

# شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات

کانولوشن‌های یکسان نسبت به ایزومنتری و پیمانه روی منیفلدهای ریمانی

موریس وایلر<sup>۱</sup> پاتریک فوره<sup>۱</sup> اریک ورلیند<sup>۲</sup> مکس ولینگ<sup>۱</sup>

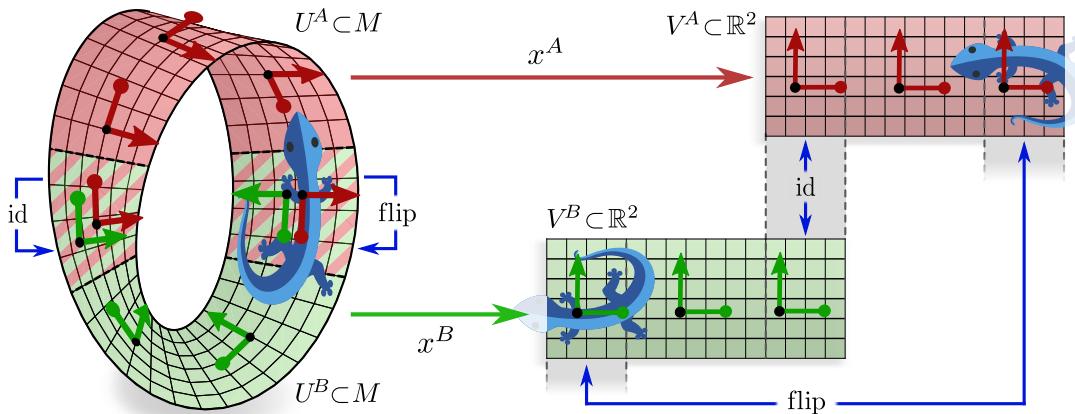
<sup>۱</sup>دانشگاه آمستردام

<sup>۲</sup>پژوهشگاه هوش مصنوعی کوالکام

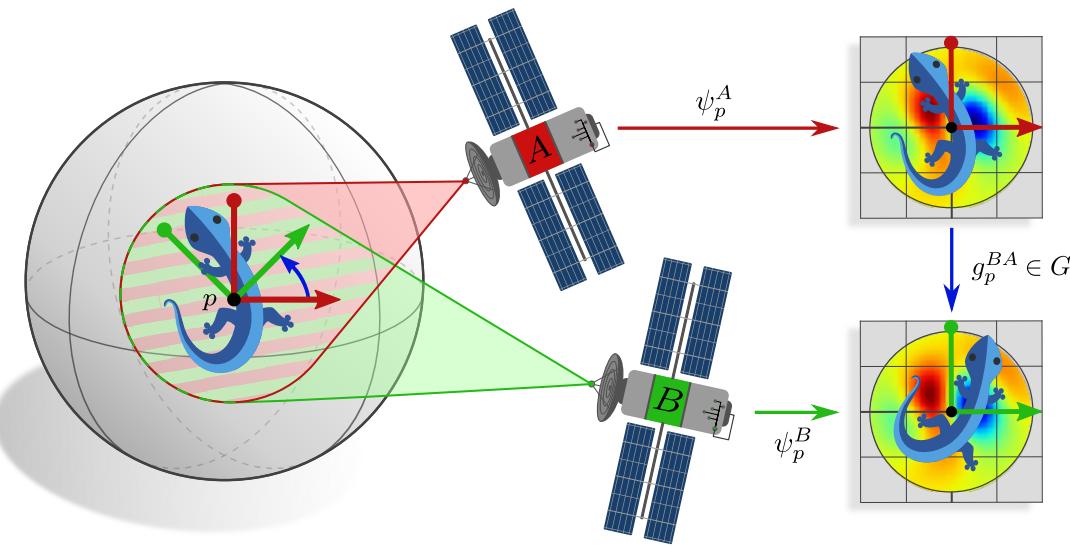
p.d.forre@uva.nl m.weiler.ml@gmail.com  
m.welling@uva.nl e.p.verlinde@uva.nl

## مقدمه

انگیزه‌ای از موقتیت گستره شبکه‌های عمیق کانولوشنی، علاقه زیادی برای تعمیم کانولوشن‌ها به منیفلدهای غیراقلیدسی وجود دارد. یک پیچیدگی عمده در مقایسه با فضاهای مسطح این است که مشخص نیست کرمل کانولوشن باید در کدام تراز روی یک منیفلد اعمال شود. دلیل اساسی این ابهام آن است که منیفلدهای عمومی دارای انتخاب متعارف چارچوب‌های مرجع (گیج) نیستند. بنابراین کرنل‌ها و ویژگی‌ها باید نسبت به مختصات دلخواه بیان شوند. ما استدلال می‌کنیم که انتخاب خاص مختصات‌بندی باید بر استنتاج شبکه تأثیر بگذارد آن باید مستقل از مختصات باشد. تقاضای همزمان برای استقلال مختصات و اشتراک وزن منجر به الزامی روی شبکه می‌شود تا تحت تبدیل‌های گیج محلی (تغییرات چارچوب‌های مرجع محلی) تناوب پذیر باشد. ابهام چارچوب‌های مرجع بدین گونه به  $G$ -ساختار منیفلد بستگی دارد، به طوری که سطح لازم تناوب پذیری گیج توسط گروه ساختار  $G$  متناظر تجویز می‌شود. کانولوشن‌های مستقل از مختصات ثابت می‌شوند که نسبت به آن ایزومنتری‌هایی که تقارن‌های  $G$ -ساختار هستند تناوب پذیر باشند. نظریه حاصل به شکل آزاد از مختصات بر حسب بندل‌های فیبر فرمول بندی می‌شود. برای نمونه‌سازی طراحی کانولوشن‌های مستقل از مختصات، ما شبکه کانولوشنی روی نوار مویوس پیاده‌سازی می‌کنیم. عمومیت فرمول بندی هنداسه دیفرانسیل ما از شبکه‌های کانولوشنی با بررسی گستره ادیبات نشان داده می‌شود که تعداد زیادی از شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی، شبکه‌های کانولوشنی کروی و شبکه‌های کانولوشنی روی سطوح عمومی را به عنوان نمونه‌های خاص کانولوشن‌های مستقل از مختصات توضیح می‌دهد.



شکل ۱: نمایش کانولوشن روی نوار مویوس با گیج‌های مختلف



شکل ۲: ناظران مختلف  $\square$  و  $\square$  ممکن است یک الگوی ویژگی را از « نقطه دید » متفاوتی در کاربرد ما، کرنل های کانولوشنی هستند که میدان دید محلی خود در اطراف  $p$  را در یک بردار ویژگی در  $p$  خلاصه می کنند. « نقطه دید » آنها انتخابی از یک چارچوب مرجع محلی (گیج) در  $\square$  است که کرنل در امتداد آن همتراز می شود. از آنجا که مشاهدات از هر دو نقطه دید یک الگوی یکسان را نشان می دهند، پاسخ های کرنل باید حاوی اطلاعات معادلی باشد، یعنی استنتاج باید مستقل از مختصات باشد. این امر کرنل های کانولوشن را ملزم می کند که تحت تبدیلات گیج محلی هموردا باشند، یعنی تغییرات چارچوب های مرجع. سطح همودایی گیج توسط گروه ساختار  $G$  تعیین می شود که هم به خمینه و هم به کاربرد بستگی دارد. (ماژولک های با مجوز [Creative Commons Attribution 4.0 International](#) باشند).

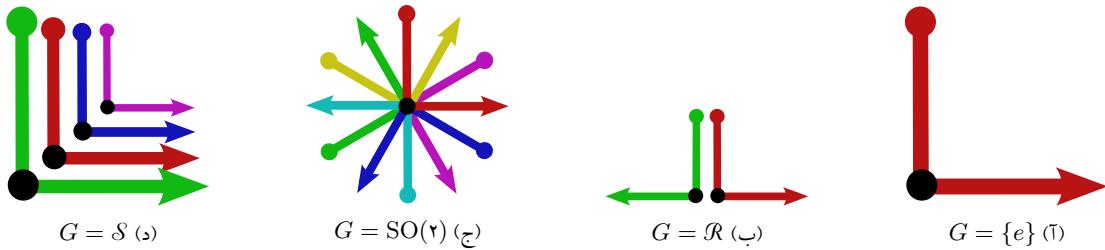
## ۱ مقدمه

در سال های اخیر، شبکه های عصبی عمیق به مدل های منتخب برای طیف گسترده ای از وظایف در یادگیری ماشین تبدیل شده اند. موقوفیت مدل های عمیق اغلب ریشه در طراحی خاص وظیفه دارد که اساختار ریاضی داده های مورد پردازش را منعکس می کند. یک مثال بر جسته، شبکه های عصبی کانولوشنی (CNN) هستند که از ساختار فضایی داده ها از طریق اتصال محلی و اشتراک گذاری وزن فضایی بهره برداری می کنند. از آنجا که کرنل یکسانی در هر نقطه از فضای اعمال می شود، شبکه های کانولوشنی نسبت به انتقال هموردا هستند، به این معنی که الگوهای آموخته شده را به طور خود کار در سراسر موقعیت های مکانی تعمیم می دهند. با توجه به موقوفیت چشمگیر تجزیی CNN های اقلیدسی، علاقه زیادی به گسترش مدل های کانولوشنی برای پردازش سیگنال ها در دامنه های عمومی تر و هموردا ساختن آنها تحت گروه های تقارن بزرگ تر وجود دارد.

این کار به بررسی تعمیم شبکه های کانولوشنی به خمینه های ریمانی می پردازد. یک پیچیدگی عده در تعمیم شبکه های کانولوشنی از فضاهای اقلیدسی  $\mathbb{R}^d$  به خمینه های ریمانی عمومی این است که خمینه ها با انتخاب ارجحی از جهت مرتع همراه نیستند، که بتوان یک کرنل کانولوشن را در امتداد آن برای اندازه گیری ویژگی ها همتراز کرد. از آنجا که هیچ جهت مرتعی ارجح نیست، کرنل باید به صورت دلخواه روی خمینه هم تراز شود. موضوع اصلی این کار، تنظیم این دلخواهی بودن با مستقل ساختن استنتاج شبکه های از همترازی خاص کرنل های کانولوشن است. مشخص می شود که این امر نیازمند آن است که کرنل های همودایی گیج باشند، یعنی هموردا تحت تبدیلات همترازی کرنل. پاسخ یک کرنل همودایی گیج هنگام تغییر همترازی اش به طور قابل پیش بینی تبدیل می شود  $\square$  بنابراین تضمین می شود که محتوای اطلاعات استخراج شده برای هر انتخاب (دلخواه) همترازی یکسان باشد.

ما همترازی یک کرنل در نقطه ای  $p$  از یک خمینه  $M$  را به عنوان انتخابی از یک چارچوب مرجع محلی یا گیج از فضای مماس متانظر  $T_p M$  فرمول بندی می کنیم. تبدیلات گیج بنابراین تبدیلات بین انتخاب های چارچوب های مرجع هستند. شکل ۵ مفهوم همتراز کرنل ها در امتداد چارچوب های مرجع را به تصویر می کشد. همتراز کرنل کرنل نسبت به میدان چارچوب کانونی (که به طور منحصر به فرد ارجح است) صفحه اقلیدسی  $\mathbb{R}^2$ ، همانطور که در بالا نشان داده شده، منجر به میدان کرنل معمول CNN های اقلیدسی می شود. یک میدان چارچوب متفاوت، همانطور که در پایین نشان داده شده، به یک میدان کرنل جایگزین و در نتیجه یک شبکه جایگزین دلالت دارد. همانطور که در بالا بیان شد، در بیشتر خمینه ها انتخاب چارچوب های ذاتاً مبهم است به طوری که هیچ همترازی کرنل خاصی ارجح نیست. شکل ۲ این موضوع را برای کره  $S^2$  به تصویر می کشد، جایی که چارچوب های تنها تا حد دوران ها منحصر به فرد هستند.

سطح ابهام در انتخاب چارچوب های مرجع به ساختار هندسی خمینه بستگی دارد. چنین ساختاری اغلب امکان رفع ابهام چارچوب های مرجع تا حد تبدیلات تقارنی معین (تبدیلات گیج) را فراهم می کند؛ به شکل ۳ مراجعه کنید. این بیانیه با چند مثال بهتر توضیح داده می شود:



شکل ۳: انتخاب چارچوب‌های مرجع یک فضای مماس  $T_p M$  همیشه منحصر به فرد نیست. ساختار هندسی  $G$  یک خمینه، زیرمجموعه‌های ارجح از چارچوب‌های مرجع را ایجاد می‌کند به طوری که تبدیلات گیج بین این چارچوب‌ها در گروه ساختار  $G \leq \text{GL}(d)$  قرار می‌گیرند. شکل‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ چنین زیرمجموعه‌هایی از چارچوب‌های را ترتیب برای گروه بدیهی  $\{e\}$  دارند، گروه بازتاب  $G = \mathcal{R}$ ، گروه دوران  $G = \text{SO}(2)$  و گروه مفیاس پذیری  $G = \mathcal{S}$  نشان می‌دهند. ویژگی‌ها اندازه‌گیری‌ها را نسبت به هر یک از چارچوب‌های متمایز که گذاری می‌کنند. ضرایب عددی آن‌ها نسبت به چارچوب‌های مختلف، توسط عمل یک نمایش گروهی  $\rho$  از  $G$  به هم مرتبط می‌شوند.

- یک خمینه هموار خام هیچ ترجیحی در انتخاب چارچوب‌ها ندارد. تبدیلات گیج بین چارچوب‌های عمومی، نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر دلخواه هستند، یعنی مقادیری در گروه خطی عمومی  $G = \text{GL}(d)$  می‌گیرند.
- یک جهت‌گیری از خمینه امکان تمایز چارچوب‌های چپ‌گرد از راست‌گرد را فراهم می‌کند. تبدیلات گیج بین چارچوب‌های هر یک از دو دست، حافظ جهت‌گیری هستند، یعنی عناصری از  $G = \text{GL}^+$  هستند. نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر با دترمینان مثبت.
- یک فرم حجم امکان تمایز چارچوب‌های با حجم واحد را فراهم می‌کند. در این صورت، تبدیلات گیج حافظ حجم هستند، یعنی مقادیری در گروه خطی ویژه  $G = \text{SL}(d)$  می‌گیرند.
- ساختار متربیک یک خمینه ریمانی امکان اندازه‌گیری فواصل و زوایا را در فضاهای مماس فراهم می‌کند و بنابراین امکان تمایز چارچوب‌های متعامد را می‌دهد. تبدیلات گیج بین چارچوب‌های متعامد، دوران‌ها و بازتاب‌ها در گروه متعامد  $G = d$  هستند.
- با هم، یک جهت‌گیری و متربیک به چارچوب‌های متعامد جهت‌دار دلالت دارند. در این صورت، تبدیلات گیج فقط دوران‌ها در گروه متعامد ویژه  $G = \text{SO}(d)$  هستند.
- یک میدان چارچوب روی خمینه شامل یک چارچوب منحصر به فرد در هر نقطه از خمینه است. در این حالت، تبدیلات گیج بدیهی هستند که توسط گروه بدیهی  $\{e\} = G$  توصیف می‌شوند.

همه این ساختارهای هندسی مشترک‌آیکی زیرمجموعه ارجح (زیربندل) از چارچوب‌ها را تعریف می‌کنند به طوری که تبدیلات گیج مقادیری در یک گروه ساختار  $G \leq \text{GL}(d)$  می‌گیرند. برای تأکید بر نقش محوری گروه ساختار  $G$ ، چنین ساختارهایی به عنوان  $GM$ -ساختار نامیده می‌شوند. مثال‌های بصری از  $G$ -ساختارهای برای گروه‌های ساختار  $G$  و خمینه‌های  $M$  مختلف در شکل ۶ آورده شده است.

از آنجا که انتخاب چارچوب‌های مرجع ذاتاً مهم است، هر کیت هندسی و عملیات شبکه باید به طور مساوی نسبت به چارچوب‌های دلخواه  $-G$  ساختار  $GM$  قابل نمایش باشد، یعنی باید  $GM$ -مستقل از مختصات باشد. بردارهای ویژگی بنابراین با یک نمایش گروهی (عمل گروهی خطی) از گروه ساختار  $G$  مرتبط هستند که قانون تبدیل آنها را تحت تبدیلات گیج (گذارهای با مقادیر  $G$  بین چارچوب‌های مرجع) تعیین می‌کند. انتخاب خاص نمایش گروهی، نوع هندسی یک میدان بردار ویژگی را تعیین می‌کند. مثال‌های معمول میدان‌های اسکالار، بردار یا تانسور هستند، با این حال، انواع میدان عمومی تری نیز در عمل استفاده می‌شوند. شکل ۷ استقلال از مختصات کمیت‌های هندسی را در مثال شناخته شده بردارهای مماس به تصویر می‌کشد.

هر لایه شبکه ملزم به رعایت قوانین تبدیل ویژگی‌های است، یعنی باید تضمین کند که خروجی‌هایش همانطور که انتظار می‌رود تبدیل می‌شوند. به طور خاص برای کانولوشن‌ها، استقلال از مختصات  $GM$  ایجاد می‌کند که اعمال کرنل مشترک نسبت به چارچوب‌های مختلف  $-G$ -ساختار در یک نقطه  $p \in M$  باید پاسخ یکسانی را تا حدی یک تبدیل گیج برانگیزد. مانشان می‌دهیم که این امر نیازمند  $G$ -راهبری (همورادی ۸۶)، کرنل‌های کانولوشن است. به طور شهودی، می‌توان کرنل‌های  $G$ -راهبر را به عنوان اندازه‌گیری ویژگی‌ها به صورت نسبی نسبت به چارچوب‌های مرجع تصور کرد، که این امر ضروری است زیرا هیچ انتخاب چارچوب، یعنی همترازی کرنل مطلق، ارجح نیست.<sup>۱</sup> مثال‌هایی از کرنل‌های  $G$ -راهبر برای گروه بازتاب  $G = \mathcal{R}$  در شکل ۸ نشان داده شده است. شکل ۹ اشتراک گذاری چنین کرنل‌هایی را نسبت به چارچوب‌های مختلف یک ساختار  $\mathcal{R}$  به تصویر می‌کشد. قید  $\mathcal{R}$ -راهبری نوعی تقارن را بر کرنل‌ها تحمیل می‌کند، به طوری که همترازی‌های مختلف واقعاً منجر به پاسخ‌هایی می‌شوند که دقیقاً با تبدیلات گیج  $(g)$  متفاوت هستند. ما در ادامه کانولوشن‌های مستقل از مختصات  $GM$  را به عنوان کانولوشن‌های  $GM$  مخفف می‌کنیم.

علاوه بر اعمال کرنل‌های همورادی گیج، کانولوشن‌های  $GM$  ممکن است همورادی ایزومنتری باشند، به این معنی که با عمل ایزومنتری‌ها بر روی میدان‌های ویژگی جایجا می‌شوند، همانطور که در شکل ۱۰ نشان داده شده است. فرض کنید  $\phi \in \text{Isom}(M)$  یک ایزومنتری (تقارن) از خمینه  $M$

<sup>۱</sup> به شباهت با اصل نسبیت خاص اینشتین توجه کنید، که به جای چارچوب‌های  $G$ -ساختار، برابری چارچوب‌های لخت تکیه دارد.

باشد. یک شبکه عصبی دقیقاً زمانی نسبت به عمل این ایزومنتری همودرا است که الگوها در  $p \in M$  به همان روشنی پردازش شوند که الگوها در  $(p)$  پردازش می‌شوند. بنابراین هموردایی ایزومنتری یک شبکه در تناظر یک به یک با ناورداری ایزومنتری اتصال عصبی آن (میدان کرنل) است؛ به شکل<sup>۲</sup> مراجعة کنید. از آنجا که کانولوشن‌های ما کرنل‌ها را نسبت به چارچوب‌های (دلخواه)  $G$ -ساختار  $GM$  اعمال می‌کنند، تقارن‌های میدان کرنل با تقارن‌های  $G$ -ساختار منطبق هستند. با نشان دادن تقارن‌های (حافظ فاصله) یک  $G$ -ساختار  $GM$  با  $\text{Isom}_{GM} \leq \text{Isom}(M)$  دارد که کانولوشن‌های ما دقیقاً  $\text{Isom}_{GM}$ -همودرا هستند. شکل<sup>۳</sup> این واقعیت را که  $G$ -ساختارها و میدان‌های کرنل متناظر تقارن‌های یکسانی دارند، به تصویر می‌کشد. خواننده تشویق می‌شود که  $G$ -ساختارها را در شکل ۶ با توجه به تقارن‌هایشان و ویژگی‌های هموردایی ضمنی کانولوشن‌های  $G$ -متناظر بررسی کند.

طراحی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات  $GM$  بر روی خمینه‌های ریمانی نیازمند انتخاب یک  $G$ -ساختار است که به ملاحظات متعددی بستگی دارد. اولاً، انتخاب گروه ساختار  $G$  هموردایی گیج محلی کانولوشن را تعیین می‌کند: یک کرنل  $G$ -راهبر به طور خودکار الگوهای آموخته شده را بر روی تمام ژست‌های مرتبط با  $G$  از الگوها تعمیم می‌دهد؛ به شکل<sup>۴</sup> مراجعة کنید. ثانیاً، انتخاب خاص  $G$ -ساختار هموردایی ایزومنتری کانولوشن را تعیین می‌کند. در کاربردهای تصویربرداری پیشکی، الگوها اغلب در دورانه، بازتاب‌ها و موقعیت‌های دلخواه رخ می‌دهند<sup>۵</sup> بنابراین باید یک ساختار  $d$  ناورداری  $\text{Isom}_{GM} = E(d)$  را روی  $\mathbb{R}^d$  انتخاب کرد، مشابه ساختار (۲)  $SO$  که در شکل ۶ نشان داده شده است. تصاویری مانند عکس‌های پرتره یک محور عمومی متمایز دارند، با این حال، بازتاب‌ها حول این محور آمار تصویر را ناورداری گذارند<sup>۶</sup> این امر نیازمند یک ساختار  $\mathcal{R}$  مانند شکل ۶ است. علاوه بر چنین ملاحظات تقارنی، توجه به این نکته مهم است که هر خمینه‌ای (توپولوژی) ساختارهای  $G$  هموار را برای هر انتخاب گروه ساختار  $G$  نمی‌پذیرد. یک مثال نوار موبیوس است که توپولوژی پیچ خورده آن (عدم جهت‌گیری) مانع از تخصیص هموار متغیر جهت‌گیری‌های چارچوب می‌شود. بنابراین یک عملیات کانولوشن مستقل از مختصات هموار بر روی نوار موبیوس لزوماً بر کرنل‌های راهبر-بازتابی تکیه دارد.

این کار شامل یک مرور ادبیات گسترده بر روی شبکه‌های کانولوشنی است که عمومیت نظریه ما را نشان می‌دهد. این بخش انواع مختلفی از CNN‌ها در فضاهای اقلیدسی،  $G$ -ساختارها کروی و کانولوشن‌ها را بر روی سطوح عمومی (مانند متشهدهای سطحی) پوشش می‌دهد. ما انتخاب‌های خاص  $G$ -ساختارها را که به طور ضمنی توسط نویسنده‌گان انجام شده است، با تحلیل ویژگی‌های هموردایی سراسری و محلی مدل‌هایشان شناسایی می‌کنیم. جدول ۶ یک نمای کلی از طبقه‌بندهای حاصل از شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات  $GM$  را ارائه می‌دهد.

برای ارائه یک مثال دقیق در مورد چگونگی نمونه‌سازی کانولوشن‌های  $GM$  را بر روی نوار موبیوس برای  $G = \mathcal{R}$  مورد بحث قرار می‌دهیم. این شامل استخراج کرنل‌های راهبر-بازتابی برای انواع میدان مختلف (نمایش‌های گروهی) و ارزیابی تجربی هموردایی ایزومنتری پیش‌بینی شده نظری است. همانطور که انتظار می‌رود، کانولوشن‌های مستقل از مختصات  $GM$  از پیاده‌سازی ارائه شده بهتر عمل می‌کنند. کد در آدرس <https://github.com/mauriceweiler/MobiusCNNS> موجود است.

یک فرمول‌بندي بدون مختصات از نظریه ما در زبان بندل‌های فیبر ابداع شده است.  $G$ -ساختارها  $Z$ -بندل چارچوب  $FM$  بر روی  $M$  هستند. میدان‌های ویژگی برش‌هایی از بندل‌های بردار ویژگی مرتبط با  $G$  هستند. گیج‌ها تمهیم‌های بندل محلی هستند، در حالی که تبدیلات گیج نگاشت‌های گذار بین چنین تمهیم‌هایی هستند. ایزومنتری‌هایی که یک کانولوشن  $GM$  نسبت به آنها هموردا است، اتومorfیسم‌های بندل اصلی از  $G$ -ساختار هستند.

CNN‌های مستقل از مختصات ما تعمیم‌هایی از CNN‌های راهبر [۷] [۸] [۹] [۱۰] از فضاهای اقلیدسی (یا همگن) به خمینه‌های ریمانی هستند. در حالی که CNN‌های راهبر بر تبدیلات فعل و سراسری میدان‌های ویژگی تمرکز دارند، CNN‌های مستقل از مختصات تبدیلات غیرفعال و محلی بین چارچوب‌های مرجع را در نظر می‌گیرند.<sup>۷</sup> مانند  $G$ -ساختارها از نظریه CNN‌های مستقل از مختصات ("CNNs") های هموردایی گیج<sup>۸</sup> را در کارهای قبلی [۱۱] [۱۲] پیشنهاد کردیم. برخلاف این انتشارات، کار حاضر نظریه را با جزئیات بسیار بیشتری توسعه می‌دهد، آن را بر حسب بندل‌های فیبر فرمول‌بندي می‌کند، هموردایی تحت عمل ایزومنتری‌ها را اثبات می‌کند و یک مرور ادبیات ارائه می‌دهد.

## فهرست مطالب

- ۱ مقدمه
- ۲ مرور کلی و شهود بصری
- ۳ مقدمه‌ای بر شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات
- ۴ بخش اول: مقدمه‌ای بر شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات
- ۵ مقدمه‌ای بر شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات
- ۶ آین شیوه به تغییر تمرکز از کوواریانس لورنس سراسری در نسیبت خاص به کوواریانس لورنس محلی در نسیبت عام است.

۱۵	.....	۱.۳ گیج‌ها، تبدیل‌های گیج و $G$ -ساختارها
۲۳	.....	۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی مستقل از مختصات
۲۶	.....	۳.۳ انتقال موازی بردارهای ویژگی
۲۹	.....	۴.۳ عمل ایزومنتری‌ها و تبدیل‌های گیج القا شده
۳۲	.....	<b>۴ شبکه‌های مستقل از مختصات و <math>\square</math>-کانولوشن‌ها</b>
۳۳	.....	۱.۴ عملیات نقطه‌ای تناوب‌پذیر گیج
۳۶	.....	۲.۴ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های $GM$
۴۵	.....	۳.۴ تناوب‌پذیری ایزومنتری
۴۸	.....	<b>۵ مدل اسباب بازی: کانولوشن‌های مویوس هم‌متغیر انعکاس</b>
۴۸	.....	۱.۵ هندسه نوار مویوس
۵۰	.....	۲.۵ میدان‌های ویژگی مستقل از جهت‌گیری
۵۲	.....	۳.۵ شبکه‌های کانولوشنی مستقل از جهت‌گیری
۵۶	.....	۴.۵ پیاده‌سازی عددی و ارزیابی کانولوشن‌های مویوس
۶۲	.....	<b>بخش دوم: نظریه شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات</b>
۶۲	.....	<b>۶ بندل‌های مرتبط و میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات</b>
۶۳	.....	۱.۶ مقدمه‌ای کوتاه بر کلاف‌های تاری
۶۸	.....	۲.۶ کلاف مماس $TM$ و کلاف چارچوب $FM$
۷۱	.....	۳.۶ ساختارهای $GM$ و کلاف‌های برداری ویژگی وابسته $A$
۷۴	.....	۴.۶ بدیهی‌سازی‌های محلی کلاف $TM$ ، $FM$ و $A$
۷۹	.....	۵.۶ منتقل‌کننده‌های موازی روی کلاف‌های الحقی
۸۲	.....	<b>۷ تبدیلات میدان کرنل مستقل از مختصات و کانولوشن‌های <math>GM</math></b>
۸۳	.....	۱.۷ کانولوشن‌های $GM$ با اندازه $1 \times 1$
۸۷	.....	۲.۷ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های $GM$
۹۴	.....	<b>۸ هم‌متغیری ایزومنتری</b>
۹۵	.....	۱.۸ ایزومنتری‌ها و عمل آنها بر منيفلد‌ها، کلاف‌ها و میدان‌ها
۱۰۷	.....	۲.۸ هم‌متغیری ایزومنتری تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های $GM$
۱۱۳	.....	۳.۸ میدان‌های کرنل خارج قسمتی
۱۲۳	.....	<b>بخش سوم: مروری بر مقالات مرتبط با شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات</b>
۱۲۷	.....	<b>۹ شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات اقلیدسی</b>
۱۲۹	.....	۱.۹ فرمول‌بندی کلاسیک CNN‌های $G$ -هدایت‌پذیر بر روی $\mathbb{R}^d$

۱۳۱	.....	هندسه‌ی افاین فضاهای اقلیدسی $\mathbb{E}_d$	۲.۹
۱۳۷	.....	CNN‌های هموردای گروه افاین در فضاهای اقلیدسی $\mathbb{E}_d$	۳.۹
۱۴۰	.....	CNN‌های اقلیدسی در مقالات	۴.۹
۱۴۳	.....	<b>۱۰ CNN‌های هموردای دورانی در فضاهای اقلیدسی سوراخ‌دار</b>	
۱۴۹	.....	<b>۱۱ CNN‌های کروی مستقل از مختصات</b>	
۱۵۰	.....	۱.۱۱ هندسه‌ی کره-۲-بعدی $S^2$	
۱۵۴	.....	۲.۱۱ CNN‌های کروی کاملاً هموردای دورانی	
۱۵۹	.....	۳.۱۱ CNN‌های کروی هموردای دوران سمتی در توبولوژی‌های استوانه‌ای	
۱۶۳	.....	۴.۱۱ تقریب‌های بیست‌وجهی از CNN‌های کروی	
۱۶۸	.....	<b>۱۲ CNN‌های مستقل از مختصات روی سطوح عمومی</b>	
۱۶۹	.....	۱.۱۲ هندسه‌ی سطوح جایگذاری شده	
۱۷۶	.....	۲.۱۲ کانولوشن‌های سطحی راهبری‌پذیر-دورانی	
۱۸۳	.....	۳.۱۲ کانولوشن‌های- $\{\mathbb{D}\}$ سطحی راهبری‌پذیر	
۱۸۸	.....	۴.۱۲ تقریب‌های بیست‌وجهی از CNN‌های کروی	
۱۹۳	.....	<b>پیوست</b>	
۱۹۳	.....	<b>آ ارتباط با فرمالیسم چارت مختصاتی در هندسه دیفرانسیل</b>	
۱۹۴	.....	۱.آ فضاهای مماس، فضاهای هم‌مماس و پایه‌های دوگان	
۱۹۵	.....	۲.آ دیفرانسیل‌ها، گرادیان‌ها و ژاکوبین‌ها	
۱۹۷	.....	۳.آ پایه‌های مختصاتی القا شده توسط چارت	
۲۰۱	.....	۴.آ پایه‌های مختصاتی به عنوان تربویالیزاسیون‌های محلی کلاف	
۲۰۳	.....	۵.آ $G$ -ساختارها و میدان‌های ویل‌باين	
۲۰۶	.....	<b>ب اشتراک وزن مستقل از مختصات و کرنل‌های <math>G</math>-راهبری‌پذیر</b>	
۲۰۷	.....	<b>پ انگرال‌گیری روی فضاهای مماس</b>	
۲۰۸	.....	<b>ت کانولوشن‌های هموردا روی فضاهای همگن</b>	
۲۱۴	.....	<b>ث میدان‌های کرنل نماینده خارج قسمتی <math>\mathbb{D}</math> اثبات‌ها</b>	
۲۱۹	.....	<b>ج کانولوشن‌های راهبری‌پذیر کروی به عنوان کانولوشن‌های <math>\mathbb{D}</math> اثبات‌ها</b>	
۲۲۳	.....	<b>چ وجود و همواری تبدیلات میدان کرنل</b>	
۲۲۵	.....	<b>ح میدان‌های ویژگی منظم به عنوان توابع اسکالر روی <math>G</math>-ساختار</b>	

این کار در قالب یک مقدمه، سه بخش اصلی و یک پیوست سازماندهی شده است.

بخش اول تلاش می‌کند شبکه‌های عصبی مستقل از مختصات را با زبانی آسان معرفی کند. میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه نسبت به مختصات محلی (تسهیم‌های بندل) بیان می‌شوند. استقلال مختصات مورد نیاز، مستلزم آن است که ویژگی‌ها با یک قانون تبدیل خاصی مرتبط باشند. لایه‌های شبکه ملزم به تضمین رفتار تبدیل صحیح و ویژگی‌ها هستند.

بخش دوم نظریه شبکه‌های عصبی مستقل از مختصات را بر حسب بندل‌های فیبر رسمی سازی می‌کند. این امر امکان فرمول‌بندی سراسری و مستقل از مختصات را فراهم می‌کند، که به ویژه هنگام بررسی تناوب پذیری ایزومنتری شبکه‌ها مفید است. تعاریف از بخش اول با بیان عملیات مستقل از مختصات در تسهیم‌های بندل محلی (مختصات) بازیابی می‌شوند.

بخش سوم نظریه ما را در کارهای مرتبط جای می‌دهد. این بخش بررسی‌های مفصلی از معماری‌های شبکه کانولوشنی بر روی هندسه‌های مختلف ارائه می‌دهد و آن‌ها را به عنوان شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات فرمول‌بندی مجدد می‌کند. برای تمهیل توسعه معماری‌های شبکه جدید، ما ویژگی‌های مربوط به هندسه‌های خاص را قبل از بررسی شبکه‌هایی که بر روی آن‌ها عمل می‌کنند، مورد بحث قرار می‌دهیم.

خواننده می‌تواند بخش دوم را در مرحله اول نادیده بگیرد فرمول‌بندی از بخش اول برای خواندن مرواریدیات در بخش سوم کاملاً کافی است. مرواری بر مفاهیم و نتایج اصلی کار ما در بخش ۲ زیر ارائه شده است. این مرواری از معادلات پرهیز می‌کند و بر شهود هندسی از طریق بصری‌سازی‌ها تکیه دارد. امیدواریم این بخش به مخاطبان غیرتخصصی کمک کند تا ایده‌ای از محتوای کار ما به دست آورند.

## مروارید جزئیات

**بخش اول:** هدف بخش ۳ ابداع فضاهای ویژگی مستقل از مختصات است. به طور خاص، بخش ۱.۳ گیج‌ها، تبدیل‌های گیج و  $G$ -ساخترها را معرفی می‌کند. گیج‌ها روشی رسمی برای بیان بردارهای مماس (مستقل از مختصات) و توابع روی فضاهای مماس نسبت به چارچوب‌های مرجع هستند. تبدیل‌های گیج بین این عبارات مختصاتی در گیج‌های مختلف ترجمه می‌کنند. بخش ۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی مستقل از مختصات را معرفی می‌کند. همانند مورد بردارهای مماس، ضرایب عددی بردارهای ویژگی هنگام انتقال بین چارچوب‌های مرجع تغییر می‌کنند. قوانین تبدیل بردارهای ویژگی به ویژه انتقال موازی آن‌ها و پیش‌برداری آن‌ها عمل توسط ایزومنتری‌ها را تعیین می‌کنند، که به ترتیب در بخش‌های ۳.۳ و ۴.۳ توضیح داده شده‌اند.

بخش ۴ شبکه‌های عصبی را که بین میدان‌های ویژگی نگاشت می‌کنند، توسعه می‌دهد. عملیات نقطه‌ای، مانند جمع بایاس، کانولوشن‌های  $1 \times 1$  و غیرخطی‌ها، در بخش ۱.۴ مورد بحث قرار می‌گیرند. بخش ۲.۴ بر روی کانولوشن‌ها با کرنل‌های گستردۀ فضایی تمرکز می‌کند. هر یک از این عملیات در ابتدا بدون فرض اشتراک وزن معرفی می‌شوند، یعنی به عنوان مثال، اجازه یک کرنل متفاوت در هر نقطه از منیفولد را می‌دهن. این کرنل‌ها (یا بایاس‌ها یا غیرخطی‌ها) به هیچ وجه محدود نمی‌شوند. با این حال، هنگام نیاز به اشتراک وزن فضایی، آن‌ها مجبور می‌شوند که تناوب پذیر گیج باشد زیرا تنها مقادیر تناوب پذیر می‌توانند به صورت مستقل از مختصات به اشتراک گذاشته شوند. بخش ۳.۴ یک اثبات مختصر از تناوب پذیری ایزومنتری کانولوشن‌های  $GM$  را بر حسب عبارات مختصاتی محلی ارائه می‌دهد. ایده اصلی در اینجا این است که ایزومنتری‌ها را می‌توان به عنوان القاگذار تبدیل‌های گیج (تفسیر منفعل) در نظر گرفت، که با تناوب پذیری گیج کرنل‌ها توضیح داده می‌شود.

بخش ۵ پیاده‌سازی کانولوشن‌های مستقل از جهت گیری بر روی هندسه نوار موبیوس در بخش ۱.۵، انواع مختلفی از میدان‌های ویژگی در بخش ۲.۵ تعریف می‌شوند. بخش ۳.۵ بعدی، شبکه‌های کانولوشنی مستقل از جهت گیری را به صورت تحلیلی توصیف می‌کند. به طور خاص، ما کرنل‌های کانولوشنی تناوب پذیر گیج، بایاس‌ها و غیرخطی‌ها را برای هر یک از انواع میدان استخراج می‌کیم. بخش ۴.۵ با یک پیاده‌سازی و ارزیابی عددی مدل‌های مربوطه به پایان می‌رسد.

**بخش ۶:** بخش ۳ را بازتاب می‌دهد، با این حال، به صورت سراسری و بر حسب بندل‌های فیبر. مقدمه‌ای کلی بر بندل‌های فیبر در بخش ۱.۶ ارائه شده است. بخش‌های ۲.۶ و ۳.۶ بندل مماس  $TM$ ، بندل چارچوب  $G$ -ساخترها،  $FM$  و  $G$  را معرفی می‌کنند. میدان‌های ویژگی بندل‌های بردار ویژگی تعریف می‌شوند. تسهیم‌های بندل محلی ( $A$ ) را معرفی می‌کنند. میدان‌های ویژگی به صورت سراسری به عنوان برش‌هایی از بندل‌های بردار ویژگی تعریف می‌شوند. گیج‌ها، که در بخش ۴.۶ مورد بحث قرار گرفته‌اند، این بندل‌ها را در مختصات بیان می‌کنند و بدین ترتیب تعاریف ما از بخش ۳ را بازیابی می‌کنند. ما به طور خاص نشان می‌دهیم که چگونه تسهیم‌های محلی بندل‌های مختلف یکدیگر را القا می‌کنند، به طوری که تبدیل‌های گیج (نگاشت‌های انتقال) آن‌ها همگام‌سازی می‌شوند. بخش ۵.۶ انتقال دهنده‌های موازی در  $G$ -بندل‌ها را مورد بحث قرار می‌دهد.

بخش ۷ شبکه‌های مستقل از مختصات از بخش ۴ را بر حسب بندل‌های فیبر بازنویسی می‌کند. کانولوشن‌های  $1 \times 1$  در بخش ۱.۷ به عنوان مورفیسم‌های مشخص بندل برداری  $M$  توصیف می‌شوند. به طور جایگزین، آن‌ها را می‌توان به عنوان برش‌هایی از یک بندل همومورفیسم مشاهده کرد. بخش ۲.۷ میدان‌های کرنل مستقل از مختصات و تبدیل‌های میدان کرنل را معرفی می‌کند. این عملیات مشابه کانولوشن‌های  $GM$  هستند اما نیازی به اشتراک وزن ندارند، یعنی ممکن است در هر مکان فضایی یک کرنل متفاوت اعمال کنند. یک میدان کرنل کانولوشن‌های  $GM$  با اشتراک یک کرنل  $G$ -استبریبل (تناوب پذیر گیج) منفرد در سراسر منیفولد ساخته می‌شود. سپس کانولوشن‌های  $GM$  به عنوان تبدیل‌های میدان کرنل با میدان‌های  $G$ -کرنل کانولوشنی تعریف می‌شوند. هنگام بیان فرمول‌بندی مستقل از مختصات کانولوشن‌های  $GM$  نسبت به تسهیم‌های محلی (گیج‌ها)، عبارات مختصاتی کانولوشن‌های  $GM$  را از بخش ۲.۴ بازیابی می‌کیم.

تناوب پذیری ایزومتری کانولوشن‌های  $GM$  در بخش ۸ بررسی می‌شود. پس از معرفی ایزومتری‌ها، بخش ۱۸ عمل پیش‌برنده آن‌ها را بر روی بندل‌های فیبر مورد بحث قرار می‌دهد. این عمل نیز می‌تواند در تسهیم‌های محلی بیان شود، که منجر به فرمول‌بندی از بخش ۴.۳ می‌شود. بخش ۲۸ عمل ایزومتری‌ها بر روی میدان‌های کرنل را تعریف می‌کند و ثابت می‌کند که تناوب پذیری ایزومتری یک تبدیل میدان کرنل، ناوردایی ایزومتری میدان کرنل آن را نتیجه می‌دهد و بالعکس. کانولوشن‌های  $GM$  ثابت شده‌اند که تحت عمل آن ایزومتری‌هایی که اتمورفیسم‌های بندلی (تقارن‌ها) از  $G$ -ساختار هستند، تناوب پذیر می‌باشد. بخش ۳۸ میدان‌های کرنل ناوردا با ایزومتری را با جزئیات بیشتری بررسی می‌کند و ثابت می‌کند که آن‌ها معادل میدان‌های کرنل در فضاهای خارج قسمتی از عمل ایزومتری هستند<sup>۲</sup> به طور شهودی، میدان‌های کرنل ناوردا با ایزومتری ملزم به اشتراک کرنل‌ها بر روی مدارات استند، تناوب پذیر می‌باشد. بخش ۳۸ میدان‌های کرنل ناوردا با ایزومتری را با جزئیات بیشتری بررسی می‌کند و ثابت می‌کند که آن‌ها معادل میدان‌های کرنل در فضاهای خارج قسمتی از عمل ایزومتری هستند<sup>۲</sup> به طور شهودی، میدان‌های کرنل ناوردا با ایزومتری ملزم به اشتراک کرنل‌ها بر روی مدارات استند. این نتیجه به ویژه دلالت دارد که تبدیل‌های میدان کرنل تناوب پذیر ایزومتری در فضاهای همگن لزوماً کانولوشن‌های  $GM$  هستند.

**بخش سوم:** بخش سوم این کار نشان می‌دهد که تعداد زیادی از شبکه‌های کانولوشنی از ادبیات را می‌توان به عنوان اعمال کانولوشن‌های  $GM$  برای انتخاب خاصی از  $G$ -ساختار و انواع میدان تفسیر کرد. این بخش با بحثی کلی در مورد انتخاب‌های طراحی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات آغاز می‌شود. جدول ۶ مروری و طبقه‌بندی از مدل‌های مورد بررسی را ارائه می‌دهد. خوانده دعوت می‌شود که به  $G$ -ساختارهای بصری سازی شده در بخش سوم نگاهی بیندازد زیرا اینها ایده شهودی در مورد ویژگی‌های کانولوشن‌های  $GM$  مربوطه ارائه می‌دهند.

شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی که نه تنها تناوب پذیر ایزومتری هستند بلکه به طور کلی تر تحت عمل گروه‌های آفین تناوب پذیر هستند، در بخش ۹ بررسی می‌شوند. این مدل‌ها اساساً معادل شبکه‌های کانولوشنی استیریل در فضاهای برداری اقلیدسی  $\mathbb{R}^d$  هستند. بخش ۱.۹ شبکه‌های کانولوشنی استیریل را بررسی می‌کند و ارتباط آن‌ها با کانولوشن‌های  $GM$  را مورد بحث قرار می‌دهد. این رویکرد تا حدی ناطلوب است زیرا  $\mathbb{R}^d$  با یک میدان چارچوب کانونی (ساختار  $\{e\}$ ) همراه است، که به طور ضمنی توسط مدل‌های تناوب پذیر نایدیه گرفته می‌شود. بخش ۲.۹ رویکردی اصولی تر را در پیش می‌گیرد و فضاهای آفین اقلیدسی  $E_d$  را تعریف می‌کند که دقیقاً با  $G$ -ساختارهایی مجذب شده‌اند که منجر به کانولوشن‌های  $GM$  تناوب پذیر  $Aff(G)$  می‌شوند. کانولوشن‌های واقعی  $GM$  در بخش ۳.۹ تعریف می‌شوند. بخش ۴.۹ شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی تناوب پذیر آفین را که در ادبیات یافت می‌شوند، بررسی می‌کند. آن‌ها عمدتاً در انتخاب‌های مفروض گروه‌های ساختار و نمایش‌های گروهی متفاوت هستند.

بخش ۱۰ شبکه‌های کانولوشنی را در فضاهای اقلیدسی سوراخ دار  $\{\cdot\}_{E_d}$ ، که مبدأ  $\{\cdot\}_0$  آن‌ها حذف شده است، پوشش می‌دهد. این مدل‌ها نسبت به چرخش حول مبدأ تناوب پذیر هستند، با این حال، نسبت به انتقال تناوب پذیر نیستند. آن‌ها بر اساس  $G$ -ساختارهایی هستند که با مختصات نقطی، مختصات لکاریتمی-قطبی یا مختصات کروی مطابقت دارند.

شبکه‌های کانولوشنی کروی در بخش ۱۱ پوشش داده می‌شوند. بخش ۱.۱۱ هنسه ۲-کره (جاسازی شده)  $S^3$  را مورد بحث قرار می‌دهد. با تفسیر فضاهای مماس به عنوان زیرفضاهای دو بعدی یک فضای جاسازی  $\mathbb{R}^3$  عبارت فرم بسته نگاشته‌های نمایی و لکاریتمی، چارچوب‌ها، گیج‌ها، انتقال دهنده‌ها و عمل ایزومتری را استخراج می‌کیم. بخش ۲.۱۱ شبکه‌های کانولوشنی کروی تناوب پذیر  $(SO(3)_3$  را بررسی می‌کند. ما به طور خاص ثابت می‌کنیم که نظریه ما فرمول‌بندی عمومی کانولوشن‌های کروی توسعه  $\mathbb{R}^3$  را به عنوان یک حالت خاص شامل می‌شود. شبکه‌های کانولوشنی کروی که فقط نسبت به چرخش  $(SO(2)_2$  حول یک محور ثابت تناوب پذیر هستند در بخش ۳.۱۱ توصیف می‌شوند. بخش ۴.۱۲ شبکه‌های کانولوشنی بیست و چهاری را بررسی می‌کند. بیست و چهاری که را تقریب می‌زند اما از وجود محلی مسطح تشکیل شده است که امکان پیاده‌سازی کارآمد عملیات کانولوشن را فراهم می‌کند.

یک بررسی از شبکه‌های کانولوشنی بر روی سطوح دو بعدی عمومی در بخش ۱۲ یافت می‌شود. بخش ۱.۱۲ مقدمه‌ای کوتاه بر هندسه دیفرانسیل کلاسیک سطوح جاسازی شده و گسته‌سازی آن‌ها بر حسب شبکه‌های مماثل ارائه می‌دهد. کانولوشن‌های سطحی در ادبیات به دو دسته طبقه‌بندی می‌شوند: دسته اول، که در بخش ۲.۱۲ پوشش داده شده است، بر اساس کرنل‌های  $G = SO(2)$ -استیریل است. این مدل‌ها مستقل از انتخاب خاص چارچوب متعامد راست گرد هستند. بخش ۳.۱۲ دسته دوم مدل‌ها را بررسی می‌کند که بر اساس کرنل‌های  $\{e\}$ -استیریل، یعنی غیرتناوب پذیر هستند. این مدل‌ها به صراحت بر انتخاب یک میدان چارچوب تکیه دارند. بنابراین آن‌ها عمدتاً در روش‌های اکتشافی که برای تعیین چارچوب‌های مرجع استفاده می‌شوند، تفاوت دارند. توجه داشته باشید که چنین مدل‌هایی لزوماً در منفرداتی غیرقابل موازی‌سازی مانند کره‌های توپولوژیکی ناپیوسته هستند.

#### پیوست: پیوست شامل اطلاعات اضافی و اثبات‌های طولانی است.

گیج‌ها به صورت رسمی تخصیص فوری چارچوب‌های مرجع به فضاهای مماس را انجام می‌دهند اما به نقاط روی منقوّل به صورت مستقل از مختصات اشاره دارند. یک جایگزین محبوب انتخاب چارت‌های مختصاتی است که به اصطلاح پایه‌های مختصاتی (پایه‌های هولونومیک) فضاهای مماس را القا می‌کنند. پیوست آ مقدمه‌ای بر فرمالیسم چارت‌ها ارائه می‌دهد و آن را با فرمالیسم گیج کلی تر مرتبط می‌کند.

پیوست ب درباره استقلال مختصات کرنل‌ها و اشتراک وزن در امتداد چارچوب‌های مرجع توضیح می‌دهد. اشتراک وزن مستقل از مختصات  $GM$  فقط برای کرنل‌های  $G$ -استیریل امکان‌پذیر است.

کانولوشن‌های  $GM$  با بیان میدان‌های ویژگی در مختصات نرمال ژنوزدیک محاسبه می‌شوند، جایی که آن‌ها با کرنل‌های کانولوشنی  $G$ -استیریل مطابقت داده می‌شوند. این فرآیند شامل یک انتگرال گیری بر روی فضاهای مماس است که در پیوست پ توصیف شده است.

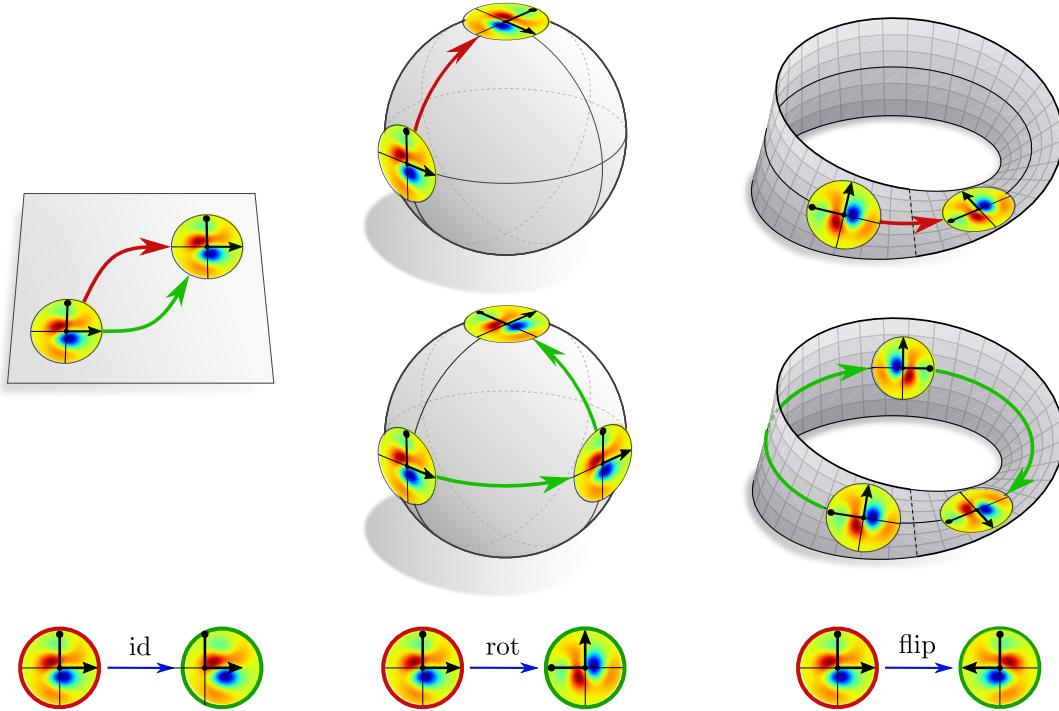
۹ [۴] و [۵] نظریه‌های نسبتاً عمومی از کانولوشن‌ها بر روی فضاهای همگن را پیشنهاد کردند. از آنجا که این مدل‌ها وزن‌ها را از طریق عمل یک گروه تقارنی به اشتراک می‌گذارند، آن‌ها سیار شیوه به تبدیل‌های میدان کرنل تناوب‌پذیر ایزومنتری ما از بخش‌های ۲۸ و ۳۸ هستند. پیوست ت این مدل‌ها را بررسی می‌کند و توضیح می‌دهد که چگونه آن‌ها با کانولوشن‌های  $GM$  مرتبط هستند.

ثابت می‌کند که میدان‌های کرنل ناوردا با ایزومنتری در منیفولد معادل میدان‌های کرنل در فضاهای خارج‌قسمتی از عمل ایزومنتری هستند. حالات خاص فضاهای همگن، که در آن‌ها تبدیل‌های میدان کرنل تناوب‌پذیر ایزومنتری معادل کانولوشن‌های  $GM$  هستند، در پیوست ث. ۲ پوشش داده شده است.

کانولوشن‌های کروی [۶] در پیوست ج ثابت شده‌اند که یک حالت خاص از کانولوشن‌های  $GM$  کروی ما هستند □ بنابراین هر شبکه کانولوشنی کروی که توسط نظریه آن‌ها پوشش داده می‌شود، توسط نظریه ما نیز توضیح داده می‌شود.

پیوست چ تأکید می‌کند که تبدیل‌های میدان کرنل و کانولوشن‌های  $GM$  ما به خوبی تعریف شده‌اند اگر میدان کرنل هموار باشد و شامل کرنل‌های با پشتیبانی فشرده باشد. "به خوبی تعریف شده" در اینجا به این معنی است که انتگرال‌ها وجود دارند و میدان‌های ویژگی حاصل هموار هستند.

در نهایت، پیوست ح استدلال می‌کند که میدان‌های ویژگی که مطابق با نمایش منظم گروه ساختار  $G$  تبدیل می‌شوند، معادل میدان‌های اسکالار بر روی  $G$ -ساختار هستند. این موضوع از آن جهت اهمیت دارد که برخی مدل‌ها، به ویژه کانولوشن‌های گروهی، این دیدگاه را اتخاذ می‌کنند.



شکل ۴: شهودی در مورد ابهام ذاتی اشتراک وزن در منیفلدهایی. چپ: یک تفسیر رایج از اشتراک وزن در صفحه، جایجاًی یک کرنل در کل فضاست. از آنجا که انتقال موازی در فضاهای مسطح مستقل از مسیر است، این امر بدون ابهام است. وسط: در فضاهای خمیده، مانند کره، انتقال موازی وابسته به مسیر است. مسیرهای مختلف منجر به کرنل‌های می‌شوند که نسبت به یکدیگر چرخانده شده‌اند. راست: نوار مویوس یک منیفلد غرقابل جهت‌گیری است. بنابراین، مسیرهای مختلف می‌توانند منجر به کرنل‌های می‌شوند که نسبت به یکدیگر بازتاب یافته‌اند. پایین: ما ترازهای مختلف کرنل را با انتخاب‌های مختلف چارچوب‌هایی مرجع محلی از فضاهای مماس مربوطه رسمی‌سازی می‌کنیم. به خوبی شناخته شده است که هیچ انتخابی از چارچوب‌های مرجع (گیج) در منیفلدهای عمومی ارجح نیست. مختصات بندی‌های مختلف با تبدیلهای گیج مرتبط هستند، که مقادیری در گروه ساختار  $G$  منیفلد (گروه بدیهی)  $\{e\}$  برای صفحه، گروه چرخش  $(2)$  برای کره و گروه بازتاب  $R = \mathcal{R}$  برای نوار مویوس می‌گیرند. شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات، ابهام چارچوب‌های مرجع را با اعمال کرنل‌های کانولوشنی  $G$ -استریبل (تاوب‌پذیر گیج) برطرف می‌کنند.

## ۲ مرور کلی و شهود بصری

فرمول‌بندی جبری شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات نیازمند آشنایی با نظریه گروه‌ها، نظریه نمایش‌ها و هندسه دیفرانسیل است که ممکن است برای مخاطبان غیرتخصصی مانع ایجاد کند. با این حال، بیشتر ساختارها و نتایج ما از نظر هندسه سیار شهودی هستند و می‌توان آن‌ها را با چند مثال بصری توضیح داد. این بخش تلاش می‌کند تا مژویری کلی و شهود بصری در مورد شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات ارائه دهد.

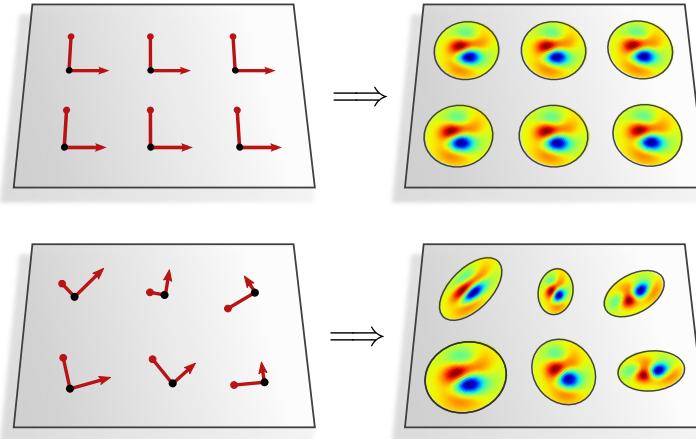
بخش ۱.۲ زیر، کانولوشن‌های مستقل از مختصات  $GM$  را در منیفلدهای ریمانی معرفی می‌کند. تاوب‌پذیری آن‌ها تحت عمل ایزو متري‌ها در بخش ۱.۲ در مورد بحث قرار می‌گیرد. بخش ۱.۲ در مورد عواملی که بر انتخاب  $G$ -ساختار در طراحی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات تأثیر می‌گذارند، توضیح می‌دهد.

### ۱.۲ ساختارها و کانولوشن‌های مستقل از مختصات

از آنجا که کانولوشن‌ها اساساً با خاصیت اشتراک وزن خود مشخص می‌شوند، یک سؤال اصلی در این کار این است: چگونه باید کرنل‌های کانولوشن بر روی منیفلدهای ریمانی به اشتراک گذاشته شوند؟<sup>۳</sup>

یک رویکرد رایج به اشتراک گذاشتن وزن‌ها از طریق عمل یک گروه تقارنی از فضای زیرین است [4]. به عنوان مثال، شبکه‌های کانولوشنی سنتی وزن‌ها را با جایجاًی کرنل‌ها روی صفحه به اشتراک می‌گذارند، در حالی که شبکه‌های کانولوشنی کروی وزن‌ها را با چرخش کرنل‌ها روی کره

<sup>۳</sup> این سؤال به طور کلی تر برای هر تابع قالب محلی، به عنوان مثال بایاس‌ها یا غیرخطی‌های نقطه‌ای نیز کاربرد دارد.



شکل ۵: یک ویژگی کلیدی کانولوشن‌ها این است که آن‌ها وزن‌ها را در سراسر منفولد به اشتراک می‌گذارند. ما تراز یک کرنل در  $p \in M$  را با انتخاب یک چارچوب مرجع  $\square$  یا گیج  $\square$  از فضای مماس مربوطه  $T_p M$  شناسایی می‌کیم. بنابراین میدان‌های چارچوب مختلف دلالت بر میدان‌های کرنل (کانولوشنی) متفاوتی دارند.

انتخاب چارچوب‌ها اغلب منحصر به فرد است. ابهام در این انتخاب با  $G$ -ساختارها رسمی‌سازی می‌شود؛ به شکل ۶ مراجعه کنید. برای در نظر گرفتن اختیاری بودن چارچوب‌ها، کرنل‌ها ملزم می‌شوند که  $G$ -استبریل (تناوب‌پذیر) باشند، همانطور که در اشکال ۴ و ۵ بصری‌سازی شده است.

به اشتراک‌گذاردن. برای به اشتراک‌گذاشتن یک کرنل در کل فضای عمل گروه تقارنی باید متعددی باشد. از آنجا که این امر به طور کلی برای ایزومنتری‌های منیفلدهای ریمانی صادق نیست، این استراتژی برای هدف ما رد می‌شود.

اشتراک وزن از طریق انتقال اشتراک‌کرنل در فضاهای اقلیدسی اغلب به عنوان "جایجایی" یک کرنل در نظر گرفته می‌شود. از آنجا که در فضاهای مسطح انتقال موازی مستقل از مسیر انتخاب شده است، این امر منجر به تراز بدون ابهام کرنل‌ها می‌شود؛ به شکل ۴ (چپ) مراجعه کنید. با این حال، در فضاهای خمیده یا غیرقابل جهت‌گیری، انتقال موازی وابسته به مسیر می‌شود و بنابراین برای اشتراک وزن نامناسب است. شکل ۴ (وسط و راست) این مشکل را برای کره و نوار مویوس مثال می‌زند، جایی که مسیرهای مختلف منجر به تراز متفاوتی از کرنل می‌شوند.

از آنجا که مفهوم "ترازهای کرنل" تا حدی مبهم است ابتدا باید آن را از نظر ریاضی دقیق کنیم:

ما انتخاب تراز کرنل در نقطه‌ای  $p \in M$

را به عنوان انتخاب یک چارچوب مرجع محلی (گیج) از فضای مماس مربوطه  $T_p M$  رسمی‌سازی می‌کنیم.

یک چارچوب مرجع در  $p \in M$  یک تاپل مرتب  $[e_1, e_2, \dots, e_d]$  با  $\dim(M) = d$  است که به عنوان محورهای چارچوب نامیده می‌شوند. از آنجا که چارچوب‌های مختلف در  $p$  با تبدیل‌های خطی مرتبط هستند، انتخاب‌های مختلف چارچوب‌ها با تغییر شکل‌های کرنل خطی مطابقت دارند. شکل ۵ دو انتخاب مختلف از میدان‌های چارچوب را در  $\mathbb{R}^3$  نشان می‌دهد. به اشتراک‌گذاشتن یک کرنل کانولوشنی در امتداد این میدان‌های چارچوب منجر به میدان‌های کرنل (کانولوشنی) مربوطه می‌شود.

شناسایی ترازهای کرنل با چارچوب‌های مرجع این سؤال را مطرح می‌کند:

انتخاب چارچوب‌های مرجع محلی بر روی یک منفولد (ریمانی) تا چه حد مبهم است؟

همانطور که در ادامه توضیح داده می‌شود، ابهام چارچوب‌های مرجع توسط یک  $G$ -ساختار که منفولد به آن مجهز است، تعیین می‌شود.

## ۱.۱.۲ $\square$ -ساختارها

فضای همه چارچوب‌های ممکن  $F_p M$  با عنوان  $T_p M$  نشان داده می‌شود. با هم، چارچوب‌های همه فضاهای مماس، بندل چارچوب  $FM$  را تشکیل می‌دهند؛ به شکل ۲۶ مراجعه کنید. هیچ انتخاب خاصی از چارچوب‌ها در  $FM$  بر روی یک منفولد هموار "عربان" (بدون ساختار هندسی اضافی) ترجیح داده نمی‌شود، که ابهام تراز کرنل‌ها را حداکثری می‌کند. برای رفع ابهام چارچوب‌ها و ترازهای کرنل، منفولد، مینفولد با ساختار هندسی اضافی مجهز شود.

یک منفولد ریمانی یا ساختار متریک مجهز شده است. با ارائه یک حاصل ضرب داخلی (متریک ریمانی) بر روی فضاهای مماس، این ساختار امکان شناسایی چارچوب‌های خاصی را می‌دهد که محورهای آن‌ها متعادل با یکدیگر هستند. تبدیل‌های گیج، یعنی تبدیل‌ها بین انتخاب‌های چارچوب‌های مرجع (به اشکال ۴ و ۷ مراجعه کنید)، سپس مقادیری در گروه متعادل  $d$  می‌گیرند. در منیفلدهای ریمانی، تراز کرنل‌ها همیشه تا چرخش‌ها و بازتاب‌ها بدون ابهام است.

شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی کرنل‌های کانولوشن (و در نتیجه چارچوب‌ها) را تراز می‌کنند موازی با یکدیگر همانطور که در شکل ۵ (بالا) بصری‌سازی شده است. شبکه‌های کانولوشنی کروی معمولاً ترازهای کرنل را تا چرخش‌ها بدون ابهام می‌کنند، یعنی آن‌ها یک دست پری ترجیحی از چارچوب‌های مرجع را فرض می‌کنند. ساختار متریک به تنهایی برای توصیف این تنظیمات کافی نیست، که نشان می‌دهد این منیفلدهایی با ساختار هندسی اضافی علاوه بر ساختار متریک مجهز شده‌اند. ما پیشنهاد می‌کنیم که چارچوب ریاضی مناسب،  $G$ -ساختارها است و فرض می‌کنیم:

ابهام در انتخاب چارچوب‌های مرجع (و در نتیجه ترازهای کرنل)  
بر روی یک مینیفولد  $G$ -ساختار  $GM$  با.

$G$ -ساختارها  $GM$  بندل‌هایی از چارچوب‌های مرجع متمایز بر روی  $M$  هستند به طوری که تبدیل‌های گیج بین چارچوب‌های یک فضای مماس واحد، مقادیری در گروه ساختار  $(d) \leq GL$  می‌گیرند. به طور شهودی، می‌توان مجموعه  $G_p M$  چارچوب‌های  $T_p M$  را "شیه"  $G'$  دانست، با این حال، بدون یک مبدأ متمایز.<sup>۴</sup>

بندل چارچوب خود یک  $FM$ -ساختار با  $GL(d)$  است، در حالی که بندل چارچوب‌های متعمد  $OM$  یک  $G$ -ساختار (ساختار متريک) با  $d = G =$  است. شبکه‌های کاتولوشنی اقلیدسی سنتی بر روی ميدان چارچوب کانونی در  $\mathbb{R}^d$  که در شکل ۲۶ نشان داده شده است، تکیه دارند که یک  $G$ -ساختار برای گروه بدینه  $\{e\} = G$  است. شکل ۶  $G$ -ساختارها را برای مینیفولدهای بیشتر و گروه‌های ساختار دیگر بصری سازی می‌کند. مروری بر گروه‌های ساختار رایج در جدول ۱ در بخش ۳.۱.۳ یافت می‌شود.

ما در ادامه همیشه مینیفولدهای ریمانی را مجهز به یک  $G$ -ساختار اضافی در کنار ساختار متريک خود فرض خواهیم کرد.<sup>۵</sup> انتخاب خاص  $G$ -ساختار خواص شبکه عصبی را تعیین می‌کند؛ ما در مورد این انتخاب در بخش ۳.۲ زیر توضیح خواهیم داد.

## ۲.۱.۲ شبکه‌های مستقل از مختصات

هدف ما طراحی شبکه‌های عصبی بر روی یک مینیفولد ریمانی با یک  $G$ -ساختار اضافی است. اگر گروه ساختار  $G$  بدینه نباشد، هیچ انتخاب کانونی از چارچوب‌های مرجع (گیج) وجود ندارد. با این حال، برای انجام محاسبات عددی، برخی گیج، که کرنل‌ها و ویژگی‌ها نسبت به آن بیان می‌شوند، باید انتخاب شود. از آنجا که این انتخاب ذاتاً دلخواه است، ما تقاضا می‌کنیم که استنتاج شبکه‌ها در نهایت نباید به آن وابسته باشد، یعنی ما بایان داریم:

شبکه‌های عصبی بر روی یک مینیفولد ریمانی با  $G$ -ساختار  
باید بر اساس عملیات "مستقل از مختصات"  $GM$  باشند.

"استقلال از مختصات  $GM$ " در اینجا به این معنی است که همه کمیت‌های هندسی و توابع بین آن‌ها باید به همان اندازه به خوبی در هر گیج قابل بیان باشند، یعنی نسبت به هر انتخابی از چارچوب‌های ساختار،  $\{e\} = G$ -ساختار. حالت خاص ضرایب بردار مماس و تبدیل‌های گیج بین آن‌ها در شکل ۷ بصری‌سازی شده است. شکل ۲۱.۳ مثالی از یک نگاشت خطی و نمایش مستقل از مختصات آن بر حسب ماتریس‌ها نسبت به چارچوب‌های مختلف را نشان می‌دهد.

توجه داشته باشید که نیاز به استقلال از مختصات  $GM$  کاملاً اعطاف‌پذیر است: برای  $GM = FM$ ،  $G = GL(d)$  را داریم و بنابراین حداکثر سطح استقلال از مختصات را. در انتهای دیگر طیف گروه‌های ساختار،  $\{e\} = G$  قرار دارد، که برای آن  $GM$  یک ميدان چارچوب ثابت است و استقلال از مختصات  $GM$  به وابستگی صریح به مختصات کاشه می‌باشد. آزادی انتخاب  $G$ -ساختارهای دلخواه امکان کنترل دقیق بر استقلال از مختصات شبکه‌ها را فراهم می‌کند، که در عمل به طور گسترده‌ای متفاوت است؛ به عنوان مثال به جدول ۶ در بخش سوم مراجعه کنید.

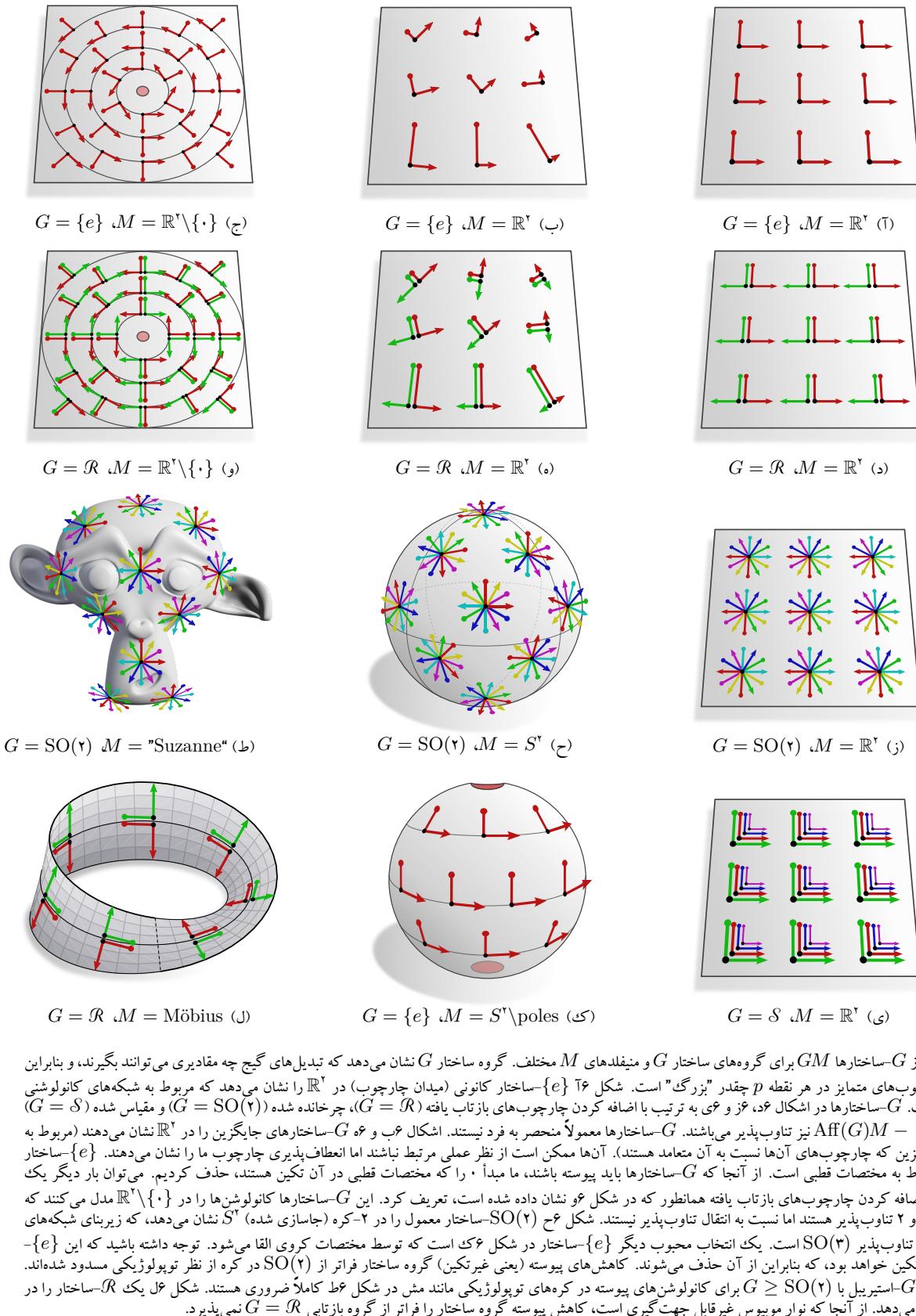
شبکه‌های میدان‌های بردار ویژگی را بر روی مینیفولد پردازش می‌کنند. بردارهای ویژگی کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات هستند، مانند بردارهای مماس. نسبت به یک چارچوب (گیج) انتخاب شده، آن‌ها را می‌توان با بردارهای ضربه عددی نمایش داد. نیاز به استقلال از مختصات  $GM$  ایجاب می‌کند که ضرایب عددی در گیج‌های مختلف، محتوای اطلاعاتی یکسانی را کدگذاری کنند. این امر به طور طبیعی با مرتبط کردن ویژگی‌ها با یک نمایش گروهی  $\rho$  از گروه ساختار  $G$  حاصل می‌شود که قانون تبدیل ضرایب آن‌ها را تحت تبدیل‌های گیج تعیین می‌کند:

میدان‌های بردار ویژگی یا یک نمایش  $G(\rho)$  مرتبط هستند که  
قانون تبدیل ضرایب عددی آن‌ها را هنگام تبدیل بین چارچوب‌های مرجع مشخص می‌کند.  
از نظر فنی، میدان‌های ویژگی برش‌هایی از بندل‌های بردار ویژگی مرتبط با  $G$  هستند.

مثال‌های معمول میدان‌های اسکالر، میدان‌های بردار مماس یا سایر میدان‌های تانسور هستند، با این حال، هر قانون تبدیلی مجاز است و می‌تواند توسط کاربر انتخاب شود. انتخاب‌های رایج دیگر برای  $\rho$  در زمینه یادگیری عمیق، نمایش‌های کاهش‌ناپذیر یا منظم هستند؛ مثال‌های بیشتر در جدول ۶ در بخش سوم فهرست شده‌اند.

ما می‌خواهیم تأکید کیم که نیاز به استقلال از مختصات  $GM$  صرفاً یک شرط سازگاری است، که تضمین می‌کند مشاهده‌گران مختلف (چارچوب‌ها) بر روی مشاهده‌هندسی مستقل از مختصات یکسانی توافق دارند. این امر مجموعه توابع مجاز را به هیچ وجه محدود نمی‌کند، بلکه فقط چگونگی ارتباط عبارات آن‌ها نسبت به چارچوب‌های مختلف را مشخص می‌کند. به طور خاص، شبکه‌های عصبی مستقل از مختصات  $GM$  به طور کلی نیازی به تناوب پذیری گیج ندارند. نیاز به تناوب پذیری گیج زمانی مطرح می‌شود که اشتراک وزن و استقلال از مختصات به طور همزمان طلب شود، یعنی کانون‌لوشن‌های مستقل از مختصات  $GM$  بر روی کرنل‌های تناوب پذیر گیج تکیه دارند.

$G$ -ساختار باید با ساختار متريک سازگار باشد به این صورت که چارچوب‌های متمایز در  $GM$  زیرمجموعه‌ای از چارچوب‌های متعمد در  $OM$  باشند زمانی که  $d < G$ . به طور خاص برای  $G = OM$  با ساختار  $GM$  مطبق است و اطلاعات هندسی اضافی را اضافه نمی‌کند.



شکل ۶: نمونه‌ای از  $GM$  برای گروه‌های ساختار  $G$  و منفلاهای  $M$  مختلف. گروه ساختار  $G$  نشان می‌دهد که تبدیل‌های گیج چه مقادیری می‌توانند بگیرند، و بنابراین زیرمجموعه چارچوب‌های متمایز در هر نقطه  $p$  چقبر "بزرگ" است. شکل ۶آ  $\{e\}$ -ساختار کانونی (میدان چارچوب) در  $\mathbb{R}^r$  را نشان می‌دهد که مربوط به شبکه‌های کانونلوشنی اقلیدسی سنتی است.  $G$ -ساختارها در اشکال عد، عز و عی به اضافه کردن چارچوب‌های بازتاب یافته ( $G = \mathcal{R}$ )، چرخانده شده ( $G = \mathcal{S}$ ) و مقیاس شده ( $G = \mathcal{S}$ ) مربوط شده‌اند.  $G$ -ساختارها معقولاً منحصر به فرد نیستند. اشکال عب و عج  $G$ -ساختارها مربوط به متریک جایگزین که چارچوب‌های آنها نسبت به آن معتماد هستند. آن‌ها ممکن است از نظر عملی مرتبط نباشند اما اعطاف‌پذیری چارچوب ما را نشان می‌دهند.  $G$ -ساختارها در شکل عج مربوط به مخصوصات قطبی است. از آنجا که  $G$ -ساختارها باید پیوسته باشند، ما می‌دانیم که مخصوصات قطبی در آن تکین هستند، حذف کردیم. می‌توان بار دیگر یک  $G$ -ساختار را با اضافه کردن چارچوب‌های بازتاب یافته همانطور که در شکل چونشان داده شده است، تعریف کرد. این  $G$ -ساختارها کانونلوشن‌ها را در  $\mathbb{R}^r \setminus \{0\}$  مدل می‌کنند که نسبت به  $\text{SO}(2)$  و  $\text{SO}(2)$ -تاوب‌پذیر مستند اما نسبت به انتقال تاوب‌پذیر نیستند. شکل ۶ج  $\text{SO}(2)$ -ساختار معمول را در ۲-کره (جاسازی شده)  $S^r$  نشان می‌دهد، که زیربنای شبکه‌های کانونلوشنی کروی تاوب‌پذیر  $\text{SO}(3)$  است. یک انتخاب محظوظ دیگر  $\{e\}$ -ساختار در شکل ۶ک است که توسط مخصوصات کروی القا می‌شود. توجه داشته باشید که این  $\{e\}$ -ساختار در قطبین تکین خواهد بود، که بنابراین از آن حذف می‌شوند. کاهش‌های پیوسته (یعنی غیرتکین) گروه ساختار فراتر از  $\text{SO}(2)$  در کره از نظر توپولوژیکی مسدود شده‌اند. بنابراین کرنل‌های  $G$ -استریل با  $G \geq \text{SO}(2)$  برای کانونلوشن‌های پیوسته در کره‌های توپولوژیکی مانند مش در شکل عط کاملاً ضروری هستند. شکل ۶ل یک  $G$ -ساختار را در نوار موبیوس نشان می‌دهد. از آنجا که نوار موبیوس غیرقابل جهت‌گیری است، کاهش پیوسته گروه ساختار را فراتر از گروه بازتابی  $G = \mathcal{R}$  نمی‌پذیرد.

## قدمه‌ای بر شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات

شبکه‌های کانولوشنی سلسله‌مراتبی از میدان‌های ویژگی را از یک سیگنال ورودی بر روی یک مینیفولد استخراج می‌کنند. ویژگی‌ها از طریق کرنل‌ها محاسبه می‌شوند، که برای شناسایی الگوهای فضایی مشخص در ویژگی‌های سطح باین ترتیب بهینه شده‌اند. مقادیر می‌کنیم که این فرآیند استنتاج صرفاً بر اساس آرایش نسبی ویژگی‌ها باشد و مستقل از انتخاب خاص مختصات بندی باشد. بنابراین ویژگی‌ها باید کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات باشند، مشابه اسکالرها، بردارها یا تانسورها. در حالی که چنین کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات وجود دارند، یک پیاده‌سازی کامپیوترا (غیرنمادین) نیازمند آن است که آن‌ها بر حسب ضرایب عددی در برخی گیج، یعنی نسبت به برخی انتخاب از چارچوب مرجع، بیان شوند. انتخاب خاص مختصات بی‌اهمیت است □ این تنها یکی از چندین توصیف معادل است. چارچوب ریاضی مناسب برای تنظیم چنین درجات آزادی اضافی، نظریه‌های گیج هستند. یک نظریه گیج، برای گیج‌های مختلف را با مرتبط کردن سازگار آن‌ها با یکدیگر از طریق تبدیل‌های گیج در نظر می‌گیرد. میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات بنابراین با یک قانون تبدیل خاص، یعنی یک عمل گروهی از گروه ساختار که توصیف می‌کند ویژگی‌ها چگونه تحت تبدیل‌های گیج تبدیل می‌شوند، مرتبط هستند. هر لایه شبکه عصبی که چنین میدان‌های ویژگی را پردازش می‌کند، ملزم به رعایت قوانین تبدیل آن‌ها برای حفظ استقلال از مختصاشان است.

هدف این بخش اول از کار ما، معرفی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات با زبانی آسان است. بنابراین، شهود هندسی و بصری‌سازی‌ها بر فرمالیسم ریاضی ترجیح داده می‌شوند. یک تبیین رسمی تر از تعاریف و نتایج ارائه شده در بخش دوم آورده شده است.

<b>۳ مقدمه‌ای بر شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات</b>	
۱۵	..... ۱.۳ گیج‌ها، تبدیل‌های گیج و $G$ -ساختارها
۱۵	..... ۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی مستقل از مختصات
۲۳	..... ۳.۳ انتقال موازی بردارهای ویژگی
۲۶	..... ۴.۳ عمل ایزومتری‌ها و تبدیل‌های گیج القا شده
<b>۴ شبکه‌های مستقل از مختصات و ۴.۰-کانولوشن‌ها</b>	
۳۲	..... ۱.۴ عملیات نقطه‌ای تناوب‌پذیر گیج
۳۳	..... ۲.۴ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های $GM$
۳۶	..... ۳.۴ تناوب‌پذیری ایزومتری
<b>۵ مدل اسباب بازی: کانولوشن‌های موییوس هم‌متغیر انعکاس</b>	
۴۸	..... ۱.۵ هندسه نوار موییوس
۴۸	..... ۲.۵ میدان‌های ویژگی مستقل از جهت‌گیری
۵۰	..... ۳.۵ شبکه‌های کانولوشنی مستقل از جهت‌گیری
۵۲	..... ۴.۵ پیاده‌سازی عددی و ارزیابی کانولوشن‌های موییوس

بخش ۳ گیج‌ها و تبدیل‌های گیج را معرفی می‌کند که بر اساس آن‌ها میدان‌های بردارهای ویژگی مستقل از مختصات تعریف می‌شوند. شبکه‌های عصبی که بین چنین میدان‌های ویژگی نگاشت می‌کنند، در بخش ۴ توسعه یافته‌اند. بخش ۵ یک نمونه پیاده‌سازی از میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را در نوار موییوس ارائه می‌دهد.

### ۳ مقدمه‌ای بر شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات

شبکه‌های کانولوشنی سلسله‌مراتبی از میدان‌های ویژگی را از یک سیگنال ورودی بر روی یک منفولد استخراج می‌کنند. ویژگی‌ها از طریق کرنل‌ها محاسبه می‌شوند، که برای شناسایی الگوهای فضایی مشخص در ویژگی‌های سطح پایین تر بهینه شده‌اند. مقاضا می‌کنیم که این فرآیند استنتاج صرفاً بر اساس آرایش نسی ویژگی‌ها باشد و مستقل از انتخاب خاص مختصات بندی باشد. بنابراین ویژگی‌ها باید کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات باشند، مشابه اسکالارها، بردارها یا تانسورها. در حالی که چنین کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات وجود دارند، یک پیاده‌سازی کامپیوترا (غیرنمادین) نیازمند آن است که آن‌ها بر حسب ضرایب عددی در برخی گیج، یعنی نسبت به برخی انتخاب از چارچوب مرتع، بیان شوند. انتخاب خاص مختصات بی‌اهمیت است □ این تنها یکی از چندین توصیف چنین درجات آزادی اضافی، نظریه‌های گیج است. چارچوب ریاضی مناسب برای تنظیم چنین درجات آزادی اضافی، نظریه‌های گیج هستند. یک نظریه گیج، برای گیج‌های مختلف را با مرتبط کردن سازگار آن‌ها با یکدیگر از طریق تبدیل‌های گیج در نظر می‌گیرد. بنابراین میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات با یک قانون تبدیل خاص، یعنی یک عمل گروهی از گروه ساختار که توصیف می‌کند ویژگی‌ها چگونه تحت تبدیل‌های گیج تبدیل می‌شوند، مرتبط می‌شوند. هر لایه شبکه عصبی که چنین میدان‌های ویژگی را پردازش می‌کند، ملزم به رعایت قوانین تبدیل آن‌ها برای حفظ استقلال از مختصاتشان است. هدف این بخش اول از کار ما، معرفی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات با زبانی آسان است. بنابراین، شهود هندسی و بصری سازی‌ها بر فرمالیسم ریاضی ترجیح داده می‌شوند. یک تبیین رسمی تر از تعاریف و نتایج ارائه شده در بخش دوم آورده شده است.

۱.۳	گیج‌ها، تبدیل‌های گیج و $G$ -ساختارها	.....
۲.۳	میدان‌های بردار ویژگی مستقل از مختصات	.....
۳.۳	انتقال موازی بردارهای ویژگی	.....
۴.۳	عمل ایزومتری‌ها و تبدیل‌های گیج القا شده	.....

بخش ۳ گیج‌ها و تبدیل‌های گیج را معرفی می‌کند که بر اساس آن‌ها میدان‌های بردارهای ویژگی مستقل از مختصات تعریف می‌شوند. شبکه‌های عصبی که بین چنین میدان‌های ویژگی نگاشت می‌کنند، در بخش ۴ توسعه یافته‌اند. بخش ۵ یک نمونه پیاده‌سازی از میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را در نوار موبیوس ارائه می‌دهد.

#### ۱.۳ گیج‌ها، تبدیل‌های گیج و $G$ -ساختارها

##### ۱.۱.۳ فضاهای مماس و چارچوب‌های مرتع

یک منفولد هموار  $d$ -بعدی  $M$  دارای یک فضای مماس، فضاهای برداری  $d$ -بعدی هستند، با این حال، برخلاف  $\mathbb{R}^d$ ، آن‌ها به طور کلی با هیچ انتخاب ارجح چارچوب مرتع همراه نیستند. یک بردار مماس  $v \in T_p M$  یک شی مستقل از مختصات است و بنابراین بلافصله به صورت عددی با یک تاپل مختصاتی  $(v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$  نمایش داده نمی‌شود. به طور انتزاعی تر، هر فضای مماس  $T_p M$  با  $\mathbb{R}^d$  هم ریخت است اما به طور کلی هیچ هم‌ریختی کانونی بین آن‌ها وجود ندارد. بنابراین هر دو فضای از نظر ساختاری معادل هستند اما به هیچ روش ارجح به یکدیگر شناسایی نمی‌شوند.

یک گیج (تسهیم محلی بندل مماس) بر روی  $M$  به عنوان مجموعه‌ای از نگاشت‌های خطی معکوس‌پذیر که به صورت هموار وابسته به موقعیت هستند، تعریف می‌شود:

$$\psi_p^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad p \in U^A, \quad (1)$$

که هم‌ریختی‌های فضای برداری گمشده بین  $T_p M$  و  $\mathbb{R}^d$  را مشخص می‌کند. همانطور که در شکل ۷ بصری‌سازی شده است، آن‌ها با تخصیص یک بردار ضریب به فضاهای مماس مختصات می‌دهند:

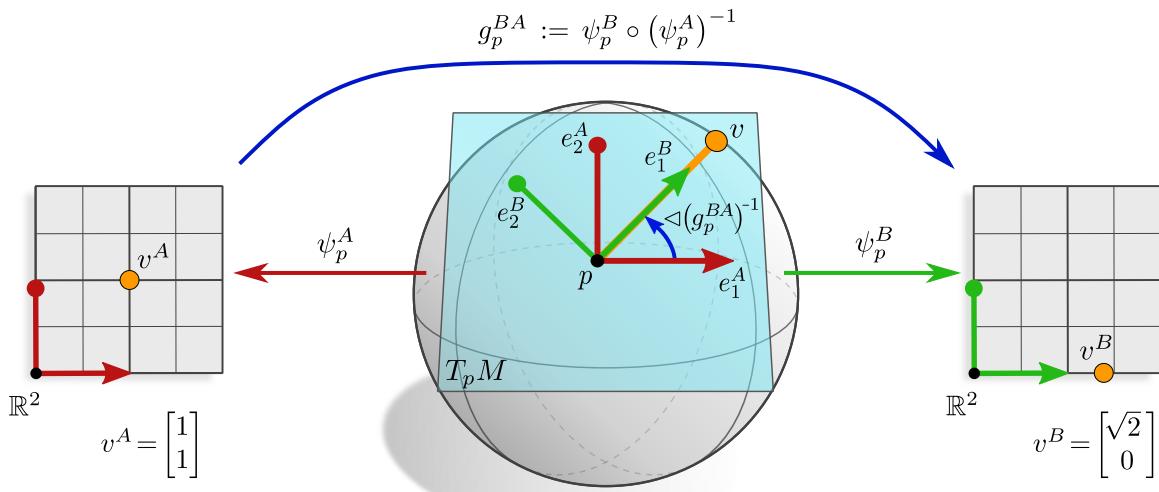
$$v^A := \psi_p^A(v) \in \mathbb{R}^d \quad (2)$$

به هر بردار مماس مستقل از مختصات  $v \in T_p M$  برابر می‌دهد: معکوس این رابطه می‌دهد:

$$v = (\psi_p^A)^{-1}(v^A) = (\psi_p^A)^{-1}\left(\sum_i v_i^A e_i\right) = \sum_i v_i^A (\psi_p^A)^{-1}(e_i) =: \sum_i v_i^A e_i^A, \quad (3)$$

که در آن  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_d\}$  را پایانه استاندارد  $\mathbb{R}^d$  نامگذاری کردایم و از خطی بودن گیج برای بیرون کشیدن جمع استفاده کردایم. این نشان می‌دهد که گیج را می‌توان به عنوان مججهز کردن هر فضای مماس  $T_p M$  با یک چارچوب مرتع در نظر گرفت:

$$[e_1^A, \dots, e_d^A] := [(\psi_p^A)^{-1}(\epsilon_1), \dots, (\psi_p^A)^{-1}(\epsilon_d)], \quad (4)$$



شکل ۷: شناسایی  $T_p M \cong \mathbb{R}^d$  از طریق گیج‌های مختلف. یک بردار مماس (مستقل از مختصات)  $v \in T_p M$  (نارنجی) را می‌توان به صورت عددی با یک تابل مخصوصی  $(v^A(v) = (1, 1)^\top)$  نسبت به گیج  $\psi_p^A(v) = (\sqrt{2}, 0)^\top$  (قرمز) یا، به طور معادل، با  $\psi_p^B(v) = (\sqrt{2}, 0)^\top$  (سیاه) نمایش داد. انتخاب یک گیج مربوط به انتخاب  $[e_1^A, e_2^A]$  یا  $[e_1^B, e_2^B]$  از چارچوب مرجع است. در یک منیفولد عمومی گیج انتخابی از گیج یا مختصات بنده پیش‌فرض ارجح نیست. گیج‌های مختلف، و در نتیجه چارچوب‌های مرجع، با تبدیل‌های گیج  $(\psi_p^B \circ \psi_p^A)^{-1}$  (آبی) مرتبط هستند که مقادیری در گروه ساختار  $G$  تعیین شده می‌گیرند. این شکل تفسیری گرافیکی از نمودارهای جابجایی در معادله (۸) و شکل ۲۷ آ است. توجه داشته باشید که گیج‌ها بلافصله به فضاهای مماس مختصات می‌دهند. شکل ۴۲ در بخش ۲.۹ یک نمودار مشابه برای چارت‌های (آفین) را نشان می‌دهد که به منیفولد مختصات می‌دهند و بدین ترتیب گیج‌ها ("پایه‌های مختصات") را القا می‌کنند.

که به عنوان یک  $d$ -تاپل از بردارهای مماس خطی مستقل تعریف می‌شود که با نگاشت پایه استاندارد  $\mathbb{R}^d$  به عقب از طریق نگاشت معکوس گیج به دست می‌آید. برای اختصار، ما در ادامه از نماد کوتاه‌شده  $[e_i^A]_{i=1}^d$  برای چارچوب‌ها  $[e_1^A, \dots, e_d^A]$  استفاده خواهیم کرد. ضرایب  $v^A$  مختصات  $v$  نسبت به این چارچوب هستند. مجموعه‌ای از چارچوب‌های القا شده توسط  $\psi_p^A$  بر روی  $U^A$  (هموار) میدان چارچوب نامیده می‌شود؛ برای بصیری سازی به شکل ۸ مراجعه کنید.

گیج‌های  $\psi^X$  فضاهای مماس را تنها در همسایگی‌های محلی  $M$  ممکن می‌دانند، و به دلیل موانع توپولوژیکی به طور کلی نمی‌توانند به کل منیفولد بدون نقض فرض همواری گسترش یابند. بنابراین یک اطلس در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathcal{A} = \{(U^X, \psi^X)\}_{X \in \mathfrak{X}}, \quad (5)$$

متشکل از گیج‌های هموار بر روی مجموعه‌ای از همسایگی‌های  $U^X = M$  که منیفولد را پوشش می‌دهند، یعنی شرط  $\bigcup_{X \in \mathfrak{X}} U^X = M$  را برآورده می‌کنند، که در آن  $\mathfrak{X}$  یک مجموعه اندیس است.<sup>۹</sup> در نواحی همپوشانی  $U^A \cap U^B \neq \emptyset$  از همسایگی‌ها، گیج‌های مختلف  $\psi_p^A$  و  $\psi_p^B$  توسط توابع گذار هموار به هم متصل می‌شوند:

$$g_p^{BA}: U^A \cap U^B \rightarrow \text{GL}(d), \quad p \mapsto g_p^{BA} := \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}. \quad (6)$$

در اینجا ما دامنه مشترک (فعلاً) را با گروه خطی عمومی  $\text{GL}(d)$  در نظر می‌گیریم، متشکل از همه ماتریس‌های معکوس‌پذیر در  $\mathbb{R}^{d \times d}$ ، که رابطه بین هر جفت از هم‌ریختی‌های فضای برداری (گیج‌ها) یا چارچوب‌های مرجع را توضیح می‌دهند. عمل چین تابع گذاری بر روی یک گیج داده شده یک تبدیل گیج را تعریف می‌کند:

$$\psi_p^B = g_p^{BA} \cdot \psi_p^A. \quad (7)$$

<sup>۹</sup> اطلس گیج‌ها بسیار شبیه به اطلس‌های معمول چارت‌های یک منیفولد است (پیوست آ). تفاوت این است که اطلس‌های مورد نظر در اینجا مستقیماً به بندل مماس  $TM$  مختصات می‌دهند به جای منیفولد.

از نظر بک نمودار جابجایی، رابطه بین گیج‌های مختلف به صورت زیر بصری‌سازی می‌شود:<sup>۷</sup>

$$\begin{array}{ccccc} & & g_p^{BA} & & \\ & \swarrow & \psi_p^A & \searrow & \\ \mathbb{R}^d & & T_p M & & \mathbb{R}^d \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ & & g_p^{AB} \cdot = (g_p^{BA})^{-1} & & \end{array} \quad (\text{۸})$$

این نمودار را با تفسیر گرافیکی آن در شکل ۷ مقایسه کنید.

یک تبدیل گیج، مختصات‌بندی فضاهای مماس را تغییر می‌دهد به طوری که همان بردار مماس مستقل از مختصات  $v$  با یک بردار مولفه‌ای متفاوت نمایش داده می‌شود:

$$v^B = g_p^{BA} v^A. \quad (\text{۹})$$

از آنجا که یک گیج مربوط به انتخاب یک میدان چارچوب است، یک تبدیل گیج مربوط به تبدیل بین میدان‌های چارچوب است. به طور خاص، یک چارچوب  $p \in M$  در  $[e_i^A]_{i=1}^d = [e_1^A, \dots, e_d^A]$  به یک چارچوب دیگر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} [e_i^B]_{i=1}^d &:= \left[ (\psi_p^B)^{-1} (\epsilon_i) \right]_{i=1}^d && \text{(چارچوب القا شده توسط گیج، (۴))} \\ &= \left[ (g_p^{BA} \cdot \psi_p^A)^{-1} (\epsilon_i) \right]_{i=1}^d && \text{(تبدیل گیج، (۷))} \\ &= \left[ (\psi_p^A)^{-1} ((g_p^{BA})^{-1} \epsilon_i) \right]_{i=1}^d && \text{(معکوس گسترش یافته)} \\ &= \left[ (\psi_p^A)^{-1} \left( \sum_j \epsilon_j \epsilon_j^\top (g_p^{BA})^{-1} \epsilon_i \right) \right]_{i=1}^d && \text{(هويت وارد شده } \mathbf{1} = \sum_j \epsilon_j \epsilon_j^\top \text{)} \\ &= \left[ (\psi_p^A)^{-1} \left( \sum_j \epsilon_j \left( (g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \right) \right]_{i=1}^d && \text{(عناصر ماتریس شناسایی شده)} \\ &= \left[ \sum_j (\psi_p^A)^{-1} (\epsilon_j) \left( (g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \right]_{i=1}^d && \text{(خطی بودن } \psi_p^A \text{)} \\ &= \left[ \sum_j e_j^A \left( (g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \right]_{i=1}^d && \text{(چارچوب القا شده توسط گیج، (۴))} \\ &=: [e_i^A]_{i=1}^d \blacktriangleright (g_p^{BA})^{-1} && \end{aligned} \quad (\text{۱۰})$$

از طریق عمل راست تعریف شده:

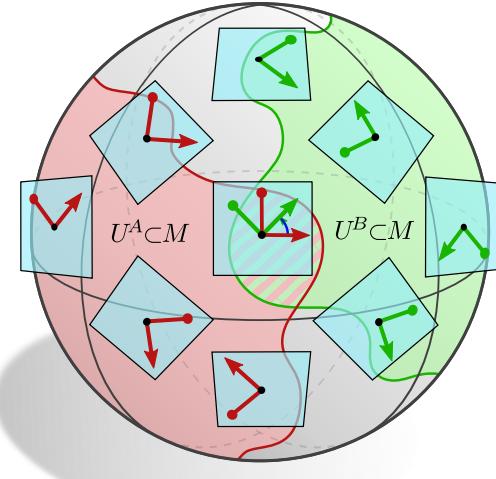
$$\blacktriangleright : ([e_i]_{i=1}^d, g) \mapsto [e_i]_{i=1}^d \blacktriangleright g := \left[ \sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \quad (\text{۱۱})$$

از عناصر گروه بروی چارچوب‌ها. توجه داشته باشد که معکوس در این عمل در معادله (۱۰) به دلیل تعریف معادله (۷) بدون معکوس است.<sup>۸</sup> معمولاً به رفتار تبدیل چارچوب‌های مرجع، تبدیل کوواریانت گفته می‌شود در حالی که تبدیل گیج‌ها و ضرایب برداری به عنوان تبدیل کونتروواریانت نامیده می‌شود؛ به پیوست آ مراجعه کنید.

<sup>۷</sup> نمودارها یک نمای کلی بصری از توابع و فضاهای را که بین آن‌ها نگاشت می‌کنند، ارائه می‌دهند. به عنوان مثال، نمودار

به این معنی است که  $T : Y \rightarrow Z$ ،  $f : X \rightarrow Y$  و  $g : X \rightarrow Z$  هم وجود دارند. اگر ترکیبات توابع در امتداد همه مسیرهایی با شروع و پایان یکسان مطابقت داشته باشند، نمودار جابجایی نامیده می‌شود. نمودار مثال ما اگر (و تنها اگر)  $h = g \circ f$  صادق باشد، جابجایی است.

<sup>۸</sup> قراردادهای دیگر ممکن است انتخاب معکوس‌ها را در  $[e_i^B]_{i=1}^d = [e_i^A]_{i=1}^d \blacktriangleright (g^{BA})^{-1}$  تغییر دهند. یک معکوس در هر یک از دو معادله برای سازگاری عمل چپ - بروی گیج‌ها و عمل راست  $\blacktriangleright$  بروی چارچوب‌ها ضروری است.



شکل ۸: هر نقطه  $p$  از یک منفولد ریمانی  $M$  دارای یک فضای مماس  $T_p M$  متصل است. یک گیج هموار  $\psi$  بر روی یک زیرمجموعه مناسب انتخاب شده  $U^A \subseteq M$  تمام ضمای مماس  $T_p M$  را برای  $p$  در  $U^A$  مخصوص می‌دهد همانطور که در شکل ۷ نشان داده شده است. این معادل انتخاب یک میدان چارچوب هموار بر روی  $U^A$  است. از آنجا که به طور کلی امکان گسترش یک گیج به صورت سراسری بر روی کل منفولد وجود ندارد، لازم است که یک  $G$ -اطلس در نظر گرفته شود، مشکل از گیج‌هایی که  $M$  را پوشش می‌دهند. مخصوصات بندی‌های مختلف  $\psi$  بر روی  $U^A$  (قرمز) و  $\psi^B$  بر روی  $U^B$  (سبز) از طریق تبدیل‌های گیج (یا نگاشتهای گذار)  $g^{BA} : U^A \cap U^B \rightarrow G$  به هم متصل می‌شوند که بر روی همپوشانی  $g^{BA} : U^A \cap U^B \rightarrow G$  (خطدار) تعریف شده‌اند و مقادیری در گروه ساختار  $G \leq \text{GL}(d)$  می‌گیرند.

از آنجا که رفتار تبدیل ضرایب در معادله (۹) و پایه در معادله (۱۰) معکوس یکدیگر هستند، آن‌ها یکدیگر را ختشی می‌کنند، یعنی بردار مماس  $v = \sum_i v_i^A e_i^A = \sum_i v_i^B e_i^B$  را ناوردانه می‌گذارند:

$$\begin{aligned} v &= \sum_i v_i^B e_i^B = \sum_i v_i^B \sum_j e_j^A \left( (g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \\ &= \sum_j \left( \sum_i \left( (g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} v_i^B \right) e_j^A \\ &= \sum_j v_j^A e_j^A. \end{aligned} \quad (۱۲)$$

این ساختار تضمین می‌کند که هر محاسبه‌ای در نهایت مستقل از گیج انتخاب شده است، که معمولاً به آن استقلال از مخصوصات گفته می‌شود. به طور کلی، هر نمایش مخصوصاتی از یک شی یا تابع مستقل از مخصوصات برای دلایل سازگاری باید مستقل از مخصوصات باشد.

برای کامل بودن می‌خواهیم اشاره کنیم که فرمالیسم ارائه شده در اینجا پایه‌های عمومی فضاهای مماس را تعریف می‌کند، که گاهی اوقات به عنوان پایه‌های غیرمخصوصاتی (پایه‌های غیرهولونومیک) از نظر گیج‌های محلی نامیده می‌شوند. یک جایگزین بسیار محبوب اما کمتر عمومی پایه‌های مخصوصاتی (پایه‌های هولونومیک) هستند:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_1^A} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d^A} \Big|_p \right], \quad (۱۳)$$

که توسط چارت‌های مخصوصاتی منفولد القا می‌شوند [۹]:

$$x^A : U^A \rightarrow V^A \subseteq \mathbb{R}^d \quad (۱۴)$$

گیج‌های مربوطه توسط دیفرانسیل‌های چارت داده می‌شوند، یعنی:

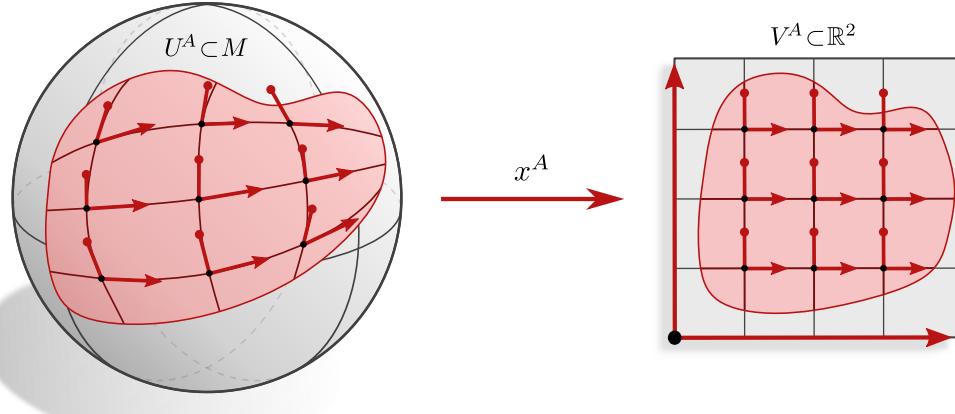
$$\psi_p^A = \hat{dx}_p^A = (\hat{dx}_{p,1}^A, \dots, \hat{dx}_{p,d}^A)^\top : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d. \quad (۱۵)$$

تبدیل‌های گیج در این تنظیم با ژاکویان‌ها مطابقت دارند:

$$g_p^{BA} = \left. \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right|_{x^A(p)} \in \text{GL}(d) \quad (۱۶)$$

از نگاشتهای گذار چارت. یک چارت نمونه و پایه‌های مخصوصاتی القا شده آن در شکل ۹ بصری‌سازی شده‌اند. پیوست آ رابطه بین هر دو فرمالیسم را با جزئیات مورد بحث قرار می‌دهد؛ یک مرور کلی در جدول ۷ ارائه شده است.

در ادامه این مقاله ما عمدتاً در فرمالیسم گیج کار خواهیم کرد، که چارچوب‌های مرجع را مستقیماً به فضاهای مماس تخصیص می‌دهد به جای اینکه آن‌ها را از چارت‌ها القا کند. استثنایاً عبارتند از کانولوشن‌های موبیوس در بخش ۵، CNN‌های اقلیدسی در بخش ۹، مخصوصات لگاریتمی-قطبی در بخش ۱۰ و CNN‌های بیست و چهار در بخش ۴.۱۲ در ممه این موارد، متفاوت‌هایی به صورت محلی مسطح هستند و چارت‌ها ایزومنتریک هستند، به طوری که چارچوب‌های متعامد را القا می‌کنند. کانولوشن‌های GM در  $U^A$  سپس می‌توانند به روشهای کارآمد با اجرای کانولوشن‌های اقلیدسی با کرنل‌های  $G$ -استیریبل در دامنه‌های مشترک چارت‌ها  $V^A$  محاسبه شوند.



شکل ۹: یک چارت  $x^A : U^A \subseteq M \rightarrow V^A \subseteq \mathbb{R}^d$  را به نوایی  $V^A$  از منیفولد تخصیص می‌دهد. این چارت پایه‌های مختصاتی  $\psi_p^A = \hat{dx}_p^A = \left[ \frac{\partial}{\partial x_1^A}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d^A}|_p \right]$  و گیج‌های مربوطه از فضاهای مماس  $T_p M$  در  $U^A$  القای کند. معمدتاً با چارت‌ها کار نخواهیم کرد بلکه به نقاط  $p \in M$  به صورت مستقل از مختصات ارجاع خواهیم داد. گیج‌ها (چارچوب‌ها) سپس مستقیماً به فضاهای مماس تخصیص داده می‌شوند به جای اینکه از چارت‌ها القای شوند.

### ۲.۱.۳ توابع مستقل از مختصات در فضاهای مماس

همانطور که بردارهای مماس مستقل از مختصات هستند، یعنی بدون اشاره به هیچ چارچوب مرجع تعریف می‌شوند. یک گیج انتخاب شده امکان نمایش چنین نگاشتهای مستقل از مختصات را توسط توابعی فراهم می‌کند که بر روی بردارهای ضریب در  $\mathbb{R}^d$  عمل می‌کنند. مشابه بردارهای ضریب، مختصات بندی توابع باید به روشی خاص تحت تبدیل‌های گیج تبدیل شوند تا به طور سازگار تعریف شوند، یعنی برای رعایت استقلال از مختصات. ما بعداً مفهوم ارائه شده در اینجا را از بین نگاشتهای مستقل از مختصات بر حسب مختصات محلی برای تعریف کانولوشن‌های مستقل از مختصات  $GM$  به کار خواهیم برد.

به عنوان یک مثال ساده برای یک عملیات مستقل از مختصات، باید حالت یک نگاشت خطی را در نظر بگیریم:

$$\mathcal{M} : T_p M \rightarrow T_p M. \quad (17)$$

فرض کنید  $v_{\square\square} \in T_p M$  یک بردار مماس باشد که توسط  $\mathcal{M}$  به  $\mathcal{M}v_{\square\square} \in T_p M$  نگاشت می‌شود. نگاشتهای خطی در پیاده‌سازی‌های عددی معمولاً توسط ماتریس‌های ضریب مدل می‌شوند که بین بردارهای ضریب نسبت به یک انتخاب از چارچوب مرجع نگاشت می‌کنند. برای دقیقی کردن این موضوع، فرض کنید گیج  $\psi_p^A$  داده شده باشد به طوری که بردارهای مستقل از مختصات  $v_{\square\square}$  و  $v_{\square\square\square}$  در  $T_p M$  با بردارهای ضریب  $\psi_p^A(v_{\square\square})$  و  $\psi_p^A(v_{\square\square\square})$  نمایش داده شوند. نگاشت خطی  $\mathcal{M}$  در این گیج توسط ماتریس نمایش داده می‌شود:

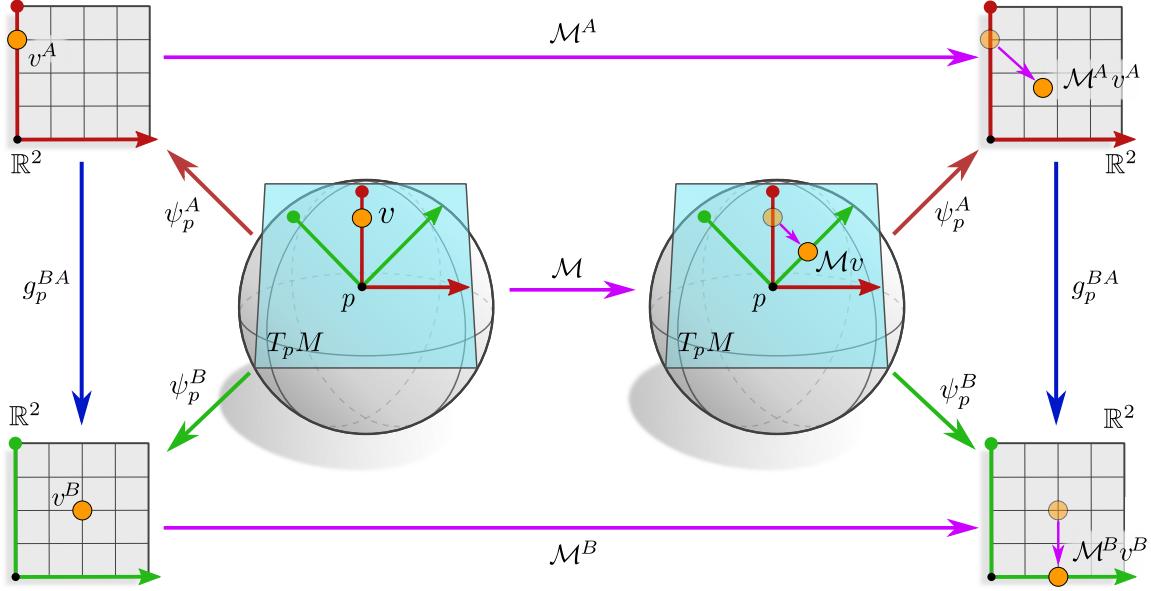
$$\mathcal{M}^A := \psi_p^A \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^A)^{-1} \in \mathbb{R}^{d \times d} \quad (18)$$

که تعریف آن توسط نمودار جابجایی زیر بصری‌سازی شده است:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\psi_p^A} & T_p M & \xrightarrow{\mathcal{M}} & T_p M \xrightarrow{\psi_p^A} \mathbb{R}^d \\ & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\mathcal{M}^A} & & & \uparrow \end{array} \quad (19)$$

ماتریس با نگاشت مستقل از مختصات سازگار است زیرا هر دو یکدیگر را نتیجه می‌دهند:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^A v_{\square\square}^A &= [\psi_p^A \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^A)^{-1}] \circ [\psi_p^A(v_{\square\square})] \\ &= \psi_p^A(\mathcal{M}v_{\square\square}) \\ &= \psi_p^A(v_{\square\square\square}) \\ &= v_{\square\square\square}^A \end{aligned} \quad (20)$$



شکل ۱۰: تفسیر گرافیکی نمودار جابجایی در معادله (۲۳). یک نگاشت مستقل از مختصات  $\mathcal{M} : T_p M \rightarrow T_p M$  را می‌توان به طور معادل با تابع  $\mathcal{M}^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  یا  $\mathcal{M}^B : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  نسبت به گیج‌های مختلف  $\psi_p^B$  یا  $\psi_p^A$  نمایش داد. این مختصات‌بندی‌های  $\mathcal{M}$  با پیش و پس ترکیب با گیج‌ها در دامنه و دامنه مشترک تعریف می‌شوند، به عنوان مثال، با دنبال کردن فلش‌ها،  $\mathcal{M}^A := \psi_p^A \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^A)^{-1}$ . در نتیجه، تبدیل‌های گیج  $\mathcal{M}^A = g_p^{BA} \mathcal{M}^B (g_p^{BA})^{-1}$  بین مختصات‌بندی‌ها توسط یک پیش و پس ترکیب با نگاشت‌های گذار  $g_p^{BA}$  در دامنه و دامنه مشترک داده می‌شوند. همه کمیت‌ها و نگاشت‌ها در این کار با مستقل از مختصات خواهند بود (مانند  $\mathcal{M}$ ) یا به روشی مستقل از مختصات در گیج‌های مختلف بیان خواهد شد (مانند  $\mathcal{M}^A$  و  $\mathcal{M}^B$ ). ما بنابراین باید قوانین تبدیل را برای هر کمیت و تابع تعریف (یا استخراج) کنیم.

البته می‌توان  $\mathcal{M}$  را نسبت به هر انتخاب دیگری از گیج  $\psi_p^B$  نیز نمایش داد. ما از معادله (۹) می‌دانیم که بردارهای ضرب در گیج‌های مختلف با  $v^B = g_p^{BA} v^A$  مرتبط هستند. به طور مشابه،  $\mathcal{M}^A \mathcal{M}^B$  با  $\mathcal{M}^B$  توسط تبدیل گیج مرتبط است:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^B &= \psi_p^B \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^B)^{-1} \\ &= \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1} \circ \mathcal{M}^A \circ \psi_p^A \circ (\psi_p^B)^{-1} \\ &= g_p^{BA} \mathcal{M}^A (g_p^{BA})^{-1}, \end{aligned} \quad (21)$$

که در اینجا هم بر دامنه و هم بر دامنه مشترک عمل می‌کند.<sup>۱</sup> این قانون تبدیل دوباره سازگار است زیرا تبدیل‌های متقابل یکدیگر را خنثی می‌کنند:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^B v^B_{\square\square} &= [g_p^{BA} \mathcal{M}^A (g_p^{BA})^{-1}] [g_p^{BA} v^A_{\square\square}] \\ &= g_p^{BA} \mathcal{M}^A v^A_{\square\square} \\ &= g_p^{BA} v^A_{\square\square} \\ &= v^B_{\square\square} \end{aligned} \quad (22)$$

<sup>۱</sup> تبدیل ضرایب ماتریس از طریق ضرب چپ و راست با  $(g^{BA})^{-1}$  و  $g^{BA}$  به ترتیب، نگاشت خطی را به عنوان یک تانسور از نوع (۱, ۱) شناسایی می‌کند.

تبدیل‌های گیج استخراج شده بنابراین تأیید می‌کنند که تمام محاسبات مختصات‌بندی شده در نهایت مستقل از مختصات هستند. روابط بین نگاشت مستقل از مختصات و مختصات‌بندی‌های آن توسط نمودار جابجایی زیر خلاصه می‌شود:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M^A & & \\
 & \swarrow \psi_p^A & \downarrow & \searrow \psi_p^A & \\
 \mathbb{R}^d & & T_p M & & \mathbb{R}^d \\
 & \downarrow \psi_p^B & \xrightarrow{\mathcal{M}} & \downarrow \psi_p^B & \\
 & & \mathbb{R}^d & & M^B
 \end{array} \quad (23)$$

که در شکل ۱۰ به صورت گرافیکی تفسیر شده است.

در عمل نمی‌توان نگاشت خطی مستقل از مختصات  $\mathcal{M}$  را به صورت عددی بدون اشاره به یک انتخاب مختصات‌بندی پیاده‌سازی کرد. با این حال، وجود آن تنها در صورتی (و تنها در صورتی) دلالت دارد که مختصات‌بندی‌های آن همانطور که در معادله (۲۱) مشخص شده است به یکدیگر مربوط باشند، که تضمین می‌کند رفتار تبدیل صحیح ضرایب بردار وروودی و خروجی در معادله (۹) حفظ می‌شود.

### ۳.۱.۳ گروه‌های ساختار، $G$ -ساختارها و $G$ -اطلس‌ها

ما بعداً از شبکه‌های عصبی می‌خواهیم که به روشنی مستقل از مختصات عمل کنند، یعنی ما تقاضا می‌کنیم که استنتاج آن‌ها مستقل از انتخاب‌های دلخواه چارچوب‌های مرجع باشد. این سؤال را مطرح می‌کند که انتخاب چارچوب‌های مرجع در یک منیفولد تا چه حد دلخواه است. در بخش‌های ۱.۱.۳ و ۲.۱.۳ قبلی ما هر انتخاب ممکن از گیج یا چارچوب مرجع را مجاز می‌دانیم، که بنابراین توسعه تبدیل‌های گیج با مقدار کلی  $GL(d)$  مرتبط بودند. با این حال، در بسیاری از کاربردها، منیفولد دارای ساختار اضافی است که امکان تشخیص یک زیرمجموعه ارجح از چارچوب‌های مرجع یا گیج‌ها را می‌دهد که توابع گذار آن‌ها مقادیری در یک گروه ساختار کاوش یافته  $GL(d) \leq G$  می‌گیرند. چنین ساختارهای هندسی  $\square$  یا بلکه خود زیرمجموعه‌های چارچوب‌های مرجع ترجیحی، که اطلاعات معادل را کدگذاری می‌کنند  $\square$  به عنوان  $G$ -ساختارها نامیده می‌شوند.

$G$ -ساختارها با در نظر گرفتن چند مثال خاص بهتر در کم می‌شوند. لیست زیر چنین مثال‌هایی را ارائه می‌دهد که بر اساس گروه ساختار  $GL(d) \leq GL(d)$  طبقه‌بندی شده‌اند:

$d$ : ساختار متریک یک منیفولد ریمانی را در نظر بگیرید، که امکان اندازه‌گیری فواصل و زوایا را می‌دهد، و بنابراین تشخیص چارچوب‌های متuumad را، یعنی آن چارچوب‌هایی که شرط  $\eta(e_i, e_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, \dots, d$  برآورده می‌کنند. به طور متأثر، یک متریک ریمانی امکان صحبت در مورد گیج‌های ایزو‌متریک  $\psi_p^A$  را با متریک  $T_p M$  شناسایی می‌کنند، یعنی شرط  $\eta(v, w) = \langle \psi_p^A(v), \psi_p^A(w) \rangle_{\mathbb{R}^d}$  را برای هر  $v, w \in T_p M$  برآورده می‌کنند. از آنجا که چارچوب‌های متuumad و گیج‌های ایزو‌متریک تا چرخش‌ها و بازتاب‌ها تعریف می‌شوند، هر تبدیل گیجی بین آن‌ها مقادیری در گروه متuumad  $d$  خواهد گرفت، که آن زیر گروه از  $GL(d)$  است که زوایا و فواصل را حفظ می‌کند.

$GL^+(d)$ : به طور مشابه، یک جهت‌گیری منیفولد چارچوب‌های راست‌گرد را از چپ‌گرد و گیج‌های حفظ‌کننده جهت‌گیری را از گیج‌های معکوس کنند. جهت‌گیری متمایز می‌کند. تبدیل‌های گیج بین چارچوب‌های یک دست پری داده شده مقادیری در  $GL^+(d)$  می‌گیرند، یعنی آن زیر گروه از  $GL(d)$  که جهت‌گیری‌ها را حفظ می‌کند.

$SO(d)$ : با هم، یک متریک و جهت‌گیری داده شده، چارچوب‌های متuumad با جهت‌گیری خاصی را مشخص می‌کنند. تبدیل‌های گیج بین چنین چارچوب‌هایی تضمین شده‌اند که در زیر گروه  $SO(d) \leq GL(d)$  قرار گیرند.

$e$ : یک میدان چارچوب هموار سراسری یک  $\{e\}$ -ساختار را در  $M$  تعریف می‌کند. در این حالت تنها یک چارچوب متمایز در هر موقعیت وجود دارد، به طوری که تبدیل‌های گیج در گروه بدیهی  $\{e\} \leq GL(d)$  قرار می‌گیرند.

$GL(d)$ : اگر هیچ ساختار اضافی تحمیل نشود، هر چارچوب مرجع فضاهای مماس به همان اندازه معتبر است. تبدیل‌های گیج در این حالت نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر عمومی در  $GL(d)$  هستند و  $G$ -ساختار مربوطه فقط بدل چارچوب  $FM$  است.

structure group $G \leq \mathrm{GL}(d)$	$G$ -structure $GM$	equivalent structure on $M$
$\mathrm{GL}^+(d)$	positively oriented frames	orientation of $M$
$\mathrm{SL}(d)$	unit volume frames	volume form
$\mathrm{CO}(d)$	conformal frames	—
$\mathrm{Sp}(d)$	symplectic frames	—
$\mathrm{O}(d)$	orthonormal frames	Riemannian metric
$\mathrm{O}(d-n, n)$	pseudo-orthonormal frames	pseudo-Riemannian metric
$\mathrm{SO}(d)$	positively oriented orthonormal frames	Riemannian metric + orientation
$\{e\}$	parallelization (global frame field)	—

جدول ۱: مثال‌هایی از  $G$ -ساختارها  $GM$  بر روی  $M$  و گروه‌های ساختار کاهش‌یافته مربوطه ( $d \leq \mathrm{GL}(d)$ ). یک  $G$ -ساختار به عنوان یک زیرمجموعه هموار متغیر از چارچوب‌های مرجع (یک زیربندل اصلی  $G$  از بندل چارچوب ( $FM$ ) تعریف می‌شود، که در آن چارچوب‌های هر فضای مماس به صورت متقابل توسط تبدیل‌های گیج با مقادیر  $G$  مرتبط هستند. در حالی که این تعریف نسبتاً انتزاعی است، امکان مشاهده بسیاری از ساختارهای هندسی در  $M$  را به روشنی یکپارچه فراهم می‌کند. به عنوان مثال، یک متريک ريماني در  $M$  امكان تشخيص چارچوب‌های معتمد را مي دهد. برعکس، مشخص کردن معتمد بودن به طور منحصر به فرد یک متريک را نتيجه مي دهد. بنابراین یک متريک ريماني و یک ساختار معتمد با يك‌يگر معادل هستند. به طور مشابه، یک تناظر یک به يك بين فرم‌های حجم و چارچوب‌های واحد حجم وجود دارد. توجه داشته باشید که انتخاب یک گروه ساختار  $G$  به طور منحصر به فرد یک  $G$ -ساختار را مشخص نمی‌کند. به عنوان مثال، متريک‌های ريماني مختلف می‌توانند به عنوان ساختار  $d$ ، فرم‌های حجم مختلف به عنوان ساختار  $(SL)$  یا ميدان‌های چارچوب سراسری مختلف به عنوان ساختار  $\{e\}$  انتخاب شوند. CNN‌های مستقل از مختصات برای رعایت یک  $G$ -ساختار داده شده طراحی شده‌اند □ اینکه کدام ساختار خاص است به وظیفه یادگیری بستگی دارد.

موضوع مشترک در این مثال‌های انگيزشی اين است که همه آن‌ها با موارد زير تعریف می‌شوند:

۱. یک زیرمجموعه (که به صورت فضابی هموار تغیر می‌کند) از چارچوب‌های مرجع متمایز،

۲. یک زیرمجموعه مربوطه از گیج‌های ترجیحی و

۳. یک زیرگروه  $(G \leq \mathrm{GL}(d))$  از تبدیل‌های گیج که مفهوم متمایز چارچوب‌ها و گیج‌ها را حفظ می‌کند.

چنین زیرمجموعه‌هایی از چارچوب‌های مرجع که به صورت هموار تغیر می‌کنند به عنوان  $G$ -ساختارها  $GM$  بر روی  $M$  نامیده می‌شوند و گروه  $G$  به عنوان گروه ساختار (کاهش‌یافته) نامیده می‌شود □ برای تعریف دقیق تر به بخش ۳.۶ مراجعه کنید.<sup>۱۰</sup> فرآیند مشخص کردن یک  $G$ -ساختار به عنوان کاهش گروه ساختار از  $(\mathrm{GL}(d))$  به عنوان  $G$ -اطلس  $\mathcal{A}^G = \{(U^X, \psi^X)\}_{X \in \mathfrak{X}}$  نامیده می‌شود. اطلس نامیده می‌شود اگر تمام توابع گذار آن:

$$g^{BA}: U^A \cap U^B \rightarrow G, \quad p \mapsto g_p^{BA} := \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1} \quad (24)$$

در یک گروه ساختار کاهش‌یافته ( $G \leq \mathrm{GL}(d)$ ) قرار گیرند (مقایسه کنید با معادله (۴)). رابطه بین چارچوب‌های مرجع و گیج‌ها در معادله (۴) دلالت دارد بر اینکه هر  $G$ -اطلس یک  $G$ -ساختار مربوطه را کدگذاری می‌کند.

انتخاب‌های متعددی از  $G$ -ساختارها ممکن است برای یک گروه ساختار  $G$  داده شده وجود داشته باشند. برای ارتباط با مثال‌های بالا: متريک‌های ريماني مختلف، زیرمجموعه‌های متفاوتی از چارچوب‌های مرجع را به عنوان معتمد مشخص می‌کنند، یعنی آن‌ها با ساختارهای  $d$  مطابقت دارند. بنابراین انتخاب یک متريک معادل انتخاب یک ساختار  $d$  است. به طور مشابه، انتخاب‌های مختلف جهت گیری یک متفوله قابل جهت گیری، مجموعه متفاوتی از چارچوب‌ها را به عنوان راستگرد مشخص می‌کنند. بنابراین دو انتخاب ممکن جهت گیری با دو انتخاب ممکن از ساختارهای  $(\mathrm{GL}^+M)$   $\mathrm{GL}^+(d)$  مطابقت دارند. ساختارهای  $\mathrm{SO}(d)$  ممکن است در انتخاب جهت گیری و متريک هر دو متفاوت باشند. مثال دیگر ساختار  $\{e\}M$  است. آن‌ها اجازه تبدیل‌های گیج (غيربدیهی) را نمی‌دهند و بنابراین با انتخاب میدان‌های چارچوب هموار سراسری در  $M$  مطابقت دارند. جدول ۱ مثال‌های پیشتری از گروه‌های ساختار  $G$  و  $G$ -ساختارهای مربوطه را ارائه می‌دهد.

کاهش گروه ساختار به  $G$ ، یعنی وجود یک  $G$ -ساختار، ممکن است توسعه تپولوژی متفوله مسدود شود. این دلالت دارد بر اینکه یک "گروه ساختار کاهش ناپذیر" وجود دارد که فراتر از آن اهام چارچوب‌های مرجع را نمی‌توان بدون نقض فرض همواری (یا حتی پیوستگی)  $G$ -ساختار برطرف کرد. به عنوان مثال، نوار موبیوس در شکل ۲۱ غیرقابل جهت گیری است. این بدان معنی است که یک تعریف هموار و سراسری سازگار از دست پری چارچوب و در نتیجه ساختار  $\{e\}$  (میدان چارچوب هموار سراسری) را نمی‌پذیرد. همانطور که در شکل ۲۱ بصری سازی شده است، یک  $G$ -اطلس از گیج‌ها که نوار موبیوس را پوشش می‌دهد، به طور ناگزیر نیازمند یک بازتاب در یکی از نگاشتهای گذار خواهد بود، که به معنای یک گروه ساختار کاهش ناپذیر است. CNN‌های مستقل از مختصات بر روی نوار موبیوس بنابراین حداقل باید تناوب پذیر بازتابی باشند. به طور مشابه، گروه ساختار کره  $G = \mathcal{R}$  را نمی‌توان فراتر از  $\mathrm{SO}(2)$  کاهش داد. CNN‌های کروی هموار بنابراین لزوماً بر پایه کرنل‌های محلی تناوب پذیر چرخش هستند.

<sup>۱۰</sup> به طور رسمی،  $GM$  به عنوان یک زیربندل اصلی  $G$  از بندل چارچوب  $FM$  تعریف می‌شود، که یک بندل اصلی  $(d)$  است.

توجه داشته باشد که هر منیفولد (دیفرانسیل پذیر) با برخی  $G$ -ساختار همراه است. به عنوان مثال، یک منیفولد دیفرانسیل پذیر خام دارای یک ساختار  $GL(d)$  (حاوی هر چارچوب ممکن) است، یک منیفولد ریمانی یک ساختار  $d$  دارد و  $\mathbb{R}^d$  به طور کانونی با یک ساختار  $\{e\}$  مجهز شده است که در شکل ۲.۳۵ بصری‌سازی شده است. مانابراین بدون از دست دادن کیلت، اصطلاح "استقلال از مختصات" را به استقلال از مختصات  $GM$  تصحیح خواهیم کرد، یعنی استقلال نسبت به انتخاب چارچوب‌های مرجع در  $G$ -ساختار داده شده در  $M$ . در طول این کار ما فرض خواهیم کرد که گیج‌ها بخشی از یک  $G$ -اطلس هستند:

$$\mathcal{A}^G = \{(U^X, \psi^X)\}_{X \in \mathfrak{X}} \quad \text{و} \quad g_p^{BA} \in G \quad \text{و} \quad \psi_p^A, \psi_p^B \in \mathcal{A}^G, \quad p \in U^A \cap U^B, \quad (25)$$

مطابق با  $G$ -ساختار داده شده، هر کمیت یاتابع می‌تواند نسبت به هر گیج از این اطلس بیان شود<sup>۱۱</sup>، و مختصات‌بندی‌ها در گیج‌های مختلف به طور منحصر به فرد توسط یک تبدیل گیج با مقدار  $G$  مرتبط هستند. با تضمین استقلال از مختصات همه ساختارها، آن‌ها همیشه با همتایان مستقل از مختصات خود مطابقت خواهند داشت، که ما نظریه سراسری را بر حسب آن‌ها در بخش‌های ۶ و ۸ فرمول‌بندی خواهیم کرد.

### ۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی مستقل از مختصات

فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات، فضاهای میدان‌های بردار ویژگی هستند. مشابه مورد ضرایب بردارهای مماس، ضرایب عددی بردارهای ویژگی ملزم به تبدیل سازگار تحت تبدیل‌های گیج هستند. قانون تبدیل خاص (نمایش گروهی) یک میدان ویژگی در اینجا نوع میدان آن را مشخص می‌کند  $\square$  مثال‌های معمول شامل میدان‌های اسکالار، میدان‌های بردار مماس، میدان‌های تansور عمومی، میدان‌های ویژگی منظم یا میدان‌های  $\square\square\square\square\square$  هستند. بخش ۱.۲.۳ چنین میدان‌های ویژگی و قوانین تبدیل آن‌ها را معرفی می‌کند. در بخش ۲.۲.۳، ما به طور مختصر فضاهای ویژگی مستقل از مختصات را تعریف می‌کنیم. مشابه تعریف فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی معمولی به عنوان ابشاری از چندین نقشه ویژگی، فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات شامل چندین میدان ویژگی مستقل هستند.

#### ۱.۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی منفرد

میدان‌های ویژگی کانولوشنی یک بردار ویژگی، که اطلاعات استنباط شده از یک همسایگی محلی از سیگنال ورودی را کدگذاری می‌کند، به هر نقطه از منیفولد تخصیص می‌دهند. ایناشت فضایی اطلاعات توسط یک کرنل کانولوشنی انجام می‌شود که میدان‌های ویژگی را در محیط خود نسبت به چارچوب مرجع محلی خود اندازه‌گیری می‌کند. بنابراین ما گیج  $A$  را فرض می‌کنیم که ترازهای کرنل را در یک همسایگی  $U^A$  مشخص می‌کند. نسبت به این گیج، کرنل یک میدان محلی هموار از پاسخ‌ها (مشاهدات) تولید خواهد کرد:

$$f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad (26)$$

که توسط یک بردار ویژگی عددی  $C$ -بعدی  $p$  در هر موقعیت  $p \in U^A$  داده می‌شود. فرض کنید یک میدان پاسخ دوم  $f^B : U^B \rightarrow \mathbb{R}^c$  در  $U^B$  استنباط شده است. از آنجا که پاسخ یک کرنل به طور کلی به تراز آن بستگی دارد، انتظار می‌رود که  $f^A$  و  $f^B$  در همپوشانی  $U^A \cap U^B$  مطابقت نداشته باشند. بدون محدودیت‌های بیشتر، پاسخ‌های یک کرنل کانولوشن به طور دلخواه وابسته به گیج خواهند بود.

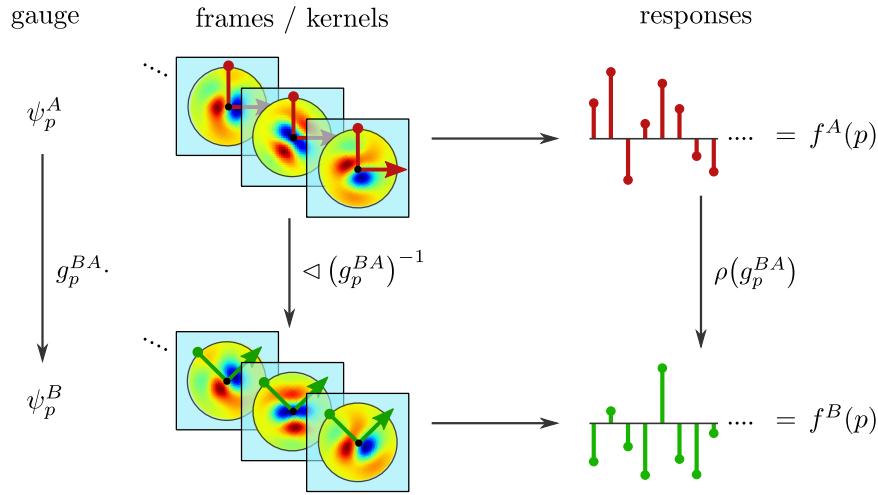
اصل کوواریانس، که توسط آلبرت اینشتین پیشنهاد شد [۲۰]، بیان می‌کند که:

«قانون جهان‌شمول طبیعت باید توسط معادلاتی بیان شوند که برای همه سیستم‌های مختصات صادق باشند، یعنی نسبت به هر جایگزینی کوواریانت باشند.»

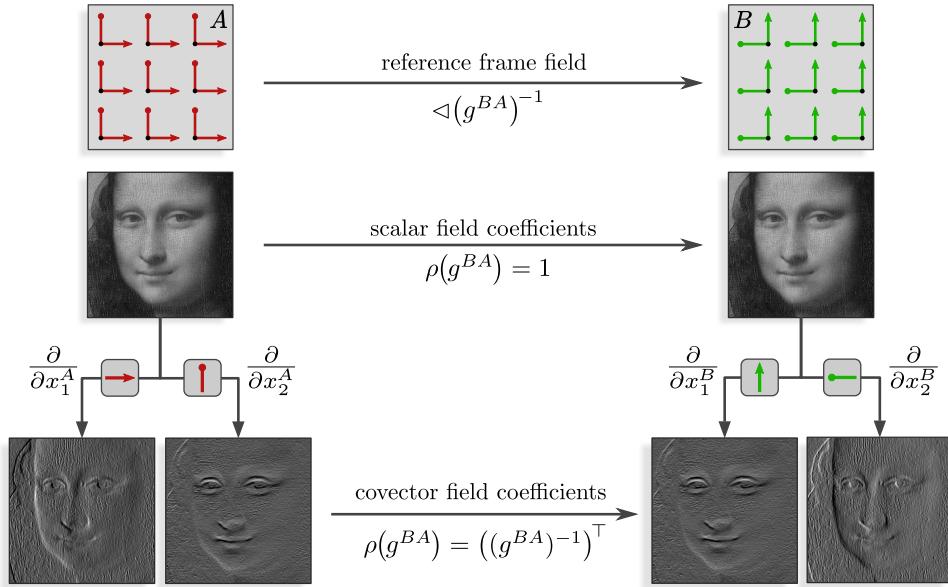
ما معقدیم که اصل مشابهی باید در یادگیری عیقونی هندسی نیز صادق باشد، یعنی استنتاج باید مستقل از هر دلخواهی در انتخاب چارچوب‌های مرجع باشد. با توجه به اینکه این دلخواهی در مختصات‌بندی‌ها دقیقاً توسط  $G$ -ساختار داده شده  $GM$  پوشش داده می‌شود، این امر به ویژه ایجاد می‌کند که ویژگی‌ها باید اشیاء هندسی مستقل از مختصات  $GM$  باشند.<sup>۱۲</sup> بنابراین ما کرنل‌های کانولوشن را طوری طراحی می‌کنیم که پاسخ‌های آن‌ها  $f^A$  و  $f^B$  میدان‌هایی از ضرایب بردار ویژگی را کدگذاری کنند که یک میدان بردار ویژگی آزاد از مختصات  $f$  را به صورت محلی در گیج‌های مختلف نمایش می‌دهند. مجموعه‌ای از چنین میدان‌های ضریب عددی  $X$ ، که نسبت به  $G$ -اطلس گیج‌های  $\psi^X$  در همسایگی‌های  $U^X$  که  $M$  را پوشش می‌دهند بیان شده‌اند، معادل میدان ویژگی سراسری و آزاد از مختصات  $f$  در  $M$  است.

<sup>۱۱</sup> این یک گزاره غیربدینه است زیرا هر کمیتی را نمی‌توان نسبت به چارچوب‌های مرجع دلخواه مرتبط با  $GL(d)$  بیان کرد. به عنوان مثال، میدان‌های ویژگی که در بخش ۲.۳ معرفی شده‌اند، تنها تبدیل‌های گیج با مقدار  $G$  را می‌پذیرند و بنابراین تنها نسبت به چارچوب‌های ترجیحی در  $GM$  تعریف می‌شوند. به عنوان یک مثال شهردی، CNN‌های سنتی (غیرتاوب‌پذیر) در  $\mathbb{R}^d$  را در نظر بگیرید که نسبت به ساختار  $\{e\}$  کانولوشن  $\mathbb{R}^d$  استخراج می‌شوند و اطلاعاتی در مورد پاسخ‌های کرنل نسبت به سایر چارچوب‌های مرجع را حل نمی‌کنند.

<sup>۱۲</sup> در این نکته ما از کوواریانس عمومی اینشتین منحرف می‌شویم، که همیشه تبدیل‌های گیج با مقدار  $(d)$   $GL(d)$  را در نظر می‌گیرد (منتظر با کوواریانس دیفلومورفیسم). تنظیم او در فرمول‌بندی ما برای  $G = GL(d)$  شامل شده است، با این حال، مگر و ساختار فرضی را انعطاف‌پذیر نگه می‌داریم زیرا اکثر کاربردها گروه ساختار کاهش یافته را فرض خواهند کرد.



شکل ۱۱: پاسخ‌های عددی  $f^A(p) \in \mathbb{R}^c$  و  $f^B(p) \in \mathbb{R}^c$  که بر اساس چارچوب‌های مختلف جهت‌گیری شده‌اند، به طور کلی منطبق نیستند. به منظور نمایش ضرایب عددی یکسان بردار ویژگی مستقل از مختصات نسبت به گیج انتخاب شده، آن‌ها ملزم به ارتباط توسط تبدیل‌های گیج  $(g_p^{BA})\rho(g_p^{BA})$  هستند. اگر گیج‌ها توسط  $g_p^{BA}$  مرتبط باشند، همانطور که در بخش ۴ استخراج شده است، این الزام یک قید تابع پذیری گیج را بر کرنل‌های کانولوشن تحمیل می‌کند.



شکل ۱۲: مثال‌هایی از میدان‌های ضرب ویژگی در  $M = \mathbb{R}^7$  از پردازش کلاسیک تصویر. بالا: برای سادگی ما یک میدان چارچوب «موازی» فرض می‌کیم و همان تبدیل گیج، چرخش به میزان  $\pi/2$  را در هر نقطه  $p \in M$  در نظر می‌گیریم. وسط: مقادیر شدت یک تصویر خاکستری مستقل از انتخاب چارچوب‌های مرتع هستند. بنابراین آن‌ها توسط میدان‌های اسکالار مدل می‌شوند که با نمایش بدیهی  $\rho(g) \in G$  مشخص می‌شوند. پایین: دو کanal ضرب یک تصویر گرادیان از یک تصویر اسکالار با گرفتن مشتق‌ها در امتداد محورهای چارچوب محسوسه می‌شوند. بنابراین آن‌ها وابسته به گیج هستند. تصاویر گرادیان نسبت به گیج‌های مختلف توسط نمایش گروهی  $(g^{-1})^\top$  مرتبط می‌شوند. برای چرخش نمایش داده شده به میزان  $\pi/2$  این منجر به کanal اول جدید  $(\partial/\partial x_1^B)$  (معادل کanal دوم قدیمی  $(\partial/\partial x_1^A)$ ) و کanal دوم جدید  $(\partial/\partial x_2^B)$  (معادل منفی کanal اول قدیمی  $(\partial/\partial x_2^A)$ ) می‌شود. نسبت به چارچوب‌های مرتع مربوطه، هر دو میدان ضرب یکسان میدان گرادیان (آزاد از مختصات) را کدگذاری می‌کنند. بنابراین توصیف به طور خودکار مستقل از مختصات است.

برای اینکه این میدان ویژگی آزاد از مختصات به خوبی تعریف شود، یعنی مستقل از مختصات  $GM$  باشد، میدان‌های ضرب محلی (یا پاسخ‌های کرنل) ملزم به دوخته شدن سازگار از طریق نگاشت‌های گذار با مقدار  $G$  هستند. بنابراین آن‌ها باید به روشی اصولی تحت تبدیل‌های گیج تبدیل شوند. از آنجا که ما با فضاهای بردار ویژگی سروکار داریم، این تبدیل‌ها معمولاً خطی در نظر گرفته می‌شوند، یعنی آن‌ها توسط نمایش‌های گروهی خطی مدل می‌شوند:

$$\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(c) \quad (27)$$

از گروه ساختار  $(c, \mathrm{GL}(c))$ ، که بر  $\mathbb{R}^c$  عمل می‌کند و شرط  $\rho(g) = \rho(g)\rho(h) \forall g, h \in G$  را برآورده می‌کند.<sup>13</sup> مشابه تبدیل ضرایب بردار مimas در معادله (۹)، ضرایب بردار ویژگی سپس تعریف می‌شوند که تحت یک تبدیل گیج با مقدار  $G$  مانند  $g_p^{BA} = \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}$  تبدیل شوند:

$$f^B(p) := \rho(g_p^{BA}) f^A(p), \quad (28)$$

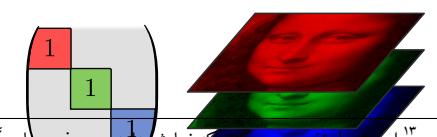
که در آن  $p \in U^A \cap U^B$  برای بصری‌سازی به شکل ۱۲ مراجعه کنید. با ساخته شدن برای تبدیل همگام، فضاهای چارچوب‌های مرتع، ضرایب بردار مimas و ضرایب بردار ویژگی گفته می‌شود که با یکدیگر  $G$ -مربط هستند. توجه داشته باشید که ساخت از طریق یک  $G$ -نمایش  $\rho$  به طور کلی تبدیل‌های گیج با مقدار  $(d, \mathrm{GL}(d))$  را توصیف نمی‌کند، یعنی ویژگی‌های کاملاً مستقل از مختصات. بنابراین بردارهای ویژگی استخراج شده تنها بیان به خوبی تعریف شده‌ای نسبت به چارچوب‌ها در  $G$ -ساختار در نظر گرفته شده  $GM$  خواهد داشت، که توسط اصطلاح «استقلال از مختصات  $GM$ » پوشش داده می‌شود.

انتخاب‌های مختلف نمایش‌ها  $\rho$  از انواع مختلفی از میدان‌های ویژگی را تولید می‌کنند همانطور که در شکل ۱۲ نمونه‌سازی شده است. به عنوان مثال، نمایش بدیهی،  $\rho(g) = 1 \forall g \in G$ ، رفتار تبدیل میدان‌های اسکالار  $s^A(p) \mapsto s^B(p)$  را توصیف می‌کند، که ضرایب عددی آن‌ها تحت تبدیل‌های گیج ناوردا هستند. مثال‌هایی از میدان‌های اسکالار شامل تصاویر خاکستری، میدان‌های دما، میدان‌های فشار یا توزیع‌های اختلال در  $M$  هستند. ضرایب میدان‌های بردار مimas مانند  $v^A(p) \mapsto v^B(p)$  را تبدیل می‌شوند و بنابراین با نمایش گروهی  $g = g_p^{BA} v^A(p)$  مطابقت دارند. مثال‌هایی برای میدان‌های سرعت باد هستند. میدان‌های تانسور عمومی تراز نوع  $(r, s)$  توسط نمایش‌های حاصل ضرب تانسوری  $g \otimes^r (g^{-1})^\top \otimes^s (g^{-1})$  توصیف می‌شوند. آن‌ها به عنوان مثال تصاویر تانسور انتشار، تانسورهای میدان الکترومغناطیسی یا تانسورهای تنش را مدل می‌کنند. انتخاب رایج برای گروه‌های ساختار گسته نمایش‌های منظم هستند که مجموعه محدود عملیات گروهی را توسط ماتریس‌های جایگشت تحقق می‌بخشد. نمایش‌های منظم به عنوان تقارن‌های دقیق شبکه‌های کریستالی، شبکه‌های اسپین یا شبکه‌های پیکسل ظاهر می‌شوند [۱۴]. علاوه بر این، آن‌ها معمولاً به عنوان تقریب گسسته گروه‌های ساختار پیوسته استفاده می‌شوند، به عنوان مثال گروه‌های چرخشی  $(\mathrm{SO}(2, C_N) \leq \mathrm{SO}(2))$  برای تقریب ریختش‌های پیوسته [۱۵]. آن‌ها از اهمیت عملی زیادی برخوردارند زیرا تبدیل ویژگی‌های شبکه‌های کانولوشنی گروهی را توصیف می‌کنند [۱۶]. میدان‌های ویژگی که تحت نمایش‌های کاوش‌ناپذیر (۰۰۰۰۰۰۰۰) تبدیل می‌شوند در [۱۷] بررسی شدند. <sup>۱۴</sup> مروری دقیق‌تر و معیاری گسترده از انواع میدان یا نمایش‌های مختلف در یادگیری عمیق در [۱۸] ارائه شد.

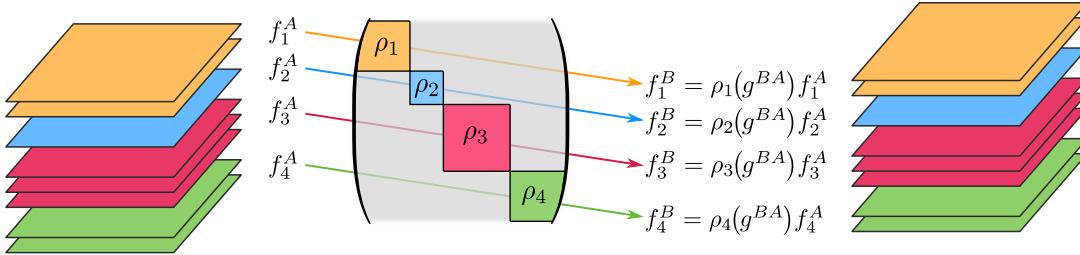
برای کامل بودن می‌خواهیم اشاره کنیم که میدان‌های بردار ویژگی آزاد از مختصات به طور رسمی به عنوان برش‌های هموار  $(A) \in \Gamma$  از یک بندل بردار ویژگی  $M \xrightarrow{\pi_A} A$  تعریف می‌شوند که با  $G$ -ساختار  $GM$  مرتبط است و فضاهای ضرب بردار ویژگی  $\mathbb{R}^c$  را به عنوان فیبرهای معمول دارد. بردارهای ضرب  $f^A(p)$  و  $f^B(p)$  در  $\mathbb{R}^c$  در تسهیمات محلی از یک بردار ویژگی آزاد از مختصات  $f(p) \in A_p \cong \mathbb{R}^c$  هستند، و مشابه ضرایب  $v^B = \psi_p^B(v)$  و  $v^A = \psi_p^A(v)$  از یک بردار مimas  $v \in T_p M$  تعریف می‌شوند. توجه داشته باشید که، در حالی که هم ریخت هستند، فضاهای ویژگی  $A_p \cong A_q$  از نقاط مختلف  $p \neq q$  از  $M$  از یکدیگر متمایز هستند، به طوری که عناصر آن‌ها نمی‌توانند با هم جمع شوند. انتقال‌دهنده‌های موافقی، که در بخش‌های ۳.۲ و ۵.۶ مورد بحث قرار گرفته‌اند، هم‌ریختی‌هایی بین فضاهای بردار ویژگی مختلف فراهم می‌کنند، که امکان جمع ویژگی‌ها را (پس از انتقال آن‌ها به همان فضای برداری) فراهم می‌کنند. از آنجا که این تعاریف کاملاً فنی هستند، ما جزئیات آن‌ها را فعلاً رد می‌کنیم و خواننده علاقه‌مند را به بخش ۳.۶ ارجاع می‌دهیم.

### ۲.۲.۳ میدان‌های ویژگی انباسته و فضاهای ویژگی مستقل از مختصات

فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی معمولی شامل چندین نقشه ویژگی هستند. به طور مشابه، ما فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات را تعریف می‌کنیم که شامل چندین میدان ویژگی  $i$  از انواع بالقوه متفاوت  $\rho_i$  و بعد  $C_i$  باشند. بنابراین یک میدان کامل از فعالسازی‌های یک فضای ویژگی از یک شبکه کانولوشنی مستقل از مختصات به



این طبقه‌بندی می‌کند که نمایش  $h$  هموار قسم‌های گروهی هستند، یعنی نگاشت‌هایی که ساختار گروهی  $G$  را رعایت می‌کنند. بنابراین عمل‌های گروه شکل تولید اضافی کار نمایش  $h$  را کاری می‌نمایند که علی‌الوایل یک گروه فشرده می‌تواند از طریق تغییر پایه به مجموع مستقیم  $\square \square \square \square \square \square \square$  تجزیه شود. این دلالت دارد بر اینکه هم‌سازنی‌های اسکالاری  $\square \square \square \square \square \square \square$  پیوسته شوند (پس از تغییر پایه) بر حسب عملیات بین  $\square \square \square \square \square \square \square$  در ک شود [۱۹]. در مقابل، انتخاب خاص نمایش، یعنی می‌تواند  $\square \square \square \square \square \square \square$  موجول این  $\square \square \square \square \square \square \square$  تجزیه شوند لایه شوند.



شکل ۱۴: یک فضای ویژگی کامل شامل چندین میدان ویژگی منفرد  $f_i^A$  از انواع بالقوه متفاوت  $\rho_i$  و ابعاد  $c_i$  است. از طریق گج  $\psi$ ، به صورت محلی توسط میدان‌های ضرب  $f_i^A \rightarrow U^A \rightarrow \mathbb{R}^{c_i}$  نمایش داده می‌شود. میدان‌های ضرب در گج دیگر  $\psi$  از طریق تبدیل گج  $f_i^B = \rho_i(g^{BA})f_i^A$  مرتبط هستند. ضرایب  $\oplus_i \rho_i = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \rho_3 \oplus \rho_4$  میدان منفرد به طور مستقل تبدیل می‌شوند، بنابراین نمایش مدل‌سازی کل فضای ویژگی توسط مجموع مستقیم داده می‌شود، در اینجا  $\rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \rho_3 \oplus \rho_4$ .

عنوان مجموع مستقیم تعریف می‌شود<sup>۱۵</sup>

$$f = \bigoplus_i f_i \quad (29)$$

از میدان‌های منفرد. هر نقشه ویژگی از یک شبکه کانولوشنی معمولی موقعیت یک ویژگی خاص را کدگذاری می‌کند و به طور مستقل تبدیل می‌شود هنگامی که ورودی شبکه جابجا می‌شود. میدان‌های ویژگی منفرد  $f_i^A$  شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات  $GM$  هم موقعیت و هم  $G$ -پوزیک ویژگی را کدگذاری می‌کنند. در مقابل نقشه‌های ویژگی معمولی، میدان‌های ضرب آن‌ها، به عنوان مثال  $f_i^A$ ، علاوه بر این تضمین شده‌اند که به طور مستقل از یکدیگر تحت تبدیل‌های گج همانطور که توسط نوع آن‌ها ( $c_i$ )  $G \rightarrow GL(c_i)$  مشخص شده است، تبدیل شوند. یک نمایش عددی محلی  $f_i^A = \bigoplus_i f_i^A$  از میدان ویژگی کامل در معادله (۲۹) بنابراین طبق مجموع مستقیم نمایش‌های منفرد تبدیل می‌شود، یعنی:

$$\rho = \bigoplus_i \rho_i. \quad (30)$$

تبدیل مستقل میدان‌های منفرد تحت  $\rho$ ، که در شکل ۱۴ بصری‌سازی شده است، از ساخت روشن است:

$$\rho(g)f^A = (\bigoplus_i \rho_i(g))(\bigoplus_i f_i^A) = \bigoplus_i (\rho_i(g)f_i^A) \quad (31)$$

به عنوان یک مثال عملی از فضای ویژگی مستقل از مختصات مشکل از چندین میدان، تصویر ۱۳ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. مانند تصویر خاکستری در شکل ۱۲، کانال‌های رنگ منفرد مقادیر شدت را کدگذاری می‌کنند که تحت تبدیل‌های گج ناوردا هستند. بنابراین تصویر ۱۰ کامل باید با سه میدان اسکالر شناسایی شود که هر کدام به طور مستقل تحت نمایش بدیهی «تبدیل» می‌شوند. همه میدان‌های ویژگی منفرد نیازی نیست که از همان نوع  $\rho$  باشند. به عنوان مثال، در یک کاربرد پیش‌بینی آب و هوای سیگنال ورودی ممکن است شامل میدان‌های اسکالار کدگذاری کننده ویژگی‌هایی مانند دما یا فشار و میدان‌های پرداری مانند سرعت‌های باد باشد. توصیف به عنوان میدان‌های  $\rho$  از انواع مربوطه، پردازش هندسی صحیح چنین داده‌هایی را تضمین می‌کند. در حالی که انواع میدان  $\rho$  ورودی و خروجی یک شبکه معمولاً توسعه وظیفه یادگیری داده می‌شوند، انواع میدان استفاده شده در لایه‌های مخفی توسط کاربر به عنوان یک فرآپارامتر مشابه انتخاب کانال‌ها برای یک شبکه کانولوشنی معمولی انتخاب می‌شوند.

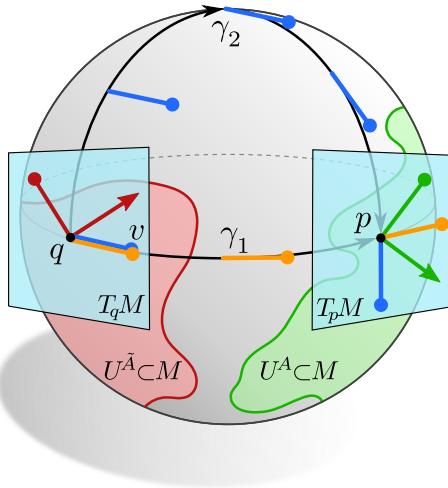
### ۳.۳ انتقال موازی بردارهای ویژگی

کرنل‌های شبکه‌های کانولوشنی ویژگی‌ها را از تمام نقاط  $q$  در یک همسایگی اطراف هر نقطه  $p$  از مینیولد جمع آوری می‌کنند. از آنجا که ویژگی‌ها در نقاط مختلف در فضاهای بردار ویژگی متفاوتی قرار دارند و نسبت به گجی‌های مختلف بیان می‌شوند، باید قبل از پردازش بیشتر، در امتداد یک مسیر  $\gamma$  از  $q$  به  $p$  به صورت موازی منتقل شوند. ما ابتدا انتقال بردارهای مماس را مورد بحث قرار می‌دهیم، که توسط یک نگاشت انتقال موازی رسمی سازی می‌شود:

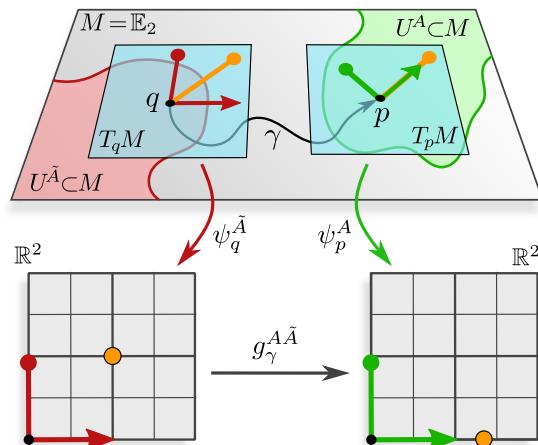
$$\mathcal{P}_\gamma : T_q M \rightarrow T_p M. \quad (32)$$

این انتقال دهنده اغلب از اتصال کانونی لوی-چویتا منیفولد محاسبه می‌شود، با این حال، ممکن است در برخی کاربردها مربوط به یک اتصال جایگزین (سازگار با  $G$ ) باشد، همانطور که در ادامه و در مرور ادبیات ما در بخش سوم بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد. انتقال دهنده بردارهای ویژگی (مرتبه با  $G$ ) از انتقال دهنده بردارهای مماس تعیت می‌کند اگر انتقال سازگار با  $G$  باشد.

<sup>۱۵</sup> مجموع مستقیم  $\bigoplus$  بردارهای  $(p)$   $f_i$  را می‌توان به عنوان «انباست» آن‌ها در یک بردار پیوسته در نظر گرفت. به طور سازگار با این، مجموع مستقیم نمایش‌های  $\rho_i$  را می‌توان به عنوان ساخت یک ماتریس قطری بلوکی حاوی  $\rho_i$  به عنوان بلوک‌ها در نظر گرفت؛ به اشکال ۱۳ و ۱۴ مراجعه کنید.



(ب) انتقال موازی در کره  $S^2$



(c) انتقال موازی و مختصات‌بندی آن در یک فضای مسطح

شکل ۱۵: انتقال موازی بردارهای مماس  $v \in T_q M$  در  $p \in T_p M$  در  $q \in \mathcal{P}_\gamma v$  به مقدار  $\psi_p^A \circ \psi_q^{\bar{A}}(\psi_q^{\bar{A}}(v))$  انجام می‌گیرد. مسیر انتقال موازی شده  $\gamma$  را به معنای معمول در فضاهای اقلیدسی می‌دانند. گچه‌های  $\psi_q^{\bar{A}}$  (قرمز) و  $\psi_p^A$  (سبز) امکان بیان انتقال دهنده مستقل از مختصات را توسط یک عنصر گروهی  $\psi_q^{\bar{A}} \circ \psi_p^A \in \text{GL}(d)$  فراهم می‌کنند که تغییر ضرایب بردار را در نظر می‌گیرد اگر چارچوب هدف با چارچوب منبع منتقل شده مطابقت نداشته باشد. شکل ۱۵ اب انتقال موازی چوینتا را در ۲-کره  $S^2$  نشان می‌دهد، مقایسه کنید با معادله (۴۳۸). انتقال دهنده‌های  $\mathcal{P}_{\gamma_1}$  و  $\mathcal{P}_{\gamma_2}$  در امداد مسیرهای مختلف ۶۱ و ۶۲ به طور کلی با یکدیگر اختلاف دارند. همانند فضاهای مسطح، انتقال دهنده‌های مستقل از مختصات را می‌توان توسط عناصر گروهی که بر روی ضرایب نسبت به چارچوب‌های مختصاتی در  $q$  و  $p$  عمل می‌کنند، بیان کرد.

### ۱.۳.۳ انتقال دهنده‌های بردار مماس

از نظر آموزشی معقول است که ابتدا با حالت خاص انتقال دهنده‌های لوی-چوینتا در فضاهای اقلیدسی که در شکل ۱۵ آ به تصویر کشیده شده‌اند، شروع کنیم، قبل از پرداختن به انتقال دهنده‌ها و منيفلددهای عمومی‌تر. در این حالت انتقال موازی مستقل از مسیر انتخاب شده  $\gamma$  است و بردار منتقل شده را به معنای معمول در فضاهای اقلیدسی موازی نگه می‌دارد. توجه داشته باشید که انتقال دهنده  $\mathcal{P}_\gamma$  بین فضاهای مماس  $T_q M$  و  $T_p M$  نگاشت می‌کند و بنابراین مستقل از مختصات است. با این حال، می‌توان آن را نسبت به مختصات بیان کرد، سپس به جای بردارهای مماس بر روی بردارهای ضرایب عددی عمل می‌کند. شهودی در شکل ۱۵ آورده شده است، جایی که چارچوب‌ها در  $q$  و  $p$  موازی نیستند<sup>۱۶</sup> به طوری که ضرایب  $(1, 0, 0, 0)$  در  $q$  و  $(0, 1, 0, 0)$  در  $p$  متفاوت هستند، حتی اگر بردارهای مماس (مستقل از مختصات) مربوطه با یکدیگر موازی باشند. برای دقیق‌تر کردن این موضوع، گچه‌های  $\psi_q^{\bar{A}}$  و  $\psi_p^A$  را در همسایگی‌های  $U^{\bar{A}}$  از  $q$  (قرمز) و  $U^A$  از  $p$  (سبز) در نظر بگیرید. فرض کنید یک بردار  $v = (\psi_q^{\bar{A}})^{-1}(\psi_p^A(v))$  با ضرایب بردار منتقل شده  $\mathcal{P}_\gamma v$  در سپس توسط:  $\mathcal{P}_\gamma v = \psi_p^A \circ \mathcal{P}_\gamma \circ (\psi_q^{\bar{A}})^{-1}(v^{\bar{A}})$  داده شده باشد. ضرایب بردار منتقل شده  $\mathcal{P}_\gamma v$  با ضرایب  $\psi_p^A \circ \mathcal{P}_\gamma(v) = \psi_p^A \circ \mathcal{P}_\gamma \circ (\psi_q^{\bar{A}})^{-1}(v^{\bar{A}})$  می‌شود. نتیجه می‌شود که بیان مختصاتی یک انتقال دهنده نسبت به گچه‌های  $\bar{A}$  و  $A$  به صورت زیر است:<sup>۱۷</sup>

$$g_\gamma^{A\bar{A}} := \psi_p^A \circ \mathcal{P}_\gamma \circ (\psi_q^{\bar{A}})^{-1} \in \text{GL}(d) \quad (33)$$

عنصر گروهی  $g_\gamma^{A\bar{A}}$  انتقال دهنده‌ای غیرموازی چارچوب‌های مرجع در  $q$  و  $p$  را در نظر می‌گیرد. در  $\mathbb{R}^d$ ، معمولاً فرض می‌شود که تمام چارچوب‌ها موازی هستند به طوری که تمام مختصات‌بندی‌های انتقال دهنده‌های لوی-چوینتا بدیهی می‌شوند.<sup>۱۸</sup>

<sup>۱۶</sup> برخلاف منيفلددهای عمومی،  $\mathbb{R}^d$  با مفهوم کانونی موازی بودن چارچوب‌های مرجع همراه است.

<sup>۱۷</sup> مقدار  $g_\gamma^{A\bar{A}}$  ممادیری در  $\text{GL}(d)$  می‌گیرد اگر ما اتصال‌های دلخواه (با مقدار  $\text{gl}(d)$ ) و گروه‌های ساختار عمومی  $G \leq \text{GL}(d)$  را فرض کنیم. برای اتصال

لوی-چوینتا با مقدار  $d=50$  و چارچوب‌های متعدد، یعنی  $d \geq G$ ،  $g_\gamma^{A\bar{A}} \in d$  را داریم.

<sup>۱۸</sup> CNN‌های سنتی در  $\mathbb{R}^d$  به طور ضمنی این فرض را از چارچوب‌های موازی (شکل ۲۶) و انتقال دهنده‌های بدیهی می‌کنند.

از آنجا که انتقال‌دهنده در معادله (۳۳) وابسته به مختصات است، ما علاوه‌مند به تبدیل‌های گیج آن هستیم. گیج‌های  $\psi_q^{\tilde{B}}$  و  $\psi_p^B$  را دو گیج جایگزین در همسایگی‌های  $q$  و  $p$  در نظر بگیرید. از نمودار جابجایی:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & g_{\gamma}^{A\tilde{A}}. & & \\
 \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^d \\
 \downarrow & \swarrow \psi_q^{\tilde{A}} & T_q M & \xrightarrow{\quad \mathcal{P}_{\gamma} \quad} & \downarrow \psi_p^A \\
 g_q^{\tilde{B}\tilde{A}}. & & & & g_p^{BA}. \\
 \downarrow & \swarrow \psi_q^{\tilde{B}} & & \searrow \psi_p^B & \downarrow \\
 \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\quad} & T_p M & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^d \\
 & & \downarrow & & \\
 & & g_{\gamma}^{B\tilde{B}}. & &
 \end{array} \tag{۳۴}$$

می‌توان خواند که انتقال‌دهنده‌ها در گیج‌های مختلف توسط:

$$g_{\gamma}^{B\tilde{B}} = g_p^{BA} g_{\gamma}^{A\tilde{A}} (g_q^{\tilde{B}\tilde{A}})^{-1} \tag{۳۵}$$

مرتبه هستند. توجه داشته باشید که شباهت این قانون تبدیل و نمودار جابجایی به آنچه در معادلات (۲۱) و (۲۳) آمده است. تفاوت بین هر دو این است که انتقال‌دهنده دارای دامنه  $T_q M$  و دامنه مشترک  $T_p M$  متفاوتی است که توسعه گیج‌های مختلف و مستقل از یکدیگر تسهیم شده‌اند و بنابراین به طور مستقل تبدیل می‌شوند.

به طور کلی، انتقال موازی بردارهای مماس توسط یک انتخاب اتصال تعیین می‌شود، به عنوان مثال (اما نه لزوماً) توسط اتصال کانونی لوی-چویتا یک منيفولد ریمانی. یک اتصال را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای از انتقال‌دهنده‌های بین فضاهای مماس مجاور در نظر گرفت، به طوری که انتقال‌دهنده کامل  $\mathcal{P}_{\gamma}$  با انگرال‌گیری اتصال در امتداد مسیر  $\gamma$  به دست می‌آید. انتقال‌دهنده‌ها در امتداد مسیرهای مختلف  $q$  و  $p$  از  $\gamma$  به  $S^1$  مثال زده شده است، مقایسه کید با معادله (۴۳۸). همانند نیازی به مطابقت ندارند، که در شکل ۱۵ ب انتقال‌دهنده‌های لوی-چویتا در  $-2$ -کره  $S^1$  مثال زده شده است، توافق نیافرود است. تبدیل‌های گیج چنین انتقال‌دهنده‌های فضاهای مسطح، انتقال‌دهنده‌های مستقل از مختصات را می‌توان توسط معادله (۳۳) نسبت به گیج‌ها بیان کرد. تبدیل‌های گیج انتقال‌دهنده‌های مختصات بندی شده دوباره توسط معادله (۳۵) داده می‌شوند. انتقال‌دهنده‌ها در یک منيفولد داده شده می‌توانند در اصل به صورت تحلیلی از اتصال محاسبه شوند [؟] و گاهی اوقات می‌توانند به صورت فرم بسته بیان شوند، به عنوان مثال برای کره  $S^2$ ، معادله (۴۳۸). چندین الگوریتم عددی برای محاسبه انتقال‌دهنده‌های موازی در مسیرها وجود دارد؛ به بخش ۲.۱.۲ مراجعه کنید. ما به جزئیات بیشتر در مورد نحوه محاسبه انتقال‌دهنده‌های بردار مماس  $\mathcal{P}_{\gamma}$  نخواهیم پرداخت بلکه به سادگی آن‌ها را داده شده فرض می‌کیم.

### ۲.۳.۳ انتقال‌دهنده‌های بردار ویژگی

معادله (۲۸) قانون تبدیل ضرایب بردار ویژگی را توسط نوع میدان آن‌ها ( $\rho$ ) تعریف می‌کند. انتقال‌دهنده موازی آن‌ها، که نسبت به گیج‌های  $\psi_q^{\tilde{A}}$  و  $\psi_p^A$  بیان می‌شود، به طور مشابه با پیچیدن انتقال‌دهنده ضریب بردار مماس در این نمایش میدان داده می‌شود، یعنی توسط:

$$\rho(g_{\gamma}^{A\tilde{A}}). \tag{۳۶}$$

توجه داشته باشید که از آنجا که  $G \rightarrow \text{GL}(c)$  است  $\square$  این ساختار تنها زمانی به خوبی تعریف می‌شود که تمام انتقال‌دهنده‌ها  $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$  (برای مسیرهای دلخواه  $\gamma$  و چارچوب‌های  $\tilde{A}$ ) واقعاً مقادیری در گروه ساختار انتخاب شده  $G$  بگیرند. اینکه آیا این حالت صادق است یا خیر هم به انتخاب خاص  $G$ -ساختار (یا  $G$ -اطلس) و هم به انتقال‌دهنده‌ها (یا اتصال) مورد نظر بستگی دارد  $\square$  آن‌ها باید سازگار باشند [؟].

تمام شبکه‌های کانولوشنی (بنابراین انتقال می‌دهند) بردارهای ویژگی را به نحوی جمع‌آوری می‌کنند، و بنابراین برخی انتخاب از اتصال و  $G$ -ساختار انتخاب شده با اتصال لوی-چویتا ناسازگار باشد، این به معنای آن است که این مدل‌ها  $\square$  اغلب به طور ضمنی  $\square$  یک اتصال جایگزین و سازگار با  $G$  را برای جمع‌آوری ویژگی‌ها فرض می‌کنند. خواننده فعلایا باید نگران انتخاب‌های خاص اتصال‌ها باشد، که در مرور ادبیات ما در بخش سوم روشن تر خواهد شد. در ادامه این بخش، ما بیشتر در مورد سازگاری  $G$ -اتصال‌ها و  $G$ -ساختارها توضیح خواهیم داد. با فرض اینکه انتقال‌دهنده‌های ویژگی در ادامه همیشه به خوبی تعریف خواهند شد، این بخش را می‌توان با خیال راحت در اولین مطالعه نادیده گرفت.

بحث دقیق‌تر و مستقل از مختصات انتقال‌دهنده‌ها در بندل‌های بردار ویژگی مرتبه را می‌توان در بخش ۵.۶ یافت.

### ۳.۳.۳ سازگاری اتصال‌ها و $G$ -ساختارها

یک اتصال با یک  $G$ -ساختار  $GM$  سازگار با  $G$  نامیده می‌شود اگر عبارات مختصاتی  $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$  انتقال‌دهنده‌های  $\gamma$  آن نسبت به هر چارچوب  $A$ ,  $\tilde{A}$  از  $GM$  مقادیری در گروه ساختار  $G$  بگیرند [۱۹]. یک اتصال سازگار با  $G$  منجر به انتقال‌دهنده‌های بردارهای ویژگی مرتبه با  $G$  می‌شود.

برای روشن کردن این شرط سازگاری تا حدی انتزاعی، چند مثال خاص را مورد بحث قرار می‌دهیم. یک مثال ساده، اتصال لوی-چویتا در  $\mathbb{R}^n$  است، شکل ۱۵. آ. دو ساختار  $\{e\}$  در اشکال  $\mathbb{A}^3$  و  $\mathbb{B}^3$  نشان داده شده‌اند را در نظر بگیرید. در اینجا  $\{e\} = G$  است، به این معنی که نوع میدان  $(c) \rightarrow \{e\}$  :  $\rho$  یک نمایش  $\{e\}$  است، به طوری که انتقال موازی بردارهای ویژگی تها در صورتی می‌تواند تعریف شود که عبارات مختصاتی  $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$  مقادیری در  $\{e\}$  بگیرند، یعنی بدینهی باشند. از آنجا که ساختار  $\{e\}$  در شکل  $\mathbb{A}^3$  از چارچوب‌های "موازی" تشکیل شده است، این امر واقعاً همینطور است □ بنابراین اتصال لوی-چویتا با این ساختار  $\{e\}$  سازگار است. در مقابل، چارچوب‌های ساختار  $\{e\}$  در شکل  $\mathbb{B}^3$  نسبت به یکدیگر "چرخانده شده‌اند"، که منجر به عبارات مختصاتی غیربدینه  $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$  می‌شود که مقادیری در  $SO(2)$  می‌گیرند (در شکل  $\mathbb{A}^3$  بصری‌سازی شده است). از آنجا که نوع میدان  $(c) \rightarrow \{e\}$  :  $\rho$  چرخش‌ها را مدیریت نمی‌کند، امکان تعریف انتقال لوی-چویتا ویژگی‌های مرتبه با این ساختار وجود ندارد □ آن‌ها ناسازگار هستند. به عنوان مثال دوم، اتصال لوی-چویتا در  $S^2$  را در نظر بگیرید، که در شکل ۱۵ ب نشان داده شده است. انتقال در این حالت همیشه وابسته به مسیر خواهد بود و منجر به بردارهای چرخانده شده متفاوت خواهد شد، که دلالت دارد بر اینکه  $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$  مقادیری در  $(2)$   $SO(2)$  خواهد گرفت. بردارهای ویژگی که باید مطابق با اتصال لوی-چویتا منتقل شوند، بنابراین باید از نوع  $(c) \rightarrow GL(2)$  :  $\rho$  باشد که یک نمایش  $(2)$   $SO(2)$  است. این امر حداقل نیازمند ساختار  $(2)$   $SO(2)$  در  $S^2$  است که در شکل  $\mathbb{A}^3$  نشان داده شده است. ساختار  $\{e\}$  در  $S^2$  از شکل ۰۵ ب با اتصال لوی-چویتا ناسازگار است.

از آنجا که اتصال لوی-چویتا یک اتصال متربیک است، طول و زاویه بین بردارهای مماس را حفظ می‌کند، و بنابراین چارچوب‌های معماد را به چارچوب‌های متعادم منتقل می‌کند. نتیجه می‌شود که اتصال لوی-چویتا همیشه با ساختار  $d$  چارچوب‌های متعادم سازگار است، که نسبت به آن  $\tilde{A}$   $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$  مقادیری در  $d$  می‌گیرد. اگر مینیفولد  $d$  قابل جهت‌گیری باشد، دست‌سازی چارچوب توسط انتقال‌دهنده‌های لوی-چویتا حفظ می‌شود، به این معنی که آن‌ها تضمین شده‌اند که با ساختارهای  $SO(d)$  چارچوب‌های متعادم راست گرد در  $M$  شوند. تمام شبکه‌های کانولوشنی در مرور ادبیات ما در بخش سوم که بر اساس ساختارهای  $(d)$  هستند، ویژگی‌ها را از طریق انتقال‌دهنده‌های لوی-چویتا جمع‌آوری می‌کنند.

اگر یک  $G$ -ساختار داده شده با اتصال لوی-چویتا ناسازگار باشد، باید یک اتصال جایگزین و سازگار با  $G$  را برای انتقال بردارهای ویژگی تعریف کرد. بر جسته‌ترین مثال در مرور ادبیات ما، اتصال‌های بدینهی در ساختارهای  $\{e\}$  است. یک اتصال بدینهی با خاصیت مستقل از مسیر بودن انتقال آن مشخص می‌شود [۲۰]. هر ساختار  $\{e\}$  یک اتصال بدینهی منحصر به فرد را نتیجه می‌دهد، که بردارهای مماس را به گونه‌ای منتقل می‌کند که زاویه یکسانی را با چارچوب‌های مرجع ساختار  $\{e\}$  حفظ کنند. این امر دلالت دارد بر اینکه  $e = g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$  یعنی آن‌ها بردارهای ضربی را در  $\mathbb{R}^n$  (نسبت به چارچوب‌های ساختار  $\{e\}$ ) بدون تغییر مقادیر عددی آن‌ها منتقل می‌کنند. چنین انتقال‌دهنده‌هایی در شبکه‌های کانولوشنی استفاده می‌شوند که انتقال‌دهنده‌های غیربدینه را به صراحت مدل نمی‌کنند □ که در مورد تمام شبکه‌های دارای  $\{e\} = G$  در جدول ۶ صادق است، به ویژه آن‌هایی که در بخش‌های ۳.۱۱ و ۳.۱۲ هستند. توجه داشته باشید که اتصال بدینهی تها انصالی است که با یک ساختار  $\{e\}$  سازگار است.

همانطور که در بالا ذکر شد، هر شبکه کانولوشنی برخی انتخاب از  $G$ -ساختار و اتصال سازگار را فرض می‌کند، اغلب اتصال‌های لوی-چویتا یا اتصال‌های بدینهی.

بخش ۵.۶ به طور مفصل در مورد سازگاری انتقال‌دهنده‌ها و  $G$ -ساختارها از دیدگاه مستقل از مختصات توضیح می‌دهد.

### ۴.۳ عمل ایزومتری‌ها و تبدیل‌های گیج القا شده

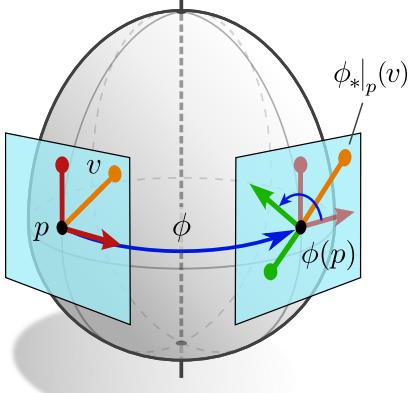
تا کنون بحث ما منحصراً بر تقارن‌های گیج محلی در مختصات‌بندی فضاهای مماس متمرکز بوده است. یک مینیفولد ممکن است، با این حال، خود دارای تقارن‌های غیربدینه باشد، که در مورد یک مینیفولد ریمانی  $M$  گروه ایزومتری آن ( $Isom(M)$ ) را تشکیل می‌دهند. این بخش ایزومتری‌ها و عمل آن‌ها بر مبنی‌لهای مماس، بردارهای مرجع و میدان‌های مرتع و چارچوب‌های مرتع ایزومتری را به طور خلاصه موردنی بحث قرار می‌دهد، نتایجی را خلاصه می‌کند که به طور دقیق‌تری در بخش ۱.۸ استخراج شده‌اند. ما بدین ترتیب معادلی بین عمل‌های فعل ایزومتری و تفسیر منفعل آن‌ها بر حسب تبدیل‌های گیج القا شده توسط ایزومتری را بر جسته خواهیم کرد. این معادلی بعداً امکان توصیف تناوب پذیری ایزومتری  $GM$ -کانولوشن‌ها را فراهم خواهد کرد.

ایزومتری‌ها به عنوان تقارن‌های مبنی‌لهای ریمانی تعریف می‌شوند، یعنی آن نگاشتش (دیفتومورفیسم‌ها)

$$\phi : M \rightarrow M, \quad (37)$$

که متریک و در نتیجه فواصل روی  $M$  را حفظ می‌کنند. مجموعه همه ایزومتری‌های یک مینیفولد ریمانی  $M$  گروه ایزومتری آن را تشکیل می‌دهد، که ما آن را با  $(M)$   $Isom(M)$  نشان می‌دهیم. به عنوان مثال، گروه ایزومتری  $E(d)$  ایزومتری فضاهای اقلیدسی  $\mathbb{E}_d$  است. این گروه شامل انتقال‌ها،

<sup>۱۹</sup> به طور معادل، فرم ۱-اتصال اتصال، که نسبت به چارچوب‌های  $GM$  بیان می‌شود، ملزم به داشتن مقدار  $\mathbb{A}$  است، که در آن  $\mathbb{A}$  نشان دهنده جبر لی  $G$  است. به طور انتزاعی تر، ما به اتصال‌های اصلی اهرسمن در بندل اصلی  $G$  ( $GM$ ) علاقه‌مندیم.



شکل ۱۶: بصری‌سازی پیش‌برنده آزاد از مختصات بردارهای مماس و بیان مختصاتی آن نسبت به چارچوب‌های مرجع داده شده در موقعیت منبع و هدف. پیش‌برنده آزاد از مختصات  $\phi_*|_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} M$  بردارهای مماس  $v \in T_p M$  را به  $\phi_*|_p(v) \in T_{\phi(p)} M$  (نازنگی) منتقل می‌کند. فرض کنید  $\psi_p^{\tilde{A}}$  گیج در  $p$  که متناظر با چارچوب مرجع قرمز است و  $\psi_{\phi(p)}^A$  گیج در  $\phi(p)$  که متناظر با چارچوب مرجع سبز است. آنها بردارها را قبل و بعد از پیش‌برنده توسط ضرایب عددی  $(1, 1)^T$  و  $(0, -\sqrt{2})^T$  توضیح می‌دهند. این تبدیل ضرایب بردار توسط تبدیل گیج القا شده توسط ایزومتری  $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in \text{GL}(d)$  توصیف می‌شود، یعنی  $(\phi_*|_p(v)) = g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \cdot \psi_{\phi(p)}^A(\phi_*|_p(v)) = g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \cdot \psi_p^{\tilde{A}}(v)$ . ضرایب بردارهای ویژگی به طور مشابه  $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in G$  تبدیل می‌شوند اگر طبق

چرخش‌ها و بازتاب‌ها است، که همه آن‌ها متريک استاندارد  $\mathbb{E}_d$  را حفظ می‌کنند. گروه ایزومتری  $-\mathbb{S}^2$  توسط گروه متعامد  $\mathbb{S}^2$  داده می‌شود، که شامل چرخش‌ها و بازتاب‌ها است. شکل ۱۶ متفاوت تخم‌مرغی شکلی را نشان می‌دهد که ایزومتری‌های آن چرخش‌ها و بازتاب‌ها در ۲ حول محور عمودی هستند.

### ۱.۴.۳ پیش‌برنده بردارهای مماس

هر ایزومتری  $\phi \in \text{Isom}(M)$  از طریق پیش‌برنده (یا دیفرانسیل) آن

$$\phi_*|_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} M, \quad (38)$$

به طور طبیعی بردارهای مماس عمل می‌کند. همانطور که در شکل ۱۶ (وسط) بصری‌سازی شده است، پیش‌برنده را می‌توان به طور شهودی به عنوان حمل بردارهای مماس همراه با عمل ایزومتری بر مبنای زیرین  $M$  در نظر گرفت. تعریف رسی پیش‌برنده بر روی  $T M$  در پیوست آ.۲ آورده شده است، با این حال، شهود ارائه شده برای هدف ما کافی است. از آنجا که پیش‌برنده یک نگاشت خطی آزاد از مختصات بین فضاهای مماس است، عمل آن در مختصات توسط ماتریس  $d \times d$  نمایش داده می‌شود. با فرض گیج‌های  $\psi_p^{\tilde{A}}$  در موقعیت منبع و هدف، به ترتیب، این ماتریس توسط

$$g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) := \psi_{\phi(p)}^A \circ \phi_*|_p \circ (\psi_p^{\tilde{A}})^{-1} \in \text{GL}(d). \quad (39)$$

داده می‌شود. این ماتریس تبدیل از ضرایب عددی یک بردار اصلی  $v \in T_p M$  در گیج منبع و پیش‌برنده آن  $\phi_*|_p(v) \in T_{\phi(p)} M$  در گیج هدف را توضیح می‌دهد، یعنی  $(\phi_*|_p(v)) = g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \cdot \psi_{\phi(p)}^A(v)$ . نمودار جایجایی

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \cdot} & \mathbb{R}^d \\ \downarrow \psi_p^{\tilde{B}} & \nearrow \psi_p^{\tilde{A}} & & \downarrow \psi_{\phi(p)}^B & \nearrow \psi_{\phi(p)}^A \\ T_p M & \xrightarrow{\phi_*|_p} & T_{\phi(p)} M & & \mathbb{R}^d \\ \downarrow \psi_p^{\tilde{B}} & \nearrow \psi_p^{\tilde{A}} & & \downarrow \psi_{\phi(p)}^B & \nearrow \psi_{\phi(p)}^A \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{g_{\phi}^{B\tilde{B}}(p) \cdot} & \mathbb{R}^d & & , \end{array} \quad (40)$$

که از نظر مفهومی شبیه آن در معادله (۳۴) است، تعریف بیان مختصاتی پیش‌برنده بردار مماس را بصری‌سازی می‌کند. علاوه بر این دلالت بر اینکه تبدیل‌های گیج بین مختصات‌بندی‌های مختلف توسط

$$g_{\phi}^{B\tilde{B}} = g_{\phi(p)}^{BA} g_{\phi}^{A\tilde{A}} (g_p^{\tilde{B}\tilde{A}})^{-1}, \quad (41)$$

داده می‌شوند، که معادل مفهومی معادله (۳۵) است.

### ۲.۴.۳ پیش‌برنده چارچوب‌های مرجع و تقارن‌های $\square$ -ساختار

از آنجا که چارچوب‌های مرجع فقط  $d$ -تاپل‌هایی از بردارهای چارچوب خطی مستقل هستند، پیش‌برنده بردارهای مماس پیش‌برنده‌ای از چارچوب‌های مرجع را با پیش‌بردن محورهای چارچوب منفرد القا می‌کند. به طور خاص، پیش‌برنده یک چارچوب  $[e_i]_{i=1}^d$  در  $p$  به عنوان چارچوب  $\phi|_p$  در  $(\phi|_p)_i$  تعریف می‌شود.

