هندسی و مستقل از مختصات فرمول‌بندی شده بود. نقطه نظر جایگزین هم‌متغیری ایزومتری کانولوشن‌های GM را در مختصات توضیح می‌دهد، جایی که ایزومتری‌ها از طریق تبدیل‌های گیج القا شده عمل می‌کنند. این تبدیل‌های گیج توسط قابلیت هدایت G کرنل توضیح داده می‌شوند، که پیوندی بین مفاهیم هم‌متغیری ایزومتری فراهم می‌کند. ما در ادامه به طور مختص این نقطه نظر جایگزین را شرح می‌دهیم.

وقتی نسبت به چارچوب‌های مرجع محلی بیان می‌شوند، ایزومتری‌ها می‌توانند به عنوان عمل از طریق تبدیل‌های گیج القا شده روی ضرایب بردار ویژگی در نظر گرفته شوند. شکل ۱۲ (راست) این مفهوم را تجسم می‌کند: فرض کنید که چارچوب‌های مرجع را در نقطه‌ای p و در تصویرش (p) $\phi(p)$ تحت عمل ایزومتری ϕ انتخاب کرده‌ایم. ایزومتری یک ویژگی را از p به $(p)\phi$ هل می‌دهد. از آنجا که هندسه‌های ریمانی حول p و $(p)\phi$ غیرقابل تشخیص هستند، تنها چیزی که از نقطه نظر بردار ویژگی تغییر کرده نسبت به کدام چارچوب مرجع بیان می‌شود. این تغییر چارچوب‌ها تبدیل گیج القا شده توسط ایزومتری است.

به یاد بیاورید که کانولوشن‌های GM همان کرنل قابل هدایت G را در هر نقطه از منیفولد اعمال می‌کنند. هم‌متغیری G کرنل هر تبدیل گیج مقدار G (القا شده) را در نظر می‌گیرد، به طوری که:

اگر ایزومتری تبدیل‌های گیجی القا کند که مقادیری در گروه ساختار G بگیرند،
انگاه هر کانولوشن GM نسبت به این ایزومتری هم‌متغیر است.



شکل ۱۲: تبدیلهای گیج، ایزومتریها و رابطه متقابل آنها. چپ: گیج انتخاب چارچوب‌های مرجع محلی (میدان چارچوب) است که نسبت به آن کمیت‌های هندسی ممکن است بیان شوند. اگر گروه ساختار منیفولد G غیر بدینه باشد، انتخاب گیج یکتا نیست بلکه انتخاب‌های معادل زیادی وجود دارد. انتخاب‌های مختلف گیج‌ها (قرمز یا سبز) توسط تبدیلهای گیج (ای) مرتبط هستند که طبق تعریف مقادیری در گروه ساختار G می‌گیرند. چارچوب‌های معتمد نرمال راست‌گرد تجسم شده‌اند که برای آنها تبدیلهای گیج مقدار $G = \text{SO}(2)$ دارند. وسط: ایزومتری‌ها تقارن‌های مینیفولدهای ریمانی هستند. آنها به عنوان توابع حافظ فاصله $M \rightarrow M$: ϕ تعریف می‌شوند که مینیفولد را به خودش نگاشت می‌کنند. ایزومتری‌ها از طریق انتقال به جلو روی بردارهای مماس، چارچوب‌های مرجع و بردارهای ویژگی عمل می‌کنند. در حالی که تبدیلهای گیج تبدیلهای مختصات غیرفعال هستند، ایزومتری‌ها به طور فعل نقاط و کمیت‌های هندسی را روی مینیفولد حرکت می‌دهند. راست: وقتی نسبت به چارچوب‌های مرجع محلی بیان می‌شوند، عمل ایزومتری‌ها می‌تواند به عنوان القای تبدیلهای گیج در نظر گرفته شود. فرض کنید چارچوب‌ها در p (قرمز) و $\phi(p)$ (سبز) داده شده باشند. یک کمیت هندسی در p (نارنجی) توسط ایزومتری به $\phi(p)$ (بنفش) هل داده می‌شود. از آنجا که ϕ ایزومتری است، هندسه ریمانی حول p و ϕ غیرقابل تشخیص است، با این حال، انتقال به جلو کمیت هندسی نسبت به چارچوب مرجع جدیدی (سبز) به جای قرمز بیان می‌شود. بنابراین می‌توان ایزومتری‌ها را به عنوان القای تبدیلهای گیج در نظر گرفت. اگر این تبدیلهای گیج القای شده مقادیری در گروه ساختار G بگیرند، توسط قابلیت هدایت (هم‌متغیری گیج) کرنل‌های کانولوشن توضیح داده می‌شوند. کانولوشن‌های GM آنگاه هم‌متغیر ایزومتری هستند. این شرط معماره برای $G \geq O(d)$ برآورده می‌شود.

تبدیلهای گیج القا شده برای ایزومتری‌های عمومی ممکن است مقادیری در گروه ساختار انتخابی G نگیرند. برای مثال، ساختارهای G در شکل‌های ۷ و ۷د گروه‌های ساختار $M = \{e\}$ و $G = \text{Flip}$ هستند، اما چرخش‌های $\text{Isom}_{GM} = \text{SO}(2)$ تبدیلهای گیج مقدار G در $O(2)$ القا می‌کنند. با این حال، اگر ایزومتری تقارن ساختار G باشد، یعنی عنصری از GM ، چارچوب‌ها در GM را به چارچوب‌ها در GM نگاشت می‌کنند. از آنجا که چارچوب‌ها در GM توسط تبدیلهای گیج مقدار G مرتبط هستند، نتیجه می‌شود که:

ایزومتری‌ها در Isom_{GM} تبدیلهای گیجی القا می‌کنند که مقادیری در گروه ساختار G می‌گیرند.

این نتیجه می‌دهد که کانولوشن‌های GM هم‌متغیر Isom_{GM} هستند، همان‌طور که قبلاً در تنظیم مستقل از مختصات یافت شد. در حالی که این نقطه نظر جایگزین از لحاظ هندسی کمتر شهودی است، نقش قابلیت هدایت G کرنل‌ها در هم‌متغیر ایزومتری شبکه‌ها را تأکید می‌کند.

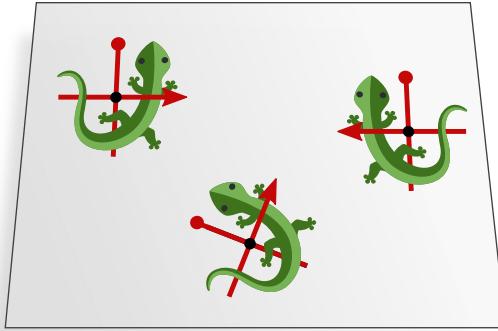
۳.۲.۲ دیفئومورفیسم‌ها، ایزومتری‌ها و تبدیلهای آفین:

اکثر استدلال‌ها در بندهای قبلی نه تنها برای ایزومتری‌ها، بلکه برای دیفئومورفیسم‌ها نیز برقرار خواهد بود. این سؤال را مطرح می‌کند که آیا کانولوشن‌های GM نسبت به گروه‌های دیفئومورفیسم عمومی‌تر هم‌متغیر هستند. در برخی تنظیمات واقعاً چنین است، با این حال، کانولوشن‌های GM به طور کلی (علاوه بر این) بر ساختار متریک منیفولدها تکیه می‌کنند که تنها توسط ایزومتری‌ها حفظ می‌شود.

در بالا کانولوشن‌های GM را به عنوان «عمل کرنل قابل هدایت G » نسبت به چارچوب‌های ساختار G توصیف کردیم. دقیق‌تر، کرنل در مختصات نرمال ژئوپزیکی اعمال می‌شود. این بدان معنی است که میدان ویژگی در هر نقطه $p \in M$ از طریق نگاشت نمایی ریمانی $\exp_p T_p M$ بازگشیده می‌شود، جایی که با کرنل تطبیق داده می‌شود؛ شکل ۲۴ را ببینید. در حالی که میدان کرنل خود تحت آن دیفئومورفیسم‌ها $\text{Diff}_{GM} \leq \text{Diff}(M)$ هستند ثابت خواهد بود، نگاشت نمایی صراحتاً به ساختار متریک بستگی دارد. کانولوشن‌های GM با کرنل‌های گسترده فضایی بنابراین به طور کلی تنها می‌توانند هم‌متغیر ایزومتری باشند.

هر لایه شبکه که وزن‌ها را به اشتراک می‌گذارد و بر ساختار متریک منیفولدها تکیه نمی‌تواند هم‌متغیر دیفئومورفیسم باشد. نمونه‌های مهم لایه‌های هم‌متغیر Diff_{GM} شامل عملیات نقطه‌ای مانند جمع بایاس، غیرخطی‌ها و کانولوشن $\times 1 \times 1$ است که در بخش ۱.۴ معرفی می‌شوند. باید امکان تعیین نظریه ما به معادلات دیفرانسیل جزئی عصبی روزی منیفولدهای هموار وجود داشته باشد که تعامل‌های غیرمحلی کانولوشن‌های GM را با تعامل‌های محلی بر حسب عملگرهای دیفرانسیل قابل هدایت G قابل بادگیری جایگزین کنند. توجه کنید که کانولوشن‌های GM در عمل اغلب از کرنل‌های پشتیبانی فشرده استفاده می‌کنند و بنابراین شبیه محلی [۱۸۲] هستند. هم‌متغیری Diff_{GM} چنین کانولوشن‌های GM با کرنل‌های کوچک باید تقریباً برقار باشد.

مورد خاص کانولوشن‌های GM روی فضاهای اقلیدسی است. نگاشت نمایی روی فضاهای اقلیدسی نه تنها توسط ایزومتری‌ها، بلکه توسط هر تبدیل آفین حفظ می‌شود. قضیه ۸.۹ ثابت می‌کند که کانولوشن‌های GM اقلیدسی واقعاً تحت عمل گروه‌های آفین $\text{Aff}(G)$ (معادله (۳۶۴)) هم‌متغیر



شکل ۱۳: الگوهای معمول در سیگنال‌ها معمولاً در ژست‌های هندسی متفاوت ظاهر می‌شوند. کاتولوشن‌های GM روی تمام ژست‌هایی که توسط عمل گروه ساختار انتخابی G مرتبط هستند تعیین می‌دهند. در حالی که یک CNN مرسوم روی $M = \mathbb{R}^2$ باید یاد بگیرد تمام مارمولک‌ها را به طور جداگانه تشخیص هد، یک CNN مستقل از مختصات $G = \text{SO}(2)$ برای GM بین مارمولک چپ و پایین تعیین می‌هد و برای $G = \text{Flip}$ بین مارمولک چپ و راست تعیین می‌دهد. برای $G = \text{O}(2)$ ، تعیین می‌شود که هر سه مارمولک را به عنوان همان ویژگی در ژست‌های متفاوت کدکاری کند.
 (مارمولک‌ها تحت مجوز Creative Commons Attribution 4.0 International License اقتباس شده با تشکر از Twitter)

هستند اگر ساختارهای G ثابت آفین مانند ستون اول شکل ۷ انتخاب شوند. این شامل ایزومنتری‌های $E(d)$ فضاهای اقلیدسی، اما همچنین مثلاً CNN ‌های همتغیر مقیاس است.

۳.۲ در مورد انتخاب ساختارهای G

نکتایی که تاکنون بار گذاشته شده انتخاب ساختار G است. به طور کلی، یک منیفولد ریمانی با ساختار متریک، یعنی ساختار (d, O) می‌آید. کاهش گروه ساختار به زیرگروه‌های $O(d) < G$ ممکن است توسط توپولوژی منیفولد مسدود شود - ساختارهای G هموار (با پیوسته) وجود ندارند اگر چنین باشد. به جز از این محدودیت، انتخاب ساختار G عمدتاً سوال مهندسی است که برای مثال به خواص همتغیری مطلوب بستگی دارد.

در اکثر کاربردها منطقی است که تقاضا کنیم پیش‌بینی شبکه عصبی به طور هموار روی منیفولد تغییر کند. از آنجا که کاتولوشن‌های GM کرنل‌ها را نسبت به چارچوب‌های برخی ساختار G به اشتراک می‌گذارند، پاسخ کاتولوشن تنها زمانی تضمین می‌شود که هموار باشد که ساختار G هموار باشد. این واقعیت شناخته شده است که توپولوژی منیفولد کاهش (هموار) گروه ساختارش را فراتر از سطح خاصی مسدود می‌کند. این نتیجه می‌دهد که حداقل سطحی از همتغیری گیج کاملاً ضروری است برای عملیات کاتولوشن هموار. ما در قضیه ۷.۷ ثابت می‌کنیم که کاتولوشن‌های GM ما واقعاً همواری میدان‌های ویژگی را حفظ می‌کنند.

نمونه شهودی از چنین مانع توپولوژیکی غیرقابل جهت‌یابی بودن نوار موبیوس از شکل ۷L است: کاهش گروه ساختار به گروه بدیهی $\{e\}$ مطابق با انتخاب میدان چارچوب هموار روی نوار خواهد بود. با این حال، به دلیل پیچش نوار، این کاهش لزوماً منجر به ناپیوستگی در قالب انعکاس چارچوب در نقطه‌ای خواهد شد - کاهش به $\{e\} = G$ = بنابراین از لحاظ توپولوژیکی مسدود است و کرنل‌های قابل هدایت Flip روی نوار موبیوس اجتناب‌ناپذیر هستند. نمونه دیگر ۲-کره $S^2 = \text{SO}(2)$ است که کاهش فراتر از $G = \text{SO}(2)$ را نمی‌پذیرد.

در ادبیات یادگیری عمیق غیرمعمول نیست که چنین مانع توپولوژیکی نادیده گرفته شوند و شبکه‌های ناپیوسته پیاده‌سازی شوند. نمونه‌ای CNN‌های کروی هستند که بر ساختار $\{e\}$ در شکل ۷ک تکیه می‌کنند؛ بخش ۳.۱۱ را برای بررسی دقیق چنین مدل‌هایی ببینید. توجه کنید که حذف قطب‌ها، جایی که میدان چارچوب تکین است، توپولوژی کروی را به توپولوژی استوانه‌ای تبدیل می‌کند، جایی که کاهش هموار به $G = \{e\}$ امکان‌پذیر است. بخش ۳.۱۲ کاتولوشن‌های GM ناپیوسته بیشتری را بحث می‌کند که کرنل‌های غیرقابل هدایت را نسبت به ساختارهای $\{e\}$ ثابت شده به طور اکتشافی (الگوریتمی) اعمال می‌کنند.

مهم است که در کنیم ساختارهای G متفاوت زیادی به نام GM برای گروه ساختار G و منیفولد M داده شده وجود دارند. شکل‌های ۷A و ۷B انتخاب‌های مختلف ساختارهای $\{e\}$ را نشان می‌دهند در حالی که شکل‌های ۷D و ۷E ساختارهای Flip متفاوت را نشان می‌دهند. ساختارهای $O(d)$ مختلف روی M مطابق با متریک‌های ریمانی متفاوت هستند. در حالی که گروه ساختار G قابلیت هدایت G را نتیجه می‌دهد، ساختار G تعیین می‌کند که دقیقاً این کرنل چگونه به اشتراک گذاشته شود.

در محدودیت‌های توپولوژیکی، گروه ساختار G و ساختار G ممکن است آزادانه توسط کاربر انتخاب شوند. اگر منیفولد با گروه ایزومنتری غیربدیهی $\text{Isom}(M)$ بیاید، ساختار G به نام GM اغلب طوری طراحی می‌شود که کاتولوشن GM متناظر نسبت به برخی زیرگروه‌های Isom_{GM} ایزومنتری‌ها هم‌متغیر باشد. نمونه‌ها در شکل ۷ و در سراسر بررسی ادبیات ما در بخش سوم ارائه شده‌اند. حتی اگر منیفولد نامتقارن باشد، الگوهای محلی ویژگی‌ها اغلب در چندین ژست هندسی متفاوت ظاهر می‌شوند. انتخاب گروه ساختار G ایزار قدرتمندی برای بهره‌برداری از چنین تقارن‌هایی در کار یادگیری فراهم می‌کند: کاتولوشن‌های GM الگوهای یادگرفته را به طور خودکار روی هر ژست مرتبط با G تعیین می‌دهند؛ شکل ۱۳ را ببینید. انتخاب بهینه گروه ساختار ممکن است با مقیاس طول (میدان دید) و بنابراین با عمق در شبکه متفاوت باشد [۱۹۰]. برای مثال، حتی اگرچه تصاویر طبیعی در مقیاس سراسری تراز هستند، الگوهای محلی مانند لبه‌ها و گوش‌ها معمولاً در چندین جهت ظاهر می‌شوند، به طوری که همتغیری گیج محلی همچنان مفید ثابت می‌شود.

بخش اول

مقدمه‌ای بر شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات

شبکه‌های کانولوشنی سلسله‌مراتبی از میدان‌های ویژگی را از یک سیگنال ورودی بر روی یک منیفولد استخراج می‌کنند. ویژگی‌ها از طریق کرنل‌ها محاسبه می‌شوند، که برای شناسایی الگوهای فضایی مشخص در ویژگی‌های سطح پایین‌تر بهینه شده‌اند. ما تقاضا می‌کنیم که این فرآیند استنتاج صرفاً بر اساس آرایش نسبی ویژگی‌ها باشد و مستقل از انتخاب خاص مختصات بندی باشد. بنابراین ویژگی‌ها باید کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات باشند، مشابه اسکالرها، بردارها یا تانسورها. در حالی که چنین کمیت‌هایی هندسی مستقل از مختصات وجود دارند، یک پیاده‌سازی کامپیوتربی (غیرنمادین) نیازمند آن است که آن‌ها بر حسب ضرایب عددی در برخی گیج، یعنی نسبت به برخی انتخاب از چارچوب مرجع، بیان شوند. انتخاب خاص مختصات بی‌همیت است ۱۰ این تنها یکی از چندین توصیف معادل است. چارچوب ریاضی مناسب برای تنظیم چنین درجات آزادی اضافی، نظریه‌های گیج هستند. یک نظریه گیج، برایری گیج‌های مختلف را با مرتبط کردن سازگار آن‌ها با یکدیگر از طریق تبدیل‌های گیج در نظر می‌گیرد. میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات بنابراین با یک قانون تبدیل خاص، یعنی یک عمل گروهی از گروه ساختار که توصیف می‌کند ویژگی‌ها چگونه تحت تبدیل‌های گیج تبدیل می‌شوند، مرتبط هستند. هر لایه شبکه عصبی که چنین میدان‌های ویژگی را بردازش می‌کند، ملزم به رعایت قوانین تبدیل آن‌ها برای حفظ استقلال از مختصاتان است.

هدف این بخش اول از کار ما، معرفی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات با زبانی آسان است. بنابراین، شهود هندسی و بصری‌سازی‌ها بر فرمالیسم ریاضی ترجیح داده می‌شوند. یک تبیین رسمی تراز تعاریف و نتایج ارائه شده در بخش دوم آورده شده است.

۲۲	۳	مقدمه‌ای بر شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات
۲۲	۱.۳	گیج‌ها، تبدیل‌های گیج و G -ساختارها
۳۰	۲.۳	میدان‌های بردار ویژگی مستقل از مختصات
۳۳	۳.۳	انتقال موازی بردارهای ویژگی
۳۶	۴.۳	عمل ایزومنتری‌ها و تبدیل‌های گیج القا شده
۳۸	۴	شبکه‌های مستقل از مختصات و GM -کانولوشن‌ها
۳۹	۱.۴	عملیات نقطه‌ای تناوب‌پذیر گیج
۴۳	۲.۴	تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM
۵۱	۳.۴	تناوب‌پذیری ایزومنتری
۵۴	۵	مدل اسباب‌بازی: کانولوشن‌های موبیوس هم‌متغیر انعکاس
۵۴	۱.۵	هندسه نوار موبیوس
۵۶	۲.۵	میدان‌های ویژگی مستقل از جهت‌گیری
۵۸	۳.۵	شبکه‌های کانولوشنی مستقل از جهت‌گیری
۶۱	۴.۵	پیاده‌سازی عددی و ارزیابی کانولوشن‌های موبیوس

بخش ۳ گیج‌ها و تبدیل‌های گیج را معرفی می‌کند که بر اساس آن‌ها میدان‌های بردارهای ویژگی مستقل از مختصات تعریف می‌شوند. شبکه‌های عصبی که بین چنین میدان‌های ویژگی نگاشت می‌کنند، در بخش ۴ توسعه یافته‌اند. بخش ۵ یک نمونه پیاده‌سازی از میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را در نوار موبیوس ارائه می‌دهد.

۳ مقدمه‌ای بر شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات

شبکه‌های کانولوشنی سلسله‌مراتبی از میدان‌های ویژگی را از یک سیگنال ورودی بر روی یک منیفولد استخراج می‌کنند. ویژگی‌ها از طریق کرنل‌ها محاسبه می‌شوند، که برای شناسایی الگوهای فضایی مشخص در ویژگی‌های سطح پایین‌تر بهینه شده‌اند. ما تقاضاً می‌کنیم که این فرآیند استنتاج صرفاً بر اساس آرایش نسبی ویژگی‌ها باشد و مستقل از انتخاب خاص مختصات بندی باشد. بنابراین ویژگی‌ها باید کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات باشند، مشابه اسکالارها، بردارها یا تانسورها. در حالی که چنین کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات وجود دارند، یک پیاده‌سازی کامپیوتربی (غیرنمادین) نیازمند آن است که آن‌ها بر حسب ضرایب عددی در برخی گیج، یعنی نسبت به برخی انتخاب از چارچوب مرجع، بیان شوند. انتخاب خاص مختصات بی‌اهمیت است \square این تنها یکی از چندین توصیف معادل است. چارچوب ریاضی مناسب برای تنظیم چنین درجات آزادی اضافی، نظریه‌های گیج هستند. یک نظریه گیج، برای گیج‌های مختلف را با مرتبط کردن سازگار آن‌ها با یکدیگر از طریق تبدیل‌های گیج در نظر می‌گیرد. بنابراین میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات با یک قانون تبدیل خاص، یعنی یک عمل گروهی از گروه ساختار که توصیف می‌کند ویژگی‌ها چگونه تحت تبدیل‌های گیج تبدیل می‌شوند، مرتبط هستند. هر لایه شبکه عصبی که چنین میدان‌های ویژگی را پردازش می‌کند، ملزم به رعایت قوانین تبدیل آن‌ها برای حفظ استقلال از مختصات‌شان است. هدف این برای اول از کار مام، معرفی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات با زبانی آسان است. بنابراین، شهود هندسی و بصری‌سازی‌ها بر فرمالیسم ریاضی ترجیح داده می‌شوند. یک تبیین رسمی‌تر از تعاریف و نتایج ارائه شده در بخش دوم آورده شده است.

۱.۳ گیج‌ها، تبدیل‌های گیج و G -ساختارها	۲۲
۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی مستقل از مختصات	۳۰
۳.۳ انتقال موازی بردارهای ویژگی	۳۳
۴.۳ عمل ایزومنتری‌ها و تبدیل‌های گیج القا شده	۳۶

بخش ۳ گیج‌ها و تبدیل‌های گیج را معرفی می‌کند که بر اساس آن‌ها میدان‌های بردارهای ویژگی مستقل از مختصات تعریف می‌شوند. شبکه‌های عصبی که بین چنین میدان‌های ویژگی نگاشت می‌کنند، در بخش ۴ توسعه یافته‌اند. بخش ۵ یک نمونه پیاده‌سازی از میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را در نوار موبیوس ارائه می‌دهد.

۱.۳ گیج‌ها، تبدیل‌های گیج و G -ساختارها

۱.۱.۳ فضاهای مماس و چارچوب‌های مرجع

یک منیفولد هموار d -بعدی M دارای یک فضای مماس $T_p M \cong \mathbb{R}^d$ متصل به هر نقطه $p \in M$ است. فضاهای مماس، فضاهای برداری d -بعدی هستند، با این حال، برخلاف \mathbb{R}^d ، آن‌ها به طور کلی با هیچ انتخاب ارجح چارچوب مرجع همراه نیستند. یک بردار مماس $v \in T_p M$ یک شی مستقل از مختصات است و بنابراین بلافصله به صورت عددی با یک تاپل مختصاتی $(v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$ نمایش داده نمی‌شود. به طور انتزاعی‌تر، هر فضای مماس $T_p M$ با \mathbb{R}^d هم‌ریخت است اما به طور کلی هیچ هم‌ریختی کانونی بین آن‌ها وجود ندارد. بنابراین هر دو فضا از نظر ساختاری معادل هستند اما به هیچ روش ارجح به یکدیگر شناسایی نمی‌شوند.

یک گیج (تسهیم محلی بندل مماس) بر روی M به عنوان مجموعه‌ای از نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر که به صورت هموار وابسته به موقعیت هستند، تعریف می‌شود:

$$(1) \quad \psi_p^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad p \in U^A,$$

که هم‌ریختی‌های فضای برداری گمشده بین $T_p M$ و \mathbb{R}^d را مشخص می‌کند. همانطور که در شکل ۱۴ بصری‌سازی شده است، آن‌ها با تخصیص یک بردار ضریب به فضاهای مماس مختصات می‌دهند:

$$(2) \quad v^A := \psi_p^A(v) \in \mathbb{R}^d$$

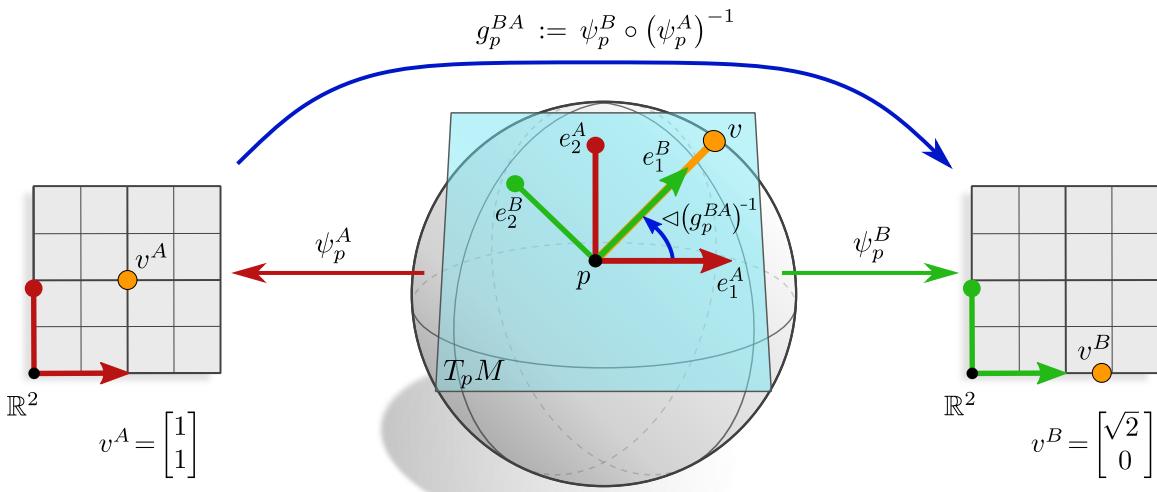
به هر بردار مماس مستقل از مختصات $v \in T_p M$ این رابطه می‌دهد:

$$(3) \quad v = (\psi_p^A)^{-1}(v^A) = (\psi_p^A)^{-1}\left(\sum_i v_i^A e_i\right) = \sum_i v_i^A (\psi_p^A)^{-1}(e_i) =: \sum_i v_i^A e_i^A,$$

که در آن $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_d\}$ را پایانه استاندارد \mathbb{R}^d نامگذاری کرده‌ایم و از خطی بودن گیج برای بیرون کشیدن جمع استفاده کرده‌ایم. این نشان می‌دهد که گیج را می‌توان به عنوان مجهر کردن هر فضای مماس $T_p M$ با یک چارچوب مرجع در نظر گرفت:

$$(4) \quad [e_1^A, \dots, e_d^A] := \left[(\psi_p^A)^{-1}(\epsilon_1), \dots, (\psi_p^A)^{-1}(\epsilon_d) \right],$$

که به عنوان یک d -تاپل از بردارهای مماس خطی مستقل تعریف می‌شود که با نگاشت پایه استاندارد \mathbb{R}^d به عقب از طریق نگاشت معکوس گیج v^A به دست می‌آید. برای اختصار، ما در ادامه از نماد کوتاه‌شده $[e_i^A]_{i=1}^d$ برای چارچوب‌ها استفاده خواهیم کرد. ضرایب



شکل ۱۴: شناسایی \mathbb{R}^3 از طریق گیج‌های مختلف. یک بردار مماس (مستقل از مختصات) $v \in T_p M \cong \mathbb{R}^3$ را می‌توان به صورت عددی با یک تابع مختصاتی $\psi_p^A(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ نسبت به گیج ψ_p^A (قمر) یا، به طور معادل، با $\psi_p^B(v) = (\sqrt{2}, 0)^T$ نسبت به گیج ψ_p^B (سیز) نمایش داد. انتخاب یک گیج مربوط به انتخاب $[e_1^A, e_2^A]$ یا $[e_1^B, e_2^B]$ از چارچوب مرجع است. در یک منیفولد عمومی هیچ انتخابی از گیج یا مختصات بندی پیش‌فرض ارجح نیست. گیج‌های مختلف، و در نتیجه چارچوب‌های مرجع، با تبدیل‌های گیج $(\psi_p^A)^{-1} := \psi_p^{BA} = \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}$ مرتبط هستند که مقادیری در گروه ساختار G تعریف شده‌اند. این شکل تفسیری گرفته‌ای از نمودارهای جایجاوی در عادله (۸) و شکل ۳۴ است. توجه داشته باشید که گیج‌ها بالافاصله به فضاهای مماس مختصات می‌دهند. شکل ۴۹ در بخش ۲.۹ یک نمودار مشابه برای چارت‌های (آفین) را نشان می‌دهد که به منیفولد مختصات می‌دهند و بدین ترتیب گیج‌ها ("پایه‌های مختصات") را القا می‌کنند.

مختصات v نسبت به این چارچوب هستند. مجموعه‌ای از چارچوب‌های القا شده توسط ψ_p^A بر روی U^A (هموار) میدان چارچوب نامیده می‌شود؛ برای بصری‌سازی به شکل ۱۵ مراجعه کنید.

گیج‌های X -فضاهای مماس را تنها در همسایگی‌های محلی M $\subseteq U^X$ مختصات می‌دهند، و به دلیل موانع توپولوژیکی به طور کلی نمی‌توانند کل منیفولد بدون نقض فرض همواری گسترش یابند. بنابراین یک اطلس در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathcal{A} = \{(U^X, \psi^X)\}_{X \in \mathfrak{X}}, \quad (5)$$

متشکل از گیج‌های هموار بر روی مجموعه‌ای از همسایگی‌های U^X که منیفولد را پوشش می‌دهند، یعنی شرط $U^X = \bigcup_{X \in \mathfrak{X}} U^X$ را برآورده می‌کنند، که در آن \mathfrak{X} یک مجموعه اندیس است.^۸ در نواحی همپوشانی $U^A \cap U^B \neq \emptyset$ از همسایگی‌ها، گیج‌های مختلف ψ_p^A و ψ_p^B توسط توابع گذار هموار به هم متصل می‌شوند:

$$g^{BA} : U^A \cap U^B \rightarrow \text{GL}(d), \quad p \mapsto g_p^{BA} := \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}. \quad (6)$$

در اینجا ما دامنه مشترک (فعل) را با گروه خطی عمومی $\text{GL}(d)$ در نظر می‌گیریم، متشکل از همه ماتریس‌های معکوس‌پذیر در $\mathbb{R}^{d \times d}$ که رابطه بین هر جفت از هم‌ریختی‌های فضای برداری (گیج‌ها) یا چارچوب‌های مرجع را توضیح می‌دهند. عمل چنین تابع گذاری بر روی یک گیج داده شده یک تبدیل گیج را تعریف می‌کند:

$$\psi_p^B = g_p^{BA} \cdot \psi_p^A. \quad (7)$$

^۸ اطلس گیج‌ها بسیار شبیه به اطلس‌های معمول چارت‌های معمول است (پیوست آ). تفاوت این است که اطلس‌های مورد نظر در اینجا مستقیماً به بدل مختصات می‌دهند به جای منیفولد TM .

از نظر یک نمودار جابجایی، رابطه بین گیج‌های مختلف به صورت زیر بصری‌سازی می‌شود:^۹

$$\begin{array}{ccccc} & & g_p^{BA} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\psi_p^A} & T_p M & \xrightarrow{\psi_p^B} & \mathbb{R}^d \\ & \uparrow & & & \downarrow \\ & g_p^{AB} \cdot = (g_p^{BA})^{-1} & & & \end{array} \quad (\text{۸})$$

این نمودار را با تفسیر گرافیکی آن در شکل ۱۴ مقایسه کنید.

یک تبدیل گیج، مختصات‌بندی فضاهای مماس را تغییر می‌دهد به طوری که همان بردار مماس مستقل از مختصات v با یک بردار مولفه‌ای متفاوت نمایش داده می‌شود:

$$v^B = g_p^{BA} v^A. \quad (\text{۹})$$

از آنجا که یک گیج مربوط به انتخاب یک میدان چارچوب است، یک تبدیل گیج مربوط به تبدیل بین میدان‌های چارچوب است. به طور خاص، یک چارچوب $[e_i^A]_{i=1}^d = [e_1^A, \dots, e_d^A]$ در $p \in M$ به یک چارچوب دیگر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} [e_i^B]_{i=1}^d &:= \left[(\psi_p^B)^{-1} (\epsilon_i) \right]_{i=1}^d && \text{(چارچوب القا شده توسط گیج، معادله (۴))} \\ &= \left[(g_p^{BA} \cdot \psi_p^A)^{-1} (\epsilon_i) \right]_{i=1}^d && \text{(تبدیل گیج، معادله (۷))} \\ &= \left[(\psi_p^A)^{-1} \left((g_p^{BA})^{-1} \epsilon_i \right) \right]_{i=1}^d && \text{(معکوس گسترش یافته)} \\ &= \left[(\psi_p^A)^{-1} \left(\sum_j \epsilon_j \epsilon_j^\top (g_p^{BA})^{-1} \epsilon_i \right) \right]_{i=1}^d && \text{(هویت وارد شده} = \sum_j \epsilon_j \epsilon_j^\top \text{)} \\ &= \left[(\psi_p^A)^{-1} \left(\sum_j \epsilon_j \left((g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \right) \right]_{i=1}^d && \text{(عناصر ماتریس} (g_p^{BA})^{-1} \text{) شناسایی شده)} \\ &= \left[\sum_j (\psi_p^A)^{-1} (\epsilon_j) \left((g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \right]_{i=1}^d && \text{(خطی بودن} (\psi_p^A) \text{)} \\ &= \left[\sum_j e_j^A \left((g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \right]_{i=1}^d && \text{(چارچوب القا شده توسط گیج، معادله (۴))} \\ &=: [e_i^A]_{i=1}^d \blacktriangleright (g_p^{BA})^{-1} && \text{(۱۰)} \end{aligned}$$

از طریق عمل راست تعریف شده:

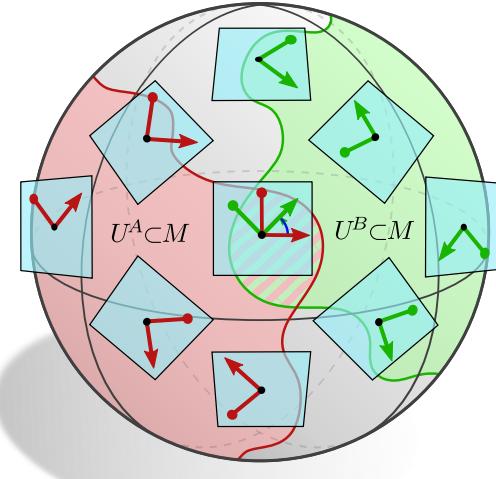
$$\blacktriangleright : ([e_i]_{i=1}^d, g) \mapsto [e_i]_{i=1}^d \blacktriangleright g := \left[\sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \quad (\text{۱۱})$$

از عناصر گروه بر روی چارچوب‌ها. توجه داشته باشید که معکوس در این عمل در معادله (۱۰) به دلیل تعریف معادله (۷) بدون معکوس است.^{۱۰} معمولاً به رفتار تبدیل چارچوب‌های مرجع، تبدیل کوواریانت گفته می‌شود در حالی که تبدیل گیج‌ها و ضرایب برداری به عنوان تبدیل کونترواریانت نامیده می‌شود؛ به پیوست آ مراجعه کنید.

$$X \xrightarrow{f} Y \quad \begin{matrix} \downarrow g \\ h \end{matrix} \quad Z$$

به این معنی است که توابع $Y \rightarrow f : X \rightarrow Z$ و $g : X \rightarrow Z$ وجود دارند. اگر ترکیبات توابع در امتداد همه مسیرهایی با شروع و پایان یکسان مطابقت داشته باشند، نمودار جابجایی نامیده می‌شود. نمودار مثال ما اگر (و تنها اگر) $h = g \circ f$ صادق باشد، جابجایی است.

^{۱۱} قراردادهای دیگر ممکن است انتخاب معکوس‌ها را در $[e_i^B]_{i=1}^d = [e_i^A]_{i=1}^d \blacktriangleright (g^{BA})^{-1}$ تغییر دهند. یک معکوس در هر یک از دو معادله برای سازگاری عمل چپ · بر روی گیج‌ها و عمل راست ► بر روی چارچوب‌ها ضروری است.



شکل ۱۵: هر نقطه p از یک منیفولد ریمانی M دارای یک فضای مماس $T_p M$ متصل است. یک گیج هموار ψ^A بر روی یک زیرمجموعه مناسب انتخاب شده $U^A \subseteq M$ مختصات می‌دهد همانطور که مماس $T_p M$ را برای p در U^A مختصات می‌دهد. در شکل ۱۴ نشان داده شده است. این معادل انتخاب یک میدان چارچوب هموار بر روی U^A است. از آنجا که به طور کلی امکان گسترش یک گیج به صورت سراسری بر روی کل منیفولد وجود ندارد، لازم است که یک G -اطلس در نظر گرفته شود، مشکل از گیج‌هایی که M را بوشش می‌دهند. مختصات‌بندی‌های مختلف ψ^A بر روی U^A و ψ^B بر روی U^B (سیز) از طریق $g^{BA} : U^A \cap U^B \rightarrow G$ تبدیل‌های گیج (یا نگاشت‌های گذار) $U^A \cap U^B \rightarrow G$ (خطدار) به هم متصل می‌شوند که بر روی همپوشانی $G \leq \text{GL}(d)$ تعریف شده‌اند و مقادیری در گروه ساختار G می‌گیرند.

از آنجا که رفتار تبدیل ضرایب در معادله (۹) و پایه در معادله (۱۰) معکوس یکدیگر هستند، آن‌ها یکدیگر را خنثی می‌کنند، یعنی بردار مماس $v = \sum_i v_i^A e_i^A = \sum_i v_i^B e_i^B$ را ناوردا می‌گذارند:

$$\begin{aligned} v &= \sum_i v_i^B e_i^B = \sum_i v_i^B \sum_j e_j^A \left((g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \\ &= \sum_j \left(\sum_i \left((g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} v_i^B \right) e_j^A \\ &= \sum_j v_j^A e_j^A. \end{aligned} \quad (12)$$

این ساختار تضمین می‌کند که هر محاسبه‌ای در نهایت مستقل از گیج انتخاب شده است، که معمولاً به آن استقلال از مختصات گفته می‌شود. به طور کلی، هر نمایش مختصاتی از یک شی یاتابع مستقل از مختصات برای دلایل سازگاری باید مستقل از مختصات باشد.

برای کامل بودن می‌خواهیم اشاره کنیم که فرمالیسم ارائه شده در اینجا پایه‌های عمومی فضاهای مماس را تعریف می‌کند، که گاهی اوقات به عنوان پایه‌های غیرمختصاتی (پایه‌های غیرهولونومیک) از نظر گیج‌های محلی نامیده می‌شوند. یک جایگزین بسیار محبوب اما کمتر عمومی پایه‌های مختصاتی (پایه‌های هولونومیک) هستند:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1^A} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d^A} \Big|_p \right], \quad (13)$$

که توسط چارت‌های مختصاتی منیفولد القا می‌شوند [۱۳۲]:

$$x^A : U^A \rightarrow V^A \subseteq \mathbb{R}^d \quad (14)$$

گیج‌های مربوطه توسط دیفرانسیل‌های چارت داده می‌شوند، یعنی:

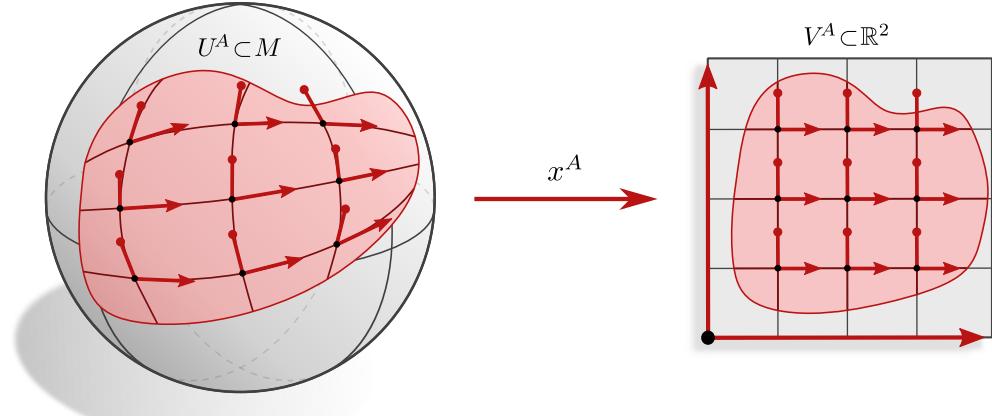
$$\psi_p^A = \hat{dx}_p^A = (\hat{dx}_{p,1}^A, \dots, \hat{dx}_{p,d}^A)^\top : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d. \quad (15)$$

تبدیل‌های گیج در این تنظیم با ژاکوبیان‌ها مطابقت دارند:

$$g_p^{BA} = \left. \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right|_{x^A(p)} \in \text{GL}(d) \quad (16)$$

از نگاشت‌های گذار چارت. یک چارت نمونه و پایه‌های مختصاتی القا شده آن در شکل ۱۶ بصیری‌سازی شده‌اند. پیوست آ رابطه بین هر دو فرمالیسم را با جزئیات مورد بحث قرار می‌دهد؛ یک مرور کلی در جدول ۷ را ارائه شده است.

در ادامه این مقاله ما مدعناً در فرمالیسم گیج کارخواهیم کرد، که چارچوب‌های مختصاتی مماس تخصیص می‌دهد به جای اینکه آن‌ها را از چارت‌ها القا کنند. استثنایاً عبارتند از کانولوشن‌های موبیوس در بخش ۵، CNN‌های اقلیدسی در بخش ۹، مختصات لگاریتمی-قطبی در بخش ۱۰ و CNN‌های بیست‌وجهی در بخش ۴.۱۲. در همه این موارد، منیفلدهایی به صورت محلی مسطح هستند و چارت‌ها ایزومتریک هستند، به طوری که چارچوب‌های متuumد را القا می‌کنند. کانولوشن‌های U^A در GM سپس می‌توانند به روشی کارآمد با اجرای کانولوشن‌های اقلیدسی با کرنل‌های G -استیریبل در دامنه‌های مشترک چارت‌ها V^A محاسبه شوند.



شکل ۱۶: یک چارت $x^A : U^A \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow V^A \subseteq \mathbb{R}^d$ از مختصات $U^A \subseteq M$ را به نواحی V^A مختصات $\psi_p^A = \hat{d}x_p^A$ و گیج‌های مریبوطه $\left[\frac{\partial}{\partial x_1^A}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d^A} \right]$ برای فضاهای مماس $T_p M$ در القا می‌کند. ما عمدتاً با چارت‌ها کار خواهیم کرد بلکه به نقاط $p \in M$ به صورت مستقل از مختصات ارجاع خواهیم داد. گیج‌ها (چارچوب‌ها) سپس مستقیماً به فضاهای مماس تخصیص داده می‌شوند به جای اینکه از چارت‌ها القا شوند.

۲.۱.۳ توابع مستقل از مختصات در فضاهای مماس

همانطور که بردارهای $v \in T_p M$ ، توابع بر روی فضاهای مماس مستقل از مختصات هستند، یعنی بدون اشاره به هیچ چارچوب مرجع تعريف می‌شوند. یک گیج انتخاب شده امکان نمایش چنین نگاشتهای مستقل از مختصات را توسط توابعی فراهم می‌کند که بر روی بردارهای ضریب در \mathbb{R}^d عمل می‌کنند. مشابه بردارهای ضریب، مختصات‌بندی توابع باید به روشی خاص تحت تبدیل‌های گیج تبدیل شوند تا به طور سازگار تعريف شوند، یعنی برای رعایت استقلال از مختصات. ما بعداً مفهوم ارائه شده در اینجا را از بیان نگاشتهای مستقل از مختصات بر حسب مختصات محلی برای تعریف کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM به کار خواهیم برد.

به عنوان یک مثال ساده برای یک عملیات مستقل از مختصات، بباید حالت یک نگاشت خطی را در نظر بگیریم:

$$\mathcal{M} : T_p M \rightarrow T_p M. \quad (17)$$

فرض کنید $v_{\text{in}} \in T_p M$ یک بردار مماس باشد که توسط \mathcal{M} به $v_{\text{out}} = \mathcal{M}v_{\text{in}} \in T_p M$ نگاشت می‌شود. نگاشتهای خطی در پیاده‌سازی‌های عددی معمولاً توسط ماتریس‌های ضریب مدل می‌شوند که بین بردارهای ضریب نسبت به یک انتخاب از چارچوب مرجع نگاشت می‌کنند. برای دقیق کردن این موضوع، فرض کنید گیج ψ_p^A داده شده باشد به طوری که بردارهای مستقل از مختصات v_{in} و v_{out} در $T_p M$ دارای تعریف کانولوشن‌های $\psi_p^A(v_{\text{in}})$ و $\psi_p^A(v_{\text{out}})$ نمایش داده شوند. نگاشت خطی \mathcal{M} در این گیج توسط ماتریس نمایش داده می‌شود:

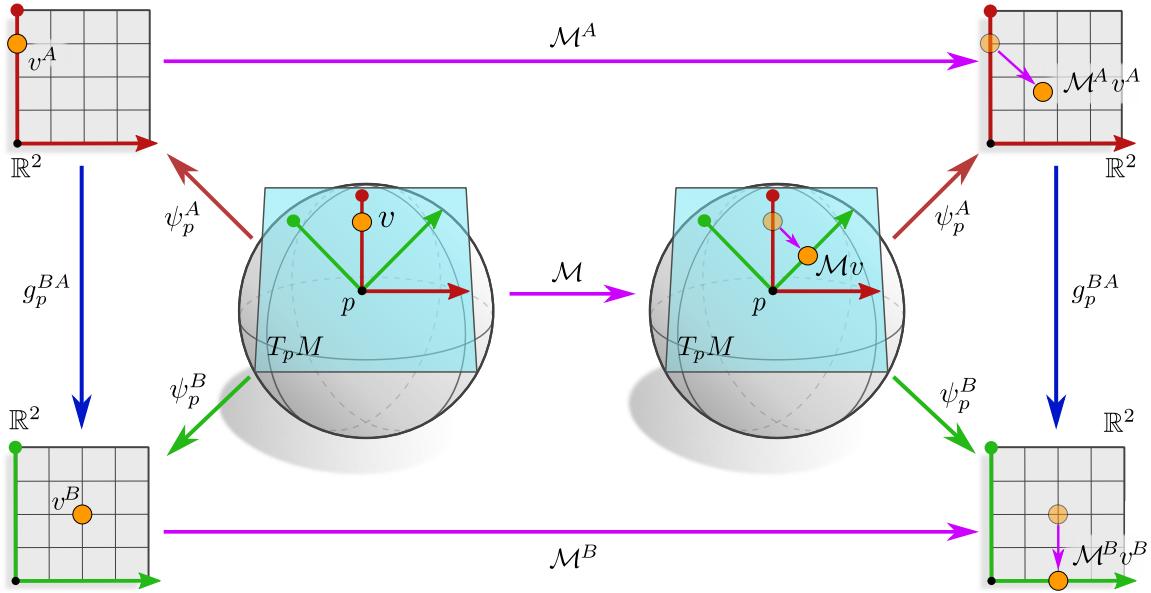
$$\mathcal{M}^A := \psi_p^A \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^A)^{-1} \in \mathbb{R}^{d \times d} \quad (18)$$

که تعریف آن توسط نمودار جابجایی زیر بصری‌سازی شده است:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\psi_p^A} & T_p M & \xrightarrow{\mathcal{M}} & T_p M & \xrightarrow{\psi_p^A} & \mathbb{R}^d \\ & & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\mathcal{M}^A} & & & & \uparrow \end{array} \quad (19)$$

ماتریس با نگاشت مستقل از مختصات سازگار است زیرا هر دو یکدیگر را نتیجه می‌دهند:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^A v_{\text{in}}^A &= [\psi_p^A \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^A)^{-1}] \circ [\psi_p^A(v_{\text{in}})] \\ &= \psi_p^A(\mathcal{M} v_{\text{in}}) \\ &= \psi_p^A(v_{\text{out}}) \\ &= v_{\text{out}}^A \end{aligned} \quad (20)$$



شکل ۱۷: تفسیر گرافیکی نمودار جابجایی در معادله (۲۳). یک نگاشت مستقل از مختصات $\mathcal{M} : T_p M \rightarrow T_p M$ را می‌توان به طور معادل با توابع $\mathcal{M}^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ یا $\mathcal{M}^B : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ نسبت به گیج‌های مختلف ψ_p^A یا ψ_p^B نمایش داد. این مختصات‌بندی‌های \mathcal{M} با پیش و پس ترکیب با گیج‌ها در دامنه و دامنه مشترک تعریف می‌شوند، به عنوان مثال، با دنبال کردن فلش‌ها، $\mathcal{M}^A := \psi_p^A \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^A)^{-1}$ در نتیجه، تبدیل‌های گیج $\mathcal{M}^A = g_p^{BA} \mathcal{M}^B (g_p^{BA})^{-1}$ بین مختصات‌بندی‌ها توسط یک پیش و پس ترکیب با نگاشت‌های گذار g_p^{BA} در دامنه و دامنه مشترک داده می‌شوند. همه کمیت‌ها و نگاشت‌ها در این کار یا مستقل از مختصات خواهند بود (مانند \mathcal{M}) یا به روشی مستقل از مختصات در گیج‌های مختلف بیان خواهند شد (مانند \mathcal{M}^A و \mathcal{M}^B). ما بنابراین باید قوانین تبدیل را برای هر کمیت و تابع تعریف (یا استخراج) کنیم.

البته می‌توان \mathcal{M} را نسبت به هر انتخاب دیگری از گیج ψ_p^B نیز نمایش داد. ما از معادله (۹) می‌دانیم که بردارهای ضرب در گیج‌های مختلف با $v^B = g_p^{BA} v^A$ مرتبط هستند. به طور مشابه، \mathcal{M}^B با \mathcal{M}^A توسط تبدیل گیج مرتبط است:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^B &= \psi_p^B \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^B)^{-1} \\ &= \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1} \circ \mathcal{M}^A \circ \psi_p^A \circ (\psi_p^B)^{-1} \\ &= g_p^{BA} \mathcal{M}^A (g_p^{BA})^{-1}, \end{aligned} \quad (21)$$

که در اینجا هم بر دامنه و هم بر دامنه مشترک عمل می‌کند.^{۱۱} این قانون تبدیل دوباره سازگار است زیرا تبدیل‌های متناظر یکدیگر را خنثی می‌کنند:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^B v_{\text{in}}^B &= [g_p^{BA} \mathcal{M}^A (g_p^{BA})^{-1}] [g_p^{BA} v_{\text{in}}^A] \\ &= g_p^{BA} \mathcal{M}^A v_{\text{in}}^A \\ &= g_p^{BA} v_{\text{out}}^A \\ &= v_{\text{out}}^B \end{aligned} \quad (22)$$

^{۱۱} تبدیل ضرایب ماتریس از طریق ضرب چپ و راست با $(g^{BA})^{-1}$ و g^{BA} به ترتیب، نگاشت خطی را به عنوان یک تansور از نوع (۱, ۰) شناسایی می‌کند.

تبديل‌های گیج استخراج شده بنابراین تأیید می‌کنند که تمام محاسبات مختصات‌بندی شده در نهایت مستقل از مختصات هستند. روابط بین نگاشت مستقل از مختصات و مختصات‌بندی‌های آن توسط نمودار جابجایی زیر خلاصه می‌شود:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M^A & & \\
 & \swarrow \psi_p^A & & \searrow \psi_p^A & \\
 \mathbb{R}^d & & T_p M & & \mathbb{R}^d \\
 \downarrow g_p^{BA} & & \xrightarrow{\mathcal{M}} & & \downarrow g_p^{BA} \\
 & \swarrow \psi_p^B & & \searrow \psi_p^B & \\
 & \mathbb{R}^d & & \mathbb{R}^d & \\
 & & M^B & &
 \end{array} \quad (23)$$

که در شکل ۱۷ به صورت گرافیکی تفسیر شده است.

در عمل نمی‌توان نگاشت خطی مستقل از مختصات \mathcal{M} را به صورت عددی بدون اشاره به یک انتخاب مختصات‌بندی پیاده‌سازی کرد. با این حال، وجود آن تنها در صورتی (و تنها در صورتی) دلالت دارد که مختصات‌بندی‌های آن همانظور که در معادله (۲۱) مشخص شده است به یکدیگر مربوط باشند، که تضمین می‌کند رفتار تبدیل صحیح ضرایب بردار ورودی و خروجی در معادله (۹) حفظ می‌شود.

۳.۱.۳ گروه‌های ساختار، G -ساختارها و G -اطلس‌ها

ما بعداً از شبکه‌های عصبی می‌خواهیم که به روشی مستقل از مختصات عمل کنند، یعنی ما تقاضا می‌کنیم که استنتاج آن‌ها مستقل از انتخاب‌های دلخواه چارچوب‌های مرجع باشد. این سؤال را مطرح می‌کند که انتخاب چارچوب‌های مرجع در یک منیفولد تا چه حد دلخواه است. در بخش‌های ۱.۱.۳ و ۲.۱.۳ قبلی ما هر انتخاب ممکن از گیج یا چارچوب مرجع را مجاز می‌دانستیم، که بنابراین توسط تبدیل‌های گیج با مقدار کلی $GL(d)$ مرتبط بودند. با این حال، در بسیاری از کاربردها، منیفولد دارای ساختار اضافی است که امکان تشخیص یک زیرمجموعه ارجح از چارچوب‌های مرجع یا گیج‌ها را می‌دهد که توابع گذار آن‌ها مقادیری در یک گروه ساختار کاهش یافته $G \leq GL(d)$ می‌گیرند. چنین ساختارهای هندسی - یا بلکه خود زیرمجموعه‌های چارچوب‌های مرجع ترجیحی، که اطلاعات معادل را کدگزاری می‌کنند - به عنوان G -ساختارها نامیده می‌شوند.

G -ساختارها با در نظر گرفتن چند مثال خاص بهتر درک می‌شوند. لیست زیر چنین مثال‌هایی را ارائه می‌دهد که بر اساس گروه ساختار $G \leq GL(d)$ طبقه‌بندی شده‌اند:

$O(d)$: ساختار متریک یک منیفولد ریمانی را در نظر بگیرید، که امکان اندازه‌گیری فواصل و زوایا را می‌دهد، و بنابراین تشخیص چارچوب‌های متعامد را، یعنی آن چارچوب‌هایی که شرط $\delta_{ij}(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ برای هر $i, j = 1, \dots, d$ برآورده می‌کنند. به طور متناظر، یک متریک ریمانی امکان صحبت در مورد گیج‌های ایزومنتریک ψ_p^A را می‌دهد، که متریک \mathbb{R}^d را با متریک $T_p M$ شناسایی می‌کنند، یعنی شرط $\langle \psi_p^A(v), \psi_p^A(w) \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle v, w \rangle_{T_p M}$ برآورده می‌کنند. از آنجا که چارچوب‌های متعامد و گیج‌های ایزومنتریک تا چرخش‌ها و بازتاب‌ها تعریف می‌شوند، هر تبدیل گیجی بین آن‌ها مقادیری در گروه متعامد $O(d)$ خواهد گرفت، که آن زیرگروه از $GL(d)$ است که زوایا و فواصل را حفظ می‌کند.

$GL^+(d)$: به طور مشابه، یک جهت‌گیری منیفولد چارچوب‌های راست‌گرد را از چپ‌گرد و گیج‌های حفظ‌کننده جهت‌گیری را از گیج‌های معکوس‌کننده جهت‌گیری متمایز می‌کند. تبدیل‌های گیج بین چارچوب‌های یک دست‌پری داده شده مقادیری در $GL^+(d)$ می‌گیرند، یعنی آن زیرگروه از $GL(d)$ که جهت‌گیری‌ها را حفظ می‌کند.

$SO(d)$: با هم، یک متریک و جهت‌گیری داده شده، چارچوب‌های متعامد با جهت‌گیری خاصی را مشخص می‌کنند. تبدیل‌های گیج بین چنین چارچوب‌هایی تضمین شده‌اند که در زیرگروه $SO(d)$ از $GL(d)$ قرار گیرند. یک میدان چارچوب هموار سراسری یک $\{e\}$ -ساختار را در M تعریف می‌کند. در این حالت تنها یک چارچوب متمایز در هر موقعیت $\{e\}$ وجود دارد، به طوری که تبدیل‌های گیج در گروه بدیهی $GL(d) \leq GL(\{e\})$ قرار می‌گیرند.

$GL(d)$: اگر هیچ ساختار اضافی تحمیل نشود، هر چارچوب مرجع فضاهای مماس به همان اندازه معتبر است. تبدیل‌های گیج در این حالت نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر عمومی در $GL(d)$ هستند و G -ساختار مربوطه فقط بندل چارچوب FM است.

structure group $G \leq \text{GL}(d)$	G -structure GM	equivalent structure on M
$\text{GL}^+(d)$	positively oriented frames	orientation of M
$\text{SL}(d)$	unit volume frames	volume form
$\text{CO}(d)$	conformal frames	—
$\text{Sp}(d)$	symplectic frames	—
$\text{O}(d)$	orthonormal frames	Riemannian metric
$\text{O}(d-n, n)$	pseudo-orthonormal frames	pseudo-Riemannian metric
$\text{SO}(d)$	positively oriented orthonormal frames	Riemannian metric + orientation
$\{e\}$	parallelization (global frame field)	—

جدول ۱: مثال‌هایی از G -ساختارها بر روی M و گروه‌های ساختار کاهش‌یافته مربوطه $\text{GL}(d) \leq G$. یک G -ساختار به عنوان یک زیرمجموعه هموار معرفی می‌شود، که در آن چارچوب‌های هر فضای مماس به صورت متقابل توسط تبدیل‌های گیج با مقدار G مرتبط هستند. در حالی که این تعریف نسبتاً انتزاعی است، امکان مشاهده بسیاری از ساختارهای هندسی در M را به روی یکپارچه فراهم می‌کند. به عنوان مثال، یک متريک ريماني در M امكان شخيص چارچوب‌های متعامد را می‌دهد. برعکس، مشخص کردن متعامد بودن به طور منحصر به فرد یک متريک رانتیجه می‌دهد. بنابراین یک ساختار متعامد با یکدیگر معادل هستند. به طور مشابه، یک تناول یک به یک بین فرم‌های حجم و چارچوب‌های واحد حجم وجود دارد. توجه داشته باشید که انتخاب یک گروه ساختار G به طور منحصر به فرد یک G -ساختار را مشخص نمی‌کند. به عنوان مثال، متريک‌های ريماني مختلف می‌توانند به عنوان ساختار (d) ، فرم‌های حجم مختلف به عنوان ساختار G (SL(d) یا ميدان‌های چارچوب سراسری مختلف به عنوان ساختار $\{e\}$ انتخاب شوند. CNN‌های مستقل از مختصات برای یک G -ساختار داده شده طراحی شده‌اند – اينکه کدام ساختار خاص است به وظيفه يادگيری بستگی دارد.

موضوع مشترک در اين مثال‌های انگيزشی اين است که همه آن‌ها با موارد زير تعریف می‌شوند:

۱. یک زیرمجموعه (که به صورت فضایي هموار تغيير می‌کند) از چارچوب‌های مربوطه متمايز،

۲. یک زیرمجموعه مربوطه از گیج‌های ترجيحی و

۳. یک زيرگروه $\text{GL}(d) \leq \text{GL}(d)$ از تبدیل‌های گیج که مفهوم متمايز چارچوب‌ها و گیج‌ها را حفظ می‌کند.

چنین زیرمجموعه‌هایی از چارچوب‌های مرجع که به صورت هموار تغيير می‌کند به عنوان G -ساختارها GM نامیده می‌شوند و گروه G به عنوان گروه ساختار (کاهش‌یافته) نامیده می‌شود – برای تعریفی دقیق‌تر به بخش ۳.۶ مراجعه کنید.^{۱۷} فرآيند مشخص کردن یک G -ساختار به عنوان کاهش گروه ساختار از $\text{GL}(d)$ به G شاخته می‌شود. یک اطلس $\mathcal{A}^G = \{(U^X, \psi^X)\}_{X \in \mathfrak{X}}$ به عنوان G -اطلس نامیده می‌شود اگر تمام توابع گذار آن:

$$g^{BA}: U^A \cap U^B \rightarrow G, \quad p \mapsto g_p^{BA} := \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1} \quad (24)$$

در یک گروه ساختار کاهش‌یافته $G \leq \text{GL}(d)$ فرار گيرند (مقاييسه کنيد با معادله (۶)). رابطه بين چارچوب‌های مرجع و گیج‌ها در معادله (۴) دلالت دارد بر اينکه هر G -اطلس یک G -ساختار مربوطه را كدگزاری می‌کند.

انتخاب‌های متعددی از G -ساختارها ممکن است برای یک گروه ساختار G داده شده وجود داشته باشند. برای ارتباط با مثال‌های بالا: متريک‌های ريماني مختلف، زيرمجموعه‌های متفاوتی از چارچوب‌های مرجع را به عنوان متعامد مشخص می‌کنند، يعني آن‌ها با ساختارهای $O(d)$ مطابقت دارند. بنابراین انتخاب یک متريک متعادل انتخاب یک ساختار (d) است. به طور مشابه، انتخاب‌های مختلف جهت‌گيری یک منيفولد قابل جهت‌گيری، مجموعه متفاوتی از چارچوب‌ها را به عنوان راست‌گرد مشخص می‌کنند. بنابراین دو انتخاب ممکن جهت‌گيری با دو انتخاب ممکن از ساختارهای $(GL^+M) GL^+$ مطابقت دارند. ساختارهای $\text{SO}(d)$ (SOM) ممکن است در انتخاب جهت‌گيری و متريک هر دو متفاوت باشند. مثال دیگر ساختار $\{e\}M$ است. آن‌ها اجازه تبدیل‌های گیج (غيربدپنهان) را نمی‌دهند و بنابراین با انتخاب ميدان‌های چارچوب هموار سراسری در M مطابقت دارند. جدول ۱ مثال‌های بيشتری از گروه‌های ساختار G و G -ساختارهای مربوطه را ارائه می‌دهد.

کاهش گروه ساختار به G ، يعني وجود یک G -ساختار، ممکن است توسط توبولوژی منيفولد مسدود شود. اين دلالت دارد بر اينکه یک "گروه ساختار کاهش‌نادر" وجود دارد که فراتر از آن ابهام چارچوب‌های مرجع را نمی‌توان بدون نقص فرض همواري (يا حتی پيوستگی) G -ساختار برطرف کرد. به عنوان مثال، نوار موبیوس در شکل ۲۸ غيرقابل جهت‌گيری است. اين بدان معنی است که یک تعریف هموار و سراسری سازگار از دست‌پری چارچوب و در نتیجه ساختار $\{e\}$ (ميدان چارچوب هموار سراسری) را نمی‌پذيرد. همانطور که در شکل ۲۸ بصري‌سازی شده است، یک G -اطلس از گیج‌ها که نوار موبیوس را پوشش می‌دهد، به طور ناگير نيزمند یک بازتاب در يكی از نگاشته‌های گذار خواهد بود، که به معنای یک گروه ساختار کاهش‌نادر $R = G$ است. CNN‌های مستقل از مختصات بر روی نوار موبیوس بنابراین حداقل باید تناوب پذير بازتابی باشند. به طور مشابه، گروه ساختار کره را نمی‌توان فراتر از $G = \text{SO}(2)$ داد. CNN‌های کروی هموار بنابراین لزوماً بر پایه کرنل‌های محلی تناوب پذير چرخش هستند.

توجه داشته باشید که هر منيفولد (ديفرانسييل پذير) با برخی G -ساختار همراه است. به عنوان مثال، یک منيفولد ديرانسييل پذير خام دارای یک ساختار (d) (حاوي هر چارچوب ممکن) است، یک منيفولد ريماني یک ساختار (d) دارد و \mathbb{R}^d به طور کانونی با یک ساختار $\{e\}$ مجهر

^{۱۷} به طور رسمي، GM به عنوان یک زيربند اصلی G از بندل چارچوب FM تعریف می‌شود، که یک بندل اصلی (d) $\text{GL}(d)$ است.

شده است که در شکل ۴۲ آبروی این بدون از دست دادن کلیت، اصطلاح "استقلال از مختصات" را به استقلال از مختصات GM تصحیح خواهیم کرد، یعنی استقلال نسبت به انتخاب چارچوب‌های مرجع در G -ساختار داده شده در M . در طول این کار ما فرض خواهیم کرد که گیج‌ها بخشی از یک G -اطلس هستند:

$$p \in U^A \cap U^B, \quad \psi_p^A, \psi_p^B \in \mathcal{A}^G, \quad g_p^{BA} \in G \quad \text{برای هر } \quad \mathcal{A}^G = \{(U^X, \psi^X)\}_{X \in \mathfrak{X}} \quad (25)$$

مطابق با G -ساختار داده شده. هر گمیت یاتابع می‌تواند نسبت به هر گیج از این اطلس بیان شود^{۱۳}، و مختصات‌بندی‌ها در گیج‌های مختلف به طور منحصر به فرد توسط یک تبدیل گیج با مقدار G مرتبط هستند. با تضمین استقلال از مختصات همه ساختارها، آن‌ها همیشه با همتایان مستقل از مختصات خود مطابقت خواهند داشت، که ما نظریه سراسری را بر حسب آن‌ها در بخش‌های ۷ و ۸ فرمول‌بندی خواهیم کرد.

۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی مستقل از مختصات

فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات، فضاهای میدان‌های بردار ویژگی هستند. مشابه مورد ضرایب بردارهای مماس، ضرایب عددی بردارهای ویژگی ملزم به تبدیل سازگار تحت تبدیل‌های گیج هستند. قانون تبدیل خاص (نمایش گروهی) یک میدان ویژگی در اینجا نوع میدان آن را مشخص می‌کند^{۱۴} مثال‌های معمول شامل میدان‌های اسکالار، میدان‌های بردار مماس، میدان‌های تansور عمومی، میدان‌های ویژگی منظم یا میدان‌های irrep هستند. بخش ۲.۳ چنین میدان‌های ویژگی و قوانین تبدیل آن‌ها را معرفی می‌کند. در بخش ۲.۳، ما به طور مختصر فضاهای ویژگی مستقل از مختصات را تعریف می‌کنیم. مشابه تعریف فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی معمولی به عنوان اثباتی از چندین نقشه ویژگی، فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات شامل چندین میدان ویژگی مستقل هستند.

۱.۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی منفرد

میدان‌های ویژگی کانولوشنی یک بردار ویژگی، که اطلاعات استنباط شده از یک همسایگی محلی از سینگنال ورودی را کدگذاری می‌کند، به هر نقطه از منیفولد تخصیص می‌دهند. اثبات فضای اطلاعات توسط یک کرنل کانولوشنی انجام می‌شود که میدان ویژگی را در محیط خود نسبت به جارچوب مرتع محلی خود اندمازه‌گیری می‌کند. بنابراین ما گیج A را فرض می‌کنیم که ترازهای کرنل را در یک همسایگی U^A مشخص می‌کند. نسبت به این گیج، کرنل یک میدان محلی هموار از پاسخ‌ها (مشاهدات) تولید خواهد کرد:

$$f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad (26)$$

که توسط یک بردار ویژگی عددی c -بعدی $f^A(p) \in U^A$ در هر موقعیت $p \in U^A$ داده می‌شود. فرض کنید یک میدان پاسخ دوم $f^B : U^B \rightarrow \mathbb{R}^c$ در U^B استنباط شده است. از آنجا که پاسخ یک کرنل به طور کلی به تراز آن بستگی دارد، انتظار می‌رود که f^A و f^B در همپوشانی $U^A \cap U^B$ مطابقت نداشته باشند. بدون محدودیت‌های بیشتر، پاسخ‌های یک کرنل کانولوشن به طور دلخواه وابسته به گیج خواهند بود.

اصل کوواریانس، که توسط آبرت ائیشتین پیشنهاد شد [۴۸، ۴۷]، بیان می‌کند که:

«قوانین جهانشمول طبیعت باید توسط معادلاتی بیان شوند که برای همه سیستم‌های مختصات صادق باشند، یعنی نسبت به هر جایگزینی کوواریانت باشند.»

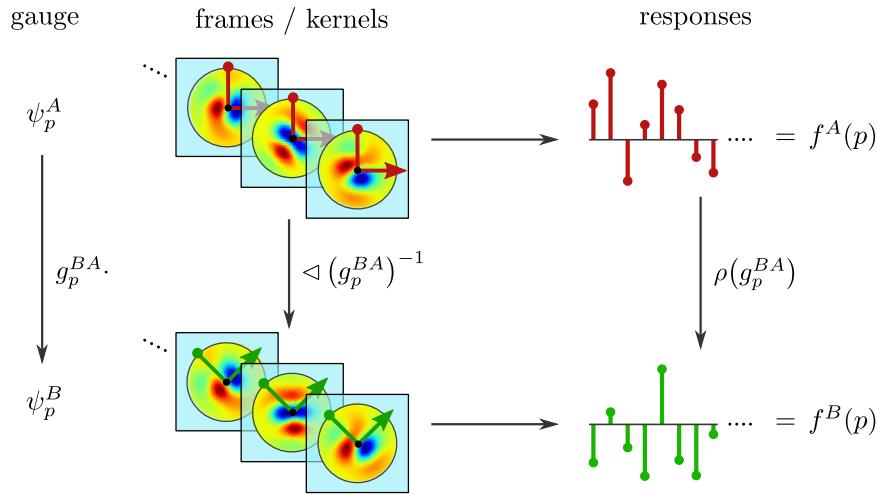
ما معتقدیم که اصل مشابهی باید در یادگیری عمیق هندسی نیز صادق باشد، یعنی استنتاج باید مستقل از هر دلخواهی در انتخاب چارچوب‌های مرجع باشد. با توجه به اینکه این دلخواهی در مختصات‌بندی‌ها دقیقاً توسط G -ساختار داده شده GM پوشش داده می‌شود، این امر به ویژه ایجاد می‌کند که ویژگی‌ها باید اشیاء هندسی مستقل از مختصات GM باشند.^{۱۵} بنابراین ما کرنل‌های کانولوشن را طوری طراحی می‌کنیم که پاسخ‌های آن‌ها f^A و f^B میدان‌هایی از ضرایب بردار ویژگی را کدگذاری کنند که یک میدان بردار ویژگی آزاد از مختصات f را به صورت محلی در گیج‌های مختلف نمایش می‌دهند. مجموعه‌ای از چنین میدان‌هایی ضریب عددی X ، که نسبت به G -اطلس گیج‌های ψ^X در همسایگی‌های UX که M را پوشش می‌دهند بیان شده‌اند، معادل میدان ویژگی سراسری و آزاد از مختصات f در M است.

برای اینکه این میدان ویژگی آزاد از مختصات به خوبی تعریف شود، یعنی مستقل از خوبی تعریف شود، میدان‌های ضریب محلی (یا پاسخ‌های کرنل) ملزم به دوخته شدن سازگار از طریق نگاشت‌های گذار با مقدار G هستند. بنابراین آن‌ها باید به روشی اصولی تحت تبدیل‌های گیج در G تعریف می‌شوند. از آنجا که ما با فضاهای بردار ویژگی سر و کار داریم، این تبدیل‌ها معمولاً خطی در نظر گرفته می‌شوند، یعنی آن‌ها توسط نمایش‌های گروهی خطی مدل می‌شوند:

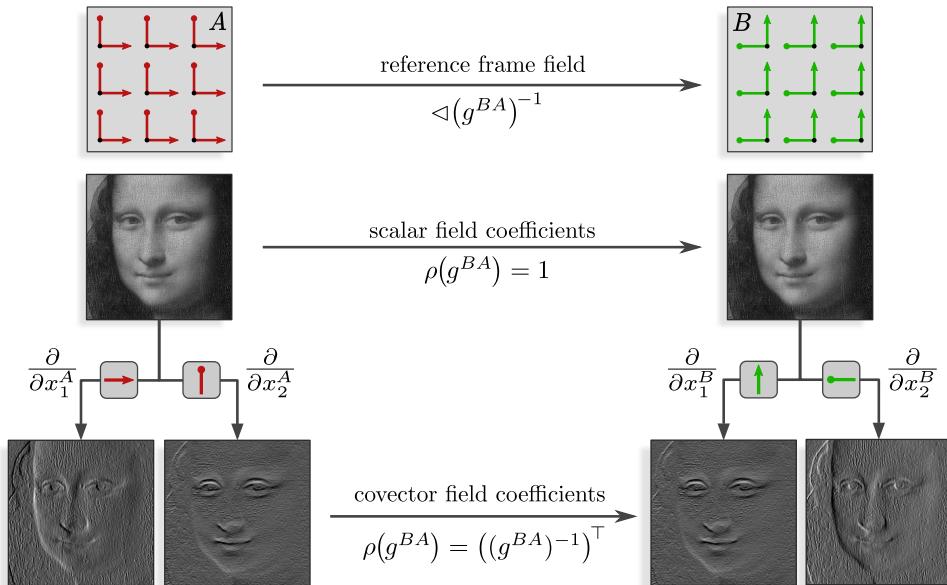
$$\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(c) \quad (27)$$

^{۱۳} این یک گزاره غیربدینه است زیرا هر کمیتی را نمی‌توان نسبت به چارچوب‌های مرتع دلخواه مرتبط با $\mathrm{GL}(d)$ بیان کرد. به عنوان مثال، میدان‌های ویژگی که در بخش ۲.۳ معرفی شده‌اند، تنها تبدیل‌های گیج با مقدار G را می‌پذیرند و بنابراین تنها نسبت به جارچوب‌های ترجیحی در GM تعریف می‌شوند. به عنوان یک مثال شهودی، CNN‌های سنتی (غیرتابوپذیر) در \mathbb{R}^d را در نظر بگیرید که نسبت به ساختار $\{e\}$ کانونی \mathbb{R}^d استخراج می‌شوند و اطلاعاتی در مورد پاسخ‌های کرنل نسبت به سایر چارچوب‌های مرتع را حمل نمی‌کنند.

^{۱۴} در این نکته ما از کوواریانس عمومی ائیشتین منحرف می‌شویم، که همیشه تبدیل‌های گیج با مقدار $\mathrm{GL}(d)$ را در نظر می‌گیرد (منتظر با کوواریانس دیفکوئورفیسم). تنظیم او در فرمول‌بندی ما برای $G = \mathrm{GL}(d)$ شامل شده است. با این حال، ما گروه ساختار فرضی را انعطاف‌پذیر نگه می‌داریم زیرا اکثر کاربردها گروه ساختار کاهش یافته را فرض خواهند کرد.



شکل ۱۸: پاسخ‌های عددی $f^B(p) \in \mathbb{R}^c$ و $f^A(p) \in \mathbb{R}^c$ کرnel‌هایی که بر اساس چارچوب‌های مختلف جهت‌گیری شده‌اند، به طور کلی منطبق نیستند. به منظور نمایش ضرایب عددی یکسان بردار ویژگی مستقل از مختصات نسبت به گیج انتخاب شده، آن‌ها ملزم به ارتباط توسط تبدیل‌های گیج (g_p^{BA}) $\rho(g_p^{BA})$ هستند. اگر گیج‌ها توسط g_p^{BA} مرتبط باشند، همانطور که در بخش ۴ استخراج شده است، این الزام یک قید تناوب‌پذیری گیج را بر کرنل‌های کانولوشن تحمیل می‌کند.



شکل ۱۹: مثال‌هایی از میدان‌های ضریب ویژگی در $M = \mathbb{R}^2$ از پردازش کلاسیک تصویر. بالا: برای سادگی ما یک میدان چارچوب «موازی» فرض می‌کنیم و همان تبدیل گیج، چرخشش به میزان $\pi/2$ ، را در هر نقطه $p \in M$ در نظر می‌گیریم. وسط: مقادیر شدت یک تصویر خاکستری مستقل از انتخاب چارچوب‌های مرجع هستند. بنابراین آن‌ها توسط میدان‌های اسکالر مدل می‌شوند که با نمایش بدینهی $\rho(g) = 1 \forall g \in G$ مشخص می‌شوند. پایین: دو کanal ضریب یک تصویر گرادیان از یک تصویر اسکالار با گرفتن مشتق‌ها در امتداد محورهای چارچوب محاسبه می‌شوند. بنابراین آن‌ها وابسته به گیج هستند. تصاویر گرادیان نسبت به گیج‌های مختلف توسط نمایش گروهی $(g^{-1})^\top \rho(g) = (\rho(g^{-1}))^\top$ مرتبط هستند و بنابراین به عنوان میدان‌های کوپردار (میدان‌های تراسور از نوع (\cdot, \cdot) یا 1 -فرم‌ها) شناسایی می‌شوند. برای چرخش نمایش داده شده به میزان $\pi/2$ این منجر به کanal اول جدید $(\partial/\partial x_1^B)$ (معادل کanal دوم قدیمی $(\partial/\partial x_1^A)$) و کanal دوم جدید $(\partial/\partial x_2^B)$ (معادل منفی کanal اول قدیمی $(\partial/\partial x_2^A)$) می‌شود. نسبت به چارچوب‌های مرجع مربوطه، هر دو میدان ضریب یکسان میدان گرادیان (از اد از مختصات) را کدگناری می‌کنند. بنابراین توصیف به طور خودکار مستقل از مختصات است.

از گروه ساختار $(c) GL(c) \leq \mathbb{R}^c$ عمل می کند و شرط $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h) \forall g, h \in G$ برآورده می کند.^{۱۵} مشابه تبدیل ضرایب $g_p^{BA} = \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}$ بردار مماس در معادله (۹)، ضرایب بردار ویژگی سپس تعریف می شوند که تحت یک تبدیل گیج با مقدار G مانند^{۱۶} تبدیل شوند:

$$f^B(p) := \rho(g_p^{BA}) f^A(p), \quad (28)$$

که در آن $p \in U^A \cap U^B$ برای بصری سازی به شکل ۱۸ مراجعه کنید. با ساخته شدن برای تبدیل همگام، فضاهای چارچوب های مرجع، ضرایب بردار مماس و ضرایب بردار ویژگی گفته می شود که با یکدیگر G -مرتبط هستند. توجه داشته باشید که ساخت از طریق یک G -نمایش به طور کلی تبدیل های گیج با مقدار $GL(d)$ را توصیف نمی کند، یعنی ویژگی های کاملاً مستقل از مختصات. بنابراین بردار های ویژگی استخراج شده تنها بین به خوبی تعریف شده ای نسبت به چارچوب ها در G -ساختار در نظر گرفته شده GM خواهد داشت، که توسعه اصطلاح «استقلال از مختصات GM » پوشش داده می شود.

انتخاب های مختلف نمایش ها ρ_i انواع مختلفی از میدان های ویژگی را تولید می کنند همانطور که در شکل ۱۹ نمونه سازی شده است. به عنوان مثال، نمایش بدینه $\rho, \rho(g) = 1 \forall g \in G$ ، رفتار تبدیل میدان های اسکالار $s^A(p) \mapsto s^B(p) = 1 \cdot s^A(p)$ را توصیف می کند، که ضرایب عددی آن ها تحت تبدیل های گیج ناورده هستند. مثال هایی از میدان های اسکالار شامل تصاویر خاکستری، میدان های دما، میدان های فشار یا توزیع های احتمال در M هستند. ضرایب میدان های بردار مماس مانند $v^A(p) \mapsto v^B(p) = g_p^{BA} v^A(p)$ تبدیل می شوند و بنابراین با نمایش گروهی $\rho(g) = \rho(g)$ مطابقت دارند. مثال هایی برای میدان های بردار شامل جریان نوری یا میدان های سرعت باد هستند. میدان های تانسور عمومی تر از نوع (r, s) (توسط نمایش های حاصل ضرب تانسوری $g = \otimes^s (g^{-1})^\top \otimes^r (g^{-1})$) توصیف می شوند. آن ها به عنوان مثال تصاویر تانسور انتشار، تانسور های میدان الکترومغناطیسی یا تانسور های تششیق را مدل می کنند. انتخاب رایج برای گروه های ساختار گسسته نمایش های منظم هستند که مجموعه محدود عملیات گروهی را توسعه ماتریس های جایگشت تحقق می بخشند. نمایش های منظم به عنوان تقارن های دقیق شبکه های کریستالی، شبکه های اسپین یا پیکسل ظاهر می شوند [۳۲، ۱۹۷، ۷۴، ۲۷]. علاوه بر این، آن ها عموماً به عنوان تقریب گسسته گروه های ساختار پیوسته استفاده می شوند، به عنوان مثال گروه های چرخشی $SO(2) \leq C_N$ برای تقریب چرخش های پیوسته [۱۹۰، ۷، ۱۱۵، ۶، ۱۹۲]. آن ها از اهمیت عملی زیادی برخوردارند زیرا تبدیل ویژگی های شبکه های کانولوشنی گروهی را توصیف می کنند [۲۷]. میدان های ویژگی که تحت نمایش های کاوش ناپذیر (irrep) تبدیل می شوند در [۸۳، ۱۹۰، ۲، ۹۵، ۸۱، ۱۹۱] بررسی شدند.^{۱۶} مروی دقیق تر و معیاری گستره ای مختلف در یادگیری عمیق در [۱۹۰] ارائه شد.

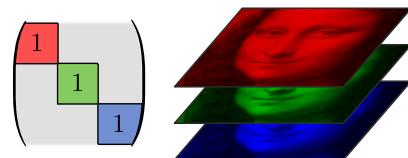
برای کامل بودن می خواهیم اشاره کنیم که میدان های بردار ویژگی آزاد از مختصات به طور رسمی به عنوان برش های هموار $f \in \Gamma$ از یک بندل بردار ویژگی $M \xrightarrow{\pi_A} A$ تعریف می شوند که با G -ساختار GM مرتبط است و فضاهای ضریب بردار ویژگی \mathbb{R}^c را به عنوان فیبرهای $f(p) \in A_p \cong \mathbb{R}^c$ در $T_p M$ در $f^B(p) = f^A(p)$ در تسهیمات محلی از یک بردار ویژگی آزاد از مختصات $\rho_i \in \mathcal{A}_p$ هستند، معمول دارد. بردار های ضریب $v^B(v) = \psi_p^B(v)$ از یک بردار مماس $v \in T_p M$ تعریف می شوند. توجه داشته باشید که، در حالی که هم ریخت هستند، فضاهای ویژگی $A_p \cong A_q$ در نقاط مختلف $p \neq q$ از M از یکدیگر متمایز هستند، به طوری که عناصر آن ها نمی توانند با هم جمع شوند. انتقال دهنده های موازی، که در بخش های ۳.۳ و ۵.۶ مورد بحث قرار گرفته اند، هم ریختی هایی بین فضاهای بردار ویژگی مختلف فراهم می کنند، که امکان جمع ویژگی ها را (پس از انتقال آن ها به همان فضای برداری) فراهم می کند. از انجا که این تعاریف کاملاً فنی هستند، ما جزئیات آن ها را فعلاً رد می کنیم و خواننده علاقه مند را به بخش ۳.۶ ارجاع می دهیم.

۲.۲.۳ میدان های ویژگی انباسته و فضاهای ویژگی مستقل از مختصات

فضاهای ویژگی شبکه های کانولوشنی معمولی شامل چندین نقشه ویژگی هستند. به طور مشابه، ما فضاهای ویژگی شبکه های کانولوشنی مستقل از مختصات را تعریف می کنیم که شامل چندین میدان ویژگی f_i از انواع بالقوه متغروات ρ_i و ابعاد c_i باشند. بنابراین یک میدان کامل از فعال سازی های یک فضای ویژگی از یک شبکه کانولوشنی مستقل از مختصات به عنوان مجموع مستقیم تعریف می شود^{۱۷}

$$f = \bigoplus_i f_i \quad (29)$$

از میدان های منفرد، هر نقشه ویژگی از یک شبکه کانولوشنی معمولی موقعیت یک ویژگی خاص را کدگذاری می کند و به طور مستقل تبدیل می شود هنگامی که ورودی شبکه جابجا می شود. میدان های ویژگی منفرد f_i شبکه های کانولوشنی مستقل از مختصات GM هم موقعیت و هم G -پوز یک ویژگی را کدگذاری می کنند. در مقابل نقشه های ویژگی معمولی،

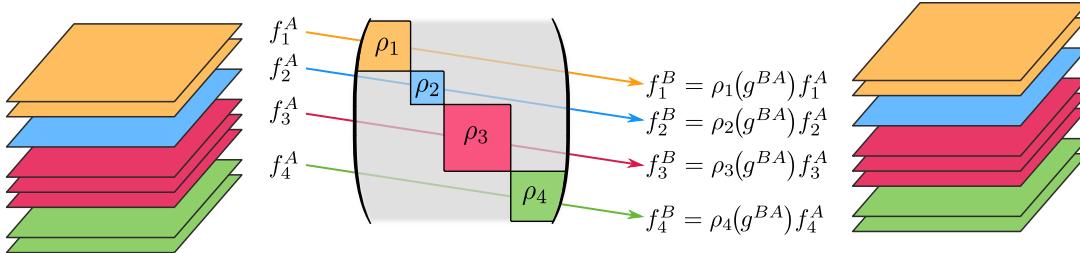


شکل ۲۰: سه کانال رنگ یک تصویر RGB به عنوان میدان های اسکالار شناسایی می شوند، بنابراین فضای ویژگی کامل طبق (۱) $(1 \oplus 1 \oplus 1) \oplus (1 \oplus 1 \oplus 1) \oplus (1 \oplus 1 \oplus 1) \oplus (1 \oplus 1 \oplus 1)$ تبدیل می شود.

^{۱۵} این شرط تضمین می کند که نمایش ها همومورفیسم های گروهی هستند، یعنی نگاشت هایی که ساختار گروهی G را رعایت می کنند. بنابراین عمل های گروه ساختار بر فضای مماس و فضاهای ضریب بردار ویژگی سازگار هستند.

^{۱۶} توسط قضیه Peter-Weyl، هر نمایش یکانی از یک گروه فشرده می تواند از طریق تغییر پایه به مجموع مستقیم irreps بر اینکه هر عملیات شبکه عصبی خطی بین نمایش های عمومی می تواند (پس از تغییر پایه) بر حسب عملیات بین irreps درگ شود [۱۰۲، ۹۰]. در مقابل، انتخاب خاص نمایش، یعنی تغییر پایه سبب است که irrep موجود در آن برای هر لایه شبکه غیرخطی اهمیت دارد.

^{۱۷} جمیع مستقیم $\bigoplus_i f_i$ را می توان به عنوان «نباسته» آن ها در یک بردار پیوسته در نظر گرفت. به طور سازگار با این، جمیع مستقیم نمایش های ρ را می توان به عنوان ساخت یک ماتریس قطری بلوکی حاوی ρ ؛ به عنوان بلوک ها در نظر گرفت؛ به اشکال ۲۰ و ۲۱ مراجعه کنید.



شکل ۲۱: یک فضای ویژگی کامل شامل چندین میدان ویژگی منفرد f_i از انواع بالقوه متفاوت و ابعاد c_i است. از طریق گیج ψ^A به صورت محلی توسط میدان‌های ضریب $\rho_i : U^A \rightarrow \mathbb{R}^{c_i}$ نمایش داده می‌شود. میدان‌های ضریب در گیج دیگر ψ^B از طریق تبدیل گیج ψ^B از طریق تبدیل گیج ψ^A مرتبه هستند. ضرایب هر میدان منفرد به طور مستقل تبدیل می‌شوند، بنابراین نمایش مدل‌سازی کل فضای ویژگی مجموع مستقیم داده می‌شود، در اینجا $\bigoplus_i \rho_i = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \rho_3 \oplus \rho_4$

میدان‌های ضریب آن‌ها، به عنوان مثال f_i^A ، علاوه بر این تضمین شده‌اند که به طور مستقل از یکدیگر تحت تبدیل‌های گیج همانطور که توسط نوع آن‌ها $G \rightarrow GL(c_i)$ مشخص شده است، تبدیل شوند. یک نمایش عددی محلی $f^A = \bigoplus_i f_i^A$ از میدان ویژگی کامل در معادله (۲۹) بنابراین طبق مجموع مستقیم نمایش‌های منفرد تبدیل می‌شود، یعنی:

$$\rho = \bigoplus_i \rho_i. \quad (30)$$

تبدیل مستقل میدان‌های منفرد تحت ρ ، که در شکل ۲۱ بصری‌سازی شده است، از ساخت روشن است:

$$\rho(g)f^A = (\bigoplus_i \rho_i(g))(\bigoplus_i f_i^A) = \bigoplus_i (\rho_i(g)f_i^A) \quad (31)$$

به عنوان یک مثال عملی از فضای ویژگی مستقل از مختصات متشکل از چندین میدان، تصویر RGB را همانطور که در شکل ۲۰ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. مانند تصویر خاکستری در شکل ۱۹، کانال‌های رنگ منفرد مقادیر شدت را کدگذاری می‌کنند که تحت تبدیل‌های گیج ناوردا هستند. بنابراین تصویر RGB کامل باید با سه میدان اسکالار شناسایی شود که هر کدام به طور مستقل تحت نمایش بدیهی «تبدیل» می‌شوند. همه میدان‌های ویژگی منفرد نیازی نیست که از همان نوع ρ_i باشند. به عنوان مثال، در یک کاربرد پیش‌بینی آب و هوای سیگنال ورودی ممکن است شامل میدان‌های اسکالار کدگذاری کننده ویژگی‌هایی مانند دما یا فشار و میدان‌های برداری مانند سرعت‌های باد باشد. توصیف به عنوان میدان‌های ρ_i از انواع مربوطه، پردازش هندسی صحیح چنین داده‌هایی را تضمین می‌کند. در حالی که انواع میدان ρ_i ورودی و خروجی یک شبکه عموماً توسط وظیفه یادگیری داده می‌شوند، انواع میدان استفاده شده در لایه‌های مخفی توسط کاربر به عنوان یک فرآپارامتر مشابه انتخاب کانال‌ها برای یک شبکه کانولوشنی معمولی انتخاب می‌شوند.

۳.۳ انتقال موازی بردارهای ویژگی

کرنل‌های شبکه‌های کانولوشنی ویژگی‌ها را از تمام نقاط q در یک همسایگی اطراف هر نقطه p از منيفولد جمع‌آوری می‌کنند. آنجا که ویژگی‌ها در نقاط مختلف در فضاهای بردار ویژگی متفاوتی قرار دارند و نسبت به گیج‌های مختلف بیان می‌شوند، باید قبل از پردازش بیشتر، در امتداد یک مسیر γ از q به p به صورت موازی منتقل شوند. ما ابتدا انتقال بردارهای مماس را مورد بحث قرار می‌دهیم، که توسط یک نگاشت انتقال موازی رسمی‌سازی می‌شود:

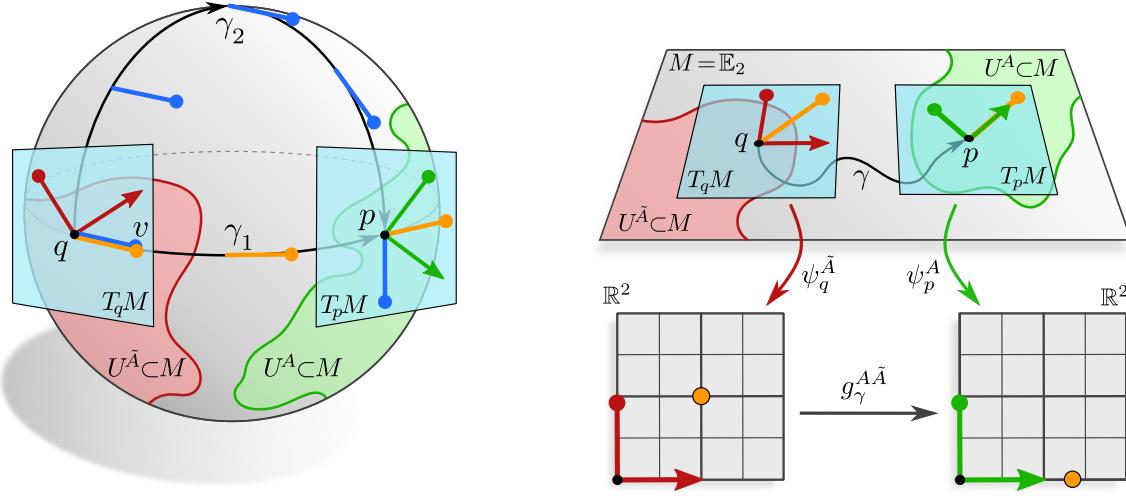
$$\mathcal{P}_\gamma : T_q M \rightarrow T_p M. \quad (32)$$

این انتقال‌دهنده اغلب از اتصال کانونی لوی-چوپیتا منیفولد محاسبه می‌شود، با این حال، ممکن است در برخی کاربردها مربوط به یک اتصال جایگزین (سازگار با G) باشد، همانطور که در ادامه و در مرور ادبیات ما در بخش سوم بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد. انتقال‌دهنده بردارهای ویژگی (مرتبط با G) از انتقال‌دهنده بردارهای مماس تبعیت می‌کند اگر انتقال سازگار با G باشد.

۱.۳.۳ انتقال‌دهنده‌های بردار مماس

از نظر آموزشی معقول است که ابتدا با حالت خاص انتقال‌دهنده‌های لوی-چوپیتا در فضاهای اقلیدسی که در شکل ۲۲ به تصویر کشیده شده‌اند، شروع کنیم، قبل از پرداختن به انتقال‌دهنده‌ها و منیفلدهای عمومی‌تر. در این حالت انتقال موازی مستقل از مسیر انتخاب شده γ است و بردار $T_p M$ نگاشت شده را به معنای معمول در فضاهای اقلیدسی مواری نگه می‌دارد. توجه داشته باشید که انتقال‌دهنده γ بین فضاهای مماس $T_q M$ و $T_p M$ نگاشت می‌کند و بنابراین مستقل از مختصات است. با این حال، می‌توان آن را نسبت به مختصات بیان کرد، سپس به جای بردارهای مماس بر روی بردارهای ضریب عددی عمل می‌کند. شهرودی در شکل ۲۲ آورده شده است، جایی که چارچوب‌ها در q و p موازی نیستند^{۱۸}

^{۱۸} برخلاف منیفلدهای عمومی \mathbb{R}^d با مفهوم کانونی موازی بودن چارچوب‌های مرجع همراه است.



(ا) انتقال موازی و مختصاتبندی آن در یک فضای مسطح.

(ب) انتقال موازی در کره S^2 .

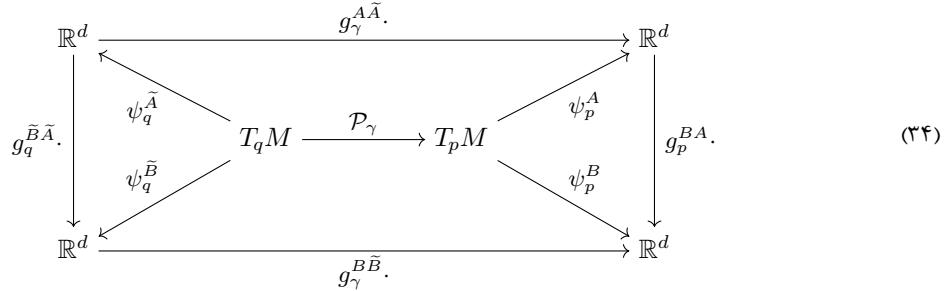
شکل ۲۲: انتقال موازی بردارهای مماس $v \in T_q M$ در $q \in T_p M$ به p . شکل ۲۲ آ حالت خاص انتقال دهندهای لوی-چویتا را در فضاهای اقلیدسی مسطح $M = \mathbb{E}_d$ بصری سازی می‌کند. مستقل از مسیر انتخاب شده γ انتقال لوی-چویتا بردار (تارنجی) را به معنای معمول در فضاهای اقلیدسی موازی نگه می‌دارد. گیج‌های $\psi_q^{\tilde{A}}$ (قرمز) و $\psi_p^{\tilde{A}}$ (سبز) امکان بیان انتقال دهنده مستقل از مختصات را توسط یک عنصر گروهی $\psi_p^{\tilde{A}} \circ \mathcal{P}_{\gamma} \circ (\psi_q^{\tilde{A}})^{-1} \in \text{GL}(d)$ فراهم می‌کنند که تغییر ضرایب بردار را در نظر می‌گیرد اگر چارچوب هدف با چارچوب منبع منتقل شده مطابقت نداشته باشد. شکل ۲۲ ب انتقال لوی-چویتا را در ۲-کره S^2 نشان می‌دهد، مقایسه کنید با معادله (۴۳۸). انتقال دهندهای γ_1 و γ_2 در انتداد مسیرهای مختلف γ_1 و γ_2 به طور کلی با یکدیگر اختلاف دارند. همانند فضاهای مسطح، انتقال دهندهای مستقل از مختصات را می‌توان توسط عناصر گروهی که بر روی ضرایب نسبت به چارچوب‌های مختصاتی در q و p عمل می‌کنند، بیان کرد.

طوری که ضرایب $(1, 0, 0, \sqrt{2})$ در q و $(0, 0, 1, \sqrt{2})$ در p متفاوت هستند، حتی اگر بردارهای مماس (مستقل از مختصات) مربوطه با یکدیگر موازی باشند. برای دقیق‌تر کردن این موضوع، گیج‌های $\psi_q^{\tilde{A}}$ و $\psi_p^{\tilde{A}}$ را در همسایگی‌های $U^{\tilde{A}}$ از q و p با ضرایب U^A (قرمز) و U^B (سبز) در نظر بگیرید. فرض کنید یک بردار $v \in T_q M$ با ضرایب $v^{\tilde{A}} \in \mathbb{R}^d$ داده شده باشد. ضرایب بردار منتقل شده v در p سپس توسط: $\mathcal{P}_{\gamma} v = \psi_p^A \circ \mathcal{P}_{\gamma} \circ (\psi_q^{\tilde{A}})^{-1} (v^{\tilde{A}})$ و \tilde{A} به صورت زیر است:^{۱۹}

$$g_{\gamma}^{A\tilde{A}} := \psi_p^A \circ \mathcal{P}_{\gamma} \circ (\psi_q^{\tilde{A}})^{-1} \in \text{GL}(d) \quad (33)$$

عنصر گروهی $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$ انتخاب‌های غیرموازی چارچوب‌های مرتع در q و p را در نظر می‌گیرد. در \mathbb{R}^d معمولاً فرض می‌شود که تمام چارچوب‌ها موازی هستند به طوری که تمام مختصاتبندی‌های انتقال دهنده‌ای لوی-چویتا بدیهی می‌شوند.^{۲۰}

از آنجا که انتقال دهنده در معادله (۳۳) وابسته به مختصات است، ما علاقه‌مند به تبدیل‌های گیج آن هستیم. گیج‌های $\psi_q^{\tilde{B}}$ و ψ_p^B را دو گیج جایگزین در همسایگی‌های q و p در نظر بگیرید. از نمودار جابجای:



^{۱۹} مقداری در $\text{GL}(d)$ می‌گیرد اگر ما اتصال‌های دلخواه (با مقدار $d(d-1)$) و گروه‌های ساختار عمومی $G \leq \text{GL}(d)$ را فرض کنیم. برای اتصال لوی-چویتا با مقدار $d(d-1)$ و چارچوب‌های متعامد، یعنی $(\mathcal{P}_{\gamma} \circ \psi_q^{\tilde{A}}) \in \text{O}(d)$ ، $G = \text{O}(d)$ را داریم.

^{۲۰} CNN‌های سنتی در \mathbb{R}^d به طور ضمنی این فرض را از چارچوب‌های موازی (شکل ۱۷) و انتقال دهنده‌ای بدیهی می‌کنند.

می‌توان خواند که انتقال‌دهنده‌ها در گیج‌های مختلف توسط:

$$g_{\gamma}^{B\tilde{B}} = g_p^{BA} g_{\gamma}^{A\tilde{A}} (g_q^{\tilde{B}\tilde{A}})^{-1} \quad (35)$$

مرتبط هستند. توجه داشته باشید که شاخص این قانون تبدیل و نمودار جابجایی به آنچه در معادلات (۲۱) و (۲۳) آمده است. تفاوت بین هر دو این است که انتقال‌دهنده دارای دامنه $T_p M$ و دامنه مشترک $T_q M$ متفاوتی است که توسط گیج‌های مختلف و مستقل از یکدیگر تشهیم شده‌اند و بنابراین به طور مستقل تبدیل می‌شوند.

به طور کلی، انتقال موازی بردارهای مماس توسط اتصال کانونی لوی-چوپیتا یک منفول ریمانی. یک اتصال را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای از انتقال‌دهنده‌های بین‌نهایت کوچک بین فضاهای مماس مجاور در نظر گرفت، به طوری که انتقال‌دهنده کامل \mathcal{P}_{γ} با انتگرال گیری اتصال در امتداد مسیر γ به دست می‌آید. انتقال‌دهنده‌ها در امتداد مسیرهای مختلف γ_1 و γ_2 از p به p نیازی به مطابقت ندارند، که در شکل ۲۲ ب انتقال‌دهنده‌های لوی-چوپیتا در ۲-کره S^3 مثال زده شده است، مقایسه کنید با معادله (۴۳۸). همانند فضاهای مسطح، انتقال‌دهنده‌های مستقل از مختصات را می‌توان توسط معادله (۳۳) نسبت به گیج‌ها بیان کرد. تبدیل‌های گیج چنین انتقال‌دهنده‌های مختصات بندی شده دوباره توسط معادله (۳۵) داده می‌شوند. انتقال‌دهنده‌ها در یک منفول داده می‌توانند در اصل به صورت تحلیلی از اتصال محاسبه شوند [۱۳۲] و گاهی اوقات می‌توانند به صورت فرم بسته بیان شوند، به عنوان مثال برای کره S^2 ، معادله (۴۳۸). چندین الگوریتم عددی برای محاسبه انتقال‌دهنده‌های موازی در مشاهدهای پراکنده معرفه شده‌اند [۱۲.۱]. ما به جزئیات بیشتر در مورد نحوه محاسبه انتقال‌دهنده‌های بردار مماس P_{γ} نخواهیم پرداخت بلکه به سادگی آن‌ها را داده شده فرض می‌کنیم.

۲.۳.۳ انتقال‌دهنده‌های بردار ویژگی

معادله (۲۸) قانون تبدیل ضرایب بردار ویژگی را توسط نوع میدان آن‌ها (ρ) تعریف می‌کند. انتقال‌دهنده موازی آن‌ها، که نسبت به گیج‌های $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$ و $g_p^{A\tilde{A}}$ بیان می‌شود، به طور مشابه با پیچیدن انتقال‌دهنده ضریب بردار مماس در این نمایش میدان داده می‌شود، یعنی توسط:

$$\rho(g_{\gamma}^{A\tilde{A}}). \quad (36)$$

توجه داشته باشید که از آنجا که \square از آنجا که $G \rightarrow \text{GL}(c)$ یک نمایش G است - این ساختار تنها زمانی به خوبی تعریف می‌شود که تمام انتقال‌دهنده‌ها $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$ (برای مسیرهای دلخواه γ و چارچوب‌های A , \tilde{A}) واقع‌مقادیری در گروه ساختار انتخاب شده G بگیرند. اینکه آیا این حالت صادق است یا خیر هم به انتخاب خاص G -ساختار (یا G -اطلس) و هم به انتقال‌دهنده‌ها (یا اتصال) مورد نظر بستگی دارد - آن‌ها باید سازگار باشدند [۱۹۳].

تمام شبکه‌های کاتولوشنی (بنابراین انتقال می‌دهند) بردارهای ویژگی را به نحوی جمع‌آوری می‌کنند، و بنابراین برخی انتخاب از اتصال و G -ساختار را فرض می‌کنند. اگر G -ساختار انتخاب شده با اتصال لوی-چوپیتا ناسازگار باشد، این به معنای آن است که این مدل‌ها \square اغلب به طور ضمنی - یک اتصال جایگزین و سازگار با G را برای جمع‌آوری ویژگی‌ها فرض می‌کنند. خواننده فعلاً باید نگران انتخاب‌های خاص اتصال‌ها باشد، که در مرور ادبیات ما در بخش سوم روش‌تر خواهد شد. در ادامه این بخش، ما بیشتر در مورد سازگاری G اتصال‌ها و G -ساختارها توضیح خواهیم داد. با فرض اینکه انتقال‌دهنده‌های ویژگی در ادامه همیشه به خوبی تعریف خواهند شد، این بخش را می‌توان با خیال راحت در اولین مطالعه نادیده گرفت.

بحث دقیق‌تر و مستقل از مختصات انتقال‌دهنده‌ها در بندل‌های بردار ویژگی مرتبط را می‌توان در بخش ۵.۶ یافت.

۲.۳.۴ سازگاری اتصال‌ها و G -ساختارها

یک اتصال با یک G -ساختار GM سازگار با G نامیده می‌شود اگر عبارات مختصاتی $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$ انتقال‌دهنده‌های \mathcal{P}_{γ} آن نسبت به هر چارچوب A , \tilde{A} از GM مقادیری در گروه ساختار G بگیرند [۱۹۳]. یک اتصال سازگار با G منجر به انتقال‌دهنده‌های بردارهای ویژگی مرتبط با G می‌شود. برای روشن کردن این شرط سازگاری تا حدی انتزاعی، چند مثال خاص را مورد بحث قرار می‌دهیم. یک مثال ساده، اتصال لوی-چوپیتا در \mathbb{R}^2 است، شکل ۲۲. دو ساختار $\{e\}$ در \mathbb{R}^2 که در اشکال آ۴۲ و آ۴۲ ب نشان داده شده‌اند را در نظر بگیرید. در اینجا $\{e\} \rightarrow G$ است، به این معنی که نوع میدان $(c) \rightarrow \text{GL}(c)$ یک نمایش $\{e\}$ است، به طوری که انتقال موازی بردارهای ویژگی تنها در صورتی می‌تواند تعریف شود که عبارات مختصاتی در $\{e\}$ مقادیری در $\{e\}$ بگیرند، یعنی بدینه باشند. از آنجا که ساختار $\{e\}$ در شکل ۴۲ از چارچوب‌های "موازی" تشکیل شده است، این امر واقعاً همینطور است - بنابراین اتصال لوی-چوپیتا با این ساختار $\{e\}$ سازگار است. در مقابل، چارچوب‌های ساختار $\{e\}$ در شکل ۴۲ ب نسبت به یکدیگر "چرخانه شده‌اند"، که منجر به عبارات مختصاتی غیربدینه $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$ می‌شود که مقادیری در $\text{SO}(2)$ می‌گیرند (در شکل ۲۲ آ بصیری سازی شده است). از آنجا که نوع میدان $(c) \rightarrow \text{GL}(c)$ است، به این معنی که $\rho : \{e\} \rightarrow G$ چرخش‌ها را مدیریت نمی‌کند، امکان تعریف انتقال لوی-چوپیتا ویژگی‌های مرتبط با این ساختار $\{e\}$ وجود ندارد - آن‌ها ناسازگار هستند. به عنوان مثال دوم، اتصال لوی-چوپیتا در S^3 را در نظر بگیرید، که در شکل ۲۲ ب نشان داده شده است. انتقال در این حالت همیشه وابسته به مسیر خواهد بود و منجر به بردارهای چرخانه شده متفاوت خواهد شد.

^{۶۱} به طور معمول، فرم ۱-اتصال اتصال، که نسبت به چارچوب‌های GM بیان می‌شود، ملزم به داشتن مقدار ρ است، که در آن \square نشان‌دهنده جبر لی G است. به طور انتزاعی‌تر، ما به اتصال‌های اصلی اهرسمن در بندل اصلی G علاقه‌مندیم.

که دلالت دارد بر اینکه $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$ مقداری در (2) SO خواهد گرفت. بردارهای ویژگی که باید مطابق با اتصال لوی-چوپتا منتقل شوند، بنابراین باید از نوع $\text{SO}(2) \rightarrow \text{GL}(c)$ باشند که یک نمایش (2) SO است. این امر حداقل نیازمند ساختار (2) SO در S^3 است که در شکل 157 نشان داده شده است. ساختار $\{e\}$ در S^3 از شکل 57 با اتصال لوی-چوپتا ناسازگار است.

از آنجا که اتصال لوی-چوپتا یک اتصال متريک است، طول و زاويه بين بردارهای مماس را حفظ می کند، و بنابراین چارچوب های متعامد را به چارچوب های متعامد منتقل می کند. نتيجه می شود که اتصال لوی-چوپتا همیشه با ساختار $O(d)$ چارچوب های متعامد سازگار است، که نسبت به

آن $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$ مقداری در $O(d)$ می گيرد. اگر منيفولد قابل جهتگيري باشد، دستسانی چارچوب توسط انتقال دهنده های لوی-چوپتا حفظ می شود، به اين معنی که آنها تضمین شده اند که با ساختارهای $\text{SO}(d)$ چارچوب های متعامد راستگرد در M سازگار باشند. تمام شبکه های کانولوشنی در مور ادبیات ما در بخش سوم که بر اساس ساختارهای $\text{SO}(d)$ هستند، ویژگی ها را از طریق انتقال دهنده های لوی-چوپتا جمع آوری می کنند.

اگر یک G -ساختار داده شده با اتصال لوی-چوپتا ناسازگار باشد، باید یک اتصال جایگزین و سازگار با G را برای انتقال بردارهای ویژگی تعريف کرد. بر جسته ترین مثال در مور ادبیات ما، اتصال های بدیهی در ساختارهای $\{e\}$ است. یک اتصال بدیهی با خاصیت مستقل از مسیر بودن انتقال آن مشخص می شود [37]. هر ساختار $\{e\}$ یک اتصال بدیهی منحصر به فرد را نتيجه می دهد، که بردارهای مماس را به گونه ای منتقل می کند که

زاویه یکسانی را با چارچوب های مرجع ساختار $\{e\}$ حفظ کنند. این امر دلالت دارد بر اینکه $\mathbb{E} = e$ یعنی آنها بردارهای ضرب را در \mathbb{R}^c (نسبت به چارچوب های ساختار $\{e\}$) بدون تغییر مقدار عددی آنها منتقل می کنند. چنین انتقال دهنده هایی در شبکه های کانولوشنی استفاده می شوند که انتقال دهنده های غیربدیهی را به صراحت مدل نمی کنند - که در مورد تمام شبکه های دارای $G = \{e\}$ در جدول 6 صادق است، به ویژه آن هایی که در بخش های 11 و 12 هستند. توجه داشته باشید که اتصال بدیهی تنها اتصالی است که با یک ساختار $\{e\}$ سازگار است.

همانطور که در بالا ذکر شد، هر شبکه کانولوشنی برخی انتخاب از G -ساختار و اتصال سازگار را فرض می کند، اغلب اتصال های لوی-چوپتا یا اتصال های بدیهی.

بخش 5.6 به طور مفصل در مورد سازگاری انتقال دهنده ها و G -ساختارها از دیدگاه مستقل از مختصات توضیح می دهد.

4.3 عمل ايزومتری ها و تبدیل های گیج القا شده

تا کنون بحث ما منحصرأ بر تقارن های گیج محلی در مختصات بندی فضاهای مماس متتمرکز بوده است. یک منيفولد ممکن است، با این حال، خود دارای تقارن های غیربدیهی باشد، که در مورد یک منيفولد ریمانی M گروه ايزومتری آن $\text{Isom}(M)$ را تشکیل می دهد. این بخش ايزومتری ها و عمل آنها بر منيفلدها، بردارهای مماس، چارچوب های مرجع و میدان های ویژگی را به طور خلاصه مورد بحث قرار می دهد، نتایجی را خلاصه می کند که به طور دقیق تری در بخش 1.8 استخراج شده اند. ما بدین ترتیب معادلی بین عمل های فعال ايزومتری و تفسیر منفعل آنها بر حسب تبدیل های گیج القا شده توسط ايزومتری را بر جسته خواهیم کرد. این معادلی بعد امکان توصیف تناوب پذیری ايزومتری GM -کانولوشن ها را فراهم خواهد کرد.

ايزومتری ها به عنوان تقارن های منيفلدهای ریمانی تعریف می شوند، یعنی آن نگاشت ها (دیفتومورفیسم ها)

$$\phi : M \rightarrow M, \quad (37)$$

که متريک و در نتيجه فواصل روی M را حفظ می کنند. مجموعه همه ايزومتری های یک منيفولد ریمانی M گروه ايزومتری آن را تشکیل می دهد، که ما آن را با $\text{Isom}(M)$ نشان می دهیم. به عنوان مثال، گروه اقلیدسی $E(d)$ گروه ايزومتری فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d است. این گروه شامل انتقال ها، چرخش ها و بازتاب ها است، که همه آنها متريک استاندارد \mathbb{E}_d را حفظ می کنند. گروه ايزومتری -2 -کره S^3 توسعه گروه متعامد $O(3)$ داده می شود، که شامل چرخش ها و بازتاب ها است. شکل 23 منيفولد تخم مرغی شکلی را نشان می دهد که ايزومتری های آن چرخش ها و بازتاب ها در (2) حول محور عمودی هستند.

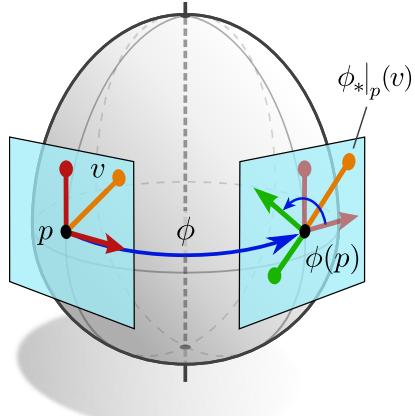
1.4.3 پيش برنده بردارهای مماس

هر ايزومتری $\phi \in \text{Isom}(M)$ از طریق پيش برنده (یا دیفرانسیل) آن

$$\phi_*|_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} M, \quad (38)$$

به طور طبیعی بر بردارهای مماس عمل می کند. همانطور که در شکل 12 (وسط) بصری سازی شده است، پيش برنده را می توان به طور شهودی به عنوان حمل بردارهای مماس همراه با عمل ايزومتری بر منيفولد زیرین M در نظر گرفت. تعریف رسمی پيش برنده بر روی TM در پیوست 2.1 آورده شده است، با این حال، شهود ارائه شده برای هدف ما کافی است. از آنجا که پيش برنده یک نگاشت خطی آزاد از مختصات بین فضاهای مماس است، عمل آن در مختصات توسط ماتریس d نمایش داده می شود. با فرض گیج های ψ_p^A و $\psi_{\phi(p)}^{\tilde{A}}$ در موقعیت منبع و هدف، به ترتیب، این ماتریس توسط

$$g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) := \psi_{\phi(p)}^A \circ \phi_*|_p \circ (\psi_p^{\tilde{A}})^{-1} \in \text{GL}(d). \quad (39)$$



شکل ۲.۳: بصری‌سازی پیش‌برنده آزاد از مختصات بردارهای مماس و بیان مختصاتی آن نسبت به چارچوب‌های مرجع داده شده در موقعیت منبع و هدف. پیش‌برنده آزاد از مختصات $\phi_*|_p(v) \in T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} M$ به $v \in T_p M$ را به $\psi_p^{\tilde{A}}(v) \in T_{\phi(p)} M$ منتقل می‌کند. فرض کنید $\psi_p^{\tilde{A}}$ گیج در p در $\phi(p)$ که متناظر با چارچوب مرجع سبز است. آن‌ها بردارها را قبل و بعد از پیش‌برنده توسط ضرایب عددی $(1, 1)^T$ که متناظر با چارچوب مرجع سبز است. آن‌ها بردارها را قبل و بعد از پیش‌برنده توضیح می‌دهند. این تبدیل ضرایب بردار توسط تبدیل گیج القا شده توسط ایزومنتری ϕ توصیف می‌شود، یعنی $(\psi_{\phi(p)}^{\tilde{A}}(\phi_*|_p(v)) = g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \cdot \psi_p^{\tilde{A}}(v)$. ضرایب بردارهای ویژگی به طور مشابه طبق $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in G$ تبدیل می‌شوند اگر $\rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))$ تبدیل می‌شوند.

داده می‌شود. این ماتریس تبدیل از ضرایب عددی یک بردار اصلی $v \in T_p M$ در گیج $\phi_*|_p(v) \in T_{\phi(p)} M$ را بیان می‌نماید، یعنی $(\psi_{\phi(p)}^{\tilde{A}}(\phi_*|_p(v)) = g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \cdot \psi_p^{\tilde{A}}(v)$. نمودار جابجایی

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & & \mathbb{R}^d \\ \downarrow \psi_p^{\tilde{B}} & \nearrow \phi_*|_p & \downarrow \psi_{\phi(p)}^A \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)} & \mathbb{R}^d \\ \downarrow \psi_{\phi(p)}^B & & \downarrow g_{\phi(p)}^{B\tilde{A}} \\ \mathbb{R}^d & & \mathbb{R}^d \end{array} \quad (40)$$

که از نظر مفهومی شبیه آن در معادله (۳۴) است، تعریف بیان مختصاتی پیش‌برنده بردار مماس را بصری‌سازی می‌کند. علاوه بر این دلالت دارد بر اینکه تبدیل‌های گیج بین مختصات‌بندی‌های مختلف توسط

$$g_{\phi}^{B\tilde{B}} = g_{\phi(p)}^{BA} g_{\phi}^{A\tilde{A}} (g_p^{\tilde{B}\tilde{A}})^{-1}, \quad (41)$$

داده می‌شوند، که معادل مفهومی معادله (۳۵) است.

۲.۴.۳ پیش‌برنده چارچوب‌های مرجع و تقارن‌های G -ساختار

از آنجا که چارچوب‌های مرجع فقط d -تاپل‌هایی از بردارهای چارچوب خطی مستقل هستند، پیش‌برنده بردارهای مماس پیش‌برندهای از چارچوب‌های مرجع را با پیش‌بردن محورهای چارچوب منفرد القا می‌کند. به طور خاص، پیش‌برنده یک چارچوب $[e_i]_{i=1}^d$ در p به عنوان چارچوب $\phi(p)$ در $\phi|_p(e_i)$ تعریف می‌شود.

این پیش‌برنده چارچوب‌ها همیشه به خوبی تعریف شده است، با این حال، ممکن است با G -ساختار سازگار نباشد، یعنی به طور کلی تضمینی وجود ندارد که چارچوب‌ها در GM هنگام پیش‌برده شدن در GM باقی بمانند. به عنوان مثال ۱۱ انتقال در شکل ۱۱ (بالا چپ) را در نظر بگیرید، که توسط انتقال‌های افقی حفظ می‌شود اما توسط انتقال‌های عمودی یا هر ایزومنتری دیگر از \mathbb{R}^d حفظ نمی‌شود. به طور مشابه، R -ساختار در شکل ۱۱ (پایین چپ) توسط انتقال‌ها و بازتاب‌های افقی حفظ می‌شود، اما توسط چرخش‌ها نه. بنابراین ما زیرگروه

$$\text{Isom}_{GM} := \left\{ \phi \in \text{Isom}(M) \mid [\phi_*(e_i)]_{i=1}^d \in GM \quad \forall [e_i]_{i=1}^d \in GM \right\} \leq \text{Isom}(M) \quad (42)$$

ایزومنتری‌هایی که تقارن‌های G -ساختار هستند را در نظر می‌گیریم، یعنی آن‌هایی که تضمین شده‌اند هر چارچوب در GM را به چارچوب دیگری که نیز در GM موجود است، نگاشت کنند.^{۲۲} توجه داشته باشید که Isom_{GM} به طور کلی به انتخاب خاص G -ساختار GM بستگی دارد، نه فقط به گروه ساختار G . برای حالت خاص که $G \geq O(d)$ ، تضمین شده است که $\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M)$ مطابقت داشته باشند زیرا

^{۲۲} به طور رسمی تری بیان شود، چنین ایزومنتری‌هایی اتومorfیسم‌های بندل اصلی G -ساختار هستند (یا القا می‌کنند).

ایزومتری‌ها تضمین شده‌اند که چارچوب‌های متعامد را به چارچوب‌های متعامد نگاشت کنند. ما علاقه‌مند به زیرگروه Isom_{GM} هستیم زیرا تنها آن ایزومتری‌ها پیش‌برنده به خوبی تعریف شده‌ای از بردارهای ویژگی مستقل از مختصات GM را القا خواهند کرد، همانطور که در بخش بعدی بیشتر مورد بحث قرار گرفته است.

پیش از ادامه به عمل ایزومتری بر بردارهای ویژگی، ما آنچه را که تبدیل‌های گیج القا شده توسط ایزومتری می‌نامیم، مورد بحث قرار می‌دهیم. برای این منظور، فرض کنید $[e_i^A]_{i=1}^d$ آن چارچوب در p باشد که متناظر با گیج منبع ψ است و فرض کنید $[e_i^{\tilde{A}}]_{i=1}^d$ آن چارچوب در (p) باشد که متناظر با گیج هدف ϕ است، همانطور که در شکل ۲۳ به ترتیب در قرمز (چپ) و سبز (راست) نشان داده شده است. پیش‌برنده بخش ۳.۱.۸ اثبات شده است، دو چارچوب توسط تبدیل گیج القا شده توسط ایزومتری مرتبط هستند:

$$[\phi_*|_p(e_i^{\tilde{A}})]_{i=1}^d = [e_i^A]_{i=1}^d \triangleleft g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p), \quad (43)$$

که در آن $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)$ عنصر گروهی از معادله (۳۹) و \triangleleft عمل راست از معادله (۱۱) است. اصطلاح «تبدیل گیج القا شده توسط ایزومتری» تا آنجا معنا دارد که هندسه‌های اطراف p و (p) غیرقابل تشخیص هستند زیرا ϕ یک ایزومتری، یعنی یک تقارن از M است. با شناسایی دو نقطه با یکدیگر، بنابراین می‌توان عمل فعل ϕ بر یک کمیت هندسی را به عنوان یک تبدیل گیج منفعل، یعنی یک تغییر القا شده از چارچوب منبع به چارچوب هدف، تفسیر مجدد کرد.

قضیه ۳.۸ در بخش ۱.۸ اثبات می‌کند که ایزومتری‌های حفظ‌کننده G -ساختار در Isom_{GM} و تبدیل‌های گیج القا شده با مقدار G یکدیگر را نتیجه می‌دهند، یعنی

$$\phi \in \text{Isom}_{GM} \iff g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in G \quad \forall p \in M \quad (44)$$

برای گیج‌های دلخواه $\psi_p^{\tilde{A}}$ و $\psi_{\phi(p)}^A$ از G -اطلس برقرار است. خواننده باید این ادعاهای ما در شکل ۱۱ تأیید کند.

۳.۴.۳ پیش‌برنده بردارهای ویژگی

اگر (و تنها اگر) یک ایزومتری تقارنی از G -ساختار باشد، منجر به پیش‌برنده بردارهای ویژگی می‌شود. به طور شهودی، این پیش‌برنده بردارهای ویژگی را از نقاط p به $\phi(p)$ منتقل می‌کند. هنگامی که نسبت به دو چارچوب مرجع در p و $\phi(p)$ بیان شود، توسط تبدیل گیج القا شده

$$\rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)). \quad (45)$$

داده می‌شود. توجه داشته باشید که این تبدیل برای هر $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ به خوبی تعریف شده است، زیرا تبدیل‌های گیج القا شده در $g_{\phi}^{A\tilde{A}}$ این حالت مقادیری در G خواهند گرفت و ρ یک G -نمایش است. در مقابل، اگر ϕ تقارنی از G -ساختار نباشد، تعریف پیش‌برنده بردار ویژگی متناظر غیرممکن است. این گزاره با این واقعیت مرتبط است که ویژگی‌های های معمولی هیچ رفتار تبدیل مشخصی تحت چرخش‌ها یا بارتابها در گروه اقليدسي $E(d)$ ندارند.

پیش‌برنده بردارهای ویژگی منفرد عملی بر کل میدان ویژگی f را دلالت می‌کند، که ما آن را با $f \triangleright \phi$ نشان می‌دهیم. نسبت به مختصات، این عمل به صورت

$$[\phi \triangleright f]^A(\phi(p)) = \rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)) f^{\tilde{A}}(p). \quad (46)$$

بیان می‌شود. ما بعداً اثبات خواهیم کرد که های معمولی متناظر با عمل ایزومتری‌ها در Isom_{GM} بر میدان‌های ویژگی تناوب‌پذیر هستند؛ به شکل ۲۷ مراجعاً کنید. این ویژگی بر این واقعیت تکیه دارد که عمل فعل ایزومتری بر میدان‌های ویژگی می‌تواند توسط معادله (۴۶) به عنوان یک تبدیل گیج منفعل صرف ضایعه بردار ویژگی در ک شود.

۴ شبکه‌های مستقل از مختصات و GM -کانولوشن‌ها

شبکه‌های عصبی داده‌ها را با اعمال مجموعه‌ای از نگاشت‌های پارامتری (لایه‌ها) به یک سیگنال ورودی پردازش می‌کنند - در مورد ما به مجموعه‌ای از میدان‌های ویژگی بر روی یک مینیفولد ریمانی. اصل کوواریانس بدین ترتیب ایجاب می‌کند که لایه‌های منفرد شبکه باشد عملیات مستقل از مختصات GM باشند. نمایش‌های مختصاتی چنین لایه‌ای باید طوری تبدیل شوند که قوانین تبدیل میدان‌های ویژگی ورودی و خروجی خود را رعایت کنند. به جز این الزام سازگاری، لایه‌های مستقل از مختصات عمومی بدون محدودیت باقی می‌مانند.

یک اصل طراحی رایج شبکه‌های عصبی که بر روی سیگنال‌های فضایی (میدان‌های ویژگی) عمل می‌کنند این است که آن‌ها به معنای تعمیم یافته‌ای کانولوشنی هستند. ویژگی اصلی که اکثر تعمیم‌های عملیات کانولوشن در آن مشترک هستند این است که استنتاج آن‌ها مستقل از موقعیت است. این امر با اشتراک توابع قالب، به عنوان مثال کرنل‌های کانولوشن یا بایاس‌ها، بین مکان‌های مختلف حاصل می‌شود. هر زمان که گروه ساختار G

غیربدهی باشد، فرآیند اشتراک وزن مبهم است زیرا توابع قالب می‌توانند نسبت به چارچوب‌های مرجع مختلف به اشتراک گذاشته شوند. همانطور که در ادامه استدلال خواهیم کرد، این ابهام با طراحی توابع قالب مشترک برای تناوب‌پذیر بودن تحت تبدیل‌های گیج با مقدار G حل می‌شود. توابع قالب تناوب‌پذیر گیج نسبت به چارچوب مرجع خاصی که در آن اعمال می‌شوند بی‌تفاوت خواهد بود و بنابراین امکان اشتراک وزن مستقل از مختصات را فراهم می‌کنند.

۳۹	۱.۴	عملیات نقطه‌ای تناوب‌پذیر گیج
۳۹	۱.۱.۴	کانولوشن‌های 1×1 تناوب‌پذیر گیج
۴۱	۲.۱.۴	جمع بایاس تناوب‌پذیر گیج
۴۲	۳.۱.۴	غیرخطی‌های تناوب‌پذیر گیج
۴۳	۲.۰.۴	تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM
۴۳	۱.۲.۴	دیدگاه یک ناظر محلی به میدان‌های ویژگی
۴۵	۲.۲.۴	کرنل‌های مستقل از مختصات و تبدیلات میدان کرنل
۴۷	۳.۲.۴	کانولوشن‌های GM -راهبر و کرنل‌های G -راهبر
۵۱	۳.۴	تناوب‌پذیری ایزومنتری

در این بخش ما لایه‌های شبکه‌ای را در نظر خواهیم گرفت که میدان‌های f_{in} از نوع ρ_{in} را به عنوان ورودی می‌گیرند و میدان f_{out} از نوع ρ_{out} به عنوان خروجی تولید می‌کنند. بخش ۱.۴ حالت خاص لایه‌هایی را که به صورت نقطه‌ای عمل می‌کنند مورد بحث قرار می‌دهد، یعنی آن‌هایی که خروجی آن‌ها $f_{out}(p)$ در هر $p \in M$ تنها به بردار ویژگی ورودی متفاوت ($f_{in}(p)$) در همان مکان بستگی دارد. مثال‌های عملی مرتبط که در اینجا در نظر گرفته شده‌اند ببارتند از کانولوشن‌های 1×1 تناوب‌پذیر گیج در بخش ۱.۱.۴، جمع بایاس در بخش ۲.۱.۴ و غیرخطی‌های در بخش ۲.۰.۴. حالت پیچیده‌تر کانولوشن‌ها با کرنل‌های گسترده فضایی در بخش ۲.۲.۴ بررسی شده است. به عنوان آماده‌سازی، بخش ۱.۲.۴ میدان‌های ویژگی را همانطور که از دیدگاه مشاهده‌گران محلی (چارچوب‌های مرجع) دیده می‌شوند مورد بحث قرار می‌دهد، که کرنل‌های (کانولوشن) نسبت به آن‌ها اعمال خواهند شد. چنین مشاهداتی به عنوان پس‌کشی میدان ویژگی به فضای مماس یک مشاهده‌گر رسمی‌سازی می‌شوند؛ به شکل ۲۴ مراجعة کنید. بخش ۲.۲.۴ به اصطلاح تبدیل‌های میدان کرنل را معرفی می‌کند، که شبیه کانولوشن‌ها هستند اما اشتراک وزن فضایی را فرض نمی‌کنند و بنابراین توسط یک میدان کرنل (به صورت هموار متغیر) بر روی M پارامتری می‌شوند. کانولوشن‌های واقعی در بخش ۳.۲.۴ به عنوان آن تبدیل‌های میدان کرنل تعریف می‌شوند که توسط یک کرنل قالب متفاوت مشترک پارامتری می‌شوند. به منظور تضمین استقلال از مختصات فرآیند اشتراک وزن، کرنل‌های کانولوشن مطالبه می‌شوند، یعنی قید تناوب‌پذیری گیج را برآورده کنند. بخش ۳.۴ نشان می‌دهد که GM -کانولوشن‌ها به طور خودکار تحت آن ایزومنتری‌هایی که تقارن‌های G -ساختر هستند (تناوب‌پذیر Isom GM) تناوب‌پذیر هستند. این بدان معنی است که GM -کانولوشن‌ها با عمل ایزومنتری‌ها بر میدان‌های ویژگی همانطور که در شکل ۲۷ بصری‌سازی شده است، جابجا می‌شوند.

۱.۴ عملیات نقطه‌ای تناوب‌پذیر گیج

برای شروع، ما برخی عملیات شبکه عصبی را در نظر می‌گیریم که محدودیت‌های ناشی از استقلال از مختصات مورد نیاز و اشتراک وزن به ویژه ساده قابل استخراج هستند. همه این عملیات‌این ویژگی مشترک را دارند که به صورت نقطه‌ای بر بردارهای ویژگی عمل می‌کنند، یعنی بردارهای ویژگی خروجی ($f_{out}(p)$) در اساس بردارهای ویژگی ورودی ($f_{in}(p)$) در همان مکان محاسبه می‌کنند. به منظور ارضا اصل کوواریانس، مختصات‌بندی‌های این عملیات همگی مطالبه می‌شوند که مطابق پیش‌ترکیب با ρ_{in} و پس‌ترکیب با ρ_{out} تبدیل شوند. هنگام تقاضای اینکه عملیات بر حسب وزن‌های مشترک تعیین شوند، این قوانین تبدیل‌الزامی (یا ناورداشی) عملیات را دلالت می‌کنند.

استخراج‌ها برای عملیات نقطه‌ای مختلف در بخش‌های بعدی ۱.۱.۴، ۲.۱.۴ و ۳.۱.۴ در گام‌های اول عمدتاً مشابه هستند و به محدودیت‌های کوواریانس و تناوب‌پذیری اساساً یکسانی بر توابع قالب منجر می‌شوند. بنابراین آن‌ها می‌توانند با هم بررسی شوند، عملیات خاص (با تابع قالب) را انتزاعی نگه داشته. با این حال، از آنجا که مفاهیم محدودیت‌های حاصل برای نمونه‌سازی‌های خاص متفاوت است، و از آنجا که می‌خواهیم بحث را نزدیک به کاربرد نگه داریم، چنین فرمول‌بندی انتزاعی را حذف خواهیم کرد و مستقیماً نمونه‌سازی‌های خاص را در نظر خواهیم گرفت.

۱.۱.۴ کانولوشن‌های 1×1 تناوب‌پذیر گیج

به عنوان اولین مثال از عملیات نقطه‌ای، ما عمل خانواده‌ای از نگاشتهای خطی \mathcal{C}_p را در نظر می‌گیریم، که بردار ویژگی ورودی ($f_{in}(p)$) را در هر $p \in M$ به بردار ویژگی خروجی

$$f_{out}(p) := \mathcal{C}_p f_{in}(p). \quad (47)$$

ارسال می‌کنند. اگر فرض اشتراک وزن فضایی را اضافه کنیم، نگاشتهای خطی \mathcal{C}_p و \mathcal{C}_q در مکان‌های مختلف p و q جفت خواهند شد، و عملیات را می‌توان به عنوان کانولوشنی با کرنل دلتای دیراک با مقدار عملگر خطی دید. این عملیات در بینایی کامپیوتر بسیار رایج است، جایی که معمولاً به عنوان کانولوشن 1×1 نشان داده می‌شود، زیرا گسسته‌سازی فضایی یک کرنل دیراک خطی که بر روی تصاویر دو بعدی عمل می‌کند توسط

کرنل (با مقدار ماتریس) با گستره فضایی 1×1 پیکسل داده می‌شود. ما در ادامه استخراج خواهیم کرد که تقاضای اشتراک وزن فضایی منجر به محدودیتی خواهد شد که کرنل‌های قالب با مقدار ماتریس را مجبور می‌کند که در هم تنیده باشند، یعنی ماتریس‌های تناوب‌پذیر گیج.

پیش از فرض اشتراک وزن، بیان‌های مختصاتی نگاشتهای خطی \mathcal{C}_p و تبدیلهای خطی گیج بین آن‌ها بسیار شبیه آن‌های از نگاشتهای خطی بر روی $T_p M$ رفتار می‌کنند، که در بخش ۲.۱.۳ مورد بحث قرار دادیم. از آنجا که بردارهای ویژگی ورودی و خروجی در مختصات توسط بردارهای ضریب $\mathcal{C}_p^A \in \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ نمایش داده می‌شوند، نگاشت خطی به طور طبیعی توسط آن ماتریس $f_{\text{out}}^A(p) \in \mathbb{R}^{c_{\text{out}}}$ و $f_{\text{in}}^A(p) \in \mathbb{R}^{c_{\text{in}}}$ نمایش داده می‌شود که

$$f_{\text{out}}^A(p) = \mathcal{C}_p^A \cdot f_{\text{in}}^A(p). \quad (48)$$

را برآورده می‌کند. این رابطه البته برای مختصات‌بندی‌های دلخواه برقرار است، به طوری که برای هر گیج دیگری که با B برچسب گذاری شده است، $f_{\text{out}}^B(p) = \mathcal{C}_p^B \cdot f_{\text{in}}^B(p)$ داریم. قانون تبدیلی که \mathcal{C}_p^B را به \mathcal{C}_p^A مرتبط می‌کند از اصل کوواریانس از قوانین تبدیل ویژگی‌های ورودی و خروجی پیروی می‌کند. از آنجا که این‌ها توسط $f_{\text{out}}^B(p) = \rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) f_{\text{out}}^A(p)$ و $f_{\text{in}}^B(p) = \rho_{\text{in}}(g_p^{BA}) f_{\text{in}}^A(p)$ داده می‌شوند، داریم:

$$\begin{aligned} f_{\text{out}}^B(p) &= \mathcal{C}_p^B \cdot f_{\text{in}}^B(p) \\ \Leftrightarrow \rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) f_{\text{out}}^A(p) &= \mathcal{C}_p^B \rho_{\text{in}}(g_p^{BA}) f_{\text{in}}^A(p) \\ \Leftrightarrow f_{\text{out}}^A(p) &= \rho_{\text{out}}(g_p^{BA})^{-1} \mathcal{C}_p^B \rho_{\text{in}}(g_p^{BA}) f_{\text{in}}^A(p). \end{aligned} \quad (49)$$

مقایسه با معادله (۴۸) دلالت دارد بر اینکه دو بیان مختصاتی \mathcal{C}_p لزوماً با

$$\mathcal{C}_p^B = \rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) \mathcal{C}_p^A \rho_{\text{in}}(g_p^{BA})^{-1} \quad (50)$$

مرتبط هستند اگر قرار باشد قوانین تبدیل بردارهای ویژگی را رعایت کنند. همانطور که معمول است، این ملاحظات به طور مختصر توسط نمودار جابجایی ضبط می‌شوند:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}_p^A. & \\ \mathbb{R}^{c_{\text{in}}} & \xrightarrow{\mathcal{C}_p^A.} & \mathbb{R}^{c_{\text{out}}} \\ \rho_{\text{in}}(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) \cdot \\ & \mathbb{R}^{c_{\text{in}}} & \xrightarrow{\mathcal{C}_p^B.} \mathbb{R}^{c_{\text{out}}} \end{array} \quad (51)$$

مفهوم عملی مهم این نتیجه تا کنون این است که نگاشت خطی \mathcal{C}_p به هیچ وجه محدود نیست. به بیان دیگر: تا زمانی که بیان‌های مختصاتی در گیج‌های مختلف توسط معادله (۵۰) مرتبه باشند، آزاد هستیم که \mathcal{C}_p را در یک گیج دلخواه ثابت A توسط ماتریس بدون محدودیت \mathcal{C}_p^A پارامتری کنیم. همانطور که خواهیم دید، وضعیت زمانی تغییر می‌کند که نگاشتهای خطی اشتراک وزن داشته باشند.

حال حالتی را در نظر بگیرید که نگاشتهای خطی \mathcal{C}_q و وزن‌ها را به اشتراک می‌گذارند. این بدان معنی است که فرض می‌کنیم آن‌ها توسط مجموعه مشترکی از پارامترها پارامتری شوند، که توسط کرنل قالب $1 \times 1 \in \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ داده می‌شود. سؤال باز این است که دقیقاً چگونه نگاشتهای آزاد از مختصات باید بر حسب این کرنل قالب پارامتری شوند. الزام ما برای استقلال از مختصات GM تقاضاً می‌کند که هیچ چارچوب مرجع خاصی را در فرآیند اشتراک وزن ترجیح ندهیم، یعنی همه مختصات‌بندی‌ها را به همان شیوه درمان کنیم. بنابراین لازم است که کرنل قالب را با همه مختصات‌بندی‌ها به اشتراک بگذاریم، یعنی

$$\mathcal{C}_p^X = K_{1 \times 1} (U^X, \psi^X) \in \mathcal{A}^G \quad p \in U^X, \quad (52)$$

تنظیم کنیم، که در آن \mathcal{A}^G (حداکثر) G -اطلس متناظر با G -ساختمان در نظر گرفته شده است؛ به معادله (۲۵) مراجعه کنید. از آنجا که محدودیت کوواریانس در معادله (۵۰) نیاز دارد که برای گیج‌های دلخواه مرتبه با G برقرار باشد، و مختصات‌بندی‌های $\mathcal{C}_p^A = \mathcal{C}_p^B$ نگاشتهای خطی همگی مطابقت دارند، تقاضای مشترک برای اشتراک وزن و استقلال از مختصات GM منجر به محدودیت

$$K_{1 \times 1} = \rho_{\text{out}}(g) K_{1 \times 1} \rho_{\text{in}}(g)^{-1} \quad \forall g \in G \quad (53)$$

بر کرنل قالب می‌شود. تطبیق متناظر نمودار جابجایی در معادله (۵۱) با اشتراک وزن توسط:

$$\begin{array}{ccc} & K_{1 \times 1}. & \\ \mathbb{R}^{c_{\text{in}}} & \xrightarrow{K_{1 \times 1}.} & \mathbb{R}^{c_{\text{out}}} \\ \rho_{\text{in}}(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) \cdot \\ & \mathbb{R}^{c_{\text{in}}} & \xrightarrow{K_{1 \times 1}.} \mathbb{R}^{c_{\text{out}}} \end{array} \quad (54)$$

داده می‌شود.

نتیجه‌گیری این تحلیل این است که کرنل‌های قالبی که می‌توانند بدون ابهام به اشتراک گذاشته شوند دقیقاً آن‌هایی هستند که تحت عمل گیج ناوردا هستند. فضای برداری چنین کرنل‌های 1×1 ناورد گیج ساده فضای نگاشته‌های درهم‌تییده بین نمایش‌های ρ_{in} و ρ_{out} است، یعنی

$$\text{Hom}_G(\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}) := \left\{ K_{1 \times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \mid K_{1 \times 1} = \rho_{\text{out}}(g) K_{1 \times 1} \rho_{\text{in}}(g)^{-1} \quad \forall g \in G \right\} \subseteq \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}. \quad (55)$$

توجه داشته باشید که، طبق لم شور [۶۱]، الزام بر $K_{1 \times 1}$ برای درهم‌تییده بودن مانع از نگاشت بین میدان‌های کاهش‌ناپذیر غیره هم ریخت تبدیل می‌شوند از طریق کانولوشن‌های 1×1 می‌شود. این محدودیت شدید با کرنل‌های 1×1 اجتناب‌ناپذیر است اما بعداً هنگام اجازه دادن به کرنل‌های گسترده فضایی حل خواهد شد.

در این نقطه می‌خواهیم اشاره کنیم که اصطلاحات «تابع قالب تناوب‌پذیر گیج» و «تابع قالب ناورد گیج» را به طور متقابل استفاده می‌کنیم. این با مشاهده توجیه می‌شود که محدودیت ناورداییی در معادله (۵۳) می‌تواند به عنوان محدودیت تناوب‌پذیری $\rho_{\text{in}}(g) K_{1 \times 1} \rho_{\text{out}}(g) = \rho_{\text{out}}(g) K_{1 \times 1}$ $\forall g \in G$ نوشته شود. به طور کلی امکان مشاهده توابعی که نسبت به عمل گروهی در دامنه و دامنه مشترک آن‌ها تناوب‌پذیر هستند به عنوان ناوردایی عمل متناظر بر خود تابع وجود دارد. در کاربرد ما، دیدگاه تناوب‌پذیری بر جسته می‌کند که تبدیل میدان ورودی منجر به تبدیل متناظر میدان خروجی خواهد شد، که تضمین می‌کند همه کمیت‌های در گیر به طور کوواریانت با یکدیگر تبدیل شوند. از طرف دیگر، دیدگاه ناوردایی تأکید می‌کند که تابع قالب می‌تواند در گیج دلخواه به اشتراک گذاشته شود.

۲.۱.۴ جمع بایاس تناوب‌پذیر گیج

پس از اعمال عملیات کانولوشن، رایج است که بردار بایاس (مشترک) به بردارهای ویژگی منفرد جمع شود. همراه با الزام استقلال از مختصات، اشتراک وزن دوباره منجر به محدودیت خطی خواهد شد. این محدودیت تنها اجازه جمع شدن بایاس‌ها به زیرفضاهای ناوردآ عمل گیج بر میدان ویژگی ورودی را خواهد داد.

همانند قبل، ابتدا جمع بایاس را بدون اشتراک وزن در نظر می‌گیریم. بنابراین بایاس‌های p داریم، که به موقعیت p بر روی منیفولد بستگی دارند، که به بردار ویژگی ورودی جمع می‌شوند تا بردار ویژگی خروجی

$$f_{\text{out}}(p) = f_{\text{in}}(p) + b_p. \quad (56)$$

تولید کنند. نسبت به گیج‌های ψ_p^A و ψ_p^B ، بایاس توسط آن بردارهای ضریب β_p^A و β_p^B در \mathbb{R}^c نمایش داده می‌شود که $f_{\text{out}}^A(p) = f_{\text{in}}^A(p) + \beta_p^A$ و $f_{\text{out}}^B(p) = f_{\text{in}}^B(p) + \beta_p^B$ را برآورده می‌کنند. از آنجا که جمع بردارها اجازه تعییر قوانین تبدیل آن‌ها را نمی‌دهد، نمایش‌های گروهی مرتبط با ویژگی‌های ورودی و خروجی لزوماً مطابقت دارند، یعنی

$$\rho_{\text{in}} = \rho_{\text{out}} =: \rho. \quad (57)$$

همراه با الزام برای استقلال از مختصات، این دلالت دارد بر اینکه نمودار

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+\beta_p^A} & \mathbb{R}^c \\ \rho(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho(g_p^{BA}) \cdot \\ \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+\beta_p^B} & \mathbb{R}^c \end{array}, \quad (58)$$

که معادل آن در معادله (۵۱) است، نیاز دارد که جایجا شود. به صورت معادله نوشته شده، این رابطه $\rho(g_p^{BA}) f_p^A + \beta_p^B = \rho(g_p^{BA}) (f_p^A + \beta_p^A)$ را تلقاضاً می‌کند که برقرار باشد. از آنجا که خطی بودن (g) امکان بازنویسی سمت راست را به عنوان $\rho(g_p^{BA}) f_p^A + \rho(g_p^{BA}) \beta_p^A$ دهد، تغیریق بردار ویژگی ورودی منجر به

$$\beta_p^B = \rho(g_p^{BA}) \beta_p^A. \quad (59)$$

می‌شود. بردارهای ضریبی که یک بایاس مستقل از مختصات را نسبت به گیج‌های نمایش می‌دهند بنابراین نیاز دارند که دقیقاً مانند بردارهای ویژگی که به آن‌ها جمع می‌شوند تبدیل شوند. همانند مورد کانولوشن‌های 1×1 استقلال از مختصات بایاس p را به هیچ وجه محدود نمی‌کند، بلکه فقط مختصات‌بندی‌های مختلف همان بایاس را مطالبه می‌کند که با یکدیگر سازگار باشند. یک پیاده‌سازی بنابراین می‌تواند گیج دلخواه انتخاب کند و بایاس را در آن گیج آزادانه توسط پارامترهایی در $\mathbb{R}^{c_{\text{in}}}$ پارامتری کند.

وضعیت دوباره زمانی تعییر می‌کند که اشتراک وزن فضایی تقاضاً شود. فرض کنید $b \in \mathbb{R}^{c_{\text{in}}}$ بردار بایاس قالبی باشد که بر روی منیفولد به اشتراک گذاشته شود. از آنجا که تنها راه انجام این کار بدون ترجیح دلخواه هر مختصات‌بندی، اشتراک بردار بایاس در همه گیج‌ها به طور همزمان است، باید

$$\beta_p^X = b \quad \text{برای هر گیج} \quad (U^X, \psi^X) \in \mathcal{A}^G \quad p \in U^X. \quad (60)$$

را در قیاس با معادله (۵۲) مطالبه کنیم. ترکیب محدودیت کوواریانس در معادله (۵۹) با این اشتراک وزن مستقل از گیج سپس منجر به محدودیت ناورداشی است

$$b = \rho(g) b \quad \forall g \in G \quad (61)$$

بر قالب بردار بایاس می‌شود. برای تکمیل قیاس با مورد کانولوشن‌های 1×1 ، نسخه تطبیق یافته نمودار جابجایی در معادله (۵۸) با وزن‌های مشترک را نشان می‌دهیم:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+b} & \mathbb{R}^c \\ \rho(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho(g_p^{BA}) \\ \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+b} & \mathbb{R}^c \end{array} \quad (62)$$

برای بصیرت در مفاهیم محدودیت ناورداشی در معادله (۶۱)، فرض کنید برای بردار قالب داده شده b برآورده شود. به دلیل خطی بودن محدودیت، هر بردار مقیاس شده $\alpha \cdot b$ برای $\alpha \in \mathbb{R}$ نیز آن را برآورده خواهد کرد، یعنی هر حل زیرفضای یک بعدی از \mathbb{R}^c را پوشش می‌دهد که تحت عمل ρ ناوردا است. چنین زیرفضای ناوردا به عنوان زیرنمایش ρ نشان داده می‌شود. از آنجا که زیرفضاهای در نظر گرفته شده یک بعدی هستند، خودشان هیچ زیرفضای مناسب ندارند و بنابراین زیرنمایش‌های کاهاش‌ناپذیر بدیهی هستند. نتیجه می‌شود که فضای برداری

$$\mathcal{B}_\rho^G := \{b \in \mathbb{R}^c \mid b = \rho(g) b \quad \forall g \in G\} \quad (63)$$

بایاس‌های تناوب‌پذیر گیج با (زیرفضاهای) زیرنمایش‌های بدیهی ρ مطابقت دارد. ابعاد \mathcal{B}_ρ^G و بنابراین تعداد پارامترهای قابل یادگیری با کثرت زیرنمایش‌های بدیهی موجود در ρ مطابقت دارد. برای گروههای فشرده G ، روابط متعدد شور دلالت دارند بر اینکه این ابعاد توسط $\dim(\mathcal{B}_\rho^G) = \int_G \text{tr}(\rho(g)) dg$ داده می‌شود. این گزاره موارد مهم عملی گروههای متعدد $G = O(d)$ و همه زیرگروههای آن را پوشش می‌دهد.

دو مثال ساده از میدان‌های ویژگی که ممکن است بخواهیم بایاس‌های مشترک به آن‌ها جمع کنیم، میدان‌های اسکالار و میدان‌های بردار مماس هستند. بر اساس تعریف، میدان ضربی یک میدان اسکالار تحت تبدیل‌های گیج ناوردا است، یعنی طبق نمایش بدیهی $\rho(g) = 1 \quad \forall g \in G$ تبدیل می‌شود. بنابراین می‌توان بایاس (اسکالار) \mathbb{R}^b به آن‌ها جمع کرد. در مقابل، میدان ضربی یک میدان بردار مماس طبق نمایش گروهی غیربدیهی، کاهاش‌ناپذیر $\rho(g) = g$ تبدیل می‌شود. از آنجا که این نمایش هیچ زیرنمایش بدیهی ندارد، جمع بردار بایاس مشترک به میدان‌های بردار مماس با حفظ استقلال از مختصات غیرممکن است. به عنوان مثال سوم، نمایش‌های منظم گروههای فشرده را در نظر بگیرید، که به عنوان مثال میدان‌های ویژگی شبکه‌های کانولوشنی گروهی را توصیف می‌کنند. توسط قضیه پیتر-ویل، شناخته شده است که نمایش‌های منظم دقیقاً یک زیرنمایش بدیهی دارند [۶۱، ۶۷]. بنابراین بایاس که به میدان‌های ویژگی منظم جمع می‌شود توسط یک پارامتر منفرد توصیف می‌شود.

۳.۱.۴ غیرخطی‌های تناوب‌پذیر گیج

به جز عملیات خطی (کانولوشن) و جمع بایاس، اساسی‌ترین عملیات استفاده شده در هر شبکه عصی غیرخطی‌هاست. ما در اینجا حالت معمول غیرخطی‌های σ_p را در نظر خواهیم گرفت که به روشن محلی فضایی عمل می‌کنند، یعنی بردارهای ویژگی خروجی را به عنوان $f_{\text{out}}(p) = (\sigma_p(f_{\text{in}}(p)))$ محاسبه می‌کنند. یک غیرخطی مشترک دوباره مطالبه می‌شود که تناوب‌پذیر گیج باشد. از آنجا که استدلایلی که به این نتیجه گیری منجر می‌شود شبیه آن در موارد قبلی است، تنها به طور خلاصه آن را خلاصه خواهیم کرد. به دلیل عمومیت نگاشته‌های غیرخطی استخراج فضاهای حل خطی همانند معادلات (۵۵) و (۶۳) غیرممکن است، با این حال، برخی مثال‌های خاص را مورد بحث قرار خواهیم داد.

مشابه قبل، هر غیرخطی آزاد از مختصات σ_p نسبت به گیج‌های مختصاتی A و B توسط بیان‌های مختصاتی $\sigma_p^B : \mathbb{R}^{c_{\text{in}}} \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}}}$ و $\sigma_p^A : \mathbb{R}^{c_{\text{in}}} \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}}}$ داده می‌شود، که توسط تقاضای استقلال از مختصات مطالبه می‌شوند که با $\sigma_p^B = \rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) \circ \sigma_p^A \circ \rho_{\text{in}}(g_p^{BA})^{-1}$ دلایل $\mathbb{R}^{c_{\text{in}}} \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}}} = \mathbb{d}$ تابع قالب غیرخطی است: \mathbb{d} تنها زمانی می‌تواند به روشنی مستقل از مختصات به اشتراک گذاشته شود که به طور همزمان با همه گیج‌ها به اشتراک گذاشته شود. این محدودیت کوواریانس را به محدودیت ناورداشی $\rho_{\text{out}}(g) \circ \mathbb{d} \circ \rho_{\text{in}}(g)^{-1} = \mathbb{d}$ بر تابع قالب تبدیل می‌کند، یا، به طور معادل، به محدودیت تناوب‌پذیری متناظر

$$\rho_{\text{out}}(g) \circ \mathbb{d} = \mathbb{d} \circ \rho_{\text{in}}(g)^{-1} \quad \forall g \in G. \quad (64)$$

به دلیل غیرخطی بودن این محدودیت مجبور هستیم آن را مورد به مورد برسی کنیم - بنابراین بحث خود را به چند مثال خاص محدود خواهیم کرد. بحث برانگیزترین ساده‌ترین حالت، غیرخطی‌هایی است که بین میدان‌های اسکالار نگاشت می‌کنند، یعنی برای آن‌ها $\rho_{\text{in}}(g) = \rho_{\text{out}}(g) = 1$ برای هر $g \in G$ ناوردا محسنتند. در این حالت محدودیت تناوب‌پذیری در معادله (۶۴) به $\mathbb{d} = \mathbb{d}$ تبدیل می‌شود، که به طور بدیهی برای هر $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \mathbb{d}$ برآورده می‌شود. مثال جالب‌تری نمایش یکانی ρ_{in} است. یک غیرخطی ممکن برای این حالت توسط نرم بردارهای ویژگی داده می‌شود. از آنجا که $\|f_{\text{in}}^A(p)\| = \|f_{\text{in}}^A(g)f_{\text{in}}^A(p)\| = \|\rho_{\text{in}}(g)f_{\text{in}}^A(p)\|$ به دلیل یکانی بودن ρ_{in} نمایش بدیهی خواهد بود. گرفتن نرم بنابراین به عنوان عملیات غیرخطی، تناوب‌پذیر گیج دیده می‌شود که هر میدان یکانی را به میدان اسکالار نگاشت می‌کند. یک نگاشت غیرخطی که

نوع میدان را حفظ می‌کند، یعنی $\rho_{\text{in}} = \rho_{\text{out}} \cdot f_{\text{in}}^A(p) \mapsto \|f_{\text{in}}^A(p)\| \cdot f_{\text{in}}^A(p)$ تعریف شود. گزینه دیگر، که ممکن است در یادگیری تعاملات فیزیکی نقش داشته باشد و در [۱۰، ۲، ۹۵، ۹۷] حاصل ضرب تانسوری هستند. با داشتن دو میدان (p, f_{out}^A) و (p, f_{in}^A) ، که به ترتیب طبق ρ_{out} و ρ_{in} تبدیل می‌شوند، چنین غیرخطی‌های ویژگی حاصل ضرب تانسوری $(p, f_{\text{out}}^A) \otimes (p, f_{\text{in}}^A)$ را محاسبه می‌کنند، که به طور تناوب‌پذیر طبق نمایش حاصل ضرب تانسوری $\rho_{\text{out}} \otimes \rho_{\text{in}} = \rho_{\text{in}} \otimes \rho_{\text{out}}$ تبدیل می‌شود.

همه این مثال‌ها محدودیت تناوب‌پذیری گیج در معادله (۶۴) را برآورده می‌کنند. اینکه کدام غیرخطی خاص در عمل خوب کار می‌کند، با این حال، هنوز سؤال تحقیقاتی بازی است که نیازمند بررسی تجربی بسیار بیشتری قبل از پاسخ دادن است. اولین تلاش در این جهت در [۱۹۰] انجام شده است.

۲.۴ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM

عملیات اصلی شبکه‌های کانولوشنی، عملگر کانولوشن است که الگوهای مشخصه ویژگی‌ها را از یک همسایگی محلی در اطراف هر نقطه $p \in M$ به صورت خطی در یک بردار ویژگی جدید $f_{\text{out}}(p)$ جمع می‌کند. یک کرنل کانولوشن گستره‌ای فضایی، جزئیات این اباحت را تعیین می‌کند. اصل کوواریانس نیازمند استقلال از مختصات و در نتیجه یک قانون تبدیل خاص برای کرنل‌ها تحت تبدیلات بیمانه است. همانند مثال‌های قبلی، یک تقاضای اضافی برای اشتراک‌گذاری وزن منجر به الزایمی برای کرنل الگو می‌شود تا نسبت به پیمانه هموردا (G -راهبر) باشد.

مطلوب با بخش قبل، ما بهوضوح بین الزامات استقلال از مختصات و اشتراک‌گذاری وزن تمایز قائل می‌شویم. بنابراین، بخش ۲.۲.۴ با بحث در مورد میدان‌های کرنل و قوانین تبدیل آن‌ها بدون الزام به اینکه کرنل‌ها در موقعیت‌های جداگانه به هم مرتبط باشند، شروع می‌شود. چنین میدان‌های کرنل نامحدودی منجر به تبدیلات میدان کرنل می‌شوند که تبدیلات انتگرالی هستند و می‌توان آن‌ها را به عنوان پیش‌درآمدۀ کانولوشن‌ها در نظر گرفت. کانولوشن‌های واقعی GM که توسط یک کرنل الگوی مشترک و لزوماً هموردادی پیمانه‌ای پارامتری می‌شوند، در بخش ۳.۲.۴ تعریف شده‌اند. به عنوان یک آماده‌سازی، در بخش بعدی ۱.۲.۴، نمایش‌های محلی میدان‌های ویژگی را بر روی فضاهای مماس توصیف خواهیم کرد، جایی که آن‌ها با کرنل‌های کانولوشن تطبیق داده می‌شوند.

۱.۲.۴ دیدگاه یک ناظر محلی به میدان‌های ویژگی

برخلاف فضاهای اقلیدسی یا فضاهای همگن کلی تر مانند کره، هندسه محلی یک خمینه ریمانی کلی از نقطه‌های به نقطه دیگر متفاوت است. بنابراین، بلافضلۀ مشخص نیست که یک کرنل کانولوشن چگونه باید روی M تعریف شود و چگونه می‌توان آن را بین مکان‌های مختلف به اشتراک گذاشت. یک راه حل رایج این است که کرنل را طبق معمول روی یک فضای برداری مسطح و اقلیدسی \mathbb{R}^d تعریف کرده و آن را به جای خود خمینه، روی فضاهای مماس به اشتراک‌گذاری؛ به بخش‌های ۲.۲.۴ و ۳.۲.۴ و ۱۴۰، ۱۷۷، ۱۴۰، ۱۹۴، ۳۲۲، ۲۰۴۰ [۲۰۲۴] مراجعه کنید. سپس، کرنل را می‌توان از طریق نگاشت نمایی ریمانی به روی خمینه نگاشت. می‌توان آن را به گونه‌ای تصور کرد که توسط یک ناظر محلی اعمال می‌شود که ویژگی‌ها را در محیط اطراف خود نسبت به چارچوب مرجع محلی خود اندازه‌گیری می‌کند. در این بخش به طور خلاصه به چگونگی در کمیدان‌های ویژگی از دیدگاه ناظران محلی مختلف خواهیم پرداخت. از نظر ریاضی، این موضوع به عنوان پس‌کش (pullback) و انتقال موازی میدان ویژگی به فضاهای مماس فرمول‌بندی می‌شود؛ برای تجسم به شکل ۲۴ مراجعه کنید.

برای نگاشت بین فضاهای مماس و خمینه، مانگاشت نمایی (مرتبط با اتصال لوی-چیویتا) را در نظر می‌گیریم.^{۲۳} با فرض اینکه خمینه برای سادگی کامل از نظر ژئودزیکی باشد^{۲۴}، نگاشت نمایی در یک نقطه خاص $p \in M$ نگاشتی است به صورت

$$\exp_p : T_p M \rightarrow M. \quad (۶۵)$$

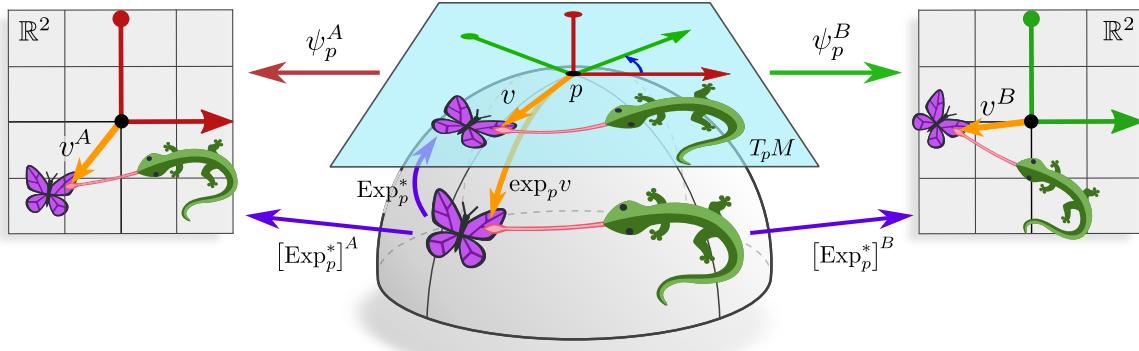
این نگاشت، بردارهای $v \in T_p M$ را با نقاطی $\exp_p(v) \in M$ می‌داند که با دنبال کردن ژئودزیک گذرنده از p با سرعت اولیه v برای یک واحد زمان به دست می‌آیند. نگاشت نمایی با اینکه فواصل شعاعی را حفظ می‌کند، به طور کلی زوایا را تغییر می‌دهد و یک‌به‌یک نیست. به عنوان مثال، اگر خمینه یک کره باشد، نگاشت‌های نمایی فضای مماس مربوطه را بی‌نهایت بار دور آن می‌پیچند. با این حال، تضمین می‌شود که نگاشت نمایی یک دیفونورفیسم محلی است اگر دامنه آن به فواصلی کوتاه‌تر از فاصله تا مکان بُرش (جایی که یک‌به‌یک بودن از دست می‌رود) محدود شود.

با داشتن نگاشت‌های نمایی، می‌توان میدان‌های ویژگی روی خمینه را به فضاهای مماس پس‌کش کرد. به طور خاص، اگر f یک میدان ویژگی روی M باشد، پس‌کش $f \circ \exp_p^* : f \circ \exp_p(v) \mapsto f(\exp_p(v))$ به عنوان نگاشتی تعریف می‌شود که بردار ویژگی $v \in T_p M$ را به $f(\exp_p(v))$ می‌رساند. توجه داشته باشید که به دلیل عدم یک‌به‌یک بودن نگاشت نمایی، هر بردار ویژگی ممکن است به چندین بردار مماس v_1 و v_2 اختصاص یابد اگر $\exp_p(v_1) = \exp_p(v_2)$ باشد – این پدیده تا حدودی شبیه به اثرات عدسی گرانشی در فیزیک است. در صورتی که نگاشت نمایی یک‌به‌یک باشد، یا زمانی که آن را به شعاع یک‌به‌یک بودن آن محدود کنیم، پس‌کش معادل بیان میدان‌های ویژگی در مختصات نرمال ژئودزیکی است.^{۲۵}

^{۲۳} حتی مدل‌هایی که یک اتصال جایگزین (سازگار با G) برای انتقال ویژگی‌ها فرض می‌کنند، معمولاً از اتصال کانونی لوی-چیویتا برای محاسبه ژئودزیک‌ها و نگاشت‌های نمایی استفاده می‌کنند.

^{۲۴} فرض کامل بودن ژئودزیکی M به این معناست که نگاشت‌های نمایی \exp_p برای هر $p \in M$ روی کل فضای مماس $T_p M$ تعریف شده‌اند. در مواردی که این فرض برقرار نباشد، می‌توان به پر کردن با صفر متولّش شد، که معمولاً در شبکه‌های کانولوشنی برای تصاویر با تکیه‌گاه متناهی استفاده می‌شود.

به یاد بیاورید که هدف از پسکش بردارهای ویژگی به فضاهای مماس این است که بتوان آن‌ها را توسط یک کرنل کانولوشن جمع‌آوری کرد. متأسفانه، این کار بلافضلله امکان‌پذیر نیست زیرا بردارهای ویژگی در مکان‌های مختلف در فضاهای برداری متفاوتی قرار دارند و نسبت به پیمانه‌های متفاوتی بیان می‌شوند.^{۲۵} بنابراین لازم است تمام بردارهای ویژگی (v) در یک فضای برداری و نسبت به یک پیمانه یکسان بیان شوند. یک ایده طبیعی که توسط پولنار و همکاران [۱۴۰] پیشنهاد شد، انجام این کار با انتقال موازی بردارهای ویژگی در امتداد ژئودزیک‌هایی است که تگاشت نمایی را از $\exp_p(v)$ به v تعریف می‌کنند.^{۲۶} ما این پسکش f را با انتقال اضافی با $\text{Exp}_p^* f$ نشان می‌دهیم تا ارتباط نزدیک آن با پسکش معمولی f به $T_p M$ تأکید کنیم. شکل ۲۴ یک ایده بصری از این پسکش انتقال‌دهنده میدان‌های ویژگی به فضای مماس و نمایش‌های آن $[\text{Exp}_p^* f]^A$ و $[\text{Exp}_p^* f]^B$ روی \mathbb{R}^d نسبت به مختصات‌دهی‌های مختلف ارائه می‌دهد.



شکل ۲۴: یک میدان ویژگی f روی M و نمایش محلی آن $\text{Exp}_p^* f$ روی $T_p M$. درست مانند پسکش معمولی $v \in T_p M$ از $\exp_p^* f$ در امتداد نگاشت نمایی $\text{Exp}_p^* f$ از $T_p M \rightarrow M$ ، پسکش انتقال‌دهنده بردارهای ویژگی $\exp_p(v)$ را به بردارهای مماس $f(\exp_p(v))$ نسبت می‌دهد. با این حال، از آنچه که هدف ما انتقال‌دهنده با استفاده از یک کرنل کانولوشن است، آن‌ها باید در یک فضای یکسان و نسبت به یک پیمانه یکسان در p داده شوند. بنابراین، پسکش انتقال‌دهنده علاوه بر این، انتقال‌دهنده موازی سازگار با (G) را در امتداد ژئودزیک از $\exp_p(v)$ به p اعمال می‌کند. از طریق یک پیمانه ψ_p ، پسکش انتقال‌دهنده f روی $T_p M$ را می‌توان روی $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c$ به صورت $[\text{Exp}_p^* f]^X$ انتخاب‌های مختلف چارجوب‌های مرجع (ناظران) در اینجا با تغییر شکل‌های خطی مختلف میدان ویژگی مطابقت دارد. تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM یک ویژگی خروجی $f_{\text{out}}(p)$ را در p با تطبیق یک کرنل K_p روی $T_p M$ محاسبه می‌کنند (یعنی انتگرال حاصلضرب آن‌ها را روی فضای مماس می‌گیرند؛ به مفادله (۷۶) مراجعه کنید).

(مارمولکها و پروانه‌ها با مجوز Creative Commons Attribution 4.0 International از توپیتر اقتباس شده‌اند.)

ما $\text{Exp}_p^* f$ را با تعریف آن بر حسب عبارت مختصات‌ایش نسبت به یک انتخاب پیمانه فرمول‌بندی می‌کیم. برای این منظور، فرض کنید ψ_p^A یک پیمانه در p باشد که ویژگی‌های منتقل شده نهایتاً نسبت به آن بیان می‌شوند و $\psi_{\exp_p(v)}^{\tilde{A}}$ یک پیمانه دلخواه در (v) باشد که بردار ویژگی در آن مکان را با یک بردار ضریب $f^{\tilde{A}}(\exp_p(v)) \in \mathbb{R}^c$ نشان می‌دهد. فرض کنید

$$\rho(g_{p \leftarrow \exp_p v}^{A \tilde{A}}) \quad (66)$$

انتقال‌دهنده موازی سازگار با G برای ضرایب بردار ویژگی در امتداد ژئودزیک از $\exp_p(v)$ به p باشد. سپس ما پسکش انتقال‌دهنده را در مختصات به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} [\text{Exp}_p^* f]^A : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R}^c, \quad v^A \mapsto [\text{Exp}_p^* f]^A(v^A) \\ &:= \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(\psi_p^A)^{-1}(v^A)}^{A \tilde{A}}) \cdot f^{\tilde{A}}(\exp_p(\psi_p^A)^{-1}(v^A)), \end{aligned} \quad (67)$$

که در آن $v = (\psi_p^A)^{-1}(v^A) \in T_p M$ بردار مماس بدون مختصات است که توسط ضرایب v^A از طریق ψ_p^A به آن ارجاع داده می‌شود. همانطور که قبلاً ادعا شد، انتخاب پیمانه $\psi_{\exp_p(v)}^{\tilde{A}}$ در دلیل استقلال مختصات تمام معادلات، بی‌ربط است و حذف می‌شود. به طور خاص، می‌توانستیم از هر پیمانه دیگری مانند $\rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{A \tilde{B}}) \psi_{\exp_p(v)}^{\tilde{B}}$ در $\exp_p(v)$ استفاده کنیم، که منجر به تبدیلات پیمانه $=$

^{۲۵} یک وضعیت بسیار مشابه، تعریف مشتقات کوواریانت را انگیزه‌مند می‌کند، که آن نیز نیاز به ترکیب اشیاء هندسی دارد که در فضاهای متفاوتی زندگی می‌کنند.

^{۲۶} انتقال موازی در امتداد هر مسیر دیگری نیز به همان اندازه معتبر خواهد بود.

ضرایب بردار ویژگی طبق معادله (۲۸) می‌شود، که هنگام ترکیب هر دو عبارت، یکدیگر را خنثی می‌کنند.

با این حال، پس‌کش انتقال‌دهنده $[Exp_p^* f]^A$ همچنان به پیمانه در p بستگی دارد و بنابراین تحت تبدیلات پیمانه g_p^{BA} در p تبدیل می‌شود. مانند هر تابع مختصاتی، قانون تبدیل آن توسط تبدیلات پیمانه بر روی دامنه \mathbb{R}^d و هم‌دامنه‌اش \mathbb{R}^c تعیین می‌شود. بنابراین به صورت زیر داده می‌شود:

$$[Exp_p^* f]^B = \rho(g_p^{BA}) \circ [Exp_p^* f]^A \circ (g_p^{BA})^{-1}, \quad (68)$$

که توسط نمودار جابجایی زیر خلاصه می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{[Exp_p^* f]^A} & \mathbb{R}^c \\ g_p^{BA} \downarrow & & \downarrow \rho(g_p^{BA}) \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{[Exp_p^* f]^B} & \mathbb{R}^c \end{array} \quad (69)$$

همانطور که در شکل ۲۴ به تصویر کشیده شده است، $[Exp_p^* f]^B$ و $[Exp_p^* f]^A$ باید به عنوان دیدگاه ناظران محلی (چارچوب‌های مرجع) مختلف به میدان ویژگی در نظر گرفته شوند.

در اصل، می‌توان ساختارهای جایگزینی را برای پس‌کش میدان‌های ویژگی از M به $T_p M$ در نظر گرفت. تعریف ما از تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM در بخش‌های ۲.۲.۴ و ۳.۲.۴ در آدامه، مستقل از این انتخاب خاص است.

۲.۲.۴ کرنل‌های مستقل از مختصات و تبدیلات میدان کرنل

کانولوشن‌های GM عملیات مستقلی از مختصات هستند که کرنل مشترک و یکسانی را در هر نقطه از خمینه اعمال می‌کنند. برای تفکیک واضح فرضیات، ابتدا تبدیلات میدان کرنل عمومی‌تری را مورد بحث قرار می‌دهیم که عملیات مستقلی از مختصات هستند اما الزام اشتراک‌گذاری وزن را کنار می‌گذارند. بنابراین، آن‌ها شبیه به کانولوشن‌های GM هستند اما در هر نقطه p از خمینه، کرنل بالقوه متفاوتی \mathcal{K}_p اعمال می‌کنند. به منظور رعایت اصل کوواریانس، عبارات مختصاتی این کرنل‌ها باید به شیوه‌ای اصولی تبدیل شوند، با این حال، خود کرنل‌ها بدون محدودیت باقی می‌مانند.

کرنل‌های مستقل از مختصات: از آنجایی که کانولوشن‌ها در یادگیری عمیق بین میدان‌های بردارهای ویژگی با ابعاد $\mathbb{R}^{c_{\text{out}}}$ و $\mathbb{R}^{c_{\text{in}}}$ نگاشت برقرار می‌کنند، کرنل‌های کانولوشن ماتریس-مقدار $c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}$ هستند. پیاده‌سازی‌های گستته کانولوشن‌های d بعدی روش فضاهای اقلیدسی معمولاً چنین کرنل‌هایی را به صورت آرایه‌های با شکل $(s_1, \dots, s_d, c_{\text{out}}, c_{\text{in}})$ نمایش می‌دهند. معمور اول یک شبکه فضایی از s_d فضایی از $s_1 \times \dots \times s_d$ پیکسل را نشان می‌دهند، که به هر کدام یک ماتریس $c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}$ اختصاص داده شده است که در دو محور آخر کدگذاری شده است.^{۷۷} در محیط پیوسته و اقلیدسی، چنین کرنل‌هایی را می‌توان به عنوان نگاشت‌هایی توصیف کرد

$$K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}, \quad (70)$$

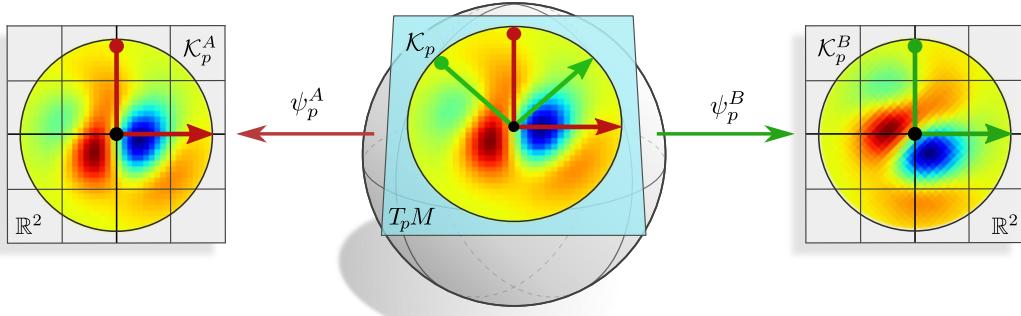
که یک ماتریس $c_{\text{in}} \times c_{\text{out}}$ را به هر نقطه از \mathbb{R}^d اختصاص می‌دهد. همانطور که در بخش قبلی ۱.۲.۴ ذکر شد، ما کانولوشن‌های GM را به عنوان تطبیق پس‌کش انتقال‌دهنده $Exp_p^* f_{\text{in}}$ روی فضای مماس $T_p M$ با یک کرنل \mathcal{K}_p تعریف می‌کنیم. از آنجایی که فضاهای مماس مسطح هستند، طبیعی است که این تطبیق را مانند حالت کامل‌اکلیدسی معمول تعریف کنیم. بنابراین، ما کرنل‌های \mathcal{K}_p را از طریق عبارات مختصاتی‌شان تعریف می‌کنیم که شکل معادله (۷۰) را دارند، یعنی،

$$\mathcal{K}_p^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}. \quad (71)$$

شکل ۲۵ یک کرنل داده‌شده بدون مختصات را روی $T_p M$ و نمایش‌های آن را روی \mathbb{R}^d نسبت به چارچوب‌های مرجع مختلف نشان می‌دهد.^{۷۸}

^{۷۷} چیدمان واقعی حافظه به چارچوب یادگیری عمیق خاص مورد نظر بستگی دارد.

