

شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات

کانولوشن‌های یکسان نسبت به ایزومتری و پیمانه روی منیفلدهای ریمانی

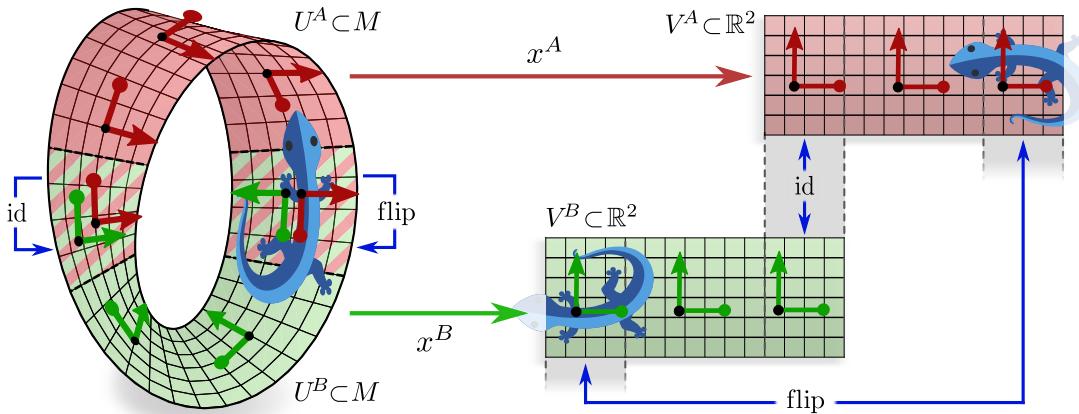
موریس وایلر^۱ پاتریک فوره^۱ اریک ورلیند^{۱,۲} مکس ولینگ^۱

^۱دانشگاه آمستردام
^۲پژوهشگاه هوش مصنوعی کوالکام

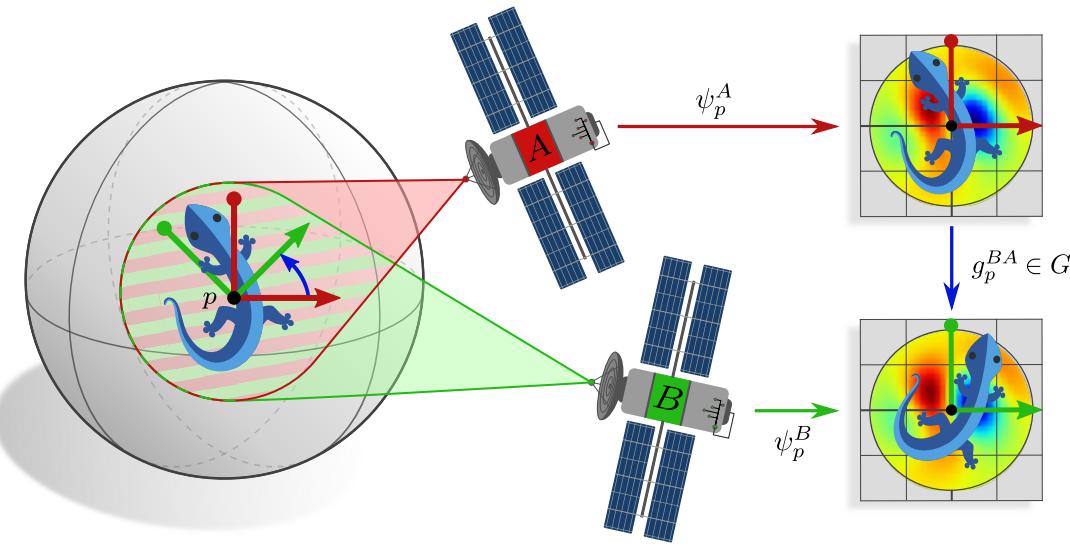
p.d.forre@uva.nl m.weiler.ml@gmail.com
m.welling@uva.nl e.p.verlinde@uva.nl

مقدمه

انگیزه‌ای از موفقیت گسترده شبکه‌های عمیق کانولوشن‌ها به منیفلدهای غیراقلیدسی وجود دارد. یک پیچیدگی عمده در مقایسه با فضاهای مسطح این است که مشخص نیست کنل کانولوشن باید در کدام تراز روی یک منیفلولد اعمال شود. دلیل اساسی این ابهام آن است که منیفلولددهای عمومی دارای انتخاب متعارف چارچوب‌های مرجع (گیج) نیستند. بنابراین کنل‌ها و ویژگی‌ها باید نسبت به مختصات داخله بیان شوند. ما استدلال می‌کنیم که انتخاب خاص مختصات‌بندی نباید بر استنتاج شبکه تاثیر بگذارد. آن باید مستقل از مختصات باشد. تقاضای همزمان برای استقلال مختصات و اشتراک وزن منجر به الزامی روی شبکه می‌شود تا تحت تبدیل‌های گیج محلی (تفصیرات چارچوب‌های مرجع محلی) تناوب‌پذیر باشد. اینها چارچوب‌های مرجع بدین‌گونه به G -ساختار منیفلولد بستگی دارد، به طوری که سطح لازم تناوب‌پذیری گیج توسط گروه ساختار G متناظر تعویز می‌شود. کانولوشن‌های مستقل از مختصات ثابت می‌شوند که نسبت به آن ایزومتری‌هایی که تقارن‌های G -ساختار هستند تناوب‌پذیر باشند. نظریه حاصل به شکل آزاد از مختصات بر حسب بندلهای فیبر فرمول‌بندی می‌شود. برای نمونه‌سازی طراحی کانولوشن‌های مستقل از مختصات، ما شبکه کانولوشنی روی نوار موبیوس پیاده‌سازی می‌کنیم. عمومیت فرمول‌بندی هندسه دیفرانسیل ما از شبکه‌های کانولوشنی با بررسی گسترده ادبیات نشان داده می‌شود که تعداد زیادی از شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی، شبکه‌های کانولوشنی کروی و شبکه‌های کانولوشنی روی سطوح عمومی را به عنوان نمونه‌های خاص کانولوشن‌های مستقل از مختصات توضیح می‌دهد.



شکل ۱: نمایش کانولوشن روی نوار موبیوس با گیج‌های مختلف



شکل ۲: ناظران مختلف \square ممکن است یک الگوی ویژگی را از « نقطه دید » متفاوتی درک کنند. کرنل‌های کانولوشنی هستند که میدان دید محلی خود در اطراف p را در یک پرداز ویژگی در p خلاصه می‌کنند. « نقطه دید » آن‌ها انتخابی از یک چارچوب مرجع محلی (گیج) در \square است که کرنل در امتداد آن همتراز می‌شود. از آنجا که مشاهدات از هر دو نقطه دید یک الگوی یکسان را نشان می‌دهند، پاسخ‌های کرنل باید حاوی اطلاعات معادل باشند، یعنی استنتاج باید مستقل از مختصات باشد. این کرنل‌های کانولوشن را ملزم می‌کند که تحت تبدیلات گیج محلی هموردا باشند، یعنی تعییرات چارچوب‌های مرجع. سطح همودای گیج توسط گروه ساختار G تعیین می‌شود که هم به خمینه و هم به کاربرد بستگی دارد. (مارمولک‌ها با جوز با تشکر از توپیتر اقتباس شده‌اند). Creative Commons Attribution 4.0 International

۱ مقدمه

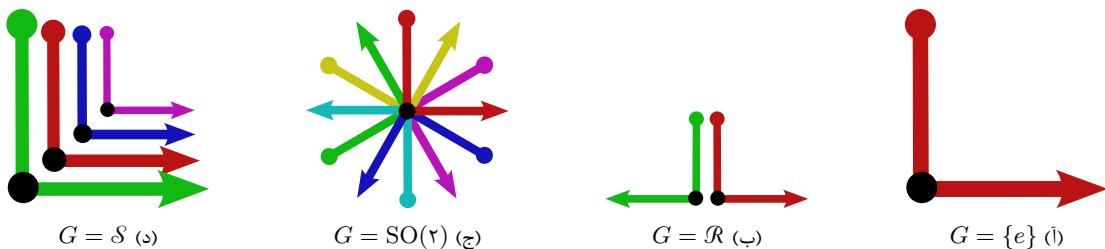
در سال‌های اخیر، شبکه‌های عصبی عمیق به مدل‌های منتخب برای طیف گسترده‌ای از وظایف در یادگیری ماشین تبدیل شده‌اند. موفقیت مدل‌های عمیق اغلب ریشه در طراحی خاص-وظیفه دارد که ساختار ریاضی داده‌های مورد پردازش را منعکس می‌کند. یک مثال برجسته، شبکه‌های عصبی کانولوشنی (CNN) هستند که از ساختار فضایی داده‌ها از طریق اتصال محلی و اشتراک‌گذاری وزن فضایی بهره‌برداری می‌کنند. از آنجا که کرنل یکسانی در هر نقطه از فضای اعمال می‌شود، شبکه‌های کانولوشنی نسبت به انتقال هموردا هستند، به این معنی که الگوهای آموخته شده را به طور خودکار در سراسر موقعیت‌های مکانی تعمیم می‌دهند. با توجه به موفقیت چشمگیر تجربی CNN‌های اقلیدسی، علاقه زیادی به گسترش مدل‌های کانولوشنی برای پردازش سیگنال‌ها در دامنه‌های عمومی‌تر و هموردا ساختن آنها تحت گروه‌های تقارن بزرگ‌تر وجود دارد.

این کار به بررسی تعیین شبکه‌های کانولوشنی به خمینه‌های ریمانی می‌پردازد. یک پیچیدگی عمده در تعیین شبکه‌های کانولوشنی از فضاهای اقلیدسی \mathbb{R}^d به خمینه‌های ریمانی عمومی این است که خمینه‌ها با انتخاب ارجحی از جهت مرجع همراه نیستند، که بتوان یک کرنل کانولوشن را در امتداد آن برای اندازه‌گیری ویژگی‌ها همتراز کرد. از آنجا که هیچ جهت مرجع ارجح نیست، کرنل باید به صورت دلخواه روی خمینه همتراز شود. موضوع اصلی این کار، تنظیم این دلخواهی بودن با مستقل ساختن انتخاب شبکه‌ها از همترازی خاص کرنل‌های کانولوشن است. مشخص می‌شود که این امر نیازمند آن است که کرنل‌ها هموردا تحت تبدیلات همترازی کرنل، پاسخ یک کرنل هموردا گیج هنگام تعییر همترازی اش به طور قابل پیش‌بینی تبدیل می‌شود \square بنابراین تضمین می‌شود که محتوای اطلاعات استخراج شده برای هر انتخاب (دلخواه) همترازی یکسان باشد.

ما همترازی یک کرنل در نقطه‌ای p از یک خمینه M را به عنوان انتخابی از یک چارچوب مرجع محلی یا گیج از فضای مماس متاظر $T_p M$ فرمول بندی می‌کنیم، تبدیلات گیج بنابراین تبدیلات بین انتخاب‌های چارچوب‌های مرجع هستند. شکل ۵ مفهوم همتراز کرنل‌ها در امتداد چارچوب‌های مرجع را به تصویر می‌کشد. همتراز کرنل نسبت به میدان چارچوب کانونی (که به طور منحصر به فرد ارجح است) صفحه اقلیدسی \mathbb{R}^n ، همانطور که در بالا نشان داده شده، منجر به میدان کرنل معمول CNN‌های اقلیدسی می‌شود. یک میدان چارچوب متفاوت، همانطور که در پایین نشان داده شده، به یک میدان کرنل جایگزین و در نتیجه یک شبکه جایگزین دلالت دارد. همانطور که در بالا بیان شد، در بیشتر خمینه‌ها انتخاب چارچوب‌ها ذاتاً مبهم است به طوری که هیچ همترازی کرنل خاصی ارجح نیست. شکل ۲ این موضوع را برای کره S^2 به تصویر می‌کشد، جایی که چارچوب‌ها تنها تا حد دوران‌ها منحصر به فرد هستند.

سطح ابهام در انتخاب چارچوب‌های مرجع به ساختار هندسی خمینه بستگی دارد. چنین ساختاری اغلب امکان رفع ابهام چارچوب‌های مرجع تا حد تبدیلات تقارنی معین (تبدیلات گیج) را فراهم می‌کند؛ به شکل ۳ مراجعه کنید. این بیانیه با چند مثال بهتر توضیح داده می‌شود:

- یک خمینه هموار خام هیچ ترجیحی در انتخاب چارچوب‌ها ندارد. تبدیلات گیج بین چارچوب‌های عمومی، نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر دلخواه هستند، یعنی مقادیری در گروه خطی عمومی $G = \text{GL}(d)$ می‌گیرند.



شکل ۳: انتخاب چارچوب‌های مرجع یک فضای مماس $T_p M$ همیشه منحصر به فرد نیست. ساختار هندسی (G) یک خمینه، زیرمجموعه‌ای ارجح از چارچوب‌های مرجع را ایجاد می‌کند به طوری که تبدیلات گیج بین این چارچوب‌ها در گروه ساختار $G \leq \text{GL}(d)$ قرار می‌گیرند. شکل‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چنین زیرمجموعه‌هایی از چارچوب‌های را به ترتیب برای گروه بدینهی $G = \{e\}$ ، گروه بازتاب $G = \mathcal{R}$ ، گروه دوران $G = \text{SO}(2)$ و گروه مقایس‌پذیری $G = \mathcal{S}$ نشان می‌دهند. ویژگی‌ها اندازه‌گیری‌ها را نسبت به یک از چارچوب‌های متمازی که دارای مختصات متفاوت، توسعه عمل یک نمایش گروهی ρ از G به هم مرتبط می‌شوند.

- یک جهت‌گیری از خمینه امکان تمایز چارچوب‌های چپ‌گرد از راست‌گرد را فراهم می‌کند. تبدیلات گیج بین چارچوب‌های هر یک از دو دست، حافظه‌گیری هستند، یعنی عناصری از $G = \text{GL}^+(d)$ هستند (نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر با دترمینان مثبت).
- یک فرم حجم امکان تمایز چارچوب‌های با حجم واحد را فراهم می‌کند. در این صورت، تبدیلات گیج حافظ حجم هستند، یعنی مقادیری در گروه خطی ویژه $G = \text{SL}(d)$ می‌گیرند.
- ساختار متریک یک خمینه ریمانی امکان اندازه‌گیری فواصل و زوایا را در فضاهای مماس فراهم می‌کند و بنابراین امکان تمایز چارچوب‌های متعامد را می‌دهد. تبدیلات گیج بین چارچوب‌های متعامد، دوران‌ها و بازتاب‌ها در گروه متعامد $G = d$ هستند.
- با هم، یک جهت‌گیری و متریک به چارچوب‌های متعامد جهت‌دار دلالت دارند. در این صورت، تبدیلات گیج فقط دوران‌ها در گروه متعامد ویژه $G = \text{SO}(d)$ هستند.
- یک میدان چارچوب روی خمینه شامل یک چارچوب منحصر به فرد در هر نقطه از خمینه است. در این حالت، تبدیلات گیج بدینهی هستند که توسعه گروه بدینهی $\{e\} = G$ را توصیف می‌شوند.

همه این ساختارهای هندسی مشترکاً یک زیرمجموعه ارجح (زیربندل) از چارچوب‌ها را تعریف می‌کنند به طوری که تبدیلات گیج مقادیری در یک گروه ساختار $G \leq \text{GL}(d)$ می‌گیرند. برای تأکید بر نقش محوری گروه ساختار G ، چنین ساختارهایی به عنوان G -ساختار GM نامیده می‌شوند. مثال‌های بصری از G -ساختارها برای گروه‌های ساختار G و خمینه‌های M مختلف در شکل ۷ آورده شده است.

از آنجا که انتخاب چارچوب‌های مرجع ذاتاً مفهم است، هر کمیت هندسی و عملیات شبکه باید به طور مساوی نسبت به چارچوب‌های دلخواه G -ساختار GM قابل نمایش باشد، یعنی باید GM -مستقل از مختصات باشد. بردارهای ویژگی بنابراین با یک نمایش گروهی (عمل گروهی خطی) ρ از گروه ساختار G مرتبط هستند که قانون تبدیل آنها را تحت تبدیلات گیج (گذارهای با مقدار G بین چارچوب‌هایی تعیین می‌کند. انتخاب خاص نمایش گروهی، نوع هندسی یک میدان بردار ویژگی را تعیین می‌کند. مثال‌های معقول شامل میدان‌های استکالر، بردار یا تانسور هستند، با این حال، انواع میدان عمومی تری نیز در عمل استفاده می‌شوند. شکل ۱۴ استقلال از مختصات کمیت‌های هندسی را در مثال شناخته‌شده بردارهای مماس به تصویر می‌کشد.

هر لایه شبکه ملزم به رعایت قوانین تبدیل ویژگی‌هاست، یعنی باید تضمین کند که خروجی‌هایش همانطور که انتظار می‌رود تبدیل می‌شوند. به طور خاص برای کانولوشن‌ها، استقلال از مختصات GM ایجاد می‌کند که اعمال کرنل مشترک نسبت به چارچوب‌های مختلف G -ساختار در یک نقطه $p \in M$ باید پاسخ یکسانی را تا حد یک تبدیل گیج برانگیزد. ما نشان می‌دهیم که این امر نیازمند G -راهبری (هموردایی گیج، معادله (۸۶)) کرنل‌های کانولوشن است. به طور شهودی، می‌توان کرنل‌های G -راهبری را به عنوان اندازه‌گیری ویژگی‌ها به صورت نسی نسبت به چارچوب‌های مرجع تصور کرد، که این امر ضروری است زیرا هیچ انتخاب چارچوب، یعنی همترازی کرنل مطلق، ارجح نیست. مثال‌هایی از کرنل‌های G -راهبری برای گروه بازتاب $G = \mathcal{R}$ در شکل ۶ نشان داده شده است. شکل ۸ اشتراک‌گذاری چنین کرنل‌هایی را نسبت به چارچوب‌های مختلف یک ساختار \mathcal{R} به تصویر می‌کشد. قید \mathcal{R} -راهبری نوعی تقارن را بر کرنل‌ها تحمیل می‌کند، به طوری که همترازی‌های مختلف واقعاً منجر به پاسخ‌هایی می‌شوند که دقیقاً با تبدیلات گیج (g) متفاوت هستند. ما در ادامه کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM را به عنوان G -کانولوشن‌های GM مخفف می‌کیم.

علاوه بر اعمال کرنل‌های هموردای گیج، کانولوشن‌های GM ممکن است هموردای ایزومنتری باشند، به این معنی که با عمل ایزومنتری‌ها بر روی میدان‌های ویژگی جایجا می‌شوند، همانطور که در شکل ۹ نشان داده شده است. فرض کنید ϕ یک ایزومنتری (تقارن) از خمینه M باشد. یک شبکه عصبی دقیقاً زمانی نسبت به عمل این ایزومنتری هموردا است که الگوها در هر نقطه $p \in M$ به همان روشی پردازش شوند که الگوها در $(p)\phi$ پردازش می‌شوند. بنابراین هموردای ایزومنتری یک شبکه در تناظر یک به یک با ناوردادی ایزومنتری اتصال عصبی آن (میدان کرنل) است؛ به شکل ۱۰ مراجعه کنید. از آنجا که کانولوشن‌های ما کرنل‌ها را نسبت به چارچوب‌های (دلخواه) G -ساختار GM را به عنوان G -ساختار با اعمال می‌کنند، تقارن‌های میدان کرنل با تقارن‌های G -ساختار منطبق هستند. با نشان دادن تقارن‌های (حافظ فاصله) یک G -ساختار با

^۱ به شباهت با اصل نسبیت خاص ایشتین توجه کنید، که به جای چارچوب‌های G -ساختار، بر برابری چارچوب‌های لخت تکیه دارد.

$\text{Isom}_{GM} \leq \text{Isom}(M)$ این دلالت دارد که کانولوشن‌های ما دقیقاً Isom_{GM} -هموردا هستند. شکل ۱۱ این واقعیت را که G -ساختارها و میدان‌های کرنل متناظر تقارن‌های یکسانی دارند، به تصویر می‌کشد. خواننده تشویق می‌شود که G -ساختارها را در شکل ۷ با توجه به تقارن‌هایشان و ویژگی‌های هموردایی ضمنی کانولوشن‌های GM متناظر بررسی کند.

طراحی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات GM بر روی خمینه‌های ریمانی نیازمند انتخاب یک G -ساختار است که به ملاحظات متعددی بستگی دارد. اولاً، انتخاب گروه ساختار G هموردایی گیج محلی کانولوشن را تعیین می‌کند: یک کرنل G -راهبر به طور خودکار الگوهای آموخته شده را بر روی تمام ژست‌های مرتبط با G الگوها تعیین می‌دهد؛ به شکل ۱۳ مراجعة کنید. ثانیاً، انتخاب خاص G -ساختار هموردایی ایزومنتری سراسری کانولوشن را تعیین می‌کند. در کاربردهای تصویربرداری پزشکی، الگوها اغلب در دوران‌ها، بازتاب‌ها و موقعیت‌های دلخواه رخ می‌دهند □ بنابراین باید یک ساختار d ناوردادی $\text{Isom}_{GM} = E(d)$ را روی \mathbb{R}^d انتخاب کرد، مشابه ساختار (۲) که در شکل ۷ نشان داده شده است. تصاویری مانند عکس‌های پرتوه یک محور عمودی متمایز دارند، با این حال، بازتاب‌ها حول این محور آمار تصویر را ناوردا می‌گذارند □ این امر نیازمند یک ساختار R مانند شکل ۷ است. علاوه بر چنین ملاحظات تقارنی، توجه به این نکته مهم است که هر خمینه‌ای (توبولوژی) ساختارهای G هموار را برای هر انتخاب گروه ساختار G نمی‌پذیرد. یک مثال نوار موبیوس است که توبولوژی پیچ خورده آن (عدم جهت‌گیری) مانع از تخصیص هموار متغیر چهت‌گیری‌های چارچوب می‌شود. بنابراین یک عملیات کانولوشن مستقل از مختصات هموار بر روی نوار موبیوس لزوماً بر کرنل‌های راهبر-بازتابی تکیه دارد.

این کار شامل یک مرور ادبیات گسترده بر روی شبکه‌های کانولوشنی است که عمومیت نظریه ما را نشان می‌دهد. این بخش انواع مختلفی از CNN‌ها را در فضاهای اقلیدسی، کنولوشن‌ها را بر روی سطوح عمومی (مانند مش‌های سطحی) پوشش می‌دهد. ما انتخاب‌های خاص G -ساختارها را که به طور ضمنی توسعه نوبسندگان انجام شده است، با تحلیل ویژگی‌های هموردایی سراسری و محلی مدل‌هایشان شناسایی می‌کنیم. جدول ۶ یک نمای کلی از طبقه‌بندی حاصل از شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات GM ارائه می‌دهد.

برای ارائه یک مثال دقیق در مورد چگونگی نمونه‌سازی نظریه ما در عمل، ما پیاده‌سازی کانولوشن‌های GM را بر روی نوار موبیوس برای $G = R$ مورد بحث قرار می‌دهیم. این شامل استخراج کرنل‌های راهبر-بازتابی برای انواع میدان مختلف (نمایش‌های گروهی) و ارزیابی تجزیی هموردایی ایزومنتری پیش‌بینی شده نظری است. همانطور که انتظار می‌رود، کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM از پیاده‌سازی وابسته به مختصات ساده بهتر عمل می‌کنند. کد در آدرس <https://github.com/mauriceweiler/MobiusCNNs> موجود است.

یک فرمول‌بندی بدون مختصات از نظریه ما در زبان بندل‌های فیبر ابداع شده است. G -ساختارها GM زیربندل‌های اصلی G از بندل چارچوب FM بر روی M هستند. میدان‌های ویژگی برش‌هایی از بندل‌های بردار ویژگی مرتبط با G هستند. گیج‌ها تشهیم‌های بندل محلی هستند، در حالی که تبدیلات گیج نگاشته‌های گذار بین چنین تشهیم‌هایی هستند. ایزومنتری‌هایی که یک کانولوشن GM نسبت به آنها هموردا است، اتومورفیسم‌های بندل اصلی از G -ساختار هستند.

CNN‌های مستقل از مختصات ما تعیین‌هایی از CNN های راهبر [؟ ؟ ؟ ؟] از فضاهای اقلیدسی (یا همگن) به خمینه‌های ریمانی هستند. در حالی که CNN‌های راهبر بر تبدیلات فعل و سراسری میدان‌های ویژگی تمرکز دارند، CNN‌های مستقل از مختصات تبدیلات غیرفعال و محلی بین چارچوب‌های مرجع را در نظر می‌گیرند.^۲ ما نسخه‌های اولیه‌ای از نظریه CNN‌های مستقل از مختصات ("CNN‌های هموردایی گیج") را در کارهای قبلی [؟ ؟] پیشنهاد کردیم. برخلاف این انتشارات، کار حاضر نظریه را با جزئیات بسیار بیشتری توسعه می‌دهد، آن را بر حسب بندل‌های فیبر فرمول‌بندی می‌کند، هموردایی تحت عمل ایزومنتری‌ها را اثبات می‌کند و یک مرور ادبیات ارائه می‌دهد.

فهرست مطالعه

۱	مقدمه
۲	مرور کلی و شهود بصری
۱۸	بخش اول: مقدمه‌ای بر شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات
۱۸	۳ مقدمه‌ای بر شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات
۱۸	۱.۳ گیج‌ها، تبدیل‌های گیج و G -ساختارها
۲۶	۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی مستقل از مختصات
۲۹	۳.۳ انتقال موازی بردارهای ویژگی
۳۲	۴.۳ عمل ایزومنتری‌ها و تبدیل‌های گیج القا شده

^۲ این شبیه به تغییر تمرکز از کوواریانس لورنتس سراسری در نسبیت خاص به کوواریانس لورنتس محلی در نسبیت عام است.

۴	شبکه‌های مستقل از مختصات و ۰۰-کانولوشن‌ها
۱.۴	عملیات نقطه‌ای تناوب‌پذیر گیج
۲.۴	تبديلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM
۳.۴	تناوب‌پذیری ایزومتری
۵	مدل اسباب بازی: کانولوشن‌های موبیوس هم‌متغیر انعکاس
۱.۵	هنده‌سه نوار موبیوس
۲.۵	میدان‌های ویژگی مستقل از جهت‌گیری
۳.۵	شبکه‌های کانولوشنی مستقل از جهت‌گیری
۴.۵	پیاده‌سازی عددی و ارزیابی کانولوشن‌های موبیوس
۶۳	بخش دوم: نظریه شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات
۶	بندل‌های مرتبط و میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات
۱.۶	مقدمه‌ای کوتاه بر کلاف‌های تاری
۲.۶	کلاف مماس TM و کلاف چارچوب FM
۳.۶	ساختمان‌های G و کلاف‌های برداری ویژگی وابسته \mathcal{A}
۴.۶	بدیهی‌سازی‌های محلی کلاف TM , FM , TM , FM و \mathcal{A}
۵.۶	منتقل‌کننده‌های موازی روی کلاف‌های الحقی
۷	تبديلات میدان کرنل مستقل از مختصات و کانولوشن‌های GM
۱.۷	کانولوشن‌های GM با اندازه 1×1
۲.۷	تبديلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM
۸	هم‌متغیری ایزومتری
۱.۸	ایزومتری‌ها و عمل آنها بر منیفلدها، کلاف‌ها و میدان‌ها
۲.۸	هم‌متغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM
۳.۸	میدان‌های کرنل خارج قسمتی
۱۲۲	بخش سوم: مروری بر مقالات مرتبط با شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات
۹	شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات اقلیدسی
۱.۹	فرمول‌بندی کلاسیک CNN‌های G -هدایت‌پذیر بر روی \mathbb{R}^d
۲.۹	هنده‌سه‌ی آفین فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d
۳.۹	CNN‌های هموردای گروه آفین در فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d
۴.۹	CNN‌های اقلیدسی در مقالات
۱۰	CNN‌های هموردای دورانی در فضاهای اقلیدسی سوراخ‌دار
۱۴۱	

۱۴۸	۱۱ CNN‌های کروی مستقل از مختصات
۱۴۸	۱.۱۱ هندسه‌ی کره ۲-بعدی S^3
۱۵۲	۲.۱۱ CNN‌های کروی کاملاً همودای دورانی
۱۵۶	۳.۱۱ CNN‌های کروی همودای دوران سمتی در تپولوژی‌های استوانه‌ای
۱۶۱	۴.۱۱ تقریب‌های بیست‌وجهی از CNN‌های کروی
۱۶۵	۱۲ CNN‌های مستقل از مختصات روی سطوح عمومی
۱۶۶	۱.۱۲ هندسه‌ی سطوح جایگذاری شده
۱۷۳	۲.۱۲ کانولوشن‌های سطحی راهبری‌پذیر-دورانی
۱۸۰	۳.۱۲ کانولوشن‌های- $\{\mathbb{D}\}$ سطحی راهبری‌پذیر
۱۸۴	۴.۱۲ تقریب‌های بیست‌وجهی از CNN‌های کروی
۱۸۹	پیوست
۱۸۹	آ ارتباط با فرمالیسم چارت مختصاتی در هندسه دیفرانسیل
۱۸۹	۱. آ فضاهای مماس، فضاهای هم‌مماس و پایه‌های دوگان
۱۹۱	۲. آ دیفرانسیل‌ها، گرادیان‌ها و ژاکوبین‌ها
۱۹۲	۳. آ پایه‌های مختصاتی القا شده توسط چارت
۱۹۶	۴. آ پایه‌های مختصاتی به عنوان تریوپالیزاسیون‌های محلی کلاف
۱۹۸	۵. آ G -ساختارها و میدان‌های ویل‌باین
۲۰۲	ب اشتراک وزن مستقل از مختصات و کرنل‌های G -راهبری‌پذیر
۲۰۳	پ انتگرال‌گیری روی فضاهای مماس
۲۰۴	ت کانولوشن‌های همودا روی فضاهای همگن
۲۰۹	ث میدان‌های کرنل نماینده خارج قسمتی \mathbb{D} اثبات‌ها
۲۱۵	ج کانولوشن‌های راهبری‌پذیر کروی به عنوان کانولوشن‌های $\mathbb{D}\mathbb{D}$ اثبات‌ها
۲۱۸	چ وجود و همواری تبدیلات میدان کرنل
۲۲۱	ح میدان‌های ویژگی منظم به عنوان توابع اسکالار روی G -ساختار

این کار در قالب یک مقدمه، سه بخش اصلی و یک پیوست سازماندهی شده است.

بخش اول تلاش می‌کند شبکه‌های عصبی مستقل از مختصات را با زبانی آسان معرفی کند. میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه نسبت به مختصات محلی (تسهیم‌های بندل) بیان می‌شوند. استقلال مختصات مورد نیاز، مستلزم آن است که ویژگی‌ها با یک قانون تبدیل خاصی مرتبط باشند. لایه‌های شبکه ملزم به تضمین رفتار تبدیل صحیح ویژگی‌ها هستند.

بخش دوم نظریه شبکه‌های عصبی مستقل از مختصات را بر حسب بندل‌های فیبر رسمی‌سازی می‌کند. این امر امکان فرمول‌بندی سراسری و مستقل از مختصات را فراهم می‌کند، که به ویژه هنگام بررسی تناوب‌پذیری ایزومنتری شبکه‌ها مفید است. تعاریف از بخش اول با بیان عملیات مستقل از مختصات در تسهیم‌های بندل محلی (مختصات) بازیابی می‌شوند.

بخش سوم نظریه ما را در کارهای مرتبط جای می‌دهد. این بخش بررسی‌های مفصلی از معماری‌های شبکه کانولوشنی بر روی هندسه‌های مختلف ارائه می‌دهد و آن‌ها را به عنوان شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات فرمول‌بندی مجدد می‌کند. برای تسهیل توسعه معماری‌های شبکه جدید، ما ویژگی‌های مربوط به هندسه‌های خاص را قبل از بررسی شبکه‌هایی که بر روی آن‌ها عمل می‌کنند، مورد بحث قرار می‌دهیم.

خواننده می‌تواند بخش دوم را در مرحله اول نادیده بگیرد فرمول‌بندی از بخش اول برای خواندن مرور ادبیات در بخش سوم کاملاً کافی است.

مرور بر مفاهیم و نتایج اصلی کار ما در بخش ۲ زیر ارائه شده است. این مرور از معادلات پرهیز می‌کند و بر شهود هندسی از طریق بصری‌سازی‌ها تکیه دارد. امیدواریم این بخش به مخاطبان غیرتخصصی کمک کند تا ایده‌ای از محتوای کار ما به دست آورند.

مرور کلی جزئیات

بخش اول: هدف بخش ۳ ابداع فضاهای ویژگی مستقل از مختصات است. به طور خاص، بخش ۱.۳ گیج‌ها، تبدیل‌های گیج و G -ساختارها را معرفی می‌کند. گیج‌ها روشی رسمی برای بیان بردارهای مماس (مستقل از مختصات) و توابع روی فضاهای مماس نسبت به چارچوب‌های مرجع هستند. تبدیل‌های گیج بین این عبارات مختصاتی در گیج‌های مختلف ترجمه می‌کنند. بخش ۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی مستقل از مختصات را معرفی می‌کند. همانند مرور بردارهای مماس، ضرایب عددی بردارهای ویژگی هنگام انتقال بین چارچوب‌های مرجع تغییر می‌کنند. قوانین تبدیل بردارهای ویژگی به ویژگی به پیش‌برداری آن‌ها و پیش‌برداری آن‌ها هنگام عمل توسط ایزومتری‌ها را تعیین می‌کنند، که به ترتیب در بخش‌های ۳.۳ و ۴.۳ توضیح داده شده‌اند.