این پیش‌برنده چارچوب‌ها همیشه به خوبی تعریف شده است، با این حال، ممکن است با  $G$ -ساختار سازگار نباشد، یعنی به طور کلی تضمینی وجود ندارد که چارچوب‌ها در  $GM$  هنگام پیش‌برده شدن در  $GM$  باقی بمانند. به عنوان مثال  $\{e\}$ -ساختار در شکل ۲۰ (بالا چپ) را در نظر بگیرید، که توسط انتقال‌های افقی حفظ می‌شود اما توسط انتقال‌های عمودی یا هر ایزومنتری دیگر از  $\mathbb{R}^2$  حفظ نمی‌شود. به طور مشابه،  $\mathcal{R}$ -ساختار در شکل ۲۱ (پایین چپ) توسط انتقال‌ها و بازتاب‌های افقی حفظ می‌شود، اما توسط چرخش‌ها نه. بنابراین مازیرگروه

$$\text{Isom}_{GM} := \left\{ \phi \in \text{Isom}(M) \mid [\phi_*(e_i)]_{i=1}^d \in GM \quad \forall [e_i]_{i=1}^d \in GM \right\} \leq \text{Isom}(M) \quad (42)$$

ایزومنتری‌هایی که تقارن‌های  $G$ -ساختار هستند را در نظر می‌گیریم، یعنی آن‌هایی که تضمین شده‌اند هر چارچوب در  $GM$  را به چارچوب دیگری که نیز در  $GM$  موجود است، نگاشت کنند.<sup>۲۰</sup> توجه داشته باشد که  $\text{Isom}_{GM}$  به طور کلی به انتخاب خاص  $G$ -ساختار  $GM$  بستگی دارد، نه فقط به گروه ساختار  $G$ . برای حالت خاص که  $G \geq d$ ، تضمین شده است که  $\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M)$  مطابقت داشته باشد زیرا ایزومنتری‌ها تضمین شده‌اند که چارچوب‌های متعامد را به چارچوب‌های متعامد نگاشت کنند. ماعلاًه مند به زیرگروه  $\text{Isom}_{GM}$  هستیم زیرا تنها آن ایزومنتری‌ها پیش‌برنده به خوبی تعریف شده‌ای از بردارهای ویژگی مستقل از مختصات  $GM$  را القا خواهند کرد، همانطور که در بخش بعدی بیشتر مورد بحث قرار گرفته است.

پیش از ادامه به عمل ایزومنتری بر بردارهای ویژگی، ما آنچه را که تبدیل‌های گیج القا شده توسط ایزومنتری می‌نامیم، مورد بحث قرار می‌دهیم. برای این منظور، فرض کنید  $[e_i^{\tilde{A}}]_{i=1}^d$  آن چارچوب در  $p$  باشد که متناظر با گیج منع  $\psi_p^{\tilde{A}}$  است و فرض کنید  $[e_i^A]_{i=1}^d$  آن چارچوب در  $(p)$  باشد که متناظر با گیج هدف  $\psi_{\phi(p)}^A$  است، همانطور که در شکل ۱۶ به ترتیب در فرم (چپ) و سبز (راست) نشان داده شده است. پیش‌برنده  $[\phi_*|_p(e_i^{\tilde{A}})]_{i=1}^d$  چارچوب منع از  $p$  به  $(p)$  (فرم شفاف، راست) به طور کلی با چارچوب هدف مطابقت ندارد. با این حال، همانطور که در بخش ۳.۱.۸ اثبات شده است، دو چارچوب توسط تبدیل گیج القا شده توسط ایزومنتری مرتبط هستند:

$$[\phi_*|_p(e_i^{\tilde{A}})]_{i=1}^d = [e_i^A]_{i=1}^d \triangleleft g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p), \quad (43)$$

که در آن  $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)$  عنصر گروهی از معادله (۳۹) و  $\triangleleft$  عمل راست از معادله (۱۱) است. اصطلاح «تبدیل گیج القا شده توسط ایزومنتری» تا آنجا معنا دارد که هندسه‌های اطراف  $p$  و  $\phi(p)$  غیرقابل تشخیص هستند زیرا  $\phi$  یک ایزومنتری، یعنی یک تقارن از  $M$  است. با شناسایی دو نقطه با یکدیگر، بنابراین می‌توان عمل فعل  $\phi$  بر یک کمیت هندسی را به عنوان یک تبدیل گیج منفعل، یعنی یک تغییر القا شده از چارچوب منع به چارچوب هدف، تفسیر مجدد کرد.

قضیه ۸.۳ در بخش ۱.۸ اثبات می‌کند که ایزومنتری‌های گیج القا شده با مقدار  $G$  یکدیگر را نتیجه می‌دهند، یعنی

$$\phi \in \text{Isom}_{GM} \iff g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in G \quad \forall p \in M \quad (44)$$

برای گیج‌های دلخواه  $\psi_p^{\tilde{A}}$  و  $\psi_{\phi(p)}^A$  از  $G$ -اطلس برقرار است. خواننده باید این ادعاهای را در مثال‌های ما در شکل ۲۰ تأیید کند.

### ۲.۴.۴ پیش‌برنده بردارهای ویژگی

اگر (و تنها اگر) یک ایزومنتری تقارنی از  $G$ -ساختار باشد، منجر به پیش‌برنده بردارهای ویژگی می‌شود. به طور شهودی، این پیش‌برنده بردارهای ویژگی را از نقاط  $p$  به  $(p)\phi$  منتقل می‌کند. هنگامی که نسبت به دو چارچوب مرجع در  $p$  و  $(p)\phi$  بیان شود، توسط تبدیل گیج القا شده

$$\rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)). \quad (45)$$

داده می‌شود. توجه داشته باشد که این تبدیل برای هر  $\phi \in \text{Isom}_{GM}$  به خوبی تعریف شده است، زیرا تبدیل‌های گیج القا شده  $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)$  در این حالت مقادیری در  $G$  خواهد گرفت و یک  $G$ -نماش است. در مقابل، اگر  $\phi$  تقارنی از  $G$ -ساختار نباشد، تعریف پیش‌برنده بردار ویژگی متناظر غیرممکن است. این گزاره با این واقعیت مرتبط است که ویژگی‌های های ۳.۰.۰ معمولی هیچ رفتار تبدیل مشخصی تحت چرخش‌ها یا بازتاب‌ها در گروه  $E(d)$  ندارند.

<sup>۲۰</sup> به طور رسمی تری بیان شود، چنین ایزومنتری‌هایی اتمورفیسم‌های بندل اصلی  $G$ -ساختار هستند (یا القا می‌کنند).

پیش‌برنده بردارهای ویژگی منفرد عملی بر کل میدان ویژگی  $f$  را دلالت می‌کند، که ما آن را با  $f \triangleright \phi$  نشان می‌دهیم. نسبت به مختصات، این عمل به صورت

$$[\phi \triangleright f]^A(\phi(p)) = \rho(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) f^{\tilde{A}}(p). \quad (46)$$

بیان می‌شود. ما بعداً آبیات خواهیم کرد که های  $\square\square\square$  مستقل از مختصات نسبت به عمل ایزومنتری‌ها در  $\text{Isom}_{GM}$  بر میدان‌های ویژگی تناوب پذیر هستند؛ به شکل ۲۰ مراجعه کنید. این ویژگی بر این واقعیت تکیه دارد که عمل فعال ایزومنتری بر میدان‌های ویژگی می‌تواند توسط معادله (۴۶) به عنوان یک تبدیل گیج منفعل صرف ضرایب بردار ویژگی در ک شود.

## ۴ شبکه‌های مستقل از مختصات و $\square\square$ -کانولوشن‌ها

شبکه‌های عصی داده‌ها را با اعمال مجموعه‌ای از تگاشتهای پارامتری (لایه‌ها) به یک سیگال ورودی پردازش می‌کنند  $\square$  در مورد ما به مجموعه‌ای از میدان‌های ویژگی بر روی یک منيفولد ریمانی. اصل کوواریانس بدین ترتیب ایجاد می‌کند که لایه‌های منفرد شبکه باید عملیات مستقل از مختصات  $GM$  باشند. نمایش‌های مختصاتی چنین لایه‌هایی بنابراین باید طوری تبدیل شوند که قوانین تبدیل میدان‌های ویژگی ورودی و خروجی خود را رعایت کنند. به جز این الزام سازگاری، لایه‌های مستقل از مختصات عمومی بدون محدودیت باقی می‌مانند.

یک اصل طراحی رایج شبکه‌های عصی که بر روی سیگال‌های فضایی (میدان‌های ویژگی) عمل می‌کنند این است که آن‌ها به معنای تعیین یافته‌ای کانولوشنی هستند. ویژگی اصلی که اکثر تعیین‌های عملیات کانولوشن در آن مشترک هستند این است که استنتاج آن‌ها مستقل از موقعیت است. این امر با اشتراک توابع قالب، به عنوان مثال کرنل‌های کانولوشن یا بایاس‌ها، بین مکان‌های مختلف حاصل می‌شود. هر زمان که گروه ساختار  $G$  غیربدیهی باشد، فرآیند اشتراک وزن مهم است زیرا توابع قالب می‌توانند نسبت به چارچوب‌های مرجع مختلف به اشتراک گذاشته شوند. همانطور که در ادامه استدلال خواهیم کرد، این ابهام با طراحی توابع قالب مشترک برای تناوب پذیر بودن تحت تبدیل‌های گیج با مقدار  $G$  حل می‌شود. توابع قالب تناوب پذیر گیج نسبت به چارچوب مرجع خاصی که در آن اعمال می‌شوند بی تفاوت خواهد بود و بنابراین امکان اشتراک وزن مستقل از مختصات را فراهم می‌کنند.

۱.۴	عملیات نقطه‌ای تناوب پذیر گیج	.....
۳۳		.....
۱.۱.۴	کانولوشن‌های $1$ تناوب پذیر گیج	.....
۳۳		.....
۲.۱.۴	جمع بایاس تناوب پذیر گیج	.....
۳۴		.....
۳.۱.۴	غیرخطی‌های تناوب پذیر گیج	.....
۳۶		.....
۲.۴	تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های $GM$	.....
۳۶		.....
۱.۲.۴	دیدگاه یک ناظر محلی به میدان‌های ویژگی	.....
۳۷		.....
۲.۲.۴	کرنل‌های مستقل از مختصات و تبدیلات میدان کرنل	.....
۳۹		.....
۳.۲.۴	کانولوشن‌های $\square\square$ و کرنل‌های $\square$ -راهبر	.....
۴۱		.....
۴۵	تناوب پذیری ایزومنتری	.....

در این بخش ما لایه‌های شبکه‌ای را در نظر خواهیم گرفت که میدان‌های  $\square\square f$  از نوع  $p$  را به عنوان ورودی می‌گیرند و میدان  $\square\square f$  از نوع  $p$  را به عنوان خروجی تولید می‌کنند. بخش ۱.۴ حالت خاص لایه‌هایی را که به صورت نقطه‌ای عمل می‌کنند مورد بحث قرار می‌دهد، یعنی آن‌هایی که خروجی آن‌ها  $(p)$  در هر  $p \in M$  در هر  $f \in \square\square$  در تنها به بردار ویژگی ورودی منفرد  $(p)$  در همان مکان بستگی دارد. مثال‌های عملی مرتبط که در اینجا در نظر گرفته شده‌اند عبارتند از  $1 \times 1$ -تناوب پذیر گیج در بخش ۱.۱.۴، جمع بایاس در بخش ۲.۱.۴ و غیرخطی‌ها در بخش ۳.۱.۴. حالت پیچیده‌تر کانولوشن‌ها با کرنل‌های گسترده فضایی در بخش ۲.۴ بررسی شده است. به عنوان آماده‌سازی، بخش ۱.۲.۴ میدان‌های ویژگی را همانطور که از دیدگاه مشاهده‌گران محلی (چارچوب‌های مرجع) دیده می‌شوند مورد بحث قرار می‌دهد، که کرنل‌های (کانولوشن) نسبت به آن‌ها اعمال خواهند شد. چنین مشاهداتی به عنوان پس‌کشی میدان ویژگی به فضای مماس یک مشاهده‌گر رسمی سازی می‌شوند؛ به شکل ۱۷ مراجعه کنید. بخش ۲.۲.۴ به اصطلاح تبدیل‌های میدان کرنل را معرفی می‌کند، که شیوه کانولوشن‌ها مستند اما اشتراک وزن فضایی را فرض نمی‌کند و بنابراین توسعه یک میدان کرنل (به صورت هموار مغایر) بر روی  $M$  پارامتری می‌شوند. کانولوشن‌های کرنل مفترض شترک پارامتری می‌شوند. به متنظر تضمین استقلال از مختصات فرآیند اشتراک وزن، کرنل‌های کانولوشن مطالبه می‌شوند که  $G$ -استریبل باشند، یعنی قید تناوب پذیری گیج را برآورده کنند. بخش ۳.۴ نشان می‌دهد که  $GM$ -کانولوشن‌ها به طور خود کار تحت آن ایزومنتری‌هایی که تقارن‌های  $G$ -ساختار هستند (Isom $_{GM}$ -تناوب پذیر) تناوب پذیر هستند. این بدان معنی است که  $GM$ -کانولوشن‌ها با عمل ایزومنتری‌ها بر میدان‌های ویژگی همانطور که در شکل ۲۰ بصری سازی شده است، جابجا می‌شوند.

## ۱.۴ عملیات نقطه‌ای تناوب‌پذیر گیج

برای شروع، ما برخی عملیات شبکه عصبی را در نظر می‌گیریم که محدودیت‌های ناشی از استقلال از مختصات مورد نیاز و اشتراک وزن به ویژه ساده قابل استخراج هستند. همه این عملیات این ویژگی مشترک را دارند که به صورت نقطه‌ای بر بردارهای ویژگی عمل می‌کنند، یعنی بردارهای ویژگی خروجی  $(p) \circ f \in M$  را صرفاً بر اساس بردارهای ویژگی ورودی  $(p)$  در همان مکان محاسبه می‌کنند. به منظور ارضای اصل کوواریانس، مختصات‌بندی‌های این عملیات همگی مطالبه می‌شوند که مطابق پیش‌تکیب با  $\rho$  و پس‌تکیب با  $\rho$  تبدیل شوند. هنگام تقاضای اینکه عملیات بر حسب وزن‌های مشترک تعیین شوند، این قوانین تبدیل الزاماً برای تناوب‌پذیری گیج (با ناوردادی) عملیات را دلالت می‌کنند.

استخراج‌ها برای عملیات نقطه‌ای مختلف در بخش‌های اول  $1.4$  و  $2.1.4$  در گام‌های اول عمده‌ای مشابه هستند و به محدودیت‌های کوواریانس و تناوب‌پذیری اساساً یکسانی بر توابع قالب منجر می‌شوند. بنابراین آن‌ها می‌توانند با هم بررسی شوند، عملیات خاص (یا تابع قالب) را انتزاعی نگه داشته. با این حال، از آنجا که مفاهیم محدودیت‌های حاصل برای نمونه‌سازی‌های خاص متفاوت است، و از آنجا که می‌خواهیم بحث را نزدیک به کاربرد نگه داریم، چنین فرمول‌بندی انتزاعی را حذف خواهیم کرد و مستقیماً نمونه‌سازی‌های خاص را در نظر خواهیم گرفت.

### ۱.۱.۴ کانولوشن‌های $1 \times 1$ تناوب‌پذیر گیج

به عنوان اولین مثال از عملیات نقطه‌ای، ما عمل خانواده‌ای از نگاشت‌های خطی  $\mathcal{C}_p$  را در نظر می‌گیریم، که بردار ویژگی ورودی  $(p) \circ f$  را در هر  $p \in M$  به بردار ویژگی خروجی

$$\mathcal{C}_p(p) := \mathcal{C}_p \circ f(p). \quad (47)$$

ارسال می‌کنند. اگر فرض اشتراک وزن فضایی را اضافه کنیم، نگاشت‌های خطی  $\mathcal{C}_q$  و  $\mathcal{C}_p$  در مکان‌های مختلف  $p$  و  $q$  جفت خواهند شد، و عملیات را می‌توان به عنوان کانولوشنی با کرنل دلایی دیراک با مقدار عملکرگ خطی دید. این عملیات در بینایی کامپیوتر سیار رایج است، جایی که معمولاً به عنوان کانولوشن  $1 \times 1$  نشان داده می‌شود، زیرا گرسیت‌سازی فضایی یک کرنل دیراک خطی که بر روی تصاویر دو بعدی عمل می‌کند توسعه کرنل (با مقدار ماتریس) با گستره فضایی  $1 \times 1$  پیکسل داده می‌شود. ما در ادامه استخراج خواهیم کرد که تقاضای اشتراک وزن فضایی منجر به محدودیتی خواهد شد که کرنل‌های قالب با مقدار ماتریس را مجبور می‌کند که در هم تنیده باشند، یعنی ماتریس‌های تناوب‌پذیر گیج.

پیش از فرض اشتراک وزن، بیان‌های مختصاتی نگاشت‌های خطی  $\mathcal{C}_p$  و تبدیل‌های گیج بین آن‌ها بسیار شبیه آن‌هایی از نگاشت‌های خطی بر روی  $T_p M$  رفتار می‌کنند، که در بخش  $2.1.3$  مورد بحث قرار دادیم. از آنجا که بردارهای ویژگی ورودی و خروجی در مختصات توسط بردارهای ضریب  $f^A(p) \in \mathbb{R}^{c_{\text{out}}}$  و  $\mathcal{C}_p^A(p) \in \mathbb{R}^{c_{\text{in}} \times c_{\text{out}}}$  نمایش داده می‌شود که

$$f^A(p) = \mathcal{C}_p^A \cdot f(p). \quad (48)$$

را برآورده می‌کند. این رابطه البته برای مختصات‌بندی‌های دلخواه برقرار است، به طوری که برای هر گیج دیگری که با  $B$  برجسب گذاری شده است،  $f^B(p) = \mathcal{C}_p^B \cdot f(p)$  داریم. قانون تبدیلی که  $\mathcal{C}_p^A \circ \mathcal{C}_p^B = \mathcal{C}_p^B \circ \mathcal{C}_p^A$  مرتبط می‌کند از اصل کوواریانس از قوانین تبدیل ویژگی‌های ورودی و خروجی پیروی می‌کند. از آنجا که این‌ها توسط  $f^B(p) = \rho(g_p^{BA}) f^A(p)$  داده می‌شوند، داریم:

$$\begin{aligned} f^B(p) &= \mathcal{C}_p^B \cdot f(p) \\ \Leftrightarrow \rho(g_p^{BA}) f^A(p) &= \mathcal{C}_p^B \rho(g_p^{BA}) f^A(p) \\ \Leftrightarrow f^A(p) &= \rho(g_p^{BA})^{-1} \mathcal{C}_p^B \rho(g_p^{BA}) f^A(p). \end{aligned} \quad (49)$$

مقایسه با معادله (۴۸) دلالت دارد بر اینکه دو بیان مختصاتی  $\mathcal{C}_p$  لزوماً با

$$\mathcal{C}_p^B = \rho(g_p^{BA}) \mathcal{C}_p^A \rho(g_p^{BA})^{-1} \quad (50)$$

مربط هستند اگر قرار باشد قوانین تبدیل بردارهای ویژگی را رعایت کنند. همانطور که معمول است، این ملاحظات به طور مختصر توسط نمودار جابجایی ضبط می‌شوند:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{c_{\text{in}}} & \xrightarrow{\mathcal{C}_p^A} & \mathbb{R}^{c_{\text{out}}} \\ \rho(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho(g_p^{BA}) \\ \mathbb{R}^{c_{\text{in}}} & \xrightarrow{\mathcal{C}_p^B} & \mathbb{R}^{c_{\text{out}}} \end{array} \quad (51)$$

مفهوم عملی مهم این نتیجه تا کنون این است که نگاشت خطی  $\mathcal{C}_p$  به هیچ وجه محدود نیست. به بیان دیگر: تا زمانی که بیان‌های مختصاتی در گیج‌های مختلف توسط معادله (۵۰) مرتبط باشند، آزاد هستیم که  $\mathcal{C}_p$  را در یک گیج دلخواه ثابت  $A$  توسط ماتریس بدون محدودیت  $\mathcal{C}_p^A$  پارامتری کنیم. همانطور که خواهیم دید، وضعیت زمانی تغییر می‌کند که نگاشت‌های خطی اشتراک وزن داشته باشند.

حال حالتی را در نظر بگیرید که نگاشت‌های خطی  $\mathcal{C}_p$  و  $\mathcal{C}_q$  وزن‌ها را به اشتراک می‌گذارند. این بدان معنی است که فرض می‌کنیم آن‌ها توسط مجموعه مشترکی از پارامترها پارامتری شوند، که توسط کرنل قالب  $1 \times 1 \in \mathbb{R}^{c_{\text{m}} \times c_{\text{m}}}$  داده می‌شود. سوال باز این است که دقیقاً چگونه نگاشت‌های آزاد از مختصات باید بر حسب این کرنل قالب پارامتری شوند. الزام ما برای استقلال از مختصات  $GM$  تقاضاً می‌کند که هیچ چارچوب مرجع خاصی را در فرآیند اشتراک وزن ترجیح ندهیم، یعنی همه مختصات‌بندی‌ها را به همان شیوه درمان کنیم. بنابراین لازم است که کرنل قالب را با همه مختصات‌بندی‌ها به طور همزمان به اشتراک بگذاریم، یعنی

$$\mathcal{C}_p^X = K_{1 \times 1} \quad \text{برای هر گیج } (U^X, \psi^X) \in \mathcal{A}^G \quad p \in U^X, \quad (52)$$

تنظيم کنیم، که در آن  $\mathcal{A}^G$  (حداکثر)  $G$ -اطلس متناظر با  $G$ -ساختار در نظر گرفته شده است؛ به معادله (۲۵) مراجعه کنید. از آنجا که محدودیت کوواریانس در معادله (۵۰) نیاز دارد که برای گیج‌های دلخواه مرتبط با  $G$  برقرار باشد، و مختصات‌بندی‌های  $\mathcal{C}_p^B = K_{1 \times 1}$  همگی مطابقت دارند، تقاضای مشترک برای اشتراک وزن و استقلال از مختصات  $GM$  منجر به محدودیت

$$K_{1 \times 1} = \rho_{\text{m}}(g) K_{1 \times 1} \rho_{\text{m}}(g)^{-1} \quad \forall g \in G \quad (53)$$

بر کرنل قالب می‌شود. تطبیق متناظر نمودار جابجایی در معادله (۵۱) با اشتراک وزن توسط:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{c_{\text{m}}} & \xrightarrow{K_{1 \times 1} \cdot} & \mathbb{R}^{c_{\text{m}}} \\ \rho_{\text{m}}(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho_{\text{m}}(g_p^{BA}) \cdot \\ \mathbb{R}^{c_{\text{m}}} & \xrightarrow{\quad K_{1 \times 1} \cdot \quad} & \mathbb{R}^{c_{\text{m}}} \end{array} \quad (54)$$

داده می‌شود.

نتیجه‌گیری این تحلیل این است که کرنل‌های قالبی که می‌توانند بدون ابهام به اشتراک گذاشته شوند دقیقاً آن‌هایی هستند که تحت عمل گیج ناوردا هستند. فضای برداری چنین کرنل‌های  $1 \times 1$  ناوردا گیج ساده فضای نگاشت‌های درهم‌تیشه بین نمایش‌های  $\rho_{\text{m}}$  و  $\rho_{\text{m}}$  است، یعنی

$$\text{Hom}_G(\rho_{\text{m}}, \rho_{\text{m}}) := \left\{ K_{1 \times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\text{m}} \times c_{\text{m}}} \mid K_{1 \times 1} = \rho_{\text{m}}(g) K_{1 \times 1} \rho_{\text{m}}(g)^{-1} \quad \forall g \in G \right\} \subseteq \mathbb{R}^{c_{\text{m}} \times c_{\text{m}}} \quad (55)$$

توجه داشته باشید که، طبق لم سور [۴]، الزام بر  $K_{1 \times 1}$  برای درهم‌تیشه بودن مانع از نگاشت بین میدان‌هایی که تحت نمایش‌های کاهش ناپذیر غیرهم‌ریخت تبدیل می‌شوند از طریق کانولوشن‌های  $1 \times 1$  می‌شود. این محدودیت شدید با کرنل‌های  $1 \times 1$  اجتناب‌ناپذیر است اما بعد از هنگام اجازه دادن به کرنل‌های گسترده فضایی حل خواهد شد.

در این نقطه می‌خواهیم اشاره کنیم که اصطلاحات «تابع قالب تناوب‌پذیر گیج» و «تابع قالب ناوردا گیج» را به طور متقابل استفاده می‌کنیم. این با مشاهده توجیه می‌شود که محدودیت ناوردا بینی در معادله (۵۳) می‌تواند به عنوان محدودیت تناوب‌پذیری  $K_{1 \times 1} \rho_{\text{m}}(g) = \rho_{\text{m}}(g) K_{1 \times 1}$  نوشته شود. به طور کلی امکان مشاهده توابعی که نسبت به عمل گروهی در دامنه و دامنه مشترک آن‌ها تناوب‌پذیر هستند به عنوان ناورداهای عمل متناظر بر خود تابع وجود دارد. در کاربرد ما، دیدگاه تناوب‌پذیری بر جسته می‌کند که تبدیل میدان ورودی منجر به تبدیل متناظر میدان خروجی خواهد شد، که تضمین می‌کند همه کمیت‌های در گیر به طور کوواریانت با یکدیگر تبدیل شوند. از طرف دیگر، دیدگاه ناوردا بینی تأکید می‌کند که تابع قالب می‌تواند در گیج دلخواه به اشتراک گذاشته شود.

#### ۲.۱.۴ جمع بایاس تناوب‌پذیر گیج

پس از اعمال عملیات کانولوشن، رایج است که بردار بایاس (مشترک) به بردارهای ویژگی منفرد جمع شود. همراه با الزام استقلال از مختصات، اشتراک وزن دوباره منجر به محدودیت خطی خواهد شد. این محدودیت تنها اجازه جمع شدن بایاس‌ها به زیرفضاهای ناوردا عمل گیج بر میدان ویژگی ورودی را خواهد داد.

همانند قبل، ابتدا جمع بایاس را بدون اشتراک وزن در نظر می‌گیریم. بنابراین بایاس‌های  $b$  داریم، که به موقعیت  $p$  بر روی متیفولد بستگی دارند، که به بردار ویژگی ورودی جمع می‌شوند تا بردار ویژگی خروجی

$$f_{\text{m}}(p) = f_{\text{m}}(p) + b_p. \quad (56)$$

تولید کنند. نسبت به گیج‌های  $\psi_p^A$  و  $\psi_p^B$ ، بایاس توسط آن بردارهای ضریب  $\beta_p^A$  و  $\beta_p^B$  در  $\mathbb{R}^c$  نمایش داده می‌شود که  $f_{\square\square}^A(p) = f_{\square\square}^A(p) + \beta_p^A$  و  $f_{\square\square}^B(p) = f_{\square\square}^B(p) + \beta_p^B$  را برابر می‌کنند. از آنجا که جمع بردارها اجازه تغییر قوانین تبدیل آنها را نمی‌دهد، نمایش‌های گروهی مرتبط با ویژگی‌های ورودی و خروجی لزوماً مطابقت دارند، یعنی

$$\rho_{\square\square} = \rho_{\square\square} =: \rho. \quad (57)$$

همراه با الزام برای استقلال از مختصات، این دلالت دارد بر اینکه نمودار

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+\beta_p^A} & \mathbb{R}^c \\ \rho(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho(g_p^{BA}) \cdot \\ \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+\beta_p^B} & \mathbb{R}^c \end{array}, \quad (58)$$

که معادل آن در معادله (۵۱) است، نیاز دارد که جایجا شود. به صورت معادله نوشته شده، این رابطه  $\rho(g_p^{BA})f_p^A + \beta_p^B = \rho(g_p^{BA})(f_p^A + \beta_p^A)$  را تلقاً می‌کند که برقرار باشد. از آنجا که خطی بودن  $\rho(g)$  امکان بازنویسی سمت راست را به عنوان  $\rho(g_p^{BA})f_p^A + \rho(g_p^{BA})\beta_p^A$  می‌دهد، تغیری بردار ویژگی ورودی منجر به

$$\beta_p^B = \rho(g_p^{BA})\beta_p^A. \quad (59)$$

می‌شود. بردارهای ضریبی که یک بایاس مستقل از مختصات را نسبت به گیج‌های مختلف نمایش می‌دهند بنابراین نیاز دارند که دقیقاً مانند بردارهای ویژگی که به آنها جمع می‌شوند تبدیل شوند. همانند مورد کانون‌لوشن‌های  $1 \times 1$  استقلال از مختصات بایاس  $b$  را به هیچ وجه محدود نمی‌کند، بلکه فقط مختصات‌بندی‌های مختلف همان بایاس را مطالبه می‌کند که با یکدیگر سازگار باشند. یک پیاده‌سازی بنابراین می‌تواند گیج دلخواه انتخاب کند و بایاس را در آن گیج آزاده توسط پارامترهایی در  $\mathbb{R}^{c_{\square}}$  پارامتری کند.

وضعیت دوباره زمانی تغییر می‌کند که اشتراک وزن فضایی تلقاً می‌شود. فرض کنید  $b \in \mathbb{R}^{c_{\square}}$  بردار بایاس قالبی باشد که بر روی منیفولد به اشتراک گذاشته شود. از آنجا که تنها راه انجام این کار بدون ترجیح دلخواه هر مختصات‌بندی، اشتراک بردار بایاس در همه گیج‌ها به طور همزمان است، باید

$$\beta_p^X = b \quad (\text{برای هر گیج } U^X, \psi^X \in \mathcal{A}^G \text{ با } p \in U^X). \quad (60)$$

را در قیاس با معادله (۵۲) مطالبه کنیم. ترکیب محدودیت کوواریانس در معادله (۵۹) با این اشتراک وزن مستقل از گیج سپس منجر به محدودیت ناوردادایی

$$b = \rho(g)b \quad \forall g \in G \quad (61)$$

بر قالب بردار بایاس می‌شود. برای تکمیل قیاس با مورد کانون‌لوشن‌های  $1 \times 1$  نسخه تطبیق یافته نمودار جابجایی در معادله (۵۸) با وزن‌های مشترک را نشان می‌دهیم:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+b} & \mathbb{R}^c \\ \rho(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho(g_p^{BA}) \cdot \\ \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+b} & \mathbb{R}^c \end{array} \quad (62)$$

برای بصیرت در مفاهیم محدودیت ناوردادایی در معادله (۶۱)، فرض کنید برای بردار قالب داده شده  $b$  برابر آورده شود. به دلیل خطی بودن محدودیت، هر بردار مقیاس شده نیز آن را برابر آورده خواهد کرد، یعنی هر حل زیرفضایی یک بعدی از  $\mathbb{R}^c$  را پوشش می‌دهد که تحت عمل ناوردا است. چنین زیرفضایی ناوردا به عنوان زیرنمایش  $\rho$  نشان داده می‌شود. از آنجا که زیرفضاهای در نظر گرفته شده یک بعدی هستند، خودشان هیچ زیرفضایی مناسب ندارند و بنابراین زیرنمایش‌های کاهش‌ناپذیر بدیهی هستند. نتیجه می‌شود که فضای برداری

$$\mathcal{B}_\rho^G := \{b \in \mathbb{R}^c \mid b = \rho(g)b \quad \forall g \in G\} \quad (63)$$

بایاس‌های تناوب‌پذیر گیج با (زیرفضاهای) زیرنمایش‌های بدیهی  $\rho$  مطابقت دارد. ابعاد  $\mathcal{B}_\rho^G$  و بنابراین تعداد پارامترهای قابل بادگیری  $\square$  با کثرت زیرنمایش‌های بدیهی موجود در  $\rho$  مطابقت دارد. برای گروه‌های فشرده  $G$ ، روابط متعامد شور دلالت دارند بر اینکه این ابعاد  $\dim(\mathcal{B}_\rho^G) = \int_G \text{tr}(\rho(g))dg$  داده می‌شود. این گزاره موارد مهم عملی گروه‌های متعامد  $d = G$  و همه زیرگروه‌های آن را پوشش می‌دهد.

دو مثال ساده از میدان‌های ویژگی که ممکن است بخواهیم بایاس‌های مشترک به آنها جمع کنیم، میدان‌های اسکالر و میدان‌های بردار مماس هستند. بر اساس تعریف، میدان ضریب یک میدان اسکالر تحت تبدیل‌های گیج ناوردا است، یعنی طبق نمایش بدیهی  $\rho(g) = 1 \forall g \in G$  تبدیل می‌شود.

بنابراین می‌توان بایاس (اسکالر)  $\mathbb{R} \in b$  به آن‌ها جمع کرد. در مقابل، میدان ضریب یک میدان بردار مماس طبق نمایش گروهی غیربدینه‌یی، کاهش ناپذیر  $g = g(p)$  تبدیل می‌شود. از آنجا که این نمایش هیچ زیرنمایش بدینه‌یی ندارد، جمع بردار بایاس مشترک به میدان‌های بردار مماس با حفظ استقلال از مختصات غیرممکن است. به عنوان مثال سوم، نمایش‌های منظم گروه‌های فشرده را در نظر بگیرید، که به عنوان مثال میدان‌های ویژگی شبکه‌های کانولوشنی گروهی را توصیف می‌کنند. توسط قضیه پیتر-ولی، شناخته شده است که نمایش‌های منظم دقیقاً یک زیرنمایش بدینه‌یی دارند [؟]. بنابراین بایاس که به میدان‌های ویژگی منظم جمع می‌شود توسط یک پارامتر منفرد توصیف می‌شود.

### ۳.۱.۴ غیرخطی‌های تناوب‌پذیر گیج

به جز عملیات خطی (کانولوشن) و جمع بایاس، اساسی‌ترین عملیات استفاده شده در هر شبکه عصبی غیرخطی‌ها هستند. ما در اینجا حالت معمول غیرخطی‌های  $\sigma_p$  را در نظر خواهیم گرفت که به روش محلی فضایی عمل می‌کنند، یعنی بردارهای ویژگی خروجی را به عنوان  $f_{\mathbb{C}^m}(p) = (\sigma_p(p), \sigma_p^B)$  محاسبه می‌کنند. یک غیرخطی مشترک دوباره مطالبه می‌شود که تناوب‌پذیر گیج باشد. از آنجا که به این نتیجه گیری منجر می‌شود شبیه آن در موارد قبلی است، تنها به طور خلاصه آن را خلاصه خواهیم کرد. به دلیل عمومیت نگاشتهای غیرخطی استخراج فضاهای حل خطی همانند معادلات (۵۵) و (۶۳) غیرممکن است، با این حال، برخی مثال‌های خاص را مورد بحث قرار خواهیم داد.

مشابه قبل، هر غیرخطی آزاد از مختصات  $\sigma_p$  نسبت به گیج‌های  $A$  و  $B$  توسط بیان‌های مختصاتی  $\sigma_p^A : \mathbb{R}^{c_{\mathbb{C}^m}} \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\mathbb{C}^m}}$  و  $\sigma_p^B : \mathbb{R}^{c_{\mathbb{C}^m}} \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\mathbb{C}^m}}$  داده می‌شود، که توسط تقاضای استقلال از مختصات مطالبه می‌شوند که با  $\rho_{\mathbb{C}^m}(g_p^{BA}) = \rho_{\mathbb{C}^m} \circ \rho_{\mathbb{C}^m}(g_p^{BA})^{-1}$   $\sigma_p^B = \rho_{\mathbb{C}^m}(g_p^{BA}) \circ \sigma_p^A \circ \rho_{\mathbb{C}^m}(g_p^{BA})^{-1}$  مرتبه باشند. یک تابع قالب غیرخطی  $\mathbb{R}^{c_{\mathbb{C}^m}} \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\mathbb{C}^m}}$   $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  :  $\delta$ ، تنها زمانی می‌تواند به روشی مستقل از مختصات باشد از اشتراک گذاشته شود که به طور همزمان با همه گیج‌ها به اشتراک گذاشته شود. این محدودیت کوواریانس را به محدودیت ناورداشی  $G = \rho_{\mathbb{C}^m}(g) \circ \rho_{\mathbb{C}^m}(g)^{-1}$  برای قابل تبدیل می‌کند، یا، به طور معادل، به محدودیت تناوب‌پذیری متناظر.

$$\rho_{\mathbb{C}^m}(g) \circ \delta = \delta \circ \rho_{\mathbb{C}^m}(g)^{-1} \quad \forall g \in G. \quad (64)$$

به دلیل غیرخطی بودن این محدودیت مجبور هستیم آن را مورد به مورد بررسی کنیم. بنابراین بحث خود را به چند مثال خاص محدود خواهیم کرد. بحث برانگیزترین ساده‌ترین حالت، غیرخطی‌ای است که بین میدان‌های اسکالر نگاشت می‌کنند، یعنی برای آنها  $1 = \rho_{\mathbb{C}^m}(g) = \rho_{\mathbb{C}^m}(g)$  برای  $g \in G$  ناوردا هستند. در این حالت محدودیت تناوب‌پذیری در معادله (۶۴) به  $\delta = \delta$  تبدیل می‌شود، که به طور بدینه‌یی هر غیرخطی  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  :  $\delta$  برآورده می‌شود. مثال جالب‌تری نمایش یکانی  $\rho_{\mathbb{C}^m}$  است. یک غیرخطی ممکن برای این حالت توسط نرم بردارهای ویژگی داده می‌شود. از آنجا که  $\|f_{\mathbb{C}^m}(p)\| = \|f_{\mathbb{C}^m}(p)\| \circ \rho_{\mathbb{C}^m}(g) = \|f_{\mathbb{C}^m}(p)\| \circ \rho_{\mathbb{C}^m}(g) \circ \rho_{\mathbb{C}^m}(g)^{-1}$  به دلیل یکانی بودن  $\rho_{\mathbb{C}^m}$  ناوردا است،  $\rho_{\mathbb{C}^m}$  نمایش بدینه‌یی خواهد بود. گرفتن نرم بنابراین به عنوان عملیات غیرخطی، تناوب‌پذیر گیج دیده می‌شود که هر میدان یکانی را به میدان اسکالر نگاشت می‌کند. یک نگاشت غیرخطی که نوع میدان را حفظ می‌کند، یعنی  $\rho_{\mathbb{C}^m}$  را برآورده می‌کند، می‌تواند به طور مشابه به عنوان  $\|f_{\mathbb{C}^m}(p)\| = \|f_{\mathbb{C}^m}(p)\| \circ \rho_{\mathbb{C}^m}(g) = \|f_{\mathbb{C}^m}(p)\| \circ \rho_{\mathbb{C}^m}(g) \circ \rho_{\mathbb{C}^m}(g)^{-1}$  تعریف شود. گزینه دیگر، که ممکن است در یادگیری تعاملات فیزیکی نقش داشته باشد و در [؟] مورد بررسی قرار گرفته است، غیرخطی‌های حاصل ضرب تansوری هستند. با داشتن دو میدان  $(p, f_{\mathbb{C}^m}(p))$ ، که به ترتیب طبق  $\rho_{\mathbb{C}^m}$  و  $\rho_{\mathbb{C}^m}$  تبدیل می‌شوند، چنین غیرخطی‌هایی ویژگی حاصل ضرب تansوری  $(p, f_{\mathbb{C}^m}(p)) \otimes (p, f_{\mathbb{C}^m}(p)) = (p, f_{\mathbb{C}^m}(p) \otimes f_{\mathbb{C}^m}(p))$  را محسوبه می‌کنند، که به طور تناوب‌پذیری طبق حاصل ضرب تansوری  $\rho_{\mathbb{C}^m} \otimes \rho_{\mathbb{C}^m} = \rho_{\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^m}$  تبدیل می‌شود. همه این مثال‌ها محدودیت تناوب‌پذیری گیج در معادله (۶۴) را برآورده می‌کنند. اینکه کدام غیرخطی خاص در عمل خوب کار می‌کند، با این حال، هنوز سوال تحقیقاتی بازی است که نیازمند بررسی تجربی بسیار بیشتری قبل از پاسخ دادن است. اولین تلاش در این جهت در [؟] انجام شده است.

### ۲.۴ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM

عملیات اصلی شبکه‌های کانولوشنی، عملکرگ کانولوشن است که الگوهای مشخصه ویژگی‌ها را از یک همسایگی محلی در اطراف هر نقطه  $p \in M$  به صورت خطی در یک بردار ویژگی جدید  $(p, f)$  جمع می‌کند. یک کرنل کانولوشن گستره فضایی، جزئیات این اثبات را تعیین می‌کند. اصل کوواریانس نیازمند استقلال از مختصات و در نتیجه یک قانون تبدیل خاص برای کرنل‌ها تحت تبدیلات پیمانه است. همانند مثال‌های قبلی، یک تقاضای اضافی برای اشتراک گذاری وزن منجر به الزامی پیمانه هموردا (G-راهنم) باشد.

مطابق با بخش قبل، ما به وضوح بین الزامات استقلال از مختصات و اشتراک گذاری وزن تمايز قائل می‌شویم. بنابراین، بخش ۲.۲.۴ با بحث در مورد میدان‌های کرنل و قوانین تبدیل آن‌ها بدون الزام به اینکه کرنل‌ها در موقعیت‌های جداگانه به هم مرتبط باشند، شروع می‌شود. چنین میدان‌های کرنل نامحدودی منجر به تبدیلات میدان کرنل می‌شوند که تبدیلات انگرالی هستند و می‌توان آن‌ها را به عنوان پیش‌درآمد های کانولوشن‌ها در نظر گرفت. کانولوشن‌های واقعی GM که توسط یک کرنل الگوی مشترک و لزوماً هموردای پیمانه‌ای پارامتری می‌شوند، در بخش ۳.۲.۴ تعریف شده‌اند. به عنوان یک آماده‌سازی، در بخش بعدی ۱.۲.۴، نمایش‌های محلی میدان‌های ویژگی را بر روی فضاهای مماس توصیف خواهیم کرد، جایی که آن‌ها با کرنل‌های کانولوشن تطبیق داده می‌شوند.

## ۱.۲.۴ دیدگاه یک ناظر محلی به میدان‌های ویژگی

برخلاف فضاهای اقلیدسی یا فضاهای همگن کلی تر مانند کره، هندسه محلی یک خمینه ریمانی کلی از نقطه‌ای به نقطه دیگر متفاوت است. بنابراین، بالافصله مشخص نیست که یک کرنل کانولوشن چگونه باید روی  $M$  تعریف شود و چگونه می‌توان آن را بین مکان‌های مختلف به اشتراک گذاشت. یک راه حل رایج این است که کرنل را طبق معمول روی یک فضای برداری مسطح و اقلیدسی  $\mathbb{R}^d$  تعریف کرده و آن را به جای خود خمینه، روی فضاهای مماس به اشتراک بگذاریم؛ به بخش‌های قبلی [؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟] یا کارهای [؟ ؟ ۲.۲.۶ و ۳.۲.۴] مراجعه کنید. سپس، کرنل را می‌توان از طریق نگاشت نمایی ریمانی به روی خمینه نگاشت. می‌توان آن را به گونه‌ای تصور کرد که توسط یک ناظر محلی اعمال می‌شود که ویژگی‌ها را در محیط اطراف خود نسبت به چارچوب مرجع محلی خود اندازه‌گیری می‌کند. در این بخش به طور خلاصه به چگونگی در که میدان‌های ویژگی از دیدگاه ناظران محلی مختلف خواهیم پرداخت. از نظر ریاضی، این موضوع به عنوان پس‌کش ( $\text{Post}(\text{Post}(M))$ ) و انتقال موازی میدان ویژگی به فضاهای مماس فرمول‌بندی می‌شود؛ برای تجسم به شکل ۱۷ مراجعه کنید.

برای نگاشت بین فضاهای مماس و خمینه، ما نگاشت نمایی ریمانی (مرتبه با اتصال لوی-چیوینتا) را در نظر می‌گیریم.<sup>۱۱</sup> با فرض اینکه خمینه برای سادگی کامل از نظر ژئودزیکی باشد<sup>۱۲</sup>، نگاشت نمایی در یک نقطه خاص  $p \in M$  نگاشتی است به صورت

$$\exp_p : T_p M \rightarrow M. \quad (65)$$

این نگاشت، بردارهای  $v \in T_p M$  را با نقاطی  $\exp_p(v) \in M$  یکی می‌داند که با دنبال کردن ژئودزیک گذرنده از  $p$  با سرعت اولیه  $v$  برای یک واحد زمان به دست می‌آید. نگاشت نمایی با اینکه فواصل شعاعی را حفظ می‌کند، به طور کلی زوایا را تغییر می‌دهد و یک به یک نیست. به عنوان مثال، اگر خمینه یک کره باشد، نگاشتهای نمایی فضای مماس مربوطه را بین نهایت بار دور آن می‌بینند. با این حال، تضمین می‌شود که نگاشت نمایی یک دیفوورسیم محلی است اگر دامنه آن به فواصلی کوتاه‌تر از فاصله تا مکان بُرش (جاوی) که یک به یک بودن از دست می‌رود) محدود شود.

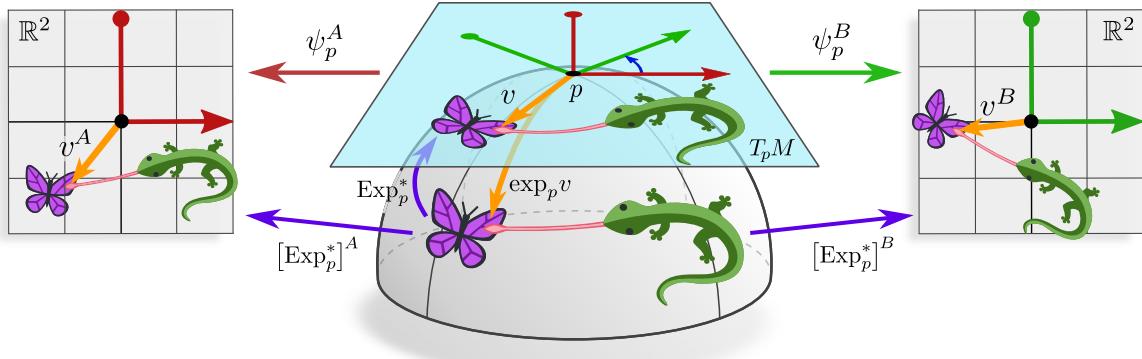
با داشتن نگاشتهای نمایی، می‌توان میدان‌های ویژگی روی خمینه را به فضاهای مماس پس کش کرد. به طور خاص، اگر  $f$  یک میدان ویژگی روی  $M$  باشد، پس کش  $f := f \circ \exp_p$  به عنوان نگاشتی تعریف می‌شود که بردار ویژگی  $(\exp_p(v))$  از  $f(\exp_p(v))$  از  $v \in T_p M$  است. در مورد  $v$  نسبت  $v_1$  و  $v_2$  ایده می‌دهد. توجه داشته باشید که به دلیل عدم یک به یک بودن نگاشت نمایی، هر بردار ویژگی ممکن است به چندین بردار مماس  $v_1$  و  $v_2$  اختصاص یابد اگر  $\exp_p(v_1) = \exp_p(v_2)$  باشد<sup>۱۳</sup> این پدیده تا حدودی شبیه به اثرات عدسی گرانتی در فیزیک است. در صورتی که نگاشت نمایی یک به یک باشد، یا زمانی که آن را به شعاع یک به یک بودن آن محدود کنیم، پس کش معادل بیان میدان‌های ویژگی در مختصات نرمال ژئودزیکی است [؟].

به یاد بیاورید که هدف از پس کش بردارهای ویژگی به فضاهای مماس این است که بتوان آن‌ها را توسط یک کرنل کانولوشن جمع‌آوری کرد. متأسفانه، این کار بالافصله امکان‌پذیر نیست زیرا بردارهای ویژگی در مکان‌های مختلف در فضاهای برداری متفاوتی قرار دارند و نسبت به پیمانه‌های متفاوتی بیان می‌شوند.<sup>۱۴</sup> بنابراین لازم است تمام بردارهای ویژگی  $(v)$  در یک فضای برداری و نسبت به یک پیمانه یکسان بیان شوند. یک ایده طبیعی که توسط  $\text{Exp}_p^*$  پیشنهاد شد، انجام این کار با انتقال موازی بردارهای ویژگی در امتداد ژئودزیک‌هایی است که نگاشت نمایی را از  $(v)$  به  $u$  تعریف می‌کند.<sup>۱۵</sup> ما این پس کش  $f$  را با انتقال اضافی با  $\text{Exp}_p^* f$  نشان می‌دهیم تا بر ارتباط نزدیک آن با پس کش معمولی  $f$  در  $T_p M$  به  $\text{Exp}_p^* f$  تأکید کنیم. شکل ۱۷ یک ایده بصری از این پس کش انتقال‌دهنده میدان‌های ویژگی به فضای مماس و نمایش‌های آن  $[ \text{Exp}_p^* f ]^A$  و  $[ \text{Exp}_p^* f ]^B$  روی  $\mathbb{R}^d$  را نشان می‌دهد.

<sup>۱۱</sup> حتی مدل‌هایی که یک اتصال جایگزین (سازگار با  $G$ ) برای انتقال ویژگی‌ها فرض می‌کنند، معمولاً از اتصال کانولوئی لوی-چیوینتا برای محاسبه ژئودزیک‌ها و نگاشت‌های نمایی استفاده می‌کنند.

<sup>۱۲</sup> فرض کامل بودن ژئودزیکی  $M$  به این معناست که نگاشتهای نمایی  $\exp_p$  برای هر  $p \in M$  روی کل فضای مماس  $T_p M$  تعریف شده‌اند. در مواردی که این فرض برقرار نباشد، می‌توان به پر کردن با صفر متغیر شد، که معمولاً در شبکه‌های کانولوشنی برای تصاویر با تکیه‌گاه متناهی استفاده می‌شود.

<sup>۱۳</sup> یک وضعیت سیار مشابه، تعریف مشتقهای کوواریانس را انگیزه‌مند می‌کند، که آن نیز نیاز به ترکیب اشیاء هندسی دارد که در فضاهای متفاوتی زندگی می‌کنند.



شکل ۱۷: یک میدان ویژگی  $f$  روی  $M$  و نمایش محلی آن  $\text{Exp}_p^* f$  روی  $T_p M$ . درست مانند پس کش معمولی  $\exp_p^* f$  از  $f$  در امتداد نگاشت نمایی  $T_p M \rightarrow M$  است،  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ ، پس کش انتقال دهنده بردارهای ویژگی  $f(\exp_p(v))$  را به بردارهای مماس  $v \in T_p M$  نسبت می‌دهد. با این حال، از آنچهایی که هدف ما نیاشت، پس کش شده با استفاده از یک کرnel کاتولوشن است، آن‌ها باید در یک فضای یکسان و نسبت به یک پیمانه یکسان در  $p$  داده شوند. بنابراین، پس کش انتقال دهنده علاوه بر این، انتقال دهنده موازی (سازگار با  $G$ ) را در امتداد ژودزیک  $(v)$  به  $p$   $\exp_p(v)$  به اعمال می‌کند. از طریق یک پیمانه  $\psi_p^X$ ، پس کش انتقال دهنده  $f$  روی  $T_p M$  را می‌توان روی  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c$  به صورت  $[\text{Exp}_p^* f]^X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c$  [یعنی انتخاب های مختلف چارچوب های مرجع (ناظران) در اینجا با تغییر شکل های خطی مختلف میدان ویژگی مطابقت دارد. تبدیلات میدان کرnel و کاتولوشن های  $GM$  یک ویژگی خروجی  $(p)$  را در  $p$  با تطبیق یک کرnel  $\mathcal{K}_p$  روی  $\text{Exp}_p^* f$  با  $\text{Exp}_p^* f(T_p M)$  محاسبه می‌کنند (یعنی انگرال حاصلضرب آنها را روی فضای مماس می‌گیرند؛ به معادله (۷۶) مراجعه کنید].  
پیمانه ایکها و پروانهها با مجوز Creative Commons Attribution 4.0 International از توییتر اقتباس شده‌اند.

ما  $\text{Exp}_p^* f$  را با تعریف آن بر حسب عبارت مختصاتی اش نسبت به یک انتخاب پیمانه فرمول بندی می‌کنیم. برای این منظور، فرض کنید  $\psi_p^A$  یک پیمانه در  $p$  باشد که ویژگی های منتقل شده نهایتاً نسبت به آن بیان می‌شوند و  $\psi_{\exp_p(v)}^{\tilde{A}}$  یک پیمانه دلخواه در  $(v)$  باشد که بردار ویژگی در آن مکان را با یک بردار ضرب  $\rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{A \tilde{A}}(f(\exp_p(v)))) \in \mathbb{R}^c$  نشان می‌دهد. فرض کید

$$\rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{A \tilde{A}}) \quad (66)$$

انتقال دهنده موازی سازگار با  $G$  برای ضرایب بردار ویژگی در امتداد ژودزیک  $(v)$  به  $p$  باشد. سپس ما پس کش انتقال دهنده را در مختصات به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[\text{Exp}_p^* f]^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad v^A \mapsto [\text{Exp}_p^* f]^A(v^A) \\ := \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(\psi_p^A)^{-1}(v^A)}^{A \tilde{A}}) \cdot f^{\tilde{A}}(\exp_p(\psi_p^A)^{-1}(v^A)), \quad (67)$$

که در آن  $v = (\psi_p^A)^{-1}(v^A) \in T_p M$  بردار مماس بدون مختصات است که توسط ضرایب  $v^A$  از طریق  $\psi_p^A$  به آن ارجاع داده می‌شود. همانطور که قبلاً ادعا شد، انتخاب پیمانه  $\psi_{\exp_p(v)}^{\tilde{A}}$  در  $\exp_p(v)$  به دلیل استقلال مختصات تمام معادلات، بی‌ربط است و حذف می‌شود. به طور خاص، می‌توانستیم از هر پیمانه دیگری مانند  $\psi_{\exp_p(v)}^{\tilde{B}}$  در  $(v)$  استفاده کنیم، که منجر به تبدیلات پیمانه  $\rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{A \tilde{B}}) = \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{A \tilde{A}}) \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{\tilde{A} \tilde{B}}) = \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{\tilde{B} \tilde{A}}) \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{\tilde{B} \tilde{A}})$  برای انتقال دهنده طبق معادله (۳۵) و (۴۰) برابر باشد. بردار ویژگی طبق معادله (۲۸) می‌شود، که هنگام ترکیب هر دو عبارت، یکدیگر را خشی می‌کنند.

با این حال، پس کش انتقال دهنده  $[\text{Exp}_p^* f]^A$  همچنان به پیمانه در  $p$  بستگی دارد و بنابراین تحت تبدیلات پیمانه  $\rho(g_p^{BA})$  در  $p$  تبدیل می‌شود. مانند هر تابع مختصاتی، قانون تبدیل آن توسط تبدیلات پیمانه بر روی دامنه  $\mathbb{R}^d$  و هم‌دامنه  $\mathbb{R}^c$  تعیین می‌شود. بنابراین به صورت زیر داده می‌شود:

$$[\text{Exp}_p^* f]^B = \rho(g_p^{BA}) \circ [\text{Exp}_p^* f]^A \circ (g_p^{BA})^{-1}, \quad (68)$$

که توسط نمودار جایگایی زیر خلاصه می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{[\text{Exp}_p^* f]^A} & \mathbb{R}^c \\ g_p^{BA} \downarrow & & \downarrow \rho(g_p^{BA}) \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{[\text{Exp}_p^* f]^B} & \mathbb{R}^c \end{array} \quad (69)$$

همانطور که در شکل ۱۷ به تصویر کشیده شده است،  $[\text{Exp}_p^* f]^B$  و  $[\text{Exp}_p^* f]^A$  باید به عنوان دیدگاه ناظران محلی (چارچوب‌های مرجع) مختلف به میدان ویژگی در نظر گرفته شوند.

در اصل، می‌توان ساختارهای جایگزینی را برای پس‌کش میدان‌های ویژگی از  $M$  به  $T_p M$  در نظر گرفت. تعریف ما از تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های  $GM$  در بخش‌های ۲.۲.۴ و ۳.۲.۴ در آدامه، مستقل از این انتخاب خاص است.

#### ۲.۲.۴ کرنل‌های مستقل از مختصات و تبدیلات میدان کرنل

کانولوشن‌های  $GM$  عملیات مستقلی از مختصات هستند که کرنل مشترک و یکسانی را در هر نقطه از خمینه اعمال می‌کنند. برای تفکیک واضح فرضیات، ابتدا تبدیلات میدان کرنل عمومی تری را مورد بحث قرار می‌دهیم که عملیات مستقلی از مختصات هستند اما الزام اشتراک‌گذاری وزن را کنار می‌گذارند. بنابراین، آن‌ها شیوه به کانولوشن‌های  $GM$  هستند اما در هر نقطه  $p$  از خمینه، کرنل بالقوه متفاوتی  $\mathcal{K}_p$  اعمال می‌کنند. به منظور رعایت اصل کوواریانس، عبارات مختصاتی این کرنل‌ها باید به شیوه‌ای اصولی تبدیل شوند، با این حال، خود کرنل‌ها بدون محدودیت باقی می‌مانند.

**کرنل‌های مستقل از مختصات:** از آنجایی که کانولوشن‌ها در یادگیری عمیق بین میدان‌های برداری ویژگی با ابعاد  $\mathbb{R}^{c_{\text{out}}}$  و  $\mathbb{R}^{c_{\text{in}}}$  نگاشت برقرار می‌کنند، کرنل‌های کانولوشن ماتریس-مقدار  $C_{\text{out}} \times C_{\text{in}}$  هستند. پیاده‌سازی‌های گسسته کانولوشن‌های  $d$ -بعدی روی فضاهای اقلیدسی معمولاً چنین کرنل‌هایی را به صورت آرایه‌هایی با شکل  $(s_1, \dots, s_d, c_{\text{out}}, c_{\text{in}})$  نمایش می‌دهند. محور اول یک شبکه فضایی از  $s_1 \times \dots \times s_d$  اختصاص داده شده است که در دو محور آخر کدگذاری شده است.<sup>۲۵</sup> در محيط پیکسل را نشان می‌دهند، که به هر کدام یک ماتریس  $C_{\text{out}} \times C_{\text{in}}$  اختصاص داده شده است که در عنوان نگاشت‌هایی توصیف کرد

$$K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}, \quad (70)$$

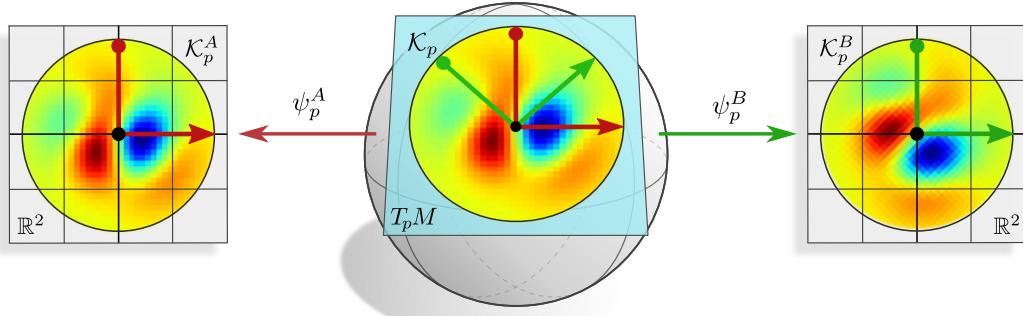
که یک ماتریس  $C_{\text{out}} \times C_{\text{in}}$  را به هر نقطه از  $\mathbb{R}^d$  اختصاص می‌دهد. همانطور که در بخش قبلی ۱.۲.۴ ذکر شد، ما کانولوشن‌های  $GM$  را به عنوان  $T_p M$  روی فضای مماس  $\text{Exp}_p^* f$  از  $\mathcal{K}_p$  تعریف می‌کنیم. از آنجایی که فضاهای مماس مسطح هستند، طبیعی است که این تطبیق را مانند حالت کاملاً اقلیدسی معمول تعریف کنیم. بنابراین، ما کرنل‌های  $\mathcal{K}_p$  را از طریق عبارات مختصاتی شان تعریف می‌کنیم که شکل معادله (۷۰) را دارند، یعنی،

$$\mathcal{K}_p^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}. \quad (71)$$

شکل ۱۸ یک کرنل داده‌شده بدون مختصات را روی  $T_p M$  و تمايش‌های آن را روی  $\mathbb{R}^d$  نسبت به چارچوب‌های مرجع مختلف نشان می‌دهد.<sup>۲۶</sup>

<sup>۲۵</sup> چیدمان واقعی حافظه به چارچوب یادگیری عمیق خاص مورد نظر بستگی دارد.

<sup>۲۶</sup> ما تأکید می‌کنیم که در اینجا یک کرنل بدون مختصات  $\mathcal{K}_p$  را که روی  $T_p M$  داده شده است فرض می‌کنیم و عبارات مختصاتی آن  $\mathcal{K}_p^X$  را روی  $\mathbb{R}^d$  به چارچوب‌های مرجع  $X$  در نظر می‌گیریم. اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی بعداً ما را با این سؤال مواجه خواهد کرد که چگونه یک کرنل بدون مختصات  $\mathcal{K}_p$  را روی  $T_p M$  با توجه به یک کرنل الگوریتم  $K$  روی  $\mathbb{R}^d$  تعریف کنیم. پیوست ب این دو مفهوم و ارتباط آنها را با  $G$ -راهبری کرنل توضیح می‌دهد.



شکل ۱۸: یک کرنل بدون مختصات  $K_p$  روی  $T_p M$  و عبارات مختصاتی آن  $\psi_p^X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{dim}} \times c_{\text{dim}}}$  نسبت به پیمانه‌های  $\psi_p^X$  (فقط یکی از کانال‌های کرنل  $\mathbb{R}^{c_{\text{dim}} \times c_{\text{dim}}}$  نشان داده شده است). تبدیلات پیمانه‌ای که مختصات دهی‌های مختلف یک کرنل را به هم مرتبط می‌کنند، از قوانین تبدیل دامنه و همدامنه آنها پیروی می‌کنند. بنابراین برای هر  $v \in \mathbb{R}^d$  به صورت  $\psi_p^B(v) = \rho_{\text{dim}}(g_p^{BA})^{-1} K_p^A(v) \rho_{\text{dim}}(g_p^{BA}) = \rho_{\text{dim}}(g_p^{BA}) K_p^A(v) \rho_{\text{dim}}(g_p^{BA})$  داده می‌شوند. یک میدان کرنل  $K$  روی  $M$  یک تخصیص هموار از کرنل‌ها بر روی فضاهای مماس است (تعريف ۷.۲).  
توجه داشته باشید که ما در اینجا فرض می‌کنیم کرنل روی  $T_p M$  داده شده است و سپس آن را نسبت به پیمانه‌های مختلف روی  $\mathbb{R}^d$  بیان می‌کنیم. این از نظر مفهومی با وضعیت نشان داده شده در شکل‌های ۵، ۱۱ و ۶۷ متفاوت است، که در آنها فرض می‌کنیم یک کرنل الگو  $K$  روی  $\mathbb{R}^d$  داده شده است و سپس  $K_p$  را روی  $T_p M$  از طریق اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی نسبت به یک چارچوب مرتع تعريف می‌کنیم. برای حفظ استقلال از مختصات در طول فرآیند اشتراک‌گذاری وزن، کرنل مشترک باید تحت تبدیلات پیمانه پایا (یا هموردا) باشد؛ به بخش ۳.۴ پیوست ب مراجعه کنید.

قانون تبدیل بین نمایش‌های مختصاتی  $K_p^B$  و  $K_p^A$  یک کرنل  $K_p$  روی  $T_p M$  طبق معمول از قوانین تبدیل دامنه و همدامنه آنها پیروی می‌کند.  
در دامنه  $\mathbb{R}^d$  قانون تبدیل توسط  $g_p^{BA}$  داده می‌شود، در حالی که قانون تبدیل  $\mathbb{R}^{c_{\text{dim}} \times c_{\text{dim}}}$ ، همانند معادله (۵۰)، توسط یک ضرب همزمان از چپ با  $\rho_{\text{dim}}(g_p^{BA})^{-1}$  داده می‌شود. بنابراین، دو مختصات دهی کرنل  $K_p$  برای هر  $v \in \mathbb{R}^d$  به صورت زیر با هم ارتباط دارند:

$$K_p^B(g_p^{BA}v) = \rho_{\text{dim}}(g_p^{BA}) \cdot K_p^A(v) \cdot \rho_{\text{dim}}(g_p^{BA})^{-1}, \quad (72)$$

که توسط نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{K_p^A} & \mathbb{R}^{c_{\text{dim}} \times c_{\text{dim}}} \\ g_p^{BA} \downarrow & & \downarrow \rho_{\text{dim}}(g_p^{BA}) [\cdot] \rho_{\text{dim}}(g_p^{BA})^{-1} \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{K_p^B} & \mathbb{R}^{c_{\text{dim}} \times c_{\text{dim}}} \end{array} \quad (73)$$

همانند مثال‌های بخش ۱.۴، اصل کوواریانس تنها نیازمند یک رفتار تبدیل سازگار بین مختصات دهی‌های مختلف کرنل است اما محدودیتی بر خود کرنل اعمال نمی‌کند. بنابراین می‌توان کرنل‌های  $K_p$  را برای هر  $p \in M$  و یک پیمانه دلخواه در  $p$  با یک کرنل ماتریس-مقدار نامحدود پارامتری کرد. ما میدان‌های هموار چنین کرنل‌هایی را به عنوان میدان‌های کرنل نشان می‌دهیم که نقش عمده‌ای در تحلیل ما از همودایی ایزومنتری کانولوشن‌های  $GM$  در بخش ۸ ایفا می‌کنند.

**تبدیلات میدان کرنل مستقل از مختصات:** با داشتن یک میدان کرنل هموار  $K$ ، می‌توانیم تبدیلات میدان کرنل را تعريف کنیم، که شبیه به کانولوشن‌ها هستند اما از این جهت متفاوتند که ممکن است در هر موقعیت مکانی یک کرنل متفاوت اعمال کنند. آنها یک میدان از بردارهای ویژگی خروجی  $f(p)$  را با انتگرال‌گیری از حاصلضرب کرنل مربوطه  $K_p$  و پس‌کش انتقال‌دهنده  $f_p$  از  $T_p M$  روی  $\mathbb{R}^d$  محاسبه می‌کنند، یعنی،

$$f(p) = \int_{T_p M} K_p(v) \text{Exp}_p^* f(v) dv. \quad (74)$$

برای بیان این تعريف بدون مختصات، باید تمام کمیت‌ها را با عبارات مختصاتی شان جایگزین کرده و انتگرال‌گیری را از طریق پیمانه انتخاب شده از  $T_p M$  به  $\mathbb{R}^d$  منتقل کرد. همانطور که در پیوست ب توضیح داده شده است، عنصر حجم ریمانی مناسب (پایا نسبت به پیمانه) برای یک پیمانه  $\psi_p^A$  به صورت زیر داده می‌شود:

$$\sqrt{|\eta_p^A|} dv^A, \quad (75)$$

که در آن ضریب  $\sqrt{|\eta_p^A|}$ ، تعریف شده در معادله (۵۸۷)، حجم (مثبت) پوشیده شده توسط چارچوب مرجع  $e_i^A$  در  $p$  است. بنابراین، عبارت مختصاتی تبدیل میدان کرنل به صورت زیر است:

$$f_{\square\Box}^A(p) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) [\text{Exp}_p^* f_{\square\Box}]^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A. \quad (76)$$

استقلال از مختصات تبدیل میدان کرنل با یان آن نسبت به یک پیمانه جایگزین  $\psi^B$  و نشان دادن اینکه میدان خروجی حاصل همانطور که انتظار می‌رود تبدیل می‌شود، تأیید می‌شود، که در واقع چنین است:

$$\begin{aligned} f_{\square\Box}^B(p) &\stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^B(v^B) [\text{Exp}_p^* f_{\square\Box}]^B(v^B) \sqrt{|\eta_p^B|} dv^B \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \rho_{\square\Box}(g_p^{BA}) \mathcal{K}_p^A((g_p^{BA})^{-1} v^B) \right] [\text{Exp}_p^* f_{\square\Box}]^B(g_p^{BA} v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &\stackrel{(3)}{=} \rho_{\square\Box}(g_p^{BA}) \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) \left[ \rho_{\square\Box}(g_p^{BA})^{-1} [\text{Exp}_p^* f_{\square\Box}]^B(g_p^{BA} v^A) \right] \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &\stackrel{(4)}{=} \rho_{\square\Box}(g_p^{BA}) \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) [\text{Exp}_p^* f_{\square\Box}]^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &\stackrel{(5)}{=} \rho_{\square\Box}(g_p^{BA}) f_{\square\Box}^A(p) \end{aligned} \quad (77)$$

در اینجا ما از تعریف تبدیلات میدان کرنل و قانون تبدیل کرنل‌ها (معادله (۷۲)) در دو مرحله اول استفاده کردیم. مرحله سوم با بیرون کشیدن  $\rho_{\square\Box}$  از انتگرال و جایگزینی  $v^A = (g_p^{BA})^{-1} v^B$  به دست می‌آید، با استفاده از اینکه عنصر حجم  $\sqrt{|\eta_p^B|} dv^B = \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A$  به طور طراحی شده پایا نسبت به پیمانه است. دو مرحله آخر با شناسایی قانون تبدیل پس کش انتقال‌دهنده میدان ویژگی در معادله (۶۸) و تعریف تبدیل میدان کرنل در پیمانه  $\psi^A$  به دست می‌آیند. توجه داشته باشید که استقلال از مختصات تبدیل میدان کرنل، صحت قانون تبدیل کرنل در معادله (۷۲) را تأیید می‌کند.

یک تبدیل میدان کرنل تنها زمانی به خوبی تعریف می‌شود که انتگرال‌ها روی فضاهای مماس همگرا باشند، که به طور دقیق‌تر در بخش ۲.۷ و پیوست ج مورد بحث قرار گرفته است. قضیه ۷.۷ ثابت می‌کند که یک تکیه گاه فشرده برای کرنل‌های  $\mathcal{K}$  برای تضمین این خوش‌تعریفی کافی است. این قضیه همچنین ثابت می‌کند که تبدیلات میدان کرنل که بر اساس میدان‌های کرنل هموار هستند، میدان‌های ویژگی ورودی هموار را به میدان‌های ویژگی خروجی هموار نگاشت می‌کنند.

### ۳.۲.۴ کانولوشن‌های $\square\Box$ و کرنل‌های $\square\Box$ -راهبر

آزادی تبدیلات میدان کرنل در اعمال یک کرنل متفاوت در هر مکان، به آنها اجازه تعیین استنتاج آموخته شده را بر روی مکان‌های مختلف نمی‌دهد و بنابراین آنها از نظر داده ناکارآمد می‌سازد. بنابراین، معمولاً کانولوشن‌ها در نظر گرفته می‌شوند، که می‌توان آن‌ها را به عنوان آن دسته از تبدیلات میدان کرنل خاصی دید که بر اساس میدان‌های کرنل کانولوشنی هستند، یعنی میدان‌های کرنلی که توسط یک کرنل الگوی واحد و مشترک پارامتری شده‌اند. همانند قبل، یک اشتراک‌گذاری وزن مستقل از مختصات نیازمند آن است که کرنل‌های الگوی را بیانه همودرا ( $G$ -راهبر) باشند. این همودارایی پیمانه‌ای کرنل‌های الگوی تضمین می‌کند که الگوهایی که در ژست‌های هندسی مختلف و مرتبط با  $G$  ظاهر می‌شوند، تا یک تبدیل متناظر بردار ویژگی از طریق  $\rho_{\square\Box}$  پاسخ یکسانی را برانگیزند.

**اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی:** فرض کنید  $K$  یک کرنل الگو باشد که باید روی تمام فضاهای مماس به اشتراک گذاشته شود. برای اینکه هیچ پیمانه خاصی را ترجیح ندهیم  $\square\Box$  که با نیاز ما به استقلال از مختصات در تضاد است  $\square$  مجبوریم کرنل را با قرار دادن  $\mathcal{K}_p^X = K$  در تمام پیمانه‌ها به طور همزمان به اشتراک بگذاریم. به طور ساده‌انگارانه، این به نظر می‌رسد که پیشنهاد می‌کند کرنل الگو را با قرار دادن  $\mathcal{K}_p^X$  برای هر نقطه  $p \in M$  و هر پیمانه  $\psi$  در  $p$  به اشتراک‌گذاریم. در حالی که چنین تعریفی از اشتراک‌گذاری کرنل معقول به نظر می‌رسد، از اصل ما برای اشتراک‌گذاری توابع الگوی محلی به معنای دقیق پیروی نمی‌کند: به جای اشتراک‌گذاری مستقیم کرنل، مهم است که کل عملیات محلی را به اشتراک‌گذاری  $\square$  که در اینجا کل تبدیل انتگرالی در معادله (۷۶) است. از آنجایی که این عملیات بر حسب میدان کرنل  $\mathcal{K}$  پارامتری می‌شود، این به طور غیرمستقیم منجر به اشتراک‌گذاری کرنل الگوی شود، با این حال، با نتیجه‌های کمی متفاوت از اشتراک‌گذاری ساده‌انگارانه در نظر گرفته شده در بالا.

برای یافتن تعریف صحیح میدان‌های کرنل کانولوشنی  $GM$  طبق اصل ما برای اشتراک‌گذاری توابع الگوی محلی، ابتدا باید این عملیات محلی را شناسایی کنیم. ما این کار را با انتزاع تبدیلات میدان کرنل (در مختصات) به عنوان مجموعه‌ای از عملگرهای انتگرالی محلی به شکل زیر انجام می‌دهیم:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{K}, p}^A : C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c) \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad F \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v) F(v) \sqrt{|\eta_p^A|} dv, \quad (78)$$

که در آن  $C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c)$  فضای نگاشت‌های هموار از  $\mathbb{R}^d$  به  $\mathbb{R}^c$  را نشان می‌دهد. در کاربرد ما، این نگاشت‌های هموار صرفاً نمایش‌های میدان ویژگی محلی  $[Exp_p^* f]^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c$  هستند که از فضاهای مماس در  $p$  دیده می‌شوند و توسط تبدیل میدان کرنل به یک بردار ویژگی خروجی  $f_{\mathcal{K},p}^A(p) = \mathcal{G}_{\mathcal{K},p}^A([Exp_p^* f]^A)$  در  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{من}} \times c_{\text{من}}}$  می‌شوند. با توجه به کرنل الگوی ما  $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{من}} \times c_{\text{من}}}$ ، ما یک الگوی عملگر انتگرالی متناظر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathfrak{I}_K : C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c) \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad F \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} K(\mathfrak{v}) F(\mathfrak{v}) d\mathfrak{v}, \quad (79)$$

که نمایش میدان محلی  $F$  را در کرنل الگو  $K$  ضرب کرده و سپس حاصلضرب آنها را انتگرال می‌گیرد. توجه داشته باشد که  $\mathfrak{I}_K$  به عنوان یک تابع الگو لزوماً نسبت به انتخاب‌های خاص پیمانه‌ها بی‌تفاوت است و بنابراین شامل ضریب حجم چارچوب نمی‌شود. یک طرح اشتراک گذاری وزن کاتولوشنی مستقل از مختصات  $GM$  با الزام به اینکه این تابعک الگو با تمام عملگرهای انتگرالی منفرد در هر نقطه و در هر پیمانه موافق باشد، تحمیل می‌شود، یعنی:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{K},p}^X = \mathfrak{I}_K \quad \text{برای هر پیمانه } p \in U^X, \quad (80)$$

که در آن  $\mathcal{A}^G$  اطلاع  $G$  (ماکسیمال) متناظر با ساختار  $G$  در نظر گرفته شده است؛ به معادله (۲۵) مراجعه کنید. این معادل اشتراک گذاری مستقیم کرنل الگوی محلی طبق زیر است:

$$\mathcal{K}_p^X = \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^X|}} \quad \text{برای هر پیمانه } p \in U^X, \quad (81)$$

که در آن ضریب نرمال‌سازی «چگالی کرنل» را به اندازه حجم چارچوب مرجع  $\sqrt{|\eta_p^X|}$  کاهش می‌دهد. همانطور که در ادامه بحث می‌شود، این نرمال‌سازی برای همودایی تحت گروه‌های تقارن غیر حافظ حجم مهم است.

ما میدان‌های کرنلی را که توسط یک کرنل مشترک  $K$  طبق معادله (۸۱) پارامتری شده‌اند، به عنوان میدان‌های کرنل کاتولوشنی  $GM$  می‌نامیم. الزام همزمان برای اشتراک گذاری وزن و استقلال از مختصات منجر به یک قید همودایی بر روی کرنل‌های الگو می‌شود. برای استخراج این قید، اشتراک گذاری کرنل در معادله (۸۱) را در قانون تبدیل کرنل در معادله (۷۲)  $(G \text{-راهبری دهیم})$ ، که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{1}{\sqrt{|\eta_p^B|}} K(g_p^{BA} \mathfrak{v}) = \frac{1}{\sqrt{|\eta_p^A|}} \rho_{\text{من}}(g_p^{BA}) \cdot K(\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\text{من}}(g_p^{BA})^{-1}. \quad (82)$$

از آنجایی که حجم‌های چارچوب‌های مرجع مختلف با  $\sqrt{|\eta_p^A|}$  مرتبط هستند و از آنجایی که قانون تبدیل باید برای پیمانه‌های دلخواه مرتبط با  $G$  برقرار باشد، این قید  $G$ -راهبری را ایجاد می‌کند<sup>۷۷</sup>

$$K(g \mathfrak{v}) = \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{من}}(g) \cdot K(\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\text{من}}(g)^{-1} \quad \forall \mathfrak{v} \in \mathbb{R}^d, g \in G. \quad (83)$$

بر روی کرنل‌های الگو، همانطور که توسط [۸] ثابت شده است، این قید نیازمند آن است که کرنل‌های الگو عملگرهای نمایش [۹] باشند (تعیین‌هایی از عملگرهای تانسوری کروی در مکانیک کواترnomی)، از نظر نموداری، یک کرنل  $G$ -راهبری  $K$  باید جایجاً زیر را برآورده کند:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{K} & \mathbb{R}^{c_{\text{من}} \times c_{\text{من}}} \\ g \downarrow & & \downarrow \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{من}}(g) [\cdot] \rho_{\text{من}}(g)^{-1} \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{K} & \mathbb{R}^{c_{\text{من}} \times c_{\text{من}}} \end{array} \quad (84)$$

برای هر  $g \in G$ . توجه داشته باشید که ضریب دترمینان معکوس  $|\det g|$  در قانون تبدیل کرنل باعث می‌شود که آن مانند یک (۱)-چگالی ماتریس-مقدار تبدیل شود؛ برای جزئیات بیشتر به جدول ۲ مراجعه کنید. به طور شهودی، کرنل‌های  $G$ -راهبری دقیقاً آن کرنل‌هایی هستند که می‌توانند نسبت به چارچوب‌های مرجع دلخواه مرتبط با  $G$  به اشتراک گذاشته شوند بدون اینکه انتخاب خاص پیمانه بر نتیجه تأثیر بگذارد.<sup>۷۸</sup> بنابراین، ابهام

<sup>۷۷</sup> برخلاف کارهای قلبی [۹]، این قید شامل ضریب  $|\det g|$  است. این ضریب در آن کارها ظاهر نشد زیرا همه آنها گروه‌های ساختاری متعامد  $d$  (یا زیرگروه‌های آن) را در نظر گرفته بودند که برای آنها ضریب دترمینان صفر می‌شود.

<sup>۷۸</sup> قید  $G$ -راهبری را می‌توان به صورت  $\rho_{\text{من}}(g)^{-1} \cdot \rho_{\text{من}}(g) \cdot K(g^{-1} \mathfrak{v}) = |\det g|^{-1} \rho_{\text{من}}(g) \cdot \rho_{\text{من}}(g) \cdot K(g^{-1} \mathfrak{v})$  با  $\mathfrak{v} \in \mathbb{R}^d$ ،  $g \in G$  در سمت راست مستند. یک کرنل  $G$ -راهبری، با پایا بودن تحت تبدیلات پیمانه، منجر به همان کرنل بدون مختصات  $\mathcal{K}_p$  می‌شود، زمانی که نسبت به هر چارچوب مرجعی در  $G_p M$  به اشتراک گذاشته شود.

هم ترازی کرnel‌ها  $\square$  که انگیزه اصلی این کار بود  $\square$  با اشتراک گذاری وزن اضافی بر روی تمام چارچوب‌های مرجع معادل (تمام پیمانه‌ها) در ساختار  $G$  در نظر گرفته شده  $GM$  حل می‌شود.

	$d\psi$ و $dv^X$	$\sqrt{ \eta^X }$	$F$ و $[\text{Exp}_p^* f]^X$	$K$	$\mathcal{K}_p^X$	شیء
۱	-۱	۰	-۱	۰	-۱	چگالی
۰	۰	-۱	۰	۰	۰	۸

جدول ۲: مروری بر توانهای چگالی  $s$  برای اشیاء مختلف در گیر در تبدیلات میدان کرnel عمومی و کانولوشن‌های  $GM$ . عبارت مختصاتی یک  $s$ -چگالی با ضرب  $| \det g |^s$  تبدیل می‌شود و قی مختصات از طریق  $G \in$  تبدیل شوند. یک کرnel ماتریس-مقدار عمومی  $\mathcal{K}_p^X$  طبق معادله (۷۶) یک  $s$ -چگالی است. همین امر برای میدان‌های ویزگی و پس‌کش‌های آنها نیز صادق است که قوانین تبدیل آنها در معادلات (۲۸) و (۶۸) داده شده است. کل انتگرال‌ده  $\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^X(v^X) [ \text{Exp}_p^* f ]^X(v^X) dv^X$  از یک تبدیل میدان کرnel عمومی در معادله (۷۶) نیز یک  $s$ -چگالی دیده می‌شود  $\square$  توجه داشته باشد که این برای استقلال آن از مختصات، همانطور که در معادله (۷۷) نشان داده شده، ضروری است. از آنجایی که الگوی عملگر انتگرالی  $\int_K$  در معادله (۷۹) نسبت به هر انتخاب پیمانه بی‌تفاوت است، شامل ضرب حجم چارچوب  $\sqrt{|\eta^X|}$  نمی‌شود. از آنجایی که با این وجود باید مانند عملگرها ای انتگرالی  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}_p^X}$  که زیربنای تبدیلات میدان کرnel هستند رفتار کند، کل انتگرال‌ده  $\int_K K(v) F(v) dv$  از  $(F)(v)$  ملزم به بودن یک  $s$ -چگالی است. این امر مستلزم آن است که خود کرnel‌های الگوی مشترک  $K$  مانند  $(1-s)$ -چگالی‌ها تبدیل شوند، که در قید  $G$ -راهبری در معادله (۸۳) معنکس شده است. توجه داشته باشد که این قانون تبدیل کرnel‌های الگوی برای  $GM$  محظی کانولوشن‌های  $GM$  اکیداً صروری است اگر ویزگی‌های خروجی باید مانند چگالی‌های با وزن  $\int_K$  تبدیل شوند؛ به معادله (۸۹) مراجعه کنید. برای دیدگاهی جایگزین، خواننده علاقه‌مند را به نتیجه ۱ در [۴] ارجاع می‌دهیم، جایی که ضرب در مینیان از اندازه‌های هار روی گروه‌های لی استخراج می‌شود.

قبل از پرداختن به کانولوشن‌های  $GM$ ، در مورد فضای کرnel‌های  $G$ -راهبر توضیح می‌دهیم. توجه داشته باشد که مجموعه

$$\mathcal{K} := \left\{ K: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \right\}. \quad (85)$$

کرnel‌های عمومی، یعنی نه لزوماً هموردا، با مجهر شدن به جمع و ضرب اسکالار استاندارد روی  $\mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$  یک فضای برداری تشکیل می‌دهد. از آنجایی که قید  $G$ -راهبری در معادله (۸۳) خطی است، فضای کرnel را به یک زیرفضای خطی محدود می‌کند:

$$\mathcal{K}_{\rho_{\text{out}}, \rho_{\text{in}}}^G := \left\{ K: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \mid K(gv) = \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{out}}(g) \cdot K(v) \cdot \rho_{\text{in}}(g)^{-1} \quad \forall v \in \mathbb{R}^d, g \in G \right\}. \quad (86)$$

بنابراین می‌توان برای یک پایه از کرnel‌های  $G$ -راهبر راه حلی یافت که کانولوشن  $GM$  را می‌توان بر حسب آن پارامتری کرد. در حالی که این فضا در ثئوری معمولاً بی‌نهایت بعدی است، در عمل اغلب گستره می‌شود، به طوری که در نهایت با یک پایه متأثی  $\{K_1, K_2, \dots, K_N\}$  از کرnel‌های  $G$ -راهبر مواجه می‌شویم. سپس یک مجموعه از وزن‌های با مقادیر حقیقی  $\{w_1, \dots, w_N\}$  که در طول فرآیند آموزش بهینه‌سازی می‌شوند، کانولوشن را با  $w_i K_i = \sum_{i=1}^N w_i K_i$  پارامتری می‌کنند. توجه داشته باشد که ابعاد کاهاش‌یافته (زیر) فضای کرnel‌های  $G$ -راهبر به معنای بهبود کارایی پارامتر در مقایسه با کانولوشن‌های معمولی است.

بخش ۳.۳.۵ به بحث در مورد راه حل‌های تحلیلی نمونه‌ای از فضاهای کرnel همودرای بازتابی برای نمایش‌های گروهی مختلف گروه بازتاب  $\mathcal{R}$  می‌پردازد. کرnel‌های حاصل که با انواع مختلفی از تقارن‌های بازتابی مشخص می‌شوند، در جدول ۳ به تصویر کشیده شده‌اند.

مثال‌های بیشتری را می‌توان در ادبیات مربوط به شبکه‌های عصبی کانولوشنی راهبر یافت: یک راه حل تحلیلی برای قید فضای کرnel برای گروه ساختاری متعدد خاص  $\text{SO}(3)$  در سه بعد و نمایش‌های تحویل‌نپذیر آن توسعه  $\square$  ارائه شد.  $\square$  [۴] این رویکرد را برای پوشش نمایش‌های گروهی دلخواه تعیین دادند و قید فضای کرnel را برای هر نمایشی از ۲ و تمام زیر گروه‌های آن  $\leq 2$  حل کردند  $\square$  یک پیاده‌سازی در <https://quva-lab.github.io/e2cnn/api/e2cnn.kernels.html> موجود است. برای گروههای ساختاری متناهی، قید را می‌توان به صورت عددی نیز حل کرد، همانطور که توسعه  $\square$  [۴] توضیح داده شده است. یک استراتژی راه حل کلی تر، که برای گروههای ساختاری فشرده دلخواه  $G$  (و بنابراین همه موارد ذکر شده در بالا) کاربرد دارد، توسعه  $\square$  [۴] پیشنهاد شد. این راه حل قضیه کلاسیک ویگنر-اکارت  $\square$  [۴] را به یک قضیه ویگنر-اکارت برای کرnel‌های  $G$ -راهبر تعیین می‌دهد، که کرnel‌ها را بر حسب توابع پایه هارمونیک، ضرایب کلیش-گوردان و اندومورفیسم‌های نمایش‌ها (عناصر ماتریسی کاهاش‌یافته تعیین یافته) بیان می‌کند. ما برای مروری دقیق‌تر بر کارهای قبلی و مرتبط با کرnel‌های راهبر به [۴] ارجاع می‌دهیم.

**کانولوشن‌های مستقل از مختصات  $\square$ :** با داشتن یک کرnel الگوی  $G$ -راهبر  $K \star GM$  با این کرnel به عنوان  $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{out}}, \rho_{\text{in}}}^G$  کانولوشن  $GM$  متناظر تعریف می‌شود، که برای هر نقطه  $p \in M$  و هر پیمانه  $\psi$  در  $\mathcal{K}_p^X = K / \sqrt{|\eta^X|}$  صدق می‌کند. با قرار دادن میدان کرnel کانولوشنی  $GM$  در معادله (۷۶)، یعنی تبدیل میدان کرnel، عبارت مختصاتی کانولوشن  $GM$  به صورت زیر ساده می‌شود:

$$f_{\text{out}}^A(p) = [K \star f_{\text{in}}]^A(p) := \int_{\mathbb{R}^d} K(v) [\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^A(v) dv = \mathcal{I}_K([\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^A). \quad (87)$$

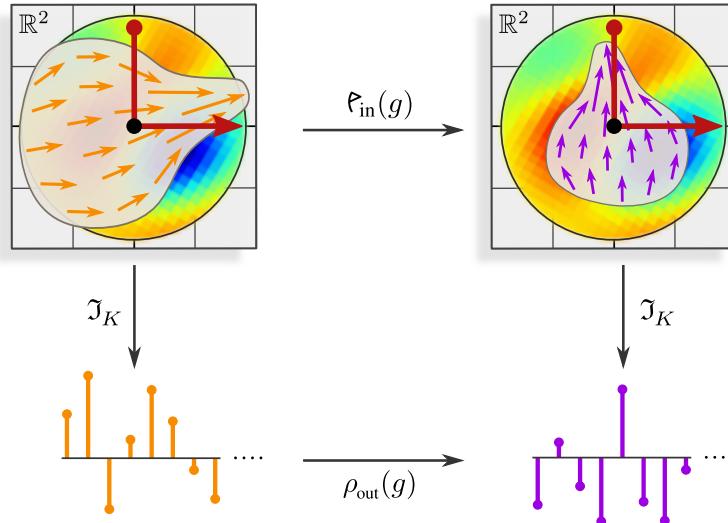
بنابراین، این به سادگی با تطبیق پس کش انتقال دهنده  $\text{Exp}_p^* f_{00}^A$  از میدان ویژگی در یک پیمانه دلخواه انتخاب شده  $\psi$  با کرنل کانولوشن مستقل از پیمانه  $K$  به دست می آید. بنابراین کانولوشن های مستقل از مختصات  $GM$  به راحتی با ۱) انتخاب چارچوب های مرجع دلخواه، ۲) پس کش (و انتقال) میدان های ویژگی به مختصات دهی های فضای مماس و ۳) انقباض آنها در آنجا با یک کرنل  $G$ -راهبر (قابل آموزش) پیاده سازی می شوند.

کانولوشن های  $GM$  چندین ویژگی تقارنی مربوط را از خود نشان می دهند:

استقلال از مختصات: به عنوان موارد خاصی از تبدیلات میدان کرنل، کانولوشن های  $GM$  به طور (غیرفعال) مستقل از مختصات هستند، یعنی معادله (۷۷) در مورد آنها صدق می کند.

هموردایی ایزومنتری سراسری: آنها تحت عمل فعال و سراسری ایزومنتری های حافظ ساختار  $G$  در  $\text{Isom}_{GM}$  بر روی میدان های ویژگی هموردا هستند. بخش های ۳.۴ و به ویژه ۸ این ویژگی را به تفصیل موردن بحث قرار می دهند.

هموردایی  $G$  محلی: الگوی عملگر انتگرالی  $\mathcal{J}_K$  به دلیل  $G$ -راهبری  $K$  خود  $G$ -هموردا است. بنابراین، هر تبدیل یک نمایش ییدان ویژگی محلی روی  $\mathbb{R}^d$  منجر به تبدیل متناظر بردار ویژگی حاصل خواهد شد؛ به شکل ۱۹ مراجعه کنید. بنابراین، تبدیلات  $G$  مستقل الگوهایی که در نقاط مختلف  $p_i \in M$  متغیر شده اند، منجر به تبدیلات ویژگی خروجی مستقل در این نقاط می شوند (این فقط در این نقاط برقرار است و نیازمند کرنل هایی با تکیه گاه فشرده است که کل میدان دید آنها طبق تبدیل  $G$  تبدیل شود).



شکل ۱۹: هموردایی  $G$  محلی الگوی عملگر انتگرالی مشترک  $\mathcal{J}_K$  که زیربنای یک کانولوشن  $K \star GM$  است. یک تبدیل  $G$  از یک نمایش میدان محلی روی  $\mathbb{R}^d$  بردارهای ویژگی را از  $g^{-1} \rho_{00}^{\square \square} g$  به ۷ منطق می کند و آنها را علاوه بر این از طریق  $(g)$  تبدیل می کند. در حالی که اولی ویژگی ها را به صورت فضایی جابجا می کند، دومی ضرایب عددی آنها را تبدیل می کند (که در شکل به صورت چرخش و مقیاس بندی بردارهای (مماس) منفرد به تصویر کشیده شده است). اعمال  $\mathcal{J}_K$  به هر دو ورودی منجر به بردارهای ویژگی خروجی متفاوتی می شود. با این حال، به دلیل هموردایی  $G$  از  $K$ ، تضمین می شود که پاسخ های  $\rho_{000}(g)$  مربوط هستند؛ به معادله (۸۹) مراجعه کنید. بنابراین، یک تبدیل  $G$  فعال متناظر از بردار ویژگی خروجی می شود. توجه داشته باشید که هموردایی  $G$  از  $\mathcal{J}_K$  یک نتیجه مستقیم از  $G$ -راهبری  $K$  است.

برای دقیق تر کردن نکته آخر، ما تبدیلات  $G$  فعال نمایش های میدان ویژگی محلی را در  $C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c)$  به صورت زیر تعریف می کنیم<sup>۶۹</sup>

$$\mathfrak{h}_{00}: G \times C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c), \quad F \mapsto \mathfrak{h}_{00}(g)F := \rho_{00}(g) \circ F \circ g^{-1}, \quad (88)$$

که در آن فرض می کیم  $F$  از نوع  $\rho_{00}$  است. به طور شهودی،  $\mathfrak{h}_{00}$  با انتقال فعال بردارهای ویژگی  $\rho(g^{-1} \rho_{00}^{\square \square} g)$  از  $\mathbb{R}^c$  به ۷ و تبدیل آنها با  $\rho_{00}$  بر روی میدان های  $F$  عمل می کند<sup>۷۰</sup> این تعریف «معمولی» تبدیلات فعال میدان های ویژگی  $F$  بر روی فضاهای اقلیدسی  $\mathbb{R}^d$  است. هموردایی  $(g)$

<sup>۶۹</sup>  $b = \text{Res}_G^{\mathbb{R}^d \times G} \text{Ind}_G^{\mathbb{R}^d \times G} \rho$  به طور رسمی با القای نمایش  $G$   $\rho$  به یک نمایش  $(\mathbb{R}^d \times G)$  محدود کردن آن به  $G$  داده می شود. یک توضیح شهودی از نمایش های القایی و محدود شده را می توان در پیوست ۷۰ از [۶] این موضوع را به طور رسمی تر بررسی می کند.

ادعا شده برای  $\mathfrak{I}_K$  به راحتی با اعمال آن به یک ورودی تبدیل شده، و سپس جایگزینی و استفاده از  $G$ -راهبری  $K$  دیده می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{I}_K(\mathfrak{f}_{\square}(g)F) &= \mathfrak{I}_K(\rho_{\square}(g) \circ F \circ g^{-1}) && (\text{تعريف } \mathfrak{I}_K, \text{ معادله (88)}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \rho_{\square}(g) F(g^{-1}v) dv && (\text{تعريف } \mathfrak{I}_K, \text{ معادله (79)}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} K(g\tilde{v}) \rho_{\square}(g) F(\tilde{v}) |\det g| d\tilde{v} && (\tilde{v} = g^{-1}v) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_{\square\square}(g) K(\tilde{v}) F(\tilde{v}) d\tilde{v} && (\text{ـراهبری } G, \text{ معادله (83)}) \\
 &= \rho_{\square\square}(g) \mathfrak{I}_K(F) && (\text{تعريف } \mathfrak{I}_K, \text{ معادله (79)}) \tag{89}
 \end{aligned}$$

بنابراین، یک تبدیل فعال یک نمایش میدان ویژگی محلی  $F$  روی یک مختصات دهی فضای مماس با  $(g)$  تضمین می‌کند که منجر به تبدیل بردار ویژگی خروجی حاصل با  $(g)$  می‌شود. به عبارت دیگر، ویژگی هایی که در ژستهای هندسی مختلف مرتبط با  $G$  ظاهر می‌شوند، تا یک تبدیل از طریق  $\rho_{\square\square}$  پاسخ یکسانی را برمی‌انگیرند. این به طور خلاصه در قالب یک نمودار جابجایی به صورت زیر است:

$$\begin{array}{ccc}
 C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{c\square}) & \xrightarrow{\mathfrak{f}_{\square}(g)} & C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{c\square}) \\
 \downarrow \mathfrak{I}_K & & \downarrow \mathfrak{I}_K \\
 \mathbb{R}^{c\square\square} & \xrightarrow{\rho_{\square\square}(g)} & \mathbb{R}^{c\square\square} \tag{90}
 \end{array}$$

شکل ۱۹ یک تفسیر بصری از این ویژگی همودایی  $\mathfrak{I}_K$  ارائه می‌دهد.

توجه داشته باشید که همودایی تحت تبدیلات  $G$  محلی در معادله (89) دقیقاً به قید  $G$ -راهبری همانطور که در معادله (83) است، یعنی به طور خاص، با ضریب دترمینان<sup>۱</sup>  $|\det g|$  که باعث می‌شود کرنل مانند یک  $(-)$ -چگالی تبدیل شود، نیاز دارد. این ضریب به تعریف ما از اشتراک گذاری وزن کانولوشنی در معادله (81) با نرمال‌سازی با حجم‌های چارچوب مرجع  $\sqrt{|\eta_p^X|}$  برمی‌گردد. بنابراین، اشتراک گذاری وزن ساده‌انگارانه‌ای که در ابتدای این بخش ذکر شد، به رفتار تبدیل مطلوب منجذب شده. به عبارت دیگر: هر دو نسخه ساده‌انگارانه و نرمال‌شده اشتراک گذاری کرنل مستقل از مختصات هستند و بنابراین هر دو تحت تبدیلات پیمانه غیرفعال  $\square$  به ویژه آنها که حجم چارچوب را تغییر می‌دهند  $\square$  به طور سازگار رفتار می‌کنند. با این حال، در مورد اشتراک گذاری کرنل ساده‌انگارانه، این امر توسط پایابی عنصر حجم ریمانی  $\sqrt{|\eta_p^A|} dv^A = \sqrt{|\eta_p^B|} dv^B$  مراجعت می‌شود. با حذف این ضریب در اشتراک گذاری وزن نرمال شده، سازگاری رفتار تبدیل دیگر توسط خود اندازه انتگرال گیری تضمین نمی‌شود  $\square$  که مستلزم آن است که خود کرنل‌های  $G$ -راهبر تغییرات حجم را از طریق ضریب دترمینان توضیح دهد. فقط دومی به تبدیلات فعل تعیین می‌یابد، جایی که فقط میدان ویژگی تبدیل می‌شود، در حالی که اندازه انتگرال گیری پایا می‌ماند.

از آنجایی که تعریف ما از کانولوشن‌های  $GM$  امکان خمینه‌های ریمانی، ساختارهای  $\square$  و انواع میدان دلخواه را فراهم می‌کند، بسیار عمومی است و طیف گسترده‌ای از کارهای مرتبط را پوشش می‌دهد. ما این ادعای را در پخش سوم اثبات می‌کنیم، جایی که بسیاری از CNN‌ها را روی فضاهای آفین اقلیدسی  $d$ ، کره  $S^d$  و خمینه‌ها یا مشاهی عمومی به عنوان نمونه‌های خاصی از معادله (87) توضیح می‌دهیم. برای یک نمای کلی و طبقه‌بندی این مدل‌ها، به جدول ۶ مراجعه کنید.

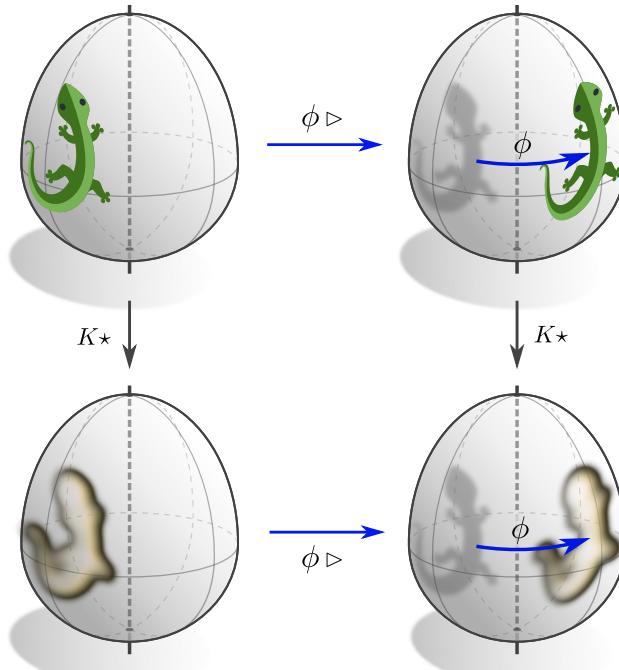
### ۳.۴ تناوب پذیری ایزومتری

با توجه به اینکه یک منفول تقارن‌های نشان می‌دهد، معمولاً مطلوب است که شبکه‌های عصبی این تقارن‌ها را رعایت کنند، یعنی تحت عمل آنها بر میدان‌های ویژگی تناوب پذیر باشد.  $GM$ -کانولوشن‌ها طراحی شده‌اند تا  $\text{Isom}_{GM}$ -تناوب پذیر باشند، که به این معنی است که آنها با عمل ایزومتری‌ها در  $\text{Isom}_{GM}$  بر میدان‌های ویژگی جابجا می‌شوند، همانطور که در شکل ۲۰ بصری‌سازی شده است.<sup>۲</sup> در معادلات،  $G$ -کانولوشن  $K^*$  تناوب پذیر است زمانی که رابطه

$$K \star (\phi \triangleright f_{\square}) = \phi \triangleright (K \star f_{\square}) \quad \forall \phi \in \text{Isom}_{GM} \tag{91}$$

را برای هر میدان ورودی ممکن  $\square$  برآورده کند، یعنی زمانی که نمودار زیر جابجا باشد:

<sup>۱</sup> به یاد داشته باشید که عمل بر میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات  $GM$  تنها برای ایزومتری‌های حفظ‌کننده  $G$ -ساختار در  $\text{Isom}_{GM}$  قابل تعریف است. بنابراین حتی امکان تعریف مفهوم تناوب پذیری ایزومتری برای ایزومتری‌هایی که تقارن‌های  $G$ -ساختار نیستند وجود ندارد. توجه داشته باشید که این بدون از دست دادن کلیت است زیرا همیشه می‌توان گروه ساختار  $d$  را انتخاب کرد که برای آن  $\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M)$  با کل گروه ایزومتری منطبق می‌شود.



شکل ۲۰: گفته می شود یک لایه شبکه تحت ایزومتری تناوب پذیر است زمانی که با عمل آنها بر میدان های ویژگی جابجا می شود.  $-GM$ -کانولوشن ها طراحی شده اند تا نسبت به آن ایزومتری های  $\phi \in \text{Isom}_{GM}$  که تقارن های ساختار هستند، تناوب پذیر باشند. در معادلات، کانولوشن  $K^*$  تحت عمل ایزومتری  $\phi$  تناوب پذیر است زمانی که رابطه  $(\phi \triangleright f_{00}) = \phi \triangleright (K^* \circ f_{00})$  برآورده کند. این رابطه توسط انتخابی از میدان ورودی  $f_{00}$  برآورده کند. این رابطه توسعه نمودار جابجایی در معادله (۹۲) بصری سازی شده است که تفسیر گرافیکی آن در این شکل نشان داده شده است.

اینکه  $-GM$ -کانولوشن ها  $\text{Isom}_{GM}$ -تناوب پذیر هستند بر این حقایق تکیه دارد که (۱) کرنل ها در کل منفولد به اشتراک گذاشته می شوند، (۲) ایزومتری ها عقب کشی انتقال دهنده میدان های ویژگی را حفظ می کنند و (۳) اینکه  $\text{Isom}_{GM}$ -تبديل های گیج با مقدار  $G$  را القا می کند که توسط  $-G$ -استیریبل بودن کرنل در نظر گرفته می شود.

Creative Commons Attribution 4.0  
(مارمولک ها تحت مجوز International اقتباس شده با مجوز Twitter)

$$\begin{array}{ccccc}
 & f_{00} & \xrightarrow{\phi \triangleright} & \phi \triangleright f_{00} & \\
 \downarrow K^* & & & & \downarrow K^* \\
 f_{00} & \xrightarrow{\phi \triangleright} & \phi \triangleright f_{00} & &
 \end{array} \tag{۹۲}$$

به عنوان اولین قدم به سوی اثبات تناوب پذیری ایزومتری  $-GM$ -کانولوشن ها، به یاد بیاورید که آنها به صورت نقطه ای به عنوان انقباض یک کرنل  $K$  با عقب کشی انتقال دهنده  $A$   $[\text{Exp}_p^* f_{00}]^A$  از میدان ورودی  $f_{00}$  تعریف می شوند. از آنجا که ایزومتری ها به طور تعریف هندسه ریمانی  $M$  را حفظ می کنند، به ویژه نگاشت نمایی ریمانی و انتقال دهنده های لوی-چیویتا را حفظ می کنند؛ به بخش ۴.۱.۸ و شکل ۳۷ مراجعه کنید.<sup>۳۱</sup> این امر دلالت دارد بر اینکه عقب کشی انتقال دهنده میدان پیش برده  $f_{00} \triangleright \phi$  در  $(p)$   $\phi \triangleright f_{00}$  با تبدیل گیج القا شده توسعه ایزومتری از عقب کشی انتقال دهنده میدان اصلی  $f_{00}$  در  $p$  متفاوت خواهد بود، یعنی:

$$[\text{Exp}_{\phi(p)}^*(\phi \triangleright f_{00})]^A = \rho_{00}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) \circ [\text{Exp}_p^* f_{00}]^{\tilde{A}} \circ g_\phi^{A\tilde{A}}(p)^{-1}; \tag{۹۳}$$

مقایسه کنید با معادله (۶۸) و برای فرمول بندی مستقل از مختصات، قضیه ۸.۴

با توجه به این همانی، تناوب پذیری ایزومتری  $-GM$ -کانولوشن ها توسعه محاسبه ساده زیر اثبات می شود که به طور اساسی از  $G$ -استیریبل بودن کرنل قالب  $K$  برای توضیح عمل گیج القا شده توسعه ایزومتری استفاده می کند:

<sup>۳۱</sup> به طور کلی تر، هر زمان که یک اتصال جایگزین  $G$ -سازگار برای انتقال بردارهای ویژگی انتخاب شود، فرض می کنیم این اتصال تحت عمل  $\text{Isom}_{GM}$  ناورد باشد؛ به بخش ۴.۱.۸ مراجعه کنید. این فرض برای همه مدل هایی که در بررسی ادبیات در بخش سوم پوشش داده شده اند، برآورده می شود.

$$\begin{aligned}
[K \star (\phi \triangleright f_{\square\square})]^A(\phi(p)) &\stackrel{(\textcircled{1})}{=} \int_{\mathbb{R}^d} K(v) [\text{Exp}_{\phi(p)}^*(\phi \triangleright f_{\square\square})]^A(v) dv \\
&\stackrel{(\textcircled{2})}{=} \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \left[ \rho_{\square\square}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^{\tilde{A}}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)^{-1}v) \right] dv \\
&\stackrel{(\textcircled{3})}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \left[ K(g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \tilde{v}) \rho_{\square\square}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) \right] [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^{\tilde{A}}(\tilde{v}) |\det g_\phi^{A\tilde{A}}(p)| d\tilde{v} \\
&\stackrel{(\textcircled{4})}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \rho_{\square\square\square}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) K(\tilde{v}) \right] [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^{\tilde{A}}(\tilde{v}) d\tilde{v} \\
&\stackrel{(\textcircled{5})}{=} \rho_{\square\square\square}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) \cdot f_{\square\square\square}^{\tilde{A}}(p) \\
&\stackrel{(\textcircled{6})}{=} [\phi \triangleright f_{\square\square\square}]^A(\phi(p)) \\
&\stackrel{(\textcircled{7})}{=} [\phi \triangleright (K \star f_{\square\square})]^A(\phi(p))
\end{aligned} \tag{44}$$

قدم اول از تعریف  $GM$ -کانولوشن‌ها در معادله (۸۷) پیروی می‌کند در حالی که قدم دوم تبدیل گیج القا شده را طبق معادله (۹۳) وارد کرد. جایگزینی از  $\mathbb{G}^{\phi}$  به  $(p)^{-1}\mathbb{G}$  قسم سوم را توجیه می‌کند. در قسم چهارم  $G$ -استیریبل بودن کرنل قالب، یعنی معادله (۸۳)، اعمال می‌شود (معادله (۴۴)) را به یاد یاورید که بیان می‌کند تبدیل‌های گیج القا شده توسط  $Isom_{GM}$  دارای مقدار  $G$  هستند. نتیجه این است که بردار ویژگی خروجی حاصل توسط تبدیل گیج القا شده تبدیل می‌شود. پس از شناسایی این امر به عنوان ییان مختصاتی پیش‌برد میدان خروجی در معادله (۴۶)، گزگاره پیروی می‌کند. آنچه که همه قدمها برای ایزوومتری‌های دلخواه در  $GM$  معتبر هستند، می‌بینیم که  $GM$ -کانولوشن‌ها به طور خودکار نسبت به هر ایزوومتری حفظ کننده  $G$ -ساختار تناوب‌پذیر هستند. آن‌ها لزوماً نسبت به ایزوومتری‌های عمومی در  $Isom(M)$  که ممکن است  $G$ -ساختار را رعایت نکنند تناوب‌پذیر نیستند، با این حال، تناوب‌پذیری کامل ایزوومتری برای گروه‌های ساختار متعماد  $d = G$  (یا ابر-گروه‌های آن) تضمین شده است.

**میدان‌های کرنل ناوردا:** تحلیل عمیق تری از تناوب پذیری تبدیل‌های میدان کرنل عمومی را می‌توان در بخش‌های ۲۸ و ۳۸ یافته. نتیجه اصلی این برسی قضیه ۸۸ است که بیان می‌کند تناوب پذیری ایزومنتری یک تبدیل میدان کرنل، ناوردایی ایزومنتری میدان کرنل آن را نتیجه می‌دهد و بالعکس. شکل ۳۸ چنین میدان کرنل ناوردایی را بصری‌سازی می‌کند که ملزم به اشتراک وزن‌ها بر روی مدارات عمل ایزومنتری است. ناوردایی مورد نیاز میدان کرنل از نظر شهرهودی قابل فهم است زیرا تناوب پذیری ایزومنتری مطمئناً نازمند ثابت بودن استنتاج شکله بر روی هر مدار است. این نتیجه انتزاعی تناوب پذیری ایزومنتری  $GM$ -کاتولوشن<sup>□</sup> که توسط یک کرنل قالب منفرد و مشترک تعیین می‌شوند<sup>□</sup> تحت ایزومنتری‌ها در  $Isom_{GM}$  ناوردا هستند، نتیجه می‌دهد؛ به قضیه ۸.۹ و شکل ۳۸ مراجعه کنید.  $G$ -استریبل بودن کرنل قالب بدین ترتیب ناوردایی کرنل‌ها تحت عمل زیرگرهای پایدار کننده گروه ایزومنتری را توضیح می‌دهد.

**فضاهای همگن:** در حالی که تفاضلی تناوب پذیری ایزو متري نیازمند آن است که کرnelها بر روی مدارات گروه ایزو متري به اشتراک گذاشته شوند، به طور کلی نیازمند اشتراک وزن کانولوشنی در کل منیفولد نیست. یک استثنای مهم حالت منیفولد هایی است که فضاهای همگن گروه ایزو متري خود هستند، مانند  $\mathbb{R}^d$  یا کره  $S^d$ . به طور تعريف، عمل ایزو متري در چنین فضاهایی متعدد است، یعنی تنها یک مدار منفرد وجود دارد. در نتيجه، تنها یک کرnel مستقل وجود خواهد داشت که از طریق عمل گروه ایزو متري در کل فضا به اشتراک گذاشته می شود. قضیه ۱۴.۸ در بخش ۳.۸ ثابت می کند که تبدیل های میدان کرnel تناوب پذیر ایزو متري در فضاهای همگن لزوماً کانولوشن های مستقل از مختصات هستند. این مشاهده پیوند رسمی بین نظریه ما و کارهای قبلی در مورد شبکه های کانولوشنی در فضاهای همگن توسط  $[?, ?]$  و  $[?, ?]$  برقرار می کند که کانولوشن ها را از طریق تناوب پذیری آنها نسبت به تقارن های سراسری فضای زیرین تعريف می کنند.

**تناوب پذیری دیفئومورفیسم:** خواننده ممکن است تعجب کند که آیا امکان کاملاً دیفئومورفیسم تناوب پذیر کردن های ۱۰۰٪ مستقل از مختصات ما موجود دارد یا نه. همانطور که به راحتی می توان دید، عملیات نقطه‌ای از بخش ۱.۴، یعنی  $\text{_____} \times 1$ ، بایاس‌ها و غیرخطی‌ها، از قبل دیفئومورفیسم تناوب پذیر هستند. به طور خاص، بگذراید

$$\text{Diff}_{GM} := \left\{ \phi \in \text{Diff}(M) \mid [\phi_*(e_i)]_{i=1}^d \in GM \quad \forall [e_i]_{i=1}^d \in GM \right\} \leq \text{Diff}(M) \quad (45)$$

زیرگروه دیفیومورفیسم‌های حفظ کننده  $G$ -ساختر باشد، یعنی آنالوگ معادله (۴۲) بدون نیاز به اینکه  $\phi$  ایزو-متری باشد. مشابه معادله (۴۴) و قضیه ۸.۳:

$$\phi \in \text{Diff}_{GM} \iff g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \in G \quad \forall p \in M. \quad (46)$$

-تباوب پذیری توابع قالب نقطه‌ای مشترک تضمین خواهد کرد که آن‌ها با این تبدیل‌های گیج القا شده توسط  $\text{Diff}_{GM}$  جایجا شوند  $\square$  و بنابراین با خود عمل دیفیومور فیسم فعال.

از طرف دیگر،  $GM$ -کانولوشن‌ها با کرنل‌های گسترده فضایی، به طور کلی نسبت به دیفیومور فیسم‌ها تباوب پذیر نیستند. دلیل این امر آن است که عقب‌کشی انتقال‌دهنده  $f$  بر نگاشتهای نمایی تکیه می‌کند که ذاتاً ساختارهای ریمانی هستند که با دیفیومور فیسم‌ها جایجا نمی‌شوند. با این حال، از آنجا که کرنل‌ها  $G$ -استیریل هستند، تباوب پذیری  $\text{Diff}_{GM}$  باید در حد صفر رفن پشتیانی کرنل همچنان برقرار باشد. با توجه به اینکه کرنل‌های کانولوشن در کاربردهای معمول یادگیری عمیق کاملاً کوچک هستند، تباوب پذیری دیفیومور فیسم باید در عمل تقریباً برقرار باشد.

**تباوب پذیری آفین:** فضاهای اقلیدسی حالت خاصی را تشکیل می‌دهند  $\mathbb{M}$  زیرا امکان  $GM$ -کانولوشن‌هایی را فراهم می‌کنند که تحت عمل گروه‌های آفین  $\text{Aff}(G)$  تباوب پذیر هستند. اینکه چنین است به این حقیقت تکیه دارد که نگاشت نمایی در فضاهای اقلیدسی نه تنها با عمل ایزومنتری ها بلکه به طور کلی تر با تبدیل‌های آفین جایجا می‌شود. تباوب پذیری گروه آفین  $GM$ -کانولوشن‌های اقلیدسی در بخش ۳.۹ اثبات شده است.

## ۵ مدل اسباب بازی: کانولوشن‌های موبیوس هم‌متغیر انعکاس

برای ملموس تر کردن ملاحظات نظری پخش‌های قبلی، اکنون به یک نمونه کاربرد می‌پردازیم. در حالی که از اهمیت عملی فوری برخوردار نیست، کانولوشن‌های  $GM$  روی نوار موبیوس یک مدل اسباب بازی مناسب هستند زیرا هندسه آن و نظریه نمایش در گیر بهویژه ساده است. به دلیل غیرجهت‌پذیر بودن آن، چارچوب‌های مرجع فقط می‌توانند (به‌طور هموار) تا حد انعکاس‌ها ترجیح داده شوند. همانطور که انتظار می‌رود، CNN‌های مستقل از مختصات، با اعمال توابع الگوی هم‌متغیر انعکاس، از پیاده‌سازی ساده‌لوحانه وابسته به مختصات بهتر عمل می‌کنند. علاوه بر این نشان داده می‌شود که آنها تحت عمل گروه ایزومنتری نوار موبیوس هم‌متغیر هستند.

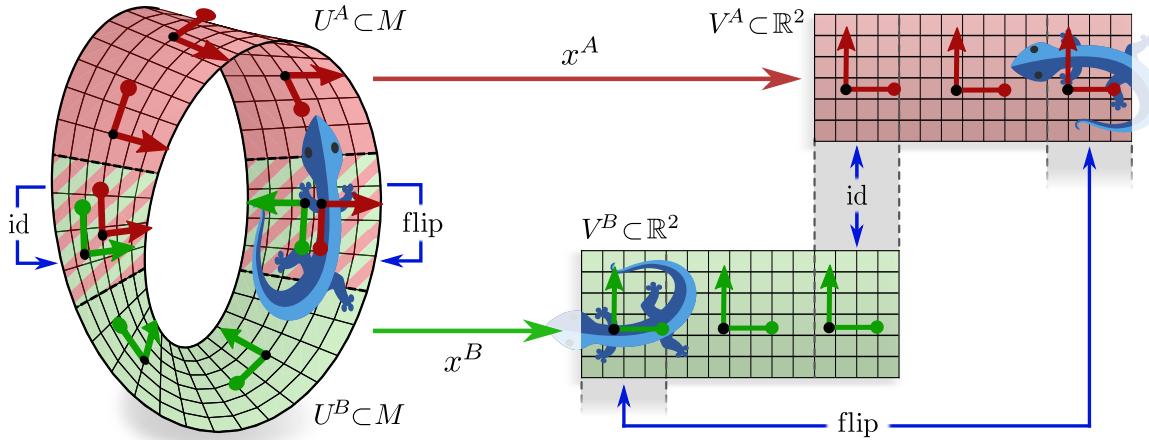
۱.۵	هندسه نوار موبیوس . . . . .
۲.۵	میدان‌های ویژگی مستقل از جهت گیری . . . . .
۳.۵	شبکه‌های کانولوشنی مستقل از جهت گیری . . . . .
۴.۵	جمع بایاس مستقل از جهت گیری . . . . .
۵.۳	غیرخطی‌های مستقل از جهت گیری . . . . .
۵.۳	کانولوشن‌های مستقل از جهت گیری . . . . .
۵.۶	پیاده‌سازی عددی و ارزیابی کانولوشن‌های موبیوس . . . . .
۵.۶	پیاده‌سازی عددی . . . . .
۵.۹	ارزیابی تجربی . . . . .

بخش ۱.۵ در ادامه هندسه نوار موبیوس مسطح را مورد بحث قرار می‌دهد. به دلیل پیچ آن، گروه ساختار آن نمی‌تواند بیش از گروه انعکاس  $G = \mathcal{R}$  کاهش یابد، به‌طوری که باید اطلس  $\mathcal{R}$  از گیج‌ها را همانطور که در شکل ۲۱ نمایش داده شده، در نظر گرفت. گروه ایزومنتری توسط چرخش‌ها در امتداد نوار داده می‌شود و تبدیل‌های گیج با مقادیر  $R$  را القا می‌کند. میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات  $\mathcal{R}M$ ، که برخی از آنها در بخش ۲.۵ معرفی می‌شوند، لزوماً باید مطابق با نمایشی از گروه انعکاس تبدیل شوند. بخش ۳.۵ عملیات شبکه کانولوشنی مستقل از جهت گیری را مورد بحث قرار می‌دهد. این بهویژه مفهوم کرنل‌های  $G$ -راهبری‌پذیر را روشن می‌کند اما همچنین بایاس‌های هم‌متغیر انعکاس و غیرخطی‌ها را پوشش می‌دهد. پیاده‌سازی عددی خانواده مدل پیشنهادی در بخش ۴.۵ مورد بحث و ارزیابی قرار می‌گیرد. کد به‌طور عمومی در <https://github.com/mauriceweiler/MobiusCNNs> در دسترس است.

### ۱.۵ هندسه نوار موبیوس

منیفلد  $M$  مورد بررسی نوار موبیوس مسطح با مرز است همانطور که در شکل ۴ (راست) نشان داده شده است. می‌توان آن را به عنوان ساخته شده از زیرمجموعه مستطیلی  $[0, Y] \times [0, X]$  از  $\mathbb{R}^2$  و چسباندن دو انتهای مقابل به شکل پیچ خورده در نظر گرفت. با این تعریف، نوار موبیوس متريک کانونی  $\mathbb{R}^2$  را به ارث می‌برد که آن را با ساختار ریمانی مجهز می‌کند. متريک بهویژه اتصال لوی-چویتا و در نتیجه نگاشتهای نمایی و انتقال‌دهنده‌های موازی را مشخص می‌کند که در ادامه بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرند.

اولین سؤالی که در ساخت CNN مستقل از مختصات باید پاسخ داد این است که تا چه حد انتخاب چارچوب‌های مرجع مبهم است. با توجه به متريک ریمانی روی نوار، می‌توانیم توجه خود را به چارچوب‌های متعامد محدود کنیم. علاوه بر این می‌توان یکی از دو جهت در امتداد نوار را متمایز کرد تا چرخش چارچوب‌های مرجع را با تراز کردن محورهای اول آنها با این جهت (به‌طور هموار) رفع ابهام کرد. این ما را با ابهام دست‌گردی چارچوب



شکل ۲۱: هندسه مسطح نوار مویوس امکان زیرمجموعه‌های محلی را فراهم می‌کند که می‌تواند به طور ایزومتریک با زیرمجموعه‌های متضاد از  $\mathbb{R}^3$  شناسایی شوند. ما اطلاعی ایزومتریک را ثابت می‌کنیم که از دو چارت  $x^A$  و  $x^B$  روی  $U^A$  (قمر) و  $U^B$  (سیز) تشکیل می‌شود که کل نوار را می‌پوشانند. گیج‌های  $\psi_p^X := \hat{dx}_p^X$  در  $T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d$  برای  $p \in U^A$  به عنوان دیفرانسیل‌های چارت‌القا می‌شوند. بدلیل پیچ نوار مویوس، تابع گذار  $g_p^{BA}$  در یکی از نواحی همپوشان بدینهی خواهد بود، در حالی که ناجه دیگر لزوماً بین گیج‌ها از طریق انعکاس‌های  $s$  گذار خواهد کرد. اطلاع انتخاب شده از چارت‌ها از چارت‌ها بنابراین  $\mathcal{R}$ -اطلاعی از گیج‌ها را القا می‌کند و  $\mathcal{R}$ -ساختار متضاد می‌شود که از دو چارچوب منعکس شده در هر نقطه از  $M$  تشکیل می‌شود. هر یک از چارت‌های  $x^X$  میدان چارچوب محلی هموار را القا می‌کند که توسط پایه‌های مختصات  $\left[ \frac{\partial}{\partial x_i^X} \right]_{|p}^d$  داده می‌شود. انعکاس در تابع گذار در یک همپوشانی در انعکاس چارچوب‌ها نمایان می‌شود.

(مارمولک‌ها تحت مجوز Twitter Creative Commons Attribution 4.0 International License اقتباس شده‌اند).

باقی می‌گذارد، با دو جهت گیری که متضاد با دو جهت ممکن محصور دوم چارچوب عمود بر نوار هستند. نوار مویوس به عنوان منیفلد غیرجهت‌پذیر، انتخاب سراسری هموار (یا حتی پیوسته) جهت گیری‌های چارچوب را نمی‌پذیرد. برای به دست آوردن شهودی از این گزاره، تلاش برای ساخت میدان چارچوب هموار با انتخاب چارچوب دلخواه در موقعیت تصادفی و گسترش هموار این انتخاب روی کل نوار را در نظر بگیرید. پس از یک دور کامل در اطراف نوار، چارچوب‌های ساخته شده ناگزیر نسبت به چارچوب‌های اولیه منعکس خواهند شد و بنابراین با هموار بودن مطلوب در تناقض خواهند بود. بنابراین از نظر توپولوژیکی تعریف  $\{e\}$ -ساختار، یعنی میدان سراسری هموار چارچوب‌ها، روی نوار مویوس غیرممکن است. بنابراین ما با کروه ساختار غیرقابل کاهش

$$G = \mathcal{R} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad (97)$$

که انعکاس چارچوب‌ها را مدل می‌کند، باقی می‌مانیم. گروه انعکاس فقط شامل دو عنصر است، همانی  $e$  و انعکاس  $s$ ، که طبق جدول ضرب ساده زیر ترکیب می‌شوند:

$$\begin{array}{c|cc} & s & e \\ \hline s & e & e \\ e & e & s \end{array} \quad (98)$$

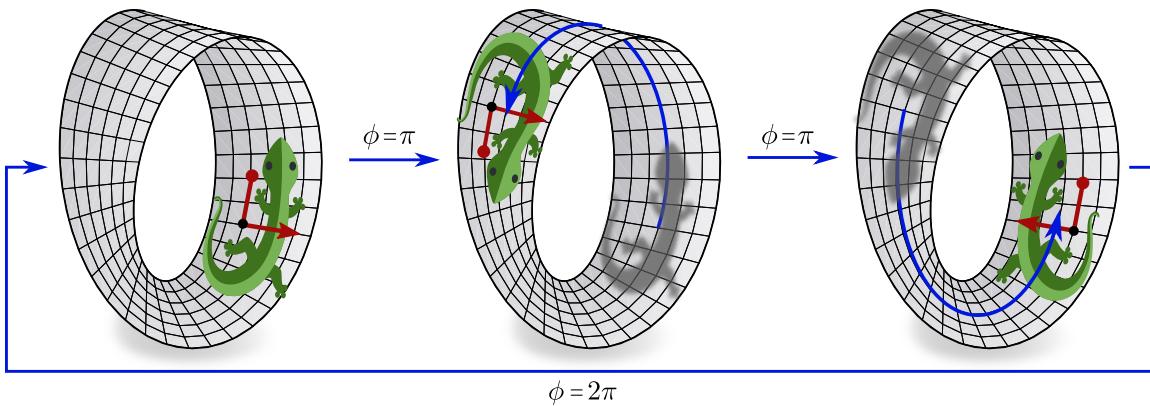
تنها گزاره غیربدیهی در این جدول این است که دو انعکاس یکدیگر را خنثی می‌کنند، یعنی  $e = s^2$ ، یا به طور معادل،  $s = e^{-1}$ . با توجه به غیرقابل کاهش بودن گروه ساختار  $\mathcal{R}$ ، در ادامه باید  $\mathcal{R}$ -ساختار متضاد  $\mathcal{RM}$  را در نظر بگیریم که از دو چارچوب با دست گردی مخالف در هر نقطه روی نوار مویوس تشکیل می‌شود.

برای کدگذاری میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات  $\mathcal{RM}$  هموار روی  $M$ ، نیاز است که  $\mathcal{R}$ -اطلاعی مشخص شود که از گیج‌های مرتبط با  $\mathcal{R}$  تشکیل شده و کل نوار را پوشاند. ما انتخاب می‌کنیم این کار را با ثابت کردن اطلاعی از چارت‌ها

$$x^X : U^X \rightarrow V^X \subset \mathbb{R}^4 \quad (99)$$

که نوار را می‌پوشانند انجام دهیم و سپس گیج‌ها را از آن القا کنیم. شکل ۲۱ چنین اطلاعی را تجسم می‌کند که از دو چارت  $x^A$  و  $x^B$  روی  $U^A$  (قمر) و  $U^B$  (سیز) تشکیل شده است که دو نیمه همپوشان نوار را به طور ایزومتریک به نواحی مستطیلی متضاد از  $\mathbb{R}^4$  نگاشت می‌کنند. همانطور که در پیوست آ.۳ توضیح داده شده، چارت‌ها گیج‌هایی را القا می‌کنند که توسط دیفرانسیل‌های چارت داده می‌شوند، یعنی

$$\psi_p^X := \hat{dx}_p^X : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad \text{و} \quad p \in U^X, \quad X = A, B. \quad (100)$$



شکل ۲۲: تجسم گروه ایزومتری‌های حافظ  $\mathcal{R}$ -ساختار  $RM$  نوار موبیوس که با  $(2)$   $SO(\mathcal{R})$  یکریخت است. این گروه شامل تمام چرخش‌ها در امتداد نوار است. به دلیل پیچ، چرخش  $2\pi$ ، یعنی یکبار در اطراف نوار، هنوز آن را به خودش بازنمی‌گرداند بلکه منجر به انعکاس می‌شود. پس از دوین دور، یعنی چرخش کل  $4\pi$  نوار به خودش بازمی‌گردد. تبدیل‌های گیج القا شده مقادیر در  $\mathcal{R}$  می‌گیرند.  
(مارمولک‌ها تحت مجوز Creative Commons Attribution 4.0 International License با مجوز Twitter اقتas شده‌اند.)

توابع گذار سپس با زاکوبین‌ها منطبق می‌شوند  $g^{BA} = \frac{\partial x^B}{\partial x^A}$ . به دلیل پیچ، نگاشت‌های گذار در یکی از دو ناحیه همپوشان همگی بدیهی هستند، یعنی  $e_i^{BA} = g_p^{BA}$ ، و در انتهای دیگر لزوماً منعکس هستند، یعنی  $s = g_p^{BA}$ . اطلس القا شده از گیج‌ها بنابراین واقعاً به عنوان  $\mathcal{R}$ -اطلس شناسایی می‌شود. از آنجا که از چارت‌های مختصاتی مشتق شده‌اند، میدان‌های چارچوب محلی هموار متناظر با گیج‌ها فقط پایه‌های مختصاتی معمول هستند، یعنی چارچوب‌های  $[e_i^X]_{i=1}^d$  در  $p \in U^X$  توسط  $[e_i^X]_{i=1}^d$  داده می‌شوند. از آنجا که چارت‌ها ایزومتریک هستند، میدان چارچوب القا شده به طور خودکار متعامد است. با این حال، دو ناحیه مستطیلی  $V^A$  و  $V^B$  در  $\mathbb{R}^2$  نباید نسبت به یکدیگر چرخانده شوند تا  $\mathcal{R}$ -ساختار و  $\mathcal{R}$ -متناظر  $RM$  را القا کنند.

باشد تأکید کیم که رویکرد القای گیج‌ها از طریق چارت‌های مختصاتی کاملاً ضروری نیست<sup>۳۱</sup> این فقط گزینه‌ای مناسب است زیرا نوار موبیوس مسطح به طور محلی با نواحی  $\mathbb{R}^2$  به شکل ایزومتریک شناسایی می‌شود. این بعداً به ما اجازه خواهد داد تا شبکه‌های نمونه گیری منظم از  $\mathbb{R}^2$ ، مانند شبکه پیکسل  $\mathbb{Z}^2$ ، را به شبکه‌های نمونه گیری منظم روی نوار منتقل کنیم. از آنجا که این برای منیفلد‌هایی که به طور محلی مسطح نیستند، مانند میش‌ها در گرافیک کامپیوتری، ممکن نیست، اکثر پایه‌سازی‌ها روی منیفلد‌های عمومی (یا میش‌ها) مختصات را مستقیماً به فضاهای مماس اختصاص می‌دهند؛ بخش ۱۲ را ببینید.

اتصال کانونی لوی-چیویتا روی نوار موبیوس مفهوم انتقال موازی بردارهای مماس را تعریف می‌کند. از آنجا که نوار به طور محلی با صفحه  $\mathbb{R}^2$  ایزومتریک است، این انتقال می‌تواند روی تکه‌های محلی به عنوان مسطح کردن این تکه‌ها در یک صفحه و حرکت بردارها به طور معمول روی  $\mathbb{R}^2$  درک شود. اگر هیچ تکه منفردی نتواند مسیر  $\gamma$  را پوشاند، پوشش بازی وجود خواهد داشت که انتقال کامل توسط دنباله‌ای از انتقال‌دهنده‌ها روی تکه‌های محلی توضیح داده شود. آسان است که دید انتقال نسبت به چارچوب‌های  $\mathcal{R}$ -ساختار انتخاب شده مقادیر  $g_\gamma^{A\bar{A}}$  در گروه انعکاس  $\mathcal{R}$  خواهد گرفت. این بدان معنی است که اتصال لوی-چیویتا با  $RM$  سازگار با  $\mathcal{R}$  است. بنابراین انتقال‌دهنده‌های خوش تعریف  $(g_\gamma^{A\bar{A}})_{\rho}$  بردارهای ویژگی مرتبط با  $\mathcal{R}$  را مستلزم می‌شود.

گروه  $Isom_{RM}$  ایزومتری‌هایی که  $\mathcal{R}$ -ساختار را حفظ می‌کنند شامل تمام چرخش‌هایی است که نوار را در امتداد خودش جایه‌جا می‌کنند. توجه کنید که یک چرخش یکبار در اطراف نوار، که آن را با زاویه  $2\pi$  نشان می‌دهیم، با همانی مطابقت نمی‌کند بلکه نوار را به شکل منعکس روی خودش نگاشت می‌کند. تنها چرخش  $4\pi$ ، یعنی دو دور کامل، نوار را به خودش بازمی‌گرداند.<sup>۳۲</sup> عمل گروه ایزومتری روی منیفلد و روی چارچوب‌های مرجع در شکل ۲۲ تجسم شده است. نسبت به مختصات، عمل ایزومتری تبدیل‌های گیج با مقادیر  $\mathcal{R}$  را القا خواهد کرد.

## ۲.۵ میدان‌های ویژگی مستقل از جهت گیری

اصل کوواریانس مستلزم آن است که میدان‌های ویژگی روی نوار موبیوس مستقل از مختصات  $RM$  باشند، یعنی آنها باید به طور معادل نسبت به چارچوب‌های هر دو دست گردی قابل بیان باشند. بنابراین آنها با انتخاب نمایش گروهی  $GL(c) \rightarrow \mathcal{R}$  : از گروه انعکاس مشخص می‌شوند که تبدیل بردارهای ویژگی عددی هنگام تعویض بین دو جهت گیری را مشخص می‌کند. در ادامه چند انتخاب ممکن از چنین انواع میدان‌هایی را در شکل ۲۲ تجسم شده است. نسبت به مختصات، عمل ایزومتری تبدیل‌های گیج با مقادیر  $\mathcal{R}$  را القا خواهد کرد.

<sup>۳۱</sup> بنابراین نوار موبیوس استوانه را به عنوان پوشش دو گانه در نظر می‌گیرد.

مورد بحث قرار خواهیم داد. خواننده ممکن است بخواهد بررسی کند که نمایش‌های پیشنهادی واقعًا همومورفیسم‌های گروهی هستند که  $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$  برآورده می‌کنند، همانطور که در بخش ۲.۳ و پاورقی ۱۳ خواسته شده است.

ابتداً ترین مثال، که برای هر گروه ساختار وجود دارد، نمایش بدیهی است

$$\begin{aligned} \rho_{\text{id}} : \mathcal{R} &\rightarrow \text{GL}(1), & e &\mapsto \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \\ s &\mapsto \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (101)$$

که ماتریس همانی  $1 \times 1$  را به هر دو عنصر گروه اختصاص می‌دهد. این میدان‌های اسکالار  $f_{\text{id}}$  را مدل می‌کند که از بردارهای ویژگی یک‌بعدی تشکیل شده‌اند که مختصات‌سازی‌های آنها  $f_{\text{id}}^A(p) \in \mathbb{R}^1$  تحت انعکاس‌های چارچوب نامغایر باقی می‌مانند. دومین نمایش یک‌بعدی، نمایش تغییر علامت است

$$\begin{aligned} \rho_{\text{id}} : \mathcal{R} &\rightarrow \text{GL}(1), & e &\mapsto \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \\ s &\mapsto \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (102)$$

این ماتریس همانی منفی  $1 \times 1$  را به انعکاس‌ها اختصاص می‌دهد و بنابراین میدان‌های شبه‌اسکالار را توصیف می‌کند، یعنی میدان‌های ویژگی یک‌بعدی  $f_{\text{id}}$  که ضرایب عددی آنها  $f_{\text{id}}^A(p) \in \mathbb{R}$  تحت انعکاس‌ها علامت خود را تغییر می‌دهند، یعنی  $f_{\text{id}}^A(p) = -f_{\text{id}}^A(s) \cdot f_{\text{id}}^A(p)$ . از آنجا که نمایش بدیهی و نمایش تغییر علامت یک‌بعدی هستند، هر دو نمایش‌های غیرقابل کاهش (irreps) گروه انعکاس هستند. در واقع، آنها تنها دو irrep گروه انعکاس هستند.<sup>۳۳</sup>

از آنجا که گروه متناهی است، نمایش منظم متناهی بعدی (دو‌بعدی) دارد

$$\begin{aligned} \rho_{\text{id}} : \mathcal{R} &\rightarrow \text{GL}(2), & e &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ s &\mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (103)$$

که عناصر گروه را توسط ماتریس‌های جایگشت نمایش می‌دهد. طبق تعریف، نمایش منظم جایگشت عناصر گروه در  $\mathcal{R}$  هنگام عمل بر خودشان را مدل می‌کند. این را با ستون‌های جدول ضرب در معادله (۴۸) مقایسه کنید: سیون میانی را می‌توان به عنوان ناشی از عمل  $(e)$   $\rho_{\text{id}}(e)$  بر سیون چپ در نظر گرفت، در حالی که عناصر گروه جایه‌جا شده در سیون راست متناظر با جایگشت توصیف شده توسط عمل  $(s)$   $\rho_{\text{id}}(s)$  بر سیون چپ هستند. میدان‌های ویژگی منظم از  $\mathcal{R}$  به‌طور عددی توسط بردارهای ویژگی دو‌بعدی  $f_{\text{id}}^A(p) \in \mathbb{R}^2$  نمایش داده می‌شوند که دو کانال آنها تحت انعکاس‌ها

$$\rho_{\text{id}}(s) \cdot f_{\text{id}}^A(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{\text{id}}^A(p) \\ f_{\text{id}}^A(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{\text{id}}^A(p) \\ -f_{\text{id}}^A(p) \end{bmatrix}$$

نمایش منظم قابل کاهش است، یعنی شامل دو زیرفضای نامغایر حقیقی است که در این مورد متناظر با نمایش بدیهی و نمایش تغییر علامت هستند. بنابراین می‌توان آن را به‌طور معادل به عنوان ساخته شده از مجموع مستقیم  $\rho_{\text{id}} \oplus \rho_{\text{id}}$  irrep و تغییر پایه  $Q$  در نظر گرفت:

$$\rho_{\text{id}}(g) = Q (\rho_{\text{id}} \oplus \rho_{\text{id}})(g) Q^\top \quad \text{که در آن } Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (104)$$

اعتبار این گزاره به‌آسانی با جایگذاری سمت راست برای هر دو عنصر گروه تأیید می‌شود:

$$Q (\rho_{\text{id}} \oplus \rho_{\text{id}})(e) Q^\top = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \rho_{\text{id}}(e) \quad (105)$$

$$Q (\rho_{\text{id}} \oplus \rho_{\text{id}})(s) Q^\top = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \rho_{\text{id}}(s) \quad (106)$$

به‌طور کلی تر، هر نمایش متناهی‌بعدی گروه‌های فشرده (از جمله متناهی) کاملاً قابل کاهش به مجموع مستقیم irrep‌ها است [۶۳]. این نشان می‌دهد که هر بردار ویژگی کوواریانت که تحت گروه ساختار فشرده تبدیل می‌شود، تا حد تغییر پایه می‌تواند از ویژگی‌های irrep ساخته شود. همانطور که در [۶۳] استدلال شده است، در این مورد واقعًا امکان کاهش هر عملیات شبکه خطی به عملیات معادل بین میدان‌های irrep وجود دارد که ساخت فضای کرنل‌های  $G$ -راهبری‌پذیر در معادله (۶۶) و بایاس‌های نامغایر در معادله (۶۳) را ساده می‌کند. با این حال، همانطور که در ادامه خواهیم دید، انتخاب خاص پایه از انواع میدان معادل تأثیر کاملاً قابل توجهی بر عملکرد مدل دارد. دلیل این امر آن است که عملیات شبکه غیرخطی به پایه انتخاب شده حساس هستند، یعنی به انتخاب خاصی از انواع میدان معادل.

<sup>۳۳</sup> گروه انعکاس با گروه دوری  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  از مرتبه دو یک‌بعدی است. به خوبی شناخته شده است که  $N$  از مرتبه  $N$  متناظر با ریشه‌های  $N$  وحدت هستند که برای  $N = 2$  فقط  $+1$  (بدیهی) و  $-1$  (تغییر علامت) هستند.

## ۳.۵ شبکه‌های کانولوشنی مستقل از جهت‌گیری

برای ساخت CNN‌های مستقل از جهت‌گیری روی نوار موبیوس باید لایه‌های هم‌متغیر گیج از بخش ۴ را برای گروه انعکاس  $\mathcal{R}$  نمونه‌سازی کنیم. به طور مشخص‌تر، هر یک از توابع الگوی مشترک هم‌متغیر که لایه‌های مستقل از جهت‌گیری را تعریف می‌کنند باید برای هر انتخاب از انواع میدان  $\rho$  نظر گرفته شده  $\mathcal{B}_\rho^{\mathcal{R}}$  و  $\rho_{\mathbb{R}^c}$  نمونه‌سازی شوند. بخش ۱.۳.۵ در ادامه با حل فضاهای الگوهای  $\mathcal{B}_\rho^{\mathcal{R}}$  با ایاس نام‌متغیر گیج از معادله (۹۴) شروع می‌کند. چند انتخاب مجاز از غیرخطی‌های هم‌متغیر گیج برای انواع میدان مختلف در بخش ۲.۳.۵ پیشنهاد می‌شوند. بخش ۳.۳.۵ سپس فضاهای کرنل‌های  $\mathcal{K}_{\rho_{\mathbb{R}^c}, \mathcal{R}}$  را برای هر جفت ممکن از  $\text{irrep}$ ‌های ورودی و خروجی استخراج خواهد کرد. در حالی که این بخش عمده‌تاً شامل اشتقاقات نظری خواهد بود، بخش ۴.۵ در ادامه جزئیات پیاده‌سازی عملی تری را پوشش خواهد داد.

### ۱.۳.۵ جمع با ایاس مستقل از جهت‌گیری

فضای الگوهای  $\mathcal{B}_\rho^{\mathcal{R}}$  که می‌توانند به میدانی از نوع  $\rho$  بدون دخالت در فرض استقلال از مختصات جمع شوند، در بخش ۲.۱.۴ نشان داده شد که توسط

$$\mathcal{B}_\rho^{\mathcal{R}} := \{b \in \mathbb{R}^c \mid b = \rho(g)b \quad \forall g \in \mathcal{R}\}. \quad (107)$$

داده می‌شود. برای مورد گروه انعکاس، فقط دو عنصر گروه و بنابراین دو قید وجود دارد. قید برای عنصر همانی  $g = e$  به طور بدینهی برآورده می‌شود زیرا  $\rho(e) = \text{id}_{\mathbb{R}^c}$  طبق تعریف همیشه همانی روی  $\mathbb{R}^c$  است. در ادامه بنابراین کافی است توجه را به قید  $b = \rho(s)b$  ناشی از انعکاس  $s = s$  محدود کنیم.

با مورد میدان‌های اسکالار، یعنی نمایش بدینهی، شروع می‌کنیم. قید انعکاس سپس  $b = \rho_{\mathbb{R}^c}(s)b = b$  می‌شود که همیشه برآورده می‌شود. نتیجه می‌شود که فضای الگوهای  $\mathcal{B}_\rho^{\mathcal{R}}$  برابر با  $\mathbb{R}$  است:

$$\mathcal{B}_{\rho_{\mathbb{R}^c}}^{\mathcal{R}} = \mathbb{R} \quad (108)$$

بدون قید باقی می‌ماند به طوری که  $\mathcal{B}_\rho^{\mathcal{R}}$  را دلخواه با مقدار حقیقی می‌توانند به میدان‌های اسکالار جمع شوند. برای نمایش تغییر علامت، قید انعکاس  $b = -b = \rho_{\mathbb{R}^c}(s)b$  تبدیل می‌شود و بنابراین فقط برای  $b$  با ایاس‌هایی که صفر هستند برآورده می‌شود:

$$\mathcal{B}_{\rho_{\mathbb{R}^c}}^{\mathcal{R}} = \{+\} \quad (109)$$

بنابراین جمع با ایاس به میدان‌های تغییر علامت با حفظ استقلال از مختصات غیرممکن است. سومین نوع میدان نمونه ما نمایش منظم دو بعدی است. قید انعکاسی متناظر روی  $\mathbb{R}^2$  به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = b = \rho_{\mathbb{R}^2}(s)b = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (110)$$

و به فضای حل یک بعدی منجر می‌شود

$$\mathcal{B}_{\rho_{\mathbb{R}^2}}^{\mathcal{R}} = \{b \in \mathbb{R}^2 \mid b_1 = b_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} \mid \beta \in \mathbb{R} \right\}. \quad (111)$$

استقلال از مختصات این قید به طور شهودی روشن است: از آنجا که نمایش منظم دو کانالی که میدان را تشکیل می‌دهند جایه‌جا می‌کند، جمع با ایاس تنها زمانی مستقل از مختصات است که مقادیر جمع شده به هر دو کانال برابر باشند، به طوری که ترتیب آنها اهمیت نداشته باشد.

همانطور که قبلاً در بخش ۲.۱.۴ ادعا شد، فضای حل  $\mathcal{B}_\rho^{\mathcal{R}}$  برای نمایش  $\rho$  دقیقاً با زیرنمایش‌های بدینهی آن مطابق است. این مطمئناً برای نمایش بدینهی صادق است که می‌توان هر بایاسی را به آن جمع کرد، و نمایش تغییر علامت که خود هیچ زیرنمایش بدینهی ندارد و بنابراین اصلًاً با ایاس نمی‌پذیرد. مثال جالب‌تر نمایش منظم است که در معادله ۱۰۴ نشان داده شد به مجموع مستقیم نمایش بدینهی و نمایش تغییر علامت تجزیه می‌شود. فضای حل یک بعدی در معادله ۱۱۱ دقیقاً متناظر با تک زیرنمایش بدینهی موجود در  $\rho_{\mathbb{R}^2}$  است. برای بررسی اعتبار این گزاره، توجه کنید که با ایاس‌های مجاز برای مجموع مستقیم  $\rho_{\mathbb{R}^2} \oplus \rho_{\mathbb{R}^2}$  از شکل  $(\beta, 0)^\top$  هستند، که در آن  $\beta \in \mathbb{R}$ . این نتیجه می‌تواند از طریق تغییر پایه  $Q$  به نمایش منظم برگردانده شود که واقعاً حل ما در معادله (۱۱۱) را بازیابی می‌کند:

$$Q \cdot \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} \quad (112)$$

### ۲.۳.۵ غیرخطی‌های مستقل از جهت‌گیری

برای ساخت شبکه عمیق، باید غیرخطی‌های هم‌متغیر برای هر یک از انواع میدان ارائه دهیم. همانطور که قبلاً در بخش ۳.۱.۴ بحث شد، میدان‌های اسکالار به دلیل نامتغیر بودن آنها تحت تبدیل‌های گیج می‌توانند تحت تأثیر هر غیرخطی  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  باشند، قرار بگیرند. انتخاب‌های معمول غیرخطی‌های نقطه‌ای ReLU یا ELU استند. برای میدان‌های تغییر علامت می‌توان قدر مطلق  $\|f\|$  بردارهای ویژگی را که میدان تغییر علامت را به میدان اسکالار نگاشت می‌کند، در نظر گرفت. در پاده‌سازی ما در ادامه به جای آن از غیرخطی‌هایی از شکل

$$(113) \quad \rho_{\text{ReLU}} : f \mapsto \text{ReLU}(\|f\| - b) \cdot \frac{f}{\|f\|},$$

استفاده می‌کنیم، که در آن  $b \in \mathbb{R}^+$  پارامتر بایاس قابل آموزش است. به آسانی دیده می‌شود که این انتخاب میدان‌های تغییر علامت را به میدان‌های تغییر علامت نگاشت می‌کند زیرا ضریب اول بر روی نرم نامتغیر گیج بردارهای ویژگی عمل می‌کند در حالی که ضریب دوم علامت بردار ویژگی را حفظ می‌کند. به عنوان نمایش جایگشت، نمایش منظم اجازه می‌دهد هر غیرخطی نقطه‌ای، مثل ReLU، بر روی کاتال‌های میدان منفرد بدون تغییر نوع میدان عمل کند:

$$(114) \quad \rho_{\text{ReLU}}(s) \circ \rho_{\text{ReLU}} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ReLU}(f_1) \\ \text{ReLU}(f_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ReLU}(f_2) \\ \text{ReLU}(f_1) \end{bmatrix} = \rho_{\text{ReLU}} \circ \rho_{\text{ReLU}}(s) \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

در حالی که نمایش منظم از نظر خطی معادل  $\rho_{\text{ReLU}} \oplus \rho_{\text{ReLU}}$  است، نمی‌توانیم غیرخطی‌های نقطه‌ای مستقل را روی دو کانال در پایه irrep اعمال کنیم. این ادعا را که غیرخطی‌ها شبکه‌ها را نسبت به انتخاب خاص پایه نمایش حساس می‌کند، تقویت می‌کند.

### ۲.۳.۶ کانولوشن‌های مستقل از جهت‌گیری

آخرین عملیاتی که اینجا نموده‌سازی می‌کنیم کانولوشن‌های هم‌متغیر انعکاس هستند. این از یک طرف مستلزم توضیح نگاشت نمایی و انتقال موازی روی نوار است، و از طرف دیگر حل فضاهای کرنل  $\mathcal{R}$ -راهبری‌پذیر. به دلیل هندسه مسطح  $M$  و استفاده از چارت‌های ایزومنتیک، مورد اول تقریباً بدیهی است: ویژگی‌ها مشابه روی  $\mathbb{R}^2$  منتقل می‌شوند، با این تفاوت که بردارهای ویژگی ممکن است انعکاسی توسط  $(s)^\rho$  تجزیه کنند. پاده‌سازی ما از این بخش در شکل ۲۳ تجسم شده است که در بخش ۱.۴.۵ در ادامه بیشتر توضیح داده می‌شود. بخش فعلی احصاراً بر حل تحلیلی فضاهای کرنل متمرکز است.

برای نوار موبیوس با  $\mathcal{R}$ -ساختار، فضای کرنل‌های  $\mathcal{R}$ -راهبری‌پذیر از معادله (۸۶) توسط

$$(115) \quad \mathcal{K}_{\rho_{\text{ReLU}}, \rho_{\text{ReLU}}}^{\mathcal{R}} := \left\{ K : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \mid K(gv) = \rho_{\text{ReLU}}(g) \cdot K(v) \cdot \rho_{\text{ReLU}}(g) \quad \forall v \in \mathbb{R}^r, g \in \mathcal{R} \right\},$$

داده می‌شود، که در آن ضریب دترمینان  $1 = |\det g|$  را حذف کردیم و تمام معکوس‌ها را برداشتم زیرا  $g \cdot g^{-1} = g$  همانند مورد بایاس‌های هم‌متغیر، قید ناشی از عنصر همانی به طور بدیهی برآورده می‌شود، به طوری که فقط قید انعکاسی باقی می‌ماند. کرنل‌های هم‌متغیر انعکاس بنا بر این با قید واحد

$$(116) \quad K(s.v) = \rho_{\text{ReLU}}(s) \cdot K(v) \cdot \rho_{\text{ReLU}}(s) \quad \forall v \in \mathbb{R}^r,$$

مشخص می‌شوند، که مستلزم آن است که کرنل منعکس شده  $K(s.v)$  برابر کرنل منعکس شده  $K(v)$  پس از عمل نمایش میدان ورودی و خروجی باشد. در ادامه این قید را برای تمام نه جفت از انواع میدان حل خواهیم کرد. کرنل‌های حاصل، که همگی به نحوی متقارن تحت انعکاس‌ها هستند، در جدول ۳ تجسم شده‌اند.

• **اسکالار  $\leftarrow$  اسکالار:** کرنل‌های  $K = [K_{11}] : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 1}$  که بین میدان‌های اسکالار نگاشت می‌کنند باید محدودیت زیر را برآورده کنند

$$(117) \quad [K_{11}](s.v) = [1] \cdot [K_{11}](v) \cdot [1] = [K_{11}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^r.$$

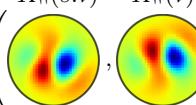
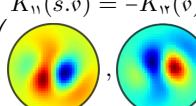
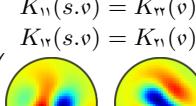
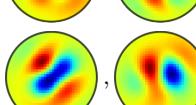
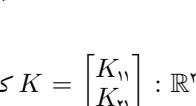
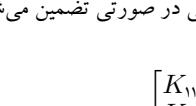
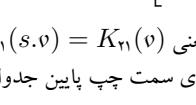
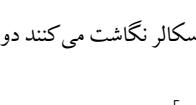
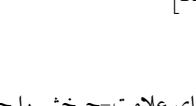
آنها لزوماً تحت بازتاب‌ها متقارن (ناوردا) هستند؛ ورودی سمت چپ بالا در جدول ۳ را بینید.

• **اسکالار  $\leftarrow$  علامت-چرخش:** کرنل‌های  $K = [K_{11}] : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 1}$  که میدان اسکالار را به میدان علامت-چرخش نگاشت می‌کنند باید محدودیت زیر را برآورده کنند

$$(118) \quad [K_{11}](s.v) = [-1] \cdot [K_{11}](v) \cdot [1] = -[K_{11}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^r.$$

این امر کرنل‌های ضدمتقارن را به همراه دارد همانطور که در ردیف وسط در ستون اول جدول ۳ مشاهده می‌شود.

جدول ۳: تجسم کرnel‌های انکاس-راهبری‌پذیر در  $\mathcal{K}_{\rho_{\text{رو}}^{\text{رو}}, \rho_{\text{خرو}}^{\text{خرو}}}$  برای تمام جفت‌های در نظر گرفته شده از انواع میدان ورودی و خروجی  $\rho_{\text{رو}}^{\text{رو}} = \rho_{\text{خرو}}^{\text{خرو}}$  به طور کلی، این کرnel‌ها باید قید کرnel-راهبری‌پذیری  $K(s.v) = \rho_{\text{خرو}}(s) \cdot \rho_{\text{رو}}(v)$  را بآورده کنند که در آن  $K : \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{خرو}} \times c_{\text{رو}}}$  هر ورودی جدول قید خاص برای نمایش‌های ورودی و خروجی متناظر را بیان می‌کند و یک کرnel-راهبری‌پذیر نمونه را تعسیم می‌کند. توجه کنید که قید، کرnel معکس شده  $K(s.v) = \rho_{\text{خرو}}(s) \cdot \rho_{\text{رو}}(v)$  را به تبدیل خطی کرnel معکس نشده  $K(v)$  توسط نمایش‌های ورودی و خروجی مقید می‌کند. بنابراین منجر به تقارن‌های انکاسی کرnel‌ها می‌شود.

منظمه	تغییر علامت	بدیهی	$\rho_{\text{رو}}$
$K_{\text{رو}}(s.v) = K_{\text{رو}}(v)$ 	$K_{\text{رو}}(s.v) = -K_{\text{رو}}(v)$ 	$K_{\text{رو}}(s.v) = K_{\text{رو}}(v)$ 	بدیهی
$K_{\text{رو}}(s.v) = -K_{\text{خرو}}(v)$ 	$K_{\text{رو}}(s.v) = K_{\text{خرو}}(v)$ 	$K_{\text{رو}}(s.v) = -K_{\text{خرو}}(v)$ 	تغییر علامت
$K_{\text{رو}}(s.v) = K_{\text{خرو}}(v)$ $K_{\text{خرو}}(s.v) = K_{\text{رو}}(v)$ 	$K_{\text{رو}}(s.v) = -K_{\text{خرو}}(v)$ 	$K_{\text{رو}}(s.v) = K_{\text{خرو}}(v)$ 	منظمه

• **اسکالو  $\leftarrow$  منظم:** به منظور نگاشت از میدان اسکالار به میدان ویژگی منظم، باید کرnel‌هایی از شکل  $K = \begin{bmatrix} K_{\text{رو}} \\ K_{\text{خرو}} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 1}$  که از یک کاتال ورودی به دو کاتال خروجی نگاشت می‌کند، اعمال کرد. جایگشت مورد نیاز کاتال‌های خروجی در صورتی تضمین می‌شود که کرnel محدودیت زیر را بآورده کند

$$\begin{bmatrix} K_{\text{رو}} \\ K_{\text{خرو}} \end{bmatrix}(s.v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{\text{رو}} \\ K_{\text{خرو}} \end{bmatrix}(v) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\text{رو}} \\ K_{\text{خرو}} \end{bmatrix}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^c. \quad (119)$$

این محدودیت مستلزم آن است که دو کاتال حاوی کرnel‌هایی باشند که نسخه‌هایی بازتابی یکدیگر هستند، یعنی  $(v) = K_{\text{رو}}(s.v) = K_{\text{خرو}}(v)$  برای همه  $v \in \mathbb{R}^c$  (این قبل خط دوم محدودیت در معادله (119) را پوشش می‌دهد). این حالت در ورودی سمت چپ پایین جدول ۳ مشاهده می‌شود.

• **علامت-چرخش  $\leftarrow$  اسکالو:** کرnel‌های  $K = \begin{bmatrix} K_{\text{رو}} \\ K_{\text{خرو}} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 1}$  که از علامت-چرخش به میدان‌های اسکالار نگاشت می‌کنند دوباره ضدمتارن هستند زیرا باید همان محدودیت را بآورده کنند

$$[K_{\text{رو}}](s.v) = [1] \cdot [K_{\text{رو}}](v) \cdot [-1] = -[K_{\text{رو}}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^c \quad (120)$$

مانند کرnel‌هایی که در جهت مخالف نگاشت می‌کنند.

• **علامت-چرخش  $\leftarrow$  علامت-چرخش:** کرnel‌های  $K = \begin{bmatrix} K_{\text{رو}} \\ K_{\text{خرو}} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 1}$  که رفتار تبدیل میدان‌های علامت-چرخش را حفظ می‌کنند متقارن هستند زیرا دو وارونگی علامت در محدودیت

$$[K_{\text{رو}}](s.v) = [-1] \cdot [K_{\text{رو}}](v) \cdot [-1] = [K_{\text{رو}}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^c \quad (121)$$

حذف می‌شوند.

• **علامت-چرخش  $\leftarrow$  منظم:** در حالت کرnel‌های  $K = \begin{bmatrix} K_{\text{رو}} \\ K_{\text{خرو}} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 1}$  که از علامت-چرخش به میدان‌های ویژگی منظم نگاشت می‌کند، محدودیت زیر بذست می‌آید

$$\begin{bmatrix} K_{\text{رو}} \\ K_{\text{خرو}} \end{bmatrix}(s.v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{\text{رو}} \\ K_{\text{خرو}} \end{bmatrix}(v) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -[K_{\text{رو}}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^c. \quad (122)$$

دو خط با یکدیگر مطابقت دارند، به طوری که می‌توان آنها را با محدودیت کرnel بگانه  $K_{\text{رو}}(s.v) = -K_{\text{رو}}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^c$  خلاصه کرد. این محدودیت مستلزم آن است که دو کاتال کرnel حاوی نسخه‌های بازتابی، منفی شده یکدیگر باشند؛ تجسم آن در وسط ردیف پایین جدول ۳ را ببینید.

▪ **منظلم ← اسکالو:** کرنل های ویژگی منظم را به میدان های اسکالار نگاشت می کنند دارای دو کanal ورودی و یک کanal خروجی هستند و بنابراین از شکل  $K = [K_{11}, K_{12}] : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  هستند. محدودیت

$$[K_{11}, K_{12}](s.v) = [1] \cdot [K_{11}, K_{12}](v) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ v \end{bmatrix} = [K_{12}, K_{11}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^1, \quad (123)$$

که می توان آن را به الزام  $K_{11}(s.v) = K_{12}(v) \in \mathbb{R}^1$  کاوش داد، دوباره مستلزم آن است که دو ورودی کرنل حاوی نسخه های بازتابی یکدیگر باشند.

▪ **منظلم ← علامت-چرخش:** نگاشته های از میدان های ویژگی منظم به میدان های علامت-چرخش از کرنل های :  $K = [K_{11}, K_{12}] : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$  که محدودیت زیر را برآورده می کنند استفاده می کنند

$$[K_{11}, K_{12}](s.v) = [-1] \cdot [K_{11}, K_{12}](v) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ v \end{bmatrix} = -[K_{12}, K_{11}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^1, \quad (124)$$

یا معادل آن،  $K_{11}(s.v) = -K_{12}(v) \in \mathbb{R}^1$ . احتمالاً همانطور که قبل انتظار می رفت، آنها از کرنل هایی تشکیل شده اند که دو کanal آنها حاوی نسخه های بازتابی، منفی شده یکدیگر هستند.

▪ **منظلم ← منظم:** در نهایت، باید کرنل های  $K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  که میدان های منظم را به میدان های منظم نگاشت می کنند و بنابراین دارای ماتریس های  $2 \times 2$  به عنوان کوادومین هستند، در نظر بگیرید. محدودیت آنها، که از ضرب چپ و راست با نمایش منظم حاصل می شود، به شکل زیر است

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}(s.v) = \begin{bmatrix} 1 & v \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}(v) \cdot \begin{bmatrix} 1 & v \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{21} \\ K_{12} & K_{11} \end{bmatrix}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^1. \quad (125)$$

این معادل دو محدودیت مستقل است

$$K_{11}(s.v) = K_{22}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^1 \quad (126)$$

و

$$K_{12}(s.v) = K_{21}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^1, \quad (127)$$

که چهار ورودی کرنل را به هم متصل می کند به طوری که دو جفت کرنل منعکس شده متقابل وجود دارد. این حالت در ورودی سمت راست پایین جدول ۳ مشاهده می شود.

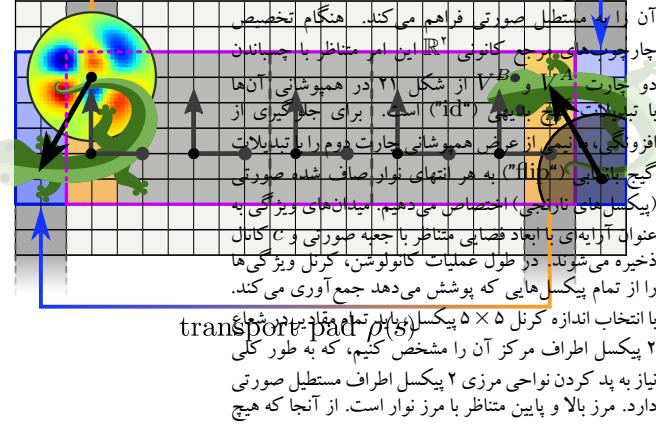
در حالی که نتایج استخراج شده به ما می گویند چگونه بین میدان های ویژگی منفرد نگاشت کنیم، شبکه های عصبی معمولاً فضاهای ویژگی را فرض می کنند که از چندین میدان ویژگی احتمالاً تفاوت تشکیل می شوند. کرنل هایی که بین این پشتنه های میدان های ویژگی نگاشت می کنند را می توان به عنوان ساخته شده از بلوک هایی در نظر گرفت که بین میدان های منفرد نگاشت می کنند. به عنوان مثال، موردی را در نظر بگیرید که هر دو فضای ویژگی ورودی و خروجی شامل یکی از نمایش های موربد بحث هستند، یعنی  $\rho_{0000} = \rho_{00000} \oplus \rho_{00000} \oplus \rho_{00000} \oplus \rho_{00000}$  تعداد کanal های ورودی و خروجی سیس  $= 4 = c_{000} = c_{0000} = 1+1+2$  است، به طوری که کرنل کامل از شکل  $K : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  است. از آنجا که نمایش های ورودی و خروجی به عنوان مجموع های مستقیم تعریف می شوند، آنها قطعی بلوکی هستند. قید کامل بنابراین به نه قید مستقل بین تمام جفت های میدان های منفرد ورودی و خروجی تلقی کیک می شود که در این مورد دقیقاً متناظر با نه حل ارائه شده در بالا هستند. ورودی های  $4 \times 4$  کرنل کامل بنابراین ملزم خواهند بود همان تقارن هایی را داشته باشند که کرنل های  $4 \times 4$  که در جدول ۳ به طور کلی تجسم شده اند.

برای کامل بودن، به طور مختصر تبدیل های میدان کرنل عمومی و تبدیل های میدان کرنل هم تغیر ایزو متري روی نوار موبیوس را تشریح می کنیم. در مورد عمومی میدان کرنل هموار کاملاً بدون قید باقی می ماند، یعنی هیچ وزنی نیاز به اشتراک گذاری ندارد و کرنل های منفرد ملزم به داشتن هیچ تقارن انعکاسی نیستند. برای اینکه تبدیل میدان کرنل نسبت به ایزو متري ها هم تغیر باشد، میدان کرنل اعمال شده باید تحت عمل آنها ناتغیر باشد. این مستلزم اشتراک گذاری وزن ها روی مدار های ایزو متري است که در دو نوع مختلف می آیند. نوع اول متناظر با آن مدار منفرد است که دقیقاً در وسط نوار قرار دارد. نقاط روی این مدار پس از یک دور کامل در اطراف نوار به خودشان بر می گردند، در حالی که خود نوار روی این مدار مرکزی منعکس می شود. میدان کرنل Isom<sub>RM</sub>-نماتغیر کرنلی را روی این مدار مرکزی اشتراک خواهد گذاشت، با این حال، این کرنل ملزم است تقارن های انعکاسی ماند کرنل های  $\mathcal{R}$ -راهبری پذیر در جدول ۳ داشته باشد. این به این دلیل است که کرنل های پس از یک دور به شکل منعکس روی خودشان نگاشت می شوند در حالی که میدان کرنل باید نامتغیر ایزو متري باشد.<sup>۳۴</sup> هر مدار دیگر از نوع مدار دوم است. نقطه ای را در فاصله داده شده از مدار مرکزی در نظر

<sup>۳۴</sup> بخش ۳۸ چنین موقعیت هایی را در محیط کلی تری به عنوان قیدهای زیر گروه پایدار ساز گروه ایزو متري توصیف می کند. در مورد غلی، زیر گروه چرخش های یکبار در اطراف نوار نقاط روی مدار مرکزی را پایدار می کند. این با گروه انعکاس یکریخت است و بنابراین منجر به تقارن های انعکاسی در کرنل های می شود.

شکل ۲۳: نمایش عددی میدل(s) و پرینت روتی موبیوس  
و انتقال لوی-چپویتا بردارهای ویژگی در طول کانولوشن.

هنده سطح نوار امکان برش و صاف کردن ایزومتریک آن است.



(مارمولک ها تحت مجوز <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/> انتشار می شوند با مجوز.)

بگیرید. عمل ایزومتری این نقطه را در این فاصله از مرکز در امتداد نوار حرکت خواهد داد. با این حال، پس از یک دور به نقطه اولیه برنمی گردد بلکه به آن نقطه ای که در همان فاصله در طرف مقابل مدار مرکزی قرار دارد. تنها پس از دو مین دور در اطراف نوار مدار بسته خواهد شد. نامتغیری ایزومتری مطلوب میدان کرنل بنابراین مستلزم اشتراک گذاری کرنل ها روی تمام نقاط با همان فاصله در هر دو جهت مرکز نوار (اما اجازه کرنل های مختلف در فاصله های مختلف را می دهد). برخلاف کرنل مدار مرکزی، این کرنل ها ملزم به هم متغیر انعکاس خودشان نیستند. این تحلیل نشان می دهد که هر تبدیل میدان کرنل هم متغیر ایزومتری مستلزم کرنل های  $\mathcal{R}$ -راهبری پذیر است، اگرچه به طور دقیق فقط روی مدار مرکزی. بر عکس، میدان کرنل کانولوشنی که متناظر با اعمال همان کرنل های  $\mathcal{R}$ -راهبری پذیر روی کل منفذ است، مطمئناً تحت ایزومتری ها نامتغیر است. کانولوشن مستقل از جهت گیری روی نوار موبیوس بنابراین  $Isom_{RM}$ -هم متغیر است که در ادامه به طور تجربی تأیید می شود.

## ۴.۵ پیاده سازی عددی و ارزیابی کانولوشن های موبیوس

با آمادگی از اشتیاقات تحلیلی در بخش های قبلی، اکنون آماده ایم تا پیاده سازی عددی CNN های مستقل از جهت گیری روی نوار موبیوس را مورد بحث قرار دهیم. پس از انجام این کار در بخش ۱.۴.۵، مدل ها را برای انتخاب های مختلف انواع میدان ارزیابی کرده و آن ها را با پیاده سازی ساده وابسته به جهت گیری در بخش ۲.۴.۵ مقایسه می کنیم.

پیاده سازی به صورت عمومی در آدرس <https://github.com/mauriceweiler/MobiusCNNs> در دسترس است.

### ۱.۴.۵ پیاده سازی عددی

**فضاهای ویژگی:** اولین سوالی که هنگام پیاده سازی کانولوشن های روی نوار موبیوس باید پاسخ داد این است که میدان های ویژگی چگونه باید به صورت عددی نمایش داده شوند. از آنجا که نوار موبیوس یک منیفلد مسطح است، می توانیم به راحتی (زیرمجموعه هایی از) شبکه نمونه برداری منظم را از  $\mathbb{R}^2$  به نوار انتقال دهیم. این شهود با کشش های برگشتی  $\rightarrow V^X \circ (x^X)^{-1} : V^X \rightarrow \mathbb{R}^c$  از مختصات سازی های میدان ویژگی محلی  $\mathbb{Z}^2$  را از  $f^X : U^X \rightarrow V^X$  از طریق چارت های (معکوس)  $\rightarrow U^X \subset \mathbb{R}^c$  به دامنه جدید  $V^X \cap \mathbb{Z}^2$  رسمی سازی می شود، که در آن  $X = A, B$  گستره سازی عددی سپس به عنوان محدودیت  $|f^X \circ (x^X)^{-1}|_{V^X \cap \mathbb{Z}^2}$  از کشش برگشتی به شبکه نمونه برداری تعریف می شود، که در شکل ۲۱ به عنوان همپوشانی نشان داده شده است.

توجه داشته باشید که این نمایش به دلیل همپوشانی  $U^A \cap U^B \neq \emptyset$  چارت ها افزو نه است. برای حذف این افزونگی باید آن نواحی را که دو بار نمایش داده می شوند شناسایی کرد و تنها یک کمی مشترک از بردارهای ویژگی متناظر را ذخیره کرد. یک طرح ممکن برای انجام این کار، که ما

در پیاده‌سازی عددی خود استفاده می‌کنیم، ذخیره میدان‌های ویژگی در آرایه چندبعدی متناظر با مستطیل صورتی در شکل ۲۳ است. می‌توان آن را به عنوان تعریف شده توسط "چسباندن" آن نواحی در  $V^A$  و  $V^B$  که توسط تبدیلات گیج بدینه  $g^{BA}$  شناسایی می‌شوند در نظر گرفت ("id" در شکل ۲۱ و چهار پیکسل مرکزی در شکل ۲۳). آنچه باقی می‌ماند افزونگی بردارهای ویژگی در ناحیه همپوشانی دوم با تبدیلات گیج بازتابی است ("flip" در شکل ۲۱). این افزونگی با تخصیص آن بردارهای ویژگی به صورت مساوی به هر انتهای نمایش میدان محلی "چسبانده شده" حل می‌شود (پیکسل‌های نارنجی در شکل ۲۳). در مجموع، پیکسل‌های جعبه صورتی فضای ویژگی را به صورت غیرافزونه با تخصیص یک بردار ویژگی  $c$ -بعدی به هر یک از آنها نمایش می‌دهند. حلقه دو پیکسلی اطراف مستطیل صورتی بخشی از فضای ویژگی نیست بلکه نایه پد کردن را تجسم می‌کند که تنها در طول پاس رو به جلوی عملیات کانولوشن همانطور که در زیر بحث شده است استفاده خواهد شد.

ابعاد (شکل) واقعی آرایه‌ای که فضای ویژگی را کد گذاری می‌کند به چند گانگی های میدان انتخاب شده بستگی دارد. فرض کنید  $m_{\text{m}} = m_{\text{m}} \times m_{\text{m}}$  آن چند گانگی های صحیح میدان‌های ویژگی باشند که فضای ویژگی را تشکیل می‌دهند. از آنجا که میدان‌های اسکالر و تغییر علامت یک بعدی هستند و میدان‌های ویژگی منظمه دو بعدی هستند، تعداد کل کانال‌ها (یا بعد بردارهای ویژگی ایجاد شده) توسط  $c = m_{\text{m}} + m_{\text{m}} + 2m_{\text{m}}$  داده می‌شود. فرض کنید همچنین کهوضوح فضای مستطیل صورتی  $X \times Y \times Z$  پیکسل باشد و اندازه دسته  $N$  نumeone فرض کنید. آرایه‌ای که فضای ویژگی را کد گذاری می‌کند سپس از شکل  $(N, c, X, Y)$  است، همانطور که معمولاً در پردازش تصویر استفاده می‌شود. توجه داشته باشید که این نمایش عددی فضای ویژگی هم نسبت به هندسه پیچیده نوار و هم نوع واقعی میدان‌های ویژگی موجود (به جز بعد آنها) بی‌اطلاع است. بنابراین اطلاعات هندسی واقعی منحصرآ توسط لایه‌های شبکه که میدان‌ها را پردازش می‌کنند حمل می‌شود.

**جمع بایاس:** برای پیاده‌سازی جمع بایاس مستقل از جهت گیری، نتایج بخش ۱.۳.۵ را به خاطر بیاورید که فضاهای برداری بایاس‌های الگوی هم‌متغیر بازتاب برای میدان‌های اسکالر و میدان‌های منظم یک بعدی و برای میدان‌های تغییر علامت صفر بعدی هستند. در مقداردهی اولیه مازول بایاس بنابراین یک بردار پارامتر  $m_{\text{m}} - \text{بعدی}$  و یک بردار پارامتر  $m_{\text{m}} - \text{بعدی}$  اختصاص می‌دهیم. در طول پاس رو به جلو این پارامترها را به یک بردار بایاس  $c$ -بعدی  $b_{\text{m}}$  گسترش می‌دهیم که باید به اینباشت کامل میدان‌های ویژگی اضافه شود. این کار با اختصاص آرایه  $c$ -بعدی از صفرها و پر کردن  $m_{\text{m}}$  عنصر اول با پارامترهای بایاس میدان اسکالر و  $2m_{\text{m}}$  عنصر آخر با پارامترهای بایاس میدان منظم  $m_{\text{m}}$ ، هر کدام دو بار تکرار شده برای برآوردن ساختار فضای حل در معادله (۱۱۱)، انجام می‌شود. پس از این گسترش بردار بایاس کامل

$$b_{\text{m}} = [\underbrace{\beta_{\text{m},1}, \dots, \beta_{\text{m},m_{\text{m}}}}_{m_{\text{m}}}, \underbrace{\dots, \dots, \beta_{\text{m},1}, \beta_{\text{m},1}, \dots, \beta_{\text{m},m_{\text{m}}}, \beta_{\text{m},m_{\text{m}}}}_{2m_{\text{m}}}]^\top \in \mathbb{R}^c \quad (128)$$

طبق معمول به آرایه میدان ویژگی اضافه می‌شود. استقلال آن از جهت گیری (ناوردایی گیج) اضافه کردن به آرایه در شکل ۲۳ را توجیه می‌کند، علی‌رغم اینکه از بردارهای ویژگی در دو گیج مختلف چسبانده شده است.

**غیرخطی‌ها:** غیرخطی‌ها را می‌توان مطابق تعریف در بخش ۲.۳.۵ به صورت مستقیم پیاده‌سازی کرد. این کار را با تقسیم اینباشت کامل میدان‌های ویژگی به سه اینباشت از میدان‌های همان نوع، اعمال غیرخطی‌های هم‌متغیر بازتاب مربوطه به آنها، و در نهایت الحاق نتایج انجام می‌دهیم. به دلیل تعریف غیرخطی برای میدان‌های تغییر علامت در معادله (۱۱۳) با بایاس قابل یادگیری، مازول گیری، مازول غیرخطی دارای  $m_{\text{m}}$  پارامتر قابل آموخت است.

**کانولوشن‌های  $\mathcal{K}$ :** از آنجا که عملیات کانولوشن به صورت نقطه‌ای عمل نمی‌کند بلکه تمام ویژگی‌های پوشش داده شده توسعه کرنل را اینباشت می‌کند، پیاده‌سازی آنها کمتر بدینه است. پاس رو به جلو به سه گام تقسیم می‌شود، یعنی ۱) گسترش کرنل‌های متقاضان بازتاب از آرایه‌های پارامتر، ۲) انتقال لوى-چیوینتا بردارهای ویژگی و ۳) کانولوشن  $GM$  واقعی.

به خاطر بیاورید که فضای  $\mathcal{K}_{\rho, p, m}$ -هدايت‌پذیر زیرفضای خطی فضای کرنل‌های بدون قید  $\mathcal{K}$  در معادله (۸۵) است. برای پارامتری کردن کرنل‌های  $\mathcal{K}$ -هدايت‌پذیر لازم است پایه‌ای از  $\mathcal{K}_{\rho, p, m}$ -انتخاب کنیم که کرنل‌ها بر حسب آن گسترش یابند. پارامترهای قابل آموخت عملیات کانولوشن ضرایب گسترش در این پایه هستند. پیاده‌سازی ما تمام کرنل‌هایی را که متناظر با همان جفت انواع میدان رودی و خروجی هستند به صورت مشترک پارامتری می‌کند زیرا آنها تقارن‌های یکسان و بنابراین پایه یکسان دارند. با در نظر گیری نه جفت انواع میدان نشان داده شده در جدول ۳، این بدان معناست که مازول کانولوشن نه آرایه پارامتر متناظر نگه می‌دارد. کرنل‌های واقعی سپس از این پارامترها در طول هر پاس رو به جلو گسترش می‌یابند. برای مثال، زیرمجموعه کانال‌های کرنل را در نظر بگیرید که از  $m_{\text{m}}$  میدان اسکالر به  $m_{\text{m}}$  میدان تغییر علامت نگاشت می‌کند و اندازه کرنل  $s \times s$  پیکسل فرض کنید. آرایه پارامتر متناظر سپس از شکل  $(s, s, m_{\text{m}}, m_{\text{m}})$  است و  $m_{\text{m}}$  کانال کرنل منفرد را با پایه‌ای از  $s \times s$  کرنل نامتقارن هر کدام نمایش می‌دهد. گسترش به عنوان پر کردن  $s \times s$  پیکسل بالا با پارامترهای تغییر نیافرته در حالی که  $s \times s$  پیکسل پایین با پارامترهای منفی شده و بازتاب یافته پر می‌شوند، پیاده‌سازی می‌شود. به عنوان مثال دوم، کانال‌های کرنل را در نظر بگیرید که از  $m_{\text{m}}$  میدان منظم به  $m_{\text{m}}$  میدان اسکالر نگاشت می‌کند. آرایه پارامتر برای این حالت از شکل  $(s, s, m_{\text{m}}, m_{\text{m}})$  است و یکی از دو کانال کرنل به ازای هر میدان رودی و خروجی را ذخیره می‌کند. کانال‌های دوم متناظر در طول پاس رو به جلو بازتاب کانال‌های کرنل اول همانطور که در جدول ۳ نشان داده شده گسترش می‌یابند. پس از گسترش کرنل کامل به این شکل از تمام زیربلوک‌های آن متناظر با ترکیب‌های مختلف انواع میدان، شکل معمول کرنل‌ها در یادگیری عمیق را دارد اما تضمین می‌شود که تقارن‌های مشتق شده در بخش ۳.۳.۵ را رعایت کند. توجه داشته باشید

که تقارن‌های کرنل کانولوشن‌های  $GM$  را نسبت به  $CNN$  غیرهم‌متغیر متناظر با همان تعداد کاتالال ۶ از نظر پارامتر کارآمدتر می‌کند. به طور خاص برای کرنل  $R$ -های پذیر تعداد پارامترها با ضریب دو کاهش می‌باشد.<sup>۲۵</sup>

پس از گسترش کرنل‌ها، آنها با میدان‌های ویژگی کانولو می‌شوند. این امر نیاز به پیاده‌سازی نگاشت نمایی و انتقال دهنده‌های لوی-چیویتا  $R$ -ساز کار روی نوار موبیوس دارد<sup>۲۶</sup> یا بهتر بگوییم روی نمایش عددی آن توسط آرایه صورتی از شکل ۲۳. هندسه مسطح نوار موبیوس پیاده‌سازی را تقریباً بدیهی می‌کند، با این حال، مرزها و اتصال دایره‌ای آن نیاز به دقت خاصی دارند. بنابراین باید بین سه حالت کیفی متفاوت تمایز قائل شویم که متناظر با موارد زیر هستند<sup>۱)</sup> نگاشت‌های نمایی که کاملاً در آرایه صورتی قرار دارند،<sup>۲)</sup> نگاشت‌های نمایی که از مرز عبور می‌کنند و بنابراین خوش تعریف نیستند و<sup>۳)</sup> نگاشت‌هایی که ژئودزیک‌هاشان از یک انتهای آرایه خارج شده و (پیچیده) از انتهای دیگر وارد می‌شوند. حالت اول بدیهی است و متناظر با نگاشت نمایی روی خود<sup>۲۷</sup> است. از آنجا که نوار مسطح است و چارچوب‌های مرجع درون آرایه همه موزایی هستند، انتقال در امتداد این ژئودزیک‌ها بدیهی است. در ناحیه داخلی آرایه، جایی که کرنل‌های (با پشتیانی متناظر) از آن پیرون نمی‌زنند، بنابراین می‌توان کانولوشن را طبق معمول روی<sup>۲۸</sup> پیاده‌سازی کرد. حالت دوم مربوط به ردیف‌های بالا و پایین آرایه است که در آن نگاشت‌های نمایی ممکن است از مرز نوار (یا آرایه) عبور کنند. این شیوه مسائل مرزی برای تصاویر مسطح مستطیلی معمول است، که معمولاً با پد کردن صفر حل می‌شود. با اتخاذ این راه حل، آرایه را با ردیف‌هایی از صفر پد می‌کنیم که به عنوان دو نوار خاکستری روشن بالا و پایین مستطیل صورتی در شکل ۲۳ نشان داده شده‌اند. با اندازه کرنل  $8 \times 8$  پیکسل با<sup>۲۹</sup> فرد، باید  $1/2 - 8$  ردیف صفر در هر دو طرف پد کرد. حالت سوم در انتهای چپ و راست آرایه رخ می‌دهد، جایی که نوار برای صاف کردن بریده شده است. شکل ۲۳ ژئودزیک نمونه‌ای را تجسم می‌کند که از خط برش عبور می‌کند و بنابراین در جهت بازتاب یافته از طرف مقابل وارد آرایه می‌شود. به دلیل بازتاب، انتقال دهنده‌های موزایی در سراسر برش توسعه<sup>(۴)</sup> دارد. برای اینکه بتوانیم روتین کانولوشن متعدد اجرا کنیم، انتقال در سراسر برش را با کمی کردن ناحیه<sup>۲/۱ - ۸</sup> پیکسل از هر دو انتهای آرایه (نارنجی)، بازتاب آنها به صورت وارونه برای مدل‌سازی پیچ، عمل روی آنها با<sup>(۵)</sup> برای در نظر گیری گیج‌های بازتاب یافته و در نهایت الحاق آنها به طرف مقابل آرایه (آبی) پیاده‌سازی می‌کنیم. با پد کردن آرایه به این شکل، تمام ژئودزیک‌ها و انتقال دهنده‌های مربوطه به همتایان بدیهی خود روی<sup>۲۸</sup> کاهش می‌یابند.

به طور کلی، پیاده‌سازی ما از عملیات کانولوشن سه گام فوق‌الذکر را اعمال می‌کند. ابتدا کرنل‌های  $R$ -های پذیر را گسترش می‌دهد و آرایه میدان ویژگی صورتی را با صفرها و مقادیر میدان که در سراسر برش منتقل می‌شوند پد می‌کنند. کرنل گسترش یافته سپس با میدان‌های ویژگی پد شده کانولو می‌شود و روتین کانولوشن متعارف برای تصاویر مسطح فراخوانی می‌شود. ماتنظیمات مرزی "معتبر" برای کانولوشن استفاده می‌کنیم، که به این معناست که عملیات به طور ضمنی صفرهای پیشتری پد نمی‌کند و تنها بردارهای ویژگی را برای آن نطاپی محاسبه می‌کند که کرنل از مرزهای آرایه دستی پد شده ما فراتر نمی‌رود. میدان ویژگی حاصل بنابراین دوباره همان ابعاد فضایی مستطیل صورتی اصلی را خواهد داشت.

**Pooling**: CNN‌های متعارف معمولاً عملیات **pooling** فضایی را اعمال می‌کنند که بردارهای ویژگی از یک پنجره pooling داده شده، به عنوان مثال ناحیه‌ای از پیکسل های  $2 \times 2$ ، را در یک بردار ویژگی جدید خلاصه می‌کنند. چنین عملیاتی وضوح فضایی را کاهش می‌دهد که هزینه محاسباتی را کاهش داده و میدان دید مؤثر کرنل‌های کانولوشن را افزایش می‌دهد. روش رایج pooling به اصطلاح "max-pooling" است که پیشترین مقدار هر کanal ویژگی فردی در ناحیه pooling را انتخاب می‌کند. این عملیات را می‌توان مستقیماً روی میدان‌های اسکالار اعمال کرد زیرا آنها ناوردای پیمانه هستند. همچنین برای میدان‌های ویژگی منتظم قابل قبول است زیرا گرفتن پیشنهاین با جایجایی کانال‌ها جایجا می‌شود. با این حال، از آنجا که میدان‌های sign-flip علامت خود را تحت تبدیلات پیمانه تغییر می‌دهند، max-pooling نسبت به قانون تبدیل آنها هموردان نیست. جایگزین همودار، average pooling است که میانگین ویژگی ها در ناحیه pooling را می‌گیرد و بنابراین با تغییر علامت جایجا می‌شود. گزینه دیگر، که در آزمایش‌های زیر استفاده می‌کنیم زیرا کمی بهتر عمل می‌کند، این است که میدان‌های sign-flip را بر اساس قدر مطلق آنها pool کنیم که مجدداً تحت وارونگی علامت ناوردا است. سپس علامت مقادیر میدان pool شده را با پیشترین نرم ضرب می‌کنیم تا قانون تبدیل اصلی حفظ شود.

در حالی که عملیات pooling تعریف شده به این شکل نسبت به تبدیلات پیمانه همودار است، اصل طراحی آنها اساساً با هموداری ایزومنتری مطلوب تداخل دارد. این بدان دلیل است که آنها وضوح فضایی گستته‌سازی عالدی را کاهش می‌دهند، به طوری که خروجی تهنا نسبت به زیرگروه تقارن‌های شبکه با وضوح پایین تر دقیقاً همودار است. این اثر برای CNN‌های متعارف به خوبی شناخته شده است<sup>[۶]</sup>. اگرچه تلاش‌هایی برای اصلاح وضعیت انجام شده<sup>[۷]</sup>، از دست رفتن جزئی هموداری انتقالی (یا ایزومنتری) به یک زیرگروه معمولاً همانطور که هست پذیرفته می‌شود.