^{۷۸} ما تأکید می‌کنیم که در اینجا یک کرنل بدون مختصات \mathcal{K}_p را که روی $T_p M$ داده شده است فرض می‌کنیم و عبارات مختصاتی آن \mathcal{K}_p^X را روی \mathbb{R}^d نسبت به چارچوب‌های مرجع X در نظر می‌گیریم. اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی بعداً ما را با این سوال مواجه خواهد کرد که چگونه یک کرنل بدون مختصات را روی $T_p M$ با توجه به یک کرنل الگو K روی \mathbb{R}^d تعریف کنیم. پیوست ب این دو مفهوم و ارتباط آنها را با G -راهبری کرنل توضیح می‌دهد.



شکل ۲.۵. یک کرnel بدون مختصات روی $T_p M$ و عبارات مختصاتی آن $\mathcal{K}_p^X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ نسبت به پیمانه‌های ψ_p^X (فقط یکی از کانال‌های کرnel \mathcal{K}_p^X نشان داده شده است). تبدیلات پیمانه‌ای که مختصات‌دهی‌های مختلف یک کرnel را به هم مرتبط می‌کنند، از قوانین تبدیل دامنه \mathbb{R}^d و هم دامنه آن‌ها پیروی می‌کنند. بنابراین برای هر $v \in \mathbb{R}^d$ به صورت $\mathcal{K}_p^B(g_p^{BA}v) = \rho_{\text{out}}(g_p^{BA})^{-1} \mathcal{K}_p^A(v) \rho_{\text{in}}(g_p^{BA})$ داده می‌شوند. یک میدان کرnel روی M یک تخصیص هموار از کرnel‌ها بر روی فضاهای مماس است (تعريف ۲.۷).

توجه داشته باشید که ما در اینجا فرض می‌کنیم کرnel روی $T_p M$ داده است و سپس آن را نسبت به پیمانه‌های مختلف روی \mathbb{R}^d بیان می‌کنیم. این از نظر مفهومی با وضعیت نشان داده شده در شکل‌های ۱۸، ۲۴ و ۷۴ متفاوت است، که در آنها فرض می‌کنیم یک کرnel الگو K روی \mathbb{R}^d داده است و سپس \mathcal{K}_p روی $T_p M$ از طریق اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی نسبت به یک چارچوب مرتع غیریف می‌کنیم. برای حفظ استقلال از مختصات در طول فرآیند اشتراک‌گذاری وزن، کرnel مشترک باید تحت تبدیلات پیمانه پایا (یا هموردا) باشد؛ به بخش ۳.۲.۴ و پیوست ب مراجعه کنید.

قانون تبدیل بین نمایش‌های مختصاتی \mathcal{K}_p^A و \mathcal{K}_p^B یک کرnel روی $T_p M$ طبق معمول از قوانین تبدیل دامنه و هم‌دامنه آن‌ها پیروی می‌کند. در دامنه \mathbb{R}^d قانون تبدیل توسعه g_p^{BA} داده می‌شود، در حالی که قانون تبدیل $\mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ همانند معادله (۵۰)، توسط یک ضرب همزمان از چپ با $\rho_{\text{out}}(g_p^{BA})^{-1}$ و از راست با $\rho_{\text{in}}(g_p^{BA})$ داده می‌شود. بنابراین، دو مختصات‌دهی کرnel برای هر $v \in \mathbb{R}^d$ به صورت زیر با هم ارتباط دارند:

$$\mathcal{K}_p^B(g_p^{BA}v) = \rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) \cdot \mathcal{K}_p^A(v) \cdot \rho_{\text{in}}(g_p^{BA})^{-1}, \quad (72)$$

که توسط نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\mathcal{K}_p^A} & \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \\ g_p^{BA} \downarrow & & \downarrow \rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) [\cdot] \rho_{\text{in}}(g_p^{BA})^{-1} \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\mathcal{K}_p^B} & \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \end{array} \quad (73)$$

همانند مثال‌های بخش ۱.۴، اصل کوواریانس تنها نیازمند یک رفتار تبدیل سازگار بین مختصات‌دهی‌های مختلف کرnel است اما محدودیتی بر خود کرnel اعمال نمی‌کند. بنابراین می‌توان کرnel‌های \mathcal{K}_p را برای هر $p \in M$ و یک پیمانه دلخواه در p با یک کرnel ماتریس-مقدار نامحدود پارامتری کرد. ما میدان‌های هموار چنین کرnel‌هایی را به عنوان میدان‌های کرnel نشان می‌دهیم که نقش عمده‌ای در تحلیل ما از هموردا ایزومنتری کانولوشن‌های GM در بخش ۸ ایفا می‌کنند.

تبدیلات میدان کرnel مستقل از مختصات: با داشتن یک میدان کرnel هموار \mathcal{K} می‌توانیم تبدیلات میدان کرnel را تعریف کنیم، که شبیه به کانولوشن‌ها هستند اما از این جهت متفاوتند که ممکن است در هر موقعیت مکانی یک کرnel متفاوت اعمال کنند. آنها یک میدان از بردارهای ویژگی خروجی (p, f_{out}) را با انتگرال‌گیری از حاصلضرب کرnel مربوطه \mathcal{K}_p و پس‌کش انتقال‌دهنده $\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}$ از $T_p M$ روی f_{in} محاسبه می‌کنند، یعنی،

$$f_{\text{out}}(p) = \int_{T_p M} \mathcal{K}_p(v) \text{Exp}_p^* f_{\text{in}}(v) dv. \quad (74)$$

برای بیان این تعریف بدون مختصات بر حسب مختصات، باید تمام کمیت‌ها را با عبارات مختصاتی‌شان جایگزین کرده و انتگرال‌گیری را از طریق پیمانه انتخاب شده از $T_p M$ به \mathbb{R}^d منتقل کرد. همانطور که در پیوست پ توضیح داده شده است، عنصر حجم ریمانی مناسب (پایا نسبت به پیمانه) برای یک پیمانه ψ_p^A به صورت زیر داده می‌شود:

$$\sqrt{|\eta_p^A|} dv^A, \quad (75)$$

که در آن ضریب $\sqrt{|\eta_p^A|}$ ، تعریف شده در معادله (۵۸۷)، حجم (مثبت) پوشیده شده توسط چارچوب مرجع $[e_i^A]_{i=1}^d$ در p است. بنابراین، عبارت مختصاتی تبدیل میدان کرنل به صورت زیر است:

$$f_{\text{out}}^A(p) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) [\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A. \quad (76)$$

استقلال از مختصات تبدیل میدان کرنل با بیان آن نسبت به یک پیمانه جایگزین ψ^B و نشان دادن اینکه میدان خروجی حاصل همانطور که انتظار می‌رود تبدیل می‌شود، تأیید می‌شود، که در واقع چنین است:

$$\begin{aligned} f_{\text{out}}^B(p) &\stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^B(v^B) [\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^B(v^B) \sqrt{|\eta_p^B|} dv^B \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \left[\rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) \mathcal{K}_p^A((g_p^{BA})^{-1} v^B) \right] \rho_{\text{in}}(g_p^{BA})^{-1} [\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^B(g_p^{BA} v^A) \sqrt{|\eta_p^B|} dv^B \\ &\stackrel{(3)}{=} \rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) \left[\rho_{\text{in}}(g_p^{BA})^{-1} [\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^B(g_p^{BA} v^A) \right] \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &\stackrel{(4)}{=} \rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) [\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &\stackrel{(5)}{=} \rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) f_{\text{out}}^A(p) \end{aligned} \quad (77)$$

در اینجا ما از تعریف تبدیلات میدان کرنل و قانون تبدیل کرنل‌ها (معادله (۷۲)) در دو مرحله اول استفاده کردیم. مرحله سوم با بیرون کشیدن $\sqrt{|\eta_p^B|} dv^B = \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A$ به دست می‌آید، با استفاده از اینکه عنصر حجم $v^A = (g_p^{BA})^{-1} v^B$ به طور طراحی شده پایا نسبت به پیمانه است. دو مرحله آخر با شناسایی قانون تبدیل پس‌کش انتقال‌دهنده میدان ویژگی در معادله (۶۸) و تعریف تبدیل میدان کرنل در پیمانه ψ^A به دست می‌آیند. توجه داشته باشید که استقلال از مختصات تبدیل میدان کرنل، صحت قانون تبدیل کرنل در معادله (۷۲) را تأیید می‌کند.

یک تبدیل میدان کرنل تنها زمانی به خوبی تعریف می‌شود که انتگرال‌ها روی فضاهای مماس همگرا باشند، که به طور دقیق‌تر در بخش ۲.۷ و پیوست ج مورد بحث قرار گرفته است. قضیه ۷ ثابت می‌کند که یک تکیه‌گاه فشرده برای کرنل‌های \mathcal{K}_p برای تضمین این خوش‌تعریفی کافی است. این قضیه همچنین ثابت می‌کند که تبدیلات میدان کرنل که بر اساس میدان‌های کرنل هموار هستند، میدان‌های ویژگی ورودی هموار را به میدان‌های ویژگی خروجی هموار نگاشت می‌کنند.

۳.۲.۴ کانولوشن‌های GM و کرنل‌های G -راهبر

ازادی تبدیلات میدان کرنل در اعمال یک کرنل متفاوت در هر مکان، به آنها اجازه تعمیم استنتاج آموخته شده را بر روی مکان‌های مختلف نمی‌دهد و بنابراین آنها را از نظر داده ناکارآمد می‌سازد. بنابراین، معمولاً کانولوشن‌ها در نظر گرفته می‌شوند، که می‌توان آن‌ها را به عنوان آن دسته از تبدیلات میدان کرنل خاصی دید که بر اساس میدان‌های کرنل کانولوشنی هستند، یعنی میدان‌های کرنلی که توسط یک کرنل الگوی واحد و مشترک پارامتری شده‌اند. همانند قبل، یک اشتراک‌گذاری وزن مستقل از مختصات نیازمند آن است که کرنل‌های الگو نسبت به پیمانه هموردا (G -راهبر) باشند. این هموردا یک پیمانه‌ای کرنل‌های الگو تضمین می‌کند که الگوهایی که در ژست‌های هندسی مختلف و مرتبط با G ظاهر می‌شوند، تا یک تبدیل متناظر بردار ویژگی از طریق ρ_{out} پاسخ یکسانی را برانگیزند.

اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی: فرض کنید $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ یک کرنل الگو باشد که باید روی تمام فضاهای مماس به اشتراک گذاشته شود. برای اینکه هیچ پیمانه خاصی را ترجیح ندهیم \square که با نیاز ما به استقلال از مختصات در تضاد است \square مجبوریم کرنل را با مختصات دهنده ها در تمام پیمانه‌ها به طور همزمان با اشتراک بگذاریم. به طور ساده‌انگارانه، این به نظر می‌رسد که پیشنهاد می‌کند کرنل الگو را با قرار دادن $K_p^X = K$ برای هر نقطه $M \in p$ و هر پیمانه ψ^X در p به اشتراک بگذاریم. در حالی که چنین تعریفی از اشتراک‌گذاری کرنل معقول به نظر می‌رسد، از اصل ما برای اشتراک‌گذاری توابع الگوی محلی به معنای دقیق پیروی نمی‌کند: به جای اشتراک‌گذاری مستقیم کرنل، مهم است که کل عملیات محلی را به اشتراک بگذاریم - که در اینجا کل تبدیل انتگرالی در معادله (۷۶) است. از آنجایی که این عملیات بر حسب میدان کرنل \mathcal{K} پارامتری می‌شود، این به طور غیرمستقیم منجر به اشتراک‌گذاری کرنل الگو می‌شود، با این حال، با نتیجه‌ای کمی متفاوت از اشتراک‌گذاری ساده‌انگارانه در نظر گرفته شده در بالا.

برای یافتن تعریف صحیح میدان‌های کرنل کانولوشنی GM طبق اصل ما برای اشتراک‌گذاری توابع الگوی محلی، ابتدا باید این عملیات محلی را شناسایی کنیم. ما این کار را با انتراع تبدیلات میدان کرنل (در مختصات) به عنوان مجموعه‌ای از عملگرهای انتگرالی محلی به شکل زیر انجام می‌دهیم:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{K}, p}^A : C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c) \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad F \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v) F(v) \sqrt{|\eta_p^A|} dv, \quad (78)$$

که در آن $(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c)$ فضای نگاشته‌های هموار از \mathbb{R}^d به \mathbb{R}^c را نشان می‌دهد. در کاربرد ما، این نگاشته‌های هموار صرفاً نمایش‌های میدان ویژگی محلی هستند که از فضاهای مماس در p دیده می‌شوند و توسط تبدیل میدان کرنل به یک بردار ویژگی خروجی $(\mathcal{G}_{K,p}^A([Exp_p^*f]^A))$ در p نگاشته می‌شوند. با توجه به کرنل الگوی ما $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ ، ما یک الگوی عملگر انگرالی متناظر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{J}_K : C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c) \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad F \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} K(v) F(v) dv, \quad (79)$$

که نمایش میدان محلی F را در کرنل الگو K ضرب کرده و سپس حاصلضرب آنها را انگرال می‌گیرد. توجه داشته باشید که \mathcal{J}_K به عنوان یک تابع الگو لزوماً نسبت به انتخاب‌های خاص پیمانه‌ها بی‌تفاوت است و بنابراین شامل ضریب حجم چارچوب نمی‌شود. یک طرح اشتراک‌گذاری وزن کانون‌شناختی مستقل از مختصات GM با الزام به اینکه این تابع الگو با تمام عملگرهای انگرالی منفرد در هر نقطه و در هر پیمانه موافق باشد، تحمیل می‌شود، یعنی:

$$\mathcal{G}_{K,p}^X = \mathcal{J}_K(U^X, \psi^X) \in \mathcal{A}^G \quad p \in U^X, \quad (80)$$

که در آن \mathcal{A}^G اطلس G (ماکسیمال) متناظر با ساختار G در نظر گرفته شده است؛ به معادله (۲۵) مراجعه کنید. این معادل اشتراک‌گذاری مستقیم کرنل الگوی محلی طبق زیر است:

$$K_p^X = \frac{1}{\sqrt{|\eta_p^X|}} (U^X, \psi^X) \in \mathcal{A}^G \quad \text{برای هر پیمانه } p \in U^X, \quad (81)$$

که در آن ضریب نرمال‌سازی «چگالی کرنل» را به اندازه حجم چارچوب مرجع $\sqrt{|\eta_p^X|}$ کاهش می‌دهد. همانطور که در ادامه بحث می‌شود، این نرمال‌سازی برای همودایی تحت گروههای تقارن غیر حافظ حجم مهم است.

ما میدان‌های کرنلی را که توسط یک کرنل مشترک K طبق معادله (۸۱) پارامتری شده‌اند، به عنوان میدان‌های کرنل کانون‌شناختی GM می‌نامیم. الزام هم‌zman برای اشتراک‌گذاری وزن و استقلال از مختصات منجر به یک قید همودایی بر روی کرنل‌های الگو می‌شود. برای استخراج این قید، اشتراک‌گذاری کرنل در معادله (۸۱) را در قانون تبدیل کرنل در معادله (۷۲) قرار می‌دهیم، که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{1}{\sqrt{|\eta_p^B|}} K(g_p^{BA} v) = \frac{1}{\sqrt{|\eta_p^A|}} \rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) \cdot K(v) \cdot \rho_{\text{in}}(g_p^{BA})^{-1}. \quad (82)$$

از آنجایی که حجم‌های چارچوب‌های مرجع مختلف با $\sqrt{|\eta_p^A|} = |\det(g_p^{BA})| \sqrt{|\eta_p^B|}$ مرتبط هستند و از آنجایی که قانون تبدیل باید برای پیمانه‌های دلخواه مرتبط با G برقرار باشد، این قید G -راهبری را ایجاد می‌کند^{۲۹}

$$K(gv) = \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{out}}(g) \cdot K(v) \cdot \rho_{\text{in}}(g)^{-1} \quad \forall v \in \mathbb{R}^d, g \in G. \quad (83)$$

بر روی کرنل‌های الگو، همانطور که توسط لانگ و همکاران [۱۰۲] ثابت شده است، این قید نیازمند آن است که کرنل‌های الگو عملگرهای نمایش [۸۲] باشند (تعمیمهایی از عملگرهای تانسوری کروی در مکانیک کوانتومی). از نظر نموداری، یک کرنل G -راهبری K باید جایگزین زیر را برآورده کند:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{K} & \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \\ g \cdot \downarrow & & \downarrow \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{out}}(g) [\cdot] \rho_{\text{in}}(g)^{-1} \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{K} & \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \end{array} \quad (84)$$

برای هر $g \in G$. توجه داشته باشید که ضریب دترمینان معکوس $|\det g|$ در قانون تبدیل کرنل باعث می‌شود که آن مانند یک (۱)-چگالی ماتریس-مقدار تبدیل شود؛ برای جزئیات بیشتر به جدول ۲ مراجعه کنید. به طور شهودی، کرنل‌های G -راهبری دقیقاً آن کرنل‌هایی هستند که می‌توانند نسبت به چارچوب‌های مرجع دلخواه مرتبط با G به اشتراک گذاشته شوند بدون اینکه انتخاب خاص پیمانه بر نتیجه تاثیر بگذارد.^{۳۰} بنابراین، ابهام همترازی کرنل‌ها - که انگیزه اصلی این کار بود - با اشتراک‌گذاری وزن اضافی بر روی تمام چارچوب‌های مرجع معادل (تمام پیمانه‌ها) در ساختار G در نظر گرفته شده GM حل می‌شود.

^{۲۹} برخلاف کارهای قبلی [۹۱، ۱۹۰، ۳۲، ۴۰، ۸۷]، این قید شامل ضریب $|\det g|$ است. این ضریب در آن کارها ظاهر نشد زیرا همه آنها گروههای ساختاری متعادل $O(d)$ (با زیرگروههای آن) را در نظر گرفته بودند که برای آنها ضریب دترمینان صفر می‌شود.

^{۳۰} قید G -راهبری را می‌توان به صورت $\rho_{\text{out}}(g)^{-1} \cdot K(g^{-1}v) \cdot \rho_{\text{in}}(g) = |\det g|^{-1} \rho_{\text{out}}(g) \cdot K(g^{-1}v) \cdot \rho_{\text{in}}(g)$ برای هر $v \in \mathbb{R}^d$ ، $g \in G$ تأکید کرد. یک کرنل G -راهبری، با پایا بودن تحت تبدیلات پیمانه، منجر به همان کرنل بدون مختصات \mathcal{K}_p در p می‌شود، زمانی که نسبت به هر چارچوب مرجعی در $G_p M$ به اشتراک گذاشته شود.

$d\psi$ و dv^X	$\sqrt{ \eta^X }$	F و $[\text{Exp}_p^* f]^X$	K	K_p^X	شیء
۱	-۱	.	-۱	.	چگالی s

جدول ۲: مروری بر توان‌های چگالی s برای اشیاء مختلف در گیر در تبدیلات میدان کرنل عمومی و کانولوشن‌های GM . عبارت مختصاتی یک s -چگالی با ضریب $| \det g |^s$ تبدیل می‌شود وقتی مختصات از طریق $g \in G$ تبدیل شوند. یک کرنل ماتریس-مقدار عمومی K_p^X طبق معادله (۷۲) یک s -چگالی باشد. همین امر برای میدان‌های ویژگی و پسکش‌های آنها نیز صادق است که قوانین تبدیل آنها در معادلات (۴۸) و (۲۸) داده شده است. کل انتگرال ده برای استقلال آن از مختصات، مهانطون کر کرنل عمومی در معادله (۷۶) نیز یک s -چگالی دیده می‌شود \square توجه داشته باشید که این انتخاب پیمانه بی‌تفاوت است، شامل ضریب حجم چارچوب $\sqrt{|\eta^X|}$ نمی‌شود. از آنجایی که با این وجود باید مانند عملگرهای انتگرال $\mathcal{I}_{K,p}^X$ که زیربنای میدان کرنل هستند رفتار کنند، کل انتگرال ده $\mathcal{I}_{K,F}(\psi)dv$ از $\mathcal{I}_{K,F}(\psi)$ ملزم به بودن یک s -چگالی است. این امر مستلزم آن است که خود کرنل‌های الگوی مشترک K مانند (۱)-(۲)-چگالی‌ها تبدیل شوند، که در قید G -راهبری در معادله (۳۳) معنکس شده است. توجه داشته باشید که این قانون تبدیل کرنل‌های الگوی G برای هموردایی کانولوشن‌های GM اکیداً ضروری است اگر ویژگی‌های خروجی باید مانند چگالی‌هایی با وزن \cdot تبدیل شوند؛ به معادله (۸۹) مراجعه کنید. برای دیدگاهی جایگزین، خواننده علاقه‌مند را به نتیجه ۱ در [۶] ارجاع می‌دهیم، جایی که ضریب دترمینان از اندازه‌های هار روی گروه‌های لی استخراج می‌شود.

قبل از پرداختن به کانولوشن‌های GM ، در مورد فضای کرنل‌های G -راهبر توضیح می‌دهیم. توجه داشته باشید که مجموعه $\mathcal{K} := \{K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \}$. (۸۵)

کرنل‌های عمومی، یعنی نه لزوماً همودرا، با مجهر شدن به جمع و ضرب اسکالار استاندارد روى $\mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ یک فضای برداری تشکیل می‌دهد. از آنجایی که قید G -راهبری در معادله (۸۳) خطی است، فضای کرنل را به یک زیرفضای خطی محدود می‌کند:

$$\mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^G := \left\{ K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \mid K(gv) = \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{out}}(g) \cdot \rho_{\text{in}}(g)^{-1} \quad \forall v \in \mathbb{R}^d, g \in G \right\}. \quad (۸۶)$$

بنابراین می‌توان برای یک پایه از کرنل‌های G -راهبر را حل یافته که کانولوشن GM را می‌توان بر حسب آن پارامتری کرد. در حالی که این فضای G -راهبر مواجه می‌شویم، سپس یک مجموعه از وزن‌های با مقادیر حقیقی $\{w_1, \dots, w_N\}$ که $w_i \in \mathbb{R}$ هستند و در طول فرآیند آموزش بهینه‌سازی می‌شوند، کانولوشن را با $K = \sum_{i=1}^N w_i K_i$ پارامتری می‌کنند. توجه داشته باشید که ابعاد کاهش‌یافته (زیر) فضای کرنل‌های G -راهبر به معنای بهبود کارایی پارامتر در مقایسه با کانولوشن‌های معمولی است.

بخش ۳.۳.۵ به بحث در مورد راه حل‌های تحلیلی نمودهای از فضاهای کرنل همودای بازتابی برای نمایش‌های گروهی مختلف گروه بازتاب \mathcal{R} می‌پردازد. کرنل‌های حاصل که با انواع مختلفی از تقارن‌های بازتابی مشخص می‌شوند، در جدول ۳ به تصویر کشیده شده‌اند.

مثال‌های بیشتری را می‌توان در ادبیات مربوط به شبکه‌های عصبی کانولوشنی راهبر یافته: یک راه حل تحلیلی برای قید فضای کرنل برای گروه ساختاری متعدد خاص $\text{SO}(3)$ در سه بعد و نمایش‌های تحويل‌ناپذیر آن توسط توماس و همکاران [۱۹۱] ارائه شد. واپر و کوهن [۱۹۰] این روش را برای پیاده‌سازی در https://quva-lab.github.io/e_cnn/api/e_cnn.kernels.html یک پیاده‌سازی در حل $G \leq O(2)$ کردند \square یک پیاده‌سازی در گروه‌های ساختاری متنه، قید را می‌توان به صورت عددی نیز حل کرد، همانطور که توسط کوهن و ولینگ [۲۸] توضیح داده شده است. یک استراتژی راه حل کلی‌تر، که برای گروه‌های ساختاری فشرده دلخواه G (و بنابراین همه موارد ذکر شده در بالا) کاربرد دارد، توسط لانگ و کورنبلیث [۱۰۲] پیشنهاد شد. این راه حل قصیه کلاسیک ویکتر-اکارت [۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷] را به یک قضیه ویکتر-اکارت برای کرنل‌های G -راهبر تعیین می‌دهد، که کرنل‌ها را بر حسب توابع پایه هارمونیک، ضرایب کلیش-گوردان و اندومورفیسم‌های نمایش‌ها (عنصر ماتریسی کاهش‌یافته تعیین‌یافته) بیان می‌کند. ما برای مروری دقیق‌تر بر کارهای قبلی و مرتبط با کرنل‌های راهبر به لانگ و کورنبلیث [۱۰۲] ارجاع می‌دهیم.

کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM : با داشتن یک کرنل الگوی G -راهبر $K \star GM$ با این کرنل به عنوان تبدیل میدان کرنل با میدان کرنل کانولوشنی GM متناظر تعریف می‌شود، که برای هر نقطه $M \in p \in M$ در \mathbb{R}^d و هر پیمانه ψ_p^X در $\mathcal{K}_p^X = K / \sqrt{|\eta^X|}$ صدق می‌کند. با قرار دادن میدان کرنل کانولوشنی GM در معادله (۷۶)، یعنی تبدیل میدان کرنل، عبارت مختصاتی کانولوشن GM به صورت زیر ساده می‌شود:

$$f_{\text{out}}^A(p) = [K \star f_{\text{in}}]^A(p) := \int_{\mathbb{R}^d} K(v) [\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^A(v) dv = \mathcal{I}_K([\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^A). \quad (۸۷)$$

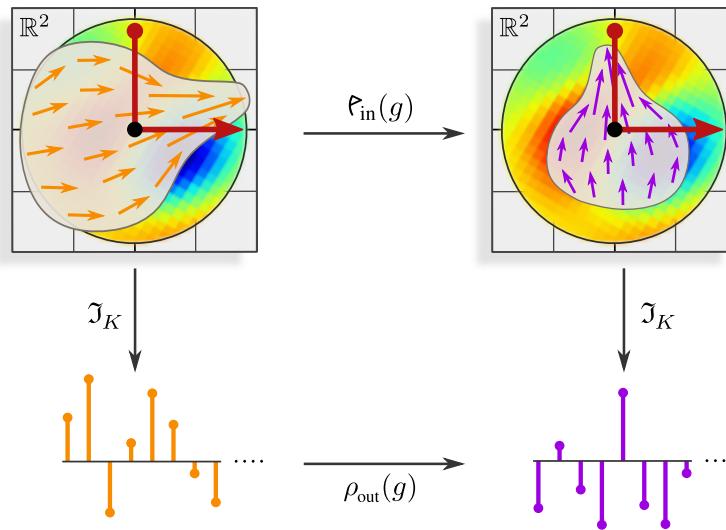
بنابراین، این به سادگی با تطبیق پسکش انتقال دهنده $[\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^A$ از میدان ویژگی در یک پیمانه دلخواه انتخاب شده ψ_p^A با کرنل کانولوشن مستقل از پیمانه K به دست می‌آید. بنابراین کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM به راحتی با (۱) انتخاب چارچوب‌های مرتع دلخواه، (۲) پسکش (و انتقال) میدان‌های ویژگی به مختصات‌دهی‌های فضای مماس و (۳) انقباض آنها در آنجا با یک کرنل G -راهبر (قابل آموزش) پیاده‌سازی می‌شوند.

کانولوشن‌های GM چندین ویژگی تقارنی مرتبط را از خود نشان می‌دهند:

استقلال از مختصات: به عنوان موارد خاصی از تبدیلات میدان کرنل، کانولوشن‌های GM به طور (غیرفعال) مستقل از مختصات هستند، یعنی معادله (۷۷) در مورد آنها صدق می‌کند.

هموردایی ایزومنتری سراسری: آنها تحت عمل فعل و سراسری ایزومنتری‌های حافظ ساختار G در Isom_{GM} بر روی میدان‌های ویژگی همودارa هستند. بخش‌های ۳.۴ و به ویژه ۸ این ویژگی را به تفصیل مورد بحث قرار می‌دهند.

هموردایی G محلی: الگوی عملگر انترگرالی \mathcal{J}_K به دلیل G -راهبری K خود G -هموردا است. بنابراین، هر تبدیل G یک نمایش میدان ویژگی محلی روی \mathbb{R}^d منجر به تبدیل متناظر بردار ویژگی حاصل خواهد شد؛ به شکل ۲۶ مراجعه کنید. بنابراین، تبدیلات G مستقل الگوهایی که در نقاط مختلف $p_i \in M$ متمرک شده‌اند، منجر به تبدیلات ویژگی خروجی مستقل در این نقاط می‌شوند (این فقط در این نقاط برقرار است و نیازمند کرنل‌هایی با تکیه‌گاه فشرده است که کل میدان دید آنها طبق تبدیل G تبدیل شود).



شکل ۲۶: هموردایی G محلی الگوی عملگر انترگرالی مشترک \mathcal{J}_K که زیربنای یک کانولوشن \mathfrak{b}_n از یک نمایش میدان محلی روی \mathbb{R}^d بردارهای ویژگی را از $g^{-1}\mathfrak{b}_n$ به \mathfrak{b}_n منتقل می‌کند و آنها را علاوه بر این از طریق $(\rho_{\text{in}}(g))$ تبدیل می‌کند. در حالی که اولی ویژگی‌ها را به صورت فضایی جابجا می‌کند، دومی ضرایب عددی آنها را تبدیل می‌کند (که در شکل به صورت چربوش و مقیاس‌بندی بردارهای (umas) متفاوتی می‌شود). این حال، به دلیل هموردایی G از \mathcal{J}_K ، تضمین می‌شود که پاسخ‌ها با $(\rho_{\text{out}}(g))$ مرتبه هستند؛ به معادله (۸۹) مراجعه کنید. بنابراین، یک تبدیل G فعل از یک میدان ورودی منجر به یک تبدیل G فعل متناظر از بردار ویژگی خروجی می‌شود. توجه داشته باشید که هموردایی G از \mathcal{J}_K یک نتیجه مستقیم از G -راهبری K است.

برای دقیق‌تر کردن نکته آخر، ما تبدیلات G فعل نمایش‌های میدان ویژگی محلی را در $C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم^{۳۱}

$$\mathfrak{b}_n : G \times C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c), \quad F \mapsto \mathfrak{b}_n(g)F := \rho_{\text{in}}(g) \circ F \circ g^{-1}, \quad (88)$$

که در آن فرض می‌کنیم F از نوع ρ_{in} است. به طور شهودی، \mathfrak{b}_n با انتقال فعل بردارهای ویژگی $\mathfrak{b}_n(F(g^{-1}))$ از g^{-1} به $\mathfrak{b}_n(F)$ و تبدیل آنها با $(\rho_{\text{in}}(g))$ بر روی میدان‌های F عمل می‌کند - این تعریف «معمولی» تبدیلات فعل میدان‌های ویژگی F بر روی فضاهای اقلیدسی \mathbb{R}^d است.

^{۳۱} $\mathfrak{b} = \text{Res}_G^{\mathbb{R}^d \rtimes G} \text{Ind}_G^{\mathbb{R}^d \rtimes G} \rho$ به طور رسمی با القای نمایش G به یک نمایش $(\mathbb{R}^d \rtimes G)$ به داده ρ می‌شود. یک توضیح شهودی از نمایش‌های القایی و محدود شده را می‌توان در پیوست [۱۹۰] یافت در حالی که [۶۱] این موضوع را به طور رسمی تر بررسی می‌کند.

هموردابی G ادعا شده برای \mathfrak{I}_K به راحتی با اعمال آن به یک ورودی تبدیل شده، و سپس جایگزینی و استفاده از G -راهبری K دیده می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{I}_K(\mathfrak{h}_{\text{in}}(g)F) &= \mathfrak{I}_K(\rho_{\text{in}}(g) \circ F \circ g^{-1}) && (\text{تعريف } \mathfrak{I}_K, \text{ معادله (88)}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \rho_{\text{in}}(g) F(g^{-1}v) dv && (\text{تعريف } \mathfrak{I}_K, \text{ معادله (79)}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} K(g\tilde{v}) \rho_{\text{in}}(g) F(\tilde{v}) |\det g| d\tilde{v} && (\tilde{v} = g^{-1}v) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_{\text{out}}(g) K(\tilde{v}) F(\tilde{v}) d\tilde{v} && (G\text{-راهبری } K, \text{ معادله (83)}) \\
 &= \rho_{\text{out}}(g) \mathfrak{I}_K(F) && (\text{تعريف } \mathfrak{I}_K, \text{ معادله (79)}) \quad (89)
 \end{aligned}$$

بنابراین، یک تبدیل فعال یک نمایش میدان ویژگی محلی F روی یک مختصات‌دهی فضای مماس با (g) تضمین می‌کند که منجر به تبدیل بردار ویژگی خروجی حاصل با (g) می‌شود. به عبارت دیگر، ویژگی‌هایی که در ژست‌های هندسی مختلف مرتبط با G ظاهر می‌شوند، تا یک تبدیل از طریق ρ_{out} پاسخ یکسانی را برمی‌انگیرند. این به طور خلاصه در قالب یک نمودار جابجا‌یابی به صورت زیر است:

$$\begin{array}{ccc}
 C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{c_{\text{in}}}) & \xrightarrow{\mathfrak{h}_{\text{in}}(g)} & C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{c_{\text{in}}}) \\
 \downarrow \mathfrak{I}_K & & \downarrow \mathfrak{I}_K \\
 \mathbb{R}^{c_{\text{out}}} & \xrightarrow{\rho_{\text{out}}(g)} & \mathbb{R}^{c_{\text{out}}} \quad (90)
 \end{array}$$

شکل ۲۶ یک تفسیر بصری از این ویژگی هموردابی \mathfrak{I}_K را به می‌دهد.

توجه داشته باشید که هموردابی تحت تبدیلات G محلی در معادله (89) دقیقاً به قید G -راهبری همانطور که در معادله (83) است، یعنی به طور خاص، با ضریب دترمینان $|\det g|^{-1}$ که باعث می‌شود کرنل مانند یک (-1) -چگالی تبدیل شود، نیاز دارد. این ضریب به تعریف از اشتراک‌گذاری وزن کاتولوشنی در معادله (81) با نرمال‌سازی با حجم‌های چارچوب مرجع $\sqrt{|\eta_p^X|}$ برمی‌گردد. بنابراین، اشتراک‌گذاری وزن ساده‌انگارانه‌ای که در ابتدای این بخش ذکر شد، به رفتار تبدیل مطلوب منجر نمی‌شد. به عبارت دیگر: هر دو نسخه ساده‌انگارانه و نرمال‌شده اشتراک‌گذاری کرنل مستقل از مختصات هستند و بنابراین هر دو تحت تبدیلات پیمانه غیرفعال - به ویژه آنهایی که حجم چارچوب را تغییر می‌دهند - به طور سازگار رفتار می‌کنند. با این حال، در مورد اشتراک‌گذاری کرنل ساده‌انگارانه، این امر توسط پایایی عنصر حجم ریمانی اندازه انتگرال‌گیری تضمین نمی‌شود - که مستلزم آن است که خود کرنل‌های G -راهبر تغییرات حجم را از طریق ضریب دترمینان توضیح دهند. فقط دومی به تبدیلات فعال تعیین می‌اید، جایی که فقط میدان ویژگی تبدیل می‌شود، در حالی که اندازه انتگرال‌گیری پایا می‌ماند.

از آنجایی که تعریف ما از کاتولوشن‌های GM امکان خمینه‌های ریمانی، ساختارهای \square و انواع میدان دلخواه را فراهم می‌کند، بسیار عمومی است و طیف گسترده‌ای از کارهای مرتبه را پوشش می‌دهد. ما این ادعا را در بخش سوم اثبات می‌کنیم، جایی که بسیاری از CNN‌ها را روی فضاهای آفین اقلیدسی \mathbb{E}^d کره S^2 و خمینه‌ها یا متشهدهای عمومی به عنوان نمونه‌های خاصی از معادله (87) توضیح می‌دهیم. برای یک نمای کلی و طبقه‌بندی این مدل‌ها، به جدول ۶ مراجعه کنید.

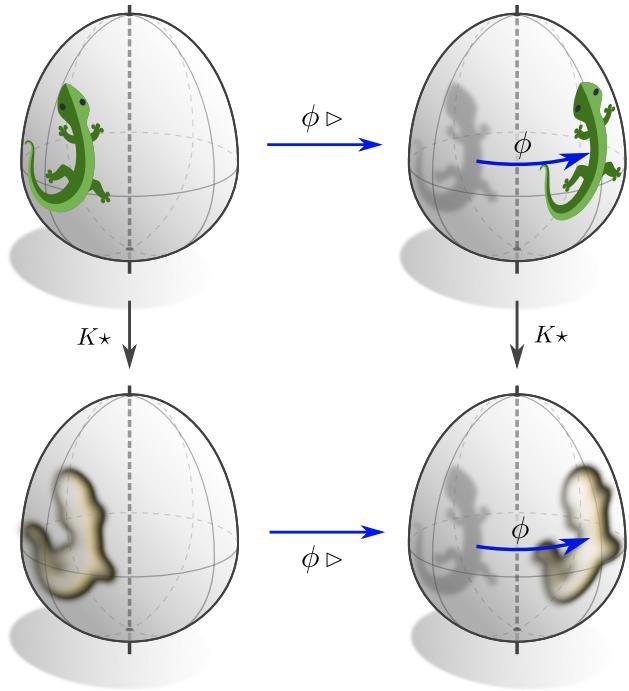
۳.۴ تناوب‌پذیری ایزومتری

با توجه به اینکه یک منیفولد تقارن‌هایی نشان می‌دهد، معمولاً مطلوب است که شبکه‌های عصبی این تقارن‌ها را رعایت کنند، یعنی تحت عمل آن‌ها بر میدان‌های ویژگی تناوب‌پذیر باشند. G -کاتولوشن‌ها طراحی شده‌اند تا Isom_{GM} -تناوب‌پذیر باشند، که به این معنی است که آن‌ها با عمل ایزومتری‌ها در $Isom_{GM}$ بر میدان‌های ویژگی جابجا می‌شوند، همانطور که در شکل ۲۷ بصری‌سازی شده است.^{۳۲} در معادلات، G -کاتولوشن K^* تناوب‌پذیر است زمانی که رابطه

$$K \star (\phi \triangleright f_{\text{in}}) = \phi \triangleright (K \star f_{\text{in}}) \quad \forall \phi \in \text{Isom}_{GM} \quad (91)$$

را برای هر میدان ورودی ممکن f_{in} برآورده کند، یعنی زمانی که نمودار زیر جابجا باشد:

^{۳۲} به یاد داشته باشید که عمل بر میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات GM تنها برای ایزومتری‌های حفظ‌کننده G -ساختار در Isom_{GM} قابل تعریف است. بنابراین حتی امکان تعریف مفهوم تناوب‌پذیری ایزومتری برای ایزومتری‌هایی که تقارن‌های G -ساختار نیستند وجود ندارد. توجه داشته باشید که این بدون از دست دادن کلیت است زیرا همیشه می‌توان گروه ساختار $O(d) = G$ را انتخاب کرد که برای آن $\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M)$ با کل گروه ایزومتری منطبق می‌شود.



شکل ۲۷: گفته می‌شود یک لایه شبکه تحت ایزومتری‌ها تناوب‌پذیر است زمانی که با عمل آن‌ها بر میدان‌های ویزگی جابجا می‌شود. کانولوشن‌ها طراحی شده‌اند تا نسبت به آن ایزومتری‌های $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ که تقارن‌های \tilde{G} ساختار هستند، تناوب‌پذیر باشند. در معادلات، کانولوشن K^* تحت عمل ایزومتری ϕ تناوب‌پذیر است زمانی که رابطه $(\phi \triangleright f_{in}) = \phi \triangleright (K^* \star f_{in})$ برآورده کند. این رابطه توسط نمودار جابجا می‌شود (۹۲) بصری‌سازی شده است که تفسیر گرافیکی آن در این شکل نشان داده شده است.

اینکه $-GM$ -کانولوشن‌ها Isom_{GM} -تناوب‌پذیر هستند بر این حقایق تکیه دارد که (۱) کریل‌ها در کل منیفولد بر اشتراک گذاشته می‌شوند، (۲) ایزومتری‌ها عقب‌کشی انتقال‌دهنده میدان‌های ویزگی را حفظ می‌کنند و (۳) اینکه تبدیل‌های گیج با مقدار G را القا می‌کند که توسط $-G$ -استیربیل بودن کرنل در نظر گرفته می‌شود.

Creative Commons Attribution 4.0 International
(مارمولک‌ها تحت مجوز اقتباس شده با مجوز Twitter)

$$\begin{array}{ccccc}
 & f_{in} & \xleftarrow{\phi \triangleright} & \phi \triangleright f_{in} & \\
 & \downarrow K^* & & \downarrow K^* & \\
 f_{out} & \xleftarrow{\phi \triangleright} & \phi \triangleright f_{out} & &
 \end{array} \tag{۹۲}$$

به عنوان اولین قدم به سوی اثبات تناوب‌پذیری ایزومتری $-GM$ -کانولوشن‌ها، به یاد بیاورید که آن‌ها به صورت نقطه‌ای به عنوان انقباض یک کرنل K با عقب‌کشی انتقال‌دهنده A $[\text{Exp}_p^* f_{in}]^A$ [Exp] $_p^* f_{in}$ تعريف می‌شوند. از آنجا که ایزومتری‌ها به طور تعريف هندسه ریمانی M را حفظ می‌کنند، به ویژه نگاشت نمایی ریمانی و انتقال‌دهنده‌های لوی-چوویتا را حفظ می‌کنند؛ به بخش ۴.۱.۸ و شکل ۴۴ مراجعه کنید.^{۳۳} این امر دلالت دارد بر اینکه عقب‌کشی انتقال‌دهنده میدان پیش‌برده f_{in} در $\phi \triangleright f_{in}$ در (p) تها با تبدیل گیج القا شده توسط ایزومتری از عقب‌کشی انتقال‌دهنده میدان اصلی f_{in} در p متفاوت خواهد بود، یعنی:

$$[\text{Exp}_{\phi(p)}^*(\phi \triangleright f_{in})]^A = \rho_{in}(g_{\phi}^{AA}(p)) \circ [\text{Exp}_p^* f_{in}]^{\tilde{A}} \circ g_{\phi}^{AA}(p)^{-1}; \tag{۹۳}$$

مقایسه کنید با معادله (۶۸) و، برای فرمول‌بندی مستقل از مختصات، قضیه ۴.۸.

با توجه به این همانی، تناوب‌پذیری ایزومتری $-GM$ -کانولوشن‌ها توسط محاسبه ساده زیر اثبات می‌شود که به طور اساسی از G -استیربیل بودن کرنل قالب K برای توضیح عمل گیج القا شده توسط ایزومتری استفاده می‌کند:

^{۳۳} به طور کلی‌تر، هر زمان که یک اتصال جایگزین G -سازگار برای انتقال بردارهای ویزگی انتخاب شود، فرض می‌کنیم این اتصال تحت عمل Isom_{GM} ناوردان باشد؛ به بخش ۴.۱.۸ مراجعه کنید. این فرض برای همه مدل‌هایی که در بررسی ادبیات در بخش سوم پوشش داده شده‌اند، برآورده می‌شود.

$$\begin{aligned}
[K \star (\phi \triangleright f_{\text{in}})]^A(\phi(p)) &\stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} K(v) [\text{Exp}_{\phi(p)}^*(\phi \triangleright f_{\text{in}})]^A(v) dv \\
&\stackrel{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \left[\rho_{\text{in}}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) [\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^{\tilde{A}}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)^{-1}v) \right] dv \\
&\stackrel{(3)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \left[K(g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \tilde{v}) \rho_{\text{in}}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) \right] [\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^{\tilde{A}}(\tilde{v}) |\det g_\phi^{A\tilde{A}}(p)| d\tilde{v} \\
&\stackrel{(4)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \left[\rho_{\text{out}}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) K(\tilde{v}) \right] [\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^{\tilde{A}}(\tilde{v}) d\tilde{v} \\
&\stackrel{(5)}{=} \rho_{\text{out}}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) \cdot f_{\text{out}}^{\tilde{A}}(p) \\
&\stackrel{(6)}{=} [\phi \triangleright f_{\text{out}}]^A(\phi(p)) \\
&\stackrel{(7)}{=} [\phi \triangleright (K \star f_{\text{in}})]^A(\phi(p))
\end{aligned} \tag{94}$$

قدم اول از تعریف GM -کانولوشن‌ها در معادله (۸۷) پیروی می‌کند در حالی که قدم دوم تبدیل گیج القا شده را طبق معادله (۹۳) وارد کرد. جایگزینی از ۷ به $g_\phi^{A\tilde{A}}(p)^{-1} = \tilde{v}$ قدم سوم را توجیه می‌کند. در قدم چهارم G -استیریبل بودن کرنل قالب، یعنی معادله (۸۳)، اعمال می‌شود (معادله (۴۴) را به یاد بیاورید که بیان می‌کند تبدیل‌های گیج القا شده توسط $Isom_{GM}$ دارای مقدار G هستند). نتیجه این است که بردار ویژگی خروجی حاصل توسط تبدیل گیج القا شده تبدیل می‌شود. پس از شناسایی این امر به عنوان بیان مختصاتی پیش‌برد میدان خروجی در معادله (۴۶)، گزاره پیروی می‌کند. از آنجا که همه قدم‌ها برای ایزومنتری $Isom_{GM}$ معتبر هستند، می‌بینیم که GM -کانولوشن‌ها به طور خودکار نسبت به هر ایزومنتری حفظ‌کننده G -ساختار تناوب‌پذیر هستند. آن‌ها لزوماً نسبت به ایزومنتری‌های عمومی در G ممکن است G -ساختار را رعایت نکنند تناوب‌پذیر نیستند، با این حال، تناوب‌پذیری کامل ایزومنتری برای گروه‌های ساختار متعدد ($G = O(d)$ یا ابرگروه‌های آن) تضمین شده است.

میدان‌های کرنل ناوردان: تحلیل عمیق‌تری از تناوب‌پذیری ایزومنتری تبدیل‌های میدان کرنل عمومی را می‌توان در بخش‌های ۲.۸ و ۳.۸ یافت. نتیجه اصلی این بررسی قضیه ۸.۸ است که بیان می‌کند تناوب‌پذیری ایزومنتری یک تبدیل ایزومنتری میدان کرنل آن را نتیجه می‌دهد و بالعکس. شکل ۴۵ چنین میدان کرنل ناوردایی را بصری‌سازی می‌کند که ملزم به اشتراک وزن‌ها بر روی مدارات عمل ایزومنتری است. ناوردایی مورد نیاز میدان کرنل از نظر شهودی قابل فهم است زیرا تناوب‌پذیری ایزومنتری مطمئناً نیازمند ثابت بودن استنتاج شبکه بر روی هر مدار است. این نتیجه انتزاعی تناوب‌پذیری ایزومنتری GM -کانولوشن‌ها را با مشاهده اینکه میدان‌های کرنل GM -کانولوشنی – که توسط یک کرنل قالب منفرد و مشترک تعیین می‌شوند \square تحت ایزومنتری $Isom_{GM}$ ناوردان هستند، نتیجه می‌دهد؛ به قضیه ۹.۸ و شکل ۱۱ مراجعه کنید.

فضاهای همگن: در حالی که تقاضای تناوب‌پذیری ایزومنتری بروی مدارات گروه ایزومنتری به اشتراک گذاشته شوند، به طور کلی نیازمند اشتراک وزن کانولوشنی در کل منیفلد‌هایی است. یک استثنای مهم حالت منیفلد‌هایی است که فضاهای همگن گروه ایزومنتری خود هستند، مانند \mathbb{R}^d یا کره S^3 . به طور تعریف، عمل ایزومنتری در چنین فضاهایی متعدد است، یعنی تنها یک مدار منفرد وجود دارد. در نتیجه، تنها یک کرنل مستقل وجود خواهد داشت که از طریق عمل گروه ایزومنتری در کل فضای اشتراک گذاشته می‌شود. قضیه ۱۴.۸ در بخش ۳.۸ ثابت می‌کند که تبدیل‌های میدان کرنل تناوب‌پذیر ایزومنتری در فضاهای همگن لزوماً کانولوشن‌های مستقل از مختصات هستند. این مشاهده پیوند رسمی بین نظریه ما و کارهای قبلی در مورد شبکه‌های کانولوشنی در فضاهای همگن توسط کوندور و ترودی [۴۶]، کوهن و همکاران [۳۱] و بکر [۴۶] برقرار می‌کند که کانولوشنها را از طریق تناوب‌پذیری آنها نسبت به تقارن‌های سراسری فضای زیرین تعریف می‌کنند.

تناوب‌پذیری دیفثومورفیسم: خواننده ممکن است تعجب کند که آیا امکان کاملاً دیفثومورفیسم تناوب‌پذیر کردن مستقل از مختصات ما وجود دارد یا نه. همانطور که به راحتی می‌توان دید، عملیات نقطه‌ای از بخش ۱.۴، یعنی *onexonesfarsi*، بایس‌ها و غیرخطی‌ها، از قبل دیفثومورفیسم تناوب‌پذیر هستند. به طور خاص، بگذارید:

$$\text{Diff}_{GM} := \left\{ \phi \in \text{Diff}(M) \mid [\phi_*(e_i)]_{i=1}^d \in GM \quad \forall [e_i]_{i=1}^d \in GM \right\} \leq \text{Diff}(M) \tag{95}$$

زیرگروه دیفثومورفیسم‌های حفظ‌کننده G -ساختار باشد، یعنی آنالوگ معادله (۴۲) بدون نیاز به اینکه ϕ ایزومنتری باشد. مشابه معادله (۴۴) و قضیه ۳.۸، بیان‌های مختصاتی (تبدیل‌های گیج القا شده) دیفثومورفیسم‌های حفظ‌کننده G -ساختار تضمین شده‌اند که مقادیری در G بگیرند، یعنی:

$$\phi \in \text{Diff}_{GM} \iff g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \in G \quad \forall p \in M. \tag{96}$$

G -تناوب پذیری توابع قالب نقطه‌ای مشترک تضمین خواهد کرد که آن‌ها با این تبدیل‌های گیج القا شده توسط Diff_{GM} جابجا شوند - و بنابراین با خود عمل دیفئومورفیسم فعال.

از طرف دیگر، GM -کانولوشن‌ها با کرنل‌های گسترده فضایی، به طور کلی نسبت به دیفئومورفیسم‌ها تناوب پذیر نیستند. دلیل این امر آن است که عقب‌کشی انتقال‌دهنده f_p^* بر نگاشتهای نمایی تکیه می‌کند که داتا ساختارهای ریمانی هستند که با دیفئومورفیسم‌ها جابجا نمی‌شوند. با این حال، از آنجا که کرنل‌ها G -استریبل هستند، تناوب پذیری Diff_{GM} باید در حد صفر رفتن پشتیبانی کرنل همچنان برقرار باشد. با توجه به اینکه کرنل‌های کانولوشن در کاربردهای ععمیک کاملاً کوچک هستند، تناوب پذیری دیفئومورفیسم باید در عمل تقریباً برقرار باشد.

تناوب پذیری آفین: فضاهای آفینی‌ای را تشکیل می‌دهد \mathbb{A}^n زیرا امکان GM -کانولوشن‌های را فراهم می‌کند که تحت عمل گروه‌های آفین (G) $\text{Aff}(G)$ تناوب پذیر هستند. اینکه چنین است به این حقیقت تکیه دارد که نگاشت نمایی در فضاهای آفینی‌ای را در مختصات متحسن کردن می‌نماید. بلکه به طور کلی تر با تبدیل‌های آفین جابجا می‌شود. تناوب پذیری گروه آفین GM -کانولوشن‌های آفین در بخش ۳.۹ اثبات شده است.

۵ مدل اسباب بازی: کانولوشن‌های موبیوس هم‌متغیر انعکاس

برای ملموس‌تر کردن ملاحظات نظری بخش‌های قبلی، اکنون به یک نمونه کاربرد می‌پردازیم. در حالی که از اهمیت عملی فوري برخوردار نیست، کانولوشن‌های GM روی نوار موبیوس یک مدل اسباب بازی مناسب هستند زیرا هندسه آن و نظریه نمایش در گیر به ویژه ساده است. به دلیل غیرجهت‌پذیر بودن آن، چارچوب‌های مرجع فقط می‌توانند (به‌طور هموار) تا حد انعکاس‌ها ترجیح داده شوند. همانطور که انتظار می‌رود، CNN‌های مستقل از مختصات، با اعمال توابع الگوی هم‌متغیر انعکاس، از پیاده‌سازی ساده‌لوحانه وابسته به مختصات بهتر عمل می‌کنند. علاوه بر این نشان داده می‌شود که آنها تحت عمل گروه ایزومتری نوار موبیوس هم‌متغیر هستند.

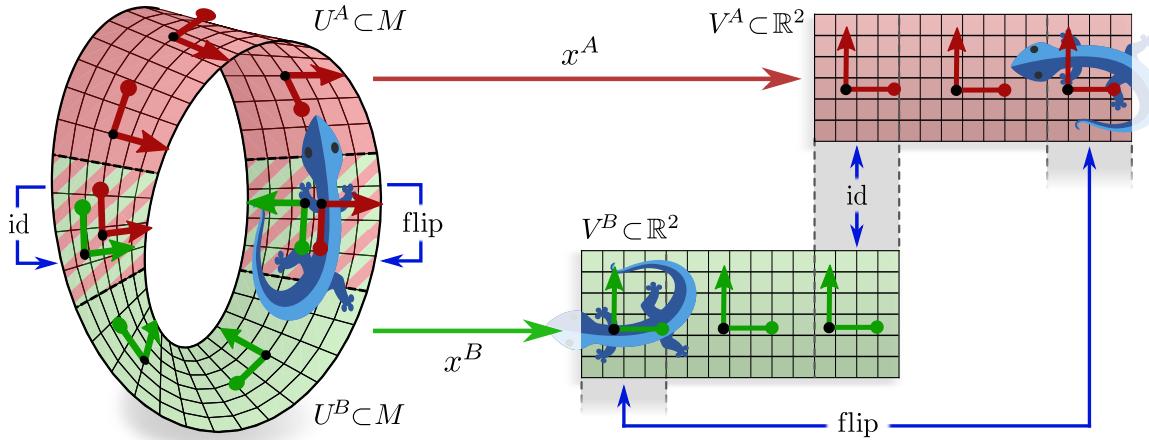
۱.۵	هندسه نوار موبیوس
۲.۵	میدان‌های ویژگی مستقل از جهت‌گیری
۳.۵	شبکه‌ای کانولوشنی مستقل از جهت‌گیری
۱.۳.۵	جمع بایاس مستقل از جهت‌گیری
۲.۳.۵	غیرخطی‌های مستقل از جهت‌گیری
۳.۳.۵	کانولوشن‌های مستقل از جهت‌گیری
۴.۵	پیاده‌سازی عددی و ارزیابی کانولوشن‌های موبیوس
۱.۴.۵	پیاده‌سازی عددی
۶۲	۲.۴.۵ ارزیابی تجربی
۶۴	

بخش ۱.۵ در ادامه هندسه نوار موبیوس مسطح را مورد بحث قرار می‌دهد. به دلیل پیچ آن، گروه ساختار آن نمی‌تواند بیش از گروه انعکاس $G = \mathcal{R}$ کاوش یابد، به‌طوری که باید اطیبل \mathcal{R} از گیج‌ها را همانطور که در شکل ۲.۸ نمایش داده شده، در نظر گرفت. گروه ایزومتری توسط چرخش‌ها در امتداد نوار داده می‌شود و تبدیل‌های گیج با مقادیر \mathcal{R} را الفا می‌کند. میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات \mathcal{RM} ، که برخی از آنها در بخش ۲.۵ معرفی می‌شوند، لزوماً باید مطابق با نمایشی از گروه انعکاس تبدیل شوند. بخش ۳.۵ عملیات شبکه کانولوشنی مستقل از جهت‌گیری را مورد بحث قرار می‌دهد. این به ویژه مفهوم کرنل‌های G -راهبردی‌پذیر را روش می‌کند اما همچنین بایاس‌های هم‌متغیر انعکاس و غیرخطی‌ها را پوشش می‌دهد. پیاده‌سازی عددی خانواده مدل پیشنهادی در بخش ۴.۵ مورد بحث و ارزیابی قرار می‌گیرد. کد به‌طور عمومی در <https://github.com/mauriceweiler/MobiusCNNs> در دسترس است.

۱.۵ هندسه نوار موبیوس

منیفلد M مورد بررسی نوار موبیوس مسطح با مرز است همانطور که در شکل ۴ (راست) نشان داده شده است. می‌توان آن را به عنوان ساخته شده از زیرمجموعه مستطیلی \mathbb{R}^3 از $[0, Y] \times [0, X]$ و چسباندن دو انتهای مقابل به‌شكل پیچ‌خورده در نظر گرفت. با این تعریف، نوار موبیوس متريک کانونی \mathbb{R}^3 را به اirth می‌پرسد که آن را با ساختار ریمانی مجهز می‌کند. متريک به ویژه اتصال لوی-چیوینتا و در نتیجه نگاشتهای نمایی و انتقال‌دهنده‌های موازی را مشخص می‌کند که در ادامه بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرند.

اولین سؤالی که در ساخت CNN مستقل از مختصات باید پاسخ داد این است که تا چه حد انتخاب چارچوب‌های مرجع مهم است. با توجه به متريک ریمانی روی نوار، می‌توانیم توجه خود را به چارچوب‌های متعدد محدود کنیم. علاوه بر این می‌توان یکی از دو جهت در امتداد نوار را متمایز کرد تا چرخش چارچوب‌های مرجع را با تراز کردن محورهای اول آنها با این جهت (به‌طور هموار) رفع ابهام کرد. این ما را با ابهام دست‌گردی چارچوب باقی می‌گذارد، با دو جهت‌گیری که متناظر با دو جهت ممکن محور دوم چارچوب عمود بر نوار هستند. نوار موبیوس به عنوان منیفلد غیرجهت‌پذیر، انتخاب سراسری هموار (یا حتی پیوسته) جهت‌گیری‌های چارچوب را نمی‌پذیرد. برای به دست آوردن شهودی از این گزاره، تلاش برای ساخت میدان چارچوب هموار با انتخاب چارچوب دلخواه در موقعیت تصادفی و گسترش هموار این انتخاب روی کل نوار را در نظر بگیرید. پس



شکل ۲۸: هندسه مسطح نوار موبیوس امکان زیرمجموعه‌های محلی را فراهم می‌کند که می‌توانند به طور ایزومتریک با زیرمجموعه‌های متناظر از \mathbb{R}^3 شناسایی شوند. ما اطلسی ایزومتریک را ثابت می‌کنیم که از دو چارت x^A و x^B (سیز) تشکیل می‌شود که کل نوار را می‌پوشانند. گیج‌های $\psi_p^X = \hat{d}x_p^X : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d$ برای $p \in U^A$ به عنوان دیفرانسیل‌های چارت القا می‌شوند. به دلیل پیچ نوار موبیوس، توابع گذار g_p^{BA} در یکی از نواحی همپوشان بدهیه خواهد بود، در حالی که ناحیه دیگر لزوماً بین گیج‌ها از طریق انعکاس‌های s گذار خواهد کرد. اطلس انتخاب شده از چارت‌ها بنابراین \mathcal{R} -اطلسی از گیج‌ها را القا می‌کند و \mathcal{R} -ساختار متناظر \mathcal{RM} را مستلزم می‌شود که از دو چارت‌ها متعکس شده در هر نقطه از M تشکیل می‌شود. هر یک از چارت‌های x^X میدان چارچوب محلی هموار را القا می‌کند که توسط پایه‌های مختصاتی $\left[\frac{\partial}{\partial x_i^X} \right]_{|p}^d$ داده می‌شود. انعکاس در توابع گذار در یک همپوشانی در انعکاس چارچوب‌ها نمایان می‌شود.

(مارمولک‌ها تحت مجوز Twitter با مجوز license Creative Commons Attribution 4.0 International اقتباس شده‌اند.)

از یک دور کامل در اطراف نوار، چارچوب‌های ساخته شده ناگزیر نسبت به چارچوب‌های اولیه منعکس خواهند شد و بنابراین با هموار بودن مطلوب در تناض خواهد بود. بنابراین از نظر توبولوژیکی تعریف $\{e\}$ -ساختار، یعنی میدان سراسری هموار چارچوب‌ها، روی نوار موبیوس غیرممکن است. بنابراین ما با گروه ساختار غیرقابل کاهش

$$G = \mathcal{R} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad (97)$$

که انعکاس چارچوب‌ها را مدل می‌کند، باقی می‌مانیم. گروه انعکاس فقط شامل دو عنصر است، همانی e و انعکاس s ، که طبق جدول ضرب ساده زیر ترکیب می‌شوند:

$$\begin{array}{c|cc} s & e \\ \hline s & e & e \\ e & s & s \end{array} \quad (98)$$

تنها گزاره غیربدیهی در این جدول این است که دو انعکاس یکدیگر را خنثی می‌کنند، یعنی $s = e^{-1}$ یا به طور معادل، $s^{-1} = s$. با توجه به غیرقابل کاهش بودن گروه ساختار \mathcal{R} ، در ادامه باید \mathcal{R} -ساختار متناظر \mathcal{RM} را در نظر بگیریم که از دو چارچوب با دست‌گردی مخالف در هر نقطه روی نوار موبیوس تشکیل می‌شود.

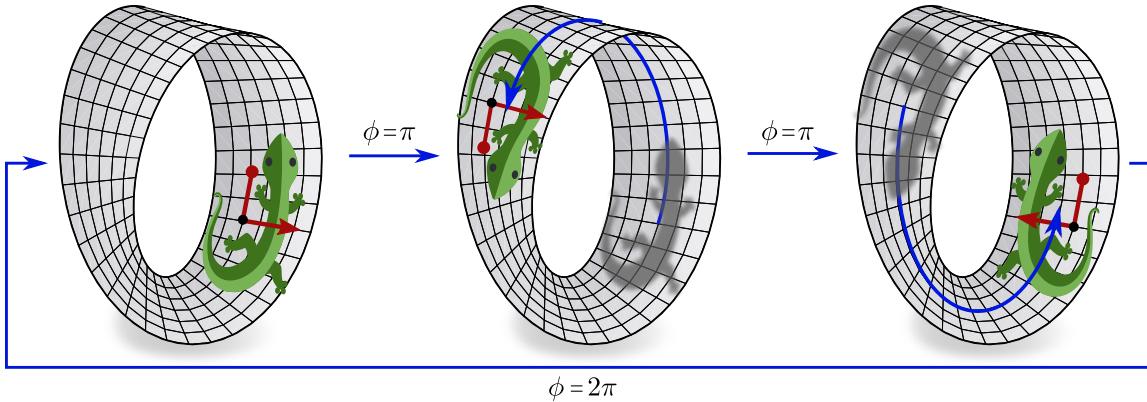
برای کدگذاری میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات \mathcal{RM} هموار روی M ، نیاز است که از گیج‌های مرتبط با \mathcal{R} تشکیل شده و کل نوار را بپوشاند. ما انتخاب می‌کنیم این کار را با ثابت کردن اطلسی از چارت‌ها

$$x^X : U^X \rightarrow V^X \subset \mathbb{R}^3 \quad (99)$$

که نوار را می‌پوشانند انجام دهیم و سپس گیج‌ها را از آن القا کنیم. شکل ۲۸ چنین اطلسی را تجسم می‌کند که از دو چارت x^A و x^B روی U^A و U^B (سیز) تشکیل شده است که دو نیمه همپوشان نوار را به طور ایزومتریک به نواحی مستطیلی متناظر از \mathbb{R}^3 نگاشت می‌کنند. همانطور که در پیوست آ.۳. توضیح داده شده، چارت‌ها گیج‌هایی را القا می‌کنند که توسط دیفرانسیل‌های چارت داده می‌شوند، یعنی

$$\psi_p^X := \hat{d}x_p^X : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{و } p \in U^X, X = A, B. \quad (100)$$

توابع گذار سپس با ژاکوبین‌ها منطبق می‌شوند $= \frac{\partial x^B}{\partial x^A}$. به دلیل پیچ، نگاشتهای گذار در یکی از دو ناحیه همپوشان همگی بدیهی هستند، یعنی $e = g_p^{BA}$ و در انتهای دیگر لزوماً منعکس هستند، یعنی $s = g_p^{BA}$ اطلس القا شده از گیج‌ها بنابراین واقعاً به عنوان \mathcal{R} -اطلسی شناسایی می‌شود. از آنجا که از چارت‌های مختصاتی مشتق شده‌اند، میدان‌های چارچوب محلی هموار متناظر با گیج‌ها فقط پایه‌های مختصاتی



شکل ۲.۹: تجسم گروه ایزومتری‌های حافظ \mathcal{R} -ساختار $Isom_{RM}$ نوار موبیوس که با (2) یکریخت است. این گروه شامل تمام چرخش‌ها در امتداد نوار است. به دلیل پیچ، چرخش 2π ، یعنی یکبار در اطراف نوار، هنوز آن را به خودش بازنمی‌گرداند بلکه منجر به انعکاس می‌شود. پس از دومین دور، یعنی چرخش 4π ، نوار به خودش بازمی‌گردد. تبدیل‌های گیج اقا شده مقادیر در \mathcal{R} می‌گیرند.
(مارمولکها تحت مجوز [Creative Commons Attribution 4.0 International license](#) با مجوز Twitter اقتباس شده‌اند).

ممول هستند، یعنی چارچوب‌های $[e_i^X]_{i=1}^d$ در U^X توسط $p \in U^X$ داده می‌شوند. از آنجا که چارت‌ها ایزومتریک هستند، میدان چارچوب القا شده به طور خودکار متعامد است. با این حال، دو ناحیه مستطیلی V^A و V^B در \mathbb{R}^3 نباید نسبت به یکدیگر چرخانده شوند تا \mathcal{R} -اطلس و \mathcal{R} -ساختار متناظر RM را القا کنند.

باید تأکید کنیم که رویکرد القای گیج‌ها از طریق چارت‌های مختصاتی کاملاً ضروری نیست \square این فقط گزینه‌ای مناسب است زیرا نوار موبیوس مسطح بطور محلی با نواحی \mathbb{R}^2 به شکل ایزومتریک شناسایی می‌شود. این بعداً به ما اجازه خواهد داد تا شبکه‌های نمونه‌گیری منظم از \mathbb{R}^2 مانند شبکه پیکسل \mathbb{Z}^2 را به شبکه‌های نمونه‌گیری منظم روی نوار منتقل کنیم. از آنجا که این برای منیفلدهایی که به طور محلی مسطح نیستند، مانند مش‌ها در گرافیک کامپیوتری، ممکن نیست، اکثر پیاده‌سازی‌ها روی منیفلدهای عمومی (یا مش‌ها) مختصات را مستقیماً به فضاهای مماس اختصاص می‌دهند؛ بخش ۱۲ را ببینید.

اتصال کانونی لوی-چیویتا روی نوار موبیوس مفهوم انتقال موازی بردارهای مماس را تعریف می‌کند. از آنجا که نوار به طور محلی با صفحه \mathbb{R}^2 ایزومتریک است، این انتقال می‌تواند روی تکه‌های محلی به عنوان مسطح کردن این تکه‌ها در یک صفحه و حرکت بردارها به طور معمول روی \mathbb{R}^2 درک شود. اگر هیچ تکه منفردی نتواند مسیر γ را پوشاند، پوشش بازی وجود خواهد داشت که انتقال کامل توسط دنباله‌ای از انتقال دهنده‌ها روی تکه‌های محلی توضیح داده شود. آسان است که دید انتقال نسبت به چارچوب‌های \mathcal{R} -ساختار انتخاب شده مقادیر $g_\gamma^{A\tilde{A}}$ در گروه انعکاس \mathcal{R} خواهد گرفت. این بدان معنی است که اتصال لوی-چیویتا با RM سازگار با \mathcal{R} است. بنابراین انتقال دهنده‌های خوش تعریف ($\rho(g_\gamma^{A\tilde{A}})$ بردارهای ویژگی مرتبط با \mathcal{R}) را مستلزم می‌شود.

گروه $Isom_{RM}$ ایزومتری‌هایی که \mathcal{R} -ساختار را حفظ می‌کنند شامل تمام چرخش‌هایی است که نوار را در امتداد خودش جایه‌جا می‌کنند. توجه کنید که یک چرخش یکبار در اطراف نوار، که آن را با زاویه 2π نشان می‌دهیم، با همانی مطابقت نمی‌کند بلکه نوار را به شکل منعکس روی خودش نگاشت می‌کند. تنها چرخش 4π ، یعنی دو دور کامل، نوار را به خودش بازمی‌گرداند.^{۳۴} عمل گروه ایزومتری روی چارچوب‌های مرجع در شکل ۲۹ تجسم شده است. نسبت به مختصات، عمل ایزومتری تبدیل‌های گیج با مقادیر \mathcal{R} را القا خواهد کرد.

۲.۵ میدان‌های ویژگی مستقل از جهت‌گیری

اصل کوواریانس مستلزم آن است که میدان‌های ویژگی روی نوار موبیوس مستقل از مختصات RM باشند، یعنی آنها باید به طور معادل نسبت به چارچوب‌های هر دو دست‌گردی قابل بیان باشند. بنابراین آنها با انتخاب نمایش گروهی $\mathcal{R} \rightarrow GL(c)$ که از گروه انعکاس مشخص می‌شوند که تبدیل بردارهای ویژگی عددی هنگام تعویض بین دو جهت‌گیری را مشخص می‌کند. در ادامه چند انتخاب ممکن از چنین انواع میدان‌هایی را مورد بحث قرار خواهیم داد. خوشنده ممکن است بخواهد بررسی کند که نمایش‌های پیشنهادی واقعاً همومورفیسم‌های گروهی هستند که $\forall g, h \in \mathcal{R}$ $\rho(g)\rho(h) = \rho(g)\rho(h)$.

ابتداًی ترین مثال، که برای هر گروه ساختار وجود دارد، نمایش بدیهی است

$$\begin{aligned} \rho_{\text{واحد}} : \mathcal{R} &\rightarrow GL(1), & e &\mapsto [1] \\ && s &\mapsto [1] \end{aligned} \quad (101)$$

^{۳۴} بنابراین نوار موبیوس استوانه را به عنوان پوشش دوگانه در نظر می‌گیرد.

که ماتریس همانی 1×1 را به هر دو عنصر گروه اختصاص می‌دهد. این میدان‌های اسکالر f^A را مدل می‌کند که از بردارهای ویژگی یکبعدی تشكیل شده‌اند که مختصات‌سازی‌های آنها $f^A(p) \in \mathbb{R}^1$ تحت انعکاس‌های چارچوب نامتغیر باقی می‌مانند. دومین نمایش یکبعدی، نمایش تغییر علامت است

$$\begin{aligned} e &\mapsto [1] \\ s &\mapsto [-1] \end{aligned} \quad (10.2)$$

این ماتریس همانی منفی 1×1 را به انعکاس‌ها اختصاص می‌دهد و بنابراین میدان‌های شباه‌اسکالر را توصیف می‌کند، یعنی میدان‌های ویژگی یکبعدی f^A که ضرایب عددی آنها $f^A(p) \in \mathbb{R}^1$ تحت انعکاس‌ها علامت خود را تغییر می‌دهند، یعنی $f^A(s) = -f^A(p)$. از آنجا که نمایش بدیهی و نمایش تغییر علامت یکبعدی هستند، هر دو نمایش‌های غیرقابل کاهش (irreps) گروه انعکاس هستند. در واقع، آنها تنها دو irrep هستند.^{۲۵}

از آنجا که \mathcal{R} گروه متناهی است، نمایش منظم متناهی بعدی (دوبعدی) دارد

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbb{R}} : \mathcal{R} &\rightarrow \text{GL}(2), \\ e &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ s &\mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (10.3)$$

که عناصر گروه را توسط ماتریس‌های جایگشت نمایش می‌دهد. طبق تعریف، نمایش منظم جایگشت عناصر گروه در \mathcal{R} هنگام عمل بر خودشان را مدل می‌کند. این را با ستون‌های جدول ضرب در معادله (۹.۸) مقایسه کنید: ستون میانی را می‌توان به عنوان ناشی از عمل (e) $\rho_{\mathbb{R}}$ بر ستون $\rho_{\mathbb{R}}(e)$ چپ در نظر گرفت، در حالی که عناصر گروه جایه‌جا شده در ستون راست متناظر با جایگشت توصیف شده توسط عمل (s) $\rho_{\mathbb{R}}$ بر ستون چپ هستند. میدان‌های ویژگی منظم f^A از \mathcal{R} به طور عددی توسط بردارهای ویژگی دوبعدی $f^A(p) \in \mathbb{R}^2$ نمایش داده می‌شوند که دو کanal آنها تحت انعکاس‌ها جایه‌جا می‌شوند، یعنی $f^A(s) = \begin{bmatrix} f^A_{\mathbb{R},1} & f^A_{\mathbb{R},2} \\ f^A_{\mathbb{R},2} & f^A_{\mathbb{R},1} \end{bmatrix}(p)$.

نمایش منظم قابل کاهش است، یعنی شامل دو زیرفضای نامتغیر حقیقی است که در این مورد متناظر با نمایش بدیهی و نمایش تغییر علامت هستند. بنابراین می‌توان آن را به طور معادل به عنوان ساخته شده از مجموع مستقيمه $\rho_{\mathbb{R}} \oplus \rho_{\mathbb{R}}$ irrep آن دو irrep Q در نظر گرفت:

$$\rho_{\mathbb{R}}(g) = Q(\rho_{\mathbb{R}} \oplus \rho_{\mathbb{R}})(g) Q^\top \quad (10.4)$$

اعتبار این گزاره به‌آسانی با جایگذاری سمت راست برای هر دو عنصر گروه تأیید می‌شود:

$$Q(\rho_{\mathbb{R}} \oplus \rho_{\mathbb{R}})(e) Q^\top = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \rho_{\mathbb{R}}(e) \quad (10.5)$$

$$Q(\rho_{\mathbb{R}} \oplus \rho_{\mathbb{R}})(s) Q^\top = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \rho_{\mathbb{R}}(s) \quad (10.6)$$

به طور کلی‌تر، هر نمایش متناهی بعدی گروه‌های فشرده (از جمله متناهی) کاملاً قابل کاهش به مجموع مستقيمه irrep است [۶۱، ۲۰۵، ۱۵۸]. این نشان می‌دهد که هر بردار ویژگی کوواریانت که تحت گروه ساختار فشرده تبدیل می‌شود، تا حد تغییر پایه می‌تواند از ویژگی‌های irrep ساخته شود. همانطور که در [۱۹۰] اثبات شده است در این مورد واقعاً امکان کاهش هر عملیات شبکه خطی به عملیات معادل بین میدان‌های irrep وجود دارد که ساخت فضای کرنل‌های G -راهبری‌پذیر در معادله (۸۶) و بایاس‌های نامتغیر در معادله (۶۳) را ساده می‌کند. با این حال، همانطور که در ادامه خواهیم دید، انتخاب خاص پایه از انواع میدان معادل تأثیر کاملاً قابل توجهی بر عملکرد مدل دارد. دلیل این امر آن است که عملیات شبکه غیرخطی به پایه انتخاب شده حساس هستند، یعنی به انتخاب خاصی از انواع میدان معادل.

۳.۵ شبکه‌های کانولوشنی مستقل از جهت‌گیری

برای ساخت CNN‌های مستقل از جهت‌گیری روی نوار موبیوس باید لایه‌های هم‌متغیر گیج از بخش ۴ را برای گروه انعکاس \mathcal{R} نمونه‌سازی کیم. به طور مشخص‌تر، هر یک از توابع الگوی مشترک هم‌متغیر که لایه‌های مستقل از جهت‌گیری را تعریف می‌کنند باید برای هر انتخاب از انواع میدان در نظر گرفته شده $\rho_{\mathbb{R}}$ ، $\rho_{\mathbb{R}}$ و $\rho_{\mathbb{R}}$ نمونه‌سازی شوند. بخش ۱.۳.۵ در ادامه با حل فضاهای \mathcal{B}_ρ^R الگوهای بایاس نامتغیر گیج از معادله (۶۳) شروع می‌کند. چند انتخاب مجاز از غیرخطی‌های هم‌متغیر گیج برای انواع میدان مختلف در بخش ۲.۳.۵ پیشنهاد می‌شوند. بخش ۳.۳.۵ سپس فضاهای $\mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{\mathcal{R}}$ کرنل‌های \mathcal{R} -راهبری‌پذیر (معادله (۸۶)) را برای هر جفت ممکن از irrep‌های ورودی و خروجی استخراج خواهد کرد. در حالی که این بخش عمده‌اً شامل اشتقات نظری خواهد بود، بخش ۴.۵ در ادامه جزئیات پیاده‌سازی عملی تری را پوشش خواهد داد.

^{۲۵} گروه انعکاس با گروه دوری $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ از مرتبه دو یک‌ریخت است. به خوبی شناخته شده است که rep ‌های گروه‌های دوری از مرتبه N متناظر با ریشه‌های N وحدت هستند که برای $N = 2$ فقط $+1$ (بدیهی) و -1 (تغییر علامت) هستند.

۱.۳.۵ جمع بایاس مستقل از جهت‌گیری

فضای الگوهای بایاس که می‌توانند به میدانی از نوع ρ بدون دخالت در فرض استقلال از مختصات جمع شوند، در بخش ۲.۱.۴ نشان داده شد که توسط

$$\mathcal{B}_\rho^{\mathcal{R}} := \{b \in \mathbb{R}^c \mid b = \rho(g)b \quad \forall g \in \mathcal{R}\}. \quad (10.7)$$

داده می‌شود. برای مورد گروه انکاس، فقط دو عنصر گروه و بنابراین دو قید وجود دارد. قید برای عنصر همانی $g = e$ به طور بدینه براورد ده می‌شود زیرا $\rho(e) = \text{id}_{\mathbb{R}^c}$ طبق تعریف همیشه همانی روی \mathbb{R}^c است. در ادامه بنابراین کافی است توجه را به قید $b = \rho(s)$ ناشی از انکاس s محدود کنیم.

با مورد میدان‌های اسکالار، یعنی نمایش بدینه، شروع می‌کنیم. قید انکاس سپس $b = \rho_{\mathbb{R}^c}(s)b = b$ می‌شود که همیشه براورد می‌شود. نتیجه می‌شود که فضای الگوهای بایاس

$$\mathcal{B}_{\rho_{\mathbb{R}^c}}^{\mathcal{R}} = \mathbb{R} \quad (10.8)$$

بدون قید باقی می‌ماند به طوری که بایاس‌های دلخواه با مقدار حقیقی می‌توانند به میدان‌های اسکالار جمع شوند. برای نمایش تغییر علامت، قید انکاس به $-b = \rho_{\mathbb{R}^c}(s)b$ تبدیل می‌شود و بنابراین فقط برای بایاس‌هایی که صفر هستند براورد می‌شود:

$$\mathcal{B}_{\rho_{\mathbb{R}^c}}^{\mathcal{R}} = \{0\} \quad (10.9)$$

بنابراین جمع بایاس به میدان‌های تغییر علامت با حفظ استقلال از مختصات غیرممکن است. سومین نوع میدان نمونه ما نمایش منظم دو بعدی است. قید انکاسی متناظر روی \mathbb{R}^2 به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = b = \rho_{\mathbb{R}^2}(s)b = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

و به فضای حل یکبعدی منجر می‌شود

$$\mathcal{B}_{\rho_{\mathbb{R}^2}}^{\mathcal{R}} = \{b \in \mathbb{R}^2 \mid b_1 = b_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} \mid \beta \in \mathbb{R} \right\}. \quad (10.11)$$

استقلال از مختصات این قید به طور شهودی روشن است: از آنجا که نمایش منظم دو کانالی که میدان را تشکیل می‌دهند جابه‌جا می‌کند، جمع بایاس تنها زمانی مستقل از مختصات است که مقادیر جمع شده به هر دو کانال برابر باشند، به طوری که ترتیب آنها اهمیت نداشته باشد.

همانطور که قبلاً در بخش ۲.۱.۴ ادعا شد، فضای حل $\mathcal{B}_\rho^{\mathcal{R}}$ برای نمایش دقیقاً با زیرنمایش‌های بدینه آن منطبق است. این ظرفمناً برای نمایش بدینه صادق است که می‌توان هر بایاسی را به آن جمع کرد، و نمایش تغییر علامت که خود هیچ زیرنمایش بدینه ندارد و بنابراین اصلًاً بایاس نمی‌پذیرد. مثال جالب‌تر نمایش منظم است که در معادله ۱۰.۴ نشان داده شد به مجموع مستقیم $\rho_{\mathbb{R}^2}(s) + \rho_{\mathbb{R}^2}(t)$ تغییر علامت تجزیه می‌شود. فضای حل یکبعدی در معادله ۱۱۱ دقیقاً متناظر با تک زیرنمایش بدینه موجود در $\rho_{\mathbb{R}^2}(s) + \rho_{\mathbb{R}^2}(t)$ است. برای بررسی اعتبار این گزاره، توجه کنید که بایاس‌های مجاز برای نمایش مجموع مستقیم $\rho_{\mathbb{R}^2}(s) + \rho_{\mathbb{R}^2}(t)$ از شکل $\begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix}$ هستند، که در آن β است. این نتیجه می‌تواند از طریق تغییر پایه Q به نمایش منظم برگردانده شود که واقعاً حل ما در معادله (۱۱۱) را بازیابی می‌کند:

$$Q \cdot \begin{bmatrix} \beta \\ \cdot \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} \quad (10.12)$$

۲.۳.۵ غیرخطی‌های مستقل از جهت‌گیری

برای ساخت شبکه عمیق، باید غیرخطی‌های همتغیر برای هر یک از انواع میدان ارائه دهیم. همانطور که قبلاً در بخش ۳.۱.۴ بحث شد، میدان‌های اسکالار به دلیل نامتغیر بودن آنها تحت تبدیل‌های گیج می‌توانند تحت تأثیر هر غیرخطی $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ هستند. برای میدان‌های غیرخطی‌های نقطه‌ای ReLU یا ELU هستند. برای میدان‌های تغییر علامت می‌توان قدر مطلق $\|f\|$ بردارهای ویژگی را که میدان تغییر علامت را به میدان اسکالار نگاشت می‌کند، در نظر گرفت. در پیاده‌سازی ما در ادامه به جای آن از غیرخطی‌هایی از شکل

$$\text{ReLU} : f \mapsto \text{ReLU}(\|f\| - b) \cdot \frac{f}{\|f\|}, \quad (10.13)$$

استفاده می‌کنیم، که در آن $b \in \mathbb{R}^+$ پارامتر بایاس قابل آموزش است. به‌آسانی دیده می‌شود که این انتخاب میدان‌های تغییر علامت را به میدان‌های تغییر علامت نگاشت می‌کند زیرا ضریب اول بر روی نرم نامتنیر گیج بردارهای ویژگی عمل می‌کند در حالی که ضریب دوم علامت بردار ویژگی را حفظ می‌کند. به عنوان نمایش جایگشت، نمایش منظم اجزاء می‌دهد هر غیرخطی نقطه‌ای، مثلاً ReLU، بر روی کانال‌های میدان منفرد بدون تغییر نوع میدان عمل کند:

$$\rho_{\mathbb{R}^2}(s) = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ReLU}(f_1) \\ \text{ReLU}(f_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ReLU}(f_1) \\ \text{ReLU}(f_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \rho_{\mathbb{R}^2}(s) \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (10.14)$$

در حالی که نمایش منظم از نظر خطی معادل $\rho_{\mathbb{R}^2}(s) + \rho_{\mathbb{R}^2}(t)$ است، نمی‌توانیم غیرخطی‌های نقطه‌ای مستقل را روی دو کانال در پایه irrep کنیم. این ادعا را که غیرخطی‌ها شبکه‌ها را نسبت به انتخاب خاص پایه نمایش حساس می‌کنند، تقویت می‌کند.

منظمه	تغییر علامت	بدیهی	ρ_{in}
$K_{11}(s, v) = K_{11}(v)$ 	$K_{11}(s, v) = -K_{11}(v)$ 	$K_{11}(s, v) = K_{11}(v)$ 	بدیهی
$K_{11}(s, v) = -K_{11}(v)$ 	$K_{11}(s, v) = K_{11}(v)$ 	$K_{11}(s, v) = -K_{11}(v)$ 	تغییر علامت
$K_{11}(s, v) = K_{11}(v)$ $K_{11}(s, v) = K_{11}(v)$ 	$K_{11}(s, v) = -K_{11}(v)$ 	$K_{11}(s, v) = K_{11}(v)$ 	منظمه

جدول ۳: تجسم کرnel‌های انعکاس-راهنمای پذیر در $\mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{\mathcal{R}}$ برای تمام جفت‌های در نظر گرفته شده از انواع میدان ورودی و خروجی ρ_{out} و ρ_{in} بهطور کلی، این کرnel‌ها باید قید کردن $K(s, v) = \mathcal{R} \cdot K(v) \cdot \rho_{\text{out}}(s) \cdot \rho_{\text{in}}(v)$ را بآورده کنند که در آن $\mathbb{R}^{\mathbb{C}_{\text{out}} \times \mathbb{C}_{\text{in}}}$ هر ورودی جدول قید خاص برای نمایش‌های ورودی و خروجی مناظر را بیان می‌کند و یک کرnel راهنمای پذیر نمونه را تجسم می‌کند. توجه کنید که قید کردن منعکس شده $K(s, v) = K(v) \cdot \rho_{\text{out}}(s)$ را به تبدیل خطی کرnel منعکس نشده $K(v)$ توسط نمایش ورودی و خروجی محدود می‌کند. بنابراین منجر به تقارن‌های انعکاسی کرnel‌ها می‌شود.

۳.۳.۵ کانولوشن‌های مستقل از جهت‌گیری

آخرین عملیاتی که اینجا نمونه‌سازی می‌کنیم کانولوشن‌های همتغیر انعکاس هستند. این از یک طرف مستلزم توضیح نگاشت نمایی و انتقال موازی روی نوار است، و از طرف دیگر حل فضاهای کرnel \mathcal{R} -راهنمایی پذیر. به دلیل هندسه مسطح M و استفاده از چارت‌های ایزومنتیک، مورد اول تقریباً بدیهی است: ویژگی‌ها مشابه روی \mathbb{R}^2 منتقل می‌شوند، با این تفاوت که بردارهای ویژگی ممکن است انعکاسی توسط $\rho(s)$ تجربه کنند. پیاده‌سازی ما از این بخش در شکل ۳۰ تجسم شده است که در ادامه بیشتر توضیح داده می‌شود. بخش فعلی انحصاراً بر حل تحلیلی فضاهای کرnel متمرکز است.

برای نوار موبیوس با \mathcal{R} -ساختار، فضای کرnel‌های \mathcal{R} -راهنمایی پذیر از معادله (۸۶) توسط

$$\mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{\mathcal{R}} := \left\{ K: \mathbb{R}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{C}_{\text{out}} \times \mathbb{C}_{\text{in}}} \mid K(gv) = \rho_{\text{out}}(g) \cdot K(v) \cdot \rho_{\text{in}}(g) \quad \forall v \in \mathbb{R}^{\mathbb{C}}, g \in \mathcal{R} \right\}, \quad (115)$$

داده می‌شود، که در آن ضریب دترمینان $|\det g|$ را حذف کردیم و تمام معکوس‌ها را برداشتیم زیرا $g \cdot g^{-1} = g \quad \forall g \in \mathcal{R}$ همانند مورد پایان‌های همتغیر، قید ناشی از عنصر همانی بهطور بدیهی برآورده می‌شود، بهطوری که فقط قید انعکاسی باقی می‌ماند. کرnel‌های همتغیر انعکاس بنابراین با قید واحد

$$K(s, v) = \rho_{\text{out}}(s) \cdot K(v) \cdot \rho_{\text{in}}(s) \quad \forall v \in \mathbb{R}^{\mathbb{C}}, \quad (116)$$

مشخص می‌شوند، که مستلزم آن است که کرnel منعکس شده $K(s, v) = K(v)$ پس از عمل نمایش میدان ورودی و خروجی باشد. در ادامه این قید را برای تمام نه جفت از انواع میدان حل خواهیم کرد. کرnel‌های حاصل، که همگی به نحوی متقارن تحت انعکاس‌ها هستند، در جدول ۳ تجسم شده‌اند.

• اسکالار \leftarrow اسکالار: کرnel‌های اسکالار نگاشت می‌کنند باید محدودیت زیر را برآورده کنند

$$[K_{11}](s, v) = [1] \cdot [K_{11}](v) \cdot [1] = [K_{11}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^{\mathbb{C}}. \quad (117)$$

آنها لزوماً تحت بازتاب‌ها متقارن (ناوردا) هستند؛ ورودی سمت چپ بالا در جدول ۳ را ببینید.

• اسکالار \leftarrow علامت-چرخش: کرnel‌های $K = [K_{11}] : \mathbb{R}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 1}$ که میدان اسکالار را به میدان علامت-چرخش نگاشت می‌کنند باید محدودیت زیر را برآورده کنند

$$[K_{11}](s, v) = [-1] \cdot [K_{11}](v) \cdot [1] = -[K_{11}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^{\mathbb{C}}. \quad (118)$$

این امر کرnel‌های ضدمتقارن را به همراه دارد همانطور که در ردیف وسط در ستون اول جدول ۳ مشاهده می‌شود.

- اسکالر \leftarrow منظم: به منظور نگاشت از میدان اسکالر به میدان ویژگی منظم، باید کرنل‌هایی از شکل $K = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{r \times 1}$ باشد که از یک کاتال ورودی به دو کاتال خروجی نگاشت می‌کند، اعمال کرد. جایگشت مورد نیاز کاتال‌های خروجی در صورتی تضمین می‌شود که کرنل محدودیت زیر را برآورده کند

$$\begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{bmatrix}(s.v) = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{bmatrix}(v) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{bmatrix}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^r. \quad (119)$$

این محدودیت مستلزم آن است که دو کاتال خروجی کرنل‌هایی باشند که نسخه‌هایی بازتابی یکدیگر هستند، یعنی $(v) = K_{21}(s.v)$ برای همه $v \in \mathbb{R}^r$ (این قبلاً خط دوم محدودیت در معادله (119) را پوشش می‌دهد). این حالت در ورودی سمت چپ پایین جدول ۳ مشاهده می‌شود.

- علامت-چرخش \leftarrow اسکالر: کرنل‌های $K = \begin{bmatrix} K_{11} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{r \times 1}$ که از علامت-چرخش به میدان‌های اسکالر نگاشت می‌کنند دوباره ضدمتقارن هستند زیرا باید همان محدودیت را برآورده کنند

$$\begin{bmatrix} K_{11} \end{bmatrix}(s.v) = [1] \cdot \begin{bmatrix} K_{11} \end{bmatrix}(v) \cdot [-1] = -\begin{bmatrix} K_{11} \end{bmatrix}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^r \quad (120)$$

مانند کرنل‌هایی که در جهت مخالف نگاشت می‌کنند.

- علامت-چرخش \leftarrow علامت-چرخش: کرنل‌های $K = \begin{bmatrix} K_{11} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{r \times 1}$ که رفتار تبدیل میدان‌های علامت-چرخش را حفظ می‌کنند، متقارن هستند زیرا دو وارونگی علامت در محدودیت

$$\begin{bmatrix} K_{11} \end{bmatrix}(s.v) = [-1] \cdot \begin{bmatrix} K_{11} \end{bmatrix}(v) \cdot [-1] = \begin{bmatrix} K_{11} \end{bmatrix}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^r \quad (121)$$

حذف می‌شوند.

- علامت-چرخش \leftarrow منظم: در حالت کرنل‌های $K = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{r \times 1}$ که از علامت-چرخش به میدان‌های ویژگی منظم نگاشت می‌کند، محدودیت زیر بدست می‌آید

$$\begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{bmatrix}(s.v) = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{bmatrix}(v) \cdot [-1] = -\begin{bmatrix} K_{21} \\ K_{11} \end{bmatrix}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^r. \quad (122)$$

دو خط با یکدیگر مطابقت دارند، به طوری که می‌توان آنها را با محدودیت کرنل یگانه $K_{11}(s.v) = -K_{21}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^r$ خلاصه کرد. این محدودیت مستلزم آن است که دو کاتال کرنل خروجی نسخه‌های بازتابی، منفی شده یکدیگر باشند؛ تجسم آن در وسط ردیف پایین جدول ۳ را ببینید.

- منظم \leftarrow اسکالر: کرنل‌هایی که میدان‌های ویژگی منظم را به میدان‌های اسکالر نگاشت می‌کنند دارای دو کاتال ورودی و یک کاتال خروجی هستند و بنابراین از شکل $K = [K_{11}, K_{12}] : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{r \times 2}$ هستند. محدودیت

$$[K_{11}, K_{12}](s.v) = [1] \cdot [K_{11}, K_{12}](v) \cdot \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} = [K_{12}, K_{11}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^r, \quad (123)$$

که می‌توان آن را به لازم $K_{11}(s.v) = K_{12}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^r$ کاهش داد، دوباره مستلزم آن است که دو ورودی کرنل خروجی نسخه‌های بازتابی یکدیگر باشند.

- منظم \leftarrow علامت-چرخش: نگاشتهایی از میدان‌های ویژگی منظم به میدان‌های علامت-چرخش از کرنل‌های $K = [K_{11}, K_{12}] : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{r \times 2}$ که محدودیت زیر را برآورده می‌کنند استفاده می‌کنند

$$[K_{11}, K_{12}](s.v) = [-1] \cdot [K_{11}, K_{12}](v) \cdot \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} = -[K_{12}, K_{11}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^r, \quad (124)$$

یا معادل آن، $K_{11}(s.v) = -K_{12}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^r$. احتمالاً همانطور که قبلاً انتظار می‌رفت، آنها از کرنل‌هایی تشکیل شده‌اند که دو کاتال آنها خروجی نسخه‌های بازتابی، منفی شده یکدیگر هستند.

- منظم \leftarrow منظم: در نهایت، باید کرنل‌های $K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{r \times 2}$ که میدان‌های منظم را به میدان‌های منظم نگاشت می‌کنند و بنابراین دارای ماتریس‌های 2×2 به عنوان کودومین هستند، در نظر بگیریم. محدودیت آنها، که از ضرب چپ و راست با نمایش منظم حاصل می‌شود، به شکل زیر است

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}(s.v) = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}(v) \cdot \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{21} \\ K_{12} & K_{11} \end{bmatrix}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^r. \quad (125)$$

این معادل دو محدودیت مستقل است

$$K_{11}(s.v) = K_{22}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^r \quad (126)$$

و

$$K_{12}(s.v) = K_{21}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^r, \quad (127)$$

که چهار ورودی کرنل را به هم متصل می‌کند به طوری که دو جفت کرنل منعکس شده متقابل وجود دارد. این حالت در ورودی سمت راست پایین جدول ۳ مشاهده می‌شود.

در حالی که نتایج استخراج شده به ما می‌گویند چگونه بین میدان‌های ویژگی منفرد نگاشت کنیم، شبکه‌های عصبی معمولاً فضاهای ویژگی را فرض می‌کنند که از چندین میدان ویژگی احتمالاً متفاوت تشکیل می‌شوند. کرنل‌هایی که بین این پشت‌های میدان‌های ویژگی نگاشت می‌کنند را می‌توان به عنوان ساخته شده از بلوک‌هایی در نظر گرفت که بین میدان‌های منفرد نگاشت می‌کنند. به عنوان مثال، موردی را در نظر بگیرید که هر دو فضای ویژگی ورودی و خروجی شامل یکی از نمایش‌های موردن بحث هستند، یعنی $\rho_{\text{in}} = \rho_{\text{out}} = \rho_{0000} \oplus \rho_{0000} \oplus \rho_{0000}$. تعداد کاتالوگ‌های ورودی و خروجی سپس $c_{\text{in}} = c_{\text{out}} = 1 + 1 + 2 = 4$ است، به طوری که کرنل کامل از شکل $K : \mathbb{R}^{4 \times 4} \rightarrow \mathbb{R}^4$ است. از آنجا که نمایش‌های ورودی و خروجی به عنوان مجموعه‌ای مستقیم تعریف می‌شوند، آنها قطعی بلوکی هستند. قید کامل بنابراین به نه قید مستقل بین تمام جفت‌های میدان‌های منفرد ورودی و خروجی تکیک می‌شود که در این مورد دقیقاً متناظر با نه حل ارائه شده در بالا هستند. ورودی‌های 4×4 کرنل کامل بنابراین ملزم خواهد بود همان تقارن‌هایی را داشته باشند که کرنل‌های 4×4 که در جدول ۳ به طور کلی تجسم شده‌اند.

برای کامل بودن، به طور مختصر تبدیل‌های میدان کرنل عمومی و تبدیل‌های میدان کرنل نامتغیر ایزومنتری روی نوار موبیوس را تشریح می‌کنیم. در مورد عمومی میدان کرنل کاملاً بدون قید باقی می‌ماند، یعنی هیچ وزنی نیاز به اشتراک‌گذاری ندارد و کرنل‌های منفرد ملزم به داشتن هیچ تقارن انعکاسی نیستند. برای اینکه تبدیل میدان کرنل نسبت به ایزومنتری‌ها هم‌متغیر باشد، میدان کرنل اعمال شده باید تحت عمل آنها نامتغیر باشد. این مستلزم اشتراک‌گذاری وزن‌ها روی میدان‌های ایزومنتری است که در دو نوع مختلف ممکن است که دقيقاً در وسط نوار قرار دارد. نقاط روی این مدار پس از یک دور کامل در اطراف نوار به خودشان برمی‌گردند، در حالی که خود نوار روی این مدار مرکزی منعکس می‌شود. میدان کرنل Isom_{RM} -نماتغیر کرنلی را روی این مدار مرکزی اشتراک خواهد گذاشت، با این حال، این کرنل ملزم است تقارن‌های انعکاسی مانند کرنل‌های R -راهبری پذیر در جدول ۳ داشته باشد. این به این دلیل است که کرنل‌ها پس از یک دور به شکل منعکس روی خودشان نگاشت می‌شوند در حالی که میدان کرنل باشد نامتغیر ایزومنتری باشد.^{۳۶} هر مدار دیگر از نوع مدار دوم است. نقطه‌ای را در فاصله داده شده از مدار مرکزی در نظر بگیرید. عمل ایزومنتری این نقطه را در این فاصله از مرکز در امتداد نوار حرکت خواهد داد. با این حال، پس از یک دور به نقطه اولیه برگرد بلکه به آن نقطه‌ای که در همان فاصله در طرف مقابل مدار مرکزی قرار دارد. تنها پس از دو میان دور در اطراف نوار مدار بسته خواهد شد. نامتغیری ایزومنتری مطلوب میدان اشتراک‌گذاری کرنل‌ها روی تمام نقاط با همان فاصله در هر دو جهت مرکز نوار (اما اجازه کرنل‌های مختلف در فاصله‌های مختلف را می‌دهد). برخلاف کرنل مدار مرکزی، این کرنل‌ها ملزم به هم‌متغیر انعکاس خودشان نیستند. این تحلیل نشان می‌دهد که هر تبدیل میدان کرنل هم‌متغیر ایزومنتری مستلزم کرنل‌های R -راهبری پذیر است، اگرچه به طور دقیق فقط روی مدار مرکزی، برعکس، میدان کرنل کانولوشنی که متناظر با اعمال همان کرنل‌های R -راهبری پذیر روی کل منیفلد است، مطمئناً تحت ایزومنتری‌ها نامتغیر است. کانولوشن مستقل از جهت‌گیری روی نوار موبیوس بنابراین Isom_{RM} -هم‌متغیر است که در ادامه به طور تجزیی تأیید می‌شود.

۴.۵ پیاده‌سازی عددی و ارزیابی کانولوشن‌های موبیوس

با آمادگی از اشتقاقات تحلیلی در بخش‌های قبلی، اکنون آماده‌ایم تا پیاده‌سازی عددی CNN‌های مستقل از جهت‌گیری روی نوار موبیوس را مورد بحث قرار دهیم. پس از انجام این کار در بخش ۴.۵، مدل‌ها را برای انتخاب‌های مختلف انواع میدان ارزیابی کرده و آن‌ها را با پیاده‌سازی ساده وابسته به جهت‌گیری در بخش ۴.۵ مقایسه می‌کنیم.

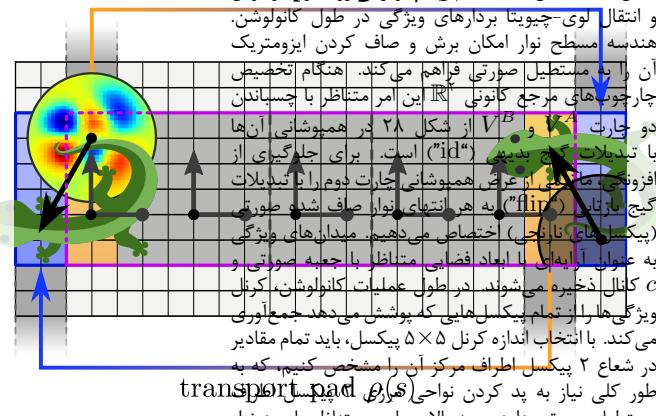
پیاده‌سازی به صورت عمومی در آدرس <https://github.com/mauriceweiler/MobiusCNNs> در دسترس است.

۱.۴.۵ پیاده‌سازی عددی

فضاهای ویژگی: اولین سوالی که هنگام پیاده‌سازی کانولوشن‌ها روی نوار موبیوس باید پاسخ داد این است که میدان‌های ویژگی چگونه باید به صورت عددی نمایش داده شوند. از آنجا که نوار موبیوس یک منیفلد مسطح است، می‌توانیم به راحتی (زیرمجموعه‌هایی از) شبکه نمونه‌برداری منظم \mathbb{Z}^2 را از \mathbb{R}^2 به نوار انتقال دهیم. این شهود با کنش‌های برگشتی $V^X \rightarrow \mathbb{R}^c$ از مختصات‌سازی‌های میدان ویژگی محلی $U^X \rightarrow \mathbb{R}^c$ از طریق چارت‌های (معکوس) $f^X : V^X \rightarrow U^X$ به دامنه جدید $V^X \subset \mathbb{R}^2$ به دامنه $(x^X)^{-1}$ در آن $X = A, B$. گسسته‌سازی عددی سپس به عنوان محدودیت $|f^X \circ (x^X)^{-1}|_{V^X \cap \mathbb{Z}^2}$ از کنش برگشتی به شبکه نمونه‌برداری تعریف می‌شود، که در شکل ۲۸ به عنوان همپوشانی نشان داده شده است.

^{۳۶} بخش ۳.۸ چین موقعيت‌هایی را در محیط کلی تری به عنوان قیدهای زیرگروه پایدارساز گروه ایزومنتری توصیف می‌کند. در مورد فعلی، زیرگروه چرخش‌های یکبار در اطراف نوار نقاط روی مدار مرکزی را پایدار می‌کند. این با گروه انکاس یکریخت است و بنابراین منجر به تقارن‌های انعکاسی در کرنل‌ها می‌شود.

شکل ۳۰: نمایش عددی میدان انتقال پاد (transport pad) و انتقال نوار



است. از آنجا که هیچ مقدار ویژگی معتبری نمی توان در آنجا تخصیص داد، آرایه را با صفر پد می کنیم همانطور که معمولاً در بینایی کامپیوتر انجام می شود. مرزهای چپ و راست نوار صاف شده با یک پیچ به هم چسبانده شده اند. ما انتقال موازی آن ویژگی ها را با برش ناحیه ای به عرض دو پیکسل از هر انتهای نوار (نارنجی) و پد کردن آنها به صورت بازتاب یافته به انتهای مقابله (آبی) پیاده سازی می کنیم. همانطور که پیچ مستلزم تبدیل گیج است، میدان های ویژگی باید هنگام بازتاب یافتن تحت عمل $(\beta)^2$ قرار گیرند. پس از پد کردن، کاتولوشن با شرایط مرزی "معابر" اجرا می شود، به طوری که خروجی آن دوباره اندازه جعبه صورتی را داشته باشد. عملیاتی که به صورت تقطیعی عمل می کنند نیاز به پد کردن ندارند اما می توانند بالا فاصله روی آرایه صورتی اعمال شوند.

(مارمولک ها تحت مجوز [CC BY-SA 4.0](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) اقتباس شده با مجوز.)

توجه داشته باشید که این نمایش به دلیل همپوشانی $U^A \cap U^B \neq \emptyset$ چارت ها افزونه است. برای حذف این افزونگی باید آن نواحی را که دو بار نمایش داده می شوند شناسایی کرد و تنهای یک کپی مشترک از بردارهای ویژگی متناظر را ذخیره کرد. یک طرح ممکن برای انجام این کار، که ما در پیاده سازی عددی خود استفاده می کنیم، ذخیره میدان های ویژگی در آرایه چند بعدی متناظر با مستطیل صورتی در شکل ۳۰ است. می توان آن را به عنوان تعریف شده توسط "چسباندن" آن نواحی در V^B و V^A که توسط تبدیلات گیج بدینه g^{BA} شناسایی می شوند در نظر گرفت ("id") در شکل ۲۸ و چهار پیکسل مرکزی در شکل ۳۰. آنچه باقی می ماند افزونگی بردارهای ویژگی در ناحیه همپوشانی دوم با تبدیلات گیج بازتابی است ("flip") در شکل ۲۸. این افزونگی با تخصیص آن بردارهای ویژگی به صورت مساوی به هر انتهای نمایش میدان محلی "چسبانده شده" حل می شود (پیکسل های نارنجی در شکل ۳۰). در مجموع، پیکسل های جعبه صورتی فضای ویژگی را به صورت غیر افزونه با تخصیص یک بردار ویژگی c -بعدی به هر یک از آنها نمایش می دهند. حلقه دو پیکسلی اطراف مستطیل صورتی بخشی از فضای ویژگی نیست بلکه ناحیه پد کردن را تجسم می کند که تهها در طول پاس رو به جلوی عملیات کاتولوشن همانطور که در زیر بحث شده است استفاده خواهد شد.

ابعاد (شکل) واقعی آرایه ای که فضای ویژگی را کد گذاری می کند به چندگانگی های میدان انتخاب شده بستگی دارد. فرض کنید m_{width} و m_{height} آن چندگانگی های صحیح میدان های ویژگی باشند که فضای ویژگی را تشکیل می دهند. از آنجا که میدان های اسکالر و تغییر علامت یک بعدی هستند و میدان های ویژگی منظم دو بعدی هستند، تعداد کل کانال ها (یا بعد بردارهای ویژگی انباسته شده) توسط $c = m_{\text{width}} + m_{\text{height}} + 2m_{\text{overlap}}$ داده می شود. فرض کنید همچنین کهوضوح فضایی مستطیل صورتی $X \times Y$ پیکسل باشد و اندازه دسته N نمونه فرض کنید. آرایه ای که فضای ویژگی را کد گذاری می کند سپس از شکل (N, c, X, Y) است، همانطور که معمولاً در پردازش تصویر استفاده می شود. توجه داشته باشید که این نمایش عددی فضای ویژگی هم نسبت به هندسه پیچیده نوار و هم نوع واقعی میدان های ویژگی موجود (به جز بعد آنها) بی اطلاع است. بنابراین اطلاعات هندسی واقعی منحصرًا توسط لایه های شبکه که میدان ها را پردازش می کنند حمل می شود.

جمع بایاس: برای پیاده سازی جمع بایاس مستقل از جهت گیری، نتایج بخش ۱.۳.۵ را به خاطر بیاورید که فضاهای برداری بایاس های الگوی هم متغیر بازتاب برای میدان های اسکالر و میدان های منظم یک بعدی و برای میدان های تغییر علامت صفر بعدی هستند. در مقداردهی اولیه مازول با بایاس بنابراین یک بردار پارامتر $m_{\text{width}} \times m_{\text{height}} \times \beta$ و یک بردار پارامتر $b_{\text{width}} \times m_{\text{width}} \times \beta$ گسترش می دهیم که باید به انباست کامل میدان های ویژگی اضافه شود. این کار با اختصاص آرایه c بعدی از صفرها و پر کردن $m_{\text{width}} \times m_{\text{height}}$ عنصر اول با پارامترهای بایاس میدان اسکالر و $2m_{\text{width}} \times m_{\text{height}}$ عنصر آخر با پارامترهای بایاس میدان منظم m_{width} هر کدام دو بار تکرار شده برای پرآوردن ساختار فضای حل در معادله (۱۱۱)، انجام می شود. پس از این گسترش بردار بایاس کامل

$$b_{\text{width}} = \left[\underbrace{\beta_{1,1}, \dots, \beta_{1,m_{\text{width}}}}_{m_{\text{width}}}, \underbrace{\dots, \dots, \dots, \underbrace{\beta_{1,1}, \beta_{1,2}, \dots, \beta_{1,m_{\text{width}}}, \beta_{1,m_{\text{width}}+1}}_{2m_{\text{width}}}}_{m_{\text{height}}} \right]^T \in \mathbb{R}^c \quad (128)$$

طبق معمول به آرایه میدان ویژگی اضافه می شود. استقلال آن از جهت گیری (ناورداری گیج) اضافه کردن به آرایه در شکل ۳۰ را توجیه می کند، علی رغم اینکه از بردارهای ویژگی در دو گیج مختلف چسبانده شده است.

غیرخطی‌ها: غیرخطی‌ها را می‌توان مطابق تعریف در بخش ۲.۳.۵ به صورت مستقیم پیاده‌سازی کرد. این کار را با تقسیم انباشت کامل میدان‌های ویژگی به سه انباشت از میدان‌های همان نوع، اعمال غیرخطی‌های هم‌متغیر بازتاب مربوطه به آنها، و در نهایت الحق نتایج انجام می‌دهیم. به دلیل تعریف غیرخطی برای میدان‌های تغییر علامت در معادله (۱۱۳) با بایاس قابل یادگیری، مأذول غیرخطی دارای m_{paramter} پارامتر قابل آموزش است.

کاتولوشن‌های \mathcal{R} : از آنجا که عملیات کاتولوشن به صورت نقطه‌ای عمل نمی‌کند بلکه تمام ویژگی‌های پوشش داده شده توسط کرnel را انباشت می‌کند، پیاده‌سازی آنها کمتر بدیهی است. پاس رو به سه گام تقسیم می‌شود، یعنی ۱) گسترش کرnel‌های متقارن بازتاب از آرایه‌های پارامتر، ۲) انتقال لوی-چیویتا بردارهای ویژگی و ۳) کاتولوشن GM واقعی.

به خاطر بیاورید که فضای $\mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^R$ کرnel‌های R -هادایت‌پذیر زیرفضای خطی فضای کرnel‌های بدون قید K در معادله (۸۵) است. برای پارامتری کردن کرnel‌های R -هادایت‌پذیر لازم است پایه‌ای از $\mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^R$ انتخاب کنیم که کرnel‌ها بر حسب آن گسترش یابند. پارامترهای قابل آموزش عملیات کاتولوشن ضرائب گسترش در این پایه هستند. پیاده‌سازی ما تمام کرnel‌های را که متناظر با همان جفت انواع میدان ورودی و خروجی هستند به صورت مشترک پارامتری می‌کند زیرا آنها تلقن‌های یکسان و بنابراین یا به یکسان دارند. با در نظر گیری نه جفت انواع میدان نشان داده شده در جدول ۳، این بدان معناست که مأذول کاتولوشن نه آرایه پارامتر متناظر نگه می‌دارد. کرnel‌های واقعی سیس از این پارامترها در طول هر پاس رو به جلو گسترش می‌یابند. برای مثل، زیرمجموعه کاتال‌های کرnel را در نظر بگیرید که از m_{m}^{m} میدان اسکالار به m_{m}^{m} میدان تغییر علامت نگاشت می‌کند و اندازه کرnel $s \times s$ پیکسل فرض کنید. آرایه پارامتر متناظر سیس از شکل (۳، ۴، ۵) است و $m_{\text{m}}^{\text{m}} \times m_{\text{m}}^{\text{m}}$ کاتال کرnel متفred را با پایه‌ای از $s \times s$ کرnel نامتناقون هر کدام نمایش می‌دهد. گسترش به عنوان پر کردن $s \times s$ پیکسل بالا با پارامترهای تغییر نیافته در حالی که $s \times s$ پیکسل پایین با پارامترهای منفی شده و بازتاب یافته پر می‌شوند، پیاده‌سازی می‌شود. به عنوان مثال دوم، کاتال‌های کرnel را در نظر بگیرید که از m_{m}^{m} میدان منظم به m_{m}^{m} میدان اسکالار نگاشت می‌کنند. آرایه پارامتر برای این حالت از شکل (۳، ۴، ۵) است و یکی از دو کاتال کرnel به ازای هر میدان ورودی و خروجی را ذخیره می‌کند. کاتال‌های دوم متناظر در طول پاس رو به جلو با بازتاب کاتال‌های کرnel اول همانطور که در جدول ۳ نشان داده شده گسترش می‌یابند. پس از گسترش کرnel کامل به این شکل از تمام زیربلوک‌های آن متناظر با ترکیب‌های مختلف انواع میدان، شکل معمول کرnel‌ها در یادگیری عمیق را دارد اما تضمین می‌شود که تلقن‌های مشتق شده در بخش ۲.۳.۵ را رعایت کند. توجه داشته باشید که تلقن‌های کرnel کاتولوشن‌های GM را نسبت به CNN غیرهم‌متغیر متناظر با همان تعداد کاتال C از نظر پارامتر کارآمدتر می‌کند. به طور خاص برای کرnel R -هادایت‌پذیر تعداد پارامترها با ضریب دو کاهش می‌یابد.^{۳۷}

پس از گسترش کرnel‌ها، آنها با میدان‌های ویژگی کاتولو می‌شوند. این امر نیاز به پیاده‌سازی نگاشت نمایی و انتقال دهنده‌های لوی-چیویتا R -سازگار روی نوار موبیوس دارد^{۳۸} یا بهتر بگوییم روی نمایش عدی آن توسط آرایه صورتی از شکل ۳۰. هندسه مسطح نوار موبیوس پیاده‌سازی را تقریباً بدیهی می‌کند، با این حال، مزراها و اتصال دایره‌ای آن نیاز به دقت خاصی دارند. بنابراین باید بین سه حالت کیفی متفاوت تمایز قائل شویم که متناظر با موارد زیر هستند (۱) نگاشت‌های نمایی که کاملاً در آرایه صورتی قرار دارند، (۲) نگاشت‌های نمایی که از مرز عبور می‌کنند و بنابراین خوش‌تعیف نیستند و (۳) نگاشت‌هایی که ژئودزیک‌هایشان از یک انتهای آرایه خارج شده و (بیچیده) از انتهای دیگر وارد می‌شوند. حالت اول بدیهی است و متناظر با نگاشت نمایی روی خود R^3 است. از آنجا که نوار مسطح است و چارچوب‌های مرجع درون آرایه همه موازی هستند، انتقال در امتداد این ژئودزیک‌ها بدیهی است. در ناحیه داخلی آرایه، جایی که کرnel‌های (با پشتیبانی متناهی) از آن بیرون نمی‌زنند، بنابراین می‌توان کاتولوشن را طبق معمول روی R^3 پیاده‌سازی کرد. حالت دوم مربوط به ردیف‌های بالا و پایین آرایه است که در آن نگاشت‌های نمایی ممکن است از مرز نوار (یا آرایه) عبور کنند. این شبیه مسائل مرزی برای تصاویر مسطح مستطیلی معمول است، که معمولاً با پد کردن صفر حل می‌شود. با اتخاذ این راه حل، آرایه را با ردیف‌هایی از صفر پد می‌کنیم که به عنوان دو نوار خاکستری روشن بالا و پایین مستطیل صورتی در شکل ۳۰ نشان داده شدند. با اندازه کرnel $s \times s$ پیکسل با s فرد، باید $(1 - s)$ ردیف صفر در هر دو طرف پد کرد. حالت سوم در انتهای چپ و راست آرایه رخ می‌دهد، جایی که نوار برای صاف کردن پریده شده است. شکل ۳۰ ژئودزیک نمونه‌ای را جسم می‌کند که از خط پرش عبور می‌کند و بنابراین در جهت بازتاب یافته از طرف مقابل وارد آرایه می‌شود. به دلیل بازتاب، انتقال دهنده موازی در سراسر پرش توسط $(s/\rho)^2$ داده می‌شود. برای اینکه بتوانیم روتین کاتولوشن متعارف اجرا کنیم، انتقال در سراسر پرش را با کمی کردن ناحیه $(1 - s)/2$ پیکسل از هر دو انتهای آرایه (نارنجی)، بازتاب آنها به صورت وارونه برای مدل سازی پیچ، عمل روی آنها با $(s/\rho)^2$ برای در نظر گیری چیزی‌ای بازتاب یافته و در نهایت الحق آنها به طرف مقابله آرایه (آبی) پیاده‌سازی می‌کنیم. با پد کردن آرایه به این شکل، تمام ژئودزیک‌ها و انتقال دهنده‌های مربوطه به همتایان بدیهی خود روی R^3 کاهش می‌یابند.

به طور کلی، پیاده‌سازی ما از عملیات کاتولوشن سه گام فوق الذکر را اعمال می‌کند. ابتدا کرnel‌های R -هادایت‌پذیر را گسترش می‌دهد و آرایه میدان ویژگی صورتی را با صفرها و مقادیر میدان که در سراسر پرش منتقل می‌شوند پد می‌کند. کرnel گسترش یافته سیس با میدان‌های ویژگی پد شده کاتولو می‌شود و روتین کاتولوشن متعارف برای تصاویر مسطح فراخوانی می‌شود. مان تنظیمات مرزی "معتبر" برای کاتولوشن استفاده می‌کنیم، که به این معناست که عملیات به طور ضمنی صفرهای بیشتری پد نمی‌کند و تنها بردارهای ویژگی را برای آن نقاطی محاسبه می‌کند که کرnel از مرزهای آرایه دستی پد شده ما فراتر نمی‌رود. میدان ویژگی حاصل بنابراین دوباره ممانع باید فضایی مستطیل صورتی اصلی را خواهد داشت.

Pooling: CNN‌های متعارف معمولاً عملیات pooling فضایی را اعمال می‌کنند که بردارهای ویژگی از یک پنجه pooling داده شده، به عنوان مثال ناحیه‌ای از پیکسل‌های 2×2 ، را در یک بردار ویژگی جدید خلاصه می‌کنند. چنین عملیاتی وضوح فضایی را کاهش می‌دهد که هزینه محاسباتی را کاهش داده و میدان دید مؤثر کرnel‌های کاتولوشن را افزایش می‌دهد. روش رایج pooling به اصطلاح "max-pooling" است که بیشترین مقدار هر کاتال ویژگی فردی در ناحیه pooling را انتخاب می‌کند. این عملیات را می‌توان مستقیماً روی میدان‌های اسکالار

^{۳۷} بهبود کارایی پارامتر کرnel‌های R -هادایت‌پذیر با ضریب ۲ برای کرnel‌های پیوسته یا برای اندازه‌های کرnel زوج s دقیق است. اگر s فرد باشد، تعداد پارامترها برای کرnel‌های متقارن مثل $(s/2)^2 + 1$ و برای کرnel‌های نامتناقون مثل $(s/2)^2 + (s/2)$ مقیاس می‌شود زیرا اولی ردیف مرکزی پیکسل‌ها را آزادانه پارامتری می‌کند در حالی که دومی باید آنها را روی صفر تنظیم کند.

اعمال کرد زیرا آنها ناوردای پیمانه هستند. همچنین برای میدان‌های ویژگی منتظم قابل قبول است زیرا گرفتن بیشینه با جابجا کردن اینها ناوردای پیمانه هستند. max-pooling نسبت به قانون تبدیل آنها هموردا نیست. جایگین هموردا، average pooling است که میانگین ویژگی‌ها در ناحیه pooling را می‌گیرد و بنابراین با تعییر عالمت جابجا می‌شود. گزینه دیگر، که در آزمایش‌های زیر استفاده می‌کنیم زیر عمل می‌کند، این است که میدان‌های sign-flip را بر اساس قدر مطلق آنها pool کنیم که مجددًا تحت وارونگی عالمت ناوردا است. سپس عالمت مقادیر میدان pool شده را با بیشترین نُرم ضرب می‌کنیم تا قانون تبدیل اصلی حفظ شود.

در حالی که عملیات pooling تعریف شده به این شکل نسبت به تبدیلات پیمانه هموردا هستند، اصل طراحی آنها اساساً با هموردا بی ایزومنتری مطلوب تداخل دارد. این بدان دلیل است که آنها وضوح فضایی گسترش‌سازی عددی را کاهش می‌دهند، به طوری که خروجی تنها نسبت به زیرگروه تقارن‌های شبکه با وضوح پایین‌تر دقیقاً هموردا است. این اثر برای CNN‌های متعارف به خوبی شناخته شده است [۴]. اگرچه تلاش‌هایی برای اصلاح وضعیت انجام شده [۲۰۹]، از دست رفتن جزئی هموردا بی ایزومنتری (با ایزومنتری) به یک زیرگروه معمولاً همانطور که هست پذیرفته می‌شود.

تست‌های واحد: تمام عملیات مستقل از مختصات پیشنهادی برای تضمین هموردا بی ایزومنتری آنها تست واحد می‌شوند. تست‌های هموردا بی ایزومنتری تمام عملیات پیشنهادی و همچنین برای کل شبکه‌های توصیف شده در بخش بعدی موفق هستند. برای کانولوشن، جمع bias و غیرخطی‌ها، تست‌های واحد ما تأیید می‌کنند که هموردا بی ایزومنتری دقیقاً برقرار است. همانطور که انتظار می‌رود، عملیات pooling فضایی نسبت به تقارن‌های شبکه با وضوح بالا دقیقاً هموردا نیستند.^{۳۸} با این حال، هموردا بی ایزومنتری آنها را برای آن زیرگروه از ایزومنتری‌ها که همزمان تقارنی از شبکه با وضوح پایین‌تر هستند تأیید می‌کنیم. نتایج تجربی ما، که در ادامه بحث می‌کنیم، نشان می‌دهند که هموردا بی ایزومنتری غیردقیق، ناوردایی ایزومنتری پیش‌بینی‌های طبقه‌بندی یک شبکه کامل را در اکثر موارد تنها به طور حاشیه‌ای تحت تأثیر قرار می‌دهد.

۲.۴.۵ ارزیابی تجربی

عملیات مستقل از مختصات و ویژگی‌های هموردا بی ادعای شده آنها را روی یک وظیفه طبقه‌بندی ساده تصاویر MNIST که روی نوار مؤبیوس پروردگر شده‌اند، ارزیابی می‌کنیم. ترکیبات مختلف انواع میدان‌ها نمونه‌سازی معماری‌های مدل مشابه برای آنها مقایسه می‌شوند. به عنوان خط مینا، یک CNN غیرمستقل از مختصات را روی نوار مؤبیوس آموزش می‌دهیم که به طور قابل توجهی توسعه مدل‌های هموردا بهتر عمل می‌کند.

مجموعه داده Mōbius MNIST با گرفتن ارقام استاندارد 28×28 MNIST پیکسل و پروژکت کردن آنها روی نوار با شناسایی مرز چپ و راست با یک پیچش اضافی ساخته می‌شود. مطابق با مجموعه داده MNIST چرخانده شده، که یک میکار استاندارد برای CNN‌های اقلیدسی هموردا بی دروانی است، اندازه مجموعه آموزش را به 12000 نمونه کاهش می‌دهیم [۱۹۰، ۱۹۲]. از آنجا که MNIST شامل ارقام خاکستری تک کاناله است که تحت تبدیلات پیمانه ناوردا هستند، نمونه‌های آن به عنوان میدان‌های اسکالر شناسایی می‌شوند. بنابراین هر نمونه با آرایه‌ای به شکل (۱، ۲۸، ۲۸) نمایش داده می‌شود که متناظر با مستطیل بنشش در شکل 30×30 است. توجه کنید که شناسایی مرز چپ و راست برای مورد خاص ارقام MNIST منجر به هیچ ناپیوستگی نمی‌شود زیرا رنگ پس‌زمینه آنها سیاه ثابت (یعنی صفر) است. به منظور نمایش هموردا بی ایزومنتری القا شده CNN‌های مستقل از مختصات، دو نسخه از این مجموعه داده می‌سازیم. اولی شامل ارقامی است که همگی مرکز هستند، یعنی در همان موقعیت روی نوار قرار دارند. مجموعه داده دوم ارقام را در موقعیت‌های تصادفی اطراف نوار قرار می‌دهد، یعنی آنها را با ایزومنتری‌های نمونه‌برداری تصادفی جابجا می‌کند همانطور که در شکل ۲۹ تجسم شده است. انتظار می‌رود هر مدل هموردا ایزومنتری استنتاج خود را از مجموعه داده ارجام متمرکز به مجموعه داده جابجا شده تعمیم دهد که توسط آزمایش‌های ما تأیید می‌شود. در حالی که Mōbius MNIST به وضوح یک مجموعه داده اسپاب‌بازی است، تمام ویژگی‌های نظری که ما به آنها علاقه‌مندیم را نشان می‌دهد و به عنوان یک مورد تست راحت برای نمایش تفاوت بین CNN‌های متناظر و CNN‌های مستقل از مختصات عمل می‌کند.

تمام معماری‌های شبکه همانطور که معمول است به عنوان یک سری لایه‌های کانولوشنی، که با یک عملیات pooling سراسری و یک طبقه‌بندی کننده ناوردا و کاملاً متصل دنبال می‌شوند، ساخته می‌شوند؛ جدول ۴ را برای مقایسه بینند. بخش‌های کانولوشنی از شش بلوك کانولوشنی با عملیات pooling فضایی پس از بلوك کانولوشن دوم و چهارم ساخته می‌شوند. بلوك‌های کانولوشن کاملاً اساسی هستند و تنها از یک لایه کانولوشنی که با جمع bias و یک لایه غیرخطی دنبال می‌شود تشکیل شده‌اند. تمام عملیات pooling میانی از پنجره‌های 2×2 پیکسل استفاده کرده و بنابراین وضوح فضایی را نصف می‌کنند. در مورد مدل‌های موردا بی اسکالر نایه کانولوشنی به 64×64 میدان اسکالار نقشه می‌برد. ناوردایی آنها تحت تبدیلات پیمانه تضمین می‌کند که عملیات global max-pooling بعدی ویژگی‌های هم ناوردایی موقعیت و هم ناوردای پیمانه تولید کند. یک MLP با فعال‌سازی softmax نهایی آن ویژگی‌ها را برای تولید پیش‌بینی‌های ناوردا می‌گیرد. برای تمام مدل‌ها از همان دو بلوك MLP تشکیل شده است که ELU dropout با احتمال حذف 30% و یک لایه خطی (یا affine) اعمال می‌کنند که تعداد نورون‌های خروجی آن در جدول ۴ فهرست شده است. بنابراین تفاوت‌های بین مدل‌های مختلف به بخش کانولوشنی محدود می‌شود.

پنج مدل مستقل از مختصاتی که نمونه‌سازی می‌کنیم در انواع میدان استفاده شده متفاوت هستند: سه مدل خالص وجود دارد که با "scalar"، "sign-flip" و "regular" نشان داده می‌شوند که تنها نوع میدان پیشنهادی را فرض می‌کنند. به دلیل بُعد بالاتر، چندگانگی‌های میدان میدان‌های ویژگی‌منظم در مقایسه با میدان‌های اسکالر و sign-flip نصف می‌شوند. مدل چهارم، که با "irrep" نشان داده می‌شود، از ترکیبی از میدان‌های اسکالر و sign-flip به نسبت‌های مساوی استفاده می‌کند. توجه کنید که میدان‌های ویژگی این مدل به صورت خطی معادل مدل‌های

^{۳۸} توجه کنید که این مسئله برای عملیات pooling ذاتی است و برای CNN‌های متعارف نیز صدق می‌کند [۴، ۲۰۹].

CNN	مختلط irreps	منتظم	چندگانگی میدان‌های خروجی ($m_{\text{CNN}}, m_{\text{CNN}}, m_{\text{CNN}}$) / کانال‌ها / نورون‌ها	اسکالار	لایه
۱	(۱, ۰, ۰)	(۱, ۰, ۰)	(۱, ۰, ۰)	(۱, ۰, ۰)	وروودی شبکه
$\lfloor \frac{1}{16}/\sqrt{\alpha} \rfloor$	(۴, ۴, ۲)	(۸, ۸, ۰)	(۰, ۰, ۸)	(۱۶, ۰, ۰)	بلوک کاتولوشن
$\lfloor \frac{32}{\sqrt{\alpha}} \rfloor$	(۸, ۸, ۴)	(۱۶, ۱۶, ۰)	(۰, ۰, ۱۶)	(۳۲, ۰, ۰)	بلوک کاتولوشن
همان	همان	همان	همان	همان	pooling
$\lfloor \frac{64}{\sqrt{\alpha}} \rfloor$	(۱۶, ۱۶, ۸)	(۳۲, ۳۲, ۰)	(۰, ۰, ۳۲)	(۶۴, ۰, ۰)	بلوک کاتولوشن
$\lfloor \frac{128}{\sqrt{\alpha}} \rfloor$	(۳۲, ۳۲, ۱۶)	(۶۴, ۶۴, ۰)	(۰, ۰, ۶۴)	(۱۲۸, ۰, ۰)	بلوک کاتولوشن
همان	همان	همان	همان	همان	pooling
$\lfloor \frac{256}{\sqrt{\alpha}} \rfloor$	(۶۴, ۶۴, ۳۲)	(۱۲۸, ۱۲۸, ۰)	(۰, ۰, ۱۲۸)	(۲۵۶, ۰, ۰)	بلوک کاتولوشن
۶۴	۶۴	۶۴	۶۴	۶۴	global max-pooling
۳۲	۳۲	۳۲	۳۲	۳۲	بلوک MLP
۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	بلوک softmax + MLP

جدول ۴: نمای کلی معماري‌های مدل مقایسه شده. تمام مدل‌ها از یک بخش کاتولوشن روی نوار مؤبیوس، که با یک عملیات global max-pooling و یک طبقه‌بندی کننده MLP دنبال می‌شود، تشکیل شده‌اند. پنج CNN مستقل از جهت‌گیری در چندگانگی‌های ($m_{\text{CNN}}, m_{\text{CNN}}, m_{\text{CNN}}$) انواع میدان‌های متفاوت هستند اما دقیقاً در تعداد کانال‌ها و تقریباً در تعداد پارامترها متفاوتند. ورودی‌های آنها، یعنی ارقام ($m_{\text{CNN}}, m_{\text{CNN}}, m_{\text{CNN}}$) به عنوان میدان‌های اسکالار فرض می‌شوند. تمام مدل‌های مستقل از جهت‌گیری در آخرین کاتولوشن خود به ۶۴ میدان اسکالار تاوردای پیمانه نقشه می‌برند. عملیات pooling سراسری سپس بعده بنابراین ویژگی‌های تاوردای موقعیت و مستقل از مختصات تولید می‌کند. مدل CNN خط میان در دو نوع را به می‌شود که در ضرب $\sqrt{\alpha}$ آنها در تعداد کانال‌ها متفاوت هستند. نسخه اول $\alpha = 1$ فرض کرده و بنابراین همان تعداد کانال مدل‌های مستقل از مختصات را استفاده می‌کند. به دلیل کارایی پارامتر پایین‌تر CNN‌های غیرهموردا، این مدل تقریباً دو برابر پارامتر بیشتری استفاده می‌کند. برای مقایسه عادلانه نسخه دومی با $\alpha = 2$ و بنابراین تقریباً همان تعداد پارامتر مدل‌های هموردا اضافه می‌کنیم.

تمام لایه‌های مستقل از مختصات تست واحد شده و کامل‌آمده هموردای پیمانه یافت شده‌اند که نشان می‌دهد مدل‌ها به طور کلی کامل‌آمده تاوردای پیمانه. هستند. از آنجا که دو مرحله pooling اعمال می‌کنند که وضوح فضایی را هر یک با ضرب ۲.۳.۵ توضیح داده شده‌اند. همانطور که قبلاً بیان شد، تمام مدل‌ها ورودی‌ها و خروجی‌های اسکالار فرض می‌کنند.

تمام لایه‌های مستقل از مختصات تست واحد شده و کامل‌آمده هموردای پیمانه یافت شده‌اند که نشان می‌دهند که نشان می‌دهد مدل‌ها به طور کلی کامل‌آمده تاوردای پیمانه. هستند. از آنجا که دو مرحله pooling اعمال می‌کنند که وضوح فضایی را هر یک با ضرب ۲.۳.۵ توضیح داده شده‌اند. همانطور که قبلاً بیان شد، هموردایی ایزومنتری (ناوردایی) تنها برای زیرگروه جابجایی‌ها به مضارب ۴ پیکسل برقرار است. بنابراین ویژگی‌های ادعا شده نظری همانطور که انتظار می‌رود برقرار هستند.

به عنوان خط میانا، مدل‌های هموردای بازتاب را با CNN‌های متعارف وابسته به مختصات روی نوار مؤبیوس مقایسه می‌کنیم. به منظور احترام به توپولوژی نوار، نسخه ساده‌ای از عملیات padding انتقالی را اعمال می‌کنیم. از آنجا که CNN‌ها نسبت به انواع میدان ناگاهه هستند، این کار با گرفتن نوارهای نارنجی دو پیکسل از شکل ۳۰ و pad کردن آنها به طرف مقابل آرایه پس از اعمال بازتاب اما بدون عمل کردن با نمایش گروهی نامشخص انجام می‌شود \blacksquare به طور رسمی، این منتظر با انتقال ویژگی‌ها طبق یک اتصال بدیهی است. از آنجا که عملیات غیرهموردا از نظر پارامتر کمتر کارآمد هستند، دو نسخه مختلف در نظر می‌گیریم: نسخه اول همان تعداد کانال مدل‌های مستقل از مختصات را استفاده می‌کند و بنابراین تقریباً دو برابر پارامتر بیشتری نیاز دارد. تعداد کانال‌های نسخه دوم با ضرب $\sqrt{2}$ کاهش می‌یابد تا تعداد پارامترها تقریباً معادل مدل‌های مستقل از جهت‌گیری باشد.

تمام مدل‌ها برای epoch ۲۰ با اندازه batch ۱۲۸ نمونه، کاهش وزن $\mathcal{L} = 10^{-6}$ و استفاده از بهینه‌ساز Adam آموزش داده می‌شوند. نرخ یادگیری اولیه $\eta = 5 \cdot 10^{-4}$ تا حد امکان بالا انتخاب شده بدون اینکه منجر به واگرایی فرآیند آموزش شود. یک برنامه کاهش نرخ یادگیری ثابت اندازه گام را هر ۴ epoch با ضرب ۲ کاهش می‌دهد.

جدول ۵ خطاهای تست حاصل از تمام مدل‌ها را نشان می‌دهد که هر کدام روی \mathbb{A}^{132} اجرا می‌انگین گیری شده‌اند. تنظیم اول، که در ستون “shifted digits” train digits گزارش شده، از ارقام قرار داده شده تصادفی هم در مجموعه داده آموزش و هم تست استفاده می‌کند. هر دو نسخه CNN غیرهموردا تقریباً همان خطای تست را به دست می‌آورند. در تضاد، اکثر CNN‌های مستقل از مختصات نتیجه بهتری به طور قابل توجهی به دست می‌آورند. تنها مدلی که کاملاً بر میدان‌های sign-flip مبتنی است بدتر عمل می‌کند \blacksquare این نشان می‌دهد که ترکیب استفاده شده از میدان‌های sign-flip و غیرخطی‌ها انتخاب خوبی نیست، علیرغم اینکه مستقل از مختصات است. بنابراین انتخاب‌های بد میدان‌های ویژگی و غیرخطی‌ها دیده می‌شود که به عملکرد مدل آسیب می‌زند. مدلی که بهترین نتایج را به دست می‌آورد بر میدان‌های ویژگی منتظم مبتنی است. این مشاهده با یافته‌های قبلی، به عنوان مثال مقایسه سیستماتیک انواع میدان در \mathbb{A}^{190} همسو است. تفسیر ما از این نتیجه این است که قیدهای کرنل شامل میدان‌های ویژگی منتظم اساساً اجازه کانال‌های کرنل بدون قید را می‌دهند، با شرط اضافی اعمال دو کپی بازتاب یافته از آنها \blacksquare این را در تضاد با \mathcal{R} -راهبری‌پذیر بین میدان‌های irep بینیابی کرد. کرنل کرنل متقاضان باشند. مدل مبتنی بر میدان‌های اسکالار عملکرد می‌اند بین CNN‌های متعارف و مدل میدان منتظم به دست می‌آورند. هر دو مدلی که از انواع میدان مختصات استفاده می‌کنند عملکردی بین انواع میدان ترکیب دارند. می‌خواهیم مجدد تأکید کنیم که مدل منتظم و مدل irep دقیقاً شامل همان انواع میدان irep هستند اما در پایه متفاوتی

مدل	انواع میدان ρ_i	sign-flip	منتظم	پارامترها	خطای تست (%)	ارقام آموزش جابجا شده	ارقام آموزش متغیر
CNN (channels)	□			k ۱۵۰۱	۱.۹۷ ± ۰.۱۱	۱.۹۷ ± ۰.۶۵	۴۲.۹۹ ± ۲.۶۵
CNN (params)	□			k ۸۳۲	۲.۰۸ ± ۰.۱۰	۲.۰۸ ± ۲.۸۵	۴۳.۶۸ ± ۲.۸۵
gauge CNN (scalar)	✓	×	×	k ۹۰۲	۱.۶۰ ± ۰.۱۰	۱.۶۰ ± ۰.۹	۱.۶۰ ± ۰.۹
gauge CNN (sign-flip)	×	✓	×	k ۸۲۰	۴.۲۷ ± ۰.۲۴	۴.۸۹ ± ۰.۲۶	۴.۸۹ ± ۰.۲۶
gauge CNN (regular)	×	×	×	k ۷۵۲	۱.۲۴ ± ۰.۰۸	۱.۲۳ ± ۰.۰۷	۱.۲۳ ± ۰.۰۷
gauge CNN (irreps)	✓	✓	✓	k ۷۵۲	۱.۶۵ ± ۰.۰۹	۱.۶۴ ± ۰.۱۲	۱.۶۴ ± ۰.۱۲
gauge CNN (mixed)	✓	✓	✓	k ۷۵۲	۱.۴۳ ± ۰.۰۹	۱.۴۲ ± ۰.۱۰	۱.۴۲ ± ۰.۱۰

جدول ۵: خطاهای تست معناری‌های مختلف شبکه، هر کدام میانگین‌گیری شده روی ۳۲ اجرا. ستون "shifted train digits" عملکرد برای تنظیمی را گزارش می‌کند که در آن هم نمونه‌های آموزش و هم تست در مکان‌های تصادفی روی نوار قرار داده شده‌اند. در حالی که CNN‌های متعارف \mathcal{RM} -مستقل از مختصات نیستند، قادر به یادگیری تشخیص ارقام همانطور که از میدان چارچوب ناپیوسته آنها دیده می‌شود هستند. تقریباً تمام CNN‌های مستقل از مختصات نتایج بهتری به طور قابل توجهی به دست می‌آورند. عملکرد پایین‌تر مدل sign-flip نشان می‌دهد که های CNN‌های مستقل از مختصات انتخاب‌های بدی از انواع میدان یا غیرخطی‌ها انجام شود خوب کار نکنند. ارقام آموزش در ستون "centered train digits" ممگی در همان موقعیت روی نوار قرار داده شده‌اند در حالی که ارقام تست به طور تصادفی جابجا شده باقی مانند. CNN‌های متعارف بدلتر می‌شود که شان دهنده فتدان همودایی آنها تحت دو وضعیت هستند که همودایی ایزومتری آنها را تأیید می‌کند. در نتیجه، عملکرد CNN‌های متعارف بدلتر می‌شود که شان دهنده فتدان همودایی آنها تحت ایزومتری‌ها است.

بیان شده‌اند. از آنجا که این تغییر پایه می‌تواند به عنوان بخشی از غیرخطی‌های اعمال شده تفسیر شود، این نتیجه نشان می‌دهد که غیرخطی‌های استفاده شده تأثیر عمده‌ای روی عملکرد مدل دارند. علی‌رغم اینکه در [۱۹۰] بررسی شده، منظره غیرخطی‌های همودا هنوز تا حد زیادی قلمرو ناکشف شده‌ای است.

تنظیم آموزش دوم، که در ستون "centered train digits" گزارش شده، قابلیت مدل‌ها برای تعیین روی تمام حالت‌هایی که توسط ایزومتری‌ها مرتبط هستند را بررسی می‌کند. تمام مدل‌ها روی ارقامی که در همان مکان روی نوار رخ می‌دهند آموزش داده می‌شوند اما روی ارقام جابجا شده تصادفی تست می‌شوند. همانطور که انتظار می‌رود، عملکرد CNN‌های متعارف در این تنظیم به طور قابل توجهی بدتر می‌شود [۱۱]. این نشان می‌دهد که آنها واقعاً تحت ایزومتری‌های نوار مؤبیوس همودا نیستند. در تضاد، عملکرد اکثر CNN‌های مستقل از مختصات در انحراف معیار بدون تغییر باقی می‌ماند. علی‌رغم زیرگروه ایزومتری‌هایی که به مضارب ۴ پیکسل جابجا می‌شوند دقیقاً همودا (ناوردا) هستند، باوردادی ایزومتری کامل مدل‌ها بنابراین به نظر خیلی خوب برقرار است. در حالی که مدل sign-flip در مقایسه با تنظیم آموزش اول بطور قابل توجهی بدتر می‌شود، هنوز تقریباً همودای ایزومتری است و بنابراین خیلی بهتر از CNN‌های متعارف عمل می‌کند.

در نتیجه، آزمایش‌های انجام شده ویژگی‌های ادعا شده CNN‌های مستقل از مختصات را تأیید کرده و برتری آنها نسبت به مدل‌های وابسته به مختصات را نشان می‌دهند.

بخش دوم

نظریه شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات

بخش اول میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را بر حسب عبارات مختصاتی آن‌ها نسبت به انتخابی از گیج روی محله‌های محلی $U \subseteq M$ معرفی کرد. از آنجا که وجود گیج‌های سراسری به طور کلی از نظر تپولوژیکی مانع دارد، نمایش‌های مختصاتی سراسری میدان‌های ویژگی به طور کلی وجود ندارند. بخش اول مسلله را با تجمعی محتواهای سراسری میدان‌های ویژگی از عبارات مختصاتی محلی آن‌ها نسبت به اطلاعی از گیج‌هایی که M را پوشش می‌دهند، برطرف کرد. یک جایگزین ظرفیفتر، تعریف میدان‌های ویژگی سراسری در یک فرمالیسم انتزاعی و مستقل از مختصات بر حسب بندل‌های فیبر است. تسهیم‌های بندل امکان بازیابی عبارات مختصاتی محلی میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را فراهم می‌کنند.

۶۷	۶	بندل‌های مرتبط و میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات
۶۸	۱۶	مقدمه‌ای کوتاه بر کلاف‌های تاری
۷۳	۲۶	کلاف مماس TM و کلاف چارچوب
۷۶	۳۶	ساختارهای G و کلاف‌های برداری ویژگی وابسته A
۷۸	۴۶	بدیهی‌سازی‌های محلی کلاف A ، GM ، FM ، TM
۸۴	۵۶	منتقل‌کننده‌های موازی روی کلاف‌های الحقی
۸۷	۷	تبديلات میدان کرنل مستقل از مختصات و کانولوشن‌های GM
۸۸	۱۷	کانولوشن‌های GM با اندازه 1×1
۹۲	۲۷	تبديلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM
۹۸	۸	همتغیری ایزومتری
۱۰۰	۱۸	ایزومتری‌ها و عمل آنها بر منیفلدها، کلاف‌ها و میدان‌ها
۱۱۲	۲۸	همتغیری ایزومتری تبدلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM
۱۱۷	۳۸	میدان‌های کرنل خارج قسمتی

بخش‌های زیر توصیف سراسری و مستقل از مختصات شبکه‌های عصبی و فضاهای ویژگی از بخش اول را توسعه می‌دهند. بخش ۶ بندل‌های فیبر، به ویژه بندل مماس، G -ساختارها و بندل‌های بردار ویژگی G -مرتبط را معرفی می‌کند. عملیات شبکه عصبی مانند تبدیل‌های میدان کرنل و کانولوشن‌های GM در بخش ۷ تعریف می‌شوند. بخش ۸ همورادی ایزومتری این عملیات را بررسی می‌کند.

۶ بندل‌های مرتبط و میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات

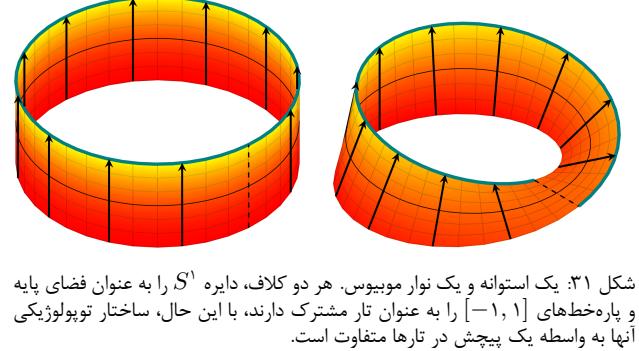
میدان‌های کمیت‌های هندسی بر روی خمینه‌ها به عنوان پرش‌هایی از بندل‌های فیبر رسمی سازی می‌شوند (معادله (۱۴۷)). هر خمینه هموار به طور طبیعی مجهر به بندل مماس و بندل چارچوب خود است. انتخاب یک G -ساختار، که یک G -بندل از چارچوب‌های مرتع است، امکان تعریف بندل‌های بردار ویژگی G -مرتبط را فراهم می‌کند. فضاهای ویژگی شبکه‌های عصبی مستقل از مختصات ما فضاهایی از میدان‌های ویژگی هستند، یعنی پرش‌هایی از این بندل‌های بردار ویژگی. بندل‌های فیبر به طور کلی در بخش ۱۶ مرور می‌شوند. بخش ۲۶ بندل مماس و TM و بندل چارچوب FM را مورد بحث قرار می‌دهد. G -ساختارها، که زیرمجموعه‌هایی از چارچوب‌های مرتع هستند که توسط ساختار هندسی داده شده بر روی خمینه تمایز می‌شوند، در بخش ۳۶ معرفی می‌شوند. G -بندل‌های مرتع، از جمله بندل‌های بردار ویژگی A ، از G -ساختار ساخته می‌شوند. بخش ۴۶ جزئیات تسهیم‌های محلی (گیج‌ها)، TM ، FM ، GM و A را ارائه می‌دهد، که مختصات را دوباره معرفی می‌کند و فرمول بندی بخش ۳ را بازیابی می‌کند. تبدیل متقابل میدان‌های ویژگی تسهیم‌شده با ضرایب بردار مماس و چارچوب‌های مرتع تسهیم‌شده از این

رو از فرمول‌بندی مستقل از مختصات از طریق G بندل‌های مرتبط به دست می‌آید. بخش ۵.۶ انتقال‌دهنده‌های موازی بر روی بندل‌های مرتبط را مورد بحث قرار می‌دهد، به ویژه اینکه چگونه آن‌ها یکدیگر را القا می‌کنند. تمام مفاهیم ارائه شده در اینجا در هندسه دیفرانسیل به خوبی ثابت شده‌اند و به راحتی در ادبیات یافت می‌شوند [۱۳۲، ۱۵۷، ۱۲۲، ۸۰، ۱۷۱، ۱۹۳، ۹۴، ۱۱۸، ۱۳۸، ۳۴]. سهم ما ارائه یک توضیح جامع است که بین نظریه ریاضی و کاربرد آن در یادگیری عمیق هندسی پل می‌زند.

۱.۶ مقدمه‌ای کوتاه بر کلاف‌های تاری

به طور شهودی، یک کلاف تاری را می‌توان فضایی در نظر گرفت که با گرفتن یک فضای دیگر موسوم به فضای پایه، در مورد ما خمینه M ، و چسباندن فضای دیگری F موسوم به تار، به هر یک از نقاط آن ساخته می‌شود. یک مثال بدیهی، حاصلضرب مستقیم $M \times F$ خواهد بود. با این حال، تارها به طور کلی می‌توانند به روی پیچ خورده به هم متصل شوند، به طوری که کلاف حاصل از نظر توپولوژیکی با یک حاصلضرب متفاوت باشد.

به عنوان مثال، فرض کنید فضای پایه دایره S^1 و $M = S^1 \times [-1, 1]$ باشد. حاصلضرب مستقیم آنها تار، پاره خط $F = [-1, 1] \times S^1$ یک استوانه را تشکیل می‌دهد؛ به شکل ۳۱ (چپ) مراجعه کنید. در مقابل، اگر تارها به گونه‌ای چسبانده شوند که پس از یک دور کامل حول دایره، "وارونه" شوند، نوار موبیوس به دست می‌آید که یک کلاف تاری غیربدیهی است و از نظر توپولوژیکی با استوانه تفاوت دارد؛ به شکل ۳۱ (راست) مراجعه کنید.^{۴۲} توجه داشته باشید که نوار موبیوس به صورت محلی شبیه به حاصلضرب مستقیم $U \times F$ از یک جزء خطی $U \subseteq S^1$ با تار F است. همانطور که در ادامه بحث می‌شود، کلاف‌های تاری طبق تعریف همیشه می‌توانند به صورت محلی به حاصلضرب‌های تاری علاوه‌مندیم زیرا آنها امکان توصیف سراسری



شکل ۳۱: یک استوانه و یک نوار موبیوس. هر دو کلاف، دایره S^1 را به عنوان فضای پایه و پاره خط‌های $[-1, 1]$ را به عنوان تار مشترک دارند، با این حال، ساختار توپولوژیکی آنها به واسطه یک پیچش در تارها متفاوت است.

(مشکل های روزی که حکم اینها را فراهم می‌نمایند) به عنوان مثال، یک میدان باد روی $M = S^1$ یک میدان باد روی $T_p M$ است که به هر نقطه p از M یک بردار مماس در $T_p M$ نسبت می‌دهد. کلاف تاری متناظر، کلاف مماس است که تمام فضاهای مماس را به هم متصل می‌کند و بنابراین به عنوان یک کلاف تاری با فضای پایه S^1 $\cong T_p M$ و تار $M = S^1$ شناسایی می‌شود. مشابه تارهای نوار موبیوس، فضاهای مماس یک خمینه خمیده به طور کلی به روی کانونی به هم متصل نیستند، بلکه ذاتاً نسبت به یکدیگر پیچ خورده‌اند. بنابراین، کلاف مماس به طور کلی از نظر توپولوژیکی با یک حاصلضرب متمایز است، یعنی $TM \times \mathbb{R}^d \not\cong M \times \mathbb{R}^d$. به منظور تعریف میدان‌های برداری ویژگی C -بعدی، ما بعداً کلاف‌هایی با فضای پایه M و فضاهای برداری ویژگی \mathbb{R}^C به عنوان تار در نظر خواهیم گرفت.

کلاف‌های تاری به طور کلی: به طور رسمی، یک کلاف تاری ساختاری (E, M, π, F) است که از فضاهای توپولوژیکی E (فضای کلی)، M (فضای پایه) و F (تار نوعی) و یک نگاشت تصویر پیوسته و پوشاننده $E \rightarrow M$ است. یک کلاف تاری به صورت محلی بدیهی شدنی است، به این معنی که برای هر نقطه $p \in M$ یک همسایگی محلی $U \subseteq M$ از p وجود دارد که کلاف، محدود به آن، شبیه به یک حاصلضرب مستقیم $U \times F$ است. بدیهی بودن محلی توسط همسان‌ریختی‌ها $\Psi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ ^{۴۳} یعنی Ψ فرمول‌بندی می‌شود که نمودار جابجایی زیر را برآورده می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Psi} & U \times F \\ \downarrow \pi & \nearrow \text{proj}_1 & \\ M & \supseteq & U \end{array}, \quad (129)$$

یعنی،

$$\pi = \text{proj}_1 \circ \Psi, \quad (130)$$

که در آن $U \times F \rightarrow U \times F$ proj_1 نگاشت تصویر طبیعی روی عامل اول را نشان می‌دهد. کلافی که به صورت سراسری با حاصلضرب همسان‌ریخت باشد، بدیهی نامیده می‌شود. کلاف‌ها اغلب به طور خلاصه به صورت $E \xrightarrow{\pi} M$ یا فقط E نوشته می‌شوند و تار نوعی و فضای پایه به طور ضمنی فرض می‌شوند. از آنجا که ما میدان‌های چارچوب هموار را در نظر می‌گیریم، فرض می‌کنیم E ، M و F خمینه‌های هموار و Ψ نگاشت‌های هموار (دیفرانسیل) باشند.

^{۴۹} برای جلوگیری از سردگمی، تأکید می‌کنیم که این مثال، نوار موبیوس را به عنوان یک کلاف تاری با فضای پایه (خمینه) S^1 در نظر می‌گیرد. در مقابل، تمام شکل‌های قبلی که شامل نوار موبیوس بودند، آن را به عنوان فضای پایه (خمینه) M برای کانولوشن در نظر می‌گرفتند.

^{۴۰} علاوه بر این، باید اشاره کنیم که پیکان‌های نشان داده شده در شکل فقط برای تأکید بر پیچش در نوار موبیوس هستند. آنها به معنای جهت چسباندن مانند نمودارهای جیسنند نیستند.

^{۴۱} یک همسان‌ریختی یک یکریختی توپولوژیکی است، یعنی یک نگاشت پیوسته و معکوس‌پذیر بین فضاهای توپولوژیکی با معکوس پیوسته.

بدیهی بودن محلی $E \xrightarrow{\pi} M$ ایجاد می‌کند که تصویر معکوس $(\pi^{-1}(p) = p \in M)$ از هر نقطه E_p که تار روی p نامیده می‌شود، با تار $\psi_p : E_p \rightarrow F$ دیفرمorf باشد. همانند بخش ۳، ما دیفرمورفیسم‌های را که تارها روی نقاط مختلف را با تار نوعی یکی می‌دانند با نشان می‌دهیم. بدیهی سازی‌های محلی در این صورت بر حسب این دیفرمورفیسم‌ها به صورت زیر داده می‌شوند:

$$\Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F, \quad e \mapsto (\pi(e), \psi_{\pi(e)}(e)). \quad (131)$$

اگر تار نوعی F و تارهای E_p روی p ساختار اضافی داشته باشند، لازم است که دیفرمورفیسم‌های $\psi_p : E_p \rightarrow F$ این ساختار را حفظ کنند، یعنی یکریختی باشند.^{۴۲} به عنوان مثال، اگر F و ساختار فضای برداری داشته باشند، آنگاه ψ_p باید خطی باشد.

به طور کلی، انتخاب خاص بدیهی‌سازی‌های محلی (یا دیفرمورفیسم‌ها) روی U به طور کانونی توسعه کلاف مشخص نمی‌شود. بنابراین باید انتخاب‌های مختلف (پیمانه‌ها) و توابع گذار (تبديلات پیمانه) بین آنها را در نظر گرفت. برای دقیق کردن این موضوع، دو همسایگی بدیهی‌سازی همپوشان U^A و U^B را با بدیهی‌سازی‌های محلی Ψ^A و Ψ^B در نظر بگیرید. از معادله (۱۳۱) نتیجه می‌شود که گذار بین هر دو بدیهی‌سازی محلی روی $U^{AB} := U^A \cap U^B \neq \emptyset$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\Psi^B \circ (\Psi^A)^{-1} : U^{AB} \times F \rightarrow U^{AB} \times F, \quad (p, f) \mapsto \left(p, [\psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}] (f) \right) =: (p, g_p^{BA} \blacktriangleright f) \quad (132)$$

که در آن ما به طور ضمنی توابع گذار هموار را تعریف کردیم:^{۴۳}

$$g^{BA} : U^{AB} \rightarrow \text{Aut}(F), \quad p \mapsto g_p^{BA} := \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1} \quad (133)$$

و عمل چپ آنها

$$\blacktriangleright : \text{Aut}(F) \times F \rightarrow F, \quad (g_p^{BA}, f) \mapsto g_p^{BA} \blacktriangleright f := [\psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}] (f). \quad (134)$$

روی تار نوعی F مقایسه کنید با معادلات (۷) و (۶). برای اینکه ببینیم عامل اول در معادله (۱۳۲) در واقع با همانی داده می‌شود، توجه داشته باشید که برای هر $p \in U^{AB}$ و هر $f \in F$ ، اعمال مکرر معادله (۱۳۰) ایجاد می‌کند: $[\text{proj}_1 \circ \Psi^B \circ (\Psi^A)^{-1}] (p, f) = \text{proj}_1 (p, f) = p$. نتیجه $[\pi \circ (\Psi^A)^{-1}] (p, f) = \text{proj}_1 (p, f) = p$. معادله (۱۲۹) به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id} \times g^{BA} \blacktriangleright & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ U^{AB} \times F & \xleftarrow{\Psi^A} & \pi^{-1}(U^{AB}) & \xrightarrow{\Psi^B} & U^{AB} \times F \\ & \searrow \text{proj}_1 & \downarrow \pi & \swarrow \text{proj}_1 & \\ & & U^{AB} & & \end{array} \quad (135)$$

محدود به یک نقطه $p \in U^{AB}$ و برای حالت خاص کلاف مماس (که در ادامه تعریف می‌شود)، این نمودار با نمودار در معادله (۸) و نسخه گرافیکی آن در شکل ۱۴ مطابقت دارد.

طبق تعریف، توابع گذار در معادله (۱۳۳) سه شرط زیر را برآورده می‌کنند:^{۴۴}

$$i) \quad g_p^{AA} = e \quad \forall p \in U^A \quad (136)$$

$$ii) \quad g_p^{BA} = (g_p^{AB})^{-1} \quad \forall p \in U^A \cap U^B \quad (137)$$

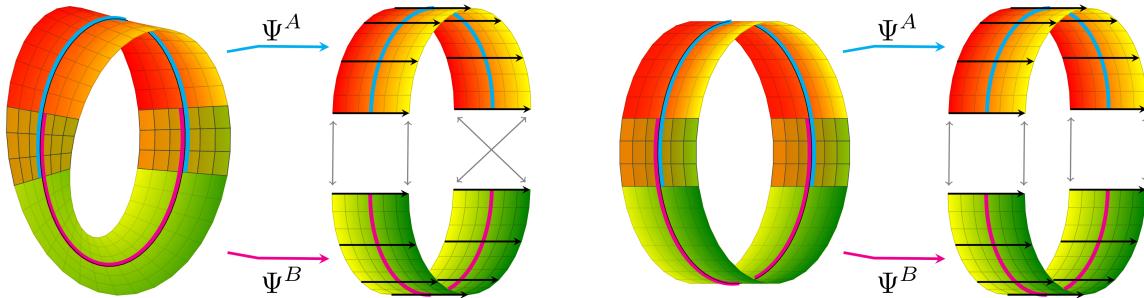
$$iii) \quad g_p^{CB} g_p^{BA} = g_p^{CA} \quad \forall p \in U^A \cap U^B \cap U^C \quad (\text{شرط همزنجیر}) \quad (138)$$

طبق قضیه ساخت کلاف تاری، هر کلاف تاری را می‌توان به طور کامل و سراسری بر حسب یک اطلس $\mathcal{A} = \{(U^X, \Psi^X) \mid X \in \mathfrak{X}\}$ از بدیهی‌سازی‌های محلی (U^X, Ψ^X) مشخص کرد که M را می‌پوشاند و توابع گذار آنها معادلات (۱۳۶)، (۱۳۷) و (۱۳۸) را برآورده می‌کنند (در اینجا \mathfrak{X} یک مجموعه اندیس را نشان می‌دهد). می‌توان بدیهی‌سازی‌های منفرد را به گونه‌ای تصور کرد که توسعه نگاشته‌های گذار به هم چسبیده‌اند، که در شکل ۳۲ به تصویر کشیده شده است. توجه داشته باشید که این مشابه باشید که این مشابه توصیف سراسری یک خمینه بر حسب یک اطلس از چارت‌های محلی است.

^{۴۲} به طور جایگزین، فرض کنید F ساختاری دارد که توسعه توابع گذار $(\psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1} (p) \in \text{Aut}(F))$ حفظ می‌شود (پاراگراف بعدی را ببینید). سپس بدیهی‌سازی‌های $E_p \rightarrow F$ به طور سازگار ساختار F را روی E_p القا می‌کنند و به طور خودکار یکریختی هستند.

^{۴۳} گروه خودریختی‌های $\text{Aut}(F)$ یک فضای F از تمام نگاشته‌های معکوس‌پذیر و حافظ ساختار (یکریختی‌ها) از F به خودش تشکیل شده است. به عنوان مثال، اگر $F = \mathbb{R}^n$ یک فضای برداری باشد، گروه خودریختی، گروه خطی عام $\text{GL}(n)$ است که از تمام ماتریس‌های معکوس‌پذیر $n \times n$ تشکیل شده است.

^{۴۴} شرایط (i) و (ii) از شرط همزنجیر (iii) نتیجه می‌شوند اما اغلب به طور صریح بیان می‌شوند.



شکل ۳.۲: توصیف استوانه و نوار موبیوس بر حسب اطلس‌های G که هر کدام از دو بدیهی‌سازی محلی تشکیل شده‌اند. چپ: از آنجا که استوانه یک کلاف بدیهی است، تمام توابع گذار را می‌توان به عنوان نگاشته‌های همانی انتخاب کرد به طوری که گروه ساختار به گروه بدیهی $G = \{e\}$ کاهش یابد. برخلاف وضعیت به تصویر کشیده شده، امکان انتخاب یک بدیهی‌سازی سراسری و واحد وجود دارد. راست: توبولوژی نوار موبیوس توابع گذار را در یکی از همپوشانی‌ها مجبور می‌کند که تارها را به روشنی وارونه به هم پیگیرانند. بنابراین گروه ساختار را نمی‌توان بیشتر از گروه $G = \mathcal{R}$ که بازتاب تارها را مدل می‌کند، کاهش داد. بنابراین بدیهی‌سازی‌های سراسری برای نوار موبیوس وجود ندارد. توجه داشته باشید که پیکان‌های روی نوار موبیوس را نباید با پیکان‌های نمودارهای چسباندن اشتباه گرفت، یعنی پیچش، بردارها را در یکی از برش‌ها در جهت مخالف می‌چسباند.

کلافهای برداری: چندین مفهوم خاص‌تر از کلافهای تاری وجود دارد که ساختار ریاضی اضافی دارند. یک مثال مهم کلافهای برداری هستند که همانطور که از نامشان پیداست، کلافهایی هستند که از فضاهای برداری متصل به یک خمینه تشکیل شده‌اند. به طور رسمی، یک کلاف برداری (حقیقی) از رتبه k یک کلاف $(E, M, \pi, \mathbb{R}^k)$ با تار نوعی \mathbb{R}^k و تارهای $E_p \cong \mathbb{R}^k$ روی p است. به طوری که طوری که بدیهی‌سازی‌های محلی به ازای هر تار، یکریختی‌های فضای برداری (نگاشته‌های خطی) هستند. توابع گذار $\psi_p = \text{GL}(k)$ در این صورت مقادیری در گروه خطی عام می‌گیرند.

به طور جایگزین، با داشتن تار \mathbb{R}^k و یک اطلس از بدیهی‌سازی‌های محلی که توابع گذار آن مقادیری در $\text{Aut}(\mathbb{R}^k) = \text{GL}(k)$ می‌گیرند، یک ساختار فضای برداری برای E_p با قرار دادن

$$\alpha v + \beta w := (\psi_p^A)^{-1}(\alpha \psi_p^A(v) + \beta \psi_p^A(w)) \quad \forall v, w \in E_p, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (139)$$

برای یک پیمانه دلخواه $\psi_p^A : E_p \rightarrow \mathbb{R}^k$ از اطلس $\text{GL}(k)$ القا می‌شود. اینکه ساختار فضای برداری به طور سازگار تعریف شده است واضح است زیرا

$$\begin{aligned} & (\psi_p^B)^{-1}(\alpha \psi_p^B(v) + \beta \psi_p^B(w)) \\ &= (\psi_p^A)^{-1}\left((g_p^{BA})^{-1}(\alpha g_p^{BA}\psi_p^A(v) + \beta g_p^{BA}\psi_p^A(w))\right) \\ &= (\psi_p^A)^{-1}(\alpha \psi_p^A(v) + \beta \psi_p^A(w)) \end{aligned} \quad (140)$$

همان نتیجه را به دست می‌دهد. توجه داشته باشید که مرحله آخر نیازمند خطی بودن $(g_p^{BA})^{-1}$ است. این صورت به طور خودکار یکریختی‌های فضای برداری هستند.

مهم‌ترین مثال‌ها برای ما کلاف مماس و کلافهای برداری ویژگی هستند که در بخش‌های بعدی معرفی می‌شوند.

G -کلافها بسته به توبولوژی کلاف، ممکن است بتوان یک اطلس از بدیهی‌سازی‌های محلی \mathcal{X} تعريف کرد که توابع گذار آن به یک زیرگروه $G \leq \text{Aut}(F)$ محدود شده‌اند، یعنی برآورده می‌کنند:

$$g_p^{BA} \in G \quad \text{برای تمام } A, B \in \mathcal{X} \quad p \in U^A \cap U^B. \quad (141)$$

هر چنین اطلسی، اطلس G نامیده می‌شود و G به عنوان گروه ساختار کلاف شناخته می‌شود. دو اطلس G مختلف معادل (یا سازگار) هستند، اگر اجتماع آنها دوباره یک اطلس G باشد. کلافی که به یک کلاس هم‌ارزی از اطلس‌های G مجهز شده باشد، به عنوان یک G -کلاف شناخته می‌شود.^{۴۵}

توبولوژی یک کلاف تعیین می‌کند که گروه ساختار آن تا چه حد قابل کاهش است. به عنوان مثال، استوانه در شکل ۳.۲ (یا هر کلاف بدیهی دیگر) را می‌توان با یک اطلس $\{e\}$ توصیف کرد که فقط از بدیهی‌سازی‌های محلی با توابع گذار همانی تشکیل شده است. این متناظر با کاهش به یک

^{۴۵} کلاس هم‌ارزی تضمین می‌کند که هیچ یک از اطلس‌های G معادل، برتری ندارند. به طور معادل، می‌توان اطلس G ماقسیمال را در نظر گرفت که به عنوان اطلس G منحصر به فردی تعریف می‌شود که هر اطلس G سازگار دیگری در آن موجود است. توجه داشته باشید که یک کلاس هم‌ارزی از اطلس‌های G به طور منحصر به فرد توسط یک اطلس G داده شده، ایجاب می‌شود.

گروه ساختار بدیهی $G = \{e\}$ است. در مقابل، توبولوژی پیچ‌خورده نوار موبیوس ایجاد می‌کند که هر اطلس G شامل توابع گذاری باشد که تارها را با جهت‌گیری ازونه به هم پیچ‌سینند؛ به شکل ۳۲ (راست) مراجعت کنید. بنابراین گروه ساختار نوار موبیوس را نمی‌توان بیشتر از گروه $G = \mathcal{R}$ که بازتاب تارها را مدل می‌کند، محدود کرد. روی خمینه‌های ریمانی، گروه ساختار کلاف مماس TM و در نتیجه کلاف‌های برداری ویژگی وابسته، به طور کلی نمی‌تواند بیشتر از یک گروه ساختار متعامد ($O(d)$) کاهش یابند، که این کار روی های \mathbb{M}^n مستقل از مختصات را در وهله اول انگیزه‌مند کرد.

کلاف‌های G وابسته: دو G -کلاف را وابسته به یکدیگر می‌نامند اگر دارای فضای پایه، گروه ساختار و مهمتر از همه، توابع گذار یکسان باشند. کلاف‌های وابسته (E, M, π, F) و $(\tilde{E}, M, \tilde{\pi}, \tilde{F})$ با گروه ساختار G ممکن است در تارهای نوعی خود F و \tilde{F} و بنابراین در عمل چپ $\tilde{F} \rightarrow F$ و $G \times \tilde{F} \rightarrow \tilde{F}$ و $G \times F \rightarrow F$ باشند. با داشتن دو اطلس G و $(U^X, \Psi^X) | X \in \mathfrak{X}$ از کلاف‌های ریمانی M از $(U^X, \tilde{\Psi}^X) | X \in \mathfrak{X}$ از کلاف‌ها را همان پوشش باز M ، شرط هم‌ارزی توابع گذار (تا حد عمل‌های چپ مختلف) به این معنی است:

$$\Psi^B \circ (\Psi^A)^{-1} = (\text{id} \times g^{BA} \blacktriangleright) \iff \tilde{\Psi}^B \circ (\tilde{\Psi}^A)^{-1} = (\text{id} \times g^{BA} \blacktriangleright) \quad (142)$$

به طور شهودی، تارهای نوعی F و \tilde{F} از E و \tilde{E} به روی یکسان روی M "به هم چسبیده‌اند".

یک مثال مهم از کلاف‌هایی که به صورت $GL(d)$ -وابسته به یکدیگر هستند، کلاف مماس TM ، هر کلاف هم‌مماس T^*M دیگر T_s^rM و کلاف چارچوب مماس FM هستند (اولی و آخری در بخش ۲۶ معرفی شده‌اند). وابستگی این کلاف‌ها در این واقعیت منعکس می‌شود که مؤلفه‌های آنها نسبت به پایه‌های انتخاب شده مطابق با همان تبدیل پیمانه شوند (مثلًاً ژاکوبین $g_{\mu\nu}^{BA} = \frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\nu^A}$ ، به پیوست آ مراجعة کنید). عمل‌های مختلف یک تبدیل پیمانه بر روی تارهای مربوطه در این مثال به عنوان تبدیل پادوردا (T^*M)، تبدیل هموردا (TM)، تبدیل r -بار پادوردا و s -بار هموردا (T^rM و T^sM)، تبدیل هموردا (TM)، به ترتیب، مشخص می‌شوند. ما بعداً ساختار G ، کلاف مماس GM و کلاف‌های برداری ویژگی A را به عنوان کلاف‌های G وابسته معرفی خواهیم کرد. وابستگی در این مورد از این واقعیت ناشی می‌شود که تغییرات چارچوب‌های مرجع در GM منجر به تبدیل هم‌مان ضرایب بردار مماس و ضرایب بردار ویژگی می‌شود. می‌خواهیم اشاره کنیم که هر کلاف وابسته‌ای علاوه بر این به یک کلاف اصلی G منحصر به فرد (که در پاراگراف بعدی تعریف می‌شود) وابسته است. در مقابل، هر کلاف وابسته را می‌توان از کلاف اصلی وابسته مربوطه ساخت ما از این ساختار به طور گسترده برای تعریف کلاف‌های برداری ویژگی در بخش ۳.۶ استفاده خواهیم کرد.

کلاف‌های اصلی G : یک کلاف تاری $(P, M, \pi, G, \triangleleft)$ را یک کلاف اصلی (هموار) (P, M, π, G) می‌نامند اگر ۱) تار نوعی آن با گروه ساختار آن G منطبق باشد و ۲) به یک عمل راست (هموار)

$$\triangleleft : P \times G \rightarrow G, \quad (p, g) \mapsto p \triangleleft g \quad (143)$$

تجهز باشد که تارها را حفظ می‌کند، یعنی

$$\pi(p \triangleleft g) = \pi(p) \quad \forall p \in P, g \in G \quad (144)$$

و به صورت تعدی‌پذیر و آزاد روی آنها عمل می‌کند.^{۴۶} دو شرط آخر (عدی‌پذیری و آزادی) با هم ایجاد می‌کنند که تارهای یک کلاف اصلی G ، G -تورسور (یا فضاهای همگن اصلی G) باشند، که به طور شهودی به این معناست که آنها " شبیه به G " هستند اما بدون هیچ مبدأ یا عنصر همانی مشخصی ارائه می‌شوند.^{۴۷} بدیهی‌سازی‌های محلی $\Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ باید عمل راست G را حفظ کنند، یعنی هموردا راست G باشند:

$$\Psi(p \triangleleft g) = \Psi(p)(\text{id} \times \cdot \cdot g) = \psi_{\pi(p)}(p \triangleleft g) = \psi_{\pi(p)}(p) \cdot g \quad \forall p \in P, g \in G, \quad (145)$$

که در آن g : ضرب راست کانونی با عناصر گروه روی تار نوعی G را نشان می‌دهد. این، نمودار زیر بسط می‌دهد:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi} & U \times G \\ \downarrow \triangleleft g & & \uparrow (\text{id} \times \cdot \cdot g) \\ \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi} & U \times G \\ \downarrow \pi & \nearrow \text{proj}_1 & \\ U & & \end{array}, \quad (146)$$

^{۴۶} یک عمل گروهی (راست) $X : (x, g) \mapsto x \cdot g$ برای هر $x, g \in G$ یک عمل تعدی‌پذیر می‌نامند اگر هر نقطه از X را بتوان به هر نقطه دیگر نگاشت، یعنی اگر کند که $e = g$ باشد، یعنی اگر تنها عمل عنصر همانی p را ناوردا باقی بگذارد. توجه داشته باشید که همین گزاره‌ها را می‌توان برای عمل‌های چپ تبیز بیان کرد.

^{۴۷} به طور رسی، یک G -تورسور (راست) P شرط $P \times P \cong P$ را برآورده می‌کند که در آن یک‌یاختی توسعه $(p, g) \mapsto (p, p \cdot g)$ داده می‌شود.

این شرط ایجاد می‌کند که یک عنصر گروهی منحصر‌بفرد وجود داشته باشد که هر دو نقطه در تورسور را به هم متصل کند.

که لازم است برای هر $g \in G$ جابجا باشد.

کلافهای اصلی G برای مطالعه کلافهای عمومی G از اهمیت زیادی برخوردارند. به طور خاص، هر کلاف G (برای مطالعه کلافهای اصلی G منحصر به فرد) $(P, M, \pi_P, G, \triangleleft)$ روی M وابسته است و هر کلاف G وابسته را می‌توان از P ساخت. در بخش‌های بعدی، ما کلاف چارچوب GM و FM را به عنوان نمونه‌های خاصی از کلافهای اصلی ارائه خواهیم داد، که ادعاهای مطرح شده در اینجا را کمتر انتزاعی کرده و برخی از پیامدهای آنها را آشکار می‌سازد.

برش‌ها و میدان‌ها: میدان‌های هموار با مقدار F روی M به عنوان برش‌های هموار σ از یک کلاف $E \xrightarrow{\pi} M$ با تار F فرمول‌بندی می‌شوند. یک برش هموار در این صورت به عنوان یک نگاشت هموار $\sigma : M \rightarrow E$ تعریف می‌شود که به هر نقطه p از فضای پایه یک عنصر در تار E_p روی p نسبت می‌دهد، یعنی شرط $\sigma = \text{id}_M \circ \pi$ را برآورده می‌کند، که نمودار جابجایی زیر آن را به تصویر می‌کشد:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\sigma} & E & \xrightarrow{\pi} & M \\ & & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{id}_M} & & \\ & & & & \end{array} \quad (147)$$

یک مثال مهم میدان‌های برداری مماس هستند که به عنوان برش‌های $v : M \rightarrow TM$ مدل می‌شوند که به هر نقطه p در M یک بردار مماس $v(p) \in T_p M$ نسبت می‌دهند. توجه داشته باشید که نگاشت تصویر، به طبیعت خود، معکوس‌نابذیر است، به طوری که $\sigma \circ \pi \neq \text{id}_E$. بنابراین نمودار زیر به طور کلی جابجا نمی‌شود:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\pi} & M & \xrightarrow{\sigma} & E \\ & & \varnothing & & \\ & & & & \text{id}_E \end{array} \quad (148)$$

در مواردی که در ادامه یک نمودار جابجا نباشد، که بیشتر در مورد برش‌ها صدق می‌کند، ما این موضوع را با افزودن نماد \triangleleft به صورت بصری تأکید می‌کنیم. برش‌های هموار لزوماً به صورت سراسری وجود ندارند اما همیشه می‌توانند روی همسایه‌های بدیهی‌ساز $U \subseteq M$ تعریف شوند. از طریق یک بدیهی‌سازی محلی، یک برش محلی را می‌توان با یک تابع $F : U \rightarrow \tilde{E}$ با قرار دادن $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{F})$ نشان می‌دهیم در حالی که فضای برش‌های محلی به صورت $\Gamma(U, E)$ نوشته می‌شود.