بخش ۴ شبکه‌های عصی را که بین میدان‌های ویژگی نگاشت می‌کنند، توسعه می‌دهد. عملیات نقطه‌ای، مانند جمع یا اس، کانولوشن‌های ۱ × ۱ و غیرخطی‌ها، در بخش ۱.۴ مرور بحث قرار می‌گیرند. بخش ۲.۴ بر روی کانولوشن‌ها با کرنل‌های گسترده فضایی تمرکز می‌کند. هر یک از این عملیات در ابتدا بدون فرض اشتراک وزن معرفی می‌شوند، یعنی به عنوان مثال، اجازه یک کرنل متفاوت در هر نقطه از منیفولد را می‌دهند. این کرنل‌ها (با بایاس‌ها یا غیرخطی‌ها) به هیچ وجه محدود نمی‌شوند. با این حال، هنگام نیاز به اشتراک وزن فضایی، آن‌ها مجبور می‌شوند که تناوب‌پذیر گیج باشند زیرا تنها مقادیر تناوب‌پذیر می‌توانند به صورت مستقل از مختصات به اشتراک گذاشته شوند. بخش ۳.۴ یک اثبات مختصراً از تناوب‌پذیری ایزومتری کانولوشن‌های GM را بر حسب عبارات مختصاتی محلی ارائه می‌دهد. ایده اصلی در اینجا این است که ایزومتری‌ها را می‌توان به عنوان القاگذار تبدیل‌های گیج (تفسیر منفعل) در نظر گرفت، که با تناوب‌پذیری گیج کرنل‌ها توضیح داده می‌شود.

بخش ۵ پیاده‌سازی کانولوشن‌های مستقل از جهت‌گیری بر روی نوار موبیوس را توصیف می‌کند. پس از بررسی هندسه نوار موبیوس در بخش ۱.۵، انواع مختلفی از میدان‌های ویژگی در بخش ۲.۵ تعریف می‌شوند. بخش ۳.۵ بعدی، شبکه‌های کانولوشنی مستقل از جهت‌گیری را به صورت تحلیلی توصیف می‌کند. به طور خاص، ما کرنل‌های کانولوشنی تناوب‌پذیر گیج، بایاس‌ها و غیرخطی‌ها را برای هر یک از انواع میدان استخراج می‌کنیم. بخش ۴.۵ با یک پیاده‌سازی و ارزیابی عددی مدل‌های مربوطه به پایان می‌رسد.

بخش دوم: بخش ۶ محتوای بخش ۳ را بازتاب می‌دهد، با این حال، به صورت سراسری و بر حسب بندل‌های فیبر. مقدمه‌ای کلی بر بندل‌های فیبر در بخش ۱.۶ ارائه شده است. بخش‌های ۲.۶ و ۳.۶ TM , BM , FM -ساختارها و بندل‌های بردار ویژگی G -مرتبط با G (A) را معرفی می‌کنند. میدان‌های ویژگی به صورت سراسری به عنوان برش‌هایی از بندل‌های بردار ویژگی تعریف می‌شوند. تسمیه‌های بندل محلی (گیج‌ها)، که در بخش ۴.۶ مرور بحث قرار گرفته‌اند، این بندل‌ها را در مختصات بیان می‌کنند و بدین ترتیب تعاریف ما از بخش ۳ را بازیابی می‌کنند. ما به طور خاص نشان می‌دهیم که چگونه تسمیه‌های محلی بندل‌های مختلف یکدیگر را القا می‌کنند، به طوری که تبدیل‌های گیج (نگاشت‌های انتقال) آن‌ها همگام‌سازی می‌شوند. بخش ۵.۶ انتقال‌دهنده‌های موادی در G -بندل‌ها را مرور بحث قرار می‌دهد.

بخش ۷ شبکه‌های مستقل از مختصات از بخش ۴ را بر حسب بندل‌های فیبر بازنویسی می‌کند. کانولوشن‌های ۱ × ۱ در بخش ۱.۷ به عنوان مورفیسم‌های مشخص بندل برداری M توصیف می‌شوند. به طور جایگزین، آن‌ها را می‌توان به عنوان برش‌هایی از یک بندل همومورفیسم مشاهده کرد. بخش ۲.۷ میدان‌های کرنل مستقل از مختصات و تبدیل‌های میدان کرنل را معرفی می‌کند. این عملیات مشابه کانولوشن‌های GM هستند اما نیازی به اشتراک وزن ندارند، یعنی ممکن است در هر مکان فضایی یک کرنل متفاوت اعمال کنند. یک میدان کرنل کانولوشنی GM با اشتراک یک کرنل G -استریل (تناوب‌پذیر گیج) متفاوت در سراسر منیفولد ساخته می‌شود. سپس کانولوشن‌هایی هستند که اینجا از مختصات GM به عنوان تبدیل‌های میدان کرنل با میدان‌های کرنل کانولوشنی تعریف می‌شوند. هنگام بیان فرمول‌بندی مستقل از مختصات کانولوشن‌های GM نسبت به تسمیه‌های محلی (گیج‌ها)، عبارات مختصاتی کانولوشن‌های GM را از بخش ۲.۴ ارزیابی می‌کنیم.

تناوب‌پذیری ایزومتری کانولوشن‌های GM در بخش ۸ بررسی می‌شود. پس از معرفی ایزومتری‌ها، بخش ۱.۸ عمل پیش‌برنده آن‌ها را بر روی بندل‌های فیبر مورد بحث قرار می‌دهد. این عمل نیز می‌تواند در تسمیه‌های محلی بیان شود، که منجر به فرمول‌بندی از بخش ۴.۳ می‌شود. بخش ۲.۸ عمل ایزومتری‌ها بر روی میدان‌های کرنل را تعریف می‌کند و ثابت می‌کند که تناوب‌پذیری ایزومتری یک تبدیل میدان کرنل، ناوردایی ایزومتری میدان کرنل آن را توجه می‌دهد و بالعکس. کانولوشن‌های GM ثابت شده‌اند که تحت عمل آن ایزومتری‌هایی که اتومورفیسم‌های بندلی (تقارن‌ها) از G -ساختار GM هستند، تناوب‌پذیر می‌باشند. بخش ۳.۸ میدان‌های کرنل ناوردا با ایزومتری را با جزئیات بیشتری بررسی می‌کند و ثابت می‌کند که آن‌ها معادل میدان‌های کرنل ناوردا با ایزومتری هستند □ به طور شهودی، میدان‌های کرنل ناوردا با ایزومتری ملزم به اشتراک کرنل‌ها بر روی مدارات ایزومتری هستند. این نتیجه به ویژه دلالت دارد که تبدیل‌های میدان کرنل تناوب‌پذیر ایزومتری در فضاهای همگن لزوماً کانولوشن‌های GM هستند.

بخش سوم: بخش سوم این کار نشان می‌دهد که تعداد زیادی از شبکه‌های کانولوشنی از ادیبات را می‌توان به عنوان اعمال کانولوشن‌های GM برای انتخاب خاصی از G -ساختار و انواع میدان تفسیر کرد. این بخش با بحثی کلی در مورد انتخاب‌های طراحی شبکه‌های کانولوشنی مستقل

از مختصات آغاز می‌شود. جدول ۶ مروری و طبقه‌بندی از مدل‌های مورد بررسی را ارائه می‌دهد. خواننده دعوت می‌شود که به G -ساختارهای بصری‌سازی شده در بخش سوم نگاهی بیندازد زیرا اینها ایده شهودی در مورد ویژگی‌های کانولوشن‌های GM مربوطه ارائه می‌دهند.

شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی که نه تنها تناوب‌پذیر ایزومنتری هستند بلکه به طور کلی تر تحت عمل گروه‌های آفین تناوب‌پذیر هستند، در بخش ۹ بررسی می‌شوند. این مدل‌ها اساساً معادل شبکه‌های کانولوشنی استیریبل در فضاهای برداری اقلیدسی \mathbb{R}^d هستند. بخش ۹.۱ شبکه‌های کانولوشنی استیریبل را بررسی می‌کند و ارتباط آن‌ها با کانولوشن‌های GM را مورد بحث قرار می‌دهد. این رویکرد تا حدی نامطابق است زیرا \mathbb{R}^d با یک میدان چارچوب کانونی (ساختار e) همراه است، که به طور ضمنی توسط مدل‌های تناوب‌پذیر نادیده گرفته می‌شود. بخش ۹.۲ رویکردی اصولی تر را در پیش می‌گیرد و فضاهای آفین اقلیدسی \mathbb{E}_d را تعریف می‌کند که دقیقاً با G -ساختارهای مجذب شده‌اند که منجر به کانولوشن‌های GM تناوب‌پذیر $Aff(G)$ می‌شوند. کانولوشن‌های واقعی GM در بخش ۹.۳ تعریف می‌شوند. بخش ۹.۴ شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی تناوب‌پذیر آفین را که در ادبیات یافت می‌شوند، بررسی می‌کند. آن‌ها عمدتاً در انتخاب‌های مفروض گروه‌های ساختار و نمایش‌های گروهی متفاوت هستند.

بخش ۱۰ شبکه‌های کانولوشنی را در فضاهای اقلیدسی سوراخ‌دار $\{\cdot\}_{e_d}$ که مبدأ $\{\cdot\}$ آن‌ها حذف شده است، پوشش می‌دهد. این مدل‌ها نسبت به چرخش حول مبدأ تناوب‌پذیر هستند، با این حال، نسبت به انتقال تناوب‌پذیر نیستند. آن‌ها بر اساس G -ساختارهایی هستند که با مختصات قطبی، مختصات لگاریتمی-قطبی یا مختصات کروی مطابقت دارند.

شبکه‌های کانولوشنی کروی در بخش ۱۱ پوشش داده می‌شوند. بخش ۱۱.۱ هندسه ۲-کره (جاسازی شده) S^3 را مورد بحث قرار می‌دهد. با تفسیر فضاهای مماس به عنوان زیرفضاهای دو بعدی یک فضای جاسازی \mathbb{R}^3 ، عبارات فرم بسته نگاشتهای نمایی و لگاریتمی، چارچوب‌ها، گنجی‌ها، انتقال‌دهندها و عمل ایزومنتری را استخراج می‌کنیم. بخش ۱۱.۲ شبکه‌های کانولوشنی کروی تناوب‌پذیر $(SO(3)^3 \times SO(3))$ را بررسی می‌کند. ما به طور خاص ثابت می‌کنیم که نظریه ما فرمول‌بندی عمومی کانولوشن‌های کروی توسط \mathbb{A} را به عنوان یک حالت خاص شامل می‌شود. شبکه‌های کانولوشنی کروی که فقط نسبت به چرخش $SO(2)$ حول یک محور ثابت تناوب‌پذیر هستند در بخش ۱۱.۱ توصیف می‌شوند. بخش ۱۱.۳ شبکه‌های کانولوشنی بیست‌وجهی را بررسی می‌کند. بیست‌وجهی را تقریباً می‌زنند اما از وجود محلی مسطح تشکیل شده است که امکان پیاده‌سازی کارآمد عملیات کانولوشن را فراهم می‌کند.

یک بررسی از شبکه‌های کانولوشنی بر روی سطوح دو بعدی عمومی در بخش ۱۲ یافت می‌شود. بخش ۱۲.۱ مقدمه‌ای کوتاه بر هندسه دیفرانسیل کلاسیک سطوح جاسازی شده و گستره‌سازی آن‌ها بر حسب شبکه‌های متلشی ارائه می‌دهد. کانولوشن‌های سطحی در ادبیات به دو دسته طبقه‌بندی می‌شوند: دسته اول، که در بخش ۱۲.۱ پوشش داده شده است، بر اساس کرنل‌های $G = SO(2)$ -استیریبل است. این مدل‌ها مستقل از انتخاب خاص چارچوب متعامد راست‌گرد هستند. بخش ۱۲.۲ دسته دوم مدل‌ها را بررسی می‌کند که بر اساس کرنل‌های $\{e\}$ -استیریبل، یعنی غیرتناوب‌پذیر هستند. این مدل‌ها به صراحت بر انتخاب یک میدان چارچوب تکیه دارند. بنابراین آن‌ها عمدتاً در روش‌های اکتشافی که برای تعیین چارچوب‌های مرجع استفاده می‌شوند، تفاوت دارند. توجه داشته باشید که چنین مدل‌هایی لزوماً در متیفلدهای غیرقابل موازی‌سازی مانند کره‌های توپولوژیکی ناپیوسته هستند.

پیوست: پیوست شامل اطلاعات اضافی و اثبات‌های طولانی است.

گیج‌ها به صورت رسمی تخصیص فوری چارچوب‌های مرجع به فضاهای مماس را انجام می‌دهند اما به نقاط روی منیفولد به صورت مستقل از مختصات اشاره دارند. یک جایگزین محبوب انتخاب چارت‌های مختصاتی است که به اصطلاح پایه‌های مختصاتی (پایه‌های هولونومیک) فضاهای مماس را القا می‌کنند. پیوست آ مقدمه‌ای بر فرمالیسم چارت‌های ارائه می‌دهد و آن را با فرمالیسم گیج کلی تر مرتبط می‌کند.

پیوست ب درباره استقلال مختصات کرنل‌ها و اشتراک وزن در امتداد چارچوب‌های مرجع توضیح می‌دهد. اشتراک وزن مستقل از مختصات GM فقط برای کرنل‌های G -استیریبل امکان‌پذیر است.

کانولوشن‌های GM با بیان میدان‌های ویژگی در مختصات نرمال ژئودزیک محاسبه می‌شوند، جایی که آن‌ها با کرنل‌های کانولوشنی G -استیریبل مطابقت داده می‌شوند. این فرآیند شامل یک انتگرال‌گیری بر روی فضاهای مماس است که در پیوست پ توصیف شده است.

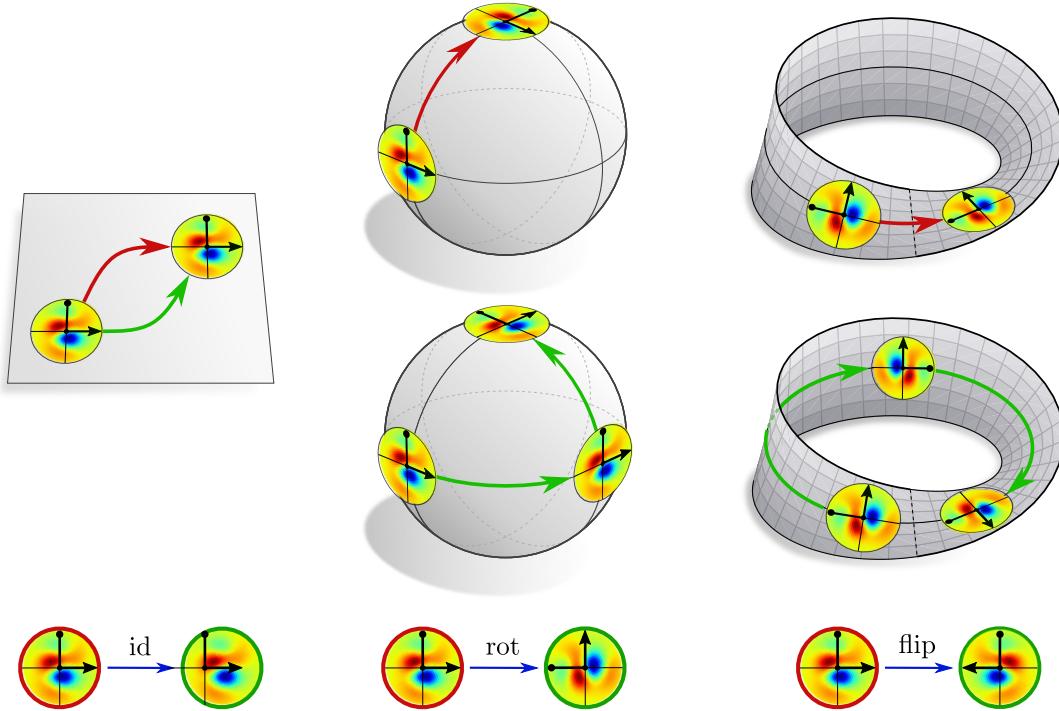
؟، ۹، ۱۰ و ۱۱ نظریه‌های نسبتاً عمومی از کانولوشن‌ها بر روی فضاهای همگن را پیشنهاد کردن. از آنجا که این مدل‌ها وزن‌ها را از طریق عمل یک گروه تقارنی به اشتراک می‌گذارند، آن‌ها بسیار شبیه به تبدیل‌های میدان کرنل تناوب‌پذیر ایزومنتری می‌باشند. پیوست ۱۰ هستند. پیوست ۱۱ این مدل‌ها را بررسی می‌کند و توضیح می‌دهد که چگونه آن‌ها با کانولوشن‌های GM مرتبط هستند.

پیوست ۱۲. ۱ ثابت می‌کند که میدان‌های کرنل ناوردا با ایزومنتری در منیفولد معادل میدان‌های کرنل در فضاهای خارج‌قسمتی از عمل ایزومنتری هستند. حالت خاص فضاهای همگن، که در آن‌ها تبدیل‌های میدان کرنل تناوب‌پذیر ایزومنتری معادل کانولوشن‌های GM هستند، در پیوست ۱۲. ۲ پوشش داده شده است.

کانولوشن‌های کروی ؟ [۱] در پیوست ۱۲. ۲ ثابت شده‌اند که یک حالت خاص از کانولوشن‌های GM کروی ما هستند [۱] بنابراین هر شبکه کانولوشنی کروی که توسط نظریه آن‌ها پوشش داده می‌شود، توسط نظریه ما نیز توضیح داده می‌شود.

پیوست ۱۲. ۳ تأکید می‌کند که تبدیل‌های میدان کرنل و کانولوشن‌های GM ما به خوبی تعریف شده‌اند اگر میدان کرنل هموار باشد و شامل کرنل‌های با پشتیبانی فشرده باشد. "به خوبی تعریف شده" در اینجا به این معنی است که انتگرال‌ها وجود دارند و میدان‌های ویژگی حاصل هموار هستند.

در نهایت، پیوست ۱۲. ۴ ابتدا میدان‌های ویژگی که مطالیق با نمایش منظم گروه ساختار G تبدیل می‌شوند، معادل میدان‌های اسکالر بر روی G -ساختار هستند. این موضوع از آن جهت اهمیت دارد که برخی مدل‌ها، به ویژه کانولوشن‌های گروهی، این دیدگاه را اتخاذ می‌کنند.



شکل ۴: درک شهودی از اهمیت ذاتی اشتراک وزن روی منیفولدها. چپ: تفسیر رایج اشتراک وزن روی صفحه، جایجا به یک کرنل روی کل فضا است. از آنجا که انتقال موازی روی فضاهای مسطح مستقل از مسیر است، این امر مهم نیست. وسط: روی فضاهای خمیده، مانند کره، انتقال موازی وابسته به مسیر است. مسیرهای مختلف منجر به کرنل هایی می شوند که نسبت به یکدیگر چرخیده هستند. راست: نوار موبیوس منیفولدی غیرقابل جهت یابی است. بنابراین مسیرهای مختلف می توانند منجر به کرنل هایی می شوند که نسبت به یکدیگر منعکس هستند. پایین: ما تراز مختلف کرنل ها را با انتخابهای مختلف چارچوب های مرجع محلی فضاهای مماس متناظر رسمی می کنیم. معلوم است که هیچ انتخابی از چارچوب های مرجع (گیج) روی منیفولدهای عمومی ترجیح داده نمی شود. مختصاتی سازی های مختلف توسط تبدیل های گیج مرتب هستند که مقادیری در گروه ساختار G منیفولد می گیرند (گروه بدیهی $\{e\}$ برای صفحه، گروه چرخش $G = \text{SO}(2)$ برای کره و گروه انعکاس $G = \mathcal{R}$ برای نوار موبیوس). CNN های مستقل از مختصات ابهام چارچوب های مرجع را با اعمال کرنل های کانولوشن قابل هدایت (هم متغیر گیج) مورد توجه قرار می دهد.

۲ مرور کلی و شهود بصری

فرمول بندی جبری CNN های مستقل از مختصات نیاز به آشنایی با نظریه گروه، نظریه نمایش و هندسه دیفرانسیل دارد که ممکن است مانعی برای مخاطب غیرفنی باشد. با این حال، اکثر ساختارها و نتایج ما از لحاظ هندسی بسیار شهودی هستند و می توانند با چند نمونه بصری توضیح داده شوند. این بخش سعی می کند مروری کلی و شهود بصری در مورد CNN های مستقل از مختصات ارائه دهد.

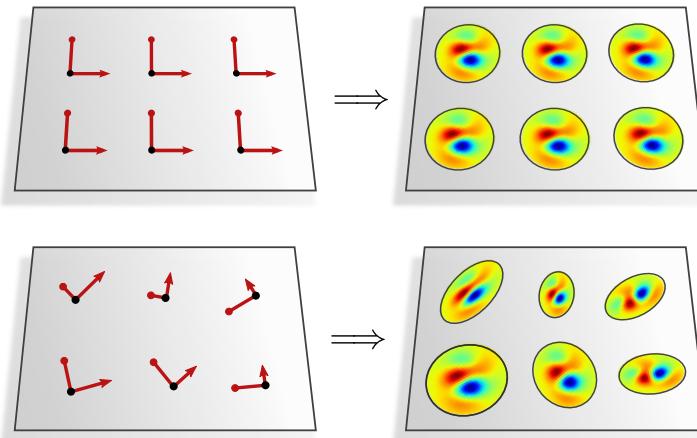
بخش زیر ۱.۲ کانولوشن های مستقل از مختصات GM روی منیفولدهای ریمانی را معرفی می کند. همتغیری آنها تحت عمل ایزومتری ها در بخش ۲.۲ بحث می شود. بخش ۳.۲ در مورد عواملی که بر انتخاب ساختار G در طراحی CNN های مستقل از مختصات تأثیر می گذارند، نظر می دهد.

۱.۲ ساختارهای G و کانولوشن های مستقل از مختصات GM

از آنجا که کانولوشن ها اساساً با خاصیت اشتراک وزن خود مشخص می شوند، سؤال اصلی در این کار این است: کرنل های کانولوشن چگونه باید روی منیفولدهای ریمانی به اشتراک گذاشته شوند؟^۳

یک رویکرد رایج اشتراک وزن ها از طریق عمل گروه تقارن فضای زیربنایی است [؟ ؟] . برای مثال شرکت CNN های طبقه سوم وزن ها را با جایجا به یک کرنل روی کل فضا، عمل گروه تقارن باید متعدد باشد. از آنجا که این امر به طور کلی برای ایزومتری های منیفولدهای ریمانی صادق نیست، این استراتژی برای هدف ما رد می شود.

^۳ این سؤال به طور کلی تر به هرتابع قالب محلی، برای مثال بایاس ها یا غیرخطی های نقطه ای، اعمال می شود.



شکل ۵: خاصیت کلیدی کانولوشن‌ها این است که آنها وزن‌ها را روی منیفولد به انتخاب می‌گذارند. ما تراز یک کرنل در $p \in M$ را با انتخاب چارچوب مرجع \square یا گیج \square فضای مماس متاظر $T_p M$ شناسایی می‌کنیم. بنابراین میدان‌های چارچوب مختلف میدان‌های کرنل (کانولوشن) متفاوتی را دربر می‌گیرند.

انتخاب چارچوب‌ها اغلب یکتا نیست. ابهام در این انتخاب توسط ساختارهای G رسمی می‌شود؛ شکل ۷ را ببینید. برای در نظر گیری اختیاری بودن چارچوب‌ها، کرنل‌ها سپس نیاز دارند که قابل هدایت G (هم‌متغیر) باشند همان‌طور که در شکل‌های ۶ و ۸ تجسم شده است.

اشتراک وزن روی فضاهای اقلیدسی اغلب به عنوان «جایجاًی» یک کرنل روی فضای در نظر گرفته می‌شود. از آنجا که روی فضاهای مسطح انتقال موازی مستقل از مسیر انتخابی است، این امر منجر به تراز مبهم کرنل‌ها می‌شود؛ شکل ۴ (چپ) را ببینید. با این حال، روی فضاهای خمیده یا غیرقابل جهت‌یابی، انتقال موازی وابسته به مسیر می‌شود و بنابراین برای اشتراک وزن‌ها نامناسب است. شکل ۴ (وسط و راست) این مسئله را برای کره و نوار موبیوس نمونه می‌زند، جایی که مسیرهای مختلف منجر به تراز متفاوت کرنل می‌شوند. از آنجا که مفهوم «تراز کرنل‌ها» تا حدودی مبهم است ابتدا باید آن را از لحاظ ریاضی دقیق کنیم:

ما انتخاب تراز کرنل در نقطه $p \in M$ را
به عنوان انتخاب چارچوب مرجع محلی (گیج) فضای مماس متاظر $T_p M$ رسمی می‌کنیم.

یک چارچوب مرجع در M چندتایی مرتب $[e_1, \dots, e_d]$ از $T_p M$ به عنوان محورهای چارچوب نامیده می‌شوند. از آنجا که چارچوب‌های مختلف در p توسط تبدیل‌های خطی مرتبط هستند، انتخاب‌های مختلف چارچوب‌ها مطابق با تغییر شکل‌های خطی کرنل هستند. شکل ۵ دو انتخاب مختلف از میدان‌های چارچوب روی $M = \mathbb{R}^2$ را نشان می‌دهد. اشتراک گذاری برخی کرنل کانولوشن در امتداد این میدان‌های چارچوب منجر به میدان‌های کرنل (کانولوشن) متاظر می‌شود.

شناسایی تراز کرنل‌ها با چارچوب‌های مرجع این سؤال را مطرح می‌کند:

انتخاب چارچوب‌های مرجع محلی روی یک منیفولد (ریمانی) تا چه حد مبهم است؟

همان‌طور که در ادامه تفصیل داده می‌شود، ابهام چارچوب‌های مرجع توسط ساختار G که منیفولد با آن مجهر است، تعیین می‌شود.

۱.۱.۲ ساختارهای G

فضای تمام چارچوب‌های ممکن $T_p M$ به عنوان $F_p M$ نشان داده می‌شود. در کنار هم، چارچوب‌های تمام فضاهای مماس بسته چارچوب FM را تشکیل می‌دهند؛ شکل ۳۳ را ببینید. هیچ انتخاب خاصی از چارچوب‌ها در FM روی منیفولد هموار «برهنه» (بدون ساختار هندسی بیشتر) نسبت به یکدیگر ترجیح داده نمی‌شود، که تراز کرنل‌ها را حداکثر مبهم می‌گذارد. برای رفع ابهام چارچوب‌ها و تراز کرنل‌ها، منیفولد باید به ساختار هندسی اضافی مجهر شود.

یک منیفولد ریمانی به ساختار متریک مجهر است. با فراهم کردن ضرب داخلی (متریک ریمانی) روی فضاهای مماس، این ساختار امکان جدا کردن آن چارچوب‌های خاص که محورهایشان نسبت به یکدیگر متعامد نرم‌مال هستند را فراهم می‌کند. تبدیل‌های گیج، یعنی تبدیل‌های بین انتخاب‌های چارچوب‌های مرجع (شکل‌های ۱۲ (چپ) و ۱۴ را ببینید)، سپس مقادیری در گروه متعامد d می‌گیرند. روی منیفولد‌های ریمانی تراز کرنل‌ها بنابراین همواره تا چرخش‌ها و انعکاس‌ها رفع ابهام می‌شود.

CNN‌های اقلیدسی کرنل‌های کانولوشن (بنابراین چارچوب‌ها) را موازی با یکدیگر تراز می‌کنند همان‌طور که در شکل ۵ (بالا) تجسم شده است. CNN‌های کروی تراز کرنل‌ها را معمولاً تا چرخش‌ها رفع ابهام می‌کنند، یعنی آنها دست‌چینی ترجیحی چارچوب‌هایی را فرض را فرض می‌کنند. ساختار متریک به تنها یک تووصیف این تنظیمات ناکافی است، که نشان می‌دهد این منیفولد‌ها به ساختار هندسی بیشتری علاوه بر ساختار متریک مجهر هستند. ما پیشنهاد می‌کنیم که چارچوب ریاضی مناسب، چارچوب ساختارهای G است و فرض می‌کنیم:

ابهام در انتخاب چارچوب‌های مرجع (بنابراین تراز کرنل‌ها)
روی منیفولد M توسط ساختار G آن به نام GM رسمی می‌شود.

ساختمان‌های G به نام GM بسته‌هایی از چارچوب‌های مرجع متمایز روی M هستند به طوری که تبدیل‌های گیج بین چارچوب‌های همان فضای مماس مقادیری در گروه ساختار $\text{GL}(d) \leq G$ می‌گیرند. به طور شهودی، می‌توان در مورد مجموعه $G_p M$ چارچوب‌های $T_p M$ به عنوان «شیوه به» G فکر کرد، با این حال، بدون مبدأ متمایز.^۴

بسته چارچوب خودش یک ساختار $G = \text{GL}(d)$ است، در حالی که بسته چارچوب‌های معتمد نرمال OM یک ساختار G (ساختار متريک) با $d = d$ است. CNN ‌هاي افليديسي مرسم بر ميدان چارچوب متعارف روی \mathbb{R}^d نشان داده شده در شكل ۷ تکيه می‌کنند، که يك ساختار G برای گروه بدبيهي $G = \{e\}$ است. شكل ۷ ساختاراهای G را برای منيفولدها و گروههای ساختار بيشتر تجسم می‌کند. مروري بر گروههای ساختار را يچ در جدول ۱ در بخش ۳.۱.۳ يافت می‌شود.

ما در ادامه همواره فرض می‌کنیم که منيفولدهای ريماني علاوه بر ساختار متريک خود به ساختار G اضافي مجهز هستند.^۵ انتخاب خاص ساختار G خواص شبکه عصبی را تعیین می‌کند؛ ما در بخش ۳.۲ در زير در مورد اين انتخاب نظر خواهيم داد.

۲.۱.۲ شبکه‌های مستقل از مختصات GM

هدف ما طراحی شبکه‌های عصبی روی منيفولدهای ريماني با ساختار اضافي G است. اگر گروه ساختار G غير بدبيهي باشد، هیچ انتخاب متعارف برای چارچوب‌های مرجع (گیج) وجود ندارد طبق تعریف. با این حال، برای انجام محاسبات عددی، برخی گیج، که نسبت به آن کرنل‌ها و ویژگی‌ها بيان می‌شوند، باید انتخاب شود. از آنجا که این انتخاب ذاتاً اختياری است، ما تقاضا می‌کنیم که استنتاج شبکه‌ها در نهايیت به آن وابسته باشند، يعني ما نياز داريم:

شبکه‌های عصبی روی منيفولد ريماني با ساختار G به نام GM
باید بر پایه عملیات «مستقل از مختصات GM » باشند.

«استقلال از مختصات GM » به اين معني است که تمام کميتهای هندسي و توابع بين آنها باید به طور مساوی در هر گيچي قابل بيان باشند، يعني نسبت به هر انتخابي از چارچوب‌های مرجع G . مورخ خاص ضرايب بردار مماس و تبدیلهای $G = \{e\}$ يك ميدان چارچوب ثابت است و استقلال از مختصات GM به واسطي صريح مختصات تقليل می‌يابد. آزادی انتخاب ساختاراهای G اختياری امكان کنترل دقیق استقلال از مختصات شبکه‌ها شده است. شكل ۲.۱.۳ نمونه‌ای از نگاشت خطی و نمایش مستقل از مختصات آن در قالب ماتریس‌های سببت به چارچوب‌های مختلف را نشان می‌دهد.

توجه کنید که نياز به استقلال از مختصات GM کاملاً انعطاف‌پذير است: برای $G = FM$ و بنابراین حداکثر سطح استقلال از مختصات. در انتهای دیگر طيف گروههای ساختار، $G = \{e\}$ يك ميدان چارچوب ثابت است و استقلال از مختصات GM به واسطي صريح مختصات تقليل می‌يابد. آزادی انتخاب ساختاراهای G اختياری امكان کنترل دقیق استقلال از مختصات شبکه‌ها را فراهم می‌کند، که در عمل به طور گسترده متفاوت است؛ برای مثال جدول ۶ در بخش سوم را ببینيد.

شبکه‌های ميدان‌های بردار ویژگی روی منيفولد را پردازش می‌کنند. بردارهای ویژگی کميتهای هندسي مستقل از مختصات هستند مثلاً بردارهای مماس. نسبت به چارچوب انتخابي (گیج) ممکن است توسيط بردارهای ضريب عددی نمایش داده شوند. تقاضا برای استقلال از مختصات GM نياز دارد که ضرايب عددی در گيچ‌های مختلف همان محتواي اطلاعاتي را کدگزاری کنند. اين امر به طور طبيعي با مرتبط کردن ویژگي‌ها با نمایش گروهی ρ از گروه ساختار G که رفتار تبدیل ضرايب آنها را تحت تبدیلهای گيچ تعیين می‌کند، حاصل می‌شود:

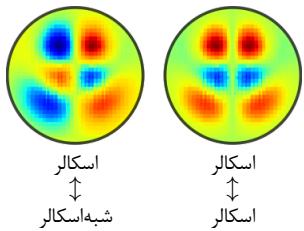
ميدان‌های بردار ویژگی با نمایش G به نام ρ مرتبط هستند که
قانون تبدیل ضرايب عددی آنها را هنگام تبدیل بين چارچوب‌های مرجع مشخص می‌کند.
از لحاظ فني، ميدان‌های ویژگي بخش‌هایي از بسته‌های بردار ویژگي مرتبط با G هستند.