**تست‌های واحد:** تمام عملیات مستقل از مختصات پیشنهادی برای تضمین هموداری پیمانه و هموداری ایزومنتری آنها تست واحد می‌شوند. تست‌های هموداری پیمانه برای تمام عملیات پیشنهادی و همچنین برای کل شبکه‌های توصیف شده در بخش بعدی موقق هستند. برای کانولوشن، جمع bias و غیرخطی‌ها، تست‌های واحد متأثیر می‌کنند که هموداری ایزومنتری دقیقاً برقرار است. همانطور که انتظار می‌رود، عملیات pooling فضایی نسبت به تقارن‌های شبکه با وضوح بالا دقیقاً همودار نیستند.<sup>۲۹</sup> با این حال، هموداری ایزومنتری آنها را برای آن زیرگروه از ایزومنتری‌ها که همزمان

<sup>۲۵</sup> بهبود کارایی پارامتر کرنل‌های  $R$ -های پذیر با ضریب ۲ برای کرنل‌های پیوسته یا برای اندازه‌های کرنل زوج ۸ دقیق است. اگر ۸ فرد باشد، تعداد پارامترها برای کرنل‌های متقابن مثل  $1/2 + 8$  و برای کرنل‌های نامتقابن مثل  $1/2 - 8$  مقایس می‌شود زیرا اولی ردیف مرکزی پیکسل‌ها را آزادانه پارامتری می‌کند در حالی که دومی باید آنها را روی صفر تنظیم کند.

<sup>۲۶</sup> توجه کنید که این مسئله برای عملیات pooling ذاتی است و برای CNN‌های متعارف نیز صدق می‌کند<sup>[۸]</sup>.

تقارنی از شبکه با وضوح پایین تر هستند تأیید می کنیم. نتایج تجربی ما، که در ادامه بحث می کنیم، نشان می دهد که هموردایی ایزومنتری غیردقیق، ناوردایی ایزومنتری پیش‌بینی‌های طبقه‌بندی یک شبکه کامل را در اکثر موارد تنها به طور حاشیه‌ای تحت تأثیر قرار می دهد.

## ۲.۴.۵ ارزیابی تجربی

عملیات مستقل از مختصات و ویژگی‌های هموردایی ادعا شده آنها را روی یک وظیفه طبقه‌بندی ساده تصاویر MNIST که روی نوار مؤبیوس پروژکت شده‌اند، ارزیابی می کنیم. ترکیبات مختلف انواع میدان با نمونه‌سازی معماری‌های مدل مشابه برای آنها مقایسه می شوند. به عنوان خط مبدأ، یک CNN غیرمستقل از مختصات را روی نوار مؤبیوس آموزش می دهیم که به طور قابل توجهی توسط مدل‌های هموردا بهتر عمل می کند.

مجموعه داده Möbius MNIST با گرفتن ارقام استاندارد  $28 \times 28$  پیکسل و پروژکت کردن آنها روی نوار با شناسایی مرز چپ و راست با یک پیچش اضافی ساخته می شود. مطابق با مجموعه داده MNIST چرخانده شده، که یک معیار استاندارد برای CNN‌های اقلیدسی هموردای دورانی است، اندازه مجموعه آموزش را به  $12000$  نمونه کاهش می دهیم [؟]. از آنجا که شامل ارقام خاکستری تک کاناله است که تحت تبدیلات پیمانه ناوردا هستند، نمونه‌های آن به عنوان میدان‌های اسکالر شناسایی می شوند. بنابراین هر نمونه با آرایه‌ای به شکل  $(1, 28, 28)$  نمایش داده می شود که متناظر با مستطیل بخش در شکل  $23 \times 23$  است. توجه کنید که شناسایی مرز چپ و راست برای مورد خاص ارقام MNIST منجر به هیچ ناپیوستگی نمی شود زیرا رنگ پس‌زمینه آنها سیاه ثابت (یعنی صفر) است. به منظور نمایش هموردایی ایزومنتری القا شده CNN‌های مستقل از مختصات، دو نسخه از این مجموعه داده می سازیم. اولی شامل ارقامی است که همگی متبرک هستند، یعنی در میدان موقعیت روی نوار قرار دارند. مجموعه داده دوم ارقام را در موقعیت‌های تصادفی اطراف نوار قرار می دهد، یعنی آنها را با ایزومنتری‌های نمونه‌برداری تصادفی جایجا می کند همانطور که در شکل  $22$  تجسم شده است. انتظار می رود هر مدل هموردای ایزومنتری استنتاج خود را از مجموعه داده ارقام متبرک به مجموعه داده جایجا شده ایزومنتری تعیین دهد که توسط آزمایش‌های ما تأیید می شود. در حالی که Möbius MNIST به وضوح یک مجموعه داده اسباب بازی است، تمام ویژگی‌های نظری که ما به آنها علاقه‌مندیم را نشان می دهد و به عنوان یک مورد تست راحت برای نمایش تفاوت بین CNN‌های متعارف و CNN‌های مستقل از مختصات عمل می کند.

تمام معماری‌های شبکه همانطور که معمول است به عنوان یک سری لایه‌های کانولوشنی، که با یک عملیات pooling سراسری و یک طبقه‌بندی کننده ناوردا و کاملاً متصل دنبال می شوند، ساخته می شوند؛ جدول  $4$  را برای مقایسه بیینید. بخش‌های کانولوشنی از شش بلوک کانولوشنی با عملیات pooling فضایی پس از بلوک کانولوشن دوم و چهارم ساخته می شوند. بلوک‌های کانولوشن کاملاً اساسی هستند و تنها از یک لایه کانولوشنی که با جمع bias و یک لایه غیرخطی دنبال می شود تشکیل شده‌اند. تمام عملیات pooling میانی از پنجره‌های  $2 \times 2$  pooling استفاده کرده و بنابراین وضوح فضایی را نصف می کنند. در مورد مدل‌های هموردای بازتاب، آخرين لایه کانولوشنی به  $64$  میدان اسکالر نقشه می برد. ناوردایی آنها تحت تبدیلات پیمانه تضمین می کند که عملیات global max-pooling بعدی ویژگی‌های هم ناوردای موقعیت و هم ناوردای پیمانه تولید کنند. یک MLP با فعال‌سازی softmax نهایی آن ویژگی‌ها را برای تولید پیش‌بینی‌های ناوردا می گیرد. برای تمام مدل‌ها از همان دو بلوک MLP تشکیل شده است که dropout با حذف  $\frac{1}{3}$ ، batch-normalization، ELU، غیرخطی  $\text{softmax}$  و یک لایه خطی (affine) اعمال می کنند که تعداد نورون‌های خروجی آن در جدول  $4$  فهرست شده است. بنابراین تفاوت‌های بین مدل‌های مختلف به بخش کانولوشنی محدود می شود.

پنج مدل مستقل از مخصوصاتی که نمونه‌سازی می کنیم در انواع میدان استفاده شده متفاوت هستند: سه مدل خالص وجود دارد که با "sign-", "scalar" و "regular" نشان داده می شوند که تنها نوع میدان پیشنهادی رافرض می کنند. به دلیل بعد الاتر، چندگانگی‌های میدان‌های ویژگی منتظم در مقایسه با میدان‌های اسکالار و sign-flip نصف می شوند. مدل چهارم، که با "irrep" نشان داده می شود، از ترکیبی از میدان‌های اسکالار و sign-flip به نسبت‌های مساوی استفاده می کند. توجه کنید که میدان‌های ویژگی این مدل به صورت خطی معادل مدل‌های "regular" هستند زیرا تغییر پایه از معادله  $(10.4)$  بین هر دو ترجمه می کند. مدل پنجم، "mixed" هر سه نوع میدان را اعمال می کند. غیرخطی‌های همودرای انتظارهای مختلف همان‌هایی هستند که در بخش  $2.3.5$  توضیح داده شده‌اند. همانطور که قبلاً بیان شد، تمام مدل‌ها ورودی‌ها و خروجی‌های اسکالار فرض می کنند.

تمام لایه‌های مستقل از مختصات تست واحد شده و کاملاً هموردای پیمانه یافت شده‌اند که نشان می دهد مدل‌ها به طور کلی کاملاً ناوردای پیمانه هستند. از آنجا که دو مرحله pooling اعمال می کنند که وضوح فضایی را هر یک با ضریب  $2$  قبل از pooling سراسری کاهش می دهند، هموردایی ایزومنتری (ناوردایی) تنها برای زیرگروه جابجا‌یابی‌ها به مضارب  $4$  پیکسل برقرار است. بنابراین ویژگی‌های ادعا شده نظری همانطور که انتظار می رود برقرار هستند.

به عنوان خط مبدأ، مدل‌های هموردای بازتاب را با CNN‌های متعارف وابسته به مختصات روی نوار مؤبیوس مقایسه می کیم. به منظور احترام به توپولوژی نوار، نسخه ساده‌ای از عملیات padding انتقالی را اعمال می کنیم. از آنجا که CNN‌ها نسبت به انواع میدان ناآگاه هستند، این کار با گرفتن نوارهای نارنجی دو پیکسل از شکل  $23 \times 23$  و pad کردن آنها به طرف مقابل آرایه پس از اعمال بازتاب اما بدون عمل کردن با نمایش گروهی نامشخص انجام می شود [؟] به طور رسمی، این متناظر با انتقال ویژگی‌ها طبق یک اتصال بدیهی است. از آنجا که عملیات غیرهمودرا از نظر پارامتر کمتر کارآمد هستند، دو نسخه مختلف در نظر می گیریم: نسخه اول همان تعداد کانال مدل‌های مستقل از مختصات را استفاده می کند و بنابراین تقریباً دو برابر پارامتر بیشتری نیاز دارد. تعداد کانال‌های نسخه دوم با ضریب  $\sqrt{2}$  کاهش می یابد تا تعداد پارامترها تقریباً معادل مدل‌های مستقل از جهت گیری باشد.

CNN	متخلط	irreps	منتظم	sign-flip	اسکالر	لایه
۱	(۱, ۰, ۰)	(۱, ۰, ۰)	(۱, ۰, ۰)	(۱, ۰, ۰)	(۱, ۰, ۰)	وروودی شبکه
$\lfloor \frac{1}{16/\sqrt{\alpha}} \rfloor$	(۴, ۴, ۲)	(۸, ۸, ۰)	(۰, ۰, ۸)	(۰, ۱۶, ۰)	(۱۶, ۰, ۰)	بلوک کاتنولوشن
$\lfloor \frac{32}{16/\sqrt{\alpha}} \rfloor$	(۸, ۸, ۴)	(۱۶, ۱۶, ۰)	(۰, ۰, ۱۶)	(۰, ۳۲, ۰)	(۳۲, ۰, ۰)	بلوک کاتنولوشن
همان	همان	همان	همان	همان	همان	pooling
$\lfloor \frac{64}{16/\sqrt{\alpha}} \rfloor$	(۱۶, ۱۶, ۸)	(۳۲, ۳۲, ۰)	(۰, ۰, ۳۲)	(۰, ۶۴, ۰)	(۶۴, ۰, ۰)	بلوک کاتنولوشن
$\lfloor \frac{128}{16/\sqrt{\alpha}} \rfloor$	(۳۲, ۳۲, ۱۶)	(۶۴, ۶۴, ۰)	(۰, ۰, ۶۴)	(۰, ۱۲۸, ۰)	(۱۲۸, ۰, ۰)	بلوک کاتنولوشن
همان	همان	همان	همان	همان	همان	pooling
$\lfloor \frac{256}{16/\sqrt{\alpha}} \rfloor$	(۶۴, ۶۴, ۳۲)	(۱۲۸, ۱۲۸, ۰)	(۰, ۰, ۱۲۸)	(۰, ۲۵۶, ۰)	(۲۵۶, ۰, ۰)	بلوک کاتنولوشن
۶۴	(۶۴, ۰, ۰)	(۶۴, ۰, ۰)	(۶۴, ۰, ۰)	(۶۴, ۰, ۰)	(۶۴, ۰, ۰)	بلوک کاتنولوشن
۶۴	۶۴	۶۴	۶۴	۶۴	۶۴	global max-pooling
۳۲	۳۲	۳۲	۳۲	۳۲	۳۲	MLP
۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	بلوک softmax + MLP

جدول ۴: نمای کلی معماری‌های مدل مقایسه شده. تمام مدل‌ها از یک بخش کاتنولوشن روی نوار مؤبیوس، که با یک عملیات global max-pooling و یک طبقه‌بندی کننده MLP دنبال می‌شود، تشکیل شده‌اند. پنج CNN مستقل از جهت گیری در چند گانگی‌های ( $m_{\text{irreps}}, m_{\text{params}}, m_{\text{sign-flip}}$ ) انواع میدان متفاوت هستند اما دقیقاً در تعداد کانال‌ها و تقریباً در تعداد پارامترها موافق هستند. ورودی‌های آنها، یعنی ارقام MNIST، به عنوان میدان‌های اسکالار فرض می‌شوند. تمام مدل‌های مستقل از جهت گیری در آخرین کاتنولوشن خود به ۶۴ میدان اسکالار ناوردای پیمانه نقشه می‌برند. عملیات pooling سراسری بعدی بنا برای ویژگی‌های ناوردای موقعیت و مستقل از مختصات تولید می‌کند. مدل مبنای در نوع ارائه می‌شود که در ضربی  $\sqrt{\alpha}$  آنها در تعداد کانال‌ها متفاوت هستند. نسخه اول  $\alpha = 1$  فرض کرده و بنا برای همان تعداد کانال مدل‌های مستقل از مختصات را استفاده می‌کند. به دلیل کارایی پارامتر پایین‌تر CNN‌های غیرهموردا، این مدل تقریباً  $\sqrt{\alpha}$  دو برابر پارامتر بیشتری استفاده می‌کند. برای مقایسه عادلانه نسخه دومی با  $\alpha = 2$  و بنا برای تقریباً همان تعداد پارامتر مدل‌های هموردا اضافه می‌کیم.

ارقام آموزش جابجا شده ارقام آموزش متمرکز	خطای تست (%)	پارامترها	انواع میدان؛ بدیهی sign-flip	مدل
			منتظم	
$42.99 \pm 2.65$	$1.97 \pm 0.11$	k ۱۵۰۱	□	CNN (channels)
$43.68 \pm 2.85$	$2.08 \pm 0.10$	k ۸۳۲	□	CNN (params)
$1.60 \pm 0.09$	$1.60 \pm 0.10$	k ۹۰۲	×	gauge CNN (scalar)
$4.89 \pm 0.26$	$4.27 \pm 0.24$	k ۸۲۰	✓	gauge CNN (sign-flip)
$1.23 \pm 0.07$	$1.24 \pm 0.08$	k ۷۵۲	✓	gauge CNN (regular)
$1.64 \pm 0.12$	$1.65 \pm 0.09$	k ۷۵۲	✓	gauge CNN (irreps)
$1.42 \pm 0.10$	$1.43 \pm 0.09$	k ۷۵۲	✓	gauge CNN (mixed)

جدول ۵: خطاهای تست معماری‌های مختلف شبکه، هر کدام میانگین گیری شده روی نوار ۳۲ اجرا. ستون "shifted train digits" عملکرد برای تنظیمی را گزارش می‌کند که در آن هم نمونه‌های آموزش و هم تست در مکان‌های تصادفی روی نوار قرار داده شده‌اند. در حالی که CNN‌های معرف RM-مستقل از مختصات نیستند، قادر به یادگیری تشخیص ارقام همانطور که از میدان جارچوب نایپوسته آنها دیده می‌شود هستند. تقریباً تمام CNN‌های مستقل از مختصات نتایج بهتری به طور قابل توجهی به دست می‌آورند. عملکرد پایین‌تر مدل sign-flip نشان می‌دهد که CNN‌های مستقل از مختصات ممکن است زمانی که انتخاب‌های بدی از انواع میدان یا غیر خطی‌ها انجام شود خیلی خوب کار نکنند. ارقام آموزش در ستون "centered train digits" همگی در همان موقعیت روی نوار قرار داده شده‌اند در حالی که ارقام تست به طور تصادفی جابجا شده باقی می‌مانند. CNN‌های مستقل از مختصات قادر به تعیین استنتاج خود بین هر دو وضعیت هستند که هموردایی ایزومنتری آنها را تأیید می‌کند. در نضاد، عملکرد CNN‌های معرف بدتر می‌شود که نشان‌دهنده فقدان هموردایی آنها تحت ایزومنتری‌ها است.

تمام مدل‌ها برای epoch ۲۰ با اندازه batch ۱۲۸ نمونه، کاهش وزن  $-10^{-6}$  و استفاده از بهینه‌ساز Adam [؟] آموزش داده می‌شوند. نرخ یادگیری اوایله  $-3 \times 10^{-5}$  تا حد امکان بالا انتخاب شده بدون اینکه منجر به واگرایی فرآیند آموزش شود. یک برنامه کاهش نرخ یادگیری ثابت اندازه گام را هر epoch ۴ با ضربی ۲ کاهش می‌دهد.

جدول ۵ خطاهای تست حاصل از تمام مدل‌ها را نشان می‌دهد که هر کدام روی نوار ۳۲ اجرا میانگین گیری شده‌اند. تنظیم اول، که در ستون "shifted train digits" گزارش شده، از ارقام قرار داده شده تصادفی هم در مجموعه داده آموزش و هم تست استفاده می‌کند. هر دو نسخه CNN غیرهموردا تقریباً همان خطای تست را به دست می‌آورند. در تضاد، اکثر CNN‌های مستقل از مختصات نتیجه بهتری به طور قابل توجهی به دست می‌آورند. تنها مدلی که کاملاً بر میدان‌های sign-flip مبتنی است بدتر عمل می‌کند [!] این نشان می‌دهد که ترکیب استفاده شده از میدان‌های sign-flip و غیرخطی‌ها انتخاب خوبی نیست، علی‌رغم اینکه مستقل از مختصات است. بنا برای انتخاب‌های بد میدان‌های ویژگی و غیرخطی‌ها دیده می‌شود که به عملکرد مدل آسیب می‌زند. مدلی که بهترین نتایج را به دست می‌آورد بر میدان‌های ویژگی منظم مبتنی است. این مشاهده با یافته‌های قبلی، به عنوان مثال مقایسه

سیستماتیک انواع میدان در [؟] همسو است. تفسیر ما از این نتیجه این است که قیدهای کرنل شامل میدان‌های ویژگی منتظم اساساً اجازه کanal‌های کرنل بدون قید را می‌دهند، با شرط اضافی اعمال دو کپی بازتاب یافته از آنها  $\square$  این را در تضاد با کرنل‌های  $R$ -راهبری پذیر بین میدان‌های CNN irrep باید درون یک کاتال کرنل متقارن باشند. مدل مبتنی بر میدان‌های اسکالر عملکرد میانی بین CNN‌های متعارف و مدل میدان منتظم به دست می‌آورد. هر دو مدلی که از انواع میدان مختلط استفاده می‌کنند عملکردی بین انواع میدان ترکیب دارند. می‌خواهیم مجدداً تاکید کنیم که مدل منتظم و مدل irrep دقیقاً شامل همان انواع میدان irrep هستند اما در پایه متفاوتی بیان شده‌اند. از آنجا که این تغییر پایه می‌تواند به عنوان بخشی از غیرخطی‌های اعمال شده تفسیر شود، این نتیجه نشان می‌دهد که غیرخطی‌های استفاده شده تأثیر عمده‌ای روی عملکرد مدل دارند. علی‌رغم اینکه در [؟] بررسی شده، منظره غیرخطی‌های هموردا هنوز تا حد زیادی قلمرو ناکشf شده‌ای است.

تنظیم آموزش دوم، که در ستون "centered train digits" گزارش شده، قابلیت مدل‌ها برای تعیین روی تمام حالت‌هایی که توسط ایزومنتری‌ها مرتبط هستند را بررسی می‌کند. تمام مدل‌ها روی ارقامی که در همان مکان روی نوار رخ می‌دهند آموزش داده می‌شوند اما روی ارقام جابجا شده تصادفی تست می‌شوند. همانطور که انتظار می‌رود، عملکرد CNN‌های متعارف در این تنظیم به طور قابل توجهی بدتر می‌شود  $\square$  این نشان می‌دهد که آنها واقعاً تحت ایزومنتری‌های نوار مؤبیوس هموردا نیستند. در تضاد، عملکرد اکثر CNN‌های مستقل از مختصات در انحراف معیار بدون تغییر باقی می‌ماند. علی‌رغم اینکه تنها نسبت به زیرگروه ایزومنتری‌هایی که به مضارب  $\pm$  پیکسل جابجا می‌شوند دقیقاً هموردا (ناوردا) هستند، ناوردایی ایزومنتری کامل مدل‌ها بنابراین به نظر خیلی خوب برقرار است. در حالی که مدل sign-flip در مقایسه با تنظیم آموزش اول بطور قابل توجهی بدتر می‌شود، هنوز تقریباً هموردای ایزومنتری است و بنابراین خیلی بهتر از CNN‌های متعارف عمل می‌کند.

در نتیجه، آزمایش‌های انجام شده ویژگی‌های ادعا شده CNN‌های مستقل از مختصات را تأیید کرده و برتری آنها نسبت به مدل‌های وابسته به مختصات را نشان می‌دهند.

## ظرف شیکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات

بخش اول میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را بر حسب عبارات مختصاتی آنها نسبت به انتخابی از گنجیج روی محله‌های محلی  $U \subseteq M$  معرفی کرد. از آنجا که وجود گنجیج‌های سراسری به طور کلی از نظر توپولوژیکی مانع دارد، نمایش‌های مختصاتی سراسری میدان‌های ویژگی به طور کلی وجود ندارند. بخش اول این مسئله را با تجمعی محتوای سراسری میدان‌های ویژگی از عبارات مختصاتی محلی آنها نسبت به اطلاعی از گنجیج‌هایی که  $M$  را پوشش می‌دهند، برطرف کرد. یک جایگزین ظرفیت، تعریف میدان‌های ویژگی سراسری در یک فرمالیسم انتزاعی و مستقل از مختصات بر حسب بندل‌های فیبر است. تسهیم‌های بندل امکان بازیابی عبارات مختصاتی محلی میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را فراهم می‌کنند.

## ۶ بندل‌های مرتبه و میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات

۶۲	مقدمه‌ای کوتاه بر کلاف‌های تاری	۱.۶
۶۳	.....	۲.۶
۶۸	.....	۳.۶
۷۱	.....	۴.۶
۷۴	.....	۵.۶
۷۹	.....	

## ۷ تبدیلات میدان کرنل مستقل از مختصات و کانولوشن‌های GM

۸۲	کانولوشن‌های GM با اندازه $1 \times 1$	۱.۷
۸۳	.....	۲.۷
۸۷	.....	

۹۴	هم‌متغیری ایزومنتری	۱۸
۹۵	.....	۲۸
۱۰۷	.....	۳۸
۱۱۳	.....	

بخش‌های زیر توصیف سراسری و مستقل از مختصات شبکه‌های عصبی و فضاهای ویژگی از بخش اول را توسعه می‌دهند. بخش ۶ بندل‌های فیبر، به ویژه بندل مماس،  $G$ -ساختارها و بندل‌های بردار ویژگی  $G$ -مرتبه را معرفی می‌کند. عملیات شبکه عصبی مانند تبدیل‌های میدان کرنل و کانولوشن‌های  $GM$  در بخش ۷ تعریف می‌شوند. بخش ۸ هم‌متغیری ایزومنتری این عملیات را بررسی می‌کند.

## ۶ بندل‌های مرتبه و میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات

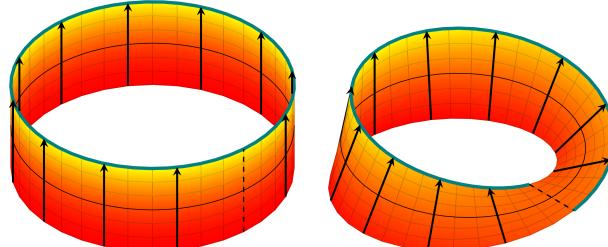
میدان‌های کمیت‌های هندسی بر روی خمینه‌ها به عنوان برش‌هایی از بندل‌های فیبر رسمی سازی می‌شوند (معادله (۱۴۷)). هر خمینه هموار به طور طبیعی مجهز به بندل مماس و بندل چارچوب خود است. انتخاب یک  $G$ -ساختار، که یک  $G$ -بندل از چارچوب‌های مرتبه است، امکان تعریف بندل‌های بردار ویژگی  $G$ -مرتبه را فراهم می‌کند. فضاهای ویژگی شبکه‌های عصبی مستقل از مختصات ما فضاهایی از میدان‌های ویژگی هستند، یعنی برش‌هایی از این بندل‌های بردار ویژگی. بندل‌های فیبر به طور کلی در بخش ۱.۶ مورود می‌شوند. بخش ۲.۶ بندل مماس  $TM$  و بندل چارچوب  $FM$  را مورد بحث قرار می‌دهد.  $G$ -ساختارها  $GM$ ، که زیرمجموعه‌هایی از چارچوب‌های مرتبه هستند که توسط ساختار هندسی داده شده بر روی خمینه متمایز می‌شوند، در بخش ۳.۶ معرفی می‌شوند.  $G$ -بندل‌های مرتبه، از جمله بندل‌های بردار ویژگی  $A$ ، از  $G$ -ساختار ساخته می‌شوند. بخش ۴.۶ جزئیات تسهیم‌های محلی (گنجیج‌ها)  $TM$ ،  $FM$  و  $A$  را ارائه می‌دهد، که مختصات را دوباره معرفی می‌کند و فرمول‌بندی بخش ۳ را بازیابی می‌کند. تبدیل متقابل میدان‌های ویژگی تسهیم شده با ضرایب بردار مماس و چارچوب‌های مرتبه تسهیم شده از این را از فرمول‌بندی مستقل از مختصات از طریق  $G$ -بندل‌های مرتبه به دست می‌آید. بخش ۵.۶ انتقال دهنده‌های موازی بر روی بندل‌های مرتبه را مورد بحث قرار می‌دهد، به ویژه اینکه چگونه آنها

یکدیگر را القا می کنند. تمام مفاهیم ارائه شده در اینجا در هندسه دیفرانسیل به خوبی ثابت شده اند و به راحتی در ادبیات یافت می شوند [۱-۶]. سهم ما ارائه یک توضیح جامع است که بین نظریه ریاضی و کاربرد آن در یادگیری عمیق هندسی پل می زند.

## ۱.۶ مقدمه‌ای کوتاه بر کلاف‌های تاری

به طور شهودی، یک کلاف تاری را می توان فضایی در نظر گرفت که با گرفتن یک فضای دیگر موسوم به فضای پایه، در مورد ما خمینه  $M$  و چسباندن فضای دیگری  $F$  موسوم به تار، به هر یک از نقاط آن ساخته می شود. یک مثال بدینه، حاصلضرب مستقیم  $M \times F$  خواهد بود. با این حال، تارها به طور کلی می توانند به روشنی پیچ خورده به هم متصل شوند، به طوری که کلاف حاصل از نظر توپولوژیکی با یک حاصلضرب متفاوت باشد. به عنوان مثال، فرض کنید فضای پایه دایره  $S^1 = M$  و تار، پاره خط  $[1, -1] = F$  باشد. حاصلضرب مستقیم آنها

[۱-۲] یک استوانه را تشکیل می دهد؛ به شکل (۲۴) مراجعه کنید. در مقابل، اگر تارها به گونه‌ای چسبانده شوند که پس از یک دور کامل حول دایره، "وارونه" شوند، نوار موبیوس به دست می آید که یک کلاف تاری غیربدینه است و از نظر توپولوژیکی با استوانه تفاوت دارد؛ به شکل (۲۴) (راست) مراجعه کنید.<sup>۳۲۳</sup> توجه داشته باشید که نوار موبیوس به صورت محلی شبیه به حاصلضرب مستقیم  $F \times U$  از یک جزء خطی  $S^1 \subseteq U$  با تار  $F$  است. همانطور که در ادامه بحث می شود، کلاف‌های تاری طبق تعریف همیشه می توانند به صورت محلی به حاصلضرب‌های مستقیم بدلینه سازی شوند.



شکل (۲۴): یک استوانه و یک نوار موبیوس. هر دو کلاف، دایره  $S^1$  را به عنوان فضای پایه و پاره خط‌های [۱, -۱] را به عنوان تار مشترک دارند، با این حال، ساختار توپولوژیکی آنها به واسطه یک پیچش در تارها متفاوت است.

(شکل بر اساس کد جیک از [tex.stackexchange.com](http://tex.stackexchange.com).)

ما به کلاف‌های تاری علاقه مندیم زیرا آنها امکان توصیف سراسری میدان‌ها روی خمینه‌ها را فراهم می کنند. به عنوان مثال، یک میدان باد روی کره  $M = S^2$  یک میدان برداری مماس است که به هر نقطه  $p$  از  $M$  بردار مماس در  $T_p M$  نسبت می دهد. کلاف تاری متناظر، کلاف مماس  $TM$  است که تمام فضاهای مماس را به هم متصل می کند و بنابراین به عنوان یک کلاف تاری با فضای پایه  $S^2 = TM$  و تار  $\mathbb{R}^d \cong T_p M$  می شود. مشابه تارهای نوار موبیوس، فضاهای مماس یک خمینه خمیده به طور کلی به روشنی کانونی به هم متصل نیستند، بلکه ذاتاً نسبت به یکدیگر پیچ خورده‌اند. بنابراین، کلاف مماس به طور کلی از نظر توپولوژیکی با یک حاصلضرب متمایز است، یعنی  $TM \times \mathbb{R}^d \not\cong M \times \mathbb{R}^d$ . به نظر تعریف میدان‌های برداری ویژگی  $C$ -بعدی، ما بعداً کلاف‌هایی با فضای پایه  $M$  و فضاهای برداری ویژگی  $\mathbb{R}^c$  به عنوان تار در نظر خواهیم گرفت.

**کلاف‌های تاری به طور کلی:** به طور رسمی، یک کلاف تاری ساختاری  $(E, M, \pi, F)$  است که از فضاهای توپولوژیکی  $E$  (فضای پایه) و  $F$  (تار نوعی) و یک نگاشت تصویر پیوسته و پوشای  $E \rightarrow M$  :  $E \rightarrow M$  تشكیل شده است. یک کلاف تاری به صورت محلی بدینه شدنی است، به این معنی که برای هر نقطه  $p \in M$  یک همسایگی محلی  $U \subseteq M$  از  $p$  وجود دارد که کلاف، محدود به آن، شبیه به یک حاصلضرب مستقیم  $F \times U$  است. بدینه بودن محلی توسط همسان‌ریختی ها  $\Psi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  :  $\Psi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  مفهول‌بندی می شود که نمودار جابجایی زیر را برآورده می کند:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Psi} & U \times F \\ \downarrow \pi & \nearrow \text{proj}_1 & \\ M & \xrightarrow{\quad} & U \end{array}, \quad (129)$$

$$\text{یعنی،} \quad \pi = \text{proj}_1 \circ \Psi, \quad (130)$$

که در آن  $U \times F \rightarrow U \times F$  نگاشت تصویر طبیعی روی عامل اول را نشان می دهد. کلافی که به صورت سراسری با حاصلضرب  $M \times F$  همسان‌ریخت باشد، بدینه نامیده می شود. کلاف‌ها اغلب به طور خلاصه به صورت  $E \xrightarrow{\pi} M$  یا  $E \xrightarrow{\pi} F$  نوشته می شوند و تار نوعی و فضای پایه به طور ضمنی فرض می شوند. از آنجا که ما میدان‌های چارچوب هموار را در نظر می گیریم، فرض می کنیم  $E$ ,  $M$  و  $F$  خمینه‌های هموار و  $\pi$  و  $\Psi$  نگاشت‌های هموار (دیفتوئورفیسم) باشند.

<sup>۳۷</sup> برای جلوگیری از سردگمی، تأکید می کنیم که این مثال، نوار موبیوس را به عنوان یک کلاف تاری با فضای پایه (خمینه)  $S^1 = M$  در نظر می گیرد. در مقابل، تمام شکل‌های قبلی که شامل نوار موبیوس بودند، آن را به عنوان فضای پایه ( الخمینه)  $M$  برای کاتانولوشن در نظر می گرفتند.

<sup>۳۸</sup> علاوه بر این، باید اشاره کنیم که پیکان‌های شنان داده شده در شکل فقط برای تأکید بر پیچش در نوار موبیوس هستند. آنها به معنای جهت چسباندن مانند نمودارهای چسباندن نیستند.

<sup>۳۹</sup> یک همسان‌ریختی یک یکریختی توپولوژیکی است، یعنی یک نگاشت پیوسته و معکوس‌بذری بین فضاهای توپولوژیکی با معکوس پیوسته.

بدیهی بودن محلی  $E \xrightarrow{\pi} M$  ایجاد می‌کند که تصویر معکوس  $(p) = \pi^{-1}(p)$  که تار روی  $p$  نامیده می‌شود، با تار نوعی  $F$  دیفلمورف باشد. همانند بخش ۳، ما دیفلمورفیسم‌های را که تارها روی نقاط مختلف را با تار نوعی یکی می‌دانند با  $E_p \rightarrow F$  نشان می‌دهیم. بدیهی سازی‌های محلی در این صورت بر حسب این دیفلمورفیسم‌ها به صورت زیر داده می‌شوند:

$$\Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F, \quad e \mapsto (\pi(e), \psi_{\pi(e)}(e)). \quad (131)$$

اگر تار نوعی  $F$  و تارهای  $E_p$  روی  $p$  ساختار اضافی داشته باشند، لازم است که دیفلمورفیسم‌های  $E_p \rightarrow F$  این ساختار را حفظ کنند، یعنی یکریختی باشند.<sup>۴۰</sup> به عنوان مثال، اگر  $F$  و  $E_p$  ساختار فضای برداری داشته باشند، آنگاه  $\psi$  باید خطی باشد.

به طور کلی، انتخاب خاص بدیهی سازی‌های محلی (یا دیفلمورفیسم‌ها) روی  $U$  به طور کانونی توسعه کلاف مشخص نمی‌شود. بنابراین باید انتخاب‌های مختلف (پیمانه‌ها) و توابع گذار (تیدیلات پیمانه) بین آنها را در نظر گرفت. برای دقیق کردن این موضوع، دو همسایگی بدیهی ساز همپوشان  $U^A$  و  $U^B$  را با بدیهی سازی‌های محلی  $\Psi^A$  و  $\Psi^B$  در نظر بگیرید. از معادله (۱۳۱) نتیجه می‌شود که گذار بین هر دو بدیهی سازی محلی روی  $U^A \cap U^B \neq \emptyset$  به صورت زیر داده می‌شود:

$$\Psi^B \circ (\Psi^A)^{-1} : U^{AB} \times F \rightarrow U^{AB} \times F, \quad (p, f) \mapsto \left(p, [\psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}](f)\right) =: (p, g_p^{BA} \blacktriangleright f) \quad (132)$$

که در آن ما به طور ضمنی تابع گذار هموار را تعریف کردیم:<sup>۴۱</sup>

$$g^{BA} : U^{AB} \rightarrow \text{Aut}(F), \quad p \mapsto g_p^{BA} := \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1} \quad (133)$$

و عمل چپ آنها

$$\blacktriangleright : \text{Aut}(F) \times F \rightarrow F, \quad (g_p^{BA}, f) \mapsto g_p^{BA} \blacktriangleright f := [\psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}](f). \quad (134)$$

روی تار نوعی  $F$  مقایسه کنید با معادلات (۷) و (۶). برای اینکه بینیم عامل اول در معادله (۱۳۲) در اینجا با همانی داده می‌شود، توجه داشته باشید که برای هر  $f \in F$  و هر  $p \in U^{AB}$  اعمال مکرر معادله (۱۳۱) ایجاد می‌کند:  $[\text{proj}_1 \circ \Psi^B \circ (\Psi^A)^{-1}](p, f) = [\pi \circ (\Psi^A)^{-1}](p, f) = \Psi^A(p, f)$ . گذار بین بدیهی سازی‌های مختلف توسعه بسط (جایجا) زیر از نمودار جایجا در معادله (۱۲۹) به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccc} & \text{id} \times g^{BA} \blacktriangleright & \\ \swarrow & \Psi^A & \searrow \\ U^{AB} \times F & \xleftarrow{\pi^{-1}(U^{AB})} & \xrightarrow{\Psi^B} U^{AB} \times F \\ \text{proj}_1 \searrow & \downarrow \pi & \nearrow \text{proj}_1 \\ & U^{AB} & \end{array} \quad (135)$$

محدود به یک نقطه  $p \in U^{AB}$  و برای حالت خاص کلاف مماس (که در ادامه تعریف می‌شود)، این نمودار با نمودار در معادله (۸) و نسخه گرافیکی آن در شکل ۷ مطابقت دارد.

طبق تعریف، تابع گذار در معادله (۱۳۳) سه شرط زیر را برآورده می‌کنند:<sup>۴۲</sup>

$$i) \quad g_p^{AA} = e \quad \forall p \in U^A \quad (136)$$

$$ii) \quad g_p^{BA} = (g_p^{AB})^{-1} \quad \forall p \in U^A \cap U^B \quad (137)$$

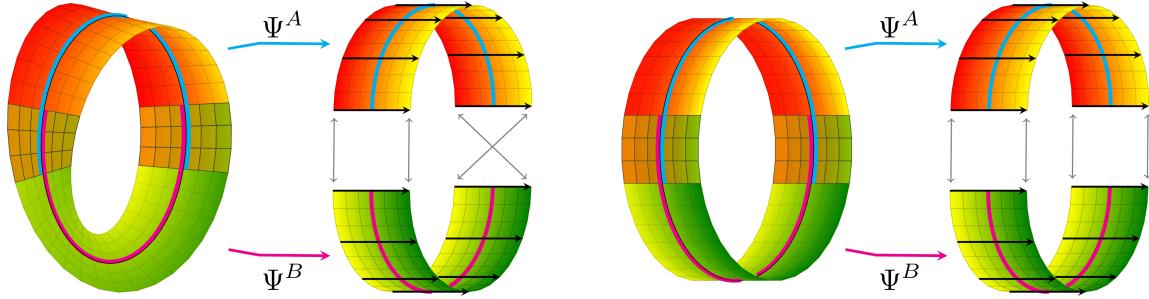
$$iii) \quad g_p^{CB} g_p^{BA} = g_p^{CA} \quad \forall p \in U^A \cap U^B \cap U^C \quad (\text{شرط همزنجیر}) \quad (138)$$

طبق قضیه ساخت کلاف تاری، هر کلاف تاری را می‌توان به طور کامل و سراسری بر حسب یک اطلس  $\mathcal{A} = \{(U^X, \Psi^X) \mid X \in \mathfrak{X}\}$  از بدیهی سازی‌های محلی  $(U^X, \Psi^X)$  مشخص کرد که  $M$  را می‌پوشاند و تابع گذار آنها معادلات (۱۳۶)، (۱۳۷) و (۱۳۸) را برآورده می‌کنند (در اینجا  $\mathfrak{X}$  یک مجموعه اندیس را نشان می‌دهد). می‌توان بدیهی سازی‌های منفرد را به گونه‌ای تصور کرد که توسط نگاشت‌های گذار "به هم چسیده‌اند"، که در شکل ۲۵ به تصویر کشیده شده است. توجه داشته باشید که این مشابه توصیف سراسری یک خمینه بر حسب یک اطلس از چارت‌های محلی است.

<sup>۴۳</sup> به طور جایگزین، فرض کنید  $F$  ساختاری دارد که توسعه تابع گذار  $\Psi^B \circ (\Psi^A)^{-1} = g^{BA}(p) \in \text{Aut}(F)$  را حفظ می‌شود (پاراگراف بعدی را بینید). سپس بدیهی سازی‌های  $F \rightarrow E_p \rightarrow \psi_p^X : E_p \rightarrow \psi_p^X$  به طور سازگار ساختار  $F$  را روی  $E_p$  القا می‌کند و به طور خودکار یکریختی هستند.

<sup>۴۴</sup> گروه خودریختی‌های  $\text{Aut}(F)$  یک فضای برداری باشند، گروه خودریختی‌های مکوس‌پذیر و حافظ ساختار (یکریختی‌ها) از  $F$  به خودش تشکیل شده است. به عنوان مثال، اگر  $F = \mathbb{R}^n$  یک فضای برداری باشد، گروه خودریختی، گروه خطی عام  $\text{GL}(n)$  است که از تمام ماتریس‌های مکوس‌پذیر  $n \times n$  تشکیل شده است.

<sup>۴۵</sup> شرایط (i) و (ii) از شرط همزنجیر (iii) نتیجه می‌شوند اما اغلب به طور صریح بیان می‌شوند.



شکل ۲۵: توصیف استوانه و نوار موبیوس بر حسب اطلس‌های  $G$  که هر کدام از دو بدیهی سازی محلی تشکیل شده‌اند. چپ: از آنجا که استوانه یک کلاف بدیهی است، تمام توابع گذار را می‌توان به عنوان تگاشت‌های همانی انتخاب کرد به طوری که گروه ساختار به گروه بدیهی  $G = \{e\}$  کاهش یابد. برخلاف وضیت به تصویر کشیده شده، امکان انتخاب یک بدیهی سازی سراسری و واحد وجود دارد. راست: تپیولوژی نوار موبیوس توابع گذار را در یکی از همپوشانی‌ها مجبور می‌کند که تارها را به روشنی وارونه به هم بچسبانند. بنابراین گروه ساختار نیان توان بیشتر از گروه  $\mathcal{R} = G$  که بازتاب تارها را مدل می‌کند، کاهش داد. بنابراین بدیهی سازی‌های سراسری برای نوار موبیوس وجود ندارد. توجه داشته باشید که پیکان‌های روی نوار موبیوس را باید با پیکان‌های نمودارهای چسباندن اشیاه گرفت، یعنی پیچش، بردارها را در یکی از برش‌ها در جهت مخالف می‌چسباند.

**کلاف‌های بوداری:** چندین مفهوم خاص‌تر از کلاف‌های تاری وجود دارد که ساختار ریاضی اضافی دارند. یک مثال مهم کلاف‌های برداری هستند که همانطور که از نامشان پیداست، کلاف‌هایی هستند که از فضاهای برداری متصل به یک خمینه تشکیل شده‌اند. به طور رسمی، یک کلاف برداری (حقیقی) از رتبه  $k$  یک کلاف  $E_p \cong \mathbb{R}^k$  (با تار نوعی  $(E, M, \pi, \mathbb{R}^k)$  و تارهای  $p$ ) است، به طوری که بردارهای سازی‌های محلی به ازای هر تار، یکریختی‌های فضای برداری (تگاشت‌های خطی) هستند. توابع گذار  $\psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{R}^k) = \text{GL}(k)$  در این صورت مقادیری در گروه خطی عام می‌گیرند.

به طور جایگزین، با داشتن تار  $\mathbb{R}^k$  و یک اطلس از بدیهی سازی‌های محلی که توابع گذار آن مقادیری در  $\text{Aut}(\mathbb{R}^k) = \text{GL}(k)$  می‌گیرند، یک ساختار فضای برداری برای  $E_p$  با قرار دادن

$$\alpha v + \beta w := (\psi_p^A)^{-1}(\alpha \psi_p^A(v) + \beta \psi_p^A(w)) \quad \forall v, w \in E_p, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (139)$$

برای یک پیمانه دلخواه  $\psi_p^A : E_p \rightarrow \mathbb{R}^k$  از اطلس  $\text{GL}(k)$  القا می‌شود. اینکه ساختار فضای برداری به طور سازگار تعريف شده است واضح است زیرا

$$\begin{aligned} & (\psi_p^B)^{-1}(\alpha \psi_p^B(v) + \beta \psi_p^B(w)) \\ &= (\psi_p^A)^{-1}((g_p^{BA})^{-1}(\alpha g_p^{BA} \psi_p^A(v) + \beta g_p^{BA} \psi_p^A(w))) \\ &= (\psi_p^A)^{-1}(\alpha \psi_p^A(v) + \beta \psi_p^A(w)) \end{aligned} \quad (140)$$

همان نتیجه را به دست می‌دهد. توجه داشته باشید که مرحله آخر نیازمند خطی بودن  $(g_p^{BA})^{-1} \in \text{GL}(d)$  بود. پیمانه‌های  $\psi_p^B$  در این صورت به طور خودکار یکریختی‌های فضای برداری هستند.

مهم‌ترین مثال‌ها برای ما کلاف مماس و کلاف‌های برداری ویژگی هستند که در بخش‌های بعدی معرفی می‌شوند.

**-کلاف‌ها** بسته به تپیولوژی کلاف، ممکن است بتوان یک اطلس از بدیهی سازی‌های محلی  $\mathcal{X}$  تعریف کرد که توابع گذار آن به یک زیرگروه  $G \leq \text{Aut}(F)$  محدود شده‌اند، یعنی برآورده می‌کنند:

$$g_p^{BA} \in G \quad \text{برای تمام } A, B \in \mathcal{X} \quad p \in U^A \cap U^B. \quad (141)$$

هر چنین اطلسی، اطلس  $G$  نامیده می‌شود و  $G$  به عنوان گروه ساختار کلاف شناخته می‌شود. دو اطلس  $G$  مختلف معادل (یا سازگار) هستند، اگر اجتماع آنها دوباره یک اطلس  $G$  باشد. کلافی که به یک کلاس همارزی از اطلس‌های  $G$  مجهز شده باشد، به عنوان یک  $G$ -کلاف شناخته می‌شود.<sup>۴۳</sup>

تپیولوژی یک کلاف تعیین می‌کند که گروه ساختار آن تا چه حد قابل کاهش است. به عنوان مثال، استوانه در شکل ۲۵ (یا هر کلاف بدیهی دیگر) را می‌توان با یک اطلس  $\{e\}$  توصیف کرد که فقط از بدیهی سازی‌های محلی با توابع گذار همانی تشکیل شده است. این متناظر با کاهش به یک گروه

<sup>۴۳</sup> کلاس همارزی تضمین می‌کند که هیچ یک از اطلس‌های  $G$  معادل، برتری ندارند. به طور معادل، می‌توان اطلس  $G$  ماکسیمال را در نظر گرفت که به عنوان اطلس  $G$  منحصر به فرد تعریف می‌شود که هر اطلس  $G$  سازگار دیگری در آن موجود است. توجه داشته باشید که یک کلاس همارزی از اطلس‌های  $G$  به طور منحصر به فرد توسط یک اطلس  $G$  داده شده، ایجاد می‌شود.

ساختار بدیهی  $\{e\} = G$  است. در مقابل، توبولوژی پیچ خورده نوار موبیوس ایجاد می‌کند که هر اطلس  $G$  شامل توابع گذاری باشد که تارها را با جهت‌گیری وارونه به هم بچسباند؛ به شکل ۲۵ (راست) مراجعه کنید. بنابراین گروه ساختار نوار موبیوس را نمی‌توان بیشتر از گروه  $G = \mathcal{R}$  که بازتاب تارها را مدل می‌کند، محدود کرد. روی خمینه‌های ریمانی، گروه ساختار کلاف مماس  $TM$  و در نتیجه کلاف‌های برداری ویژگی وابسته، به طور کلی نمی‌تواند بیشتر از یک گروه ساختار متعامد  $d$  کاهاش یابند، که این کار روی های  $\mathbb{H}^n$  مستقل از مختصات را در وهله اول انگیزه‌مند کرد.

**کلاف‌های  $G$  وابسته:** دو  $G$ -کلاف را وابسته به یکدیگر می‌نامند اگر دارای فضای پایه، گروه ساختار و مهمتر از همه، توابع گذار یکسان باشند. کلاف‌های وابسته  $(E, M, \pi, F)$  و  $(\tilde{E}, M, \tilde{\pi}, \tilde{F})$  با گروه ساختار  $G$  ممکن است در تارهای نوعی خود  $F$  و  $\tilde{F}$  و بنابراین در عمل چپ  $\bullet$  و گروه  $G$  بر روی تار مربوطه متفاوت باشند. با داشتن دو اطلس  $G$  و  $\tilde{G}$   $\bullet : G \times F \rightarrow \tilde{F}$  و  $\tilde{\bullet} : \tilde{G} \times \tilde{F} \rightarrow F$  باز  $\bullet \circ \tilde{\bullet} = \tilde{\bullet} \circ \bullet$  و  $\tilde{\bullet} \circ \bullet = \bullet \circ \tilde{\bullet}$  باشند. با این معنی از کلاف‌های  $G$  و  $\tilde{G}$  تابع گذار (تار  $X$  در اطلس  $G$  باز از  $U^X$  و  $\tilde{U}^X$  و  $\bullet(U^X, \Psi^X) = \tilde{\bullet}(\tilde{U}^X, \tilde{\Psi}^X)$ ) باشند. این معنی است:

$$\Psi^B \circ (\Psi^A)^{-1} = (\text{id} \times g^{BA} \bullet) \iff \tilde{\Psi}^B \circ (\tilde{\Psi}^A)^{-1} = (\text{id} \times g^{BA} \tilde{\bullet}) \quad (142)$$

به طور شهودی، تارهای نوعی  $F$  و  $\tilde{F}$  از  $E$  و  $\tilde{E}$  به روی یکسان روی  $M$  به هم چسبیده‌اند.

یک مثال مهم از کلاف‌هایی که به صورت  $\text{GL}(d)$ -وابسته به یکدیگر هستند، کلاف مماس  $TM$ ، هر کلاف تانسوری دیگر  $T_s^rM$  و کلاف چارچوب مماس  $FM$  هستند (اولی و آخری در بخش ۲.۶ معرفی شده‌اند). وابستگی این کلاف‌ها در این واقعیت منعکس می‌شود که مؤلفه‌های آنها نسبت به پایه‌های انتخاب شده مطابق با همان تبدیل پیمانه شوند (مثلاً  $\partial x_\mu^B / \partial x_\nu^A$  به پیوست آ مراجعه کنید). عمل‌های مختلف یک تبدیل پیمانه بر روی تارهای مربوطه در این عنوان تبدیل پادوردا ( $TM$ )، تبدیل هموردا ( $TM_s^rM$ ) و دوباره، تبدیل هموردا ( $FM$ )، به ترتیب، مشخصی می‌شوند. ما بعداً ساختار  $GM$ ، کلاف مماس  $TM$  و کلاف‌های برداری ویژگی  $\mathcal{A}$  را به عنوان کلاف‌های  $G$  وابسته معرفی خواهیم کرد. وابستگی در این مورد از این واقعیت ناشی می‌شود که تغییرات چارچوب‌های مرجع در  $GM$  منجر به تبدیل همزمان ضرایب بردار مماس و ضرایب بردار ویژگی می‌شود.

می‌خواهیم اشاره کنیم که هر کلاف وابسته‌ای علاوه بر این به یک کلاف اصلی  $G$  منحصر به فرد (که در پاراگراف بعدی تعریف می‌شود) وابسته است. در مقابل، هر کلاف وابسته را می‌توان از کلاف اصلی وابسته مربوطه ساخت ما از این ساختار به طور گسترده برای تعریف کلاف‌های برداری ویژگی در بخش ۳.۶ استفاده خواهیم کرد.

**کلاف‌های اصلی  $G$ :** یک کلاف تاری  $(P, M, \pi, G, \triangleleft)$  را یک کلاف اصلی (هموار)  $(P, M, \pi, G)$  می‌نامند اگر ۱) تار نوعی آن با گروه ساختار آن  $G$  مطابق باشد و ۲) به یک عمل راست (هموار)  $\triangleleft : P \times G \rightarrow G$  داشته باشد.

$$(143)$$

مجوز باشد که تارها را حفظ می‌کند، یعنی،

$$\pi(p \triangleleft g) = \pi(p) \quad \forall p \in P, g \in G \quad (144)$$

و به صورت تعدی پذیر و آزاد روی آنها عمل می‌کند. ۴۴ دو شرط آخر (عدی پذیری و آزادی) با هم ایجاد می‌کنند که تارهای یک کلاف اصلی  $G$ ،  $G$ -تورسور (یا فضاهای همگن اصلی  $G$ ) باشند، که به طور شهودی به این معناست که آنها "شیوه به  $G$ " هستند اما بدون هیچ مبدأ یا عصر همانی مشخصی ارائه می‌شوند.<sup>۴۵</sup> بدینهای سازی‌های محلی  $\pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$  باشد. باید عمل راست  $G$  را حفظ کنند، یعنی هموردادی راست  $G$  باشند:

$$\Psi(p \triangleleft g) = \Psi(p)(\text{id} \times \cdot \cdot g) \quad \forall p \in P, g \in G, \quad (145)$$

که در آن  $g$ -ضرب راست کانونی با عناصر گروه روی تار نوعی  $G$  را نشان می‌دهد. این، نمودار زیر بسط می‌دهد:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi} & U \times G \\ \downarrow \triangleleft g & & \uparrow (\text{id} \times \cdot \cdot g) \\ \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi} & U \times G \\ \downarrow \pi & \nearrow \text{proj}_1 & \\ U & & \end{array}, \quad (146)$$

یک عمل گروهی (راست)  $X \times G \rightarrow X$  را تعددی پذیر می‌نامند اگر هر نقطه از  $X$  را بتوان به هر نقطه دیگر نگاشت، یعنی اگر برای هر  $x, y \in X$  یکی وجود داشته باشد به طوری که  $y = x \cdot g$ . آن را (نقطه تابت) آزاد می‌نامند اگر برای هر  $x \in X$  معادله  $x \cdot g = e$  باشد، یعنی اگر تنها عمل عنصر همانی  $p$  را ناوردانه بگذارد. توجه داشته باشید که همین گزاره‌ها را می‌توان برای عمل‌های چپ نیز بیان کرد.

۴۶ به طور رسمی، یک  $G$ -تورسور (راست)  $P \times P \cong P \times G$  شرط  $P \times P \times P \times \dots$  را برآورده می‌کند که در آن یکریختی توسط  $(p, g) \mapsto (p, p \cdot g)$  داده می‌شود. این شرط ایجاد می‌کند که یک عنصر گروهی منحصر به فرد وجود داشته باشد که هر دو نقطه در تورسور را به هم متصل کند.

که لازم است برای هر  $g \in G$   $g\circ \text{id}_M = \text{id}_M \circ g$  باشد.

کلاف‌های اصلی  $G$  برای مطالعه کلاف‌های عمومی  $G$  از اهمیت زیادی برخوردارند. به طور خاص، هر کلاف  $(E, M, \pi_E, F)$   $G$  به یک کلاف اصلی  $G$  (منحصر به فرد)  $(P, M, \pi_P, G, \Delta)$  (روی  $M$  وابسته است و هر کلاف  $G$  وابسته را می‌توان از  $P$  ساخت. در بعضی‌های بعدی، ما کلاف چارچوب  $FM$  و  $G$ -ساختارها  $GM$  را به عنوان نمونه‌های خاصی از کلاف‌های اصلی ارائه خواهیم داد، که ادعاهای مطرح شده در اینجا را کمتر انتراعی کرده و برخی از پیامدهای آنها را آشکار می‌سازد).

**برش‌ها و میدان‌ها:** میدان‌های هموار با مقدار  $F$  روی  $M$  به عنوان برش‌های هموار  $\sigma$  از یک کلاف  $M \xrightarrow{\pi} E$  با تار  $F$  فرمول‌بندی می‌شوند. یک برش هموار در این صورت به عنوان یک نگاشت هموار  $\sigma : M \rightarrow E$  تعریف می‌شود که به هر نقطه  $p$  از فضای  $p$  از  $E$  عضویت  $\sigma(p) \in F$  را برازد، یعنی شرط  $\sigma \circ \text{id}_M = \text{id}_F$  نسبت می‌دهد، یعنی  $\sigma(p) = \sigma \circ \text{id}_M(p) = \text{id}_F(p)$ .

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\sigma} & E & \xrightarrow{\pi} & M \\ & & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{id}_M} & & \end{array} \quad (147)$$

یک مثال مهم میدان‌های برداری مماس هستند که به عنوان برش‌های  $M \rightarrow TM$  مدل می‌شوند که به هر نقطه  $p$  در  $M$  یک بردار مماس  $v \in T_p M$  نسبت می‌دهند. توجه داشته باشید که نگاشت تصویر، به طبیعت خود، معکوس ناپذیر است، به طوری که  $\sigma \circ \pi \neq \text{id}_E$ . بنابراین نمودار زیر به طور کلی جابجایی می‌شود:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\pi} & M & \xrightarrow{\sigma} & E \\ & & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{id}_E} & & \end{array} \quad (148)$$

در مواردی که در ادامه یک نمودار جابجایی نباشد، که بیشتر در مورد برش‌ها صدق می‌کند، ما این موضوع را با افزودن نماد  $\circlearrowleft$  به صورت بصری تأکید می‌کنیم. برش‌های هموار لزوماً به صورت سراسری وجود ندارند اما همیشه می‌توانند روی همسایگی‌های بدیهی ساز  $U \subseteq M$  تعریف شوند. از طریق یک بدیهی سازی محلی، یک برش محلی را می‌توان با یک تابع  $s : U \rightarrow F$  با قرار دادن  $(\psi_p(\sigma(p)) = s(p))$  برای  $p \in U$  یکی دانست. ما فضای برش‌های سراسری را با  $(E, \Gamma)$  نشان می‌دهیم در حالی که فضای برش‌های محلی به صورت  $(U, E)$  نوشته می‌شود.

**ریخت‌های کلاف:** ریخت‌ها (نگاشت‌ها) در رده کلاف‌های تاری، ریخت‌های کلاف یا نگاشت‌های کلاف نامیده می‌شوند. آنها با دیفتومorfیسم‌های صرف بین فضاهای کلی تفاوت دارند، زیرا علاوه بر آن ملزم به حفظ ساختار کلاف هستند، یعنی تارها را به تارها نگاشت کنند. به طور کلی، یک نگاشت کلاف هموار بین دو کلاف تاری هموار  $(E, M, \pi, F)$  و  $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{F})$  یک نگاشت هموار  $\phi : E \rightarrow \tilde{E}$  است، به طوری که یک نگاشت هموار دوم  $\tilde{\phi} : \tilde{M} \rightarrow M$  بین فضاهای پایه وجود دارد که شرط  $\tilde{\phi} \circ \phi = \text{id}_E$  برآورده می‌کند، یعنی نمودار زیر باید جابجا باشد:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & \tilde{E} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\ M & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \tilde{M} \end{array} \quad (149)$$

نگاشت روی فضای پایه تضمین می‌کند که ریخت کلاف، تارها در  $M$  در  $\tilde{M}$  را به تارهایی در  $\tilde{E}$  نگاشت می‌کند به جای اینکه آنها را "از هم بگسلند". تعمیم‌های واضح به یکریختی‌های کلاف و خودریختی‌های کلاف وجود دارد. به عنوان مثال، یکریختی‌های کلاف ایجاب می‌کنند که  $\phi$  و  $\tilde{\phi}$  معکوس پذیر باشند، یعنی دیفتومorfیسم باشند (و ساختارهای دیگر را در صورت تعریف حفظ کنند).

نوع خاص نگاشت کلاف تحت بررسی را می‌توان با خواستن الزامات اضافی محدودتر کرد. یک ریخت  $\phi : E \rightarrow \tilde{E}$  کلاف بین دو کلاف  $(E, M, \pi, F)$  و  $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{F})$  روی همان فضای پایه  $M$  ملزم است که تارهای  $E_p$  را به تارهای  $\tilde{E}_p$  روی همان نقطه  $p$  نگاشت کند، یعنی  $\phi \circ \pi = \tilde{\pi} \circ \text{id}_M$ . بر حسب یک نمودار جابجایی این به صورت زیر خوانده می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & \tilde{E} \\ \pi \searrow & & \swarrow \tilde{\pi} \\ & M & \end{array} \quad (150)$$

از این دیدگاه، ما بدیهی سازی کلاف در نمودار (۱۲۹) را به عنوان یک ریخت  $U$  کلاف  $\Psi$  بین کلافهای بدیهی  $(U)^{-1} \times F$  روی  $U$  شناسایی می‌کنیم.

اگر تارهای ساختار اضافی داشته باشند، معمولاً لازم است که این ساختار توسط نگاشت کلاف حفظ شود. به عنوان مثال، ریختهای کلاف برداری  $\phi$  بین  $(E, M, \pi, \mathbb{R}^k)$  و  $(\tilde{E}, M, \tilde{\pi}, \mathbb{R}^{\tilde{k}})$  ملزم به حفظ ساختار فضای برداری روی تارها هستند و بنابراین به نگاشتهای خطی به ازای هر تار  $E_p \rightarrow \tilde{E}_{\phi(p)}$  محدود می‌شوند. مشابهانه، ریختهای کلاف اصلی ملزم به حفظ ویژگی تارها به عنوان تورسورهای راست  $G$  هستند، یعنی هموردای راست  $G$  باشند. با داشتن دو کلاف اصلی  $(\triangleleft, \triangleleft)$  و  $(P, M, \pi, G)$  و  $(\tilde{P}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{G}, \tilde{\triangleleft})$  و یک هم‌ریختی گروهی  $\theta : G \rightarrow \tilde{G}$ ، یک ریخت کلاف اصلی ملزم است که نمودار زیر را برای هر  $g \in G$  جابجا کند:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\phi} & \tilde{P} \\ \triangleleft g \uparrow & & \uparrow \tilde{\triangleleft} \theta(g) \\ P & \xrightarrow{\phi} & \tilde{P} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\ M & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \tilde{M} \end{array} \quad (151)$$

بدیهی سازی محلی کلافهای اصلی در نمودار (۱۴۶) بدین ترتیب به عنوان یک ریخت  $U$  کلاف اصلی  $\Psi$  بین  $(U)^{-1} \times G$  و  $U$  دیده می‌شود که در آن هم‌ریختی گروهی  $g \mapsto \theta(g)$  با همانی روی  $G$  داده می‌شود.

ریختهای کلاف از اهمیت ویژه‌ای در بخش ۸ برخوردارند، جایی که آنها تبدیل کلافها و میدان‌های ویژگی را تحت عمل ایزومنتری‌ها توصیف می‌کنند. ثابت می‌شود که های  $\square$  مستقل از مختصات نسبت به این عمل‌ها بر روی کلافها و برش‌هایشان هموردا هستند. برای پیش‌زمینه بیشتر در مورد کلافهای تاری به طور کلی به مراجع [۳۶] مراجعه می‌کنیم.

## ۲.۶ کلاف مماس $TM$ و کلاف چارچوب $FM$

هر خمینه دیفرانسیل پذیر (و بنابراین هر خمینه ریمانی)  $M$  به طور کانونی به کلاف مماس خود  $TM$  و کلاف چارچوب (عام)  $FM$  مجهز است، که از تمام چارچوب‌های مرجع محلی فضاهای مماس تشکیل شده است. این دو کلاف به طور طبیعی به یکدیگر وابسته‌اند و گروه ساختار آنها به طور پیشینی توسط  $\text{Aut}(\mathbb{R}^d) = \text{GL}(d)$  داده می‌شود. این واقعیت با "بازسازی"  $TM$  از  $TM$  از طریق یک ساختار کلاف وابسته تأثیر خواهد شد که بعداً به ما امکان می‌دهد کلافهای برداری ویژگی وابسته را تعریف کنیم. برای جدا کردن واضح مفاهیم معرفی شده و فرضیات انجام شده، ما در اینجا  $TM$  و  $FM$  را به عنوان کلاف‌های  $\text{GL}(d)$  توصیف خواهیم کرد. بخش بعدی علاوه بر این یک  $G$ -ساختار را بر  $TM$  و  $FM$  تحمیل خواهد کرد که آنها را به عنوان  $G$ -کلاف‌ها تثیت می‌کند. در حالی که کلاف‌ها طبق تعریف به صورت محلی بدیهی شدنی هستند، ما در حال حاضر بدیهی سازی‌های خاص را مسلم فرض می‌کنیم و تعریف دقیق آنها را به بخش ۴.۶ موکول می‌کنیم.

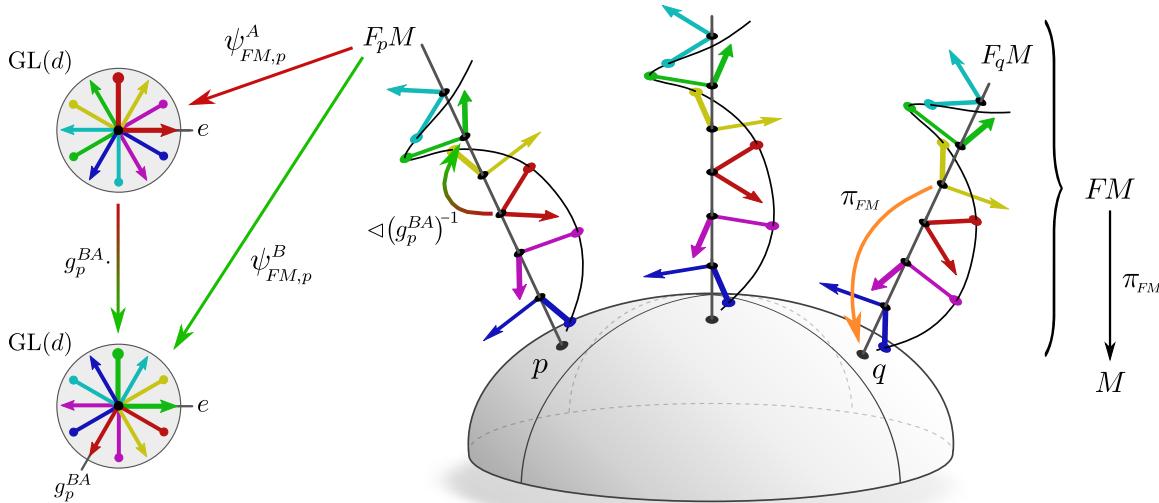
**کلاف مماس  $TM$ :** هر خمینه هموار  $M$  با مجموعه‌ای از فضاهای مماس  $T_p M \cong \mathbb{R}^d$  همراه است. اجتماع مجزای آنها <sup>۴۶</sup>

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M, \quad (152)$$

به همراه یک ساختار هموار و نگاشت تصویر داده شده به طور کانونی، یک کلاف تاری هموار را تعریف می‌کند که به عنوان کلاف مماس شناخته می‌شود. نگاشت تصویر  $TM \rightarrow M$  در این صورت با انتخاب بدیهی  $\pi_{TM} : TM \rightarrow M$  برای  $v \in T_p M$  برای  $p = \pi_{TM}(v)$  داده می‌شود. همانطور که در پیوست آ استنتاج شده است، بدیهی سازی‌های محلی  $\Psi_{TM} : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^d$  از کلاف مماس به طور کانونی توسط چارت‌های  $U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^d$  از خمینه‌القا می‌شوند. بنابراین می‌توانیم بدیهی شدنی بودن  $TM$  را مسلم فرض کرده و بحث در مورد آنها را به بخش ۴.۶ موکول کنیم. یک ساختار هموار روی  $TM$  از ساختار هموار  $M$  از طریق بدیهی سازی‌های فوق الذکر از چارت‌ها القا می‌شود. ما از جزئیات فنی این ساختار صرف نظر کرده و خواننده علاقمند را به مراجع [۳۶] ارجاع می‌دهیم.

کلاف مماس تعریف شده بدین ترتیب یک کلاف برداری است زیرا تار نوعی آن  $\mathbb{R}^d$  یک فضای برداری است. میدان‌های برداری مماس، که به عنوان مثال یک جریان روی  $M$  را توصیف می‌کنند، به عنوان برش‌های  $M \rightarrow TM$  از کلاف مماس فرمول‌بندی می‌شوند. برش‌های سراسری هموار

<sup>۴۶</sup> اجتماع مجزای  $\{(p, v) \mid v \in T_p M\} = \bigcup_{p \in M} T_p M$  از فضاهای مماس را می‌توان به گونه‌ای تصور کرد که "به یاد می‌آورد" یک بردار خاص  $v \in TM$  از کدام فضای مماس خاص  $T_p M$  سرچشم می‌گیرد، که برای تعریف نگاشت تصویر  $\pi_{TM}$  ضروری است.



شکل ۲۶: تفسیری گرافیکی از کلاف چارچوب  $FM$  روی  $M$  و بدهی سازی های آن. تار  $F_p M$  روی  $p$  به عنوان فضای تمام چارچوب های مرجع ممکن  $T_p M$  تعریف می شود. تمام چارچوب ها در  $F_p M$  توسط نگاشت تصویر  $\pi_{FM}$  به ممان نقطه  $p$  در  $M$  نگاشته می شوند که تار به آن متصل است. تارهای  $F_p M$  با  $GL(d)$  یک ریخت هستند، اما بدون مبدأی ارائه می شوند که یک انتخاب مرجع از چارچوب مرجع را تمیز کند. پیمانه های  $(GL(d))$  :  $F_p M \rightarrow GL(d)$  یا  $\psi_{FM,p}^A$  یا  $\psi_{FM,p}^B$  که در بخش ۴.۶ در ادامه معرفی می شوند، تارها را با  $GL(d)$  یکی می دانند و در نتیجه یک چارچوب مرجع را مشخص می کنند. پیمانه های مختلف با تبدیلات پیمانه  $g_p^{BA} \in GL(d)$  به هم مرتبط هستند. باید خواسته را در مورد دو تصور غلط احتمالی هشدار دهیم؛ اولاً، چارچوب ها در تارهای مختلف به طور پیشینی به روشی کانونی با یکدیگر یکی داشته نمی شوند، چیزی که ممکن است رنگ های اضافی نشان دهد. ثانیاً، برای به حداقل رساندن شلوغی، تصویر فقط چارچوب های راست گرد و متعامد را به جای تمام چارچوب های مرجع ممکن نشان می دهد. همانطور که در بخش بعدی ۳.۶ بحث خواهیم کرد، چارچوب های متعامد و راست گرد نشان داده شده، متناظر با یک  $G$ -ساختار  $GM$  (یک زیر کلاف اصلی  $G$  از  $FM$ ) برای گروه ساختار  $(G = SO(2))$  خواهد بود.

از کلاف های برداری همیشه وجود دارند؛ یک مثال استاندارد برش صفر است که بردار صفر از  $T_p M$  را به هر  $p \in M$  نسبت می دهد. می خواهیم تأکید کنیم که فضاهای مماس  $\square$  و بنابراین کلاف مماس  $\square$  بدون ارجاع به چارچوب های مختصاتی تعریف می شوند، به طوری که برش ها میدان های برداری را به روشی مستقل از مختصات توصیف می کنند.

پس از معرفی کلاف چارچوب مماس  $FM$  در ادامه، به کلاف مماس و ساختار صریح آن به عنوان کلاف  $(GL-d)$ -وابسته باز خواهیم گشت که ماهیت مستقل از مختصات آن تأکید می کند. در بخش ۳.۶ ۳.۶ مابه طور مشابه  $TM$  را به عنوان یک  $G$ -کلاف وابسته به یک  $G$ -ساختار  $GM$  خواهیم ساخت.

**کلاف چارچوب  $FM$ :** فضای چارچوب های مرجع محلی تمام فضاهای مماس  $T_p M$ ، (کلاف) چارچوب (مماس) را تشکیل می دهد. فضاهای چارچوب های مرجع (پایه های مرتب) فضاهای مماس منفرد  $T_p M$  را در نظر بگیرید:

$$F_p M := \{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ است یک پایه از } T_p M \} \quad (153)$$

کلاف چارچوب به عنوان اجتماع مجزای آنها  $FM := \coprod_{p \in M} F_p M$  که چارچوب ها در  $FM$  به همراه نگاشت تصویر  $\pi_{FM} : FM \rightarrow M$  تعریف می شود. تار نوعی کلاف چارچوب، گروه خطی عام  $GL(d) \cong F_p M$  است، یعنی گروه ماتریس های معکوس پذیر  $d \times d$  که ستون های مستقل خطی آن را می توان به عنوان تعریف کننده یک چارچوب از  $\mathbb{R}^d$  در نظر گرفت. از آنجا که کلاف چارچوب از کلاف مماس ساخته شده است، بدهی سازی های محلی آن  $(d)$   $\Psi_{FM}^{-1}(U) \rightarrow U \times GL(d)$  بلافاصله از بدهی سازی های  $TM$  القا می شوند؛ به بخش ۴.۶ مراجعه کنید. شکل ۲۶ تفسیری گرافیکی از کلاف چارچوب را نشان می دهد.

برش های هموار محلی  $U \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U) \subseteq FM$  از کلاف چارچوب، نقاط  $p \in U$  را به چارچوب هایی در  $F_p M$  نگاشت می کنند. آنها میدان های چارچوب هموار محلی را تعریف می کنند، یعنی انتخاب های هموار متغیر از چارچوب های مرجع برای  $T_p M$ ،  $p \in U$  به  $U$  مابه است. همانطور که در معادله (۴) استدلال شد، یک انتخاب از میدان چارچوب روی  $U$  یا یک انتخاب از پیمانه یا بدهی سازی محلی روی  $U$  معادل است. این ایجاد می کند که میدان های چارچوب سراسری تنها در صورتی وجود داشته باشند که  $FM$  و در نتیجه  $TM$  بدهی باشند. ما این همارزی را با عمق بیشتری در بخش ۴.۶ مورد بحث قرار خواهیم داد.

یک عمل راست تعدی پذیر و آزاد بر روی تارهای منفرد  $F_p M \cong \text{GL}(d)$  از کلاف چارچوب به طور طبیعی توسط تغییر چارچوب‌ها که در معادله (۱۰) تعریف شده است، داده می‌شود [۹]. عمل متناظر

$$\triangleleft : FM \times \text{GL}(d) \rightarrow FM, \quad ([e_i]_{i=1}^d, g) \mapsto [e_i]_{i=1}^d \triangleleft g := \left[ \sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \quad (154)$$

روی  $FM$  به عنوان یک کل، کلاف چارچوب را به یک کلاف اصلی  $\text{GL}(d)$  تبدیل می‌کند. فordan مبدأ یا عنصر همانی مرجع در تارهای  $F_p M$  به عنوان  $\text{GL}(d)$ -تورسورها، بهم ذاتی چارچوب‌های مرجع را منعکس می‌کند.

**کلاف  $TM$  به عنوان کلاف برداری وابسته به  $\text{GL}(d)$** : در بخش ۱۱.۳ ما بردارهای مماس در  $T_p M$  را بر حسب ضرایب آنها در  $\mathbb{R}^d$  نسبت به یک چارچوب مرجع بیان کردیم. انتخاب خاص چارچوب‌ها در آنجا بی ربط بود زیرا تبدیل ضرایب در معادله (۹) با تبدیل چارچوب‌های مرجع در معادله (۱۰) خشی می‌شود به طوری که  $v = \sum_i v_i^A e_i^A = \sum_i v_i^B e_i^B$  نمایش‌های مختلف معمول از همان بردار مستقل از مختصات  $v \in T_p M$  هستند. با پیروی از این ایده، می‌توان کلاف مماس را از کلاف چارچوب با جفت کردن چارچوب‌های مرجع با بردارهای ضربی و گرفتن یک خارج قسمت برای فروکاستن توصیفات اضافی حاصل از بردارهای مماس نسبت به چارچوب‌های مختلف به یک عنصر منحصر به فرد، ساخت.

برای ساختن کلاف مماس به این روش، حاصل ضرب  $FM \times \mathbb{R}^d$  را در نظر بگیرید که می‌توان آن را به عنوان یک کلاف تاری با فضای پایه  $M$  و یک تار نوعی  $\mathbb{R}^d \times \text{GL}(d)$  دید. این کلاف از جفت‌های چارچوب‌های مرجع و ضرایب (متقابلًاً نامرتبط) تشکیل شده است. با انگیزه از بیان معادله (۴۷) بردارهای مماس در چارچوب‌های مرجع مختلف، ما رابطه همارزی را تعریف می‌کنیم:

$$([e_i]_{i=1}^d, v) \sim_{\text{GL}(d)} ([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}, g \cdot v) \quad \forall g \in \text{GL}(d) \quad (155)$$

روی  $FM \times \mathbb{R}^d$  به عنوان یک رابطه همارزی، این رابطه  $FM \times \mathbb{R}^d$  را به کلاس‌های همارزی  $[v]$  افزایش می‌کند. فضای این کلاس‌های همارزی، فضای خارج قسمتی  $(FM \times \mathbb{R}^d) / \text{GL}(d)$  است. نگاشت تصویر

$$\pi_{\sim_{\text{GL}(d)}} : (FM \times \mathbb{R}^d) / \text{GL}(d) \rightarrow M, \quad ([e_i]_{i=1}^d, v) \mapsto \pi_{FM}([e_i]_{i=1}^d), \quad (156)$$

که از کلاف چارچوب القا شده است،  $(FM \times \mathbb{R}^d) / \text{GL}(d)$  را به یک کلاف تاری با فضای پایه  $M$  و تار نوعی  $\mathbb{R}^d$  تبدیل می‌کند. توجه داشته باشید که نگاشت تصویر در معادله (۱۵۶) خوش‌تعریف است زیرا مستقل از نماینده کلاس همارزی است، یعنی  $(\pi_{\sim_{\text{GL}(d)}}([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}, g \cdot v)) = \pi_{FM}([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1})$ ، که در آن ما از این واقعیت استفاده کردیم که عمل راست  $\triangleleft$  تارهای  $FM$  را حفظ می‌کند. ساختار فضای برداری  $(FM \times \mathbb{R}^d) / \text{GL}(d)$  را به یک کلاف برداری تبدیل می‌کند که ترکیبات خطی در همان تار توسط

$$\alpha [[e_i]_{i=1}^d, v] + \beta [[e_i]_{i=1}^d, w] := [[e_i]_{i=1}^d, \alpha v + \beta w], \quad (157)$$

برای مقادیر دلخواه  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  و  $v, w \in \mathbb{R}^d$  تعریف می‌شود. به راحتی می‌توان بررسی کرد که این تعریف مستقل از انتخاب نماینده در هر دو جمله جمع است.

کلاف تعریف شده بدین ترتیب با کلاف مماس یکریخت است،

$$TM \cong (FM \times \mathbb{R}^d) / \text{GL}(d), \quad (158)$$

که در آن یکریختی  $M$ -کلاف برداری توسط نگاشت خطی به ازای هر تار

$$\chi : (FM \times \mathbb{R}^d) / \text{GL}(d) \rightarrow TM, \quad [[e_i]_{i=1}^d, v] \mapsto \sum_{i=1}^d v_i e_i \quad (159)$$

داده می‌شود که یک تاپل نماینده از چارچوب و بردار ضربی را از کلاس همارزی گرفته و آنها را به بردار مماس متناظر نگاشت می‌کند. طبق تعریف رابطه همارزی  $\sim_{\text{GL}(d)}$ ، این تابع مستقل از انتخاب نماینده است، یعنی  $\forall g \in \text{GL}(d) : \chi(([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}, g \cdot v)) = \chi(([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}, g \cdot w))$  می‌باشد، مانند  $\sum_i (g \cdot v)_i = \sum_i (g \cdot w)_i$ . همانطور که در [۹] بحث شد، معکوس این نگاشت با گرفتن یک بردار مماس، تصویر کردن آن بر روی یک چارچوب دلخواه و گرفتن کلاس همارزی به دست می‌آید.

کلاف  $(FM \times \mathbb{R}^d) / \text{GL}(d)$  به عنوان یک کلاف  $(GL(d) \text{-وابسته})$  وابسته است، یعنی همان توابع گذار را در  $GL(d)$  دارد که  $FM$  دارد، همانطور که در بخش ۴.۶ استنتاج خواهیم کرد. ساختار  $TM$  به عنوان خارج قسمت  $(FM \times \mathbb{R}^d) / \text{GL}(d)$  بر ماهیت مستقل از مختصات کلاف مماس به روشنی بسیار شهودی تأکید می‌کند: این ساختار تمام انتخاب‌های ممکن از مختصات دهی‌های فضاهای مماس را در نظر گرفته و با گرفتن یک خارج قسمت، آنها را معادل تلقی می‌کند.

یک رابطه همارزی روی یک مجموعه  $X$  یک رابطه دوتایی  $\sim$  است که بازتابی  $(x \sim x)$ ، متقابن  $(x \sim y \Leftrightarrow y \sim x)$  و تراگذری  $(x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z)$  دارد. این رابطه یک افزایش همارزی  $\{y \in X | x \sim y\}$  از عناصر  $x \in X$  به کلاس‌های همارزی می‌کند. فضای کلاس‌های همارزی  $X / \sim$  را مجموعه خارج قسمتی  $\{[x] | x \in X\}$  نامند.

## ۳.۶ ساختارهای $G$ و کلافهای برداری ویژگی وابسته $A$

اکنون ما  $G$ -ساختارها را به عنوان زیرمجموعه‌های متمایزی از چارچوب‌ها در  $FM$  معرفی می‌کنیم که ساختار هندسی اضافی روی  $M$  را کدگذاری می‌کنند که باشد توسط  $CNN$ ‌های مستقل از مختصات رعایت شود. کلاف مماس از طریق یک ساختار کلاف وابسته مشابه با بخش قبل، به عنوان یک  $G$ -کلاف وابسته باز معرفی می‌شود. این رویکرد را می‌توان برای ساخت هر کلاف  $G$ -وابسته دیگر تعیین داد، که ما از آن برای تعریف کلافهای برداری ویژگی  $A$  استفاده می‌کنیم. تمام چنین کلافهای ساخته شده‌ای به یکدیگر وابسته‌اند، یعنی فقط در تار خود  $F$  تفاوت دارند اما فضای پایه  $M$ , گروه ساختار  $G$  و توابع گذار  $g^{BA}$  بین همسایگی‌های بدیهی ساز را مشترک کارند. بدیهی سازی‌های محلی کلاف‌ها و تبدیلات پیمانه متقابل آنها در بخش بعدی ۴.۶ به تفصیل مورد بحث قرار می‌گیرد.

**$G$ -ساختارها:** همانطور که در بخش ۱.۳ و جدول ۱ بحث شد، اغلب ممکن است با یک زیرمجموعه متمایز از چارچوب‌های مرتع کار کرد که توسط عمل یک گروه ساختار کاهش یافته  $\text{GL}(d) \leq G$  به هم مرتبط هستند. این موضوع با بحث در مورد چند مثال قبل از رسیدن به یک تعریف فنی در ادامه، به بهترین وجه قابل درک است. به عنوان مثال، یک محدودیت به چارچوب‌های معتماد

$$O_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ یک پایه معتماد از } T_p M \right\} \text{ است} \quad (160)$$

منجر به یک زیرکلاف اصلی  $OM$  از  $FM$  با گروه ساختار  $d$  می‌شود. توجه داشته باشید که معتماد چارچوب‌های مرتع توسعه متربک  $\eta$  روی  $M$  قضاوت می‌شود  $\square$  بنابراین انتخاب‌های مختلف متربک روى یک خمینه متناظر با زیرمجموعه‌های مختلفی از چارچوب‌های مرتع برای همان گروه ساختار  $d$  است. به عنوان مثال دوم، یک انتخاب جهت‌گیری روی یک خمینه جهت‌پذیر را در نظر بگیرید، که امکان مشخص کردن یک مفهوم مرتع از چارچوب‌ها را فراهم می‌کند<sup>۴۹</sup>

$$\text{GL}_p^+ M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ یک پایه با جهت‌گیری مثبت از } T_p M \right\} \cong \text{GL}^+(d) \quad (161)$$

و یک زیرکلاف اصلی متناظر  $GL^+(d)M$  از  $FM$  با گروه ساختار  $\text{GL}^+(d)$ . باز هم، دو انتخاب مختلف از جهت‌گیری‌ها متناظر با دو انتخاب مختلف از زیرکلاف‌های چارچوب‌های جهت‌دار مناسب است. ترکیب هر دو شرط برای تعتماد و راست‌گردی چارچوب‌ها منجر به یک  $-\text{SO}(d)$ -ساختار با تارهای زیر می‌شود:

$$SO_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ یک پایه با جهت‌گیری مثبت و معتماد از } T_p M \right\} \cong SO(d), \quad (162)$$

می‌توان شکل ۲۶ را به عنوان نمایش دهنده یک  $(2)$ - $\text{SO}$ -ساختار در نظر گرفت زیرا تنها چارچوب‌های راست‌گرد و معتماد نشان داده شده‌اند (در این صورت تار نوعی  $\text{GL}(d)$  باید با  $\text{SO}(2)$  برچسب‌گذاری شود). انتخاب‌های مختلف از  $\text{SO}(d)$ -ساختارها یا متناظر با یک دست‌سانی مخالف از چارچوب‌ها، با پاییندی به همان مفهوم تعتماد، یا متناظر با یک انتخاب متفاوت از متربک (یا هر دو) است. دقیقاً همین الگو برای فرم‌های حجم  $\omega$  (روی خمینه‌های جهت‌پذیر  $M$ ) تکرار می‌شود: آنها امکان مشخص کردن یک مفهوم مرتع از چارچوب‌ها را فراهم می‌کنند

$$SL_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ یک پایه از } T_p M \text{ با حجم واحد نسبت به } \{e_1, \dots, e_d\} \right\} \cong SL(d) \quad (163)$$

و در نتیجه زیرکلاف‌های اصلی  $SLM$  از  $FM$  با گروه ساختار  $SL(d)$  مجموعه خاص چارچوب‌هایی که مرتع هستند در اینجا به انتخاب خاص فرم حجم بستگی دارد. به عنوان آخرین مثال،  $\{e\}$ -ساختارها را در نظر بگیرید که متناظر با یک گروه ساختار بدیهی  $\{e\} = G$  هستند و بنابراین در هر نقطه  $p$  از یک چارچوب واحد تشکیل شده‌اند. طبق تعریف،  $\{e\}$ -ساختارها با میدان‌های چارچوب (هموار) سراسری ( $\sigma \in \Gamma(FM)$ ) معادل هستند:

$$\{e\}_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] = \sigma(p) \right\} \cong \{e\} \quad (164)$$

بنابراین آنها فقط روی خمینه‌های بدیهی وجود دارند. شکل‌های ۳۵ و ۳۵ ب دو انتخاب مختلف از  $\{e\}$ -ساختارها  $M = \mathbb{R}^n$  را به تصویر می‌کشند.

تمام این مثال‌ها انتخاب‌های خاصی از  $G$ -ساختارها را نشان می‌دهند. به طور کلی، یک  $G$ -ساختار روی  $M$  یک زیرکلاف اصلی  $G$  از  $FM$  است، یعنی یک انتخاب "هموار متغیر" از زیرمجموعه‌های  $G_p M \subseteq F_p M$  که نسبت به  $\triangleleft$  برای هر  $p \in M$  هستند<sup>۴۸</sup>. همواری در اینجا می‌تواند با این شرط فرمولبندی شود که در اطراف هر چارچوب  $U$  از  $G$  یک همسایگی  $\pi_{GM}^{-1}(U) \subseteq GM$  وجود داشته باشد که روی آن یک برش هموار  $\pi_{GM}^{-1}(U) = [e_i]_{i=1}^d$  باشد. تصویر

$$\pi_{GM} := \pi_{FM}|_{GM} : GM \rightarrow M \quad (165)$$

<sup>۴۸</sup> بر عکس، خمینه‌های غیرجهت‌پذیر اجازه کاهش گروه ساختار به  $\text{GL}^+(d)$  را نمی‌دهند.

<sup>۴۹</sup> از آنجا که  $F_p M - GL(d)$ -تورسور راست است، هر  $G$ -مدار  $G_p M$  در  $F_p M$  به طور خودکار تضمین می‌شود که یک  $G$ -تورسور راست باشد.

از  $GM$  در اینجا به سادگی با محدود کردن نگاشت تصویر  $FM$  به  $GM$  داده می‌شود. به همراه محدودیت

$$\triangleleft : GM \times G \rightarrow GM, \quad ([e_i]_{i=1}^d, g) \mapsto [e_i]_{i=1}^d \triangleleft g := \left[ \sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \quad (166)$$

از عمل راست  $FM$  روی  $GL(d)$  در معادله (۱۵۴) به یک عمل  $G$  روی  $GM \subseteq FM$  به  $GL(d)$  این  $G$ -ساختار را به یک کلاف اصلی  $\pi_{GM} : GM \xrightarrow{\pi_{GM}} M$  تبدیل می‌کند. با این حال، مهم است توجه داشته باشید که چندین انتخاب از چنین زیرکلاف‌هایی وجود دارد، که متناظر با  $G$ -ساختارهای مختلف برای همان گروه ساختار  $G$  است؛ این ادعا را با مثال‌های بالا مقایسه کنید. همانطور که قبلاً بحث شد، توپولوژی یک کلاف ممکن است مانع از کاهش به یک گروه ساختار  $G$  و در نتیجه وجود یک  $G$ -ساختار متناظر  $GM$  شود.

در حالی که تعریف بالا از  $G$ -ساختارها کافی خواهد بود، مفید است که به طور خلاصه برخی از تعاریف معادل جایگزین را مرور کیم. ادعای اینکه  $GM$  یک زیرکلاف اصلی  $G$  از  $FM$  است، با تعریف آن به عنوان یک تاپل  $(P, \mathcal{E})$  مشکل از یک انتخاب از یک کلاف اصلی  $G$  (همچنین غیرمنحصر به فرد)  $P$  روی  $M$  به همراه یک نشاندن هموردای راست  $G \rightarrow FM$  و هموار  $P \rightarrow M$  (روی  $M$ ) دقیق می‌شود.<sup>۵۰</sup> این موضوع توسط نمودار زیر به تصویر کشیده شده است، که لازم است برای هر  $g \in G$  جایجا باشد:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{E} & & \\ & P & \xleftarrow{\quad \mathcal{E} \quad} & \xrightarrow{\quad \mathcal{E} \quad} & FM \\ \triangleleft_P g \uparrow & & & & \uparrow \triangleleft g \\ P & \xleftarrow{\quad \mathcal{E} \quad} & \xrightarrow{\quad \mathcal{E} \quad} & \xleftarrow{\quad \mathcal{E} \quad} & FM \\ & \searrow \pi_P & & \swarrow \pi_{FM} & \\ & & M & & \end{array} \quad (167)$$

زیرمجموعه‌های مختلف از چارچوب‌های انتخاب با انتخاب از نشاندن‌های  $GM = \mathcal{E}(P)$  از  $FM$  در  $P$  است.  $G$ -ساختارها علاوه بر این با برش‌هایی به شکل  $GM = s(M) : M \mapsto FM/G$  معادل هستند، که تأکید می‌کند  $s(p) \in (P, \mathcal{E})$  در واقع یک انتخاب از  $G$ -مدار در  $F_p M$  است همانطور که در پانوشت ۴۹ بیان شد. تعریف دیگری از  $G$ -ساختارها بر حسب (کلاس‌های هم‌ارزی) اطلس‌های  $G$  است [؟]. از آنجا که این دیدگاهی است در یک پیاده‌سازی از کانولوشن‌های  $GM$  اتخاذ شود، ما آن را با جزئیات بیشتری در بخش بعدی مورد بحث قرار می‌دهیم. برای خواننده علاقه‌مند می‌خواهیم اشاره کنیم که  $G$ -ساختارها یک مورد خاص از مفهوم کلی‌تر کاهش (یا لیفت) گروه‌های ساختار هستند [؟ ؟ ؟ ؟].

$G$ -ساختارها برای نظریه کانولوشن‌های  $GM$  از اهمیت محوری برخوردارند. انتخاب خاص  $G$ -ساختار، مجموعه خاصی از چارچوب‌های مرجع را تعیین می‌کند که کرنل الگوی  $G$ -راهبر بروی آن به اشتراک گذاشته می‌شود. با توجه به همورادی پیمانه‌ای کرنل‌ها، تضمین می‌شود که کانولوشن‌های  $G$ -ساختار را راعیت کنند، یعنی مستقل از مختصات  $GM$  باشند. همانطور که در بخش ۸ استنتاج شده است، ایزوومتری‌هایی که یک کانولوشن  $GM$  نسبت به آنها هموردا است، دقیقاً آنها باید  $G$ -ساختار را حفظ می‌کنند (یعنی آنها باید خود ریختی‌های  $GM$  را القا می‌کنند).

**کلاف به عنوان کلاف بوداری  $G$ -وابسته**: با داشتن یک  $G$ -ساختار کلاف  $(GM \times \mathbb{R}^d)/G$ ، می‌توان ساختار کلاف  $(GL(d)/G)$  را در  $TM$  از  $TM$  در بخش ۲.۶ را به یک ساختار کلاف  $G$ -وابسته مشابه  $TM$  بر اساس  $GM$  تطبیق داد. به جای یکنایان بردارهای مماس نسبت به چارچوب‌های عمومی در  $TM$ ، آنها در اینجا نسبت به چارچوب‌های متمایز در  $GM$  (بیان می‌شوند و خارج قسمت نسبت به گروه ساختار کاهش یافته  $GL(d)$  گرفته می‌شود). کلاف حاصل طبق طراحی به  $GM$  وابسته است (یا به  $FM$  با یک اطلس  $G$ ، که معادل است همانطور که در بخش بعدی توضیح داده می‌شود) و بنا بر این دارای توابع گذاری است که مقادیری در  $G$  می‌گیرند. محدودیت  $\chi$  در معادله (۱۵۹) به  $(GM \times \mathbb{R}^d)/G$  یک یکریختی کلاف برداری به دست می‌دهد:

$$TM \cong (GM \times \mathbb{R}^d)/G. \quad (168)$$

در حالی که هرسه کلاف  $TM$ ،  $TM$  و  $(GM \times \mathbb{R}^d)/G$  و  $(FM \times \mathbb{R}^d)/GL(d)$  (بنابراین به عنوان کلاف‌های برداری یکریخت هستند، آنها تنها در صورتی به عنوان کلاف‌های  $G$ -وابسته یکریخت هستند که  $TM$  و  $(GM \times \mathbb{R}^d)/GL(d)$  به یک  $G$ -ساختار (یا اطلس  $G$ ) مجهز شوند)، که به طور پیشنهای اینطور نیست. در مقابل، کلاف طبق طراحی  $(GM \times \mathbb{R}^d)/G$  طبق طراحی با یک  $G$ -ساختار همراه است. برای تعریف دقیق یکریختی کلاف  $G$ -وابسته، ما به [؟] ارجاع می‌دهیم.

<sup>۵۰</sup> این نشاندن یک ریخت  $M$ -کلاف اصلی  $G$  است همانطور که در بخش ۱.۶ با هم ریختی گروهی  $(GL(d))^\theta$  :  $G \rightarrow GL(d)$  که الحاق کانونی زیرگروه  $GL(d)$  به  $G$  است، معرفی شد.

**کلافهای برداری ویژگی وابسته  $\mathcal{A}$ :** ساختار کلاف  $G$ -وابسته  $(GM \times \mathbb{R}^d)/G$  را می‌توان برای چسباندن تارهای دیگر با عملهای گروهی دیگر به  $G$ -ساختار  $GM$  تعیین داد. در واقع، هر کلاف وابسته به  $GM$  را می‌توان به این روش ساخت. مثال‌های مهم در هندسه دیفرانسیل عبارتند از کلاف هم‌مماس  $T^*M$  با تار نوعی آن که دوگان<sup>\*</sup> از  $\mathbb{R}^d$  است و عمل دوگان بر آن اثر می‌گذارد، یا کلافهای تانسوری  $(r, s)$  با تارهای  $T_s^r M$  که نمایش حاصل ضرب تانسوری  $G$  بر آن عمل می‌کند.

در ادامه ما کلافهای برداری ویژگی وابسته با ضرایب بردار ویژگی  $\mathbb{R}^c$  به عنوان تارهای نوعی را در نظر می‌گیریم. تحت تبدیلات پیمانه، این تارها از چپ توسط یک ضرب با یک نمایش گروهی  $G \rightarrow \text{GL}(c)$  :  $\rho$  عمل می‌شوند، یعنی معادله (۱۳۴) با  $\rho(g)f \mapsto \rho(g)f$  نموده سازی می‌شود. مشابه قبل، کلافهای برداری ویژگی در این صورت به عنوان یک خارج قسمت

$$\mathcal{A} := (GM \times \mathbb{R}^c)/\sim_\rho \quad (169)$$

ساخته می‌شوند که در آن رابطه همارزی  $\sim$  توسط

$$([e_i]_{i=1}^d, f) \sim_\rho ([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}, \rho(g)f) \quad \forall g \in G. \quad (170)$$

داده می‌شود. عناصر  $\mathcal{A}$  کلاس‌های همارزی  $[e_i]_{i=1}^d, f$  از ضرایب بردار ویژگی نسبت به چارچوب‌های مرتع هستند و بنابراین مستقل از مختصات هستند. یک نگاشت تصویر (خوش‌تعريف) دوباره از تصویر  $G$ -ساختار القامی شود:

$$\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow M, \quad [e_i]_{i=1}^d, f \mapsto \pi_{GM}([e_i]_{i=1}^d) \quad (171)$$

ترکیبات خطی روی تارها به قیاس با معادله (۱۵۷) تعریف می‌شوند. از آنجا که چنین کلافهای برداری ویژگی تعریف شده‌ای به  $GM$  وابسته‌اند، گروه ساختار آنها  $\leq \text{GL}(d)$  است، همانطور که به طور صریح در بخش بعدی ۴.۶ استنتاج خواهیم کرد.<sup>۵</sup> توجه داشته باشید که این تعریف شامل میدان‌های برداری مماس و میدان‌های اسکالر، که البته می‌توانند به عنوان میدان‌های ویژگی برداش شوند، به ترتیب برای  $g = \rho(g) = 1$  و  $g = f$  می‌شود.

ساختار  $\mathcal{A}$  به عنوان یک کلاف  $G$ -وابسته، بردارهای ویژگی مستقل از مختصات  $M$  روی  $GM$  را مدل می‌کند: ویژگی‌های  $f_p \in \mathcal{A}$  به طور معادل نسبت به چارچوب‌های دلخواه در  $GM$  بیان می‌شوند، با ضرایب ویژگی در مختصات دهی‌های مختلف که از طریق معادله (۱۷۰) به هم مرتبط هستند، اما بیان مختصاتی خوش‌تعريفی نسبت به چارچوب‌های دیگر ندارند. از دیدگاه مهندسی، این موضوع در  $G$ -راهبری کرنل‌های کانولوشن منعکس می‌شود که تضمین می‌کند اندازه‌گیری‌های ویژگی‌ها به صورت نسبی به چارچوب‌ها در  $GM$  انجام شود اما امکان تمایز بین الگوهایی را فراهم می‌کند که ژست‌های آنها با یک تبدیل پیمانه  $G$ -مقدار به هم مرتبط نیستند، به معنای مطلق.

**میدان برداری ویژگی وابسته و فضاهای ویژگی:** میدان‌های ویژگی هموار و مستقل از مختصات به عنوان برش‌های سراسری هموار  $f \in \Gamma(\mathcal{A})$  از کلافهای برداری ویژگی تعریف می‌شوند، یعنی به عنوان نگاشت‌های هموار  $f : M \rightarrow \text{id}_M \circ f = \text{id}_M$  که شرط  $\pi_{\mathcal{A}} \circ f = f$  می‌کنند. همانطور که قبلاً بحث شد، وجود چنین میدان‌های ویژگی تضمین شده است زیرا کلافهای برداری همیشه برش‌های سراسری هموار را می‌پذیرند. در بخش بعدی ۴.۶ نشان می‌دهیم که چگونه یک بدیهی سازی کلاف محلی روی  $U^A$  امکان نمایش  $f$  توسط یک میدان  $\rightarrow U^A$  از ضرایب بردار ویژگی را فراهم می‌کند. یک بدیهی سازی متفاوت روی  $U^B$  منجر به یک میدان ضریب متفاوت  $f^B : U^B \rightarrow \mathbb{R}^c$  می‌شود که  $f$  را به صورت محلی نمایش می‌دهد. از نگاشت‌های گذار بین بدیهی سازی‌های کلاف نتیجه خواهد شد که هر دو میدان ضریب روی همپوشانی  $U^{AB} = U^A \cap U^B$  از دامنه‌های خود با  $f^B(p) = \rho(g_p^{BA})f^A(p)$  به هم مرتبط هستند. نمودار جابجایی در شکل ۲۹ روابط بین میدان‌های برداری ویژگی و بدیهی سازی‌های محلی آنها را به تصویر می‌کشد.

فضاهای ویژگی‌های  $\mathbb{M}$  مستقل از مختصات معمولاً از چندین میدان ویژگی مستقل روی همان فضای پایه تشکیل شده‌اند. کلاف توصیف کننده یک فضای ویژگی به عنوان یک کل، مجموع ویتنی  $\bigoplus_i \mathcal{A}_i$  از کلافهای برداری ویژگی  $M$  است که زیرنای میدان‌های منفرد آن هستند. به این ترتیب، این کلاف همان فضای پایه  $M$  را دارد، یک تار نوعی  $\bigoplus_i \mathbb{R}^{c_i} \cong \mathbb{R}^{\sum_i c_i}$  که به عنوان مجموع مستقیم تارهای میدان‌های منفرد تعریف شده و به نگاشت تصویر بدیهی مجذب است. این کلاف به عنوان  $G$ -کلاف‌ها وابسته است و بنابراین می‌تواند به طور معادل به صورت

$$\bigoplus_i \mathcal{A}_i \cong (GM \times \mathbb{R}^{\sum_i c_i})/\sim_{\bigoplus_i \rho_i} \quad (172)$$

تعریف شود. توجه داشته باشید که مجموع مستقیم  $\bigoplus_i \rho_i$  از نمایش‌های  $\mathcal{A}_i$  که را تعریف می‌کنند، تضمین می‌کند که نگاشت‌های گذار  $\bigoplus_i \mathcal{A}_i$  هر میدان منفرد را به طور مستقل تبدیل کنند. فضاهای ویژگی در این صورت به عنوان فضاهای سراسری کلاف مجموع ویتنی تعریف می‌شوند.

<sup>۵</sup> به طور دقیق، توابع گذار مقادیری در  $(c) \leq \text{GL}(d) \leq \text{GL}(G)$  به جای  $\rho(G)$  خواهند گرفت، با این حال، از آنجا که گذارهای حاصل هنوز با  $G$  سازگار هستند، اصطلاح "مقدار" معمولاً برای شامل شدن چنین مواردی تطبیق داده می‌شود [۱].

## ۴.۶ بدهی‌سازی‌های محلی کلاف $GM$ , $FM$ , $TM$ و $\mathcal{A}$

در حالی که نظریه سراسری شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات به شیوه‌ی بر حسب کلاف‌های تاری مستقل از مختصات فرمولبندی می‌شود، پیاده‌سازی عددی نیازمند آن است که بردارهای ویژگی مستقل از مختصات  $A_p \in \mathcal{A}_p$  به صورت  $f(p) \in \mathbb{R}^c$  نسبت به یک انتخاب قاب مرتع  $e_i^A]_{i=1}^d \in G_p M$  در بخش ۲.۳ شرح داده شد. در زبان کلاف‌های تاری، این معادل با انتخاب بدهی‌سازی‌های محلی یا پیمانه‌های  $\Psi_{TM}^A, \Psi_{FM}^A, \Psi_{GM}^A$  و  $\Psi_{\mathcal{A}}^A$  است که اگر  $TM, GM$  و  $\mathcal{A}$  به صورت  $G$ -الحاقی با یکدیگر در نظر گرفته شوند، همگی به طور همزمان تبدیل می‌شوند. به این بیاورید که توصیف محلی و در نتیجه پیاده‌سازی از طریق یک  $G$ -اطلس، متشکل از بدهی‌سازی‌های محلی که  $M$  را می‌پوشاند و سه شرط (۱۳۷)، (۱۳۸) را برآورده می‌کنند، کاملاً معادل با نظریه سراسری و مستقل از مختصات است.

در این بخش، ما بدهی‌سازی‌های الحاقی  $TM, GM, FM$  و  $\mathcal{A}$  و تبدیلات پیمانه همان آن‌ها را بررسی می‌کنیم. برای حفظ سازگاری با بخش ۱.۳، با فرض داده شده بودن بدهی‌سازی‌های  $TM$  شروع کرده و بحث می‌کنیم که چگونه آن‌ها بدهی‌سازی‌های  $FM$  و میدان‌های قاب محلی متناظر را الفا می‌کنند. اگر یک  $G$ -اطلس برای  $TM$  و در نتیجه برای  $FM$  انتخاب شود، این به یک  $G$ -ساختار  $GM$  منجر می‌شود که  $G$ -اطلس آن با  $G$ -اطلس  $TM$  منطبق است. بدهی‌سازی‌های محلی هر کلاف  $G$ -الحاقی، به ویژه کلاف‌های بردار ویژگی  $\mathcal{A}$ ، از بدهی‌سازی‌های محلی  $\mathcal{A}$  به دست می‌آیند. این بدهی‌سازی‌ها قانون تبدیل میدان‌های ویژگی از بخش ۲.۳ را بازیابی می‌کنند.

**بدهی‌سازی‌های  $TM$ :** از آنجا که کلاف مماس،  $\mathbb{R}^d$  را به عنوان تار نمونه‌ای خود دارد، بدهی‌سازی‌های محلی آن توسط نگاشت‌هایی به شکل زیر داده می‌شوند:

$$\Psi_{TM} : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^d. \quad (173)$$

این بدهی‌سازی‌ها با پیمانه‌های نقطه‌ای (که به صورت هموار در فضا تغییر می‌کنند)

$$\psi_{TM,p} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (174)$$

از معادله (۱) با شناسایی  $(v) = (\pi_{TM}(v), \psi_{TM,p}(v))$  مطابقت دارند. به منظور رعایت ساختارهای فضای برداری تار  $\mathbb{R}^d$  و فضاهای مماس  $T_p M$ ، بدهی‌سازی‌های  $\Psi_{TM}$  به عنوان ایزوومورفیسم‌های کلاف برداری بین  $U \times \mathbb{R}^d$  و  $\pi_{TM}^{-1}(U)$  تعریف می‌شوند، یعنی نگاشت‌های  $\psi_{TM,p}$  باید خطی و معکوس پذیر باشد (یعنی ایزوومورفیسم‌های فضای برداری باشد). نگاشت‌های گذار بین بدهی‌سازی‌های مختلف  $TM$  به طور کلی در گروه خطی عام  $GL(d)$ ، یعنی گروه خودریختی‌های (خطی)  $\mathbb{R}^d$ ، مقدار می‌گیرند.

اگر ساختار بیشتری روی کلاف مماس مشخص شود، بدهی‌سازی‌ها باید این ساختار را رعایت کنند. به عنوان مثال، اگر یک متريک روی  $M$  و در نتیجه روی  $TM$  تعریف شود، نگاشت‌های  $\psi_{TM,p}$  باید ایزوومتریک باشند، یعنی بردارهای را در  $\mathbb{R}^d$  نگاشت کنند که نرمه‌ها و زوایا حفظ شوند. از آنجا که در این حالت بدهی‌سازی‌ها فقط در جهت و سوکبری خود می‌توانند متفاوت باشند، تضمین می‌شود که بدهی‌سازی‌های مختلف توسط یک گروه ساختار کاهاش باشند به یکدیگر مرتبط باشند که متناظر با متريک به عنوان یک  $O(d)$ -ساختار است. به طور کلی تر، یک  $G$ -ساختار روی  $TM$  نیازمند - یا القا شده توسط - یک انتخاب از  $G$ -اطلس  $\{\Psi_{TM}^X\}_{X \in \mathfrak{X}}$  است. دو بدهی‌سازی مختلف  $\Psi_{TM}^A$  و  $\Psi_{TM}^B$  از چنین  $G$ -اطلسی روی  $U^A \cap U^B$  توسط  $(\Psi_{TM}^A \circ (\Psi_{TM}^B)^{-1})$  همان‌طور که در معادله (۱۳۲) تعریف شده است، با توابع گذار با مقدار در  $G$  به یکدیگر مرتبط می‌شوند:

$$g^{BA} : U^A \cap U^B \rightarrow G, \quad p \mapsto \psi_{TM,p}^B \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}, \quad (175)$$

که عمل چپ  $\triangleright$   $G \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ،  $(g, v) \mapsto g \cdot v$  را روی تار نمونه‌ای تعریف می‌کنند. برای درک شهودی گرافیکی از عمل نقطه‌ای توابع گذار بر روی تارهای منفرد، به شکل ۷ بازمی‌گردیم. یک نمایش نموداری از بدهی‌سازی‌های محلی  $TM$  و گذارهای آن‌ها در شکل ۱۷۷ آورده شده است.

**بدهی‌سازی‌های الایی  $FM$  و میدان‌های قاب:** هر اطلس  $\{U^X, \Psi_{TM}^X\}_{X \in \mathfrak{X}}$  از کلاف مماس در تاظر یک به یک با یک اطلس  $\{U^X, \Psi_{FM}^X\}_{X \in \mathfrak{X}}$  از کلاف قاب است. به طور خاص، با داشتن یک بدهی‌سازی محلی  $\Psi_{TM}^A$  از  $TM$ ، یک بدهی‌سازی محلی متناظر

$$\Psi_{FM}^A : \pi_{FM}^{-1}(U^A) \rightarrow U^A \times GL(d), \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto (p, \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d)), \quad (176)$$

از  $FM$ ، که در آن  $p = \pi_{FM}([e_i]_{i=1}^d)$  را به اختصار آورده‌ایم، با تعریف زیر الای می‌شود:

$$\psi_{FM,p}^A : F_p M \rightarrow GL(d), \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) := (\psi_{TM,p}^A(e_i))_{i=1}^d, \quad (177)$$

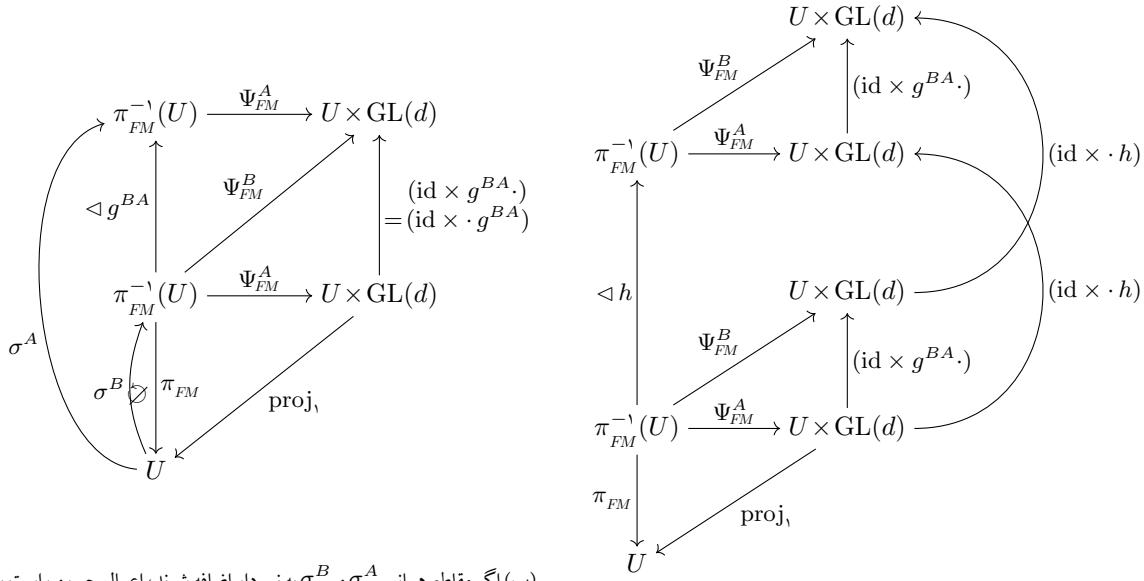
$$\begin{array}{ccc}
& U \times \mathrm{GL}(d) & \\
\Psi_{FM}^B \nearrow & \uparrow (\mathrm{id} \times g^{BA} \cdot) & \nearrow U \times \mathbb{R}^d \\
\pi_{FM}^{-1}(U) \xrightarrow{\Psi_{FM}^A} U \times \mathrm{GL}(d) & & \pi_{TM}^{-1}(U) \xrightarrow{\Psi_{TM}^A} U \times \mathbb{R}^d \\
\downarrow \pi_{FM} & \text{proj,} & \downarrow \pi_{TM} \\
U & & U \\
& \text{(ب) بدیهی‌سازی‌های } FM \xrightarrow{\pi_{FM}} M & \text{(ت) بدیهی‌سازی‌های } TM \xrightarrow{\pi_{TM}} M \\
\\
& U \times \mathbb{R}^c & \\
\Psi_A^B \nearrow & \uparrow (\mathrm{id} \times \rho(g^{BA}) \cdot) & \nearrow U \times G \\
\pi_A^{-1}(U) \xrightarrow{\Psi_A^A} U \times \mathbb{R}^c & & \pi_{GM}^{-1}(U) \xrightarrow{\Psi_{GM}^A} U \times G \\
\downarrow \pi_A & \text{proj,} & \downarrow \pi_{GM} \\
U & & U \\
& \text{(د) بدیهی‌سازی‌های } \mathcal{A} \xrightarrow{\pi_A} M & \text{(ج) بدیهی‌سازی‌های } GM \xrightarrow{\pi_{GM}} M
\end{array}$$

شکل ۲۷: نمایش تصویری بدیهی‌سازی‌های محلی کلاف‌های G-الحاقی  $U = U^A \cap U^B$  در قالب نمودارهای جابجایی که در آنها را به اختصار نشان می‌دهیم. یک G-اطلس  $\{U^X, \Psi_{TM}^X\}$  از کلاف مماس با نگاشتهای گذار  $G$ -نمودار  $GM$  را ساختار  $G$  را القا می‌کند و  $G$ -اطلس‌هایی برای  $FM$  و  $\mathcal{A}$  با توابع گذار سازگار به وجود می‌آورد. نمودارهای جابجایی دقیق‌تری که مقاطع  $(\mathrm{id} \times \pi_{FM}^{-1}(U)) \rightarrow U$  و  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  را دارند در شکل ۲۸ و ۲۹ نشان داده شده‌اند. میدان‌های ویژگی، که به عنوان مقاطع  $f : M \rightarrow \mathcal{A}$  از کلاف بردار ویژگی  $\mathcal{A}$  مدل‌سازی شده‌اند، و بدیهی‌سازی‌های محلی آنها  $f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c$  در شکل ۲۹ نشان داده شده‌اند. تفسیری گرافیکی از نمودار جابجایی برای  $TM$ ، که به یک فضای مماس منفرد  $T_p M$  محدود شده است، در شکل ۷ ارائه شده است.

به عنوان یک نگاشت از قاب‌های مماس به ماتریس‌های  $d \times d$  معکوس‌پذیر که ستون  $\square$ -ام آن توسط  $\psi_{TM,p}^A(e_i) \in \mathbb{R}^d$  داده شده است. همان‌طور که برای کلاف‌های الحاقی لازم است، بدیهی‌سازی‌های  $TM$  و  $FM$  از توابع گذار یکسانی استفاده می‌کنند،

$$\begin{aligned}
\psi_{FM,p}^B([e_i]_{i=1}^d) &= (\psi_{TM,p}^B(e_i))_{i=1}^d \\
&= (g_p^{BA} \psi_{TM,p}^A(e_i))_{i=1}^d \\
&= g_p^{BA} (\psi_{TM,p}^A(e_i))_{i=1}^d \\
&= g_p^{BA} \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d),
\end{aligned} \tag{۱۷۸}$$

زیرا عمل  $g^{BA}$  روی محورهای قاب بدیهی‌شده منفرد در خط دوم با عمل آن روی ماتریس قاب بدیهی‌شده در خط سوم یکسان است. علاوه بر این، همان‌طور که برای کلاف‌های اصلی در معادله (۱۴۵) ادعا شد، بدیهی‌سازی‌های کلاف قاب راست- $\mathrm{GL}(d)$ -هم‌متغیر هستند، یعنی برای هر



(ب) اگر مقاطع همانی  $\sigma^A$  و  $\sigma^B$  به نمودار اضافه شوند، اعمال چپ و راست با یکدیگر منطبق می‌شوند زیرا  $g \cdot e = e \cdot g \quad \forall g \in \psi_{FM,p}^A \circ \sigma^A(p) = e$  و  $\psi_{FM,p}^A \circ \sigma^A(p) = e$ .

(ت) بدیهی سازی‌های کلاف قاب راست-هم‌متغیر هستند، یعنی برای هر  $h \in \text{GL}(d)$  در رابطه  $\Psi_{FM} \circ \triangleleft h = (\text{id} \times \cdot \cdot h) \circ \Psi_{FM}$  صدق می‌کنند.

شکل ۲۸: نمودارهای گسترش‌یافته بدیهی سازی‌های کلاف قاب که تعامل توابع گذار  $g^{BA}$ ، اعمال راست  $\triangleleft$  و  $h$  و مقاطع همانی  $\sigma^A$  و  $\sigma^B$  را نشان می‌دهند. اگر مانند قبل،  $U = U^{AB} = U^A \cap U^B$  را به اختصار نشان می‌دهیم. به جز  $\sigma^B \circ \pi_{FM} \neq \text{id}_{FM}$  و  $\sigma^A \circ \pi_{FM} \neq \text{id}_{FM}$  نمودارها جایجاً می‌شوند. اگر بدیهی سازی‌ها بخشی از یک G-اطلس باشند، نمودارهای مشابهی، با جایگزینی  $FM$  و  $GM$  با  $GL(d)$  برای G-ساختار متناظر اعمال می‌شوند.

: داریم  $h \in \text{GL}(d)$

$$\begin{aligned}
\psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d \triangleleft h) &= \psi_{FM,p}^A \left( \left( \sum_j e_j h_{ji} \right)_{i=1}^d \right) \\
&= \left( \psi_{TM,p}^A \left( \sum_j e_j h_{ji} \right) \right)_{i=1}^d \\
&= \left( \sum_j \psi_{TM,p}^A(e_j) h_{ji} \right)_{i=1}^d \\
&= \left( \psi_{TM,p}^A(e_i) \right)_{i=1}^d \cdot h \\
&= \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) \cdot h
\end{aligned} \tag{۱۷۹}$$

در اینجا از خطی بودن  $\psi_{TM,p}^A$  در مرحله سوم استفاده کردیم و عبارت اندیسی را به عنوان ضرب ماتریسی از راست در مرحله چهارم شناسایی کردیم. شکل ۲۸ عمل چپ روی بدیهی سازی را از طریق توابع گذار  $\Psi_{FM}^B \circ (\Psi_{FM}^A)^{-1} = (\text{id} \times g^{BA})$  که در معادله (۱۷۸) مشتق شده و هم‌متغیری راست  $\triangleleft h = (\text{id} \times \cdot \cdot h) \circ \Psi_{FM}^A$  که در معادله (۱۷۹) مشتق شده، خلاصه می‌کند.

همان‌طور که در معادله (۴) اشاره شد و در شکل‌های ۷ و ۸ نمایش داده شد، یک بدیهی سازی محلی هموار  $\Psi_{TM}^A$  روی  $U^A$  از کلاف مimas یک میدان قاب را روی  $U^A$  القا می‌کند. این به عنوان یک مقطع محلی هموار

$$\sigma^A : U^A \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^A), \quad p \mapsto \left[ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(e_i) \right]_{i=1}^d \tag{۱۸۰}$$

از کلاف قاب فرمول‌بندی می‌شود که با نگاشت بردارهای قاب استاندارد  $e_i$  از  $\mathbb{R}^d$  به فضاهای مimas در  $TM$  تعریف می‌شود. پیرو معادله ۱۰، یک تبدیل پیمانه از  $\Psi_{TM}^B = (\text{id} \times g^{BA}) \circ \Psi_{TM}^A$  به  $\Psi_{TM}^A$  متناظر است با یک تبدیل

$$\sigma^B(p) = \sigma^A(p) \triangleleft (g_p^{BA})^{-1} \tag{۱۸۱}$$

از مقاطع روی  $U^{AB}$  بدیهی سازی های  $\Psi_{FM}^A$  از  $FM$  که بر حسب  $\Psi_{TM}^A$  تعریف شده اند، این ویژگی خوب را دارند که مقاطع متناظر  $\sigma^A$  را به قاب همانی  $\mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^{d \times d}$  نگاشت می کنند، که با جایگذاری هر دو تعریف می توان آن را مشاهده کرد:

$$\psi_{FM,p}^A \circ \sigma^A(p) = \psi_{FM,p}^A \left( \left[ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i) \right]_{i=1}^d \right) = \left( \psi_{TM,p}^A \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i) \right)_{i=1}^d = (\epsilon_i)_{i=1}^d = e \quad (182)$$

این ویژگی اغلب برای تعریف مقاطع  $FM$  با داشتن بدیهی سازی های  $\Psi_{FM}^A$  به صورت زیر استفاده می شود:

$$\sigma^A: U^A \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^A), \quad p \mapsto (\Psi_{FM}^A)^{-1}(p, e) = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(e), \quad (183)$$

که در نهایت با تعریف ما در معادله (180) متنطبق است. از آنجا که به این روش ساخته شده اند یکدیگر را القا می کنند، گاهی اوقات به آنها مقاطع های همانی و بدیهی سازی های محلی کانونی گفته می شود. گسترش نمودار در شکل ۲۸ با مقاطع همانی  $\sigma^A$  و  $\sigma^B$  که با معادله ۱۸۱ مرتبط هستند،  $h = g^{BA}$  را ثابت می کند و بنابراین به نمودار جابجایی در شکل ۲۸ ب منجر می شود. ضرب های چپ و راست با  $g^{BA}$  روی تار  $g^{BA} \cdot e = g^{BA} = e \cdot g^{BA} = e$  و  $\psi_{FM,p}^B \circ \sigma^B = \psi_{FM,p}^A \circ \sigma^A = e$  در اینجا فقط به این دلیل متنطبق هستند که برای آن  $\Delta(g_p^{BA})$  از عنصر گروه معکوس را نشان می دهد که بین قاب های مقاطع همانی متناظر تبدیل می کند.

**G-اطلس الفاکتورد ساختار GM:** انطباق توابع گذار کلاف مماس و کلاف قاب در معادله (178) نشان می دهد که یک G-اطلس از  $TM$  برای  $GM$  برای  $FM$  القا می کند. همانطور که در ادامه استنتاج خواهیم کرد، چنین G-اطلس هایی یک G-ساختار متناظر  $GM$  را مشخص می کنند، یعنی یک زیرکلاف اصلی  $G$  از  $FM$  که از قاب های ممتاز تشکیل شده است.

برای توجیه تعریف  $GM$  بر اساس یک G-اطلس داده شده  $\{(U^X, \Psi_{FM}^X)\}_{X \in \mathfrak{X}}$  از  $FM$ ، دو بدیهی سازی محلی آن  $\Psi_{FM}^A$  و  $\Psi_{FM}^B$  را با دامنه های همپوشان در نظر بگیرید و فرض کنید  $p \in U^A \cap U^B$ . بدیهی سازی ها قاب های مرتع  $(p, \sigma^A(p))$  و  $(p, \sigma^B(p))$  را در  $F_p M$  تعريف می کنند که طبق معادله (181) توسط عمل راست عصری مانند  $g_p^{BA}$  از گروه ساختار کاهش یافته  $G \leq \text{GL}(d)$  به یکدیگر مرتبط هستند. بنابراین، هر قاب تعريف شده به این شکل، عصری از یک G-مدار  $G_p M \cong \text{GL}(d)$  در  $G_p M \cong \text{GL}(d)$  است. به طور خاص، با بیان مقاطع همانی از طریق معادله (183) به صورت  $\sigma^B(p) = (\psi_{FM,p}^B)^{-1}(e) = (g_p^{BA} \psi_{FM,p}^A)^{-1}(e) = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}((g_p^{BA})^{-1}(e))$  تعريف نقطه ای G-ساختار بر اساس تصاویر معکوس  $G$  توسط نگاشت های پیمانه (دلخواه) پیشنهاد می شود:

$$G_p M := \{(\psi_{FM,p}^A)^{-1}(g) \mid g \in G\} = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(G) \quad (184)$$

استقلال از پیمانه انتخاب شده از G-اطلس واضح است زیرا هر انتخاب دیگری  $= (\psi_{FM,p}^B)^{-1}(G) = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}((g_p^{BA})^{-1}G)$  نتیجه یکسانی به دست می دهد. همانطور که به راحتی می توان بررسی کرد،  $G_p M$  در واقع یک تورسور راست G است زیرا G یک تورسور راست G است و  $\psi_{FM,p}^A$  طبق معادله (179) یک ایزو مورفیسم راست  $-G$ -هم متغیر - و بنابراین به طور خاص راست  $-G$ -هم متغیر - است. همواری مورد نیاز  $GM = \coprod_{p \in M} G_p M$  ناشی می شود.

یک G-اطلس از بدیهی سازی های محلی  $GM$  با محدود کردن بدیهی سازی ها در G-اطلس  $FM$  به قاب های موجود در  $GM$  به دست می آید، یعنی،

$$\Psi_{GM}^A := \Psi_{FM}^A|_{\pi_{GM}^{-1}(U^A)}: \pi_{GM}^{-1}(U^A) \rightarrow U^A \times G, \quad (185)$$

یا، به صورت محلی،

$$\psi_{GM,p}^A := \psi_{FM,p}^A|_{G_p M}: G_p M \rightarrow G. \quad (186)$$

بالا فاصله نتیجه می شود که توابع گذار با مقدار در G با توابع گذار  $TM$  و  $FM$  متنطبق هستند، یعنی،

$$\psi_{GM,p}^B([e_i]_{i=1}^d) = g_p^{BA} \psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d), \quad (187)$$

و اینکه بدیهی سازی ها راست  $-G$ -هم متغیر هستند:

$$\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d \triangleleft h) = \psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) \cdot h \quad \forall h \in G \quad (188)$$

میدان های قاب نیز با یک عبارت معادل

$$\sigma^A(p) = (\psi_{GM,p}^A)^{-1}(e) \quad (189)$$

با عبارت معادله (183) داده می شوند. نمودار های جابجایی در شکل های ۲۸ و ۲۹ نیز هنگام جایگزینی  $FM$  با  $GM$  و  $GL(d)$  با  $G$  معتبر هستند.

**بدیهی‌سازی‌های القایی کلاف‌های الحاقی  $\mathcal{A}$ :** یک  $G$ -اطلس  $\{\Psi_{\mathcal{A}}^X, \Psi_{\mathcal{A}}^X\}_{X \in \mathfrak{X}}$ ، شامل بدیهی‌سازی‌های محلی :  
 $\Psi_{\mathcal{A}}^X : U^X \times \mathbb{R}^c \rightarrow U^X \times \mathbb{R}^c$  از کلاف‌های بردار ویژگی الحاقی  $\sim_p$  از  $(GM \times \mathbb{R}^c) / \sim_p$  است.  
القا می‌شود. برای ساختن این بدیهی‌سازی‌ها، به یاد بیاورید که  $\mathcal{A} = (GM \times \mathbb{R}^c) / \sim_p$  از بدیهی‌سازی‌های متناظر  $\Psi_{GM}^X$  از  $G$ -ساختار  
قاب‌های مرتع و بردارهای ضربی ویژگی است که توسط رابطه همارزی  $\rho \sim$  تعریف می‌شود که شامل زوج‌هایی از  
است که  $[e_i]_{i=1}^d \in \mathcal{A}_p$  را انتخاب یک نماینده از بردارهای ضربی همارز آن در  $\mathbb{R}^c$  بدیهی‌سازی کنیم. یک انتخاب متناظر از نماینده در  
اینجا توسط آن بردار ضربی داده می‌شود که به قاب مقطع همانی  $\sigma^A(p)$  متناظر با  $\Psi_{GM}^A$  تعلق دارد.

فرض کنید  $[e_i]_{i=1}^d \in \mathcal{A}_p$  باشد که توسط یک جابجایی  $h \in G_p M$  نسبت به مقطع  $\sigma^A(p)$  تعریف شده است. این جابجایی  
را می‌توان با بدیهی‌سازی  $G$ -ساختار بازیابی کرد:

$$\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) = \psi_{GM,p}^A(\sigma^A(p) \triangleleft h) = \psi_{GM,p}^A(\sigma^A(p)) \cdot h = h \quad (190)$$

در اینجا از هم‌متغیری راست  $\psi_{GM,p}^A$  و اینکه  $\sigma^A$  به عنوان مقطع همانی تعریف شده است، استفاده کردیم؛ به معادلات (۱۸۸) و (۱۸۲) که دومی  
برای  $\psi_{GM,p}^A$  تطبیق داده شده است، مراجعه کنید. بنابراین می‌توانیم هر قاب را از طریق جابجایی آن بازنویسی کنیم:

$$[e_i]_{i=1}^d = \sigma^A(p) \triangleleft \psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) \quad (191)$$

به طور مشابه، می‌توانیم هر بردار ویژگی  $p \in \mathcal{A}_p$  را با  $[e_i]_{i=1}^d, f \in A$  مختصه کلاس همارزی بازنویسی کنیم:

$$[[e_i]_{i=1}^d, f] = [\sigma^A(p) \triangleleft \psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d), f] = [\sigma^A(p), \rho(\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f] \quad (192)$$

بر اساس این بیان‌ها، بدیهی‌سازی‌های القایی  $\mathcal{A}$  را با قرار دادن زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Psi_{\mathcal{A}}^A : \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(U^A) \rightarrow U^A \times \mathbb{R}^c, \quad [[e_i]_{i=1}^d, f] \mapsto \left( \pi_{GM}^A([e_i]_{i=1}^d), \psi_{\mathcal{A},p}^A([e_i]_{i=1}^d, f) \right), \quad (193)$$

با

$$\psi_{\mathcal{A},p}^A : \mathcal{A}_p \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad [[e_i]_{i=1}^d, f] = [\sigma^A(p), \rho(\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f] \mapsto \rho(\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f, \quad (194)$$

که آن بردار ضربی نماینده خاصی  $f^A = \rho(\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f \in \mathbb{R}^c$  را انتخاب می‌کند که توسط قاب مرتع  $\sigma^A(p)$  متناظر با پیمانه  
انتخاب شده، متمایز می‌شود. برای راحتی در آینده، توجه می‌کنیم که این به طور خاص دلالت بر این دارد که معکوس معادله (۱۹۴) توسط

$$(\psi_{\mathcal{A},p}^A)^{-1} : \mathbb{R}^c \rightarrow \mathcal{A}_p : f \mapsto [\sigma^A(p), f]. \quad (195)$$

داده می‌شود. بدیهی‌سازی تعریف شده به این شکل مستقل از نماینده انتخاب شده است زیرا برای هر  $k \in G$  داریم:

$$\begin{aligned} \psi_{\mathcal{A},p}^A([[[e_i]_{i=1}^d \triangleleft k^{-1}, \rho(k)f]] &= \rho(\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d \triangleleft k^{-1})) \rho(k)f \\ &= \rho(\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) \cdot k^{-1}) \rho(k)f \\ &= \rho(\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f \\ &= \psi_{\mathcal{A},p}^A([[[e_i]_{i=1}^d, f]]) \end{aligned} \quad (196)$$

بر اساس ساختار، توابع گذار توسط  $(g_p^{BA}) \rho(g_p^{BA})$  داده می‌شوند:

$$\begin{aligned} \psi_{\mathcal{A},p}^B([[[e_i]_{i=1}^d, f]]) &= \rho(\psi_{GM,p}^B([e_i]_{i=1}^d)) f \\ &= \rho(g_p^{BA} \psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f \\ &= \rho(g_p^{BA}) \rho(\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f \\ &= \rho(g_p^{BA}) \psi_{\mathcal{A},p}^A([[[e_i]_{i=1}^d, f]]) \end{aligned} \quad (197)$$

اگر کلاف مماس به عنوان یک کلاف برداری  $G$ -الحاقی  $TM \cong (GM \times \mathbb{R}^d)/G$  است، بدیهی‌سازی‌های آن از معادله (۱۹۳)  
برای انتخاب خاص  $g = \rho(g)$  بازنویسی می‌شوند.

فرض کنید یک میدان ویژگی مستقل از مختصات  $f \in \Gamma(\mathcal{A})$  داده شده باشد. نسبت به پیمانه  $\Psi_{\mathcal{A}}^A$ ، می‌توان آن را به صورت محلی به عنوان یک  
میدان بردار ضربی  $f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c$  تعریف زیر نمایش داد:

$$f^A := \text{proj}_{\nabla} \circ \Psi_{\mathcal{A}}^A \circ f \quad (198)$$

$$\begin{array}{ccccc}
& & U \times \mathbb{R}^c & \xrightarrow{\text{proj}_\gamma} & \mathbb{R}^c \\
& \swarrow \Psi_A^B & \uparrow (\text{id} \times \rho(g^{BA}) \cdot) & & \uparrow \rho(g^{BA}) \\
\pi_A^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi_A^A} & U \times \mathbb{R}^c & \xrightarrow{\text{proj}_\gamma} & \mathbb{R}^c \\
\downarrow f & \uparrow \pi_A & \swarrow f^B & & \uparrow f^A \\
U & & & & 
\end{array}$$

شکل ۲۹: میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات به عنوان مقاطع سراسری  $\Gamma(\mathcal{A})$  در  $U^A$  و  $U^B$ ، آن‌ها به میدان‌های برداری ضریب ویژگی  $f^B : U^B \cap U^A \mapsto \mathbb{R}^c$  و  $f^A : U^A \cap U^B \mapsto \mathbb{R}^c$  بدبیهی سازی می‌شوند که روی  $f^B(p) = \rho(g_p^{BA})f^A(p)$  با رابطه  $U^A \cap U^B = U^A \cup U^B$  به هم مرتبط هستند. به جز  $\pi_A^{-1} \circ f \neq \text{id}_{\mathcal{A}}$  نمودار جابجایی پذیر است.

که معادل با تعریف نقطه‌ای زیر است:

$$f^A(p) = \psi_{\mathcal{A}, p}^A \circ f(p). \quad (199)$$

همانطور که از نمودار جابجایی در شکل ۲۹ پیداست، توابع گذار در معادله (۱۹۷) به میدان‌های ضریب محلی منتقل می‌شوند به طوری که داریم:

$$f^B(p) = \rho(g_p^{BA})f^A(p) \quad (200)$$

برای  $p \in U^A \cap U^B$  این با تعریف ما از تبدیلات پیمانه برداری ضریب ویژگی در معادله (۲۸) موافق است و آن را توجیه می‌کند.

**ملحوظات پایانی:** بدبیهی سازی‌های محلی و توابع گذار تعریف شده در اینجا، تعاریف پیمانه‌ها و تبدیلات پیمانه از بخش ۲.۳ را رسمی‌سازی و توجیه می‌کنند. نشان داده شد که بدبیهی سازی‌های محلی  $FM$  و  $TM$  یکدیگر را القا می‌کنند. اگر یک  $G$ -اطلس برای هر یک این دو انتخاب شود، یک  $G$ -ساختار  $GM$  تعریف می‌کند که  $G$ -اطلس آن اساساً با  $G$ -اطلس  $FM$  منطبق است. علاوه بر این، یک  $G$ -اطلس برای هر کلاف الحاقی دیگر، از جمله  $\mathcal{A}$ ، القا می‌کند. همانطور که در شکل ۲۷ به تصویر کشیده شده است، توابع گذار تمام  $G$ -اطلس‌ها برای  $FM$ ،  $TM$  و  $GM$  و  $\mathcal{A}$  با هم منطبق هستند، که این کلاف‌ها را  $G$ -الحاقی با یکدیگر می‌سازند. به طور خاص، منگام تغییر از پیمانه  $A$  به پیمانه  $B$ ، بدبیهی سازی‌های  $FM$ ،  $TM$  و  $GM$  مطابق با یک ضرب چپ با  $g^{BA}$  تبدیل می‌شوند در حالی که بدبیهی سازی‌های کلاف بردار ویژگی مطابق با یک ضرب چپ با  $\rho(g^{BA})$  تبدیل می‌شوند؛ به معادلات (۱۷۵)، (۱۷۶)، (۱۷۷) و (معادله (۱۹۷)) مراجعه کنید. در عین حال، میدان‌های قاب مطابق با عمل راست  $\langle (g^{BA})^{-1} \rangle$  (معادله (۱۸۱)) تبدیل می‌شوند.

## ۵.۶ منتقل‌کننده‌های موازی روی کلاف‌های الحاقی

بخش ۳.۳ مقدمه‌ای شهودی بر انتقال موازی بردارهای مماس و بردارهای ویژگی در امتداد یک مسیر  $\gamma$  از  $p \in M$  به  $q \in M$  ارائه داد. در اینجا به طور خلاصه بحث می‌کنیم که چگونه منتقل‌کننده‌های موازی مستقل از مختصات روی کلاف‌های تاری کلاف را یکدیگر را القا می‌کنند و عبارات مختصاتی آن‌ها را نسبت به بدبیهی سازی‌های داده شده استخراج می‌کنیم. ما با فرض داده شده بودن منتقل‌کننده‌های مستقل از مختصات

$$\mathcal{P}_{TM, \gamma} : T_q M \rightarrow T_p M \quad (201)$$

روی کلاف مماس  $TM$  شروع می‌کنیم و توضیح می‌دهیم که چگونه آن‌ها منتقل‌کننده‌های

$$\mathcal{P}_{FM, \gamma} : F_q M \rightarrow F_p M \quad (202)$$

روی کلاف قاب  $FM$  را القا می‌کنند. اگر این منتقل‌کننده‌ها، همانطور که در ادامه بحث می‌شود، با  $G$ -ساختار انتخاب شده  $G$ -سازگار باشند، در ادامه منتقل‌کننده‌های

$$\mathcal{P}_{GM, \gamma} : G_q M \rightarrow G_p M \quad (203)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}, \gamma} : \mathcal{A}_q \rightarrow \mathcal{A}_p \quad (204)$$

را روی کلاف‌های  $G$ -الحاقی  $GM$  و  $\mathcal{A}$ -القا می‌کنند. در عمل، یعنی در مرور ادبیات ما در بخش سوم، اکثر شبکه‌های کانولوشنی یا منتقل‌کننده‌هایی را فرض می‌کنند که بر اساس اتصال لوی-چیویتا هستند یا یک اتصال بدبیهی.

یک تعریف رسمی تر از منتقل کننده‌های کلاف ممکن است مسیر متفاوتی را در پیش بگیرد، که با معرفی یک اتصال به اصطلاح اصلی ارسمان روی کلاف اصلی  $G$  یعنی  $GM$  شروع می‌شود (که بنا به تعریف،  $G$ -سازگار خواهد بود). چنین اتصال ارسمانی می‌تواند یا با انتخاب یک زیرکلاف افقی از کلاف مماس  $TGM$  از  $GM$  تعریف شود یا، به طور معادل، با یک ۱-فرم اتصال با مقدار در جبر لی  $\gamma : TGM \rightarrow \mathcal{A}$  را روی  $GM$  انتقال روی  $GM$  متعاقباً از طریق بالابر افقی  $\gamma^\dagger : \gamma \text{ از منحنی های } M \rightarrow [0, 1]$  را روی فضای یا به تعریف می‌شود، به طوری که بردارهای مماس بالابر در  $GM$  افقی هستند، یعنی  $\gamma^\dagger \in HGM$ . سپس تمام منتقل کننده‌ها روی  $TM$  و  $TM$  از  $GM$  بردارهای روی  $G$ -ساختر القا می‌شوند. به جای دنبال کردن این رویکرد رسمی، که نسبتاً فنی خواهد بود و می‌توان آن را در ادبیات یافت<sup>۵۲</sup>، ما بر چگونگی ارتباط متقابل منتقل کننده‌های مختلف از طریق القای یکدیگر تمرکز می‌کیم.

**انتقال روی  $TM$ :** برای این منظور، با فرض داده شده بودن منتقل کننده‌های مستقل از مختصات  $\gamma$  روی  $TM$ ، یک راه میانبر را انتخاب می‌کیم. به یاد بیاورید که، با داشتن پیمانه‌های  $\Psi_{TM}^{\tilde{A}}$  از  $q$  و  $p$  یک همسایگی  $U^{\tilde{A}}$  از  $p$ ، منتقل کننده بردار مماس طبق معادله (۳۳) مختصاتی می‌شود، یعنی،

$$g_\gamma^{A\tilde{A}} := \psi_{TM,p}^A \circ \mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1} \in \mathrm{GL}(d), \quad (205)$$

و اینکه مختصاتی سازی‌های آن تحت تبدیلات پیمانه در  $q$  و  $p$  طبق معادله (۳۵) تبدیل می‌شوند:

$$g_\gamma^{B\tilde{B}} = g_p^{BA} g_\gamma^{A\tilde{A}} (g_q^{\tilde{B}\tilde{A}})^{-1} \quad (206)$$

برای نمایش تصویری این تعاریف در قالب یک نمودار جابجایی، به معادله (۳۴) بازمی‌گردیم.

**انتقال روی  $FM$ :** با داشتن منتقل کننده روی کلاف قاب بالاصله از انتقال محورهای قاب منفرد به دست می‌آید. در معادلات، فرض کنید  $[e_i]_{i=1}^d \in E_qM$  یک قاب در  $q$  باشد، سپس محورهای منفرد  $e_i$  برای  $i = 1, \dots, d$  هستند که می‌توانند از طریق  $\mathcal{P}_{TM,\gamma}$  منتقل شوند. بنابراین منتقل کننده روی کلاف قاب را به صورت زیر تعریف می‌کیم:

$$\mathcal{P}_{FM,\gamma} : F_qM \rightarrow F_pM, \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto \mathcal{P}_{FM,\gamma}([e_i]_{i=1}^d) := [\mathcal{P}_{TM,\gamma}(e_i)]_{i=1}^d \quad (207)$$

برای استخراج شکل صریح مختصاتی سازی آن  $(\psi_{FM,p}^A \circ \mathcal{P}_{FM,\gamma} \circ (\psi_{FM,q}^{\tilde{A}})^{-1}) \in \mathrm{GL}(d)$  عمل آن را بر روی یک عنصر گروهی ( $h \in \mathrm{GL}(d)$ ) در نظر بگیرید که نماینده یک قاب بدیهی شده از  $\mathbb{R}^d$  است که توسط ستون‌های ماتریس  $h_{:,i} \in \mathbb{R}^d$ ،  $i = 1, \dots, d$  تولید می‌شود:

$$\begin{aligned} [\psi_{FM,p}^A \circ \mathcal{P}_{FM,\gamma} \circ (\psi_{FM,q}^{\tilde{A}})^{-1}](h) &= [\psi_{FM,p}^A \circ \mathcal{P}_{FM,\gamma}] \left( [(\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(h_{:,i})]_{i=1}^d \right) && \text{(تعريف } \psi_{FM,p}^{\tilde{A}}, \text{ معادله (۱۷۷))} \\ &= \psi_{FM,p}^A \left( [\mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(h_{:,i})]_{i=1}^d \right) && \text{(معادله } \mathcal{P}_{FM,\gamma} \text{)} \\ &= \left( \psi_{TM,p}^A \circ \mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(h_{:,i}) \right)_{i=1}^d && \text{(تعريف } \psi_{FM,p}^{\tilde{A}}, \text{ معادله (۱۷۷))} \\ &= \left( g_\gamma^{A\tilde{A}}(h_{:,i}) \right)_{i=1}^d && \text{(بدیهی‌سازی } \mathcal{P}_{TM,\gamma}, \text{ معادله (۲۰۵))} \\ &= g_\gamma^{A\tilde{A}} h && \text{(۲۰۸))} \end{aligned}$$

بنابراین، مختصاتی سازی‌های منتقل کننده‌های قاب معادل با مختصاتی سازی‌های منتقل کننده‌های بردار مماس در معادله (۲۰۵) هستند اما به جای عمل بر روی بردارهای ضرب در  $\mathbb{R}^d$ ، بر روی قاب‌های بدیهی شده در  $\mathrm{GL}(d)$  عمل می‌کنند. تبدیلات پیمانه آن‌ها از نمودار جابجایی

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(d) & \xrightarrow{g_\gamma^{A\tilde{A}}} & \mathrm{GL}(d) \\ \downarrow g_q^{\tilde{B}\tilde{A}} & \swarrow \psi_{FM,q}^{\tilde{A}} & \uparrow \psi_{FM,p}^A \\ F_qM & \xrightarrow{\mathcal{P}_{FM,\gamma}} & F_pM \\ \uparrow \psi_{FM,q}^{\tilde{B}} & \searrow \psi_{FM,p}^B & \downarrow g_p^{BA} \\ \mathrm{GL}(d) & \xrightarrow{g_\gamma^{B\tilde{B}}} & \mathrm{GL}(d) \end{array} \quad (209)$$

<sup>۵۲</sup> انتقال یک قاب در امتداد  $\gamma$  یک منحنی<sup>۵۳</sup> (بالابر افقی) را در  $TFM$  توصیف می‌کند. فضای تولید شده توسط تمام بردارهای مماس  $\gamma^\dagger$  در امتداد  $TFM$  از  $HFM$  چنین منحنی‌هایی، زیرکلاف افقی  $TFM$  است که در بالا ذکر شد.

دیده می شود که با تبدیلات پیمانه منتقل کننده های مختصاتی شده روی  $TM$  در معادله (۲۰۶) منطبق هستند.

**سازگاری اتصالات و  $G$ -ساختارها:** هر انتخابی از اتصال یا تعریف منتقل کننده ها روی کلاف های  $GL(d)$  یعنی  $TM$  و  $FM$  با هر  $G_qM \subseteq F_qM$  است تحت انتقال قاب ها بسته نباشد، یعنی در حالی که یک قاب در  $F_pM$  منتقل می شود، این قاب لزوماً در  $G_pM$  قرار ندارد.<sup>۵۳</sup> نسبت به بدیهی سازی های  $GM$ ، چنین ناسازگاری در توسط  $P_{FM,\gamma}$  به یک قاب در  $F_pM$  منتقل می شود، این قاب آنها روی تارهای  $\mathbb{R}^d$  از کلاف های  $GL(d)$  معنکش می شود، که ضرب چپ آنها روی تارهای  $TM$  خوش تعریف نیست. اگر زیر کلاف  $GM$  تحت انتقال موازی  $FM$  بسته نباشد، این به معنای آن است که هیچ انتقال متناظر خوش تعریف روی  $GM$  در نتیجه روی هیچ کلاف  $G$ -الحاقی  $A$  وجود ندارد.

به عنوان مثال، اتصال لوی-چیویتا را در فضاهای اقليدسي در نظر بگیرید، که منتقل کننده های آن بردارهای مماس و قاب ها را به معنای معمول در  $\mathbb{E}_d$  موازی نگه می دارند.  $\{e\}$ -ساختار (میدان قاب) در شکل ۲۳۵ تحت این انتقال بسته است و بنابراین سازگار است. از سوی دیگر،  $\{e\}$ -ساختار در شکل ۳۵ تحت این انتقال بسته نیست و بنابراین با اتصال لوی-چیویتا سازگار است. اما روی تار  $G$  از  $SO(2)$ -ساختار روی  $S^1$  در شکل ۵۰ با اتصال لوی-چیویتا روی کره سازگار است، در حالی که  $\{e\}$ -ساختار در شکل ۵۱ بسازگار نیست.

خواننده ممکن است پرسد چه گزاره های کلی در مورد سازگاری اتصالات (یا منتقل کننده ها) و  $G$ -ساختارها می توان بیان کرد. به طور کلی، اتصال لوی-چیویتا، یا هر اتصال متريک ديجيگري، با  $G$ -ساختار  $OM$  که متناظر با متريک است، سازگار هستند.<sup>۵۴</sup> اگر منيفلد جهت پذير باشد، اتصال لوی-چیویتا علاوه بر اين با هر  $SO(d)$ -ساختاری که متناظر با متريک باشد، سازگار است. يك مثال،  $\{e\}$ -ساختار روی  $S^1$  در شکل ۵۰ است. يك شرط لازم (اما نه کافی) برای اينکه يك  $G$ -ساختار با يك اتصال داده شده سازگار باشد اين است که گروه هولونومی اتصال، زيرگروهی از گروه ساختار  $G$  باشد.

يک مورد خاص مهم،  $\{e\}$ -ساختارها هستند، زيرا آنها يك اتصال بدیهی منحصر به فرد را القا می کنند.<sup>۵۵</sup> منتقل کننده های متناظر، قاب ها را به گونه ای حرکت می دهند که با قاب های  $\{e\}$ -ساختار موازی باقی بمانند. اتصالات بدیهی ممکن است برای نظریه کانولوشن های  $GM$  اهمیت خاصی نداشته باشند، با اين حال، در واقع توسعه بسیاري از شبکه های کانولوشنی استفاده می شوند. به طور خاص، هر شبکه ای که به يك  $\{e\}$ -ساختار متنکی است، به طور ضمنی يك اتصال بدیهی را فرض می کند. اين شامل تمام مدل های جدول ۶ با  $G = \{e\}$  می شود، به ویژه آنهاي که در بخش های ۳.۱۱ و ۳.۱۲ بررسی شده اند.<sup>۵۶</sup> توجه داشته باشید که اين مدل ها اتصال بدیهی را فقط برای انتقال بردار ويزگی خود فرض می کنند اما ژئودزیک ها را برای پول بک منتقل کننده، معادله (۶۷)، بر اساس اتصال اصلی لوی-چیویتا محاسبه می کنند.

**انتقال روی  $GM$ :** با فرض اينکه  $GM$  با انتقال روی  $FM$  سازگار است (يعني تحت آن بسته است)، يك منتقل کننده خوش تعریف با محدود کردن منتقل کننده کلاف قاب به  $G$ -ساختار داده می شود:

$$P_{GM,\gamma} := P_{FM,\gamma}|_{GM} : G_qM \rightarrow G_pM \quad (210)$$

توابع گذار بين مختصاتي سازی های مختلف  $P_{GM,\gamma}$  سپس با توابع گذار  $P_{TM,\gamma}$  و در نتیجه با  $P_{F_pM,\gamma}$  نيز منطبق خواهد بود. ما نمودار جابجایی زير را به دست می آوريم که محدود سازی نمودار در معادله (۲۰۹) از  $F_pM$  و  $F_qM$  و  $G_qM$  و  $GL(d)$  و  $G_pM$  و  $G$  را به تصویر می کشد:

$$\begin{array}{ccccc} & & g^{A\bar{A}}. & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ G & & & & G \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & \psi_{GM,q}^{\bar{A}} & & \psi_{GM,p}^A & \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & g_q^{\bar{B}\bar{A}}. & & & g_p^{BA}. \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ & \psi_{GM,q}^{\bar{B}} & & \psi_{GM,p}^B & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ & G & & & G \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ & g_\gamma^{B\bar{B}}. & & & \end{array} \quad (211)$$

ما در ادامه اين کار فرض می کنیم که انتقال روی  $GM$  خوش تعریف است.

<sup>۵۳</sup> بر حسب يك اتصال اصلی ارسامن روی  $FM$ ، اين حالت زمانی رخ می دهد که زير کلاف افقی  $TGM \subseteq TFM$  در  $HFM \subseteq TFM$  قرار نداشته باشد. يك تعریف فوری از انتقال موازی بر حسب انتخاب يك زير کلاف افقی  $HGM$  روی  $G$ -ساختار، همیشه (بنا به تعریف) منجر به يك انتقال خوش تعریف روی  $GM$  خواهد شد.

<sup>۵۴</sup> اين گزاره بنا به تعریف برقرار است زيرا اتصالات متريک زوایا و طول ها بین بردارها و در نتیجه اورتونمال بودن قاب ها را حفظ می کنند. علاوه بر اين، می توان اتصالات متريک را به عنوان اتصالات اصلی ارسامن روی  $OM$  تعریف کرد.

<sup>۵۵</sup> يك اتصال بدیهی است اگر گروه هولونومی آن، یعنی انتقال موازی آن حول هر حلقه بسته، بدیهی باشد [۶].

<sup>۵۶</sup> فقط يك اتصال اصلی ارسامن  $H\{e\}M = T\{e\}M$  را می توان روی  $V\{e\}M$  انتخاب کرد زيرا زير کلاف عمودی  $T\{e\}M$  مقطع صفر از  $V\{e\}M$  است.

<sup>۵۷</sup> اين مدل ها با مدل سازی نکردن منتقل کننده های غیر بدیهی بردارهای ويزگی، به طور ضمنی يك اتصال بدیهی را فرض می کنند: آنها ضرایب بردار ويزگی را بدون تبدیل آنها ابیشت می کنند.

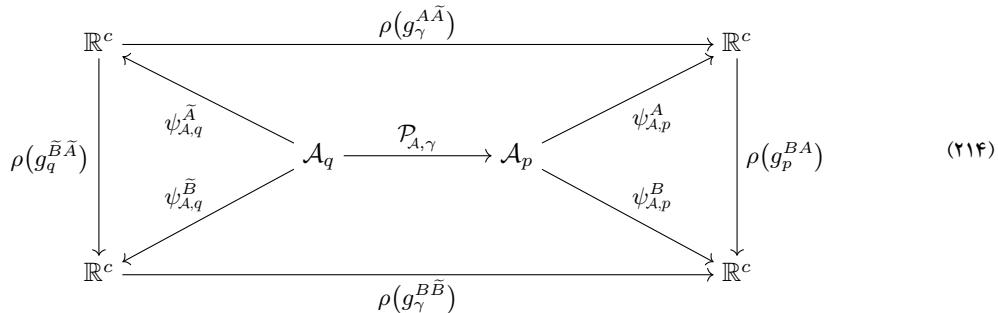
**انتقال روی  $\mathcal{A}$ :** اگر منتقل کننده‌های یک اتصال روی  $GM$  خوش‌تعریف باشند، آن‌ها منتقل کننده‌هایی را روی هر کلاف  $G$ -الحاقی، از جمله کلاف‌های بردار ویژگی  $\rho \sim / \sim_{\mathcal{A}} = (GM \times \mathbb{R}^c)$  می‌کنند. فرض کنید  $f_q := [[e_i]]_{i=1}^d, f \in \mathcal{A}$  یک بردار ویژگی مستقل از مختصات در  $\mathcal{A}_q$  باشد. انتقال موازی آن توسط آن کلاس هم‌ارزی داده می‌شود که با ثابت نگه داشتن برخی ضرایب نماینده  $f \in \mathbb{R}^c$  و انتقال قاب متناظر  $[e_i]_{i=1}^d$  تعریف می‌شود:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A},\gamma} : \mathcal{A}_q \rightarrow \mathcal{A}_p, \quad f_q \mapsto \mathcal{P}_{\mathcal{A},\gamma}(f_q) := [\mathcal{P}_{GM,\gamma}([e_i]_{i=1}^d), f] \quad (212)$$

در بخش ۳.۳ ما ادعا کردیم که منتقل کننده ضرایب عددی بردار ویژگی توسط  $(g_\gamma^{A\tilde{A}})^{-1} \circ \rho(g_\gamma^{A\tilde{A}})$  باشد، که این حالت زمانی است که انتقال روی  $GM$  خوش‌تعریف باشد. این عبارت مختصاتی از  $\mathcal{P}_{\mathcal{A},\gamma} \circ (\psi_{\mathcal{A},q}^{\tilde{A}})^{-1} \circ \rho(\psi_{\mathcal{A},q}^{\tilde{A}})$  را می‌توان با ارزیابی گام به گام عمل  $\psi_{\mathcal{A},p}^A \circ \mathcal{P}_{\mathcal{A},\gamma} \circ (\psi_{\mathcal{A},q}^{\tilde{A}})^{-1} \in GL(c)$  را در  $\mathbb{R}^c$  استخراج کرد:

$$\begin{aligned} [\psi_{\mathcal{A},p}^A \circ \mathcal{P}_{\mathcal{A},\gamma} \circ (\psi_{\mathcal{A},q}^{\tilde{A}})^{-1}](f) &= [\psi_{\mathcal{A},p}^A \circ \mathcal{P}_{\mathcal{A},\gamma}]([\sigma^{\tilde{A}}(q), f]) && \text{(تعریف } \mathcal{P}_{\mathcal{A},\gamma} \text{، معادله ۱۹۵)} \\ &= \psi_{\mathcal{A},p}^A([\mathcal{P}_{GM,\gamma}(\sigma^{\tilde{A}}(q)), f]) && \text{(تعریف } \mathcal{P}_{\mathcal{A},\gamma} \text{، معادله ۲۱۲)} \\ &= \rho(\psi_{GM,p}^A \circ \mathcal{P}_{GM,\gamma} \circ \sigma^{\tilde{A}}(q)) \cdot f && \text{(تعریف } \psi_{\mathcal{A},p}^A \text{، معادله ۱۹۴)} \\ &= \rho(\psi_{GM,p}^A \circ \mathcal{P}_{GM,\gamma} \circ (\psi_{GM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(e)) \cdot f && \text{(تعریف مقطع همانی } \sigma^{\tilde{A}} \text{، معادله ۱۸۳)} \\ &= \rho(g_\gamma^{A\tilde{A}}) \cdot f && \text{(در مختصات، معادله ۲۱۱)} \end{aligned} \quad (213)$$

نمودار جابجایی



نشان می‌دهد که تبدیلات پیمانه منتقل کننده‌های بردار ویژگی مختصاتی شده به صورت زیر است:

$$\rho(g_\gamma^{B\tilde{A}}) = \rho(g_p^{BA}) \rho(g_\gamma^{A\tilde{A}}) \rho(g_q^{B\tilde{A}})^{-1} \quad (215)$$

توجه داشته باشید که این قانون تبدیل با قانون تبدیل در معادله ۲۰۶ سازگار است.

## ۷ تبدیلات میدان کوکنل مستقل از مختصات و کانولوشن‌های GM

کلاف‌های  $G$ -الحاقی معرفی شده در بخش ۶ امکان توصیف میدان‌های ویژگی - و در نتیجه شبکه‌های کانولوشنی - را در سطح سراسری فراهم می‌کنند. با داشتن دنباله‌ای از کلاف‌های بردار ویژگی  $G$ -الحاقی روی  $M$   $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N \xrightarrow{\pi_{\mathcal{A}_1}} M \xrightarrow{\pi_{\mathcal{A}_N}} M$ ، ما شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات را به عنوان دنباله‌هایی

$$\Gamma(\mathcal{A}_1) \xrightarrow{L_1} \Gamma(\mathcal{A}_2) \xrightarrow{L_2} \dots \xrightarrow{L_N} \Gamma(\mathcal{A}_N) \quad (216)$$

از لایه‌های پارامتری شده  $L_1, \dots, L_N$  توصیف می‌کنیم که بین فضاهای ویژگی  $\Gamma(\mathcal{A}_1), \dots, \Gamma(\mathcal{A}_N)$ ، یعنی بین میدان‌های ویژگی مدل‌شده توسط کلاف‌های متناظر، نگاشت می‌کنند. در حالی که انواع میدان (یا قوانین تبدیل)  $(\mathcal{A}_i, c_i)$  برای کلاف‌های میانی  $\mathcal{A}_i := G \rightarrow GL(c_i)$  معمولاً باشد، توسعه کاربر به عنوان یک آبرپارامتر مشخص شوند، انواع میدان  $(\mathcal{A}_i, c_i, \rho_i)$  برای  $i = 1, \dots, N$  باشد. برای  $\rho_N : G \rightarrow GL(c_N)$  و  $\rho_1 : G \rightarrow GL(c_1)$ ، معمولاً توسعه وظیفه بادگیری تعیین می‌شوند. ساختار مازولار شبکه‌های عصبی اجازه می‌دهد تا توجه را به لایه‌های منفرد محدود کنیم که بین فضاهای ویژگی  $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N)$  و  $(\Gamma(\mathcal{A}_1), \dots, \Gamma(\mathcal{A}_N))$  با ابعاد  $c_1, \dots, c_N$  و نوع  $\rho_1, \dots, \rho_N$  نگاشت آنچه می‌دهند.

۸۳	.....	کانولوشن‌های GM با اندازه $1 \times 1$	۱.۷
۸۳	.....	کانولوشن‌های GM با اندازه $1 \times 1$ به عنوان M-مورفیسم‌های کلاف برداری	۱.۱.۷
۸۵	.....	کانولوشن‌های GM با اندازه $1 \times 1$ به عنوان مقاطع کلاف هومومورفیسم	۲.۱.۷
۸۷	.....	تبديلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM	۲.۷
۸۷	.....	میدان‌های کرنل	۱.۲.۷
۹۰	.....	تبديلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM	۲.۲.۷
۹۲	.....	تبديلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM در مختصات محلی	۳.۲.۷

هدف اصلی این بخش، معرفی کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM است که بلوک‌های سازنده اصلی شبکه‌های مستقل از مختصات روی میفلدهای ریمانی هستند. برای شروع، و برای معرفی مفاهیمی که بعداً مورد نیاز خواهد بود، ما در بخش ۱.۷ ایندا بر روی مورد ساده‌تر  $1 \times 1$ -مورفیسم‌های GM-تمرکز خواهیم کرد که کرنل‌های نقطه‌مانند را به کار می‌برند. بخش ۲.۷ تمرکز را به کانولوشن‌های GM و تبدیلات میدان کرنل با کرنل‌های با گستره فضایی مستقل می‌کند. آن‌ها بر حسب میدان‌های کرنل سراسری و هموار پارامتری می‌شوند که در بخش ۱.۲.۷ معرفی شده‌اند. میدان‌های کرنل کانولوشنی GM ملزم به اشتراک گذاری وزن‌ها بین موقعیت‌های مکانی مختلف هستند. برای اینکه این اشتراک گذاری وزن شده‌اند. میدان‌های کرنل کانولوشنی GM تبدیلات واقعی میدان کرنل و کانولوشن‌های GM در بخش ۲.۲.۷ معرفی می‌شوند. تعریف سراسری آن‌ها با جایگزینی عبارات مختصاتی محلی از بخش ۲.۴ با مختصاتی سراسری و مستقل از مختصات شان هدایت می‌شود. همانطور که در بخش ۲.۳ نشان داده شده است، این تعاریف مستقل از مختصات در بدیهی سازی‌های محلی به عبارات مختصاتی از بخش ۲.۴ کاهش می‌یابند.

## ۱.۷ کانولوشن‌های GM با اندازه $1 \times 1$

$1 \times 1$ -میدان‌های ویژگی ورودی  $f_{\text{out}} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{out}})$  را به میدان‌های ویژگی خروجی  $(f_{\text{in}})^\ast \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{in}})$  با نگاشت خطی  $p \in M$  بردار ویژگی ورودی منفرد  $f_{\text{out}}(p) \in \mathcal{A}_{\text{out},p} \cong \mathbb{R}^{c_{\text{out}}}$  به یک بردار ویژگی خروجی  $\mathcal{A}_{\text{in},p}$  در همان مکان نگاشت می‌کند. ویژگی کانولوشنی با اشتراک گذاری نگاشت خطی از  $\mathcal{A}_{\text{out},p}$  به  $\mathcal{A}_{\text{in},p}$  بین مکان‌های فضایی مختلف پیاده‌سازی می‌شود. با این حال، در حالی که فضاهای ویژگی  $\mathcal{A}_{\text{out},q}$  و همچنین  $\mathcal{A}_{\text{in},q}$  برای  $p, q \in M$  مختلف با یکدیگر ایزوپروف هستند، اگر گروه ساختار  $G$  در نظر گرفته شده غیربدیهی باشد، هیچ ایزوپروفیسم کانونی بین آنها وجود ندارد. بنابراین، مشخص نیست که چگونه نگاشت خطی می‌تواند بین مکان‌های مختلف به اشتراک گذاشته شود. همانطور که قبلاً در مقدمه این بخش اشاره شد، این مسئله با در نظر گرفتن کرنل‌های G-هم‌متغیر که نسبت به انتخاب خاص ایزوپروفیسم یا بیمانه‌ی تفاوت مستند، حل می‌شود. اختیاری بودن بدیهی سازی که از G-اطلس انتخاب می‌شود، استقلال از مختصات GM را در  $1 \times 1$ -مورفیسم‌های GM-معکس می‌کند.

از نظر ریاضی،  $1 \times 1$ -مورفیسم‌های GM-را می‌توان یا به عنوان M-مورفیسم‌های کلاف برداری خاص یا از طریق مقاطع متناظر کلاف‌های هومومورفیسم (الحقیقی)  $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{out}}, \mathcal{A}_{\text{in}})$  فرمول‌بندی کرد. از آنجایی که بعداً هر دو مفهوم نیاز داریم، هر دو دیدگاه را در بخش‌های بعدی ۱.۱.۷ و ۱.۲.۷ معرفی خواهیم کرد.

### ۱.۱.۷ کانولوشن‌های GM با اندازه $1 \times 1$ به عنوان M-مورفیسم‌های کلاف برداری

$1 \times 1$ -را می‌توان بر حسب M-مورفیسم‌های کلاف برداری هموار خاصی که وزن‌ها در موقعیت‌های مکانی به اشتراک گذارند، رسمی‌سازی کرد. با نادیده گرفتن الزام به اشتراک گذاری وزن‌ها در حال حاضر، چنین M-مورفیسم کلاف برداری  $\mathcal{C}$  یک نگاشت کلاف هموار است که نمودار جابجایی زیر را برآورده می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\text{out}} & \xrightarrow{\mathcal{C}} & \mathcal{A}_{\text{in}} \\ & \searrow \pi_{\mathcal{A}_{\text{out}}} & \swarrow \pi_{\mathcal{A}_{\text{in}}} \\ & M & \end{array} \quad (217)$$

جابجایی‌پذیری  $\mathcal{C}$  تضمین می‌کند که هر تار  $\mathcal{A}_{\text{out},p} \circ \mathcal{A}_{\text{out},p} = \mathcal{A}_{\text{in},p} \circ \mathcal{A}_{\text{in},p}$  روی همان نقطه  $p \in M$  نگاشت می‌شود (که باعث پیدایش «M» در عبارت M-مورفیسم می‌شود). به عنوان یک مورفیسم کلاف برداری، محدودیت  $\mathcal{C}|_p : \mathcal{A}_{\text{out},p} \rightarrow \mathcal{A}_{\text{in},p}$  به یک تار منفرد، علاوه بر این، به صورت خطی تعریف می‌شود. نسبت به یک بدیهی سازی محلی  $\Psi^A_{\mathcal{A}_{\text{out}}}$  از  $\mathcal{A}_{\text{out}}$  و  $\Psi^A_{\mathcal{A}_{\text{in}}}$  از  $\mathcal{A}_{\text{in}}$ ، نگاشت کلاف در هر نقطه  $p \in U^A$  توسط یک ماتریس نمایش داده می‌شود:

$$\mathcal{C}|_p := \psi^A_{\mathcal{A}_{\text{out}},p} \circ \mathcal{C}|_p \circ (\psi^A_{\mathcal{A}_{\text{out}},p})^{-1} \in \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}. \quad (218)$$

ارتباط آن با یک مختصاتی‌سازی دوم  $p \in U^A \cap U^B$  در  $\mathcal{C}^B$  به صورت زیر داده می‌شود:

$$\mathcal{C}^B|_p = \rho_{\text{□□}}(g_p^{BA}) \mathcal{C}^A|_p \rho_{\text{□□}}(g_p^{BA})^{-1}, \quad (219)$$

که از نمودار جابجایی زیر مشهود است:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}^A|_p & \\ \mathbb{R}^{c_{\square\square}} & \xleftarrow{\psi_{A_{\square\square}, p}^A} & \mathbb{R}^{c_{\square\square}} \\ \downarrow \rho_{\square\square}(g_p^{BA}) & & \downarrow \rho_{\square\square}(g_p^{BA}) \\ \mathcal{A}_{\square\square, p} & \xrightarrow{\mathcal{C}|_p} & \mathcal{A}_{\square\square\square, p} \\ \uparrow \psi_{A_{\square\square}, p}^B & & \downarrow \psi_{A_{\square\square\square}, p}^A \\ \mathbb{R}^{c_{\square\square}} & \xrightarrow{\psi_{A_{\square\square}, p}^B} & \mathbb{R}^{c_{\square\square}} \\ & \mathcal{C}^B|_p & \end{array} \quad (220)$$

نگاشت کلاف  $\mathcal{C}$  بر روی میدان‌های ویژگی ورودی  $f_{\square\square} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square})$  عمل می‌کند تا میدان‌های ویژگی خروجی تولید کند:

$$f_{\square\square\square} = \mathcal{C} \circ f_{\square\square} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}). \quad (221)$$

بر حسب یک نمودار جابجایی، این نگاشت به صورت زیر به تصویر کشیده می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\square\square} & \xrightarrow{\mathcal{C}} & \mathcal{A}_{\square\square\square} \\ \downarrow f_{\square\square} & & \downarrow f_{\square\square\square} \\ M & & \end{array}, \quad (222)$$

برای اینکه یک  $M$ -مورفیسم کلاف برداری  $\mathcal{C}_{K_{1\times 1}}$  نماینده یک  $1\times 1$ - $GM$ -کرنل باشد، باید بر حسب یک الگوی کرنل  $K_{1\times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}}$ -پارامتری شود که با مختصاتی‌سازی‌ها در تمام موقعیت‌های مکانی به اشتراک گذاشته شده است. همانطور که قبلاً بحث شد، برای تضمین استقلال از مختصات  $GM$ ، هیچ پیمانه خاصی نباید ترجیح داده شود. بنابراین لازم است که وزن‌ها با تمام بدیهی‌سازی‌های  $X \in \mathfrak{X}$  از  $G$ -اطلس  $\mathcal{A}^G$  به طور همزمان به اشتراک گذاشته شوند، یعنی لازم است:

$$\mathcal{C}_{K_{1\times 1}}^X|_p = K_{1\times 1} \quad \text{برای هر پیمانه } X \in \mathfrak{X} \text{ با } p \in U^X. \quad (223)$$

از رفتار تبدیل بین مختصاتی‌سازی‌های مختلف در معادله (219) نتیجه می‌شود که الگوی کرنل باید قید خطی زیر را برآورده کند:

$$\rho_{\square\square}(g) K_{1\times 1} \rho_{\square\square}(g)^{-1} = K_{1\times 1} \quad \forall g \in G, \quad (224)$$

یعنی، باید یک درهم تنnde (یک نگاشت خطی هم‌متغیر) باشد. فضای برداری

$$\text{Hom}_G(\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square}) := \left\{ K_{1\times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}} \mid K_{1\times 1} \rho_{\square\square}(g) = \rho_{\square\square}(g) K_{1\times 1} \quad \forall g \in G \right\} \quad (225)$$

نگاشت‌های درهم تنnde، فضای کرنل‌های  $1\times 1$ - $GM$ -استقلال از مختصات  $GM$  را به طور کامل مشخص می‌کند. همانطور که قبلاً در بخش ۱.۱.۴ ذکر شد، لم شور [؟] ایجاد می‌کند که الزام به اینکه  $K_{1\times 1}$  یک درهم تنnde باشد، از نگاشت بین میدان‌هایی که تحت نمایش‌های کاهش‌ناپذیر غیرایزوورف تبدیل می‌شوند، از طریق  $1\times 1$ - $GM$ -جلوگیری می‌کند. کانولوشن‌های عمومی تر  $GM$  با کرنل‌های با گستره فضایی، که در بخش ۲.۷ تعریف شده‌اند، این مسئله را حل خواهند کرد.

با این مقدمات، آمده‌ایم تا تعریف دقیقی از  $1\times 1$ - $GM$ -کرنل را ارائه دهیم:

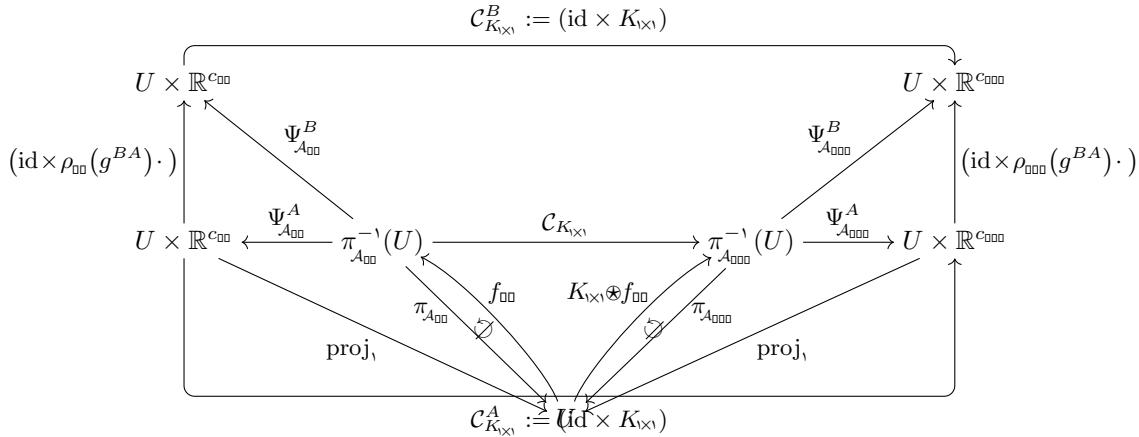
**تعریف ۲.۱  $1\times 1$ - $GM$ -کرنل**—یک نگاشت است

$$K_{1\times 1} \otimes : \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}), \quad f_{\square\square} \mapsto K_{1\times 1} \otimes f_{\square\square} := \mathcal{C}_{K_{1\times 1}} \circ f_{\square\square} \quad (226)$$

که توسط یک کرنل درهم تنnde  $1\times 1$ - $GM$ -یعنی  $K_{1\times 1} \in \text{Hom}_G(\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square})$  پارامتری می‌شود. در اینجا  $-M\mathcal{C}_{K_{1\times 1}}$ -مورفیسم کلاف برداری هموار منحصر به فرد بین  $\mathcal{A}_{\square\square}$  و  $\mathcal{A}_{\square\square\square}$  است که در پیمانه‌های دلخواه  $\psi_{A_{\square\square}, p}$  و  $\psi_{A_{\square\square\square}, p}$  از  $G$ -اطلس مورد نظر به صورت نقطه‌ای تعریف می‌شود:

$$\mathcal{C}_{K_{1\times 1}}|_p := \psi_{A_{\square\square}, p}^{-1} \circ K_{1\times 1} \circ \psi_{A_{\square\square}, p}. \quad (227)$$

استقلال از پیمانه‌های انتخاب شده (استقلال از مختصات  $GM$ ) با درهم تنnde بودن  $K_{1\times 1}$  تضمین می‌شود.



شکل ۳۰. مختصاتی‌سازی یک  $1 \times 1$ - $GM$  با اشتراک‌گذاری یک ماتریس کرنل  $C_{K_{1X1}}$ . ویژگی کانولوشنی با اشتراک‌گذاری یک ماتریس کرنل  $K_{1X1} \in \mathbb{R}^{c_{000} \times c_{00}}$  در موقعیت‌های مکانی مختلف  $p \in M$  در مورفیسم کدگذاری می‌شود. از آنجایی که هیچ پیمانه‌ای نباید ترجیح داده شود، کرنل علاوه بر این در بدیهی‌سازی‌های مختلف  $C_{K_{1X1}}^B$  و  $C_{K_{1X1}}^A$  به اشتراک گذاشته می‌شود. بنابراین، جابجایی پذیری نمودار برای هر انتخاب  $\Psi_{A_{000}}^A$ ,  $\Psi_{A_{000}}^B$  و  $\Psi_{A_{000}}^A$  قید  $\rho_{A_{000}}(g)K_{1X1}\rho_{A_{000}}(g)^{-1} = K_{1X1} \forall g \in G$  را اعمال می‌کند که ماتریس کرنل را به یک درهم تنده (یک نگاشت خطی هم‌متغیر) محدود می‌کند، یعنی  $[K_{1X1} \otimes f_{00}] \circ \pi_{A_{000}} \neq \text{id}_{A_{000}}$  و  $f_{00} \circ \pi_{A_{000}} \neq \text{id}_{A_{000}}$ . به جز  $K_{1X1} \in \text{Hom}_G(\rho_{A_{000}}, \rho_{A_{000}}) \subseteq \mathbb{R}^{c_{000} \times c_{00}}$  در شکل ۳۰ نمودار جابجایی پذیر است.

برای نشان دادن صریح استقلال از پیمانه انتخاب شده، هر بدیهی‌سازی مرتبه با  $G$  یعنی  $\psi_{A_{000}, p}$  را برای یک عنصر گروه ساختار دلخواه  $g \in G$  در نظر بگیرید، که ساختار

$$\begin{aligned} C_{K_{1X1}}|_p &= (\rho_{A_{000}}(g) \psi_{A_{000}, p})^{-1} \circ K_{1X1} \circ (\rho_{A_{000}}(g) \psi_{A_{000}, p}) \\ &= \psi_{A_{000}, p}^{-1} \circ (\rho_{A_{000}}(g)^{-1} K_{1X1} \rho_{A_{000}}(g)) \circ \psi_{A_{000}, p} \\ &= \psi_{A_{000}, p}^{-1} \circ K_{1X1} \circ \psi_{A_{000}, p} \end{aligned} \quad (228)$$

را نامتغیر باقی می‌گذارد. اینکه  $1 \times 1$ - $GM$ -تعریف شده به این شکل واقعاً به مقاطعی در  $(\mathcal{A}_{000}, \Gamma)$  نگاشت می‌شوند، از این واقعیت ناشی می‌شود که  $C_{K_{1X1}}$  یک نگاشت کلاف است. یک نمای کلی از مختصاتی‌سازی‌های محلی  $1 \times 1$ - $GM$ -در شکل ۳۰ آورده شده است.

## ۲.۱.۷ کانولوشن‌های $GM$ با اندازه $1 \times 1$ به عنوان مقاطع کلاف هومومورفیسم

در حالی که  $M$ -مورفیسم کلاف برداری با مختصاتی‌سازی‌های مستقل از پیمانه از تعریف ۷.۱ و شکل ۳۰ یک  $1 \times 1$ - $GM$ -را به طور کامل مشخص می‌کند، اکنون دیدگاه جایگزینی را اتخاذ می‌کنیم که  $1 \times 1$ - $GM$ -را بر حسب کلاف هومومورفیسم  $\text{Hom}(\mathcal{A}_{000}, \mathcal{A}_{000}) \xrightarrow{\pi_{000}} M$  توصیف می‌کند. برای این منظور، به یاد بیاورید که مورفیسم کلاف برداری  $C$  در معادله (۲۱۷) به نگاشت‌های خطی  $p \in M$  روی هر  $\mathcal{C}|_p : \mathcal{A}_{000, p} \rightarrow \mathcal{A}_{000, p}$  محدود می‌شود. مجموعه چنین نگاشت‌های خطی (یا هومومورفیسم‌های فضای برداری) بین  $\mathcal{A}_{000, p}$  و  $\mathcal{A}_{000, p}$  به صورت  $\text{Hom}(\mathcal{A}_{000, p}, \mathcal{A}_{000, p})$  نشان داده می‌شود. از آنجایی که این مجموعه تحت ترکیب‌های خطی بسته است، خود یک فضای برداری تشکیل می‌دهد. می‌توان نشان داد که اجتماع مجموعه این فضاهای هومومورفیسم، هنگامی که با نگاشت تصویر  $\pi_{000} : \text{Hom}(\mathcal{A}_{000}, \mathcal{A}_{000}) \rightarrow M$  که عناصر در  $\text{Hom}(\mathcal{A}_{000, p}, \mathcal{A}_{000, p})$  را به  $\text{Hom}(\mathcal{A}_{000, p}, \mathcal{A}_{000, p})$  تبدیل می‌فرستد و یک ساختار هموار القا شده از ساختار  $\mathcal{A}_{000}$  و  $\mathcal{A}_{000}$ ، مجهز شود، یک کلاف برداری، یعنی کلاف هومومورفیسم بین  $\mathcal{A}_{000}$  و  $\mathcal{A}_{000}$  را را تشکیل می‌دهد [؟]. تارهای روی  $p$  در رابطه  $\text{Hom}(\mathbb{R}^{c_{00} \times c_{00}}, \mathbb{R}^{c_{00} \times c_{00}}) \cong \mathbb{R}^{c_{00} \times c_{00}}$  صدق می‌کنند، به طوری که می‌توانیم تار نمونه‌ای را فضای برداری ماتریس‌های  $c_{00} \times c_{00}$  با مقادیر حقیقی در نظر بگیریم. بدیهی‌سازی‌های

$$\text{Hom}(\mathcal{A}_{000}, \mathcal{A}_{000}) := \coprod_{p \in M} \text{Hom}(\mathcal{A}_{000, p}, \mathcal{A}_{000, p}) \quad (229)$$

این فضاهای هومومورفیسم، هنگامی که با نگاشت تصویر  $\pi_{000} : \text{Hom}(\mathcal{A}_{000}, \mathcal{A}_{000}) \rightarrow M$  که عناصر در  $\text{Hom}(\mathcal{A}_{000, p}, \mathcal{A}_{000, p})$  را به  $\text{Hom}(\mathcal{A}_{000, p}, \mathcal{A}_{000, p})$  تبدیل می‌فرستد و یک ساختار هموار القا شده از ساختار  $\mathcal{A}_{000}$  و  $\mathcal{A}_{000}$ ، مجهز شود، یک کلاف برداری، یعنی کلاف هومومورفیسم بین  $\mathcal{A}_{000}$  و  $\mathcal{A}_{000}$  را را تشکیل می‌دهد [؟]. تارهای روی  $p$  در رابطه  $\text{Hom}(\mathbb{R}^{c_{00} \times c_{00}}, \mathbb{R}^{c_{00} \times c_{00}}) \cong \mathbb{R}^{c_{00} \times c_{00}}$  صدق می‌کنند، به طوری که می‌توانیم تار نمونه‌ای را فضای برداری ماتریس‌های  $c_{00} \times c_{00}$  با مقادیر حقیقی در نظر بگیریم. بدیهی‌سازی‌های

$$\Psi_{000} : \pi_{000}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^{c_{00} \times c_{00}}, \quad H \mapsto (p, \psi_{000, p}(H)), \quad (230)$$

$$\begin{array}{ccc}
& & (\text{id} \times \rho_{\square\square}(g^{BA}) \cdot) \\
& \swarrow \Psi_{\square\square}^B & \searrow \text{proj}, \\
\pi_{\square\square}^{-1}(U) & \xrightarrow{\quad \Psi_{\square\square}^A \quad} & U \times \underbrace{\text{Hom}_G(\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square})}_{\subseteq \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}}} \\
\uparrow \sigma_{K_{1\times 1}} & \nearrow \pi_{\square\square} & \uparrow \text{proj}, \\
& U &
\end{array}$$

(۲) بدیهی سازی ( $\mathcal{A}_{\square\square}, GM, TM$ ) از آنجایی که به  $\mathcal{A}_{\square\square}$  الحاقی است، نگاشتهای گذار کلاف همومورفیسم توسط همان  $\mathcal{A}_{\square\square}$  الحاقی است، مطالعه  $\mathcal{A}_{\square\square}$  در  $GM$ -هستند، دقیقاً آنهاست که به  $K_{1\times 1} \in \text{Hom}_G(\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square}) \subseteq \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}}$  عضو گروهی  $g^{BA}$  از گروه ساختار مشترک  $G$  تعیین می‌شوند (این را با شکل ۲۷ مقایسه کنید).  $M$ -مورفیسم‌های کلاف برداری بدون قید همانطور که در معادله (۲۱۷) نشان داده شده است، مطالعه با مقاطعه هموار بدون قید از  $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square})$  هستند.

شکل ۳۱: بدیهی سازی‌های محلی کلاف همومورفیسم  $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square})$ ، کلاف برداری نگاشتهای خطی بین فضاهای  $\mathcal{A}_{\square\square, p}$  و  $\mathcal{A}_{\square\square, p}$  برای هر  $p \in M$ . کلاف برداری نگاشتهای خطی بین  $\mathcal{A}_{\square\square, p}$  و  $\mathcal{A}_{\square\square, p}$  را به اختصار  $\mathcal{A}_{\square\square, p}$  نمودارها جایجاً پذیر هستند. طبق معمول  $U = U^A \cap U^B$  را به اختصار می‌نویسیم. به جز  $\pi_{\square\square} \circ \sigma_{K_{1\times 1}} \neq \text{id}_{\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square})}$ ، نمودارها جایجاً پذیر هستند.

که در آن  $(H) = p$  را به اختصار آورده‌ایم، از بدیهی سازی‌های  $\mathcal{A}_{\square\square}$  و  $\mathcal{A}_{\square\square}$  با تعریف

$$\psi_{\square\square, p}: \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square, p}, \mathcal{A}_{\square\square, p}) \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}}, \quad H \mapsto \psi_{\mathcal{A}_{\square\square, p}} \circ H \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\square\square, p}})^{-1} \quad (231)$$

به قیاس با معادلات (۲۱۸) و (۱۸) الگامی شوند. این به معنای نگاشتهای گذار

$$\begin{aligned}
H^B &= \psi_{\mathcal{A}_{\square\square, p}}^B \circ H \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\square\square, p}}^B)^{-1} \\
&= \psi_{\mathcal{A}_{\square\square, p}}^B \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\square\square, p}}^A)^{-1} H^A \psi_{\mathcal{A}_{\square\square, p}}^A \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\square\square, p}}^B)^{-1} \\
&= \rho_{\square\square}(g^{BA}) H^A \rho_{\square\square}(g^{BA})^{-1} \\
&=: \rho_{\square\square}(g^{BA}) H^A
\end{aligned} \quad (232)$$

بین پیمانه‌های  $\Psi_{\square\square}^A$  و  $\Psi_{\square\square}^B$  روی  $\mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}}$  است، که در آن برای راحتی نوشتاری، نمایش گروهی همومورفیسم  $\rho_{\square\square}: G \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}})$  را به عنوان ضرب چپ و راست با  $\rho_{\square\square} \circ \rho_{\square\square}$  معرفی کردیم.<sup>۵۸</sup> کلاف همومورفیسم  $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square})$  بنا به ساختار، به  $\mathcal{A}_{\square\square}$  الحاقی است، یعنی بدیهی سازی‌های آن به طور همزمان با بدیهی سازی‌های دیگر تبدیل می‌شوند. به عنوان یک کلاف برداری  $G$ -الحاقی، می‌توان آن را با  $\sim_{\rho_{\square\square}}/$  ( $GM \times \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}}$ ) شناسایی کرد. شکل ۳۱  $GM$ -های از بدیهی سازی‌های محلی  $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square})$  را نشان می‌دهد. به شباهت با بدیهی سازی‌های دیگر کلاف‌های  $G$ -الحاقی در شکل ۲۷ توجه کنید.

از دیدگاه کلاف‌های همومورفیسم، نگاشتهای کلاف بدون قید مانند معادله (۲۱۷) مطالعه با عمل مقاطعه کلاف همومورفیسم هموار بدون قید هستند

$$\sigma_{\text{Hom}}: M \mapsto \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square}) \quad \pi_{\square\square} \circ \sigma_{\text{Hom}} = \text{id}_M \quad (233)$$

که می‌توان آنها را به عنوان میدان‌های کرنل  $1 \times 1$  تفسیر کرد که وزن‌ها را به اشتراک نمی‌گذارند. وجود سراسری آنها با این واقعیت که  $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square})$  یک کلاف برداری است تفسیم می‌شود. مقاطعه مطالعه با  $1 \times 1$ -های  $GM$ -علاءه بر این نیاز دارد که تبدیلات خطی  $\sigma_{\text{Hom}}(p) \in \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square, p}, \mathcal{A}_{\square\square, p})$  توسط یک کرنل الگو  $K_{1\times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}}$  تعیین شوند که در موقعیت‌های مختلف  $p \in M$  و  $p \in \mathcal{A}_{\square\square}$  انتخاب پیمانه به اشتراک گذاشته شده است. بنابراین آنها را می‌توان برای هر  $p \in M$  به صورت زیر تعریف کرد

$$\sigma_{K_{1\times 1}}(p) := \psi_{\square\square, p}^{-1}(K_{1\times 1}), \quad K_{1\times 1} \in \text{Hom}_G(\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square}), \quad (234)$$

<sup>۵۸</sup> به طور کلی، یک کلاف همومورفیسم بین دو کلاف برداری غیرالحاقی با گروه‌های ساختار  $G_1$  و  $G_2$  یک گروه ساختار  $G_1 \times G_2$  خواهد داشت. از آنجایی که  $\mathcal{A}_{\square\square}$  و  $\mathcal{A}_{\square\square}$  الحاقی هستند، آنها به طور همزمان تحت همان گروه ساختار  $G = G_1 = G_2$  تبدیل می‌شوند به طوری که نگاشتهای گذار آنها در زیرگروه قطری  $G \times G$  مقدار می‌گیرند.