ریخت‌های کلاف: ریخت‌ها (نگاشتها) در رده کلافهای تاری، ریخت‌های کلاف یا نگاشتهای کلاف نامیده می‌شوند. آنها با دیفئو‌مورفیسم‌های صرف بین فضاهای کلی تفاوت دارند، زیرا علاوه بر آن ملزم به حفظ ساختار کلاف هستند، یعنی تارها را به تارها نگاشت کنند. به طور کلی، یک نگاشت کلاف هموار بین دو کلاف تاری هموار (E, M, π, F) و $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{F})$ یک نگاشت هموار $\phi : E \rightarrow \tilde{E}$ است که ϕ بین فضاهای کلی است، به طوری که یک نگاشت هموار دوم $M \xrightarrow{\hat{\phi}} \tilde{M}$: $\hat{\phi}$ بین فضاهای پایه وجود دارد که شرط $\hat{\phi} \circ \pi = \tilde{\phi} \circ \phi = \tilde{\phi} \circ \pi \circ \phi = \tilde{\phi}$ را برآورده می‌کند، یعنی نمودار زیر باید جابجا باشد:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & \tilde{E} \\ \pi \downarrow & & \tilde{\pi} \downarrow \\ M & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \tilde{M} \end{array} \quad (149)$$

نگاشت روی فضای پایه تضمین می‌کند که ریخت کلاف، تارها در $p \in M$ را به تارهایی در $\hat{p} \in \tilde{M}$ نگاشت می‌کند به جای اینکه آنها را "از هم بگسلند". تعمیم‌های واضح به یکریختی‌های کلاف و خودریختی‌های کلاف وجود دارد. به عنوان مثال، یکریختی‌های کلاف ایجاب می‌کنند که ϕ و $\hat{\phi}$ معکوس‌نابذیر باشند، یعنی دیفئو‌مورفیسم باشند (و ساختارهای دیگر را در صورت تعریف حفظ کنند).

نوع خاص نگاشت کلاف تحت بررسی را می‌توان با خواستن الزامات اضافی محدودتر کرد. یک ریخت M کلاف بین دو کلاف (E, M, π, F) و $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{F})$ را همان فضای پایه M ملزم است که تارهای E_p را به تارهای \tilde{E}_p روی همان نقطه p نگاشت کند، یعنی $\hat{\phi} = \text{id}_M$. بر حسب یک نمودار جابجایی این به صورت زیر خوانده می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & \tilde{E} \\ \pi \searrow & & \swarrow \tilde{\pi} \\ & M & \end{array} \quad (150)$$

از این دیدگاه، ما بدیهی‌سازی کلاف در نمودار (۱۲۹) را به عنوان یک ریخت U کلاف Ψ بین کلافهای بدیهی (U, π^{-1}) و (U, F) روی U شناسایی می‌کنیم.

اگر تارها ساختار اضافی داشته باشند، معمولاً لازم است که این ساختار توسط نگاشت کلاف حفظ شود. به عنوان مثال، ریخت‌های کلاف برداری ϕ بین $(E, M, \tilde{\pi}, \mathbb{R}^{\tilde{k}})$ و $(E, M, \pi, \mathbb{R}^k)$ ملزم به حفظ ساختار فضای برداری روی تارها هستند و بنابراین به نگاشت‌های خطی به ازای هر تار $\phi|_p : E_p \rightarrow \tilde{E}_{\phi(p)}$ محدود می‌شوند. مشابه‌اً، ریخت‌های کلاف اصلی ملزم به حفظ ویژگی تارها به عنوان تورسوارهای راست G هستند، یعنی هموردای راست G باشند. با داشتن دو کلاف اصلی $(P, M, \pi, G, \triangleleft)$ و $(\tilde{P}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{G}, \triangleleft)$ و یک هم‌ریختی گروهی $\theta : G \rightarrow \tilde{G}$ ، یک ریخت کلاف اصلی ملزم است که نمودار زیر را برای هر $g \in G$ جایجا کند:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\phi} & \tilde{P} \\ \uparrow \triangleleft g & & \uparrow \tilde{\triangleleft} \theta(g) \\ P & \xrightarrow{\phi} & \tilde{P} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \tilde{\pi} \\ M & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \tilde{M} \end{array} \quad (151)$$

بدیهی‌سازی محلی کلاف‌های اصلی در نمودار (۱۴۶) بدین ترتیب به عنوان یک ریخت U کلاف اصلی Ψ بین $(U)^{-1} \times G$ و U دیده می‌شود که در آن هم‌ریختی گروهی $g \mapsto \theta(g)$ با همانی روی G داده می‌شود.

ریخت‌های کلاف از اهمیت ویژه‌ای در بخش ۸ بخوددارند، جایی که آنها تبدیل کلاف‌ها و میدان‌های ویژگی را تحت عمل ایزومنتری‌ها توصیف می‌کنند. ثابت می‌شود که های ۱۰۰ مستقل از مختصات نسبت به این عمل‌ها بر روی کلاف‌ها و برش‌هایشان هموردا هستند. برای پیش‌زمینه بیشتر در مورد کلاف‌های تاری به طور کلی به مراجع [۱۹۳، ۱۱۸، ۹۴، ۱۷۱، ۱۳۲، ۱۵۷] مراجعه می‌کنیم.

۲.۶ کلاف مماس TM و کلاف چارچوب

هر خمینه دیفرانسیل‌پذیر (و بنابراین هر خمینه ریمانی) M به طور کانونی به کلاف مماس خود TM و کلاف چارچوب (عام) FM مجهز است، که از تمام چارچوب‌های مرجع محلی فضاهای مماس تشکیل شده است. این دو کلاف به طور طبیعی به یکدیگر وابسته‌اند و گروه ساختار آنها به طور پیشینی توسط $\text{Aut}(\mathbb{R}^d) = \text{GL}(d)$ داده می‌شود. این واقعیت با "بازسازی" از TM از FM خواهد شد که بعداً به ما امکان می‌دهد کلاف‌های برداری ویژگی وابسته را تعریف کنیم. برای جدا کردن واضح مفاهیم معرفی شده و فرضیات انجام شده، ما در اینجا TM و TM را به عنوان کلاف‌های $\text{GL}(d)$ توصیف خواهیم کرد. بخش بعدی ۳۶ علاوه بر این یک G -ساختار را بر TM و FM تحمیل خواهد کرد که آنها را به عنوان G -کلاف‌ها ثبت می‌کند. در حالی که کلاف‌ها طبق تعریف به صورت محلی بدیهی‌شدنی هستند، ما در حال حاضر بدیهی‌سازی‌های خاص را مسلم فرض می‌کنیم و تعریف دقیق آنها را به بخش ۴۶ موکول می‌کنیم.

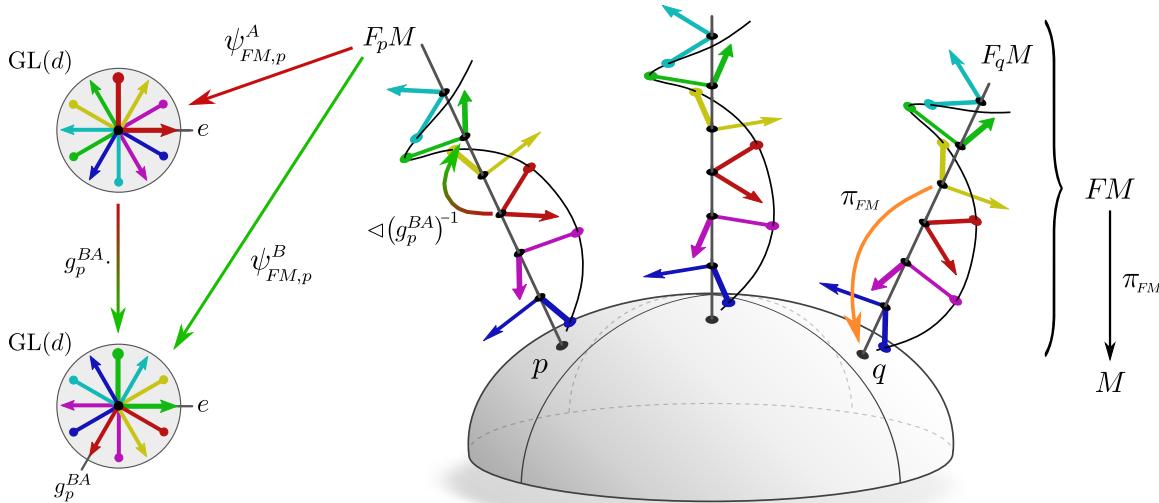
کلاف مماس TM هر خمینه هموار M با مجموعه‌ای از فضاهای مماس $T_p M \cong \mathbb{R}^d$ همراه است. اجتماع مجزای آنها^{۴۸}

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M, \quad (152)$$

به همراه یک ساختار هموار و نگاشت تصویر داده شده به طور کانونی، یک کلاف تاری هموار را تعریف می‌کند که به عنوان کلاف مماس شناخته می‌شود. نگاشت تصویر $M \rightarrow TM$: π_{TM} در این صورت با انتخاب بدیهی $p = v \in T_p M$ برای $v \in U$ داده می‌شود. همانطور که در پیوست آ استنتاج شده است، بدیهی‌سازی‌های محلی $\Psi_{TM} : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^d$ از کلاف مماس به طور کانونی توسط چارت‌های $U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^d$ از خمینه القا می‌شوند. بنابراین می‌توانیم بدیهی‌شدنی بودن TM را مسلم فرض کرده و بحث در مورد آنها را به بخش ۴۶ موقول کنیم. یک ساختار هموار روی TM از ساختار هموار M از طریق بدیهی‌سازی‌های فوق‌الذکر از چارت‌ها القا می‌شود. ما از جزئیات فنی این ساختار صرف نظر کرده و خواننده علاقه‌مند را به مراجع [۱۳۲، ۱۵۷] ارجاع می‌دهیم.

کلاف مماس تعریف شده بدین ترتیب یک کلاف برداری است زیرا تار نوعی آن \mathbb{R}^d یک فضای برداری مماس، که به عنوان مثال یک جریان روی M را توصیف می‌کنند، به عنوان برش‌های $M \rightarrow TM$: σ از کلاف مماس فرمول‌بندی می‌شوند. برش‌های سراسری هموار از کلاف‌های برداری همیشه وجود دارند؛ یک مثال استاندارد برش از $T_p M$ را به هر $p \in M$ نسبت می‌دهد. می‌خواهیم تأکید کنیم که فضاهای مماس و بنابراین کلاف مماس بدون ارجاع به چارچوب‌های مختصاتی تعریف می‌شوند، به طوری که برش‌ها میدان‌های برداری را به روشنی مستقل از مختصات توصیف می‌کنند.

^{۴۸} اجتماع مجزای $\{(p, v) \mid v \in T_p M\} = \bigcup_{p \in M} T_p M$ از فضاهای مماس را می‌توان به گونه‌ای تصور کرد که "به یاد می‌آورد" یک بردار $T_p M$ از کدام فضای مماس خاص $T_p M$ سرچشمه می‌گیرد، که برای تعریف نگاشت تصویر π_{TM} ضروری است.



شکل ۳۳: تفسیری گرافیکی از کلاف چارچوب FM روی M و بدیهی سازی‌های آن. تار $T_p M$ روی p به عنوان فضای تمام چارچوب‌های مرجع ممکن تعریف می‌شود. تمام چارچوب‌ها در $F_p M$ توسط نگاشت تصویر π_{FM} به همان نقطه p در M نگاشته می‌شوند که تار به آن متصل است. تارهای با $GL(d)$ یکریخت هستند، اما بدون مبدأ راشه می‌شوند که یک انتخاب چارچوب مرجع را تمیزی کند. پیمانه‌های $\psi_{FM,p}^A : F_p M \rightarrow GL(d)$ یا $\psi_{FM,p}^B : F_p M \rightarrow GL(d)$ که در بخش ۴.۶ در ادامه معرفی می‌شوند، تارها را با $GL(d)$ یکی می‌دانند و در نتیجه یک چارچوب مرجع را مشخص می‌کنند. پیمانه‌های مختلف با تبدیلات پیمانه $(g_p^BA) \in GL(d)$ به هم مرتبط هستند. باید خواننده را در مورد دو تصویر غلط احتمالی هشدار دهیم؛ اولاً، چارچوب‌ها در تارهای مختلف به طور پیشینی به روشنی کافی نمی‌شوند، چیزی که ممکن است رنگ‌های اضافی نشان دهند. ثانیاً، برای به حداقل رساندن شلوغی، تصویر فقط چارچوب‌های راست‌گرد و معتمد را به جای تمام چارچوب‌های مرجع ممکن نشان می‌دهد. همانطور که در بخش ۳.۶ بحث خواهیم کرد، چارچوب‌های معتمد و راست‌گرد نشان داده شده، متناظر با یک G -ساختار GM (یک زیرکلاف اصلی G از FM) برای گروه ساختار $G = SO(2)$ خواهد بود.

پس از معرفی کلاف چارچوب مماس FM در ادامه، به کلاف مماس و ساختار صریح آن به عنوان کلاف $GL(d)$ -وابسته باز خواهیم گشت که بر ماهیت مستقل از مختصات آن تأکید می‌کند. در بخش ۳۶ ما به طور مشابه TM را به عنوان یک G -کلاف وابسته به یک G -ساختار خواهیم ساخت.

کلاف چارچوب: فضای چارچوب‌های مرجع محلی تمام فضاهای مماس $T_p M$ ، (کلاف) چارچوب (مماس) را تشکیل می‌دهد. فضاهای چارچوب‌های مرجع (پایه‌های مرتب) فضاهای مماس منفرد $T_p M$ را در نظر بگیرید:

$$F_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ است } T_p M \text{ یک پایه از } \right\} \quad (153)$$

کلاف چارچوب به عنوان اجتماع مجذای آنها $FM := \coprod_{p \in M} F_p M$: $FM \rightarrow M$ که چارچوب‌ها در $F_p M$ را به p می‌فرستد و یک ساختار هموار القا شده از TM تعریف می‌شود. تار نوعی کلاف چارچوب، گروه خطی عام $GL(d) \cong F_p M$ است، یعنی گروه ماتریس‌های معکوس‌پذیر $d \times d$ که ستون‌های مستقل خطی آن را می‌توان به عنوان تعريف‌کننده یک چارچوب از \mathbb{R}^d در نظر گرفت. از آنجا که کلاف چارچوب از کلاف مماس ساخته شده است، بدیهی سازی‌های محلی آن ($\Psi_{FM}^{-1}(U) \rightarrow U \times GL(d)$ بالاصله از بدیهی سازی‌های TM القا می‌شوند؛ به بخش ۴.۶ مراجعه گرافیکی از کلاف چارچوب را نشان می‌دهد.

برش‌های هموار محلی $U \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U) \subseteq FM$ از کلاف چارچوب، نقاط $p \in U$ را به چارچوب‌هایی در $F_p M$ نگاشت می‌کنند. آنها میدان‌های چارچوب هموار محلی را تعریف می‌کنند، یعنی انتخاب‌های هموار متغیر از چارچوب‌های مرجع برای $T_p M$ ، $p \in U$ ، که در شکل ۱۵ به تصویر کشیده شده است. همانطور که در معادله (۴) استدلال شد، یک انتخاب از میدان چارچوب روی U با یک انتخاب از پیمانه یا بدیهی سازی محلی روی U معادل است. این ایجاب می‌کند که میدان‌های چارچوب سراسری تنها در صورتی وجود داشته باشند که FM بحث قرار خواهیم داد. بدیهی باشند. ما این همارزی را با عمق بیشتری در بخش ۴.۶ مورد بحث قرار خواهیم داد.

یک عمل راست تعددی‌پذیر و آزاد بر روی تارهای منفرد $F_p M \cong GL(d)$ از کلاف چارچوب به طور طبیعی توسط تغییر چارچوب‌ها که در معادله (۱۰) تعریف شده است، داده می‌شود [۱۵۷]. عمل متناظر

$$\triangleleft : FM \times GL(d) \rightarrow FM, \quad ([e_i]_{i=1}^d, g) \mapsto [e_i]_{i=1}^d \triangleleft g := \left[\sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \quad (154)$$

روی $F_p M$ به عنوان یک کلaf چارچوب را به یک کلaf اصلی $\text{GL}(d)$ تبدیل می‌کند. فقدان مبدأ یا عنصر همانی مردج در تارهای $F_p M$ به عنوان $(\text{GL}(d)$ -تورسورها، ابهام ذاتی چارچوب‌های مردج را معکوس می‌کند.

کلaf TM به عنوان کلaf برداری وابسته به $\text{GL}(d) = (FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$: در بخش ۱.۱.۳ ما بردارهای مماس در $T_p M$ را بر حسب ضرایب آنها در \mathbb{R}^d نسبت به یک چارچوب مردج بیان کردیم. انتخاب خاص چارچوب‌ها در آنجا بی‌ربط بود زیرا تبدیل ضرایب در معادله (۹) با تبدیل چارچوب‌های مردج در معادله (۱۰) خنشی می‌شود به طوری که $v = \sum_i v_i^A e_i^A = \sum_i v_i^B e_i^B$ نمایش‌های مختصاتی معادل از همان بردار مستقل از مختصات $v \in T_p M$ هستند. با پیروی از این ایده، می‌توان کلaf مماس را از کلaf چارچوب با جفت کردن چارچوب‌های مردج با بردارهای ضریب و گرفتن یک خارج قسمت برای فروکاستن توصیفات اضافی حاصل از بردارهای مماس نسبت به چارچوب‌های مختصات به یک عنصر منحصر به‌فرد، ساخت.

برای ساختن کلaf مماس به این روش، حاصلضرب $FM \times \mathbb{R}^d$ را در نظر بگیرید که می‌توان آن را به عنوان یک کلaf تاری با فضای پایه M و یک تار نوعی $\text{GL}(d) \times \mathbb{R}^d$ دید. این کلaf از جفت‌های چارچوب‌های مردج و ضرایب (متقابلانه تابعیت) تشکیل شده است. با انگیزه از بیان معادل بردارهای مماس در چارچوب‌های مردج مختلف، ما رابطه همارزی را تعریف می‌کنیم:

$$([e_i]_{i=1}^d, v) \sim_{\text{GL}(d)} ([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}, g \cdot v) \quad \forall g \in \text{GL}(d) \quad (155)$$

روی $FM \times \mathbb{R}^d$. به عنوان یک رابطه همارزی، این رابطه $FM \times \mathbb{R}^d$ را به کلاس‌های همارزی $[[e_i]_{i=1}^d, v]$ افزایش می‌کند. فضای این کلاس‌های همارزی، فضای خارج قسمتی $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$ است. نگاشت تصویر

$$\pi_{\sim_{\text{GL}(d)}} : (FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d) \rightarrow M, \quad [[e_i]_{i=1}^d, v] \mapsto \pi_{FM}([e_i]_{i=1}^d), \quad (156)$$

که از کلaf چارچوب القا شده است، $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$ را به یک کلaf تاری با فضای پایه M و تار نوعی \mathbb{R}^d تبدیل می‌کند. توجه داشته باشید که نگاشت تصویر در معادله (۱۵۶) خوش‌تعریف است زیرا مستقل از نماینده کلاس همارزی است، یعنی $\pi_{\sim_{\text{GL}(d)}}\left(([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1})\right) = \pi_{\text{FM}}\left(([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1})\right) = \pi_{\text{FM}}\left(([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}, g \cdot v)\right)$ که در آن ما از این واقعیت استفاده کردیم که عمل راست \triangleleft تارهای FM را حفظ می‌کند. ساختار فضای برداری $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$ را به یک کلaf برداری تبدیل می‌کند که ترکیبات خطی در همان تار توسط

$$\alpha [[e_i]_{i=1}^d, v] + \beta [[e_i]_{i=1}^d, w] := [[e_i]_{i=1}^d, \alpha v + \beta w], \quad (157)$$

برای مقادیر دلخواه $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ و $v, w \in \mathbb{R}^d$ تعریف می‌شود. به راحتی می‌توان بررسی کرد که این تعریف مستقل از انتخاب نماینده در هر دو جمله جمع است.

کلaf تعریف شده بدین ترتیب با کلaf مماس یکریخت است،

$$TM \cong (FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d), \quad (158)$$

که در آن یکریختی M -کلaf برداری توسط نگاشت خطی به ازای هر تار

$$\chi : (FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d) \rightarrow TM, \quad [[e_i]_{i=1}^d, v] \mapsto \sum_{i=1}^d v_i e_i \quad (159)$$

داده می‌شود که یک تاپل نماینده از چارچوب و بردار ضریب را از کلاس همارزی گرفته و آنها را به بردار مماس متناظر نگاشت می‌کند. طبق تعریف رابطه همارزی $\sim_{\text{GL}(d)}$ ، این تابع مستقل از انتخاب نماینده است، یعنی $\chi\left(\left(([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}), g \cdot v\right)\right) = \chi\left(\left(\sum_i (g \cdot v)_i ([e_j]_{j=1}^d \triangleleft g^{-1})_i\right)\right) = \sum_i v_i e_i$; یک بردار مماس، تصویر کردن آن بر روی یک چارچوب دلخواه و گرفتن کلاس همارزی به دست می‌آید.

کلaf $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$ طبق ساختار، به FM به عنوان یک کلaf $\text{GL}(d)$ -وابسته، وابسته است، یعنی همان توابع گذار را در $\text{GL}(d)$ دارد که FM دارد، همانطور که در بخش ۴.۶ استنتاج خواهیم کرد. ساختار TM به عنوان خارج قسمت $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$ (بر ماهیت مستقل از مختصات کلaf مماس به روی بسیار شهودی تأکید می‌کند: این ساختار تمام انتخاب‌های ممکن از مختصات دهی‌های فضاهای مماس را در نظر گرفته و با گرفتن یک خارج قسمت، آنها را معادل تلقی می‌کند).

^{۴۹} یک رابطه همارزی روی یک مجموعه X یک رابطه دوتایی \sim است که بازتابی $(x \sim x)$ ، متقابران $(y \sim x) \Leftrightarrow (x \sim y)$ و تراگذری $(x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z)$ است. این رابطه یک افزای از X به کلاس‌های همارزی $\{y \in X \mid x \sim y\}$ از عناصر $x \in X$ تعریف می‌کند. فضای کلاس‌های همارزی X/\sim را مجموعه خارج قسمتی $X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$ می‌نامند.

۳.۶ ساختارهای برداری ویژگی وابسته \mathcal{A} و کلافهای GM G

اکنون ما G -ساختارها را به عنوان زیرمجموعه‌های متمایزی از چارچوب‌ها در FM معرفی می‌کنیم که ساختار هندسی اضافی روی M را کدگذاری می‌کنند که باید توسط CNN ‌های مستقل از مختصات رعایت شود. کلاف مماس از طریق یک ساختار کلاف وابسته مشابه با بخش قبل، به عنوان یک G -کلاف وابسته بازمعروفی می‌شود. این رویکرد را می‌توان برای ساخت هر کلاف G -وابسته دیگر تعیین داد، که ما از آن برای تعریف کلافهای برداری ویژگی \mathcal{A} استفاده می‌کنیم. تمام چنین کلاف‌های ساخته شده‌ای به یکدیگر وابسته‌اند، یعنی فقط در تار خود F تفاوت دارند اما فضای پایه M ، گروه ساختار G و توابع گذار g^{BA} بین همسایگی‌های بدیهی ساز را مشترکاً دارند. بدیهی سازی‌های محلی کلاف‌ها و تبدیلات پیمانه متناظر آنها در بخش بعدی ۴.۶ به تفصیل مورد بحث قرار می‌گیرد.

GM -ساختارها: همانطور که در بخش ۱.۳ و جدول ۱ بحث شد، اغلب ممکن است با یک زیرمجموعه متمایز از چارچوب‌های مرجع کار کرد که توسط عمل یک گروه ساختار کاهش‌یافته $G \leq \text{GL}(d)$ به هم مرتبط هستند. این موضوع با بحث در مورد چند مثال قبل از رسیدن به یک تعریف فنی در ادامه، به بهترین وجه قابل درک است. به عنوان مثال، یک محدودیت به چارچوب‌های متعامد

$$O_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ است } \eta \text{ نسبت به } T_p M \text{ یک پایه متعامد از } \{e_1, \dots, e_d\} \right\} \cong O(d) \quad (160)$$

منجر به یک زیرکلاف اصلی OM از FM با گروه ساختار $O(d)$ می‌شود. توجه داشته باشید که تعامد چارچوب‌های مرجع توسط متريک η روی M قضاؤت می‌شود \square بنابراین انتخاب‌های مختلف متريک روی یک خمينه متناظر با زیرمجموعه‌های مختلفی از چارچوب‌های مرجع مرجح برای همان گروه ساختار $O(d)$ است. به عنوان مثال دوم، یک انتخاب جهت‌گیری روی یک خمينه جهت‌پذیر را در نظر بگیرید، که امکان مشخص کردن یک مفهوم مرجح از چارچوب‌ها را فراهم می‌کند^۵.

$$GL_p^+ M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ است } T_p M \text{ یک پایه با جهت‌گیری مثبت از } \{e_1, \dots, e_d\} \right\} \cong GL^+(d) \quad (161)$$

و یک زیرکلاف اصلی متناظر $GL^+(d)M$ از FM با گروه ساختار $GL^+(d)$. باز هم، دو انتخاب مختلف از جهت‌گیری‌ها متناظر با دو انتخاب مختلف از زیرکلاف‌های چارچوب‌های جهت‌دار متناسب است. ترکیب هر دو شرط برای تعامد و راستگردی چارچوب‌ها منجر به یک $-SO(d)$ -ساختار با تارهای زیر می‌شود:

$$SO_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ است } T_p M \text{ یک پایه با جهت‌گیری مثبت و متعامد از } \{e_1, \dots, e_d\} \right\} \cong SO(d), \quad (162)$$

می‌توان شکل ۳۳ را به عنوان نمایش‌دهنده یک $(2-SO)$ -ساختار در نظر گرفت زیرا تنها چارچوب‌های راستگرد و متعامد نشان داده شده‌اند (در این صورت تار نوعی $SO(d)$ باید با $GL(d)$ بروجسپ گذاری شود). انتخاب‌های مختلف از $(2-SO)$ -ساختارها یا متناظر با یک دستسانی مخالف از چارچوب‌ها، با پایبندی به همان مفهوم تعامد، یا متناظر با یک انتخاب متفاوت از متريک (یا هر دو) است. دقیقاً همین الگو برای فرم‌های حجم ω (روی خمينه‌های جهت‌پذیر M) تکرار می‌شود: آنها امکان مشخص کردن یک مفهوم مرجح از چارچوب‌ها را فراهم می‌کنند

$$SL_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ است } T_p M \text{ یک پایه از } \{e_1, \dots, e_d\} \right\} \cong SL(d) \quad (163)$$

و در نتیجه زیرکلاف‌های اصلی SLM از FM با گروه ساختار $SL(d)$. مجموعه خاص چارچوب‌هایی که مرجح هستند در اینجا به انتخاب خاص فرم حجم بستگی دارد. به عنوان آخرین مثال، $\{e\}$ -ساختارها را در نظر بگیرید که متناظر با یک گروه ساختار بدیهی $G = \{e\}$ هستند و بنابراین در هر نقطه p از یک چارچوب واحد تشکیل شده‌اند. طبق تعریف، $\{e\}$ -ساختارها با میدان‌های چارچوب (هموار) سراسری ($\sigma \in \Gamma(FM)$) معادل هستند:

$$\{e\}_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] = \sigma(p) \right\} \cong \{e\} \quad (164)$$

بنابراین آنها فقط روی خمينه‌های بدیهی وجود دارند. شکل‌های ۴۲ و ۴۲ ب دو انتخاب مختلف از $\{e\}$ -ساختارها $M = \mathbb{R}^n$ را به تصویر می‌کشند.

تمام این مثال‌ها انتخاب‌های خاصی از G -ساختارها GM روی M را نشان می‌دهند. به طور کلی، یک G -ساختار روی M یک زیرکلاف اصلی G از FM است، یعنی یک انتخاب "هموار متغیر" از زیرمجموعه‌های $G_p M \subseteq F_p M$ که نسبت به \triangleleft برای هر $p \in M$ راست هستند [۱۷۲، ۱۳۸، ۳۴].^{۵۱} همواری در اینجا می‌تواند با این شرط فرمول‌بندی شود که در اطراف هر چارچوب $[e_i]_{i=1}^d \in G_p M$ یک همسایگی U از p وجود داشته باشد که روی آن یک برش هموار $\pi_{GM}^{-1}(U) \subseteq GM$ باشد که $\sigma(p) = [e_i]_{i=1}^d$ و $\sigma(p)$ وجود داشته باشد. توضیح

$$\pi_{GM} := \pi_{FM}|_{GM} : GM \rightarrow M \quad (165)$$

از GM در اینجا به سادگی با محدود کردن نگاشت تصویر FM به GM داده می‌شود. به همراه محدودیت

$$\triangleleft : GM \times G \rightarrow GM, \quad ([e_i]_{i=1}^d, g) \mapsto [e_i]_{i=1}^d \triangleleft g := \left[\sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \quad (166)$$

^۵ برعکس، خمينه‌های غیرجهت‌پذیر اجزه کاهش گروه ساختار به $GL^+(d)$ را نمی‌دهند.

^{۵۱} از آنجا که $F_p M$ یک $GL(d)$ -تورسور راست است، هر G -مدار $G_p M$ در $F_p M$ به طور خودکار تضمین می‌شود که یک G -تورسور راست باشد.

از عمل راست FM روی $GL(d)$ در معادله (۱۵۴) به یک کلاف اصلی $GM \subseteq FM$ روی G ساختار را به یک کلاف اصلی $GM \xrightarrow{\pi_{GM}} M$ تبدیل می‌کند. با این حال، مهم است توجه داشته باشید که چندین انتخاب از چنین زیرکلافهایی وجود دارد، که متناظر با G -ساختارهای مختلف برای همان گروه ساختار G است؛ این ادعا را با مثال‌های بالا مقایسه کنید. همانطور که قبلًا بحث شد، توپولوژی یک کلاف ممکن است مانع از کاهش به یک گروه ساختار G و در نتیجه وجود یک G -ساختار متناظر GM شود.

در حالی که تعریف بالا از G -ساختارها کافی خواهد بود، مفید است که به طور خلاصه برخی از تعاریف معادل جایگزین را مرور کنیم. ادعای اینکه یک زیرکلاف اصلی G از FM است، با تعریف آن به عنوان یک تاپل (P, \mathcal{E}) منشک از یک انتخاب از یک کلاف اصلی G (همچنین غیرمنحصر به فرد) P روی M به همراه یک نشاندن همودای راست G و هموار $FM \rightarrow P$ (روی M) دقیق می‌شود. این موضوع توسط نمودار زیر به تصویر کشیده شده است، که لازم است برای هر $g \in G$ جایجا باشد:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P & & \\
 & \swarrow & \uparrow \triangleleft_P g & \searrow & \\
 & & P & \xrightarrow{\mathcal{E}} & FM \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & & M & &
 \end{array} \quad (167)$$

زیرمجموعه‌های مختلف از چارچوب‌های انتخاب‌های مختلف از نشاندن‌های $\mathcal{E}(P)$ از FM در P است. G -ساختارها علاوه بر این با برش‌هایی به شکل $GM = s(M) \mapsto FM/G$ معادل هستند، که تأکید می‌کند $G_pM = s(p) \in F_pM/G$ در واقع یک انتخاب از G -مدار در F_pM است همانطور که در پانوشت ۵۱ بیان شد. تعریف دیگری از G -ساختارها بر حسب (کلاس‌های هم‌ارزی) اطلاس‌های G است [۱۹۳]. از انجا که این دیدگاهی است که ممکن است در یک پیاده‌سازی از کاتولوشن‌های GM اتخاذ شود، ما آن را با جزئیات بیشتری در بخش بعدی ۴.۶ مورد بحث قرار می‌دهیم. برای خواننده علاقه‌مند می‌خواهیم اشاره کنیم که G -ساختارها یک مورد خاص از مفهوم کلی‌تر کاهش (یا لیفت) گروه‌های ساختار هستند [۳۴، ۱۷۲، ۱۳۸].

G -ساختارها برای نظریه کاتولوشن‌های GM از اهمیت محوری برخوردارند. انتخاب خاص G -ساختار، مجموعه خاصی از چارچوب‌های مرجع را تعیین می‌کند که کرنل الگوی G -راهبر بر روی آن به اشتراک گذاشته می‌شود. با توجه به همودایی پیمانه‌ای کرنل‌ها، تضمین می‌شود که کاتولوشن‌های G ، G -ساختار را رعایت کنند، یعنی مستقل از مختصات GM باشند. همانطور که در بخش ۸ استنتاج شده است، ایزومنتری‌هایی که یک کاتولوشن GM نسبت به آنها همودا است، دقیقاً آنهایی هستند که G -ساختار را حفظ می‌کنند (یعنی آنهایی که خودریختی‌های GM را الفا می‌کنند).

کلاف TM به عنوان کلاف برداری G -وابسته ($TM \cong (GM \times \mathbb{R}^d)/G$): با داشتن یک G -ساختار GM وابسته TM از TM در بخش ۲.۶ را به یک ساختار کلاف G -وابسته مشابه TM بر اساس GM تطبیق داد. به جای بیان بردارهای مماس نسبت به چارچوب‌های عمومی در TM ، آنها در اینجا نسبت به چارچوب‌های متمایز در GM بیان می‌شوند و خارج قسمت نسبت به گروه ساختار کاهش‌یافته G به جای $GL(d)$ گرفته می‌شود. کلاف حاصل طبق طراحی به GM وابسته است (یا به FM با یک اطلاس G ، که معادل است همانطور که در بخش بعدی توضیح داده می‌شود) و بنابراین دارای توابع گذاری است که مقادیری در G محدودیت χ در معادله (۱۵۹) به $(GM \times \mathbb{R}^d)/G$ یک یکریختی کلاف برداری به دست می‌دهد:

$$TM \cong (GM \times \mathbb{R}^d)/G. \quad (168)$$

در حالی که هر سه کلاف TM ، $TM \cong (GM \times \mathbb{R}^d)/GL(d)$ و $TM \cong (FM \times \mathbb{R}^d)/GL(d)$ بنا براین به عنوان کلاف‌های برداری یکریخت هستند، آنها تنها در صورتی به عنوان کلاف‌های G -وابسته پکیجت هستند که TM به یک G -ساختار (یا اطلاس G) مجهز شوند، که به طور پیشینی اینطور نیست. در مقابل، کلاف G -وابسته $TM \cong (GM \times \mathbb{R}^d)/G$ طبق طراحی با یک G -ساختار همراه است. برای تعریف دقیق یکریختی‌های کلاف G -وابسته، ما به [۱۵۷] ارجاع می‌دهیم.

کلاف‌های برداری ویژگی وابسته A : ساختار کلاف G -وابسته $GM \times \mathbb{R}^d/G$ را می‌توان برای چسباندن تارهای دیگر با عمل‌های گروهی دیگر به G -ساختار GM تعمیم داد. در واقع، هر کلاف وابسته به GM را می‌توان به این روش ساخت. مثال‌های مهم در هندسه دیفرانسیل عبارتند از کلاف هم‌مماس T^*M با تار نوعی آن که دوگان \mathbb{R}^{d*} از \mathbb{R}^d است و عمل دوگان بر آن اثر می‌گذارد، یا کلاف‌های تانسوری (r, s) با تارهای T_s^*M که نمایش حاصلضرب تانسوری متناظر G بر آن عمل می‌کند.

در ادامه ما کلاف‌های برداری ویژگی وابسته با ضرایب بردار ویژگی \mathbb{R}^c به عنوان تارهای نوعی را در نظر می‌گیریم. تحت تبدیلات پیمانه، این تارها از چپ توسط یک ضرب با یک نمایش گروهی $\rho : G \rightarrow GL(c)$ عمل می‌شوند، یعنی معادله (۱۳۴) با:

^{۵۲} این نشاندن یک ریخت M -کلاف اصلی G است همانطور که در بخش ۱.۶ با هم‌ریختی گروهی $GL(d)$ به $G \leq GL(d)$ است، معرفی شد.

$$G \times \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}^c, (g, f) \mapsto \rho(g)f$$

$$\mathcal{A} := (GM \times \mathbb{R}^c) / \sim_{\rho} \quad (169)$$

ساخته می‌شوند که در آن رابطه همارزی ρ ~ توسط

$$([e_i]_{i=1}^d, f) \sim_{\rho} ([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}, \rho(g)f) \quad \forall g \in G. \quad (170)$$

داده می‌شود. عناصر \mathcal{A} کلاس‌های همارزی $[f]$ از ضرایب بردار ویژگی نسبت به چارچوب‌های مرتع هستند و بنابراین مستقل از مختصات هستند. یک نگاشت تصویر (خوش‌تریف) دوباره از تصویر G -ساختار α می‌شود:

$$\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow M, [[e_i]_{i=1}^d, f] \mapsto \pi_{GM}([e_i]_{i=1}^d) \quad (171)$$

ترکیبات خطی روی تارها به قیاس با معادله (157) تعریف می‌شوند. از آنجا که چنین کلاس‌های برداری ویژگی تعریف شده‌ای به GM وابسته‌اند، گروه ساختار آنها $G \leq \text{GL}(d)$ است، همانطور که به طور صریح در بخش بعدی ۴.۶ استنتاج خواهیم کرد.^{۵۳} توجه داشته باشید که این تعریف شامل میدان‌های برداری مماس و میدان‌های اسکالر، که البته می‌توانند به عنوان میدان‌های ویژگی پردازش شوند، به ترتیب برای $g = \rho(g) = 1$ می‌شود.

ساختار \mathcal{A} به عنوان یک کلاس G -وابسته، بردارهای ویژگی مستقل از مختصات GM روی M را مدل می‌کند: ویژگی‌های $f_p \in \mathcal{A}$ به طور معادل نسبت به چارچوب‌های دلخواه در GM بیان می‌شوند، با ضرایب ویژگی در مختصات‌دهی‌های مختلف که از طریق معادله (170) به هم مرتبط هستند، اما بیان مختصاتی خوش‌تریفی نسبت به چارچوب‌های دیگر ندارند. از دیدگاه مهندسی، این موضوع در G -راهنری کرنل‌های کانولوشن منعکس می‌شود که تضمین می‌کند اندازه‌گیری‌های ویژگی‌ها به صورت نسبی به چارچوب‌ها در GM اجرا شود اما امکان تمایز بین گوهای را فراهم می‌کند که رُست‌های آنها با یک تبدیل پیمانه G -مقدار به هم مرتبط نیستند، به معنای مطلق.

میدان برداری ویژگی وابسته و فضاهای ویژگی: میدان‌های ویژگی هموار و مستقل از مختصات به عنوان برش‌های سراسری هموار $f \in \Gamma(\mathcal{A})$ از کلاس‌های برداری ویژگی تعریف می‌شوند، یعنی به عنوان نگاشتهای هموار $f : M \rightarrow \mathcal{A}$ که شرط $f = \text{id}_M \circ f$ را برآورده می‌کند. همانطور که قبلاً بحث شد، وجود چنین میدان‌های ویژگی تضمین شده است زیرا کلاس‌های برداری همیشه برش‌های سراسری هموار را می‌پذیرند. در بخش بعدی ۴.۶ نشان می‌دهیم که چگونه یک بدیهی سازی کلاس محلی روی U^A امکان نمایش f توسط یک میدان $\mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}^c$ از $f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c$ در ضرایب بردار ویژگی را فراهم می‌کند. یک بدیهی سازی متفاوت روی U^B منجر به یک میدان ضریب متفاوت $f^B : U^B \rightarrow \mathbb{R}^c$ می‌شود که f را به صورت محلی نمایش می‌دهد. از نگاشتهای گذار بین بدیهی‌سازی‌های کلاس محلی خواهد شد که هر دو میدان ضریب روی همپوشانی $U^{AB} = U^A \cap U^B$ از دامنه‌های خود با $f^B(p) = \rho(g_p^B) f^A(p)$ به هم مرتبط هستند. نمودار جایجایی در شکل ۳۶ روابط بین میدان‌های برداری ویژگی و بدیهی‌سازی‌های محلی آنها را به تصویر می‌کشد.

فضاهای ویژگی \mathbb{H} می‌شوند از مختصات معمولاً از چندین میدان ویژگی مستقل روی همان فضای پایه تشکیل شده‌اند. کلاس توصیف کننده یک فضای ویژگی به عنوان یک کل، مجموع ویتنی $\bigoplus_i \mathcal{A}_i$ از کلاس‌های برداری ویژگی $A_i \xrightarrow{\pi_{\mathcal{A}_i}} M$ است که زیربنای میدان‌های منفرد آن هستند. به این ترتیب، این کلاس همان فضای پایه M را دارد، یک تار نوعی $\bigoplus_i \mathbb{R}^{c_i} \cong \mathbb{R}^{\sum_i c_i}$ که به عنوان مجموع مستقیم تارهای میدان‌های منفرد تعریف شده و به نگاشت تصویر بدیهی مجهز است. این کلاس به عنوان G -کلاس، TM ، FM و A_i به عنوان GM وابسته است و بنابراین می‌تواند به طور معادل به صورت

$$\bigoplus_i \mathcal{A}_i \cong (GM \times \mathbb{R}^{\sum_i c_i}) / \sim_{\bigoplus_i \rho_i} \quad (172)$$

تعریف شود. توجه داشته باشید که مجموع مستقیم $\bigoplus_i \rho_i$ از نمایش‌های A_i را تعریف می‌کنند، تضمین می‌کند که نگاشتهای گذار $\bigoplus_i \mathcal{A}_i$ هر میدان منفرد را به طور مستقل تبدیل کنند. فضاهای ویژگی در این صورت به عنوان فضاهای $(\Gamma(\bigoplus_i \mathcal{A}_i))$ از برش‌های سراسری کلاس مجموع ویتنی تعریف می‌شوند.

۴.۶ بدیهی‌سازی‌های محلی کلاس TM ، FM و GM

در حالی که نظریه سراسری شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات به شیوه‌ای بر حسب کلاس‌های تاری مستقل از مختصات فرمول‌بندی می‌شود، پیاده‌سازی عددی نیازمند آن است که بردارهای ویژگی مستقل از مختصات $f(p) \in A_p$ توسط بردارهای ضریب $\rho_i \in \mathbb{R}^c$ در $f^A(p) = \psi_{\mathcal{A}, p}^A(f(p))$ نسبت به یک انتخاب قاب مرتع $[e_i^A]_{i=1}^d \in G_p M$ بیان شوند، همان‌طور که در بخش ۲.۳ شرح داده شد. در زبان کلاس‌های تاری، این معادل با انتخاب بدیهی‌سازی‌های محلی یا پیمانه‌های Ψ_{TM}^A ، Ψ_{GM}^A و Ψ_{FM}^A است که اگر TM ، GM و FM به صورت G -الحقی با یکدیگر در نظر گرفته شوند، همگی به طور همزمان تبدیل می‌شوند. به یاد بیاورید که توصیف محلی و در نتیجه پیاده‌سازی از طریق یک G -اطلس، مشکل از بدیهی‌سازی‌های محلی که M را می‌پوشانند و سه شرط (۱۳۶)، (۱۳۷) و (۱۳۸) را برآورده می‌کنند، کاملاً معادل با نظریه سراسری و مستقل از مختصات است.

^{۵۳} به طور دقیق، توابع گذار مقدابری در $\rho(G) \leq \text{GL}(c)$ به جای $G \leq \text{GL}(d)$ خواهند گرفت، با این حال، از آنجا که گذارهای حاصل هنوز با G سازگار هستند، اصطلاح G -مقدار معمولاً برای شامل شدن چنین مواردی تطبیق داده می‌شود [۱۹۳].

در این بخش، ما بدیهی‌سازی‌های الحاقی TM و FM و A و تبدیلات پیمانه همزمان آن‌ها را بررسی می‌کنیم. برای حفظ سازگاری با بخش ۱.۳، با فرض داده شده بودن بدیهی‌سازی‌های TM شروع کرده و بحث می‌کنیم که چگونه آن‌ها بدیهی‌سازی‌های FM و میدان‌های قاب محلی متناظر را القا می‌کنند. اگر یک G -اطلس برای TM و در نتیجه برای FM انتخاب شود، این به یک G -ساختار GM منجر می‌شود که G -اطلس آن با G -اطلس FM مطابق است. بدیهی‌سازی‌های محلی هر کلاف G -الحاقی، به ویژه کلاف‌های بردار ویژگی A ، از بدیهی‌سازی‌های GM به دست می‌آیند. این بدیهی‌سازی‌ها قانون تبدیل میدان‌های ویژگی از بخش ۲.۳ را بازیابی می‌کنند.

بدیهی‌سازی‌های TM : از آنجا که کلاف مماس، \mathbb{R}^d را به عنوان تار نمونه‌ای خود دارد، بدیهی‌سازی‌های محلی آن توسط نگاشتهایی به شکل زیر داده می‌شوند:

$$\Psi_{TM} : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^d. \quad (173)$$

این بدیهی‌سازی‌ها با پیمانه‌های نقطه‌ای (که به صورت هموار در فضای تغییر می‌کنند)

$$\psi_{TM,p} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (174)$$

از معادله (۱) با شناسایی (v) برای $\Psi_{TM}(v) = (\pi_{TM}(v), \psi_{TM,p}(v))$ مطابقت دارند. به منظور رعایت ساختارهای فضای برداری تار \mathbb{R}^d و فضاهای مماس $T_p M$ بدیهی‌سازی‌های Ψ_{TM} به عنوان ایزومورفیسم‌های کلاف برداری بین $(U \times \mathbb{R}^d, \pi_{TM}^{-1}(U))$ و \mathbb{R}^d تعریف می‌شوند، یعنی نگاشتهای $\psi_{TM,p}$ باید خطی و معکوس‌پذیر باشند (یعنی ایزومورفیسم‌های فضای برداری باشند). نگاشتهای گذار بین بدیهی‌سازی‌های مختلف TM به طور کلی در گروه خودریختی‌های (خطی) $\text{GL}(d)$ ، یعنی گروه خودریختی‌های (خطی) \mathbb{R}^d ، مقدار می‌گیرند.

اگر ساختار بیشتری روی کلاف مماس مشخص شود، بدیهی‌سازی‌ها باید این ساختار را رعایت کنند. به عنوان مثال، اگر یک متريک روی M و در نتیجه روی TM تعریف شود، نگاشتهای $\psi_{TM,p}$ باید ايزومتریک باشند، یعنی بردارها را در \mathbb{R}^d به گونه‌ای به بردارهای در $T_p M$ که نرم‌ها و زوایا حفظ شوند. از آنجا که در این حالت بدیهی‌سازی‌ها فقط در جهت و سوگیری خود می‌توانند متفاوت باشند، تضمین می‌شود که بدیهی‌سازی‌های مختلف ساختار را متناسب با متريک به عنوان یک گروه ساختار کاهش‌یافته $O(d)$ به یکدیگر مرتبط باشند که متناظر با متريک به عنوان یک $O(d)$ -ساختار است. به طور کلی‌تر، یک G -ساختار روی TM نیازمند - یا القا شده توسط - یک انتخاب از G -اطلس $\{\Psi_{TM}^X, \Psi_{TM}^X\}_{X \in \mathfrak{X}}$ است. دو بدیهی‌سازی مختلف Ψ_{TM}^A و Ψ_{TM}^B از چنین G -اطلسی روی $U^A \cap U^B$ توسط $(\Psi_{TM}^A)^{-1} \circ (\Psi_{TM}^B) \circ (\Psi_{TM}^A)^{-1}$ همان‌طور که در معادله (۱۳۲) تعریف شده است، با توابع گذار با مقدار در G به یکدیگر مرتبط می‌شوند:

$$g^{BA} : U^A \cap U^B \rightarrow G, \quad p \mapsto \psi_{TM,p}^B \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}, \quad (175)$$

که عمل چپ \circ و $\circ \cdot v$ (یعنی $(g, v) \mapsto g \cdot v$) را روی تار نمونه‌ای تعریف می‌کنند. برای درک شهودی گرافیکی از عمل نقطه‌ای توابع گذار بر روی تارهای منفرد، به شکل ۱۴ بازمی‌گردیم. یک نمایش نموداری از بدیهی‌سازی‌های محلی TM و گذارهای آن‌ها در شکل ۱۳۴ آورده شده است.

بدیهی‌سازی‌های القایی FM و میدان‌های قاب: هر اطلس $\{(U^X, \Psi_{TM}^X)\}_{X \in \mathfrak{X}}$ از کلاف مماس در تناظر یک به یک با یک اطلس $\{(U^X, \Psi_{FM}^X)\}_{X \in \mathfrak{X}}$ از کلاف قاب است. به طور خاص، با داشتن یک بدیهی‌سازی محلی Ψ_{TM}^A از TM ، یک بدیهی‌سازی محلی متناظر

$$\Psi_{FM}^A : \pi_{FM}^{-1}(U^A) \rightarrow U^A \times \text{GL}(d), \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto (p, \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d)), \quad (176)$$

از FM ، که در آن $p = \pi_{FM}([e_i]_{i=1}^d)$ را به اختصار آورده‌ایم، با تعریف زیر القا می‌شود:

$$\psi_{FM,p}^A : F_p M \rightarrow \text{GL}(d), \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) := (\psi_{TM,p}^A(e_i))_{i=1}^d \quad (177)$$

به عنوان یک نگاشت از قاب‌های مماس به ماتریس‌های $d \times d$ معمکوس‌پذیر که ستون i -ام آن توسط $\psi_{TM,p}^A(e_i) \in \mathbb{R}^d$ داده شده است. همان‌طور که برای کلاف‌های الحاقی لازم است، بدیهی‌سازی‌های TM و FM از توابع گذار یکسانی استفاده می‌کنند.

$$\begin{aligned} \psi_{FM,p}^B([e_i]_{i=1}^d) &= (\psi_{TM,p}^B(e_i))_{i=1}^d \\ &= (g_p^{BA} \psi_{TM,p}^A(e_i))_{i=1}^d \\ &= g_p^{BA} (\psi_{TM,p}^A(e_i))_{i=1}^d \\ &= g_p^{BA} \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d), \end{aligned} \quad (178)$$

زیرا عمل g^{BA} روی محورهای قاب بدیهی‌شده منفرد در خط دوم با عمل آن روی ماتریس قاب بدیهی‌شده در خط سوم یکسان است. علاوه بر این، همان‌طور که برای کلاف‌های اصلی در معادله (۱۴۵) ادعا شد، بدیهی‌سازی‌های کلاف قاب راست- $\text{GL}(d)$ -هم‌متغیر هستند، یعنی برای هر

(ا) $TM \xrightarrow{\pi_{TM}} M$ بدبیهی‌سازی‌های
 $\pi_{TM}^{-1}(U) \xrightarrow{\Psi_{TM}^A} U \times \mathbb{R}^d$
 $\pi_{TM} \downarrow$ proj₁

(ب) $FM \xrightarrow{\pi_{FM}} M$ بدبیهی‌سازی‌های
 $\pi_{FM}^{-1}(U) \xrightarrow{\Psi_{FM}^A} U \times \mathrm{GL}(d)$
 $\pi_{FM} \downarrow$ proj₁

(ج) $GM \xrightarrow{\pi_{GM}} M$ بدبیهی‌سازی‌های
 $\pi_{GM}^{-1}(U) \xrightarrow{\Psi_{GM}^A} U \times G$
 $\pi_{GM} \downarrow$ proj₁

(د) $A \xrightarrow{\pi_A} M$ بدبیهی‌سازی‌های
 $\pi_A^{-1}(U) \xrightarrow{\Psi_A^A} U \times \mathbb{R}^c$
 $\pi_A \downarrow$ proj₁

شکل ۳.۴: نمایش تصویری بدبیهی‌سازی‌های محلی G-الحاقی $U = U^A \cap U^B$ ، FM ، TM ، A و GM کلاف مماس با نگاشتهای گذار g^{BA} را به اختصار نشان می‌دهیم. یک G-اطلس $\{U^X, \Psi_{TM}^X\}$ از کلاف مماس با نگاشتهای گذار G -ساختار GM را القا می‌کند و G-اطلس‌هایی برای A و GM ، FM با توابع گذار سازگار به وجود می‌آورد. نمودارهای جابجاگی دقیق‌تری که مقاطع $\pi_{FM}^{-1}(U) \rightarrow \sigma : U \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U)$ و عمل راست \lhd روی کلاف قاب را نشان می‌دهند در شکل‌های ۱۲۵ و ۱۲۶ آورده شده‌اند. میدان‌های ویژگی، که به عنوان مقاطع $f : M \rightarrow A$ از کلاف بردار ویژگی الحاقی A مدل‌سازی شده‌اند، و بدبیهی‌سازی‌های محلی آن‌ها $U^A \rightarrow \mathbb{R}^c$ در شکل ۳۶ نشان داده شده‌اند. تفسیری گرافیکی از نمودار جابجاگی برای TM به یک فضای مماس منفرد $T_p M$ محدود شده است: در شکل ۱۴ ارائه شده است.

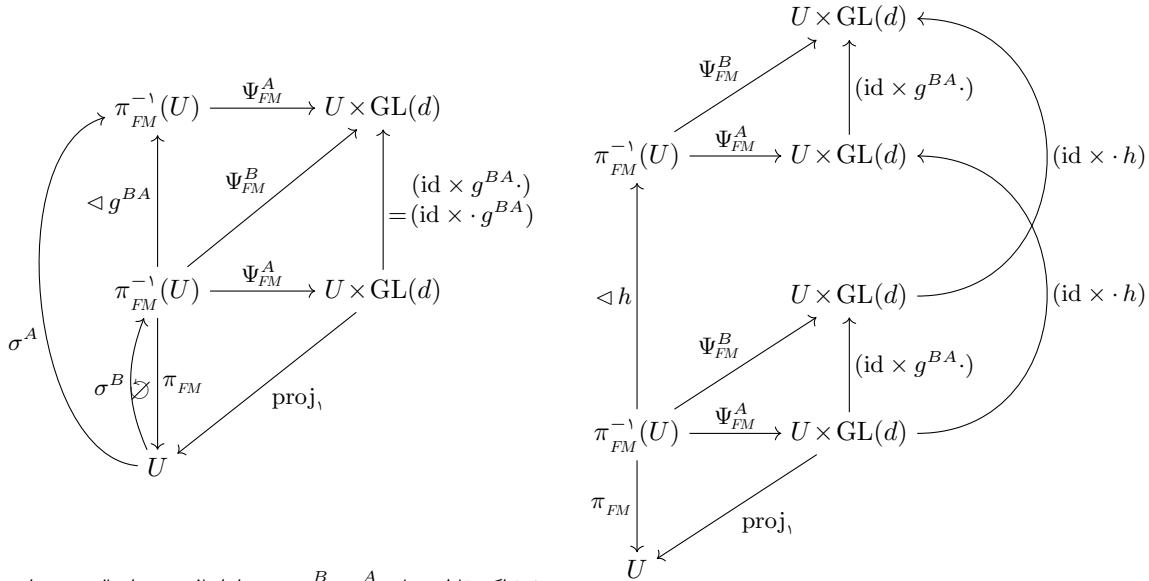
داریم: $h \in \mathrm{GL}(d)$

$$\begin{aligned}
 \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d \lhd h) &= \psi_{FM,p}^A \left(\left(\sum_j e_j h_{ji} \right)_{i=1}^d \right) \\
 &= \left(\psi_{TM,p}^A \left(\sum_j e_j h_{ji} \right) \right)_{i=1}^d \\
 &= \left(\sum_j \psi_{TM,p}^A(e_j) h_{ji} \right)_{i=1}^d \\
 &= \left(\psi_{TM,p}^A(e_i) \right)_{i=1}^d \cdot h \\
 &= \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) \cdot h
 \end{aligned} \tag{۱۷۹}$$

در اینجا از خطی بودن $\psi_{TM,p}^A$ در مرحله سوم استفاده کردیم و عبارت اندیسی را به عنوان ضرب ماتریسی از راست در مرحله چهارم شناسایی کردیم. شکل ۱۲۵ عمل چپ روی بدبیهی‌سازی را از طریق توابع گذار $\Psi_{FM}^B \circ (\Psi_{FM}^A)^{-1} = (\mathrm{id} \times g^{BA}) \circ \Psi_{FM}^A$ که در معادله (۱۷۸) مشتق شده و هم‌متغیری راست $\Psi_{FM}^A \circ (\lhd h) = (\mathrm{id} \times \cdot \cdot h) \circ \Psi_{FM}^A$ بدبیهی‌سازی‌ها را که در معادله (۱۷۹) مشتق شده، خلاصه می‌کند.

همان‌طور که در معادله (۴) اشاره شد و در شکل‌های ۱۴ و ۱۵ نمایش داده شد، یک بدبیهی‌سازی محلی هموار Ψ_{TM}^A را از کلاف مماس یک میدان قاب را روی U^A القا می‌کند. این به عنوان یک مقطع محلی هموار

$$\sigma^A : U^A \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^A), \quad p \mapsto \left[(\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i) \right]_{i=1}^d \tag{۱۸۰}$$



(ب) اگر مقاطع همانی σ^A و σ^B به نمودار اضافه شوند، اعمال چپ و راست با یکدیگر منطبق می‌شوند زیرا $e \cdot e = e$ و $\psi_{FM,p}^A \circ \sigma^A(p) = e \cdot g \quad \forall g \in GL(d)$

(ا) بدیهی‌سازی‌های کلاف قاب راست-هم‌متغیر هستند، یعنی برای هر $h \in GL(d)$ صدق می‌کنند.

شکل ۳۵: نمودارهای گسترش‌یافته بدیهی‌سازی‌های کلاف قاب که تعامل توابع گذار g^{BA} ، اعمال راست \triangleleft و \triangleright و مقاطع همانی σ^A و σ^B را نشان می‌دهند. مانند قبل، $U = U^A \cap U^B = U^A \cup U^B$ را به اختصار نشان می‌دهیم. به جز نمودارها جابجا $\sigma^B \circ \pi_{FM}^A \neq id_{FM}$ و $\sigma^A \circ \pi_{FM}^B \neq id_{FM}$ باشند، نمودارهای مشابهی، با جایگزینی FM و GM با G و $GL(d)$. برای G -ساختار متناظر اعمال می‌شوند.

از کلاف قاب فرمول‌بندی می‌شود که با نگاشت بردارهای قاب استاندارد ϵ_i از \mathbb{R}^d به فضاهای مماس در TM $\pi_{TM}^{-1}(U^A) \subseteq TM$ تعریف می‌شود. پیرو معادله ۱۰، یک تبدیل پیمانه از $\Psi_{TM}^B = (id \times g^{BA}) \circ \Psi_{TM}^A$ به $\Psi_{TM}^A = (id \times g^{BA}) \circ \Psi_{TM}^B$ متناظر است با یک تبدیل کرد:

$$\sigma^B(p) = \sigma^A(p) \triangleleft (g^{BA})^{-1} \quad (181)$$

از مقاطع روی U^{AB} بدیهی‌سازی‌های Ψ_{TM}^A از FM که بر حسب Ψ_{TM}^A تعریف شده‌اند، این ویژگی خوب را دارند که مقاطع متناظر σ^A را به قاب همانی σ^B در $GL(d) \subset \mathbb{R}^{d \times d}$ از \mathbb{R}^d نگاشت می‌کنند، که با جایگزایی هر دو تعریف می‌توان آن را مشاهده کرد:

$$\psi_{FM,p}^A \circ \sigma^A(p) = \psi_{FM,p}^A \left(\left[(\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i) \right]_{i=1}^d \right) = \left(\psi_{TM,p}^A \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i) \right)_{i=1}^d = (\epsilon_i)_{i=1}^d = e \quad (182)$$

این ویژگی اغلب برای تعریف مقاطع FM با داشتن بدیهی‌سازی‌های Ψ_{TM}^A به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\sigma^A: U^A \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^A), \quad p \mapsto (\Psi_{FM}^A)^{-1}(p, e) = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(e), \quad (183)$$

که در نهایت با تعریف ما در معادله (۱۸۰) منطبق است. از آنجا که σ^A و Ψ_{TM}^A به این روش ساخته شده‌اند یکدیگر را القا می‌کنند، گاهی اوقات به آن‌ها مقاطع همانی و بدیهی‌سازی‌های محلی کانونی گفته می‌شود. گسترش نمودار در شکل ۳۵ با مقاطع همانی σ^A و σ^B که با معادله ۱۸۱ مرتبه هستند، $g^{BA} \circ h = g^{BA}$ را ثابت می‌کند و بنابراین به نمودار جابجایی در شکل ۳۵ ب منجر می‌شود. ضربهای چپ و راست با $g^{BA} \circ e = g^{BA} = e \cdot g^{BA}$ که برای آن $GL(d)$ در اینجا فقط به این دلیل منطبق هستند که از عنصر گروه معکوس را است. شکل ۳۵ را با شکل ۳۳ مقایسه کنید که عمل پیمانه چپ g_p^{BA} و عمل راست $(g_p^{BA})^{-1}$ از عنصر گروه معکوس را نشان می‌دهد که بین قاب‌های مقاطع همانی متناظر تبدیل می‌کند.

ATLSS لفکننده G -ساختار GM : انتباق توابع گذار کلاف مماس و کلاف قاب در معادله (۱۷۸) نشان می‌دهد که یک G -atlss از TM یک G -atlss برای FM القا می‌کند. همانطور که در ادامه استنتاج خواهیم کرد، چنین G -atlss‌هایی یک G -ساختار متناظر GM را مشخص می‌کنند، یعنی یک زیرکلاف اصلی G از FM که از قاب‌های متناظر تشکیل شده است.

برای توجیه تعریف GM بر اساس یک G -atlss داده شده $\{(U^X, \Psi_{FM}^X)\}_{X \in \mathfrak{X}}$ از FM ، دو بدیهی‌سازی محلی آن Ψ_{FM}^A و Ψ_{FM}^B را با $p \in U^A \cap U^B$ در $F_p M$ فرض کنید. برای همپوشان در نظر بگیرید و فرض کنید

می‌کنند که طبق معادله (۱۸۱) توسط عمل راست عنصری مانند g_p^{BA} از گروه ساختار کاهش‌یافته $G \leq \text{GL}(d)$ به یکدیگر مرتبط هستند. بنابراین، هر قاب تعریف شده به این شکل، عنصری از یک G -مدار $G_pM \cong \text{GL}(d)$ در G است. به طور خاص، با بیان مقاطع همانی از طریق معادله (۱۸۳) به صورت $(\psi_{FM,p}^A)^{-1}(e) = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(g) = \sigma^A(p) = (\psi_{FM,p}^B)^{-1}(e)$ و $\sigma^B(p) = (\psi_{FM,p}^B)^{-1}(g) = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}((\psi_{FM,p}^A)^{-1}(g))$ تعریف نقطه‌ای G -ساختار بر اساس تصاویر معکوس G توسط نگاشت‌های پیمانه (دلخواه) پیشنهاد می‌شود:

$$G_pM := \left\{ (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(g) \mid g \in G \right\} = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(G) \quad (184)$$

استقلال از پیمانه انتخاب شده از G -اطلس واضح است زیرا هر انتخاب دیگری $(\psi_{FM,p}^A)^{-1}(G) = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}((\psi_{FM,p}^B)^{-1}(G))$ نتیجه یکسانی به دست می‌دهد. همانطور که به راحتی می‌توان بررسی کرد، G_pM در واقع یک تورسور راست G است زیرا G یک تورسور راست G است و $\psi_{FM,p}^A$ طبق معادله (۱۷۹) یک ایزوگرور فیسم راست- $GL(d)$ -هم‌متغیر- و بنابراین به طور خاص راست- G -هم‌متغیر- است. همواری مورد نیاز $GM = \coprod_{p \in M} G_pM$ از همواری بدیهی‌سازی‌های Ψ_{FM}^A ناشی می‌شود.

یک G -اطلس از بدیهی‌سازی‌های محلی GM با محدود کردن بدیهی‌سازی‌ها در G -اطلس FM به قاب‌های موجود در GM به دست می‌آید، یعنی،

$$\Psi_{GM}^A := \Psi_{FM}^A|_{\pi_{GM}^{-1}(U^A)} : \pi_{GM}^{-1}(U^A) \rightarrow U^A \times G, \quad (185)$$

یا، به صورت محلی،

$$\psi_{GM,p}^A := \psi_{FM,p}^A|_{G_pM} : G_pM \rightarrow G. \quad (186)$$

بلافاصله نتیجه می‌شود که توابع گذار با مقدار در G با توابع گذار TM و FM منطبق هستند، یعنی،

$$\psi_{GM,p}^B([e_i]_{i=1}^d) = g_p^{BA} \psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d), \quad (187)$$

و اینکه بدیهی‌سازی‌ها راست- G -هم‌متغیر هستند:

$$\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d \triangleleft h) = \psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) \cdot h \quad \forall h \in G \quad (188)$$

میدان‌های قاب نیز با یک عبارت معادل

$$\sigma^A(p) = (\psi_{GM,p}^A)^{-1}(e) \quad (189)$$

با عبارت معادله (۱۸۳) داده می‌شوند. نمودارهای جابجایی در شکل‌های ۳۵ و ۳۶ نیز هنگام جایگزینی FM با GM با $GL(d)$ با G معتبر هستند.

بدیهی‌سازی‌های القایی کلاف‌های الحاقی \mathcal{A} : یک G -اطلس $\Psi_{\mathcal{A}}^X : \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(U^X) \rightarrow (U^X, \Psi_{\mathcal{A}}^X)$ از $U^X \times \mathbb{R}^c$ از کلاف‌های بردار ویژگی الحاقی \sim_ρ با $\mathcal{A} = (GM \times \mathbb{R}^c) / \sim_\rho$ از بدیهی‌سازی‌های متناظر Ψ_{GM}^X از G -ساختار القایی می‌شود. برای ساختن این بدیهی‌سازی‌ها، به یاد بیاورید که \mathcal{A} بر اساس کلاس‌های همارزی $[e_i]_{i=1}^d, f$ تعریف می‌شود که شامل زوج‌هایی از قاب‌های مرجع و بردارهای ضربی ویژگی است که توسط رابطه همارزی \sim_ρ تعریف شده در معادله (۱۷۰) به هم مرتبط هستند. یک ایده طبیعی این است که $[e_i]_{i=1}^d, f \in \mathcal{A}_p$ را با انتخاب یک نماینده از بردارهای ضربی همارز آن در \mathbb{R}^c بدیهی‌سازی کنیم. یک انتخاب ممتاز از نماینده در اینجا توسط آن بردار ضربی داده می‌شود که به قاب مقطع همانی $(p) \sigma^A$ متناظر با Ψ_{GM}^A تعلق دارد.

فرض کنید $\sigma^A(p) \triangleleft h \in G_pM$ باشد که توسط یک جابجایی $h \in G$ نسبت به مقطع σ^A تعریف شده است. این جابجایی را می‌توان با بدیهی‌سازی G -ساختار بازیابی کرد:

$$\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) = \psi_{GM,p}^A(\sigma^A(p) \triangleleft h) = \psi_{GM,p}^A(\sigma^A(p)) \cdot h = h \quad (190)$$

در اینجا از هم‌متغیری راست- G - $\psi_{GM,p}^A$ و اینکه $\psi_{GM,p}^A$ به عنوان مقطع همانی تعریف شده است، استفاده کردیم؛ به معادلات (۱۸۸) و (۱۸۲) که دومی برای $\psi_{GM,p}^A$ تطبیق داده شده است، مراجعه کنید. بنابراین می‌توانیم هر قاب را از طریق جابجایی آن بازنویسی کنیم:

$$[e_i]_{i=1}^d = \sigma^A(p) \triangleleft \psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) \quad (191)$$

به طور مشابه، می‌توانیم هر بردار ویژگی $[e_i]_{i=1}^d, f \in \mathcal{A}_p$ را با نماینده‌گان مختلف کلاس همارزی بازنویسی کنیم:

$$[[e_i]_{i=1}^d, f] = [\sigma^A(p) \triangleleft \psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d), f] = [\sigma^A(p), \rho(\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f] \quad (192)$$

$$\begin{array}{ccccc}
& & U \times \mathbb{R}^c & \xrightarrow{\text{proj}_\gamma} & \mathbb{R}^c \\
& \nearrow \Psi_A^B & \uparrow (\text{id} \times \rho(g^{BA}) \cdot) & & \uparrow \rho(g^{BA}) \cdot \\
\pi_A^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi_A^A} & U \times \mathbb{R}^c & \xrightarrow{\text{proj}_\gamma} & \mathbb{R}^c \\
\downarrow \pi_A & \nearrow \text{proj}_\gamma & \nearrow f^B & \nearrow \text{proj}_\gamma & \\
U & \xrightarrow{f^A} & & \xrightarrow{f^A} &
\end{array}$$

شکل ۳۶: میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات به عنوان مقاطع سراسری $f \in \Gamma(\mathcal{A})$ در همسایگی‌های محلی U^B و U^A . آن‌ها به میدان‌های بردارهای ضریب ویژگی $f^B : U^B \rightarrow \mathbb{R}^c$ و $f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c$ بدبیهی‌سازی می‌شوند که روی $U = U^A \cap U^B$ با رابطه $f^B(p) = \rho(g_p^{BA}) f^A(p)$ با هم مرتبط هستند. به جز $f \circ \pi_A \neq \text{id}_{\mathcal{A}}$, نمودار جایجایی‌پذیر است.

بر اساس این بیان‌ها، بدبیهی‌سازی‌های القایی \mathcal{A} را با قرار دادن زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Psi_{\mathcal{A}}^A : \pi_A^{-1}(U^A) \rightarrow U^A \times \mathbb{R}^c, \quad [[e_i]_{i=1}^d, f] \mapsto \left(\pi_{GM}^A([e_i]_{i=1}^d), \psi_{\mathcal{A}, p}^A([e_i]_{i=1}^d, f) \right), \quad (193)$$

با

$$\psi_{\mathcal{A}, p}^A : \mathcal{A}_p \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad [[e_i]_{i=1}^d, f] = \left[\sigma^A(p), \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f \right] \mapsto \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f, \quad (194)$$

که آن بدرار ضریب نماینده خاص $f^A = \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f \in \mathbb{R}^c$ را انتخاب می‌کند که توسط قاب مرجع $(p, \sigma^A(p))$ متناظر با پیمانه انتخاب شده، متمایز می‌شود. برای راحتی در اینده، توجه می‌کنیم که این به طور خاص دلالت بر این دارد که معکوس معادله (194) توسط

$$(\psi_{\mathcal{A}, p}^A)^{-1} : \mathbb{R}^c \rightarrow \mathcal{A}_p : f \mapsto [\sigma^A(p), f]. \quad (195)$$

داده می‌شود. بدبیهی‌سازی تعریف شده به این شکل مستقل از نماینده انتخاب شده است زیرا برای هر $k \in G$ داریم:

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathcal{A}, p}^A \left([[e_i]_{i=1}^d \triangleleft k^{-1}, \rho(k)f] \right) &= \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d \triangleleft k^{-1})) \rho(k)f \\
&= \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d) \cdot k^{-1}) \rho(k)f \\
&= \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f \\
&= \psi_{\mathcal{A}, p}^A \left([[e_i]_{i=1}^d, f] \right)
\end{aligned} \quad (196)$$

بر اساس ساختار، توابع گذار توسط $\rho(g_p^{BA})$ داده می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathcal{A}, p}^B \left([[e_i]_{i=1}^d, f] \right) &= \rho(\psi_{GM, p}^B([e_i]_{i=1}^d)) f \\
&= \rho(g_p^{BA} \psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f \\
&= \rho(g_p^{BA}) \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f \\
&= \rho(g_p^{BA}) \psi_{\mathcal{A}, p}^A \left([[e_i]_{i=1}^d, f] \right)
\end{aligned} \quad (197)$$

اگر کلاف مماس به عنوان یک کلاف برداری G -الحاقی $TM \cong (GM \times \mathbb{R}^d)/G$ در نظر گرفته شود، بدبیهی‌سازی‌های آن از معادله (193) برای انتخاب خاص $g = \rho(g)$ بازیابی می‌شوند.

فرض کنید یک میدان ویژگی مستقل از مختصات $f \in \Gamma(\mathcal{A})$ داده شده باشد. نسبت به پیمانه $\Psi_{\mathcal{A}}^A$ ، می‌توان آن را به صورت محلی به عنوان یک میدان بردار ضریب $f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c$ با تعریف زیر نمایش داد:

$$f^A := \text{proj}_\gamma \circ \Psi_{\mathcal{A}}^A \circ f \quad (198)$$

که معادل با تعریف نقطه‌ای زیر است:

$$f^A(p) = \psi_{\mathcal{A}, p}^A \circ f(p). \quad (199)$$

همانطور که از نمودار جایجایی در شکل ۳۶ پیداست، توابع گذار در معادله (197) به میدان‌های ضریب محلی منتقل می‌شوند به طوری که داریم:

$$f^B(p) = \rho(g_p^{BA}) f^A(p) \quad (200)$$

برای $p \in U^A \cap U^B$ این با تعریف ما از تبدیلات پیمانه بردارهای ضریب ویژگی در معادله (28) موافق است و آن را توجیه می‌کند.

ملاحظات پایانی: بدیهی‌سازی‌های محلی و توابع گذار تعریف شده در اینجا، تعاریف پیمانه‌ها و تبدیلات پیمانه از بخش ۲.۳ را رسمی‌سازی و توجیه می‌کنند. نشان داده شد که بدیهی‌سازی‌های محلی TM و TM یکدیگر را القا می‌کنند. اگر یک G -اطلس برای هر یک این دو انتخاب شود، یک G -ساختار GM تعریف می‌کند که G -اطلس آن اساساً با G -اطلس TM منطبق است. علاوه بر این، یک G -اطلس برای هر کلاف الحاقی دیگر، از جمله A ، القا می‌کند. همانطور که در شکل ۳۴ به تصویر کشیده شده است، توابع گذار تمام G -اطلس‌ها برای GM ، TM ، TM ، TM ، TM با هم منطبق هستند، که این کلاف‌ها را G -الحاقی با یکدیگر می‌سازند. به طور خاص، هنگام تغییر از پیمانه A به پیمانه B ، بدیهی‌سازی‌های A با G -اطلس TM مطابق با یک ضرب چپ با g^{BA} تبدیل می‌شوند در حالی که بدیهی‌سازی‌های کلاف بردار ویژگی مطابق با یک ضرب چپ با $(g^{BA})\rho$ تبدیل می‌شوند؛ به معادلات (۱۷۵)، (۱۷۶) و (معادله ۱۹۷) مراجعه کنید. در عین حال، میدان‌های قاب مطابق با عمل راست^۱ ($(g^{BA})^{-1}$) تبدیل می‌شوند.

۵.۶ منتقل کننده‌های موازی روی کلاف‌های الحاقی

بخش ۳.۳ مقدمه‌ای شهودی بر انتقال موازی بردارهای مماس و بردارهای ویژگی در امتداد یک مسیر γ از $p \in M$ به $q \in M$ ارائه داد. در اینجا به طور خلاصه بحث می‌کنیم که چگونه منتقل کننده‌های موازی مستقل از مختصات روی کلاف‌های تاری یکدیگر را القا می‌کنند و عبارت مختصاتی آن‌ها را نسبت به بدیهی‌سازی‌های داده شده استخراج می‌کنیم. ما با فرض داده شده بودن منتقل کننده‌های مستقل از مختصات

$$\mathcal{P}_{TM,\gamma} : T_q M \rightarrow T_p M \quad (201)$$

روی کلاف مماس TM شروع می‌کنیم و توضیح می‌دهیم که چگونه آن‌ها منتقل کننده‌های

$$\mathcal{P}_{FM,\gamma} : F_q M \rightarrow F_p M \quad (202)$$

روی کلاف قاب FM را القا می‌کنند. اگر این منتقل کننده‌ها، همانطور که در ادامه بحث می‌شود، با G -ساختار انتخاب شده G -سازگار باشند، در ادامه منتقل کننده‌های

$$\mathcal{P}_{GM,\gamma} : G_q M \rightarrow G_p M \quad (203)$$

$$\mathcal{P}_{A,\gamma} : A_q \rightarrow A_p \quad (204)$$

را روانی کلاف‌های G -الحاقی GM و A -الحاقی GM یا منتقل کننده‌های را فرض می‌کنند که بر اساس اتصال لوی-چیویتا هستند یا یک اتصال بدیهی.

یک تعریف رسمی تراز منتقل کننده‌های کلاف ممکن است مسیر متفاوتی را در پیش بگیرد، که با معروفی یک اتصال به اصطلاح اصلی ارسمن روى کلاف اصلی G یعنی GM شروع می‌شود (که بنا به تعریف، G -سازگار خواهد بود). چنین اتصال ارسمنی می‌تواند یا با انتخاب یک زیرکلاف افقی HGM از کلاف مماس TM تعریف شود یا، به طور معادل، با یک افق اتمال با مقدار در جبر لی \mathfrak{g} : $TGM \rightarrow \mathfrak{g}$ روی GM . انتقال روی GM متعاقباً از طریق بالابر افقی $\gamma^{\dagger} : [0, 1] \rightarrow GM$ را روی فضای پایه تعریف می‌شود، به طوری که بردارهای مماس بالابر در GM افقی هستند، یعنی $\gamma^{\dagger} \in HGM$. سپس تمام منتقل کننده‌ها روی FM و TM و TM به عنوان کلاف‌های G -الحاقی از منتقل کننده‌های روی G -ساختار القا می‌شوند. به جای دنبال کردن این رویکرد رسمی، که نسبتاً فنی خواهد بود و می‌توان آن را در ادبیات یافت [۱۹۳، ۱۹۴، ۱۱۸، ۱۳۲، ۸۰]، ما بر چگونگی ارتباط منتقل کننده‌های مختلف از طریق القای یکدیگر تمرکز می‌کیم.

انتقال روی TM : برای این منظور، با فرض داده شده بودن منتقل کننده‌های مستقل از مختصات γ روی TM ، یک راه میانبر را انتخاب می‌کنیم. به یاد بیاورید که، با داشتن پیمانه‌های Ψ_{TM}^A روی یک همسایگی $U^{\tilde{A}}$ از q و Ψ_{TM}^A روی یک همسایگی U^A از p ، منتقل کننده بردار مماس طبق معادله (۳۳) مختصاتی می‌شود، یعنی،

$$g_{\gamma}^{A\tilde{A}} := \psi_{TM,p}^A \circ \mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ \left(\psi_{TM,q}^{\tilde{A}} \right)^{-1} \in \text{GL}(d), \quad (205)$$

و اینکه مختصاتی‌سازی‌های آن تحت تبدیلات پیمانه در q و p طبق معادله (۳۵) تبدیل می‌شوند:

$$g_{\gamma}^{B\tilde{B}} = g_p^{BA} g_{\gamma}^{A\tilde{A}} \left(g_q^{\tilde{B}\tilde{A}} \right)^{-1} \quad (206)$$

برای نمایش تصویری این تعاریف در قالب یک نمودار جابجایی، به معادله (۳۶) بازمی‌گردیم.

انتقال روی FM : با داشتن منتقل کننده روی کلاف مماس، منتقل کننده روی کلاف قاب بالاصله از انتقال محورهای قاب منفرد به دست می‌آید. در معادلات، فرض کنید $[e_i]_{i=1}^d \in F_q M$ یک قاب در q باشد، سپس محورهای منفرد e_i برای $d, i = 1, \dots, d$ بردارهای مماس در $T_q M$ هستند که می‌توانند از طریق $\mathcal{P}_{TM,\gamma}$ منتقل شوند. بنابراین منتقل کننده روی کلاف قاب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:^۵

$$\mathcal{P}_{FM,\gamma} : F_q M \rightarrow F_p M, \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto \mathcal{P}_{FM,\gamma}([e_i]_{i=1}^d) := [\mathcal{P}_{TM,\gamma}(e_i)]_{i=1}^d \quad (207)$$

^۴ انتقال یک قاب در امتداد γ یک منحنی γ^{\dagger} (بالابر افقی) را در TM توصیف می‌کند. فضای تولید شده توسط تمام بردارهای مماس γ^{\dagger} در TM در امتداد چنین منحنی‌هایی، زیرکلاف افقی HFM از TFM است که در بالا ذکر شد.

برای استخراج شکل صریح مختصاتی‌سازی آن، عمل آن را بر روی یک عنصر گروهی $(\psi_{FM,q}^{\tilde{A}})^{-1} \in GL(d)$ در نظر بگیرید که نماینده یک قاب بدیهی شده از \mathbb{R}^d است که توسط ستون‌های ماتریس $h_{:,i} \in \mathbb{R}^d$ ، $i = 1, \dots, d$ تولید می‌شود:

$$\begin{aligned} [\psi_{FM,p}^A \circ \mathcal{P}_{FM,\gamma} \circ (\psi_{FM,q}^{\tilde{A}})^{-1}](h) &= [\psi_{FM,p}^A \circ \mathcal{P}_{FM,\gamma}] \left([(\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(h_{:,i})]_{i=1}^d \right) && \text{(تعريف } \psi_{FM,p}^{\tilde{A}}, \text{ معادله } 177) \\ &= \psi_{FM,p}^A \left([\mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(h_{:,i})]_{i=1}^d \right) && \text{(تعريف } \mathcal{P}_{FM,\gamma} \text{، معادله } 207) \\ &= \left(\psi_{TM,p}^A \circ \mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(h_{:,i}) \right)_{i=1}^d && \text{(تعريف } \psi_{TM,p}^{\tilde{A}}, \text{ معادله } 177) \\ &= \left(g_{\gamma}^{A\tilde{A}}(h_{:,i}) \right)_{i=1}^d && \text{(بدیهی‌سازی } \mathcal{P}_{TM,\gamma} \text{، معادله } 205) \\ &= g_{\gamma}^{A\tilde{A}} h && \text{(208)} \end{aligned}$$

بنابراین، مختصاتی‌سازی‌های منتقل‌کننده‌های قاب معادل با مختصاتی‌سازی‌های بردار مماس در معادله (205) هستند اما به جای عمل بر روی بردارهای ضریب در \mathbb{R}^d ، بر روی قاب‌های بدیهی شده در $GL(d)$ عمل می‌کنند. تبدیلات پیمانه آن‌ها از نمودار جابجایی

$$\begin{array}{ccc} & g_{\gamma}^{A\tilde{A}} & \\ \begin{matrix} GL(d) & \xrightarrow{\quad} & GL(d) \\ \downarrow & \nearrow \psi_{FM,q}^{\tilde{A}} & \downarrow \\ & F_q M & \\ \downarrow & \nearrow \psi_{FM,q}^{\tilde{B}} & \downarrow \\ & GL(d) & \xrightarrow{g_{\gamma}^{B\tilde{B}}} GL(d) \end{matrix} & & \end{array} \quad (209)$$

دیده می‌شود که با تبدیلات پیمانه منتقل‌کننده‌های مختصاتی‌شده روی TM در معادله (206) منطبق هستند.

سازگاری اتصالات و G -ساختارها: هر انتخابی از اتصال یا تعريف منتقل‌کننده‌ها روی کلافهای TM و FM با هر G -ساختاری سازگار نیست. به طور خاص، یک G -ساختار ممکن است تحت انتقال قاب‌ها بسته نباشد، یعنی، در حالی که یک قاب در TM توسط $G_q M \subseteq F_q M$ قرار ندارد.⁵⁵ نسبت به بدیهی‌سازی‌های GM ، GM به یک قاب در $F_p M$ منتقل‌کننده‌ی شده $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}\tilde{A}} \notin GL(d)$ منعکس می‌شود، که ضرب چپ آن‌ها روی تارهای \mathbb{R}^d از کلافهای $GL(d)$ یعنی TM خوش‌تعريف است، اما روی تار G از GM خوش‌تعريف نیست. اگر زیرکلاف GM تحت انتقال موازی روی FM بسته نباشد، این به معنای آن است که هیچ انتقال متناظر خوش‌تعريفی روی هیچ کلاف G -الحقایق A وجود ندارد.

به عنوان مثال، اتصال لوی-چیوینتا را در فضاهای اقلیدسی در نظر بگیرید، که منتقل‌کننده‌های آن بردارهای مماس و قاب‌ها را به معنای معمول در \mathbb{E}_d موازی نگه می‌دارند. $\{e\}$ -ساختار (میدان قاب) در شکل ۴۲ تحت این انتقال بسته است و بنابراین سازگار است. از سوی دیگر، $\{e\}$ -ساختار در شکل ۴۳ ب تحت این انتقال بسته نیست و بنابراین با اتصال لوی-چیوینتا ناسازگار است. به طور مشابه، (2) - SO - S^3 -ساختار روی S^3 در شکل ۱۷۶ با اتصال لوی-چیوینتا روی کره سازگار است، در حالی که $\{e\}$ -ساختار در شکل ۵۷ ب سازگار نیست.

خواننده ممکن است پرسد چه گزاره‌های کلی در مورد سازگاری اتصالات (یا منتقل‌کننده‌ها) و G -ساختارها می‌توان بیان کرد. به طور کلی، اتصال لوی-چیوینتا، یا هر اتصال متريک ديجري، با $O(d)$ - O - OM که متناظر با متريک است، سازگار هستند.⁵⁶ اگر منيفلد جهت‌پذير باشد، اتصال لوی-چیوینتا علاوه بر اين با هر $SO(d)$ - S -ساختاری که متناظر با متريک باشد، سازگار است. يك مثال، (2) - SO - S^3 -ساختار روی S^3 در شکل ۱۵۷ است. يك شرط لازم (اما نه کافی) برای اينکه يك G -ساختار با يك اتصال داده شده سازگار باشد اين است که گروه هولونومي اتصال، زيرگروهی از گروه ساختار G باشد.

يک مورد خاص مهم، $\{e\}$ -ساختارها هستند، زیرا آن‌ها يك اتصال بدیهی منحصر به فرد را الفا می‌کنند.⁵⁷ منتقل‌کننده‌های متناظر، قاب‌ها را به گونه‌ای حرکت می‌دهند که با قاب‌های $\{e\}$ -ساختار موازی باقی بمانند. اتصالات بدیهی ممکن است برای نظریه کانولوشن‌های GM اهمیت خاصی

⁵⁵ بر حسب يك اتصال اصلی ارسمان روی FM ، اين حالت زمانی رخ می‌دهد که زيرکلاف افقی $HFM \subseteq TFM$ در $TGM \subseteq TFM$ قرار نداشته باشد. يك تعريف فوري از انتقال موازی بر حسب انتخاب يك زيرکلاف افقی HGM روی G -ساختار، هميشه (بنا به تعريف) منجر به يك انتقال خوش‌تعريف روی GM خواهد شد.

⁵⁶ اين گزاره بنا به تعريف برقرار است زيرا اتصالات متريک زوایا و طول‌ها بين بردارها و در نتيجه اورتونمال بودن قاب‌ها را حفظ می‌کنند. علاوه بر اين، می‌توان اتصالات متريک را به عنوان اتصالات اصلی ارسمان روی OM تعريف کرد.

⁵⁷ يك اتصال بدیهی است اگر گروه هولونومی آن، یعنی انتقال موازی آن حول هر حلقه بسته، بدیهی باشد [۳۷].

فقط يك اتصال اصلی ارسمان $H\{e\}M = \bar{T}\{e\}M$ را می‌توان روی $V\{e\}M$ مقطع صفر از $T\{e\}M$ است.

نداشته باشند، با این حال، در واقع توسط بسیاری از شبکه‌های کانولوشنی استفاده می‌شوند. به طور خاص، هر شبکه‌ای که به یک $\{c\}$ -ساختار منکی است، به طور ضمنی یک اتصال بدیهی را فرض می‌کند. این شامل تمام مدل‌های جدول ۶ با $G = \{e\}$ می‌شود، به ویژه آن‌هایی که در بخش‌های ۳.۱۱ و ۳.۱۲ بررسی شده‌اند.^{۵۹} توجه داشته باشید که این مدل‌ها اتصال بدیهی را فقط برای انتقال بردار ویژگی خود فرض می‌کنند اما ژئودزیک‌ها را برای پول‌بک منتقل کننده، معادله (۶۷)، بر اساس اتصال اصلی لوی–چیوپیتا محاسبه می‌کنند.

انتقال روی GM : با فرض اینکه FM با انتقال روی سازگار است (یعنی تحت آن بسته است)، یک منتقل کننده خوش‌تعريف با محدود کردن منتقل کننده کلاف قاب به G -ساختار داده می‌شود:

$$\mathcal{P}_{GM,\gamma} := \mathcal{P}_{FM,\gamma}|_{GM} : G_q M \rightarrow G_p M \quad (210)$$

توابع گذار بین مختصاتی‌سازی‌های مختلف $\mathcal{P}_{GM,\gamma}$ سپس با توابع گذار $\mathcal{P}_{TM,\gamma}$ و در نتیجه با $\mathcal{P}_{FM,\gamma}$ نیز منطبق خواهند بود. ما نمودار جابجایی زیر را به دست می‌آوریم که محدودسازی نمودار در معادله (۲۰۹) از $F_p M$ و $F_q M$ به $G_p M$ و $G_q M$ به $GL(d)$ و G را به تصویر می‌کشد:

$$\begin{array}{ccccc} & & g^{A\tilde{A}}_{\gamma} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ G & & & & G \\ & \downarrow \psi_{GM,q}^{\tilde{A}} & & \downarrow \psi_{GM,p}^A & \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & g_q^{\tilde{B}\tilde{A}} & & & \\ & \uparrow \psi_{GM,q}^{\tilde{B}} & & & \downarrow g_p^{BA} \\ & & G_q M & \xrightarrow{\mathcal{P}_{GM,\gamma}} & G_p M \\ & \uparrow & & & \downarrow \psi_{GM,p}^B \\ & & & & g_{\gamma}^{B\tilde{B}} \end{array} \quad (211)$$

ما در ادامه این کار فرض می‌کنیم که انتقال روی GM خوش‌تعريف است.

انتقال روی \mathcal{A} : اگر منتقل کننده‌های یک اتصال روی GM خوش‌تعريف باشند، آن‌ها منتقل کننده‌های را روی هر کلاف G -الحاقی، از جمله کلاف‌های بردار ویژگی $\rho \sim (GM \times \mathbb{R}^c)/\sim$ می‌کنند. فرض کنید $f_q := [[e_i]_{i=1}^d, f]$ یک بردار ویژگی مستقل از مختصات در \mathcal{A}_q باشد. انتقال موازی آن توسط آن کلاس هم‌ارزی داده می‌شود که با ثابت نگه داشتن برخی ضرایب نماینده $f \in \mathbb{R}^c$ و انتقال قاب متناظر $[e_i]_{i=1}^d$ تعریف می‌شود:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A},\gamma} : \mathcal{A}_q \rightarrow \mathcal{A}_p, \quad f_q \mapsto \mathcal{P}_{\mathcal{A},\gamma}(f_q) := [\mathcal{P}_{GM,\gamma}([e_i]_{i=1}^d), f] \quad (212)$$

در بخش ۳.۳ ما ادعا کردیم که منتقل کننده ضرایب عددی بردار ویژگی توسط $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$ باشد، که این حالت زمانی است که انتقال روی GM خوش‌تعريف باشد. این عبارت مختصاتی از $\mathcal{P}_{\mathcal{A},\gamma}$ را می‌توان با ارزیابی گام به گام عمل $\psi_{\mathcal{A},p}^A \circ \mathcal{P}_{\mathcal{A},\gamma} \circ (\psi_{\mathcal{A},q}^{\tilde{A}})^{-1}$ انجام داد: $\rho(G) \leq GL(c)$ را بردار ضریب ویژگی $f \in \mathbb{R}^c$ استخراج کرد:

$$\begin{aligned} [\psi_{\mathcal{A},p}^A \circ \mathcal{P}_{\mathcal{A},\gamma} \circ (\psi_{\mathcal{A},q}^{\tilde{A}})^{-1}](f) &= [\psi_{\mathcal{A},p}^A \circ \mathcal{P}_{\mathcal{A},\gamma}]([\sigma^{\tilde{A}}(q), f]) && \text{(تعریف } \psi_{\mathcal{A},p}^{\tilde{A}} \text{، معادله (۱۹۵))} \\ &= \psi_{\mathcal{A},p}^A([\mathcal{P}_{GM,\gamma}(\sigma^{\tilde{A}}(q)), f]) && \text{(تعریف } \mathcal{P}_{\mathcal{A},\gamma} \text{، معادله (۲۱۲))} \\ &= \rho(\psi_{GM,p}^A \circ \mathcal{P}_{GM,\gamma} \circ \sigma^{\tilde{A}}(q)) \cdot f && \text{(تعریف } \psi_{\mathcal{A},p}^A \text{، معادله (۱۹۴))} \\ &= \rho(\psi_{GM,p}^A \circ \mathcal{P}_{GM,\gamma} \circ (\psi_{GM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(e)) \cdot f && \text{(تعریف مقطع همانی } \sigma^{\tilde{A}} \text{، معادله (۱۸۳))} \\ &= \rho(g_{\gamma}^{A\tilde{A}}) \cdot f && \text{(در مختصات، معادله (۲۱۱))} \end{aligned} \quad (213)$$

^{۵۹} این مدل‌ها با مدل‌سازی نکردن منتقل کننده‌های غیربدیهی بردارهای ویژگی، به طور ضمنی یک اتصال بدیهی را فرض می‌کنند: آن‌ها ضرایب بردار ویژگی را بدون تبدیل آن‌ها اباحت می‌کنند.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \rho(g_{\gamma}^{A\tilde{A}}) & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 \mathbb{R}^c & & \mathcal{A}_q & & \mathbb{R}^c \\
 & \downarrow \psi_{A,q}^{\tilde{A}} & \xrightarrow{\mathcal{P}_{A,\gamma}} & \downarrow \psi_{A,p}^A & \\
 \rho(g_q^{\tilde{B}\tilde{A}}) & & \mathcal{A}_p & & \rho(g_p^{BA}) \\
 & \uparrow \psi_{A,q}^{\tilde{B}} & & \downarrow \psi_{A,p}^B & \\
 & & \rho(g_{\gamma}^{B\tilde{B}}) & &
 \end{array} \quad (214)$$

نشان می‌دهد که تبدیلات پیمانه منتقل‌کننده‌های بردار ویژگی مختصاتی شده به صورت زیر است:

$$\rho(g_{\gamma}^{B\tilde{B}}) = \rho(g_p^{BA})\rho(g_{\gamma}^{A\tilde{A}})\rho(g_q^{\tilde{B}\tilde{A}})^{-1} \quad (215)$$

توجه داشته باشید که این قانون تبدیل با قانون تبدیل در معادله (۲۰۶) سازگار است.

۷ تبدیلات میدان کرنل مستقل از مختصات و کانولوشن‌های GM

کلاف‌های G-الحاقی معرفی شده در بخش ۶ امکان توصیف میدان‌های ویژگی - و در نتیجه شبکه‌های کانولوشنی - را در سطح سراسری فراهم می‌کند. با داشتن دنباله‌ای از کلاف‌های بردار ویژگی G-الحاقی روی $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N \xrightarrow{\pi_{\mathcal{A}_1}, \dots, \pi_{\mathcal{A}_N}} M$ ، ما شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات را به عنوان دنباله‌هایی

$$\Gamma(\mathcal{A}_.) \xrightarrow{L_1} \Gamma(\mathcal{A}_1) \xrightarrow{L_2} \dots \xrightarrow{L_N} \Gamma(\mathcal{A}_N) \quad (216)$$

از لایه‌های پارامتری شده L_1, \dots, L_N توصیف می‌کنیم که بین فضاهای ویژگی $\Gamma(\mathcal{A}_.), \dots, \Gamma(\mathcal{A}_N)$ یعنی بین فضاهای میدان‌های ویژگی A_i مدل شده توسط کلاف‌های متناظر، نگاشت می‌کنند. در حالی که انواع میدان (یا قوانین تبدیل) $(\mathcal{A}_i, \rho_i : G \rightarrow \text{GL}(c_i)) / \sim_{\rho_i}$ (برای $i = 1, \dots, N-1$) باشد توسط کاربر به عنوان یک آبرپارامتر مشخص شوند، انواع میدان (برای $i = N$) $\rho_N : G \rightarrow \text{GL}(c_N)$ و $\rho_N : G \rightarrow \text{GL}(c_N)$ برای ورودی و خروجی شبکه معمولاً توسط وظیفه یادگیری تعیین می‌شوند. ساختار مازولار شبکه‌های عصی اجازه می‌دهد تا توجه را به لایه‌های منفرد محدود کنیم که بین فضاهای ویژگی $\Gamma(\mathcal{A}_{\text{out}})$ و $\Gamma(\mathcal{A}_{\text{in}})$ با ابعاد c_{out} و c_{in} و نوع ρ_{out} و ρ_{in} نگاشت انجام می‌دهند.

- ۱.۷ کانولوشن‌های GM با اندازه 1×1
- ۱.۱.۷ کانولوشن‌های GM با اندازه 1×1 به عنوان M-مورفیسم‌های کلاف برداری
- ۲.۱.۷ کانولوشن‌های GM با اندازه 1×1 به عنوان مقاطع کلاف هومومورفیسم
- ۲.۷ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM
- ۱.۲.۷ میدان‌های کرنل
- ۲.۲.۷ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM
- ۳.۲.۷ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM در مختصات محلی

هدف اصلی این بخش، معرفی کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM است که بلوک‌های سازنده اصلی شبکه‌های مستقل از مختصات GM را برای شروع، و برای معرفی مفاهیمی که بعداً مورد نیاز خواهد بود، ما در بخش ۱.۷ ابتدا بر روی مورد ساده‌تر $GM \times 1 \times 1$ -تمرکر خواهیم کرد که کرنل‌های نقطه‌مانند را به کار می‌برند. بخش ۲.۷ تمرکر را به کانولوشن‌های GM تبدیلات میدان کرنل با کرنل‌های با گستره فضایی منتقل می‌کند. آن‌ها بر حسب میدان‌های کرنل سراسری و هموار پارامتری می‌شوند که در بخش ۱.۲.۷ معرفی شده‌اند. میدان‌های کرنل کانولوشنی GM ملزم به اشتراک‌گذاری وزن‌ها بین موقعیت‌های مکانی مختلف هستند. برای اینکه این اشتراک‌گذاری وزن مستقل از مختصات GM باشد، کرنل‌های الگو که میدان‌های کرنل کانولوشنی GM را پارامتری می‌کنند، باید G-هدایت‌پذیر باشند (معادله (۲۴۲)). تبدیلات واقعی میدان کرنل و کانولوشن‌های GM در بخش ۲.۷ معرفی می‌شوند. تعریف سراسری آن‌ها با جایگزینی عبارات مختصاتی محلی از بخش ۲.۷ با همتای‌های سراسری و مستقل از مختصات‌شان هدایت می‌شود. همانطور که در بخش ۳.۲.۷ نشان داده شده است، این تعاریف مستقل از مختصات در بدیهی‌سازی‌های محلی به عبارات مختصاتی از بخش ۲.۴ کاهش می‌یابند.

۱.۷ کانولوشن‌های GM با اندازه 1×1

هر بردار ویژگی ورودی منفرد $f_{\text{out}} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square})$ را به میدان‌های ویژگی خروجی ($f_{\text{in}} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square})$) با نگاشت خطی $f_{\text{out}}(p) \in \mathcal{A}_{\square\square,p} \cong \mathbb{R}^{c_{\text{in}}}$ به یک بردار ویژگی خروجی $f_{\text{in}}(p) \in \mathcal{A}_{\square\square,p} \cong \mathbb{R}^{c_{\text{out}}}$ در همان مکان $p \in M$ نگاشت می‌کنند. ویژگی کانولوشن با اشتراک گذاری نگاشت خطی از $\mathcal{A}_{\square\square,p}$ به $\mathcal{A}_{\square\square,q}$ بین مکان‌های فضای مختلف پیاده‌سازی می‌شود. با این حال، در حالی که فضاهای ویژگی $\mathcal{A}_{\square\square,p}$ و $\mathcal{A}_{\square\square,q}$ همچنین $\mathcal{A}_{\square\square,p}$ و $\mathcal{A}_{\square\square,q}$ مختلف با یکدیگر ایزو‌مورف هستند، اگر گروه ساختار G در نظر گرفته شده غیربدپیه باشد، هیچ ایزو‌مورفیسم کاتونی بین آنها وجود ندارد. بنابراین، مشخص نیست که چگونه نگاشت خطی می‌تواند بین مکان‌های مختلف به اشتراک گذاشته شود. همانطور که قبلاً در مقدمه این بخش اشاره شد، این مسئله با در نظر گرفتن کرnel‌های G -هم‌متغیر که نسبت به انتخاب خاص ایزو‌مورفیسم یا پیمانه بی‌تفاوت هستند، حل می‌شود. اختیاری بودن بدپیه سازی که از G -اطلس انتخاب می‌شود، استقلال از مختصات M را در 1×1 -عنوان GM می‌معنکس می‌کند.

از نظر ریاضی، 1×1 -عنوان GM-را می‌توان یا به عنوان M -مورفیسم‌های کلاف برداری خاص یا از طریق مقاطع متناضل کلاف‌های هومومورفیسم (الحاقی) $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square})$ فرمول بندی کرد. از آنجایی که بعداً به هر دو مفهوم نیاز داریم، هر دو دیدگاه را در بخش‌های بعدی ۱.۱.۷ و ۲.۱.۷ معرفی خواهیم کرد.

۱.۱.۷ کانولوشن‌های GM با اندازه 1×1 به عنوان M -مورفیسم‌های کلاف برداری

می‌گذرند، رسمی‌سازی کرد. با نادیده گرفتن الزام به اشتراک گذاری وزن‌ها در حال حاضر، چنین M -مورفیسم کلاف برداری \mathcal{C} یک نگاشت کلاف هموار است که نمودار جابجایی زیر را برآورده می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\square\square} & \xrightarrow{\mathcal{C}} & \mathcal{A}_{\square\square} \\ & \searrow \pi_{\mathcal{A}_{\square\square}} & \swarrow \pi_{\mathcal{A}_{\square\square}} \\ & M & \end{array} \quad (217)$$

جابجایی‌بذری \mathcal{C} تضمین می‌کند که هر تار $\mathcal{A}_{\square\square,p} \circ \mathcal{C} = \mathcal{C} \circ \mathcal{A}_{\square\square,p}$ به روی همان نقطه $p \in M$ نگاشت می‌شود (که باعث پیدایش « M » در عبارت M -مورفیسم می‌شود). به عنوان یک مورفیسم کلاف برداری، محدودیت $\mathcal{C}|_p : \mathcal{A}_{\square\square,p} \rightarrow \mathcal{A}_{\square\square,p}$ به یک تار منفرد، علاوه بر این، به صورت خطی تعریف می‌شود. نسبت به یک بدپیه سازی محلی $\Psi_{\mathcal{A}_{\square\square}}^A$ از $\mathcal{A}_{\square\square}$ و $\Psi_{\mathcal{A}_{\square\square}}^B$ از $\mathcal{A}_{\square\square}$ ، نگاشت کلاف در هر نقطه $p \in U^A \cap U^B$ توسط یک ماتریس نمایش داده می‌شود:

$$\mathcal{C}^A|_p := \psi_{\mathcal{A}_{\square\square},p}^A \circ \mathcal{C}|_p \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\square\square},p}^A)^{-1} \in \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}. \quad (218)$$

ارتباط آن با یک مختصاتی‌سازی دوم $\mathcal{C}^B|_p \in U^B$ در $p \in U^A \cap U^B$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\mathcal{C}^B|_p = \rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) \mathcal{C}^A|_p \rho_{\text{in}}(g_p^{BA})^{-1}, \quad (219)$$

که از نمودار جابجایی زیر مشهود است:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{C}^A|_p & & \\ & \swarrow \psi_{\mathcal{A}_{\square\square},p}^A & & \nearrow \psi_{\mathcal{A}_{\square\square},p}^B & \\ \mathbb{R}^{c_{\text{in}}} & & \mathcal{A}_{\square\square,p} & & \mathbb{R}^{c_{\text{out}}} \\ & \nearrow \psi_{\mathcal{A}_{\square\square},p}^B & \xrightarrow{\mathcal{C}|_p} & \swarrow \psi_{\mathcal{A}_{\square\square},p}^A & \\ & & & & \\ & & \mathbb{R}^{c_{\text{in}}} & & \mathbb{R}^{c_{\text{out}}} \\ & & \mathcal{C}^B|_p & & \end{array} \quad (220)$$

نگاشت کلاف \mathcal{C} بر روی میدان‌های ویژگی ورودی ($f_{\text{in}} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square})$) عمل می‌کند تا میدان‌های ویژگی خروجی تولید کند:

$$f_{\text{out}} = \mathcal{C} \circ f_{\text{in}} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}). \quad (221)$$

بر حسب یک نمودار جابجایی، این نگاشت به صورت زیر به تصویر کشیده می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} A_{\square\square} & \xrightarrow{\quad C \quad} & A_{\square\square\square} \\ & \swarrow f_{\text{in}} & \searrow f_{\text{out}} \\ & M & \end{array}, \quad (222)$$

برای اینکه یک M -مورفیسم کلاف برداری $C_{K_{1\times 1}}$ نماینده یک 1×1 -متغیر است، باید بر حسب یک الگوی کرنل $K_{1\times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ -یعنی $P_{1\times 1}$ -پارامتری شود که با مختصاتی سازی‌ها در تمام موقعیت‌های مکانی به اشتراک گذاشته شده است. همانطور که قبلًا بحث شد، برای تضمین استقلال از مختصات GM ، هیچ پیمانه خاصی نباید ترجیح داده شود. بنابراین لازم است که وزن‌ها با تمام بدیهی‌سازی‌های \mathcal{X} از G -اطلس $X \in \mathcal{X}$ به طور همزمان به اشتراک گذاشته شوند، یعنی لازم است:

$$C_{K_{1\times 1}}^X|_p = K_{1\times 1} \quad \text{برای هر پیمانه } X \in \mathcal{X} \text{ با } p \in U^X. \quad (223)$$

از رفتار تبدیل بین مختصاتی سازی‌های مختلف در معادله (۲۱۹) نتیجه می‌شود که الگوی کرنل باید قید خطی زیر را برآورده کند:

$$\rho_{\text{out}}(g) K_{1\times 1} \rho_{\text{in}}(g)^{-1} = K_{1\times 1} \quad \forall g \in G, \quad (224)$$

یعنی، باید یک درهم‌تننده (یک نگاشت خطی هم‌متغیر) باشد. فضای برداری

$$\text{Hom}_G(\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}) := \left\{ K_{1\times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \mid K_{1\times 1} \rho_{\text{in}}(g) = \rho_{\text{out}}(g) K_{1\times 1} \quad \forall g \in G \right\} \quad (225)$$

نگاشتهای درهم‌تننده، فضای کرنل‌های 1×1 -مستقل از مختصات GM را به طور کامل مشخص می‌کند. همانطور که قبلًا در بخش ۱.۱.۴ ذکر شد، لم شور [۶۱] ایجاد می‌کند که الزام به اینکه $K_{1\times 1}$ یک درهم‌تننده باشد، از نگاشت بین میدان‌هایی که تحت نمایش‌های کاهش‌ناپذیر غیرایزومورف تبدیل می‌شوند، از طریق 1×1 -متغیر GM -جلوگیری می‌کند. کانولوشن‌های عمومی تر GM با کرنل‌های با گستره فضایی، که در بخش ۲.۷ تعریف شده‌اند، این مسئله را حل خواهند کرد.

با این مقدمات، آمده‌ایم تا تعریف دقیقی از 1×1 -متغیر GM -را ارائه دهیم:

تعریف ۱.۷ 1×1 -متغیر GM یک نگاشت است

$$K_{1\times 1} \otimes : \Gamma(A_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(A_{\square\square\square}), \quad f_{\text{in}} \mapsto K_{1\times 1} \otimes f_{\text{in}} := C_{K_{1\times 1}} \circ f_{\text{in}} \quad (226)$$

که توسط یک کرنل درهم‌تننده 1×1 -متغیر GM -یعنی $K_{1\times 1} \in \text{Hom}_G(\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}})$ پارامتری می‌شود. در اینجا M -مورفیسم کلاف برداری هموار منحصر به فرد بین A و $A_{\square\square}$ است که در پیمانه‌های دلخواه $\psi_{A_{\square\square}, p}$ و $\psi_{A_{\square\square\square}, p}$ از G -اطلس مورد نظر به صورت نقطه‌ای تعریف می‌شود:

$$C_{K_{1\times 1}}|_p := \psi_{A_{\square\square}, p}^{-1} \circ K_{1\times 1} \circ \psi_{A_{\square\square}, p}. \quad (227)$$

استقلال از پیمانه‌های انتخاب شده (استقلال از مختصات GM) با درهم‌تننده بودن $K_{1\times 1}$ تضمین می‌شود.

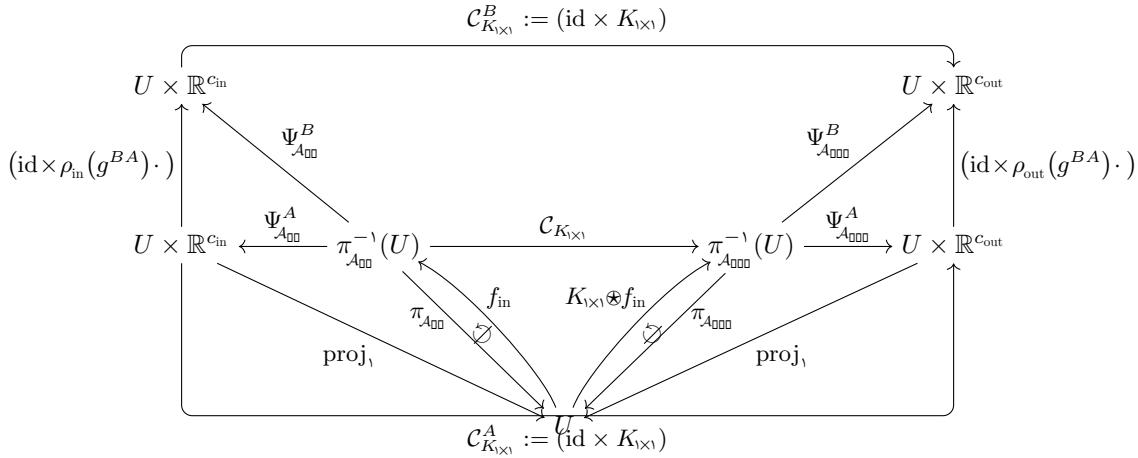
برای نشان دادن صریح استقلال از پیمانه انتخاب شده، هر بدیهی‌سازی مرتبط با G یعنی $\rho_{\text{out}}(g) \psi_{A_{\square\square}, p}(g)$ و $\rho_{\text{in}}(g) \psi_{A_{\square\square}, p}(g)$ را برای یک عنصر گروه ساختار دلخواه $g \in G$ در نظر بگیرید. که ساختار

$$\begin{aligned} C_{K_{1\times 1}}|_p &= (\rho_{\text{out}}(g) \psi_{A_{\square\square}, p})^{-1} \circ K_{1\times 1} \circ (\rho_{\text{in}}(g) \psi_{A_{\square\square}, p}) \\ &= \psi_{A_{\square\square}, p}^{-1} \circ (\rho_{\text{out}}(g)^{-1} K_{1\times 1} \rho_{\text{in}}(g)) \circ \psi_{A_{\square\square}, p} \\ &= \psi_{A_{\square\square}, p}^{-1} \circ K_{1\times 1} \circ \psi_{A_{\square\square}, p} \end{aligned} \quad (228)$$

را نامتغیر باقی می‌گذارد. اینکه 1×1 -متغیر GM -تعریف شده به این شکل واقعًا به مقاطعی در $(\mathcal{A}_{\square\square})^\Gamma$ نگاشت می‌شوند، از این واقعیت ناشی می‌شود که $C_{K_{1\times 1}}$ یک نگاشت کلاف است. یک نمای کلی از مختصاتی سازی‌های محلی 1×1 -متغیر GM -در شکل ۳۷ اورده شده است.

۲.۱.۷ کانولوشن‌های GM با اندازه 1×1 به عنوان مقاطع کلاف هومومورفیسم

در حالی که M -مورفیسم کلاف برداری با مختصاتی سازی‌های مستقل از پیمانه از تعریف ۱.۷ و شکل ۳۷ یک 1×1 -متغیر GM -را به طور کامل مشخص می‌کند، اکنون دیدگاه جایگزینی را اتخاذ می‌کنیم که 1×1 -متغیر GM -را بر حسب کلاف هومومورفیسم



شکل ۳.۷: مختصاتی سازی یک 1×1 -مorfیسم کلاف برداری متناظر آن $\mathcal{C}_{K_{\times 1}} \otimes \mathcal{C}_{K_{\times 1}} : \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square\square})$ -کانولوشنی با اشتراک‌گذاری یک ماتریس کرنل $K_{\times 1} \in \mathbb{R}^{c_{out} \times c_{in}}$ در موقعیت‌های مکانی مختلف $p \in M$ است. از هیچ پیمانه‌ای نباید ترجیح داده شود، کرنل علاوه بر این در بدیهی سازی‌های مختلف $\mathcal{C}_{K_{\times 1}}^B$ و $\mathcal{C}_{K_{\times 1}}^A$ به اشتراک گذاشته می‌شود. بنابراین، جابجایی‌پذیری نمودار برای هر انتخاب $\Psi_{A_{\square\square}}^B$ ، $\Psi_{A_{\square\square}}^A$ و $\Psi_{A_{\square\square\square\square}}^B$ قید $\rho_{\square\square\square\square}(g)K_{\times 1}\rho_{\square\square}(g)^{-1} = K_{\times 1} \forall g \in G$ است. اعمال می‌کند که ماتریس کرنل را به یک درهم‌تننده (یک نگاشت خطی هم‌متغیر) محدود می‌کند، یعنی $[K_{\times 1} \otimes f_{in}] \circ \pi_{A_{\square\square\square\square}} \neq \text{id}_{A_{\square\square\square\square}}$ و $f_{in} \circ \pi_{A_{\square\square\square\square}} \neq \text{id}_{A_{\square\square}}$. به جز $K_{\times 1} \in \text{Hom}_G(\rho_{in}, \rho_{out}) \subseteq \mathbb{R}^{c_{out} \times c_{in}}$ ، proj_1 و proj_2 نمودار جابجایی‌پذیر است.

$\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square\square\square}) \xrightarrow{\pi_{\square\square\square\square}} M$ توصیف می‌کند. برای این منظور، به یاد بیاورید که مورفیسم کلاف برداری \mathcal{C} در معادله (۲۱۷) به نگاشتهای خطی $\mathcal{C}|_p : \mathcal{A}_{\square\square, p} \rightarrow \mathcal{A}_{\square\square\square\square, p}$ محدود می‌شود. مجموعه چنین نگاشتهای خطی (با هومومورفیسم‌های فضای برداری) بین $\mathcal{A}_{\square\square, p}$ و $\mathcal{A}_{\square\square\square\square, p}$ نشان داده می‌شود. از آنجایی که این مجموعه تحت ترکیب‌های خطی بسته است، خود یک فضای برداری تشکیل می‌دهد. می‌توان نشان داد که اجتماع مجزای

$$\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square\square\square}) := \coprod_{p \in M} \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square, p}, \mathcal{A}_{\square\square\square\square, p}) \quad (229)$$

این فضاهای هومومورفیسم، هنگامی که با نگاشت تصویر $M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square, p}, \mathcal{A}_{\square\square\square\square, p})$ را به $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square, p}, \mathcal{A}_{\square\square\square\square, p})$ می‌فرستد و یک ساختار هموار القا شده از ساختار $\mathcal{A}_{\square\square}$ و $\mathcal{A}_{\square\square\square\square}$ مجهر شود، یک کلاف برداری، یعنی کلاف هومومورفیسم بین $\mathcal{A}_{\square\square}$ و $\mathcal{A}_{\square\square\square\square}$ را تشکیل می‌دهد [۴۴]. تارهای روی p در رابطه $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square, p}, \mathcal{A}_{\square\square\square\square, p}) \cong \text{Hom}(\mathbb{R}^{c_{in}}, \mathbb{R}^{c_{out}}) \cong \mathbb{R}^{c_{out} \times c_{in}}$ صدق می‌کند، به طوری که می‌توانیم تار نمونای را فضای برداری ماتریس‌های $\mathcal{C}_{out} \times \mathcal{C}_{in}$ با مقادیر حقیقی در نظر بگیریم. بدیهی سازی‌های

$$\Psi_{\square\square\square\square} : \pi_{\square\square\square\square}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^{c_{out} \times c_{in}}, \quad H \mapsto (p, \psi_{\square\square\square\square, p}(H)), \quad (230)$$

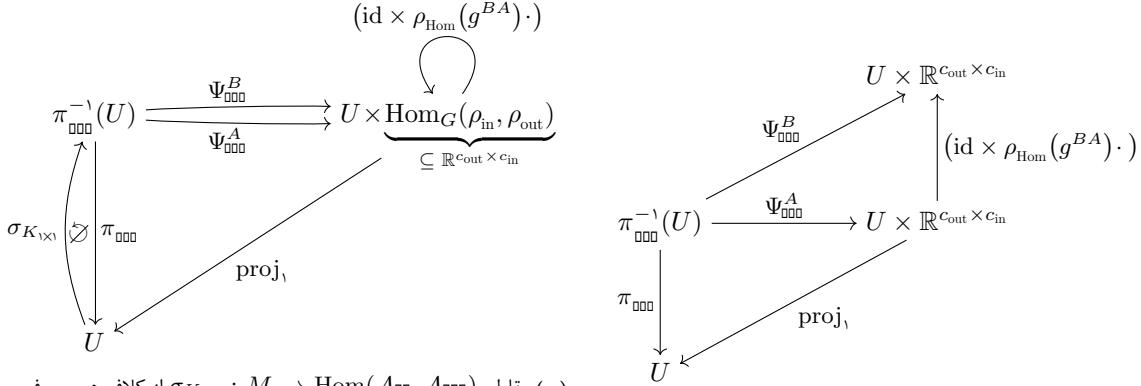
$$\begin{aligned} \text{که در آن } (H) = \pi_{\square\square\square\square}(H) \text{ را به اختصار آورده‌ایم، از بدیهی سازی‌های } \mathcal{A}_{\square\square} \text{ و } \mathcal{A}_{\square\square\square\square} \text{ با تعريف} \\ \psi_{\square\square\square\square, p} : \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square, p}, \mathcal{A}_{\square\square\square\square, p}) \rightarrow \mathbb{R}^{c_{out} \times c_{in}}, \quad H \mapsto \psi_{\mathcal{A}_{\square\square, p}} \circ H \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\square\square, p}})^{-1} \end{aligned} \quad (231)$$

به قیاس با معادلات (۲۱۸) و (۲۱۹) القا می‌شوند. این به معنای نگاشتهای گذار

$$\begin{aligned} H^B &= \psi_{\mathcal{A}_{\square\square, p}}^B \circ H \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\square\square, p}}^B)^{-1} \\ &= \psi_{\mathcal{A}_{\square\square, p}}^B \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\square\square, p}}^A)^{-1} H^A \psi_{\mathcal{A}_{\square\square, p}}^A \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\square\square, p}}^B)^{-1} \\ &= \rho_{out}(g^{BA}) H^A \rho_{in}(g^{BA})^{-1} \\ &=: \rho_{\text{Hom}}(g^{BA}) H^A \end{aligned} \quad (232)$$

بین پیمانه‌های $\Psi_{\square\square}^A$ و $\Psi_{\square\square}^B$ روی $U^A \cap U^B$ است. که در آن برای راحتی نوشترای، نمایش گروهی هومومورفیسم $\rho_{\text{Hom}} : G \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^{c_{out} \times c_{in}})$ را به عنوان ضرب چپ و راست با ρ_{in} و ρ_{out} معرفی کردیم.^{۶۰} کلاف هومومورفیسم (

^{۶۰} به طور کلی، یک کلاف هومومورفیسم بین دو کلاف برداری غیرالحقیقی با گروه‌های ساختار G_1 و G_2 یک گروه ساختار $G_1 \times G_2$ خواهد داشت. از آنجایی که $\mathcal{A}_{\square\square}$ و $\mathcal{A}_{\square\square\square\square}$ الحقیقی هستند، آنها به طور هم‌مان تحت همان گروه ساختار $G_1 = G_2$ تبدیل می‌شوند به طوری که نگاشتهای گذار آنها در زیرگروه قطری از $G \times G$ مقدار می‌گیرند.



(ب) مقاطع $\sigma_{K_{1 \times 1}} : M \rightarrow \text{Hom}(A_{000}, A_{000})$ از کلاف هومومورفیسم

که متناظر با 1×1 -GM است، دقیقاً آنهاستند که به همان ماتریس (درهم تنند) $K_{1 \times 1} \in \text{Hom}_G(\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}) \subseteq \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ در رسم پیمانهای بدیهی سازی می‌شوند. چنین مقاطعی متناظر با نگاشت‌های کلاف هستند که همانطور که در شکل ۳۷ مشخص شده است، بدیهی سازی می‌شوند.

(آ) بدیهی سازی (A_{000}, A_{000}) . از آنجایی که به A_{000}, GM, TM الحاقی است، نگاشتهای گذار کلاف هومومورفیسم توسط همان عصر گروهی g^{BA} از گروه ساختار مشترک G تعیین می‌شوند (این را با شکل ۳۴ مقایسه کنید). M -مورفیسم‌های کلاف برداری بدون قید همانطور که در معادله (۲۱۷) نشان داده است، متناظر با مقاطع هموار بدون قید از $\text{Hom}(A_{000}, A_{000})$ هستند.

شکل ۳۸: بدیهی سازی‌های محلی کلاف هومومورفیسم $\text{Hom}(A_{000}, A_{000})$. که کلاف برداری نگاشتهای خطی بین فضاهای $A_{000,p}$ و $A_{000,p}$ برای هر $p \in M$ است. طبق معقول $U = U^A \cap U^B$ با $\pi_{000} \circ \sigma_{K_{1 \times 1}} \neq \text{id}_{\text{Hom}(A_{000}, A_{000})}$. به جز $\sigma_{K_{1 \times 1}}$ نمودارها جابجایی‌پذیر هستند.

به عنوان یک کلاف برداری-G-الحاقی، یعنی بدیهی سازی‌های آن به طور همزمان با بدیهی سازی‌های کلاف‌های دیگر تبدیل می‌شوند. به $\text{Hom}(A_{000}, A_{000})$ ارائه می‌دهد. به شباهت با بدیهی سازی‌های دیگر کلاف‌های G-الحاقی در شکل ۳۴ توجه کنید.

از دیدگاه کلاف‌های هومومورفیسم، نگاشتهای کلاف بدون قید مانند معادله (۲۱۷) متناظر با عمل مقاطع کلاف هومومورفیسم هموار بدون قید هستند

$$\sigma_{\text{Hom}} : M \mapsto \text{Hom}(A_{000}, A_{000}) \quad \pi_{000} \circ \sigma_{\text{Hom}} = \text{id}_M \quad (233)$$

که می‌توان آنها را به عنوان میدان‌های کرنل 1×1 تفسیر کرد که وزن‌ها را به اشتراک نمی‌گذارند. وجود سراسری آنها با این واقعیت که $\text{Hom}(A_{000}, A_{000})$ یک کلاف برداری است تضمین می‌شود. مقاطع متناظر با 1×1 -GM-علوه بر این نیاز دارند که تبدیلات خطی $\sigma_{\text{Hom}}(p) \in \text{Hom}(A_{000,p}, A_{000,p})$ توسعه یک کرنل الگو $K_{1 \times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ تعیین شوند که در موقعیت‌های مختلف $p \in M$ و هر انتخاب پیمانه به اشتراک گذاشته شده است. بنابراین آنها را می‌توان برای هر $p \in M$ به صورت زیر تعریف کرد

$$\sigma_{K_{1 \times 1}}(p) := \psi_{000,p}^{-1}(K_{1 \times 1}), \quad K_{1 \times 1} \in \text{Hom}_G(\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}), \quad (234)$$

که در آن بدیهی سازی انتخاب شده Ψ دلخواه است اگر (و تنها اگر) $K_{1 \times 1}$ قید درهم تنند را برآورده کند

$$\rho_{\text{Hom}}(g)K_{1 \times 1} = K_{1 \times 1} \quad \forall g \in G, \quad (235)$$

که معادل با معادله (۲۲۴) است.^{۶۱} بی‌اهمیت بودن پیمانه در چنین مقاطعی در نمودار جابجایی در شکل ۳۸ ب به تصویر کشیده شده است (این را با بدیهی سازی نگاشت کلاف معادل در شکل ۳۷ مقایسه کنید).

ملاحظات پایانی: یک لایه هموار 1×1 -GM را می‌توان به طور معادل از طریق یک نگاشت کلاف هموار به صورت $K_{1 \times 1} \otimes : \Gamma(A_{000}) \rightarrow \Gamma(A_{000})$, $f_{\text{in}} \mapsto f_{\text{out}}$ یا از طریق $f_{\text{out}}(p) := \mathcal{C}_{K_{1 \times 1}} \circ f_{\text{in}}(p)$ یا $f_{\text{out}}(p) := \sigma_{K_{1 \times 1}}(p) \circ f_{\text{in}}(p)$ تعریف کرد. بنا به تعریف، هر دو در یک پیمانه دلخواه به $f_{\text{out}}^A(p) = K_{1 \times 1} f_{\text{in}}^A(p)$ می‌شوند. استقلال از مختصات GM این تعریف با خاصیت درهم تنندگی کرتل در معادله (۲۲۴) یا، به طور معادل، معادله (۲۳۵) تضمین می‌شود. این را می‌توان با در نظر گرفتن یک بدیهی سازی متفاوت از طریق Ψ^B مشاهده کرد:

$$\begin{aligned} K_{1 \times 1} f_{\text{in}}^B(p) &= K_{1 \times 1} (\rho_{\text{in}}(g_p^{BA}) f_{\text{in}}^A(p)) \\ &= \rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) K_{1 \times 1} f_{\text{in}}^A(p) \\ &= \rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) f_{\text{out}}^A(p) \\ &= f_{\text{out}}^B(p) \end{aligned} \quad (236)$$

^{۶۱} همواری مورد نیاز مقاطع از همواری بدیهی سازی‌های محلی ناشی می‌شود.

۲.۷ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM

اکنون به سراغ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM با کرنل‌های کانولوشنی (کانولوشنی) با گستره فضایی می‌رویم. بخش ۱.۲.۷ میدان‌های کرنل عمومی و بدون قید و میدان‌های کرنل کانولوشنی GM خاص‌تر را معرفی می‌کند که بر اساس یک کرنل الگوی مشترک و G-هدايت‌پذیر تعريف می‌شوند. تبدیلات میدان کرنل عمومی و کانولوشن‌های GM در بخش ۲.۲.۷ معرفی می‌شوند. از آنجایی که هر دو به صورت سراسری تعريف شده‌اند، فرمول‌بندی آنها لزوماً مستقل از مختصات است. بخش ۳.۲.۷ هر دو عمل را نسبت به بدیهی‌سازی‌های محلی بیان می‌کند و تعاریف محلی ما را از بخش ۲.۴ بازیابی می‌کند.

۱.۲.۷ میدان‌های کرنل مستقل از مختصات و کرنل‌های G-هدايت‌پذیر

برای تشخیص الگوهای فضایی در میدان‌های ویژگی، شبکه‌های کانولوشنی از کرنل‌های با گستره فضایی استفاده می‌کنند که به صورت خطی ویژگی‌ها را از یک همسایگی محلی در اطراف هر نقطه جمع‌آوری می‌کنند. در معادله (۷۰) ما کرنل‌های الگوی (بدون قید) را برای یک منیفلد d -بعدی و میدان‌های ویژگی ورودی و خروجی با ابعاد c_{out} و c_{in} به عنوان نگاشتهای $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ تعریف کردیم که به هر نقطه از دامنه خود یک ماتریس $c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}$ اختصاص می‌دهند. تعریف کرنل‌های کانولوشن به عنوان نگاشتهایی با دامنه $\mathbb{R}^d \cong T_p M$ و همان‌های $(\mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \cong \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square}))$ یک تعریف مستقل از مختصات برای کرنل‌ها به عنوان نگاشتهایی بین فضاهای مماس و فضاهای همومورفیسم متناظر پیشنهاد می‌کند:

تعريف ۲.۷ (میدان کرنل). ما میدان‌های کرنل (بدون قید) از نوع M -مورفیسم‌های کلاف هموار بین کلاف مماس TM و کلاف همومورفیسم بردار ویژگی $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square})$ تعریف می‌کنیم. بر اساس تعریفش به عنوان یک M -مورفیسم، یک میدان کرنل \mathcal{K} باعث جابجاگری نمودار زیر می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\mathcal{K}} & \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square}) \\ & \searrow \pi_{TM} \quad \swarrow \pi_{\square\square} & \\ & M & \end{array} \quad (237)$$

با وجود نگاشت هموار بین دو کلاف برداری باشد، یعنی، فرض نمی‌شود که محدودیت‌های $\mathcal{K}_p : T_p M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square, p}, \mathcal{A}_{\square\square, p})$ یک مورفیسم کلاف برداری باشد، یعنی، فرض نمی‌شود که محدودیت‌های $\mathcal{K}_p : T_p M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square, p}, \mathcal{A}_{\square\square, p})$ با وجود نگاشت هموار بین دو کلاف برداری باشد، یعنی، فرض نمی‌شود که محدودیت‌های $\mathcal{K}_p : T_p M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square, p}, \mathcal{A}_{\square\square, p})$ باعث جابجاگری نمودار زیر می‌شود:

نام میدان کرنل از این واقعیت ناشی می‌شود که نگاشتهای کلاف تعریف شده به این شکل \mathcal{K} یک کرنل مستقل از مختصات (بالقوه متفاوت) $\mathcal{K}_p : T_p M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square, p}, \mathcal{A}_{\square\square, p})$ را به هر نقطه p از منیفلد اختصاص می‌دهند.^{۶۳} در عمل، کرنل‌های \mathcal{K}_p اغلب برای تشخیص الگوهای محلی در اطراف طراحی می‌شوند و بنابراین فرض می‌شود که در اطراف مبدأ $T_p M$ دارای تکیه‌گاه فشرده باشند.

یک کرنل مستقل از مختصات \mathcal{K}_p در p نسبت به پیمانه‌های $\psi_{TM, p}^A$ و $\psi_{\square\square, p}^A$ از G-اطلس‌ها توسط نگاشت زیر داده می‌شود:

$$\mathcal{K}_p^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}, \quad \mathcal{K}_p^A := \psi_{\square\square, p}^A \circ \mathcal{K}_p \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}. \quad (238)$$

شکل ۲۵ یک کرنل مستقل از مختصات روی $T_p M$ و مختصات‌سازی‌های آن روی \mathbb{R}^d را نسبت به پیمانه‌های مختلف به تصویر می‌کشد. از نمودار جابجاگری

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & & \mathcal{K}_p^A & & \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \\ & \nwarrow \psi_{TM, p}^A & & \nearrow \psi_{\square\square, p}^A & \\ & T_p M & \xrightarrow{\mathcal{K}_p} & \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}|_p, \mathcal{A}_{\square\square}|_p) & \\ & \downarrow \psi_{TM, p}^B & & \downarrow \psi_{\square\square, p}^B & \downarrow \rho_{\text{Hom}}(g_p^{BA}) \\ \mathbb{R}^d & & \mathcal{K}_p^B & & \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \end{array} \quad (239)$$

^{۶۳} این نشان می‌دهد که کرنل‌های کانولوشن به طور کلی به عنوان نگاشتهای $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ خطي نیستند. توجه داشته باشید که این با خطی $K(v) \in \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ (به عنوان نگاشت $\mathbb{R}^{c_{\text{in}}} \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}}}$ برای هر $v \in \mathbb{R}^{c_{\text{in}}}$ یا، در اینجا، خطی بودن $\mathcal{K}_p(v) \in \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square, p}, \mathcal{A}_{\square\square, p})$) برای هر $v \in T_p M$ تداخلی ندارد.

^{۶۴} ما انتظار داریم که بتوان یک مفهوم خوش‌تعريف از کلاف‌های کرنل را تدوین کرد که مقاطع آنها در تناقض یک به یک با تعريف ما از میدان‌های کرنل به عنوان نگاشتهای کلاف باشند (این فرمول‌بندی مجدد، گذار از معادله (۲۱۷) به معادله (۲۳۳) را منعکس می‌کند).

نتیجه می‌شود که مختصاتی‌سازی‌های مختلف کرنل با رابطه زیر به هم مرتبط هستند:

$$\mathcal{K}_p^B = \rho_{\text{Hom}}(g_p^{BA}) \circ \mathcal{K}_p^A \circ (g_p^{BA})^{-1}. \quad (240)$$

توجه داشته باشید که این رابطه فقط استقلال از مختصات GM را ایجاب می‌کند اما کرنل مستقل از مختصات را به هیچ وجه محدود نمی‌کند. مانند قبل، وضعیت با اشتراک‌گذاری وزن‌ها در موقعیت‌های مکانی تغییر می‌کند.

برای اینکه یک میدان کرنل \mathcal{K}_K متناظر با یک کانولوشن باشد، باید به طور کامل توسط یک کرنل الگوی واحد $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ مشخص شود که در تمام موقعیت‌های مکانی به اشتراک گذاشته شده است. ما دوباره مجبوریم وزن‌ها را با تمام پیمانه‌های $X \in \mathfrak{X}$ به طور همزمان به اشتراک‌گذاریم تا همارزی آنها و در نتیجه استقلال از مختصات GM را حفظ کنیم. همانطور که در بخش ۳.۲.۴ استدلال شد، روش مناسب برای اشتراک‌گذاری K با مختصاتی‌سازی‌های کرنل $\mathcal{K}_{K,p}^X$ شامل نرم‌افزاری با حجم قاب مرجع $\sqrt{|\eta_p^X|}$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{K}_{K,p}^X = \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^X|}} \quad \text{برای هر پیمانه } X \in \mathfrak{X} \quad p \in U^X. \quad (241)$$

دلیل وجود ضریب نرم‌افزاری قاب این است که کانولوشن‌ها بعداً بر حسب انتگرال روی فضاهای مماس تعریف خواهند شد. بنابراین ما در واقع ملزم به اشتراک‌گذاری خود عملگر انتگرال در مختصاتی‌سازی‌های مختلف هستیم، که معادل با شناسایی معیارهای انتگرال‌گیری ماتریسی $\sqrt{|\eta_p^X|} d\gamma$ برای هر پیمانه $X \in M$ در $p \in M$ با یک معیار الگو (v) است. شکل اشتراک‌گذاری کرنل در معادله (۲۴۱) با برابر قرار دادن هر دو عبارت به دست می‌آید.

همراه با رابطه $\sqrt{|\eta_p^A|} = |\det(g_p^{BA})| \sqrt{|\eta_p^B|}$ بین حجم‌های قاب مختلف، قانون تبدیل کرنل در معادله (۲۴۰) و اشتراک‌گذاری وزن در معادله (۲۴۱) قید کرنل G -هدایت‌پذیر را ایجاب می‌کند:

$$\frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{Hom}}(g) \circ K \circ g^{-1} = K \quad \forall g \in G. \quad (242)$$

بنابراین کرنل‌های الگوی معتبر توسط نامتغیرهای تحت عمل پیمانه همزمان $(\det g)^{-1}$ ، $\rho_{\text{Hom}}(g)$ و g^{-1} داده می‌شوند. با نوشتند نمایش ρ_{Hom} که بر روی $\mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ از طریق ضرب با ρ_{out}^{-1} به ترتیب از چپ و راست عمل می‌کند، دیده می‌شود که قید در معادله (۲۴۲) معادل با قید در معادله (۸۳) است، یعنی $K(gv) = |\det g|^{-1} \rho_{\text{out}}(g) K(v) \rho_{\text{out}}(g)^{-1} \forall g \in G, v \in \mathbb{R}^d$.

ما این بینش‌ها را در قالب تعاریف زیر بیان می‌کنیم: تعريف ۳.۷ (کرنل G -هدایت‌پذیر). کرنل‌های G -هدایت‌پذیر با نامتغیر بودنشان تحت عمل پیمانه مشخص می‌شوند. فضای برداری کرنل‌های هموار G -هدایت‌پذیر که بین انواع میدان ρ_{in} و ρ_{out} نگاشت می‌کنند، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^G := \left\{ K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \mid \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{Hom}}(g) \circ K \circ g^{-1} = K \quad \forall g \in G \right\}, \quad (243)$$

$$= \left\{ K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \mid \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{out}}(g) K(g^{-1}v) \rho_{\text{in}}(g)^{-1} = K(v) \quad \forall g \in G, v \in \mathbb{R}^d \right\}, \quad (244)$$

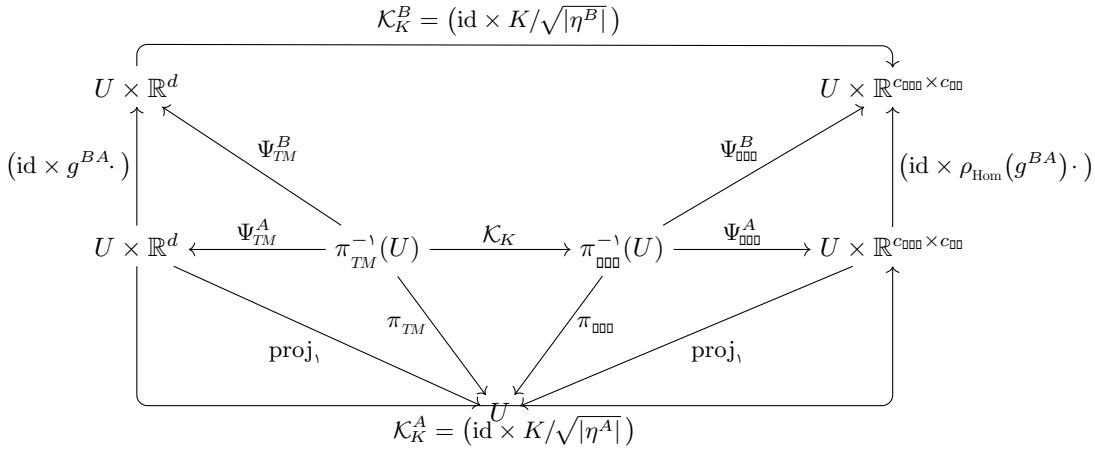
که در آن $(\det g)^{-1} \rho_{\text{out}}(g) H \rho_{\text{in}}(g) H := \rho_{\text{out}}(g) H \rho_{\text{in}}(g)$ برای هر $H \in \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ است. نامتغیر بودن پیمانه‌ای کرنل‌های G -هدایت‌پذیر امکان اشتراک‌گذاری وزن مستقل از مختصات GM را فراهم می‌کند.

کرنل‌های G -هدایت‌پذیر در [۲۸] به یادگیری عمیق همتغیر معرفی شدند، جایی که گروههای متناهی فرض شده بودند. فرمول‌بندی فعلی در تعریف ۳.۷ در [۹۱] پیشنهاد شد. یک راه حل کامل از گروههای کرنل G -هدایت‌پذیر برای نمایش‌های دلخواه ρ_{in} و ρ_{out} از گروههای ساختار (۲) در $G \leq O(2)$ استخراج شده است. یک پیاده‌سازی به صورت عمومی در https://quva-lab.github.io/e_cnn/ در دسترس است. از نظر ریاضی، کرنل‌های هدایت‌پذیر معادل با عملگرهای نمایشی مانند عملگرهای تansor کروی از مکانیک کوانتمی هستند. یک تعمیم از قضیه ویگنر-اکارت کرنل‌های G -هدایت‌پذیر را به عنوان ترکیبی از توابع پایه هارمونیک، ضرایب کلیش-گوردان و اندومورفیسم‌های نمایش‌های کاوش‌ناپذیر توصیف می‌کند [۱۰۲].

تعريف ۴.۷ (میدان کرنل کانولوشنی GM). یک میدان کرنل کانولوشنی K از نوع $\mathcal{K}_K GM$ یک میدان کرنل است که توسط یک کرنل الگوی G -هدایت‌پذیر و مشترک $\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}$ تعیین می‌شود. این میدان در پیمانه‌های دلخواه $\psi_{TM,p}^X$ و ψ_{out}^X از G -اطلس مورد نظر به صورت نقطه‌ای تعریف می‌شود:

$$\mathcal{K}_{K,p} := (\psi_{\text{out}}^X)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^X|}} \circ \psi_{TM,p}^X \quad (245)$$

همواری K از همواری پیمانه‌ها، متريک و کرنل الگو ناشی می‌شود.



شکل ۳۹: نمودار جابجایی که بدینهی سازی‌های محلی یک میدان کرنل کانولوشنی GM یعنی K_K را همانطور که در تعریف ۴.۷ تعریف شده است، نشان می‌دهد. اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی مستلزم آن است که عبارت مختصاتی میدان کرنل K_K در هر نقطه $p \in M$ در X در $p \in M$ به صورت $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{out} \times c_{in}}$ توسط کرنل الگوی مشترک $K_{K,p}^X = K / \sqrt{|\eta_p^X|}$ تعیین شود. جابجایی‌پذیری نمودار سیس قید G-هدايت‌پذيری از کرنل‌های الگو ایجاب می‌کند. ما می‌خواهیم تأکید کنیم که، با وجود شbahet به نمودار در شکل ۳۷، نمودار در این شکل باید به عنوان مشابه نمودار در شکل ۳۸ دیده شود. تفاوت بین نمودار فعلی و نمودار در شکل ۳۸ این است که نگاشتهای خطی در کلاف هومومورفیسم از طریق $\mathcal{K}_K^G : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{out}}, \mathcal{A}_{\text{out}})$ توسط یک عنصر از کلاف مماس TM به جای مقطع $\sigma_{K_{\text{out}}} : M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{out}}, \mathcal{A}_{\text{out}})$ تعیین می‌شوند.

همانند مورد 1×1 - GM ، اختیاری بودن انتخاب خاص پیمانه در معادله (۲۴۵) \square و بنابراین استقلال از مختصات GM تعریف \square با G-هدايت‌پذيری $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^G$ تعیین می‌شود. برای نشان دادن این موضوع به طور صریح، می‌توان میدان کرنل را نسبت به یک پیمانه B تعریف کرد و سپس یک تبدیل به هر پیمانه دیگر A اعمال کرد، که حذف می‌شود و بنابراین به یک عبارت معادل منجر می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_{K,p} &= (\psi_{\text{out},p}^B)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta^B|}} \circ \psi_{TM,p}^B \\
 &= (\rho_{\text{Hom}}(g_p^{BA}) \psi_{\text{out},p}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta^A|} / |\det(g_p^{BA})|} \circ (g_p^{BA} \cdot \psi_{TM,p}^A) \\
 &= (\psi_{\text{out},p}^A)^{-1} \circ \frac{|\det(g_p^{BA})| \rho_{\text{Hom}}(g_p^{BA})^{-1} \circ K \circ g_p^{BA}}{\sqrt{|\eta^A|}} \circ \psi_{TM,p}^A \\
 &= (\psi_{\text{out},p}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta^A|}} \circ \psi_{TM,p}^A
 \end{aligned} \tag{۲۴۶}$$

شکل ۳۹ یک نمای کلی از بدینهی سازی‌های محلی میدان‌های کرنل کانولوشنی GM را در قالب یک نمودار جابجایی ارائه می‌دهد.

توجه داشته باشید که قید G-هدايت‌پذيری در معادله (۲۴۴) یا (۲۴۳) هنگام ارزیابی در مبدأ \mathbb{R}^d که تحت عمل هر $g \in G$ نامتغیر است، به قید روی کرنل‌های 1×1 - GM -در معادله (۲۲۴) یا (۲۳۵) کاهش می‌باشد. بنابراین، نتایج مربوط به 1×1 - GM -که در پخش قبل استخراج شدن، به عنوان یک مورد خاص برای انتخاب کرنل‌های نقطه‌مانند دیده می‌شوند. \mathbb{M} مهچنین می‌خواهیم ذکر کنیم که قید روی کرنل‌های با گستره فضایی به طور کلی نیازی ندارد که همانه آنها به $\text{Hom}_G(\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}})$ یعنی فضای درهم‌تننده‌ها، محدود شود. برخلاف 1×1 - GM -، این به کانولوشن‌های GM با کرنل‌های با گستره فضایی اجازه می‌دهد تا بین میدان‌هایی که طبق نمایش‌های کاهش‌ناپذیر غیرایزومورف تبدیل می‌شوند، نگاشت انجام دهنند.

۲.۲.۷ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM

با تعریف هر دو میدان ویژگی و میدان کرنل، آماده معرفی تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM هستیم. آنها به صورت نقطه‌ای بر حسب عملگرهای انتگرالی تعریف می‌شوند که بردارهای ویژگی خروجی $f_{\text{out}}(p)$ را در نقاط $p \in M$ با تطبیق کرنل K_p در p با میدان ویژگی f_{in} «همانطور که از p دیده می‌شود» محاسبه می‌کنند.

^۴ برای دقیق کردن این گزاره، باید تعریف ۳.۷ را به توزیع‌های با مقدار عملگری تعمیم داد و کرنل‌های 1×1 - GM - را به عنوان دلتاهای دیراک با مقدار عملگری تعریف کرد. ما در اینجا برای اختصار از این تعمیم صرف نظر می‌کنیم.

نمایش محلی یک میدان ورودی «همانطور که از p دیده می‌شود» به طور رسمی توسط پول‌بک منتقل‌کننده آن داده می‌شود که در شکل ۲۴ به تصویر کشیده شده است. این به عنوان پول‌بک معمول از \tilde{M} به TM از طریق نگاشت نمایی ریمانی تعریف می‌شود^{۶۵} با کاربرد اضافی یک منتقل‌کننده موازی (معادله (۲۱۲))، که برای بیان ویژگی‌های پول‌بک شده در $\mathcal{A}_{\text{exp}(v)}$ به عنوان ویژگی در $\mathcal{A}_{\text{exp}(v)}$ ضروری است. با نشان دادن این منتقل‌کننده موازی در امتداد مسیر ژئودزیک $\gamma_v(t) = \exp(v)(1-t)$ بین $\gamma_v(0) = \exp(v)$ و $\gamma_v(1) = \exp(v)$ با:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}, p \leftarrow \exp(v)} : \mathcal{A}_{\exp(v)} \rightarrow \mathcal{A}_p, \quad (247)$$

ما نمایش‌های میدان ویژگی پول‌بک شده را روی فضاهای مماس به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
تعریف ۵.۷ (پول‌بک منتقل‌کننده میدان ویژگی به TM). با داشتن یک میدان ویژگی $(\mathcal{A}, f) \in \Gamma(\mathcal{A})$ ، ما نمایش (زاد) آن را روی کلاف مماس به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{Exp}^*f : TM \rightarrow \mathcal{A}, \quad v \mapsto \mathcal{P}_{\mathcal{A}, \pi_{TM}(v) \leftarrow \exp(v)} \circ f \circ \exp(v). \quad (248)$$

نگاشت نمایی ریمانی \exp در اینجا متناظر با اتصال لوی-چیویتا است، در حالی که منتقل‌کننده $\mathcal{P}_{\mathcal{A}, \pi_{TM}(v) \leftarrow \exp(v)}$ به یک اتصال G -سازگار متکی است؛ به بخش‌های ۳.۳ و ۵.۶ مراجعه کنید.
از ساختار مشخص است که $\text{Exp}^*f(v) \in \mathcal{A}_p$ برای هر $v \in T_p M$ یک M -مورفیسم کلاف است که نمودار جابجایی زیر را برآورده می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\text{Exp}^*f} & \mathcal{A} \\ \pi_{TM} \searrow & & \swarrow \pi_{\mathcal{A}} \\ & M & \end{array} \quad (249)$$

با وجود نگاشت هموار بین دو کلاف برداری، فرض نمی‌شود که Exp^*f یک مورفیسم کلاف برداری باشد، یعنی، محدودیت‌های $\text{Exp}_p^*f : T_p M \rightarrow \mathcal{A}_p$ معقولاً خطا نیستند.

محدودیت $\text{Exp}_p^*f := \text{Exp}^*f|_{T_p M}$ دامنه پول‌بک منتقل‌کننده به $T_p M$ میدان ویژگی را از دیدگاه یک ناظر در p همانطور که در شکل ۲۴ نشان داده شده است، ثابت می‌کند. توجه داشته باشید که این تعریف شیوه‌بهی یک نمایش محلی از میدان ویژگی بر حسب مختصات نرمال ژئودزیک است، با این تفاوت که به شعاع یکنواخت نگاشت نمایی محدود نمی‌شود.^{۶۶} ما همچنین می‌خواهیم ذکر کنیم که منتقل‌کننده ممکن است با هر ایزومورفیسم دیگری بین $\mathcal{A}_{\text{exp}(v)}$ و \mathcal{A}_p جایگزین شود، همانطور که به عنوان مثال در [۱۶۸] انجام شده است.

همانطور که قبلاً بیان شد، تبدیلات میدان کرنل و کانون‌لوشن‌های GM به عنوان تطبیق نمایش‌های میدان ویژگی محلی روی فضاهای مماس با کرنل‌ها تعریف می‌شوند. در راستای این تعاریف، توجه داشته باشید که M -مورفیسم‌های کلاف کرنل‌ها $TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{exp}}, \mathcal{A}_{\text{exp}})$ و $\mathcal{K} : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{exp}}, \mathcal{A}_{\text{exp}})$ را می‌توان برای ایجاد یک M -مورفیسم (غیرخطی) دیگر از TM به \mathcal{A}_{exp} ترکیب کرد،

$$\begin{array}{ccccc} TM & \xrightarrow{\mathcal{K} \times \text{Exp}^*f_{\text{fin}}} & \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{exp}}, \mathcal{A}_{\text{exp}}) \times \mathcal{A}_{\text{exp}} & \xrightarrow{\text{ev}} & \mathcal{A}_{\text{exp}} \\ & \searrow \pi_{TM} & & \nearrow \pi_{\mathcal{A}_{\text{exp}}} & \\ & & M & & \end{array}, \quad (250)$$

که در آن $(\mathcal{K}(v), \text{Exp}^*f_{\text{fin}}(v)) \mapsto \mathcal{K}(v)$ نگاشت ارزیابی روی \mathcal{A}_{exp} است. تبدیلات میدان کرنل بردارهای ویژگی خروجی را در p با انتگرال‌گیری از این حاصل‌ضرب کرنل‌ها و میدان‌های ورودی روی فضای مماس مربوطه $T_p M$ محاسبه می‌کنند:

تعریف ۶.۷ (تبدیل میدان کرنل). فرض کنید \mathcal{K} یک تبدیل میدان کرنل متناظر، یک تبدیل انتگرالی هموار است

$$\mathcal{T}_{\mathcal{K}} : \Gamma(\mathcal{A}_{\text{exp}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\text{exp}}) \quad (251)$$

^{۶۵} ما نگاشت نمایی را روی کل کلاف مماس به صورت $(v) \mapsto \text{exp}_{\pi_{TM}(v)}$ تعریف می‌کنیم. به یاد بیاورید که ما فرض کردیم منیفلد از نظر ژئودزیکی کامل است، به طوری که نگاشت نمایی روی کل کلاف مماس خوش‌تعریف است (و اگر این فرض برقرار نباشد به صفر-پوشانی متولس می‌شود).

^{۶۶} بنابراین هر بردار ویژگی $f(q)$ ممکن است چندین بار در همان فضای مماس $T_p M$ نمایش داده شود، یک بار برای هر $v \in T_p M$ با $\text{exp}(v) = q$ و اگر این مطلوب نباشد، می‌توان تکیه‌گاه کرنل را به شعاع یکنواخت نگاشت نمایی محدود کرد، به طوری که فقط نزدیکترین رخداد از نظر ژئودزیکی اندازه‌گیری شود.

که به صورت نقطه‌ای تعریف می‌شود:^{۶۷}

$$[\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f_{\text{in}})](p) := \int_{T_p M} \mathcal{K}(v) \text{Exp}^* f_{\text{in}}(v) dv = \int_{T_p M} \mathcal{K}(v) \mathcal{P}_{A_{\text{in}}, p \leftarrow \exp_p v} f_{\text{in}}(\exp_p v) dv. \quad (252)$$

برای خوش‌معرفی بودن، انتگرال باید وجود داشته باشد و میدان خروجی حاصل $(f) \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ باید هموار باشد. این مستلزم آن است که \mathcal{K} به طور مناسب انتخاب شود، به عنوان مثال، با فرض اینکه به سرعت کاهش یابد یا دارای تکیه‌گاه فشرده باشد.

توجه داشته باشید که تبدیلات میدان کرنل عمومی لزوماً کانولوشن‌ها را مدل نمی‌کنند زیرا فرض نمی‌کنند که وزن‌ها (کرنل‌ها) بین موقعیت‌های مکانی به اشتراک گذاشته شوند. چنین تبدیلات میدان کرنل عمومی در بخش ۸ مفید خواهد بود، جایی که ما یک الزام برای اشتراک‌گذاری وزن مکانی را از الزام به همتغیری ایزومنتریک استخراج می‌کنیم.

پیوست ج وجود و همواری تبدیلات میدان کرنل را مورد بحث قرار می‌دهد. یک شرط کافی برای خوش‌معرفی بودن تبدیلات میدان کرنل، محدود کردن تکیه‌گاه‌های کرنل به گویی‌هایی با شاعع ثابت $> R$ است:

قضیه ۷.۷ (وجود تبدیل میدان کرنل برای کرنل‌های با تکیه‌گاه فشرده). فرض کنید \mathcal{K} یک میدان کرنل باشد که کرنل‌های منفرد آن \mathcal{K}_p در هر $p \in M$ (حداکثر) روی یک گویی بسته با شاعع $> R$ در اطراف مبدأ $T_p M$ تکیه‌گاه دارند، یعنی

$$\text{supp}(\mathcal{K}_p) \subseteq \{v \in T_p M \mid \|v\| \leq R\} \quad \forall p \in M. \quad (253)$$

سپس تضمین می‌شود که تبدیل میدان کرنل متناظر $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ خوش‌معرفی است، یعنی انتگرال در معادله (۲۵۲) وجود دارد و میدان خروجی $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f) \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{out}})$ برای هر میدان ورودی هموار است.

اثبات: به پیوست‌های ج و ج ۱ مراجعه کنید. \square

الزام به محدود کردن تکیه‌گاه کرنل به یک گویی بسته با شاعع معین، یک رویه معمول در یادگیری عمیق است. با این حال، توجه داشته باشید که یک کرنل با تکیه‌گاه فشرده با کانولوشن‌های همتغیر نسبت به مقیاس در تضاد است، که طبق قیود کرنل G -هدايت‌پذیر مربوطه، به کرنل‌هایی با گستره بی‌نهایت نیاز دارند. پیاده‌سازی‌های فعلی کانولوشن‌های همتغیر نسبت به مقیاس معمولاً فضاهای کرنل همتغیر نسبت به مقیاس را با محدود کردن تکیه‌گاه آنها تقریب می‌زنند [۱۱۶، ۱۹۹، ۲۱۳، ۶، ۶۲، ۱۳۱، ۱۶۹] و بنابراین تحت پوشش قضیه ۷.۷ قرار می‌گیرند.

بر اساس تبدیلات میدان کرنل عمومی، ما کانولوشن‌های GM مستقل از مختصات را با افزودن فرض اشتراک‌گذاری وزن مکانی تعریف می‌کنیم، یعنی با فرض میدان‌های کرنل کانولوشنی GM :

تعريف ۸.۷ (کانولوشن GM). فرض کنید \mathcal{A}_{in} و \mathcal{A}_{out} کلاف‌های بردار ویژگی G -الحقی با انواع ρ_{in} و ρ_{out} باشند. ما کانولوشن GM را با یک کرنل G -هدايت‌پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^G$ به عنوان تبدیل میدان کرنل با میدان کرنل کانولوشنی GM متناظر \mathcal{K}_K تعریف می‌کنیم:

$$K \star : \Gamma(\mathcal{A}_{\text{in}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\text{out}}), \quad f_{\text{in}} \mapsto K \star f_{\text{in}} := \mathcal{T}_{\mathcal{K}_K}(f_{\text{in}}) = \int_{T_p M} \mathcal{K}_K(v) \text{Exp}^* f_{\text{in}}(v) dv \quad (254)$$

از آنجایی که کانولوشن‌های GM هیچ قاب مرجعی را در G -ساختار ترجیح نمی‌دهند، تضمین می‌شود که استنتاج خود را بر روی تمام «وضعیت‌های الگوهایی» که با عمل گروه ساختار G مرتبط هستند، تعیین مدهند؛ به معادله (۸۹) و شکل ۲۶ مراجعه کنید.

۳.۲.۷ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM در مختصات محلی

آنچه باقی مانده است این است که نشان دهیم تعاریف مستقل از مختصات پول‌بک‌های منتقل‌کننده، تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM که در این بخش معرفی شدند، هنگام بیان نسبت به یک بدیهی‌سازی محلی، به عبارات مختصاتی از بخش ۲.۴ کاهش می‌یابند.

عبارت مختصاتی محلی پول‌بک منتقل‌کننده f^* Exp از یک میدان ویژگی f ، طبق معمول، با پیش- و پس-ترکیب آن با بدیهی‌سازی‌های محلی کلاف‌های متناظر تعریف می‌شود، یعنی:

$$\begin{aligned} [\text{Exp}^* f]^A : U \times \mathbb{R}^d &\rightarrow U \times \mathbb{R}^c, \quad (p, v) \mapsto \Psi_A^A \circ \text{Exp}^* f \circ (\Psi_{TM}^A)^{-1}(p, v) \\ &= (p, \psi_{A,p}^A \circ \text{Exp}_p^* f \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(v)) \end{aligned} \quad (255)$$

از این تعریف دیده می‌شود که تبدیلات پیمانه محلی در $p \in M$ به صورت زیر داده می‌شوند:

$$[\text{Exp}_p^* f]^B = \rho(g_p^{BA}) \circ [\text{Exp}_p^* f]^A \circ (g_p^{BA})^{-1}. \quad (256)$$

^{۶۷} انتگرال‌گیری روی $T_p M$ از طریق چگالی حجم ریمانی dv در پیوست پ بحث شده است.

ما این عبارات مختصاتی را در قالب یک نمودار جابجایی به تصویر می‌کشیم، که بسیار شبیه به نمودار بدینه‌سازی‌های محلی میدان‌های کرنل در شکل ۳۹ است:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & [\text{Exp}^* f]^B & & \\
 & \swarrow \Psi_{TM}^B & & \searrow \Psi_A^B & \\
 U \times \mathbb{R}^d & & & & U \times \mathbb{R}^c \\
 (\text{id} \times g^{BA}) & & & & (\text{id} \times \rho(g^{BA})) \\
 & \downarrow \Psi_{TM}^A & & \downarrow \Psi_A^A & \\
 U \times \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\pi_{TM}^{-1}(U)} & \xrightarrow{\text{Exp}^* f} & \xrightarrow{\pi_A^{-1}(U)} & U \times \mathbb{R}^c \\
 & \searrow \pi_{TM} & & \swarrow \pi_A & \\
 & & U & & \\
 & \text{proj}_1 & & \text{proj}_1 & \\
 & & [\text{Exp}^* f]^A & &
 \end{array} \quad (257)$$

برای پیاده‌سازی، مفید است که عبارت مختصاتی پول‌بک منتقل کننده را به اجزای منفرد آن، یعنی منتقل کننده f ، میدان و یزگی ρ نگاشت نمایی \exp تجزیه کنیم. این کار با بسط دادن آن با یک همانی به شکل $\text{id}_{\mathcal{A}_{\exp(v)}} = (\psi_{\mathcal{A}, \exp(v)}^{\tilde{A}})^{-1} \circ \psi_{\mathcal{A}, \exp(v)}^{\tilde{A}}$ انجام می‌شود، که در آن انتخاب پیمانه \tilde{A} در $\exp(v)$ بی‌اهمیت است زیرا در نهایت حذف می‌شود:

$$\begin{aligned}
 [\text{Exp}_p^* f]^A(v) &= [\psi_{\mathcal{A}, p}^A \circ \text{Exp}_p^* f \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}](v) \\
 &= \psi_{\mathcal{A}, p}^A \circ \mathcal{P}_{\mathcal{A}, p \leftarrow \exp(v)} \circ f(\exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v)) \\
 &= \psi_{\mathcal{A}, p}^A \circ \mathcal{P}_{\mathcal{A}, p \leftarrow \exp(v)} \circ (\psi_{\mathcal{A}, \exp(v)}^{\tilde{A}_v})^{-1} \circ \psi_{\mathcal{A}, \exp(v)}^{\tilde{A}_v} \circ f(\exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v)) \\
 &= \rho(g_{p \leftarrow \exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v)}^{A \tilde{A}}) \cdot f^{\tilde{A}}(\exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v))
 \end{aligned} \quad (258)$$

همانطور که انتظار می‌رفت، ما تعریف خود را از معادله (۶۷) در بخش ۱.۲.۴ بازیابی می‌کنیم، که تأیید می‌کند تعریف ۵.۷ در واقع همتای مستقل از مختصات آن است.

عبارت مختصاتی یک تبدیل میدان کرنل، که با معادله (۷۶) در بخش ۱.۲.۴ منطبق است، توسط قضیه زیر داده می‌شود: قضیه ۹.۷ (تبدیل میدان کرنل در مختصات). نسبت به یک پیمانه $A \in U^A$ در $p \in T_p M$ تبدیل میدان کرنل با عبارت مختصاتی زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f_{\text{in}})]^A(p) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) [\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) \rho(g_{p \leftarrow \exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v^A)}^{A \tilde{A}}) \cdot f_{\text{in}}^{\tilde{A}}(\exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v^A)) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A,
 \end{aligned} \quad (259)$$

که در آن پیمانه‌های \tilde{A} در $\exp(v)$ به طور دلخواه انتخاب می‌شوند زیرا حذف می‌شوند.^{۶۸}

^{۶۸} توجه داشته باشید که پیمانه‌ها در $\exp(v)$ ممکن است برای $v \in T_p M$ مختلف متفاوت باشند و باید به طور صحیح‌تر با v برچسب‌گذاری شوند. ما برای اختصار از این واپسگی چشیده‌نشانی می‌کنیم.

اثبات: عبارت اول با یک محاسبه ساده که تمام مقادیر درگیر را به عبارات مختصاتی متناظرشان ترجمه می‌کند، استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned}
& [\mathcal{T}_K(f_{\text{in}})]^A(p) \\
& \stackrel{(1)}{=} \psi_{A_{\text{out}}, p}^A [\mathcal{T}_K(f_{\text{in}})](p) \\
& \stackrel{(2)}{=} \psi_{A_{\text{out}}, p}^A \int_{T_p M} \mathcal{K}_p(v) [\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}](v) dv \\
& \stackrel{(3)}{=} \psi_{A_{\text{out}}, p}^A \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p((\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v^A)) [\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]((\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v^A)) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\
& \stackrel{(4)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} [\psi_{A_{\text{out}}, p}^A \circ \mathcal{K}_p((\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v^A)) \circ (\psi_{A_{\text{out}}, p}^A)^{-1}] [\psi_{A_{\text{out}}, p}^A \circ [\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}] \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}](v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\
& \stackrel{(5)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} [\psi_{A_{\text{out}}, p}^A \circ \mathcal{K}_p \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}](v^A) [\psi_{A_{\text{out}}, p}^A \circ [\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}] \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}](v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\
& \stackrel{(6)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) [\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A
\end{aligned} \tag{۲۶۰}$$

مرحله (۱) بردار ویژگی خروجی در p را به طور صریح بر حسب پیمانه $\psi_{A_{\text{out}}, p}^A$ بیان می‌کند که بر روی تبدیل میدان کرنل مستقل از مختصات عمل می‌کند. این عبارت مستقل از مختصات در مرحله (۲) همانطور که در تعریف ۶.۷ تعریف شده است، بسط داده می‌شود. مرحله (۳) انتگرال روی $T_p M$ را از طریق پیمانه انتخاب شده به \mathbb{R}^d بازمی‌گرداند، که با جزویت‌بیشتر در پیوست پ توصیف شده است. مرحله (۴) یک نگاشت همانی به شکل $\psi_{A_{\text{out}}, p}^A \circ \psi_{A_{\text{out}}, p}^A = \text{id}$ را وارد می‌کند و $\psi_{A_{\text{out}}, p}^A$ را به داخل انتگرال می‌برد در حالی که مرحله (۵) تعریف $\psi_{A_{\text{out}}, p}^A$ را از معادله (۲۳۱) شناسایی می‌کند. در نهایت، ما عبارات مختصاتی \mathcal{K}_p و $\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}$ را از معادلات (۲۳۸) و (۲۵۵) شناسایی می‌کنیم.

□ عبارت دوم از عبارت اول با بسط دادن عبارت مختصاتی پول‌بک منتقل‌کننده طبق معادله (۲۵۸) به دست می‌آید.

عبارت مختصاتی برای کانولوشن‌های GM مستقل از مختصات بلافضله به دست می‌آید: قضیه ۱۰.۷ (کانولوشن‌های GM در مختصات). یک کانولوشن GM مستقل از مختصات $(\mathcal{A}_{\text{out}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\text{out}})$ با یک کرنل $K \star$ در $\mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^G$ -هدایت‌پذیر $A \in U^A$ در $p \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^G$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$[K \star f]^A(p) = [\mathcal{T}_{K_K}(f)]^A(p) = \int_{\mathbb{R}^d} K(v^A) [\text{Exp}_p^* f]^A(v^A) dv^A, \tag{۲۶۱}$$

يعني، با عبارت مختصاتی که در معادله (۸۷) معرفی شد. این عبارت ممکن است همانطور که برای تبدیلات میدان کرنل عمومی در معادله (۲۵۹) انجام شد، بیشتر بسط داده شود.

اثبات: نتیجه از قضیه ۹.۷ با مشاهده اینکه کانولوشن GM مستقل از مختصات \star فقط یک تبدیل میدان کرنل کانولوشنی GM متناظر \mathcal{K}_K است، به دست می‌آید؛ به تعریف ۸.۷ مراجعه کنید. به طور خاص، عبارت مختصاتی یک میدان کرنل کانولوشنی GM یعنی \mathcal{K}_K طبق تعریف ۴.۷ G -هدایت‌پذیر N رتمال شده با حجم قاب داده می‌شود، یعنی $\mathcal{K}_{K,p}^A = K / \sqrt{|\eta_p^A|}$. جایگذاری این همانی در معادله (۲۵۹) به عبارت مختصاتی ادعا شده برای کانولوشن‌های GM منجر می‌شود. □

این نتیجه اطمینان می‌دهد که یک کانولوشن GM سراسری و مستقل از مختصات می‌تواند بر حسب عبارات مختصاتی محلی آن نسبت به یک اطلس از بدیهی‌سازی‌های محلی که M را می‌پوشاند، پیاده‌سازی شود.

۸ هم‌متغیری ایزومتری

یک ویژگی اصلی عمل کانولوشن و تعمیم‌های مختلف آن، هم‌متغیری آنها نسبت به تقارن‌های منیفلد زیربنایی است. به عنوان مثال، کانولوشن مرسوم در فضاهای اقلیدسی نسبت به انتقال هم‌متغیر است در حالی که کانولوشن‌های کروی نسبت به دوران هم‌متغیر هستند. به طور کلی، تر،

هر گروه فشرده موضعی و فضاهای همگن آنها، کانولوشن‌های گروهی را می‌پذیرند [۶۱، ۶۷، ۹۸، ۲۵]. اکنون فضاهایی مورد توجه قرار گرفته‌اند [۲۷، ۳۱، ۹۶]. با این حال، از آنجایی که این رویکردها اساساً به تقارن‌های سراسری و تعدی پذیر فضای همگن متنکی هستند، بالاصله برای منیفلدهای ریمانی عمومی قابل اعمال نیستند.

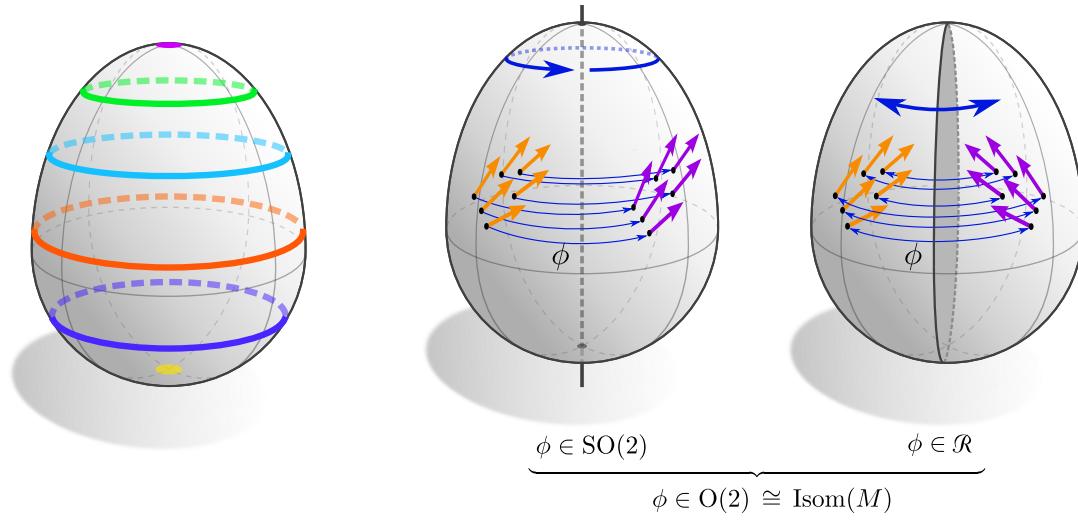
از سوی دیگر، کانولوشن‌های GM تمرکز را از تقارن‌های سراسری خود فضا به تقارن‌های محلی در مختصاتی‌سازی فضا منتقل می‌کنند. همانطور که مشخص می‌شود، هم‌متغیری پیمانه محلی کانولوشن‌های GM ، همراه با اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی، هم‌متغیری آنها را تحت عمل تقارن‌های سراسری القا می‌کند. به بیان دقیق‌تر، کانولوشن‌های GM تحت عمل ایزو‌متری‌های حافظه-ساختار (تعريف ۱.۸) هم‌متغیر هستند، که زیرگروهی $\text{Isom}_{GM} \leq \text{Isom}(M)$ از گروه کامل ایزو‌متری را تشکیل می‌دهند. الزام به اینکه تقارن یک ایزو‌متری باشد (یعنی متريک را حفظ کند) در اینجا از استفاده از نگاشت‌های نمایی ناشی می‌شود، که به اتصال لوی-چیویتا و در نتیجه به متريک ریمانی متنکی هستند. الزام اضافی بر این ایزو‌متری‌ها برای حافظه-ساختار، نتیجه تعريف کلاف‌های G -الحاقی است، که عناصر آنها تنها نسبت به آن قاب‌های مرجعی که در GM قرار دارند، معنای خوش‌تعريفی دارند. توجه داشته باشید که مورد دوم واقعاً یک محدودیت نیست، زیرا همیشه می‌توان گروه‌های ساختار $O(d) \geq G$ را انتخاب کرد، که برای آنها هر ایزو‌متری به G -ساختار متناظر احترام می‌گذارد. بر عکس، این طراحی امکان کنترل دقیق سطح هم‌متغیری ایزو‌متری را فراهم می‌کند. به عنوان مثال، کانولوشن مرسمون در فضاهای برداری اقلیدسی به $\{e\}$ -ساختار \mathbb{R}^d متنکی است که در شکل ۱۴۲ به تصویر کشیده شده است، و بنابراین تنها نسبت به انتقال هم‌متغیر است. یک $SO(d)$ -ساختار روی \mathbb{R}^d که در شکل ۱۴۳ به تصویر کشیده شده است، علاوه بر این توسط دوران‌ها نیز حفظ می‌شود، و بنابراین متناظر با کانولوشن‌های (d) -SE-هم‌متغیر است. هم‌متغیری تحت گروه کامل ایزو‌متری $E(d)$ از \mathbb{R}^d -O-ساختار روی \mathbb{R}^d ایجاب می‌شود.

۱.۸	ایزو‌متری‌ها و عمل آنها بر منیفلدها، کلاف‌ها و میدان‌ها
۱۰۰	
۱.۱۸	گروه‌های ایزو‌متری
۱۰۰	
۲.۱۸	عمل ایزو‌متری بر روی کلاف‌های تاری
۱۰۱	
۳.۱۸	عمل ایزو‌متری در مختصات محلی
۱۰۶	
۴.۱۸	جابجایی‌پذیری اعمال ایزو‌متری با نگاشت‌نمایی و منتقل‌کنندگان
۱۱۰	
۲.۸	هم‌متغیری ایزو‌متری تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM
۱۱۲	
۱.۲۸	هم‌متغیری ایزو‌متری تبدیلات میدان کرنل عمومی
۱۱۲	
۲.۲۸	هم‌متغیری ایزو‌متری کانولوشن‌های GM
۱۱۵	
۳.۸	میدان‌های کرنل خارج‌قسمتی
۱۱۷	
۱.۳۸	فضاهای خارج‌قسمتی القا شده از ایزو‌متری
۱۱۷	
۲.۳۸	میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی و قیود پایدارساز
۱۲۰	

هدف این بخش استخراج قضایایی است که به طور رسمی هم‌متغیری ایزو‌متری کانولوشن‌های GM و تبدیلات میدان کرنل را مشخص می‌کند. بخش ۱.۸ با معرفی گروه‌های ایزو‌متری منیفلدهای ریمانی و بحث در مورد طیفی از روابط و ساختارهای شناخته‌شده‌ای که آنها القا می‌کنند، پایه‌های این تحقیق را بنا می‌نهاد. به طور خاص، بخش ۱.۱.۸ ایزو‌متری‌ها و گروه‌های ایزو‌متری را معرفی می‌کند در حالی که بخش ۲.۱.۸ عمل الایافی آنها («پیش‌ران‌ها») را بر روی کلاف‌های الحاقی در یک محیط مستقل از مختصات تعريف می‌کند. در بخش ۳.۱.۸ ما این اعمال روی کلاف‌ها را نسبت به بدیهی‌سازی‌های محلی بیان می‌کنیم و تفسیر غیرفعال آنها را به عنوان تبدیلات پیمانه القا شده از ایزو‌متری، که در شکل‌های ۱۲ (راست) و ۲۳ به تصویر کشیده شده‌اند، مورد بحث قرار می‌دهیم. بخش ۴.۱.۸ به طور خلاصه بیان می‌کند که مقادیر در گیر در تبدیلات میدان کرنل تحت عمل ایزو‌متری‌ها چگونه رفتار می‌کنند.

بر اساس این ویژگی‌ها، ما هم‌متغیری ایزو‌متری تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM را در بخش ۲.۸ مطالعه می‌کنیم. پس از تعريف رسمی عبارت «هم‌متغیری ایزو‌متری»، بخش ۱.۲.۸ یک نتیجه مرکزی را اثبات می‌کند که تأکید می‌کند تقاضا برای هم‌متغیری ایزو‌متری مستلزم نامتفاوت بودن میدان کرنل تحت ایزو‌متری‌ها است؛ به شکل ۴۵ مراجعه کنید. بخش ۲.۲.۸ کانولوشن‌های خاص‌تر GM را در نظر می‌گیرد و اثبات می‌کند که آنها بنا به طراحی، تحت هر ایزو‌متری که G -ساختار را حفظ می‌کند، هم‌متغیر هستند. این نتیجه به طور خاص ایجاب می‌کند که کانولوشن‌های OM نسبت به هر ایزو‌متری هم‌متغیر هستند.

قید نامتفاوت بودن بر روی میدان‌های کرنل ایجاد می‌کند که آنها وزن‌ها را بر روی مدارهای گروه ایزو‌متری به اشتراک بگذارند. این نشان می‌دهد که میدان‌های کرنل نامتفاوت را می‌توان به طور معادل با کرنل‌های نماینده روی نمایندگان مدار توصیف کرد، که ما آن را در بخش ۳.۸ رسمی می‌کنیم. بخش ۱.۳.۸ فضاهای خارج‌قسمتی القا شده از ایزو‌متری و نمایندگان آنها را مورد بحث قرار می‌دهد. در بخش ۲.۳.۸ ما از این تعاریف ریاضی برای اثبات این موضوع استفاده می‌کنیم که فضای میدان‌های کرنل نامتفاوت نسبت به ایزو‌متری در واقع با میدان‌های کرنل روی نمایندگان خارج‌قسمتی ایزو‌مروف است. این به طور خاص ایجاد می‌کند که تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزو‌متری در فضاهای همگن لزومناً کانولوشن هستند، که حلقه را به کارهای پیشین متصل می‌کند.



(ب) مدارهای گروه ایزومتری.

(ا) عمل زیرگروه‌های مختلف گروه ایزومتری بر روی میدان‌ها.

شکل ۴.۴۰: تصاویری از گروه ایزومتری $\text{Isom}(M) \cong \text{O}(2)$ که در سراسر این بخش برای نمونه‌سازی مفاهیم و ساختارهای مختلف مربوط به ایزومتری‌ها از آن استفاده خواهیم کرد. شکل ۱۴۰ عمل گروه ایزومتری را بر روی میدان‌های برداری (مماضی یا ویژگی) نشان می‌دهد. می‌توان آن را متشکل از زیرگروه‌های دوران‌ها در $\text{SO}(2)$ و بازتاب‌ها در \mathcal{R} در نظر گرفت. عمل گروه ایزومتری، تخم مرغ را به مدارهای $\{\phi(p) | \phi \in \text{Isom}(M)\}$ از نقاط $p \in M$ افزایش می‌کند که در شکل ۴۰ ب با رنگ‌های مختلف نشان داده شده‌اند. توجه داشته باشید که همه مدارها با یکدیگر همسان‌ریخت نیستند - مدارهای قطب‌ها نقاط منفرد هستند در حالی که هر مدار دیگر یک دایره را در اطراف تخم مرغ ترسیم می‌کند. گروه ایزومتری تخم مرغ به صورت غیرتعددی پذیر بر روی آن عمل می‌کند، یعنی نمی‌توان از هر نقطه‌ای به هر نقطه دیگر رسید. یک تبدیل میدان کرnel زمانی هم‌متغیر نسبت به ایزومتری است که با عمل ایزومتری بر روی میدان‌های ویژگی جایجا شود. ما نشان می‌دهیم که هم‌متغیر ایزومتری تنها و تنها در صورتی تضمین می‌شود که میدان کرnel تحت عمل ایزومتری‌ها نامتغیر باشد. این به طور خاص ایجاب می‌کند که هم‌متغیر ایزومتری ایزومتری اشتراک‌گذاری وزن در امتداد مدارهای ایزومتری است؛ به شکل ۴۵ مراجعه کنید.