نمونه‌های معمول شامل ميدان‌های اسکالار، ميدان‌های بردار مماس يا ساير ميدان‌های تانسوری هستند، اما هر قانون تبدیلي قابل قبول است و می‌تواند توسيط کاريبر انتخاب شود. ساير انتخاب‌های را يچ برای ρ در زمينه يادگيري عميق شامل نمایش‌های غيرقابل تقليل يا منظم است؛ نمونه‌های بيشتر در جدول ۶ در بخش سوم فهرست شده‌اند.

ما می‌خواهيم تأكيد کنیم که نياز به استقلال از مختصات GM صرفاً يك شرط سازگاري است که تضمین می‌کند ناظران مختلف (چارچوب‌ها) روی همان مشاهده هندسي مستقل از مختصات توافق دارند. اين امر مجموعه توابع قابل قبول را به هیچ وجه محدود نمی‌کند، بلکه تنها نحوه ارتباط بيان‌های آنها نسبت به چارچوب‌های مختلف را مشخص می‌کند. به طور خاص، شبکه‌های عصبی مستقل از مختصات GM به طور کلي مجبور به همتغیر گيچ بودن نيستند. نياز به همتغیر گيچ زمانی پيروي می‌کند که همزمان تقاضا اشتراك وزن و استقلال از مختصات شود، يعني کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM بر کرنل‌های همتغیر گيچ تکيه می‌کنند.

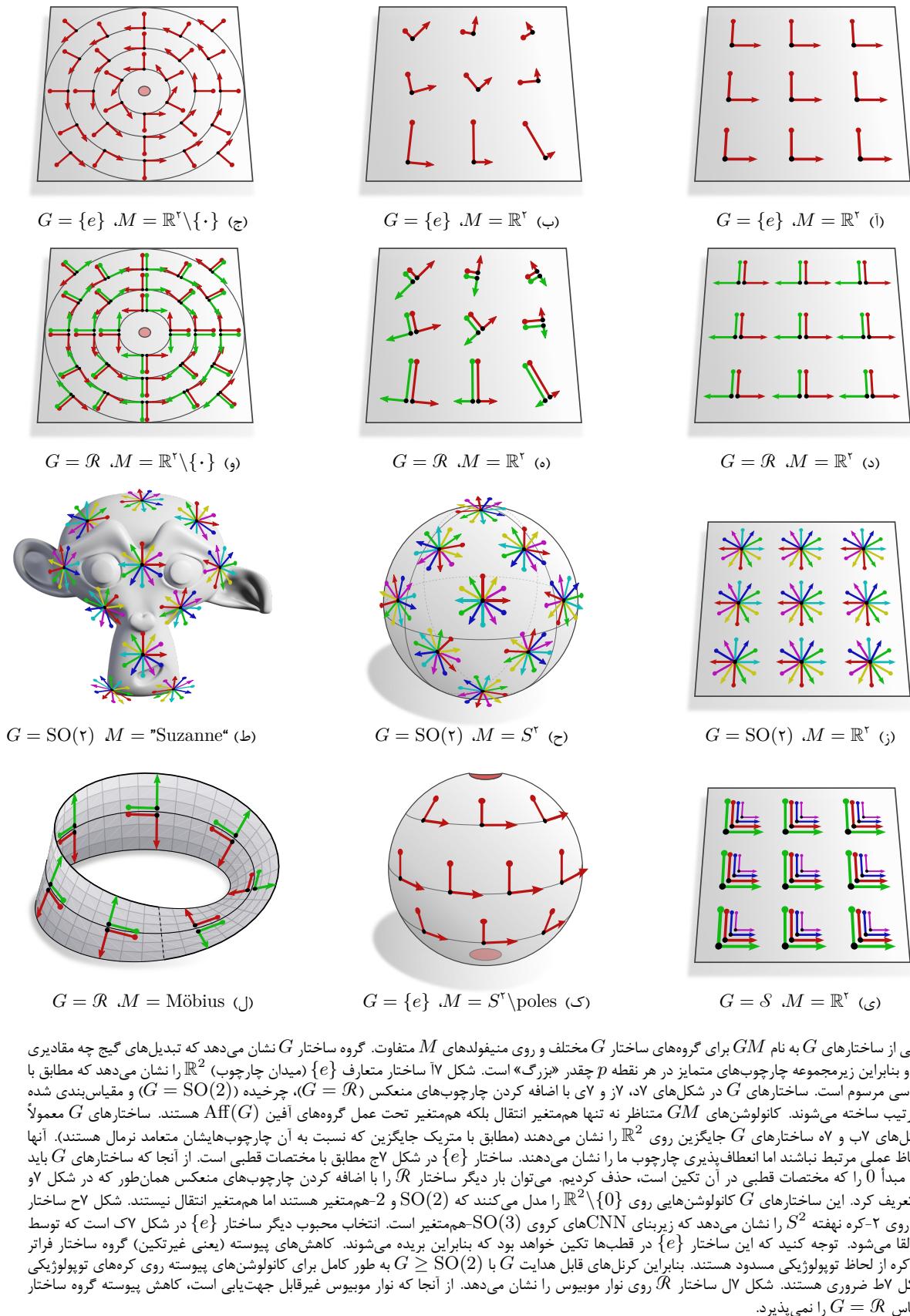
⁴ يك فضای همگن اصلی از G - G -توروسرور است.

⁵ ساختار G باید با ساختار متريک سازگار باشد به اين معني که چارچوب‌های متمایز در GM زيرمجموعه‌اي از چارچوب‌های متعامد نرمال در OM هستند و وقتی $d < d$. به طور خاص برای d ، ساختار G با نام GM با ساختار متريک OM منطبق است و هیچ اطلاعات هندسي اضافي اضافه نمی‌کند.

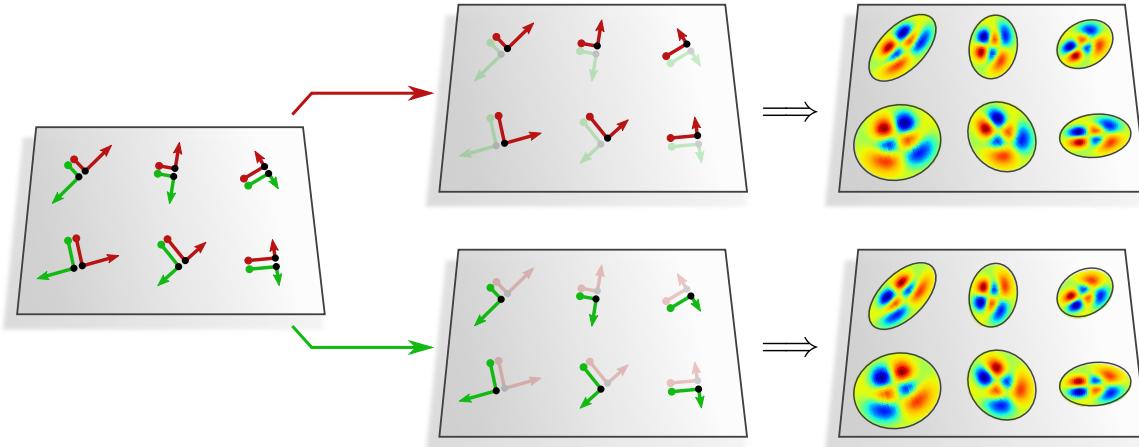


شکل ۶: کرنل‌های قابل هدایت $G = \text{Flip}$ نمونه برای گروه $G = \text{Flip}$ انعکاس‌ها در امتداد محور اول چارچوب (تبديل‌های پارiente). محدودیت‌های همتغیری کرنل‌ها به انواع میدان ρ_{in} و ρ_{out} ورودی و خروجی کانولوشن بستگی دارد. میدان‌های اسکالار و شبیه اسکالار توسط نمایش بدیهی و نمایش تغییر علامت Flip به ترتیب توصیف می‌شوند. کرنل‌های قابل هدایت که بین چنین میدان‌هایی نگاشت می‌کنند محدود به متقارن یا نامتقارن بودن هستند.

توجه کنید که کرنل‌های قابل هدایت به طور کلی مقدار اسکالار ندارند بلکه مقدار ماتریس $C_{\text{out}} \times C_{\text{in}}$ دارند، جایی که C_{out} و C_{in} ابعاد بردارهای ویژگی خروجی و ورودی به ترتیب هستند. اشتاقاق و نمونه‌های بیشتر برای سایر انواع میدان (ابعاد بالاتر) $G = \text{Flip}$ در بخش ۳.۳.۵ و جدول ۳ یافت می‌شود. کرنل‌های قابل هدایت برای $G = \text{SO}(3)$ یا $G = \text{SO}(2)$ از هارمونیک‌های دایره‌ای [؟] یا کروی [؟] ساخته می‌شوند. اگر G فشرده باشد، کرنل‌های قابل هدایت G توسط تعمیمی از قضیه ویگنر-اکارت [؟] توصیف می‌شوند.



شکل ۷: نمونه‌هایی از ساختارهای G به نام GM برای گروه‌های ساختار G مختلف و روی منیفولدهای M متفاوت. گروه ساختار G نشان می‌دهد که تبدیل‌های گیج چه مقادیری می‌توانند بگیرند، و بنابراین زیرمجموعه چارچوب‌های متمایز در هر نقطه p چقدر «بزرگ» است. شکل ۷A ساختار متعارف $\{e\}$ (میدان چارچوب) \mathbb{R}^2 را نشان می‌دهد که مطابق با CNN‌های اقلیدسی مرسوم است. ساختارهای G در شکل‌های ۷ا، ۷ب، ۷ز و ۷ای با اضافه کردن چارچوب‌های معنکس ($G = \mathcal{R}$)، چرخیده ($G = SO(2)$) و مقیاس‌بندی شده ($G = \mathcal{S}$) به ترتیب ساخته می‌شوند. کاتولوشن‌های GM متناظر نه تنها هم‌متغیر انتقال بلکه هم‌متغیر تحت عمل گروه‌های آفین ($G = Aff(G)$) هستند. ساختارهای G عموماً یکتا نیستند. شکل‌های ۷ب و ۷ز ساختارهای G جایگزین روى \mathbb{R}^2 را نشان می‌دهند (مطابق با متربک جایگزین که نسبت به آن چارچوب‌هایشان متعدد نرمال هستند). آنها ممکن است از لحاظ عملی مرتبط نباشند اما اعطاف‌پذیری چارچوب ما را نشان می‌هند. ساختار $\{e\}$ در شکل ۷ج مطابق با مختصات قطبی است. از آنجا که ساختارهای G باید پیوسته باشند، ما مبدأ ۰ را که مختصات قطبی در آن تکین است، حذف کردیم. می‌توان باز دیگر ساختار را با اضافه کردن چارچوب‌های معنکس همان‌طور که در شکل ۷او نشان داده شده، تعریف کرد. این ساختارهای G کاتولوشن‌هایی روى $\{0\}$ و $SO(2)$ را مدل می‌کنند که \mathbb{R}^2 را مدل می‌کنند که $SO(2)$ -هم‌متغیر هستند اما $SO(2)$ -هم‌متغیر انتقال نیستند. شکل ۷ج ساختار معمول ($SO(2)$ روی S^2 -کره نهفته) S^2 را نشان می‌دهد که زیربنای CNN‌های کروی ($SO(3)$ -هم‌متغیر) است. انتخاب محبوب دیگر ساختار $\{e\}$ در شکل ۷ک است که توسط مختصات کروی القا می‌شود. توجه کنید که این ساختار $\{e\}$ در قطب‌ها تکین خواهد بود که بنابراین بزیده می‌شوند. کاهش‌های پیوسته (یعنی غیرتکین) گروه ساختار فراتر از $SO(2)$ روی کره از لحاظ توپولوژیکی مسدود هستند. بنابراین کرnel‌های قابل هدایت G با $SO(2) \geq G$ به طور کامل برای کاتولوشن‌های پیوسته روی کره‌های توپولوژیکی مانند مش در شکل ۷ل ساختار R روی نوار موبیوس را نشان می‌دهد. از آنجا که نوار موبیوس غیرقابل جهت‌بایی است، کاهش پیوسته گروه ساختار فراتر از گروه انعکاس $G = \mathcal{R}$ را نمی‌پذیرد.



شکل ۸ اشتراک یک کرnel قابل هدایت \mathcal{R} بر اساس ساختار \mathcal{R} داده شده به نام \mathcal{RM} روی منیفوولد $M = \mathbb{R}^2$. دو گیج پیوسته (قمز و سیر) وجود دارد که کرnel می‌تواند در امتداد آنها به اشتراک گذاشته شود. به دلیل همتغیری \mathcal{R} آن، انتخاب خاص در نهایت بی‌ربط است. کرnel تجسم شده نامتقارن است و بنابراین بین میدان‌های اسکالار و شبیه‌اسکالار نگاشت می‌کند. به راحتی می‌توان تأیید کرد که واقعاً چنین است: ضرایب عددی یک میدان ورودی اسکالار تحت تبدیل‌های گیج ثابت باقی می‌مانند اما کرnel‌ها منعکس می‌شوند. از آنجا که آنها نامتقارن هستند، پاسخ‌هایشان منفی خواهد شد \square که قانون تبدیل ضرایب عددی یک میدان شبیه‌اسکالار است. استدلال مشابهی برای نگاشتها از شبیه‌اسکالارها به اسکالارها برقرار است. چگونه می‌توانستیم از اسکالارها به اسکالارها نگاشت کنیم؟ در این مورد هم ورودی و هم خروجی باید ثابت گیج باشند، که نیاز دارد کرnel به جای نامتقارن، متقاضی باشد. کرnel‌های متقاضی علاوه بر این بین میدان‌های شبیه‌اسکالار نگاشت می‌کنند.

۳.۱.۲ کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM

ما به سؤال اولیه خود بازمی‌گردیم در مورد اینکه چگونه یک کرnel کانولوشن را به اشتراک بگذاریم با توجه به اینکه تراز آن ذاتاً مبهم است وقتی گروه ساختار G غیر بدینه است. از انجا که عملیات کانولوشن باید مستقل از مختصات GM باشد، روش اشتراک وزن زیربنایی نیز باید مستقل از انتخاب‌های اختیاری چارچوب‌های مرجع باشد. تراز کرnel در امتداد چارچوب‌های مختلف ساختار G در نقطه‌ای p بنابراین همواره باید نتایج معادلی به دست دهد. ما نشان می‌دهیم که استقلال از مختصات GM فرآیند اشتراک وزن محدودیت همتغیری گیج (قابلیت هدایت G) « \square » را بر کرnel‌های کانولوشن تحمیل می‌کند:

$$\left. \begin{array}{c} \text{استقلال از مختصات } GM \\ \text{قابلیت هدایت } G \text{ (هم‌متغیری گیج)} \\ \text{اشتراک وزن} \end{array} \right\} \longrightarrow$$

شکل ۶ و حدول ۳ نمونه‌هایی از کرnel‌های قابل هدایت را نشان می‌دهند. محدودیت همتغیری (قابلیت هدایت) نوعی از تقارن G را اعمال می‌کند که تضمین می‌کند پاسخ‌های کرnel به طور قابل پیش‌بینی تحت تبدیل‌های گیج تبدیل شوند. یک نمایش بصری از اینکه چگونه کرnel‌های قابل هدایت G ابهام چارچوب‌های مرجع را حل می‌کنند در شکل ۸ ارائه شده است.

کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM (یا به اختصار کانولوشن‌های GM) به عنوان کانولوشن‌هایی با کرnel‌های قابل هدایت G تعریف می‌شوند:

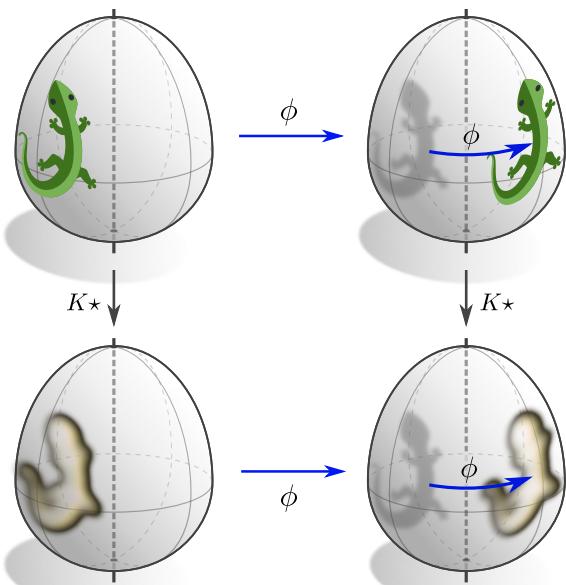
یک کانولوشن GM با کرnel قابل هدایت G به نام K ویژگی‌ها را با اعمال این کرnel در هر نقطه $p \in M$ نسبت به انتخاب اختیاری چارچوب مرجع در $G_p M$ پردازش می‌کند.

اختیاری بودن گیج انتخابی بین ترتیب توسط قابلیت هدایت G کرnel تضمین می‌شود. در حالی که در مختصات محلی ساخته می‌شوند، کانولوشن‌های GM مطابق با عملیات کانولوشن مستقل از مختصات به خوبی تعریف شده روی منیفوولد هستند.

نه تنها کرnel‌های کانولوشن بلکه هر تابع قالب مشترک نیاز به همتغیر گیج بودن دارد تا استقلال از مختصات GM را حفظ کند. بخش ۱.۴ محدودیت‌های همتغیری روی بایاس‌های مشترک، کرnel‌های 1×1 و غیرخطی‌ها را مشتق می‌کند. توجه کنید که محدودیت‌های همتغیری روی توابع قالب مشترک می‌توانند به عنوان شکلی از اشتراک وزن روی چارچوب‌های مرجع مرتبط با G در نظر گرفته شوند \square ابهام اشتراک وزن روی منیفوولد M بنابراین با گسترش اشتراک وزن روی کل ساختار G به نام GM حل می‌شود.

۲.۲ همتغیری تحت تقارن‌های سراسری منیفوولد

عملیات کانولوشن اغلب طراحی می‌شوند تا نسبت به تقارن‌های فضای زیربنایی همتغیر باشند \square [؟]. تقارن‌های یک منیفوولد ریمانی گروه ایزومتری آن به نام $\text{Isom}(M)$ را تشکیل می‌دهند، که گروه تمام نگاشتهای حافظ فاصله $M \rightarrow M : \phi$ است. ایزومتری‌ها به طور طبیعی



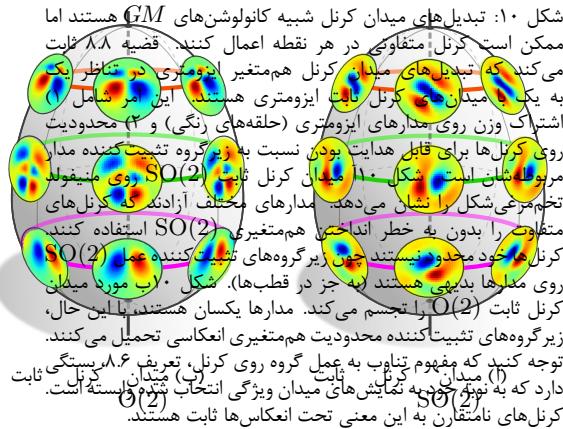
شکل ۹: تجسم یک کانولوشن GM هم‌متغیر ایزومتری. یک ایزومتری ϕ از طریق انتقال به جلو روی میدان‌های ویژگی عمل می‌کند. کانولوشن GM به نام K^* با کرنل قابل هدایت G به نام K هم‌متغیر نسبت به این ایزومتری گفته می‌شود وقتی پاسخ کانولوشن یک ورودی تبدیل شده (\downarrow, \rightarrow) با انتقال به جلو پاسخ ورودی تبدیل نشده (\rightarrow, \downarrow) مواقع باشد.

کانولوشن‌های GM نسبت به (زیر)گروه Isom_{GM} ایزومتری‌هایی که تقارن‌های ساختار G هستند، هم‌متغیر هستند. هم‌متغیری چرخش آریموقال تجسم شده بنابراین نیاز به ساختار G دارد که تحت چرخش‌ها حول محور قطبی ثابت باشد \square . این شرط برای مثال توسط مشابه ساختارهای G کروی در شکل‌های ۷ و ۷ک رکو روی تعم‌مرغ برآورده می‌شود. گروه ایزومتری منيفولد تخم مرغی شکل نه تنها شامل چرخش‌ها بلکه انعکاس‌ها نیز هست. برای دستیابی به هم‌متغیری انعکاس، ساختارهای G علاوه بر این باید شامل چارچوب‌های منعکس باشند و کانولوشن GM باید کرنل‌های قابل هدایت انعکاس اعمال کند.

(مارمولکها تحت مجوز Creative Commons Attribution 4.0 International اقتباس شده با تشکر از Twitter)

روی کمیت‌های هندسی مانند بردارهای ویژگی با «حرکت دادن آنها همراه با» عمل ایزومتری (انتقال به جلو) عمل می‌کنند؛ شکل ۱۲ (وسط) را ببینید. علی‌رغم اینکه تنها برای هم‌متغیر بودن تحت تبدیل‌های گیج محلی طراحی شده‌اند، کانولوشن‌های GM نسبت به عمل زیرگروه‌های ایزومتری خاص $\text{Isom}(M) \leq \text{Isom}_{GM}$ روی میدان‌های ویژگی هم‌متغیر هستند. این زیرگروه‌ها Isom_{GM} شامل آن ایزومتری‌هایی هستند که تقارن‌های ساختار G محسوب می‌شوند. طراحی کانولوشن‌های GM هم‌متغیر ایزومتری بنابراین با طراحی ساختارهای G ثابت مرتبط است. شکل ۹ ایده یک کانولوشن GM هم‌متغیر ایزومتری را به طور گرافیکی تجسم می‌کند.

ما در ادامه به طور مختصر محدودیت‌های تقارن که نیاز به هم‌متغیری ایزومتری بر میدان‌های کرنل، یعنی بر اتصال عصبی، تحمیل می‌کند را بحث خواهیم کرد. این شرایط روی میدان‌های کرنل مطابق با محدودیت‌های تقارن روی ساختارهای G است که کرنل‌های کانولوشن در امتداد آنها به اشتراک گذاشته می‌شوند. در نهایت در مورد اینکه چرا کانولوشن‌های GM تنها هم‌متغیر ایزومتری هستند و به طور کلی نسبت به دیفنتوفوریسم‌های عمومی‌تر هم‌متغیر نیستند، نظر خواهیم داد.



۱.۲.۲ میدان‌های کرنل ثابت ایزومتری

خواص هم‌متغیری یک شبکه عصبی در نهایت به تقارن‌ها در اتصال عصبی آن بستگی دارد [۹]. برای شبکه‌های کانولوشن این امر معادل محدودیت‌های تقارن روی میدان کرنل است. برای مطالعه این محدودیت‌ها در کلیت کامل، ما نیاز نداریم که میدان‌های کرنل کانولوشن باشند، یعنی توسط یک کرنل مشترک واحد تعیین شوند، بلکه میدان‌های کرنل عمومی را فرض می‌کنیم که ممکن است کرنل متغیری در هر نقطه از فضای اعمال کنند. ما لایه‌های شبکه متناظر را به عنوان «تبدیل‌های میدان کرنل» نشان می‌دهیم:

«تبدیل‌های میدان کرنل» شبیه کانولوشن‌های GM هستند اما ممکن است کرنل متغیری در هر نقطه اعمال کنند.
بنابراین آنها توسط میدان‌های کرنل عمومی پارامتری می‌شوند.

کانولوشن‌های GM تبدیل‌های میدان کرنل خاصی با میدان‌های کرنل کانولوشن GM هستند. نتایج کلی برای تبدیل‌های میدان کرنل هم‌متغیر ایزومتری بنابراین فوراً به کانولوشن‌های GM تعمیم می‌یابند.

قضیه ۸.۸ ثابت می‌کند که تناوب یک میدان کرنل تحت عمل ایزومتری و هم‌متغیری تبدیل میدان کرنل متناظر یکدیگر را نتیجه می‌دهند:

$$\text{میدان کرنل ثابت ایزومتری} \iff \text{تبدیل میدان کرنل هم‌متغیر ایزومتری}$$

میدان‌های کرنل ثابت به دو روش کیفیتاً متفاوت محدود می‌شوند؛ اولاً، کرنل‌ها باید روی مدارهای ایزومتری به اشتراک گذاشته شوند. ثانیاً، کرنل‌های مشترک خود توسط زیرگروه ثبیت‌کننده مدار متناظر محدود می‌شوند. توجه کنید که میدان کرنل کامل و متناظر می‌تواند از یک کرنل نماینده واحد برای هر مدار بازیابی شود [۰.۱۲ و ۰.۱۳] قضیه‌های [۰.۱۲ و ۰.۱۳] این گزاره را با اثبات یکریختی‌هایی بین میدان‌های کرنل ثابت روی منیفولد و میدان‌های کرنل روی فضاهای خارج قسمت تحت عمل ایزومتری رسمی می‌کنند.

شکل‌های ۰.۱۰ و ۰.۱۱ این نتایج را برای منیفولد تخم مرغی‌شکل که ایزومتری‌هایش چرخش‌ها و انعکاس‌ها حول محور عمودی هستند، نمونه می‌زنند. یک تبدیل میدان کرنل عمومی می‌تواند هر میدان کرنلی اعمال کند. اگر تنها هم‌متغیری ایزومتری $(SO(2))$ نیاز باشد (بدون انعکاس‌ها)، مدارها حلقه‌هایی حول تخم مرغ هستند و زیرگروه ثبیت‌کننده عمل $(SO(2))$ روی این مدارها بدهی می‌باشد؛ شکل ۰.۱۰ را بینید.^۶ میدان کرنل ثابت ایزومتری بنابراین کرنل‌های بدون محدودیت را روی این مدارها به اشتراک می‌گذارد. شکل ۰.۱۱ میدان کرنل ثابت $(SO(2))$ را نشان می‌دهد. مدارها، و بنابراین الگوی اشتراک وزن فضایی، در اینجا همانند مورد قبلی هستند. با این حال، زیرگروه ثبیت‌کننده عمل $(SO(2))$ روی مدارها گروه انعکاس است. کرنل‌ها بنابراین محدود به قابل هدایت انعکاس بودن هستند، با محدودیت دقیق بسته به انواع ρ_{in} و ρ_{out} میدان ویژگی ورودی و خروجی.

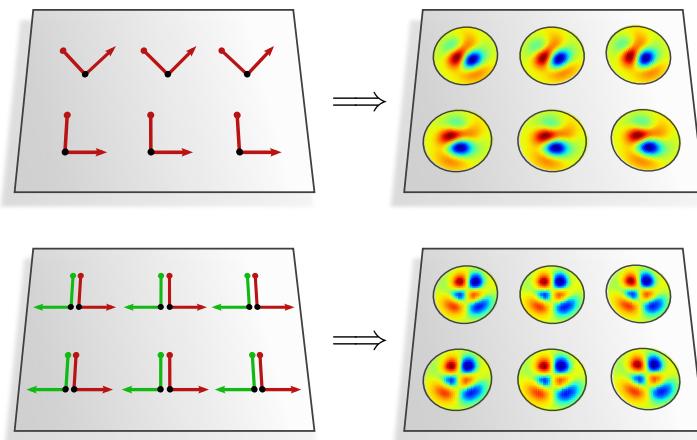
موردن جالب خاص منیفولد‌هایی است که فضاهای همگن گروه ایزومتری‌شان هستند. در این مورد تنها یک مدار واحد وجود دارد، به طوری که میدان کرنل ثابت توسط یک کرنل مشترک (کانولوشن) واحد تعیین می‌شود. قضیه ۸.۱۴ ثابت می‌کند:

تبدیل‌های میدان کرنل هم‌متغیر ایزومتری روی فضاهای همگن لزوماً کانولوشن هستند.

کرنل‌ها بار دیگر نیاز دارند که نسبت به زیرگروه ثبیت‌کننده عمل ایزومتری قابل هدایت باشند. این امر نتایج [۰.۹ و ۰.۱۰] را بازیابی می‌کند که CNN‌های هم‌متغیر گروه روی فضاهای همگن را بررسی کردن؛ پیوست ت را برای مقایسه عمیق ببینید.

^۶ تبدیل‌های میدان کرنل در ادبیات بینایی کامپیوتر گاهی «شبکه‌های متصل محلی» نامیده می‌شوند.

^۷ ما برای اختصار قطب‌ها را نادیده می‌گیریم، جایی که زیرگروه ثبیت‌کننده در شکل ۰.۱۰ برابر $(SO(2))$ و در شکل ۰.۱۱ برابر $(O(2))$ است.



شکل ۱۱: میدان‌های کرنل کانولوشن GM با اشتراک گذاری برخی کرنل قابل هدایت G در امتداد GM چارچوب‌های (اختیاری) ساختار G به نام $Isom_{GM}$ می‌شوند. تقارن‌های میدان‌های کرنل بنابراین با تقارن‌های ساختار G , یعنی با $Isom_{GM}^G$, موفق هستند. ساختار $\{e\}$ که در بالا تجسم شده بنابراین مطابق با کانولوشن GM است که نسبت به انتقال‌ها در جهت افقی هم‌متغیر است اما در جهت عمودی نیست. از آنجا که ساختار $Flip$ که در پایین تجسم شده تحت انتقال‌های اختیاری و انکاس‌های افقی ثابت است، کانولوشن GM هم‌متغیر انتقال و انکاس است.

۲.۲.۲ هم‌متغیری ایزومتری کانولوشن‌های GM

ساختارهای G ثابت ایزومتری: کانولوشن‌های میدان کرنل خاصی هستند که بر میدان‌های کرنل کانولوشن GM تکیه می‌کنند. بنابراین آنها هم‌متغیر ایزومتری هستند اگر میدان کرنل کانولوشن GM تحت عمل ایزومتری ثابت باشد. به یاد بیاورید که میدان‌های کرنل کانولوشن GM با اشتراک گذاری برخی کرنل قابل هدایت G در امتداد چارچوب‌های (اختیاری) ساختار G تعریف می‌شوند. تقارن‌های آنها (ایزومتری‌ها) بنابراین با تقارن‌های ساختار G متنطبق هستند.

ما $Isom_{GM} \leq Isom(M)$ را به عنوان زیرگروه آن ایزومتری‌هایی تعریف می‌کیم که تقارن‌های ساختار G به نام GM هستند (خودریختی‌های بسته اصلی).

از این رو نتیجه می‌شود که

میدان‌های کرنل کانولوشن GM ثابت $Isom_{GM}$ هستند.

در نتیجه، که در قضیه ۸.۹ به طور دقیق اثبات شده، می‌باییم:

کانولوشن‌های GM هم‌متغیر $Isom_{GM}$ هستند.

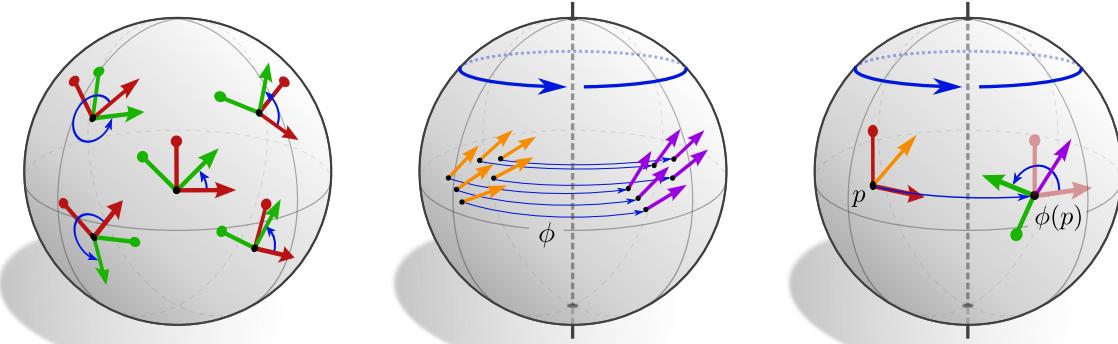
طراحی کانولوشن‌های GM هم‌متغیر ایزومتری بنابراین به طراحی ساختارهای G ثابت ایزومتری ساختارهای G به نام GM و میدان‌های کرنل کانولوشن GM متناظر را نشان می‌دهد که همان تقارن‌ها را به اشتراک می‌گذارند. برای نمونه‌های بیشتر به ساختارهای G در شکل ۷ مراجعه می‌کنیم. توجه کنید که $Isom_{GM} = O(d)$ (یا ابرگروه‌های آن) شامل تمام ایزومتری‌های ممکن است، که نتیجه می‌دهد کانولوشن‌های GM متناظر کاملاً $Isom(M)$ -هم‌متغیر هستند. گزاره مشابهی برای $G = SO(d)$ و ایزومتری‌های حافظ جهت‌یابی برقرار است.