که در آن بدیهی سازی انتخاب شده  $\Psi$  دلخواه است اگر (و تنها اگر)  $K_{1 \times 1}$  قید درهم تمنه را برآورده کند

$$\rho_{\square}(g)K_{1 \times 1} = K_{1 \times 1} \quad \forall g \in G, \quad (235)$$

که معادل با معادله (۲۲۴) است.<sup>۵۹</sup> بی اهمیت بودن پیمانه در چنین مقاطعی در نمودار جابجایی در شکل ۳۱ به تصویر کشیده شده است (این را بدیهی سازی نگاشت کلاف معادل در شکل ۳۰ مقایسه کنید).

**ملاحظات پایانی:** یک لایه هموار  $K_{1 \times 1} \oplus \Gamma(\mathcal{A}_{\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square})$ ,  $f_{\square} \mapsto f_{\square} - \text{مقدار معمولی } GM$  را می توان به طور معادل از طریق یک نگاشت کلاف هموار به صورت  $f_{\square}(p) := \mathcal{C}_{K_{1 \times 1}} \circ f_{\square}(p)$  یا از طریق یک مقطع کلاف هومورفیسم هموار به صورت  $f_{\square}(p) := \sigma_{K_{1 \times 1}}(p) \circ f_{\square}(p)$  تعریف کرد. بنا به تعریف، هر دو در یک پیمانه دلخواه  $\Psi^A$  به  $K_{1 \times 1} f_{\square}(p) = K_{1 \times 1} f_{\square}^A(p)$  بدیهی سازی می شوند. استقلال از مختصات  $GM$  این تعریف با خاصیت درهم تمنه کرنل در معادله (۲۲۴) یا، به طور معادل، معادله (۲۳۵) تضمین می شود. این را می توان با در نظر گرفتن یک بدیهی سازی متفاوت از طریق  $\Psi^B$  مشاهده کرد:

$$\begin{aligned} K_{1 \times 1} f_{\square}(p) &= K_{1 \times 1} (\rho_{\square}(g_p^{BA}) f_{\square}^A(p)) \\ &= \rho_{\square}(g_p^{BA}) K_{1 \times 1} f_{\square}^A(p) \\ &= \rho_{\square}(g_p^{BA}) f_{\square}(p) \\ &= f_{\square}(p) \end{aligned} \quad (236)$$

## ۲.۷ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM

اکنون به سراغ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM با کرنل‌های (کانولوشنی) با گستره فضایی می‌رویم. بخش ۱.۲.۷ میدان‌های کرنل عمومی و بدون قید و میدان‌های کرنل کانولوشنی GM خاص‌تری را معرفی می‌کند که بر اساس یک کرنل الگوی مشترک و G-هدایت‌پذیر تعریف می‌شوند. تبدیلات میدان کرنل عمومی و کانولوشن‌های GM در بخش ۲.۲.۷ معرفی می‌شوند. از آنجایی که هر دو به صورت سراسری تعریف شده‌اند، فرمول‌بندی آنها لزوماً مستقل از مختصات است. بخش ۳.۲.۷ هر دو عمل را نسبت به بدیهی سازی‌های محلی بیان می‌کند و تعاریف محلی ما را از بخش ۲.۴ بازیابی می‌کند.

### ۱.۲.۷ میدان‌های کرنل مستقل از مختصات و کرنل‌های G-هدایت‌پذیر

برای تشخیص الگوهای فضایی در میدان‌های ویژگی، شبکه‌های کانولوشنی از کرنل‌های با گستره فضایی استفاده می‌کنند که به صورت خطی ویژگی‌ها را از یک همسایگی محلی در اطراف هر نقطه جمع‌آوری می‌کنند. در معادله (۷۰) ما کرنل‌های الگوی (بدون قید) را برای یک منیفلد  $d$ -بعدی و میدان‌های ویژگی ورودی و خروجی با ابعاد  $c_{\square}$  و  $c_{\square \square}$  به عنوان نگاشتهای  $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square} \times c_{\square}}$  تعریف کردیم که به هر نقطه از دامنه خود یک ماتریس  $c_{\square} \times c_{\square}$  از اختصاص می‌دهند. تعریف کرنل‌های کانولوشن به عنوان نگاشتهایی با دامنه  $\mathbb{R}^d \cong T_p M$  و هم‌دامنه  $\mathbb{R}^{c_{\square} \times c_{\square}} \cong \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square}, \mathcal{A}_{\square})$  یک تعریف مستقل از مختصات برای کرنل‌ها به عنوان نگاشتهایی بین فضاهای مماس و فضاهای هومورفیسم متناظر پیشنهاد می‌کند:

**تعریف ۲.۲ (میدان کرنل).** ما میدان‌های کرنل (بدون قید) از نوع  $\rho_{\square}$  را روی یک منیفلد  $M$  به عنوان  $M$ -مورفیسم‌های کلاف هموار بین کلاف مماس  $TM$  و کلاف هومورفیسم بردار ویژگی  $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square}, \mathcal{A}_{\square})$  تعریف می‌کیم. بر اساس تعریفش به عنوان یک  $M$ -مورفیسم، یک میدان کرنل  $\mathcal{K}$  باعث جابجایی نمودار زیر می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\mathcal{K}} & \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square}, \mathcal{A}_{\square}) \\ \pi_{TM} \searrow & & \swarrow \pi_{\square} \\ & M & \end{array} \quad (237)$$

با وجود نگاشت هموار بین دو کلاف برداری، فرض نمی‌شود که  $\mathcal{K}$  یک مورفیسم کلاف برداری باشد، یعنی، فرض نمی‌شود که محدودیت‌های  $\mathcal{K}_p : T_p M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square}, \mathcal{A}_{\square})$

<sup>۵۹</sup> همواری مورد نیاز مقطع از همواری بدیهی سازی‌های محلی ناشی می‌شود.

<sup>۶۰</sup> این نشان می‌دهد که کرنل‌های کانولوشن به طور کلی به عنوان نگاشتهای  $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square} \times c_{\square}}$  خطی نیستند. توجه داشته باشید که این با خطی بودن  $K(v) \in \mathbb{R}^{c_{\square} \times c_{\square}}$  به عنوان نگاشت  $\mathbb{R}^{c_{\square}} \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square}}$  برای هر  $v \in \mathbb{R}^d$  یا، در اینجا، خطی بودن  $\mathcal{K}_p(v) \in \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square}, \mathcal{A}_{\square})$  به عنوان نگاشت  $\mathcal{K}_p(v) \in T_p M$  تداخلی ندارد. برای هر  $v \in T_p M$   $\mathcal{K}_p(v) \rightarrow \mathcal{A}_{\square}$

نام میدان کرnel از این واقعیت ناشی می‌شود که نگاشتهای کلاف تعریف شده به این شکل  $\mathcal{K}_p$  یک کرnel مستقل از مختصات (بالقوه متفاوت) :  
 $T_p M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square}, \mathcal{A}_{\square})$  در عمل، کرnel های  $\mathcal{K}_p$  اغلب برای تشخیص الگوهای محلی در اطراف  $p$  طراحی می‌شوند و بنابراین فرض می‌شود که در اطراف مبدأ  $T_p M$  دارای تکیه گاه فشرده باشند.

یک کرnel مستقل از مختصات  $\mathcal{K}_p$  در  $p$  نسبت به پیمانه‌های  $\psi_{TM,p}^A$  و  $\psi_{\square,p}^A$  از  $G$ -اطلس‌ها توسط نگاشت زیر داده می‌شود:

$$\mathcal{K}_p^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square} \times c_{\square}}, \quad \mathcal{K}_p^A := \psi_{\square,p}^A \circ \mathcal{K}_p \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}. \quad (238)$$

شکل ۱۸ یک کرnel مستقل از مختصات روی  $T_p M$  و مختصاتی سازی‌های آن روی  $\mathbb{R}^d$  را نسبت به پیمانه‌های مختلف به تصویر می‌کشد. از نمودار جابجایی

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{K}_p^A & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathbb{R}^d & & & & \mathbb{R}^{c_{\square} \times c_{\square}} \\ & \downarrow \psi_{TM,p}^A & & \downarrow \psi_{\square,p}^A & \\ g_p^{BA} & \longrightarrow T_p M & \xrightarrow{\mathcal{K}_p} & \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square}|_p, \mathcal{A}_{\square}|_p) & \rho_{\square}(g_p^{BA}) \\ & \downarrow \psi_{TM,p}^B & & \downarrow \psi_{\square,p}^B & \\ & & \mathcal{K}_p^B & & \mathbb{R}^{c_{\square} \times c_{\square}} \end{array} \quad (239)$$

نتیجه می‌شود که مختصاتی سازی‌های مختلف کرnel با رابطه زیر به هم مرتبط هستند:

$$\mathcal{K}_p^B = \rho_{\square}(g_p^{BA}) \circ \mathcal{K}_p^A \circ (g_p^{BA})^{-1}. \quad (240)$$

توجه داشته باشید که این رابطه فقط استقلال از مختصات  $GM$  را ایجاد می‌کند اما کرnel مستقل از مختصات را به هیچ وجه محدود نمی‌کند. مانند قبل، وضعیت با اشتراک‌گذاری وزن‌ها در موقعیت‌های مکانی تغییر می‌کند.

برای اینکه یک میدان کرnel  $\mathcal{K}$  متاظر با یک کانون‌لوشن باشد، باید به طور کامل توسط یک کرnel الگوی واحد مشخص شود که در تمام موقعیت‌های مکانی به اشتراک‌گذارشده شده است. ما دوباره مجبوریم وزن‌ها را با تمام پیمانه‌های  $X \in \mathfrak{X}$  به طور همزمان به اشتراک‌گذاری وزن‌ها در نتیجه استقلال از مختصات  $GM$  را حفظ کنیم. همانطور که در بخش ۳.۲.۴ استدلال شد، روش مناسب برای اشتراک‌گذاری  $K$  با مختصاتی سازی‌های کرnel نرمال‌سازی با حجم قاب مرجع  $\sqrt{|\eta_p^X|}$  است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{K}_{K,p}^X = \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^X|}} \quad \text{برای هر پیمانه } X \in \mathfrak{X} \text{ با } p \in U^X. \quad (241)$$

دلیل وجود ضریب نرمال‌سازی قاب این است که کانون‌لوشن‌ها بعداً بر حسب انتگرال روی فضاهای مماس تعریف خواهند شد. بنابراین ما در واقع ملزم به اشتراک‌گذاری خود عملگر انتگرال در مختصاتی سازی‌های مختلف هستیم، که معادل با شناسایی معیارهای انتگرال‌گیری ماتریسی است. شکل اشتراک‌گذاری کرnel در معادله (۲۴۱) با  $\sqrt{|\eta_p^X|} d\vartheta$  برای هر پیمانه  $X \in \mathfrak{X}$  در  $M$  با یک معیار الگو  $d\vartheta$  است. شکل اشتراک‌گذاری کرnel در معادله (۲۴۱) با برابر قرار دادن هر دو عبارت به دست می‌آید.

همراه با رابطه  $\sqrt{|\eta_p^A|} = |\det(g_p^{BA})| \sqrt{|\eta_p^B|}$  بین حجم‌های قاب مختلف، قانون تبدیل کرnel در معادله (۲۴۰) و اشتراک‌گذاری وزن در معادله (۲۴۱) قید کرnel  $G$ -هدایت‌پذیر را ایجاد می‌کند:

$$\frac{1}{|\det g|} \rho_{\square}(g) \circ K \circ g^{-1} = K \quad \forall g \in G. \quad (242)$$

بنابراین کرnel‌های الگوی معتبر توسط نامتغیرهای تحت عمل پیمانه همزمان  $(\det g)^{-1}$ ،  $\rho_{\square}(g)$  و  $g^{-1}$  داده می‌شوند. با نوشتن نمایش  $\rho_{\square}$  که بر روی  $\mathbb{R}^{c_{\square} \times c_{\square}}$  از طریق ضرب با  $\rho_{\square}$  و  $\rho_{\square}^{-1}$  به ترتیب از چپ و راست عمل می‌کند، دیده می‌شود که قید در معادله (۲۴۲) معادل با قید در معادله (۸۳) است، یعنی  $K(g\vartheta) = |\det g|^{-1} \rho_{\square}(g) K(\vartheta) \rho_{\square}(g)^{-1} \forall g \in G, \vartheta \in \mathbb{R}^d$ .

ما این بیان‌ها را در قالب تعاریف زیر بیان می‌کنیم:

<sup>۱</sup> ما انتظار داریم که بتوان یک مفهوم خوش تعریف از کلاف‌های کرnel را تدوین کرد که مقاطع آنها در تناظر یک به یک با تعریف ما از میدان‌های کرnel به عنوان نگاشتهای کلاف باشند (این فرمول‌بندی مجدد، گذار از معادله (۲۱۷) به معادله (۲۳۳) را منعکس می‌کند).

**تعريف ۷.۳ (کرنل G-هدایت‌پذیر).** کرنل‌های  $G$ -هدایت‌پذیر با نامتغیر بودن‌شان تحت عمل پیمانه مشخص می‌شوند. فضای برداری کرنل‌های  $G$ -هدایت‌پذیر که بین انواع میدان  $\rho_{\square\square\square}$  و  $\rho_{\square\square\square\square\square\square}$  نگاشت می‌کنند، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{K}_{\rho_{\square\square\square}, \rho_{\square\square\square\square\square\square}}^G := \left\{ K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square\square\square} \times c_{\square\square\square}} \mid \frac{1}{|\det g|} \rho_{\square\square\square}(g) \circ K \circ g^{-1} = K \quad \forall g \in G \right\}, \quad (243)$$

$$= \left\{ K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square\square\square} \times c_{\square\square\square}} \mid \frac{1}{|\det g|} \rho_{\square\square\square}(g) K(g^{-1}\mathfrak{v}) \rho_{\square\square\square}(g)^{-1} = K(\mathfrak{v}) \quad \forall g \in G, \mathfrak{v} \in \mathbb{R}^d \right\}, \quad (244)$$

که در آن  $(\rho_{\square\square\square}(g)H\rho_{\square\square\square}(g))$  برای هر  $G \leq \mathrm{GL}(d)$  و  $H \in \mathbb{R}^{c_{\square\square\square} \times c_{\square\square\square}}$  است. نامتغیر بودن پیمانه‌ای کرنل‌های  $G$ -هدایت‌پذیر امکان اشتراک‌گذاری وزن مستقل از مختصات  $GM$  را فراهم می‌کند.

کرنل‌های  $G$ -هدایت‌پذیر در [؟] به یادگیری عمیق هم‌متغیر معرفی شدند، جایی که گروه‌های متناهی فرض شده بودند. فرمول‌بندی فعلی در تعریف ۷.۳ در [؟] پیشنهاد شد. یک راه حل کامل برای فضاهای کرنل  $G$ -هدایت‌پذیر برای نمایش‌های دلخواه  $\rho_{\square\square\square}$  و  $\rho_{\square\square\square\square\square\square}$  از گروه‌های ساختار ۲ در [؟] است. یک پیاده‌سازی به صورت عمومی در <https://quva-lab.github.io/e2cnn/api/e2cnn.kernels.html> در دسترس است. از نظر ریاضی، کرنل‌های هدایت‌پذیر معادل با عملگرهای نمایشی مانند تانسور کروی از مکانیک کواترومی هستند. یک تعمیم از قضیه ویگنر-اکارت کرنل‌های  $G$ -هدایت‌پذیر را به عنوان ترکیبی از توابع پایه هارمونیک، ضرایب کلیش-گوردان و اندومورفیسم‌های نمایش‌های کاهش‌نپذیر توصیف می‌کند [؟].

**تعريف ۷.۴ (میدان کرنل کانولوشنی GM).** یک میدان کرنل کانولوشنی  $K_K GM$  از نوع  $\rho_{\square\square\square}$  یک میدان کرنل است که توسط یک کرنل الگوی  $G$ -هدایت‌پذیر و مشترک  $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\square\square\square}, \rho_{\square\square\square}}^G$  تعیین می‌شود. این میدان در پیمانه‌های دلخواه  $\psi_{TM,p}^X$  و  $\psi_p^X$  از  $G$ -اطلس مورد نظر به صورت نقطه‌ای تعریف می‌شود:

$$\mathcal{K}_{K,p} := (\psi_{\square\square\square,p}^X)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^X|}} \circ \psi_{TM,p}^X \quad (245)$$

همواری  $\mathcal{K}_K$  از همواری پیمانه‌ها، متريک و کرنل الگو ناشی می‌شود.

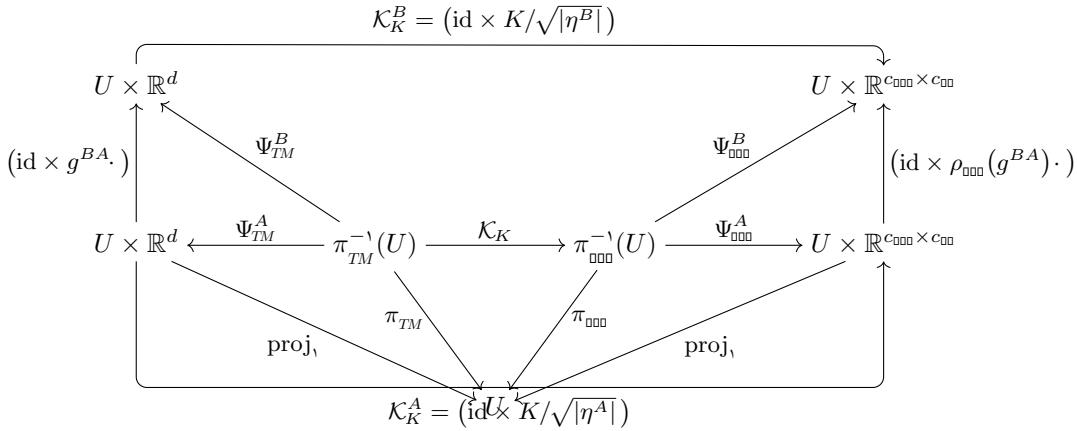
همانند مورد  $1 \times 1$   $GM$ -هدایت‌پذیری بودن انتخاب خاص پیمانه در معادله (۲۴۵) و بنابراین استقلال از مختصات  $GM$  تعریف  $\square$  با  $G$ -هدایت‌پذیری  $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\square\square\square}, \rho_{\square\square\square}}^G$  تعیین می‌شود. برای نشان دادن این موضوع به طور صریح، می‌توان میدان کرنل را نسبت به یک پیمانه  $B$  تعریف کرد و سپس یک تبدیل به هو پیمانه دیگر  $A$  اعمال کرد، که حذف می‌شود و بنابراین به یک عبارت معادل منجر می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{K,p} &= (\psi_{\square\square\square,p}^B)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^B|}} \circ \psi_{TM,p}^B \\ &= (\rho_{\square\square\square}(g_p^{BA}) \psi_{\square\square\square,p}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^A|} / |\det(g_p^{BA})|} \circ (g_p^{BA} \cdot \psi_{TM,p}^A) \\ &= (\psi_{\square\square\square,p}^A)^{-1} \circ \frac{|\det(g_p^{BA})| \rho_{\square\square\square}(g_p^{BA})^{-1} \circ K \circ g_p^{BA}}{\sqrt{|\eta_p^A|}} \circ \psi_{TM,p}^A \\ &= (\psi_{\square\square\square,p}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^A|}} \circ \psi_{TM,p}^A \end{aligned} \quad (246)$$

شکل ۳۲ یک نمای کلی از بدیهی‌سازی‌های محلی میدان‌های کرنل کانولوشنی  $GM$  را در قالب یک نمودار جابجایی ارائه می‌دهد.

توجه داشته باشید که قید  $G$ -هدایت‌پذیری در معادله (۲۴۳) یا (۲۴۴) هنگام ارزیابی در مبدأ  $= 0$  از  $\mathbb{R}^d$  که تحت عمل هر  $g \in G$  نامتغیر است، به قید روی کرنل‌های  $1 \times 1$   $GM$ -هدایت‌پذیری در معادله (۲۴۵) یا (۲۴۶) کاهش می‌یابد. بنابراین، نتایج مربوط به  $1 \times 1$   $GM$ -هدایت‌پذیری که در بخش قبل استخراج شدند، به عنوان یک مورد خاص برای انتخاب کرنل‌های نقطه‌مانند دیده می‌شوند.<sup>۶۲</sup> ما همچنین می‌خواهیم ذکر کنیم که قید روی کرنل‌های با گستره فضایی به طور کلی نیازی ندارد که هم‌دامنه آنها به  $(\rho_{\square\square\square}, \rho_{\square\square\square\square\square\square})$   $\mathrm{Hom}_G$  یعنی فضای درهم‌تننده‌ها، محدود شود. برخلاف  $1 \times 1$   $GM$ -هدایت‌پذیری، این به کانولوشن‌های  $GM$  با کرنل‌های با گستره فضایی اجازه می‌دهد تا بین میدان‌هایی که طبق نمایش‌های کاهش‌نپذیر غیرایزومنوف تبدیل می‌شوند، نگاشت انجام دهنند.

<sup>۶۲</sup> برای دقیق کردن این گزاره، باید تعریف ۷.۳ را به توزیع‌های با مقدار عملگری تعمیم داد و کرنل‌های  $1 \times 1$   $GM$ -هدایت‌پذیر را به عنوان دلتهای دیراک با مقدار عملگری تعریف کرد. ما در اینجا برای اختصار از این تعمیم صرف نظر می‌کیم.



شکل ۷.۴۲: نمودار جابجایی که بدینه سازی‌های محلی یک میدان کرنل کانولوشنی  $GM$  یعنی  $\mathcal{K}_K$  را همانطور که در تعریف ۷.۴ تعریف شده است، نشان می‌دهد. اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی مستلزم آن است که عبارت مختصاتی میدان کرنل  $\mathcal{K}_K$  در هر نقطه  $X \in M$  و هر پیمانه  $p \in p$  در توسعه کرنل الگوی مشترک  $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$  به صورت  $K = K / \sqrt{|\eta_p^X|}$  تعیین شود. جابجایی‌پذیری نمودار سپس قید G-هدایت‌پذیری  $G$  را بر روی فضای  $\mathcal{K}_{p_{\text{out}}, p_{\text{in}}}^G$  از کرنل‌های الگو ایجاب می‌کند. ما می‌خواهیم تأکید کیم که، با وجود شاهست به نمودار در شکل ۷.۰، نمودار در این شکل باید به عنوان مشابه نمودار در شکل ۳.۱ دیده شود. تفاوت بین نمودار فعلی و نمودار در شکل ۳.۱ این است که نگاشتهای خطی در کلاف همومorfیسم از طریق  $(\mathcal{A}_{\text{out}}, \mathcal{A}_{\text{in}}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{out}}, \mathcal{A}_{\text{in}})$  توسط یک نظریه از کلاف مimas به جای مقطع  $\sigma_{K_{\text{out}}} : M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{out}}, \mathcal{A}_{\text{in}})$  تعیین می‌شوند.

## ۷.۲.۷ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM

با تعریف هر دو میدان ویژگی و میدان کرنل، آماده معرفی تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های  $GM$  هستیم. آنها به صورت نقطه‌ای بر حسب عملگرهای انتگرالی تعیین شوند که بردارهای ویژگی خروجی  $f(p)$  را در نقاط  $p \in M$  با تطبیق کرنل  $\mathcal{K}_p$  در  $p$  با میدان ویژگی  $f$  «همانطور که از  $p$  دیده می‌شود» محاسبه می‌کنند.

نمایش محلی یک میدان ورویدی «همانطور که از  $p$  دیده می‌شود» به طور رسمی توسط پولبک منتقل کننده آن داده می‌شود که در شکل ۷.۱۷ به تصویر کشیده شده است. این به عنوان پولبک معمول از  $TM$  به  $M$  از طریق نگاشت نمایی ریمانی تعیین شود<sup>۳۹</sup> با کاربرد اضافی یک منتقل کننده موازی (معادله (۲۱۲)), که برای بیان ویژگی‌های پولبک شده در  $\mathcal{A}_{\text{out}, \exp(v)}$  به عنوان ویژگی در  $v$  است. با نشان دادن این منتقل کننده موازی در امتداد مسیر ژئودزیک  $\gamma_v(t) = \exp(v)(t) = \exp((1-t)v + t\gamma_v)$  با

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}, p \leftarrow \exp(v)} : \mathcal{A}_{\exp(v)} \rightarrow \mathcal{A}_p, \quad (247)$$

ما نمایش‌های میدان ویژگی پولبک شده را روی فضاهای مimas به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

**تعریف ۷.۵ (بولبک منتقل کننده میدان ویژگی به  $TM$ )** با داشتن یک میدان ویژگی  $f \in \Gamma(\mathcal{A})$ ، ما نمایش (زاده) آن را روی کلاف مimas به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{Exp}^* f : TM \rightarrow \mathcal{A}, \quad v \mapsto \mathcal{P}_{\mathcal{A}, \pi_{TM}(v) \leftarrow \exp(v)} \circ f \circ \exp(v). \quad (248)$$

نگاشت نمایی ریمانی  $\exp$  در اینجا متاظر با اتصال لوی-چیویتا است، در حالی که منتقل کننده  $\mathcal{P}_{\mathcal{A}, \pi_{TM}(v) \leftarrow \exp(v)}$  به یک اتصال  $G$ -سازگار متکی است؛ به بخش‌های ۳.۳ و ۵.۶ مراجعه کنید.

<sup>۳۹</sup> مانگاشت نمایی را روی کل کلاف مimas به صورت  $\exp(v) : TM \rightarrow M$ ,  $v \mapsto \exp_{\pi_{TM}(v)}(v)$  تعریف می‌کنیم. به باد بیاورید که ما فرض کردیم منیفلد از نظر ژئودزیکی کامل است، به طوری که نگاشت نمایی روی کل کلاف مimas خوش تعریف است (و اگر این فرض برقرار نباشد به صفر-پوشانی متولّ می‌شوند).

از ساختار مشخص است که  $\text{Exp}^*f(v) \in \mathcal{A}_p$  برای هر  $v \in T_p M$  مورفیسم کلاف است که نمودار جابجایی زیر را برآورده می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\text{Exp}^*f} & \mathcal{A} \\ \pi_{TM} \searrow & & \swarrow \pi_A \\ & M & \end{array} \quad (249)$$

با وجود نگاشت هموار بین دو کلاف برداری، فرض نمی‌شود که  $\text{Exp}^*f$  یک مورفیسم کلاف برداری باشد، یعنی، محدودیت‌های  $\text{Exp}_p^*f : \text{Exp}^*f|_{T_p M}$  معمولاً خطی نیستند.

محدودیت  $\text{Exp}_p^*f := \text{Exp}^*f|_{T_p M}$  دامنه پولبک منتقل کننده به  $T_p M$  میدان ویژگی را از دیدگاه یک ناظر در  $p$  همانطور که در شکل ۱۷ نشان داده شده است، ثبت می‌کند. توجه داشته باشید که این تعریف شیوه‌یه به یک نمایش محلی از میدان ویژگی بر حسب مختصات نرمال ژئودزیک است، با این تفاوت که به شاعر یکنواخت نمایی محدود نمی‌شود.<sup>۶۴</sup> ما ممچنین می‌خواهیم ذکر کنیم که منتقل کننده ممکن است با هر ایزومورفیسم دیگری بین  $\mathcal{A}_{\exp(v)}$  و  $\mathcal{A}_p$  جایگزین شود، همانطور که به عنوان مثال در [۳] انجام شده است.

همانطور که قلاً بیان شد، تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های  $GM$  به عنوان تطبیق نمایش‌های میدان ویژگی محلی روی فضاهای مماس با کرنل‌ها تعریف می‌شوند. در راستای این تعاریف، توجه داشته باشید که  $M$ -مورفیسم‌های کلاف کرنل‌ها ( $TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\bullet\bullet\bullet}, \mathcal{A}_{\bullet\bullet\bullet})$ ) و نمایش‌های میدان محلی  $\mathcal{A}_{\bullet\bullet\bullet} : TM \rightarrow \mathcal{A}_{\bullet\bullet\bullet}$  را می‌توان برای ایجاد یک  $M$ -مورفیسم (غیرخطی) دیگر از  $TM$  ترکیب کرد.

$$\begin{array}{ccccc} TM & \xrightarrow{\mathcal{K} \times \text{Exp}^*f_{\bullet\bullet\bullet}} & \text{Hom}(\mathcal{A}_{\bullet\bullet\bullet}, \mathcal{A}_{\bullet\bullet\bullet}) \times \mathcal{A}_{\bullet\bullet\bullet} & \xrightarrow{\text{ev}} & \mathcal{A}_{\bullet\bullet\bullet} \\ & \searrow \pi_{TM} & & \nearrow \pi_{\mathcal{A}_{\bullet\bullet\bullet}} & \\ & & M & & \end{array} , \quad (250)$$

که در آن  $(\mathcal{K}(v), \text{Exp}^*f_{\bullet\bullet\bullet}(v)) \mapsto \mathcal{K}(v)$  است. تبدیلات میدان کرنل بردارهای ویژگی خروجی را در  $p$  با انتگرال‌گیری از این حاصلضرب کرنل‌ها و میدان‌های ورودی روی فضای مماس مربوطه محاسبه می‌کنند:

**تعریف ۲.۶ (تبدیل میدان کرنل).** فرض کنید  $\mathcal{K}$  هر میدان کرنل همواری باشد. تبدیل میدان کرنل متناظر، یک تبدیل انتگرالی هموار است

$$\mathcal{T}_{\mathcal{K}} : \Gamma(\mathcal{A}_{\bullet\bullet\bullet}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\bullet\bullet\bullet}) \quad (251)$$

که به صورت نقطه‌ای تعریف می‌شود:<sup>۶۵</sup>

$$[\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f_{\bullet\bullet\bullet})](p) := \int_{T_p M} \mathcal{K}(v) \text{Exp}^*f_{\bullet\bullet\bullet}(v) dv = \int_{T_p M} \mathcal{K}(v) \mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\bullet\bullet\bullet}, p \leftarrow \exp_p v} f_{\bullet\bullet\bullet}(\exp_p v) dv . \quad (252)$$

برای خوش تعریف بودن، انتگرال باید وجود داشته باشد و میدان خروجی حاصل  $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f)$  باید هموار باشد. این مستلزم آن است که  $\mathcal{K}$  به طور مناسب انتخاب شود، به عنوان مثال، با فرض اینکه به سرعت کاهش باید یا دارای تکیه‌گاه فشرده باشد.

توجه داشته باشید که تبدیلات میدان کرنل عمومی لزوماً کانولوشن‌ها را مدل نمی‌کنند زیرا فرض نمی‌کنند که وزن‌ها (کرنل‌ها) بین موقعیت‌های مکانی به اشتراک گذاشته شوند. چنین تبدیلات میدان کرنل عمومی در بخش ۸ مفید خواهد بود، جایی که ما یک الزام برای اشتراک گذاری وزن مکانی را از الزام به هم‌متغیری ایزو‌متریک استخراج می‌کنیم.

پیوست چ وجود و همواری تبدیلات میدان کرنل را مورد بحث قرار می‌دهد. یک شرط کافی برای خوش تعریف بودن تبدیلات میدان کرنل، محدود کردن تکیه‌گاه‌های کرنل به گویه‌هایی با شاعر ثابت  $R > 0$  است:

**قضیه ۲.۷ (وجود تبدیل میدان کرنل برای کرنل‌های با تکیه‌گاه فشرده).** فرض کنید  $\mathcal{K}$  یک میدان کرنل باشد که کرنل‌های منفرد آن در هر  $p \in M$  (حداکثر) روی یک گوی بسته با شاعر  $R > 0$  در اطراف مبدأ  $T_p M$  تکیه‌گاه دارند، یعنی،

$$\text{supp}(\mathcal{K}_p) \subseteq \{v \in T_p M \mid \|v\| \leq R\} \quad \forall p \in M . \quad (253)$$

<sup>۶۴</sup> بنابراین هر بردار ویژگی  $(q)$  ممکن است چندین بار در همان فضای مماس  $T_p M$  نمایش داده شود، یک بار برای هر  $v \in T_p M$  با  $\exp(v) = q$  و یک بار برای هر  $v \in T_p M$  با  $\exp(v) = q$ . اگر این مطلوب نباشد، می‌توان تکیه‌گاه کرنل را به شاعر یکنواخت نگاشت نمایی محدود کرد، به طوری که فقط نزدیکترین رخداد از نظر ژئودزیکی اندازه گیری شود.

<sup>۶۵</sup> انتگرال‌گیری روی  $T_p M$  از طریق چگالی حجم ریمانی  $dv$  در پیوست پ بحث شده است.

سپس تضمین می‌شود که تبدیل میدان کرnel متناظر  $\mathcal{K}$  خوش‌تعریف است، یعنی انگرال در معادله (۲۵۲) وجود دارد و میدان خروجی  $f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square})$  برای هر میدان ورودی هموار است.

□ اثبات: به پیوست‌های چ و چ.۱ مراجعه کنید.

الرام به محدود کردن تکیه‌گاه کرnel به یک گوی بسته با شعاع معین، یک رویه معمول در یادگیری عمیق است. با این حال، توجه داشته باشید که یک کرnel با تکیه‌گاه فشرده با کانولوشن‌های هم‌متغیر نسبت به مقیاس در تضاد است، که طبق قیود کرnel  $G$ -هدایت‌پذیر مربوطه، به کرnel‌هایی با گستره بی‌نهایت نیاز دارند. پیاده‌سازی‌های فعلی کانولوشن‌های هم‌متغیر نسبت به مقیاس معمولاً فضاهای کرnel هم‌متغیر نسبت به مقیاس را با محدود کردن تکیه‌گاه آنها تقریب می‌زنند [۴۴۴۴۴۴] و بنابراین تحت پوشش قضیه ۷.۷ قرار می‌گیرند.

بر اساس تبدیلات میدان کرnel عمومی، ما کانولوشن‌های  $GM$  مستقل از مختصات را با افزودن فرض اشتراک‌گذاری وزن مکانی تعریف می‌کیم، یعنی با فرض میدان‌های کرnel کانولوشنی  $GM$ :

**تعریف ۷.۸ (کانولوشن  $GM$ )**. فرض کنید  $\mathcal{A}_{\square\square\square}$  و  $\mathcal{A}_{\square\square\square}$  کلاف‌های بردار ویژگی  $G$ -الحافی با انواع  $\rho_{\square\square\square}$  و  $\rho_{\square\square\square}$  باشند. ما کانولوشن  $GM$  را با یک کرnel  $G$ -هدایت‌پذیر  $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\square\square\square}, \rho_{\square\square\square}}^G$  معرفی می‌کیم:

$$K \star : \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}), \quad f_{\square\square\square} \mapsto K \star f_{\square\square\square} := \mathcal{J}_{K_K}(f_{\square\square\square}) = \int_{T_p M} \mathcal{K}_K(v) \operatorname{Exp}^* f_{\square\square\square}(v) dv \quad (254)$$

از آنجایی که کانولوشن‌های  $GM$  هیچ قاب مرجعی را در  $G$ -ساختار ترجیح نمی‌دهند، تضمین می‌شود که استنتاج خود را بروی تمام «وضعیت‌های» الگوهایی که با عمل گروه ساختار  $G$  مرتبط هستند، تعمیم دهن؛ به معادله (۸۹) و شکل ۱۹ مراجعه کنید.

### ۳.۲.۷ تبدیلات میدان کرnel و کانولوشن‌های $GM$ در مختصات محلی

آنچه باقی مانده است این است که نشان دهیم تعاریف مستقل از مختصات پولبک‌های منتقل کننده، تبدیلات میدان کرnel و کانولوشن‌های  $GM$  در این بخش معرفی شدند، هنگام بیان نسبت به یک بدیهی‌سازی محلی، به عبارات مختصاتی از بخش ۲.۴ کاهش می‌یابند.

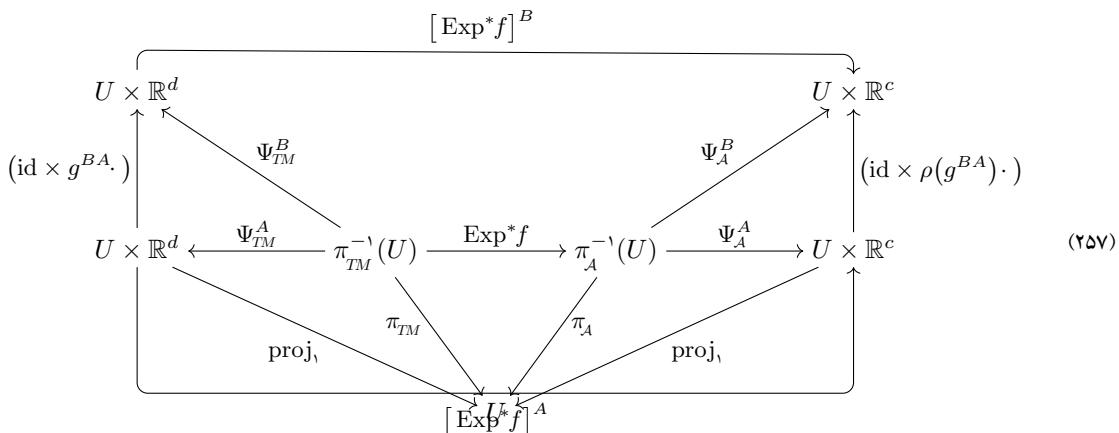
عارضت مختصاتی محلی پولبک منتقل کننده  $\operatorname{Exp}^* f$  از یک میدان ویژگی  $f$ ، طبق معمول، با پیش- و پس-ترکیب آن با بدیهی‌سازی‌های محلی کلاف‌های متناظر تعریف می‌شود، یعنی:

$$\begin{aligned} [\operatorname{Exp}^* f]^A : U \times \mathbb{R}^d &\rightarrow U \times \mathbb{R}^c, \quad (p, v) \mapsto \Psi_A^A \circ \operatorname{Exp}^* f \circ (\Psi_{TM}^A)^{-1}(p, v) \\ &= (p, \psi_{A,p}^A \circ \operatorname{Exp}_p^* f \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(v)) \end{aligned} \quad (255)$$

از این تعریف دیده می‌شود که تبدیلات پیمانه محلی در  $p \in M$  به صورت زیر داده می‌شوند:

$$[\operatorname{Exp}_p^* f]^B = \rho(g_p^{BA}) \circ [\operatorname{Exp}_p^* f]^A \circ (g_p^{BA})^{-1}. \quad (256)$$

ما این عبارات مختصاتی را در قالب یک نمودار جاچایی به تصویر می‌کشیم، که بسیار شبیه به نمودار بدیهی‌سازی‌های محلی میدان‌های کرnel در شکل ۳۲ است:



برای پیاده‌سازی، مفید است که عبارت مختصاتی پول‌بک منتقل کننده را به اجزای منفرد آن، یعنی منتقل کننده  $\mathcal{P}_{\mathcal{A}, p \leftarrow \exp(v)}$ ، میدان ویژگی  $f$  و نگاشت نمایی  $\exp$ ، تجزیه کنیم. این کار با بسط دادن آن با یک همانی به شکل  $\text{id}_{\mathcal{A}_{\exp(v)}} = (\psi_{\mathcal{A}, \exp(v)}^{\tilde{A}})^{-1} \circ \psi_{\mathcal{A}, \exp(v)}^{\tilde{A}}$  انجام می‌شود، که در آن انتخاب پیمانه  $\tilde{A}$  در  $\exp(v)$  بی‌اهمیت است زیرا در نهایت حذف می‌شود:

$$\begin{aligned} [\text{Exp}_p^* f]^A(v) &= [\psi_{\mathcal{A}, p}^A \circ \text{Exp}_p^* f \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}] (v) \\ &= \psi_{\mathcal{A}, p}^A \circ \mathcal{P}_{\mathcal{A}, p \leftarrow \exp(v)} \circ f(\exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v)) \\ &= \psi_{\mathcal{A}, p}^A \circ \mathcal{P}_{\mathcal{A}, p \leftarrow \exp(v)} \circ (\psi_{\mathcal{A}, \exp(v)}^{\tilde{A}})^{-1} \circ \psi_{\mathcal{A}, \exp(v)}^{\tilde{A}} \circ f(\exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v)) \\ &= \rho(g_{p \leftarrow \exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v)}^{A \tilde{A}}) \cdot f^{\tilde{A}}(\exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v)) \end{aligned} \quad (258)$$

همانطور که انتظار می‌رفت، ما تعریف خود را از معادله (۶۷) در بخش ۱.۲.۴ بازیابی می‌کنیم، که تأیید می‌کند تعریف ۷.۵ در واقع همتای مستقل از مختصات آن است.

عبارت مختصاتی یک تبدیل میدان کرنل، که با معادله (۷۶) در بخش ۱.۲.۴ منطبق است، توسط قضیه زیر داده می‌شود: **قضیه ۷.۹ (تبدیل میدان کرنل در مختصات).** نسبت به یک پیمانه  $A$  در  $p \in U^A$ ، تبدیل میدان کرنل با عبارت مختصاتی زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} [\mathcal{T}_K(f_{\square\square})]^A(p) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) \rho(g_{p \leftarrow \exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v^A)}^{A \tilde{A}}) \cdot f_{\square\square}^{\tilde{A}}(\exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v^A)) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A, \end{aligned} \quad (259)$$

که در آن پیمانه‌های  $\tilde{A}$  در  $\exp(v)$  به طور دلخواه انتخاب می‌شوند.<sup>۶۶</sup>

اثبات: عبارت اول با یک محاسبه ساده که تمام مقادیر در گیر را به عبارات مختصاتی متناظر شان ترجمه می‌کند، استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} &[\mathcal{T}_K(f_{\square\square})]^A(p) \\ &\stackrel{(1)}{=} \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^A [\mathcal{T}_K(f_{\square\square})](p) \\ &\stackrel{(2)}{=} \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^A \int_{T_p M} \mathcal{K}_p(v) [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}](v) dv \\ &\stackrel{(3)}{=} \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^A \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p((\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v^A)) [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]((\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v^A)) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &\stackrel{(4)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} [\psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^A \circ \mathcal{K}_p((\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v^A)) \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^A)^{-1}] [\psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^A \circ [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}] \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}](v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &\stackrel{(5)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} [\psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^A \circ \mathcal{K}_p \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}](v^A) [\psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^A \circ [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}] \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}](v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &\stackrel{(6)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \end{aligned} \quad (260)$$

مرحله (۱) بردار ویژگی خروجی در  $p$  را به طور صریح بر حسب پیمانه  $\psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^A$  بیان می‌کند که بر روی تبدیل میدان کرنل مستقل از مختصات عمل می‌کند. این عبارت مستقل از مختصات در مرحله (۲) همانطور که در تعریف ۷.۶ تعریف شده است، بسط داده می‌شود. مرحله (۳) انتگرال

<sup>۶۶</sup> توجه داشته باشید که پیمانه‌ها در  $\exp(v)$  ممکن است برای  $v \in T_p M$  مختلف متفاوت باشند و باید به طور صحیح تر با  $\tilde{A}_v$  برچسب گذاری شوند. ما برای اختصار از این وابستگی چشم‌پوشی می‌کنیم.

روی  $T_p M$  را از طریق پیمانه انتخاب شده به  $\mathbb{R}^d$  بازمی‌گرداند، که با جزئیات بیشتر در پیوست پ توصیف شده است. مرحله (۴) یک نگاشت همانی به شکل  $\text{id} = (\psi_{A_{\square}, p}^A)^{-1} \circ \psi_{A_{\square}, p}^A$  را وارد می‌کند و  $\psi_{A_{\square}, p}^A$  را به داخل انتگرال می‌برد در حالی که مرحله (۵) تعریف  $\psi_{A_{\square}, p}^A$  را از معادله (۲۳۱) شناسایی می‌کند. در نهایت، معبارات مختصاتی  $K_p f$  را از معادلات (۲۳۸) و (۲۵۵) شناسایی می‌کنیم.

عبارت دوم از عبارت اول با بسط دادن عبارت مختصاتی پول بک منتقل کننده طبق معادله (۲۵۸) به دست می‌آید.

عبارت مختصاتی برای کانولوشن‌های  $GM$  مستقل از مختصات بلافصله به دست می‌آید:

**قضیه ۷.۱۰ (کانولوشن‌های  $GM$  در مختصات).** یک کانولوشن  $GM$  مستقل از مختصات  $(A_{\square}) \rightarrow \Gamma(A_{\square})$  با یک کرنل  $K \star : \Gamma(A_{\square}) \rightarrow \Gamma(A_{\square})$  نسبت به یک پیمانه  $A$  در  $p \in U^A$  به صورت زیر داده می‌شود:

$$[K \star f]^A(p) = [\mathcal{T}_{K_p}(f)]^A(p) = \int_{\mathbb{R}^d} K(v^A) [Exp_p^* f]^A(v^A) dv^A, \quad (261)$$

یعنی، با عبارت مختصاتی که در معادله (۸۷) معرفی شد. این عبارت ممکن است همانطور که برای تبدیلات میدان کرنل عمومی در معادله (۲۵۹) انجام شد، بیشتر بسط داده شود.

**اثبات:** نتیجه از قضیه ۷.۹ با مشاهده اینکه کانولوشن  $GM$  مستقل از مختصات  $K \star$  فقط یک تبدیل میدان کرنل با میدان کرنل کانولوشنی  $K_p GM$  متناظر  $K_K$  است، به دست می‌آید؛ به تعریف ۷.۸ مراجعه کنید. به طور خاص، عبارت مختصاتی یک میدان کرنل کانولوشنی  $K_p GM$  یعنی  $K_K$  طبق تعریف ۷.۴ با کرنل  $G$ -هدایت پذیر  $K$  نرمال شده با حجم قاب داده می‌شود، یعنی  $K_{K,p}^A = K / \sqrt{|\eta_p^A|}$ . جایگذاری این همانی در معادله (۲۵۹) به عبارت مختصاتی ادعا شده برای کانولوشن‌های  $GM$  منجر می‌شود.

این نتیجه اطمینان می‌دهد که یک کانولوشن  $GM$  سراسری و مستقل از مختصات می‌تواند بر حسب عبارات مختصاتی محلی آن نسبت به یک  $G$ -اطلس از بدیهی‌سازی‌های محلی که  $M$  را می‌پوشاند، پایاده‌سازی شود.

## ۸ هم‌متغیری ایزومنتری

یک ویژگی اصلی عمل کانولوشن و تعیین‌های مختلف آن، هم‌متغیری آنها نسبت به تقارن‌های متفاوت زیربنایی است. به عنوان مثال، کانولوشن مرسوم در فضاهای اقلیدسی نسبت به انتقال هم‌متغیر است در حالی که کانولوشن‌های کروی نسبت به دوران هم‌متغیر هستند. به طور کلی تر، هر گروه فشرده موضوعی و فضاهای همگن آنها، کانولوشن‌های گروهی را می‌پذیرند [؟ ؟ ؟ ؟]، که اخیراً توسعه جامعه یادگیری عمیق برای تعیین شبکه‌های کانولوشنی به چنین فضاهایی مورد توجه قرار گرفته‌اند [؟ ؟ ؟ ؟]. با این حال، از آنجایی که این رویکردها اساساً به تقارن‌های سراسری و تعدی‌پذیر فضای همگن متکی هستند، بلافصله برای متفاوت‌های ریمانی عمومی قابل اعمال نیستند.

از سوی دیگر، کانولوشن‌های  $GM$  تمرکز را از تقارن‌های سراسری خود فضا به تقارن‌های محلی در مختصاتی سازی فضا منتقل می‌کنند. همانطور که مشخص می‌شود، هم‌متغیری پیمانه محلی کانولوشن‌های  $GM$ ، همراه با اشتراک گذاری وزن کانولوشنی، هم‌متغیری آنها را تحت عمل تقارن‌های سراسری القا می‌کند. به بیان دقیق‌تر، کانولوشن‌های  $GM$  تحت عمل ایزومنتری‌های حافظ  $G$ -ساختار (تعریف ۸.۱) هم‌متغیر هستند، که زیرگروهی  $Isom_{GM} \leq Isom(M)$  از گروه کامل ایزومنتری را تشکیل می‌دهند. الزام به اینکه تقارن یک ایزومنتری باشد (یعنی متربیک را حفظ کند) در اینجا از استفاده از نگاشت‌های نمایی ناشی می‌شود، که به اتصال لوى-چیوبتا و در نتیجه به متربیک ریمانی متکی هستند. الزام اضافی بر این ایزومنتری‌ها برای حفظ  $G$ -ساختار، نتیجه تعریف کلاف‌های بردار ویژگی به عنوان کلاف‌های  $G$ -الحاقی است، که عناصر آنها تنها نسبت به آن قاب‌های مرجعی که در  $GM$  قرار دارند، معنای خوش‌تعیینی دارند. توجه داشته باشید که مورد دوم واقعاً یک محدودیت نیست، زیرا همیشه می‌توان گروه‌های ساختار  $G$  را انتخاب کرد، که برای آنها هر ایزومنتری به  $G$ -ساختار متناظر احترام می‌گذارد. بر عکس، این طراحی امکان کنترل دقیق سطح هم‌متغیری ایزومنتری را فراهم می‌کند. به عنوان مثال، کانولوشن مرسوم در فضاهای برداری اقلیدسی به  $\{e\}$ -ساختار کانونی  $\mathbb{R}^d$  متکی است که در شکل ۶۳۵ به تصویر کشیده شده است، و بنابراین تنها نسبت به انتقال هم‌متغیر است. یک  $SO(d)$ -ساختار روی  $\mathbb{R}^d$ ، که در شکل ۶۳۶ به تصویر کشیده شده است، علاوه بر این توسط دوران‌ها نیز حفظ می‌شود، و بنابراین متناظر با کانولوشن‌های  $SE(d)$ -هم‌متغیر است. هم‌متغیری تحت گروه کاملاً ایزومنتری  $E(d)$  از  $\mathbb{R}^d$  هنگام انتخاب یک  $d$ -ساختار روی  $\mathbb{R}^d$  ایجاب می‌شود.

۱۸	ایزومنتری‌ها و عمل آنها بر متفاوت‌های، کلاف‌ها و میدان‌ها . . . . .
۹۵	۱.۱۸ گروه‌های ایزومنتری . . . . .
۹۵	۲.۱۸ عمل ایزومنتری بر روی کلاف‌های تاری . . . . .
۹۶	۳.۱۸ عمل ایزومنتری در مختصات محلی . . . . .
۱۰۲	۴.۱۸ جایگایی‌پذیری اعمال ایزومنتری با نگاشت نمایی و منتقل کننده‌ها . . . . .
۱۰۵	

۱۰۷	۲۸	هم متغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن های $GM$
۱۰۸	۱.۲۸	هم متغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرنل عمومی
۱۱۱	۲.۲۸	هم متغیری ایزومتری کانولوشن های $GM$
۱۱۳	۳۸	میدان های کرنل خارج قسمتی
۱۱۳	۱.۳۸	فضاهای خارج قسمتی القا شده از ایزومتری
۱۱۶	۲.۳۸	میدان های کرنل نماینده خارج قسمتی و قیود پایدار ساز

هدف این بخش استخراج قضایایی است که به طور رسمی هم متغیری ایزومتری کانولوشن های  $GM$  و تبدیلات میدان کرنل را مشخص می کنند. بخش ۱.۸ با معرفی گروه های ایزومتری منیفلد های ریمانی و بحث در مورد طبیعی از روابط و ساختار های شناخته شده ای که آنها القا می کنند، پایه های این تحقیق را بنا می نهند. به طور خاص، بخش ۱.۸ ایزومتری ها و گروه های ایزومتری را معرفی می کند در حالی که بخش ۲.۸ عمل القابی آنها («پیش ران ها») را بر روی کلاف های الحاقی در یک محيط مستقل از مختصات تعریف می کند. در بخش ۲.۸ ما این اعمال روی کلاف ها را نسبت به بدیهی سازی های محلی بیان می کنیم و تفسیر غیرفعال آنها را به عنوان تبدیلات پیمانه القا شده از ایزومتری، که در شکل های ۴.۱۶ (راست) و ۱۶ به تصویر کشیده شده اند، مورد بحث قرار می دهیم. بخش ۴.۸ به طور خلاصه بیان می کند که مقادیر در گیر در تبدیلات میدان کرنل تحت عمل ایزومتری ها چگونه رفتار می کنند.

بر اساس این ویژگی ها، ما هم متغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن های  $GM$  را در بخش ۲.۸ مطالعه می کنیم. پس از تعریف رسمی عبارت «هم متغیری ایزومتری»، بخش ۱.۸ یک تیجه مرکزی را اثبات می کند که تأکید می کند تقاضا برای هم متغیری ایزومتری مستلزم نامتفاوت بودن میدان کرنل تحت ایزومتری ها است؛ به شکل ۲.۸ مراجعه کنید. بخش ۲.۸ کانولوشن های خاص تر  $GM$  را در نظر می گیرد و اثبات می کند که آنها بنا به طراحی، تحت هر ایزومتری که  $G$ -ساختار را حفظ می کند، هم متغیر هستند. این نتیجه به طور خاص ایجاب می کند که کانولوشن های  $OM$  نسبت به هر ایزومتری هم متغیر هستند.

قد نامتفاوت بودن بر روی میدان های کرنل ایجاب می کند که آنها وزن ها را بر روی مدارهای گروه ایزومتری به اشتراک بگذارند. این نشان می دهد که میدان های کرنل نامتفاوت را می توان به طور معادل با کرنل های نماینده روی نماینده کان مدار توصیف کرد، که ما آن را در بخش ۳.۸ رسمی می کنیم. بخش ۱.۳۸ فضاهای خارج قسمتی القا شده از ایزومتری و نماینده گان آنها را مورد بحث قرار می دهد. در بخش ۲.۳۸ ما از این تعاریف ریاضی برای اثبات این موضوع استفاده می کنیم که فضای میدان های کرنل نامتفاوت به ایزومتری در واقع با ییدان های کرنل روی نماینده گان خارج قسمتی ایزومورف است. این به طور خاص ایجاد می کند که تبدیلات میدان کرنل هم متغیر نسبت به ایزومتری در فضاهای همگن لزوماً کانولوشن هستند، که حلقه را به کارهای پیشین متصل می کند.

## ۱.۸ ایزومتری ها و عمل آنها بر منیفلدها، کلاف ها و میدان ها

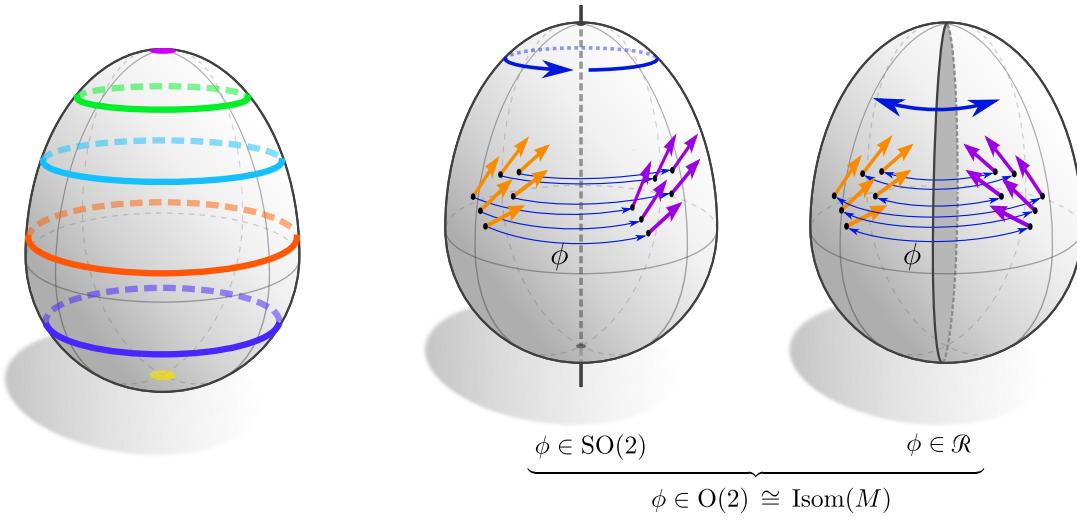
در این بخش، ما بیشتر مفاهیم ریاضی مورد نیاز برای مطالعه هم متغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن های  $GM$  را معرفی می کنیم. پس از تعریف ایزومتری ها در بخش ۱.۱.۸، در بخش ۲.۱.۸ می بحث می کنیم که جگونه آنها اعمال طبیعی را بر روی بردارهای مماس و قاب های مرجع القا می کنند. برای گروه های ساختار  $d < G$ ، هر ایزومتری با هر  $G$ -ساختاری سازگار نیست. ما زیر گروه  $Isom_{GM} \leq Isom(M)$  را تعریف می کنیم که بر روی یک  $G$ -ساختار  $GM$  و کلاف های ویژگی  $G$ -الحاقی آن عمل می کنند (خودربختهای را القا می کنند). در حالی که این ساختارها مستقل از مختصات نگه داشته می شوند، بخش ۳.۱.۸ عمل ایزومتری ها را بر روی کلاف های تاری نسبت به بدیهی سازی های محلی کلاف بیان می کند. به عنوان مقدمه ای برای بررسی تبدیلات میدان کرنل هم متغیر نسبت به ایزومتری در ادامه، بخش ۴.۱.۸ بحث می کند که چگونه ایزومتری ها با نگاشت نمایی و با منتقل کننده های مواد جابجا می شوند، که به ما اجازه می دهد تا نحوه عمل ایزومتری ها را بر روی پول بک منتقل کننده  $f^*$   $Exp_p^*$  میدان های ویژگی  $f$  استخراج کنیم. در حالی که عمدتاً ریاضی باقی می مانیم، سعی می کنیم تا حد امکان ارتباطاتی با کاربرد برقرار کنیم.

### ۱.۱.۸ گروه های ایزومتری

یک ایزومتری (سراسری)  $M \rightarrow \hat{M}$  :  $\phi$  یک دیفیوورفیسم بین منیفلدهای ریمانی  $(\hat{M}, \hat{\eta})$  و  $(M, \eta)$  است که متريک را حفظ می کند. بر حسب پیش ران (دیفرانسیل)  $\phi_{*,TM} : TM \rightarrow T\hat{M}$  :  $\phi_{*,TM}$  بردارهای مماس، که در پیوست آ.۲.۱.۸ در بخش ۲.۱.۸ در زیر معرفی می کنیم، این گزاره با الزام به اینکه ایزومتری ها برآورده کنند، دقیق می شود:

$$\eta_p(v, w) = \hat{\eta}_{\phi(p)}(\phi_{*,TM}v, \phi_{*,TM}w) \quad \forall p \in M, v, w \in T_p M, \quad (262)$$

بعنی، آنها فاصله ها و زوایا بین بردارهای مماس را حفظ می کنند. به طور شهودی، یک ایزومتری به عنوان یک نگاشت حافظ فاصله بین منیفلدها در نظر گرفته می شود. توجه داشته باشید که معکوس یک ایزومتری لزوماً یک ایزومتری نیز هست. از آنجایی که ایزومتری ها (و معکوس هایشان) به متريک احترام می گذارند، آنها ایزومورفیسم ها در رده منیفلدهای ریمانی را تشکیل می دهند.



(ب) مدارهای گروه ایزومتری.

(ت) عمل زیرگروههای مختلف گروه ایزومتری بر روی میدانها.

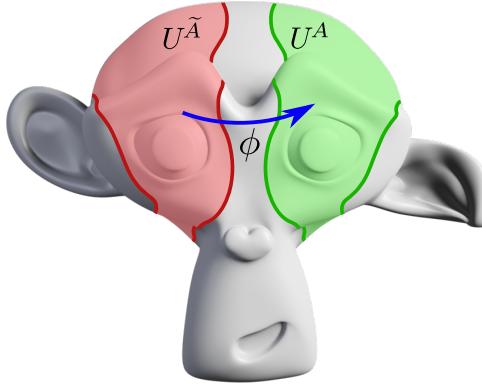
شکل ۳۳: تصاویری از گروه ایزومتری  $\text{Isom}(M) \cong \mathbb{Z}^2$  که در سراسر این بخش برای نمونه‌سازی مفاهیم و ساختارهای مختلف مربوط به ایزومتری‌ها از آن استفاده خواهیم کرد. شکل ۳۳آ عمل گروه ایزومتری را بر روی میدان‌های برداری (umas یا ویژگی) نشان می‌دهد. می‌توان آن را مشکل از زیرگروههای دوران‌ها در  $\text{SO}(2)$  و بازتاب‌ها در  $\mathcal{R}$  در نظر گرفت. عمل گروه ایزومتری، تخم مرغ را به مدارهای  $\{p \in \text{Isom}(M) \cdot p = \{\phi(p) \mid \phi \in \text{Isom}(M)\}$  از نقاط  $p \in M$  افزایی می‌کند که در شکل ۳۳ب با رنگ‌های مختلف نشان داده شده‌اند. توجه داشته باشید که همه مدارهای با یکدیگر همسان‌ریخت نیستند – مدارهای قطب‌ها نقاط منفرد هستند در حالی که هر مدار دیگر یک دایره را در اطراف تخم مرغ به صورت غیرتعاضی پذیر بر روی آن عمل می‌کند، یعنی نمی‌توان از هر نقطه‌ای به هر نقطه دیگر رسید. یک تبدیل میدان کرنل زمانی هم متغیر نسبت به ایزومتری است که با عمل ایزومتری بر روی میدان‌های ویژگی جایجا شود. مانشان می‌دهیم که همتغیری ایزومتری تنها و تنها در صورتی تضمین می‌شود که میدان کرنل تحت عمل ایزومتری‌ها نامغایر باشد. این به طور خاص ایجاب می‌کند که همتغیری ایزومتری نیازمند اشتراک‌گذاری وزن در امتداد مدارهای ایزومتری است؛ به شکل ۳۸ مراجعه کنید.

مجموعه تمام ایزومتری‌های  $M \rightarrow M$  :  $\phi$  از یک منیفلد ریمانی به خودش، که با ترکیب معمول توابع  $\phi_1 \circ \phi_2 \mapsto \phi_1 \circ \phi_2$  :  $\circ$  مجهر شده است، یک گروه را تعریف می‌کند که به عنوان گروه ایزومتری  $\text{Isom}(M)$  از  $M$  شناخته می‌شود. این گروه، گروه خودریختی یک منیفلد ریمانی است که شامل تمام «تقارن‌های» (متريکي) آن است. اين يك زيرگروه از گروه Diff( $M$ ) از  $M$  است. گروه کامل ایزومتری ممکن است زيرگروههای غيربدیهی داشته باشد، که ما در ادامه با  $\mathcal{I} \leq \text{Isom}(M)$  نشان خواهیم داد. یك مثال در شکل ۳۳آورده شده است، که گروه ایزومتری  $\mathcal{I}_1 \cong \text{SO}(2)$  یک تخم مرغ را به تصویر می‌کشد. گروه کامل ایزومتری (به عنوان مثال) به زيرگروههای دوران‌ها در  $\mathcal{I}_2 \cong \mathcal{R}$  تقسیم می‌شود.

به طور کلی، گروه ایزومتری یک منیفلد غیرتعاضی پذیر است، یعنی، هر نقطه‌ای از  $M$  را نمی‌توان از هر نقطه دیگری با عمل آن رسید. سپس منیفلد به مدارهای مجزا افزایش می‌شود که برای مثال  $M$  به عنوان یک تخم مرغ (عید پاک) در شکل ۳۳ب به تصویر کشیده شده است. گروه ایزومتری یک منیفلد  $M$  ممکن است بدیهی باشد، به شرطی که  $M$  به اندازه کافی نامتقارن باشد. در این حالت، ممکن است هنوز ایزومتری‌های غیربدیهی زیرمجموعه‌های باز  $U^A$  و  $U^{\bar{A}}$  از  $M$  وجود داشته باشد، که معادله  $U^A \cap U^{\bar{A}} = \emptyset$  به آنها محدود می‌شود. شکل ۳۴ نمونه‌ای از یک منیفلد را نشان می‌دهد که به صورت سراسری نامتقارن است اما ایزومتری‌های غیربدیهی بین زیرمجموعه‌های محلی خود دارد. ما در ادامه فقط ایزومتری‌های سراسری  $M$  را در نظر خواهیم گرفت، با این حال، تمام مفاهیم بخش فلی ۱۸ به روش آشکار باز ایزومتری‌ها بین زیرمجموعه‌های محلی تعیین می‌باشد. بدون اثبات، ما ادعای کنیم که همین امر برای همتغیری ایزومتری هر عمل شبکه عصی که به صورت نقطه‌ای عمل می‌کند، به عنوان مثال  $1 \times 1 \times \dots \times 1$ ، می‌باشد. غیرخطی‌ها یا جمع بایاس، صادق است. همتغیری تبدیلات میدان کرنل با کرنل‌های با گستره فضایی تا اثرات مرزی برقرار است.

## ۲.۱.۸ عمل ایزومتری بر روی کلاف‌های تاری

ایزومتری‌ها به طور طبیعی بر روی بردارهای مmas در  $TM$  و قاب‌های مرجع در  $FM$  با «حمل کردن آنها» با عمل گروهی همانطور که در شکل ۳۳آ به تصویر کشیده شده است، عمل می‌کنند. اگر یک ایزومتری علاوه بر این با  $G$ -ساختار سازگار باشد، یعنی اگر یک خودریختی از  $GM$  ایجاد کند، علاوه بر این بر روی هر کلاف  $G$ -الحاقی، به ویژه کلاف‌های بردار ویژگی  $A$  عمل می‌کند. ما این اعمال ایزومتری‌ها را بر روی کلاف‌های الحاقی و بر روی میدان‌های ویژگی در ادامه مورد بحث قرار می‌دهیم.



شکل ۳۴. یک منیفلد نامتقارن، که گروه ایزومتری سراسری آن بدیهی است. از آنجایی که عدم تقارن به گوش‌ها و دهان «سوزان»، میمون، محدود می‌شود، تقارن‌های موضعی غیربدیهی باقی مانده‌اند. به عنوان مثال، نگاشت هموار  $\phi : U^{\tilde{A}} \rightarrow U^A$  بین زیرمجموعه‌های برجسته شده با رنگ قرمز و سبز، متريک را به صورت محلی حفظ می‌کند. تمام مقاهمیم توسعه یافته در بخش ۱۸ و همچنین همتغیری ایزومتری عملیات نقطه‌ای مانند  $1 \times 1$ -بلافاصله به چنین ایزومتری‌هایی بین زیرمجموعه‌های محلی تعمیم می‌یابد. همتغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرnel با کرنل‌های با گستره فضایی تا اثرات مرزی تعمیم می‌یابد.

**عمل ایزومتری بر روی کلاف مماس  $TM$ :** هر ایزومتری  $\phi \in \text{Isom}(M)$  یک پیش‌ران را ایجاد می‌کند

$$\phi_{*,TM} : TM \rightarrow TM, \quad \phi \in \text{Isom}(M) \quad (263)$$

روی کلاف مماس، که فقط دیفرانسیل  $\phi$  است همانطور که در پیوست آ.۲ معرفی شده است. در هر نقطه  $p \in M$  می‌توان آن را به عنوان یک تقریب خطی از  $\phi$  در نظر گرفت که بردارها  $v \in T_p M$  را به  $\phi_{*,TM}(v) \in T_{\phi(p)} M$  تبدیل می‌کنند، یعنی برآورده می‌کنند:

$$\pi_{TM} \circ \phi_{*,TM} = \phi \circ \pi_{TM}. \quad (264)$$

همانطور که در پیوست آ.۲ استدلال شد، پیش‌ران با  $\phi_{*,TM}^{-1}$  معکوس‌پذیر است، که ما به طور بدون ابهام آن را با  $\phi_{*,TM}^{-1}$  خواهیم نوشت.<sup>۷۷</sup> بنابراین دیده می‌شود که پیش‌ران یک عنصر  $\phi$  از گروه ایزومتری کلاف برداری (ایزومتریک) از  $TM$  روی  $M$  است که نمودار جابجایی زیر را برآورده می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\phi_{*,TM}} & \\ TM & \downarrow \pi_{TM} & \downarrow \pi_{TM} \\ M & \xleftarrow{\phi^{-1}} & \xrightarrow{\phi} M \end{array} \quad (265)$$

بنابراین  $\phi$  ایزومتری است، پیش‌ران آنها فاصله‌ها و زوایا را حفظ می‌کند، یعنی،

$$\eta_{\phi(p)}(\phi_{*,TM} v, \phi_{*,TM} w) = \eta_p(v, w) \quad \forall p \in M, v, w \in T_p M, \phi \in \text{Isom}(M). \quad (266)$$

جزئیات بیشتر در مورد پیش‌ران‌ها بین کلاف‌های مماس به راحتی در ادبیات، به عنوان مثال در [۹]، یافت می‌شود.

**عمل ایزومتری بر روی کلاف قاب  $FM$ :** پیش‌ران روی  $TM$  بلافاصله یک خودریختی کلاف اصلی متناظر  $\phi_{*,FM}$  را بر روی  $FM$  با  $\phi$  معرفی می‌کند، پیش‌ران  $\phi_{*,FM}$  را که متناظر با  $\phi$  است، می‌نگاشت. پیش‌ران  $\phi_{*,FM}$  را ایجاد می‌کند:

$$\phi_{*,FM} : FM \rightarrow FM, \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto \phi_{*,FM}([e_i]_{i=1}^d) := [\phi_{*,TM}(e_i)]_{i=1}^d, \quad \phi \in \text{Isom}(M) \quad (267)$$

این نگاشت قاب‌ها را در  $F_p M$  برای هر  $p \in M$  دلخواه به قاب‌ها در  $F_{\phi(p)} M$  نگاشت می‌کند، یعنی  $\pi_{FM} \circ \phi_{*,FM} = \phi \circ \pi_{FM}$ . برای دیدن این، فرض کنید  $\pi_{FM}([\phi_{*,TM}(e_i)]_{i=1}^d) = \pi_{FM}([\phi_{*,TM}(e_i)]_{i=1}^d) = \phi(p)$ ، آنگاه  $[\phi_{*,TM}(e_i)]_{i=1}^d \in F_p M$  و  $\phi \circ \pi_{FM}([\phi_{*,TM}(e_i)]_{i=1}^d) = \phi(p)$ . علاوه بر این می‌توان بررسی کرد که با  $(\phi_{*,FM})^{-1} = (\phi^{-1})_{*,FM}$   $\pi_{TM} \circ \phi_{*,TM}(e_j) = \phi \circ \pi_{TM}(e_j) = \phi(p)$  است. باز هم با  $\phi_{*,FM}^{-1}$  به اختصار نوشته می‌شود. عمل چهار قاب با عمل راست  $\phi$  بر روی کلاف قاب با عمل راست  $\phi$  بر روی تارهای آن جابجا می‌کند.

<sup>۷۷</sup> معکوس‌پذیری به طور کلی برای پیش‌ران‌ها برقرار نیست بلکه فقط برای پیش‌ران‌های دیفتومورفیسم‌ها و در نتیجه ایزومتری‌ها برقرار است.

می شود، یعنی برای هر  $\phi \in \text{Isom}(M)$  و  $g \in \text{GL}(d)$  دلخواه داریم:

$$\begin{aligned}
 (\phi_{*,FM}([e_i]_{i=1}^d)) \triangleleft g &= [\phi_{*,TM}(e_i)]_{i=1}^d \triangleleft g && \text{(تعریف } \triangleleft \text{، معادله (۲۶۷))} \\
 &= \left[ \sum_j \phi_{*,TM}(e_j) g_{ji} \right]_{i=1}^d && \text{(تعریف } \triangleleft \text{، معادله (۱۵۴))} \\
 &= \left[ \phi_{*,TM} \left( \sum_j e_j g_{ji} \right) \right]_{i=1}^d && \text{(خطی بودن)} \\
 &= \phi_{*,FM} \left( \left[ \sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \right) && \text{(تعریف } \triangleleft \text{، معادله (۲۶۷))} \\
 &= \phi_{*,FM}([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) && \text{(تعریف } \triangleleft \text{، معادله (۱۵۴))} \tag{۲۶۸}
 \end{aligned}$$

یک تبدیل پیمانه یک قاب در  $p \in M$  با  $\phi$ ، بنابراین برابر است با یک پیش‌ران قاب تبدیل نشده، و به دنبال آن یک تبدیل پیمانه با همان عنصر گروهی  $g$  اما در  $p\phi$ . از این رو قاب‌های مختلف در تار  $F_p M$  به گونه‌ای به قاب‌ها در  $F_{\phi(p)} M$  نگاشت می‌شوند که جابجایی نسبی آنها حفظ شود. ویژگی‌های استخراج شده از  $\phi_{*,FM}$  با این گزاره خلاصه می‌شود که نمودار

$$\begin{array}{ccc}
 FM & \xrightarrow{\phi_{*,FM}} & FM \\
 \downarrow \triangleleft g & & \downarrow \triangleleft g \\
 FM & \xrightarrow{\phi_{*,FM}} & FM \\
 \downarrow \pi_{FM} & & \downarrow \pi_{FM} \\
 M & \xrightarrow{\phi} & M
 \end{array} \tag{۲۶۹}$$

برای هر  $\phi \in \text{Isom}(M)$  و  $g \in \text{GL}(d)$  جابجا می‌شود. با برآورده کردن جابجایی این نمودار، پیش‌ران  $\phi_{*,FM}$  بر روی کلاف قاب به عنوان یک خودریختی کلاف اصلی شناسایی می‌شود<sup>۶۸</sup> روى  $\phi$ .  
توجه داشته باشید که معکوس‌ها، که به طور صریح در نمودار (۲۶۵) نشان داده شده‌اند، برای کاهش شلوغی حذف شده‌اند.

**عمل ایزومتری بر روی G-ساختارها GM:** از آنجایی که G-ساختارها زیر کلاف‌های اصلی از کلاف قاب هستند، می‌توان محدودیت دامنه پیش‌ران روی  $GM$  را به  $FM$  در نظر گرفت، یعنی،

$$\phi_{*,FM}|_{GM} : GM \rightarrow FM, \quad \phi \in \text{Isom}(M). \tag{۲۷۰}$$

در اینجا لازم است که کل کلاف قاب  $FM$  به عنوان همدامنه حفظ شود زیرا به طور کلی هیچ تضمینی وجود ندارد که قاب‌ها در  $G_p M$  به قاب‌های  $G_{\phi(p)} M$  نگاشت شوند بلکه فقط به  $F_{\phi(p)} M$  نگاشت می‌شوند. از آنجایی که G-ساختارها به طور کلی تحت عمل ایزومتری‌ها بر روی  $FM$  بسته نیستند، ممکن است تعریف یک عمل گروهی از گروه کامل ایزومتری بر روی  $GM$  یا هر کلاف G-الحقی دیگر غیرممکن باشد. برای رفع این نقصه، ما در ادامه زیر گروهی از آن ایزومتری‌ها را در نظر خواهیم گرفت که به G-ساختار احترام می‌گذارند، یعنی قاب‌های ممتاز در  $GM$  را به  $GM$  نگاشت می‌کنند.

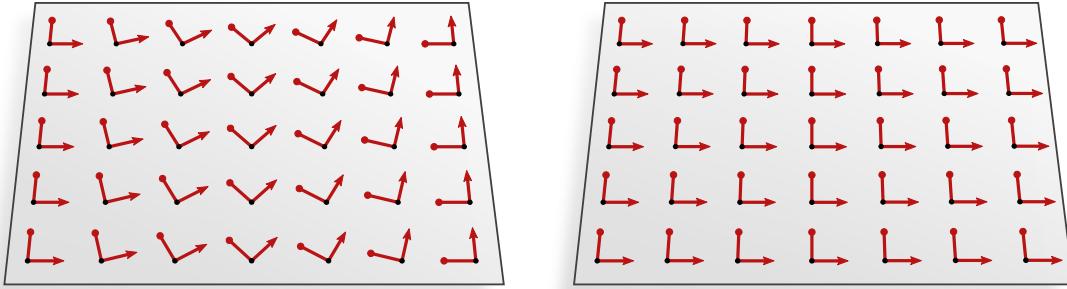
**تعریف ۸.۱ (ایزومتری‌های حافظ G-ساختار).** با داشتن یک G-ساختار  $GM$ ، ما زیر گروه متناظر از ایزومتری‌های حافظ G-ساختار  $GM$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{Isom}_{GM} := \left\{ \phi \in \text{Isom}(M) \mid \phi_{*,FM}(G_p M) = G_{\phi(p)} M \quad \forall p \in M \right\} \leq \text{Isom}(M) \tag{۲۷۱}$$

برای چنین ایزومتری‌هایی، ما عمل القایی بر روی  $GM$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi_{*,GM} := \phi_{*,FM}|_{GM} : GM \rightarrow GM, \quad \phi \in \text{Isom}_{GM}. \tag{۲۷۲}$$

<sup>۶۸</sup> یعنی، یک ایزومورفیسم کلاف اصلی از کلاف قاب به خودش؛ مقایسه کنید با معادله (۱۵۱).

(b) یک  $\{e\}$ -ساختار جایگزین بر روی  $\mathbb{R}^5$ (T)  $\{e\}$ -ساختار کانوونی

شکل ۳۵ دو انتخاب خاص از  $\{e\}$ -ساختارها (میدان‌های قاب سراسری)  $M = \mathbb{R}^5$  که ما برای به تصویر کشیدن مفهوم ایزومنتی‌های حافظ  $G$  ساختار از آنها استفاده می‌کنیم. گروه کامل ایزومنتی  $M$  گروه اقلیدسی  $E(2)$  است که از انتقال‌ها، دوران‌ها و بازتاب‌ها تشکیل شده است. شکل ۳۵-۱ ساختار کانوونی  $\mathbb{R}^5$  را نشان می‌دهد که تحت انتقال‌ها نامتفغیر است اما تحت دوران‌ها یا بازتاب‌ها نامتفغیر نیست. به بیان انتزاعی‌تر، انتقال‌ها زیر گروه  $\{e\}$ -ساختار  $\text{Isom}_{\{e\}}M = T_r := (\mathbb{R}^5, +)$  از ایزومنتی‌هایی را تشکیل می‌دهند که خودریختی‌های  $\{e\}_p M$  نمی‌شوند. فرستادن آنها به  $\{e\}_{\phi(p)} M$  در مقابل، دوران‌ها یا بازتاب‌ها قاب‌ها را در  $\{e\}_p M$  به قاب‌ها در  $F_{\phi(p)} M$  نگاشت می‌کنند اما موقعیت  $\{e\}_p M$  نمی‌شوند. بنابراین آنها خودریختی‌های  $\{e\}$ -ساختار را القا نمی‌کنند و بخشی از  $\text{Isom}_{\{e\}}M$  نیستند. اعمال گروهی چنین ایزومنتی‌هایی بر روی  $\{e\}_p M$  یا هر یک از کلافت‌های  $\{e\}$ -الحافی آن تعریف نشده است. شکل ۳۵-۲ یک انتخاب جایگزین از  $\{e\}$ -ساختار را بر روی  $M = \mathbb{E}_2$  (یا  $M = \mathbb{R}^3$ ) می‌نماید که فقط تحت انتقال‌ها در چهت «بالا-پایین» نامتفغیر است، یعنی  $\text{Isom}_{\{e\}}M \cong T_r = (\mathbb{R}, +)$ . مثال‌های موجود در شکل‌های ۳۵ و ۳۶ نمونه‌ای از این هستند که خودریختی‌های  $G$ -ساختار نه تنها به گروه ساختار بلکه به انتخاب خاص  $G$ -ساختار  $GM$  سنتگی دارند. مورد کلی برای  $G$  غیربدیهی سخت‌تر به تصویر کشیده می‌شود زیرا  $G_p M$  در آن صورت یک قاب منفرد نخواهد بود بلکه مجموعه‌ای از قاب‌ها خواهد بود.

اعمال تعریف شده به این شکل برای  $\phi \in \text{Isom}_{GM}$  خودریختی‌های  $G$ -ساختار هستند، یعنی باعث می‌شوند نمودار زیر برای هر  $g \in G$  جابجا شود (که با محدود کردن معادله (۲۶۹) از  $GM$  و از  $FM$  به دست می‌آید):

$$\begin{array}{ccc}
 GM & \xrightarrow{\phi_{*,GM}} & GM \\
 \triangleleft g \uparrow & & \uparrow \triangleleft g \\
 GM & \xrightarrow{\phi_{*,GM}} & GM \\
 \pi_{GM} \downarrow & & \downarrow \pi_{GM} \\
 M & \xrightarrow{\phi} & M
 \end{array} \tag{۲۷۴}$$

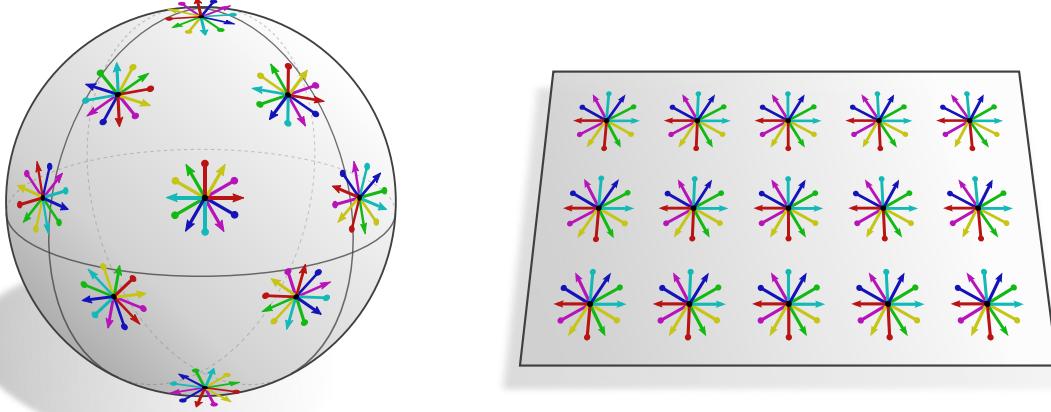
شکل ۳۵ دو نمونه از  $\{e\}$ -ساختارها را روی  $M = \mathbb{R}^5$  نشان می‌دهد، یعنی میدان‌های قاب سراسری. از این مثال‌ها مشخص است که زیر گروه‌های  $\text{Isom}_{GM}$  واقعاً به انتخاب خاص  $G$ -ساختار  $GM$  بستگی دارند، نه فقط به گروه ساختار  $G$ . در شکل ۳۶ ما یک  $\text{SO}(2)$ -ساختار را روی  $M = \mathbb{R}^2$  به تصویر می‌کشیم. گروه ایزومنتی آن  $\text{SE}(2)$  (یعنی  $\{e\}$ -ساختارها در شکل ۳۵) است. یک  $\text{SO}(2)$ -ساختار روی کره  $S^2$  که توسط تمام دوران‌ها  $\text{Isom}_{SOM} = \text{SO}(3)$  حفظ می‌شود، در شکل ۳۶ نشان داده شده است.

برای انتخاب‌های خاص از گروه‌های ساختار  $G$  می‌توان گراوهای کلی تری در مورد اینکه کدام ایزومنتی‌ها در زیر گروه  $\text{Isom}_{GM}$  قرار دارند، بیان کرد. مهم‌تر از همه، برای گروه‌های ساختار اورتونرمال  $G = d$  (که با  $\eta$  سازگار هستند) هر ایزومنتی یک خودریختی از  $OM$  را القا می‌کند، یعنی همیشه داریم  $\text{Isom}_{OM} = \text{Isom}(M)$ . برای اثبات این ادعاء، فرض کنید  $[e_i]_{i=1}^d \in O_p M \subset F_p M$  یک قاب اورتونرمال باشد که توسط یک ایزومنتی دلخواه  $\phi_{*,FM}|_{OM} [e_i]_{i=1}^d = [\phi_{*,TM} e_i]_{i=1}^d$  به معادله (۲۶۷) مراجعت کنید. اعمال معادله (۲۶۶) بر روی محورهای منفرد قاب پیش‌ران به دست می‌دهد:

$$\eta(\phi_{*,TM} e_i, \phi_{*,TM} e_j) = \eta(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in 1, \dots, d, \tag{۲۷۴}$$

که اورتونرمال بودن قاب پیش‌ران  $\phi_{*,FM}|_{OM} [e_i]_{i=1}^d \in O_{\phi(p)} M$  را ایجاب می‌کند و بنابراین اجازه می‌دهد تا  $\phi_{*,OM}$  را برابر  $\phi \in \text{Isom}(M)$  تعریف کنیم. به طور کلی تر، این نتیجه ایجاب می‌کند:

$$\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M) \quad \forall G \geq d \tag{۲۷۵}$$



(۲) ساختار SOM نامتغیر روی  $S^2$  و  $M = S^2$  (۳) ساختار SOM نامتغیر روی  $\mathbb{R}^n$  و  $M = \mathbb{R}^n$

شکل ۳۶ دو نمونه از (۲) ساختارها  $SOM$  روی صفحه  $S^2$  و کره  $M = \mathbb{R}^n$ ، که در شکل آن شان داده است، (۲)- $SOM$  ساختار تحت انتقال‌ها و دوران‌ها نامتغیر است. از آنجایی که فقط از قاب‌های راست گرد تشکیل شده است (به نوک پیکان‌ها روی محورهای اول و نوک دایره‌ها روی محورهای دوم توجه کنید) تحت بازتاب‌ها نامتغیر نیست. بنابراین ایزومنتری‌هایی که  $SOM$  را حفظ می‌کنند گروه  $\text{SE}(2)$  را تشکیل می‌دهند که زیرگروهی از گروه کامل ایزومنتری  $E(2)$  است. در شکل ۳۶  $M = S^2$  که در مورد  $\text{Isom}(M) = E(2)$  است. در شکل ۳۷  $M = \mathbb{R}^n$  که در شکل ۳۶ شان داده شده است، (۲)- $SOM$  ساختار در اینجا  $\text{Isom}_{SOM} = \text{SO}(2)$  هستند در حالی که گروه کامل ایزومنتری  $\text{Isom}(M) = \mathbb{R}$  است.

به طور مشابه می‌توان نشان داد:

$$\text{Isom}_{SOM} = \text{Isom}_+(M), \quad (276)$$

یعنی، هر ایزومنتری حافظ جهت در  $(M, \text{Isom}_+)$ -ساختار  $SOM$  را القا می‌کند. توجه داشته باشید که این گزاره‌ها همه فقط به گروه ساختار  $G$  بستگی دارند اما از انتخاب خاص  $G$ -ساختار مستقل هستند. این در نهایت نتیجه در نظر گرفتن فقط ایزومنتری‌ها است که بنا به تعریف با  $d$ -ساختارها سازگار هستند، به جای در نظر گرفتن دیفونومorfیسم‌های عمومی تر. همانطور که قبل ذکر شد، زیرگروه  $\text{Isom}_{GM}$  کلی به انتخاب خاص  $GM$ -ساختار  $G$  بستگی دارد، نه فقط به گروه ساختار  $G$ .

**عمل ایزومنتری بر روی کلاف‌های برداری الحاقی  $\mathcal{A}$ :** از پیش‌ران ایزومنتری‌ها در  $\text{Isom}_{GM}$  بر روی  $GM$  می‌توان یک پیش‌ران  $\phi_{*,\mathcal{A}}$  را برابر روی هر کلاف برداری  $G$ -الحاقی  $\mathcal{A} = (GM \times \mathbb{R}^c)/\sim$  زیر ساخت:

$$\phi_{*,\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad [[e_i]_{i=1}^d, f] \mapsto \phi_{*,\mathcal{A}}\left([[e_i]_{i=1}^d, f]\right) := [\phi_{*,GM}([e_i]_{i=1}^d), f], \quad \phi \in \text{Isom}_{GM}. \quad (277)$$

این عمل خوش‌تعریف است زیرا ساختار به دلیل هم‌متغیری راست  $G$ - $\phi_{*,GM}$  در معادله (۲۷۳) از توانیده انتخاب شده کلاس همارزی مستقل است. مشابه قبیل، داریم  $\phi_{*,\mathcal{A}} = \phi \circ \pi_{\mathcal{A}} \circ \phi_{*,A}$ ، یعنی  $\phi$  بردارهای ویژگی را در  $A_p$  به بردارهای ویژگی در  $(p)$ - $\mathcal{A}_\phi$  نگاشت می‌کند، که می‌توان با عمل بر روی یک بردار ویژگی و استفاده از ویژگی متناظر  $\phi_{*,GM}$  آن را برسی کرد. از آنجایی که  $\phi$  با عمل  $\phi_{*,GM}$  بر روی عامل اول در  $\sim/\sim$  تعریف می‌شود، با ترکیب‌های خطی که بر روی عامل دوم همانطور که در معادله (۵۷) تعریف شده است، عمل می‌کنند، تداخلی ندارد. این ایجاد می‌کند که پیش‌ران روی کلاف‌های الحاقی به صورت خطی بین تارهای آنها نگاشت کند. معکوس‌پذیری  $\phi_{*,\mathcal{A}}$  از معکوس‌پذیری  $\phi_{*,GM}$  نتیجه می‌شود به طوری که دوباره داریم  $\phi_{*,\mathcal{A}}^{-1}(\phi) = (\phi)^{-1}_{*,\mathcal{A}}$ ، که آن را به صورت  $\phi_{*,\mathcal{A}}^{-1}$  می‌نویسیم. این ویژگی‌ها، همراه با این واقعیت که  $\phi_{*,GM} \in \text{Aut}(GM)$  به طور خاص یک خودریختی کلاف اصلی است،  $\phi_{*,\mathcal{A}}$  را به عنوان یک خودریختی کلاف برداری الحاقی شناسایی می‌کند که نمودار جابجایی زیر را برآورده می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\phi_{*,\mathcal{A}}} & \mathcal{A} \\ \pi_{\mathcal{A}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{A}} \\ M & \xrightarrow{\phi} & M \end{array} \quad (278)$$

کلاف الحاقی حاصل از انتخاب‌های خاص نمایش گروهی  $g = \rho(g)/\sim_{\mathbb{R}^d}$  به عنوان تار نمونه‌ای از طریق مورفیسم کلاف  $\sim_{\mathbb{R}^d}/\sim_{GM \times \mathbb{R}^d}$  با کلاف مماس  $TM$  (به عنوان یک  $G$ -کلاف) ایزومورف است. تعریف ما از پیش‌ران‌ها بر روی کلاف‌های  $\sim_{G-TM}$  با این شناسایی سازگار است زیرا  $\chi \circ \phi_{*,A} = \phi_{*,TM} \circ \chi$ . برای دیدن این، فرض کنید  $[[e_i]_{i=1}^d, v] \in (GM \times \mathbb{R}^d)/\sim_{G-TM}$  نگاشت می‌شود. آنگاه داریم  $\chi \circ \phi_{*,A}([[e_i]_{i=1}^d, v]) = \sum_i e_i v_i$  که سازگاری تعاریف را نشان می‌دهد.

به عنوان یک کلاف الحاقی، پیش‌ران  $\phi$  بر روی کلاف هومومورفیسم  $\text{Hom}(A_{\square\square}, A_{\square\square\square\square}) \cong (GM \times \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square\square}})/\sim_{\rho_{\square\square\square\square}}$  با معاطله (۲۷۷) مشخص می‌شود. با این حال، ما بعداً به عبارتی از  $\phi_{*,A_{\square\square}}$  بر حسب پیش‌ران‌های  $\phi_{*,A_{\square\square}}$  و  $A_{\square\square}$  از  $A_{\square\square\square\square}$  نیاز خواهیم داشت، که آن را به زودی در اینجا استخراج خواهیم کرد. برای این منظور، فرض کنید  $H \in \text{Hom}(A_{\square\square}|_p, A_{\square\square\square\square}|_p)$  یک هومومورفیسم در  $p$  و  $f_p \in \mathcal{A}_{\square\square,p}$  یک بردار ویژگی در  $p$  باشد. آنگاه  $(f_p)_H$  بنا به تعریف یک بردار ویژگی در  $A_{\square\square,p}$  است. برای اینکه به طور سازگار تعریف شود، پیش‌ران بردار ویژگی وروودی  $f_p$  که توسط پیش‌ران هومومورفیسم  $H$  بر آن عمل می‌شود، باید با پیش‌ران بردار ویژگی خروجی  $(f_p)_H$  موافق باشد. این ایجاد می‌کند:

$$\phi_{*,A_{\square\square}}[H(f_p)] = [\phi_{*,A_{\square\square}} H \phi_{*,A_{\square\square}}^{-1}] (\phi_{*,A_{\square\square}} f_p) =: [\phi_{*,A_{\square\square}}, H](\phi_{*,A_{\square\square}} f_p), \quad (279)$$

که در آن پیش‌ران روی کلاف هومومورفیسم را به صورت زیر تعریف کردیم:

$$\phi_{*,A_{\square\square}} : \text{Hom}(A_{\square\square}, A_{\square\square\square\square}) \rightarrow \text{Hom}(A_{\square\square}, A_{\square\square\square\square}), \quad H \mapsto \phi_{*,A_{\square\square}} H \phi_{*,A_{\square\square}}^{-1}, \quad \phi \in \text{Isom}_{GM} \quad (280)$$

توجه داشته باشید که ترکیب یک عنصر  $H \in \text{Hom}(A_{\square\square}, A_{\square\square\square\square})$  با  $\phi_{*,A_{\square\square}}^{-1}$  از راست، سبک معاطله (۲۳۱) را معکس می‌کند.

**عمل ایزومتری بر روی میدان‌های ویژگی:** اعمال ایزومتری‌ها در  $\text{Isom}_{GM}$  بر روی کلاف‌های الحاقی، اعمالی را بر روی مقاطع آنها، به ویژه بر روی میدان‌های ویژگی، ایجاد می‌کنند. این پیش‌ران مقاطع به صورت زیر تعریف می‌شود:

**تعریف ۸.۲ (پیش‌ران ایزومتری میدان ویژگی):** فرض کنید  $(A, f) \in \Gamma(\mathcal{A})$  یک میدان ویژگی و  $\phi \in \text{Isom}_{GM}$  یک ایزومتری حافظ  $G$ -ساختار باشد. ایزومتری از طریق پیش‌ران بر روی میدان ویژگی عمل می‌کند<sup>۶۹</sup>

$$\triangleright : \text{Isom}_{GM} \times \Gamma(\mathcal{A}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}), \quad (\phi, f) \mapsto \phi \triangleright f := \phi_{*,A} \circ f \circ \phi^{-1}. \quad (281)$$

بر حسب یک نمودار جابجایی، این تعریف به صورت زیر به تصویر کشیده می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi_{*,A}} & A \\ \uparrow f & & \uparrow \phi \triangleright f := \phi_{*,A} \circ f \circ \phi^{-1} \\ M & \xrightarrow{\phi} & M \end{array} \quad (282)$$

به طور شهودی، این تعریف بیان می‌کند که مقطع پیش‌ران  $f \triangleright \phi$  که در  $p \in M$  ارزیابی می‌شود، بردار ویژگی  $f$  را از  $(p)_{\phi^{-1}}$  که از طریق  $\phi$  به  $p$  پیش‌ران شده است، برمی‌گرداند. توجه داشته باشید که چنین پیش‌ران‌هایی در واقع مقاطع خوش تعریفی را به دست می‌دهند که برآورده می‌کنند:

$$\begin{aligned} \pi_A \circ (\phi \triangleright f) &= \pi_A \circ \phi_{*,A} \circ f \circ \phi^{-1} \\ &= \phi \circ \pi_A \circ f \circ \phi^{-1} \\ &= \phi \circ \text{id}_M \circ \phi^{-1} \\ &= \text{id}_M \end{aligned} \quad (283)$$

همانطور که در معاطله (۱۴۷) لازم است. شکل ۳۳۳ آ عملي ایزومتری‌ها را بر روی میدان‌ها به تصویر می‌کشد. عمل ایزومتری‌ها بر روی پول‌بک منتقل کننده  $\text{Exp}_p^* f$  از میدان‌های  $f$  در بخش ۴.۱.۸ در زیر استخراج می‌شود.

<sup>۶۹</sup> به شاہت این تعریف با تعریف نمایش القابی توجه کنید، که عمل گروهی است که شبکه‌های CNN هدایت‌پذیر طوری طراحی شده‌اند که نسبت به آن هم متغیر باشند [۱۰۰].

### ۳.۱.۸ عمل ایزومتری در مختصات محلی

بیشتر استخراج‌ها در مورد هم‌متغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرnel در بخش‌های ۲۸ و ۳۸ در یک محیط مستقل از مختصات نگه داشته خواهد شد. با این حال، از آنجایی که کانولوشن‌های  $GM$  نسبت به یک انتخاب از  $G$ -اطلس‌های کلاف‌های الحاقی تعريف می‌شوند، بررسی هم‌متغیری ایزومتری آنها مستلزم مطالعه عبارات مختصاتی پیش‌ران‌های ایزومتری  $\phi_{*,TM}$ ،  $\phi_{*,FM}$ ،  $\phi_{*,A}$  و  $\phi$  نسبت به بدیهی سازی‌های محلی کلاف است. عبارات مختصاتی عمل ایزومتری علاوه بر این در پیاده‌سازی‌های عددی مفید هستند، که لزوماً میدان‌های ویژگی را نسبت به میدان‌های قاب‌های مرتع کدگذاری می‌کنند.

در ادامه، ما پیمانه‌های  $\Psi_{TM}^{\tilde{A}}$  و  $\Psi_{TM,p}^{\tilde{A}}$  را به ترتیب در همسایگی‌های از  $p$  و  $U^{\tilde{A}}$  از  $(p)$  داده شده فرض می‌کیم. برای راحتی، فرض کنید  $U^A = \phi(U^{\tilde{A}})$  با تصویر  $U^{\tilde{A}}$  تحت ایزومتری منطبق باشد، که همیشه بدون از دست دادن کلیت امکان‌پذیر است.

**پیش‌ران روی  $TM$  در مختصات:** به یاد بیاورید که پیش‌ران روی کلاف مماس یک نگاشت خطی از بردارها  $v \in T_p M$  به بردارها  $\phi_{*,TM} v \in T_{\phi(p)} M$  است. نسبت به پیمانه‌های داده شده، پیش‌ران بنابراین توسط یک میدان از ماتریس‌ها مختصاتی می‌شود.

$$g_{\phi}^{A\tilde{A}} : U^{\tilde{A}} \rightarrow \mathrm{GL}(d), \quad p \mapsto g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) := \psi_{TM,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,TM} \circ (\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1}, \quad \phi \in \mathrm{Isom}(M), \quad (284)$$

که بین ضرایب عددی متناظر  $(v)$  از  $p$  و  $\psi_{TM,p}^{\tilde{A}}(v)$  از  $\phi_{*,TM} v$  در  $\phi(p)$  تبدیل می‌کند. دقیق‌تر،  $g_{\phi}^{A\tilde{A}}$  در زیرگروه  $\langle G \cup d \rangle$  از  $\mathrm{GL}(d)$  مقدار می‌گیرد، که توسط عناصر  $d$  (به دلیل اینکه  $\phi_{*,TM}$  متریک را حفظ می‌کند) و  $G$  (زیرا توابع گذار ممکن است یک ابرگروه از  $d$  تشکیل دهد) تولید می‌شود. تعریف پیش‌ران در مختصات محلی با نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده می‌شود:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\psi_{TM,p}^{\tilde{A}}} & T_p M & \xrightarrow{\phi_{*,TM}} & T_{\phi(p)} M & \xrightarrow{\psi_{TM,\phi(p)}^A} & \mathbb{R}^d \\ & & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)} & & & & \uparrow \end{array} \quad (285)$$

شکل ۱۶ یک تفسیر گرافیکی از پیش‌ران در مختصات ارائه می‌دهد.

**پیش‌ران روی  $FM$  در مختصات:** مختصاتی سازی پیش‌ران روی کلاف قاب به قیاس با معادله (۲۸۴) تعریف می‌شود. مشخص می‌شود که این با عمل چپ همان عنصر گروهی  $g_{\phi}^{A\tilde{A}}$  بر روی قاب‌های بدیهی شده داده می‌شود همانطور که در نمودار جابجایی زیر نشان داده شده است:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{GL}(d) & \xleftarrow{\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}} & F_p M & \xrightarrow{\phi_{*,FM}} & F_{\phi(p)} M & \xrightarrow{\psi_{FM,\phi(p)}^A} & \mathrm{GL}(d) \\ & & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)} & & & & \uparrow \end{array} \quad (286)$$

برای اثبات این ادعا، ما عمل را برابر روی یک قاب بدیهی شده، که با یک ماتریس  $(h)$  که ستون  $i$ -ام آن  $h_{:,i}$  نماینده بردار قاب  $i$ -ام است، محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \left[ \psi_{FM,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,FM} \circ (\psi_{FM,p}^{\tilde{A}})^{-1} \right] (h) \\ &= \left[ \psi_{FM,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,FM} \right] \left( \left( (\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1} (h_{:,i}) \right)_{i=1}^d \right) && \text{(تعریف } \psi_{FM,p}^{\tilde{A}}, \text{ معادله (۱۷۷))} \\ &= \psi_{FM,\phi(p)}^A \left( \left( \phi_{*,TM} \circ (\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1} (h_{:,i}) \right)_{i=1}^d \right) && \text{(تعریف } \phi_{*,TM}, \text{ معادله (۲۶۷))} \\ &= \left( \left( \psi_{TM,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,TM} \circ (\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1} (h_{:,i}) \right)_{i=1}^d \right) && \text{(تعریف } \psi_{TM,\phi(p)}^A, \text{ معادله (۱۷۷))} \\ &= \left( g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \cdot h_{:,i} \right)_{i=1}^d && \text{(تعریف } g_{\phi}^{A\tilde{A}}, \text{ معادله (۲۸۴))} \\ &= g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \cdot h \end{aligned} \quad (287)$$

با داشتن چارت‌های  $x^A : U^A \rightarrow x^{\tilde{A}}(U^{\tilde{A}}) \subseteq \mathbb{R}^d$  و  $x^{\tilde{A}} : U^{\tilde{A}} \rightarrow x^{\tilde{A}}(U^{\tilde{A}}) \subseteq \mathbb{R}^d$  یک ایزومتری  $\phi$  را می‌توان به صورت محلی با یک نگاشت  $x^A \circ \phi \circ (x^{\tilde{A}})^{-1} : x^{\tilde{A}}(U^{\tilde{A}}) \rightarrow x^A(U^A)$  بین مختصات نمایش داد. برای حالت خاصی که پیمانه‌ها در  $p$  و  $(p)$  متناظر با پایه‌های مختصاتی آن چارت‌ها هستند،  $g_{\phi}^{A\tilde{A}}$  به سادگی توسط ژاکوبین  $x^A \circ \phi \circ (x^{\tilde{A}})^{-1}$  داده می‌شود.

عمل پیش‌ران بر روی بدیهی‌سازی‌های محلی را می‌توان به عنوان القا کردن یک تبدیل پیمانه در نظر گرفت. یک شهود گرافیکی برای این گزاره در شکل ۱۶ داده شد که در آن پیمانه‌های اولیه در  $p$  و  $(p)\phi$  با انتخاب‌های قاب‌های مرتع ب تصویر کشیده شده‌اند. یک پیش‌ران از قاب در  $p$  به  $\phi(p)$  (قرمز) به طور کلی با قاب اصلی در  $(p)\phi$  (سبز) موافق نیست. گذار بین این دو قاب، تبدیل پیمانه القا شده در  $(p)\phi$  است. ما در ادامه این تبدیل را می‌سازیم؛ ابتدا بر حسب بدیهی‌سازی‌های محلی، سپس بر حسب میدان‌های قاب متناظر.

از نمودار جابجایی در معادله (۲۸۶) مشخص است که پیمانه  $(p)\phi$  در  $p$  را می‌توان از طریق  $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} : F_p M \rightarrow \text{GL}(d)$  به یک پیمانه در  $\phi(p)$  پولبک کرد، که به صورت زیر داده می‌شود:

$$\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,FM}^{-1} = (g_\phi^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{FM,\phi(p)}^A : F_{\phi(p)} M \rightarrow \text{GL}(d). \quad (۲۸۸)$$

گسترش متناظر نمودار جابجایی در معادله (۲۸۶) هم‌ارزی هر دو عبارت را به تصویر می‌کشد و یک اثبات جبری را زائد می‌کند:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1} = (g_\phi^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{FM,\phi(p)}^A & & & & \\ & \downarrow & & & & & \\ \text{GL}(d) & \xleftarrow{\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}} & F_p M & \xrightarrow{\phi_{*,FM}} & F_{\phi(p)} M & \xrightarrow{\psi_{FM,\phi(p)}^A} & \text{GL}(d) \\ & & \boxed{F_p M} & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & g_\phi^{A\tilde{A}}(p) & & \end{array} \quad (۲۸۹)$$

نگاشت گذار (تبدیل پیمانه) بین پیمانه القا شده از ایزومتری  $\psi_{FM,\phi(p)}^A$  و پیمانه اصلی  $\phi(p)$  مشخص می‌شود که توسط عنصر گروهی معکوس داده می‌شود<sup>۷۱</sup>

$$(\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1}) \circ (\psi_{FM,\phi(p)}^A)^{-1} = (g_\phi^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \in \langle G \cup d \rangle \leq \text{GL}(d). \quad (۲۹۰)$$

توجه داشته باشید که این عنصر گروهی برای  $d$  لزوماً در گروه ساختار قرار نمی‌گیرد، یعنی پیمانه القا شده از ایزومتری ممکن است  $G$ -سازگار نباشد (نمی‌توان آن را به یک  $G$ -اطلس موجود از  $FM$  اضافه کرد). در پاراگراف بعدی در مورد  $G$ -ساختارها نشان خواهیم داد که این دقیقاً زمانی اتفاق می‌افتد که  $\phi \notin \text{Isom}_{GM}$  باشد، یعنی برای ایزومتری‌هایی که به  $G$ -ساختار احترام نمی‌گذارند.

برای استخراج عمل ایزومتری بر روی میدان‌های قاب، مقاطع همانی  $(U^A \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^A) \sigma^{\tilde{A}} : U^{\tilde{A}} \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^{\tilde{A}}) \sigma^{\tilde{A}}$  را در نظر بگیرید. این مقاطع میدان‌های قاب اصلی را از شکل ۱۶ مدل می‌کنند. سپس میدان قاب جدید با مقطع پیش‌ران داده می‌شود:

$$\phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}} := \phi_{*,FM} \circ \sigma^{\tilde{A}} \circ \phi^{-1} : U^A \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^A), \quad (۲۹۱)$$

که به طور معادل با تعریف در معادله ۲۸۱ تعریف شده است. یک عبارت جایگزین برای میدان قاب پیش‌ران بر حسب عمل راست  $g_\phi^{A\tilde{A}}$  با اعمال  $\psi_{FM,\phi(p)}^A$  یافت می‌شود:

$$\begin{aligned} & \psi_{FM,\phi(p)}^A ([\phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}}](\phi(p))) \\ &= \psi_{FM,\phi(p)}^A \phi_{*,FM} \sigma^{\tilde{A}}(p) && \text{(تعریف } \phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}} \text{، معادله (۲۹۱))} \\ &= g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \sigma^{\tilde{A}}(p) && \text{(عبارات معادل در معادله (۲۸۸))} \\ &= g_\phi^{A\tilde{A}}(p) && \text{(مقطع همانی } \sigma^{\tilde{A}} \text{، معادله (۱۸۲))} \\ &= \psi_{FM,\phi(p)}^A (\sigma^A(\phi(p))) g_\phi^{A\tilde{A}}(p) && \text{(مقطع همانی } \sigma^A \text{، معادله (۱۸۲))} \\ &= \psi_{FM,\phi(p)}^A (\sigma^A(\phi(p)) \triangleleft g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) && \text{(هم‌متغیری راست-GL(d)، معادله (۱۷۹))} \end{aligned} \quad (۲۹۲)$$

از آنجایی که  $\psi_{FM,\phi(p)}^A$  یک ایزومورفیسم است، نتیجه می‌شود که:

$$(\phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}})(\phi(p)) = \phi_{*,FM} \sigma^{\tilde{A}}(p) = \sigma^A(\phi(p)) \triangleleft g_\phi^{A\tilde{A}}(p), \quad (۲۹۳)$$

<sup>۷۱</sup> معکوس یک موضوع قراردادی است. در اینجا به این دلیل به وجود می‌آید که ما  $g_\phi^{A\tilde{A}}$  را به عنوان عبارت مختصاتی پیش‌ران هموردای قاب‌ها تعریف کردیم در حالی که پیمانه‌ها به صورت پادروردا تبدیل می‌شوند.

بعنی،  $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)$  همانطور که انتظار می‌رفت تبدیل بین مقاطع همانی را توصیف می‌کند. این تبدیل القا شده از ایزومنتری بین قاب‌های مرجع در شکل ۱۶ با فلش آبی بین قاب قرمز (شفاف) و سبز به تصویر کشیده شده است.

پیمانه تبدیل شده با ایزومنتری  $\sigma^{\tilde{A}} \triangleright \phi^{-1}$  به این ترتیب با یکدیگر مطابقت دارند که دومی مقطع همانی اولی است:

$$\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1} [\phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}}] (\phi(p)) = \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1} \phi_{*,FM} \sigma^{\tilde{A}}(p) = \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \sigma^{\tilde{A}}(p) = e \quad (294)$$

**پیش‌ران روی  $GM$  در مختصات:** همانطور که در بخش قبلی ۲.۱.۸ استدلال شد، پیش‌ران روی  $GM$  فقط برای ایزومنتری‌های  $\phi$  در یک زیرگروه  $\text{Isom}_{GM}$  خوش‌تعییر است. جای تعجب نیست که تبدیلات پیمانه القا شده از ایزومنتری متناظر در گروه ساختار  $G$  مقدار می‌گیرند: قضیه ۸.۳  $\text{Isom}_{GM}$  در بدیهی‌سازی‌های محلی). فرض کنید  $\phi \in \text{Isom}(M)$  هر ایزومنتری از  $M$  باشد. آنگاه سه گزاره زیر معادل هستند:

۱.  $\phi$  حافظ  $G$ -ساختار است، یعنی  $\phi \in \text{Isom}_{GM}$

۲. پولبک ایزومنتری  $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$  از هر پیمانه  $\phi_{*,FM}$  از  $G$ -اطلس  $FM$  که  $GM$  را تعییر می‌کند، با آن  $G$ -اطلس-سازگار است.

۳. عبارت مختصاتی  $\phi_{*,FM}$  نسبت به هر پیمانه  $\psi_{FM,p}^A$  و  $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$  از  $G$ -اطلس  $FM$  در گروه ساختار مقدار می‌گیرد، یعنی  $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in G \quad \forall p \in M$

اثبات: ویژگی تعییر کننده یک ایزومنتری حافظ  $G$ -ساختار  $G_{\phi(p)}M = G_{\phi(p)}M$  است که  $\phi \in \text{Isom}_{GM}$  باشد؛ به معادله (۲۷۱) مراجعه کنید. بر حسب یک  $G$ -اطلس داده شده از  $FM$ ، معادله (۱۸۴)  $G$ -ساختار را در  $p \in M$  به صورت  $G_pM := (\psi_{FM,p}^{\tilde{A}})^{-1}(G)$  تعییر کرد که در آن  $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$  یک پیمانه دلخواه از  $G$ -اطلس است. با این عبارت ما سمت چپ ویژگی تعییر کننده  $\text{Isom}_{GM}$  را بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \phi_{*,FM}(G_pM) &= \phi_{*,FM}(\psi_{FM,p}^{\tilde{A}})^{-1}(G) \\ &= (\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1})^{-1}(G) \end{aligned} \quad (295)$$

نسبت به هر پیمانه  $\psi_{FM,\phi(p)}^A$  از  $G$ -اطلس در  $(p)$ ، این را می‌توان بیشتر به صورت زیر دستکاری کرد

$$\begin{aligned} \phi_{*,FM}(G_pM) &= ((g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{FM,\phi(p)}^A)^{-1}(G) \\ &= (\psi_{FM,\phi(p)}^A)^{-1}(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) G). \end{aligned} \quad (296)$$

سمت راست ویژگی تعییر کننده  $\text{Isom}_{GM}$  بر حسب  $\psi_{FM,\phi(p)}$  به صورت زیر داده می‌شود:

$$G_{\phi(p)}M = (\psi_{FM,\phi(p)}^A)^{-1}(G). \quad (297)$$

با برابر قرار دادن هر دو طرف و استفاده از اینکه  $\psi_{FM,\phi(p)}^A$  یک ایزومنتری است، نتیجه می‌شود  $G = g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) G$  که به همارزی ادعا شده منجر می‌شود:

$$\phi_{*,FM}(G_pM) = G_{\phi(p)}M \iff g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in G \quad (298)$$

از گزاره‌های ۱. و ۳. برای اثبات همارزی با گزاره ۲.، به یاد بیاورید که  $(\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1})^{-1}(G)$  برابر با تبدیل پیمانه از  $\psi_{FM,\phi(p)}^A$  است. از آنجایی که  $G$ -اطلس‌ها بنا به تعییر توابع گذار در گروه ساختار  $G$  دارند، پیامدهای (۲.۲↔۳.۳) نتیجه می‌شوند، به طوری که هر سه گزاره معادل دیده می‌شوند.  $\square$

این نتایج برای مطالعه بعدی ما در مورد هم‌متغیری ایزومنتری کانولوشن‌های  $GM$  اهمیت مرکزی دارند. ما قادر خواهیم بود نشان دهیم که چنین کانولوشن‌هایی تحت عمل  $\phi \in \text{Isom}_{GM}$  بر روی میدان‌های ویژگی هم‌متغیر هستند، که به این واقعیت متکی است که  $G$ -هدایت‌پذیری کرنل‌های کانولوشن، تبدیلات پیمانه القا شده از ایزومنتری  $G$   $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)$  را در نظر می‌گیرد.

برای ایزومتری‌های الگاکننده خودریختی  $G$ -ساختمان  $FM$  در معادله (۲۸۹) را به همتای آن برای  $\phi$ , می‌توانیم نمودار جابجایی برای  $\text{Isom}_{GM}$  بفرمایش  $\psi_{GM,p}^{\tilde{A}}$  داشت:  $\psi_{GM,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,GM}^{-1} = (\psi_{\phi(p)}^A)^{-1} \circ \psi_{GM,\phi(p)}^A$

$$\begin{array}{ccccccc} & \psi_{GM,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,GM}^{-1} & = & (\psi_{\phi(p)}^A)^{-1} \circ \psi_{GM,\phi(p)}^A & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ G & \xleftarrow{\psi_{GM,p}^{\tilde{A}}} & G_p M & \xrightarrow{\phi_{*,GM}} & G_{\phi(p)} M & \xrightarrow{\psi_{GM,\phi(p)}^A} & G \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) & & \end{array} \quad (۲۹۹)$$

**پیش‌ران روی  $\mathcal{A}$  در مختصات:** پیش‌ران  $\phi \in \text{Isom}_{GM}$  بر روی کلاف‌های  $G$ -الحقیقی به طور مشابه با پیش‌ران‌های دیگر کلاف‌ها مختصاتی می‌شود. بر حسب یک نمودار جابجایی، ما به طور غیرمنتظره‌ای به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^c & \xleftarrow{\psi_{\mathcal{A},p}^{\tilde{A}}} & \mathcal{A}_p & \xrightarrow{\phi_{*,\mathcal{A}}} & \mathcal{A}_{\phi(p)} & \xrightarrow{\psi_{\mathcal{A},\phi(p)}^A} & \mathbb{R}^c \\ & & \downarrow & & & & \uparrow \\ & & \rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)) & & & & \end{array} , \quad (۳۰۰)$$

که وقتی بر روی ضرایب بردار ویژگی  $f \in \mathbb{R}^c$  عمل می‌کنیم به دست می‌آید:

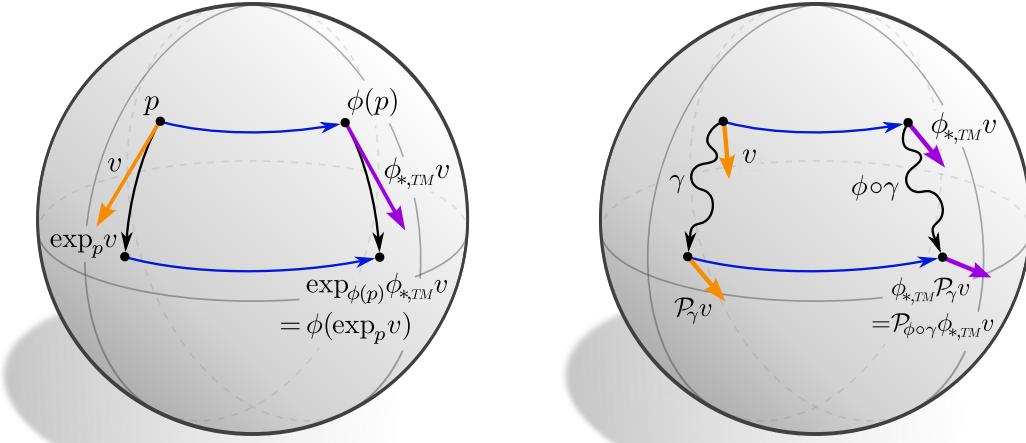
$$\begin{aligned} & \left[ \psi_{\mathcal{A},\phi(p)}^A \circ \phi_{*,\mathcal{A}} \circ (\psi_{\mathcal{A},p}^{\tilde{A}})^{-1} \right] (f) \\ &= \left[ \psi_{\mathcal{A},\phi(p)}^A \circ \phi_{*,\mathcal{A}} \right] \left( [\sigma^{\tilde{A}}(p), f] \right) && \text{(تعريف } \psi_{\mathcal{A},p}^{\tilde{A}} \text{، معادله (۱۹۵))} \\ &= \psi_{\mathcal{A},\phi(p)}^A \left( [\phi_{*,FM}(\sigma^{\tilde{A}}(p)), f] \right) && \text{(تعريف } \phi_{*,\mathcal{A}} \text{، معادله (۲۷۷))} \\ &= \psi_{\mathcal{A},\phi(p)}^A \left( [\sigma^A(\phi(p)) \triangleleft g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p), f] \right) && \text{(تبديل پیمانه القابی، معادله (۲۹۳))} \\ &= \psi_{\mathcal{A},\phi(p)}^A \left( [\sigma^A(\phi(p)), \rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))f] \right) && \text{(تعريف } \rho \text{، معادله (۱۷۰))} \\ &= \rho \left( g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \right) \cdot f && \text{(تعريف } \psi_{\mathcal{A},p}^{\tilde{A}} \text{، معادله (۱۹۴))} \end{aligned} \quad (۳۰۱)$$

توجه داشته باشید که عبارت  $(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))\rho$  مستلزم آن است که  $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)$  یک عنصر گروه ساختار باشد زیرا  $\rho$  یک نمایش  $G$  است. این یک بار دیگر از دیدگاه دیگری نشان می‌دهد که پیش‌ران‌ها بر روی  $\mathcal{A}$  فقط می‌توانند برای ایزومتری‌ها در  $\text{Isom}_{GM}$  تعریف شوند. برای کامل بودن، ما بدیهی‌سازی محلی زیر از نمودار جابجایی از معادله (۲۸۲) را ارائه می‌دهیم، که ممکن است هنگام پیاده‌سازی CNN‌های مستقل از مختصات و آزمایش هم‌متغیری  $\text{Isom}_{GM}$  آنها مفید باشد:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \phi \times \rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}) & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ U^{\tilde{A}} \times \mathbb{R}^c & \xleftarrow{\Psi_{\mathcal{A}}^{\tilde{A}}} & \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(U^{\tilde{A}}) & \xrightarrow{\phi_{*,\mathcal{A}}} & \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(U^A) & \xrightarrow{\Psi_{\mathcal{A}}^A} & U^A \times \mathbb{R}^c \\ & \searrow \text{proj}, & \pi_{\mathcal{A}} \circ f & \uparrow & \phi \triangleright f & \uparrow \pi_{\mathcal{A}} & \swarrow \text{proj}, \\ & & U^{\tilde{A}} & \xrightarrow{\phi} & U^A & & \end{array} \quad (۳۰۲)$$

#### ۴.۱.۸ جابجایی پذیری اعمال ایزومتری با نگاشت نمایی و منتقل کننده‌ها

در بخش بعدی ما به عبارتی برای عمل ایزومتری‌ها بر روی پول‌بک‌های منتقل کننده  $f^*$  از میدان‌های ویژگی  $f$  نیاز خواهیم داشت، که آن را در اینجا استخراج می‌کنیم. برای این منظور، ما رفتار نگاشت نمایی و منتقل کننده‌های موازی را تحت عمل ایزومتری‌ها مورد بحث قرار می‌دهیم.



شکل ۳۷. چپ: ایزومتری‌ها با نگاشت نمایی جابجا می‌شوند، یعنی،  $\exp_{\phi(p)} \circ \phi_{*,TM}(v) = \phi \circ \exp_p(v)$  برای هر بردار  $v \in T_p M$  و ایزومتری  $\phi \in \text{Isom}(M)$ . راست: ایزومتری‌ها همچنین با انتقال لوی-چیویتا بردارهای مماس و بردارهای ویژگی جابجا می‌شوند، یعنی،  $\phi_{*,A} \circ \mathcal{P}_{A,\gamma} = \mathcal{P}_{A,\phi \circ \gamma} \circ \phi_{*,A}$  برای مسیرهای دلخواه  $M \rightarrow M$  [۱]:  $\gamma$  و ایزومتری‌های  $\phi \in \text{Isom}(M)$ . اگر یک اتصال جایگزین و G-سازگار استفاده شود، ما می‌خواهیم که همان خاصیت جابجا بی‌پذیری برای آنها نیز برقرار باشد. نامتفیر بودن نگاشتهای نمایی و منتقل‌کننده‌ها نسبت به ایزومتری به کانولوشن‌های GM اجازه می‌دهد تا تحت عمل ایزومتری‌ها هم متغیر باشند.

**ایزومتری‌ها و نگاشت نمایی:** همانطور که در [۲] اثبات شده است، ایزومتری‌ها ژئودزیک‌ها را به ژئودزیک‌ها نگاشت می‌کنند و بنابراین به طور خاص با نگاشت نمایی جابجا می‌شوند.<sup>۷۲</sup>

$$\exp_{\phi(p)} \circ \phi_{*,TM}(v) = \phi \circ \exp_p(v) \quad \forall v \in T_p M, \phi \in \text{Isom}(M), \quad (3.0.3)$$

برای هر ایزومتری و هر بردار مماس در  $p$  برقرار است (هنوز یک منیفلد از نظر ژئودزیکی کامل را فرض می‌کنیم)، این بیان می‌کند که نتیجه نگاشت نمایی در  $p$  که با یک بردار  $v$  ارزیابی شده و سپس از طریق ایزومتری نگاشت می‌شود، برابر با نگاشت نمایی در  $(p)\phi$  است که با پیش‌ران  $v$  ارزیابی می‌شود، همانطور که در شکل ۳۷ (چپ) به تصویر کشیده شده است. این گزاره به صورت نموداری با جابجا بی‌پذیری (مربع بالایی) نمودار زیر بیان می‌شود:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\phi} & M \\
 \exp \uparrow & & \downarrow \exp \\
 TM & \xrightarrow{\phi_{*,TM}} & TM \\
 \pi_{TM} \downarrow & & \downarrow \pi_{TM} \\
 M & \xrightarrow{\phi} & M
 \end{array} \quad (3.0.4)$$

**ایزومتری‌ها و منتقل‌کننده‌های موازی:** پیش‌ران روی کلاف مماس در [۲] علاوه بر این استدلال شد که با منتقل‌کننده‌های متناظر لوی-چیویتا جابجا می‌شود، همانطور که در شکل ۳۷ (راست) به تصویر کشیده شده است. اگر یک اتصال جایگزین و G-سازگار برای انتقال بردارهای ویژگی انتخاب شود، ما می‌خواهیم که آن نیز با عمل ایزومتری جابجا شود. از آنجایی که منتقل‌کننده‌ها و پیش‌ران‌ها بر روی  $FM$ ،  $TM$  و  $GM$  از آنها بی‌پذیری  $\phi$  بر روی  $TM$  هستند (القا می‌شوند)، می‌توان به راحتی نشان داد که این خاصیت به آنها نیز منتقل می‌شود. به طور خاص برای کلاف‌های بردار ویژگی الحاقی این به این معنی است که برای ایزومتری‌های دلخواه  $\phi$  و مسیرهای  $\gamma$  ما رابطه

$$\phi_{*,A} \circ \mathcal{P}_{A,\gamma} = \mathcal{P}_{A,\phi \circ \gamma} \circ \phi_{*,A} \quad (3.0.5)$$

<sup>۷۲</sup> اثبات به این واقعیت متنکی است که اتصال لوی-چیویتا  $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ ،  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ ، که نگاشت نمایی ریمانی بر اساس آن است، با ایزومتری‌ها جابجا می‌شود:  $\phi \triangleright (\nabla_X Y) = \nabla_{\phi \triangleright X} (\phi \triangleright Y)$ ; به [۲] مراجعه کنید.

را فرض می کنیم، به طوری که نمودار زیر جایجا می شود:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}_{\gamma(\cdot)} & \xrightarrow{\phi_{*,A}} & \mathcal{A}_{\phi \circ \gamma(\cdot)} \\
 \downarrow \mathcal{P}_{A,\gamma} & & \downarrow \mathcal{P}_{A,\phi \circ \gamma} \\
 \mathcal{A}_{\gamma(1)} & \xrightarrow{\phi_{*,A}} & \mathcal{A}_{\phi \circ \gamma(1)}
 \end{array} \tag{۳۰۶}$$

**ایزومتری ها و پولبک های منتقل کننده میدان های ویژگی:** با داشتن قوانین تبدیل نگاشت های نمایی و منتقل کننده ها تحت عمل ایزومتری ها، ما همه جیز لازم را برای استخراج قانون تبدیل پولبک های منتقل کننده  $\text{Exp}_p^* f$  از میدان های ویژگی  $f$  در دست داریم:

**قضیه ۸.۴ (عمل ایزومتری بر روی پولبک های منتقل کننده میدان های ویژگی):** فرض کنید  $f \in \Gamma(\mathcal{A})$ . فرض کنید  $\phi \in \text{Isom}_{GM}$  هر ایزومتری حافظ  $G$ -ساختار باشد. فرض کنید منتقل کننده های بردار ویژگی  $\phi$  با عمل  $\text{Isom}_{GM}$  جابجا شوند، یعنی معادله (۳۰۵) برقرار باشد (که به طور خود کار برای اتصال لوی-چوپیتا تضمین می شود). سپس پولبک منتقل کننده (تعريف ۷.۵) از میدان پیش ران  $f \triangleright \phi$  به صورت زیر داده می شود:

$$\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f) = \phi_{*,\mathcal{A}_{\phi(1)}} \circ [\text{Exp}_{\phi^{-1}(p)}^* f] \circ \phi_{*,TM}^{-1} \tag{۳۰۷}$$

اثبات: ما با اعمال سمت راست بر روی یک بردار دلخواه  $v \in T_p M$  شروع می کیم و با استفاده از ویژگی های استخراج شده در این بخش به تدریج به سمت چپ می رسیم:

$$\begin{aligned}
 & \phi_{*,\mathcal{A}_{\phi(1)}} [\text{Exp}_{\phi^{-1}(p)}^* f] \phi_{*,TM}^{-1} (v) \\
 &= \phi_{*,\mathcal{A}_{\phi(1)}} \mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\phi(1)}, \phi^{-1}(p)} \leftarrow \exp_{\phi^{-1}(p)} \circ \phi_{*,TM}^{-1} (v) \circ f \circ \exp_{\phi^{-1}(p)} \circ \phi_{*,TM}^{-1} (v) \quad (۷.۵) \\
 &= \phi_{*,\mathcal{A}_{\phi(1)}} \mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\phi(1)}, \phi^{-1}(p)} \leftarrow \phi^{-1} \circ \exp_p (v) \circ f \circ \phi^{-1} \circ \exp_p (v) \quad (\text{عمل ایزومتری بر } \exp, \text{معادله } ۳۰۳) \\
 &= \mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\phi(1)}, p \leftarrow \exp_p (v)} \circ \phi_{*,\mathcal{A}_{\phi(1)}} \circ f \circ \phi^{-1} \circ \exp_p (v) \quad (\text{عمل ایزومتری بر } \mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\phi(1)}}, \text{معادله } ۳۰۵) \\
 &= \mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\phi(1)}, p \leftarrow \exp_p (v)} \circ (\phi \triangleright f) \circ \exp_p (v) \quad (\text{پیش ران میدان ها, معادله } ۲۸۱) \\
 &= [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)] (v) \quad (\text{بولبک منتقل کننده, تعريف } ۷.۵) \quad \square
 \end{aligned} \tag{۳۰۸}$$

به طور شهودی، این نتیجه فقط بیان می کند که پولبک منتقل کننده یک میدان پیش ران برابر با پیش ران پولبک منتقل کننده میدان اصلی است. نسبت به بدیهی سازی های محلی، این پیش ران را می توان به عنوان یک تبدیل پیمانه القا شده از ایزومتری تفسیر کرد، که در معادله (۹۳) بیان شد. ما در ادامه فرض خواهیم کرد که اتصال  $G$ -سازگاری که برای انتقال بردار های ویژگی انتخاب می شود، همیشه نسبت به  $\text{Isom}_{GM}$  نامغایر خواهد بود و بنابراین معادله (۳۰۷) برقرار است.

اینکه پولبک منتقل کننده و پیش ران ایزومتری جابجا می شوند، نتیجه جابجا پذیری نگاشت نمایی و منتقل کننده موازی است، که پولبک منتقل کننده بر حسب آنها تعريف می شود. توجه داشته باشید که دیفیومورفیسم های عمومی متربک و در نتیجه نگاشت نمایی و پولبک منتقل کننده میدان های ویژگی را حفظ نمی کنند. با تکیه بر این ساختارها، تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن های  $GM$  فقط می توانند نسبت به ایزومتری هم متغیر باشند اما نه کاملاً نسبت به دیفیومورفیسم.

## ۲.۸ هم متغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن های $GM$

اکنون به بررسی این موضوع می پردازیم که تحت چه شرایطی تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن های  $GM$  نسبت به عمل ایزومتری ها بر روی میدان های ویژگی هم متغیر هستند. از آنجایی که عمل بر روی کلاف های بردار ویژگی  $G$ -الحاقی فقط برای ایزومتری های حافظ  $G$ -ساختار تعريف شده است، ما تمام گزاره ها را برای زیر گروه های  $\text{Isom}_{GM} \leq \text{Isom}(M)$  یا زیر گروه های  $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$  از آن فرمول بندی خواهیم کرد. البته همیشه می توان گروه های ساختار  $G \geq d$  را در نظر گرفت که برای آنها  $\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M)$  است.

هم متغیری یک تبدیل میدان کرنل، و در نتیجه کانولوشن های  $GM$ ، به صورت زیر تعريف می شود:

**تعريف ۸.۵ (تبدیل میدان کرنل هم متغیر نسبت به ایزومتری):** فرض کنید  $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} : \Gamma(\mathcal{A}_{\phi(1)}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\phi(0)})$  یک تبدیل میدان کرنل باشد. آنگاه گفته می شود که  $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$  نسبت به عمل ایزومتری ها در یک زیر گروه  $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$  هم متغیر است اگر با این عمل جابجا شود، یعنی اگر

ویژگی زیر برقرار باشد:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(\phi \triangleright f) = \phi \triangleright (\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f)) \quad \forall f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square}), \phi \in \mathcal{I} \quad (309)$$

بر حسب یک نمودار،  $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$  نسبت به ایزومنتری‌ها در  $\mathcal{I}$  هم‌متغیر است اگر

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathcal{A}_{\square}) & \xrightarrow{\mathcal{T}_{\mathcal{K}}} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \\ \phi \triangleright \downarrow & & \downarrow \phi \triangleright \\ \Gamma(\mathcal{A}_{\square}) & \xrightarrow{\mathcal{T}_{\mathcal{K}}} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \end{array} \quad (310)$$

برای همه  $\phi \in \mathcal{I}$  جابجا شود.

یک نمایش تصویری از این تعریف در شکل ۲۰ آورده شده است. در بخش بعدی ۱.۲.۸ ما یک قید بر روی میدان‌های کرنل استخراج خواهیم کرد تا تبدیل میدان کرنل متناظر نسبت به ایزومنتری هم‌متغیر باشد. نتیجه‌ای که از نظر هندسی شهودی است و به دست می‌آوریم این است که خود میدان کرنل باید تحت عمل ایزومنتری‌ها نامتغیر باشد، که این به معنای نوعی اشتراک‌گذاری وزن بر روی مدارهای ایزومنتری است؛ به شکل ۳۸ مراجعه کنید. بخش ۲.۲.۸ این پیش‌ها را به مورد خاص تر کاتولوشن‌های  $GM$  و میدان‌های کرنل کاتولوشنی  $GM$  اعمال می‌کند. مشخص می‌شود که کاتولوشن‌های  $GM$  به دلیل  $G$ -هدایت‌پذیری کرنل الگوی خود، به طور خود، هر ایزومنتری در  $Isom_{GM}$  هم‌متغیر هستند.

### ۱.۲.۸ هم‌متغیری ایزومنتری تبدیلات میدان کرنل عمومی

نتیجه اصلی این بخش، قضیه ۸.۸، بیان می‌کند که یک تبدیل میدان کرنل  $\mathcal{K}$  نسبت به ایزومنتری هم‌متغیر است اگر و تنها اگر میدان کرنل زیربنایی آن  $\mathcal{K}$  تحت ایزومنتری‌ها نامتغیر باشد. برای معنادار کردن این گزاره، ما با تعریف رفتار تبدیلی میدان‌های کرنل هنگام عمل ایزومنتری‌ها بر آنها شروع می‌کنیم.

**تعریف ۸.۶ (عمل ایزومنتری بر روی میدان‌های کرنل).** فرض کنید  $\mathcal{K} : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square}, \mathcal{A}_{\square\square})$  یک میدان کرنل باشد. یک ایزومنتری  $\phi \in Isom_{GM}$  از طریق پیش‌ران میدان کرنل بر روی  $\mathcal{K}$  عمل می‌کند:

$$\phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K} := \phi_{*\square\square} \circ \mathcal{K} \circ \phi_{*,TM}^{-1}. \quad (311)$$

به طور شهودی، این پیش‌ران میدان‌های کرنل را می‌توان به عنوان حرکت دادن کرنل‌های منفرد  $\mathcal{K}_p$  در نقاط  $p \in M$  در امتداد مدارهای گروه ایزومنتری به  $(p)\phi$  در نظر گرفت.

از آنجایی که میدان‌های کرنل به عنوان  $M$ -مورفیسم‌های کلاف تعریف می‌شوند، یعنی  $\mathcal{K} = \pi_{TM} \circ \pi_{\square\square} \mathcal{K} = \pi_{TM} \circ \phi_{*,TM}^{-1} \circ \phi_{*\square\square} \mathcal{K}$  صورتی خوش تعریف است که این ویژگی را حفظ کند. این تضمین می‌شود زیرا پیش‌ران روی کلاف مماس و کلاف هومومorfیسم نگاشت‌های کلاف هستند که به ترتیب (۲۶۵) و (۲۷۸) (معادله (۲۷۸) را برآورده می‌کنند:

$$\begin{aligned} \pi_{\square\square} \phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K} &= \pi_{\square\square} \phi_{*\square\square} \mathcal{K} \phi_{*,TM}^{-1} \\ &= \phi \pi_{\square\square} \mathcal{K} \phi_{*,TM}^{-1} \\ &= \phi \pi_{TM} \phi_{*,TM}^{-1} \\ &= \phi \phi^{-1} \pi_{TM} \\ &= \pi_{TM} \end{aligned} \quad (312)$$

ما تعريف عمل ايزومتری را بر روی میدان‌های کرنل با یک نمودار جابجایی به تصویر می‌کشیم:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M & & \\
 & \nearrow \pi_{TM} & & \swarrow \pi_{\mathcal{A}_{\mathbb{D}\mathbb{D}}} & \\
 TM & \xrightarrow{\phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K}} & \text{Hom}(\mathcal{A}_{\mathbb{D}\mathbb{D}}, \mathcal{A}_{\mathbb{D}\mathbb{D}}) & & \\
 \downarrow \phi_{*,TM} & & \uparrow \phi_{*,\mathcal{A}_{\mathbb{D}\mathbb{D}}} & & \\
 TM & \xrightarrow{\mathcal{K}} & \text{Hom}(\mathcal{A}_{\mathbb{D}\mathbb{D}}, \mathcal{A}_{\mathbb{D}\mathbb{D}}) & & \\
 & \searrow \pi_{TM} & & \swarrow \pi_{\mathcal{A}_{\mathbb{D}\mathbb{D}}} & \\
 & & M & &
 \end{array} \tag{۳۱۳}$$

بعض پایینی این نمودار میدان کرنل مستقل از مختصات  $\mathcal{K}$  را از نمودار در معادله (۲۳۷) نشان می‌دهد در حالی که بخش بالایی پیش‌ران آن  $\phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K} = \phi^{-1} \circ \mathcal{K} \circ \phi_{*,\mathbb{D}\mathbb{D}}$  را توسط  $\phi$  را توسط  $\phi_{*,TM}$  نشان می‌دهد. جابجایی پذیری فلش سمت چپ، که تأیید می‌کند  $\phi_{*,\mathcal{K}}$  کرنل‌ها را از  $p$  به  $\phi(p)$  منتقل می‌کند، از این واقعیت ناشی می‌شود که  $\phi_{*,TM}$  و  $\phi_{*,\mathbb{D}\mathbb{D}}$  هر دو نگاشتهای کلاف روی  $\phi$  هستند.

ما با تعريف میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ايزومتری ادامه می‌دهیم - یک نمایش تصویری در شکل ۳۸ یافت می‌شود.

**تعريف ۸.۷ (میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ايزومتری).** گفته می‌شود یک میدان کرنل  $\mathcal{K}$  نامتغیر<sup>۷۳</sup> تحت ايزومتری‌ها در  $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$  است اگر قید  $\mathcal{K} = \mathcal{K} \circ \phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K} = \mathcal{K}$  را برای همه  $\phi \in \mathcal{I}$  برآورده کند. ما فضای میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ايزومتری را با

$$\mathcal{K}_{\mathbb{D}\mathbb{D}\mathbb{D}\mathbb{D}}^{\mathcal{I}} := \left\{ \mathcal{K} : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\mathbb{D}\mathbb{D}}, \mathcal{A}_{\mathbb{D}\mathbb{D}}) \mid \pi_{\mathbb{D}\mathbb{D}\mathbb{D}\mathbb{D}} \circ \mathcal{K} = \pi_{TM}, \quad \phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K} = \mathcal{K} \quad \forall \phi \in \mathcal{I} \right\}. \tag{۳۱۴}$$

بانوشتن  $\mathcal{K}$ ، قید نامتغیر بودن به صورت زیر خوانده می‌شود:

$$\phi_{*,\mathbb{D}\mathbb{D}\mathbb{D}\mathbb{D}} \circ \mathcal{K} \circ \phi_{*,TM}^{-1} = \mathcal{K} \quad \forall \phi \in \mathcal{I}, \tag{۳۱۵}$$

که پس از بسط بیشتر  $\phi_{*,\mathbb{D}\mathbb{D}\mathbb{D}\mathbb{D}}$  همانطور که در معادله (۲۸۰) تعريف شده است، به صورت زیر در می‌آید:

$$\phi_{*,\mathcal{A}_{\mathbb{D}\mathbb{D}}} \mathcal{K}(\phi_{*,TM}^{-1} v) \phi_{*,\mathcal{A}_{\mathbb{D}\mathbb{D}}}^{-1} = \mathcal{K}(v) \quad \forall v \in TM, \quad \forall \phi \in \mathcal{I} \tag{۳۱۶}$$

به شاهت این قیود میدان کرنل در معادلات (۳۱۵) و (۳۱۶) با قید  $G$ -هدایت پذیری بر روی کرنل‌های الگو در معادلات (۲۴۳) و (۲۴۴) توجه کنید. در واقع، هر دو قید ارتباط نزدیکی با هم دارند و تا حدی یکدیگر را ایجاد می‌کنند، همانطور که در بخش بعدی ۲.۲.۸ در مورد کانولوشن‌های  $GM$  هم متغیر نسبت به ايزومتری نشان خواهیم داد.

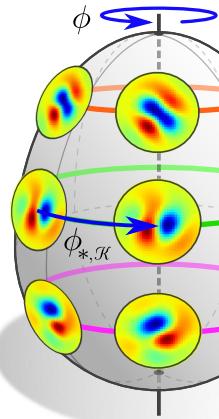
قضیه زیر اثبات می‌کند که میدان‌های کرنلی که تحت ايزومتری‌ها نامتغیر هستند، در واقع متناظر با تبدیلات میدان کرنل هم متغیر نسبت به ايزومتری هستند:

**قضیه ۸.۸ (تبدیل میدان کرنل هم متغیر  $\Leftrightarrow$  میدان کوفل نامتغیر).** یک تبدیل میدان کرنل  $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} : \Gamma(\mathcal{A}_{\mathbb{D}\mathbb{D}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\mathbb{D}\mathbb{D}\mathbb{D}\mathbb{D}})$  نسبت به ايزومتری‌ها در  $\text{Isom}_{GM} \leq \mathcal{I}$  طبق تعريف ۸.۵ هم متغیر است اگر و تنها اگر میدان کرنل زیربنایی  $\mathcal{K}$  تحت ايزومتری‌ها طبق تعريف ۸.۷ نامتغیر باشد، یعنی،

$$\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(\phi \triangleright f) = \phi \triangleright \mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f) \quad \forall \phi \in \mathcal{I}, \quad f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\mathbb{D}\mathbb{D}}) \iff \phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K} = \mathcal{K} \quad \forall \phi \in \mathcal{I} \tag{۳۱۷}$$

اثبات: برای اثبات این قضیه، ما تبدیلات میدان کرنل و پیش‌ران‌های میدان ویژگی را در هر دو طرف شرط هم متغیری ايزومتری در معادله (۳۰۹) می‌نویسیم. گزاره پس از چند دستکاری جبری از مقایسه هر دو طرف به دست می‌آید.

<sup>۷۳</sup> به جای گفتن اینکه  $\mathcal{K}$  نامتغیر است، می‌توان آن را هم متغیر نامید زیرا  $\forall \phi \in \mathcal{I} \quad \phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K} = \mathcal{K} \circ \phi_{*,TM}$  نسبت به اعمال گروهی معینی بر روی دامنه و هم دامنه اش هم متغیر باشد، خودش تحت پیش‌ترکیب و پس‌ترکیب با اعمال روی دامنه و هم دامنه اش مانند معادله (۳۱۵) نامتغیر است.



شکل ۳۸: نمایش تصویری یک میدان کرنل نامتغیر  $\mathcal{K}$  برای حالت یک (زیر) گروه ایزومنتری  $(2) \quad \mathcal{I} = SO(2)$ . قید نامتغیر بودن مستلزم  $\mathcal{K} := \phi_{*,\mathcal{A}_{\text{TM}}} \mathcal{K} \phi_{*,\mathcal{K}}^{-1} = \mathcal{K}$  است. این ایجاد می‌کند که کرنل‌ها بر روی مدارهای  $\phi$  در  $\mathcal{I}$  دارند. این  $\mathcal{I}$  عمل به اشتراک گذاشته شوند اما اجازه می‌دهد کرنل‌های متقاضی بر روی مدارهای مختلف وجود داشته باشند. قضیه ۸.۸ اثبات می‌کند که میدان‌های کرنل نامتغیر و تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر بکار راه ایجاد می‌کنند. این به طور شهودی روشن است زیرا یک الگوی خاص در میدان ویژگی در  $p \in M$  همان پاسخی را هنگامی که به  $(p)$  منتقل می‌شود برمی‌انگزد، اگر و تنها اگر کرنل‌ها در هر دو نقطه متنطبق باشند. برای انتخاب  $2 \in \mathcal{I}$  به عنوان گروه ایزومنتری، کرنل‌ها علاوه بر این باید یک قید بازتابی را برآورده کنند؛ به شکل ۴۰ مراجعه کنید.

ما با سمت راست معادله (۳۱۹) شروع می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 [\phi \triangleright \mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f)](p) &\stackrel{(1)}{=} \phi_{*,\mathcal{A}_{\text{TM}}} [\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f)](\phi^{-1}(p)) \\
 &\stackrel{(2)}{=} \phi_{*,\mathcal{A}_{\text{TM}}} \int_{T_{\phi^{-1}(p)}M} \mathcal{K}(v) [\text{Exp}_{\phi^{-1}(p)}^* f](v) dv \\
 &\stackrel{(3)}{=} \phi_{*,\mathcal{A}_{\text{TM}}} \int_{T_{\phi^{-1}(p)}M} \mathcal{K}(v) \phi_{*,\mathcal{A}_{\text{TM}}}^{-1} [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](\phi_{*,\text{TM}}(v)) dv \\
 &\stackrel{(4)}{=} \int_{T_p M} \phi_{*,\mathcal{A}_{\text{TM}}} \mathcal{K}(\phi_{*,\text{TM}}^{-1} \tilde{v}) \phi_{*,\mathcal{A}_{\text{TM}}}^{-1} [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](\tilde{v}) d\tilde{v} \\
 &\stackrel{(5)}{=} \int_{T_p M} [\phi_{*,\mathcal{A}_{\text{TM}}} \mathcal{K} \phi_{*,\text{TM}}^{-1}](\tilde{v}) [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](\tilde{v}) d\tilde{v} \\
 &\stackrel{(6)}{=} \int_{T_p M} [\phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K}](\tilde{v}) [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](\tilde{v}) d\tilde{v} \tag{318}
 \end{aligned}$$

مراحل (۱) و (۲) عمل ایزومنتری  $\triangleright$  را بر روی میدان‌های ویژگی (تعریف ۸.۲) و تبدیل میدان کرنل (تعریف ۷.۶) بسط می‌دهند. قانون تبدیل پولبک متنقل کننده میدان در قضیه ۸.۴ که به نامتغیر بودن اتصال  $G$ -سازگار نسبت به  $GM$  Isom متنکی است، مرحله (۳) را توجیه می‌کند. مرحله (۴)  $v$  را با  $\tilde{v} = \phi_{*,\text{TM}} v$  جایگزین می‌کند. از آنجایی که  $\phi$  یک ایزومنتری است، تغییر حجم برابر با ۱ است. مراحل (۵) و (۶) عمل پیش‌ران کرنل  $\phi_{*,\mathcal{K}}$  را شناسایی می‌کنند، تعریف ۸.۶ گزاره حاصل کاملاً شهودی است: یک تبدیل خروجی تبدیل میدان کرنل متناظر با یک تبدیل همزمان ورودی و میدان کرنل آن است.

نوشتن سمت چپ به دست می‌دهد:

$$[\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(\phi \triangleright f)](p) = \int_{T_p M} \mathcal{K}(v) [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](v) dv, \tag{319}$$

که تا تبدیل میدان کرنل با سمت راست معادل است.

هم‌متغیری ایزومنتری مستلزم آن است که هر دو عبارت برای میدان‌های دلخواه  $f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{TM}})$ ، نقاط  $p \in M$  و ایزومنتری‌های  $\phi \in \mathcal{I}$  موافق باشند. این حالت اگر و تنها اگر میدان کرنل تحت عمل ایزومنتری‌ها نامتغیر باشد، برقرار است.  $\square$

توجه داشته باشید که این اثبات در (یک  $G$ -اطلس از) بدیهی‌سازی‌های محلی بسیار دشوار بود. توصیف سراسری و مستقل از مختصات تبدیلات میدان کرنل امکان یک اثبات ساده را بدون نگرانی از اینکه ایزومنتری‌ها ویژگی‌ها را بین بدیهی‌سازی‌های محلی مختلف متنقل کنند، فراهم می‌کند.

در این مرحله ما می توانستیم با بررسی بیشتر میدان های کرnel نامتغیر نسبت به ایزو متري ادامه دهیم: از آنجایی که قید نامتغیر بودن ایجاد می کند که کرnel ها بر روی مدارهای گروه ایزو متري به اشتراک گذاشته شوند، توصیف کل میدان کرnel بر روی کل منيفلد زائد است. بنابراین امکان کاهش توصیف چنین میدان های کرنلی به میدان های کرنل بر روی فضاهای خارج قسمتی وجود دارد. از آنجایی که این تحلیل برای اثبات هم متفاوتی ایزو متري کانون لوشن های  $GM$  لازم نیست و به برخی تعاریف فنی بیان دارد، ما آن را به بخش ۳۸ موکول می کنیم.

## ۲.۲.۸ هم متفاوتی ایزو متري کانون لوشن های $GM$

به یاد بیاورید که کانون لوشن های  $GM$  (تعریف ۷.۴) به عنوان تبدیلات میدان کرنل خاص با میدان های کرنل کانون لوشنی  $GM$  (تعریف ۷.۴) تعریف شدند. بنابراین نتایج مربوط به هم متفاوتی تبدیلات میدان کرنل بلا فاصله به کانون لوشن های  $GM$  نیز اعمال می شود. با این حال، علاوه بر قید نامتغیر بودن ایزو متري در معادله (۳۱۵)، میدان های کرنل کانون لوشنی  $GM$  باید قید  $G$ -هدایت پذیری را بر روی کرنل الگو از معادله (۲۴۳) برآورده کنند و وزن ها را طبق معادله (۲۴۵) بر روی  $G$ -ساختار به اشتراک گذاشته اند. برای اینکه کانون لوشن  $GM$  نسبت به ایزو متري هم متفاوتی باشد، همه این قیود باید به طور همزمان برآورده شوند. به طور شهودی، این ایجاد می کند که اشتراک گذاری وزن کانون لوشنی با اشتراک گذاری وزن القا شده از ایزو متري بر روی مدارها موافق باشد. خوشبختانه مشخص می شود که این به طور خود کار برای ایزو متري های مورد نظر صادق است: کانون لوشن های  $GM$  وزن ها را بر روی  $G$ -ساختار به اشتراک گذاشته اند و ایزو متري ها در  $Isom_{GM}$  تضمین شده اند که نسبت به  $Isom_{GM}$  نامتغیر باشند. در مخصوصات، این در تبدیلات پیمانه القا شده از  $g_{\phi}^{A\tilde{A}}$  (معنی  $(p)$ ) که در  $G$ -گروه ساختار مقدار می گیرند، معکس می شود، به طوری که آنها توسط  $G$ -هدایت پذیری کرنل های الگو حذف می شوند.

برای دقیق تر کردن این استدلال ها، یک کانون لوشن  $GM$  یعنی  $(K \star : \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}))$  در  $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square\square}}^G$ -هدایت پذیر بود. نظر بگیرید، که طبق تعریف ۷.۸ فقط تبدیل میدان کرنل  $\mathcal{T}_{K_K}$  با میدان کرنل کانون لوشنی  $GM$  یعنی  $\mathcal{K}_K$  است. طبق قضیه ۸.۸ کانون لوشن  $GM$  بنابراین دقیقاً زمانی نسبت به  $Isom_{GM}$  هم متفاوت است که  $\mathcal{K}_K$  نسبت به  $Isom_{GM}$  نامتغیر باشد، یعنی زمانی که  $\phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K}_K = \phi_{*,\square\square} \circ \mathcal{K}_K \circ \phi_{*,TM}^{-1}$  باشد. این قید بر روی کرنل  $K$  را برای هر  $\phi \in Isom_{GM}$  برآورده کند. این قید بر روی کرنل  $K$  به طور معادل با مجموعه ای از قیود بر روی کرنل های کانون لوشن منفرد که میدان را تشکیل می دهدن، بیان می شود:

$$\phi_{*,\square\square} \circ \mathcal{K}_{K,p} \circ \phi_{*,TM}^{-1} = \mathcal{K}_{K,\phi(p)} \quad \forall p \in M, \phi \in Isom_{GM} \quad (320)$$

با در نظر گرفتن یک نقطه خاص  $\varphi \in M$  ما پیمانه های دلخواه  $\tilde{A}$  را در  $p$  و  $A$  را در  $\phi(p)$  از  $G$ -اطلس انتخاب می کنیم. میدان کرنل کانون لوشنی  $GM$  طبق تعریف ۷.۴ در  $p$  و  $\phi(p)$  به صورت زیر داده می شود:

$$\mathcal{K}_{K,p} := (\psi_{\square\square,p}^{\tilde{A}})^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^{\tilde{A}}|}} \circ \psi_{TM,p}^{\tilde{A}} \quad \text{و} \quad \mathcal{K}_{K,\phi(p)} := (\psi_{\square\square,\phi(p)}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_{\phi(p)}^A|}} \circ \psi_{TM,\phi(p)}^A. \quad (321)$$

با جایگذاری این عبارات در قید در معادله (۳۲۰) برای  $p$  ثابت و شناسایی  $(\psi_{\square\square,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,\square\square} \circ (\psi_{\square\square,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,TM}^{-1})^{-1})$  به دست می آوریم:

$$(\psi_{\square\square,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,TM}^{-1})^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^{\tilde{A}}|}} \circ \psi_{TM,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,TM}^{-1} = (\psi_{\square\square,\phi(p)}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_{\phi(p)}^A|}} \circ \psi_{TM,\phi(p)}^A \quad \forall \phi \in Isom_{GM} \quad (322)$$

بنابراین هم متفاوتی ایزو متري برقرار خواهد بود اگر اشتراک گذاری وزن از طریق پیمانه های القا شده از ایزو متري  $\phi_{*,\square\square} \circ \psi_{\square\square,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,TM}^{-1}$  با اشتراک گذاری وزن از طریق پیمانه های اصلی  $(\psi_{\square\square,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,TM}^{-1})^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^{\tilde{A}}|}} \circ \psi_{TM,p}^{\tilde{A}}$  موافق باشد. به یاد بیاورید که پیمانه های القا شده از ایزو متري طبق قضیه ۸.۳ برای ایزو متري های  $Isom_{GM}$  تضمین شده اند که با  $G$ -اطلس ها (از کلاس متناظر) سازگار باشند. همانطور که در معادله (۲۴۶) نشان داده شده است، انتخاب خاص پیمانه، که کرنل الگوی  $G$ -هدایت پذیر نسبت به آن جهت دهنده می شود، بی اهمیت است، تا زمانی که پیمانه های  $G$ -سازگار باشند. از آنجایی که همه استخراج ها از نقطه انتخاب شده  $p$  و انتخاب خاص پیمانه های مستقل بودند، این ایجاد می کند که کانون لوشن های  $GM$  بنا به طراحی تضمین شده اند که نسبت به  $Isom_{GM}$  هم متفاوت باشند.

برای به دست آوردن شهود بهتر برای این نتیجه، ارزش دارد که تبدیلات پیمانه القایی و با مقدار در  $G$  یعنی  $(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))$  را صریح کنیم. برای این منظور، توجه داشته باشید که جایگذاری پذیری نمودارها در معادلات (۳۰۲) و (۲۸۵) ایجاد می کند  $(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \circ \psi_{\square\square,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,TM}^{-1} = \rho_{\square\square} \circ (g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))$ . با جایگذاری این عبارات مختصاتی در قید در معادله (۳۲۲) به این الزام می رسیم که

$$(\rho_{\square\square} \circ (g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \circ \psi_{\square\square,\phi(p)}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^{\tilde{A}}|}} \circ (g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \circ \psi_{TM,\phi(p)}^A = (\psi_{\square\square,\phi(p)}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_{\phi(p)}^A|}} \circ \psi_{TM,\phi(p)}^A \quad (323)$$

باید برای هر ایزومتری  $\phi$  در  $\text{Isom}_{GM}$  برقرار باشد. با بسط دادن معکوس در سمت چپ، با استفاده از اینکه  $\sqrt{|\eta_p^{\tilde{A}}|} = \sqrt{|\eta_{\phi(p)}^A|} \cdot |\det g_\phi^{A\tilde{A}}(p)|$  و حذف پیمانه‌ها، که ممکن است زیرا آنها ایزومورفیسم هستند، ما به قید زیر می‌رسیم:

$$\frac{1}{|\det g_\phi^{A\tilde{A}}(p)|} \rho_{\text{iso}}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) \circ K \circ (g_\phi^{A\tilde{A}}(p))^{-1} = K \quad \forall \phi \in \text{Isom}_{GM}, \quad (324)$$

که دقیقاً شیوه قید کرنل  $G$ -هدایت پذیر بر روی  $K$  از تعریف ۷.۳ است. به یاد بیاورید که تبدیلات پیمانه القا شده از ایزومتری  $g_\phi^{A\tilde{A}}(p)$  طبق قضیه ۸.۳ تضمین شده‌اند که اگر  $\phi$  عنصری از  $\text{Isom}_{GM}$  باشد، با مقدار در  $G$  باشد. بنابراین قید در معادله (۳۲۴) همیشه با  $G$ -هدایت پذیری  $K$  برآورده می‌شود.

نتایج استخراج شده در مورد نامتغیر بودن میدان‌های کرنل کانولوشنی  $GM$  یعنی  $\mathcal{K}_K$  نسبت به  $\text{Isom}_{GM}$  به طور خلاصه با این گزاره خلاصه می‌شوند که نمودار زیر تضمین شده است که اگر  $K$   $G$ -هدایت پذیر باشد و اگر  $\phi \in \text{Isom}_{GM}$  حافظ  $G$ -ساختار باشد، جابجا‌بی پذیر است:

$$\begin{array}{c} \text{id} \times (\rho_{\text{iso}}(g_\phi'^{A\tilde{A}}) \circ K / \sqrt{|\eta^A|} \circ (g_\phi'^{A\tilde{A}})^{-1}) \\ \boxed{\begin{array}{ccccc} U^A & & & & \\ \pi_{TM} \nearrow & & \searrow \pi_{\text{iso}} & & \\ \pi_{TM}^{-1}(U^A) & \xrightarrow{\phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K}_K} & \pi_{\text{iso}}^{-1}(U^A) & \xrightarrow{\Psi_{\text{iso}}^A} & U^A \times \mathbb{R}^{c_{\text{iso}} \times c_{\text{iso}}} \\ \uparrow \phi \times g_\phi^{A\tilde{A}} & \uparrow \phi_{*,TM} & \uparrow \phi_{*,\text{iso}}, & \uparrow \phi \times \rho_{\text{iso}}(g_\phi^{A\tilde{A}}) & \\ U^{\tilde{A}} \times \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\Psi_{TM}^{\tilde{A}}} & \pi_{TM}^{-1}(U^{\tilde{A}}) & \xrightarrow{\mathcal{K}_K} & U^{\tilde{A}} \times \mathbb{R}^{c_{\text{iso}} \times c_{\text{iso}}} \\ \downarrow \pi_{TM} & & \swarrow \pi_{\text{iso}} & & \uparrow \text{id} \times K / \sqrt{|\eta^{\tilde{A}}|} \\ U^{\tilde{A}} & & & & \end{array}} \end{array} \quad (325)$$

در اینجا ما پولبک  $U^A \rightarrow G$  را از مختصاتی‌سازی پیش‌ران ایزومتری را از  $U^{\tilde{A}}$  به  $U^A$  برای راحتی نوشتاری تعریف کردیم.

همراه با قضیه ۸.۸، نامتغیر بودن میدان‌های کرنل کانولوشنی  $GM$  نسبت به  $\text{Isom}_{GM}$  هم‌متغیری کانولوشن‌های  $GM$  نسبت به  $\text{Isom}_{GM}$  را ایجاب می‌کند:

**قضیه ۸.۹ (هم‌متغیری ایزومتری کانولوشن‌های  $GM$ ).** یک کانولوشن  $GM$  یعنی  $\Gamma(\mathcal{A}_{\text{iso}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\text{iso}})$  با یک کرنل  $G$ -هدایت پذیر  $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{iso}}, \rho_{\text{iso}}}^G$  هم‌متغیر است، یعنی،

$$K \star (\phi \triangleright f) = \phi \triangleright (K \star f) \quad \forall f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{iso}}), \phi \in \text{Isom}_{GM}. \quad (326)$$

بنابراین نمودار زیر برای هر  $\phi \in \text{Isom}_{GM}$  می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathcal{A}_{\text{iso}}) & \xrightarrow{K \star} & \Gamma(\mathcal{A}_{\text{iso}}) \\ \phi \triangleright \downarrow & & \downarrow \phi \triangleright \\ \Gamma(\mathcal{A}_{\text{iso}}) & \xrightarrow{K \star} & \Gamma(\mathcal{A}_{\text{iso}}) \end{array} \quad (327)$$

اثبات: اثبات در بحث قبل از قضیه ارائه شد.  $\square$

با استخراج این نتیجه کلی در مورد کانولوشن‌های  $GM$ ، ما اکنون برخی موارد خاص را برای انتخاب‌های خاص از گروه‌های ساختار  $G$  مورد بحث قرار می‌دهیم. اولاً، برای گروه‌های ساختار متعامد  $d = G$  (یا ابرگروه‌های آن)، کانولوشن با هر ایزومتری جابجا می‌شود:

قضیه ۸.۱۰ (همتغیری کامل ایزومتری کانولوشن‌های  $OM$ ). کانولوشن‌های  $OM$  نسبت به عمل هر ایزومتری  $\phi \in \text{Isom}(M)$  را روی میدان‌های ویژگی همتغیر هستند. به طور کلی تر، هر کانولوشن  $GM$  برای  $G$ -ساختارها با گروه‌های ساختار  $d \geq G$  کاملاً نسبت به ایزومتری همتغیر است.

اثبات: گزاره از قضیه ۸.۹ با مشاهده اینکه  $\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M)$  برای گروه‌های ساختار  $d \geq G$  تضمین شده است، به دست می‌آید. دو میگردید در معادله (۲۷۵) مورد بحث قرار گرفت.  $\square$

این نتیجه اساساً به این واقعیت مตکی است که ایزومتری‌ها به عنوان آن زیرگروهی از دیفنتومورفیسم‌ها بر روی  $M$  تعریف می‌شوند که خودریختی‌های  $d$ -ساختار را القا می‌کنند. به بیان کمتر انتزاعی،  $\text{Isom}(M)$  بنا به تعریف آن زیرگروهی از دیفنتومورفیسم‌ها است که به متريک ريماني  $M$  از  $d$ -گذار و  $d$ -ساختار متناظر  $OM$  اطلاعاتی معادل با متريک است.

بر روی متفاصلهای ريماني جهت‌پذیر، می‌توان علاوه بر این یک جهت (دست‌گردی قاب) را انتخاب کرد، که همراه با متريک یک  $\text{SO}(d)$ -ساختار  $SOM$  را تعریف می‌کنند. ایزومتری‌های متناظر که به خودریختی‌های ساختار  $(d, \text{SO})$  بالابر می‌شوند، ایزومتری‌های حافظ جهت در  $\text{Isom}_+(M)$  هستند.

قضیه ۸.۱۱ (همتغیری  $\text{Isom}_+(M)$  کانولوشن‌های  $SOM$ ). کانولوشن‌های  $SOM$  نسبت به عمل ایزومتری‌های حافظ جهت  $\phi \in \text{Isom}_+(M)$  بر روی میدان‌های ویژگی همتغیر هستند.

اثبات: این نتیجه از قضیه ۸.۹ با مشاهده اینکه  $\text{Isom}_{SOM} = \text{Isom}_+(M)$  به دست می‌آید.  $\square$

به عنوان مثال، یک کانولوشن  $SOM$  برای  $M = \mathbb{R}^n$  که متناظر با شکل ۳۶ است، نسبت به عمل گروه اقلیدسی ویژه  $(\mathbb{R}^n, +)$  همتغیر است. به طور مشابه، یک کانولوشن  $SOM$  برای  $S^n = \text{SO}(n)$  که متناظر با شکل ۳۶ ب است، نسبت به دوران با  $(\mathbb{R}^n, +)$  همتغیر است.

توجه داشته باشید که نتایج قضایای ۸.۱۰ و ۸.۱۱ فقط به گروه ساختار  $G$ -ساختار بستگی ندارند. برای زیرگروه‌های  $F$  از  $d$  (یا  $\text{SO}(d)$ ) مسائل پیچیده‌تر می‌شوند. در این موارد، زیرگروه‌های  $\text{Isom}_{GM}$  از  $\text{Isom}(M)$  به نشاندن خاص  $G$ -ساختار  $GM$  در  $G$  بستگی دارند. این برای  $\{e\} = \{e\}$  در شکل ۳۵ به تصویر کشیده شد. به طور خاص، شکل ۳۵  $\{e\}$ -ساختار کانونی  $\mathbb{R}^n$  را نشان می‌دهد که کاملاً نسبت به انتقال همتغیر است، یعنی  $\text{Isom}_{\{e\}M} = T_e = (\mathbb{R}^n, +)$  در مقابل، شکل ۳۵ ب یک  $\{e\}$ -ساختار از  $\mathbb{R}^n$  را نشان می‌دهد که فقط در امتداد یک محور نسبت به انتقال همتغیر است به طوری که  $\text{Isom}_{\{e\}M} \cong T_e = (\mathbb{R}, +)$ . از دیدگاه شبکه‌های کانولوشنی این نتیجه بسیار شهودی است: کرنل‌های  $\{e\}$ -هدایت‌پذیر در این مثال‌ها بدون قید هستند، یعنی کرنل‌های کانولوشن مرسمون هستند. بنابراین آنها به طور کلی هیچ اطلاعاتی در مورد پاسخ‌های خود هنگام اعمال نسبت به قاب‌های مرجع تبدیل شده با پیمانه حمل نمی‌کنند. از آنجایی که قاب‌ها، و بنابراین کرنل‌ها، در شکل ۳۵ در جهت «چپ-راست» به طور متفاوتی چرخانده شده‌اند، پاسخ‌های کرنل هنگام انتقال یک سیگنال در آن جهت به طور غیرقابل پیش‌بینی تغییر می‌کنند. اگر کرنل‌های الگو، با این حال،  $\text{SO}(n)$ -هدایت‌پذیر بودند، می‌توانستند چرخش قاب‌ها را در نظر بگیرند. این حالت متناظر با وضعیت در شکل ۳۶ است، یعنی یک کانولوشن  $SOM$ .

## ۳.۸ میدان‌های کرنل خارج‌قسمتی

قضیه ۸.۸ نشان داد که همتغیری ایزومتری یک تبدیل میدان کرنل، نیازمند نامتغیر بودن میدان کرنل متناظر است. از آنجایی که قید نامتغیر بودن ایجاد می‌کند که کرنل‌ها بر روی مدارها به اشتراک گذاشته شوند، همانظور که در شکل ۳۸ به تصویر کشیده شده است، توصیف ریاضی چنین میدان‌های کرنل نامتغیری زائد است: یک کرنل منفرد در یک نماینده مدار برای بازسازی میدان کرنل بر روی کل مدار کافی است. در پیش ۲.۳.۸ ما توصیف‌های معادل و کاهش‌یافته‌ای از میدان‌های کرنل نامتغیر را بر حسب کرنل‌ها بر روی نماینده گان مدار استخراج می‌کنیم. این کرنل‌های نماینده خود توسعه عمل زیرگروه پایدارساز نماینده مدار محدود می‌شوند. ما یک بالابر (منحصر به فرد) از کرنل‌های نماینده به میدان‌های کرنل نامتغیر پیشنهاد می‌کنیم که یک ایزومورفیسم بین هر دو توصیف برقرار می‌کند. این ایزومورفیسم بالابر راهی برای پارامترسازی و ساخت تبدیلات میدان کرنل همتغیر نسبت به ایزومتری در یک پایدارسازی پیشنهاد می‌کند. قبل از استخراج این نتایج در بخش ۲.۳.۸، بخش بعدی ۱۳۸ چارچوب ریاضی را تنظیم می‌کند.

استخراج‌ها و نتایج این بخش از نظر روحی به نظریه  $CNN$ ‌های هدایت‌پذیر در فضاهای همگن نزدیک است [؟]. با این حال، ما نتایج آنها را از فضاهای همگن به متفاصلهای عمومی تعمیم می‌دهیم. هنگامی که به فضاهای همگن  $M$  پاییند باشیم، ثابت می‌کنیم که تبدیلات میدان کرنل همتغیر هستند. نسبت به ایزومتری با کانولوشن‌های  $GM$  معادل هستند.

### ۱.۳.۸ فضاهای خارج‌قسمتی القا شده از ایزومتری

عمل یک گروه تقارن بر روی یک فضای آن را به مدارهایی افزای می‌کند که به عنوان مجموعه‌هایی از تمام نقاطی که با عمل گروه به هم متصل هستند، تعریف می‌شوند. فضای چنین مدارهایی، فضای خارج‌قسمتی نسبت به این عمل گروهی است. در ادامه ما فضاهای خارج‌قسمتی ناشی از اعمال یک گروه ایزومتری  $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$  را هم بر روی متفاصلهای تاری مورد بحث قرار خواهیم داد. این تعاریف بعداً به ما اجازه می‌دهند تا با عمل ایزومتری‌ها بر روی کرنل‌ها، وزن‌ها را بر روی مدارها به اشتراک بگذاریم.

**خارج قسمت‌های منیفلد:** هر نقطه  $p \in M$  یک مدار را ترسیم می‌کند

$$\mathcal{I}.p := \{\phi(p) \mid \phi \in \mathcal{I}\} \subseteq M, \quad (328)$$

که به عنوان مجموعه تمام نقاطی که با عمل بر روی  $p$  با هر ایزومتری در  $\mathcal{I} \leq \text{Isom}(M)$  به دست می‌آیند، تعریف می‌شود. می‌توان به راحتی برسی کرد که رابطه « $p$  و  $q$  عناصری از یک مدار هستند» یک رابطه همارزی است (به پاره‌قی ۴۷ مراجعه کنید) و بنابراین منیفلد را همانطور که در شکل ۳۹ به تصویر کشیده شده است، افزای می‌کند. فضای خارج قسمتی

$$\mathcal{I}\setminus M := \{\mathcal{I}.p \mid p \in M\} \quad (329)$$

نسبت به این رابطه همارزی، فضای تمام مدارها است، یعنی هر عنصر از  $\mathcal{I}\setminus M$  متناظر با یک مدار کامل در  $M$  است.<sup>۷۴</sup> نگاشت خارج قسمتی متناظر

$$Q_M : M \rightarrow \mathcal{I}\setminus M, \quad p \mapsto \mathcal{I}.p \quad (330)$$

یک نقطه  $p \in M$  را با مدارش  $\mathcal{I}.p \in \mathcal{I}\setminus M$  شناسایی می‌کند. برای هر مدار می‌توان یک نماینده مدار دلخواه را انتخاب کرد که به طور رسمی توسط یک مقطع تعیین می‌شود

$$r_M : \mathcal{I}\setminus M \rightarrow M \quad Q_M \circ r_M = \text{id}_{\mathcal{I}\setminus M}, \quad (331)$$

که در آن شرط آخر تضمین می‌کند که نماینده  $(\mathcal{I}.p)$  در واقع عنصری از مدار  $\mathcal{I}.p$  است. اغلب به مقاطع پیوسته (یا هموار) علاقه‌مند هستیم، با این حال، اینها به طور کلی وجود ندارند. بنابراین ما در ادامه نمی‌خواهیم که نماینده‌گان مدار به طور پیوسته انتخاب شوند و در صورت لزوم این نقصه را بعداً جبران خواهیم کرد. طبق معمول برای مقاطع، آنها به طور کلی فقط وارون راست نگاشت خارج قسمتی هستند اما وارون چپ نیستند، یعنی این با یک نمودار جابجایی  $r_M \circ Q_M \neq \text{id}_M$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{I}\setminus M & \xrightarrow{r_M} & M & \xrightarrow{Q_M} & \mathcal{I}\setminus M \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{id}_{\mathcal{I}\setminus M}} & & \uparrow & \\ & & & & \end{array} \quad (332)$$

مشابه با معادله (۱۴۷) و یک نمودار غیرجابجایی

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{Q_M} & \mathcal{I}\setminus M & \xrightarrow{r_M} & M \\ & \swarrow & & \uparrow & \\ & & & \text{id}_M & \end{array} \quad (333)$$

مشابه با معادله (۱۴۸) به تصویر کشیده می‌شود. تارهای منفرد  $Q_M$  از نگاشت خارج قسمتی  $\text{preim}_{Q_M}(\mathcal{I}.p) = \mathcal{I}.p \subseteq M$  توسط خود مدارها داده می‌شوند. توجه داشته باشید که  $M \xrightarrow{Q_M} \mathcal{I}\setminus M$  به طور کلی یک کلاف تاری نیست زیرا مدارها لزوماً با یکدیگر همسان ریخت نیستند و بنابراین نمی‌توان آنها را به صورت محلی با یک تار نمونه‌ای مشترک  $F$  بدینهی سازی کرد، همانطور که در نمودار جابجایی در معادله (۱۲۹) لازم است. بنابراین هر مدار نوع خاص خود را دارد که در ارتباط نزدیک با زیرگروه‌های پایدارساز نقاط روى آن مدار خاص است. زیرگروه پایدارساز

$$\text{Stab}_p := \{\xi \in \mathcal{I} \mid \xi(p) = p\} \leq \mathcal{I} \quad (334)$$

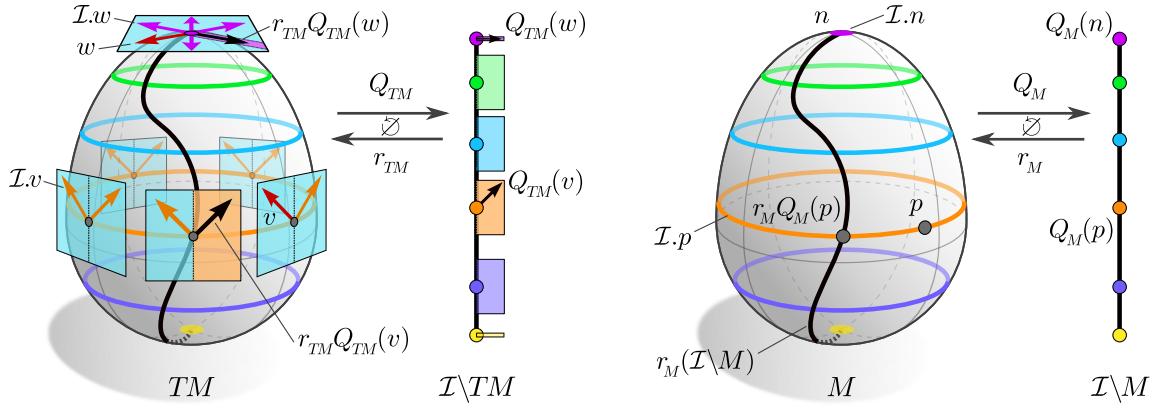
یک نقطه  $p \in M$  به عنوان آن زیرگروهی از گروه ایزومتری که  $p$  را ثابت نگه می‌دارد، تعریف می‌شود. بر حسب زیرگروه پایدارساز، برقرار است که مدار یک نقطه با

$$\mathcal{I}.p \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_p. \quad (335)$$

شناسایی می‌شود. برای دیدن این ادعا، فرض کنید  $f_p : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}.p$ ،  $\phi \mapsto \phi(p)$  برای یک  $p \in M$  و مشاهده کنید که  $\phi(p) = f_p(\phi) = \phi(p) = \phi \circ \text{id}_M$ . به طور کلی  $\phi \circ \text{id}_M = \phi$  برای هر  $\phi \in \text{Stab}_p$  می‌توان نشان داد که در واقع  $\text{preim}_{f_p}(\phi(p)) = \phi$ .  $\text{Stab}_p(\phi(p)) = \text{id}_M$  یک هم‌دسته از زیرگروه پایدارساز  $f_p$  ایزومورفیسم ادعای شده  $\mathcal{I}.p \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_p$  را برقرار می‌کند.

برای شهودی تر کردن این ساختارها، مثال در شکل ۳۹ را با ۲  $\cong \mathcal{I}$  در نظر بگیرید. مدارهای  $\{s\}$  و  $\{n\}$   $\mathcal{I}.n = \{n\}$  و  $\mathcal{I}.s = \{s\}$  در نقطه  $s \in \mathcal{I}$  تثبیت می‌شوند. این با، به عنوان مثال،  $\mathcal{I}.n \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_n = \mathcal{I}/\mathcal{I} \cong \{n\}$  موقایق است زیرا  $\text{Stab}_n = \mathcal{I}$  فقط نقطی هستند که توسط  $\mathcal{I}$  تثبیت می‌شوند. مدارهای  $\mathcal{I}.n \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_n$  کامل ایزومتری مطابق است. برای هر نقطه دیگر  $s \in \mathcal{I}$ ، مدارهای  $\mathcal{I}.s \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_s$  هستند. ما بازتاب‌های  $\mathcal{I}.p$  را بازتاب نسبت به  $p$  را به عنوان زیرگروه پایدارساز داریم و بنابراین در واقع دایره  $\mathcal{I}/\text{Stab}_p \cong \mathbb{S}^1$  را به عنوان نوع مدار به دست می‌آوریم. نگاشت خارج قسمتی  $\mathcal{I}\setminus M$  نقاط  $Q_M : M \rightarrow \mathcal{I}\setminus M$  را به مدارهایشان  $Q_M(q) = \mathcal{I}.q$  در فضای خارج قسمتی  $\mathcal{I}\setminus M$  که در سمت راست نشان داده شده است، فرمی‌فرستند. از آنجایی که مدارها را می‌توان از قطب شمال تا قطب جنوب پیمود، فضای خارج قسمتی  $\mathcal{I}\setminus M$  توپولوژی یک پاره خط را دارد. مقطع تصویر شده را بازیابی نمی‌کند. به عنوان مثال، دایره  $r_M : \mathcal{I}\setminus M \rightarrow M$  را برای هر مدار  $o \in \mathcal{I}\setminus M$  توصیف می‌کند، این نماینده مدار یک نقطه صورت خط سیاه  $r_M(\mathcal{I}\setminus M)$  از قطب شمال تا قطب جنوب نشان داده است، تفسیر کرد.

<sup>۷۴</sup> ما  $M$  را به عنوان یک خارج قسمت چپ می‌نویسیم زیرا  $\mathcal{I}\setminus M$  از چپ بر روی  $M$  عمل می‌کند.

(ب) نگاشت خارج قسمتی و نمایندگان مدار برای  $TM$ (آ) نگاشت خارج قسمتی و نمایندگان مدار برای  $M$ 

شکل ۳.۳۹: نگاشتهای خارج قسمتی  $Q_M$  و  $Q_{TM}$  و نمایندگان مدار (مقاطع)  $r_M$  و  $r_{TM}$  برای اعمال گروه ایزومتری  $\mathcal{I} = \mathbb{Z}_2$  بر روی منیفلد  $M$  در شکل ۳.۲۹ آ و بر روی کلاف مماس  $TM$  در شکل ۳.۳۹ ب. توصیف دقیقی از هر دو تصویر در متن اصلی آورده شده است.

**خارج قسمت‌های کلاف:** از آنجایی که گروه ایزومتری نه تنها بر روی خود منیفلد بلکه از طریق پیش‌ران‌ها بر روی کلاف‌های الحاقی نیز عمل می‌کند، این کلاف‌ها به روشی مشابه به مدارهای افزایش شوند. برای کلی نگاشتن بحث، ما در ادامه یک کلاف الحاقی عمومی  $E \xrightarrow{\pi_E} M$  را در نظر می‌گیریم که می‌تواند نماینده  $TM$ ,  $TM$ ,  $TM$ ,  $GM$ ,  $FM$ ,  $Hom(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square\square})$  یا  $\mathcal{A}_{\square\square\square}$  باشد. ماعناصر فضای کل را با  $e \in E$  نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم  $\phi_{*,E}$  پیش‌ران  $\phi$  بر روی  $E$  باشد همانطور که در بخش ۲.۱.۸ معرفی شد. مدار یک عنصر از کلاف سپس به قیاس با معادله (۳۲۸) به صورت زیر داده می‌شود:

$$\mathcal{I}.e = \{\phi_{*,E}(e) \mid \phi \in \mathcal{I}\} \quad (3.36)$$

در حالی که فضای خارج قسمتی، که از مدارهای کلاف تشکیل شده است، به طور مشابه با معادله (۳۲۹) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{I}\setminus E = \{\mathcal{I}.e \mid e \in E\}. \quad (3.37)$$

مشابه قبل، نگاشت خارج قسمتی (کانونی) عناصر کلاف را به مدارشان می‌فرستد:

$$Q_E : E \mapsto \mathcal{I}\setminus E, \quad e \mapsto \mathcal{I}.e \quad (3.38)$$

ما یک نگاشت تصویر (منحصر به فرد) را تعریف می‌کنیم

$$\pi_{\mathcal{I}\setminus E} : \mathcal{I}\setminus E \rightarrow \mathcal{I}\setminus M, \quad Q_E(e) \mapsto Q_M \circ \pi_E(e) \quad (3.39)$$

بین خارج قسمت‌های کلاف و خارج قسمت منیفلد همانطور که در نمودار جاگایی زیر به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccc} & Q_E & \\ \mathcal{I}\setminus E & \xleftarrow{\hspace{1cm}} & E \\ \pi_{\mathcal{I}\setminus E} \downarrow & & \downarrow \pi_E \\ & Q_M & \\ \mathcal{I}\setminus M & \xleftarrow{\hspace{1cm}} & M \end{array} \quad (3.40)$$

توجه داشته باشید که تعریف در معادله (۳۳۹) به انتخاب خاص نماینده مدار استگی ندارد زیرا برای هر  $\phi_{*,E}(e) \in Q_E(e)$  دیگر نتیجه یکسانی به دست می‌آوریم:  $Q_M \circ \pi_E \circ \phi_{*,E}(e) = Q_M \circ \phi \circ \pi_E(e) = Q_M \circ \pi_E(e)$ . تعیین می‌شوند

$$r_E : \mathcal{I}\setminus E \rightarrow E \quad Q_E \circ r_E = \text{id}_{\mathcal{I}\setminus E}, \quad (3.41)$$

که ما دوباره نمی‌خواهیم پیوسته باشد. با این حال، برای راحتی، ما می‌خواهیم که نماینده مدارهای کلاف بالای نماینده مدار  $(\mathcal{I}\setminus M)$  در فضای پایه قرار گیرند، یعنی برآورده کنند:

$$\pi_E \circ r_E = r_M \circ \pi_{\mathcal{I}\setminus E} \quad (3.42)$$

همانطور که در نمودار جایجاوی زیر نشان داده شده است:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} \setminus E & \xrightarrow{r_E} & E \\ \pi_{\mathcal{I} \setminus E} \downarrow & & \downarrow \pi_E \\ \mathcal{I} \setminus M & \xrightarrow{r_M} & M \end{array} \quad (343)$$

زیرگروه پایدارساز یک عنصر کلاف  $e \in E$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Stab}_e := \{\xi \in \mathcal{I} \mid \xi_{*,E} e = e\} \leq \text{Stab}_{\pi_E(e)} \leq \mathcal{I}. \quad (344)$$

این لزوماً یک زیرگروه از زیرگروه پایدارساز  $\text{Stab}_{\pi_E(e)}$  نقطه  $(e)$  در فضای پایه است، که به راحتی با  $\xi \in \text{Stab}_e \Leftrightarrow \xi_{*,E} e = e \Rightarrow \xi = e$  دیده می‌شود. مانند قبل، رابطه  $\mathcal{I}.e \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_e$  برقرار است.

ما مثال خود را از شکل ۳۹ آآ با درنظر گرفتن عمل  $\mathcal{I} \cong \mathcal{I}$  بر روی کلاف مimas  $TM$  در شکل ۳۹ تعمیر  $M$  می‌دهیم. مدار (بنفس) یک بردار غیرصفر  $w \in T_n M$  یک دایره را در  $T_n M$  توصیف می‌کند. این با  $\mathcal{I}.w \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_w \cong \mathbb{Z}/\mathcal{R} \cong S^1$  سازگار است زیرا چنین برداری با بازتاب‌های  $\text{Stab}_w \cong \mathcal{R}$  در امتداد محور خود پایدار می‌شود. مدار  $v \in T_n M$  یک نقطه منفرد در  $TM$  است که توسط هر ایزومنتری پایدار می‌شود. هر بردار دیگر  $v \in T_p M$  (قرمز)، که در یک فضای مimas در نقطه‌ای  $p \in M$  متفاوت از قطب هازندگی می‌کند، با عمل گروه ایزومنتری به فضاهای مimas دیگر  $T_{\phi(p)} M$  بر روی مدار  $p$  چرخانده و بازتاب می‌شود. مدار  $\mathcal{I}.v$  (نارنجی) از هر چنین برداری، اگر دقیقاً به سمت شمال یا جنوب اشاره نکند، با یک کپی به سمت شرق و یک کپی به سمت غرب در هر یک از فضاهای مimas روی  $\mathcal{I}.p$  داده می‌شود. ما برای چنین بردارهای  $\{e\}$  داریم و در واقع مدار  $\mathcal{I}.v \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_v = \mathbb{Z}/\{e\}$  با  $\mathcal{I}.v' \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_{v'}$  (یا دو دایره) همسان‌ریخت است. بردارهای  $v' \in T_p M$  که دقیقاً به سمت شمال یا جنوب اشاره می‌کنند با بازتاب‌ها روی محوری که تعریف می‌کنند پایدار می‌شوند، یعنی  $\text{Stab}_{v'} \cong \mathcal{R}$ . مدار آنها با یک دایره  $\mathcal{I}.v' \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_{v'} \cong \mathbb{Z}/\mathcal{R} \cong S^1$  همسان‌ریخت است.