۱.۸ ایزومتری‌ها و عمل آنها بر منیفلدها، کلاف‌ها و میدان‌ها

در این بخش، ما بیشتر مفاهیم ریاضی مورد نیاز برای مطالعه هم‌متغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرnel و کاتولوشن‌های GM را معرفی می‌کنیم. پس از تعریف ایزومتری‌ها در بخش ۲۱.۸، در بخش ۲۱.۸ بحث می‌کنیم که چگونه آنها اعمال طبیعی را بر روی بردارهای مماضی و قابلهای مرتع القا می‌کنند. برای گروه‌های ساختار $O(d) < G$ ، هر ایزومتری با هر G -ساختاری سازگار نیست. ما زیرگروه $\text{Isom}_{GM} \leq \text{Isom}(M)$ از آن ایزومتری‌هایی را تعریف می‌کنیم که بر روی یک G -ساختار GM و کلاف‌های ویژگی G -الحقیقی آن عمل می‌کنند (خودریختی‌هایی را القا می‌کنند). در حالی که این ساختارها مستقل از مختصات نگه داشته‌ی شوند، بخش ۳.۱.۸ عمل ایزومتری‌ها را بر روی کلاف‌های تاری نسبت به بدیهی‌سازی‌های محلی کلاف‌بیان می‌کند. به عنوان مقدمه‌ای برای بررسی تبدیلات میدان کرnel هم‌متغیر نسبت به ایزومتری در ادامه، بخش ۴.۱.۸ بحث می‌کند که چگونه ایزومتری‌ها با نگاشت نهایی و با منتقل کننده‌های موازی جایجا می‌شوند، که به ما اجازه می‌دهد تا نحوه عمل ایزومتری‌ها را بر روی یک پول‌بک منتقل کننده f^* Exp_p^* میدان‌های ویژگی f استخراج کنیم. در حالی که عمدتاً ریاضی باقی می‌مانیم، سعی می‌کنیم تا حد امکان ارتباطاتی با کاربرد برقرار کنیم.

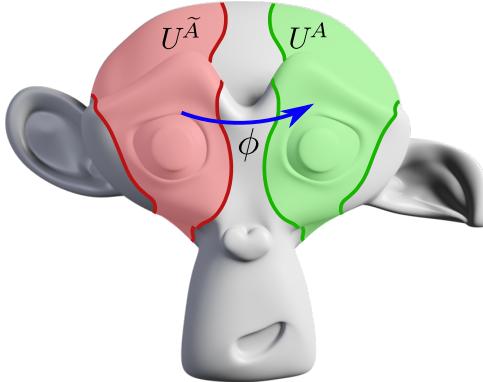
۱.۱۸ گروه‌های ایزومتری

یک ایزومتری (سراسری) $M \rightarrow \hat{M}$: ϕ یک دیفئومورفیسم بین منیفلدهای ریمانی (M, η) و $(\hat{M}, \hat{\eta})$ است که متریک را حفظ می‌کند. بر حسب پیش‌ران (دیفرانسیل) $TM \rightarrow T\hat{M}$: $\phi_{*,TM}$ بردارهای مماضی، که در پیوست ۲۰ در بخش ۲.۱.۸ در زیر معرفی می‌کنیم، این گزاره با الازم به اینکه ایزومتری‌ها برآورده کنند، دقیق می‌شود:

$$\eta_p(v, w) = \hat{\eta}_{\phi(p)}(\phi_{*,TM}v, \phi_{*,TM}w) \quad \forall p \in M, v, w \in T_p M, \quad (262)$$

يعنى، آنها فاصله‌ها و زوایا بین بردارهای مماضی را حفظ می‌کنند. به طور شهودی، یک ایزومتری به عنوان یک نگاشت حافظ فاصله بین منیفلدها در نظر گرفته می‌شود. توجه داشته باشید که معکوس یک ایزومتری لزوماً یک ایزومتری نیز هست. از انجایی که ایزومتری‌ها (و معکوس‌هایشان) به متریک احترام می‌گذارند، آنها ایزومورفیسم‌ها در رده منیفلدهای ریمانی را تشکیل می‌دهند.

مجموعه تمام ایزومتری‌های $M \rightarrow M$: ϕ از یک منیفلد ریمانی به خودش، که با ترکیب معمول توابع $\phi_1 \circ \phi_2 \mapsto \phi_1 \circ \phi_2$: \circ مجهر شده است، یک گروه را تعریف می‌کند که به عنوان گروه ایزومتری $\text{Isom}(M)$ از M شناخته می‌شود. این گروه، گروه خودریختی یک منیفلد ریمانی است که شامل تمام «تقارن‌های» (متریکی) آن است. این یک زیرگروه از گروه دیفئومورفیسم $\text{Diff}(M)$ از M است. گروه کامل ایزومتری ممکن است زیرگروه‌های غیربدیهی داشته باشد، که ما در ادامه با $\mathcal{I} \leq \text{Isom}(M)$ نشان خواهیم داد. یک مثال در شکل ۴۰ آورده شده است،



شکل ۴۱: یک منیفلد نامتقارن، که گروه ایزومتری سراسری آن بدینهی است. از آنجایی که عدم تقارن به گوش‌ها و دهان «سوزان» می‌باشد، محدود می‌شود، تقارن‌های موضعی غیربدینهی باقی مانده‌اند. به عنوان مثال، نگاشت هموار $U^{\tilde{A}} \rightarrow U^A$ را به زیرمجموعه‌های برجسته شده با رنگ قرمز و سبز، متريک را به صورت محلی حفظ می‌کند. تمام مفاهم توسعه یافته در بخش ۱.۸ و همچنین هم‌متغیری ایزومتری عملیات نقطه‌ای مانند $\text{Hom}_{\text{Diff}}(M, M)$ -بلطفاً مجموعه‌های محلی تعیین می‌یابد. هم‌متغیری ایزومتری بین زیرمجموعه‌های محلی تعیین می‌یابد. هم‌متغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرnel با کرنل‌های با گستره فضایی تا اثرات مرزی تعیین می‌یابد.

که گروه ایزومتری $\text{Isom}(M) \cong O(2)$ یک تخم مرغ را به تصویر می‌کشد. گروه کامل ایزومتری (به عنوان مثال) به زیرگروه‌های دوران‌ها در $\mathcal{I}_1 \cong \mathcal{R}$ و بازتاب‌ها در $\mathcal{I}_2 \cong SO(2)$ تقسیم می‌شود.

به طور کلی، گروه ایزومتری یک منیفلد غیرتعدي بدیر است، یعنی، هر نقطه‌ای از M را نمی‌توان از هر نقطه دیگری با عمل آن رسید. سپس منیفلد به مدارهای مجزا افزای می‌شود که برای مثال M به عنوان یک تخم مرغ (عید پاک) در شکل ۴۰ به تصویر کشیده شده است. گروه ایزومتری یک منیفلد M ممکن است بدینهی باشد، به شرطی که M به اندازه کافی نامتقارن باشد. در این حالت، ممکن است هنوز ایزومتری‌های غیربدینهی بین زیرمجموعه‌های باز $U^{\tilde{A}}$ و U^A از M وجود داشته باشد، که معادله (۲۶۲) به آنها محدود می‌شود. شکل ۴۱ نمونه‌های از یک منیفلد را نشان می‌دهد که به صورت سراسری نامتقارن است اما ایزومتری‌های غیربدینهی بین زیرمجموعه‌های محلی خود دارد. ما در ادامه فقط ایزومتری‌های سراسری M را در نظر خواهیم گرفت، با این حال، تمام مفاهم بخش فعلی ۱.۸ به روشنی آشکار به ایزومتری‌ها بین زیرمجموعه‌های محلی تعیین می‌یابند. بدون اثبات، ما ادعا می‌کنیم که همین امر برای هم‌متغیری ایزومتری هر عمل شبکه عصبی که به صورت نقطه‌ای عمل می‌کند، به عنوان مثال $\text{Hom}_{\text{Diff}}(M, M)$ -، غیرخطی‌ها یا جمع بایاس، صادق است. هم‌متغیری تبدیلات میدان کرnel با کرنل‌های با گستره فضایی تا اثرات مرزی برقرار است.

۲.۱.۸ عمل ایزومتری بر روی کلاف‌های تاری

ایزومتری‌ها به طور طبیعی بر روی بردارهای مماس در TM با «حمل کردن آنها» با عمل گروهی همانطور که در شکل ۴۰ به تصویر کشیده شده است، عمل می‌کنند. اگر یک ایزومتری علاوه بر این با G -ساختر سازگار باشد، یعنی اگر یک خودریختی از GM ایجاد کند، علاوه بر این بر روی هر کلاف G -الحقی، به ویژه کلاف‌های بردار ویژگی A عمل می‌کند. ما این اعمال ایزومتری‌ها را بر روی کلاف‌های الحقی و بر روی میدان‌های ویژگی در ادامه مورد بحث قرار می‌دهیم.

عمل ایزومتری بر روی کلاف مماس: هر ایزومتری $\phi \in \text{Isom}(M)$ یک پیش‌ران را ایجاد می‌کند

$$\phi_{*,TM} : TM \rightarrow TM, \quad \phi \in \text{Isom}(M) \quad (263)$$

بر روی کلاف مماس، که فقط دیفرانسیل ϕ است همانطور که در پیوست آ.۲ معرفی شده است. در هر نقطه $p \in M$ می‌توان آن را به عنوان یک تقریب خطی از ϕ در نظر گرفت که بردارها $v \in T_p M$ را به $\phi_{*,TM}(v) \in T_{\phi(p)} M$ تابع ϕ می‌کند، یعنی برآورده می‌کند:

$$\pi_{TM} \circ \phi_{*,TM} = \phi \circ \pi_{TM}. \quad (264)$$

همانطور که در پیوست آ.۲ استدلال شد، پیش‌ران با $\phi_{*,TM}^{-1} = (\phi_{*,TM})^{-1} = (\phi^{-1})_{*,TM}$ معکوس بدیر است، که ما به طور بدون ابهام آن را با $\phi_{*,TM}^{-1}$ خواهیم نوشت.^{۶۹} بنابراین دیده می‌شود که پیش‌ران یک عنصر ϕ از گروه ایزومتری یک خودریختی کلاف برداری (ایزومتریک) از TM روی ϕ است که نمودار جابجایی زیر را برآورده می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightleftharpoons{\phi_{*,TM}} & TM \\ \pi_{TM} \downarrow & \phi_{*,TM}^{-1} & \downarrow \pi_{TM} \\ M & \xrightleftharpoons[\phi^{-1}]{\phi} & M \end{array} \quad (265)$$

^{۶۹} معکوس بدیری به طور کلی برای پیش‌ران‌ها برقرار نیست بلکه فقط برای پیش‌ران‌های دیفئومورفیسم‌ها و در نتیجه ایزومتری‌ها برقرار است.

بنا به تعریف ایزومتری‌ها، پیش‌ران آنها فاصله‌ها و زوایا را حفظ می‌کند، یعنی،

$$\eta_{\phi(p)}(\phi_{*,TM}v, \phi_{*,TM}w) = \eta_p(v, w) \quad \forall p \in M, v, w \in T_p M, \phi \in \text{Isom}(M). \quad (266)$$

جزئیات بیشتر در مورد پیش‌ران‌ها بین کلاف‌های مماس به راحتی در ادبیات، به عنوان مثال در [۱۵۷]، یافت می‌شود.

عمل ایزومتری بر روی کلاف قاب \mathbf{FM} : پیش‌ران روی TM بلایا کلاف اصلی متناظر $\phi_{*,FM}$ را بر روی FM با پیش‌ران کردن بردارهای قاب منفرد القا می‌کند:

$$\phi_{*,FM}: FM \rightarrow FM, [e_i]_{i=1}^d \mapsto \phi_{*,FM}([e_i]_{i=1}^d) := [\phi_{*,TM}(e_i)]_{i=1}^d, \phi \in \text{Isom}(M) \quad (267)$$

این نگاشت قاب‌ها را در $F_p M$ برای هر $p \in M$ دلخواه به قاب‌ها در $F_{\phi(p)} M$ نگاشت می‌کند، یعنی $\pi_{FM} \circ \phi_{*,FM} = \phi \circ \pi_{FM}$. برای دیدن این، فرض کنید $[\phi_{*,FM}(e_i)]_{i=1}^d = \phi([e_i]_{i=1}^d) = \phi(e_p) \in F_p M$ ، آنگاه $\phi(e_p) = \phi \circ \pi_{FM}([e_i]_{i=1}^d) = \phi \circ \pi_{TM}([\phi_{*,TM}(e_i)]_{i=1}^d) = (\phi_{*,TM})^{-1}(\phi(e_j))$. علاوه بر این می‌توان بررسی کرد که با $(\phi_{*,FM})^{-1} = (\phi^{-1})_{*,FM}$ $\pi_{TM} \circ \phi_{*,TM}(e_j) = \phi \circ \pi_{TM}(e_j) = \phi(p)$ معکوس‌پذیر است، که باز هم با $\phi_{*,FM}^{-1}$ به اختصار نوشته می‌شود. عمل چپ قاب با عمل راست \triangleleft بر روی تارهای آن جابجا می‌شود، یعنی برای هر $\phi \in \text{Isom}(M)$ و $g \in \text{GL}(d)$ $\phi \triangleleft g \in \text{Isom}(M)$ دلخواه داریم:

$$\begin{aligned} \left(\phi_{*,FM}([e_i]_{i=1}^d) \right) \triangleleft g &= [\phi_{*,TM}(e_i)]_{i=1}^d \triangleleft g && \text{(تعریف } \phi_{*,FM}, \text{ معادله } (267)) \\ &= \left[\sum_j \phi_{*,TM}(e_j) g_{ji} \right]_{i=1}^d && \text{(تعریف } \triangleleft, \text{ معادله } (154)) \\ &= \left[\phi_{*,TM} \left(\sum_j e_j g_{ji} \right) \right]_{i=1}^d && \text{(خطی بودن } \phi_{*,TM}) \\ &= \phi_{*,FM} \left(\left[\sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \right) && \text{(تعریف } \phi_{*,FM}, \text{ معادله } (267)) \\ &= \phi_{*,FM}([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) && \text{(تعریف } \triangleleft, \text{ معادله } (154)) \end{aligned} \quad (268)$$

یک تبدیل پیمانه یک قاب در $p \in M$ با $g \in \text{GL}(d)$ و به دنبال آن یک پیش‌ران به (p) ، بنابراین برای است با یک پیش‌ران قاب تبدیل نشده، و به دنبال آن یک تبدیل پیمانه با همان عنصر گروهی g اما در (p) . از این رو قاب‌های مختلف در تار $F_p M$ به گونه‌ای به قاب‌ها در $F_{\phi(p)} M$ نگاشت می‌شوند که جابجایی نسبی آنها حفظ شود. ویژگی‌های استخراج شده از $\phi_{*,FM}$ با این گزاره خلاصه می‌شود که نمودار

$$\begin{array}{ccc} FM & \xrightarrow{\phi_{*,FM}} & FM \\ \triangleleft g \uparrow & & \uparrow \triangleleft g \\ FM & \xrightarrow{\phi_{*,FM}} & FM \\ \pi_{FM} \downarrow & & \downarrow \pi_{FM} \\ M & \xrightarrow{\phi} & M \end{array} \quad (269)$$

برای هر $\phi \in \text{Isom}(M)$ و هر $g \in \text{GL}(d)$ جابجا می‌شود. با برآورده کردن جابجایی این نمودار، پیش‌ران $\phi_{*,FM}$ بر روی کلاف قاب به عنوان یک خودریختی کلاف اصلی شناسایی می‌شود.^۷ روی ϕ .

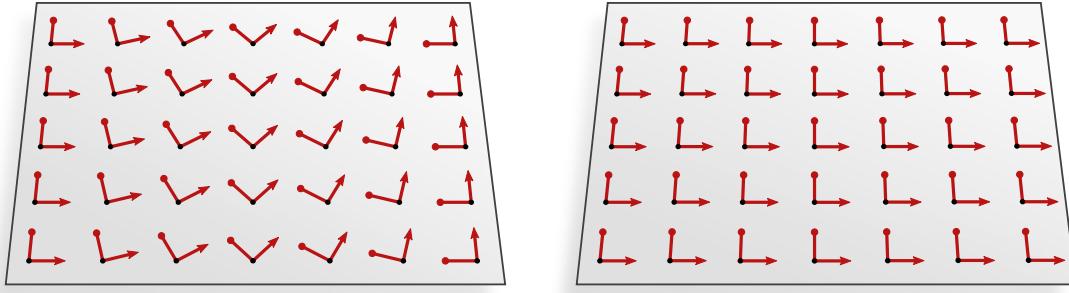
توجه داشته باشید که معکوس‌ها، که به طور صریح در نمودار (۲۶۵) نشان داده شده‌اند، برای کاهش شلوغی حذف شده‌اند.

عمل ایزومتری بر روی G -ساختارها: از آنجایی که G -ساختارها زیرکلاف‌های اصلی از کلاف قاب هستند، می‌توان محدودیت دامنه پیش‌ران روی GM را به FM در نظر گرفت، یعنی،

$$\phi_{*,FM}|_{GM}: GM \rightarrow FM, \phi \in \text{Isom}(M). \quad (270)$$

در اینجا لازم است که کل کلاف قاب FM به عنوان همدامنه حفظ شود زیرا به طور کلی هیچ تضمینی وجود ندارد که قاب‌ها در $G_p M$ به قاب‌های $G_{\phi(p)} M$ نگاشت شوند بلکه فقط به $F_{\phi(p)} M$ نگاشت می‌شوند. از آنجایی که G -ساختارها به طور کلی تحت عمل ایزومتری‌ها بر روی

^۷ یعنی، یک ایزومورفیسم کلاف اصلی از کلاف قاب به خودش؛ مقایسه کنید با معادله ۱۵۱.

(b) یک $\{e\}$ -ساختار جایگزین بر روی \mathbb{R}^4 (a) $\{e\}$ -ساختار کانونی \mathbb{R}^4

شکل ۴.۲ دو انتخاب خاص از $\{e\}$ -ساختارها (میدان‌های قاب سراسری) $M = \mathbb{R}^4$ را نشان می‌دهد که از انتقال‌ها، دوران‌ها و بازتاب‌ها تشکیل شده است. شکل ۴.۲(a) ساختار کانونی \mathbb{R}^4 را نشان می‌دهد که تحت انتقال‌ها نامتفاوت است اما تحت دوران‌ها یا بازتاب‌ها نامتفاوت نیست. به بیان انتزاعی‌تر، انتقال‌ها زیرگروه $\text{Isom}_{\{e\}M} = T_7 := (\mathbb{R}^4, +)$ از ایزوومتری‌های را تشکیل می‌دهند که خودریختی‌های $\{e\}M$ را القا می‌کنند. در مقابل، دوران‌ها یا بازتاب‌ها قاب‌ها را در $F'_{\phi(p)}M$ نگاشت می‌کنند اما موقب فرستادن آنها به $\{e\}_p M$ نمی‌شوند. بنابراین آنها خودریختی‌های $\{e\}$ -ساختار را القا نمی‌کنند و بخشی از $\{e\}M$ نیستند. اعمال گروهی چنین ایزوومتری‌هایی بر روی $\{e\}M$ یا هر یک از کلافهای $\{e\}$ -الحاقی ان تعریف نشده است. شکل ۴.۲(b) یک انتخاب جایگزین از $\{e\}$ -ساختار را بر روی $M = \mathbb{E}_4$ (با \mathbb{E}_4 نشان می‌دهد که فقط تحت انتقال‌ها در جهت «بالاپایین» نامتفاوت است، یعنی $\text{Isom}_{\{e\}M} \cong T_7 = (\mathbb{R}, +)$) نمایه می‌نماید. مثال‌های موجود در شکل ۴.۲ و ۴.۳ این مسئله را در G -ساختار نه تنها به گروه ساختار G بلکه به انتخاب خاص G -ساختار GM پستگی دارند. مورد کلی برای G غیربدیهی سخت‌تر به تصویر کشیده می‌شود زیرا $G_p M$ در آن صورت یک قاب منفرد خواهد بود بلکه مجموعه‌ای از قاب‌ها خواهد بود.

بسطه نیستند، ممکن است تعریف یک عمل گروهی از گروه کامل ایزوومتری بر روی GM یا هر کلاف G -الحاقی دیگر غیرممکن باشد. برای رفع این نقیصه، ما در ادامه زیرگروهی از آن ایزوومتری‌ها را در نظر خواهیم گرفت که به G -ساختار احترام می‌گذارند، یعنی قاب‌های ممتاز در GM را به قاب‌ها در GM نگاشت می‌کنند.

تعریف ۱.۸ (ایزوومتری‌های حافظ G -ساختار). با داشتن یک G -ساختار GM . ما زیرگروه متناظر از ایزوومتری‌های حافظ G -ساختار GM را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{Isom}_{GM} := \{\phi \in \text{Isom}(M) \mid \phi_{*,FM}(G_p M) = G_{\phi(p)} M \quad \forall p \in M\} \leq \text{Isom}(M) \quad (271)$$

برای چنین ایزوومتری‌هایی، ما عمل القابی بر روی GM را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

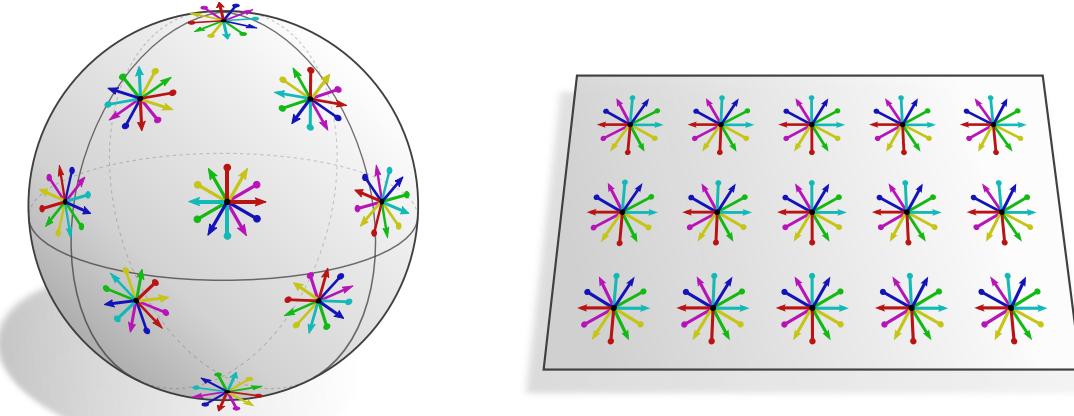
$$\phi_{*,GM} := \phi_{*,FM}|_{GM} : GM \rightarrow GM, \quad \phi \in \text{Isom}_{GM}. \quad (272)$$

اعمال تعریف شده به این شکل برای $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ خودریختی‌های G -ساختار هستند، یعنی باعث می‌شوند نمودار زیر برای هر $g \in G$ جابجا شود (که با محدود کردن معادله (۲۶۹) از GM به FM و از G به $\text{GL}(d)$ به دست می‌آید):

$$\begin{array}{ccc} GM & \xrightarrow{\phi_{*,GM}} & GM \\ \downarrow g & & \downarrow g \\ GM & \xrightarrow{\phi_{*,GM}} & GM \\ \downarrow \pi_{GM} & & \downarrow \pi_{GM} \\ M & \xrightarrow{\phi} & M \end{array} \quad (273)$$

شکل ۴.۲ دو نمونه از $\{e\}$ -ساختارها را روی $M = \mathbb{R}^4$ نشان می‌دهد، یعنی میدان‌های قاب سراسری. از این مثال‌ها مشخص است که زیرگروه‌های Isom_{GM} واقعاً به انتخاب خاص G -ساختار GM پستگی دارند، نه فقط به گروه ساختار G . در شکل ۴.۳ می‌یابیم $\text{SO}(2)$ -ساختار را روی $M = \mathbb{R}^2$ به تصویر می‌کشیم. گروه ایزوومتری آن $\text{SE}(2) = \text{SO}(2) \times \mathbb{R}^2$ می‌باشد. این می‌تواند دوران‌ها $\{e\}$ -ساختارها را در شکل ۴.۲ نشان داده شده است. یک $\text{SO}(2)$ -ساختار روی کره S^1 که توسط تمام دوران‌ها $\text{SO}(3) = \text{SO}(2)$ حفظ می‌شود، در شکل ۴.۳ نشان داده شده است.

برای انتخاب‌های خاص از گروه‌های ساختار G می‌توان گزاره‌های کلی تری در مورد اینکه کدام ایزوومتری‌ها در زیرگروه Isom_{GM} قرار دارند، بیان کرد. مهم‌تر از همه، برای گروه‌های ساختار اورتونمال ($G = O(d)$) هر ایزوومتری یک خودریختی از OM را القا می‌کند.



(ب) ساختار (۲)-SOM روى $S\text{-}SO(3)$ نامتغیر

(ا) ساختار (۲)-SOM روى $\text{SE}(2)$ نامتغیر

شکل ۴۳: دو نمونه از (۲)-SOM ساختارها و دوران‌ها نامتغیر است. از آنجایی که فقط از قاب‌های راست‌گرد تشکیل شده است (به نوک پیکان‌ها روی محورهای اول و نوک دایره‌ها روی محورهای دوم توجه کنید) تحت بازتاب‌ها نامتغیر نیست. بنابراین ایزومنتری‌هایی که $\text{SOM} = \text{SE}(2)$ را حفظ می‌کنند گروه $\text{SO}(2)$ است. در مورد $M = S^3$ است. در شکل ۴۳ ب نشان داده شده است، (۲)-SOM $\text{Isom}(M) = \text{E}(2)$ که زیرگروهی از گروه کامل ایزومنتری (۲)-SOM است. در مورد $M = S^3$ که در شکل ۴۳ ب نشان داده شده است، (۲)-SOM $\text{Isom}_{\text{SOM}} = \text{SO}(3)$ است. خودریختی‌های (۲)-SOM $\text{Isom}_{\text{SOM}} = \text{SO}(3)$ هستند در اینجا (۲)-SOM $\text{Isom}(M) = \text{O}(3)$ است.

یعنی همیشه داریم $\text{Isom}_{\text{OM}} = \text{Isom}(M)$. برای اثبات این ادعا، فرض کنید $[e_i]_{i=1}^d \in \text{O}_p M \subset F_p M$ یک قاب اورتونرمال باشد. که توسط یک ایزومنتری دلخواه $\phi \in \text{Isom}(M)$ به $[\phi_{*,FM} e_i]_{i=1}^d = [\phi_{*,TM} e_i]_{i=1}^d$ فرستاده می‌شود؛ به معادله (۲۶۷) مراجعه کنید. اعمال معادله (۲۶۶) بر روی محورهای منفرد قاب پیش‌ران به دست می‌دهد:

$$\eta(\phi_{*,TM} e_i, \phi_{*,TM} e_j) = \eta(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in 1, \dots, d, \quad (274)$$

که اورتونرمال بودن قاب پیش‌ران $\phi_{*,OM} [e_i]_{i=1}^d \in \text{O}_{\phi(p)} M$ را ایجاب می‌کند و بنابراین اجازه می‌دهد تا $\phi \in \text{Isom}(M)$ هر ϕ تعريف کنیم. به طور کلی، این نتیجه ایجاب می‌کند:

$$\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M) \quad \forall G \geq \text{O}(d) \quad (275)$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد:

$$\text{Isom}_{\text{SOM}} = \text{Isom}_+(M), \quad (276)$$

یعنی، هر ایزومنتری حافظ جهت در $\text{Isom}_+(M)$ یک خودریختی از یک (۲)-SOM را القا می‌کند. توجه داشته باشید که این گزاره‌ها همه فقط به گروه ساختار G بستگی دارند اما از انتخاب خاص G -ساختار مستقل هستند. این در نهایت نتیجه در نظر گرفتن فقط ایزومنتری‌ها است که بنا به تعريف با $\text{O}(d)$ -Sاختارها سازگار هستند، به جای در نظر گرفتن دیفئومورفیسم‌های عمومی‌تر. همانطور که قبل ذکر شد، زیرگروه Isom_{GM} به انتخاب خاص G -ساختار GM بستگی دارد، نه فقط به گروه ساختار G .

عمل ایزومنتری بر روی کلاف‌های برداری الحاقی \mathcal{A} : از پیش‌ران ایزومنتری‌ها در Isom_{GM} بر روی GM می‌توان یک پیش‌ران $\phi_{*,\mathcal{A}}$ را بر روی $\mathcal{A} = (GM \times \mathbb{R}^c)/\sim_\rho$ با تعريف زیر ساخت:

$$\phi_{*,\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad [[e_i]_{i=1}^d, f] \mapsto \phi_{*,\mathcal{A}}([[e_i]_{i=1}^d, f]) := [\phi_{*,GM}([e_i]_{i=1}^d), f], \quad \phi \in \text{Isom}_{GM}. \quad (277)$$

این عمل خوش‌تعريف است زیرا ساختار به دلیل همتغیری راست- G - ϕ در معادله (۲۷۳) از نماینده انتخاب‌شده کلاس هم‌ارزی مستقل است. مشابه قبل، داریم $\phi \circ \pi_{\mathcal{A}} = \phi \circ \phi_{*,\mathcal{A}} = \phi \circ \pi_{\mathcal{A}}$ ، یعنی $\phi_{*,\mathcal{A}}$ بردارهای ویژگی را در \mathcal{A}_p به بردارهای ویژگی در $\mathcal{A}_{\phi(p)}$ نگاشت می‌کند، که می‌توان با عمل بر روی یک بردار ویژگی و استفاده از ویژگی متناظر $\phi_{*,GM}$ آن را بررسی کرد. از آنجایی که $\phi_{*,\mathcal{A}}$ با عمل $\phi_{*,GM}$ بر روی عامل اول در $\sim_\rho / (GM \times \mathbb{R}^c)$ تعريف می‌شود، با ترکیب‌های خطی که بر روی عامل دوم همانطور که در معادله (۱۵۷) تعريف شده است، عمل می‌کند، تداخلی ندارد. این ایجاد می‌کند که پیش‌ران روی کلاف‌های الحاقی به صورت خطی بین تارهای آنها نگاشت کند. معکوس‌پذیری $\phi_{*,\mathcal{A}}$ از معکوس‌پذیری $\phi_{*,GM}$ نتیجه می‌شود به طوری که دوباره داریم $(\phi_{*,\mathcal{A}})^{-1} = (\phi^{-1})_{*,\mathcal{A}}$ ، که آن را به صورت $\phi_{*,\mathcal{A}}^{-1} = (\phi^{-1})_{*,\mathcal{A}}$ می‌نویسیم. این ویژگی‌ها،

همراه با این واقعیت که $\phi_{*,GM} \in \text{Aut}(GM)$ به طور خاص یک خودریختی کلاف اصلی است، $\phi_{*,A}$ را به عنوان یک خودریختی کلاف برداری الحاقی شناسایی می‌کند که نمودار جابجایی زیر را برآورده می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\phi_{*,A}} & \mathcal{A} \\ \pi_A \downarrow & & \downarrow \pi_A \\ M & \xrightarrow{\phi} & M \end{array} \quad (278)$$

کلاف الحاقی حاصل از انتخاب‌های خاص نمایش گروهی $g = \rho(g) / \sim_{\mathbb{R}^d}$ به عنوان تار نمونه‌ای از طریق هوموژنیسم کلاف $(GM \times \mathbb{R}^d) / \sim_{\mathbb{R}^d}$ از معادله (۱۵۹) با کلاف مماس TM (به عنوان یک G -کلاف) ایزومنورف است. تعریف ما از پیش‌ران‌ها بر روی کلاف‌های G -الحاقی با این شناسایی سازگار است زیرا $\chi \circ \phi_{*,A} = \phi_{*,TM} \circ \chi$. برای دیدن این، فرض کنید $[[e_i]_{i=1}^d, v] \in (GM \times \mathbb{R}^d) / \sim_{\mathbb{R}^d}$ عنصری از کلاف الحاقی ایزومنورف باشد که به $\chi([[e_i]_{i=1}^d, v]) = \sum_i e_i v_i$ نگاشت می‌شود. آنگاه داریم $\chi \circ \phi_{*,A}([[e_i]_{i=1}^d, v]) = \sum_i e_i v_i = \phi_{*,TM}(\sum_i e_i v_i) = \phi_{*,TM} \circ \chi(\sum_i e_i v_i) = \phi_{*,TM}(\sum_i e_i v_i)$ که سازگاری تعاریف را نشان می‌دهد.

به عنوان یک کلاف الحاقی، پیش‌ران ϕ بر روی کلاف هوموژنیسم $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square}, \mathcal{A}_{\square}) \cong (GM \times \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}) / \sim_{\rho_{\text{Hom}}}$ نیز با معادله (۲۷۷) مشخص می‌شود. با این حال، ما بعداً به عبارتی از $\phi_{*,A}$ بر حسب پیش‌ران‌های $\phi_{*,A}$ و \mathcal{A}_{\square} از \mathcal{A}_{\square} و \mathcal{A}_{\square} نیاز خواهیم داشت، که آن را به زودی در اینجا استخراج خواهیم کرد. برای این منظور، فرض کنید $H \in \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square}|_p, \mathcal{A}_{\square}|_p)$ یک هوموژنیسم در p و $f_p \in \mathcal{A}_{\square,p}$ یک بردار ویژگی در p باشد. آنگاه $H(f_p)$ بنا به تعریف یک بردار ویژگی در $\mathcal{A}_{\square,p}$ است. برای اینکه به طور سازگار تعریف شود، پیش‌ران بردار ویژگی ورودی f_p که توسط پیش‌ران هوموژنیسم H بر آن عمل می‌شود، باید با پیش‌ران بردار ویژگی خروجی $H(f_p)$ موافق باشد. این ایجاد می‌کند:

$$\phi_{*,A} [H(f_p)] = [\phi_{*,A} H \phi_{*,A}^{-1}] (\phi_{*,A} f_p) =: [\phi_{*,A}, H] (\phi_{*,A} f_p), \quad (279)$$

که در آن پیش‌ران روی کلاف هوموژنیسم را به صورت زیر تعریف کردیم:

$$\phi_{*,A}: \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square}, \mathcal{A}_{\square}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square}, \mathcal{A}_{\square}), \quad H \mapsto \phi_{*,A} H \phi_{*,A}^{-1}, \quad \phi \in \text{Isom}_{GM} \quad (280)$$

توجه داشته باشید که ترکیب یک عنصر $(\phi_{*,A}, H)$ با $\phi_{*,A}$ از چپ و با $\phi_{*,A}^{-1}$ از راست، سبک معادله (۲۳۱) را منعکس می‌کند.

عمل ایزومنتری بر روی میدان‌های ویژگی: اعمال ایزومنتری‌ها در Isom_{GM} بر روی کلاف‌های الحاقی، اعمالی را بر روی مقاطع آنها، به ویژه بر روی میدان‌های ویژگی، ایجاد می‌کنند. این پیش‌ران مقاطع به صورت زیر تعریف می‌شود:
تعریف ۲.۸ (پیش‌ران ایزومنتری میدان ویژگی): فرض کنید $f \in \Gamma(\mathcal{A})$ یک میدان ویژگی و $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ یک ایزومنتری حافظ G -ساختار باشد. ایزومنتری از طریق پیش‌ران بر روی میدان ویژگی عمل می‌کند^۷

$$\triangleright: \text{Isom}_{GM} \times \Gamma(\mathcal{A}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}), \quad (\phi, f) \mapsto \phi \triangleright f := \phi_{*,A} \circ f \circ \phi^{-1}. \quad (281)$$

بر حسب یک نمودار جابجایی، این تعریف به صورت زیر به تصویر کشیده می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\phi_{*,A}} & \mathcal{A} \\ f \uparrow & & \uparrow \phi \triangleright f := \phi_{*,A} \circ f \circ \phi^{-1} \\ M & \xrightarrow{\phi} & M \end{array} \quad (282)$$

به طور شهودی، این تعریف بیان می‌کند که مقطع پیش‌ران $f \triangleright \phi$ که در $p \in M$ ارزیابی می‌شود، بردار ویژگی f را از $(p)^{-1} \phi$ که از طریق ϕ به p پیش‌ران شده است، برمی‌گرداند. توجه داشته باشید که چنین پیش‌ران‌هایی در واقع مقاطع خوش‌تعریفی را به دست می‌دهند که

^۷ به شباهت این تعریف نمایش الگایی توجه کنید، که عمل گروهی است که شبکه‌های CNN هدایت‌پذیر طوری طراحی شده‌اند که نسبت به آن همتغیر باشند [۱۹۰، ۱۹۱، ۲۸].

برآورده می‌کنند:

$$\begin{aligned}
 \pi_{\mathcal{A}} \circ (\phi \triangleright f) &= \pi_{\mathcal{A}} \circ \phi_{*,\mathcal{A}} \circ f \circ \phi^{-1} \\
 &= \phi \circ \pi_{\mathcal{A}} \circ f \circ \phi^{-1} \\
 &= \phi \circ \text{id}_M \circ \phi^{-1} \\
 &= \text{id}_M
 \end{aligned} \tag{۲۸۳}$$

همانطور که در معادله (۱۴۷) لازم است. شکل ۱۴۰ عمل ایزومتری‌ها را بر روی میدان‌ها به تصویر می‌کشد. عمل ایزومتری‌ها بر روی پول‌بک منتقل کننده $\text{Exp}_p^* f$ از میدان‌های f در بخش ۴.۱.۸ در زیر استخراج می‌شود.

۳.۱.۸ عمل ایزومتری در مختصات محلی

بیشتر استخراج‌ها در مورد همتغیری ایزومتری میدان کرnel در بخش‌های ۲.۸ و ۳.۸ در یک محیط مستقل از مختصات نگه داشته خواهد شد. با این حال، از آنجایی که کانولوشن‌های GM نسبت به یک انتخاب از G -اطلس‌های کلاف‌های الحاقی تعریف می‌شوند، بررسی همتغیری ایزومتری آنها مستلزم مطالعه عبارات مختصاتی پیش‌ران‌های ایزومتری $\phi_{*,\mathcal{A}}$ ، $\phi_{*,GM}$ ، $\phi_{*,FM}$ و $\phi_{*,TM}$ نسبت به بدیهی‌سازی‌های محلی کلاف است. عبارات مختصاتی عمل ایزومتری علاوه بر این در پیاده‌سازی‌های عددی مفید هستند، که لزوماً میدان‌های ویژگی را نسبت به میدان‌های قاب‌های مرجع کدگذاری می‌کنند.

در ادامه، ما پیمانه‌های Ψ_{TM}^A و $\Psi_{TM}^{\tilde{A}}$ را به ترتیب در همسایگی‌های $U^{\tilde{A}}$ از p و U^A از (p) داده شده فرض می‌کنیم. برای راحتی، فرض کنید \tilde{A} تحت ایزومتری منطبق باشد، که همیشه بدون از دست دادن کلیت امکان پذیر است.

پیش‌ران روی TM در مختصات: به یاد بیاورید که پیش‌ران روی کلاف مماس یک نگاشت خطی از بردارها $v \in T_p M$ به بردارها $\phi_{*,TM} v \in T_{\phi(p)} M$ است. نسبت به پیمانه‌های داده شده، پیش‌ران بنابراین توسط یک میدان از ماتریس‌ها مختصاتی می‌شود^{۲۲}

$$g_{\phi}^{A\tilde{A}} : U^{\tilde{A}} \rightarrow \text{GL}(d), \quad p \mapsto g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) := \psi_{TM,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,TM} \circ (\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1}, \quad \phi \in \text{Isom}(M), \tag{۲۸۴}$$

که بین ضرایب عددی متناظر v از p و $\psi_{TM,\phi(p)}^{\tilde{A}}(\phi_{*,TM} v)$ در $\phi(p)$ تبدیل می‌کند. دقیق‌تر، $g_{\phi}^{A\tilde{A}}$ در زیرگروه $\langle G \cup O(d) \rangle$ از $\text{GL}(d)$ مقدار می‌گیرد، که توسط عناصر $O(d)$ (به دلیل اینکه $\phi_{*,TM}$ متریک را حفظ می‌کند) و G (زیرا تابع گذار ممکن است یک ابرگروه از $O(d)$ تشکیل دهنده) تولید می‌شود. تعریف پیش‌ران در مختصات محلی با نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده می‌شود:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\psi_{TM,p}^{\tilde{A}}} & T_p M & \xrightarrow{\phi_{*,TM}} & T_{\phi(p)} M \xrightarrow{\psi_{TM,\phi(p)}^A} \mathbb{R}^d \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)} & & & \uparrow
 \end{array} \tag{۲۸۵}$$

شکل ۲۳ یک تفسیر گرافیکی از پیش‌ران در مختصات ارائه می‌دهد.

پیش‌ران روی FM در مختصات: مختصاتی‌سازی پیش‌ران روی کلاف قاب به قیاس با معادله (۲۸۴) تعریف می‌شود. مشخص می‌شود که این با عمل چپ همان عنصر گروهی $g_{\phi}^{A\tilde{A}}$ بر روی قاب‌های بدیهی‌شده داده می‌شود همانطور که در نمودار جابجایی زیر نشان داده است:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{GL}(d) & \xleftarrow{\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}} & F_p M & \xrightarrow{\phi_{*,FM}} & F_{\phi(p)} M \xrightarrow{\psi_{FM,\phi(p)}^A} \text{GL}(d) \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)} & & & \uparrow
 \end{array} \tag{۲۸۶}$$

با داشتن چارت‌های M از $x^A : U^A \rightarrow x^A(U^A) \subseteq \mathbb{R}^d$ و $x^{\tilde{A}} : U^{\tilde{A}} \rightarrow x^{\tilde{A}}(U^{\tilde{A}}) \subseteq \mathbb{R}^d$ ^{۲۳} یک ایزومتری ϕ را می‌توان به صورت محلی با یک نگاشت $x^A \circ \phi \circ (x^{\tilde{A}})^{-1} : x^{\tilde{A}}(U^{\tilde{A}}) \rightarrow x^A(U^A)$ بین مختصات نمایش داد. برای حالت خاصی که پیمانه‌ها در p و (p) متناظر با پایه‌های مختصاتی آن چارت‌ها هستند، $g_{\phi}^{A\tilde{A}}$ به سادگی توسط ژاکوبین $(x^{\tilde{A}})^{-1} \circ \phi \circ (x^{\tilde{A}})^{-1}$ داده می‌شود.

برای اثبات این ادعا، ما عمل را بر روی یک قاب بدیهی شده، که با یک ماتریس $h \in \mathrm{GL}(d)$ نماینده بردار قاب i -ام است، محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
& \left[\psi_{FM,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,FM} \circ (\psi_{FM,p}^{\tilde{A}})^{-1} \right] (h) \\
&= \left[\psi_{FM,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,FM} \right] \left(\left((\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1} (h_{:,i}) \right)_{i=1}^d \right) && \text{(تعريف } \psi_{FM,p}^{\tilde{A}}, \text{ معادله (۱۷۷))} \\
&= \psi_{FM,\phi(p)}^A \left(\left(\phi_{*,TM} \circ (\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1} (h_{:,i}) \right)_{i=1}^d \right) && \text{(تعريف } \phi_{*,FM}, \text{ معادله (۲۶۷))} \\
&= \left(\left(\psi_{TM,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,TM} \circ (\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1} (h_{:,i}) \right)_{i=1}^d \right) && \text{(تعريف } \psi_{TM,p}^A, \text{ معادله (۱۷۷))} \\
&= \left(g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \cdot h_{:,i} \right)_{i=1}^d && \text{(تعريف } g_\phi^{A\tilde{A}}, \text{ معادله (۲۸۴))} \\
&= g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \cdot h && \text{(۲۸۷))
\end{aligned}$$

عمل پیش‌ران بر روی بدیهی‌سازی‌های محلی را می‌توان به عنوان الگا کردن یک تبدیل پیمانه در نظر گرفت. یک شهود گرافیکی برای این گزاره در شکل ۲۳ داده شد که در آن پیمانه‌های اولیه در p و $\phi(p)$ با انتخاب‌های قاب‌های مرجع به تصویر کشیده شده‌اند. یک پیش‌ران از قاب در p به $\phi(p)$ (قرمز) به طور کلی با قاب اصلی در $\phi(p)$ (سبز) موافق نیست. گذار بین این دو قاب، تبدیل پیمانه الگا شده در $\phi(p)$ است. ما در ادامه این تبدیل را می‌سازیم؛ ابتدا بر حسب بدیهی‌سازی‌های محلی، سپس بر حسب میدان‌های قاب متضایر.

از نمودار جایجایی در معادله (۲۸۶) مشخص است که پیمانه $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} : F_p M \rightarrow \mathrm{GL}(d)$ را می‌توان از طریق $\phi_{*,FM}^{-1}$ به یک پیمانه در $\phi(p)$ پول‌بک کرد، که به صورت زیر داده می‌شود:

$$\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,FM}^{-1} = (g_\phi^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{FM,\phi(p)}^A : F_{\phi(p)} M \rightarrow \mathrm{GL}(d). \quad (۲۸۸)$$

گسترش متضایر نمودار جایجایی در معادله (۲۸۶) هم‌ارزی هر دو عبارت را به تصویر می‌کشد و یک اثبات جبری را زائد می‌کند:

$$\begin{array}{ccccccc}
& \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1} = (g_\phi^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \cdot \psi_{FM,\phi(p)}^A & & & & & \\
& \downarrow & & & & & \\
& \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} & F_p M & \xrightarrow{\phi_{*,FM}} & F_{\phi(p)} M & \xrightarrow{\psi_{FM,\phi(p)}^A} & \mathrm{GL}(d) \\
& \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{g_\phi^{A\tilde{A}}(p)} & & & & & \\
& & & & & & \uparrow
\end{array} \quad (۲۸۹)$$

نگاشت گذار (تبدیل پیمانه) بین پیمانه الگا شده از ایزومنتری $\psi_{FM,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,FM}^{-1}$ و پیمانه اصلی $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$ در $\phi(p)$ مشخص می‌شود که توسط عنصر گروهی معکوس داده می‌شود^{۷۳}

$$(\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1}) \circ (\psi_{FM,\phi(p)}^A)^{-1} = (g_\phi^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \in \langle G \cup \mathrm{O}(d) \rangle \leq \mathrm{GL}(d). \quad (۲۹۰)$$

توجه داشته باشید که این عنصر گروهی برای $G \leq \mathrm{O}(d)$ لزوماً در گروه ساختار قرار نمی‌گیرد، یعنی پیمانه الگا شده از ایزومنتری ممکن است G -سازگار نباشد (نمی‌توان آن را به یک G -اطلس موجود از F_M اضافه کرد). در پاراگراف بعدی در مورد G -ساختارها نشان خواهیم داد که این دقیقاً زمانی اتفاق می‌افتد که $\phi \notin \mathrm{Isom}_{GM}$ باشد، یعنی برای ایزومنتری‌هایی که به G -ساختار احترام نمی‌گذارند.

برای استخراج عمل ایزومنتری بر روی میدان‌های قاب، مقاطع همانی $\sigma^A : U^A \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^{\tilde{A}})$ و $\sigma^{\tilde{A}} : U^{\tilde{A}} \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^A)$ را در نظر بگیرید. این مقاطع میدان‌های قاب اصلی را از شکل ۲۳ مدل می‌کنند. سپس میدان قاب جدید با مقاطع پیش‌ران داده می‌شود:

$$\phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}} := \phi_{*,FM} \circ \sigma^{\tilde{A}} \circ \phi^{-1} : U^A \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^A), \quad (۲۹۱)$$

^{۷۳} معکوس یک موضوع قراردادی است. در اینجا به این دلیل به وجود می‌آید که ما $g_\phi^{A\tilde{A}}$ را به عنوان عبارت مختصاتی پیش‌ران هموردای قاب‌ها تعریف کردیم در حالی که پیمانه‌ها به صورت پادردا تبدیل می‌شوند.

که به طور معادل با تعریف در معادله ۲۸۱ تعریف شده است. یک عبارت جایگزین برای میدان قاب پیش‌ران بر حسب عمل راست $g_\phi^{A\tilde{A}}$ با اعمال $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ یافت می‌شود:

$$\begin{aligned}
 & \psi_{FM,\phi(p)}^A ([\phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}}](\phi(p))) \\
 &= \psi_{FM,\phi(p)}^A \phi_{*,FM} \sigma^{\tilde{A}}(p) && (\text{تعريف } \sigma^{\tilde{A}}, \phi, \text{ معادله } ۲۹۱) \\
 &= g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \sigma^{\tilde{A}}(p) && (\text{عبارات معادل در معادله } ۲۸۸) \\
 &= g_\phi^{A\tilde{A}}(p) && (\text{قطعه همانی } \sigma^{\tilde{A}}, \text{ معادله } ۱۸۲) \\
 &= \psi_{FM,\phi(p)}^A (\sigma^A(\phi(p))) g_\phi^{A\tilde{A}}(p) && (\text{قطعه همانی } \sigma^A, \text{ معادله } ۱۸۲) \\
 &= \psi_{FM,\phi(p)}^A (\sigma^A(\phi(p)) \triangleleft g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) && (\text{هم‌متغیری راست-GL}(d), \text{ معادله } ۱۷۹) \tag{۲۹۲}
 \end{aligned}$$

از آنجایی که $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ یک ایزومورفیسم است، نتیجه می‌شود که:

$$(\phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}})(\phi(p)) = \phi_{*,FM} \sigma^{\tilde{A}}(p) = \sigma^A(\phi(p)) \triangleleft g_\phi^{A\tilde{A}}(p), \tag{۲۹۳}$$

یعنی، $g_\phi^{A\tilde{A}}(p)$ همانطور که انتظار می‌رفت تبدیل بین مقاطعه همانی را توصیف می‌کند. این تبدیل القا شده از ایزومنتری بین قاب‌های مرجع در شکل ۲۳ با فلش آبی بین قاب قرمز (شفاف) و سبز به تصویر کشیده است.

پیمانه تبدیل شده با ایزومنتری $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1}$ و قطعه پیش‌ران $\sigma^{\tilde{A}} \triangleright \phi$ به این ترتیب با یکدیگر مطابقت دارند که دومی قطعه همانی اولی است:

$$\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1} [\phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}}](\phi(p)) = \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1} \phi_{*,FM} \sigma^{\tilde{A}}(p) = \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \sigma^{\tilde{A}}(p) = e \tag{۲۹۴}$$

پیش‌ران روی GM در مختصات: همانطور که در بخش قبلی ۲.۱.۸ استدلال شد، پیش‌ران روی GM فقط برای ایزومنتری‌های ϕ در یک زیرگروه Isom_{GM} خوش‌تعریف است. جای تعجب نیست که تبدیلات پیمانه القا شده از ایزومنتری متناظر در گروه ساختار G مقدار می‌گیرند: قصیه ۳.۸ در بدیهی‌سازی‌های محلی). فرض کنید $\phi \in \text{Isom}(M)$ هر ایزومنتری از M باشد. آنگاه سه گزاره زیر معادل هستند:

۱. ϕ حافظ G -ساختار است، یعنی $\phi \in \text{Isom}_{GM}$.
۲. پول‌بک ایزومنتری $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1}$ از هر پیمانه $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$ از G -اطلس GM را تعریف می‌کند، با آن G -اطلس سازگار است.
۳. عبارت مختصاتی $\phi_{*,FM}$ نسبت به هر پیمانه $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ و $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$ از G -اطلس FM در گروه ساختار مقدار می‌گیرد، یعنی $g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \in G \quad \forall p \in M$

اثبات: ویژگی تعریف‌کننده یک ایزومنتری حافظ G -ساختار $p \in M$ است که $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ برآورده می‌کند؛ به معادله (۲۷۱) مراجعه کنید. بر حسب یک G -اطلس داده شده از FM ، معادله (۱۸۴) G -ساختار را در $p \in M$ به صورت $(G) := (\psi_{FM,p}^{\tilde{A}})^{-1}(G)$ تعریف کرد که در آن $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$ یک پیمانه دلخواه از G -اطلس است. با این عبارت ما سمت چپ ویژگی تعریف‌کننده Isom_{GM} را بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
 \phi_{*,FM}(G_p M) &= \phi_{*,FM} (\psi_{FM,p}^{\tilde{A}})^{-1}(G) \\
 &= (\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1})^{-1}(G) \tag{۲۹۵}
 \end{aligned}$$

نسبت به هر پیمانه $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ از G -اطلس در (ϕ, p) ، این را می‌توان بیشتر به صورت زیر دستکاری کرد

$$\begin{aligned}
 \phi_{*,FM}(G_p M) &= ((g_\phi^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{FM,\phi(p)}^A)^{-1}(G) \\
 &= (\psi_{FM,\phi(p)}^A)^{-1}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p) G). \tag{۲۹۶}
 \end{aligned}$$

سمت راست ویژگی تعریف‌کننده Isom_{GM} بر حسب $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$G_{\phi(p)} M = (\psi_{FM,\phi(p)}^A)^{-1}(G). \tag{۲۹۷}$$

با برابر قرار دادن هر دو طرف و استفاده از اینکه $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ یک ایزومورفیسم است، نتیجه می‌شود $G = G_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)$ که به همارزی ادعا شده منجر می‌شود:

$$\phi_{*,FM}(G_p M) = G_{\phi(p)} M \iff g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in G \quad (298)$$

از گزاره‌های ۱. و ۳. برای اثبات همارزی با گزاره ۲.، به یاد بیاورید که $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1} g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)$ طبق معادله (۲۹۰) برابر با تبدیل پیمانه از $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ است. از آنجایی که G -اطلاس‌ها بنا به تعریف توابع گذار در گروه ساختار G دارند، پیامدهای (۲. \leftrightarrow ۳.) نتیجه می‌شوند، به طوری که هر سه گزاره معادل دیده می‌شوند. \square

این نتایج برای مطالعه بعدی ما در مورد همتغیری ایزومرتری کانولوشن‌های GM اهمیت مرکزی دارند. ما قادر خواهیم بود نشان دهیم که چنین کانولوشن‌هایی تحت عمل $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ بر روی میدان‌های ویژگی همتغیر هستند، که به این واقعیت متکی است که G -هدايت‌پذیری کنلهای کانولوشن، تبدیلات پیمانه القا شده از ایزومرتری G را در نظر می‌گیرد.

برای ایزومرتری‌های القاکننده خودریختی G -ساختار M در معادله (۲۸۹) را به همتای آن برای GM تطبیق دهیم:

$$\begin{array}{ccccccc} \psi_{GM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,GM}^{-1} & = & (g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \cdot \psi_{GM,\phi(p)}^A \\ \downarrow & & \boxed{G \xleftarrow{\psi_{GM,p}^{\tilde{A}}} G_p M \xrightarrow{\phi_{*,GM}} G_{\phi(p)} M \xrightarrow{\psi_{GM,\phi(p)}^A} G} \\ & & g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p). \end{array} \quad (299)$$

پیش‌ران روی A در مختصات: پیش‌ران $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ بر روی کلاف‌های G -الحاقی به طور مشابه با پیش‌ران‌های دیگر کلاف‌ها مختصاتی می‌شود. بر حسب یک نمودار جابجایی، ما به طور غیرمنتظره‌ای به دست می‌آوریم:

$$\mathbb{R}^c \xleftarrow{\psi_{A,p}^{\tilde{A}}} \mathcal{A}_p \xrightarrow{\phi_{*,A}} \mathcal{A}_{\phi(p)} \xrightarrow{\psi_{A,\phi(p)}^A} \mathbb{R}^c, \quad (300)$$

$\rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))$

که وقتی بر روی ضرایب بردار ویژگی $f \in \mathbb{R}^c$ عمل می‌کنیم به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \left[\psi_{A,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,A} \circ (\psi_{A,p}^{\tilde{A}})^{-1} \right] (f) \\ &= \left[\psi_{A,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,A} \right] \left([\sigma^{\tilde{A}}(p), f] \right) && \text{(تعريف } \psi_{A,p}^{\tilde{A}} \text{، معادله (۱۹۵))} \\ &= \psi_{A,\phi(p)}^A \left([\phi_{*,FM}(\sigma^{\tilde{A}}(p)), f] \right) && \text{(تعريف } \phi_{*,A} \text{، معادله (۳۷۷))} \\ &= \psi_{A,\phi(p)}^A \left([\sigma^A(\phi(p)) \triangleleft g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p), f] \right) && \text{(تبدیل پیمانه القایی، معادله (۲۹۳))} \\ &= \psi_{A,\phi(p)}^A \left([\sigma^A(\phi(p)), \rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))f] \right) && \text{(تعريف } \rho \text{، معادله (۱۷۰))} \\ &= \rho \left(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \right) \cdot f && \text{(تعريف } \psi_{A,p}^{\tilde{A}} \text{، معادله (۱۹۴))} \end{aligned} \quad (301)$$

توجه داشته باشید که عبارت $(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))\rho$ مستلزم آن است که ρ یک عنصر گروه ساختار باشد زیرا ρ یک نمایش G است. این یک بار دیگر از دیدگاه دیگری نشان می‌دهد که پیش‌ران‌ها بر روی A فقط می‌توانند برای ایزومرتری‌ها در Isom_{GM} تعریف شوند.

برای کامل بودن، ما بدیهی‌سازی محلی زیر از نمودار جابجایی از معادله (۲۸۲) را ارائه می‌دهیم، که ممکن است هنگام پیاده‌سازی CNN‌های مستقل از مختصات و آزمایش همتغیری Isom_{GM} آنها مفید باشد:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \phi \times \rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}) & & & & \\
 & U^{\tilde{A}} \times \mathbb{R}^c & \xleftarrow{\Psi_{\tilde{A}}} & \pi_A^{-1}(U^{\tilde{A}}) & \xrightarrow{\phi_{*,A}} & \pi_A^{-1}(U^A) & \xrightarrow{\Psi_A^A} U^A \times \mathbb{R}^c \\
 & \searrow \text{proj}_1 & & \pi_A \circ f & & \phi \triangleright f \circ \pi_A & \swarrow \text{proj}_1 \\
 & & U^{\tilde{A}} & \xrightarrow{\phi} & U^A & &
 \end{array} \quad (30.2)$$

۴.۱.۸ جابجایی‌پذیری اعمال ایزومتری با نگاشت نمایی و منتقل کننده‌ها

در بخش بعدی ما به عبارتی برای عمل ایزومتری‌ها بر روی پولک‌های منتقل کننده f از میدان‌های ویزگی \tilde{f} نیاز خواهیم داشت، که آن را در اینجا استخراج می‌کنیم. برای این منظور، ما رفتار نگاشت نمایی و منتقل کننده‌های موازی را تحت عمل ایزومتری‌ها مورد بحث قرار می‌دهیم.

ایزومتری‌ها و نگاشت نمایی: همانطور که در [۵۹] اثبات شده است، ایزومتری‌ها ژئودزیک‌ها را به ژئودزیک‌ها نگاشت می‌کنند و بنابراین به طور خاص با نگاشت نمایی جابجا می‌شوند.^{۷۴} به طور خاص، همانی

$$\exp_{\phi(p)} \circ \phi_{*,TM}(v) = \phi \circ \exp_p(v) \quad \forall v \in T_p M, \quad \phi \in \text{Isom}(M), \quad (30.3)$$

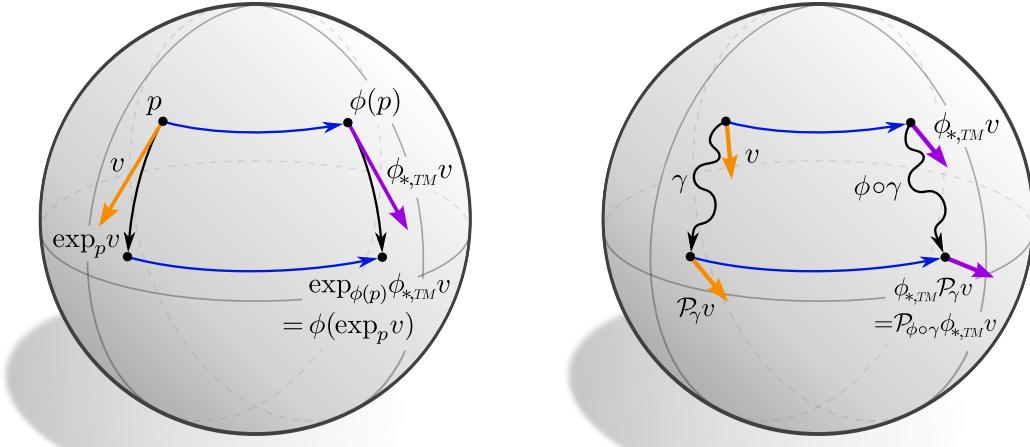
برای هر ایزومتری و هر بردار مماس در p برقرار است (هنوز یک منیفلد از نظر ژئودزیکی کامل را فرض می‌کنیم). این بیان می‌کند که نتیجه نگاشت نمایی در p که با یک بردار v ارزیابی شده و سپس از طریق ایزومتری نگاشت می‌شود، برابر با نگاشت نمایی در $(p)\phi$ است که با پیش‌ران v ارزیابی می‌شود، همانطور که در شکل ۴۴ (چپ) به تصویر کشیده شده است. این گزاره به صورت نموداری با جابجایی‌پذیری (مربع بالایی) نمودار زیر بیان می‌شود:

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{\phi} & M & & \\
 \uparrow \exp & & \uparrow \exp & & \\
 TM & \xrightarrow{\phi_{*,TM}} & TM & & \\
 \downarrow \pi_{TM} & & \downarrow \pi_{TM} & & \\
 M & \xrightarrow{\phi} & M & &
 \end{array} \quad (30.4)$$

ایزومتری‌ها و منتقل کننده‌های موازی: پیش‌ران روی کلاف مماس در [۵۹] علاوه بر این استدلال شد که با منتقل کننده‌های متناظر لوی-چیوپیتا جابجا می‌شود، همانطور که در شکل ۴۴ (راست) به تصویر کشیده شده است. اگر یک اتصال جایگزین و G-سازگار برای انتقال بردارهای ویزگی انتخاب شود، ما می‌خواهیم که آن نیز با عمل ایزومتری‌ها جابجا شود. از آنجایی که منتقل کننده‌ها و پیش‌ران‌ها بر روی TM هستند لقا می‌شوند، می‌توان به راحتی نشان داد که این خاصیت به آنها نیز منتقل می‌شود. به طور خاص برای کلاف‌های آنها که بر روی TM هستند، می‌توان به راحتی نشان داد که این خاصیت به آنها نیز منتقل می‌شود. بردار ویزگی الحاقی این به این معنی است که برای ایزومتری‌های دلخواه ϕ و مسیرهای γ ما رابطه

$$\phi_{*,A} \circ \mathcal{P}_{A,\gamma} = \mathcal{P}_{A,\phi \circ \gamma} \circ \phi_{*,A} \quad (30.5)$$

^{۷۴} اثبات به این واقعیت منکی است که اتصال لوی-چیوپیتا $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ ، $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ ، که نگاشت نمایی ریمانی بر اساس آن است، با ایزومتری‌ها جابجا می‌شود: $(\nabla_X Y) = \nabla_{\phi \triangleright X} (\phi \triangleright Y)$ ؛ به [۵۹] مراجعه کنید.



شکل ۴۴: چپ: ایزومتری‌ها با نگاشت نمایی جابجا می‌شوند، یعنی، $v \in T_p M$ برای هر بردار $\exp_{\phi(p)} \circ \phi_{*,TM}(v) = \phi \circ \exp_p(v)$ و ایزومتری $\phi \in \text{Isom}(M)$ راست: ایزومتری‌ها همچنین با انتقال لوی-چیویتا بردارهای مماس و بردارهای ویژگی جابجا می‌شوند، یعنی، $\phi_{*,A} \circ \phi_{*,A}^* \mathcal{P}_{A,\gamma} = \mathcal{P}_{A,\phi \circ \gamma} \circ \phi_{*,A}$ برای مسیرهای دلخواه $M \rightarrow [0,1]$: γ و ایزومتری‌های $\phi \in \text{Isom}(M)$. اگر یک اتصال جایگزین و G-سازگار استفاده شود، ما می‌خواهیم که همان خاصیت جابجا‌بی‌پذیری برای آنها نیز برقرار باشد. تامغیر بودن نگاشتهای نمایی و منتقل‌کننده‌ها نسبت به ایزومتری به کاولوش‌های GM اجازه می‌دهد تا تحت عمل ایزومتری‌ها هم‌متغیر باشند.

را فرض می‌کنیم، به طوری که نمودار زیر جابجا می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\gamma(\cdot)} & \xrightarrow{\phi_{*,A}} & \mathcal{A}_{\phi \circ \gamma(\cdot)} \\ \downarrow \mathcal{P}_{A,\gamma} & & \downarrow \mathcal{P}_{A,\phi \circ \gamma} \\ \mathcal{A}_{\gamma(1)} & \xrightarrow{\phi_{*,A}} & \mathcal{A}_{\phi \circ \gamma(1)} \end{array} \quad (3.06)$$

ایزومتری‌ها و پول‌بک‌های منتقل‌کننده میدان‌های ویژگی: با دانستن قوانین تبدیل نگاشتهای نمایی و منتقل‌کننده‌ها تحت عمل ایزومتری‌ها، ما همه چیز لازم را برای استخراج قانون تبدیل پول‌بک‌های منتقل‌کننده $\text{Exp}_p^* f$ از میدان‌های ویژگی f در دست داریم: قضیه ۴.۸ (عمل ایزومتری بر روی پول‌بک‌های منتقل‌کننده میدان‌های ویژگی). فرض کنید $f \in \Gamma(\mathcal{A})$ هر میدان ویژگی $f \in \text{Isom}_{GM}$ هر ایزومتری حافظ G-ساختار باشد. فرض کنید منتقل‌کننده‌های بردار ویژگی با عمل Isom_{GM} جابجا شوند، یعنی معادله (۳.۰۵) برقرار باشد (که به طور خودکار برای اتصال لوی-چیویتا تضمین می‌شود). سپس پول‌بک منتقل‌کننده (تعريف ۵.۷) از میدان پیش‌ران $f \triangleright f$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f) = \phi_{*,A_{000}} \circ [\text{Exp}_{\phi^{-1}(p)}^* f] \circ \phi_{*,TM}^{-1} \quad (3.07)$$

اثبات: ما با اعمال سمت راست بر روی یک بردار دلخواه $v \in T_p M$ شروع می‌کنیم و با استفاده از ویژگی‌های استخراج شده در این بخش به تدریج به سمت چپ می‌رسیم:

$$\begin{aligned} & \phi_{*,A_{000}} [\text{Exp}_{\phi^{-1}(p)}^* f] \phi_{*,TM}^{-1}(v) \\ &= \phi_{*,A_{000}} \mathcal{P}_{A_{000}, \phi^{-1}(p) \leftarrow \exp_{\phi^{-1}(p)} \circ \phi_{*,TM}^{-1}(v)} \circ f \circ \exp_{\phi^{-1}(p)} \circ \phi_{*,TM}^{-1}(v) \quad (\text{پول‌بک منتقل‌کننده، تعريف ۵.۷}) \\ &= \phi_{*,A_{000}} \mathcal{P}_{A_{000}, \phi^{-1}(p) \leftarrow \phi^{-1} \circ \exp_p(v)} \circ f \circ \phi^{-1} \circ \exp_p(v) \quad (\text{عمل ایزومتری بر } \exp, \text{ معادله (۳.۰۳)}) \\ &= \mathcal{P}_{A_{000}, p \leftarrow \exp_p(v)} \circ \phi_{*,A_{000}} \circ f \circ \phi^{-1} \circ \exp_p(v) \quad (\text{عمل ایزومتری بر } \mathcal{P}_{A_{000}}, \text{ معادله (۳.۰۵)}) \\ &= \mathcal{P}_{A_{000}, p \leftarrow \exp_p(v)} \circ (\phi \triangleright f) \circ \exp_p(v) \quad (\text{پیش‌ران میدان‌ها، معادله (۲.۸۱)}) \\ &= [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](v) \quad (\text{پول‌بک منتقل‌کننده، تعريف ۵.۷}) \quad \square \end{aligned} \quad (3.08)$$

به طور شهودی، این نتیجه فقط بیان می‌کند که پول‌بک منتقل‌کننده یک میدان پیش‌ران برابر با پیش‌ران پول‌بک منتقل‌کننده میدان اصلی است. نسبت به بدیهی‌سازی‌های محلی، این پیش‌ران را می‌توان به عنوان یک تبدیل پیمانه القا شده از ایزومنتری تفسیر کرد، که در معادله (۹۳) بیان شد. ما در ادامه فرض خواهیم کرد که اتصال G -سازگاری که برای انتقال بردارهای ویژگی انتخاب می‌شود، همیشه نسبت به Isom_{GM} خواهد بود و بنابراین معادله (۳۰۷) برقرار است.

اینکه پول‌بک منتقل‌کننده و پیش‌ران ایزومنتری جابجا می‌شوند، نتیجه جابجایی‌بدیری نگاشت نمایی و منتقل‌کننده موازی است، که پول‌بک منتقل‌کننده بر حسب آنها تعریف می‌شود. توجه داشته باشید که دیفیومورفیسم‌های عمومی متريک و در نتیجه نگاشت نمایی و پول‌بک منتقل‌کننده میدان‌های ویژگی را حفظ نمی‌کنند. با تکیه بر این ساختارها، تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM فقط می‌توانند نسبت به ایزومنتری هم‌متغیر باشند اما نه کاملاً نسبت به دیفیومورفیسم.

۲.۸ هم‌متغیری ایزومنتری تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM

اکنون به بررسی این موضوع می‌پردازیم که تحت چه شرایطی تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM نسبت به عمل ایزومنتری‌ها بر روی میدان‌های ویژگی هم‌متغیر هستند. از آنجایی که عمل بر روی کلاف‌های بردار و ویژگی G -الحاقی فقط برای ایزومنتری‌های حافظ G -ساختار تعریف شده است، ما تمام گزاره‌ها را برای زیرگروه $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM} \leq \text{Isom}(M)$ یا زیرگروه‌های $\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M)$ از آن فرمول‌بندی خواهیم کرد. البته همیشه می‌توان گروه‌های ساختار $G \geq O(d)$ را در نظر گرفت که برای آنها $\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M)$ است.

هم‌متغیری یک تبدیل میدان کرنل، و در نتیجه کانولوشن‌های GM . به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعريف ۵.۸ (تبدیل میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزومنتری). فرض کنید $\mathcal{T}_K : \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square\square})$ یک تبدیل میدان کرنل باشد. آنگاه گفته می‌شود که \mathcal{T}_K نسبت به عمل ایزومنتری‌ها در یک زیرگروه $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$ هم‌متغیر است اگر با این عمل جابجا شود، یعنی اگر ویژگی زیر برقرار باشد:

$$\mathcal{T}_K(\phi \triangleright f) = \phi \triangleright (\mathcal{T}_K(f)) \quad \forall f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}), \phi \in \mathcal{I} \quad (309)$$

بر حسب یک نمودار، \mathcal{T}_K نسبت به ایزومنتری‌ها در \mathcal{I} هم‌متغیر است اگر

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) & \xrightarrow{\mathcal{T}_K} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square\square}) \\ \phi \triangleright \downarrow & & \downarrow \phi \triangleright \\ \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) & \xrightarrow{\mathcal{T}_K} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square\square}) \end{array} \quad (310)$$

برای همه $\phi \in \mathcal{I}$ جابجا شود.

یک نمایش تصویری از این تعریف در شکل ۲۷ آورده شده است. در بخش بعدی ۱.۲.۸ ما یک قید بر روی میدان‌های کرنل استخراج خواهیم کرد تا تبدیل میدان کرنل متناظر نسبت به ایزومنتری هم‌متغیر باشد. نتیجه‌های که از نظر هندسی شهودی است و به دست می‌آوریم این است که خود میدان کرنل باید تحت عمل ایزومنتری‌ها نامتغیر باشد، که این به معنای نوعی اشتراک‌گذاری وزن بر روی مدارهای ایزومنتری است؛ به شکل ۴۵ مراجعه کنید. بخش ۱.۲.۸ این بیان‌ها را به مورد خاص تر کانولوشن‌های GM و میدان‌های کرنل کانولوشنی GM اعمال می‌کند. مشخص می‌شود که کانولوشن‌های GM به دلیل G -هدایت‌پذیری کرنل الگوی خود، به طور خودکار نسبت به هر ایزومنتری در Isom_{GM} هم‌متغیر هستند.

۱.۲.۸ هم‌متغیری ایزومنتری تبدیلات میدان کرنل عمومی

نتیجه اصلی این بخش، قضیه ۸.۸، بیان می‌کند که یک تبدیل میدان کرنل \mathcal{T}_K نسبت به ایزومنتری هم‌متغیر است اگر و تنها اگر میدان کرنل زیربنایی آن K تحت ایزومنتری‌ها نامتغیر باشد. برای معنادار کردن این گزاره، ما با تعریف رفتار تبدیلی میدان‌های کرنل هنگام عمل ایزومنتری‌ها بر آنها شروع می‌کنیم.

تعريف ۶.۸ (عمل ایزومنتری بر روی میدان‌های کرنل). فرض کنید $\mathcal{T}_K : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square\square\square})$ یک میدان کرنل باشد. یک ایزومنتری $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ از طریق پیش‌ران میدان کرنل بر روی K عمل می‌کند:

$$\phi_{*,K} K := \phi_{*,\square\square} \circ \mathcal{T}_K \circ \phi_{*,TM}^{-1}. \quad (311)$$

به طور شهودی، این پیش‌ران میدان‌های کرنل را می‌توان به عنوان حرکت دادن کرنل‌های منفرد \mathcal{K}_p در نقاط $p \in M$ در امتداد مدارهای گروه ایزومنتری به $(p)\phi$ در نظر گرفت.

از آنجایی که میدان‌های کرنل به عنوان M -مورفیسم‌های کلاف تعریف می‌شوند، یعنی $\pi_{TM} \circ \pi_M = \pi_K$ را برآورده می‌کنند، پیش‌ران آنها تنها در صورتی خوش‌تعریف است که این ویژگی را حفظ کند. این تضمین می‌شود زیرا پیش‌ران روی کلاف مماس و کلاف هومومورفیسم نگاشته‌های

کلاف هستند که به ترتیب $\pi_{TM} \circ \phi_{*,TM} = \phi \circ \pi_{TM}$ و $\pi_{\mathcal{K}} \circ \phi_{*,\mathcal{K}} = \phi \circ \pi_{\mathcal{K}}$ می‌کنند:

$$\begin{aligned}\pi_{\mathcal{K}} \circ \phi_{*,\mathcal{K}} &= \pi_{\mathcal{K}} \circ \phi_{*,TM} \circ \mathcal{K} \circ \phi_{*,TM}^{-1} \\&= \phi \circ \pi_{TM} \circ \mathcal{K} \circ \phi_{*,TM}^{-1} \\&= \phi \circ \pi_{TM} \circ \phi_{*,TM}^{-1} \\&= \phi \circ \phi^{-1} \circ \pi_{TM} \\&= \pi_{TM}\end{aligned}\tag{۳۱۲}$$

ما تعريف عمل ايزومتری را بر روی میدان‌های کرنل با یک نمودار جابجایی به تصویر می‌کشیم:

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & \nearrow \pi_{TM} & & \searrow \pi_{\mathcal{K}} & \\ TM & \xrightarrow{\phi_{*,\mathcal{K}}} & \text{Hom}(\mathcal{A}_{\mathbb{M}}, \mathcal{A}_{\mathbb{M}}) & & \\ \downarrow \phi & & \uparrow \phi_{*,TM} & & \\ TM & \xrightarrow{\mathcal{K}} & \text{Hom}(\mathcal{A}_{\mathbb{M}}, \mathcal{A}_{\mathbb{M}}) & & \\ & \searrow \pi_{TM} & & \nearrow \pi_{\mathcal{K}} & \\ & M & & & \end{array}\tag{۳۱۳}$$

بعش پایینی این نمودار میدان کرنل مستقل از مختصات \mathcal{K} را از نمودار در معادله (۳۷) نشان می‌دهد. $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ نشان می‌دهد. جابجایی پذیری فلش سمت چپ، که تأیید می‌کند ϕ کرنل‌ها را از p به (p) منتقل می‌کند، از این واقعیت ناشی می‌شود که $\phi_{*,TM} \circ \phi_{*,\mathcal{K}} = \phi$ هر دو نگاشتهای کلاف روی ϕ هستند.

ما با تعريف میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ايزومتری ادامه می‌دهیم - یک نمایش تصویری در شکل ۴۵ یافت می‌شود.
تعريف ۷.۸ (میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ايزومتری). گفته می‌شود یک میدان کرنل \mathcal{K} نامتغیر^{۷۵} تحت ايزومتری‌ها در $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$ است اگر قید $\phi_{*,\mathcal{K}} = \mathcal{K}$ برای همه $\phi \in \mathcal{I}$ برآورده کند. ما فضای میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ايزومتری را با

$$\mathcal{K}_{\mathbb{M}}^{\mathcal{I}} := \left\{ \mathcal{K} : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\mathbb{M}}, \mathcal{A}_{\mathbb{M}}) \mid \pi_{\mathcal{K}} \circ \mathcal{K} = \pi_{TM}, \quad \phi_{*,\mathcal{K}} = \mathcal{K} \quad \forall \phi \in \mathcal{I} \right\}.\tag{۳۱۴}$$

با نوشتن ϕ ، قید نامتغیر بودن به صورت زیر خوانده می‌شود:

$$\phi_{*,TM} \circ \mathcal{K} \circ \phi_{*,TM}^{-1} = \mathcal{K} \quad \forall \phi \in \mathcal{I},\tag{۳۱۵}$$

که پس از بسط بیشتر $\phi_{*,TM}$ همانطور که در معادله (۲۸۰) تعريف شده است، به صورت زیر در می‌آید:

$$\phi_{*,\mathcal{A}_{\mathbb{M}}} \mathcal{K}(\phi_{*,TM}^{-1} v) \phi_{*,\mathcal{A}_{\mathbb{M}}}^{-1} = \mathcal{K}(v) \quad \forall v \in TM, \quad \forall \phi \in \mathcal{I}\tag{۳۱۶}$$

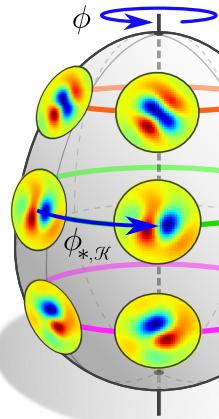
به شاهد این قیود میدان کرنل در معادلات (۳۱۵) و (۳۱۶) با قید G-هدایت‌پذیری بر روی کرنل‌های الگو در معادلات (۲۴۳) و (۲۴۴) توجه کنید. در واقع، هر دو قید ارتباط نزدیکی با هم دارند و تا حدی یکدیگر را ایجاب می‌کنند، همانطور که در بخش بعدی ۲.۲.۸ در مورد کاتولوشن‌های GM هم‌متغیر نسبت به ايزومتری نشان خواهیم داد.

قضیه زیر اثبات می‌کند که میدان‌های کرنلی که تحت ايزومتری‌ها نامتغیر هستند، در واقع متناظر با تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ايزومتری هستند:

قضیه ۸.۸ (تبدیل میدان کرنل هم‌متغیر \Leftrightarrow میدان کرنل نامتغیر). یک تبدیل میدان کرنل $(\mathcal{A}_{\mathbb{M}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\mathbb{M}})$ نسبت به ايزومتری‌ها در $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$ طبق تعريف ۵.۸ هم‌متغیر است اگر و تنها اگر میدان کرنل زیربنایی \mathcal{K} تحت ايزومتری‌ها طبق تعريف ۷.۸ نامتغیر باشد، یعنی،

$$\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(\phi \triangleright f) = \phi \triangleright \mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f) \quad \forall \phi \in \mathcal{I}, \quad f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\mathbb{M}}) \iff \phi_{*,\mathcal{K}} = \mathcal{K} \quad \forall \phi \in \mathcal{I}\tag{۳۱۷}$$

^{۷۵} به جای گفتن اینکه \mathcal{K} نامتغیر است، می‌توان آن را هم‌متغیر نامید زیرا $\phi_{*,\mathcal{K}} = \mathcal{K} \circ \phi_{*,TM}$ $\forall \phi \in \mathcal{I}$. تابعی که نسبت به اعمال گروهی معینی بر روی دامنه و هم‌دامنه‌اش هم‌متغیر باشد، خودش تحت پیش‌ترکیب و پس‌ترکیب با اعمال روی دامنه و هم‌دامنه‌اش مانند معادله (۳۱۵) نامتغیر است.



شکل ۴۵: نمایش تصویری یک میدان کرnel نامتغیر \mathcal{K} برای حالت یک (زیر) گروه ایزومتری $\mathcal{I} = SO(2)$. قید نامتغیر بودن مستلزم $\phi_{*,\mathcal{K}}\mathcal{K}\phi_{*,TM}^{-1} = \mathcal{K}$ است. این ایجاب می‌کند که کرل‌ها بر روی مدارهای متفاوتی $\mathcal{I}\cdot p := \{\phi(p) \mid \phi \in \mathcal{I}\}$ عمل به اشتراک گذاشته شوند اما اجازه می‌دهد کرnel‌های متفاوتی بر روی مدارهای مختلف وجود داشته باشند. قضیه ۸.۸ اثبات می‌کند که میدان‌های کرnel نامتغیر و تبدیلات میدان کرnel هم‌متغیر یکدیگر را ایجاب می‌کنند. این به طور شهودی روشن است زیرا یک الگوی خاص در میدان ویژگی در $p \in M$ همان پاسخی را هنگامی که به (p) منتقل می‌شود برهم انگیز، اگر و تنها اگر کرnel‌ها در هر دو نقطه متنطبق باشند. برای انتخاب $\mathcal{I} = O(2)$ به عنوان گروه ایزومتری، کرnel‌ها علاوه بر این باید یک قید بازتابی را برآورده کنند؛ به شکل ۴۷ مراجعه کنید.

اثبات: برای اثبات این قضیه، ما تبدیلات میدان کرnel و پیش‌ران‌های میدان ویژگی را در هر دو طرف شرط هم‌متغیری ایزومتری در معادله (۳۰۹) می‌نویسیم. گزاره پس از چند دستکاری جبری از مقایسه هر دو طرف به دست می‌آید.

ما با سمت راست معادله (۳۰۹) شروع می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 [\phi \triangleright \mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f)](p) &\stackrel{(1)}{=} \phi_{*,\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}}[\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f)](\phi^{-1}(p)) \\
 &\stackrel{(2)}{=} \phi_{*,\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}} \int_{T_{\phi^{-1}(p)}M} \mathcal{K}(v) [\text{Exp}_{\phi^{-1}(p)}^* f](v) dv \\
 &\stackrel{(3)}{=} \phi_{*,\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}} \int_{T_{\phi^{-1}(p)}M} \mathcal{K}(v) \phi_{*,\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}}^{-1} [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](\phi_{*,TM}(v)) dv \\
 &\stackrel{(4)}{=} \int_{T_p M} \phi_{*,\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}} \mathcal{K}(\phi_{*,TM}^{-1} \tilde{v}) \phi_{*,\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}}^{-1} [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](\tilde{v}) d\tilde{v} \\
 &\stackrel{(5)}{=} \int_{T_p M} [\phi_{*,\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}} \mathcal{K} \phi_{*,TM}^{-1}](\tilde{v}) [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](\tilde{v}) d\tilde{v} \\
 &\stackrel{(6)}{=} \int_{T_p M} [\phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K}](\tilde{v}) [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](\tilde{v}) d\tilde{v} \tag{۳۱۸}
 \end{aligned}$$

مراحل (۱) و (۲) عمل ایزومتری \triangleright را بر روی میدان‌های ویژگی (تعریف ۲.۸) و تبدیل میدان کرnel (تعریف ۶.۷) بسط می‌دهند. قانون تبدیل پول‌بک منتقل کننده میدان در قضیه ۴.۸، که به نامتغیر بودن اتصال G -سازگار نسبت به v می‌کند. مرحله (۴) v را با $\tilde{v} = \phi_{*,TM} v$ تغییر می‌کند. از آنجایی که ϕ یک ایزومتری است، تغییر حجم برابر با ۱ است. مراحل (۵) و (۶) عمل پیش‌ران کرnel $\phi_{*,\mathcal{K}}$ را شناسایی می‌کنند، تعریف ۶.۸ گزاره حاصل کاملاً شهودی است: یک تبدیل خروجی تبدیل میدان کرnel متناظر با یک تبدیل همزمان ورودی و میدان کرnel آن است.

نوشتن سمت چپ به دست می‌دهد:

$$[\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(\phi \triangleright f)](p) = \int_{T_p M} \mathcal{K}(v) [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](v) dv, \tag{۳۱۹}$$

که تا تبدیل میدان کرnel با سمت راست معادل است.

هم‌متغیری ایزومتری مستلزم آن است که هر دو عبارت برای میدان‌های دلخواه $(\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}, f) \in \Gamma(\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n})$ و $p \in M$ موافق باشند. این حالت اگر و تنها اگر $\phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K} = \mathcal{K}$ برقرار باشد، یعنی اگر میدان کرnel تحت عمل ایزومتری‌ها نامتغیر باشد، برقرار است. \square

توجه داشته باشید که این اثبات در (یک G -اطلس از) بدیهی‌سازی‌های محلی بسیار دشوار بود. توصیف سراسری و مستقل از مختصات تبدیلات میدان کرnel امکان یک اثبات ساده را بدون نگرانی از اینکه ایزومتری‌ها ویژگی‌ها را بین بدیهی‌سازی‌های محلی مختلف منتقل کنند، فراهم می‌کند.

در این مرحله ما می‌توانستیم با بررسی بیشتر میدان‌های کرنل نامتفیر نسبت به ایزومتری ادامه دهیم: از آنجایی که قید نامتفیر بودن ایجاد می‌کند که کرنل‌ها بر روی مدارهای گروه ایزومتری باشترک گذاشته شوند، توصیف کل میدان کرنل بر روی کل منیفلد زائد است. بنابراین امکان کاهش توصیف چنین میدان‌های کرنلی به میدان‌های کرنل بر روی فضاهای خارج‌قسمتی وجود دارد. از آنجایی که این تحلیل برای اثبات هم‌متغیری ایزومتری کاتولوشن‌های GM لازم نیست و به برخی تعاریف فنی نیاز دارد، ما آن را به بخش ۳.۸ موقوک می‌کنیم.

۲.۲.۸ هم‌متغیری ایزومتری کاتولوشن‌های GM

به یاد بیاورید که کاتولوشن‌های GM (تعریف ۴.۷) به عنوان تبدیلات میدان کرنل خاص با میدان‌های کرنل کاتولوشنی GM (تعریف ۴.۷) تعریف شدند. بنابراین نتایج مربوط به هم‌متغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرنل بلطفاً به کاتولوشن‌های GM نیز اعمال می‌شود. با این حال، علاوه بر قید نامتفیر بودن ایزومتری در معادله (۳۱۵)، میدان‌های کرنل کاتولوشنی GM باید قید G -هدایت‌پذیری را بر روی کرنل الگو از معادله (۲۴۳) برآورده کنند و وزن‌ها را طبق معادله (۲۴۵) بر روی G -ساختار به اشتراک بگذارند. برای اینکه کاتولوشن GM نسبت به ایزومتری هم‌متغیر باشد، همه این قیود باید به طور شهودی، این ایجاد می‌کند که اشتراک گذاری وزن کاتولوشنی با اشتراک گذاری وزن القا شده از ایزومتری بر روی مدارها موافق باشد. خوب‌شناخته مشخص می‌شود که این به طور خودکار برای ایزومتری‌های مورده نظر صادق است: کاتولوشن‌های GM وزن‌ها را بر روی G -ساختار به اشتراک می‌گذارند و ایزومتری‌ها در G -Isom GM ساختار را حفظ می‌کنند به طوری که میدان‌های کرنل کاتولوشنی GM تضمین شده‌اند که نسبت به Isom_{GM} نامتفیر باشند. در مختصات، این در تبدیلات پیمانه‌القا شده از Isom_{GM} یعنی $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)$ که در گروه ساختار G مقدار می‌گیرند، منعکس می‌شود، به طوری که آنها توسط G -هدایت‌پذیری کرنل‌های الگو حذف می‌شوند.

برای دقیق تر کردن این استدلال‌ها، یک کاتولوشن GM یعنی $(\Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}))^*$ را با یک کرنل G -هدایت‌پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^G$ در نظر بگیرید، که طبق تعریف ۴.۷ فقط تبدیل میدان کرنل \mathcal{K}_K با میدان کرنل کاتولوشنی GM یعنی \mathcal{K}_K است. طبق قضیه ۴.۸، کاتولوشن GM بنابراین دقیقاً زمانی نسبت به Isom_{GM} هم‌متغیر است که \mathcal{K}_K نسبت به Isom_{GM} نامتفیر باشد، یعنی زمانی که $\phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K}_K = \mathcal{K}_K \circ \phi_{*,TM}^{-1} = \mathcal{K}_K$ بر روی کرنل‌های کاتولوشن منفرد که میدان را تشکیل می‌دهند، بیان می‌شود:

$$\phi_{*,\square\square\square} \circ \mathcal{K}_{K,p} \circ \phi_{*,TM}^{-1} = \mathcal{K}_{K,\phi(p)} \quad \forall p \in M, \phi \in \text{Isom}_{GM} \quad (320)$$

با در نظر گرفتن یک نقطه خاص $p \in M$ ما پیمانه‌های دلخواه \tilde{A} را در p و A را در $\phi(p)$ از G -اطلس انتخاب می‌کنیم. میدان کرنل کاتولوشنی GM طبق تعریف ۴.۷ در p و $\phi(p)$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\mathcal{K}_{K,p} := (\psi_{\square\square\square,p}^{\tilde{A}})^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^{\tilde{A}}|}} \circ \psi_{TM,p}^{\tilde{A}} \quad \text{و} \quad \mathcal{K}_{K,\phi(p)} := (\psi_{\square\square\square,\phi(p)}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_{\phi(p)}^A|}} \circ \psi_{TM,\phi(p)}^A. \quad (321)$$

با جایگذاری این عبارات در قید در معادله (۳۲۰) برای p ثابت و شناسایی $(\psi_{\square\square\square,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,\square\square\square}^{-1})$ با $(\psi_{\square\square\square,\phi(p)}^A)^{-1}$ به دست می‌آوریم:

$$(\psi_{\square\square\square,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,TM}^{-1})^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^{\tilde{A}}|}} \circ \psi_{TM,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,TM}^{-1} = (\psi_{\square\square\square,\phi(p)}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_{\phi(p)}^A|}} \circ \psi_{TM,\phi(p)}^A \quad \forall \phi \in \text{Isom}_{GM} \quad (322)$$

بنابراین هم‌متغیری ایزومتری برقرار خواهد بود اگر اشتراک گذاری وزن از طریق پیمانه‌های القا شده از ایزومتری $\psi_{*,(\cdot)p}^{\tilde{A}}$ با اشتراک گذاری وزن $\psi_{*,(\cdot)p}^{\tilde{A}}$ از طریق پیمانه‌های اصلی $\psi_{*,(\cdot)p}^A$ موقوف باشد. به یاد بیاورید که پیمانه‌های القا شده از ایزومتری طبق قضیه ۴.۸ برای ایزومتری‌ها در Isom_{GM} تضمین شده‌اند که با G -اطلس‌ها (از کلاف متناظر) سازگار باشند. همانطور که در معادله (۲۴۶) نشان داده شده است، انتخاب خاص پیمانه، که کرنل الگوی G -هدایت‌پذیر نسبت به آن جهت‌دهی می‌شود، بی‌همیت است، تا زمانی که پیمانه‌ها G -سازگار باشند. از آنجایی که ممه استخراج‌ها از نقطه انتخاب شده p و انتخاب خاص پیمانه‌ها مستقل بودند، این ایجاد می‌کند که کاتولوشن‌های GM بنا به طراحی تضمین شده‌اند که نسبت به Isom_{GM} هم‌متغیر باشند.

برای به دست آوردن شهود بهتر برای این نتیجه، ارزش دارد که تبدیلات پیمانه‌القا و با مقدار در G یعنی $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)$ را صریح کنیم. برای این منظور، توجه داشته باشید که جایگایی‌پذیری نمودارها در معادلات (۳۰۲) و (۲۸۵) ایجاد می‌کند $\rho_{\text{Hom}}(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{\square\square\square,\phi(p)}^A \circ \psi_{\square\square\square,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,TM}^{-1} = \rho_{\text{Hom}}(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{TM,\phi(p)}^A$. با جایگذاری این عبارات مختصاتی در قید در معادله (۳۲۲) به این زام رسمیم که

$$(\rho_{\text{Hom}}(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{\square\square\square,\phi(p)}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^{\tilde{A}}|}} \circ (g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{TM,\phi(p)}^A = (\psi_{\square\square\square,\phi(p)}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_{\phi(p)}^A|}} \circ \psi_{TM,\phi(p)}^A \quad (323)$$

باید برای هر ایزومتری ϕ در Isom_{GM} برقرار باشد. با بسط دادن معکوس در سمت چپ، با استفاده از اینکه $\sqrt{|\eta_p^{\tilde{A}}|} = \sqrt{|\eta_{\phi(p)}^A|} \cdot |\det g_\phi^{A\tilde{A}}(p)|$ و حذف پیمانه‌ها، که ممکن است زیرا آنها ایزومورفیسم هستند، ما به قید زیر می‌رسیم:

$$\frac{1}{|\det g_\phi^{A\tilde{A}}(p)|} \rho_{\text{Hom}}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) \circ K \circ (g_\phi^{A\tilde{A}}(p))^{-1} = K \quad \forall \phi \in \text{Isom}_{GM}, \quad (324)$$

که دقیقاً شبیه قید کرنل G -هدایت‌پذیر بر روی K از تعریف ۳.۷ است. به یاد بیاورید که تبدیلات پیمانه‌ها شده از ایزومتری $(g_\phi^{A\tilde{A}}(p))$ طبق قضیه ۳.۸ تضمین شده‌اند که اگر ϕ عنصری از Isom_{GM} باشد، با مقدار در G باشند. بنابراین قید در معادله (۳۲۴) همیشه با G -هدایت‌پذیری K برآورده می‌شود.

نتایج استخراج شده در مورد نامتغیر بودن میدان‌های کانولوشنی GM یعنی \mathcal{K}_K نسبت به Isom_{GM} به طور خلاصه با این گزاره خلاصه می‌شوند که نمودار زیر تضمین شده است که اگر G K -هدایت‌پذیر باشد و اگر $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ جابجاً پذیر است:

$$\begin{array}{c} \text{id} \times (\rho_{\text{Hom}}(g_\phi'^{A\tilde{A}}) \circ K / \sqrt{|\eta^A|} \circ (g_\phi'^{A\tilde{A}})^{-1}) \\ \boxed{\begin{array}{ccccc} & U^A & & & \\ & \nearrow \pi_{TM} & \searrow \pi_{\square\square\square} & & \\ U^A \times \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\Psi_{TM}^A} & \pi_{TM}^{-1}(U^A) & \xrightarrow{\phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K}_K} & \pi_{\square\square\square}^{-1}(U^A) \xrightarrow{\Psi_{\square\square\square}^A} U^A \times \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \\ \uparrow \phi \times g_\phi^{A\tilde{A}}. & \uparrow \phi_{*,TM} & & \uparrow \phi_{*,\square\square\square}, & \uparrow \phi \times \rho_{\text{Hom}}(g_\phi^{A\tilde{A}}) \\ U^{\tilde{A}} \times \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\Psi_{TM}^{\tilde{A}}} & \pi_{TM}^{-1}(U^{\tilde{A}}) & \xrightarrow{\mathcal{K}_K} & \pi_{\square\square\square}^{-1}(U^{\tilde{A}}) \xrightarrow{\Psi_{\square\square\square}^{\tilde{A}}} U^{\tilde{A}} \times \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \\ \uparrow \pi_{TM} & & \uparrow \pi_{\square\square\square} & & \uparrow \\ & U^{\tilde{A}} & & & \end{array}} \\ \text{id} \times K / \sqrt{|\eta^{\tilde{A}}|} \end{array} \quad (325)$$

در اینجا ما پول‌بک G از مختصاتی سازی پیش‌ران ایزومتری را از $U^{\tilde{A}}$ به U^A برای راحتی نوشتاری تعریف کردیم.

همراه با قضیه ۸.۸، نامتغیر بودن میدان‌های کرنل کانولوشنی GM نسبت به Isom_{GM} هم‌متغیری کانولوشن‌های GM نسبت به Isom_{GM} را ایجاد می‌کنند:

قضیه ۹.۸ (هم‌متغیری ایزومتری کانولوشن‌های GM). یک کانولوشن GM یعنی $(\Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}), \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}))$ با یک کرنل G -هدایت‌پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^G$ نسبت به تمام ایزومتری‌های حافظ G -ساختار $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ هم‌متغیر است، یعنی،

$$K \star (\phi \triangleright f) = \phi \triangleright (K \star f) \quad \forall f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}), \phi \in \text{Isom}_{GM}. \quad (326)$$

بنابراین نمودار زیر برای هر $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ جابجا می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) & \xrightarrow{K \star} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}) \\ \downarrow \phi \triangleright & & \downarrow \phi \triangleright \\ \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) & \xrightarrow{K \star} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}) \end{array} \quad (327)$$

اثبات: اثبات در بحث قبل از قضیه ارائه شد. \square

با استخراج این نتیجه کلی در مورد کانولوشن‌های GM . ما اکنون برخی موارد خاص را برای انتخاب‌های خاص از گروه‌های ساختار G مورد بحث قرار می‌دهیم. اولاً، برای گروه‌های ساختار متعامد ($G = O(d)$ یا ابرگروه‌های آن)، کانولوشن با هر ایزومتری جابجا می‌شود:

قضیه ۱۰.۸ (هممتغیری کامل ایزومتری کانولوشن‌های OM). کانولوشن‌های OM نسبت به عمل هر ایزومتری $\phi \in \text{Isom}(M)$ بروی میدان‌های ویژگی هممتغیر هستند. به طور کلی تر، هر کانولوشن GM برای G -ساختارها با گروه‌های ساختار $G \geq O(d)$ کاملاً نسبت به ایزومتری هممتغیر است.

اثبات: گزاره از قضیه (۹.۸) با مشاهده اینکه $\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M)$ برای گروه‌های ساختار $G \geq O(d)$ تضمین شده است، به دست می‌آید. دومی در معادله (۲۷۵) مورد بحث قرار گرفت. \square

این نتیجه اساساً به این واقعیت مตکی است که ایزومتری‌ها به عنوان آن زیرگروهی از دیفیومورفیسم‌ها بر روی M تعریف می‌شوند که خودریختی‌های $O(d)$ -ساختار را القا می‌کنند. به بیان کمتر انتزاعی، $\text{Isom}(M)$ بنا به تعریف آن زیرگروهی از دیفیومورفیسم‌ها است که به متريک ریمانی η احترام می‌گذارد و $O(d)$ -ساختار متناظر OM اطلاعاتی معادل با متريک است.

بر روی منیفلدهای ریمانی جهت‌پذیر، می‌توان علاوه بر این یک جهت (دست‌گردی قاب) را انتخاب کرد، که همراه با متريک یک $\text{SO}(d)$ -ساختار SOM را تعریف می‌کند. ایزومتری‌های متناظر که به خودریختی‌های ساختار (SOM, d) بالابر می‌شوند، ایزومتری‌های حافظ جهت در $\text{Isom}_+(M)$ هستند.

قضیه ۱۱.۸ (هممتغیری $\text{Isom}_+(M)$ کانولوشن‌های SOM). کانولوشن‌های SOM نسبت به عمل ایزومتری‌های حافظ جهت $\phi \in \text{Isom}_+(M)$ بر روی میدان‌های ویژگی هممتغیر هستند.

اثبات: این نتیجه از قضیه (۹.۸) با مشاهده اینکه $\text{Isom}_{SOM} = \text{Isom}_+(M)$ به دست می‌آید. \square

به عنوان مثال، یک کانولوشن SOM برای \mathbb{R}^n که متناظر با شکل آ است، نسبت به عمل گروه اقلیدسی ویژه $\text{SE}(n)$ هممتغیر است. به طور مشابه، یک کانولوشن SOM برای S^n که متناظر با شکل آب است، نسبت به دوران با $\text{SO}(n)$ هممتغیر است.

توجه داشته باشید که نتایج قضایای ۱۰.۸ و ۱۱.۸ فقط به گروه ساختار G -ساختار بستگی ندارند. برای زیرگروه‌های G از $O(d)$ (با $\text{SO}(d)$ مسائل پیچیده‌تر می‌شوند. در این موارد، زیرگروه‌های $\text{Isom}(M)$ از Isom_{GM} به نشاندن خاص G -ساختار FM در شکل G است. این برای $\{e\}$ در شکل ۴۲ به تصویر کشیده شد. به طور خاص، شکل ۴۲- e -ساختار کانونی \mathbb{R}^n را نشان می‌دهد که کاملاً نسبت به انتقال هممتغیر است، یعنی $\text{Isom}_{\{e\}M} = \mathcal{T}_2 := (\mathbb{R}^n, +)$. از \mathbb{R}^n را نشان می‌دهد که فقط در امتداد یک محور نسبت به انتقال هممتغیر است به طوری که $\text{Isom}_{\{e\}M} \cong \mathcal{T}_1 := (\mathbb{R}, +)$. شبکه‌های کانولوشنی این نتیجه بسیار شهودی است: کرنل‌های $\{e\}$ -هدایت‌پذیر در این مثال‌ها بدون قید هستند، یعنی کرنل‌های کانولوشن مرسمون هستند. بنابراین آنها به طور کلی هیچ اطلاعاتی در مورد پاسخ‌های خود هنگام اعمال نسبت به قاب‌های مرجع تبدیل شده با پیمانه حمل نمی‌کنند. از آنجایی که قاب‌ها، و بنابراین کرنل‌ها، در شکل ۴۲ ب درجه «چپ-راست» به طور متقاوی چرخانه شده‌اند، پاسخ‌های کرنل‌های کانولوشن مرسمون سیکنال در آن جهت به طور غیرقابل پیش‌بینی تغییر می‌کنند. اگر کرنل‌های الگو، با این حال، $\text{SO}(2)$ -هدایت‌پذیر بودند، می‌توانستند چرخش قاب‌ها را در نظر بگیرند. این حالت متناظر با وضعیت در شکل ۴۳ است، یعنی یک کانولوشن SOM .

۳.۸ میدان‌های کرنل خارج‌قسمتی

قضیه ۸.۸ نشان داد که هممتغیری ایزومتری یک تبدیل میدان کرنل، نیازمند نامتفیر بودن میدان کرنل متناظر است. از آنجایی که قید نامتفیر بودن ایجاد می‌کند که کرنل‌ها بر روی مدارها به اشتراک گذاشته شوند، همانطور که در شکل ۴۵ به تصویر کشیده شده است، توصیف ریاضی چنین میدان‌های کرنل نامتفیری زائد است: یک کرنل متفرد در یک نماینده مدار برای بازسازی میدان کرنل بر روی کل مدار کافی است. در بخش ۲.۳.۸ ما توصیف‌های معادل و کاهش‌یافته‌ای از میدان‌های کرنل نامتفیر را بر حسب کرنل‌ها بر روی نماینده‌گان مدار استخراج می‌کنیم. این کرنل‌های نماینده خود توسط عمل زیرگروه پایدارساز نماینده مدار محدود می‌شوند. ما یک بالابر (منحصر به فرد) از کرنل‌های نماینده به میدان‌های کرنل نامتفیر پیشنهاد می‌کنیم که یک ایزومورفیسم بین هر دو توصیف برقرار می‌کند. این ایزومورفیسم بالابر راهی برای پارامترسازی و ساخت تبدیلات میدان کرنل هممتغیر نسبت به ایزومتری در یک پایدارسازی پیشنهاد می‌کند. قبل از استخراج این نتایج در بخش ۲.۳.۸، بخش بعدی ۱.۳.۸ چارچوب ریاضی را تنظیم می‌کند.

استخراج‌ها و نتایج این بخش از نظریه CNN ‌های هدایت‌پذیر در فضاهای همگن نزدیک است [۳۰، ۳۱]، با این حال، ما نتایج آنها را از فضاهای همگن به منیفلدهای عمومی تعمیم می‌دهیم. هنگامی که به فضاهای همگن M پایین‌بادیم، ثابت می‌کنیم که تبدیلات میدان کرنل هممتغیر نسبت به ایزومتری با کانولوشن‌های GM معادل هستند.

۱.۳.۸ فضاهای خارج‌قسمتی القا شده از ایزومتری

عمل یک گروه تقارن بر روی یک فضای آن را به مدارهایی افزار می‌کند که به عنوان مجموعه‌هایی از تمام نقاطی که با عمل گروه به هم متصل هستند، تعریف می‌شوند. فضای چنین مدارهایی، فضای خارج‌قسمتی نسبت به این عمل گروهی است. در ادامه ما فضاهای خارج‌قسمتی ناشی از اعمال یک گروه ایزومتری GM را هم بر روی منیفلد و هم بر روی کلاف‌های تاری مورد بحث قرار خواهیم داد. این تعاریف بعداً به ما اجازه می‌دهند تا با عمل ایزومتری‌ها بر روی کرنل‌ها، وزن‌ها را بر روی مدارها به اشتراک بگذاریم.

خارج قسمت‌های منیفلد: هر نقطه $p \in M$ یک مدار را ترسیم می‌کند

$$\mathcal{I}.p := \{\phi(p) \mid \phi \in \mathcal{I}\} \subseteq M, \quad (328)$$

که به عنوان مجموعه تمام نقاطی که با عمل بر روی p با \mathcal{I} به $\text{Isom}(M)$ ≤ دست می‌آیند، تعریف می‌شود. می‌توان به راحتی بررسی کرد که رابطه « p و q عناصری از یک مدار هستند» یک رابطه همارزی است (به پاورقی ۴۹ مراجعه کنید) و بنابراین منیفلد را همانطور که در شکل ۴۶ به تصویر کشیده شده است، افزار می‌کند. فضای خارج قسمتی

$$\mathcal{I}\setminus M := \{\mathcal{I}.p \mid p \in M\} \quad (329)$$

نسبت به این رابطه همارزی، فضای تمام مدارها است، یعنی هر عنصر از $\mathcal{I}\setminus M$ متناظر با یک مدار کامل در M است.^{۷۶} نگاشت خارج قسمتی متناظر

$$Q_M : M \rightarrow \mathcal{I}\setminus M, \quad p \mapsto \mathcal{I}.p \quad (330)$$

یک نقطه $p \in M$ را با مدارش $\mathcal{I}.p \in \mathcal{I}\setminus M$ شناسایی می‌کند. برای هر مدار می‌توان یک نماینده مدار دلخواه را انتخاب کرد که به طور رسمی توسط یک مقطع تعیین می‌شود

$$r_M : \mathcal{I}\setminus M \rightarrow M \quad Q_M \circ r_M = \text{id}_{\mathcal{I}\setminus M}, \quad (331)$$

که در آن شرط آخر تضمین می‌کند که نماینده $(\mathcal{I}.p)$ در واقع عنصری از مدار r_M است. اغلب به مقاطع پیوسته (با هموار) علاقه‌مند هستیم، با این حال، اینها به طور کلی وجود ندارند. بنابراین ما در ادامه نمی‌خواهیم که نمایندگان مدار به طور پیوسته انتخاب شوند و در صورت لزوم این نقیصه را بعداً جبران خواهیم کرد. طبق معمول برای مقاطع، آنها به طور کلی فقط وارون راست نگاشت خارج قسمتی هستند اما وارون چپ نیستند، یعنی $r_M \circ Q_M \neq \text{id}_M$ این با یک نمودار جایگزینی می‌شود

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{I}\setminus M & \xrightarrow{r_M} & M & \xrightarrow{Q_M} & \mathcal{I}\setminus M \\ & & \underbrace{\qquad\qquad\qquad} & & \uparrow \\ & & \text{id}_{\mathcal{I}\setminus M} & & \end{array} \quad (332)$$

مشابه با معادله (۱۴۷) و یک نمودار غیرجایگزینی

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{Q_M} & \mathcal{I}\setminus M & \xrightarrow{r_M} & M \\ & \underbrace{\qquad\qquad\qquad} & \downarrow & & \uparrow \\ & & \text{id}_M & & \end{array} \quad (333)$$

مشابه با معادله (۱۴۸) به تصویر کشیده می‌شود. تارهای منفرد $Q_M(\mathcal{I}.p) = \mathcal{I}.p \subseteq M$ از نگاشت خارج قسمتی Q_M توسط خود مدارها داده می‌شوند. توجه داشته باشید که $\mathcal{I}\setminus M \xrightarrow{Q_M} M$ به طور کلی یک کلاف تاری نیست زیرا مدارها لزوماً با یکدیگر همسان ریخت نیستند و بنابراین نمی‌توان آنها را به صورت محلی با یک تار نمونه‌ای مشترک F بدیهی سازی کرد، همانطور که در نمودار جایگزینی در معادله (۱۲۹) لازم است. بنابراین هر مدار نوع خاص خود را دارد که در ارتباط نزدیک با زیرگروه‌های پایدارساز نقاط خارج قسمتی هستند اما مدار خاص است. زیرگروه پایدارساز

$$\text{Stab}_p := \{\xi \in \mathcal{I} \mid \xi(p) = p\} \leq \mathcal{I} \quad (334)$$

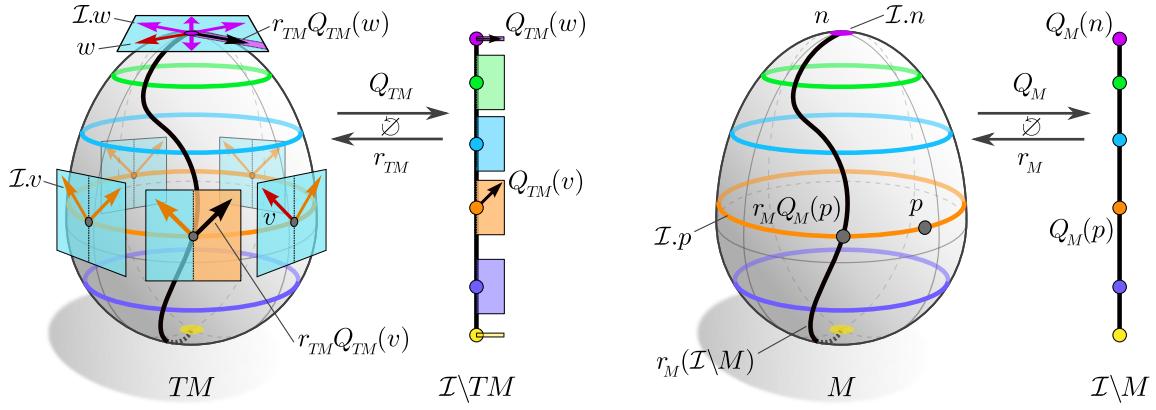
یک نقطه $p \in M$ به عنوان آن زیرگروهی از گروه ایزومنتری که p را ثابت نگه می‌دارد، تعریف می‌شود. بر حسب زیرگروه پایدارساز، برقرار است که مدار یک نقطه با

$$\mathcal{I}.p \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_p. \quad (335)$$

شناسایی می‌شود. برای دیدن این ادعا، فرض کنید $f_p : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}.p$ ، $\phi \mapsto \phi(p)$ برای یک $p \in M$ و مشاهده کنید که $f_p(\phi \circ \xi) = \phi(p) = f_p(\phi)$. بنابراین $\phi \circ \xi(p) = \phi(p)$ به عنوان نشان داد که در واقع $\text{Stab}_p(\phi(p)) = \phi(p)$ می‌آوریم. نگاشت خارج قسمتی ادعا شده $\mathcal{I}.p \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_p$ را برقرار می‌کند.

برای شهودی تر کردن این ادعا، مثال در شکل ۴۶ آرا با $O(2)$ در نظر بگیرید. مدارهای $\mathcal{I}.n = \{n\}$ و $\mathcal{I}.s = \{s\}$ قطب شمال و جنوب فقط نقاطی هستند که توسط \mathcal{I} ثابت می‌شوند. این با، به عنوان مثال، $\mathcal{I}.n \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_n = \mathcal{I}/\mathcal{I} \cong \{n\}$ موافق است زیرا $\text{Stab}_n \cong \mathcal{R}$ با گروه کامل ایزومنتری منطبق است. برای هر نقطه دیگر $\mathcal{I}.p$ ، $p \in M$ مدارهای $\mathcal{I}.p$ به عنوان زیرگروه پایدارساز داریم و بنابراین در واقع دایره $\mathcal{I}/\text{Stab}_p \cong O(2)/\mathcal{R} \cong S^1$ است (بازتاب نسبت به p) را به عنوان زیرگروه پایدارساز داریم و بنابراین در واقع دایره $\mathcal{I}/\text{Stab}_p \cong O(2)/\mathcal{R} \cong S^1$ را به عنوان نوع مدار به دست می‌آوریم. نگاشت خارج قسمتی $Q_M : M \rightarrow \mathcal{I}\setminus M$ نقاط $q \in M$ را به مدارهایشان $Q_M(q) = \mathcal{I}.q$ در فضای خارج قسمتی $\mathcal{I}\setminus M$ که در سمت راست نشان داده شده است، می‌فرستد. از آنجایی که مدارها را می‌توان از قطب شمال تا قطب جنوب پیمود، فضای خارج قسمتی $\mathcal{I}\setminus M$ تپولوژی یک پاره خط را دارد. مقطع $\mathcal{I}\setminus M \rightarrow M$ را برای هر مدار $o \in \mathcal{I}\setminus M$ یک نقطه نماینده $r_M(o) \in M$ می‌دانیم. به عنوان مثال، داریم $r_M(Q_M(p)) \neq p$ می‌توان مقطع را به عنوان نشان دادن فضای خارج قسمتی $\mathcal{I}\setminus M$ در منیفلد، که به صورت خط سیاه $(\mathcal{I}\setminus M)$ از قطب شمال تا قطب جنوب نشان داده شده است، تفسیر کرد.

^{۷۶} ما را به عنوان یک خارج قسمت چپ می‌نویسیم زیرا \mathcal{I} از چپ بر روی M عمل می‌کند.

(ب) نگاشت خارج-قسمتی و نمایندگان مدار برای TM (آ) نگاشت خارج-قسمتی و نمایندگان مدار برای M

شکل ۴۶: نگاشتهای خارج-قسمتی Q_M و Q_{TM} و نمایندگان مدار (مقاطع) r_M و r_{TM} برای اعمال گروه ایزومتری $\mathcal{O}(2)$ بر روی منیفلد M در شکل ۴۶ آ و بر روی کلاف مماس TM در شکل ۴۶ ب. توصیف دقیقی از هر دو تصویر در متن اصلی آورده شده است.

خارج-قسمتی کلاف: از آنجایی که گروه ایزومتری نه تنها بر روی منیفلد بلکه از طریق پیشرانها بر روی کلافهای الحاقی نیز عمل می‌کند، این کلافها به روشنی مشابه به مدارهای افزار می‌شوند. برای کلی نگه داشتن بحث، ما در ادامه یک کلاف الحاقی عمومی $E \xrightarrow{\pi_E} M$ را در نظر می‌گیریم که می‌تواند نماینده \mathcal{A}, GM, FM, TM باشد. ما عناصر فضای کل را با $e \in E$ نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم $\phi_{*,E}$ پیشران ϕ بر روی E باشد همانطور که در بخش ۲.۱.۸ معرفی شد. مدار یک عنصر از کلاف سپس به قیاس با معادله (۳۲۸) به صورت زیر داده می‌شود:

$$\mathcal{I}.e = \{\phi_{*,E}(e) \mid \phi \in \mathcal{I}\} \quad (336)$$

در حالی که فضای خارج-قسمتی، که از مدارهای کلاف تشکیل شده است، به طور مشابه با معادله (۳۲۹) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{I}\setminus E = \{\mathcal{I}.e \mid e \in E\}. \quad (337)$$

مشابه قبل، نگاشت خارج-قسمتی (کانونی) عناصر کلاف را به مدارشان می‌فرستد:

$$Q_E : E \mapsto \mathcal{I}\setminus E, \quad e \mapsto \mathcal{I}.e \quad (338)$$

ما یک نگاشت تصویر (منحصر به فرد) را تعریف می‌کنیم

$$\pi_{\mathcal{I}\setminus E} : \mathcal{I}\setminus E \rightarrow \mathcal{I}\setminus M, \quad Q_E(e) \mapsto Q_M \circ \pi_E(e) \quad (339)$$

بین خارج-قسمتی کلاف و خارج-قسمت منیفلد همانطور که در نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}\setminus E & \xleftarrow{Q_E} & E \\ \pi_{\mathcal{I}\setminus E} \downarrow & & \downarrow \pi_E \\ \mathcal{I}\setminus M & \xleftarrow{Q_M} & M \end{array} \quad (340)$$

توجه داشته باشید که تعریف در معادله (۳۳۹) به انتخاب خاص نماینده مدار بستگی ندارد زیرا برای هر $\phi_{*,E}(e) \in Q_E(e)$ دیگر نتیجه یکسانی به دست می‌آوریم: $Q_M \circ \pi_E \circ \phi_{*,E}(e) = Q_M \circ \phi \circ \pi_E(e) = Q_M \circ \pi_E(e)$. تعریف رسمی توسعه یافته از مقطع تعیین می‌شوند

$$r_E : \mathcal{I}\setminus E \rightarrow E \quad \text{به طوری که} \quad Q_E \circ r_E = \text{id}_{\mathcal{I}\setminus E}, \quad (341)$$

که ما دوباره نمی‌خواهیم پیوسته باشند. با این حال، برای راحتی، ما می‌خواهیم که نمایندگان مدارهای کلاف بالای نمایندگان $(\mathcal{I}\setminus M)$ در فضای پایه قرار گیرند، یعنی برآورده کنند:

$$\pi_E \circ r_E = r_M \circ \pi_{\mathcal{I}\setminus E} \quad (342)$$

همانطور که در نمودار جاچایی زیر نشان داده شده است:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} \setminus E & \xrightarrow{r_E} & E \\ \pi_{\mathcal{I} \setminus E} \downarrow & & \downarrow \pi_E \\ \mathcal{I} \setminus M & \xrightarrow{r_M} & M \end{array} \quad (343)$$

زیرگروه پایدارساز یک عنصر کلاف $e \in E$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Stab}_e := \{\xi \in \mathcal{I} \mid \xi_{*,E} e = e\} \leq \text{Stab}_{\pi_E(e)} \leq \mathcal{I}. \quad (344)$$

این لزوماً یک زیرگروه از زیرگروه پایدارساز $\text{Stab}_{\pi_E(e)}$ در فضای پایه است، که به راحتی با $\xi \in \text{Stab}_e \Leftrightarrow \xi_{*,E} e = e \Rightarrow \xi_{*,E} = e$ داشته باشد. مانند $\pi_E(\xi_{*,E} e) = \xi \pi_E(e) = \pi_E(e) \Leftrightarrow \xi \in \text{Stab}_{\pi_E(e)}$ برقرار است.

ما مثال خود را از شکل ۴۶ آآ در نظر گرفتن عمل $(*)$ بر روی کلاف مماس TM در شکل ۴۶ ب گسترش می‌دهیم. مدار $\mathcal{I}.w \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_w \cong S^1$ (بنفس) یک بردار غیرصفر $w \in T_n M$ در قطب شمال n یک دایره را در $T_n M$ (قزم) در انتداد محور خود پایدار می‌شود. مدار $\mathcal{I}.v \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_v \cong S^1$ (قزم) در انتداد محور خود پایدار می‌شود. هر بردار دیگر $v \in T_p M$ (قزم)، که در یک فضای مماس در نقطه‌ای $p \in M$ متفاوت بازتاب می‌شود. هر بردار دیگر $v' \in T_{\phi(p)} M$ (قزم) بر روی مدار $\mathcal{I}.p$ توسط هر ایزومنتری پایدار می‌شود. هر بردار دیگر $v' \in T_{\phi(p)} M$ (قزم) بر روی مدار $\mathcal{I}.p$ توسط هر ایزومنتری پایدار می‌شود. از قطبها زندگی می‌کند، با عمل گروه ایزومنتری به فضاهای مماس دیگر $\mathcal{I}.v$ (نارنجی) از هر چنین برداری، اگر دقیقاً به سمت شمال یا جنوب اشاره نکند، با یک کپی از بردار به سمت شرق و یک کپی به سمت غرب در هر یک از فضاهای مماس روزی $\mathcal{I}.p$ (یا دایره) همسان ریخت است. بردارهای $\mathcal{I}.v \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_v \cong S^1$ (قزم) با یک دیگر $v' \in T_p M$ (قزم) که دقیقاً به سمت شمال یا جنوب اشاره می‌کند بازتابها را روی محوری که تعريف می‌کند پایدار می‌شوند، یعنی $\mathcal{I}.v' \cong \mathcal{R} \cong S^1$ (قزم) همسان ریخت است.

نگاشت خارج‌قسمتی کلاف مماس را به خارج‌قسمت کلاف $\mathcal{I} \setminus TM \rightarrow TM$: $Q_{TM} : TM \rightarrow \mathcal{I} \setminus TM$ که در نیمه راست شکل ۴۶ ب نشان داده شده است، تصویر می‌کند. برای درک ساختار آن، ما تمام موارد کیفی متفاوت را در نظر می‌گیریم: اولاً توجه داشته باشید که مدارهای بردارها در قطبها متناظر با دایره‌هایی با شعاع معین هستند، به طوری که مجموعه چنین مدارهایی یک خط $\pi_{\mathcal{I},E}^{-1}(\mathcal{I}.n) \cong \mathbb{R}^+$ (پرتو صورتی زیر فلش سیاه) را تشکیل می‌دهد. به طور مشابه، مدارهای بردارها در هر نقطه دیگر $p \in M$ تمام فضاهای مماس $T_{\phi(p)} M$ را روی $\mathcal{I}.p$ در دو بازتاب قطع می‌کنند و بنابراین یک نیم‌صفحه $\pi_{\mathcal{I},E}^{-1}(\mathcal{I}.p) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ (نارنجی) را تشکیل می‌دهند. مقطع $r_{TM} : \mathcal{I} \setminus TM \rightarrow TM$ هر عنصر خارج‌قسمت کلاف را به یک نمایندگان پایید در همان تار روی نمایندگان $\mathcal{I} \setminus M$ (۳۴۲) از خارج‌قسمت منیفلد، که به صورت خط سیاه نشان داده شده است، قرار گیرند. به عنوان مثال، $v \in T_p M$ (قزم) با نگاشت خارج‌قسمتی به $r_{TM} Q_{TM}(v) \in \mathcal{I} \setminus TM$ (سیاه) فرستاده می‌شود. مقطع $(v) \in \mathcal{I} \setminus TM$ را با $Q_{TM}(v)$ (همچنین سیاه) نمایش می‌دهد، که عنصری از M است و به طور کلی با v متفاوت است.

۲.۳.۸ میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی و قیود پایدارساز

برای توجیه ساخت میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی و قیود پایدارساز، فرمول‌بندی صریح‌تر

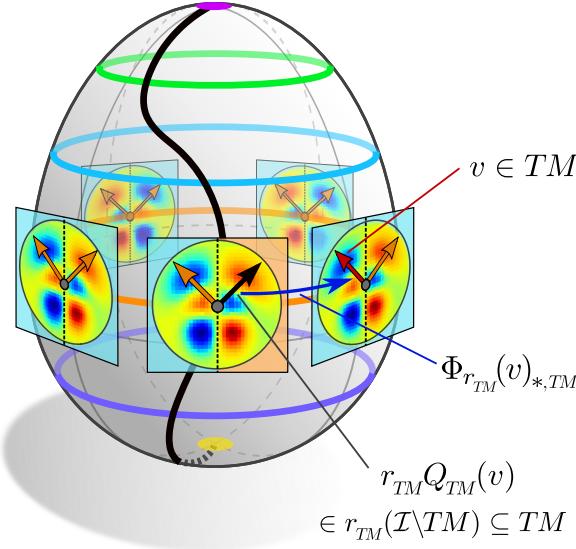
$$\phi_{*,\mathbb{R}} \circ \mathcal{K}_p \circ \phi_{*,TM}^{-1} = \mathcal{K}_{\phi(p)} \quad \forall p \in M, \phi \in \mathcal{I}. \quad (345)$$

از قید نامتغیر بودن ایزومنتری از تعریف ۷.۸ را در نظر بگیرید، که با نوشتن معادله (۳۱۵) برای هر نقطه $p \in M$ به طور جداگانه به دست می‌آید. این فرمول‌بندی تأکید می‌کند که قید منجر به اشتراک‌گذاری وزن در انتداد مدارهای منیفلد $\mathcal{I}.p \in \mathcal{I} \setminus M$ می‌شود همانطور که در شکل‌های ۴۵ و ۴۷ به تصویر کشیده شده است. این ایجاد می‌کند که کرنل K_r در یک نقطه نماینده دلخواه (o) از هر مدار $o = \mathcal{I}.r = r_M(o)$ به طور کامل میدان کرنل را در بقیه مدار، یعنی در تمام نقاط (r) که $\mathcal{I} \setminus \phi(r) \subset \mathcal{I}$ است، مشخص می‌کند. کرنل K_r در نقطه نماینده r خود توسط زیرگروه پایدارساز $\mathcal{I} \setminus M$ محدود می‌شود:

$$\xi_{*,\mathbb{R}} \circ K_r \circ \xi_{*,TM}^{-1} = K_r \quad \forall \xi \in \text{Stab}_r. \quad (346)$$

این ایجاد می‌کند که هر میدان کرنل نامتغیر نسبت به ایزومنتری را می‌توان بر حسب یک میدان از کرنل‌ها بر روی نمایندگان مدار منیفلد $\mathcal{I} \setminus M$ (۳۴۶) که معادله (۳۴۶) را برآورده می‌کند، پارامترسازی کرد.

در صورتی که زیرگروه پایدارساز در $\mathcal{I} \setminus M$ غیربدیهی باشد، قید پایدارساز در معادله (۳۴۶) تقارن‌های بیشتری را برای خود کرنل K_r در r ایجاد می‌کند. به عنوان مثال، در مثال شکل ۴۷ زیرگروه پایدارساز $\mathcal{R} \cong \text{Stab}_r \cong S^1$ بر روی مدار برجسته شده وجود دارد که تقارن بازتابی کرنل‌ها را اعمال می‌کند. چنین تقارن‌های امکان فشرده‌سازی بیشتر توصیف میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومنتری را فراهم می‌کند: مشخص می‌شود که دانستن مقادیر $\mathcal{K}(w)$ میدان کرنل فقط بر روی نمایندگان خارج‌قسمتی کلاف مماس $TM \subseteq \mathcal{I} \setminus TM$ کافی است.



شکل ۴۷: نمایش تصویری یک میدان کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری، تعریف ۷.۸، و بازسازی کامل آن فقط از کرنل‌ها بر روی نمایندگان خارج قسمتی. برخلاف شکل ۴۵، ما در اینجا یک گروه ایزومتری $\mathcal{I} = \text{SO}(2)$ را به جای $O(2)$ فرض می‌کنیم. بنابراین کرنل‌های به تصویر کشیده شده دارای تقاضن بازتابی هستند که توسط زیرگروه‌های پایدارساز از نقاط روی مدار $(v) \in \mathcal{R}$ اعمال می‌شود. به دلیل تقارنش، میدان کرنل کامل $\mathcal{K} : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{id}}, \mathcal{A}_{\text{id}})$ می‌توان از محدودیت آن به نماینده خارج قسمتی کلاف $\subseteq \mathcal{I}(TM)$ بازسازی کرد؛ به قضیه ۱۲.۸ مراجعه کنید. به عنوان مثال، کرنل‌های نشان داده شده به طور کامل توسط کرنل جزئی روی نیمه‌فضای نارنجی تعیین می‌شوند. بازسازی از $v \in TM$ با ارزیابی کرنل نماینده خارج قسمتی در $r_{TM}Q_{TM}(v) \in r_{TM}(\mathcal{I}(TM))$ و پیش‌ران کردن از طریق ایزومتری بازسازی $\Phi_{r_{TM}}(v) \in \mathcal{I}$ ، که در معادله (۳۴۷) تعریف شده است، به v کرنل جزئی روی نیمه‌فضای نارنجی تعیین می‌شود. ما اینجا می‌خواهیم ذکر کنیم که کرنل‌های پایدارساز به تصویر کشیده شده هنگام نگاشت بین میدان‌های ویزگی با پاریته زوج و فرد حاصل می‌شوند، در حالی که کرنل‌ها بین میدان‌های ویزگی با پاریته یکسان متناظر خواهند بود.

در شکل ۴۷ این متناظر با دانستن مقادیر کرنل بر روی نیمه‌فضای برجسته شده با رنگ نارنجی است، که از آن می‌توان میدان کامل بر روی مدار را با تقاضن‌های بازتابی و دورانی در $O(2) \cong \mathcal{I}$ بازسازی کرد.

قضیه ۱۲.۸ در زیر ادعای اخیر را دقیق می‌کند با اثبات اینکه فضای $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}$ از میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری با یک فضای \mathcal{K}_{id} از میدان‌های کرنل بر روی نمایندگان مدار کلاف مماس $r_{TM}(\mathcal{I}(TM))$ ایزومورف است. $r_{TM}Q_{TM}(v)$ با قیود حداقل کاهش‌بافته مشخص می‌شود و بنابراین میدان‌های کرنل را در $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}$ به روش غیرزاوید کدگذاری می‌کند. در قضیه ۱۳.۸ ما یک فضای ایزومورف سوم $\widehat{\mathcal{R}}^{\mathcal{I}}$ را فرمول‌بندی می‌کنیم که به طور معادل میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری را بر حسب کرنل‌های \mathcal{K}_r با قید زیرگروه پایدارساز از معادله (۳۴۶) توصیف می‌کند. در حالی که فرمول‌بندی میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری بر حسب $\widehat{\mathcal{R}}^{\mathcal{I}}$ شامل قیود قوی‌تری نسبت به فرمول‌بندی بر حسب $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}$ است، ممکن است برای پیاده‌سازی‌ها راحت‌تر باشد، زیرا کرنل‌ها را بر روی فضاهای مماس کامل به جای کرنل‌ها بر روی خارج قسمت‌های فضاهای مماس توصیف می‌کند.

ایزومتری‌های بازسازی: برای بازسازی میدان‌های کرنل نامتغیر کامل در $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}$ از کرنل‌های منفرد بر روی نمایندگان مدار، کرنل‌های نماینده باید با اعمال پیش‌ران کرنل در معادله (۳۴۵) با $p = r$ ثابت برای نقاط نماینده انتخاب شده، بر روی کل منیفلد توزیع شوند. برای بازسازی کرنل در یک نقطه $q \in M$ ، این به یک ایزومتری ϕ نیاز دارد که نماینده مدار $r_M Q_M(q) \in r_M(\mathcal{I}(M)) \subseteq M$ باشد، $q \in M$ بازگرداند، یعنی $\phi(r_M Q_M(q)) = q$ را برآورده کند. برای دقیق‌تر کردن این، به یاد بیاورید که میدان‌های کرنل $\mathcal{K} : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{id}}, \mathcal{A}_{\text{id}})$ به عنوان نگاشت‌هایی با دامنه TM تعریف می‌شوند، که علاوه بر موقعیت‌شان، ترازهای کرنل را نیز کدگذاری می‌کنند. بنابراین ما باید ایزومتری‌های خاص‌تری را در نظر بگیریم که نمایندگان مدار کلاف مماس $r_{TM}Q_{TM}(v) \in r_{TM}(\mathcal{I}(TM)) \subseteq TM$ را بردارها $v \in TM$ بازگردانند. این ایزومتری‌های بازسازی به صورت زیر تعریف می‌شوند:^{۷۷}

$$\Phi_{r_{TM}} : TM \rightarrow \mathcal{I} \quad \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = v \quad \forall v \in TM \quad (347)$$

ما توصیه می‌کنیم برای به دست آوردن شهردی از ایزومتری‌های بازسازی به شکل ۴۷ مراجعه کنید: از نظر گرافیکی، $\Phi_{r_{TM}}(v)$ به عنوان هر ایزومتری تعریف می‌شود که بردار سیاه $r_{TM}Q_{TM}(v)$ را روی مدار نارنجی v به بردار قرمز $\Phi_{r_{TM}}(v)$ را برآورده کند. توجه داشته باشید که $\Phi_{r_{TM}}(v)$ تنها تا زیرگروه‌های پایدارساز نمایندگان مدار منحصر به فرد است زیرا برای هر $\xi \in \text{Stab}_{r_{TM}Q_{TM}(v)}$ نتیجه می‌شود که $\Phi_{r_{TM}}(v)\xi = \xi$. نشان نیز قید تعریف‌کننده در معادله (۳۴۷) را برآورده می‌کند: $\Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = v$ ^{۷۸}. نشان $\Phi_{r_{TM}}(v)$ را اعمال می‌داده که تمام ساختارهای بعدی از این ابهام مستقل هستند. عمل ایزومتری‌های بازسازی بر روی فضای پایه M با اعمال تصویر کلاف

^{۷۷} از آنجایی که مقاطع r_{TM} به طور کلی پیوسته نیستند، $\Phi_{r_{TM}}$ نیز به طور کلی نمی‌تواند پیوسته خواسته شود.

^{۷۸} علاوه بر این، قید تعریف‌کننده بر روی هنگام ضرب چپ $\zeta \Phi_{r_{TM}}(v)$ با هر $\zeta \in \text{Stab}_v$ باشد. این، با این حال، هیچ درجه آزادی جدیدی $\tilde{\zeta} \in \text{Stab}_{r_{TM}Q_{TM}(v)}$ با ζ باشد. $\Phi_{r_{TM}}(v)[\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1}\zeta\Phi_{r_{TM}}(v)] =: \Phi_{r_{TM}}(v)\tilde{\zeta}$ و $\text{Stab}_v \cong \text{Stab}_{r_{TM}Q_{TM}(v)}$.

مماس بر هر دو طرف قید تعریف کننده در معادله (۳۴۷) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 \pi_{TM}(v) &= \pi_{TM} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) && (\text{تعريف } \Phi_{r_{TM}} \text{، معادله } (347)) \\
 &= \Phi_{r_{TM}}(v) \pi_{TM} r_{TM} Q_{TM}(v) && (\text{پیش‌ران یک نگاشت کلاف است، معادله } (264)) \\
 &= \Phi_{r_{TM}}(v) r_M \pi_{\mathcal{I}\setminus TM} Q_{TM}(v) && (\text{تعريف مقاطع کلاف، معادله } (342)) \\
 &= \Phi_{r_{TM}}(v) r_M Q_M \pi_{TM}(v) && (\text{تعريف } \pi_{\mathcal{I}\setminus E} \text{، معادله } (340))
 \end{aligned} \tag{348}$$

یک خلاصه بصری از ویژگی‌های $\Phi_{r_{TM}}$ یعنی اعمال آن بر روی M و TM در نمودار جابجایی زیر آورده شده است:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_{TM} & & \\
 & \Phi_{r_{TM}} \times r_{TM} \circ Q_{TM} & \rightarrow & \text{ev} & \\
 \begin{array}{c} TM \\ \downarrow \pi_{TM} \\ M \end{array} & \downarrow \text{id}_{\mathcal{I}} \times \pi_{TM} & \downarrow & \downarrow \pi_{TM} & \downarrow \text{id}_M \\
 & \mathcal{I} \times r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM) & \xrightarrow{\quad \text{ev} \quad} & TM & \\
 & \downarrow & & & \\
 & \mathcal{I} \times r_M(\mathcal{I}\setminus M) & \xrightarrow{\quad \text{ev} \quad} & M & \\
 & & & \uparrow & \\
 & & & \text{id}_M &
 \end{array} \tag{349}$$

که در آن نگاشتهای ارزیابی ev با استفاده بیش از حد از نمادگذاری، به ترتیب با $\text{ev} : \mathcal{I} \times M \rightarrow M$ ، $(\phi, p) \mapsto \phi(p)$ و $\text{ev} : \mathcal{I} \times TM \rightarrow TM$ ، $(\phi, v) \mapsto \phi_{*,TM}(v)$ داده می‌شوند.

میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی: همانطور که در بالا استدلال شد، تقارن‌های موجود در یک میدان ویژگی نامتغیر نسبت به ایزومتری $\mathcal{K} \in \mathcal{K}_{\square\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ باید امکان بازسازی کامل آن را از محدودیتش ($r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM) \rightarrow r_{\text{Hom}}(\mathcal{I}\setminus \text{Hom})$) به نماینده‌گان مدار کلاف مماس $\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)} \subseteq TM$ فراهم کنند.^{۷۹} برای ساخت یک بالابر (منحصر به فرد) Λ که $\mathcal{K} = \Lambda(\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)})$ بازسازی $\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)}$ را در دامنه \mathcal{K} از طریق ایزومتری بازسازی $\Phi_{r_{TM}}(\mathcal{I}\setminus TM)$ بازیابی می‌کند، ما بردارهای مماس v را در دامنه \mathcal{K} از معادله (۳۴۷) بسط می‌دهیم و از نامتغیر بودن (هم‌متغیر بودن) میدان کرنل در معادله (۳۱۵) استفاده می‌کنیم. این منجر به موارد زیر می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}(v) &= \mathcal{K} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) \\
 &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{K} r_{TM} Q_{TM}(v) \\
 &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)} r_{TM} Q_{TM}(v) \\
 &=: [\Lambda(\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)})](v)
 \end{aligned} \tag{350}$$

توجه داشته باشید که این ساختار با وجود ابهام $\Phi_{r_{TM}}(v)$ نسبت به ضرب راست با عناصر در \mathcal{K} خوش‌تعریف است. این به راحتی با مشاهده اینکه برای هر $w \in TM$ و هر $\xi \in \text{Stab}_w$ $\mathcal{K}(w) = \mathcal{K}(\xi_{*,TM} w) = \mathcal{K}(w)$ که ایجاب می‌کند $\text{Stab}_{\mathcal{K}(w)} \geq \text{Stab}_w$ و $\text{Stab}_{\mathcal{K}(w)} \cap \text{Stab}_w = \text{Stab}_w$ می‌شود.

از آنجایی که بالابر Λ میدان‌های کرنل نامتغیر را از محدودیت آنها به نماینده‌گان مدار کلاف مماس بازیابی می‌کند، می‌توان آن را به عنوان نگاشت مکوнос محدودیت (از میدان‌های کرنل نامتغیر) در نظر گرفت. این دیدگاه ایجاب می‌کند که بالابر یک ایزومورفیسم $\Lambda : \mathcal{K}_{\square\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\square\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ که هنوز باید آن را مشخص کنیم و بقرار می‌کند:

$$\begin{array}{ccc}
 & \Lambda & \\
 \mathcal{K}_{\square\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{K}_{\square\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} \\
 \Lambda^{-1} = (\cdot)|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)} & &
 \end{array} \tag{351}$$

برای مشخص کردن فضای $\mathcal{K}_{\square\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ که Λ را به یک ایزومورفیسم تبدیل می‌کند، کافی است ویژگی‌های میدان‌های محدود شده $=: \mathcal{Q}$ را برای $\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)} \in \mathcal{K}_{\square\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ فهرست کنیم:

^{۷۹} در ادامه ممکن است $\mathcal{I}\setminus \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square\square})$ و $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square\square})$ به اختصار بنویسیم.

- اول از همه، از آنجایی که Λ^{-1} با محدودیت دامنه به $r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$ داده می‌شود، واضح است که هر $\mathcal{Q} \in \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ باید به شکل $\mathcal{Q} : r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM) \rightarrow r_{\text{Hom}}(\mathcal{I}\setminus \text{Hom})$ باشد.
- دوم، ویژگی میدان‌های کرنل برای اینکه M -مورفیسم‌های کلاف باشند، تحت محدودیت Λ^{-1} به این الزام برای \mathcal{Q} ترجمه می‌شود که $\mathcal{Q}(w) = \pi_{TM}(w) \circ \mathcal{Q} \circ \pi_{\text{Hom}}(w)$ برآورده کند.
- سوم، باید قید پایدارساز (پایداری) $\mathcal{Q}(w) = \mathcal{Q}(w)$ را برای هر بردار نماینده $w \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$ و هر $\xi \in \text{Stab}_w$ کنند. این الزام باقیمانده‌ای از قید نامتغیر بودن در معادله (۳۱۵) است که پس از محدودیت باقی می‌ماند. این را می‌توان با در نظر گرفتن قید کامل $\mathcal{Q}(\phi_{*,TM}^{-1}(w)) = \mathcal{Q}(w)$ و هر $w \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$ که $\phi \in \mathcal{I}$ که علاوه بر این برآورده می‌کند $(\phi_{*,TM}(w)) \circ \mathcal{Q} \circ \phi_{*,TM}^{-1}(w) = \mathcal{Q}(w)$ در دامنه محدود شده \mathcal{Q} باقی می‌ماند، استنتاج کرد. توجه داشته باشید که \mathcal{Q} هر مدار را دقیقاً یک بار قطع می‌کند. این ایجاب می‌کند که $\mathcal{Q} \cap r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM) = \{w\}$. قید پایدارساز (پایداری) ادعا شده از این ملاحظات نتیجه می‌شود.
- برای شهود به شکل ۴۷ بازمی‌گردیم که در آن بردار نماینده سیاه $v = r_{TM} Q_{TM}(v)$ فقط با ایزومتری بدینه $\{e\} = \xi$ پایدار می‌شود، که ایجاب می‌کند مقدار متناظر \mathcal{Q} بدون قید باشد. بردارهای $w' \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$ که دقیقاً به سمت شمال یا جنوب اشاره می‌کنند، یعنی روی محور بازتابی خط‌چین قرار دارند، با بازتاب‌ها در $\mathcal{R} \cong \text{Stab}_w$ پایدار می‌شوند، که قیدی را بر روی مقدار کرنل متناظر ایجاب می‌کند.^{۱۰}
- به عنوان آخرین الزام، \mathcal{Q} باید به یک میدان کرنل هموار بالابر شود، یعنی $\Lambda(\mathcal{Q})$ باید هموار باشد. متاسفانه، همواری (یا حتی پیوستگی) $\Lambda(\mathcal{Q})$ به طور خودکار از همواری (پیوستگی) \mathcal{Q} نتیجه نمی‌شود زیرا Λ بر حسب r_{TM} و $\Phi_{r_{TM}}$ تعریف می‌شود، که به طور کلی نمی‌توان آنها را هموار (پیوسته) خواست.

قبل از خلاصه کردن و اثبات دقیق این ادعاهای در قضیه ۱۲.۸ در زیر، ما یک نمای کلی بصیری از رابطه بین $\mathcal{K} = \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)}$ و $\mathcal{Q} = \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)} \in \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ را در قالب نمودارهای جابجایی ارائه می‌دهیم:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K} = \Lambda(\mathcal{Q}) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ TM \xrightarrow[\Phi_{r_{TM}} \times \mathcal{Q} \circ r_{TM} \circ Q_{TM}]{} \mathcal{I} \times r_{\text{Hom}}(\mathcal{I}\setminus \text{Hom}) & \xrightarrow{\text{ev}} & \text{Hom} \end{array} \quad (352)$$

۹

$$\begin{array}{ccccc} TM & & \mathcal{K} = \Lambda(\mathcal{Q}) & & \text{Hom} \\ & \searrow r_{TM} \circ Q_{TM} & & \swarrow r_{\text{Hom}} \circ Q_{\text{Hom}} & \\ & & r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM) & \xrightarrow{\mathcal{Q}} & r_{\text{Hom}}(\mathcal{I}\setminus \text{Hom}) \\ & \swarrow \pi_{TM} & & \uparrow \pi_{\text{Hom}} & \\ & & r_M(\mathcal{I}\setminus M) & & \\ & & \uparrow r_M \circ Q_M & & \\ & & M & & \end{array} \quad (353)$$

در نمودار آخر، جابجایی‌بذری مریع بالایی با جایگذاری تعريف بالایر به دست می‌آید، که نتیجه می‌دهد $r_{\text{Hom}} Q_{\text{Hom}} \Lambda(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM} = r_{\text{Hom}} Q_{\text{Hom}} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}$.

^{۱۰} قید دقیق به عمل $\mathcal{Q} \circ \pi_{\text{Hom}}$ بر روی $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{Hom}}, \mathcal{A}_{\text{Hom}})$ بستگی دارد، که به ρ_{out} و ρ_{in} به ρ_{Hom} بستگی دارد. کرنل به تصویر کشیده شده در شکل (۴۷) متناظر با ρ_{Hom} به عنوان نمایش بازتاب-علامت (باریته فرد) گروه بازتابی خواهد بود، که کرنل‌های پادمتقارن را اعمال می‌کند. پادمتقارن بودن مستلزم آن است که $\mathcal{Q}(w') = -\mathcal{Q}(w)$ برای w' روی محور بازتابی محدود شود؛ مقایسه کنید با جدول ۳

قضیه ۱۲.۸ (میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی مماس). فضای میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری $\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ از تعريف ۷.۸ با فضای $\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ از میدان‌های کرنل با قید زیرگروه پایدارساز (پرداز) بر روی نماینده‌گان خارج‌قسمتی کلاف مماس، که به صورت زیر تعريف می‌شود، ایزومورف است:^{۸۱}

$$\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} := \left\{ \mathcal{Q} : r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) \rightarrow r_{\text{Hom}}(\mathcal{I} \setminus \text{Hom}) \mid \pi_{\text{Hom}} \circ \mathcal{Q} = \pi_{TM}, \quad \text{هموار,} \right. \\ \left. \xi_{*, \text{Hom}} \mathcal{Q}(w) = \mathcal{Q}(w) \quad \forall w \in r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM), \quad \xi \in \text{Stab}_w \right\} \quad (354)$$

ایزومورفیسم بالابر (منحصر به فرد) $\Lambda : \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ بین هر دو فضا در اینجا به صورت زیر داده می‌شود:

$$\Lambda(\mathcal{Q}) : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{Hom}}, \mathcal{A}_{\text{Hom}}), \quad v \mapsto [\Lambda(\mathcal{Q})](v) := \Phi_{r_{TM}}(v)_{*, \text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v). \quad (355)$$

معکوس آن $\Lambda^{-1} : \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ با محدودیت میدان‌های کرنل نامتغیر به نماینده‌گان خارج‌قسمتی کلاف $r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) \subseteq TM$ داده می‌شود:

$$\Lambda^{-1}(\mathcal{K}) : r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) \rightarrow r_{\text{Hom}}(\mathcal{I} \setminus \text{Hom}), \quad w \mapsto [\Lambda^{-1}(\mathcal{K})](w) := \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)}(w) \quad (356)$$

اثبات: برای اثبات اینکه $\Lambda : \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ یک ایزومورفیسم است، باید نشان دهیم که ۱) Λ^{-1} در واقع معکوس Λ است، که ۲) ویژگی‌های تعريف‌کننده $\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ و $\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ پس از بالبر و محدود کردن برآورده می‌شوند و اینکه ۳) ساختارها به انتخاب‌های دلخواه بستگی ندارند. برای اینکه این بخش بیش از حد سنگین نشود، ما اثبات کامل را به پیوست ۱. موکول می‌کیم. مراحل منفرد اثبات در زیر فهرست شده‌اند:

$$1) \quad \text{یک وارون راست از } \Lambda \text{ است} \quad \text{یعنی, } \Lambda \circ \Lambda^{-1} = \text{id}_{\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}}.$$

$$2) \quad \text{یک وارون چپ از } \Lambda \text{ است} \quad \text{یعنی, } \Lambda^{-1} \circ \Lambda = \text{id}_{\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}}.$$

$$3) \quad \text{یک } M\text{-مورفیسم برای هر } \mathcal{Q} \in \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \text{, یعنی, بالبر } \pi_{\text{Hom}} \circ \Lambda(\mathcal{Q}) = \pi_{TM}.$$

$$4) \quad \text{کل } \mathcal{K} \in \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \text{ برای هر } \pi_{\text{Hom}} \circ \Lambda^{-1}(\mathcal{K}) = \pi_{TM}.$$

$$5) \quad \text{یک } \phi_{*, \text{Hom}} \text{, یعنی, (}\mathcal{Q}, \phi_{*, \text{Hom}}\text{) قید کامل نامتغیر بودن (هم‌متغیر بودن) ایزومتری را برآورده می‌کند}$$

$$6) \quad \text{یک } \xi \in \text{Stab}_w \text{, یعنی, (}\mathcal{K}, \xi\text{) قید پایدارساز را برآورده می‌کند}$$

۳) تمام ساختارها و اثبات‌ها از انتخاب خاص $\Phi_{r_{TM}}$ مستقل هستند

□
همواری میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی بالابر شده بنا به تعريف برقرار است.

اختیاری بودن در انتخاب مقطع r_{TM} به میدان‌های کرنل خارج‌قسمتی متفاوت اما ایزومورف، که بر روی نماینده‌گان خارج‌قسمتی کلاف مختلف بیان شده‌اند، اجازه می‌دهد.

به جای محدود کردن حداکثری میدان کرنل به نماینده‌گان مدار کلاف در $(r_{TM}(\mathcal{I} \setminus M))$ می‌توان توصیف را فقط به $(r_M(\mathcal{I} \setminus M))$ محدود کرد، یعنی به فضاهای مماس کامل $r \in r_M(\mathcal{I} \setminus M)$ برای هر $T_r M$ در شکل (۴۷)، این متناظر با مدل‌سازی کرنل (متقارن بازتابی) بر روی کل فضای مماس نشان داده شده در جلو به جای فقط یک نیمه است. الزامات بر روی چنین کرنل‌های محدود شده‌ای را می‌توان با دنبال کردن همان منطق قبلی استخراج کرد و به قید در معادله (۳۴۶) منجر می‌شود. ما یک قضیه مشابه با قضیه (۱۲.۸) به دست می‌آوریم:

قضیه ۱۲.۸ (میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی منیفلد). فضای میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری $\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ از تعريف ۷.۸ با فضای $\widehat{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ از میدان‌های کرنل با قید زیرگروه پایدارساز (منیفلد) بر روی فضاهای مماس روی نماینده‌گان خارج‌قسمتی منیفلد $r_M(\mathcal{I} \setminus M)$ که به صورت زیر تعريف می‌شود، ایزومورف است:

$$\widehat{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} := \left\{ \widehat{\mathcal{Q}} : \pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)) \rightarrow \pi_{\text{Hom}}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)) \mid \pi_{\text{Hom}} \circ \widehat{\mathcal{Q}} = \pi_{TM}, \quad \text{هموار,} \right. \\ \left. \xi_{*, \text{Hom}} \widehat{\mathcal{Q}}|_r \xi_{*, TM}^{-1} = \widehat{\mathcal{Q}}|_r \quad \forall r \in r_M(\mathcal{I} \setminus M), \quad \xi \in \text{Stab}_r \right\} \quad (357)$$

^{۸۱} این تعريف از $\widehat{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ در واپسگی دوری با تعريف Λ در معادله (۳۵۵) است. این را می‌توان با هزینه ۱) تعريف فضاهای $\widetilde{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ و $\widetilde{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ بدون الزامات هماری، که بر حسب آنها ۲) $\widetilde{\Lambda} : \widetilde{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ را می‌توان تعريف کرد، که ۳) اجازه می‌دهد الزامات هماری را در $\widetilde{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ بر حسب $\widetilde{\Lambda}$ بخواهیم، اجتناب کرد.

ایزومورفیسم بالابر $\widehat{\Lambda} : \widehat{\mathcal{K}}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ بر حسب Λ و یک محدودیت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\widehat{\Lambda} := \Lambda \circ (\cdot) \Big|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} \quad (358)$$

و بنابراین اساساً با Λ موافق است:

$$\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathcal{Q}}) : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square}), \quad v \mapsto [\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathcal{Q}})](v) := \Phi_{r_{TM}}(v)_{*, \text{Hom}} \widehat{\mathcal{Q}} r_{TM} Q_{TM}(v) \quad (359)$$

معکوس آن $\widehat{\Lambda}^{-1} : \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} \rightarrow \widehat{\mathcal{K}}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ با محدودیت میدان‌های کرنل نامتغیر به فضاهای مماس روی نمایندگان خارج‌قسمتی منیفلد داده می‌شود: $\pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)) \subseteq TM$

$$\widehat{\Lambda}^{-1}(\mathcal{K}) : \pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)) \rightarrow \pi_{\square\square}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)), \quad \widehat{w} \mapsto [\widehat{\Lambda}^{-1}(\mathcal{K})](\widehat{w}) := \mathcal{K} \Big|_{\pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M))}(\widehat{w}) \quad (360)$$

اثبات: اثبات اساساً مشابه اثبات قضیه ۱۲.۸ است با این تفاوت جزئی که قید قوی تر $\xi \in \xi_{*, TM}$ است که $\widehat{\mathcal{Q}}|_r \xi_{*, TM}^{-1} = \widehat{\mathcal{Q}}|_r \quad \forall r \in r_M(\mathcal{I} \setminus M)$. از آنجایی که چیز زیادی به آنچه در پیوست ۱. ارائه شده اضافه نمی‌کند، ما از اثبات صرف نظر می‌کنیم.

نمودار جابجایی زیر ایزومورفیسم‌ها را بین سه توصیف معادل از میدان‌های کرنل نامتغیر نشان می‌دهد:

$$\begin{array}{ccccc} & & \Lambda & & \\ & \swarrow \Omega & & \searrow \widehat{\Lambda} & \\ \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} & & \widehat{\mathcal{K}}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} & & \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} \\ \uparrow \Omega^{-1} = (\cdot) \Big|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} & & & \downarrow \widehat{\Lambda}^{-1} = (\cdot) \Big|_{\pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M))} & \\ & & \Lambda^{-1} = (\cdot) \Big|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} & & \end{array} \quad (361)$$

رابطه با کانولوشن‌های GM : تفاوت بین کانولوشن‌های GM همتغیر نسبت به Isom_{GM} و تبدیلات میدان کرنل عمومی همتغیر نسبت به Isom_{GM} از طریق میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به Isom_{GM} این است که اولی کرنل‌های G -هدایت‌پذیر را بر روی کل منیفلد به اشتراک می‌گذارد در حالی که دومی فقط ملزم به اشتراک‌گذاری کرنل‌های $p \in \text{Isom}_{GM} \setminus M$ -هدایت‌پذیر بر روی مدارهای Stab_p است. از این‌جا در اشتراک‌گذاری وزن‌ها بر روی کل منیفلد به شدت ضروری نیست اما با حمایت از تبع اوکام \square احتمالاً در عمل یک سوگیری استقرایی خوب است. می‌توان آن را به عنوان مشابهی برای این فرض در نظر گرفت که همان قوانین فیزیکی در سراسر جهان اعمال می‌شوند.

اگر $p, q \in M$ یک فضای همنگ نسبت به عمل یک گروه ایزومتری $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$ است، یعنی برای هر دو نقطه $\phi \in \mathcal{I}$ وجود دارد که هر دو نقطه را به هم متناسب می‌کند، یعنی $\phi(p) = q$. در این حالت فقط یک مدار منفرد $\mathcal{I} \setminus M$ دارد که همان M است، و پایدارسازهای Stab_p همه نقاط $p \in M$ تا ایزومورفیسم با هم منطبق هستند. فضای خارج‌قسمتی $\mathcal{I} \setminus M$ تکعسوی است که با یک نقطه نماینده منفرد $r = r_M(\mathcal{I} \setminus M)$ نمایش داده می‌شود. طبق قضیه ۱۳.۸، فضای میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به طور معادل با یک میدان کرنل بر روی نمایندگان مدار بیان می‌شود. از آنجایی که ما فقط یک نقطه نماینده منفرد r برای فضاهای همنگ داریم، میدان کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری کامل در این حالت معادل با یک کرنل منفرد بر روی $T_r M$ است. این کرنل نماینده باید قید زیرگروه پایدارساز را در معادله (۳۵۷) برآورده کند. از طریق ایزومورفیسم بالابر $\widehat{\Lambda}$ در معادله (۳۵۹) کرنل نماینده بر روی کل منیفلد به اشتراک گذاشته می‌شود.

این بسیار شبیه به تعریف کانولوشن‌های GM است، که یک کرنل منفرد با قید G -هدایت‌پذیری را بر روی کل منیفلد به اشتراک می‌گذارند. قضیه ۱۴.۸ در زیر تأیید می‌کند که در واقع یک همارزی بین کانولوشن‌ها و تبدیلات میدان کرنل همتغیر بر روی فضاهای همنگ وجود دارد. Stab_r -هدایت‌پذیری مستقل از مختصات از قید پایدارساز در نتیجه (به طور غیرکانونی) به H -هدایت‌پذیری کرنل‌های الگو ترجمه می‌شود، که در آن $H \leq G$ با $H \cong \text{Stab}_r$ نیماش ایزومورف از Stab_r است. می‌توان (زیر)گروه ایزومتری $\text{Isom}_{GM} \leq \text{Isom}_{HM}$ را ایجاد می‌کند. اشتراک‌گذاری یک کرنل H -هدایت‌پذیر از طریق ایزومورفیسم بالابر، که بر اساس عمل \mathcal{I} عمل می‌کند، سپس دقیقاً متناظر با اشتراک‌گذاری یک کرنل H -هدایت‌پذیر بر روی HM است. این ایجاد می‌کند که تبدیلات میدان کرنل همتغیر نسبت به \mathcal{I} بر روی فضاهای همنگ در واقع متناظر با یک کانولوشن HM هستند.

قضیه ۱۴.۸ (همتغیری بر روی \square همنگ به معنای کانولوشن است). فرض کنید M یک منیفلد مجهز به یک G -ساختار GM باشد. فرض کنید یک گروه ایزومتری $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$ وجود دارد که به طور تعدی‌پذیر بر روی M عمل می‌کند و آن را به یک فضای همنگ تبدیل می‌کند. فرض کنید $r \in M$ یک نقطه نماینده دلخواه از M و $\text{Stab}_r \leq \mathcal{I}$ پایدارساز آن باشد. آنگاه

$$(1) \quad \text{یک } H\text{-}(\text{زیر)}\text{ساختار } HM \subseteq GM \text{ بر روی } M \text{ با ویژگی‌های زیر وجود دارد:}$$

یک زیرگروه از $H \cong \text{Stab}_r \leq \mathcal{I}$ است $G \cap \text{O}(d) \cong H$ \square
 \square یک نشاندن از \mathcal{I} (به عنوان کلاف اصلی Stab_r یعنی $\mathcal{I} / \text{Stab}_r$) در GM است که توسط \mathcal{I} حفظ می‌شود، یعنی $\text{Isom}_{HM} = \mathcal{I}$

۲) هر تبدیل میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به \mathcal{I} یک کرنل H -هدایت‌پذیر منفرد را بر روی کل فضای M به اشتراک می‌گذارد و با یک کانولوشن HM با آن کرنل معادل است.

انتخاب خاص H -ساختار به ایزومورفیسم انتخاب شده $H \cong \text{Stab}_r$ بستگی دارد اما بی‌اهمیت است زیرا تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به \mathcal{I} را می‌توان به طور معادل در هر چنین انتخابی بیان کرد.
 \square اثبات: اثبات در پیوست ث. ۲ یافت می‌شود.

تعریف ما از تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزومتری بر روی فضاهای همگن اساساً معادل با کانولوشن‌های هدایت‌پذیر بر روی فضاهای همگن است که توسط Isom_{HM} [۳۰. ۰۰. ۰۰۰۰۰۰] پیشنهاد شده است. بنابراین همارزی اثبات شده بین تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزومتری و کانولوشن‌های HM بر روی فضاهای همگن تأیید می‌کند که کانولوشن‌های HM و کانولوشن‌های هدایت‌پذیر در این مورد اساساً مشابه هستند. با این حال، در حالی که کانولوشن‌های هدایت‌پذیر فقط بر روی فضاهای همگن تعریف شده‌اند، کانولوشن‌های HM به منیفلدهای ریمانی عمومی تعمیم می‌یابند. جزئیات بیشتر در مورد کانولوشن‌ها بر روی فضاهای همگن در پیوست کارهای مرتبط ت مورد بحث قرار گرفته است.

بخش سوم

مروری بر مقالات مرتبط با شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات

فرمول‌بندی شبکه‌های کانولوشنی (CNN)ها مستقل از مختصات بر حسب کلاف‌های G -همبسته روی منيفلد‌های ریمانی بسیار کلی است و طیف وسیعی از نمونه‌سازی‌های ممکن برای مدل‌ها را پوشش می‌دهد. برای اثبات این ادعا، ما مجموعه بزرگی از مدل‌های کانولوشنی را از مقالات علمی مرور کرده و آنها را از دیدگاه یکپارچه CNN‌های مستقل از مختصات توضیح می‌دهیم. اکثر مقالات موجود، مدل‌های خود را به صراحت بر حسب G -ساختارها و کلاف‌های G -همبسته فرمول‌بندی نمی‌کنند. بنابراین، G -ساختارها و نمایش‌های گروهی که به طور ضمنی فرض شده‌اند، از الگوهای اشتراک وزن، تقارن‌های کرنل و ویژگی‌های هموردادی مدل‌ها استنتاج می‌شوند؛ به عنوان مثال شکل ۵۴ جدول ۶ خلاصه‌ای از طبقه‌بندی حاصل از CNN‌های مستقل از مختصات را ارائه می‌دهد. بخش‌های بعدی، مدل‌های پوشش داده شده و ویژگی‌های آنها را با جزئیات مورد بحث قرار می‌دهند.

۱۳۱	۹ شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات اقلیدسی
۱۳۳	۱.۹ فرمول‌بندی کلاسیک CNN‌های G -هدایت‌پذیر بر روی \mathbb{R}^d
۱۳۵	۲.۹ هندسه‌ی آفین فضاهای اقلیدسی E_d
۱۴۱	۳.۹ CNN‌های هموردادی گروه آفین در فضاهای اقلیدسی E_d
۱۴۴	۴.۹ CNN‌های اقلیدسی در مقالات
۱۴۷	۱۰ CNN‌های هموردادی دورانی در فضاهای اقلیدسی سوراخ‌دار
۱۵۳	۱۱ CNN‌های کروی مستقل از مختصات
۱۵۴	۱.۱۱ هندسه‌ی کره ۲-بعدی S^2
۱۵۸	۲.۱۱ CNN‌های کروی کاملاً هموردادی دورانی
۱۶۳	۳.۱۱ CNN‌های کروی هموردادی دوران سمتی در توپولوژی‌های استوانه‌ای
۱۶۷	۴.۱۱ تقریب‌های بیست‌وجهی از CNN‌های کروی
۱۷۱	۱۲ CNN‌های مستقل از مختصات روی سطوح عمومی
۱۷۲	۱.۱۲ هندسه‌ی سطوح جایگذاری شده
۱۸۰	۲.۱۲ کانولوشن‌های سطحی راهبری‌پذیر-دورانی
۱۸۶	۳.۱۲ کانولوشن‌های $\{\mathbb{M}\}$ سطحی راهبری‌پذیر
۱۹۰	۴.۱۲ تقریب‌های بیست‌وجهی از CNN‌های کروی
۱۹۴	۹ کانولوشن‌های هموردا نسبت به گروه آفین ($\text{Aff}(G)$) را روی فضاهای اقلیدسی E_d پوشش می‌دهد. این مدل‌ها بر G -ساختارهای ناوردا $\mathbb{E}_d \setminus \{0\}$ نسبت به $\text{Aff}(G)$ تکیه دارند، همانطور که در شکل ۵۰ نشان داده شده است. مدل‌های بخش ۱۰ روی فضاهای اقلیدسی سوراخ‌دار $\mathbb{E}_d \setminus \{0\}$ عمل می‌کنند، شکل‌های ۵۱، ۵۲ یا ۵۴ را بینید. این مدل‌ها نسبت به دوران حول مبدأ انتخاب شده $\{0\}$ هموردا هستند اما هموردادی نسبت به انتقال ندارند. CNN‌های کروی و بیست‌وجهی در بخش ۱۱ مورد بحث قرار می‌گیرند. اکثر این مدل‌ها G -ساختارهایی را فرض می‌کنند که در شکل‌های ۵۵ و ۵۶ به تصویر کشیده شده‌اند و بنابراین به ترتیب نسبت به $\text{SO}(3)$ یا $\text{SO}(2)$ هموردا هستند. بخش ۱۲ کانولوشن‌های GM را روی سطوح عمومی که اغلب به صورت میش گسسته‌سازی می‌شوند، مرور می‌کند.
۱۹۷	چند صفحه آینده به بحث در مورد انتخاب‌های طراحی مختلف برای CNN‌های مستقل از مختصات می‌پردازد و یک نمای کلی اولیه از مدل‌های جدول ۶ ارائه می‌دهد.

مرجع	نمایش	تقارن سراسری	گروه ساختار	منیفلد
	ρ	$\text{Isom}_{GM} \rtimes \text{Aff}_{GM}$	G	M
[۲۰۹، ۱۴]	بدیهی	\mathcal{T}_d	$\{e\}$	\mathbb{E}_d
[۱۴۹]	منظم	$\mathcal{T}_r \rtimes \mathcal{S}$	\mathcal{S}	\mathbb{E}_r
[۱۹۰]	منظم	$\mathcal{T}_r \rtimes \mathcal{R}$	\mathcal{R}	
[۱۸۷، ۱۹۰، ۲۰۰] [۱۵۴، ۷۴، ۷، ۱۹۲، ۲۸، ۲۱۲، ۲۷، ۴۳] [۱۲۸، ۱۴۸، ۱۸۸، ۱۶۷، ۹۹، ۸۴، ۱۹۰] [۷۳، ۱۸۷، ۱۲۹، ۶۶، ۱۸۴، ۵۵، ۶، ۱۶۱] [۶۹، ۲۳، ۱۳۴، ۱۶۵، ۱۶۴، ۱۶، ۱۶۳، ۴۲]	irreps			۴
[۱۹۰، ۲۸]	quotients		$\text{SE}(۲)$	$\text{SO}(۲)$
[۱۹۰، ۱۱۴، ۲۷]	trivial $\xrightarrow{\square\square\square\square}$ regular			۷
[۱۹۰، ۱۱۵]	vector $\xrightarrow{\square\square\square\square}$ regular			۸
[۱۹۰، ۸۶]	بدیهی			\mathbb{E}_r
[۱۹۰]	irreps			۱۰
[۱۶۱، ۶۴، ۱۲۹] [۱۶۱، ۶۴، ۱۲۹]	منظم			۱۱
[۲۸]	quotients	$E(۲)$	$O(۲)$	۱۲
[۱۹۰]	trivial $\xrightarrow{\square\square\square\square}$ regular			۱۳
[۱۹۰]	irreps-SO(۲) induced			۱۴
[۲۱۳، ۶، ۱۶۹، ۱۹۹]	منظم			۱۵
[۶۲]	trivial $\xrightarrow{\square\square\square\square}$ regular	$\mathcal{T}_r \rtimes \mathcal{S}$	\mathcal{S}	۱۶
[۵، ۲، ۹۵، ۱۲۶، ۱۸۱، ۱۹۱]	irreps			۱۷
[۲۰۶]	quaternion			۱۸
[۱۹۸، ۱۹۷، ۵۵]	منظم	$\text{SE}(۳)$	$\text{SO}(۳)$	۱۹
[۷]	trivial $\xrightarrow{\square\square\square\square}$ regular			۲۰
[۱۹۷]	منظم			۲۱
[۸۱]	$O(۳)/O(۲)$ quotient	$E(۳)$	$O(۳)$	۲۲
[۱۴۱]	trivial $\xrightarrow{\square\square\square\square}$ irrep			\mathbb{E}_r
[۱۷۶]	منظم	$\mathcal{T}_r \rtimes C_r$	C_r	۲۴
[۱۷۶]	منظم	$\mathcal{T}_r \rtimes D_r$	D_r	۲۵
[۱۶۲]	irreps	$\mathcal{T}_d \rtimes \text{SO}(d-1, 1)$	$\text{SO}(d-1, 1)$	$\mathbb{E}_{d-1, 1}$
				۲۶

جدول ۶: طبقه‌بندی شبکه‌های کانولوشنی در مقالات از دیدگاه CNN‌های مستقل از مختصات. خطوط پررنگ هندسه‌های مختلف را از هم جدا می‌کنند. کانولوشن‌های هموردا نسبت به گروه آفین روی فضاهای اقليدسي \mathbb{E}_d (ردیفهای ۲۶-۱) در بخش ۹ مرور شده‌اند. بخش ۱۰ کانولوشن‌های GM را روی فضاهای اقليدسي سوارخ‌دار $\mathbb{E}_d \setminus \{.\}$ $\cong S^{d-1} \times \mathbb{R}^+$ (ردیفهای ۳۰-۲۷) مورد بحث قرار می‌دهد. جزئیات مربوط به CNN‌های کروی (ردیفهای ۳۶-۳۱) در بخش ۱۱ یافت می‌شود. مدل‌های موجود در ردیفهای (۴۱-۳۷) روی سطوح عمومی، که عمدتاً با شاخص‌های مثلثی نمایش داده می‌شوند، عمل می‌کنند؛ به بخش ۱۲ مراجعه کنید. دو خط آخر، کانولوشن‌های موبیوس ما از بخش ۵ را فهرست می‌کنند. \mathcal{T}_d و \mathcal{S} به ترتیب نمایانگر گروه‌های انتقال، بازتاب و پیمانه هستند، در حالی که C_N و D_N گروه‌های دوری و دووجهی هستند. نمایش‌های با ابعاد بی‌نهایت در پیاده‌سازی گسسته‌سازی یا نمونه‌برداری می‌شوند. به عنوان مثال، نمایش‌های منظم $O(۲)$ یا $\text{SO}(۲)$ معمولاً با نمایش‌های منظم گروه‌های دوری یا دووجهی C_N یا D_N تقریب زده می‌شوند.

انتخاب‌های طراحی و نمای کلی

یک CNN مستقل از مختصات در تئوری به طور کامل با موارد زیر مشخص می‌شود:

$$1) \text{ انتخاب یک منیفلد ریمانی } (M, \eta)$$

$$2) \text{ ساختار-}\square\text{-آن, } GM.$$

$$3) \text{ یک اتصال سازگار-}\square\text{-که انتقال دهنده‌های ویژگی } \mathcal{P}_{A,7} \text{ را مشخص می‌کند,}$$

$$4) \text{ انواع میدان یا نمایش‌های } G \text{ برای هر فضای ویژگی, } \rho, \theta, \text{ و}$$

$$5) \text{ انتخاب غیرخطی‌های } G\text{-هموردا.}$$

ژودزیک‌ها، نگاشت‌های نمایی و لگاریتمی از اتصال کانونی لوی-چیویتا روی M به دست می‌آیند.^{۸۲} گروه ایزومنتری Isom_{GM} که شبکه نسبت به آن هموردا است، از متربیک و G -ساختار نتیجه می‌شود. تمام فضاهای کرنل $\mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^G$ توسط نمایش‌های گروهی فضاهای ویژگی که بین آن‌ها نگاشت انجام می‌دهند، تعیین می‌شوند. اشتراک وزن با قرار دادن یک کرنل الگوی G -راهبری‌پذیر نسبت به یک چارچوب G دلخواه در $G_p M$ برای هر نقطه $p \in M$ انجام می‌شود.

در عمل، کاربر با پرسش‌های طراحی اضافی رویرو است، به عنوان مثال در مورد گستته‌سازی هندسه، کدگذاری میدان‌های ویژگی، الگوریتم‌های عددی برای محاسبه ژودزیک‌ها و انتقال دهنده‌ها وغیره. این بخش یک نمای کلی سطح بالا از تمام انتخاب‌های طراحی مرتبط ارائه می‌دهد. جزئیات بیشتر در بخش‌های بعدی ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲ یافت می‌شود.

گستته‌سازی منیفلدها و میدان‌های ویژگی: پیاده‌سازی‌ها در نمایش منیفلدها و نمونه‌برداری از میدان‌های ویژگی متفاوت هستند.

فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d شبکه‌های پیکسلی منظمی مانند \mathbb{Z}^d یا شبکه شش ضلعی را می‌پذیرند [۷۴]. به طور کلی، تر، شبکه‌های محلی منظم برای منیفلدهای محلی مانند نوار موبیوس و بیست‌وچهاری مناسب هستند؛ به شکل‌های ۳۰ و ۷۷ مراجعت کنید. میدان‌های ویژگی در فضاهای اقلیدسی همچنین می‌توانند روی یک ابر نقطه نامنظم نمونه‌برداری شوند. این امر به عنوان مثال هنگام پردازش محیط‌های اتمی، که در آن موقعیت اتم‌ها به عنوان مکان‌های نمونه‌برداری عمل می‌کنند، مفید است [۱۸۱].

یک تفاوت مهم بین این دو رویکرد این است که شبکه‌های پیکسلی منظم نسبت به انتقال‌های پیوسته در $(\mathbb{R}^d, +)$ هموردا نیستند، بلکه فقط نسبت به زیرگروه انتقال‌های گستته که شبکه را حفظ می‌کنند، مانند $(\mathbb{Z}^d, +)$ ، هموردا هستند. CNN‌ها روی شبکه‌های منظم علاوه‌بر این عموماً از عملیات تجمعی فضایی استفاده می‌کنند که هموردا باید مدل‌ها را حتی بیشتر کاوش می‌دهد. به طور خاص، با توجه به اینکه عملیات تجمعی دارای گام $(\mathbb{Z}^d, +)$ پیکسل است، نسبت به انتقال‌ها در $(n\mathbb{Z}^d, +)$ هموردا است. پس از L لایه تجمعی در یک شبکه کاتولوشنی، این بدان معناست که مدل به طور کلی فقط نسبت به انتقال‌ها در $(+, +)$ هموردا است [۴] بررسی شده است. [۲۰۹] پیشنهاد می‌کنند که این مشکل با جایگزینی لایه‌های تجمعی با \mathbb{Z}^m با لایه‌های تجمعی با \mathbb{Z}^m (با همان اندازه پنجره تجمعی)، یک فیلتر پایین‌گذر و یک زیرنمونه‌برداری n -پیکسلی برطرف شود. فیلتر پایین‌گذر اضافی بین عملیات تجمعی و زیرنمونه‌برداری از اثرات آلیاسینگ جلوگیری می‌کند، که نشان داده شده است شبکه‌ها را به اندازه کافی تحت انتقال‌هایی که عضو $(n\mathbb{Z}^d, +)$ نیستند، پایدارتر می‌کند.

فضاهای خمیده مانند کره S^2 -بعدی به طور کلی شبکه‌های نمونه‌برداری منظم را نمی‌پذیرند. یک گستته‌سازی به ظاهر واضح، بر حسب یک شبکه نمونه‌برداری منظم در مختصات کروی است (معادله (۴۲۷) و شکل ۵۹)، اما از آنجا که این مختصات ایزومنتریک نیستند، سیگنال را در نزدیکی قطب‌ها بیش نمونه‌برداری می‌کنند [۱۷۹، ۲۱۰]. شبکه‌های نمونه‌برداری تقریباً یکنواخت روی S^2 شامل «مجموعه مارپیچ تعیین‌یافته» [۳۳] یا شبکه ایکوسکوکو (icosahedron) هستند. به طور جایگزین، میدان‌های ویژگی ممکن است در حوزه طیفی گستته‌سازی شوند. برای کره، این کار از طریق بسط بر حسب همانگاه‌های کروی برای میدان‌های اسکالار، همانگاه‌های کروی با وزن اسپین برای میدان‌های نمایش تحويل‌ناپذیر یا ماتریس‌های \square ویگنر برای میدان‌های ویژگی عمومی انجام می‌شود [۵۱، ۵۴، ۲۹، ۹۷].

سطوح عموماً به صورت مس‌های مثلثی نمایش داده می‌شوند؛ به بخش ۲.۱.۱۲ مراجعه کنید. میدان‌های ویژگی سپس می‌توانند روی رؤوس، یال‌ها یا وجوده مش نمونه‌برداری شوند [۳۹]. زرولوشن بالاتر میدان‌های ویژگی را می‌توان با کدگذاری آنها از طریق نقشه‌های بافت \square به دست آورد [۱۰۶، ۷۹]. به طور جایگزین، سطوح ممکن است به صورت ابرهای نقطه نمایش داده شوند [۱۷۸، ۸۵].