تبديل‌های گیج القا شده توسط ایزومتری: استدلال بر حسب میدان‌های کرنل ثابت و ساختارهای G ثابت بر هیچ انتخاب گیجی تکیه نمی‌کرد بلکه در تنظیم کاملاً هندسی و مستقل از مختصات فرمول‌بندی شده بود. نقطه نظر جایگزین هم‌متغیری ایزومتری کانولوشن‌های GM را در مختصات توضیح می‌دهد، جایی که ایزومتری‌ها از طریق تبدل‌های گیج القا شده عمل می‌کنند. این تبدل‌های گیج توسط قابلیت هدایت G کرنل توضیح داده می‌شوند، که پیوندی بین مفاهیم هم‌متغیری گیج و هم‌متغیری ایزومتری فراهم می‌کند. ما در ادامه به طور مختصر این نقطه نظر جایگزین را شرح می‌دهیم.

وقتی نسبت به چارچوب‌های مرجع محلی بیان می‌شوند، ایزومتری‌ها می‌توانند به عنوان عمل از طریق تبدل‌های گیج القا شده روی ضرایب بردار ویژگی در نظر گرفته شوند. شکل ۱۲ (راست) این مفهوم را تجسم می‌کند: فرض کنید که چارچوب‌های مرجع را در نقاطهای p و در تصویرش $\phi(p)$ تحت عمل ایزومتری ϕ انتخاب کرده‌ایم. ایزومتری یک ویژگی را از p به $\phi(p)$ هل می‌دهد. از آنجا که هندسه‌های ریمانی حول p و $\phi(p)$ غیرقابل تشخیص هستند، تنها چیزی که از نقطه نظر بردار ویژگی تغییر کرده نسبت به کدام چارچوب مرجع بیان می‌شود. این تغییر چارچوب‌ها تبدل گیج القا شده توسط ایزومتری است.

به یاد بیاورید که کانولوشن‌های GM همان کرنل قابل هدایت G را در هر نقطه از منیفولد اعمال می‌کنند. هم‌متغیری G کرنل هر تبدل گیج مقدار G (القا شده) را در نظر می‌گیرد، به طوری که:

اگر ایزومتری تبدل‌های گیجی القا کند که مقادیری در گروه ساختار G بگیرند،
انگاه هر کانولوشن GM نسبت به این ایزومتری هم‌متغیر است.



شکل ۱۲: تبدیلهای گیج، ایزومتری‌ها و رابطه متقابل آنها. چپ: گیج انتخاب چارچوب‌های مرجع محلی (میدان چارچوب) است که نسبت به آن کمیت‌های هندسی ممکن است بیان شوند. اگر گروه ساختار منیفولد G غیر بدینه باشد، انتخاب گیج یکتا نیست بلکه انتخاب‌های مختلف گیج‌ها (قزمز یا سبز) توسط تبدیلهای گیج (ای) مرتبط هستند که طبق تعریف مقادیری در گروه ساختار G می‌گیرند. چارچوب‌های معتمد نرمال راست‌گرد تجسم شده‌اند که برای آنها تبدیلهای گیج مقدار $G = \text{SO}(2)$ دارند. وسط: ایزومتری‌ها تقارن‌های منیفولدهای ریمانی هستند. آنها به عنوان توابع حافظ فاصله $M \rightarrow M$: گیج تعریف می‌شوند که منیفولد را به خودش نگاشت می‌کنند. ایزومتری‌ها از طریق انتقال به جلو روی بردارهای مماس، چارچوب‌های مرجع و بردارهای ویژگی عمل می‌کنند. در حالی که تبدیلهای مختصات غیرفعال هستند، ایزومتری‌ها به طور فعل نقاط و کمیت‌های هندسی را روی منیفولد حرکت می‌دهند. راست: وقتی نسبت به چارچوب‌های مرجع محلی بیان می‌شوند، عمل ایزومتری‌ها می‌تواند به عنوان القای تبدیلهای گیج در نظر گرفته شود. فرض کنید چارچوب‌ها در p (قزمز) و $\phi(p)$ (سبز) داده شده باشند. یک کمیت هندسی در p (نارنجی) توسط ایزومتری به $\phi(p)$ (بنفش) هل داده می‌شود. از آنجا که ϕ ایزومتری است، هندسه ریمانی حول p و ϕ غیرقابل تشخیص است، با این حال، انتقال به جلو کمیت هندسی نسبت به چارچوب مرجع جدیدی (سبز) به جای قزمز بیان می‌شود. بنابراین می‌توان ایزومتری‌ها را به عنوان القای تبدیلهای گیج در نظر گرفت. اگر این تبدیلهای گیج القا شده مقادیری در گروه ساختار G بگیرند، توسط قابلیت هدایت (هم‌متغیری گیج) کرنل‌های کانولوشن توضیح داده می‌شوند. کانولوشن‌های GM آنگاه هم‌متغیر ایزومتری هستند. این شرط معماره برای $G \geq O(d)$ برآورده می‌شود.

تبدیلهای گیج القا شده برای ایزومتری‌های عمومی ممکن است مقادیری در گروه ساختار انتخابی G نگیرند. برای مثال، ساختارهای G در شکل‌های ۷ و ۷د گروه‌های ساختار $M = \{e\}$ و $G = \text{Flip}$ هستند، اما چرخش‌های Isom_{GM} تبدیلهای گیج مقدار $\text{SO}(2)$ یا $O(2)$ القا می‌کنند. با این حال، اگر ایزومتری تقارن ساختار G باشد، یعنی عنصری از GM ، چارچوب‌ها در GM را به چارچوب‌ها در GM نگاشت می‌کنند. از آنجا که چارچوب‌ها در GM توسط تبدیلهای گیج مقدار G مرتبط هستند، نتیجه می‌شود که:

ایزومتری‌ها در Isom_{GM} تبدیلهای گیجی القا می‌کنند که مقادیری در گروه ساختار G می‌گیرند.

این نتیجه می‌دهد که کانولوشن‌های GM هم‌متغیر Isom_{GM} هستند، همان‌طور که قبلًا در تنظیم مستقل از مختصات یافت شد. در حالی که این نقطه نظر جایگزین از لحاظ هندسی کمتر شهودی است، نقش قابلیت هدایت G کرنل‌ها در هم‌متغیر ایزومتری شبکه‌ها را تأکید می‌کند.

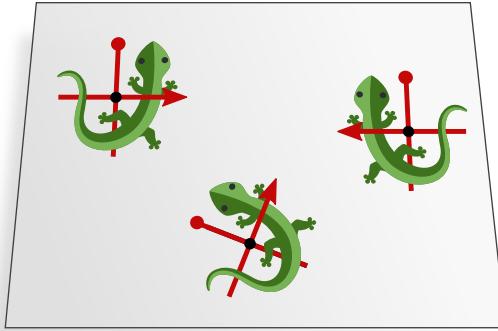
۳.۲.۲ دیفئومورفیسم‌ها، ایزومتری‌ها و تبدیلهای آفین:

اکثر استدلال‌ها در بندهای قبلی نه تنها برای ایزومتری‌ها، بلکه برای دیفئومورفیسم‌ها نیز برقرار خواهد بود. این سؤال را مطرح می‌کند که آیا کانولوشن‌های GM نسبت به گروه‌های دیفئومورفیسم عمومی‌تر هم‌متغیر هستند. در برخی تنظیمات واقعاً چنین است، با این حال، کانولوشن‌های GM به طور کلی (علاوه بر این) بر ساختار متریک منیفولدها تکیه می‌کنند که تنها توسط ایزومتری‌ها حفظ می‌شود.

در بالا کانولوشن‌های GM را به عنوان «عمل کرنل قابل هدایت G » نسبت به چارچوب‌های ساختار G توصیف کردیم. دقیق‌تر، کرنل در مختصات نرمال ژئوپزیکی اعمال می‌شود. این بدان معنی است که میدان ویژگی در هر نقطه $p \in M$ از طریق نگاشت نمایی ریمانی \exp_p به فضای مماس $T_p M$ بازگشیده می‌شود، جایی که با کرنل تطبیق داده می‌شود؛ شکل ۲۴ را ببینید. در حالی که میدان کرنل خود تحت آن دیفئومورفیسم‌ها $\text{Diff}_{GM} \leq \text{Diff}(M)$ هستند ثابت خواهد بود، نگاشت نمایی صراحتاً به ساختار متریک بستگی دارد. کانولوشن‌های GM با کرنل‌های گسترده فضایی بنابراین به طور کلی تنها می‌توانند هم‌متغیر ایزومتری باشند.

هر لایه شبکه که وزن‌ها را به اشتراک می‌گذارد و بر ساختار متریک منیفولدها تکیه نمی‌کند می‌تواند هم‌متغیر دیفئومورفیسم باشد. نمونه‌های مهم لایه‌های هم‌متغیر Diff_{GM} شامل عملیات نقطه‌ای مانند جمع بایاس، غیر خطی ها و $\times 1$ است که در بخش ۱.۴ معرفی می‌شوند. باید امکان تعیین نظریه ما به معادلات دیفرانسیل جزئی عصبی روی منیفولدهای هموار وجود داشته باشد که تعامل‌های غیر محلی کانولوشن‌های GM را با تعامل‌های محلی بر حسب عملگرهای دیفرانسیل قابل هدایت G قابل هدایت Diff_{GM} هستند. توجه کنید که کانولوشن‌های GM در عمل اغلب از کرنل‌های پشتیبانی فشرده استفاده می‌کنند و بنابراین شبیه محلی [؟] هستند. هم‌متغیری Diff_{GM} چنین کانولوشن‌های GM با کرنل‌های کوچک باید تقریباً برقار باشد.

مورد خاص کانولوشن‌های GM روی فضاهای اقلیدسی است. نگاشت نمایی روی فضاهای اقلیدسی نه تنها توسط ایزومتری‌ها، بلکه توسط هر تبدیل آفین حفظ می‌شود. قضیه ۹.۸ ثابت می‌کند که کانولوشن‌های GM اقلیدسی واقعاً تحت عمل گروه‌های آفین $\text{Aff}(G)$ (معادله (۳۶۴)) هم‌متغیر



شکل ۱۳: الگوهای معمول در سیگنال‌ها معمولاً در ژست‌های هندسی متفاوت ظاهر می‌شوند. کاتولوشن‌های GM روی تمام ژست‌هایی که توسط عمل گروه ساختار انتخابی G مرتبط هستند تعیین می‌دهند. در حالی که یک CNN مرسوم روی $M = \mathbb{R}^2$ باید یاد بگیرد تمام مارمولک‌ها را به طور جداگانه تشخیص هد، یک CNN مستقل از مختصات G برای GM برای $G = SO(2)$ بین مارمولک چپ و پایین تعیین می‌هد و برای $G = \text{Flip}$ بین مارمولک چپ و راست تعیین می‌دهد. برای $G = O(2)$ ، تعیین می‌شود که هر سه مارمولک را به عنوان همان ویژگی در ژست‌های متفاوت کدکاری کند.
مارمولک‌ها تحت مجوز Creative Commons Attribution 4.0 International License
اقتباس شده با تشکر از Twitter

هستند اگر ساختارهای G ثابت آفین مانند ستون اول شکل ۷ انتخاب شوند. این شامل ایزومنتری‌های $E(d)$ فضاهای اقلیدسی، اما همچنین مثلاً CNN ‌های همتغیر مقیاس است.

۳.۲ در مورد انتخاب ساختارهای G

نکتایی که تاکنون باز گذاشته شده انتخاب ساختار G است. به طور کلی، یک منیفولد ریمانی با ساختار متریک، یعنی ساختار (d, O) می‌آید. کاهش گروه ساختار به زیرگروههای $O(d) < G$ ممکن است توسط توپولوژی منیفولد مسدود شود ۱۰ ساختارهای G هموار (با پیوسته) وجود ندارند اگر چنین باشد. به جز این محدودیت، انتخاب ساختار G عمده‌سؤال مهندسی است که برای مثال به خواص همتغیری مطلوب بستگی دارد.

در اکثر کاربردها منطقی است که تقاضا کنیم پیش‌بینی شبکه عصبی به طور هموار روی منیفولد تغییر کند. از آنجا که کاتولوشن‌های GM کرنل‌ها را نسبت به چارچوب‌های برخی ساختار G به اشتراک می‌گذارند، پاسخ کاتولوشن تنها زمانی تضمین می‌شود که هموار باشد که ساختار G هموار باشد. این واقعیت شناخته شده است که توپولوژی منیفولد کاهش (هموار) گروه ساختارش را فراتر از سطح خاصی مسدود می‌کند. این نتیجه می‌دهد که حداقل سطحی از همتغیری گیج کاملاً ضروری است برای عملیات کاتولوشن هموار. ما در قضیه ۷.۷ ثابت می‌کنیم که کاتولوشن‌های GM ما واقعاً همواری میدان‌های ویژگی را حفظ می‌کنند.

نمونه شهودی از چنین مانع توپولوژیکی غیرقابل جهت‌یابی بودن نوار موبیوس از شکل ۷L است: کاهش گروه ساختار به گروه بدیهی $\{e\}$ مطابق با انتخاب میدان چارچوب هموار روی نوار خواهد بود. با این حال، به دلیل پیچش نوار، این کاهش لزوماً منجر به نایپوستگی در قالب انعکاس چارچوب در نقطه‌ای خواهد شد ۱۱ کاهش به $\{e\}$ = بنابراین از لحظه توپولوژیکی مسدود است و کرنل‌های قابل هدایت Flip روی نوار موبیوس اجتناب‌ناپذیر هستند. نمونه دیگر ۲-کره S^2 است که کاهش فراتر از $G = SO(2)$ را نمی‌پذیرد.

در ادبیات یادگیری عمیق غیرمعمول نیست که چنین مانع توپولوژیکی نادیده گرفته شوند و شبکه‌های نایپوسته پیاده‌سازی شوند. نمونه‌ای CNN‌های کروی هستند که بر ساختار $\{e\}$ در شکل ۷ک تکیه می‌کنند؛ بخش ۳.۱۱ را برای بررسی دقیق چنین مدل‌هایی ببینید. توجه کنید که حذف قطب‌ها، جایی که میدان چارچوب تکین است، توپولوژی کروی را به توپولوژی استوانه‌ای تبدیل می‌کند، جایی که کاهش هموار به $G = \{e\}$ امکان‌پذیر است. بخش ۳.۱۲ کاتولوشن‌های GM نایپوسته بیشتری را بحث می‌کند که کرنل‌های غیرقابل هدایت را نسبت به ساختارهای $\{e\}$ ثابت شده به طور اکتشافی (الگوریتمی) اعمال می‌کنند.

مهم است که در کنیم ساختارهای G متفاوت زیادی به نام GM برای گروه ساختار G و منیفولد M داده شده وجود دارند. شکل‌های ۷A و ۷B انتخاب‌های مختلف ساختارهای $\{e\}$ را نشان می‌دهند در حالی که شکل‌های ۷D و ۷E ساختارهای $Flip$ متفاوت را نشان می‌دهند. ساختارهای $O(d)$ مختلف روی M مطابق با متريک‌های ریمانی متفاوت هستند. در حالی که گروه ساختار G قابلیت هدایت G کرنل را نتیجه می‌دهد، ساختار G تعیین می‌کند که دقیقاً این کرنل چگونه به اشتراک گذاشته شود.

در محدودیت‌های توپولوژیکی، گروه ساختار G و ساختار GM ممکن است آزادانه توسط کاربر انتخاب شوند. اگر منیفولد با گروه ایزومنتری غیربدیهی $(M, Isom(G))$ بیاید، ساختار G به نام GM اغلب طوری طراحی می‌شود که کاتولوشن GM متناظر نسبت به برخی زیرگروه $Isom_{GM}$ ایزومنتری‌ها هم‌متغیر باشد. نمونه‌ها در شکل ۷ و در سراسر بررسی ادبیات ما در بخش سوم ارائه شده‌اند. حتی اگر منیفولد نامتقارن باشد، الگوهای محلی ویژگی‌ها اغلب در چندین ژست هندسی متفاوت ظاهر می‌شوند. انتخاب گروه ساختار G ابزار قدرتمندی برای بهره‌برداری از چنین تقارن‌هایی در کار یادگیری فراهم می‌کند: کاتولوشن‌های GM الگوهای یادگرفته را به طور خودکار روی هر ژست مرتبط با G تعیین می‌دهند؛ شکل ۱۳ را ببینید. انتخاب بهینه گروه ساختار ممکن است با مقایسه طول (میدان دید) و بنابراین با عمق در شبکه متفاوت باشد [۱]. برای مثال، حتی اگرچه تصاویر طبیعی در مقیاس سراسری تراز هستند، الگوهای محلی مانند لبه‌ها و گوشها معمولاً در چندین جهت ظاهر می‌شوند، به طوری که همتغیری گیج محلی همچنان مفید ثابت می‌شود.

بخش اول

مقدمه‌ای بر شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات

شبکه‌های کانولوشنی سلسله‌مراتبی از میدان‌های ویژگی را از یک سیگنال ورودی بر روی یک منیفولد استخراج می‌کنند. ویژگی‌ها از طریق کرنل‌ها محاسبه می‌شوند، که برای شناسایی الگوهای فضایی مشخص در ویژگی‌های سطح پایین تر بهینه شده‌اند. ما تقاضا می‌کنیم که این فرآیند استنتاج صرفاً بر اساس آرایش نسبی ویژگی‌ها باشد و مستقل از انتخاب خاص مختصات بندی باشد. بنابراین ویژگی‌ها باید کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات باشند، مشابه اسکالرهای بردارها یا تانسورها. در حالی که چنین کمیت‌هایی هندسی مستقل از مختصات وجود دارند، یک پیاده‌سازی کامپیوتربی (غیرنمادین) نیازمند آن است که آن‌ها بر حسب ضرايب عددی در برخی گیج، یعنی نسبت به برخی انتخاب از چارچوب مرجع، بیان شوند. انتخاب خاص مختصات بی‌همیت است ۰۰ این تنها یکی از چندین توصیف معادل است. چارچوب ریاضی مناسب برای تنظیم چنین درجات آزادی اضافی، نظریه‌های گیج هستند. یک نظریه گیج، برای گیج‌های مختلف را با مرتبط کردن سازگار آن‌ها با یکدیگر از طریق تبدیل‌های گیج در نظر می‌گیرد. میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات بنابراین با یک قانون تبدیل خاص، یعنی یک عمل گروهی از گروه ساختار که توصیف می‌کند ویژگی‌ها چگونه تحت تبدیل‌های گیج تبدیل می‌شوند، مرتبط هستند. هر لایه شبکه عصبی که چنین میدان‌های ویژگی را بردازش می‌کند، ملزم به رعایت قوانین تبدیل آن‌ها برای حفظ استقلال از مختصاتشان است.

هدف این بخش اول از کار ما، معرفی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات با زبانی آسان است. بنابراین، شهود هندسی و بصری‌سازی‌ها بر فرمالیسم ریاضی ترجیح داده می‌شوند. یک تبیین رسمی تر از تعاریف و نتایج ارائه شده در بخش دوم آورده شده است.

۱۸	۳ مقدمه‌ای بر شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات
۱۸	۱.۳ گیج‌ها، تبدیل‌های گیج و G -ساختارها
۲۶	۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی مستقل از مختصات
۲۹	۳.۳ انتقال موازی بردارهای ویژگی
۳۲	۴.۳ عمل ایزومتری‌ها و تبدیل‌های گیج القا شده
۴۵	۴ شبکه‌های مستقل از مختصات و \mathbb{M} -کانولوشن‌ها
۴۵	۱.۴ عملیات نقطه‌ای تناوب‌پذیر گیج
۴۹	۲.۴ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM
۴۷	۳.۴ تناوب‌پذیری ایزومتری
۵۰	۵ مدل اسباب بازی: کانولوشن‌های موبیوس هم‌متغیر انعکاس
۵۰	۱.۵ هندسه نوار موبیوس
۵۲	۲.۵ میدان‌های ویژگی مستقل از جهت‌گیری
۵۳	۳.۵ شبکه‌های کانولوشنی مستقل از جهت‌گیری
۵۷	۴.۵ پیاده‌سازی عددی و ارزیابی کانولوشن‌های موبیوس

بخش ۳ گیج‌ها و تبدیل‌های گیج را معرفی می‌کند که بر اساس آن‌ها میدان‌های بردارهای ویژگی مستقل از مختصات تعریف می‌شوند. شبکه‌های عصبی که بین چنین میدان‌های ویژگی نگاشت می‌کنند، در بخش ۴ توسعه یافته‌اند. بخش ۵ یک نمونه پیاده‌سازی از میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را در نوار موبیوس ارائه می‌دهد.

۳ مقدمه‌ای بر شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات

شبکه‌های کانولوشنی سلسله‌مراتبی از میدان‌های ویژگی را از یک سیگنال ورودی بر روی یک منیفولد استخراج می‌کنند. ویژگی‌ها از طریق کرنل‌ها محاسبه می‌شوند، که برای شناسایی الگوهای فضایی مشخص در ویژگی‌های سطح پایین‌تر بهینه شده‌اند. ما تقاضا می‌کنیم که این فرآیند استنتاج صرفاً بر اساس آرایش نسبی ویژگی‌ها باشد و مستقل از انتخاب خاص مختصات بندی باشد. بنابراین ویژگی‌ها باید کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات باشند، مشابه اسکالارها، بردارها یا تانسورها. در حالی که چنین کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات وجود دارند، یک پیاده‌سازی کامپیوتربی (غیرنمادین) نیازمند آن است که آن‌ها بر حسب ضرایب عددی در برخی گیج، یعنی نسبتی از چندین توصیف معادل است. چارچوب ریاضی مناسب برای تنظیم چنین درجات شوند. انتخاب خاص مختصات بی‌اهمیت است آن‌تنهایی یکی از چندین توصیف معادل است. چارچوب ریاضی مناسب برای تنظیم چنین درجات آزادی اضافی، نظریه‌های گیج هستند. یک نظریه گیج، برای گیج‌های مختلف را با مرتبط کردن سازگار آن‌ها با یکدیگر از طریق تبدیل‌های گیج در نظر می‌گیرد. بنابراین میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات با یک قانون تبدیل خاص، یعنی یک عمل گروهی از گروه ساختار که توصیف می‌کند ویژگی‌ها چگونه تحت تبدیل‌های گیج تبدیل می‌شوند، مرتبط هستند. هر لایه شبکه عصبی که چنین میدان‌های ویژگی را پردازش می‌کند، ملزم به رعایت قوانین تبدیل آن‌ها برای حفظ استقلال از مختصات‌شان است. هدف این برای اول از کار مام، معرفی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات با زبانی آسان است. بنابراین، شهود هندسی و بصری‌سازی‌ها بر فرمالیسم ریاضی ترجیح داده می‌شوند. یک تبیین رسمی‌تر از تعاریف و نتایج ارائه شده در بخش دوم آورده است.

۱.۳ گیج‌ها، تبدیل‌های گیج و G -ساخترها	۱۸
۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی مستقل از مختصات	۲۶
۳.۳ انتقال موازی بردارهای ویژگی	۲۹
۴.۳ عمل ایزومتری‌ها و تبدیل‌های گیج القا شده	۳۲

بخش ۳ گیج‌ها و تبدیل‌های گیج را معرفی می‌کند که بر اساس آن‌ها میدان‌های بردارهای ویژگی مستقل از مختصات تعریف می‌شوند. شبکه‌های عصبی که بین چنین میدان‌های ویژگی نگاشت می‌کنند، در بخش ۴ توسعه یافته‌اند. بخش ۵ یک نمونه پیاده‌سازی از میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را در نوار موبیوس ارائه می‌دهد.

۱.۳ گیج‌ها، تبدیل‌های گیج و G -ساخترها

۱.۱.۳ فضاهای مماس و چارچوب‌های مرجع

یک منیفولد هموار d -بعدی M دارای یک فضای مماس $T_p M \cong \mathbb{R}^d$ متعلق به هر نقطه $p \in M$ است. فضاهای مماس، فضاهای برداری d -بعدی هستند، با این حال، برخلاف \mathbb{R}^d ، آن‌ها به طور کلی با هیچ انتخاب ارجح چارچوب مرجع همراه نیستند. یک بردار مماس $v \in T_p M$ یک شی مستقل از مختصات است و بنابراین بلافصله به صورت عددی با یک تاپل مختصاتی $(v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$ نمایش داده نمی‌شود. به طور انتزاعی‌تر، هر فضای مماس $T_p M$ با \mathbb{R}^d هم‌ریخت است اما به طور کلی هیچ هم‌ریختی کانونی بین آن‌ها وجود ندارد. بنابراین هر دو فضا از نظر ساختاری معادل هستند اما به هیچ روش ارجح به یکدیگر شناسایی نمی‌شوند.

یک گیج (تسهیم محلی بندل مماس) بر روی M به عنوان مجموعه‌ای از نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر که به صورت هموار وابسته به موقعیت هستند، تعریف می‌شود:

$$(1) \quad \psi_p^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad p \in U^A,$$

که هم‌ریختی‌های فضای برداری گمشده بین $T_p M$ و \mathbb{R}^d را مشخص می‌کند. همانطور که در شکل ۱۴ بصری‌سازی شده است، آن‌ها با تخصیص یک بردار ضریب به فضاهای مماس مختصات می‌دهند:

$$(2) \quad v^A := \psi_p^A(v) \in \mathbb{R}^d$$

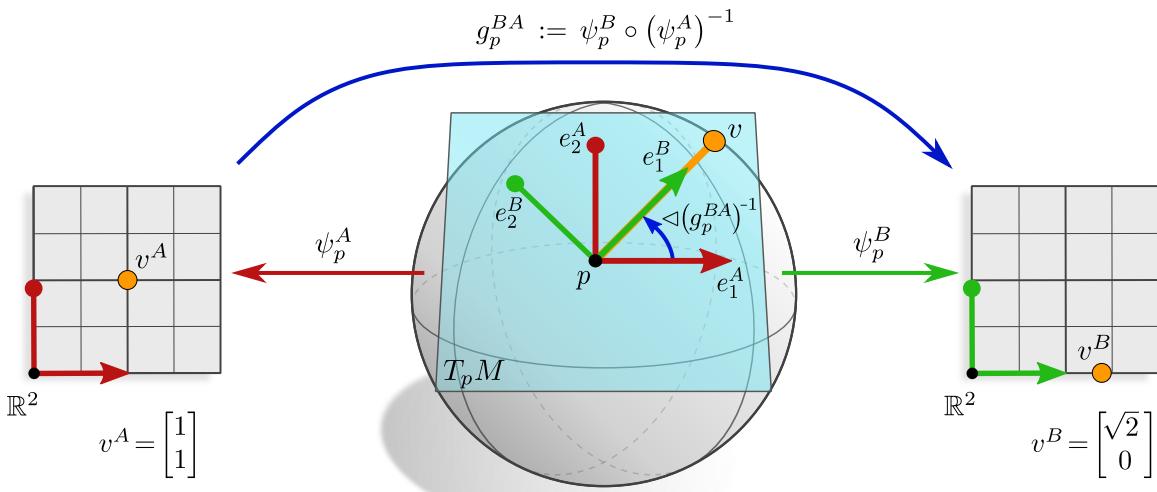
به هر بردار مماس مستقل از مختصات $v \in T_p M$ این رابطه می‌دهد:

$$(3) \quad v = (\psi_p^A)^{-1}(v^A) = (\psi_p^A)^{-1}\left(\sum_i v_i^A e_i\right) = \sum_i v_i^A (\psi_p^A)^{-1}(e_i) =: \sum_i v_i^A e_i^A,$$

که در آن $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_d\}$ را پایانه استاندارد \mathbb{R}^d نامگذاری کرده‌ایم و از خطی بودن گیج برای بیرون کشیدن جمع استفاده کرده‌ایم. این نشان می‌دهد که گیج را می‌توان به عنوان مجهر کردن هر فضای مماس $T_p M$ با یک چارچوب مرجع در نظر گرفت:

$$(4) \quad [e_1^A, \dots, e_d^A] := \left[(\psi_p^A)^{-1}(\epsilon_1), \dots, (\psi_p^A)^{-1}(\epsilon_d) \right],$$

که به عنوان یک d -تاپل از بردارهای مماس خطی مستقل تعریف می‌شود که با نگاشت پایه استاندارد \mathbb{R}^d به عقب از طریق نگاشت معکوس گیج v^A به دست می‌آید. برای اختصار، ما در ادامه از نماد کوتاه‌شده $[e_i^A]_{i=1}^d$ برای چارچوب‌ها استفاده خواهیم کرد. ضرایب



شکل ۱۴: شناسایی \mathbb{R}^3 از طریق گیج‌های مختلف. یک بردار مماس (مستقل از مختصات) $v \in T_p M \cong \mathbb{R}^3$ را می‌توان به صورت عددی با یک تابع مختصاتی $\psi_p^A(v) = (1, 1)^T$ نسبت به گیج ψ_p^A (قمر) یا، به طور معادل، با $v^B = \psi_p^B(v) = (\sqrt{2}, 0)^T$ نسبت به گیج ψ_p^B (سیز) نمایش داد. انتخاب یک گیج مربوط به انتخاب $[e_1^A, e_2^A]$ یا $[e_1^B, e_2^B]$ از چارچوب مرجع است. در یک منیفولد عمومی هیچ انتخابی از گیج یا مختصات بندی پیش‌فرض ارجح نیست. گیج‌های مختلف، و در نتیجه چارچوب‌های مرجع، با تبدیل‌های گیج $(\psi_p^A)^{-1} := \psi_p^{BA} = \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}$ مرتبط هستند که مقادیری در گروه ساختار G تعریف شده‌اند. این شکل تفسیری گرفته‌ای از نمودارهای جایجاوی در عادله (۸) و شکل ۳۴ است. توجه داشته باشید که گیج‌ها بالافاصله به فضاهای مماس مختصات می‌دهند. شکل ۴۹ در بخش ۲.۹ یک نمودار مشابه برای چارت‌های (آفین) را نشان می‌دهد که به منیفولد مختصات می‌دهند و بدین ترتیب گیج‌ها ("پایه‌های مختصات") را القا می‌کنند.

مختصات v نسبت به این چارچوب هستند. مجموعه‌ای از چارچوب‌های القا شده توسط ψ_p^A بر روی U^A (هموار) میدان چارچوب نامیده می‌شود؛ برای بصری‌سازی به شکل ۱۵ مراجعه کنید.

گیج‌های X -فضاهای مماس را تنها در همسایگی‌های محلی $M \subseteq U^X$ مختصات می‌دهند، و به دلیل موانع توپولوژیکی به طور کلی نمی‌توانند به کل منیفولد بدون نقض فرض همواری گسترش یابند. بنابراین یک اطلس در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathcal{A} = \{(U^X, \psi^X)\}_{X \in \mathfrak{X}}, \quad (5)$$

متشکل از گیج‌های هموار بر روی مجموعه‌ای از همسایگی‌های U^X که منیفولد را پوشش می‌دهند، یعنی شرط $U^X = \bigcup_{X \in \mathfrak{X}} U^X$ را برآورده می‌کنند، که در آن \mathfrak{X} یک مجموعه اندیس است.^۸ در نواحی همپوشانی $U^A \cap U^B \neq \emptyset$ از همسایگی‌ها، گیج‌های مختلف ψ_p^A و ψ_p^B توسط توابع گذار هموار به هم متصل می‌شوند:

$$g^{BA} : U^A \cap U^B \rightarrow \text{GL}(d), \quad p \mapsto g_p^{BA} := \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}. \quad (6)$$

در اینجا ما دامنه مشترک (فعلًا) را با گروه خطی عمومی $\text{GL}(d)$ در نظر می‌گیریم، متشکل از همه ماتریس‌های معکوس‌پذیر در $\mathbb{R}^{d \times d}$ که رابطه بین هر جفت از هم‌ریختی‌های فضای برداری (گیج‌ها) یا چارچوب‌های مرجع را توضیح می‌دهند. عمل چنین تابع گذاری بر روی یک گیج داده شده یک تبدیل گیج را تعریف می‌کند:

$$\psi_p^B = g_p^{BA} \cdot \psi_p^A. \quad (7)$$

^۸ اطلس گیج‌ها بسیار شبیه به اطلس‌های معمول چارت‌های می‌دهند به جای منیفولد TM مختصات می‌دهند.

از نظر یک نمودار جابجایی، رابطه بین گیج‌های مختلف به صورت زیر بصری‌سازی می‌شود:^۹

$$\begin{array}{ccccc} & & g_p^{BA} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\psi_p^A} & T_p M & \xrightarrow{\psi_p^B} & \mathbb{R}^d \\ & \uparrow & & & \downarrow \\ & g_p^{AB} \cdot = (g_p^{BA})^{-1} & & & \end{array} \quad (\text{۸})$$

این نمودار را با تفسیر گرافیکی آن در شکل ۱۴ مقایسه کنید.