نگاشت خارج قسمتی  $Q_{TM} : TM \rightarrow \mathcal{I}/TM$  کلاف مimas را به خارج قسمت کلاف  $\mathcal{I}$  که در نیمه راست شکل ۳۹ ب نشان داده شده است، تصویر می‌کند. برای در ک ساختار آن، ما تمام موارد کیفی متفاوت را در نظر می‌گیریم: اولاً، توجه داشته باشید که مدارهای بردارها در قطبها متناظر با دایره‌هایی با شعاع معین هستند، به طوری که مجموعه چنین مدارهایی یک خط  $\pi_{\mathcal{I} \setminus E}^{-1}(\mathcal{I}.n) \cong \mathbb{R}^+$  (پرتو صورتی زیر فلس سیاه) را تشکیل می‌دهد. به طور مشابه، مدارهای بردارها در هر نقطه دیگر  $\mathcal{I}.p$  تمام فضاهای مimas  $M$  در دو بازتاب قطع می‌کنند و بنابراین یک نیم صفحه  $\pi_{\mathcal{I} \setminus E}^{-1}(\mathcal{I}.p) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  (نارنجی) را تشکیل می‌دهند. مقطع  $r_{TM} : \mathcal{I}/TM \rightarrow TM$  یک نیم خارج قسمت کلاف را به یک نماینده در  $TM$  می‌فرستد. طبق الزام در معادله (۳۴۲)، این نماینده‌گان باید در همان تار روی نماینده‌گان  $(\mathcal{I}/M)(r_M)$  از خارج قسمت منفرد، که به صورت خط سیاه نشان داده شده است، قرار گیرند. به عنوان مثال،  $v \in T_p M$  (قرمز) با نگاشت خارج قسمتی به  $r_{TM} Q_{TM}(v) \in \mathcal{I}/TM$  فرستاده می‌شود. مقطع  $(v) Q_{TM}(r_{TM} Q_{TM}(v))$  را با (همچنین سیاه)  $r_{TM Q_{TM}}(v)$  نمایش می‌دهد، که عنصری از  $M$  است و به طور کلی با  $v$  متفاوت است.

## ۲.۳.۸ میدان‌های کرنل نماینده خارج قسمتی و قیود پایدارساز

برای توجیه ساخت میدان‌های کرنل نماینده خارج قسمتی و قیود پایدارساز، فرمول‌بندی صریح تر

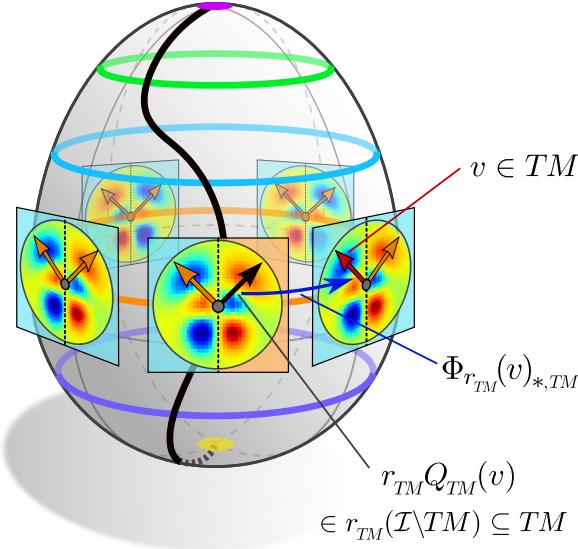
$$\phi_{*,\mathbb{Z}^n} \circ \mathcal{K}_p \circ \phi_{*,TM}^{-1} = \mathcal{K}_{\phi(p)} \quad \forall p \in M, \phi \in \mathcal{I}. \quad (345)$$

از قید ناتغیر بودن ایزومنتری از تعریف ۸.۷ را در نظر بگیرید، که با نوشتن معادله (۳۱۵) برای هر نقطه  $p \in M$  به طور جداگانه به دست می‌آید. این فرمول‌بندی تأکید می‌کند که قید منجر به اشتراک‌گذاری وزن در امتداد مدارهای منفرد  $\mathcal{I}.p \in \mathcal{I}/M$  می‌شود همانطور که در شکل‌های ۳۸ و ۴۰ به تصویر کشیده شده است. این ایجاد می‌کند که کرنل  $\mathcal{K}_r$  در یک نقطه نماینده دلخواه  $\mathcal{K}_r(o)$  از هر مدار  $o = \mathcal{I}.r = r_M$  در  $\mathcal{I} \in \mathcal{I}/\phi(r)$  است، مشخص می‌کند. کرنل  $\mathcal{K}_r$  در نقطه نماینده  $r$  خود توسط زیرگروه پایدارساز  $r$  محدود می‌شود:

$$\xi_{*,\mathbb{Z}^n} \circ \mathcal{K}_r \circ \xi_{*,TM}^{-1} = \mathcal{K}_r \quad \forall \xi \in \text{Stab}_r. \quad (346)$$

این ایجاد می‌کند که هر میدان کرنل ناتغیر نسبت به ایزومنتری را می‌توان بر حسب یک میدان از کرنل‌ها بر روی نماینده‌گان مدار منفرد  $r \in \mathcal{I}/M$  که معادله (۳۴۶) را برآورده می‌کنند، پارامترسازی کرد.

در صورتی که زیرگروه پایدارساز در  $r$  غیربدیهی باشد، قید پایدارساز در معادله (۳۴۶) تقارن‌های بیشتری را برای خود کرنل  $\mathcal{K}_r$  در  $r$  ایجاد می‌کند. به عنوان مثال، در مثال شکل ۴۰ زیرگروه پایدارساز  $\mathcal{R}$  بر روی مدار بر جسته شده وجود دارد که تقارن بازتابی کرنل‌ها را اعمال می‌کند.



شکل ۴۰: نمایش تصویری یک میدان کرnel نامتغیر نسبت به ایزومتری، تعریف ۸.۷ و بازسازی کامل آن فقط از کرnel ها بر روی نمایندگان خارج قسمتی. برخلاف شکل ۳۸، ما در اینجا یک گروه ایزومتری  $\mathcal{I} = \text{SO}(2)$  را به جای  $\mathcal{I}$  فرض می کنیم. بنابراین کرnel های به تصویر کشیده شده دارای تقارن بازتابی هستند که توسط زیرگروه های پایدارساز  $\text{Stab}_p \cong \mathcal{R}$  از نقاط روی مدار  $(v)$  اعمال می شود. به دلیل تقارنش، میدان کرnel کامل  $(\mathcal{I})$  :  $TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square})$  محدودیت آن به نماینده خارج قسمتی کلاف  $r_{TM}(\mathcal{I})(TM) \subseteq TM$  بازسازی کرد؛ به قضیه ۸.۱۲ مراجعه کنید. به عنوان مثال، کرnel های نشان داده شده به طور کامل توسط کرnel جزئی روی یعنی فضای تارنجی تعیین می شوند. بازسازی در  $M$  با ایزومتری کرnel نماینده خارج قسمتی در  $(\mathcal{I}\setminus TM)$  و  $r_{TM}Q_{TM}(v) \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$  و پیش ران کرnel از طریق ایزومتری بازسازی  $\Phi_{r_{TM}}(v) \in \mathcal{I}$  که در معادله (۳۴۶) تعریف شده است، به  $v$  انجام می شود. ما می خواهیم ذکر کنیم که کرnel های پادتقارن به تصویر کشیده شده هنگام نگاشت بین میدان های ویژگی با پاریته زوج و فرد حاصل می شوند، در حالی که کرnel های بین میدان های ویژگی با پاریته یکسان متقارن خواهند بود.

چنین تقارن های پایدارسازی امکان فشرده سازی بیشتر توصیف میدان های کرnel نامتغیر را فراهم می کند: مشخص می شود که دانستن مقادیر  $\mathcal{K}(w)$  میدان کرnel فقط بر روی نمایندگان خارج قسمتی کلاف مماس  $w \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM) \subseteq TM$  کافی است. در شکل ۴۰ این متناظر با دانستن مقادیر کرnel بر روی نیم فضای بر جسته شده با رنگ تارنجی است، که از آن می توان میدان کامل بر روی مدار را با تقارن های بازتابی و دورانی در  $\mathcal{I} \cong$  بازسازی کرد.

قضیه ۸.۱۲ در زیر ادعای اخیر را دقیق می کند با اثبات اینکه فضای  $\mathcal{K}_{\square\square}^{\mathcal{I}}$  از میدان های کرnel نامتغیر نسبت به ایزومتری با یک فضای  $\mathcal{K}_{\square\square}^{\mathcal{I}}$  میدان های کرnel بر روی نمایندگان مدار کلاف مماس  $(r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM))$  ایزومورف است. با قیود حداقل کاهش یافته مشخص می شود و بنابراین میدان های کرnel را در  $\mathcal{K}_{\square\square}^{\mathcal{I}}$  به روی غیرزايد کدگذاری می کند. در قضیه ۸.۱۳ ما یک فضای ایزومورف سوم  $\mathcal{K}_{\square\square}^{\mathcal{I}}$  را فرمول بندی می کنیم که به طور معادل میدان های کرnel نامتغیر نسبت به ایزومتری را بر حسب کرnel های  $\mathcal{K}_{\square\square}$  با قید زیر گروه پایدارساز از معادله (۳۴۶) توصیف می کند. در حالی که فرمول بندی میدان های کرnel نامتغیر نسبت به ایزومتری بر حسب  $\mathcal{K}_{\square\square}^{\mathcal{I}}$  شامل قیود قوی تری نسبت به فرمول بندی بر حسب  $\mathcal{K}_{\square\square}^{\mathcal{I}}$  است، ممکن است برای پایدارسازی ها راحت تر باشد، زیرا کرnel ها را بر روی فضاهای مماس کامل به جای کرnel ها بر روی خارج قسمت های فضاهای مماس توصیف می کند.

**ایزومتری های بازسازی:** برای بازسازی میدان های کرnel نامتغیر کامل در  $\mathcal{K}_{\square\square}^{\mathcal{I}}$  از کرnel های منفرد بر روی نمایندگان مدار، کرnel های نماینده باشد که  $p = r$  ثابت برای نقاط نماینده انتخاب شده، بر روی کل مینفلد توزیع شوند. برای بازسازی کرnel در یک نقطه  $q \in M$ ، این به یک ایزومتری  $\phi$  نیاز دارد که نماینده مدار  $r_M Q_M(q) \in r_M(\mathcal{I}\setminus M) \subseteq M$  باشد. در یک نقطه  $q \in M$  بازگرداند، یعنی  $\phi(r_M Q_M(q)) = q$  (برآورده کنند). برای دقيق تر کردن این، به یاد یاورید که میدان های کرnel  $\mathcal{K} : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square})$  تعریف می شوند، که علاوه بر موقعیتشان، ترازهای کرnel را نیز کدگذاری می کنند. بنابراین ما باید ایزومتری های خاص تری را در نظر بگیریم که نمایندگان مدار کلاف مماس  $v \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM) \subseteq TM$  را به بردارها  $r_{TM}Q_{TM}(v)$  باز می گردانند. این ایزومتری های بازسازی به صورت زیر تعریف می شوند:<sup>۷۵</sup>

$$\Phi_{r_{TM}} : TM \rightarrow \mathcal{I} \quad \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = v \quad \forall v \in TM \quad (347)$$

ما توصیه می کنیم برای به دست آوردن شهودی از ایزومتری های بازسازی به شکل ۴۰ مراجعه کنید: از نظر گرافیکی،  $\Phi_{r_{TM}}(v)$  به عنوان هر ایزومتری تعریف می شود که بردار سیاه  $r_{TM}Q_{TM}(v)$  را روی مدار نارنجی  $v$  به بردار قرمز  $r_{TM}Q_{TM}(v)$  تبدیل کند. توجه داشته باشید که  $\Phi_{r_{TM}}$  تنها تا زیر گروه های پایدارساز نماینده گان مدار منحصر به فرد است زیرا برای هر  $(v)$   $\zeta \in \text{Stab}_{r_{TM}Q_{TM}}(v)$  نتیجه می شود که  $\Phi_{r_{TM}}(\zeta(v)) = \zeta(\Phi_{r_{TM}}(v))$  نیز قید تعریف کننده در معادله (۳۴۷) را برآورده می کند:  $\Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = [\Phi_{r_{TM}}(v)]_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = v$ <sup>۷۶</sup>. نشان داده می شود که تمام ساختارهای بعدی از این ابهام مستقل هستند. عمل ایزومتری های بازسازی بر روی فضای پایه  $M$  با اعمال تصویر کلاف مماس بر هر دو طرف قید

<sup>۷۵</sup> از آنجایی که مقاطع  $\mathcal{I}$  به طور کلی پیوسته نیستند،  $\Phi_{r_{TM}}$  نیز به طور کلی پیوسته خواسته شود.

<sup>۷۶</sup>:علاوه بر این، قید تعریف کننده بر روی  $\Phi_{r_{TM}}$  هنگام ضرب چپ  $(v)$  با هر  $\zeta \in \text{Stab}_v$   $\Phi_{r_{TM}}(\zeta(v))$  برآورده می شود. این، با این حال، هیچ درجه آزادی جدیدی اضافه نمی کند زیرا  $\zeta(v) = \Phi_{r_{TM}}(v)[\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1}\zeta\Phi_{r_{TM}}(v)] =: \Phi_{r_{TM}}(v)\zeta$  با  $\text{Stab}_v \cong \text{Stab}_{r_{TM}Q_{TM}(v)}$

تعريف کننده در معادله (۳۴۷) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 \pi_{TM}(v) &= \pi_{TM} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) && \text{(تعريف } \Phi_{r_{TM}}, \text{ معادله (۳۴۷))} \\
 &= \Phi_{r_{TM}}(v) \pi_{TM} r_{TM} Q_{TM}(v) && \text{(پیش‌ران یک نگاشت کلاف است، معادله (۲۶۴))} \\
 &= \Phi_{r_{TM}}(v) r_M \pi_{\mathcal{I}\setminus TM} Q_{TM}(v) && \text{(تعريف مقاطع کلاف، معادله (۳۴۲))} \\
 &= \Phi_{r_{TM}}(v) r_M Q_M \pi_{TM}(v) && \text{(تعريف } \pi_{\mathcal{I}\setminus E}, \text{ معادله (۳۴۰))} \quad (348)
 \end{aligned}$$

یک خلاصه بصری از ویژگی‌های  $\Phi_{r_{TM}}$  یعنی اعمال آن بر روی  $TM$  و  $M$  در نمودار جابجایی زیر آورده شده است:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_{TM} & & \\
 & \Phi_{r_{TM}} \times r_{TM} \circ Q_{TM} & \longrightarrow & \text{ev} & \\
 TM & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \mathcal{I} \times r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) & \longrightarrow & TM \\
 \pi_{TM} \downarrow & & \text{id}_{\mathcal{I}} \times \pi_{TM} \downarrow & & \downarrow \pi_{TM} \\
 M & & \mathcal{I} \times r_M(\mathcal{I} \setminus M) & \xrightarrow{\hspace{10em}} & M \\
 & & \text{id}_M & &
 \end{array} \quad (349)$$

که در آن نگاشتهای ارزیابی  $\text{ev}$  با استفاده پیش از حد از نمادگذاری، به ترتیب با  $(\phi, p) \mapsto \phi(p)$  و  $\text{ev} : \mathcal{I} \times M \rightarrow M$ ,  $(\phi, p) \mapsto \phi_{*,TM}(v)$  داده می‌شوند.

**میدان‌های کرnel نماینده خارج قسمتی:** همانطور که در بالا استدلال شد، تقارن‌های موجود در یک میدان ویژگی نامتغیر نسبت به ایزومنتری  $\mathcal{K} \in \mathcal{K}_{\square\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$  باید امکان بازسازی کامل آن را از محدودیتش  $\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} : r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) \rightarrow r_{\text{Hom}}(\mathcal{I} \setminus \text{Hom})$  به نماینده‌گان مدار کلاف مimas  $\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)}(\mathcal{I} \setminus TM) \subseteq TM$  فراهم کنند.<sup>۷۷</sup> برای ساخت یک بالابر (منحصر به فرد)  $\Lambda$  که  $\mathcal{K} = \Lambda(\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)})$  را از  $\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)}$  بازیابی می‌کند، ما بردارهای مimas  $w$  را در دامنه  $\mathcal{K}$  از طریق ایزومنتری بازسازی  $\Phi_{r_{TM}}$  از معادله (۳۴۷) بسط می‌دهیم و از نامتغیر بودن (هم‌متغیر بودن) میدان کرnel در معادله (۳۱۵) استفاده می‌کنیم. این منجر به موارد زیر می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}(v) &= \mathcal{K} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) \\
 &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{K} r_{TM} Q_{TM}(v) \\
 &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} r_{TM} Q_{TM}(v) \\
 &=: [\Lambda(\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)})](v) \quad (350)
 \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که این ساختار با وجود ابهام  $\Phi_{r_{TM} Q_{TM}(v)}$  نسبت به ضرب راست با عناصر در  $\mathcal{K}$  خوش‌تعريف است. این به راحتی با مشاهده اینکه برای هر  $w \in TM$  هر  $\mathcal{K}(w) = \mathcal{K}(\xi_{*,TM} w) = \mathcal{K}(w)$  و هر  $\mathcal{K} \in \mathcal{K}_{\square\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$  داریم  $\mathcal{K}(w) \geq \text{Stab}_w$  و بنابراین نتیجه نهایی به انتخاب خاص  $\Phi_{r_{TM}}$  بهم بستگی ندارد، دیده می‌شود.

از آنجایی که بالابر  $\Lambda$  میدان‌های کرnel نامتغیر را از محدودیت آنها به نماینده‌گان مدار کلاف مimas بازیابی می‌کند، می‌توان آن را به عنوان نگاشت مکوس محدودیت (از میدان‌های کرnel نامتغیر) در نظر گرفت. این دیدگاه ایجاب می‌کند که بالابر یک ایزومورفیسم  $\mathcal{K}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\square\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$  باشد که هنوز باید آن را مشخص کنیم و  $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}$  برقرار می‌کند:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{K}_{\square\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} & \xleftarrow{\Lambda} & \mathcal{K}_{\square\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} \\
 \Lambda^{-1} = (\cdot)|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} & &
 \end{array} \quad (351)$$

برای مشخص کردن فضای  $\mathcal{K}_{\square\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$  که  $\Lambda$  را به یک ایزومورفیسم تبدیل می‌کند، کافی است ویژگی‌های میدان‌های محدود شده  $=: \mathcal{Q}$  را برای  $\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} \in \mathcal{K}_{\square\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$  فهرست کنیم:

<sup>۷۷</sup> در ادامه ممکن است  $\mathcal{I} \setminus \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square})$  و  $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square})$  به اختصار بنویسیم.

- اول از همه، از آنچایی که  $\Lambda^{-1}$  با محدودیت دامنه به  $r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$  داده می‌شود، واضح است که هر  $Q \in \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$  باید به شکل :  $\pi_{\text{Hom}}(r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)) \rightarrow r_{\text{Hom}}(\mathcal{I}\setminus \text{Hom})$
- دوم، ویژگی میدان‌های کرنل برای اینکه  $M$ -مورفیسم‌های کلاف باشند، تحت محدودیت  $\Lambda^{-1}$  به این الزام برای  $Q$  ترجمه می‌شود که  $\circ \pi_{\text{Hom}}(w) = \pi_{TM}(w)$
- سوم،  $Q$  باید قید پایدارساز (برداری)  $\mathcal{Q}(w) = Q(w)$  را برای هر  $w \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$  و هر  $w \in \text{Stab}_w(\mathcal{I}\setminus TM)$  بروآورده کند.
- این را می‌توان با در نظر گرفتن قید کامل  $\phi \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$  و  $w \in \mathcal{I}$  با  $\phi \circ \mathcal{Q} \circ \phi^{-1} = Q(w)$  و هر ایزومتری  $\phi \in \mathcal{I}$  که علاوه بر این بروآورده می‌کند  $\phi \circ \mathcal{Q} \circ \phi^{-1} = Q(w)$  یعنی پیش‌ران  $w' \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$  در دامنه محدود شده  $\mathcal{Q}$  باقی می‌ماند، استنتاج کرد. توجه داشته باشید که  $\mathcal{Q}$  و اینکه  $\phi \circ \mathcal{Q} \circ \phi^{-1}$  هر مدار را دقیقاً یک بار قطع می‌کند. این ایجاد می‌کند که  $\mathcal{Q} \cap r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM) = \{w\}$  (برداری) ادعا شده از این ملاحظات نتیجه می‌شود.
- برای شهود به شکل ۴۰ بازی گردیم که در آن بردار نماینده سیاه  $v = r_{TM}Q_{TM}(v)$  فقط با ایزومتری بدیهی  $\{e\} = \mathcal{P}$  پایدار می‌شود، که ایجاد می‌کند مقدار متناظر  $\mathcal{Q}$  بدن قید پایدارش. بردارهای  $r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$  که دقیقاً به سمت شمال یا جنوب اشاره می‌کنند، یعنی روی محور بازنای خط‌چین قرار دارند، با بازتاب‌ها در  $\mathcal{R} \cong \text{Stab}_w$  پایدار می‌شوند، که قیدی را بر روی مقدار کرنل متناظر ایجاد می‌کند.<sup>۷۸</sup>
- به عنوان آخرین الزام،  $Q$  باید به یک میدان کرنل هموار بالابر شود، یعنی  $(Q \circ \mathcal{P}) \circ \mathcal{P} = Q$  باشد. متأسفانه، همواری (یا حتی پیوستگی)  $Q$  به طور خودکار از همواری (پیوستگی)  $\mathcal{P}$  نتیجه نمی‌شود زیرا  $\mathcal{P} \circ \Phi_{r_{TM}} \circ r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM) \circ \mathcal{Q}$  بر حسب  $\Lambda$  تعریف می‌شود، که به طور کلی نمی‌توان آنها را هموار (پیوسته) خواست.

قبل از خلاصه کردن و اثبات دقیق این ادعاهای در قضیه ۱۲.۸ در زیر، ما یک نمای کلی بصری از رابطه بین  $\mathcal{K} = \Lambda(Q)$  و بالابر  $\mathcal{K} = \Lambda(\mathcal{Q})$  را در قالب نمودارهای جابجایی ارائه می‌دهیم:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K} = \Lambda(Q) & & \\ \downarrow & & \\ TM \xrightarrow[\Phi_{r_{TM}} \times \mathcal{Q} \circ r_{TM} \circ Q_{TM}]{} \mathcal{I} \times r_{\text{Hom}}(\mathcal{I}\setminus \text{Hom}) & \xrightarrow{\text{ev}} & \text{Hom} \end{array} \quad (352)$$

و

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{K} = \Lambda(Q) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ TM & \xrightarrow[r_{TM} \circ Q_{TM}]{} & r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM) & \xrightarrow[\mathcal{Q}]{} & r_{\text{Hom}}(\mathcal{I}\setminus \text{Hom}) \\ & \searrow & \uparrow \pi_{TM} & \nearrow & \uparrow \pi_{\text{Hom}} \\ & & r_M(\mathcal{I}\setminus M) & & \\ & \uparrow r_M \circ Q_M & & & \\ & & M & & \end{array} \quad (353)$$

در نمودار آخر، جابجایی‌پذیری مربع بالایی با جایگذاری تعريف بالابر به دست می‌آید، که نتیجه می‌دهد  $r_{\text{Hom}}Q_{\text{Hom}}\Lambda(Q) = \Lambda(Q \circ r_{\text{Hom}}Q_{\text{Hom}}\Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}}Q \circ r_{TM}Q_{TM}) = Q \circ r_{TM}Q_{TM}$ .

قید دقیق به عمل  $\circ \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{Hom}}, \mathcal{A}_{\text{Hom}})$  بر روی  $\mathcal{Q}$  دارد، که به  $\rho_{\text{Hom}}$  و بتایراین به  $\rho_{\text{Hom}}$  و  $\rho_{\text{Hom}}$  سنتگی دارد. کرنل به تصویر کشیده شده در شکل (۴۰) متناظر با  $\rho_{\text{Hom}}$  به عنوان نمایش بازتاب-علامت (پاریته فرد) گروه بازنای خواهد بود، که کرنل‌های پادمتقارن را اعمال می‌کند. پادمتقارن بودن مستلزم آن است که  $\mathcal{Q}$  به  $\rho_{\text{Hom}}$  بروی مجموعه بازنای محدود شود؛ مقایسه کنید با جدول ۳

قضیه ۸.۱۲ (میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی مماس). فضای میدان‌های کرنل نامتغير نسبت به ایزومتری  $\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$  از تعریف ۸.۷ با  $\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$  از میدان‌های کرنل با قید زیرگروه پایدارساز (برداری) بر روی نماینده‌گان خارج‌قسمتی کلاف مماس، که به صورت زیر تعریف می‌شود، ایزومورف است:<sup>۷۴</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} := \left\{ \mathcal{Q} : r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) \rightarrow r_{\text{Hom}}(\mathcal{I} \setminus \text{Hom}) \mid \pi_{\text{Hom}} \circ \mathcal{Q} = \pi_{TM}, \quad \Lambda(\mathcal{Q}), \right. \\ \left. \text{هموار}, \quad \xi_{*,TM} \mathcal{Q}(w) = \mathcal{Q}(w) \quad \forall w \in r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM), \quad \xi \in \text{Stab}_w \right\} \end{aligned} \quad (۳۵۴)$$

ایزومورفیسم بالابر (منحصر به فرد):  $\Lambda : \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$  بین هر دو فضای در اینجا به صورت زیر داده می‌شود:

$$\Lambda(\mathcal{Q}) : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{Hom}}, \mathcal{A}_{\text{Hom}}), \quad v \mapsto [\Lambda(\mathcal{Q})](v) := \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q}|_{r_{TM}}(v). \quad (۳۵۵)$$

معکوس آن  $\Lambda^{-1} : \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$  با محدودیت میدان‌های کرنل نامتغير به نماینده‌گان خارج‌قسمتی کلاف مماس آن داده می‌شود:

$$\Lambda^{-1}(\mathcal{K}) : r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) \rightarrow r_{\text{Hom}}(\mathcal{I} \setminus \text{Hom}), \quad w \mapsto [\Lambda^{-1}(\mathcal{K})](w) := \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)}(w) \quad (۳۵۶)$$

اثبات: برای اثبات اینکه  $\Lambda : \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$  یک ایزومورفیسم است، باید نشان دهیم که (۱)  $\Lambda^{-1}\Lambda$  در واقع معکوس  $\Lambda$  است، که (۲) ویژگی‌های تعریف‌کننده  $\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$  و  $\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$  پس از بالابر و محدود کردن برآورده می‌شوند و اینکه (۳) ساختارها به انتخاب‌های دلخواه بستگی ندارند. برای اینکه این بخش بیش از حد سنگین نشود، ما اثبات کامل را به پیوست ۱. موکول می‌کنیم. مراحل منفرد اثبات در زیر فهرست شده‌اند:

$$\text{اثبات: برای اثبات اینکه } \Lambda : \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \text{ یک ایزومورفیسم است، باید نشان دهیم که (۱) } \Lambda^{-1}\Lambda \text{ در واقع راست از } \Lambda \text{ است}$$

$$\text{اثبات: برای اثبات اینکه } \Lambda : \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \text{ یک ایزومورفیسم است، باید نشان دهیم که (۲) } \Lambda^{-1}\Lambda \circ \Lambda = \text{id}_{\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}} \text{ است}$$

$$\text{اثبات: برای اثبات اینکه } \Lambda : \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \text{ یک ایزومورفیسم است، باید نشان دهیم که (۳) } \Lambda^{-1}(\mathcal{K}) \text{ یک } M\text{-مورفیسم کلاف است}$$

$$\mathcal{K} \in \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}, \quad \pi_{TM} \circ \Lambda^{-1}(\mathcal{K}) = \pi_{TM} \quad (۳۵۷)$$

$$\text{اثبات: برای اثبات اینکه } \Lambda : \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \text{ یک ایزومورفیسم است، باید نشان دهیم که (۱) } \Lambda(\mathcal{Q}) \phi_{*,TM}^{-1} = \Lambda(\mathcal{Q}) \text{ برای هر } \mathcal{Q} \in \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \text{ و } \phi \in \mathcal{I} \quad (۳۵۸)$$

$$\text{اثبات: برای اثبات اینکه } \Lambda : \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \text{ یک ایزومورفیسم است، باید نشان دهیم که (۲) } \Lambda^{-1}(\mathcal{K})(w) = [\Lambda^{-1}(\mathcal{K})](w) \quad \forall w \in r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM), \quad \xi \in \text{Stab}_w \quad (۳۵۹)$$

برآورده می‌کند

$$\text{اثبات: برای اثبات اینکه } \Lambda : \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \text{ یک ایزومورفیسم است، باید نشان دهیم که (۳) تمام ساختارها و اثبات‌ها از انتخاب خاص } \Phi_{r_{TM}} \text{ مستقل هستند}$$

□ همواری میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی بالابر شده بنا به تعریف برقرار است.

اختیاری بودن در انتخاب مقطع  $r_{TM}$  به میدان‌های کرنل خارج‌قسمتی متفاوت اما ایزومورف، که بر روی نماینده‌گان خارج‌قسمتی کلاف مختلف بیان شده‌اند، اجازه می‌دهد.

به جای محدود کردن جداگیری میدان کرنل به نماینده‌گان مدار کلاف در  $(r_M(\mathcal{I} \setminus M))_{TM}$  می‌توان توصیف را فقط به  $(r_M(\mathcal{I} \setminus M))_{TM}$  محدود کرد، یعنی به فضاهای مماس کامل در شکل (۴۰)، این متناظر با مدل‌سازی کرنل (متقارن بازتابی) بر روی کل فضای مماس نشان داده شده در جلو به جای فقط یک نیمه است. الزامات بر روی چینین کرنل‌های محدود شده‌ای را می‌توان با دنبال کردن همان منطق قبلی استخراج کرد و به قید در معادله (۳۴۶) منجر می‌شود. ما یک قضیه مشابه با قضیه (۸.۱۲) به دست می‌آوریم:

قضیه ۸.۱۳ (میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی منیفلد). فضای میدان‌های کرنل نامتغير نسبت به ایزومتری  $\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$  از تعریف ۸.۷ با  $\widehat{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$  از میدان‌های کرنل با قید زیرگروه پایدارساز (منیفلد) بر روی فضاهای مماس روی نماینده‌گان خارج‌قسمتی منیفلد  $(r_M(\mathcal{I} \setminus M))_{TM}$  که به صورت زیر تعریف می‌شود، ایزومورف است:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} := \left\{ \widehat{\mathcal{Q}} : \pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)) \rightarrow \pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)) \mid \pi_{TM} \circ \widehat{\mathcal{Q}} = \pi_{TM}, \quad \widehat{\Lambda}(\widehat{\mathcal{Q}}), \right. \\ \left. \text{هموار}, \quad \xi_{*,TM} \widehat{\mathcal{Q}}|_r \xi_{*,TM}^{-1} = \widehat{\mathcal{Q}}|_r \quad \forall r \in r_M(\mathcal{I} \setminus M), \quad \xi \in \text{Stab}_r \right\} \end{aligned} \quad (۳۵۸)$$

<sup>۷۴</sup> این تعریف از  $\widehat{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$  در وایستگی دوری یا تعریف  $\Lambda$  در معادله (۳۵۵) است. این را می‌توان با هزینه (۱) تعریف فضاهای  $\widetilde{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$  و  $\widetilde{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$  بدون الزامات همواری، که بر حسب آنها (۲)  $\widetilde{\Lambda} : \widetilde{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$  است. این را می‌توان تعریف کرد، که (۳) اجازه می‌دهد الزامات همواری را در  $\widetilde{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$  بر حسب  $\widetilde{\Lambda}$  بخواهیم، احتساب کرد.

ایزومورفیسم بالابر  $\widehat{\Lambda} : \widehat{\mathcal{K}}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$  بر حسب  $\Lambda$  و یک محدودیت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\widehat{\Lambda} := \Lambda \circ (\cdot)|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} \quad (358)$$

و بنابراین اساساً با  $\Lambda$  موافق است:

$$\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathcal{Q}}) : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square\square}), \quad v \mapsto [\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathcal{Q}})](v) := \Phi_{r_{TM}}(v)_{*, \text{Hom}} \widehat{\mathcal{Q}} r_{TM} Q_{TM}(v) \quad (359)$$

معکوس آن  $\widehat{\Lambda}^{-1} : \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} \rightarrow \widehat{\mathcal{K}}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$  با محدودیت میدان‌های کرنل نامتغیر به فضاهای مماس روی نمایندگان خارج قسمتی منیفلد داده می‌شود:

$$\widehat{\Lambda}^{-1}(\mathcal{K}) : \pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)) \rightarrow \pi_{\square\square}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)), \quad \widehat{w} \mapsto [\widehat{\Lambda}^{-1}(\mathcal{K})](\widehat{w}) := \mathcal{K}|_{\pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M))}(\widehat{w}) \quad (360)$$

اثبات: اثبات اساساً مشابه اثبات قضیه ۸.۱۲ است با این تفاوت جزئی که قید قوی‌تر  $\xi \in r_M(\mathcal{I} \setminus M)$  است. از آنجایی که چیز زیادی به آنچه در پیوست ۱. ارائه شده اضافه نمی‌کند، ما از اثبات صرف نظر می‌کنیم.

نمودار جابجایی زیر ایزومورفیسم‌ها را بین سه توصیف معادل از میدان‌های کرنل نامتغیر نشان می‌دهد:

$$\begin{array}{ccccc} & & \Lambda & & \\ & \swarrow \Omega & & \searrow \widehat{\Lambda} & \\ \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} & & \widehat{\mathcal{K}}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} & & \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} \\ \uparrow \Omega^{-1} = (\cdot)|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} & & & \searrow \widehat{\Lambda}^{-1} = (\cdot)|_{\pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M))} & \\ & & \Lambda^{-1} = (\cdot)|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} & & \end{array} \quad (361)$$

**رابطه با کانولوشن‌های  $GM$ :** تفاوت بین کانولوشن‌های  $GM$  هم‌متغیر نسبت به  $\text{Isom}_{GM}$  و تبدیلات میدان کرنل عمومی هم‌متغیر نسبت به  $\text{Isom}_{GM}$  از طریق میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به  $\text{Isom}_{GM}$  این است که اولی کرنل‌های  $G$ -هدایت‌پذیر را بر روی کل منیفلد به اشتراک می‌گذارد در حالی که دومی فقط ملزم به اشتراک گذاری کرنل‌های  $G$ -هدایت‌پذیر بر روی مدارهای  $\text{Stab}_p \in \text{Isom}_{GM} \setminus M$  است. از این‌جا مدارهای وزن‌ها بر روی کل منیفلد به شدت ضروری نیست اما با حمایت از تبع او کام  $\square$  احتمالاً در عمل یک سوگیری استقرایی خوب است. می‌توان آن را به عنوان مشابهی برای این فرض در نظر گرفت که همان قوانین فیزیکی در سراسر جهان اعمال می‌شوند.

اکنون فرض کنید که  $M$  یک فضای همگن نسبت به عمل یک گروه ایزو‌متری  $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$  است، یعنی برای هر دو نقطه  $p, q \in M$  حداقل یک ایزو‌متری  $\phi \in \mathcal{I}$  وجود دارد که هر دو نقطه را به هم متصل می‌کند، یعنی  $\phi(p) = q$ . در این حالت فقط یک مدار منفرد  $\mathcal{I}.p$  وجود دارد که همان  $M$  است، و پایدارسازهای  $\text{Stab}_p$  همه نقاط  $t \in M$  را ایزومورفیسم با هم منطبق هستند. فضای خارج قسمتی است که با یک نقطه نماینده منفرد  $r = r_M(\mathcal{I} \setminus M)$  در  $M$  نمایش داده می‌شود. طبق قضیه ۸.۱۳، فضای میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به  $\mathcal{I}$  یک عضوی است با یک میدان کرنل بر روی نمایندگان مدار بین می‌شود. از آنجایی که ما فقط یک نقطه نماینده منفرد  $r$  برای فضاهای همگن داریم، میدان کرنل نامتغیر نسبت به ایزو‌متری کامل در این حالت معادل با یک کرنل منفرد بر روی  $T_r M$  است. این کرنل نماینده باشد یک قید زیرگروه پایدارساز را در معادله (۳۵۷) برآورده کند. از طریق ایزومورفیسم بالابر  $\widehat{\Lambda}$  در معادله (۳۵۹)، کرنل نماینده بر روی کل منیفلد به اشتراک گذاشته می‌شود.

این بسیار شبیه به تعریف کانولوشن‌های  $GM$  است، که یک کرنل منفرد با قید  $G$ -هدایت‌پذیری را بر روی کل منیفلد به اشتراک می‌گذارند. قضیه ۸.۱۴ در زیر تأیید می‌کند که در واقع یک همارزی بین کانولوشن‌ها و تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر بر روی فضاهای همگن وجود دارد.  $\text{Stab}_r$ -هدایت‌پذیری مستقل از مخصوصات از قید پایدارساز در نتیجه (به طور غیر کافونی) به  $H$ -هدایت‌پذیری کرنل‌های الگو ترجمه می‌شود، که در آن  $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$  با  $\widehat{G} \leq H \cong \text{Stab}_r$  یک نمایش ایزو‌متری از  $\text{Stab}_r$  نسبت به یک مخصوصاتی‌سازی است. می‌توان (زیر) گروه ایزو‌متری  $HM$  از  $GM$  را به عنوان یک کلاف اصلی  $\text{Stab}_r$  بر روی  $M$  در نظر گرفت، که نشاندن (غیر کافونی) آن در  $GM$  یک  $H$ -(zیر) ساختار  $HM$  از  $GM$  را ایجاد می‌کند. اشتراک گذاری یک کرنل  $\text{Stab}_r$ -هدایت‌پذیر از طریق ایزومورفیسم بالابر، که بر اساس عمل  $\mathcal{I}$  عمل می‌کند، سپس دقیقاً متناظر با اشتراک گذاری یک کرنل  $H$ -هدایت‌پذیر بر روی  $HM$  است. این ایجاب می‌کند که تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به  $\mathcal{I}$  بر روی فضاهای همگن در واقع متناظر با یک کانولوشن  $HM$  هستند.

**قضیه ۸.۱۴ (هم‌متغیری بر روی  $\square$  همگن به معنای کانولوشن است).** فرض کنید  $M$  یک منیفلد مجهز به یک  $G$ -ساختار  $GM$  باشد. فرض کنید یک گروه ایزو‌متری  $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$  وجود دارد که به طور تعدی‌پذیر بر روی  $M$  عمل می‌کند و آن را به یک فضای همگن تبدیل می‌کند. فرض کنید  $r \in M$  یک نقطه نماینده دلخواه از  $M$  و  $\text{Stab}_r \leq \mathcal{I}$  باشد. آنگاه

(۱) یک  $H$ -زیر(ساختار  $M$  بر روی  $HM \subseteq GM$  با ویژگی‌های زیر وجود دارد:

$G \cap d \cong \text{Stab}_r \leq H \cong \text{Stab}_r \leq \mathcal{I}$  است

□ یک نشاندن از  $HM$  (به عنوان کلاف اصلی  $\mathcal{I} / \text{Stab}_r$  یعنی  $\text{Stab}_r$  در  $GM$  است که توسط  $\mathcal{I}$  حفظ می‌شود، یعنی  $\text{Isom}_{HM} = \mathcal{I}$ )

(۲) هر تبدیل میدان کرنل  $H$ -هدايت پذیر منفرد را بر روی کل فضای  $M$  به اشتراک می‌گذارد و یا یک کانولوشن  $HM$  با آن کرنل معادل است.

انتخاب خاص  $H$ -ساختار به این‌وورفیسم انتخاب شده  $H \cong \text{Stab}_r$  بستگی دارد اما بایهیت است زیرا تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به  $\mathcal{I}$  را می‌توان به طور معادل در هر چنین انتخابی بیان کرد.

اثبات: اثبات در پیوست ث. ۲ یافت می‌شود. □

تعریف ما از تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزومنتری بر روی فضاهای همگن اساساً معادل با کانولوشن‌های هدايت پذیر بر روی فضاهای همگن است که توسط  $[\cdot, \cdot]$  پیشنهاد شده است. بنابراین همارزی اثبات شده بین تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزومنتری و کانولوشن‌های  $HM$  بر روی فضاهای همگن تأیید می‌کند که کانولوشن‌های  $HM$  و کانولوشن‌های هدايت پذیر در این مورد اساساً مشابه هستند. با این حال، در حالی که کانولوشن‌های هدايت پذیر فقط بر روی فضاهای همگن تعریف شده‌اند، کانولوشن‌های  $HM$  به منیفلدهای ریمانی عمومی تعمیم می‌یابند. جزئیات بیشتر در مورد کانولوشن‌ها بر روی فضاهای همگن در پیوست کارهای مرتبط ت مورد بحث قرار گرفته است.

### دوری پر مقالات هم تطبیق با شبکه های کانولوشنی مستقل از مختصات

فرمول بندی شبکه های کانولوشنی (CNN)ها مستقل از مختصات بر حسب کلاف های  $G$ -همبسته روی متغیرهای ریمانی بسیار کلی است و طیف وسیعی از نمونه سازی های ممکن برای مدل ها را پوشش می دهد. برای اثبات این ادعا، ما مجموعه بزرگی از مدل های کانولوشنی را از مقالات علمی مرور کرده و آنها را از دیدگاه یکپارچه CNN های مستقل از مختصات توضیح می دیم. اکثر مقالات موجود، مدل های خود را به صراحت بر حسب  $G$ -ساختارها و کلاف های  $G$ -همبسته فرمول بندی نمی کنند. بنابراین،  $G$ -ساختارها و نمایش های گروهی که به طور ضمنی فرض شده اند، از الگوهای اشتراک وزن، تقارن های کرنل و ویژگی های هموردادی مدل ها استنتاج می شوند؛ به عنوان مثال شکل ۴۷ را بینید. جدول ۶ خلاصه ای از طبقه بندی حاصل از CNN های مستقل از مختصات را ارائه می دهد. بخش های بعدی، مدل های پوشش داده شده و ویژگی های آنها را با جزئیات مورد بحث قرار می دهند.

۹ شبکه های کانولوشنی مستقل از مختصات اقلیدسی	
۱۲۷	.....
۱۲۹	فرمول بندی کلاسیک CNN های $G$ -هدایت پذیر بر روی $\mathbb{R}^d$
۱۳۱	..... هندسه ای افاین فضاهای اقلیدسی $\mathbb{E}_d$
۱۳۷	..... CNN های هموردادی گروه افاین در فضاهای اقلیدسی $\mathbb{E}_d$
۱۴۰	..... CNN های اقلیدسی در مقالات
۱۰ CNN های هموردادی دورانی در فضاهای اقلیدسی سوراخ دار	
۱۴۳	.....
۱۱ CNN های کروی مستقل از مختصات	
۱۴۹	.....
۱۵۰	..... هندسه ای کره ۲-بعدی $S^2$
۱۵۴	..... CNN های کروی کاملاً هموردادی دورانی
۱۵۹	..... CNN های کروی هموردادی دوران سمتی در توپولوژی های استوانه ای
۱۶۳	..... تقریب های بیست و چهی از CNN های کروی
۱۲ CNN های مستقل از مختصات روی سطوح عمومی	
۱۶۸	.....
۱۶۹	..... هندسه ای سطوح جایگذاری شده
۱۷۶	..... کانولوشن های سطحی راهبری پذیر-دورانی
۱۸۳	..... کانولوشن های- $\{\mathbb{E}\}$ سطحی راهبری پذیر
۱۸۸	..... تقریب های بیست و چهی از CNN های کروی
۱۹۹	.....
۲۰۲	..... کانولوشن های سطحی راهبری پذیر-دورانی
۲۰۴	..... کانولوشن های- $\{\mathbb{E}\}$ سطحی راهبری پذیر
۲۰۸	..... تقریب های بیست و چهی از CNN های کروی
۲۱۲	.....
۲۱۴	..... کانولوشن های هموردا نسبت به گروه افاین $(G)$ پوشش می دهد. این مدل ها بر $G$ -ساختارهای ناوردا
۲۱۶	.....
۲۱۷	.....
۲۱۸	.....
۲۱۹	.....
۲۲۰	.....
۲۲۱	.....
۲۲۲	.....
۲۲۳	.....

چند صفحه آینده به بحث در مورد انتخاب های طراحی مختلف برای CNN های مستقل از مختصات می پردازد و یک نمای کلی اولیه از مدل های جدول ۶ ارائه می دهد.

منیفلد	گروه ساختار	تقارن سراسری	نمایش	مرجع
$M$	$G$	$\text{Isom}_{GM} \rtimes \text{Aff}_{GM}$	$\rho$	
۱	$\{\mathbf{e}\}$	$\mathcal{T}_d$	بدیهی	[ ፩ ፩ ]
۲	$\mathcal{S}$	$\mathcal{T}_\gamma \rtimes \mathcal{S}$	منظم	[ ፩ ]
۳	$\mathcal{R}$	$\mathcal{T}_\gamma \rtimes \mathcal{R}$	منظم	[ ፩ ]
۴			irreps	[ ፩ ፩ ፩ ፩ ]
۵	SE(۲)		منظم	[ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ] [ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ] [ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ] [ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ]
۶			quotients	[ ፩ ፩ ]
۷	SO(۲)		trivial $\xrightarrow{\text{□□□}}$ regular	[ ፩ ፩ ፩ ]
۸			vector $\xrightarrow{\text{□□□}}$ regular	[ ፩ ፩ ]
۹			بدیهی	[ ፩ ፩ ]
۱۰			irreps	[ ፩ ]
۱۱			منظم	[ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ] [ ፩ ፩ ፩ ፩ ]
۱۲	۲	E(۲)	quotients	[ ፩ ]
۱۳			trivial $\xrightarrow{\text{□□□}}$ regular	[ ፩ ]
۱۴			irreps-SO(۲) induced	[ ፩ ]
۱۵			منظم	[ ፩ ፩ ፩ ፩ ]
۱۶	$\mathcal{S}$	$\mathcal{T}_\gamma \rtimes \mathcal{S}$	trivial $\xrightarrow{\text{□□□}}$ regular	[ ፩ ]
۱۷			irreps	[ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ]
۱۸		SE(۳)	quaternion	[ ፩ ]
۱۹	SO(۳)		منظم	[ ፩ ፩ ፩ ]
۲۰			trivial $\xrightarrow{\text{□□□}}$ regular	[ ፩ ]
۲۱			منظم	[ ፩ ]
۲۲	۳	E(۳)	$\frac{3}{2}$ quotient	[ ፩ ]
۲۳			trivial $\xrightarrow{\text{□□□}}$ irrep	[ ፩ ]
۲۴	C <sub>f</sub>	$\mathcal{T}_\gamma \rtimes C_f$	منظم	[ ፩ ]
۲۵	D <sub>f</sub>	$\mathcal{T}_\gamma \rtimes D_f$	منظم	[ ፩ ]
۲۶	$\mathbb{E}_{d-1,1}$	$\mathcal{T}_d \rtimes \text{SO}(d-1, 1)$	irreps	[ ፩ ]

جدول ۶: طبقه‌بندی شبکه‌های کانولوشنی در مقالات از دیدگاه CNN‌های مستقل از مختصات. خطوط پرنگ هندسه‌های مختلف را از هم جدا می‌کنند. کانولوشن‌های هموردا نسبت به گروه افاین روی فضاهای اقیلیدسی  $\mathbb{E}_d$  (ردیف‌های ۲۶-۱) در بخش ۹ مورود شده‌اند. بخش ۱۰ کانولوشن‌های  $GM$  را روی فضاهای اقیلیدسی سوراخ‌دار  $\mathbb{E}_d \setminus \{.\cdot.\}$  ( $\mathbb{E}_d \setminus \{0\}$ )  $\cong S^{d-1} \times \mathbb{R}^+$  (ردیف‌های ۳۰-۲۷) مورد بحث قرار می‌دهد. جزئیات مربوط به CNN‌های کروی (ردیف‌های ۳۶-۳۱) در بخش ۱۱ یافت می‌شود. مدل‌های موجود در ردیف‌های (۴۱-۳۷) روی سطوح عمومی، که عدتاً با مشاهداتی متعلق نمایش داده می‌شوند، عمل می‌کنند؛ به بخش ۱۲ مراجعه کنید. دو خط آخر، کانولوشن‌های موبیوس ما از بخش ۵ را فهرست می‌کنند.  $\mathcal{T}_d$ ,  $\mathcal{R}$  و  $\mathcal{S}$  به ترتیب نمایانگر گروه‌های انتقال، بازتاب و پیمانه هستند، در حالی که  $C_N$  و  $D_N$  گروه‌های دوری و دووجی هستند. نمایش‌های با ابعاد بی‌نهایت در پیاده‌سازی یا نمونه‌برداری می‌شوند. به عنوان مثال، نمایش‌های منظم (۲)  $\text{SO}(2)$  یا ۲ معمولاً با نمایش‌های منظم گروه‌های دوری یا دووجی  $C_N$  یا  $D_N$  تقریب زده می‌شوند.

## انتخابهای طراحی و نمای کلی

یک CNN مستقل از مختصات در تئوری به طور کامل با موارد زیر مشخص می‌شود:

- (۱) انتخاب یک منیفلد ریمانی ( $M, \eta$ )
- (۲) ساختار- $\square$ -آن،  $GM$
- (۳) یک اتصال سازگار- $\square$  که انتقال‌دهنده‌های ویژگی  $\mathcal{P}_{A,7}$  را مشخص می‌کند،
- (۴) انواع میدان یا نمایش‌های  $G$  برای هر فضای ویژگی،  $\rho$ ، و
- (۵) انتخاب غیرخطی‌های  $G$ -هموردا.

ژئودزیک‌ها، نگاشت‌های نمایی و لگاریتمی از اتصال کانونی لوی-چیویتا روی  $M$  به دست می‌آیند.<sup>۸۰</sup> گروه ایزوومتری  $Isom_{GM}$  که شبکه نسبت به آن هموردا است، از متربیک و  $G$ -ساختار نتیجه می‌شود. تمام فضاهای کرنل  $\mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^G$  توسط نمایش‌های گروهی فضاهای ویژگی که بین آن که نگاشت انجام می‌دهند، تعیین می‌شوند. اشتراک وزن با قرار دادن یک کرنل الگوی  $G$ -راهبری پذیر نسبت به یک چارچوب  $G$  دلخواه در  $G_p M$  برای  $p \in M$  انجام می‌شود.

در عمل، کاربر با پرسش‌های طراحی اضافی روبرو است، به عنوان مثال در مورد گسته‌سازی هندسه، کدگذاری میدان‌های ویژگی، الگوریتم‌های عددی برای محاسبه ژئودزیک‌ها و انتقال‌دهنده‌ها وغیره. این بخش یک نمای کلی سطح بالا از تمام انتخاب‌های طراحی مرتبط ارائه می‌دهد. جزئیات بیشتر در بخش‌های بعدی ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲ یافت می‌شود.

**گسته‌سازی منیفلدها و میدان‌های ویژگی:** پیاده‌سازی‌ها در نمایش منیفلدها و نمونه‌برداری از میدان‌های ویژگی متفاوت هستند.

فضاهای اقليدسي  $\mathbb{E}$  شبکه‌های پیکسلی منظمی مانند  $\mathbb{Z}^d$  یا شبکه شش‌ضلعی را می‌پذیرند [۶]. به طور کلی، شبکه‌های محلی منظم برای منیفلدهای محلی تخت مانند نوار موبیوس و پیست وجهی می‌باشد؛ به شکل‌های ۲۳ و ۶۵ مراجعه کنید. میدان‌های ویژگی در فضاهای اقليدسي همچنین می‌توانند روی یک ابر نقطه نامنظم نمونه‌برداری شوند. این امر به عنوان مثال هنگام پردازش محیط‌های اتمی، که در آن موقعیت اتم‌ها به عنوان مکان‌های نمونه‌برداری عمل می‌کنند، مفید است [۶].

یک تفاوت مهم بین این دو رویکرد این است که شبکه‌های پیکسلی منظم نسبت به انتقال‌های پیوسته در  $(+, +)$  هموردا نیستند، بلکه فقط نسبت به زیرگروه انتقال‌های گسته که شبکه را حفظ می‌کنند، مانند  $(\mathbb{Z}^d, +)$ ، هموردا هستند. CNN‌ها روی شبکه‌های منظم علاوه‌بر این معمولاً از عملیات تجمع‌افزایی استفاده می‌کنند که هموردا ای دلیل را حتی بیشتر کاوش می‌دهد. به طور خاص، با توجه به اینکه عملیات تجمع‌افزایی  $\mathbb{G}$  (۰۰۰۰۰۰)  $n$  پیکسل است، نسبت به انتقال‌ها در  $(+, +)$  هموردا است. پس از  $L$  لایه تجمع در یک شبکه کانون‌لوشنی، این بدان معناست که مدل به طور کلی فقط نسبت به انتقال‌ها در  $(+, n\mathbb{Z}^d)$  هموردا است [۷] این موضوع به صورت تجزیی در [۷] بررسی شده است. [۷] پیشنهاد می‌کنند که این مشکل با جایگزینی لایه‌های تجمع با  $\mathbb{G}$  (۰) با لایه‌های تجمع با  $\mathbb{G}$  (۱) (با همان اندازه پنجه تجمعی)، یک فیلتر پایین‌گذار و یک زیرنمونه‌برداری  $n$ -پیکسلی برطرف شود. فیلتر پایین‌گذار اضافی بین عملیات تجمع و زیرنمونه‌برداری از اثرات آلباسینگ جلوگیری می‌کند، که شناس داده شده است شبکه‌ها را به اندازه کافی تحت انتقال‌هایی که عضو  $(+, n\mathbb{Z}^d)$  نیستند، پایدارتر می‌کند.

فضاهای خمیده مانند کره-۲-بعدی  $S^2$  به طور کلی شبکه‌های نمونه‌برداری منظم را نمی‌پذیرند. یک گسته‌سازی به ظاهر واضح، بر حسب یک شبکه نمونه‌برداری منظم در مختصات کروی است (معادله (۴۲۷) و شکل (۲۴)، اما از آنجا که این مختصات ایزوومتریک نیستند، سیگنال را در نزدیکی قطب‌ها پیش‌نمونه‌برداری می‌کنند [۸]. شبکه‌های نمونه‌برداری تقریباً یکنواخت روی  $S^2$  شامل «مجموعه مارپیچ تعیین‌یافته» [۸] یا شبکه ایکوسکروی (۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰) [۸] هستند. به طور جایگزین، میدان‌های ویژگی ممکن است در حوزه طیفی گسته‌سازی شوند. برای کره، این کار از طریق سطح بر حسب همانهگ‌های کروی برای میدان‌های اسکالر، همانهگ‌های کروی با وزن اسپین برای میدان‌های نمایش تحويل‌ناپذیر یا ماتریس‌های  $\square$  ویگنر برای میدان‌های ویژگی عمومی انجام می‌شود [۸] [۹].

سطوح عمومی معمولاً به صورت متش‌های مثلثی نمایش داده می‌شوند؛ به بخش ۲.۱.۱۲ مراجعه کنید. میدان‌های ویژگی سپس می‌توانند روی رئوس، یال‌ها یا وجهه متش نمونه‌برداری شوند [۸]. رزلولوشن بالاتر میدان‌های ویژگی را می‌توان با کدگذاری آنها از طریق نقشه‌های بافت  $\square$  (۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰) (۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰) به دست آورد [۸]. به طور جایگزین، سطوح ممکن است به صورت ابرهای نقطه نمایش داده شوند [۸] [۹].

$\square$ -ساختارها و گروههای ساختاری: انتخاب خاص  $G$ -ساختار که باید توسط شبکه رعایت شود، به وظیفه یادگیری و توبولوژی  $M$  بستگی دارد (اگر پیوستگی یا همواری کانون‌لوشن مورد نیاز باشد). به طور کلی،  $M$  مجهز به یک  $d$ -ساختار است، یعنی یک کلاف از چارچوب‌های

<sup>۸۰</sup> ممکن است عجیب به نظر برسد که ژئودزیک‌ها و انتقال‌دهنده‌های ویژگی بر اساس اتصال‌های بالقوه متفاوتی محاسبه شوند. زمانی که اتصال انتقال‌دهنده با لوی-چیویتا متفاوت است، معمولاً به این دلیل است که اتصال لوی-چیویتا با  $G$ -ساختار انتخاب شده، زمانی که  $d < G$  باشد،  $G$ -سازگار نیست. چند مثال در پاراگراف مربوط به اتصالات  $G$ -سازگار در ادامه ارائه شده است.

مرجع راست‌هنچار نسبت به متربیک ریمانی داده شده. یک ارتقا به گروه‌های ساختاری  $G$  با  $\text{GL}(d)$  به طور یکتا توسط تبدیلات پیمانه‌ای با مقدایر  $G$  از چارچوب‌های راست‌هنچار تعین می‌شود. تقلیل‌های گروه ساختاری به  $d < G$ , در مقابل، لزوماً یکتا نیستند و اطلاعات هندسی اضافی را کدگذاری می‌کنند. به عنوان مثال، یک تقلیل به  $G = \text{SO}(d)$  نیازمند یک جهت‌گیری روی منیفلد است.<sup>۸۱</sup> بخش‌های بعدی به بحث در مورد انتخاب‌های بیشتر (عمدتاً به طور ضمنی انجام شده) از  $G$ -ساختارها که در مقالات یافته می‌شوند، می‌پردازند؛ به عنوان مثال، شکل‌های ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۵۰، ۵۱ را ببینید. این ساختارها یا توسط تقاضا برای همودالیت تحت گروه ایزومنتری  $\text{Isom}_{GM}$  تعیین می‌شوند، یا به طور کانونی روی منیفلد داده شده‌اند، یا به طور خاص برای  $\{e\}$ -ساختارها، به صورت الگوریتمی از طریق برخی روش‌های ابتکاری ثابت شده‌اند. به یاد بیاورید که  $\{e\}$ -ساختارها روی منیفلد‌های غیرمومازی پذیر (طبق تعریف) لزوماً ناپیوسته هستند.

گروه‌های ساختاری که بیشتر در مقالات با آنها مواجه می‌شویم، عبارتند از:

- گروه بدیهی  $\{e\}$ , متناظر با CNN‌های غیرمستقل از مختصات با کرنل‌های نامحدود
- گروه بازتاب  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathcal{R}$ , که اولین محور چارچوب را بر می‌گرداند
- گروه‌های متعامد خاص  $\text{SO}(d)$  (دوران‌های پیوسته)
- گروه‌های متعامد  $d$  (دوران‌ها و بازتاب‌های پیوسته)
- گروه پیمانه  $(\mathbb{R}^+, \cdot, \mathcal{S}) \cong (\mathbb{R}, \cdot)$

از آنجا که سه گروه آخر گروه‌های لی پیوسته هستند، در پیاده‌سازی‌های عددی گاهی توسط زیرگروه‌های متناهی تقریب زده می‌شوند. به عنوان مثال،  $\text{SO}(2)$  و ۲ اغلب با گروه‌های دوری  $C_N$  یا گروه‌های دووجهی  $D_N$  مدل‌سازی می‌شوند، در حالی که دوران‌ها و بازتاب‌های سبعدی در  $3^{\circ}$  را می‌توان با گروه‌های چندوجهی (گروه‌های تقارن اجسام افلاطونی، به عنوان مثال بیست و چهار) تقریب زد. برای کاهش پیچیدگی طبقه‌بندی مدل‌ها در جدول ۶، ما تصمیم گرفتیم بین تقارن‌های پیوسته و تقریب‌های آنها توسط زیرگروه‌های متناهی تمایز قائل نشویم. با این حال، ما چنین تقریب‌هایی را در بحث دقیق خود در مورد مدل‌ها در بخش‌های بعدی بیان خواهیم کرد.

**اتصالات ۱-سازگار:** تمام مدل‌ها یا اتصال کانونی لوی-چیویتا روی  $M$  یا اتصال یکتای بدیهی را که توسط یک  $\{e\}$ -ساختار الفا می‌شود، در نظر می‌گیرند. انتخاب اتصال برای شبکه‌هایی که صرفاً روی میدان‌های اسکالار عمل می‌کنند، که انتقال آنها همیشه بدیهی است، بی اهمیت (و بنابراین نامشخص) می‌شود.

به طور خاص، تمام CNN‌های اقلیدسی از انتقال‌دهنده‌های لوی-چیویتا استفاده می‌کنند، که بردارها را به گونه‌ای منتقل می‌کنند که در معنای معمول در فضاهای اقلیدسی  $\mathbb{E}_d$  موافق باقی بمانند؛ به شکل ۱۵ آراججه کنید. این امکان‌پذیر است زیرا اتصال لوی-چیویتا با  $G$ -ساختارها مدل‌ها (تعریف شده در معادله (۳۷۱) و در شکل ۳۳ به تصویر کشیده شده)  $G$ -سازگار است.<sup>۸۲</sup>

مدل‌های روی فضاهای اقلیدسی سوراخ‌دار  $\{\cdot\}$  از بخش ۹ یا بر اساس  $\{e\}$ -ساختارها هستند و/یا میدان‌های اسکالار را در نظر می‌گیرند. بنابراین، آنها از اتصالات بدیهی استفاده می‌کنند که با اتصال کانونی لوی-چیویتا روی  $\mathbb{E}_d$  متفاوت است.

تمام CNN‌های کروی که بر  $\text{SO}(2)$ -ساختار در شکل ۱۵ تکیه دارند (در بخش ۲.۱۱ مرور شده‌اند)، ویژگی‌ها را مطابق با اتصال لوی-چیویتا روی  $S^1$  منتقل می‌کنند (شکل ۱۵). آنها بیکاری که روی  $\{e\}$ -ساختار در شکل ۱۵ ب عمل می‌کنند (در بخش ۳.۱۱ مرور شده‌اند) دوباره یک اتصال بدیهی را در نظر می‌گیرند زیرا اتصال لوی-چیویتا کروی با این  $\{e\}$ -ساختار ناسازگار است. CNN‌بیست و چهاری با  $C$ -ساختار، شکل ۴۶، ویژگی‌ها را مطابق با اتصال لوی-چیویتا بیست و چهاری  $C$ -سازگار منتقل می‌کنند.<sup>۸۳</sup>

تمام CNN‌های روی سطوح عمومی که در ردیف‌های (۳۷۱-۳۷۹) جدول ۶ فهرست شده‌اند، سطوح جهت‌داری را فرض می‌کنند که مجهر به یک  $\text{SO}(2)$ -ساختار هستند. آنها ویژگی‌ها را با اتصال لوی-چیویتا  $\text{SO}(2)$ -سازگار سطوح منتقل می‌کنند. سایر CNN‌های سطوح بر اساس  $\{e\}$ -ساختارها هستند و/یا روی میدان‌های اسکالار عمل می‌کنند. بنابراین انتقال ویژگی آنها بدیهی است.

کانون‌لوشن‌های نوار موبیوس ما ویژگی‌ها را از طریق اتصال لوی-چیویتا منتقل می‌کنند، که با  $\mathcal{R}$ -ساختار فرض شده سازگار است.

به یاد بیاورید که اتصال لوی-چیویتا به طور یکتا توسط متربیک تعین می‌شود و بنابراین به طور کلی ناوردای ایزومنتری است؛ پاورقی ۴۱.۸ در بخش ۴.۱.۸ را مقایسه کنید. از آنجا که اتصالات بدیهی  $\{e\}$ -سازگار به طور یکتا توسط  $\{e\}$ -ساختار مشخص می‌شوند، تقارن‌های آن را به اشتراک می‌گذارند، یعنی تحت عمل  $\text{Isom}_{GM}$  ناوردا هستند. این موضوع با قضیه ۸.۹ دلالت بر این دارد که کانون‌لوشن‌های  $GM$  که بر اساس این اتصالات هستند،  $\text{Isom}_{GM}$ -هموردا می‌باشند.

<sup>۸۱</sup> برای یک منیفلد منفرد و همبند، این انتخاب تا زمانی که مقداردهی اولیه کرنل نسبت به هر دو جهت‌گیری متقابن باشد، دلخواه است. در این حالت شبکه به سادگی کرنل‌های بازتابیده را برای جهت‌گیری‌های مختلف یاد می‌گیرد. هنگام بررسی یک مجموعه داده مشتمل از چندین منیفلد، جهت‌گیری نسبی آنها برای تعیین صحیح مرتبه است.

<sup>۸۲</sup> در مقابل،  $\{e\}$ -ساختار اقلیدسی در شکل ۳۵ ب اتصال لوی-چیویتا روی  $\mathbb{E}^2$  ناسازگار خواهد بود.  
<sup>۸۳</sup> اتصالات لوی-چیویتا گستره روی مشاهده در بخش ۲.۱.۱۲ و [۸۱] مورد بحث قرار گرفته‌اند.

## بولبک‌های انتقال‌دهنده و تصویرهای جایگزین به

بولبک انتقال‌دهنده  $f_{\text{Exp}_p^*}$  که در تعریف ۷.۵ و معادله (۶۷) تعریف شده است، یک میدان ویژگی  $\tilde{\rho}$  را در یک پارامترسازی ژئودزیک روی فضای مماس  $T_p M$  نمایش می‌دهد. بخش انتقال عمليات توسط اتصال  $G$ -سازگار تعیین می‌شود. ژئودزیک‌ها  $\square$  و بنابراین نگاشت‌های نمایی در  $\mathbb{E}_d$  در فضاهای اقلیدسی  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  دارند. به طور خاص، نگاشت‌های نمایی روی  $\mathbb{E}_d$  در مختصات  $\mathbb{R}^d$  دکارتی به جمع برداری در معادله (۴۰۰) کاهش می‌یابند، به طوری که کانولوشن‌های  $GM$  اقلیدسی به کانولوشن‌های متعدد روی  $\mathbb{R}^d$  تبدیل می‌شوند؛ به قضیه ۹.۷ مراجعه کنید. ژئودزیک‌ها روی  $S^2$  به خوبی شناخته شده‌اند که توسط دوایر عظیمه کره داده می‌شوند. اگر کره به عنوان جایگذاری شده در  $\mathbb{R}^3$  در نظر گرفته شود، نگاشت نمایی به صراحت توسط معادله (۴۳۰) داده می‌شود. ژئودزیک‌ها روی مس‌های سطوح عمومی با راه حل‌های فرم بسته توصیف نمی‌شوند بلکه به صورت عددی محاسبه می‌شوند؛ به بخش ۲.۱.۱۲ مراجعه کنید. در مقایسه با محیط هموار، باید بین ژئودزیک‌های «کوتاه‌ترین» و «مستقیم‌ترین» روی مس‌ها تمایز قائل شد [۸].

بولبک میدان‌های ویژگی به مختصات نرم الی ژئودزیک تنها راه نمایش میدان‌های ویژگی روی فضاهای مماس نیست. در مقالات مربوط به CNN‌های کروی، استفاده از تصویرهای نوموئیک، که در شکل ۵۱ به تصویر کشیده شده‌اند، نسبتاً رایج است. قضیه ۱۱.۳ نشان می‌دهد که این تصویر را می‌توان به عنوان یک مورد خاص از پارامترسازی ژئودزیک عمومی تر ما پس از اعمال یک تاب شعاعی به کرنل‌ها در نظر گرفت. بنابراین مدل‌های مربوطه دقیقاً به عنوان کانولوشن‌های  $GM$  شناسایی می‌شوند. سطوحی که در یک فضای محیطی مانند  $\mathbb{R}^3$  جایگذاری شده‌اند، ممکن است علاوه بر این بر تصویرهای مختلفی در فضای جایگذاری تکیه کنند؛ به عنوان مثال سه مدل آخر که در بخش ۳.۱۲ مورد بحث قرار گرفته‌اند را ببینید. توجه داشته باشد که این رویکردها واقعاً با رویکرد متفاوت هستند، یعنی این سه مدل دقیقاً کانولوشن‌های  $GM$  نیستند.

**نمایش‌های  $\square$  و غیرخطی‌ها:** تقریباً تمام مدل‌ها یا نمایش بدیهی، نمایش‌های تحویل‌نایدیر یا نمایش‌های منظم را به عنوان انواع میدان در نظر می‌گیرند. استثنایات شامل نمایش‌های خارج‌قسمتی، نمایش‌های القایی عمومی‌تر، نمایش‌های حاصل ضرب تansوری، و به طور خاص برای  $G = SO(3)$  نمایش کواترنیونی هستند. نمایش‌های با ابعاد بی‌نهایت، به ویژه نمایش‌های منظم و خارج‌قسمتی گروه‌های لی، در پیاده‌سازی‌ها گسته‌سازی می‌شوند. این کار می‌تواند یا از طریق نمونه‌برداری مونت کارلو یا با بازگشت به نمایش‌های متناظر زیرگروه‌های متناهی همانطور که در بالا بحث شد، انجام شود.

غیرخطی‌ها باید نسبت به عمل نمایش‌های  $G$  انتخاب شده هموردا باشند. از آنجا که میدان‌های اسکالر  $G$ -ناوردا هستند، غیرخطی‌های معمول مانند ReLU رونی آنها عمل می‌کنند. میدان‌های ویژگی که مطابق با نمایش‌های جایگشتی، به ویژه نمایش‌های منظم، تبدیل می‌شوند، به صورت کاتال به کاتال عمل می‌کنند. سایر انواع میدان به غیرخطی‌های سفارشی نیاز دارند  $\square$  ما برای بحث در مورد انتخاب‌های خاص به [۸] ارجاع می‌دهیم.

**فضاهای کرنل  $\square$ -راهبری‌پذیر:** کانولوشن‌های  $GM$  میدان‌های ورودی از نوع  $\rho$  را به میدان‌های خروجی از نوع  $\rho$  با کانولوکردن آنها با کرنل‌های  $G$ -راهبری‌پذیر  $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^G$  نگاشت می‌دهند. از آنجا که فضای  $\mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^G$  از کرنل‌های  $G$ -راهبری‌پذیر، تعریف ۷.۳.۲ یک فضای برداری است، معمولاً بر حسب یک پایه  $\{K_1, \dots, K_N\}$  از  $\mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^G$  پارامتری می‌شود. قبل از محاسبه کانولوشن، کرنل یادگرفته شده  $K_i = \sum_{i=1}^N w_i K_i$  در این پایه بسط داده می‌شود، که در آن  $\{w_1, \dots, w_N\}$  در [۸] پیاده‌سازی شده‌اند.  $\square$  یک تعمیم از قضیه ویکتر-اکارت، پایه‌های فضای کرنل را برای گروه‌های ساختاری فشرده عمومی  $G$  مشخص می‌کند [۸].

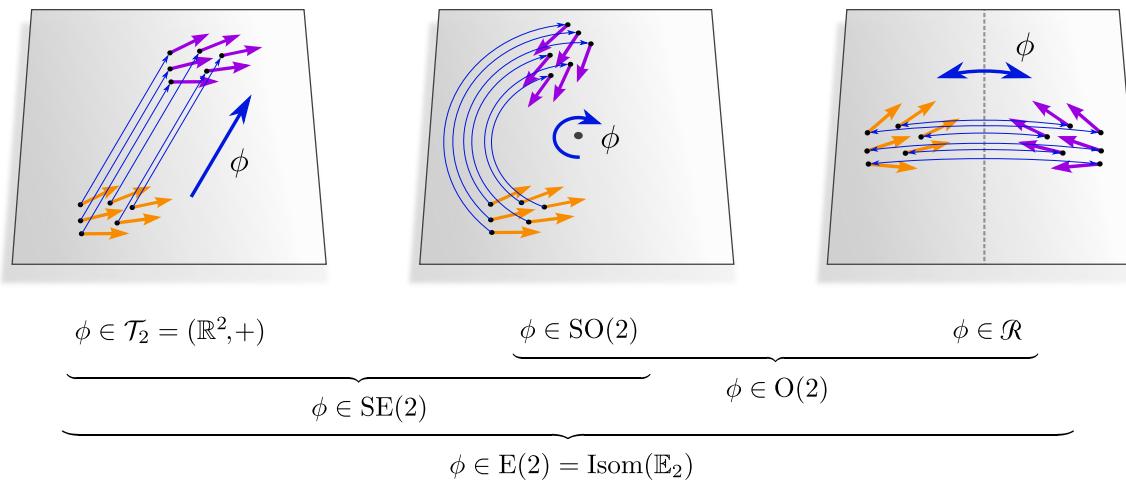
در عمل، اکثر نویسندها از فرمول‌بندی مبتنی بر نظریه نمایش برای میدان‌های ویژگی و کرنل‌های راهبری‌پذیر استفاده نمی‌کنند، بلکه آنها را بر اساس شهود فرمول‌بندی می‌کنند. به طور خاص، اکثر نویسندها یک نوع میدان ورودی داده شده را فرض می‌کنند و عملیات کانولوشن مختلفی را پیشنهاد می‌دهند که به گونه‌ای مهندسی شده‌اند که میدان خروجی حاصل به شیوه‌ای هموردا (یا مستقل از مختصات) تبدیل شود. در حالی که این رویکردها کرنل‌های  $G$ -راهبری‌پذیر خاصی را پیشنهاد می‌کنند که بین میدان‌های  $\square$  و میدان‌های  $\rho$  نگاشت انجام می‌دهند، این کرنل‌ها گاهی اوقات فضای کامل کرنل‌های ممکن را پوشش نمی‌دهند. این موضوع به عنوان مثال در مورد  $PFCNN$ ها و  $MDGCNN$ ها، که در بخش ۲.۱۲ بحث می‌شوند، صدق می‌کند.

## ۹ شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات اقلیدسی

این بخش به بررسی کانولوشن‌های هموردا در فضاهای اقلیدسی (افاین)  $M = \mathbb{E}_d$  می‌پردازد که بدون شک از بیشترین اهمیت عملی برخوردار هستند. شبکه‌های کانولوشنی در فضاهای اقلیدسی برای تحلیل تصاویر صفحه‌ای و حجمی، سیگنال‌های صوتی، ویدئوهای فیزیکی در فضازمان مینکوفسکی (شبکه اقلیدسی) یا محیط‌های صفحه‌ای در یادگیری تقویتی به کار می‌روند. معماری مدل کانولوشنی نمونه اولیه  $\square$  هم در فضاهای اقلیدسی و هم به طور کلی  $\square$  متعارف روی  $\mathbb{E}_d$  نویست [۸]. است. موقتی آن تا حد زیادی بر پایه هموردا می‌نست به انتقال است که به آن امکان تعمیم

<sup>۱۴</sup> <https://quva-lab.github.io/e2cnn/api/e2cnn.kernels.html>

<sup>۱۵</sup> این برخلاف رویکرد ماست که میدان‌های ورودی و خروجی را ثابت می‌کند و سپس به دنبال محدودیت حاصل بر کرنل‌های کانولوشن می‌گردد.



شکل ۴۱: نمایش گروه ایزومتری کامل  $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}_d) = \mathrm{E}(d) = (\mathbb{R}^d, +)$  برای  $d = 2$ . این گروه شامل زیرگرووهای انتقال  $\mathcal{T}_d = (\mathbb{R}^d, +)$  دوران  $\mathrm{SO}(d)$  و بازتاب  $\mathcal{R}$  است. دورانها و بازتابها گروه متعدد  $\mathrm{SE}(d) = \mathrm{SO}(d) \rtimes \mathcal{R}$  را تشکیل می‌دهند، در حالی که انتقالها و دورانها گروه اقليدسي خاص  $\mathrm{E}(d) = \mathrm{Isom}(\mathbb{E}_d)$  را می‌سازند.

استنتاج آموخته شده بین مکانهای فضایی مختلف را می‌دهد. با انگیزه از این مشاهده، تلاش زیادی برای تعمیم ویژگی‌های همودایی CNN‌ها به گروههای تقارن سراسری بزرگتر  $\mathbb{E}_d$  به عنوان مثال به ایزومتری‌های اقليدسي در شکل ۴۱ یا تبدیلات افاین عمومی تر، صورت گرفته است.

جالب اینجاست که اکثر مدل‌های همودایی در مقالات، همودایی خود را با اعمال نوعی کرنل G-راهبری‌پذیر به دست می‌آورند. این بدان معناست که این مدل‌ها در واقع تحت تبدیلات پیمانه‌ای محلی نیز همودا هستند، علی‌رغم اینکه صراحتاً برای آن طراحی نشده‌اند. دلیل این همودایی پیمانه‌ای ناخواسته این است که همودایی سراسری مدل‌ها معمولاً برای هر لایه به صورت جداگانه طراحی می‌شود و بنابراین به طور مستقل برای میدان دریافتی محلی هر نورون اعمال می‌گردد. در اینجا ما CNN‌های اقليدسي همودایی سراسری را که در ردیف‌های (۲۶-۱) جدول ۶ فهرست شده‌اند، از دیدگاه عمومی تر تقارن‌های پیمانه‌ای محلی توضیح می‌دهیم و بحث می‌کنیم که چگونه همودایی سراسری آنها از همودایی پیمانه‌ای محلی شان ناشی می‌شود. قضیه ۸.۹ بدين ترتیب بیان می‌کند که یک کانولوشن  $M = \mathbb{E}_d GM$  روی  $GM$  نسبت به  $\mathbb{E}_d$  همودا است. با این حال، برای مورد خاص فضاهای اقليدسي، می‌توان گزاره‌ای قوی تر از صرفاً همودایی ایزومتری بیان کرد: کانولوشن با یک کرنل G-راهبری‌پذیر روی  $\mathbb{E}_d$  به معنای همودایی سراسری مدل تحت عمل گروه افاین  $\mathrm{Aff}(G) = \mathcal{T}_d \rtimes G$  است، همانطور که در قضیه ۹.۸ در ادامه اثبات شده است. دلیل اصلی این نتیجه آن است که ژئوذیک‌ها و انتقال‌دهنده‌های لوی-چیوینتا در فضاهای اقليدسي نه تنها توسط ایزومتری‌ها حفظ می‌شوند، بلکه به طور کلی تر توسعه هر تبدیل افاین نیز حفظ می‌گردد.

کانولوشن‌ها در فضاهای اقليدسي به طور کلاسیک در مختصات  $\mathbb{R}^d$  از  $\mathbb{E}_d$  فرمول‌بندی این است که تمام ساختارهای ریاضی مورد نیاز برای تعاریف را فراهم می‌کند. با این حال،  $\mathbb{R}^d$  دارای ساختار اضافی است، به عنوان مثال یک ساختار برداری (و در نتیجه یک مبدأ) یا ساختار کانوونیک  $\{e\}$  آن. با طراحی کانولوشن‌ها به گونه‌ای که همودا باشد، استنتاج (تا حدی) مستقل از این ساختار می‌شود؛ به عنوان مثال، همودایی نسبت به انتقال در کانولوشن‌ها، انتخاب خاص مبدأ را یکسان می‌سازد در حالی که همودایی نسبت به  $\mathrm{E}(d)$  (ایزومتری)، جهت و جهت‌گیری خاص ساختار  $\{e\}$  را یکسان می‌کند. برای روشن شدن اینکه کدام ساختار ریاضی واقعاً فرض و مورد نیاز است، ما یک دیدگاه جایگزین را توسعه می‌دهیم؛ ما با ساختار خالص افاین و متریک فضای اقليدسي  $\mathbb{E}_d$  شروع می‌کنیم. اگر یک کانولوشن  $GM$  روی  $\mathbb{E}_d$  ساختار هندسي پیشتری را فرض کند، این ساختار متعاقباً با مشخص کردن اطلسی از چارت‌های (افاین)  $x^A : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$  که پیمانه‌ها و G-ساختارها را القا می‌کنند، اضافه خواهد شد.

۱۲۹	فرمول‌بندی کلاسیک CNN‌های $G$ -هدایت‌پذیر بر روی $\mathbb{R}^d$	۱.۹
۱۳۱	هنده‌سی افاین فضاهای اقلیدسی $\mathbb{E}_d$	۲.۹
۱۳۱	چارت‌های افاین و اطلس‌های $\text{Aff}(G)$	۱.۲.۹
۱۳۲	$\square$ -اطلس‌ها و $\square$ -ساختارهای القا شده	۲.۲.۹
۱۳۵	تبديلات افاین مستقل از مختصات	۳.۲.۹
۱۳۷	CNN‌های هموردای گروه افاین در فضاهای اقلیدسی $\mathbb{E}_d$	۳.۹
۱۴۰	CNN‌های اقلیدسی در مقالات	۴.۹

برای ارائه یک نمای کلی و مقدمه‌ای ساده، ما فرمول‌بندی کلاسیک کانولوشن‌های  $G$ -راهبری‌پذیر (هموردای افاین) را در مختصات  $\mathbb{R}^d$  در بخش ۱.۹ معرف می‌کنیم. بخش‌های بعدی ۲.۹ و ۳.۹ کانولوشن‌های هموردای افاین را در فضاهای اقلیدسی در یک چارت‌جوب بدون مختصات و مستقل از مختصات تعریف می‌کنند. به طور خاص، بخش ۲.۹ به بحث در مورد هندسه افاین فضاهای اقلیدسی می‌پردازد. اطلس‌هایی از چارت‌ها با توابع گذار در یک گروه افاین  $(G, \text{Aff}(G))$  (شکل ۴۲)،  $G$ -ساختارهای ثابت تحت  $\text{Aff}(G)$  مورد نظر را القا می‌کنند (شکل ۴۳). بخش ۳.۹ کانولوشن‌های  $G$  را روی  $GM$  معرف می‌کند. نمونه‌های خاصی از این مدل‌ها که در مقالات یافته شوند، یعنی ردیف‌های (۱۶-۱) جدول ۶ در بخش ۳.۹ مورد بحث قرار گرفته‌اند.

خواننده می‌تواند از تعاریف فنی در بخش‌های ۲.۹ و ۳.۹ که برای درک مدل‌های بخش ۴.۹ لزوماً ضروری نیستند، عبور کند.

## ۱.۹ فرمول‌بندی کلاسیک CNN‌های $\square$ -هدایت‌پذیر بر روی $\mathbb{R}^d$

در این بخش، ما مفهوم معمول کانولوشن‌ها (یا همبستگی‌های متقابل<sup>۶۶</sup>) را بر روی  $\mathbb{R}^d$  معرف می‌کنیم. هنگام کانولوشن با یک کرنل  $G$ -هدایت‌پذیر، کانولوشن‌ها تحت عمل گروه آفین  $\text{Aff}(G)$  هم متغیر می‌شوند. بخش‌های بعدی ۲.۹ و ۳.۹ این عملیات را بر روی  $\mathbb{R}^d$  به عنوان عبارات مختصاتی کانولوشن‌های  $GM$  مستقل از مختصات بر روی فضاهای اقلیدسی  $\mathbb{E}_d$  شناسایی خواهند کرد.

**CNN‌های هدایت‌پذیر اقلیدسی:** CNN‌های مرسوم نقشه‌های ویژگی را بر روی  $\mathbb{R}^d$  در نظر می‌گیرند، که توابعی به شکل زیر هستند:

$$F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c. \quad (362)$$

یک کانولوشن (در واقع یک همبستگی) با یک کرنل با مقدار ماتریسی  $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}}$  سپس به عنوان تبدیل انتگرالی زیر تعریف می‌شود:

$$F_{\square\square}(x) := [K * F_{\square\square}](x) := \int_{\mathbb{R}^d} K(v) F_{\square\square}(x + v) dv, \quad (363)$$

که یک نقشه ویژگی ورودی با  $c_{\square\square}$  کانال را به یک نقشه ویژگی خروجی با  $c_{\square\square}$  کانال نگاشت می‌کند. می‌توان نشان داد که این عملیات عمومی ترین نگاشت خطی و هم‌متغیر نسبت به انتقال بین نقشه‌های ویژگی است<sup>۶۷</sup>.

CNN‌های هدایت‌پذیر اقلیدسی  $[? ? ?]$  میدان‌های ویژگی هم متغیر هستند. گروه‌های آفین  $\mathbb{R}^d$  در اینجا به عنوان حاصلضرب‌های نیمه‌مستقیم به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\text{Aff}(G) := \mathcal{T}_d \rtimes G, \quad (364)$$

که در آن  $G \leq \text{GL}(d)$  است. گروه‌های آفین شامل ایزوومتری‌های  $\mathbb{R}^d$  که در شکل ۴۱ معرف می‌شوند، به تصویر کشیده شده‌اند، به عنوان یک مورد خاص برای  $G \leq O(d)$  هستند اما گروه‌های نقطه‌ای (گروه‌های ساختار  $G$  عمومی تری، به عنوان مثال مقیاس‌نمایی یکنواخت<sup>۶۸</sup>، رانیز مجاز می‌دانند. معادلات زیر یک نمای کلی از رایج‌ترین گروه‌های آفین در ادبیات (تا گسسته‌سازی‌ها) و راه‌های جایگزین نوشتن آنها را رائه می‌دهند (با فرض اینکه  $\text{Isom}_{GM}$  توسط  $G$ -ساختارهای نامتغیر نسبت به  $\text{Aff}(G)$  تعیین می‌شود؛ به زیر مراجعه کنید):

$$\begin{aligned} \text{Aff}(\{e\}) &= \mathcal{T}_d &= (\mathbb{R}^d, +) &= \text{Isom}_{\{e\}M} \\ \text{Aff}(\mathcal{R}) &= \mathcal{T}_d \rtimes \mathcal{R} &&= \text{Isom}_{\mathcal{RM}} \\ \text{Aff}(\text{SO}(d)) &= \mathcal{T}_d \rtimes \text{SO}(d) = \text{SE}(d) &= \text{Isom}_{\text{SOM}} &= \text{Isom}_+(\mathbb{R}^d) \\ \text{Aff}(O(d)) &= \mathcal{T}_d \rtimes O(d) = \text{E}(d) &= \text{Isom}_{\text{OM}} &= \text{Isom}(\mathbb{R}^d) \\ \text{Aff}(\mathcal{S}) &= \mathcal{T}_d \rtimes \mathcal{S} && \end{aligned} \quad (365)$$

<sup>۶۶</sup> در یادگیری عمیق، استفاده از اصطلاحات «کانولوشن» و «همبستگی متقابل» به صورت مترادف رایج شده است.

<sup>۶۷</sup> برای کلیت کامل، در واقع باید کرنل‌ها را به معنای توزیعی (توابع تعیین‌یافته) مجاز دانست.

گروه  $\text{Aff}(\text{GL}(d))$  شامل تمام تبدیلات آفین  $\mathbb{R}^d$  است. از آنجایی که گروههای آفین به عنوان حاصلضربهای نیمه-مستقیم تعریف می‌شوند، هر یک از عناصر آنها  $tg \in \text{Aff}(G)$  را می‌توان به طور منحصر به فرد به یک انتقال  $T_d$  و یک عنصر گروه نقطه‌ای  $g \in G$  تجزیه کرد. عمل (کانونی) آنها بر روی  $\mathbb{R}^d$  به صورت زیر داده می‌شود:

$$\text{Aff}(G) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (tg, x) \mapsto gx + t. \quad (366)$$

عمل یک عنصر گروه معکوس  $(tg)^{-1}$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$((tg)^{-1}, x) \mapsto g^{-1}(x - t). \quad (367)$$

یک میدان ویژگی از نوع  $\rho$  بر روی  $\mathbb{R}^d$  طبق نمایش القابی  $\rho \text{Ind}_G^{\text{Aff}(G)}$  از  $\rho$  همانطور که توسط

$$(tg) \triangleright_\rho F := [\text{Ind}_G^{\text{Aff}(G)} \rho](tg)F := \rho(g)F(tg)^{-1}, \quad (368)$$

مشخص شده است، تبدیل می‌شود، که می‌توان آن را به عنوان مشابه عمل مستقل از مختصات بر روی مقاطع در معادله (۲۸۱) در نظر گرفت.<sup>۸۸</sup> یک کانونلوشن با یک کرنل  $G$ -هدایت پذیر  $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square}}^G$  نسبت به این اعمال بر روی میدان ورودی و خروجی هم‌متغیر است، یعنی،

$$K * (tg \triangleright_{\rho_{\square\square}} F_{\square\square}) = tg \triangleright_{\rho_{\square\square\square\square}} (K * F_{\square\square}) \quad \forall tg \in \text{Aff}(G). \quad (369)$$

این به راحتی با یک محاسبه صریح بررسی می‌شود:

$$\begin{aligned} [K * (tg \triangleright_{\rho_{\square\square}} F_{\square\square})](x) &= [K * (\rho_{\square\square}(g) F_{\square\square}(tg)^{-1})](x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \rho_{\square\square}(g) F_{\square\square}((tg)^{-1}(x + v)) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \rho_{\square\square}(g) F_{\square\square}(g^{-1}(x + v - t)) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} K(g\tilde{v}) \rho_{\square\square}(g) F_{\square\square}(g^{-1}(x - t) + \tilde{v}) |\det g| d\tilde{v} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_{\square\square\square\square}(g) K(\tilde{v}) F_{\square\square}(g^{-1}(x - t) + \tilde{v}) d\tilde{v} \\ &= \rho_{\square\square\square\square}(g) [K * F_{\square\square}](g^{-1}(x - t)) \\ &= tg \triangleright_{\rho_{\square\square\square\square}} [K * F_{\square\square}](x), \end{aligned} \quad (370)$$

که از  $G$ -هدایت پذیری  $K$  در مرحله پنجم استفاده کرد و برای هر  $x \in \mathbb{R}^d$  و هر  $tg \in \text{Aff}(G)$  برقرار است. همانطور که در [۹] اثبات شده است، چنین کانونلوشن‌های  $G$ -هدایت پذیر، عمومی ترین نگاشتهای خطی هم‌متغیر نسبت به  $\text{Aff}(G)$  بین میدان‌های ویژگی اقلیدسی هستند.<sup>۹۰۸۹</sup>

**رابطه با کانونلوشن‌های GM اقلیدسی:** این کانونلوشن‌های هدایت پذیر بر روی  $\mathbb{R}^d$  چگونه به کانونلوشن‌های  $GM$  بر روی فضاهای اقلیدسی  $M = \mathbb{E}_d$  مرتبط می‌شوند؟ این واقعیت که کانونلوشن‌های هدایت پذیر به کرنل‌های  $G$ -هدایت پذیر متکی هستند، نشان می‌دهد که آنها نه تنها به صورت سراسری نسبت به  $\text{Aff}(G)$  هم‌متغیر هستند، بلکه (به طور کلی تر) به صورت محلی نسبت به  $G$  نیز هم‌متغیر هستند. برای برقراری ارتباط بین CNN‌های کلاسیک  $G$ -هدایت پذیر بر روی  $\mathbb{R}^d$  و کانونلوشن‌های  $GM$  مستقل از مخصوصات ما، باید ساختار هندسی را که به طور ضمنی توسط اولی در نظر گرفته شده است، شناسایی کنیم.

<sup>۸۸</sup> نمایش‌های القابی به روشنی مشابه با آنچه در شکل ۱۹ نشان داده شده است، بر روی میدان‌ها عمل می‌کنند. برخلاف تبدیل در این شکل، نمایش‌های القابی علاوه بر این به انتقال‌ها نیز اجازه می‌دهند (قانون تبدیل در بخش ۳.۲.۴ محدودیت  $\rho \text{Ind}_G^{\text{Aff}(G)}$  از نمایش القابی به  $G$  است، یعنی نمایش القابی بدون انتقال‌ها).

<sup>۸۹</sup> با فرض اینکه میدان‌های ویژگی طبق نمایش القابی، معادله (۳۶۸)، تبدیل می‌شوند، که برای رسیدن به یک کانونلوشن لازم است.

<sup>۹۰</sup> این گزاره، گزاره شناخته‌شده‌ای را تمییم می‌دهد که کانونلوشن‌های اقلیدسی مرسوم، عمومی ترین نگاشتهای خطی هم‌متغیر نسبت به انتقال بین توابع (یا نشانه‌های ویژگی) در فضاهای اقلیدسی هستند، که برای  $\{e\} = \{G\}$  بازیابی می‌شود.

به طور کلی،  $\mathbb{R}^d$  به طور کانونی با یک  $\{e\}$ -ساختار، که در شکل ۴۳ به تصویر کشیده شده است، مجهز است.<sup>۹۱</sup> علاوه بر این، با یک متريک ريماني متناظر با ضرب داخلی استاندارد  $\mathbb{R}^d$  همراه است.<sup>۹۲</sup> اتصال لوی-چيوتای متناظر، منتقل کننده‌های موازی را در شکل ۱۵ آيجاد می‌کند، که بردارها را به معنای معمول در فضاهای اقلیدسی موازی نگه می‌دارد. هنگامی که نسبت به قاب‌های  $\{e\}$ -ساختار کانونی بيان می‌شود، منتقل کننده‌های موازی بدیهی می‌شوند و بنابراین حذف می‌شوند. نگاشت‌های نمایی به یک جمع ساده کاهاش می‌باشد (پس از اعمال برخی ايزومورفیسم‌ها، به زیر مراجعه کنید).

در حالی که ما یک  $\{e\}$ -ساختار بر روی  $\mathbb{R}^d$  داریم، کانولوشن‌های  $G$  به  $G$ -ساختارهای کمتر خاصی متکی هستند. این  $G$ -ساختارها را می‌توان به عنوان بالابرهاي  $G$  (کانوني) در نظر گرفت. به طور شهودی، اين  $G$ -ساختارهاي بالابر شده با افزودن هر قاب  $G$ -مرتبه دیگر (مدار راست- $G$  آن در  $FM$ ) به هر قاب مرتع کانوني در  $\{e\}$  تعریف می‌شوند. شکل ۴۳ چنین  $G$ -ساختارهاي بالابر شده‌ای را برای گروه‌های ساختار مختلف نشان می‌دهد. همانطور که در قضیه ۹.۶ در زیر اثبات شده است، آنها تحت عمل  $Aff(G)$  نامغير هستند که در قضیه ۹.۸ نشان داده شده است که هم‌متغیری  $Aff(G)$  کانولوشن‌ها را توضیح می‌دهد. آنها علاوه بر این با اتصال لوی-چيوتای  $G$ -سازگار هستند.

ادعاهای مطرح شده در اینجا در دو بخش بعدی با دقت بیشتری مورد بحث قرار می‌گیرند. این فرمول‌بندی رسمی، با این حال، برای درک طبقه‌بندی ما از CNN‌هاي اقلیدسی در ادييات به شدت ضروري نیست، به طوري که خواننده می‌تواند از آنها عبور کرده و مستقیماً به بخش ۴.۹ برود.

## ۲.۹ هندسه‌ی افاین فضاهای اقلیدسی $\mathbb{E}_d$

قبل از بحث در مورد کانولوشن‌های مستقل از مختصات در فضاهای اقلیدسی، باید هندسه‌ی زیربنایی را درک کنیم. فضاهای اقلیدسی  $\mathbb{E}_d$  بنا به تعریف، فضاهای افاین هستند، یعنی با یک فضای برداری متناظر با بعد  $d$  همراه هستند که انتقال‌ها را روی  $\mathbb{E}_d$  تعریف می‌کند. فضاهای اقلیدسی علاوه بر اینکه فضای افاین هستند، به یک متريک اقلیدسی (تابع فاصله) نيز مجهزند. اين تابع فاصله متناظر با یک متريک ريماني  $\eta$  است، یعنی یک  $d$ -ساختار  $OM = \mathbb{E}_d$  روی منیفلد (ريماني)  $M$ . اين متريک دارای اين ویژگی است که انحنای آن در همه جا صفر است، یعنی  $\mathbb{E}_d$  سرتاسر تخت است.

یک مثال استاندارد برای فضاهای اقلیدسی، فضاهای برداری  $\mathbb{R}^d$  هستند، با این حال، فضاهای اقلیدسی عمومی ساختار کمتری را در نظر می‌گیرند. به طور خاص، آنها با یک ساختار فضای برداری همراه نیستند و بنابراین مبدأ مرجحی ندارند. علاوه بر این، آنها به طور کلی مجذب به مختصات دکارتی نیستند. بنابراین ما با فضاهای اقلیدسی «عريان»  $\mathbb{E}_d$  شروع می‌کنیم و بحث می‌کنیم که چگونه ساختار هندسی مربوطه به آنها اضافه می‌شود. در اصل می‌توان هر  $G$ -ساختار را در نظر گرفت، با این حال، ما به طور خاص به آن  $G$ -ساختارهایی علاقه‌مندیم که راهبری پذیر کلاسیک را از بخش قبل بازیابی می‌کنند، که تمام مدل‌های ردیف‌های (۱-۲۶) جدول ۶ را توضیح می‌دهند. چنین  $G$ -ساختارهای ناورداری  $G$  از اطلس‌های  $Aff(G)$  القا می‌شوند، که شامل چارت‌هایی از  $\mathbb{E}_d$  هستند که توابع گذار آنها مقادیری در  $Aff(G)$  می‌گیرند (معادله (۳۶۴)); به شکل ۴۲ کلید. تمام گزاره‌هایی که در مختصات  $\mathbb{R}^d$  بيان می‌شوند، می‌توانند از طریق چارت‌ها به یک چارچوب مستقل از مختصات ترجمه شوند، که ما در اینجا آن را توسعه می‌دهیم. اطلاعات بیشتر در مورد رابطه بین چارت‌های مخصوصاتی و پیمانه‌ها را می‌توان در پیوست آ یافت.

### ۱.۲.۹ چارت‌های افاین و اطلس‌های $Aff(G)$

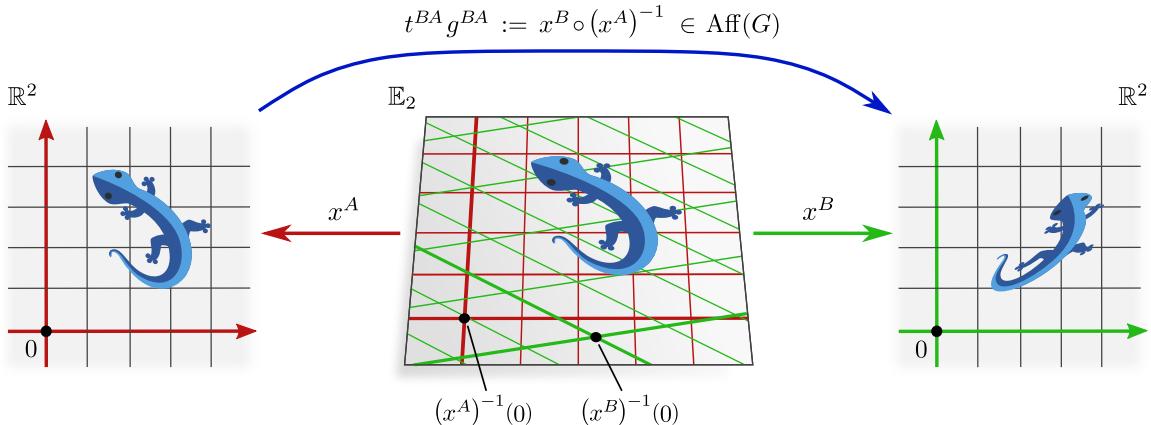
یک فضای اقلیدسی  $\mathbb{E}_d$  با بعد  $d$  با  $\mathbb{R}^d$  همسان‌ریخت است و بنابراین چارت‌های سراسری را می‌پذیرد<sup>۹۳</sup>

$$x^A : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d. \quad (372)$$

<sup>۹۱</sup> به طور رسمی،  $\{e\}$ -ساختار کانونی  $\mathbb{R}^d$  به صورت زیر به وجود می‌آید: فضای برداری  $M = \mathbb{R}^d$  خود با یک پایه کانونی، که توسط بردارهای پایه با عناصر  $e_i \in \mathbb{R}^d$  داده می‌شود، همراه است. قاب‌های مرتع کانونی فضاهای مimas از این پایه از طریق ايزومورفیسم‌های کانونی  $T_p \mathbb{R}^d$  از معادله (۵۳۰) به دست می‌آیند. به طور شهودی، قاب‌های محلی فضاهای مimas  $T_p \mathbb{R}^d$  با قاب سراسری  $\mathbb{R}^d$  «هم‌تراز» هستند. این معادل با معرفی نگاشت همانی به عنوان چارت مختصاتی سراسری  $x = id_{\mathbb{R}^d} : M = \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  و سپس تعریف  $\{e\}$ -ساختار کانونی به عنوان میدان پایه‌های مختصاتی القابی  $[e_i]_{i=1}^d$  است.

<sup>۹۲</sup> این متريک استاندارد  $\eta$  به عنوان پول‌بک ضرب داخلی استاندارد  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  بر روی  $\mathbb{R}^d$  از طریق ايزومورفیسم‌های کانونی  $\iota_{\mathbb{R}^d, p}$  از معادله (۵۳۰) به فضاهای مimas تعریف می‌شود. بنابراین برای هر  $v, w \in T_p \mathbb{R}^d$  داده می‌شود.

<sup>۹۳</sup> این واقیت که  $\mathbb{E}_d$  و  $\mathbb{R}^d$  به صورت سراسری همسان‌ریخت (یا حتی ايزومتریک) هستند، توضیح می‌دهد که چرا اکثر کارهای مرتبط، فضاهای برداری  $\mathbb{R}^d$  را به عنوان مدل‌هایی از فضاهای اقلیدسی در نظر می‌گیرند. رویکرد ما در این بخش کمی دقیق‌تر است زیرا حداقل ساختار لازم برای تعریف کانولوشن‌های مستقل از مختصات  $GM$  را در فضاهای اقلیدسی  $M = \mathbb{E}_d$  معرفی می‌کنیم.



شکل ۴۲: نمایش چارت‌های افاین  $x^X : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$  که مختصات سراسری را به فضاهای اقلیدسی اختصاص می‌دهند. هم  $\mathbb{R}^d$  و هم فضاهای افاین هستند، به طوری که می‌توان خواست که چارت‌های نگاشت‌های افاین باشند، که هم خطی و نسبت فاصله‌ها را حفظ می‌کنند. ما یک اطلس  $\mathcal{A}_{\mathbb{E}_d}^{\text{Aff}(G)}$  را به عنوان اطلسی مشکل از چارت‌هایی تعریف می‌کنیم که توسط توابع گذار  $t^{BA} g^{BA} := x^B \circ (x^A)^{-1}$  که اعضایی در  $\text{Aff}(G)$  هستند، به یکدیگر مرتبط می‌شوند. چارت‌های در یک اطلس  $\text{Aff}(G)$  حداقل در انتخاب مبدأ  $(0)$  و یک بندی  $G$  با هم تفاوت دارند. انتخاب یک اطلس  $\text{Aff}(G)$ ، مشکل از چارت‌های  $\text{Aff}(G)$ -اطلس  $\mathcal{A}^G$  از پیمانه‌های  $\hat{dx}^X$  برای گروه‌های مختلف  $G$  مثال زده شده است، تحت عمل  $x^X$  یک  $G$ -ساختار متناظر  $GM$  که در شکل ۴۳ برای چارت‌های  $GM$  روی چنین  $G$ -ساختارهایی،  $\text{Aff}(G)$ -هموردا هستند. (مارمولک‌ها با مجوز توپیتر تحت لایسنس بین‌المللی CC-BY-SA ارائه شده‌اند.)

در ادامه ما همیشه این چارت‌های را به عنوان نگاشت‌های افاین، یعنی ایزومورفیسم‌های فضاهای افاین، که هم خطی (یعنی خطوط راست را به خطوط راست می‌نگارند) و نسبت فاصله‌ها را حفظ می‌کنند، در نظر خواهیم گرفت. از آنجا که ترکیب نگاشت‌های افاین، خود نگاشت افاین است، نتیجه می‌شود که توابع گذار چارت

$$x^B \circ (x^A)^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (373)$$

تبیلات افاین از  $\mathbb{R}^d$  هستند، یعنی اعضایی در  $\text{Aff}(\text{GL}(d))$ . بنابراین توابع گذار به طور یکتا به یک انتقال  $T_d$  و یک عضو  $t^{BA} \in T_d$  و یک عضو  $\text{GL}(d)$  تجزیه می‌شوند:

$$t^{BA} g^{BA} := x^B \circ (x^A)^{-1} \quad (374)$$

نماد  $g^{BA}$  در اینجا تصادفی نیست زیرا این اعضای گروه با تبیلات پیمانه‌ای که توسط گذار چارت‌ها القا می‌شوند، مطابقت دارند، که در قضیه ۹.۲ در ادامه ثابت شده است.

با توجه به انتخاب یک گروه افاین  $\text{Aff}(G)$ ، ما اطلس‌های  $\mathbb{E}_d$  را به عنوان آن دسته از اطلس‌های چارت‌های سراسری از  $\mathbb{E}_d$  تعریف می‌کنیم که توابع گذار چارت آنها مقادیری در  $\text{Aff}(G)$  می‌گیرند:

**تعریف ۹.۱ (اطلس  $\text{Aff}(G)$  از فضای اقلیدسی).** فرض کنید  $\mathfrak{X}$  یک مجموعه اندیس برای نام گذاری چارت‌ها باشد و برای هر  $X \in \mathfrak{X}$  یک چارت افاین سراسری از  $\mathbb{E}_d$  به  $x^X : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$  باشد. اطلس

$$\mathcal{A}_{\mathbb{E}_d}^{\text{Aff}(G)} = \left\{ (\mathbb{E}_d, x^X) \mid X \in \mathfrak{X} \right\} \quad (375)$$

یک اطلس  $\text{Aff}(G)$  نامیده می‌شود اگر تمام توابع گذار چارت آن مقادیری در  $\text{Aff}(G)$  بگیرند، یعنی اگر

$$x^B \circ (x^A)^{-1} \in \text{Aff}(G) \quad \forall A, B \in \mathfrak{X}. \quad (376)$$

شکل ۴۲ چارت‌های افاین و نگاشت‌های گذار چارت با مقادیر  $\text{Aff}(G)$  بین آنها را به تصویر می‌کشد.

## ۲.۰.۲.۹ -اطلس‌ها و -ساختارهای القا شده

هر چارت مختصاتی سراسری  $x^A : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$  یک پیمانه سراسری را القا می‌کند که به صورت نقطه‌ای توسط گرادیان‌های چارت داده می‌شود

$$\psi_{TM,p}^A := \hat{dx}_p^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (377)$$

به معادله (۵۴۰) در پیوست آ.۳ و جدول ۷ مراجعه کنید. بنابراین یک اطلس از چارت‌ها متناظر با یک اطلس از پیمانه‌ها است. به طور خاص، با توجه به اینکه چارت‌ها یک اطلس  $\text{Aff}(G)$  را تشکیل می‌دهند، تضمین می‌شود که تبدیلات پیمانه دارای مقادیر  $G$  هستند، یعنی پیمانه‌های القا شده یک  $G$ -اطلس را تشکیل می‌دهند:

**قضیه ۹.۲ (اطلس‌های  $\text{Aff}(G)$  از چارت‌ها،  $G$ -اطلس‌های از پیمانه‌ها را القا می‌کنند.** فرض کنید

$$\mathcal{A}^{\text{Aff}(G)}_{\mathbb{E}_d} = \{(\mathbb{E}_d, x^X) \mid X \in \mathfrak{X}\}$$

$$\mathcal{A}^G = \{(\mathbb{E}_d, \hat{dx}^X) \mid X \in \mathfrak{X}\} \quad (۳۷۸)$$

تضمین می‌شود که یک  $G$ -اطلس باشد. به طور خاص، اگر نگاشتهای گذار چارت با  $x^B \circ (x^A)^{-1} = t^{BA} g^{BA}$  داده شوند، نگاشتهای گذار بین پیمانه‌ها در هر نقطه  $p \in \mathbb{E}_d$  با  $g_p^{BA} = g^{BA}$  داده می‌شوند.

اثبات: توابع گذار بین پیمانه‌های القا شده توسط چارت، طبق معادله (۵۵۳)، با ژاکوبین نگاشتهای گذار چارت منطبق هستند، یعنی،

$$g_p^{BA} = \hat{dx}_p^B \circ (\hat{dx}_p^A)^{-1} = \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)}. \quad (۳۷۹)$$

عبارت آخر، سوءاستفاده معمول از نماد گذاری برای ژاکوبین‌های نگاشتهای گذار چارت است، که در معادله (۵۴۷) به صورت مؤلفه‌ای به شکل زیر تعریف شد:

$$\frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\nu^A} \Big|_{x^A(p)} := \partial_\nu (x_\mu^B \circ (x^A)^{-1}) \Big|_{x^A(p)}. \quad (۳۸۰)$$

با استفاده از اینکه نگاشتهای گذار چارت با  $x^B \circ (x^A)^{-1} = t^{BA} g^{BA}$  داده می‌شوند، این نتیجه می‌دهد که

$$(g_p^{BA})_{\mu\nu} = \partial_\nu (x_\mu^B \circ (x^A)^{-1})(x) \Big|_{x^A(p)} = \partial_\nu (g^{BA} x + t^{BA})_\mu \Big|_{x^A(p)} = g_{\mu\nu}^{BA}, \quad (۳۸۱)$$

یعنی تبدیلات پیمانه القا شده  $g_p^{BA}$  مقادیری در  $G$  دارند و با  $g^{BA}$  مطابقت دارند (که این نماد گذاری را توجیه می‌کند). از آنجا که این استدلال برای هر چارت  $\mathfrak{X}$  برقرار است، نتیجه می‌شود که اطلس القا شده از پیمانه‌ها یک  $G$ -اطلس است.  $\square$

همانطور که در بخش ۴.۶ بحث شد، هر  $G$ -اطلس از پیمانه‌ها یک  $G$ -ساختار  $GM$  را القا می‌کند. طبق معادله (۱۸۴)،  $GM$  به صورت نقطه‌ای توسط

$$G_p M := (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(G), \quad (۳۸۲)$$

تعیین می‌شود، که در آن انتخاب خاص پیمانه  $\mathfrak{X} \in \mathfrak{X}$  دلخواه است. چارچوب‌های موجود در  $G_p M$  پایه‌های مختصاتی  $\left[ \frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \right]_{\mu=1}^d$  و تمام تبدیلات  $G$  آنها هستند. از آنجا که اطلس ماکسیمال  $\text{Aff}(G)$  با  $\text{Aff}(G)$ -ناوردا است، همین امر برای  $G$ -ساختار القا شده نیز صادق است (با عملی که از طریق هر چارت تعریف می‌شود، همانطور که در ادامه روشن و اثبات شده است). شکل ۴۳-جنبه  $G$ -ساختارهایی را برای گروه‌های افاین مختلف نشان می‌دهد. در بخش بعدی ما ثابت می‌کنیم که کانولوشن‌های  $GM$  متناظر، تحت عمل  $\text{Aff}(G)$  ایزومورفیسم هستند.

همانطور که مشخص می‌شود،  $GM$  به عنوان یک کلاف اصلی با  $\text{Aff}(G)/G \cong \mathbb{R}^d$  (به صورت غیرکانونی) ایزومورف است، که در آن

$$q : \text{Aff}(G) \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad tg \mapsto t \quad (۳۸۳)$$

نگاشت خارج قسمتی کانونی گروه افاین است (پس از یکی گرفتن هم دسته‌های  $tG$  با انتقال‌های  $t$ ).<sup>۹۴</sup> جای تعجب نیست که این ایزومورفیسم کلاف اصلی به انتخاب چارت بستگی دارد.

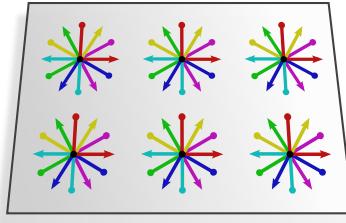
**قضیه ۹.۳ (ایزومورفیسم کلاف اصلی بین  $\text{Aff}(G)$  و  $GM$ )**. فرض کنید  $GM$  یک  $G$ -ساختار القا شده توسط اطلس  $\mathbb{E}_d \text{Aff}(G)$  روی  $GM$  باشد. آنگاه  $GM$  به عنوان یک کلاف اصلی با  $\text{Aff}(G)/G \cong \mathbb{R}^d$  ایزومورف است، یعنی ایزومورفیسم‌هایی وجود دارند

$$\alpha^A : \text{Aff}(G) \rightarrow GM, \quad tg \mapsto (\psi_{GM,(x^A)^{-1}(t)})^{-1}(g) \quad (۳۸۴)$$

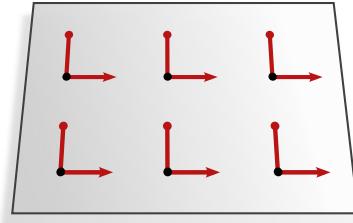
و

$$(x^A)^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{E}_d \quad (۳۸۵)$$

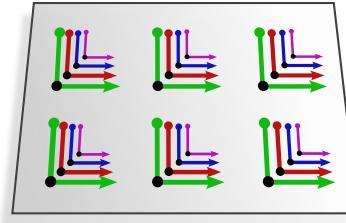
<sup>۹۴</sup> ما به طور ضمنی از یک ایزومورفیسم کانونی  $\text{Aff}(G)/G \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^d$  استفاده می‌کنیم، که در آن  $t$  در سمت چپ یک عضو گروه انتقال در  $\mathbb{R}^d$  را نشان می‌دهد.  $\mathcal{T}_d = (\mathbb{R}^d, +)$  و در سمت راست یک بردار در  $\mathbb{R}^d$  را نشان می‌دهد.



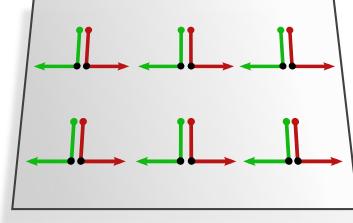
ب)  $\text{SOM}$ -ساختار القا شده توسط اطلس  $(\text{SO}(2))$  روی  $\text{Aff}(\text{SO}(2))$ ، که تحت انتقال‌ها و دوران‌ها در  $M = \mathbb{E}_2$  حفظ می‌شود.



ت)  $\{e\}M$ -ساختار القا شده توسط اطلس  $(\mathbb{T}_2)$  روی  $\text{Aff}(\{e\})$ ، که تحت انتقال‌ها در  $M = \mathbb{E}_2$ ،  $\text{Aff}(\{e\}) = \text{Isom}_{\{e\}M} = \mathcal{T}_2$ ،  $\mathcal{T}_2$  حفظ می‌شود.



د)  $\mathcal{S}$ -ساختار القا شده توسط اطلس  $(\mathcal{S})$  روی  $M = \mathbb{E}_2$ ، که  $\text{Aff}(\mathcal{S}) = \mathcal{T}_2 \times \mathcal{S}$ ، تحت انتقال‌ها و مقایس‌بندی‌ها در  $\text{Aff}(\mathcal{S}) = \mathcal{T}_2$  حفظ می‌شود. توجه داشته باشید که  $\text{Isom}_{\mathcal{S}M} = \mathcal{T}_2$  زیرا مقایس‌بندی‌ها ایزو‌متريک نیستند.



ج)  $\mathcal{R}$ -ساختار القا شده توسط اطلس  $(\mathcal{R})$  روی  $M = \mathbb{E}_2$ ،  $\text{Aff}(\mathcal{R}) = \text{Isom}_{\mathcal{R}M} = \mathcal{T}_2$ ، که تحت انتقال‌ها و بازتاب‌ها در  $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$  حفظ می‌شود.

شکل ۴۳: نمایش  $G$ -ساختارهای مختلف  $GM$  در فضاهای اقلیدسی آ. شکل ۹.۱. ساختار ناوردای انتقالی  $\{e\}M$  را نشان می‌دهد که متناظر با کاتولوشن‌های CNN های  $G$ -راهبری پذیر غیربدپهی هستند. آنها به صورت محلی روی تمام ژست‌هایی که توسط مجموعه خاصی از چارچوب‌های مرتع در  $G_p M$  به هم مرتبط هستند، تعیین می‌باشند. از آنجا که  $G$ -ساختارها  $\text{Aff}(G)$ -ناوردا هستند (که از قضیه ۹.۶ نتیجه می‌شود)، کاتولوشن‌های  $G$ -راهبری پذیر به صورت سراسری نسبت به  $\text{Aff}(G)$  همودا هستند (قضیه ۹.۸). به جای تعریف  $G$ -ساختارها از طریق یک ارتقای  $G$ -به صورت  $G \triangleleft G := \{e\}M$  از  $GM$  تعیین می‌کند.  $\mathbb{R}^d$ -ساختار کانونی  $\mathbb{R}^d$  تعریف کرد (معادله (۳۷۱)، که چارچوب‌های موجود در  $\{e\}M$ -ساختار را تمام چارچوب‌های مرتبط با  $G$  مجهر می‌کند.

به طوری که نمودار زیر جابجایی است:

$$\begin{array}{ccc} \text{Aff}(G) \times G & \xrightarrow{\alpha^A \times \text{id}_G} & GM \times G \\ \downarrow \cdot & & \downarrow \triangleleft \\ \text{Aff}(G) & \xrightarrow{\alpha^A} & GM \\ q \downarrow & & \downarrow \pi_{GM} \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{(x^A)^{-1}} & \mathbb{E}_d \end{array} \quad (386)$$

وارون  $\alpha^A$  در اینجا با

$$(\alpha^A)^{-1} : GM \rightarrow \text{Aff}(G), [e_i]_{i=1}^d \mapsto t_g \quad \square \square \square \quad \begin{cases} t = x^A \circ \pi_{GM}([e_i]_{i=1}^d) \\ g = \psi_{GM, \pi_{GM}([e_i]_{i=1}^d)}^A([e_i]_{i=1}^d) \end{cases} \quad (387)$$

داده می‌شود. توجه داشته باشید که این ایزو‌مورفیسم‌ها در تناظر یک به یک با چارت‌های سازگار با  $\text{Aff}(G)$  از اطلس مورد نظر هستند.

اثبات: برای اثبات این گزاره، باید نشان دهیم که  $\alpha^A$  و  $(\alpha^A)^{-1}$  واقعاً وارون یکدیگر هستند، که یک نگاشت کلاف روی  $(x^A)$  است و  $\alpha^A$  همودای-راست نسبت به  $G$  است. اینکه  $(\alpha^A)^{-1}$  هم یک وارون چپ و هم یک وارون راست خوش‌تعریف برای  $\alpha^A$  است، به راحتی توسط خواننده بررسی می‌شود. اینکه  $\alpha^A$  یک نگاشت کلاف روی  $(x^A)$  است به این معناست که مریع پایینی نمودار جابجایی است. این امر با مشاهده اینکه  $\pi_{GM} \circ \alpha^A(tg) = \pi_{GM} \circ (\psi_{GM, (x^A)^{-1}(t)})^{-1}(g) = (x^A)^{-1}(t) \circ (x^A)^{-1} \circ q(tg) = (x^A)^{-1}(t)$  برای

هر  $tg \in \text{Aff}(G)$  برایر هستند، دیده می شود. جایجاوی مریع بالایی در نمودار، یعنی هموردایی-راست  $\alpha^A$  نسبت به  $G$ ، از این واقعیت ناشی می شود که  $\tilde{g} \triangleleft \tilde{g} = \alpha^A(tg) \triangleleft \tilde{g} = (\psi_{GM, (x^A)^{-1}(t)})^{-1}(g\tilde{g}) = (\psi_{GM, (x^A)^{-1}(t)})^{-1}(g\tilde{g})$  برای هر  $tg \in \text{Aff}(G)$  و هر  $\tilde{g} \in G$  برقرار است. در مرحله دوم از این واقعیت استفاده شد که  $\psi_{GM, (x^A)^{-1}(t)}$  هموردایی-راست نسبت به  $G$  است (معادله (۱۸۸)، که هموردایی وارون آن را نتیجه می دهد. در مجموع، این ویژگی ها نشان می دهند که  $\alpha^A$  یک ایزومورفیسم کلاف اصلی است.  $\square$

### ۳.۲.۹ تبدیلات افاین مستقل از مختصات

از آنجا که ما می خواهیم هموردایی کانولوشن های  $GM$  را تحت تبدیلات افاین در یک چارچوب مستقل از مختصات اثبات کنیم، باید گروه هایی از تبدیلات افاین  $\mathbb{E}_d$  را به جای  $\mathbb{R}^d$  مانند بالا، معرفی کنیم. چارت ها گروه های افاین مستقل از مختصات را به گروه های افاین  $\text{Aff}(G)$  از  $\mathbb{R}^d$  مرتبط خواهند کرد.

ما با گروه کامل

$$\text{Aff}(\mathbb{E}_d) := \{\phi : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{E}_d \mid \phi \text{ یک تبدیل افاین از } \mathbb{E}_d \text{ است}\} \quad (388)$$

از تبدیلات افاین یک فضای اقلیدسی  $\mathbb{E}_d$  شروع می کنیم. اثبات اینکه  $\text{Aff}(\text{GL}(d))$  ایزومورف است، آسان است، با ایزومورفیسم هایی که برای یک انتخاب دلخواه از چارت  $x^A \mapsto \phi(x^A)$  داده می شوند. این گزاره در یک چارچوب کلی تر در قضیه ۹.۶ در ادامه اثبات شده است.

همانند مورد ایزومنتری ها، ما زیر گروه های  $\text{Aff}(\mathbb{E}_d)$  از  $\text{Aff}_{GM}$  ≤  $\text{Aff}(\mathbb{E}_d)$  همانند مورد ایزومنتری ها، ما زیر گروه های  $\text{Aff}_{GM}$  ≤  $\text{Aff}(\mathbb{E}_d)$  را تعریف می کنیم:

**تعريف ۹.۴ (تبدیلات افاین حافظ ساختار).** فرض کنید  $GM$  هر  $G$ -ساختاری روی  $\mathbb{E}_d$  باشد. ما زیر گروه متناظر از تبدیلات افاین حافظ  $G$ -ساختار را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\text{Aff}_{GM} := \{\phi \in \text{Aff}(\mathbb{E}_d) \mid \phi_{*,FM} G_p M = G_{\phi(p)} M \quad \forall p \in \mathbb{E}_d\} \leq \text{Aff}(\mathbb{E}_d). \quad (389)$$

این تعریف را با تعریف ۸.۱ Isom $_{GM}$  مقایسه کنید. همانند مورد  $\text{Isom}_{GM}$  در تعریف ۸.۱، تضمین می شود که تبدیلات پیمانه ای که توسط تبدیلات افاین در  $\text{Aff}_{GM}$  القا می شوند، مقادیری در  $G$  داشته باشند. این گزاره توسط قضیه زیر رسمیت می باید، که اساساً مشابه قضیه ۸.۳ است: **قضیه ۹.۵ (تبدیلات افاین حافظ های محلی).** فرض کنید  $\phi \in \text{Aff}(\mathbb{E}_d)$  هر ایزومنتری از  $M = \mathbb{E}_d$  باشد. آنگاه سه گزاره زیر معادل هستند:

۱.  $\phi$  حافظ  $G$ -ساختار است، یعنی،

۲. پولبک تبدیل افاین  $\psi_{*,FM}^{-1} \phi_{*,FM}^{\tilde{A}} \psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$  از هر پیمانه  $G$ -اطلس  $FM$  که  $GM$  را تعریف می کند، با آن  $G$ -اطلس،  $-G$ -سازگار است.

۳. عبارت مختصاتی  $\phi_{*,FM}$  نسبت به هر پیمانه  $\psi_{FM,\phi(p)}^A$  و  $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$  از  $G$ -اطلس  $FM$  مقادیری در گروه ساختار می گیرد، یعنی،  $\phi_{*,FM}^A(p) := \psi_{FM,\phi(p)}^A \phi_{*,FM} (\psi_{FM,p}^{\tilde{A}})^{-1} = \hat{d}x_{\phi(p)}^A \phi_{*,TM} (\hat{d}x_p^{\tilde{A}})^{-1}$  مقادیری در  $G$  دارد.

اثبات: اثبات مشابه اثبات قضیه ۸.۳ است. به طور کلی تر، این گزاره برای دیفوئورفیسم های حافظ  $G$ -ساختار دلخواه نیز برقرار است.  $\square$

تبدیلات پیمانه القا شده، تبدیل عبارت مختصاتی اعضای کلاف، به عنوان مثال ضرایب بردارهای مماس یا ویژگی، را توصیف می کنند. عمل تبدیل افاین  $\phi$  روی خود منیفلد  $\mathbb{E}_d$  نیز می تواند در مختصات  $\mathbb{R}^d$  توصیف شود. این کار با ضرب چپ و راست  $\phi$  با هر چارت (افاین) انجام می شود، که بدون از دست دادن گلایت می توانیم آن را در مکان مبدأ و مقصد برابر در نظر بگیریم زیرا فقط چارت های سراسری را در نظر می گیریم. عبارت مختصاتی حاصل  $t_{\phi}^{AA} g_{\phi}^{AA}$ ، که توسط نمودار جایجاوی زیر تعریف می شود،

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{x^A} & \mathbb{E}_d & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{E}_d \xrightarrow{x^A} \mathbb{R}^d \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{t_{\phi}^{AA} g_{\phi}^{AA}} & & & \end{array} \quad (390)$$

تضمین می شود که مقادیری در  $\text{Aff}(G)$  بگیرد اگر  $\phi$  حافظ  $G$ -ساختار را حفظ کند.

**قضیه ۹.۶ (تبدیلات افاین سراسری).** فرض کنید  $GM$   $G$ -ساختار القا شده توسط یک اطلس  $(\mathbb{E}_d, \text{Aff}(G))$  باشد و  $x^A : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$  یک چارت از این اطلس باشد. عبارت مختصاتی یک عضو  $\phi \in \text{Aff}_{GM}$  نسبت به  $x^A$  آنگاه با

$$x^A \phi (x^A)^{-1} =: t_{\phi}^{AA} g_{\phi}^{AA} \in \text{Aff}(G), \quad (391)$$

داده می شود، که در آن

$$t_{\phi}^{AA} := x^A \phi(x^A)^{-1}(\cdot) \in \mathcal{T}_d \quad \text{و} \quad g_{\phi}^{AA} := \hat{dx}_{\phi(p)}^A \phi_{*,TM} (\hat{dx}_p^A)^{-1} \in G \quad (392)$$

عضو  $G$  در عبارت مختصاتی در اینجا با تبدیل پیمانه القا شده  $g_{\phi}^{AA}(p) \in G$  از قضیه ۹.۵ در هر نقطه  $p \in \mathbb{E}_d$  منطبق است.

علاوه بر این، نگاشت مختصاتی سازی

$$\text{Aff}_{GM} \rightarrow \text{Aff}(G), \quad \phi \mapsto x^A \phi(x^A)^{-1}, \quad (393)$$

یک ایزومورفیسم گروهی است.

اثبات: از آنجا که  $x^A$  و  $\phi$  نگاشتهای افاین هستند،  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  یک تبدیل افاین از  $\text{Aff}(\text{GL}(d))$  است، یعنی عضوی از  $\text{Aff}(\text{GL}(d))$  (یا زیرگروهی از آن)، این بدان معناست که بسط تیلور مرتبه اول عبارت، دقیق است. بنابراین کاربرد عبارت مختصاتی به یک عضو دلخواه  $x \in \mathbb{R}^d$  را می توان بر حسب بسط تیلور زیر حول مبدأ از  $\mathbb{R}^d$  نوشت:

$$\begin{aligned} [x^A \phi(x^A)^{-1}](x) &= [x^A \phi(x^A)^{-1}](\cdot) + \frac{\partial}{\partial x'} [x^A \phi(x^A)^{-1}]_{x'=\cdot} \cdot x \\ &= t_{\phi}^{AA} + g_{\phi}^{AA} \cdot x \\ &= (t_{\phi}^{AA} g_{\phi}^{AA}) x \end{aligned} \quad (394)$$

در اینجا ما به طور ضمنی انتقال  $t_{\phi}^{AA} \in \mathbb{R}^{d \times d}$  و  $g_{\phi}^{AA} \in \mathbb{R}^d$  را تعریف کردیم و آنها را با اعضای گروه یکی گرفتیم، که این کار ممکن است زیرا تمام مورفیسم‌های در گیر، وارون پذیر هستند.

اینکه  $g_{\phi}^{AA}$  با تبدیل پیمانه القا شده  $(p) g_{\phi}^{AA}$  در یک نقطه دلخواه  $M \in M$  مطابقت دارد، با بازنویسی آن از طریق معادله (۵۳۱) بر حسب دیفرانسیل‌ها نشان داده می شود:

$$\begin{aligned} g_{\phi}^{AA} &= \frac{\partial}{\partial x'} [x^A \phi(x^A)^{-1}]_{x'=x^A(p)} \\ &= \iota_{\mathbb{R}^d} d[x^A \phi(x^A)^{-1}]_{x^A(p)} (\iota_{\mathbb{R}^d})^{-1} \\ &= \iota_{\mathbb{R}^d} dx_{\phi(p)}^A d\phi_p (dx_p^A)^{-1} (\iota_{\mathbb{R}^d})^{-1} \\ &= \hat{dx}_{\phi(p)}^A \phi_{*,TM} (\hat{dx}_p^A)^{-1} \\ &= g_{\phi}^{AA}(p) \end{aligned} \quad (395)$$

در مرحله ماقبل آخر ما دیفرانسیل  $d\phi$  را به عنوان یک نماد جایگزین برای پوش فروارد  $\phi_{*,TM}$  و گرادیان‌های چارت  $\iota_{\mathbb{R}^d} dx^A := \iota_{\mathbb{R}^d} dx^A$  همانطور که در معادله (۵۴۰) تعریف شده، شناسایی کردیم. اندیس  $p$  در نماد  $g_{\phi}^{AA}(p)$  به دلیل دلخواه بودن آن حذف شده است.

اینکه  $g_{\phi}^{AA}$  نه تنها عضوی از  $\text{Aff}(\text{GL}(d))$  بلکه از زیرگروه آن  $\text{Aff}(G)$  است، روشن است زیرا قضیه ۹.۵ بیان می کند که  $\phi \in \text{Aff}_{GM}$  برای هر  $G$

برای اثبات اینکه نگاشت مختصاتی سازی  $C^A : \text{Aff}_{GM} \rightarrow \text{Aff}(G)$ ،  $\phi \mapsto x^A \phi(x^A)^{-1}$  واقعاً یک ایزومورفیسم گروهی است، باید نشان دهیم که آن (۱) یک همومورفیسم گروهی، (۲) یک به یک و (۳) پوش است. اینکه  $C^A$  یک همومورفیسم گروهی است، بلاعده از تعریف آن نتیجه می شود زیرا

$$\begin{aligned} C^A(\phi \tilde{\phi}) &= x^A \phi \tilde{\phi}(x^A)^{-1} \\ &= x^A \phi(x^A)^{-1} x^A \tilde{\phi}(x^A)^{-1} \\ &= C^A(\phi) C^A(\tilde{\phi}) \end{aligned} \quad (396)$$

برای هر  $\phi, \tilde{\phi} \in \text{Aff}_{GM}$   $C^A(\phi \tilde{\phi})$  برقرار است. یک به یک بودن این است که برای هر  $\phi, \tilde{\phi} \in \text{Aff}_{GM}$   $C^A(\phi \tilde{\phi}) = C^A(\tilde{\phi} \phi)$ . اینکه این مورد برقرار است، روشن است زیرا  $C^A(\phi) = C^A(\tilde{\phi})$  معادل است با  $x^A \phi(x^A)^{-1} = x^A \tilde{\phi}(x^A)^{-1}$ ، که تساوی  $\phi$  و  $\tilde{\phi}$  را نتیجه می دهد زیرا  $x^A$  یک ایزومورفیسم است. در آخر،  $C^A$  پوش است اگر و تنها اگر برای هر  $\phi \in \text{Aff}_{GM}$  به وجود داشته باشد، به طوری که  $C^A(\phi) = tg(\phi) = tg(x^A \phi(x^A)^{-1})$ . آنچه باقی می ماند نشان دادن این است که این ساختار  $\phi$  واقعاً عضوی از  $\text{Aff}_{GM}$  است. همانطور که به راحتی می توان بررسی کرد،  $g_{\phi}^{AA} = g \in G$ ، به طوری که  $\phi \in \text{Aff}_{GM}$  از قضیه ۹.۵ نتیجه می شود، که با آن پوش بودن برقرار است. در کل، این اثبات می کند که  $C^A : \text{Aff}_{GM} \rightarrow \text{Aff}(G)$  یک ایزومورفیسم گروهی است اگر و تنها  $\text{Aff}_{GM}$  یک اطلس القا شده باشد.  $\square$

ایزومورفیسم بین  $\text{Aff}(G)$  و  $\text{Aff}_{GM}$  یکتا نیست، زیرا به چارت خاص در نظر گرفته شده بستگی دارد. انتخاب‌های مختلف با خود ریختی‌های داخلی مرتبط هستند زیرا  $\text{Aff}(G)$

$$C^B(\phi) = x^B \phi(x^B)^{-1} = x^B (x^A)^{-1} x^A \phi(x^A)^{-1} x^A (x^B)^{-1} = (t^{BA} g^{BA}) C^A(\phi) (t^{BA} g^{BA})^{-1}. \quad (397)$$

این تحلیل ما از هندسه‌ی اقلیدسی و  $G$ -ساختارهای  $\text{Aff}(G)$ -تاوردرا که برای تعریف کانولوشن‌های اقلیدسی مستقل از مختصات در بخش بعدی لازم است، به پایان می‌رساند.

## ۳.۹ CNN‌های هموردای گروه افاین در فضاهای اقلیدسی $\mathbb{E}_d$

اکنون به بررسی کانولوشن‌های  $GM$  اقلیدسی روی  $G$ -ساختارهای القا شده توسط اطلس  $\text{Aff}(G)$  می‌پردازیم. همانطور که در ادامه نشان خواهیم داد، این کانولوشن‌ها هنگامی که در یک چارت بیان شوند، به کانولوشن‌های کلاسیک  $G$ -راهبری‌بذری روی  $\mathbb{R}^d$  خلاصه می‌شوند. هموردایی افاین آنها در قضیه ۹.۸ در یک چارچوب مستقل از مختصات اثبات شده است.

**بازیابی کانولوشن‌های متعارف روی  $\mathbb{R}^d$ :** کانولوشن‌های  $GM$  به طور حیاتی به پول‌بک انتقال‌دهنده  $f_p^*$  از میدان‌های ویژگی بستگی دارند، که به نوبه خود به انتقال‌دهنده‌های موازی و نگاشت نمایی وابسته است. در فضاهای اقلیدسی، این عملیات شکل بسیار ساده‌ای به خود می‌گیرند. همانطور که ابتدا به آن می‌پردازیم.

همانطور که قبلاً گفته شد، انتقال‌دهنده‌های لوی-چپویتا بردارهای مماس را در فضاهای اقلیدسی به گونه‌ای جابجا می‌کنند که در معنای معمول در فضاهای اقلیدسی موازی باقی بمانند؛ به شکل ۱۵ مراجعه کنید. فرض کنید  $x^A : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$  هر چارت سراسری از یک اطلس  $\text{Aff}(G)$  باشد. از آنجا که میدان چارچوب القا شده "موازی" است، انتقال‌دهنده‌ها در امتداد هر مسیر  $\gamma$  هنگامی که نسبت به پیمانه‌های القا شده  $\hat{dx}_p^A$  بیان شوند، بدیهی می‌شوند:

$$g_\gamma^{AA} = e \quad \text{برای هر مسیر} \quad (398)$$

این به طور خاص دلالت بر این دارد که انتقال‌دهنده‌های بردار ویژگی در این پیمانه با نگاشت‌های همانی داده می‌شوند، یعنی

$$\rho(g_\gamma^{AA}) = \text{id}_{\mathbb{R}^c} \quad \text{برای هر مسیر} \quad (399)$$

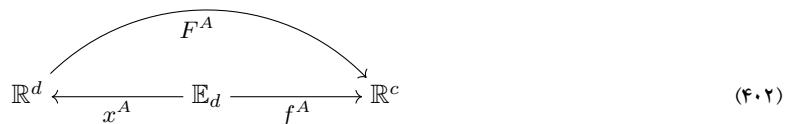
هنگامی که نگاشت نمایی در یک چارت بیان شود، به جمع عبارات مختصاتی نقطه و بردار خلاصه می‌شود:

$$x^A(\exp_p v) = x^A(p) + \hat{dx}_p^A(v) \quad (400)$$

علاوه بر این، ما باید میدان‌های ویژگی را در مختصات بیان کنیم، یعنی آنها را از طریق چارت (سراسری، وارون) از  $\mathbb{E}_d$  به  $\mathbb{R}^d$  پول‌بک می‌کنیم،

$$F^A := f^A \circ (x^A)^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad (401)$$

که توسط نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:



با این اجزا در دست، پول‌بک انتقال‌دهنده، معادله (۶۷)، از میدان‌های ویژگی در فضاهای اقلیدسی را می‌توان در مختصات به صورت زیر بیان کرد

$$\begin{aligned} [\text{Exp}_p^* f]^A(v) &= \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(\hat{dx}_p^A)^{-1}(v^A)}^{AA}) f^A \exp_p((\hat{dx}_p^A)^{-1}(v)) \\ &= f^A(x^A)^{-1} x^A \exp_p((\hat{dx}_p^A)^{-1}(v)) \\ &= F^A(x^A(p) + v). \end{aligned} \quad (403)$$

بنابراین عبارت مختصاتی کانولوشن  $GM$ ، معادله (۸۷)، به صورت زیر در می‌آید

$$f_{\square\square}^A(p) = [K * f_{\square\square}]^A(p) = \int_{\mathbb{R}^d} K(v) [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^A(v) dv = \int_{\mathbb{R}^d} K(v) F^A(x^A(p) + v) dv. \quad (404)$$

این نشان می‌دهد که کانولوشن‌های  $GM$  در فضاهای اقلیدسی، کانولوشن‌های (همبستگی‌های) متعارف هستند.

قضیه ۹.۷ (کانولوشن‌های  $GM$  در فضاهای اقلیدسی، کانولوشن‌های روی  $\mathbb{R}^d$ ) را بازیابی می‌کنند. فرض کنید  $GM$  یک  $-G$  ساختار القا شده توسط یک اطلس  $\text{Aff}(G)$  از چارت‌ها باشد، همانطور که در بخش ۲.۹ تعریف شد. هنگامی که نسبت به هر چارت سراسری  $\mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$  از این اطلس  $\text{Aff}(G)$  بیان شود، کانولوشن  $GM$  شکل یک کانولوشن (همبستگی) متعارف  $*$  را به خود می‌گیرد:

$$F_{\square\Box}^A(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(v) F_{\square\Box}^A(x+v) dv = [K * F_{\square\Box}^A](x) \quad (4.5)$$

اثبات: این گزاره با ارزیابی معادله (۴۰۴) در  $F_{\square\Box}^A = f_{\square\Box}^A \circ (x^A)^{-1}(x)$  و شناسایی  $p = (x^A)^{-1}(x)$  در سمت چپ به دست می‌آید.  $\square$

قبل از پرداختن به اثبات هموردایی کانولوشن‌های  $GM$  اقلیدسی در یک چارچوب مستقل از مختصات، ما استقلال از مختصات آن را در نظر می‌گیریم  $\square$  همانطور که خواهیم دید، هر دو مفهوم به شدت به هم مرتبط هستند. تمام آنچه برای نشان دادن استقلال از مختصات لازم است، قانون تبدیل پول‌بک‌های میدان ویژگی به  $\mathbb{R}^d$  از طریق چارت‌ها است. قانون تبدیل مستقیماً از توابع گذار نتیجه می‌شود و می‌توان آن را از جایجایی نمودار زیر

$$\begin{array}{ccccc} & & F^A & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathbb{R}^d & & \mathbb{E}_d & & \mathbb{R}^c \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ t^{BA} g^{BA} & & & & \rho(g^{BA}) \\ & \nearrow & & \searrow & \\ & x^A & & f^A & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & x^B & & f^B & \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & F^B & & \mathbb{R}^c \end{array} \quad (4.6)$$

خواند که به صورت زیر داده می‌شود:

$$F^B = \rho(g^{BA}) F^A (t^{BA} g^{BA})^{-1}. \quad (4.7)$$

توجه داشته باشید که این قانون تبدیل دقیقاً نمایش القابی  $t^{BA} g^{BA} \triangleright_\rho F^A \triangleright_\rho F^B = t^{BA} g^{BA}$  است که در معادله (۳۶۸) معرفی شد. با استفاده از هموردایی کانولوشن متعارف با کرنل‌های  $G$ -راهنری پذیر از معادله (۳۶۹)، این نتیجه می‌دهد

$$K * F_{\square\Box}^B = K * (t^{BA} g^{BA} \triangleright_{\rho_{\square\Box}} F_{\square\Box}^A) = t^{BA} g^{BA} \triangleright_{\rho_{\square\Box}} (K * F_{\square\Box}^A) = t^{BA} g^{BA} \triangleright_{\rho_{\square\Box}} F_{\square\Box}^A = F_{\square\Box}^B \quad (4.8)$$

بنابراین دیده می‌شود که هموردایی فعال  $(G)$ -کانولوشن‌های کلاسیک  $G$ -راهنری پذیر روی  $\mathbb{R}^d$  از بخش ۱.۹، استقلال از مختصات غیرفعال  $\text{Aff}(G)$  کانولوشن‌های  $GM$  اقلیدسی را نتیجه می‌دهد و برعکس. این دو، دو روی یک سکه هستند. علاوه بر این، می‌توان هموردایی  $\text{Aff}(G)$  کانولوشن  $GM$  را در چارچوب مستقل از مختصات اثبات کرد، که در ادامه این کار را انجام خواهیم داد.

**هموردایی گروه افاین** برای اثبات هموردایی گروه افاین کانولوشن‌های  $GM$  اقلیدسی، ابتدا قانون تبدیل میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات  $f \in \Gamma(\mathcal{A})$  را تحت تبدیلات افاین  $\phi \in \text{Aff}_{GM}$  به صورت زیر تعریف می‌کیم:

$$\phi \triangleright f = \phi_{*,\mathcal{A}} f \phi^{-1}, \quad (4.9)$$

یعنی همانند ایزومنتری‌ها در تعریف  $\text{Aff}_{GM}$  پول‌بک انتقال‌دهنده (لوی-چیویتا) از یک میدان ویژگی تبدیل شده افاین  $f \triangleright \phi$  نسبت به یک چارت افاین با عبارت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
& [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)]^A(\mathfrak{v}) \\
& \stackrel{(1)}{=} [\text{Exp}_p^*(\phi_{*,A} f \phi^{-1})]^A(\mathfrak{v}) \\
& \stackrel{(2)}{=} \underbrace{\rho(g_p^{AA} \leftarrow \exp_p(\hat{dx}_p^A)^{-1}(\mathfrak{v}))}_{= \text{id}_{\mathbb{R}^c}} \psi_{A,p}^A (\phi_{*,A} f \phi^{-1}) \exp_p((\hat{dx}_p^A)^{-1}(\mathfrak{v})) \\
& \stackrel{(3)}{=} \psi_{A,p}^A \phi_{*,A} [(\psi_{A,\phi^{-1}(p)}^A)^{-1} \psi_{A,\phi^{-1}(p)}^A] f [(x^A)^{-1} x^A] \phi^{-1} [(x^A)^{-1} x^A] \exp_p((\hat{dx}_p^A)^{-1}(\mathfrak{v})) \\
& \stackrel{(4)}{=} [\psi_{A,p}^A \phi_{*,A} (\psi_{A,\phi^{-1}(p)}^A)^{-1}] [\psi_{A,\phi^{-1}(p)}^A f (x^A)^{-1}] [x^A \phi^{-1} (x^A)^{-1}] [x^A \exp_p((\hat{dx}_p^A)^{-1}(\mathfrak{v}))] \\
& \stackrel{(5)}{=} \rho(g_\phi^{AA}) F^A (t_\phi^{AA} g_\phi^{AA})^{-1} (x^A(p) + \mathfrak{v}) \\
& \stackrel{(6)}{=} [(t_\phi^{AA} g_\phi^{AA}) \triangleright_\rho F^A] (x^A(p) + \mathfrak{v})
\end{aligned} \tag{410}$$

این عبارت به پول‌بک انتقال‌دهنده از میدان تبدیل نشده از طریق نمایش القابی (معادله (۳۶۸)) مرتبط می‌شود، که با عبارت مختصاتی  $(\phi_{*,A} f \phi^{-1})^A$  عمل می‌کند (معادله (۳۹۱)). دو مرحله اول از معادله (۴۰۹) و تعریف پول‌بک انتقال‌دهنده در مختصات استفاده می‌کنند، که در آن  $= (\phi_{*,A} f \phi^{-1})^A$  و  $\text{id}_{\mathbb{R}^c} = (\psi_{A,\phi^{-1}(p)}^A)^{-1} \psi_{A,\phi^{-1}(p)}^A$ . برای ترجمه تمام مورفیسم‌ها به عبارات مختصاتی مربوطه، مرحله سوم همانی‌های  $\psi_{A,\phi^{-1}(p)}^A$  را وارد می‌کند، که در مرحله چهارم دوباره دسته‌بندی می‌شوند تا روش شود کدام ترکیب‌ها پس از مرحله پنجم به عبارات مختصاتی منجر می‌شوند. برای مرحله ۵ به یاد بیاورید که، طبق قضیه ۹.۶،  $g_\phi^{AA}(p) = g_\phi^{AA}(p)$  برای هر  $p \in \mathbb{E}_d$  همانطور که در بالا گفته شد، مرحله آخر قانون تبدیل حاصل در مختصات را به عنوان عمل نمایش القابی شناسایی می‌کند.

با این نتیجه می‌توانیم هموردادی  $\text{Aff}_{GM}$  کانولوشن‌های اقلیدسی را در چارچوب مستقل از مختصات اثبات کنیم. این قضیه ۸.۹ را که هموردادی ایزومنتری کانولوشن‌های  $GM$  را اثبات می‌کند، برای مورد خاص فضاهای اقلیدسی تعمیم می‌دهد.

**قضیه ۹.۸ (هموردادی افاین کانولوشن‌های  $GM$  اقلیدسی).** فرض کنید  $G$ -ساختار باشد که توسط یک اطلس  $(G)$  از فضای اقلیدسی  $M = \mathbb{E}_d$  اقا شده و فرض کنید بردارهای ویژگی مطابق با اتصال لوی-چیویتا روی  $\mathbb{E}_d$  منتقل می‌شوند. کانولوشن  $GM$  متناظر، تفصین می‌شود که تحت عمل تبدیلات افاین حافظ  $G$ -ساختار  $\text{Aff}_{GM} \cong \text{Aff}(G)$  هموردا باشد. در معادلات، برای میدان‌های ویژگی دلخواه  $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\mathbb{R}^d}, \rho_{\mathbb{R}^d}}^G$  و کرنل‌های  $G$ -راهنمایی  $f_{\square\square} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square})$  داریم که

$$[K \star (\phi \triangleright f_{\square\square})] = \phi \triangleright [K \star f_{\square\square}] \quad \forall \phi \in \text{Aff}_{GM}, \tag{411}$$

یعنی نمودار زیر برای هر  $\phi$  در  $\text{Aff}_{GM}$  جایجاًی است:

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) & \xrightarrow{\phi \triangleright} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \\
K \star \downarrow & & \downarrow K \star \\
\Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square\square}) & \xrightarrow{\phi \triangleright} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square\square})
\end{array} \tag{412}$$

اثبات: فرض کنید  $x^A : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$  هر چارت سراسری از اطلس  $(G)$  مورد نظر باشد و  $p \in \mathbb{E}_d$ . اثبات ما از هموردادی  $\text{Aff}_{GM}$  با بیان کانولوشن نسبت به این مختصات و استفاده از هموردادی  $\text{Aff}(G)$  کانولوشن‌های کلاسیک  $G$ -راهنمایی پذیر روی  $\mathbb{R}^d$  از معادله (۳۶۹) انجام می‌شود:

$$\begin{aligned}
& \psi_{A_{\square\square\square\square}, p}^A [K \star (\phi \triangleright f_{\square\square})](p) \\
& = \int_{\mathbb{R}^d} K(\mathfrak{v}) [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f_{\square\square})]^A(\mathfrak{v}) d\mathfrak{v} \quad (\text{کانولوشن } GM \text{ در مختصات، معادله (۸۷)})
\end{aligned} \tag{413}$$

<sup>۱۵</sup> از آنجا که کلاف بردار ویژگی به عنوان یک  $G$ -کلاف، یعنی مرتبط با  $GM$  تعریف شده است، پوش فرواردها فقط برای تبدیلات افاین حافظ  $G$ -ساختار در  $\text{Aff}_{GM}$  قابل تعریف هستند.

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^d} K(\vartheta) \left[ (t_\phi^{AA} g_\phi^{AA}) \triangleright_{\rho_{\square\square}} F_{\square\square}^A \right] (x^A(p) + \vartheta) \, d\vartheta && (\text{پولبک انتقالدهنده تبدیل شده، معادله (۴۱۰)}) \\
&= \left[ K * (t_\phi^{AA} g_\phi^{AA} \triangleright_{\rho_{\square\square}} F_{\square\square}^A) \right] (x^A(p)) && (\text{کانولوشن } * \text{ شناسایی شده روی } \mathbb{R}^d) \\
&= \left[ t_\phi^{AA} g_\phi^{AA} \triangleright_{\rho_{\square\square\square\square}} (K * F_{\square\square}^A) \right] (x^A(p)) && (\text{هموردایی } \mathbb{R}^d \text{ روی } \text{Aff}(G), \text{ معادله (۳۶۹)}) \\
&= \rho_{\square\square\square\square} (g_\phi^{AA}) (K * F_{\square\square}^A) \left( (t_\phi^{AA} g_\phi^{AA})^{-1} x^A(p) \right) && (\text{نمایش القایی } \rho_{\square\square\square\square}, \text{ معادله (۳۶۸)}) \\
&= \rho_{\square\square\square\square} (g_\phi^{AA}) (K * F_{\square\square}^A) (x^A(\phi^{-1}(p))) && (\text{عبارت مختصاتی } \phi, \text{ معادله (۳۹۱)}) \\
&= \rho_{\square\square\square\square} (g_\phi^{AA}) \int_{\mathbb{R}^d} K(\vartheta) F_{\square\square}^A (x^A(\phi^{-1}(p)) + \vartheta) \, d\vartheta && (\text{کانولوشن بسطداده شده } * \text{ روی } \mathbb{R}^d) \\
&= \rho_{\square\square\square\square} (g_\phi^{AA}) \int_{\mathbb{R}^d} K(\vartheta) \left[ \text{Exp}_{\phi^{-1}(p)}^* f_{\square\square} \right]^A(\vartheta) \, d\vartheta && (\text{پولبک انتقالدهنده اقلیدسی، معادله (۴۰۳)}) \\
&= \rho_{\square\square\square\square} (g_\phi^{AA}) \psi_{A_{\square\square\square}, \phi^{-1}(p)}^A [K \star f_{\square\square}] \phi^{-1}(p) && (\text{کانولوشن } GM \text{ در مختصات، معادله (۸۷)}) \\
&= \psi_{A_{\square\square\square}, p}^A \phi_{*, A_{\square\square\square}} [K \star f_{\square\square}] \phi^{-1}(p) && (\text{پوش فوروارد در مختصات، معادله (۳۰۲)}) \\
&= \psi_{A_{\square\square\square}, p}^A [\phi \triangleright [K \star f_{\square\square}]](p) && (\text{عمل } \text{Aff}_{GM} \text{ روی میدان‌های ویژگی، معادله (۴۰۹)}) \\
\end{aligned}$$

□

این گزاره نتیجه می‌شود زیرا  $\psi_{A_{\square\square\square}, p}^A$  یک ایزومورفیسم است.

به طور خلاصه، کانولوشن‌های  $GM$  اقلیدسی با  $G$ -ساختارهای القا شده توسط اطلس  $\text{Aff}(G)$  دو ویژگی زیر را دارند:

استقلال از مختصات :  $\text{Aff}(G)$  تضمین می‌شود که آنها در هر چارت از اطلس  $\mathcal{A}_{\mathbb{E}_d}^{\text{Aff}(G)}$ ، یعنی  $\text{Aff}(G)$ ، نتایج معادل تولید کنند. این ویژگی در معادله (۴۰۸) نشان داده شد و در شکل ۴۲ به عنوان تبدیل بین چارت‌ها به تصویر کشیده شده است.

هموردایی فعال :  $\text{Aff}(G)$  همانطور که در قضیه ۹.۸ اثبات شد، آنها تحت تبدیلات فعل میدان‌های ویژگی توسط  $\text{Aff}_{GM} \cong \text{Aff}(G)$  هموردا هستند. در شکل ۴۲، این متناظر با یک تبدیل سیگنال  $\mathbb{E}_d$  روی  $\mathbb{E}_d$  خواهد بود، که در یک تبدیل فعل روی نمایش آن نسبت به همان چارت متعارض می‌شود.

اثبات هر دو ویژگی در نهایت به هموردایی فعال  $\text{Aff}(G)$  کانولوشن‌های کلاسیک  $G$ -راهبری‌پذیر روی  $\mathbb{R}^d$  در معادله (۳۶۹) متکی است.

## ۴.۹ CNN‌های اقلیدسی در مقالات

تمام مدل‌های موجود در ردیف‌های (۱-۲۶) جدول ۶، کانولوشن‌های  $GM$  همودانیت به  $\text{Aff}(G)$  در فضاهای اقلیدسی  $\mathbb{E}_d$  هستند که در بخش‌های قبل مورد بحث قرار گرفتند. آنها در ابعاد  $d$  فضای اقلیدسی، گروه ساختار  $G$  و در نتیجه گروه تقارن سراسری  $\text{Aff}(G)$ ، نمایش‌های گروهی یا انواع میدان  $\rho$  و انتخاب‌های گسسته‌سازی متفاوت هستند. این بخش به طور خلاصه مدل‌ها را با گروه‌بندی آنها بر اساس انواع میدان‌شان به مدل‌های نمایش تحويل ناپذیر، (۱۰۰۰۰۰) مدل‌های نمایش منظم (متناظر با کانولوشن‌های گروهی) و انواع آنها، مدل‌های نمایش خارج قسمتی و غیره مورد بحث قرار می‌دهد. CNN‌های متعارف، که ابتدا آنها را مورو می‌کنیم، کمی از این طبقه‌بندی خارج می‌شوند زیرا گروه ساختاری بدیهی آنها منجر به میدان‌های ویژگی و کرنل‌هایی بدون هیچ گونه محدودیت تقارنی می‌شود.

ردیف (۱) کانولوشن‌های  $GM$  اقلیدسی را روی  $\{e\}$ -ساختارهای ناورداری انتقالی فهرست می‌کند که در شکل ۴۳ به تصویر کشیده شده است. به دلیل بدیهی بودن گروه ساختار  $\{e\}$ ، هیچ تبدیل پیمانه‌ای (غیربدیهی) وجود ندارد و تنها انتخاب ممکن برای نمایش گروه، نمایش بدیهی است. بنابراین، محدودیت راهبری‌پذیری  $G$ -بدیهی می‌شود، به طوری که فضای کرنل‌های کانولوشن قابل قبول، نامحدود باقی می‌ماند. هنگامی که از طریق یک چارت به  $\mathbb{R}^d$  پولبک شود، کانولوشن  $GM$  طبق قضیه ۹.۷ به یک کانولوشن (همبستگی) متعارف تبدیل می‌شود. قضیه ۹.۸ هموردایی انتقالی آن را تأیید می‌کند. بنابراین، دیده می‌شود که این مدل‌ها با شبکه‌های کانولوشنی متعارف توسط  $\mathbb{R}^d$  مطابقت دارند.

تمام مدل‌های اقلیدسی دیگر در ردیف‌های (۲-۲۶) گروه‌های ساختاری غیربدیهی را در نظر می‌گیرند. می‌توان آنها را به عنوان کانولوشن‌های متعارف روی  $\mathbb{R}^d$  با محدودیت اضافی بر روی کرنل‌ها برای  $G$ -راهبری‌پذیر بودن در نظر گرفت، که هموردایی  $\text{Aff}(G)$  آنها را تضمین می‌کند.

**ویژگی‌های نمایش تحويل ناپذیر (Irrep):** شبکه‌های موجود در ردیف‌های (۴، ۹، ۱۰، ۱۷، ۲۳) و (۲۶) بر روی میدان‌های ویژگی عمل می‌کنند که مطابق با نمایش‌های تحويل ناپذیر (irreps) از  $G = \text{SO}(2)$  برای  $G = \text{SO}(4)$  فهرست شده است، این امر به

شبکه‌های به اصطلاح هارمونیک منجر می‌شود [؟]. این نام از این واقعیت نشأت می‌گیرد که محدودیت کرنل در این حالت فقط به هارمونیک‌های دایره‌ای با مکان‌بابی طیفی فرکانس  $n$  – اجازه می‌دهد، هنگام نگاشت بین میدان‌هایی که مطابق با نمایش‌های تحویل‌ناپذیر مرتبه  $n$  در ورودی و مرتبه  $m$  در خروجی تبدیل می‌شوند.<sup>۴۶</sup> محدودیت بازنایی اضافی برای  $G = G'$  که در ردیف (۱۰) فهرست شده است، قوانین انتخاب پاریته را اضافه می‌کند که فاز هارمونیک‌های دایره‌ای را ثابت می‌کند و نیزی از درجات آزادی را در مقایسه با حالت  $G = SO(2)$  سرکوب می‌کند [؟]. مدل‌های [؟] در ردیف (۱۷) نمایش‌های تحویل‌ناپذیر<sup>(۳)</sup>  $G = SO(m)$  را در نظر می‌گیرند و بنابراین می‌توان آنها را به عنوان مشاهه مدل‌های ردیف (۴) در سه بعد در نظر گرفت. فضای کرنل‌های معتبر برای نگاشت بین میدان‌هایی که مطابق با نمایش‌های تحویل‌ناپذیر (ماتریس‌های  $\mathbb{H}$  ویژگی) از مرتبه‌های  $m$  و  $n$  تبدیل می‌شوند، در اینجا توسط تمام هارمونیک‌های کروی از  $|m-n| \leq j \leq m+n$  (min( $m, n$ ) + 1) تولید می‌شود. همانطور که در [؟] اثبات شده است، این امر به هر گروه ساختاری فشرده تعیین می‌یابد، و فرکانس‌های مجاز هارمونیک‌ها توسعه ضرایب متناظر

کلیش-گوردون که با  $mn$  و  $j$  برجسب گذاری شده‌اند، تعیین می‌شوند. نوعی از این رویکرد در ردیف (۲۳) فهرست شده است [؟]. یک کانون‌لوشن از یک میدان اسکالار ورودی با هارمونیک‌های کروی، میدان‌های نمایش تحویل‌ناپذیر از مرتبه متناظر را تولید می‌کند. با این حال، به جای پردازش پیشتر این ویژگی‌های نمایش تحویل‌ناپذیر از طریق کانون‌لوشن‌ها، نویسنده‌گان نرم آنها را محاسبه می‌کنند. این کار منجر به اسکالار می‌شود که در لایه بعدی به همین روش پردازش می‌شوند. مدل [؟] در ردیف (۲۶) متریک استاندارد اقلیدسی را فرض نمی‌کند بلکه متریک مینکوفسکی را در نظر می‌گیرد. گروه ساختاری آن گروه لوئنس (۱, ۱, ۱)  $G = SO(d-1, 1, 1)$  و گروه تقارن سراسری، گروه پوانکاره است. علاوه بر ساختن شبکه همودرا، نویسنده‌گان الگوریتمی را برای محاسبه نمایش‌های تحویل‌ناپذیر گروه‌های لی از ثوابت ساختاری جبر لی آنها پیشنهاد می‌کنند.

یک مورد خاص از نمایش‌های تحویل‌ناپذیر، نمایش‌های بدیهی هستند که بردارهای ویژگی  $G$ -ناوردا (اسکالارها) را توصیف می‌کنند. به دلیل ناوردادی، چنین ویژگی‌هایی نمی‌توانند تفاوت بین هیچ الگویی را در ژست‌های مرتبط با  $G$  کد گذاری کنند. محدودیت روی کرنل‌هایی که بین میدان‌های اسکالار نگاشت انجام می‌دهند، به (۵)  $K(gv) = K(v)$  در ردیف  $g \in \mathbb{R}^d$  و  $v \in G$  تبدیل می‌شود، که کرنل‌هایی را که (در هر کاتال بطور جداگانه) تحت عمل  $G$  ناوردا هستند، تحمیل می‌کند. این برای بازتاب‌های  $R = G$  در ورودی بالا سمت چپ جدول ۳ به تصویر کشیده شده است. تفسیر شبکه پیکسلی یک تصویر به عنوان یک گراف و اعمال یک کانون‌لوشن گراف استاندارد بر روی آن، متناظر با یک کانون‌لوشن با راهبری پذیری بدیهی با کرنل‌های ۲-ناوردا است زیرا کانون‌لوشن‌های گراف استاندارد کرنل‌های همسانگرد را اعمال می‌کنند [؟].

یک مزیت ویژگی‌های نمایش تحویل‌ناپذیر از دیدگاه عملی، ابعاد پایین و در نتیجه مصرف حافظه کمتر برای هر میدان ویژگی است. با این حال، نتایج تجربی نشان می‌دهد که کانون‌لوشن‌های راهبری پذیر مبتنی بر میدان نمایش تحویل‌ناپذیر معمولاً عملکرد پایین‌تری نسبت به انواع دیگر میدان‌ها، به عنوان مثال آنها بیکار از این گروه‌های غیرمتناهی هستند، کسب می‌کنند. این گزاره در ارزیابی ما از کانون‌لوشن‌های موبیوس در بخش ۲.۴.۵ و بنچمارک کانون‌لوشن‌های اقلیدسی همودرای ایزوومتری در [؟] معکوس شده است.

**ویژگی‌های منظم و کانون‌لوشن‌های گروهی:** احتمالاً بر جسته‌ترین دسته از نمایش‌های گروهی در بادگیری عمیق همودرا، نمایش‌های منظم از گروه‌های ساختاری هستند. نمایش‌های منظم بر روی یک فضای مناسب<sup>۴۷</sup> از توابع  $\mathbb{R} \rightarrow G$  با انتقال آنها عمل می‌کنند، یعنی  $F : G \rightarrow \mathbb{R}$  با  $F(g) = F(\tilde{g})$  برای گروه‌های متناهی، این به معنای میدان‌های ویژگی با تعداد کانال‌های  $|G| = c$  است که توسعه مرتبه گروه داده می‌شود. از آنجا که گروه‌های غیرمتناهی هستند، ویژگی‌های مربوطه در عمل گسته‌سازی می‌شوند، که عمدتاً با در نظر گرفتن یک زیرگروه متناهی از گروه ساختاری انجام می‌شود. از آنجا که میدان‌های ویژگی منظم  $\mathcal{A} \in \Gamma(\mathcal{A})$  یک تابع  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  را به هر نقطه  $p \in M$  اختصاص می‌دهند (هنگامی که نسبت به هر پیمانه  $A$  در  $p$  بیان می‌شوند)، آنها با توابع با مقادیر حقیقی  $\tilde{f} : GM \rightarrow \mathbb{R}$  ساختار  $GM$  معادل هستند.<sup>۴۸</sup> برای حالتی که  $GM$  توسعه یک اطلس ( $G$  الفا می‌شود، این علاوه بر این با توابع با مقادیر حقیقی  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  در انتداد ایزوومرفیسم در معادله (۳۸۴)) معادل است. نگاشت‌های خطی همودرا بین توابع روی گروه  $G$  کانون‌لوشن‌های گروهی هستند (به معادله (۶۰۱) در بخش ت و بخش ۱۱.۷ در [؟] مراجعه کنید)، که به این معنی است که CNN‌های مبتنی بر کانون‌لوشن گروه افاین توسعه چارچوب ما پوشش داده می‌شوند [؟].

کانون‌لوشن‌های گروهی  $\text{Aff}(G)$  در جدول ۶ در ردیف‌های (۲۰) و (۲۵) فهرست شده‌اند. از آنجا که این مدل‌ها معمولاً تصاویر خاکستری یا اسکالار را پردازش می‌کنند، آنها یک کانون‌لوشن اولیه از میدان‌های اسکالار به میدان‌های منظم اعمال می‌کنند، و به دنبال آن کانون‌لوشن‌های گروهی، یعنی کانون‌لوشن‌ها از میدان‌های منظم به منظم را انجام می‌دهند. از آنجا که نمایش‌های منظم، نمایش‌های گروهی جایگشتی هستند، آنها معمولاً غیرخطی‌های نقطه‌ای مانند ReLU را به هر یک از کانال‌های میدان به طور جداگانه اعمال می‌کنند. <sup>۴۹</sup> CNN همودرای بازنایی روی  $\mathbb{E}_2$  از [؟] در ردیف (۳) کرنل‌های  $\mathcal{R}$ -راهبری‌پذیر را اعمال می‌کند، همانطور که در بخش ۵ استخراج شده و در ورودی پایین سمت جدول ۳ به تصویر

<sup>۴۶</sup> هنگام در نظر گرفتن نمایش‌های تحویل‌ناپذیر مخلط از  $(\mathbb{K}, \text{Aff}(G), \text{Aff}(G))$  فقط فرکانس  $m - n$  مجاز است. برای نمایش‌های تحویل‌ناپذیر حقیقی، محدودیت به فرکانس‌های  $|m - n|$  و  $m + n$  می‌دهد. جزئیات بیشتر را در پیوستهای [؟] و [؟] و [؟] یافت.

<sup>۴۷</sup> به عنوان مثال، برای گروه‌های توپولوژیکی، توابع معمولاً باید پیوسته باشند. برای گروه‌های فشرده محلی معمولاً فضای  $L^p(G)$  از توابع انتگرال‌پذیر مربع روی  $G$  در نظر گرفته می‌شود.

<sup>۴۸</sup> نمایش‌های منظم روی یک میدان  $\mathbb{K}$  متفاوت از اعداد حقیقی، مقادیری در این میدان می‌گیرند، یعنی  $F : G \rightarrow \mathbb{K}$ .

<sup>۴۹</sup> قضیه ۱. در پیوست ح این ایزوومرفیسم  $C^\infty(GM) \cong \Gamma(\mathcal{A}_{\text{smooth}})$  را برای حالت علی مرتبه که  $G$  یک گروه متناهی است، اثبات می‌کند.

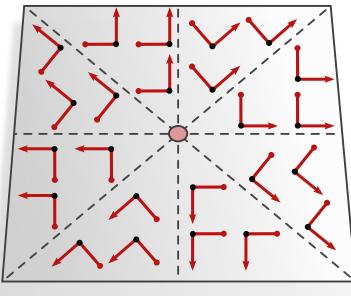
<sup>۱۰۰</sup> از آنجا که عمل نگاشت‌های غیرخطی به پایه انتخاب شده بستگی دارد، این همان چیزی است که واقعاً میدان‌های ویژگی منظم (یا هر میدان غیر تحویل‌ناپذیر دیگر) را از تجزیه آنها به میدان‌های نمایش تحویل‌ناپذیر تمیز می‌کند؛ به پاورقی ۲.۵ مراجعه کنید.

کشیده شده است. از آنجا که  $\mathcal{R}$  بازتاب متناهی با مرتبه  $2 = |\mathcal{R}|$  است، میدان‌های ویژگی منظم دارای دو کanal هستند که هر کدام به یکی از دو جهت‌گیری چارچوب از  $\mathcal{R}$ -ساختار در شکل ۴۳ ج مرتب است. مدل حاصل به صورت سراسری  $\text{Aff}(\mathcal{R}) = \text{Aff}(\mathcal{R}) \times \mathcal{T}_\mathcal{R}$  دارد. برای ساخت کانولوشن‌های گروهی  $\text{SO}(2) = \text{Aff}(\text{SO}(2)) = \text{SE}(2)$ -هموردا، در تئوری باید  $\text{SO}(2)$ -ساختار را در شکل ۴۳ با میدان‌های ویژگی که مطابق با نمایش منظم  $\text{SO}(2)$  تبدیل می‌شوند، در نظر گرفت. در عمل، اکثر مدل‌های ردیف (۵) از جدول ۶ این را از طریق نمایش‌های منظم گروههای دوری  $\text{SO}(2) \leq C_N$  که زیرگروههای متناهی از دوران‌های گستته با مضرب‌هایی از  $N/2\pi$  هستند، تقریب می‌زنند. از آنجا که مرتبه این گروهها  $|C_N| = N$  است، میدان‌های ویژگی متناظر  $N$ -بعدی هستند. در حالی که عملکرد مدل در ابتدا به طور قابل توجهی با  $N$  افزایش می‌یابد، به طور تجربی مشخص شده است که در حدود ۸ تا ۱۲ جهت نمونه‌برداری شده به اشباع رسید [؟ ۳]. برای درک شهودی از فضاهای کرنل‌های  $C_N$ -راهبری پذیر به تصاویر در [؟ ۴] مراجعه می‌کنیم. کانولوشن‌های گروهی (۲)  $= \text{Aff}(\mathcal{E})$ -هموردا در ردیف (۱۱) به طور مشابه از طریق زیرگروههای دووجهی  $2 \leq D_N$  که از  $N$  دوران، هر کدام در دو بازتاب، تشکیل شده‌اند، تقریب زده می‌شوند. میدان‌های ویژگی در این حالت  $2N = |D_N|$ -بعدی هستند. هموردا بی همزمان تحت انتقال و مقیاس‌بندی توسط کانولوشن‌های گروهی  $\text{Aff}(\mathcal{S})$  در ردیف‌های (۲) و (۱۵) به دست می‌آید. گروه مقیاس‌بندی در اینجا معمولاً گسته‌سازی می‌شود. از آنجا که این کار هنوز به یک مرتبه گروه (شمارا) نامتناهی منجر می‌شود، پیاده‌سازی‌ها برش‌هایی را عرفی می‌کنند، یعنی مقیاس‌های حداقل و حداً کمتر همانظور که توسط چارچوب‌ها در شکل ۴۳ نشان داده شده است. توجه داشته باشید که این امر به اثرات مزی مشابه کانولوشن‌های متعارف در لبه یک تصویر منجر می‌شود. مدل‌های ردیف‌های (۱۹) و (۲۱) نسبت به انتقال‌ها، دوران‌ها و بازتاب‌ها در فضاهای اقلیدسی سه‌بعدی هموردا هستند. در حالی که [؟ ۴] یک گسته‌سازی مونت کارلو از نمایش منظم را انتخاب می‌کنند، مدل‌های [؟ ۴] بر اساس زیرگروههای گستته مختلف از  $\text{SO}(3)$  یا  $\mathcal{E}$  هستند. یک محدودیت فعلی مدل‌های هموردا بدورانی و بازتابی مبتنی بر کانولوشن گروهی در سه بعد، نیاز بالای آنها به حافظه و محاسبات است. به عنوان مثال، گروه تقارن مکعب، که هنوز وضوح نسبتاً درشتی از دوران‌ها با  $\pi/2$  دارد، در حال حاضر از  $48$  عضو گروه تشکیل شده است که به معنای میدان‌های ویژگی  $48$  بعدی در فضای سه‌بعدی است. از سوی دیگر، تعداد زیاد تقارن‌ها نشان‌دهنده کارایی داده سیار بهبود یافته چنین مدل‌هایی است: نویسندهان [؟ ۵] عملکرد یکسانی را از یک مدل هموردا در مقایسه با یک شبکه غیرهموردا (قابل راهبری با  $\mathcal{E}$ ) گزارش می‌دهند علی‌رغم اینکه روی یک مجموعه داده  $10$  برابر کوچکتر آموخته دیده‌اند. مدل‌های ردیف‌های (۲۴) و (۲۵) روی  $\mathbb{E}^3$  کانولوپ می‌کنند، با این حال، آنها گروههای ساختاری دوری و دووجهی  $\mathcal{C}_4$  و  $D_4$  را در نظر می‌گیرند، یعنی دوران‌ها و بازتاب‌های صفحه‌ای حول محور  $\mathcal{Z}$  (که به این ترتیب تعريف شده است). بنابراین کرنل‌های راهبری پذیر آنها مشابه کرنل‌های مدل‌های ردیف‌های (۵) و (۱۱) هستند اما علاوه بر این در یک جهت جدید  $\mathcal{Z}$  گسترش می‌یابند.

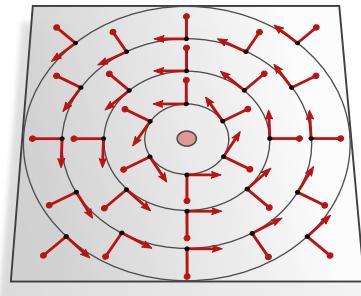
**تجمیع از منظم به اسکالر و بردار:** یک نوع از شبکه‌های کانولوشنی گروهی، مدل‌های ردیف‌های (۷،۸،۱۳،۱۶) و (۲۰) هستند که با  $\text{vector} \rightarrow \text{regular}$  بر چسب‌گذاری شده‌اند. پس از اعمال یک کانولوشن به میدان‌های ویژگی منظم، آنها یک  $\text{regular}$   $\text{max}$  عملیات تجمعی را روی کانال‌ها انجام می‌دهند که منجر به میدان‌های اسکالار (بدیهی) می‌شود [؟ ۶]. یا یک تجمعی  $\text{max}$  بر همراه یک  $\text{argmax}$ ، که از آن می‌توان میدان‌های برداری را محاسبه کرد [؟ ۷]. کانولوشن‌های بعدی از میدان‌های اسکالار یا برداری حاصل به میدان‌های ویژگی منظم نگاشت می‌یابند. از آنجا که عملیات تجمعی تعداد کانال‌ها را به طور قابل توجهی از  $|G|$  به ترتیب به  $1$  یا  $d$  کاهش می‌دهد، مدل‌ها از نظر حافظه و محاسبات کارآمدتر از کانولوشن‌های گروهی متعارف می‌شوند. نقطه ضعف این است که تجمعی با از دست دادن اطلاعات همراه است، که به طور تجربی مشخص شده است که عملکرد مدل را کاهش می‌دهد [؟ ۸].

**ویژگی‌های خارج قسمتی:** ردیف‌های (۶،۱۲) و (۲۲) مدل‌های را فهرست می‌کنند که میدان‌های ویژگی آنها مطابق با نمایش‌های خارج قسمتی از گروه ساختاری تبدیل می‌شوند، که نمایش‌های جایگشتی مشابه نمایش‌های منظم هستند. با توجه به یک زیرگروه  $\widehat{G}$ ، نمایش خارج قسمتی متناظر بر روی توابع اسکالار  $G: \mathbb{R} \rightarrow G/\widehat{G}$  در فضای خارج قسمتی  $\widehat{G}$  از طریق انتقال عمل می‌کند، یعنی  $(g\widehat{G}) = F(\tilde{g}^{-1}g\widehat{G})[\rho_{\mathbb{R}}^{G/\widehat{G}}(\tilde{g})F]$ . بنابراین بعد از  $G$  در  $\widehat{G}$  داده می‌شود که برای گروههای متناهی برابر با  $|G|/|\widehat{G}|$  است. میدان‌های ویژگی که تحت نمایش‌های خارج قسمتی تبدیل می‌شوند را می‌توان به عنوان میدان‌های ویژگی منظم با تقارن محدود در نظر گرفت که مجبور نداند مقدار یکسانی را روی تمام اعضای گروه در یک هم‌دسته  $g\widehat{G}$  از  $\widehat{G}$  در  $G$  بگیرند. یک مثال خاص، نمایش‌های ردیف (۲۲) هستند که با خارج قسمت  $S^3 \cong \mathbb{R}^3/2$  مرتبط هستند. به جای اجازه دادن به کرنل‌های کانولوشن دلخواه، محدودیت کرنل در اینجا به کرنل‌هایی منجر می‌شود که تحت دوران حول محور  $\mathcal{Z}$  ناوردا هستند؛ به تصاویر در [؟ ۹] مراجعه کنید. جزئیات بیشتر و یک شهود گرافیکی در مورد میدان‌های ویژگی مبتنی بر نمایش خارج قسمتی را می‌توان در پیوست □ از [؟ ۱۰] یافت. نظریه پیشنهادی در [؟ ۱۱] میدان‌های خارج قسمتی را از دیدگاه جایگرین کانولوشن‌های گروهی روی فضاهای خارج قسمتی راست پوشش می‌دهد.

**نمایش‌های القایی:** یک تعمیم از نمایش‌های منظم و خارج قسمتی، نمایش‌های القایی مانند نمایش‌های تحویل‌ناپذیر القایی (۲) در ردیف (۱۴) از جدول ۶ هستند. با توجه به هر نمایش تحویل‌ناپذیر (۲)  $\text{SO}(n) \rightarrow \text{GL}(n)$  به صورت  $\text{SO}(2) \rightarrow \text{GL}(2)$ ، نمایش القایی ( $c$ )  $: \text{Ind}_{\text{SO}(2)} \rho : 2 \rightarrow \text{GL}(c)$  است. از  $2$  با  $n = 2n = n \cdot 1 : \text{SO}(2)$  به روش زیر عمل می‌کند: بازتاب‌ها دو زیرفضای  $n$ -بعدی و معادل از  $\mathbb{R}^{2n}$  را که متناظر با دو هم‌دسته در (۲) /  $\text{SO}(2)$  هستند، جایگشت می‌کنند در حالی که دوران‌ها بر روی زیرفضاهای جداگانه از طریق  $\rho$  عمل می‌کنند. برای  $\rho$  که نمایش بدیهی از  $\text{SO}(2)$  است، این کار نمایش‌های خارج قسمتی را همانطور که در بالا بحث شد، بازیابی می‌کند. در مقایسه با میدان‌های ویژگی نمایش تحویل‌ناپذیر القایی (۲) عملکرد به طور قابل توجهی بهبود یافته‌ای را نشان می‌دهند. توصیف دقیق‌تر و ارزیابی تجربی این انواع میدان را می‌توان در [؟ ۱۲] یافت.



(ب)  $\{e\}$ -ساختار ناوردای  $C_8$  که به طور ضمنی توسط  $\mathbb{E}_2$  فرض شده است.



(ت)  $\{e\}$ -ساختار ناوردای  $(2)$   $SO(2)$  که به طور ضمنی توسط  $\mathbb{E}_2$  فرض شده است.

شکل ۴۴: دو مثال از  $\{e\}$ -ساختارها در صفحه سوراخ دار  $\mathbb{E}_2$  که ۱) تحت دوران حول مبدأ  $\{0\}$  ناوردای هستند و ۲) مشکل از چارچوب‌های راست‌هنگار نسبت به متريک اقليدسي استاندارد هستند. کانولوشن‌های  $GM$  متناظر، هموردای دوراني هستند اما هموردای انتقالی نیستند (در واقع،  $\{0\}$   $\mathbb{E}_2$  حتى انتقال‌ها را نمی‌پذيرد).

آخرین نوع نمایش فهرست شده در جدول ۶، نمایش کواترنیونی از دوران‌های سه‌بعدی در ردیف (۱۸) است [؟]. این از نمایش معمول دوران‌ها از طریق کواترنیون‌ها استفاده می‌کند، که بر شناسایی کواترنیون‌های واحد با  $(2)$   $SU(2)$  وجود یک همومورفیسم گروهی پوشان  $(2)$   $SO(3)$  به  $SU(2)$  تکیه دارد. توجه داشته باشید که نمایش کواترنیونی در واقع یک نمایش تصویری از  $(3)$   $SO(3)$  است.

در حالی که نظریه ما بر روی فضاهای اقلیدسی پیوسته فرمول‌بندی شده است، پیاده‌سازی‌ها میدان‌های ویژگی را بر روی زیرمجموعه‌های گسته نمونه‌برداری می‌کنند. رایج‌ترین گسته‌سازی  $\mathbb{E}_d$  بر حسب شبکه‌پیکسلی  $\mathbb{Z}^d$  است. یک جایگزین، شبکه‌های صفحه‌ای شش‌ضلعی روی  $\mathbb{E}_2$  است که توسط  $\mathbb{E}_2$  بررسی شده است. اگر چنین شبکه‌های پیکسلی منظمی انتخاب شوند، یک پایه از کرنل‌های  $G$ -راهنگی پذیر را می‌توان از پیش محاسبه کرد و بر روی این شبکه نمونه‌برداری کرد. داده‌هایی مانند رویدادها در فضایمان [؟] یا مولکول‌ها در  $\mathbb{R}^3$  [؟] در عوض معمولاً با ابرهای نقطه نامنظم نمایش داده می‌شوند. در این حالت، کرنل‌ها باید به صورت تحلیلی داده شوند، که امکان نمونه‌برداری آنلاین آنها را در طول پاس مستقیم فراهم می‌کند.

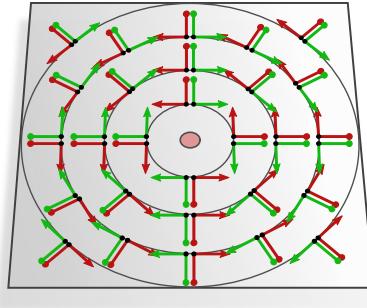
در نهایت، می‌خواهیم اشاره کنیم که مدل‌های سراسری  $Aff(G)$ -هموردای وجود دارند که به صورت محلی  $G$ -هموردا نیستند. یک مثال، تجمع ناوردای-تبديل (CNN- $\mathbb{E}_d$ ) [؟] است، که مجموعه‌ای از میدان‌های ویژگی تبدیل شده سراسری را به یک CNN متعارف می‌دهد و در نهایا ویژگی‌های حاصل را روی این تبدیلات تجمعی می‌کند، که منجر به یک توصیفگر ناوردای می‌شود.

## ۱۰ CNN‌های هموردای دورانی در فضاهای اقلیدسی سوراخ دار

مدل‌های موجود در ردیف‌های (۳۰-۲۷) جدول ۶ یک جایگزین جالب برای کانولوشن‌های هموردای دورانی در فضاهای اقلیدسی سوراخ دار  $\mathbb{E}_d$  ارائه می‌دهند. آنها بر  $G$ -ساختارهایی تکیه دارند که تحت دوران حول مبدأ  $\{0\}$  ناوردای هستند، همانطور که به عنوان مثال در شکل ۴۴ به تصویر کشیده شده است. با مشخص کردن یک مبدأ مرجع، این مدل‌ها ویژگی هموردایی انتقالی را از دست می‌دهند. با این حال، اگر  $G$ -ساختار علاوه بر این تحت مقیاس‌بندی نیز ناوردای باشد، که به عنوان مثال زمانی که توسط مخصوصات فراکروی یا یک مؤلفه شعاعی لگاریتمی القای شود، صادق است (همانطور که در شکل ۴۶ نشان داده شده)، مدل‌ها نسبت به حاصلضرب مستقیم  $\mathcal{S} \times SO(d)$  از گروه دوران و مقیاس‌بندی هموردا می‌شوند. به طور مشابه،  $G$ -ساختارهای ناوردای دورانی و بازنایی، که در شکل ۴۵ به تصویر کشیده شده‌اند، بر هموردای  $d$  کانولوشن‌های  $GM$  متناظر دلالت دارند.

این مدل‌ها به دو صورت به CNN‌های کروی، که در بخش ۱۱ در ادامه مورد بحث قرار می‌گیرند، مرتبط هستند. اولاً، آنها  $G$ -ساختارهای ناوردای دورانی را روی  $\mathbb{E}_d$  فرض می‌کنند، که می‌توان آنها را مشکل از چندین  $G$ -ساختار ناوردای دورانی روی پوسته‌های کروی  $(d-1)$ -بعدی در شعاع‌های مختلف در نظر گرفت. بنابراین می‌توان این مدل‌ها را به عنوان CNN‌های (فرآ)کروی با یک بعد شعاعی اضافی  $\mathbb{R}^+$  در نظر گرفت [؟]، که در شکل ۴۷ برای حالت  $d=3$  = در  $d=4$  برای حالت  $d=4$  در نظر گرفت [؟]. ثانیاً، سیستم‌های مختصات قطبی [؟] [؟] (شکل‌های ۴۴ و ۴۶  $G$ -ساختارهایی را که همان نوع تکینگی را در مبدأ خود نشان می‌دهند که CNN‌های کروی سوراخ دار در شکل ۴۵ در قطب‌ها دارند. توجه داشته باشید که صفحه اقلیدسی سوراخ دار  $\mathbb{E}_2$  و کره سوراخ دار  $S^1 \times \mathbb{R}^+$  با قطب‌های شمال و جنوب  $\{n, s\}$  حذف شده هر دو از نظر توبولوژیکی معادل یک استوانه  $S^1 \times \mathbb{R}^+ \cong S^1 \times \mathbb{R}^+$  هستند و  $\{e\}$ -ساختارهای استوانه‌ای که در شکل‌های ۴۴ و ۴۶ (چپ) و ۴۵ به تصویر کشیده شده‌اند، دیفیوژن‌هایی هستند.

<sup>۱۱</sup> این مشکل را می‌توان با ترکیب شبکه با یک شبکه پیش‌بینی کننده مبدأ ناوردای انتقالی حل کرد [؟]. توجه داشته باشید که هموردایی دورانی مدل ترکیبی تنها در صورتی حفظ می‌شود که این پیش‌بینی کننده مبدأ  $(d)$ -هموردا باشد.



شکل ۴۵: یک  $\mathcal{R}$ -ساختار ۲-ناوردا روی  $\mathbb{E}_d$  که با افزودن نسخه‌های بازتابیده به هر چارچوب از  $\{e\}$ -ساختار در شکل ۴۴ ساخته شده است. کانولوشن  $GM$  متناظر به طور همزمان نسبت به دوران‌ها و بازتاب‌های سراسری در  $Isom_{RM} = 2$  حول مبدأ همودا است.

یک تفاوت عمده در مقایسه با شبکه‌های  $(d)$ -هموردا از بخش قل این است که مدل‌های بخش فعلی فقط به صورت سراسری حول مبدأ  $-SO(d)$  هموردا هستند به جای اینکه به صورت محلی  $-SO(d)$ -هموردا  $(d)$ -هموردا  $(d)$ -راهبری پذیر باشند. در حالی که مدل‌های هموردای سراسری به کرنل‌های  $(d)$ -راهبری پذیر نیاز ندارند، آنها همچنان حداقل به کرنل‌های  $(d-1)$ -راهبری پذیر نیاز دارند. این به این دلیل است که  $SO(d)$  یک کلاف  $(d-1)$  است که  $G \cong SO(d)/SO(d-1) \cong SO(d)/SO(d-1)$  است که  $G$ -ساختارهای کروی  $(1)$  باشد. برای  $d=2$  این امر به  $\{e\}$ -ساختارها و کرنل‌های غیرراهبری پذیر اجازه می‌دهد زیرا  $SO(1) = \{e\} = SO(d-1) = SO(d)$  به شکل ۴۴ یا ۴۶ مراججه کنید. برای  $d=3$  این امر حداقل به یک  $(1-d)$ -ساختار روی پوسته‌های کروی جداگانه نیاز دارد، که در شکل ۴۵ تصویر کشیده شده است.

پس از این ملاحظات کلی، در ادامه به طور خلاصه مدل‌های جدأگانه روی  $\mathbb{E}_d$  را که در مقالات یافته می‌شوند، از دیدگاه CNN‌های مستقل از مختصات مرور خواهیم کرد. ما با مدل‌های ردیف (۲۷) جدول ۶ شروع می‌کنیم، که نسبت به دوران‌های  $SO(2)$  حول یک مبدأ انتخاب شده از هموردا هستند و با مدل‌های ردیف (۲۸) ادامه می‌دهیم، که علاوه بر آن هموردای مقیاس هستند. شبکه فهرست شده در ردیف (۲۹)، که در آخر آن را مورد بحث قرار می‌دهیم، به صورت سراسری حول مبدأ  $\mathbb{E}_3$  همودای ۳ است.

## هموردایی دورانی سراسری روی $\mathbb{E}_d$

ما با مدل‌های مفهومی ساده‌تر شروع می‌کنیم، که شبکه‌های هموردای دورانی سراسری هستند و تنها بر  $\{e\}$ -ساختارهای ناوردا دورانی روی  $\mathbb{E}_d$  تکیه دارند [؟]. این مدل‌ها متريک اقليدسی استاندارد را روی  $\mathbb{E}_d$  فرض می‌کنند، که نسبت به آن چارچوب‌ها راست‌هنگار هستند. در مجموع، این دو الزام به  $\{e\}$ -ساختارهایی منجر می‌شوند که در شکل ۴۴ نشان داده شده‌اند.