\square -ساختارها \square و گروه‌های ساختاری \square . انتخاب خاص G -ساختار که باید توسط شبکه رعایت شود، به وظیفه یادگیری و تپولوژی M بستگی دارد (اگر پیوستگی یا همواری کاتولوشن مورد نیاز باشد). به طور کلی، M -جهز به یک $O(d)$ -ساختار است، یعنی یک کافی از چارچوب‌های مرتع راست‌هنگار نسبت به متربیک ریمانی داده شده. یک ارتقا به گروه‌های ساختاری G با $\text{GL}(d, \mathbb{C}) < G \leq \text{GL}(d)$ به طور یکتا توسط تبدیلات پیمانه‌ای با مقادیر G از چارچوب‌های گروه ساختاری می‌شود. تقلیل‌های گروه ساختاری به $O(d) < G$ ، در مقابل، لزوماً یکتا نیستند و

^{۸۲} ممکن است عجیب به نظر برسد که ژودزیک‌ها و انتقال دهنده‌های ویژگی بر اساس اتصال‌های بالقوه متفاوتی محاسبه شوند. زمانی که اتصال انتقال دهنده با لوی-چیویتا متفاوت است، عموماً به این دلیل است که اتصال لوی-چیویتا با G -ساختار انتخاب شده، زمانی که $O(d) < G$ باشد، G -سازگار نیست. چند مثال در پاراگراف مربوط به اتصالات G -سازگار در ادامه ارائه شده است.

اطلاعات هندسی اضافی را کدگذاری می‌کنند. به عنوان مثال، یک تقلیل به $G = \text{SO}(d)$ نیازمند یک جهت‌گیری روی منیفلد است.^{۸۳} بخش‌های بعدی به بحث در مورد انتخاب‌های بیشتر (عمدتاً به طور ضمنی انجام شده) از G -ساختارها که در مقالات یافته می‌شوند، می‌پردازند؛ به عنوان مثال، شکل‌های $5_0, 5_1, 5_2, 5_3, 5_4, 5_5, 5_6$ یا 7_1 را ببینید. این ساختارها یا توسط تقاضا برای همودایی تحت گروه ایزومتری Isom_{GM} تعیین می‌شوند، یا به طور کانونی روی منیفلد داده شده‌اند، یا به طور خاص برای $\{e\}$ -ساختارها، به صورت الگوریتمی از طریق برخی روش‌های ابتکاری ثابت شده‌اند. به یاد بیاورید که $\{e\}$ -ساختارها روی منیفلدهای غیرمواری پذیر (طبق تعریف) لزوماً ناپیوسته هستند.

گروه‌های ساختاری که بیشتر در مقالات با آنها مواجه می‌شویم، عبارتند از:

- گروه بدیهی $\{e\}$ -متناظر با CNN ‌های غیرمستقل از مختصات با کرنل‌های نامحدود
- گروه بازتاب $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathcal{R}$ ، که اولین محور چارچوب را برمی‌گرداند
- گروه‌های متعمد خاص $\text{SO}(d)$ (دوران‌های پیوسته)
- گروه‌های متعمد $\text{O}(d)$ (دوران‌ها و بازتاب‌های پیوسته)
- گروه پیمانه $\mathcal{S} \cong (\mathbb{R}^+, *)$

از آنجا که سه گروه آخر گروه‌های لی پیوسته هستند، در پیاده‌سازی‌های عددی گاهی توسط زیرگروه‌های متناهی تقریب زده می‌شوند. به عنوان مثال، $\text{SO}(2)$ و $\text{O}(2)$ را می‌توان با گروه‌های چندوجهی (گروه‌های تقارن اجسام افلاطونی، به عنوان مثال $\{e\}$ -ساختارها، بیست‌وچهار گروه) در جدول ۶، ما تصمیم گرفتیم بین تقارن‌های پیوسته و تقریب‌های آنها توسط زیرگروه‌های متناهی تمایز قائل نشویم. با این طبقه‌بندی مدل‌ها در جدول ۶، ما می‌توانیم گروه‌های متناهی تقریب زده می‌شوند. به این خواهیم کرد.

اتصالات سازگار: تمام مدل‌ها یا اتصال کانونی لوی-چیویتا روی M یا اتصال یکتای بدیهی را که توسط یک $\{e\}$ -ساختار القا می‌شود، در نظر می‌گیرند. انتخاب اتصال برای شبکه‌هایی که صرفاً روی میدان‌های اسکالر عمل می‌کنند، که انتقال آنها همیشه بدیهی است، بی‌اهمیت (و بنابراین ناشخص) می‌شود.

به طور خاص، تمام CNN ‌های اقلیدسی از بخش ۹ از انتقال‌دهندهای لوی-چیویتا استفاده می‌کنند، که بردارها را به گونه‌ای منتقل می‌کنند که در معنای معمول در فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d موازی باقی بمانند؛ به شکل ۲۲ مراجعه کنید. این امکان پذیر است زیرا اتصال لوی-چیویتا با G -ساختارهای مدل‌ها (تعریف شده در معادله (۳۷۱) و در شکل ۵۰ به تصویر کشیده شده) G -سازگار است.^{۸۴}

مدل‌های روی فضاهای اقلیدسی سوراخ دار $\{e\} \setminus \mathbb{E}_d$ از بخش ۱۰ یا بر اساس $\{e\}$ -ساختارها هستند و یا میدان‌های اسکالر را در نظر می‌گیرند. بنابراین، آنها از اتصالات بدیهی استفاده می‌کنند که با اتصال کانونی لوی-چیویتا روی $\{e\} \setminus \mathbb{E}_d$ متفاوت است.

تمام CNN ‌های کروی که بر (۲)- SO -ساختار در شکل ۵۷ تکیه دارند (در بخش ۱۱ مرور شده‌اند)، ویژگی‌ها را مطابق با اتصال لوی-چیویتا روی S^3 منتقل می‌کنند (شکل ۲۲ ب). آنها ویژگی که روی $\{e\}$ -ساختار در شکل ۵۷ عمل می‌کنند (در بخش ۱۱ مرور شده‌اند) دوباره یک اتصال بدیهی را در نظر می‌گیرند زیرا اتصال لوی-چیویتا کروی با این $\{e\}$ -ساختار ناسازگار است. CNN بیست‌وچهار با شکل ۷۱، ج، \mathbb{C} -سازگار منتقل می‌کند.^{۸۵}

تمام CNN ‌ها روی سطوح عمومی که در ردیفهای (۳۹-۳۷) جدول ۶ فهرست شده‌اند، سطوح جهت‌داری را فرض می‌کنند که مجهر به یک $\text{SO}(2)$ -ساختار هستند. آنها ویژگی‌ها را با اتصال لوی-چیویتا $\{e\}$ -سازگار سطوح منتقل می‌کنند. سایر CNN ‌های سطوح بر اساس $\{e\}$ -ساختارها هستند و یا روی میدان‌های اسکالر عمل می‌کنند بنابراین انتقال ویژگی آنها بدیهی است.

کانولوشن‌های نوار موبیوس ما ویژگی‌ها را از طریق اتصال لوی-چیویتا منتقل می‌کنند، که با \mathcal{R} -ساختار فرض شده سازگار است.

به یاد بیاورید که اتصال لوی-چیویتا به طور یکتا توسط متریک تعیین می‌شود و بنابراین به طور کلی ناوردای ایزومتری است؛ پاورقی؟ در بخش ۴.۱.۸ را مقایسه کنید. از آنجا که اتصالات بدیهی $\{e\}$ -سازگار به طور یکتا توسط $\{e\}$ -ساختار مشخص می‌شوند، تقارن‌های آن را به اشتراک می‌گذارند، یعنی تحت عمل $\text{Isom}_{\{e\}M}$ ناوردا هستند. این موضوع با قضیه ۹.۸ دلالت بر این دارد که کانولوشن‌های GM که بر اساس این اتصالات هستند، Isom_{GM} -هموردا می‌باشند.

پول‌بک‌های انتقال‌دهنده و تصویرهای جایگزین به $T_p M$ که در تعریف ۵.۷ و معادله (۶۷) تعریف شده است، یک میدان ویژگی f را در یک پارامترسازی ژودزیک روی فضای مماس $T_p M$ نمایش می‌دهد. بخش انتقال عملیات توسط اتصال G -سازگار تعیین می‌شود. ژودزیک‌ها \mathbb{E} و بنابراین نگاشتهای نمایی M در فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d و کره S^3 عبارات فرم بسته دارند. به طور خاص، نگاشتهای نمایی روی \mathbb{E}_d در مختصات دکارتی به جمع برداری در معادله (۴۰) کاهش می‌باشد، به طوری که کانولوشن‌های GM اقلیدسی به کانولوشن‌های متعارف روی \mathbb{R}^d تبدیل می‌شوند؛ به قضیه ۷.۹ مراجعه کنید. ژودزیک‌ها روی S^3 به خوبی شناخته شده‌اند که

^{۸۳} برای یک منیفلد منفرد و همبند، این انتخاب تا زمانی که مقداردهی اولیه کرنل نسبت به هر دو جهت‌گیری متقاضن باشد، دلخواه است. در این حالت شبکه به سادگی کرنل‌های بازتابیده را برای جهت‌گیری‌های مختلف یاد می‌گیرد. هنگام بررسی یک مجموعه داده مشکل از چندین منیفلد، جهت‌گیری نسبی آنها برای تعیین صحیح مرتبط است.

^{۸۴} در مقابل، $\{e\}$ -ساختار اقلیدسی در شکل ۴۲ ب با اتصال لوی-چیویتا روی \mathbb{E}_2 ناسازگار خواهد بود.

^{۸۵} اتصالات لوی-چیویتا گسترش روی مشاهده در بخش ۲.۱.۱۲ و [۳۷، ۳۵] مورد بحث قرار گرفته‌اند.

توسط دوایر عظیمه کره داده می شوند. اگر کره به عنوان جایگذاری شده در \mathbb{R}^3 در نظر گرفته شود، نگاشت نمایی به صراحت توسط معادله (۴۳۰) داده می شود. ژئوزیکها روی مشاهدهای سطوح عمومی با راحلهای فرم بسته توصیف نمی شوند بلکه به صورت عددی محاسبه می شوند؛ به بخش ۲.۱.۱۲ مراجعه کنید. در مقایسه با محیط هموار، باید بین ژئوزیکهای «کوتاهترین» و «مستقیمترین» روی مشاهدها تمایز قائل شد [۱۳۹].

پولبک میدانهای ویژگی به مختصات نرمال ژئوزیک تنها راه نمایش میدانهای ویژگی روی فضاهای مماس نیست. در مقالات مربوط به CNN های کروی، استفاده از تصویرهای نومونیک، که در شکل ۵۸ به تصویر کشیده شده‌اند، نسبتاً رایج است. قضیه ۳.۱۱ نشان می‌دهد که این تصویر را می‌توان به عنوان یک مورد خاص از پارامترسازی ژئوزیک عمومی تر ما پس از اعمال یک تاب شعاعی به کرنل‌ها در نظر گرفت. بنابراین مدل‌های مربوطه دقیقاً به عنوان کانولوشن‌های GM شناسایی می‌شوند. سطوحی که در یک فضای محيطی مانند \mathbb{R}^3 جایگذاری شده‌اند، ممکن است علاوه بر این بر تصویرهای مختلفی در فضای جایگذاری تکیه کنند؛ به عنوان مثال سه مدل دیگر که در بخش ۳.۱۲ مورد بحث قرار گرفته‌اند را بینید. توجه داشته باشید که این رویکردها واقعاً با رویکرد ما متفاوت هستند، یعنی این سه مدل دقیقاً کانولوشن‌های GM نیستند.

نمایش‌های \mathbb{H} و غیرخطی‌ها: تقریباً تمام مدل‌ها یا نمایش بدیهی، نمایش‌های تحویل‌ناپذیر یا نمایش‌های منظم را به عنوان انواع میدان در نظر می‌گیرند. استثنایات شامل نمایش‌های خارج قسمتی، نمایش‌های القایی عومومی تر، نمایش‌های حاصل ضرب تانسوری و، به طور خاص برای $G = SO(3)$ ، نمایش کواترنیونی هستند. نمایش‌های با ابعاد بینهایت، به ویژه نمایش‌های منظم و خارج قسمتی گروههای لی، در پیاده‌سازی‌ها گسسته‌سازی می‌شوند. این کار می‌تواند یا از طریق نمونه‌برداری مونت کارلو یا بازگشت به نمایش‌های متناظر زیرگروههای متناهی همانطور که در بالا بحث شد، انجام شود.

غیرخطی‌ها باید نسبت به عمل نمایش‌های G انتخاب شده همودرا باشند. آنجا که میدان‌های اسکالر G -ناوردا هستند، غیرخطی‌های معمول مانند ReLU روی آنها عمل می‌کنند. میدان‌های ویژگی که مطابق با نمایش‌های جایگشتی، به ویژه نمایش‌های منظم، تبدیل می‌شوند، به صورت کanal به کanal عمل می‌کنند. سایر انواع میدان به غیرخطی‌های سفارشی نیاز دارند \mathbb{H} ما برای بحث در مورد انتخاب‌های خاص به [۱۹۰] ارجاع می‌دهیم.

فضاهای کرنل \mathbb{H} -راهبری‌پذیر: کانولوشن‌های GM میدان‌های ورودی از نوع ρ_{in} را به میدان‌های خروجی از نوع ρ_{out} با کانولو کردن آنها با کرنل‌های G -راهبری‌پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^G$ نگاشت می‌دهند. از آنجا که فضای $\mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^G$ از کرنل‌های G -راهبری‌پذیر، تعریف ۳.۷، یک فضای برداری است، معمولاً بر حسب یک پایه $\{K_1, \dots, K_N\}$ از $\mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^G$ پارامتری می‌شود. قبل از محاسبه کانولوشن، کرنل یادگرفته شده $\sum_{i=1}^N w_i K_i$ در این پایه بسط داده می‌شود، که در آن $\{w_1, \dots, w_N\}$ وزن‌های با مقادیر حقیقی هستند که باید بهینه‌سازی شوند. فضاهای کرنل اثبات شده کامل برای گروههای $O(2)$ در [۱۹۱] پیاده‌سازی شده‌اند.^{۶۶} یک تعییم از قضیه ویگنر-اکارت، پایه‌های فضای کرنل را برای گروههای ساختاری فشرده عمومی G مشخص می‌کند [۱۰۲].

در عمل، اکثر نویسندها از فرمول بندی مبتنی بر نظریه نمایش برای میدان‌های ویژگی و کرنل‌های راهبری‌پذیر استفاده نمی‌کنند، بلکه آنها را بر اساس شهود فرمول بندی می‌کنند. به طور خاص، اکثر نویسندها یک نوع میدان ورودی داده شده را فرض می‌کنند و عملیات کانولوشن مختلفی را پیشنهاد می‌دهند که به گونه‌ای مهندسی شده‌اند که میدان خروجی حاصل به شیوه‌ای همودرا (با مستقل از مختصات) تبدیل شود.^{۶۷} در حالی که این رویکردها کرنل‌های G -راهبری‌پذیر خاصی را پیشنهاد می‌کنند که بین میدان‌های ρ_{in} و میدان‌های ρ_{out} نگاشت انجام می‌دهند، این کرنل‌ها گاهی اوقات فضای کامل کرنل‌های ممکن را پوشش نمی‌دهند. این موضوع به عنوان مثال در مورد $PFCNN$ ها و $MDGCNN$ ها در بخش ۲.۱۲ بحث می‌شوند، صدق می‌کند.

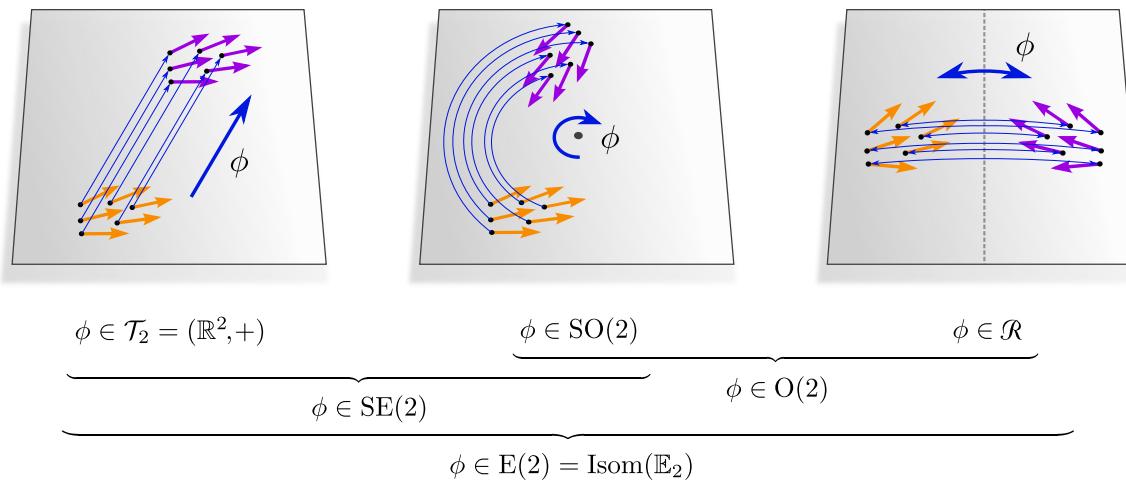
۹ شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات اقلیدسی

این بخش به بررسی کانولوشن‌های همودرا در فضاهای اقلیدسی (آفین) $M = \mathbb{E}_d$ می‌پردازد که بدون شک از بیشترین اهمیت عملی برخوردار هستند. شبکه‌های کانولوشنی در فضاهای اقلیدسی برای تحلیل تصاویر صفحه‌ای و حجمی، سیگنال‌های صوتی، ویدئوها، رویدادهای فیزیکی در فضازمان مینکوفسکی (شبه-اقلیدسی) یا محیط‌های صفحه‌ای در یادگیری تقویتی به کار می‌روند. عماری مدل کانولوشنی نمونه اولیه \mathbb{H} هم در فضاهای اقلیدسی و هم به طور کلی \mathbb{H} -CNN متعارف روش d توسط [۱۰۴] است. موقوفیت آن تا حد زیادی بر پایه همودادی نسبت به انتقال است که به آن امکان تعیین استنتاج آموخته شده بین مکان‌های فضایی مختلف را می‌دهد. با انگیزه از این مشاهده، تلاش زیادی برای تعیین ویژگی‌های همودایی CNNها به گروههای تقارن سراسری بزرگتر d به عنوان مثال به ایزومتری‌های اقلیدسی در شکل ۴۸ تبدیلات آفین عمومی تر، صورت گرفته است.

جالب اینجاست که اکثر مدل‌های همودایی سراسری در مقالات، همودایی خود را با اعمال نوعی کرنل G -راهبری‌پذیر به دست می‌آورند. این بدان معناست که این مدل‌ها در واقع تحت تبدیلات پیمانه‌ای محلی نیز همودرا هستند، علی‌رغم اینکه صراحتاً برای آن طراحی نشده‌اند. دلیل این همودادی پیمانه‌ای ناخواسته این است که همودایی سراسری مدل‌ها معمولاً برای هر لایه به صورت جداگانه طراحی می‌شود و بنابراین به طور مستقل برای میدان دریافتی محلی هر نورون اعمال می‌گردد. در اینجا ما CNN‌های اقلیدسی همودایی سراسری را که در ردیفهای (۲۶-۱) جدول ۶ فهرست شده‌اند، از دیدگاه عمومی تر تقارن‌های پیمانه‌ای محلی توضیح می‌دهیم و بحث می‌کنیم که چگونه همودایی سراسری آنها از

^{۶۶} https://quva-lab.github.io/e_cnn/api/e_cnn.kernels.html

^{۶۷} این برخلاف رویکرد ماست که میدان‌های ورودی و خروجی را ثابت می‌کند و سپس به دنبال محدودیت حاصل بر کرنل‌های کانولوشن می‌گردد.



شکل ۴۸: نمایش گروه ایزومتری کامل $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}_d) = \mathrm{E}(d) = (\mathbb{R}^d, +)$ برای $d = 2$. این گروه شامل زیرگرووهای انتقال $\mathcal{T}_d = (\mathbb{R}^d, +)$ ، دوران $\mathrm{SO}(d)$ و بازتاب \mathcal{R} است. دوران‌ها و بازتاب‌ها گروه متعامد $\mathrm{O}(d) = \mathrm{SO}(d) \rtimes \mathcal{R}$ را تشکیل می‌دهند، در حالی که انتقال‌ها و دوران‌ها گروه اقلیدسی خاص $\mathrm{SE}(d) = \mathcal{T}_d \rtimes \mathrm{SO}(d)$ را می‌سازند.

هموردایی پیمانه‌ای محلی‌شان ناشی می‌شود. قضیه ۹.۸ بدين ترتیب بیان می‌کند که یک کانولوشن $M = \mathbb{E}_d GM$ نسبت به Isom_{GM} هموردا است. با این حال، برای مورد خاص فضاهای اقلیدسی، می‌توان گزاره‌ای قوی‌تر از صرفاً هموردایی ایزومتری بیان کرد: کانولوشن با یک کرنل G -راهبری‌پذیر روی \mathbb{E}_d به معنای هموردایی سراسری مدل تحت عمل گروه آفین $\mathrm{Aff}(G) := \mathcal{T}_d \rtimes G$ است، همانطور که در قضیه ۸.۹ در ادامه اثبات شده است. دلیل اصلی این نتیجه آن است که ژئودزیک‌ها و انتقال‌دهنده‌های لوی-چیویتا در فضاهای اقلیدسی نه تنها توسط ایزومتری‌ها حفظ می‌شوند، بلکه به طور کلی تر توسط هر تبدیل آفین نیز حفظ می‌گردد.

کانولوشن‌ها در فضاهای اقلیدسی به طور کلاسیک در مختصات \mathbb{R}^d از \mathbb{E}_d فرمول‌بندی می‌شوند. مزیت این نوع فرمول‌بندی این است که تمام ساختارهای ریاضی مورد نیاز برای تعاریف را فراهم می‌کند. با این حال، \mathbb{R}^d دارای ساختار اضافی است، به عنوان مثال یک ساختار فضای برداری (و در نتیجه یک مبدأ) یا ساختار کانونیک $\{e\}$ آن. با طراحی کانولوشن‌ها به گونه‌ای که هموردا باشند، استنتاج (تا حدی) مستقل از این ساختار می‌شود: به عنوان مثال، هموردایی نسبت به انتقال در کانولوشن‌ها، انتخاب خاص مبدأ را یکسان می‌سازد در حالی که هموردایی نسبت به $\mathrm{E}(d)$ (ایزومتری)، جهت و جهت‌گیری خاص ساختار $\{e\}$ را یکسان می‌کند. برای روشن شدن اینکه کدام ساختار ریاضی واقعاً فرض و مورد نیاز است، ما یک دیدگاه جایگزین را توسعه می‌دهیم: ما با ساختار خالص آفین و متريک فضای اقلیدسی \mathbb{E}_d شروع می‌کنیم. اگر یک کانولوشن GM روی \mathbb{E}_d ساختار هندسی بیشتری را فرض کند، این ساختار متعاقباً با مشخص کردن اطلسی از چارت‌های (آفین) $\mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ است. $x^A : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ساختارها را القا می‌کنند، اضافه خواهد شد.

۱۳۳	۱.۹ فرمول‌بندی کلاسیک CNN‌های G -هدایت‌پذیر بر روی \mathbb{R}^d
۱۳۵	۲.۹ هندسه‌ی آفین فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d
۱۳۵	۱.۲.۹ چارت‌های آفین و اطلس‌های $\text{Aff}(G)$
۱۳۶	۲.۲.۹ \square -اطلس‌ها و \square -ساختارهای القا شده
۱۳۹	۳.۲.۹ تبدیلات آفین مستقل از مختصات
۱۴۱	۳.۹ های همودای گروه آفین در فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d
۱۴۴	۴.۹ CNN‌های اقلیدسی در مقالات

برای ارائه یک نمای کلی و مقدمه‌ای ساده، ما فرمول‌بندی کلاسیک کانولوشن‌های G -راهبری‌پذیر (همودای آفین) را در مختصات \mathbb{R}^d در بخش ۱.۹ مور می‌کیم. بخش‌های بعدی ۲.۹ و ۳.۹ کانولوشن‌های همودای آفین را در فضاهای اقلیدسی در یک چارچوب بدون مختصات و مستقل از مختصات تعریف می‌کنند. به طور خاص، بخش ۲.۹ به بحث در مورد هندسه‌ی آفین فضاهای اقلیدسی در یک پردازه اطلس‌هایی از چارت‌ها با تابع گزار در یک گروه آفین $\text{Aff}(G)$ (شکل ۴۹)، G -ساختارهای ثابت تحت $\text{Aff}(G)$ مورد نظر را الفا می‌کنند (شکل ۵۰). بخش ۳.۹ کانولوشن‌های G را روی این G -ساختارها بررسی کرده و همودایی سراسری آنها نسبت به $\text{Aff}(G)$ را اثبات می‌کند. نمونه‌های خاصی از این مدل‌ها که در مقالات یافت می‌شوند، یعنی ردیفهای (۱-۲۶) جدول ۶ در بخش ۴.۹ مورد بحث قرار گرفته‌اند.

خواننده می‌تواند از تعاریف فنی در بخش‌های ۲.۹ و ۳.۹ که برای درک مدل‌های بخش ۴.۹ لزوماً ضروری نیستند، عبور کند.

۱.۹ فرمول‌بندی کلاسیک CNN‌های \square -هدایت‌پذیر بر روی \mathbb{R}^d

در این بخش، ما مفهوم معمول کانولوشن‌ها (یا همبستگی‌های متقابل^{۸۸}) را بر روی \mathbb{R}^d مور می‌کنیم. هنگام کانولو کردن با یک کرنل G -هدایت‌پذیر، کانولوشن‌ها تحت عمل گروه آفین $\text{Aff}(G)$ همتغیر می‌شوند. بخش‌های بعدی ۲.۹ و ۳.۹ این عملیات را بر روی \mathbb{R}^d به عنوان عبارات مختصاتی کانولوشن‌های GM مستقل از مختصات بر روی فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d شناسایی خواهند کرد.

CNN‌های هدایت‌پذیر اقلیدسی: CNN‌های مرسم نقشه‌های ویژگی را بر روی \mathbb{R}^d در نظر می‌گیرند، که توابعی به شکل زیر هستند:

$$F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c. \quad (362)$$

یک کانولوشن (در واقع یک همبستگی) با یک کرنل با مقدار ماتریسی $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ سپس به عنوان تبدیل انتگرالی زیر تعریف می‌شود:

$$F_{\text{out}}(x) := [K * F_{\text{in}}](x) := \int_{\mathbb{R}^d} K(v) F_{\text{in}}(x + v) dv, \quad (363)$$

که یک نقشه ویژگی ورودی با c_{in} کانال را به یک نقشه ویژگی خروجی با c_{out} کانال نگاشت می‌کند. می‌توان نشان داد که این عملیات عمومی‌ترین نگاشت خطی و همتغیر نسبت به انتقال بین نقشه‌های ویژگی است^{۸۹}. [۳۱]

CNN‌های هدایت‌پذیر اقلیدسی [۲۸، ۱۹۰، ۱۹۱] مرسم را به شبکه‌های کانولوشنی تعمیم می‌دهند که تحت عمل گروه‌های آفین بر روی میدان‌های ویژگی همتغیر هستند. گروه‌های آفین \mathbb{R}^d در اینجا به عنوان حاصلضرب‌های نیمه‌مستقیم به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\text{Aff}(G) := \mathcal{T}_d \rtimes G, \quad (364)$$

که در آن $G \leq \text{GL}(d)$ است. گروه‌های آفین شامل ایزومنتری‌های \mathbb{R}^d که در شکل ۴۸ به تصویر کشیده شده‌اند، به عنوان یک مورد خاص برای $G \leq \text{O}(d)$ هستند اما گروه‌های نقطه‌ای (گروه‌های ساختار) G عمومی‌تری، به عنوان مثال مقیاس‌بندی یکنواخت^{۹۰}، رانیز مجاز می‌دانند. معادلات زیر یک نمای کلی از رایج‌ترین گروه‌های آفین در ادبیات (تا گسیته‌سازی‌ها) و راه‌های جایگزین نوشتن آنها را ارائه می‌دهند (با فرض اینکه توسط G -ساختارهای نامتغیر نسبت به $\text{Aff}(G)$ تعیین می‌شود؛ به زیر مراجعه کنید):

$$\begin{aligned} \text{Aff}(\{e\}) &= \mathcal{T}_d &= (\mathbb{R}^d, +) &= \text{Isom}_{\{e\}|M} \\ \text{Aff}(\mathcal{R}) &= \mathcal{T}_d \rtimes \mathcal{R} &&= \text{Isom}_{\mathcal{R}M} \\ \text{Aff}(\text{SO}(d)) &= \mathcal{T}_d \rtimes \text{SO}(d) = \text{SE}(d) &= \text{Isom}_{\text{SOM}} &= \text{Isom}_+(\mathbb{R}^d) \\ \text{Aff}(\text{O}(d)) &= \mathcal{T}_d \rtimes \text{O}(d) = \text{E}(d) &= \text{Isom}_{\text{OM}} &= \text{Isom}(\mathbb{R}^d) \\ \text{Aff}(\mathcal{S}) &= \mathcal{T}_d \rtimes \mathcal{S} && \end{aligned} \quad (365)$$

^{۸۸} در یادگیری عمیق، استفاده از اصطلاحات «کانولوشن» و «همبستگی متقابل» به صورت مترادف رایج شده است.
^{۸۹} برای کلیت کامل، در واقع باید کرنل‌ها را به معنای توزیعی (تابع تعمیم‌یافته) مجاز دانست.

گروه $\text{Aff}(\text{GL}(d))$ شامل تمام تبدیلات آفین \mathbb{R}^d است. از آنجایی که گروههای آفین به عنوان حاصلضربهای نیمه-مستقیم تعریف می‌شوند، هر یک از عناصر آنها $tg \in \text{Aff}(G)$ را می‌توان به طور منحصر به فرد به یک انتقال $t \in \mathcal{T}_d$ و یک عنصر گروه نقطه‌ای $g \in G$ تجزیه کرد. عمل (کانونی) آنها بر روی \mathbb{R}^d به صورت زیر داده می‌شود:

$$\text{Aff}(G) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (tg, x) \mapsto gx + t. \quad (366)$$

عمل یک عنصر گروه معکوس $(tg)^{-1}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$((tg)^{-1}, x) \mapsto g^{-1}(x - t). \quad (367)$$

یک میدان ویژگی از نوع ρ بر روی \mathbb{R}^d طبق نمایش القایی ρ از $\text{Ind}_G^{\text{Aff}(G)}$ همانطور که توسط

$$(tg) \triangleright_\rho F := [\text{Ind}_G^{\text{Aff}(G)} \rho](tg) F := \rho(g) F (tg)^{-1}, \quad (368)$$

مشخص شده است، تبدیل می‌شود، که می‌توان آن را به عنوان مشابه عمل مستقل از مختصات بر روی مقاطع در معادله (۲۸۱) در نظر گرفت.^{۹۰} یک کانونلوشن با یک کرنل G -هدایت‌پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^G$ نسبت به این اعمال بر روی میدان ورودی و خروجی هم‌متغیر است، یعنی،

$$K * (tg \triangleright_{\rho_{\text{in}}} F_{\text{in}}) = tg \triangleright_{\rho_{\text{out}}} (K * F_{\text{in}}) \quad \forall tg \in \text{Aff}(G). \quad (369)$$

این به راحتی با یک محاسبه صریح بررسی می‌شود:

$$\begin{aligned} [K * (tg \triangleright_{\rho_{\text{in}}} F_{\text{in}})](x) &= [K * (\rho_{\text{in}}(g) F_{\text{in}}(tg)^{-1})](x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \rho_{\text{in}}(g) F_{\text{in}}((tg)^{-1}(x + v)) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \rho_{\text{in}}(g) F_{\text{in}}(g^{-1}(x + v - t)) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} K(gv) \rho_{\text{in}}(g) F_{\text{in}}(g^{-1}(x - t) + v) |\det g| dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_{\text{out}}(g) K(v) F_{\text{in}}(g^{-1}(x - t) + v) dv \\ &= \rho_{\text{out}}(g) [K * F_{\text{in}}](g^{-1}(x - t)) \\ &= tg \triangleright_{\rho_{\text{out}}} [K * F_{\text{in}}](x), \end{aligned} \quad (370)$$

که از G -هدایت‌پذیری K در مرحله پنجم استفاده کرد و برقرار است. همانطور که در [۱۹۱] اثبات شده است، چنین کانونلوشن‌های G -هدایت‌پذیر، عمومی‌ترین نگاشتهای خطی هم‌متغیر نسبت به $\text{Aff}(G)$ بین میدان‌های ویژگی اقلیدسی هستند.^{۹۲۹۱}

رابطه با کانونلوشن‌های **GM** اقلیدسی: این کانونلوشن‌های هدایت‌پذیر بر روی \mathbb{R}^d چگونه به کانونلوشن‌های GM بر روی فضاهای اقلیدسی $M = \mathbb{E}_d$ مرتبط می‌شوند؟ این واقعیت که کانونلوشن‌های هدایت‌پذیر به کرنل‌های G -هدایت‌پذیر متکی هستند، نشان می‌دهد که آنها نه تنها به صورت سراسری نسبت به $\text{Aff}(G)$ هم‌متغیر هستند، بلکه (به طور کلی تر) به صورت محلی نسبت به G هم‌متغیر هستند. برای برقراری ارتباط بین CNN‌های کلاسیک G -هدایت‌پذیر بر روی \mathbb{R}^d و کانونلوشن‌های GM مستقل از مختصات، باید ساختار هندسی را که به طور ضمنی توسط اولی در نظر گرفته شده است، شناسایی کنیم.

^{۹۰} نمایش‌های القایی به روشی مشابه با آنچه در شکل ۲۶ نشان داده شده است، بر روی میدان‌ها عمل می‌کنند. برخلاف تبدیل در این شکل، نمایش‌های القایی علاوه بر این به انتقال‌ها نیز اجازه می‌دهند (قانون تبدیل در بخش ۳.۲.۴ $\text{Ind}_G^{\text{Aff}(G)} \rho$ از نمایش القایی به G است، یعنی نمایش القایی بدون انتقال‌ها).

^{۹۱} با فرض اینکه میدان‌های ویژگی طبق نمایش القایی، معادله (۳۶۸)، تبدیل می‌شوند، که برای رسیدن به یک کانونلوشن لازم است.

^{۹۲} این گزاره، گزاره شناخته‌شده‌ای را تعیین می‌دهد که کانونلوشن‌های اقلیدسی مرسوم، عمومی‌ترین نگاشتهای خطی هم‌متغیر نسبت به انتقال بین توابع (یا نقشه‌های ویژگی) در فضاهای اقلیدسی هستند، که برای $\{e\} = G$ بازیابی می‌شود.

به طور کلی، به طور کانونی با یک $\{e\}$ -ساختار، که در شکل ۰۵۰ به تصویر کشیده شده است، مجهز است.^{۹۳} علاوه بر این، با یک متريک ريماني متناظر با ضرب داخلی استاندارد \mathbb{R}^d همراه است.^{۹۴} اتصال لوی-چيوپاتای متناظر، منتقل کننده‌های موازی را در شکل ۰۲۲ آيجاد می‌کند، که بردارها را به معنای معمول در فضاهای اقلیدسی موازی نگه می‌دارد. هنگامی که نسبت به قاب‌های $\{e\}$ -ساختار کانونی بيان می‌شود، منتقل کننده‌های موازی بدبيهي می‌شوند و بنابراین حذف می‌شوند. نگاشتهای نمایی به یک جمع ساده کاهش می‌ياند (پس از اعمال برخی ايزومورفيسمهای، به زير مراججه کنيد).

در حالی که ما یک $\{e\}$ -ساختار بر روی \mathbb{R}^d داريم، کانولوشن‌های GM به G -ساختارها کمتر خاصی متکی هستند. اين G -ساختارها را می‌توان به عنوان بالابرهای G (کانوني) در حالت $\{e\}$ -ساختار کانوني با یک $\{e\}$ -ساختار باز است.

$$GM = \{e\}M \triangleleft G := \left\{ [e_i]_{i=1}^d \triangleleft g \mid [e_i]_{i=1}^d \in \{e\}M, g \in G \right\} \quad (371)$$

از $\{e\}$ -ساختار کانوني $\{e\}M$ از \mathbb{R}^d در نظر گرفت. به طور شهودي، اين G -ساختارها بالابر شده با افزودن هر قاب G -مرتبط دیگر راست- G -آن در FM به هر قاب مرجع کانوني در $\{e\}M$ تعریف می‌شوند. شکل ۰۵۰ چنین G -ساختارها بالابر شدهای را برای گروههای ساختار مختلف نشان می‌دهد. همانطور که در قضيه ۶.۹ در زير اثبات شده است، آنها تحت عمل $\text{Aff}(G)$ نامتغیر هستند^{۹۵} که در قضие ۸.۹ نشان داده است که هم‌متغيری $\text{Aff}(G)$ کانولوشن‌ها را توضیح می‌دهد. آنها علاوه بر اين با اتصال لوی-چيوپاتا G -سازگار هستند.

ادعاهای مطرح شده در اينجا در دو بخش بعدی با دقت بيشتری مورد بحث قرار می‌گيرند. اين فرمول‌بندی رسمي، با اين حال، برای درک طبقه‌بندی ما از CNN‌های اقلیدسی در ادبیات به شدت ضروري نیست، به طوری که خواننده می‌تواند از آنها عبور کرده و مستقیماً به بخش ۴.۹ برود.

۲.۹ هندسي آفين فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d

قبل از بحث در مورد کانولوشن‌های مستقل از مختصات در فضاهای اقلیدسی، باید هندسي زيربنائي را درک کنيم. فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d بنا به تعریف، فضاهای آفين هستند، یعنی با یک فضای برداری متناظر با بعد d همراه هستند که انتقال‌ها را روی \mathbb{E}_d تعریف می‌کند. فضاهای اقلیدسی علاوه بر اينکه فضای آفين هستند، به یک متريک اقلیدسی (تابع فاصله) نيز مجهزند. اين تابع فاصله متناظر با یک متريک ريماني η است، یعنی یک $O(d)$ -ساختار OM روی منيفلد (ريماني) $M = \mathbb{E}_d$. اين متريک داراي اين ويزگي است که انحنائي آن در همه جا صفر است، یعنی \mathbb{E}_d سرتاسر تخت است.

يك مثال استاندارد برای فضاهای اقلیدسی، فضاهای برداری \mathbb{R}^d هستند، با اين حال، فضاهای اقلیدسی عمومی ساختار کمتری را در نظر می‌گيرند. به طور خاص، آنها با یک ساختار فضای برداری همراه نیستند و بنابراین مبدأ مرجحی ندارند. علاوه بر اين، آنها به طور کلی مجهز به مختصات دکارتی نیستند. بنابراین ما با فضاهای اقلیدسی «عيان» \mathbb{E}_d شروع می‌کنیم و بحث می‌کنیم که جگونه ساختار هندسي مربوطه به آنها اضافه می‌شود. در اصل می‌توان هر G -ساختاري را در نظر گرفت، با اين حال، ما به طور خاص به آن G -ساختارها می‌شود. راهبردي پذير كلاسيك را از بخش قبيل بازيابي می‌کنند، که تمام مدل‌های رديفهای (۲۶-۱) جدول ۶ را توضیح می‌دهند. چنین G -ساختارهاي ناورداری (G) از اطلس‌های $\text{Aff}(G)$ می‌شوند، که شامل چارت‌هایی از \mathbb{E}_d هستند که توابع گذار آنها مقداري در (G) می‌گيرند (معادله (۳۶۴))؛ به شکل ۰۴۹ مراجعه کنيد. تمام گزارهایی که در مختصات \mathbb{R}^d بيان می‌شوند، می‌توانند از طریق چارت‌ها به یک چارچوب مستقل از مختصات ترجمه شوند، که ما در اينجا آن را توسعه می‌دهيم. اطلاعات بيشتر در مورد رابطه بين چارت‌های مختصاتي و پیمانه‌ها را می‌توان در پيوست آ يافت.

۱.۲.۹ چارت‌های آفين و اطلس‌های $\text{Aff}(G)$

يك فضای اقلیدسی \mathbb{E}_d با بعد d با \mathbb{R}^d همسان‌ريخت است و بنابراین چارت‌های سراسري را می‌پذيرد^{۹۶}

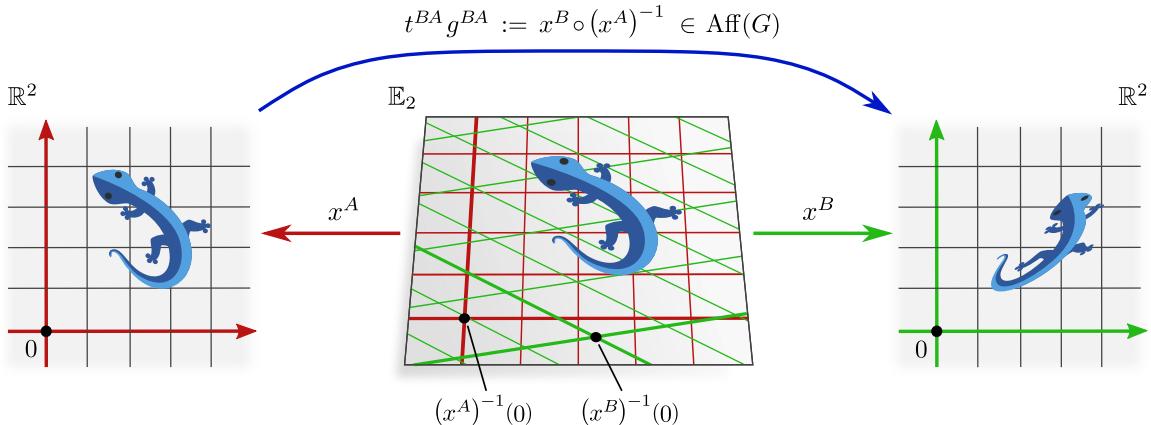
$$x^A : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d. \quad (372)$$

در ادامه ما هميشه اين چارت‌ها را به عنوان نگاشتهای آفين، یعنی ايزومورفيسمهای فضاهای آفين، که هم خطی (يعني خطوط راست را به خطوط راست می‌نگارند) و نسبت فاصله‌ها را حفظ می‌کنند، در نظر خواهيم گرفت. از انجا که ترکيب نگاشتهای آفين، خود نگاشت آفين است، نتيجه

^{۹۳} به طور رسمي، $\{e\}$ -ساختار کانوني \mathbb{R}^d به صورت زير به وجود می‌آيد: فضای برداری $M = \mathbb{R}^d$ خود با یک پايه کانوني، که توسط بردارهای پايه $e_i \in \mathbb{R}^d$ با عناصر $e_i = \delta_{ij}$ داده می‌شود، همراه است. قاب‌های مرتع کانوني فضاهای مماس $T_p \mathbb{R}^d$ از اين پايه از طریق ايزومورفيسمهای کانوني \mathbb{R}^d به دست می‌آيد. به طور شهودي، قاب‌های محلی فضاهای مماس $T_p \mathbb{R}^d \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^d$ با قاب سراسري \mathbb{R}^d «هم‌تاز» هستند. اين معادل با معرفی نگاشت همانی به عنوان چارت مختصاتي سراسري $x = \text{id}_{\mathbb{R}^d} : M = \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ و سپس تعریف $\{e\}$ -ساختار کانوني به عنوان میدان پايه‌های مختصاتي القابی $[e_i]_{i=1}^d$ است.

^{۹۴} اين متريک استاندارد η به عنوان پول‌بک ضرب داخلی استاندارد $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ بر روی \mathbb{R}^d به طریق ايزومورفيسمهای کانوني $\eta_p(v, w) := \langle \iota_{\mathbb{R}^d, p}(v), \iota_{\mathbb{R}^d, p}(w) \rangle_{\mathbb{R}^d}$ از $T_p \mathbb{R}^d \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^d$ به فضاهای مماس تعریف می‌شود. بنابراین برای هر $v, w \in T_p \mathbb{R}^d$ به صورت $\eta_p(v, w) := \langle \iota_{\mathbb{R}^d, p}(v), \iota_{\mathbb{R}^d, p}(w) \rangle_{\mathbb{R}^d}$ داده می‌شود.

^{۹۵} اين واقعيت که \mathbb{E}_d و \mathbb{R}^d به صورت سراسري همسان‌ريخت (يا حتى ايزومetriک) هستند، توضیح می‌دهد که چرا اکثر کارهای مرتبط، فضاهای برداری \mathbb{R}^d را به عنوان مدل‌های از فضاهای اقلیدسی در نظر می‌گيرند. روکردن ما در اين بخش کمی دقیق‌تر است زيرا حداقل ساختار لازم برای تعریف کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM را در فضاهای اقلیدسی $M = \mathbb{E}_d$ معرفی می‌کند.



شکل ۴.۹: نمایش چارت‌های آفین $x^X : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ که مختصات سراسری را به فضاهای اقلیدسی اختصاص می‌دهند. هم \mathbb{R}^d و \mathbb{E}_d فضاهای آفین هستند، به طوری که می‌توان خواست که چارت‌ها نگاشت‌های آفین باشند، که هم خطی و نسبت فضاهای را حفظ می‌کنند. ما یک اطلس $\mathcal{A}_{\mathbb{E}_d}^{\text{Aff}(G)}$ با نماد $\text{Aff}(G)$ از عنوان اطلسی مشکل از چارت‌هایی تعریف می‌کنیم که توسط تابع گذار $t^{BA}g^{BA} := x^B \circ (x^A)^{-1}$ هستند، به یکدیگر مرتبط می‌شوند. چارت‌ها در یک اطلس \mathcal{A}^G حداقل در انتخاب مبدأ $(x^X)^{-1}(0)$ و یک تبدیل G با هم تفاوت دارند. انتخاب یک اطلس \mathcal{A}^G ، مشکل از چارت‌های x^X یک G -اطلس \mathcal{A}^G از پیمانه‌های \hat{dx}^X را القا می‌کند. G -ساختار متناظر GM که در شکل ۵.۰ برای گروه‌های مختلف G ، مثال زده شده است، تحت عمل $(\text{Aff}(G))$ ناوردا است. قضیه ۸.۹ ثابت می‌کند که کاتولوشن‌های GM روی چنین G -ساختارهایی، همورا هستند.

(مارمولک‌ها با مجوز توپیتر تحت لایسنس بین‌المللی CC-BY-SA ۳.۰ ارائه شده‌اند.)

می‌شود که تابع گذار چارت

$$x^B \circ (x^A)^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (373)$$

تبدیلات آفین از \mathbb{R}^d هستند، یعنی اعضای در $\text{Aff}(\text{GL}(d))$. بنابراین تابع گذار به طور یکتا به یک انتقال $t^{BA} \in \mathcal{T}_d$ و یک عضو $g^{BA} \in \text{GL}(d)$ تجزیه می‌شوند:

$$t^{BA}g^{BA} := x^B \circ (x^A)^{-1} \quad (374)$$

نماد g^{BA} در اینجا تصادفی نیست زیرا این اعضای گروه با تبدیلات پیمانه‌ای که توسط گذار چارت‌ها القا می‌شوند، مطابقت دارند، که در قضیه ۲.۹ در ادامه ثابت شده است.

با توجه به انتخاب یک گروه آفین $\text{Aff}(G)$ ، ما اطلس‌های \mathcal{A}^G از \mathbb{E}_d را به عنوان آن دسته از اطلس‌های چارت‌های سراسری از \mathbb{R}^d به تعریف می‌کیم که تابع گذار چارت آنها مقادیری در $\text{Aff}(G)$ می‌گیرند:

تعريف ۱.۹ (اطلس $\text{Aff}(G)$ از فضای اقلیدسی). فرض کنید \mathfrak{X} یک مجموعه اندیس برای نام‌گذاری چارت‌ها باشد و برای هر $X \in \mathfrak{X}$: $x^X : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ یک چارت آفین سراسری از \mathbb{E}_d باشد. اطلس

$$\mathcal{A}_{\mathbb{E}_d}^{\text{Aff}(G)} = \{(\mathbb{E}_d, x^X) \mid X \in \mathfrak{X}\} \quad (375)$$

یک اطلس $(\text{Aff}(G), \mathbb{E}_d)$ نامیده می‌شود اگر تمام توابع گذار چارت آن مقادیری در $\text{Aff}(G)$ بگیرند، یعنی اگر

$$x^B \circ (x^A)^{-1} \in \text{Aff}(G) \quad \forall A, B \in \mathfrak{X}. \quad (376)$$

شکل ۴.۹ چارت‌های آفین و نگاشت‌های گذار چارت با مقادیر $(\text{Aff}(G), \mathbb{E}_d)$ بین آنها را به تصویر می‌کشد.

۲.۲.۹ اطلس‌ها و ساختارهای القا شده

هر چارت مختصاتی سراسری $x^A : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ یک پیمانه سراسری را القا می‌کند که به صورت نقطه‌ای توسط گرادیان‌های چارت داده می‌شود

$$\psi_{TM,p}^A := \hat{dx}_p^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (377)$$

به معادله (۵.۴۰) در پیوست آ.۳ و جدول ۷ مراجعه کنید. بنابراین یک چارت‌ها متناظر با یک اطلس از پیمانه‌ها است. به طور خاص، با توجه به اینکه چارت‌ها یک اطلس $\text{Aff}(G)$ را تشکیل می‌دهند، تضمین می‌شود که تبدیلات پیمانه دارای مقادیر G هستند، یعنی پیمانه‌های القا شده یک G -اطلس را تشکیل می‌دهند:

قضیه ۲.۹ (اطلس‌های $\text{Aff}(G)$ از چارت‌ها، G -اطلس‌های از پیمانه‌ها را القا می‌کنند). فرض کنید $\{(E_d, x^X) \mid X \in \mathfrak{X}\}$ یک اطلس $\text{Aff}(G)$ از چارت‌ها باشد. اطلس القا شده از پیمانه‌ها

$$\mathcal{A}^G = \{(\mathbb{E}_d, \hat{dx}^X) \mid X \in \mathfrak{X}\} \quad (378)$$

تضمین می‌شود که یک G -اطلس باشد. به طور خاص، اگر نگاشتهای گذار چارت با $x^B \circ (x^A)^{-1} = t^{BA} g^{BA}$ داده شوند، نگاشتهای گذار بین پیمانه‌ها در هر نقطه $p \in \mathbb{E}_d$ با $g_p^{BA} = g^{BA} \in G$ داده می‌شوند.

اثبات: توابع گذار بین پیمانه‌های القا شده توسط چارت، طبق معادله (۵۵۳)، با ژاکوبین نگاشتهای گذار چارت منطبق هستند، یعنی،

$$g_p^{BA} = \hat{dx}_p^B \circ (\hat{dx}_p^A)^{-1} = \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)}. \quad (379)$$

عبارت آخر، سو استفاده معمول از نمادگذاری برای ژاکوبین‌های نگاشتهای گذار چارت است، که در معادله (۵۴۷) به صورت مؤلفه‌ای به شکل زیر تعریف شد:

$$\frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\nu^A} \Big|_{x^A(p)} := \partial_\nu (x_\mu^B \circ (x^A)^{-1}) \Big|_{x^A(p)}. \quad (380)$$

با استفاده از اینکه نگاشتهای گذار چارت با $x^B \circ (x^A)^{-1} = t^{BA} g^{BA}$ داده می‌شوند، این نتیجه می‌دهد که

$$(g_p^{BA})_{\mu\nu} = \partial_\nu (x_\mu^B \circ (x^A)^{-1})(x) \Big|_{x^A(p)} = \partial_\nu (g^{BA} x + t^{BA})_\mu \Big|_{x^A(p)} = g_{\mu\nu}^{BA}, \quad (381)$$

یعنی تبدیلات پیمانه القا شده g_p^{BA} مقابله‌ای در G دارند و با t^{BA} مطابقت دارند (که این نمادگذاری را توجیه می‌کند). از آنجا که این استدلال برای هر $A, B \in \mathfrak{X}$ و هر چارت $p \in \mathbb{E}_d$ برقرار است، نتیجه می‌شود که اطلس القا شده از پیمانه‌ها یک G -اطلس است. \square

همانطور که در بخش ۴.۶ بحث شد، هر G -اطلس از پیمانه‌ها یک G -ساختر GM را القا می‌کند. طبق معادله (۱۸۴)، GM به صورت نقطه‌ای توسط

$$G_p M := (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(G), \quad (382)$$

تعیین می‌شود، که در آن انتخاب خاص پیمانه $\mathfrak{X} \in A$ دلخواه است. چارچوب‌های موجود در $G_p M$ پایه‌های مختصاتی $= [\frac{\partial}{\partial x_\mu^A}]_p \Big|_{\mu=1}^d$ و تمام تبدیلات G آنها هستند. از آنجا که اطلس ماسکیمال $\text{Aff}(G)$ بنابراین امر $\text{Aff}(G)$ -ناوردا است، همین امر برای G -ساختر القا شده نیز صادق است (با عملی که از طریق هر چارت تعریف می‌شود، همانطور که در ادامه روشن و اثبات شده است). شکل ۵۰ چنین G -ساخترهایی را برای گروه‌های آفین مختلف نشان می‌دهد. در بخش بعدی ما ثابت می‌کنیم که کانولوشن‌های GM متناظر، تحت عمل G همورداستند. $\text{Aff}(G)$

همانطور که مشخص می‌شود، GM به عنوان یک کلاف اصلی با \mathbb{R}^d به صورت غیرکانونی ایزومولف است، که در آن

$$q : \text{Aff}(G) \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad tg \mapsto t \quad (383)$$

نگاشت خارج‌قسمتی کانونی گروه آفین است (پس از یکی گرفتن همدسته‌های tG با انتقال‌های t).^{۹۶} جای تعجب نیست که این ایزومولفیسم کلاف اصلی به انتخاب چارت بستگی دارد.

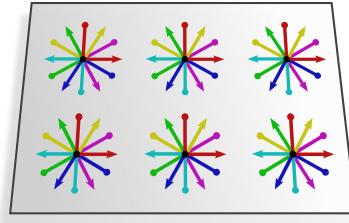
قضیه ۳.۹ (ایزومولفیسم کلاف اصلی بین $\text{Aff}(G)$ و \mathbb{E}_d). فرض کنید GM یک G -ساختر القا شده توسط اطلس $\text{Aff}(G)$ روی \mathbb{E}_d باشد. آنگاه GM به عنوان یک کلاف اصلی با $\mathbb{R}^d \xrightarrow{q} \text{Aff}(G)$ ایزومولف است، یعنی ایزومولفیسم‌هایی وجود دارند

$$\alpha^A : \text{Aff}(G) \rightarrow GM, \quad tg \mapsto (\psi_{GM, (x^A)^{-1}(t)})^{-1}(g) \quad (384)$$

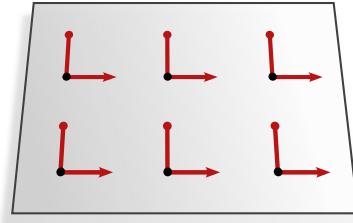
۹

$$(x^A)^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{E}_d \quad (385)$$

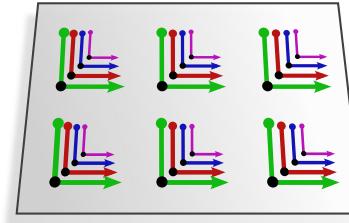
^{۹۶} ما به طور ضمنی از یک ایزومولفیسم کانونی $\text{Aff}(G)/G \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^d$ استفاده می‌کنیم، که در آن t در سمت چپ یک عضو گروه انتقال در $\mathcal{T}_d = (\mathbb{R}^d, +)$ و در سمت راست یک بردار در \mathbb{R}^d را نشان می‌دهد.



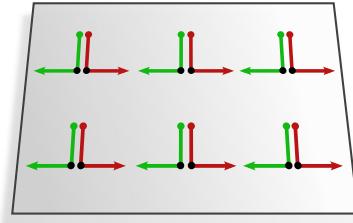
ب) $\text{Aff}(\text{SO}(2))$ -ساختار SOM القا شده توسط اطلس $(\text{SO}(2), \text{Aff}(\text{SO}(2)))$ روی $M = \mathbb{E}_2$, که تحت انتقال‌ها و دوران‌ها در $\text{Isom}_{\text{SOM}} = \text{SE}(2)$ حفظ می‌شود.



ا) $\{\epsilon\}$ -ساختار $\text{M}_{\{\epsilon\}}$ القا شده توسط اطلس $(\{\epsilon\}, \text{Aff}(\{\epsilon\}))$ روی $M = \mathbb{E}_2$, که تحت انتقال‌ها در $\text{Isom}_{\{\epsilon\}M} = \mathcal{T}_2$ حفظ می‌شود.



د) \mathcal{S} -ساختار \mathcal{SM} القا شده توسط اطلس $(\mathcal{S}, \text{Aff}(\mathcal{S}))$ روی $M = \mathbb{E}_2$ که تحت انتقال‌ها و مقیاس‌بندی‌ها در $\text{Aff}(\mathcal{S}) = \mathcal{T}_2 \times \mathcal{S}$ حفظ می‌شود. توجه داشته باشید که $\text{Isom}_{\mathcal{SM}} = \mathcal{T}_2$ زیرا مقیاس‌بندی‌ها ایزو متريک نیستند.



ج) \mathcal{R} -ساختار \mathcal{RM} القا شده توسط اطلس $(\mathcal{R}, \text{Aff}(\mathcal{R}))$ که تحت انتقال‌ها و بازتاب‌ها در $\text{Aff}(\mathcal{R}) = \text{Isom}_{\mathcal{RM}} = \mathcal{T}_2 \times \mathcal{R}$ حفظ می‌شود.

شکل ۵: نمایش G -ساختارهای مختلف GM در فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d .
شکل ۱۵۰: $\{\epsilon\}$ -ساختار ناوردای انتقالی $\text{M}_{\{\epsilon\}}$ را نشان می‌دهد که مناظر با کانولوشن‌های اقلیدسی متغیر است. سه G -ساختار دیگر مناظر با CNN-ها G -راهبری‌پذیر غیربدیدهی هستند. آنها به صورت محلی روی تمام زست‌هایی که توسط مجموعه خاصی از چارچوب‌های مرتع در $G_p M$ به هم مرتبط هستند، تعیین می‌یابند. از آنجا که G -ساختارها $\text{Aff}(G)$ -ناوردا هستند (قفسیه ۶.۹)، کانولوشن‌های G -راهبری‌پذیر به صورت سراسری نسبت به $\text{Aff}(G)$ هموردا هستند (قفسیه ۸.۹). به جای تعریف G -ساختارها از طریق یک اطلس $(G, \text{Aff}(G))$ از چارت‌ها، می‌توان آنها را از طریق یک ارتقای G -به صورت \mathbb{R}^d -تعريف کرد (معادله ۳۷۱)، که چارچوب‌های موجود در $\{\epsilon\}$ -ساختار کانونی \mathbb{E}_d را با تمام چارچوب‌های مرتبط با G مجهر می‌کند.

به طوری که نمودار زیر جایجایی است:

$$\begin{array}{ccc} \text{Aff}(G) \times G & \xrightarrow{\alpha^A \times \text{id}_G} & GM \times G \\ \downarrow \cdot & & \downarrow \lhd \\ \text{Aff}(G) & \xrightarrow{\alpha^A} & GM \\ q \downarrow & & \downarrow \pi_{GM} \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{(x^A)^{-1}} & \mathbb{E}_d \end{array} \quad (386)$$

وارون α^A در اینجا با

$$(\alpha^A)^{-1} : GM \rightarrow \text{Aff}(G), \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto tg \quad \square\square\square\square \quad \begin{cases} t = x^A \circ \pi_{GM}([e_i]_{i=1}^d) \\ g = \psi_{GM, \pi_{GM}([e_i]_{i=1}^d)}^A([e_i]_{i=1}^d) \end{cases} \quad (387)$$

داده می‌شود. توجه داشته باشید که این ايزومورفيسم‌ها در تناظر یک به یک با چارت‌های سازگار با $\text{Aff}(G)$ از اطلس مورد نظر هستند.

اثبات: برای اثبات این گزاره، باید نشان دهیم که α^A و $(\alpha^A)^{-1}$ واقعاً وارون یکدیگر هستند، که یک نگاشت کلاف روی x^A است و α^A همورداً راست به G است. اینکه $(\alpha^A)^{-1}$ هم یک وارون چپ و هم یک وارون راست خوش تعریف برای α^A است، به راحتی توسعه خواننده بررسی می‌شود. اینکه α^A یک نگاشت کلاف روی $(x^A)^{-1}$ است به این معناست که مربع پایه‌نی نمودار جایجایی است. این $\pi_{GM} \circ \alpha^A(tg) = \pi_{GM} \circ (\psi_{GM, (x^A)^{-1}(tg)})^{-1}(g) = (x^A)^{-1}(t)$ و $(x^A)^{-1} \circ q(tg) = (x^A)^{-1}(t)$ امر با مشاهده اینکه $(x^A)^{-1}(t)$

برای هر $tg \in \text{Aff}(G)$ برابر هستند، دیده می‌شود. جابجایی مرتع بالایی در نمودار، یعنی هموردایی-راست α^A نسبت به G ، از این واقعیت ناشی می‌شود که $\tilde{g} = \alpha^A(tg) \triangleleft \tilde{g} = (\psi_{GM, (x^A)^{-1}(t)})^{-1}(g) \triangleleft \tilde{g} = \alpha^A(tg \cdot \tilde{g}) = (\psi_{GM, (x^A)^{-1}(t)})^{-1}(g \tilde{g})$ برای هر G و هر $\tilde{g} \in G$ برقرار است. در مرحله دوم از این واقعیت استفاده شد که $\psi_{GM, (x^A)^{-1}(t)}$ هموردایی-راست نسبت به G است (معادله (۱۸۸)، که هموردایی وارون آن را نتیجه می‌دهد. در مجموع، این ویژگی‌ها نشان می‌دهند که α^A یک ایزومورفیسم کلافی است. \square

۳.۲.۹ تبدیلات آفین مستقل از مختصات

از آنجا که ما می‌خواهیم هموردایی کانولوشن‌های GM را تحت تبدیلات آفین در یک چارچوب مستقل از مختصات اثبات کنیم، باید گروه‌هایی از تبدیلات آفین \mathbb{E}_d را به جای \mathbb{R}^d مانند بالا، معروف کنیم. چارت‌ها گروه‌های آفین مستقل از مختصات را به گروه‌های آفین $\text{Aff}(G)$ از \mathbb{R}^d مرتبط خواهند کرد. ما با گروه کامل

$$\text{Aff}(\mathbb{E}_d) := \{\phi : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{E}_d \mid \phi \text{ یک تبدیل آفین از } \mathbb{E}_d \text{ است}\} \quad (۳۸۸)$$

از تبدیلات آفین یک فضای اقلیدسی \mathbb{E}_d شروع می‌کنیم. اثبات اینکه $\text{Aff}(\mathbb{E}_d) = \text{Aff}(\text{GL}(d))$ ایزومورف است، آسان است، با ایزومورفیسم‌هایی که برای یک انتخاب دلخواه از چارت $x^A \mapsto x^A \phi(x^A)$ با ϕ داده می‌شوند. این گزاره در یک چارچوب کلی‌تر در قضیه ۶.۹ در ادامه اثبات شده است.

همانند مورد ایزومتری‌ها، ما زیرگروه‌های $\text{Aff}_{GM} \leq \text{Aff}(\mathbb{E}_d)$ از تبدیلات آفین حافظ G -ساختار را تعریف می‌کنیم: تعريف ۴.۹ (تبدیلات آفین حافظ G -ساختار). فرض کنید GM هر G -ساختاری روی \mathbb{E}_d باشد. ما زیرگروه متناظر از تبدیلات آفین حافظ G -ساختار را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\text{Aff}_{GM} := \{\phi \in \text{Aff}(\mathbb{E}_d) \mid \phi_{*,FM} G_p M = G_{\phi(p)} M \quad \forall p \in \mathbb{E}_d\} \leq \text{Aff}(\mathbb{E}_d). \quad (۳۸۹)$$

این تعریف را با تعریف Isom_{GM} در تعريف ۱.۸ مقایسه کنید. همانند مورد Isom_{GM} ، تضمین می‌شود که تبدیلات پیمانه‌ای که توسط تبدیلات آفین در القا می‌شوند، مقادیری در G داشته باشند. این گزاره توسط قضیه زیر رسمیت می‌یابد، که اساساً مشابه قضیه ۳.۸ است: قضیه ۵.۹ Aff_{GM} در تئوری دیفرانسیل (آنالیز محلی). فرض کنید $\phi \in \text{Aff}(\mathbb{E}_d)$ هر ایزومتری از $M = \mathbb{E}_d$ باشد. آنگاه سه گزاره زیر معادل هستند:

۱. ϕ حافظ G -ساختار است، یعنی،

۲. پول‌بک تبدیل آفین $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$ از هر پیمانه GM را تعریف می‌کند، با آن G -اطلس، G -سازگار است.

۳. عبارت مختصاتی $\phi_{*,FM}$ نسبت به هر پیمانه $\psi_{FM,\phi(p)}^{\tilde{A}}$ از G -اطلس FM مقادیری در گروه ساختار می‌گیرد، یعنی، $\psi_{FM,\phi(p)}^{\tilde{A}}(p) := \psi_{FM,\phi(p)}^A \phi_{*,FM}(\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}(p))^{-1} = \hat{d}x_{\phi(p)}^A \phi_{*,TM}(\hat{d}x_p^{\tilde{A}})^{-1}$ مقادیری در G دارد.

اثبات: اثبات مشابه اثبات قضیه ۳.۸ است. به طور کلی‌تر، این گزاره برای دیفرانسیل (آنالیز محلی) حافظ G -ساختار دلخواه نیز برقرار است. \square

تبدیلات پیمانه القا شده، تبدیل عبارات مختصاتی اعضای کلاف، به عنوان مثال ضرایب بردارهای مماس یا ویژگی، را توصیف می‌کنند. عمل تبدیل آفین ϕ روی خود منیفلد \mathbb{E}_d نیز می‌تواند در مختصات \mathbb{R}^d توصیف شود. این کار با ضرب چپ و راست ϕ با هر چارت (آفین) انجام می‌شود، که بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم آن را در مکان مبدأ و مقصد برابر در نظر بگیریم زیرا ما فقط چارت‌های سراسری را در نظر می‌گیریم. عبارت مختصاتی حاصل $t_\phi^{AA} g_\phi^{AA}$ که توسط نمودار جابجایی زیر تعریف می‌شود،

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{x^A} & \mathbb{E}_d & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{E}_d \xrightarrow{x^A} \mathbb{R}^d \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{t_\phi^{AA} g_\phi^{AA}} & & & \end{array} \quad (۳۹۰)$$

تضمین می‌شود که مقادیری در $\text{Aff}(G)$ بگیرید اگر ϕ G -ساختار را حافظ کند.

قضیه ۶.۹ Aff_{GM} در چارت‌های آفین سراسری. فرض کنید GM هر G -ساختار القا شده توسعه یک اطلس $(\text{Aff}(G), \mathbb{R}^d)$ باشد و $x^A : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ یک چارت از این اطلس باشد. عبارت مختصاتی یک عضو $\phi \in \text{Aff}_{GM}$ نسبت به x^A با

$$x^A \phi(x^A)^{-1} =: t_\phi^{AA} g_\phi^{AA} \in \text{Aff}(G), \quad (۳۹۱)$$

داده می‌شود، که در آن

$$t_{\phi}^{AA} := x^A \phi(x^A)^{-1}(\cdot) \in \mathcal{T}_d \quad \text{و} \quad g_{\phi}^{AA} := \hat{dx}_{\phi(p)}^A \phi_{*,TM} (\hat{dx}_p^A)^{-1} \in G \quad (392)$$

عضو G در عبارت مختصاتی در اینجا با تبدیل پیمانه القا شده $G \in \mathbb{E}_d$ از قضیه ۵.۹ در هر نقطه $p \in \mathbb{E}_d$ منطبق است. علاوه بر این، نگاشت مختصاتی سازی

$$\text{Aff}_{GM} \rightarrow \text{Aff}(G), \quad \phi \mapsto x^A \phi(x^A)^{-1}, \quad (393)$$

یک ایزومورفیسم گروهی است.

اثبات: از آنجا که $x^A \phi$ نگاشته‌های آفین هستند، $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d : x^A \phi(x^A)^{-1}$ یک تبدیل آفین از \mathbb{R}^d است، یعنی عضوی از $(\text{GL}(d))(\mathbb{R})$ (یا زیرگروهی از آن). این بدان معناست که بسط تیلور مرتبه اول عبارت، دقیق است. بنابراین کاربرد عبارت مختصاتی به یک عضو دلخواه $x \in \mathbb{R}^d$ را می‌توان بر حسب بسط تیلور زیر حول مبدأ از \mathbb{R}^d نوشت:

$$\begin{aligned} [x^A \phi(x^A)^{-1}](x) &= [x^A \phi(x^A)^{-1}](\cdot) + \frac{\partial}{\partial x'} [x^A \phi(x^A)^{-1}]_{x'=\cdot} \cdot x \\ &= t_{\phi}^{AA} + g_{\phi}^{AA} \cdot x \\ &= (t_{\phi}^{AA} g_{\phi}^{AA}) x \end{aligned} \quad (394)$$

در اینجا ما به طور ضمنی انتقال $t_{\phi}^{AA} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ را تعریف کردیم و آنها را با اعضای گروه یکی گرفتیم، که این کار ممکن است زیرا تمام مورفیسم‌های درگیر، وارون پذیر هستند.

اینکه ژاکوبین g_{ϕ}^{AA} با تبدیل پیمانه القا شده (p) در یک نقطه دلخواه $M \in p$ مطابقت دارد، با بازنویسی آن از طریق معادله (۵۳۱) بر حسب دیفرانسیل‌ها نشان داده می‌شود:

$$\begin{aligned} g_{\phi}^{AA} &= \frac{\partial}{\partial x'} [x^A \phi(x^A)^{-1}]_{x'=x^A(p)} \\ &= \iota_{\mathbb{R}^d} d[x^A \phi(x^A)^{-1}]_{x^A(p)} (\iota_{\mathbb{R}^d})^{-1} \\ &= \iota_{\mathbb{R}^d} dx_{\phi(p)}^A d\phi_p (dx_p^A)^{-1} (\iota_{\mathbb{R}^d})^{-1} \\ &= \hat{dx}_{\phi(p)}^A \phi_{*,TM} (\hat{dx}_p^A)^{-1} \\ &= g_{\phi}^{AA}(p) \end{aligned} \quad (395)$$

در مرحله ماقبل آخر ما دیفرانسیل $d\phi$ را به عنوان یک نماد جایگزین برای پوش‌فوروارد $\phi_{*,TM}$ و گرادیان‌های چارت را همانطور که در معادله (۵۴۰) تعریف شده، شناسایی کردیم. اندیس p در نماد (p) به دلیل دلخواه بودن آن حذف شده است.

اینکه $t_{\phi}^{AA} g_{\phi}^{AA}$ نه تنها عضوی از $\text{Aff}(G)$ بلکه از زیرگروه آن (۵.۹) است، روشن است زیرا قضیه ۵.۹ بیان می‌کند که $\phi \in \text{Aff}_{GM}$ برای هر $g_{\phi}^{AA}(p) \in G$

برای اثبات اینکه نگاشت مختصاتی سازی $C^A : \text{Aff}_{GM} \rightarrow \text{Aff}(G)$ ، $\phi \mapsto x^A \phi(x^A)^{-1}$ واقعاً یک ایزومورفیسم گروهی است، باید نشان دهیم که آن ۱) یک همومورفیسم گروهی، ۲) یک به یک و ۳) پوشاست. اینکه C^A یک همومورفیسم گروهی است، بلاعده از تعریف آن نتیجه می‌شود زیرا

$$\begin{aligned} C^A(\phi \tilde{\phi}) &= x^A \phi \tilde{\phi}(x^A)^{-1} \\ &= x^A \phi(x^A)^{-1} x^A \tilde{\phi}(x^A)^{-1} \\ &= C^A(\phi) C^A(\tilde{\phi}) \end{aligned} \quad (396)$$

برای هر $\phi, \tilde{\phi} \in \text{Aff}_{GM}$ نیازمند این است که برای هر $\phi, \tilde{\phi} \in \text{Aff}_{GM}$ $C^A(\phi \tilde{\phi}) = C^A(\tilde{\phi}) C^A(\phi)$ نتیجه دهد. اینکه این مورد برقرار است، روشن است زیرا $C^A(\phi) = x^A \phi(x^A)^{-1}$ معادل است با $x^A \tilde{\phi}(x^A)^{-1}$ که تساوی ϕ و $\tilde{\phi}$ را نتیجه می‌دهد زیرا $x^A \tilde{\phi}(x^A)^{-1}$ یک ایزومورفیسم است. در آخر، C^A پوشاست اگر و تنها اگر برای هر $\phi \in \text{Aff}_{GM}$ $C^A(\phi) = \phi$ وجود داشته باشد، به طوری که $C^A(\phi) = \phi$. به عنوان یک آنساتز، فرض کنید $\phi = (x^A)^{-1} \operatorname{tg} x^A$. $\operatorname{tg} x^A$ یک $\text{Aff}(G)$ است. همانطور که به طوری که $C^A(\phi) = \operatorname{tg} \phi$ واقعاً عضوی از Aff_{GM} است. آنچه باقی می‌ماند نشان دادن این است که این ساختار ϕ واقعاً عضوی از Aff_{GM} است. همانطور که

راحتی می‌توان بررسی کرد، $\phi \in \text{Aff}_{GM}$ به طوری که $\phi^{AA} = g \in G$ از قضیه ۵.۹ نتیجه می‌شود، که با آن پوشایش بودن برقرار است. در کل، این اثبات می‌کند که $C^A : \text{Aff}_{GM} \rightarrow \text{Aff}(G)$ یک ایزومورفیسم گروهی است اگر Aff_{GM} توسط یک اطلس $\text{Aff}(G)$ القا شده باشد. \square

ایزومورفیسم بین Aff_{GM} و $\text{Aff}(G)$ یکتا نیست، زیرا به چارت خاص در نظر گرفته شده بستگی دارد. انتخاب‌های مختلف با خود ریختی‌های داخلی $\text{Aff}(G)$ مرتبط هستند زیرا

$$C^B(\phi) = x^B \phi(x^B)^{-1} = x^B(x^A)^{-1}x^A \phi(x^A)^{-1}x^A(x^B)^{-1} = (t^{BA}g^{BA})C^A(\phi)(t^{BA}g^{BA})^{-1}. \quad (۳۹۷)$$

این تحلیل ما از هندسه‌ای اقلیدسی و G -ساختارهای $\text{Aff}(G)$ -ناوردا را که برای تعریف کانولوشن‌های اقلیدسی مستقل از مختصات در بخش بعدی لازم است، به پایان می‌رساند.

۳.۹ CNN‌های همودای گروه آفین در فضاهای اقلیدسی

اکنون به بررسی کانولوشن‌های GM اقلیدسی روی G -ساختارهای القا شده توسط اطلس $\text{Aff}(G)$ می‌پردازیم. همانطور که در ادامه نشان خواهیم داد، این کانولوشن‌ها هنگامی که در یک چارت بیان شوند، به کانولوشن‌های کلاسیک G -راهبری‌پذیر روی \mathbb{R}^d خلاصه می‌شوند. همودایی آفین آنها در قضیه ۸.۹ در یک چارچوب مستقل از مختصات اثبات شده است.

بازیابی کانولوشن‌های متعارف روی \mathbb{R}^d : کانولوشن‌های GM به طور حیاتی به پول‌بک انتقال‌دهنده f^* از میدان‌های ویژگی بستگی دارند، که به نوبه خود به انتقال‌دهنده‌های موازی و نگاشت نمایی وابسته است. در فضاهای اقلیدسی، این عملیات شکل بسیار ساده‌ای به خود می‌گیرند، که ابتدا به آن می‌پردازیم.

همانطور که قبلاً گفته شد، انتقال‌دهنده‌های لوی-چیویتا بردارهای مماس را در فضاهای اقلیدسی به گونه‌ای جابجا می‌کنند که در معنای معمول در فضاهای اقلیدسی موازی باقی مانند؛ به شکل ۲۲ مراجعه کنید. فرض کنید $x^A : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ هر چارت سراسری از یک اطلس $\text{Aff}(G)$ باشد. از آنجا که میدان چارچوب القا شده "موازی" است، انتقال‌دهنده‌ها در امتداد هر مسیر γ هنگامی که نسبت به پیمانه‌های القا شده \hat{dx}_p^A بیان شوند، بدینهای می‌شوند:

$$g_\gamma^{AA} = e \quad \gamma \text{ برای هر مسیر} \quad (۳۹۸)$$

این به طور خاص دلالت بر این دارد که انتقال‌دهنده‌های بردار ویژگی در این پیمانه با نگاشتهای همانی داده می‌شوند، یعنی $\rho(g_\gamma^{AA}) = \text{id}_{\mathbb{R}^c}$ γ برای هر مسیر. $\quad (۳۹۹)$

هنگامی که نگاشت نمایی در یک چارت بیان شود، به جمع عبارات مختصاتی نقطه و بردار خلاصه می‌شود:

$$x^A(\exp_p v) = x^A(p) + \hat{dx}_p^A(v) \quad (۴۰۰)$$

علاوه بر این، ما باید میدان‌های ویژگی را در مختصات بیان کنیم، یعنی آنها را از طریق چارت (سراسری، وارون) از \mathbb{E}_d به \mathbb{R}^d پول‌بک می‌کنیم،

$$F^A := f^A \circ (x^A)^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad (۴۰۱)$$

که توسط نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccc} & F^A & \\ \mathbb{R}^d & \xleftarrow{x^A} & \mathbb{E}_d \xrightarrow{f^A} \mathbb{R}^c \end{array} \quad (۴۰۲)$$

با این اجزا در دست، پول‌بک انتقال‌دهنده، معادله (۶۷)، از میدان‌های ویژگی در فضاهای اقلیدسی را می‌توان در مختصات به صورت زیر بیان کرد

$$\begin{aligned} [\text{Exp}_p^* f]^A(v) &= \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(\hat{dx}_p^A)^{-1}(v^A)}^{AA}) f^A \exp_p((\hat{dx}_p^A)^{-1}(v)) \\ &= f^A(x^A)^{-1} x^A \exp_p((\hat{dx}_p^A)^{-1}(v)) \\ &= F^A(x^A(p) + v). \end{aligned} \quad (۴۰۳)$$

بنابراین عبارت مختصاتی کانولوشن GM ، معادله (۸۷)، به صورت زیر در می‌آید

$$f_{\text{out}}^A(p) = [K * f_{\text{in}}]^A(p) = \int_{\mathbb{R}^d} K(v) [\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^A(v) dv = \int_{\mathbb{R}^d} K(v) F^A(x^A(p) + v) dv. \quad (۴۰۴)$$

این نشان می‌دهد که کانولوشن‌های GM در فضاهای اقلیدسی، کانولوشن‌های (همبستگی‌های) متعارف هستند.

قضیه ۷.۹ (کانولوشن‌های GM در فضاهای اقلیدسی، کانولوشن‌های روی \mathbb{R}^d را بازیابی می‌کنند). فرض کنید GM یک G -ساختمان القا شده $x^A : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ از چارت‌ها باشد، همانطور که در بخش ۲.۹ تعریف شد. هنگامی که نسبت به هر چارت سراسری \rightarrow از این اطلس $Aff(G)$ بیان شود، کانولوشن GM شکل یک کانولوشن (همبستگی) متعارف $*$ را به خود می‌گیرد:

$$F_{\text{out}}^A(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(v) F_{\text{in}}^A(x + v) dv = [K * F_{\text{in}}^A](x) \quad (4.5)$$

اثبات: این گزاره با ارزیابی معادله (۴۰۴) در $F_{\text{out}}^A = f_{\text{out}}^A \circ (x^A)^{-1}(x) = (x^A)^{-1}(x) \circ p = p$ و شناسایی \square در سمت چپ به دست می‌آید.

قبل از پرداختن به اثبات همودایی کانولوشن‌های GM اقلیدسی در یک چارچوب مستقل از مختصات، ما استقلال از مختصات آن را در نظر می‌گیریم \square همانطور که خواهیم دید، هر دو مفهوم به شدت به هم مرتبط هستند. تمام آنچه برای نشان دادن استقلال از مختصات لازم است، قانون تبدیل پولیک‌های میدان ویژگی به \mathbb{R}^d از طریق چارت‌ها است. قانون تبدیل مستقیماً از توابع گذار نتیجه می‌شود و می‌توان آن را از جایجایی نمودار زیر

$$\begin{array}{ccccc} & & F^A & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathbb{R}^d & & \mathbb{E}_d & & \mathbb{R}^c \\ t^{BA}g^{BA} \downarrow & & \downarrow & & \rho(g^{BA}) \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathbb{R}^d & & F^B & & \mathbb{R}^c \end{array} \quad (4.6)$$

خواند که به صورت زیر داده می‌شود:

$$F^B = \rho(g^{BA}) F^A (t^{BA}g^{BA})^{-1}. \quad (4.7)$$

توجه داشته باشید که این قانون تبدیل دقیقاً نمایش القای $F^B = t^{BA}g^{BA} \triangleright_\rho F^A$ است که در معادله (۳۶۸) معرفی شد. با استفاده از همودایی کانولوشن متعارف با کرنل‌های G -راهبری‌پذیر از معادله (۳۶۹)، این نتیجه می‌دهد

$$K * F_{\text{in}}^B = K * (t^{BA}g^{BA} \triangleright_{\rho_{\text{in}}} F_{\text{in}}^A) = t^{BA}g^{BA} \triangleright_{\rho_{\text{out}}} (K * F_{\text{in}}^A) = t^{BA}g^{BA} \triangleright_{\rho_{\text{out}}} F_{\text{out}}^A = F_{\text{out}}^B \quad (4.8)$$

بنابراین دیده می‌شود که همودایی فعال $Aff(G)$ کانولوشن‌های کلاسیک G -راهبری‌پذیر روی \mathbb{R}^d از بخش ۱.۹، استقلال از مختصات غیرفعال $Aff(G)$ کانولوشن‌های GM اقلیدسی را نتیجه می‌دهد و بر عکس. این دو، دو روی یک سکه هستند. علاوه بر این، می‌توان همودایی $Aff(G)$ کانولوشن GM را در چارچوب مستقل از مختصات اثبات کرد، که در ادامه این کار را انجام خواهیم داد.

همودایی گروه آفین برای اثبات همودایی گروه آفین کانولوشن‌های GM اقلیدسی، ابتدا قانون تبدیل میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات $f \in \Gamma(\mathcal{A})$ را تحت تبدیلات آفین $\phi \in Aff_{GM}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi \triangleright f = \phi_{*,\mathcal{A}} f \phi^{-1}, \quad (4.9)$$

یعنی همانند ایزومتری‌ها در تعریف ۲.۸^{۹۷} پول‌بک انتقال‌دهنده (لوی-چیویتا) از یک میدان ویژگی تبدیل شده آفین $f \triangleright \phi$ نسبت به یک چارت آفین x^A با عبارت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
& [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)]^A(\mathfrak{o}) \\
& \stackrel{(1)}{=} [\text{Exp}_p^*(\phi_{*,A} f \phi^{-1})]^A(\mathfrak{o}) \\
& \stackrel{(2)}{=} \underbrace{\rho(g_p^{AA} \leftarrow \exp_p(\hat{dx}_p^A)^{-1}(\mathfrak{o}))}_{= \text{id}_{\mathbb{R}^d}} \psi_{A,p}^A(\phi_{*,A} f \phi^{-1}) \exp_p((\hat{dx}_p^A)^{-1}(\mathfrak{o})) \\
& \stackrel{(3)}{=} \psi_{A,p}^A \phi_{*,A} [(\psi_{A,\phi^{-1}(p)}^A)^{-1} \psi_{A,\phi^{-1}(p)}^A] f [(x^A)^{-1} x^A] \phi^{-1} [(x^A)^{-1} x^A] \exp_p((\hat{dx}_p^A)^{-1}(\mathfrak{o})) \\
& \stackrel{(4)}{=} [\psi_{A,p}^A \phi_{*,A} (\psi_{A,\phi^{-1}(p)}^A)^{-1}] [\psi_{A,\phi^{-1}(p)}^A f (x^A)^{-1}] [x^A \phi^{-1} (x^A)^{-1}] [x^A \exp_p((\hat{dx}_p^A)^{-1}(\mathfrak{o}))] \\
& \stackrel{(5)}{=} \rho(g_\phi^{AA}) F^A (t_\phi^{AA} g_\phi^{AA})^{-1} (x^A(p) + \mathfrak{o}) \\
& \stackrel{(6)}{=} [(t_\phi^{AA} g_\phi^{AA}) \triangleright_\rho F^A] (x^A(p) + \mathfrak{o})
\end{aligned} \tag{410}$$

این عبارت به پول‌بک انتقال‌دهنده از میدان تبدیل نشده از طریق نمایش القایی (معادله (۳۶۸)) مرتبط می‌شود، که با عبارت مختصاتی $t_\phi^{AA} g_\phi^{AA}$ از ϕ عمل می‌کند (معادله (۳۹۱)). دو مرحله اول از معادله (۴۰۹) و تعریف پول‌بک انتقال‌دهنده در مختصات استفاده می‌کنند، که در آن $\text{id}_{\mathbb{R}^d} = \psi_{A,p}^A(\phi_{*,A} f \phi^{-1})^A := \psi_{A,p}^A$. برای ترجمه تمام مورفیسم‌ها به عبارات مختصاتی مربوطه، مرحله سوم همانی‌های $\text{id}_{\mathbb{R}^d}$ ترکیب‌ها پس از مرحله پنجم به عبارات مختصاتی منجر می‌شوند. برای مرحله ۵ به یاد بیاورید که، طبق قضیه ۶.۹ $g_\phi^{AA}(p) = g_\phi^{AA}$ برای هر p در \mathbb{E}_d همانطور که در بالا گفته شد، مرحله آخر قانون تبدیل حاصل در مختصات را به عنوان عمل نمایش القایی شناسایی می‌کند.

با این نتیجه می‌توانیم هموردايی Aff_{GM} کانولوشن‌های اقلیدسی را در چارچوب مستقل از مختصات اثبات کنیم. این قضیه ۹.۸ را که هموردايی ایزومتری کانولوشن‌های GM را اثبات می‌کند، برای مورد خاص فضاهای اقلیدسی تمییم می‌دهد.

قضیه ۸.۹ (هموردايی آفین کانولوشن‌های GM اقلیدسی). فرض کنید G - GM ساختار باشد که توسط یک اطلس $\text{Aff}(G)$ از فضای $M = \mathbb{E}_d$ القایی شده و فرض کنید بردارهای ویژگی مطابق با اتصال لوی-چیویتا روی \mathbb{E}_d منتقل می‌شوند. کانولوشن GM متناظر، تصمین می‌شود که تحت عمل تبدیلات آفین حافظ G -ساختار $\text{Aff}_{GM} \cong \text{Aff}(G)$ هموردا باشد. در معادلات، برای میدان‌های $f_{\text{in}} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square})$ و کرنل‌های G -راهبری‌پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^G$ داریم که

$$[K \star (\phi \triangleright f_{\text{in}})] = \phi \triangleright [K \star f_{\text{in}}] \quad \forall \phi \in \text{Aff}_{GM}, \tag{411}$$

یعنی نمودار زیر برای هر ϕ در Aff_{GM} جایجاًی است:

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) & \xrightarrow{\phi \triangleright} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \\
K \star \downarrow & & \downarrow K \star \\
\Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}) & \xrightarrow[\phi \triangleright]{} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square})
\end{array} \tag{412}$$

اثبات: فرض کنید $x^A : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ هر چارت سراسری از اطلس $\text{Aff}(G)$ مورد نظر باشد و $p \in \mathbb{E}_d$ اثبات ما از هموردايی Aff_{GM} با بیان کانولوشن نسبت به این مختصات و استفاده از هموردايی $\text{Aff}(G)$ کانولوشن‌های کلاسیک G -راهبری‌پذیر روی \mathbb{R}^d از معادله (۳۶۹) انجام می‌شود:

$$\psi_{\mathcal{A}_{\square\square\square}, p}^A [K \star (\phi \triangleright f_{\text{in}})](p) \tag{413}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} K(\mathfrak{o}) [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f_{\text{in}})]^A(\mathfrak{o}) d\mathfrak{o} \quad (\text{کانولوشن } GM \text{ در مختصات، معادله (۸۷)})$$

^{۹۷} از آنجا که کلاف بردار ویژگی به عنوان یک G -کلاف، یعنی مرتبط با GM تعریف شده است، پوشش فورواردها فقط برای تبدیلات آفین حافظ G -ساختار در قابل تعریف هستند.

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \left[(t_\phi^{AA} g_\phi^{AA}) \triangleright_{\rho_{in}} F_{in}^A \right] (x^A(p) + v) dv && (\text{پول بک انتقال دهنده تبدیل شده، معادله (۴۱۰)}) \\
&= [K * (t_\phi^{AA} g_\phi^{AA} \triangleright_{\rho_{in}} F_{in}^A)](x^A(p)) && (\text{کانولوشن } * \text{ شناسایی شده روی } \mathbb{R}^d) \\
&= [t_\phi^{AA} g_\phi^{AA} \triangleright_{\rho_{out}} (K * F_{in}^A)](x^A(p)) && (\text{هموردایی } \text{Aff}(G) \text{ روی } \mathbb{R}^d, \text{ معادله (۳۶۹)}) \\
&= \rho_{out}(g_\phi^{AA})(K * F_{in}^A) \left((t_\phi^{AA} g_\phi^{AA})^{-1} x^A(p) \right) && (\text{نمایش القابی } \triangleright_{\rho_{out}}, \text{ معادله (۳۶۸)}) \\
&= \rho_{out}(g_\phi^{AA})(K * F_{in}^A)(x^A(\phi^{-1}(p))) && (\text{عبارت مختصاتی } \phi, \text{ معادله (۳۹۱)}) \\
&= \rho_{out}(g_\phi^{AA}) \int_{\mathbb{R}^d} K(v) F_{in}^A(x^A(\phi^{-1}(p)) + v) dv && (\text{کانولوشن بسطداده شده } * \text{ روی } \mathbb{R}^d) \\
&= \rho_{out}(g_\phi^{AA}) \int_{\mathbb{R}^d} K(v) [\text{Exp}_{\phi^{-1}(p)}^* f_{in}]^A(v) dv && (\text{پول بک انتقال دهنده اقلیدسی، معادله (۴۰۳)}) \\
&= \rho_{out}(g_\phi^{AA}) \psi_{\mathcal{A}_{\infty}, \phi^{-1}(p)}^A [K * f_{in}] \phi^{-1}(p) && (\text{کانولوشن } GM \text{ در مختصات، معادله (۸۷)}) \\
&= \psi_{\mathcal{A}_{\infty}, p}^A \phi_{*, \mathcal{A}_{\infty}} [K * f_{in}] \phi^{-1}(p) && (\text{پوش فوروارد در مختصات، معادله (۳۰۲)}) \\
&= \psi_{\mathcal{A}_{\infty}, p}^A [\phi \triangleright [K * f_{in}]](p) && (\text{عمل } \text{Aff}_{GM} \text{ روی میدان های ویژگی، معادله (۴۰۹)}) \\
\end{aligned}$$

□

این گزاره نتیجه می شود زیرا $\psi_{\mathcal{A}_{\infty}, p}^A$ یک ایزومورفیسم است.

به طور خلاصه، کانولوشن های GM اقلیدسی با G -ساختار های القا شده توسط اطلس $\text{Aff}(G)$ دو ویژگی زیر را دارند:

استقلال از مختصات : $\text{Aff}(G)$ تضمین می شود که آنها در هر چارت از اطلس $\text{Aff}(G)$ ، یعنی $\mathcal{N}_{\mathbb{E}_d}^{\text{Aff}(G)}$ ، نتایج معادل تولید کنند. این ویژگی در معادله (۴۰۸) نشان داده شد و در شکل ۴۹ به عنوان تبدیل بین چارت های تصویر کشیده شده است.

هموردایی فعال : $\text{Aff}(G)$ همانطور که در قضیه ۸.۹ اثبات شد، آنها تحت تبدیلات فعال میدان های ویژگی توسط $\text{Aff}_{GM} \cong \text{Aff}(G)$ همودرا هستند. در شکل ۴۹، این متناظر با یک تبدیل سیگنال روی خواهد بود، که در یک تبدیل فعال روی نمایش آن نسبت به همان چارت منعکس می شود.

اثبات هر دو ویژگی در نهایت به هموردایی فعال $\text{Aff}(G)$ کانولوشن های کلاسیک G -راهبری پذیر روی \mathbb{R}^d در معادله (۳۶۹) متکی است.

۴.۹ CNN های اقلیدسی در مقالات

تمام مدل های موجود در ردیف های (۲۶-۱) جدول ۶، کانولوشن های GM همودرا نسبت به $\text{Aff}(G)$ در فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d هستند که در بخش های قبل مورد بحث قرار گرفتند. آنها در ابعاد d فضای اقلیدسی، گروه ساختار G و در نتیجه گروه تقارن سراسری $\text{Aff}(G)$ ، نمایش های گروهی یا انواع میدان ρ و انتخاب های گستته سازی متفاوت هستند. این بخش به طور خلاصه مدل ها را با گروه بندی آنها بر اساس انواع میدانشان به مدل های نمایش تحويل ناپذیر (۳۶۰۰) مدل های نمایش منظم (متناظر با کانولوشن های گروهی) و انواع آنها، مدل های نمایش خارج قسمتی و غیره مورد بحث قرار می دهد. CNN های متعارف، که ابتدا آنها را مور می کنند، کمی از این طبقه بندی خارج می شوند زیرا گروه ساختاری بدیهی آنها منجر به میدان های ویژگی و کرنل هایی بدون هیچ گونه محدودیت تقارنی می شود.

ردیف (۱) کانولوشن های GM اقلیدسی را روی $\{e\}$ -ساختار های ناوردی انتقالی فهرست می کند که در شکل ۵۰ به تصویر کشیده شده است. به دلیل بدیهی بودن گروه ساختار $G = \{e\}$ ، هیچ تبدیل پیمانه ای (غیر بدیهی) وجود ندارد و تنها انتخاب ممکن برای نمایش گروه، نمایش بدیهی است. بنابراین، محدودیت راهبری پذیری G -بدیهی می شود، به طوری که فضای کرنل های کانولوشن قابل قبول، نامحدود باقی می ماند. هنگامی که از طریق یک چارت به \mathbb{R}^d پول بک شود، کانولوشن GM طبق قضیه ۷.۹ به یک کانولوشن (همبستگی) متعارف تبدیل می شود. قضیه ۸.۹ هموردایی انتقالی آن را تأیید می کند. بنابراین، دیده می شود که این مدل ها با شبکه های کانولوشنی متعارف توسط \mathbb{R}^d مطابقت دارند.

تمام مدل های اقلیدسی دیگر در ردیف های (۲۶-۲) گروه های ساختاری غیر بدیهی را در نظر می گیرند. می توان آنها را به عنوان کانولوشن های متعارف روی \mathbb{R}^d با محدودیت اضافی بر روی کرنل ها برای G -راهبری پذیر بودن در نظر گرفت، که هموردایی $\text{Aff}(G)$ آنها را نضمین می کند.

ویژگی های نمایش تحويل ناپذیر (Irrep): شبکه های موجود در ردیف های (۲۶، ۲۳، ۱۰، ۹، ۴) بر روی میدان های ویژگی عمل می کنند که مطابق با نمایش های تحويل ناپذیر (irreps) از G تبدیل می شوند. برای $G = \text{SO}(2)$ که در ردیف (۴) فهرست شده است، این امر به

شبکه‌های به اصطلاح هارمونیک منجر می‌شود [۲۰۰، ۱۹۰]. این نام از این واقعیت نشأت می‌گیرد که محدودیت کرنل در این حالت فقط به هارمونیک‌های دایره‌ای با مکان‌یابی طیفی فرکانس $m - n$ اجازه می‌دهد، هنگام نگاشت بین میدان‌هایی که مطابق با نمایش‌های تحویل‌ناپذیر $G = SO(2)$ در رودی و مرتبه n در خروجی تبدیل می‌شوند.^{۹۸} محدودیت بازتابی اضافی برای $G = O(2)$ که در ردیف (۱۰) فهرست شده است، قوانین انتخاب پاریته را اضافه می‌کند که فاز هارمونیک‌های دایره‌ای را ثابت می‌کند و نیمی از درجات آزادی را در مقایسه با حالت $G = SO(2)$ سرکوب می‌کند [۱۹۰]. مدل‌های [۱۹۱، ۱۸۱، ۱۲۶، ۹۵] در ردیف (۱۷) نمایش‌های تحویل‌ناپذیر $G = SO(3)$ را در نظر می‌گیرند و بنابراین می‌توان آنها را به عنوان مشابه مدل‌های ردیف (۴) در سه بعد در نظر گرفت. فضای کرنل‌های معتبر برای نگاشت بین میدان‌هایی که مطابق با نمایش‌های تحویل‌ناپذیر (ماتریس‌های Γ ویترن) از مرتبه‌های n و m تبدیل می‌شوند، در اینجا توسط تمام هارمونیک‌های کروی از $(\min(m, n) + 1) \leq j \leq m + n$ مرتبه j با $|m - n| \leq j \leq m + n$ تولید می‌شود. همانطور که در [۱۰۷] اثبات شده است، این امر به هر گروه ساختاری فشرده تعیین می‌باشد، و فرکانس‌های مجاز هارمونیک‌ها توسط ضرایب متناظر کلیس-گوردون که با mn و j برچسب‌گذاری شده‌اند، تعیین می‌شوند. نوعی از این رویکرد در ردیف (۲۳) فهرست شده است [۱۴۱]. یک کانونلوشن از یک میدان اسکالار ورودی با هارمونیک‌های کروی، میدان‌های نمایش تحویل‌ناپذیر از مرتبه متناظر را تولید می‌کند. با این حال، به جای پردازش بیشتر این ویژگی‌های نمایش تحویل‌ناپذیر از طریق کانونلوشن‌ها، نویسنده‌گان نرم آنها را محاسبه می‌کنند. این کار منجر به میدان‌های اسکالار می‌شود که در لایه بعدی به همین روش پردازش می‌شوند. مدل [۱۶۲] در ردیف (۲۶) متريک استاندارد اقلیدسی را فرض نمی‌کند بلکه متريک مينکوفسکی را در نظر می‌گيرد. گروه ساختاری آن گروه لورنتس ($G = SO(d-1, 1)$) و گروه تقارن سراسری، گروه پوانکاره است. علاوه بر ساختن شبکه هموردا، نویسنده‌گان الگوريتمي را برای محاسبه نمایش‌های تحویل‌ناپذير گروه‌های لی از ثوابت ساختاري جبر لی آنها پيشنهاد می‌کنند.

یک مورد خاص از نمایش‌های تحویل‌ناپذير، نمایش‌های بدیهی هستند که بردارهای ویژگی G -ناوردا (اسکالارها) را توصیف می‌کنند. به دلیل ناورداي، چنین ویژگی‌هایی نمی‌توانند تفاوت بین هیچ الگویی را در زسته‌های مرتبط با G کدگذاری کنند. محدودیت روى کرنل‌هایی که بین میدان‌های اسکالار نگاشت انجام می‌دهند، به $\rho_{0000}(\tilde{g})F = F(\tilde{g}^{-1}g)$ برای هر $\tilde{g} \in \mathbb{R}^d$ و هر $F \in \mathcal{G}$ است که در هر کanal به طور جداگانه) تحت عمل G ناوردا هستند، تحمیل می‌کند. این برای بازتاب‌های $G = \mathcal{R}$ در رودی بالا سمت چه جدول ۳ به تصویر کشیده شده است. تفسیر شبکه پیکسلی یک تصویر به عنوان یک گراف و اعمال یک کانونلوشن گراف استاندارد بر روی آن، متناظر با یک کانونلوشن با راهبری پذيری بدیهی با کرنل‌های $O(2)$ -ناوردا است زيرا کانونلوشن‌های گراف استاندارد کرنل‌های همسانگرد را اعمال می‌کنند [۱۶۳].

یک مزيت ویژگی‌های نمایش تحویل‌ناپذير از ديدگاه عملی، ابعاد پايان و در نتيجه مصرف حافظه كمتر برای هر میدان ویژگی است. با اين حال، نتایج تجربی نشان می‌دهد که کانونلوشن‌های راهبری پذير مبتنی بر میدان نمایش تحویل‌ناپذير معمولاً عملکرد پايان‌تری نسبت به انواع دیگر میدان‌ها، به عنوان مثال آنهايی که بر اساس نمایش‌های منظم هستند، كسب می‌کنند. اين گزاره در ارزیابی ما از کانونلوشن‌های موبیوس در بخش ۲.۴.۵ و بنچمارک کانونلوشن‌های اقلیدسی همورداي ايزومتری در [۱۹۰] منعكس شده است.

ویژگی‌های منظم و کانونلوشن‌های گروهی: احتمالاً برجسته‌ترین دسته از نمایش‌های گروهی در يادگيري عميق هموردا، نمایش‌های منظم از گروه‌های ساختاري هستند. نمایش‌های منظم بر روی یک فضای مناسب^{۹۹} از توابع $\mathbb{R} \rightarrow G$ با انتقال آنها عمل می‌کنند، يعني $\rho_{0000}(\tilde{g})F = F(\tilde{g}^{-1}g)$ برای گروه‌های متناظر، اين به معنai میدان‌های ویژگی با تعداد کانال‌های $c = |G|$ است که در هر مرتبه گروه داده می‌شود. از آنجا که گروه‌های غيرمنتهای به معنai نمایش‌های منظم غيرمنتهای هستند، ویژگی‌های مربوطه در عمل گسته‌سازی می‌شوند، که عمدتاً با در نظر گرفتن یک زیرگروه متناظر از گروه ساختاري انجام می‌شود. از آنجا که میدان‌های ویژگی منظم $f \in \Gamma(\mathcal{A})$ یک تابع $\mathbb{R} \rightarrow f^A(p)$ را به هر نقطه $p \in M$ اختصاص می‌دهند (هنگامی که نسبت به هر پیمانه A در p بيان می‌شوند)، آنها با توابع با مقادير حقيقي همودا بين توابع روی گروه \mathcal{A} کانونلوشن‌های گروهی هستند (به معادله $f^A(p) = f(p)$ در بخش ۲.۱.۷ در [۱۶۱] مراجعت کنيد)، که به اين معنى است که CNN‌هاي مبتنی بر کانونلوشن گروه آفین توسيع چارچوب ما پوشش داده می‌شوند [۲۷، ۹۶].

کانونلوشن‌های گروهی G در جدول ۶ در ردیفهای (۲۴، ۲۱، ۱۹، ۱۵، ۱۱، ۵، ۳، ۲) و (۲۵) فهرست شده‌اند. از آنجا که اين مدل‌ها معمولاً تصاویر خاکستری يا اسکالار را پردازش می‌کنند، آنها یک کانونلوشن اولیه از میدان‌های اسکالار به میدان‌های منظم اعمال می‌کنند، و به دنبال آن کانونلوشن‌های گروهی، يعني کانونلوشن‌ها از میدان‌های منظم به منظم را انجام می‌دهند. از آنجا که نمایش‌های منظم، نمایش‌های جايگشتی هستند، آنها معمولاً غيرخطی‌های نقطه‌ای مانند $ReLU$ را به هر یک از کانال‌های میدان به طور جداگانه $\text{Aff}(G)$ توسيع يک اطلس GM متعادل هستند.^{۱۰۰} برای حالت $G = \mathbb{R}$ روی $\tilde{f} : GM \rightarrow \mathbb{R}$ تابع \tilde{f} را در \mathbb{R} در امتداد ايزومورفیسم در معادله (۳۸۴) متعادل است. نگاشتهای خطی همودا بين توابع روی گروه \mathcal{A} کانونلوشن‌های گروهی هستند (به معادله (۶۰۱) در بخش ۲.۱.۷ در [۱۶۱] مراجعة کنيد)، است. برای ساخت کانونلوشن‌های گروهی آفین توسيع چارچوب ما پوشش داده می‌شوند [۲۷، ۹۶].

^{۹۸} هنگام در نظر گرفتن نمایش‌های تحویل‌ناپذير مختلط از $SO(2)$ فقط فرکانس $m - n$ مجاز است. برای نمایش‌های تحویل‌ناپذير حقيقي، محدودیت به فرکانس‌های $m - n$ و $m + n$ اجازه می‌دهد. جزئيات بیشتر را می‌توان در پيوسنهای [۱۹۰] و [۲۰۰] از [۱۰۲] بازگشت.

^{۹۹} به عنوان مثال، برای گروه‌های توپولوژيکی، توابع معمولاً بايد پيوسنه باشند. برای گروه‌های محلی معمولاً فضای G از L^2 از توابع انتگرال‌پذير مربع روی G در نظر گرفته می‌شود.

^{۱۰۰} نمایش‌های منظم روی یک میدان \mathbb{K} متفاوت از اعداد حقيقي، مقاديری در اين میدان می‌گيرند، يعني $\mathbb{F} : G \rightarrow \mathbb{K}$.

^{۱۰۱} قضيه ۱. در پيوسنه اين ايزومورفیسم $C^\infty(GM) \cong \Gamma(\mathcal{A}_{0000})$ را برای حالت عملی مرتبط که G یک گروه متناظر است، اثبات می‌کند.

^{۱۰۲} از آنجا که عمل نگاشتهای غيرخطی به پایه انتخاب شده بستگی دارد، اين همان چيزی است که واقعاً میدان‌های ویژگی منظم (با هر میدان غير تحویل‌ناپذير دیگر) را از تجزيه آنها به میدان‌های نمایش تحویل‌ناپذير متمایز می‌کند؛ به پاوري ۱۶ و بحث در بخش ۲.۵ مراجعة کنيد.

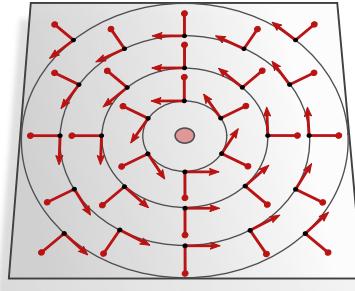
ویژگی که مطابق با نمایش منظم (۲) $T\text{b}\text{d}\text{i}\text{l}\text{m}\text{e}\text{s}\text{h}\text{a}\text{y}$ می‌شوند، در نظر گرفت. در عمل، اکثر مدل‌های ردیف (۵) از جدول ۶ این را از طریق نمایش‌های منظم (۲) $\text{S}\text{O}(2)$ تبدیل می‌کنند. از آنجا که مرتبه این گروهها N است، میدان‌های ویژگی متناظر N -بعدی هستند. در حالی که عملکرد مدل در ابتدا به طور قابل توجهی با افزایش می‌یابد، به طور تجربی مشخص شده است که در حدود ۸ تا ۱۲ جهت نمونه‌برداری شده به اشیاع می‌رسد [۱۹۲، ۱۹۰، ۱۶]. برای درک شهودی از فضاهای کرنل‌های C_N راهبری‌پذیر به تصاویر در [۱۹۲، ۷، ۶] مراجعه می‌کنیم. کاتولوشن‌های گروهی $\text{Aff}(\text{O}(2)) = \text{E}(2)$ -هستند. از طریق زیرگروههای دووجهی (۱۱) که از D_N که از N میدان در دو بازتاب، تشکیل شده‌اند، تقریب زده می‌شوند. میدان‌های ویژگی در این حالت $|D_N| = 2N$ -بعدی هستند. همودایی همزمان تحت انتقال و مقیاس‌بندی توسط کاتولوشن‌های گروهی $\text{G}(S) = \text{Aff}(S)$ در ردیفهای (۲) و (۱۵) به دست می‌آید. گروه مقیاس‌بندی در اینجا معمولاً گسسته‌سازی می‌شود. از آنجا که این کار هنوز به یک مرتبه گروه (شمارا) نامتناهی منجر می‌شود، پیاده‌سازی‌ها برش‌هایی را معرفی می‌کنند، یعنی مقیاس‌های حداقل و حداکثر همانطور که توسط چارچوب‌ها در شکل ۵۰ نشان داده شده است. توجه داشته باشید که این امر به اثرات مرزی مشابه کاتولوشن‌های متعارف در لبه یک تصویر منجر می‌شود. مدل‌های ردیفهای (۱۹) و (۲۱) نسبت به انتقال‌ها، دوران‌ها و براز مورد دوم، بازتاب‌ها در فضاهای اقلیدسی سه‌بعدی E^3 همودا هستند. در حالی که E^3 [۵۵] یک گسسته‌سازی مونت کارلو از نمایش منظم را انتخاب می‌کنند، مدل‌های (۱۹۷، ۱۹۸) بر اساس زیرگروههای گسسته مختلف از $\text{SO}(3)$ هستند. یک محدودیت فعلی مدل‌های همودایی دورانی و بازتابی مبتنی بر کاتولوشن گروهی در سه بعد، تیاز بالای آنها به حافظه و محاسبات است. به عنوان مثال، گروه تقارن مکعب، که هنوز وضوح نسبتاً درشتی از دوران‌ها با $\pi/2$ دارد، در حال حاضر از ۴۸ عضو گروه تشکیل شده است که به معنای میدان‌های ویژگی ۴۸ بعدی در فضای سه‌بعدی است. از سوی دیگر، تعداد زیاد تقارن‌ها نشان‌دهنده کارایی داده بسیار بهبود یافته چنین مدل‌هایی است: نویسندهان [۱۹۷] عملکرد یکسانی را از یک مدل همودا در مقایسه با یک شبکه غیرهمودا (قابل راهبری با $e^{\langle \cdot, \cdot \rangle}$) گزارش می‌دهند علی‌رغم اینکه روی یک مجموعه داده ۱۰ برابر کوچکتر آموزش دیده‌اند. مدل‌های ردیفهای (۲۴) و (۲۵) [۳۵] روی E^3 کاتولو می‌کنند، با این حال، آنها گروههای ساختاری دوری و دووجهی C_4 و D_4 را در نظر می‌گیرند، یعنی دوران‌ها و بازتاب‌های صفحه‌ای حول محور ζ (که به این ترتیب تعریف شده است). بنابراین کرنل‌های راهبری‌پذیر آنها مشابه کرنل‌های مدل‌های ردیفهای (۵) و (۱۱) هستند اما علاوه بر این در یک جهت جدید ζ گسترش می‌یابند.

تجمیع از منظم به اسکالار و بردار: یک تنوع از شبکه‌های کاتولوشنی گروهی، مدل‌های ردیفهای (۱۶، ۱۳۸، ۷) و (۲۰) هستند که با $\text{vector} \rightarrow \text{regular}$ و $\text{trivial} \rightarrow \text{regular}$ برچسب‌گذاری شده‌اند. پس از اعمال یک کاتولوشن به میدان‌های ویژگی منظم، آنها یک عملیات تجمیع \max را روی کانال‌ها انجام می‌دهند که منجر به میدان‌های اسکالار (بدیهی) می‌شود [۲۷، ۱۱۴، ۱۹۰، ۱۹۱، ۳، ۶۲]. یا یک \max به همراه یک argmax با همراهی $\text{vector} \rightarrow \text{regular}$ کاتولوشن‌های بعدی از میدان‌های اسکالار یا برداری حاصل به میدان‌های ویژگی منظم نگاشت می‌یابند. از آنجا که عملیات تجمیع تعداد کانال‌ها را به طور قابل توجهی از $|G|$ به ترتیب به ۱ یا d کاهش می‌دهد، مدل‌ها از نظر حافظه و محاسبات کارآمدتر از کاتولوشن‌های گروهی متعارف می‌شوند. نقطه ضعف این است که تجمیع با از دست دادن اطلاعات همراه است، که به طور تجربی مشخص شده است که عملکرد مدل را کاهش می‌دهد [۱۹۰].

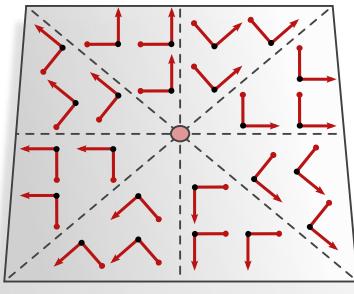
ویژگی‌های خارج‌قسمتی: ردیفهای (۱۲، ۶) و (۲۲) مدل‌های را فهرست می‌کنند که میدان‌های ویژگی آنها مطابق با نمایش‌های خارج‌قسمتی از گروه ساختاری تبدیل می‌شوند، که نمایش‌های جایگشتی مشابه نمایش‌های منظم هستند. با توجه به یک زیرگروه \widehat{G} از G ، نمایش خارج‌قسمتی متناظر بر روی توابع اسکالار $F : G/\widehat{G} \rightarrow \mathbb{R}$ در فضای خارج‌قسمتی G/\widehat{G} از طریق انتقال عمل می‌کند، یعنی $= [\rho_{\text{regular}}(\tilde{g})F](g\widehat{G})$. F بنابراین ابعاد میدان‌های ویژگی با اندیس $|G|$ از \widehat{G} در G داده می‌شود که برای گروههای متناهی برابر با $|G|/\|\widehat{G}\|$ است. میدان‌های ویژگی که تحت نمایش‌های خارج‌قسمتی تبدیل می‌شوند را می‌توان به عنوان میدان‌های ویژگی منظم با تقارن محدود در نظر گرفت که مجبورند مقدار یکسانی را روی تمام اعضای گروه در یک همدسته $g\widehat{G}$ از G در \widehat{G} دارند. یک مثال خاص، نمایش‌های ردیف (۲۲) هستند که با خارج قسمت $S^1 \cong O(3)/O(2)$ مرتب هستند. به جای اجازه دادن به کرنل‌های کاتولوشن دلخواه، محدودیت کرنل در اینجا به کرنل‌های منجر می‌شود که تحت دوران حول محور ζ ناورده است؛ به تصاویر در [۸۱] مراجعه کنید. جزئیات بیشتر و یک شهود گرافیکی در مورد میدان‌های ویژگی مبتنی بر نمایش خارج‌قسمتی را می‌توان در پیوست [۱۹۰] از [۹۶] میدان‌های خارج‌قسمتی را از دیدگاه جایگزین کاتولوشن‌های گروهی روی فضاهای خارج‌قسمتی راست پوشش می‌دهد.

نمایش‌های القایی: یک تعمیم از نمایش‌های منظم و خارج‌قسمتی، نمایش‌های مانند نمایش‌های تحویل‌ناپذیر القایی (۲) $\text{SO}(2)$ در ردیف (۱۴) از جدول ۶ هستند. با توجه به هر نمایش تحویل‌ناپذیر (۲) $\text{SO}(2) \rightarrow \text{GL}(n)$ به صورت $\text{Ind}_{\text{SO}(2)}^{\text{O}(2)}$ ، نمایش القایی: $\rho : \text{SO}(2) \rightarrow \text{GL}(c)$ از $\text{O}(2)$ به $\text{O}(2)$ با $c = n$ است، این کار نمایش بدیهی از $\text{SO}(2)/\text{SO}(2)$ هستند، جایگشت می‌کنند در حالی که دوران‌ها بر روی زیرفضاهای n -بعدی و متعامد از \mathbb{R}^{2n} را که متناظر با دو همدسته در $\text{SO}(2)/\text{SO}(2)$ است، این کار نمایش‌های خارج‌قسمتی را همانطور که در بالا بحث شد، بازتابی می‌کند. در مقایسه با میدان‌های ویژگی نمایش تحویل‌ناپذیر (۲)، میدان‌های نمایش تحویل‌ناپذیر القایی (۲) $\text{SO}(2)$ عملکرد به طور قابل توجهی بهبود یافته‌ای را نشان می‌دهند. توصیف دقیق‌تر و ارزیابی تجربی این انواع میدان را می‌توان در [۱۹۰] یافت.

آخرین نوع نمایش فهرست شده در جدول ۶، نمایش کواترنیون از دوران‌های سه‌بعدی در ردیف (۱۸) است [۲۰۶]. این از نمایش معمول دوران‌ها از طریق کواترنیون‌ها استفاده می‌کند، که بر شناسایی کواترنیون‌های واحد با $(\mathbb{2})\text{SU}(2)$ وجود یک همومورفیسم گروهی پوشش از $(\mathbb{2})\text{SU}(2)$ به $(\mathbb{2})\text{SO}(3)$ تکیه دارد. توجه داشته باشید که نمایش کواترنیونی در واقع یک نمایش تصویری از $\text{SO}(3)$ است.



(ا) $\{e\}$ -ساختار ناوردای $SO(2)$ که به طور ضمنی توسط \mathbb{R}^2 فرض شده است.



(ب) $\{e\}$ -ساختار ناوردای C_8 که به طور ضمنی توسط \mathbb{R}^2 فرض شده است.

شکل ۵۱: دو مثال از $\{e\}$ -ساختارها در صفحه سوراخدار \mathbb{R}^2 که ۱) تحت دوران حول مبدأ $\{0, 0\}$ ناوردا هستند و ۲) متشکل از چارچوب‌های راست‌هنگار نسبت به متریک اقلیدسی استاندارد هستند. کاتولوشن‌های GM متاظلر، هموردای دورانی هستند اما هموردای انتقالی نیستند (در واقع، $\{0, 0\}$ حتی انتقال‌ها را نمی‌پذیرد).

در حالی که نظریه ما بر روی فضاهای اقلیدسی پیوسته فرمول‌بندی شده است، پیاده‌سازی‌ها میدان‌های ویژگی را بر روی زیرمجموعه‌های گستره نمونه‌برداری می‌کنند. رایج‌ترین گستره‌سازی \mathbb{E}_d بر حسب شبکه پیکسلی \mathbb{Z}^d است. یک جایگزین، شبکه‌های صفحه‌ای شش‌ضلعی روی \mathbb{E}_2 است که توسط \mathbb{R}^2 بررسی شده است. اگر چنین شبکه‌های پیکسلی منظمی انتخاب شوند، یک پایه از کرنل‌های G -راهبری‌پذیر را می‌توان از پیش محاسبه کرد و بر روی این شبکه نمونه‌برداری کرد. داده‌هایی مانند رویدادها در فضازمان \mathbb{R}^3 یا مولکول‌ها در \mathbb{R}^3 در عوض معمولاً با ابرهای نقطه‌نامنظم نمایش داده می‌شوند. در این حالت، کرنل‌ها باید به صورت تحلیلی داده شوند، که امکان نمونه‌برداری آنلاین آنها را در طول پاس مستقیم فراهم می‌کند.

در نهایت، می‌خواهیم اشاره کنیم که مدل‌های سراسری $Aff(G)$ -هموردا وجود دارند که به صورت محلی G -هموردا نیستند. یک مثال، تجمعی ناوردای-تبدیل ($\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$) است، که مجموعه‌ای از میدان‌های ویژگی تبدیل شده سراسری را به یک CNN متعارف می‌دهد و در نهایت ویژگی‌های حاصل را روی این تبدیلات تجمعی می‌کند، که منجر به یک توصیفگر ناوردا می‌شود.

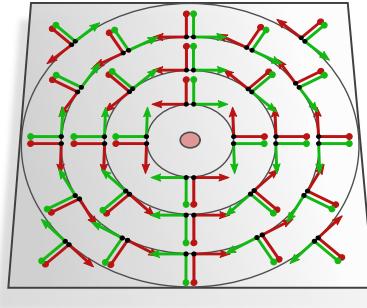
۱۰ CNN‌های هموردای دورانی در فضاهای اقلیدسی سوراخدار

مدل‌های موجود در ردیف‌های (۳۰-۳۷) جدول ۶ یک جایگزین جالب برای کاتولوشن‌های هموردای دورانی در فضاهای اقلیدسی سوراخدار \mathbb{R}^d ارائه می‌دهند. آنها بر G -ساختارهایی تکیه دارند که تحت دوران حول مبدأ انتخاب شده $\{0, 0\}$ ناوردا هستند، همانطور که به عنوان مثال در شکل ۵۱ به تصویر کشیده شده است. با مشخص کردن یک مبدأ مرجع، این مدل‌ها ویژگی هموردایی انتقالی را از دست می‌دهند. با این حال، اگر G -ساختار علاوه بر این تحت مقیاس‌بندی نیز ناوردا باشد، که به عنوان مثال زمانی که توسط مختصات فراکتیو یا یک مؤلفه شعاعی لگاریتمی القا می‌شود، صادق است (همانطور که در شکل ۵۳ نشان داده شده)، مدل‌ها نسبت به حاضر متصرب مستقیم $SO(d) \times S^1$ از گروه دوران و مقیاس‌بندی هموردا می‌شوند. به طور مشابه، G -ساختارهای ناوردای دورانی و بازتابی، که در شکل ۵۲ به تصویر کشیده شده‌اند، بر هموردایی $O(d)$ کاتولوشن‌های GM متاظلر دلالت دارند.

این مدل‌ها به دو صورت به CNN‌های کروی، که در بخش ۱۱ در ادامه مورد بحث قرار می‌گیرند، مرتبط هستند. اول آنها G -ساختارهای ناوردای دورانی را روی $\mathbb{E}_d \setminus \{0\} \cong S^{d-1} \times \mathbb{R}^+$ فرض می‌کنند، که می‌توان آنها را متشکل از چندین G -ساختار ناوردای دورانی روی پوسته‌های کروی $(d-1)$ -بعدی در شعاع‌های مختلف در نظر گرفت. بنابراین می‌توان این مدل‌ها را به عنوان CNN‌های (فرآ)کروی با یک بعد شعاعی اضافی \mathbb{R}^+ در نظر گرفت [۱۴۵]. که در شکل ۵۴ برای حالت $d=3$ [۲۴، ۵۵] و $d=4$ [۵۲] به تصویر کشیده شده است. ثانیاً، سیستم‌های مختصات قطبی [۵۳، ۵۵] (شکل‌های ۵۱ و ۵۲) G -ساختارهایی را القا می‌کنند که همان نوع تکینگی را در مبدأ خود نشان می‌دهند که CNN‌های کروی سوراخدار در شکل ۵۷ ب در قطب‌ها دارند. توجه داشته باشید که صفحه اقلیدسی سوراخدار $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ و کره سوراخدار $S^3 \setminus \{n, s\}$ (با قطب‌های شمال و جنوب $\{n, s\}$) حذف شده هر دو از نظر تپولوژیکی معادل یک استوانه $\mathbb{R} \times S^1$ هستند و G -ساختارهای استوانه‌ای که در شکل‌های ۵۳، ۵۴ (چپ) و ۵۷ (راحت) به تصویر کشیده شده‌اند، دیفومورفیک هستند.

یک تفاوت عمده در مقایسه با شبکه‌های $SE(d)$ -هموردا از بخش قبل این است که مدل‌های بخش فعلی فقط به صورت سراسری حول مبدأ $SO(d)$ -هموردا هستند به جای اینکه به صورت محلی $SO(d)$ -هموردا ($SO(d)$ -راهبری‌پذیر) باشند. در حالی که مدل‌های هموردای سراسری به کرنل‌های $SO(d)$ -راهبری‌پذیر نیاز ندارند، آنها همچنان حداقل به کرنل‌های $(d-1)$ -راهبری‌پذیر نیاز دارند. این به این دلیل است که $SO(d-1) \cong SO(d)/SO(d-1)$ یک کلاف (۱) را روی پوسته‌های کروی $SO(d)$ دارند، دیفومورفیک هستند.

^{۱۰۳} این مشکل را می‌توان با ترکیب شبکه با یک شبکه پیش‌بینی کننده مبدأ ناوردای انتقالی حل کرد [۵۲]. توجه داشته باشید که هموردای دورانی مدل ترکیبی تنها در صورتی حفظ می‌شود که این پیش‌بینی کننده مبدأ $SE(d)$ -هموردا باشد.



شکل ۵۲: یک \mathcal{R} -ساختار (۲)-ناوردا روی $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ که با افزودن نسخه‌های بازتابیده به هر چارچوب از $\{e\}$ -ساختار در شکل ۱۵۱ ساخته شده است. کانولوشن GM متناظر به طور همزمان نسبت به دوران‌ها و بازتاب‌های سراسری در $Isom_{RM} = O(2)$ حول مبدأ همورداست.

$SO(d)$ هموردا باشد. برای $d = 2$ این امر به $\{e\}$ -ساختارها و کرنل‌های غیراهمی پذیر اجازه می‌دهد زیرا $SO(1) = \{e\}$ (e)-ساختار را $SO(d-1) = SO(2)$ دارد. برای $d = 3$ این امر حداقل به یک (e) -ساختار روی پوسته‌های کروی جداگانه نیاز دارد، که در شکل ۱۵۷ به تصویر کشیده شده است.

پس از این ملاحظات کلی، در ادامه به طور خلاصه مدل‌های جدایگانه روی \mathbb{E}_d را که در مقالات یافته می‌شوند، از دیدگاه CNN‌های مستقل از مختصات مرور خواهیم کرد. ما با مدل‌های داده شروع می‌کنیم، که نسبت به دوران‌های $SO(2)$ حول یک مبدأ انتخاب شده از \mathbb{E}_2 هموردا هستند و با مدل‌های دیف (۲۸) ادامه می‌دهیم، که علاوه بر آن هموردانی مقیاس هستند. شبکه فهرست شده در ردیف (۲۹)، که در آخر آن را مورد بحث قرار می‌دهیم، به صورت سراسری حول مبدأ هموردا (۳) است.

هموردانی دورانی سراسری روی $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$

ما با مدل‌های مفهومی ساده‌تر شروع می‌کنیم، که شبکه‌های هموردانی دورانی سراسری هستند و تنها بر $\{e\}$ -ساختارهای ناوردا دورانی روی $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ تکیه دارند [۲۴، ۵۵]. این مدل‌ها متريک اقليدسی استاندارد را روی $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ فرض می‌کنند، که نسبت به آن چارچوب‌ها راست‌هنگار هستند. در مجموع، این دو الزام به $\{e\}$ -ساختارهایی منجر می‌شوند که در شکل ۱۵۱ نشان داده شده‌اند.

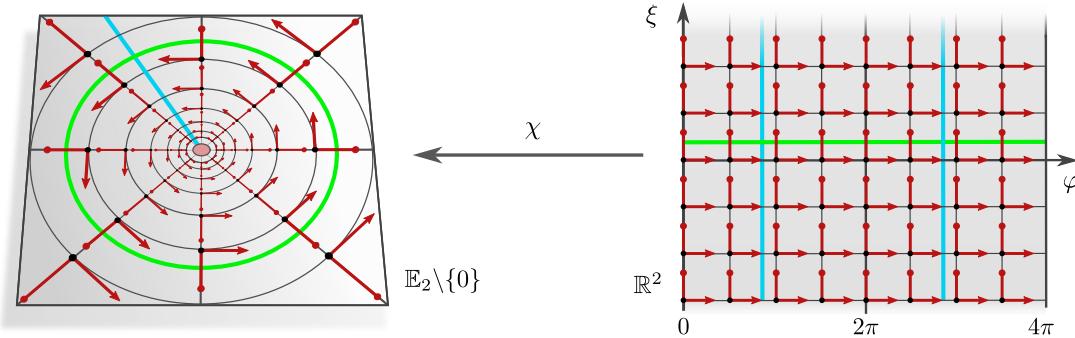
علاوه بر G -ساختارهای در نظر گرفته شده، شبکه‌ها به پیاده‌سازی خاص پول‌بک انتقال‌دهنده و انتقال‌دهنده‌های موازی بستگی دارند. ژئودزیک‌ها در هر دو مدل، ژئودزیک‌های استاندارد در فضاهای اقلیدسی (یعنی خطوط مستقیم) فرض می‌شوند، که متناظر با اتصال لوى-چیویتا از متريک اقلیدسی است. از آنجا که $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ از نظر ژئودزیکی کامل نیست، برای نگاشته‌های نمایی که در مبدأ به پایان می‌رسند، باید از پدینگ-صفر استفاده شود. توجه داشته باشید که این امر تأثیری بر نتیجه نهایی ندارد زیرا ژئودزیک‌های از دست رفته دارای اندازه صفر هستند.

از سوی دیگر، انتقال موازی بردارهای ویزگی، با اتصال لوی-چیویتا مطابقت ندارد زیرا اتصال لوی-چیویتا با $\{e\}$ -ساختارها سازگار نیست. در عوض، مدل‌ها اتصالات بدیهی یکتای $\{e\}$ -سازگار را فرض می‌کنند که توسعه $\{e\}$ -ساختارهای مربوطه القا می‌شوند.^{۱۰۴} مطابق با اتصالات بدیهی، ضایاب عددی بردارهای ویزگی هنگام انتقال، تبدیل نمی‌شوند، علی‌رغم اینکه چارچوب‌ها نسبت به مفهوم معمول توانی از فضاهای اقلیدسی چرخانده می‌شوند. در عمل، این فقط به این معنی است که انتقال‌دهنده‌های $\text{id}_{\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}}(g_{\gamma}^{\rho})$ را می‌توان در پیاده‌سازی نادیده گرفت \square که دلیلی است که آنها در مقالات اصلی مورد بحث قرار نگرفته‌اند [۲۴، ۵۵].

از آنجا که دوران‌ها $\{e\}$ -ساختارهای در نظر گرفته شده را ناوردا باقی می‌گذارند و در عین حال ایزومتری هستند، ما داریم $Isom_{\{e\}M} = SO(2)$ برای مدل $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ و C_8 برای مدل $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ (شکل ۱۵۱) [۵۵] (شکل ۲۴). قضیه ۹.۸ سپس تأیید می‌کند که کانولوشن‌های GM متناظر، $Isom_{\{e\}M}$ -هموردا هستند، که با گزاره‌های بیان شده توسعه نویسنده‌گان مطابقت دارد.

قبل از ادامه می‌خواهیم اشاره کنیم که $\{e\}$ -ساختار در شکل ۱۵۱ پیوسته نیست و بنابراین استنتاج پیوسته (یا هموار) را تضمین نمی‌کند. یک مزیت این $\{e\}$ -ساختار از دیدگاه مهندسی این است که به صورت محلی با $\{e\}$ -ساختار کانونی \mathbb{R}^3 ایزومتریک است، که اجازه می‌دهد روال‌های کانولوشن اقلیدسی متعارف را روی هر هشتگ اجرا شوند. نویسنده‌گان تعیین به $\{e\}$ -ساختارهای C_N -ناوردا در شکل ۱۵۱ را مورد بحث قرار دهند، که در حد $\infty \rightarrow N$ معادل $\{e\}$ -ساختار (۲)-ناوردا در شکل ۱۵۱ می‌شوند.

علاوه بر این، با استفاده از کرنل‌های راهبری پذیر بازتابی به جای کرنل‌های نامحدود، می‌توان مدل‌ها را به صورت سراسری (۲)-هموردا ساخت. از دیدگاه نظری، این متناظر با \mathcal{R} -ساختار با \mathcal{R} -ناوردا ($Isom_{RM} = O(2)$) را روی $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ داریم [۰] است که در شکل ۱۵۲ نشان داده شده است. توجه داشته باشید که کلاف \mathcal{R} یک کلاف RM است، که تحدید آن به دایره‌هایی با شعاع ثابت، به عنوان یک کلاف اصلی، با $O(2)$ که به عنوان یک کلاف \mathcal{R} روی فضای خارج قسمتی $S^1 \cong O(2)/\mathcal{R}$ تفسیر می‌شود، ایزومorf است.



شکل ۵.۳: مختصات لگاریتمی-قطبی $(\xi, \varphi) : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ به صورت $(e^\xi \cos(\varphi), e^\xi \sin(\varphi))$ و لگاریتم-شعاع های $\xi = \log\|p\| \in \mathbb{R}$ را به نقاط در $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ نگاشت می‌دهد. پس از انتخاب مختصات دکارتی برای $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ این کار یک مختصاتی سازی از \mathbb{R}^2 توسط $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ به دست می‌دهد. مختصات لگاریتمی-قطبی یک $e \in \mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ -ساختار را روی $\{e\}$ -القا می‌کند که شامل چارچوب‌های مرجع [۱۵۲] است که با شبکه مختصاتی تراز شده‌اند. آنها علاوه بر این یک متریک ریمانی را القا می‌کنند که با متریک اقلیدسی معمول متفاوت است و چارچوب‌های القا شده نسبت به آن راست‌هنگار هستند. کانولوشن‌های GM روی این $\{e\}$ -ساختار متناظر با کانولوشن‌های اقلیدسی متعارف در مختصات \mathbb{R}^2 هستند. انتقال‌های $\in \mathcal{T}_2$ در \mathbb{R}^2 از طریق χ مناظر با دوران‌ها و تغییر مقیاس‌های $\{e\}$ هستند، که در آن زوایای دوران و فاکتورهای تغییر مقیاس به ترتیب با φ و $e^{\Delta\xi}$ داده می‌شوند. بنابراین، هموردایی انتقالی کانولوشن در مختصات \mathbb{R}^2 بر هموردایی $SO(2) \times \mathcal{S}$ کانولوشن GM روی $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ دارد. این نتیجه با هموردایی ایزومنتری کانولوشن GM مطابقت دارد زیرا تبدیلات در $SO(2) \times \mathcal{S}$ Isom $_{GM} = SO(2) \times \mathcal{S}$ نسبت به متریک القا شده، ایزومنتری هستند. [۱۵۲] چنین کانولوشن‌های GM را بر حسب کانولوشن‌های متعارف روی \mathbb{R}^2 پیاده‌سازی می‌کنند.

هموردایی سراسری دورانی و مقیاسی روی $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ از طریق مختصات لگاریتمی-قطبی

با ناوردا کردن G -ساختارهای ناوردای دورانی از بخش قبل نسبت به مقیاس، کانولوشن‌های GM متناظر نسبت به گروه حاصل‌ضرب مستقیم $SO(2) \times \mathcal{S}$ هموردا می‌شوند. چنین G -ساختارهایی توسط مختصات لگاریتمی-قطبی القا می‌شوند، که در شکل ۵.۳ نشان داده شده است و این ممکن است که پیاده‌سازی راحت از کانولوشن GM را بر حسب کانولوشن‌های اقلیدسی متعارف روی نمایش مختصات \mathbb{R}^2 فراهم می‌کند. هموردایی انتقالی کانولوشن‌ها روی \mathbb{R}^2 سپس متناظر با هموردایی $SO(2) \times \mathcal{S}$ روی $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ است. برای وضوح، ما تووصیف مدل بر حسب مختصات لگاریتمی-قطبی همانطور که توسط [۱۵۲] پیشنهاد شده، شروع می‌کنیم.^{۱۰۴} متعاقباً، ما بررسی می‌کنیم که چگونه این مدل ویژگی‌های آن در چارچوب ما توضیح داده می‌شوند.

مختصات لگاریتمی-قطبی فضای برداری اقلیدسی سوراخ دار $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ بر حسب پوشای هموار زیر تعریف می‌شود:

$$\chi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad (\varphi, \xi) \mapsto (e^\xi \cos(\varphi), e^\xi \sin(\varphi)), \quad (414)$$

که نقطه $(\varphi, \xi) = p$ را در $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ به یک زاویه قطبی داده شده $\varphi \in \mathbb{R}$ و لگاریتم-شعاع $\xi = \log\|p\| \in \mathbb{R}$ اختصاص می‌دهد. این نگاشت در مختصات زاویه‌ای $-2\pi \times [0, 2\pi]$ -متناسب است (به تکرار نوار آبی در سمت راست شکل ۵.۳ توجه کنید) و بنابراین به طور خاص یک‌بیهیک نیست. یک تحدید به \mathbb{R}^2 (دوسویه و پیوسته خواهد بود، اما همسان ریخت نخواهد بود) این امر ما را ملزم می‌کند که در ادامه حداقل دو چارت را برای پوشش صفحه سوراخ دار در نظر بگیریم، مختصات دکارتی $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ را با $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ یکی می‌گیریم و بنابراین اجازه می‌دهد که مختصات لگاریتمی-قطبی به دومی اختصاص داده شود. از آنجا که سیستم‌های مختصات دکارتی مختلف (راست‌گرد) که در مبدأ $\{0\}$ متمرکز شده‌اند فقط در دوران‌ها متفاوت هستند، تخصیص مختصات لگاریتمی-قطبی با یک جایجایی در مولفه زاویه‌ای در میهم است.

با توجه به یک نقشه ویژگی $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^c$ (یک میدان ویژگی مرتبط با e) M ، همانطور که در ادامه روشن می‌شود، پول بک آن از طریق $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^c$ را از طریق مختصات لگاریتمی-قطبی در نظر می‌گیرند، که توسط جابجایی نمودار زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbb{R}^2 \xleftarrow[\chi]{\tilde{f}} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow[f]{\quad} \mathbb{R}^c \quad (415)$$

یک کانولوشن گروهی هموردای دورانی و مقیاسی از میدان ویژگی f روی $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ سپس به صورت زیر تعریف می‌شود: ۱) پول بک آن از طریق χ به مختصات \mathbb{R}^2 اعمال یک کانولوشن اقلیدسی متعارف در آنجا و ۲) این روش خوش تعریف است زیرا χ همورا است، به طوری که نقشه‌های ویژگی (میدان‌های ویژگی) هموار f منجر به پول بک‌های هموار و متناسب \tilde{f} می‌شوند. از آنجا که کانولوشن‌ها مستقل

^{۱۰۴} اینیمیشنی از انتقال $\{e\}$ -سازگار متناظر با شکل ۱۵.۱ را می‌توان در ویکی‌پدیا یافت.

^{۱۰۵} ایده پیاده‌سازی همبستگی‌های ناوردای دورانی از طریق تبدیلات لگاریتمی-قطبی پیش از این در دهه ۸۰ میلادی ظاهر شده بود [۲۰، ۱۵۲].

از موقعیت هستند، نقشه ویژگی خروجی آنها همچنان متناوب و هموار خواهد بود و بنابراین به طور یکتا به یک نقشه ویژگی هموار روی $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ متناظر است.^{۱۰۶}

هموردایی دورانی و مقیاسی کاتولوشن گروهی ضمنی روی $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ از هموردایی انتقالی تابع مختصاتی χ نتیجه می‌شود.^{۱۰۷} فرض کنید (ξ, φ) در \mathbb{R}^2 باشد و $(\Delta\varphi, \Delta\xi)$ هر انتقالی در T_2 باشد. نقطه $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ که متناظر با مختصات منتقل شده $(\xi + \Delta\varphi, \varphi + \Delta\xi)$ است، سپس به نقطه متناظر با مختصات منتقل نشده (ξ, φ) از طریق یک مقیاس‌بندی با ضریب $e^{\Delta\xi}$ و دوران با زاویه φ مرتبط می‌شود:

$$\begin{aligned}\chi(\varphi + \Delta\varphi, \xi + \Delta\xi) &= e^{\xi + \Delta\xi} \left(\frac{\cos(\varphi + \Delta\varphi)}{\sin(\varphi + \Delta\varphi)} \right) \\ &= e^{\Delta\xi} \left(\frac{\cos(\Delta\varphi)}{\sin(\Delta\varphi)} - \frac{\sin(\Delta\varphi)}{\cos(\Delta\varphi)} \right) e^{\xi} \left(\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \right) \\ &= e^{\Delta\xi} \left(\frac{\cos(\Delta\varphi)}{\sin(\Delta\varphi)} - \frac{\sin(\Delta\varphi)}{\cos(\Delta\varphi)} \right) \chi(\varphi, \xi) \\ &=: (\Delta\varphi, \Delta\xi) \triangleright \chi(\varphi, \xi)\end{aligned}\quad (416)$$

بر حسب یک نمودار، این بدان معناست که

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{(\Delta\varphi, \Delta\xi) +} & \mathbb{R}^2 \\ \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\ \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{(\Delta\varphi, \Delta\xi) \triangleright} & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \end{array} \quad (417)$$

برای انتقالات دلخواه، جایجاًی است. این به همراه هموردایی انتقالی کاتولوشن‌های متعارف روی \mathbb{R}^2 دلالت بر این دارد که نقشه‌های ویژگی ورودی دوران یافته و مقیاس شده روی $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ منجر به نقشه‌های ویژگی خروجی دوران یافته و مقیاس شده روی $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ خواهند شد، یعنی هموردایی $S \times \text{SO}(2)$ کاتولوشن روی $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ جزئیات بیشتر در مورد این دیدگاه در $\S 52$ و $\S 91$ یافت می‌شود.

اکنون این عملیات کاتولوشن و ویژگی‌های آن را از دیدگاه کاتولوشن‌های GM مستقل از مختصات بازیبینی می‌کنیم. برای این کار، یک اطلس از چارت‌ها را در نظر می‌گیریم که با مختصات لکلاریتمی قطبی سازگار هستند و $\{e\}$ -ساختار، پیمانه‌ها، متريک ريماني، ژودزيک‌ها و انتقال موازی القا شده توسيط آن را مورد بحث قرار می‌دهيم. هموردایي ادعا شده $S \times \text{SO}(2)$ بالافصله از هموردایي $\text{Isom}_{\{e\}}^M$ کاتولوشن‌های GM نتیجه می‌شود. برای راحتی نمادگذاري، ما دوباره $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ را از طریق یک انتخاب از مختصات دکارتی با $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ یکی می‌گيریم.

از آنجا که تحديد $\chi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 2\pi\}$ از مختصات لکلاریتمی χ به زوایای غیرزايد، دوسویه و پیوسته است، ممکن است وسوسه شویم که وارون آن را به عنوان یک چارت مختصاتی در نظر بگیریم. این کار، با این حال، ممکن نیست، زیرا χ یک همسان‌ریختی نیست، همانطور که برای چارت‌ها لازم است. در عوض، ما یک اطلس متشکل از دو چارت را در نظر می‌گیریم که بر حسب تحديدهایی از χ تعريف شده‌اند و $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ را پوشش می‌دهند. یک انتخاب خاص، تعريف هم‌دامنه‌های چارت به عنوان مجموعه‌های باز $V^B = (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{R}$ و $V^A = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ برای یک $\epsilon < \pi$ است و برای $X = A, B$ تعريف چارت‌ها روی $V^X = \chi(V^X)$ به صورت $U^X \rightarrow V^X := (\chi|_{V^X})^{-1} : U^X \rightarrow V^X$ است. به طور شهودی، این اطلس همان کاری را انجام می‌دهد که تلاش ساده‌لوحانه برای تعريف چارت‌ها به عنوان وارون χ انجام می‌داد. تفاوت مهم، با این حال، این است که چارت‌ها ديفئوموريك هستند، که برای اطمینان از همواري تمام عملیات ضروري است.

طبق معمول، این چارت‌ها میدان‌های چارچوب محلی و تريولياليسيون‌های کلاف را به ترتیب روی U^B و U^A و $U^B \cap U^A$ دید که نگاشته‌های گزار $g_p^{BA} = \frac{\partial x^B}{\partial x^A}|_{x^A(p)}$ روی $U^A \cap U^B$ بديهي هستند، که اين نتیجه می‌دهد که اجتماع میدان‌های چارچوب یک $\{e\}$ -ساختار هموار M را روی $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ تعريف می‌کند. اين پايه‌های مختصاتی، که در مقالات اغلب با $\left[\begin{array}{c} \varphi \\ \xi \end{array} \right]$ نشان داده می‌شوند، در شکل ۵۳ (چپ) نشان داده شده‌اند. محاسبه ما در معادله (۴۱۶) در بالا دلالت بر اين دارد که $\{e\}$ -ساختار القا شده $S \times \text{SO}(2)$ ناوردا است.

چارت‌ها علاوه بر اين یک متريک ريماني را می‌کنند که با متريک اقليليسی معمول روی $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ متفاوت است. اين متريک به عنوان پول‌بك متريک اقليليسی $\eta_p(v, w) := \langle \hat{dx}_p^X(v), \hat{dx}_p^X(w) \rangle_{\mathbb{R}^2}$ در هم‌دامنه‌های چارت‌ها تعريف می‌شود و بنابراین به صورت نقطه‌اي با

$$\eta_p(v, w) := \langle \hat{dx}_p^X(v), \hat{dx}_p^X(w) \rangle_{\mathbb{R}^2}, \quad (418)$$

^{۱۰۶} برای ديدن اين موضوع، توجه داشته باشيد که χ یک نگاشت خارج‌قسمتی است (زيرا بخش زاويه‌ای آن یک نگاشت خارج‌قسمتی است). برای نقشه‌های ویژگی پيوسته (به جاي هموار) اين گزاره از ویژگي جهاني فضاهای خارج‌قسمتی نتیجه می‌شود؛ به عنوان مثال به ويکي‌پيديا مراجعه کنيد. از آنجا که همواری یک تابع به عنوان مشتق‌پذيری پيوسته آن تعريف می‌شود، ویژگي جهاني را می‌توان به صورت بازگشتی اعمال کرد تا نشان دهد که اين گزاره برای نقشه‌های ویژگي هموار نيز برقرار است.

^{۱۰۷} اينکه اين مکان‌بذر است به اين واقعيت بستگي دارد که يك همومورفيسم گروهي $(\Delta\varphi, \Delta\xi) \mapsto (R_{\Delta\varphi}, e^{\Delta\xi})$ در $\text{SO}(2) \times S$ وجود دارد که توسط ايزومورفيسم گروهي $\mathcal{S} : T_1 \rightarrow \text{SO}(2) \cong T_1 / 2\pi\mathbb{Z}$ روی عامل دوم و همومورفيسم گروهي (نگاشت خارج‌قسمتی) $R : T_1 \rightarrow \text{SO}(2)$ روی عامل اول تعريف می‌شود، که در آن $R_{\Delta\varphi}$ دوران با زاويه φ را نشان می‌دهد.

داده می شود، که در آن $X \in T_p M$ و $v, w \in U^X$ هر یک از چارت هایی را که نشان می دهد، مشخص می کند. $\{e\}$ -ساختار القا شده توسط چارت، بنا به ساختار، از چارچوب هایی تشکیل شده است که نسبت به این متريک القا شده توسط چارت، راسته هنگار هستند، حتی اگر اين چارچوب ها با افزایش شعاع هنگام اندازه گيری نسبت به متريک اقليدسی استاندارد، رشد کنند. اتصال لوی چيوپتا برای متريک القا شده با اتصال اقليدسی معقول متفاوت است و بنابراین ژئودزیک ها و انتقال دهنده های موازی جايگزینی را نتيجه می دهد. از آنجا که متريک از طریق چارت ها پول بک می شود، ژئودزیک ها متناظر با خطوط مستقيم در همدامنه های چارت ها هستند^{۱۰} یک مثال، خطوط مختصاتی روی \mathbb{R}^3 در شکل ۵۳ است. انتقال موازی نیز متناظر با انتقال معقول در همدامنه های چارت ها است، که این نتيجه می دهد که بردار های منتقل شده را در یک زاویه ثابت نسبت به خطوط مختصاتی روی \mathbb{R}^3 نگه می دارد؛ پاورقی 104 را مقایسه کنید. توجه داشته باشید که اين همان انتقالی است که مدل های متناظر با شکل های 51 در بالا مورد بحث قرار گرفت، که در آنجا انتقال متناظر با اتصال لوی چيوپتا نبود زیرا آن مدل ها متريک استاندارد را روی \mathbb{R}^3 به جای متريک القا شده توسط چارت فرض می کردند.

ایزومتری های حافظ $\{e\}$ -ساختار \mathcal{S} نسبت به متريک القا شده توسط چارت با دوران ها و تغيير مقیاس های $\{e\}$ -Isom $_{\{e\}M} \cong SO(2)$ ساختار نسبت به متريک اقليدسی معقول داده می شوند. قضيه 9.8 بر هموردابی $SO(2) \times \mathcal{S}$ کانونلوشن GM متناظر دلالت دارد^{۱۱} که گزاره بيان شده توسط \mathbb{R}^3 را در نظر يه ما بازيابي می کند. همانطور که در بالا گفته شد، اين واقعیت که متريک از طریق چارت ها القا می شود به اين معنی است که تمام عملیات هنگام بيان در چارت به عمليات اقليدسی معقول خلاصه می شوند. بنابراین کانونلوشن GM به پهترین وجه از طریق يک کانونلوشن متعارف روی چارت پياده سازی می شود، همانطور که توسط \mathbb{R}^3 [۵۲] پيشنهاد شده است.

توجه داشته باشید که هموردابی $\mathcal{S} \times (2)$ کانونلوشن GM به راحتی به هموردابی $O(2)$ که شامل بازتاب ها نیز می شود، قابل تعليم است. اين کار با انجام يک کانونلوشن هموردابی بازتابی در چارت پياده سازی می شود، که متناظر با \mathcal{R} -ساختار نشان داده شده در شکل 50 است. روی \mathbb{R}^3 اين امر به يک \mathcal{R} -ساختار منجر می شود که شبیه به ساختار در شکل 52 در بالا است، با اين تفاوت که \mathcal{R} -ساختار علاوه بر اين تحت يک تغيير مقیاس سراسری نیز ناوردا است.

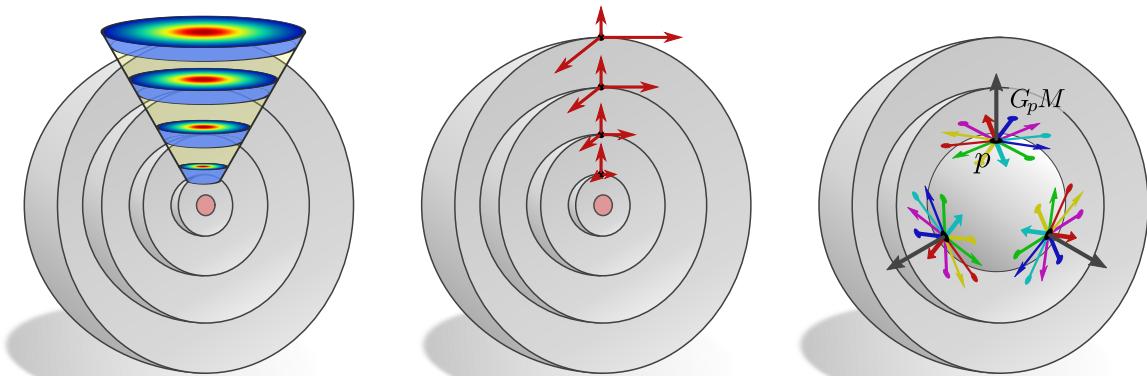
هموردابی دوراني سراسری روی \mathbb{E}^3

ایده های ارائه شده در بالا را می توان به محیط سه بعدی، یعنی به فضای اقلیدسی سوراخ دار \mathbb{E}^3 تعمیم داد. کانونلوشن های GM هموردابی در اینجا متناظر با G -ساختار هایی هستند که تحت دوران های $SO(3)$ حول مبدأ ناوردا هستند. در حالی که وابستگی شعاعی چنین G -ساختار هایی بدون محدودیت باقی می ماند، تقاضا برای ناورداي دوراني، محدودیتی را بر شکل 53 پوسته های کروي با شعاع ثابت، که مدار های عمل $SO(3)$ روی \mathbb{E}^3 هستند، تحميل می کند. اين واقعیت که كره (2) $S^3 = SO(3)/SO(2)$ یک فضای همگن از $SO(3)$ با زيرگروه های پايدار ساز ايزومورف با $SO(2)$ است، دلالت بر اين دارد که گروه ساختاري يک G -ساختار 53 -ناوردا را نمی توان بيشتر از $G = SO(2)$ کاهش داد؛ به شکل 57 مراجعه کنید. بنابراین ما اساساً با CNN های کروي با يک بعد شعاعي اضافي سرو كار داريم. برای مروري بر CNN های کروي، خواننده را به بخش 11 ارجاع می دهیم.

\mathbb{E}^3 [۱۴۵] اين وضعیت را شناسايی کرده و کانونلوشن های $SO(3)$ -هموردا را روی \mathbb{E}^3 طراحی کردن. قبل از پرداختن به طبقه بندی ما به عنوان کانونلوشن GM که در ردیف 29 جدول 6 فهرست شده است، به طور خلاصه فرمول بندی و پياده سازی نويسندگان را مرور می کنیم. پياده سازی آنها مبتنی بر CNN های کروي است باين اضافه که (1) کرنل ها در جهت شعاعي گسترش می يابند و (2) روی پوسته های با شعاع های مختلف به اشتراك گذاشته می شوند؛ به شکل 54 (چپ) مراجعه کنید. همانطور که معمولاً برای CNN های کروي انجام می شود، وابستگی زاويه های کرنل ها از طریق طیف فوريه آنها روی S^3 کدگاردي می شود، یعنی بر حسب ضرايب بسط هارمونيک های کروي. اشتراك اين ضرايب بسط دلالت بر اين دارد که کرنل های به اشتراك گذاشته شده زاويه فضائي يكسان را برای همه شعاع ها پوشش می دهد، که به اين معنی است که کرنل ها در جهت زاويه های به صورت خططي با شعاع گشاد می شوند.^{۱۰} در پياده سازی گسترش سازی شده، پوسته های کروي در شعاع های با فاصله مساوی قرار دارند^{۱۱} که اين به معنی آن است که کرنل ها در جهت شعاعي گشاد نمی شوند. از اين بينش ها، ما G -ساختار خاصی را که مدل در ادامه فرض می کنند، استنباط می کنیم. خود کرنل ها به گونه ای محدود شده اند که تحت دوران های $SO(2)$ حول محور شعاعي گشاد نمی شوند. از مرکشكان ناوردا باشند، که اغلب به آن کرنل های ناحيه ای \mathbb{E}^3 گفته می شود؛ به شکل 55 و 56 [۱۵] مراجعه کنید. همانطور که در $[15]$ اثبات شده است، کانونلوشن با چنین کرنل های $SO(3)$ -هموردا است. اينکه اين مورد برقرار است، به طور شهودي روش است زيرا درون های پوسته های کروي دارای $SO(2)$ به عنوان زيرگروه پايدار ساز مستند، که کرنل های ناحيه ای نسبت به آن ناوردا هستند. همانطور که در ادامه استدلال خواهيم کرد، اين مدل در واقع (3) -هموردا است، یعنی علاوه بر آن تحت بازتاب ها نیز همودا است.

برای بازيابي اين مدل از ديدگاه کانونلوشن های GM ، ما باید G -ساختار متناظر را روی \mathbb{E}^3 تعیين کنیم. همانطور که در بالا گفته شد، هموردابی $SO(3)$ مدل نيازمند اين است که G -ساختار تحت عمل (3) ناوردا باشد اما تغييرات شعاعي آن را محدود نمی کند. برای استنتاج اين وابستگی شعاعي G -ساختار، به ياد بياوريد که ما اشتراك وزن کانونلوشنی را در $p \in M$ به عنوان تراز کردن کرنل الگو $T_p M \rightarrow \mathbb{R}^c$ نسبت به يک چارچوب (دلخواه) در $G_p M$ از فضاهای مماس $T_p M$ تعريف کرديم. بنابراین، اشتراك کرنل در نظر گرفته شده توسط G -ساختار به طور ضمنی در نظر گرفته شده نتيجه گيری کنیم. نويسندگان کرنل ها را به گونه های به اشتراك می گذارند که مساحت مماس آنها بر پوسته های کروي با افزایش فاصله از مبدأ گسترش يابد (آنها زاويه فضائي يكسان را در هر شعاع پوشش می دهند) در حالی که ضخامت شعاعي آنها ثابت باقی می ماند. شکل 54 (چپ) اين تغيير شعاعي کرنل های به اشتراك گذاشته شده را نشان می دهد

شکل ۵۵: يک کرنل ناحيه ای \mathbb{E}^3 به طور همزمان (همسانگرد) و (جهازه گيری) اقليدسی استاندارد \mathbb{E}^3 [۱۴۵] آندازه گيری می شود.



$$\mathbb{E}_3 \setminus \{0\} \cong S^2 \times \mathbb{R}^+$$

شکل ۴.۵: G -ساختاری که به طور ضمیمی توسط $\mathbb{E}_3 \times \mathbb{R}^+ \cong S^2 \times \mathbb{R}^+$ فرض شده بود را می‌توان از طرح اشتراک وزن استنتاج کرد. چپ: اشتراک وزن کرnel‌های کانولوشن (همسانگرد) روی $\mathbb{E}_3 \setminus \{0\}$. میانه: همانطور که در [۱۴۵] پیشنهاد شده است. کرnel‌ها به گونه‌ای تعریف شده‌اند که زاویه فضایی یکسانی را پوشش دهند، مستقل از فاصله از مبدأ، به طوری که قطر آنها به صورت خطی با این فاصله رشد می‌کند. گستره کرnel‌ها در جهت شعاعی مستقل از فاصله از مبدأ است. وسط: در نظریه ما، کرnel‌ها نسبت به چارچوب‌های مرجع از G -ساختار به اشتراک گذاشته می‌شوند. برای بازیابی طرح اشتراک وزن پیشنهادی، GM باید از چارچوب‌هایی تشکیل شود که محورهای آنها در جهت زاویه‌ای به صورت خطی با فاصله شعاعی از مبدأ رشد می‌کنند، در حالی که محورها در جهات شعاعی باید اندازه خود را ثابت نمایند (هر دو نسبت به متريک اقليديست استاندارد). چنین چارچوب‌هایی یک متريک ريماني جايكزين را روی $\mathbb{E}_3 \setminus \{0\}$ القا می‌کنند. راست: آنجا که کانولوشن GM حاصل باید $(SO(3))$ -نمودار باشد، لازم است که G -ساختار تحت دوران حول مبدأ ناوردا باشد. اين امر (حافل) به يك (۲)-ساختار نياز دارد، که تحديد آن به يك پوسته کروي در قسمت سمت راست شکل نشان داده است. اين را با $(SO(2))$ -نمودار (۳)-نمودار (۲)-های کروي در شکل ۴.۵ مقایسه کنيد.

در حالی که شکل ۴.۵ (وسط) مقیاس‌بندی متناظر چارچوب‌های مرجع نمونه را نشان می‌دهد. این به همراه ناورداي $(SO(3))$ -مورد نياز G -ساختار، (حافل) يك $(SO(2))$ -ساختار را نتيجه می‌دهد، که تحديد آن به يك پوسته کروي در شکل ۴.۵ (راست) به تصویر کشیده شده است.^{۱۰.۹} متريک در نظر گرفته شده از اين G -ساختار نتيجه می‌شود، زيرا چارچوب‌های آن مفهوم مربوط به راست‌هجاری راتعريف می‌کنند. توجه داشته باشيد که اين متريک با متريک اقليدي معمول متفاوت است.

بنا به ساختار، ما دوران‌های $Isom_{GM} = SO(3)$ را به عنوان ايزومتری‌های حافظ G -ساختار داريم. بنابراین، کانولوشن‌های GM تعریف شده توسط این G -ساختار، که ممکن است در نوع میدان ورودی و خروجی خود متفاوت باشند، (طبق قضیه ۹.۸) همودای دوراني خواهد بود. کانولوشن GM خاصی که توسط [۱۴۵] فرض شده، يعني انواع میدان فرض شده، را می‌توان از اين واقعیت استنتاج کرد که نویسنده‌گان کرnel‌های ناحیه‌ای را فرض می‌کنند: چنین کرnel‌هایی به طور طبیعی هنگام در نظر گرفتن میدان‌های اسکالر، يعني نمایش‌های میدان بدیهی، به وجود می‌آیند، زيرا محدودیت کرnel، معادله (۸۳)، در این حالت به صورت زیر در می‌آید

$$K(gv) = K(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^3, g \in SO(2), \quad (419)$$

كه کرnel‌های همسانگرد (ناحیه‌ای) را تحميل می‌کند.^{11.0}

به عنوان يك تنوع از مدل، می‌توان $(SO(2))$ -ساختار را در نظر گرفت که از $(SO(2))$ -ساختار با افزودن چارچوب‌های مرجع بازتابیده (بازتاب نسبت به يك محور دلخواه در داخل صفحات مماس بر پوسته‌های کروي، در حالی که بردارهای چارچوب شعاعی همچنان به سمت بیرون اشاره دارند) به دست می‌آيد.^{11.1} در اين حالت، ايزومتری‌های حافظ G -ساختار $Isom_{GM} = O(3)$ وجود دارند که از دوران‌ها و بازتاب‌های سراسری حول مبدأ تشکيل شده‌اند و بنابراین کانولوشن‌های GM همودای $O(3)$ هستند. يك مورد خاص جالب در زمينه فعلی، کانولوشن‌های GM است که بین میدان‌های اسکالار نگاشت انجام می‌دهند، که برای آنها محدودیت کرnel به صورت زير در می‌آيد:

$$K(gv) = K(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^3, g \in O(2). \quad (420)$$

اين به نظر مرسد يك محدودیت قوي تر از محدودیت در معادله (۴۱۹) بالا باشد: به جاي اينکه فقط کرnel‌ها را ناورداي دوراني بخواهد، علاوه بر آن از آنها می‌خواهد که تحت بازتاب‌ها نيز ناوردا باشند. با اين حال، از آنجا که کرnel‌های ناورداي دوراني در حال حاضر تحت بازتاب‌ها نيز ناوردا

^{۱۰.۹} مشابه دو بعدی آن شبیه به G -ساختار در شکل ۵.۳ خواهد بود اما با تمام بردارهای چارچوب در جهت شعاعی که داراي نرم واحد هستند (نسبت به متريک اقليدي).

^{۱۱.۰} کرnel‌هایی که بين «ميدان‌های اسکالر»، يعني ميدان‌هایی که مطابق با نمایش بدیهی G تبدیل می‌شوند، نگاشت انجام می‌دهند، همیشه G -نمودار است. برای $G = SO(2)$ اين به معنی کرnel‌های همسانگرد (ناحیه‌ای) است، در حالی که $G = \mathcal{R}$ به معنی کرnel‌های ناورداي بازتابی در ورودی بالا سمت چپ جدول ۳ است.

^{۱۱.۱} اين $(O(2))$ -ساختار، همتای \mathcal{R} در شکل ۵.۲ برای $d = 3$ به جاي $d = 2$ است.

هستند، این دوباره به کرنل‌های ناحیه‌ای منجر می‌شود و بنابراین دقیقاً همان فضای کرنل را که برای $\text{SO}(2)$ بود، به دست می‌دهد.^{۱۱۲} این دلالت بر این دارد که مدل $\text{Isom}_{\text{SOM}} = \text{SO}(3)$ در واقع نه تنها $\text{SO}(3)$ است، همانطور که توسط نویسندهان ادعا شده، بلکه به طور کلی تر (2) -هموردا است، که طبقه‌بندی ما را در ردیف (2) جدول 6 توجیه می‌کند. توجه داشته باشید که این یک مورد خاص است که فقط برای میدان‌های اسکالر اعمال می‌شود \square فضاهای کرنل‌های $\text{SO}(2)$ -و (2) - O -راهبری پذیر برای نمایش‌های گروهی عمومی متفاوت هستند.

مدل $\text{Isom}_{\text{SOM}} = \text{SO}(3)$ که بر G -ساختار شان داده شده در شکل 53 تکیه دارد، مرتبط است. یک تفاوت کلیدی بین این دو رویکرد این است که G -ساختار در شکل 53 از چارچوب‌هایی تشکیل شده است که محورهای رو به پیرون آنها با فاصله شعاعی از مبدأ رشد می‌کنند، که این مورد برای G -ساختار در شکل 54 صادق نیست. اگر دوی $\text{SO}(3)$ را به گونه‌ای اصلاح کنیم که از چارچوب‌هایی تشکیل شود که محورهای شعاعی آنها به صورت خطی با فاصله چارچوب‌ها از مبدأ رشد می‌کنند، آنگاه $\text{Isom}_{\text{GM}} = \text{SO}(3)$ (به جای $\text{Isom}_{\text{GM}} = \text{SO}(3)$) خواهیم داشت. بنابراین کانولوشن GM متاظر علاوه بر این هموردا مقایس خواهد بود. در این راستا پیاده‌سازی، این را می‌توان به راحتی با فاصله‌گذاری نمایی به جای یکنواخت پوسته‌های کروی گستته در نظر گرفته شده توسط Isom_{GM} (متاظر با فاصله‌گذاری یکنواخت شعاع لگاریتمی شده) تحقق بخشد.^{۱۱۳}

در آخر، به طور خلاصه کانولوشن توسط Isom_{GM} (که در ردیف (30) جدول 6 فهرست شده است، مورد بحث قرار می‌دهیم. این مدل بر یک تصویر شعاعی از سیگنال روى پوسته‌های کروی به یک مکعب محیطی تکیه دارد. برای تعریف یک کانولوشن روی مکعب، نویسندهان آن را در برخی از یال‌هایش برش داده و آن را پهن می‌کنند؛ به شکل 2 در کار آنها مراجعه کنید. متعاقباً، آنها یک کانولوشن دو بعدی متقارف را روی وجوده پهن شده مکعب انجام می‌دهند. گسترش این عملیات با یک بعد سوم و شعاعی، یک کانولوشن را روی \mathbb{E}^3 تعریف می‌کند. از آنجا که پوسته‌های شعاعی در پیاده‌سازی GM ساخته دواره با فاصله مساوی قرار گرفته‌اند، این عملیات متاظر با یک کانولوشن GM روی \mathbb{E}^3 -ساختار است که به صورت شعاعی همانطور که در شکل 54 نشان داده شد، تغییر می‌کند. تصویر از پوسته‌های کروی به مکعب به معنای یک اعوجاج در چارچوب‌ها روی هر یک از وجوده مکعب است و بنابراین به یک اعوجاج در متربک روى پوسته‌های کروی منجر می‌شود. \mathbb{E}^3 -ساختار در اکثر برش‌های ناپیوسته است و بنابراین به کانولوشن اجازه نمی‌دهد که پیوستگی میدان‌های ویژگی را حفظ کند. از آنجا که S^3 موافق پذیر نیست، این مشکل را نمی‌توان بدون فرض یک گروه ساختاری غیربدیده G حل کرد. \mathbb{E}^3 -ساختار به طور کلی توسط هیچ ایزومنتری حفظ نمی‌شود، که این دلالت بر این دارد که گروه هموردا بسیاری سراسری مدل $\text{Isom}_{\{e\}M} = \{e\}$ بدیده است. با این حال، از آنجا که تحدید \mathbb{E}^3 -ساختار به چهار وجه «عمودی» مکعب تحت دوران‌هایی با مضربه‌هایی از $\pi/2$ ناوردا است، مدل در عمل تا حدی نسبت به دوران‌های سراسری C_4 حول محور عمودی هموردا است. برای مجموعه داده‌هایی که نمونه‌های آنها حول مبدأ $\{0\}$ متتمرکز شده و از نظر توزیع، تقارن دورانی دارند، به طور تحریبی نشان داده شده است که این ویژگی منجر به عملکرد بهبود یافته‌های در مقایسه با کانولوشن‌های متقارف روی \mathbb{E}^3 می‌شود. نویسندهان علاوه بر این تأثیر طرح‌های مختلف اشتراک وزن را بر روی بعد شعاعی بررسی می‌کنند و در می‌باشد که اشتراک وزن کامل در عمل بهترین کارایی را دارد.

۱۱ CNN‌های کروی مستقل از مختصات

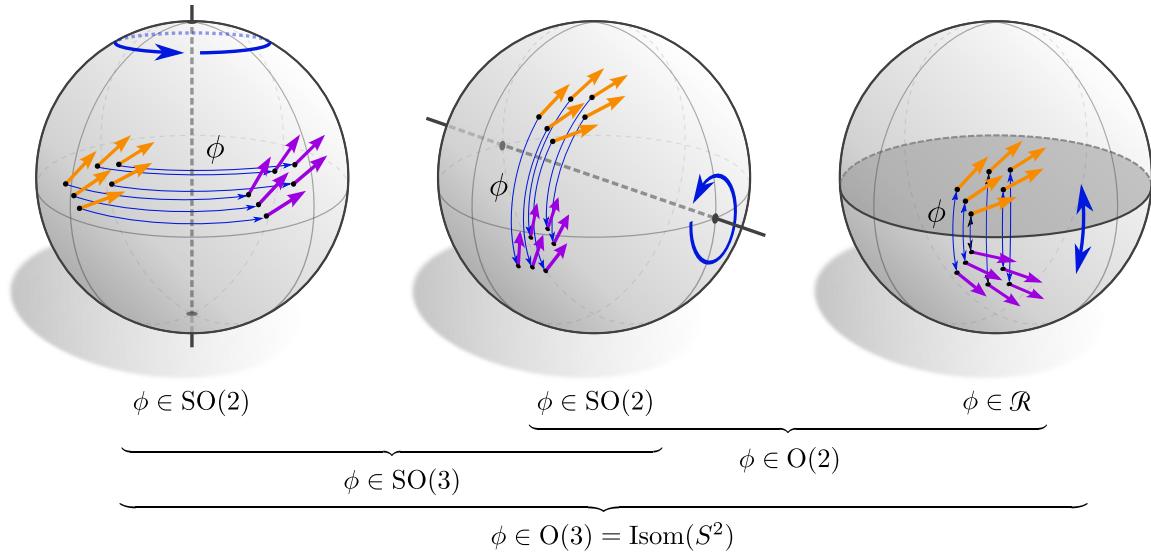
فراتر از کانولوشن‌ها در فضاهای اقلیدسی، کانولوشن‌ها روی کره S^2 از اهمیت عملی بالایی برخوردارند. کاربردها شامل وظایف بینایی همه‌جانبه، پیش‌بینی جهانی آب و هوای تحلیل تابش زمینه کیهانی است. کانولوشن‌های کروی به جای هموردا بسیاری انتقالی، معمولاً باشد هموردا دورانی باشند. گروه ایزومنتری که $\text{Isom}(S^2) = O(3)$ است. بازگردانی آن به مجموعه داده‌هایی مرتبطتر در شکل 56 به تصویر کشیده شده است.

یک تفاوت عمده بین فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}^d و کره S^2 این است که دومی موافق پذیر نیست، یعنی اجازه یک میدان چارچوب سراسری و پیوسته را نمی‌دهد. تقلیل گروه ساختاری فراتر از $\text{SO}(2) = G$ از نظر توپولوژیکی مسدود شده است، که به این معنی است که کانولوشن‌های کروی حداقل به کرنل‌های $\text{SO}(2)$ -راهبری پذیر نیاز دارند اگر بخواهند پیوستگی میدان‌های ویژگی را حفظ کنند. $\text{SO}(2)$ -ساختار متاظر، که به طور کامل توسط متربک و چهت‌گیری کره تعیین می‌شود، در شکل 57 نشان داده شده است. کانولوشن‌های GM روی این G -ساختار ناوردا دارانی دورانی سراسری، تضمین می‌شوند که $\text{Isom}_{\text{SOM}} = \text{SO}(3)$ هموردا باشند.

علی‌رغم مانع توپولوژیکی اجتناب‌ناپذیر، سیاری از نویسندهان CNN‌های کروی را پیشنهاد داده‌اند که از کرنل‌های $\text{SO}(2)$ -راهبری پذیر استفاده نمی‌کنند. رایج‌ترین انتخاب $\{e\}$ -ساختار متاظر با جنین کانولوشن‌هایی، میدان چارچوب نشان داده شده در شکل 58 است. که چارچوب‌های مرجع راست‌هنگار آن (معادله (426)) با شیوه مختصاتی مختصات کروی تراز شده‌اند. توجه داشته باشید که این میدان چارچوب دارای تکینگی‌هایی در قطب‌ها است، جایی که کانولوشن‌ها ناپیوسته می‌شوند. برای تطبیق چنین مدل‌هایی با نظریه‌ما، به ویژه فرض همورای G -ساختارها، آنها باید به عنوان کانولوشن‌هایی روی یک استوانه توپولوژیکی با متربک شبه-کروی توصیف شوند. گروه ایزومنتری این کره سواخ دار $S^1 \setminus \{n, s\}$ بدون قطب‌های $n, s \in S^2$ (شکل 58 (وسط و راست)) از گروه ایزومنتری کامل کره $O(3)$ است. $\{e\}$ -ساختار به تصویر کشیده شده توسط دوران‌های سمتی در $\text{Isom}_{\{e\}M} = \text{SO}(2)$ حفظ می‌شود، یعنی دوران حول محور گذرنده از قطب‌ها.

از دیدگاه مهندسی، هر دو رویکرد توجیه خود را دارند: کاربردهای کاملاً همسان‌گرد مانند تحلیل تابش زمینه کیهانی به مدل‌های کاملاً $\text{SO}(3)$ -هموردا روی S^2 نیاز دارند. وظایف پادگیری که با یک محور دوران مرجح همراه هستند، که به عنوان مثال برای زمین با تصاویر پانوراما با جهت‌های «بالا» و «پایین» مشخص، صادق است، ممکن است از اطلاعات هندسی اضافی کدگذاری شده در $\{e\}$ -ساختار بهره‌مند شوند. نتایج تحریبی نشان می‌دهد که در جنین مواردی اغلب مفید است که با ترکیبی از هر دو رویکرد کار شود: لایه‌های اولیه با کانولوشن‌های کاملاً هموردا می‌توانند از تقارن‌های محلی در داده‌ها بهره‌برداری کنند، در حالی که لایه‌های بعدی با تنها هموردا بسیاری سمتی می‌توانند بر اساس محور مرجح، یادگیرند که تمایز قائل شوند؛ به بخش 7.2 در [۱۹۱] مراجعه کنید.

^{۱۱۲} به طور رسمی تر، ما به دنبال کرنل‌هایی هستیم که در G صدق کنند، یعنی روی مدارهای $\{g\}$ مدارهای $\{g\}$ است. $K(gv) = K(v) \quad \forall g \in G$ برای هر $v \in \mathbb{R}^d$ برابر هستند. از آنجا که مدارهای $\text{SO}(2)$ -و $\text{O}(2)$ -یکسان خواهند بود.



شکل ۵۶: نمایش گروه ایزومتری کره ۲-بعدی $\text{Isom}(S^2) = \text{O}(3)$ و زیرگروههای مختلف آن. می‌توان گروه ایزومتری را متشکل از دوران‌های حافظ جهت در $(\mathbb{R})^3 = \text{SO}(3) \times \mathcal{R}$ از طریق حاصلضرب مستقیم $\text{SO}(3) = \text{SO}(3) \times \mathcal{R}$ در نظر گرفت. $\text{SO}(3)$ به نوبه خود، توسط دوران‌های $\text{SO}(2)$ حول هر دو محور غیرموازی تولید می‌شود، که در پارامترسازی زاویه اویلر استفاده می‌شود. برای زیرگروههای مرتبط بیشتر و روابط آنها به متن اصلی مراجعه کنید.

۱۱۱ هندسه کره ۲-بعدی S^2	۱۵۴
۲.۱۱ CNN‌های کروی کاملاً هموردای دورانی	۱۵۸
۳.۱۱ CNN‌های کروی هموردای دوران سمتی در توپولوژی‌های استوانه‌ای	۱۶۳
۴.۱۱ تقریب‌های بیست‌وجهی از CNN‌های کروی	۱۶۷

ما با توصیف هندسه کره در بخش ۱.۱۱ شروع می‌کنیم. بخش ۲.۱۱ کاتولوشن‌های GM کروی کاملاً $\text{SO}(3)$ - $\text{O}(3)$ -هموردا را مورد بحث قرار می‌دهد، که بر $(\mathbb{R})^3 - \text{SO}(2)$ - $\text{SO}(2)$ -ساختارها همانطور که در شکل ۱۵۷ نشان داده شده، تکیه دارند. CNN ‌های کروی سراسری $(\mathbb{R})^3 - \text{SO}(2)$ -هموردا، متناظر با $\{e\}$ -ساختار در شکل ۵۷ یا \mathcal{R} -ساختار متناظر، به ترتیب در بخش ۳.۱۱ مرور می‌شوند. بخش ۴.۱۲ بر تقریب‌های بیست‌وجهی کاتولوشن‌های کروی تمرکز دارد، که پیاده‌سازی‌های کارآمد از نظر محاسباتی را ممکن می‌سازند زیرا بیست‌وجهی تکه‌ای-تخت است و شبکه‌های نمونه‌برداری منظم را می‌پذیرد؛ به شکل ۷۰ مراجعه کنید. $(\mathbb{R})^3 - \text{SO}(2)$ -ساختار و $\{e\}$ -ساختار در شکل‌های ۱۵۷ و ۵۷ در اینجا به ترتیب با \mathbb{C} -ساختار و $\{e\}$ -ساختارها در شکل‌های ۷۱ و ۷۱ یا ۱۷۱ تقریب زده می‌شوند.