یک تبدیل گیج، مختصات‌بندی فضاهای مماس را تغییر می‌دهد به طوری که همان بردار مماس مستقل از مختصات v با یک بردار مولفه‌ای متفاوت نمایش داده می‌شود:

$$v^B = g_p^{BA} v^A. \quad (\text{۹})$$

از آنجا که یک گیج مربوط به انتخاب یک میدان چارچوب است، یک تبدیل گیج مربوط به تبدیل بین میدان‌های چارچوب است. به طور خاص، یک چارچوب $[e_i^A]_{i=1}^d = [e_1^A, \dots, e_d^A]$ در $p \in M$ به یک چارچوب دیگر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} [e_i^B]_{i=1}^d &:= \left[(\psi_p^B)^{-1} (\epsilon_i) \right]_{i=1}^d && (\text{چارچوب القا شده توسط گیج. (۴) \text{--}}) \\ &= \left[(g_p^{BA} \cdot \psi_p^A)^{-1} (\epsilon_i) \right]_{i=1}^d && (\text{Tبدیل گیج. (۷) \text{--}}) \\ &= \left[(\psi_p^A)^{-1} \left((g_p^{BA})^{-1} \epsilon_i \right) \right]_{i=1}^d && (\text{معکوس گسترش یافته}) \\ &= \left[(\psi_p^A)^{-1} \left(\sum_j \epsilon_j \epsilon_j^\top (g_p^{BA})^{-1} \epsilon_i \right) \right]_{i=1}^d && (\text{هوبت وارد شده}) \\ &= \left[(\psi_p^A)^{-1} \left(\sum_j \epsilon_j \left((g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \right) \right]_{i=1}^d && (\text{عناصر ماتریس} \ (g_p^{BA})^{-1} \text{ شناسایی شده}) \\ &= \left[\sum_j (\psi_p^A)^{-1} (\epsilon_j) \left((g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \right]_{i=1}^d && (\text{خطی بودن} \ (\psi_p^A)) \\ &= \left[\sum_j e_j^A \left((g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \right]_{i=1}^d && (\text{چارچوب القا شده توسط گیج. (۴) \text{--}}) \\ &=: [e_i^A]_{i=1}^d \blacktriangleright (g_p^{BA})^{-1} && \end{aligned} \quad (\text{۱۰})$$

از طریق عمل راست تعریف شده:

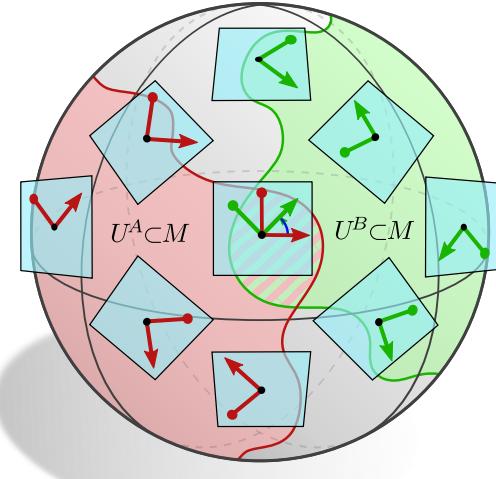
$$\blacktriangleright : ([e_i]_{i=1}^d, g) \mapsto [e_i]_{i=1}^d \blacktriangleright g := \left[\sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \quad (\text{۱۱})$$

از عناصر گروه بر روی چارچوب‌ها. توجه داشته باشید که معکوس در این عمل در معادله (۱۰) به دلیل تعریف معادله (۷) بدون معکوس است.^{۱۰} معمولاً به رفتار تبدیل چارچوب‌های مرجع، تبدیل کوواریانت گفته می‌شود در حالی که تبدیل گیج‌ها و ضرایب برداری به عنوان تبدیل کونترواریانت نامیده می‌شود؛ به پیوست آ مراجعه کنید.

$$X \xrightarrow{f} Y \quad \begin{matrix} \downarrow g \\ h \end{matrix} \quad Z$$

به این معنی است که توابع $Y \rightarrow f : X \rightarrow Z$ و $g : X \rightarrow Z$ هم مسیرهایی با شروع و پایان یکسان مطابقت داشته باشند، نمودار جابجایی نامیده می‌شود. نمودار مثال ما اگر (و تنها اگر) $h = g \circ f$ صادق باشد، جابجایی است.

^{۱۰} قراردادهای دیگر ممکن است انتخاب معکوس‌ها را در $[e_i^B]_{i=1}^d = [e_i^A]_{i=1}^d \blacktriangleright (g^{BA})^{-1}$ تغییر دهند. یک معکوس در هر یک از دو معادله برای سازگاری عمل چپ \cdot بر روی گیج‌ها و عمل راست \blacktriangleright بر روی چارچوب‌ها ضروری است.



شکل ۱۵: هر نقطه p از یک منیفولد ریمانی M دارای یک فضای مماس $T_p M$ متصل است. یک گیج هموار ψ^A بر روی یک زیرمجموعه مناسب انتخاب شده $U^A \subseteq M$ مختصات می‌دهد همانطور که مماس $T_p M$ را برای p در U^A مختصات می‌دهد. در شکل ۱۴ نشان داده شده است. این معادل انتخاب یک میدان چارچوب هموار بر روی U^A است. از آنجا که به طور کلی امکان گسترش یک گیج به صورت سراسری بر روی کل منیفولد وجود ندارد، لازم است که یک G -اطلس در نظر گرفته شود، مشکل از گیج‌هایی که M را پوشش می‌دهند. مختصات‌بندی‌های مختلف ψ^A بر روی U^A و ψ^B بر روی U^B (سیز) از طریق $g^{BA} : U^A \cap U^B \rightarrow G$ تبدیل‌های گیج (یا نگاشت‌های گذار) $U^A \cap U^B \rightarrow G$ به هم متصل می‌شوند که بر روی همپوشانی (خطدار) تعریف شده‌اند و مقادیری در گروه ساختار $G \leq \text{GL}(d)$ می‌گیرند.

از آنجا که رفتار تبدیل ضرایب در معادله (۹) و پایه در معادله (۱۰) معکوس یکدیگر هستند، آن‌ها یکدیگر را خنثی می‌کنند، یعنی بردار مماس $v = \sum_i v_i^A e_i^A = \sum_i v_i^B e_i^B$ را ناوردا می‌گذارند:

$$\begin{aligned} v &= \sum_i v_i^B e_i^B = \sum_i v_i^B \sum_j e_j^A \left((g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \\ &= \sum_j \left(\sum_i \left((g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} v_i^B \right) e_j^A \\ &= \sum_j v_j^A e_j^A. \end{aligned} \quad (12)$$

این ساختار تضمین می‌کند که هر محاسبه‌ای در نهایت مستقل از گیج انتخاب شده است، که معمولاً به آن استقلال از مختصات گفته می‌شود. به طور کلی، هر نمایش مختصاتی از یک شی یاتابع مستقل از مختصات برای دلایل سازگاری باید مستقل از مختصات باشد.

برای کامل بودن می‌خواهیم اشاره کنیم که فرمالیسم ارائه شده در اینجا پایه‌های عمومی فضاهای مماس را تعریف می‌کند، که گاهی اوقات به عنوان پایه‌های غیرمختصاتی (پایه‌های غیرهولونومیک) از نظر گیج‌های محلی نامیده می‌شوند. یک جایگزین بسیار محبوب اما کمتر عمومی پایه‌های مختصاتی (پایه‌های هولونومیک) هستند:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1^A} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d^A} \Big|_p \right], \quad (13)$$

که توسط چارت‌های مختصاتی منیفولد القا می‌شوند [۹]:

$$x^A : U^A \rightarrow V^A \subseteq \mathbb{R}^d \quad (14)$$

گیج‌های مربوطه توسط دیفرانسیل‌های چارت داده می‌شوند، یعنی:

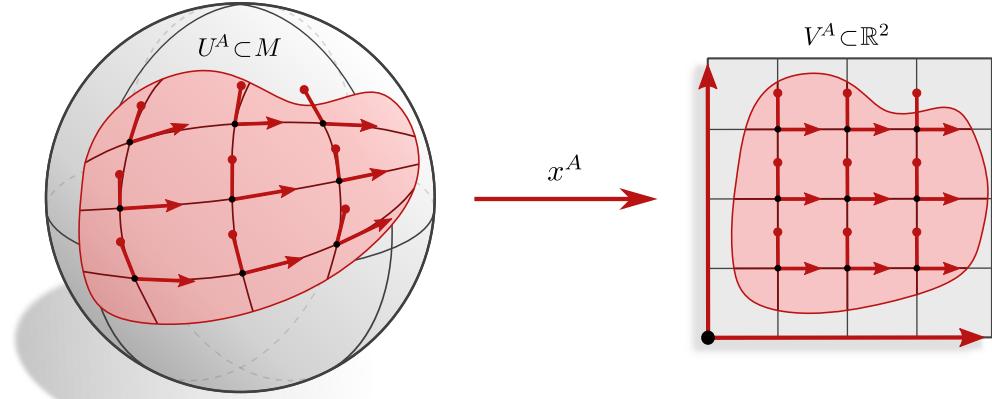
$$\psi_p^A = \hat{dx}_p^A = (\hat{dx}_{p,1}^A, \dots, \hat{dx}_{p,d}^A)^\top : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d. \quad (15)$$

تبدیل‌های گیج در این تنظیم با ژاکوبیان‌ها مطابقت دارند:

$$g_p^{BA} = \left. \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right|_{x^A(p)} \in \text{GL}(d) \quad (16)$$

از نگاشت‌های گذار چارت. یک چارت نمونه و پایه‌های مختصاتی القا شده آن در شکل ۱۶ بصیری‌سازی شده‌اند. پیوست آ رابطه بین هر دو فرمالیسم را با جزئیات مورد بحث قرار می‌دهد؛ یک مرور کلی در جدول ۷ را ارائه شده است.

در ادامه این مقاله ما مدعی‌اند در فرمالیسم گیج کارخواهیم کرد، که چارچوب‌های مماس را مستقیماً به فضاهای مماس تخصیص می‌دهد به جای اینکه آن‌ها را از چارت‌ها القا کنند. استثنایاً عبارتند از کانولوشن‌های موبیوس در بخش ۵، CNN‌های اقلیدسی در بخش ۹، مختصات لگاریتمی-قطبی در بخش ۱۰ و CNN‌های بیست‌وچهاری در بخش ۴.۱۲. در همه این موارد، منیفلدهایی به صورت محلی مسطح هستند و چارت‌ها ایزومتریک هستند، به طوری که چارچوب‌های متuumد را القا می‌کنند. کانولوشن‌های U^A در GM سپس می‌توانند به روشی کارآمد با اجرای کانولوشن‌های اقلیدسی با کرنل‌های G -استیریبل در دامنه‌های مشترک چارت‌ها V^A محاسبه شوند.



شکل ۱۶: یک چارت $x^A : U^A \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow V^A \subseteq \mathbb{R}^d$ از مختصات $U^A \subseteq M$ را به نواحی V^A مختصات $x^A : U^A \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow V^A \subseteq \mathbb{R}^d$ مخصوص می‌دهد. این چارت پایه‌های مختصاتی $\left[\frac{\partial}{\partial x_1^A}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d^A} \right]$ و گیج‌های مربوطه $\psi_p^A = \hat{dx}_p^A$ را برای فضاهای مماس $T_p M$ در U^A القا می‌کند. ما عمدتاً با چارت‌ها کار خواهیم کرد بلکه به نقاط $p \in M$ به صورت مستقل از مختصات ارجاع خواهیم داد. گیج‌ها (چارچوب‌ها) سپس مستقیماً به فضاهای مماس تخصیص داده می‌شوند به جای اینکه از چارت‌ها القا شوند.

۲.۱.۳ توابع مستقل از مختصات در فضاهای مماس

همانطور که بردارهای مماس مستقل از مختصات هستند، یعنی بدون اشاره به هیچ چارچوب مرجع تعريف می‌شوند. یک گیج انتخاب شده امکان نمایش چنین نگاشتهای مستقل از مختصات را توسط توابعی فراهم می‌کند که بر روی بردارهای ضریب در \mathbb{R}^d عمل می‌کنند. مشابه بردارهای ضریب، مختصات‌بندی توابع باید به روشی خاص تحت تبدیل‌های گیج تبدیل شوند تا به طور سازگار تعریف شوند، یعنی برای رعایت استقلال از مختصات. ما بعداً مفهوم ارائه شده در اینجا را از بیان نگاشتهای مستقل از مختصات بر حسب مختصات محلی برای تعریف کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM به کار خواهیم برد.

به عنوان یک مثال ساده برای یک عملیات مستقل از مختصات، بباید حالت یک نگاشت خطی را در نظر بگیریم:

$$\mathcal{M} : T_p M \rightarrow T_p M. \quad (17)$$

فرض کنید $v_{\square\square} \in T_p M$ یک بردار مماس باشد که توسط \mathcal{M} به $v_{\square\square} = \mathcal{M}v_{\square\square} \in T_p M$ نگاشت می‌شود. نگاشتهای خطی در پیاده‌سازی‌های عددی معمولاً توسط ماتریس‌های ضریب مدل می‌شوند که بین بردارهای ضریب نسبت به یک انتخاب از چارچوب مرجع نگاشت می‌کنند. برای دقیق گردن این موضوع، فرض کنید گیج ψ_p^A داده شده باشد به طوری که بردارهای مستقل از مختصات $v_{\square\square}$ و $v_{\square\square}^A$ در $T_p M$ با بردارهای ضریب $(\psi_p^A(v_{\square\square}))$ و $(\psi_p^A(v_{\square\square}^A))$ نمایش داده شوند. نگاشت خطی \mathcal{M} در این گیج توسط ماتریس نمایش داده می‌شود:

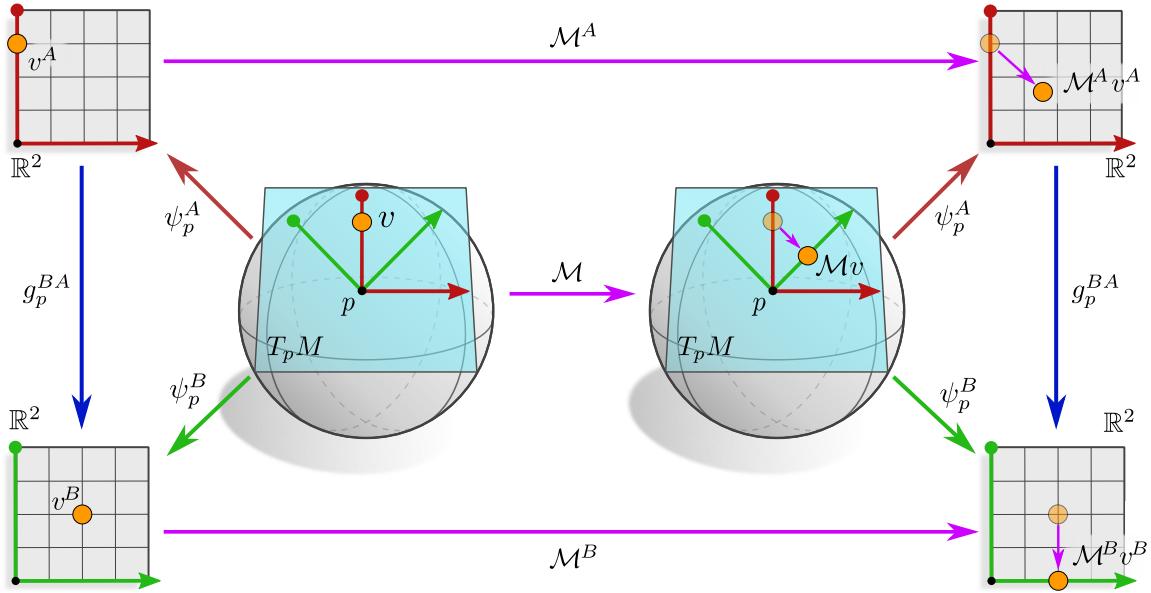
$$\mathcal{M}^A := \psi_p^A \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^A)^{-1} \in \mathbb{R}^{d \times d} \quad (18)$$

که تعریف آن توسط نمودار جابجایی زیر بصری‌سازی شده است:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\psi_p^A} & T_p M & \xrightarrow{\mathcal{M}} & T_p M & \xrightarrow{\psi_p^A} & \mathbb{R}^d \\ & & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\mathcal{M}^A} & & & & \uparrow \end{array} \quad (19)$$

ماتریس با نگاشت مستقل از مختصات سازگار است زیرا هر دو یکدیگر را نتیجه می‌دهند:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^A v_{\square\square}^A &= [\psi_p^A \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^A)^{-1}] \circ [\psi_p^A(v_{\square\square})] \\ &= \psi_p^A(\mathcal{M} v_{\square\square}) \\ &= \psi_p^A(v_{\square\square}) \\ &= v_{\square\square}^A \end{aligned} \quad (20)$$



شکل ۱۷: تفسیر گرافیکی نمودار جابجایی در معادله (۲۳). یک نگاشت مستقل از مختصات $\mathcal{M} : T_p M \rightarrow T_p M$ را می‌توان به طور معادل با توابع $\mathcal{M}^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ یا $\mathcal{M}^B : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ نسبت به گیج‌های مختلف ψ_p^A یا ψ_p^B نمایش داد. این مختصات‌بندی‌های \mathcal{M} با پیش و پس ترکیب با گیج‌ها در دامنه و دامنه مشترک تعریف می‌شوند، به عنوان مثال، با دنبال کردن فلش‌ها، $\mathcal{M}^A := \psi_p^A \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^A)^{-1}$ در نتیجه، تبدیل‌های گیج $\mathcal{M}^B = g_p^{BA} \mathcal{M}^A (g_p^{BA})^{-1}$ بین مختصات‌بندی‌ها توسط یک پیش و پس ترکیب با نگاشت‌های گذار g_p^{BA} در دامنه و دامنه مشترک داده می‌شوند. همه کمیت‌ها و نگاشت‌ها در این کار یا مستقل از مختصات خواهند بود (مانند \mathcal{M}) یا به روشی مستقل از مختصات در گیج‌های مختلف بیان خواهند شد (مانند \mathcal{M}^A و \mathcal{M}^B). ما بنابراین باید قوانین تبدیل را برای هر کمیت و تابع تعریف (یا استخراج) کنیم.

البته می‌توان \mathcal{M} را نسبت به هر انتخاب دیگری از گیج ψ_p^B نیز نمایش داد. ما از معادله (۹) می‌دانیم که بردارهای ضرب در گیج‌های مختلف با $v^B = g_p^{BA} v^A$ مرتبط هستند. به طور مشابه، \mathcal{M}^B با \mathcal{M}^A توسط تبدیل گیج مرتبط است:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^B &= \psi_p^B \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^B)^{-1} \\ &= \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1} \circ \mathcal{M}^A \circ \psi_p^A \circ (\psi_p^B)^{-1} \\ &= g_p^{BA} \mathcal{M}^A (g_p^{BA})^{-1}, \end{aligned} \quad (21)$$

که در اینجا هم بر دامنه و هم بر دامنه مشترک عمل می‌کند.^{۱۱} این قانون تبدیل دوباره سازگار است زیرا تبدیل‌های متناظر یکدیگر را خنثی می‌کنند:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^B v_{\square\square}^B &= [g_p^{BA} \mathcal{M}^A (g_p^{BA})^{-1}] [g_p^{BA} v_{\square\square}^A] \\ &= g_p^{BA} \mathcal{M}^A v_{\square\square}^A \\ &= g_p^{BA} v_{\square\square}^A \\ &= v_{\square\square}^B \end{aligned} \quad (22)$$

^{۱۱} تبدیل ضرایب ماتریس از طریق ضرب چپ و راست با $(g^{BA})^{-1}$ و g^{BA} به ترتیب، نگاشت خطی را به عنوان یک تansور از نوع (۱, ۰) شناسایی می‌کند.

تبديل‌های گیج استخراج شده بنابراین تأیید می‌کنند که تمام محاسبات مختصات‌بندی شده در نهایت مستقل از مختصات هستند. روابط بین نگاشت مستقل از مختصات و مختصات‌بندی‌های آن توسط نمودار جابجایی زیر خلاصه می‌شود:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M^A & & \\
 & \swarrow \psi_p^A & & \searrow \psi_p^A & \\
 \mathbb{R}^d & & T_p M & & \mathbb{R}^d \\
 \downarrow g_p^{BA} & & \xrightarrow{\mathcal{M}} & & \downarrow g_p^{BA} \\
 & \swarrow \psi_p^B & & \searrow \psi_p^B & \\
 & & M^B & &
 \end{array} \quad (23)$$

که در شکل ۱۷ به صورت گرافیکی تفسیر شده است.

در عمل نمی‌توان نگاشت خطی مستقل از مختصات \mathcal{M} را به صورت عددی بدون اشاره به یک انتخاب مختصات‌بندی پیاده‌سازی کرد. با این حال، وجود آن تنها در صورتی (و تنها در صورتی) دلالت دارد که مختصات‌بندی‌های آن همانظور که در معادله (۲۱) مشخص شده است به یکدیگر مربوط باشند، که تصمین می‌کند رفتار تبدیل صحیح ضرایب بردار ورودی و خروجی در معادله (۹) حفظ می‌شود.

۳.۱.۳ گروه‌های ساختار، G -ساختارها و G -اطلس‌ها

ما بعداً از شبکه‌های عصبی می‌خواهیم که به روشی مستقل از مختصات عمل کنند، یعنی ما تقاضا می‌کنیم که استنتاج آن‌ها مستقل از انتخاب‌های دلخواه چارچوب‌های مرجع باشد. این سؤال را مطرح می‌کند که انتخاب چارچوب‌های مرجع در یک منیفولد تا چه حد دلخواه است. در بخش‌های ۱.۱.۳ و ۲.۱.۳ قبلي ما هر انتخاب ممکن از گیج یا چارچوب مرجع را مجاز می‌دانستیم، که بنابراین توسط تبدیل‌های گیج با مقدار کلی $GL(d)$ مرتبط بودند. با این حال، در بسیاری از کاربردها، منیفولد دارای ساختار اضافی است که امکان تشخیص یک زیرمجموعه ارجح از چارچوب‌های مرجع یا گیج‌ها را می‌دهد که توابع گذار آن‌ها مقادیری در یک گروه ساختار کاهش یافته $G \leq GL(d)$ می‌گیرند. چنین ساختارهای هندسی \square یا بلکه خود زیرمجموعه‌های چارچوب‌های مرجع ترجیحی، که اطلاعات معادل را کدگذاری می‌کنند \blacksquare به عنوان G -ساختارها نامیده می‌شوند.

G -ساختارها با در نظر گرفتن چند مثال خاص بهتر درک می‌شوند. لیست زیر چنین مثال‌هایی را ارائه می‌دهد که بر اساس گروه ساختار $G \leq GL(d)$ طبقه‌بندی شده‌اند:

d -ساختار متریک یک منیفولد ریمانی را در نظر بگیرید، که امکان اندازه‌گیری فواصل و زوایا را می‌دهد، و بنابراین تشخیص چارچوب‌های متعادل را، یعنی آن چارچوب‌هایی که شرط $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ را برای هر $i, j = 1, \dots, d$ برآورده می‌کنند. به طور متناظر، یک متریک ریمانی امکان صحبت در مورد گیج‌های ایزوومتریک ψ_p^A را می‌دهد، که متریک \mathbb{R}^d را با متریک $T_p M$ شناسایی می‌کنند، یعنی شرط $\langle \psi_p^A(v), \psi_p^A(w) \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle v, w \rangle_{T_p M}$ را برآورده می‌کنند. از آنجا که چارچوب‌های متعادل و گیج‌های ایزوومتریک تا چرخش‌ها و بازتاب‌ها تعریف می‌شوند، هر تبدیل گیجی بین آن‌ها مقادیری در گروه متعادل d خواهد گرفت، که آن زیرگروه از $GL(d)$ است که زوایا و فواصل را حفظ می‌کند.

: به طور مشابه، یک جهت‌گیری منیفولد چارچوب‌های راستگرد را از چپگرد و گیج‌های حفظ‌کننده جهت‌گیری را از گیج‌های معکوس‌کننده جهت‌گیری متمایز می‌کند. تبدیل‌های گیج بین چارچوب‌های یک دست‌پری داده شده مقادیری در $GL^+(d)$ می‌گیرند، یعنی آن زیرگروه از $GL(d)$ که جهت‌گیری‌ها را حفظ می‌کند.

: با هم، یک متریک و جهت‌گیری داده شده، چارچوب‌های متعادل با جهت‌گیری خاصی را مشخص می‌کنند. تبدیل‌های گیج بین چنین چارچوب‌هایی تصمین شده‌اند که در زیرگروه $SO(d)$ از $GL(d)$ قرار گیرند.

: یک میدان چارچوب هموار سراسری یک $\{e\}$ -ساختار را در M تعریف می‌کند. در این حالت تنها یک چارچوب متمایز در هر موقعیت وجود دارد، به طوری که تبدیل‌های گیج در گروه بدیهی $GL(d)$ قرار می‌گیرند.

: اگر هیچ ساختار اضافی تحمیل نشود، هر چارچوب مرجع فضاهای مماس به همان اندازه معتبر است. تبدیل‌های گیج در این حالت نگاشت‌های خطی معکوس‌پذیر عمومی در $GL(d)$ هستند و G -ساختار مربوطه فقط بندل چارچوب FM است.

structure group $G \leq \mathrm{GL}(d)$	G -structure GM	equivalent structure on M
$\mathrm{GL}^+(d)$	positively oriented frames	orientation of M
$\mathrm{SL}(d)$	unit volume frames	volume form
$\mathrm{CO}(d)$	conformal frames	—
$\mathrm{Sp}(d)$	symplectic frames	—
$\mathrm{O}(d)$	orthonormal frames	Riemannian metric
$\mathrm{O}(d-n, n)$	pseudo-orthonormal frames	pseudo-Riemannian metric
$\mathrm{SO}(d)$	positively oriented orthonormal frames	Riemannian metric + orientation
$\{e\}$	parallelization (global frame field)	—

جدول ۱: مثال‌هایی از G -ساختارها GM بر روی M و گروه‌های ساختار کاهش‌یافته مربوطه $\mathrm{GL}(d) \leq \mathrm{GL}$. یک G -ساختار به عنوان یک زیرمجموعه هموار تعریف می‌شود، که در آن چارچوب‌های هر فضای مماس به صورت متقابل توسعه تبدیل‌های گیج با مقدار G مرتبط هستند. در حالی که این عرف نسبتاً انتزاعی است، امکان مشاهده بسیاری از ساختارهای هندسی در M را به روی یکپارچه فراهم می‌کند. به عنوان مثال، یک متريک ريماني در M امكان شخيص چارچوب‌های متعامد را می‌دهد. برعکس، مشخص کردن متعامد بودن به طور منحصر به فرد یک متريک ريماني و یک ساختار متعامد با یکپارچه متعامد است. بدینها، یک تاظر یک به یک بین فرم‌های حجم و چارچوب‌های واحد حجم وجود دارد. توجه داشته باشید که انتخاب یک گروه ساختار G به طور منحصر به فرد یک G -ساختار را مشخص نمی‌کند. به عنوان مثال، متريک‌های ريماني مختلف می‌توانند به عنوان ساختار $\{e\}$ فرم‌های حجم مختلف متفاوت به عنوان ساختار $\{e\}$ انتخاب شوند. CNN‌ها مستقل از مختصات برای رعایت یک G -ساختار داده شده طراحی شده‌اند \square اينکه کدام ساختار خاص است به عنوان ساختار $\{e\}$ وظيفه يادگيري بستگي دارد.

موضوع مشترک در اين مثال‌های انگيزشی اين است که همه آن‌ها با موارد زير تعریف می‌شوند:

۱. یک زیرمجموعه (که به صورت فضای هموار تغییر می‌کند) از چارچوب‌های مرتبه متمايز،

۲. یک زیرمجموعه مربوطه از گیج‌های ترجیحی و

۳. یک زیرگروه $(d) \leq \mathrm{GL}$ از تبدیل‌های گیج که مفهوم متمايز چارچوب‌ها و گیج‌ها را حفظ می‌کند.

چنین زیرمجموعه‌هایی از چارچوب‌های مرتع که به صورت هموار تغییر می‌کند به عنوان G -ساختارها GM بر روی M نامیده می‌شوند و گروه G به عنوان گروه ساختار (کاهش‌یافته) نامیده می‌شود \square برای تعریفی دقیق‌تر به بخش ۳.۶ مراجعه کنید.^{۱۲} فرآيند مشخص کردن یک G -ساختار به عنوان کاهش گروه ساختار از $\mathrm{GL}(d)$ به G شاخته می‌شود. یک اطلس $\mathcal{A}^G = \{(U^X, \psi^X)\}_{X \in \mathfrak{X}}$ به عنوان G -اطلس نامیده می‌شود اگر تمام توابع گذار آن:

$$g^{BA}: U^A \cap U^B \rightarrow G, \quad p \mapsto g_p^{BA} := \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1} \quad (24)$$

در یک گروه ساختار کاهش‌یافته $(d) \leq \mathrm{GL}$ فرار گيرند (مقاييسه کنيد با معادله (۶)). رابطه بين چارچوب‌های مرتع و گیج‌ها در معادله (۴) دلالت دارد بر اينکه هر G -اطلس یک G -ساختار مربوطه را كدگذاري می‌کند.

انتخاب‌های متعددی از G -ساختارها ممکن است برای یک گروه ساختار G داده شده وجود داشته باشند. برای ارتباط با مثال‌های بالا: متريک‌های ريماني مختلف، زيرمجموعه‌های متفاوتی از چارچوب‌های مرتع را به عنوان متعامد مشخص می‌کنند، يعني آن‌ها با ساختارهای d مطابقت دارند. بنابراین انتخاب یک متريک معادل انتخاب یک ساختار d است. به طور مشابه، انتخاب‌های مختلف جهت‌گيری یک منيفولد قابل جهت‌گيری، مجموعه متفاوتی از چارچوب‌ها را به عنوان راست‌گرد مشخص می‌کنند. بنابراین دو انتخاب ممکن جهت‌گيری با دو انتخاب ممکن از ساختارهای $(GL^+M)(GL^+d)$ مطابقت دارند. ساختارهای $\mathrm{SO}(d)$ (SOM) ممکن است در انتخاب جهت‌گيری و متريک هر دو متفاوت باشند. مثال دیگر ساختار $\{e\}M$ است. آن‌ها اجازه تبدیل‌های گیج (غیربدیهی) را نمی‌دهند و بنابراین با انتخاب میدان‌های چارچوب هموار سراسری در M مطابقت دارند. جدول ۱ مثال‌های بيشتری از گروه‌های ساختار G و G -ساختارهای مربوطه را ارائه می‌دهد.

کاهش گروه ساختار به G ، يعني وجود یک G -ساختار، ممکن است توسط توبولوژی منيفولد مسدود شود. اين دلالت دارد بر اينکه یک "گروه ساختار کاهش‌ناپذير" وجود دارد که فراتر از آن ابهام چارچوب‌های مرتع را نمی‌توان بدون نقض فرض همواري (يا حتی پيوستگي) G -ساختار برطرف کرد. به عنوان مثال، نوار موبیوس در شکل ۲۸ غیرقابل جهت‌گيری است. اين بدان معنی است که یک تعريف هموار و سراسری سازگار از دست‌پری چارچوب و در نتیجه ساختار $\{e\}$ (ميدان چارچوب هموار سراسری) را نمی‌پذيرد. همانطور که در شکل ۲۸ بصري‌سازی شده است، یک G -اطلس از گیج‌ها که نوار موبیوس را پوشش می‌دهد، به طور ناگير نيزمند يك بازتاب در يك از نگاشته‌های گذار خواهد بود، که به معنای یک گروه ساختار کاهش‌ناپذير $R = G$ است. CNN‌ها مستقل از مختصات بر روی نوار موبیوس بنابراین حداقل باید تناوب پذير بازتابی باشند. به طور مشابه، گروه ساختار کره را نمی‌توان فراتر از $G = \mathrm{SO}(2)$ کاهش داد. CNN‌هاي کروي هموار بنابراین لزوماً بر پایه کرنل‌های محلی تناوب پذير چرخش هستند.

توجه داشته باشید که هر منيفولد (ديفرانسييل پذير) با برخی G -ساختار هموار است. به عنوان مثال، یک منيفولد ديفرانسييل پذير خام دارای یک ساختار (d) حاوی هر چارچوب ممکن است، یک منيفولد ريماني یک ساختار d دارد و \mathbb{R}^d به طور کانونی با یک ساختار $\{e\}$ مجهر شده

^{۱۲} به طور رسمي، GM به عنوان یک زيربند اصلی G از بندل چارچوب FM تعریف می‌شود، که یک بندل اصلی (d) GL است.

است که در شکل ۴۲ آبروی سازی شده است. ما بنابراین بدون از دست دادن کلیت، اصطلاح "استقلال از مختصات" را به استقلال از مختصات GM تصحیح خواهیم کرد، یعنی استقلال نسبت به انتخاب چارچوب‌های مرجع در G -ساختار داده شده در M . در طول این کار ما فرض خواهیم کرد که گیج‌ها بخشی از یک G -اطلس هستند:

$$\mathcal{A}^G = \{(U^X, \psi^X)\}_{X \in \mathfrak{X}} \quad \text{میانهای} \quad g_p^{BA} \in G \quad \text{میانهای} \quad \psi_p^A, \psi_p^B \in \mathcal{A}^G, \quad p \in U^A \cap U^B, \quad (25)$$

مطابق با G -ساختار داده شده. هر کمیت یاتابع می‌تواند نسبت به گیج‌گی از این اطلس بیان شود^{۱۳}، و مختصات‌بندی‌ها در گیج‌های مختلف به طور منحصر به فرد توسط یک تبدیل گیج با مقدار G مرتبط هستند. با تضمین استقلال از مختصات همه ساختارها، آن‌ها همیشه با همتایان مستقل از مختصات خود مطابقت خواهند داشت، که ما نظریه سراسری را بر حسب آن‌ها در بخش‌های ۷ و ۸ فرمول‌بندی خواهیم کرد.

۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی مستقل از مختصات

فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات، فضاهای میدان‌های بردار ویژگی هستند. مشابه مورد ضرایب بردارهای مماس، ضرایب عددی بردارهای ویژگی ملزم به تبدیل سازگار تحت تبدیل‌های گیج هستند. قانون تبدیل خاص (نمایش گروهی) یک میدان ویژگی در اینجا نوع میدان آن را مشخص می‌کند^{۱۴} مثال‌های معمول شامل میدان‌های اسکالار، میدان‌های بردار مماس، میدان‌های تansور عمومی، میدان‌های ویژگی منظم یا میدان‌های $\mathbb{R}^{n \times n}$ هستند. بخش ۱.۲.۳ چنین میدان‌های ویژگی و قوانین تبدیل آن‌ها را معرفی می‌کند. در بخش ۲.۲.۳، ما به طور مختص فضاهای ویژگی مستقل از مختصات را تعریف می‌کنیم. مشابه تعریف فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی معمولی به عنوان انباشتی از چندین نقشه ویژگی، فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات شامل چندین میدان ویژگی مستقل هستند.

۱.۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی منفرد

میدان‌های ویژگی کانولوشنی یک بردار ویژگی، که اطلاعات استنباط شده از یک همسایگی محلی از سینگنال ورودی را کدگذاری می‌کند، به هر نقطه از منیفولد تخصیص می‌دهند. انباشت فضای اطلاعات توسط یک کرنل کانولوشنی انجام می‌شود که میدان‌های ویژگی را در محیط خود نسبت به چارچوب مرجع محلی خود اندمازه‌گیری می‌کند. بنابراین ما گیج A^A را فرض می‌کنیم که ترازهای کرنل را در یک همسایگی U^A مشخص می‌کند. نسبت به این گیج، کرنل یک میدان محلی هموار از پاسخ‌ها (مشاهدات) تولید خواهد کرد:

$$f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad (26)$$

که توسط یک بردار ویژگی عددی C -بعدی $f^A(p) \in U^A$ در هر موقعیت $p \in U^A$ داده می‌شود. فرض کنید یک میدان پاسخ دوم $f^B : U^B \rightarrow \mathbb{R}^c$ در U^B استنباط شده است. از آنجا که پاسخ یک کرنل به طور کلی به تراز آن بستگی دارد، انتظار می‌رود که f^A و f^B در همپوشانی $U^A \cap U^B$ مطابقت نداشته باشند. بدون محدودیت‌های بیشتر، پاسخ‌های یک کرنل کانولوشن به طور دلخواه وابسته به گیج خواهند بود.

اصل کوواریانس، که توسط آبرت انشیتن پیشنهاد شد^[۹]، بیان می‌کند که:

«قوانین جهان‌شمول طبیعت باید توسط معادلاتی بیان شوند که برای همه سیستم‌های مختصات صادق باشند، یعنی نسبت به هر جایگزینی کوواریانت باشند.»

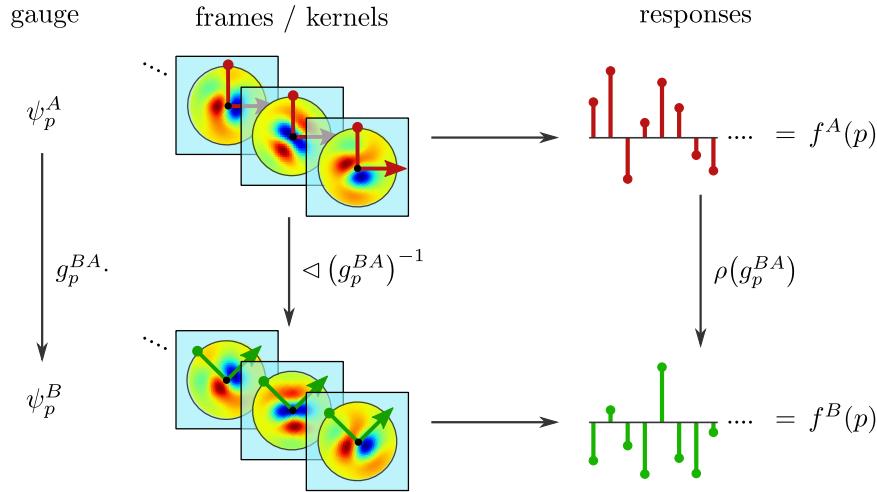
ما معتقدیم که اصل مشابهی باید در یادگیری عمیق هندسی نیز صادق باشد، یعنی استنتاج باید مستقل از هر دلخواهی در انتخاب چارچوب‌های مرجع باشد. با توجه به اینکه این دلخواهی در مختصات‌بندی‌ها دقیقاً توسط G -ساختار داده شده GM پوشش داده می‌شود، این امر به ویژه ایجاد می‌کند که ویژگی‌ها باید اشیاء هندسی مستقل از مختصات GM باشند.^{۱۵} بنابراین ما کرنل‌های کانولوشن را طوری طراحی می‌کنیم که پاسخ‌های آن‌ها f^A و f^B میدان‌هایی از ضرایب بردار ویژگی را کدگذاری کنند که یک میدان بردار ویژگی آزاد از مختصات f را به صورت محلی در گیج‌های مختلف نمایش می‌دهند. مجموعه‌ای از چنین میدان‌هایی ضریب عددی X^X ، که نسبت به G -اطلس گیج‌های ψ^X در همسایگی‌های UX^X که را پوشش می‌دهند بیان شده‌اند، معادل میدان ویژگی سراسری و آزاد از مختصات f در M است.

برای اینکه این میدان ویژگی آزاد از مختصات به خوبی تعریف شود، یعنی مستقل از خوبی ضریب محلی (یا پاسخ‌های GM باشد، میدان‌های ضریب محلی کرنل) ملزم به دوخته شدن سازگار از طریق نگاشت‌های گذار با مقدار G هستند. بنابراین آن‌ها باید به روشی اصولی تحت تبدیل‌های گیج در G تعریف می‌شوند. از آنجا که ما با فضاهای بردار ویژگی سر و کار داریم، این تبدیل‌ها معمولاً خطی در نظر گرفته می‌شوند، یعنی آن‌ها توسط نمایش‌های گروهی خطی مدل می‌شوند:

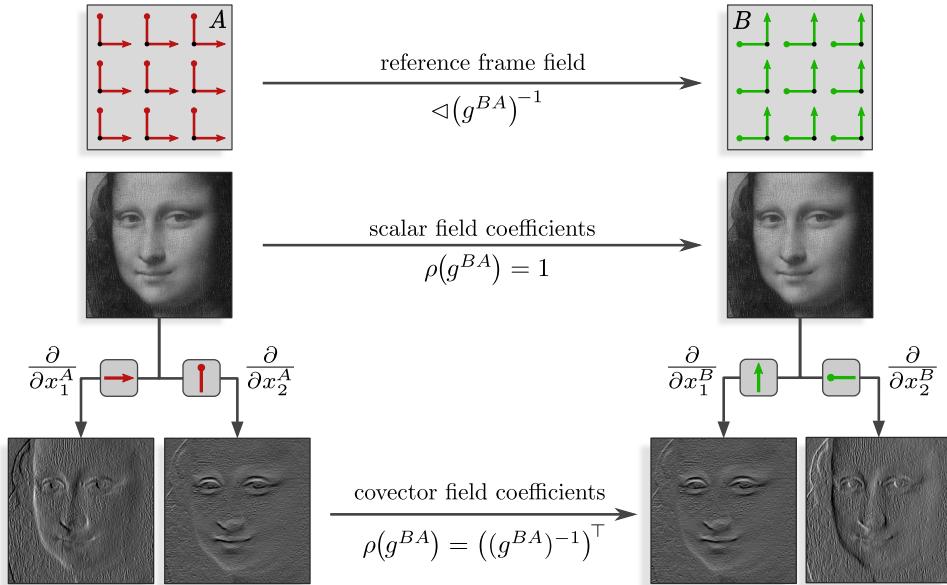
$$\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(c) \quad (27)$$

^{۱۳} این یک گزاره غیربدینه است زیرا هر کمیتی را نمی‌توان نسبت به چارچوب‌های مرجع دلخواه مرتبط با $\mathrm{GL}(d)$ بیان کرد. به عنوان مثال، میدان‌های ویژگی که در بخش ۲.۳ معرفی شده‌اند، تنها تبدیل‌های گیج با مقدار G را می‌پذیرند و بنابراین تنها نسبت به چارچوب‌های ترجیحی در GM تعریف می‌شوند. به عنوان یک مثال شهودی، CNN‌های سنتی (غیرتابوپ‌پذیر) در \mathbb{R}^d را در نظر بگیرید که نسبت به ساختار $\{e\}$ کانونی \mathbb{R}^d استخراج می‌شوند و اطلاعاتی در مورد پاسخ‌های کرنل نسبت به سایر چارچوب‌های مرجع را حمل نمی‌کنند.

^{۱۴} در این نکته ما از کوواریانس عمومی انشیتن منحرف می‌شویم، که همیشه تبدیل‌های گیج با مقدار $\mathrm{GL}(d)$ را در نظر می‌گیرد (منتظر با کوواریانس دیفکومورفیسم). تنظیم او در فرمول‌بندی ما برای $G = \mathrm{GL}(d)$ شامل شده است. با این حال، ما گروه ساختار فرضی را انعطاف‌پذیر نگه می‌داریم زیرا اکثر کاربردها گروه ساختار کاهش یافته را فرض خواهند کرد.



شکل ۱۸: پاسخ‌های عددی $f^B(p) \in \mathbb{R}^c$ و $f^A(p) \in \mathbb{R}^c$ کرnel‌هایی که بر اساس چارچوب‌های مختلف جهت‌گیری شده‌اند، به طور کلی منطبق نیستند. به منظور نمایش ضرایب عددی یکسان بردار ویژگی مستقل از مختصات نسبت به گیج انتخاب شده، آن‌ها ملزم به ارتباط توسط تبدیل‌های گیج (g_p^{BA}) $\rho(g_p^{BA})$ هستند. اگر گیج‌ها توسط g_p^{BA} مرتبط باشند، همانطور که در بخش ۴ استخراج شده است، این الزام یک قید تنابوپذیری گیج را بر کرنل‌های کانولوشن تحمیل می‌کند.



شکل ۱۹: مثال‌هایی از میدان‌های ضریب ویژگی در $M = \mathbb{R}^2$ از پردازش کلاسیک تصویر. بالا: برای سادگی ما یک میدان چارچوب «موازی» فرض می‌کنیم و همان تبدیل گیج، چرخشش به میزان $\pi/2$ ، را در هر نقطه $p \in M$ در نظر می‌گیریم. وسط: مقادیر شدت یک تصویر خاکستری مستقل از انتخاب چارچوب‌های مرجع هستند. بنابراین آن‌ها توسط میدان‌های اسکالار مدل می‌شوند که با نمایش بدینهی $\rho(g) = 1 \forall g \in G$ مشخص می‌شوند. پایین: دو کanal ضریب یک تصویر گرادیان از یک تصویر اسکالار با گرفتن مشتق‌ها در امتداد محورهای چارچوب محاسبه می‌شوند. بنابراین آن‌ها وابسته به گیج هستند. تصاویر گرادیان نسبت به گیج‌های مختلف توسط نمایش گروهی $(g^{-1})^\top$ مرتبط هستند و بنابراین به عنوان میدان‌های کوپردار (میدان‌های تراسور از نوع (\cdot, \cdot) یا 1 -فرم‌ها) شناسایی می‌شوند. برای چرخش نمایش داده شده به میزان $\pi/2$ این منجر به کanal اول جدید $(\partial/\partial x_1^B)$ (معادل کanal دوم قدیمی $(\partial/\partial x_1^A)$) و کanal دوم جدید $(\partial/\partial x_2^B)$ (معادل منفی کanal اول قدیمی $(\partial/\partial x_2^A)$) می‌شود. نسبت به چارچوب‌های مرجع مربوطه، هر دو میدان ضریب یکسان میدان گرادیان (ازاد از مختصات) را کدگناری می‌کنند. بنابراین توصیف به طور خودکار مستقل از مختصات است.

از گروه ساختار $(c) GL \leq \mathbb{R}^c$ عمل می کند و شرط $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h) \forall g, h \in G$ برآورده می کند.^{۱۵} مشابه تبدیل ضرایب $g_p^{BA} = \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}$ بردار مماس در معادله (۹)، ضرایب بردار ویژگی سپس تعریف می شوند که تحت یک تبدیل گیج با مقدار G مانند^{۱۶} تبدیل شوند:

$$f^B(p) := \rho(g_p^{BA}) f^A(p), \quad (28)$$

که در آن $p \in U^A \cap U^B$ برای بصری سازی به شکل ۱۸ مراجعه کنید. با ساخته شدن برای تبدیل همگام، فضاهای چارچوب های مرجع، ضرایب بردار مماس و ضرایب بردار ویژگی گفته می شود که با یکدیگر G -مرتبط هستند. توجه داشته باشید که ساخت از طریق یک G -نمایش به طور کلی تبدیل های گیج با مقدار $GL(d)$ را توصیف نمی کند، یعنی ویژگی های کاملاً مستقل از مختصات. بنابراین بردار های ویژگی استخراج شده تنها بیان به خوبی تعریف شده ای نسبت به چارچوب ها در G -ساختار در نظر گرفته شده GM خواهد داشت، که توسعه اصطلاح «استقلال از مختصات GM » پوشش داده می شود.

انتخاب های مختلف نمایش ها ρ_i انواع مختلفی از میدان های ویژگی را تولید می کنند همانطور که در شکل ۱۹ نمونه سازی شده است. به عنوان مثال، نمایش بدیهی، $\rho(g) = 1 \forall g \in G$ ، رفتار تبدیل میدان های اسکالار $s^A(p) \mapsto s^B(p) = 1 \cdot s^A(p)$ را توصیف می کند، که ضرایب عددی آن ها تحت تبدیل های گیج ناوردا هستند. مثال هایی از میدان های اسکالار شامل تصاویر خاکستری، میدان های دما، میدان های فشار یا توزیع های احتمال در M هستند. ضرایب میدان های بردار مماس مانند $v^A(p) \mapsto v^B(p) = g_p^{BA} v^A(p)$ تبدیل می شوند و بنابراین با نمایش گروهی $g = g(\rho)$ مطابقت دارند. مثال هایی برای میدان های سرعت باد هستند. میدان های تانسور عمومی تراز نوع (r, s) توسط نمایش های حاصل ضرب تانسوری $\otimes^r g \otimes^s g^{-1} = \rho(g)$ توصیف می شوند. آن ها به عنوان مثال تصاویر تانسور انتشار، تانسور های میدان الکترومغناطیسی یا میدان الکترومغناطیسی یا نشانه را مدل می کنند. انتخاب رایج برای گروه های ساختار گسته نمایش های منظم هستند که مجموعه محدود عملیات گروهی را توسط ماتریس های جایگشت تحقق می بخشد. نمایش های منظم به عنوان تقارن های دقیق شبکه های کریستالی، شبکه های اسپین یا شبکه های پیکسل گلایه می شوند [۱۷]. علاوه بر این، آن ها معمولاً به عنوان تقریب گسته گروه های ساختار پیوسته استفاده می شوند، به عنوان مثال گروه های چرخشی $C_N \leq SO(2)$ برای تقریب چرخش های پیوسته [۱۸]. آن ها از اهمیت عملی زیادی برخوردارند زیرا تبدیل ویژگی های شبکه های کانولوشنی گروهی را توصیف می کنند [۱۹]. میدان های ویژگی که تحت نمایش های کاهش ناپذیر (۲۰) تبدیل می شوند در [۲۰] بررسی شدند.^{۱۷} مروری دقیق تر و معیاری گستره از انواع میدان یا نمایش های مختلف در یادگیری عمیق در [۲۱] ارائه شد.

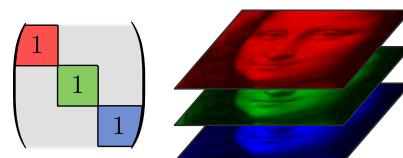
برای کامل بودن می خواهیم اشاره کنیم که میدان های بردار ویژگی آزاد از مختصات به طور رسمی به عنوان برش های هموار (\mathcal{A}) از یک بندل بردار ویژگی $\mathcal{A} \xrightarrow{\pi_A} M$ تعریف می شوند که با G -ساختار GM مرتبط است و فضاهای ضریب بردار ویژگی \mathbb{R}^c را به عنوان فیبرهای معمول دارد. بردار های ضریب $f^B(p) = f^A(p)$ در $T_p M$ در تسهیمات محلی از یک بردار ویژگی آزاد از مختصات $\mathcal{A}_p \cong \mathbb{R}^c$ هستند، و مشابه ضرایب $v^B = \psi_p^B(v)$ از یک بردار مماس $v \in T_p M$ از $\mathcal{A}_p \cong \mathcal{A}_q \cong \mathcal{A}_r$ در نقاط مختلف $p \neq q \neq r$ از M هر ریخت هستند، فضاهای ویژگی متمایز هستند، به طوری که عناصر آن ها نمی توانند با هم جمع شوند. انتقال دهنده های مواردی، که در بخش های ۳.۳ و ۵.۶ مورد بحث قرار گرفته اند، هم ریخت هایی بین فضاهای بردار ویژگی مختلف فراهم می کنند، که امکان جمع ویژگی ها را (پس از انتقال آن ها به همان فضای برداری) فراهم می کند. از انجا که این تعاریف کاملاً فنی هستند، ما جزئیات آن ها را فعل ارد می کنیم و خواننده علاقه مند را به بخش ۳.۶ ارجاع می دهیم.

۲.۲.۳ میدان های ویژگی انباسته و فضاهای ویژگی مستقل از مختصات

فضاهای ویژگی شبکه های کانولوشنی معمولی شامل چندین نقشه ویژگی هستند. به طور مشابه، ما فضاهای ویژگی شبکه های کانولوشنی مستقل از مختصات را تعریف می کنیم که شامل چندین میدان ویژگی f_i از انواع بالقوه متغیر ρ_i و ابعاد c_i باشند. بنابراین یک میدان کامل از فضای سازی های یک فضای ویژگی از یک شبکه کانولوشنی مستقل از مختصات به عنوان مجموع مستقیم تعریف می شود^{۱۸}

$$f = \bigoplus_i f_i \quad (29)$$

از میدان های منفرد، هر نقشه ویژگی از یک شبکه کانولوشنی معمولی موقعیت یک ویژگی خاص را کدگذاری می کند و به طور مستقل تبدیل می شود هنگامی که ورودی شبکه جابجا می شود. میدان های ویژگی منفرد f_i شبکه های کانولوشنی مستقل از مختصات GM هم موقعیت و هم G -پوز یک ویژگی را کدگذاری می کنند. در مقابل نقشه های ویژگی معمولی،

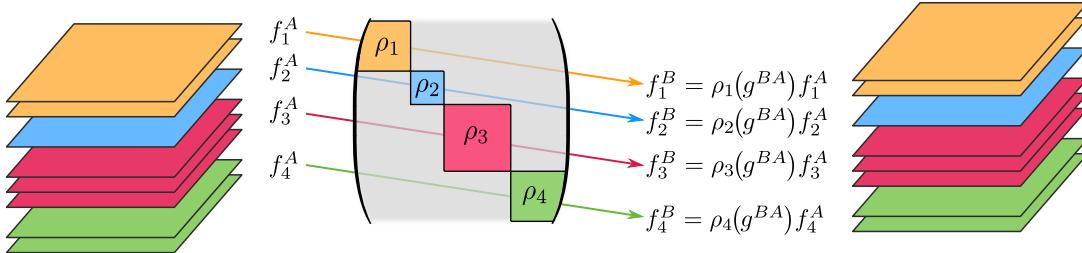


شکل ۲۰: سه کانال رنگ یک تصویر [۲۰] به عنوان میدان های اسکالار شناسایی می شوند، بنابراین فضای ویژگی کامل طبق (۱) $\oplus (۱) \oplus (۱) \oplus (۱) = (1)(g)$ تبدیل می شود.

^{۱۵} این شرط تضمین می کند که نمایش های گروهی هستند، یعنی نگاشت هایی که ساختار گروهی G را رعایت می کنند. بنابراین عمل های گروه ساختار بر فضای مماس و فضاهای ضریب بردار ویژگی سازگار هستند.

^{۱۶} توسط قصیه، هر نمایش یکانی از یک گروه فشرده می تواند از طریق تغییر پایه به مجموع مستقیم $[0][0][0][0]$ تجزیه شود. این دلالت دارد بر اینکه هر عملیات شبکه خطی بین نمایش های عمومی می تواند (پس از تغییر پایه) بر حسب عملیات بین $[0][0][0][0]$ در کش شود [۲۰]. در مقابل، انتخاب خاص نمایش، یعنی تغییر پایه سبب می شود در آن برای هر لایه شبکه غیرخطی اهمیت دارد.

^{۱۷} جمیع مستقیم \oplus بردار های $(p)_i f_i$ را می توان به عنوان «نباسته» آن ها در یک بردار پیوسته در نظر گرفت. به طور سازگار با این، مجموع مستقیم نمایش های ρ را می توان به عنوان ساخت یک ماتریس قطری بلوکی حاوی ρ ؛ به عنوان بلوک ها در نظر گرفت؛ به اشکال ۲۰ و ۲۱ مراجعه کنید.



شکل ۲۱: یک فضای ویژگی کامل شامل چندین میدان ویژگی منفرد f_i از انواع بالقوه متفاوت و ابعاد c_i است. از طریق گیج ψ^A به صورت محلی توسط میدان‌های ضریب $\rho_i : U^A \rightarrow \mathbb{R}^{c_i}$ نمایش داده می‌شود. میدان‌های ضریب در گیج دیگر ψ^B از طریق تبدیل گیج ψ^B از طریق تبدیل گیج ψ^A مرتبه هستند. ضرایب هر میدان منفرد به طور مستقل تبدیل می‌شوند، بنابراین نمایش مدل‌سازی کل فضای ویژگی مجموع مستقیم داده می‌شود، در اینجا $\bigoplus_i \rho_i = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \rho_3 \oplus \rho_4$

میدان‌های ضریب آن‌ها، به عنوان مثال f_i^A ، علاوه بر این تضمین شده‌اند که به طور مستقل از یکدیگر تحت تبدیل‌های گیج همانطور که توسط نوع آن‌ها $(c_i : G \rightarrow \text{GL}(c_i))$ مشخص شده است، تبدیل شوند. یک نمایش عددی محلی $f^A = \bigoplus_i f_i^A$ از میدان ویژگی کامل در معادله (۲۹) بنابراین طبق مجموع مستقیم نمایش‌های منفرد تبدیل می‌شود، یعنی:

$$\rho = \bigoplus_i \rho_i. \quad (30)$$

تبدیل مستقل میدان‌های منفرد تحت ρ ، که در شکل ۲۱ بصری‌سازی شده است، از ساخت روشن است:

$$\rho(g)f^A = (\bigoplus_i \rho_i(g))(\bigoplus_i f_i^A) = \bigoplus_i (\rho_i(g)f_i^A) \quad (31)$$

به عنوان یک مثال عملی از فضای ویژگی مستقل از مختصات متشکل از چندین میدان، تصویر ۲۰۰ را همانطور که در شکل ۲۰ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. مانند تصویر خاکستری در شکل ۱۹، کانال‌های رنگ منفرد مقادیر شدت را کدگذاری می‌کنند که تحت تبدیل‌های گیج ناوردا هستند. بنابراین تصویر ۲۰۰ کامل باشد با سه میدان اسکالار شناسایی شود که هر کدام به طور مستقل تحت نمایش بدیهی «تبدیل» می‌شوند. همه میدان‌های ویژگی منفرد نیازی نیست که از همان نوع ρ باشند. به عنوان مثال، در یک کاربرد پیش‌بینی آب و فوا، سیگنال ورودی ممکن است شامل میدان‌های اسکالار کدگذاری کننده ویژگی‌های مانند دما یا فشار و میدان‌های برداری مانند سرعت‌های باد باشد. توصیف به عنوان میدان‌های ρ_i از انواع مربوطه، پردازش هندسی صحیح چنین داده‌هایی را تضمین می‌کند. در حالی که انواع میدان ρ ورودی و خروجی یک شبکه معمولاً توسط وظیفه یادگیری داده می‌شوند، انواع میدان استفاده شده در لایه‌های مخفی توسط کاربر به عنوان یک فرایرامتر مشابه انتخاب کانال‌ها برای یک شبکه کانولوشنی معمولی انتخاب می‌شوند.

۳.۳ انتقال موازی بردارهای ویژگی

کرنل‌های شبکه‌های کانولوشنی ویژگی‌ها را از تمام نقاط q در یک همسایگی اطراف هر نقطه p از متفاول جمع‌آوری می‌کنند. از آنجا که ویژگی‌ها در نقاط مختلف در فضاهای بردار ویژگی متفاوتی قرار دارند و نسبت به گیج‌های مختلف بیان می‌شوند، باید قبل از پردازش بیشتر، در امتداد یک مسیر γ از q به p به صورت موازی منتقل شوند. ما ابتدا انتقال بردارهای مماس را مورد بحث قرار می‌دهیم، که توسط یک نگاشت انتقال موازی رسمی‌سازی می‌شود:

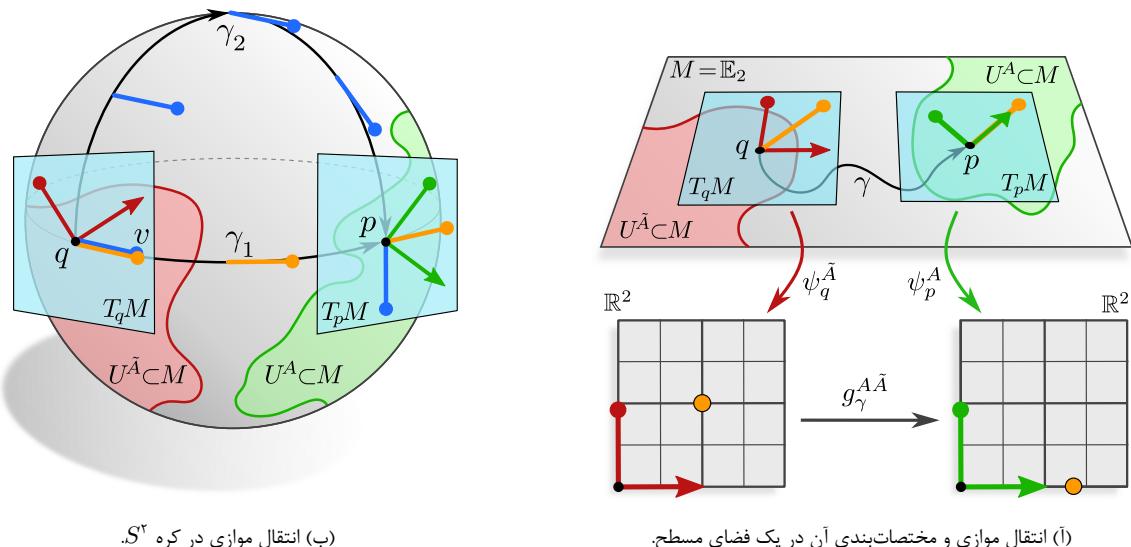
$$\mathcal{P}_\gamma : T_q M \rightarrow T_p M. \quad (32)$$

این انتقال‌دهنده اغلب از اتصال کانونی لوی-چوپیتا منیفولد محاسبه می‌شود، با این حال، ممکن است در برخی کاربردها مربوط به یک اتصال جایگزین (سازگار با G) باشد، همانطور که در ادامه و در مرور ادبیات ما در بخش سوم بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد. انتقال‌دهنده بردارهای ویژگی (مرتبط با G) از انتقال‌دهنده بردارهای مماس تبعیت می‌کند اگر انتقال سازگار با G باشد.

۱۳.۳ انتقال‌دهنده‌های بردار مماس

از نظر آموزشی معقول است که ابتدا با حالت خاص انتقال‌دهنده‌های لوی-چوپیتا در فضاهای اقلیدسی که در شکل ۲۲ به تصویر کشیده شده‌اند، شروع کنیم، قبل از پرداختن به انتقال‌دهنده‌ها و منیفلدهای عمومی‌تر. در این حالت انتقال موازی مستقل از مسیر انتخاب شده γ است و بردار متنقل شده را به معنای معمول در فضاهای اقلیدسی موازی نگه می‌دارد. توجه داشته باشید که انتقال‌دهنده γ بین فضاهای مماس $T_q M$ و $T_p M$ نگاشت می‌کند و بنابراین مستقل از مختصات است. با این حال، می‌توان آن را نسبت به مختصات بیان کرد، سپس به جای بردارهای مماس بر روی بردارهای ضریب عددی عمل می‌کند. شهرودی در شکل ۲۲ آورده شده است، جایی که چارچوب‌ها در q و p موازی نیستند^{۱۸}.

^{۱۸} برخلاف منیفلدهای عمومی، \mathbb{R}^d با مفهوم کانونی موازی بودن چارچوب‌های مرجع همراه است.



(ب) انتقال موازی در کره S^2

(ا) انتقال موازی و مختصات‌بندی آن در یک فضای مسطح.

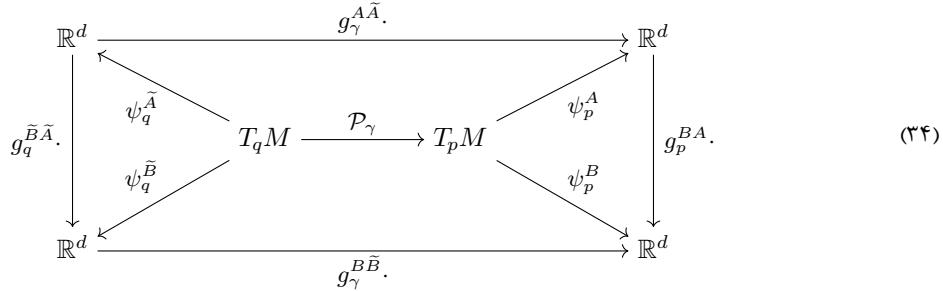
شکل ۲۲: انتقال موازی بردارهای مماس $v \in T_q M$ در $q \in T_p M$ به p . شکل ۲۲ آ حالت خاص انتقال دهنده‌های لوی-چویتا را در فضاهای اقلیدسی مسطح $M = \mathbb{E}_d$ بصری‌سازی می‌کند. مستقل از مسیر انتخاب شده γ انتقال لوی-چویتا بردار (تارنجی) را به معنای معمول در فضاهای اقلیدسی موازی نگه می‌دارد. گیج‌های $\psi_q^{\tilde{A}}$ (قرمز) و $\psi_p^{\tilde{A}}$ (سبز) امکان بیان انتقال دهنده مستقل از مختصات را توسط یک عنصر گروهی $\psi_p^A \circ \mathcal{P}_{\gamma} \circ (\psi_q^{\tilde{A}})^{-1} \in \text{GL}(d)$ فراهم می‌کنند که تغییر ضرایب بردار را در نظر می‌گیرد اگر چارچوب هدف با چارچوب منبع منتقل شده مطابقت نداشته باشد. شکل ۲۲ ب انتقال لوی-چویتا را در ۲-کره S^2 نشان می‌دهد، مقایسه کنید با معادله (۴۳۸). انتقال دهنده‌های \mathcal{P}_{γ} و \mathcal{P}_{γ} در انتداد دهنده‌های مختلف γ و γ به طور کلی با یکدیگر اختلاف دارند. همانند فضاهای مسطح، انتقال دهنده‌های مستقل از مختصات را می‌توان توسط عناصر گروهی که بر روی ضرایب نسبت به چارچوب‌های مختصاتی در q و p عمل می‌کنند، بیان کرد.

طوری که ضرایب $(1, \sqrt{2}, 0, 0)^T$ در q و $(1, 0, 0, 0)^T$ در p متفاوت هستند، حتی اگر بردارهای مماس (مستقل از مختصات) مربوطه با یکدیگر موازی باشند. برای دقیق‌تر کردن این موضوع، گیج‌های $\psi_q^{\tilde{A}}$ و $\psi_p^{\tilde{A}}$ را در همسایگی‌های $U^{\tilde{A}}$ از q و p با ضرایب $v^{\tilde{A}} \in \mathbb{R}^d$ در نظر بگیرید. فرض کنید یک بردار $v \in T_q M$ با ضرایب $v^{\tilde{A}} \in \mathbb{R}^d$ داده شده باشد. ضرایب بردار منتقل شده $\mathcal{P}_{\gamma}v$ در p سپس توسط: $A \sim \tilde{A}$ به صورت زیر است:^{۱۹}

$$g_{\gamma}^{A\tilde{A}} := \psi_p^A \circ \mathcal{P}_{\gamma} \circ (\psi_q^{\tilde{A}})^{-1} \in \text{GL}(d) \quad (33)$$

عنصر گروهی $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$ انتخاب‌های غیرموازی چارچوب‌های مرتع در q و p را در نظر می‌گیرد. در \mathbb{R}^d معمولاً فرض می‌شود که تمام چارچوب‌ها موازی هستند به طوری که تمام مختصات‌بندی‌های انتقال دهنده‌های لوی-چویتا بدیهی می‌شوند.^{۲۰}

از آنجا که انتقال دهنده در معادله (۳۳) وابسته به مختصات است، ما علاقه‌مند به تبدیل‌های گیج آن هستیم. گیج‌های $\psi_q^{\tilde{B}}$ و ψ_p^B را دو گیج جایگزین در همسایگی‌های q و p در نظر بگیرید. از نمودار جابجای:



^{۱۹} مقداری در $\text{GL}(d)$ می‌گیرد اگر ما اتصال‌های دلخواه (با مقدار $d(d-1)$) و گروه‌های ساختار عمومی $G \leq \text{GL}(d)$ را فرض کنیم. برای اتصال لوی-چویتا با مقدار $d(d-1)$ و چارچوب‌های متعامد، یعنی $G = d$ ، ما $g_{\gamma}^{A\tilde{A}} \in \text{GL}(d)$ را داریم.