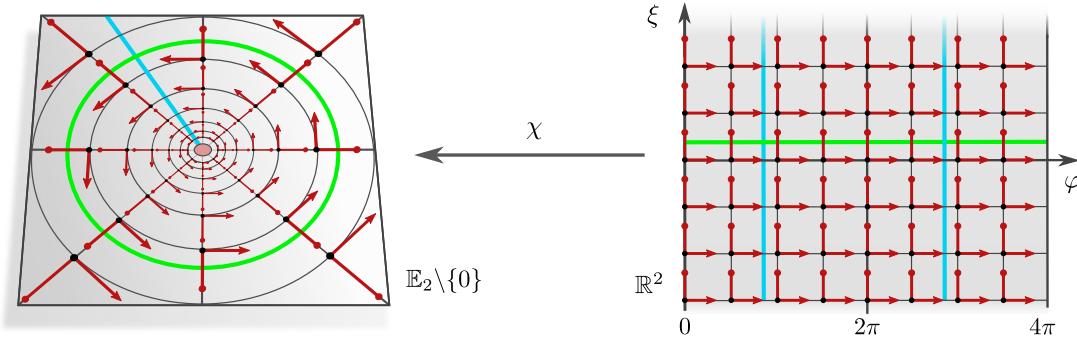
علاوه بر  $G$ -ساختارهای در نظر گرفته شده، شبکه‌ها به پیاده‌سازی خاص پول‌بک انتقال‌دهنده‌ها و انتقال‌دهنده‌های موازی بستگی دارند. ژئودزیک‌ها در هر دو مدل، ژئودزیک‌های استاندارد در فضاهای اقلیدسی (یعنی خطوط مستقیم) فرض می‌شوند، که متناظر با اتصال لوی-چیویتا از متريک اقليدسی است. از آنجا که  $\mathbb{E}_d$  از نظر ژئودزیکی کامل نیست، برای نگاشتهای نمایی که در مبدأ به پایان می‌رسند، باید از پدینگ-صفراستفاده شود. توجه داشته باشید که این امر تأثیری ندارد زیرا ژئودزیک‌های از دست رفته دارای اندازه صفر هستند. از سوی دیگر، انتقال موازی بردارهای ویزگی، با اتصال لوی-چیویتا مطابقت ندارد زیرا اتصال لوی-چیویتا با  $\{e\}$ -ساختارها سازگار نیست. در عوض، مدل‌ها اتصالات بدیهی یکتای  $\{e\}$ -سازگار را فرض می‌کنند که توسط  $\{e\}$ -ساختارهای مربوطه القا می‌شوند.<sup>۱۲</sup> مطابق با اتصالات بدیهی، ضرایب عددی بردارهای ویزگی هنگام انتقال، تبدیل نمی‌شوند، علی‌رغم اینکه چارچوب‌ها نسبت به مفهوم معمول توازی در فضاهای اقلیدسی چرخانده می‌شوند. در عمل، این فقط به این معنی است که انتقال‌دهنده‌های  $id_{\mathbb{E}_d} = id_{(g_{\gamma}^A)^{\rho}}$  را می‌توان در پیاده‌سازی نادیده گرفت  $\square$  که دلیلی است که آنها در مقالات اصلی مورد بحث قرار نگرفته‌اند [؟].

از آنجا که دوران‌ها  $\{e\}$ -ساختارهای در نظر گرفته شده را ناوردا باقی می‌گذارند و در عین حال ایزومنتری هستند، ما داریم  $Isom_{\{e\}M} = SO(2)$  برای مدل  $\mathbb{E}_d$  [شکل ۴۴] و  $C_8 = Isom_{\{e\}M}$  برای مدل  $\mathbb{E}_2$  [شکل ۴۴]. قضیه ۸.۹ سپس تأیید می‌کند که کانولوشن‌های  $GM$  متناظر،  $Isom_{\{e\}M}$ -هموردا هستند، که با گزاره‌های بیان شده توسط نویسنده‌گان مطابقت دارد.

قبل از ادامه می‌خواهیم اشاره کنیم که  $\{e\}$ -ساختار  $C_N$ -ناوردا در شکل ۴۴ ب پوسته نیست و بنابراین استنتاج پوسته (یا هموار) را تضمین نمی‌کند. یک مزیت این  $\{e\}$ -ساختار از دیدگاه مهندسی این است که به صورت محلی  $\{e\}$ -ساختار کانونی  $\mathbb{E}_d$  ایزومنتری است، که اجازه می‌دهد روال‌های کانولوشن اقلیدسی متعارف روی هر هشتگ را اجرا شوند. نویسنده‌گان تعیین به  $\{e\}$ -ساختارهای  $C_N$ -ناوردا را مورد بحث قرار می‌دهند، که در حد معادل  $N \rightarrow \infty$   $\{e\}$ -ساختار  $\mathbb{E}_d$ -ناوردا در شکل ۴۴ می‌شوند.

علاوه بر این، با استفاده از کرنل‌های راهبری پذیر بازتابی به جای کرنل‌های نامحدود، می‌توان مدل‌ها را به صورت سراسری ۲-هموردا ساخت. از دیدگاه نظری، این متناظر با  $\mathcal{R}$ -ساختار  $RM$ -ناوردا  $Isom_{RM} = 2$  روی  $\mathbb{E}_d$  است که در شکل ۴۵ نشان داده شده است. توجه داشته باشید که

<sup>۱۲</sup> این می‌شنبند از انتقال  $\{e\}$ -سازگار متناظر با شکل ۴۴ را می‌توان در ویکی‌پدیا یافت.



شکل ۴.۶: مختصات لگاریتمی-قطبی  $(\varphi, \xi) \mapsto (\xi \cos(\varphi), \xi \sin(\varphi))$  زوایای  $\varphi \in \mathbb{R}^*$  و لگاریتم-شعاع‌های  $\xi \in \mathbb{R}$  را به نقاط  $p$  در  $\mathbb{R}^* \setminus \{0\}$  نگاشت می‌دهد. پس از انتخاب مختصات دکارتی برای  $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ ، این کار یک مختصاتی سازی از  $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$  توسط  $\mathbb{R}^*$  به دست می‌دهد. مختصات لگاریتمی-قطبی یک  $e_2$ -ساختار را روی  $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$  القا می‌کند که شامل چارچوب‌های مرتعج  $\left[ \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \xi} \right]$  است که با شبکه مختصاتی تراز شده‌اند. آنها علاوه بر این یک متريک ريماني را القا می‌کنند که با متريک اقليدسي معقول متفاوت است و چارچوب‌های القا شده نسبت به آن راست هنجار هستند. کانولوشن‌های  $GM$  روی اين  $e_2$ -ساختار متناظر با کانولوشن‌های اقلیدسی متعارف در مختصات  $\mathbb{R}^*$  هستند. انتقال‌های  $\in T_{\mathbb{R}}(\Delta\varphi, \Delta\xi)$  در  $\mathbb{R}^*$  از طريق  $\chi$  متناظر با دوران‌ها و تغيير مقیاس‌های  $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$  هستند، که در آن زوایای دوران و فاكتورهای تعیير مقیاس به ترتیب با  $\varphi$  و  $e^{\Delta\xi}$  داده می‌شوند. بنابراین، هموردايی انتقالی کانولوشن در مختصات  $\mathbb{R}^*$  بر هموردايی  $\times S$   $\text{SO}(2) \times S$  کانولوشن  $GM$  روی  $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$  دلالت دارد. این نتيجه با هموردايی ايزومتری کانولوشن  $GM$  مطابقت دارد زیرا تبدیلات در  $S = \text{SO}(2) \times S$  Isom $_{GM} = \text{SO}(2) \times S$  بود. جين کانولوشن‌های  $GM$  را بر حسب کانولوشن‌های  $\mathbb{R}^*$  پياده‌سازی می‌کنند.

یک کلاف  $\mathcal{R}$  روی  $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$  است، که تحديد آن به دایره‌هایی با شعاع ثابت، به عنوان یک کلاف اصلی، با ۲ که به عنوان یک کلاف  $\mathcal{R}$  روی فضای خارج قسمتی  $S^1 / \mathcal{R} \cong S^1$  تفسير می‌شود، ايزومورف است.

### هموردايی سراسری دورانی و مقیاسی روی $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ از طريق مختصات لگاریتمی-قطبی

با ناوردا کردن  $G$ -ساختارهای ناورداي دورانی از بخش قبل نسبت به مقیاس، کانولوشن‌های  $GM$  متناظر نسبت به گروه حاصلضرب مستقیم  $\mathcal{S} \times \text{SO}(2)$  همورداي شوند. چنین  $G$ -ساختارهایی توسط مختصات لگاریتمی-قطبی القا می‌شوند، که در شکل ۴.۶ نشان داده شده است و امکان یک پياده‌سازی راحت از کانولوشن  $GM$  را بر حسب کانولوشن‌های اقلیدسی متعارف روی نمايش مختصاتی  $\mathbb{R}^*$  فراهم می‌کند. هموردايی انتقالی کانولوشن‌ها روی  $\mathbb{R}^*$  سپس متناظر با هموردايی  $\times S$   $\text{SO}(2) \times S$  روی  $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$  است. برای وضوح، ما با توصيف مدل بر حسب مختصات لگاریتمی-قطبی همانطور که توسط [۱۰] پيشنهاد شده، شروع می‌کنیم. ۱۰۳ متعاقباً، ما بررسی می‌کنیم که چگونه اين مدل و ویژگی‌های آن در چارچوب ما توضیح داده می‌شوند.

مختصات لگاریتمی-قطبی فضای بداری اقلیدسی سوراخ دار  $\mathbb{R}^* \setminus \{0\}$  بر حسب پوشای هموار زیر تعریف می‌شود:

$$\chi : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* \setminus \{0\}, \quad (\varphi, \xi) \mapsto (e^\xi \cos(\varphi), e^\xi \sin(\varphi)), \quad (4.14)$$

که نقاط  $(\varphi, \xi) = \chi(p)$  را در  $\mathbb{R}^* \setminus \{0\}$  به یک زاویه قطبی داده شده  $\varphi \in \mathbb{R}$  و لگاریتم-شعاع  $\xi \in \mathbb{R}$  نگاشت. نگاشت در مختصات زاویه‌ای  $2\pi$ -متناوب است (به تکرار نوار آبی در سمت راست شکل ۴.۶ توجه کنید) و بنابراین به طور خاص یک به یک نیست. یک تحديد به  $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$  دوسویه و پيوسته خواهد بود، اما همسان ریخت نخواهد بود [۱۰] اين امر ما را ملزم می‌کند که در ادامه حداقل دو چارت را برای پوشش صفحه سوراخ دار در نظر بگیریم. مختصات دکارتی  $\mathbb{R}^* \setminus \{0\}$  را با  $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$   $\mathbb{R}^*$  یکی می‌گيرد و بنابراین اجازه می‌دهد که مختصات لگاریتمی-قطبی به دومی اختصاص داده شود. از آنجا که سیستم‌های مختصات دکارتی مختلف (راست گرد) که در مبدأ  $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$  متumerک شده‌اند فقط در دوران‌ها متفاوت هستند، تخصیص مختصات لگاریتمی-قطبی با یک جابجايی در مؤلفه زاویه‌ای مهم است.

با توجه به یک نقشه ویژگی  $f : \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}^c$  (یک میدان ویژگی مرتبط با  $e_2 M$ ، همانطور که در ادامه روشن می‌شود)، [۱۰] پول بک آن از طريق  $f \circ \chi : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^c$  را از طريق مختصات لگاریتمی-قطبی در نظر می‌گيرند، که توسط جابجايی نومدار زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbb{R}^* \xrightarrow{\chi} \mathbb{R}^* \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^c \quad (4.15)$$

یک کانولوشن گروهي همورداي دورانی و مقیاسی از میدان ویژگی  $f$  روی  $\mathbb{R}^* \setminus \{0\}$  سپس به صورت زیر تعریف می‌شود: ۱) پول بک آن از طريق  $\chi$  به مختصات  $\mathbb{R}^*$  ۲) اعمال یک کانولوشن اقلیدسی متعارف در آنجا و ۳) نگاشت نتيجه به  $\mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ . اين روش خوش تعریف است زيرا  $\chi$  هموار

<sup>۱۰۳</sup> اينde پياده‌سازی همبستگی‌های ناورداي دورانی از طريق تبدیلات لگاریتمی-قطبی پيش از اين در دهه ۸۰ ميلادي ظاهر شده بود [۱۰].

است، به طوری که نقشه‌های ویژگی (میدان‌های ویژگی) هموار  $\tilde{f}$  منجر به پولبک‌های هموار و متناوب  $\tilde{f}$  می‌شوند. از آنجا که کانولوشن‌ها مستقل از موقعیت هستند، نقشه ویژگی خروجی آنها همچنان متناوب و هموار خواهد بود و بنابراین به طور یکتا به یک نقشه ویژگی هموار روی  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  است.<sup>۱۰۴</sup>

هموردایی دورانی و مقیاسی کانولوشن گروهی ضمنی روی  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  از هموردایی انتقالی تابع مخصوصاتی  $\chi$  نتیجه می‌شود.<sup>۱۰۵</sup> فرض کنید  $(\varphi, \xi)$  هر مخصوصاتی در  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  باشد و  $(\Delta\varphi, \Delta\xi)$  هر انتقالی در  $T_2$  باشد. نقطه  $(\varphi + \Delta\varphi, \xi + \Delta\xi)$  است، سپس به نقطه متناظر با مخصوصات منتقل شده  $(\varphi, \xi)$  از طریق یک مقیاس‌بندی با ضریب  $e^{\Delta\varphi}$  و دوران با زاویه  $\varphi$  مرتبط می‌شود:

$$\begin{aligned} \chi(\varphi + \Delta\varphi, \xi + \Delta\xi) &= e^{\xi + \Delta\xi} \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \Delta\varphi) \\ \sin(\varphi + \Delta\varphi) \end{pmatrix} \\ &= e^{\Delta\xi} \begin{pmatrix} \cos(\Delta\varphi) & -\sin(\Delta\varphi) \\ \sin(\Delta\varphi) & \cos(\Delta\varphi) \end{pmatrix} e^\xi \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= e^{\Delta\xi} \begin{pmatrix} \cos(\Delta\varphi) & -\sin(\Delta\varphi) \\ \sin(\Delta\varphi) & \cos(\Delta\varphi) \end{pmatrix} \chi(\varphi, \xi) \\ &=: (\Delta\varphi, \Delta\xi) \triangleright \chi(\varphi, \xi) \end{aligned} \quad (416)$$

بر حسب یک نمودار، این بدان معناست که

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{(\Delta\varphi, \Delta\xi) +} & \mathbb{R}^n \\ \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\ \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \xrightarrow{(\Delta\varphi, \Delta\xi) \triangleright} & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \end{array} \quad (417)$$

برای انتقالات دلخواه، جایجایی است. این به همراه هموردایی انتقالی کانولوشن‌های متعارف روی  $\mathbb{R}^n$  دلالت بر این دارد که نقشه‌های ویژگی ورودی دوران یافته و مقیاس شده روی  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  منجر به نقشه‌های ویژگی خروجی دوران یافته و مقیاس شده روی  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  خواهد شد، یعنی هموردایی  $\mathcal{S} \times SO(2)$  کانولوشن روی  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  جزئیات بیشتر در مورد این دیدگاه در [۴] و [۵] یافت می‌شود.

اگون این عملیات کانولوشن و ویژگی‌های آن را از دیدگاه کانولوشن‌های  $GM$  مستقل از مخصوصات بازیبینی می‌کنیم. برای این کار، یک اطلس از چارت‌ها را در نظر می‌گیریم که با مخصوصات لگاریتمی–قطبی سازگار هستند و  $\{e\}$ -ساختار، پیمانه‌ها، متريک ريماني، زئودزيك‌ها و انتقال موازي القا شده توسط آن را مورد بحث قرار می‌دهيم. هموردایی ادعاه شده  $\mathcal{S} \times SO(2)$  بلافاصله از هموردایی  $Isom_{(e)M}$  کانولوشن‌های  $GM$  نتیجه می‌شود. برای راحتی نمادگذاری، ما دوباره  $\mathbb{E}_2 \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  را از طریق یک انتخاب از مخصوصات دکارتی با  $\{0\}$  یکی می‌گیریم.

از آنجا که تحدید  $\{0, 2\pi\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  :  $\chi$  از مخصوصات لگاریتمی–قطبی  $\chi$  به زوایای غیرزاولد، دوسویه و پیوسته است، ممکن است وسوسه شویم که وارون آن را به عنوان یک چارت مخصوصاتی در نظر بگیریم. این کار، با این حال، ممکن نیست، زیرا  $\chi$  یک همسان‌ریختنی نیست، همانطور که برای چارت‌ها لازم است. در عوض، ما یک اطلس مشکل از دو چارت را در نظر می‌گیریم که بر حسب تحدیدهایی از  $\chi$  تعریف شده‌اند و  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  را پوشش می‌دهند. یک انتخاب خاص، تعریف همدامنه‌های چارت به عنوان مجموعه‌های باز  $\times \mathbb{R} \times V^A = (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{R} \times V^B = (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \times V^B$  برای یک  $\pi < \epsilon < 2\pi$  است و برای  $X = A, B$  تعریف چارت‌ها روی  $U^X = \chi(V^X)$  به صورت  $x^X := (\chi|_{V^X})^{-1}$  است. به طور شهودی، این اطلس همان کاری را انجام می‌دهد که تلاش ساده‌لوحانه برای تعریف چارت‌ها به عنوان وارون  $\chi$  انجام می‌داد. تفاوت مهم، با این حال، این است که چارت‌ها دیفومورفیک هستند، که برای اطمینان از همواری تمام عملیات ضروری است.

طبق معمول، این چارت‌ها میدان‌های چارچوب محلی و تریوپالیزاویون‌های کلاف را به ترتیب روی  $U^A$  و  $U^B$  القایی کنند. به راحتی می‌توان دید که نگاشت‌های گذار  $g_p^{BA} = \frac{\partial x^B}{\partial x^A}|_{x^A(p)}$  روی  $U^A \cap U^B$  بدیهی هستند، که این نتیجه می‌دهد که اجتماع میدان‌های چارچوب یک  $\{e\}$ -ساختار هموار  $M$  را روی  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  تعریف می‌کند. این پایه‌های مخصوصاتی، که در مقالات اغلب با  $\left[ \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \xi} \right]$  نشان داده می‌شوند، در شکل ۴۶ (چپ) نشان داده شده‌اند. محاسبه ما در معادله (۴۱۶) در بالا دلالت بر این دارد که  $\{e\}$ -ساختار القا شده  $\mathcal{S} \times SO(2)$  ناوردا است.

برای دیدن این موضوع، توجه داشته باشید که  $\chi$  یک نگاشت خارج قسمتی است (زیرا بخش زاویه‌ای آن یک نگاشت خارج قسمتی  $\mathbb{R} \rightarrow S^1 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  است). برای نقشه‌های ویژگی پیوسته (به جای هموار) این گزاره از ویژگی جهانی فضاهای خارج قسمتی نتیجه می‌شود؛ به عنوان مثال به ویکی پدیا مراجعه کنید. از آنجا که همواری یک تابع به عنوان مشتق پذیری پیوسته آن تعریف می‌شود، ویژگی جهانی را می‌توان به صورت بازگشتی اعمال کرد تا نشان دهد که این گزاره برای نقشه‌های ویژگی هموار نیز برقرار است.<sup>۱۰۴</sup>

اینکه این امکان‌پذیر است به این واقعیت بستگی دارد که یک همومورفیسم گروهی  $(R_{\Delta\varphi}, e^{\Delta\xi}) \mapsto SO(2) \times \mathcal{S}$  وجود دارد که توسط ایزومورفیسم گروهی  $\mathcal{S} \rightarrow T_1$  روی عامل دوم و همومورفیسم گروهی (نگاشت خارج قسمتی)  $T_1 \rightarrow SO(2) \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  است. اول تعریف می‌شود، که در آن  $R_{\Delta\varphi}$  ماتریس دوران با زاویه  $\varphi$  را نشان می‌دهد.<sup>۱۰۵</sup>

چارت‌ها علاوه بر این یک متریک ریمانی را القا می‌کنند که با متریک اقلیدسی معمول روی  $\mathbb{R}^n$  متفاوت است. این متریک به عنوان پولبک متریک اقلیدسی  $\mathbb{R}^n$  در هم‌دانه‌های چارت‌ها تعریف می‌شود و بنابراین به صورت نقطه‌ای با

$$\eta_p(v, w) := \langle \hat{dx}_p^X(v), \hat{dx}_p^X(w) \rangle_{\mathbb{R}}, \quad (418)$$

داده می‌شود، که در آن  $v, w \in T_p M$  و  $X \in U^X$  نشان می‌دهد، مشخص می‌کند.  $\{e\}$ -ساختار القا شده توسط چارت، بنا به ساختار، از چارچوب‌هایی تشکیل شده است که نسبت به این متریک القا شده توسط چارت، راست‌هنجار هستند، حتی اگر این چارچوب‌ها با افزایش شعاع هنگام اندازه‌گیری نسبت به متریک اقلیدسی استاندارد، رشد کنند. اتصال لوی-چیویتا برای متریک القا شده با اتصال اقلیدسی معمول متفاوت است و بنابراین ژئودزیک‌ها و انتقال‌دهنده‌های موازی جایگزینی را توجه می‌دهد. از آنجا که متریک از طریق چارت‌ها پولبک می‌شود، ژئودزیک‌ها متناظر با خطوط مستقیم در هم‌دانه‌های چارت‌ها هستند  $\square$  یک مثلث، خطوط مختصاتی روی  $\mathbb{R}^n$  در شکل ۴۶ است. انتقال موازی نیز متناظر با انتقال معمول در هم‌دانه‌های چارت‌ها است، که این نتیجه می‌دهد که بردارهای منتقل شده را در یک زاویه ثابت نسبت به خطوط مختصاتی روی  $\mathbb{R}^n$  نگه می‌دارد؛ پاورقی  $10^2$  را مقایسه کنید. توجه داشته باشید که این همان انتقالی است که قبلاً در مدل‌های متناظر با شکل‌های ۴۴ در بالا مورد بحث قرار گرفت، که در آنجا انتقال متناظر با اتصال لوی-چیویتا بود زیرا آن مدل‌ها متریک استاندارد را روی  $\mathbb{R}^n$  به جای متریک القا شده توسط چارت فرض می‌کردند.

ایزومتری‌های حافظ  $\{e\}$ -ساختار  $\mathcal{S}$  نسبت به متریک القا شده توسط چارت با دوران‌ها و تغییرمیاس‌های  $\{e\}$ -ساختار نسبت به متریک اقلیدسی معمول داده می‌شوند. قضیه ۸.۹ بر همودایی  $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$  کانونلوشن  $GM$  متناظر دلالت دارد  $\square$  که گزاره بیان شده توسط  $\square$  را در نظریه ما بازیابی می‌کند. همانطور که در بالا گفته شد، این واقعیت که متریک از طریق چارت‌ها القا می‌شود به این معنی است که تمام عملیات هنگام بیان در چارت به عملیات اقلیدسی معمول خلاصه می‌شوند. بنابراین کانونلوشن  $GM$  به بهترین وجه از طریق یک کانونلوشن متعارف روی چارت پیاده‌سازی می‌شود، همانطور که توسط  $\square$  پیشنهاد شده است.

توجه داشته باشید که همودایی  $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$  کانونلوشن  $GM$  به راحتی به همودایی  $\mathcal{S} \times 2$  که شامل بازتاب‌ها نیز می‌شود، قابل تعمیم است. این کار با انجام یک کانونلوشن همودایی بازتابی در چارت پیاده‌سازی می‌شود، که متناظر با  $\mathcal{R}$ -ساختار نشان داده شده در شکل ۴۳ است. روی  $\mathbb{R}^n$  این امر به یک  $\mathcal{R}$ -ساختار منجرب می‌شود که شبیه به ساختار در شکل ۴۵ در بالا است، با این تفاوت که  $\mathcal{R}$ -ساختار علاوه بر این تحت یک تغییرمیاس سراسری نیز ناوردا است.

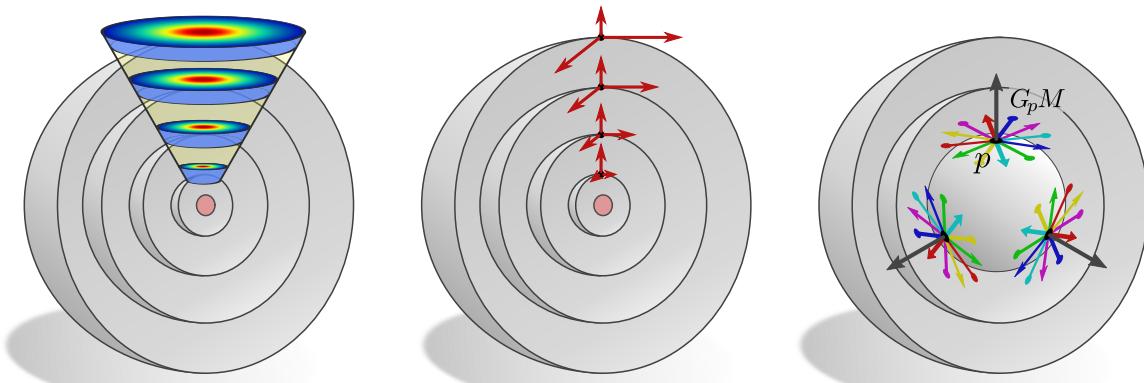
## هموردایی دورانی سراسری روی $\mathbb{R}^n$

ایده‌های ارائه شده در بالا را می‌توان به محیط سه‌بعدی، یعنی به فضای اقلیدسی سوراخ دار  $\mathbb{R}^n$  تعمیم داد. کانونلوشن‌های  $GM$  هموردای دورانی سراسری در اینجا متناظر با  $G$ -ساختارهایی هستند که تحت دوران‌های  $SO(3)$  حول مبدأ ناوردا هستند. در حالی که واستگی شعاعی چنین  $G$ -ساختارهایی بدون محدودیت باقی می‌ماند، تقاضا برای ناوردا می‌دورانی، محدودیتی را بر شکل آنها روی پوسته‌های کروی با شعاع ثابت، که مدارهای عمل  $(2)$   $SO(3) \times SO(3)$  روی  $\mathbb{R}^n$  هستند، تحمیل می‌کند. این واقعیت که کره  $(2)$   $SO(3) \times SO(3)$  یک فضای همگن از  $(3)$   $SO(3)$  بازیز گروه‌های پایدارساز ایزومورف با  $(2)$   $SO(3)$  است، دلالت بر این دارد که  $G$ -گروه ساختاری یک  $G$ -ساختار  $(3)$  ناوردا را نمی‌توان بیشتر از  $(2)$   $G = SO(3)$  کاهش داد؛ به شکل ۴۵ مراجعة کنید. بنابراین ما اساساً با  $CNN$ ‌های کروی با یک بعد شعاعی اضافی سروکار داریم. برای مروری بر  $CNN$ ‌های کروی، خواننده را به پیشخ ۱۱ ارجاع می‌دهیم.

$\square$  این وضعیت را شناسایی کرده و کانونلوشن‌های  $SO(3)$ -هموردا را روی  $\mathbb{R}^n$  طراحی کردن. قبل از پرداختن به طبقه‌بندی ما به عنوان کانونلوشن  $GM$  که در ردیف (۲۹) جدول ۶ فهرست شده است، به طور خلاصه فرمول‌بندی و پیاده‌سازی نویسنده‌گان را معرف می‌کنیم. پیاده‌سازی آنها مبتنی بر  $CNN$ ‌های کروی است با این اضافه که (۱) کرنل‌ها در جهت شعاعی گسترش می‌یابند و (۲) روی پوسته‌هایی با شعاع‌های مختلف به اشتراک گذاشته می‌شوند؛ به شکل ۴۷ (چپ) مراجعة کنید. همانطور که معمولاً برای  $CNN$ ‌های کروی انجام می‌شود، واستگی زاویه‌ای کرنل‌ها از طریق طیف فوریه آنها روی  $S^3$  کدگذاری می‌شود، یعنی بر حسب ضرایب بسط هارمونیک‌های کروی. اشتراک این ضرایب بسط دلالت بر این دارد که کرنل‌های به اشتراک گذاشته شده زاویه‌فضایی یکسانی را برای همه شعاع‌ها پوشش می‌دهند، که به این معنی است که کرنل‌ها در جهت زاویه‌ای به صورت خطی با شعاع گشاد می‌شوند.  $\square$  در پیاده‌سازی گسته‌سازی شده، پوسته‌های کروی در شعاع‌های با فاصله مساوی قرار دارند  $\square$  که این به معنی آن است که کرنل‌ها در جهت شعاعی گشاد می‌شوند. از این بیشش‌ها، ما  $G$ -ساختار خاصی را که مدل در ادامه فرض می‌کند، استنباط می‌کنیم. خود کرنل‌ها به گونه‌ای محدود شده‌اند که تحت دوران‌های  $SO(2)$  حول محور شعاعی گذرنده از مرکزشان ناوردا باشند، که اغلب به آن کرنل‌های ناحیه‌ای (۴۰۰۰۰۰) گفته می‌شود؛ به شکل ۴۸ و  $\square$  مراجعة کنید. همانطور که در  $\square$  و  $\square$  اثبات شده است، کانونلوشن با چنین کرنل‌هایی  $SO(3)$ -هموردا است. اینکه این مورد برقرار است، به طور شهودی روشن است از زیرا دوران‌های پوسته‌های کروی دارای  $(2)$   $SO(3)$  به عنوان زیرگروه پایدارساز هستند، که کرنل‌های ناحیه‌ای نسبت به آن ناوردا هستند. همانطور که در ادامه استدلال خواهیم کرد، این مدل در واقع  $3$ -هموردا است، یعنی علاوه بر آن تحت بازتاب‌ها نیز هموردا است.

برای بازیابی این مدل از دیدگاه کانونلوشن‌های  $GM$ ، ما باید  $G$ -ساختار متناظر را روی  $\mathbb{R}^n$  تعیین کنیم. همانطور که در بالا گفته شد، همودایی  $(3)$   $SO(3)$  مدل نايزمند این است که  $G$ -ساختار تحت عمل  $(3)$   $SO(3)$  ناوردا باشد اما تغییرات شعاعی آن را محدود نمی‌کند. برای استنتاج این واستگی شعاعی  $G$ -ساختار،

$\square$  گشادی در اینجا نسبت به متریک اقلیدسی استاندارد  $\mathbb{R}^n$  اندازه‌گیری می‌شود.



$$\mathbb{E}_3 \setminus \{0\} \cong S^2 \times \mathbb{R}^+$$

شکل ۴۷:  $G$ -ساختاری که به طور ضمنی توسط  $\mathbb{E}_3 \setminus \{0\} \cong S^2 \times \mathbb{R}^+$  فرض شده بود را می‌توان از طرح اشتراک وزن کرنل‌های کانولوشن (همسانگرد) روی  $G$ -همانطور که در [۱۰] پیشنهاد شده است. کرنل‌های گونه‌ای تعریف شده‌اند که زاویه فضایی یکسانی را پوشش دهند، مستقل از فاصله از مبدأ، به طوری که قدر آنها به صورت خطی با این فاصله رشد می‌کند. گستره کرنل‌ها در جهت شعاعی مستقل از فاصله از مبدأ است. سطح: در نظریه ما، کرنل‌ها نسبت به چارچوب‌های مرتع از  $G$ -ساختار به اشتراک گذاشته می‌شوند. برای بازیابی طرح اشتراک وزن پیشنهادی،  $GM$  باید از چارچوب‌های تشکیل شود که محورهای آنها در جهت زاویه‌ای به صورت خطی با فاصله شعاعی از مبدأ رشد می‌کنند، در حالی که محورهای در جهات شعاعی باید اندازه خود را ثابت نگه دارند (هر دو نسبت به متريک اقليدي استاندارد). چنین چارچوب‌هایی يك متريک ريماني جاگتن را روی  $\mathbb{E}_3 \setminus \{0\}$  القامي کنند. راست: از آنجا که کانولوشن  $GM$  حاصل باید  $SO(3)$ -هموردا باشد، لازم است که  $G$ -ساختار تحت دوران حول مبدأ ناوردا باشد. اين امر (حداقل) به يك (حداقل) به يك  $SO(2)$ -ساختار نيز دارد، که تجديد آن به يك پوشه کروي در قسمت سمت راست شکل نشان داده است. اين را با  $(2)$ - $SO$ -ساختار  $(2)$ - $SO$ -ناورداي  $CNN$ ‌هاي کروي در شكل ۴۵ مقایسه کنيد.

به ياد بياوريد که ما اشتراک وزن کانولوشنی را در  $p \in M$  به عنوان تراز کردن کرنل الگو  $K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{C_{\text{out}} \times C_{\text{in}}}$  نسبت به يك چارچوب (دلخواه) در  $G_p M$  از فضاهای مماس  $T_p M$  تعریف کردیم. بنابراین، اشتراک کرنل در نظر گرفته شده توسط  $\mathbb{E}_3 \setminus \{0\}$  به ما اجازه می‌دهد تا در مورد  $G$ -ساختار به طور ضمنی در نظر گرفته شده نتيجه گيری کنیم. نویسنده گان کرنل‌ها را به گونه‌ای به اشتراک گذاشته می‌کنند که مساحت مماس آنها بر پوشه‌های کروی با افزایش فاصله از مبدأ گسترش یابد (آنها زاویه فضایی یکسانی را در هر شعاع پوشش می‌دهند) در حالی که ضخامت شعاعی آنها ثابت باقی می‌ماند. شکل ۴۷ (چپ) اين تغیير شعاعی کرنل‌های به اشتراک گذاشته شده را نشان می‌دهد در حالی که شکل ۴۷ (وسط) مقیاس‌بندی متانظر چارچوب‌های مرتع نمونه را نشان می‌دهد. اين به همراه ناورداي  $(2)$ - $SO$ -ساختار، (حداقل) يك  $(2)$ - $SO$ -ساختار را نتيجه می‌دهد، که تجديد آن به يك پوشه کروي در شکل ۴۷ (راست) به تصویر کشیده شده است. ۱۰۷ متريک در نظر گرفته شده از اين  $G$ -ساختار نتيجه می‌شود، زيرا چارچوب‌های آن مفهوم مربوط به راست‌هنجاري را تعریف می‌کنند. توجه داشته باشید که اين متريک اقليدي معمول متفاوت است.

با اين ساختار، ما دوران‌های  $Isom_{GM} = SO(3)$  را به عنوان ايزومتری‌های حافظ  $G$ -ساختار داریم. بنابراین، کانولوشن‌های  $GM$  تعریف شده توسط اين  $G$ -ساختار، که ممکن است در نوع میدان ورودی و خروجی خود متفاوت باشند، (طبق قضیه ۸.۹) همورداي دوراني خواهند بود. کانولوشن  $GM$  خاصی که توسط  $\mathbb{E}_3 \setminus \{0\}$  فرض شده، يعني انواع میدان فرض شده، را می‌توان از اين واقعیت استنتاج کرد که نویسنده گان کرنل‌های ناجهای را فرض می‌کنند: چنین کرنل‌هایی به طور طبیعی هنگام در نظر گرفتن میدان‌های اسکالر، يعني نمایش‌های میدان بدیهی، به وجود می‌آیند، زيرا محدودیت کرنل، معادله (۸۳)، در اين حالت به صورت زير در می‌آيد

$$K(gv) = K(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^3, g \in SO(2), \quad (419)$$

که کرنل‌های همسانگرد (ناحیه‌ای) را تحميل می‌کند.<sup>۱۰۸</sup>

به عنوان يك نوع از مدل، می‌توان  $2$ -ساختار را در نظر گرفت که از  $(2)$ - $SO$ -ساختار با افزودن چارچوب‌های مرتع بازتابیده (بازتاب نسبت به يك محور دلخواه در داخل صفحات مماس بر پوشه‌های کروی، در حالی که بردارهای چارچوب شعاعی همچنان به سمت بیرون اشاره دارند) به دست

<sup>۱۰۷</sup> مشابه دو بعدی آن شبيه به  $G$ -ساختار در شکل ۴۶ خواهد بود اما با تمام بردارهای چارچوب در جهت شعاعی که دارای نرم واحد هستند (نسبت به متريک اقليدي).

<sup>۱۰۸</sup> کرنل‌هایی که بين «ميدان‌های اسکالر»، يعني میدان‌هایي که مطابق با نمایش بدیهی  $G$  تبدیل می‌شوند، نگاشت انجام می‌دهند، هميشه  $G$ -ناوردا هستند. برای  $G = SO(2)$  اين به معنی کرنل‌های همسانگرد (ناحیه‌ای) است، در حالی که  $R = G$  به معنی کرنل‌های ناورداي بازتابی در ورودی بالا سمت چپ جدول ۳ است.

می‌آید.<sup>۱۰۹</sup> در این حالت، ایزومنتری‌های حافظ  $G$ -ساختر  $\mathcal{S}$  که از دوران‌ها و بازتاب‌های سراسری حول مبدأ تشکیل شده‌اند و بنابراین کانولوشن‌های  $GM$  همودای  $\mathcal{S}$  هستند. یک مورد خاص جالب در زمینه فعلی، کانولوشن‌های  $GM$  است که بین میدان‌های اسکالار نگاشت انجام می‌دهند، که برای آنها محدودیت کرنل به صورت زیر است:

$$K(gv) = K(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, g \in \mathbb{R}^d. \quad (420)$$

این به نظر می‌رسد یک محدودیت قوی تر از محدودیت در معادله (۴۱۹) بالا باشد: به جای اینکه فقط کرنل‌ها ناوردا بخواهد، علاوه بر آن از آنها می‌خواهد که تحت بازتاب‌ها نیز ناوردا باشند. با این حال، از آنجا که کرنل‌های ناوردا در حال حاضر تحت بازتاب‌ها نیز ناوردا هستند، این دوباره به کرنل‌های ناحیه‌ای منجر می‌شود و بنابراین دقیقاً همان فضای کرنل را که برای  $SO(2)$  بود، به دست می‌دهد.<sup>۱۱۰</sup> این دلالت بر این دارد که مدل  $\mathcal{S}$  در واقع نه تنها  $SO(3)$ -همودا است، همانطور که توسط نویسندهان ادعا شده، بلکه به طور کلی تر  $SO(3)$ -همودا است، که طبقه‌بندی ما را در ردیف (۲۹) جدول ۶ توجیه می‌کند. توجه داشته باشید که این یک مورد خاص است که فقط برای میدان‌های اسکالار اعمال می‌شود □ فضاهای کرنل‌های  $SO(2)$  و راهبری‌پذیر برای نمایش‌های گروهی عمومی متفاوت هستند.

مدل  $\mathcal{S}$  چگونه با مدل  $\mathcal{E}$  که در  $G$ -ساختر نشان داده شده در شکل ۴۶ تکیه دارد، مرتبط است؟ یک تفاوت کلیدی بین این دو رویکرد این است که  $G$ -ساختر در شکل ۴۶ از چارچوب‌هایی تشکیل شده است که محورهای رو به بیرون آنها با فاصله شعاعی از مبدأ رشد می‌کنند، که این مورد برای  $G$ -ساختر در شکل ۴۷ صادق نیست. اگر دومی را به گونه‌ای اصلاح کنیم که از چارچوب‌هایی تشکیل شود که محورهای شعاعی آنها به صورت خطی با فاصله چارچوب‌ها از مبدأ رشد می‌کنند، آنگاه  $\mathcal{S} = SO(3) \times \{e\}$  (به جای  $Isom_{GM} = SO(3)$ ) خواهیم داشت. بنابراین کانولوشن  $GM$  متناظر علاوه بر این همودای مقیاس خواهد بود. در یک پیاده‌سازی، این را می‌توان به راحتی با فاصله گذاری نمایی به جای یکنواخت پوسته‌های کروی گستته در نظر گرفته شده توسعه  $\mathcal{E}$  (متناظر با فاصله گذاری یکنواخت شاعع لگاریتمی شده) تحقق بخشد.

در آخر، به طور خلاصه کانولوشن توسعه  $\mathcal{E}$  را که در ردیف (۳۰) جدول ۶ فهرست شده است، مورد بحث قرار می‌دهیم. این مدل بر یک تصویر شعاعی از سیگنال روی پوسته‌های کروی به یک مکعب محیطی تکیه دارد. برای تعریف یک کانولوشن روی مکعب، نویسندهان آن را در برخی از یال‌هایش برش داده و آن را پهن می‌کنند؛ به شکل ۲ در کار آنها مراجعت کنید. متعاقباً، آنها یک کانولوشن دوبعدی متعارف را روی وجه پهن شده مکعب انجام می‌دهند. گسترش این عملیات با یک بعد سوم و شعاعی، یک کانولوشن را روی  $\mathbb{R}^3$  تعریف می‌کند. از آنجا که پوسته‌های شعاعی در پیاده‌سازی گستته دوباره با فاصله مساوی قرار گرفته‌اند، این عملیات متناظر با یک کانولوشن  $GM$  روی یک  $\{e\}$ -ساختر است که به صورت شعاعی همانطور که در شکل ۴۷ نشان داده شده، تغییر می‌کند. تصویر از پوسته‌های کروی به معنای یک اعوجاج در چارچوب‌ها روی هر یک از وجوده مکعب است و بنابراین به یک اعوجاج در متريک روی پوسته‌های کروی منجر می‌شود.  $\{e\}$ -ساختر در اکثر برش‌ها ناپيوسته است و بنابراین به کانولوشن اجازه نمی‌دهد که پيوستگي ميدان‌های ويزگي را حفظ کند. از آنجا که  $S^2$  موافق پذير نیست، این مشکل را نمی‌توان بدون فرض یک گروه ساختاری غيرپذيری  $G$  حل کرد.  $\{e\}$ -ساختر به طور کلی توسعه هجیز ایزومنتری حفظ نمی‌شود، که این دلالت بر این دارد که گروه همودای سراسری مدل  $\{e\}$   $Isom_{\{e\}M} = \{e\}$  بدیهی است. با این حال، از آنجا که تحديد  $\{e\}$ -ساختر به چهار وجه «عمودی» مکعب تحت دوران‌هایی با مضرب‌های از  $\pi/2$  ناوردا است، مدل در عمل تا حدی نسبت به دوران‌های سراسری  $C_4$  حول محور عمودی همودا است. برای مجموعه داده‌هایی که نمونه‌های آنها حول مبدأ  $\{e\}$  متقارن شده و از نظر توزيع، تقارن دورانی دارند، به طور تجربی نشان داده شده است که این ويزگي منجر به عملکرد بهبود يافته‌ای در مقایسه با کانولوشن‌های متعارف روی  $\mathbb{R}^3$  می‌شود. نویسندهان علاوه بر این تأثیر طرح‌های مختلف اشتراک وزن را بر روی بعد شعاعی بررسی می‌کنند و در می‌يانند که اشتراک وزن کامل در عمل بهترین کارایی را دارد.

## ۱۱ CNN‌های کروی مستقل از مختصات

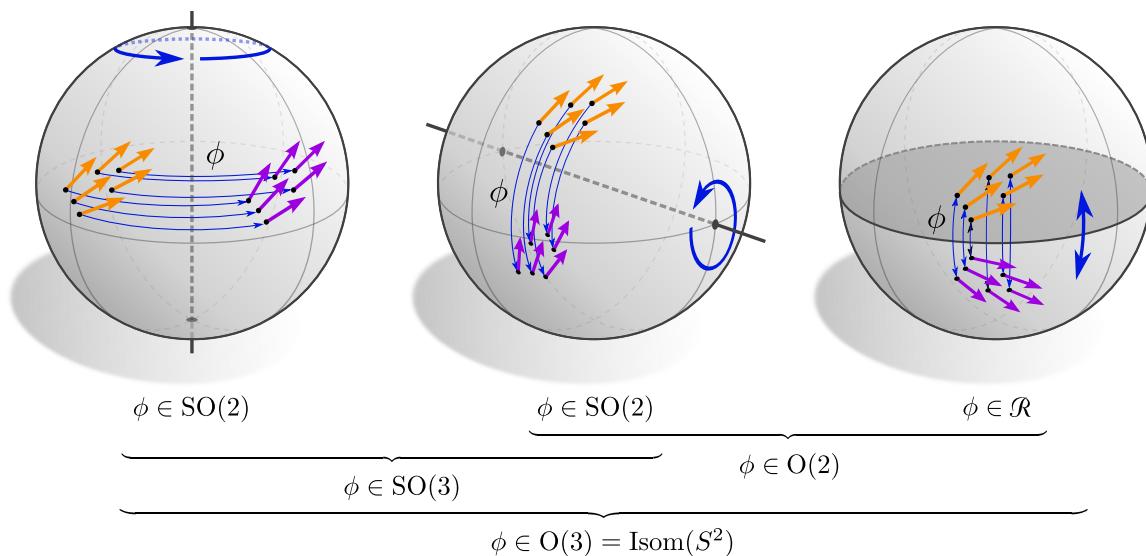
فراتر از کانولوشن‌ها در فضاهای اقلیدسی، کانولوشن‌ها روی کره  $S^2$  از اهمیت عملی بالایی برخوردارند. کاربردها شامل وظایف بینایی همه جانبه، پیش‌بینی جهانی آب و هوا، یا تحلیل تابش زمینه کهنه‌ای است. کانولوشن‌های کروی به جای همودای انتقالی، معمولاً باید همودای دورانی باشند. گروه ایزومنتری کره  $\mathcal{S}$   $= Isom(S^2)$  می‌شوند که از کاربری راهبری‌پذیر باید است.

یک تفاوت عمده بین فضاهای اقلیدسی  $\mathbb{E}_d$  و کره  $S^2$  این است که دومی موافق پذير نیست، یعنی اجازه یک میدان چارچوب سراسری و پيوسته را نمی‌دهد. تقلیل گروه ساختاری فراتر از  $SO(2) = G$  از نظر توپولوژیکی مسدود شده است، که این معنی است که کانولوشن‌های کروی حداقل به کرنل‌های  $SO(2)$  راهبری‌پذیر نیاز دارند اگر بخواهند پيوستگي ميدان‌های ويزگي را حفظ کنند.  $(SO(2))$ -ساختر متناظر، که به طور کامل توسعه متريک و جهت گيری کره تعين می‌شود، در شکل ۵۰ نشان داده شده است. کانولوشن‌های  $GM$  روی اين  $G$ -ساختر ناوردا دورانی سراسری، تضمین می‌شوند که  $Isom_{SOM} = SO(3)$ -همودا باشند.

على رغم مانع توپولوژیکی اجتناب پذير، بسياري از نویسندهان CNN‌هاي کروي را پيشنهاد داده‌اند که از کرنل‌های  $SO(2)$ -راهبری‌پذير استفاده نمی‌کنند. رايچ ترين انتخاب  $\{e\}$ -ساختر متناظر با چينين کانولوشن‌هایي، ميدان چارچوب نشان داده شده در شکل ۵۰ است، که چارچوب‌های مرتع راست‌هنچار آن (معادله (۴۲۶)) با شبكه مختصاتي مختصات کروي تراز شده‌اند. توجه داشته باشید که اين ميدان چارچوب داراي تكينگي هایي در قطب‌ها است، جايی که کانولوشن‌ها ناپيوسته می‌شوند. برای تطبیق چينين مدل‌هایي با نظریه ما، به ويزه فرض همواري  $G$ -ساخترها، آنها باید به عنوان

<sup>۱۰۹</sup> اين  $\mathcal{S}$ -ساختر، همتای  $\mathcal{R} = 1$ -ساختر در شکل ۴۵ برای  $d = 3$  به جای  $d = 2$  است.

<sup>۱۱۰</sup> به طور رسمي تر، ما به دنبال کرنل‌هایی هستيم که در  $G$  صدق کنند، یعنی روی مدارهای  $K(gv) = K(v) \forall g \in G$   $\{gv | g \in G\} \in G \setminus \mathbb{R}^d$  برای هر  $v \in \mathbb{R}^d$  برابر هستند، فضاهای کرنل حاصل يکسان خواهند بود.



شکل ۴.۹: نمایش گروه ایزومتری کره ۲-بعدی  $S^2$  و  $\text{Isom}(S^2)$  را متشکل از دوران‌های حافظ جهت در  $\text{SO}(3) \times \mathcal{R}$  بازتاب‌ها از طریق حاصلضرب مستقیم  $\text{SO}(3) \times \mathcal{R} = \text{SO}(3)$  در نظر گرفت. (۳) به نوبه خود، توسط دوران‌های  $\text{SO}(2)$  حول هر دو محور غیرموازی تولید می‌شود، که در پارامترسازی زاویه اویلر استفاده می‌شود. برای زیرگروه‌های مرتبط بیشتر و روابط آنها به متن اصلی مراجعه کنید.

کانون‌لوشن‌های روی یک استوانه توپولوژیکی با متريک شبه-کروی توصيف شوند. گروه ایزومتری اين کره سوراخ دار  $\{n, s\} \setminus S^2$  بدون قطب‌های زيرگروه ۲ (شکل ۴.۹ (وسط و راست)) از گروه ایزومتری كامل کره ۳ است.  $\{e\}$ -ساختار به تصویر کشide شده توسط دوران‌های سمتی در  $\text{SO}(2)$  حفظ می‌شود، یعنی دوران حول محور گذرنده از قطب‌ها.

از دیدگاه مهندسی، هر دو رویکرد توجیه خود را دارند: کاربردهای کاملاً همسانگرد مانند تحلیل تابش زمینه کیهانی به مدل‌های کاملاً  $\text{SO}(3)$ -هموردا روی  $S^2$  نیاز دارند. وظایف یادگیری که با یک محور دوران مرجع همراه هستند، که به عنوان مثال برای زمین یا تصاویر پانوراما باجهت‌های «بالا» و «پایین» مشخص، صادق است، ممکن است از اطلاعات هندسی اضافی کدگذاری شده در  $\{e\}$ -ساختار بهره‌مند شوند. نتایج تجربی نشان دهد که در چنین مواردی اغلب مفید است که با ترکیبی از هر دو رویکرد کار شود: لایه‌های اولیه با کانون‌لوشن‌های کاملاً همواردا می‌توانند از مقایسه‌های معجلی در داده‌ها بهره‌برداری کنند، در حالی که لایه‌های بعدی با تنها هموردا سمتی می‌توانند بر اساس محور مرجع، یادگیری که تمايز قائل شوند؛ به بخش ۷.۲ در [؟] مراجعه کنید.

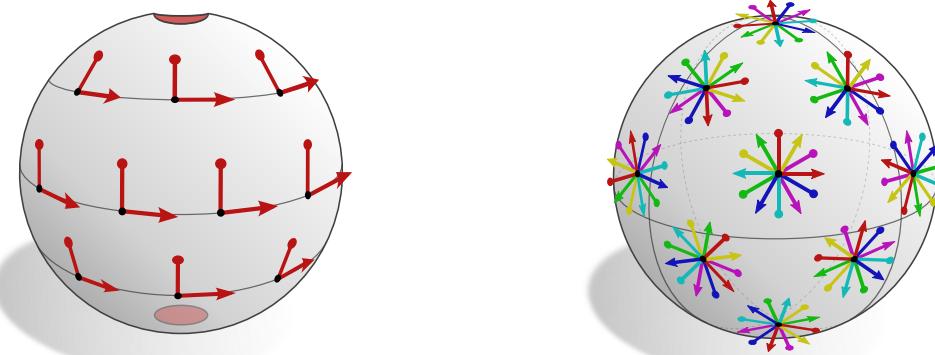
- |      |  |
|------|--|
| ۱.۱۱ | هندرسی کره ۲-بعدی $S^2$ . . . . .                                    |
| ۲.۱۱ | CNN‌های کروی کاملاً همورداي دوراني . . . . .                         |
| ۳.۱۱ | CNN‌های کروی همورداي دوران سمتی در توپولوژی‌های استوانه‌ای . . . . . |
| ۴.۱۱ | تقریب‌های بیست‌وجهی از CNN‌های کروی . . . . .                        |

ما با توصیف هندسه کره در بخش ۱.۱۱ شروع می‌کنیم. بخش ۲.۱۱ کانون‌لوشن‌های  $\text{SO}(3)$ - $\text{SO}(2)$ -هموردا را مورد بحث قرار می‌دهد، که بر  $\text{SO}(2)$ -یا  $\text{SO}(3)$ -ساختارها همانطور که در شکل ۵۰ آشنا شده، تکیه دارند. CNN‌های کروی سراسری  $\text{SO}(2)$ - $\text{SO}(3)$ -هموردا، متناظر با  $\{e\}$ -ساختار در شکل ۵۰ بـ ۵۱  $\mathcal{R}$ -ساختار متناظر، به ترتیب در بخش ۴.۱۱ معرف می‌شوند. بخش ۴.۱۲ بر تقریب‌های بیست‌وجهی کانون‌لوشن‌های کروی تمرکز دارد، که پیاده‌سازی‌های کارآمد از نظر محاسباتی را ممکن می‌سازند زیرا بیست‌وجهی تکه‌ای-تخت است و شبکه‌های نمونه‌برداری منظم را می‌پذیرد؛ به شکل ۶۳ مراجعه کنید. (۲)  $\text{SO}(2)$ -CNN‌ساختار و  $\{e\}$ -CNN‌ساختار در شکل‌های ۵۰ و ۵۱ در اینجا به ترتیب با  $\text{C}_e$ -CNN‌ساختار و  $\{e\}$ -CNN‌ساختار در شکل‌های ۶۴ و ۶۴ یا ۶۴ بـ تقریب زده می‌شوند.

## ۱.۱۱ هندسه کره ۲-بعدی $S^2$

به عنوان پایه‌ای برای بحث ما در مورد CNN‌های کروی، این بخش به بحث در مورد هندسه دیفرانسیل کره (واحد)  $M = S^2$  می‌پردازد. این کره معمولاً به عنوان زیرمجموعه‌ای از نقاط اقلیدسی ۳-بعدی  $\mathbb{E}^3$  تعریف می‌شود که فاصله واحد از مبدأ دارند:

$$S^2 := \{p \in \mathbb{E}^3 \mid \|p\| = 1\} \quad (4.21)$$



(ب)  $\{e\}M$ -ساختار روی یک کره ۲-بعدی سوراخ دار  $= \text{Isom}_{\{e\}M}(S^1 \setminus \{n, s\})$ ، که توسط دوران های سمتی در  $\text{SO}(2)$  حفظ می شود.

(ت)  $\text{SO}(2)$ -ساختار SOM روی کره ۲-بعدی  $M = S^1$ ، که توسط دوران های سه بعدی عمومی در  $\text{SO}(3)$   $= \text{Isom}_{\text{SOM}}$  حفظ می شود.

شکل ۵۰:  $G$ -ساختارهای رایج زیربنای CNN های کروی. موئن توپولوژیکی از کاهش گروه ساختاری کره ۲-بعدی فراتر از  $G = \text{SO}(2)$  جلوگیری می کند. شکل ۵۰-۱: ساختار استاندارد روی  $S^1$  را نشان می دهد، که با متريک جايگذاري (معادله (۴۲۹)) (القا شده از حاصلضرب داخلی  $\mathbb{R}^3$  مطابقت دارد. اين ساختار تحت دوران ها در  $\text{SO}(3)$  تأثیر دارد، که بر همودايی دوراني کانونلوشن  $GM$  متناظر دلالت دارد. توجه داشته باشيد که تارهای  $G_p M$  و  $G_q M$  در نقاط مختلف  $p$  و  $q$  ايزومورف مستند اما نه به صورت کانوني  $\square$  به نظر می رسد زنگ های چارچوب در تصویر چینن ايزومورفیسمی را القا می کنند، با این حال، آنها به طور تصادفی انتخاب شده اند و هیچ معنایي ندارند. شکل ۵۰-۲: یک کره را نشان می دهد که در دو قطب متناظر سوراخ شده است. اين کار کره را به یک استوانه توپولوژیکی  $(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}) \cong S^1$  با متريک شبیه-کروی تبدیل می کند  $\square$  که اجازه يك کاهش کامل به یک گروه ساختاری بدینه می دهد. شکل ۵۰-۳: رایج ترین انتخاب از  $\{e\}$ -ساختار را نشان می دهد، که نتیجه با چارچوب های راست هنجراري است که با شبکه مخصوصات گروی تراز شده اند؛ شکل ۵۰-۴: مقایسه کنید. از آنجا که این  $\{e\}$ -ساختار تحت دوران های سمتی حول محور قطبی ناورداست، کانونلوشن های  $GM$  متناظر  $\text{Isom}_{\{e\}M} = \text{SO}(2)$ -هموردا هستند. توجه داشته باشيد که سوراخ کردن کره فقط وسیله ای برای پنهان کردن ناپیوستگی مدل ها در قطب ها است.

به عنوان يك سطح جايگذاري شده، اين کره يك متريک ريماني (فرم بندي اول) را از فضای جايگذاري  $\mathbb{E}_3$  به ارث می برد. در ادامه، برای سادگی،  $\mathbb{E}_3$  را با فضای برداری  $\mathbb{R}^3$  مدل سازی می کنیم. هنگامی که فضاهای مماس  $T_p M$  را به معنای واقعی کلمه به عنوان آن دسته از زیرفضاهای دو بعدی  $\mathbb{R}^3$  تفسیر کنیم که شامل تمام بردارهای مماس در  $p \in S^1$  هستند، آنگاه متريک، نگاشت های نمایی، انتقال دهنده های موازی، چارچوب ها و پیمانه ها همگی می توانند بر حسب عملیات معمول فضای برداری در  $\mathbb{R}^3$  بیان شوند. قبل از پرداختن به این عبارات مشخص، که هنگام پیاده سازی CNN های کروی مفید هستند، ما برخی از ویژگی های کره را از دیدگاهی انتزاعی تر مورد بحث قرار می دهیم.

گروه ايزومتری کره با

$$\text{Isom}(S^1) = \mathbb{Z}, \quad (422)$$

داده می شود، یعنی دوران ها و بازتاب های سه بعدی، که در شکل ۴۹ به تصویر کشیده شده اند. عمل هر ايزومتری  $\phi \in \mathbb{Z}$  با عمل معمول آن روی  $\mathbb{R}^3$  از طریق ضرب ماتریسی، که به کره جايگذاري شده است، منطبق است. توجه داشته باشيد که این در واقع يك عمل خوش تعریف روی  $S^1$  به دست می دهد زیرا  $\mathbb{Z}$  بنا به تعریف از تمام نگاشت های خطی حافظ فاصله و زاویه تشکیل شده است و بنابراین کره را حفظ می کند. از آنجا که کره جهت پذیر است، دارای يك زیر گروه از ايزومتری های حافظ جهت است

$$\text{Isom}_+(S^1) = \text{SO}(3), \quad (423)$$

که از تمام دوران های سه بعدی تشکیل شده است. زیر گروه های دیگری که در زمینه يادگیری عمیق مرتبط هستند، عبارتند از: هر انتخاب از يك محور دوران، يك زیر گروه از دوران های دو بعدی را تعیین می کند که با  $\text{SO}(2)$  ايزومورف است و تمام این زیر گروه ها با يك دیگر مزدوج هستند. به طور مشابه، هر انتخاب از يك زیر فضای دو بعدی از  $\mathbb{R}^3$  متناظر با يك زیر گروه از بازتاب ها نسبت به این صفحه است که با  $\mathcal{R}$  ايزومورف است. زیر گروه های دوران های دو بعدی حول دو محور دوران غیر موازی،  $\text{SO}(2)$  را تولید می کنند، که به پارامتر سازی زاویه اوپیلر از  $\text{SO}(3)$  مربوط می شود. يك انتخاب از صفحه بازتاب و هر محور دوران در داخل این صفحه، زیر گروه حاصلضرب نیمه مستقیم  $\mathcal{R} \times \text{SO}(2) = \text{SO}(3)$  را تولید می کند. اگر محور دوران به جای آن عمود بر صفحه بازتاب انتخاب شود، دوران ها و بازتاب های دو بعدی جایجا می شوند و بنابراین زیر گروه های ايزومورف با حاصلضرب مستقیم  $\mathcal{R} \times \text{SO}(2)$  را تولید می کنند. علاوه بر این دارای زیر گروه های گسته است که مرتبط ترین آنها از نظر عملی، گروه های تقارن اجسام افلاطونی هستند، به عنوان مثال بیست و چهاری، که در شکل ۶۳ نشان داده شده است.<sup>۱۱۱</sup>

<sup>۱۱۱</sup> يك لیست جامع از تمام زیر گروه های متناهی  $\text{SO}(3)$  را می توان در [\[۱\]](#) یافت.

$\exists$  به صورت متعددی بر روی کره عمل می‌کند، یعنی برای هر دو نقطه  $p$  و  $q \in S^3$  حداقل یک ایزومتری  $\phi$  وجود دارد به طوری که  $\phi(p) = q$ . عمل‌های  $\exists$  روی  $S^3$  بدون نقطه ثابت نیستند: هر نقطه  $p \in S^3$  تو سمت زیرگروه  $\text{Stab}_p \cong \mathbb{Z}^2$  است. پایدار می‌شود، که از دوران‌ها و بازتاب‌ها حول محور گذرنده از  $p$  در  $\mathbb{R}^3$  تشکیل شده است. در مجموع، این دو ویژگی دلالت بر این دارند که کره یک فضای همگن از  $\exists$  است و به صورت جبری به عنوان فضای خارج قسمتی

$$\exists / \mathbb{Z} \cong S^3, \quad (424)$$

تحقیق می‌یابد، که از همدسته‌هایی به شکل ۲  $\phi$  تشکیل شده است. یک گزاره مشابه برای  $\text{SO}(3)$  برقرار است، که دارای زیرگروه‌های پایدارساز  $\text{Stab}_p \cong \text{SO}(2)$  است و بنابراین

$$\text{SO}(3) / \text{SO}(2) \cong S^3. \quad (425)$$

با این روابط، قضیه ۸.۱۴ اثبات می‌کند که هر تبدیل میدان کرنل هموردای  $\exists$  یا  $\text{SO}(3)$  روی  $S^3$  معادل یک کاتولوشن  $G$  با  $GM$  به ترتیب برابر با  $\mathbb{Z}$  یا  $\text{SO}(2)$  است. این نتیجه با دیدگاه کلاسیک CNN‌های هموردای گروهی روی فضاهای همگن مطابقت دارد [۱۰]. رابطه دقیق بین این دو در قضیه ۱۱.۲ در ادامه روشن می‌شود. به یاد بیاورید که ایزومتری‌ها بنا به تعریف، متريک ریمانی را حفظ می‌کنند. اینکه  $\exists$  به صورت متعددی روی  $S^3$  با پایدارساز  $\mathbb{Z}$  عمل می‌کند، بنابراین دلالت بر این دارد که هندسه ریمانی  $S^3$  در هر نقطه و در هر جهت و جهت‌گیری «شیوه به هم» به نظر می‌رسد  $\exists$  یک فضای پیشینه متقاضن است.

به عنوان یک منفرد ریمانی،  $S^3$  بنا به طراحی دارای یک  $\mathbb{Z}$ -ساختار است. یک تحدید به چارچوب‌های راست‌گرد، که ممکن است زیرا کره جهت‌پذیر است،  $\text{SO}(2)$ -ساختار را در شکل ۵۰ به دست می‌دهد، که تو سمت دوران‌ها در  $\text{SO}(3)$  حفظ می‌شود. می‌توان نشان داد که این دو  $G$ -ساختار  $\text{SO}(M)$  به عنوان کلاف‌های اصلی به ترتیب با  $\mathbb{Z}$  و  $\text{SO}(3)$  ایزومورف هستند. ایزومورفیسم خاص در اینجا با انتخاب یک چارچوب از  $G$ -ساختار داده می‌شود، که باید با عضو همانی گروه یکی گرفته شود.

قضیه گوی مودار بیان می‌کند که هیچ میدان برداری پیوسته‌ای روی  $S^3$  وجود ندارد، که به طور خاص دلالت بر این دارد که هیچ  $\{\cdot\}$ -ساختار (پیوسته‌ای) نمی‌تواند وجود داشته باشد. بنابراین، یک کاهش گروه ساختاری فراتر از  $\text{SO}(2)$  نیازمند تغییر در توپولوژی مینیفتد است. برای مثال، سوراخ کردن کره در یک نقطه دلخواه، همانطور که در شکل ۵۱ نشان داده شده است، توپولوژی کره را به توپولوژی یک استوانه تبدیل می‌کند و بنابراین اجازه وجود  $\{\cdot\}$ -ساختارها را می‌دهد. رایج‌ترین انتخاب از  $\{\cdot\}$ -ساختار روی کره سوراخ دار  $\{e\} \times S^3 \setminus \{n, s\}$  است. در شکل‌های ۵۱ و ۵۲ است. چارچوب‌های آن در شکل‌های ۵۱ و ۵۲ معرفی شدند.

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{\cos(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \quad (426)$$

با شبکه مختصاتی معمول کروی تراز شده‌اند، که در قراردادهای فیزیک (یعنی با  $\varphi$  و  $\theta$ ) که به ترتیب زاویه سمتی و انحراف نسبت به صفحه  $xy$  را نشان می‌دهند) توسط نگاشت پوشای  $2\pi$ -متناوب زیر داده می‌شوند:

$$\chi : (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \times \mathbb{R} \rightarrow S^3 \setminus \{n, s\}, \quad (\theta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos \varphi \\ \cos(\theta) \sin \varphi \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (427)$$

برخی از CNN‌های  $\{\cdot\}$ -راهنری‌بذری با نمایش میدان‌های ویژگی روی  $S^3 \setminus \{n, s\}$  در مختصات کروی پایدارسازی می‌شوند؛ به بخش ۳.۱۱ در ادامه مراجعه کنید. از آنجا که نگاشت مختصاتی  $\chi$  ایزووتریک نیست، این روش‌ها به یک متريک جايگرین (یا  $\{\cdot\}$ -ساختار) روی مختصات  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$  نیاز دارند؛ به چارچوب‌های کنیده شده در شکل ۵۲ (راست) مراجعه کنید.

از آنجا که  $S^3$  فشرده است، از نظر ژئودزیکی کامل است. ژئودزیک‌ها تو سمت دوایر عظیمه کره داده می‌شوند، یعنی آن دایره‌هایی که متناظر با تقاطع کره با یک صفحه گذرنده از مبدأ  $\mathbb{R}^3$  هستند. نگاشت‌های نمایی  $\exp_p(v)$  این دوایر عظیمه را از طریق  $p$  در جهت  $v$  برای فاصله‌ای برابر با  $\|v\|$  دنبال می‌کنند. بنابراین نگاشت‌های لگاریتمی  $\log_p(q)$  برای تمام نقاط  $q \in S^3 \setminus p$  نیستند، با بردار یکتاً در جهت کوتاه‌تر در امتداد دایره عظیمه گذرنده از  $p$  و  $q$  داده می‌شوند، با  $\|\log_p(q)\|$  که با طول قوس در امتداد این مسیر داده می‌شود. ژئودزیک‌ها بین نقاط متقابل  $p$  و  $q$  یکتاً نیستند، به طوری که نگاشت لگاریتمی وجود ندارد.

## هندسه‌ی صریح $S^3$ به عنوان یک سطح جایگذاری شده در $\mathbb{R}^3$

همانطور که در بالا گفته شد، فضاهای مماس  $\mathbb{R}^3 \subset S^3$  در هندسه دیفرانسیل کلاسیک سطوح به عنوان زیرفضاهای دوبعدی از فضای جایگذاری  $\mathbb{R}^3$  تعریف می‌شوند. یک فضای مماس خاص  $T_p M$  در  $p \in S^3$  در این تفسیر با

$$T_p M = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, v \rangle = 0\} \subset \mathbb{R}^3, \quad (428)$$

<sup>۱۱</sup> این فرآیند به عنوان مثال با تصویر استریوگرافیک کره مطابقت دارد.

داده می شود، یعنی فضای تمام بردارهایی که بر بردار نرمال سطح در  $p$  عمود هستند، که برای کره با خود  $p$  منطبق است. توجه داشته باشید که، علی رغم بیان شدن نسبت به چارچوب استاندارد  $\mathbb{R}^3$ ، این بردارهای مماس اشیاء مستقل از مختصات هستند به این معنا که با زوچهای مرتبی از ضرایب  $v^A \in \mathbb{R}^3$  نسبت به یک پیمانه  $\psi_{TM,p}^A$  از  $T_p M$  توصیف نمی شوند. یکی گرفتن فضاهای مماس با زیرفضاهای فضای جایگذاری اجازه می دهد تا بسیاری از روابط جبری انتزاعی بر حسب عملیات فضای برداری روی  $\mathbb{R}^3$  بیان شوند. در باقیمانده این بخش، ما چنین عباراتی را برای متریک، نگاشت های نمایی و لگاریتمی، چارچوب ها، پیمانه ها، انتقال دهنده های لوی - چیویتا در امتداد ژئودزیک ها و تبدیلات پیمانه القا شده بیان خواهیم کرد.

با به تعریف،  $S^*$  متریک ریمانی خود را از فضای جایگذاری به اorth می برد. این متریک القا شده برای هر  $v, w \in T_p M \subset \mathbb{R}^3$  با

$$\eta_p(v, w) := \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad (429)$$

داده می شود، یعنی حاصلضرب داخلی استاندارد  $\mathbb{R}^3$ ، که به  $T_p M$  محدود شده است. برای کاهش شلوغی، ما زیرنویس  $\mathbb{R}^3$  را در نماد  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  در باقیمانده این بخش حذف می کنیم.

نگاشت نمایی  $\exp_p$  بردارهای  $v \in T_p M$  را به نقاط  $q = \exp_p(v) \in S^*$  در فاصله ای برابر با  $\|v\|$  در امتداد دایره عظیمه درجهت  $v$  نگاشت می دهد. با قرار گرفتن روی همان دایره عظیمه،  $p$  و  $q$  از طریق یک دوران با زاویه  $\alpha = \|v\|/r = \|v\|/\|v\| = p \times v / \|p \times v\|$  حول محور دوران به هم مرتبط می شوند، که در آن معادلات ساده می شوند زیرا کره دارای شعاع واحد  $r = \|p\| = 1$  است و بردارهای  $p$  و  $v$  در  $\mathbb{R}^3$  بر هم عمود هستند. با استفاده از فرمول دوران رودریگز،  $\langle q = p \cos(\alpha) + (a \times p) \sin(\alpha) + a \langle a, p \rangle (1 - \cos(\alpha))$  به همراه عمود بودن  $\langle a, p \rangle = 0$  و  $a \times p = \frac{v}{\|v\|}(p \times v) \times p = \frac{v}{\|v\|}(\langle p, p \rangle v + \langle p, v \rangle p) = \frac{v}{\|v\|}$  این منجر به عبارت صریح

$$\exp_p : \mathbb{R}^3 \supset T_p M \rightarrow S^* \subset \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto \exp_p(v) = p \cos(\|v\|) + \frac{v}{\|v\|} \sin(\|v\|) \quad (430)$$

برای نگاشت نمایی می شود.

یک عبارت صریح از نگاشت لگاریتمی در امتداد همین خط استدلال یافت می شود: نرم  $(q) \log_p(q)$  که در آن  $q \in S^* \setminus p$  با زاویه دوران  $\alpha = \arccos(\langle p, q \rangle)$  منطبق است. جهت آن با جهت مماس بر دایره عظیمه داده می شود، که ممکن است بر حسب تصویر نرمال شده  $\frac{v}{\|v\|}$  از  $q$  روی  $T_p M$  بیان شود. در کل، نگاشت لگاریتمی بنابراین به صورت زیر نمونه سازی می شود:

$$\log_p : S^* \setminus p \rightarrow B_{T_p M}(0, \pi), \quad q \mapsto \log_p(q) = \arccos(\langle p, q \rangle) \frac{q - \langle p, q \rangle p}{\|q - \langle p, q \rangle p\|}, \quad (431)$$

که در آن  $\mathbb{R}^3 \subset T_p M \subset \mathbb{R}^3$  گوی باز با شعاع انزکتیویته  $\pi$  حول مبدأ  $T_p M$  را نشان می دهد.

چارچوب های مرجع روی  $S^*$  بنا به تعریف فقط زوچهای مرتبی از بردارهای مماس خطی مستقل هستند. هنگامی که محورهای یک چارچوب مرجع به صراحت به عنوان بردارهایی در فضای جایگذاری  $\mathbb{R}^3$  بیان شوند، این چارچوب را می توان با ماتریس  $2 \times 3$  با رتبه ۲

$$[e_1^A, e_2^A] = \begin{bmatrix} e_{1,1}^A & e_{1,2}^A \\ e_{1,2}^A & e_{1,1}^A \\ e_{1,3}^A & e_{2,3}^A \end{bmatrix} =: E_p^A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}. \quad (432)$$

شناسایی کرد. این ایزو مورفیسم فضای برداری

$$E_p^A = [e_1^A, e_2^A] : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p M, \quad v^A \mapsto E_p^A v^A = v_1^A e_1^A + v_2^A e_2^A \quad (433)$$

را از ضرایب برداری به بردارهای مماس مستقل از مختصات تعریف می کند. بنابراین فضاهای مماس  $T_p M$  دقیقاً تصویر  $E_p^A$  هستند.

پیمانه های متناظر  $T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3$  :  $\psi_{TM,p}^A$  از نظر فنی فقط وارون چارچوبها هستند، هنگامی که به عنوان نگاشت های  $E_p^A : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p M$  تفسیر شوند. در مقابل، هنگامی که به عنوان ماتریس های  $2 \times 3$  که  $\mathbb{R}^3$  را به صورت غیرپوششی به  $\mathbb{R}^3$  نگاشت می دهند، تفسیر شوند،  $E_p^A$  وارون پذیر نیست اما فقط یک شبه - وارون را می پذیرد

$$(E_p^A)^+ := ((E_p^A)^\top E_p^A)^{-1} (E_p^A)^\top \in \mathbb{R}^{2 \times 3}. \quad (434)$$

از نظر هندسی، این ماتریس با ۱) تصویر کردن بردارهای در  $\mathbb{R}^3$  به تصویر  $E_p^A$  که همان  $T_p M \subset \mathbb{R}^3$  است، و ۲) اعمال وارون ایزو مورفیسم  $E_p^A : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p M$  روی این زیرفضا عمل می کند. این بدان معناست که شبه - وارون در واقع وارون روی فضای مماس است، که دلالت بر این دارد که نگاشت پیمانه با

$$\psi_{TM,p}^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto (E_p^A)^+ v. \quad (435)$$

داده می شود. به صورت باز شده، نگاشت پیمانه مطابق با

$$\begin{aligned}\psi_{TM,p}^A(v) &= \begin{pmatrix} \langle e_1^A, e_1^A \rangle & \langle e_1^A, e_\gamma^A \rangle \\ \langle e_\gamma^A, e_1^A \rangle & \langle e_\gamma^A, e_\gamma^A \rangle \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \langle e_1^A, v \rangle \\ \langle e_\gamma^A, v \rangle \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\langle e_1^A, e_1^A \rangle \langle e_\gamma^A, e_\gamma^A \rangle - \langle e_1^A, e_\gamma^A \rangle \langle e_\gamma^A, e_1^A \rangle} \begin{pmatrix} \langle e_1^A, e_\gamma^A \rangle & -\langle e_1^A, e_\gamma^A \rangle \\ -\langle e_\gamma^A, e_1^A \rangle & \langle e_1^A, e_1^A \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle e_1^A, v \rangle \\ \langle e_\gamma^A, v \rangle \end{pmatrix}. \quad (436)\end{aligned}$$

عمل می کند. توجه داشته باشید که، به طور کلی،  $\langle e_i^A, v \rangle \neq v_i^A$ . با این حال، اگر (و تنها اگر)  $E_p^A$  یک چارچوب راستهنجار باشد، یعنی برای  $G \leq 2$ ، نگاشت پیمانه به سادگی با تصویر بردار مماس روی محورهای چارچوب داده می شود:

$$\psi_{TM,p}^A(v) = (E_p^A)^\top v = \begin{pmatrix} \langle e_1^A, v \rangle \\ \langle e_\gamma^A, v \rangle \end{pmatrix} \quad \langle e_i^A, e_j^A \rangle = \delta_{ij} \quad (437)$$

عبارت صریح برای انتقالدهندهای لوی-چیویتا مستقل از مختصات در امتداد ژئودزیک‌ها مشابه عبارت نگاشت نمایی است، با این تفاوت که فرمول دوران رودریگز برای دوران دادن بردارهای مماس بین مبدأ و مقصد به جای دوران نقطه مبدأ به مقصد اعمال می شود. فرض کنید  $\gamma$  کوتاه‌ترین ژئودزیک بین  $p \in S^3 \setminus -p$  و  $q \in S^3 \setminus -q$  باشد. دوران از  $p$  به  $q$  در امتداد این ژئودزیک سپس با محور  $a = p \times q$  و زاویه  $\alpha = \arccos(\langle p, q \rangle)$  داده می شود. بر حسب این کمیت‌ها، انتقال لوی-چیویتا از یک بردار مماس جایگذاری شده  $v \in T_p M \subset \mathbb{R}^3$  در امتداد ژئودزیک  $\gamma$  با بردار دوران یافته

$$\mathcal{P}_{TM,\gamma}(v) = v \cos(\alpha) + (a \times v) \sin(\alpha) + (a \langle a, v \rangle)(1 - \cos(\alpha)) \quad (438)$$

در  $\mathbb{R}^3$  داده می شود. نسبت به پیمانه‌های  $T_q M \subset \mathbb{R}^3$  در نقطه شروع  $p$  و نقطه پایان  $q$  ژئودزیک، این انتقالدهنده با عضو گروه

$$g_\gamma^{A\tilde{A}} = \psi_{TM,p}^A \circ \mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1} = (E_p^A)^+ \circ \mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ E_q^{\tilde{A}}. \quad (439)$$

بیان می شود.

تبديلات پیمانه القا شده توسط ایزومنتری به طور مشابه نسبت به چارچوب‌های مرجع صریح با ضرب ماتریسی زیر داده می شوند:

$$g_\phi^{A\tilde{A}}(p) = \psi_{TM,\phi(p)}^A \circ \phi \circ (\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1} = (E_{\phi(p)}^A)^+ \phi E_p^{\tilde{A}} \quad (440)$$

## ۲.۱۱ CNN‌های کروی کاملاً همودای دورانی

این بخش به بحث در مورد کانولوشن‌های کروی کاملاً-SO(۳)-یا-۳-هموردا می‌پردازد که در ردیف‌های (۳۱-۳۳) جدول ۶ فهرست شده‌اند. همه آنها را می‌توان به عنوان نمونه‌های خاصی از کانولوشن‌های GM روی SO(۲)-ساختار در شکل ۵۰ آ-۲-ساختار متناظر، که علاوه بر آن تحت بازتاب‌های چارچوب نیز بسته است، در ک کرد.

به جای سازماندهی این بحث بر حسب گروههای ساختاری و نمایش‌های گروهی در نظر گرفته شده، مدل‌ها را بر اساس چارچوب‌های نظری که در آنها توسعه یافته‌اند، دسته‌بندی می‌کنیم: [۴] یک شبکه پیکسلی را روی کره تعريف کرده و کانولوشن را مستقیماً به عنوان کانولوشن GM فرمول‌بندی می‌کنند، یعنی بر حسب پیمانه‌ها، کرنل‌های راهبری‌پذیر و انتقال‌دهندهای بردار ویژگی. یک چارچوب جایگزین، کانولوشن‌های گراف روی مس‌های پیکسلی کروی است [۴]. چنین کانولوشن‌های گرافی متناظر با کانولوشن‌های GM با کرنل‌های همسانگرد هستند. بنابراین آنها بین میدان‌های اسکالار (غیرحساس به جهت) نگاشت‌های کانولوشن (راهبری‌پذیر) را روی  $S^3$  به جای کرنل‌های مس در نظر می‌گیرند [۴-۴-۴]. قضیه ۱۱.۱ اثبات می‌کند که چنین کرنل‌های راهبری‌پذیر کروی را می‌توان با کرنل‌های G-راهبری‌پذیر روی فضاهای مماس، هنگامی که در مختصات نرمال ژئودزیک بیان می‌شوند، یکی گرفت. بر اساس این نتیجه، ما در قضیه ۱۱.۲ اثبات می‌کنیم که کانولوشن‌ها با کرنل‌های کروی معادل کانولوشن‌های GM می‌هستند. برای کامل بودن، باید اشاره کنیم که چنین مدل‌هایی معمولاً در حوزه طیفی پیاده‌سازی می‌شوند. ما بر این دیدگاه تمکن نمی‌کنیم اما خواننده علاقه‌مند را به معرفه [۴] ارجاع می‌دهیم.

**کانولوشن‌های کروی CNN:** ما با CNN کروی توسط [۴] شروع می‌کنیم زیرا فرمول‌بندی آن دقیقاً با نظریه عمومی تر ما هنگام اعمال بر هندسه کروی مطابقت دارد. نویسنده‌گان (۲)-ساختار را از شکل ۵۰ فرض می‌کنند و بنابراین میدان‌های ویژگی و کرنل‌های کانولوشن SO(۲)-راهبری‌پذیر را در نظر می‌گیرند. میدان‌های ویژگی بر حسب بردارهای ویژگی که به یک شبکه نمونه‌برداری روی کره اختصاص داده شده‌اند، گسترش‌سازی می‌شوند. در حالی که این روش در اصل مستقل از طرح نمونه‌برداری خاص است، نویسنده‌گان پیشنهاد می‌کنند که هندسه کروی را با یک مش ایکوسfer گسترش‌سازی کنند. این مش با گرفتن یک بیست و چهار جایگذاری شده، تقسیم مکرر وجود آن همانطور که در شکل ۶۳ نشان

داده شده، و در نهایت تصویر کردن رئوس شبکه به صورت شعاعی روی کرده، یعنی به نرم واحد، ساخته می‌شود. میدان‌های ویژگی نمونه‌برداری شده به صورت عددی با مجموعه‌ای از بردارهای ضرب  $f^A(p) \in \mathbb{R}^c$  در رئوس شبکه  $p$  نمایش داده می‌شوند، که نسبت به برخی چارچوب‌های راست‌هنگار راست‌گرد دلخواه  $[e_1^A, e_2^A]$  در رئوس بیان می‌شوند.<sup>۱۱۳</sup> در عمل، چارچوب‌ها بیک بردار مماس منفرد با نرم واحد نمایش داده می‌شوند، که بردار چارچوب دوم از آن به طور یکتا نتیجه می‌شود زیرا چارچوب‌ها راست‌گرد هستند.

برای محاسبه کانولوشن مستقل از مختصات  $(p)$   $[K \star f]^A$  را با پول‌بک انتقال دهنده  $K$  را با پول‌بک انتقال دهنده  $\text{Exp}_p^* f^A$  از معادله (۲)  $[K \star f]^A = \text{Exp}_p^* f^A$  راهبری‌پذیر  $K$  را پاد کرنل (۲)  $\text{SO}(2)$  از میدان ویژگی  $f$  (معادله (۶۷)) مقایض کنند. همانطور که در پادگیری عمیق معمول است، در اینجا فرض می‌شود که  $K$  دارای تکیه گاه فشرده است، به طوری که فقط چند رأس را در یک همسایگی یک-حلقه یا دو-حلقه  $N_p$  حول یک رأس مرکزی  $p$  پوشش می‌دهد. در نظریه پیوسته، پول‌بک انتقال دهنده ویژگی‌ها را از تمام نقاط  $v \in \mathbb{R}^2$  برای  $\exp_p(\psi_{TM,p}^{-1})$  می‌گیرد و آنرا به  $p$  منتقل می‌کند. در عمل، میدان‌های ویژگی فقط در رئوس شبکه  $q$  نمونه‌برداری می‌شوند، که متناظر با ضرایب بردار مماس  $v_{pq}^A = \psi_{TM,p}^A \log_p(q) \in \mathbb{R}$  نسبت به پیمانه  $A$  در رأس  $p$  هستند.<sup>۱۱۴</sup>

نگاشتهای لگاریتمی  $\log_p(q)$  در اینجا همانطور که در معادله (۴۴۱) تعریف شده، محاسبه می‌شوند. انتقال دهنده‌های لوی-چیویتا ( $g_{p \leftarrow q}^{A \bar{A}}$ ) در امتداد ژئودزیک‌ها از  $q$  به  $p$  در اصل توسط معادله (۴۴۹) داده می‌شوند. از آنجا که چارچوب‌ها همگن راست‌گرد و راست‌هنگار هستند، و از آنجا که انتقال متناظر با اتصال لوی-چیویتا روی  $S^2$  است، اعضاي گروه  $g_{p \leftarrow q}^{A \bar{A}}$  مقادیری در (۲)  $\text{SO}(2)$  دارند. بنابراین آنها به طور کامل توسط زاویه بین محور اول چارچوب منتقل شده  $(e_1^{\bar{A}})$  از  $q$  و محور اول چارچوب  $e_1^A$  در  $p$  تعیین می‌شوند. با این اجزا در دست، نویسنده‌گان پیشنهاد می‌کنند که انگرال کانولوشن پیوسته را با مجموع گسسته

$$[K \star f]^A(p) = \int_{\mathbb{R}^2} K(v) [\text{Exp}_p^* f]^A(v) dv \approx \sum_{q \in N_p} K(v_{pq}^A) \rho(g_{p \leftarrow q}^{A \bar{A}}) f^{\bar{A}}(q) \quad (441)$$

روی گره‌های متش همسایه تقریب بزنند. ضریب نرم‌سازی گمشده را می‌توان به عنوان جذب شده در پارامترهای پادگرفتی  $w_i \in \mathbb{R}$  از کرنل کانولوشن (۲)  $\text{SO}(2)$ -راهبری‌پذیر  $i$  در نظر گرفت. به عنوان جایگزینی برای این تقریب ساده، نویسنده‌گان یک طرح انگرال گیری تریکی بهینه را پیشنهاد می‌کنند، که به طور تجربی نشان داده شده است که همودادی ایزومنتری  $\text{SO}(3)$  مدل را بهبود می‌بخشد.

این مدل در جدول ۶ به عنوان پردازشگر میدان‌های ویژگی که مطابق با نمایش منظم  $\text{SO}(2)$  تبدیل می‌شوند، فهرست شده است. در پیاده‌سازی خود،  $\mathbb{R}$  میدان‌های نمایش تحویل ناپذیر از (۲)  $\text{SO}$  را در کانولوشن‌ها در نظر می‌گیرند. یک تغییر پایه قبل و بعد از کانولوشن‌ها این میدان‌های ویژگی را به میدان‌های ویژگی منظم تبدیل می‌کنند، که سپس غیرخطی‌های تقطه ای مانند  $\text{ReLU}$  روی آنها عمل می‌کنند. نمایش منظم بی‌نهایت بعدی در اینجا با نمایش‌های منظم زیرگروه‌های دوری  $C_N$  تقریب زده می‌شود، که نمایش‌های تحویل ناپذیر آنها فقط نمایش‌های تحویل ناپذیر (۲)  $\text{SO}(2)$  تا یک فرکانس محدود کننده باند  $[2/N, \infty]$  هستند؛ به عنوان مثال به پیوست ۲ از [۴] مراجعه کنید. تغییر پایه بین نمایش‌ها در این مورد خاص فقط تبدیل فوریه گسسته معمول است.

**کانولوشن‌های گراف کروی:** CNN‌های کروی توسط  $\mathbb{R}$  و  $\mathbb{C}$ ، که در ردیف (۳۳) جدول ۶ فهرست شده‌اند، بر اساس کانولوشن‌های گراف متعارف هستند [۱]. مش‌های پیکسلی روی کره در اینجا به عنوان گراف تفسیر می‌شوند. شبکه‌های کانولوشنی گراف سیکنال‌ها را روی کره با ضرب آنها در چندجمله‌ای‌های درجه  $k$  به صورت  $\sum_{k=0}^K w_k L^k$  پردازش می‌کنند، که در آن  $w_k \in \mathbb{R}$  پارامترهای قابل آموزش هستند. از آنجا که ماتریس لاپلاسین گراف  $L$  پردازش می‌کند،  $w_k$  پارامترهای  $k$ -ام فقط بر همسایگی  $k$ -ها پس از  $w_0$  هستند. از آنجا که ماتریس لاپلاسین فقط برای گره‌های مجاور و روده‌های غیرصفر دارد،  $w_k$  مربوط به  $k$ -ام فقط بر همسایگی  $k$ -ها پس از  $w_0$  هستند. از آنجا که گره همسایه  $v$  در ویژگی اینباشته شده در  $p$  در ویژگی گراف آنها (شاعع) بستگی دارد، اما نه به همسایه خاص (جهت). بنابراین کانولوشن گراف در چنین مواردی کرنل‌های همسانگرد را روی گراف اعمال می‌کند. گراف پیکسلی در نظر گرفته شده روی کره این ویژگی‌ها را تقریباً برآورده می‌کند. از آنجا که جایگزاری آنها روی کره به گونه‌ای است که گره‌ها تقریباً به صورت ژئودزیک هم‌فاصله هستند، همسانگردی توبولوژیکی کرنل‌های کانولوشن گراف متناظر با همسانگردی متريک آنها روی کره است.

گروه ایزومنتری  $\text{SO}(3)$  کرده، تبدیلات پیمانه‌ای با مقادیر ۲ را القای می‌کند، یعنی با جایگایی الگوهای  $b$  در یک مکان جدید و در یک جهت جدید عمل می‌کند. به دلیل اشتراک وزن کانولوشنی و همسانگردی کرنل‌ها، کانولوشن‌های گراف به طور بدیهی همودادی ایزومنتری هستند. همانطور که قبل از معادله (۴۲۰) استدلال شد، کرنل‌های همسانگرد در چارچوب ما به عنوان کرنل‌های ۲-راهبری‌پذیر که بین میدان‌های اسکالار نگاشت انجام می‌دهند، بازیابی می‌شوند. همودادی  $\text{SO}(3)$  کانولوشن در نظریه ما با ناوردادی  $\text{SO}(2)$  ساختار کره توضیح داده می‌شود.

**کانولوشن‌های کروی با کرنل‌های روی  $S^2$ :** به عنوان یک فضای همگن، کره کانولوشن‌های گروهی (یا فضای خارج‌قسمتی) [۱] و کانولوشن‌های راهبری‌پذیر عمومی‌تر روی فضاهای همگن [۱] را می‌پذیرد.<sup>۱۱۵</sup> به جای تعریف کرنل‌های کانولوشن روی فضاهای مماس یا روی

<sup>۱۱۳</sup> این متناظر با یک انتخاب مستقل از پیمانه  $\text{Exp}_{TM,p}^A$  روی همسایگی باز  $U^{A_p}$  از هر رأس  $p$  است.

<sup>۱۱۴</sup> اگر نگاشت نمایی به شعاع اتزکیویته محدود نشود، هر رأس  $q$  با چندین بردار مماس نمایش داده می‌شود. این در عمل مشکلی ایجاد نمی‌کند زیرا فرض می‌شود که کرنل به صورت محلی در داخل شعاع اتزکیویته دارای تکیه گاه است.

<sup>۱۱۵</sup> یک مرور عمومی تراز کانولوشن‌ها روی فضاهای همگن در پیوست ۱ می‌شود.

همسايگي هاي گراف، اين رو يكردها کرنلها را بلا فاصله به عنوان توابع ماتريسي روی کره تعریف می کنند، يعني به صورت

$$\kappa : S^* \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} . \quad (442)$$

؟ [ نشان دادند که اين کرنلها برای تضمین همودايی کانولوشن باید يک محدوديت تقارني را برآورده کنند. ما در ادامه استدلال می کنیم که چنین کرنل های روی  $S^*$  معادل کرنل های  $G$ -راهبری پذیر روی فضاهای مماس هستند (قضیه ۱۱.۱)، که این دلالت بر این دارد که  $\text{CNN}$  های کروی پوشش داده شده در [؟] و [؟] را می توان به عنوان کانولوشن های  $GM$  در نظر گرفت (قضیه ۱۱.۲). يکی گرفتن بين اين دونع کرنل در اينجا با پول يك کردن کرنل های کروی از طریق نگاشت نمایی به فضاهای مماس انجام می شود. قبل از توضیح این عملیات، ما به طور خلاصه مدل های پیشنهادی در [؟] و [؟] را به عنوان نمونه های خاصی از کانولوشن های کروی با کرنل های کروی مورد بحث قرار می دهیم. برای جزئیات بیشتر در مورد این مدل ها، به ویژه در مورد فرمول بندی آنها در فضای فوریه، خواننده را به مرور جامع [؟] ارجاع می دهیم.

بحث خود را با  $\text{CNN}$  کروی کانولوشنی گروهی تو سط [؟] که در ردیف (۳۲) جدول ۶ فهرست شده است، آغاز می کنیم. این مدل پشتهدایی از  $c_{\text{out}}$  میدان اسکالار

$$f : S^* \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}}} \quad (443)$$

را روی کره با تطبیق آنها با کرنل های کروی (معادله (۴۴۲)) در هر ژست تبدیل شده با  $(3)$   $\text{SO}(3)$  پردازش می کنند. در معادلات، این عملیات به صورت زیر تعریف می شود:

$$[\kappa \star_{S^*} f](\phi) := \int_{S^*} \kappa(\phi^{-1}(p)) f(p) dp \quad \phi \in \text{SO}(3) . \quad (444)$$

توجه داشته باشید که نقشه ویژگی حاصل به عنوان پشتهدای از  $c_{\text{out}}$  تابع اسکالار روی گروه تقارنی  $(3)$   $\text{SO}(3)$  در نظر گرفته می شود. چنین نقشه های ویژگی به شکل  $\text{SO}(3) \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}}}$  (با تعداد جدید کانال های ورودی که متناظر با کانال های خروجی لایه قبل است) با کانولوشن های گروهی به شکل زیر بیشتر پردازش می شوند:

$$[\kappa \star_{\text{SO}(3)} f](\phi) := \int_{\text{SO}(3)} \kappa(\phi^{-1}\omega) f(\omega) d\omega \quad \phi \in \text{SO}(3) , \quad (445)$$

که در آن  $\text{SO}(3) \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} : \kappa$  اکنون يک تابع ماتريسي روی  $\text{SO}(3)$  است و  $s_{\text{out}}$  اندازه هار روی  $\text{SO}(3)$  است. از ديدگاه  $\text{CNN}$  های راهبری پذير روی فضاهای همگن [؟] و کانولوشن های  $GM$ ، توابع اسکالار روی  $\text{SO}(3)$  به عنوان میدان های ویژگی روی  $\text{SO}(2)/\text{SO}(3)$  در نظر گرفته می شوند، که مطابق با نمایش منظم تارهای (زیر گروه های پایدار ساز)  $(2)$   $\text{SO}(2)$  تبدیل می شوند. کانولوشن اوپرаторی در این تفسیر، کرنل های  $\text{SO}(2)$ -راهبری پذير را بين میدان های اسکالار و منظم اعمال می کند، در حالی که کانولوشن گروهی در معادله (۴۴۵) کرنل های  $\text{SO}(2)$ -راهبری پذير را بين میدان های منظم روی  $S^*$  اعمال می کند.

؟ [ کانولوشن های کروی را مانند معادله (۴۴۴) با اين فرض اضافي اعمال می کنند که کرنلها ناحيه اي هستند، يعني تحت دوران های  $\text{SO}(2)$  حول محور قطبي ناوردا هستند؛ شکل ۴۸ را مقایسه کنيد. در حالی که انگرال از نظر فني هنوز پاسخ هایي در  $(3)$   $\text{SO}(3)$  می دهد، تقارن کرنل دلالت بر اين دارد که اين پاسخ ها روی تارهای  $\text{SO}(2)$  از  $\text{SO}(3)$  هنگامی که به عنوان کلاف روی  $S^*$  تفسیر می شوند، ثابت هستند. بنابراین میدان های ویژگی حاصل به عنوان میدان های اسکالار روی  $S^*$  شناسابي می شوند، که اجازه کاربرد مکرر اين نوع کانولوشن را می دهد. توجه داشته باشید که تقارن ناحيه اي کرنل با محدوديت کرنل راهبری پذير بين میدان های (نمایش های بدیهی) که قبلاً در معادله (۴۱۹) با آن مواجه شدیم، سازگار است. همانطور که قبلاً در بخش ۱۰ بحث شد، اين محدوديت معادل محدوديت راهبری پذيری ۲ بين میدان های اسکالار در معادله (۴۲۰) است، که اين دلالت بر اين دارد که مدل [؟] در واقع  $^3\text{-humor}$  دارد. اين مدل از نظر روحی شبیه به کانولوشن های گراف کروی است که در بالا مورد بحث قرار گرفت، اما از ديدگاه متفاوتی استخراج شده و در پياده سازی به طور متفاوتی گسترش سازی می شود.

؟ [ اين مدل را از میدان های اسکالار به توابع کروي با وزن اسپين تعیین می دهن. اين توابع نه تنها به موقعیت  $S^* \in \text{SO}(3)$  روی کره بستگی دارند، بلکه علاوه بر آن به انتخاب خاص چارچوب مرجع راست هنجار و راست گرد در آن نقطه نيز بستگی دارند. آنها با نمایش های تحويل ناپذير  $s$  از  $\text{SO}(2)$  مرتبط هستند، که در آن عدد صحيح  $s \in \mathbb{Z}$  به عنوان وزن اسپين توابع شناخته می شود.<sup>۱۶</sup> مقادير آنها برای چارچوب های مختلف  $\text{SO}_p M$  از  $\text{SO}(2)$ -ساختار  $\text{SOM}$  به گونه ای محدود شده اند که تبدیلات پیمانه ای چارچوب با  $(2)$   $\text{SO}(g) \in \text{SO}(g)$  منجر به تبدیل مقدار تابع با  $(g)$  می شود. بنابراین، در معادلات، آنها با<sup>۱۷</sup>

$${}_s f : \text{SOM} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{_____} {}_s f([e_1, e_2] \triangleleft g) = \rho_s(g) {}_s f([e_1, e_2]) \quad \forall [e_1, e_2] \in \text{SO}_p M, g \in \text{SO}(2) ; \quad (446)$$

<sup>۱۶</sup> می توان اين مفهوم را به نمایش های اسپين، که با وزن های اسپين نيمه صحیح برجسب گذاري شده اند، تعیین داد.

<sup>۱۷</sup> يک پياده سازی با مقادير حقیقی به جای آن توابع با وزن اسپين به شکل  $f : \text{SOM} \rightarrow \mathbb{R}^{\dim(\rho_s)}$  را در نظر می گيرد، که در آن  $\rho_s$  نمایش های تحويل ناپذير  $\text{SO}(2)$  روی اعداد حقیقی هستند.

تعريف می‌شوند؛ برای جزئیات بیشتر و تعاریف جایگزین به [۴] مراجعه کنید. به شباht این محدودیت تقارنی با رابطه همارزی

$$[[e_i]_{i=1}^n \triangleleft g, f] \sim_{\rho_s} [[e_i]_{i=1}^n, \rho_s(g)f] \quad (447)$$

از معادله (۱۷۰) که زیربنای تعريف کلاف‌های همبسته است، توجه کنید. توابع کروی با وزن اسپین در واقع معادل مقاطعی از کلاف‌های همبسته  $(SOM \times \mathbb{C})/\sim_{\rho_s}$  هستند؛ به عنوان مثال به گزاره ۳۶.۲ در [۴] مراجعه کنید. آنها در نظریه ما به عنوان میدان‌های نمایش تحويل ناپذیر  $SO(2)$  ظاهر می‌شوند، از جمله میدان‌های اسکالار برای  $\theta = 0$  و میدان‌های برداری برای  $\theta = s$ . شبکه‌های عصبی پیشنهادی توسعه [۴] اویزگی‌های با وزن اسپین را با کرنل‌های با وزن اسپین روی کره کانولوشن با کرنل‌های  $SO(2)$ -راهبری پذیر است که در آن  $\rho_{\text{so}}$  و  $\rho_{\text{sp}}$  نمایش‌های تحويل ناپذیر هستند.

مدل‌های [۴] در ابتدا در حوزه فضایی فرمول‌بندی شده‌اند، یعنی به عنوان پردازش توابع روی  $S^2$  همانطور که در بالا بحث شد. با این حال، آنها در حوزه طیفی پیاده‌سازی می‌شوند، که به لطف قضاایی کانولوشن تعمیم یافته روی  $S^2$  و روی  $SO(3)$  ممکن است [۴]. [۴] این روش را در راهبرد را تعیین می‌دهند و مدلی را پیشنهاد می‌کنند که بر اساس ترکیبات خطی یادگرفته شده از تمام مدهای فوریه میدان‌های ویزگی با فرکانس یکسان است. نویسندها اگان استدلال می‌کنند که این روش را بین میدان‌های خطی  $SO(3)$ -هموردا را بین میدان‌های ویزگی روی کره پوشش می‌دهد. از سوی دیگر، [۴] نشان می‌دهند که هر چنین نگاشتی را می‌توان در حوزه فضایی به عنوان یک کانولوشن با کرنل‌های کروی  $(\mathbb{R}-راهبری) \rightarrow SO(2)$  نوشت. یک ویزگی قابل توجه مدل پیشنهادی توسعه [۴] این است که به طور کامل در فضای فوریه عمل می‌کند: به جای تبدیل بازگشت به حوزه فضایی و اعمال غیرخطی‌های نقطه‌ای مانند ReLU در آنچه، همانطور که در روش‌های قبلی انجام می‌شد، نویسندها اگان حاصلضرب تانسوری را بین تمام میدان‌های ویزگی محاسبه کرده و متعاقباً آنها را از طریق تجزیه کلیش-گوردون به ویزگی‌های بودن غیرخطی‌ها تمام می‌شود. وظایف یادگیری خاص، به ویزه در علوم طبیعی، ممکن است از چنین غیرخطی‌هایی بهره‌مند شوند زیرا تعاملات فیزیکی اغلب با حاصلضرب‌های تانسوری توصیف می‌شوند.

همانطور که در [۴] استدلال شده است، تمام این مدل‌ها را می‌توان به عنوان اعمال کرنل‌های راهبری پذیر روی  $S^2$  در نظر گرفت که بین میدان‌های اسکالار [۴]، میدان‌های ویزگی منظم [۴] یا میدان‌های نمایش تحويل ناپذیر [۴] نگاشت انجام می‌دهند. با قیامانده این بخش و پیوست ج ما نشان می‌دهیم که آنها را نیز می‌توان به عنوان کانولوشن‌های  $GM$  در نظر گرفت. ادعای اینکه کانولوشن‌های کروی با کرنل‌های راهبری پذیر روی  $S^2$  معادل کانولوشن‌های  $GM$  هستند، در قضیه ۱۱.۲ دقیقاً بیان می‌شود. این قضیه به طور حیاتی به قضیه ۱۱.۱ متکی است، که یک ایزومورفیسم را بین کرنل‌های راهبری پذیر کروی و کرنل‌های  $G$ -راهبری پذیر روی فضاهای مماس برقرار می‌کند.

فرض کنید  $\mathcal{I}$  هر گروه ایزومرتی متعالی از کره باشد، یعنی  $\mathcal{I} = SO(3)$  یا  $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ -کانولوشن‌های کروی  $\mathcal{I}$ -هموردا را بر حسب کرنل‌های  $\text{Stab}_n$ -راهبری پذیر  $\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{so}} \times c_{\text{so}}} : S^2 \rightarrow \text{Stab}_n$  که در آن  $\mathcal{I} = \text{Stab}_n$  تووصیف می‌کنند، که از نظر توضیح پذیر  $\mathcal{I}$  به  $n$  است، به عنوان مثال قطب شمال. از آنچه که این کرنل‌های راهبری پذیر ممکن نیست. با این حال، از آنچه که از نظر تپولوژیکی با  $\mathbb{R}^n$  متمایز است، تعريف متفقیم یک ایزومورفیسم بین آنها و کرنل‌های  $G$ -راهبری پذیر ممکن نیست. با این حال، از آنچه که قطب جنوب  $-n$ -یک مجموعه با اندازه صفر است، می‌توانیم دامنه انتگرال‌گیری  $S^2$ -کانولوشن‌های کروی را بـ  $S^2 \setminus -n$  جایگزین کنیم بدون اینکه نتیجه تغییر کند. با این تبلیغ، کرنل‌های راهبری پذیر کروی [۴] به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathcal{K}_{\rho_{\text{so}}, \rho_{\text{sp}}}^{\text{Stab}_n} := \left\{ \kappa : S^2 \setminus -n \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{so}} \times c_{\text{so}}} \mid \kappa(\xi(p)) = \rho_{\text{so}}(g_\xi^{NN}(p)) \cdot \kappa(p) \cdot \rho_{\text{sp}}(g_\xi^{XP}(p))^{-1} \right. \\ \forall p \in S^2 \setminus -n, \xi \in \text{Stab}_n \}, \quad (448)$$

هنگامی که به نمادگذاری ما ترجمه شود. از آنچه که کرنل‌ها به صورت سراسری روی کره تعريف شده‌اند، مقادیر آنها در  $\mathbb{R}^{c_{\text{so}} \times c_{\text{so}}}$  نسبت به پیمانه‌های بالقوه متفاوت  $N$  در  $n$  که کرنل در آن متمرکز است،  $P$  در  $S^2$  که کرنل یک ویزگی  $f^P(p) \in \mathbb{R}^{c_{\text{so}}}$  را منطبق می‌کند و در  $(p)$  که این ویزگی تحت عمل  $X$  در  $\text{Stab}_n$  یعنی  $\text{Stab}_n \cdot X \in \text{Stab}_n$  جایجا می‌شود، بیان می‌شوند. این محدودیت کرنل تمام مقادیر کرنل را که روی مدارهای قرار دارند، از طریق تبدیلات پیمانه القا شده توسط ایزومرتی آنها  $\text{Stab}_n \cdot p = \{\xi(p) \mid \xi \in \text{Stab}_n\}$  می‌کند؛ به معادلات (۲۹۹) و (۳۰۲) مراجعه کنید.<sup>۱۱۸</sup> کرنل‌های  $G$ -راهبری پذیر معادل می‌شوند، که در آن  $G \cong \text{Stab}_n$  با

$$\mathcal{K}_{\rho_{\text{so}}, \rho_{\text{sp}}}^{G, B_{\mathbb{R}}(\cdot, \pi)} := \left\{ K : B_{\mathbb{R}}(\cdot, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{so}} \times c_{\text{so}}} \mid K(gv) = \rho_{\text{so}}(g) \cdot K(v) \cdot \rho_{\text{sp}}(g)^{-1} \quad \forall v \in B_{\mathbb{R}}(\cdot, \pi), g \in G \right\}. \quad (449)$$

داده می‌شود. دامنه کرنل در اینجا از  $\mathbb{R}^2$  به گوی باز  $\{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\| < \pi\}$  با شعاع  $\pi$  حول مبدأ  $\mathbb{R}^2$  محدود شده است  $\square$  که می‌توان آن را از طریق نگاشت نمایی با  $-n$  که کرنل در آن متمرکز است،  $P$  در  $S^2$  یکی گرفت. توجه داشته باشید که  $\mathcal{K}_{\rho_{\text{so}}, \rho_{\text{sp}}}^{G, B_{\mathbb{R}}(\cdot, \pi)}$  خوش تعريف است زیرا  $G \cong \text{Stab}_n$  شامل ایزومرتی‌ها است، که این دلالت بر  $2 = G = \text{SO}(2)$  یا  $2 = P = B_{\mathbb{R}}(\cdot, \pi)$  دارد، که تحت عمل آنها  $B_{\mathbb{R}}(\cdot, \pi)$  بسته است. ملاعوه بر این ضربت دترمینان را از محدودیت  $G$ -راهبری پذیری عمومی تر در معادله (۸۶) حذف کردیم زیرا  $|\det g| \leq 2$ . محدودیت کرنل ما به طور قابل توجهی ساده‌تر از محدودیت [۴] است زیرا کرنل را به صورت محلی نسبت به یک پیمانه منفرد توصیف می‌کند، به جای اینکه به صورت سراسری نسبت به

<sup>۱۱۸</sup> [۴] تبدیلات پیمانه القا شده توسط ایزومرتی را با  $(\xi) h(p)$  به جای  $g_\xi^{XP}(p)$  نشان می‌دهند، با این فرض که پیمانه‌های  $X$  در  $(p)$  و  $P$  در  $p$  یکسان هستند. تعريف آنها از  $(\xi) h(p)$  مشابه معادله ما (۲۹۳) است.

یک اطلس از پیمانه‌ها توصیف کند. توجه داشته باشد که ما فرض همواری را روی کرnel‌ها حذف کردیم، زیرا همواری یا پیوستگی میدان‌های ویژگی توسط  $\Omega$  مورد بحث قرار نگرفته است. این ویژگی را می‌توان به راحتی با خواستن اینکه کرnel‌های  $G$ -راهبری‌پذیر برای  $\Omega$  که به سمت  $\pi$  می‌رود، به مقدار یکسانی همگرا شوند، که از طریق نگاشت نهایی متاظر با قطب جنوب است، اضافه کرد.

فضاهای کرnel‌های  $G$ -راهبری‌پذیر روی  $B_{\mathbb{R}^n}$  و کرnel‌های  $G$ -راهبری‌پذیر روی  $S^n \setminus -n$  ایزومورف هستند، یعنی کرnel‌های آنها با یک نگاشت وارون‌پذیر  $\Omega$  که محدودیت‌های کرnel را رعایت می‌کند، یکی گرفته می‌شوند:

$$\begin{array}{ccc} & \Omega & \\ \mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square}}^{G, B_{\mathbb{R}^n}(\cdot, \pi)} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square}}^{\text{Stab}_n} \\ & \Omega^{-1} & \end{array} \quad (450)$$

این ایزومورفیسم (یا بهتر بگوییم وارون آن  $\Omega^{-1}$ ) را می‌توان به عنوان مشابه پولبک انتقال‌دهنده از میدان‌های ویژگی در نظر گرفت: این ایزومورفیسم مقدادر کرnel را از نقاط  $\psi_{TM,n}^N(\cdot, \pi)^{-1} \in S^n \setminus -n$  به مختصات نرمال ژئودزیک ( $\psi_{TM,n}^N(\cdot, \pi)$ ) پولبک می‌کند. برای بیان مقدادر کرnel از تمام نقاط  $p \in S^n \setminus -n$  نسبت به همان پیمانه، این ایزومورفیسم انتقال‌دهنده‌های لوی-چوویتا ( $g_{n \leftarrow p}^{NP} \rho$ ) را از  $p$  در امتداد ژئودزیک‌ها به قطب شمال  $n$  اعمال می‌کند. علاوه بر این، مقدادر کرnel را با عنصر حجم ریمانی  $\sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|} := \sqrt{|\det(\eta_p(\frac{\partial}{\partial v_i}|_p, \frac{\partial}{\partial v_j}|_p)_{ij})|}$  نسبت به سیستم مختصات نرمال ژئودزیک (چارت مختصاتی)  $S^n \setminus -n \rightarrow B_{\mathbb{R}^n}(\cdot, \pi)$ ،  $p \mapsto v(p) := \psi_{TM,n}^N \log_n p$  :  $\Omega$  تغییر مقیاس می‌دهد.<sup>۱۱۹</sup> قضیه زیر ایزومورفیسم فضای کرnel را به طور رسمی تعریف و اثبات می‌کند.

**قضیه ۱۱.۱ (کرnel‌های راهبری‌پذیر کروی در مختصات ژئودزیک).** فرض کنید  $\mathcal{I}$  هر گروه ایزوومتری متعددی از  $S^n$  باشد و  $\text{Stab}_n$  زیرگروه پایدارساز آن در قطب شمال  $S^n$  در  $n$  باشد. با توجه به هر انتخاب از پیمانه  $\psi_{TM,n}^N$  در این قطب، فرض کنید  $G \leq \text{GL}(2)$  گروه ساختاری ایزومورف باشد که  $\text{Stab}_n$  را در مختصات مطابق با  $\sim G$ ،  $\xi \mapsto \psi_{TM,n}^N \circ \xi_{*, TM} \circ (\psi_{TM,n}^N)^{-1}$  نمایش می‌دهد. فضای  $\mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square}}^{\text{Stab}_n}$  از کرnel‌های  $G$ -راهبری‌پذیر روی  $S^n \setminus -n$  توسط  $\Omega$  [معادله (۴۴۸)] سپس با فضای  $\mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square}}^{G, B_{\mathbb{R}^n}(\cdot, \pi)}$  از کرnel‌های  $G$ -راهبری‌پذیر روی گوی باز ( $B_{\mathbb{R}^n}(\cdot, \pi)$ ) ایزومورف است. ایزومورفیسم فضای کرnel

$$\Omega : \mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square}}^{G, B_{\mathbb{R}^n}(\cdot, \pi)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square}}^{\text{Stab}_n} \quad (451)$$

با

$$\Omega(K) : S^n \setminus -n \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}}, \quad p \mapsto [\Omega(K)](p) := K(\psi_{TM,n}^N \log_n p) \rho_{\square\square}(g_{n \leftarrow p}^{NP}) \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}^{-1} \quad (452)$$

داده می‌شود اگر کرnel نسبت به پیمانه‌های (بالقوه مستقل)  $N$  در  $n$  و  $P$  در  $p$  بیان شود. وارون آن با

$$\Omega^{-1}(\kappa) : B_{\mathbb{R}^n}(\cdot, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}}, \quad v \mapsto [\Omega^{-1}(\kappa)](v) := \kappa(\exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1} v) \rho_{\square\square}(g_{n \leftarrow p}^{NP})^{-1} \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}, \quad (453)$$

داده می‌شود، که در آن ما  $\psi_{TM,n}^N(\cdot, \pi)^{-1} = \exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1} v$  را به صورت مخفف نوشته‌ایم.

اثبات: با جایگذاری این دو عبارت، به راحتی می‌توان دید که  $\Omega^{-1} \circ \Omega = \text{id}_{\mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square}}^{\text{Stab}_n}}$  است زیرا  $\Omega \circ \Omega^{-1} = \text{id}_{\mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square}}^{G, B_{\mathbb{R}^n}(\cdot, \pi)}}$ . بخش فنی اثبات این است که نشان دهم این دو محدودیت کرnel یکدیگر را نتیجه می‌دهند، که این کار در  $\square$  پیوست ج ۱. انجام شده است.

توجه داشته باشد که ضرب مقياس‌بندی حجم برای برقراری ایزومورفیسم بین فضاهای کرnel ضروری نیست اما برای معادل ساختن انگرال کانولوشن کروی روی  $S^n \setminus -n$  با انگرال کانولوشن  $GM$  روی  $B_{\mathbb{R}^n}(\cdot, \pi)$  لازم است.

? کانولوشن  $[f] \star_{S^n} \kappa$  از یک میدان ویژگی ( $A_{\square\square}$ )  $f \in \Gamma(A_{\square\square})$  را با کرnel‌های راهبری‌پذیر کروی  $\kappa \in \mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square}}^{\text{Stab}_n}$  در مختصات تعريف می‌کنند. با توجه به پیمانه‌های  $P$  در  $p$  و  $Q$  در  $q$  (اشتباه تایپی در متن اصلی، باید  $P$  در  $p$  و  $Q$  در  $q$  باشد)، فرض کنید  $\mathcal{I}$  ایزوومتری  $\phi_p \in \mathcal{I}$  ایزوومتری یکایی باشد که قطب شمال را به  $p$  منتقل می‌کند، یعنی  $\phi_p(n) = p$ ، و چارچوب در  $n$  را به چارچوب در  $p$  تغییر می‌دهد، یعنی  $(\phi_p)_*(\sigma_{*, GM}^N(n)) = \sigma_p^P(p)$  (یا  $(\phi_p)_*(\sigma_{*, GM}^N(n)) = \sigma_p^P(p)$ )

<sup>۱۱۹</sup> توجه داشته باشد که پایه‌های مختصاتی  $\left[ \frac{\partial}{\partial v_i} |_p \right]$  که توسط مختصات نرمال ژئودزیک ( $\psi_{TM,n}^N(\cdot, \pi)$ ) ندارند اما فقط برای تصحیح حجم ریمانی هنگام انگرال‌گیری در مختصات نرمال ژئودزیک روی  $G$  موجود نیستند. این پایه‌ها نقشی در کانولوشن  $GM$  ندارند اما همچنانکه هنگام انگرال‌گیری در مختصات نرمال ژئودزیک روی  $G$  ظاهر می‌شوند.

طور معادل  $e = g_{\phi_p}^{PN}(n)$  علاوه بر این، فرض کنید  $X$  پیمانه در  $(q)^{-1}\phi_p^{-1}$  باشد. کانولوشن کروی سپس در  $[?]$  نسبت به این پیمانه‌ها به صورت نقطه‌ای با

$$[\kappa \star_{S^r} f]^P(p) := \int_{S^r} \kappa(\phi_p^{-1} q) \rho_{\square}(g_{\phi_p}^{XQ}(q)) f^Q(q) dq = \int_{S^r \setminus p} \kappa(\phi_p^{-1} q) \rho_{\square}(g_{\phi_p}^{XQ}(q)) f^Q(q) dq, \quad (454)$$

تعريف می‌شود، که در آن ما نقطه مقابل  $p$  – را در مرحله دوم بدون تغییر نتیجه حذف کردیم.<sup>۱۲۰</sup> به طور شهودی، این عملیات یک ویژگی خروجی را در  $p$  با (۱) گرفن هم کرnel و هم میدان ورودی، (۲) دوران دادن آنها از طریق  $\phi_p^{-1}$  به طوری که  $p$  به قطب شمال منتقل شود (از طریق تبدیل پیمانه القا شده برای بردار ویژگی) و (۳) انترگال‌گیری از حاصلضرب آنها روی کره، محاسبه می‌کند. بنابراین، این عملیات به جای اشتراک مستقیم وزن‌ها روی فضاهای مماس، همانطور که مانجام می‌دیم، وزن‌ها از طریق عمل ایزومنتری به اشتراک می‌گذارند. بنا به تعریف  $\phi_p$ ، هر دو تعریف از اشتراک وزن، کرنل را در مکان هدف  $p$  به گونه‌ای جهت‌دهی می‌کنند که با چارچوب انتخاب شده  $(p)^P \sigma$  در این مکان تراز شود. قضیه زیر اثبات می‌کند که کانولوشن  $GM$  با یک کرنل  $K \in \mathcal{R}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^{G, B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)}$  معادل کانولوشن کروی با کرنل کروی متناظر  $(K)$  است.

**قضیه ۱۱.۲ (کانولوشن‌های راهبری‌پذیر کروی به عنوان کانولوشن‌های  $\Omega$ )**. فرض کنید  $Stab_n$  زیرگروه پایدارساز هر گروه ایزومنتری متعددی از  $S^r$  باشد و (۱)  $G \leq GL(S^r)$  باشد و (۲) هر گروه ساختاری ایزومنورف باشد. علاوه بر این، فرض کنید  $K \in \mathcal{R}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^{G, B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)}$  هر کرنل  $G$ -راهبری‌پذیر روی گوی باز  $B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)$  با شاعع  $\pi$  باشد (معادله (۴۴۹)) و فرض کنید  $\Omega(K) \in \mathcal{R}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^{Stab_n(\Omega)}(K)$  کرنل راهبری‌پذیر متناظر آن روی  $-n S^r$  باشد (معادلات (۴۴۸) و (۴۵۲)). کانولوشن  $GM$  (در اینجا برایوضوح با  $\star_{GM}$  نشان داده شده) با سپس معادل کانولوشن کروی  $(S^r, \star_{GM})$  (معادله (۴۵۴)) توسط  $\star$  با کرنل کروی  $(K)$  است، یعنی

$$\Omega(K) \star_{S^r} f = K \star_{GM} f \quad (455)$$

برای هر میدان ویژگی کروی  $f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square})$  برقرار است.

□ اثبات: اثبات در پیوست ج ۲ ارائه شده است.

این اثبات ادعای ما را توجیه می‌کند که مدل‌های [؟] که در این بخش مورد بحث قرار گرفتند، همگی موارد خاصی از کانولوشن‌های  $GM$  هستند.

### ۳.۱۱ CNN‌های کروی همودای دوران سمتی در توپولوژی‌های استوانه‌ای

علاوه بر کانولوشن‌های کروی کاملاً  $SO(3)$  – یا همودا، سیاری از CNN‌های کروی طوری طراحی شده‌اند که نسبت به دوران‌های سمتی حول یک محور قطبی مشخص، همودا باشند. تمام مدل‌های مورد بحث در این بخش یا بر (۲)  $SO(3)$ -ساختار  $\{\cdot\}$  – ناوردا که در شکل‌های ۵۰ و ۵۲ نشان داده شده است، یا به طور جایگزین، بر ساختار نشان داده شده در شکل ۵۳ تکیه دارند. به دلیل بدیهی بودن گروه ساختار  $\{e\}$ ،  $G = \{e\}$ ، فضاهای کرنل نامحدود باقی می‌مانند ( $\{e\}$ -راهبری‌پذیر). ویژگی‌ها مطابق با اتصال بدیهی یکای  $\{e\}$  – سازگار منتقل می‌شوند که با اتصال لوی-چوپیتا کروی معمول متفاوت است. با این اطلاعات، و با نگاشت‌های نمایی صریح در معادله (۴۳۰)، کانولوشن‌های  $GM$  کروی در این بخش در تئوری کاملاً مشخص شده‌اند. در عمل، پیاده‌سازی‌ها، که در ردیف (۳۴) جدول ۶ فهرست شده‌اند، در پیاده‌سازی‌های عددی خود متفاوت هستند، که در ادامه به بحث در مورد آنها می‌پردازیم.

همزمان با تعریف ما از اشتراک وزن کانولوشنی، مدل‌های [؟] یک کرنل الگوی داده شده را روی فضاهای مماس با جهت‌دهی آن نسبت به چارچوب‌های  $\{e\}$ -ساختار در نظر گرفته شده در شکل ۵۰ به اشتراک می‌گذارند. با این حال، برخلاف کانولوشن‌های  $GM$  تطبیق این کرنل‌ها با میدان ویژگی از طریق نگاشت‌های نمایی (یا پولک‌های انتقال‌دهنده) انجام نمی‌شود، بلکه از طریق تصویر نومونیک انجام می‌شود. این تصویر نومونیک در هر نقطه  $p$  با

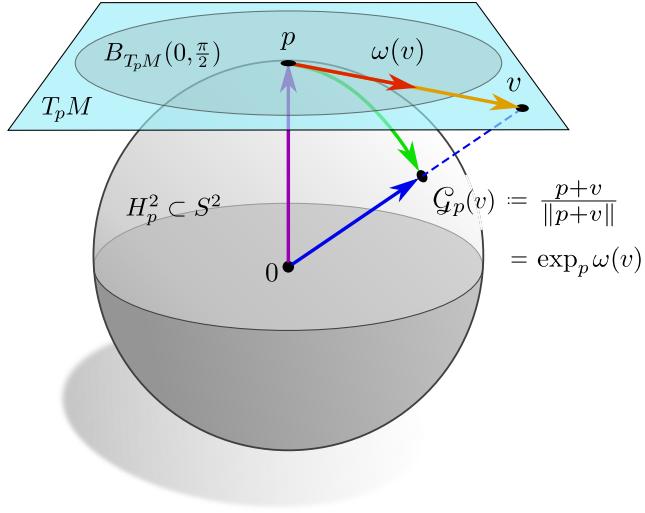
$$\mathcal{G}_p : T_p M \rightarrow H_p^r, \quad v \mapsto \frac{p + v}{\|p + v\|}, \quad (456)$$

تعريف می‌شود، که در شکل ۵۱ به تصویر کشیده شده است. جمع  $v \in T_p M \subset \mathbb{R}^r \subset \mathbb{R}^r$  با بردارهای مماس  $v \in T_p M \subset \mathbb{R}^r$  در اینجا در فضای جایگذاری  $\mathbb{R}^r$  انجام می‌شود و نرمال‌سازی نتیجه را به کره باز می‌گرداند. هم‌دامنه تصویر نومونیک، نیمکره «بالایی»

$$H_p^r := \{q \in S^r \mid \langle p, q \rangle_{\mathbb{R}^r} > 0\} \subset S^r \quad (457)$$

است که حول  $p$  متقارن شده است. با توجه به این تفاوت در تصویرهای کرنل، ممکن است به نظر برسد که مدل‌های [؟] به عنوان کانولوشن  $GM$  توضیح داده نمی‌شوند (یا فقط به طور تقریبی). قضیه زیر، با این حال، اثبات می‌کند که تصویر نومونیک معادل یک تصویر از طریق نگاشت

<sup>۱۲۰</sup> این فرمول‌بندی عمومی‌تر از فرمول‌بندی در معادله (۴۴۴) است. دومی برای کرنل‌های اسکالر را به میدان‌های ویژگی منظم نگاشت می‌دهند، بازیابی می‌شود.



شکل ۱۵: تصویر نومونیک  $G_p : T_p M \rightarrow H_p^\circ$  از فضای مماس در  $p$  به نیمکره بالایی  $H_p^\circ \subset S^\circ$  حول  $p$ . نتیجه که کرده به عنوان جایگذاری شده در  $\mathbb{R}^n$  تفسیر شود، تصویر نومونیک  $G_p(v)$  ( $v \in T_p M \subset S^\circ \subset \mathbb{R}^n$ ) با مجموع  $v + p \in S^\circ$  و  $v \in \mathbb{R}^n$  (بنفس) ( $v \in \mathbb{R}^n$ ) (زرد) در فضای محیطی، و به دنبال آن یک نرمال‌سازی برای بازگشت به کرده، داده شود. قضیه ۱۱.۳ اثبات می‌کند که این عملیات معادل یک تصویر از یک بردار با تاب شعاعی  $\omega(v) = \arctan(\frac{\|v\|}{\|v\|}) \in B_{T_p M}(\cdot, \frac{\pi}{2})$  نمایی (سبز) است. بنابران، کانون‌لوشن‌های کروی متنبی بر تصویر نومونیک در  $\mathbb{R}^n$  موارد خاصی از کانون‌لوشن‌های  $GM$  کروی با کرنل‌های دارای تاب شعاعی هستند. کانون‌لوشن‌های  $GM$  عمومی‌تر هستند زیرا به تصویرهای کرنل روی کل کرده به جای فقط نیمکره بالایی اجازه می‌دهند.

نمایی پس از اعمال یک تاب شعاعی

$$\omega : T_p M \rightarrow B_{T_p M}(\cdot, \frac{\pi}{2}), \quad v \mapsto \arctan(\|v\|) \frac{v}{\|v\|} \quad (458)$$

به فضاهای مماس است، که بردارهای مماس را به یک گوی باز با شعاع  $\frac{\pi}{2}$  حول مبدأ منقبض می‌کنند:

**قضیه ۱۱.۳ (تصویرهای نومونیک به عنوان نگاشتهای نمایی دارای تاب).** تصویر نومونیک  $G_p$  از  $T_p M$  به نیمکره بالایی  $H_p^\circ \subset S^\circ$  که در معادله (۴۵۶) تعریف شده است، معادل یک تصویر از تاب شعاعی آن  $(T_p M) = B_{T_p M}(\cdot, \frac{\pi}{2})$  (معادله (۴۵۸)) از طریق نگاشت نمایی است، یعنی نمودار زیر جایگزین است:

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{\quad G_p \quad} & H_p^\circ \subset S^\circ \\ \omega \downarrow & & \searrow \exp_p \\ B_{T_p M}(\cdot, \frac{\pi}{2}) & \xrightarrow{\quad \exp_p \quad} & \end{array} \quad (459)$$

در معادلات،

$$G_p(v) = \exp_p \circ \omega(v) \quad (460)$$

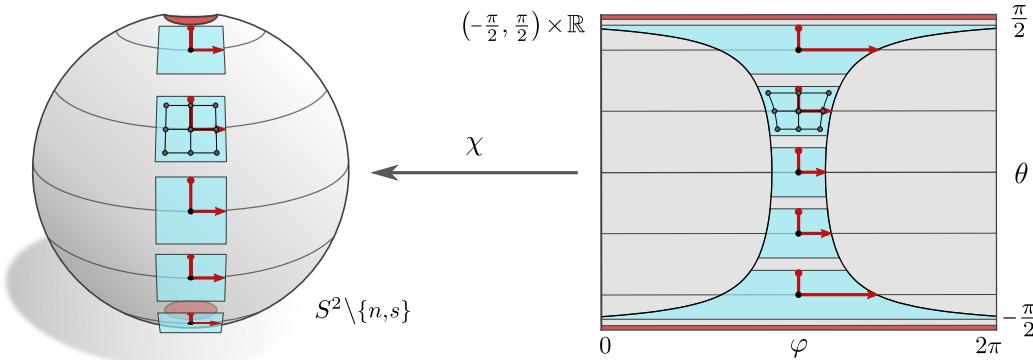
برای هر  $v \in T_p M$  و هر  $p \in S^\circ$  برقرار است.

اثبات: اثبات با محاسبه ساده زیر داده می‌شود، که برای هر  $v \in T_p M$  و هر  $p \in S^\circ$  برقرار است:

$$\begin{aligned} \exp_p \circ \omega(v) &\stackrel{(1)}{=} p \cdot \cos(\|\omega(v)\|) + \frac{\omega(v)}{\|\omega(v)\|} \cdot \sin(\|\omega(v)\|) \\ &\stackrel{(2)}{=} p \cdot \cos(\arctan(\|v\|)) + \frac{v}{\|v\|} \cdot \sin(\arctan(\|v\|)) \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{p + v}{\sqrt{1 + \|v\|^2}} \\ &\stackrel{(4)}{=} \frac{p + v}{\|p + v\|} \\ &\stackrel{(5)}{=} G_p(v) \end{aligned} \quad (461)$$

مراحل اول و دوم از تعریف صریح نگاشت نمایی کرده جایگذاری شده، معادله (۴۳۰)، و تاب شعاعی، معادله (۴۵۸)، استفاده می‌کنند. مرحله سوم از آنجا نتیجه می‌شود که  $\sin \circ \arctan(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  و  $\cos \circ \arctan(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ . در مرحله چهارم ما از این استفاده کردیم که  $\square$

در حالی که مرحله آخر تصویر نومونیک، معادله (۴۵۶) را شناسایی کرد.



شکل ۵۲: نمایش  $\{e\}$ -ساختار  $(\mathbb{S}O)$ -ناوردا که توسط اکثر مدل‌های مورد بحث در بخش ۳.۱۱ در نظر گرفته شده است. تمام جاچوب‌ها  $\left[ \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{\cos(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]$  به سمت قطب شمال تراز شده‌اند و نسبت به متريک جايجذاري کره در  $\mathbb{R}^3$  راست‌هنچار هستند. نگاشت مختصات کروي  $S^3 \setminus \{n, s\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  از معادله (۴۲۷) اجازه می‌دهد تا میدان‌های ويژگي کروي به میدان‌های ويژگي روی زوایای کروي  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (پولبک شوند، که به آن تصویر هم‌مستطيلي گفته می‌شود. از آنجا که  $\chi$  ايزوموريک نیست،  $\{e\}$ -ساختار کروي در مختصات با يك ضريب وابسته به عرض جغرافياي  $\theta / \cos(\theta)$  که به سمت قطب‌ها و اگرها می‌شود، تغيير شكل می‌باشد. کانولوشن کروي روی  $\mathbb{R}^3$  ساختار در  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  با تصویر کردن در درون‌يابي يك شبکه نمونه‌برداری کرنل روی فضاهای مماس به يك شبکه نمونه‌برداری میدان ويژگي روی کره پيدام‌سازی می‌شود. اگر میدان‌های ويژگي در عرض روی تصویر هم‌مستطيلي نمونه‌برداری شوند، شبکه نمونه‌برداری تغیير شكل یافته روی  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  نگاشت داده می‌شود [۱۰]. توجه داشته باشید که شبکه‌های نمونه‌برداری منظم تصویر هم‌مستطيلي سیگنال را (نسبت به متريک کروي) به سمت قطب‌ها بيش نمونه‌برداری می‌کنند.

این قضيه دلالت بر این دارد که کانولوشن‌های مبتنی بر تصویر نمونيک در  $\mathbb{R}^3$  در واقع موارد خاصی از کانولوشن‌های  $GM$  پس از يك گرفتن کرنل‌ها از طريق تاب شعاعي  $\mathcal{L}$  هستند.<sup>۱۱۱</sup> توجه داشته باشید که اين يك گرفتن نه تنها برای کرنل‌هاي  $\{e\}$ -راهيري پذير بلکه برای هر زير‌گروه  $G \leq G$  نيز برقرار است زيرا محدوديت‌هاي  $G$ -راهيري پذيری متناظر فقط بر بخش‌های زاويه‌اي کرنل‌ها تأثير می‌گذارند اما مستقل از بخش‌های شعاعي تاب داده شده هستند. ما علاوه بر اين می‌خواهيم اشاره کنیم که تصویر مبتنی بر نگاشت نمایي در کانولوشن‌های  $GM$  از اين جهت عمومي تراز تصویر کرنل نمونيک است که می‌تواند کرنل‌هاي را توصيف کند که فراتر از نيمکره بالائي  $H_p^k$  حول  $p$  گشتش می‌ياند. توجه داشته باشید که هر دو تصویر کرنل در حد عملی مرتبط کرنل‌هاي کوچک، حتی بدون تاب شعاعي، معادل می‌شوند زира  $(\|v\| = \|v\| + \mathcal{O}(\|v\|^3))$ .

پياده‌سازی‌هاي  $\mathbb{R}^3$  در پيوستان همگي با يكديگر و با کانولوشن  $GM$  ما معادل هستند، با اين حال، گسته‌سازی‌هاي عددی آنها متفاوت است.  $\mathbb{R}^3$  میدان‌های ويژگي را روی شبکه‌های نمونه‌برداری (تقریباً) یکنواخت روی کره گسته‌سازی می‌کنند. به طور خاص،  $\mathbb{R}^3$  از «مجموعه مارپیچ تعمیم‌یافته روی  $S^3$ » از  $\mathbb{R}^3$  به عنوان نقاط نمونه‌برداری استفاده می‌کنند، در حالی که  $\mathbb{R}^3$  از  $\mathbb{R}^3$  يك ايكوسфер استفاده می‌کنند. از آنجا که تصویرهای نمونيک از شبکه‌های نمونه‌برداری کرنل روی فضاهای مماس به شبکه نمونه‌برداری کروي طبقت ندارند، نويسندگان بين آنها درون‌يابي دو خطي리 انجام می‌هند. ضرائب نمونه‌برداری کرنل در اينجا می‌توانند در يك مرحله آفلайн از پيش محاسبه شوند. کانولوشن واقعی سپس يك میدان ويژگي خروجي را با منقبض کردن کرنل‌هاي تصویر شده و درون‌يابي شده در هر نقطه با میدان ورودي محاسبه می‌کند.

$\mathbb{R}^3$  میدان‌های ويژگي کروي خود  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^c$ :  $f$  را در عرض به شبکه پيکسلی منظم روی يك تصویر هم‌مستطيلي از کره گسته‌سازی می‌کنند. از نظر رياضي، تصویر هم‌مستطيلي، که در شکل ۵۲ به تصویر کشیده شده است، به عنوان پولبک:  $\chi^* f = f \circ \chi$ :  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^c$  از تصویر توسط نگاشت مختصات کروي  $\chi$  از معادله (۴۲۷) رسmit می‌باشد:

$$\underbrace{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}}_{\chi^* f} \xrightarrow{\chi} S^3 \setminus \{n, s\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^c \quad (462)$$

همانند رویکردهای قبلی، نويسندگان يك شبکه نمونه‌برداری کرنل را از طريق تصویر نمونيک از فضاهای مماس به کره تصویر می‌کنند. در يك مرحله اضافي، آنها آن را از طريق  $\chi$  به تصویر هم‌مستطيلي نگاشت می‌هند که در آن ضرائب درون‌يابي را بين شبکه نمونه‌برداری کرنل تصویر شده و شبکه نمونه‌برداری میدان ويژگي محاسبه می‌کنند. از آنجا که تغیير شکل ناشی از تصویر هم‌مستطيلي مستقل از طول جغرافياي  $\phi \in \mathbb{R}$  است، کافی است آن را فقط يك بار برای هر عرض جغرافياي  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \in \theta$  محاسبه کرد. نمودار زير، که بنا به تعاريف  $K_p^m$  و  $K_p^c$  جايجابي است، يك نمای کلي از تصویر نمونيک يك کرنل  $K: \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}^{c \times c}$  به کره  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{c \times c}$  و به تصویر هم‌مستطيلي آن [۱۰] ارائه می‌دهد (توجه داشته باشید).

<sup>۱۱۱</sup> از نظر فني، معادل بودن هر دو کانولوشن علاوه بر اين نيازمند يك تغيير وابسته به شعاع در دامنه کرنل برای در نظر گرفتن تغيير در اندازه حجم هنگام تاب دادن کرنل است.

باشد که  $\mathcal{G}_p$  روی  $H_p^*$  وارون پذیر است):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & K & \longrightarrow & \mathbb{R}^{c_{\text{ooo}} \times c_{\text{ooo}}} & \longleftarrow & K_p^{\text{oooooooooooo}} \\
 & \downarrow & & & \uparrow & & \downarrow \\
 \mathbb{R}^* & \xleftarrow{\psi_{TM,p}^A} & T_p M & \xrightarrow{\mathcal{G}_p = \exp_p \circ \omega} & H_p^* & \xleftarrow{\chi} & \underbrace{\chi^{-1}(H_p^*)}_{\subset (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \times \mathbb{R}} \\
 & & & & & & 
 \end{array} \quad (463)$$

یک نقطه ضعف عمدۀ گسسته‌سازی میدان‌های ویژگی کروی از طریق یک شبکه پیکسلی منظم روی تصویر هم‌مستطیلی این است که این رویکرد سیگنال را به سمت قطب‌ها بیش نموده برداری می‌کند.

انواع دیگری از کانولوشن‌های کروی روی تصویر هم‌مستطیلی توسط [؟] پیشنهاد شده‌اند. به جای پیش‌محاسبه الگوی نموده برداری کرنل تغییر شکل یافته، [؟] اشتراک وزن را باز می‌کنند به طوری که هر عرض جغرافیایی کرنل مستقل خود را در یک کانولوشن یک بعدی اقلیدسی اعمال می‌کند. سپس شبکه روی هر عرض جغرافیایی پیش‌آموزش داده می‌شود تا نتیجه‌ای را که هنگام کانولوکردن با یک کرنل که روی فضاهای مماس به اشتراک گذاشته شده است، بازیابی کند. اگر اشتراک وزن کانولوشنی یک بایاس استقرایی مناسب باشد، این روش باید به طور بهینه به روش‌های مبتنی بر هندسه توسط [؟] همگرا شود. [؟] این رویکرد را بیشتر توسعه داده و از یک فرا-شبکه استفاده می‌کنند که یک کرنل تغییر شکل یافته را بر اساس یک کرنل الگوی ورودی مشترک و عرض جغرافیایی هدف پیش‌بینی می‌کند. هر دوی این رویکردها وزن‌های دایره‌ای (خطوط با عرض جغرافیایی ثابت) از گروه ایزومنتری در نظر گرفته شده (۲)  $SO(n, s)$  از  $S^3$  به اشتراک می‌گذارند؛ شکل ۳۸ را مقایسه کنید. بنابراین آنها به عنوان تبدیلات میدان کرنل با میدان‌های کرنل (۲)  $-SO$ –ناوردا شناسایی می‌شوند، که طبق قضیه ۸۸  $-SO(2)$ –هموردا هستند.

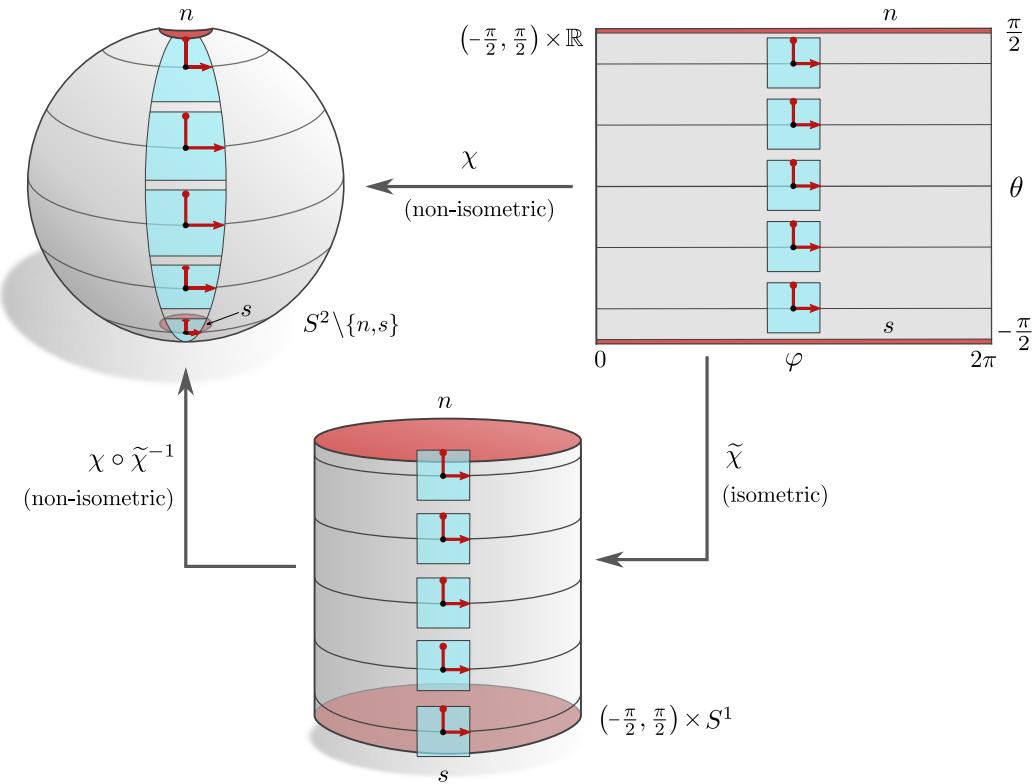
با توجه به یک میدان ویژگی کروی در تصویر هم‌مستطیلی، ممکن است علاوه بر این وسوسه شویم که آن را مستقیماً با یک CNN اقلیدسی متعارف پردازش کنیم و از تصویر کرنل از فضاهای مماس صرف نظر کنیم، همانطور که به عنوان مثال در [؟] انجام شده است. همانطور که در بخش ۹ بحث شد، چنین کانولوشن‌های اقلیدسی متناظر با کانولوشن‌های  $GM$  روی  $\{e\}$ –ساختار کانولوشنی از  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \subset (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \times \mathbb{R}$  هستند، که در شکل‌های آ۴۳ و ۵۳ (بالا سمت راست) به تصویر کشیده شده است. این  $\{e\}$ –ساختار از چارچوب‌های  $[\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \theta}]$  تشکیل شده است، که نسبت به متريک اقلیدسی از  $\mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  راست‌هنچار است. این چارچوب‌ها، با این حال، نسبت به متريک کروی روی  $(429)$  راست‌هنچار نیستند، که در شکل ۵۳ (بالا سمت چپ) در انقضای چارچوب با ضرب  $\cos(\theta)$  در جهت طولی منعکس شده است. بنابراین یک کانولوشن  $GM$  روی این  $\{e\}$ –ساختار از نظر هندسی متناظر با یک کانولوشن کروی نیست. این بیشتر متناظر با یک کانولوشن  $GM$  روی یک کانولوشن  $GM$  است، که از طریق نگاشت مختصاتی ایزومنتریک

$$\tilde{\chi} : (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \times \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \times S^1, \quad (\theta, \phi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ \theta \end{pmatrix} \quad (464)$$

در  $\mathbb{R}^3$  جایگذاری شده است. در مقابل،  $\{e\}$ –ساختار نشان داده در شکل‌های ۵۰ و ۵۲ از چارچوب‌های  $[\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{\cos(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi}]$  تشکیل شده است، که نسبت به متريک کروی راست‌هنچار هستند. توجه داشته باشید که این چارچوب‌ها و متريک کروی با ضرب  $(\cos(\theta)/\sin(\theta))$  نسبت به همتایان اقلیدسی کانولوشن خود روی  $\mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  کشیده شده‌اند.

[؟] یک رویکرد جایگزین برای کانولوشن‌های کروی روی  $\{e\}$ –ساختار نشان داده شده در شکل‌های ۵۰ و ۵۲ پیشنهاد می‌کنند. به جای تعریف کرنل‌ها روی فضاهای مماس، آنها سیگنال را از طریق عملگرهای دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم به شکل  $+w_{\text{id}} + w_{e_i^A} \partial_i + w_{e_i^A} \partial_i + w_{\text{ooooooo}} \partial_i^3$  (۲) پردازش می‌کنند، که در آن  $\partial_i$  مشتق جزئی در جهت محور  $i$ –ام چارچوب را نشان می‌دهد و وزن‌های  $w_i \in \mathbb{R}^{c_{\text{ooo}} \times c_{\text{ooo}}}$  بهینه‌سازی می‌شوند. اینکه وزن‌ها مستقل از موقعیت هستند، متناظر با اشتراک وزن فضایی ما است. این به همراه ناوردایی (۲)  $-SO(n)$  از  $\{e\}$ –ساختار، که عملگرهای دیفرانسیل در امتداد آن تراز شده‌اند، هموردا (۲)  $SO(n)$  عملیات را تضمین می‌کند. در نظریه پیوسته، این مدل متناظر با یک کانولوشن  $GM$  در حد کرنل‌های بی‌نهایت کوچک است. در عمل، [؟] میدان ویژگی کروی یک مش ایکوسفر نموده برداری می‌کند و عملگرهای دیفرانسیل را بر حسب استنسیل‌های گسترده فضایی روی روش‌های  $\{e\}$ –ساختار تراز کردن چارچوب‌های  $GM$  با کرنل‌های گسترده فضایی می‌کند.

مدل [؟] دوباره روی یک ایکوسفر عمل می‌کند، با این حال، با یک  $\{e\}$ –ساختار به شدت تغییر یافته (ناهمرار): به جای تراز کردن چارچوب‌های مرتع به طوری که همگی به سمت قطب شمال اشاره کنند، چارچوب‌ها به طور متناظر به سمت شمال یا جنوب اشاره می‌کنند. این طراحی از پیکسل‌بندي ایکوسفر، که وجوده مثلثی آن یا رو به شمال یا رو به جنوب هستند، الهام گرفته شده است. بنابراین پیکسل‌های مجاور را می‌توان با کرنل‌هایی که نسبت به یکدیگر  $180^\circ$  چرخانده شده‌اند، پردازش کرد. نویسندهان ابتدا این استدلال می‌کنند که فرآیند آموزش باید این دوران را با یادگیری کرنل‌های راهبری پذیر متناسب جبران کند. علی‌رغم دوران‌های شدید کرنل،  $\{e\}$ –ساختار تحت آن دسته از دوران‌های سمتی که چارچوب‌های رو به شمال را روی خودشان نگاشت می‌دهند، ناورداست، که منجر به یک هموردا (۲)  $-SO(n)$  کانولوشن می‌شود.



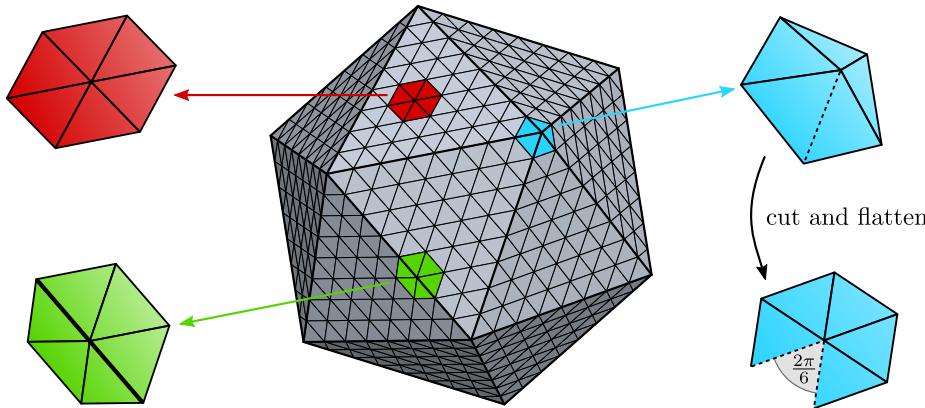
شکل ۵۳: نگاشت مختصات کروی  $\{\chi, \theta, \phi\}$  (معادله (۴۲۷)، زوایا) را به نقاطی روی کره می‌فرستد. این نگاشت ایزومتریک نیست، که به این معنی است که پوش فروارد چارچوب‌های راست‌هنگار  $\left[ \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]$  نسبت به متريک اقلیدسی روی  $\mathbb{R}$  چارچوب‌هایی را که نسبت به متريک کروی راست‌هنگار باشند، به دست نمی‌دهد. بنابراین یک کانولوشن اقیالدوی متعارف در مختصات  $\mathbb{R}$  در جهت طولی منطبق می‌شوند. از آنجا که فاصله‌ها بر حسب زوایا اندازه‌گیری می‌شوند، این عملیات بیشتر متناظر با یک کانولوشن روی یک استوانه است، که از طریق نگاشت ایزومتریک  $\tilde{\chi}$  (معادله (۴۶۴)) در  $\mathbb{R}^3$  جایگذاری شده است. یک کانولوشن کروی به  $\{e\}$ -ساختار نشان داده شده در شکل ۵۲ نیاز دارد.

مدل‌های مورد بحث در این بخش به راحتی به دیگر اجسام دورانی (SO(2)-ناوردا) مانند استوانه از شکل ۵۳ یا تخم مرغ از شکل ۳۳ تعمیم داده می‌شوند. آنها علاوه بر این برای ۲-هموردا بودن، هنگام در نظر گرفتن یک ارتقا از  $\mathcal{R}$ -ساختارها، که متناظر با استفاده از کرنل‌های  $\mathcal{R}$ -راهبری‌پذیر است، همانطور که در شکل ۴۰ نشان داده شده، تطبیق داده می‌شوند.

#### ۴.۱۱ تقریب‌های بیست‌وجهی از CNN‌های کروی

کره  $S^3$  در علوم محاسباتی معمولاً با اجسام افلاطونی، یعنی چندوجهی‌های منتظم محدب، تقریب زده می‌شود. در زمینه یادگیری عمیق، علاقه بیشتر بر روی بیست‌وجهی، (icosahedron) شکل ۶۳، متوجه شده است، که در میان اجسام افلاطونی، نزدیک‌ترین تقریب به کره است [؟]. در حالی که هندسه ریمانی کره فقط تقریب زده می‌شود، اجسام افلاطونی این مزیت را دارند که تکه‌ای-تخت هستند و مشاهی منظمی را می‌پذیرند. این ویژگی‌ها امکان استفاده از روال‌های کانولوشن مسطح را فراهم می‌کنند، که از نظر محاسباتی بهینه‌تر از روش‌های دو بخش قبل هستند. این بخش به بحث در مورد CNN‌های بیست‌وجهی از [؟] و [؟] می‌پردازد، که به ترتیب بر  $G$ -ساختارهای نشان داده شده در شکل‌های آء۶۴، ۶۴ب و ۶۴ج تکیه دارند. قبل از پرداختن به پیاده‌سازی‌های آنها بر حسب اطلسی از چارت‌های افاین در شکل ۶۵، مجزایی‌تری در مورد هندسه بیست‌وجهی و  $G$ -ساختارهای در نظر گرفته شده ارائه می‌دهیم.

**هندسه‌ی بیست‌وجهی:** بیست‌وجهی یک منifold دوبعدی گستته است که از ۲۰ وجه متساوی‌الاضلاع، ۱۲ رأس و ۳۰ یال تشکیل شده است. همانند کره ۲-بعدی، ما بیست‌وجهی را به عنوان جایگذاری شده در  $\mathbb{R}^3$  تعریف می‌کیم، که از آن متريک جایگذاری را در معادله (۴۲۹) به ارث می‌برد. فضاهای مماس جایگذاری شده  $T_p M \subset \mathbb{R}^3$  روی وجه در اینجا به گونه‌ای تعریف می‌شوند که نرمال‌های آنها با نرمال‌های وجه منطبق

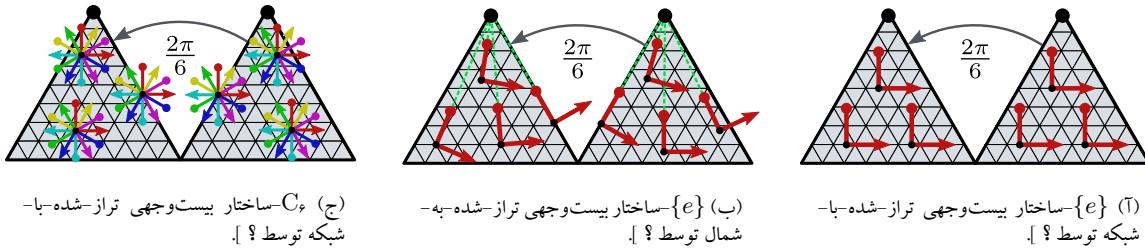


شکل ۵۴: بیست و چهی یک جسم افلاطونی است که در  $\mathbb{R}^3$  به عنوان یک تقریب تکه‌ای-تخت از هندسه کروی استفاده می‌شود. این جسم از ۱۲ رأس، ۲۰ وجه مثلثی متساوی‌الاضلاع و ۳۰ یال تشکیل شده است. این جسم یک شبکه نمونه‌برداری منظم را می‌پذیرد، که با تقسیم مکرر هر مثلث به چهار مثلث کوچکتر ساخته می‌شود. پس از ۲ تکرار، این رویه منجر به یک شبکه با  $2^{2r+1}$  رأس می‌شود. سه تکه بر جسته شده، هندسه کیفی مقاومت همسایگی‌ها حول رئوس روی وجوده (قمرن)، یال‌ها (سیز) و رئوس بیست و چهی (آبی) نشان می‌دهند. همسایگی قرمز بهوضوح تخت است. در حالی که همسایگی سبز در فضای جایگذاری خمیده است، انحصار گاؤسی ذاتی آن دوباره صفر است. این واقعیت در این امر منعکس می‌شود که می‌توان آن را به صورت ایزومنتریک (یعنی بدون پرش) پهن کرد و به طور معادل، انتقال لوى-چیوینتا در امتداد یک مسیر بسته حول گره مرکزی، نگاشت همانی است. همسایگی آبی باید در امتداد یک یال بر پرده شود تا بتوان آن را پهن کرد. نقص زاویه، یعنی زاویه‌ای که برش هنگام پهن کردن نوک تیز باز می‌شود، برابر با  $\frac{\pi}{6}$  است. هنگامی که یک بردار یک بار حول رأس مرکزی همسایگی به صورت موازی منتقل می‌شود، به اندازه این نقص زاویه می‌چرخد. به جای داشتن انحصار گاؤسی مثبت ثابت مانند کره<sup>۱</sup>، انحصار بیست و چهی در رئوس آن منظر کز (تکین) است و در همه جای دیگر صفر است.

باشد. فضاهای مماس روی رئوس و یال‌ها را می‌توان از طریق میانگین نرم‌الهای وجوه مجاور تعریف کرد، همانطور که در بخش بعدی ۱۲ مورد بحث قرار می‌گیرد. با این حال، از آنجا که ما میدان‌های ویژگی را به عنوان نمونه‌برداری شده روی وجوه بیست و چهی (که تقریباً همه جا است) در نظر می‌گیریم، از این انتخاب مستقل هستیم. با فرض اتصال لوى-چیوینتا، انتقال موازی بردارهای مماس روی وجوه به گوشه‌ای عمل می‌کند که آنها را در فضای جایگذاری  $\mathbb{R}^3$  موازی نگه دارد. هنگامی که بردارهای مماس از روی یک یال به صورت موازی منتقل می‌شوند، زاویه یکسانی را نسبت به یال در هر دو طرف حفظ می‌کنند  $\square$  این انتقال را می‌توان به طور شهودی به این صورت تصور کرد که (۱) دو وجه مجاور را پهن کرده، (۲) بردار را روی یال مانند حالت معمول در یک فضای اقلیدسی دو بعدی منتقل کرده، و (۳) دو وجه را به جایگذاری اصلی خود بازگردانیم؛ به شکل ۵۸ و [۶] مراجعه کنید. بنابراین ژئودزیک‌ها در  $\mathbb{R}^3$  تکه‌ای-خطی هستند و از یال‌ها به گونه‌ای عبور می‌کنند که زاویه خروج آنها برابر با زاویه ورودشان باشد. بنابراین نگاشتهای نمایی  $(v)_p = \exp_p v$  به راحتی با دنبال کردن یک مسیر تکه‌ای-ثابت برای فاصله‌ای برابر با  $\|v\|$  محاسبه می‌شوند. در عمل، نویسندهان [۶] آن را روی یک متش منظم نمونه‌برداری می‌کنند و فقط آن دسته از بردارهای مماس را در نظر می‌گیرند که به رئوس مش همسایه نگاشت می‌یابند.

شکل ۶۳ همسایگی‌های دیسک مانند را حول نقاط نمونه روی وجوه (قمرن)، یال‌ها (سیز) و رئوس (آبی) بیست و چهی نشان می‌دهد. همسایگی قرمز کاملاً در داخل یک وجه قرار دارد و بنابراین تخت است. همسایگی سبز در فضای جایگذاری خمیده است، با این حال، انحصار ذاتی (ریمانی یا گاؤسی) آن هنوز صفر است زیرا انتقال لوى-چیوینتا بردارها یک بار حول رأس مرکزی، آنها را همانطور که هستند حفظ می‌کند. اینکه این مورد برقرار است معادل این واقعیت است که همسایگی سبز را می‌توان به صورت ایزومنتریک پهن کرد، یعنی بدون کشش یا برش آن. این پهن کردن ایزومنتریک برای نوع آبی همسایگی‌ها حول رئوس ممکن نیست، که برای پهن شدن باید در یکی از یال‌ها بر پرده شوند. با ساخته شدن از پنج مثلث متساوی‌الاضلاع، نوک تیز پهن شده یک نقص زاویه  $\frac{\pi}{6}$  را نشان می‌دهد. هولونومی هر مسیر بسته حول هر رأس (منفرد)، یعنی زاویه بین یک بردار دلخواه و انتقال آن یک بار حول حلقة، دقیقاً با این نقص زاویه داده می‌شود. در کل، این نتایج دلالت بر این دارتند که انحصار گاؤسی (گسسته) بیست و چهی در رئوس صفر است، جایی که با هولونومی  $\frac{\pi}{6}$  تکین است. هندسه ساده بیست و چهی اجازه می‌دهد تا آن را باز کرده و به صورت سراسری پهن کرد، همانطور که در شکل ۶۵ به تصویر کشیده شده است، که در  $\mathbb{R}^3$  برای یک پیاده‌سازی کارآمد از کانولوشن‌های  $GM$  بیست و چهی استفاده شد.

گروه ایزومنتری کامل بیست و چهی  $I_h \leq Isom(M)$  متناهی است و از  $120$  عضو تشکیل شده است. می‌توان آن را به عنوان حاصل ضرب  $R \times I$  از زیرگروه بازتاب‌ها  $R$  و زیرگروه ایزومنتری‌های حافظ جهت  $I \leq SO(3)$  که شامل  $SO(3)$  است، ساخت. هر رأس  $p$  توسط پنج دوران گیسته حول محور گذرنده از  $p$  و رأس متقابل آن پایدار می‌شود، که گروه دوری  $D_5 \leq SO(2)$  را تشکیل می‌دهند. پایدارساز  $p$  علاوه بر این توسط بازتاب‌ها نسبت به صفحه تعریف شده توسط محور دوران و هر یال خروجی از  $p$  پایدار می‌شود، به طوری که زیرگروه  $D_{2h} = Stab_p$  داده می‌شود. همودایی کانولوشن‌های  $GM$  بیست و چهی نسبت به گروه‌های ایزومنتری



(ج)  $\epsilon$ -ساختار بیست وجهی تراز شده با شبکه توسط ؟ .

(ب)  $\epsilon$ -ساختار بیست وجهی تراز شده به شمال توسط ؟ .

(ت)  $\epsilon$ -ساختار بیست وجهی تراز شده با شبکه توسط ؟ .

شکل ۶۵: ایده مفهومی  $G$ -ساختارهای فرض شده در [؟ ؟] به دلیل محدودیت فضای مجاور کنار قطب شمال از بیست وجهی پهن شده (شکل ۶۵) نشان داده شده است.  $\epsilon$ -ساختار در شکل ۶۴ با تراز کردن تمام چارچوب‌ها در امتداد یال‌های «افقی» وجود (با فرض عمودی بودن محور قطبی) تعریف می‌شود. شکل ۶۴ عبیک  $\epsilon$ -ساختار جایگزین را نشان می‌دهد که چارچوب‌های آن به سمت قطب شمال تراز شده‌اند. این ساختار برخلاف  $\epsilon$ -ساختار قابل پیوسته است زیرا چارچوب‌ها روی یال‌های بریده شده هنگام چسباندن مجدد یال‌ها به یکدیگر متنطبق می‌شوند.  $\epsilon$ -ساختار در شکل ۶۴ با افزودن چارچوب‌هایی که با مضرب‌هایی از  $\frac{\pi}{6}$  چرخانده شده‌اند به  $\epsilon$ -ساختار آن ساخته می‌شود. از آنجا که این زاویه با نقص زاویه در یال‌های بریده شده برابر است،  $\epsilon$ -ساختار تعریف شده به این ترتیب هموار (پیوسته) است. توجه داشته باشید که این دو  $\epsilon$ -ساختار با انتقال لوی-چیویتا ناسازگار هستند (یعنی تحت آن بسته نیستند) اما یک اتصال بدینه جایگزین را القا می‌کنند.  $\epsilon$ -ساختار، در مقابل، با انتقال لوی-چیویتا سازگار است.

$C_5$  یا  $D_5$  در [؟] نشان داده شده است که همودایی کامل  $(3)$ ،  $SO(2)$  یا  $SO(3)$  CNN‌های کروی را به خوبی تقریب می‌زنند هنگامی که از افزایش داده دورانی پیوسته استفاده شود.<sup>۱۲۲</sup>

$G$ -ساختارهای بیست وجهی: کانولوشن‌های  $GM$  بیست وجهی توسط ؟ و ؟ [به طور ضمنی]  $\epsilon$ -ساختارها را فرض می‌کنند، در حالی که مدل ؟ یک  $\epsilon$ -ساختار را فرض می‌کنند. شکل ۶۴ ایده پشت این  $G$ -ساختارها را به تصویر می‌کشد، که در سه پاراگراف بعدی با جزئیات بیشتری توضیح می‌دهیم.

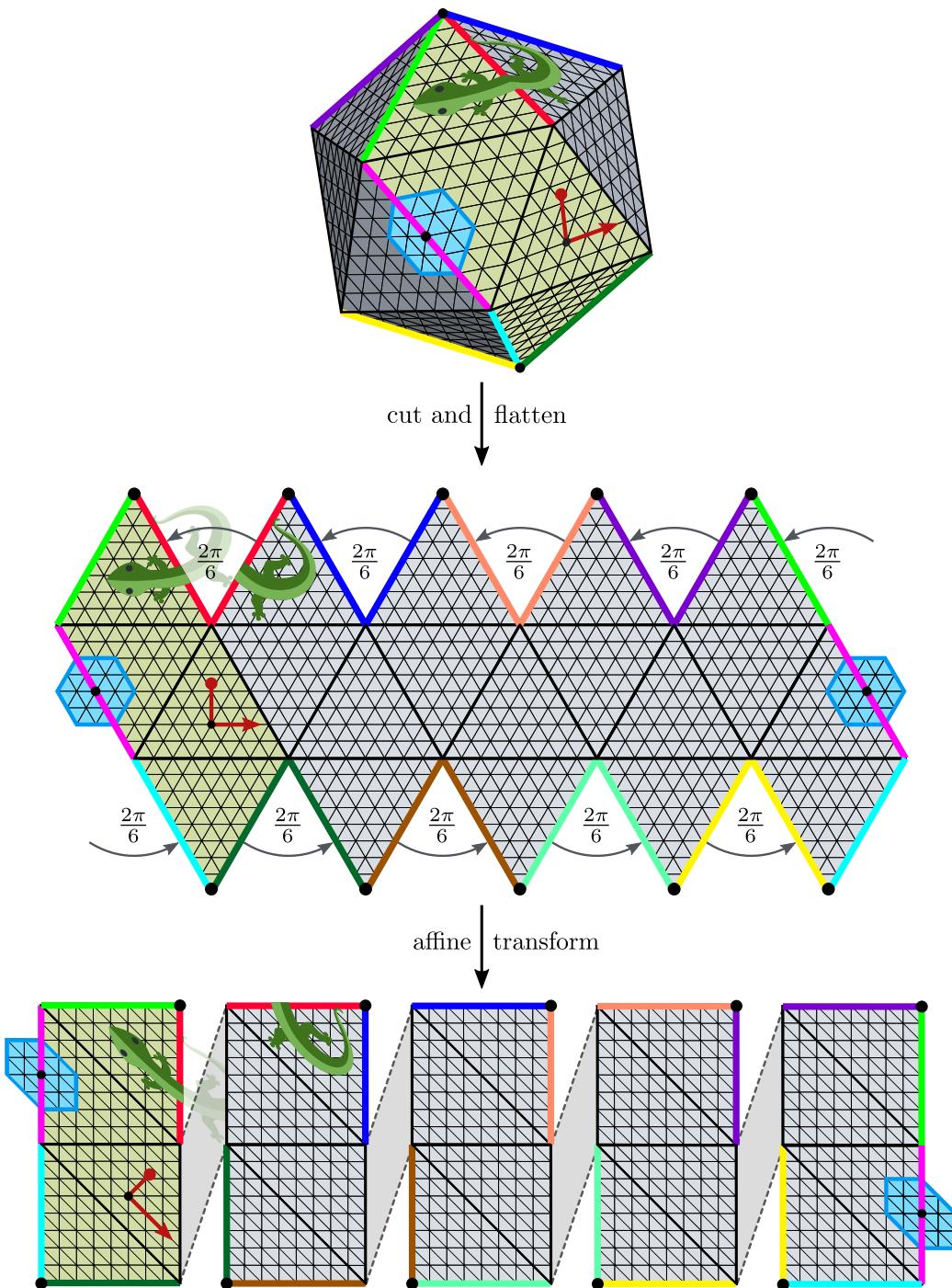
$\epsilon$ -ساختار توسط ؟ که در شکل ۶۴ نشان داده است، با انتداد یال‌های «افقی» وجود مثلث مانظر تعریف می‌شود. هنگام پهن کردن بیست وجهی به یک صفحه همانطور که در شکل ۶۵ نشان داده شده است، تمام چارچوب‌های این  $\epsilon$ -ساختار در این صفحه موازی هستند، که پیاده‌سازی کانولوشن‌های  $GM$  مانظار را بسیار ساده می‌کند. طبق معمول،  $\epsilon$ -ساختار یک اتصال بدینه یکتا را مشخص می‌کند که ویژگی‌ها مطابق آن منتقل می‌شوند. این اتصال بدینه در داخل وجوه، روی یال‌هایی که در شکل ۶۵ بریده شده‌اند و روی یال مشخص می‌کند که اتصال ارغوانی با اتصال لوی-چیویتا متنطبق است. با این حال، انتقال آن از روی یال‌های بریده شده باقی مانده با انتقال لوی-چیویتا متفاوت است زیرا چارچوب‌های  $\epsilon$ -ساختار در آن‌جا به طور ناپیوسته به اندازه زاویه  $\frac{\pi}{6}$  می‌چرخدند. از آنجا که  $\epsilon$ -ساختار توسط دوران‌ها در  $D_5$  حول محور قطبی حفظ می‌شود، کانولوشن‌های  $GM$  آن تقریباً  $(2)$ -همودا هستند، یعنی مدل‌های بخش قبلي ۳.۱۱ را تقریب می‌زنند. با این حال،  $\epsilon$ -ساختار و بنابراین استنتاج شبکه  $\square$  روی یال‌های با نقص زاویه غیرصفر ناپیوسته است. علاوه بر این، چارچوب‌های مرجع دقیقاً به سمت قطب شمال اشاره نمی‌کنند، همانطور که برای  $\epsilon$ -ساختار کروی از بخش ۳.۱۱ و شکل ۵.۶ ب صادق است.

؟ پیشنهاد می‌کند که دو مشکل اخیر را کار کردن با  $\epsilon$ -ساختار در شکل ۶۴ حل کند. این ساختار به گونه‌ای تعریف شده است که چارچوب‌ها دقیقاً در امتداد تصویر محور قطبی روی وجوه، یعنی به سمت قطب شمال، اشاره می‌کنند. این  $\epsilon$ -ساختار در همه جا به جز در قطب‌های شمال و جنوب پیوسته است.<sup>۱۲۳</sup> این ساختار به این معنا تقریب بهتری از  $\epsilon$ -ساختار کروی از شکل ۵.۶ دارد.  $\epsilon$ -ساختار دوباره یک اتصال بدینه یکتا را القا می‌کند. انتقال آن با انتقال لوی-چیویتا روی یال‌ها متنطبق است، با این حال، هنگام انتقال روی وجوه با آن متفاوت است زیرا بردارها را به آرامی همراه با چارچوب‌ها می‌چرخانند. مانند  $\epsilon$ -ساختار دیگر، این میدان چارچوب تحت دوران‌های سمتی در  $D_5$  ناوردا است و بنابراین CNN‌های کروی همودای دوران سمتی را تقریب می‌زنند.

$\epsilon$ -ساختار در شکل ۶۴ ج توسط ؟ با افزودن چارچوب‌هایی که با مضرب‌هایی از  $\frac{\pi}{6}$  چرخانده شده‌اند به چارچوب‌های  $\epsilon$ -ساختار از شکل ۶۴ تعریف می‌شود. این ساختار به وضوح پیوسته است زیرا روایای بین مجموعه چارچوب‌های مرجع در هر نقطه دقیقاً برابر با نقص‌های زاویه در یال‌های بریده شده است. این ساختار برخلاف دو  $\epsilon$ -ساختار قبلي با انتقال لوی-چیویتا سازگار است زیرا گروه ساختاری  $\epsilon$ - $C_5$  با گروه هولونومی بیست وجهی متنطبق است.  $\epsilon$ - $C_5$ -ساختار علاوه بر این تحت عمل ایزوومتری‌های حافظ جهت بیست وجهی I حفظ می‌شود. بنابراین کانولوشن‌های  $GM$  روی این  $\epsilon$ -ساختار، CNN‌های کروی کاملاً همودای دورانی  $(3)$ - $SO$  را از بخش ۲.۱۱ تقریب می‌زنند.

۱۲۲ این در [؟] به صورت تجربی برای  $SO(2)$  در [I] نشان داده شده است. اینکه این نتیجه به  $3 \leq I_h$  تعمیم می‌یابد، روشن است زیرا گروه‌ها فقط در بازتاب‌ها متفاوت هستند، که کانولوشن‌های  $GM$  بیست وجهی را می‌توان نسبت به آنها دقیقاً همودا ساخت. این علاوه بر این برای  $2 \leq D_5$  و  $D_5 \leq C_5$  نیز برقرار است، زیرا اینها زیرگروه‌هایی از  $3 \leq I_h$  هستند.<sup>۱۲۴</sup>

۱۲۳ برای دیدن این، تصور کنید که یال بریده شده در شکل ۶۴ را دوباره به هم بچسبانید: چارچوب‌های روی نیمه چپ و راست یال سپس با هم متنطبق می‌شوند، که این مورد در شکل ۶۴ صادق نیست.



شکل ۵۶: پیاده‌سازی‌های [؟ ؟ ؟] میدان‌های ویژگی را نسبت به یک اطلس که بیست‌وجهی را با پنج چارت می‌پوشاند، نمایش می‌دهند. برای ساخت این چارت‌ها، بیست‌وجهی در امتداد یال‌های رنگی بریده شده و پهن می‌شود. سپس پنج ناحیه، که هر کدام از چهار مثلث تشکیل شده‌اند، به همدامنه‌های چارت مستطیلی برش داده می‌شوند. (\_\_\_\_\_ ) این عملیات شبکه شش‌ضلعی را به یک شبکه از پیکسل‌های مربعی نگاشت می‌دهد، به طوری که میدان‌های ویژگی بیست‌وجهی را می‌توان با مجموعه‌ای از پنج آرایه مستطیلی کدگذاری کرد. توجه داشته باشید که چارچوب‌های مرجع و کرنل‌ها بر این اساس در همدامنه‌های چارت تغییر شکل می‌یابند. انتقال لوی-چوپیتا از روی تمام یال‌های رنگی به جز یال ارجاعی، یک دوران به اندازه  $\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6}$  را به همراه دارد، که علامت آن به جهت انتقال بستگی دارد. این کار با پدینگ انتقال ردیف‌هایی از پیکسل‌ها در امتداد یال‌های بریده شده، همانطور که قبلاً در شکل ۲۳ توصیف شد، پیاده‌سازی می‌شود.  
(مارمولک‌ها با مجوز تویتر تحت لایسنس بین‌المللی \_\_\_\_\_ اقتباس شده‌اند.)

**پیاده‌سازی‌ها:** برای پیاده‌سازی کانولوشن‌های GM روی  $G$ -ساختارهای متناظر،  $\{e\}$  و  $\{f\}$  یک شبکه منظم را روی وجود بیست و چهار مراحل می‌گذراند؛ به شکل ۶۳ مراجعت کنید. این شبکه شش ضلعی منظم با تقسیم مکرر یال‌ها و جایگزینی هر مثلث با چهار مثلث کوچکتر ساخته می‌شود. در وضوح ۱۰۱ این کار منجر به یک شبکه با  $2^{2r+1} + 2^r + 5$  رأس می‌شود. توجه داشته باشید که این شبکه بنا به ساختار، دقیقاً تحت ایزومنتری‌های بیست و چهار متقابله است، که منجر به یک هموردادی دقیق Isom<sub>GM</sub> کانولوشن‌های GM گسته‌سازی شده می‌شود.<sup>۱۴۴</sup> [پیشنهاد کردند که میدان‌های ویژگی بیست و چهار متقابله از چارت‌ها که در شکل ۶۵ نشان داده شده است، نمایش دهنند. این چارت‌ها این مزیت را دارند که شبکه‌های شش ضلعی روی وجود بیست و چهار میکسلی مربعي معمول نگاشت می‌شوند. با این حال، توجه داشته باشید که چارچوب‌های راست‌هنگار روی بیست و چهار شکل می‌باشد، به طوری که نسبت به متريک اقليدي‌سی کانولوشن، راست‌هنگار نیستند. کرنل‌های کانولوشن شش ضلعی روی بیست و چهار شکل می‌باشد و می‌توانند بر حسب کرنل‌های مربعي که به گونه‌ای ماسک گذاري شده‌اند که دو گوشه آنها با صفر پر شده است، پیاده‌سازی شوند.]

کانولوشن GM توسط  $\{e\}$  چارچوب‌های را فرض می‌کند که همگي موازي هستند و بنابراین می‌توانند در داخل چارت‌ها، جايی که تكىه گاه کرنل از مرزهای آن فراتر نمی‌رود، از طريق يك کانولوشن اقليدي‌سی متعارف پیاده‌سازی شوند. در نقاطی که به يك یال بين چارت‌های مختلف نزدیک هستند، کرنل ویژگی‌ها را از آن سوی برش ابانت می‌کند. همانطور که قبل از بخش ۴.۵ و شکل ۲۳ بحث و به تصوير کشیده شد، اين کار به راحتی از طريق يك عمليات پدينگ انتقال پیاده‌سازی می‌شود که يك حاشيه از ویژگی‌هاي منتقل شده موازي را در اطراف آرایه پیکسل‌های مربعي قبلى از اجرای عمليات کانولوشن، پد می‌کند. برای انتقال بدیهی که به طور ضمنی توسط  $\{e\}$  فرض شده است، اين عمليات پدينگ فقط يك ریدیف از ویژگی‌ها را در هر یال بدون تبدیل آنها کپی می‌کند. از آنجا که نویسنده گان گروه ساختاري بدیهی  $\{e\} = \{G\}$  را فرض می‌کنند، کرنل‌های شش ضلعی نامحدود باقی می‌مانند.

**پیاده‌سازی  $\{e\}$**  عمده‌تاً مشابه است، با این حال، تفاوت حياتی آن در این است که از انتقال دهنده‌های لوی-چوپانا و کرنل‌های  $e$ -راهبری پذير استفاده می‌کند. به جای پدينگ مستقيم رديف‌های پیکسل از روی یال‌ها، انتقال لوی-چوپانا نيزمند اين است که ویژگی‌ها يا با  $g = e$  برای تمام یال‌هاي داخلي و یال ارغوانی، يا با زاويه‌اي برابر با  $\frac{\pi}{2} \pm \theta$  از روی تمام یال‌هاي با نقص زاويه  $\frac{\pi}{2}$  راهبری شوند، که علامت آن بهجهت انتقال بستگي دارد.<sup>۱۴۵</sup> [نمایش منظم  $e$ -C را به عنوان نوع میدان فرض می‌کند و کرنل‌های کانولوشن را برای برآورده کردن محدوديت راهبری پذير مربوطه محدود می‌کند. پس از پدينگ انتقال، کانولوشن GM آنها به عنوان يك کانولوشن اقليدي‌سی متعارف با اين کرنل‌های راهبری پذير پیاده‌سازی می‌شود. توجه داشته باشید که اين کانولوشن GM در داخل وجوده، يعني به جز پدينگ انتقال، مشابه HexaConv توسط  $\{e\}$  است.]

از آنجا که کانولوشن GM توسط  $\{e\}$  يك گروه ساختاري بدیهی  $\{e\} = G$  را فرض می‌کند، پدينگ انتقال دوباره به عنوان يك کپي بدیهی از پیکسل‌ها بدون راهبری پیاده‌سازی می‌شود و کرنل‌ها دوباره نامحدود باقی می‌مانند. با این حال، از آنجا که چارچوب‌های  $\{e\}$ -ساختار به سمت قطب شمال تراز شده‌اند، آنها دیگر در نمایش پیکسل مربعي مستطيلي موازي نیستند، که از يك پیاده‌سازی فوري بر حسب کانولوشن‌های متعارف جلوگیری می‌کند. در عوض، کرنل‌ها بايد در هر نقطه از شبکه در يك دوران متفاوت اعمال شوند. از آنجا که کرنل شش ضلعی را می‌توان با  $\frac{\pi}{2}$  بدون استفاده از درون‌يابي چرخاند، و از آنجا که ترازها به سمت قطب شمال جداگانه باشند، يك ديرگر تفاوت دارند، نویسنده گان تقریب کارآمد زیر را برای اين عمليات پیشنهاد می‌کنند: آنها روی هر وجهه دو بار کانولوشن می‌کنند، يك بار با کرنل اصلی و يك بار با نسخه دوران یافته آن با  $\frac{\pi}{2}$ . سپس دو میدان پاسخ به صورت خطی باهم ترکب می‌شوند، با وزن‌های درون‌يابي از پيش محاسبه شده که به زوایای چارچوب‌های مرجع تراز-شده-به-شمال نسبت به دو تراز کرنل (يعني نسبت به شبکه پیکسلی) بستگي دارد. بنابراین اين پیاده‌سازی تقریباً دو برابر پرهزینه‌تر از پیاده‌سازی‌های  $\{e\}$  است.]

يک پیاده‌سازی جايگزین از کانولوشن‌های کروي روی بیست و چهار توسيع  $\{e\}$  پیشنهاد شده است. نویسنده گان سیگنانل کروي را روی صفحات گسترده شده توسيع ۲۰ وجه (که به عنوان تصاویر مimas شناخته می‌شوند) تصوير می‌کند و متعاقباً يك CNN متعارف را روی هر يك از اين تصاویر اجرا می‌کنند. ما اين شبکه را در ليست خود یاوردیم زيرا اين شبکه اين نمایش‌ها را به طور مستقل از يك ديرگر پردازش می‌کند، يعني ویژگی‌ها را بين آنها منتقل يا پد نمی‌کند و بنابراین دقیقاً به عنوان کانولوشن GM توصیف نمی‌شود.

همانطور که قبل ذكر شد، نتایج تجربی  $\{e\}$  نشان می‌دهد که هندسه کروي را برای کاربردهای يادگیری عميق به خوبی تقریب می‌زنند. به طور خاص، نویسنده گان CNN کروي خود را روی يك شبکه ایکوسфер با CNN بیست و چهار تکه‌ای-تخت توسيع  $\{e\}$  مقایسه می‌کنند و در می‌باشد که هر دو علی رغم هندسه تغیير شکل يافته دومي، عملکرد مشابهی دارند. مشخص شده است که هموردادي CNN‌هاي بیست و چهار تحت دوران‌های پيوسته در  $(SO(3))$  به طور قابل توجهی نقص می‌شود، با اين حال، به نظر می‌رسد اين فقط يك اثر بيش برآزش است زира به راحتی و بدون از دست دادن عملکرد مدل با استفاده از افزايش داده  $SO(3)$   $SO(3)$  خشی می‌شود.

همشه، می‌خواهيم اشاره کنیم که  $CNN$ ‌هاي  $D$ -هموردا ساخت. به طور مشابه،  $D$ -هموردا توسيع  $\{e\}$   $I$ -CNN  $D$ -هموردا توسيع  $\{e\}$  راهبری پذير بازتابی،  $D$ -هموردا ساخت. به طور مشابه،  $D$ -هموردا توسيع  $\{e\}$   $I$ -CNN  $D$ -هموردا توسيع  $\{e\}$  راهبری پذير به جای  $e$ -C-راهبری پذير، تحت گروه ایزومنتری كامل  $I_h$  بیست و چهار هموردا ساخت.

<sup>۱۴۴</sup> شبکه ایکوسфер، که توسيع برخی از مدل‌های بخش‌های  $2.11$  و  $3.11$  استفاده می‌شود، با تصوير کردن گرههای اين شبکه به فاصله شعاعی واحد از مبدأ، يعني به  $S^2$  تعریف می‌شود. مدل‌های این تصوير را فرض نمی‌کنند بلکه مستقيماً روی هندسه بیست و چهار تکه‌ای-تخت کانولوشن می‌کنند.

## ۱۲ CNN‌های مستقل از مختصات روی سطوح عمومی

به جای عمل روی یک هندسه ثابت، کانولوشن‌های  $GM$  در این بخش روی منیفلدهای عمومی تعریف می‌شوند. ما مرور خود را به سطوح ( $d = 2$ ) محدود می‌کنیم زیرا از پیاده‌سازی‌ها روی منیفلدهای (عمومی) با ابعاد بالاتر آگاه نیستیم. سیگنال‌هایی که باید پردازش شوند، می‌توانند یا مستقیماً توسعه مجموعه داده ارائه شوند یا از هندسه سطوح محاسبه شوند. مثال‌هایی برای دسته اول شامل بافت‌های رنگی یا کمیت‌های فیزیکی مانند میدان‌های دما یا تنش دیواره یک طرف تحت فشار است. دسته دوم می‌تواند به عنوان مثال شامل انتحاهای گاوسی و اصلی، توصیفگرهای  $\square\square\square\square\square\square$  یا امضاهای کرنل موج باشد. اکثر کاربردها تاکنون بر روی طبقه‌بندی سطوح [؟ ؟ ؟]، قطعه‌بندی بخش‌هایی از آنها [؟ ؟ ؟ ؟] یا یافتن تناظر بین سطوح مختلف [؟ ؟ ؟ ؟ ؟] متمرکز شده‌اند. کاربردهای دیگر شامل پیش‌بینی کمیت‌های فیزیکی مانند تنش مکانیکی [؟] یا سنتراست بافت‌های رنگی [؟] یا تغییر شکل‌های هندسی [؟] است.

طراحی CNN‌های اقلیدسی و کروی به شدت تحت تأثیر نیاز به هموردایی تقارن سراسری است. از آنجا که سطوح عمومی معمولاً دارای گروه‌های ایزومنتری بدینهی هستند، این اصل را همنما از بین می‌رود، که آزادی زیادی را در انتخاب  $G$ -ساختارها به ما می‌دهد. مدل‌هایی که در این بخش مرور می‌کنیم را می‌توان به کانولوشن‌های سطوح راهبری‌پذیر-دورانی و  $\{e\}$ -راهبری‌پذیر طبقه‌بندی کرد. هر دو رویکرد به مسئله عدم وجود یک جهت کانونی روی سطوح می‌پردازند، با این حال، آنها این کار را به روشی اساساً متفاوت انجام می‌دهند. مدل‌های راهبری‌پذیر-دورانی، عدم وجود جهت مرجع را با طراحی هموردای خود در نظر می‌گیرند و با همه جهات به طور یکسان رفتار می‌کنند. (۲)  $SO(2)$ -ساختار زیربنای آنها  $\square$  به جز یک انتخاب عالمابی اهمیت از جهت گیری  $\square\text{e}^5$  توسط متريک ريماني ثابت می‌شود. بنابراین مدل‌های راهبری‌پذیر-دورانی عمدتاً در انتخاب انواع میدان متفاوت هستند. مدل‌های  $\{e\}$ -راهبری‌پذیر، غيرهموردا هستند و بنابراین با یک نوع میدان (غيريدنهاي) مرتبط نیستند. با این حال، آنها از یکدیگر با انتخاب خاص  $\{e\}$ -ساختار که برای تعیین ترازهای کرنل استفاده می‌شود، متفاوت هستند.

### ۱.۱۲ هندسه سطوح جایگذاری شده ..... ۱۶۹

#### ۱.۱.۱۲ هندسه دiferانسیل کلاسیک سطوح جایگذاری شده ..... ۱۶۹

#### ۲.۱.۱۲ هندسه‌ی گسته‌سازی شاهدی مشاهی سطحی ..... ۱۷۱

#### ۲.۱۲ کانولوشن‌های سطحی راهبری‌پذیر-دورانی ..... ۱۷۶

#### ۳.۱۲ کانولوشن‌های- $\{\square\}$ سطحی راهبری‌پذیر ..... ۱۸۳

#### ۴.۱۲ تقریب‌های بیست‌وجهی از CNN‌های کروی ..... ۱۸۸

این بخش به صورت زیر سازماندهی شده است: ما در بخش ۱.۱.۱۲ با یک مقدمه (بسیار) کوتاه بر هندسه دiferانسیل کلاسیک سطوح شروع می‌کنیم و پیوسته تفاوت بین هندسه ذاتی و خارجی آنها را مورد بحث قرار می‌دهیم. در عمل، اکثر پیاده‌سازی‌ها روی سطوح گسته‌سازی شده عمل می‌کنند. بخش ۲.۱.۱۲ یک نمای کلی از هندسه مشاهی سطحی مثای ارائه می‌دهد، که مسلماً رایج‌ترین گسته‌سازی‌های سطح در مقالات یادگیری عمیق هستند. در بخش ۲.۱۲ ما کانولوشن‌های سطحی راهبری‌پذیر-دورانی را مورد بحث قرار می‌دهیم. روش‌های ابتکاری برای ثابت کردن میدان‌های چارچوب که کانولوشن‌های سطحی  $\{e\}$ -راهبری‌پذیر را تعریف می‌کنند، در بخش ۳.۱۲ مرور می‌شوند. برای کامل بودن، در پاراگراف بعدی به چند رویکرد جایگزین برای تعریف کانولوشن‌های سطح اشاره می‌کنیم قبل از اینکه به محتوای اصلی این بخش پردازیم.