۱.۱۱ هندسه کره ۲-بعدی S^2

به عنوان پایه‌ای برای بحث ما در مورد CNN‌های کروی، این بخش به بحث در مورد هندسه دیفرانسیل کره (واحد) $M = S^2$ می‌پردازد. این کره معمولاً به عنوان زیرمجموعه‌ای از نقاط در فضای اقلیدسی ۳-بعدی \mathbb{E}^3 تعریف می‌شود که فاصله واحد از مبدأ دارد:

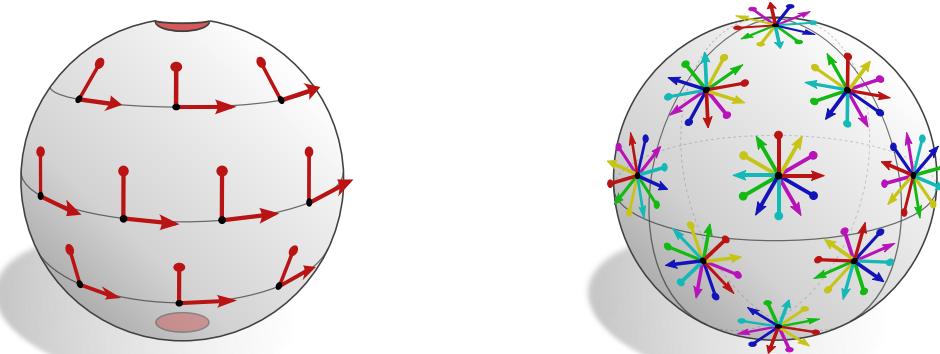
$$S^2 := \{p \in \mathbb{E}^3 \mid \|p\| = 1\} \quad (421)$$

به عنوان یک سطح جایگذاری شده، این کره یک متریک ریمانی (فرم بنیادی اول) را از فضای جایگذاری \mathbb{E}^3 به ارث می‌برد. در ادامه، برای سادگی، \mathbb{E}^3 را با فضای برداری \mathbb{R}^3 مدل‌سازی می‌کنیم. هنگامی که فضاهای مماس $T_p M$ را به معنای واقعی کلمه به عنوان آن دسته از زیرفضاهای دو بعدی \mathbb{R}^3 تفسیر کنیم که شامل تمام بردارهای مماس در $p \in S^2$ هستند، آنگاه متریک، نگاشتهای نمایی، انتقال‌دهنده‌های موازی، چارچوبها و پیمانه‌ها همگی می‌توانند بر حسب عملیات معمول فضای برداری در \mathbb{R}^3 بیان شوند. قبل از پرداختن به این عبارات مشخص، که هنگام پیاده‌سازی CNN‌های کروی مفید هستند، ما برخی از ویژگی‌های کره را از دیدگاهی انتزاعی‌تر مورد بحث قرار می‌دهیم.

گروه ایزومتری کره با

$$\text{Isom}(S^2) = \text{O}(3), \quad (422)$$

داده می‌شود، یعنی دوران‌ها و بازتاب‌های سه‌بعدی، که در شکل ۵۶ به تصویر کشیده شده‌اند. عمل هر ایزومتری $\phi \in \text{O}(3)$ با عمل معمول آن روی \mathbb{R}^3 از طریق ضرب ماتریسی، که به کره جایگذاری شده $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ محدود شده است، منطبق است. توجه داشته باشید که این در واقع یک



(ب) $\{e\}M$ -ساختار روی یک کره ۲-بعدی سوراخدار $= M = S^3 \setminus \{n, s\}$ ، که بواسطه دوران‌های سمتی در $\text{Isom}_{\{e\}M} = \text{SO}(2)$ حفظ می‌شود.

(ا) $\text{SO}(2)$ -ساختار SOM روی کره ۲-بعدی $M = S^3$ ، که توسط دوران‌های سه بعدی عمومی در $\text{Isom}_{\text{SOM}} = \text{SO}(3)$ مطابقت دارد.

شکل ۵۷-G-SO(2)-ساختار استاندارد روی S^3 را نشان می‌دهد، که با متريک جايگذاري (معادله (۴۲۹)) القا شده از حاصلضرب داخلی \mathbb{R}^3 مطابقت دارد. اين ساختار تحت دوران‌ها در $\text{Isom}_{\text{SOM}} = \text{SO}(3)$ ناوردا است، که بر هموردايی دوراني کانونلوشن GM متناظر دلالت دارد. توجه داشته باشيد که تارهای G_qM و G_pM در نقاط مختلف p و q ايزومورف هستند اما نه به صورت کانوني \square به نظر مى‌رسد رنگ‌ها چارچوب در تصویر چنین ايزومورفیسمی را القا می‌کنند، با اين حال، آنها به طور تصادفي انتخاب شده‌اند و همچ معنایي ندارند. شکل ۵۸- $\{n, s\} \cong S^1 \times (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ با متريک شبه-کروي تبديل مى‌کند \square که اجازه يك کاهش كامل به يك گروه ساختاري بدبيهي را مى‌دهد. شکل، رايچ ترين انتخاب از $\{e\}$ -ساختار را نشان مى‌دهد، که متناظر با چارچوب‌هاي راست-هنجراري است که با شبکه مختصات GM-هموردا هستند. توجه داشته باشيد که سوراخ کردن فقط وسيلي‌های برای پنهان کردن ناپيوستگي مدل‌ها در قطبها است.

عمل خوشتعريف روی S^3 به دست مى‌دهد زيرا (۳) O بنا به تعریف از تمام نگاشتهای خطی حافظ فاصله و زاویه تشکيل شده است و بنابراین کره را حفظ می‌کند. از آنجا که کره جهت‌پذير است، دارای يك زيرگروه از ايزومتری‌های حافظ جهت است

$$\text{Isom}_+(S^3) = \text{SO}(3), \quad (423)$$

که از تمام دوران‌های سه بعدی تشکيل شده است. زيرگروه‌های يادگيري عميق مرتبه هستند، عبارتند از: هر انتخاب از يك محور دوران، يك زيرگروه از دوران‌های دو بعدی را تعين مى‌کند که با (۲) SO ايزومورف است و تمام اين زيرگروه‌ها با يك‌دiger مزدوج هستند. به طور مشابه، هر انتخاب از يك زيرفضاي دو بعدی از \mathbb{R}^3 متناظر با يك زيرگروه از بازتاب‌ها نسبت به اين صفحه است که با \mathcal{R} ايزومورف است. زيرگروه‌های دوران‌های دو بعدی حول دو محور دوران غيرمواري، (۳) SO ، را توليد مى‌کنند، که به پarametrisasi زاويه اوپير از $\text{SO}(3) \times \text{SO}(2)$ مربوط مى‌شود. يك انتخاب از صفحه بازتاب و هر محور دوران در داخل اين صفحه، زيرگروه حاصلضرب نيمه مستقيم $\mathcal{R} \times O(2) = O(2)$ را توليد مى‌کند. اگر محور دوران به جاي آن عمود بر صفحه بازتاب انتخاب شود، دوران‌ها و بازتاب‌هاي دو بعدی جايجا مى‌شوند و بنابراین زيرگروه‌های ايزومورف با حاصلضرب مستقيم $\mathcal{R} \times O(2)$ را توليد مى‌کنند. (۳) O علاوه بر اين دارای زيرگروه‌های گستته است که مرتبه‌ترین آنها از نظر عملی، گروه‌های تقارن اجسام افلاطونی هستند، به عنوان مثال بيست و چهار، که در شکل ۷۰ نشان داده شده است.^{۱۱۳}

(۳) O به صورت منعدی بر روی کره عمل مى‌کند، يعني برای هر دو نقطه p و $q \in S^3$ حداقل يك ايزومتری ϕ وجود دارد به طوري که $\phi(p) = q$. عمل‌های $O(2)$ روی S^3 بدون نقطه ثابت نيسنند: هر نقطه زيرگروه $p \in S^3$ توسيع زيرگروه $\langle p \rangle \subseteq O(2)$ را يابدار Stab _{p} مى‌شود، که از دوران‌ها و بازتاب‌ها حول محور گذرنده از p در \mathbb{R}^3 تشکيل شده است. در مجموع، اين دو ويژگي دلالت بر اين دارند که کره يك فضای همگن از (۳) O است و به صورت جبری به عنوان فضای خارج‌قسمتی

$$O(3)/O(2) \cong S^3, \quad (424)$$

تحقیق می‌باید، که از هم‌دسته‌های به شکل (۲) O . ϕ تشکيل شده است. يك گزاره مشابه برای (۳) O برقرار است، که دارای زيرگروه‌های پایدارساز $\text{Stab}_p \cong \text{SO}(2)$ است و بنابراین

$$\text{SO}(3)/\text{SO}(2) \cong S^3. \quad (425)$$

با اين روابط، قضيه ۱۴.۸ اثبات مى‌کند که هر تبديل ميدان کرنل همورداي (۳) SO يا (۲) O روی S^3 معادل يك کانونلوشن GM با G به ترتيب برابر با (۲) O يا (۲) SO است. اين نتيجه با ديدگاه کلاسيک CNN‌هاي همورداي گروهي روی فضاهاي همگن مطابقت دارد [۳۱] \square رابطه دقیق بين اين دو در قضيه ۲.۱۱ در ادامه روشن مى‌شود. به ياد بياوريد که ايزومتری‌ها بنا به تعریف، متريک ريمانی را حفظ مى‌کنند. اينکه (۳) O به

۱۱۳ يك لیست جامع از تمام زيرگروه‌های متناهی (۳) SO را می‌توان در [\[۳۱\]](#) یافت.

صورت متعدد روی S^3 با پایدارساز $O(2)$ عمل می‌کند، بنابراین دلالت بر این دارد که هندسه ریمانی S^3 در هر نقطه و در هر جهت و جهت‌گیری «شیوه به هم» به نظر می‌رسد \square یک فضای بیشینه متقاض است.

به عنوان یک منیفلد ریمانی، S^3 بنا به طراحی دارای یک $O(2)$ -ساختار است. یک تحدید به چارچوب‌های راست‌گرد، که ممکن است زیرا کره جهت‌بزیر است، $O(2)$ - $S\bar{O}$ -ساختار را در شکل ۱۵۷ به دست می‌دهد، که توسط دوران‌ها در $S\bar{O}(3)$ حفظ می‌شود. می‌توان نشان داد که این دو G -ساختار و SOM به عنوان کلاف‌های اصلی به ترتیب با (3) و (3) - $S\bar{O}$ ایزومورف هستند. ایزومورفیسم خاص در اینجا با انتخاب یک چارچوب از G -ساختار داده می‌شود، که باید با عضو همانی گروه یکی گرفته شود.

قضیه گوی مودار بیان می‌کند که هیچ میدان برداری پیوسته‌ای روی S^3 وجود ندارد، که به طور خاص دلالت بر این دارد که هیچ $\{e\}$ -ساختار (پیوسته‌ای) نمی‌تواند وجود داشته باشد. بنابراین، یک کاهش گروه ساختاری فراتر از $S\bar{O}(2)$ نیازمند تغییر در توپولوژی منیفلد است. برای مثال، سوراخ کردن کره در یک نقطه دلخواه $p \in S^3$ یک سطح را به دست می‌دهد که با صفحه اقلیدسی همسان‌ریخت است و بنابراین موازی‌پذیر است.^{۱۱۴} سوراخ کردن کره در دو نقطه متقابل دلخواه، همانطور که در شکل ۱۵۷ نشان داده است، توپولوژی کره را به توپولوژی یک استوانه تبدیل می‌کند و بنابراین اجازه وجود $\{e\}$ -ساختارها را می‌دهد. رایج‌ترین انتخاب از $\{e\}$ -ساختار روی کره سوراخ دار $S^3 \setminus \{n, s\}$ -ساختار ناوردا در شکل‌های ۱۵۸ و ۱۵۹ است. چارچوب‌های آن

$$\left[\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{\cos(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \quad (426)$$

با شبکه مختصاتی معمول کروی تراز شده‌اند، که در قراردادهای فیزیک (یعنی با φ و θ که به ترتیب زاویه سمتی و انحراف نسبت به صفحه xy را نشان می‌دهند) توسط نگاشت پوشای 2π -متناوب زیر داده می‌شوند:

$$\chi : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \rightarrow S^3 \setminus \{n, s\}, \quad (\theta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos \varphi \\ \cos(\theta) \sin \varphi \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (427)$$

برخی از CNN‌های $\{e\}$ -راهبری‌پذیر با نمایش میدان‌های ویژگی روی $S^3 \setminus \{n, s\}$ در مختصات کروی پیاده‌سازی می‌شوند؛ به بخش ۳.۱۱ در ادامه مراجعه کنید. از آنجا که نگاشت مختصاتی χ ایزومتریک نیست، این روش‌ها به یک متریک جایگزین (یا $\{e\}$ -ساختار) روی مختصات $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^4$ (نیاز دارند؛ به چارچوب‌های کشیده شده در شکل ۱۵۹ (راست) مراجعه کنید).

از آنجا که S^3 فشرده است، از نظر ژئوپزیکی کامل است. ژئوپزیک‌ها توسط دو ایر عظیمه کره داده می‌شوند، یعنی آن دایره‌هایی که متناظر با تقاطع کره با یک صفحه گذرنده از مبدأ \mathbb{R}^3 هستند. نگاشتهای نمایی $\exp_p(v)$ این دو ایر عظیمه را از طریق p در جهت v برای فاصله‌ای برابر با $\|v\|$ دنبال می‌کنند. بنابراین نگاشتهای لگاریتمی $\log_p(q)$ برای تمام نقاط $q \in S^3 \setminus p$ که متقابل p بیستند، با بردار یکتایی در جهت کوتاه‌تر در امتداد دایره عظیمه گذرنده از p داده می‌شوند، با $\|\log_p(q)\|$ که با طول قوس در امتداد این مسیر داده می‌شود. ژئوپزیک‌ها بین نقاط متقابل p و $-p$ یکتا نیستند، به طوری که نگاشت لگاریتمی وجود ندارد.

هندسه‌ی صریح S^3 به عنوان یک سطح جایگذاری شده در \mathbb{R}^3

همانطور که در بالا گفته شد، فضاهای مماس $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ در هندسه دیفرانسیل کلاسیک سطوح به عنوان زیرفضاهای دو بعدی از فضای جایگذاری \mathbb{R}^3 تعریف می‌شوند. یک فضای مماس خاص در $T_p M \subset S^3$ در این تفسیر با

$$T_p M = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \langle p, v \rangle = \cdot\} \subset \mathbb{R}^4, \quad (428)$$

داده می‌شود، یعنی فضای تمام بردارهایی که بر بردار نرمال سطح در p عمود هستند، که برای کره با خود p منطبق است. توجه داشته باشید که، علی‌رغم بیان شدن نسبت به چارچوب استاندارد \mathbb{R}^4 ، این بردارهای مماس اشیاء مستقل از مختصات هستند به این معنا که با زوج‌های مرتبی از ضرایب $v^A \in \mathbb{R}^4$ نسبت به یک پیمانه $\psi_{TM,p}^A$ از $T_p M$ توصیف می‌شوند. یکی گرفته فضاهای مماس با زیرفضاهای فضای جایگذاری اجازه می‌دهد تا بسیاری از روابط جبری انتزاعی بر حسب عملیات فضای برداری روی \mathbb{R}^3 بیان شوند. در باقیمانده این بخش، ما چنین عبارتی را برای متریک، نگاشتهای نمایی و لگاریتمی، چارچوب‌ها، پیمانه‌ها، انتقال‌دهنده‌های لوی-چیویتا در امتداد ژئوپزیک‌ها و تبدیلات پیمانه‌ی القا شده بیان خواهیم کرد.

با این به تعریف، S^3 متریک ریمانی خود را از فضای جایگذاری به ارث می‌برد. این متریک القا شده برای هر $v, w \in T_p M \subset \mathbb{R}^4$ با

$$\eta_p(v, w) := \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^4}, \quad (429)$$

داده می‌شود، یعنی حاصلضرب داخلی استاندارد \mathbb{R}^4 ، که به $T_p M$ محدود شده است. برای کاهش شلوغی، ما زیرنویس \mathbb{R}^3 را در نماد $\langle \cdot, \cdot \rangle$ در باقیمانده این بخش حذف می‌کیم.

نگاشت نمایی \exp_p بردارهای $v \in T_p M$ را به نقاط $q = \exp_p(v) \in S^3$ در فاصله‌ای برابر با $\|v\|$ در امتداد دایره عظیمه در جهت v نگاشت می‌دهد. با قرار گرفتن روی همان دایره عظیمه، p و q از طریق یک دوران با زاویه $\alpha = \|v\|/r$ حول محور دوران

^{۱۱۴} این فرآیند به عنوان مثال با تصویر استریوگرافیک کرده مطابقت دارد.

به هم مرتبط می‌شوند، که در آن معادلات ساده می‌شوند زیرا کره دارای شعاع واحد $r = \|p\| = \frac{p \times v}{\|p \times v\|} = \frac{p \times v}{\|v\|}$ است و بردارهای $a = \frac{p \times v}{\|p \times v\|}$ در \mathbb{R}^3 برعکس دوران رودریگز، $a = p \cos(\alpha) + (a \times p) \sin(\alpha) + a \langle a, p \rangle (1 - \cos(\alpha))$ است. با استفاده از فرمول دوران رودریگز، $a \times p = \frac{1}{\|v\|} (p \times v) \times p = \frac{1}{\|v\|} (\langle p, p \rangle v + \langle p, v \rangle p) = \frac{v}{\|v\|} \langle a, p \rangle$ به همراه عمود بودن $\langle a, p \rangle = 0$ این منجر به عبارت صریح

$$\exp_p : \mathbb{R}^3 \supset T_p M \rightarrow S^3 \subset \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto \exp_p(v) = p \cos(\|v\|) + \frac{v}{\|v\|} \sin(\|v\|) \quad (430)$$

برای نگاشت نمایی می‌شود.

یک عبارت صریح از نگاشت لگاریتمی در امتداد همین خط استدلال یافت می‌شود: نرم $(q) \in S^3 \setminus p$ ، با زاویه دوران $\alpha = \arccos(\langle p, q \rangle)$ منطبق است. جهت آن با جهت مماس بر دایره عظیمه داده می‌شود، که ممکن است بر حسب تصویر نرمال شده $T_p M$ بیان شود. در کل، نگاشت لگاریتمی بنابراین به صورت زیر نمونه‌سازی می‌شود:

$$\log_p : S^3 \setminus p \rightarrow B_{T_p M}(\cdot, \pi), \quad q \mapsto \log_p(q) = \arccos(\langle p, q \rangle) \frac{q - \langle p, q \rangle p}{\|q - \langle p, q \rangle p\|}, \quad (431)$$

که در آن $\mathbb{R}^3 \subset T_p M \subset B_{T_p M}(\cdot, \pi) \subset T_p M$ گوی باز با شعاع انزکتیویته π حول مبدأ $T_p M$ را نشان می‌دهد.

چارچوب‌های مرجع روی S^3 بنا به تعریف فقط زوچهای مرتبی از بردارهای مماس خطی مستقل هستند. هنگامی که محورهای یک چارچوب مرجع به صراحت به عنوان بردارهایی در فضای جایگذاری \mathbb{R}^3 بیان شوند، این چارچوب را می‌توان با ماتریس 2×3 با رتبه ۲

$$[e_1^A, e_2^A] = \begin{bmatrix} e_{1,1}^A & e_{1,2}^A \\ e_{1,2}^A & e_{2,2}^A \\ e_{1,3}^A & e_{2,3}^A \end{bmatrix} =: E_p^A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}. \quad (432)$$

شناسایی کرد. این ایزومورفیسم فضای برداری

$$E_p^A = [e_1^A, e_2^A] : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p M, \quad v^A \mapsto E_p^A v^A = v_1^A e_1^A + v_2^A e_2^A \quad (433)$$

را از ضرایب برداری به بردارهای مماس مستقل از مختصات تعریف می‌کند. بنابراین فضاهای مماس $T_p M$ دقیقاً تصویر E_p^A هستند.

پیمانه‌های متناظر $\psi_{TM,p}^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3$ از نظر فنی فقط وارون چارچوب‌ها هستند، هنگامی که به عنوان نگاشتهای $E_p^A : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p M$ تفسیر شوند. در مقابل، هنگامی که به عنوان ماتریس‌های 2×3 که \mathbb{R}^3 را به صورت غیرپوششی N نگاشت می‌دهند، تفسیر شوند، E_p^A وارون پذیر نیست اما فقط یک شبه-وارون را می‌پذیرد

$$(E_p^A)^+ := ((E_p^A)^\top E_p^A)^{-1} (E_p^A)^\top \in \mathbb{R}^{3 \times 3}. \quad (434)$$

از نظر هندسی، این ماتریس با ۱) تصویر کردن بردارهای در \mathbb{R}^3 به تصویر $E_p^A(\mathbb{R}^3) = T_p M \subset \mathbb{R}^3$ که همان E_p^A است، و ۲) اعمال وارون ایزومورفیسم $E_p^A : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p M$ روی این زیرفضا عمل می‌کند. این بدان معناست که شبه-وارون در واقع وارون E_p^A روی فضای مماس است، که دلالت بر این دارد که نگاشت پیمانه با

$$\psi_{TM,p}^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto (E_p^A)^+ v. \quad (435)$$

داده می‌شود. به صورت باز شده، نگاشت پیمانه مطابق با

$$\begin{aligned} \psi_{TM,p}^A(v) &= \begin{pmatrix} \langle e_1^A, e_1^A \rangle & \langle e_1^A, e_2^A \rangle \\ \langle e_2^A, e_1^A \rangle & \langle e_2^A, e_2^A \rangle \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \langle e_1^A, v \rangle \\ \langle e_2^A, v \rangle \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\langle e_1^A, e_1^A \rangle \langle e_2^A, e_2^A \rangle - \langle e_1^A, e_2^A \rangle \langle e_2^A, e_1^A \rangle} \begin{pmatrix} \langle e_1^A, e_1^A \rangle & -\langle e_1^A, e_2^A \rangle \\ -\langle e_2^A, e_1^A \rangle & \langle e_1^A, e_1^A \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle e_1^A, v \rangle \\ \langle e_2^A, v \rangle \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (436)$$

عمل می‌کند. توجه داشته باشید که، به طور کلی، اگر (و تنها اگر) E_p^A یک چارچوب راست‌هنجار باشد، یعنی برای $G \leq O(2)$ نگاشت پیمانه به سادگی با تصویر بردار مماس روی محورهای چارچوب داده می‌شود:

$$\psi_{TM,p}^A(v) = (E_p^A)^\top v = \begin{pmatrix} \langle e_i^A, v \rangle \\ \langle e_j^A, v \rangle \end{pmatrix} \quad \text{برای چارچوب‌های راست‌هنجار، یعنی } \langle e_i^A, e_j^A \rangle = \delta_{ij} \quad (437)$$

عبارت صریح برای انتقال‌دهنده‌های لوی-چیویتا مستقل از مختصات در امتداد ژئودزیک‌ها مشابه عبارت نگاشت نمایی است، با این تفاوت که فرمول دوران رودریگز برای دوران دادن بردارهای مماس بین مبدأ و مقصد به جای دوران نقطه مبدأ به مقصد اعمال می‌شود. فرض کنید γ

کوتاه‌ترین ژئودزیک بین $S^3 \setminus p$ و $p \in S^3$ باشد. دوران از p به q در امتداد این ژئودزیک سپس با محور $a = p \times q$ و زاویه $\alpha = \arccos(\langle p, q \rangle)$ داده می‌شود. بر حسب این کمیت‌ها، انتقال لوی‌چیویتا از یک بردار مماس جایگذاری شده $v \in T_p M \subset \mathbb{R}^3$ در امتداد ژئودزیک γ با بردار دوران یافته

$$\mathcal{P}_{TM,\gamma}(v) = v \cos(\alpha) + (a \times v) \sin(\alpha) + (a \langle a, v \rangle) (1 - \cos(\alpha)) \quad (438)$$

در \mathbb{R}^3 داده می‌شود. نسبت به پیمانه‌های $\psi_{TM,p}^{\tilde{A}}$ در نقطه شروع p و نقطه پایان q ژئودزیک، این انتقال‌دهنده با عضو گروه

$$g_{\gamma}^{A\tilde{A}} = \psi_{TM,p}^A \circ \mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1} = (E_p^A)^+ \circ \mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ E_q^{\tilde{A}}. \quad (439)$$

بیان می‌شود.

تبديلات پیمانه القا شده توسط ایزومتری به طور مشابه نسبت به چارچوب‌های مرجع صریح با ضرب ماتریسی زیر داده می‌شوند:

$$g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) = \psi_{TM,\phi(p)}^A \circ \phi \circ (\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1} = (E_{\phi(p)}^A)^+ \phi E_p^{\tilde{A}} \quad (440)$$

۲.۱۱ CNN‌های کروی کاملاً هموردای دورانی

این بخش به بحث در مورد کانولوشن‌های کروی کاملاً $(3)-O-SO$ یا $(3)-SO-O$ -هموردا می‌پردازد که در ردیف‌های (۳۳-۳۱) جدول ۶ فهرست شده‌اند. همه آنها را می‌توان به عنوان نمونه‌های خاصی از کانولوشن‌های GM روی (۲)- $O-SO$ -ساختار در شکل ۵۷ آیا (۲)- $O-SO$ -ساختار متناظر، که علاوه بر آن تحت بازتاب‌های چارچوب‌های نیز بسته است، درک کرد.

به جای سازماندهی این بحث بر حسب گروه‌های ساختاری و نمایش‌های گروهی در نظر گرفته شده، ما مدل‌ها را بر اساس چارچوب‌های نظری که در آنها توسعه یافته‌اند، دسته‌بندی می‌کنیم: $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ [۸۷] یک شبکه پیکسلی را روی کره تعریف کرده و کانولوشن را مستقیماً به عنوان کانولوشن GM فرمول‌بندی می‌کنند، یعنی بر حسب پیمانه‌ها، کرل‌های راهبری‌پذیر و انتقال‌دهنده‌های بردار و بیزگی. یک چارچوب جایگین، کانولوشن‌های گراف روی مش‌های پیکسلی کروی است [۲۰۱، ۳۷]. چنین کانولوشن‌های گرافی منتظر با کانولوشن‌های GM با کرنل‌های همسانگرد هستند. بنابراین آنها بین میدان‌های اسکالار (غیرحساس به جهت) و بین اسکالاری های می‌رسیم که کرنل‌های کانولوشن (راهبری‌پذیر) را روی S^3 به جای کرنل‌های ما روی فضاهای مماس در نظر می‌گیرند [۵۱، ۵۱، ۹۷، ۲۹]. قضیه ۱.۱۱ اثبات می‌کند که چنین کرنل‌های راهبری‌پذیر کروی را می‌توان با کرنل‌های G -راهبری‌پذیر روی فضاهای مماس، هنگامی که در مختصات ترمال ژئودزیک بیان می‌شوند، یکی گرفت. بر اساس این نتیجه، ما در قضیه ۲.۱۱ اثبات می‌کنیم که کانولوشن‌ها با کرنل‌های کروی معادل کانولوشن‌های GM ما هستند. برای کامل بودن، باید اشاره کنیم که چنین مدل‌هایی معمولاً در حوزه طیفی پیاده‌سازی می‌شوند. ما بر این دیدگاه تمرکز نمی‌کنیم اما خواننده علاقمند را به مرور $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ [۵۰] ارجاع می‌دهیم.

کانولوشن‌های $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ کروی: ما با CNN کروی توسط $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ [۸۷] شروع می‌کنیم زیرا فرمول‌بندی آن دقیقاً با نظریه عمومی‌تر ما هنگام اعمال بر هندسه کروی مطابقت دارد. نویسندهای (۲)- $O-SO$ -ساختار را از شکل ۵۷ آفراحت که در قسمی از این راهبری‌پذیر را در نظر می‌گیرند. میدان‌های ویزگی بر حسب بردارهای ویزگی که به یک شبکه نمونه‌برداری روی کره اختصاص داده شده‌اند، گسترش‌سازی می‌شوند. در حالی که این روش در اصل مستقل از طرح نمونه‌برداری خاص است، نویسندهای پیشنهاد می‌کنند که هندسه کروی را با یک مش ایکوسفر گسترش‌سازی کنند. این مش با گرفتن یک بسته‌جegه‌ی جایگذاری شده، تقسیم مکرر وجوه آن همانطور که در شکل ۷۰ نشان داده شده، و در نهایت تصویر کردن رؤوس شبکه به صورت شعاعی روی کره، یعنی به نرم واحد، ساخته می‌شود. میدان‌های ویزگی نمونه‌برداری شده به صورت عددی با مجموعه‌ای از بردارهای ضرب $f^A(p) \in \mathbb{R}^c$ در $f^A(p)$ در رؤوس شبکه p نمایش داده می‌شوند، که نسبت به برخی چارچوب‌های راست‌هنچار راست‌گرد دلخواه e_1^A, e_2^A در عمل، چارچوب‌ها با یک بردار مماس منفرد با نرم واحد نمایش داده می‌شوند، که بردار چارچوب دوم از آن به طور یکتا نتیجه می‌شود زیرا چارچوب‌ها راست‌گرد هستند.

برای محاسبه کانولوشن مستقل از مختصات $[K * f](p)$ از معادله (۸۷)، $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ [۸۷] باید کرنل (۲)- R -راهبری‌پذیر K را با پول‌بک انتقال‌دهنده A از میدان ویزگی f (معادله (۶۷)) منقبض کنند. همانطور که در یادگیری عمیق معمول است، در اینجا فرض می‌شود که K دارای تکیه‌گاه فشرده است، به طوری که فقط چند رأس را در یک همسایگی یک‌حلقه یا دو-حلقه \mathcal{N}_p حول یک رأس مرکزی p بوسشم می‌دهد. در نظریه پیوسته، پول‌بک انتقال‌دهنده ویزگی‌ها را از تمام نقاط $(\psi_{TM,p}^A)^{-1}(v) \in \mathbb{R}^3$ برای \exp_p می‌گیرد و آنها را به p منتقل می‌کند. در عمل، میدان‌های ویزگی فقط در رؤوس شبکه q نمونه‌برداری می‌شوند، که منتظر با ضرایب بردار مماس $v_{pq}^A = \psi_{TM,p}^A \log_p(q) \in \mathbb{R}^3$ نگاشت‌های لکاریتمی $\log_p(q)$ در اینجا همانطور که در معادله (۴۳۱) تعریف شده، محاسبه می‌شوند. انتقال‌دهنده‌های لوی‌چیویتا از q به p در اصل توسط معادله (۴۳۹) داده می‌شوند. از آنجا که چارچوب‌ها همگی راست‌گرد و راست‌هنچار هستند، و از آنجا که انتقال‌منتظر با اتصال لوی‌چیویتا روی S^3 است، اعضای

^{۱۱۵} این متناظر با یک انتخاب مستقل از پیمانه $\psi_{TM,p}^{Ap}$ روی هر همسایگی باز U^{Ap} از هر رأس p است.

^{۱۱۶} اگر نگاشت‌نمایی به شعاع انزکتیویته محدود نشود، هر رأس q با چندین بردار مماس نمایش داده می‌شود. این در عمل مشکلی ایجاد نمی‌کند زیرا فرض می‌شود که کرنل به صورت محلی در داخل شعاع انزکتیویته دارای تکیه‌گاه است.

گروه $g_{p \leftarrow q}^{A\tilde{A}}$ مقادیری در $\text{SO}(2)$ دارند. بنابراین آنها به طور کامل توسط زاویه بین محور اول چارچوب منتقل شده $(e_1^{\tilde{A}})$ از q و محور اول چارچوب e_1^A در p تعیین می‌شوند. با این اجزا در دست، نویسنده‌گان پیشنهاد می‌کنند که انتگرال کانولوشن پیوسته را با مجموع گسسته

$$[K \star f]^A(p) = \int_{\mathbb{R}^r} K(v) [\text{Exp}_p^* f]^A(v) dv \approx \sum_{q \in \mathcal{N}_p} K(v_{pq}^A) \rho(g_{p \leftarrow q}^{A\tilde{A}}) f^{\tilde{A}}(q) \quad (441)$$

روی گره‌های مش همسایه تقریب بزنند. ضریب نرمال‌سازی گمشده را می‌توان به عنوان جذب شده در پارامترهای یادگرفتنی $w_i \in \mathbb{R}$ از کرنل کانولوشن $\text{SO}(2)$ -راهبری‌پذیر $K = \sum_i w_i K_i$ در نظر گرفت. به عنوان جایگزینی برای این تقریب ساده، نویسنده‌گان یک طرح انتگرال گیری تربیعی بهینه را پیشنهاد می‌کنند، که به طور تجربی نشان داده شده است که همودایی ایزومتری $\text{SO}(3)$ مدل را بهبود می‌بخشد.

این مدل در جدول ۶ به عنوان پردازشگر میدان‌های می‌شوند، فهرست شده است. در پیاده‌سازی خود، [۱۹۰] میدان‌های نمایش تحويل‌ناپذیر از $\text{SO}(2)$ را در کانولوشن‌ها در نظر می‌گیرند. یک تغییر پایه قبیل و بعد از کانولوشن‌ها این میدان‌های ویژگی را به میدان‌های ویژگی منظم تبدیل می‌کند، که سپس غیرخطی‌های نقطه‌ای مانند ReLU روی آنها عمل می‌کنند. نمایش منظم بی‌نهایت-بعدی $\text{SO}(2)$ در اینجا با نمایش‌های منظم زیرگروه‌های دوری گسترش C_N تقریب زده می‌شود، که نمایش‌های تحویل‌ناپذیر آنها فقط نمایش‌های تحویل‌ناپذیر $\text{SO}(2)$ تا یک فرکانس محدود کننده باند $[N/2]$ هستند؛ به عنوان مثال به پیوست [۲۰] از [۱۹۰] مراجعه کنید. تغییر پایه بین نمایش‌ها در این مورد خاص فقط تبدیل فوریه گسترش معمول است.

کانولوشن‌های گراف کروی: CNN‌های کروی توسط [۱۳۷] و [۲۰۱]، که در ردیف (۳۳) جدول ۶ فهرست شده‌اند، بر اساس کانولوشن‌های گراف متعارف هستند [۹۰]. مش‌های پیکسلی روی کره در اینجا به عنوان گراف تفسیر می‌شوند. شبکه‌های کانولوشنی گراف سیگنال‌ها را روی کره با ضرب آنها در چندجمله‌ای‌های درجه k به صورت $\sum_k^k w_k L^k$ پردازش می‌کنند، که در آن $w_k \in \mathbb{R}$ پارامترهای قابل آموزش هستند. از آنجا که ماتریس لاپلاسین فقط برای گره‌های مجاور ورویدی‌های غیرصفر دارد، جمله مرتبه k -ام فقط بر همسایگی k -هاب حول هر گره θ تأثیر می‌گذارد. روی یک مش منظم با یال‌های گراف بدون وزن، سهم یک گره همسایه q در ویژگی ایناشته شده در p فقط به فاصله گراف آنها (شعاع) سنتگی گراف آنها (شعاع) است. بنابراین کانولوشن گراف در چنین مواردی کرنل‌های همسانگرد را روی گراف اعمال می‌کند. گراف پیکسلی در نظر گرفته شده روی کره این ویژگی‌ها را تقریباً برآورده می‌کند. از آنجا که جایگذاری آنها روی کره به گونه‌ای است که گره‌ها تقریباً به صورت ژئوپزیکی هم‌فاصله هستند، همسانگردی توپولوژیکی کرنل‌های کانولوشن گراف متاخر با همسانگردی متريک آنها روی کره است.

گروه ایزومتری $\text{SO}(3)$ کره، تبدیلات پیمانه‌ای با مقادیر (۲) را القا می‌کند، یعنی با جایجایی الگوها به یک مکان جدید و در یک جهت جدید عمل می‌کند. به دلیل اشتراک وزن کانولوشن‌های گراف به طور بدیهی همودایی ایزومتری هستند. همانطور که قلاؤ در معادله (۴۲۰) استدلال شد، کرنل‌های همسانگرد در چارچوب ما به عنوان کرنل‌های $\text{SO}(3)$ -راهبری‌پذیر که بین میدان‌های اسکالار نگاشت انجام می‌دهند، بازیابی می‌شوند. همودایی (۳) از $\text{SO}(2)$ -کانولوشن در نظریه ما با ناوردايی (۳) از $\text{SO}(3)$ -ساختار کره توضیح داده می‌شود.

کانولوشن‌های کروی با کرنل‌های روی S^3 : به عنوان یک فضای همگن، کره کانولوشن‌های گروهی (یا فضای خارج‌قسمتی) [۹۶] و کانولوشن‌های راهبری‌پذیر عمومی تر روی فضاهای همگن [۳۱] را می‌پذیرد.^{۱۱۷} به جای تعریف کرنل‌های کانولوشن روی فضاهای مماس با روی همسایگی‌های گراف، این رویکردها کرنل‌ها را بالافصله به عنوان توابع ماتریسی روی کره تعریف می‌کنند، یعنی به صورت

$$\kappa : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \quad (442)$$

استدلال می‌کنیم که چنین کرنل‌هایی روی S^3 معادل کرنل‌های G -راهبری‌پذیر روی فضاهای مماس هستند (قضیه ۱.۱)، که این دلالت بر این دارد که CNN‌های کروی بوشش داده شده در [۳۱] و [۴۶] را می‌توان به عنوان کانولوشن‌های GM در نظر گرفت (قضیه ۲.۱). یکی گرفتن بین این دو نوع کرنل در اینجا با پول‌بک کردن کرنل‌های کروی از طریق نگاشت نمایی به فضاهای مماس انجام می‌شود. قبل از توضیح این عملیات، ما به طور خلاصه مدل‌های پیشنهادی در [۴۹، ۵۴، ۵۱، ۲۹] را به عنوان نمونه‌های خاصی از کانولوشن‌های کروی با کرنل‌های کروی مورد بحث قرار می‌دهیم. برای جزئیات بیشتر در مورد این مدل‌ها، به ویژه در مورد فرمول‌بندی آنها در فضای فوریه، خواننده را به معرف جامع [۵۰] ارجاع می‌دهیم.

بحث خود را با CNN کروی کانولوشنی گروهی توسط [۲۹] جدول ۶ فهرست شده است، آغاز می‌کنیم. این مدل پشتنهایی از c_{in} میدان اسکالار

$$f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{in}}} \quad (443)$$

را روی کره با تطبیق آنها با کرنل‌های کروی (معادله (۴۴۲)) در هر ژست تبدیل شده با $\text{SO}(3)$ پردازش می‌کند. در معادلات، این عملیات به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\kappa \star_{S^3} f](\phi) := \int_{S^3} \kappa(\phi^{-1}(p)) f(p) dp \quad \phi \in \text{SO}(3). \quad (444)$$

^{۱۱۷} یک معرف عمومی تر از کانولوشن‌ها روی فضاهای همگن در پیوست ت یافت می‌شود.

توجه داشته باشید که نقشه ویژگی حاصل به عنوان پشتهای از c_{out} تابع اسکالر روی گروه تقارنی (3) در نظر گرفته می‌شود. چنین نقشه‌های ویژگی به شکل $\text{SO}(3) \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{in}}}$ (با تعداد جدید کانال‌های ورودی که متاظر با کانال‌های خروجی لایه قبل است) با کانولوشن‌های گروهی به شکل زیر بیشتر پردازش می‌شوند:

$$[\kappa \star_{\text{SO}(3)} f](\phi) := \int_{\text{SO}(3)} \kappa(\phi^{-1}\Omega) f(\Omega) d\Omega \quad \phi \in \text{SO}(3), \quad (445)$$

که در آن $\text{SO}(3) \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$: κ اکنون یک تابع ماتریسی روی (3) است و $d\Omega$ اندازه هار روی (3) است. از دیدگاه CNN‌های راهبری‌بزیر روی فضاهای همگن $[31]$ و کانولوشن‌های GM . در نظر گرفته می‌شوند، که مطابق با نمایش منظم تارهای (بزیرگوهای پایدارساز) $\text{SO}(2)/\text{SO}(3) \cong S^1$ در $\text{SO}(3)$ تبدیل می‌شوند. کانولوشن اولیه در معادله (444) در این تفسیر، کرنل‌های SO -راهبری‌بزیر را بین میدان‌های اسکالر و منظم اعمال می‌کند، در حالی که کانولوشن گروهی در معادله (445) کرنل‌های SO -راهبری‌بزیر را بین میدان‌های منظم روی S^1 اعمال می‌کند.

۵۱ کانولوشن‌های گروی را مانند معادله (444) با این فرض اضافی اعمال می‌کنند که کرنل‌ها ناحیه‌ای هستند، یعنی تحت دوران‌های $\text{SO}(2)$ حول محور قطبی ناوردا هستند؛ شکل 55 را مقایسه کنید. در حالی که انتگرال از نظر فنی هنوز پاسخ‌هایی در $\text{SO}(3)$ می‌دهد، تقارن کرنل دلالت بر این دارد که این پاسخ‌ها روی تارهای $\text{SO}(3)$ از $\text{SO}(2)$ ، هنگامی که به عنوان کلاف روی S^1 تفسیر می‌شوند، ثابت هستند. بنابراین میدان‌های ویژگی حاصل به عنوان میدان‌های اسکالار روی S^1 شناسایی می‌شوند، که اجازه کاربرد مکرر این نوع کانولوشن را می‌دهد. توجه داشته باشید که تقارن ناخیه‌ای کرنل با محدودیت کرنل راهبری‌بزیر بین میدان‌های اسکالار (نمایش‌های بدپی) که قبلاً در معادله (419) با آن مواجه شدیم، سازگار است. ممانعطور که قبلاً در بخش 10 بحث شد، این محدودیت معادل محدودیت راهبری‌بزیر (2) O بین میدان‌های اسکالار در معادله (420) است، که این دلالت بر این دارد که مدل $\text{SO}(3)$ در واقع (51) $\text{SO}_p M$ -ساختار $\text{SO}(2)$ -هموردا است. این مدل از نظر روحی شبیه به کانولوشن‌های گراف گروی است که در بالا مورد بحث قرار گرفت، اما از دیدگاه متفاوتی استخراج شده و در پیاده‌سازی به طور متفاوتی گسته‌سازی می‌شود.

۵۴ این مدل را از میدان‌های اسکالار به توابع گروی با وزن اسپین تعیین می‌دهند. این توابع نه تنها به موقعیت $p \in S^1$ روی کره بستگی دارند، بلکه علاوه بر آن به انتخاب خاص چارچوب مرجع راست‌هنگار و راست‌گرد در آن نقطه نیز بستگی دارند. آنها با نمایش‌های تحویل‌ناپذیر ρ_s از $\text{SO}(2)$ مرتبط هستند، که در آن عدد صحیح $s \in \mathbb{Z}$ به عنوان وزن اسپین توابع شناخته می‌شود.^{۱۱۸} مقدار آنها برای چارچوب‌های مختلف $\text{SO}_p M$ از $\text{SO}(2)$ -ساختار SOM به گونه‌ای محدود شده‌اند که تبدیلات پیمانه‌ای چارچوب با $(g \in \text{SO}(2))$ منجر به تبدیل مقدار تابع با $\rho_s(g)$ می‌شود. بنابراین، در معادلات، آنها با^{۱۱۹}

$${}_s f : \text{SOM} \rightarrow \mathbb{C} \quad \forall [e_1, e_2] \in \text{SO}_p M, g \in \text{SO}(2); \quad (446)$$

تعريف می‌شوند؛ برای جزئیات بیشتر و تعاریف جایگزین به $[14]$ مراجعه کنید. به شباهت این محدودیت تقارنی با رابطه هم‌ارزی

$$[[e_i]_{i=1}^s \triangleleft g, f] \sim_{\rho_s} [[e_i]_{i=1}^s, \rho_s(g)f] \quad (447)$$

از معادله (170) که زیربنای تعریف کلاف‌های همبسته است، توجه کنید. توابع گروی با وزن اسپین در واقع معادل مقاطعی از کلاف‌های همبسته $(\text{SOM} \times \mathbb{C})/\sim_{\rho_s}$ هستند؛ به عنوان مثال به گزاره 36.1 در $[193]$ مراجعه کنید. آنها در نظریه ما به سادگی به عنوان میدان‌های نمایش تحویل‌ناپذیر (2) ظاهر می‌شوند، از جمله میدان‌های اسکالار برای $s = 0$ و میدان‌های برداری برای $s = 1$. شبکه‌هایی پیشنهادی توسط $[54]$ $\text{SO}(2)$ -ویژگی‌های با وزن اسپین را با کرنل‌هایی با وزن اسپین روی کره کانوالو می‌کنند. این عملیات متاظر با یک کانولوشن با کرنل‌های $\text{SO}(2)$ -راهبری‌بزیر است که در آن r_{in} و r_{out} میدان‌های تحویل‌ناپذیر هستند.

مدل‌های $[29, 51]$ در ابتدا در حوزه فضایی فرمول‌بندی شده‌اند، یعنی به عنوان پردازش توابع روی S^1 همانطور که در بالا بحث شد. با این حال، آنها در حوزه طیفی پیاده‌سازی می‌شوند، که به لطف قضاایی کانولوشن تمیم‌بافته روش $\text{SO}(3)$ ممکن است $[112, 96, 92]$. این روش $\text{SO}(2)$ -رویکردها را پیشنهاد می‌دهند و مدلی را پیشنهاد می‌کنند که بر اساس ترکیبات خطی یادگرفته شده از تمام مدهای فوریه میدان‌های ویژگی با فرکانس یکسان است. نویسنده‌گان استدلال می‌کنند که این روش فضایی کامل نگاشته‌های خطی (3) -هموردا را بین میدان‌های ویژگی روی کره پوشش می‌دهد. از سوی دیگر، $[31]$ SOM شناختی را می‌توان در حوزه $\text{SO}(2)$ -راهبری‌بزیر نشان دهد. این روش نیز می‌تواند زیرا توابع فضایی و اعمال غیرخطی‌های نقطه‌ای مانند ReLU در آنجا، همانطور که در رویکردهای قبلي انجام می‌شد، نویسنده‌گان حاصل‌ضرب تانسوری را بین تمام میدان‌های ویژگی محاسبه کرده و متعاقباً آنها را از طریق تجزیه کلیش-گوردون به ویژگی‌های (مندهای فوریه) باز می‌گردانند. این از نظر محاسباتی سودمند است، با این حال، به قیمت از دست دادن محلی بودن غیرخطی‌ها تمام می‌شود. وظایف یادگیری خاص، به ویژه در علوم طبیعی، ممکن است از چنین غیرخطی‌هایی بهره‌مند شوند زیرا تعاملات فیزیکی اغلب با حاصل‌ضرب‌های تانسوری توصیف می‌شوند.

همانطور که در $[31, 51]$ استدلال شده است، تمام این مدل‌ها را می‌توان به عنوان اعمال کرنل‌های راهبری‌بزیر روی S^1 در نظر گرفت که بین میدان‌های اسکالار $[29]$ ، میدان‌های ویژگی منظم $[51]$ یا میدان‌های نمایش تحویل‌ناپذیر $[97]$ تفاوت نداشت. در باقیمانده این بخش

^{۱۱۸} می‌توان این مفهوم را به نمایش‌های اسپین، که با وزن‌های اسپین نیمه‌صحيح برقسپگذاری شده‌اند، تعیین داد.

^{۱۱۹} یک پیاده‌سازی با مقدار حقيقی به جای آن توابع با وزن اسپین به شکل $\text{SOM} \rightarrow \mathbb{R}^{\dim(\rho_s)}$: f را در نظر می‌گیرد، که در آن ρ_s نمایش‌های تحویل‌ناپذیر (2) روی اعداد حقیقی هستند.

و پیوست ج ما نشان می‌دهیم که آنها را نیز می‌توان به عنوان کانولوشن‌های GM در نظر گرفت. ادعای اینکه کانولوشن‌های کروی با کرنل‌های راهبری‌پذیر روی S^* معادل کانولوشن‌های GM هستند، در قضیه ۲.۱۱ دقیقاً بیان می‌شود. این قضیه به طور حیاتی به قضیه ۱.۱۱ متکی است، که یک ایزومورفیسم را بین کرنل‌های راهبری‌پذیر کروی و کرنل‌های G -راهبری‌پذیر روی فضاهای مماس برقرار می‌کند.

فرض کنید \mathcal{I} هر گروه ایزومتری متعددی از کره باشد، یعنی $(\mathcal{I} = O(3) \text{ یا } S^* \text{ کانولوشن‌های کروی } -\text{-هموردا را بر حسب کرنل‌های کروی } Stab_n \text{-راهبری‌پذیر} : S^* \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \text{ توصیف می‌کنند. که در آن } Stab_n < \mathcal{I} \text{ است، به عنوان مثال قطب شمال. از آنجا که این کرنل‌ها روی کره تعریف شده‌اند، که از نظر توپولوژیکی با } \mathbb{R}^n \text{ متمایز است، تعريف مستقیم یک ایزومورفیسم بین آنها و کرنل‌های } G \text{-راهبری‌پذیر ممکن نیست. با این حال، از آنجا که قطب جنوب } n \text{ یک مجموعه با اندازه صفر است، می‌توانیم دامنه انتگرال گیری } S^* \text{ کانولوشن‌های کروی را با } n \in S^* \text{ جایگزین کنیم بدون اینکه نتیجه تغییر کند. با این تطبیق، کرنل‌های راهبری‌پذیر کروی } S^* \text{ به صورت زیر تعریف می‌شوند:}$

$$\mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{\text{Stab}_n} := \left\{ \kappa : S^* \setminus n \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \mid \kappa(\xi(p)) = \rho_{\text{out}}(g_\xi^{NN}(n)) \cdot \kappa(p) \cdot \rho_{\text{in}}(g_\xi^{XP}(p))^{-1} \right. \\ \forall p \in S^* \setminus n, \quad \xi \in Stab_n \}, \quad (448)$$

هنگامی که به نمادگذاری ما ترجمه شود. از آنجا که کرنل‌ها به صورت سراسری روی کره تعریف شده‌اند، مقادیر آنها در $\mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ نسبت به پیمانه‌های بالقوه متفاوت N در n که کرنل در آن متتمرکز است، P در S^* که کرنل یک ویژگی $f^P(p) \in \mathbb{R}^{c_{\text{in}}}$ را منقبض می‌کند و X در $\rho(p) \in S^*$ که این ویژگی تحت عمل κ جابجا می‌شود، بیان می‌شوند. این محدودیت کرنل تمام مقادیر کرنل را که روی مدارهای $Stab_n.p = \{\xi(p) \mid \xi \in Stab_n\}$ قرار دارند، از طریق تبدیلات پیمانه القا شده توسط ایزومتری آنها $(g_\xi^{NN}(n) \text{ و } g_\xi^{XP}(p))$ به هم مرتبط می‌کند؛ به معادلات (۴۹۹) و (۴۰۲) مراجعه کنید.^{۱۲۰} کرنل‌های G -راهبری‌پذیر معادل ما، که در آن $G \cong Stab_n$ با

$$\mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{G, B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi)} := \left\{ K : B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \mid K(gv) = \rho_{\text{out}}(g) \cdot K(v) \cdot \rho_{\text{in}}(g)^{-1} \quad \forall v \in B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi), \quad g \in G \right\}. \quad (449)$$

داده می‌شود. دامنه کرنل در اینجا از \mathbb{R}^* به گوی باز $\pi < \pi$ حول مبدأ \mathbb{R}^* محدود شده است \square که می‌توان آن را از طریق نگاشت نمایی با $S^* \setminus n$ یکی گرفت. توجه داشته باشید که $\mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{G, B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi)}$ خوش تعریف است زیرا $Stab_n \cong G$ شامل ایزومتری‌ها است، که این دلالت بر $O(2) = G = SO(2)$ یا $B_{\mathbb{R}^*}$ دارد، که تحت عمل آنها (\cdot, π) بسته است. ملاوه بر این ضریب دترمینان را از محدودیت G -راهبری‌پذیری عمومی‌تر در معادله (۸۶) حذف کردیم زیرا $|\det g| = O(2) \leq G$. محدودیت کرنل ما به طور قابل توجهی ساده‌تر از محدودیت $\mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{\text{Stab}_n}$ است زیرا کرنل را به صورت محلی نسبت به یک پیمانه منفرد توصیف می‌کند، به جای اینکه به صورت سراسری نسبت به یک اطلاس از پیمانه‌ها توصیف کند. توجه داشته باشید که ما فرض همواری را روی کرنل‌ها حذف کردیم، زیرا همواری یا پیوستگی میدان‌های ویژگی توسط $\psi_{TM,n}^N$ مورد بحث قرار نگرفته است. این ویژگی را می‌توان به راحتی با خواستن اینکه کرنل‌های G -راهبری‌پذیر برای $v \in \mathbb{R}^*$ که به سمت π می‌رود، به مقادیر یکسانی همگرا شوند، که از طریق نگاشت نمایی متناظر با قطب جنوب است، اضافه کرد.

فضاهای کرنل‌های G -راهبری‌پذیر روی $S^* \setminus n$ و کرنل‌های G -راهبری‌پذیر روی $B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi)$ ایزومورف هستند، یعنی کرنل‌های آنها با یک نگاشت وارون‌پذیر Ω که محدودیت‌های کرنل را رعایت می‌کند، یکی گرفته می‌شوند:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{G, B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi)} & \xrightarrow{\Omega} & \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{\text{Stab}_n} \\ & \xleftarrow{\Omega^{-1}} & \end{array} \quad (450)$$

این ایزومورفیسم (یا بهتر بگوییم وارون آن Ω^{-1}) را می‌توان به عنوان مشابه پول‌بک انتقال‌دهنده از میدان‌های ویژگی در نظر گرفت: این ایزومورفیسم مقادیر کرنل را از نقاط $\psi_{TM,n}^N$ در $S^* \setminus n$ به مختصات نرمال ژئوذیک $v \in B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi)$ پول‌بک می‌کند. برای بیان مقادیر کرنل از تمام نقاط $p \in S^* \setminus n$ نسبت به همان پیمانه، این ایزومورفیسم انتقال‌دهنده‌های لوی-چبوتا $(g_{n \leftrightarrow p}^{NP}) \rho(g_{n \leftrightarrow p}^{NP})^{-1}$ را از p در امتداد ژئوذیک‌ها به قطب شمال n اعمال می‌کند. علاوه بر این، مقادیر کرنل را با عنصر حجم ریمانی $(\cdot)_{ij}$ نسبت $\sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|} := \sqrt{|\det(\eta_p(\frac{\partial}{\partial v_i}|_p, \frac{\partial}{\partial v_j}|_p))_{ij}|}$ به سیستم مختصات نرمال ژئوذیک (چارت مختصاتی) $\psi_{TM,n}^N$ تغییر مقیاس می‌دهد.^{۱۲۱} قضیه زیر ایزومورفیسم فضای کرنل را به طور رسمی تعریف و اثبات می‌کند.

قضیه ۱.۱۱ (کرنل‌های راهبری‌پذیر کروی در مختصات ژئوذیک). فرض کنید \mathcal{I} هر گروه ایزومتری متعددی از S^* باشد و $Stab_n$ پایدارساز آن در قطب شمال $S^* \setminus n$ باشد. با توجه به هر انتخاب از پیمانه $\psi_{TM,n}^N$ در این قطب، فرض کنید $G \leq GL(2)$

^{۱۲۰} تبدیلات پیمانه القا شده توسط ایزومتری را با $(\xi, h(p, \xi))$ نشان می‌دهند، با این فرض که پیمانه‌های در (p, ξ) در P دارای یکسان هستند. تعریف آنها از $(p, \xi) h(p, \xi)$ مشابه معادله (۴۹۳) است.

^{۱۲۱} توجه داشته باشید که پایه‌های مختصاتی $[\frac{\partial}{\partial v_i}|_p, \frac{\partial}{\partial v_j}|_p]$ که توسط مختصات نرمال ژئوذیک $B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi) \rightarrow S^* \setminus n$ دارند اما فقط برای تصحیح حجم ریمانی هنگام انتگرال گیری در مختصات نرمال ژئوذیک روی کرنل را می‌شوند.

گروه ساختاری ایزومورف باشد که $\text{Stab}_n \xrightarrow{\sim} G$, $\xi \mapsto \psi_{TM,n}^N \circ \xi_{*TM} \circ (\psi_{TM,n}^N)^{-1}$ نمایش می‌دهد. فضای $\mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{\text{Stab}_n}$ از کرنل‌های G -راهبری‌پذیر روی $S^r \setminus -n$ توسط [۳۱] (معادله (۴۴۸)) سپس با فضای

از کرنل‌های G -راهبری‌پذیر روی گوی باز (۴۴۹) ایزومورف است. ایزومورفیسم فضای کرنل

$$\Omega : \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{G, B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{\text{Stab}_n} \quad (451)$$

با

$$\Omega(K) : S^r \setminus -n \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}, \quad p \mapsto [\Omega(K)](p) := K(\psi_{TM,n}^N \log_n p) \rho_{\text{in}}(g_{n \leftarrow p}^{NP}) \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial^0}|}^{-1} \quad (452)$$

داده می‌شود اگر کرنل نسبت به پیمانه‌های (بالقوه مستقل) N در n و P در p بیان شود. وارون آن با

$$\Omega^{-1}(\kappa) : B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}, \quad v \mapsto [\Omega^{-1}(\kappa)](v) := \kappa(\exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1} v) \rho_{\text{in}}(g_{n \leftarrow p}^{NP})^{-1} \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial^0}|}, \quad (453)$$

داده می‌شود، که در آن ما $p := \exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1} v$ را به صورت مخفف نوشتیم.

اثبات: با جایگذاری این دو عبارت، به راحتی می‌توان دید که $\Omega^{-1} \circ \Omega = \text{id}_{\mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{\text{Stab}_n}}$ یک وارون خوش‌تعريف برای Ω است زیرا $\Omega \circ \Omega^{-1} = \text{id}_{\mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{\text{Stab}_n}}$. بخش فنی اثبات این است که نشان دهیم این دو محدودیت کرنل یکدیگر را نتیجه می‌دهند، که این کار در پیوست ج ۱ انجام شده است. \square

توجه داشته باشید که ضریب مقیاس‌بندی حجم برای برقراری ایزومورفیسم بین فضاهای کرنل ضروری نیست اما برای معادل ساختن انتگرال کانون‌لوشن کروی روی $S^r \setminus -n$ با انتگرال کانون‌لوشن GM روی $B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)$ لازم است.

توجه داشته باشید که $\kappa \star_{S^r} f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{III}})$ از یک میدان ویژگی $f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{III}})$ با کرنل‌های راهبری‌پذیر کروی $\kappa \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{\text{Stab}_n}$ در مختصات تعريف می‌کنند. با توجه به پیمانه‌های p و Q در P (اشتباه تایپی در متن اصلی، باید p در q و Q در P باشد)، فرض کنید $\phi_p \in \mathcal{I}$ ایزو‌متري یکتایی باشد که قطب شمال را به p منتقل می‌کند، یعنی $\phi_p(n) = p$. $\phi_p(n)$ ، $\phi_p(q)$ و چارچوب در n را به چارچوب در p منتقل می‌کنند، یعنی $\phi_p(g_{\phi_p(n)}^{PN}(n) = e)$. علاوه بر این، فرض کنید X پیمانه در $(\phi_p)^{-1}(q)$ باشد. کانون‌لوشن کروی سپس در [۳۰] نسبت به این پیمانه‌ها به صورت نقطه‌ای با

$$[\kappa \star_{S^r} f]^P(p) := \int_{S^r \setminus -p} \kappa(\phi_p^{-1} q) \rho_{\text{in}}(g_{\phi_p^{-1}(q)}^{XQ}) f^Q(q) dq = \int_{S^r \setminus -p} \kappa(\phi_p^{-1} q) \rho_{\text{in}}(g_{\phi_p^{-1}(q)}^{XQ}) f^Q(q) dq, \quad (454)$$

تعريف می‌شود، که در آن ما نقطه متقابل $-p$ را در مرحله دوم بدون تغییر نتیجه حذف کردیم.^{۱۲۲} به طور شهودی، این عملیات یک ویژگی خروجی را در p با (۱) گرفتن هم کرنل و هم میدان ورودی، (۲) دوران دادن آنها از طریق ϕ_p^{-1} به طوری که p به قطب شمال منتقل شود (از طریق تبدیل پیمانه القا شده برای بردار ویژگی) و (۳) انتگرال گیری از حاصل‌ضرب آنها روی کره، محاسبه می‌کند. بنابراین، این عملیات به جای اشتراک مستقیم وزن‌ها روی فضاهای مماس، همانطور که مانجام می‌دهیم، وزن‌ها را از طریق عمل ایزو‌متري به اشتراک می‌گذارند. بنا به تعریف ϕ_p ، هر دو تعريف از اشتراک وزن، کرنل را در مکان هدف p به گونه‌ای جهت‌دهی می‌کنند که با چارچوب انتخاب شده (p) σ^P در این مکان تراز شود. قصبه زیر اثبات می‌کند که کانون‌لوشن GM با یک کرنل $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{G, B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)}$ معادل کانون‌لوشن کروی با کرنل کروی منتظر $\Omega(K) \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{\text{Stab}_n}$ است.

قضیه ۲.۱۱ (کانون‌لوشن‌های راهبری‌پذیر کروی به عنوان کانون‌لوشن‌های III). فرض کنید Stab_n زیرگروه پایدارساز هر گروه ایزو‌متري متعددی \mathcal{I} از S^r باشد و $G \leq \text{GL}(2)$ هر گروه ساختاری ایزومورف باشد. علاوه بر این، فرض کنید $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{G, B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)}$ هر کرنل G -راهبری‌پذیر روی گوی باز $B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)$ با شاعع π باشد (معادله (۴۴۹)) و فرض کنید $\Omega(K) \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{\text{Stab}_n}$ کرنل $\Omega(K)$ راهبری‌پذیر متناظر آن روی $S^r \setminus -n$ باشد (معادلات (۴۴۸) و (۴۵۲)). کانون‌لوشن GM (در اینجا برایوضوح با \star_{GM} نشان داده شده) با K سپس معادل کانون‌لوشن کروی (۴۵۴)، معادله (۴۵۴) توسط $\Omega(K)$ است، یعنی

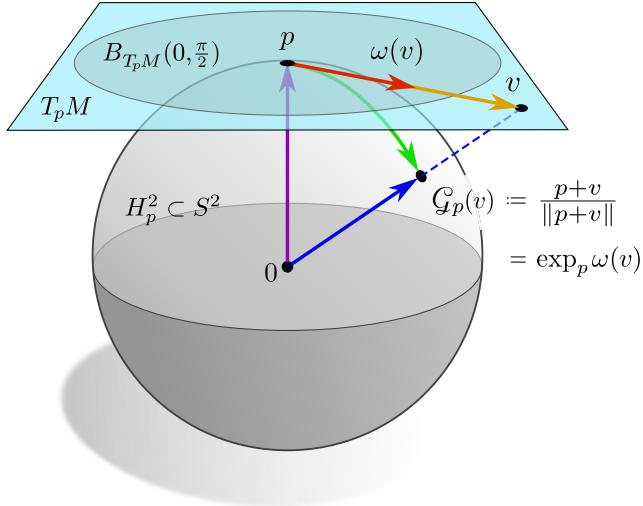
$$\Omega(K) \star_{S^r} f = K \star_{GM} f \quad (455)$$

برای هر میدان ویژگی کروی $f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{III}})$ برقرار است.

اثبات: اثبات در پیوست ج ۲. اراده شده است. \square

این اثبات ادعای ما را توجیه می‌کند که مدل‌های [۹۷، ۵۱، ۵۴، ۲۹] که در این بخش مورد بحث قرار گرفتند، همگی موارد خاصی از کانون‌لوشن‌های GM هستند.

^{۱۲۲} این فرمول‌بندی عمومی‌تر از فرمول‌بندی در معادله (۴۴۴) است. دومی برای کرنل‌های اسکالر را به میدان‌های ویژگی منظم نگاشت می‌دهند، بازیابی می‌شود.



شکل ۳.۱۱: تصویر نومونیک $G_p : T_p M \rightarrow H_p^\circ \subset S^r$ از فضای مماس در p به نیمکره بالایی $H_p^\circ \subset S^r$ حول p هنگامی که کره به عنوان جایگذاری شده در \mathbb{R}^r تفسیر شود، تصویر نومونیک $G_p(v)$ ($v \in T_p M \subset \mathbb{R}^r$) با مجموع $(\cdot, \frac{\pi}{r})$ (بنفش) و برای $v \in H_p^\circ \subset S^r$ ($v \in B_{T_p M}(\cdot, \frac{\pi}{r})$ (زرد) در فضای محیطی، و به دنبال آن یک نرمالسازی $\omega(v) = \arctan(\|v\|)$ (قرمز) از طریق نگاشت نمایی (سبز) است. بنابراین، کانولوشن‌های کروی مبتنی بر تصویر نومونیک در GM کروی با کرنل‌های دارای تاب شعاعی خاصی از کانولوشن‌های GM عمومی‌تر هستند زیرا به تصویرهای هستند. کانولوشن‌های GM روی کل روى کنل روى کل کره به جای فقط نیمکره بالایی اجازه می‌دهند.

۳.۱۱ CNN‌های کروی همودای دوران سمتی در توپولوژی‌های استوانه‌ای

علاوه بر کانولوشن‌های کروی کامل‌ $(3)-SO(3)$ -ها، بسیاری از CNN‌های کروی طوری طراحی شده‌اند که نسبت به دوران‌های سمتی حول یک محور قطبی مشخص، همودا باشند. تمام مدل‌های مورد بحث در این بخش با بر $(2)-SO(3)$ -ساختار $\{e\}$ -نارودا که در شکل‌های ۵۷ و ۵۹ نشان داده شده است، با طور جایگزین، بر ساختار نشان داده شده در شکل ۶۰ تکه دارند. به دلیل بدیهی بودن گروه ساختار $G = \{e\}$. فضاهای کرنل نامحدود باقی می‌مانند ($\{e\}$ -راهبری‌پذیر)، ویژگی‌ها مطابق با اتصال بدیهی یکتائی $\{e\}$ -سازگار منتقل می‌شوند که با اتصال لوی-چیویتا کروی معمول متفاوت است. با این اطلاعات، و با نگاشت‌های نمایی صریح در معادله (۴۳۰)، کانولوشن‌های GM کروی در این بخش در تئوری کامل‌مشخص شده‌اند. در عمل، پیاده‌سازی‌ها، که در ردیف (۳۴) جدول ۶ فهرست شده‌اند، در پیاده‌سازی‌های عددی خود متفاوت هستند، که در ادامه به بحث در مورد آنها می‌پردازیم.

همزمان با تعریف ما از اشتراک وزن کانولوشنی، مدل‌های [۱۱۹، ۲۱۰، ۴۵، ۱۷۹] یک کرنل الگوی داده شده را روی فضاهای مماس با جهت‌دهی آن نسبت به چارچوب‌های $\{e\}$ -ساختار در نظر گرفته شده در شکل ۵۷ به اشتراک می‌گذارند. با این حال، برخلاف کانولوشن‌های GM تطبیق این کرنل‌ها با میدان ویژگی از طریق نگاشت‌های نمایی (یا پول‌بکهای انتقال‌دهنده) انجام نمی‌شود، بلکه از طریق تصویر نومونیک انجام می‌شود. این تصویر نومونیک در هر نقطه p با

$$G_p : T_p M \rightarrow H_p^\circ, \quad v \mapsto \frac{p + v}{\|p + v\|}, \quad (456)$$

تعريف می‌شود، که در شکل ۵۸ به تصویر کشیده شده است. جمع $v \in T_p M \subset \mathbb{R}^r$ با $p \in S^r \subset \mathbb{R}^r$ در اینجا در فضای \mathbb{R}^r جایگذاری نمایی شود و نرمال‌سازی نتیجه را به کره باز می‌گرداند. هم‌دانمه تصویر نومونیک، نیمکره «بالایی»

$$H_p^\circ := \{q \in S^r \mid \langle p, q \rangle_{\mathbb{R}^r} > 0\} \subset S^r \quad (457)$$

است که حول p متمرکز شده است. با توجه به این تفاوت در تصویرهای کرنل، ممکن است به نظر برسد که مدل‌های [۱۱۹، ۴۵، ۱۷۹، ۲۱۰] به عنوان کانولوشن GM توضیح داده نمی‌شوند (یا فقط به طور تقریبی). قضیه زیر، با این حال، اثبات می‌کند که تصویر نومونیک معادل یک تصویر از طریق نگاشت نمایی پس از اعمال یک تاب شعاعی

$$\omega : T_p M \rightarrow B_{T_p M}(\cdot, \frac{\pi}{r}), \quad v \mapsto \arctan(\|v\|) \frac{v}{\|v\|} \quad (458)$$

به فضاهای مماس است، که بردارهای مماس را به یک گوی باز با شاعع $\pi/2$ حول مبدأ منقبض می‌کند: قضیه ۳.۱۱ (تصویرهای نومونیک به عنوان نگاشت‌های نمایی دارای تاب). تصویر نومونیک G_p از $T_p M$ به نیمکره بالایی $H_p^\circ \subset S^r$ که در معادله (۴۵۶) تعریف شده است، معادل یک تصویر از تاب شعاعی آن $(\cdot, \frac{\pi}{r})$ (معادله (۴۵۸)) از طریق نگاشت نمایی است، یعنی نمودار زیر جایجایی است:

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{G_p} & H_p^\circ \subset S^r \\ \omega \downarrow & & \searrow \exp_p \\ B_{T_p M}(\cdot, \frac{\pi}{r}) & \xrightarrow{\quad} & \end{array} \quad (459)$$

در معادلات،

$$\mathcal{G}_p(v) = \exp_p \circ \omega(v) \quad (460)$$

برای هر $v \in T_p M$ و هر $p \in S^*$ برقرار است.

اثبات: اثبات با محاسبه ساده زیر داده می‌شود، که برای هر $v \in T_p M$ و $p \in S^*$ برقرار است:

$$\begin{aligned} \exp_p \circ \omega(v) &\stackrel{(1)}{=} p \cdot \cos(\|\omega(v)\|) + \frac{\omega(v)}{\|\omega(v)\|} \cdot \sin(\|\omega(v)\|) \\ &\stackrel{(2)}{=} p \cdot \cos(\arctan(\|v\|)) + \frac{v}{\|v\|} \cdot \sin(\arctan(\|v\|)) \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{p + v}{\sqrt{1 + \|v\|^2}} \\ &\stackrel{(4)}{=} \frac{p + v}{\|p + v\|} \\ &\stackrel{(5)}{=} \mathcal{G}_p(v) \end{aligned} \quad (461)$$

مراحل اول و دوم از تعریف صریح نگاشت نمایی کره جایگذاری شده، معادله (۴۵۰)، و تاب شعاعی، معادله (۴۵۸)، استفاده می‌کنند. مرحله سوم از آنجا نتیجه می‌شود که $\sin \circ \arctan(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ و $\cos \circ \arctan(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ در مرحله چهارم ما از این استفاده کردیم که $\|p\| = 1$ و $\langle p, v \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$. در حالی که مرحله آخر تصویر نومونیک، معادله (۴۵۶) را شناسایی کرد. \square

این قضیه دلالت بر این دارد که کانولوشن‌های مبتنی بر تصویر نومونیک در $[3, 4, 45, 119, 210, 179]$ در واقع موارد خاصی از کانولوشن‌های GM پس از یکی گرفتهن کردن‌ها از طریق تاب شعاعی ω هستند.^{۱۲۳} توجه داشته باشید که این یکی گرفتن نه تنها برای کردن‌های $\{e\}$ -راهبری‌پذیر بلکه برای هر زیرگروه $G \leq O(2)$ نیز برقرار است زیرا محدودیت‌های G -راهبری‌پذیری متناظر فقط بر بخش‌های زاویه‌ای کردن‌ها تأثیر می‌گذارند اما مستقل از بخش‌های شعاعی تاب‌داده شده هستند. ما علاوه بر این می‌خواهیم اشاره کنیم که تصویر مبتنی بر نگاشت نمایی در کانولوشن‌های GM از این جهت عمومی‌تر از تصویر کردن نومونیک است که می‌تواند کردن‌هایی را توصیف کند که فراتر از نیمکره بالای H_p حول p گسترش می‌یابند. توجه داشته باشید که هر دو تصویر کردن در حد عملی مرتبط کردن‌های کوچک، حتی بدون تاب شعاعی، معادل می‌شوند زیرا $\arctan(\|v\|) = \|v\| + \mathcal{O}(\|v\|^3) = \|v\| + \mathcal{O}(\|v\|^2)$.

پیاده‌سازی‌های $[3, 4, 45, 119, 210, 179]$ در پیوستار همگی با یکدیگر و با کانولوشن GM ما معادل هستند، با این حال، گسسته‌سازی‌های عددی آنها متفاوت است. $\dots [22], \dots [21], \dots [20], \dots [19]$ میدان‌های ویژگی را روی شبکه‌های نمونه‌برداری (تقریباً) یکنواخت روی کره گسسته‌سازی می‌کنند. به طور خاص، $[23] \rightarrow [22] \rightarrow [21] \rightarrow [19]$ از «مجموعه مارپیچ تعمیم‌یافته روی S^* » از $[152]$ به عنوان نقاط نمونه‌برداری استفاده می‌کنند، در حالی که $[20] \rightarrow [21] \rightarrow [22] \rightarrow [23]$ از رؤس یک ایکوسفر استفاده می‌کنند. از آنجا که تصویرهای نومونیک از شبکه‌های نمونه‌برداری کردن روی فضاهای مماس با شبکه نمونه‌برداری کروی مطابقت ندارند، نویسنده‌گان بین آنها درون‌بابی دوخطی انجام می‌دهند. ضرایب نمونه‌برداری کردن در اینجا می‌توانند در یک مرحله افلاین از پیش محاسبه شوند. کانولوشن واقعی سپس یک میدان ویژگی خروجی را با منقبض کردن کردن‌های تصویر شده و درون‌بابی شده در هر نقطه با میدان ورودی محاسبه می‌کند.

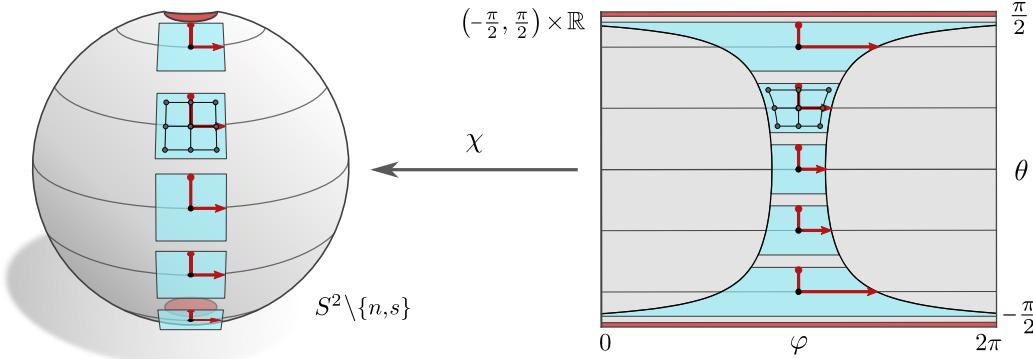
پیکسلی منظم روی یک تصویر هم‌مستطیلی از کره گسسته‌سازی می‌کنند. از نظر ریاضی، تصویر هم‌مستطیلی، که در شکل ۵۹ به تصویر کشیده شده است، به عنوان پول‌بک $\chi^* f = f \circ \chi : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^c$ از χ از معادله (۴۲۷) رسمیت می‌یابد:

$$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \xrightarrow{\chi} S^* \setminus \{n, s\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^c \quad (462)$$

$\underbrace{\phantom{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}}}^{\chi^* f}$

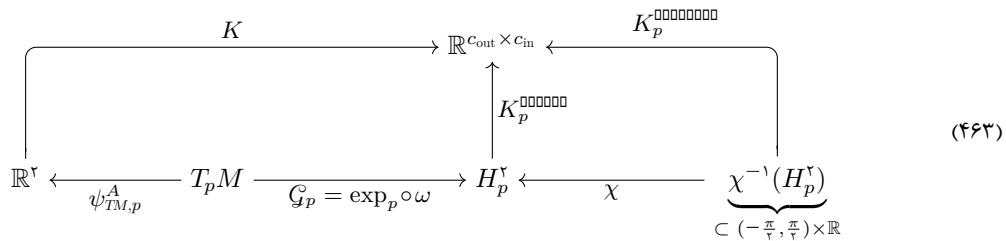
همانند رویکردهای قبلی، نویسنده‌گان یک شبکه نمونه‌برداری کردن را از طریق تصویر نومونیک از فضاهای مماس به کره تصویر می‌کنند. در یک مرحله اضافی، آنها آن را از طریق χ به تصویر هم‌مستطیلی نگاشت می‌دهند که در آن ضرایب درون‌بابی را بین شبکه نمونه‌برداری کردن تصویر شده و شبکه نمونه‌برداری میدان ویژگی محاسبه می‌کنند. از آنجا که تغییر شکل ناشی از تصویر هم‌مستطیلی مستقل از طول جغرافیایی $\phi \in \mathbb{R}$ است، کافی است آن را فقط یک بار برای هر عرض جغرافیایی $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \in \theta$ محاسبه کرد. نمودار زیر، که بنا به تعاریف K_p و K_p^* داده شده است، این را نشان می‌دهد:

^{۱۲۳} از نظر فنی، معادل بودن هر دو کانولوشن علاوه بر این نیازمند یک تغییر وابسته به شاعر در دامنه کردن برای در نظر گرفتن تغییر در اندازه حجم هنگام تاب دادن کردن است.



شکل ۵.۹ نمایش $\{e\}$ -ساختار (2) -ناوردا که توسط اکثر مدل‌های مورد بحث در بخش ۳.۱۱ در نظر گرفته شده است. تمام چارچوب‌ها $\left[\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{\cos(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]$ به سمت قطب شمال تراز شده‌اند و نسبت به متريک جايداري کره در $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow S^3 \setminus \{n, s\}$ راست‌هنجر هستند. نگاشت مختصات کروي $\chi : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \rightarrow S^3 \setminus \{n, s\}$ از معادله (۴۲۷) اجازه می‌دهد تا میدان‌های ويزگی کروي به میدان‌های ويزگی روی زوایای کروي $\times \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ پولبک شوند، که به آن تصویر هم‌مستطيلی $(1/\cos(\theta))$ گفته می‌شود. از آنجا که χ ايزوموريک نیست، ساختار کروي در مختصات $\{e\}$ با ضريب وابسته به عرض جغرافيايی $1/\cos(\theta)$ که به سمت قطب‌ها و اگرای شود، تغيير شكل می‌باشد. کانولوشن کروي روی اين $\{e\}$ -ساختار در [۱۱۹، ۴۵، ۳۳] با تصویر کردن و درون‌ياتی یک شبکه نمونه‌برداری کرنل روی فضاهای مماس به یک شبکه نمونه‌برداری میدان ويزگی روی کره پیاپه‌سازی می‌شود. اگر میدان‌های ويزگی در عرض روی تصویر هم‌مستطيلی نمونه‌برداری شوند، شبکه نمونه‌برداری کرنل در مرحله دوم از کره به یک شبکه نمونه‌برداری تغيير شکل یافته روی $\mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ نگاشت داده می‌شود [۱۷۹، ۲۱۰]. توجه داشته باشید که شبکه‌های نمونه‌برداری منظم روی تصویر هم‌مستطيلی سیگال را (نسبت به متريک کروي) به سمت قطب‌ها بيش‌نمونه‌برداری می‌کنند.

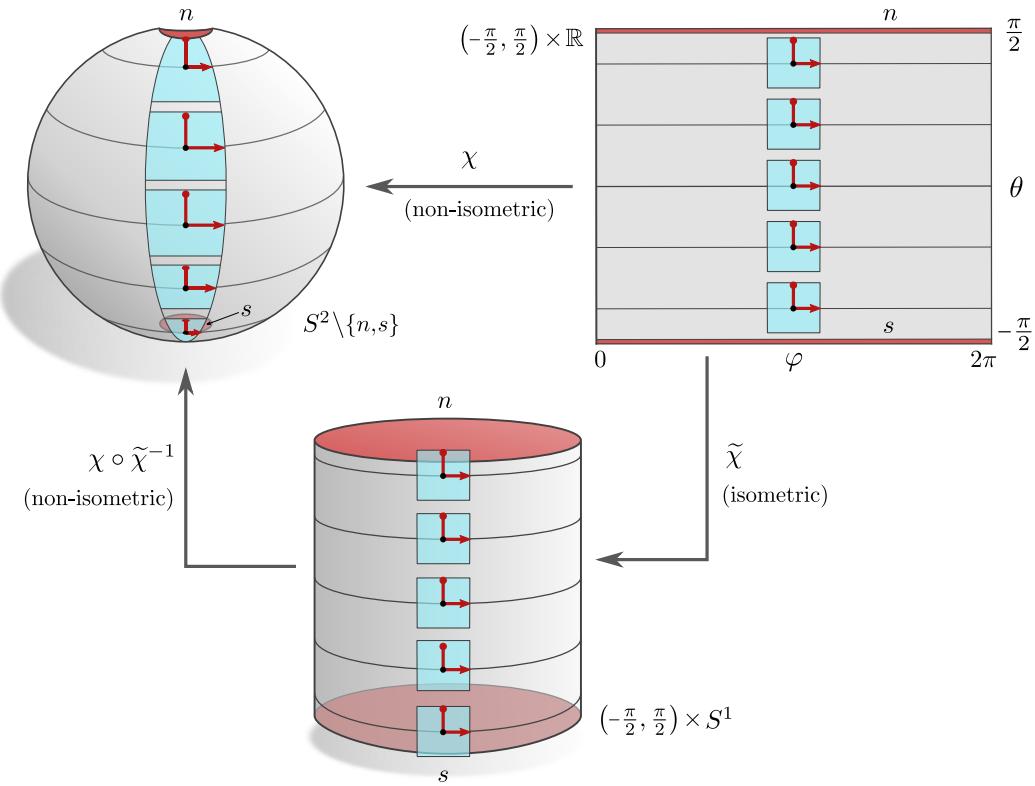
جابجایی است، یک نمای کلی از تصویر نمونيک یک کرنل $K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ به کره [۱۱۹، ۳۳، ۴۵] و به تصویر هم‌مستطيلی آن [۱۷۹، ۲۱۰] ارائه می‌دهد (توجه داشته باشید که G_p روی H_p وارون‌پذير است):



یک نقطه ضعف عمده گسيسته‌سازی میدان‌های ويزگی کروي از طريق یک شبکه پيكسلی منظم روی تصویر هم‌مستطيلی اين است که اين رو يك رود سیگال را به سمت قطب‌ها بيش‌نمونه‌برداری می‌کند.

انواع دیگری از کانولوشن‌های کروي روی تصویر هم‌مستطيلی توسط [۱۷۵، ۱۷۶] پيشنهاد شده‌اند. به جای پيش‌محاسبه الگوي نمونه‌برداری کرنل تغيير شکل یافته، [۱۷۶] اشتراك وزن را باز می‌کنند به طوري که هر عرض جغرافيايی کرنل مستقل خود را در يك کانولوشن يك‌بعدی اقليدسي اعمال می‌کند. سپس شبکه روی هر عرض جغرافيايی پيش‌آموزش داده می‌شود تا نتيجه‌ها را که هنگام کانولوکردن با يك کرنل که روی فضاهای مماس به اشتراك گذاشته شده است، بازيابي کند. اگر اشتراك وزن کانولوشن‌يک با يك اشتراك همگاري متناسب باشد، اين روش يابد به طور بهينه به روش‌های بعيتی بر هندسه توسيع [۱۷۹، ۲۱۰] همگرا شود. [۱۷۵] اين روش يابد به طور بهينه به روش‌های بعيتی بر هندسه توسيع [۱۷۶] اين رويکرد را بيشتر توسيع داده و از يك فرا-شبکه استفاده که يك کرنل تغيير شکل یافته را بر اساس يك کرنل الگوي ورودي مشترك و عرض جغرافيايی هدف پيش‌بیني می‌کند. هر دوی اين رویکردها وزن‌ها را روی مدارهای دایره‌اي (خطوط با عرض جغرافيايی ثابت) از گروه ايزوموري در نظر گرفته شده (۲)-SO $_n$ از $S^3 \setminus \{n, s\}$ به اشتراك که می‌گذارند؛ شبکه ۴۵ را مقایسه کنيد. بنابراین آنها به عنوان تبدیلات میدان کرنل با میدان‌های کرنل (2) -SO $_n$ -ناوردا شناسايي می‌شوند، که طبق قضيه ۸.۸ هستند.

با توجه به يك میدان ويزگي کروي در تصویر هم‌مستطيلی، ممكن است علاوه بر اين وسوسه شويم که آن را مستقيماً با يك CNN اقليدسي متعارف پردازش کنیم و از تصویر کرنل از فضاهای مماس صرف نظر کنیم، همانطور که به عنوان مثال در [۷۷، ۱۰۰] انجام شده است. همانطور که در بخش ۹ بحث شد، چنین کانولوشن‌های اقليدسي متاظر با کانولوشن‌های GM روی $\{e\}$ -ساختار کانونی از $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ هستند، که در شکل‌های ۵۰ و ۶۰ (بالا سمت راست) به تصویر کشیده شده است. اين $\{e\}$ -ساختار از چارچوب‌هاي $[\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}]$ تشکيل شده است، که نسبت به متريک اقليدسي از $\mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ راست‌هنجر هستند. اين چارچوب‌ها، با اين حال، نسبت به متريک کروي (معادله (۴۲۹)) راست‌هنجر نیستند، که در شکل ۶۰ (بالا سمت چپ) در انقباض چارچوب با ضريب $\cos(\theta)$ در جهت طولي مععكس شده است. بنابراین يك کانولوشن روی اين $\{e\}$ -ساختار از نظر هندسي متاظر با يك کانولوشن کروي نیست. اين بيشتر متاظر با يك کانولوشن GM روی يك



شکل ۶۰. نگاشت مختصات کروی $\{n, s\} \times \mathbb{R} \rightarrow S^3 \setminus \{n, s\}$: (θ, ϕ) را به نقاطی روی کره می‌فرستد. این نگاشت ایزومتریک نیست، که به این معنی است که پوشفوارد چارچوب‌های راست‌هنگار $\left[\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]$ نسبت به متريک اقليدسی روی $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ نیست. بنابراین یک کانولوشن اقلیدسی متعارف در مختصات $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$ نیست. کرنل‌های آن با یک ضریب $\cos(\theta)$ در جهت طولی منطبق می‌شوند. از آنجا که فاصله‌ها بر حسب زوایا اندازه‌گیری می‌شوند، این عملیات بیشتر متناظر با یک کانولوشن روی یک استوانه است. که از طریق نگاشت ایزومتریک $S^1 \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$ (معادله ۴۶۴) در \mathbb{R}^3 جایگذاری شده است. یک کانولوشن کروی به $\{e\}$ -ساختار نشان داده در شکل ۵۹ نیاز دارد.

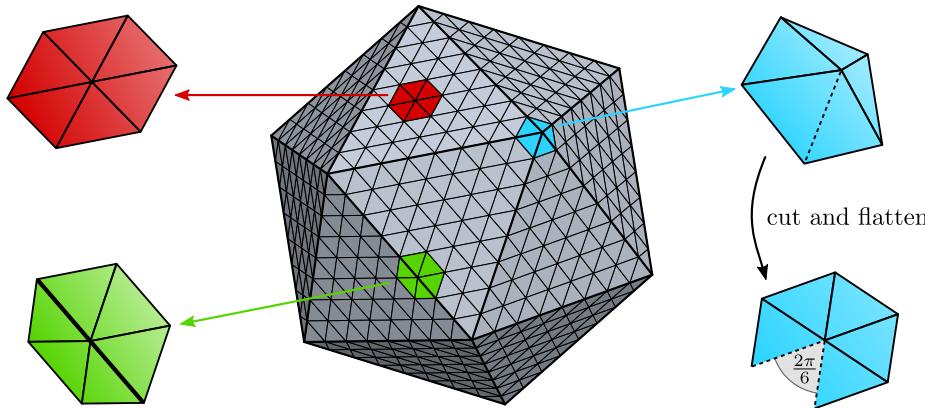
استوانه است، که از طریق نگاشت مختصاتی ایزومتریک

$$\tilde{\chi} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times S^1, \quad (\theta, \phi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ \theta \end{pmatrix} \quad (464)$$

در \mathbb{R}^3 جایگذاری شده است. در مقابل، $\{e\}$ -ساختار نشان داده در شکل‌های ۵۷ و ۵۹ از چارچوب‌های $\left[\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{\cos(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]$ تشکیل شده است، که نسبت به متريک کروی راست‌هنگار هستند. توجه داشته باشید که این چارچوب‌ها و متريک کروی با ضریب $1/\cos(\theta)$ هم‌تایان اقلیدسی کانونی خود روی $\mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ کشیده شده‌اند.

یک رویکرد جایگزین برای کانولوشن‌های کروی روی $\{e\}$ -ساختار نشان داده شده در شکل‌های ۵۷ و ۵۹ پیشنهاد می‌کند. به جای تعریف کرنل‌ها روی فضاهای مماس، آنها سیگنال را از طریق عملگرهای دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم به شکل $w_{id} + w_{e_i^A} \partial_1 + w_{e_i^B} \partial_2 + w_{e_i^C} \partial_3$ پردازش می‌کنند، که در آن ∂_i مشتق جزئی در جهت محور i ام چارچوب را نشان می‌دهد و وزن‌های $w \in \mathbb{R}^{c_{out} \times c_{in}}$ در طول آموزش بهینه‌سازی می‌شوند. اینکه وزن‌ها مستقل از موقعیت هستند، متناظر با اشتراک وزن فضایی ما است. این به همراه ناوردایی $SO(2)$ از $\{e\}$ -ساختار، که عملگرهای دیفرانسیل در امتداد آن تراز شده‌اند، همودایی $SO(2)$ عملیات را تضمین می‌کند. در نظریه بیوسته، این مدل متناظر با یک کانولوشن GM در حد کرنل‌های بی‌نهایت کوچک است. در عمل، GM میدان ویژگی را روی یک مش ایکوسfer نمونه‌برداری می‌کنند و عملگرهای دیفرانسیل را بر حسب استنسیل‌های گسترده فضایی روی رؤوس مش نمایش می‌دهند. این کار، روش را معادل یک کانولوشن GM با کرنل‌های گسترده فضایی می‌کند.

مدل ۱۰۵. دوباره روی یک ایکوسfer عمل می‌کند، با این حال، با یک $\{e\}$ -ساختار به شدت تغییر یافته (ناهموار): به جای تراز کردن چارچوب‌های مرجع به طوری که همگی به سمت قطب شمال اشاره کنند، چارچوب‌ها به طور متناسب به سمت شمال یا جنوب اشاره می‌کنند. این طراحی از پیکسل‌بندی ایکوسfer، که وجوده مثلثی آن یا رو به شمال یا رو به جنوب هستند، الهام گرفته شده است. بنابراین پیکسل‌های مجاور



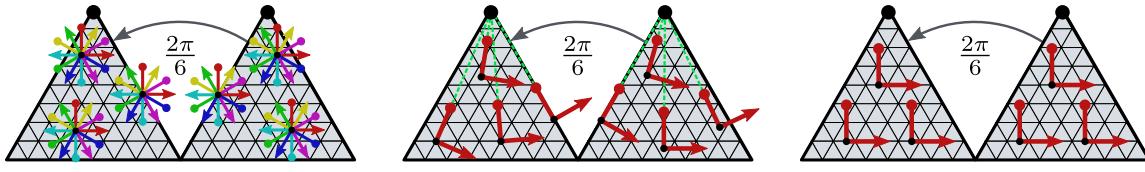
شکل ۶۱ بیست و چهارمی یک جسم افلاطونی است که در [۱۱۱، ۳۲، ۲۰۷] به عنوان یک تقریب تکه‌ای-تخت از هندسه کروی استفاده می‌شود. این جسم از ۱۲ رأس، وجه مثلثی متساوی‌الاضلاع و ۳۰ یال تشکیل شده است. این جسم یک شبکه نمونه‌برداری منظم را می‌پذیرد، که با تقسیم مکرر هر مثلث به چهار مثلث کوچکتر ساخته می‌شود. پس از ۷ تکرار، این رویه منجر به یک شبکه با $5 + 2^{n+1}$ رأس می‌شود. سه تکه برگشته شده، هندسه کیفی ستفاوت همسایگی‌ها را حول رؤوس روی وجه (قمر)، یال‌ها (سیز) و رؤوس بیست و چهارمی (آی) نشان می‌دهند. همسایگی قرمز بهوضوح تخت است. در حالی که همسایگی سبز در فضای جایگذاری خمیده است، انحنای گاؤسی ذاتی آن دوباره صفر است. این واقعیت در این امر منعکس می‌شود که می‌توان آن را به صورت آن برش (یعنی بدون برش) پهن کرد و به طور معادل، انتقال لوى-چیوپیتا در امتداد یک مسیر بسته حول گره مرکزی، نگاشت همانی است. همسایگی آبی باید در امتداد یک یال برپیده شود تا بتوان آن را پهن کرد. نقص زاویه‌ای، یعنی زاویه‌ای که برش هنگام پهن نوک تیز باز می‌شود، برابر با $\frac{\pi}{3}$ است. هنگامی که یک بردار یک بار حول رأس مرکزی همسایگی به صورت موازی منتقل می‌شود، به اندازه این نقص زاویه می‌چرخد. به جای داشتن انحنای گاؤسی مثبت ثابت مانند کره S^3 ، انحنای بیست و چهارمی در رؤوس آن متمرکز (تکین) است و در همه جای دیگر صفر است.

را می‌توان با کرنل‌هایی که نسبت به یکدیگر 180° چرخانده شده‌اند، پردازش کرد. نویسنده‌گان استدلال می‌کنند که فرآیند آموزش باید این دوران را با یادگیری کرنل‌های راهبری‌پذیر متناسب جبران کند. علی‌رغم دوcean‌های شدید کرنل، $\{e\}$ -ساختار تحت آن دسته از دوcean‌های سمتی که جارچوب‌های رو به شمال را روی خودشان نگاشت می‌دهند، ناوردا است، که منجر به یک همودایی تقریبی (2) $SO(2)$ کاتولوشن می‌شود. مدل‌های مورد بحث در این بخش به راحتی به دیگر اجسام دورانی ((2) -ناوردا) مانند استوانه از شکل ۶۰ یا تخم مرغ از شکل ۴۰ تعمیم داده می‌شوند. آنها علاوه بر این برای (2) -همودا بودن، هنگام در نظر گرفتن یک ارتقا از $\{e\}$ -ساختارها به \mathcal{R} -ساختارها، که متناظر با استفاده از کرنل‌های \mathcal{R} -راهبری‌پذیر است، همانطور که در شکل ۴۷ نشان داده شده، تطبیق داده می‌شوند.

۴.۱۱ تقریب‌های بیست و چهارمی از CNN‌های کروی

کره S^3 در علوم محاسباتی معمولاً اجسام افلاطونی، یعنی چندوجهی‌های منتظم محدب، تقریب زده می‌شود. در زمینه یادگیری عمیق، علاقه بیشتر بر روی بیست و چهارمی، (2) -متمرکز شده است، که در میان اجسام افلاطونی، نزدیک‌ترین تقریب به کره است [۱۵۶]. در حالی که هندسه ریمانی کره فقط تقریب زده می‌شود، اجسام افلاطونی این مزیت را دارند که تکه‌ای-تخت هستند و مشاهای منظمی را می‌پذیرند. این ویژگی‌ها امکان استفاده از روال‌های کاتولوشن مسطح را فراهم می‌کنند، که از نظر محاسباتی بهینه‌تر از روش‌های دو بخش قبل هستند. این بخش به بحث در مورد CNN‌های بیست و چهارمی از [۱۱۱، ۳۲۰، ۲۰۷] می‌پردازد، که به ترتیب بر G -ساختارها به \mathcal{R} -ساختارها نشان داده شده در شکل‌های ۷۱ و ۷۲ تکیه دارند. قبل از پرداختن به پیاده‌سازی‌های آنها بر حسب اطلاعی از چارت‌های آفین در شکل ۷۲، ما جزئیات بیشتری در مورد هندسه بیست و چهارمی و G -ساختارهای در نظر گرفته شده ارائه می‌دهیم.

هندسه بیست و چهارمی: بیست و چهارمی دو بعدی گستته است که از ۲۰ وجه مثلثی متساوی‌الاضلاع، ۱۲ رأس و ۳۰ یال تشکیل شده است. همانند کره 2 -بعدی، ما بیست و چهارمی را به عنوان جایگذاری شده در \mathbb{R}^3 تعریف می‌کنیم، که از آن متريک جایگذاری را در معادله (۴۲۹) به اirth می‌برد. فضاهای مماس جایگذاری شده $T_p M \subset \mathbb{R}^3$ روی وجه در اینجا به گونه‌ای تعریف می‌شوند که نرمال‌های آنها با نرمال‌های وجه منطبق باشند. فضاهای مماس روی رؤوس و یال‌ها را می‌توان از طریق میانگین نرمال‌های وجه مجاور تعریف کرد، همانطور که در بخش بعدی ۱۲ مورد بحث قرار می‌گیرد. با این حال، از آنجا که ما میدان‌های ویژگی را به عنوان نمونه‌برداری شده روی وجه بیست و چهارمی (که تقریباً همه جا است) در نظر می‌گیریم، از این انتخاب مستقل هستیم. با فرض اتصال لوى-چیوپیتا، انتقال موازی بردارهای مماس روی وجه به گونه‌ای عمل می‌کند که آنها را در فضای جایگذاری \mathbb{R}^3 موازی نگه دارد. هنگامی که بردارهای مماس از روی یک یال به صورت موازی منتقل می‌شوند، زاویه یکسانی را نسبت به یال در هر دو طرف حفظ می‌کنند [۱]. این انتقال را می‌توان به طور شهودی به این صورت تصور کرد که (۱) دو وجه مجاور را پهن کرد، (۲) بردار را روی یال مانند حالت معمول در یک فضای اقلیدسی دو بعدی منتقل کرده، و (۳) دو وجه را به جایگذاری اصلی خود بازگردانیم؛ به شکل ۶۵ و [۳۵] مراجعه کنید. بنابراین \mathbb{Z}^6 -دیگرها در \mathbb{R}^3 تکه‌ای-خطی هستند و از یال‌ها به گونه‌ای عبور می‌کنند که زاویه خروج آنها برابر با زاویه ورودشان باشد. بنابراین نگاشت‌های نمایی (v) به راحتی با دنبال کردن یک مسیر تکه‌ای-ثابت برای فاصله‌ای برابر با $\|v\|$ محاسبه می‌شوند. در



(ج) e -ساختار بیستوچهی تراز-شده-با- شبکه توسط [۳۲].

(ب) e -ساختار بیستوچهی تراز-شده-با- شمال توسط [۲۰۷].

(ا) e -ساختار بیستوچهی تراز-شده-با- شبکه توسط [۱۱۱].

شکل ۳۲ ایده مفهومی G -ساختارهای فرض شده در [۱۱۱، ۲۰۷، ۳۲]. به دلیل محدودیت فضای مجاور قطب شمال از بیستوچهی پنهان شده (شکل ۷۲) نشان داده شده است. $\{e\}$ -ساختار در شکل ۷۲ با تراز کردن تمام چارچوب‌ها در امتداد یال‌های «افقی» وجوه (با فرض عمودی بودن محور قطبی) تعریف می‌شود. شکل ۷۲ یک $\{e\}$ -ساختار جایگزین را نشان می‌دهد که چارچوب‌های آن به سمت قطب شمال تراز شده‌اند. این ساختار برخلاف $\{e\}$ -ساختار قبلی پیوسته است زیرا چارچوب‌ها روی یال‌های بربیده شده منگام جسبانیده مجدد یال‌ها به یکدیگر مطابق می‌شوند. e -ساختار در شکل ۷۲ با افزودن چارچوب‌هایی که با مضرب‌هایی از $\frac{\pi}{6}$ چرخانده شده‌اند به $\{e\}$ -ساختار از شکل ۷۱ آساخته می‌شود. از آنجا که این زاویه با نقص زاویه در یال‌های بربیده شده برابر است، e -ساختار تعریف شده به این ترتیب هموار (پیوسته) است. توجه داشته باشید که این دو $\{e\}$ -ساختار با نقص زاویه در انتقال لوى-چیوینتا سازگار هستند (یعنی تحت آن بسته نیستند) اما یک اتصال بدیهی جایگزین را القا می‌کنند. e -ساختار، در مقابل، با انتقال لوى-چیوینتا سازگار است.

عمل، نویسنده‌گان [۱۱۱، ۳۲، ۲۰۷] میدان‌های ویژگی را روی یک مش منظم نمونه‌برداری می‌کنند و فقط آن دسته از بردارهای مماس را در نظر می‌گیرند که به رئوس مش همسایه نگاشت می‌یابند.

شکل ۷۰ همسایگی‌های دیسکمانند را حول نقاط نمونه روی وجوه (قرمز)، یال‌ها (سبز) و رؤوس (آبی) بیستوچهی نشان می‌دهد. همسایگی قرمز کاملاً در داخل یک وجه قرار دارد و بنابراین تخت است. همسایگی سبز در فضای جایگذاری خمیده است، با این حال، انحنای ذاتی (یمانی یا گاوسی) آن هنوز صفر است زیرا انتقال لوى-چیوینتا بردارها یک بار حول رأس مرکزی، آنها را همانظر که هستند حفظ می‌کند. اینکه این مورد برقرار است معادل این واقعیت است که همسایگی سبز را می‌توان به صورت ایزومتریک پهن کرد، یعنی بدون کشش با برش آن، این پهن کردن ایزومتریک برای نوع آبی همسایگی‌ها حول رئوس ممکن نیست، که برای پهن شدن باید در یکی از یال‌ها بربیده شوند. با ساخته شدن از پنج مثلث متساوی‌الاضلاع، نوک تیز پهن شده یک نقص زاویه $\frac{\pi}{6}$ را نشان می‌دهد. هولونومی هر مسیر سته حول هر رأس (منفرد)، یعنی زاویه بین یک بردار دلخواه و انتقال آن یک بار حول حلقه، دقیقاً با این نقص زاویه داده می‌شود. در کل، این نتایج دلالت بر این دارند که انحنای گاوسی (گستته) بیستوچهی در همه جا به جز در رئوس صفر است، جایی که با هولونومی $\frac{\pi}{6}$ تکین است. هندسه ساده بیستوچهی اجازه می‌دهد تا آن را باز کرده و به صورت سراسری پهن کرد، همانطور که در شکل ۷۲ به تصویر کشیده شده است، که در [۱۱۱، ۳۲، ۲۰۷] برای یک پیاده‌سازی کارآمد از کانولوشن‌های GM بیستوچهی استفاده شد.

گروه ایزومتری کامل بیستوچهی (3) $Isom(M) = I_h \leq O(3)$ متناهی است و از 120 عضو تشکیل شده است. می‌توان آن را به عنوان حاصلضرب مستقیم $I \times R$ از زیرگروه بازتاب‌ها R و زیرگروه ایزومتری‌های حافظ جهت $Isom_+(M) \leq SO(3)$ که شامل 60 دوران است، ساخت. هر رأس p توسط پنج دوران گستته حول محور گذرنده از p و رأس متقابل آن پایدار می‌شود، که گروه دوری $C_5 \leq SO(2)$ را تشکیل می‌دهند. رأس p علاوه بر این توسط بازتاب‌ها نسبت به صفحه تعريف شده توسط محور دوران و هر یال خروجی از p پایدار می‌شود، به طوری که زیرگروه پایدارساز کامل آن با گروه دوچرخه (2) $Stab_p = D_5 \leq O(2)$ داده می‌شود. همودایی کانولوشن‌های GM بیستوچهی نسبت به گروه‌های ایزومتری $O(3)$ در [۳۲] نشان داده شده است که همودایی کامل (3) $SO(2)$ یا $O(2)$ CNN های I_h یا D_5 یا I یا C_5 در [۳۲] نشان داده شده است. GM را به خوبی تقریب می‌زند هنگامی که از افزایش داده دورانی پیوسته استفاده شود.^{۱۲۴}

G -ساختارهای بیستوچهی: کانولوشن‌های GM بیستوچهی توسط [۱۱۱] و [۲۰۷] (به طور ضمنی) $\{e\}$ -ساختارها را فرض می‌کنند، در حالی که مدل [۳۲] یک e -ساختار را فرض می‌کند. شکل ۷۱ ایده پشت این G -ساختارها را به تصویر می‌کشد، که در سه پاراگراف بعدی با جزئیات بیشتری توضیح می‌دهیم.

$\{e\}$ -ساختار توسط [۱۱۱] که در شکل ۷۱ نشان داده شده است، با تراز کردن اولین محورهای چارچوب در امتداد یال‌های «افقی» وجود متشابه متناظر تعريف می‌شود. هنگام پهن کردن بیستوچهی به یک صفحه همانطور که در شکل ۷۲ نشان داده شده است، تمام چارچوب‌های این $\{e\}$ -ساختار در این صفحه موازی هستند، که پیاده‌سازی کانولوشن‌های GM متناظر را سیار ساده می‌کند. طبق معمول، $\{e\}$ -ساختار یک اتصال بدیهی یکتا را مشخص می‌کند که ویژگی‌ها مطابق آن منتقل می‌شوند. این اتصال بدیهی در داخل وجوه، روی یال‌هایی که در شکل ۷۲ بربیده نشده‌اند و روی یال بربیده شده ارجوانی با اتصال لوى-چیوینتا منطبق است. با این حال، انتقال آن از روی یال‌های بربیده شده باقی‌مانده با انتقال لوى-چیوینتا متفاوت است زیرا چارچوب‌های $\{e\}$ -ساختار در آنچا به طور نایپوسته به اندازه زاویه $\frac{\pi}{6}$ می‌چرخد. از آنجا که $\{e\}$ -ساختار توسط دوران‌ها در D_5 حول محور قطبی حفظ می‌شود، کانولوشن‌های GM آن تقریباً (2) $SO(2)$ -همورا هستند، یعنی مدل‌های بخش قبلی ۳.۱۱ را تقریب می‌زنند. با این حال، $\{e\}$ -ساختار و بنابراین استنتاج شبکه روی یال‌های با نقص زاویه غیرصفر نایپوسته است. علاوه بر این، چارچوب‌های مرتع دقيقاً به سمت قطب شمال اشاره نمی‌کنند، همانطور که برای $\{e\}$ -ساختار کروی از بخش ۳.۱۱ و شکل ۷۷ صدق است.

^{۱۲۴} این در [۳۲] به صورت تجربی برای $I_h \leq SO(3)$ نشان داده شده است. اینکه این نتیجه به $I_h \leq O(3)$ تعمیم می‌یابد، روشن است زیرا گروه‌ها فقط در بازتاب‌ها متفاوت هستند، که کانولوشن‌های GM بیستوچهی را می‌توان نسبت به آنها دقیقاً همورا ساخت. این علاوه بر این برای $D_5 \leq O(2)$ و $C_5 \leq SO(2)$ نیز برقرار است، زیرا اینها زیرگروه‌هایی از $O(3)$ هستند.

[۲۰۷] پیشنهاد می‌کنند که دو مشکل اخیر را با کار کردن با $\{e\}$ -ساختار در شکل ۷۱ حل کنند. این ساختار به گونه‌ای تعریف شده است که چارچوب‌ها دقیقاً در امتداد تصویر محور قطبی روی وجود، یعنی به سمت قطب شمال، اشاره می‌کنند. این $\{e\}$ -ساختار در همه جا به جز در قطب‌های شمال و جنوب پیوسته است.^{۱۲۵} این ساختار به این معنا تقریب بهتری از $\{e\}$ -ساختار کروی از شکل ۷۸ است. $\{e\}$ -ساختار دوباره یک اتصال بدیهی یکتا را الفتا می‌کند. انتقال آن با انتقال لوی-چیویتا روی یال‌ها منطبق است، با این حال، هنگام انتقال روی وجوده با آن متفاوت است زیرا بردارها را به ارمای همراه با چارچوب‌ها می‌چرخاند. مانند $\{e\}$ -ساختار دیگر، این میدان چارچوب تحت دوران‌های سمتی در C_5 ناوردا است و بنابراین CNN‌های کروی هموردای دوران سمتی را تقریب می‌زنند.

C_6 -ساختار در شکل ۷۱ ج توسط [۳۲] با افزودن چارچوب‌هایی که با مضرب‌هایی از π^2 چرخانده شده‌اند به چارچوب‌های $\{e\}$ -ساختار از شکل ۷۱ آ تعریف می‌شود. این ساختار بهوضوح پیوسته است زیرا زوایای بین مجموعه چارچوب‌های مرچ در هر نقطه دقیقاً برابر با نقص‌های زاویه در یال‌های بریده شده است. این ساختار برخلاف دو $\{e\}$ -ساختار قبلی با انتقال لوی-چیویتا سازگار است زیرا گروه ساختاری C_6 با گروه هولونومی بیست‌وجهی منطبق است. C_6 -ساختار علاوه بر این تحت عمل ایزومتری‌های حافظ جهت بیست‌وجهی I حفظ می‌شود. بنابراین کاتولوشن‌های GM روی این C_6 -ساختار، های کروی کامل‌هموردای دورانی $(SO(3))$ را از بخش ۲.۱۱ تقریب می‌زنند.

پیاده‌سازی‌ها: برای پیاده‌سازی کاتولوشن‌های GM روی G -ساختارهای متناظر، [۱۱۱]، [۲۰۷] و [۲۰۰] [۲۲] یک شبکه منظم را روی وجوده بیست‌وجهی فرض می‌کنند؛ به شکل ۷۰ مراجعه کنید. این شبکه شش ضلعی منظم با تقسیم مکرر یال‌ها و جایگزینی هر مثلث با چهار مثلث کوچکتر ساخته می‌شود. در وضوح π^2 این کار منجر به یک شبکه با $+2 + 5 \cdot 2^{n+1}$ رأس می‌شود. توجه داشته باشید که این شبکه بنا به ساختار، دقیقاً تحت ایزومتری‌های بیست‌وجهی مقارن است، که منجر به یک هموردایی دقیق $Isom_{GM}$ کاتولوشن‌های GM گسترش‌سازی شده می‌شود.^{۱۲۶} [۱۱۱] پیشنهاد کردند که میدان‌های ویژگی بیست‌وجهی را نسبت به اطلسی از چارت‌ها که در شکل ۷۲ نشان داده شده است، نمایش دهند. این چارت‌ها این مزیت را دارند که شبکه‌های شش ضلعی روی وجوده بیست‌وجهی را به شبکه‌های پیکسلی مربعی معمول نگاشت می‌دهند. با این حال، توجه داشته باشید که چارچوب‌های راست‌هنچار روی بیست‌وجهی در این نمایش تغییر شکل می‌یابند، به طوری که نسبت به متريک اقليدسی کانونی، راست‌هنچار نیستند. کرنل‌های کاتولوشن شش ضلعی روی بیست‌وجهی بر این اساس تغییر شکل می‌یابند و می‌توانند بر حسب کرنل‌های مربعی که به گونه‌ای ماسک‌گذاری شده‌اند که دو گوشه آنها با صفر پر شده است، پیاده‌سازی شوند.

کاتولوشن GM توسط [۱۱۱] چارچوب‌هایی را فرض می‌کند که همگی موازی هستند و بنابراین می‌توانند در داخل چارت‌ها، جایی که تکیه‌گاه کرنل از مزه‌های آن فراتر نمی‌رود، از طریق یک کاتولوشن اقلیدسی متعارف پیاده‌سازی شوند. در نقاطی که به یک یال بین چارت‌های مختلف نزدیک هستند، کرنل ویژگی‌ها را از آن سوی رش اپاشت می‌کند. همانطور که قبل از بخش ۴.۵ و شکل ۳۰ بحث و به تصویر کشیده شد، این کار به راحتی از طریق یک عملیات پدینگ انتقال پیاده‌سازی می‌شود که یک حاشیه از ویژگی‌های منتقل شده موازی را در اطراف آرایه پیکسل‌های مربعی قبل از اجرای عملیات کاتولوشن، پد می‌کند. برای انتقال بدیهی که به طور ضمنی توسط [۱۱۱] فرض شده است، این عملیات پدینگ فقط یک ردیف از ویژگی‌ها را در هر یال بدون تبدیل آنها کپی می‌کند. از آنجا که نویسنده‌گان گروه ساختاری بدیهی G را فرض می‌کنند، کرنل‌های شش ضلعی نامحدود باقی می‌مانند.

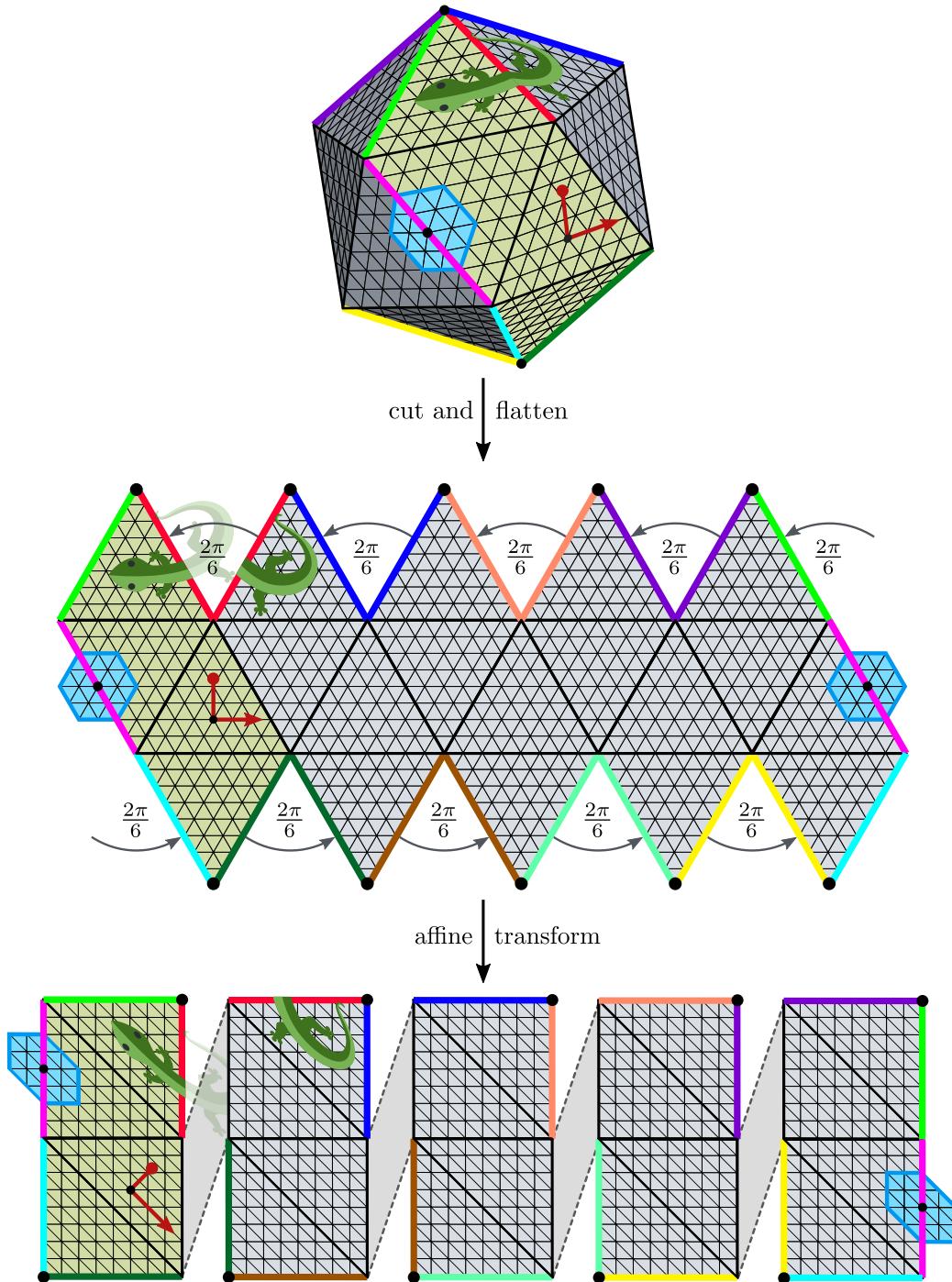
پیاده‌سازی [۳۲] عمده‌اً مشابه است، با این حال، تفاوت حیاتی آن در این است که از انتقال‌دهنده‌های لوی-چیویتا و کرنل‌های C_6 -راهبری‌پذیر استفاده می‌کند. به جای پدینگ مستقیم ردیف‌های پیکسل از روی یال‌ها، انتقال لوی-چیویتا یا زوایای مانند این است که ویژگی‌ها یا با $g = e$ برای تمام یال‌های داخلی و یال ارغوانی، یا با زوایه‌ای برابر با $\pm \frac{\pi}{2}$ از روی تمام یال‌های با نقص زاویه $\frac{\pi}{2}$ راهبری شوند، که علامت آن به جهت انتقال بستگی دارد. [۳۲] نمایش منظم C_6 را به عنوان نوع میدان فرض می‌کنند و کرنل‌های کاتولوشن را برای براورد کردن محدودیت راهبری‌پذیری مربوطه محدود می‌کنند. پس از پدینگ انتقال، کاتولوشن GM آنها به عنوان یک کاتولوشن اقلیدسی متعارف با این کرنل‌های راهبری‌پذیر پیاده‌سازی می‌شود. توجه داشته باشید که این کاتولوشن GM در داخل وجوده، یعنی به جز پدینگ انتقال، مشابه HexaConv توسط [۷۴] است.

از آنجا که کاتولوشن GM توسط [۲۰۷] یک گروه ساختاری بدیهی $\{e\}$ را فرض می‌کند، پدینگ انتقال دوباره به عنوان یک کپی بدیهی از پیکسل‌ها بدون راهبری پیاده‌سازی می‌شود و کرنل‌ها و بارهای نامحدود باقی می‌مانند. با این حال، از آنجا که چارچوب‌های $\{e\}$ -ساختار به سمت قطب شمال تراز شده‌اند، آنها دیگر در نمایش پیکسل مربعی مستطیلی موازی نیستند، که از یک پیاده‌سازی فوری بر حسب کاتولوشن‌های متعارف جلوگیری می‌کند. در عوض، کرنل‌ها باید در هر نقطه از شبکه در یک دوران متفاوت اعمال شوند. از آنجا که کرنل شش ضلعی را می‌توان با $\frac{\pi}{2}$ بدون استفاده از درون‌یابی چرخاند، و از آنجا که ترازها به سمت قطب شمال حداکثر با این زوایه با یکدیگر تفاوت دارند، نویسنده‌گان تقریب کارآمد زیر را برای این عملیات پیشنهاد می‌کنند: آنها روی هر وجه دو بار کاتولو می‌شوند، یک بار با کرنل اصلی و یک بار با نسخه دوران یافته‌آن با $\frac{\pi}{2}$. سپس دو میدان پاسخ به صورت خطی با هم ترکیب می‌شوند، با وزن‌های درون‌یابی از پیش محاسبه شده که به زوایای چارچوب‌های مرجع تراز شده-به-شمال نسبت به دو تراز کرنل (یعنی نسبت به شبکه پیکسلی) است. بنابراین این پیاده‌سازی تقریباً دو برابر پرهزینه‌تر از پیاده‌سازی‌های [۱۱۱] [۳۲] است.

یک پیاده‌سازی جایگزین از کاتولوشن‌های کروی روی بیست‌وجهی توسط [۴۶] پیشنهاد شده است. نویسنده‌گان سیگنال کروی را روی صفحات گسترده شده توسط ۲۰ وجه (که به عنوان تصاویر مماس شناخته می‌شوند) تصویر می‌کنند و متعاقباً یک CNN متعارف را روی هر

^{۱۲۵} برای دیدن این، تصویر کنید که یال بریده شده در شکل ۷۱ ب را دوباره به هم بجسیانید: چارچوب‌های روی نیمه چپ و راست یال سپس با هم منطبق می‌شوند، که این مورد در شکل ۷۱ آ صادق نیست.

^{۱۲۶} شبکه ایکوسفر، که توسط برخی از مدل‌های بخش‌های ۲.۱۱ و ۳.۱۱ استفاده می‌شود، با تصویر کردن گره‌های این شبکه به فاصله شعاعی واحد از مبدأ، یعنی به S^3 تعریف می‌شود. مدل‌های این بخش این تصویر را فرض نمی‌کنند بلکه مستقیماً روی هندسه بیست‌وجهی تکه‌ای-تخت کاتولو می‌کنند.



شکل ۶۳: پیاده‌سازی‌های $[111, 32, 207]$ میدان‌های ویزگی را نسبت به یک اطلس که بیست‌وجهی را با پنج چارت می‌پوشاند، نمایش می‌دهند. برای ساخت این چارت‌ها، بیست‌وجهی در امتداد یال‌های رنگی بریده شده و پهن می‌شود. سپس پنج ناحیه، که هر کدام از چهار مثلث تشکیل شده‌اند، به همدامنه‌های چارت مستطیلی برش داده می‌شوند. (۰۰۰۰۰۰۰۰) این عملیات شبکه شش ضلعی را به یک شبکه از پیکسل‌های مریبی نگاشت می‌دهد، به طوری که میدان‌های ویزگی بیست‌وجهی را می‌توان با مجموعه‌ای از پنج آرایه مستطیلی کدگذاری کرد. توجه داشته باشید که چارچوب‌های مرجع و کرنل‌ها بر این اساس در همدامنه‌های چارت تغییر شکل می‌یابند. انتقال لوى چیوپتا از روی تمام یال‌های رنگی به جز یال ارغوانی، یک دوران به اندازه $\frac{2\pi}{6}$ را به همراه دارد، که علامت آن به جهت انتقال بستگی دارد. این کار با پدینگ انتقال ردیف‌هایی از پیکسل‌ها در امتداد یال‌های بریده شده، همانطور که قبلاً در شکل ۳۰ توصیف شد، پیاده‌سازی می‌شود.
(مارموک‌ها با مجوز توییتر تحت لایسنس بین‌المللی CC-BY-NC-ND ۴.۰ اقیاس شده‌اند.)

یک از این تصاویر اجرا می‌کنند. ما این شبکه را در لیست خود نیاوردهیم زیرا این شبکه این نمایش‌ها را به طور مستقل از یکدیگر پردازش می‌کند، یعنی ویژگی‌ها را بین آنها منتقل یا پد نمی‌کند و بنابراین دقیقاً به عنوان کانولوشن GM توصیف نمی‌شود.

همانطور که قبل ذکر شد، نتایج تجربی CNN نشان می‌دهد که هندسه بیستوجه‌ی هندسه کروی را برای کاربردهای یادگیری عمیق به خوبی تقریب می‌زند. به طور خاص، نویسندهان CNN کروی خود را روی یک شبکه ایکوسfer با CNN بیستوجه‌ی تکه‌ای-تخت توسط $\text{SO}(3)$ مقایسه می‌کنند و در می‌یابند که هر دو علی‌رغم هندسه تغییر شکل یافته دومی، عملکرد مشابهی دارند. مشخص شده است که هموردایی CNN‌های بیستوجه‌ی تحت دوران‌های پیوسته در $\text{SO}(3)$ به طور قابل توجهی نقض می‌شود، با این حال، به نظر می‌رسد این فقط یک اثر بیش‌برازش است زیرا به راحتی و بدون از دست دادن عملکرد مدل با استفاده از افزایش داده $\text{SO}(3)$ خنثی می‌شود. همیشه، می‌خواهیم اشاره کنیم که C_h -هموردا توسط I_h را می‌توان به راحتی با در نظر گرفتن یک \mathcal{R} -ساختار و در نتیجه کرنل‌های راهبری‌پذیر بازتابی، D_h -هموردا ساخت. به طور مشابه، I_h -هموردا توسط I_h را می‌توان با ساختن کرنل‌های D_h -راهبری‌پذیر، تحت گروه ایزومتری کامل I_h بیستوجه‌ی هموردا ساخت.

۱۲ CNN‌های مستقل از مختصات روی سطوح عمومی

به جای عمل روی یک هندسه ثابت، کانولوشن‌های GM در این بخش روی منیفلدهای عمومی تعریف می‌شوند. ما مرور خود را به سطوح ($d = 2$) محدود می‌کنیم زیرا از پیاده‌سازی‌ها روی منیفلدهای (عمومی) با ابعاد بالاتر آگاه نیستیم. سینکال‌هایی که باید پردازش شوند، می‌توانند با مستقیماً توسط مجموعه داده ارائه شوند یا از هندسه سطوح محاسبه شوند. مثال‌هایی برای دسته اول شامل بافت‌های رنگی یا کمیت‌های فیزیکی مانند میدان‌های دما یا تنفس دیواره یک ظرف تحت فشار است. دسته دوم می‌تواند به عنوان مثال شامل احناهای گاؤسی و اصلی، توصیفگرهای اضافه‌ای کریل موج باشد. اکثر کاربردها تاکنون بر روی طبقه‌بندی بخش‌هایی از آنها [۱۴۰، ۱۹۴، ۷۹] یا یافتن تناظر بین سطوح مختلف [۱۲۰، ۱۵۵، ۱۰۳، ۹۴، ۴۰] متمرکز شده‌اند. کاربردهای دیگر شامل پیش‌بینی کمیت‌های فیزیکی مانند تنفس مکانیکی [۱۷۷] یا سنتز بافت‌های رنگی [۲۰۴، ۱۸۲] یا تغییر شکل‌های هندسی [۷۲] است.

طراحی CNN‌های اقلیدسی و کروی به شدت تحت تأثیر نیاز به موردی است. از آنجا که سطوح عمومی معمولاً دارای گروه‌های ایزومتری بدینهی هستند، این اصل را نیاز به مورد، که آزادی زیادی را در انتخاب G -ساختارها به ما می‌دهد. مدل‌هایی که در این بخش مور می‌کنیم را می‌توان به کانولوشن‌های سطوح راهبری‌پذیر-دورانی و $\{e\}$ -راهبری‌پذیر طبقه‌بندی کرد. هر دو رویکرد به مسئله عدم وجود یک جهت کانونی روی سطوح می‌پردازند، با این حال، آنها این کار را به روی اساساً متفاوت انجام می‌دهند. مدل‌های راهبری‌پذیر-دورانی، عدم وجود جهت مرجع را با طراحی هموردا خود در نظر می‌گیرند و با همه جهات به طور یکسان رفتار می‌کنند. $\text{SO}(2)$ -ساختار زیربنای آنها به جز یک انتخاب عملاً اهمیت از جهت‌گیری $\text{SO}(2)$ توسط متریک ریمانی ثابت می‌شود. بنابراین مدل‌های راهبری‌پذیر-دورانی عمدها در انتخاب انواع میدان متفاوت هستند. مدل‌های $\{e\}$ -راهبری‌پذیر، غیرهموردا هستند و بنابراین با یک نوع میدان (غیربدینهی) مرتبط نیستند. با این حال، آنها از یکدیگر با انتخاب خاص $\{e\}$ -ساختار که برای تعیین ترازهای کرنل استفاده می‌شود، متفاوت هستند.

۱.۱۲ هندسه‌ی سطوح جایگذاری شده	۱۷۲
۱.۱.۱۲ هندسه‌ی دیفرانسیل کلاسیک سطوح جایگذاری شده	۱۷۳
۲.۱.۱۲ هندسه‌ی گسته‌سازی شده‌ی مشهای سطحی	۱۷۴
۲.۱۲ کانولوشن‌های سطحی راهبری‌پذیر-دورانی	۱۸۰
۳.۱۲ کانولوشن‌های- $\{e\}$ سطحی راهبری‌پذیر	۱۸۶
۴.۱۲ تقریب‌های بیستوجه‌ی از CNN‌های کروی	۱۹۰

این بخش به صورت زیر سازماندهی شده است: ما در بخش ۱.۱.۱۲ با یک مقدمه (بسیار) کوتاه بر هندسه دیفرانسیل کلاسیک سطوح شروع می‌کنیم و به ویژه تفاوت بین هندسه ذاتی و خارجی آنها را مورد بحث قرار می‌دهیم. در عمل، اکثر پیاده‌سازی‌ها روی سطوح گسسته‌سازی شده عمل می‌کنند. بخش ۲.۱.۱۲ یک نمای کلی از هندسه مشهای سطحی مثلثی ارائه می‌دهد، که مسلماً رایج‌ترین گسسته‌سازی‌های سطح در مقالات یادگیری عمیق هستند. در بخش ۲.۱.۲ ما کانولوشن‌های سطحی راهبری‌پذیر-دورانی را مورد بحث قرار می‌دهیم. روش‌های ابتکاری برای ثابت کردن میدان‌های چارچوب که کانولوشن‌های سطحی $\{e\}$ -راهبری‌پذیر را تعریف می‌کنند، در بخش ۳.۱۲ مرور می‌شوند.

برای کامل بودن، در پاراگراف بعدی به چند رویکرد جایگزین برای تعریف کانولوشن‌های سطح اشاره می‌کنیم قبل از اینکه به محتوای اصلی این بخش پردازیم.

های سطوح فراتر از کانولوشن‌های GM : در حالی که تعداد قابل توجهی از CNN‌های سطح را می‌توان به عنوان کانولوشن‌های GM تفسیر کرد، بسیاری از طراحی‌های شبکه جایگزین پیشنهاد شده‌اند. این روش‌ها به عنوان مثال بر موارد زیر تکیه دارند: کانولوشن‌های گراف روی مشهای سطح، رویکردهای طیفی، رندرهای چند-نمای از جایگذاری‌های سطح، روش‌های حجمی در فضای جایگذاری، عملگرهای دیفرانسیل، یا عملگرهای

^{۱۷} جهت‌گیری انتخاب شده روی یک منیفلد (همبند، جهت‌پذیر) دلخواه است زیرا کرنل‌ها یاد گرفته می‌شوند. اگر جهت‌گیری مخالف انتخاب می‌شود، آموزش فقط منجر به کرنل‌های با جهت‌گیری مخالف می‌شود.

دیگری که بلافاصله روی ساختارهای داده مش عمل می‌کنند. مرور مختصر زیر به منظور ارائه یک نمای کلی از جهات مختلفی است که مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

یک روش برای طبقه‌بندی سطوح جایگذاری شده، رندر کردن آنها از چندین دیدگاه و پردازش رندرها با CNN‌های اقلیدسی متعارف است. ویژگی‌های حاصل سپس با تجمع روى ديدگاهها [۱۴۴، ۱۷۳] يا از طريق يك روش اجماع [۱۳۵] مى‌شوند. [۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰] انتخاب مى‌کنند که دیدگاه‌های دوربین را روی يك كره مطابق با يك زيرگروه گسته از (۳) SO قرار دهند، به عنوان مثال گروه بیست‌وچهار. سپس ویژگی‌های حاصل به طور مشترک از طريق يك کانونلوشن گروهی گسته (نه يك کانونلوشن سطح) پردازش مى‌شوند.

به جای تصویر کردن سطح با رندر کردن آن، مى‌توان آن را با تعریف يك چارت به \mathbb{R}^2 تصویر کرد. [۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰] چارت‌های سراسری تقریباً مساحت‌تغییر [۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰] را توپولوژی‌های کروی تعریف می‌کنند. این چارت‌ها ناپیوسته و به طور کلی زاویه‌تغییر [۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰] نیستند. يك CNN اقلیدسی متعارف برای پردازش تصاویر حاصل استفاده مى‌شود. ناپیوستگی‌ها را مى‌توان با پول‌بک کردن ویژگی‌های در امتداد نگاشته‌های پوششی چنبره‌ای [۱۱۷] يا عمومی‌تر [۸، ۶۸] دور زد. کانونلوشن اقلیدسی بعدی روی پول‌بک را نمی‌توان به عنوان يك کانونلوشن GM تفسیر کرد زیرا لایه‌های نگاشت پوششی، {e} ساختارهای متفاوت و ناسازگاری را روی سطح القا می‌کنند. [۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰] از يك اطلس از چارت‌های (تقریباً) ایزومتریک استفاده مى‌کنند \square همانطور که در انتهای بخش ۳.۲ بحث شد، این در واقع متناظر با يك کانونلوشن GM است.

روش‌های حجمی سطوح جایگذاری شده را با CNN‌ها در فضای جایگذاری \mathbb{R}^3 پردازش مى‌کنند، به عنوان مثال با تفسیر رئوس يك مش سطح به عنوان يك ابر نقطه [۱۴۳، ۱۴۲] يا با واکسل‌بندی ورودی. روش‌های مبتنی بر ابر نقطه در [۶۵] مور شده‌اند. [۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰] استدلال مى‌کنند که يك پارامترسازی ضمنی سطح اقتصادی‌تر است و شبکه‌هایی را پیشنهاد مى‌کنند که سطوح را به عنوان مزه‌های تصمیم‌گیری مدل‌سازی می‌کنند.

رویکردهای طیفی از قضیه کانونلوشن الهام گرفته‌اند. پایه فوریه روی يك منیفلد در اینجا با ویژه‌توابع عملگر لابلس-بلترامی داده می‌شود. شبکه‌های عصبی طیفی، نقشه‌های ویژگی را با دستکاری طیف فوریه آنها با عملگرها خطي یادگرفته شده پردازش مى‌کنند. از آنجا که پایه فوریه غیرمحلي است، [۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰] به جای آن از يك تبدیل فوریه پنجره‌های استفاده مى‌کنند؛ يك جایگزین، هارمونیک‌های منیفلد محلي شده [۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰] است. [۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰] مشهای سطح را به عنوان گراف تفسیر مى‌کنند. بنابراین آنها از تبدیلات فوریه گراف استفاده مى‌کنند، که بر اساس ویژه‌توابع لاپلاسین گراف هستند.

[۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰] مدلی را پیشنهاد مى‌کنند که بر اساس عملگرها دیفرانسیل است. ویژگی‌های اسکالار از طریق نفوذ گرما با يك زمان نفوذ یادگرفتني منتشر مى‌شوند. از آنجا که لاپلاسین (که در معادله گرما ظاهر مى‌شود) همسانگر است، نمی‌تواند به طور انتخابی به الگوها در دوران‌های خاص پاسخ دهد. بنابراین نویسندهان علاوه بر این يك عملگر گرادیان اعمال مى‌کنند و سپس حاصلضربهای داخلی از ویژگی‌های حاصل با مقادیر بردار مماس را می‌گیرند. توجه داشته باشید که هر دو عملیات ناوردای پیمانه هستند. این شبکه‌ها را مى‌توان بر روی تمام ساختارهای داده‌ای که عملگرها دیفرانسیل جزئی را می‌پذیرند، مانند ابرهای نقطه یا مش‌ها، پیاده‌سازی کرد.

تعداد قابل توجهی از شبکه‌ها بر روی ساختار منیفلد ریمانی عمل مى‌کنند، بلکه بر روی ساختار داده که سطوح را به صورت عددی نمایش مى‌دهد، عمل مى‌کنند. يك مثال، شبکه‌هایی هستند که گره‌ها و یال‌های يك مش سطح را به عنوان تشکیل دهنده يك گراف تفسیر مى‌کنند و در نتیجه از شبکه‌های گراف استفاده مى‌کنند. همودایی ایزومتری شبکه‌های گراف در [۷۵] بررسی شده است. [۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰] يك شبکه گراف با فیلترهای پویا، یعنی فیلترهایی که در طول پاس مستقیم از ویژگی‌ها پیش‌بینی مى‌شوند، پیشنهاد کردند. مدل [۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰] بر روی گراف‌های اولیه و دوگان مش‌ها عمل مى‌کند و از مکانیزم‌های توجه استفاده مى‌کند.

شبکه‌های مارپیچی [۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰] ویژگی‌ها را روی مش‌ها از طریق عملگرها مارپیچی محلی پردازش مى‌کنند [۶۳، ۱۰۸]. این عملگرها ویژگی‌ها را با دنبال کردن يك مسیر مارپیچی به سمت بیرون از گره مرکزی شمارش مى‌شود. يك پاسخ با اعمال يك LSTM به دنباله حاصل از ویژگی‌ها يا يك MLP به الحال آنها محاسبه مى‌شود. انتخاب اولین همسایه و جهت مارپیچ متناظر با يك انتخاب از {e} ساختار است. [۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰] کانونلوشن‌ها را به ترتیب روی وجوده و یال‌های مش تعریف مى‌کنند. هر دو مدل نسبت به دلخواه بودن ترتیب عناصر مش ناوردا ساخته شده‌اند، که مى‌تواند به يك طراحی همودای جایگشتی تعیین یابد.

برای مرورهای عمیق‌تر از چنین روش‌هایی، خواننده را به [۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰] و [۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰، ۰۰] ارجاع مى‌دهیم.

۱.۱۲ هندسه‌ی سطوح جایگذاری شده

این بخش يك مقدمه کوتاه بر هندسه سطوح ارائه مى‌دهد. برخی مفاهیم هندسه دیفرانسیل سطوح جایگذاری شده هموار در بخش ۱.۱.۱۲ مورد بحث قرار مى‌گیرند. بخش ۲.۱.۱۲ تلاش مى‌کند تا يك نمای کلی از راههای ممکن برای گسته‌سازی کمیت‌های دیفرانسیل روی مش‌های سطحی ارائه دهد.

برای يك بررسی عمیق‌تر از سطوح پارامتری شده، خواننده را به [۵۸] ارجاع مى‌دهیم. يك مقدمه مختصر و شهودی بر این موضوع و ارتباط آن با هندسه محاسباتی (گسته‌سازی شده) را مى‌توان در [۳۵] یافت.

۱.۱.۱۲ هندسه‌ی دیفرانسیل کلاسیک سطوح جایگذاری شده

به طور کلاسیک، سطوح به صورت خارجی توصیف شده‌اند، یعنی به عنوان غوطه‌ور (یا جایگذاری شده) در یک فضای محیطی اقلیدسی \mathbb{R}^3 . این غوطه‌وری را می‌توان به چندین روش معادل تعریف کرد، به عنوان مثال پارامتری‌سازی‌های محلی، وصله‌های مونژ یا توابع ضمنی. پارامتری‌سازی‌های محلی سطح، نگاشته‌های همواری هستند

$$\chi : \mathbb{R}^r \supset V \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3 \quad (465)$$

که زیرمجموعه‌های باز V از \mathbb{R}^r را در فضای محیطی \mathbb{R}^3 غوطه‌ور می‌کنند. اینها باید منظم باشند، یعنی مشتقات جزئی آنها

$$e_i = \frac{\partial \chi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2 \quad (466)$$

باید در \mathbb{R}^3 مستقل خطی باشند. مشتقات $e_1(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ و $e_2(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ فضاهای مماس جایگذاری شده $T_p M \subset \mathbb{R}^3$ را در $\chi(x_1, x_2) = p$ تولید می‌کنند.^{۱۲۸} بنابراین نرمال‌های سطح در فضای جایگذاری به خوبی تعریف شده و با $\frac{e_1 \times e_2}{\|e_1 \times e_2\|} = n$ داده می‌شوند. یک اطلس از پارامتری‌سازی‌های محلی سطح سازگار، امکان توصیف سطوحی را فراهم می‌کند که از نظر توبولوژیکی با صفحه در سطح جهانی متفاوت هستند.

متريک ريماني سطح \mathbb{M} که در اين زمينه اغلب به عنوان فرم بياني اوL آن شناخته می‌شود از فضای جایگذاری القا می‌شود. مطابق با تعريف مشابه برای کره جایگذاری شده S^2 در معادله (۴۲۹) داريم:

$$\eta_p(v, w) := \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^r} \quad \forall v, w \in T_p M \quad (467)$$

فرض کنيد $w = \sum_i v_i e_i$ و $v = \sum_i v_i e_i$ براي هرداراهای مماس در $T_p M$ باشند که بحسب براي هرداراهای ضرائب خود $w \in \mathbb{R}^r$ ، $v \in \mathbb{R}^r$ نسبت به پايه مختصاتي بيان شده‌اند. متريک نسبت به اين پايه با يك ماترييس ضرائب متقان نمايش نمايش داده می‌شود

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad (468)$$

با درايدهای ^{۱۲۹} $E = \langle e_1, e_1 \rangle_{\mathbb{R}^r}$ ، $F = \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbb{R}^r}$ و $G = \langle e_2, e_2 \rangle_{\mathbb{R}^r}$ عمل می‌کند. فرم بياني اوL هندسه ذاتي يك منيفلد ريماني دوبعدی کدگذاري می‌کند، یعنی آن بخشی از هندسه که مستقل از غوطه‌وری آن در فضای محیطی است.

هندسه خارجي يك سطح، یعنی جزيئات مربوط به غوطه‌وری خاص آن در فضای محیطی، توسط فرم بياني دوم آن ثبت می‌شود. نسبت به e_1 و e_2 اين فرم با ماترييس

$$II = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \quad (469)$$

$N = \langle n, \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \rangle_{\mathbb{R}^r} = 0$ و $M = \langle n, \frac{\partial \chi}{\partial x_1 \partial x_2} \rangle_{\mathbb{R}^r} = \langle n, \frac{\partial e_1}{\partial x_2} \rangle_{\mathbb{R}^r} = \langle n, \frac{\partial e_2}{\partial x_1} \rangle_{\mathbb{R}^r} = L = \langle n, \frac{\partial \chi}{\partial x_2} \rangle_{\mathbb{R}^r} = \langle n, \frac{\partial e_1}{\partial x_2} \rangle_{\mathbb{R}^r}$ با درايدهای $\frac{\partial e_1}{\partial x_2} \rangle_{\mathbb{R}^r}$ نمايش داده می‌شود. اين درايدها اساساً اندازه‌گيری می‌کنند که پايه‌های مختصاتي \mathbb{M} و در نتيجه فضاهای مماس در فضای محیطی (در جهت نرمال) هنگام حرکت در امتداد خطوط مختصاتي چقدر خم می‌شوند. اين فرم را می‌توان به عنوان مثال برای تعیين انحنای نرمال

$$\kappa_n(v) = \frac{v^\top II v}{v^\top I v} \quad (470)$$

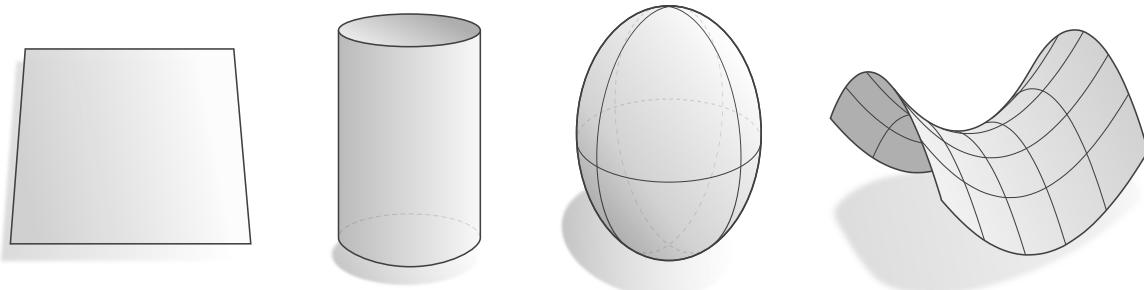
سطح در جهت p در جهت v استفاده کرد. به طور شهودی، اين انحنای نرمال را می‌توان به عنوان انحنای منحنی تعريف شده توسط تقاطع سطح با صفحه توپید شده جهت v و نرمال n در آن نقطه درک کرد. اين انحنای با معکوس شعاع $(v) = 1/\kappa_n(v) = r$ دايره بوسان بر منحنی در p مطابقت دارد و بنابراین اندازه‌گيری می‌کند که سطح هنگام حرکت در جهت v چقدر در جهت نرمال خم می‌شود؛ برای تجسم عالی اين وضعیت به [۳۵] مراجعه کنید. کمیت‌های مورد علاقه دیگر در مطالعه سطوح غوطه‌ور شده، انحنای‌های اصلی، میانگین و گاوی آنها هستند که می‌توانند بر حسب انحنای‌های نرمال بيان شوند و در شکل ۶۴ مثال زده شده‌اند. جهت‌ها (براي هرداراهای واحد در $T_p M$) که در آنها v_{\min} و v_{\max} در يك نقطه داده شده p جداگذشتار یا حداقل است، به عنوان جهات اصلی در p شناخته می‌شوند. انحنای‌های متناظر

$$\kappa_{\max} = \kappa_n(v_{\max}) \quad \square\square\square \quad \kappa_{\min} = \kappa_n(v_{\min}) \quad (471)$$

انحنای‌های اصلی در p هستند. مقدار میانگین آنها

$$\kappa_{\square\square\square} = \frac{\kappa_{\max} + \kappa_{\min}}{2} \quad (472)$$

^{۱۲۸} براي هرداراهای مشتق e_i در فرماليسم چارت ذاتي با پايه‌های مختصاتي مطابقت دارند؛ به پيوست آ.۳.۱ مراجعه کنيد.
^{۱۲۹} در نمادگذاري مدرن، ضرائب يك متريک (مستقل از مختصات) g نسبت به يك پايه داده شده اغلب با $g_{\mu\nu}$ نشان داده می‌شوند.



شکل ۶۴. سطوح جایگذاری شده با انحنای‌های خارجی کیفی متفاوت. چپ: صفحه با انحنای‌های اصلی و گاووسی صفر مشخص می‌شود $\kappa_{\max} = \kappa_{\min} = 0$. وسط چپ: یک استوانه یک جهت با انحنای مثبت و یک جهت با انحنای صفر دارد، یعنی $\kappa_{\max} > 0$ و $\kappa_{\min} = 0$. آن راست: گون نیز صفحه است، صفحه و استوانه به صورت محلی ایزومنتریک هستند، یعنی هندسه ذاتی آنها به صورت محلى قابل تشخیص نیست. توجه داشته باشید که صفحه را می‌توان لوله کرد (گسترش داد) تا یک استوانه تشکیل شود \square تفاوت بین این دو فقط در جایگذاری در فضای محیطی است. وسط راست: یک بیضی گون با انحنای‌های اصلی و گاووسی مثبت $\kappa_{\max} > 0$ و $\kappa_{\min} < 0$ در هر نقطه مشخص می‌شود. راست: سطح یک زین در جهات مختلف خم می‌شود، که دلالت بر عالم‌های مخالف انحنای‌های اصلی $\kappa_{\max} < 0$ و $\kappa_{\min} < 0$ منفی است.

به عنوان انحنای میانگین شناخته می‌شود. انحنای میانگین در نقاط «زین‌مانند» که $\kappa_{\min} = -\kappa_{\max}$ است، صفر است. سطوح کمینه در هر نقطه انحنای میانگین صفر دارند. حاصل ضرب

$$\kappa_{\text{محلی}} = \kappa_{\max} \cdot \kappa_{\min} \quad (473)$$

انحنای‌های اصلی به عنوان انحنای گاووسی شناخته می‌شود. این انحنا مثبت است اگر انحنای‌های اصلی هم‌علامت باشند، که به عنوان مثال برای بیضی گون‌ها صادق است. برای اینکه انحنای گاووسی منفی باشد، عالم‌انحنای‌های اصلی باید متفاوت باشد، مانند اطراف نواحی هذلولی (زین‌مانند). انحنای گاووسی صفر است اگر یکی (با هر دو) از مقادیر انحنای‌های اصلی صفر باشد، یعنی اگر سطح یک جهت باشد. یک مثال برای یک منیقلد با انحنای گاووسی صفر، استوانه است. گفته می‌شود چنین سطوحی گسترش‌پذیر هستند، که به این معنی است که می‌توان آنها را بدون تغییر شکل به یک صفحه پهن کرد، یا به طور دقیق‌تر، آنها به صورت محلی با صفحه ایزومنتریک هستند. کارل فریدریش گاووس در قسمیه شگفت‌انگیز خود اثبات کرد که انحنای گاووسی یک سطح در واقع یک ویژگی ذاتی است، یعنی به نحوه غوطه‌وری سطح در فضای محیطی بستگی ندارد. این انحنا در تناظر یک به یک با تناسور انحنای ریمانی (ذاتی) یک سطح است (و بنابراین با انحنای‌های ریچی و اسکالار آن نیز). یک ویژگی مهم انحنای گاووسی این است که انتگرال آن روی یک دیسک توپولوژیکی $D \subset M$ برابر با هولونومی $\delta_{\partial D}$ است، یعنی زاویه‌ای که یک بردار هنگام انتقال (لوی-چیوپتا) یک بار حول مرز دیسک ∂D می‌چرخد:

$$\int_D \kappa_{\text{محلی}} dp = \delta_{\partial D} \quad (474)$$

همانطور که در ادامه خواهیم دید، این رابطه را می‌توان برای تعیین انحنای گاووسی به مشاهده استفاده کرد، جایی که هولونومی $\delta_{\partial D}$ با نقص زاویه یک حلقه باز شده از وجوده (مانند همسایگی آبی در شکل ۷۰) مطابقت دارد.

از آنجا که کاتولوشن‌های GM فقط به هندسه ذاتی یک سطح بستگی دارند، خواننده ممکن است تعجب کند که چرا ما در مورد ویژگی‌های خارجی آنها مانند انحنای‌های اصلی بحث می‌کنیم. دلیل این است که کاتولوشن‌های GM با این وجود می‌توانند از هندسه خارجی یک سطح مطلع شوند، به عنوان مثال با کدگذاری آن در میدان‌های ویژگی. هندسه خارجی علاوه بر این ممکن است برای تراز کردن ابتكاری چارچوب‌های یک $\{e\}$ -ساختار و در نتیجه کرنل‌ها استفاده شود. برای مثال، $[106] \quad [84] \quad [100] \quad [100]$ چارچوب‌ها را در امتداد محور \mathbb{R}^3 تراز می‌کنند، در حالی که $[178] \quad [13] \quad [100] \quad [100]$ چارچوب‌ها را در امتداد جهت انحنای اصلی غالب سطح تراز می‌کنند. توجه داشته باشید که این روش‌های ابتكاری همیشه خوش تعریف نیستند: به عنوان مثال، تصویر محور \mathbb{R} روی یک فضای مماس «افقی» (در فضای محیطی) صفر است، و جهت انحنای اصلی غالب ممکن است تعریف نشده باشد، همانطور که در مورد کره صادق است.

۲.۱.۱۲ هندسه‌ی گستته‌سازی شده‌ی مشاهی سطحی

در اصل، امکان توصیف کاتولوشن‌های GM روی پارامتری‌سازی‌های محلی سطح همانطور که در بخش قبل توصیف شد، وجود دارد. در حالی که این رویکرد ممکن است برای برخی هندسه‌های ساده یا متقاضن مانند بیضی گون‌ها، هذلولی گون‌ها یا چنبره‌ها مناسب باشد، برای هندسه‌های پیچیده‌تر غیرعملی به نظر می‌رسد. در عمل، سطوح عمده‌ای به صورت گستته‌سازی شده ارائه می‌شوند، به عنوان مثال به شکل مشاهی مثلثی، مشاهی چهارضلعی، مشاهی نیم-یال، سطوح تقسیمی یا ابرهای نقطه. بدلیل استفاده از آنها \square هم به طور کلی و هم به طور خاص در توصیف کاتولوشن‌های GM سطحی که در دو بخش بعدی مور می‌کنیم \square ما در ادامه عمده‌ای بر روی مشاهی‌های مثلثی تمرکز خواهیم کرد. بنابراین هدف ما برای باقیمانده بخش فعلی این است که کمیت‌ها و تعاریف را از نظریه هموار گرفته و همتایان گستته آنها را روی مشاهی مثلثی مور

بحث قرار دهیم. متأسفانه، این آنالوگ‌های گسسته معمولاً یکتا نیستند، به طوری که تعداد زیادی از تعاریف غیرمعادل وجود دارد.^{۱۳۰} ما در ادامه سعی خواهیم کرد یک ایده کلی در مورد برخی از رایج‌ترین رویکردها برای گسسته‌سازی هندسه هموار سطوح بر حسب مشاهی مثلثی ارائه دهیم.

$$\text{توپولوژی، هندسه و جایگذاری مشاهی مثلثی: مشاهی مثلثی } (\mathcal{V}, \mathcal{F}) \text{ معمولاً بر حسب یک مجموعه از} \\ \mathcal{V} \subseteq \mathbb{N} \quad (475)$$

رئوس و یک مجموعه از

$$\mathcal{F} \subseteq \{\{i, j, k\} \mid i \neq j \neq k \in \mathcal{V}\} \quad (476)$$

وجوه مثلثی کدگذاری می‌شوند، که این شرط را برآورده می‌کنند که هر رأس حداقل در یکی از وجوه موجود باشد.^{۱۳۱} یک مجموعه از

$$\mathcal{E} = \{\{i, j\} \mid i \neq j \in \{i', j', k'\} \text{ و } \{i', j', k'\} \in \mathcal{F}\} \quad (477)$$

یال‌ها که وجوه را محدود می‌کنند، بالاصله نتیجه می‌شود. در عمل، اغلب یک مجموعه از

$$P = \{p_i \in \mathbb{R}^3 \mid i \in \mathcal{V}\} \quad (478)$$

موقعیت‌های رأس داده می‌شود، که یک جایگذاری از مش را در فضای محیطی \mathbb{R}^3 مشخص می‌کند. این جایگذاری طول‌های

$$l_{\{i, j\}} = \|p_j - p_i\| \quad (479)$$

یال‌های $\{i, j\}$ و مساحت‌های

$$\square_{\{i, j, k\}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \|(p_j - p_i) \times (p_k - p_i)\| \quad (480)$$

وجوه $\{i, j, k\}$ را نتیجه می‌دهد.

ما به طور خاص به مشاهی سطحی علاقه‌مندیم، که باید شرایط اضافی را برآورده کنند. برای فرمول‌بندی این شرایط، توجه داشته باشید که عناصر مش $\{i_1, \dots, i_n\}$ (که در آن $i_1 < \dots < i_n$ برای رئوس، یال‌ها یا وجوه است) n -سادک‌ها را القا می‌کنند، که به عنوان پوشش‌های محدب

$$\text{convex}(\{i_1, \dots, i_n\}) := \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j p_{i_j} \mid \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1 \text{ و } \alpha_j \geq 0 \forall j = 1, \dots, n \right\} \subset \mathbb{R}^3. \quad (481)$$

تعریف می‌شوند. مجموعه‌ای که تمام این سادک‌ها (عناصر مش) را در بر می‌گیرد، یک کمپلکس سادکی-۲ خالص را تشکیل می‌دهد [۴۱، ۴۵]. اینکه کمپلکس سادکی-۲ خالص است به این معنی است که هر سادک-۰ (رأس) و سادک-۱ (یال) زیرمجموعه‌ای از حداقل یک سادک-۲ (وجه) است. به عبارت دیگر، هیچ رأس یا یال منقطعی در مش وجود ندارد. فضای زیربنایی

$$\bigcup_{\{i_1, \dots, i_n\} \in \mathcal{V} \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{F}} \text{convex}(\{i_1, \dots, i_n\}) \stackrel{\text{Def}}{=} \bigcup_{\{i, j, k\} \in \mathcal{F}} \text{convex}(\{i, j, k\}) \subset \mathbb{R}^3 \quad (482)$$

از کمپلکس سادکی به عنوان اجتماع تمام سادک‌های آن تعریف می‌شود، که با توپولوژی معمول به عنوان یک زیرمجموعه از \mathbb{R}^3 مجهز شده است. یک مش سپس یک مش سطحی (مش مینیفلد) نامیده می‌شود اگر فضای زیربنایی یک سطح توپولوژیکی (مینیفلد)، به صورت اختیاری با مرز، باشد. به طور شهودی، این امر نیازمند (۱) این است که هر یال مجاور دو وجه (یا یکی در مرزها) باشد و (۲) اینکه وجوه اطراف هر رأس یک دیسک توپولوژیکی (یا یک نیم‌دیسک در مرزها) تشکیل دهند.

چنین مش‌های سطحی تعریف شده، همتایان گسسته سطوح ریمانی جایگذاری شده هستند. با این حال، از آنجا که کاتولوشن‌های GM مستقل از هندسه خارجی مینیفلد زیربنایی هستند، بحث مختصر در مورد هندسه ذاتی آنها آموختنده است. بنابراین مجموعه‌های رأس، یال و وجه \mathcal{V} ، \mathcal{E} و \mathcal{F} را در نظر بگیرید، اما مکان‌های جایگذاری P رئوس را کنار بگذارید. در مجموع، این مجموعه‌ها یک کمپلکس سادکی-۲ انتزاعی، \mathcal{F} علاوه بر \mathcal{V} را تشکیل می‌دهند که به عنوان خانواده‌ای از سادک‌های انتزاعی $\{i_1, \dots, i_n\}$ که تحت عمل زیرمجموعه‌گیری بسته است، تعریف می‌شود [۴۵]. اگر این کمپلکس سادکی-۲ (که اکنون انتزاعی است) (۱) خالص و (۲) به گونه‌ای باشد که «ستاره» هر رأس (که با سادک‌های حاوی آن رأس داده می‌شود) یک دیسک ترکیبیاتی تشکیل دهد، این یک سطح سادکی انتزاعی را تشکیل می‌دهد (که دقیقاً در صورتی است که مش جایگذاری شده

^{۱۳۰} [۱۲۴] این وضعیت را به این صورت توصیف می‌کند: «علی‌رغم استفاده گسترده از مش‌های مثلثی در گرافیک کامپیوترا، هیچ اتفاق نظری در مورد مناسب‌ترین روش برای تخمین وزنی‌گی‌های هندسه ساده مانند برداهای نرمال و انحنای روی سطوح گسسته وجود ندارد.» به طور مشابه، [۴۵] ادعا می‌کند: «هیچ راه «درست» واحدی برای گسسته‌سازی یک کمیت هندسه ایجاد نشده، بلکه راههای مختلف زیادی وجود دارد که هر کدام برای یک هدف خاص مناسب است.»

^{۱۳۱} وجوده به طور جایگزین می‌تواند به عنوان سه‌تایی‌های مرتب از رئوس تعریف شوند. ترتیب رئوس (یا بهتر بگوییم، کلاس‌های هم‌ارزی ترتیب‌ها تحت یک تعداد زوج از جایگشت‌ها) ممکن است برای کدگذاری جهت‌گیری وجوده استفاده شود. ما در عوض جهت‌گیری وجوده را همانند نظریه هموار خود با انتخاب یک دست‌سازی از چارچوب‌های مرجع کدگذاری خواهیم کرد.

یک مش سطحی باشد). سطوح سادکی انتزاعی را می‌توان به عنوان همتایان ترکیبیاتی منیفلدهای توپولوژیکی در نظر گرفت. آنها امکان محاسبه ناورداهای توپولوژیکی، به عنوان مثال مشخصه اوبلر

$$\chi_{\text{منیفلد}} = |\mathcal{V}| - |\mathcal{E}| + |\mathcal{F}|. \quad (483)$$

را می‌دهند. به عنوان یک ناوردای توپولوژیکی، مشخصه اوبلر برای هر دو فضای همسان ریخت، به ویژه برای یک منیفلد هموار و هر یک از مثلث‌بندی‌های آن، برابر است. برای مثال، بیست‌وجهی از بخش ۴.۱۲ دارای $2 = 20 - 30 + 12 = \chi_{\text{منیفلد}}^S$ است، که با $\chi_{\text{منیفلد}}^S$ برای کره ۲-بعدی مطابقت دارد.

برای رسیدن به یک توصیف ذاتی از هندسه یک سطح مثلث‌بندی شده، به یال‌های $E \in \{i, j, k\}$ طول یال $l_{\{i, j, k\}} > l_{\{i, j, i\}} + l_{\{i, j, k\}}$ را برای هر وجه $i, j, k \in \mathcal{F}$ بروآورده کنند. طول یال‌ها متريک‌های اقلیدسی (نوابع فاصله) را روی وجه و بنابراین یک متريک اقلیدسی تکه‌ای-تعريف شده را روی کل سطح القا می‌کنند. این متناظر با یک متريک ريماني (يا فرم بنائي اول) است که دور از رئوس اقلیدسی و در یک همسایگی کوچک حول رؤس «مخروط‌مانند» (تکين) است [۴۱، ۳۶].

برای بستن دایره به تعريف خارجي اوليه ما از مش‌های مثلثي، باید مش را در فضای محيطي \mathbb{R}^3 جايگذاري کرد. اطلاعات لازم در مورد هندسه خارجي با مجهز کردن مش به یک فرم بنائي دوم داده می‌شود. در محيط گستته، اين فرم را می‌توان به عنوان يك انتخاب از زاويه دووجهی (زاويه خمس) بين هر دو مثلث مجاور، يعني يك زاويه برای هر يال غيرمرزی مش، تعريف کرد. بافرض اينكه اين داده‌ها به طور سازگار انتخاب شده باشند^{۱۲۲}، امكان بازسازی جايگذاري، يعني موقعیت‌های رأس P ، تا حرکات صلب در $E^{(3)}$ وجود دارد [۱۰۹، ۱۸۹]. در حالی که یک جايگذاري از سطح برای کانولوشن‌های GM ذاتی ضروري نیست، تمام مقالات فهرست شده در ردیف‌های (۴۱-۳۷) جدول ۶ مدل‌های خود را روی مش‌های مثلثي جايگذاري شده ارزیابی می‌کنند.

فضاهای مماس و میدان‌های برداری: برای توصیف میدان‌های برداری روی مش‌های، و برای مجهز کردن مش‌ها به ساختار هندسی مانند اتصالات، لازم است یک مفهوم از فضاهای مماس که به آنها متصل هستند، تعريف شود. تعريف ناسازگار متعددی، که برای کاربرد خاص مورد نظر طراحی شده‌اند، در مقالات وجود دارد. از آنجا که میدان‌های برداری معمولاً در مکان‌های گستته نمونه‌برداری می‌شوند، کلاف‌های مماس گستته اغلب فقط به صورت جزئی تعريف می‌شوند، به عنوان مثال فقط روی وجه، يال‌ها یا رئوس. ما به طور خلاصه برخی از اين تعريفات را مرور می‌کنیم، يك برسی دقیق‌تر را می‌توان در [۳۹] یافت.

از آنجا که وجود (سادک‌های-۲) یک مش جايگذاري شده تخت هستند، می‌توان به طور طبیعی فضاهای مماس آنها را به عنوان آن دسته از زيرفضاهای دوبعدی \mathbb{R}^3 که در آنها قرار دارند، تعريف کرد [۱۸۹، ۳۵، ۳۷]. به طور خاص، با توجه به يك وجه $i, j, k \in \mathcal{F}$ ، می‌توان فضاهای مماس $T_p M = \text{span}(p_j - p_i, p_k - p_i) \subset \mathbb{R}^3$ را برای هر $p \in \text{convex}(\{i, j, k\})$ به عنوان پوشش خطی هر دو بردار يال تعريف کرد. تراز فضای مماس در فضای محيطي اغلب بر حسب نرمال وجه $n = (p_j - p_i) \times (p_k - p_i)$ نمايش داده می‌شود. میدان‌های برداری مماس (با ويژگی) گستته در نمايش‌های مبتنی بر وجه را می‌توان به عنوان ثابت روی هر وجه تعريف کرد، يعني با يك بردار مماس (با ويژگی) منفرد برای هر وجه نمايش داده می‌شوند. نسبت به يك انتخاب از چارچوب مرجع روی هر يك از وجه، چنین میدان‌های برداری مماس و ويژگی به ترتیب با $|\mathcal{F}|/2$ یا $|\mathcal{F}|$ ضریب برداری کدگذاري می‌شوند. توجه داشته باشید که چنین میدان‌های برداری به رئوس يال‌ها گسترش نمی‌یابند. به دلیل ناپیوستگی آنها، مفهوم عملگرهاي دیفرانسیل، که بر روی چنین میدان‌های عمل می‌کنند، بسیار محدود است [۳۹] (که برای کاربرد خاص ما بی‌اهمیت است). يك طرح درون‌یابی خطی از میدان‌های برداری مبتنی بر وجه در [۱۰۷] پیشنهاد شده است.

از آنجا که هیچ جهت نرمال طبیعی در رئوس یک مش وجود ندارد، تعريف رایج متعددی برای فضاهای مماس رأس وجود دارد. نرمال‌های رأس را می‌توان به عنوان مثال به عنوان میانگین وزن‌دار مساحتی از نرمال‌های وجوه مجاور تعريف کرد [۴۰، ۱۰۱، ۱۲۴]. علاوه بر وزن‌دهی مساحتی، گاهی از وزن‌های یکنواخت یا وزن‌های زاويه نوك استفاده می‌شود [۲۵]. گزینه دیگر، تعريف بردارهای نرمال از طریق يك عملگر نرمال انحنای میانگین است [۲۵]. نرمال حاصل با نرمال‌های مشتق شده از طریق گرادیان‌های مساحت طباقبت دارد، اما با آنهاي که از طریق گرادیان‌های حجم یا نرمال‌های کره محاطی مشتق شده‌اند، متفاوت است؛ به [۲۵] مراجعه کنید.

به طور جايگزین، می‌توان فضاهای مماس رأس را به روش ذاتی تعريف کرد، به سادگی با تعريف آنها به عنوان فضاهای برداری دوبعدی که به رأس متصل هستند. رابطه آنها با هندسه مش در یک همسایگی محلی حول رأس در اینجا با نمايش همسایگی يك-حلقه در صفحات مماس کدگذاري می‌شود. مسلماً بر جسته‌ترین این رویکردها بر اساس تغییر مقیاس زاویه کل

$$\Theta_i = \sum_{\{i, j, k\} \in \mathcal{F}} \theta_{\{i, j, k\}}^i, \quad (484)$$

است، که از زاويای نوك $\theta_{\{i, j, k\}}^i = \arccos \langle \frac{p_j - p_i}{\|p_j - p_i\|}, \frac{p_k - p_i}{\|p_k - p_i\|} \rangle$ از تمام مثلث‌های $\{i, j, k\}$ مجاور رأس $i \in \mathcal{V}$ جمع می‌شود. اگر این زاويه دقیقاً 2π باشد، همسایگی محلی حول رأس به طور ذاتی تخت است؛ به عنوان مثال به همسایگی قرمز یا سبز در شکل ۷۰ مراجعة کنید. يك زاويه $\Theta_i < 2\pi$ همانند همسایگی آبي، نشان‌دهنده يك انحنای گاووسی گستته مثبت (که به درستی در ادامه تعريف می‌شود) $\Theta_i = 2\pi - \Theta_i$ است، يعني يك همسایگی مخروط‌مانند. يك زاويه $\Theta_i > 2\pi$ به طور مشابه متناظر با يك همسایگی زین‌مانند با انحنای گاووسی منفی است. رویکرد دنیال شده در [۱۳۹، ۳۵، ۱۵۹، ۹۳، ۲۰۸] این است که همسایگی يك-حلقه را با تغییر مقیاس همسانگرد

^{۱۲۲} فرم‌های بنائي اول و دوم گستته باید يك شرط انتگرال‌پذيری را برآورده کنند، مشابه معادله گاووس و معادلات مایناردي-کوداتسي در محيط هموار [۱۸۹].

زوایای قطبی با ضریب $\frac{2\pi}{\Theta_i}$ به کل $s_i \Theta_i = s_i$ برداری در این محیط با یک بردار v به کل 2π از یک فضای اقلیدسی (مماس) پهن کنند. یک میدان برداری در این محیط با یک بردار v به رأس نمایش داده می‌شود. یک انتخاب از پیمانه، که اغلب با یکی از یال‌ها تراز شده است، سپس امکان کدگذاری میدان‌های برداری مماس یا ویژگی را به ترتیب بر حسب [۲۷] یا [۲۸] ضریب فراهم می‌کند. پیشنهاد کردند که بردارها را با یکتابع وزن‌دهی کلاهی تکه‌ای-خطی از رئوس به وجود درون‌یابی کنند. جهت بردارها در اینجا با یک انتقال اقلیدسی معمول روی فضاهای مماس پهن شده تعیین می‌شود. همانطور که توسط [۳۹] اشاره شده است، این درون‌یابی پیوسته نیست. برای حل این مشکل، همان نویسنده‌گان در [۱۰] پیشنهاد می‌کنند که یک ساختار هموار را روی مش مثلثی تعریف کرده و همسایگی‌های یک-حلقه را در چارت‌های هموار نمایش دهند. سپس یک درون‌یابی هموار با انتقال بردارها از طریق یک اتصال سادکی هموار روی مش انجام می‌شود، که برای نزدیکترین حالت ممکن به اتصال لوی-چیوینا الفا شده از فضای جایگذاری اصلی، بهینه‌سازی شده است. توجه داشته باشید که هر دو رویکرد به طور موثر هندسه را حول رئوس پهن می‌کنند، یعنی دقیقاً روی مش مثلثی عمل نمی‌کنند.

یک رویکرد دیگر، که ریشه در حساب دیفرانسیل خارجی گستته دارد [۴۱، ۴۹]، تعریف بردارهای مماس $M \in T_p M$ بر حسب ۱-فرمها $\omega \in T_p^* M$ با استفاده از ایزومور فیسم موسیقی‌ای (وابسته به متريک) $T^* M \rightarrow TM$: $\#(\text{بالا بردن اندیس})$ است. از آنجا که ۱-فرم‌های سادکی به طور طبیعی به یال‌ها (سدک‌های ۱-) اختصاص داده می‌شوند، این منجر به میدان‌های برداری می‌شود که بر حسب یک بردار برای هر یال و در نتیجه $\#$ ضریب پس از انتخاب چارچوب‌ها، پارامتری می‌شوند. با این حال، همانطور که توسط [۳۹] استدلال شده است، یک درون‌یابی تکه‌ای-خطی از بردارها روی وجود دوباره به ناپیوستگی منجر خواهد شد. علاوه بر این، برای ما روشن نیست که چگونه این رویکرد می‌تواند به کلاف‌های برداری همبسته عمومی و در نتیجه میدان‌های ویژگی تعیین یابد.

با توجه به هر یک از ساختارهای بالا از فضاهای مماس، چارچوب‌های مرتع مرجع محلی به راحتی به عنوان زوج‌های مرتع از بردارهای مماس خطی مستقل تعریف می‌شوند. یک انتخاب رایج در اینجا تراز این مجموعه چارچوب با یکی از یال‌های مجاور سادک فعلی (عنصر مش) است. به طور خاص برای مورد چارچوب‌های راست‌هنگار و راست‌گرد، راست‌گرد، یعنی هر زمان که $G \leq \text{SO}(2)$ باشد، یک انتخاب از یال (جهت‌دار) یک چارچوب را به طور کامل تعیین می‌کند. سپس بردارهای مماس اغلب در مختصات قطبی نمایش داده می‌شوند، با زاویه اندازه‌گیری شده نسبت به یال مرجع. اگر فضاهای مماس به صورت خارجی مدل‌سازی شوند، یعنی به عنوان زیرفضاهای دوبعدی از فضای محیطی \mathbb{R}^3 رایج‌ترین روش نمایش چارچوب‌ها به عنوان یک زوج مرتب از بردارها در $\mathbb{R}^3 \subset T_p M$ است. تعاریف چارچوب‌ها و پیمانه‌ها سپس کاملاً معادل تعاریف در معادلات (۴۳۷) و (۴۳۲) در بخش ۱.۱۱ هستند.

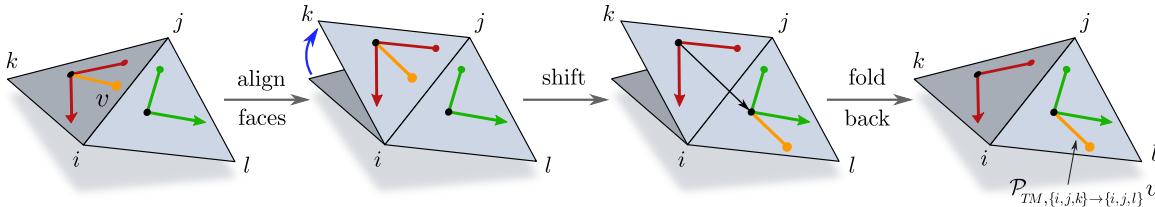
C_N -ساختارها، طبق معمول، به عنوان کلاف‌هایی از چارچوب‌ها تعریف می‌شوند، که در هر فضای مماس از طریق تبدیلات پیمانه‌ای با مقادیر G به هم مرتبط هستند. در جامعه گرافیک کامپیوتی، علاقه خاصی به N -میدان‌های جهتی (یا میدان‌های N - واحد) وجود دارد، که در آنجا به عنوان مجموعه‌ای از N -میدان برداری واحد تعریف می‌شوند، به طوری که N بردار در هر فضای مماس با زاویه $N/2\pi$ از هم فاصله دارند. از آنجا که هر بردار واحد روی یک چارچوب راست‌هنگار و راست‌گرد متناظر را الفا می‌کند، دیده می‌شود که N -میدان‌های جهتی معرفت پذیر یک چارچوب راست‌هنگار در شکل ۷۱ ج است، که به طور موثر ۶ جهت واحد را به هر نقطه اختصاص می‌دهد، به جز در قطب‌ها، که در آنجا تکینگی‌هایی با اندیس $\frac{\pi}{4}$ (یا زاویه $\frac{\pi}{4}$) دارد. طراحی تعاملی میدان‌های جهتی هموار، با تکینگی‌های تعریف شده توسط کاربر در میان دیگر محدودیت‌ها، یک زمینه تحقیقاتی فعال در جامعه گرافیک کامپیوتی است [۱۰۷، ۱۴۷، ۱۰۱، ۹۳، ۳۷، ۱۱۰، ۹۳، ۱۵۹]. برخی از کانولوشن‌های GM سطحی که در بخش بعدی مرور می‌کنیم از جنین الگوریتم‌های برای محاسبه یک C_N -ساختار استفاده می‌کنند [۲۰۲، ۷۹].

متريک ريماني و ايزومترى‌ها: با داشتن یک مش مجهر به فضاهای مماس، می‌توان یک متريک ريماني را روی آن تعریف کرد. رایج‌ترین مور، مش‌های جایگذاری شده ايزومتریک با فضاهای مماس مدل‌سازی شده به عنوان زيرفضاهای دوبعدی از فضای محيطی \mathbb{R}^3 است. همانطور که قبلًا در معادلات (۴۲۹) و (۴۶۷) توصيف شد، متريک سپس با تحديد حاصلضرب داخلی استاندارد اقلیدسی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ از فضای جایگذاری به فضاهای مماس الفا می‌شود.

اگر فضاهای مماس به صورت ذاتی مدل‌سازی شوند، یک متريک را می‌توان با انتخاب یک O -ساختار، یعنی چارچوب‌های مرتعی که تعریف شده‌اند راست‌هنگار باشند، ثابت کرد. کمی کمتر از همان‌گویی، اگر طول یال‌ها $\{z_i\}_1^n$ و بنابراین یک تابع فاصله اقلیدسی تکه‌ای-تعریف شده روی سطح داده شده باشد، انتخاب O -ساختار باید با این طول‌ها سازگار باشد. به طور خاص، نگاشت لگاريتمي باید منجر به بردارهای مماس با نرم (ريماني) $\ell = \log_p(q) | \log_p(p)$ شود اگر نقاط p و q از \mathbb{R}^+ با یک فاصله اقلیدسی ℓ از هم جدا شده باشند. توجه داشته باشید که اين گزاره نيازمند یک تعریف سازگار از اتصال لوی-چیوینا روی مش است، که در ادامه به آن می‌پردازیم.

ايزيومترى‌ها به طور ذاتی طبق معمول تعریف می‌شوند، یعنی به عنوان آن دسته از نگاشتهای مش به خود، که متريک را حفظ می‌کنند. به صورت خارجی، گروه ايزيومترى از آن دسته از ايزيومترى‌ها $E \in \phi$ فضای جایگذاری تشكيل شده است که مش را ناواردا باقی می‌گذارند. اكثراً مقالات در ردیف‌های ۴۱-۳۷ از جدول ۶ مجموعه داده‌های را در نظر می‌گيرند که مش‌های آنها دارای یک گروه ايزيومترى بديهي هستند. با اين حال، همسایگی‌های محلی مش‌ها اغلب با اين وجود با يكديگر ايزيومترى (يا تقريباً ايزيومترىک) هستند، که در شکل ۴۱ مثال زده شده است. همانطور که در بخش ۱.۱.۸ بحث شد، همواردي ايزيومترى کانولوشن‌های GM همچنان به صورت محلی برقرار خواهد بود اگر ميدان ديد کرنل‌ها به اندازه کافی کوچک باشد.

اتصالات، انتقال دهنده‌ها و ژئودزیک‌ها روی مش‌های مثلثی: آخرین جزء مورد نياز ما برای پياده‌سازی کانولوشن‌های GM روی مش‌ها، پول‌بك انتقال دهنده Exp_p^* از میدان‌های ویژگی است (معادله (۶۷)). بنابراین ما باید بدانیم که چگونه (۱) بردارهای ویژگی را به صورت موازی روی مش‌ها منتقل کنیم و (۲) ژئودزیک‌ها را روی مش‌ها، به ویژه نگاشت نمایی، باسته به پياده‌سازی، نگاشت لگاريتمي را محاسبه کنیم. تمام اين نگاشتهای



شکل ۶۵ انتقال موازی بین وجوده مش. هندسه محلی دو وجه مجاور گسترش‌پذیر است، یعنی به طور ذاتی تخت است و می‌توان آن را به یک صفحه باز کرد. بنابراین انتقال لوی-چیویتا بین وجوده با جابجایی یک بردار روی وجوده باز شده و سپس خم کردن وجوده به جایگذاری اصلی خود می‌شود. این انتقال موازی بین وجوده مجاور را می‌توان به عنوان آنالوگ گستته اتصال لوی-چیویتا پیوسته در محیط هموار در نظر گرفت [۳۷]. با توجه به هر انتخاب از چارچوب‌های مرتع، انتقال عومنا مجاور را می‌توان به عنوان آنالوگ گستته اتصال لوی-چیویتا پیوسته در محیط هموار در نظر گرفت [۲]. راسته هنجار و راستگرد، نمایش داده $P_{TM, \{i,j,k\} \rightarrow \{i,j,l\}} v$ یا $g_{\{i,j,k\} \rightarrow \{i,j,l\}}^{\bar{A}\bar{A}}$ با یک عضو گروه $\mathcal{G}(2)$ در $GL(\mathbb{C})$ می‌شود. اتصالات عمومی تر یک تبدیل خطی اضافی را به بردار مستقل از مختصات هنگام انتقال بین وجوده اعمال می‌کنند. تعاریف جایگزین از اتصالات گستته، به عنوان مثال برای انتقال بین رؤوس در امتداد یال‌ها، در متن اصلی مورد بحث قرار گرفته‌اند.