^{۲۰} CNN‌های سنتی در \mathbb{R}^d به طور ضمنی این فرض را از چارچوب‌های موازی (شکل ۲۷) و انتقال دهنده‌های بدیهی می‌کنند.

می‌توان خواند که انتقال‌دهنده‌ها در گیج‌های مختلف توسط:

$$g_{\gamma}^{B\tilde{B}} = g_p^{BA} g_{\gamma}^{A\tilde{A}} (g_q^{\tilde{B}\tilde{A}})^{-1} \quad (35)$$

مرتبط هستند. توجه داشته باشید که شاهت این قانون تبدیل و نمودار جایجایی به آنچه در معادلات (۲۱) و (۲۳) آمده است. تفاوت بین هر دو این است که انتقال‌دهنده دارای دامنه $T_q M$ و دامنه مشترک $T_p M$ متفاوت است که توسط گیج‌های مختلف و مستقل از یکدیگر تشهیم شده‌اند و بنابراین به طور مستقل تبدیل می‌شوند.

به طور کلی، انتقال موازی بردارهای مماس توسط یک انتخاب اتصال تعیین می‌شود، به عنوان مثال (اما نه لزوماً) توسط اتصال کانونی لوی-چوپیتا یک منفولد ریمانی. یک اتصال را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای از انتقال‌دهنده‌های بین فضاهای مماس مجاور در نظر گرفت، به طوری که انتقال‌دهنده کامل \mathcal{P}_{γ} با انتقال‌گیری اتصال در امتداد مسیر γ به دست می‌آید. انتقال‌دهنده‌های در امتداد مسیرهای مختلف γ_1 و γ_2 از p به p نیازی به مطابقت ندارند، که در شکل ۲۲ ب انتقال‌دهنده‌های لوی-چوپیتا در ۲-کره S^3 ، مثال زده است، مقایسه کنید با معادله (۴۳۸). همانند فضاهای مسطح، انتقال‌دهنده‌های مستقل از مختصات را می‌توان توسط معادله (۳۳) نسبت به گیج‌ها بیان کرد. تبدیل‌های گیج چنین انتقال‌دهنده‌های مختصات‌بندی شده دوباره توسط معادله (۳۵) داده می‌شوند. انتقال‌دهنده‌ها در یک منفولد داده می‌توانند در اصل به صورت تحلیلی از اتصال محاسبه شوند [۹] و گاهی اوقات می‌توانند به صورت فرم بسته بیان شوند، به عنوان مثال برای کره S^3 ، معادله (۴۳۸). چندین الگوریتم عددی برای محاسبه انتقال‌دهنده‌های موازی در مشاهدهای وجود دارد؛ به بخش ۲.۱.۱۲ مراجعه کنید. ما به جزئیات بیشتر در مورد نحوه محاسبه انتقال‌دهنده‌های بردار مماس \mathcal{P}_{γ} خواهیم پرداخت بلکه به سادگی آن‌ها را داده شده فرض می‌کنیم.

۲.۳.۳ انتقال‌دهنده‌های بردار ویژگی

معادله (۲۸) قانون تبدیل ضرایب بردار ویژگی را توسط نوع میدان آن‌ها (ρ) تعریف می‌کند. انتقال‌دهنده موازی آن‌ها، که نسبت به گیج‌های $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$ و $g_p^{A\tilde{A}}$ بیان می‌شود، به طور مشابه با پیچیدن انتقال‌دهنده ضریب بردار مماس در این نمایش میدان داده می‌شود، یعنی توسط:

$$\rho(g_{\gamma}^{A\tilde{A}}). \quad (36)$$

توجه داشته باشید که از آنجا که $G \rightarrow \text{GL}(c)$ یک نمایش G است \square این ساختار تنها زمانی به خوبی تعریف می‌شود که تمام انتقال‌دهنده‌ها $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$ (برای مسیرهای دلخواه γ و چارچوب‌های A, \tilde{A}) واقعاً مقادیری در گروه ساختار انتخاب شده G بگیرند. اینکه آیا این حالت صادق است یا خیر هم به انتخاب خاص G -ساختار (یا G -اطلس) و هم به انتقال‌دهنده‌ها (یا اتصال) مورد نظر بستگی دارد \square آن‌ها باید سازگار باشند [۹].

تمام شبکه‌های کانولوشنی (بنابراین انتقال می‌دهند) بردارهای ویژگی را به نحوی جمع‌آوری می‌کنند، و بنابراین برخی انتخاب از اتصال و G -ساختار را فرض می‌کنند. اگر G -ساختار انتخاب شده با اتصال لوی-چوپیتا ناسازگار باشد، این به معنای آن است که این مدل‌ها \square اغلب به طور ضمنی \square یک اتصال جایگزین و سازگار با G را برای جمع‌آوری ویژگی‌ها فرض می‌کنند. خواننده فعلی باید تکران انتخاب‌های خاص اتصال‌ها باشد، که در مرور ادبیات ما در بخش سوم روش تر خواهد شد. در ادامه این بخش، ما بیشتر در مورد سازگاری G -اتصال‌ها و G -ساختارها توضیح خواهیم داد. با فرض اینکه انتقال‌دهنده‌های ویژگی در ادامه همیشه به خوبی تعریف خواهد شد، این بخش را می‌توان با خیال راحت در اولین مطالعه نادیده گرفت.

بحث دقیق‌تر و مستقل از مختصات انتقال‌دهنده‌ها در بندهای بردار ویژگی مرتبط را می‌توان در بخش ۵.۶ یافت.

۲.۳.۴ سازگاری اتصال‌ها و G -ساختارها

یک اتصال با یک G -ساختار GM سازگار با G نامیده می‌شود اگر عبارات مختصاتی $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$ انتقال‌دهنده‌های \mathcal{P}_{γ} آن نسبت به هر چارچوب A از GM مقادیری در گروه ساختار G بگیرند [۹].^{۱۱} یک اتصال سازگار با G منجر به انتقال‌دهنده‌های بردارهای ویژگی مرتبط با G می‌شود. برای روشن کردن این شرط سازگاری تا حدی انتزاعی، چند مثال خاص را مورد بحث قرار می‌دهیم. یک مثال ساده، اتصال لوی-چوپیتا در \mathbb{R}^2 است، شکل ۲۲. دو ساختار $\{e\}$ در \mathbb{R}^2 که در اشکال ۲۱ و ۲۲ نشان داده شده‌اند را در نظر بگیرید. در اینجا $\{e\} = G$ است، به این معنی که نوع میدان $\{e\} \rightarrow \text{GL}(c)$ یک نمایش $\{e\}$ است، به طوری که انتقال موازی بردارهای ویژگی تنها در صورتی می‌تواند تعریف شود که عبارات مختصاتی $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$ مقادیری در $\{e\}$ بگیرند، یعنی بدینهای باشد. از آنجا که ساختار $\{e\}$ در شکل ۲۲ از چارچوب‌های "موازی" تشکیل شده است، این امر واقعاً همینطور است \square بنابراین اتصال لوی-چوپیتا با این ساختار $\{e\}$ سازگار است. در مقابل، چارچوب‌های ساختار $\{e\}$ در شکل ۲۲ ب نشان داده شده است، از آنجا که عبارات مختصاتی غیربدینه در $\{e\}$ می‌شود که مقادیری در $\text{SO}(2)$ می‌گیرند (در شکل ۲۲ آ بصیری سازی شده است). از آنجا که نوع میدان $\{e\} \rightarrow \text{GL}(c)$ است، $\rho : \{e\} \rightarrow \text{GL}(c)$ چرخش‌ها را مدیریت نمی‌کند، امکان تعریف انتقال لوی-چوپیتا ویژگی‌های مرتبط با این ساختار $\{e\}$ وجود ندارد \square آن‌ها ناسازگار هستند. به عنوان مثال دوم، اتصال لوی-چوپیتا در S^3 را در نظر بگیرید، که در شکل ۲۲ ب نشان داده شده است. انتقال در این حالت همیشه وابسته به مسیر خواهد بود و منجر به بردارهای چرخانده شده متفاوت خواهد شد،

^{۱۱} به طور معادل، فرم ۱-اتصال اتصال، که نسبت به چارچوب‌های GM بیان می‌شود، ملزم به داشتن مقدار ρ است، که در آن \square نشان‌دهنده جبر لی G است. به طور انتزاعی‌تر، ما به اتصال‌های اصلی اهرسمن در بنده اصلی G علاقه‌مندیم.

که دلالت دارد بر اینکه $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$ مقداری در (2) SO خواهد گرفت. بردارهای ویژگی که باید مطابق با اتصال لوی-چوپتا منتقل شوند، بنابراین باید از نوع $\text{SO}(2) \rightarrow \text{GL}(c)$ باشند که یک نمایش (2) SO است. این امر حداقل نیازمند ساختار (2) SO در S^3 است که در شکل 157 نشان داده شده است. ساختار $\{e\}$ در S^3 از شکل 57 ب با اتصال لوی-چوپتا ناسازگار است.

از آنجا که اتصال لوی-چوپتا یک اتصال متريک است، طول و زاويه بين بردارهای مماس را حفظ می کند، و بنابراین چارچوب های متعامد را به چارچوب های متعامد منتقل می کند. نتيجه می شود که اتصال لوی-چوپتا هميشه با ساختار d چارچوب های متعامد سازگار است، که نسبت به آن چارچوب های متعامد منتقل می گيرد. اگر منيفولد قابل جهتگيري باشد، دستاني چارچوب توسط انتقال دهنده های لوی-چوپتا حفظ می شود، به اين معني که آنها تضمین شده اند که با ساختارهای $\text{SO}(d)$ چارچوب های متعامد راست گرد در M سازگار باشند. تمام شبکه های کانولوشني در مرور ادبیات ما در بخش سوم که بر اساس ساختارهای $\text{SO}(d)$ هستند، ویژگی ها را از طریق انتقال دهنده های لوی-چوپتا جمع آوری می کنند.

اگر یک G -ساختار داده شده با اتصال لوی-چوپتا ناسازگار باشد، باید یک اتصال جايگزین و سازگار با G را برای انتقال بردارهای ویژگی تعريف کرد. بر جسته ترين مثال در مرور ادبیات ما، اتصال های بدیهی در ساختارهای $\{e\}$ است. یک اتصال بدیهی با خاصیت مستقل از مسیر بودن انتقال آن مشخص می شود [؟]. هر ساختار $\{e\}$ یک اتصال بدیهی منحصر به فرد را نتيجه می دهد، که بردارهای مماس را به گونه ای منتقل می کند که زاويه يكسانی را با چارچوب های مرجع ساختار $\{e\}$ حفظ کنند. اين امر دلالت دارد بر اينکه $\mathbb{R}^n = e$ یعنی آنها بردارهای ضرיב را در \mathbb{R}^c (نسبت به چارچوب های ساختار $\{e\}$) بدون تغيير مقدار عددی آنها منتقل می کنند. چين انتقال دهنده هایي در شبکه های کانولوشني استفاده می شوند که انتقال دهنده های غيربدیهی را به صراحت مدل نمی کنند \square که در مورد تمام شبکه های دارای $G = \{e\}$ در جدول 6 صادر است، به ویژه آن هايي که در بخش های 11 و 12 هستند. توجه داشته باشيد که اتصال بدیهی تنها اتصالی است که با یک ساختار $\{e\}$ سازگار است. همانطور که در بالا ذکر شد، هر شبکه کانولوشني برخی انتخاب از G -ساختار و اتصال سازگار را فرض می کند، اغلب اتصال های لوی-چوپتا يا اتصال های بدیهی.

بخش 5.6 به طور مفصل در مورد سازگاري انتقال دهنده ها و G -ساختارها از ديدگاه مستقل از مختصات توضیح می دهد.

۴.۳ عمل ايزومتری ها و تبدیل های گیج الفا شده

تا کنون بحث ما منحصرأ بر تقارن های گیج محلی در مختصات بندی فضاهای مماس متتمرکز بوده است. یک منيفولد ممکن است، با اين حال، خود دارای تقارن های غيربدیهی باشد، که در مورد یک منيفولد ريماني M گروه ايزومتری آن $\text{Isom}(M)$ را تشکيل می دهد. اين بخش ايزومتری ها و عمل آنها بر منيفولدها، بردارهای مماس، چارچوب های مرجع و میدان های ویژگی را به طور خلاصه مورد بحث قرار می دهد، نتایجي را خلاصه می کند که به طور دقیق تری در بخش 1.8 استخراج شده اند. ما بدین ترتیب معادلی بین عمل های فعال ايزومتری و تفسیر منفعل آنها بر حسب تبدیل های گیج الفا شده توسيع ايزومتری را بر جسته خواهیم کرد. اين معادلی بعداً امكان توصیف تناوب پذیری ايزومتری GM -کانولوشن ها را فراهم خواهد کرد.

ايزومتری ها به عنوان تقارن های منيفولدهای ريماني تعریف می شوند، یعنی آن نگاشت ها (ديفتومورفيسم ها)

$$\phi : M \rightarrow M, \quad (37)$$

که متريک و در نتيجه فواصل روی M را حفظ می کنند. مجموعه همه ايزومتری های یک منيفولد ريماني M گروه ايزومتری آن را تشکيل می دهد، که ما آن را با $\text{Isom}(M)$ نشان می دهیم. به عنوان مثال، گروه اقلیدسي $E(d)$ گروه ايزومتری فضاهای اقلیدسي \mathbb{E}_d است. اين گروه شامل انتقال ها، چرخش ها و بازتاب ها است، که همه آنها متريک استاندارد \mathbb{E}_d را حفظ می کنند. گروه ايزومتری $S^3 - 2$ که S^3 توسيع گروه متعمد 3 داده می شود، که شامل چرخش ها و بازتاب ها است. شکل 23 ۲۳ منيفولد تخم مرغی شکلی را نشان می دهد که ايزومتری های آن چرخش ها و بازتاب ها در 2 حول محور عمودی هستند.

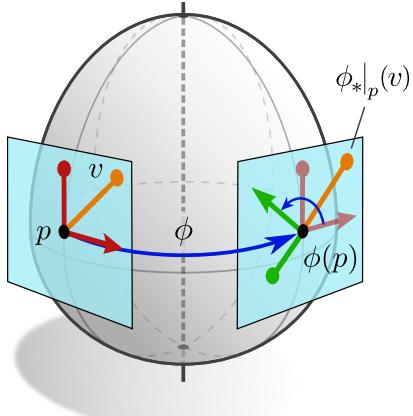
۱.۴.۳ پيش برنده بردارهای مماس

هر ايزومتری $\phi \in \text{Isom}(M)$ از طریق پيش برنده (يا دیفرانسیل)، آن

$$\phi_*|_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} M, \quad (38)$$

به طور طبیعی بر بردارهای مماس عمل می کند. همانطور که در شکل 12 (وسط) بصری سازی شده است، پيش برنده را می توان به طور شهودی به عنوان حمل بردارهای مماس همراه با عمل ايزومتری بر منيفولد زيرین M در نظر گرفت. تعریف رسمي پيش برنده بر روی TM در پيوست 2.1 آورده شده است، با اين حال، شهود ارائه شده برای هدف ما کافی است. از آنجا که پيش برنده یک نگاشت خطی آزاد از مختصات بین فضاهای مماس است، عمل آن در مختصات توسيع ماترييس d نمایش داده می شود. با فرض گیج های ψ_p^A و $\psi_{\phi(p)}^{\tilde{A}}$ در موقعیت منبع و هدف، به ترتیب، اين ماترييس توسيع

$$g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) := \psi_{\phi(p)}^A \circ \phi_*|_p \circ (\psi_p^{\tilde{A}})^{-1} \in \text{GL}(d). \quad (39)$$



شکل ۲۳: بصری‌سازی پیش‌برنده آزاد از مختصات بردارهای مماس و بیان مختصاتی آن نسبت به چارچوب‌های مرجع داده شده در موقعیت منبع و هدف. پیش‌برنده آزاد از مختصات $\phi_*|_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} M$ به $v \in T_p M$ به $\psi_{\phi(p)}^A(v) \in T_{\phi(p)} M$ متناظر با چارچوب مرجع قرمز است و $\psi_{\phi(p)}^A(v)$ نارنجی) منتقل می‌کند. فرض کنید $\tilde{\psi}_p^A$ گیج در p در که متناظر با چارچوب مرجع سبز است. آن‌ها بردارها را قبل و بعد از پیش‌برنده توسط ضرایب عددی $(1, -\sqrt{2})^\top$ که متناظر با چارچوب مرجع سبز است. آن‌ها بردارها را قبل و بعد از پیش‌برنده توضیح می‌دهند. این تبدیل ضرایب بردار توسط تبدیل گیج القا شده توسط ایزومنتری $g_\phi^{A\bar{A}}(p) \in \mathrm{GL}(d)$ توصیف می‌شود، یعنی $(\psi_{\phi(p)}^A(v)) = g_\phi^{A\bar{A}}(p) \cdot \psi_p^A(v)$. ضرایب بردارهای ویزگی به طور مشابه طبق $g_\phi^{A\bar{A}}(p) \in G$ تبدیل می‌شوند اگر $\rho(g_\phi^{A\bar{A}}(p))$ تبدیل می‌شوند.

داده می‌شود. این ماتریس تبدیل از ضرایب عددی یک بردار اصلی $v \in T_p M$ در گیج $\phi_*|_p(v) \in T_{\phi(p)} M$ هدف را توضیح می‌دهد، یعنی $(\psi_{\phi(p)}^A(v)) = g_\phi^{A\bar{A}}(p) \cdot \psi_p^A(v)$. نمودار جابجایی

$$\begin{array}{ccccc} & & g_\phi^{A\bar{A}}(p) \cdot & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathbb{R}^d & & T_p M & & \mathbb{R}^d \\ \downarrow \psi_p^{\bar{A}} & & \xrightarrow{\phi_*|_p} & & \downarrow \psi_{\phi(p)}^A \\ g_p^{\bar{B}\bar{A}} \cdot & & & & g_{\phi(p)}^{B\bar{A}} \cdot \\ \downarrow \psi_p^{\bar{B}} & & & & \downarrow \psi_{\phi(p)}^B \\ & & & & \mathbb{R}^d \\ & & g_\phi^{B\bar{B}}(p) \cdot & & \end{array} \quad (40)$$

که از نظر مفهومی شبیه آن در معادله (۳۴) است، تعریف بیان مختصاتی پیش‌برنده بردار مماس را بصری‌سازی می‌کند. علاوه بر این دلالت دارد بر اینکه تبدیل‌های گیج بین مختصات‌بندی‌های مختلف توسط

$$g_\phi^{B\bar{B}} = g_{\phi(p)}^{B\bar{A}} g_\phi^{A\bar{A}} (g_p^{\bar{B}\bar{A}})^{-1}, \quad (41)$$

داده می‌شوند، که معادل مفهومی معادله (۳۵) است.

۲.۴.۳ پیش‌برنده چارچوب‌های مرجع و تقاضه‌های G -ساختار

از آنجا که چارچوب‌های مرجع فقط d -تاپل‌هایی از بردارهای چارچوب خطی مستقل هستند، پیش‌برنده بردارهای مماس پیش‌برندهای از چارچوب‌های مرجع را با پیش‌بردن محورهای چارچوب منفرد القا می‌کند. به طور خاص، پیش‌برنده یک چارچوب $[e_i]_{i=1}^d$ در p به عنوان چارچوب $\phi(p)$ در $\phi_*|_p(e_i)$ تعریف می‌شود.

این پیش‌برنده چارچوب‌ها همیشه به خوبی تعریف شده است، با این حال، ممکن است با G -ساختار سازگار نباشد، یعنی به طور کلی تضمینی وجود ندارد که چارچوب‌ها در GM هنگام پیش‌برده شدن در GM باقی بمانند. به عنوان مثال ۱۱ \mathbb{R}^d -ساختار در شکل ۱۱ (بالا چپ) را در نظر بگیرید، که توسط انتقال‌های افقی حفظ می‌شود اما توسط انتقال‌های عمودی یا هر ایزومنتری دیگر از \mathbb{R}^d حفظ نمی‌شود. به طور مشابه، \mathcal{R} -ساختار در شکل ۱۱ (پایین چپ) توسط انتقال‌ها و بازتاب‌های افقی حفظ می‌شود، اما توسط چرخش‌ها نه. بنابراین ما زیرگروه

$$\mathrm{Isom}_{GM} := \left\{ \phi \in \mathrm{Isom}(M) \mid [\phi_*(e_i)]_{i=1}^d \in GM \quad \forall [e_i]_{i=1}^d \in GM \right\} \leq \mathrm{Isom}(M) \quad (42)$$

ایزومنتری‌هایی که تقاضه‌های G -ساختار هستند را در نظر می‌گیریم، یعنی آن‌هایی که تضمین شده‌اند هر چارچوب در GM را به چارچوب دیگری که نیز در GM موجود است، نگاشت کنند.^{۲۲} توجه داشته باشید که Isom_{GM} به طور کلی به انتخاب خاص G -ساختار GM بستگی دارد، نه فقط به گروه ساختار G . برای حالت خاص که $G \geq d$ ، تضمین شده است که $\mathrm{Isom}_{GM} = \mathrm{Isom}(M)$ مطابقت داشته باشند زیرا

^{۲۲} به طور رسمی تری بیان شود، چنین ایزومنتری‌هایی اتومورفیسم‌های بندل اصلی G -ساختار هستند (یا القا می‌کنند).

ایزومتری‌ها تضمین شده‌اند که چارچوب‌های متعامد را به چارچوب‌های متعامد نگاشت کنند. ما علاقه‌مند به زیرگروه Isom_{GM} هستیم زیرا تنها آن ایزومتری‌ها پیش‌برنده به خوبی تعریف شده‌ای از بردارهای ویژگی مستقل از مختصات GM را القا خواهند کرد، همانطور که در بخش بعدی پیش‌مورد بحث قرار گرفته است.

پیش از ادامه به عمل ایزومتری بر بردارهای ویژگی، ما آنچه را که تبدیل‌های گیج القا شده توسط ایزومتری می‌نامیم، مورد بحث قرار می‌دهیم: برای این منظور، فرض کنید $[e_i^A]_{i=1}^d$ آن چارچوب در p باشد که متناظر با گیج منبع ψ است و فرض کنید $[e_i^{\tilde{A}}]_{i=1}^d$ آن چارچوب در (p) باشد که متناظر با گیج هدف $\phi(p)$ است، همانطور که در شکل ۲۳ به ترتیب در قرمز (چپ) و سبز (راست) نشان داده شده است. پیش‌برنده اثبات شده است، دو چارچوب توسط تبدیل گیج القا شده توسط ایزومتری مرتبط هستند:

$$[\phi_*|_p(e_i^{\tilde{A}})]_{i=1}^d = [e_i^A]_{i=1}^d \triangleleft g_\phi^{A\tilde{A}}(p), \quad (43)$$

که در آن $g_\phi^{A\tilde{A}}(p)$ عنصر گروهی از معادله (۳۹) و \triangleleft عمل راست از معادله (۱۱) است. اصطلاح «تبدیل گیج القا شده توسط ایزومتری» تا آنجا معنا دارد که هندسه‌های اطراف p و (p) غیرقابل تشخیص هستند زیرا ϕ یک ایزومتری، یعنی یک تقارن از M است. با شناسایی دو نقطه با یکدیگر، بنابراین می‌توان عمل فعل ϕ بر یک کمیت هندسی را به عنوان یک تبدیل گیج منفعل، یعنی یک تغییر القا شده از چارچوب منبع به چارچوب هدف، تفسیر مجدد کرد.

قضیه ۸.۳ در بخش ۱.۸ اثبات می‌کند که ایزومتری‌های حفظ‌کننده G -ساختار در Isom_{GM} و تبدیل‌های گیج القا شده با مقدار G یکدیگر را نتیجه می‌دهند، یعنی

$$\phi \in \text{Isom}_{GM} \iff g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \in G \quad \forall p \in M \quad (44)$$

برای گیج‌های دلخواه ψ_p و $\psi_{\phi(p)}$ از G -اطلس برقرار است. خواننده باید این ادعاهای ما در شکل ۱۱ تأیید کند.

۴.۴.۳ پیش‌برنده بردارهای ویژگی

اگر (و تنها اگر) یک ایزومتری تقارنی از G -ساختار باشد، منجر به پیش‌برنده بردارهای ویژگی می‌شود. به طور شهودی، این پیش‌برنده بردارهای ویژگی را از نقاط p به $\phi(p)$ منتقل می‌کند. هنگامی که نسبت به دو چارچوب مرجع در p و $\phi(p)$ بیان شود، توسط تبدیل گیج القا شده

$$\rho(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)). \quad (45)$$

داده می‌شود. توجه داشته باشید که این تبدیل برای هر $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ در G خواهد گرفت و ρ یک G -نمایش است. در مقابل، اگر ϕ تقارنی از G -ساختار نباشد، تعریف پیش‌برنده بردار ویژگی متناظر غیرممکن است. این گزاره با این واقعیت مرتبط است که ویژگی‌های های معمولی هیچ رفتار تبدیل مشخصی تحت چرخش‌ها یا بارتابها در گروه اقیلیدسی $E(d)$ ندارند.

پیش‌برنده بردارهای ویژگی منفرد عملی بر کل میدان ویژگی f را دلالت می‌کند، که ما آن را با $f \triangleright \phi$ نشان می‌دهیم. نسبت به مختصات، این عمل به صورت

$$[\phi \triangleright f]^A(\phi(p)) = \rho(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) f^{\tilde{A}}(p). \quad (46)$$

بیان می‌شود. ما بعداً اثبات خواهیم کرد که های متناظر از مختصات نسبت به عمل ایزومتری‌ها در Isom_{GM} بر میدان‌های ویژگی تناوب‌پذیر هستند؛ به شکل ۲۷ مراجعاً کنید. این ویژگی بر این واقعیت تکیه دارد که عمل فعل ایزومتری بر میدان‌های ویژگی می‌تواند توسط معادله (۴۶) به عنوان یک تبدیل گیج منفعل صرف ضایای بردار ویژگی درک شود.

۴ شبکه‌های مستقل از مختصات و کانولوشن‌ها

شبکه‌های عصبی داده‌ها را با اعمال مجموعه‌ای از نگاشتهای پارامتری (ایههای) به یک سیگنال ورودی پردازش می‌کنند در مورد ما به مجموعه‌ای از میدان‌های ویژگی بر روی یک مینیفولد ریمانی. اصل کوواریانس بدین ترتیب ایجاب می‌کند که لایه‌های منفرد شبکه باشد عملیات مستقل از مختصات GM باشند. نمایش‌های مختصاتی چنین لایه‌ای باید طوری تبدیل شوند که قوانین تبدیل میدان‌های ویژگی ورودی و خروجی خود را رعایت کنند. به جز این الزام سازگاری، لایه‌های مستقل از مختصات عمومی بدون محدودیت باقی می‌مانند.

یک اصل طراحی رایج شبکه‌های عصبی که بر روی سیگنال‌های فضایی (میدان‌های ویژگی) عمل می‌کنند این است که آن‌ها به معنای تعمیم یافته‌ای کانولوشنی هستند. ویژگی اصلی که اکثر تعمیم‌های عملیات کانولوشن در آن مشترک هستند این است که استنتاج آن‌ها مستقل از موقعیت است. این امر با اشتراک توابع قالب، به عنوان مثال کرنل‌های کانولوشن یا بایاس‌ها، بین مکان‌های مختلف حاصل می‌شود. هر زمان که گروه ساختار G

غیربدهی باشد، فرآیند اشتراک وزن مبهم است زیرا توابع قالب می‌توانند نسبت به چارچوب‌های مرجع مختلف به اشتراک گذاشته شوند. همانطور که در ادامه استدلال خواهیم کرد، این ابهام با طراحی توابع قالب مشترک برای تناوب‌پذیر بودن تحت تبدیل‌های گیج با مقدار G حل می‌شود. توابع قالب تناوب‌پذیر گیج نسبت به چارچوب مرجع خاصی که در آن اعمال می‌شوند بی‌تفاوت خواهد بود و بنابراین امکان اشتراک وزن مستقل از مختصات را فراهم می‌کنند.

۳۵	۱.۴	عملیات نقطه‌ای تناوب‌پذیر گیج
۳۵	۱.۱.۴	کانولوشن‌های 1×1 تناوب‌پذیر گیج
۳۷	۲.۱.۴	جمع بایاس تناوب‌پذیر گیج
۳۸	۳.۱.۴	غیرخطی‌های تناوب‌پذیر گیج
۳۹	۲.۰.۴	تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM
۳۹	۱.۲.۴	دیدگاه یک ناظر محلی به میدان‌های ویژگی
۴۱	۲.۲.۴	کرنل‌های مستقل از مختصات و تبدیلات میدان کرنل
۴۳	۳.۲.۴	کانولوشن‌های \square و کرنل‌های \square -راهبر
۴۷	۳.۴	تناوب‌پذیری ایزومتری

در این بخش ما لایه‌های شبکه‌ای را در نظر خواهیم گرفت که میدان‌های f از نوع p را به عنوان ورودی می‌گیرند و میدان f از نوع 000 را به عنوان خروجی تولید می‌کنند. بخش ۱.۴ حالت خاص لایه‌های عمل می‌کنند مورد بحث قرار می‌دهد، یعنی آن‌هایی که خروجی آن‌ها (p) در هر $p \in M$ تنها به بردار ویژگی ورودی منفرد (p) f در همان مکان بستگی دارد. مثال‌های عملی مرتبط که در اینجا در نظر گرفته شده‌اند عبارتند از 1×1 -تناوب‌پذیر گیج در بخش ۱.۱.۴، جمع بایاس در بخش ۲.۱.۴ و غیرخطی‌های در بخش ۳.۱.۴. حالت پیچیده‌تر کانولوشن‌ها با کرنل‌های گسترده فضایی در بخش ۲.۰.۴ بررسی شده است. به عنوان آماده‌سازی، بخش ۱.۲.۴ میدان‌های ویژگی را همانطور که از دیدگاه مشاهده‌گران محلی (چارچوب‌های مرجع) دیده می‌شوند مورد بحث قرار می‌دهد، که کرنل‌های (کانولوشن) نسبت به آن‌ها اعمال خواهند شد. چنین مشاهده‌گران محلی (چارچوب‌های مرجع) به عنوان پس‌کشی میدان ویژگی به فضای مامان یک مشاهده‌گر رسمی سازی می‌شوند؛ به شکل ۲۴ مراجعت کنید. بخش ۲.۰.۴ به اصطلاح تبدیل‌های میدان کرنل را معرفی می‌کند، که شبیه کانولوشن‌ها هستند اما اشتراک وزن فضایی را فرض نمی‌کنند و بنابراین توسط یک میدان کرنل (به صورت هموار متغیر) بر روی M پارامتری می‌شوند. GM -کانولوشن‌های واقعی در بخش ۳.۲.۴ به عنوان آن تبدیل‌های میدان کرنل تعریف می‌شوند که توسط یک کرنل قالب منفرد مشترک پارامتری می‌شوند. به منظور تضمین استقلال از مختصات فرآیند اشتراک وزن، کرنل‌های کانولوشن مطالبه می‌شوند که G -استریبل باشند، یعنی قید تناوب‌پذیری گیج را برآورده کنند. بخش ۳.۴ نشان می‌دهد که GM -کانولوشن‌ها به طور خودکار تحت آن ایزومتری‌هایی که تقارن‌های G -ساختار هستند ($Isom_{GM}$ -تناوب‌پذیر) هستند. این بدان معنی است که GM -کانولوشن‌ها با عمل ایزومتری‌ها بر میدان‌های ویژگی همانطور که در شکل ۲۷ بصری سازی شده است، جایجاً می‌شوند.

۱.۴ عملیات نقطه‌ای تناوب‌پذیر گیج

برای شروع، ما برخی عملیات شبکه عصبی را در نظر می‌گیریم که محدودیت‌های ناشی از استقلال از مختصات مورد نیاز و اشتراک وزن به ویژه ساده قابل استخراج هستند. همه این عملیات‌این ویژگی مشترک را دارند که به صورت نقطه‌ای بر بردارهای ویژگی عمل می‌کنند، یعنی بردارهای ویژگی خروجی (p) در $p \in M$ را صرفاً بر اساس بردارهای ویژگی ورودی (p) f در همان مکان محاسبه می‌کنند. به منظور ارزیابی اصل کوواریانس، مختصات‌بندی‌های این عملیات ممکن مطالبه می‌شوند که مطالبه می‌شوند که ترکیب با p و پس‌ترکیب با 000 p تبدیل شوند. هنگام تقاضای اینکه عملیات بر حسب وزن‌های مشترک تعیین شوند، این قوانین تبدیل الزاماً برای تناوب‌پذیری گیج (یا ناوردایی) عملیات را دلالت می‌کنند.