**۱۰۰ سطوح فراتر از کانولوشن‌های  $\square\square\square\square\square\square$ :** در حالی که تعداد قابل توجهی از CNN‌های سطح را می‌توان به عنوان کانولوشن‌های  $GM$  تفسیر کرد، بسیاری از طراحی‌های شبکه جایگزین پیشنهاد شده‌اند. این روش‌ها به عنوان مثال بر موارد زیر تکیه دارند: کانولوشن‌های گراف روی مشاهی سطح، رویکردهای طیفی، رندرهای چند-نما از جایگذاری‌های سطح، روش‌های حجمی در فضای جایگذاری، عملگرهای دiferانسیل، یا عملگرهای دیگری که بلافضله روی ساختارهای داده مش عمل می‌کنند. مرور مختصر ارائه یک نمای کلی از جهات مختلفی است که مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

یک روش برای طبقه‌بندی یا قطعه‌بندی سطوح جایگذاری شده، رندر کردن آنها از چندین دیدگاه و پردازش رندرها با CNN‌های اقلیدسی متعارف است. ویژگی‌های حاصل سپس با تجيیع روى دیدگاهها [؟ ؟ ؟] یا از طریق یک روش اجماع [؟] می‌شوند. [؟] انتخاب می‌کنند که دیدگاه‌های دورین را روی یک کره مطابق با یک زیرگروه گسته از  $(3)SO(3)$  قرار دهند، به عنوان مثال گروه بیست‌وجهی. سپس ویژگی‌های حاصل به طور مشترک از طریق یک کانولوشن گروهی گسته (نه یک کانولوشن سطح) پردازش می‌شوند.

به جای تصویر کردن سطح با رندر کردن آن، می‌توان آن را با تعریف یک چارت به  $\mathbb{R}^4$  تصویر کرد. [؟] چارت‌های سراسری تقریباً مساحت-نگهدار CNN (۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰) را روی توپولوژی‌های کروی تعریف می‌کنند. این چارت‌ها ناپیوسته و به طور کلی زاویه-نگهدار (۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰) نیستند. یک

<sup>۱۲۵</sup> جهت گیری انتخاب شده روی یک منیفلد (همبند، جهت‌پذیر) دلخواه است زیرا کرنل‌ها یاد گرفته می‌شوند. اگر جهت گیری مخالف انتخاب می‌شد، آموزش فقط منجر به کرنل‌های با جهت گیری مخالف می‌شد.

اقلیدسی متعارف برای پردازش تصاویر حاصل استفاده می‌شود. نایپوستگی‌ها را می‌توان با پولبک کردن ویژگی‌های سطح در امتداد نگاشتهای پوششی چنبره‌ای (CNN) [۱] یا عمومی تر [۲] [۳] دور زد. کانولوشن اقلیدسی بعدی روی پولبک را نمی‌توان به عنوان یک کانولوشن  $GM$  تفسیر کرد زیرا لایه‌های نگاشت پوششی، { $e$ }—ساختارهای متفاوت و ناسازگاری را روی سطح القا می‌کنند. [۴] از یک اطلس از چارت‌های (تقریباً) ایزومتریک استفاده می‌کنند [۵] همانطور که در انتهای بخش ۳.۱.۲ بحث شد، این در واقع متناظر با یک کانولوشن  $GM$  است.

روش‌های حجمی سطوح جایگذاری شده را با CNN ها در فضای جایگذاری  $\mathbb{R}^3$  پردازش می‌کنند، به عنوان مثال با تفسیر رئوس یک مش سطح به عنوان یک ابر نقطه [۶] [۷] یا با واکسل‌بندی و رودی. روش‌های مبتنی بر ابر نقطه در [۸] مرور شده‌اند. [۹] و [۱۰] استدلال می‌کنند که یک پارامترسازی ضمنی سطح اقتصادی تر است و شبکه‌هایی را پیشنهاد می‌کنند که سطوح را به عنوان مرازهای تصمیم‌گیری مدل‌سازی می‌کنند.

رویکردهای طیفی از قضیه کانولوشن الهام گرفته‌اند. پایه فوریه روی یک مینیفلد در اینجا با ویژه‌توابع عملگر لابلس-بلترامی داده می‌شود. شبکه‌های عصی طیفی، نقشه‌های ویژگی را با دستکاری طیف فوریه آنها با عملگرهای خطی یادگرفته شده پردازش می‌کنند. از آنجا که پایه فوریه غیرمحلي است، [۱۱] به جای آن از یک تبدیل فوریه پنجره‌ای استفاده می‌کنند؛ یک جایگزین، هارمونیک‌های مینیفلد محلی شده [۱۲] است. [۱۳] های سطح را به عنوان گراف تفسیر می‌کنند. بنابراین آنها از تبدیلات فوریه گراف استفاده می‌کنند، که بر اساس ویژه‌توابع لابلسین گراف هستند.

[۱۴] مدلی را پیشنهاد می‌کنند که بر اساس عملگرهای دیفرانسیل است. ویژگی‌های اسکالار از طریق نفوذ گرمایی با یک زمان نفوذ یادگرفته می‌شوند. از آنجا که در معادله گرمایی شود) همسانگرد است، نمی‌تواند به طور انتخابی به الگویها در دوران‌های خاص پاسخ دهد. بنابراین نویسنده‌گان علاوه بر این یک عملگر گردایان اعمال می‌کنند و سپس حاصل‌ضرب‌های داخلی از ویژگی‌های حاصل با مقادیر بردار مماس را می‌گیرند. توجه داشته باشید که هر دو عملیات ناوردای پیمانه هستند. این شبکه‌ها را می‌توان بر روی تمام ساختارهای داده‌ای که عملگرهای دیفرانسیل جزئی را می‌پذیرند، مانند ابرهای نقطه یا مش‌های پیاده‌سازی کرد.

تعداد قابل توجهی از شبکه‌ها بر روی ساختار مینیفلد ریمانی عمل نمی‌کنند، بلکه بر روی ساختار داده که سطوح را به صورت عددی نمایش می‌دهد، عمل می‌کنند. یک مثال، شبکه‌هایی هستند که گره‌ها و یال‌های یک مش سطح را به عنوان تشکیل دهنده یک گراف تفسیر می‌کنند و در نتیجه از شبکه‌های گراف استفاده می‌کنند. همودایی ایزومتری شبکه‌های گراف در [۱۵] [۱۶] بررسی شده است. [۱۷] یک شبکه گراف با فیلترهای پویا، یعنی فیلترهایی که در طول پاس مستقیم از ویژگی‌ها پیش‌بینی می‌شوند، پیشنهاد کردد. مدل [۱۸] بر روی گراف‌های اولیه و دوگان مش‌های عمل می‌کند و از مکانیزم‌های توجه استفاده می‌کند.

شبکه‌های مارپیچی (MSP) [۱۹] ویژگی‌ها را روی مش‌ها از طریق عملگرهای مارپیچی محلی پردازش می‌کنند [۲۰]. این عملگرهای ویژگی‌ها را با دنبال کردن یک مسیر مارپیچی به سمت بیرون از گره مرکزی شمارش می‌کنند. یک پاسخ با اعمال یک LSTM به دنباله حاصل از ویژگی‌ها یا یک MLP به الحال آنها محاسبه می‌شود. انتخاب اولین همسایه و جهت مارپیچ متناظر با یک انتخاب از { $e$ }—ساختار است. [۲۱] و [۲۲] کانولوشن  $h$  را به ترتیب روی وجه و یال‌های مش تعریف می‌کنند. هر دو مدل نسبت به دلخواه بودن ترتیب عناصر مش ناوردا ساخته شده‌اند، که می‌تواند به یک طراحی همودای جایگشتی تعیین یابد.

برای معرفه‌های عمیق‌تر از چنین روش‌هایی، خواننده را به [۲۳] و [۲۴] ارجاع می‌دهیم.

## ۱.۱.۱۲ هندسه‌ی سطوح جایگذاری شده

این بخش یک مقدمه کوتاه بر هندسه سطوح ارائه می‌دهد. برخی مفاهیم هندسه دیفرانسیل سطوح جایگذاری شده هموار در بخش ۱.۱.۱۲ مورد بحث قرار می‌گیرند. بخش ۲.۱.۱۲ تلاش می‌کند تا یک نمای کلی از راه‌های ممکن برای گسسته‌سازی کمیت‌های دیفرانسیل روی مش‌های سطحی ارائه دهد.

برای یک بررسی عمیق‌تر از سطوح پارامتری شده، خواننده را به [۲۵] ارجاع می‌دهیم. یک مقدمه مختصر و شهودی بر این موضوع و ارتباط آن با هندسه محاسباتی (گسسته‌سازی شده) را می‌توان در [۲۶] یافت.

### ۱.۱.۱۲.۱ هندسه‌ی دیفرانسیل کلاسیک سطوح جایگذاری شده

به طور کلاسیک، سطوح به صورت خارجی توصیف شده‌اند، یعنی به عنوان غوطه‌ور (یا جایگذاری شده) در یک فضای محیطی اقلیدسی  $\mathbb{R}^3$ . این غوطه‌وری را می‌توان به چندین روش معادل تعریف کرد، به عنوان مثال پارامتری‌سازی‌های محلی، وصله‌های موئز یا توابع ضمنی. پارامتری‌سازی‌های محلی سطح، نگاشتهای همواری هستند

$$\chi : \mathbb{R}^r \supset V \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n \quad (465)$$

که زیرمجموعه‌های باز  $V$  از  $\mathbb{R}^r$  را در فضای محیطی  $\mathbb{R}^3$  غوطه‌ور می‌کنند. اینها باید منظمه باشند، یعنی مشتقات جزئی آنها

$$e_i = \frac{\partial \chi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2 \quad (466)$$

باید در  $\mathbb{R}^3$  مستقل خطی باشند. مشتقات  $e_1(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$  و  $e_2(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$  فضاهای مماس جایگذاری شده  $T_p M \subset \mathbb{R}^3$  را در  $p = \chi(x_1, x_2)$  تولید می‌کنند.<sup>۱۲۶</sup> بنابراین نرمال‌های سطح در فضای جایگذاری به خوبی تعریف شده و با  $\frac{e_1 \times e_2}{\|e_1 \times e_2\|} = n$  داده می‌شوند. یک اطلس از پارامتری‌سازی‌های محلی سطح سازگار، امکان توصیف سطوحی را فراهم می‌کند که از نظر توبولوژیکی با صفحه در سطح جهانی متفاوت هستند.

متريک ريماني سطح  $\square$  که در اين زمينه اغلب به عنوان فرم بنيادي اول آن شناخته می‌شود  $\square$  از فضای جایگذاری القا می‌شود. مطابق با تعریف مشابه برای کره جایگذاری شده  $S^3$  در معادله (۴۲۹) داريم:

$$\eta_p(v, w) := \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^3} \quad \forall v, w \in T_p M \quad (467)$$

فرض کنيد  $v_i e_i$  و  $v = \sum_i v_i e_i$  در  $T_p M$  باشند که بر حسب بردارهای ضریب خود  $v, w \in \mathbb{R}^3$  نسبت به پایه مختصاتی بيان شده‌اند. متريک نسبت به اين پایه با يك ماترييس ضریب متقان نمايش داده می‌شود

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad (468)$$

با دراييه‌های <sup>۱۲۷</sup>  $E = \langle e_1, e_1 \rangle_{\mathbb{R}^3}$  و  $F = \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle e_2, e_1 \rangle_{\mathbb{R}^3}$ . اين ماترييس بر روی ضرایب برداری مطابق با  $\eta_p(v, w) = v^\top I w$  عمل می‌کند. فرم بنيادي اول، هندسه ذاتي يك سطح را به عنوان يك منifold ريماني دو بعدی کدگذاري می‌کند، يعني آن بخشی از هندسه که مستقل از غوطه‌وری آن در فضای محیطی است.

هندسه خارجی يك سطح، يعني جزئيات مربوط به غوطه‌وری خاص آن در فضای محیطی، توسط فرم بنيادي دوم آن ثبت می‌شود. نسبت به  $e_1$  و  $e_2$  اين فرم با ماترييس

$$II = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \quad (469)$$

با دراييه‌های  $L = \langle n, \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_i \partial x_j} \rangle_{\mathbb{R}^3}$  و  $M = \langle n, \frac{\partial e_i}{\partial x_j} \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle n, \frac{\partial e_i}{\partial x_i} \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle n, \frac{\partial e_1}{\partial x_i} \rangle_{\mathbb{R}^3}$  در  $\langle n, \frac{\partial e_1}{\partial x_i} \rangle_{\mathbb{R}^3}$  نمايش داده می‌شود. اين دراييه‌ها اساساً اندازه‌گيری می‌کنند که پایه‌های مختصاتی  $\square$  و در نتيجه فضاهای مماس  $\square$  در فضای محیطی (در جهت نرمال) هنگام حرکت در امتداد خطوط مختصاتی جقدر خم می‌شوند. اين فرم را می‌توان به عنوان مثال برای تعیین انحنای نرمال

$$\kappa_n(v) = \frac{v^\top II v}{v^\top I v} \quad (470)$$

سطح در  $p$  در جهت  $v = \sum_i v_i e_i \in T_p M$  استفاده کرد. به طور شهودی، اين انحنای نرمال را می‌توان به عنوان انحنای منحنی تعریف شده توسط تقاطع سطح با صفحه تویلید شده توسط جهت  $v$  و نرمال  $n = 1/\kappa_n(v)$  داریه بوسان بر منحنی در  $p$  مطابقت دارد و بنابراین اندازه‌گيری می‌کند که سطح هنگام حرکت در جهت  $v$  چقدر در جهت  $n$  می‌شود؛ برای تجسم عالی اين وضعیت به [؟] مراجعه کنید. کیت‌های مورد علاقه دیگر در مطالعه سطوح غوطه‌ور شده، انحنای‌های اصلی، میانگین و گاووسی آنها مستند که می‌توانند بر حسب انحنای‌های نرمال بيان شوند و در شکل ۵۷ مثال زده شده‌اند. جهت‌ها (بردارهای واحد در  $T_p M$ ) و  $v_{\min}$  که در آنها انحنای نرمال در يك نقطه داده شده  $p$  جداگذار یا حداقل است، به عنوان جهات اصلی در  $p$  شناخته می‌شوند. انحنای‌های منتظر

$$\kappa_{\max} = \kappa_n(v_{\max}) \quad \square \quad \kappa_{\min} = \kappa_n(v_{\min}) \quad (471)$$

انحنای‌های اصلی در  $p$  هستند. مقدار میانگین آنها

$$\kappa_{\text{میانگین}} = \frac{\kappa_{\max} + \kappa_{\min}}{2} \quad (472)$$

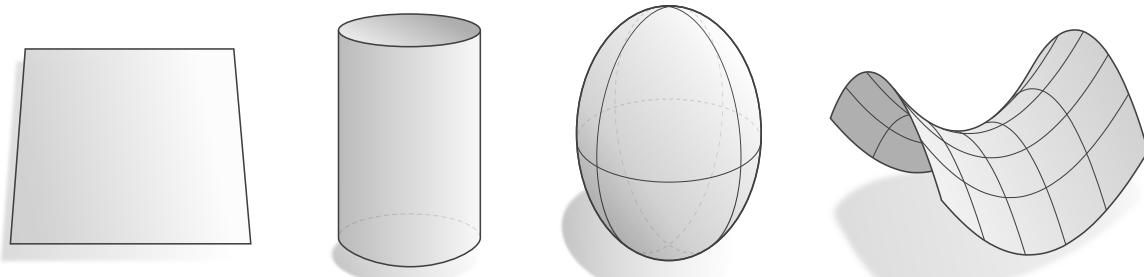
به عنوان انحنای میانگین شناخته می‌شود. انحنای میانگین در نقاط «زین‌مانند» که  $\kappa_{\min} = -\kappa_{\max}$  است، صفر است. سطوح کمینه در هر نقطه انحنای میانگین صفر دارند. حاصلضرب

$$\kappa_{\text{میانگین}} = \kappa_{\max} \cdot \kappa_{\min} \quad (473)$$

انحنای‌های اصلی به عنوان انحنای گاووسی شناخته می‌شود. اين انحنا مثبت است اگر انحنای‌های اصلی هم علامت باشند، که به عنوان مثال برای يرضی گون‌ها صادق است. برای اينکه انحنای گاووسی منفی باشد، علامت انحنای‌های اصلی باید متفاوت باشد، مانند اطراف نواحی هذلولی (زین‌مانند). انحنای گاووسی صفر است اگر يكی (يا هر دو) از مقادير انحنای‌های اصلی صفر باشد، يعني اگر سطح يك جهت تخت داشته باشد. يك مثال برای يك منifold با انحنای گاووسی صفر، استوانه است. گفته می‌شود چنین سطوحی گسترش‌پذیر هستند، که به اين معنی است که می‌توان آنها را بدون تغیير شکل به يك صفحه

<sup>۱۲۶</sup> بردارهای مشتق  $e_i$  در فرمالیسم چارت ذاتی با پایه‌های مختصاتی مطابقت دارند؛ به پیوست آ.۳.۱ مراجعه کنید.

<sup>۱۲۷</sup> در نمادگذاري مدرن، ضرایب يك متريک (مستقل از مختصات)  $g$  نسبت به يك پایه داده شده اغلب با  $g_{\mu\nu}$  نشان داده می‌شوند.



شکل ۵۷: سطوح جایگذاری شده با انحنای خارجی کیفی متفاوت. چپ: صفحه با انحنای اصلی و گاووسی صفر مشخص می‌شود ( $\kappa_{\max} = \kappa_{\min} = \kappa_0$ ). وسط چپ: یک استوانه یک جهت با انحنای مثبت و یک جهت با انحنای صفر دارد، یعنی  $\kappa_{\max} > \kappa_0 > \kappa_{\min}$ . بنابراین انحنای گاووسی آن نیز صفر است. صفحه و استوانه به صورت محلی ایزومنتریک مستند، یعنی هندسه ذاتی آنها به صورت محلی قابل تشخیص نیست. توجه داشته باشید که صفحه را می‌توان لوله کرد (گسترش داد) تا یک استوانه تشکیل شود [[تفاوت بین این دو فقط در فضای محیطی است. وسط راست: یک بیضی گون با انحنای اصلی و گاووسی مثبت ( $\kappa_{\max} > \kappa_0 > \kappa_{\min}$ ) در هر نقطه مشخص می‌شود. راست: سطح یک زین در جهات مختلف خم می‌شود، که دلالت بر عالمت‌های مختلف انحنای اصلی ( $\kappa_0 > \kappa_{\max} > \kappa_{\min}$ ) دارد. در نتیجه، انحنای گاووسی ( $\kappa_0 < 0$ ) منفی است.

یهند کرد، با به طور دقیق‌تر، آنها به صورت محلی با صفحه ایزومنتریک هستند. کارل فریدریش گاووس در قضیه شگفت‌انگیز خود اثبات کرد که انحنای گاووسی یک سطح در واقع یک ویژگی ذاتی است، یعنی به نحوه غوطه‌وری سطح در فضای محیطی مستگی ندارد. این انحنای در تناظر یک به یک با تانسور انحنای ریمانی (ذاتی) یک سطح است (و بنابراین با انحنای ریچی و اسکالار آن نیز). یک ویژگی مهم انحنای گاووسی این است که انتگرال آن روی یک دیسک توپولوژیکی  $D \subset M$  برابر با هولونومی  $\delta_{\partial D}$  است، یعنی زاویه‌ای که یک بردار هنگام انتقال (لوی-چیویتا) یک بار حول مرز دیسک  $\partial D$  می‌چرخد:

$$\int_D \kappa_0 dp = \delta_{\partial D} \quad (474)$$

همانطور که در ادامه خواهیم دید، این رابطه را می‌توان برای تعیین انحنای گاووسی به مشاهده استفاده کرد، جایی که هولونومی  $\delta_{\partial D}$  با نقص زاویه یک حلقه باز شده از وجوده (مانند همسایگی آبی در شکل ۶۳) مطابقت دارد.

از آنجا که کانولوشن‌های  $GM$  فقط به هندسه ذاتی یک سطح مستگی دارند، خواننده ممکن است تعجب کند که چرا ما در مورد ویژگی‌های خارجی آنها مانند انحنای اصلی بحث می‌کنیم. دلیل این است که کانولوشن‌های  $GM$  با این وجود می‌توانند از هندسه خارجی یک سطح مطلع شوند، به عنوان مثال با کدگذاری آن در میدان‌های ویژگی. هندسه خارجی علاوه بر این ممکن است برای تراز کردن ابتکاری چارچوب‌های یک {e}-ساختار و در نتیجه کرنل‌ها استفاده شود. برای مثال، [[ و ]] چارچوب‌ها را در امتداد محور  $\mathbb{R}^3$  فضای محیطی تراز می‌کنند، در حالی که [[ و ]] چارچوب‌ها را در امتداد جهت انحنای اصلی غالب سطح تراز می‌کنند. توجه داشته باشید که این روش‌های ابتکاری همیشه خوش تعریف نیستند: به عنوان مثال، تصویر محور  $\mathbb{R}$  روی یک فضای مماس «افقی» (در فضای محیطی) صفر است، و جهت انحنای اصلی غالب ممکن است تعریف نشده باشد، همانطور که در مورد کره صادق است.

### ۲.۱.۱۲ هندسه‌ی گسته‌سازی شده‌ی مش‌های سطحی

در اصل، امکان توصیف کانولوشن‌های  $GM$  روی پارامتری‌سازی‌های محلی سطح همانطور که در بخش قبل توصیف شد، وجود دارد. در حالی که این رویکرد ممکن است برای برخی هندسه‌های ساده یا متقاضی مانند یکی‌گونهای چنبره‌ها یا هذلولی‌گونهای یکی‌گونهای یا چنبره‌ها مناسب باشد، برای هندسه‌های پیچیده‌تر غیرعملی به نظر می‌رسد. در عمل، سطوح عمدتاً به صورت گسته‌سازی شده ارائه می‌شوند، به عنوان مثال به شکل مشاهده می‌شوند، مشاهده چهارضلعی، مشاهده نیم-یال، سطوح تقسیمی یا ابرهای نقطه. به دلیل استفاده گستره از آنها [[ هم به طور کلی و هم به طور خاص در توصیف کانولوشن‌های  $GM$  سطحی که در دو بخش بعدی مورور می‌کنیم [[ ما در ادامه عمدتاً بر روی مشاهده مثلاً تمرکز خواهیم کرد. بنابراین هدف ما برای باقیمانده بخش فعلی این است که کمیت‌ها و تعاریف را از نظریه هموار گرفته و همتایان گسته‌سازی آنها را روی مشاهده مثلاً مورد بحث قرار دهیم. متأسفانه، این آنالوگ‌های گسته‌سازی عموماً یکتا نیستند، به طوری که تعداد زیادی از تعاریف غیرمعادل وجود دارد.<sup>۱۲۸</sup> ما در ادامه سعی خواهیم کرد یک ایده کلی در مورد برخی از رایج‌ترین رویکردهای گسته‌سازی هندسه هموار سطوح بر حسب مشاهده مثلاً ارائه دهیم.

<sup>۱۲۸</sup> [[ این وضعیت را به این صورت توصیف می‌کنند: «علی‌رغم استفاده گستره از مشاهده مثلاً در گرافیک کامپیوتری، هیچ اختلاف نظری در مورد مناسب‌ترین روش برای تخمین ویژگی‌های هندسی ساده مانند بردارهای نرمال و انحنای روی سطوح گسته‌سازی وجود ندارد.» به طور مشابه، [[ ادعای می‌کند: «هیچ راه "درست" واحدی برای گسته‌سازی یک کمیت هندسی داده شده وجود ندارد، بلکه راه‌های مختلف زیادی وجود دارد که هر کدام برای یک هدف خاص مناسب است.»]

توبولوژی، هندسه و جایگذاری مشهای مثلثی: مشهای مثلثی  $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$  معمولاً بر حسب یک مجموعه از

$$\mathcal{V} \subseteq \mathbb{N} \quad (475)$$

رئوس و یک مجموعه از

$$\mathcal{F} \subseteq \{\{i, j, k\} \mid i \neq j \neq k \in \mathcal{V}\} \quad (476)$$

وجوه مثلثی کدگذاری می‌شوند، که این شرط را برآورده می‌کنند که هر رأس حداقل در یکی از وجوه موجود باشد.<sup>۱۲۹</sup> یک مجموعه از

$$\mathcal{E} = \{\{i, j\} \mid i \neq j \in \{i', j', k'\} \text{ و } \{i', j', k'\} \in \mathcal{F}\} \quad (477)$$

یال‌ها که وجوه را محدود می‌کنند، بالاصله نتیجه می‌شود. در عمل، اغلب یک مجموعه از

$$P = \{p_i \in \mathbb{R}^r \mid i \in \mathcal{V}\} \quad (478)$$

موقعیت‌های رأس داده می‌شود، که یک جایگذاری از مش را در فضای محیطی  $\mathbb{R}^r$  مشخص می‌کند. این جایگذاری طول‌های

$$l_{\{i,j\}} = \|p_j - p_i\| \quad (479)$$

یال‌های  $\{i, j\}$  و مساحت‌های

$$\square_{\{i,j,k\}} = \frac{1}{4} \|(p_j - p_i) \times (p_k - p_i)\| \quad (480)$$

وجوه  $\{i, j, k\}$  را نتیجه می‌دهد.

ما به طور خاص به مشهای سطحی علاقه‌مندیم، که باید شرایط اضافی را برآورده کنند. برای فرمول‌بندی این شرایط، توجه داشته باشید که عناصر مش  $\{i_1, \dots, i_n\}$  (که در آن  $i_1, \dots, i_n = 0, 1, \dots, n$  برای رئوس، یال‌ها یا وجوه است)  $n$ -سادک‌ها را القا می‌کنند، که به عنوان پوشش‌های محدب

$$\text{convex}(\{i_1, \dots, i_n\}) := \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j p_{i_j} \mid \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1 \text{ و } \alpha_j \geq 0 \text{ برای } j = 1, \dots, n \right\} \subset \mathbb{R}^r. \quad (481)$$

تعریف می‌شوند. مجموعه‌ای که تمام این سادک‌ها (عناصر مش) را در بر می‌گیرد، یک کمپلکس سادکی-۲-خالص را تشکیل می‌دهد [؟]. اینکه کمپلکس سادکی-۲-خالص است به این معنی است که هر سادک-۰ (رأس) و سادک-۱ (یال) زیرمجموعه‌ای از حداقل یک سادک-۲ (وجه) است. به عبارت دیگر، هیچ رأس یا یال منقطعی در مش وجود ندارد. فضای زیربنایی

$$\bigcup_{\{i_1, \dots, i_n\} \in \mathcal{V} \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{F}} \text{convex}(\{i_1, \dots, i_n\}) \stackrel{\text{Def}}{=} \bigcup_{\{i, j, k\} \in \mathcal{F}} \text{convex}(\{i, j, k\}) \subset \mathbb{R}^r \quad (482)$$

از کمپلکس سادکی به عنوان اجتماع تمام سادک‌های آن تعریف می‌شود، که با توبولوژی معمول به عنوان یک زیرمجموعه از  $\mathbb{R}^r$  مجهر شده است. یک مش سپس یک مش سطحی (مش منیفلد) نامیده می‌شود اگر فضای زیربنایی یک سطح توبولوژیکی (منیفلد)، به صورت اختیاری با مرز، باشد. به طور شهودی، این امر نیازمند (۱) این است که هر یال مجاور دو وجه (یا یکی در مرزها) باشد و (۲) اینکه وجود اطراف هر رأس یک دیسک توبولوژیکی (یا یک نیم‌دیسک در مرزها) تشکیل دهند.

چنین مشهای سطحی تعریف شده، همتایان گسته سطوح ریمانی جایگذاری شده هستند. با این حال، از آنجا که کانون‌لوشن‌های  $GM$  مستقل از هندسه خارجی منیفلد زیربنایی هستند، بحث مختصر در مورد هندسه ذاتی آنها آموزنده است. بنابراین مجموعه‌های رأس، یال و وجه  $\mathcal{V}$ ،  $\mathcal{E}$  و  $\mathcal{F}$  را در نظر بگیرید، اما مکان‌های جایگذاری  $P$  رئوس را کنار بگذارید. در مجموع، این مجموعه‌ها یک کمپلکس سادکی-۲-انتزاعی،  $\mathcal{V} \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{F}$  را تشکیل می‌دهند که به عنوان خانواده‌ای از سادک‌های انتزاعی  $\{i_1, \dots, i_n\}$  [؟] که تحت عمل زیرمجموعه‌گیری سته است، تعریف می‌شود [؟]. اگر این کمپلکس سادکی-۲ (که اکنون انتزاعی است) (۱) خالص و (۲) به گونه‌ای باشد که «استاره» هر رأس (که با سادک‌های حاوی آن رأس داده می‌شود) یک دیسک ترکیبی‌تر تشکیل دهد، این یک سطح سادکی انتزاعی را تشکیل می‌دهد (که دقیقاً در صورتی است که مش جایگذاری شده یک مش سطحی باشد). سطح سادکی انتزاعی را می‌توان به عنوان همتایان ترکیبی‌تر منیفلدهای توبولوژیکی در نظر گرفت. آنها امکان محاسبه ناوردهای توبولوژیکی، به عنوان مثال مشخصه اویلر

$$\chi_{\text{منیفلد}} = |\mathcal{V}| - |\mathcal{E}| + |\mathcal{F}|. \quad (483)$$

را می‌دهند. به عنوان یک ناوردای توبولوژیکی، مشخصه اویلر برای هر دو فضای همسان‌ریخت، به ویژه برای یک منیفلد هموار و هر یک از مثلث‌بندی‌های آن، برابر است. برای مثال، بیست‌وچهاری از بخش ۴.۱۲ دارای  $2 - 30 + 20 = 12$  است، که با  $2 - 2 = 0$  برای کره ۲-بعدی مطابقت دارد.

<sup>۱۲۹</sup> وجود به طور جایگزین می‌توانند به عنوان سه‌تایی‌های مرتب از رئوس تعریف شوند. ترتیب رئوس (یا بهتر بگوییم، کلاس‌های هم‌ارزی ترتیب‌ها تحت یک تعداد زوج از جایگشت‌ها) ممکن است برای کدگذاری جهت‌گیری وجود استفاده شود. ما در عرض جهت‌گیری وجود را همانند نظریه هموار خود با انتخاب یک دست‌سازی از چارچوب‌های مرجع کدگذاری خواهیم کرد.

برای رسیدن به یک توصیف ذاتی از هندسه یک سطح مثلث‌بندی شده، به یال‌های  $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^+_{ij}$  طول یال  $i, j \in \{i, j, k\}$  اختصاص می‌دهیم. برای سازگاری، این طول‌ها باید نامساوی مثلث  $|l_{k,i}| + |l_{j,k}| > |l_{i,j}|$  را برای هر وجه  $i, j, k \in \mathcal{F}$  برآورده کنند. طول یال‌ها متريک‌های اقليدسی (توابع فاصله) را روی وجود و بتابراين یک متريک اقليدسی تکمای-تعريف شده را روی کل سطح القا می‌کنند. اين متناظر با یک متريک ريماني (يا فرم بندي اول) است که دور از رئوس اقليدسی و در يك همسایگی کوچک حول رئوس «مخروطمانند» (تکين) است [؟].

برای بستن دايره به تعريف خارجي اوليه ما از مش‌های مثلثي، باید مش را در فضای محیطي  $\mathbb{R}^3$  جايگذاري کرد. اطلاعات لازم در مورد هندسه خارجي با مجهر کردن مش به يك فرم بندي اول دوم داده می‌شود. در محیط گسته، اين فرم را می‌توان به عنوان يك انتخاب از زاويه دووجهی (زاويه خمش) بین هر دو مثلث مجاور، يعني يك زاويه برای هر يال غيرمنزري مش، تعريف کرد. با فرض اينکه اين داده‌ها به طور سازگار انتخاب شده باشند<sup>۱۳</sup>، امكان بازسازی جايگذاري، يعني موقعیت‌های رأس  $P$ ، تا حرکات صلب در  $(\mathbb{R}^3)$  وجود دارد [؟]. در حالی که يك جايگذاري از سطح برای کانون‌لوشن‌های  $GM$  ذاتي ضروري نیست، تمام مقالات فهرست شده در ردیف‌های (۴۱-۳۷) جدول ۶ مدل‌های خود را روی مش‌های مثلثي جايگذاري شده ارزیابی می‌کنند.

**فضاهای مماس و میدان‌های بوداری:** برای توصیف میدان‌های بوداری روی مش‌ها، و برای مجهر کردن مش‌ها به ساختار هندسي مانند اتصالات، لازم است يك مفهوم از فضاهای مماس که به آنها متصل هستند، تعريف شود. تعريف ناسازگار متعددی، که برای کاربرد خاص مورد نظر طراحی شده‌اند، در مقالات وجود دارد. از آنجا که میدان‌های بوداری معمولاً در مکان‌های گسته نمو نبوداری می‌شوند، کلاف‌های مماس گسته مورد اغلب فقط به صورت جزئی تعريف می‌شوند، به عنوان مثال فقط روی وجود، يال‌ها يا رئوس. ما به طور خلاصه برخی از اين تعريف را مرور می‌کنیم، يك بررسی دقیق‌تر را می‌توان در [؟] یافت.

از آنجا که وجود (садک‌های -۲) يك مش جايگذاري شده هستند، می‌توان به طور طبیعی فضاهای مماس آنها را به عنوان آن دسته از زیرفضاهای دوبعدی  $\mathbb{R}^3$  که در آنها قرار دارند، تعريف کرد [؟]. به طور خاص، با توجه به يك وجه  $i, j, k \in \mathcal{F}$ ، می‌توان فضاهای مماس  $T_p M = \text{span}(p_j - p_i, p_k - p_i) \subset \mathbb{R}^3$  به عنوان پوشش خطی هر دو بودار يال تعريف کرد. تراز فضای مماس در فضای محیطي اغلب بر حسب نرمال وجه  $(p_j - p_i) \times (p_k - p_i) = n$  نمایش داده می‌شود. میدان‌های بوداری مماس (يا ويژگي) گسته در نمایش‌های مبتنی بر وجه را می‌توان به عنوان ثابت روی هر وجه تعريف کرد، يعني با يك بودار مماس (يا ويژگي) منفرد برای هر وجه نمایش داده می‌شوند. نسبت به يك انتخاب از چارچوب مرجع روی هر يك از وجود، چنین میدان‌های بوداری مماس و ويژگي به ترتیب با  $c|\mathcal{F}|$  يا  $2|\mathcal{F}|$  يا  $c|\mathcal{F}|^2$  ضریب بوداری کدگذاري می‌شوند. توجه داشته باشید که چنین میدان‌های بوداری به رئوس يا يال‌ها گسترش نمی‌یابند. بدليل ناپیوستگي آنها، مفهوم عملگرهای دیفرانسیل، که بر روی چنین میدان‌هایی عمل می‌کنند، بسیار محدود است [؟] (که برای کاربرد خاص ما بی‌اهمیت است). يك طرح درون‌یابی خطی از میدان‌های بوداری مبتنی بر وجه در [؟] پیشنهاد شده است.

از آنجا که هیچ جهت نرمال طبیعی در رئوس يك مش جايگذاري شده از تمدن دارد، تعريف رایج متعددی برای فضاهای مماس رأس و وجود دارد. نرمال‌های رأس را می‌توان به عنوان مثال به عنوان میانگین وزن‌دار ساحتی از نرمال‌های وجود مجاور تعريف کرد [؟]. علاوه بر وزن‌دهی ساحتی، گاهی از وزن‌های یکنواخت یا وزن‌های زاويه نوک استفاده می‌شود [؟]. گزینه دیگر، تعريف بودارهای نرمال از طریق يك عاملکر نرمال ادھاری میانگین است [؟]. نرمال حاصل با نرمال‌های مشتق شده از طریق گرادیان‌های ساحت مطابقت دارد، اما با آنهايی که از طریق گرادیان‌های حجم یا نرمال‌های کره محاطی مشتق شده‌اند، متفاوت است؛ به [؟] مراجعه کنید.

به طور جايگزین، می‌توان فضاهای مماس رأس را به روش ذاتي تعريف کرد، به سادگي با تعريف آنها به عنوان فضاهای بوداری دو بعدی که به رأس متصل هستند. رابطه آنها با هندسه مش در يك همسایگی محلی حول رأس در اینجا با نمایش همسایگی يك-حلقه در صفحات مماس کدگذاري می‌شود. مسلماً بر جسته‌ترین اين رویکردها بر اساس تغیير مقیاس زاويه کل

$$\Theta_i = \sum_{\{i, j, k\} \in \mathcal{F}} \theta_{\{i, j, k\}}^i, \quad (484)$$

است، که از زوایای نوک  $\theta_{\{i, j, k\}}^i = \arccos \left\langle \frac{p_j - p_i}{\|p_j - p_i\|} \frac{p_k - p_i}{\|p_k - p_i\|} \right\rangle$  اگر اين زاويه دقیقاً  $2\pi$  باشد، همسایگی محلی حول رأس به طور ذاتي تحت است؛ به عنوان مثال به همسایگی قمز یا سیز در شکل ۶۳ مراجعه کنید. يك زاويه  $\Theta_i < 2\pi$  همانند همسایگی آبی، شنان دهنده يك اتحادي گاووسی گسته مثبت (که به درستی در ادامه تعريف می‌شود)،  $\Theta_i = 2\pi - \Theta_{i+1, i}$  است، يعني يك همسایگی مخروطمانند. يك زاويه  $\Theta_i > 2\pi$  به طور مشابه متناظر با يك همسایگی زین مانند با اتحادي گاووسی منفی است. رویکرد دنبال شده در [؟] [؟] [؟] این است که همسایگی يك-حلقه را با تغیير مقیاس همسانگردد زوایای قطعی با ضریب  $s_i \Theta_i = 2\pi$  به کل  $\sum_i s_i \Theta_i = 2\pi$  از يك فضای اقلیدسی (مماس) پهن کنند. يك میدان بوداری در این محیط با يك بودار برای هر رأس نمایش داده می‌شود. يك انتخاب از پیمانه، که اغلب با يكی از يال‌ها تراز شده است، سپس امکان کدگذاري میدان‌های بوداری مماس یا ويژگی را به ترتیب بر حسب  $|V|$  يا  $|L|$  ضریب فراهم می‌کند. [؟] پیشنهاد کردن که بودارها را با يك تابع وزن‌دهی کلاهی تکمه‌ای-خطی از رئوس به وجود درون‌یابی کنند. جهت بودارها در اینجا با يك انتقال اقلیدسی معمول روی فضاهای مماس پهن شده تعیین می‌شود. همانطور که توسط [؟] اشاره شده است، این درون‌یابی پیوسته ییست. برای حل این مشکل، همان نویسنده‌گان در [؟] پیشنهاد می‌کنند که يك ساختار هموار را روی مش مثبت تعريف کرده و همسایگی های يك-حلقه را در چارت‌های هموار نمایش دهند. سپس يك درون‌یابی هموار با انتقال بودارها از طریق يك اتصال سادک هموار روی مش انجام می‌شود، که برای نزدیکرین حالت

<sup>۱۳</sup>. فرم‌های بندي اول و دوم گسته باید يك شرط انتگرال‌پذيری را برآورده کنند، مشابه معادله گاووس و معادلات مابیناردي-کوداتسي در محیط هموار [؟].

ممکن به اتصال لوی-چویتا القا شده از فضای جایگذاری اصلی، بهینه سازی شده است. توجه داشته باشد که هر دو رویکرد به طور موثر هندسه را حول رئوس پهن می کنند، یعنی دقیقاً روی مش مثالی عمل نمی کنند.

یک رویکرد دیگر، که ریشه در حساب دیفرانسیل خارجی گسته دارد [؟ ؟]، تعریف بردارهای مماس  $v \in T_p M$  بر حسب ۱-فرم‌ها  $\{e_i\}$  با استفاده از ایزومورفیسم موسیقیایی (وابسته به متربک)  $T^*M \rightarrow TM$  :  $T^*M \rightarrow TM$  است. از آنجا که ۱-فرم‌های سادک به طور طبیعی به یال‌ها (سادک‌های ۱-اختصاص داده می‌شوند، این منجر به میدان‌های برداری می‌شود که بر حسب یک بردار برای هر یال و در نتیجه [؟ ؟] ضریب پس از انتخاب چارچوب‌ها، پارامتری می‌شوند. با این حال، همانطور که توسط [؟] استدلال شده است، یک درون یا بی‌تکه‌ای-خطی از بردارهای روی وجوده دوباره به تأییس‌گنگی منجر خواهد شد. علاوه بر این، برای ما روشن نیست که چگونه این رویکرد می‌تواند به کلاف‌های برداری همبسته عمومی و در نتیجه میدان‌های ویژگی تعیین یابد.

با توجه به هر یک از ساختارهای بالا از فضاهای مماس، چارچوب‌های مرجع محلی به راحتی به عنوان زوج‌های مرتبی از بردارهای مماس خطی مستقل تعریف می‌شوند. یک انتخاب رایج در اینجا تراز کردن اولین محور چارچوب با یکی از یال‌های مجاور سادک فعلی (عنصر مش) است. به طور خاص برای مورد چارچوب‌های راست‌هنگار و راست‌گرد، یعنی هر زمان که  $G \leq SO(2)$  باشد، یک انتخاب از یال (جهت‌دار) یک چارچوب را به طور کامل تعیین می‌کند. سپس بردارهای مماس اغلب در مختصات قطبی نمایش داده می‌شوند، با زاویه اندازه‌گیری شده نسبت به یال مرجع. اگر فضاهای مماس به صورت خارجی مدل‌سازی شوند، یعنی به عنوان زیرفضاهای دو بعدی از فضای محیطی  $\mathbb{R}^3$  رایج‌ترین روش نمایش صریح چارچوب‌ها به عنوان یک زوج مرتب از بردارها در  $T_p M \subset \mathbb{R}^3$  است. تعاریف چارچوب‌ها و پیمانه‌ها سپس کاملاً معادل تعاریف در معادلات (۴۳۷) و (۴۳۲) در بخش ۱.۱۱ هستند.

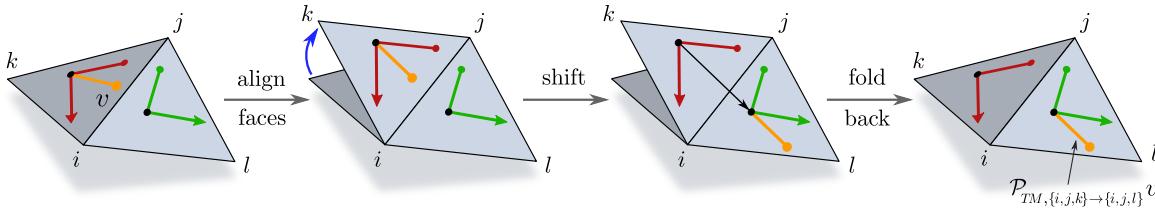
$G$ -ساختارها، طبق معمول، به عنوان کلاف‌هایی از چارچوب‌ها تعریف می‌شوند، که در هر فضای مماس از طریق تبدیلات پیمانه‌ای با مقادیر  $G$  به هم مرتبط هستند. در جامعه گرافیک کامپیوتی، علاقه خاصی به  $N$ -میدان‌های جهتی (یا میدان‌های  $N_{\text{اصل}} = N/\pi$ - واحد) وجود دارد، که در آنجا به عنوان مجموعه‌ای از میدان برداری واحد تعریف می‌شوند، به طوری که  $N$  بردار در هر فضای مماس با زاویه  $N/\pi$  از هم فاصله دارند. از آنجا که هر بردار واحد روى یک متفاصله جهت‌پذیر یک چارچوب راست‌هنگار و راست‌گرد متناظر را القا می‌کند، دیده می‌شود که  $N$ -میدان‌های جهتی معادل  $C_N$ -ساختارها هستند. یک مثال،  $C_6$ -ساختار روى بیست و چهار در شکل ۶۴۶ است، که به طور موثر ۶ چهت واحد را به هر نقطه اختصاص می‌دهد، به جز در قطب‌ها، که در آنجا تکینگی‌هایی با اندازه  $\frac{1}{6}$  (یا زاویه  $\frac{\pi}{6}$ ) دارد. طراحی تعاملی میدان‌های جهتی هموار، با تکینگی‌های تعریف شده توسط کاربر در میان دیگر محدودیت‌ها، یک زمینه تحقیقاتی فعال در جامعه گرافیک کامپیوتی است [؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟]. برخی از کانولوشن‌های  $GM$  سطحی که در بخش بعدی مرور می‌کنیم از چنین الگوریتم‌هایی برای محاسبه یک  $C_N$ -ساختار استفاده می‌کنند [؟].

**متربک ریمانی و ایزومنتری‌ها:** با داشتن یک مش مجذوب از فضاهای مماس، می‌توان یک متربک ریمانی را روی آن تعریف کرد. رایج‌ترین مورد، مش‌های جایگذاری شده ایزومنتریک با فضاهای مماس مدل‌سازی شده به عنوان زیرفضاهای دو بعدی از فضای محیطی  $\mathbb{R}^3$  است. همانطور که قبل از معادلات (۴۲۹) و (۴۶۷) توصیف شد، متربک سپس با تحلید حاصل‌ضرب داخلی استاندارد اقلیدسی  $\mathbb{R}^3$  از فضای جایگذاری به فضاهای مماس القا می‌شود.

اگر فضاهای مماس به صورت ذاتی مدل‌سازی شوند، یک متربک را می‌توان با انتخاب یک  $d$ -ساختار، یعنی چارچوب‌های مرجعی که تعریف شده‌اند راست‌هنگار باشند، ثابت کرد. کمی کمتر از همان‌گویی، اگر طول یال‌ها  $\{l_{i,j}\}$  و بنابراین یک تابع فاصله اقلیدسی تکمیلی-تعیین شده روی سطح داده شده باشد، انتخاب  $d$ -ساختار باید با این طول‌ها سازگار باشد. به طور خاص، نگاشت لگاریتمی باید منجر به بردارهای مماس با نرم (ریمانی)  $\mathcal{E} = |\log_p(q)|$  شود اگر نقاط  $p$  و  $q$  با یک فاصله اقلیدسی  $\mathbb{R}^d$  از هم جدا شده باشند. توجه داشته باشید که این گزاره نیازمند یک تعریف سازگار از اتصال لوی-چویتا روی مش است، که در ادامه به آن می‌پردازیم.

ایزومنتری‌ها به طور ذاتی طبق معمول تعریف می‌شوند، یعنی به عنوان آن دسته از نگاشت‌های مش به خود، که متربک را حفظ می‌کنند. به صورت خارجی، گروه ایزومنتری از آن دسته ایزومنتری‌های  $E(2) \in \phi$  فضای جایگذاری تشکیل شده است که مش را ناوردا باقی می‌گذارند. اکثر مقالات در ردیف‌های [۴۱-۴۷] از جدول ۶ مجموعه داده‌هایی را در نظر می‌گیرند که مش‌های آنها دارای یک گروه ایزومنتری بدیهی هستند. با این حال، همسایگی‌های محلی مش‌ها اغلب با این وجود با یکدیگر ایزومنتریک (یا تقریباً ایزومنتریک) هستند، که در شکل ۳۴ مثال ۳ زد شده است. همانطور که در بخش ۱.۱۸ بحث شد، هموردایی ایزومنتری کانولوشن‌های  $GM$  همچنان به صورت محلی برقرار خواهد بود اگر میدان دید کرنل‌ها به اندازه کافی کوچک باشد.

**اتصالات، انتقال‌دهنده‌ها و ژئودزیک‌ها روی مش‌های مثلثی:** آخرین جزء مورد نیاز ما برای پیداهسازی کانولوشن‌های  $GM$  روی مش‌ها، پول‌بک انتقال‌دهنده  $Exp_p$  از میدان‌های ویژگی است (معادله (۶۷)). بنابراین ما باید بدانیم که چگونه (۱) بردارهای ویژگی را به صورت موازی روی مش‌ها منتقل کنیم و (۲) ژئودزیک‌ها را روی مش‌ها، به ویژه نگاشت نمایی یا، بسته به پیداهسازی، نگاشت لگاریتمی را محاسبه کنیم. تمام این نگاشت‌ها در نهایت به یک انتخاب از اتصال روی مش پستگی دارند. در محیط هموار، یک اتصال اساساً مجموعه‌ای از انتقال‌دهنده‌های بی‌نهایت کوچک بین فضاهای مماس مجاور است. بنابراین اتصالات گسته روی مش‌ها معمولاً به عنوان انتقال‌دهنده‌ها بین عناصر مش مجاور تعریف می‌شوند. انتخاب خاص گسته‌سازی کلاف مماس، که گزینه‌های آن در بالا مورد بحث قرار گرفت، بر تعریف خاص اتصال تأثیر می‌گذارد. در ادامه، ما برخی از گسته‌سازی‌های اتصالات را که در مقالات یافت می‌شوند، مرور می‌کنیم و توضیح می‌دهیم که چگونه می‌توان از آنها برای محاسبه انتقال‌دهنده‌ها و ژئودزیک‌ها استفاده کرد.



شکل ۵۸: انتقال موازی بین وجهه مش. هندسه محلی دو وجه مجاور گسترش پذیر است، یعنی به طور ذاتی تخت است و می‌توان آن را به یک صفحه باز کرد. بنابراین انتقال لوی-چیویتا بین وجهه با جایگذاری یک بردار روی وجهه باز شده و سپس خم کردن وجهه به جایگذاری اصلی خود داده می‌شود. این انتقال موازی بین وجهه مجاور را می‌توان به عنوان آنالوگ گسته اتصال لوی-چیویتا پیوسته در محیط هموار در نظر گرفت [۴]. با توجه به هر انتخاب از چارچوب‌های مرچ، انتقال  $P_{TM, \{i,j,k\} \rightarrow \{i,j,l\}} v$  با یک عضو گروه  $\mathcal{G}_{\{i,j,k\} \rightarrow \{i,j,l\}}$  (یا  $\text{SO}(2)$ ) در نظر گرفتن چارچوب‌های راست‌هنگار و راست‌گرد) نمایش داده می‌شود. اتصالات عمومی تر یک تبدیل خطی اضافی را به بردار مستقل از مختصات هنگام انتقال بین وجهه اعمال می‌کنند. تعاریف جایگزین از اتصالات گسته است، عناوی مثال برای انتقال بین رئوس در امتداد یال‌ها، در متن اصلی مورد بحث قرار گرفته‌اند.

ساده‌ترین مورد برای بررسی، انتقال با اتصال بین دو وجه مجاور است. به یاد بیاورید که انتقال لوی-چیویتا روی یک صفحه تخت به عنوان جایگذاری یک بردار به گونه‌ای تعریف می‌شود که در معنای معمول اقلیدسی موازی بماند؛ به شکل ۱۱۵ آنرا مراججه کنید. از آنجا که اتصالات ذاتاً ذاتی هستند، به جایگذاری خاص این صفحه در فضای محيطی بستگی ندارند، که به ما می‌گوید چگونه روی هر سطح گسترش پذیر است. این به طور خاص به ما می‌گوید که چگونه بین دو مثلث مجاور منتقل کنیم، زیرا می‌توان آنها را باز کرد (گسترش داد) و به یک صفحه تبدیل کرد، همانطور که در شکل ۵۸ به تصویر کشیده شده است. بنابراین اتصال لوی-چیویتا بین وجهه را می‌توان به این صورت تصور کرد که (۱) وجهه را پهن کرده، (۲) بردار را طبق معمول روی صفحه منتقل کرده و (۳) وجهه را به جایگذاری اصلی خود باز گردانیم [۴]. انتقال دهنده حاصل  $P_{TM, \{i,j,k\} \rightarrow \{i,j,l\}} v$  و  $\{i,j,l\}$  را می‌توان به صورت اختیاری بر حسب یک عضو گروه  $\mathcal{G}_{\{i,j,k\} \rightarrow \{i,j,l\}}$  در (۲)  $\text{GL}(2)$  یان کرد. از آنجا که اتصال لوی-چیویتا یک اتصال متربک است، برای مورد خاص چارچوب‌های راست‌هنگار منجر به اعضای گروه در ۲ و برای چارچوب‌های راست‌هنگار جهت‌دار منجر به اعضای  $\text{SO}(2)$  یا زوایای دوران می‌شود.

همانطور که توسط [۶] پیشنهاد شده است، امکان تعیین این ساختار فراتر از اتصالات لوی-چیویتا وجود دارد: به جای صرفاً جایگذاری بردارها بین وجهه پنهن شده، اتصالات عمومی تر یک تبدیل خطی اضافی، به عنوان مثال یک  $C_N$  دوران اضافی، را اعمال می‌کنند. در حالی که این تبدیل اضافی با یک اتصال دهنده متعارض خواهد شد، از نظر مفهومی از آن مستقل است و می‌تواند در یک چارچوب کاملاً مستاند از عبارت مخصوصاتی انتقال دهنده  $P_{TM, \{i,j,k\} \rightarrow \{i,j,l\}} v$  در  $\text{GL}(2)$  معکوس خواهد شد، که با داشتن یک انتقال بالهولونومی صفر حول هر حلقه ممکن تعریف می‌شوند، و برای هر چه هموارتر بودن بهینه شده‌اند، به جز در برخی تکنیک‌ها که به صورت توپولوژیکی تحمیل شده‌اند [۶]. آنها علاوه بر این اتصالات را در نظر می‌گیرند که دوران‌های (مستقل از مخصوصات) با  $\frac{\pi}{N}$  را اعمال می‌کنند و می‌توانند برای ساخت  $N$ -میدان‌های جهتی، متناظر با  $C_N$ -ساختارها استفاده شوند. در کاربردهای ما، همیشه اتصالات لوی-چیویتا را برای محاسبه ژئودزیک‌ها در نظر خواهیم گرفت. مدل‌های مور شده در بخش بعدی ۲.۱۲ یک گروه ساختاری  $G = \text{SO}(2)$  را روی متشاهدین جهت‌پذیر فرض می‌کنند و از انتقال دهنده‌های لوی-چیویتا برای بردارهای ویژگی استفاده می‌کنند. در مقابل، مدل‌های بخش ۳.۱۲ یک گروه ساختاری بدینهی  $\{e\} = G$  را فرض می‌کنند و بنابراین فقط به اتصالات بدینهی  $\{e\}$ -ساختار سازگار اجازه می‌دهند. آنها ویژگی‌ها را به گونه‌ای منتقل می‌کنند که بردارهای ضریب آنها نسبت به چارچوب‌های  $\{e\}$ -ساختار ناوردا باقی بمانند، یعنی صرفاً مقادیر عددی آنها را کمی می‌کنند.

با توجه به فضاهای مماس جایگذاری شده  $T_p M \subset \mathbb{R}^3$  در دیگر عناصر مش مانند رئوس یا یال‌ها، این رویکرد به طور طبیعی به انتقال بین عناصر مش دلخواه تعیین می‌یابد [۶]: به جای تراز کردن وجهه، می‌توان به عنوان مثال فضای مماس رأس را با وجه مجاور قبل از جایگذاری بردار تراز کرد. از نظر هندسی، این عملیات را می‌توان به عنوان انتقال روی یک مش که رئوس و یال‌های آن در یک همسایگی بی‌نهایت کوچک بریده شده و با یک وجه چندضلعی جایگزین شده‌اند، در نظر گرفت.

یک تعریف جایگزین از اتصالات گسته در [۶] و [۷] ارائه شده است. نویسنده این هر دو مقاله، فضاهای مماس را فقط در رئوس مدل می‌کنند، جایی که آنها بر حسب تغییر مقیاس زاویه کل و رودی، معادله (۴۸۴)، به  $2\pi$  تعریف می‌شوند، همانطور که در بالا بحث شد. یک اتصال روی مش سپس با انتقال دهنده‌ها روی تمام یال‌های  $\{i, j, l\}$  داده می‌شود، که فضاهای مماس رئوس مجاور را به هم متصل می‌کنند. از آنجا که مفهوم هندسی باز کردن مثلث‌ها در اینجا وجود ندارد، انتقال دهنده‌های یال از طریق اعضا گروه نسبت به یک چارچوب مبدأ و مرجع کدگذاری می‌شوند. به طور خاص برای اتصال لوی-چیویتا، و چارچوب‌های مرچ راست‌هنگار و راست‌گرد، این اعضا گروه در (۲)  $\text{SO}(2)$  قرار دارند. سودمندی این ساختار برای انتقال مستقیم در امتداد مسیرهای دلخواه روی منیفلد نامشخص است، با این حال، برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی که به مشتق همودا بستگی دارند، مفید است. [۶] نشان دادند که یک راه حل از معادله گرمای برداری با این وجود اجازه می‌دهد تا از چنین اتصالات برای محاسبه (غیرمستقیم) انتقال موازی بین نقاط دلخواه روی یک ساختار دیگر، یعنی اتصالات سادکی هموار بین و در داخل تمام عناصر مش را پیشنهاد می‌کنند. آنها علاوه بر این بحث می‌کنند که چگونه چنین اتصالات را می‌توان بهینه کرد تا حد ممکن به اتصال لوی-چیویتا (ناهموار) نزدیک باشند.

یک اتصال داده شده، انتقال موازی را در امتداد یک مسیر تعیین می کند. در محیط هموار، که اتصالات انتقال دهنده های بی نهایت کوچک هستند، انتقال عناصر مش که انتگرال گیری از اتصال در امتداد مسیر محاسبه می شود. در محیط گسته، انتقال بر این اساس با ترکیب تبدیلات منفردی که اتصال را بین عناصر مش که توسط مسیر عبور می کنند، تشکیل می دهنده، داده می شود. برای اتصال لوی-چیویتا، این فرآیند متناظر با پهن کردن تمام عناصر مش در امتداد مسیر و سپس جابجایی بردار روی آن است؛ به شکل ۷ در [۴] مراجعه کنید. روش مبتنی بر معادله گرمای برداری توسط [۴] انتقال بردارها را به طور خاص در امتداد ژئودزیک ها محاسبه می کند. از آنجا که بین روش برای انتقال از یک مکان مبدأ به هر مکان دیگر روی منيفلد به طور همزمان حل می کند، این رویکرد می تواند کارآمدتر از انتگرال گیری از انتقال برای هر مسیر منفرد به طور جداگانه باشد.

انحنای یک اتصال در محیط هموار به عنوان هولونومی انتقال آن حول یک دیسک بی نهایت کوچک تعریف می شود. انحنای در یک رأس در محیط گسته به طور مشابه به عنوان هولونومی انتقال حول این رأس تعریف می شود. برای اتصال لوی-چیویتا، این فقط انحنای گاووسی است، که با نقص زاویه

$$\gamma_{00000,i} = \delta_i = 2\pi - \Theta_i, \quad (485)$$

داده می شود، که در آن  $\Theta$  زاویه کل نوک از معادله (484) است. ما دوباره به بیست وجهی به عنوان مثال اشاره می کنیم، که در همه جا انحنای صفر دارد، به جز در دوازده رأس اصلی خود، که در آن نقص زاویه (انحنای) برابر با  $\frac{\pi}{2}$  است. اتصالات بدیهی بنا به ساختار، انحنای صفر دارند.

در آخر، ما باید ژئودزیک ها را مورد بحث قرار دهیم. در محیط هموار، ژئودزیک ها به عنوان مستقیم ترین مسیرها تعریف می شوند، که با این گزاره رسیت می یابد که مشتقهای هموردای بردارهای ماس آنها در امتداد منحنی صفر می شوند، یعنی  $\dot{\gamma} = 0$ . این معادل این الزام است که انتقال یک بردار ماس  $(t, \dot{\gamma})$  در امتداد ژئودزیک، ماس بر آن باقی بماند، یعنی  $\dot{\gamma}(t, \dot{\gamma}) = \dot{\gamma}(t, \dot{\gamma}_{TM, \gamma(t)})$ . علاوه بر این، کوتاه ترین مسیر بین هر دو نقطه روی یک منيفلد همبند با یک ژئودزیک داده می شود. همانطور که توسط [۴] اشاره شده است، این معادل بودن مسیرهای کوتاه ترین و مستقیم ترین دیگر روی مسیرها برقرار نیست، به طوری که باید بین این دو مفهوم تمایز قائل شد.

به یاد بیاورید که نگاشت نمایی  $T_p M \rightarrow M$  به عنوان نگاشت بردارهای  $u$  به آن نقطه ای تعریف می شود که با راه رفتن به اندازه  $\|u\|$  از  $p$  در امتداد ژئودزیک (با سرعت واحد) در جهت  $u$  به آن می رسیم. این مفهوم به راحتی به مسیرها تعمیم می یابد، جایی که مستقیم ترین ژئودزیک را در جهت  $u$  برای فاصله  $\|u\|$  دنبال می کنیم. همانند محیط هموار، می توان چنین ژئودزیک های مستقیم را روی مسیرها به عنوان آن دسته از منحنی هایی تعریف کرد که بردار ماس خود را موازی با منحنی نگه می دارند. این ویژگی به طور طبیعی روی وجوه مسطح (یا در امتداد یال ها) برآورده می شود، به طوری که ژئودزیک حاصل تکه ای-خطی است، با تهات نقاط غیربدیهی آنهاست که ژئودزیک بین عناصر مش مجاور انتقال می یابد. جهت خروجی ژئودزیک پس از چنین انتقالی در اینجا با اتصال، یعنی با انتقال جهت ماس وروی به عنصر مش بعدی، تعیین می شود. اگر اتصال لوی-چیویتا را در نظر بگیریم، که ما همیشه برای محاسبه ژئودزیک های این کار را می کنیم، این منجر به یک خط راست معمولی پس از باز کردن عناصر مش به یک صفحه می شود. برای پیاده سازی نگاشت نمایی گسته، کافی است چنین ژئودزیک مستقیم را تا رسیدن به فاصله  $\|u\|$  دنبال کنیم.

نگاشت های لگاریتمی  $M \rightarrow TM$  از سوی دیگر، را می توان به عنوان محاسبه کوتاه ترین ژئودزیک های بین نقاط  $p$  و  $q$  در نظر گرفت. آنها آن بردار  $(q)$  را در  $T_p M$  بر می گردانند که در  $p$  ماس بر این ژئودزیک است و نرم آن برابر با فاصله ژئودزیک بین نقاط است. یک راه بر جسته برای محاسبه فواصل ژئودزیک از یک نقطه (یا مجموعه) مبدأ  $p$  حل معادله ایکو نال

$$|\nabla \tau| = 1 \quad 00000000 \quad \tau(p) = 0, \quad (486)$$

است، که در آن  $\nabla$  مشتق هموردا را نشان می دهد. بخش اول این معادله دیفرانسیل جزئی، الزام طبیعی را که گرادیان تابع فاصله باید یک باشد، تحمیل می کند، در حالی که بخش دوم فاصله را در مبدأ صفر ثابت می کند. یک الگوریتم پیش روی سریع (00000000)، که معادله ایکو نال را روی مش های مثلثی حل می کند، توسط [۴] پیشنهاد شد. با توجه به تابع فاصله ۷ ژئودزیک  $u$  بین  $p$  و هر نقطه دیگر  $q$  را می توان با دنبال کردن گرادیان فاصله از  $q$  ردیابی کرد، یعنی با حل معادله دیفرانسیل معمولی

$$\dot{u} = -\nabla \tau. \quad (487)$$

با این اطلاعات، ما می دانیم که  $\log_p(q) = \tau$ ، با جهت  $(q) = \log_p(q)$  که با مسیر ژئودزیک در  $p$  داده می شود. راه حل [۴] الگوریتم دایکسترا را برای محاسبه فواصل در امتداد یال های یک گراف به یک نسخه پیوسته تعمیم می دهد، که می تواند از وجود عبور کند و بنابراین روی مسیرها عمل کند. این روش یک تابع فاصله را با انتشار یک جبهه موج از  $p$  محاسبه می کند. روش گرمای (00000000) [۴] توسعه [۴] فواصل ژئودزیک را بهره برداری از فرمول واردان، که ارتباطی را با کرنل گرمای برقرار می کند، محاسبه می کند. الگوریتم آنها اساساً معادله گرمای  $\Delta u = \delta(u)$  را با شرط اولیه  $u = 0$  حل می کند، یعنی یک «پیک گرمای» را از نقطه مبدأ  $p$  منتشر می کند. برای زمان های نفوذ کوتاه، گرادیان  $\nabla u$  دقیقاً در جهت مخالف گرادیان فواصل ژئودزیک اشاره می کند. از آنجا که مشخص است که گرادیان فاصله ژئودزیک دارای قدر واحد است (معادله (486)، می توان میدان فاصله را از این اطلاعات محاسبه کرد. این روش به طور قابل توجهی سریعتر از الگوریتم های قبلی است. [۴] این روش را به معادله گرمای برداری تعمیم می دهد، که اجازه می دهد کمیت های با مقادیر برداری را به جای گرمای اسکالر منتشر کنند. این الگوریتم را می توان برای انتقال بردارها از یک نقطه (یا مجموعه) مبدأ روی کل منيفلد استفاده کرد، اما همچنین برای حل نگاشت های لگاریتمی با دقت بالا مناسب است.

## ۲.۱۲ کانولوشن های سطحی راهبری پذیر-دورانی

در این بخش، ما کانولوشن های سطحی  $(2, \text{SO}-\text{C}_N, \text{D}_N)$ -راهبری پذیر را که در ردیف های (۳۷-۴۰) جدول ۶ فهرست شده اند، مرور می کنیم. همه این مدل ها در این مشترک هستند که به ابهام جهات مرجع روی سطوح عمومی از طریق یک طراحی هموردای (یا تاور دای) دورانی محلی می پردازنند،

که آنها را از مدل‌های  $\{\cdot\}$ -راهبری‌پذیر مورد بحث در بخش بعدی ۳.۱۲ متمایز می‌کند. قبل از بحث دقیق در مورد مدل‌های منفرد، ما با یک نمای کلی سطح بالا از انتخاب‌های طراحی رایج و گسترش‌سازی‌های عددی ممکن شروع می‌کنیم.

**ملاحظات کلی و نمای کلی:** تمام مدل‌هایی که در این بخش مرور می‌شوند، روی مشاهدهای سطحی مثلثی عمل می‌کنند و راهبری‌پذیر-دورانی هستند. گروه ساختاری پیوسته  $(G = \text{SO}(3))$  برای تمام مدل‌هایی که نمایش‌های میدان منظم را فرض می‌کنند (ردیف‌های [۳۸] و [۳۹]) با گروه‌های دوری  $C_N$  یعنی  $N$  جهت با فواصل مساوی، گسترش‌سازی می‌شود. مدل  $\mathbb{D}_N$  [یک گروه ساختاری خاص تر  $D_N$ ] را فرض می‌کند. توجه داشته باشید که معماری‌های صرفاً راهبری‌پذیر فقط سطوح روی سطوح جهت‌پذیر عمل می‌کنند بدون اینکه همواری (پیوستگی) استنتاج خود را نقض کنند. سطوح غیر جهت‌پذیر نیازمند راهبری‌پذیری بازتابی اختیاری هستند، یعنی گروه‌های ساختاری  $\mathbb{D}_N$  یا  $D_N$ . این الزام اغلب با تطبیق‌های جزئی، مهمتر از همه با استفاده از فضاهای کرنل محدود است، به راحتی قابل ارضاست.

مطابق با تعریف کانولوشن‌های  $GM$  مدل‌ها ویژگی‌ها را در همسایگی محلی اطراف هر نقطه نمونه‌برداری بر حسب مختصات نرمال ژئودزیک پارامتری می‌کنند. تقریباً تمام مدل‌ها میدان‌های ویژگی را روی رئوس مش نمونه‌برداری می‌کنند؛ فقط  $\mathbb{D}_N$  [ویژگی‌ها را به صورت متراکم روی وجوده مش نمونه‌برداری می‌کند. انگرال کانولوشن پیوسته در معادله (۸۷)، که ویژگی‌ها را در مختصات نرمال ژئودزیک با یک کرنل راهبری‌پذیر تطبیق می‌دهد، را می‌توان به روش‌های مختلفی گسترش‌سازی کرد. اکثر مدل‌ها این انگرال را در یک رأس  $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^p$  به عنوان یک جمع روی رئوس همسایه آن  $\mathcal{V}$  گسترش‌سازی می‌کنند. سپس ویژگی‌ها از این رئوس  $p \in \mathcal{N}_p$  به مقادیر کرنل پیوسته در نقطه  $q \in \mathbb{R}^q$  تطبیق داده می‌شوند، که در آن  $\psi_{TM,p}^A$  پیمانه متناظر با چارچوب مرجع انتخاب شده در  $p$  است. این به همراه انتقال از  $q$  به  $p$  منجر به گسترش‌سازی زیر می‌شود:

$$f_{\square\square}^A(p) = \sum_{q \in \mathcal{N}_p} \square_q K(\psi_{TM,p}^A \log_p(q)) \rho(g_{p \leftarrow q}^{A\tilde{A}}) f_{\square\square}^{\tilde{A}}(q), \quad (488)$$

که در آن  $\mathbb{R}_q \in \mathbb{R}$  وزن‌های مساحتی مناسب انتخاب شده‌اند که مجموع آنها برابر با کل مساحت مش است،  $\sum_{q \in \mathcal{V}} \mathbb{R}_q = \int_M 1 dp$ . انتخاب‌های رایج، وزن‌های مساحتی مرکزوار به شکل

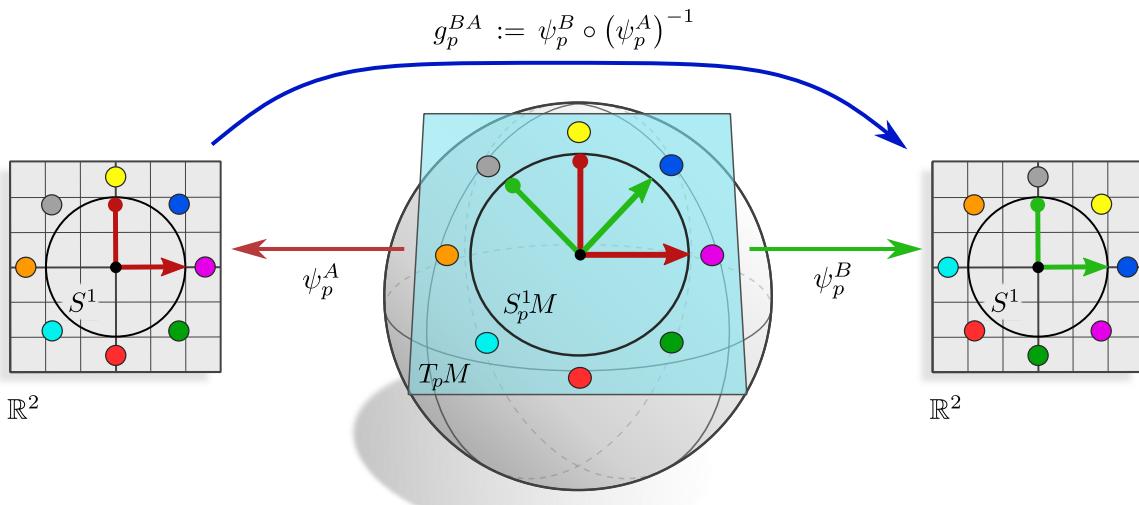
$$w_q = \frac{1}{\mathfrak{p}} \sum_{\{i,j,q\} \in \mathcal{F}} A_{\{i,j,q\}}, \quad (489)$$

هستند، با مجموعی که روی تمام مثلث‌های مجاور رأس  $q$  اجرا می‌شود، یا مساحت‌های ورونوی [۴]. از آنجا که گسترش‌سازی در معادله (۴۸۸) روی رئوس همسایه جمع می‌شود، الگوریتم‌ها نگاشت‌های لگاریتمی را از طریق کوتاه‌ترین ژئودزیک‌ها می‌کنند؛ به بخش ۲.۱.۱۲ و [۴] مراجعه کنید.

به جای محاسبه نگاشت‌های لگاریتمی رئوس همسایه، می‌توان به طور جایگزین انگرال کانولوشن را روی دامنه کرنل  $\mathbb{R}^2$  گسترش‌سازی کرد. نویسنده‌گان [۴] از یک تقسیم‌بندی هم‌زاویه و هم‌شعاع از مختصات قطبی ژئودزیک استفاده می‌کنند. آنها نگاشت نمایی را برای هر نقطه نمونه‌برداری (۴۷) محاسبه می‌کنند، یعنی یک مستقیم‌ترین ژئودزیک ([۴]) به طول  $2r$  را در جهت  $\varphi$  نسبت به چارچوب مرجع شلیک می‌کنند. از آنجا که این ژئودزیک‌ها به طور کلی در یک وجه به پایان می‌رسند، باردهای ویژگی از رئوس مجاور باید دونوں یا بیشتر شوند، به عنوان مثال بر اساس مختصات مرکزوار. [۴] همسایگی ژئودزیک را از طریق یک الگوریتم «باز کردن انتقال موازی» تقریب می‌زنند [۴].

جدول ۶ مدل‌ها را بر اساس اندیشهای میدان مربوطه خود سازماندهی می‌کند، یعنی بر اساس نمایش‌های گروهی  $\rho$  که قوانین تبدیل آنها را تحت تبدیلات پیمانه مشخص می‌کنند. تنها انواع میدان غیربدیهی که تاکنون استفاده شده‌اند، نمایش‌های تحويل ناپذیر (مختلط) از  $(\text{SO}(2))$  [۴] و نمایش‌های منظم از  $(\text{SO}(2))$  هستند، که با نمایش‌های منظم یک زیرگروه گسترش‌سازی شده‌اند [۴]. نمایش‌های منظم  $C_N$  گسترش‌سازی شده‌اند [۴]. بنابراین به تعریف بر روی  $L^2(C_N)$  توابع در  $(\text{SO}(2))$  عمل می‌کنند، یعنی بر روی ویژگی‌هایی که «یک مقدار برای هر جهت» اختصاص می‌دهند. در نسخه گسترشی،  $\text{SO}(2) \cong L^2(C_N) \cong \mathbb{R}^{|C_N|}$  را داریم، که در آن هر یک از  $N$  بعد یک باردهای ویژگی منظم متناظر با یکی از جهات در  $\{-1, 0, \dots, N\}$  است. تناظر با نمایش‌های منظم در اکثر این مقالات ضمیمی است  $\square$  معماری‌های شبکه بیشتر از یک دیدگاه شهری تر استخراج شده‌اند. مشخص می‌شود که نویسنده‌گان فقط از زیرمجموعه‌ای از فضای کامل کرنل‌های راهبری‌پذیر که بین میدان‌های ویژگی منظم  $C_N$  نگاشت انجام می‌دهند، استفاده می‌کنند. ما این ادعا را در ادامه هنگام بحث دقیق در مورد مدل‌های بیشتر اثبات می‌کیم. یک ساختار از فضای کامل کرنل در [۴] ارائه شده است، یک تصویرسازی را می‌توان در شکل ۳ از [۴] بافت. مدل‌های باقی‌مانده بر اساس نمایش‌های بدیهی، یعنی میدان‌های اسکالار هستند. یک رویکرد برای محاسبه میدان‌های اسکالار، اعمال یک کرنل در  $N$  جهت است، که منجر به یک میدان ویژگی منظم می‌شود، و به دنبال آن یک عملیات تجمع روی  $\bar{N}$  پاسخ انجام می‌شود [۴]. از آنجا که تبدیلات پیمانه در  $C_N$  منجر به یک جایگایی دوری صرف (یک جایگشت) از کانال‌های جهت ویژگی می‌شوند، عملیات تجمع تحت تبدیلات پیمانه ناوردا هستند، یعنی میدان‌های اسکالار تولید می‌کنند. [۴] بلافضل از کرنل‌های  $D_4$ -ناوردا استفاده می‌کند؛ به شکل ۶۲ مراجعه کنید. از آنجا که تبدیلات پیمانه چنین کرنل‌هایی را ناوردا باقی می‌گذارند، میدان‌های ویژگی حاصل نیز ناوردا هستند، یعنی میدان‌های اسکالار.

در آخر، می‌توانیم مدل‌ها را بر اساس انتقال‌دهنده‌های ویژگی که فرض می‌کنند، مقایسه کنیم. تمام شبکه‌های کانولوشنی در [۴] انتقال‌دهنده‌های کانونی لوی-چیویتا را روی مش فرض می‌کنند. از آنجا که تمام مدل‌های [۴] بر میدان‌های اسکالار تکیه دارند، انتقال موازی آنها بدیهی است.



شکل ۵۹: نمایش توابع جهتی توسط  $\psi$ . توابع جهتی یک پاسخ با مقدار حقیقی (نقطه رنگی) را به هر جهت (بردار واحد) در  $S_p^1 M \subset T_p M$  انتخاب می‌دهند. هنگام بیان این توابع نسبت به چارچوب‌های مرجع راست‌هنجار و راست‌گرد یا پیمانه‌های  $\psi_{TM,p}^X$ ، نمایش‌های مختصاتی پاسخ‌های با مقدار حقیقی را به بردارهای واحد در  $\mathbb{R}^1$  انتخاب می‌دهند. قانون تبدیل بین این نمایش‌های مختصاتی با یک دوران از مقادیر ویژگی روی  $S^1$  داده می‌شود. از نظر ریاضی، این قانون تبدیل به عنوان عمل نمایش منظم از  $SO(2)$  شناسایی می‌شود؛ به معادله  $(492)$  مراجعه کنید. بنابراین توابع جهتی، میدان‌های ویژگی منظم هستند و CNN سطحی  $\psi$  [براساس کانولوشن‌های  $GM$ ] بین چنین میدان‌هایی است. یک نسخه نموداری از این شکل در معادله  $(493)$  آراحت شده است.

یک رویکرد جایگزین توسط  $\psi$  [دبال شد که یک اتصال با مقادیر  $C_N$  را روی مش محاسبه می‌کنند. این اتصال در همه جا به جز در چند تکینگی با هولونومی  $k^{\frac{N}{\pi}}$  برای یک  $1, \dots, N-k$  و  $N$  ثابت، بدینهی (تخت) است. نویسندهان اتصال با مقادیر  $C_N$  خود را به گونه‌ای بهینه‌سازی می‌کنند که اتصال لوی-چیویتا با مقادیر  $SO(2)$  را تا حد امکان نزدیک تقریب بزنند؛ همچنین به  $\psi$  [مراجعه کنید]. توجه داشته باشید که این رویکرد مشابه پهن کردن محلی CNN‌های کروی به  $\psi$  [یعنی  $\psi = \psi(N)$  از بخش  $4.2$ ] است اما برای مش‌های عمومی اعمال می‌شود. با در نظر گرفتن این ملاحظات کلی، ما بر روی برخی از انتخاب‌های طراحی خاص تر که در مدل‌ها انجام شده است، تمرکز می‌کنیم.

**شبکه‌های هارمونیک سطحی:** شبکه‌های هارمونیک سطحی توسط  $\psi$  [که در ردیف  $(37)$  جدول  $6$  فهرست شده‌اند، یک مثال نمونه از کانولوشن‌های  $GM$  روی مش‌ها هستند. آنها شبکه‌های هارمونیک  $\psi$  [را  $\psi$  که ویژگی‌های هارمونیک  $\psi$  [را  $\psi$  از صفحه اقلیدسی به فضاهای خمیده عمومی تعیین می‌کنند. نویسندهان کانولوشن خود را مانند معادله  $(488)$  تبدیل می‌شوند  $\psi$  از محدوده  $G = SO(2)$  به محدوده  $\psi$  از  $SO(2)$  محدوده مختلط با استفاده از وزن‌های مساحتی مرکزوار از معادله  $(489)$  تعریف می‌کنند. انتقال دهنده‌های لوی-چیویتا و نکاشت‌های لگاریتمی از طریق روش گرمای برداری  $\psi$  [محاسبه می‌شوند، که به مش‌های مثلثی محدود نیست بلکه اجازه می‌دهد مدل را به مش‌های چندضلعی و ابرهای نقطه نیز اعمال کرد. غیرخطی‌های  $SO(2)$ -هموردای مورد استفاده توسط مدل‌ها فقط بر روی قدر مطلق ویژگی‌های مختلط عمل می‌کنند اما آرگومان آنها را تاوردا باقی می‌کارند.

همانطور که در  $\psi$  [اثبات شده است، فضاهای کرنل  $SO(2)$ -راهبری‌پذیر که توسط نویسندهان استفاده می‌شوند، روی میدان مختلط کامل هستند. با این حال، اگر میدان‌های ویژگی مختلط بر حسب دو کanal که حاوی بخش‌های حقیقی و موهومی آنها هستند، پیاده‌سازی شوند، باید آنها به عنوان تبدیل شونده مطابق با نمایش‌های تحویل‌ناپذیر حقیقی  $SO(2)$  در نظر گرفت. محدودیت کرنل در این حالت به کرنل‌های راهبری‌پذیر اضافی اجازه می‌دهد؛ برای یک بحث دقیق به پیوست  $5.5$  [مراجعه کنید]. ملاعلاً بر این می‌خواهیم اشاره کنیم که شواهد تجربی نشان می‌دهد که شبکه‌های مبتنی بر میدان‌های نمایش تحویل‌ناپذیر عملکرد به طور قابل توجهی بدتری نسبت به آنهاست که بر اساس نمایش‌های منظم هستند، دارند؛ به عنوان مثال به بنچمارک در  $\psi$  [مراجعه کنید. توجه داشته باشید که شبکه‌های هارمونیک سطحی را می‌توان به راحتی با استفاده از «غیرخطی منظم» از  $\psi$  [که اساساً یک تبدیل فوریه از پشته‌ای از میدان‌های نمایش تحویل‌ناپذیر را برای تبدیل آنها به یک میدان ویژگی منظم اعمال می‌کند، به شبکه‌هایی که روی میدان‌های ویژگی منظم عمل می‌کنند، تبدیل کرد.

**CNN‌های ژئودزیک چندجهتی:**  $\psi$  [های ژئودزیک چندجهتی (MDGCNN) را پیشنهاد کردند که روی به اصطلاح توابع جهتی عمل می‌کنند. همانطور که در ادامه استدلال می‌کنیم، توابع جهتی میدان‌های ویژگی منظم هستند و MDGCNN‌ها کانولوشن‌های خاصی بین چنین ویژگی‌هایی هستند. نویسندهان توابع جهتی را به عنوان توابع با مقدار حقیقی تعریف می‌کنند که به نقاط  $p \in M$  و جهات واحد

$$v \in T_p M, \|v\| = 1$$

$$S'_p M := \{v \in T_p M \mid \|v\| = 1\} \cong S^1, \quad (490)$$

یک ویژگی جهتی در  $p$  به عنوان یک نگاشت

$$F : S'_p M \rightarrow \mathbb{R} \quad (491)$$

از جهات واحد در صفحه مماس به پاسخ‌های با مقدار حقیقی تعریف می‌شود.<sup>۱۳۱</sup> یک انتخاب از چارچوب مرجع راست‌هنجار و راست‌گرد، یک جهت مرجع را ثابت می‌کند که نسبت به آن می‌توان تابع جهتی را بیان کرد. فرض کنید  $\psi_{TM,p}^A$  پیمانه متناظر با یک چارچوب انتخاب شده باشد، که جهات واحد را در  $S'_p M \subset T_p M$  به «جهات واحد مختصاتی» در  $\mathbb{R}^n$  نگاشت می‌دهد. سپس عبارت مختصاتی تابع جهتی با

$$F_p^A := F \circ (\psi_{TM,p}^A|_{S'_p M})^{-1} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (492)$$

داده می‌شود، یعنی به بردارهای ضربی واحد روی  $\mathbb{R}^n$  پاسخ‌های با مقدار حقیقی اختصاص می‌دهد. از جایگایی نمودار

$$\begin{array}{ccccc} & & g_p^{BA} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\psi_{TM,p}^A|_{S'_p M}} & S'_p M & \xrightarrow{\psi_{TM,p}^B|_{S'_p M}} & S^1 \subset \mathbb{R}^n \\ & \searrow F_p^A & \downarrow F & \swarrow F_p^B & \\ & & \mathbb{R} & & \end{array} \quad (493)$$

می‌توان خواند که عبارات مختصاتی تابع جهتی از قانون تبدیل زیر پیروی می‌کنند:

$$F_p^B = F_p^A \circ (g_p^{BA})^{-1} =: \rho_{\text{MM}}(g_p^{BA}) F_p^A \quad (494)$$

تساوی دوم، قانون تبدیل بین عبارات مختصاتی را به عنوان عمل نمایش منظم نشانایی می‌کند، که گزاره ما را مبنی بر اینکه تابع جهتی فقط میدان‌های ویژگی منظم هستند، توجیه می‌کند.<sup>۱۳۲</sup> شکل ۵۹ یک تابع جهتی و نمایش‌های مختصاتی آن را نسبت به چارچوب‌های مختلف نشان می‌دهد.

کانولوشن‌های ژئودزیک چندجهته توسعه ؟ [ بین تابع جهتی به رویی مستقل از مختصات با منقبض کردن آنها با کرنل‌های هموردا در یک پارامتری‌سازی ژئودزیک حول هر رأس، نگاشت انجام می‌دهند. این مشاهده دلالت بر این دارد که این کانولوشن‌ها کانولوشن‌های  $GM$  خاصی بین میدان‌های ویژگی منظم هستند. یک تفاوت در فرمول‌بندی کانولوشن‌های ژئودزیک چندجهته این است که پول‌بک انتقال‌دهنده آنها کل بردار ویژگی منظم (تابع جهتی) را در امتداد ژئودزیک‌ها منتقل نمی‌کند، بلکه فقط آن پاسخ منفرد را که متناظر با جهت مماس ژئودزیک است، منتقل می‌کند. به جای تطبیق ویژگی‌های منتقل شده با یک کرنل ماتریسی، کانولوشن‌های چندجهته پاسخ منفرد منتقل شده را با یک کرنل اسکالر تطبیق می‌دهند. معادل بودن هر دو عملیات با تحمیل یک الگوی پراکنده‌گی متناظر بر روی کرنل‌های SO(2)-راهبری پذیر ماتریسی ما، که به طور موثر آن پاسخ‌هایی را که توسط MDGCNN‌ها منتقل نمی‌شوند، صفر می‌کند، بازیابی می‌شود. در حالی که کانولوشن‌های ژئودزیک چندجهته فقط کانولوشن‌های  $GM$  بین میدان‌های ویژگی منظم هستند، آنها بنا بر این از فضای کامل کرنل‌های  $G$ -راهبری پذیر بین میدان‌های ویژگی منظم استفاده نمی‌کنند. این پراکنده‌گی MDGCNN‌ها را از نظر محاسباتی کارآمد می‌کند، با این حال، هزینه حافظه همان باقی می‌ماند و مشخص نیست که این انتخاب تا چه حد طرفیت بیانی آنها را محدود می‌کند.

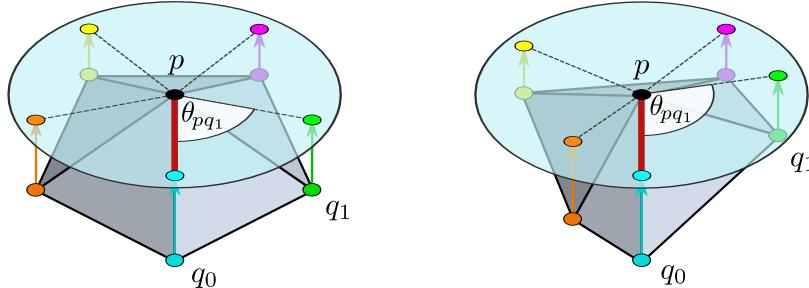
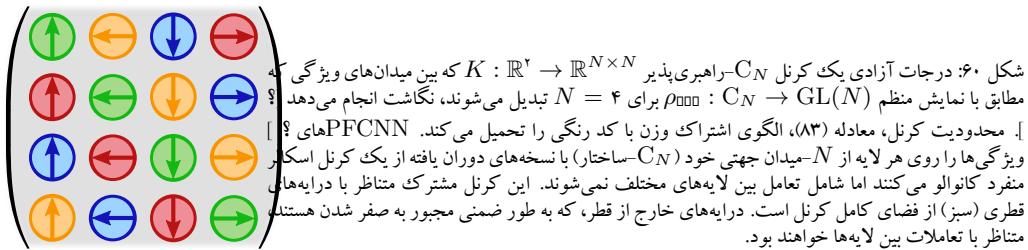
تعداد نامتناهی جهات در  $(2)$  (با  $S'_p M$  یا  $S^1$ ) در عمل به  $N$  جهت با فواصل مساوی در گروه دوری  $C_N$  گسته‌سازی می‌شود، به عنوان مثال  $8$  جهتی که در شکل ۵۹ به تصویر کشیده شده‌اند. از آنجا که انتقال لوى-چیویتا در امتداد ویژگی‌ها به طور کلی با مقادیر  $(2)$  به جای  $C_N$  است، نویسنده‌گان از یک درون‌یابی خطی بین  $N$  جهت گسته‌سازی استفاده می‌کنند.

همانطور که در بالا بحث شد، MDGCNN‌ها فقط آن پاسخ‌های خاص از ویژگی‌ها را که متناظر با جهت ژئودزیک خروجی نسبت به چارچوب مرجع محلی در  $p$  هستند، منتقل می‌کنند. این جهت در مبدأ  $v \in T_p M$  تعریف نشده است، که از خود-تعامیل رئوس جلوگیری می‌کند. نویسنده‌گان این مشکل را با اعمال یک  $1 \times 1$ -اضافی حل می‌کنند که خود-تعامیل گم‌شده را دوباره اضافه می‌کند. همانطور که در بخش ۱.۱.۴ استخراج شد، کرنل‌های  $1 \times 1$ -باید در هم تنتمه باشند تا استقلال از مختصات مدل را حفظ کنند. این الزام در واقع توسعه MDGCNN‌ها برآورده می‌شود.<sup>۱۳۳</sup> زیرا ماتریس  $1 \times 1$ -به گونای ساخته شده است که کل بردارهای ویژگی منظم را با یک وزن یکسان ترکیب می‌کند به جای اینکه کانال‌های آنها را به طور مستقل ترکیب خطی کنند. این کار با نمایش  $m_{\text{MM}}$  ویژگی منظم  $C_N$  نه به عنوان یک بردار ویژگی  $c = N \cdot m_{\text{MM}} - N \cdot m_{\text{MM}} = N \cdot m_{\text{MM}} - N \cdot m_{\text{MM}}$  بدین معنی است که کل بردارهای ویژگی منظم را با یک وزن روی آخرین محور که منجر به یک آرایه خروجی با شکل  $(N, m_{\text{MM}})$  می‌شود، پیاده‌سازی می‌شود.

<sup>۱۳۱</sup> تابع جهتی کامل سپس می‌تواند به عنوان یک نگاشت از  $S^1$ ، کلاهی با تارهای  $S'_p M$ ، به مقادیر حقیقی تعریف شود.

<sup>۱۳۲</sup> به طور دقیق، نمایش منظم  $(2)$  SO بر روی تابع  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  عمل می‌کند. با این حال، ما می‌توانیم به طور کانونی چنین توابعی را با تابع روی  $S^1$  با یکی گرفتند  $e \in S^1$  با  $(1, 0)$   $\in \text{SO}(2)$  یکی باشند.

<sup>۱۳۳</sup> مکاتبه شخصی با نویسنده.



شکل ۷: دو ناحیه مش که از نظر توبولوژیکی معادل اما از نظر هندسی متمایز هستند. یک رویکرد برای تعریف کانولوشن‌ها روی متشبه در نظر گرفتن گراف زیربنای آنها ( $\mathcal{V}, \mathcal{E}$ ) است که توبولوژی مش را ثابت می‌کند، و اجرای یک شبکه عصبی گراف (معارف) به دلیل نداشتن اطلاعات در مورد هندسه مش، نمی‌توانند بین دو همسایگی به تصویر کشیده شده تمایز قائل شوند. از نظر هندسی، آنها کرنل‌های همسانگرد را اعمال می‌کنند.  $CNN$ ‌های مش هموردی پیمانه توسعه [۱] این مشکل را با تصویر کردن رئوس همسایه  $q_i$  روی صفحات مماس و اخصوصاً دادن زوایای  $\theta_{pq_i}$  به آنها نسبت به یک یا مرجع، یعنی پیمانه (قرمز)، حل می‌کنند. الزام به استقلال از مختصات کانولوشن‌ها منجر به کرنل‌های  $G$ -راهبری‌پذیر می‌شود. در حالی که این مدل می‌تواند بر اساس جهت گره‌های همسایه تمایز قائل شود، فاصله آنها را نادیده می‌گیرد. این مدل علاوه بر این از پارامتری سازی ژئودزیک می‌شود به این دلیل که تکیه‌گاه کرنل آن بر اساس اتصال لبه محلی به جای فواصل ژئودزیک است.

**های چارچوب موازی:**  $CNN$ ‌های چارچوب موازی (□□□□□□□□) توسعه [۱] بر  $N$ -میدان‌های چارچوب جهتی تکیه دارند، که فقط  $G$ -ساختارهای  $GM$  برای گروههای ساختاری دوری  $G = C_N$  هستند. به یاد بیاورید از بحث ما در بالا که این میدان‌ها یک اتصال را کد گذاری می‌کنند که در همه جا به جز در چند تکینگی بدینه است و برای تقریب اتصال لوی-چویتا اصلی بهینه‌سازی شده است. از آنجا که این  $G$ -ساختار در یک مرحله آفلاین از پیش محاسبه می‌شود، ما در ادامه آن را به عنوان داده شده در نظر می‌گیریم و بر روی کانولوشن واقعی  $PFCNN$  تمرکز می‌کنیم. مشخص می‌شود که این عملیات معادل یک کانولوشن  $GM$  بین میدان‌های ویژگی منظم  $C_N$  است، با این حال، دوباره یک الگوی پراکندگی خاص را در کرنل‌ها فرض می‌کند که توسعه طراحی شبکه خاص القا می‌شود.

فضاهای ویژگی  $PFCNN$  ها فضاهای  $C^\infty(GM)$  از توابع با مقادیر حقیقی روی  $GM$   $\xrightarrow{\pi_{GM}} M$  برای  $G = C_N$  برای  $GM$  یک پوشش  $= N$ -لایه از  $M$  است، چنین میدان‌های ویژگی را می‌توان به طور مشابه به عنوان اختصاص یک چندتایی از  $N$  عدد حقیقی به هر نقطه  $p \in M$  در نظر گرفت. از آنجا که  $N$  لایه از فضای پوششی علاوه بر این با  $N$  جهت (که با اولین محورهای چارچوب داده می‌شوند) یکی گرفته می‌شوند، این ویژگی‌ها معادل توابع جهتی (گستته‌سازی شده) [۱] هستند. قضیه ۱.۱ در پیوست ح علاوه بر این اثبات می‌کند که یک ایزومورفیسم

$$C^\infty(GM) \cong \Gamma(\mathcal{A}_{\rho_{000}}) \quad (495)$$

بین ویژگی‌های  $PFCNN$  ها و میدان‌های ویژگی منظم ما وجود دارد. بنابراین  $PFCNN$  ها کانولوشن‌های مستقل از مختصات را بین (معادل) میدان‌های ویژگی منظم انجام می‌دهند و بنابراین به عنوان کانولوشن‌های  $GM$  منظم (خاص) شناسایی می‌شوند.

فرمول‌بندی کانولوشن‌های چارچوب موازی در نگاه اول به نظر می‌رسد کاملاً با فرمول‌بندی ما متفاوت است: به جای کانولو کردن کامل میدان‌های ویژگی منظم  $N$ -بعدی با یک کرنل ماتریسی  $C_N$ -راهبری‌پذیر  $K : \mathbb{R}^{N \times N} \rightarrow \mathbb{R}^4$  این  $PFCNN$  ها توابع اسکالر خود را روی هر یک از  $N$  لایه به طور مستقل با یک کرنل اسکالر مشترک که با چارچوب لایه مربوطه تراز شده است، کانولو می‌کنند. این عملیات در چارچوب ما به عنوان یک کانولوشن با یک کرنل ماتریسی  $C_N$ -راهبری‌پذیر تفسیر می‌شود که تنها مقادیر غیر صفر آن روی قطر آن قرار دارند و نسبت به یکیگر چرخانده شده‌اند، که با درایه‌های سیز در شکل ۶۰ به تصویر کشیده شده است. عدم وجود کوپلینگ بین ویژگی‌ها روی لایه‌های مختلف دلالت بر این دارد که درایه‌های خارج از قطر (زرد، آبی و قرمز) از فضای کامل کرنل راهبری‌پذیر به طور ضمیمی صفر در نظر گرفته می‌شوند. همانطور که قبل از MDGCNN ها گفته شد، الگوی پراکندگی این کانولوشن  $GM$  منظم آن را از نظر محاسباتی کارآمدتر از یک کانولوشن  $GM$  متراکم می‌کند اما احتمالاً بر عملکرد آن تأثیر می‌گذارد و هزینه حافظه را کاهش نمی‌دهد.

**CNN‌های مش هموردای پیمانه:**  $\text{CNN}$  مش هموردای پیمانه (GEMCNN) توسط [۶] از کاستی‌های شبکه‌های عصی گراف متعارف برای پردازش میدان‌های ویژگی روی مش‌ها الهام گرفته شده است. به طور خاص، شبکه‌های عصی گراف و اینلی می‌توانند برای پردازش میدان‌های ویژگی نمونه‌برداری شده در روش روی مش‌ها با کانولوکردن روی گراف ( $\mathcal{E}$ ) که توسط مش القا می‌شود، استفاده شوند. مشکل این رویکرد این است که گراف فقط تپولوژی مش را کدگذاری می‌کند، اما قادر به ثبت هندسه آن نیست. کانولوشن‌های گراف متعارف بر این اساس بین ترتیب یال‌ها تمایز قائل نمی‌شوند، که روی مش‌ها متغیر با استفاده از کرنل‌های همسانگرد است که بین میدان‌های اسکالر نگاشت انجام می‌دهند. شکل ۶۱ دو ناحیه از یک مش با هندسه تمایز اما تپولوژی معادل را نشان می‌دهد [۷] برای کانولوشن‌های گراف متعارف هر دو همسایگی یکسان به نظر می‌رسند.  $\text{GEMCNN}$ ‌ها این مشکل را با انتخاب یک یال مرجع در هر رأس  $p \in \mathcal{V}$  حل می‌کنند، که نسبت به آن جهت تمام یال‌های دیگر  $\mathcal{E} = \{p, q_i\}_{q_i \in \mathcal{V}}$  به حلقه یک از همسایگان  $\theta_{pq_i} \in [0, 2\pi]$  بر حسب زوایا  $\theta_{pq_i}$  می‌شود. یک انتخاب از یال مرجع متغیر با یک انتخاب از چارچوب راست هنجار و راست گرد است. انتخاب‌های مختلف با تبدیلات پیمانه در گروه ساختاری  $G = \text{SO}(2)$  مرتبط هستند.

همانند نظریه ما، فضاهای ویژگی  $\text{GEMCNN}$ ‌ها به عنوان مقاطعی از کلاف‌های برداری همیسته تعریف می‌شوند، یعنی به عنوان فضاهایی از میدان‌های ویژگی  $\mathcal{C}$ -بعدی که ضرایب آنها تحت تبدیلات پیمانه مطابق با یک نمایش گروهی ( $\mathcal{C} \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C})$ )  $\text{SO}(2) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C})$  می‌شوند. به هر یال یک انتقال‌دهنده لوى-چوویتا با مقادیر  $\{p, q_i\}_{q_i \in \mathcal{V}}$  انتخاب از یال مرجع باشد، که منجر به الزام بر روی کرنل‌ها برای  $G$ -راهبری پذیر بودن (هموردایی پیمانه) می‌شود. برخلاف فرمول‌بندی ما، کرنل‌ها مستقیماً در مختصات نرمال ژئودزیک اعمال نمی‌شوند بلکه پیام‌ها را فقط از همسایگی‌های یک-حلقه  $\mathcal{E} = \{p, q\}_{p, q \in \mathcal{V}}$  به آن گره  $p$  که کرنل حول آن متمنظر کر است، منتقل می‌کنند.<sup>۱۳۴</sup> کرنل‌ها علاوه بر این غیرحساس به شعاع هستند [۸] اینکه این تاچه حد بر عملکرد مدل تأثیر می‌گذارد، یک سؤال باقی می‌ماند.

نویسنده‌گان نمایش‌های تحویل‌ناپذیر (حقیقی) را به عنوان انواع میدان برای کانولوشن انتخاب کرده‌اند، با این حال، آنها یک تغییر پایه به نمایش‌های منظم برای اعمال غیرخطی‌های ReLU انجام می‌دهند، به همین دلیل ما آنها را در ردیف (۳۸) جدول ۶ به جای ردیف (۳۷) فهرست می‌کنیم.<sup>۱۳۵</sup> به طور خاص، نویسنده‌گان از تغییر پایه  $Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$  استفاده می‌کنند که نمایش منظم  $\text{C}_N \rightarrow \text{GL}(N)$  را به مؤلفه‌های نمایش تحویل‌ناپذیر آن تجزیه می‌کند تا یک پشته از میدان‌های نمایش تحویل‌ناپذیر را به یک میدان ویژگی منظم تبدیل کند. برای  $\text{C}_N$  این ماتریس فقط تبدیل فوریه گسته است. پس از اعمال غیرخطی ReLU به هر یک از  $N$  کanal از میدان ویژگی منظم به طور جداگانه [۹] که یک عملیات  $\text{C}_N$ -هموردا است زیرا نمایش‌های منظم، نمایش‌های جایگشتی هستند [۱۰] ویژگی‌ها برای عملیات کانولوشن بعدی به یک پشته از میدان‌های نمایش تحویل‌ناپذیر بازگردانده می‌شوند. این طراحی این مزیت را دارد که ویژگی‌ها را می‌توان دقیقاً با انتقال‌دهنده‌های با مقادیر  $\{p, q\}_{p, q \in \mathcal{V}}$  منتقل کرد، بدون اینکه نیاز به بازگشت به یک طرح درون‌یابی باشد، همانطور که توسط [۶] انجام می‌شود. توجه داشته باشید، با این حال، که شبکه کامل به دلیل استفاده از غیرخطی‌های منظم فقط  $\text{C}_N$ -هموردا است.

اینکه نویسنده‌گان از نمایش‌های تحویل‌ناپذیر حقیقی از  $\text{SO}(2)$  استفاده می‌کنند به این معنی است که فضاهای کرنل آنها تقریباً دو برابر بزرگتر از فضاهای کرنل شبکه‌های هارمونیک سطحی توسط [۱۱] است؛ بحث‌ها در [۱۲] [۱۳] [۱۴] را مقایسه کنید.

**CNN‌های ژئودزیک:** اولین کار در مورد کانولوشن‌های ژئودزیک که ما از آن آگاه هستیم، کار [۱۵] است. نویسنده‌گان ابهام دورانی مختصات قطبی ژئودزیک را روی یک منیفلد ریمانی جهت‌پذیر شناسایی کرده و آن را از طریق یک معماری ناوردا نسبت به دوران حل می‌کنند. کانولوشن‌های ژئودزیک آنها یک میدان اسکالر را نسبت به مختصات قطبی ژئودزیک با جهت‌گیری دلخواه نمایش می‌دهند. از آنجا که نوع میدان بدینه است، پول‌بک انتقال‌دهنده به مختصات ژئودزیک به انتقال‌دهنده‌های غیربدینه (یاز ندارد. سپس میدان ویژگی در مختصات ژئودزیک با یک کرنل اسکالر تطبیق داده می‌شود، که در  $N$  دوران با فواصل مساوی با زوایای  $k_i = \frac{\pi}{N}$  نسبت به چارچوب مرتع، که در آن  $1 - N - k_1 - \dots - k_{N-1} = k$  است، اعمال می‌شود. از آنجا که یک تبدیل پیمانه با  $\frac{\pi}{N}$  برای یک  $\{0, \dots, N-1\}$  است تمام کرنل‌ها را بر این اساس می‌چرخاند، منجر به یک جایگشت دوری از پاسخ‌ها با  $\frac{\pi}{N}$  گام می‌شود. بنابراین این عملیات در چارچوب ما متغیر با یک کانولوشن  $\text{C}_N$ -راهبری‌پذیر از میدان‌های ویژگی منظم است. به جای پردازش بیشتر این میدان‌ها از طریق کانولوشن‌های گروهی منظم همانطور که در  $\text{PFCNN}$  [۱۶] و  $\text{MDGCNN}$  [۱۷] انجام می‌شود [۱۸] نویسنده‌گان یک عملیات تجمعی  $\max$  را روی  $N$  پاسخ اعمال می‌کنند. از آنجا که تبدیلات پیمانه با مقادیر  $\text{C}_N$  منجر به جایگایی‌های دوری از میدان‌های ویژگی منظم می‌شوند، عملیات تجمعی ناوردادی-پیمانه است، یعنی میدان‌های اسکالر تولید می‌کند. در حالی که طراحی این شبکه برای پیاده‌سازی ساده است، از کدگذاری اطلاعات جهتی توسعه ویژگی‌ها جلوگیری می‌کند. انواع دیگری از این طراحی شبکه را می‌توان در [۱۹] [۲۰] [۲۱] یافت.

در ادامه، به  $\text{PFCNN}$  توسط [۱۶] می‌پردازیم. برای جلوگیری از سردرگمی، اشاره می‌کنیم که نویسنده‌گان دو مدل را پیشنهاد کرده‌اند، که ما آنها را به ترتیب در ردیف‌های (۳۸) و (۳۹) جدول ۶ فهرست می‌کنیم. ما هر دو مدل را با شروع از انتخاب‌های طراحی مشترک آنها توصیف می‌کنیم.

<sup>۱۳۴</sup> برای یک شبکه (به اندازه کافی) منظم و کرنل با تکیه‌گاه فشرده در مختصات ژئودزیک، هر دو رویکرد معادل می‌شوند.  
<sup>۱۳۵</sup> معادل بودن میدان‌های  $\text{p}$ -با تجزیه نمایش تحویل‌ناپذیر آنها در بخش ۲.۵ و در بخش ۴.۲ از [۱۸] مورد بحث قرار گرفت.

مفهوم کلیدی زیربنای ZerNet، پارامتری سازی کرنل های کانولوشن بر حسب چندجمله ای های زرینیکه است، که یک پایه متعامد از توابع را روی دیسک واحد بسته  $(\cdot, \cdot)$  حول مبدأ  $\mathbb{R}^2$  تشکیل می دهنده. در مختصات قطبی، چندجمله ای های زرینیکه با

$$Z_n^m : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1], \quad (r, \varphi) \mapsto R_n^m(r) \cos(m\varphi) \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq m \leq n \quad (496)$$

$$Z_n^{-m} : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1], \quad (r, \varphi) \mapsto R_n^m(r) \sin(m\varphi) \quad n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq m \leq n, \quad (497)$$

داده می شوند، که در آن  $R_n^m$  چندجمله ای های شعاعی زرینیکه هستند. اینکه چندجمله ای های زرینیکه (که به طور مناسب نرم افزاری شده اند) راست هنجاری هستند به این معنی است که آنها روابط راست هنجاری

$$\langle Z_n^m, Z_k^l \rangle_{B_{\mathbb{R}^2}(\cdot, \cdot)} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} Z_n^m(r, \varphi) Z_k^l(r, \varphi) r dr d\varphi = \delta_{nk} \delta_{ml}. \quad (498)$$

را برآورده می کنند. یک تابع روی دیسک واحد، به عنوان مثال یک کرنل اسکالر  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، را می توان در پایه چندجمله ای های زرینیکه بسط داد:

$$K(r, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=-n}^n \hat{K}_n^m Z_n^m(r, \varphi) \quad (499)$$

برای بازیابی ضرایب بسط یک تابع داده شده روی دیسک واحد، آن را روی پایه زرینیکه تصویر می کنیم:

$$\hat{K}_n^m = \langle K, Z_n^m \rangle_{B_{\mathbb{R}^2}(\cdot, \cdot)} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} K(r, \varphi) Z_n^m(r, \varphi) r dr d\varphi \quad (500)$$

حاصلضرب داخلی بین دو تابع  $K$  و  $\text{Exp}_p^* f^A$  روی دیسک واحد را می توان با این روابط بر حسب ضرایب بسط آنها بیان کرد:

$$\begin{aligned} \langle K, \text{Exp}_p^* f^A \rangle_{B_{\mathbb{R}^2}(\cdot, \cdot)} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} K(r, \varphi) \text{Exp}_p^* f^A(r, \varphi) r dr d\varphi \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=-n}^n \hat{K}_n^m Z_n^m(r, \varphi) \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{l=-k}^k [\widehat{\text{Exp}_p^* f^A}]_k^l Z_k^l(r, \varphi) r dr d\varphi \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\sum_{l=-k}^k \int_0^1 \int_0^{2\pi} Z_n^m(r, \varphi) Z_k^l(r, \varphi) r dr d\varphi}_{\delta_{nk} \delta_{ml}} \hat{K}_n^m [\widehat{\text{Exp}_p^* f^A}]_k^l \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=-n}^n \hat{K}_n^m [\widehat{\text{Exp}_p^* f^A}]_n^m \end{aligned} \quad (501)$$

همانطور که با انتخاب های  $K$  و  $\text{Exp}_p^* f^A$  برای این توابع پیشنهاد می شود، نویسنده گان از این ویژگی به مختصات قطبی ژئودزیک استفاده می کنند. ضرایب کرنل  $\hat{K}_n^m$  که فراتر از یک آستانه مشخص شده توسط کاربر صفر می شوند، به عنوان پارامترهای یادگرفته شبکه بهینه سازی می شوند. ضرایب بسط  $[\widehat{\text{Exp}_p^* f^A}]_n^m$  از پول بک انتقال دهنده میدان ویژگی با حل یک سیستم معادلات خطی محاسبه می شوند.

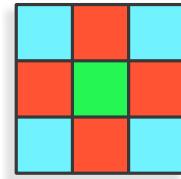
یک مزیت پارامتری سازی کرنل بر حسب چندجمله ای های زرینیکه این است که آنها بنا به تعریف کرنل های  $(2)$ -SO راهبری پذیر هستند. به طور خاص، زوج های  $(Z_n^m, Z_n^{-m})^\top$  از کرنل ها برای یک  $n \in \mathbb{N}$  داده شده، یک زوج از کرنل ها را تشکیل می دهند که با ضرب آنها در نمایش تحويل ناپذیر حقیقی مرتبه  $m$  از  $(2)$ -SO چرخانده می شوند.

$$\begin{pmatrix} Z_n^m \\ Z_n^{-m} \end{pmatrix} (r, \varphi + \Delta\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(m\Delta\varphi) & -\sin(m\Delta\varphi) \\ \sin(m\Delta\varphi) & \cos(m\Delta\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_n^m \\ Z_n^{-m} \end{pmatrix} (r, \varphi), \quad (502)$$

در حالی که کرنل های  $Z_n^m$  یعنی برای  $m = 0$  به طور بدیهی تبدیل می شوند (آنها همسانگرد هستند). توجه داشته باشد که ضرایب بسط  $\hat{K}_n^m$  از یک کرنل  $K$  به صورت وارون نسبت به پایه تبدیل می شوند. نویسنده گان از این قانون تبدیل برای دوران تحلیلی کرنل ها بر حسب ضرایب بسط آنها استفاده می کنند. راهبری پذیری دورانی چندجمله ای های زرینیکه مستقل از بخش های شعاعی آنها است اما به این واقعیت بستگی دارد که بخش های زاویه ای آنها هارمونیک های دایره ای هستند، که توابع پایه هارمونیک در تجزیه پیتر-ولیل از  $L^2(\text{SO}(2))$  هستند [؟]. به دلیل ویژگی های راهبری پذیری آنها، پایه های هارمونیک دایره ای به طور گسترده برای پارامتری کردن کرنل های کانولوشن حقیقی [؟] و مختلط [؟] حداقل از دهه ۸۰ میلادی استفاده شده اند [؟]. در واقع، هارمونیک های دایره ای زیربنای هر کرنل  $(2)$ -SO راهبری پذیر هستند [؟].

اولین و اصلی ترین طراحی مدل توصیف شده توسط [۴] مشابه طراحی [۵] است. یک میدان اسکالر به مختصات نرمال ژئودزیک پولبک می‌شود، جایی که با یک کرنل اسکالر که در  $N$  دوران گستره اعمال می‌شود، تطبیق داده می‌شود، که منجر به یک میدان ویژگی منظم میانی  $C_N$  می‌شود. یک عملیات تجمعی  $\text{max}$  بعدی روی  $N$  پاسخ سپس یک خروجی  $C_N$ -ناوردا، یعنی یک میدان خروجی اسکالر، به دست می‌دهد. تفاوت با پیاده‌سازی [۶] این است که این عملیات در پایه چندجمله‌ای‌های زرینیکه همانظور که در معادله (۱۰) مشخص شده است، انجام می‌شود. این انتخاب در نهایت متناظر با یک طرح درون‌یابی جایگزین است. طراحی مدل دوم، که در بخش ۴.۴ از [۶] توصیف شده است، یک پیاده‌سازی مجدد از MDGCNN‌های [۷] در پایه چندجمله‌ای‌های زرینیک است. نویسنده‌گان مشاهده می‌کنند که این طراحی منجر به عملکرد به طور قابل توجهی بهبود یافته‌ای می‌شود زیرا میدان‌های ویژگی منظم قادر به کدگذاری اطلاعات جهتی هستند.

آخرین مدل راهبری‌پذیر-دورانی که ما مورد بحث قرار می‌دهیم، [۸] توسط [۹] است. برخلاف مدل‌های قبلی، TextureNet-ها یک  $D_4$ -ساختار را فرض می‌کنند، که به راحتی می‌توان آن را به یک  $D_4$ -ساختار با استفاده از QuadriFlow، یک بسط نرم‌افزاری شخص ثالث که می‌تواند برای محاسبه میدان‌های [۱۰]-۴ که برای هموار بودن و داشتن تکینگی‌های کم بهینه شده‌اند، استفاده شود، از پیش محاسبه می‌شود [۹]. همانطور که از نام آن پیداست، TextureNet-ها میدان‌های ویژگی و رودی را که به عنوان بافت نمایش داده می‌شوند، پردازش می‌کنند و دارای وضوح بالقوه بالاتری نسبت به مش هستند. کرنل‌های کانولوشن در یک مجموعه متراکم از مکان‌های نمونه‌برداری، که به طور یک‌باخت روى و جوهه مش توزيع شده‌اند، اعمال می‌شوند. در هر نقطه نمونه‌برداری، میدان ویژگی اسکالر به مختصات نرمال ژئودزیک پولبک شده و نسبت به یک چارچوب دلخواه از  $D_4$ -ساختار نمایش داده می‌شود. سپس با یک کرنل  $3 \times 3$ -ناوردا تطبیق داده می‌شود. همانطور که در شکل ۶۲ به تصویر کشیده شده است، [۹] پیکسل از چنین کرنل‌هایی با  $3 \times 3$  درجه آزادی توصیف می‌شوند. کانولوشن بر حسب سه  $1 \times 1$ -ناوردا با  $D_4$ -ساختار نمایش داده می‌شود. راهبری‌پذیری بازتابی اضافی کرنل‌ها دلالت در هر یک از فضاهای مماس تقسیم‌بندی و [۱۱] می‌شوند. راهبری‌پذیری بازتابی آنها متعاقباً بر این دارد که TextureNet-های اسکالر هستند، نمی‌توانند نه جهات و نه جهت‌گیری‌ها را کدگذاری کنند. ویژگی‌های TextureNet-ها روى سطوح غيرجهت‌پذیر به خوبی تعریف شده‌اند. با این حال، از آنچه که برای غلبه بر این مشکل، لازم است از کرنل‌های  $D_4$  یا  $2$ -راهبری‌پذیر غیربدیهی استفاده شود.



شکل ۶۲: یک کرنل  $3 \times 3$  پیکسلی  $D_4$ -ناوردا با سه درجه آزادی پارامتری می‌شود.

## ۳.۱۲ کانولوشن‌های- $\{\cdot\}$ سطحی راهبری‌پذیر

این بخش شبکه‌های  $\{\cdot\}^{\otimes 4}$  را مرور می‌کند، که در این مشترک هستند که بر  $\{e\}$ -ساختارها روى سطوح تکیه دارند. از دیدگاه کانولوشن‌های  $GM$  این معماری‌ها عمدتاً در انتخاب خاص روش ابتکاری که  $\{e\}$ -ساختار را تعیین می‌کند متفاوت هستند.

با فرض یک گروه ساختاری بدیهی  $\{e\}$ -راهبری‌پذیر (یعنی نامحدود) را اعمال می‌کنند، که در امتداد چارچوب‌های  $\{e\}$ -ساختار انتخاب شده تراز شده‌اند. انواع میدان (نمایش‌های گروهی) لزوماً بدیهی هستند. همین امر برای تمام انتقال‌دهنده‌های موائز نیز صادق است، که لزوماً با  $\{e\}$ -ساختار سازگار هستند. بنابراین پولبک‌های انتقال‌دهنده  $\text{Exp}_p f^*$  از میدان‌های ویژگی  $f$  به فضاهای مماس، به پولبک‌های  $f$  توسط نگاشت نمایی معمول کاوش می‌یابند، یعنی آنها انتقال‌دهنده‌های (غیربدیهی) را اعمال نمی‌کنند. به یاد یاورید که  $\{e\}$ -ساختارهای  $\text{exp}_p^*$  پیوسته فقط روی منيفله‌های موائز پذیر وجود دارند، که این دلالت بر این دارد که استنتاج شبکه‌ها به ناچار روی سطوح غیرموائز پذیر ناپیوسته است. روش‌های ابتکاری که میدان‌های چارچوب را تعیین می‌کنند، علاوه بر این، همیشه خوش تعریف نیستند، یا تحت تغییر شکل‌های هندسه سطوح ناپایدار هستند، همانطور که در ادامه بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد.

مدل‌های [۱۰]، [۱۱] و [۱۲] روی مش‌های مثلثی عمل می‌کنند و میدان‌های ویژگی را که در رئوس نمونه‌برداری شده‌اند، پردازش می‌کنند. شبکه‌هایی را پیشنهاد می‌کنند که روی ابرهای نقطه سطحی عمل می‌کنند در حالی که معماری [۱۲] کانولوشن‌ها را روی اطلس‌های بافت از مش‌ها تعریف می‌کند.

**های ژئودزیک:** اولین خانواده مدلی که ما مورد بحث قرار می‌دهیم، [۱۳] ها توسط [۱۴] هستند. نویسنده‌گان انواع مختلفی از مدل‌ها را روی گراف‌ها و منيفله‌ها مورد بحث قرار می‌دهند، که اکثر آنها به عنوان کانولوشن‌های  $GM$  توضیح داده نمی‌شوند. این مدل‌ها در این مشترک هستند که کرنل‌ها را نسبت به یک انتخاب از «شبیه-مخصوص» روی منيفلد یا گراف اعمال می‌کنند [۱۵] ما در اینجا فقط به آن دسته از  $\text{GM}$  علاقه‌مندیم که بر مختصات نرمال ژئودزیک تکیه دارند و بنابراین به عنوان کانولوشن‌های  $GM$  شناسایی می‌شوند.

همانطور که در بالا گفته شد، تفاوت اصلی بین کانولوشن‌های سطحی  $\{e\}$ -راهبری‌پذیر، انتخاب خاص  $\{e\}$ -ساختار آنهاست. با الهام از کار قبلی [۱۶]، نویسنده‌گان انتخاب می‌کنند که چارچوب‌های مرجع  $\{e\}$ -ساختار را با جهت انتخاب اصلی منيفلد تراز کنند. توجه داشته باشید که این روش

تعریف نشده‌اند بلکه بر اساس کرنل‌های گرمای ناهمسانگرد روی منيفلد هستند. [۱۷] ادعای می‌کنند که چنین کرنل‌های گرمایی متناظر با کرنل‌های گاوسی ناهمسانگرد در مختصات ژئودزیک هستند [۱۸] اگر این گزاره درست باشد،  $CNN$ -های ناهمسانگرد توسعه [۱۹] همچنان که این میدان را می‌دانند. کرنل‌های آنها در مختصات نرمال ژئودزیک در نظر گرفت.

ابتكاری زمانی که انتخابات اصلی  $K_{\text{انتخاب}} = 5$  برابر باشد، یعنی زمانی که جهت انتخاب اصلی تهگن است، خوش تعریف نیست. یک مثال افراطی، کرمه ۲-بعدی  $S^3$  است، که در آن جهت انتخاب اصلی در هیچ کجا به خوبی تعریف نشده است. حتی زمانی که انتخابات اصلی نایابر هستند، آنها فقط یک خط بدون جهت را تعیین می‌کنند، و چارچوب‌های مرچ را تا یک  $C_2$ -ساختار (با دو چارچوب تشکیل‌دهنده) که در امتداد دو جهت در طول خط اشاره می‌کنند. بنابراین برای اینکه شکله مسئول از انتخاب چارچوب باشد، آنها در واقع باید کرمند  $C_2$ -راهبری پذیر را اعمال کنند. علاوه بر این، جهات انتخاب اصلی تحت تغییر شکل‌های سطح ناپایدار هستند. به عنوان مثال، جهت انتخاب اصلی را در قطب شمال (روی محور  $\hat{z}$  مثبت) کرمه ۲-بعدی  $S^3$  تصور کنید: یک فشردگی بی‌نهایت کوچک کرده در امتداد محور  $\hat{x}$  منجر به یک جهت انتخاب اصلی در امتداد محور  $\hat{x}$  می‌شود در حالی که یک کشش بی‌نهایت کوچک در امتداد محور  $\hat{x}$  منجر به یک جهت انتخاب اصلی در امتداد محور  $\hat{z}$  می‌شود. ما علاوه بر این می‌خواهیم اشاره کنیم که انتخابات اصلی به جایگذاری یک میفلد بستگی دارند، یعنی این رویکرد ذاتی نیست.

۳-<sup>۳</sup> ؟ یک  $CNN$  مش سه بعدی ( $3 \times 3 \times 3$ ) را پیشنهاد کردند که روی سطوح چهرهای اسکن شده کانولو می کند تا عباراتی مانند شادی، عصبانیت یا تعجب را تشخیص دهد. از آنجا که ماسک های چهره از نظر توبولوژیکی صفحاتی هستند (با سوراخ هایی در چشم ها)، آنها موازی پذیر هستند، که امکان کانولوشن های  $GM$  هموار را برای  $\{e\} = G$  فراهم می کند.

کرنل کانولوشن به یک نقطه نمونه برداری مرکزی و هشت نقطه دیگر در یک فاصله شعاعی ثابت  $R$  و زوایای  $7, \dots, 0, \dots, 7$  در مختصات قطبی گسته سازی می شود. کرنل ها  $\Phi$  و در نتیجه چار چوب هایی که  $\{\Phi\}$ -ساختار را تشکیل می دهند  $\Phi$  به گونه ای چرخانه می شوند که با محور  $z$  فضای جایگذاری  $\mathbb{R}^3$  تراز شوند. این رویکرد منطقی به نظر می رسد زیرا ماسک های چهره موازی پذیر و مهمتر از آن، به صورت عمودی تراز شده اند. برای تطبیق یک چنین کرنل را بایک میدان و زیرگی،  $\theta$  نویز یک هایی به طول  $R$  در هشت جهت شلیک می شوند. مختصات مرکزوار درون یابی سیگنال از رئوس اطراف به نقطه پایانی  $\theta$  نویز یک استفاده می شود.

**کانولوشن‌های انتقال موازی:** به عنوان آخرین کانولوشن  $e$ -راهبری پذیر مبتنی بر مش، ما کانولوشن‌های انتقال موازی ( $\square\square\square$ ) توسعه ؟  
 [را مورد بحث قرار می‌دهیم. ایده کلیدی PTC‌ها تعریف کرزل کانولوشن در یک «مدآ»  $M \in p$ . و به اشتراک گذاشتن آن با هر مکان دیگر  $p \in M$  با انتقال موازی لوی-چوپیتا در امتداد کوتاه‌ترین ژئودزیک‌ها بین  $p$  و  $p$  است. برای فرمول‌بندی دقیق‌تر این روش اشتراک و وزن، دیسک‌های پسته  $B_{T_p M}(\cdot, R) \subset T_p M$  با شاعر  $R$  را حول میداهای فضاهای مماس در نظر گیریم، که در آن  $R \in \mathbb{R}_+$  شاعر اثربویته منصفاند است. علاوه بر این، فرض کنید  $M_{p,R} := \exp_p(B_{T_p M}(\cdot, R)) \subset M$  تصاویر این دیسک‌ها تحت نگاشت نمایی باشند، که شامل تمام نقاطی است که فاصله ژئودزیک آنها از  $R$  مساوی کوچکتر یا مساوی  $R$  است.؟ [کرزل‌های کانولوشن اسکالار (نامحدود) خود را به عنوان توابع با مقادیر حقیقی

$$\widehat{K}_{p\cdot}: M_{p\cdot,R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\textcircled{5}\cdot\textcircled{3})$$

روی همسایگی اطراف مبدأ  $p$ , یعنی مستقیماً روی منیفلد، تعریف می‌کنند. برای این اشتراک گذاشتن کرnel با مکان‌های دیگر  $M \in \mathcal{N}$  نویسنده‌گان کوتاه‌ترین رُثودزیک‌ها را بین  $p$  و مکان‌های هدف  $p$  از طریق الگوریتم پیشروی سریع محاسبه می‌کنند. سپس آنها کرnel را در امتداد این رُثودزیک‌ها به صورت موازی منتقل می‌کنند، که این کار با پولبک کردن آنها به فضاهای مماس انجام می‌شود. در معادلات، کرnel در  $p$  به صورت

$$\widehat{K}_p : M_{p,R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad q \mapsto \widehat{K}_p(q) := \widehat{K}_{p\cdot} \circ \exp_{p\cdot} \circ \mathcal{P}_{TM,p,\rightarrow p}^{-1} \circ \log_p(q), \quad (\text{d.f})$$

تعريف می‌شود، که با نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:

$$M_{p.,R} \xleftarrow{\exp_{p.}} B_{T_p M}(\cdot, R) \xrightarrow{\mathcal{P}_{TM,p.\rightarrow p}} B_{T_p M}(\cdot, R) \xrightarrow{\exp_p} M_{p,R}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$   $\mathbb{R}$   $\underbrace{\hspace{10em}}$

(5.5)

وجود نگاشت لگاریتمی تضمین شده است زیرا دامنه به نقاط  $q$  در داخل شعاع انزکتیویته محدود شده است. برای محاسبه پاسخ کانولوشن در  $p$  کرنل متفاوت شده با مدار و پیگ (اسکالر) روی  $M_{p,R}$  تطبیق داده می‌شود.

برای توصیف PTC‌ها به عنوان کانولوشن‌های  $G\Box$  ماباید  $\{e\}$ -ساختار متناظر و کرنل  $\{e\}$ -راهبری پذیر روی  $\mathbb{R}^d$  را شناسایی کنیم. یک ساختار سازگار با انتخاب یک چارچوب دلخواه  $e_i^A(p_i)$ <sup>d</sup> در مبدأ  $p$ . ثابت می‌شود. سپس چارچوب‌ها در هر مکان دیگر  $p$  با انتقال لوی-چیویتا این چارچوب اولیه در امتداد کوتاه‌ترین رُندزیک‌ها تعیین می‌شوند، یعنی به صورت<sup>۱۷۳</sup>

$$\left[ e_i^A(p) \right]_{i=1}^d := \mathcal{P}_{FM,p.\rightarrow p} \left[ e_i^A(p.) \right]_{i=1}^d. \quad (5.6)$$

تعریف می‌شوند. توجه داشته باشید که این تعریف به طور خاص رابطه معادل زیر را برای پیمانه‌های متناظر نتیجه می‌دهد، که به راحتی با اعمال آن بر روی میدان جارچوں دیده می‌شود:

$$\psi_{GM,p}^A = \psi_{GM,p.}^A \circ \mathcal{P}_{GM,p.\rightarrow p}^{-1} \quad (\Delta \cdot \nabla)$$

<sup>۱۷</sup> از آنجا که این رابطه  $\{e\}$ -سانختر را تعریف می‌کند، ما باید از انتقال دهنده‌های لوی-چیوتا روی کل کلاف چارچوب  $FM$  استفاده کنیم.

با توجه به چارچوب مرجع در  $p$  می‌توانیم  $\widehat{K}_p$  را در مختصات نرمال ژئودزیک بیان کنیم، که مفهوم معمول ما از کرنل الگو را روی  $\mathbb{R}^3$  به دست می‌دهد:

$$K : B_{\mathbb{R}^3}(\cdot, R) \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto K(v) := \widehat{K}_p \circ \exp_p \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(v) \quad (50.8)$$

برای نشان دادن اینکه اشتراک وزن ما از ساختار ساخته شده به این روش واقعاً با اشتراک وزن  $\mathbb{R}^3$  [سازگار است، ما کرنل‌های  $\widehat{K}_p$  را در  $\widehat{K}$  با نگاشت کرنل الگوی ما  $K$  به منيفلد باز تولید می‌کنیم:

$$\begin{aligned} K \circ \psi_{TM,p}^A \circ \log_p &= \widehat{K}_p \circ \exp_p \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1} \circ \psi_{TM,p}^A \circ \log_p \\ &= \widehat{K}_p \circ \exp_p \circ \mathcal{P}_{TM,p \rightarrow p}^{-1} \circ \log_p \\ &= \widehat{K}_p \end{aligned} \quad (50.9)$$

مرحله دوم در این محاسبه از معادل معادله (50.7) برای انتقال دهنده و پیمانه‌های کلاف مماس استفاده کرد. تمام تعاریف، و سازگاری آنها، به طور خلاصه با این گزاره که نمودار زیر جابجایی است، خلاصه می‌شوند:

$$\begin{array}{ccccc} M_{p,R} & \xleftarrow{\exp_p} & B_{T_p M}(\cdot, R) & \xrightarrow{\mathcal{P}_{TM,p \rightarrow p}} & B_{T_p M}(\cdot, R) \xrightarrow{\exp_p} M_{p,R} \\ & & \downarrow \psi_{TM,p}^A & \swarrow \psi_{TM,p}^A & \downarrow \\ & & B_{\mathbb{R}^3}(\cdot, R) & & \\ & \downarrow K & & & \downarrow \\ & \mathbb{R} & & & \widehat{K}_p \end{array} \quad (51.0)$$

از آنجا که ما  $\{e\}$ -ساختار خود را با انتخاب یک چارچوب اولیه در  $p$  ساختیم، خواننده ممکن است در مورد پیامدهای این انتخاب کنجدکاو باشد. یک انتخاب متفاوت از چارچوب اولیه منجر به یک تبدیل متاظر از مختصات نرمال ژئودزیک در  $p$  و در نتیجه از کرنل الگو  $K$  (معادله (50.8)) خواهد شد. با این حال، از آنجا که  $\{e\}$ -ساختار با انتقال چارچوب اولیه ساخته شده است، تمام چارچوب‌های مرجع آن بر این اساس تبدیل خواهد شد. سپس تبدیل کرنل الگو با تبدیل  $\{e\}$ -ساختار خشنی خواهد شد به طوری که تمام انتخاب‌های چارچوب‌های اولیه در نهایت معادل هستند.

$\{e\}$ -ساختارهای زیربنای PTC‌ها به طور حیاتی به انتخاب مبدأ  $p$ . که میدان چارچوب از آن ساخته شده است، بستگی دارند  $\square$  انتخاب‌های مختلف از مبدأها می‌توانند به  $\{e\}$ -ساختارهای سیار متفاوتی منجر شوند. از آنجا که اکثر منيفلدها با یک مفهوم کانونی از مبدأ همراه نیستند، روش ابتکاری پیشنهادی تا حدی دلخواه به نظر می‌رسد.  $\{e\}$ -ساختارهای مبتنی بر انتقال، و در نتیجه PTC‌ها، علاوه بر این در مکان برش ناپیوسته هستند. این به طور خاص دلالت بر این دارد که آنها نزدیک به مکان برش تحت تغییر شکل‌های هندسه سطوح ناپایدار هستند زیرا چنین تغییر شکل‌هایی ممکن است مکان برش را جابجا کنند. برخلاف روش‌های ابتکاری مدل‌های قبلی، روش ابتکاری PTC‌ها صرفاً به هندسه ذاتی سطح بستگی دارد، یعنی بر اساس جایگذاری آن در فضای محیطی نیست.

برای جلوگیری از سردرگمی، باید اشاره کنیم که  $\mathbb{R}^3$  در پیاده‌سازی خود (بخش ۲.۳) یک میدان چارچوب دیگر را می‌سازند، که نیاید با  $\{e\}$ -ساختاری که در بالا توصیف کردیم، اشتباه گرفته شود. این میدان چارچوب برای محاسبه عددی اتصال لوی-چیویتا روی مش لازم است، که کرنل‌ها سپس مطابق آن منتقل می‌شوند. تحلیل ما در بالا صرفاً بر اساس تعریف مستقل از مختصات آنها از مدل است، مهمتر از همه تعریف اشتراک وزن در (معادله (50.4)).

علاوه بر این توجه داشته باشید که انتقال دهنده‌های بردار ویژگی به طور ضمنی فرض شده در پول‌بک انتقال دهنده، لزوماً بر اتصال بدیهی  $\{e\}$ -سازگار که توسط  $\{e\}$ -ساختار القا می‌شود، تکیه دارند. انتقال ویژگی در امتداد ژئودزیک‌های خروجی از  $p$ . که  $\{e\}$ -ساختار بر اساس آنها ساخته شده است، با انتقال دهنده‌های لوی-چیویتا منطبق است. انتقال دهنده‌ها در امتداد هر مسیر دیگر به طور کلی با انتقال لوی-چیویتا متفاوت هستند.

**کانولوشن‌های مماس:** کانولوشن‌های مماس توسط  $\mathbb{R}^3$  روی ابرهای نقطه  $P \subset \mathbb{R}^3$  عمل می‌کنند که فرض می‌شود نقاط آنها روی یک سطح قرار دارند. فضاهای مماس در نقاط نمونه‌برداری از طریق یک تحلیل مؤلفه‌های اصلی محلی (LPCA) محاسبه می‌شوند.  $p \in P$  در LPCA اساساً بردارهای ویژه  $e_i \in \mathbb{R}^3$ ،  $i = 1, 2, 3$ ،  $e_i \in \mathbb{R}^3$  از ماتریس کوواریانس تمام نقاط را در یک همسایگی کروی  $\mathcal{N}_p = \{q \in P \mid \|q - p\| < R\}$  با شعاع  $R$  حول  $p$  محاسبه می‌کند. از آنجا که ابر نقطه از یک سطح نمونه‌برداری شده است، یکی از مقادیر ویژه باید نزدیک به صفر باشد. بردار ویژه متناظر  $e_3$  به عنوان بردار نرمال صفحه مماس جایگذاری شده  $T_p M \subset \mathbb{R}^3$  در نظر گرفته می‌شود. دو بردار ویژه دیگر یک چارچوب راست‌هنجار  $[e_1, e_2]$  را روی صفحه مماس تولید می‌کنند، به طوری که مجموعه بردارهای ویژه PCA یک  $\{e\}$ -ساختار را روی ابر نقطه القا می‌کند. توجه داشته باشید که بردار ویژه با بزرگترین مقدار ویژه در جهت حداقل انحنای اصلی اشاره می‌کند، یعنی ما  $\kappa_n(e_1) = \kappa_{\min}$  و  $\kappa_n(e_3) = \kappa_{\max}$  را داریم. بنابراین  $\{e\}$ -ساختار در نظر گرفته شده مشابه ساختار  $\mathbb{R}^3$  است، با این حال، چارچوب‌ها با  $\pi/2$  چرخانده شده‌اند زیرا با جهت حداقل

به جای حداکثر انحصار تراز شده‌اند.<sup>۱۳۸</sup> از آنجا که علامت بردارهای ویژه دلخواه است، این روش ابتکاری در واقع چارچوب‌ها را فقط تا دوران‌هایی با  $\pi$  ثابت می‌کند. برای حل این ابعام، کانولوشن‌های مماس یا باید بین دو جهت تمایز قائل شوند یا به کرنل‌های  $C_2$ -راهبری پذیر بازگردند.

به جای نمایش میدان ویژگی در مختصات نرمال ژئودزیک، کانولوشن‌های مماس ویژگی‌ها را در امتداد جهت نرمال روی صفحه مماس تصویر می‌کنند.<sup>۱۳۹</sup> سپس آنها به یک شبکه منظم از  $N \times N$  پیکسل درون‌یابی می‌شوند. از آنجا که این شبکه با چارچوب مرجع تراز شده است، می‌توان آن را به عنوان یک گستته‌سازی از مختصاتی سازی فضای مماس  $\psi_{TM,p}^A(T_p M) = \mathbb{R}^2$  در نظر گرفت. سپس کانولوشن ویژگی‌ها را با گرفتن حاصلضرب داخلی با یک کرنل پیکسلی  $N \times N$  محاسبه می‌کند.

**۴-۲-۱-۱: NPTC-net** [۲]: ها را روی ابرهای نقطه سطحي  $P \subset \mathbb{R}^3$  پیشنهاد کردند. مانند کانولوشن‌های مماس، NPTC-net مماس را از طریق یک تحلیل مؤلفه‌های اصلی محلی محاسبه می‌کنند، با این حال،  $\{e_i\}$ -ساختار زیرینی NPTC-net های بیشتر با گرادیان تابع فاصله ژئودزیک از یک نقطه اولیه  $p \in P$  تراز شده است. برای حل تابع فاصله،  $\psi_{TM,p}^A$  معادله ایکوتال را از طریق یک الگوریتم پیشروی سریع حل می‌کنند. به جای عمل مستقیم روی ابر نقطه‌های مانطور که به عنوان مثلث در  $\mathbb{R}^3$  انجام می‌شود، نویسندهان پیشنهاد می‌کنند از یک شبکه واکسل پراکنده استفاده کنند که واکسل‌های آن در یک نوار باریک اطراف ابر نقطه قرار دارند. پس از محاسبه تابع فاصله روی شبکه واکسل، که باید فواصل تقریباً ژئودزیک را تولید کند، گرادیان آن محاسبه و روی صفحات مماس تصویر می‌شود. بردار تصویر شده اولین محورهای چارچوب  $\{e_i\}$ -ساختار را تعیین می‌کند. توجه داشته باشید که چنین میدان‌های چارچوب تعریف شده‌اند در  $p$ ، تکین هستند.

**۴-۲-۱-۲: مشاهده می‌کنند که این  $\{e_i\}$ -ساختار یک اتصال بدیهی را روی سطح القا می‌کند (به گونه‌ای تعریف شده که میدان چارچوب تحت این انتقال بسته است). میدان چارچوب (یا کرنل‌های کانولوشن) را می‌توان به عنوان منتقل شده مطابق با این اتصال بدیهی در ک، که « $\mathbb{R}^3$ » (کانولوشن انتقال موازی) را در نام مدل توجیه می‌کند. توجه داشته باشید، با این حال، که NPTC-net ها بر خلاف PTC های  $\{e_i\}$  بر انتقال لوی-چیوینا تکیه ندارند. علاوه بر این، این گزاره را می‌توان برای هر  $\{e_i\}$ -ساختار و اتصال بدیهی متناظر آن بیان کرد.**

مانند کانولوشن‌های مماس، NPTC-net ها ویژگی‌ها را در فضای محیطی به صفحه مماس تصویر می‌کنند. به جای استفاده از یک تصویر در امتداد جهت نرمال، نویسندهان از یک درون‌یابی نزدیکترین همسایه با فواصل اندازه‌گیری شده در فضای محیطی استفاده می‌کنند. سپس کرنل کانولوشن در امتداد چارچوب‌های  $\{e_i\}$ -ساختار جهت‌دهی شده و با میدان ویژگی درون‌یابی شده تطبیق داده می‌شود. با توجه به یک کرنل کانولوشن  $K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  نویسندهان تخصیص آن را به فضاهای مماس به صورت  $\psi_{TM,p}^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  فرمولبندی می‌کنند که در آن  $= \psi_{TM,p}^A$  است. این رویه دقیقاً با تعریف ما از اشتراک وزن و پیمانه‌ها (معادله (۴۳۷)) مطابقت دارد.

**کانولوشن‌های بین-اطلسی:** یک رویکرد کاملاً متفاوت توسط  $\mathbb{R}^3$  دنبال شد. کانولوشن‌های بین-اطلسی آنها یک اطلس بافت را محاسبه می‌کنند که چارت‌های آن برای تقریباً ایزومنتریک بودن بهینه‌سازی شده‌اند. سپس عملیات کانولوشن روی اطلس بافت انجام می‌شود، با نگاشت‌های آفست پیکسل که نگاشت‌های گذار بین چارت‌ها را مدل‌سازی می‌کنند.

قبل از اجرای کانولوشن‌های واقعی، یک اطلس از چارت‌ها محاسبه می‌شود. از دیدگاهی انتزاعی، چارت‌ها تکه‌هایی از سطح را به  $\mathbb{R}^3$  نگاشت می‌دهند، به طوری که کل سطح پوشش داده می‌شود. به طور مشخص، آنها تکه‌هایی از یک میدان ویژگی ورودی  $C$ -کاناله (بافت) را به روشی بدلون همپوشانی به یک آرایه با ابعاد  $(X, Y, C)$  نگاشت می‌دهند. از آنجا که تکه‌ها در آرایه باید تقریباً همسایگی‌های ژئودزیک را روی سطح نمایش دهند، چارت‌ها باید تقریباً ایزومنتریک باشند، یعنی اعوجاج‌ها را به حداقل برسانند. برای برآورده کردن این الزام، سطح به تکه‌هایی بریده می‌شود به طوری که زوایای متقابل بین تمام نرمال‌های مثبت در داخل یک تکه زیر یک آستانه مشخص شده توسط کاربر باقی بماند  $\mathbb{R}^3$  توجه داشته باشید که این رویکرد بر اساس هندسه خارجی سطوح است. پس از بهینه‌سازی تکه‌ها روی سطح، میدان ویژگی روی هر تکه در امتداد یک جهت تصویر غالب، تصویر می‌شود. یک الگوریتم بسته‌بندی بن (icosahedron) تکه‌های تصویر شده را به طور متراتک در نقشه بافت با شکل  $(X, Y, C)$  بسته‌بندی می‌کند. برای حل ابعاد جهتی تکه‌ها، آنها باید تراز-دورانی شوند. این کار با الزام به اینکه تصاویر محور  $\mathbb{R}$  فضای محیطی به هر تکه، همگی در نقشه بافت تراز شوند، به دست می‌آید.

کانولوشن مستقیماً روی نقشه بافت عمل می‌کند. این پیکسل‌ها را به سه دسته مختلف گروه‌بندی می‌کند که به روشنی متفاوت پردازش می‌شوند. پیکسل‌هایی که در داخل یک تکه هستند، به طوری که کرنل از تکه خارج نمی‌شود، از طریق کانولوشن ژئودزیک روی کانوناله می‌شوند. از آنجا که چارت‌ها تقریباً ایزومنتریک هستند، این تقریباً متناظر با یک کانولوشن ژئودزیک روی نواحی داخلی تکه را روی سطح است. پیکسل‌هایی که خارج از تکه‌ها هستند، پردازش نمی‌شوند و مقدار آنها صفر ثابت می‌شود. مورد جالب، پیکسل‌هایی هستند که نزدیک به مرز تکه‌ها هستند. از آنجا که کرنل کانولوشن برای چنین پیکسل‌هایی از تکه فعلی خارج می‌شود، به نگاشت‌های گذار نیاز دارد که ویژگی‌ها را از یک تکه همسایه روی سطح استعلام کنند. مکان استعلام با (۱) یافتن نقطه اصلی روی سطح که متناظر با مکان فعلی کرنل است، (۲) شلیک یک ژئودزیک برای یافتن مکان نمونه برداری کرنل روی سطح و (۳) نگاشت این مکان به پیکسل متناظر در نقشه بافت، محاسبه می‌شود. با استفاده از این نگاشت‌های گذار، تکه‌ها مطابق با هندسه سطح به هم دوخته می‌شوند و کانولوشن روی نقشه بافت تقریباً متناظر با یک کانولوشن ژئودزیک روی سطح است. در حد اینکه آستانه زاویه نرمال به سمت

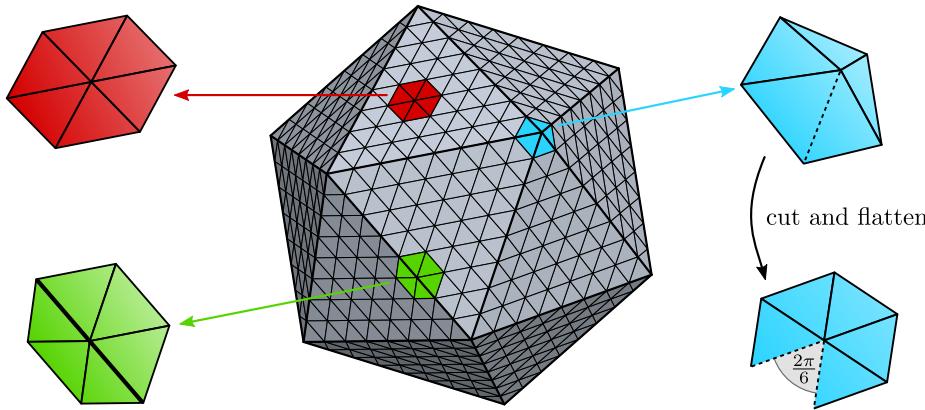
<sup>۱۳۸</sup> از آنجا که تمام چارچوب‌های مرتع با یک زاویه یکسان چرخانده شده‌اند، این تفاوت اگر کرنل‌ها یاد گرفته شوند، بی‌اهمیت است.

<sup>۱۳۹</sup> این انتخاب، کانولوشن‌های مماس (و NPTC-net) را از کانولوشن‌های  $GM$  متفاوت می‌کند. در حد کرنل‌های کوچک نسبت به انحنای سطح، هر دو تصویر از میدان‌های ویژگی به فضاهای مماس معادل می‌شوند.

صفر برود، تقریب به یک کانولوشن ژئودزیک دقیق همگرا می‌شود. با این حال، تکه‌ها سپس به وجوه منفرد کوچک می‌شوند، که منجر به نگاشتهای گذار غیربدیهی تری می‌شود.

کانولوشن‌های بین-اطلسی در این حد متناظر با کانولوشن‌های  $GM$  هستند که  $\{e\}$ -ساختار آنها از چارت‌ها القا می‌شود.  $\{e\}$ -ساختار در مرزهای بین تکه‌های مجاور ناپیوسته است، با این حال، پوش‌ها به دلیل تراز دورانی تکه‌ها در نقشه بافت باید در اکثر موارد به حداقل برسند. انتظار می‌رود ناپیوستگی‌ها در تکه‌هایی از سطح که تقریباً افقی هستند، بزرگ باشند.

برای کامل بودن، ما به روش‌های مبتنی بر اطلس توسط [؟] و [؟] اشاره می‌کنیم. هر دو تصویرهای غیر-ایزومنتریک از سطح را به یک دامنه مسطح در نظر می‌گیرند، که این دلالت بر این دارد که کانولوشن‌های اقلیدسی بعدی متناظر با کانولوشن‌های ژئودزیک روی سطح نیستند.



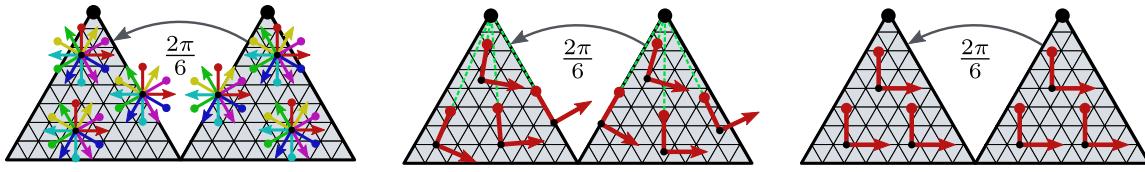
شکل ۶۳: بیست وجهی یک جسم افلاطونی است که در  $\mathbb{R}^3$  به عنوان یک تقریب تکه‌ای-تخت از هندسه کروی استفاده می‌شود. این جسم از ۱۲ رأس، ۲۰ وجه مثلثی متساوی‌الاضلاع و ۳۰ یال تشکیل شده است. این جسم یک شبکه نمونه‌برداری منظم را می‌پذیرد، که با تقسیم مکرر هر مثلث به چهار مثلث کوچکتر ساخته می‌شود. پس از ۲ تکرار، این رویه منجرب به یک شبکه با  $2^{2r+1} \cdot 20 \cdot 12$  یال و ۳۰ رأس می‌شود. سه تکه بر جسته شده، هندسه کیفی مقاومت همسایگی‌ها را حول رئوس روی وجوده (قمرن)، یال‌ها (سیز) و رئوس بیست وجهی (آبی) نشان می‌دهند. همسایگی قرمز بهوضوح تخت است. در حالی که همسایگی سبز در فضای جایگذاری خمیده است، انحصار گاؤسی ذاتی آن دوباره صفر است. این واقعیت در این امر منعکس می‌شود که می‌توان آن را به صورت ایزومتریک (یعنی بدون برش) پهن کرد و به طور معادل، انتقال لوى-چوبوتا در امتداد یک مسیر بسته حول گره مرکزی، نگاشت همانی است. همسایگی آبی باید در امتداد یک یال بر پرده شود تا بتوان آن را پهن کرد. نقص زاویه، یعنی زاویه‌ای که برش هنگام پهن کردن نوک تیز باز می‌شود، برابر با  $\frac{\pi}{6}$  است. هنگامی که یک بردار یک بار حول رأس مرکزی همسایگی به صورت موازی منتقل می‌شود، به اندازه این نقص زاویه می‌چرخد. به جای داشتن انحصار گاؤسی مثبت ثابت مانند کره  $S^2$ ، انحصار بیست وجهی در رئوس آن منمر کز (تکین) است و در همه جای دیگر صفر است.

## ۴.۱۲ تقریب‌های بیست وجهی از CNN‌های کروی

کره  $S^2$  در علوم محاسباتی معمولاً با اجسام افلاطونی، یعنی چندوجهی‌های منتظم محدب، تقریب زده می‌شود. در زمینه یادگیری عمیق، علاقه بیشتر بر روی بیست وجهی (icosahedron)، شکل ۶۳، منمر کشیده است، که در میان اجسام افلاطونی، نزدیک ترین تقریب به کره است [۶]. در حالی که هندسه ریمانی کره فقط تقریب زده می‌شود، اجسام افلاطونی این مزیت را دارند که تکه‌ای-تخت هستند و مشاهی‌های منظمی را می‌پذیرند. این ویژگی‌ها امکان استفاده از روال‌های کاتولوشن مسطح را فراهم می‌کنند، که از نظر محاسباتی بهینه‌تر از روش‌های دو بخش قبل هستند. این بخش به بحث در مورد CNN‌های بیست وجهی از [۶]، [۷] و [۸] می‌پردازد، که به ترتیب بر  $G$ -ساختارهای نشان داده شده در شکل‌های ۶۴، ۶۵ و ۶۶ تکه دارند. قبل از پرداختن به پیاده‌سازی‌های آنها بر حسب اطلسی از چارت‌های افاین در شکل ۶۵، ماجزیات بیشتری در مورد هندسه بیست وجهی و  $G$ -ساختارهای در نظر گرفته شده ارائه می‌دهیم.

**هندسه‌ی بیست وجهی:** بیست وجهی یک منیفلد دوبعدی گسسته است که از ۲۰ وجه مثلثی متساوی‌الاضلاع، ۱۲ رأس و ۳۰ یال تشکیل شده است. همانند کره ۲-بعدی، ما بیست وجهی را به عنوان جایگذاری شده در  $\mathbb{R}^3$  تعریف می‌کنیم، که از آن متريک جایگذاری را در معادله (۴۲۹) به ارث می‌پردازیم. فضاهای مماس جایگذاری شده در اینجا به گونه‌ای تعریف می‌شوند که نرمال‌های آنها با نرمال‌های وجهه منطبق باشند. فضاهای مماس روی رئوس و یال‌ها را می‌توان از طریق میانگین نرمال‌های وجهه مجاور تعریف کرد، همانطور که در بخش بعدی ۱۲ مورد بحث قرار می‌گیرد. با این حال، از آنجا که ما میدان‌های ویژگی را به عنوان نمونه‌برداری شده روی وجهه بیست وجهی (که تقریباً همه جا است) در نظر می‌گیریم، از این انتخاب مستقل هستیم. با فرض اتصال لوى-چوبوتا، انتقال موازی بردارهای مماس روی وجهه به گونه‌ای عمل می‌کند که آنها را در فضای جایگذاری  $\mathbb{R}^3$  موازی نگه دارد. هنگامی که بردارهای مماس از روی یک یال به صورت موازی منتقل می‌شوند، زاویه یکسانی را نسبت به یال در هر دو طرف حفظ می‌کنند [۱]. این انتقال را می‌توان به طور شهودی به این صورت تصور کرد که (۱) دو وجه مجاور را پهن کرده، (۲) بردار را روی یال مانند حالت معمول در یک فضای اقلیدسی دو بعده منتقل کرده، و (۳) دو وجه را به جایگذاری اصلی خود بازگردانیم؛ به شکل ۵۸ و [۸] مراجعه کنید. بنابراین ژنوزدیک‌ها در  $\mathbb{R}^3$  تکه‌ای-خطی هستند و از یال‌ها به گونه‌ای عبور می‌کنند که زاویه خروج آنها برابر با زاویه ورودشان باشد. بنابراین نگاشت‌های نمایی  $(v) \rightarrow \exp_p(v)$  به راحتی با دنبال کردن یک مسیر تکه‌ای-ثابت برای فاصله‌ای برابر با  $\|v\|$  محاسبه می‌شوند. در عمل، نویسنده‌گان [۸] میدان‌های ویژگی را روی یک مش منظم نمونه‌برداری می‌کنند و فقط آن دسته از بردارهای مماس را در نظر می‌گیرند که به رئوس مش همسایه نگاشت می‌یابند.

شکل ۶۳ همسایگی‌های دیسک‌مانند را حول نقاط نمونه روی وجهه (قمرن)، یال‌ها (سیز) و رئوس (آبی) بیست وجهی نشان می‌دهد. همسایگی قرمز کاملاً در داخل یک وجه قرار دارد و بنابراین تخت است. همسایگی سبز در فضای جایگذاری خمیده است، با این حال، انحصار ذاتی (ریمانی یا گاؤسی) آن هنوز صفر است زیرا انتقال لوى-چوبوتا بردارها یک بار حول رأس مرکزی، آنها را همانطور که هستند حفظ می‌کند. اینکه این مورد برقرار است معادل



(ج)  $\epsilon$ -ساختار بیست و جهی تراز شده با شبکه توسعه ?.

(ب)  $\{e\}$ -ساختار بیست و جهی تراز شده با شمال توسعه ?.

(ت)  $\{e\}$ -ساختار بیست و جهی تراز شده با شبکه توسعه ?.

شکل ۶۴: ایده مفهومی  $G$ -ساختارهای فرض شده در  $\{e\}$  با تراز کردن تمام چارچوب‌ها در امتداد یال‌های «افقی» وجوه (با فرض عمودی بودن محور قطبی) تعریف می‌شود. شکل ۶۴ عبیک  $\{e\}$ -ساختار جایگزین را نشان می‌دهد که چارچوب‌های آن به سمت قطب شمال تراز شده‌اند. این ساختار برخلاف  $\{e\}$ -ساختار قبلی پیوسته است زیرا چارچوب‌ها روی یال‌های بریده شده هنگام چسباندن مجدد یال‌ها به یکدیگر منطبق می‌شوند.  $\epsilon$ -ساختار در شکل ۶۴<sup>۱۶۴</sup> با افزودن چارچوب‌هایی که با مضرب‌هایی از  $\frac{\pi}{6}$  چرخانده شده‌اند به  $\{e\}$ -ساختار ۶۴<sup>۱۶۴</sup> ساخته می‌شود. از آنجا که این زاویه با نقص زاویه در یال‌های بریده شده برابر است،  $\epsilon$ -ساختار تعریف شده به این ترتیب هموار (پیوسته) است. توجه داشته باشید که این دو  $\{e\}$ -ساختار با انتقال لوی-چیویتا ناسازگار هستند (یعنی تحت آن بسته نیستند) اما یک اتصال بدینهای جایگزین را القا می‌کنند.  $\epsilon$ -ساختار، در مقابل، با انتقال لوی-چیویتا سازگار است.

این واقعیت است که همسایگی سبز را می‌توان به صورت ایزومنتریک پهن کرد، یعنی بدون کشش یا برش آن. این پهن کردن ایزومنتریک برای نوع آبی همسایگی‌ها حول رئوس ممکن نیست، که برای پهن شدن باید در یکی از یال‌ها بریده شوند. با ساخته شدن از پنج مثلث متساوی‌الاضلاع، نوک تیز پهن شده یک نقص زاویه  $\frac{\pi}{6}$  را نشان می‌دهد. هولونومی هر مسیر بسته حول هر رأس (منفرد)، یعنی زاویه بین یک بردار دلخواه و انتقال آن یک بر حول حلقه، دقیقاً با این نقص زاویه داده می‌شود. در کل، این نتایج دلالت بر این دارند که انتخاب گاوسی (گستته) بیست و جهی در همه جا به جز در رئوس صفر است، جایی که با هولونومی  $\frac{\pi}{6}$  تکین است. هندسه ساده بیست و جهی اجازه می‌دهد تا آن را باز کرده و به صورت سراسری پهن کرد، همانطور که در شکل ۶۵ به تصویر کشیده شده است، که در  $\{e\}$  برای یک پیاده‌سازی کارآمد از کانولوشن‌های  $GM$  بیست و جهی استفاده شد.

گروه ایزومنتری کامل بیست و جهی است و از  $120^\circ$  عضو تشکیل شده است. می‌توان آن را به عنوان حاصل‌ضرب مستقیم  $\mathcal{R} \times I$  از زیرگروه بازتاب‌ها  $\mathcal{R}$  و زیرگروه ایزومنتری‌های حافظ جهت  $I \leq \text{Isom}_+(M)$  که شامل  $SO(3)$  است، ساخت. هر رأس  $p$  توسط پنج دوران گستته حول محور گذرنده از  $p$  و رأس متقابل آن پایدار می‌شود، که گروه دوری  $(2)$   $\leq SO(2)$  را تشکیل می‌دهند. رأس  $p$  علاوه بر این توسط بازتاب‌ها نسبت به صفحه تعریف شده توسط محور دوران و هر یال خروجی از  $p$  پایدار می‌شود، به طوری که زیرگروه پایدارساز کامل آن با گروه دووجهی  $2 \leq D_p = \text{Stab}_p$  داده می‌شود. همودایی کانولوشن‌های  $GM$  بیست و جهی نسبت به گروه‌های ایزومنتری  $I$ ،  $I_h$  یا  $D_h$  دار  $\{e\}$  نشان داده شده است که همودایی کامل  $SO(3)$  یا  $(2)$   $\leq SO(2)$  با این  $C_h$  های کروی را به خوبی تقریب می‌زند هنگامی که از افزایش داده دورانی پیوسته استفاده شود.

$G$ -ساختارهای بیست و جهی: کانولوشن‌های  $GM$  بیست و جهی توسط  $\{e\}$  [و  $\{e\}$ ] (به طور ضمنی)  $\{e\}$ -ساختارها را فرض می‌کنند، در حالی که مدل  $\{e\}$  یک  $\epsilon$ -ساختار را فرض می‌کند. شکل ۶۴ ایده پشت این  $G$ -ساختارها را به تصویر می‌کشد، که در سه پاراگراف بعدی با جزئیات بیشتری توضیح می‌دهیم.

$\{e\}$ -ساختار توسط  $\{e\}$  که در شکل ۶۴ نشان داده شده است، با تراز کردن اولین محورهای چارچوب در امتداد یال‌های «افقی» وجوه مثلثی متناظر تعریف می‌شود. هنگام پهن کردن بیست و جهی به یک صفحه همانطور که در شکل ۶۵ نشان داده شده است، تمام چارچوب‌های این  $\{e\}$ -ساختار در این صفحه موازی هستند، که پیاده‌سازی کانولوشن‌های  $GM$  متناظر را بسیار ساده می‌کند. طبق معمول،  $\{e\}$ -ساختار یک اتصال بدیهی یکتا را مشخص می‌کند که ویژگی‌ها مطابق آن متنقل می‌شوند. این اتصال بدیهی در داخل وجوه، روی یال‌هایی که در شکل ۶۵ بریده نشده‌اند و روی یال بریده شده ارغوانی با اتصال لوی-چیویتا منطبق است. با این حال، انتقال آن از روی یال‌های بریده شده باقی‌مانده با انتقال لوی-چیویتا متفاوت است زیرا چارچوب‌های  $\{e\}$ -ساختار در آن‌جا به طور ناپیوسته به اندازه زاویه  $\frac{\pi}{6}$  می‌چرخد. از آنجا که  $\{e\}$ -ساختار توسط دوران‌ها در  $D_h$  حول محور قطبی حفظ می‌شود، کانولوشن‌های  $GM$  آن تقریباً  $(2)$   $\leq SO(2)$  همودایی هستند، یعنی مدل‌های بخش قبلی  $3.11$  را تقریب می‌زنند. با این حال،  $\{e\}$ -ساختار  $\square$  و تابراک این استنتاج شبکه  $\square$  روی یال‌های با نقص زاویه غیرصفر ناپیوسته است. علاوه بر این، چارچوب‌های مرجع دقیقاً به سمت قطب شمال اشاره نمی‌کنند، همانطور که برای  $\{e\}$ -ساختار کروی از بخش  $3.11$  و شکل  $5.6$  صادق است.

$\square$  پیشنهاد می‌کنند که دو مشکل اخیر را کار کردن با  $\{e\}$ -ساختار در شکل ۶۴ حل آورند. این ساختار به گونه‌ای تعریف شده است که چارچوب‌ها دقیقاً در امتداد تصویر محور قطبی روی وجوه، یعنی به سمت قطب شمال، اشاره می‌کنند. این  $\{e\}$ -ساختار کروی از  $\{e\}$ -ساختار کروی از شکل ۶۴<sup>۱۶۱</sup> متفاوت است. این ساختار به این معنا تقریب بهتری از  $\{e\}$ -ساختار کروی از شکل  $5.6$  دارد.  $\{e\}$ -ساختار دوباره یک اتصال بدیهی یکتا

$\square$  این در  $\{e\}$  به صورت تجربی برای  $SO(3)$   $\leq I$  نشان داده شده است. اینکه این نتیجه به  $3$   $\leq I_h$  تعمیم می‌یابد، روشن است زیرا گروه‌ها فقط در بازتاب‌ها متفاوت هستند، که کانولوشن‌های  $GM$  بیست و جهی را می‌توان نسبت به آنها دقیقاً همودا ساخت. این علاوه بر این برای  $2 \leq D_h$  و  $D_h \leq SO(2)$  نیز برقرار است، زیرا اینها زیرگروه‌هایی از  $3 \leq I_h$  هستند.

$\square$  برای دیدن این، تصور کنید که یال بریده شده در شکل ۶۴ را دوباره به هم بچسبانید: چارچوب‌های روی نیمه چپ و راست یال سپس با هم منطبق می‌شوند، که این مورد در شکل ۶۴ صادق نیست.

را القا می کند. انتقال آن با انتقال لوی-چیویتا روی یال‌ها منطبق است، با این حال، هنگام انتقال روی وجوه با آن متفاوت است زیرا بردارها را به آرامی همراه با چارچوب‌ها می چرخاند. مانند  $\{e\}$ -ساختار دیگر، این میدان چارچوب تحت دوران‌های سمتی در  $C$  ناوردا است و بنابراین CNN‌های کروی هموردای دوران سمتی را تغیری می‌زنند.

$\text{e-C}$ -ساختار در شکل ۶۴ ج توسط  $\{e\}$  با افودن چارچوب‌هایی که با مضرب‌هایی از  $\frac{\pi}{2}$  چرخانده شده‌اند به چارچوب‌های  $\{e\}$ -ساختار از شکل ۶۴ تعریف می‌شود. این ساختار بهوضوح پیوسته است زیرا زوایای بین مجموعه چارچوب‌های مرتعج در هر نقطه دقیقاً برابر با نقص‌های زاویه در یال‌های بریده شده است. این ساختار برخلاف دو  $\{e\}$ -ساختار قبلی با انتقال لوی-چیویتا سازگار است زیرا گروه ساختاری  $G$  با گروه هولونومی پیست‌وجهی منطبق است.  $\text{e-C}$ -ساختار علاوه بر این تحت عمل ایزومنتری‌های حافظ جهت پیست‌وجهی I حفظ می‌شود. بنابراین کانولوشن‌های  $GM$  روی این  $\text{e-C}$ -ساختار، CNN‌های کروی کاملاً هموردای دورانی  $(SO(3))$  را از بخش ۲.۱۱ تغیری می‌زنند.

**پیاده‌سازی‌ها:** برای پیاده‌سازی کانولوشن‌های  $GM$  روی  $G$ -ساختارهای متناظر،  $\{e\}$  و  $\{e\}$  یک شبکه منظم را روی وجوه پیست‌وجهیفرض می‌کنند؛ به شکل ۶۳ مراجعت کنید. این شبکه شش ضلعی منظم با تقسیم مکرر یال‌ها و جایگزینی هر مثلث با چهار مثلث کوچکتر ساخته می‌شود. در وضوح ۲۰۷ این کار منجر به یک شبکه با  $2^{2r+1} + 5 \cdot 2^{r+1} + 2$  رأس می‌شود. توجه داشته باشید که این شبکه بنا به ساختار، دقیقاً تحت ایزومنتری‌های پیست‌وجهی متقارن است، که منجر به یک هموردای دقیق Isom $GM$  کانولوشن‌های  $GM$  گسته‌سازی شده می‌شود.<sup>۱۲۲</sup>  $\{e\}$  پیشنهاد کردند که میدان‌های ویژگی پیست‌وجهی را نسبت به اطஸی از چارت‌ها که در شکل ۶۵ نشان داده شده است، نمایش دهند. این چارت‌ها این مزیت را دارند که شبکه‌های شش ضلعی روی وجوه پیست‌وجهی را به شبکه‌های پیکسلی مربوع معمول نگاشت می‌دهند. با این حال، توجه داشته باشید که چارچوب‌های راست‌هنچار روی وجوه پیست‌وجهی را این نمایش تغییر شکل می‌یابند، به طوری که نسبت به متريک اقيديسي کانوني، راست‌هنچار نیستند. کرنل‌های کانولوشن شش ضلعی روی پیست‌وجهی بر اين اساس تغیير شکل می‌يابند و می‌توانند بر حسب کرنل‌های مربعي که به گونه‌اي ماسك گذاري شده‌اند که دو گوشه آنها با صفر پر شده است، پیاده‌سازی شوند.

کانولوشن  $GM$  توسط  $\{e\}$  چارچوب‌هایی را فرض می‌کند که همگی موادی هستند و بنابراین می‌توانند در داخل چارت‌ها، جایی که تکیه گاه کرنل از مرزهای آن فراتر نمی‌رود، از طریق یک کانولوشن اقلیدسی متعارف پیاده‌سازی شوند. در نقاطی که به یک یال بین چارت‌های مختلف نزدیک هستند، کرنل ویژگی‌ها را از آن سوی برش ابانت می‌کند. همانطور که قبل از بخش ۴.۵ و شکل ۲۳ بحث و به تصویر کشیده شد، این کار به راحتی از طریق یک عملیات پدینگ انتقال پیاده‌سازی می‌شود که یک حاشیه از ویژگی‌های منتقل شده موادی را در اطراف آرایه پیکسل‌های مربوع قبل از اجرای عملیات کانولوشن، پد می‌کند. برای انتقال بدیهی که به طور ضمنی توسط  $\{e\}$  فرض شده است، این عملیات پدینگ فقط یک ردیف از ویژگی‌ها را در هر یال بدون تبدیل آنها کپی می‌کند. از آنجا که نویسنده‌گان گروه ساختاری بدیهی  $\{e\} = G$  را فرض می‌کنند، کرنل‌های شش ضلعی نامحدود باقی می‌مانند.

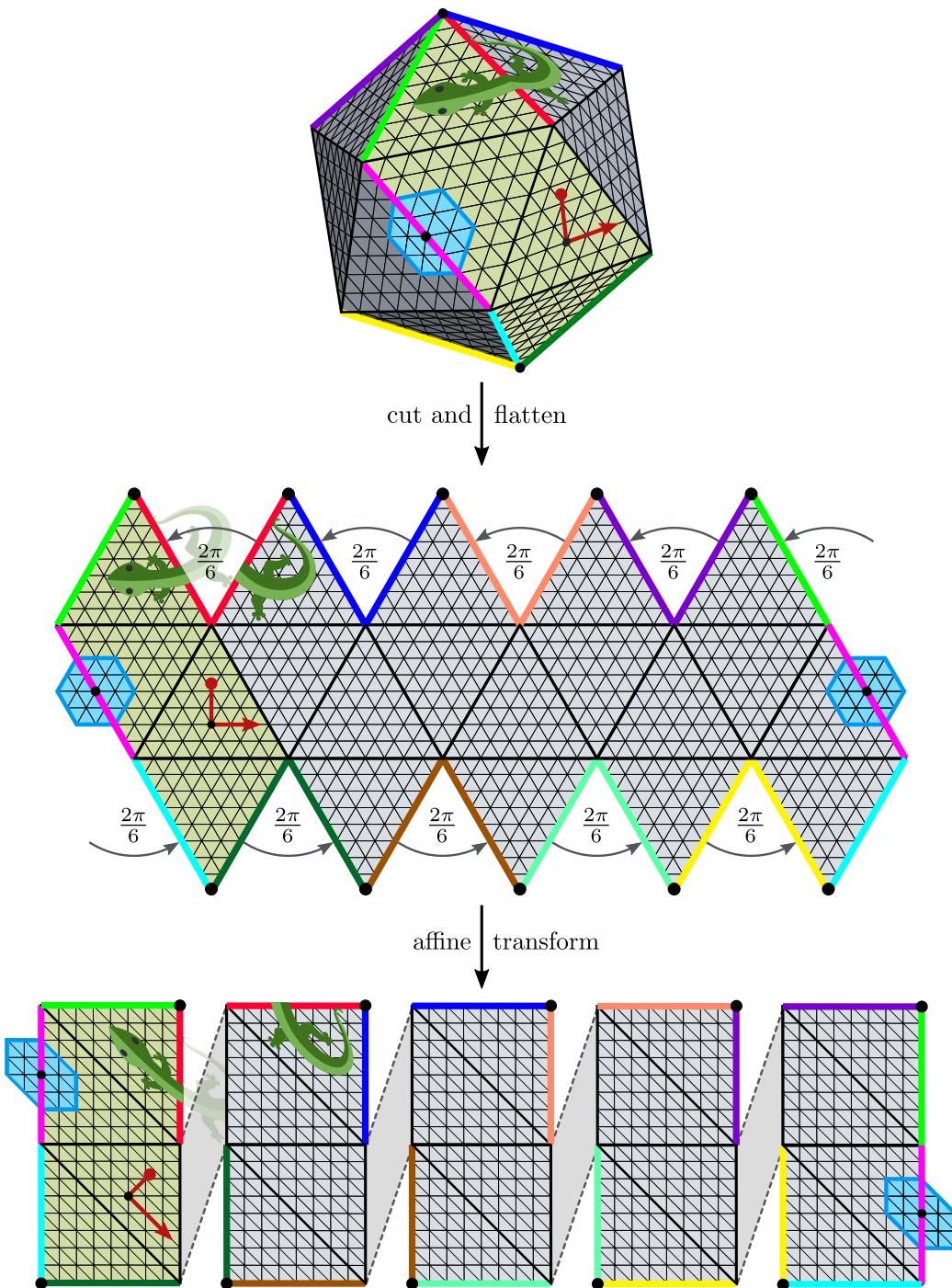
**پیاده‌سازی  $\{e\}$**  عمده‌تاً مشابه است، با این حال، تفاوت حیاتی آن در این است که از انتقال دهنده‌های لوی-چیویتا و کرنل‌های  $\{e\}$ -راهبری پذیر استفاده می‌کند. به جای پدینگ مستقیم ردیف‌های پیکسل از روی یال‌ها، انتقال لوی-چیویتا نیازمند این است که ویژگی‌ها یا با  $g = e$  برای تمام یال‌های داخلی و یال ارغوانی، یا با زاویه‌ای برای  $\frac{\pi}{2} \pm$  از روی تمام یال‌های با نقص زاویه  $\frac{\pi}{2}$  راهبری شوند، که علامت آن به جهت انتقال بستگی دارد.<sup>۱۲۳</sup>  $\{e\}$  نمایش منظم  $\{e\}$  را به عنوان نوع میدان فرض می‌کند و کرنل‌های کانولوشن را برای برآورده کردن محدودیت راهبری پذیر مربوطه محدود می‌کنند. پس از پدینگ انتقال، کانولوشن  $GM$  آنها به عنوان یک کانولوشن اقلیدسی متعارف با این کرنل‌های راهبری پذیر پیاده‌سازی می‌شود. توجه داشته باشید که این کانولوشن  $GM$  در داخل وجوه، یعنی به جز پدینگ انتقال، مشابه  $\text{HexaConv}$  توسط  $\{e\}$  است.

از آنجا که کانولوشن  $GM$  توسط  $\{e\}$  یک گروه ساختاری بدیهی  $\{e\} = G$  را فرض می‌کند، پدینگ انتقال دوباره به عنوان یک کپی بدیهی از پیکسل‌ها بدون راهبری پیاده‌سازی می‌شود و کرنل‌ها دوباره نامحدود باقی می‌مانند. با این حال، از آنجا که چارچوب‌های  $\{e\}$ -ساختار به سمت قطب شمال تراز شده‌اند، آنها دیگر در نمایش پیکسل مربوع مستطیلی موادی نیستند، که از یک پیاده‌سازی فوری بر حسب کانولوشن‌های متعارف جلوگیری می‌کند. در عوض، کرنل‌ها باید در هر نقطه از شبکه در یک دوران متفاوت اعمال شوند. از آنجا که کرنل شش ضلعی را می‌توان با  $\frac{\pi}{2}$  بدون استفاده از درون‌یابی چرخاند، و از آنجا که ترازها به سمت قطب شمال جدا کثر با این زاویه با یکدیگر تفاوت دارند، نویسنده‌گان تغیر کارآمد زیر را برای این عملیات پیشنهاد می‌کنند: آنها روی هر وجه دو بار کانولو می‌کنند، یک بار با کرنل اصلی و یک بار با نسخه دوران یافته آن با  $\frac{\pi}{2}$ . سپس دو میدان پاسخ به صورت خطی باهم ترکیب می‌شوند، با وزن‌های درون‌یابی از پیش محاسبه شده که به زوایای چارچوب‌های مرتعج تراز-شده-به-شمال نسبت به دو تراز کرنل (یعنی نسبت به شبکه پیکسلی) سنتگی دارد. بنابراین این پیاده‌سازی تقریباً دو برابر پرهزینه‌تر از پیاده‌سازی‌های  $\{e\}$  است.

یک پیاده‌سازی جایگزین از کانولوشن‌های کروی روی پیست‌وجهی توسط  $\{e\}$  پیشنهاد شده است. نویسنده‌گان سینگنال کروی را روزی صفحات گسترده شده توسط ۲۰ وجه (که به عنوان تصاویر مماس شناخته می‌شوند) تصویر می‌کنند و متعاقباً یک CNN متعارف را روی هر یک از این تصاویر اجرا می‌کنند. ما این شبکه را در لیست خود نیاوردهیم زیرا این شبکه این نمایش‌ها را به طور مستقل از یکدیگر پردازش می‌کند، یعنی ویژگی‌ها را بین آنها منتقل یا پدنمی کند و بنابراین دقیقاً به عنوان کانولوشن  $GM$  توصیف نمی‌شود.

همانطور که قبل ذکر شد، تایج تجربی  $\{e\}$  نشان می‌دهد که هندسه کروی را برای کاربردهای یادگیری عمیق به خوبی تغیری می‌زنند. به طور خاص، نویسنده‌گان CNN کروی خود را روی یک شبکه ایکوسفر با CNN پیست‌وجهی تکه‌ای-تخت توسط  $\{e\}$  مقایسه می‌کنند و در می‌یابند که هر دو علی‌رغم هندسه تغییر شکل یافته دومی، عملکرد مشابهی دارند. مشخص شده است که هموردای CNN‌های پیست‌وجهی تحت

<sup>۱۲۲</sup> شبکه ایکوسفر، که توسط برخی از مدل‌های بخش‌های ۲.۱۱ و ۳.۱۱ استفاده می‌شود، با تصویر کردن گره‌های این شبکه به فاصله شعاعی واحد از مبدأ، یعنی  $S^2$  تعریف می‌شود. مدل‌های این بخش این تصویر را فرض نمی‌کنند بلکه مستقیماً روی هندسه پیست‌وجهی تکه‌ای-تخت کانولو می‌کنند.



شکل ۶۵: پیاده‌سازی‌های [؟ ؟ ؟] میدان‌های رنگی را نسبت به یک اطلس که بیست و جهی را با پنج چارت می‌پوشاند، نمایش می‌دهند. برای ساخت این چارت‌ها، بیست و جهی در امتداد یال‌های رنگی بریده شده و پهن می‌شود. سپس پنج ناحیه، که هر کدام از چهار مثلث تشکیل شده‌اند، به همدامنه‌های چارت مستطیلی برش داده می‌شوند. (□□□□□□□□) این عملیات شبکه شش ضلعی را به یک شبکه از پیکسل‌های مربعی نگاشت می‌دهد، به طوری که میدان‌های رنگی بیست و جهی را می‌توان با مجموعه‌ای از پنج آرایه مستطیلی کدگذاری کرد. توجه داشته باشید که چارچوب‌های مرجع و کرنل‌ها بر این اساس در همدامنه‌های چارت تغییر شکل می‌یابند. انتقال لوی-چوپیتا از روی تمام یال‌های رنگی به جز یال ارجاعی، یک دوران به اندازه  $\frac{2\pi}{5} \pm \frac{\pi}{5}$  را به همراه دارد، که علامت آن به جهت انتقال بستگی دارد. این کار با پدینگ انتقال ردیف‌هایی از پیکسل‌ها در امتداد یال‌های بریده شده، همانطور که قبلًا در شکل ۲۳ توصیف شد، پیاده‌سازی می‌شود.

(مارمولک‌ها با مجوز تویتر تحت لایسنس بین‌المللی Creative Commons Attribution 4.0 license اقتباس شده‌اند.)

دوران‌های پیوسته در  $(3)$  به طور قابل توجهی نقض می‌شود، با این حال، به نظر می‌رسد این فقط یک اثر بیش‌برازش است زیرا به راحتی و بدون از دست دادن عملکرد مدل با استفاده از افزایش داده  $(3)$   $\text{SO}$  خنثی می‌شود.

همیشه، می‌خواهیم اشاره کنیم که  $\text{CNN}$ ‌های  $C$ -هموردا توسط  $I$  و  $D$  را می‌توان به راحتی با در نظر گرفتن یک  $\mathcal{R}$ -ساختار و در نتیجه کرnel‌های  $R$ -راهبری‌پذیر بازتابی،  $D$ -هموردا ساخت. به طور مشابه،  $I$   $\text{CNN}$ -هموردا توسط  $I$  را می‌توان با ساختن کرnel‌های  $D$ -راهبری‌پذیر به جای  $C$ -راهبری‌پذیر، تحت گروه ایزومنتری کامل  $I_h$  بیست‌وجهی هموردا ساخت.

## آ ارتباط با فرمالیسم چارت مختصاتی در هندسه دیفرانسیل

این پوست به منظور برقراری ارتباط بین فرمالیسم کلاف، که زیربنای نظریه CNN‌های مستقل از مختصات است، و فرمالیسم چارت مختصاتی، که احتماً در اولین مطالعه هندسه دیفرانسیل با آن مواجه می‌شونیم، عمل می‌کند. تفاوت اصلی بین این دو این است که فرمالیسم کلاف به نقاط  $p$  از فضای  $M$  به رویی مستقل از مختصات اشاره می‌کند. در صورت نیاز، مختصات مستقیماً از طریق تریویالیزاسیون‌های محلی کلاف به تارها (به عنوان مثال فضاهای مماس) اختصاص داده می‌شوند. در مقابل، فرمالیسم چارت بر چارت‌های مختصاتی (دیفئومورفیسم‌ها)

$$x : M \supseteq U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^d, \quad (511)$$

تکه دارد، که مختصات را به تکه‌های محلی  $U$  از منیفلد اختصاص می‌دهند. تریویالیزاسیون‌های محلی کلاف و تبدیلات پیمانه بین آنها به عنوان دیفرانسیل‌های چارت‌ها و توابع گذار چارت‌القا می‌شوند. در این بخش ما ارتباط بین هر دو فرمالیسم را بررسی می‌کیم. یک نمای کلی از نتایج در جدول ۷ ارائه شده است.

۱۹۴	فضاهای مماس، فضاهای هم‌مماس و پایه‌های دوگان . . . . .	۱.۰
۱۹۴	فضاهای مماس بر حسب مشتقان جهتی . . . . .	۱.۱
۱۹۴	فضاهای هم‌مماس . . . . .	۲.۱
۱۹۴	پایه‌های دوگان . . . . .	۳.۱
۱۹۵	دیفرانسیل‌ها، گرادیان‌ها و ژاکوبین‌ها . . . . .	۲.۰
۱۹۷	پایه‌های مختصاتی القا شده توسط چارت . . . . .	۳.۰
۱۹۷	چارت‌ها و پایه‌های مختصاتی القا شده . . . . .	۳.۳
۱۹۸	نگاشت‌های گذار چارت و تبدیلات پیمانه القا شده . . . . .	۲.۳
۲۰۱	پایه‌های مختصاتی به عنوان تریویالیزاسیون‌های محلی کلاف . . . . .	۴.۰
۲۰۱	تناظرات با تریویالیزاسیون‌های نقطه‌ای $T_p M$ . . . . .	۱.۶
۲۰۲	تریویالیزاسیون‌های محلی القا شده توسط چارت از $(U, \pi_{TM}^{-1}(U))$ . . . . .	۲.۴
۲۰۳	$G$ -ساختارها و میدان‌های ویل‌باین . . . . .	۵.۰

ما در بخش آ.۱ با معرفی مختصر فضاهای مماس  $T_p M$  به عنوان فضاهایی از عملگرهای مشتق جهتی شروع می‌کنیم، که از آنها فضاهای هم‌مماس  $T_p^* M$  به عنوان فضاهای دوگان نتیجه می‌شوند. بخش آ.۲ دیفرانسیل‌های عمومی و گرادیان‌ها و ژاکوبین‌های خاص ترا تعریف می‌کند. بر اساس این مقدمات، ما در بخش آ.۳ پایه‌های مختصاتی (پایه‌های هولونومیک)  $\left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d} \right)_p \in F_p M$  را تعریف  $T_p M$  را کشیده شده است، تولید می‌شوند. پایه‌های خواهیم کرد، که توسط عملگرهای مشتق جهتی در امتداد شبکه مختصاتی که توسط چارت از  $V$  به  $U$  کشیده شده است، تولید می‌شوند. پایه‌های دوگان  $\left[ \hat{dx}_\mu \right]_p, \dots, \hat{dx}_\mu \left|_p \right.$  از فضاهای هم‌مماس  $T_p^* M$  با گرادیان‌های مؤلفه‌های چارت  $x_\mu$  داده می‌شوند. نگاشت‌های گذار بین چارت‌ها، تبدیلات پیمانه کوواریانت و کانتراواریانت را بین پایه‌های متناظر القا می‌کنند، که در بخش آ.۲.۳ استخراج می‌شوند. بخش آ.۴ پایه‌های مختصاتی را به عنوان تریویالیزاسیون‌های محلی کلاف تفسیر می‌کند و ارتباط بین فرمالیسم کلاف و فرمالیسم چارت را دقیق می‌کند. پایه‌ها و تریویالیزاسیون‌های القا شده از چارت‌های مختصاتی تمام تریویالیزاسیون‌های ممکن را پوشش نمی‌دهند، به طوری که بین پایه‌های مختصاتی و پایه‌های غیرمختصاتی تمایز قائل می‌شوند (فرمالیسم کلاف به پایه‌های غیرمختصاتی عمومی اجازه می‌دهد). در ادبیات فیزیک، پایه‌های غیرمختصاتی معمولاً از طریق میدان‌های ویل‌باین معرفی می‌شوند. بخش آ.۵ استدلال می‌کند که این میدان‌های ویل‌باین فقط تبدیلات پیمانه با مقادیر  $GL(d)$  از چارچوب‌های عمومی در  $FM$  به  $GM$  هستند، که در داخل آن می‌توان متعاقباً تبدیلات پیمانه با مقادیر  $G$  را که  $G$ -ساختار را حفظ می‌کنند، اعمال کرد.

مقدمه‌های جامعی بر فرمالیسم چارت در [؟ ？ ？] ارائه شده است. یک شرح دقیق‌تر در [؟ ？ ？] یافت می‌شود.

ما می خواهیم به خوانده یادآوری کنیم که ما از اندیس‌های کوواریانس و کانتراواریانس استفاده نمی کنیم. اندیس‌ها همیشه به صورت زیرنویس ظاهر خواهند شد، با حروف یونانی  $\nu, \mu, \dots$  که اندیس‌های مرتبه با چارت مختصاتی را نشان می دهند و حروف لاتین  $i, j, \dots$  که اندیس‌های پیمانه‌های عمومی را نشان می دهند. بالا نویس‌های  $A, B, \dots$  برای برچسب گذاری چارت‌ها یا پیمانه‌های مختلف حفظ می شوند.

## آ.۱ فضاهای مماس، فضاهای هم‌مماس و پایه‌های دوگان

### آ.۱.۱ فضاهای مماس بر حسب مشتقات جهتی

یک تعریف رایج از فضاهای مماس  $T_p M$  به عنوان فضاهای برداری از عملگرهای مشتق جهتی در  $p \in M$  است، که ما در اینجا به طور خلاصه آن را تشویق می کنیم. فرض کنید  $f \in C^\infty(M)$ ، یعنی  $M \rightarrow \mathbb{R}$  :  $f$  یک نگاشت هموار باشد، و برای یک بازه  $I \subseteq \mathbb{R}$  حاوی  $t = 0$  فرض کنید  $I \rightarrow M$  :  $\gamma$  یک منحنی هموار باشد که در زمان  $t = 0$  عبور می کند، یعنی  $\gamma(0) = p$  را برآورده می کند. سپس عملگر مشتق جهتی در  $p$  در امتداد  $\gamma$  را به عنوان عملگر خطی

$$v_\gamma : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto (f \circ \gamma)'(0). \quad (512)$$

تعریف می کنیم. از آنجا که مشتق در امتداد جهت  $\gamma$  گرفته می شود، یعنی مماس بر آن،  $v_\gamma$  بردار مماس نامیده می شود. می توان آن را به عنوان سرعت یک ذره با مسیر  $\gamma$  در زمان  $t = 0$  در نظر گرفت. برای ارجاع بعدی، ما نمودار جابجایی ساده زیر را ارائه می دهیم، که پول بک  $\gamma$  از  $M$  به  $\mathbb{R}$  را از طریق  $\gamma$  نشان می دهد، که مشتق جهتی بر حسب آن تعریف می شود:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \supset & I & \xrightarrow{\gamma} & M \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & f \circ \gamma \end{array} \quad (513)$$

می توان نشان داد که فضای تمام بردارهای مماس بر منحنی‌ها در  $p$  یک فضای برداری  $d$ -بعدی را تشکیل می دهد

$$T_p M := \{v_\gamma \mid v_\gamma \text{ یک منحنی هموار گذرنده از } \gamma\}, \quad (514)$$

که به عنوان فضای مماس در  $p$  شناخته می شود. برای جزئیات بیشتر در مورد تعریف بردارهای مماس و ساختار فضای برداری فضاهای مماس، به [۹] مراجعه کنید.