در نهایت به یک انتخاب از اتصال روی مش بستگی دارند. در محیط هموار، یک اتصال اساساً مجموعه‌ای از انتقال‌دهنده‌های بین نهایت کوچک بین فضاهای مماس مجاور است. بنابراین اتصالات گستته روی مش‌ها معمولاً به عنوان انتقال‌دهنده‌ها بین عناصر مش مجاور تعريف می‌شوند. انتخاب خاص گستته‌سازی کلاف مماس، که گرینه‌های آن در بالا مورد بحث قرار گرفت، بر تعريف خاص اتصال تأثیر می‌گذارد. در ادامه، ما برخی از گستته‌سازی‌های اتصالات را که در مقالات یافت می‌شوند، مرور می‌کنیم و توضیح می‌دهیم که چگونه می‌توان از آنها برای محاسبه انتقال‌دهنده‌ها و ژئودزیک‌ها استفاده کرد.

ساده‌ترین مورد برای بررسی، انتقال یا اتصال بین دو وجه مجاور است. به یاد بیاورید که انتقال لوی-چیویتا روی یک صفحه تخت به عنوان جابجایی یک بردار به گونه‌ای تعريف می‌شود که در معنای معمول اقليدی مجاور باقی بماند؛ به شکل ۲۲ مراجعت کنید. از آنجا که اتصالات ذاتی هستند، به جایگذاری خاص این صفحه در فضای محیطی بستگی ندارند، که به ما می‌گوید چگونه روی هر سطح گسترش‌پذیر می‌باشد. این به طور خاص به ما می‌گوید که چگونه بین دو مثلث مجاور منتقل کنیم، زیرا می‌توان اینها را باز کرد (گسترش داد) و به یک صفحه تبدیل کرد، همانطور که در شکل ۶۵ به تصویر کشیده شده است. بنابراین اتصال لوی-چیویتا بین وجوده را می‌توان به این صورت تصور کرد که (۱) وجود را پنهان کرده، (۲) بردار را طبق معمول روی صفحه منتقل کرده و (۳) وجود را به جایگذاری اصلی خود بازگردانیم [۳۷، ۳۵، ۱۲۷]. انتقال‌دهنده حاصل $P_{TM, \{i,j,k\} \rightarrow \{i,j,l\}} v$ بین وجوده $\{i,j,k\}$ و $\{i,j,l\}$ را می‌توان به صورت اختیاری بر حسب یک عضو گروه $\{i,j,k\} \rightarrow \{i,j,l\}$ در $GL(\mathbb{C})$ بیان کرد. از آنجا که اتصال لوی-چیویتا یک اتصال متريک است، برای مورد خاص چارچوب‌های راسته هنجار منجر به اعضای گروه در (2) $O(2)$ و برای چارچوب‌های راسته هنجار منجر به اعضای $SO(2)$ یا زوایای دوران می‌شود.

همانطور که توسط [۳۷] پيشنهاد شده است، امکان تعیین این ساختار فراتر از اتصالات لوی-چیویتا وجود دارد: به جای صرفاً جابجایی بردارها بین وجوده پنهان شده، اتصالات عمومی تر یک تبدیل خطی اضافی، به عنوان مثال یک دوران اضافی، را اعمال می‌کنند. در حالی که این تبدیل اضافی با یک تبدیل منتظر از عبارت مختصاتی انتقال‌دهنده $\{i,j,k\} \rightarrow \{i,j,l\}$ معکس خواهد شد، از نظر مفهومی از آن مستقل است و می‌تواند در یک چارچوب کاملاً مستقل از مختصات تعريف شود. نویسنده‌گان از این ایده برای ساخت اتصالات بديهی هموار استفاده می‌کنند، که با داشتن یک انتقال با هولونومی صفر حول هر حلقه ممکن تعريف می‌شوند، و برای هر چه هموارتر بودن بهینه شده‌اند، به جز در برخی تکینگی‌ها که به صورت توپولوژیکی تحمیل شده‌اند [۳۷]. آمیلاً علاوه بر این اتصالات را در نظر می‌گیرند که دوران‌های (مستقل از مختصات) با $\frac{2\pi}{N}$ را اعمال می‌کنند و می‌توانند برای ساخت N -میدان‌های جهتی، متناظر با C_N -ساختارها استفاده شوند. در کاربردهای ما، ما همیشه اتصالات لوی-چیویتا را برای محاسبه ژئودزیک‌ها در نظر خواهیم گرفت. مدل‌های مور شده در بخش بعدی $G = SO(2)$ را روی مش‌های جهت‌پذیر فرض می‌کنند و از انتقال‌دهنده‌های لوی-چیویتا برای بردارهای ویژگی استفاده می‌کنند. در مقابل، مدل‌های بخش ۳۱۲ یک گروه ساختاری بديهی $\{e\}$ را فرض می‌کنند و بنابراین فقط به اتصالات بديهی $\{e\}$ -ساختار سازگار اجازه می‌دهند. آنها ویژگی‌ها را به گونه‌ای منتقل می‌کنند که بردارهای ضربی آنها نسبت به چارچوب‌های $\{e\}$ -ساختار ناوردا باقی بمانند، یعنی صرفاً مقادیر عددی آنها را کپی می‌کنند.

با توجه به فضاهای مماس جایگذاری شده $T_p M \subset \mathbb{R}^3$ در دیگر عناصر مش مانند رؤوس یا یال‌ها، این روش بر طور طبیعی به انتقال بین عناصر مش دلخواه تعیین می‌باید [۴۰]: به جای تراز کردن وجوده، می‌توان به عنوان مثال فضای مماس رؤوس را با وجه مجاور قبیل از جابجایی بردار تراز کرد. از نظر هندسی، این عملیات را می‌توان به عنوان انتقال روی یک مش که رؤوس و یال‌های آن در یک همسایگی بین نهايit کوچک بريده شده و با یک وجه چندضلعی جایگزین شده‌اند، در نظر گرفت.

یک تعريف جایگزین از اتصالات گستته در [۹۳] و [۱۵۹] ارائه شده است. نویسنده‌گان هر دو مقاله، فضاهای مماس را فقط در رؤوس مدل می‌کنند، جایی که آنها بر حسب تعیین مقایس زاویه کل و رودی، معادله (۴۸۴)، به 2π تعريف می‌شوند، همانطور که در بالا بحث شد. یک اتصال روی مش سپس با انتقال‌دهنده‌ها روی تمام یال‌های $\mathcal{E} = \{j, i\}$ داده می‌شود، که فضاهای مماس رؤوس مجاور را به هم متصل می‌کنند. از آنجا که مفهوم هندسی باز کردن مثلث‌ها در اینجا وجود ندارد، انتقال‌دهنده‌های یال از طریق اعضای گروه نسبت به یک چارچوب مبدأ و مرجع کدگذاری می‌شوند. به طور خاص برای اتصال لوی-چیویتا، و چارچوب‌های مرتع راسته هنجار و راستگرد، این اعضای گروه در $SO(2)$ قرار دارند. سودمندی این ساختار برای انتقال مستقیم در امتداد سیمیرهای دلخواه روی نامشخص است، با این حال، برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی که به مشتق همودا استگی دارند، مفید است. [۱۵۹] نشان دادند که یک راه حل از معادله گرمایی برداری با این وجود اجازه می‌دهد تا از چنین اتصالات برای محاسبه (غیرمستقیم) انتقال موازی بین نقاط دلخواه روی یک مش استفاده شود. [۱۱۰] یک ساختار دیگر،

یعنی اتصالات سادکی هموار بین و در داخل تمام عناصر مش را پیشنهاد می‌کنند. آنها علاوه بر این بحث می‌کنند که چگونه چنین اتصالات را می‌توان بهینه کرد تا حد ممکن به اتصال لوی-چیویتا (ناهموار) نزدیک باشند.

یک اتصال داده شده، انتقال موازی را در امتداد یک مسیر تعیین می‌کند. در محیط هموار، که اتصالات انتقال دهنده‌های بی‌نهایت کوچک هستند، انتقال متناهی با انتگرال گیری از اتصال در امتداد مسیر محاسبه می‌شود. در محیط گسته، انتقال بر این اساس با ترکیب تبدیلات منفردی که اتصال را بین عناصر مش که توسط مسیر عبور می‌کنند، تشکیل می‌دهند، داده می‌شود. برای اتصال لوی-چیویتا، این فرآیند متناظر با پهن کردن تمام عناصر مش در امتداد مسیر و سپس جابجایی بردار روی آن است؛ به شکل ۷ در [۱۰۱] مراجعه کنید. روش مبتنی بر معادله گرمای برداری توسط [۱۵۹] انتقال بردارها را به طور خاص در امتداد ژئودزیک‌ها محاسبه می‌کند. از آنجا که این روش برای انتقال از یک مکان مبدأ به هر مکان دیگر روی منیفلد به طور همزمان حل می‌کند، این رویکرد می‌تواند کارآمدتر از انتگرال گیری از انتقال برای هر مسیر منفرد به طور جداگانه باشد.

انحنای یک اتصال در محیط هموار به عنوان هولونومی انتقال آن حول یک دیسک بی‌نهایت کوچک تعریف می‌شود. انحنای در یک رأس در محیط گسته به طور مشابه به عنوان هولونومی انتقال حول این رأس تعریف می‌شود. برای اتصال لوی-چیویتا، این فقط انحنای گاوی است، که با نقص زاویه

$$\kappa_{\text{امثل}} = \delta_i = 2\pi - \Theta_i, \quad (485)$$

داده می‌شود، که در آن Θ زاویه کل نوک از معادله (۴۸۴) است. ما دوباره به بیست‌وچهاری به عنوان مثال اشاره می‌کنیم، که در همه جا انحنای صفر دارد، به جز در دوازده رأس اصلی خود، که در آن نقص زاویه (انحنای) برای با $\frac{\pi}{2}$ است. اتصالات بدیهی بنا به ساختار، انحنای صفر دارند.

در آخر، ما باید ژئودزیک‌ها را مورد بحث قرار دهیم. در محیط هموار، ژئودزیک‌ها به عنوان مستقیم‌ترین مسیرها تعریف می‌شوند، که با این گزاره رسمیت می‌باید که مشتقات همورای بردارهای مماس آنها در امتداد منحنی صفر می‌شوند، یعنی $\gamma' = 0$. این معادل این الزام است که انتقال یک بردار مماس (t) در امتداد ژئودزیک، مماس بر آن باقی بماند، یعنی $(t) = \dot{\gamma}(t)$. $P_{TM, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)}$ برای t ، t_1 دلخواه. علاوه بر این، کوتاه‌ترین مسیر بین هر دو نقطه روی یک منیفلد همبند با یک ژئودزیک داده می‌شود. همانطور که توسط [۱۵۹] اشاره شده است، این معادل بودن مسیرهای کوتاه‌ترین و مستقیم‌ترین دیگر روی مش‌ها برقرار نیست، به طوری که باید بین این دو مفهوم تمایز قائل شد.

به یاد بیاورید که نگاشت نمایی $M \rightarrow M$ به عنوان نگاشت بردارهای v به آن نقطه‌ای تعریف می‌شود که با راه رفتن به اندازه $\|v\|$ از p در امتداد ژئودزیک (با سرعت واحد) درجهت v به آن می‌رسیم. این مفهوم به راحتی به مش‌ها تعیین می‌باید، جایی که مستقیم‌ترین ژئودزیک را درجهت v برای فاصله $\|v\|$ دنبال می‌کیم. همانند محیط هموار، می‌توان چنین ژئودزیک‌هاست که مستقیم را روی مش‌ها به عنوان آن دسته از منحنی‌هایی تعریف کرد که بردار مماس خود را موازی با منحنی نگه می‌دارند. این ویژگی به طور طبیعی روزی و جووه مسطح (یا در امتداد یال‌ها) برآورده می‌شود، به طوری که ژئودزیک حاصل تکمیلی خطی است، با تنها نقاط غیربدیهی هستند که ژئودزیک بین عناصر مش مجاور انتقال می‌باید. جهت خروجی ژئودزیک پس از چنین انتقالی در اینجا با اتصال، یعنی با انتقال جهت مماس ورویدی به عنصر مش بعدی، تعیین می‌شود. اگر اتصال لوی-چیویتا را در نظر بگیریم، که ما همیشه برای محاسبه ژئودزیک‌ها این کار را می‌کنیم، این منجر به یک خط راست معمولی پس از باز کردن عناصر مش به یک صفحه می‌شود. برای پیاده‌سازی نگاشت نمایی گسته، کافی است چنین ژئودزیک مستقیم را تا رسیدن به فاصله $\|v\|$ دنبال کنیم.

نگاشتهای لگاریتمی $M \rightarrow TM$ ، از سوی دیگر، را می‌توان به عنوان محاسبه کوتاه‌ترین ژئودزیک‌ها بین نقاط p و q در نظر گرفت. آنها آن بردار (q) را در $T_p M$ برムی‌گردانند که در p مماس بر این ژئودزیک است و نرم آن برابر با فاصله ژئودزیک بین نقاط است. یک راه بررسیت برای محاسبه فواصل ژئودزیک از یک نقطه (یا مجموعه) مبدأ p حل معادله ایکوئال

$$|\nabla \tau| = 1 \quad \text{on } \Omega, \quad \tau(p) = 0, \quad (486)$$

است، که در آن ∇ مشتق همورا را نشان می‌دهد. بخش اول این معادله دیفرانسیل جزئی، الزام طبیعی را که گرادیان تابع فاصله باید یک باشد، تحمیل می‌کند، در حالی که بخش دوم فاصله را در مبدأ صفر ثابت می‌کند. یک الگوریتم پیشروی سریع [۸۸] که معادله ایکوئال را روی مش‌های مثلثی حل می‌کند، توسط [۳۸] فواصل ژئودزیک را با بهره‌برداری از فرمول وارادن، که ارتباطی را با کرنل گرمای برقرار می‌کند، محاسبه می‌کند. الگوریتم آنها اساساً معادله گرمای $\Delta u = \delta(p)$ را با شرط اولیه $u = \delta$ حل می‌کند، یعنی یک «پیک گرمای» را از نقطه مبدأ p منتشر می‌کند. برای زمان‌های نفوذ کوتاه، گرادیان ∇u دقیقاً درجهت مخالف گرادیان فواصل ژئودزیک اشاره می‌کند. از آنجا که مشخص است که گرادیان فاصله ژئودزیک دارای قدر واحد است (معادله (۴۸۶)، می‌توان میدان فاصله را از این اطلاعات محاسبه کرد. این روش به طور قابل توجه سریعتر از الگوریتم‌های قبلی است. [۱۵۹] این روش را به معادله گرمای برداری تعیین می‌دهند، که اجازه می‌دهد کمیت‌های با مقادیر برداری را به جای گرمای اسکالار منتشر کنند. این الگوریتم را می‌توان برای انتقال بردارها از یک نقطه (یا مجموعه) مبدأ روزی کل منیفلد استفاده کرد، اما همچنین برای حل نگاشتهای لگاریتمی با دقت بالا مناسب است.

۲.۱۲ کانولوشن‌های سطحی راهبری‌پذیر-دورانی

در این بخش، ما کانولوشن‌های سطحی (2) - D_N - C_N - $SO(2)$ را که در ردیف‌های $[37-40]$ جدول 6 فهرست شده‌اند، مرور می‌کنیم. همه این مدل‌ها در این مشترک هستند که به ابهام جهات نمایش‌های میدان منظم را فرض می‌کنند (ردیف‌های $[38-39]$) با گروه‌های دوری C_N یعنی N جهت با فواصل مساوی، گسته‌سازی می‌شود. مدل D_4 $\text{O}(2)$ یک گروه ساختاری خاص تر D_4 را فرض می‌کند. توجه داشته باشید که معماری‌های صرفاً راهبری‌پذیر-دورانی فقط روی سطوح جهت‌پذیر عمل می‌کنند بدون اینکه همواری (پیوستگی) استنتاج خود را نقض کنند. سطوح غیر جهت‌پذیر نیازمند راهبری‌پذیری بازتابی اضافی هستند، یعنی گروه‌های ساختاری $\text{O}(2)$ یا D_N این الزام اغلب با تطبیق‌های جزئی، مهمتر از همه با استفاده از فضاهای کرنل محدودتر، به راحتی قابل ارضاست.

ملاحظات کلی و نمای کلی: تمام مدل‌هایی که در این بخش مرور می‌شوند، روی مشاهدات مثلثی عمل می‌کنند و راهبری‌پذیر-دورانی هستند. گروه ساختاری پیوسته $G = SO(2)$ برای تمام مدل‌هایی که نمایش‌های میدان منظم را فرض می‌کنند (ردیف‌های $[38-39]$) با گروه‌های دوری C_N یعنی N جهت با فواصل مساوی، گسته‌سازی می‌شود. مدل D_4 $\text{O}(2)$ یک گروه ساختاری خاص تر D_4 را فرض می‌کند. توجه داشته باشید که معماری‌های صرفاً راهبری‌پذیر-دورانی فقط روی سطوح جهت‌پذیر عمل می‌کنند بدون اینکه همواری (پیوستگی) استنتاج خود را نقض کنند. سطوح غیر جهت‌پذیر نیازمند راهبری‌پذیری بازتابی اضافی هستند، یعنی گروه‌های ساختاری $\text{O}(2)$ یا D_N این الزام را تطبیق‌های جزئی، مهمتر از همه با استفاده از فضاهای کرنل محدودتر، به راحتی قابل ارضاست.

مطابق با تعریف کانولوشن‌های GM مدل‌ها ویژگی‌ها را در همسایگی محلی اطراف هر نقطه نمونه‌برداری بر حسب مختصات نرمال ژئودزیک پارامتری می‌کنند. تقریباً تمام مدل‌ها میدان‌های ویژگی را روی رئوس مش نمونه‌برداری می‌کنند، فقط D_4 $\text{O}(2)$ D_4 $\text{O}(2)$ ویژگی‌ها را به صورت متراکم روی وجود مش نمونه‌برداری می‌کند. انتگرال کانولوشن پیوسته در معادله (87) ، که ویژگی‌ها را در مختصات نرمال ژئودزیک با یک کرنل راهبری‌پذیر تطبیق می‌دهد، را می‌توان به روش‌های مختلفی گسته‌سازی کرد. اکثر مدل‌ها این انتگرال را در یک رأس $p \in \mathcal{V}$ به عنوان یک جمع روی رئوس همسایه آن $\mathcal{N}_p \subset \mathcal{V}$ گسته‌سازی می‌کنند. سپس ویژگی‌ها از این رئوس $q \in \mathcal{N}_p$ با مقادیر کرنل پیوسته در نقطه $\psi_{TM,p}^A \log_p(q) \in \mathbb{R}^3$ تطبیق داده می‌شوند، که در آن $\psi_{TM,p}^A$ پیمانه متناظر با چارچوب مرجع انتخاب شده در p است. این به همراه انتقال از p به q منجر به گسته‌سازی زیر می‌شود:

$$f_{\text{out}}^A(p) = \sum_{q \in \mathcal{N}_p} \mathbb{E}_q K(\psi_{TM,p}^A \log_p(q)) \rho(g_{p \leftarrow q}^{A\tilde{A}}) f_{\text{in}}^{\tilde{A}}(q), \quad (488)$$

که در آن $\mathbb{E}_q \in \mathbb{R}$ وزن‌های مساحتی مناسب انتخاب شده‌اند که مجموع آنها برابر با کل مساحت مش است، $\int_M 1 dp = \sum_{q \in \mathcal{V}} \mathbb{E}_q$. انتخاب‌های رایج، وزن‌های مساحتی مرکزوار به شکل

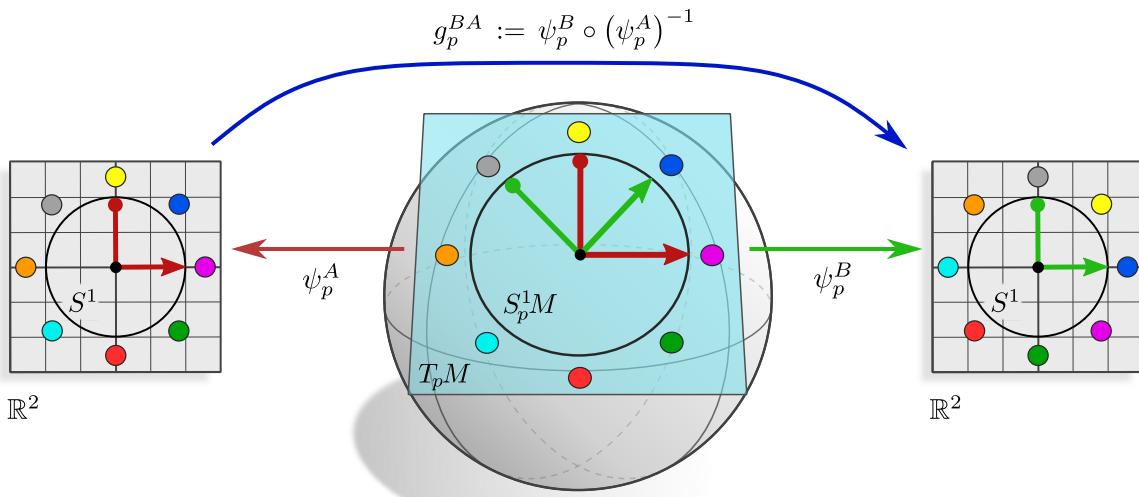
$$w_q = \frac{1}{3} \sum_{\{i,j,q\} \in \mathcal{F}} A_{\{i,j,q\}}, \quad (489)$$

هستند، با مجموعی که روی تمام مثلث‌های مجاور رأس q اجرا می‌شود، یا مساحت‌های ورونوی $[186]$. از آنجا که گسته‌سازی در معادله (488) روی رئوس همسایه جمع می‌شود، الگوریتم‌ها نگاشت‌های لگاریتمی را از طریق کوتاه‌ترین ژئودزیک‌ها بین q و p محاسبه می‌کنند؛ به بخش $2.1.12$ $[139]$ مراجعه کنید.

به جای محاسبه نگاشت‌های لگاریتمی رئوس همسایه، می‌توان به طور جایگزین انتگرال کانولوشن را روی دامنه کرنل \mathbb{R}^3 گسته‌سازی کرد. نویسنده‌گان $[120]$ از یک تقسیم‌بندی همزاویه و همشاعر از مختصات قطبی ژئودزیک استفاده می‌کنند. آنها نگاشت نمای را برای هر نقطه نمونه‌برداری (r, φ) محاسبه می‌کنند، یعنی یک مستقيمه‌ترین ژئودزیک $[139]$ به طول r را در جهت φ نسبت به چارچوب مرجع شلیک می‌کنند. از آنجا که این ژئودزیک‌ها به طور کلی در یک وجه به پایان می‌رسند، بردارهای ویژگی از رئوس مجاور باید درون یابی شوند، به عنوان مثال بر اساس مختصات مرکزوار. HMSA^3 ژئودزیک را از طریق یک الگوریتم «باز کردن انتقال موائزی» تقریب می‌زنند $[18]$.

جدول 6 مدل‌ها را بر اساس انواع میدان مربوطه خود سازماندهی می‌کند، یعنی بر اساس نمایش‌های گروهی \mathcal{M} که قوانین تبدیل آنها را تحت تبدیلات پیمانه متنخص می‌کنند. تنها انواع میدان غیربدیدهی که تاکنون استفاده شده‌اند، نمایش‌های تحویل‌ناپذیر (مختلط) از $SO(2)$ $[194]$ و نمایش‌های منظم از $SO(2)$ هستند، که با نمایش‌های منظم یک زیرگروه گسته‌سازی C_N گسته‌سازی شده‌اند $[140, 177, 202]$. نمایش‌های منظم $SO(2)$ بنا به تعریف بر روی توابع در $L^2(SO(2))$ عمل می‌کنند، یعنی بر روی ویژگی‌هایی که «یک مقدار برای هر جهت» اختصاص می‌دهند. در نسخه گسته، ما $L^2(C_N) \cong \mathbb{R}^{|C_N|} = \mathbb{R}^N$ را داریم، که در آن هر یک از N بعد یک بردار ویژگی منظم متناظر با یکی از جهات در $\{N-1, \dots, -1, 0\}$ است. تناظر با نمایش‌های منظم در اکثر این مقالات ضمیم است \mathbb{E}_k معماری‌های شبکه بیشتر از یک دیدگاه شهودی تر استخراج شده‌اند. مشخص می‌شود که نویسنده‌گان فقط از زیرمجموعه‌ای از فضای کامل کرنل‌های راهبری‌پذیر که بین میدان‌های ویژگی C_N نگاشت انجام می‌دهند، استفاده می‌کنند. ما این ادعای را در ادامه هنگام بحث دقیق در مورد مدل‌ها پیش‌آثبات می‌کنیم. یک ساختار از فضای کامل کرنل در $[190]$ ارائه شده است، یک تصویرسازی را می‌توان در شکل 3 از $[192]$ یافت. مدل‌های باقی مانده بر اساس نمایش‌های بدیدهی، یعنی میدان‌های اسکالار هستند. یک رویکرد برای محاسبه میدان‌های اسکالار، اعمال یک کرنل در N جهت است، که منجر به یک میدان ویژگی منظم میانی C_N می‌شود، و به دنبال آن یک عملیات تجمعی را روی N پاسخ انجام می‌شود $[120, 130, 177]$. از آنجا که تبدیلات پیمانه C_N منجر به یک جایگایی در صرف (یک جایگشت) از کامل‌های جهت ویژگی می‌شوند، عملیات تعمیم تحت تبدیلات پیمانه ناوردا هستند، یعنی میدان‌های اسکالار تولید می‌کنند. D_4 $\text{O}(2)$ D_4 -ناوردا استفاده می‌کنند؛ به شکل 69 مراجعه کنید. از آنجا که تبدیلات پیمانه چنین کرنل‌هایی را ناوردا باقی می‌گذارند، میدان‌های ویژگی حاصل نیز ناوردا هستند، یعنی میدان‌های اسکالار.

در آخر، می‌توانیم مدل‌ها را بر اساس انتقال‌دهنده‌های ویژگی که فرض می‌کنند، مقایسه کنیم. تمام شبکه‌های کانولوشنی در $[40, 194, 140, 177]$ تمام مدل‌های کانولوشنی لوی-چیویتا را روی مش فرض می‌کنند. از آنجا که تمام مدل‌های $[120, 177, 130]$ بر میدان‌های اسکالار تکیه دارند، انتقال‌دهنده‌های کانولوشنی لوی-چیویتا را روی مش فرض می‌کنند.



شکل ۶۶: نمایش توابع جهتی توسط مجموعه‌های مختصات. توابع جهتی یک پاسخ با مقدار حقيقی (نقطه رنگی) را به هر جهت (بردار واحد) در $S_p^1 M \subset T_p M$ (دایره سیاه) اختصاص می‌دهند. هنگام بیان این توابع نسبت به چارچوب‌های مرجع راست‌هنجار و راست‌گرد یا پیمانه‌های $\psi_{TM,p}^X$ نمایش‌های مختصاتی پاسخ‌های با مقدار حقيقی را به بردارهای واحد در $S^1 \subset \mathbb{R}^3$ اختصاص می‌دهند. قانون تبدیل بین این نمایش‌های مختصاتی با یک دوران از مقادیر ویژگی روی S^1 داده می‌شود. از نظر ریاضی، این قانون تبدیل به عنوان عمل نمایش منظم از $SO(2)$ شناسایی می‌شود؛ به معادله (۴۹۲) مراجعه کنید. بنابراین توابع جهتی، میدان‌های ویژگی منظم هستند و CNN سطحی [۱۴۰] بر اساس کانولوشن‌های GM بین چنین میدان‌هایی است. یک نسخه نموداری از این شکل در معادله (۴۹۳) آراهه شده است.

انتقال موازی آنها بدینه است. یک رویکرد جایگزین توسط C_N را روی متش محاسبه می‌کند. این اتصال در همه جا به یک در چند تکنیگ با هولونومی $k^{\frac{2\pi}{N}}$ برای یک $1, \dots, N - k = N$ ثابت، بدینه (تخت) است. نویسنده‌گان اتصال با مقادیر C_N خود را به گونه‌ای بهینه‌سازی می‌کنند که اتصال لوی-چیوپتا با مقادیر $SO(2)$ را تا حد امکان نزدیک تقریب بزنند؛ همچنین به [۳۷] مراجعه کنید. توجه داشته باشید که این رویکرد مشابه پهن کردن محلی CNN‌های کروی به N از بخش ۴.۱۲ است اما برای متش‌های عمومی اعمال می‌شود.

با در نظر گرفتن این ملاحظات کلی، ما بر روی برخی از انتخاب‌های طراحی خاص‌تر که در مدل‌ها انجام شده است، تمرکز می‌کنیم.

شبکه‌های هارمونیک سطحی: شبکه‌های هارمونیک سطحی توسط [۱۹۴] که در ردیف (۳۷) جدول ۶ فهرست شده‌اند، یک مثال نمونه از کانولوشن‌های GM روی متش‌های هارمونیک [۲۰۰] را که ویژگی‌های آنها مطابق با نمایش‌های تحویل‌ناپذیر مختلف ($G = SO(2)$) از صفحه اقلیدسی به فضاهای خمیده عمومی تعمیم می‌دهند. نویسنده‌گان کانولوشن خود را مانند معادله (۴۸۸) با استفاده از وزن‌های مساحتی مرکزوار از معادله (۴۸۹) تعریف می‌کنند. انتقال‌دهنده‌های لوی-چیوپتا و نگاشت‌های لکاریتی از طریق روش گرمایی برداری [۱۵۹] محاسبه می‌شوند، که به متش‌های مثلثی محدود نیست بلکه اجازه می‌دهد مدل را به متش‌های چندضلعی و ابرهای نقطه نیز اعمال کرد. غیرخطی‌های $SO(2)$ -هموردی مورد استفاده توسط مدل‌ها فقط بر روی قدر مطلق ویژگی‌های مختلط عمل می‌کنند اما آرگومان آنها را ناوردا باقی می‌گذارند.

همانطور که در [۱۹۰، ۱۹۱] اثبات شده است، فضاهای کرنل $SO(2)$ -راهبری‌پذیر که توسط نویسنده‌گان استفاده می‌شوند، روی میدان مختلط کامل هستند. با این حال، اگر میدان‌های ویژگی مختلط بر حسب دو کانال که حاوی بخش‌های حقیقی و موهومی آنها هستند، پیاده‌سازی شوند، باید آنها را به عنوان تبدیل شونده مطابق با نمایش‌های تحویل‌ناپذیر حقیقی $SO(2)$ در نظر گرفت. محدودیت کرنل در این حالت به کرنل‌های راهبری‌پذیر اضافی اجازه می‌دهد؛ برای یک بحث دقیق به پیوست ۵ از [۱۹۰] مراجعه کنید. ما علاوه بر این می‌خواهیم اشاره کنیم که شواهد تحریکی نشان می‌دهد که شبکه‌های مبتنی بر میدان‌های نمایش تحویل‌ناپذیر عملکرد به طور قابل توجهی بدتری نیست به آنها که بر اساس نمایش‌های منظم هستند، دارند؛ به عنوان مثال به بنچمارک در [۱۹۰] مراجعه کنید. توجه داشته باشید که شبکه‌های هارمونیک سطحی را می‌توان به راحتی با استفاده از «غیرخطی منظم» از [۱۴۰] که اساساً یک تبدیل فوریه از پشت‌های از میدان‌های نمایش تحویل‌ناپذیر را برای تبدیل آنها به یک میدان ویژگی منظم اعمال می‌کند، به شبکه‌هایی که روی میدان‌های ویژگی منظم عمل می‌کنند، تبدیل کرد.

CNN‌های ژئوزدیک چندجهته: CNN‌های ژئوزدیک چندجهته (۱۴۰) را پیشنهاد کردنده که روی به اصطلاح توابع جهتی عمل می‌کنند. همانطور که در ادامه استدلال می‌کنیم، توابع جهتی معادل میدان‌های ویژگی منظم هستند و MDGCNN‌ها کانولوشن‌های GM خاصی بین چنین ویژگی‌هایی هستند. نویسنده‌گان توابع جهتی را به عنوان توابع با مقدار حقيقی تعریف

می‌کند که به نقاط $p \in M$ و جهات واحد $v \in T_p M$, $\|v\| = 1$ بستگی دارند. با نشان دادن دایره جهات واحد در $T_p M$ با

$$S'_p M := \{v \in T_p M \mid \|v\| = 1\} \cong S^1, \quad (490)$$

یک ویژگی جهتی در p به عنوان یک نگاشت

$$F : S'_p M \rightarrow \mathbb{R} \quad (491)$$

از جهات واحد در صفحه مماس به پاسخ‌های با مقدار حقیقی تعریف می‌شود.^{۱۳۳} یک انتخاب از چارچوب مرتع راست‌هنگار و راست‌گرد، یک جهت مرتع را ثابت می‌کند که نسبت به آن می‌توان تابع جهتی را بیان کرد. فرض کنید $\psi_{TM,p}^A$ پیمانه متناظر با یک چارچوب انتخاب شده باشد، که جهات واحد را در $S'_p M \subset T_p M \subset \mathbb{R}^n$ به «جهات واحد مختصاتی» در \mathbb{R}^n نگاشت می‌دهد. سپس عبارت مختصاتی تابع جهتی با

$$F_p^A := F \circ (\psi_{TM,p}^A|_{S'_p M})^{-1} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (492)$$

داده می‌شود، یعنی به بردارهای ضریب واحد روی \mathbb{R}^n پاسخ‌های با مقدار حقیقی اختصاص می‌دهد. از جابجایی نمودار

$$\begin{array}{ccccc} & & g_p^{BA} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathbb{R}^n & \supset S^1 & \xleftarrow{\psi_{TM,p}^A|_{S'_p M}} & \xrightarrow{\psi_{TM,p}^B|_{S'_p M}} & S^1 \subset \mathbb{R}^n \\ & \searrow & F & \swarrow & \\ & & \mathbb{R} & & \end{array} \quad (493)$$

می‌توان خواند که عبارات مختصاتی تابع جهتی از قانون تبدیل زیر پیروی می‌کنند:

$$F_p^B = F_p^A \circ (g_p^{BA})^{-1} =: \rho_{\square\Box}(g_p^{BA}) F_p^A \quad (494)$$

تساوی دوم، قانون تبدیل بین عبارات مختصاتی را به عنوان عمل نمایش منظم شناسایی می‌کند، که گزاره ما را مبنی بر اینکه تابع جهتی فقط میدان‌های ویژگی منظم هستند، توجیه می‌کند.^{۱۳۴} شکل ۶۶ یک تابع جهتی و نمایش‌های مختصاتی آن را نسبت به چارچوب‌های مختلف نشان می‌دهد.

کانولوشن‌های ژئودزیک چندجهته توسط MDGCNN [۱۴۰] بین تابع جهتی به روشهای مستقل از مختصات با منقضی کردن آنها با کرنل‌های هموردا در یک پارامتری‌سازی ژئودزیک حول هر رأس، نگاشت انجام می‌دهند. این مشاهده دلالت بر این دارد که این کانولوشن‌ها کانولوشن‌های GM خاصی بین میدان‌های ویژگی منظم هستند. یک تفاوت در فرمول‌بندی کانولوشن‌های ژئودزیک چندجهته این است که پول‌بک انتقال‌دهنده آنها کل بردار ویژگی منظم (تابع جهتی) را در امتداد ژئودزیک‌ها منتقل نمی‌کند، بلکه فقط آن پاسخ منفردی را که متناظر با جهت مماس ژئودزیک است، منتقل می‌کند. به جای تطبیق ویژگی‌های منتقل شده با یک کرنل ماتریسی، کانولوشن‌های چندجهته پاسخ منفرد منتقل شده را با یک کرنل اسکالار تطبیق می‌دهند. معادل بودن هر دو عملیات با تحمیل یک الگوی پراکندگی متناظر بر روی کرنل‌های $SO(2)$ -راهبری پذیر ماتریسی‌ما، که به طور موثر آن پاسخ‌هایی را که توسط MDGCNNها منتقل نمی‌شوند، صفر می‌کند، بازیابی می‌شود. حالی که کانولوشن‌های ژئودزیک چندجهته فقط کانولوشن‌های GM بین میدان‌های ویژگی منظم هستند، آنها بنا برای از فضای کامل کرنل‌های G -راهبری پذیر بین میدان‌های ویژگی منظم استفاده نمی‌کنند. این پراکندگی MDGCNNها را از نظر محاسباتی کارآمد می‌کند، با این حال، هزینه حافظه همان باقی می‌ماند و مشخص نیست که این انتخاب تا چه حد ظرفیت بیانی آنها را محدود می‌کند.

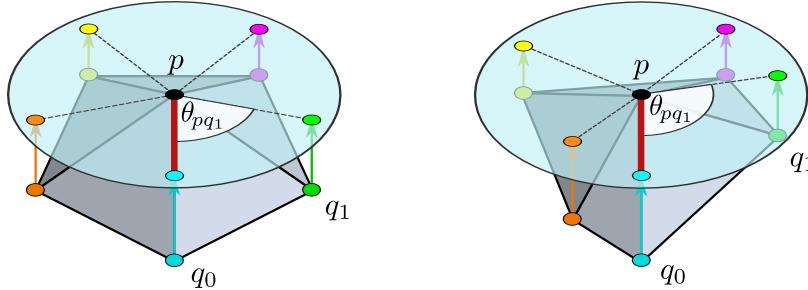
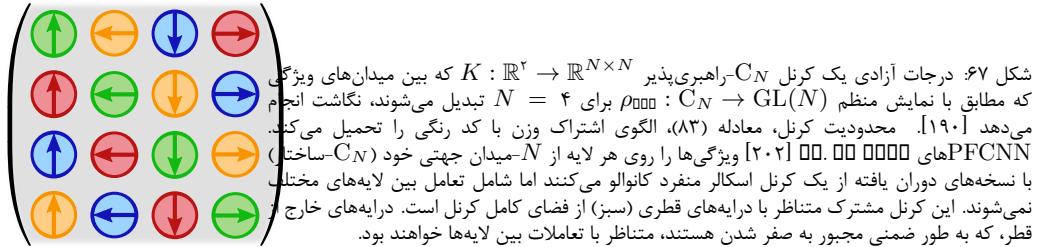
تعداد نامتناهی جهات در $SO(2)$ (یا $S'_p M$ یا S^1) در عمل به N جهت با فواصل مساوی در گروه دوری C_N گسسته‌سازی می‌شود، به عنوان مثال ۸ جهتی که در شکل ۶۶ به تصویر کشیده شده‌اند. از آنجا که انتقال لوی-چیویتا در امتداد ویژگی‌ها به طور کلی با مقادیر $SO(2)$ به جای C_N است، نویسنده‌گان از یک درون‌یابی خطی بین N جهت گستته استفاده می‌کنند.

همانطور که در بالا بحث شد، MDGCNNها فقط آن پاسخ‌های خاص از ژئودزیک خروجی نسبت به چارچوب مرتع محلی در p هستند، منتقل می‌کنند. این جهت در $v = \cdot \in T_p M$ تعريف نشده است، که از خود-تعاملی روس‌جلوگیری می‌کند. نویسنده‌گان این مشکل را با اعمال یک $\times 1$ -اضافی حل می‌کنند که خود-تعاملی گمشده را دوباره اضافه می‌کند. همانطور که در بخش ۱۱.۴ استخراج شد، کرنل‌های $\times 1$ -اضافی باید در هم‌تنه باشند تا استقلال از مختصات مدل را حفظ کنند. این الزام در واقع توسط MDGCNNها برآورده می‌شود^{۱۳۵} زیرا ماتریس $\times 1$ -اضافی به گونه‌ای ساخته شده است که کل بردارهای ویژگی منظم را با یک وزن یکسان ترکیب می‌کند به جای اینکه کانال‌های آنها را به طور مستقل ترکیب خطی کند. این کار با نمایش $m_{\square\Box}$ ویژگی منظم C_N نه به عنوان یک بردار ویژگی $c = N \cdot m_{\square\Box} = N \cdot m_{\Box\Box} -$ بعدی بلکه به عنوان یک آرایه با شکل $(N, m_{\Box\Box})$ و سپس اعمال یک ماتریس (مشترک) با شکل $(m_{\square\Box}, m_{\Box\Box})$ روی آخرین محور که منجر به یک آرایه خروجی با شکل $(N, m_{\Box\Box})$ می‌شود، پیاده‌سازی می‌شود.

^{۱۳۳} تابع جهتی کامل سپس می‌تواند به عنوان یک نگاشت از $S'_p M$ ، کلافی با تارهای $S'_p M$ ، به مقادیر تعریف شود.

^{۱۳۴} به طور دقیق، نمایش منظم $SO(2)$ بر روی تابع \mathbb{R} عمل می‌کند. با این حال، ما می‌توانیم به طور کانونی چنین توابعی را با تابع روی S' با یکی گرفتن $e \in SO(2)$ با (e) می‌کنیم.

^{۱۳۵} مکاتبه شخصی با نویسنده.



شکل ۶۸: دو ناحیه مش که از نظر توپولوژیکی معادل اما از نظر هندسی متمایز هستند. یک رویکرد برای تعریف کانولوشن‌ها روی مشاهدها، در نظر گرفتن گراف زیربنایی آنها (\mathcal{V}) است که توپولوژی مش را ثبت می‌کند، و اجرای یک شبکه عصبی گراف (متغروف) به دلیل نداشتن اطلاعات در مورد هندسه مش، نمی‌تواند بین دو همسایگی به تصویر کشیده شده تمایز قائل شوند. از نظر هندسی، آنها کرنل‌های همسان‌گرد را اعمال می‌کنند. CNN مش هموردای پیمانه توسط $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ [۴۰] این مشکل را با تصویر کردن رؤوس همسایه q_i روی صفحات مماس اختصاص دادن روزایی θ_{pq_i} به آنها نسبت به یک یال مرجع، یعنی پیمانه (قرمن)، حل می‌کنند. الزام به استقلال از مختصات کانولوشن‌ها می‌جز به کرنل‌های G -راهبری‌پذیر می‌شود. در حالی که این مدل می‌تواند بر اساس جهت‌گرهای همسایه تمایز قابل شود، فاصله آنها را نادیده می‌گیرد. این مدل علاوه بر این از پارامتری سازی ژئوپزیک ما منحرف می‌شود به این دلیل که تکیه‌گاه کرنل آن بر اساس اتصال لبه محلی به جای فواصل طراحی شده ژئوپزیک است.

های \mathbb{R}^N چارچوب موازی: CNN ‌های چارچوب موازی ($\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$) توسط \mathbb{R}^N بر M -میدان‌های چارچوب جهتی تکیه دارند، که فقط G -ساختارهای GM برای گروه‌های ساختاری دوری $G = C_N$ هستند. به یاد بیاورید از بحث ما در بالا که این میدان‌ها یک اتصال را کدگذاری می‌کنند که در همه جا به جز در چند تکینگی بدینه است و برای تقریب اتصال لوی-جیوبتا اصلی بهینه‌سازی شده است. از آنجا که این G -ساختار در یک مرحله آفلاین از پیش محاسبه می‌شود، ما در ادامه آن را به عنوان داده شده در نظر می‌گیریم و بر روی کانولوشن واقعی PFCNN تمرکز می‌کیم. مشخص می‌شود که این عملیات معادل یک کانولوشن GM بین میدان‌های ویژگی C_N منظم است، با این حال، دوباره یک الگوی پراکندگی خاص را در کرنل‌ها فرض می‌کند که توسط طراحی شبکه خاص القا می‌شود.

فضاهای ویژگی $PFCNN$ ‌ها فضاهای $C^\infty(GM)$ از توابع با مقادیر حقیقی روی GM هستند. از آنجا که $G = C_N GM \xrightarrow{\pi_{GM}} M$ برای $|G| = N$ یک پوشش $-$ لایه از M است، چنین میدان‌های ویژگی را می‌توان به طور مشابه به عنوان اختصاص یک چندتایی از N عدد حقیقی به هر نقطه $p \in M$ در نظر گرفت. از آنجا که N لایه از فضای پوششی علاوه بر این با N جهت (که با اولین محورهای چارچوب داده می‌شوند) یکی گرفته می‌شوند، این ویژگی‌ها معادل توابع جهتی (گستته‌سازی شده) $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ [۴۰] هستند. قضیه ۱.۱ در پیوست ح علاوه بر این اثبات می‌کند که یک ایزومورفیسم

$$C^\infty(GM) \cong \Gamma(\mathcal{A}_{\rho_{000}}) \quad (495)$$

بین ویژگی‌های $PFCNN$ ‌ها و میدان‌های ویژگی منظم ما وجود دارد. بنابراین $PFCNN$ ‌ها کانولوشن‌های مستقل از مختصات را بین (معادل) میدان‌های ویژگی منظم انجام می‌دهند و بنابراین به عنوان کانولوشن‌های GM منظم (خاص) شناسایی می‌شوند.

فرمول بندی کانولوشن‌های چارچوب موازی در نگاه اول به نظر می‌رسد کاملاً با فرمول بندی متفاوت است: به جای کانولوشن کامل میدان‌های ویژگی منظم N -بعدی با یک کرنل ماتریسی C_N -راهبری‌پذیر $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$: K : به طور مستقل با یک کرنل اسکالار مشترک که با چارچوب لایه مربوطه تراز شده است، کانولوشن می‌کنند. این عملیات در چارچوب ما به عنوان یک کانولوشن با یک کرنل ماتریسی C_N -راهبری‌پذیر تفسیر می‌شود که تنها مقادیر غیرصفر آن روی قطر آن قرار دارند و نسبت به یکدیگر چرخانده شده‌اند، که با درایه‌های سیز در شکل ۶۷ به تصویر کشیده شده است. عدم وجود کوپلینگ بین ویژگی‌ها روی لایه‌های مختلف دلالت بر این دارد که درایه‌های خارج از قطر (زرد، آبی و قرمز) از فضای کامل کرنل راهبری‌پذیر به طور ضمنی صفر در نظر گرفته می‌شوند. همانطور که قبل از MDGCNN گفته شد، الگوی پراکندگی این کانولوشن GM منظم آن را از نظر محاسباتی کارآمدتر از یک کانولوشن GM متراکم می‌کند اما احتمالاً بر عملکرد آن تأثیر می‌گذارد و هزینه حافظه را کاهش نمی‌دهد.

CNN های مش همودای پیمانه: $GEMCNN$ میانه CNN توسط GEMCNN عصبی گراف متعدد برای پردازش میدان های ویژگی روی مش ها الهام گرفته شده است. به طور خاص، شبکه های عصبی گراف وابیلی می توانند برای پردازش میدان های ویژگی نمونه برداری شده در رؤوس روی مش ها با کانولوشن را کنالی کردن روی گراف $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ که توسط مش القای شود، استفاده شوند. مشکل این رویکرد این است که گراف فقط توپولوژی مش را کدگذاری می کند، اما قادر به ثبت هندسه آن نیست. کانولوشن های گراف متعدد بر این اساس بین ترتیب بال ها تمایز قائل نمی شوند، که روی مش ها متناظر با استفاده از کرنل های همسانگرد است که بین میدان های اسکالار نگاشت انجام می دهند. شکل ۶۸ دو ناحیه از یک مش با هندسه متنایز اما توپولوژی معادل را نشان می دهد \square برای کانولوشن های گراف متعدد هر دو همسایگی یکسان به نظر می رسد. $GEMCNN$ ها این مشکل را انتخاب یک یال مرتع در هر رأس $p \in \mathcal{V}$ حل می کنند، که نسبت به آن جهت تمام یال های دیگر $\mathcal{E} = \{p, q_i\}$ به حلقه یک از همسایگان $q_i \in \mathcal{N}_p \subset \mathcal{V}$ بر حسب زوایا $\theta_{pq_i} \in [0, 2\pi]$ اندازه گیری می شود. یک انتخاب از یال مرتع متناظر با یک انتخاب از چارچوب راست هنجار و راست گرد است. انتخاب های مختلف با تبدیلات پیمانه در گروه ساختاری $G = SO(2)$ مرتبط هستند.

همانند نظریه ما، فضاهای ویژگی $GEMCNN$ ها به عنوان مقاطعی از کلاف های برداری همیسته تعریف می شوند، یعنی به عنوان فضاهایی از میدان های ویژگی C -بعدی که ضرایب آنها تحت تبدیلات پیمانه مطابق با یک نمایش گروهی $\text{GL}(c) \rightarrow \text{SO}(2)$ می شوند. به هر $\rho : \text{SO}(2) \rightarrow \text{GL}(c)$ متناظر با مقدار (2) SO - اختصاص داده می شود. عملیات کانولوشن ملزم است که مستقل از انتخاب یال مرتع باشد، یال یک انتقال دهنده لوی-چیوپیتا با مقدار (2) SO - ReLU از تجزیه می کند تا ρ از $\text{GL}(N)$ باشد. که منجر به الزام بر روی کرنل ها برای G -راهبری پذیر بودن (همودایی پیمانه) می شود. برخلاف فرمول بندی ما، کرنل ها مستقیماً در مختصات نرمال ژئودزیک اعمال نمی شوند بلکه پیامها را فقط از همسایگی های یک-حلقه \mathcal{E} منتظم می شوند. $\mathcal{N}_p := \{q \in \mathcal{V} \mid \{p, q\} \in \mathcal{E}\}$ کرنل ها علاوه بر این غیر حساس به شاعع هستند \square اینکه این تا چه حد بر عملکرد مدل تأثیر می گذارد، یک سوال باز باقی می ماند.

نویسندها این نمایش های تحويل ناپذیر (حقیقی) را به عنوان انواع میدان برای کانولوشن انتخاب کرده اند، با این حال، آنها یک تغییر پایه به نمایش های \mathbb{C}^N منظم برای اعمال غیر خطی های ReLU انجام می دهند، به همین دلیل ما آنها در ردیف (38) جدول 6 به جای ردیف (37) \square فهرست می کنیم. به طور خاص، نویسندها از تغییر پایه $Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$ استفاده می کنند که نمایش منظم $C_N \rightarrow \text{GL}(N)$ با $\rho_{\text{SO}} : C_N \rightarrow \text{GL}(N)$ را به مؤلفه های نمایش تحويل ناپذیر آن تجزیه می کند تا یک پشتنه از میدان های نمایش تحويل ناپذیر را به یک میدان ویژگی منظم تبدیل کند. برای C_N این ماتریس فقط تبدیل فوریه گسترش است. پس از اعمال غیر خطی ReLU به هر یک از N کانال از میدان ویژگی منظم به طور جداگانه \square که یک عملیات C_N -همودا است زیرا نمایش های منظم، نمایش های جایگشتی هستند \square ویژگی ها برای عملیات کانولوشن بعدی به یک پشتنه از میدان های نمایش تحويل ناپذیر بازگردانه می شوند. این طراحی این مزیت را دارد که ویژگی ها را می توان دقیقاً با انتقال دهنده های با مقدار (2) SO - منتقل کرد، بدون اینکه نیاز به بازگشت به یک طرح درون یابی باشد، همانطور که توسط MDGCNN \square $[140]$ [۱۴۰] انجام می شود. توجه داشته باشید، با این حال، که شبکه کامل به دلیل استفاده از غیر خطی های منظم فقط C_N -همودا است.

اینکه نویسندها از نمایش های تحويل ناپذیر حقیقی از $\text{SO}(2)$ استفاده می کنند به این معنی است که فضاهای کرنل آنها تقریباً دو برابر بزرگتر از فضاهای کرنل شبکه های هارمونیک سطحی توسط \square $[194]$ $[190]$ $[102]$ \square است؛ بحث ها در $[140]$ $[140]$ \square مقایسه کنید.

CNN های ژئودزیک: اولین کار در مورد کانولوشن های ژئودزیک که ما از آن آغاز هستیم، کار \square $[120]$ است. نویسندها ابهام دورانی مختصات قطبی ژئودزیک را روی یک منیفلد ریمانی جهت پذیر شناسایی کرد و آن را از طریق یک معماري ناوردا نسبت به دوران حل می کنند. کانولوشن های ژئودزیک آنها یک اسکالار را نسبت به مختصات قطبی ژئودزیک با جهت گیری دلخواه نمایش می دهند. از آنجا که نوع میدان بدیهی است، پول بک انتقال دهنده به مختصات ژئودزیک به انتقال دهنده های (غیر یکدیگر) نیاز ندارد. سپس میدان ویژگی در مختصات ژئودزیک با یک اسکالار تطبیق داده می شود، که در N دوران با فواصل مساوی با زوایای $\frac{\pi}{N}$ سپت به چارچوب مرتع، که در آن $k = 0, \dots, N-1$ است، اعمال می شود. از آنجا که یک تبدیل پیمانه با $\frac{\pi}{N} l$ برای یک $\{ -1, 0, \dots, N-1 \}$ \square تمام کرنل ها را بر این اساس می چرخاند، منجر به یک جایگشت دوری از پاسخ ها با l گام می شود. بنابراین این عملیات در چارچوب ما متناظر با یک کانولوشن C_N -راهبری پذیر از میدان های اسکالار به میدان های ویژگی منظم است. به جای پردازش بیشتر این میدان ها از طریق کانولوشن های گروهی منظم \square همانطور که در MDGCNN \square $[140]$ $[140]$ \square PFCNN \square $[202]$ \square GEMCNN \square $B_{\mathbb{R}^n}$ می شود \square نویسندها یک عملیات تجمعی \max را روی N پاسخ اعمال می کنند. از آنجا که تبدیلات پیمانه با مقدار C_N منجر به جایگایی های دوری از میدان های ویژگی منظم میانی می شوند، عملیات تجمعی ناوردای-پیمانه است، یعنی میدان های اسکالار تولید می کنند. در حالی که طراحی این شبکه برای پیاده سازی ساده است، از کدگذاری اطلاعات جهتی توسط ویژگی ها جلوگیری می کند. انواع دیگری از این طراحی شبکه را می توان در $[130]$ $[121]$ \square یافت.

\square در ادامه، به \square توسط \square $[177]$ \square می پردازم. برای جلوگیری از سردرگمی، اشاره می کنیم که نویسندها دو مدل را پیشنهاد کرده اند، که ما آنها را به ترتیب در ردیف های (38) و (39) جدول 6 فهرست می کنیم. ما هر دو مدل را با شروع از انتخاب های طراحی مشترک آنها توصیف می کنیم.

مفهوم کلیدی زیربنای $ZerNet$ ها، پارامتری سازی کرنل های کانولوشن بر حسب چند جمله ای های زرنيکه است، که یک پایه متعارف از توابع را روی دیسک واحد بسته $(\mathbb{R}^n, B_{\mathbb{R}^n})$ حول مبدأ \square تشکیل می دهند. در مختصات قطبی، چند جمله ای های زرنيکه با

$$Z_n^m : [0, 1] \times [0, 2\pi) \rightarrow [-1, 1], \quad (r, \varphi) \mapsto R_n^m(r) \cos(m\varphi) \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq m \leq n \quad (496)$$

$$Z_n^{-m} : [0, 1] \times [0, 2\pi) \rightarrow [-1, 1], \quad (r, \varphi) \mapsto R_n^m(r) \sin(m\varphi) \quad n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq m \leq n, \quad (497)$$

^{۱۳۶} برای یک شبکه (به اندازه کافی) منظم و کرنل با تکیه گاه فشرده در مختصات ژئودزیک، هر دو رویکرد معادل می شوند.

^{۱۳۷} معادل بودن میدان های ρ -با تجزیه نمایش تحويل ناپذیر آنها در بخش 2.5 و در بخش 4.2 از $[190]$ مورد بحث قرار گرفت.

داده می‌شوند، که در آن R_n^m چندجمله‌ای‌های شعاعی زرنیکه هستند. اینکه چندجمله‌ای‌های زرنیکه (که به طور مناسب نرمال‌سازی شده‌اند) راست‌هنگار هستند به این معنی است که آنها روابط راست‌هنگاری

$$\langle Z_n^m, Z_k^l \rangle_{B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \cdot)} = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} Z_n^m(r, \varphi) Z_k^l(r, \varphi) r dr d\varphi = \delta_{nk} \delta_{ml}. \quad (498)$$

را برآورده می‌کنند. یک تابع روی دیسک واحد، به عنوان مثال یک کرنل اسکالر $B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \cdot) : K$, را می‌توان در پایه چندجمله‌ای‌های زرنیکه بسط داد:

$$K(r, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=-n}^n \hat{K}_n^m Z_n^m(r, \varphi) \quad (499)$$

برای بازیابی ضرایب بسط یک تابع داده شده روی دیسک واحد، آن را روی پایه زرنیکه تصویر می‌کنیم:

$$\hat{K}_n^m = \langle K, Z_n^m \rangle_{B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \cdot)} = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} K(r, \varphi) Z_n^m(r, \varphi) r dr d\varphi \quad (500)$$

حاصلضرب داخلی بین دو تابع K و $\text{Exp}_p^* f^A$ روی دیسک واحد را می‌توان با این روابط بر حسب ضرایب بسط آنها بیان کرد:

$$\begin{aligned} \langle K, \text{Exp}_p^* f^A \rangle_{B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \cdot)} &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} K(r, \varphi) \text{Exp}_p^* f^A(r, \varphi) r dr d\varphi \\ &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=-n}^n \hat{K}_n^m Z_n^m(r, \varphi) \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{l=-k}^k [\widehat{\text{Exp}_p^* f^A}]_k^l Z_k^l(r, \varphi) r dr d\varphi \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{l=-k}^k \underbrace{\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} Z_n^m(r, \varphi) Z_k^l(r, \varphi) r dr d\varphi}_{\delta_{nk} \delta_{ml}} \widehat{\text{Exp}_p^* f^A}_k^l \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=-n}^n \hat{K}_n^m [\widehat{\text{Exp}_p^* f^A}]_n^m \end{aligned} \quad (501)$$

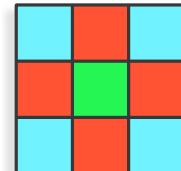
همانطور که با انتخاب‌های K و $\text{Exp}_p^* f^A$ برای این توابع پیشنهاد می‌شود، نویسنده‌گان از این ویژگی برای تطبیق کرنل‌ها با پول‌بک میدان‌های ویژگی به مختصات قطبی ژئودزیک استفاده می‌کنند. ضرایب کرنل \hat{K}_n^m که فراتر از یک آستانه مشخص شده توسعه کاربر صفر می‌شوند، به عنوان پارامترهای یادگرفته شبهه بهینه‌سازی می‌شوند. ضرایب بسط $[\widehat{\text{Exp}_p^* f^A}]_n^m$ از پول‌بک انتقال‌دهنده میدان ویژگی با حل یک سیستم معادلات خطی محاسبه می‌شوند.

یک مزیت پارامتری‌سازی کرنل بر حسب چندجمله‌ای‌های زرنیکه این است که آنها بنا به تعريف کرنل‌های (۲)-راهبری‌پذیر هستند. به طور خاص، زوج‌های $(Z_n^m, Z_n^{-m})^\top$ از کرنل‌ها برای یک $n \in \mathbb{N}$ و $m \leq n$ داده شده، یک زوج از کرنل‌ها را تشکیل می‌دهند که با ضرب آنها در نمایش تحويل‌ناپذیر حقیقی مرتبه m از $\text{SO}(2)$ چرخانده می‌شوند.

$$\begin{pmatrix} Z_n^m \\ Z_n^{-m} \end{pmatrix} (r, \varphi + \Delta\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(m\Delta\varphi) & -\sin(m\Delta\varphi) \\ \sin(m\Delta\varphi) & \cos(m\Delta\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_n^m \\ Z_n^{-m} \end{pmatrix} (r, \varphi), \quad (502)$$

در حالی که کرنل‌های Z_n^m بمعنی برای $m = 0$ به طور بدیهی تبدیل می‌شوند (آنها همسان‌گرد هستند). توجه داشته باشید که ضرایب بسط \hat{K}_n^m از یک کرنل K به صورت وارون نسبت به پایه تبدیل می‌شوند. نویسنده‌گان از این قانون تبدیل برای دوران تحلیلی کرنل‌ها بر حسب ضرایب بسط آنها استفاده می‌کنند. راهبری‌پذیری دورانی چندجمله‌ای‌های زرنیکه مستقل از بخش‌های شعاعی آنها است اما به این واقعیت بستگی دارد که بخش‌های زاویه‌ای آنها هارمونیک‌های دایره‌ای هستند، که توابع پایه هارمونیک در تجزیه پیتر-ویل از $L^2(\text{SO}(2))$ هستند [۱۰۲]. به دلیل ویژگی‌های راهبری‌پذیری آنها، پایه‌های هارمونیک دایره‌ای به طور گسترده برای پارامتری کردن کرنل‌های کاتولوشن حقیقی [۶۴، ۱۹۲] و مخلوط [۲۰۰، ۱۹۴] حداقل از دهه ۸۰ میلادی استفاده شده‌اند [۷۶، ۵۷، ۱۵۰، ۷۱]. در واقع، هارمونیک‌های دایره‌ای زیربنای هر کرنل $\text{SO}(2)$ -راهبری‌پذیر هستند [۱۰۲، ۱۹۰].

اولین و اصلی‌ترین طراحی مدل توصیف شده توسط [۱۷۷] مشابه طراحی [۱۷۰] است. یک میدان اسکالار به مختصات نرمال ژئودزیک پول‌بک می‌شود، جایی که با یک کرنل اسکالار که در دوران N گستته اعمال می‌شود، تطبیق داده می‌شود، که منجر به یک میدان ویژگی منظم میانی C_N می‌شود. یک عملیات تجمعی \max_{C_N} بعدی روی N پاسخ سپس یک خروجی C_N -تاوارد، یعنی یک میدان خروجی اسکالار، به دست می‌دهد. تفاوت با پیاده‌سازی [۱۲۰] این است که این عملیات در پایه چندجمله‌ای‌های زرنیکه همانطور که در معادله (۵۰۱) مشخص شده است، انجام می‌شود. این انتخاب در نهایت متناظر با یک طرح درون‌بایی جایگزین است. طراحی مدل دوم، که در بخش ۴.۴ از [۱۷۷] توصیف شده است، یک پیاده‌سازی مجدد از MDGCNN های [۱۴۰] در پایه چندجمله‌ای‌های زرنیکه است. نویسنده‌گان مشاهده می‌کنند که این طراحی منجر به عملکرد به طور قابل توجهی بهبود یافته‌ای می‌شود زیرا میدان‌های ویژگی منظم قادر به کدگذاری اطلاعات جهتی هستند.



شکل ۶۹.

یک کرنل 3×3 پیکسلی D_4 -ناوردا با سه درجه آزادی پارامتری می‌شود.

آخرین مدل راهبری پذیر-دورانی که ما مورد بحث قرار می‌دهیم، D_4 -TextureNet ها یک D_4 -ساختار تعییم داد. این D_4 -ساختار با استفاده از QuadriFlow، یک بسته نرم‌افزاری شخص ثالث که می‌تواند برای محاسبه میدان‌های \mathbb{M}^4 - که برای هموار بودن و داشتن تکینگی‌های کم بهینه شده‌اند، استفاده شود، از پیش محاسبه می‌شود [۷۸]. همانطور که از نام آن پیداست، TextureNet ها میدان‌های ویژگی‌گرددی را که به عنوان یافت نمایش داده می‌شوند، پردازش می‌کنند و دارای وضوح بالقوه بالاتری نسبت به مش استند. کرنل‌های کانولوشن در یک مجموعه متراکم از مکان‌های نمونه‌برداری، که به طور یکنواخت روی وجهه مش توزیع شده‌اند، اعمال می‌شوند. در هر نقطه نمونه‌برداری، میدان ویژگی‌گری اسکالار به مختصات نرمال ژئودزیک پول‌بک شده و نسبت به یک چارچوب دلخواه از D_4 -ساختار نمایش داده می‌شود. سپس با یک کرنل 3×3 -ناوردا تطبیق داده می‌شود. همانطور که در شکل ۶۹ به تصویر کشیده شده است، ۹ پیکسل از چنین کرنل‌هایی با ۳ درجه آزادی توصیف می‌شوند. کانولوشن بر حسب سه $1 \times 1 \times 1 \times 1$ -ناوردا باشد.

پیاده‌سازی می‌شود که پاسخ‌های آنها متعاقباً در هر یک از فضاهای مماس تقسیم‌بندی و \mathbb{M}^4 -می‌شوند. راهبری پذیری بارتایی اضافی کرنل‌ها دلالت بر این دارد که TextureNet ها روی سطوح غیرجهت‌پذیر به خوبی تعریف شده‌اند. با این حال، از آنجا که ویژگی‌های TextureNet میدان‌های اسکالار هستند، نمی‌توانند نه جهات و نه جهت‌گیری‌ها را کدگذاری کنند. برای غلبه بر این مشکل، لازم است از کرنل‌های D_4 یا $O(2)$ -راهبری پذیر غیربدیهی استفاده شود.

۳.۱۲ کانولوشن‌های- $\{\mathbb{M}\}$ سطحی راهبری پذیر

این بخش شبکه‌های $[130, 155, 155, 178, 178, 106]$ را مرور می‌کند، که در این مشترک هستند که بر $\{\mathbb{M}\}$ -ساختارها روی سطوح تکیه دارند. از دیدگاه کانولوشن‌های GM این معماری‌ها عمدها در انتخاب خاص روش ابتکاری که بر $\{\mathbb{M}\}$ -ساختار را تعیین می‌کند متفاوت هستند.

با فرض یک گروه ساختاری بدیهی $\{e\}$ -راهبری پذیر (یعنی نامحدود) G ، مدل‌ها کرنل‌های $\{e\}$ -راهبری پذیر می‌کنند، که در امتداد چارچوب‌های $\{e\}$ -ساختار انتخاب شده تراز شده‌اند. انواع میدان (نمایش‌های گروهی) لزوماً بدیهی هستند. همین امر برای تمام انتقال‌دهنده‌های موافق نیز صادق است، که لزوماً با $\{e\}$ -ساختار سازگار هستند. بنابراین پول‌بک‌های انتقال‌دهنده‌های f از $Exp_p f^*$ به فضاهای مماس، به پول‌بک‌های f exp_p^* توسط نگاشت نمایی معمول کاهش می‌باشد، یعنی آنها انتقال‌دهنده‌های (غیربدیهی) را اعمال نمی‌کنند. به یاد بیاورید که $\{e\}$ -ساختارهای پیوسته فقط روی منیفلدهای موافق پذیر وجود دارند، که این دلالت بر این دارد که استنتاج شبکه‌ها به ناچار روی سطوح غیرموافق پذیر ناپیوسته است. روش‌های ابتکاری که میدان‌های چارچوب را تعیین می‌کنند، علاوه بر این، همیشه خوش‌تعریف نیستند، یا تحت تغییر شکل‌های هندسه سطوح ناپایدار هستند، همانطور که در ادامه بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد.

مدل‌های \mathbb{M}^4 -می‌شوند [۱۳۰، ۱۵۵، ۱۵۵، ۱۷۸، ۱۷۸، ۱۰۶] و \mathbb{M}^3 -می‌شوند [۸۴] روی مشاهدهای مثلثی عمل می‌کنند و میدان‌های ویژگی را که در رؤوس نمونه‌برداری شده‌اند، پردازش می‌کنند. \mathbb{M}^3 -شبکه‌هایی را پیشنهاد می‌کنند که روی ابرهای نقطه سطحی عمل می‌کنند در حالی که معماری \mathbb{M}^3 -کانولوشن‌ها را روی اطلس‌های بافت از مشاهدهای تعریف می‌کند.

های \mathbb{M}^3 -ژئودزیک: اولین خانواده مدلی که ما مورد بحث قرار می‌دهیم، \mathbb{M}^3 -ها توسط \mathbb{M}^3 -های \mathbb{M}^3 -هستند. نویسنده‌گان انواع مختلفی از مدل‌ها را روی گراف‌ها و منیفلدها مورد بحث قرار می‌دهند، که اکثر آنها به عنوان کانولوشن‌های GM توضیح داده نمی‌شوند. این مدل‌ها در این مشترک هستند که کرنل‌ها را نسبت به یک انتخاب از «شیوه-مختصات» روی منیفلد یا گراف اعمال می‌کنند \square ما در اینجا فقط به آن دسته از \mathbb{M}^3 -عالقه‌مندیم که بر مختصات نرمال ژئودزیک تکیه دارند و بنابراین به عنوان کانولوشن‌های GM شناسایی می‌شوند.

همانطور که در بالا گفته شد، تفاوت اصلی بین کانولوشن‌های سطحی $\{\mathbb{M}\}$ -راهبری پذیر، انتخاب خاص $\{\mathbb{M}\}$ -ساختار آنهاست. با الهام از کار قبلی [۱۲]، نویسنده‌گان انتخاب می‌کنند که چارچوب‌های مورد بحث $\{\mathbb{M}\}$ -ساختار را با جهت اتحانای اصلی منیفلد تراز کنند. توجه داشته باشید که این روش ابتکاری زمانی که اتحانای اصلی $C_2 = K_{\mathbb{M}^3}$ برابر باشند، یعنی زمانی که جهت اتحانای اصلی تبیهگش است، خوش‌تعریف نیست. یک مثال افراطی، کره 2 -بعدی S^2 است، که در آن جهت اتحانای اصلی در هیچ کجا به خوبی تعریف نشده است. حتی زمانی که اتحانای اصلی نابرابر هستند، آنها فقط یک خط بدون جهت را تعیین می‌کنند، و چارچوب‌های مرجع را تا یک C_2 -ساختار (با دو چارچوب تشکیل‌دهنده) که در امتداد دو جهت در طول خط اشاره می‌کنند. بنابراین برای اینکه شبکه مستقل از انتخاب چارچوب باشد، آنها در واقع باید کرنل‌های C_2 -راهبری پذیر را اعمال کنند. علاوه بر این، جهات اتحانای اصلی تحت تغییر شکل‌های سطوح ناپایدار هستند. به عنوان مثال، جهت اتحانای اصلی را در قطب شمال (روی محور \mathbb{M} مثبت) کره 2 -بعدی S^2 تصور کنید: یک فشرده‌گی بینهایت کوچک که در امتداد محور x منجر به یک جهت اتحانای اصلی در امتداد محور y می‌شود. ما علاوه بر این می‌خواهیم اشاره کنیم که اتحانای اصلی به جایگذاری یک منیفلد بستگی دارند، یعنی این رویکرد ذاتی نیست.

CNN های ناهمسانگرد توسط \mathbb{M}^3 -های \mathbb{M}^3 -هستند [۱۳۰، ۱۵۵، ۱۵۵، ۱۷۸، ۱۷۸، ۱۰۶] همان $\{\mathbb{M}\}$ -ساختار مبتنی بر جهت اتحانای اصلی را فرض می‌کنند. با این حال، کرنل‌های آنها در مختصات نرمال ژئودزیک تعریف نشده‌اند بلکه بر اساس کرنل‌های گرمای ناهمسانگرد روش منیفلد هستند. \mathbb{M}^3 -های \mathbb{M}^3 -می‌کنند که چنین کرنل‌های گرمایی متناظر با کرنل‌های گاوی ناهمسانگرد در مختصات ژئودزیک هستند \square اگر این گزاره درست باشد، CNN های ناهمسانگرد را می‌توان به عنوان کانولوشن‌های GM در نظر گرفت.

تا عباراتی مانند شادی، عصبانیت یا تعجب را تشخیص دهد. از آنجا که ماسک‌های چهره از نظر توپولوژیکی صفحاتی هستند (با سوراخ‌هایی در چشم‌ها)، آنها موازی‌پذیر هستند، که امکان کانولوشن‌های GM هموار را برای $\hat{G} = \{e\}$ فراهم می‌کند.

کرنل کانولوشن به یک نقطه نمونه‌برداری مرکزی و هشت نقطه دیگر در یک فاصله شعاعی ثابت R و زوایای $7, \dots, 0^\circ$ در $\varphi_k = k \frac{\pi}{8}$ در مختصات قطبی گسترش‌سازی می‌شود. کرنل‌ها در نتیجه چارچوب‌هایی که $\{e\}$ -ساختار را تشکیل می‌دهند به گونه‌ای چرخانده می‌شوند که با محور \mathbb{R} فضای جایگذاری تراز شوند. این رویکرد منطقی به نظر مرسد زیرا ماسک‌های چهره موازی‌پذیر و مهمتر از آن، به صورت عمودی تراز شده‌اند. برای تطبیق یک چنین کرنل جهت‌داری با یک میدان ویژگی، ژئودزیک‌هایی به طول R در هشت جهت شلیک می‌شوند. مختصات مرکزوار پرای درون‌یابی سیگنال از رؤوس اطراف به نقطه پایانی ژئودزیک استفاده می‌شود.

کانولوشن‌های انتقال موازی: به عنوان آخرین کانولوشن‌های انتقال موازی (۱۵۵) توسط آن با هر مکان دیگر $p \in M$ با انتقال موازی $T_p M$ در یک «مبدأ» $e \in M$ را مورد بحث قرار می‌دهیم. ایده کلیدی PTC ها تعريف کرنل کانولوشن در یک چیزی است که p و به اشتراک گذاشتن اشتراک وزن، دیسک‌های بسته $B_{T_p M}(\cdot, R) \subset T_p M$ با شعاع R را حول میداهای فضاهای مماس در نظر بگیرید، که در آن $R \in \mathbb{R}_+$ شعاع انزکتیویته منيفلد است. علاوه بر این، فرض کنید $M_{p,R} := \exp_p(B_{T_p M}(\cdot, R)) \subset M$ تصاویر این دیسک‌ها تحت نگاشت اسکالار (نامحدود) خود را به عنوان توابع با مقادیر حقیقی باشند، که شامل تمام نقاطی است که فاصله ژئودزیک آنها از p مساوی R است. [۱۵۵] کرنل‌های کانولوشن اسکالار (نامحدود) خود را به عنوان توابع با مقادیر حقیقی

$$\hat{K}_p : M_{p,R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.0.3)$$

روی همسایگی اطراف مبدأ p . یعنی مستقیماً روی منيفلد، تعريف می‌کنند. برای به اشتراک گذاشتن کرنل با مکان‌های دیگر $p \in M$ نویسنده‌گان کوتاه‌ترین ژئودزیک‌ها را بین p و مکان‌های هدف p از طریق الگوریتم پیشروی سریع محاسبه می‌کنند. سپس آنها کرنل را در امتداد این ژئودزیک‌ها به صورت انتقال موازی منivel می‌کنند، که این کار با پول‌بک کردن آنها به فضاهای مماس انجام می‌شود. در معادلات، کرنل در به صورت

$$\hat{K}_p : M_{p,R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad q \mapsto \hat{K}_p(q) := \hat{K}_p \circ \exp_p \circ \mathcal{P}_{TM,p \rightarrow p}^{-1} \circ \log_p(q), \quad (5.0.4)$$

تعريف می‌شود، که با نمودار جایجا به تصویر کشیده شده است:

$$M_{p,R} \xleftarrow{\exp_p} B_{T_p M}(\cdot, R) \xrightarrow{\mathcal{P}_{TM,p \rightarrow p}} B_{T_p M}(\cdot, R) \xrightarrow{\exp_p} M_{p,R} \quad (5.0.5)$$

\hat{K}_p

وجود نگاشت لگاریتمی تضمین شده است زیرا دامنه به نقاط q در داخل شعاع انزکتیویته محدود شده است. برای محاسبه پاسخ کانولوشن در p کرنل انتقال شده با میدان ویژگی (اسکالار) روی تطبیق داده می‌شود.

برای توصیف PTC‌ها به عنوان کانولوشن‌های GM ما باید $\{e\}$ -ساختار متناظر و کرنل $\{e\}$ -راهبری‌پذیر روی \mathbb{R} را شناسایی کنیم. یک $\{e\}$ -ساختار سازگار با انتخاب یک چارچوب دلخواه $e_i^A(p)_{i=1}^d$ در مبدأ p . ثابت می‌شود. سپس چارچوب‌ها در هر مکان دیگر p با انتقال لوی-چیزیتا این چارچوب اولیه در امتداد کوتاه‌ترین ژئودزیک‌ها تعیین می‌شوند، یعنی به صورت^{۱۳۹}

$$[e_i^A(p)]_{i=1}^d := \mathcal{P}_{FM,p \rightarrow p}[e_i^A(p.)]_{i=1}^d. \quad (5.0.6)$$

تعريف می‌شوند. توجه داشته باشید که این تعريف به طور خاص رابطه معادل زیر را برای پیمانه‌های متناظر نتیجه می‌دهد، که به راحتی با اعمال آن بر روی میدان چارچوب دیده می‌شود:

$$\psi_{GM,p}^A = \psi_{GM,p}^A \circ \mathcal{P}_{GM,p \rightarrow p}^{-1} \quad (5.0.7)$$

با توجه به چارچوب مرجع در p می‌توانیم \hat{K}_p را در مختصات نرمال ژئودزیک بیان کنیم، که مفهوم معمول ما از کرنل الکو را روی \mathbb{R} به دست می‌دهد:

$$K : B_{\mathbb{R}}(\cdot, R) \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto K(v) := \hat{K}_p \circ \exp_p \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(v) \quad (5.0.8)$$

برای نشان دادن اینکه اشتراک وزن ماز طریق $\{e\}$ -ساختار ساخته شده به این روش واقعاً با اشتراک وزن M [۱۵۵] سازگار است، ما کرنل‌های \hat{K}_p را در p با نگاشت کرنل الکوی ما K به منivel باز تولید می‌کنیم:

$$\begin{aligned} K \circ \psi_{TM,p}^A \circ \log_p &= \hat{K}_p \circ \exp_p \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1} \circ \psi_{TM,p}^A \circ \log_p \\ &= \hat{K}_p \circ \exp_p \circ \mathcal{P}_{TM,p \rightarrow p}^{-1} \circ \log_p \\ &= \hat{K}_p \end{aligned} \quad (5.0.9)$$

^{۱۳۹} از آنجا که این رابطه $\{e\}$ -ساختار را تعريف می‌کند، ما باید از انتقال دهنده‌های لوی-چیزیتا روی کل کلاف چارچوب FM استفاده کنیم.

مرحله دوم در این محاسبه از معادل معادله (۵۰۷) برای انتقال دهنده و پیمانه های کلاف مماس استفاده کرد. تمام تعاریف، و سازگاری آنها، به طور خلاصه با این گزاره که نمودار زیر جایجایی است، خلاصه می شوند:

$$\begin{array}{ccccc}
 & \exp_p & & \exp_p & \\
 M_{p,R} & \xleftarrow{\quad} & B_{T_pM}(\cdot, R) & \xrightarrow{\quad \mathcal{P}_{TM,p \rightarrow p} \quad} & M_{p,R} \\
 & \downarrow \psi_{TM,p}^A & \downarrow \psi_{TM,p}^A & & \\
 & B_{\mathbb{R}}(\cdot, R) & K & & \\
 \hat{K}_p & \xleftarrow{\quad} & \downarrow & & \hat{K}_p \\
 & & \mathbb{R} & &
 \end{array} \tag{۵۱۰}$$

از آنجا که ماده ساختار خود را با انتخاب یک چارچوب اولیه در p . ساختیم، خواننده ممکن است در مورد پیامدهای این انتخاب کنجدکاو باشد. یک انتخاب متفاوت از چارچوب اولیه منجر به یک تبدیل متناظر از مختصات نرمال ژئوپزیک در p . و در نتیجه از کرنل الگو K (معادله (۵۰۸)) خواهد شد. با این حال، از آنجا که ماده ساختار با انتقال چارچوب اولیه ساخته شده است، تمام چارچوب های مرجع آن بر این اساس تبدیل خواهد شد. سپس تبدیل کرنل الگو با تبدیل ماده ساختار خنثی خواهد شد به طوری که تمام انتخاب های چارچوب های اولیه در نهایت معادل هستند.

ماده ساختار های زیربنای PTC ها به طور حیاتی به انتخاب مبدأ p . که میدان چارچوب از آن ساخته شده است، بستگی دارد \square انتخاب های مختلف از مبدأ ها می توانند به ماده ساختار های بسیار متفاوتی منجر شوند. از آنجا که اکثر منیفلدها با یک مفهوم کانونی از مبدأ همراه نیستند، روش ابتکاری پیشنهادی تا حدی دلخواه به نظر می رسد. ماده ساختار های مبتنی بر انتقال، و در نتیجه PTC ها، علاوه بر این در مکان برش نایپیوسته هستند. این به طور خاص دلالت بر این دارد که آنها نزدیک به مکان برش تحت تغییر شکل های هندسه سطوح نایپیدار هستند زیرا چنین تغییر شکل هایی ممکن است مکان برش نایپیدار هستند. برخلاف روش های ابتکاری مدل های قبلی، روش ابتکاری PTC ها صرفاً به هندسه ذاتی سطح بستگی دارد، یعنی بر اساس جایگذاری آن در فضای محیطی نیست.

برای جلوگیری از سردرگمی، باید اشاره کنیم که در پیاده سازی خود (بخش ۲.۳) یک میدان چارچوب دیگر را می سازند، که باید با ماده ساختاری که در بالا توصیف کردیم، اشتباہ گرفته شود. این میدان چارچوب برای محاسبه عددی اتصال لوی-چیویتا روی مش لازم است، که کرنل ها سپس مطابق آن منتقل می شوند. تحلیل ما در بالا صرفاً بر اساس تعریف مستقل از مختصات آنها از مدل است، مهمتر از همه تعریف اشتراک وزن در (معادله (۵۰۴)).

علاوه بر این توجه داشته باشید که انتقال دهنده های بدار و پیژگی به طور ضمنی فرض شده در پول بک انتقال دهنده، لزوماً بر اتصال بدیهی ماده ساختار القامی شود، تکیه دارند. انتقال و پیژگی در امتداد ژئوپزیک های خروجی از p . که ماده ساختار بر اساس آنها ساخته شده است، با انتقال دهنده های لوی-چیویتا متنطبق است. انتقال دهنده ها در امتداد هر مسیر دیگر به طور کلی با انتقال لوی-چیویتا متفاوت هستند.

کانولوشن های مماس: کانولوشن های مماس توسط $P \subset \mathbb{R}^3$ روی ابرهای نقطه [۱۷۸] عمل می کنند که فرض می شود نقاط آنها روی یک سطح قرار دارند. فضاهای مماس در نقاط نمونه بداری از طریق یک تحلیل مؤلفه های اصلی محلی (LPCA) محاسبه می شوند. $p \in P$ در PCA در اساساً بدارهای و پیژگی $e_i \in \mathbb{R}^3$ از ماتریس کوواریانس تمام نقاط p در یک همسایگی کروی $N_p = \{q \in P \mid \|q - p\| < R\}$ با شاعع R حول p محاسبه می کند. از آنجا که ابر نقطه از یک سطح نمونه بداری شده است، یکی از مقادیر پیژگی باید نزدیک به صفر باشد. بدار و پیژگی متناظر به عنوان بدار نرمال صفحه مماس جایگذاری شده $T_p M \subset \mathbb{R}^3$ در p در نظر گرفته می شود. دو بدار و پیژگی دیگر یک چارچوب راسته هنجار $[e_1, e_2]$ را روی صفحه مماس تولید می کنند، به طوری که جمجمه بدارهای و پیژگی e_1, e_2 در PCA را داریم. بنابراین $\kappa_n(e_1) = \kappa_{\max}$ و $\kappa_n(e_2) = \kappa_{\min}$ است. با این حال، چارچوب ها با $\pi/2$ چرخانده شده اند زیرا با جهت حداقل به جای حداقل انحنای اصلی اشاره می کنند، یعنی ما $\kappa_n(e_1) = \kappa_{\max}$ و $\kappa_n(e_2) = \kappa_{\min}$ است. از آنجا که بدار و پیژگی با بزرگترین مقدار و پیژگی در جهت حداقل انحنای اصلی اشاره می کنند، آنرا به عنوان یک گسسته سازی از مختصاتی سازی فضای مماس $\psi_{TM,p}^A(T_p M) = \mathbb{R}^3$ در نظر گرفت. سپس کانولوشن و پیژگی ها را با گرفتن حاصل ضرب داخلی با یک کرنل پیکسلی $N \times N$ محاسبه می کنند.

به جای نمایش میدان و پیژگی در مختصات نرمال ژئوپزیک، کانولوشن های مماس و پیژگی ها را در امتداد جهت نرمال روی صفحه مماس تصویر می کنند.^{۱۴۱} سپس آنها به یک شبکه منظم از $N \times N$ پیکسل درون یابی می شوند. از آنجا که این شبکه با چارچوب مرجع تراز شده است، می توان آن را به عنوان یک گسسته سازی از مختصاتی سازی فضای مماس $\psi_{TM,p}^A(T_p M) = \mathbb{R}^3$ در نظر گرفت. سپس کانولوشن و پیژگی ها را با گرفتن حاصل ضرب داخلی با یک کرنل پیکسلی $N \times N$ محاسبه می کنند.

$NPTC$ -net [۸۵] ها را روی ابرهای نقطه سطحی $P \subset \mathbb{R}^3$ پیشنهاد کردند. مانند کانولوشن های مماس، $NPTC$ -net ها صفحات مماس را از طریق یک تحلیل مؤلفه های اصلی محلی محاسبه می کنند، با این حال، ماده ساختار آنها مستقل از $NPTC$ -net است. ماده ساختار زیربنای $NPTC$ -net ها بیشتر با گرادیان تابع فاصله ژئوپزیک از یک نقطه اولیه $p \in P$ تراز شده است. برای حل این ابهام،

^{۱۴۰} از آنجا که تمام چارچوب های مرجع با یک زاویه یکسان چرخانده شده اند، این تفاوت اگر کرنل ها یاد گرفته شوند، بی اهمیت است.

^{۱۴۱} این انتخاب، کانولوشن های مماس (و $NPTC$ -net ها) را از کانولوشن های GM متفاوت می کند. در حد کرنل های کوچک نسبت به انحنای سطح، هر دو تصویر از میدان های و پیژگی به فضاهای مماس معادل می شوند.

حل تابع فاصله، $\| \cdot \|$ معادله ایکونال را از طریق یک الگوریتم پیشروی سریع حل می‌کنند. به جای عمل مستقیم روی ابر نقطه همانطور که به عنوان مثال در [۳۸] انجام می‌شود، نویسنده‌گان پیشنهاد می‌کنند از یک شبکه واکسل پراکنده استفاده کنند که واکسل‌های آن در یک نوار باریک اطراف ابر نقطه قرار دارند. پس از محاسبه تابع فاصله روی شبکه واکسل، که باید فواصل تقریباً ژئودزیک را تولید کند، گرادیان آن محاسبه و روی صفات مماس تصویر می‌شود. بردار تصویر شده اولین محورهای چارچوب $\{e\}$ -ساختار را تعیین می‌کند. توجه داشته باشید که چنین میدان‌های چارچوب تعريف شده‌ای در p تکین هستند.

تکین [۸۵] مشاهده می‌کنند که این $\{e\}$ -ساختار یک اتصال بدیهی را روی سطح القا می‌کند (به گونه‌ای تعريف شده که میدان چارچوب تحت این انتقال بسته است). میدان چارچوب (با کرنل‌های کانولوشن) را می‌توان به عنوان منتقل شده مطابق با این اتصال بدیهی در کرد، که « NPTC-net » (کانولوشن انتقال موازی) را در نام مدل توجیه می‌کند. توجه داشته باشید، با این حال، که NPTC-net ها بر خلاف PTC-های آن بیان کرد.

مانند کانولوشن‌های مماس، ψ^A ‌ها ویژگی‌ها را در فضای محیطی به صفحه مماس تصویر می‌کنند. به جای استفاده از یک تصویر در امتداد جهت نرمال، نویسنده‌گان از یک درون‌یابی نزدیکترین همسایه با فواصل اندازه‌گیری شده در فضای محیطی استفاده می‌کنند. سپس کرنل کانولوشن در امتداد چارچوب‌های $\{e\}$ -ساختار جهت‌دهی شده و با میدان ویژگی درون‌یابی شده تطبیق داده می‌شود. با توجه به یک کرنل کانولوشن $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ نویسنده‌گان تخصیص آن را به فضاهای مماس به صورت $K : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^2$ فرمول‌بندی می‌کنند که در آن $K \circ \psi_{TM,p}^A : (T_p M)^{\perp} \rightarrow \mathbb{R}^2$ است. این رویه دقیقاً با تعريف ما از اشتراک وزن و پیمانه‌ها (معادله (۴۳۷)) مطابقت دارد.

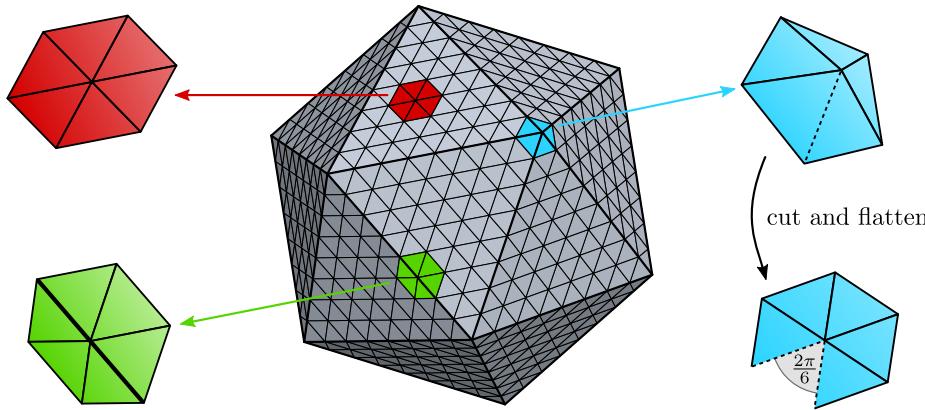
کانولوشن‌های بین-اطلسی: یک رویکرد کاملاً متفاوت توسط [۱۰۶] دنبال شد. کانولوشن‌های بین-اطلسی آنها یک اطلس بافت را محاسبه می‌کنند که چارت‌های آن برای تقریباً ایزومنتریک بودن بهینه‌سازی شده‌اند. سپس عملیات کانولوشن روی اطلس بافت انجام می‌شود، با نگاشت‌های آفست پیکسل که نگاشت‌های گذار بین چارت‌ها را مدل‌سازی می‌کنند.

قبل از اجرای کانولوشن‌های واقعی، یک اطلس از چارت‌ها محاسبه می‌شود. از دیدگاهی انتزاعی، چارت‌ها تکه‌هایی از سطح را به \mathbb{R}^2 نگاشت می‌دهند، به طوری که کل سطح پوشش داده می‌شود. به طور مشخص، آنها تکه‌هایی از یک میدان ویژگی ورودی C -کاناله (بافت) را به روشنی بدون همپوشانی به یک آرایه با ابعاد (X, Y, c) نگاشت می‌دهند. از آنجا که تکه‌ها در آرایه باید تقریباً همسایگی‌های ژئودزیک را روی سطح نمایش دهند، چارت‌ها باید تقریباً ایزومنتریک باشند، یعنی اعوچاجها را به حداقل برسانند. برای برآورده کردن این الزام، سطح به تکه‌هایی بربدیده می‌شود به طوری که زوایای متناظر بین تمام نرمال‌های مثلث در داخل یک تکه زیر یک آستانه مشخص شده توسط کاربر باقی بماند \square توجه داشته باشید که این رویکرد بر اساس هندسه خارجی سطوح است. پس از بهینه‌سازی تکه‌ها روی سطح، میدان ویژگی روی هر تکه در امتداد یک جهت تصویر غالب، تصویر می‌شود. یک الگوریتم بسته‌بندی بن (icosahedron) تکه‌های تصویر شده را به طور متراکم در نقشه بافت با شکل (X, Y, c) بسته‌بندی می‌کند. برای حل ابهام جهتی تکه‌ها، آنها باید تراز-دورانی شوند. این کار با الزام به اینکه تصاویر محور \mathbb{Z} فضای محیطی به هر تکه، همگی در نقشه بافت تراز شوند، به دست می‌آید.

کانولوشن مستقیماً روی نقشه بافت عمل می‌کند. این پیکسل‌ها را به سه دسته مختلف گروه‌بندی می‌کند که به روشنی متفاوت پردازش می‌شوند. پیکسل‌هایی که در داخل یک تکه هستند، به طوری که کرنل از تکه خارج نمی‌شود، از طریق کانولوشن‌های اقلیدسی متعارف کانولوشن می‌شوند. از آنجا که چارت‌ها تقریباً ایزومنتریک هستند، این تقریباً متناظر با یک کانولوشن ژئودزیک روی نواحی داخلی تکه روی سطح است. پیکسل‌هایی که خارج از تکه‌ها هستند، پردازش نمی‌شوند و مقدار آنها صفر ثابت می‌شود. مورد جالب، پیکسل‌هایی هستند که نزدیک به مرز تکه‌ها هستند. از آنجا که کرنل کانولوشن برای چنین پیکسل‌هایی از تکه فعلی خارج می‌شود، به نگاشت‌های گذار نیاز دارد که ویژگی‌ها را از یک تکه همسایه روی سطح استعلام کنند. مکان استعلام با (۱) یافتن نقطه اصلی روی سطح که متناظر با مکان فعلی کرنل است، (۲) شلیک یک ژئودزیک برای یافتن مکان نمونه برداری کرنل روی سطح و (۳) نگاشت این مکان به پیکسل متناظر در نقشه بافت، محاسبه می‌شود. با استفاده از این نگاشت‌های گذار، تکه‌ها مطابق با هندسه سطح به هم دوخته می‌شوند و کانولوشن روی نقشه بافت تقریباً متناظر با یک کانولوشن ژئودزیک روی سطح است. در حد اینکه آستانه زاویه نرمال به سمت صفر برود، تقریب به یک کانولوشن ژئودزیک دقیق همگرا می‌شود. با این حال، تکه‌ها سپس به وجود منفرد کوچک می‌شوند، که منجر به نگاشت‌های گذار غیربدیهی تری می‌شود.

کانولوشن‌های بین-اطلسی در این حد متناظر با کانولوشن‌های GM هستند که $\{e\}$ -ساختار آنها از چارت‌ها القا می‌شود. $\{e\}$ -ساختار در مرزهای بین تکه‌های مجاور ناپیوسته است، با این حال، پرش‌ها به دلیل تراز دورانی تکه‌ها در نقشه بافت باید در اکثر موارد به حداقل برسند. انتظار می‌رود ناپیوستگی‌ها در تکه‌هایی از سطح که تقریباً افقی هستند، بزرگ باشند.

برای کامل بودن، ما به روش‌های مبتنی بر اطلس توسط [۱۱۷] و [۱۶۶] اشاره می‌کنیم. هر دو تصویرهای غیر-ایزومنتریک از سطح را به یک دامنه مسطح در نظر می‌گیرند، که این دلالت بر این دارد که کانولوشن‌های اقلیدسی بعدی متناظر با کانولوشن‌های ژئودزیک روی سطح نیستند.



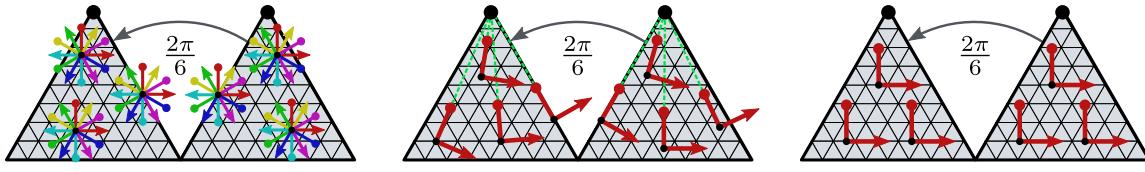
شکل ۷۰: بیستوچهی یک جسم افلاطونی است که در [۱۱۱، ۳۲، ۲۰۷] به عنوان یک تقریب تکه‌ای-تخت از هندسه کروی استفاده می‌شود. این جسم از ۱۲ رأس، ۲۰ وجه مثلثی متساوی‌الاضلاع و ۳۰ یال تشکیل شده است. این جسم یک شبکه نمونه‌برداری منظم را می‌پذیرد، که با تقسیم مکرر هر مثلث به چهار مثلث کوچکتر ساخته می‌شود. پس از ۲۷ تکرار، این رویه منجر به یک شبکه با $5 + 2^{27+1}$ رأس می‌شود. سه تکه بر جسته شده، هندسه کیفی ستفاوت همسایگی‌ها را حول رؤوس روی وجهه (قمرن)، یال‌ها (سیز) و رؤوس بیستوچهی (آبی) نشان می‌دهند. همسایگی قرمز بهوضوح تخت است. در حالی که همسایگی سیز در فضای جایگذاری خمیده است، انحنای گاوسی ذاتی آن دوباره صفر است. این واقعیت در این امر منعکس می‌شود که می‌توان آن را به صورت ایزومتریک (یعنی بدون برش) پهن کرد و به طور معادل، انتقال لوى-چیوپیتا در امتداد یک مسیر بسته حول گره مرکزی، نگاشت همانی است. همسایگی آبی باید در امتداد یک یال بریده شود تا بتوان آن را پهن کرد. نقص زاویه‌ی، یعنی زاویه‌ای که برش هنگام پهن کدن نوک تیز باز می‌شود، برابر با $\frac{\pi}{6}$ است. هنگامی که یک بردار یک بار حول رأس مرکزی همسایگی به صورت موازی منتقل می‌شود، به اندازه این نقص زاویه می‌چرخد. به جای داشتن انحنای گاوسی مثبت ثابت مانند کره S^3 ، انحنای بیستوچهی در رؤوس آن متمرکز (تکین) است و در همه جای دیگر صفر است.

۴.۱۲ تقریب‌های بیستوچهی از CNN‌های کروی

کره S^3 در علوم محاسباتی معمولاً با اجسام افلاطونی، یعنی چندوجهی‌های منتظم محدب، تقریب زده می‌شود. در زمینه یادگیری عمیق، علاقه بیشتر بر روی بیستوچهی (icosahedron)، شکل ۷۰، متمرکز شده است، که در میان اجسام افلاطونی، نزدیک‌ترین تقریب به کره است [۱۵۶]. در حالی که هندسه ریمانی کره فقط تقریب زده می‌شود، اجسام افلاطونی این مزیت را دارند که تکه‌ای-تخت هستند و مشاهای منظمی را می‌پذیرند. این ویژگی‌ها امکان استفاده از رواه‌های کاتولوشن مسطح را فراهم می‌کنند، که از نظر محاسباتی بهینه‌تر از روش‌های دو بخش قبل هستند. این بخش به بحث در مورد CNN‌های بیستوچهی از [۱۱۱، ۷۱] و [۳۲] می‌پردازد، که به ترتیب بر G -ساختارهای نشان داده شده در شکل‌های ۷۱ و ۷۱ج تکیه دارند. قبل از پرداختن به پیاده‌سازی‌های آنها بر حسب اطلسی از چارت‌های آفین در شکل ۷۲، ما جزئیات بیشتری در مورد هندسه بیستوچهی و G -ساختارهای در نظر گرفته شده ارائه می‌دهیم.

هندسه‌ی بیستوچهی: بیستوچهی یک منیفلد دوبعدی گستته است که از ۲۰ وجه مثلثی متساوی‌الاضلاع، ۱۲ رأس و ۳۰ یال تشکیل شده است. همانند کره ۲-بعدی، ما بیستوچهی را به عنوان جایگذاری شده در \mathbb{R}^3 تعریف می‌کنیم، که از آن متريک جایگذاری را در معادله (۴۲۹) به ارث می‌برد. فضاهای مماس جایگذاری شده $T_p M \subset \mathbb{R}^3$ روی وجهه در اینجا به گونه‌ای تعریف می‌شوند که نرمال‌های آنها با نرمال‌های وجوه منطبق باشند. فضاهای مماس روی رؤوس و یال‌ها را می‌توان از طریق میانگین نرمال‌های وجوه مجاور تعریف کرد، همانطور که در بخش بعدی ۱۲ مورد بحث قرار می‌گیرد. با این حال، از آنجا که ما میدان‌های ویژگی را به عنوان نمونه‌برداری شده روی وجهه بیستوچهی (که تقریباً همه جا است) در نظر می‌گیریم، از این انتخاب مستقل هستیم. با فرض اتصال لوى-چیوپیتا، انتقال موازی بردارهای مماس از رأس روی وجهه به گونه‌ای عمل می‌کند که آنها را در فضای جایگذاری \mathbb{R}^3 موازی نگه دارد. هنگامی که بردارهای مماس از رأس یک یال به صورت موازی منتقل می‌شوند، زاویه یکسانی را نسبت به یال در هر دو طرف حفظ می‌کنند [۱۱۱] این انتقال را می‌توان به طور شهودی به این صورت تصور کرد که (۱) دو وجه مجاور را پهن کرد، (۲) بردار را روی یال مانند حالت معمول در یک فضای اقلیدسی دوبعدی منتقل کرده، و (۳) دو وجه را به جایگذاری اصلی خود بازگردانیم؛ به شکل ۶۵ و [۳۵] مراجعه کنید. بنابراین $\mathbf{z}^{\text{وُزدیک}}_{\text{ها}}$ در \mathbb{R}^3 تکه‌ای-خطی هستند و از یال‌ها به گونه‌ای عبور می‌کنند که زاویه خروج آنها برابر با زاویه ورودشان باشد. بنابراین نگاشتهای نمایی $(v)_p = \exp_p(v)$ به راحتی با دنبال کردن یک مسیر تکه‌ای-ثابت برای فاصله‌ای برابر با $\|v\|$ محاسبه می‌شوند. در عمل، نویسنده‌گان [۱۱۱، ۳۲، ۲۰۷] میدان‌های ویژگی را روی یک متش منظم نمونه‌برداری می‌کنند و فقط آن دسته از بردارهای مماس را در نظر می‌گیرند که به رؤوس متش همسایه نگاشت می‌یابند.

شکل ۷۰ همسایگی‌های دیسک‌مانند را حول نقاط نمونه روی وجهه (قمرن)، یال‌ها (سیز) و رؤوس (آبی) بیستوچهی نشان می‌دهد. همسایگی قرمز کاملاً در داخل یک وجه قرار دارد و بنابراین تخت است. همسایگی سیز در فضای جایگذاری خمیده است. با این حال، انحنای گاوسی (یا گاوسی) آن هنوز صفر است زیرا انتقال لوى-چیوپیتا بردارها یک بار حول رأس مرکزی، آنها را همانطور که هستند حفظ می‌کند. اینکه این مورد برقرار است معادل این واقعیت است که همسایگی سیز را می‌توان به صورت ایزومتریک پهن کرد، یعنی بدون کشش یا برش آن. این پهن کردن ایزومتریک برای نوع آبی همسایگی‌ها حول رؤوس ممکن نیست، که برای پهن شدن باید در یکی از یال‌ها بریده شوند. با ساخته شدن از پنج مثلث متساوی‌الاضلاع، نوک تیز پهن شده یک نقص زاویه $\frac{\pi}{6}$ را نشان می‌دهد. هولونومی هر مسیر بسته حول هر رأس (منفرد)، یعنی زاویه بین یک



(ج) e -ساختار بیستوچهی تراز-شده-با- شبکه توسط [۳۲].

(ب) e -ساختار بیستوچهی تراز-شده-با- شمال توسط [۲۰۷].

(ا) e -ساختار بیستوچهی تراز-شده-با- شبکه توسط [۱۱۱].

شکل ۷۱. ایده مفهومی G -ساختارهای فرض شده در $\{e\}$ -ساختار با تراز شده است. شکل ۷۲ نشان داده شده است. $\{e\}$ -ساختار جاگزین تمام تمام چارچوب‌ها در امتداد یال‌های «افقی» وجوه (با فرض عمودی بودن محور قطبی) تعریف می‌شود. شکل ۷۱ ب یک e -ساختار جاگزین را نشان می‌دهد که چارچوب‌های آن به سمت قطب شمال تراز شده‌اند. این ساختار برخلاف e -ساختار قبلی پیوسته است زیرا چارچوب‌ها روی یال‌های بریده شده هنگام جسبانیدن مجدد یال‌ها به یکدیگر مطابق می‌شوند. e -ساختار در شکل ۷۱ با افزودن چارچوب‌هایی که با مضرب‌هایی از $\frac{\pi}{6}$ چرخانده شده‌اند به $\{e\}$ -ساختار از شکل ۷۱ آساخته می‌شود. از آنجا که این زاویه با نقص زاویه در یال‌های بریده شده برابر است، e -ساختار تعریف شده به این ترتیب هموار (پیوسته) است. توجه داشته باشید که این دو e -ساختار با نقص زاویه در انتقال لوی-چیویتا با اتصال لایه‌های کانولوشن‌گار هستند (یعنی تحت آن بسته نیستند) اما یک اتصال بدیهی جاگزین را القا می‌کنند. e -ساختار، در مقابل، با انتقال لوی-چیویتا سازگار است.

بردار دلخواه و انتقال آن یک بار حول حلقه، دقیقاً با این نقص زاویه داده می‌شود. در کل، این نتایج دلالت بر این دارند که انحنای گاووسی (گسسته) بیستوچهی در همه جا به جز در رؤوس صفر است، جایی که با هولونومی $\frac{\pi}{6}$ تکین است. هندسه ساده بیستوچهی اجازه می‌دهد تا آن را باز کرده و به صورت سراسری پهن کرد، همانطور که در شکل ۷۲ به تصویر کشیده شده است، که در [۱۱۱، ۳۲، ۲۰۷] برای یک پیاده‌سازی کارآمد از کانولوشن‌های GM بیستوچهی استفاده شد.

گروه ایزومتری کامل بیستوچهی $(Isom(M) = I_h \leq O(3))$ متناظر است و از 120 عضو تشکیل شده است. می‌توان آن را به عنوان حاصلضرب مستقیم $R \times I$ از زیرگروه بازتاب‌ها R و زیرگروه ایزومتری‌های حافظ جهت I می‌دانیم. $Isom_+(M) = I \leq SO(3)$ که شامل 60 دوران $C_5 \leq SO(2)$ است، ساخت. هر رأس p توسط پنج دوران گسترهٔ حول محور گذرنده از p و رأس متقابل آن پایدار می‌شود، که گروه دوری $D_5 \leq SO(2)$ را تشکیل می‌دهند. رأس p علاوه بر این توسط بازتاب‌ها نسبت به صفحه تعريف شده توسعه محور دوران و هر یال خروجی از p پایدار می‌شود، به طوری که زیرگروه پایدارساز کامل آن با گروه دوچهی $O(2)$ داده می‌شود. هموردا باید کانولوشن‌های GM بیستوچهی نسبت به گروه‌های ایزومتری I_h ، I ، D_5 یا C_5 در [۲۲] نشان داده شده است که هموردا باید کامل $O(3)$ ، $SO(3)$ یا $O(2)$ های CNN گروی را به خوبی تقریب می‌زند هنگامی که از افزایش داده دورانی پیوسته استفاده شود.^{۱۴۲}

G -ساختارهای بیستوچهی: کانولوشن‌های GM بیستوچهی توسط $[۱۱۱]$ و $[۲۰۷]$ (به طور ضمنی) $\{e\}$ -ساختارها را فرض می‌کنند، در حالی که مدل $[۳۲]$ یک e -ساختار را فرض می‌کند. شکل ۷۱ ایده پشت این G -ساختارها را به تصویر می‌کشد، که در سه پاراگراف بعدی با جزئیات بیشتری توضیح می‌دهیم.

$\{e\}$ -ساختار توسط $[۱۱۱]$ که در شکل ۷۱ نشان داده شده است، با تراز کردن اولین محورهای چارچوب در امتداد یال‌های «افقی» وجوه مثبتی متناظر تعريف می‌شود. هنگام پهن کردن بیستوچهی به یک صفحه همانطور که در شکل ۷۲ نشان داده شده است، تمام چارچوب‌های GM متناظر را سیار ساده می‌کند. طبق معمول، $\{e\}$ -ساختار یک اتصال بدیهی یکتا را مشخص می‌کند که ویژگی‌ها مطابق آن منتقل می‌شوند. این اتصال بدیهی در داخل وجوه، روی یال‌هایی که در شکل ۷۲ بریده نشده‌اند و روی یال بریده شده ارجوانی با اتصال لوی-چیویتا متفاوت است. با این حال، انتقال آن از روی یال‌های بریده شده باقی‌مانده با انتقال لوی-چیویتا متفاوت است زیرا چارچوب‌های $\frac{\pi}{6}$ می‌چرخد. از آنجا که $\{e\}$ -ساختار توسط دوران‌ها در D_5 حول محور قطبی حفظ می‌شود، کانولوشن‌های GM آن تقریباً $SO(2)$ هموردا هستند، یعنی مدل‌های بخش قبلی ۳.۱۱ را تقریب می‌زنند. با این حال، $\{e\}$ -ساختار \square و بنابراین استنتاج شبکه \square روی یال‌های با نقص زاویه غیرصفر ناپیوسته است. علاوه بر این، چارچوب‌های مرجع دقیقاً به سمت قطب شمال اشاره نمی‌کنند، همانطور که برای $\{e\}$ -ساختار کروی از بخش ۳.۱۱ و شکل ۵۷ صادق است.

$\{e\}$ -ساختار در شکل ۷۱ ب حل کنند. این ساختار به گونه‌ای تعریف شده است که چارچوب‌ها دقیقاً در امتداد تصویر محور قطبی روی وجوه، یعنی به سمت قطب شمال، اشاره می‌کنند. این $\{e\}$ -ساختار در همه جا به جز در قطب‌های شمال و جنوب پیوسته است.^{۱۴۳} این ساختار به این معنا تقریب بهتری از $\{e\}$ -ساختار کروی از شکل ۵۷ است. $\{e\}$ -ساختار دوباره یک اتصال بدیهی یکتا را القا می‌کند. انتقال آن با انتقال لوی-چیویتا روی یال‌ها متفاوت است، با این حال، هنگام انتقال روی وجوه با آن متفاوت است زیرا بردارها را به آرامی همراه با چارچوب‌ها می‌چرخاند. مانند $\{e\}$ -ساختار دوباره یک اتصال بدیهی یکتا را القا می‌کند. این میدان چارچوب تحت دوران‌های C_5 ناورد است و بنابراین CNN‌های کروی هموردا دوران سمتی را تقریب می‌زنند.^{۱۴۴}

این در [۳۲] به صورت تجربی برای $I_h \leq O(3)$ نشان داده شده است. اینکه این نتیجه به $I_h \leq O(3)$ تعمیم می‌یابد، روشن است زیرا گروه‌ها فقط در بازتاب‌ها متفاوت هستند، که کانولوشن‌های GM بیستوچهی را می‌توان نسبت به آنها دقیقاً هموردا ساخت. این علاوه بر این برای $D_5 \leq O(2)$ نیز برقرار است، زیرا اینها زیرگروه‌هایی از $O(3)$ هستند.^{۱۴۵} برای دیدن این، تصور کنید که یال بریده شده در شکل ۷۱ را دوباره به هم بچسبانید: چارچوب‌های روی نیمه چپ و راست یال سپس با هم منطبق می‌شوند، که این مورد در شکل ۷۱ صادق نیست.

C_e-ساختار در شکل ۷۱ ج توسط [۳۲] با افزودن چارچوب‌هایی که با مضرب‌هایی از π^2 چرخانده شده‌اند به چارچوب‌های {e}-ساختار از شکل ۷۱ آن‌تعریف می‌شود. این ساختار بهوضوح پیوسته است زیرا زوایای بین مجموعه چارچوب‌های مرجح در هر نقطه دقیقاً برابر با نقص‌های زاویه در یال‌های بریده شده است. این ساختار برخلاف دو {e}-ساختار قبلی با انتقال لوی-چیویتا سازگار است زیرا گروه ساختاری C_e با گروه هولونومی بیست‌وجهی منطبق است. C_e-ساختار علاوه بر این تحت عمل ایزومتری‌های حافظ جهت بیست‌وجهی I بنا براین کانولوشن‌های GM روی این C_e-ساختار، های کروی کاملاً همودای دورانی (۳) SO را ز بخش ۲.۱۱ تقریب می‌زنند.

پیاده‌سازی‌ها: برای پیاده‌سازی کانولوشن‌های GM روی G-ساختارهای متناظر، [۱۱۱]، [۲۰۷] و [۲۰۸] [۲۲] یک شبکه منظم را روی وجهه بیست‌وجهی فرض می‌کنند؛ به شکل ۷۰ مراجعته کنید. این شبکه شش ضلعی منظم با تقسیم مکرر یال‌ها و جایگزینی هر مثلث با چهار مثلث کوچکتر ساخته می‌شود. دروضوح [۲۰۷] این کار منجر به یک شبکه با $2 + 2 \cdot 5 \cdot 2^{n+1}$ رأس می‌شود. توجه داشته باشید که این شبکه بنا به ساختار، دقیقاً تحت ایزومتری‌های بیست‌وجهی مقابله است، که منجر به یک همودایی دقیق Isom_{GM} کانولوشن‌های GM گسترش‌سازی شده می‌شود. [۱۱۱] پیشنهاد کردند که میدان‌های ویژگی بیست‌وجهی را نسبت به اطلسی از چارت‌ها که در شکل ۷۲ نشان داده شده است، نمایش دهند. این چارت‌ها این مزیت را دارند که شبکه‌های شش ضلعی روی وجهه بیست‌وجهی را به شبکه‌های پیکسلی مربعی معمول نگاشت می‌دهند. با این حال، توجه داشته باشید که چارچوب‌های راست‌هنچار روی وجهه بیست‌وجهی را به تغییر شکل می‌یابند، به طوری که نسبت به متیک اقلیدسی کانونی، راست‌هنچار نیستند. کرنل‌های کانولوشن شش ضلعی روی بیست‌وجهی بر این اساس تغییر شکل می‌یابند و می‌توانند بر حسب کرنل‌های ماسک‌گذاری شده‌اند که دو گوشه آنها با صفر پر شده است، پیاده‌سازی شوند.

کانولوشن GM توسط [۱۱۱] چارچوب‌های را فرض می‌کند که همگی موازی هستند و بنابراین می‌توانند در داخل چارت‌ها، جایی که تکیه‌گاه کرنل از مرزهای آن فراتر نمی‌رود، از طریق یک کانولوشن اقلیدسی متعارف پیاده‌سازی شوند. در نقاطی که به یک یال بین چارت‌های مختلف نزدیک هستند، کرنل ویژگی‌ها را از آن سوی برش اینباشت می‌کند. همانطور که قبلاً در بخش ۴.۵ و شکل ۳۰ بحث و به تصویر کشیده شد، این کار به راحتی از طریق یک عملیات پدینگ انتقال پیاده‌سازی می‌شود که یک حاشیه از ویژگی‌های منتقل شده موازی را در اطراف آرایه پیکسل‌های مربعی قبل از اجرای عملیات کانولوشن، پد می‌کند. برای انتقال بدیهی که به طور ضمنی توسط [۱۱۱] فرض شده است، این عملیات پدینگ فقط یک ردیف از ویژگی‌ها را در هر یال بدون تبدیل آنها کپی می‌کند. از آنجا که نویسنده‌گان گروه ساختاری بدیهی $G =$ را فرض می‌کنند، کرنل‌های شش ضلعی نامحدود باقی می‌مانند.

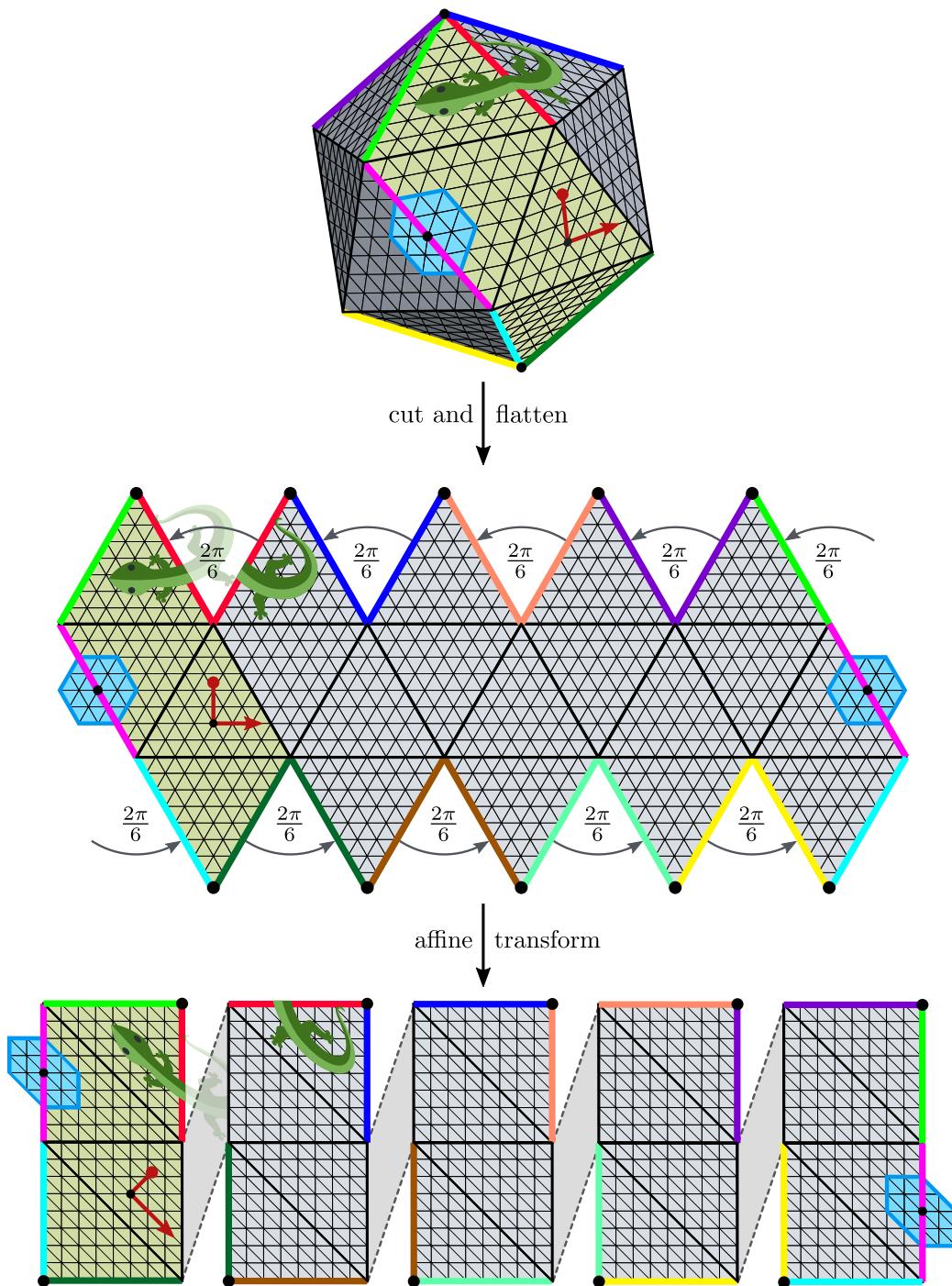
پیاده‌سازی [۳۲] عمدها مشابه است، با این حال، تفاوت حیاتی آن در این است که از انتقال‌دهندهای لوی-چیویتا و کرنل‌های C_e-راهبری‌پذیر استفاده می‌کند. به جای پدینگ مستقیم ردیف‌های پیکسل از روی یال‌ها، انتقال لوی-چیویتا نیازمند این است که ویژگی‌ها با e_g برای تمام یال‌های داخلی و یال‌های خارجی، با زوایه‌ای پیکسل از روی تمام یال‌های با نقص زاویه $\frac{\pi}{2} \pm \theta$ راهبری شوند، که علامت آن به جهت انتقال بستگی دارد. [۳۲] نمایش منظم C_e را به عنوان نوع میدان فرض می‌کنند و کرنل‌های کانولوشن را برآورده کردن محدودیت راهبری‌پذیری مربوطه محدود می‌کنند. پس از پدینگ انتقال، کانولوشن GM آنها به عنوان یک کانولوشن اقلیدسی متعارف با این کرنل‌های راهبری‌پذیر پیاده‌سازی می‌شود. توجه داشته باشید که این کانولوشن GM در داخل وجوده، یعنی به جز پدینگ انتقال، مشابه HexaConv توسط [۷۴] است.

از آنجا که کانولوشن GM توسط [۲۰۷] یک گروه ساختاری بدیهی $G =$ را فرض می‌کند، پدینگ انتقال دوباره به عنوان یک کپی بدیهی از پیکسل‌ها بدون راهبری پیاده‌سازی می‌شود و کرنل‌ها دوباره نامحدود باقی می‌مانند. با این حال، از آنجا که چارچوب‌های {e}-ساختار به سمت قطب شمال تراز شده‌اند، آنها دیگر در نمایش پیکسل مربعی مستطیلی موازی نیستند، که از یک پیاده‌سازی فوری بر حسب کانولوشن‌های متعارف جلوگیری می‌کند. در عوض، کرنل‌ها باید در هر نقطه از شبکه در یک دوران متفاوت اعمال شوند. از آنجا که کرنل شش ضلعی را می‌توان با $\frac{\pi}{2}$ بدون استفاده از درون‌بایی چرخاند، و از آنجا که ترازها به سمت قطب شمال حداکثر با این زاویه با یکدیگر تفاوت دارند، نویسنده‌گان تقریب کارآمد زیر را برای این عملیات پیشنهاد می‌کنند: آنها روی هر وجه دو بار کانولو می‌کنند، یک بار با کرنل اصلی و یک بار با نسخه دوران یافته آن با $\frac{\pi}{2}$. سپس دو میدان پاسخ به صورت خطی با هم ترکیب می‌شوند، با وزن‌های درون‌بایی از پیش محاسبه شده که به زوایای چارچوب‌های مرجع تراز-شده-به-شمال نسبت به دو تراز کرنل (یعنی نسبت به شبکه پیکسلی) بستگی دارد. بنابراین این پیاده‌سازی تقریباً دو برابر پرهزینه‌تر از پیاده‌سازی‌های [۱۱۱] [۳۲] است.

یک پیاده‌سازی جایگزین از کانولوشن‌های کروی روی بیست‌وجهی توسط [۴۶] پیشنهاد شده است. نویسنده‌گان سیگنال کروی را روی صفحات گسترده شده توسط ۲۰ وجه (که به عنوان تصاویر مماس شناخته می‌شوند) تصویر می‌کنند و متعاقباً یک CNN متعارف را روی هر یک از این تصاویر اجرا می‌کنند. ما این شبکه را در لیست خود نیاورده‌یم زیرا این شبکه این نمایش‌ها را به طور مستقل از یکدیگر پردازش می‌کند، یعنی ویژگی‌ها را بین آنها منتقل یا پد نمی‌کند و بنابراین این پیاده‌سازی توصیف نمی‌شود.

همانطور که قبلاً ذکر شد، نتایج تجربی [۸۷] نشان می‌دهد که هندسه بیست‌وجهی هندسه کروی را برای کاربردهای یادگیری عمیق به خوبی تقریب می‌زند. به طور خاص، نویسنده‌گان CNN کروی خود را روی یک شبکه ایکوسфер با CNN بیست‌وجهی تکه‌ای-تخت توسط [۳۲] مقایسه می‌کنند و در می‌یابند که هر دو علی‌رغم هندسه تغییر شکل یافته دومی، عملکرد مشابهی دارند. مشخص شده است که همودایی CNN‌های بیست‌وجهی تحت دوران‌های پیوسته در (۳) SO به طور قابل توجهی نقض می‌شود، با این حال، به نظر می‌رسد این فقط یک اثر بیش‌برازش است زیرا به این تصریف می‌شود. به این تصریف می‌شود.

^{۱۴۴} شبکه ایکوسфер، که توسط برخی از مدل‌های بخش‌های ۲.۱۱ و ۳.۱۱ استفاده می‌شود، با تصویر کردن گره‌های این شبکه به فاصله شعاعی واحد از مبدأ، یعنی به S^۲ تعریف می‌شود. مدل‌های این بخش این تصویر را فرض نمی‌کنند بلکه مستقیماً روی هندسه بیست‌وجهی تکه‌ای-تخت کانولو می‌کنند.



شکل ۷۲: پیاده‌سازی‌های [۱۱۱، ۳۲، ۲۰۷] میدان‌های ویزگی را نسبت به یک اطلس که بیست‌وجهی را با پنج چارت می‌پوشاند، نمایش می‌دهند. برای ساخت این چارت‌ها، بیست‌وجهی در امتداد یال‌های رنگی بریده شده و پهن می‌شود. سپس پنج ناحیه، که هر کدام از چهار مثلث تشکیل شده‌اند، به همدامنه‌های چارت مستطیلی برش داده می‌شوند. (۱۰۰۰۰۰۰۰) این عملیات شبیه شش ضلعی را به یک شبکه از پیکسل‌های مریبی نگاشت می‌دهد، به طوری که میدان‌های ویزگی بیست‌وجهی را می‌توان با مجموعه‌ای از پنج آرایه مستطیلی کدگذاری کرد. توجه داشته باشید که چارچوب‌های مرجع و کرنل‌ها بر این اساس در همدامنه‌های چارت تغییر شکل می‌یابند. انتقال لوى چیوپتا از روی تمام یال‌های رنگی به جز یال ارغوانی، یک دوران به اندازه $\frac{2\pi}{6}$ را به همراه دارد، که علامت آن به جهت انتقال بستگی دارد. این کار با پدینگ انتقال ردیف‌هایی از پیکسل‌ها در امتداد یال‌های بریده شده، همانطور که قبلاً در شکل ۳۰ توصیف شد، پیاده‌سازی می‌شود.

(مارموک‌ها با مجوز توییتر تحت لایسنس بین‌المللی Creative Commons Attribution 4.0 license اقیانس شده‌اند.)

همیشه، می‌خواهیم اشاره کنیم که CNN‌های C_5 -هموردا توسط [۱۱۱] و [۲۰۷] را می‌توان به راحتی با در نظر گرفتن یک \mathcal{R} -ساختار و در نتیجه کرنل‌های راهبری‌پذیر بازتابی، D_5 -هموردا ساخت. به طور مشابه، I-CNN-هموردا توسط [۳۲] را می‌توان با ساختن کرنل‌های ϵ -D-راهبری‌پذیر به جای ϵ -C-راهبری‌پذیر، تحت گروه ایزوومتری کامل I_h بیستوچهی هموردا ساخت.

آ ارتباط با فرمالیسم چارت مختصاتی در هندسه دیفرانسیل

این پیوست به منظور برقراری ارتباط بین فرمالیسم کلاف، که زیربنای نظریه CNN‌های مستقل از مختصات است، و فرمالیسم چارت مختصاتی، که احتمالاً در اولین مطالعه هندسه دیفرانسیل با آن مواجه می‌شویم، عمل می‌کند. تفاوت اصلی بین این دو این است که فرمالیسم کلاف به نقاط p از فضای پایه M به رویی مستقل از مختصات اشاره می‌کند. در صورت نیاز، مختصات مستقیماً از طریق تریویالیزاسیون‌های محلی کلاف به تارها (به عنوان مثال فضاهای مماس) اختصاص داده می‌شوند. در مقابل، فرمالیسم چارت بر چارت‌های مختصاتی (دیفثومورفیسم‌ها)

$$x : M \supseteq U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^d, \quad (511)$$

تکیه دارد، که مختصات را به تکه‌های محلی U از منیفلد اختصاص می‌دهند. تریویالیزاسیون‌های محلی کلاف و تبدیلات پیمانه بین آنها به عنوان دیفرانسیل‌های چارت‌ها و توابع گذار چارت القا می‌شوند. در این بخش ما ارتباط بین هر دو فرمالیسم را بررسی می‌کنیم. یک نمای کلی از نتایج در جدول ۷ ارائه شده است.

۱۹۶	فضاهای مماس، فضاهای هم‌مماس و پایه‌های دوگان	۱۰۱	فضاهای مماس بر حسب مشتقات جهتی
۱۹۶	فضاهای هم‌مماس	۲۱۰	فضاهای هم‌مماس
۱۹۶	پایه‌های دوگان	۳۱۰	۳.۱.۰ پایه‌های دوگان
۱۹۷	دیفرانسیل‌ها، گرادیان‌ها و ژاکوبین‌ها	۴۰۱	۲.۰ دیفرانسیل‌ها، گرادیان‌ها و ژاکوبین‌ها
۱۹۹	پایه‌های مختصاتی القا شده توسط چارت	۴۰۲	۲.۱ پایه‌های مختصاتی القا شده توسط چارت
۱۹۹	چارت‌ها و پایه‌های مختصاتی القا شده	۴۰۳	۲.۳.۰ چارت‌ها و پایه‌های مختصاتی القا شده
۲۰۰	نگاشتهای گذار چارت و تبدیلات پیمانه القا شده	۴۰۴	۲.۳.۱ نگاشتهای گذار چارت و تبدیلات پیمانه القا شده
۲۰۳	پایه‌های مختصاتی به عنوان تریویالیزاسیون‌های محلی کلاف	۴۰۵	۲.۴ پایه‌های مختصاتی به عنوان تریویالیزاسیون‌های نقطه‌ای
۲۰۳	تاظرات با تریویالیزاسیون‌های نقطه‌ای $T_p M$	۴۰۶	۲.۴.۰ تاظرات با تریویالیزاسیون‌های محلی القا شده توسط چارت از $\pi_{TM}^{-1}(U)$
۲۰۴	تریویالیزاسیون‌های محلی القا شده توسط چارت از	۴۰۷	۲.۴.۱ تریویالیزاسیون‌های محلی القا شده توسط چارت از
۲۰۵	G -ساختارها و میدان‌های ویل‌باین	۴۰۸	۲.۴.۲ G -ساختارها و میدان‌های ویل‌باین

ما در بخش آ.۱ با معرفی مختصر فضاهای مماس $T_p M$ به عنوان فضاهایی از عملگرهای مشتق جهتی شروع می‌کنیم، که از آنها فضاهای هم‌مماس $T_p^* M$ به عنوان فضاهای دوگان نتیجه می‌شوند. بخش آ.۲ دیفرانسیل‌های عمومی و گرادیان‌ها و ژاکوبین‌های خاص‌تر را تعریف می‌کند. بر اساس این مقادیر، ما در بخش آ.۳ پایه‌های مختصاتی (پایه‌های هولونومیک) $T_p M$ را تعریف کردیم. این پایه‌های مختصاتی از $F_p M$ به شکل $\left[\frac{\partial}{\partial x_d} \right]_p, \dots, \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \right]_p$ هستند. بخش آ.۴ تاظرات با تریویالیزاسیون‌های نقطه‌ای $T_p^* M$ را معرفی کردیم. این تاظرات از فضاهای هم‌مماس $T_p M$ به شکل $\left[\hat{dx}_\mu \right]_p, \dots, \left[\hat{dx}_\mu \right]_p$ هستند. بخش آ.۵ تاظرات با تریویالیزاسیون‌های محلی کلاف را معرفی کردیم. این تاظرات از چارت‌های مؤلفه‌های چارت x_μ داده می‌شوند. نگاشتهای گذار بین چارت‌ها، تبدیلات پیمانه کوواریانت و کانتراواریانت را بین پایه‌های متناظر القا می‌کنند، که در بخش آ.۲.۳.۰ استخراج می‌شوند. بخش آ.۶ پایه‌های مختصاتی را به عنوان تریویالیزاسیون‌های محلی کلاف تفسیر می‌کند و ارتباط بین فرمالیسم کلاف و فرمالیسم چارت را دقیق می‌کند. پایه‌ها و تریویالیزاسیون‌های القا شده از چارت‌های مختصاتی تمام تریویالیزاسیون‌های ممکن را پوشش نمی‌دهند، به طوری که بین پایه‌های مختصاتی و پایه‌های غیرمختصاتی تمایز قابل می‌شود (فرمالیسم کلاف به پایه‌های غیرمختصاتی عمومی اجازه می‌دهد). در ادبیات فیزیک، پایه‌های غیرمختصاتی معمولاً از طریق میدان‌های ویل‌باین معرفی می‌شوند. بخش آ.۷ اسناد اثباتی از این میدان‌های ویل‌باین فقط تبدیلات پیمانه با مقادیر $(GL(d))$ از جارجوب‌های عمومی در FM به یک G -ساختار داده شده GM هستند، که در داخل آن می‌توان متعاقباً تبدیلات پیمانه با مقادیر G را که G -ساختار را حفظ می‌کنند، اعمال کرد.

مقدمه‌های جامعی بر فرمالیسم چارت در [۱۳۲، ۱۵۷، ۱۹] ارائه شده است. یک شرح دقیق‌تر در [۱۵۷] یافت می‌شود.

ما می‌خواهیم به خواننده یادآوری کنیم که ما از اندیس‌های کوواریانت و کانتراواریانت استفاده نمی‌کنیم. اندیس‌ها همیشه به صورت زیرنویس ظاهر خواهند شد، با حروف یونانی \dots, ν, μ ، که اندیس‌های مرتبه با چارت مختصاتی را نشان می‌دهند و حروف لاتین \dots, j, i ، که اندیس‌های پیمانه‌های عمومی را نشان می‌دهند. بالاترین اندیس‌های A, B, \dots برای برجسب‌گذاری چارت‌ها یا پیمانه‌های مختلف حفظ می‌شوند.

آ.۱ فضاهای مماس، فضاهای هم‌مماس و پایه‌های دوگان

آ.۱.۱ فضاهای مماس بر حسب مشتقات جهتی

یک تعریف رایج از فضاهای مماس $T_p M$ به عنوان فضاهای برداری از عملگرهای مشتق جهتی در $p \in M$ است، که ما در اینجا به طور خلاصه آن را تشویق می‌کنیم. فرض کنید $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ، یعنی $f \in C^\infty(M)$. یک نگاشت هموار باشد، و برای یک بازه $I \subseteq \mathbb{R}$ حاوی $t = 0$ فرض کنید $\gamma : I \rightarrow M$ یک منحنی هموار باشد که در زمان $t = 0$ عبور می‌کند، یعنی $\gamma(0) = p$. از این γ را برآورده می‌کنند. سپس عملگر مشتق جهتی در p در امتداد γ را به عنوان عملگر خطی

$$v_\gamma : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto (f \circ \gamma)'(0). \quad (512)$$

تعریف می‌کنیم. از آنجا که مشتق در امتداد جهت γ گرفته می‌شود، یعنی مماس بر آن، v_γ بردار مماس نامیده می‌شود. می‌توان آن را به عنوان سرعت یک ذره با مسیر γ در زمان $t = 0$ در نظر گرفت. برای ارجاع بعده، ما نمودار جابجایی ساده زیر را ارائه می‌دهیم، که پول بک γ از f از M به \mathbb{R} را از طریق γ نشان می‌دهد، که مشتق جهتی بر حسب آن تعریف می‌شود:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \supset & I & \xrightarrow{\gamma} & M \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ & & & & \downarrow \\ & & & & f \circ \gamma \end{array} \quad (513)$$

می‌توان نشان داد که فضای تمام بردارهای مماس بر منحنی‌ها در p یک فضای برداری d -بعدی را تشکیل می‌دهد

$$T_p M := \{v_\gamma \mid \text{است } p \text{ یک منحنی هموار گذرنده از } \gamma\}, \quad (514)$$

که به عنوان فضای مماس در p شناخته می‌شود. برای جزئیات بیشتر در مورد تعریف بردارهای مماس و ساختار فضای برداری فضاهای مماس، به [۱۵۷] مراجعه کنید.

با تعریف فضاهای مماس به عنوان فضاهای برداری، ممکن است انتخاب کنیم که با بردارهای مماس به عنوان بردارهای هندسی انتزاعی رفتار کنیم و در نتیجه تعریف آنها را از طریق مشتقات جهتی (یا هر تعریف جایگزین دیگری) «فراموش» کنیم. ما این کار را در اکثر جاها انجام می‌دهیم، اما در بخش‌های بعدی برای استخراج دیفرانسیل‌های نگاشت‌های هموار و پایه‌های مختصاتی به تعریف از طریق مشتقات جهتی باز می‌گردیم.

آ.۲.۱ فضاهای هم‌مماس

به عنوان فضاهای برداری حقیقی، فضاهای مماس $T_p M$ دارای فضاهای دوگان متاظر $(T_p M)^*$ هستند، یعنی فضاهای هم‌مماس. بنا به تعریف فضاهای دوگان، آنها از تابعی‌های خطی

$$\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (515)$$

تشکیل شده‌اند، که در هندسه دیفرانسیل معمولاً هم‌بردارها یا ۱-فرم‌ها نامیده می‌شوند. به همراه جمع (هم)‌برداری $(\omega + \tilde{\omega})(v) = \omega(v) + \tilde{\omega}(v)$ و ضرب اسکالر $(\lambda \cdot \omega)(v) = \lambda \cdot (\omega(v))$ ، فضاهای هم‌مماس خود فضاهای برداری هستند.

به عنوان دوگان‌های متنهای بعدی از یکدیگر، $T_p^* M$ و $T_p M$ ایزومورف هستند و بنابراین به طور خاص دارای بعد یکسان $= d = \dim(M)$ هستند. با این حال، ایزومورفیسم بین این دو کانونی نیست. یک ایزومورفیسم فضای برداری را می‌توان از طریق یک فرم دوخطی (غیرتبهگن) $\eta_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ مثلاً یک متريک ريماني، از طریق

$$\widehat{\eta}_p : T_p M \rightarrow T_p^* M, \quad v \mapsto \eta_p(v, \cdot), \quad (516)$$

مشخص کرد، که تابعی خطی $\widehat{\eta}_p(v) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ ، $w \mapsto \eta_p(v, w)$ را تعیین می‌کند.

آ.۳.۱ پایه‌های دوگان

هر پایه e_i از $T_p M$ به طور کانونی یک پایه دوگان $[e_i^*]_{i=1}^d$ از $T_p^* M$ را القا می‌کند، که برای برآوردن روابط $e_i^* e_j = \delta_{ij}$ برای هر $i, j \in \{1, \dots, d\}$.

تعريف شده است. فرض کنید $[e_i^B]_{i=1}^d$ دو پایه از $T_p M$ باشند، که با عمل راست \triangleleft از عضو گروه ساختاری (وارون) $(g^{BA})^{-1} \in \text{GL}(d)$ در معادله (۱۰) به هم مرتبط هستند، یعنی برای $j = 1, \dots, d$

$$e_j^B = \sum_l e_l^A (g^{BA})_{lj}^{-1} \quad (518)$$

پایه دوگان $[e_i^{A,*}]_{i=1}^d$ بر این اساس تحت آن عمل چپی که را به

$$e_i^{B,*} = \sum_k g_{ik}^{BA} e_k^{A,*}. \quad (519)$$

می‌فرستد، تبدیل می‌شود. این با جفت‌کردن تأیید می‌شود:

$$\begin{aligned} e_i^{B,*} e_j^B &= \sum_{k,l} g_{ik}^{BA} e_k^{A,*} e_l^A (g^{BA})_{lj}^{-1} \\ &= \sum_{k,l} g_{ik}^{BA} \delta_{kl} (g^{BA})_{lj}^{-1} \\ &= \sum_k g_{ik}^{BA} (g^{BA})_{kj}^{-1} \\ &= \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (520)$$

رفتار تبدیل وارون پایه‌ها و پایه‌های دوگان معمولاً به عنوان تبدیل کوواریانت و کانتراواریانت نامیده می‌شود. به شاهدت تبدیل پایه دوگان با تبدیلات کانتراواریانت $v^B = g^{BA} \psi^A$ پیمانه‌ها در معادله (۷) و مؤلفه‌های برداری در (۹) توجه کنید. در واقع، پیمانه‌ها فقط انتخاب‌هایی از یک هم‌مماس هستند که در ادامه بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرند.

۲.۱ دیفرانسیل‌ها، گرادیان‌ها و ژاکوبین‌ها

در حساب برداری، توابع $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ به صورت خطی با ماتریس ژاکوبین آنها (یا مشتق کل یا دیفرانسیل) $d\phi_p = (\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}|_p)_{ij}$ تقریب زد. در اینجا ما تعیین این مفهوم را به دیفرانسیل‌های توابع هموار بین منیفلدهای هموار معرفی می‌کنیم.

دیفرانسیل‌ها به طور کلی: فرض کنید $M \rightarrow N$: یک نگاشت هموار بین منیفلدهای هموار M و N باشد. در هر نقطه $p \in M$ چنین نگاشتی یک دیفرانسیل (یا پوش‌فوروارد) دارد:

$$d\phi_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N, \quad v \mapsto d\phi_p(v) \quad (521)$$

را القا می‌کند که بردارهای مماس را در p به صورت خطی به بردارهای مماس در $\phi(p)$ نگاشت می‌دهد. برای تعریف فضاهای مماس بر حسب مشتقات جهتی در معادله (۵۱۲)، پوش‌فوروارد $v \in T_p M$ در امتداد ϕ به صراحت با

$$d\phi_p(v) : C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto (d\phi_p(v))(f) := v(f \circ \phi), \quad (522)$$

داده می‌شود، یعنی با اعمال v بر روی بولبک $f \circ \phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ از طریق ϕ . این تعاریف با دو نمودار جابجایی زیر روش می‌شوند:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi} & N \\ & \searrow f \circ \phi & \downarrow f \\ & & \mathbb{R} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C^\infty(M) & \xleftarrow{(\cdot) \circ \phi} & C^\infty(N) \\ v \downarrow & & \swarrow d\phi(v) \\ \mathbb{R} & & \end{array} \quad (523)$$

از این تعریف بلافضله نتیجه می‌شود که دیفرانسیل ترکیب نگاشتهای هموار برابر با ترکیب دیفرانسیل‌های منفرد آنها است، که همان قاعده زنجیره‌ای است:

$$d(\phi \circ \psi)_p = d\phi_{\psi(p)} \circ d\psi_p \quad (524)$$

اگر ϕ وارون پذیر باشد (یک دیفرانسیل)، علاوه بر این نتیجه می‌شود که دیفرانسیل آن یک ایزومورفیسم فضای برداری است که وارون آن برابر با دیفرانسیل ϕ^{-1} است، یعنی

$$(d\phi_p)^{-1} = d(\phi^{-1})_{\phi(p)}. \quad (525)$$

در مجموع، دیفرانسیل‌های $p \in M$ در نقاط منفرد $d\phi_p$ یک مورفیسم کلاف برداری (یک نگاشت کلاف خطی-تاری، به بخش‌های ۱.۶ مراجعه کنید) را بین کلاف‌های مماس M و N القا می‌کنند:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{d\phi} & TN \\ \pi_{TM} \downarrow & & \downarrow \pi_{TN} \\ M & \xrightarrow{\phi} & N \end{array} \quad (526)$$

توجه داشته باشید که ما در این بیوست از یک نمادگذاری متفاوت، یعنی $d\phi$ استفاده می‌کنیم، نسبت به مقاله اصلی، که در آن به جای آن $\phi_{*,TM}$ می‌نویسیم. ما اولی را برای ارتباط با نمادگذاری معمول dx_μ برای پایه‌های α شده توسط چارت از فضاهای هم‌مماس انتخاب کردیم. دومی در من اصلی برای تأکید بر شباهت با نگاشت‌های کلاف $\phi_{*,GM}$ ، $\phi_{*,FM}$ و $\phi_{*,A}$ که روی کلاف‌های همبسته GM ، FM و A القا می‌شوند، استفاده می‌شود.

گرادیان‌ها: در مورد توابع هموار با مقادیر حقیقی $d\phi_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}$ ، یعنی $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ ، دیفرانسیل $T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}$ پوش‌فروارد می‌کند. با استفاده از ایزومورفیسم کانونی v را در $T_p M$ به بردارهای $T_{\phi(p)} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f \mapsto v(f \circ \phi)$ در \mathbb{R} پوش‌فروارد می‌کند.

$$\iota_{\mathbb{R}} : T_{\phi(p)} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}, \quad v \mapsto v(\text{id}_{\mathbb{R}}) \quad (527)$$

عملگر گرادیان

$$\hat{d}_p : C^\infty(M) \rightarrow T_p^* M, \quad \phi \mapsto \hat{d}\phi_p := \iota_{\mathbb{R}} \circ d\phi_p = (d\phi_p(\cdot))(\text{id}_{\mathbb{R}}), \quad (528)$$

را تعریف می‌کنیم، که توابع هموار ϕ را به هم‌بردارها $\hat{d}\phi$ ^{۱۴۵} فرستد، که به نوبه خود بر روی بردارها به صورت

$$\hat{d}\phi_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \hat{d}\phi_p(v) = (d\phi_p(v))(\text{id}_{\mathbb{R}}) = v(\text{id}_{\mathbb{R}} \circ \phi) = v(\phi). \quad (529)$$

عمل می‌کنند. با یک سوءاستفاده از نمادگذاری معمولاً «کلام» روی \hat{d} حذف می‌شود و بالاصله $(\phi)(v) = v(\phi)$ تعریف می‌شود. در حالی که این نمادگذاری بسیار رایج است، ما در ادامه به «کلام» پابند می‌مانیم تا نیاز به ایزومورفیسم کانونی ι را صریح کنیم.

در بخش ۱.۳.۱ در ادامه خواهیم دید که دوگان پایه‌های مختصاتی $T_p^* M$ هستند، با ۱-فرم‌های گرادیان $p | \hat{d}x_\mu$ داده می‌شوند، که در آن x_μ مؤلفه‌های چارت مختصاتی هستند.

زاکوبین‌ها: به طور خاص برای توابع $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ بین (زیرمجموعه‌هایی از) فضاهای اقلیدسی، دیفرانسیل $d\phi_x : T_x \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\phi(x)} \mathbb{R}^m$ به راحتی دیده می‌شود که با زاکوبین $\frac{\partial \phi}{\partial x}|_x$ پس از یکی گرفتن کانونی $T_p \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ در دامنه و هم‌دامنه، منطبق است. ایزومورفیسم کانونی در اینجا با

$$\iota_{\mathbb{R}^k} : v \mapsto (v(\text{proj}_1), \dots, v(\text{proj}_k)), \quad (530)$$

داده می‌شود، که ι را از معادله (۵۲۷) به ابعاد چندگانه تعمیم می‌دهد. از آنجا که محاسبه عمدتاً مشابه مورد گرادیان‌ها است، ما آن را در اینجا تکرار نخواهیم کرد بلکه ایده را از طریق یک نمودار جابجایی به تصویر می‌کشیم:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\iota_{\mathbb{R}^n}} & T_x \mathbb{R}^n & \xrightarrow{d\phi|_x} & T_{\phi(x)} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\iota_{\mathbb{R}^m}} & \mathbb{R}^m \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{\partial \phi}{\partial x}|_x} & & & & & \uparrow \end{array} \quad (531)$$

^{۱۴۵} میدان گرادیان اغلب به عنوان یک میدان برداری $(\hat{df})^{\sharp^n} = \nabla f$ تعریف می‌شود که از میدان هم‌برداری \hat{df} از طریق ایزومورفیسم موسیقیایی \sharp^n متناظر با متريک («بالا بردن انديس‌ها») محاسبه می‌شود.

اگر ϕ وارون پذیر باشد، همانی در معادله (۵۲۵) به

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x.}^{-1} = \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial x} \Big|_{\phi(x.)}, \quad (532)$$

تبدیل می‌شود، که همان قضیه تابع وارون است. ما بعداً از این همانی برای وارون کردن تبدیلات پیمانه بین پایه‌های مختصاتی مختلف که به عنوان ژاکوبین‌های نگاشتهای گذار چارت القا می‌شوند، استفاده خواهیم کرد.

آ.۳ پایه‌های مختصاتی القا شده توسط چارت

در این بخش ما چارت‌های مختصاتی به شکل

$$x : U \rightarrow V, \quad (533)$$

را در نظر می‌گیریم، که به صورت دیفئومورفیک مختصات $x(p) \in V \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^d$ را به هر نقطه $p \in U$ اختصاص می‌دهند. هر چنین چارتی یک انتخاب طبیعی از پایه‌ها را برای فضاهای مماس $T_p M$ روی U القا می‌کند، که به عنوان پایه‌های مختصاتی شناخته می‌شوند. فضاهای دوگان $T_p^* M$ از فضاهای مماس روی U بر این اساس با پایه‌های مختصاتی دوگان از هم‌بردارهای مماس مجهز می‌شوند. نگاشتهای گذار بین مختصات دو چارت، تبدیلات پیمانهای القا می‌کنند که بین پایه‌های مختصاتی متناظر ترجمه می‌کنند. این تبدیلات پیمانه با ژاکوبین‌های نگاشتهای گذار داده می‌شوند.

آ.۳.۱ چارت‌ها و پایه‌های مختصاتی القا شده

پایه‌های مختصاتی برای $T_p M$. برای تشویق تعریف پایه‌های مختصاتی، مشاهده کنید که x یک «شبکه مختصاتی» را روی U با پول‌بک کردن شبکه مختصاتی کانونی روی V به منيفلد القا می‌کند. سپس پایه مختصاتی در یک نقطه خاص $p \in U$ را می‌توان به عنوان متشكل از آن d عملگر مشتق جهتی که در امتداد خطوط شبکه مختصاتی x روی U می‌روند، در نظر گرفت.

برای دقیق‌تر کردن این موضوع، ابتدا منحنی‌های

$$\tilde{\gamma}_\mu : I \rightarrow V, \quad t \mapsto x(p) + t\epsilon_\mu \quad \mu = 1, \dots, d \quad (534)$$

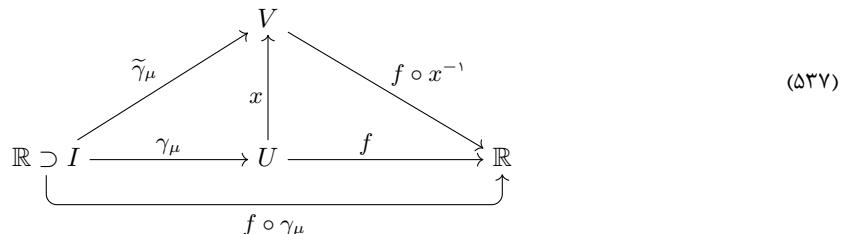
را در نظر بگیرید که در زمان $t = 0$ با سرعت واحد در جهت μ از $x(p) \in V$ عبور می‌کنند. نگاشت آن $\tilde{\gamma}_\mu$ از طریق چارت به U منحنی‌های ذکر شده در بالا را تعریف می‌کند

$$\gamma_\mu : I \rightarrow U, \quad t \mapsto x^{-1} \circ \tilde{\gamma}_\mu(t) = x^{-1}(x(p) + t\epsilon_\mu) \quad (535)$$

که در زمان $t = 0$ در امتداد شبکه مختصاتی x روی U از p عبور می‌کنند. پایه مختصاتی d -بعدی $T_p M$ القا شده توسط x سپس با عملگرهای مشتق جهتی در معادله (۵۱۲) در امتداد مسیرهای γ_μ داده می‌شود. با نشان دادن بردار پایه μ -ام با سوءاستفاده معمول از نماد گذاری به صورت $\left. \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right|_p$ بنابراین تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right|_p : f &\mapsto \left. \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right|_p f := (f \circ \gamma_\mu)'(0) \\ &= (f \circ x^{-1} \circ \tilde{\gamma}_\mu)'(0) \\ &= (f \circ x^{-1}(x(p) + t\epsilon_\mu))'(0) \\ &= [\partial_\mu (f \circ x^{-1})](x(p)) \end{aligned} \quad (536)$$

در مرحله آخر ما مشتق جزئی μ -ام معمول از پول‌بک $\left. \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right|_p$ را شناسایی کردیم، که نماد گذاری f را توجیه می‌کند. این تعاریف در نمودار جابجایی زیر که نمودار در معادله (۵۱۳) را گسترش می‌دهد، به تصویر کشیده شده‌اند:



پایه‌های مختصاتی دوگان برای T_p^*M همانطور که در بخش ۱.۶ گفته شد، هر پایه از T_pM یک پایه دوگان از T_p^*M را القا می‌کند. به طور خاص برای پایه‌های مختصاتی، که توسط بردارهای $\frac{\partial}{\partial x_\mu}|_p$ تولید می‌شوند، عناصر پایه دوگان با گرادیان‌های $\hat{dx}_\mu|_p = \hat{d}(x_\mu)|_p \in T_p^*M$ از مؤلفه‌های چارت $U \rightarrow \mathbb{R}^d$ داده می‌شوند. اینکه این گرادیان‌ها در واقع پایه دوگان را تشکیل می‌دهند، به راحتی با عمل بر روی بردارهای پایه همانطور که در معادله (۵۲۹) تعریف شده است، دیده می‌شود:

$$\begin{aligned}\hat{dx}_\mu|_p \frac{\partial}{\partial x_\nu}|_p &= \frac{\partial}{\partial x_\nu}|_p x_\mu \\&= [\partial_\nu(x_\mu \circ x^{-1})](x(p)) \\&= [\partial_\nu(\text{proj}_\mu)](x(p)) \\&= \delta_{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (۵۳۸)$$

دیفرانسیل‌های چارت به عنوان تریوپالیزاسیون محلی کانونی: با توجه به اینکه چارت از $V \subseteq \mathbb{R}^d$ به $U \subseteq M$ نگاشت می‌دهد، دیفرانسیل‌های آن در $p \in U$ نگاشته‌ای به شکل

$$dx_p : T_p M \rightarrow T_{x(p)} \mathbb{R}^d. \quad (۵۳۹)$$

هستند. با استفاده مجدد از ایزومورفیسم کانونی $\iota_{\mathbb{R}^d}$ از $T_{x(p)} \mathbb{R}^d$ به \mathbb{R}^d (معادله (۵۳۰)), ما یک نگاشت

$$\begin{aligned}\hat{dx}_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad v &\mapsto \hat{dx}_p(v) := \iota_{\mathbb{R}^d} \circ dx_p(v) \\&= ((dx_p(v))(\text{proj}_1), \dots, (dx_p(v))(\text{proj}_d))^\top \\&= (v(\text{proj}_1 \circ x \circ x^{-1})(x(p)), \dots, v(\text{proj}_d \circ x \circ x^{-1})(x(p)))^\top \\&= (v(x_1(p)), \dots, v(x_d(p)))^\top \\&= (\hat{dx}_1|_p(v), \dots, \hat{dx}_d|_p(v))^\top\end{aligned}\quad (۵۴۰)$$

به دست می‌آوریم، پس از شناسایی گرادیان‌های مؤلفه چارت منفرد در مرحله آخر. توجه داشته باشید که عمل این دیفرانسیل چارت بر روی پایه مختصاتی μ -ام نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}\hat{dx}_p \frac{\partial}{\partial x_\mu}|_p &= \left(\hat{dx}_1|_p \frac{\partial}{\partial x_\mu}|_p, \dots, \hat{dx}_d|_p \frac{\partial}{\partial x_\mu}|_p \right)^\top \\&= (\delta_{\mu 1}, \dots, \delta_{\mu d})^\top \\&= \epsilon_\mu,\end{aligned}\quad (۵۴۱)$$

عنی بردار واحد μ -ام ϵ_μ از \mathbb{R}^d این دلالت بر این دارد که \hat{dx}_p نقش یک پیمانه ψ را در p ایفا می‌کند. بنابراین می‌توان به همان اندازه با تعریف یک پایه هم‌مماس شروع کرد و

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}|_{x(p)} = \hat{dx}_p^{-1}(\epsilon_\mu), \quad (۵۴۲)$$

را قرار داد، که آنalog معادله (۴) در فرمالیسم چارت است.

۲.۳. نگاشتهای گذار چارت و تبدیلات پیمانه القا شده

چارت‌های مختلف پایه‌های مختصاتی مختلفی را القا می‌کنند. بنابراین گذار چارت‌ها تبدیلات پیمانه، یعنی تبدیلات پایه‌ها و ضرایب برداری را القا می‌کنند، که ما در این بخش آنها را استخراج می‌کنیم.

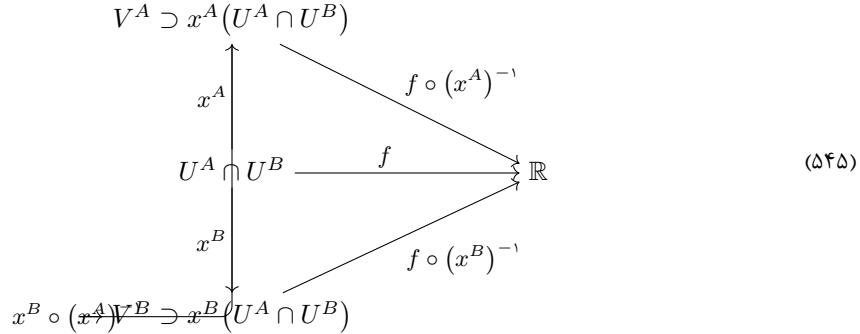
در ادامه ما دو چارت دلخواه و همپوشان $U^A \rightarrow V^A$ و $x^B : U^B \rightarrow V^B$ را در نظر می‌گیریم. مختصات مختلفی که آنها به همپوشانی $\emptyset \neq U^A \cap U^B$ اختصاص می‌دهند، سپس از طریق نگاشتهای گذار چارت به هم مرتبط می‌شوند

$$x^B \circ (x^A)^{-1} : x^A(U^A \cap U^B) \rightarrow x^B(U^A \cap U^B). \quad (۵۴۳)$$

تبدیل پایه‌های مختصاتی مماس: پایه‌های مختصاتی $T_p M$ که توسط دو چارت القایی شوند، طبق خط آخر معادله (۵۳۶) با عمل آنها بر روی $f \in C^\infty(M)$ به صورت

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \Big|_p f = \left[\partial_\mu (f \circ (x^A)^{-1}) \right] (x^A(p)) \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p f = \left[\partial_\mu (f \circ (x^B)^{-1}) \right] (x^B(p)), \quad (544)$$

تعريف می‌شوند، که با نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:



از طریق نگاشتهای گذار چارت، پایه‌های مختصاتی مختلف با

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p f &= \left[\partial_\mu (f \circ (x^B)^{-1}) \right] (x^B(p)) \\ &= \left[\partial_\mu (f \circ (x^A)^{-1} \circ x^A \circ (x^B)^{-1}) \right] (x^B(p)), \end{aligned}$$

به هم مرتبط می‌شوند، که با استفاده از قاعده زنجیره‌ای چندمتغیره، بیشتر منجر به این می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p f &= \sum_{\nu=1}^d \left[\partial_\nu (f \circ (x^A)^{-1}) \right] (x^A(p)) \cdot \left[\partial_\mu (x_\nu^A \circ (x^B)^{-1}) \right] (x^B(p)) \\ &= \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \Big|_{x^B(p)} \end{aligned} \quad (546)$$

در مرحله آخر ما از سوءاستفاده معمول از نماد گذاری^{۱۴۶}

$$\frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \Big|_{x^B(p)} := \partial_\mu (x_\nu^A \circ (x^B)^{-1}) (x^B(p)) \quad (547)$$

برای مؤلفه‌های ژاکوبین

$$\frac{\partial x^A}{\partial x^B} \Big|_{x^B(p)} = \hat{dx}_p^A \circ \hat{d}(x_p^B)^{-1} \quad (548)$$

از نگاشتهای گذار استفاده کردیم. با حذف f از معادله (۵۴۶)، ما قانون تبدیل

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \Big|_{x^B(p)} \quad (549)$$

از پایه‌های مختصاتی مماس را شناسایی می‌کنیم. ما در اینجا انتخاب کردیم که ژاکوبین را در سمت راست بردار پایه بنویسیم تا تأکید کنیم که تغییر پایه باید به عنوان یک عمل راست در ک شود. با انجام این کار، باید به خواننده هشدار دهیم که فقط یک سوءاستفاده از نماد گذاری برای بردار پایه است اما به معنای عمل یک عملگر دیفرانسیل بر روی ژاکوبین در سمت راست نیست.

^{۱۴۶} «سوءاستفاده» این است که $x^A \circ x^B(p)$ به عنوان تابعی از $x^B(p)$ تفسیر می‌شود، و بنابراین باید به طور دقیق‌تر به صورت $(x^B)^{-1} \circ x^A(p)$ نوشته شود.

تبديل پايه‌های مختصاتی هم‌مماس: قانون تبدل کانتراواریانت پايه‌های مختصاتی فضای هم‌مماس از تبدل وارون پايه‌های دوگان در معادله (۵۱۹) نسبت به (۵۱۸) نتیجه می‌شود. برای اعمال این رابطه، ما ابتدا معادله (۵۴۹) را با قرارداد خود مبنی بر اینکه پايه‌ها مطابق با یک عمل راست با یک عضو گروه وارون تبدل می‌شوند، تطبیق می‌دهیم. این کار با اعمال معادله (۵۳۲) برای وارون کردن ژاکوبین (سوءاستفاده از نمادگذاری را به یاد بیاورید)

$$\frac{\partial x^A}{\partial x^B} \Big|_{x^B(p)} = \left(\frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)} \right)^{-1} \quad (550)$$

انجام می‌شود که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \Big|_{x^B(p)} = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \left(\frac{\partial x^A}{\partial x^B} \Big|_{x^B(p)} \right)_{\nu\mu} = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \left(\frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)} \right)^{-1}_{\nu\mu} \quad (551)$$

بنابراین عناصر پايه هم‌مماس مطابق با معادلات (۵۱۸) و (۵۱۹) مانند

$$\hat{dx}_\mu^B \Big|_p = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\nu^A} \Big|_{x^A(p)} \hat{dx}_\nu^A \Big|_p. \quad (552)$$

تبديل می‌شوند.

تبديل دیفرانسیل‌های چارت: بیان دیفرانسیل‌های چارت $\hat{dx}_\mu^A \Big|_p$ بر حسب گرادیان‌های مؤلفه چارت در معادله (۵۴۰) اجازه می‌دهد تا قانون تبدل آنها را از قانون در معادله (۵۵۲) استنتاج کنیم. به طور جایگزین، قانون تبدل با ضرب راست در همانی به شکل $\text{id}_{T_p M} = \hat{dx}^A \circ (\hat{dx}^A \Big|_p)^{-1}$ و شناسایی یک ضرب چپ با ژاکوبین نگاشته‌های گذار چارت به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \hat{dx}^B \Big|_p &= \hat{dx}^B \Big|_p \circ (\hat{dx}^A \Big|_p)^{-1} \circ \hat{dx}^A \Big|_p \\ &= \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)} \hat{dx}^A \Big|_p \end{aligned} \quad (553)$$

توجه داشته باشید که این نتیجه به سادگی بیان ماتریسی معادله (۵۵۲) است.

تبديل ضرایب برداری: بردارهای $v \in T_p M$ نسبت به یک پايه مختصاتی $v^A \in \mathbb{R}^d$ با ضرایب $v_\mu^A \Big|_p$ بیان می‌شوند:

$$v = \sum_{\mu=1}^d v_\mu^A \frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \Big|_p \quad (554)$$

ضرایب منفرد با عمل پايه هم‌مماس بازیابی می‌شوند:

$$\hat{dx}_\mu^A \Big|_p(v) = \hat{dx}_\mu^A \Big|_p \sum_{\nu=1}^d v_\nu^A \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p = \sum_{\nu=1}^d v_\nu^A \delta_{\mu\nu} = v_\mu^A \quad (555)$$

این دلالت بر این دارد که ضرایب به صورت کانتراواریانت تبدل می‌شوند، درست مانند پايه مختصاتی هم‌مماس:

$$v_\mu^B = \hat{dx}_\mu^B \Big|_p(v) = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\nu^A} \Big|_{x^A(p)} \hat{dx}_\nu^A \Big|_p(v) = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\nu^A} \Big|_{x^A(p)} v_\nu^A \quad (556)$$

به راحتی تأیید می‌شود که این قانون تبدل واقعاً به یک نمایش مستقل از بردارهای مستقل از مختصات $v \in T_p M$ منجر می‌شود:

$$\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p v_\mu^B = \sum_{\mu,\nu,\rho} \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \Big|_{x^B(p)} \frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\rho^A} \Big|_{x^A(p)} v_\rho^A = \sum_{\nu,\rho} \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \delta_{\nu\rho} v_\rho^A = \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p v_\nu^A \quad (557)$$

۴. آ پایه‌های مختصاتی به عنوان تربویالیزاسیون‌های محلی کلاف

قوانين تبدیل القا شده توسط نگاشت گذار چارت در بخش ۲.۳.۱ با تبدیلات پیمانه همانطور که در بخش ۱.۳ فرمول‌بندی شده است، هنگام یکی گرفتن ژاکوبین‌ها $\left. g_p^{BA} \right|_{x^A(p)}$ با $\frac{\partial x^B}{\partial x^A}$ منطبق هستند. در بخش ۱.۴ ما این ارتباطات را با فهرست کردن تمام تنباطات دقیق می‌کنیم. بخش ۲.۴ این نتایج را با استخراج عبارات برای تربویالیزاسیون‌های کلاف القا شده توسط چارت روی دامنه‌های گسترده $U \subseteq M$ همانطور که در بخش ۶ معرفی شد، گسترش می‌دهد. یک فرنگ لغت که تنباطات را خلاصه می‌کند در جدول ۷ ارائه شده است.

۱.۴. تنباطات با تربویالیزاسیون‌های نقطه‌ای

پیمانه‌ها و دیفرانسیل‌های چارت: فرمالیسم کلاف بر تعریف پیمانه‌ها (معادله (۱))

$$\psi_{TM,p}^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (558)$$

تکیه دارد، که ایزومورفیسم‌های کلاف برداری هستند و مختصات را به فضاهای مماس با $p \in U^A$ اختصاص می‌دهند. در فرمالیسم چارت، پیمانه‌ها روی U^A به عنوان دیفرانسیل‌های چارت القا می‌شوند (معادله (۵۴۰)):

$$\hat{dx}_p^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (559)$$

پیمانه‌های مختلف با تبدیلات پیمانه به هم مرتبط هستند (معادله (۷))

$$\psi_{TM,p}^B = g_p^{BA} \psi_{TM,p}^A \quad \square\square\square \quad g_p^{BA} := \psi_{TM,p}^B \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1} \in G. \quad (560)$$

همین تعریف برای پیمانه‌های القا شده توسط چارت نیز برقرار است، که در آن تبدیلات پیمانه با ژاکوبین نگاشته‌های گذار چارت منطبق می‌شوند (معادله (۵۵۳)):

$$\hat{dx}_p^B = \left. \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right|_{x^A(p)} \hat{dx}_p^A \quad \square\square\square \quad \left. \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right|_{x^A(p)} = \hat{dx}_p^B \circ (\hat{dx}_p^A)^{-1} \in \text{GL}(d) \quad (561)$$

مؤلفه‌های برداری: از آنجا که مؤلفه‌های برداری (v^A) با عمل پیمانه‌ها داده می‌شوند، آنها همان رفتار تبدیل کوواریانت را نشان می‌دهند

$$v^B = g_p^{BA} v^A \quad \square\square\square \quad v^B = \left. \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right|_{x^A(p)} v^A. \quad (562)$$

بر حسب مؤلفه‌ها، این روابط به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$v_i^B = \sum_{j=1}^d (g_p^{BA})_{ij} v_j^A \quad \square\square\square \quad v_\mu^B = \sum_{\nu=1}^d \left. \frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\nu^A} \right|_{x^A(p)} v_\nu^A. \quad (563)$$

چارچوب‌های مرجع القا شده: چارچوب‌های مرجع در فرمالیسم کلاف با نگاشت بردارهای e_i از چارچوب استاندارد $e \in G$ از طریق $T_p M$ تبدیل پیمانه به القا می‌شوند (معادله (۴)):

$$[e_i^A]_{i=1}^d = \left[(\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i) \right]_{i=1}^d \quad (564)$$

رابطه متناظر در فرمالیسم چارت طبق معادله (۵۴۲) با

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \right]_{\mu=1}^d = \left[(\hat{dx}_p^A)^{-1}(\epsilon_\mu) \right]_{\mu=1}^d \quad (565)$$

داده می‌شود. معادله (۱۰) نشان می‌دهد که قوانین تبدیل چارچوب‌های مرجع با عمل راست

$$[e_i^B]_{i=1}^d = [e_i^A]_{i=1}^d \triangleleft (g_p^{BA})^{-1} := \left[\sum_{j=1}^d e_j^A (g_p^{BA})_{ji}^{-1} \right]_{i=1}^d = \left[\sum_{j=1}^d e_j^A (g_p^{AB})_{ji} \right]_{i=1}^d. \quad (566)$$

داده می‌شود. به طور مشابه، قانون تبدیل پایه‌های مختصاتی از معادله (۵۵۱) به صورت

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p \right]_{\mu=1}^d &= \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \Big|_p \right]_{\mu=1}^d \lhd \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)}^{-1} = \left[\sum_{\nu=1}^d \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \left(\frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)} \right)^{-1} \right]_{\mu=1}^d \\ &= \left[\sum_{\nu=1}^d \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \Big|_{x^B(p)} \right]_{\mu=1}^d \end{aligned} \quad (567)$$

دیده می‌شود.

۲.۴. آریویالیزاسیون‌های محلی القا شده توسط چارت از (U)

نتاظراتی که در بخش قبل بیان شدند، تریویالیزاسیون‌های نقطه‌ای $\psi_{TM,p}$ از $T_p M$ را به دیفرانسیل‌های چارت \hat{dx}_p مرتبط می‌کردند. برای تکمیل این تصویر، این بخش عبارتی را برای تریویالیزاسیون‌های محلی

$$\Psi_{TM} : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^d \quad (568)$$

که توسط چارت‌ها القا می‌شوند، اضافه می‌کند.

یک کاندیدای خوب برای ساخت Ψ_{TM} از آن، دیفرانسیل چارت

$$dx : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow TV \quad (569)$$

است که یک ایزومورفیسم کلاف برداری است که از ایزومورفیسم‌های فضای برداری dx_p با عدم محدودیت به یک نقطه منفرد $p \in U$ متفاوت است. برای ادامه، ما ایزومورفیسم کانونی $\iota_{\mathbb{R}^d}$ را در معادله (۵۳۰) از یک نقطه منفرد به تمام فضاهای مماس $V \subseteq \mathbb{R}^d$ روی $T_x V \cong \mathbb{R}^d$ تعیین می‌دهیم، که منجر به تریویالیزاسیون محلی کانونی زیر از TV می‌شود:

$$\iota_{TV} : TV \rightarrow V \times \mathbb{R}^d, \quad v \mapsto (\pi_{TV}(v), \iota_{\mathbb{R}^d}(v)). \quad (570)$$

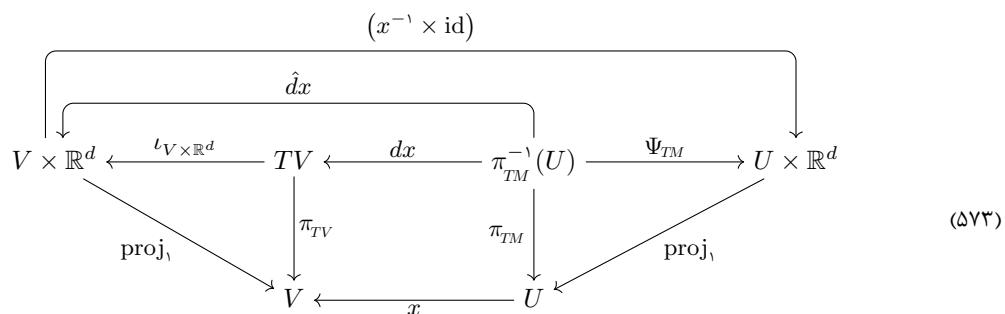
این اجازه می‌دهد تا \hat{dx}_p را از یک نقطه منفرد به یک نگاشت

$$\hat{dx} := \iota_{V \times \mathbb{R}^d} \circ dx : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow V \times \mathbb{R}^d, \quad (571)$$

تعیین دهیم، که با این حال، هنوز تریویالیزاسیون محلی مورد نظر نیست. با نگاشت عامل اول از طریق چارت وارون از V به U ما تریویالیزاسیون محلی کلاف القا شده توسط چارت را به دست می‌آوریم:

$$\Psi_{TM} := (x^{-1} \times \text{id}) \circ \hat{dx} \quad (572)$$

طبق معمول، ما تعاریف انجام شده را در یک نمودار جابجایی به تصویر می‌کشیم:



با در نظر گرفتن دو چارت همپوشان $U^{AB} = U^A \cap U^B$ و $x^B : U^B \rightarrow V^B$ و $x^A : U^A \rightarrow V^A$ نگاشتهای گذار

$$\hat{dx}^B \circ (\hat{dx}^A)^{-1} = \left(x^B \circ (x^A)^{-1} \times \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right) : x^A(U^{AB}) \times \mathbb{R}^d \rightarrow x^A(U^{AB}) \times \mathbb{R}^d \quad (574)$$

$$\Psi_{TM}^B \circ (\Psi_{TM}^A)^{-1} = \left(\text{id} \times \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right) : U^{AB} \times \mathbb{R}^d \rightarrow U^{AB} \times \mathbb{R}^d. \quad (575)$$

به دست می‌آیند. این تعاریف و رابطه متقابل آنها در نمودار جاچابی زیر نشان داده شده است:

$$\begin{array}{ccc}
 x^B(U^{AB}) \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow{((x^B)^{-1} \times \text{id})} & U^{AB} \times \mathbb{R}^d \\
 \uparrow & \swarrow \hat{dx}^B & \uparrow \\
 (x^B \circ (x^A)^{-1} \times \frac{\partial x^B}{\partial x^A}) & \pi_{TM}^{-1}(U^{AB}) & (\text{id} \times g^{BA}) \\
 & \downarrow \hat{dx}^A & \downarrow \Psi_{TM}^B \\
 x^A(U^{AB}) \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow{((x^A)^{-1} \times \text{id})} & U^{AB} \times \mathbb{R}^d
 \end{array} \quad (576)$$

۵.۱ G-ساختارها و میدان‌های ویل‌باین

همانطور که در بخش‌های ۳.۶ و ۴.۶ بحث شد، هر G -اطلس $\{\Psi_{TM}^X, U^X\}$ از تریوپالیزاسیون‌های محلی کلاف مماس، یک G -ساختار متناظر را مشخص می‌کند، یعنی یک زیرکلاف GM از چارچوب‌های مرجع متمایز که به یک ساختار هندسی روی M احترام می‌گذارد (یا آن را تعریف می‌کند). بنا به تعریف، نگاشتهای گذار g^{BA} از کلاف‌های همبسته G مقادیری در یک گروه ساختاری کاوش باشه (d) می‌گیرند. این سؤال را مطرح می‌کند که آیا می‌توان به طور مشابه « G -اطلس‌هایی از چارت‌ها» $\{(x^X, U^X)\}$ را یافت، که ژاکوبین‌های آنها $\frac{\partial x^B}{\partial x^A}$ مقادیری در یک گروه ساختاری کاوش یافته $G \leq \text{GL}(d)$ بگیرند و بنابراین یک G -ساختار را کدگذاری کنند. برای برخی گروه‌های ساختاری این قطعاً ممکن است؛ به عنوان مثال، یک جهت‌گیری از یک مینیفلد جهت‌پذیر همیشه می‌تواند با مشخص کردن یک اطلس (d) از GL^+ از چارت‌های با جهت‌گیری مثبت، که ژاکوبین‌های گذار آنها مقادیری در $\text{GL}^+(d)$ می‌گیرند، ثابت شود. با این حال، به طور کلی، یافتن چارت‌های مختصاتی که پایه‌های مختصاتی را القا کنند که در یک G -ساختار داده شده قرار گیرند، غیرممکن است. بنابراین به تبدیلات پیمانه صریح از پایه‌های مختصاتی به G -ساختار، که به عنوان میدان‌های ویل‌باین شناخته می‌شوند، متولّ می‌شوند. [۲۰۳، ۲۱۱، ۲۱۲، ۱۹]. پس از تبدیل اولیه از پایه‌های مختصاتی به G -ساختار، آزادی پیمانه در داخل G -ساختار به تبدیلات پیمانه با مقادیر G -ساختار را حفظ می‌کنند، اجازه می‌دهند.

یک مثال مهم در فیزیک، $O(d)$ -ساختارها (با $(1, d-1)$ -ساختارها برای فضازمان‌ها) هستند، که از چارچوب‌های مرجع راست‌هنجر نسبت به متریک (شبیه) ریمانی η از M تشکیل شده‌اند.^{۱۴۷} چنین چارچوب‌های راست‌هنجری، چارچوب‌های آزمایشگاهی ممکن یک ناظر لخت را نمایش می‌دهند. آنها به عنوان مثال نظریه‌های میدان کوانتومی نسبیتی، به ویژه معادله دیراک، در فضازمان‌های خمیده استفاده می‌شوند. به یاد بیاورید که یک G -ساختار داده شده باید توسط تریوپالیزاسیون‌های محلی کلاف مورد احترام قرار گیرد، که به این معنی است که نگاشتهای پیمانه ψ باید G -ساختار را در $G_p M$ به $p \in M$ به $G_p M$ از \mathbb{R}^d نگاشت. برای مورد خاص $O(d)$ -ساختارها، این معادل این الزام است که تریوپالیزاسیون‌های کلاف متریک را حفظ کنند، یعنی $\langle \psi_{TM,p}(v), \psi_{TM,p}(w) \rangle = \langle \psi(v), \psi(w) \rangle$ برای هر $v, w \in T_p M$ و $p \in M$ نگاشت. با توجه به یک چارت مختصاتی $x : U \rightarrow V$ به عنوان مثال در U در بخش‌های قبلی نشان داده شد که با $\psi_{TM,p} = \hat{dx}_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d$ داده می‌شوند. بنابراین الزام بر روی آنها برای حفظ متریک به

$$\eta_p(v, w) = \langle \hat{dx}_p(v), \hat{dx}_p(w) \rangle, \quad (577)$$

تبدیل می‌شود، که دقیقاً ویژگی تعريف‌کننده برای x به عنوان یک ایزومتری است. این نتیجه دلالت بر این دارد که پایه‌های مختصاتی فقط در صورتی یک $O(d)$ -ساختار را تعریف می‌کنند که U و V ایزومتریک باشند \square که فقط در صورتی است که M به صورت محلی روی U تخت باشد. بنابراین برای هر ناحیه غیرتخت از M توصیف مستقیم یک $O(d)$ -ساختار از طریق پایه‌های مختصاتی غیرممکن است. این ناسازگاری به عنوان مثال در این واقعیت بیان می‌شود که مؤلفه‌های $\eta_{\mu\nu}$ از متریک ریمانی روی M نسبت به پایه مختصاتی انتخاب شده با $\delta_{\mu\nu}$ (یا $\text{diag}(+1, -1, \dots, -1)$) متفاوت هستند.

همانطور که قبلاً ذکر شد، چارچوب‌های راست‌هنجر یک $O(d)$ -ساختار OM در ادبیات فیزیک معمولاً از طریق یک تبدیل پیمانه نسبت به یک میدان چارچوب القا شده توسط چارت $\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} \right]_{\mu=1}^d$ تعریف می‌شوند. با نشان دادن این تبدیل پیمانه، که میدان ویل‌باین نامیده می‌شود، با

$$\epsilon^A : U \rightarrow \text{GL}(d), \quad (578)$$

^{۱۴۷} نماد η در ادبیات فیزیک معمولاً برای متریک مینکوفسکی $(-1, +1, \dots, -1)$ حفظ می‌شود در حالی که متریک (شبیه) ریمانی M با g نشان داده می‌شود. در مقابل، ما اعضای گروه را در گروه ساختاری به صورت $g \in G$ می‌نویسیم و بنابراین از η برای متریک (شبیه) ریمانی M استفاده می‌کنیم.

میدان چارچوب راستهنجار با^{۱۴۸}

$$[e_i^A]_{i=1}^d := \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} \right]_{i=1}^d \lhd (\epsilon^A)^{-1} = \left[\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\epsilon^A)_{\mu i}^{-1} \right]_{i=1}^d \in \Gamma(U, OM). \quad (579)$$

تعريف می‌شود. راستهنجاری میدان چارچوب حاصل معمولاً به صورت^{۱۴۹}

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \eta(e_i^A, e_j^A) \\ &= \eta \left(\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\epsilon^A)_{\mu i}^{-1}, \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\epsilon^A)_{\nu j}^{-1} \right) \\ &= \sum_{\mu\nu} \eta \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) (\epsilon^A)_{\mu i}^{-1} (\epsilon^A)_{\nu j}^{-1} \\ &= \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} (\epsilon^A)_{\mu i}^{-1} (\epsilon^A)_{\nu j}^{-1}, \end{aligned} \quad (580)$$

بیان می‌شود، که توضیح می‌دهد چرا میدان ویل‌باین گاهی اوقات «ریشه دوم متريک» نامیده می‌شود. طبق معمول، مؤلفه‌های برداری از طریق تبدیل پیمانه غیروارون ترجمه می‌شوند، یعنی^{۱۵۰}:

$$v_i^A = \sum_\mu \epsilon_{i\mu}^A v_\mu \quad (581)$$

یک استدلال ساده شمارش ابعاد، آزادی پیمانه را در $O(d)$ -ساختار نشان می‌دهد:^{۱۵۱} یک ویل‌باین $\epsilon^A(p) \in GL(d)$ به عنوان عضوی از گروه خطی عمومی دارای $d!$ درجه آزادی است، در حالی که متريک η به عنوان یک فرم دوخطی متقاضان، دارای $d(d+1)/2$ درجه آزادی است. $d(d-1)/2$ درجه آزادی گمشده دقیقاً متناظر با تبدیلات پیمانه با اعضای گروه ساختاری $g^{BA} \in O(d)$ است. به طور جایگزین، از دیدگاه G -ساختارها، $F_p M \cong GL(d)$ دارای d درجه آزادی است در حالی که $O(d) \cong O_p M \cong O(d-1)/2$ درجه آزادی است، که $d(d+1)/2$ درجه آزادی را که متناظر با انتخاب متريک است، ثابت می‌کند.

تمام ساختارها بهوضوح به G -ساختارهای دلخواه با میدان‌های ویل‌باین با مقادیر $GL(d)$ که پایه‌های مختصاتی را به GM نگاشت می‌دهند و آزادی اعمال تبدیلات پیمانه با مقادیر G پس از آن، تعمیم می‌یابند.

در ادبیات فیزیک این رابطه به صورت $e_i^A = (\epsilon^A)_i^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ بیان می‌شود. مقایسه با $\epsilon_{\mu i}^A := (\epsilon^A)_i^\mu$ نشان داده می‌شود.^{۱۴۸}

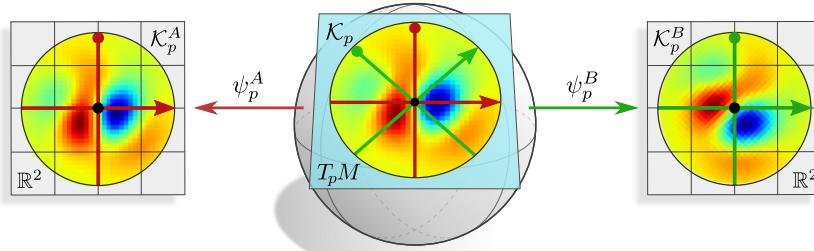
در ادبیات فیزیک این رابطه معمولاً به صورت $(\epsilon^A)_i^\mu (\epsilon^A)_\mu^\nu = \delta_{ij} (\epsilon^A)_\nu^\mu$ نوشته می‌شود.^{۱۴۹}

دوباره، در نمادگذاری معمول در فیزیک این رابطه به صورت $(\epsilon^A)_\mu^i v^\mu = (\epsilon^A)_\mu^i v^i$ خوانده می‌شود.^{۱۵۰}

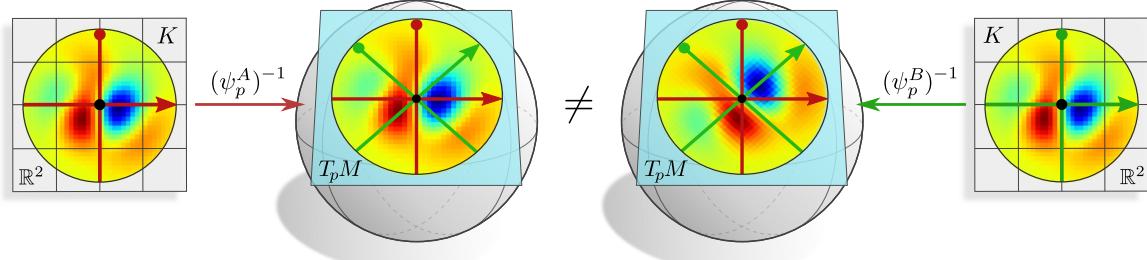
در فیزیک، بیشتر تبدیلات لورنتس محلی $(1, 3) \in O(1, 3)$ را در نظر می‌گیرند، که دوران‌ها و بوست‌های چارچوب‌های مرجع محلی را توصیف می‌کنند.^{۱۵۱}

فرماليسم چارت	فرماليسم کلاف	ايزومورفيسم
هر ديفنومورفيسم دلخواه	□	$V^A \xrightarrow{\sim} U^A$: چارت
القا شده توسيط چارتها	□	$x^A(U^{AB}) \xrightarrow{\sim} x^B(U^{AB})$ $x^B \circ (x^A)^{-1}$: نگاشت گذار
$\hat{dx}_p^A = (\hat{dx}_1^A _p, \dots, \hat{dx}_d^A _p)^\top$	ايزومورفيسم خطی از G -اطلس	$\mathbb{R}^d \xrightarrow{\sim} T_p M$ $\psi_{TM,p}^A :$ تربواليزاسيون نقطه‌اي
$\hat{dx}_p^B \circ (\hat{dx}_p^A)^{-1} = \frac{\partial x^B}{\partial x^A}\Big _{x^A(p)}$	عنصر گروه ساختار $g_p^{BA} \in G$	$\mathbb{R}^d \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^d \psi_{TM,p}^B \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1} :$ نگاشت گذار
$((x^A)^{-1} \times \text{id}) \circ \hat{dx}^A$	$v \mapsto (\pi_{TM}(v), \psi_{TM, \pi_{TM}(v)}(v))$	$U^A \times \mathbb{R}^d \xrightarrow{\sim} \pi_{TM}^{-1}(U^A)$ $\Psi_{TM}^A :$ تربواليزاسيون محلی
$\left(\text{id} \times \frac{\partial x^B}{\partial x^A}\right)$	$(\text{id} \times g^{BA})$	$U^{AB} \times \mathbb{R}^d \xrightarrow{\sim} U^{AB} \times \mathbb{R}^d$ $\Psi_{TM}^B \circ (\Psi_{TM}^A)^{-1} :$ نگاشت گذار
$\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu^A}\Big _p\right]_{\mu=1}^d = \left[(\hat{dx}_p^A)^{-1}(\epsilon_i)\right]_{\mu=1}^d$	GL(d) از G -اطلس	$[e_i^A]_{i=1}^d \in F_p M$ چارچوب عمومی
$\left[\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu^A}\Big _p (\epsilon^A)^{-1}_{\mu i}\right]_{i=1}^d$	از G -اطلس	$[e_i^A]_{i=1}^d \in G_p M$ چارچوب G -ساختار

جدول ۷: يك نمای کلي از انواع مختلف مختصاتی سازی روی منیفلدها. فرماليسم کلاف (ستون سوم)، که در اين کار استفاده می‌شود، مختصات را مستقيماً به فضاهای مماس اختصاص می‌دهد، در حالی که به نقاط p از فضای پایه M به روی مستقل از مختصات اشاره می‌کند. در مقابل، فرماليسم چارت (ستون چهارم) مختصات را به زيرمجموعه‌های محلی $M \subseteq U^X$ از منیفلد محلی U^X مرتبط می‌کند. تربواليزاسيون‌های محلی کلاف مماس و نگاشتهای گذار بين آنها به عنوان ديفرانتسیل‌های چارت‌ها و نگاشتهای گذار آنها، که دومی معمولاً به عنوان ژاكوبین‌ها نامیده می‌شوند، القا شوند. رديف ماقبل آخر عباراتي را برای چارچوب‌های مرجعی که به عنوان نقاطع همانی از تربواليزاسيون‌های محلی TM (ستون سوم) یا به عنوان پایه‌های مختصاتی القا شده توسيط چارت (ستون چهارم) القا شوند، ارائه می‌دهد. به طور مشابه، رديف آخر تعريف G -ساختارها □ به عنوان مثال چارچوب‌های راست‌هنچار □ را از طریق يك G -اطلس برای TM (ستون سوم) و از طریق میدان‌های ويل‌بان به عنوان تبدیلات پیمانه نسبت به پایه‌های مختصاتی (ستون چهارم) مقایسه می‌کند. طبق معمول، ما $p \in U^{AB}$ را با $U^A \cap U^B$ مخفف می‌کنیم و فرض می‌کنیم



شکل ۷.۳: یک کرnel مستقل از مختصات داده شده $T_p M$ روی فضای مماس K_p ممکن است در پیمانه‌های دلخواه ψ_p^A یا ψ_p^B نمایش داده شود. عبارت مختصاتی آن K_p^A و K_p^B روی R^d به طور کلی با یکدیگر متفاوت هستند. کرnel‌های G -راهبری‌پذیر این ویژگی را دارند که دقیقاً شکل یکسانی را در تمام پیمانه‌ها به خود می‌گیرند، یعنی در $K_p^A = K_p^B = K$ صدق می‌کنند (در تصویر نشان داده نشده است).



شکل ۷.۴: یک کرnel مستقل از مختصات ممکن است با اشتراک‌گذاری یک کرnel داده شده K روی R^d نسبت به یک چارچوب مرجع تعریف شود. انتخاب‌های مختلف از چارچوب‌ها منجر به یک کرnel مستقل از مختصات متفاوت می‌شوند. کرnel‌های G -راهبری‌پذیر این ویژگی را دارند که دقیقاً همان کرnel مستقل از مختصات را تولید می‌کنند، مستقل از چارچوب مرجع انتخاب شده که در امتداد آن به اشتراک‌گذاشته می‌شوند (در تصویر نشان داده نشده است). این امر امکان اشتراک وزن مستقل از مختصات را فراهم می‌کند.

ب اشتراک وزن مستقل از مختصات و کرnel‌های G -راهبری‌پذیر

یک فرض اساسی در طراحی کاتولوشن‌های GM این است که کرnel‌های K روی R^d نسبت به یک انتخاب از چارچوب مرجع، همانطور که در شکل ۷۴ به تصویر کشیده شده است، به اشتراک‌گذاشته می‌شوند. برای کرnel‌های عمومی، انتخاب‌های مختلف از چارچوب‌ها منجر به ترازهای متفاوتی از کرnel مستقل از مختصات حاصل می‌شوند. بنابراین فرایند اشتراک وزن، مستقل از مختصات نیست. شکل ۷۳ وضعیت متفاوتی را نشان می‌دهد: در اینجا ما یک کرnel مستقل از مختصات K_p را فرض می‌کنیم که از قبل روی $T_p M$ داده شده است و آن را در پیمانه‌های مختلف روی R^d بیان می‌کنیم. نمایش‌های مختصاتی K_p^A و K_p^B به طور کلی با یکدیگر موافق نیستند اما ساختار، مستقل از مختصات است.

کرnel‌های G -راهبری‌پذیر دقیقاً به گونه‌ای محدود شده‌اند که استقلال از مختصات فرایند اشتراک وزن را تضمین کنند. اشتراک‌گذاری آنها نسبت به چارچوب‌های مختلف منجر به همان کرnel مستقل از مختصات روی فضای مماس می‌شود، یعنی هیچ تفاوتی بین دو کرnel در وسط شکل ۷۴ وجود نخواهد داشت. به طور معادل، کرnel مستقل از مختصات حاصل روی $T_p M$ هنگام بیان در پیمانه‌های مختلف، شکل یکسانی $K_p^A = K_p^B = K$ را به خود می‌گیرد، یعنی کرnel چپ و راست در شکل ۷۳ با هم موافق خواهند بود.

توجه داشته باشید که این لزوماً به این معنا نیست که کرnel به معنای $K(gv) = K(v)$ برای هر $v \in \mathbb{R}^d$ ناوردا باشد، همانطور که شهود بصری ممکن است الفا کند. این در واقع یک مورد خاص برای کرnel‌هایی است که بین میدان‌های اسکالر نگاشت انجام می‌دهند، یعنی برای آنها باید ρ_{out} و هم ρ_{in} نمایش‌های بدینهی هستند (به عنوان مثال شکل ۶۶ برای $G = \mathcal{R}$ یا شکل ۵۵ برای $G = O(2)$). برای انواع میدان عمومی‌تر، کرnel‌ها باید هموردای پیمانه باشند، یعنی باید محدودیت G -راهبری‌پذیری $K(gv) = |\det g|^{-1} \rho_{\text{out}}(g) K(v) \rho_{\text{in}}(g)^{-1}$ را برآورده کنند که امکان دایت کاتال‌های کرnel $c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}$ را فراهم می‌کند (در تصویر نشان داده نشده است). البته، کرnel‌های G -راهبری‌پذیر را می‌توان به معنای ناوردا پیمانه تفسیر کرد به این معنا که $K(gv) = |\det g| \rho_{\text{out}}(g) \rho_{\text{in}}(g)^{-1} K(v)$ برای هر $v \in \mathbb{R}^d$ و هر $g \in G$ باشد. این مفهوم از ناوردا پیمانه، اشتراک مستقل از مختصات کرnel‌های G -راهبری‌پذیر را ممکن می‌سازد.

یک بحث دقیق‌تر در مورد کرnel‌های مستقل از مختصات و عبارات مختصاتی آنها در بخش ۲.۲.۴ یافت می‌شود. محدودیت G -راهبری‌پذیری در بخش ۳.۲.۴ استخراج شده است.

پ انتگرال‌گیری روی فضاهای مماس

روی یک منیفلد ریمانی (M, η) ، چگالی حجم $d\mu$ ^{۱۵۲} روی M به طور یکتا با این الزام مشخص می‌شود که به چارچوب‌های راست‌هنجر $[e_1^O, \dots, e_d^O]$ نسبت به متريک η حجم واحد اختصاص داده شود:

$$\text{برای هر چارچوب راست‌هنجر } [e_1^O, \dots, e_d^O] \text{ از } T_p M \text{ از } [e_1^O, \dots, e_d^O] = 1 \quad (582)$$

به طور مشابه، یک چگالی حجم dv روی فضاهای مماس $T_p M$ از یک منیفلد ریمانی به طور یکتا با اختصاص حجم واحد به چارچوب‌های راست‌هنجر آن نسبت به η_p تعریف می‌شود:

$$dv([e_1^O, \dots, e_d^O]) = 1 \quad T_p T_p M \text{ از } [e_1^O, \dots, e_d^O] = 1 \quad (583)$$

برای جلوگیری از یک بحث بی‌جهت پیچیده در مورد کلاف مماس مضاعف TTM ما انتگرال‌گیری روی $T_p M$ را به طور معادل با پول‌بک کردن آن از طریق یک پیمانه ایزومتریک (و در نتیجه حجم‌نگهدار) به \mathbb{R}^d تعریف می‌کنیم. فرض کنید $\psi_{TM,p}^O$ چنین پیمانه ایزومتریکی از یک اطلس $O(d)$ باشد، که چارچوب‌های راست‌هنجر را در $T_p M$ با چارچوب‌های راست‌هنجر در \mathbb{R}^d یکی می‌گیرد. سپس انتگرال یکتابع $f : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_{T_p M} f(v) dv &:= \int_{\mathbb{R}^d} f \circ (\psi_{TM,p}^O)^{-1}(v^O) dv^O \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f^O(v^O) dv^O, \end{aligned} \quad (584)$$

که در آن عبارت مختصاتی $\psi_{TM,p}^O : f^O = f \circ (\psi_{TM,p}^O)^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ را طبق معمول تعریف کردیم. این واقعیت که $\psi_{TM,p}^O$ ایزومتریک است در اینجا تضمین می‌کند که dv واقعاً حجم واحد را به چارچوب‌های راست‌هنجر اختصاص می‌دهد اگر dv^O این کار را بکند. از آنجا که دومی فقط اندازه لبگ استاندارد روی \mathbb{R}^d است، این مورد برقرار است.

حال فرض کنید $\psi_{TM,p}^A$ هر پیمانه‌ای در p باشد، که ممکن است بخواهیم انتگرال را نسبت به آن بیان کنیم. نگاشت گذار بین هر دو مختصاتی سازی به سادگی با تبدیل پیمانه $\psi^A \circ (\psi^A)^{-1}(v^A) = g_p^{OA}(v^A)$ داده می‌شود. طبق قوانین استاندارد برای تغییر متغیرها در انتگرال‌های چندبعدی، دیفرانسیل‌ها باید مطابق با دترمینان ژاکوبین این تبدیل تغییر کنند تا حجم حفظ شود. از آنجا که تبدیل خطی است، ژاکوبین با خود g_p^{OA} داده می‌شود، به طوری که به دست می‌آوریم

$$\int_{T_p M} f(v) dv = \int_{\mathbb{R}^d} f^A(v^A) |\det(g_p^{OA})| dv^A. \quad (585)$$

از طریق تبدیل پیمانه، این عبارت هنوز به انتخاب دلخواه از پیمانه ایزومتریک $\psi_{TM,p}^O$ بستگی دارد. این وابستگی را می‌توان با بیان مستقیم اندازه انتگرال بر حسب متريک به صورت

$$\int_{T_p M} f(v) dv = \int_{\mathbb{R}^d} f^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A, \quad (586)$$

از بین برد، که در آن ضریب

$$\sqrt{|\eta_p^A|} := \sqrt{|\det([\eta_p(e_i^A, e_j^A)]_{ij})|} \quad (587)$$

حجم (مطلق) چارچوب مرجع $[e_i^A]_{i=1}^d$ را نسبت به متريک η اندازه‌گیری می‌کند. برای تأیید برابری سمت راست معادلات (۵۸۵) و (۵۸۶)، ما متريک η_p از $T_p M$ را بر حسب حاصلضرب داخلی استاندارد $\langle \cdot, \cdot \rangle$ از \mathbb{R}^d بیان می‌کنیم، که دوباره با استفاده از پیمانه ایزومتریک $\psi_{TM,p}^O$ از اطلس $O(d)$ انجام می‌شود:

$$\begin{aligned} \eta_p(e_i^A, e_j^A) &= \langle \psi_{TM,p}^O(e_i^A), \psi_{TM,p}^O(e_j^A) \rangle \\ &= \langle \psi_{TM,p}^O \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i), \psi_{TM,p}^O \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_j) \rangle \\ &= \langle g_p^{OA} \epsilon_i, g_p^{OA} \epsilon_j \rangle \\ &= \epsilon_i^\top (g_p^{OA})^\top g_p^{OA} \epsilon_j \\ &= ((g_p^{OA})^\top g_p^{OA})_{ij} \end{aligned} \quad (588)$$

^{۱۵۲} برخلاف یک فرم حجم ω ، چگالی‌های حجم $|\omega|$ بک حجم مثبت را به هر چارچوب اختصاص می‌دهند. آنها هم روی منیفلدهای جهت‌بزیر و هم غیرجهت‌بزیر وجود دارند.

بنابراین قدر مطلق دترمینان در معادله (۵۸۷) با

$$\begin{aligned} \left| \det \left([\eta_p(e_i^A, e_j^A)]_{ij} \right) \right| &= \left| \det \left((g_p^{OA})^\top g_p^{OA} \right) \right| \\ &= \left| \det \left((g_p^{OA})^\top \right) \det \left(g_p^{OA} \right) \right| \\ &= \left| \det \left(g_p^{OA} \right) \right|^2, \end{aligned} \quad (589)$$

داده می شود، که از آن برابری سمت راست معادلات (۵۸۵) و (۵۸۶) با گرفتن ریشه دوم نتیجه می شود.

از آنجا که ضرایب $\sqrt{|\eta_p^B|}$ و $\sqrt{|\eta_p^A|}$ به هم مرتبط هستند:

$$\sqrt{|\eta_p^B|} = \frac{1}{|\det g_p^{BA}|} \sqrt{|\eta_p^A|} \quad (\text{چگالی } 1 - \Rightarrow) \quad (590)$$

این به همراه فرمول معمول تغییر متغیرها

$$dv^B = |\det g_p^{BA}| dv^A \quad (\text{چگالی } 1 + \Rightarrow), \quad (591)$$

دلالت بر این دارد که مختصاتی سازی های عنصر حجم ریمانی dv بنا به طراحی تحت تبدیلات پیمانه ناوردا هستند، یعنی،

$$\sqrt{|\eta_p^B|} dv^B = \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \quad (\text{چگالی } 0). \quad (592)$$

این رابطه تضمین می کند که انTEGRال گیری در معادله (۵۸۶) خوش تعریف است، یعنی مستقل از مختصات است.

ت کانولوشن های هموردا روی فضاهای همگن

کارهای کانولوشن های هموردا گروهی را در یک چارچوب نسبتاً عمومی تعریف می کنند. این مقالات در این مشترک هستند که روی نقشه های I/H یک گروه تقارن سراسری I عمل می کنند، که در آن $H \leq I^{154, 155}$ آنها در انواع گروه های I که پوشش می دهند و در تعریف فضاهای ویژگی خود، به ویژه عمل های گروهی خطی روی آنها، متفاوت هستند. قضایای اصلی این مقالات تأیید می کنند که عمومی ترین نگاشت های خطی هموردا بین چنین فضاهای ویژگی، کانولوشن ها (با همبستگی ها) با کرنل های دارای محدودیت تقارنی هستند. جزئیات خاص در مورد این کانولوشن های تعیین یافته به فضاهای ویژگی و عمل های گروهی خاصی که مدل ها در نظر می گیرند، بستگی دارد.

این پیوست این نظریه ها و ارتباط آنها را با کانولوشن های مستقل از مختصات ما بررسی می کند. مهمترین شباهت ها و تفاوت ها در لیست زیر خلاصه شده اند:

- هر فضای همگن یک منیفلد ریمانی نیست و هر منیفلد ریمانی یک فضای همگن از گروه ایزومنتری خود نیست.¹⁵⁵ با این حال، یک هموشواني قابل توجه وجود دارد، به عنوان مثال برای CNN های اقلیدسی روی $E(d)/O(d)$ یا $CNN \cong S^d \cong O(d+1)/O(d)$.

- نویسنده اگان به ترتیب گروه های فشرده [۹۶]، فشرده محلی، یکنواخت [۳۰]، و لی [۶] را در نظر می گیرند. گروه های تقارن سراسری در نظریه ما ایزومنتری های M یا، به طور خاص برای فضاهای اقلیدسی، گروه های آفین $Aff(G)$ هستند. توجه داشته باشید که گروه های آفین فشرده نیستند و فقط برای $O(d) \leq G \leq O(d+1)$ یکنواخت هستند. بنابراین گروه های آفین عمومی در نظریه های مربوطه پوشش داده نمی شوند.

- CNN های مستقل از مختصات، مرکز را از تقارن های سراسری به تقارن های محلی منتقل می کنند. روی فضاهای همگن I/H این تقارن های محلی منتظر با زیر گروه های پایدار ساز $Stab_p \cong H$ هستند. بخش ما روابط بین تقارن های سراسری و محلی را با جزئیات بررسی می کنیم هموردا بی محلی مدل ها، هموردا بی سراسری آنها را الفا می کنند.

- مدل ها انواع مختلفی از میدان های ویژگی و عمل های گروهی را روی آنها فرض می کنند: $\mathbb{R}^{n \times n}$ و $\mathbb{R}^{n \times m}$ [۶] میدان های اسکالر را روی فضاهای همگن فرض می کنند، یعنی تابع با مقادیر حقیقی $f : I/H \rightarrow \mathbb{R}$ که مطابق

¹⁵³ ما در اینجا از I برای نشان دادن تقارن های سراسری استفاده می کنیم، نه لزوماً ایزومنتری ها.

¹⁵⁴ [۶، ۳۱، ۹۶] به جای G از I برای اشاره به تقارن های سراسری استفاده می کنند. ما از I استفاده می کنیم زیرا G را برای گروه ساختاری رزرو کرده ایم.

¹⁵⁵ به عنوان مثال، $\{\pm 1\} \cong \{O(2)/SO(2)\} \cong \{\mathbb{Z}^d, +\}$ یک مجموعه است اما یک منیفلد ریمانی نیست. مثال دیگر، کانولوشن های گروهی $(\mathbb{Z}^d, +)$ روی شبکه پیکسلی گستینه \mathbb{Z}^d است.

با $f(\phi^{-1}\zeta.H) = f(\phi^{-1}\zeta.H) = f(\phi^{-1}\zeta.H)$ میدان‌های ویژگی از انواع عمومی‌تر ρ را در نظر می‌گیرند که به عنوان مقاطعی از کلافهای بردار ویژگی همبسته H تعریف می‌شوند. قوانین تبدیل آنها با نمایش‌های القابی $\text{Ind}_H^T \rho$ داده می‌شود. این تنظیم، توابع با مقادیر حقیقی از $[30] \leq G/H \leq [31]$ را به عنوان یک مورد خاص هنگام انتخاب نمایش‌های میدان بدیهی (یا، همانطور که در ادامه دقیق‌تر بیان می‌شود، نمایش‌های خارج‌قسمتی عمومی‌تر $\rho_{G/H}$ که در آن $H \leq G \leq I$ بوشش می‌دهد. نظریه ما نیز میدان‌های ویژگی را به عنوان مقاطعی از کلافهای همبسته مدل می‌کند. تبدیل آنها با پوشش فورواردها $\phi_{*,A}^{-1} \circ f \circ \phi := \phi_{*,A} \circ f$ داده می‌شود، که نمایش‌های القابی را تعیین می‌دهند.

▪ کارهای $[30] \leq G/H \leq [31]$ و $[30] \leq H \leq [31]$ اشتراک وزن کانولوشنی را از الزام هموردایی سراسری مدل‌ها استخراج می‌کنند. از سوی دیگر، کانولوشن‌های GM ، مبنای تعریف، وزن‌ها را روی G -ساختار به اشتراک می‌گذارند. ما ایده استخراج اشتراک وزن از تقارن‌های سراسری (ایزومنتری) را در بخش ۳.۸ اتخاذ کردیم. الزام به هموردایی ایزومنتری، اشتراک وزن را روی مدارهای ایزومنتری و یک محدودیت پایدارساز را روی کرنل‌ها نتیجه می‌دهد؛ به عنوان مثال به شکل ۴.۷ مراجعه کنید. قضیه ۱۴.۸ تأیید می‌کند که تبدیلات میدان کرنل هموردای ایزومنتری روی فضاهای همگن، کانولوشن‌های GM هستند □ این نتیجه نتایج $[30] \leq H \leq [31]$ و $[30] \leq G/H \leq [31]$ را به دقت منعکس می‌کند.

▪ همه این نظریه‌ها یک محدودیت تقارنی خطی بر روی فضاهای کرنل را استخراج می‌کنند. در مورد $[30] \leq H \leq [31]$ و $[30] \leq G/H \leq [31]$ ، کرنل‌ها اساساً نوع اسکالار روی فضاهای خارج‌قسمتی مضاعف $H/I/H$ هستند (با فرض همبستگی‌ها، برای کانولوشن‌ها H و H جایجاً می‌شوند؛ به ادامه مراجعه کنید). کرنل‌های $[30] \leq H \leq [31]$ در نظریه ما، یک محدودیت راهبری‌پذیری را برآورده می‌کنند که به انتخاب خاص انواع میدان ρ_{in} و ρ_{out} بستگی دارد. توجه داشته باشید که ضریب دترمینان در محدودیت G -راهبری‌پذیری $[30] \leq H \leq [31]$ وجود ندارد زیرا نویسندهان به گروه‌های یکنواخت محدود می‌شوند. این ضریب در محدودیت کرنل توسط $[30] \leq H \leq [31]$ ظاهر می‌شود.

▪ در حالی که $[30] \leq H \leq [31]$ و $[30] \leq G/H \leq [31]$ کرنل‌ها را بلا فاصله روی گروه یا فضای همگن توصیف می‌کنند، $[30] \leq H \leq [31]$ و کانولوشن‌های GM ما کرنل‌ها را روی فضاهای مماس تعریف کرده و متعاقباً آنها را از طریق نگاشت نمایی به فضاهای همگن تصویر می‌کنند. این رویکردها به طور کلی معادل نیستند، به عنوان مثال زیرا نگاشت نمایی روی یک منیفلد ناهمبند، یک‌به‌یک نیست. روی فضاهای اقلیدسی، هر دو رویکرد به وضوح معادل هستند؛ به بخش ۳.۹ مراجعه کنید. قضیه ما ۱.۱۱ در بخش ۲.۱۱ علاوه بر این، این شکاف را برای کرنل‌های کروی با ازائه یک ایزومورفیسم بین کرنل‌های دو رویکرد، پر می‌کند. در عمل، ناسازگاری عمومی بی‌اهمیت است زیرا کرنل‌های شبکه‌های کانولوشنی معمولاً دارای تکیه‌گاه فشرده در داخل شعاع ارزشکنیوئه نگاشت نمایی هستند.

ما در ادامه به تفصیل به نظریه‌های $[30] \leq H \leq [31]$ و $[30] \leq G/H \leq [31]$ خواهیم پرداخت. به عنوان یک آمادگی، ابتدا به بحث در مورد فضاهای همگن، کانولوشن‌های گروهی و همبستگی‌های گروهی می‌پردازیم. برای یک مرور جایگزین از این موضوع، خواننده را به $[50] \leq H \leq [51]$ ارجاع می‌دهیم. ما علاوه بر این می‌خواهیم به کار $[22] \leq H \leq [23]$ اشاره کنیم، که همچنین کانولوشن‌ها را روی فضاهای همگن تعریف می‌کنند. این کار در این بخش با جزئیات بیشتری پوشش داده نشده است زیرا مدل‌های آنها $\{e\}$ را فرض می‌کنند، یعنی کرنل‌های کانولوشن آنها نامحدود هستند و همیشه سیگنال ورودی را به یک میدان اسکالار روی I ارتقا می‌دهند.

۱. ملاحظات عمومی در مورد فضاهای همگن، کانولوشن‌های گروهی و همبستگی‌های گروهی

فضاهای همگن: فرض کنید I یک گروه باشد که بر روی یک فضای X عمل می‌کند. گفته می‌شود این فضای همگن است اگر عمل گروه متعدد باشد، یعنی اگر هر دو نقطه $p, q \in X$ با عمل I به هم مرتبط باشند. در معادلات، X همگن است اگر و تنها اگر برای هر $p, q \in X$ عضو $\phi \in I$ وجود داشته باشد به طوری که $\phi(p) = q$. توجه داشته باشید که عمل بر روی X لزوماً بدون نقطه ثابت نیست، یعنی هر نقطه $p \in X$ دارای یک زیرگروه پایدارساز بالقوه غیربدیهی است. می‌توان نشان داد که فضای همگن را می‌توان با فضای خارج‌قسمتی I/H یکی گرفت که در آن $p \in X$ برای یک $h \in H$ است.

از آنجا که هر فضای همگن به عنوان یک خارج‌قسمت به وجود می‌آید، ما در ادامه همیشه یک زیرگروه H از I را در نظر می‌گیریم. این زیرگروه دارای همدسته‌های چپ است، یعنی زیرمجموعه‌هایی به شکل

$$\phi.H = \{\phi h \mid h \in H\} \quad (593)$$

که اعضای فضای خارج‌قسمتی (همگن)

$$I/H = \{\phi.H \mid \phi \in I\}. \quad (594)$$

^{۱۵۶} نقشه‌های ویژگی چند-کاناله با روی هم قرار دادن چندین تابع از این نوع ساخته می‌شوند. برخلاف مورد میدان‌های ویژگی، کانال‌های منفرد چنین نقشه‌های ویژگی به طور مستقل از یکدیگر تبدیل می‌شوند.
^{۱۵۷} انتخاب‌های دیگر از نقاط، تحقیق‌های دیگری از ایزومورفیسم غیرکانونی X/I را به دست می‌دهند. هر انتخابی به همان اندازه معتبر است زیرا برای فضاهای همگن $\text{Stab}_p \cong \text{Stab}_q$ است.

هستند. یک عمل چپ طبیعی از \mathcal{I}/H بر روی \mathcal{I} با

$$\mathcal{I} \times \mathcal{I}/H \rightarrow \mathcal{I}/H, \quad (\tilde{\phi}, \phi.H) \mapsto \tilde{\phi}\phi.H. \quad (595)$$

داده می شود. به راحتی دیده می شود که این عمل متعدي است، و \mathcal{I}/H را به یک فضای همگن از \mathcal{I} تبدیل می کند. نگاشت خارج قسمتی کانونی

$$q_{\mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/H, \quad \phi \mapsto \phi.H \quad (596)$$

\mathcal{I} را به یک کلاف اصلی H/\mathcal{I} روی H تبدیل می کند. تعاریف مشابهی را می توان برای همدسته های راست

$$H.\phi \in H \setminus \mathcal{I}. \quad (597)$$

و همدسته های مضاعف

$$\tilde{H}.\phi.H \in \tilde{H} \setminus \mathcal{I}/H \quad (598)$$

و فضاهای خارج قسمتی مربوطه آنها انجام داد.

یک ویژگی جهانی از نگاشته های خارج قسمتی $q_{\mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}}$ که در بحث ما در ادامه مهم خواهد شد، به شرح زیر است. فرض کنید $\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته و ناوردای-راست نسبت به H باشد، یعنی تابعی که $f^{\uparrow}(\phi h) = f^{\uparrow}(\phi)$ را برای هر $h \in H$ و $\phi \in \mathcal{I}$ برآورده می کند. آنگاه یک تابع پیوسته یکتا $f : \mathcal{I}/H \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $f^{\uparrow} = f \circ q_{\mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}}$ است. بر عکس، می توان هر نگاشت پیوسته $\mathcal{I}/H \rightarrow \mathbb{R}$ را به طور یکتا به یک نگاشت ناوردای-راست نسبت به H به صورت $f^{\uparrow} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ارتفا داد، که توسط $f^{\uparrow}(\phi) = f(\phi.H)$ برای تمامی کانونلوشن های گروهی به فضاهای همگن استفاده می شود. رابطه بین هر دو تابع در نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} & & \\ q_{\mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}} \downarrow & \searrow !f^{\uparrow} := f \circ q_{\mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}} & \\ \mathcal{I}/H & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{array} \quad (599)$$

یک ساختار متشابه را می توان به وضوح برای فضاهای خارج قسمتی راست $H \setminus \mathcal{I}$ و نگاشته های ناوردای-چپ نسبت به H انجام داد. نمودار جابجایی زیر مورد فضاهای خارج قسمتی مضاعف ماضعف $\tilde{H} \setminus \mathcal{I}/H$ و نگاشته های f^{\uparrow} را که همزمان ناوردای-چپ نسبت به \tilde{H} و ناوردای-راست نسبت به H هستند، به تصویر می کشد، یعنی در $f^{\uparrow}(\phi) = f^{\uparrow}(\phi.H) = f^{\uparrow}(\phi)$ برای هر $\phi \in \mathcal{I}$ و $h \in H$ صدق می کنند:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} & & \\ q_{\tilde{H} \setminus \mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}} \downarrow & \searrow !f^{\uparrow} := f \circ q_{\tilde{H} \setminus \mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}} & \\ \tilde{H} \setminus \mathcal{I}/H & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{array} \quad (600)$$

کانونلوشن های گروهی و همبستگی های گروهی: کانونلوشن های طبیعی از فضاهای اقلیدسی (یا گروه های انتقال) به گروه های فشرده محلی دلخواه تعمیم داده می شوند. فرض کنید \mathcal{I} یک گروه فشرده محلی باشد و $d\zeta$ یک اندازه هار چپ روی \mathcal{I} باشد. کانونلوشن گروهی $(f *_{\mathcal{I}} \kappa)$ از دو تابع انتگرال پذیر $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ و $\kappa : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ با عبارات معادل زیر، که از [۶۱] گرفته شده اند، تعریف می شود:

$$\begin{aligned} (f *_{\mathcal{I}} \kappa)(\phi) &:= \int_{\mathcal{I}} f(\zeta) \kappa(\zeta^{-1}\phi) d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{I}} f(\phi \zeta) \kappa(\zeta^{-1}) d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{I}} f(\zeta^{-1}) \kappa(\zeta \phi) \Delta(\zeta^{-1}) d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{I}} f(\phi \zeta^{-1}) \kappa(\zeta) \Delta(\zeta^{-1}) d\zeta, \end{aligned} \quad (601)$$

همومورفیسم گروهی $(*) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^+$ که در دو عبارت آخر ظاهر می شود، تابع مدولار \mathcal{I} است. کانونلوشن های گروهی را مانند خط آخر تعریف می کنند، با این حال، بدون تابع مدولار، این معتبر است زیرا نویسنده گروه های فشرده را فرض می کنند، که یکنواخت هستند، یعنی $\Delta(\phi) = \phi$ برای هر $\phi \in \mathcal{I}$ برآورده می کنند.

مرتبط با کانولوشن‌های گروهی، همبستگی‌های گروهی هستند

$$(f *_{\mathcal{I}} \kappa)(\phi) := \langle f, \phi \cdot \kappa \rangle_{L^1(\mathcal{I})} = \int_{\mathcal{I}} f(\zeta) \kappa(\phi^{-1} \zeta) d\zeta, \quad (6.2)$$

که به عنوان حاصلضرب داخلی یک تابع f با یک کرنل جایجا شده κ . ϕ تعریف می‌شوند. یک مقایسه با معادله (۶.۱) نشان می‌دهد که کانولوشن‌های گروهی و همبستگی‌های گروهی تا یک وارونگی آرگومان کرنل، معادل هستند، یعنی،

$$(f *_{\mathcal{I}} \kappa) = (f *_{\mathcal{I}} [\kappa \circ (\cdot)^{-1}]). \quad (6.3)$$

در حالی که [۳۱] در [۹۶] کانولوشن‌های گروهی (تعمیم‌یافته) را در نظر می‌گیرند، [۶] و [۲۰] همبستگی‌ها را فرض می‌کنند برای تطبیق نظریه‌ها باید آرگومان کرنل را وارون کرد.

کانولوشن‌های گروهی و همبستگی‌های گروهی بنا به عمل‌های چپ $f(\phi) = f(\alpha^{-1}\phi) \cdot f(\phi)$ از اعضای گروه $\alpha \in \mathcal{I}$ بر روی عامل اول هموردا هستند. برای مورد کانولوشن‌ها، این با

$$\begin{aligned} ([\alpha \cdot f] *_{\mathcal{I}} \kappa)(\phi) &= \int_{\mathcal{I}} [\alpha \cdot f](\zeta) \kappa(\zeta^{-1} \phi) d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{I}} f(\alpha^{-1} \zeta) \kappa(\zeta^{-1} \phi) d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{I}} f(\tilde{\zeta}) \kappa(\tilde{\zeta}^{-1} \alpha^{-1} \phi) d(\alpha \tilde{\zeta}) \\ &= (f *_{\mathcal{I}} \kappa)(\alpha^{-1} \phi) \\ &= [\alpha \cdot (f *_{\mathcal{I}} \kappa)](\phi), \end{aligned} \quad (6.4)$$

نشان داده می‌شود، که در آن ما در مرحله سوم $\tilde{\zeta} = \alpha^{-1} \phi$ را جایگزین کردیم و از این واقعیت استفاده کردیم که $d\tilde{\zeta} = d\phi$ یک اندازه هار چپ است، یعنی $d\tilde{\zeta} = d\phi$ را برآورده می‌کند. مورد همبستگی‌ها به طور بدینه از معادله (۶.۳) نتیجه می‌شود.

اکثر CNN‌های هموردا بر کانولوشن‌های گروهی یا همبستگی‌های گروهی تکیه دارند. به طور خاص، مدل‌های رای دیف‌های (۱)، (۵)، (۱۱)، (۱۵)، (۲۱)، (۲۴)، (۲۵) و (۳۲) از جدول ۶ که همگی با نمایش‌های منظم بر جسب‌گذاری شده‌اند (یا می‌توانند به طور معادل بر جسب‌گذاری شوند)، CNN‌های کانولوشنی گروهی هستند. پیش از استفاده از آنها در CNN‌های هموردا، کانولوشن‌های گروهی به طور گسترده در ریاتیک [۲۶] یا برای تحلیل تصویر [۱۱۳، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵] به کار رفته‌اند. [۲۷] نشان دادند که کانولوشن‌های گروهی (یا بهتر بگوییم همبستگی‌ها) به طور طبیعی کانولوشن‌های متعارف را تعییم می‌دهند. از آنجا که نقشه‌های ویژگی شبکه‌های کانولوشنی شامل چندین کانال هستند، آنها با توابع با مقادیر حقیقی روی \mathcal{I} داده نمی‌شوند بلکه با توابع با مقادیر برداری \mathbb{R}^c : $\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^c$ داده می‌شوند. کرنل‌ها بر این اساس به عنوان توابع ماتریسی (نامحدود) روی گروه تعییف می‌شوند، یعنی $\kappa : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$. کارهای [۹۶] [۲۱] [۳۰] [۶] که در ادامه مرور می‌کنیم، چنین شبکه‌های کانولوشنی گروهی را به فضاهای همگن دلخواه تعییم می‌دهند.

ت. ۲. کانولوشن‌های میدان اسکالر روی فضاهای همگن

ما با شبکه‌های کانولوشنی (یا همبستگی) \mathcal{I} -هموردا روی فضاهای همگن توسط [۹۶] [۶] شروع می‌کیم. هر دو نظریه، نقشه‌های ویژگی را به عنوان میدان‌های اسکالار روی فضاهای همگن تعییف می‌کنند، یعنی هر کانال با یک تابع با مقادیر حقیقی

$$f : \mathcal{I}/H \rightarrow \mathbb{R}. \quad (6.5)$$

داده می‌شود. کانال‌های منفرد به طور مستقل تحت عمل گروه تقارن سراسری \mathcal{I} همانطور که با

$$[\tilde{\phi}, f](\phi \cdot H) := f(\tilde{\phi}^{-1} \phi \cdot H) \quad \tilde{\phi} \in H, \quad \phi \cdot H \in \mathcal{I}/H. \quad (6.6)$$

مشخص شده است، تبدیل می‌شوند.

هر لایه $L = 1, \dots, L$ ممکن است یک زیرگروه متفاوت $\mathcal{I} \leq H_L$ و در نتیجه یک فضای همگن \mathcal{I}/H_L داشته باشد که نقشه‌های ویژگی آن را روی آن زندگی می‌کنند. این به عنوان مثال اجزاء می‌دهد تا کانولوشن‌های ارتقا هنده از کره $S^3 \cong \text{SO}(3)/\text{SO}(2)$ به منیفلد گروه $\{e\} \cong \text{SO}(3)/\text{SO}(2)$ را با انتخاب به ترتیب زیرگروه‌های $\text{SO}(2)$ و $\{e\}$ مدل‌سازی کنیم. انتخاب‌های زیرگروه‌ها به نوعی با انتخاب‌های نمایش‌های گروهی در نظریه ما مطابقت دارند، که در ادامه بیشتر توضیح خواهیم داد.

نتایج این دو مقاله تا حد زیادی معادل هستند، با این حال، [۹۶] گروه‌های فشرده \mathcal{I} و کانولوشن‌ها را در نظر می‌گیرند در حالی که [۶] فرض می‌کند \mathcal{I} یک گروه لی است و از همبستگی‌ها استفاده می‌کند.

[۶۰] به طور خلاصه، میدان اسکالر روی فضاهای همگن \mathcal{I} -هموردا را بین ویژگی‌های نگاشت‌های خطی $\mathcal{I}/H_{\mathbb{M}}$ و $\mathcal{I}/H_{\mathbb{M}}/\mathcal{I}$ با فرض قانون تبدیل در معادله (۶۰.۶) بررسی می‌کنند. آنها اثبات می‌کنند که این عملیات با یک کانولوشن گروهی تعیین‌یافته با یک کرنل

$$\kappa : H_{\mathbb{M}} \setminus \mathcal{I}/H_{\mathbb{M}} \rightarrow \mathbb{R} \quad (60.7)$$

روی فضای خارج‌قسمتی مضاعف مشخص شده توسط $H_{\mathbb{M}}$ و $H_{\mathbb{M}}/\mathcal{I}$ داده می‌شود. با فرمول‌بندی برای گروه‌های متناهی، همانطور که توسط نویسنده‌گان انجام شده است، نشان داده می‌شود که این عملیات کانولوشن گروهی تعیین‌یافته با

$$(f *_{\mathcal{I}/H_{\mathbb{M}}} \kappa)(\phi.H_{\mathbb{M}}) := |H_{\mathbb{M}}| \sum_{H_{\mathbb{M}} \cdot \zeta \in H_{\mathbb{M}} \setminus \mathcal{I}} f(\phi \zeta^{-1}.H_{\mathbb{M}}) \kappa(H_{\mathbb{M}} \cdot \zeta.H_{\mathbb{M}}). \quad (60.8)$$

داده می‌شود. یک مقایسه با خط آخر معادله (۶۰.۱) نشان می‌دهد که این عملیات واقعاً به شدت به کانولوشن‌های گروهی مرتبط است □ تابع مدولار Δ حذف می‌شود زیرا \mathcal{I} فشرده و در نتیجه یکنواخت است. کانولوشن گروهی تعیین‌یافته در واقع معادل یک کانولوشن گروهی

$$(f *_{\mathcal{I}/H_{\mathbb{M}}} \kappa)(\phi.H_{\mathbb{M}}) = (f^\dagger *_{\mathcal{I}} \kappa^\dagger)(\phi) \quad (60.9)$$

با ویژگی‌ها و کرنل‌هایی است که مطابق با نمودارهای معادلات (۵۹.۹) و (۶۰.۰) ارتقا یافته‌اند. توجه داشته باشید که کرنل کانولوشن روی $H_{\mathbb{M}} \setminus \mathcal{I}/H_{\mathbb{M}}$ متناظر با یک کرنل همبستگی روی $H_{\mathbb{M}}/\mathcal{I}$ است زیرا کانولوشن‌ها و همبستگی‌ها طبق معادله (۶۰.۳) با یک وارونگی آرگومان کرنل به هم مرتبط هستند. بنابراین می‌توان کرنل‌های $H_{\mathbb{M}} \setminus \mathcal{I}/H_{\mathbb{M}}$ را به عنوان کرنل‌های همبستگی ناوردای-چپ نسبت به $H_{\mathbb{M}} \setminus \mathcal{I}/H_{\mathbb{M}}$ روی فضای ورودی در نظر گرفت.

برای ارائه یک شهود در مورد این نتایج، به مثال CNN کروی خود که در بالا ذکر شد، باز می‌گردیم. بنابراین فرض کنید $\mathcal{I} = \text{SO}(3)$ و $\mathcal{I}/H_{\mathbb{M}} = \text{SO}(2)$ و برای حال، $H_{\mathbb{M}} = \{e\}$. این تنظیم، کانولوشن‌های ارتقا دهنده از کره ۲-بعدی S^1 را به منيفلد گروه دوران $\mathcal{I}/H_{\mathbb{M}} = \text{SO}(3)/\{e\} \cong \text{SO}(3)$ توصیف می‌کند. با در نظر گرفتن همبستگی‌ها به جای کانولوشن‌ها، کرنل‌ها توابع با مقادیر حقیقی روی $H_{\mathbb{M}} \setminus \mathcal{I}/H_{\mathbb{M}} = \{e\} \setminus \text{SO}(2) \cong S^1$ هستند. اگر به جای آن $H_{\mathbb{M}} = \text{SO}(2)$ را قرار دهیم، کانولوشن از میدان‌های اسکالر روی کره ۲-بعدی به میدان‌های اسکالر روی کره $\mathcal{I}/H_{\mathbb{M}} = \text{SO}(3)/\{e\} \cong \text{SO}(2)$ نگاشت می‌دهد. در این حالت، کرنل‌های همبستگی با توابع با مقادیر حقیقی روی $\text{SO}(2) \setminus \text{SO}(3)$ داده می‌شوند. به طور معادل، کرنل‌های همبستگی با توابع ناوردای-چپ نسبت به $\text{SO}(2)$ روی S^1 داده می‌شوند، یعنی کرنل‌های ناحیه‌ای همانطور که در شکل ۵۵ به تصویر کشیده شده است. هنگام فرض $H_{\mathbb{M}} = H_{\mathbb{M}} = \{e\}$ ، $H_{\mathbb{M}} = \mathcal{I}/H_{\mathbb{M}} \cong \text{SO}(2)$ و $\mathcal{I}/H_{\mathbb{M}} \cong \text{SO}(3) \setminus \mathcal{I}/H_{\mathbb{M}}$ را داریم، که متناظر با کانولوشن‌های گروهی متعارف (یا همبستگی‌ها) است. این نتایج با بحث ما در بخش ۲.۱۱ مطابقت دارد.

برای کامل بودن، ما اشاره می‌کنیم که نتایج خود را علاوه بر این از یک دیدگاه نظریه نمایشی، یعنی با ویژگی‌ها و کرنل‌ها در فضای فوریه، توضیح می‌دهند. این واقعیت که ویژگی‌ها و کرنل‌ها روی فضاهای خارج‌قسمتی زندگی می‌کنند، در این فرمول‌بندی در الگوهای پراکنده‌گی ضرایب فوریه معنکس می‌شود.

[۶]: به جای در نظر گرفتن گروه‌های فشرده، میدان اسکالر پذیر مربع با مقادیر حقیقی در $L^2(\mathcal{I}/H_{\mathbb{M}})$ تعریف می‌شوند که هنگام عمل \mathcal{I} بر روی آنها، مطابق با معادله (۶۰.۶) تبدیل می‌شوند.

$$[6] \text{ لایه‌های شبکه‌های کانولوشنی (یا بهتر بگوییم همبستگی) خود را به عنوان عملگرهای خطی کراندار \mathcal{K} : L^2(\mathcal{I}/H_{\mathbb{M}}) \rightarrow L^2(\mathcal{I}/H_{\mathbb{M}}) \quad (61.0)$$

بین نقشه‌های ویژگی روی فضاهای همگن $\mathcal{I}/H_{\mathbb{M}}$ و \mathcal{I} مدل می‌کند. چنین عملگرهایی به طور کلی با عملگرهای انتگرالی به شکل

$$[\mathcal{K}f](\phi.H_{\mathbb{M}}) = \int_{\mathcal{I}/H_{\mathbb{M}}} \hat{\mathcal{K}}(\phi.H_{\mathbb{M}}, \zeta.H_{\mathbb{M}}) f(\zeta.H_{\mathbb{M}}) d\mu_{\mathcal{I}/H_{\mathbb{M}}}, \quad (61.1)$$

داده می‌شوند، که در آن $d\mu_{\mathcal{I}/H_{\mathbb{M}}}$ یک اندازه رادون روی $\mathcal{I}/H_{\mathbb{M}}$ است.

$$\hat{\mathcal{K}} : \mathcal{I}/H_{\mathbb{M}} \times \mathcal{I}/H_{\mathbb{M}} \rightarrow \mathbb{R} \quad (61.2)$$

یک کرنل ۲-آرگومانی انتگرال‌پذیر است.

از این بر روی عملگر برای هموردا بودن، یعنی،

$$\hat{\mathcal{K}}(\phi.f) = \phi.\hat{\mathcal{K}}(f) \quad \forall \phi \in \mathcal{I}, f \in L^2(\mathcal{I}/H_{\mathbb{M}}), \quad (61.3)$$

نشان داده می‌شود که دلالت بر این دارد که کرنل ۲-آرگومانی به یک کرنل تک‌آرگومانی کاهش می‌یابد

$$\hat{\mathcal{K}}(\phi.H_{\mathbb{M}}, \zeta.H_{\mathbb{M}}) = \frac{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\mathbb{M}}}(\phi^{-1}\zeta.H_{\mathbb{M}})}{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\mathbb{M}}}(\zeta.H_{\mathbb{M}})} \kappa(\phi^{-1}\zeta.H_{\mathbb{M}}). \quad (61.4)$$

عضو گروه $\phi \in \phi.H_{\text{Hil}} \subset \mathcal{I}$ در اینجا یک نماینده دلخواه از همدسته‌ای است که در آن قرار دارد. این کرنل ۱-آرگومانی \square تا یک ضریب مقیاس وابسته به اندازه \square محدود به ناوردایی-چپ نسبت به H_{Hil} است:

$$\kappa(\zeta.H_{\text{Hil}}) = \frac{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\text{Hil}}}(\xi^{-1}\zeta.H_{\text{Hil}})}{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\text{Hil}}}(\zeta.H_{\text{Hil}})} \kappa(\xi^{-1}\zeta.H_{\text{Hil}}) \quad \forall \zeta.H_{\text{Hil}} \in \mathcal{I}/H_{\text{Hil}}, \xi \in H_{\text{Hil}} \quad (615)$$

توجه داشته باشید که این نتیجه بسیار شبیه به نتیجه $H_{\text{Hil}} \cap \mathcal{I} = \mathcal{I}$ است زیرا یک کرنل ناوردای-چپ نسبت به H_{Hil} روی $H_{\text{Hil}}/\mathcal{I}$ معادل یک عضو از $\mathcal{I}/H_{\text{Hil}}$ است (دوباره با فرض کرنل‌های همبستگی به جای کرنل‌های کانولوشن). تفاوت اصلی ضریب مقیاس اضافی است، که ظاهر می‌شود زیرا اندازه رادون $d\mu_{\mathcal{I}/H_{\text{Hil}}}$ لزوماً ناوردای-چپ نسبت به \mathcal{I} نیست.

یکی از موارد عملی مرتبط، همبستگی‌های گروهی است، که برای آنها $\{e\} = H_{\text{Hil}} = \mathcal{I}/\{e\}$ است. در این حالت $d\mu_{\mathcal{I}/H_{\text{Hil}}}(\cdot)$ یک اندازه هار (ناوردای) چپ روی \mathcal{I} است، به طوری که ضریب مقیاس حذف می‌شود. مورد مرتبط دیگر، کانولوشن‌های هموردای آفین روی فضاهای اقلیدسی است، یعنی انتخاب‌های $(G, \mathcal{I}) = (\text{Aff}(G), \mathcal{I}/H_{\text{Hil}}) \cong \mathbb{R}^d$ است. با فرض اینکه $d\mu_{\mathcal{I}/H_{\text{Hil}}}(\cdot)$ یک روش باشد و با نشان دادن $\phi = tg \in \mathcal{I}$ اثبات می‌کند که ضریب مقیاس در این حالت با

$$\frac{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\text{Hil}}}((tg)^{-1}x)}{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\text{Hil}}}(x)} = \frac{1}{|\det g|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad (616)$$

داده می‌شود. این دقیقاً همان ضریب دترمینان است که در محدودیت کرنل G -راهبری پذیر می‌باشد، معادله (۸۳)، نیز ظاهر می‌شود. از آنجا که $\text{SO}(3)$ یک گروه لی است، مثال‌های CNN کروی که ما پس از بحث در مورد نظریه $\mathcal{I}/H_{\text{Hil}}$ [۹۶] ارائه دادیم، بدون تغییر اعمال می‌شوند (با فرض اندازه استاندارد ناوردای-چپ روی S^2).

[۶] کرنل‌ها را در شاخص نزدیک با کانولوشن‌های GM معرفی مماس تعریف کرده و آنها را متعاقباً از طریق نگاشته‌ای نمایی به فضاهای همگن تعمیر می‌کنند. کرنل‌ها روی فضاهای مماس در اینجا از طریق اسپلاین‌ها \square مدل‌سازی می‌شوند. یک تفاوت این است که [۶] نیازی به در نظر گرفتن انتقال دهنده‌های موازی ندارد زیرا او نقشه‌های ویژگی اسکالر را روی فضاهای همگن فرض می‌کند.

ارتباط با کانولوشن‌های \square : به دلیل فرمول‌بنده کاملاً متفاوت، بالا فاصله مشخص نیست که نتایج $\mathcal{I}/H_{\text{Hil}}$ [۹۶] و \mathcal{I} [۶] چگونه با نظریه ما مرتبط هستند. به جای در نظر گرفتن فضاهای خارج‌قسمتی مختلف I/H_l در هر لایه l ما یک منيفلد ثابت R_l را در نظر می‌گیریم. برای دیدن اینکه چگونه هر دو رویکرد به هم متصل می‌شوند، یک زیرگروه دیگر G را فرض کنید به طوری که $R_l \leq G \leq \mathcal{I}$ برای همه لایه‌ها $l = 1, \dots, L := \mathcal{I}/G$ و G/H_l یک منيفلد باشد، را برآورده کن. ویژگی‌های اسکالار روی \mathcal{I}/H_l را می‌توان در این حالت به عنوان میدان‌های ویژگی همبسته G روی M در نظر گرفت که مطابق با نمایش‌های خارج‌قسمتی $\rho_{\text{Hil}}^{G/H_l}$ می‌شوند. برای دیدن این، توجه داشته باشید که عمل گروه در معادله (۶۰۶) چیزی جز نمایش القابی $\text{Ind}_{H_l}^{\mathcal{I}} \rho_{\text{Hil}}^{G/H_l}$ از نمایش بدیهی H_l نیست، که قانون تبدیل میدان‌های اسکالار روی \mathcal{I}/H_l را توصیف می‌کند. این نمایش را می‌توان از طریق القا در مراحل (به [۲۱] مراجعه کنید) به

$$\text{Ind}_{H_l}^{\mathcal{I}} \rho_{\text{Hil}}^{G/H_l} = \text{Ind}_G^{\mathcal{I}} \text{Ind}_{H_l}^G \rho_{\text{Hil}}^{G/H_l} = \text{Ind}_G^{\mathcal{I}} \rho_{\text{Hil}}^{G/H_l}, \quad (617)$$

تجزیه کرد، یعنی به القای نمایش خارج‌قسمتی $\rho_{\text{Hil}}^{G/H_l}$ از G به \mathcal{I} بنابراین توابع با مقادیر حقیقی روی \mathcal{I}/H_l معادل میدان‌های \square روی $M = \mathcal{I}/G$ هستند.

موارد خاص جالب $G = H_l$ و $\mathcal{I} = \mathcal{I}/H_l$ هستند. برای اولی، میدان‌های اسکالار را روی $G = \mathcal{I}/G$ می‌دانند. برای دومی، $\rho_{\text{Hil}}^{G/H_l}$ نمایش منظم است، که متناظر با کانولوشن‌های گروهی متعارف است.

این بینش‌ها دلالت بر این دارند که نظریه \square تمام مدل‌های جدول ۶ را که روی فضاهای همگن از گروه‌های فشرده \mathcal{I} عمل می‌کنند و با نمایش‌های بدیهی، منظم با خارج‌قسمتی عمومی تر برچسب‌گذاری شده‌اند، توضیح می‌دهد \square اینها اساساً CNN‌های کروی در ردیف‌های (۳۲) و (۳۳) هستند. یک تعمیم جزئی نظریه به گروه‌های فشرده محلی و یکتواخت، علاوه بر این برخی از CNN‌های گروهی ایزومنتری را توصیف می‌کند. از آنجا که [۶] گروه‌های لی دلخواه را فرض می‌کند، مدل‌های او علاوه بر این CNN‌های (G)-هموردا را در جدول ۶ که با نمایش‌های بدیهی، منظم یا خارج‌قسمتی عمومی تر برچسب‌گذاری شده‌اند، پوشش می‌دهند. آنها به طور خاص CNN‌های اقلیدسی هموردای مقیاسی $(G = \mathcal{S})$ را که برای آنها ضریب دترمینان $|\det g|$ غیربدیهی است، پوشش می‌دهند.

انواع دیگر میدان‌های ویژگی و فضاهای غیرهمگن مانند فضاهای اقلیدسی سوراخ‌دار \mathbb{E}_d و کره‌های $\{n, s\}$ ، بیست‌وجهی، سطوح عمومی و نوار موبیوس پوشش داده نمی‌شوند.

ث میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی \square اثبات‌ها

در این پیوست، ما اثبات‌هایی برای قضایای ۱۴.۸ و ۱۲.۸ ارائه می‌دهیم.

ث. ۱۲.۸ اثبات قضیه ۱۲.۸ ایزومورفیسم بین میدان‌های کرنل ناوردای ایزومتری و میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی

قضیه ۱۲.۸ ادعا می‌کند که فضاهای $\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ از میدان‌های کرنل ناوردای ایزومتری در معادله (۳۱۴) و $\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ از میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی در معادله (۳۵۴) با یکدیگر ایزومورف هستند و این ایزومورفیسم با ارتقا داده می‌شود که وارون آن Λ^{-1} تحدید به $r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$ است. در اینجا ما اثباتی برای این گزاره ارائه می‌دهیم که شامل نشان دادن این است که ۱) Λ^{-1} واقعًا یک وارون برای Λ است، ۲) ویژگی‌های تعريف‌کننده $\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ و $\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ پس از ارتقا و تحدید برآورده می‌شوند و ۳) ساختارها به انتخاب‌های دلخواه بستگی ندارند.

۱) Λ^{-1} در معادله (۳۵۶) یک وارون خوش‌تعريف برای Λ در معادله (۳۵۵) است:

$$(\Lambda \circ \Lambda^{-1}) = \text{id}_{\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}} \quad \square$$

این ادعا برای هر $v \in TM$ و $\mathcal{K} \in \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ از

$$\begin{aligned} [\Lambda \circ \Lambda^{-1}](\mathcal{K})(v) &= [\Lambda(\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)})](v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{K} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \mathcal{K} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \mathcal{K}(v), \end{aligned} \quad (618)$$

نتیجه می‌شود، که در آن ناوردایی (هموردایی) میدان کرنل در معادله (۳۱۵) اجازه داد تا ترتیب عمل ایزومتری و ارزیابی میدان کرنل را در مرحله ماقبل آخر جابجا کنیم.

۲) $\Lambda^{-1} \circ \Lambda = \text{id}_{\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}}$ یعنی Λ^{-1} یک وارون چپ برای Λ است:

فرض کنید $w \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$ و $\mathcal{Q} \in \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$. توجه داشته باشید که $w = r_{TM} Q_{TM}(w) = w$ زیرا w یک نماینده مدار است. علاوه بر این، از آنجا که $w = \Phi_{r_{TM}}(w)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(w) = \Phi_{r_{TM}}(w)_{*,TM} w$ باشد. نتیجه می‌شود که $\Phi_{r_{TM}}(w) \in \text{Stab}_w$ به طوری که، با محدودیت در معادله (۳۵۴) داریم $\Phi_{r_{TM}}(w)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q}(w) = \mathcal{Q}(w)$. در مجموع، این ادعا را اثبات می‌کند:

$$\begin{aligned} [\Lambda^{-1} \circ \Lambda](\mathcal{Q})(w) &= \Lambda(\mathcal{Q})|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)}(w) \\ &= \Lambda(\mathcal{Q})(w) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(w)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(w) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(w)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q}(w) \\ &= \mathcal{Q}(w). \end{aligned} \quad (619)$$

۳) ویژگی‌های تعريف‌کننده $\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ و $\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ پس از ارتقا و تحدید برآورده می‌شوند:

۴) $\mathcal{Q} \in \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ برای هر $v \in TM$ ، یعنی ارتقای $\Lambda(\mathcal{Q}) = \pi_{TM} \circ \Lambda(\mathcal{Q}) = \pi_{TM}(\mathcal{Q})$ یک M -مورفیسم کلاف است:

برای هر $v \in TM$ و $\mathcal{Q} \in \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ از

$$\begin{aligned} [\pi_{TM} \circ \Lambda](\mathcal{Q})(v) &= \pi_{TM} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v) \pi_{TM} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v) \pi_{TM} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v) r_M \pi_{\mathcal{I}\setminus TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v) r_M Q_M \pi_{TM}(v) \\ &= \pi_{TM}(v), \end{aligned} \quad (620)$$

نتیجه می‌شود، که در آن مرحله آخر از معادله (۳۴۸) استفاده شده است.

۵) $\mathcal{K} \in \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ برای هر $v \in TM$ ، یعنی $\Lambda(\mathcal{K}) = \pi_{TM} \circ \Lambda^{-1}(\mathcal{K}) = \pi_{TM}(\mathcal{K})$ یک M -مورفیسم کلاف است:

این ویژگی بالاصله از ویژگی متناظر \mathcal{K} پس از تحدید به $r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM) \subseteq \pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I}\setminus M))$ نتیجه می‌شود. برای هر $w \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$

$$\begin{aligned} \pi_{TM}[\Lambda^{-1}](\mathcal{K})(w) &= \pi_{TM} \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)}(w) \\ &= \pi_{TM} \mathcal{K}(w) \\ &= \pi_{TM}(w) \end{aligned} \quad (621)$$

محدودیت کامل ناوردایی ایزومتری را برآورده می‌کند: $\Lambda(\mathcal{Q}) \phi_{*,TM}^{-1} = \Lambda(\mathcal{Q}) \quad \forall \phi \in \mathcal{I}$ و $Q_{TM}(\phi_{*,TM}^{-1} v) = Q_{TM}(v)$ فرض کنید. به دلیل ناوردایی نگاشت خارج قسمتی Q_{TM} تحت ایزومتری‌ها، ما را داریم. علاوه بر این توجه داشته باشید که

$$\begin{aligned} & [\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1} \phi \Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1} v)]_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= [\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1} \phi \Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1} v)]_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(\phi_{*,TM}^{-1} v) \\ &= [\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1} \phi]_{*,TM} \phi_{*,TM}^{-1} v \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM}^{-1} v \\ &= r_{TM} Q_{TM}(v) \end{aligned} \quad (622)$$

نتیجه می‌دهد

$$[\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1} \phi \Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1} v)] \in \text{Stab}_{r_{TM} Q_{TM}(v)}, \quad (623)$$

که از طریق محدودیت پایدارساز در معادله (۳۵۴) منجر به

$$[\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1} \phi \Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1} v)]_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) = \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v). \quad (624)$$

می‌شود. با کنار هم گذاشتن این مشاهدات، ادعا اثبات می‌شود:

$$\begin{aligned} \phi_{*,\text{Hom}} \Lambda(\mathcal{Q}) \phi_{*,TM}^{-1}(v) &= \phi_{*,\text{Hom}} \Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1} v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(\phi_{*,TM}^{-1} v) \\ &= \phi_{*,\text{Hom}} \Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1} v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= [\Phi_{r_{TM}}(v) \Phi_{r_{TM}}(v)^{-1}]_{*,\text{Hom}} \phi_{*,\text{Hom}} \Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1} v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} [\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1} \phi \Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1} v)]_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Lambda(\mathcal{Q}) \end{aligned} \quad (625)$$

برآورده می‌کند: $\xi_{*,\text{Hom}} [\Lambda^{-1}(\mathcal{K})](w) = [\Lambda^{-1}(\mathcal{K})](w) \quad \forall w \in r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)$ ، $\xi \in \text{Stab}_w$

این گزاره به راحتی اثبات می‌شود زیرا ویژگی‌های ناوردایی (هموردایی) \mathcal{K} به تحدید آن $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$ منتقل می‌شوند. ما برای $w \in \text{Stab}_w$ و $r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)$ دلخواه به دست می‌آوریم که:

$$\begin{aligned} \xi_{*,\text{Hom}} [\Lambda^{-1}(\mathcal{K})](w) &= \xi_{*,\text{Hom}} \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)}(w) \\ &= \xi_{*,\text{Hom}} \mathcal{K}(w) \\ &= \mathcal{K}(\xi_{*,TM} w) \\ &= \mathcal{K}(w) \\ &= \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)}(w) \\ &= [\Lambda^{-1}(\mathcal{K})](w) \end{aligned} \quad (626)$$

تمام ساختارها و اثبات‌ها مستقل از انتخاب خاص $\Phi_{r_{TM}}$ هستند:
تعريف

$$\Phi_{r_{TM}} : TM \rightarrow \mathcal{I} \quad \text{محدودیت} \quad \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = v \quad (627)$$

از معادله (۳۴۷) تا ضرب راست در هر $\Phi_{r_{TM}}$

$$\xi_{r_{TM}} : TM \rightarrow \mathcal{I} \quad \text{محدودیت} \quad \xi_{r_{TM}}(v) \in \text{Stab}_{r_{TM} Q_{TM}(v)} \quad (628)$$

یکتا است، زیرا بهوضوح برای هر $v \in TM$ $\Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} \xi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = v$ همانطور که در پاورقی ?? استدلال شد، این تمام درجات آزادی را در تعریف ایزومتری‌های بازسازی پوشش می‌دهد. از محدودیت

پایدارساز در معادله (۳۵۴) نتیجه می‌شود که ارتقای Λ نسبت به $\xi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) = \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v)$ است. این نتیجه با اینجا می‌شود:

$$\begin{aligned}\Lambda(\mathcal{Q}) &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \xi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v)\end{aligned}\quad (۶۲۹)$$

به جز تعریف ایزومورفیسم ارتقا، $\Phi_{r_{TM}}$ فقط (در یک زمینه کمی متفاوت) در مرحله ۲ استفاده می‌شود، که در آن ایهام با استدلال‌های مشابه حذف می‌شود.

□ در مجموع، این مراحل اثبات می‌کند که $\Lambda : \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ یک ایزومورفیسم است.

ث. ۲. اثبات قضیه ۱۴.۸ همارزی تبدیلات میدان کرnel هموردا و کانولوشن‌ها روی فضاهای همگن

برای حفظ یک نمای کلی بهتر، ما اثبات را به دو بخش تقسیم می‌کنیم و ادعاهای مطرح شده در گزاره اول و دوم قضیه ۱۴.۸ را به ترتیب اثبات می‌کنیم.

بخش (۱) ساخت، (۲) و (۳) فرض کنید $M \in \mathbb{R}^d$ یک نقطه نماینده دلخواه باشد و بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید $\psi_{GM,r}^{\tilde{A}}$ هر پیمانه ایزومتریک در r باشد. ما قرار می‌دهیم:

$$H := \psi_{GM,r}^{\tilde{A}} \text{Stab}_r(\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}, \quad (۶۳۰)$$

که فقط یک نمایش خاص از Stab_r نسبت به مختصاتی‌سازی انتخاب شده است. از آنجا که نگاشتهای پیمانه ایزومورفیسم هستند، ما یک ایزومورفیسم بین این دو گروه به دست می‌آوریم:

$$\alpha : \text{Stab}_r \rightarrow H, \quad \xi \mapsto \psi_{GM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1} =: h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r) \quad (۶۳۱)$$

از آنجا که $H \leq G$ است و بنابراین $\text{Stab}_r \leq \mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$ قضیه ۳.۸ تضمین می‌کند که $h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)$ عضوی از G است. همچنان که با محاسبه زیر دیده می‌شود، که برای هر $v, w \in \mathbb{R}^d$ برقرار است:

$$\begin{aligned}\langle h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r) \cdot v, h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r) \cdot w \rangle &\stackrel{(۱)}{=} \langle (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}) \cdot v, (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}) \cdot w \rangle \\ &\stackrel{(۲)}{=} \langle \psi_{TM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,TM} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} v, \psi_{TM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,TM} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} w \rangle \\ &\stackrel{(۳)}{=} \eta_r(\xi_{*,TM} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} v, \xi_{*,TM} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} w) \\ &\stackrel{(۴)}{=} \eta_r((\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} v, (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} w) \\ &\stackrel{(۵)}{=} \langle v, w \rangle\end{aligned}\quad (۶۳۲)$$

مرحله (۱) از معادله (۶۳۱) استفاده کرد. در مرحله (۲) ما عبارت $\psi_{TM,r}^{\tilde{A}}$ را از طریق $\psi_{GM,r}^{\tilde{A}}$ یکی گرفتیم، که با جابجایی نمودارهای معادلات (۲۹۹) و (۲۸۵) توجیه می‌شود. از آنجا که ما $\psi_{TM,r}^{\tilde{A}}$ را بدون از دست دادن کلیت، ایزومتریک فرض کردیم، می‌توانیم حاصلضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ را در مرحله (۲) با متريک ريماني η_r يكی بگيریم. مرحله (۳) از اين استفاده می‌کند که $\xi \in \text{Stab}_r \leq \mathcal{I}$ یک ایزومتری است، که بنا به تعریف متريک را حفظ می‌کند؛ به معادله (۲۶۲) مراجعه کنید. در آخر، ما در مرحله (۴) متريک را از طریق پیمانه ایزومتریک به حاصلضرب داخلی روى \mathbb{R}^d پول بک می‌کنیم. برابری عبارت اولیه و نهایی نشان می‌دهد که $h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)$ حاصلضرب داخلی را روی \mathbb{R}^d حفظ می‌کند. این دقیقاً الزاماً است که گروه متعامد را تعریف می‌کند. بنابراین ما داریم که $H \leq O(d)$ و به همراه $G \leq O(d)$ که

$$H \leq G \cap O(d). \quad (۶۳۳)$$

این گزاره اول از بخش (۱) قضیه ۱۴.۸ را اثبات می‌کند. ما به گزاره دوم از بخش (۱)، یعنی ساخت HM و Isom_{HM} می‌پردازیم. با توجه به اینکه Stab_r یک زیرگروه از \mathcal{I} است، ما نگاشت خارج‌قسمتی کانونی

$$q : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/\text{Stab}_r, \quad \phi \mapsto \phi \cdot \text{Stab}_r \quad (۶۳۴)$$

را داریم که اعضای گروه $\phi \in \mathcal{I}$ را به همدسته چپ $\{\phi \xi \mid \xi \in \text{Stab}_r\}$ فرستد. به خوبی شناخته شده است که این نگاشت خارج‌قسمتی، $\mathcal{I}/\text{Stab}_r$ روی فضای پایه Stab_r تبدیل می‌کند، با عمل راست که با ضرب راست

M با اعضای پایدارساز داده می‌شود [۶۰، ۱۳۳]. علاوه بر این، $\mathcal{I}/\text{Stab}_r \rightarrow \mathcal{I}$, $(\phi, \xi) \mapsto \phi \xi$ ایزومورف است. ایزومورفیسم با

$$\beta : \mathcal{I}/\text{Stab}_r \rightarrow M, \quad \phi, \text{Stab}_r \mapsto \phi(r), \quad (635)$$

داده می‌شود، که به وضوح مستقل از انتخاب نماینده همدسته است زیرا نمایندگان مختلف با اعضای گروهی که r را پایدار می‌کنند، متفاوت هستند. توجه داشته باشید که ما می‌توانیم به همان اندازه $q : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/\text{Stab}_r$ را به عنوان یک کلاف اصلی H در نظر بگیریم زیرا تار نوعی فقط تا ایزومورفیسم تعریف شده است.

با این مقدمات، ما H -ساختار HM را به عنوان یک جایگذاری از کلاف اصلی \mathcal{I} در GM (و در نتیجه در FM) تعریف می‌کنیم. ما نگاشت جایگذاری را به صورت

$$\mathcal{E} : \mathcal{I} \rightarrow GM, \quad \phi \mapsto \phi_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r), \quad (636)$$

تعریف می‌کنیم، که دوباره به انتخاب ما از پیمانه بستگی دارد زیرا $(e) = (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}(e) = \sigma^{\tilde{A}}(r)$. می‌توان آن را به عنوان ردیابی یک کپی جایگذاری شده از \mathcal{I} در GM با پوشفووارد کردن چارچوب $\in G_r M$ در نظر گرفت. اینکه این واقعاً یک جایگذاری معتبر را می‌دهد، تضمین شده است زیرا عمل ایزومتری‌ها روی کلاف چارچوب بدون نقطه ثابت است. جایگذاری \mathcal{E} یک نگاشت کلاف روی β است، یعنی $\beta \circ q = \pi_{GM} \circ \mathcal{E}$. برای نشان دادن این، کافی است هر دو طرف را بر روی یک عضو دلخواه $\phi \in \mathcal{I}$ اعمال کنیم، که نتیجه یکسانی می‌دهد: علاوه بر این هموردای-راست است: برای هر $\xi \in \text{Stab}_r$ و هر $\phi \in \mathcal{I}$ $\mathcal{E}(\phi \xi) = \mathcal{E}(\phi) \xi_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) = \phi \pi_{GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) = \phi(r) \beta \circ q(\phi) = \beta(\phi, \text{Stab}_r) = \phi(r)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\phi \xi) &= \phi_{*,GM} \xi_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) \\ &= \phi_{*,GM} \xi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}(e) \\ &= \phi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \psi_{GM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}(e) \\ &= \phi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1} (h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)) \\ &= \phi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}(e) \triangleleft h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r) \\ &= \mathcal{E}(\phi) \triangleleft h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r), \end{aligned} \quad (637)$$

که در آن ما از هموردای-راست G (و در نتیجه H) از $(\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}$ (و در نتیجه H) یک نگاشت کلاف اصلی است که نمودار زیر را جابجایی می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} \times \text{Stab}_r & \xrightarrow{\mathcal{E} \times \alpha} & GM \times H \\ \blacktriangleleft \downarrow & & \downarrow \triangleleft \\ \mathcal{I} & \xrightarrow{\mathcal{E}} & GM \\ q \downarrow & & \downarrow \pi_{GM} \\ \mathcal{I}/\text{Stab}_r & \xrightarrow{\beta} & M \end{array} \quad (638)$$

H -ساختار ادعا شده سپس به عنوان تصویر

$$HM := \mathcal{E}(\mathcal{I}) = \{\phi_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) \mid \phi \in \mathcal{I}\} \quad (639)$$

از \mathcal{E} به همراه عمل راست و نگاشت تصویر محدود شده از GM تعریف می‌شود. از آنجا که جایگذاری‌ها لزوماً یک‌به‌یک هستند، ما به طور خاص داریم که \mathcal{I} و HM به عنوان کلاف‌های اصلی ایزومورف هستند.

به عنوان نکته آخر، ما استدلال می‌کنیم که \mathcal{I} و HM منطبق هستند. برابری $\text{Isom}_{HM} = \{\theta \in \text{Isom}(M) \mid \theta_{*,GM} HM = HM\}$ داده شده برقرار است اگر $\theta \in \text{Isom}(M)$ و $\theta_{*,GM} HM = HM$ باشد. مورد اول، $\theta_{*,GM} HM \subseteq HM$ نیازمند این است که برای هر عضو $\theta'_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) \in HM$ یک $\theta_{*,GM} \phi_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) \in \theta_{*,GM} HM$ باشد. مورد دوم، $\theta_{*,GM} \phi_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) = \theta'_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r)$ از آنجا که عمل ایزومتری‌ها روی کلاف چارچوب بدون نقطه ثابت است، وجود داشته باشد به طوری که $\theta_{*,GM} \phi_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) = \theta'_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r)$. این نیازمند $\theta'_{*,GM} = \phi'_{*,GM} \phi_{*,GM}^{-1}$ است، که به نوبه خود $\theta = \phi' \phi^{-1}$ را نتیجه می‌دهد. همانطور که به راحتی می‌توان بررسی کرد، مورد دوم منجر به همان الزام می‌شود. هم ϕ' و هم ϕ اعضای \mathcal{I} هستند به طوری که θ باید عضوی از \mathcal{I} باشد. این ادعای

$$\text{Isom}_{HM} = \mathcal{I}. \quad (640)$$

را اثبات می‌کند.

بخش ۲ همارزی تبدیلات میدان کرنل \mathcal{I} -هموردا و کانولوشن‌های \mathbb{M} : برای اثبات گزاره دوم قضیه، ما یک تبدیل میدان کرنل \mathcal{I} -هموردا را روی M می‌سازیم و نشان می‌دهیم که با یک کانولوشن $H\bar{M}$ معادل است. قضیه ۸.۸ می‌تواند به طور معادل بر حسب یک میدان از کرنل‌های نماینده $\hat{\mathcal{Q}} : \pi_{TM}^{-1}(\mathcal{I}\setminus M) \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}(r_M(\mathcal{I}\setminus M))$ که طبق قضیه ۱۳.۸ می‌توانند به شرط $\hat{\mathcal{Q}}|_r = \hat{\mathcal{Q}}$ باشند. برای مورد یک فضای همگن M فضای خارج‌قسمتی $\mathcal{I}\setminus M$ از یک عضو منفرد تشکیل شده است، که ما آن را با $r = r_M(\mathcal{I}\setminus M) \in M$ نمایش می‌دهیم. بنابراین کل میدان کرنل ناوردا با یک کرنل منفرد $T_r M \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}$ در $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\mathbb{M},r}, \mathcal{A}_{\mathbb{M},r})$ توصیف می‌شود. این کرنل باید محدودیت پایدارساز $\hat{\mathcal{Q}} \xi_{*,TM}^{-1} = \hat{\mathcal{Q}}$ را برآورده کند و از طریق ایزومورفیسم ارتقا $(v) = \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \hat{\mathcal{Q}} r_{TM} Q_{TM}(v) = \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \hat{\mathcal{Q}} \Phi_{r_{TM}}(v)$ به اشتراک گذاشته می‌شود. همانطور که در ادامه نشان داده می‌شود، کرنل نماینده منفرد با محدودیت Stab_r دقیقاً متناظر با یک کرنل الگوی H -راهبری‌پذیر است، در حالی که اشتراک وزن از طریق ایزومورفیسم ارتقای $\hat{\Lambda}$ از قضیه ۱۳.۸ دقیقاً متناظر با اشتراک وزن کانولوشنی در تعریف ۴.۷ است.

برای صریح کردن همارزی محدودیت‌های کرنل، ما کرنل $\hat{\mathcal{Q}}$ را از طریق معادله (۲۴۵) نسبت به همان پیمانه \tilde{A} که قبلاً در نظر گرفته شد، به صورت $\psi_{\mathbb{M},r}^{\tilde{A}} \hat{\mathcal{Q}} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} := K$ بیان می‌کنیم. ضریب حجم چارچوب $|\eta_r^{\tilde{A}}|$ در اینجا حذف می‌شود زیرا ما پیمانه را بدون از دست دادن کلیت، ایزومتریک فرض کردیم. سپس محدودیت پایدارساز نسبت به این پیمانه منجر به

$$\begin{aligned} K &= \psi_{\mathbb{M},r}^{\tilde{A}} \hat{\mathcal{Q}} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \\ &= \psi_{\mathbb{M},r}^{\tilde{A}} \xi_{*,TM} \hat{\mathcal{Q}} \xi_{*,TM}^{-1} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \\ &= \psi_{\mathbb{M},r}^{\tilde{A}} \xi_{*,TM} (\psi_{\mathbb{M},r}^{\tilde{A}})^{-1} K \psi_{TM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,TM}^{-1} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \\ &= \rho_{\text{Hom}}(h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)) K (h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r))^{-1} \\ &= \frac{1}{|\det h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)|} \rho_{\text{Hom}}(h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)) K (h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r))^{-1} \end{aligned} \quad (۶۴۱)$$

برای هر ξ در Stab_r می‌شود. توجه داشته باشید که می‌توانیم ضریب دترمینان را در مرحله آخر اضافه کنیم زیرا $h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r) \in O(d)$ همانطور که در بالا نشان داده شد. بنابراین ایزومورفیسم بین \mathcal{I} و H در معادله (۶۴۱) به ما اجازه می‌دهد تا محدودیت پایدارساز را به عنوان محدودیت H -راهبری‌پذیری

$$K = \frac{1}{|\det h|} \rho_{\text{Hom}}(h) \circ K \circ h^{-1} \quad \forall h \in H. \quad (۶۴۲)$$

روی کرنل‌های الگوی یک کانولوشن $H\bar{M}$ بازنویسی کنیم.^{۱۵۸}

آنچه باقی می‌ماند نشان دادن همارزی دو روش اشتراک وزن از طریق $\hat{\Lambda}$ که از طریق پیمانه \tilde{A} بر حسب K بیان می‌شود، به صورت

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}(\hat{\mathcal{Q}})(v) &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \hat{\mathcal{Q}} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \hat{\mathcal{Q}} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM}^{-1}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} (\psi_{\mathbb{M},r}^{\tilde{A}})^{-1} \psi_{\mathbb{M},r}^{\tilde{A}} \hat{\mathcal{Q}} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \psi_{TM,r}^{\tilde{A}} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM}^{-1}(v) \\ &= \left(\psi_{\mathbb{M},r}^{\tilde{A}} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}}^{-1} \right)^{-1} K \left(\psi_{TM,r}^{\tilde{A}} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM}^{-1} \right)(v). \end{aligned} \quad (۶۴۳)$$

خوانده می‌شود. خط آخر در حال حاضر بسیار شبیه به تعریف میدان‌های کرنل کانولوشنی $H\bar{M}$ در تعریف ۴.۷ است. برای اثبات همارزی آنها، باید نشان دهیم (۱) که پیمانه‌های القا شده توسط ایزومتری $\psi_{TM,r}^{\tilde{A}} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM}^{-1}(v)$ با پیمانه‌های اصلی $\psi_{TM,r}^{\tilde{A}}$ و H -سازگار هستند و (۲) که پیمانه‌های القا شده متناظر با چارچوب‌های مرجع با حجم واحد هستند (برای توضیح ضریب حجم چارچوب گمینده در معادله (۶۴۳)). برای نکته اول، توجه داشته باشید که همان‌دسته ایزومتری بازسازی $\Phi_{r_{TM}} : TM \rightarrow \mathcal{I}$ با معادله (۶۴۰) با $\text{Isom}_{H\bar{M}}$ منطبق است. بنابراین قضیه ۳.۸ تأیید می‌کند که این پیمانه‌های القا شده با هر H سازگار هستند. نکته دوم بلافاصله نتیجه می‌شود زیرا $O(d)$ (یا زیرا $H \leq O(d)$) یک ایزومتری است و \tilde{A} ایزومتریک است. بنابراین دیده می‌شود که اشتراک وزن $\hat{\mathcal{Q}}$ از طریق ایزومورفیسم ارتقای معادله (۶۴۳) با اشتراک وزن کانولوشنی $H\bar{M}$ از کرنل H -راهبری‌پذیری می‌شود، دلالت بر این دارد که میدان کرنل ارتقا یافته معادل یک میدان کرنل کانولوشنی $H\bar{M}$ است، که بخش ۲ قضیه را اثبات می‌کند.

از آنجا که (۶۴۲) ضریب دترمینان همیشه حذف می‌شود و بنابراین می‌توان آن را نادیده گرفت.^{۱۵۸}

یک انتخاب متفاوت از پیمانه \tilde{A} ممکن است برای $G < O(d)$ منجر به یک زیرگروه مزدوج \overline{H} به H و یک جایگذاری \overline{HM} از \overline{H} شود که با HM متفاوت است. همانطور که به راحتی می‌توان بررسی کرد، محدودیت \overline{H} -راهبری‌پذیری اجازه می‌دهد تا همان کرنل را نسبت به HM مانند محدودیت H -راهبری‌پذیری در رابطه با HM توصیف کنیم، زیرا تبدیل حذف می‌شود.

ج) کانولوشن‌های راهبری‌پذیر کروی به عنوان کانولوشن‌های \mathbb{M} اثبات‌ها

این بخش اثبات‌های قضایای ۱.۱۱ و ۲.۱۱ را از بخش ۲.۱۱ در دو زیربخش زیر ارائه می‌دهد. در مجموع، این قضایا تأیید می‌کنند که کرنل‌های کانولوشن کروی Stab_n -راهبری‌پذیر توسط \mathbb{M} معادل با کرنل‌های خاص $G \cong \text{Stab}_n$ -راهبری‌پذیر هستند، و کانولوشن‌های کروی \mathcal{I} -هموردا با این کرنل‌ها معادل با کانولوشن‌های GM متناظر ماستند.

ج.۱ اثبات قضیه ۱.۱۱ ایزومورفیسم فضای کرنل

قضیه ۱.۱۱ یک ایزومورفیسم

$$\Omega : \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{G, B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{\text{Stab}_n} \quad (444)$$

بین فضای $\mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{G, B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)}$ از کرنل‌های G -راهبری‌پذیر روی باز \mathbb{R}^r و فضای $B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi) \subset \mathbb{R}^r$ از کرنل‌های Stab_n برقرار می‌کند، که در معادلات (۴۴۹) و (۴۴۸) تعریف شده‌اند. با توجه به پیمانه‌های دلخواه N در قطب شمال n کرنل حول آن مرکز است، و پیمانه‌های P در هر نقطه دیگر p این ایزومورفیسم با

$$\Omega(K) : S^r \setminus n \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}, \quad p \mapsto [\Omega(K)](p) := K(\psi_{TM,n}^N \log_n p) \rho_{\text{in}}(g_{n \leftarrow p}^{NP}) \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}^{-1}. \quad (445)$$

با مخفف‌نویسی $v := \exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1}$ وارون آن با

$$\Omega^{-1}(\kappa) : B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}, \quad v \mapsto [\Omega^{-1}(\kappa)](v) := \kappa(\exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1} v) \rho_{\text{in}}(g_{n \leftarrow p}^{NP})^{-1} \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}, \quad (446)$$

داده می‌شود.

اثبات: اینکه Ω^{-1} یک وارون خوش‌تعريف برای Ω است، به راحتی با جایگذاری عبارات آنها و تأیید اینکه

$$\Omega \circ \Omega^{-1} = \text{id}_{\mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{\text{Stab}_n}} \quad \text{و} \quad \Omega^{-1} \circ \Omega = \text{id}_{\mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{G, B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)}} \quad (447)$$

برقرار هستند، نشان داده می‌شود. برای دیدن این، توجه داشته باشید که پیمانه‌های $\psi_{TM,n}^N$ انتقال‌دهنده‌های $(g_{n \leftarrow p}^{NP})$ و ضریب حجم (غیرصفر) $\sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}$ همیشه وارون‌پذیر هستند و دو مورد اخیر زیرا ضریب مقیاس‌بندی حجم، یک اسکالر است. نگاشت $\exp_n : B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi) \rightarrow S^r \setminus n$ با $\log_n : S^r \setminus n \rightarrow B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)$ روی $\psi_{TM,n}^N$ وارون می‌شود.

محدودیت‌های کرنل دو فضای کرنل علاوه بر این یکدیگر را نتیجه می‌دهند. با توجه به هر کرنل G -راهبری‌پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{G, B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)}$ محدودیت $\Omega(K) \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{\text{Stab}_n}$ -راهبری‌پذیری را از معادله (۴۴۸) برآورده می‌کند. این برای هر $p \in S^r \setminus n$ و هر پیمانه $X \in \text{Stab}_n$ به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\begin{aligned} [\Omega(K)](\xi(p)) &\stackrel{(1)}{=} K(\psi_{TM,n}^N \log_n \xi(p)) \cdot \rho_{\text{in}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(2)}{=} K(\psi_{TM,n}^N \xi_{*,TM} \log_n p) \cdot \rho_{\text{in}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(3)}{=} K(g_{\xi}^{NN}(n) \psi_{TM,n}^N \log_n p) \cdot \rho_{\text{in}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(4)}{=} \rho_{\text{out}}(g_{\xi}^{NN}(n)) \cdot K(\psi_{TM,n}^N \log_n p) \cdot \rho_{\text{in}}(g_{\xi}^{NN}(n))^{-1} \rho_{\text{in}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(5)}{=} \rho_{\text{out}}(g_{\xi}^{NN}(n)) \cdot K(\psi_{TM,n}^N \log_n p) \cdot \rho_{\text{in}}(g_{\xi}^{NN}(n))^{-1} \rho_{\text{in}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(6)}{=} \rho_{\text{out}}(g_{\xi}^{NN}(n)) \cdot K(\psi_{TM,n}^N \log_n p) \cdot \rho_{\text{in}}(g_{n \leftarrow p}^{NP}) \rho_{\text{in}}(g_{\xi}^{XP}(p))^{-1} \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(7)}{=} \rho_{\text{out}}(g_{\xi}^{NN}(n)) \cdot [\Omega(K)](p) \cdot \rho_{\text{in}}(g_{\xi}^{XP}(p))^{-1} \end{aligned} \quad (448)$$

مرحله اول فقط $\Omega(K)$ را بسط داد، در حالی که مرحله دوم از p نتیجه می‌شود، به همراه $n = \xi^{-1}(n) \in \text{Stab}_n$ استفاده کرد زیرا در مرحله سوم، ما از تعریف تبدیلات پیمانه القا شده توسط ایزومتری در معادله (۲۸۴) استفاده کردیم. مرحله چهارم از محدودیت G -راهبری‌پذیری از معادله (۴۴۹) استفاده کرد. مرحله پنجم عنصر حجم نمایی و بنابراین ضرایب حجم مختصات نرمال ژئوپزیک، تحت عمل Stab_n ناوردا است. قبل از شناسایی $\Omega(K)$ در مرحله آخر، مرحله ششم از همانی

$$\begin{aligned} \rho_{\text{in}}(g_\xi^{NN}(n))^{-1} \rho_{\text{in}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) &= [\psi_{A_{\text{in}}, n}^N \xi_{*, A_{\text{in}}}^{-1} (\psi_{A_{\text{in}}, n}^N)^{-1}] [\psi_{A_{\text{in}}, n}^N \mathcal{P}_{A_{\text{in}}, n \leftarrow \xi(p)} (\psi_{A_{\text{in}}, \xi(p)}^X)^{-1}] \\ &= \psi_{A_{\text{in}}, n}^N \xi_{*, A_{\text{in}}}^{-1} \mathcal{P}_{A_{\text{in}}, n \leftarrow \xi(p)} (\psi_{A_{\text{in}}, \xi(p)}^X)^{-1} \\ &= \psi_{A_{\text{in}}, n}^N \mathcal{P}_{A_{\text{in}}, n \leftarrow p} \xi_{*, A_{\text{in}}}^{-1} (\psi_{A_{\text{in}}, \xi(p)}^X)^{-1} \\ &= [\psi_{A_{\text{in}}, n}^N \mathcal{P}_{A_{\text{in}}, n \leftarrow p} (\psi_{A_{\text{in}}, p}^P)^{-1}] [\psi_{A_{\text{in}}, p}^P \xi_{*, A_{\text{in}}}^{-1} (\psi_{A_{\text{in}}, \xi(p)}^X)^{-1}] \\ &= \rho_{\text{in}}(g_{n \leftarrow p}^{NP}) \rho_{\text{in}}(g_\xi^{XP}(p))^{-1}, \end{aligned} \quad (۶۴۹)$$

استفاده کرد، که به طور حیاتی بر جابجایی انتقال‌دهندها و پوش‌فروارددهای ایزومتری از معادله (۳۰۵) متکی است.

برای جهت مخالف، فرض کنید یک کرنل $\kappa \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}^N \rho_{\text{out}}^N}^{\text{Stab}_n}$ -راهبری‌پذیر $\Omega^{-1}(\kappa)$ محدودیت G -راهبری‌پذیری را از معادله (۴۴۹) برآورده می‌کند. برای نشان دادن این، فرض کنید $\pi(\cdot, \cdot) \in B_{\mathbb{R}^n}$ عضو $\xi \in \text{Stab}_n$ و $g \in G$. $\vartheta \in \mathcal{P}_{A_{\text{in}}}$ و $p := \exp_n(\psi_{TM, n}^N)^{-1} g \cdot \psi_{TM, n}^N(n) = \psi_{TM, n}^N \xi_{*, TM} (\psi_{TM, n}^N)^{-1} = g$. برای اختصار، ما نتیجه $\Omega^{-1}(\kappa)(p) = \exp_n(\psi_{TM, n}^N)^{-1} g \vartheta$ را مخفف می‌کنیم، که با مراحل ۱-۳ در ادامه توجیه می‌شود. سپس می‌یابیم:

$$\begin{aligned} [\Omega^{-1}(\kappa)](g \vartheta) &\stackrel{(1)}{=} \kappa(\exp_n(\psi_{TM, n}^N)^{-1}(g \vartheta)) \cdot \rho_{\text{in}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial \vartheta}|} \\ &\stackrel{(2)}{=} \kappa(\exp_n \xi_{*, TM} (\psi_{TM, n}^N)^{-1} \vartheta) \cdot \rho_{\text{in}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial \vartheta}|} \\ &\stackrel{(3)}{=} \kappa(\xi \exp_n(\psi_{TM, n}^N)^{-1} \vartheta) \cdot \rho_{\text{in}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial \vartheta}|} \\ &\stackrel{(4)}{=} \rho_{\text{out}}(g_\xi^{NN}(n)) \cdot \kappa(\exp_n(\psi_{TM, n}^N)^{-1} \vartheta) \cdot \rho_{\text{in}}(g_\xi^{XP}(p))^{-1} \rho_{\text{in}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial \vartheta}|} \\ &\stackrel{(5)}{=} \rho_{\text{out}}(g_\xi^{NN}(n)) \cdot \kappa(\exp_n(\psi_{TM, n}^N)^{-1} \vartheta) \cdot \rho_{\text{in}}(g_\xi^{XP}(p))^{-1} \rho_{\text{in}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial \vartheta}|} \\ &\stackrel{(6)}{=} \rho_{\text{out}}(g_\xi^{NN}(n)) \cdot \kappa(\exp_n(\psi_{TM, n}^N)^{-1} \vartheta) \cdot \rho_{\text{in}}(g_{n \leftarrow p}^{NP})^{-1} \rho_{\text{in}}(g_\xi^{NN}(n))^{-1} \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial \vartheta}|} \\ &\stackrel{(7)}{=} \rho_{\text{out}}(g_\xi^{NN}(n)) \cdot [\Omega^{-1}(\kappa)](\vartheta) \cdot \rho_{\text{in}}(g_\xi^{NN}(n))^{-1} \\ &\stackrel{(8)}{=} \rho_{\text{out}}(g) \cdot [\Omega^{-1}(\kappa)](\vartheta) \cdot \rho_{\text{in}}(g)^{-1} \end{aligned} \quad (۶۵۰)$$

مراحل اول تا سوم (κ) را بسط دادند، از تعریف ξ بر حسب g و جابجایی نگاشتهای نمایی با پوش‌فروارددهای ایزومتری، معادله (۳۰۳)، استفاده کردند. در مرحله چهارم، از محدودیت G -راهبری‌پذیری κ از معادله (۴۴۸) استفاده شده است. مرحله پنجم دوباره عنصر حجم ریمانی را در (p) با عنصر حجم در p جایگزین کرد زیرا آنها برابر هستند. مرحله ششم از رابطه

$$\begin{aligned} \rho_{\text{in}}(g_\xi^{XP}(p))^{-1} \rho_{\text{in}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} &= \rho_{\text{in}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX} g_\xi^{XP}(p))^{-1} \\ &= \left([\psi_{A_{\text{in}}, n}^N \mathcal{P}_{A_{\text{in}}, n \leftarrow \xi(p)} (\psi_{A_{\text{in}}, \xi(p)}^X)^{-1}] [\psi_{A_{\text{in}}, \xi(p)}^X \xi_{*, A_{\text{in}}}^{-1} (\psi_{A_{\text{in}}, p}^P)^{-1}] \right)^{-1} \\ &= \left(\psi_{A_{\text{in}}, n}^N \mathcal{P}_{A_{\text{in}}, n \leftarrow \xi(p)} \xi_{*, A_{\text{in}}}^{-1} (\psi_{A_{\text{in}}, p}^P)^{-1} \right)^{-1} \\ &= \left(\psi_{A_{\text{in}}, n}^N \xi_{*, A_{\text{in}}} \mathcal{P}_{A_{\text{in}}, n \leftarrow p} (\psi_{A_{\text{in}}, p}^P)^{-1} \right)^{-1} \\ &= \left(\psi_{A_{\text{in}}, n}^N \xi_{*, A_{\text{in}}} (\psi_{TM, n}^N)^{-1} \psi_{TM, n}^N \mathcal{P}_{A_{\text{in}}, n \leftarrow p} (\psi_{A_{\text{in}}, p}^P)^{-1} \right)^{-1} \\ &= \rho_{\text{in}}(g_{n \leftarrow p}^{NP})^{-1} \rho_{\text{in}}(g_\xi^{NN}(n))^{-1}, \end{aligned} \quad (۶۵۱)$$

استفاده کرد، که دوباره بر جایگایی انتقال دهنده‌ها و پوشش‌واردهای ایزومتری از معادله (۳۰۵) ممکن است. دو مرحله آخر ($\kappa^{-1}\Omega^{-1}$) را شناسایی می‌کنند و با به تعریف ξ داریم که $g_{\xi}^{NN}(n) = g$

در مجموع، این استدلال‌ها نشان می‌دهند که Ω واقعاً یک ایزومورفیسم بین فضاهای کرنل است.

ج ۲.۱۱ همارزی کانولوشن‌های راهبری‌پذیر کروی و \square

قضیه ۲.۱۱ ادعا می‌کند که کانولوشن‌های GM با یک کرنل G -راهبری‌پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{G, B_{\mathbb{R}^Y}(\cdot, \pi)}$ معادل کانولوشن کروی با کرنل $\Omega(K) \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}}^{\text{Stab}_n}$ راهبری‌پذیر هستند. کانولوشن کروی با یک کرنل $\Omega(K)$ از $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ در اینجا در معادله (۴۵۴) به صورت نقطه‌ای به شکل

$$[\kappa *_{S^r} f]^P(p) = \int_{S^r \setminus p} \kappa(\phi_p^{-1}q) \rho_{\text{in}}(g_{\phi_p^{-1}}^{XQ}(q)) f^Q(q) dq, \quad (652)$$

تعریف شده بود، که در آن P و X به ترتیب پیمانه‌های دلخواه در p و q را نشان می‌دهند. ایزومتری $\phi_p \in \mathcal{I}$ به طور یکتا با الزام $(\phi_p)_* \sigma^N(n) = \sigma^P(p)$ مشخص می‌شود. توجه داشته باشید که این به طور خاص دلالت بر

$$\phi_p(n) = p \quad (653)$$

و با استفاده از تعریف مقاطع GM (میدان‌های چارچوب) بر حسب پیمانه‌های وارون از معادله (۱۸۹) بر

$$\psi_{TM,n}^N \circ (\phi_p)^{-1}_{*,GM} = \psi_{TM,p}^P, \quad (654)$$

دارد، که هر دو را در ادامه استفاده خواهیم کرد. با این مقدمات، به اثبات قضیه ۲.۱۱ یعنی همارزی

$$\Omega(K) *_{S^r} f = K *_{GM} f \quad (655)$$

کانولوشن‌ها می‌پردازیم.

اثبات: از آنجا که $\Omega(\kappa)$ روی $S^r \setminus -n$ تعریف شده است، کرنل تبدیل شده $\Omega(\kappa) \circ \phi_p^{-1}$ روی $S^r \setminus -p$ تعریف شده است. بنابراین، با جایگذاری $\Omega(\kappa)$ در تعریف نقطه‌ای کانولوشن کروی در معادله (۴۵۴) به

$$\begin{aligned} [\Omega(K) *_{S^r} f]^P(p) &= \int_{S^r \setminus p} [\Omega(\kappa)](\phi_p^{-1}q) \rho_{\text{in}}(g_{\phi_p^{-1}}^{XQ}(q)) f^Q(q) dq \\ &= \int_{S^r \setminus p} K(\psi_{TM,n}^N \log_n \phi_p^{-1}q) \rho_{\text{in}}(g_{n \leftarrow \phi_p^{-1}(q)}^{NX}) \rho_{\text{in}}(g_{\phi_p^{-1}}^{XQ}(q)) f^Q(q) \sqrt{|\eta_{\phi_p^{-1}(q)}^{\partial/\partial \vartheta}|}^{-1} dq, \end{aligned} \quad (656)$$

می‌رسیم، که در آن مرحله دوم با بسط دادن $\Omega(K)$ همانطور که در معادله (۴۵۲) تعریف شده است، به دست می‌آید. برای ساده‌سازی این عبارت، توجه داشته باشید که

$$\psi_{TM,n}^N \log_n \phi_p^{-1}(q) = \psi_{TM,n}^N (\phi_p)^{-1}_{*,TM} \log_{\phi_p(n)}(q) = \psi_{TM,p}^P \log_p(q), \quad (657)$$

که از معادله (۳۰۳) در مرحله اول و معادلات (۶۵۳) و (۶۵۴) در مرحله دوم نتیجه می‌شود. علاوه بر این توجه داشته باشید که،

$$\begin{aligned} &\rho(g_{n \leftarrow \phi_p^{-1}(q)}^{NX}) \rho(g_{\phi_p^{-1}}^{XQ}(q)) \\ &= [\psi_{A,n}^N \mathcal{P}_{A,n \leftarrow \phi_p^{-1}(q)} (\psi_{A,\phi_p^{-1}(q)}^X)^{-1}] [\psi_{A,\phi_p^{-1}(q)}^X (\phi_p)^{-1}_{*,A} (\psi_{A,q}^Q)^{-1}] \quad (\text{معادلات (۳۱۳) و (۳۰۲)}) \\ &= \psi_{A,n}^N \mathcal{P}_{A,n \leftarrow \phi_p^{-1}(q)} (\phi_p)^{-1}_{*,A} (\psi_{A,q}^Q)^{-1} \quad (\text{پیمانه‌های وارون حذف شده}) \\ &= \psi_{A,n}^N (\phi_p)^{-1}_{*,A} \mathcal{P}_{A,\phi_p(n) \leftarrow q} (\psi_{A,q}^Q)^{-1} \quad (\text{معادله (۳۰۵)}) \\ &= \psi_{A,p}^P \mathcal{P}_{A,p \leftarrow q} (\psi_{A,q}^Q)^{-1} \quad (\text{معادله (۶۵۴)}) \\ &= \rho(g_{p \leftarrow q}^{PQ}). \quad (\text{معادله (۳۱۳)}) \end{aligned}$$

با جایگذاری این دو همانی، به دست می‌آوریم

$$[\Omega(K) \star_{S^r} f]^P(p) = \int_{S^r \setminus -p} K(\psi_{TM,p}^P \log_p q) \rho_{\text{in}}(g_{p \leftarrow q}^{PQ}) f^Q(q) \sqrt{|\eta_{\phi_p^{-1}(q)}^{\partial/\partial v}|}^{-1} dq,$$

برای ادامه، انتگرال را در مختصات نرمال ژئودزیک $S^r \setminus -p \rightarrow B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)$ ، $q \mapsto v(q) := \psi_{TM,p}^P \log_p q$ از \mathfrak{o} از $S^r \setminus -p$ در نقطه p مرکز است، بیان می‌کنیم. این کار ضریب حجم ریمانی $\sqrt{|\eta_{\phi_p^{-1}(q)}^{\partial/\partial v}|}$ را حذف می‌کند (و در نتیجه ظاهر آن را در تعریف Ω توجیه می‌کند)، به طوری که کانولوشن کروی به

$$\begin{aligned} [\Omega(K) \star_{S^r} f]^P(p) &= \int_{B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)} K(v) \rho_{\text{in}}(g_{p \leftarrow \exp_p(\psi_{TM,p}^P)^{-1}v}^{PQ}) f^Q(\exp_p(\psi_{TM,p}^P)^{-1}v) dv, \\ &= \int_{B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)} K(v) [\text{Exp}_p^* f]^P(v) dv, \\ &= [K \star_{GM} f]^P(p). \end{aligned} \quad (658)$$

می‌شود. از آنجا که تمام آرگومان‌ها مستقل از نقطه انتخاب شده p و پیمانه‌های انتخاب شده هستند، این دلالت بر

$$\Omega(K) \star_{S^r} f = K \star_{GM} f, \quad (659)$$

در یک چارچوب مستقل از مختصات دارد، که قضیه را اثبات می‌کند.

□

چ ۷ وجود و همواری تبدیلات میدان کرنل

در تعریف ۶.۷، ما تبدیلات میدان کرنل \mathcal{T}_K را به عنوان تبدیلات انتگرالی هموار

$$\mathcal{T}_K : \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square\square}) \quad (660)$$

پیشنهاد کردیم که توسط یک میدان کرنل K (تعریف ۲.۷) پارامتری شده و به صورت نقطه‌ای با

$$[\mathcal{T}_K(f)](p) := \int_{T_p M} K(v) \text{Exp}_p^* f(v) dv = \int_{T_p M} K(v) \mathcal{P}_{A_{\square\square}, p \leftarrow \exp_p v} f(\exp_p v) dv. \quad (661)$$

داده می‌شوند. تبدیلات میدان کرنل شامل کانولوشن‌های GM از تعریف ۸.۷ به عنوان موارد خاص برای میدان‌های کرنل کانولوشنی GM هستند. در اینجا ما به طور خلاصه خوش‌معرفی بودن تبدیلات میدان کرنل را مورد بحث قرار می‌دهیم. روشن است که انتگرال‌دهنده معادله (۶۶۱) برای $v \in T_p M$ و $p \in M$ قرار دارد. آچه باقی می‌ماند نشان دادن وجود انتگرال و همواری میدان ویژگی حاصل است. در ادامه ابتدا چند ملاحظه کلی در مورد چگونگی پرداختن به این پرسش‌ها ارائه می‌دهیم. سپس قضیه ۷.۷ را اثبات خواهیم کرد، یعنی خوش‌معرفی بودن تبدیلات میدان کرنل برای مورد خاص میدان‌هایی از کرنل‌ها که دارای تکیه‌گاه فشرده روی یک گوی با شاعع ثابت حول مبدأ هستند.

وجود: وجود و همواری تبدیلات میدان کرنل نیازمند یک انتخاب مناسب از میدان کرنل K است. مشابه مورد کانولوشن‌های متعارف روی $M = \mathbb{R}^d$ ، الزامات بر روی K برای اینکه تبدیل میدان کرنل وجود داشته باشد، به ویژگی‌های خاص میدان ویژگی ورودی $f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square})$ دارد.^{۱۵۹} به طور کلی، K باید به اندازه کافی سریع افت کند تا انتگرال‌دهنده در معادله (۶۶۱) انتگرال‌پذیر شود.

یک مورد خاص با اهمیت عملی بالا، کرنل‌های $K_p : T_p M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square, p}, \mathcal{A}_{\square\square\square, p})$ هستند که در هر $p \in M$ دارای تکیه‌گاه فشرده هستند. در این حالت، وجود انتگرال همیشه تضمین شده است. برای دیدن این، توجه داشته باشید که میدان‌های (ورودی) و میدان‌های کرنل به عنوان هموار تعریف شده‌اند. همواری متريک علاوه بر این دلالت بر این دارد که چگالی حجم ریمانی، تراکنش نمایی و انتقال موازی هموار هستند [۵۹]. در ترکیب، کل انتگرال‌دهنده در معادله (۶۶۱) به عنوان یکتابع هموار و در نتیجه پیوسته از $T M$ به $\mathcal{A}_{\square\square\square, p}$ دیده می‌شود. اگر K_p علاوه بر این دارای تکیه‌گاه فشرده باشد، انتگرال‌دهنده پیوسته و دارای تکیه‌گاه فشرده روی $T_p M$ می‌شود، که با تعیینی از قضیه مقدار اکسترمم، دلالت بر این دارد که تصویر آن فشرده است (و در یک تربیویالجیاسیون محلی \mathbb{R}^c از $\mathcal{A}_{\square\square\square, p}$ کران دار است) [۱۵۱]. این وجود انتگرال را تضمین می‌کند [۱۷۰، ۵۶].

بسته به کاربرد، الزام بر روی تکیه‌گاه K ممکن است تسهیل شود. به عنوان مثال، تصاویر روی $M = \mathbb{R}^d$ معمولاً خود دارای تکیه‌گاه فشرده هستند، به طوری که هیچ ویژگی اضافی از K به جز همواری آن لازم نیست.

^{۱۵۹} به بحث در https://en.wikipedia.org/wiki/Convolution#Domain_of_definition مراجعه کنید.

همواری: ما به بحث در مورد همواری تبدیلات میدان کرنل می‌پردازیم، یعنی ویژگی آنها برای نگاشت میدان‌های ورودی هموار ($f_{\text{in}} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{out}})$) به میدان‌های خروجی هموار ($\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f_{\text{in}}) \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{out}})$). بنا به تعریف، یک نگاشت $M \rightarrow \mathcal{A}_{\text{out}}$ با $f_{\text{out}} : M \rightarrow \mathcal{A}_{\text{out}}$ هموار نامیده می‌شود اگر نمایش‌های مختصاتی آن هموار باشند. در معادلات، f_{out} هموار است اگر برای هر $p \in M$ چارت‌های هموار ((U, ϕ)) حول p در M و $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ حول $f_{\text{out}}(p)$ در \mathcal{A}_{out} با $\tilde{\phi} \circ f_{\text{out}} \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \tilde{\phi}(\tilde{U})$ برابر باشد. با توجه به (U, ϕ), یک انتخاب مناسب برای $\tilde{\phi} := (\tilde{U}, \tilde{\phi})$ به عنوان یک نگاشت بین (زیرمجموعه‌هایی از) فضاهای اقلیدسی هموار باشد. با توجه به (U, ϕ)، یک انتخاب مناسب برای $\tilde{\phi} \times \text{id} : \pi_{\mathcal{A}_{\text{out}}}^{-1}(U) \mapsto \phi(U) \times \mathbb{R}^c \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^c$, نگاشت بین (زیرمجموعه‌هایی از) فضاهای اقلیدسی هموار است اگر حالت زیر مستقل از این انتخاب است.^{۱۶۰} یک $\phi(U) \times \mathbb{R}^c$ بعد از هموار باشد. بنابراین ما به همواری نگاشتهای

$$F_i : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left[\tilde{\phi} \circ f_{\text{out}} \circ \phi^{-1} \right]_i \quad (662)$$

برای هر $i = 1, \dots, d+c$ علاوه‌مندیم، با بازنویسی f_{out} و بیان انتگرال روی \mathbb{R}^d همانطور که در پیوست ۴.۰ بحث شد، دیده می‌شود که به شکل

$$F_i(x) = \int_{\mathbb{R}^d} I_i(v, x) dv. \quad (663)$$

هستند. عبارات مختصاتی انتگرال‌دهندهای I_i در اینجا برای هر $i = 1, \dots, d+c$ با

$$I_i : \mathbb{R}^d \times \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (664)$$

$$(v, x) \mapsto \left[\tilde{\phi} \circ \mathcal{K}\left(\psi_{TM, \phi^{-1}(x)}^{-1}(v)\right) \circ \mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\text{out}}, \phi^{-1}(x)} \leftarrow \exp \circ \psi_{TM, \phi^{-1}(x)}(v) \circ f_{\text{in}} \circ \exp \circ \psi_{TM, \phi^{-1}(x)}^{-1}(v) \right]_i,$$

داده می‌شوند، که در آن ما برای راحتی و بدون از دست دادن کلیت، فرض کردیم که $T_{\phi^{-1}(x)} M$ طوری که ضرب مقیاس‌بندی حجم $\sqrt{|\det \eta_p|} = 1$ حذف می‌شود. توجه داشته باشید که انتگرال‌دهندهای I_i از نگاشتهای هموار تشکیل شده‌اند و بنابراین خود نیز هموار هستند.

از بحث قبلی روش است که همواری f_{out} برقرار است اگر همه F_i هموار باشند، یعنی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر جزئی باشند. برای اثبات همواری F_i کافی است نشان دهیم که مشتق‌گیری‌های جزئی و انتگرال‌گیری در معادله (۶۶۳) جابجا می‌شوند \square که این همیشه صادق نیست. اگر آنها جابجا شوند، مشتقهای جزئی از مراتب دلخواه $(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$ با

$$\left[\partial_{x_1}^{n_1} \dots \partial_{x_d}^{n_d} F_i \right](x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[\partial_{x_1}^{n_1} \dots \partial_{x_d}^{n_d} I_i \right](v, x) dv \quad (665)$$

داده می‌شوند، که در آن (۱) مشتقهای جزئی $\left[\partial_{x_1}^{n_1} \dots \partial_{x_d}^{n_d} I_i \right]$ از انتگرال‌دهنده وجود دارند (به دلیل همواری I_i وجود آنها تضمین شده است) و (۲) انتگرال آنها وجود دارد. اینکه آیا مشتق‌گیری‌ها با انتگرال جابجا می‌شوند یا نه را می‌توان با استفاده از لم زیر از [۵۶].^{۱۶۱} که نتیجه‌ای از قضیه همگرایی تحت سلطه است، بررسی کرد.

قضیه ۱.۰.۱. (لم مشتق‌گیری [۵۶]). فرض کنید \mathcal{V} یک فضای اندازه، $\mathbb{R} \subset \mathcal{V} \times T \rightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت با ویژگی‌های زیر باشد:

(۱) برای هر $t \in T$ ثابت، نگاشت $\mathcal{V} \ni v \mapsto I(v, t) \in \mathbb{R}$ روی \mathcal{V} لیگ-انتگرال‌پذیر است.

(۲) برای هر $v \in \mathcal{V}$ ثابت، نگاشت $T \ni t \mapsto I(v, t) \in \mathbb{R}$ در T مشتق‌پذیر است.

(۳) یکتابع لیگ-انتگرال‌پذیر $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V} \times T$ وجود دارد به طوری که $(\mathcal{B}(v)) \cap \left\{ \frac{\partial}{\partial t} I(v, t) \right\} = \emptyset$ برقرار است.

آنگاه تابع $F : T \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \int_{\mathcal{V}} I(v, t) dv$ مشتق‌پذیر است با مشتقی برابر با

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} I(v, t) dv.$$

^{۱۶۰}. توجه داشته باشید که تضمین می‌شود (U, ϕ) تریویالیزه‌پذیر باشد با توجه به اینکه (U, ϕ) یک چارت از M است. این روشن است زیرا پایه‌های

مختصاتی $\left[\frac{\partial}{\partial \phi_\mu} \right]_{\mu=1}^d$ از (U, ϕ) یک تریویالیزاسیون از (U, ϕ) را به دست می‌دهند (به پیوست آ مراجعه کنید) و از آنجا که تریویالیزاسیون‌های محلی TM و \mathcal{A} FM در بخش ۴.۶ از آنهای TM القا شده‌اند.

^{۱۶۱}. نسخه‌های متفاوتی از این لم به زبان انگلیسی را می‌توان در [۹۱] یا در https://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz_integral_rule#Measure_theory_statement یافت. برخلاف آن نسخه‌ها، نسخه [۵۶] اجازه می‌دهد که T هر بازه‌ای باشد، باشند، که ما را از چند مرحله اضافی در ادامه بینیاز می‌کند.

کاربردی بودن این لم (به طور مکرر برای هر مشتق‌گیری جزئی منفرد) به ویژگی‌های انتگرال‌دهنده بستگی دارد، که به نوبه خود به ویژگی‌های خاص میدان کرنل \mathcal{K} و میدان ویژگی ورودی f_{in} بستگی دارد. برای مورد یک میدان کرنل که دارای تکیه‌گاه فشرده روی گوی‌هایی با شعاع ثابت حول مبدأ هر فضای مماس است، این لم اعمال می‌شود. بر این اساس، ما در باقیمانده این پیوست اثباتی برای قضیه ۷.۷ ارائه می‌دهیم.

چ. ۱ اثبات قضیه ۷.۷ (کفایت تکیه‌گاه فشرده کرنل روی گوی‌های مماس)

فرض کنید $B_{\mathbb{R}^d}^{\text{ممتا}}(\cdot, R) := \{v \in T_p M \mid \|v\| \leq R\}$ و $T_p M$ گوی بسته با شعاع $R > 0$ حول مبدأ. فرض کنید $\psi_{TM,p}(B_{T_p M}^{\text{ممتا}}(\cdot, R)) = \{v \in \mathbb{R}^d \mid \|v\| \leq R\}$ گوی متناظر حول مبدأ \mathbb{R}^d باشد. توجه داشته باشید که هر پیمانه ایزومتریک $\psi_{TM,p}(B_{T_p M}^{\text{ممتا}}(\cdot, R))$ را برآورده می‌کند. فرض کنید $\tilde{\mathcal{K}}$ یک میدان کرنل باشد که تکیه‌گاه آن در داخل گوی‌هایی با شعاع یکسان R در هر فضای مماس قرار دارد، یعنی

$$\text{supp}(\tilde{\mathcal{K}}_p) \subseteq B_{T_p M}^{\text{ممتا}}(\cdot, R) \quad \forall p \in M \quad (666)$$

و در نتیجه، برای هر پیمانه ایزومتریک $\psi_{TM,p}$

$$\text{supp}(\tilde{\mathcal{K}}_p \circ (\psi_{TM,p})^{-1}) \subseteq B_{\mathbb{R}^d}^{\text{ممتا}}(\cdot, R) \quad \forall p \in M \quad (667)$$

را برآورده می‌کند. طبق قضیه ۷.۷ این ویژگی برای تضمین اینکه تبدیل میدان کرنل متناظر $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_R}$ خوش‌تعریف است، کافی است. اثبات این گزاره در ادامه ارائه می‌شود.

اثبات: همانطور که قبلاً در ابتدای این پیوست بیان شد، وجود انتگرال با توجه به اینکه تکیه‌گاه‌های کرنل فشرده هستند، تضمین شده است: فشرده‌گی کرنل‌ها به انتگرال‌دهنده‌های تبدیل میدان کرنل منتقل می‌شود. همواری آنها علاوه بر این، پیوستگی آنها را نتیجه می‌دهد و انتگرال‌های توابع پیوسته با تکیه‌گاه فشرده همیشه وجود دارند.

برای اثبات همواری میدان ویژگی خروجی حاصل f_{out} ما با بحث قبلی در این بخش ادامه می‌دهیم. هدف ما اعمال لم مشتق‌گیری چ. ۱ برای جابجایی مشتقات جزئی $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ برای هر $\mu = 1, \dots, d$ در معادله (۶۶۵) با انتگرال‌گیری روی \mathbb{R}^d است. برای این منظور، ما توابع کمکی

$$I_{i,x.,\mu} : \mathbb{R}^d \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\vartheta, t) \mapsto I(\vartheta, x. + t e_\mu) \quad (668)$$

و

$$F_{i,x.,\mu} : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto F(x. + t e_\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} I_{i,x.,\mu}(\vartheta, t) d\vartheta, \quad (669)$$

را معرفی می‌کنیم، که در آن $\epsilon_\mu \in \mathbb{R}^d$ بردار واحد در جهت μ است و $\varepsilon > 0$ به گونه‌ای انتخاب شده است که $\{x. + t e_\mu \mid t \in \mathbb{R}\}$ باشد، که این کار همیشه ممکن است زیرا $\phi(U)$ باز است. سپس $I_{i,x.,\mu} : \mathbb{R}^d \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ به شکلی است که توسط لم i لازم است. این لم ویژگی (i) را بافرض وجود تبدیل میدان کرنل همانطور که قبلاً بحث شد، برآورده می‌کند. ویژگی (ii) به دلیل همواری کل انتگرال‌دهنده در معادله (۶۶۴) برقرار است. برای ویژگی (iii) مشاهده کنید که هم $I_{i,x.,\mu}$ و هم مشتق آن هموار هستند به طوری که قدر مطلق $\left| \frac{\partial}{\partial t} I_{i,x.,\mu} \right|$ پیوسته است. از آنجا که علاوه بر این دارای تکیه‌گاه فشرده روی $B_{\mathbb{R}^d}^{\text{ممتا}}(\cdot, R) \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ است، با (تعمیمی از) قضیه مقدار اکسترمم با یک عدد $b \geq 0$ کران دار است. بنابراین ما $F_{i,x.,\mu}(\vartheta, t) = b \cdot \mathbb{I}_{B_{\mathbb{R}^d}^{\text{ممتا}}(\cdot, R) \times [-\varepsilon, \varepsilon]}(\vartheta, t) \leq \mathcal{B}(\vartheta)$ را برای هر $\vartheta \in V \times T$ برآورده می‌کند و انتگرال‌پذیر است به طوری که ویژگی (iii) نیز برآورده می‌شود. بنابراین ما می‌توانیم ترتیب مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری را برای انتخاب‌های دلخواه از $x.$ و μ جایجا کنیم، که از آن برای کشیدن مشتقات جزئی دلخواه به داخل انتگرال استفاده می‌کنیم:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} F_i \right](x.) = \left[\frac{\partial}{\partial t} I_{i,x.,\mu} \right](\cdot) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial t} I_{i,x.,\mu}(\vartheta, t) \Big|_{t=0} d\vartheta = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial x_\mu} I_i(\vartheta, x) \Big|_{x=x} d\vartheta \quad (670)$$

به دلیل همواری و تکیه‌گاه فشرده انتگرال‌دهنده I_i مشتقات جزئی آن $\frac{\partial}{\partial x_\mu} I_i$ نیز هموار و دارای تکیه‌گاه فشرده هستند. بنابراین آنها نیز ویژگی‌های (i)، (ii) و (iii) را (با یک کران b بالقوه تطبیق یافته) برآورده می‌کنند. بنابراین امکان تکرار مشتق‌گیری جزئی از F_i به طور نامحدود وجود دارد، که همواری آن را اثبات می‌کند. از آنجا که استخراج‌ها مستقل از انتخاب‌های خاص برای نقطه $p \in M$ چارت‌های (U, ϕ) و (\bar{U}, ϕ) نقاط $x. \in \phi(U)$ و μ بودند، این نتیجه همواری کل میدان ویژگی خروجی $(f_{\text{out}}, \mathcal{T}_{\mathcal{K}})$ اثبات می‌کند. \square

ح میدان‌های ویژگی منظم به عنوان توابع اسکالر روی G -ساختار

تتابع با مقدار حقيقی $F : GM \rightarrow \mathbb{R}$ روی G -ساختار با میدان‌های ویژگی منظم $f : M \rightarrow \mathcal{A}_{\text{منظم}}$ روی منيفلد معادل هستند، یعنی یک ايزومورفیسم وجود دارد

$$C^\infty(GM) \cong \Gamma(\mathcal{A}_{\text{منظم}}). \quad (671)$$

این پیوست اثباتی برای این ادعا برای مورد گروه‌های ساختاری متناهی G ارائه می‌دهد. ما با تعریف معمول نمایش‌های منظم (حقیقی) از گروه‌های ساختاری متناهی شروع می‌کنیم، که بر روی فضاهای برداری (ازاد) $\mathbb{R}^{|G|}$ عمل می‌کنند. یک پایه $\{\epsilon_g \in \mathbb{R}^{|G|} \mid g \in G\}$ از $\mathbb{R}^{|G|}$ را تعریف می‌کنیم، که با اعضای گروه G $g \in G$ برجسب‌گذاری شده است. سپس عمل نمایش منظم (چپ) روی $\mathbb{R}^{|G|}$ بر حسب عمل آن بر روی این بردارهای پایه تعریف می‌شود، که با انتقال چپ داده می‌شود. به طور خاص، برای هر $h, g \in G$ نمایش منظم به صورت زیر عمل می‌کند:

$$\rho_{\text{منظم}}(h) \epsilon_g := \epsilon_{hg}. \quad (672)$$

توجه داشته باشید که عمل بر روی ضرایب یک بردار، وارون است

$$\rho_{\text{منظم}}(h) \sum_{g \in G} f_g \epsilon_g = \sum_{g \in G} f_g \epsilon_{hg} = \sum_{\bar{g} \in G} f_{h^{-1}\bar{g}} \epsilon_{\bar{g}}, \quad (673)$$

که دانستن آن مفید است، با این حال، ما در ادامه به این ویژگی نیازی نخواهیم داشت. از آنجا که نمایش منظم بردارهای پایه $\mathbb{R}^{|G|}$ را جایگشت می‌کند، یک نمایش حابگشتی است. برخی از تصاویر برای گروه دوری $G = C_4$ در پیوست [۱۹۰] یافت می‌شود. میدان‌های ویژگی منظم به عنوان مقاطع هموار از کلاف G -همبسته

$$\mathcal{A}_{\text{منظم}} = (GM \times \mathbb{R}^{|G|}) / \sim_{\rho_{\text{منظم}}}. \quad (674)$$

تعریف می‌شوند.

ایزومورفیسم $C^\infty(GM) \cong \Gamma(\mathcal{A}_{\text{منظم}})$ ادعای ما را در بخش ۱۲ مبنی بر اینکه CNN ‌های چارچوب موازی توسط $\mathbb{R}^{|G|}$ کانولوشن‌های G خاصی بین میدان‌های ویژگی منظم هستند، اثبات می‌کند. این علاوه بر این، ارتباط بین کانولوشن‌های گروهی (به بخش ۱.۱ مراجعه کنید) و کانولوشن‌های G منظم را که در بخش ۴.۹ و [۱۹۰] ادعا شده بود، برقرار می‌کند.

با این مقدمات و ملاحظات، ما آماده فرمول‌بندی قضیه هستیم:

قضیه ح ۱. (میدان‌های ویژگی منظم به عنوان تتابع اسکالر روی G -ساختار). فرض کنید $G \leq \text{GL}(d)$ یک گروه ساختاری متناهی، GM -ساختار روی M و $\mathcal{A}_{\text{منظم}}$ کلا甫ی باشد که با عمل نمایش منظم $\rho_{\text{منظم}}$ از G همبسته است. آنگاه میدان‌های ویژگی منظم با تتابع هموار و با مقدار حقيقی روی G -ساختار ایکسان هستند، یعنی یک ايزومورفیسم

$$\Lambda : C^\infty(GM) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{A}_{\text{منظم}}). \quad (675)$$

وجود دارد. این ايزومورفیسم با

$$[\Lambda F](p) = \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) \epsilon_g \right], \quad (676)$$

تعریف می‌شود، که در آن $[e_i]_{i=1}^d \in G_p M$ یک چارچوب نماینده دلخواه در p است. وارون آن با

$$[\Lambda^{-1} f]([e_i]_{i=1}^d) = \langle \epsilon_e, \psi_{\mathcal{A}, p}^{[e_i]_{i=1}^d} f(p) \rangle, \quad (677)$$

داده می‌شود، که در آن ما $([e_i]_{i=1}^d) \psi_{\mathcal{A}, p}^{[e_i]_{i=1}^d} p = \pi_{GM}([e_i]_{i=1}^d)$ را به صورت مخفف نوشته‌ایم و با آن پیمانه (یکتا) را نشان می‌دهیم که متناظر با چارچوب $[e_i]_{i=1}^d$ است، یعنی در $e = ([e_i]_{i=1}^d) \psi_{\mathcal{A}, p}^{[e_i]_{i=1}^d}$ صدق می‌کند.

اثبات: برای اثبات این گزاره، باید نشان دهیم که ۱) این ايزومورفیسم همواری نگاشتها را حفظ می‌کند، ۲) که انتخاب چارچوب نماینده $[e_i]_{i=1}^d \in G_p M$ در تعریف Λ واقعاً دلخواه است و ۳) که $\Lambda^{-1} \Lambda$ واقعاً یک وارون چپ و راست برای Λ است.

۱) همواری :

اینکه ايزومورفیسم همواری نمایش‌های میدان معادل را حفظ می‌کند، روشی است زیرا تمام مورفیسم‌های درگیر (عمل راست، نگاشت پیمانه، حاصلضرب داخلی) هموار هستند.

۲) استقلال تعریف Λ (معادله (۶۷۶)) از انتخاب چارچوب نماینده $[e_i]_{i=1}^d \in G_p M$

فرض کنید که ما از هر چارچوب دیگر $h \in G$ برای یک $[e_i]_{i=1}^d \triangleleft h$ دلخواه استفاده کرده باشیم. سپس این تبدیل پیمانه دلخواه با استفاده از رابطه همارزی $\sim_{\rho_{\text{HOM}}}$ که زیربنای ساختار کلاف همبسته است، حذف می‌شود (معادله (۶۷۵)):

$$\begin{aligned} [\Lambda F](p) &= \left[[e_i]_{i=1}^d \triangleleft h, \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft hg) \epsilon_g \right] && (\text{تعريف } \Lambda, \text{ معادله}) \\ &= \left[[e_i]_{i=1}^d, \rho_{\text{HOM}}(h) \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft hg) \epsilon_g \right] && (\text{رابطه همارزی } \sim_{\rho_{\text{HOM}}}, \text{ معادله}) \\ &= \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft hg) \epsilon_{hg} \right] && (\text{عمل روی } \rho_{\text{HOM}}, \epsilon_g, \text{ معادله}) \\ &= \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_{\tilde{g}} F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft \tilde{g}) \epsilon_{\tilde{g}} \right] && (\tilde{g} = hg) \end{aligned} \quad (678)$$

(۳) در معادله (۶۷۷) یک وارون خوش تعريف برای Λ^{-1} در معادله (۶۷۶) است:

$\Lambda^{-1} \circ \Lambda = \text{id}_{C^\infty(GM)}$ یعنی Λ^{-1} یک وارون چپ برای Λ است:

برای هر $[e_i]_{i=1}^d$ این به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\begin{aligned} &[\Lambda^{-1} \circ \Lambda F]([e_i]_{i=1}^d) \\ &= \left\langle \epsilon_e, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} [\Lambda F](p) \right\rangle && (\text{تعريف } \Lambda^{-1}, \text{ معادله}) \\ &= \left\langle \epsilon_e, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) \epsilon_g \right] \right\rangle && (\text{تعريف } \Lambda, \text{ معادله}) \\ &= \left\langle \epsilon_e, \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) \epsilon_g \right\rangle && (\text{تعريف } \psi_{A,p}, \text{ معادله}) \\ &= \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) \langle \epsilon_e, \epsilon_g \rangle && (\text{بردن حاصلضرب داخلی به داخل جمع}) \\ &= F([e_i]_{i=1}^d) && (\text{دلتای کرونکر } \delta_{e,g} = \langle \epsilon_e, \epsilon_g \rangle) \end{aligned} \quad (679)$$

$\Lambda \circ \Lambda^{-1} = \text{id}_{\Gamma(A_{\text{HOM}})}$ یعنی Λ^{-1} یک وارون راست برای Λ است:

فرض کنید (A_{HOM}) باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} &[\Lambda \circ \Lambda^{-1} f](p) \\ &= \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g [\Lambda^{-1} f]([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) \epsilon_g \right] && (\text{تعريف } \Lambda, \text{ معادله}) \\ &= \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g \left\langle \epsilon_e, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d \triangleleft g} f(p) \right\rangle \epsilon_g \right] && (\text{تعريف } \Lambda^{-1}, \text{ معادله}) \\ &= \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g \left\langle \epsilon_e, \rho_{\text{HOM}}(g)^{-1} \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} f(p) \right\rangle \epsilon_g \right] && (\text{تبديل پیمانه، معادله}) \\ &= \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g \left\langle \rho_{\text{HOM}}(g) \epsilon_e, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} f(p) \right\rangle \epsilon_g \right] && (\text{یکانی بودن } \rho_{\text{HOM}}) \\ &= \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g \left\langle \epsilon_g, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} f(p) \right\rangle \epsilon_g \right] && (\text{عمل روی } \rho_{\text{HOM}}, \epsilon_e, \text{ معادله}) \\ &= \left[[e_i]_{i=1}^d, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} f(p) \right] && (\text{حذف بسط در پایه } \epsilon_g) \\ &= f(p) && (\text{تعريف } \psi_{A,p}, \text{ معادله}) \end{aligned} \quad (680)$$

این اثبات ما را از همارزی $\Gamma(A_{\text{HOM}})$ و $C^\infty(GM)$ به پایان می‌رساند. \square

References

- [1] Vishnu Agrawala. Wigner-eckart theorem for an arbitrary group or lie algebra. *Journal of Mathematical Physics*, 21, 1980. doi: 10.1063/1.524679.
- [2] Brandon Anderson, Truong-Son Hy, and Risi Kondor. Cormorant: Covariant molecular neural networks. *arXiv preprint arXiv:1906.04015*, 2019.
- [3] Vincent Andrcarczyk, Julien Fageot, Valentin Oreiller, Xavier Montet, and Adrien Depeursinge. Exploring local rotation invariance in 3d cnns with steerable filters. In *International Conference on Medical Imaging with Deep Learning*, pages 15–26. PMLR, 2019.
- [4] Aharon Azulay and Yair Weiss. Why do deep convolutional networks generalize so poorly to small image transformations? *Journal of Machine Learning Research*, 20(184):1–25, 2019.
- [5] Simon Batzner, Tess Smidt, Lixin Sun, Jonathan Mailoa, Mordechai Kornbluth, Nicola Molinari, and Boris Kozinsky. Se(3)-equivariant graph neural networks for data-efficient and accurate interatomic potentials. *arXiv preprint arXiv:2101.03164*, 2021.
- [6] Erik Bekkers. B-spline cnns on lie groups. In *International Conference on Learning Representations (ICLR)*, 2020.
- [7] Erik Bekkers, Maxime W Lafarge, Mitko Veta, Koen AJ Eppenhof, Josien PW Pluim, and Remco Duits. Roto-translation covariant convolutional networks for medical image analysis. In *International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI)*, 2018.
- [8] Heli Ben-Hamu, Haggai Maron, Itay Kezurer, Gal Avineri, and Yaron Lipman. Multi-chart generative surface modeling. *arXiv preprint arXiv:1806.02143*, 2018.
- [9] Naomi Blatt and Jacob Rubinstein. The canonical coordinates method for pattern recognition-ii. isomorphisms with affine transformations. *Pattern recognition*, 27(1):99–107, 1994.
- [10] Alexander Bogatskiy, Brandon Anderson, Jan Offermann, Marwah Roussi, David Miller, and Risi Kondor. Lorentz group equivariant neural network for particle physics. *International Conference on Machine Learning*, 2020.
- [11] Wouter Boomsma and Jes Frellsen. Spherical convolutions and their application in molecular modelling. In *Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, 2017.
- [12] Davide Boscaini, Jonathan Masci, Simone Melzi, Michael M Bronstein, Umberto Castellani, and Pierre Vandergheynst. Learning class-specific descriptors for deformable shapes using localized spectral convolutional networks. In *Computer Graphics Forum*, volume 34, pages 13–23. Wiley Online Library, 2015.
- [13] Davide Boscaini, Jonathan Masci, Emanuele Rodolà, and Michael Bronstein. Learning shape correspondence with anisotropic convolutional neural networks. In *Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, pages 3189–3197, 2016.
- [14] Michael Boyle. How should spin-weighted spherical functions be defined? *Journal of Mathematical Physics*, 57(9):092504, 2016.
- [15] Michael M Bronstein, Joan Bruna, Yann LeCun, Arthur Szlam, and Pierre Vandergheynst. Geometric deep learning: going beyond euclidean data. *IEEE Signal Processing Magazine*, 34(4):18–42, 2017.
- [16] Joan Bruna and Stéphane Mallat. Invariant scattering convolution networks. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 35(8):1872–1886, 2013.
- [17] Joan Bruna, Wojciech Zaremba, Arthur Szlam, and Yann LeCun. Spectral networks and locally connected networks on graphs. *arXiv preprint arXiv:1312.6203*, 2013.
- [18] Max Budninskiy, Glorian Yin, Leman Feng, Yiying Tong, and Mathieu Desbrun. Parallel transport unfolding: A connection-based manifold learning approach. *ACM Transactions on Graphics*, 37(6):1–13, 2018.
- [19] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*. Addison Wesley, 2004.

- [20] David Casasent, Shao-Feng Xia, Andrew J Lee, and Jian-Zhong Song. Real-time deformation invariant optical pattern recognition using coordinate transformations. *Applied optics*, 26(5):938–942, 1987.
- [21] Tullio Ceccherini-Silberstein, A Machì, Fabio Scarabotti, and Filippo Tolli. Induced representations and mackey theory. *Journal of Mathematical Sciences*, 156(1):11–28, 2009.
- [22] Rudrasis Chakraborty, Monami Banerjee, and Baba Vemuri. H-cnns: convolutional neural networks for riemannian homogeneous spaces. *arXiv preprint arXiv:1805.05487*, 2018.
- [23] Arnav Chavan, Udbhav Bamba, Rishabh Tiwari, and Deepak Gupta. Rescaling cnn through learnable repetition of network parameters. *arXiv preprint arXiv:2101.05650*, 2021.
- [24] Benjamin Chidester, Tianming Zhou, Minh N Do, and Jian Ma. Rotation equivariant and invariant neural networks for microscopy image analysis. *Bioinformatics*, 35(14):i530–i537, 2019.
- [25] Gregory Chirikjian and Alexander Kyatkin. *Engineering applications of noncommutative harmonic analysis with emphasis on rotation and motion groups*. CRC press, 2001.
- [26] Gregory S Chirikjian and Imme Ebert-Uphoff. Numerical convolution on the euclidean group with applications to workspace generation. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 14(1):123–136, 1998.
- [27] Taco S Cohen and Max Welling. Group equivariant convolutional networks. In *International Conference on Machine Learning (ICML)*, 2016.
- [28] Taco S Cohen and Max Welling. Steerable cnns. In *International Conference on Learning Representations (ICLR)*, 2017.
- [29] Taco S Cohen, Mario Geiger, Jonas Köhler, and Max Welling. Spherical cnns. In *International Conference on Learning Representations (ICLR)*, 2018.
- [30] Taco S Cohen, Mario Geiger, and Maurice Weiler. Intertwiners between induced representations (with applications to the theory of equivariant neural networks). *arXiv preprint arXiv:1803.10743*, 2018.
- [31] Taco S Cohen, Mario Geiger, and Maurice Weiler. A general theory of equivariant cnns on homogeneous spaces. In *Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, 2019.
- [32] Taco S Cohen, Maurice Weiler, Berkay Kicanaoglu, and Max Welling. Gauge equivariant convolutional networks and the icosahedral cnn. In *International Conference on Machine Learning (ICML)*, 2019.
- [33] Benjamin Coors, Alexandru Paul, and Andreas Geiger. Spherenet: Learning spherical representations for detection and classification in omnidirectional images. In *Proceedings of the European Conference on Computer Vision (ECCV)*, pages 518–533, 2018.
- [34] Marius Crainic and Federica Pasquotto. Linear g-structures by examples, 2013. URL <http://www.few.vu.nl/~pasquott/course16.pdf>.
- [35] Keenan Crane. *Discrete Differential Geometry: An Applied Introduction*. Carnegie Mellon University, 2014.
- [36] Keenan Crane. Discrete conformal geometry. In *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*. American Mathematical Society, 2020.
- [37] Keenan Crane, Mathieu Desbrun, and Peter Schröder. Trivial connections on discrete surfaces. *Computer Graphics Forum*, 29(5):1525–1533, 2010. doi: 10.1111/j.1467-8659.2010.19810.
- [38] Keenan Crane, Clarisse Weischedel, and Max Wardetzky. The heat method for distance computation. *Communications of the ACM*, 60(11):90–99, 2017.
- [39] Fernando de Goes, Mathieu Desbrun, and Yiying Tong. Vector field processing on triangle meshes. In *ACM SIGGRAPH 2016 Courses*, pages 1–49, 2016.
- [40] Pim de Haan, Maurice Weiler, Taco Cohen, and Max Welling. Gauge equivariant mesh cnns: Anisotropic convolutions on geometric graphs. In *International Conference on Learning Representations (ICLR)*, 2021.

- [41] Mathieu Desbrun, Anil N Hirani, Melvin Leok, and Jerrold E Marsden. Discrete exterior calculus. *arXiv preprint math/0508341*, 2005.
- [42] Neel Dey, Antong Chen, and Soheil Ghafurian. Group equivariant generative adversarial networks. *arXiv preprint arXiv:2005.01683*, 2020.
- [43] Sander Dieleman, Jeffrey De Fauw, and Koray Kavukcuoglu. Exploiting cyclic symmetry in convolutional neural networks. In *International Conference on Machine Learning (ICML)*, 2016.
- [44] Bjørn Ian Dundas. *A Short Course in Differential Topology*. Cambridge University Press, 2018.
- [45] Marc Eder and Jan-Michael Frahm. Convolutions on spherical images. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops*, 2019.
- [46] Marc Eder, Mykhailo Shvets, John Lim, and Jan-Michael Frahm. Tangent images for mitigating spherical distortion. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2020.
- [47] Albert Einstein. The foundation of the general theory of relativity (english translation). *Annalen der Physik*, 354(7):769–822, 1916.
- [48] Albert Einstein. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354 (7):769–822, 1916. doi: <https://doi.org/10.1002/1.16254>.
- [49] Sharif Elcott and Peter Schröder. Building your own dec at home. In *ACM SIGGRAPH 2005 Courses*, pages 8–es, 2005.
- [50] Carlos Esteves. Theoretical aspects of group equivariant neural networks. *arXiv preprint arXiv:2004.05154*, 2020.
- [51] Carlos Esteves, Christine Allen-Blanchette, Ameesh Makadia, and Kostas Daniilidis. Learning so(3) equivariant representations with spherical cnns. In *European Conference on Computer Vision (ECCV)*, 2018.
- [52] Carlos Esteves, Christine Allen-Blanchette, Xiaowei Zhou, and Kostas Daniilidis. Polar transformer networks. *arXiv preprint arXiv:1709.01889*, 2018.
- [53] Carlos Esteves, Yinshuang Xu, Christine Allen-Blanchette, and Kostas Daniilidis. Equivariant multi-view networks. In *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision*, pages 1568–1577, 2019.
- [54] Carlos Esteves, Ameesh Makadia, and Kostas Daniilidis. Spin-weighted spherical cnns. *Conference on Neural Information Processing Systems*, 2020.
- [55] Marc Finzi, Samuel Stanton, Pavel Izmailov, and Andrew Gordon Wilson. Generalizing convolutional neural networks for equivariance to lie groups on arbitrary continuous data. *International Conference on Machine Learning*, 2020.
- [56] Otto Forster. *Analysis 3- Maß- und Integrationstheorie, Integralsätze im \mathbb{R}^n und Anwendungen*. Springer, 2012.
- [57] William Freeman and Edward Adelson. The design and use of steerable filters. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(9):891–906, 1991.
- [58] Jean Gallier. *Geometric Methods and Applications for Computer Science and Engineering*. Springer, 2011.
- [59] Jean Gallier and Jocelyn Quaintance. *Differential Geometry and Lie Groups- A Computational Perspective*. Springer, 2019.
- [60] Jean Gallier and Jocelyn Quaintance. *Differential Geometry and Lie Groups: A Second Course*. Springer, 2019.
- [61] Jean Gallier and Jocelyn Quaintance. *Aspects of harmonic analysis and representation theory*. World Scientific, 2019.
- [62] Rohan Ghosh and Anupam K Gupta. Scale steerable filters for locally scale-invariant convolutional neural networks. *arXiv preprint arXiv:1906.03861*, 2019.

- [63] Shunwang Gong, Lei Chen, Michael Bronstein, and Stefanos Zafeiriou. Spiralnet++: A fast and highly efficient mesh convolution operator. In *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision Workshops*, pages 0–0, 2019.
- [64] Simon Graham, David Epstein, and Nasir Rajpoot. Dense steerable filter cnns for exploiting rotational symmetry in histology images. *arXiv preprint arXiv:2004.03037*, 2020.
- [65] Yulan Guo, Hanyun Wang, Qingyong Hu, Hao Liu, Li Liu, and Mohammed Bennamoun. Deep learning for 3d point clouds: A survey. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 2020.
- [66] Deepak K Gupta, Devanshu Arya, and Efstratios Gavves. Rotation equivariant siamese networks for tracking. *arXiv preprint arXiv:2012.13078*, 2020.
- [67] David Gurarie. *Symmetries and Laplacians: introduction to harmonic analysis, group representations and applications*. Elsevier science publishers B.V., 1992.
- [68] Niv Haim, Nimrod Segol, Heli Ben-Hamu, Haggai Maron, and Yaron Lipman. Surface networks via general covers. *arXiv preprint arXiv:1812.10705*, 2018.
- [69] Jiaming Han, Jian Ding, Nan Xue, and Gui-Song Xia. Redet: A rotation-equivariant detector for aerial object detection. *arXiv preprint arXiv:2103.07733*, 2021.
- [70] Rana Hanocka, Amir Hertz, Noa Fish, Raja Giryes, Shachar Fleishman, and Daniel Cohen-Or. Meshcnn: a network with an edge. *ACM Transactions on Graphics*, 38(4):1–12, 2019.
- [71] Yacov Hel-Or and Patrick C Teo. Canonical decomposition of steerable functions. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 9(1):83–95, 1998.
- [72] Amir Hertz, Rana Hanocka, Raja Giryes, and Daniel Cohen-Or. Deep geometric texture synthesis. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 39(4):108–1, 2020.
- [73] Peter Holderrieth, Michael Hutchinson, and Yee Whye Teh. Equivariant conditional neural processes. *arXiv preprint arXiv:2011.12916*, 2020.
- [74] Emiel Hoogeboom, Jorn WT Peters, Taco S Cohen, and Max Welling. Hexaconv. In *International Conference on Learning Representations (ICLR)*, 2018.
- [75] Masanobu Horie, Naoki Morita, Yu Ihara, and Naoto Mitsume. Isometric transformation invariant and equivariant graph convolutional networks. *arXiv preprint arXiv:2005.06316*, 2020.
- [76] Yuan-Neng Hsu and H Arsenault. Optical pattern recognition using circular harmonic expansion. *Applied Optics*, 21(22):4016–4019, 1982.
- [77] Hou-Ning Hu, Yen-Chen Lin, Ming-Yu Liu, Hsien-Tzu Cheng, Yung-Ju Chang, and Min Sun. Deep 360 pilot: Learning a deep agent for piloting through 360° sports videos. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2017.
- [78] Jingwei Huang, Yichao Zhou, Matthias Niessner, Jonathan Richard Shewchuk, and Leonidas J Guibas. Quadriflow: A scalable and robust method for quadrangulation. *Computer Graphics Forum*, 37(5):147–160, 2018. doi: 10.1111/cgf.13498.
- [79] Jingwei Huang, Haotian Zhang, Li Yi, Thomas Funkhouser, Matthias Nießner, and Leonidas J Guibas. Texturenet: Consistent local parametrizations for learning from high-resolution signals on meshes. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2019.
- [80] Dale Husemöller. *Fibre Bundles*. Number 20 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 3rd ed edition, 1994. ISBN 978-0-387-94087-8.
- [81] Michiel Janssen, Augustus Janssen, Erik Bekkers, Javier Oliván Bescós, and Remco Duits. Design and processing of invertible orientation scores of 3d images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 60(9):1427–1458, 2018.
- [82] Nadir Jeevanjee. *An introduction to tensors and group theory for physicists*. Birkhäuser, New York, NY, 2011. doi: 10.1007/978-0-8176-4715-5.
- [83] Chiyu Jiang, Jingwei Huang, Karthik Kashinath, Prabhat, Philip Marcus, and Matthias Niessner. Spherical cnns on unstructured grids. In *International Conference on Learning Representations (ICLR)*, 2019.

- [84] Hai Jin, Yuanfeng Lian, and Jing Hua. Learning facial expressions with 3d mesh convolutional neural network. *ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology (TIST)*, 10(1):1–22, 2018.
- [85] Pengfei Jin, Tianhao Lai, Rongjie Lai, and Bin Dong. Nptc-net: Narrow-band parallel transport convolutional neural network on point clouds. *arXiv preprint arXiv:1905.12218*, 2019.
- [86] Renata Khasanova and Pascal Frossard. Isometric transformation invariant graph-based deep neural network. *arXiv preprint arXiv:1808.07366*, 2018.
- [87] Berkay Kicanaoglu, Pim de Haan, and Taco Cohen. Gauge equivariant spherical cnns. *arXiv preprint arXiv:1906.04132*, 2019.
- [88] Ron Kimmel and James A Sethian. Computing geodesic paths on manifolds. *Proceedings of the national academy of Sciences*, 95(15):8431–8435, 1998.
- [89] Diederik Kingma and Jimmy Ba. Adam: A method for stochastic optimization. In *International Conference on Learning Representations (ICLR)*, 2015.
- [90] Thomas Kipf and Max Welling. Semi-supervised classification with graph convolutional networks. *International Conference on Learning Representations*, 2017.
- [91] Achim Klenke. *Probability theory: a comprehensive course*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [92] Anatolii Ulianovich Klimyk and Ja Vilenkin. *Representation of Lie groups and special functions: Volume 3: Classical and quantum groups and special functions*, volume 75. Springer Science & Business Media, 2013.
- [93] Felix Knöppel, Keenan Crane, Ulrich Pinkall, and Peter Schröder. Globally optimal direction fields. *ACM Trans. Graph.*, 32(4), 2013.
- [94] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of Differential Geometry (Volume 1)*. Interscience Publishers, 1963.
- [95] Risi Kondor. N-body networks: a covariant hierarchical neural network architecture for learning atomic potentials. *arXiv preprint arXiv:1803.01588*, 2018.
- [96] Risi Kondor and Shubhendu Trivedi. On the generalization of equivariance and convolution in neural networks to the action of compact groups. In *International Conference on Machine Learning (ICML)*, 2018.
- [97] Risi Kondor, Zhen Lin, and Shubhendu Trivedi. Clebsch–gordan nets: A fully fourier space spherical convolutional neural network. In *Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, 2018.
- [98] Emmanuel Kowalski. *An introduction to the representation theory of groups*, volume 155. American Mathematical Society, 2010.
- [99] Maxime Lafarge, Erik Bekkers, Josien Pluim, Remco Duits, and Mitko Veta. Roto-translation equivariant convolutional networks: Application to histopathology image analysis. *Medical Image Analysis*, 68:101849, 2021.
- [100] Wei-Sheng Lai, Yujia Huang, Neel Joshi, Christopher Buehler, Ming-Hsuan Yang, and Sing Bing Kang. Semantic-driven generation of hyperlapse from 360 degree video. *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, 24(9):2610–2621, 2017.
- [101] Yu-Kun Lai, Miao Jin, Xuexiang Xie, Ying He, Jonathan Palacios, Eugene Zhang, Shi-Min Hu, and Xianfeng Gu. Metric-driven rosy fields design and remeshing. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 16(1):95–108, 2010.
- [102] Leon Lang and Maurice Weiler. A wigner-eckart theorem for group equivariant convolution kernels. In *International Conference on Learning Representations (ICLR)*, 2020. URL <https://arxiv.org/abs/2010.10952>.
- [103] Dmitry Laptev, Nikolay Savinov, Joachim M Buhmann, and Marc Pollefeys. Ti-pooling: Transformation-invariant pooling for feature learning in convolutional neural networks. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2016.

- [104] Yann LeCun, Bernhard E Boser, John S Denker, Donnie Henderson, R E Howard, Wayne E Hubbard, and Lawrence D Jackel. Handwritten digit recognition with a back-propagation network. In *Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, 1990.
- [105] Yeonkun Lee, Jaeseok Jeong, Jongseob Yun, Wonjune Cho, and Kuk-Jin Yoon. Spherephd: Applying cnns on a spherical polyhedron representation of 360deg images. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 9181–9189, 2019.
- [106] Shiwei Li, Zixin Luo, Mingmin Zhen, Yao Yao, Tianwei Shen, Tian Fang, and Long Quan. Cross-atlas convolution for parameterization invariant learning on textured mesh surface. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2019.
- [107] Wan-Chiu Li, Bruno Vallet, Nicolas Ray, and Bruno Levy. Representing higher-order singularities in vector fields on piecewise linear surfaces. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 12(5):1315–1322, 2006.
- [108] Isaak Lim, Alexander Dielen, Marcel Campen, and Leif Kobbelt. A simple approach to intrinsic correspondence learning on unstructured 3d meshes. In *Proceedings of the European Conference on Computer Vision (ECCV) Workshops*, pages 0–0, 2018.
- [109] Yaron Lipman, Olga Sorkine, David Levin, and Daniel Cohen-Or. Linear rotation-invariant coordinates for meshes. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 24(3):479–487, 2005.
- [110] Beibei Liu, Yiying Tong, Fernando De Goes, and Mathieu Desbrun. Discrete connection and covariant derivative for vector field analysis and design. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 35(3):1–17, 2016.
- [111] Min Liu, Fupin Yao, Chiho Choi, Sinha Ayan, and Karthik Ramani. Deep learning 3d shapes using alt-az anisotropic 2-sphere convolution. In *International Conference on Learning Representations (ICLR)*, 2019.
- [112] Ameesh Makadia and Kostas Daniilidis. Rotation recovery from spherical images without correspondences. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 28(7):1170–1175, 2006.
- [113] Stéphane Mallat. Group invariant scattering. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 65(10):1331–1398, 2012.
- [114] Diego Marcos, Michele Volpi, and Devis Tuia. Learning rotation invariant convolutional filters for texture classification. In *International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, 2016.
- [115] Diego Marcos, Michele Volpi, Nikos Komodakis, and Devis Tuia. Rotation equivariant vector field networks. In *International Conference on Computer Vision (ICCV)*, 2017.
- [116] Diego Marcos, Benjamin Kellenberger, Sylvain Lobry, and Devis Tuia. Scale equivariance in cnns with vector fields. *arXiv preprint arXiv:1807.11783*, 2018.
- [117] Haggai Maron, Meirav Galun, Noam Aigerman, Miri Trope, Nadav Dym, Ersin Yumer, Vladimir G Kim, and Yaron Lipman. Convolutional neural networks on surfaces via seamless toric covers. *ACM Trans. Graph.*, 36(4):71–1, 2017.
- [118] Adam Marsh. Gauge theories and fiber bundles: Definitions, pictures, and results. *arXiv preprint arXiv:1607.03089*, 2016.
- [119] Daniel Martin, Ana Serrano, and Belen Masia. Panoramic convolutions for 360° single-image saliency prediction. *arXiv preprint arXiv:2008.02996*, 2020.
- [120] Jonathan Masci, Davide Boscaini, Michael Bronstein, and Pierre Vandergheynst. Geodesic convolutional neural networks on riemannian manifolds. In *Proceedings of the IEEE international conference on computer vision workshops*, 2015.
- [121] Jonathan Masci, Davide Boscaini, Michael Bronstein, and Pierre Vandergheynst. Shapenet: Convolutional neural networks on non-euclidean manifolds. Technical report, IDIAP, 2015.
- [122] Simone Melzi, Emanuele Rodolà, Umberto Castellani, and Michael M Bronstein. Localized manifold harmonics for spectral shape analysis. In *Computer Graphics Forum*, volume 37, pages 20–34. Wiley Online Library, 2018.

- [123] Lars Mescheder, Michael Oechsle, Michael Niemeyer, Sebastian Nowozin, and Andreas Geiger. Occupancy networks: Learning 3d reconstruction in function space. *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2019.
- [124] Mark Meyer, Mathieu Desbrun, Peter Schröder, and Alan H Barr. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds. In *Visualization and mathematics III*, pages 35–57. Springer, 2003.
- [125] Francesco Milano, Antonio Loquercio, Antoni Rosinol, Davide Scaramuzza, and Luca Carlone. Primal-dual mesh convolutional neural networks. *Conference on Neural Information Processing Systems*, 2020.
- [126] Benjamin Kurt Miller, Mario Geiger, Tess E Smidt, and Frank Noé. Relevance of rotationally equivariant convolutions for predicting molecular properties. *arXiv preprint arXiv:2008.08461*, 2020.
- [127] Joseph SB Mitchell, David M Mount, and Christos H Papadimitriou. The discrete geodesic problem. *SIAM Journal on Computing*, 16(4):647–668, 1987.
- [128] Mirgahney Mohamed, Gabriele Cesa, Taco Cohen, and Max Welling. A data and compute efficient design for limited-resources deep learning. *arXiv preprint arXiv:2004.09691*, 2020.
- [129] Arnab Kumar Mondal, Pratheeeksha Nair, and Kaleem Siddiqi. Group equivariant deep reinforcement learning. *arXiv preprint arXiv:2007.03437*, 2020.
- [130] Federico Monti, Davide Boscaini, Jonathan Masci, Emanuele Rodola, Jan Svoboda, and Michael Bronstein. Geometric deep learning on graphs and manifolds using mixture model cnns. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2017.
- [131] H Naderi, L Goli, and S Kasaei. Scale equivariant cnns with scale steerable filters. In *2020 International Conference on Machine Vision and Image Processing (MVIP)*, 2020.
- [132] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics*. CRC Press, 2003.
- [133] Karl-Hermann Neeb. Differential topology of fiber bundles. *FAU Erlangen-Nuernberg*, 2010.
- [134] Edouard Oyallon and Stéphane Mallat. Deep roto-translation scattering for object classification. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2015.
- [135] Rasmus R Paulsen, Kristine Aavild Juhl, Thilde Marie Haspang, Thomas Hansen, Melanie Ganz, and Guðmundur Einarsson. Multi-view consensus cnn for 3d facial landmark placement. In *Asian Conference on Computer Vision*, pages 706–719. Springer, 2018.
- [136] Songyou Peng, Michael Niemeyer, Lars Mescheder, Marc Pollefeys, and Andreas Geiger. Convolutional occupancy networks. *arXiv preprint arXiv:2003.04618*, 2020.
- [137] Nathanaël Perraudin, Michaël Defferrard, Tomasz Kacprzak, and Raphael Sgier. Deepsphere: Efficient spherical convolutional neural network with healpix sampling for cosmological applications. *arXiv:1810.12186 [astro-ph]*, 2018.
- [138] Paolo Piccione and Daniel V Tausk. *The theory of connections and G-structures: applications to affine and isometric immersions*. IMPA, 2006.
- [139] Konrad Polthier and Markus Schmies. Straightest geodesics on polyhedral surfaces. *Mathematical visualization. Heidelberg: Springer Verlag*, pages 135–50, 1998.
- [140] Adrien Poulenard and Maks Ovsjanikov. Multi-directional geodesic neural networks via equivariant convolution. In *SIGGRAPH Asia 2018 Technical Papers*, page 236. ACM, 2018.
- [141] Adrien Poulenard, Marie-Julie Rakotosaona, Yann Ponty, and Maks Ovsjanikov. Effective rotation-invariant point cnn with spherical harmonics kernels. In *2019 International Conference on 3D Vision (3DV)*, pages 47–56. IEEE, 2019.
- [142] Charles Qi, Hao Su, Kaichun Mo, and Leonidas Guibas. Pointnet: Deep learning on point sets for 3d classification and segmentation. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2017.
- [143] Charles Qi, Li Yi, Hao Su, and Leonidas Guibas. Pointnet++: Deep hierarchical feature learning on point sets in a metric space. In *Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, 2017.

- [144] Charles R Qi, Hao Su, Matthias Nießner, Angela Dai, Mengyuan Yan, and Leonidas J Guibas. Volumetric and multi-view cnns for object classification on 3d data. In *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, pages 5648–5656, 2016.
- [145] Sameera Ramasinghe, Salman Khan, Nick Barnes, and Stephen Gould. Representation learning on unit ball with 3d roto-translational equivariance. *International Journal of Computer Vision*, pages 1–23, 2019.
- [146] Siamak RavaniBakhsh, Jeff Schneider, and Barnabas Poczos. Equivariance through parameter-sharing. In *International Conference on Machine Learning (ICML)*, 2017.
- [147] Nicolas Ray, Bruno Vallet, Wan Chiu Li, and Bruno Lévy. N-symmetry direction field design. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 27(2):1–13, 2008.
- [148] David Romero, Erik Bekkers, Jakub Tomczak, and Mark Hoogendoorn. Attentive group equivariant convolutional networks. *International Conference on Machine Learning*, 2020.
- [149] David Romero, Erik Bekkers, Jakub Tomczak, and Mark Hoogendoorn. Wavelet networks: Scale equivariant learning from raw waveforms. *arXiv preprint arXiv:2006.05259*, 2020.
- [150] Joseph Rosen and Joseph Shamir. Circular harmonic phase filters for efficient rotation-invariant pattern recognition. *Applied Optics*, 27(14):2895–2899, 1988.
- [151] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-hill, Inc. New York, 1976.
- [152] Edward Saff and Arno Kuijlaars. Distributing many points on a sphere. *The mathematical intelligencer*, 19(1):5–11, 1997.
- [153] Yoshiharu Saito, Shin-ichi Komatsu, and Hitoshi Ohzu. Scale and rotation invariant real time optical correlator using computer generated hologram. *Optics Communications*, 47(1):8–11, 1983.
- [154] Anna MM Scaife and Fiona Porter. Fanaroff-riley classification of radio galaxies using group equivariant convolutional neural networks. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 503(2):2369–2379, 2021.
- [155] Stefan C Schonsheck, Bin Dong, and Rongjie Lai. Parallel transport convolution: A new tool for convolutional neural networks on manifolds. *arXiv preprint arXiv:1805.07857*, 2018.
- [156] Peter Schröder and Wim Sweldens. Spherical wavelets: Efficiently representing functions on the sphere. In *Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 161–172, 1995.
- [157] Frederic Schuller. Lectures on the geometrical anatomy of theoretical physics, 2016.
- [158] Jean-Pierre Serre. *Linear representations of finite groups*. Springer, 1977.
- [159] Nicholas Sharp, Yousuf Soliman, and Keenan Crane. The vector heat method. *ACM Trans. Graph.*, 38(3), 2019.
- [160] Nicholas Sharp, Souhaib Attaiki, Keenan Crane, and Maks Ovsjanikov. Diffusion is all you need for learning on surfaces. *arXiv preprint arXiv:2012.00888*, 2020.
- [161] Zhengyang Shen, Lingshen He, Zhouchen Lin, and Jinwen Ma. Pdo-econvs: Partial differential operator based equivariant convolutions. *International Conference on Machine Learning*, 2020.
- [162] Noah Shutty and Casimir Wierzyński. Learning irreducible representations of noncommutative lie groups. *arXiv preprint arXiv:2006.00724*, 2020.
- [163] Laurent Sifre and Stéphane Mallat. Combined scattering for rotation invariant texture analysis. In *European Symposium on Artificial Neural Networks, Computational Intelligence and Machine Learning (ESANN)*, volume 44, pages 68–81, 2012.
- [164] Laurent Sifre and Stéphane Mallat. Rotation, scaling and deformation invariant scattering for texture discrimination. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2013.
- [165] Laurent Sifre and Stéphane Mallat. Rigid-motion scattering for texture classification. *arXiv preprint arXiv:1403.1687*, 2014.

- [166] Ayan Sinha, Jing Bai, and Karthik Ramani. Deep learning 3d shape surfaces using geometry images. In *European Conference on Computer Vision (ECCV)*, 2016.
- [167] Bart Smets, Jim Portegies, Erik Bekkers, and Remco Duits. Pde-based group equivariant convolutional neural networks. *arXiv preprint arXiv:2001.09046*, 2020.
- [168] Stefan Sommer and Alex Bronstein. Horizontal flows and manifold stochastics in geometric deep learning. *arXiv preprint arXiv:1910.14216*, 2019.
- [169] Ivan Sosnovik, Michał Szmaja, and Arnold Smeulders. Scale-equivariant steerable networks. In *International Conference on Learning Representations (ICLR)*, 2020.
- [170] Michael Spivak. *Calculus*. Reverté, 2019.
- [171] Norman Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton University Press, 1951.
- [172] Shlomo Sternberg. *Lectures on differential geometry*, volume 316. American Mathematical Soc., 1999.
- [173] Hang Su, Subhransu Maji, Evangelos Kalogerakis, and Erik Learned-Miller. Multi-view convolutional neural networks for 3d shape recognition. In *Proceedings of the IEEE international conference on computer vision*, pages 945–953, 2015.
- [174] Yu-Chuan Su and Kristen Grauman. Learning spherical convolution for fast features from 360 imagery. In *Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, 2017.
- [175] Yu-Chuan Su and Kristen Grauman. Kernel transformer networks for compact spherical convolution. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2019.
- [176] Zhaoyu Su, Pin Siang Tan, Junkang Chow, Jimmy Wu, Yehur Cheong, and Yu-Hsing Wang. Dconvnet: Fully convolutional deep learning on point clouds with dynamic voxelization and 3d group convolution. *arXiv preprint arXiv:2009.02918*, 2020.
- [177] Zhiyu Sun, Ethan Rooke, Jerome Charton, Yusen He, Jia Lu, and Stephen Baek. Zernet: Convolutional neural networks on arbitrary surfaces via zernike local tangent space estimation. *Computer Graphics Forum*, 37(5):204–215, 2018.
- [178] Maxim Tatarchenko, Jaesik Park, Vladlen Koltun, and Qian-Yi Zhou. Tangent convolutions for dense prediction in 3d. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2018.
- [179] Keisuke Tateno, Nassir Navab, and Federico Tombari. Distortion-aware convolutional filters for dense prediction in panoramic images. In *European Conference on Computer Vision (ECCV)*, 2018.
- [180] Hugues Thomas, Charles R Qi, Jean-Emmanuel Deschaud, Beatriz Marcotegui, François Goulette, and Leonidas J Guibas. Kpconv: Flexible and deformable convolution for point clouds. In *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision*, pages 6411–6420, 2019.
- [181] Nathaniel Thomas, Tess Smidt, Steven Kearnes, Lusann Yang, Li Li, Kai Kohlhoff, and Patrick Riley. Tensor field networks: Rotation-and translation-equivariant neural networks for 3d point clouds. *arXiv preprint arXiv:1802.08219*, 2018.
- [182] ET Tomboulis. Nonlocal and quasilocal field theories. *Physical Review D*, 92(12):125037, 2015.
- [183] Greg Turk. Texture synthesis on surfaces. In *Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 347–354, 2001.
- [184] Elise van der Pol, Daniel E Worrall, Herke van Hoof, Frans A Oliehoek, and Max Welling. Mdp homomorphic networks: Group symmetries in reinforcement learning. *arXiv preprint arXiv:2006.16908*, 2020.
- [185] Nitika Verma, Edmond Boyer, and Jakob Verbeek. Feastnet: Feature-steered graph convolutions for 3d shape analysis. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2018.
- [186] Etienne Vouga. Lectures in discrete differential geometry 3– discrete surfaces, 2014.

- [187] Robin Walters, Jinxi Li, and Rose Yu. Trajectory prediction using equivariant continuous convolution. *arXiv preprint arXiv:2010.11344*, 2020.
- [188] Rui Wang, Robin Walters, and Rose Yu. Incorporating symmetry into deep dynamics models for improved generalization. *arXiv preprint arXiv:2002.03061*, 2020.
- [189] Yuanzhen Wang, Beibei Liu, and Yiyi Tong. Linear surface reconstruction from discrete fundamental forms on triangle meshes. In *Computer Graphics Forum*, volume 31, pages 2277–2287. Wiley Online Library, 2012.
- [190] Maurice Weiler and Gabriele Cesa. General $e(2)$ -equivariant steerable cnns. In *Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, 2019.
- [191] Maurice Weiler, Mario Geiger, Max Welling, Wouter Boomsma, and Taco S Cohen. 3d steerable cnns: Learning rotationally equivariant features in volumetric data. In *Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, 2018.
- [192] Maurice Weiler, Fred A Hamprecht, and Martin Storath. Learning steerable filters for rotation equivariant cnns. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2018.
- [193] Chris Wendl. Lecture notes on bundles and connections, 2008. URL <https://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/connections.html>.
- [194] Ruben Wiersma, Elmar Eisemann, and Klaus Hildebrandt. Cnns on surfaces using rotation-equivariant features. *Transactions on Graphics*, 39(4), July 2020. doi: 10.1145/3386869.3392437.
- [195] Eugene Paul Wigner. *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*. Springer, 1931.
- [196] Eugene Paul Wigner. On the matrices which reduce the kronecker products of representations of s.r. groups. In *The Collected Works of Eugene Paul Wigner*, pages 608–654. Springer, 1993.
- [197] Marysia Winkels and Taco S Cohen. 3d g-cnns for pulmonary nodule detection. In *Conference on Medical Imaging with Deep Learning (MIDL)*, 2018.
- [198] Daniel E Worrall and Gabriel J Brostow. Cubenet: Equivariance to 3d rotation and translation. In *European Conference on Computer Vision (ECCV)*, 2018.
- [199] Daniel E Worrall and Max Welling. Deep scale-spaces: Equivariance over scale. In *Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, 2019.
- [200] Daniel E Worrall, Stephan J Garbin, Daniyar Turmukhambetov, and Gabriel J Brostow. Harmonic networks: Deep translation and rotation equivariance. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2017.
- [201] Qin Yang, Chenglin Li, Wenrui Dai, Junni Zou, Guo-Jun Qi, and Hongkai Xiong. Rotation equivariant graph convolutional network for spherical image classification. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2020.
- [202] Yuqi Yang, Shilin Liu, Hao Pan, Yang Liu, and Xin Tong. Pfccnn: Convolutional neural networks on 3d surfaces using parallel frames. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, June 2020.
- [203] Jeffrey Yepez. Einstein’s vierbein field theory of curved space. *arXiv preprint arXiv:1106.2037*, 2011.
- [204] Lexing Ying, Aaron Hertzmann, Henning Biermann, and Denis Zorin. Texture and shape synthesis on surfaces. In *Eurographics Workshop on Rendering Techniques*, pages 301–312. Springer, 2001.
- [205] Alexander Yom Din. Representation theory of compact groups- lecture notes, 2017. URL <http://www.math.caltech.edu/~2016-17/2term/ma145b/notes/RepCptGroups.pdf>.
- [206] Binbin Zhang, Wen Shen, Shikun Huang, Zhihua Wei, and Quanshi Zhang. 3d-rotation-equivariant quaternion neural networks. *arXiv preprint arXiv:1911.09040*, 2019.
- [207] Chao Zhang, Stephan Liwicki, William Smith, and Roberto Cipolla. Orientation-aware semantic segmentation on icosahedron spheres. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2019.

- [208] Eugene Zhang, Konstantin Mischaikow, and Greg Turk. Vector field design on surfaces. *ACM Transactions on Graphics (ToG)*, 25(4):1294–1326, 2006.
- [209] Richard Zhang. Making convolutional networks shift-invariant again. In *International Conference on Machine Learning (ICML)*, 2019.
- [210] Qiang Zhao, Chen Zhu, Feng Dai, Yike Ma, Guoqing Jin, and Yongdong Zhang. Distortion-aware cnns for spherical images. In *IJCAI*, 2018.
- [211] Tao Zhou. Gauge aspect of tetrad field in gravity. *arXiv preprint arXiv:1603.07571*, 2016.
- [212] Yanzhao Zhou, Qixiang Ye, Qiang Qiu, and Jianbin Jiao. Oriented response networks. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2017.
- [213] Wei Zhu, Qiang Qiu, Robert Calderbank, Guillermo Sapiro, and Xiuyuan Cheng. Scale-equivariant neural networks with decomposed convolutional filters. *arXiv preprint arXiv:1909.11193*, 2019.