با تعریف فضاهای مماس به عنوان فضاهای برداری، ممکن است انتخاب کنیم که با بردارهای مماس به عنوان بردارهای هندسی انتزاعی رفتار کنیم و در نتیجه تعریف آنها را از طریق مشتقات جهتی (یا هر تعریف جایگزین دیگری) «فراموش» کنیم. ما این کار را در اکثر جاها انجام می دهیم، اما در بخش‌های بعدی برای استخراج دیفرانسیل‌های نگاشت‌های هموار و پایه‌های مختصاتی به تعریف از طریق مشتقات جهتی باز می گردیم.

### آ.۲.۱ فضاهای هم‌مماس

به عنوان فضاهای برداری حقیقی، فضاهای مماس  $T_p M$  دارای فضاهای دوگان متناظر  $T_p^* M := (T_p M)^*$  هستند، یعنی فضاهای هم‌مماس. بنا به تعریف فضاهای دوگان، آنها از تابعی‌های خطی

$$\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (515)$$

تشکیل شده‌اند، که در هندسه دیفرانسیل معمولاً هم بردارها یا ۱-فرم‌ها نامیده می شوند. به همراه جمع (هم) برداری  $(\omega + \tilde{\omega})(v) = \omega(v) + \tilde{\omega}(v)$  و ضرب اسکالر  $(\lambda \cdot \omega)(v) = \lambda \cdot (\omega(v))$ ، فضاهای هم‌مماس خود فضاهای برداری هستند.

به عنوان دوگان‌های متناهی-بعدی از یکدیگر،  $T_p M$  و  $T_p^* M$  ایزومورف هستند و بنابراین به طور خاص دارای بعد یکسان  $= \dim(M)$  هستند. با این حال، ایزومورفیسم بین این دو کانونی نیست. یک ایزومورفیسم فضای برداری را می توان از طریق یک فرم دوخطی (غیرتلهنگ)  $\eta_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  روی  $T_p M$  مثلاً یک متريک ريماني، از طریق

$$\widehat{\eta}_p : T_p M \rightarrow T_p^* M, \quad v \mapsto \eta_p(v, \cdot), \quad (516)$$

مشخص کرد، که تابعی خطی  $\widehat{\eta}_p(v) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $w \mapsto \eta_p(v, w)$  را تعیین می کند.

### آ.۳.۱ پایه‌های دوگان

هر پایه  $[e_i]_{i=1}^d$  از  $T_p M$  به طور کانونی یک پایه دوگان  $[e_i^*]_{i=1}^d$  از  $T_p^* M$  را القا می کند، که برای برآوردن روابط  $e_i^* e_j = \delta_{ij}$  برای هر  $i, j \in \{1, \dots, d\}$ .

تعريف شده است. فرض کنید  $[e_i^B]_{i=1}^d = [e_i^A]_{i=1}^d \triangleleft (g^{BA})^{-1}$  و  $[e_i^A]_{i=1}^d \triangleleft (g^{BA})_{lj}^{-1} \in \text{GL}(d)$  در معادله (۱۰) به هم مرتبط هستند، یعنی برای  $j = 1, \dots, d$

$$e_j^B = \sum_l e_l^A (g^{BA})_{lj}^{-1} \quad (518)$$

پایه دوگان  $[e_i^{A,*}]_{i=1}^d$  بر این اساس تحت آن عمل چیزی که را به  $e_i^{A,*}$  می‌فرستد، تبدیل می‌شود. این با جفت کردن تأیید می‌شود:

$$e_i^{B,*} e_j^B = \sum_{k,l} g_{ik}^{BA} e_k^{A,*} e_l^A (g^{BA})_{lj}^{-1} = \sum_{k,l} g_{ik}^{BA} \delta_{kl} (g^{BA})_{lj}^{-1} = \sum_k g_{ik}^{BA} (g^{BA})_{kj}^{-1} = \delta_{ij}. \quad (519)$$

رفتار تبدیل وارون پایه‌ها و پایه‌های دوگان معمولاً به عنوان تبدیل کوواریانت و کانتراواریانت نامیده می‌شود. به شباهت تبدیل پایه دوگان با تبدیلات کانتراواریانت  $v^B = g^{BA} v^A$  پیمانه‌ها در معادله (۷) و مؤلفه‌های برداری در (۹) توجه کنید. در واقع، پیمانه‌ها فقط انتخاب‌هایی از یک پایه هم‌ماس هستند که در ادامه بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد.

## ۲.۰ دیفرانسیل‌ها، گرادیان‌ها و ژاکوین‌ها

در حساب برداری، توابع  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ :  $\phi$  را در نظر می‌گیریم، که می‌توان آنها را در هر نقطه  $p \in \mathbb{R}^m$  به صورت خطی با ماتریس ژاکوبین آنها (یا مشتق کل یا دیفرانسیل)  $d\phi_p = (\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}|_p)_{ij}$  تقریب زد. در اینجا ما تعیین این مفهوم را به دیفرانسیل‌های توابع هموار بین منیفلدهای هموار معرفی می‌کیم.

**دیفرانسیل‌ها به طور کلی:** فرض کنید  $M \rightarrow N$ :  $\phi$  یک نگاشت هموار بین منیفلدهای هموار  $M$  و  $N$  باشد. در هر نقطه  $p \in M$  چنین نگاشتی یک دیفرانسیل (یا پوش فوروارد) دارد:

$$d\phi_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N, \quad v \mapsto d\phi_p(v) \quad (520)$$

را القا می‌کند که بردارهای مماس را در  $p$  به صورت خطی به بردارهای مماس در  $\phi(p)$  نگاشت می‌دهد. برای تعریف فضاهای مماس بر حسب مشتقات جهی در معادله (۵۱۲)، پوش فوروارد  $v \in T_p M$  در امتداد  $\phi$  به صراحت با

$$d\phi_p(v) : C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto (d\phi_p(v))(f) := v(f \circ \phi), \quad (521)$$

داده می‌شود، یعنی با اعمال  $v$  بر روی پول بک  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  از طریق  $\phi$ . این تعاریف با دو نمودار جایجاوی زیر روش می‌شوند:

از این تعریف بالا فاصله نتیجه می‌شود که دیفرانسیل ترکیب نگاشتهای هموار برابر با ترکیب دیفرانسیل‌های منفرد آنها است، که همان قاعده زنجیره‌ای است:

$$d(\phi \circ \psi)_p = d\phi_{\psi(p)} \circ d\psi_p \quad (522)$$

اگر  $\phi$  وارون پذیر باشد (یک دیفرانسیل)، علاوه بر این نتیجه می شود که دیفرانسیل آن یک ایزومورفیسم فضای برداری است که وارون آن برابر با دیفرانسیل<sup>۱</sup>  $\phi^{-1}$  است، یعنی

$$(d\phi_p)^{-1} = d(\phi^{-1})_{\phi(p)}. \quad (525)$$

در مجموع، دیفرانسیل های  $d\phi_p$  در نقاط منفرد  $p \in M$  یک مورفیسم کلاف برداری (یک نگاشت کلاف خطی-تاری، به بخش های ۱.۶ مراجعه کنید) را بین کلاف های مماس  $M$  و  $N$  القا می کنند:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{d\phi} & TN \\ \pi_{TM} \downarrow & & \downarrow \pi_{TN} \\ M & \xrightarrow{\phi} & N \end{array} \quad (526)$$

توجه داشته باشید که ما در این پیوست از یک نماد گذاری متفاوت، یعنی  $d\phi$  استفاده می کنیم، نسبت به مقاله اصلی، که در آن به جای آن  $\phi_{*,TM}$  می نویسیم. ما اولی را برای ارتباط با نماد گذاری معمول  $dx_\mu$  برای پایه های القا شده توسط چارت از فضاهای هم مماس انتخاب کردیم. دومی در متن اصلی برای تأکید بر شباهت با نگاشت های کلاف  $\phi$ ،  $\phi_{*,GM}$ ،  $FM$ ،  $GM$  و  $A$  القا می شوند، استفاده می شود.

**گرادیان ها:** در مورد توابع هموار با مقادیر حقیقی  $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ ، یعنی  $d\phi_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}$ ، دیفرانسیل  $v$  را در  $T_p M$  به بردارهای  $d\phi(v) : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $f \mapsto v(f \circ \phi)$  پوش فروارد می کند. با استفاده از ایزومورفیسم کانونی  $\iota_{\mathbb{R}} : T_{\phi(p)} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ ،  $v \mapsto v(\text{id}_{\mathbb{R}})$

$$\iota_{\mathbb{R}} : T_{\phi(p)} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}, \quad v \mapsto v(\text{id}_{\mathbb{R}}) \quad (527)$$

عملگر گرادیان

$$\hat{d}_p : C^\infty(M) \rightarrow T_p^* M, \quad \phi \mapsto \hat{d}\phi_p := \iota_{\mathbb{R}} \circ d\phi_p = (d\phi_p(\cdot))(\text{id}_{\mathbb{R}}), \quad (528)$$

را تعریف می کنیم، که توابع هموار  $\phi$  را به هم بردارها  $\hat{d}\phi$ <sup>۱۴۳</sup> می فرستد، که به نوبه خود بر روی بردارها به صورت

$$\hat{d}\phi_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \hat{d}\phi_p(v) = (d\phi_p(v))(\text{id}_{\mathbb{R}}) = v(\text{id}_{\mathbb{R}} \circ \phi) = v(\phi). \quad (529)$$

عمل می کنند. با یک سوء استفاده از نماد گذاری معمولاً «کلاه» روی  $\hat{d}$  حذف می شود و بلافاصله  $\hat{d}\phi_p(v) = v(\phi)$  تعریف می شود. در حالی که این نماد گذاری بسیار رایج است، ما در ادامه به «کلاه» پایین دیگر مانیم تا نیاز به ایزومورفیسم کانونی  $\iota_{\mathbb{R}}$  را صریح کنیم.

در بخش ۱.۳ در ادامه خواهیم دید که پایه های  $T_p^* M$  که دو گان پایه های مختصاتی  $T_p M$  هستند، با  $1-f$  های گرادیان  $\hat{d}x_\mu|_p$  داده می شوند، که در آن  $x_\mu$  مؤلفه های چارت مختصاتی هستند.

**ژاکوین ها:** به طور خاص برای توابع  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ،  $\phi$  بین (زیرمجموعه هایی از) فضاهای اقلیدسی، دیفرانسیل  $d\phi_{x_*}$  به راحتی دیده می شود که با ژاکوین  $T_{\phi(x_*)} \mathbb{R}^m \rightarrow T_{x_*} \mathbb{R}^n$  پس از یکی گرفتن کانونی  $T_p \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$  در هر دو دامنه و هم دامنه، منطبق است. ایزومورفیسم کانونی در اینجا با

$$\iota_{\mathbb{R}^k} : v \mapsto (v(\text{proj}_1), \dots, v(\text{proj}_k)), \quad (530)$$

داده می شود، که  $\mathbb{R}$  را از معادله (۵۲۷) به بعد چند گانه تعیین می دهد. از آنجا که محاسبه عمده اما مشابه مورد گرادیان ها است، ما آن را در اینجا تکرار نخواهیم کرد بلکه ایده را از طریق یک نمودار جابجایی به تصویر می کشیم:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\iota_{\mathbb{R}^n}} & T_{x_*} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{d\phi|_{x_*}} & T_{\phi(x_*)} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\iota_{\mathbb{R}^m}} & \mathbb{R}^m \\ & & \underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{\partial \phi}{\partial x}|_{x_*}} & & & & \uparrow \\ & & & & & & \end{array} \quad (531)$$

<sup>۱۴۳</sup> میدان گرادیان اغلب به عنوان یک میدان برداری  $(\hat{df})^{\sharp}$  تعریف می شود که از میدان هم برداری  $\hat{df}$  از طریق ایزومورفیسم موسیقیابی:  $\sharp$  متناظر با متریک ( $\text{balab}$  بردن اندیس ها) محاسبه می شود.

اگر  $\phi$  وارون پذیر باشد، همانی در معادله (۵۲۵) به

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x_+}^{-1} = \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial x} \Big|_{\phi(x_+)}, \quad (532)$$

تبديل می شود، که همان فضیه تابع وارون است. ما بعداً از این همانی برای وارون کردن تبدیلات پیمانه بین پایه های مختصاتی مختلف که به عنوان ژاکوین های نگاشت های گذار چارت القا می شوند، استفاده خواهیم کرد.

### آ.۳ پایه های مختصاتی الفا شده توسط چارت

در این بخش ما چارت های مختصاتی به شکل

$$x : U \rightarrow V, \quad (533)$$

را در نظر می گیریم، که به صورت دیفئومorfیک مختصات  $p \in U \subseteq \mathbb{R}^d$  را به هر نقطه  $x(p) \in V \subseteq \mathbb{R}^d$  اختصاص می دهدن. هر چنین چارتی یک انتخاب طبیعی از پایه ها را برای فضاهای مماس  $T_p M$  روی  $U$  القا می کند، که به عنوان پایه های مختصاتی شناخته می شوند. فضاهای دو گان  $T_p^* M$  از فضاهای مماس روی  $U$  بر این اساس با پایه های مختصاتی دو گان از هم بردارهای مماس مجهر می شوند. نگاشت های گذار بین مختصات دو چارت، تبدیلات پیمانه ای را القا می کنند که بین پایه های مختصاتی متاظر ترجمه می کنند. این تبدیلات پیمانه با ژاکوین های نگاشت های گذار داده می شوند.

#### آ.۳.۱ چارت ها و پایه های مختصاتی الفا شده

**پایه های مختصاتی برای  $T_p M$ :** برای تشویق تعریف پایه های مختصاتی، مشاهده کنید که  $x$  یک «شبکه مختصاتی» را روی  $U$  با پول بک کردن شبکه مختصاتی کانونی روی  $V$  به منفذ القا می کند. سپس پایه مختصاتی در یک نقطه خاص  $U \ni p$  را می توان به عنوان مشکل از آن  $d$  عملگر مشتق جهتی که در امتداد خطوط شبکه مختصاتی  $x$  روی  $U$  می روند، در نظر گرفت.

برای دقیق تر کردن این موضوع، ابتدا منحنی های

$$\tilde{\gamma}_\mu : I \rightarrow V, \quad t \mapsto x(p) + t\epsilon_\mu \quad \mu = 1, \dots, d \quad (534)$$

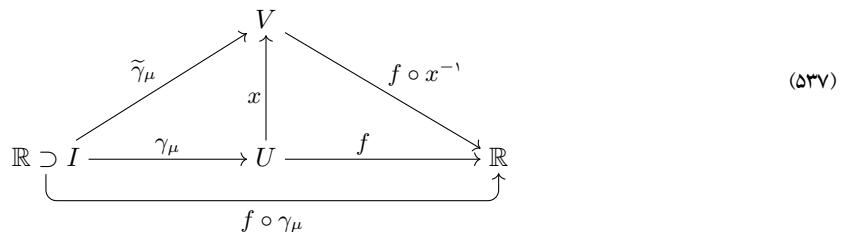
را در نظر بگیرید که در زمان  $t = 0$  با سرعت واحد در جهت  $\mu$  از  $x(p)$  عبور می کنند. نگاشت آن  $\tilde{\gamma}_\mu$  از طریق چارت به  $U$  منحنی های ذکر شده در بالا را تعریف می کند

$$\gamma_\mu : I \rightarrow U, \quad t \mapsto x^{-1}(x(p) + t\epsilon_\mu) = x^{-1}(x(p)) + t\epsilon_\mu \quad (535)$$

که در زمان  $t = 0$  در امتداد شبکه مختصاتی  $x$  از  $p$  عبور می کنند. پایه مختصاتی  $d$ -بعدی  $T_p M$  القا شده توسط  $x$  سپس با عملگرهای مشتق جهتی در معادله (۵۱۲) در امتداد مسیرهای  $\gamma_\mu$  داده می شود. با نشان دادن بردار پایه  $\mu$ -ام با سوء استفاده معمول از نماد گذاری به صورت  $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$  بنابراین تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Big|_p : f &\mapsto \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Big|_p f := (f \circ \gamma_\mu)'(0) \\ &= (f \circ x^{-1} \circ \tilde{\gamma}_\mu)'(0) \\ &= (f \circ x^{-1}(x(p) + t\epsilon_\mu))'(0) \\ &= [\partial_\mu(f \circ x^{-1})](x(p)) \end{aligned} \quad (536)$$

در مرحله آخر ما مشتق جزئی  $\mu$ -ام معمول از پول بک  $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$  را شناسایی کردیم، که نماد گذاری  $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$  را توجیه می کند. این تعاریف در نمودار جابجایی زیر که نمودار در معادله (۵۱۳) را گسترش می دهد، به تصویر کشیده شده اند:



**پایه‌های مختصاتی دوگان برای  $T_p^*M$ :** همانطور که در بخش آ.۱ گفته شد، هر پایه از  $T_p M$  یک پایه دوگان از  $T_p^*M$  را القا می‌کند. به طور خاص برای پایه‌های مختصاتی، که توسط بردارهای  $\frac{\partial}{\partial x_\mu}|_p$  تولید می‌شوند، عناصر پایه دوگان با گرادیان‌های  $\hat{dx}_\mu|_p = \hat{d}(x_\mu)|_p \in T_p^*M$  از مؤلفه‌های چارت  $\mathbb{R} : U \rightarrow \mathbb{R}$  داده می‌شوند. اینکه این گرادیان‌ها در واقع پایه دوگان را تشکیل می‌دهند، به راحتی با عمل بر روی بردارهای پایه همانطور که در معادله (۵۲۹) تعریف شده است، دیده می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{dx}_\mu|_p \frac{\partial}{\partial x_\nu}|_p &= \frac{\partial}{\partial x_\nu}|_p x_\mu \\ &= [\partial_\nu(x_\mu \circ x^{-1})](x(p)) \\ &= [\partial_\nu(\text{proj}_\mu)](x(p)) \\ &= \delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (538)$$

**دیفرانسیل‌های چارت به عنوان تریوپالیزاسیون محلی کانونی:** با توجه به اینکه چارت از  $M \subseteq \mathbb{R}^d$  به  $V \subseteq \mathbb{R}^d$  نگاشت می‌دهد، دیفرانسیل‌های آن در  $U \in p$  نگاشت‌هایی به شکل

$$dx_p : T_p M \rightarrow T_{x(p)} \mathbb{R}^d. \quad (539)$$

هستند. با استفاده مجدد از ایزو‌مورفیسم کانونی  $\mathbb{R}^d$  از  $T_{x(p)} \mathbb{R}^d$  به  $\mathbb{R}^d$  می‌گذرد از معادله (۵۳۰)، ما یک نگاشت

$$\begin{aligned} \hat{dx}_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad v \mapsto \hat{dx}_p(v) &:= \iota_{\mathbb{R}^d} \circ dx_p(v) \\ &= \left( (dx_p(v))(\text{proj}_1), \dots, (dx_p(v))(\text{proj}_d) \right)^\top \\ &= \left( v(\text{proj}_1 \circ x \circ x^{-1})(x(p)), \dots, v(\text{proj}_d \circ x \circ x^{-1})(x(p)) \right)^\top \\ &= \left( v(x_1(p)), \dots, v(x_d(p)) \right)^\top \\ &= \left( \hat{dx}_1|_p(v), \dots, \hat{dx}_d|_p(v) \right)^\top \end{aligned} \quad (540)$$

به دست می‌آوریم، پس از شناسایی گرادیان‌های مؤلفه چارت منفرد در مرحله آخر. توجه داشته باشید که عمل این دیفرانسیل چارت بر روی پایه مختصاتی  $\epsilon_\mu$  نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} \hat{dx}_p \frac{\partial}{\partial x_\mu}|_p &= \left( \hat{dx}_1|_p \frac{\partial}{\partial x_\mu}|_p, \dots, \hat{dx}_d|_p \frac{\partial}{\partial x_\mu}|_p \right)^\top \\ &= (\delta_{\mu 1}, \dots, \delta_{\mu d})^\top \\ &= \epsilon_\mu, \end{aligned} \quad (541)$$

یعنی بردار واحد  $\mu$ -ام  $\epsilon_\mu$  از  $\mathbb{R}^d$  این دلالت بر این دارد که  $\hat{dx}_p$  نقش یک پیمانه  $\psi_p$  را در  $p$  ایفا می‌کند. بنابراین می‌توان به همان اندازه با تعریف یک پایه هم‌مماس شروع کرد و

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}|_{x(p)} = \hat{dx}_p^{-1}(\epsilon_\mu), \quad (542)$$

را قرار داد، که آنالوگ معادله (۴) در فرم‌الیسم چارت است.

### آ.۲.۳. نگاشت‌های گذار چارت و تبدیلات پیمانه القا شده

چارت‌های مختلف پایه‌های مختصاتی مختلفی را القا می‌کنند. بنابراین گذار چارت‌ها تبدیلات پیمانه، یعنی تبدیلات پایه‌ها و ضرایب برداری را القا می‌کنند، که ما در این بخش آنها را استخراج می‌کنیم.

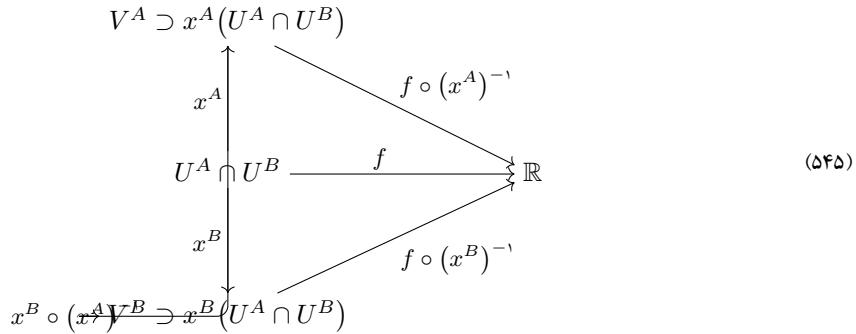
در ادامه ما دو چارت دلخواه و همپوشان  $U^A \rightarrow V^A$  و  $U^B \rightarrow V^B$  را در نظر می‌گیریم. مختصات مختلفی که آنها به همپوشانی اختصاص می‌دهند، سپس از طریق نگاشت‌های گذار چارت به هم مرتبط می‌شوند

$$x^B \circ (x^A)^{-1} : x^A(U^A \cap U^B) \rightarrow x^B(U^A \cap U^B). \quad (543)$$

**تبدیل پایه‌های مختصاتی مماس:** پایه‌های مختصاتی  $T_p M$  که توسط دو چارت الگوی شوند، طبق خط آخر معادله (۵۳۶) با عمل آنها بر روی  $f \in C^\infty(M)$  به صورت

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \Big|_p f = \left[ \partial_\mu \left( f \circ (x^A)^{-1} \right) \right] (x^A(p)) \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p f = \left[ \partial_\mu \left( f \circ (x^B)^{-1} \right) \right] (x^B(p)), \quad (544)$$

تعريف می‌شوند، که با نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:



از طریق نگاشتهای گذار چارت، پایه‌های مختصاتی مختلف با

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p f &= \left[ \partial_\mu \left( f \circ (x^B)^{-1} \right) \right] (x^B(p)) \\ &= \left[ \partial_\mu \left( f \circ (x^A)^{-1} \circ x^A \circ (x^B)^{-1} \right) \right] (x^B(p)), \end{aligned}$$

به هم مرتبط می‌شوند، که با استفاده از قاعده زنجیره‌ای چندمتغیره، بیشتر منجر به این می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p f &= \sum_{\nu=1}^d \left[ \partial_\nu \left( f \circ (x^A)^{-1} \right) \right] (x^A(p)) \cdot \left[ \partial_\mu \left( x_\nu^A \circ (x^B)^{-1} \right) \right] (x^B(p)) \\ &= \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \Big|_{x^B(p)} \end{aligned} \quad (546)$$

در مرحله آخر ما از سوءاستفاده معمول از نماد گذاری<sup>۱۴۴</sup>

$$\frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \Big|_{x^B(p)} := \partial_\mu \left( x_\nu^A \circ (x^B)^{-1} \right) (x^B(p)) \quad (547)$$

برای مؤلفه‌های ژاکوبین

$$\frac{\partial x^A}{\partial x^B} \Big|_{x^B(p)} = \hat{dx}_p^A \circ \hat{d}(x_p^B)^{-1} \quad (548)$$

از نگاشتهای گذار استفاده کردیم. با حذف  $f$  از معادله (۵۴۶)، ما قانون تبدیل

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \Big|_{x^B(p)} \quad (549)$$

از پایه‌های مختصاتی مماس را شناسایی می‌کنیم. ما در اینجا انتخاب کردیم که ژاکوبین را در سمت راست بردار پایه بنویسیم تا تأکید کنیم که تغییر پایه باید به عنوان یک عمل راست در ک شود. با انجام این کار، باید به خواننده هشدار دهیم که فقط یک سوءاستفاده از نماد گذاری برای بردار پایه است اما به معنای عمل یک عملگر دیفرانسیل بر روی ژاکوبین در سمت راست نیست.

<sup>۱۴۴</sup> «سوءاستفاده» این است که  $x^A$  به عنوان تابعی از  $x^B(p)$  تفسیر می‌شود، و بنابراین باید به طور دقیق‌تر به صورت  $x^A \circ (x^B)^{-1}$  نوشته شود.

**تبدیل پایه‌های مختصاتی هم‌هماس:** قانون تبدیل کانتراواریانت پایه‌های مختصاتی فضای هم‌هماس از تبدیل وارون پایه‌های دوگان در معادله (۵۱۹) نسبت به (۵۱۸) تیجه می‌شود. برای اعمال این رابطه، ما ابتدا معادله (۵۴۹) را با قرارداد خود مبنی بر اینکه پایه‌ها مطابق با یک عمل راست با یک عضو گروه وارون تبدیل می‌شوند، تطبیق می‌دهیم. این کار با اعمال معادله (۵۳۲) برای وارون کردن ژاکوبین (سوءاستفاده از نماد گذاری را به باد بیاورید)

$$\frac{\partial x^A}{\partial x^B} \Big|_{x^B(p)} = \left( \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)} \right)^{-1} \quad (550)$$

انجام می‌شود که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \Big|_{x^B(p)} = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \left( \frac{\partial x^A}{\partial x^B} \Big|_{x^B(p)} \right)_{\nu\mu} = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \left( \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)} \right)_{\nu\mu} \quad (551)$$

بنابراین عناصر پایه هم‌هماس مطابق با معادلات (۵۱۸) و (۵۱۹) مانند

$$\hat{dx}_\mu^B|_p = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\nu^A} \Big|_{x^A(p)} \hat{dx}_\nu^A|_p. \quad (552)$$

تبدیل می‌شوند.

**تبدیل دیفرانسیل‌های چارت:** بیان دیفرانسیل‌های چارت  $\hat{dx}_\mu^A|_p$  بر حسب گرادیان‌های مؤلفه چارت در معادله (۵۴۰) اجازه می‌دهد تا قانون تبدیل آنها را از قانون در معادله (۵۵۲) استنتاج کنیم. به طور جایگزین، قانون تبدیل با ضرب راست در همانی به شکل  $\text{id}_{T_p M} = \hat{dx}^A|_p \circ (\hat{dx}^A|_p)^{-1}$  و شناسایی یک ضرب چپ با ژاکوبین نگاشته‌های گذار چارت به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \hat{dx}^B|_p &= \hat{dx}^B|_p \circ (\hat{dx}^A|_p)^{-1} \circ \hat{dx}^A|_p \\ &= \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)} \hat{dx}^A|_p \end{aligned} \quad (553)$$

توجه داشته باشید که این نتیجه به سادگی بیان ماتریسی معادله (۵۵۲) است.

**تبدیل ضرایب برداری:** بردارهای  $v \in T_p M$  نسبت به یک پایه مختصاتی  $v^A \in \mathbb{R}^d$  با ضرایب  $v^A$  بیان می‌شوند:

$$v = \sum_{\mu=1}^d v_\mu^A \frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \Big|_p \quad (554)$$

ضرایب منفرد با عمل پایه هم‌هماس بازیابی می‌شوند:

$$\hat{dx}_\mu^A|_p(v) = \hat{dx}_\mu^A|_p \sum_{\nu=1}^d v_\nu^A \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p = \sum_{\nu=1}^d v_\nu^A \delta_{\mu\nu} = v_\mu^A \quad (555)$$

این دلالت بر این دارد که ضرایب به صورت کانتراواریانت تبدیل می‌شوند، درست مانند پایه مختصاتی هم‌هماس:

$$v_\mu^B = \hat{dx}_\mu^B|_p(v) = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\nu^A} \Big|_{x^A(p)} \hat{dx}_\nu^A|_p(v) = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\nu^A} \Big|_{x^A(p)} v_\nu^A \quad (556)$$

به راحتی تأیید می‌شود که این قانون تبدیل واقعاً به یک نمایش مستقل از مختصات از بردارهای مستقل از مختصات  $v \in T_p M$  منجر می‌شود:

$$\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p v_\mu^B = \sum_{\mu,\nu,\rho} \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \Big|_{x^B(p)} \frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\rho^A} \Big|_{x^A(p)} v_\rho^A = \sum_{\nu,\rho} \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \delta_{\nu\rho} v_\rho^A = \sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p v_\nu^A \quad (557)$$

## ۴.۰ پایه‌های مختصاتی به عنوان تریویالیزاسیون‌های محلی کلاف

قوانين تبدیل القا شده توسط نگاشت گذار چارت در بخش آ.۲.۳ با تبدیلات پیمانه همانطور که در بخش ۱.۳ فرمول‌بندی شده است، هنگام یکی گرفتن ژاکوبین‌ها  $g_p^{BA} \Big|_{x^A(p)}$  با  $\frac{\partial x^B}{\partial x^A}$  منطبق هستند. در بخش آ.۴.۳ مابین ارتباطات را با فهرست کردن تمام تناظرات دقیق می‌کیم. بخش آ.۴.۶ این نتایج را با استخراج عبارات برای تریویالیزاسیون‌های کلاف القا شده توسط چارت روى دامنه‌های گسترده  $M \subseteq U$  همانطور که در بخش ۶ معرفی شد، گسترش می‌دهد. یک فرهنگ لغت که تناظرات را خلاصه می‌کند در جدول ۷ ارائه شده است.

### ۴.۰.۴ تناظرات با تریویالیزاسیون‌های نقطه‌ای $T_p M$

**پیمانه‌ها و دیفرانسیل‌های چارت:** فرمالیسم کلاف بر تعریف پیمانه‌ها (معادله (۱))

$$\psi_{TM,p}^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (558)$$

تکیه دارد، که ایزومورفیسم‌های کلاف برداری هستند و مختصات را به فضاهای مماس با  $p \in U^A$  اختصاص می‌دهند. در فرمالیسم چارت، پیمانه‌ها روی  $U^A$  به عنوان دیفرانسیل‌های چارت القا می‌شوند (معادله (۵۴۰)):

$$\hat{dx}_p^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (559)$$

پیمانه‌های مختلف با تبدیلات پیمانه به هم مرتبط هستند (معادله (۷)):

$$\psi_{TM,p}^B = g_p^{BA} \psi_{TM,p}^A \quad \square\square\square \quad g_p^{BA} := \psi_{TM,p}^B \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1} \in G. \quad (560)$$

همین تعریف برای پیمانه‌های القا شده توسط چارت نیز برقرار است، که در آن تبدیلات پیمانه با ژاکوبین نگاشته‌های گذار چارت منطبق می‌شوند (معادله (۵۵۳)):

$$\hat{dx}_p^B = \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)} \hat{dx}_p^A \quad \square\square\square \quad \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)} = \hat{dx}_p^B \circ (\hat{dx}_p^A)^{-1} \in \text{GL}(d) \quad (561)$$

**مؤلفه‌های برداری:** از آنجا که مؤلفه‌های برداری  $(v^A|_p(v))$  با عمل پیمانه‌ها داده می‌شوند، آنها همان رفتار تبدیل کوواریانت را نشان می‌دهند

$$v^B = g_p^{BA} v^A \quad \square\square\square \quad v^B = \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)} v^A. \quad (562)$$

بر حسب مؤلفه‌ها، این روابط به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$v_i^B = \sum_{j=1}^d (g_p^{BA})_{ij} v_j^A \quad \square\square\square \quad v_\mu^B = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial x_\nu^B}{\partial x_\mu^A} \Big|_{x^A(p)} v_\nu^A. \quad (563)$$

**چارچوب‌های مرجع القا شده:** چارچوب‌های مرجع در فرمالیسم کلاف با نگاشت بردارهای  $e_i \in G$  از طریق  $e \in \mathbb{R}^d$  از طریق نگاشت پیمانه به  $T_p M$  به القا می‌شوند (معادله (۴)):

$$[e_i^A]_{i=1}^d = \left[ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i) \right]_{i=1}^d \quad (564)$$

رابطه متناظر در فرمالیسم چارت طبق معادله (۵۴۲) با

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \Big|_p \right]_{\mu=1}^d = \left[ (\hat{dx}_p^A)^{-1}(\epsilon_\mu) \right]_{\mu=1}^d \quad (565)$$

داده می‌شود. معادله (۱۰) نشان می‌دهد که قوانین تبدیل چارچوب‌های مرجع با عمل راست

$$[e_i^B]_{i=1}^d = [e_i^A]_{i=1}^d \triangleleft (g_p^{BA})^{-1} := \left[ \sum_{j=1}^d e_j^A (g_p^{BA})_{ji}^{-1} \right]_{i=1}^d = \left[ \sum_{j=1}^d e_j^A (g_p^{AB})_{ji} \right]_{i=1}^d. \quad (566)$$

داده می شود. به طور مشابه، قانون تبدیل پایه های مختصاتی از معادله (۵۵۱) به صورت

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p \right]_{\mu=1}^d &= \left[ \frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \Big|_p \right]_{\mu=1}^d \triangleleft \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)}^{-1} = \left[ \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \left( \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)} \right)^{-1} \right]_{\mu=1}^d \\ &= \left[ \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \Big|_{x^B(p)} \right]_{\mu=1}^d \end{aligned} \quad (567)$$

دیده می شود.

#### ۲.۴.۳ تربیوالیزاسیون های محلی القا شده توسط چارت از $\pi_{TM}^{-1}(U)$

نتاظراتی که در بخش قبل بیان شدند، تربیوالیزاسیون های نقطه ای چارت  $p$  از  $T_p M$  را به دیفرانسیل های نقطه ای  $\hat{dx}_p$  مرتبط می کردند. برای تکمیل این تصویر، این بخش عبارتی را برای تربیوالیزاسیون های محلی

$$\Psi_{TM} : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^d \quad (568)$$

که توسط چارت ها القا می شوند، اضافه می کند.

یک کاندیدای خوب برای ساخت  $\Psi_{TM}$  از آن، دیفرانسیل چارت

$$dx : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow TV \quad (569)$$

است که یک ایزومورفیسم کلاف برداری است که از ایزومورفیسم های فضای برداری  $dx_p$  با عدم محدودیت به یک نقطه منفرد  $p \in U$  متفاوت است. برای ادامه، ما ایزومورفیسم کانونی  $\iota_{\mathbb{R}^d}$  را در معادله (۵۳۰) از یک نقطه منفرد به تمام فضاهای مماس  $T_x V \cong \mathbb{R}^d$  روی  $V \subseteq \mathbb{R}^d$  تعمیم می دهیم، که منجر به تربیوالیزاسیون محلی کانونی زیر از  $TV$  می شود:

$$\iota_{TV} : TV \rightarrow V \times \mathbb{R}^d, \quad v \mapsto (\pi_{TV}(v), \iota_{\mathbb{R}^d}(v)). \quad (570)$$

این اجازه می دهد تا از یک نقطه منفرد به یک نگاشت

$$\hat{dx} := \iota_{V \times \mathbb{R}^d} \circ dx : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow V \times \mathbb{R}^d, \quad (571)$$

تعمیم دهیم، که با این حال، هنوز تربیوالیزاسیون محلی مورد نظر نیست. با نگاشت عامل اول از طریق چارت وارون از  $V$  به  $U$  ما تربیوالیزاسیون محلی کلاف القا شده توسط چارت را به دست می آوریم:

$$\Psi_{TM} := (x^{-1} \times \text{id}) \circ \hat{dx} \quad (572)$$

طبق معمول، ما تعاریف انجام شده را در یک نمودار جابجایی به تصویر می کشیم:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & (x^{-1} \times \text{id}) & & & \\ & & \hat{dx} & & & & \\ & \downarrow & & & & & \downarrow \\ V \times \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\iota_{V \times \mathbb{R}^d}} & TV & \xleftarrow{dx} & \pi_{TM}^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi_{TM}} & U \times \mathbb{R}^d \\ & \searrow \text{proj}_1 & \downarrow \pi_{TV} & & \pi_{TM} & & \swarrow \text{proj}_1 \\ & & V & \xleftarrow{x} & U & & \end{array} \quad (573)$$

با در نظر گرفتن دو چارت همپوشان  $U^{AB} = U^A \cap U^B$  و  $x^B : U^B \rightarrow V^B$  و  $x^A : U^A \rightarrow V^A$  و با نشان دادن  $U$  نگاشتهای گذار

$$\hat{dx}^B \circ (\hat{dx}^A)^{-1} = \left( x^B \circ (x^A)^{-1} \times \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right) : x^A(U^{AB}) \times \mathbb{R}^d \rightarrow x^A(U^{AB}) \times \mathbb{R}^d \quad (574)$$

$$\Psi_{TM}^B \circ (\Psi_{TM}^A)^{-1} = \left( \text{id} \times \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right) : U^{AB} \times \mathbb{R}^d \rightarrow U^{AB} \times \mathbb{R}^d. \quad (575)$$

به دست می‌آیند. این تعاریف و رابطه متقابل آنها در نمودار جابجایی زیر نشان داده شده است:

$$\begin{array}{ccccc}
 x^B(U^{AB}) \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow{((x^B)^{-1} \times \text{id})} & U^{AB} \times \mathbb{R}^d & & \\
 \uparrow & \swarrow \hat{dx}^B & \uparrow \Psi_{TM}^B & & \\
 (x^B \circ (x^A)^{-1} \times \frac{\partial x^B}{\partial x^A}) & \xrightarrow{\pi_{TM}^{-1}(U^{AB})} & & & \\
 & \downarrow \hat{dx}^A & & & \\
 x^A(U^{AB}) \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow{((x^A)^{-1} \times \text{id})} & U^{AB} \times \mathbb{R}^d & & \\
 \end{array} \quad (576)$$

## ۵.۱ G-ساختارها و میدان‌های ویل باین

همانطور که در بخش‌های ۳.۶ و ۴.۶ بحث شد، هر  $G$ -اطلس  $\{\Psi_{TM}^X, U^X\}$  از تربویالیزاسیون‌های محلی کلاف مimas، یک  $G$ -ساختار متناظر را مشخص می‌کند، یعنی یک زیرگروه  $GM$  از چارچوب‌های مرتع متمایز که به یک ساختار هندسی روی  $M$  احترام می‌کنارند (یا آن را تعریف می‌کنند). بنا به تعریف، نگاشتهای گذار  $g^{BA}$  از کلاف‌های همبسته  $G$  مقابله‌یافته در یک گروه ساختاری کاهش یافته  $G \leq \text{GL}(d)$  می‌گردد. این سؤال را مطرح می‌کند که آیا می‌توان به طور مشابه  $G$ -اطلس‌هایی از چارت‌ها  $\{(x^X, U^X)\}$  را یافت، که ژاکوبین‌های آنها  $\frac{\partial x^B}{\partial x^A}$  مقابله‌یافته در یک گروه ساختاری کاهش یافته  $G \leq \text{GL}(d)$  بگیرند و بنابراین یک  $G$ -ساختار را کدگذاری کنند. برای برخی گروه‌های ساختاری این قطعاً ممکن است؛ به عنوان مثال، یک جهت‌گیری از یک منیفلد جهت‌پذیر همیشه می‌تواند با مشخص کردن یک اطلس  $(d)$  از چارت‌های  $\text{GL}^+$  با جهت‌گیری مثبت، که ژاکوبین‌های گذار آنها مقابله‌یافته در  $(d)$   $\text{GL}^+$  می‌گیرند، ثابت شود. با این حال، به طور کلی، یافتن چارت‌های مختصاتی که پایه‌های مختصاتی را الفا کنند که در یک  $G$ -ساختار داده شده قرار گیرند، غیرممکن است. بنابراین به تبدیلات پیمانه صریح از پایه‌های مختصاتی به  $G$ -ساختار، که به عنوان میدان‌های ویل‌باین شناخته می‌شوند، متولی می‌شویم [٤ ٥ ٦]. پس از تبدیل اولیه از پایه‌های مختصاتی به  $G$ -ساختار، آزادی پیمانه در داخل  $G$ -ساختار به تبدیلات پیمانه با مقابله‌یافته  $G$  که  $G$ -ساختار را حفظ می‌کنند، اجازه می‌دهد.

یک مثال مهم در فیزیک،  $d$ -ساختارها (یا  $1$ -ساختارها برای فضازمان‌ها) هستند، که از چارچوب‌های مرتع راست‌هنچار نسبت به متريک  $(\eta)$  (شبیه) ريماني از  $M$  تشکيل شده‌اند.<sup>۱۴۵</sup> چين چارچوب‌های راست‌هنچاری، چارچوب‌های آزمایشگاهی ممکن یک ناظر لخت را نمایش می‌دهند. آنها به عنوان مثال برای فرمول‌بندي نظریه‌های میدان کوانتومی نسبیتی، به ویژه معادله دیراک، در فضازمان‌های خمیده استفاده می‌شوند. به ياد بياوريد که یک  $G$ -ساختار داده شده باید توسط تربویالیزاسیون‌های محلی کلاف موردن احترام قرار گیرد، که به این معنی است که نگاشتهای پیمانه  $\psi_{GM,p}$  باید  $G$ -ساختار  $G_p M$  را در  $p \in M$  به  $G$ -ساختار استاندارد کاتونی  $G$  از  $\mathbb{R}^d$  نگاشتند. برای مورد خاص  $d$ -ساختارها، اين معادله اين الزام است که تربویالیزاسیون‌های کلاف متريک را حفظ کنند، یعنی  $\langle \psi_{TM,p}(v), \psi_{TM,p}(w) \rangle = \langle \eta_p(v, w) \rangle$ . با توجه به یک چارت مختصاتی  $x : U \rightarrow V$  پیمانه‌های الفا شده در  $U$  در بخش‌های  $v, w \in T_p M$  و  $p \in M$  نسبت به  $\psi_{TM,p}$  برابر باشند. بنابراین الزام بر روی آنها برای حفظ متريک به قابل نشان داده شد که با  $\psi_{TM,p} = \hat{dx}_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d$  داده می‌شوند. بنابراین الزام بر روی آنها برای حفظ متريک به

$$\eta_p(v, w) = \langle \hat{dx}_p(v), \hat{dx}_p(w) \rangle, \quad (577)$$

تبدیل می‌شود، که دقیقاً ویژگی تعریف کننده برای  $x$  به عنوان یک ايزومتری است. این نتیجه دلالت بر این دارد که پایه‌های مختصاتی فقط در صورتی یک  $d$ -ساختار را تعریف می‌کنند که  $U$  و  $V$  توصیف مستقیم یک  $d$ -ساختار از طریق پایه‌های مختصاتی غیرممکن است. این ناسازگاری به عنوان مثال در این واقعیت بیان می‌شود که مؤلفه‌های  $\eta_{\mu\nu}$  از متريک ريماني روی  $M$  نسبت به پایه مختصاتی انتخاب شده با  $\delta_{\mu\nu}$  (یا  $(+1, -1, \dots, -1)$ ) متفاوت است.

<sup>۱۴۵</sup> نماد  $\eta$  در ادبیات فیزیک معمولاً برای متريک مینکوفسکی  $(-1, +1, \dots, +1)$  حفظ می‌شود در حالی که متريک (شبیه) ريماني  $M$  با  $g$  نشان داده می‌شود. در مقابل، ما اعضای گروه را در گروه ساختاری به صورت  $g \in G$  می‌نویسیم و بنابراین از  $\eta$  برای متريک (شبیه) ريماني  $M$  استفاده می‌کنیم.

همانطور که قبل ذکر شد، چارچوب‌های راست‌هنگار یک  $d$ -ساختار  $OM$  در ادبیات فیزیک معمولاً از طریق یک تبدیل پیمانه نسبت به یک میدان چارچوب القا شده توسط چارت  $\left[ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right]_{\mu=1}^d$  تعریف می‌شوند. با نشان دادن این تبدیل پیمانه، که میدان ویل باین نامیده می‌شود، با

$$\mathfrak{e}^A : U \rightarrow \mathrm{GL}(d), \quad (578)$$

میدان چارچوب راست‌هنگار با<sup>۱۴۶</sup>

$$[e_i^A]_{i=1}^d := \left[ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right]_{i=1}^d \triangleleft (\mathfrak{e}^A)^{-1} = \left[ \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\mathfrak{e}^A)^{-1}_{\mu i} \right]_{i=1}^d \in \Gamma(U, OM). \quad (579)$$

تعریف می‌شود. راست‌هنگاری میدان چارچوب حاصل معمولاً به صورت<sup>۱۴۷</sup>

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \eta(e_i^A, e_j^A) \\ &= \eta \left( \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\mathfrak{e}^A)^{-1}_{\mu i}, \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\mathfrak{e}^A)^{-1}_{\nu j} \right) \\ &= \sum_{\mu\nu} \eta \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) (\mathfrak{e}^A)^{-1}_{\mu i} (\mathfrak{e}^A)^{-1}_{\nu j} \\ &= \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} (\mathfrak{e}^A)^{-1}_{\mu i} (\mathfrak{e}^A)^{-1}_{\nu j}, \end{aligned} \quad (580)$$

بیان می‌شود، که توضیح می‌دهد چرا میدان ویل باین گاهی اوقات «ریشه دوم متریک» نامیده می‌شود. طبق معمول، مؤلفه‌های برداری از طریق تبدیل پیمانه غیروارون ترجمه می‌شوند، یعنی:<sup>۱۴۸</sup>

$$v_i^A = \sum_\mu \mathfrak{e}_{i\mu}^A v_\mu \quad (581)$$

یک استدلال ساده شمارش ابعاد، آزادی پیمانه را در  $d$ -ساختار نشان می‌دهد.<sup>۱۴۹</sup> یک ویل باین  $\mathfrak{e}^A(p) \in \mathrm{GL}(d)$  به عنوان عضوی از گروه خطی عمومی دارای  $d$  درجه آزادی است، در حالی که متریک  $\eta$  به عنوان یک فرم دوخطی متقابلن، دارای  $d(d+1)/2$  درجه آزادی است.  $d(d-1)/2$  درجه آزادی گشته دقتاً متناظر با اعضای گروه ساختاری  $g^{BA} \in d$  است. به طور جایگزین، از دیدگاه ساختارها،  $(d(d-1)/2)$  درجه آزادی است در حالی که  $d(d-1)/2$  درجه آزادی است، که  $d(d+1)/2$  درجه آزادی را که متناظر با انتخاب متریک است، ثابت می‌کند.

تمام ساختارها به وضوح به  $G$ -ساختارهای دلخواه با میدان‌های ویل باین با مقادیر  $GL(d)$  که پایه‌های مختصاتی را به  $GM$  نگاشت می‌دهند و آزادی اعمال تبدیلات پیمانه با مقادیر  $G$  پس از آن، تعیین می‌یابند.

<sup>۱۴۶</sup> در ادبیات فیزیک این رابطه به صورت  $e_i^A = (\mathfrak{e}^A)_i^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  بیان می‌شود. وارون در اینجا صرفاً با موقعیت مخالف اندیس‌ها  $i$  در مقایسه با  $\mathfrak{e}_{\mu i}^A := (\mathfrak{e}^A)_\mu^i$  نشان داده می‌شود.

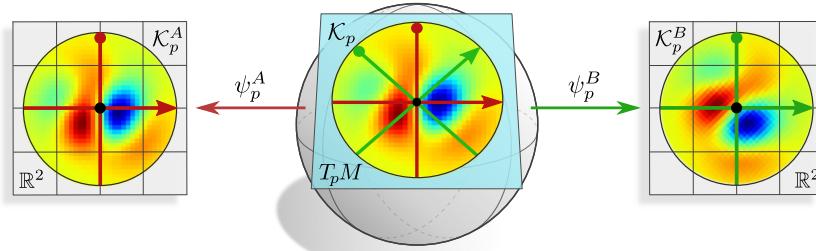
<sup>۱۴۷</sup> در ادبیات فیزیک این رابطه معمولاً به صورت  $\delta_{ij} = (\mathfrak{e}^A)_i^\mu (\mathfrak{e}^A)_j^\nu \eta_{\mu\nu}$  نوشته می‌شود.

<sup>۱۴۸</sup> دوباره، در نمادگذاری معمول در فیزیک این رابطه به صورت  $(\mathfrak{e}^A)_i^\mu v^\mu = v^i$  خوانده می‌شود.

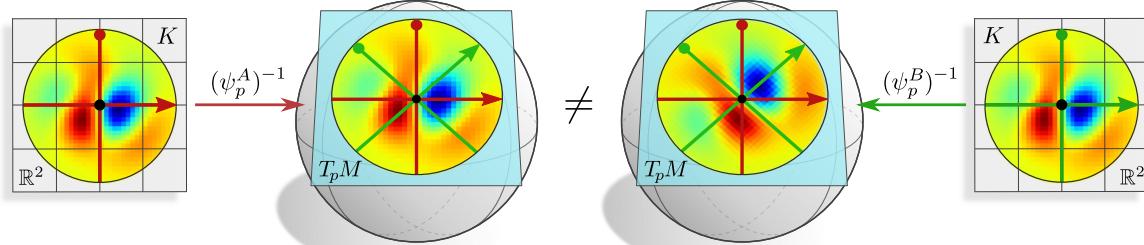
<sup>۱۴۹</sup> در فیزیک، بیشتر تبدیلات لورنتس محلی  $\Lambda$  را در نظر می‌گیرند، که دوران‌ها و بوست‌های چارچوب‌های مرجع محلی را توصیف می‌کنند.

فرماییسم چارت	فرماییسم کلاف	ایزومورفیسم
هر دیفیوژن مورفیسم دلخواه	□	$V^A \xrightarrow{\sim} U^A$ : چارت
القا شده توسط چارت‌ها	□	$x^A(U^{AB}) \xrightarrow{\sim} x^B(U^{AB})$ $x^B \circ (x^A)^{-1}$ : نگاشت‌گذار
$\hat{dx}_p^A = (\hat{dx}_1^A _p, \dots, \hat{dx}_d^A _p)^\top$	ایزومورفیسم خطی از $G$ -اطلس	$\mathbb{R}^d \xrightarrow{\sim} T_p M$ $\psi_{TM,p}^A :$ تربیویالیزاسیون نقطه‌ای
$\hat{dx}_p^B \circ (\hat{dx}_p^A)^{-1} = \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big _{x^A(p)}$	عنصر گروه ساختار $g_p^{BA} \in G$	$\mathbb{R}^d \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^d \psi_{TM,p}^B \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}$ : نگاشت‌گذار
$((x^A)^{-1} \times \text{id}) \circ \hat{dx}^A$	$v \mapsto (\pi_{TM}(v), \psi_{TM, \pi_{TM}(v)}(v))$	$U^A \times \mathbb{R}^d \xrightarrow{\sim} \pi_{TM}^{-1}(U^A)$ $\Psi_{TM}^A :$ تربیویالیزاسیون محلی
$\left( \text{id} \times \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right)$	$(\text{id} \times g^{BA})$	$U^{AB} \times \mathbb{R}^d \xrightarrow{\sim} U^{AB} \times \mathbb{R}^d$ $\Psi_{TM}^B \circ (\Psi_{TM}^A)^{-1}$ : نگاشت‌گذار
$\left[ \frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \Big _p \right]_{\mu=1}^d = \left[ (\hat{dx}_p^A)^{-1}(\epsilon_i) \right]_{\mu=1}^d$	از $\text{GL}(d)$ ا-اطلس	$[e_i^A]_{i=1}^d \in F_p M$ چارچوب عمومی
$\left[ \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \Big _p (\epsilon^A)_{\mu i}^{-1} \right]_{i=1}^d$	از $G$ -اطلس	$[e_i^A]_{i=1}^d \in G_p M$ چارچوب $G$ -ساختار

جدول ۷. یک نمای کلی از انواع مختلف مختصاتی‌سازی روی منیفلدها. فرماییسم کلاف (ستون سوم)، که در این کار استفاده می‌شود، مختصات را مستقیماً به فضاهای مماس اختصاص می‌دهد، در حالی که به نقاط  $p$  از فضای پایه  $M$  به رویی مستقل از مختصات اشاره می‌کند. در مقابل، فرماییسم چارت (ستون چهارم) مختصات را به زیرمجموعه‌های محلی  $U^X \subseteq M$  از منیفلد اختصاص می‌دهد. تربیویالیزاسیون‌های محلی کلاف مماس و نگاشت‌های گذار کلاف بین آنها به عنوان دیفرانسیل‌های چارت‌ها و نگاشت‌های گذار آنها، که دومی معمولاً به عنوان ژاکوبین‌ها نامیده می‌شوند، القا می‌شوند. ردیف ماقبل آخر عباراتی را برای چارچوب‌های مرجعی که به عنوان مقاطع همانی از تربیویالیزاسیون‌های محلی  $TM$  (ستون سوم) یا به عنوان پایه‌های مختصاتی القا شده توسط چارت (ستون چهارم) القا می‌شوند، ارائه می‌دهد. به طور مشابه، ردیف آخر تعاریف  $G$ -ساختارها □ به عنوان مثال چارچوب‌های راست‌هجار □ را از طریق یک  $G$ -اطلس برای  $TM$  (ستون سوم) و از طریق میدان‌های ویل‌بان به عنوان تبدیلات پیمانه نسبت به پایه‌های مختصاتی (ستون چهارم) مقایسه می‌کند. طبق معمول، ما  $U^A \cap U^B$  را با  $p \in U^{AB}$  مخفف می‌کنیم و فرض می‌کنیم



شکل ۶۶: یک کرnel مستقل از مختصات داده شده  $K_p$  روی فضای مماس  $T_p M$  ممکن است در پیمانه های دلخواه  $\psi_p^A$  یا  $\psi_p^B$  نمایش داده شود. عبارات مختصاتی آن  $K_p^A$  و  $K_p^B$  روی  $\mathbb{R}^d$  به طور کلی با یکدیگر متفاوت هستند. کرnel های  $G$ -راهبری پذیر این ویژگی را دارند که دقیقاً شکل یکسانی را در تمام پیمانه ها به خود می گیرند، یعنی در  $K_p^A = K_p^B = K$  صدق می کنند (در تصویر نشان داده نشده است).



شکل ۶۷: یک کرnel مستقل از مختصات ممکن است با اشتراک گذاری یک کرnel داده شده  $K$  روی  $\mathbb{R}^d$  نسبت به یک چارچوب مرجع تعریف شود. انتخاب های مختلف از چارچوب ها منجر به یک کرnel مستقل از مختصات متفاوت می شود. کرnel های  $G$ -راهبری پذیر این ویژگی را دارند که دقیقاً همان کرnel مستقل از مختصات را تولید می کنند، مستقل از چارچوب مرجع انتخاب شده که در امتداد آن به اشتراک گذاشته می شوند (در تصویر نشان داده نشده است). این امر امکان اشتراک وزن مستقل از مختصات را فراهم می کند.

## ب اشتراک وزن مستقل از مختصات و کرnel های $G$ -راهبری پذیر

یک فرض اساسی در طراحی کالولوشن های  $GM$  این است که کرnel های  $K$  روی  $\mathbb{R}^d$  نسبت به یک انتخاب از چارچوب مرجع، همانطور که در شکل ۶۷ به تصویر کشیده شده است، به اشتراک گذاشته می شوند. برای کرnel های عمومی، انتخاب های مختلف از چارچوب ها منجر به تراز های متفاوتی از کرnel مستقل از مختصات حاصل روی فضای مماس  $T_p M$  می شود. با این حال، فرآیند اشتراک وزن، مستقل از مختصات نیست. شکل ۶۶ و ضعیتی را نشان می دهد: در اینجا ما یک کرnel مستقل از مختصات  $K_p$  را فرض می کنیم که از قبل روی  $T_p M$  داده شده است و آن را در پیمانه های مختلف روی  $\mathbb{R}^d$  بیان می کنیم. نمایش های مختصاتی  $K_p^A$  و  $K_p^B$  به طور کلی با یکدیگر موافق نیستند اما ساختار، مستقل از مختصات است.

کرnel های  $G$ -راهبری پذیر دقیقاً به گونه ای محدود شده اند که استقلال از مختصات فرآیند اشتراک وزن را تضمین کنند. اشتراک گذاری آنها نسبت به چارچوب های مختلف منجر به همان کرnel مستقل از مختصات روی فضای مماس می شود، یعنی هیچ تفاوتی بین دو کرnel در وسط شکل ۶۷ وجود نخواهد داشت. به طور معادل، کرnel مستقل از مختصات حاصل روی  $T_p M$  هنگام بیان در پیمانه های مختلف، شکل یکسانی  $K_p^A = K_p^B = K$  را به خود می گیرد، یعنی کرnel چپ و راست در شکل ۶۶ با هم موافق خواهند بود.

توجه داشته باشید که این لزوماً به این معنا نیست که کرnel به معنای  $K(v) = K(gv)$  برای هر  $v \in \mathbb{R}^d$  ناوردا باشد، همانطور که شهود بصری ممکن است القا کند. این در واقع یک مورد خاص برای کرnel هایی است که بین میدان های اسکالار نگاشت انجام می دهند، یعنی برای آنها باید  $\rho_{\mathbb{R}^d}$  و هم  $\rho_{\mathbb{R}^d}$  نمایش های بدیهی هستند (به عنوان مثال شکل ۶۷ برای  $G = \mathbb{R}$  یا شکل ۴۸ برای  $G = \mathbb{C}$  را ببینید). برای انواع میدان عمومی تر، کرnel های باید همودرای پیمانه باشند، یعنی باید محدودیت  $G$ -راهبری پذیری  $(g)(v) = |det g|^{-1} \rho_{\mathbb{R}^d}(g)(v)$  را برآورده کنند که امکان هدایت کانال های کرnel  $c_{\mathbb{R}^d} \times c_{\mathbb{R}^d}$  را فراهم می کند (در تصویر نشان داده نشده است). البته، کرnel های  $G$ -راهبری پذیر را می توان به معنای ناورداي پیمانه تفسیر کرد به این معنا که  $K(v) = |det g| \rho_{\mathbb{R}^d}(g)(v)$  برای هر  $v \in \mathbb{R}^d$  و هر  $g \in G$  باشد.

یک بحث دقیق تر در مورد کرnel های مستقل از مختصات و عبارات مختصاتی آنها در بخش ۲.۲.۴ یافت می شود. محدودیت  $G$ -راهبری پذیری در بخش ۳۲۴ استخراج شده است.

## پ انتگرال گیری روی فضاهای مماس

روی یک منفرد ریمانی  $(M, \eta)$ ، چگالی حجم  $dp^{15}$  روی  $M$  به طور یکتا با این الزام مشخص می‌شود که به چارچوب‌های راست‌هنجر  $[e_1^O, \dots, e_d^O]$  نسبت به متريک  $\eta$  حجم واحد اختصاص داده شود:

$$dp(e_1^O, \dots, e_d^O) = 1 \quad T_p M [e_1^O, \dots, e_d^O] \text{ از} \quad (582)$$

به طور مشابه، یک چگالی حجم  $dv$  روی فضاهای مماس  $T_p M$  از یک منفرد ریمانی به طور یکتا با اختصاص حجم واحد به چارچوب‌های راست‌هنجر آن نسبت به  $\eta_p$  تعریف می‌شود:

$$dv(e_1^O, \dots, e_d^O) = 1 \quad T_v T_p M [e_1^O, \dots, e_d^O] \text{ از} \quad (583)$$

برای جلوگیری از یک بحث بی‌جهت پیچیده در مورد کلاف مماس مضاعف  $TTM$  را به طور معادل با پولبک کردن آن از طریق یک پیمانه ایزو‌متريک (و در نتیجه حجم نگهدار) به  $\mathbb{R}^d$  تعریف می‌کنیم. فرض کنید  $\psi_{TM,p}^O$  چنین پیمانه ایزو‌متريکی از یک اطلاس  $d$  باشد، که چارچوب‌های راست‌هنجر را در  $T_p M$  با چارچوب‌های راست‌هنجر در  $\mathbb{R}^d$  یکی می‌گیرد. سپس انتگرال یک تابع  $f : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  طریق پولبک آن تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \int_{T_p M} f(v) dv &:= \int_{\mathbb{R}^d} f \circ (\psi_{TM,p}^O)^{-1}(v^O) dv^O \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f^O(v^O) dv^O, \end{aligned} \quad (584)$$

که در آن عبارت مختصاتی  $f^O := f \circ (\psi_{TM,p}^O)^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  را طبق معمول تعریف کردیم. این واقعیت که  $\psi_{TM,p}^O$  ایزو‌متريک است در اینجا تضمین می‌کند که  $dv$  واحد حجم را به چارچوب‌های راست‌هنجر اختصاص می‌دهد اگر  $dv^O$  این کار را بکند. از آنجا که دومی فقط اندازه لگ استاندارد روی  $\mathbb{R}^d$  است، این مورد برقرار است.

حال فرض کنید  $\psi_{TM,p}^A$  هر پیمانه‌ای در  $p$  باشد، که ممکن است بخواهیم انتگرال را نسبت به آن بیان کنیم. نگاشت گذار بین هر دو مختصاتی سازی به سادگی با تبدیل پیمانه  $(v^A)^{-1}(v^A) = g_p^{OA}(v^A) = g_p^{OA}$  داده می‌شود. طبق قوانین استاندارد برای متغیرها در انتگرال‌های چندبعدی، دیفرانسیل‌ها باید مطابق با دترمینان ژاکوبین این تبدیل تغییر کنند تا حجم حفظ شود. از آنجا که تبدیل خطی است، ژاکوبین با خود  $g_p^{OA}$  داده می‌شود، به طوری که به دست می‌آوریم

$$\int_{T_p M} f(v) dv = \int_{\mathbb{R}^d} f^A(v^A) |\det(g_p^{OA})| dv^A. \quad (585)$$

از طریق تبدیل پیمانه، این عبارت هنوز به انتخاب دلخواه از پیمانه ایزو‌متريک  $\psi_{TM,p}^O$  بستگی دارد. این وابستگی را می‌توان با بیان مستقیم اندازه انتگرال بر حسب متريک به صورت

$$\int_{T_p M} f(v) dv = \int_{\mathbb{R}^d} f^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A, \quad (586)$$

از بین برد، که در آن ضریب

$$\sqrt{|\eta_p^A|} := \sqrt{\left| \det \left( [\eta_p(e_i^A, e_j^A)]_{ij} \right) \right|} \quad (587)$$

حجم (مطلق) چارچوب مرجع  $[e_i^A]_{i=1}^d$  را نسبت به متريک  $\eta$  اندازه گیری می‌کند. برای تأیید برایری سمت راست معادلات (585) و (586)، ما متريک  $\eta_p$  از  $T_p M$  را بر حسب حاصلضرب داخلی استاندارد  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  از  $\mathbb{R}^d$  بیان می‌کنیم، که دوباره با استفاده از پیمانه ایزو‌متريک  $\psi_{TM,p}^O$  از اطلاس  $d$  انجام می‌شود:

$$\begin{aligned} \eta_p(e_i^A, e_j^A) &= \langle \psi_{TM,p}^O(e_i^A), \psi_{TM,p}^O(e_j^A) \rangle \\ &= \langle \psi_{TM,p}^O \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i), \psi_{TM,p}^O \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_j) \rangle \\ &= \langle g_p^{OA} \epsilon_i, g_p^{OA} \epsilon_j \rangle \\ &= \epsilon_i^\top (g_p^{OA})^\top g_p^{OA} \epsilon_j \\ &= \left( (g_p^{OA})^\top g_p^{OA} \right)_{ij} \end{aligned} \quad (588)$$

<sup>15</sup> برخلاف یک فرم حجم  $\omega$ ، چگالی‌های حجم  $[\omega]$  یک حجم مثبت را به هر چارچوب اختصاص می‌دهند. آنها هم روی منفردی‌های جهت‌بذر و هم غیرجهت‌بذر وجود دارند.

$$\begin{aligned} \left| \det \left( [\eta_p(e_i^A, e_j^A)]_{ij} \right) \right| &= \left| \det \left( (g_p^{OA})^\top g_p^{OA} \right) \right| \\ &= \left| \det \left( (g_p^{OA})^\top \right) \det \left( g_p^{OA} \right) \right| \\ &= \left| \det \left( g_p^{OA} \right) \right|^2, \end{aligned} \quad (589)$$

داده می شود، که از آن برابری سمت راست معادلات (۵۸۵) و (۵۸۶) با گرفتن ریشه دوم نتیجه می شود.

از آنجا که ضرایب  $\sqrt{|\eta_p^B|}$  و  $\sqrt{|\eta_p^A|}$  حجم های چارچوب های مربوطه خود را اندازه گیری می کنند، به راحتی می توان نشان داد که آنها با تغییر حجم وارون  $|\det g_p^{BA}|$  به هم مرتبط هستند:

$$\sqrt{|\eta_p^B|} = \frac{1}{|\det g_p^{BA}|} \sqrt{|\eta_p^A|} \quad (\text{چگالی ۱} - \Rightarrow) \quad (590)$$

این به همراه فرمول معمول تغییر متغیرها

$$dv^B = |\det g_p^{BA}| dv^A \quad (\text{چگالی ۱} + \Rightarrow), \quad (591)$$

دلالت بر این دارد که مختصاتی سازی های عنصر حجم ریمانی  $dv$  بنا به طراحی تحت تبدیلات پیمانه ناوردا هستند، یعنی،

$$\sqrt{|\eta_p^B|} dv^B = \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \quad (\text{چگالی ۰} \Rightarrow). \quad (592)$$

این رابطه تضمین می کند که انتگرال گیری در معادله (۵۸۶) خوش تعریف است، یعنی مستقل از مختصات است.

## ت کانولوشن های هموردا روی فضاهای همگن

کارهای  $\mathcal{I}$ ،  $\mathcal{I}^\perp$  و  $\mathcal{I}^\perp$  از نظر روحی بسیار شبیه به کار ما هستند، به این معنا که آنها کانولوشن های هموردا یک چارچوب نسبتاً عمومی تعریف می کنند. این مقالات در این مشترک هستند که روى نقشه های ویژگی روى فضاهای همگن  $\mathcal{I}/H$  از یک گروه تقارن سراسری  $\mathcal{I}$  عمل می کنند، که در آن  $H \leq \mathcal{I}$ <sup>۱۵۲۱۵۱</sup> آنها در انواع گروه های  $\mathcal{I}$  که پوشش می دهند و در تعریف فضاهای ویژگی خود، به ویژه عمل های گروهی خطی روی آنها، متفاوت هستند. قضایای اصلی این مقالات تأیید می کنند که عومومی ترین نگاشتهای خطی هموردا بین چنین فضاهای ویژگی، کانولوشن های (یا همبستگی ها) با کرنل های دارای محدودیت تقارنی هستند. جزئیات خاص در مورد این کانولوشن های تعمیم یافته به فضاهای ویژگی و عمل های گروهی خاصی که مدل ها در نظر می گیرند، بستگی دارد.

این پیوست این نظریه ها و ارتباط آنها را با کانولوشن های مستقل از مختصات ما بررسی می کند. مهمترین شباهت ها و تفاوت ها در لیست زیر خلاصه شده اند:

- هر فضای همگن یک منیفلد ریمانی نیست و هر منیفلد ریمانی یک فضای همگن از گروه ایزو متري خود نیست.<sup>۱۵۳</sup> با این حال، یک همپوشانی قابل توجه وجود دارد، به عنوان مثال برای CNN های اقليدسي روی  $E_d \cong \mathbb{R}^d$  یا  $CNN(d)/d$  با  $S^d \cong d + 1/d$  روى
- نویسنده اگان به ترتیب گروه های فشرده  $\mathcal{I}$ ، فشرده محلی، یکنواخت  $\mathcal{I}$ ، و لی  $\mathcal{I}$  را در نظر می گیرند. گروه های تقارن سراسری  $\mathcal{I}$  در نظریه ما ایزو متري های  $M$  یا، به طور خاص برای فضاهای اقليدسي، گروه های افاین  $\text{Aff}(G)$  هستند. توجه داشته باشید که گروه های افاین فشرده نیستند و فقط برای  $d \leq G$  یکنواخت هستند □ بنابراین گروه های افاین عومومی در نظریه های مربوطه پوشش داده نمی شوند.
- CNN های مستقل از مختصات، تمرکز را از تقارن های سراسری به تقارن های محلی منتقل می کنند. روى فضاهای همگن  $\mathcal{I}/H$  این تقارن های محلی متناظر با زیر گروه های پایدار اساز  $\text{Stab}_p \cong H$  هستند. بخش ما روابط بین تقارن های سراسری و محلی را با جزئیات بررسی می کند □ هموردابی محلی مدل ها، هموردابی سراسری آنها را القا می کند.
- مدل ها انواع مختلفی از میدان های ویژگی و عمل های گروهی را روی آنها فرض می کنند:  $\mathcal{I}$  و  $\mathcal{I}^\perp$  میدان های اسکالر را روی فضاهای همگن فرض می کنند، یعنی توابع با مقادیر حقیقی  $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{I}/H$  که مطابق با  $f(\phi^{-1} \zeta \cdot H) = f(\zeta \cdot H)$  است.

<sup>۱۵۱</sup> ما در اینجا از  $\mathcal{I}$  برای نشان دادن تقارن های سراسری دلخواه استفاده می کنیم، نه لزوماً ایزو متري ها.

<sup>۱۵۲</sup> [ ] به جای  $\mathcal{I}$  از  $G$  برای اشاره به تقارن های سراسری استفاده می کنند. ما از  $\mathcal{I}$  استفاده می کنیم زیرا  $G$  را برای گروه ساختاری رزو کرده ایم.  
<sup>۱۵۳</sup> به عنوان مثال،  $\{\pm 1\} / SO(2) \cong \{\pm 1\} / \mathcal{I}/H = 2 / SO(2)$  یک مجموعه است اما یک منیفلد ریمانی نیست. مثال دیگر، کانولوشن های گروهی  $(\mathbb{Z}^d, +)$  روی شبکه پیکسلی گستته  $\mathbb{Z}^d$  است.

<sup>۱۵۴</sup> نقشه های ویژگی چند کاناله با روی هم قرار دادن چندین تابع از این نوع ساخته می شوند. برخلاف مورد میدان های ویژگی، کانال های منفرد چنین نقشه های ویژگی به طور مستقل از یکدیگر تبدیل می شوند.

؟ [ میدان‌های ویژگی از انواع عمومی تر  $\rho$  را در نظر می‌گیرند که به عنوان مقاطعی از کلاف‌های بردار ویژگی همبسته  $H$  تعریف می‌شوند. قوانین تبدیل آنها با نمایش‌های القایی  $\text{Ind}_H^{\mathcal{I}} \rho$  داده می‌شود. این تنظیم، توابع با مقادیر حقیقی از  $\mathbb{R}$  را به عنوان یک مورد خاص هنگام انتخاب نمایش‌های میدان بدینه (یا، همانطور که در ادامه دقیق‌تر بیان می‌شود، نمایش‌های خارج‌قسمتی عمومی تر  $\rho_{\mathbb{R}^{G/H}}$  که در آن  $\mathcal{I} \leq G \leq H$  پوشش می‌دهد. نظریه مانیز میدان‌های ویژگی را به عنوان مقاطعی از کلاف‌های همبسته مدل می‌کند. تبدیل آنها با پوش‌فورواردها  $\phi_{*,*} : f \mapsto f \circ \phi^{-1}$  داده می‌شود، که نمایش‌های القایی را تعیین می‌دهند.

- کارهای  $\mathbb{R}$  و  $\mathbb{C}$  [ اشتراک وزن کانولوشنی را از الزام هموردایی سراسری مدل‌ها استخراج می‌کنند. از سوی دیگر، کانولوشن‌های  $GM$  ما، بنابر تعریف، وزن‌ها را روی  $G$ -ساختار به اشتراک می‌گذارند. ما ایده استخراج اشتراک وزن از تقارن‌های سراسری (ایزومنتری‌ها) را در بخش ۳.۸ اتخاذ کردیم. الزام به هموردایی ایزومنتری، اشتراک وزن را روی مدارهای ایزومنتری و یک محدودیت پایدارساز را روی کرنل‌ها نتیجه می‌دهد؛ به عنوان مثال به شکل ۴۰ مراجعه کنید. قضیه ۸.۱۴ تأیید می‌کند که تبدیلات میدان کرنل هموردای ایزومنتری روی فضاهای همگن، کانولوشن‌های  $GM$  هستند [ این نتیجه نتایج  $\mathbb{R}$  و  $\mathbb{C}$  [ را به دقت منعکس می‌کند.
- همه این نظریه‌ها یک محدودیت تقارنی خطی بر روی فضاهای کرنل را استخراج می‌کنند. در مورد  $\mathbb{R}$  و  $\mathbb{C}$ ، کرنل‌ها اساساً توابع اسکالار روی فضاهای خارج‌قسمتی ماضعف  $H_{\mathbb{R}^{G/H}} / \mathcal{I}$  هستند (با فرض همبستگی‌ها، برای کانولوشن‌ها  $H_{\mathbb{R}^{G/H}}$  جایجاً می‌شوند؛ به ادامه مراجعه کنید). کرنل‌های  $\mathbb{R}$  در نظریه ما، یک محدودیت راهبری‌پذیری را برآورده می‌کنند که به انتخاب خاص انواع میدان  $\rho_{\mathbb{R}^{G/H}}$  و  $\rho_{\mathbb{C}^{G/H}}$  دارد. توجه داشته باشید که ضریب دترمینان در محدودیت  $G$ -راهبری‌پذیری  $\mathbb{R}$  وجود ندارد زیرا نویسنده‌گان به گروه‌های یکنواخت محدود می‌شوند. این ضریب در محدودیت کرنل توسط  $\mathbb{R}$  ظاهر می‌شود.
- در حالی که  $\mathbb{R}$  و  $\mathbb{C}$  [ کرنل‌ها را بلطفه روى گروه يا فضای همگن توصیف می‌کنند،  $\mathbb{R}$  و کانولوشن‌های  $GM$  ما کرنل‌ها را روی فضاهای مماس تعریف کرده و متعاقباً آنها را از طرق نگاشت‌نمایی به فضاهای همگن تصویر می‌کنند. این رویکردها به طور کلی معادل نیستند، به عنوان مثال زیرانگاشت‌نمایی روی یک منفرد ناهمبند، یک‌به‌یک نیست. روی فضاهای اقایدی‌سی، هر دو رویکرد به وضوح معادل هستند؛ به بخش ۳.۹ مراجعه کنید. قضیه ما ۱۱.۱ در بخش ۲.۱۱ علاوه بر این، این شکاف را برای کرنل‌های کروی با ارائه یک ایزومنورفیسم بین کرنل‌های دو رویکرد، پر می‌کند. در عمل، ناسازگاری عمومی بی‌اهمیت است زیرا کرنل‌های شبکه‌های کانولوشنی معمولاً دارای تکیه‌گاه فشرده در داخل شعاع اثرکنیته نگاشت‌نمایی هستند.

ما در ادامه به تفصیل به نظریه‌های  $\mathbb{R}$  و  $\mathbb{C}$  [ خواهیم پرداخت. به عنوان یک آمادگی، ابتدا به بحث در مورد فضاهای همگن، کانولوشن‌های گروهی و همبستگی‌های گروهی می‌پردازیم. برای یک مرور جایگزین از این موضوع، خواننده را به  $\mathbb{R}$  ارجاع می‌دهیم. ما علاوه بر این می‌خواهیم به کار  $\mathbb{R}$  اشاره کنیم، که همچنین کانولوشن‌ها را روی فضاهای همگن تعریف می‌کنند. این کار در این بخش با جزئیات بیشتری پوشش داده شده است زیرا مدل‌های آنها  $e = H_{\mathbb{R}^{G/H}}$  را فرض می‌کنند، یعنی کرنل‌های کانولوشن آنها نامحدود هستند و همیشه سیگنال ورودی را به یک میدان اسکالار روی  $\mathcal{I}$  ارتقا می‌دهند.

## ت. ۱ ملاحظات عمومی در مورد فضاهای همگن، کانولوشن‌های گروهی و همبستگی‌های گروهی

**فضاهای همگن:** فرض کنید  $\mathcal{I}$  یک گروه باشد که بر روی یک فضای  $X$  عمل می‌کند. گفته می‌شود این فضا همگن است اگر عمل گروه متعدد باشد، یعنی اگر هر دو نقطه  $p, q \in X$  با عمل  $\mathcal{I}$  به هم مرتبط باشند. در معادلات،  $X$  همگن است اگر و تنها اگر برای هر  $p, q \in X$  یک عضو  $\phi \in \mathcal{I}$  وجود داشته باشد به طوری که  $\phi(p) = q$ . توجه داشته باشید که عمل بر روی  $X$  لزوماً بدون نقطه ثابت نیست، یعنی هر نقطه  $p \in X$  دارای یک زیرگروه پایدارساز بالقوه غیربدینه  $\text{Stab}_p = \{x \in \mathcal{I} \mid x(p) = p\} \leq \mathcal{I}$  است. می‌توان نشان داد که فضای همگن را می‌توان با فضای خارج‌قسمتی  $\mathcal{I}/H$  یکی گرفت که در آن  $H = \text{Stab}_p$  برای یک  $p \in X$  است.<sup>۱۵۵</sup>

از آنجا که هر فضای همگن به عنوان یک خارج‌قسمت به وجود می‌آید، ما در ادامه همیشه یک زیرگروه  $H$  از  $\mathcal{I}$  را در نظر می‌گیریم. این زیرگروه دارای همدسته‌های چپ است، یعنی زیرمجموعه‌هایی به شکل

$$\phi.H = \{\phi.h \mid h \in H\} \quad (593)$$

که اعضای فضای خارج‌قسمتی (همگن)

$$\mathcal{I}/H = \{\phi.H \mid \phi \in \mathcal{I}\}. \quad (594)$$

هستند. یک عمل چپ طبیعی از  $\mathcal{I}/H$  بر روی  $\mathcal{I}/H$  با

$$\mathcal{I} \times \mathcal{I}/H \rightarrow \mathcal{I}/H, \quad (\tilde{\phi}, \phi.H) \mapsto \tilde{\phi}\phi.H. \quad (595)$$

<sup>۱۵۵</sup> انتخاب‌های دیگر از نقاط، تحقیق‌های دیگری از ایزومنورفیسم غیرکانونی  $X/\mathcal{I}/H \cong \mathcal{I}/H$  را به دست می‌دهند. هر انتخابی به همان اندازه معتبر است زیرا برای فضاهای همگن  $\text{Stab}_p \cong \text{Stab}_q$  است.

داده می شود. به راحتی دیده می شود که این عمل متعدد است، و  $\mathcal{I}/H$  را به یک فضای همگن از  $\mathcal{I}$  تبدیل می کند. نگاشت خارج قسمتی کانونی

$$q_{\mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/H, \phi \mapsto \phi.H \quad (596)$$

$\mathcal{I}$  را به یک کلاف اصلی  $H$  روی  $\mathcal{I}/H$  تبدیل می کند. تعاریف مشابهی را می توان برای هم دسته های راست

$$H.\phi \in H \setminus \mathcal{I}. \quad (597)$$

و هم دسته های مضاعف

$$\tilde{H}.\phi.H \in \tilde{H} \setminus \mathcal{I}/H \quad (598)$$

و فضاهای خارج قسمتی مربوطه آنها انجام داد.

یک ویژگی جهانی از نگاشته های خارج قسمتی  $q_{\mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}}$  که در بحث ما در ادامه مهم خواهد شد، به شرح زیر است. فرض کنید  $f^{\uparrow} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع پیوسته و ناوردای-راست نسبت به  $H$  باشد، یعنی تابعی که  $(\phi)f^{\uparrow} = f^{\uparrow}(\phi)$  را برای هر  $\phi \in \mathcal{I}$  و  $f^{\uparrow}(f(h)) = f^{\uparrow}(h)$  برآورده می کند. آنگاه یک تابع پیوسته یکتا  $f : \mathcal{I}/H \rightarrow \mathbb{R}$  وجود دارد به طوری که  $f^{\uparrow} = f \circ q_{\mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}}$  است. بر عکس، می توان هر نگاشت پیوسته  $f : \mathcal{I}/H \rightarrow \mathbb{R}$  را به طور یکتا به یک نگاشت ناوردای-راست نسبت به  $H$  به صورت  $f^{\uparrow} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  ارتفا داد، که توسط  $f^{\uparrow}(\phi) = f(q_{\mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}}(\phi))$  برای تعمیم کانولوشن های گروهی به فضاهای همگن استفاده می شود. رابطه بین هر دو تابع در نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} & & \\ q_{\mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}} \downarrow & \searrow !f^{\uparrow} := f \circ q_{\mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}} & \\ \mathcal{I}/H & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{array} \quad (599)$$

یک ساختار مشابه را می توان به وضوح برای فضاهای خارج قسمتی راست  $H \setminus \mathcal{I}$  و نگاشتهای ناوردای-چپ نسبت به  $H$  انجام داد. نمودار جابجایی زیر مورد فضاهای خارج قسمتی مضاعف نگاشتهای  $f^{\uparrow}$  و  $\tilde{H} \setminus \mathcal{I}/H$  را که همزمان ناوردای-چپ نسبت به  $\tilde{H}$  و ناوردای-راست نسبت به  $H$  هستند، به تصویر می کشد، یعنی در  $f^{\uparrow}(\phi) = f^{\uparrow}(\tilde{h}\phi h) = f^{\uparrow}(\tilde{h})f^{\uparrow}(\phi)h$  صدق می کنند:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} & & \\ q_{\tilde{H} \setminus \mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}} \downarrow & \searrow !f^{\uparrow} := f \circ q_{\tilde{H} \setminus \mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}} & \\ \tilde{H} \setminus \mathcal{I}/H & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{array} \quad (600)$$

**کانولوشن های گروهی و همبستگی های گروهی:** کانولوشن ها به طور طبیعی از فضاهای اقلیدسی (با گروه های انتقال) به گروه های فشرده محلی دلخواه تعمیم داده می شوند. فرض کنید  $\mathcal{I}$  یک گروه فشرده محلی باشد و  $d\zeta$  یک اندازه هار چپ روی  $\mathcal{I}$  باشد. کانولوشن گروهی  $(f *_{\mathcal{I}} \kappa) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  از دو تابع انتگرال بذیر  $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{I}$  و  $\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  با عبارات معادل زیر، که از  $[?]$  گرفته شده اند، تعریف می شود:

$$\begin{aligned} (f *_{\mathcal{I}} \kappa)(\phi) &:= \int_{\mathcal{I}} f(\zeta) \kappa(\zeta^{-1} \phi) d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{I}} f(\phi \zeta) \kappa(\zeta^{-1}) d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{I}} f(\zeta^{-1}) \kappa(\zeta \phi) \Delta(\zeta^{-1}) d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{I}} f(\phi \zeta^{-1}) \kappa(\zeta) \Delta(\zeta^{-1}) d\zeta, \end{aligned} \quad (601)$$

همومورفیسم گروهی  $(*) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_{>, *}^{+}$  که در دو عبارت آخر ظاهر می شود، تابع مدولار  $\mathcal{I}$  است.  $[?]$  کانولوشن های گروهی را مانند خط آخر تعریف می کنند، با این حال، بدون تابع مدولار. این معتبر است زیرا نویسنده گان گروه های فشرده را فرض می کنند، که یکنواخت هستند، یعنی  $\Delta(\phi) = \phi$  برآورده می کنند.

مرتبط با کانولوشن‌های گروهی، همبستگی‌های گروهی هستند

$$(f \star_{\mathcal{I}} \kappa)(\phi) := \langle f, \phi \cdot \kappa \rangle_{L^1(\mathcal{I})} = \int_{\mathcal{I}} f(\zeta) \kappa(\phi^{-1}\zeta) d\zeta, \quad (6.2)$$

که به عنوان حاصلضرب داخلی یک تابع  $f$  با یک کرنل جایجا شده است. یک مقایسه با معادله (6.1) نشان می‌دهد که کانولوشن‌های گروهی و همبستگی‌های گروهی تا یک وارونگی آرگومان کرنل، معادل هستند، یعنی،

$$(f \star_{\mathcal{I}} \kappa) = (f *_{\mathcal{I}} [\kappa \circ (\cdot)^{-1}]). \quad (6.3)$$

در حالی که  $\star$  [کانولوشن‌های گروهی (تعمیم‌یافته) را در نظر می‌گیرند،  $*$  و  $\circ$ ] همبستگی‌ها را فرض می‌کنند  $\square$  برای تطبیق نظریه‌ها باید آرگومان‌های کرنل را وارون کرد.

کانولوشن‌های گروهی و همبستگی‌های گروهی تا به تعریف نسبت به عمل‌های چپ  $(\alpha \cdot f)(\phi) = f(\alpha^{-1}\phi)$  از اعضای گروه  $\alpha \in \mathcal{I}$  بر روی عامل اول هموردا هستند. برای مورد کانولوشن‌های این با

$$\begin{aligned} ([\alpha \cdot f] *_{\mathcal{I}} \kappa)(\phi) &= \int_{\mathcal{I}} [\alpha \cdot f](\zeta) \kappa(\zeta^{-1}\phi) d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{I}} f(\alpha^{-1}\zeta) \kappa(\zeta^{-1}\phi) d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{I}} f(\tilde{\zeta}) \kappa(\tilde{\zeta}^{-1}\alpha^{-1}\phi) d(\alpha\tilde{\zeta}) \\ &= (f *_{\mathcal{I}} \kappa)(\alpha^{-1}\phi) \\ &= [\alpha \cdot (f *_{\mathcal{I}} \kappa)](\phi), \end{aligned} \quad (6.4)$$

نشان داده می‌شود، که در آن ما در مرحله سوم  $\tilde{\zeta} = \alpha^{-1}\zeta$  را جایگزین کردیم و از این واقعیت استفاده کردیم که  $\tilde{\zeta}$  یک اندازه هار چپ است، یعنی  $d\tilde{\zeta} = d(\alpha\tilde{\zeta})$  را برآورده می‌کند. مورد همبستگی‌ها به طور بدیهی از معادله (6.3) نتیجه می‌شود.

اکثر CNN‌های هموردا بر کانولوشن‌های گروهی یا همبستگی‌های گروهی تکیه دارند. به طور خاص، مدل‌های ردیف‌های (۱۱)، (۱۵)، (۲۱)، (۲۴)، (۲۵) و (۳۲) از جدول ۶ که همگی با نمایش‌های منظم برچسب‌گذاری شده‌اند (یا می‌توانند به طور معادل برچسب‌گذاری شوند)، CNN‌های کانولوشنی گروهی هستند. پیش از استفاده از آنها در CNN‌های هموردا، کانولوشن‌های گروهی به طور گسترده در ریاتیک  $\mathbb{R}^n$  یا برای تحلیل تصویر  $\mathbb{R}^3$  به کار رفته‌اند.  $\mathbb{R}^n$  نشان دادند که کانولوشن‌های گروهی (یا بهتر بگوییم همبستگی‌ها) به طور طبیعی کانولوشن‌های متعارف را تعیین می‌دهند. از آنجا که نقشه‌های شبکه‌های کانولوشنی شامل چندین کانال هستند، آنها با توابع با مقادیر حقیقی روی  $\mathcal{I}$  داده نمی‌شوند بلکه با توابع با مقادیر برداری  $\mathbb{R}^c \rightarrow \mathcal{I}$ :  $f$  داده می‌شوند. کرنل‌ها بر این اساس به عنوان توابع ماتریسی (نامحدود) روی گروه تعريف می‌شوند، یعنی  $\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ . کارهای  $\mathbb{R}^n$  و  $\mathbb{R}^c$  که در ادامه مورم می‌کنیم، چنین شبکه‌های کانولوشنی گروهی را به فضاهای همگن دلخواه تعیین می‌دهند.

## ت. ۲ کانولوشن‌های میدان اسکالار روی فضاهای همگن

ما با شبکه‌های کانولوشنی (یا همبستگی)  $\mathcal{I}$ -هموردا روی فضاهای همگن توسط  $\mathcal{I}$  و  $\mathcal{I}$  شروع می‌کنیم. هر دو نظریه، نقشه‌های ویژگی را به عنوان میدان‌های اسکالار روی فضاهای همگن تعريف می‌کنند، یعنی هر کانال با یک تابع با مقادیر حقیقی

$$f : \mathcal{I}/H \rightarrow \mathbb{R}. \quad (6.5)$$

داده می‌شود. کانال‌های منفرد به طور مستقل تحت عمل گروه تقارن سراسری  $\mathcal{I}$  همانطور که با

$$[\tilde{\phi} \cdot f](\phi \cdot H) := f(\tilde{\phi}^{-1} \phi \cdot H) \quad \tilde{\phi} \in H, \quad \phi \cdot H \in \mathcal{I}/H. \quad (6.6)$$

مشخص شده است، تبدیل می‌شوند.

هر لایه  $L = 1, \dots, L$  ممکن است یک زیرگروه متفاوت  $\mathcal{I} \leq H_l$  و در نتیجه یک فضای همگن  $\mathcal{I}/H_l$  داشته باشد که نقشه‌های ویژگی آن روی آن زندگی می‌کنند. این به عنوان مثال اجزه می‌دهد تا کانولوشن‌های ارتقا دهنده از کره  $S^2 \cong \text{SO}(3)/\text{SO}(2)$  به مینفلد گروه  $\text{SO}(3)/\{e\}$  را با انتخاب به ترتیب زیرگرووهای  $\text{SO}(2)$  و  $\{e\}$  مدل‌سازی کنیم. انتخاب‌های زیرگرووهای بی‌نوعی با انتخاب‌های نمایشن‌های گروهی در نظریه ما مطابقت دارند، که در ادامه بیشتر توضیح خواهیم داد.

نتایج این دو مقاله تا حد زیادی معادل هستند، با این حال،  $\mathcal{I}$  گروه‌های فشرده و کانولوشن‌ها را در نظر می‌گیرند در حالی که  $\mathcal{I}$  فرض می‌کند  $\mathcal{I}$  یک گروه لی است و از همبستگی‌ها استفاده می‌کند.

؟ [ به طور خلاصه، [ عمومی ترین نگاشت‌های خطی  $\mathcal{I}/H_{\square\square\square}$  روی فضاهای همگن  $H_{\square\square\square}/\mathcal{I}$  و  $\mathcal{I}/H_{\square\square\square}$  با فرض قانون تبدیل در معادله (۶۰۶) بررسی می‌کنند. آنها اثبات می‌کنند که این عملیات با یک کانولوشن گروهی تعیین‌یافته با یک کرنل

$$\kappa : H_{\square\square\square} \setminus \mathcal{I}/H_{\square\square\square} \rightarrow \mathbb{R} \quad (607)$$

روی فضای خارج قسمتی مضعف مشخص شده توسط  $H_{\square\square\square}$  و  $H_{\square\square\square}/\mathcal{I}$  داده می‌شود. با فرمول‌بندی برای گروه‌های متاگی، همانطور که توسط نویسنده‌گان انجام شده است، نشان داده می‌شود که این عملیات کانولوشن تعیین‌یافته با

$$(f *_{\mathcal{I}/H_{\square\square\square}} \kappa)(\phi.H_{\square\square\square}) := |H_{\square\square\square}| \sum_{H_{\square\square\square}, \zeta \in H_{\square\square\square} \setminus \mathcal{I}} f(\phi \zeta^{-1}.H_{\square\square\square}) \kappa(H_{\square\square\square}, \zeta.H_{\square\square\square}). \quad (608)$$

داده می‌شود. یک مقایسه با خط آخر معادله (۶۰۱) نشان می‌دهد که این عملیات واقعاً به شدت به کانولوشن‌های گروهی مرتبط است [ تابع مدولار  $\Delta$  حذف می‌شود زیرا  $\mathcal{I}$  فشرده و در نتیجه یکنواخت است. کانولوشن تعیین‌یافته در واقع معادل یک کانولوشن گروهی

$$(f *_{\mathcal{I}/H_{\square\square\square}} \kappa)(\phi.H_{\square\square\square}) = (f^\dagger *_{\mathcal{I}} \kappa^\dagger)(\phi) \quad (609)$$

با ویژگی‌ها و کرنل‌هایی است که مطابق با نمودارهای معادلات (۵۹۹) و (۶۰۰) ارتقا یافته‌اند. توجه داشته باشید که کرنل کانولوشن روی  $H_{\square\square\square} \setminus \mathcal{I}/H_{\square\square\square}$  متناظر با یک کرنل همبستگی روی  $H_{\square\square\square}/\mathcal{I}/H_{\square\square\square}$  است زیرا کانولوشن‌ها و همبستگی‌ها طبق معادله (۶۰۳) با یک وارونگی آرگومان کرنل به هم مرتبط هستند. بنابراین می‌توان کرنل‌های [ را به عنوان کرنل‌های همبستگی ناوردای-چپ نسبت به  $H_{\square\square\square}$  روی فضای ورودی  $\mathcal{I}/H_{\square\square\square}$  در نظر گرفت.

برای ارائه یک شهود در مورد این نتایج، به مثال CNN کروی خود که در بالا ذکر شد، باز می‌گردیم. بنابراین فرض کنید  $\mathcal{I} = \text{SO}(3)$  و  $H_{\square\square\square} = \text{SO}(2)$  و برای حال،  $\{e\}$ .  $H_{\square\square\square} = \text{SO}(3)/\text{SO}(2) \cong S^1$ -بعدی  $\mathcal{I}/H_{\square\square\square} = \text{SO}(3)/\{e\} \cong \text{SO}(3)$  را به منيفلد گروه دوران  $H_{\square\square\square}/\mathcal{I}/H_{\square\square\square} = \text{SO}(3)/\{e\}$  توصیف می‌کند. با در نظر گرفتن همبستگی‌ها به جای کانولوشن‌ها، کرنل‌ها توابع با مقادیر حقیقی روی  $S^1$  به جای آن  $H_{\square\square\square}/\mathcal{I}/H_{\square\square\square} = \{e\} \setminus \text{SO}(2)/\text{SO}(2) \cong S^1$  هستند. اگر به جای آن  $H_{\square\square\square}$  را قرار دهیم، کانولوشن از میدان‌های اسکالار روی کره-۲-بعدی به میدان‌های اسکالار روی کره-۲-بعدی  $\mathcal{I}/H_{\square\square\square} = \text{SO}(3)/\text{SO}(2)$  می‌دهد. در این حالت، کرنل‌های همبستگی با توابع با مقادیر حقیقی روی  $\text{SO}(2)/\text{SO}(2) \setminus \text{SO}(3)/\text{SO}(2)$  داده می‌شوند. به طور معادل، کرنل‌های همبستگی با توابع ناوردای-چپ نسبت به  $\text{SO}(2)$  روی  $S^1$  داده می‌شوند، یعنی کرنل‌های ناحیه‌ای همانطور که در شکل ۴۸ به تصویر کشیده شده است. هنگام فرض  $\mathcal{I}/H_{\square\square\square} = \text{SO}(3)/\text{SO}(2)$ ، ما  $H_{\square\square\square} = \{e\}$  را داریم، که متناظر با کانولوشن‌های گروهی متعارف (یا همبستگی‌ها) است. این نتایج با بحث ما در بخش ۲.۱۱ مطابقت دارد.

برای کامل بودن، ما اشاره می‌کنیم که [ نتایج خود را علاوه بر این از یک دیدگاه نظریه نمایشی، یعنی با ویژگی‌ها و کرنل‌ها در فضای فوریه، توضیح می‌دهند. این واقعیت که ویژگی‌ها و کرنل‌ها روی فضاهای خارج قسمتی زندگی می‌کنند، در این فرمول‌بندی در الگوهای پراکنده‌گی ضرایب فوریه منعکس می‌شود.

؟ [ به جای در نظر گرفتن گروه‌های فشرده، [ فرض می‌کند  $\mathcal{I}$  یک گروه لی عمومی است. نقشه‌های ویژگی لایه آ [ به عنوان توابع انتگرال‌پذیر مربع با مقادیر حقیقی در  $L^*(\mathcal{I}/H_l)$  تعریف می‌شوند که هنگام عمل  $\mathcal{I}$  بر روی آنها، مطابق با معادله (۶۰۶) تبدیل می‌شوند.

؟ [ لایه‌های شبکه‌های کانولوشنی (یا بهتر بگوییم همبستگی) خود را به عنوان عملگر‌های خطی کراندار

$$\mathfrak{K} : L^*(\mathcal{I}/H_{\square\square\square}) \rightarrow L^*(\mathcal{I}/H_{\square\square\square}) \quad (610)$$

بین نقشه‌های ویژگی روی فضاهای همگن  $\mathcal{I}/H_{\square\square\square}$  و  $\mathcal{I}/H_{\square\square\square}$  مدل می‌کند. چنین عملگر‌هایی به طور کلی با عملگر‌های انتگرالی به شکل

$$[\mathfrak{K}f](\phi.H_{\square\square\square}) = \int_{\mathcal{I}/H_{\square\square\square}} \widehat{\kappa}(\phi.H_{\square\square\square}, \zeta.H_{\square\square\square}) f(\zeta.H_{\square\square\square}) d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square\square}}, \quad (611)$$

داده می‌شوند، که در آن  $d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square\square}}$  یک اندازه رادون روی  $\mathcal{I}/H_{\square\square\square}$  و

$$\widehat{\kappa} : \mathcal{I}/H_{\square\square\square} \times \mathcal{I}/H_{\square\square\square} \rightarrow \mathbb{R} \quad (612)$$

یک کرنل-۲-آرگومانی انتگرال‌پذیر است.

ازام بر روی عملگر برای هموردا بودن، یعنی،

$$\mathfrak{K}(\phi.f) = \phi.\mathfrak{K}(f) \quad \forall \phi \in \mathcal{I}, f \in L^*(\mathcal{I}/H_{\square\square\square}), \quad (613)$$

نشان داده می شود که دلالت بر این دارد که کرنل تک آر گومانی کاهش می باید

$$\hat{\kappa}(\phi \cdot H_{\square\square}, \zeta \cdot H_{\square\square}) = \frac{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square}}(\phi^{-1}\zeta \cdot H_{\square\square})}{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square}}(\zeta \cdot H_{\square\square})} \kappa(\phi^{-1}\zeta \cdot H_{\square\square}). \quad (614)$$

عضو گروه  $\phi \in \phi \cdot H_{\square\square} \subset \mathcal{I}$  در اینجا یک نماینده دلخواه از هم دسته ای است که در آن قرار دارد. این کرنل ۱-آر گومانی  $\square$  تا یک ضرب مقیاس وابسته به اندازه  $\square$  محدود به ناوردایی چپ نسبت به  $H_{\square\square}$  است:

$$\kappa(\zeta \cdot H_{\square\square}) = \frac{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square}}(\xi^{-1}\zeta \cdot H_{\square\square})}{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square}}(\zeta \cdot H_{\square\square})} \kappa(\xi^{-1}\zeta \cdot H_{\square\square}) \quad \forall \zeta \cdot H_{\square\square} \in \mathcal{I}/H_{\square\square}, \xi \in H_{\square\square} \quad (615)$$

توجه داشته باشید که این نتیجه بسیار شبیه به نتیجه  $\square$  است زیرا یک کرنل ناوردایی چپ نسبت به  $H_{\square\square}/\mathcal{I}/H_{\square\square}$  است (دوباره با فرض کرنل های همبستگی به جای کرنل های کانولوشن). تفاوت اصلی ضرب مقیاس اضافی است، که ظاهر می شود زیرا اندازه رادون  $d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square}}$  لزوماً ناوردایی چپ نسبت به  $\mathcal{I}$  نیست.

یکی از موارد عملی مرتبط، همبستگی های گروهی است، که برای آنها  $\{e\} = \mathcal{I}/\{e\} = I$  است. در این حالت  $\mathcal{I}$  یک اندازه هار (ناوردایی) چپ روی  $\mathcal{I}$  است، به طوری که ضرب مقیاس حذف می شود. مورد مرتبط دیگر، کانولوشن های هموردادی افاین روی فضاهای اقلیدسی است، یعنی انتخاب های  $H_{\square\square} = G$  و  $\mathcal{I} = \text{Aff}(G)$  است. با فرض اینکه  $d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square}}$  اندازه لگک روی  $\mathbb{R}^d$  باشد و با نشان دادن  $\phi = tg \in \mathcal{I}$  اثبات می کند که ضرب مقیاس در این حالت با

$$\frac{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square}}((tg)^{-1}x)}{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square}}(x)} = \frac{1}{|\det g|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad (616)$$

داده می شود. این دقیقاً همان ضرب دترمینان است که در محدودیت کرنل  $G$ -راهنمایی پذیر ماء، معادله (۸۳)، نیز ظاهر می شود.

از آنجا که (۳) SO یک گروه لی است، مثال های CNN کروی که ما پس از بحث در مورد نظریه  $\square$  [ ارائه دادیم، بدون تغییر اعمال می شوند (با فرض اندازه استاندارد ناوردایی چپ روی  $\mathcal{S}$ ).

$\square$  [ کرنل ها را در شاهت نزدیک با کانولوشن های  $GM$  ما روی فضاهای مماس تعریف کرده و آنها را متعاقاً از طریق نگاشت های نمایی به فضاهای همگن تصویر می کند. کرنل ها روی فضاهای مماس در اینجا از طریق اسپلاین ها-  $\square$  مدل سازی می شوند. یک تفاوت این است که  $\square$  [ نیازی به در نظر گرفتن انتقال دهنده های موازی ندارد زیرا او نشانه های ویژگی اسکالار را روی فضاهای همگن فرض می کند.

ارتباط با کانولوشن های  $\square$ : به دلیل فرمول بندی کاملاً متفاوت، بالا فصله مشخص نیست که نتایج  $\square$  و  $\square$  [ چگونه با نظریه ما مرتبط هستند. به جای در نظر گرفتن فضاهای خارج قسمتی مختلف  $\mathcal{I}/H_l$  در هر لایه  $\square$  ما یک مبنیلد ثابت  $M$  را در نظر می گیریم. برای دیدن اینکه چگونه هر دو رویکرد به هم متصل می شوند، یک زیر گروه دیگر  $G$  را فرض کنید به طوری که  $\mathcal{I} \leq G \leq H_l$  برای همه لایه ها  $\square$   $M := \mathcal{I}/G$  ول  $= 1, \dots, L$  یک مبنیلد باشد، را برآورده کند. ویژگی های اسکالار روی  $\mathcal{I}/H_l$  را می توان در این حالت به عنوان میدان های ویژگی همبسته  $G$  روی  $M$  در نظر گرفت که مطابق با نمایش های خارج قسمتی  $\rho_{\square\square}^{G/H_l}$  تبدیل می شوند. برای دیدن این، توجه داشته باشید که عمل گروه در معادله (۶۰۶) چیزی جز نمایش القایی  $\text{Ind}_{H_l}^{\mathcal{I}} \rho_{\square\square}^{H_l} = \rho_{\square\square}^{\mathcal{I}/H_l}$  از نمایش بدیهی  $H_l$  نیست، که قانون تبدیل میدان های اسکالار روی  $H_l$  را توصیف می کند. این نمایش را می توان از طریق القا در مراحل (به  $\square$  [ مراجعه کنید) به

$$\text{Ind}_{H_l}^{\mathcal{I}} \rho_{\square\square}^{H_l} = \text{Ind}_{\mathcal{I}}^{\mathcal{I}} \text{Ind}_{H_l}^G \rho_{\square\square}^{H_l} = \text{Ind}_{\mathcal{I}}^{\mathcal{I}} \rho_{\square\square}^{G/H_l}, \quad (617)$$

تجزیه کرد، یعنی به القای نمایش خارج قسمتی  $\rho_{\square\square}^{G/H_l}$  از  $G$  به  $\mathcal{I}$  بنابراین توابع با مقادیر حقیقی روی  $H_l$  معادل میدان های  $\rho_{\square\square}^{G/H_l}$  روی  $\mathcal{I}/G$  هستند.

موارد خاص جالب  $H_l$  و  $G = H_l$  هستند. برای اولی،  $\rho_{\square\square}^G$  را داریم، که میدان های اسکالار را روی  $H_l$  توصیف می کند. برای دومی،  $\rho_{\square\square}^{G/H_l} = \rho_{\square\square}^G$  نمایش منظم است، که متناظر با کانولوشن های گروهی متعارف است.

این بیشتر از دلالت بر این دارند که نظریه  $\square$  [ تمام مدل های جدول ۶ را که روی فضاهای همگن از گروه های فشرده  $\mathcal{I}$  عمل می کند و با نمایش های بدیهی، منظم یا خارج قسمتی عمومی تر بر چسب گذاری شده اند، توضیح می دهد  $\square$  اینها اساساً CNN های کروی در ردیف های (۳۲) و (۳۳) هستند. یک تعییم جزئی نظریه به گروه های فشرده محلی و یکتواخت، علاوه بر این برخی از CNN های اقلیدسی هموردادی ایزو مرتبی را توصیف می کند. از آنجا که  $\square$  [ گروه های لی دلخواه را فرض می کند، مدل های او علاوه بر این CNN های Aff(G)-هموردا را در جدول ۶ که با نمایش های بدیهی، منظم یا خارج قسمتی عمومی تر بر چسب گذاری شده اند، پوشش می دهند. آنها به طور خاص CNN های اقلیدسی هموردادی مقیاسی ( $G = \mathcal{S}$ ) را که برای آنها ضرب دترمینان  $|\det g|$  غیر بدیهی است، پوشش می دهند.

انواع دیگر میدان های ویژگی و فضاهای غیر همگن مانند فضاهای اقلیدسی سوراخ دار  $\mathbb{E}_d \setminus \{n, s\}$  و کره های  $S^3 \setminus \{0\}$ ، بیست وجهی، سطوح عمومی و نوار موبیوس پوشش می شوند.

## ث میدان‌های کرنل نماینده خارج قسمتی □ اثبات‌ها

در این پیوست، ما اثبات‌هایی برای قضایای ۸.۱۲ و ۸.۱۴ ارائه می‌دهیم.

### ث. ۱ اثبات قضیه ۸.۱۲ □ ایزومورفیسم بین میدان‌های کرنل ناوردای ایزومتری و میدان‌های کرنل نماینده خارج قسمتی

قضیه ۸.۱۲ ادعا می‌کند که فضاهای  $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}$  از میدان‌های کرنل ناوردای ایزومتری در معادله (۳۱۴) و  $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}$  از میدان‌های کرنل نماینده خارج قسمتی در معادله (۳۵۴) با یکدیگر ایزومorf هستند و این ایزومورفیسم با ارتقای  $\Lambda$  داده می‌شود که وارون آن  $\Lambda^{-1}$  تحدید به  $(\mathcal{I} \setminus TM)$  است. در اینجا ما اثباتی برای این گزاره ارائه می‌دهیم که شامل نشان دادن این است که ۱)  $\Lambda^{-1}$  یک وارون برای  $\Lambda$  است، ۲) ویژگی‌های تعریف کننده  $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}$  پس از ارتقا و تحدید برآورده می‌شوند و ۳) ساختارها به انتخاب‌های دلخواه بستگی ندارند.

$$\begin{aligned} & ۱) \text{ در معادله (۳۵۶) یک وارون خوش تعریف برای } \Lambda \text{ در معادله (۳۵۵) است:} \\ & ۱۰) \quad \Lambda \circ \Lambda^{-1} = \text{id}_{\mathcal{K}^{\mathcal{I}}} \text{ یک وارون راست برای } \Lambda \text{ است:} \\ & \text{این ادعا برای هر } v \in TM \text{ و هر } \mathcal{K} \in \mathcal{K}^{\mathcal{I}} \text{ از} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\Lambda \circ \Lambda^{-1}(\mathcal{K})](v) &= [\Lambda(\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)})](v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{K} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \mathcal{K} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \mathcal{K}(v), \end{aligned} \quad (۶۱۸)$$

نتیجه می‌شود، که در آن ناوردایی (هموردایی) میدان کرنل در معادله (۳۱۵) اجازه داد تا ترتیب عمل ایزومتری و ارزیابی میدان کرنل را در مرحله ماقبل آخر جابجا کنیم.

$$۱۰) \quad \Lambda^{-1} \circ \Lambda = \text{id}_{\mathcal{K}^{\mathcal{I}}}, \text{ یعنی } \Lambda^{-1} \text{ یک وارون چپ برای } \Lambda \text{ است:}$$

فرض کنید  $w \in r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)$  و  $\mathcal{Q} \in \mathcal{K}^{\mathcal{I}}$  باشد. توجه داشته باشید که  $w = w \circ r_{TM} Q_{TM}(w) = w$  یک نماینده مدار است. علاوه بر این، از آنجا که  $w = \Phi_{r_{TM}}(w)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(w) = \Phi_{r_{TM}}(w)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(w)$  نتیجه می‌شود که  $w \in \text{Stab}_w$  به طوری که، با محدودیت در معادله (۳۵۴) داریم  $\Phi_{r_{TM}}(w)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q}(w) = \mathcal{Q}(w)$ . این ادعا را اثبات می‌کند:

$$\begin{aligned} [\Lambda^{-1} \circ \Lambda(\mathcal{Q})](w) &= \Lambda(\mathcal{Q})|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)}(w) \\ &= \Lambda(\mathcal{Q})(w) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(w)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(w) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(w)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q}(w) \\ &= \mathcal{Q}(w) \end{aligned} \quad (۶۱۹)$$

۲) ویژگی‌های تعریف کننده  $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}$  و  $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}$  پس از ارتقا و تحدید برآورده می‌شوند:

$$\begin{aligned} & ۲۰) \quad \mathcal{Q} \in \mathcal{K}^{\mathcal{I}}, \text{ یعنی ارتقای } \Lambda(\mathcal{Q}) = \pi_{TM} \circ \Lambda(\mathcal{Q}) = \pi_{TM} \text{-مورفیسم} \text{ کلاف است:} \\ & \text{برای هر } v \in TM \text{ و برای هر } \mathcal{Q} \in \mathcal{K}^{\mathcal{I}} \text{ این ادعا از} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\pi_{TM} \Lambda(\mathcal{Q})](v) &= \pi_{TM} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v) \pi_{TM} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v) \pi_{TM} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v) r_M \pi_{T \setminus TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v) r_M Q_M \pi_{TM}(v) \\ &= \pi_{TM}(v), \end{aligned} \quad (۶۲۰)$$

نتیجه می‌شود، که در آن مرحله آخر از معادله (۳۴۸) استفاده شده است.

این ویژگی بلافضلله از ویژگی متناظر  $\mathcal{K}$  پس از تحدید به  $r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$  نتیجه می‌شود. برای هر  $w \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{I}}[\Lambda^{-1}(\mathcal{K})](w) &= \pi_{\mathcal{I}}\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)}(w) \\ &= \pi_{\mathcal{I}}\mathcal{K}(w) \\ &= \pi_{TM}(w) \end{aligned} \quad (621)$$

فرض کنید  $\phi \in \mathcal{I}$  و  $v \in TM$  باشد. به دلیل ناوردایی نگاشت خارج قسمتی  $Q_{TM}(\phi_{*,TM}^{-1}v) = Q_{TM}(v)$  تحت ایزومنتری ها، ما را داریم. علاوه بر این توجه داشته باشید که

$$\begin{aligned} &[\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1}\phi\Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)]_{*,TM}r_{TM}Q_{TM}(v) \\ &= [\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1}\phi\Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)]_{*,TM}r_{TM}Q_{TM}(\phi_{*,TM}^{-1}v) \\ &= [\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1}\phi]_{*,TM}\phi_{*,TM}^{-1}v \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM}^{-1}v \\ &= r_{TM}Q_{TM}(v) \end{aligned} \quad (622)$$

نتیجه می‌دهد

$$[\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1}\phi\Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)] \in \text{Stab}_{r_{TM}Q_{TM}(v)}, \quad (623)$$

که از طریق محدودیت پایدارساز در معادله (۳۵۴) منجر به

$$[\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1}\phi\Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)]_{*,\text{Hom}}Q_{TM}Q_{TM}(v) = Q_{TM}Q_{TM}(v). \quad (624)$$

می‌شود. با کنار هم گذاشتن این مشاهدات، ادعا اثبات می‌شود:

$$\begin{aligned} \phi_{*,TM}, \Lambda(\mathcal{Q})\phi_{*,TM}^{-1}(v) &= \phi_{*,TM}, \Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)_{*,\text{Hom}}Q_{TM}Q_{TM}(\phi_{*,TM}^{-1}v) \\ &= \phi_{*,TM}, \Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)_{*,\text{Hom}}Q_{TM}Q_{TM}(v) \\ &= [\Phi_{r_{TM}}(v)\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1}]_{*,\text{Hom}}\phi_{*,TM}, \Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)_{*,\text{Hom}}Q_{TM}Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}}[\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1}\phi\Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)]_{*,\text{Hom}}Q_{TM}Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}}Q_{TM}Q_{TM}(v) \\ &= \Lambda(\mathcal{Q}) \end{aligned} \quad (625)$$

برآورده می‌کند: این گزاره به راحتی اثبات می‌شود زیرا ویژگی‌های ناوردایی (هموردایی)  $\mathcal{K}$  به تحدید آن  $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$  منتقل می‌شوند. ما برای  $w \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$

$$\begin{aligned} \xi_{*,TM}, [\Lambda^{-1}(\mathcal{K})](w) &= \xi_{*,TM}, \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)}(w) \\ &= \xi_{*,TM}, \mathcal{K}(w) \\ &= \mathcal{K}(\xi_{*,TM}w) \\ &= \mathcal{K}(w) \\ &= \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)}(w) \\ &= [\Lambda^{-1}(\mathcal{K})](w) \end{aligned} \quad (626)$$

(۳) تمام ساختارها و اثبات‌ها مستقل از انتخاب خاص  $\Phi_{r_{TM}}$  هستند:

تعريف

$$\Phi_{r_{TM}} : TM \rightarrow \mathcal{I} \quad \text{برای هر } v \in TM \quad \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = v \quad (627)$$

از معادله (۳۴۷) تا ضرب راست  $\Phi_{r_{TM}}$  در هر

$$\xi_{r_{TM}} : TM \rightarrow \mathcal{I} \quad \text{برای هر } v \in TM \quad \xi_{r_{TM}}(v) \in \text{Stab}_{r_{TM} Q_{TM}(v)}(v) \quad (628)$$

یکتا است، زیرا بهوضوح  $\Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} \xi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = v$  برای هر  $v \in TM$  همانطور که در پاورقی ۲۹۹ استدلال شد، این تمام درجات آزادی را در تعریف ایزومنتری های بازسازی پوشش می دهد. از محدودیت پایدارساز در معادله (۳۵۴) نتیجه می شود که  $\xi_{r_{TM}}(v)_{*,Hom} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) = \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v)$  نسبت به ابعام  $\Lambda$  ناوردا دیده می شود:

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathcal{Q}) &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,Hom} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,Hom} \xi_{r_{TM}}(v)_{*,Hom} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \end{aligned} \quad (629)$$

به جز تعریف ایزومورفیسم ارتفا،  $\Phi_{r_{TM}}$  فقط (در یک زمینه کمی متفاوت) در مرحله (۲۰) استفاده می شود، که در آن ابعام با استدلال های مشابه حذف می شود.

□ در مجموع، این مراحل اثبات می کنند که  $\Lambda : \mathcal{K}_{\mathbb{R}^d}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{R}^d}^{\mathcal{I}}$  یک ایزومورفیسم است.

## ث. ۲ اثبات قضیه ۸.۱۴ هم ارزی تبدیلات میدان کرنل هموردا و کانولوشن ها روی فضاهای همگن

برای حفظ یک نمای کلی بهتر، ما اثبات را به دو بخش تقسیم می کنیم و ادعاهای مطرح شده در گزاره اول و دوم قضیه ۸.۱۴ را به ترتیب اثبات می کنیم.

**بخش ۱) ساخت، و و :** فرض کنید  $r \in M$  یک نقطه نماینده دلخواه باشد و بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید  $\psi_{GM,r}^{\tilde{A}}$  هر پیمانه ایزومنتریک در  $\mathbb{R}^d$  باشد. ما قرار می دهیم

$$H := \psi_{GM,r}^{\tilde{A}} \text{Stab}_r (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}, \quad (630)$$

که فقط یک نمایش خاص از  $\text{Stab}_r$  نسبت به مختصاتی سازی انتخاب شده است. از آنجا که نگاشتهای پیمانه ایزومورفیسم هستند، ما یک ایزومورفیسم بین این دو گروه به دست می آوریم:

$$\alpha : \text{Stab}_r \rightarrow H, \quad \xi \rightarrow \psi_{GM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1} =: h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r) \quad (631)$$

از آنجا که  $\text{Stab}_r \leq \mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$  قضیه ۸.۳ تضمین می کند که  $h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)$  برای هر  $\xi \in \text{Stab}_p$  عضوی از  $G$  است و بنابراین  $.H \leq G$  است و با محاسبه زیر دیده می شود، که برای هر  $v, w \in \mathbb{R}^d$ ،  $\alpha(vw) = \alpha(v)\alpha(w)$  برقرار است:

$$\begin{aligned} \langle h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r) \cdot v, h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r) \cdot w \rangle &\stackrel{(1)}{=} \left\langle \left( \psi_{GM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \right) \cdot v, \left( \psi_{GM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \right) \cdot w \right\rangle \\ &\stackrel{(2)}{=} \left\langle \psi_{TM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,TM} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} v, \psi_{TM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,TM} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} w \right\rangle \\ &\stackrel{(3)}{=} \eta_r \left( \xi_{*,TM} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} v, \xi_{*,TM} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} w \right) \\ &\stackrel{(4)}{=} \eta_r \left( (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} v, (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} w \right) \\ &\stackrel{(5)}{=} \langle v, w \rangle \end{aligned} \quad (632)$$

مرحله () از معادله (۶۳۱) استفاده کرد. در مرحله () ما عبارت  $(\cdot)$  را از طریق  $h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)$  با عبارت آن از طریق  $\psi_{TM,r}^{\tilde{A}}$  یکی گرفتیم، که با جابجایی نمودارهای معادلات (۲۹۹) و (۲۸۵) توجیه می شود. از آنجا که ما  $\psi_{TM,r}^{\tilde{A}}$  را بدون از دست دادن کلیت، ایزومنتریک فرض کردیم، می توانیم حاصلضرب داخلی  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  را در مرحله () با متريک ريماني  $\eta_r$  يكی بگيریم. مرحله () از اين استفاده می کند که  $\xi \in \text{Stab}_r \leq \mathcal{I}$  یک ایزومنتری است، که بنا به تعریف متريک را حفظ می کند؛ به معادله (۲۶۲) مراجعه کنید. در آخر، ما در مرحله () متريک را از طریق پیمانه ایزومنتریک به

حاصلضرب داخلی روی  $\mathbb{R}^d$  بولبک می‌کنیم. برابری عبارت اولیه و نهایی نشان می‌دهد که  $h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)$  حاصلضرب داخلی را روی  $\mathbb{R}^d$  حفظ می‌کند  
 $\square$  این دقیقاً الزامی است که گروه متعامد را تعریف می‌کند. بنابراین ما داریم که  $H \leq G$  و به همراه که

$$H \leq G \cap d. \quad (633)$$

این گزاره اول از بخش ۱) قضیه ۸.۱۴ را اثبات می‌کند. ما به گزاره دوم از بخش ۱)، یعنی ساخت  $HM$  و  $\text{Isom}_{HM}$  می‌پردازیم.

با توجه به اینکه  $\text{Stab}_r$  یک زیرگروه از  $\mathcal{I}$  است، ما نگاشت خارج قسمتی کانونی

$$q : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/\text{Stab}_r, \quad \phi \rightarrow \phi \cdot \text{Stab}_r \quad (634)$$

را داریم که اعضای گروه  $\phi \in \mathcal{I}$  را به هم‌دسته چپ  $\phi \cdot \text{Stab}_r := \{\phi \xi \mid \xi \in \text{Stab}_r\}$  از  $\text{Stab}_r$  می‌فرستد. به خوبی شناخته شده است که این نگاشت خارج قسمتی،  $\mathcal{I}$  را به یک کلاف اصلی  $\text{Stab}_r/\mathcal{I}$  تبدیل می‌کند، با عمل راست که با ضرب راست  $\xi \in \mathcal{I}$  با اعضای پایدارساز داده می‌شود [؟؟] علاوه بر این،  $\mathcal{I}/\text{Stab}_r$  با فضای همگن  $M$  ایزومورف است. ایزومورفیسم با

$$\beta : \mathcal{I}/\text{Stab}_r \rightarrow M, \quad \phi \cdot \text{Stab}_r \mapsto \phi(r), \quad (635)$$

داده می‌شود، که به وضوح مستقل از انتخاب نماینده هم‌دسته است زیرا نماینده‌گان مختلف با اعضای گروهی که  $r$  را پایدار می‌کنند، متفاوت هستند. توجه داشته باشید که ما می‌توانستیم به همان اندازه  $\mathcal{I}/\text{Stab}_r \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/\text{Stab}_r$  در نظر بگیریم زیرا تار نوعی فقط تا ایزومورفیسم تعریف شده است.

با این مقدمات، ما  $H$ -ساختر  $HM$  را به عنوان یک جایگذاری از کلاف اصلی  $\mathcal{I}$  در  $GM$  (و در نتیجه در  $FM$ ) تعریف می‌کنیم. ما نگاشت جایگذاری را به صورت

$$\mathcal{E} : \mathcal{I} \rightarrow GM, \quad \phi \mapsto \phi_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r), \quad (636)$$

تعریف می‌کنیم، که دوباره به انتخاب ما از پیمانه بستگی دارد زیرا  $(\psi_{GM,r}^{\tilde{A}}(r))^{-1} = (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}}(e))^{-1}$ . می‌توان آن را به عنوان ردیابی یک که جایگذاری شده از  $\mathcal{I}$  در  $GM$  با پوش فوروارد کردن چارچوب  $\sigma^{\tilde{A}}(r) \in G_r M$  در نظر گرفت. اینکه این واقعاً یک جایگذاری معتبر را می‌دهد، تضمین شده است زیرا عمل ایزومتری‌ها روی کلاف چارچوب بدون نقطه ثابت است. جایگذاری  $\mathcal{E}$  یک نگاشت کلاف روی  $\beta$  است، یعنی  $\mathcal{E} \circ \beta = \pi_{GM} \circ \mathcal{E}$ . برای نشان دادن این، کافی است هر دو طرف را بر روی یک عضو دلخواه  $\mathcal{I}$   $\phi$  اعمال کنیم، که نتیجه یکسانی می‌دهد:  $\beta \circ q(\phi) = \phi(r)$  و  $\mathcal{E}(\phi) = \pi_{GM} \phi_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) = \phi \pi_{GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) = \phi(r) \beta(\phi \cdot \text{Stab}_r) = \phi(r)$ . نگاشت جایگذاری علاوه بر این هموردای-راست است: برای هر  $\phi \in \mathcal{I}$  و  $\xi \in \text{Stab}_r$   $\mathcal{E}(\phi \xi) = \phi_{*,GM} \xi_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r)$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\phi \xi) &= \phi_{*,GM} \xi_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) \\ &= \phi_{*,GM} \xi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}(e) \\ &= \phi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \psi_{GM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}(e) \\ &= \phi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1} (h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)) \\ &= \phi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}(e) \triangleleft h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r) \\ &= \mathcal{E}(\phi) \triangleleft h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r), \end{aligned} \quad (637)$$

که در آن ما از هموردایی-راست  $G$  (و در نتیجه  $H$ ) از  $(\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}$  (و در نتیجه  $\psi^{\tilde{A}}_{GM,r}$ ) در مرحله ماقبل آخر استفاده کردیم. در مجموع، این ویژگی‌ها نشان می‌دهند که  $\mathcal{E}$  یک نگاشت کلاف اصلی است که نمودار زیر را جاچایانی می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} \times \text{Stab}_r & \xrightarrow{\mathcal{E} \times \alpha} & GM \times H \\ \blacktriangleleft \downarrow & & \downarrow \triangleleft \\ \mathcal{I} & \xrightarrow{\mathcal{E}} & GM \\ q \downarrow & & \downarrow \pi_{GM} \\ \mathcal{I}/\text{Stab}_r & \xrightarrow{\beta} & M \end{array} \quad (638)$$

$$HM := \mathcal{E}(\mathcal{I}) = \{\phi_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) \mid \phi \in \mathcal{I}\} \quad (639)$$

از  $\mathcal{E}$  به همراه عمل راست و نگاشت تصویر محدود شده از  $GM$  تعریف می شود. از آنجا که جایگذاری ها لزوماً یک به یک هستند، ما به طور خاص داریم که  $\mathcal{I}$  و  $HM$  به عنوان کلاف های اصلی ایزو مورف هستند.

به عنوان نکه آخر، ما استدلال می کنیم که  $\mathcal{I}$  و  $\{\theta \in \text{Isom}(M) \mid \theta_{*,GM} HM = HM\}$  منطبق هستند. برابری  $\text{Isom}_{HM} = \{\theta \in \text{Isom}(M) \mid \theta_{*,GM} HM = HM\}$  برای یک  $\theta \in \text{Isom}(M)$  داده شده برقرار است اگر  $\theta_{*,GM} HM = HM$  همزمان یک زیر مجموعه و یک ابر مجموعه از  $HM$  باشد. مورد اول، نیازمند این است که برای هر عضو  $\theta_{*,GM} HM \subseteq HM$ .  $\theta_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) \in HM$  برای یک  $\theta_{*,GM} \phi'_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) \in HM$  نیازمند این است که  $\theta_{*,GM} \phi'_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) = \theta_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r)$  باشد. داشته باشد به طوری که  $\theta_{*,GM} \phi'_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) = \theta_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r)$  وجود داشته باشد به طوری که  $\theta_{*,GM} \phi'_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) = \theta_{*,GM} \phi'_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r)$  از آنجا که عمل ایزو متري ها روی کلاف چار چوب بدون نقطه ثابت است، این نیازمند  $\phi'_{*,GM} \phi'^{-1}_{*,GM} = \theta_{*,GM} \theta'^{-1}_{*,GM}$  است، که به نوبه خود  $\phi'_{*,GM} \phi'^{-1}_{*,GM} = \theta_{*,GM} \theta'^{-1}_{*,GM}$  را نتیجه می دهد. همانطور که به راحتی می توان بررسی کرد، مورد دوم منجر به همان الزام می شود. هم  $\phi'$  و هم  $\phi$  اعضای  $\mathcal{I}$  هستند به طوری که  $\theta$  باید عضوی از  $\mathcal{I}$  باشد. این ادعای

$$\text{Isom}_{HM} = \mathcal{I}. \quad (640)$$

را اثبات می کند.

**بخش ۲ همارزی تبدیلات میدان کرنل  $\mathcal{I}$ -هموردا و کانولوشن های  $\mathbb{Q}$ :** برای اثبات گزاره دوم قضیه، ما یک تبدیل میدان کرنل  $\mathcal{I}$ -هموردا را روی  $M$  می سازیم و نشان می دهیم که با یک کانولوشن  $HM$  معادل است. قضیه ۸۸ اثبات کرد که تبدیلات میدان کرنل  $\mathcal{I}$ -هموردا به میدان های کرنل  $\mathcal{I}$ -ناوردا نیاز دارند، که طبق قضیه ۸.۱۳ می توانند به طور معادل بر حسب یک میدان از کرنل های نماینده  $(\pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)) \rightarrow \pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M))$  از یک کد گذاری شوند. برای مورد یک فضای ممگن  $M$  فضای خارج قسمتی  $\mathcal{I} \setminus M$  عضو منفرد تشکیل شده است، که ما آن را با  $r = r_M(\mathcal{I} \setminus M) \in M$  نمایش می دهیم. بنابراین کل میدان کرنل ناوردا با یک کرنل منفرد  $\widehat{Q}|_r = \widehat{Q}(\mathcal{I} \setminus M)|_r$  تشکیل شده است، که ما آن را با  $\widehat{Q} : T_r M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\mathbb{Q},r}, \mathcal{A}_{\mathbb{Q},r})$  معرفی می شود. این کرنل باید محدودیت پایدار ساز  $\widehat{Q}(\xi)^{-1} = \widehat{Q}(\xi)$  را برآورده کند و از طریق ایزو مورفیسم ارتقا  $\widehat{Q}(v) = \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \widehat{Q} \Phi_{r_{TM}}(v)^{-1}$  را برآورده کند. همانطور که در ادامه نشان داده می شود، کرنل نماینده منفرد با محدودیت  $r$  دقیقاً متناظر با یک کرنل الگوی  $M$  به اشتراک گذاشته می شود. همانطور که در ادامه نشان داده می شود، کرنل نماینده منفرد با محدودیت  $r$  دقیقاً متناظر با اشتراک وزن کانولوشنی در تعریف ۷.۴ است.

برای صریح کردن همارزی محدودیت های کرنل، ما کرنل  $\widehat{Q}$  را از طریق معادله (۲۴۵) نسبت به همان پیمانه  $\tilde{A}$  که قبلاً در نظر گرفته شد، به صورت  $\psi_{\mathbb{Q},r}^{\tilde{A}} \widehat{Q} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} = K$  بیان می کنیم. ضریب حجم چار چوب  $\sqrt{|\eta_r^{\tilde{A}}|}$  در اینجا حذف می شود زیرا ما پیمانه را بدون از دست دادن کلیت، ایزو متريک فرض کردیم. سپس محدودیت پایدار ساز نسبت به این پیمانه منجر به

$$\begin{aligned} K &= \psi_{\mathbb{Q},r}^{\tilde{A}} \widehat{Q} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \\ &= \psi_{\mathbb{Q},r}^{\tilde{A}} \xi_{*,\mathbb{Q}} \widehat{Q} \xi_{*,TM}^{-1} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \\ &= \psi_{\mathbb{Q},r}^{\tilde{A}} \xi_{*,\mathbb{Q}} (\psi_{\mathbb{Q},r}^{\tilde{A}})^{-1} K \psi_{TM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,TM}^{-1} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \\ &= \rho_{\mathbb{Q}}(h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)) K (h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r))^{-1} \\ &= \frac{1}{|\det h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)|} \rho_{\mathbb{Q}}(h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)) K (h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r))^{-1} \end{aligned} \quad (641)$$

برای هر  $\mathbb{Q}$  در  $\text{Stab}_r$  می شود. توجه داشته باشید که می توانیم ضریب دترمینان را در مرحله آخر اضافه کنیم زیرا  $h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)$  همانطور که در بالا نشان داده شد. بنابراین ایزو مورفیسم بین  $Stab_r$  و  $H$  در معادله (۶۳۱) به ما اجازه می دهد تا محدودیت پایدار ساز را به عنوان محدودیت  $H$ -راهنمایی پذیری

$$K = \frac{1}{|\det h|} \rho_{\mathbb{Q}}(h) \circ K \circ h^{-1} \quad \forall h \in H. \quad (642)$$

روی کرنل های الگوی یک کانولوشن  $HM$  بازنویسی کنیم.<sup>۱۵۶</sup>

از آنجا که  $d \in H \leq G \cap d$ ، ضریب دترمینان همیشه حذف می شود و بنابراین می توان آن را نادیده گرفت.

آنچه باقی می‌ماند نشان دادن هم‌ارزی دو روش اشتراک وزن است. اشتراک وزن از طریق  $\widehat{\Lambda}$  که از طریق پیمانه  $\widetilde{A}$  بر حسب  $K$  بیان می‌شود، به صورت

$$\begin{aligned}\widehat{\Lambda}(\widehat{Q})(v) &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \widehat{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \widehat{Q} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM}^{-1}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} (\psi_{\square\Box\Box,r}^{\widetilde{A}})^{-1} \psi_{\square\Box\Box,r}^{\widetilde{A}} \widehat{Q} (\psi_{TM,r}^{\widetilde{A}})^{-1} \psi_{TM,r}^{\widetilde{A}} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM}^{-1}(v) \\ &= \left( \psi_{\square\Box\Box,r}^{\widetilde{A}} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}}^{-1} \right)^{-1} K \left( \psi_{TM,r}^{\widetilde{A}} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM}^{-1} \right)(v).\end{aligned}\quad (643)$$

خوانده می‌شود. خط آخر در حال حاضر بسیار شیوه به تعریف میدان‌های کرنل کانولوشنی  $HM$  در تعریف ۷.۴ است. برای اثبات هم‌ارزی آنها، باید نشان دهیم (۱) که پیمانه‌های القا شده توسط ایزومنتری  $\pi_{TM}$  با  $\psi_{\square\Box\Box,r}^{\widetilde{A}}$  در  $(v)$  با پیمانه‌های اصلی  $\psi_{TM,r}^{\widetilde{A}}$  و  $\Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}}(\psi_{\square\Box\Box,r}^{\widetilde{A}})^{-1}$  برابر باشند (برای توضیح ضربه حجم چارچوب گشته  $H$ -سازگار هستند و (۲) که پیمانه‌های القا شده متناظر با چارچوب‌های مرجع با حجم واحد هستند (برای اثبات هم‌ارزی آنها، باید نشان دهیم (۳) که  $\Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}}(\psi_{\square\Box\Box,r}^{\widetilde{A}})^{-1}$  با معادله  $\Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} : TM \rightarrow \mathcal{I}$  با معادله  $\Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} : HM \rightarrow \mathcal{I}$  منطبق است. بنابراین قضیه ۸.۳ تأیید می‌کند که این پیمانه‌های القا شده با هر  $H$ -اطلس از  $HM$  سازگار هستند. نکته دوم بلا فاصله نتیجه می‌شود زیرا  $H \leq d$  (یا زیرا  $(v)$  یک ایزومنتری است و  $\widetilde{A}$  ایزومنتریک است). بنابراین دیده می‌شود که اشتراک وزن  $\widehat{Q}$  از طریق ایزومورفیسم ارتقای معادله (۶۴۳) اشتراک وزن کانولوشنی  $HM$  از کرنل  $H$ -راهبری پذیر  $K$  در تعریف ۷.۴ منطبق است. این به همراه نتیجه‌ای که محدودیت کرنل پایدارساز منجر به محدودیت  $H$ -راهبری پذیری می‌شود، دلالت بر این دارد که میدان کرنل ارتقا یافته معادل یک میدان کرنل کانولوشنی  $HM$  است، که بخش (۲) قضیه را اثبات می‌کند.

یک انتخاب متفاوت از پیمانه  $\widetilde{A}$  ممکن است برای  $d < G$  منجر به یک زیرگروه مزدوج  $\overline{H}$  به  $H$  و یک جایگذاری  $\overline{HM}$  از  $HM$  شود که با متفاوت است. همانطور که به راحتی می‌توان برسی کرد، محدودیت  $H$ -راهبری پذیری اجازه می‌دهد تا همان کرنل را نسبت به  $H$ -راهبری پذیری در رابطه با  $HM$  توصیف کنیم، زیرا تبدیل حذف می‌شود.

## ج کانولوشن‌های راهبری‌پذیر کروی به عنوان کانولوشن‌های $\mathbb{R}$ اثبات‌ها

این بخش اثبات‌های قضایای ۱۱.۱ و ۱۱.۲ را از بخش ۲.۱۱ در دو زیربخش زیر ارائه می‌دهد. در مجموع، این قضایا تأیید می‌کنند که کرنل‌های کانولوشن کروی  $\text{Stab}_n$ -راهبری‌پذیر توسط  $\mathbb{R}$  [معادل با کرنل‌های خاص  $G$ -راهبری‌پذیر است، و کانولوشن‌های کروی  $\mathcal{I}$ -هموردا با این کرنل‌ها معادل با کانولوشن‌های  $GM$  متناظر ماستند.

### ج.۱ اثبات قضیه ۱۱.۱ ایزومورفیسم فضای کرنل

قضیه ۱۱.۱ یک ایزومورفیسم

$$\Omega : \mathcal{K}_{\rho_{\square\Box\Box}, \rho_{\square\Box\Box}}^{G, B_{\mathbb{R}}(\cdot, \pi)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_{\rho_{\square\Box\Box}, \rho_{\square\Box\Box}}^{\text{Stab}_n} \quad (644)$$

بین فضای  $\mathcal{K}_{\rho_{\square\Box\Box}, \rho_{\square\Box\Box}}^{G, B_{\mathbb{R}}(\cdot, \pi)}$  از کرنل‌های  $G$ -راهبری‌پذیر روی  $\mathbb{R}$  و فضای  $\mathcal{K}_{\rho_{\square\Box\Box}, \rho_{\square\Box\Box}}^{\text{Stab}_n}$  از کرنل‌های  $\text{Stab}_n$ - $G \cong \text{Stab}_n$  راهبری‌پذیر روی  $\mathbb{R}$  برقرار می‌کند، که در معادلات (۴۴۹) و (۴۴۸) تعریف شده‌اند. با توجه به پیمانه‌های دلخواه  $N$  در قطب شمال  $n$  که کرنل حول آن متتمرکز است، و پیمانه‌های  $P$  در هر نقطه دیگر  $p$  این ایزومورفیسم با

$$\Omega(K) : S^* \setminus n \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square\Box\Box} \times c_{\square\Box\Box}}, \quad p \mapsto [\Omega(K)](p) := K(\psi_{TM,n}^N \log_n p) \rho_{\square\Box\Box}(g_{n \leftarrow p}^{NP}) \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}^{-1}. \quad (645)$$

با مخفف‌نویسی  $v = \exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1}$  داده می‌شود.

اثبات: اینکه  $\Omega^{-1}$  یک وارون خوش تعریف برای  $\Omega$  است، به راحتی با جایگذاری عبارات آنها و تأیید اینکه

$$\Omega \circ \Omega^{-1} = \text{id}_{\mathcal{K}_{\rho_{\square\Box\Box}, \rho_{\square\Box\Box}}^{\text{Stab}_n}} \quad \square\Box\Box \quad \Omega^{-1} \circ \Omega = \text{id}_{\mathcal{K}_{\rho_{\square\Box\Box}, \rho_{\square\Box\Box}}^{G, B_{\mathbb{R}}(\cdot, \pi)}} \quad (647)$$

برقرار هستند، نشان داده می شود. برای دیدن این، توجه داشته باشید که پیمانه های  $\psi_{TM,n}^N(g_{n \leftarrow p}^{NP})$  و ضریب حجم  $\sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}$  همیشه وارون پذیر هستند و دو مورد اخیر جابجا می شوند زیرا ضریب مقیاس بندی حجم، یک اسکالر است. نگاشت  $\log_n : S^* \setminus n \rightarrow B_{\mathbb{R}}(0, \pi)$  را روی  $B_{\mathbb{R}}(0, \pi) \rightarrow S^* \setminus n$  وارون می شود.

محدودیت های کرنل دو فضای کرنل علاوه بر این یکدیگر را نتیجه می هند. با توجه به هر کرنل  $G$ -راهبری پذیر  $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{***}}, \rho_{\text{***}}}^{G, B_{\mathbb{R}}(*, \pi)}$  در  $\Omega(K) \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{***}}, \rho_{\text{***}}}^{\text{Stab}_n}$  محدودیت  $\text{Stab}_n$ -راهبری پذیر را از معادله (۴۴۸) برآورده می کند. این برای هر  $\xi \in \text{Stab}_n$  هر  $p \in S^* \setminus n$  و هر پیمانه  $X$  در  $(p)$  به صورت زیر نشان داده می شود:

$$\begin{aligned} [\Omega(K)](\xi(p)) &\stackrel{(1)}{=} K(\psi_{TM,n}^N \log_n \xi(p)) \cdot \rho_{\text{***}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(2)}{=} K(\psi_{TM,n}^N \xi_{*,TM} \log_n p) \cdot \rho_{\text{***}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(3)}{=} K(g_\xi^{NN}(n) \psi_{TM,n}^N \log_n p) \cdot \rho_{\text{***}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(4)}{=} \rho_{\text{***}}(g_\xi^{NN}(n)) \cdot K(\psi_{TM,n}^N \log_n p) \cdot \rho_{\text{***}}(g_\xi^{NN}(n))^{-1} \rho_{\text{***}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(5)}{=} \rho_{\text{***}}(g_\xi^{NN}(n)) \cdot K(\psi_{TM,n}^N \log_n p) \cdot \rho_{\text{***}}(g_\xi^{NN}(n))^{-1} \rho_{\text{***}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(6)}{=} \rho_{\text{***}}(g_\xi^{NN}(n)) \cdot K(\psi_{TM,n}^N \log_n p) \cdot \rho_{\text{***}}(g_{n \leftarrow p}^{NP}) \rho_{\text{***}}(g_\xi^{XP}(p))^{-1} \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(7)}{=} \rho_{\text{***}}(g_\xi^{NN}(n)) \cdot [\Omega(K)](p) \cdot \rho_{\text{***}}(g_\xi^{XP}(p))^{-1} \end{aligned} \quad (448)$$

مرحله اول فقط  $\Omega(K)$  را بسط داد، در حالی که مرحله دوم از  $p$  که از معادله (۳۰۳) نتیجه می شود، به  $\log_n \xi(p) = \xi_{*,TM} \log_n -1(n)$  استفاده کرد زیرا  $\xi \in \text{Stab}_n$  در مرحله سوم، ما از تعریف تبدیلات پیمانه القا شده توسط ایزومتری در معادله (۲۸۴) استفاده کردیم. مرحله چهارم از محدودیت  $G$ -راهبری پذیری از معادله (۴۴۹) استفاده کرد. مرحله پنجم عنصر حجم  $\sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|}$  را با عنصر حجم در  $\sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}$  جایگزین کرد، که این کار ممکن است زیرا کل هندسه ریمانی کره، از جمله متريک و نگاشت نمایی و بنابراین ضرایب حجم مخصوصات نرمال ژئودزیک، تحت عمل  $\text{Stab}_n$  ناوردا است. قبل از شناسایی  $(K)$  در مرحله آخر، مرحله ششم از همانی

$$\begin{aligned} \rho_{\text{***}}(g_\xi^{NN}(n))^{-1} \rho_{\text{***}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) &= [\psi_{A_{\text{***}}, n}^N \xi_{*, A_{\text{***}}}^{-1} (\psi_{A_{\text{***}}, n}^N)^{-1}] [\psi_{A_{\text{***}}, n}^N \mathcal{P}_{A_{\text{***}}, n \leftarrow \xi(p)} (\psi_{A_{\text{***}}, \xi(p)}^X)^{-1}] \\ &= \psi_{A_{\text{***}}, n}^N \xi_{*, A_{\text{***}}}^{-1} \mathcal{P}_{A_{\text{***}}, n \leftarrow \xi(p)} (\psi_{A_{\text{***}}, \xi(p)}^X)^{-1} \\ &= \psi_{A_{\text{***}}, n}^N \mathcal{P}_{A_{\text{***}}, n \leftarrow p} \xi_{*, A_{\text{***}}}^{-1} (\psi_{A_{\text{***}}, \xi(p)}^X)^{-1} \\ &= [\psi_{A_{\text{***}}, n}^N \mathcal{P}_{A_{\text{***}}, n \leftarrow p} (\psi_{A_{\text{***}}, p}^P)^{-1}] [\psi_{A_{\text{***}}, p}^P \xi_{*, A_{\text{***}}}^{-1} (\psi_{A_{\text{***}}, \xi(p)}^X)^{-1}] \\ &= \rho_{\text{***}}(g_{n \leftarrow p}^{NP}) \rho_{\text{***}}(g_\xi^{XP}(p))^{-1}, \end{aligned} \quad (449)$$

استفاده کرد، که به طور حیاتی بر جابجایی انتقال دهنده ها و پوش فورواردهای ایزومتری از معادله (۳۰۵) متکی است.

برای جهت مخالف، فرض کنید یک کرنل  $\kappa \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{***}}, \rho_{\text{***}}}^{\text{Stab}_n}$ -راهبری پذیر  $\Omega^{-1}(\kappa)$  محدودیت  $G$ -راهبری پذیری را از معادله (۴۴۹) برآورده می کند. برای نشان دادن این، فرض کنید  $\xi \in \text{Stab}_n$  و  $g \in G$ ،  $v \in B_{\mathbb{R}}(0, \pi)$  عضو یکتای پایدار ساز باشد به طوری که  $g = g_\xi^{NN}(n) = \psi_{TM,n}^N \xi_{*,TM} (\psi_{TM,n}^N)^{-1}$ . برای اختصار، ما  $v := \exp_n(\psi_{TM,n}^N)$  و در

نتیجه  $\xi(p) = \exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1} g\mathfrak{v}$  می‌کنیم، که با مرحله ۱-۳ در ادامه توجیه می‌شود. سپس می‌بایست:

$$\begin{aligned}
[\Omega^{-1}(\kappa)](g\mathfrak{v}) &\stackrel{(1)}{=} \kappa(\exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1}(g\mathfrak{v})) \cdot \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|} \\
&\stackrel{(2)}{=} \kappa(\exp_n \xi_{*,TM}(\psi_{TM,n}^N)^{-1}\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|} \\
&\stackrel{(3)}{=} \kappa(\xi \exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1}\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|} \\
&\stackrel{(4)}{=} \rho_{\square}(g_{\xi}^{NN}(n)) \cdot \kappa(\exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1}\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\square}(g_{\xi}^{XP}(p))^{-1} \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|} \\
&\stackrel{(5)}{=} \rho_{\square}(g_{\xi}^{NN}(n)) \cdot \kappa(\exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1}\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\square}(g_{\xi}^{XP}(p))^{-1} \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|} \\
&\stackrel{(6)}{=} \rho_{\square}(g_{\xi}^{NN}(n)) \cdot \kappa(\exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1}\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\square}(g_{n \leftarrow p}^{NP})^{-1} \rho_{\square}(g_{\xi}^{NN}(n))^{-1} \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|} \\
&\stackrel{(7)}{=} \rho_{\square}(g_{\xi}^{NN}(n)) \cdot [\Omega^{-1}(\kappa)](\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\square}(g_{\xi}^{NN}(n))^{-1} \\
&\stackrel{(8)}{=} \rho_{\square}(g) \cdot [\Omega^{-1}(\kappa)](\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\square}(g)^{-1} \tag{۶۵۰}
\end{aligned}$$

مراحل اول تا سوم ( $\kappa$ ) را بسط دادند، از تعریف  $\xi$  بر حسب  $g$  و جابجایی نگاشتهای نمایی با پوش فورواردهای ایزومنتری، معادله (۳۰۳)، استفاده کردند. در مرحله چهارم، از محدودیت  $\text{Stab}_n$ -راهبری پذیری  $\kappa$  از معادله (۴۴۸) استفاده شده است. مرحله پنجم دوباره عنصر حجم ریمانی را در  $(\xi)$  با عنصر حجم در  $p$  جایگزین کرد زیرا آنها برابر هستند. مرحله ششم از رابطه

$$\begin{aligned}
\rho_{\square}(g_{\xi}^{XP}(p))^{-1} \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} &= \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX} g_{\xi}^{XP}(p))^{-1} \\
&= \left( [\psi_{A_{\square}, n}^N \mathcal{P}_{A_{\square}, n \leftarrow \xi(p)} (\psi_{A_{\square}, \xi(p)}^X)^{-1}] [\psi_{A_{\square}, \xi(p)}^X \xi_{*, A_{\square}} (\psi_{A_{\square}, p}^P)^{-1}] \right)^{-1} \\
&= \left( \psi_{A_{\square}, n}^N \mathcal{P}_{A_{\square}, n \leftarrow \xi(p)} \xi_{*, A_{\square}} (\psi_{A_{\square}, p}^P)^{-1} \right)^{-1} \\
&= \left( \psi_{A_{\square}, n}^N \xi_{*, A_{\square}} \mathcal{P}_{A_{\square}, n \leftarrow p} (\psi_{A_{\square}, p}^P)^{-1} \right)^{-1} \\
&= \left( \psi_{A_{\square}, n}^N \xi_{*, A_{\square}} (\psi_{TM,n}^N)^{-1} \psi_{TM,n}^N \mathcal{P}_{A_{\square}, n \leftarrow p} (\psi_{A_{\square}, p}^P)^{-1} \right)^{-1} \\
&= \rho_{\square}(g_{n \leftarrow p}^{NP})^{-1} \rho_{\square}(g_{\xi}^{NN}(n))^{-1}, \tag{۶۵۱}
\end{aligned}$$

استفاده کرد، که دوباره بر جابجایی انتقال‌دهندها و پوش فورواردهای ایزومنتری از معادله (۳۰۵) متكی است. دو مرحله آخر ( $\kappa$ ) را شناسایی می‌کنند و با به تعریف  $\xi$  داریم که  $g_{\xi}^{NN}(n) = g$ .

در مجموع، این استدلال‌ها نشان می‌دهند که  $\Omega$  واقعاً یک ایزومنتری می‌باشد.

□

## ج. ۲ اثبات قضیه ۱۱.۲ هم‌ارزی کانولوشن‌های راهبری‌پذیر کروی و

قضیه ۱۱.۲ ادعا می‌کند که کانولوشن‌های  $GM$  با یک کرنل  $G$ -راهبری‌پذیر  $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^{G, B_{\mathbb{R}^d}(\cdot, \cdot, \pi)}$  معادل کانولوشن کروی با کرنل  $n$ - $\text{Stab}_n$  راهبری‌پذیر  $\Omega(K) \in \mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^{\text{Stab}_n}$  است. کانولوشن کروی با یک کرنل  $n$ - $\text{Stab}_n$ -راهبری‌پذیر  $\in \mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^{\text{Stab}_n}$  از [۴۵۴] در اینجا در معادله به صورت نقطه‌ای به شکل

$$[\kappa *_{S'} f]^P(p) = \int_{S' \setminus p} \kappa(\phi_p^{-1} q) \rho_{\square}(g_{\phi_p^{-1}}^{XQ}(q)) f^Q(q) dq, \tag{۶۵۲}$$

تعریف شده بود، که در آن  $P$ ،  $Q$  و  $X$  به ترتیب پیمانه‌های دلخواه در  $p$  و  $q$  و  $\phi_p^{-1}(q)$  را نشان می‌دهند. ایزومنتری  $\mathcal{I} \in \mathcal{I}$  به طور یکتا با الزام  $(\phi_p)_{*, GM} \sigma^N(n) = \sigma^P(p)$  مشخص می‌شود. توجه داشته باشید که این به طور خاص دلالت بر

$$\phi_p(n) = p \tag{۶۵۳}$$

و با استفاده از تعریف مقاطع  $GM$  (میدان‌های چارچوب) بر حسب پیمانه‌های وارون از معادله (۱۸۹) بر

$$\psi_{TM,n}^N \circ (\phi_p)^{-1}_{*, GM} = \psi_{TM,p}^P, \tag{۶۵۴}$$

دارد، که هر دو را در ادامه استفاده خواهیم کرد. با این مقدمات، به اثبات قضیه ۱۱.۲ یعنی همارزی

$$\Omega(K) \star_{S^*} f = K \star_{GM} f \quad (655)$$

کانولوشن‌ها می‌پردازیم.

اثبات: از آنجا که  $\Omega(\kappa)$  روی  $S^* \setminus -n$  تعریف شده است، کرنل تبدیل شده  $\phi_p^{-1} \circ \Omega(\kappa) \circ \phi_p$  روی  $S^* \setminus p$  تعریف شده است. بنابراین، با جایگذاری  $\Omega(\kappa)$  در تعریف نقطه‌ای کانولوشن کروی در معادله (۴۵۴) به

$$\begin{aligned} [\Omega(K) \star_{S^*} f]^P(p) &= \int_{S^* \setminus -p} [\Omega(\kappa)](\phi_p^{-1}q) \rho_{\square}(g_{\phi_p^{-1}(q)}^{XQ}(q)) f^Q(q) dq \\ &= \int_{S^* \setminus -p} K(\psi_{TM,n}^N \log_n \phi_p^{-1}q) \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \phi_p^{-1}(q)}^{NX}) \rho_{\square}(g_{\phi_p^{-1}(q)}^{XQ}(q)) f^Q(q) \sqrt{|\eta_{\phi_p^{-1}(q)}^{\partial/\partial v}|}^{-1} dq, \end{aligned} \quad (656)$$

می‌رسیم، که در آن مرحله دوم با بسط دادن  $\Omega(K)$  همانطور که در معادله (۴۵۲) تعریف شده است، به دست می‌آید. برای ساده‌سازی این عبارت، توجه داشته باشید که

$$\psi_{TM,n}^N \log_n \phi_p^{-1}(q) = \psi_{TM,n}^N(\phi_p)^{-1}_{*,TM} \log_{\phi_p(n)}(q) = \psi_{TM,p}^P \log_p(q), \quad (657)$$

که از معادله (۳۰۳) در مرحله اول و معادلات (۶۵۳) و (۶۵۴) در مرحله دوم نتیجه می‌شود. علاوه بر این توجه داشته باشید که،

$$\begin{aligned} &\rho(g_{n \leftarrow \phi_p^{-1}(q)}^{NX}) \rho(g_{\phi_p^{-1}(q)}^{XQ}(q)) \\ &= [\psi_{A,n}^N \mathcal{P}_{A,n \leftarrow \phi_p^{-1}(q)}(\phi_p^{-1})] [\psi_{A,\phi_p^{-1}(q)}^X(\phi_p)^{-1}_{*,A}(\psi_{A,q}^Q)^{-1}] \quad (\text{معادلات (۲۱۳) و (۳۰۲)}) \\ &= \psi_{A,n}^N \mathcal{P}_{A,n \leftarrow \phi_p^{-1}(q)}(\phi_p)^{-1}_{*,A}(\psi_{A,q}^Q)^{-1} \quad (\text{پیمانه‌های وارون حذف شده}) \\ &= \psi_{A,n}^N(\phi_p)^{-1}_{*,A} \mathcal{P}_{A,\phi_p(n) \leftarrow q}(\psi_{A,q}^Q)^{-1} \quad (\text{معادله (۳۰۵)}) \\ &= \psi_{A,p}^P \mathcal{P}_{A,p \leftarrow q}(\psi_{A,q}^Q)^{-1} \quad (\text{معادله (۶۵۴)}) \\ &= \rho(g_{p \leftarrow q}^{PQ}). \quad (\text{معادله (۲۱۳)}) \end{aligned}$$

با جایگذاری این دو همانی، به دست می‌آوریم

$$[\Omega(K) \star_{S^*} f]^P(p) = \int_{S^* \setminus -p} K(\psi_{TM,p}^P \log_p q) \rho_{\square}(g_{p \leftarrow q}^{PQ}) f^Q(q) \sqrt{|\eta_{\phi_p^{-1}(q)}^{\partial/\partial v}|}^{-1} dq,$$

برای ادامه، انگرال را در مختصات نرمال ژئوذیک  $S^* \setminus -p \rightarrow B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi)$ ،  $q \mapsto v(q) := \psi_{TM,p}^P \log_p q$  از  $S^* \setminus -p$  که در نقطه  $p$  متمرکز است، بیان می‌کنیم. این کار ضریب حجم ریمانی  $\sqrt{|\eta_{\phi_p^{-1}(q)}^{\partial/\partial v}|}$  را حذف می‌کند (و در نتیجه ظاهر آن را در تعریف  $\Omega$  توجه می‌کند)، به طوری که کانولوشن کروی به

$$\begin{aligned} [\Omega(K) \star_{S^*} f]^P(p) &= \int_{B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi)} K(v) \rho_{\square}(g_{p \leftarrow \exp_p(\psi_{TM,p}^P)^{-1}v}^{PQ}) f^Q(\exp_p(\psi_{TM,p}^P)^{-1}v) dv, \\ &= \int_{B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi)} K(v) [\text{Exp}_p^* f]^P(v) dv, \\ &= [K \star_{GM} f]^P(p). \end{aligned} \quad (658)$$

می‌شود. از آنجا که تمام آرگومان‌ها مستقل از نقطه انتخاب شده  $p$  و پیمانه‌های انتخاب شده هستند، این دلالت بر

$$\Omega(K) \star_{S^*} f = K \star_{GM} f, \quad (659)$$

در یک چارچوب مستقل از مختصات دارد، که قضیه را اثبات می‌کند.  $\square$

## چ ۷.۶ وجود و همواری تبدیلات میدان کرنل

در تعریف ۷.۶، ما تبدیلات میدان کرنل  $\mathcal{T}_K$  را به عنوان تبدیلات انتگرالی هموار

$$\mathcal{T}_K : \Gamma(\mathcal{A}_{\text{}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\text{}}) \quad (660)$$

پیشنهاد کردیم که توسط یک میدان کرنل  $K$  (تعریف ۷.۲) پارامتری شده و به صورت نقطه‌ای با

$$[\mathcal{T}_K(f)](p) := \int_{T_p M} K(v) \text{Exp}_p^* f(v) dv = \int_{T_p M} K(v) \mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\text{}}, p \leftarrow \exp_p v} f(\exp_p v) dv. \quad (661)$$

داده می‌شوند. تبدیلات میدان کرنل شامل کانولوشن‌های  $GM$  از تعریف ۷.۸ به عنوان موارد خاص برای میدان‌های کرنل کانولوشنی  $GM$  هستند. در اینجا ما به طور خلاصه خوش‌تعریف بودن تبدیلات میدان کرنل را مورد بحث قرار می‌دهیم. روشن است که انتگرال دهنده معادله (۶۶۱) برای هر  $v \in T_p M$  و  $p \in M$  قرار دارد. آنچه باقی می‌ماند نشان دادن وجود انتگرال و همواری میدان ویژگی حاصل است. در ادامه ابتدا چند ملاحظه کلی در مورد چگونگی پرداختن به این پرسش‌ها ارائه می‌دهیم. سپس قضیه ۷.۷ را اثبات خواهیم کرد، یعنی خوش‌تعریف بودن تبدیلات میدان کرنل برای مورد خاص میدان‌هایی از کرنل‌ها که دارای تکیه‌گاه فشرده روی یک گوی با شاعع ثابت حول مبدأ هستند.

**وجود:** وجود و همواری تبدیلات میدان کرنل نیازمند یک انتخاب مناسب از میدان کرنل  $K$  است. مشابه مورد کانولوشن‌های متعارف روی  $M = \mathbb{R}$ , الزاماً بر روی  $K$  برای اینکه تبدیل میدان کرنل وجود داشته باشد، به ویژگی‌های خاص میدان ویژگی وروی ( $f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{}})$ ) بستگی دارد.<sup>۱۵۷</sup> به طور کلی،  $K$  باید به اندازه کافی سریع افت کند تا انتگرال دهنده در معادله (۶۶۱) انتگرال پذیر شود.

یک مورد خاص با اهمیت عملی بالا، کرنل‌های  $K_p : T_p M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{}}, \mathcal{A}_{\text{}})$  هستند که در هر  $p \in M$  دارای تکیه‌گاه فشرده هستند. در این حالت، وجود انتگرال همیشه تضمین شده است. برای دیدن این، توجه داشته باشید که میدان‌های ویژگی (وروی) و میدان‌های کرنل به عنوان هموار تعریف شده‌اند. همواری متريک علاوه بر این دلالت بر این دارد که چگالی حجم ريماني، نگاشت نمایي و انتقال موازي هموار هستند [۱]. در ترکيب، كل انتگرال دهنده در معادله (۶۶۱) به عنوان یکتابع هموار و در نتيجه پيوسنه از  $T_p M$  به  $\mathcal{A}_{\text{}}$  دیده می‌شود. اگر علاوه بر اين داري تکيه‌گاه فشرده باشد، انتگرال دهنده پيوسنه و داري تکيه‌گاه فشرده روی  $T_p M$  می‌شود، که با تعديمي از قضيه مقدار اكسترم، دلالت بر اين دارد که تصویر آن فشرده است (و در يك تربوياليزاسيون محلی  $\mathbb{R}^d$  از  $\mathcal{A}_{\text{}}$  کرايان دار است) [۱]. اين وجود انتگرال را تضمين می‌کند [۱].

بسته به كاربرد، الزام بر روی تکيه‌گاه  $K$  ممکن است تسهيل شود. به عنوان مثال، تصاوير روی  $M = \mathbb{R}^d$  معمولاً خود داري تکيه‌گاه فشرده هستند، به طوري که هچ ویژگي اضافي از  $K$  به جز همواری آن لازم نیست.

**همواری:** ما به بحث در مورد همواری تبدیلات میدان کرنل می‌پردازیم، یعنی ویژگی آنها برای نگاشت میدان‌های وروی هموار به میدان‌های خروجی هموار ( $f_{\text{}} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{}})$ ) توجه داشته باشند. بنابراین  $f_{\text{}} : M \rightarrow \mathcal{A}_{\text{}}$  نگاشت  $M$  به  $\mathcal{A}_{\text{}}$  و  $M$  هموار ناميده مي‌شود اگر نمايش‌های مختصاتی آن هموار باشند. در معادلات،  $f_{\text{}} : M \rightarrow \mathcal{A}_{\text{}}$  هموار است اگر برای هر  $p \in M$  چارت‌های هموار ( $\phi$ ) حول  $p$  در  $\mathcal{A}_{\text{}}$  و  $(\tilde{U}, \phi)$  حول  $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$  در  $\mathcal{A}_{\text{}}$  با  $\tilde{U} \subseteq \tilde{U}$  باشند و  $f_{\text{}}(\tilde{U})$  در  $\mathcal{A}_{\text{}}$  با  $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$  باشند به طوري که  $\tilde{f} \circ f_{\text{}} \circ \phi^{-1} = \tilde{\phi} \circ \tilde{\phi}^{-1}$ . یک نگاشت بین  $\tilde{U}$  و  $\tilde{\phi}$  به عنوان یک  $\tilde{\phi} := (\phi \times \text{id}) \circ \Psi_{\mathcal{A}_{\text{}}} : (\tilde{U}, \tilde{\phi}) \rightarrow (\tilde{U}, \phi)$  نگاشت بین (زيرمجموعه‌های از) فضاهای اقلیدسی هموار باشد. با توجه به  $(U, \phi)$ ، یک انتخاب مناسب برای  $\tilde{\phi} := (\phi \times \text{id}) \circ \Psi_{\mathcal{A}_{\text{}}} : (\tilde{U}, \tilde{\phi}) \rightarrow (\tilde{U}, \phi)$  در  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^c \subseteq \mathbb{R}^{d+c}$ ، از فضاهای اقلیدسی هموار است اگر در هر مؤلفه از تصویر خود، در اينجا در هر يك از  $c$  بعد از  $d$   $\phi(U) \times \mathbb{R}^c$  هموار باشد. بنابراین ما به همواری نگاشت‌های

$$F_i : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto [\tilde{\phi} \circ f_{\text{}} \circ \phi^{-1}]_i \quad (662)$$

برای هر  $i = 1, \dots, d+c$  علاقه‌مندیم. با زانوسي  $f_{\text{}}$  و بيان انتگرال روی  $T_p M$  با يك انتگرال روی  $\mathbb{R}^d$  همانطور که در پيوست آ.۴ بحث شد، دیده می‌شود که  $F_i$  به شكل

$$F_i(x) = \int_{\mathbb{R}^d} I_i(v, x) dv. \quad (663)$$

<sup>۱۵۷</sup> به بحث در [https://en.wikipedia.org/wiki/Convolution#Domain\\_of\\_definition](https://en.wikipedia.org/wiki/Convolution#Domain_of_definition) مراجعه کنید.

<sup>۱۵۸</sup> توجه داشته باشید که تضمین می‌شود  $(U, \phi)$  تربوياليز پذير باشد با توجه به اينکه  $(U, \phi)$  یک چارت از  $M$  است. اين روشن است زيرا پايه‌های مختصاتي  $\pi_{\mathcal{A}_{\text{}}}^{-1}(U)$  را به دست می‌دهند (به پيوست آ مراجعه کنيد) و از آنجا که تربوياليزاسيون‌های محلی  $\mathcal{A}$  و  $FM$  در  $\mathbb{R}^d$  از آنها  $\partial \phi_\mu / \partial \phi_\nu$   $\mu, \nu = 1, \dots, d$  بخش ۴.۶ القا شده‌اند.

هستند. عبارات مختصاتی انتگرال‌دهنده‌های  $I_i$  در اینجا برای هر  $i = 1, \dots, d + c$  با

$$I_i : \mathbb{R}^d \times \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (664)$$

$$(\vartheta, x) \mapsto \left[ \tilde{\phi} \circ \mathcal{K} \left( \psi_{TM, \phi^{-1}(x)}^{-1}(\vartheta) \right) \circ \mathcal{P}_{A_{\mathbb{R}^d}, \phi^{-1}(x)} \leftarrow \exp \circ \psi_{TM, \phi^{-1}(x)}(\vartheta) \circ f_{\mathbb{R}^d} \circ \exp \circ \psi_{TM, \phi^{-1}(x)}^{-1}(\vartheta) \right]_i,$$

داده می‌شوند، که در آن ما برای راحتی و بدون از دست دادن کلیت، فرض کردیم که  $\psi_{TM, \phi^{-1}(x)}$  یک پیمانه ایزوومتریک از  $T_{\phi^{-1}(x)} M$  است، به طوری که ضریب مقیاس‌بندی حجم  $1/\sqrt{|\det \eta_p|}$  حذف می‌شود. توجه داشته باشید که انتگرال‌دهنده‌های  $I_i$  از نگاشت‌های هموار تشکیل شده‌اند و بنابراین خود نیز هموار هستند.

از بحث قبلی روشن است که همواری  $f_{\mathbb{R}^d}$  برقرار است اگر همه  $F_i$  هموار باشند، یعنی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر جزئی باشند. برای اثبات همواری  $F_i$  کافی است نشان دهیم که مشتق‌گیری‌های جزئی و انتگرال‌گیری در معادله (۶۶۳) جابجا می‌شوند که این همیشه صادق نیست. اگر آنها جابجا شوند، مشتقات جزئی از مراتب دلخواه  $(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$  با

$$\left[ \partial_{x_1}^{n_1} \dots \partial_{x_d}^{n_d} F_i \right](x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \partial_{x_1}^{n_1} \dots \partial_{x_d}^{n_d} I_i \right](\vartheta, x) d\vartheta \quad (665)$$

داده می‌شوند، که در آن (۱) مشتقات جزئی  $\left[ \partial_{x_1}^{n_1} \dots \partial_{x_d}^{n_d} I_i \right]$  از انتگرال‌دهنده وجود دارند (به دلیل همواری  $I_i$  وجود آنها تضمین شده است) و (۲) انتگرال آنها وجود دارد. اینکه آیا مشتق‌گیری‌ها با انتگرال جابجا می‌شوند یا نه را می‌توان با استفاده از لم زیر از [۱۵۹] که نتیجه‌ای از قضیه همگرایی تحت سلطه است، بررسی کرد.

**قضیه چ.۱ (لم مشتق‌گیری [۱۵۹]).** فرض کنید  $\mathcal{V}$  یک فضای اندازه،  $\mathbb{R} \subset T$  یک بازه غیرتپهگن و  $\mathcal{V} \times T \rightarrow \mathbb{R}$  :  $I$  یک نگاشت با ویژگی‌های زیر باشد:

(۱) برای هر  $t \in T$  ثابت، نگاشت  $I(\vartheta, t) \mapsto \mathcal{V}$  روی  $\mathcal{V}$  لگ-انتگرال‌پذیر است.

(۲) برای هر  $\vartheta \in \mathcal{V}$  ثابت، نگاشت  $I(\vartheta, t) \mapsto T$  در  $T$  مشتق‌پذیر است.

(۳) یک تابع لگ-انتگرال‌پذیر  $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{V})$  وجود دارد به طوری که  $|\frac{\partial}{\partial t} I(\vartheta, t)| \leq \mathcal{B}(\mathcal{V})$  برای هر  $\vartheta \in \mathcal{V} \times T$  برقرار است.

آنگاه تابع  $F : T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \int_{\mathcal{V}} I(\vartheta, t) d\vartheta$  مشتق‌پذیر است با مشتقی برابر با

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} I(\vartheta, t) d\vartheta.$$

کاربردی بودن این لم (به طور مکرر برای هر مشتق‌گیری جزئی منفرد) به ویژگی‌های انتگرال‌دهنده بستگی دارد، که به نوبه خود به ویژگی‌های خاص میدان کرنل  $\mathcal{K}$  و میدان ویژگی ورودی  $f$  بستگی دارد. برای مورد یک میدان کرنل که دارای تکیه‌گاه فشرده روی گوی‌هایی با شاعع ثابت حول مبدأ هر فضای مماس است، این لم اعمال می‌شود. بر این اساس، ما در باقیمانده این پیوست اثباتی برای قضیه ۷.۷ ارائه می‌دهیم.

## چ.۱ اثبات قضیه ۷.۷ (کفایت تکیه‌گاه فشرده کرنل روی گوی‌های مماس)

فرض کنید  $B_{\mathbb{R}^d}^{\text{ممتا}}(\cdot, R) := \{v \in T_p M \mid \|v\| \leq R\}$  و  $B_{T_p M}^{\text{ممتا}}(\cdot, R) := \{v \in T_p M \mid \|v\| \leq R\}$  گوی بسته با شاعع  $> 0$  حول مبدأ  $R$  و  $\mathbb{R}^d \mid \|v\| \leq R\}$  گوی متاظر حول مبدأ  $\mathbb{R}^d$  باشد. توجه داشته باشید که هر پیمانه ایزوومتریک  $\psi_{TM, p}(B_{T_p M}^{\text{ممتا}}(\cdot, R)) = B_{\mathbb{R}^d}^{\text{ممتا}}(\cdot, R)$  را برابر آورده می‌کند. فرض کنید  $\tilde{\mathcal{K}}$  یک میدان کرنل باشد که تکیه‌گاه آن در داخل گوی‌هایی با شاعع یکسان  $R$  در هر فضای مماس قرار دارد، یعنی

$$\text{supp}(\tilde{\mathcal{K}}_p) \subseteq B_{T_p M}^{\text{ممتا}}(\cdot, R) \quad \forall p \in M \quad (666)$$

و در نتیجه، برای هر پیمانه ایزوومتریک  $\psi_{TM, p}$

$$\text{supp}(\tilde{\mathcal{K}}_p \circ (\psi_{TM, p})^{-1}) \subseteq B_{\mathbb{R}^d}^{\text{ممتا}}(\cdot, R) \quad \forall p \in M \quad (667)$$

<sup>۱۵۹</sup> نسخه‌های مشابهی از این لم به زبان انگلیسی را می‌توان در [۱۵۹] یا در [rule#Measure\\_theory\\_statement](https://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz_integral_rule#Measure_theory_statement) یافت. برخلاف آن نسخه‌ها، نسخه [۱۵۹] اجازه می‌دهد که  $T$  هر بازه غیرتپهگن، از جمله بازه‌های بسته، باشد، که را از چند مرحله اضافی در ادامه بی‌نیاز می‌کند.

را برآورده می‌کند. طبق قضیه ۷.۷ این ویژگی برای تضمین اینکه تبدیل میدان کرnel متاظر  $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_R}$  خوش‌تعریف است، کافی است. اثبات این گزاره در ادامه ارائه می‌شود.

اثبات: همانطور که قبلاً در ابتدای این پیوست بیان شد، وجود انتگرال با توجه به اینکه تکیه‌گاه‌های کرnel فشرده هستند، تضمین شده است: فشدگی کرnel‌ها به انتگرال دهنده‌های تبدیل میدان کرnel منتقل می‌شود. همواری آنها علاوه بر این، پیوستگی آنها را نتیجه می‌دهد و انتگرال‌های توابع پیوسته با تکیه‌گاه فشرده همیشه وجود دارند.

برای اثبات همواری میدان ویژگی خروجی حاصل  $f$  ما با بحث قبلی در این بخش ادامه می‌دهیم. هدف ما اعمال لم مشتق‌گیری ج. ۱ برای جابجاپی مشتقات جزئی  $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \circ \phi$  برای هر  $d = 1, \dots, d$  در معادله (۶۶۵) در هر  $x \in \phi(U)$  با انتگرال‌گیری روی  $\mathbb{R}^d$  است. برای این منظور، ما توابع کمکی

$$I_{i,x.,\mu} : \mathbb{R}^d \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\vartheta, t) \mapsto I(\vartheta, x. + t\epsilon_\mu) \quad (668)$$

و

$$F_{i,x.,\mu} : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto F(x. + t\epsilon_\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} I_{i,x.,\mu}(\vartheta, t) d\vartheta, \quad (669)$$

را معرفی می‌کیم، که در آن  $\epsilon_\mu \in \mathbb{R}^d$  بدار واحد در جهت  $\mu$  است و  $\varepsilon > 0$  به گونه‌ای انتخاب شده است که  $T = [-\varepsilon, \varepsilon] \subset \phi(U)$  باشد، که این کار همیشه ممکن است زیرا  $\phi$  با  $\mathbb{R}^d$  باشناصایی‌های  $I_{i,x.,\mu}$  و  $V = \mathbb{R}^d$  به شکلی است که توسط لم ج. ۱ لازم است. این لم ویژگی (i) را با فرض وجود تبدیل میدان کرnel همانطور که قبلاً بحث شد، برآورده می‌کند. ویژگی (ii) به دلیل همواری کل انتگرال دهنده در معادله (۶۶۴) برقرار است. برای ویژگی (iii) مشاهده کنید که هم  $I_{i,x.,\mu}$  و هم مشتق آن هموار هستند به طوری که قدر مطلق  $\left| \frac{\partial}{\partial t} I_{i,x.,\mu} \right|$  پیوسته است. از آنجا که علاوه بر این دارای تکیه‌گاه فشرده روی  $(\cdot, R) \times B_{\mathbb{R}^d}^{(0,0,0,0)}$  است، با (تعییمی از) قضیه مقدار اکسترم با یک عدد  $b \geq 0$  کران دار است. بنابراین ما  $B_{\mathbb{R}^d}^{(0,0,0,0)}(\cdot, R) \times [-\varepsilon, \varepsilon]$  را قرار می‌دهیم که در آن  $\mathbb{I}$  تابع مشخصه است. این انتخاب  $\mathcal{B}(\vartheta) = \mathbb{I} \cap \mathcal{B}(t) = \mathbb{I} \cap \mathcal{B}(\vartheta, t) \in V \times T$  را برآورده می‌کند و انتگرال‌پذیر است به طوری که ویژگی (iii) نیز برآورده می‌شود. بنابراین ما می‌توانیم ترتیب مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری را برای انتخاب‌های دلخواه از  $x.$  و  $\mu$  جابجا کنیم، که از آن برای کشیدن مشتقات جزئی دلخواه به داخل انتگرال استفاده می‌کنیم:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_\mu} F_i \right](x.) = \left[ \frac{\partial}{\partial t} I_{i,x.,\mu} \right](\cdot) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial t} I_{i,x.,\mu}(\vartheta, t) \Big|_{t=.} d\vartheta = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial x_\mu} I_i(\vartheta, x) \Big|_{x=x.} d\vartheta \quad (670)$$

به دلیل همواری و تکیه‌گاه فشرده انتگرال دهنده  $I_i$  مشتقات جزئی آن  $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$  نیز هموار و دارای تکیه‌گاه فشرده هستند. بنابراین آنها نیز ویژگی‌های (i)، (ii) و (iii) را (با یک کران  $b$  بالقوه تطبیق یافته) برآورده می‌کنند. بنابراین امکان تکرار مشتق‌گیری جزئی از  $F_i$  به طور نامحدود وجود دارد، که همواری آن را اثبات می‌کند. از آنجا که استخراج‌ها مستقل از انتخاب‌های خاص برای نقطه  $p \in M$  چارت‌های  $(U, \phi)$  و  $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$  نقاط  $(U, \phi)$  و  $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$  را  $f$  و  $\tilde{f}$  بودند، این نتیجه همواری کل میدان ویژگی خروجی  $(f)(\cdot) = \mathcal{T}_{\mathcal{K}}(\cdot)$  را اثبات می‌کند.  $\square$

## ۷ میدان‌های ویژگی منظم به عنوان توابع اسکالر روی $G$ -ساختار

تابع با مقادیر حقیقی  $\mathbb{R} \rightarrow GM$  را روی  $G$ -ساختار با میدان‌های ویژگی منظم  $f : M \rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{R}^d}$  می‌نامیم، که  $f$  روی منیفلد معادل هستند، یعنی یک ایزومورفیسم وجود دارد

$$C^\infty(GM) \cong \Gamma(\mathcal{A}_{\mathbb{R}^d}). \quad (671)$$

این پیوست اثباتی برای این ادعا برای مورد گروه‌های ساختاری متناهی  $G$  ارائه می‌دهد. ما با تعریف معمول نمایش‌های منظم (حقیقی) از گروه‌های ساختاری متناهی شروع می‌کیم، که بر روی فضاهای برداری (آزاد)  $\mathbb{R}^{|G|}$  عمل می‌کنند. یک پایه  $\{\epsilon_g \in \mathbb{R}^{|G|} \mid g \in G\}$  از  $\mathbb{R}^{|G|}$  را تعریف می‌کنیم، که با اعضای گروه  $g \in G$  برجسب گذاری شده است. سپس عمل نمایش منظم (چپ) روی  $\mathbb{R}^{|G|}$  بر حسب عمل آن بر روی این بردارهای پایه تعریف می‌شود، که با انتقال چپ داده می‌شود. به طور خاص، برای هر  $h, g \in G$  نمایش منظم به صورت زیر عمل می‌کند:

$$\rho_{\mathbb{R}^d}(h)\epsilon_g := \epsilon_{hg}. \quad (672)$$

توجه داشته باشید که عمل بر روی ضرایب یک بردار، وارون است

$$\rho_{\mathbb{R}^d}(h) \sum_{g \in G} f_g \epsilon_g = \sum_{g \in G} f_g \epsilon_{hg} = \sum_{\tilde{g} \in G} f_{h^{-1}\tilde{g}} \epsilon_{\tilde{g}}, \quad (673)$$

که دانستن آن مفید است، با این حال، ما در ادامه به این ویژگی نیازی نخواهیم داشت. از آنجا که نمایش منظم بردارهای پایه  $\mathbb{R}^{|G|}$  را جایگشت می‌کند، یک نمایش جایگشتی است. برخی از تصاویر برای گروه دوری  $G = C_4$  در پیوست ۲ از [۹] یافت می‌شود. میدان‌های ویژگی منظم به عنوان مقاطع هموار از کلاف  $G$ -همبسته

$$\mathcal{A}_{\text{III}} = (GM \times \mathbb{R}^{|G|}) / \sim_{\rho_{\text{III}}} . \quad (674)$$

تعريف می‌شوند.

ایزومورفیسم ( $\mathcal{A}_{\text{III}}(GM) \cong \Gamma(\mathcal{A}_{\text{III}}(GM)) \cong C^\infty(GM)$ ) ادعای ما را در بخش ۱۲ مبنی بر اینکه  $CNN$ ‌های چارچوب موافق توسط [۹] کانولوشن‌های  $GM$  خاصی بین میدان‌های ویژگی منظم هستند، اثبات می‌کند. این علاوه بر این، ارتباط بین کانولوشن‌های گروهی (به بخش ۱. مراجعه کنید) و کانولوشن‌های  $GM$  منظم را که در بخش ۴.۹ و [۹] ادعا شده بود، برقرار می‌کند.

با این مقدمات و ملاحظات، ما آماده فرمول‌بندی قضیه هستیم:

قضیه ۱. (میدان‌های ویژگی منظم به عنوان توابع اسکالار روی  $G$ -ساختار). فرض کنید  $(d, GL) \leq G$  یک گروه ساختاری متناهی،  $A_{\text{III}}$  یک  $G$ -ساختار روی  $M$  و  $\rho_{\text{III}}$  کلافی باشد که با عمل نمایش منظم  $\rho_{\text{III}}$  از  $G$  همبسته است. آنگاه میدان‌های ویژگی منظم با تابع هموار و با مقادیر حقیقی روی  $G$ -ساختار یکسان هستند، یعنی یک ایزومورفیسم

$$\Lambda : C^\infty(GM) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{A}_{\text{III}}) . \quad (675)$$

وجود دارد. این ایزومورفیسم با

$$[\Lambda F](p) = \left[ [e_i]_{i=1}^d, \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) \epsilon_g \right], \quad (676)$$

تعريف می‌شود، که در آن  $[e_i]_{i=1}^d \in G_p M$  یک چارچوب نماینده دلخواه در  $p$  است. وارون آن با

$$[\Lambda^{-1} f]([e_i]_{i=1}^d) = \langle \epsilon_e, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} f(p) \rangle, \quad (677)$$

داده می‌شود، که در آن ما  $(\psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d})^{-1} p = \pi_{GM}([e_i]_{i=1}^d)$  را به صورت مخفف نوشته‌ایم و با آن پیمانه (یکتا) را نشان می‌دهیم که متناظر با چارچوب  $[e_i]_{i=1}^d$  است، یعنی در  $e = (\psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d})^{-1} p$  صدق می‌کند.

اثبات: برای اثبات این گزاره، باید نشان دهیم که ۱) این ایزومورفیسم همواری نگاشتها را حفظ می‌کند، ۲) که انتخاب چارچوب نماینده  $[e_i]_{i=1}^d \in G_p M$  در تعریف  $\Lambda$  واقعاً دلخواه است و ۳) که  $\Lambda^{-1}$  یک وارون چپ و راست برای  $\Lambda$  است.

(۱) همواری :

اینکه ایزومورفیسم همواری نمایش‌های میدان معادل را حفظ می‌کند، روشن است زیرا تمام مورفیسم‌های در گیر (عمل راست، نگاشت پیمانه، حاصلضرب داخلی) هموار هستند.

(۲) استقلال تعریف  $\Lambda$  (معادله (۶۷۶)) از انتخاب چارچوب نماینده  $G_p M$ :

فرض کنید که ما از هر چارچوب دیگر  $h \in G$  برای یک  $[e_i]_{i=1}^d$  دلخواه استفاده کرده باشیم. سپس این تبدیل پیمانه دلخواه با استفاده از رابطه همارزی  $\sim_{\rho_{\text{III}}}$  که زیربنای ساختار کلاف همبسته است، حذف می‌شود (معادله (۶۷۵)):)

$$[\Lambda F](p) = \left[ [e_i]_{i=1}^d \triangleleft h, \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft hg) \epsilon_g \right] \quad (\text{تعريف } \Lambda, \text{ معادله (۶۷۶)})$$

$$= \left[ [e_i]_{i=1}^d, \rho_{\text{III}}(h) \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft hg) \epsilon_g \right] \quad (\text{رابطه همارزی } \sim_{\rho_{\text{III}}}, \text{ معادله (۶۷۰)})$$

$$= \left[ [e_i]_{i=1}^d, \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft hg) \epsilon_{hg} \right] \quad (\text{عمل } \rho_{\text{III}} \text{ روی } \epsilon_g, \text{ معادله (۶۷۲)})$$

$$= \left[ [e_i]_{i=1}^d, \sum_{\tilde{g}} F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft \tilde{g}) \epsilon_{\tilde{g}} \right] \quad (\tilde{g} = hg) \quad (678)$$

(۳) در معادله (۶۷۷) یک وارون خوش تعریف برای  $\Lambda$  در معادله (۶۷۶) است:

$$\Lambda^{-1} \circ \Lambda = \text{id}_{C^\infty(GM)} \quad (۳)$$

برای هر  $F \in C^\infty(GM)$  و  $[e_i]_{i=1}^d$  این به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
& [\Lambda^{-1} \circ \Lambda F]([e_i]_{i=1}^d) \\
&= \left\langle \epsilon_e, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} [\Lambda F](p) \right\rangle && (\text{تعريف } \Lambda^{-1}, \text{ معادله (۶۷۷)}) \\
&= \left\langle \epsilon_e, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} \left[ [e_i]_{i=1}^d, \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) \epsilon_g \right] \right\rangle && (\text{تعريف } \Lambda, \text{ معادله (۶۷۶)}) \\
&= \left\langle \epsilon_e, \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) \epsilon_g \right\rangle && (\text{تعريف } \psi_{A,p}, \text{ معادله (۱۹۴)}) \\
&= \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) \langle \epsilon_e, \epsilon_g \rangle && (\text{بردن حاصلضرب داخلی به داخل جمع}) \\
&= F([e_i]_{i=1}^d) && (\delta_{e,g} = \langle \epsilon_e, \epsilon_g \rangle)
\end{aligned} \tag{۶۷۹}$$

فرض کنید  $p \in M$  و  $f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square})$  باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned}
& [\Lambda \circ \Lambda^{-1} f](p) \\
&= \left[ [e_i]_{i=1}^d, \sum_g [\Lambda^{-1} f]([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) \epsilon_g \right] && (\text{تعريف } \Lambda, \text{ معادله (۶۷۶)}) \\
&= \left[ [e_i]_{i=1}^d, \sum_g \left\langle \epsilon_e, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d \triangleleft g} f(p) \right\rangle \epsilon_g \right] && (\text{تعريف } \Lambda^{-1}, \text{ معادله (۶۷۷)}) \\
&= \left[ [e_i]_{i=1}^d, \sum_g \left\langle \epsilon_e, \rho_{\square\square\square}(g)^{-1} \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} f(p) \right\rangle \epsilon_g \right] && (\text{تبديل پيمانه، معادله (۱۹۷)}) \\
&= \left[ [e_i]_{i=1}^d, \sum_g \left\langle \rho_{\square\square\square}(g) \epsilon_e, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} f(p) \right\rangle \epsilon_g \right] && (\text{يکاني بودن}) \\
&= \left[ [e_i]_{i=1}^d, \sum_g \left\langle \epsilon_g, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} f(p) \right\rangle \epsilon_g \right] && (\text{عمل } \rho_{\square\square\square} \text{ روی } \epsilon_e, \text{ معادله (۶۷۲)}) \\
&= \left[ [e_i]_{i=1}^d, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} f(p) \right] && (\text{حذف بسط در پايه } \epsilon_g) \\
&= f(p) && (\text{تعريف } \psi_{A,p}, \text{ معادله (۱۹۴)})
\end{aligned} \tag{۶۸۰}$$

□

این اثبات ما را از همارزی  $\Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square})$  و  $C^\infty(GM)$  به پایان می‌رساند.