استخراج‌ها برای عملیات نقطه‌ای مختلف در بخش‌های بعدی ۱.۱.۴، ۲.۰.۱.۴ و ۳.۱.۴ در گام‌های اول عمدهً مشابه هستند و به محدودیت‌های کوواریانس و تناوب‌پذیری اساساً یکسانی بر توابع قالب منجر می‌شوند. بنابراین آن‌ها می‌توانند با هم بررسی شوند، عملیات خاص (با تابع قالب) را انتزاعی نگه داشته باشند. با این حال، از آنجا که مفاهیم محدودیت‌های حاصل برای نمونه‌سازی‌های خاص متفاوت است، و از آنجا که می‌خواهیم بحث را نزدیک به کاربرد نگه داریم، چنین فرمول‌بندی انتزاعی را حذف خواهیم کرد و مستقیماً نمونه‌سازی‌های خاص را در نظر خواهیم گرفت.

۱.۱.۴ کانولوشن‌های 1×1 تناوب‌پذیر گیج

به عنوان اولین مثال از عملیات نقطه‌ای، ما عمل خانواده‌ای از نگاشتهای خطی C_p را در نظر می‌گیریم، که بردار ویژگی ورودی (p) f را در هر $p \in M$ به بردار ویژگی خروجی $f(p) := C_p f(p)$. (۴۷)

ارسال می‌کنند. اگر فرض اشتراک وزن فضایی را اضافه کنیم، نگاشتهای خطی C_q و C_p در مکان‌های مختلف p و q جفت خواهند شد، و عملیات را می‌توان به عنوان کانولوشنی با کرنل دلتای دیراک با مقدار عملگر خطی دید. این عملیات در بینایی کامپیوتر بسیار رایج است، جایی که معمولاً به عنوان کانولوشن 1×1 نشان داده می‌شود، زیرا گسسته‌سازی فضایی یک کرنل دیراک خطی که بر روی تصاویر دو بعدی عمل می‌کند توسعه

کرnel (با مقدار ماتریس) با گستره فضایی 1×1 پیکسل داده می‌شود. ما در ادامه استخراج خواهیم کرد که تقاضای اشتراک وزن فضایی منجر به محدودیتی خواهد شد که کرnel‌های مختصاتی نگاشتهای خطی \mathcal{C}_p و تبدیل‌های خطی گیج بین آن‌ها بسیار شبیه آن‌های از نگاشتهای خطی بر روی $T_p M$ رفتار می‌کنند، که در بخش ۲.۱.۳ مورد بحث قرار دادیم. از آنجا که بردارهای ویژگی ورودی و خروجی در مختصات توسط بردارهای ضرب $\mathcal{C}_p^A \in \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ نمایش داده می‌شوند، نگاشت خطی به طور طبیعی توسط آن ماتریس $f_{\text{out}}^A(p) \in \mathbb{R}^{c_{\text{out}}}$ و $f_{\text{in}}^A(p) \in \mathbb{R}^{c_{\text{in}} \times c_{\text{out}}}$ نمایش داده می‌شود که

$$f_{\text{out}}^A(p) = \mathcal{C}_p^A \cdot f_{\text{in}}^A(p). \quad (48)$$

را برآورده می‌کند. این رابطه البته برای مختصات‌بندی‌های دلخواه برقرار است، به طوری که برای هر گیج دیگری که با B برچسب گذاری شده است، $\mathcal{C}_p^B = \mathcal{C}_p^B \cdot f_{\text{in}}^B(p) = \mathcal{C}_p^B \cdot f_{\text{out}}^B(p)$ داریم. قانون تبدیلی که \mathcal{C}_p^B را به \mathcal{C}_p^A مرتبط می‌کند از اصل کوواریانس از قوانین تبدیل ویژگی‌های ورودی و خروجی پیروی می‌کند. از آنجا که این‌ها توسط $f_{\text{out}}^B(p) = \rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) f_{\text{in}}^A(p)$ و $f_{\text{in}}^B(p) = \rho_{\text{in}}(g_p^{BA}) f_{\text{out}}^A(p)$ داده می‌شوند، داریم:

$$\begin{aligned} f_{\text{out}}^B(p) &= \mathcal{C}_p^B \cdot f_{\text{in}}^B(p) \\ \Leftrightarrow \rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) f_{\text{in}}^A(p) &= \mathcal{C}_p^B \rho_{\text{in}}(g_p^{BA}) f_{\text{out}}^A(p) \\ \Leftrightarrow f_{\text{in}}^A(p) &= \rho_{\text{in}}(g_p^{BA})^{-1} \mathcal{C}_p^B \rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) f_{\text{out}}^A(p). \end{aligned} \quad (49)$$

مقایسه با معادله (48) دلالت دارد بر اینکه دو بیان مختصاتی \mathcal{C}_p لزوماً با

$$\mathcal{C}_p^B = \rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) \mathcal{C}_p^A \rho_{\text{in}}(g_p^{BA})^{-1} \quad (50)$$

مرتبط هستند اگر قرار باشد قوانین تبدیل بردارهای ویژگی را رعایت کنند. همانطور که معمول است، این ملاحظات به طور مختصر توسط نمودار جابجایی ضبط می‌شوند:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{c_{\text{in}}} & \xrightarrow{\mathcal{C}_p^A} & \mathbb{R}^{c_{\text{out}}} \\ \rho_{\text{in}}(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) \\ \mathbb{R}^{c_{\text{in}}} & \xrightarrow{\mathcal{C}_p^B} & \mathbb{R}^{c_{\text{out}}} \end{array} \quad (51)$$

مفهوم عملی مهم این نتیجه تا کنون این است که نگاشت خطی \mathcal{C}_p به هیچ وجه محدود نیست. به بیان دیگر: تا زمانی که بیان‌های مختصاتی در گیج‌های مختلف توسط معادله (۵۰) مرتب باشند، آزاد هستیم که \mathcal{C}_p را در یک گیج دلخواه ثابت A توسط ماتریس بدون محدودیت \mathcal{C}_p^A پارامتری کنیم. همانطور که خواهیم دید، وضعیت زمانی تغییر می‌کند که نگاشتهای خطی اشتراک وزن داشته باشند.

حال حالتی را در نظر بگیرید که نگاشتهای خطی \mathcal{C}_q و وزن‌ها را به اشتراک می‌گذارند. این بدان معنی است که فرض می‌کنیم آن‌ها توسط مجموعه مشترکی از پارامترها پارامتری شوند، که توسط کرnel قالب $1 \times 1 \times \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ داده می‌شود. سؤال باز این است که دقیقاً چگونه نگاشتهای آزاد از مختصات باید بر حسب این کرnel قالب پارامتری شوند. الزام ما برای استقلال از مختصات GM تقاضاً می‌کند که هیچ چارچوب مرجع خاصی را در فرآیند اشتراک وزن ترجیح ندهیم، یعنی همه مختصات‌بندی‌ها را به همان شیوه درمان کنیم. بنابراین لازم است که کرnel قالب را با همه مختصات‌بندی‌ها به اشتراک بگذاریم، یعنی

$$\mathcal{C}_p^X = K_{1 \times 1} \cdot (U^X, \psi^X) \in \mathcal{A}^G, \quad p \in U^X, \quad (52)$$

تنظیم کنیم، که در آن \mathcal{A}^G (حداکثر) G -اطلس متناظر با G -ساختمان در نظر گرفته شده است؛ به معادله (۲۵) مراجعه کنید. از آنجا که محدودیت کوواریانس در معادله (۵۰) نیاز دارد که برای گیج‌های دلخواه مرتب با G برقرار باشد، و مختصات‌بندی‌های $\mathcal{C}_p^A = \mathcal{C}_p^B = K_{1 \times 1}$ نگاشتهای خطی همگی مطابقت دارند، تقاضای مشترک برای اشتراک وزن و استقلال از مختصات GM منجر به محدودیت

$$K_{1 \times 1} = \rho_{\text{out}}(g) K_{1 \times 1} \rho_{\text{in}}(g)^{-1} \quad \forall g \in G \quad (53)$$

بر کرnel قالب می‌شود. تطبیق متناظر نمودار جابجایی در معادله (۵۱) با اشتراک وزن توسط:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{c_{\text{in}}} & \xrightarrow{K_{1 \times 1}} & \mathbb{R}^{c_{\text{out}}} \\ \rho_{\text{in}}(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho_{\text{out}}(g_p^{BA}) \\ \mathbb{R}^{c_{\text{in}}} & \xrightarrow{K_{1 \times 1}} & \mathbb{R}^{c_{\text{out}}} \end{array} \quad (54)$$

داده می‌شود.

نتیجه‌گیری این تحلیل این است که کرنل‌های قالبی که می‌توانند بدون ابهام به اشتراک گذاشته شوند دقیقاً آن‌هایی هستند که تحت عمل گیج ناوردا هستند. فضای برداری چنین کرنل‌های 1×1 ناورد گیج ساده فضای نگاشته‌های درهم‌تییده بین نمایش‌های $\rho_{\text{من}}$ و $\rho_{\text{من}}$ است، یعنی

$$\text{Hom}_G(\rho_{\text{من}}, \rho_{\text{من}}) := \left\{ K_{1 \times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\text{من}} \times c_{\text{من}}} \mid K_{1 \times 1} = \rho_{\text{من}}(g) K_{1 \times 1} \rho_{\text{من}}(g)^{-1} \quad \forall g \in G \right\} \subseteq \mathbb{R}^{c_{\text{من}} \times c_{\text{من}}}. \quad (55)$$

توجه داشته باشید که، طبق لم سور [؟]، الزام بر $K_{1 \times 1}$ برای درهم‌تییده بودن مانع از نگاشت بین میدان‌هایی که تحت نمایش‌های کاهش‌ناپذیر غیره‌ریخت تبدیل می‌شوند از طریق کانولوشن‌های 1×1 می‌شود. این محدودیت شدید با کرنل‌های 1×1 اجتناب‌ناپذیر است اما بعداً هنگام اجازه دادن به کرنل‌های گسترده‌فضایی حل خواهد شد.

در این نقطه می‌خواهیم اشاره کنیم که اصطلاحات «تابع قالب تناوب‌پذیر گیج» و «تابع قالب ناورد گیج» را به طور متقابل استفاده می‌کنیم. این با مشاهده توجیه می‌شود که محدودیت ناوردایی در معادله (53) می‌تواند به عنوان محدودیت تناوب‌پذیری $\rho_{\text{من}}(g) K_{1 \times 1} \rho_{\text{من}}(g) = \rho_{\text{من}}(g) K_{1 \times 1} \rho_{\text{من}}(g)$ نوشته شود. به طور کلی امکان مشاهده توابعی که نسبت به عمل گروهی در دامنه و دامنه مشترک آن‌ها تناوب‌پذیر هستند به عنوان ناوردای عمل متناظر بر خود تابع وجود دارد. در کاربرد ما، دیدگاه تناوب‌پذیری بر جسته می‌کند که تبدیل میدان ورودی منجر به تبدیل متناظر میدان خروجی خواهد شد، که تضمین می‌کند همه کمیت‌های درگیر به طور کوواریانت با یکدیگر تبدیل شوند. از طرف دیگر، دیدگاه ناوردایی تأکید می‌کند که تابع قالب می‌تواند در گیج دلخواه به اشتراک گذاشته شود.

۲.۱.۴ جمع بایاس تناوب‌پذیر گیج

پس از اعمال عملیات کانولوشن، رایج است که بردار بایاس (مشترک) به بردارهای ویژگی منفرد جمع شود. همراه با الزام استقلال از مختصات، اشتراک وزن دوباره منجر به محدودیت خطی خواهد شد. این محدودیت تنها اجازه جمع شدن بایاس‌ها به زیرفضاهای ناوردآ عمل گیج بر میدان ویژگی ورودی را خواهد داد.

همانند قبل، ابتدا جمع بایاس را بدون اشتراک وزن در نظر می‌گیریم. بنابراین بایاس‌های p داریم، که به موقعیت p بر روی منیفولد بستگی دارند، که به بردار ویژگی ورودی جمع می‌شوند تا بردار ویژگی خروجی

$$f_{\text{من}}(p) = f_{\text{من}}(p) + b_p. \quad (56)$$

تولید کنند. نسبت به گیج‌های ψ_p^A و ψ_p^B ، بایاس توسط آن بردارهای ضریب f_p^A و f_p^B در \mathbb{R}^c نمایش داده می‌شود که $f_p^A + f_p^B = f_{\text{من}}^B(p) + b_p^B$ را برآورده می‌کند. از آنجا که جمع بردارها اجازه تعییر قوانین تبدیل آن‌ها را نمی‌دهد، نمایش‌های گروهی مرتبط با ویژگی‌های ورودی و خروجی لزوماً مطابقت دارند، یعنی

$$\rho_{\text{من}} = \rho_{\text{من}} =: \rho. \quad (57)$$

همراه با الزام برای استقلال از مختصات، این دلالت دارد بر اینکه نمودار

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+b_p^A} & \mathbb{R}^c \\ \rho(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho(g_p^{BA}) \cdot \\ \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+b_p^B} & \mathbb{R}^c \end{array}, \quad (58)$$

که معادل آن در معادله (51) است، نیاز دارد که جایجا شود. به صورت معادله نوشته شده، این رابطه $\rho(g_p^{BA}) f_p^A + b_p^B = \rho(g_p^{BA}) (f_p^A + b_p^B)$ را تقاضا می‌کند که برقرار باشد. از آنجا که خطی بودن (g) امکان بازنویسی سمت راست را به عنوان $\rho(g_p^{BA}) f_p^A + \rho(g_p^{BA}) b_p^A$ دهد، تغیریق بردار ویژگی ورودی منجر به

$$b_p^B = \rho(g_p^{BA}) b_p^A. \quad (59)$$

می‌شود. بردارهای ضربی که یک بایاس مستقل از مختصات را نسبت به گیج‌های نمایش می‌دهند بنابراین نیاز دارند که دقیقاً مانند بردارهای ویژگی که به آن‌ها جمع می‌شوند تبدیل شوند. همانند مورد کانولوشن‌های 1×1 استقلال از مختصات بایاس p را به هیچ وجه محدود نمی‌کند، بلکه فقط مختصات‌بندی‌های مختلف همان بایاس را مطالبه می‌کند که با یکدیگر سازگار باشند. یک پیاده‌سازی بنابراین می‌تواند گیج دلخواه انتخاب کند و بایاس را در آن گیج آزادانه توسط پارامترهایی در $\mathbb{R}^{c_{\text{من}}}$ پارامتری کند.

وضعیت دوباره زمانی تغییر می‌کند که اشتراک وزن فضایی تقاضا شود. فرض کنید $b \in \mathbb{R}^{c_{\text{من}}}$ بردار بایاس قالبی باشد که بر روی منیفولد به اشتراک گذاشته شود. از آنجا که تنها راه انجام این کار بدون ترجیح دلخواه هر مختصات‌بندی، اشتراک بردار بایاس در همه گیج‌ها به طور همزمان است، باید

$$b_p^X = b \quad \text{برای هر گیج} \quad (U^X, \psi^X) \in \mathcal{A}^G \quad p \in U^X. \quad (60)$$

را در قیاس با معادله (۵۲) مطالبه کنیم. ترکیب محدودیت کوواریانس در معادله (۵۹) با این اشتراک وزن مستقل از گیج سپس منجر به محدودیت ناوردا بیاییست.

$$b = \rho(g) b \quad \forall g \in G \quad (61)$$

بر قالب بردار بایاس می‌شود. برای تکمیل قیاس با مورد کانولوشن‌های 1×1 نسخه تطبیق یافته نمودار جابجایی در معادله (۵۸) با وزن‌های مشترک را نشان می‌دهیم:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+b} & \mathbb{R}^c \\ \rho(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho(g_p^{BA}) \\ \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+b} & \mathbb{R}^c \end{array} \quad (62)$$

برای بصیرت در مفاهیم محدودیت ناوردا بیایی در معادله (۶۱)، فرض کنید برای بردار قالب داده شده b برآورده شود. به دلیل خطی بودن محدودیت، هر بردار مقیاس شده $\alpha \cdot b$ برای $\alpha \in \mathbb{R}$ نیز آن را برآورده خواهد کرد، یعنی هر حل زیرفضای یک بعدی از \mathbb{R}^c را پوشش می‌دهد که تحت عمل ρ ناوردا است. چنین زیرفضای ناوردا به عنوان زیرنمایش ρ نشان داده می‌شود. از آنجا که زیرفضاهای در نظر گرفته شده یک بعدی هستند، خودشان هیچ زیرفضای مناسب ندارند و بنابراین زیرنمایش‌های کاهاش ناپذیر بدیهی هستند. نتیجه می‌شود که فضای برداری

$$\mathcal{B}_\rho^G := \{b \in \mathbb{R}^c \mid b = \rho(g) b \quad \forall g \in G\} \quad (63)$$

با این‌ها تناوب‌پذیر گیج با (زیرفضاهای) زیرنمایش‌های بدیهی ρ مطابقت دارد. ابعاد \mathcal{B}_ρ^G و بنابراین تعداد پارامترهای قابل یادگیری با کثرت زیرنمایش‌های بدیهی موجود در ρ مطابقت دارد. برای گروههای فشرده G ، روابط متعامد شور دلالت دارند بر اینکه این ابعاد توسط $\dim(\mathcal{B}_\rho^G) = \int_G \text{tr}(\rho(g)) dg$ و همه گروههای متعامد G می‌دهند.

دو مثال ساده از میدان‌های ویژگی که ممکن است بخواهیم بایاس‌های مشترک به آن‌ها جمع کنیم، میدان‌های اسکالر و میدان‌های بردار مماس هستند. بر اساس تعریف، میدان ضربی یک میدان اسکالر تحت تبدیل‌های گیج ناوردا است، یعنی طبق نمایش بدیهی $\rho(g) = 1 \quad \forall g \in G$ تبدیل می‌شود. بنابراین می‌توان بایاس (اسکالر) \mathbb{R}^b به آن‌ها جمع کرد. در مقابل، میدان ضربی یک میدان بردار مماس طبق نمایش گروهی غیربدیهی، کاهاش ناپذیر $\rho(g) = g$ تبدیل می‌شود. از آنجا که این نمایش هیچ زیرنمایش بدیهی ندارد، جمع بردار بایاس مشترک به میدان‌های بردار مماس با حفظ استقلال از مختصات غیرممکن است. به عنوان مثال سوم، نمایش‌های منظم گروههای فشرده را در نظر بگیرید، که به عنوان مثال میدان‌های ویژگی شبکه‌های کانولوشنی گروهی را توصیف می‌کنند. توسط قضیه پیتر-ویل، شناخته شده است که نمایش‌های منظم دقیقاً یک زیرنمایش بدیهی دارند [؟]. بنابراین بایاس که به میدان‌های ویژگی منظم جمع می‌شود توسط یک پارامتر منفرد توصیف می‌شود.

۳.۱.۴ غیرخطی‌های تناوب‌پذیر گیج

به جز عملیات خطی (کانولوشن) و جمع بایاس، اساسی‌ترین عملیات استفاده شده در هر شبکه عصی غیرخطی‌هاست. ما در اینجا حالت معمول غیرخطی‌های σ_p را در نظر خواهیم گرفت که به روش محلی فضایی عمل می‌کنند، یعنی بردارهای ویژگی خروجی را به عنوان $f_{\square\square\square}(p) = (\sigma_p(p), f_{\square\square}(p))$ محاسبه می‌کنند. یک غیرخطی مشترک دوباره مطالبه می‌شود که تناوب‌پذیر گیج باشد. از آنجا که استدلایی که به این نتیجه گیری منجر می‌شود شبیه آن در موارد قبلی است، تنها به طور خلاصه آن را خلاصه خواهیم کرد. به دلیل عمومیت نگاشته‌های غیرخطی استخراج فضاهای حل خطی همانند معادلات (۵۵) و (۶۳) غیرممکن است، با این حال، برخی مثال‌های خاص را مورد بحث قرار خواهیم داد.

مشابه قبل، هر غیرخطی آزاد از مختصات p $\sigma_p^B : \mathbb{R}^{c\square\square} \rightarrow \mathbb{R}^{c\square\square\square}$ و B توسط بیان‌های مختصاتی $\sigma_p^A : \mathbb{R}^{c\square\square} \rightarrow \mathbb{R}^{c\square\square\square}$ و A می‌شود، که توسط تقاضای استقلال از مختصات مطالبه می‌شوند که با $\sigma_p^B = \rho_{\square\square\square}(g_p^{BA}) \circ \sigma_p^A \circ (g_p^{BA})^{-1}$ داده می‌شود. یکتابع قالب غیرخطی $\mathbb{R}^{c\square\square} \rightarrow \mathbb{R}^{c\square\square\square}$ د تها زمانی می‌تواند به روشی مستقل از مختصات به اشتراک گذاشته شود که به طور همزمان با همه گیج‌ها به اشتراک گذاشته شود. این محدودیت کوواریانس را به محدودیت ناوردا بیایی G می‌دانیم. $\rho_{\square\square\square}(g) = \rho_{\square\square}(g) \circ \rho_{\square\square}(g)^{-1} = \rho_{\square\square}(g) \circ \rho_{\square\square}(g)^{-1}$ بر تابع قالب تبدیل می‌کند، یا، به طور معادل، به محدودیت تناوب‌پذیری متناظر

$$\rho_{\square\square\square}(g) \circ s = s \circ \rho_{\square\square}(g)^{-1} \quad \forall g \in G. \quad (64)$$

به دلیل غیرخطی بودن این محدودیت مجبور هستیم آن را مورد به مورد بررسی کنیم. بنابراین بحث خود را به چند مثال خاص محدود خواهیم کرد. بحث برانگیزترین ساده‌ترین حالت، غیرخطی‌هایی است که بین میدان‌های اسکالر نگاشت می‌کنند، یعنی برای آن‌ها $1 = \rho_{\square\square\square}(g) = \rho_{\square\square}(g)$ برای هر $g \in G$ ناوردا هستند. در این حالت محدودیت تناوب‌پذیری در معادله (۶۴) به $s = d = t$ تبدیل می‌شود، که به طور بدیهی برای هر $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ د برآورده می‌شود. مثال جالب‌تری نمایش یکانی $\rho_{\square\square}$ است. یک غیرخطی ممکن برای این حالت توسط نرم بردارهای ویژگی داده می‌شود. از آنجا که $\|f_{\square\square}^A(p)\| = \|f_{\square\square}^A(p) \circ \rho_{\square\square}(p)\|$ به دلیل یکانی بودن $\rho_{\square\square}$ ناوردا است، $\rho_{\square\square}$ نمایش بدیهی خواهد بود. گرفتن نرم بنابراین به عنوان عملیات غیرخطی، تناوب‌پذیر گیج دیده می‌شود که هر میدان اسکالر نگاشت می‌کند. یک نگاشت غیرخطی

که نوع میدان را حفظ می‌کند، یعنی $\rho_{\text{م}} = \rho_{\text{م}} f_{\text{م}}^A(p) \mapsto \|f_{\text{م}}^A(p)\| \cdot f_{\text{م}}^A(p)$ تعريف شود. گزینه دیگر، که ممکن است در بادگیری تعاملات فیزیکی نقش داشته باشد و در [۴۹] مورد بررسی قرار گرفته است، غیرخطی‌های حاصل ضرب تانسوری هستند. با داشتن دو میدان $(p, f_{\text{م},1}^A)$ و $(p, f_{\text{م},2}^A)$ ، که به ترتیب طبق $\rho_{\text{م},1}$ و $\rho_{\text{م},2}$ تبدیل می‌شوند، چنین غیرخطی‌های ویژگی حاصل ضرب تانسوری $(p, f_{\text{م}}^A) = f_{\text{م},1}^A \otimes f_{\text{م},2}^A$ را محاسبه می‌کنند، که به طور تناوب‌پذیر طبق نمایش حاصل ضرب تانسوری $\rho_{\text{م},1} \otimes \rho_{\text{م},2} = \rho_{\text{م}}$ تبدیل می‌شود.

همه این مثال‌ها محدودیت تناوب‌پذیری گیج در معادله (۶۴) را برآورده می‌کنند. اینکه کدام غیرخطی خاص در عمل خوب کار می‌کند، با این حال، هنوز سؤال تحقیقاتی بازی است که نیازمند بررسی تجربی بسیار بیشتری قبل از پاسخ دادن است. اولین تلاش در این جهت در [۴۹] انجام شده است.

۲.۴ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM

عملیات اصلی شبکه‌های کانولوشنی، عملگر کانولوشن است که الگوهای مشخصه ویژگی‌ها را از یک همسایگی محلی در اطراف هر نقطه $p \in M$ به صورت خطی در یک بردار ویژگی جدید $f(p)$ جمع می‌کند. یک کرنل کانولوشن گستره‌های فضایی، جزئیات این اباحت را تعیین می‌کند. اصل کوواریانس نیازمند استقلال از مختصات و در نتیجه یک قانون تبدیل خاص برای کرنل‌ها تحت تبدیلات بیمانه است. همانند مثال‌های قبلی، یک تقاضای اضافی برای اشتراک‌گذاری وزن منجر به الزایی برای کرنل الگو می‌شود تا نسبت به پیمانه هموردا (G -راهبر) باشد.

مطلوب با بخش قبل، ما بهوضوح بین الزامات استقلال از مختصات و اشتراک‌گذاری وزن تمایز قائل می‌شویم. بنابراین، بخش ۲.۲.۴ با بحث در مورد میدان‌های کرنل و قوانین تبدیل آن‌ها بدون الزام به اینکه کرنل‌ها در موقعیت‌های جداگانه به هم مرتبط باشند، شروع می‌شود. چنین میدان‌های کرنل نامحدودی منجر به تبدیلات میدان کرنل می‌شوند که تبدیلات انتگرالی هستند و می‌توان آن‌ها را به عنوان پیش‌درآمدۀ کانولوشن‌ها در نظر گرفت. کانولوشن‌های واقعی GM که توسط یک کرنل الگوی مشترک و لزوماً هموردای پیمانه‌ای پارامتری می‌شوند، در بخش ۳.۲.۴ تعریف شده‌اند. به عنوان یک آماده‌سازی، در بخش بعدی ۱.۲.۴، نمایش‌های محلی میدان‌های ویژگی را بر روی فضاهای مماس توصیف خواهیم کرد، جایی که آن‌ها با کرنل‌های کانولوشن تطبیق داده می‌شوند.

۱.۲.۴ دیدگاه یک ناظر محلی به میدان‌های ویژگی

برخلاف فضاهای اقلیدسی یا فضاهای همگن کلی تر مانند کره، هندسه محلی یک خمینه ریمانی کلی از نقطه‌های به نقطه دیگر متفاوت است. بنابراین، بالاصله مشخص نیست که یک کرنل کانولوشن چگونه باید روی M تعریف شود و چگونه می‌توان آن را بین مکان‌های مختلف به اشتراک گذاشت. یک راه حل رایج این است که کرنل را طبق معمول روی یک فضای برداری مسطح و اقلیدسی \mathbb{R}^d تعریف کرده و آن را به جای خود خمینه، روی فضاهای مماس به اشتراک بگذاری؛ به بخش‌های ۲.۲.۴ و ۳.۲.۴ یا کارهای قبلی [۴۹] مراجعه کنید. سپس، کرنل را می‌توان از طریق نگاشت نمایی ریمانی به روی خمینه نگاشت. می‌توان آن را به گونه‌ای تصور کرد که توسط یک ناظر محلی اعمال می‌شود که ویژگی‌ها را در محیط اطراف خود نسبت به چارچوب مرجع محلی خود اندازه‌گیری می‌کند. در این بخش به طور خلاصه به چگونگی در که چگونگی در که ویژگی‌ها را از دیدگاه ناظران محلی مختلف خواهیم پرداخت. از نظر ریاضی، این موضوع به عنوان پس‌کش ($\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$) و انتقال موازی میدان ویژگی به فضاهای مماس فرمول‌بندی می‌شود؛ برای تجسم به شکل ۲۴ مراجعه کنید.

برای نگاشت بین فضاهای مماس و خمینه، مانگاشت نمایی ریمانی (مرتبط با اتصال لوی-چیویتا) را در نظر می‌گیریم. ^{۲۳} با فرض اینکه خمینه برای سادگی کامل از نظر ژئودزیکی باشد ^{۲۴}، نگاشت نمایی در یک نقطه خاص $p \in M$ نگاشتی است به صورت

$$\exp_p : T_p M \rightarrow M. \quad (۶۵)$$

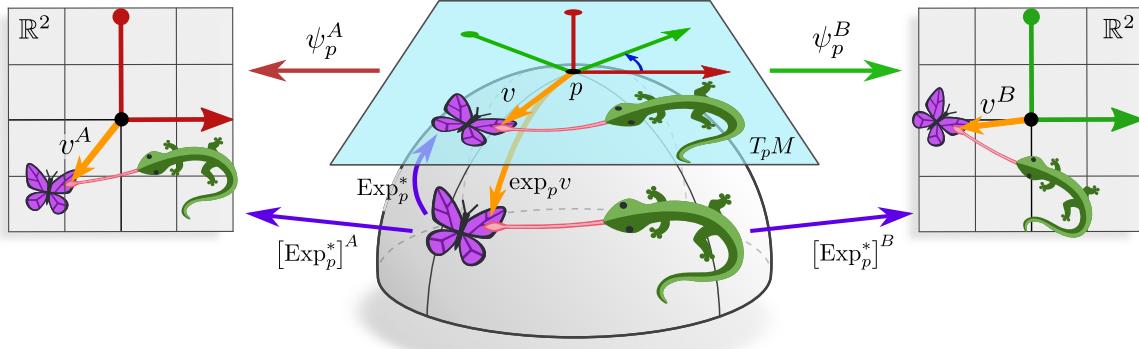
این نگاشت، بردارهای $v \in T_p M$ را با نقاطی $\exp_p(v) \in M$ می‌داند که با دنبال کردن ژئودزیک گذرنده از p با سرعت اولیه v برای یک واحد زمان به دست می‌آیند. نگاشت نمایی با اینکه فواصل شعاعی را حفظ می‌کند، به طور کلی زوایا را تغییر می‌دهد و یک‌به‌یک نیست. به عنوان مثال، اگر خمینه یک کره باشد، نگاشت‌های نمایی فضای مماس مربوطه را بی‌نهایت بار دور آن می‌پیچند. با این حال، تضمین می‌شود که نگاشت نمایی یک دیفونورفیسم محلی است اگر دامنه آن به فواصلی کوتاه‌تر از فاصله تا مکان برش (جایی که یک‌به‌یک بودن از دست می‌رود) محدود شود.

با داشتن نگاشت‌های نمایی، می‌توان میدان‌های ویژگی را به فضاهای مماس پس‌کش کرد. به طور خاص، اگر f یک میدان ویژگی روی M باشد، پس‌کش $f \circ \exp_p^* : = f \circ \exp_p$ می‌شود که عنوان نگاشتی تعریف می‌شود که بردار ویژگی $(v_1, f(\exp_p(v_1)))$ را به $v \in T_p M$ از $\exp_p(v)$ می‌رساند. توجه داشته باشید که به دلیل عدم یک‌به‌یک بودن نگاشت نمایی، هر بردار ویژگی ممکن است به چندین بردار مماس v_1 و v_2 اختصاص یابد اگر $\exp_p(v_1) = \exp_p(v_2)$ باشد ^{۲۵} این پدیده تا حدودی شبیه به اثرات عدسی گرانشی در فیزیک است. در صورتی که نگاشت نمایی یک‌به‌یک باشد، یا شعاع یک‌به‌یک بودن آن محدود کنیم، پس‌کش معادل بیان میدان‌های ویژگی در مختصات نرمال ژئودزیکی است [۴۹].

^{۲۳} حتی مدل‌هایی که یک اتصال جایگزین (سازگار با G) برای انتقال ویژگی‌ها فرض می‌کنند، معمولاً از اتصال کانونی لوی-چیویتا برای محاسبه ژئودزیک‌ها و نگاشت‌های نمایی استفاده می‌کنند.

^{۲۴} فرض کامل بودن ژئودزیکی M به این معناست که نگاشت‌های نمایی \exp_p برای هر $p \in M$ روی کل فضای مماس $T_p M$ تعریف شده‌اند. در مواردی که این فرض برقرار نباشد، می‌توان به پر کردن با صفر متولّ شد، که معمولاً در شبکه‌های کانولوشنی برای تصاویر با تکیه‌گاه متناهی استفاده می‌شود.

به یاد بیاورید که هدف از پسکش بردارهای ویژگی به فضاهای مماس این است که بتوان آن‌ها را توسط یک کرنل کانولوشن جمع‌آوری کرد. متأسفانه، این کار بلافضلله امکان‌پذیر نیست زیرا بردارهای ویژگی در مکان‌های مختلف در فضاهای برداری متفاوتی قرار دارند و نسبت به پیمانه‌های متفاوتی بیان می‌شوند.^{۲۵} بنابراین لازم است تمام بردارهای ویژگی (v) در یک فضای برداری و نسبت به یک پیمانه یکسان بیان شوند. یک ایده طبیعی که توسط v پیشنهاد شد، انجام این کار با انتقال موازی بردارهای ویژگی در امتداد ژئودزیک‌هایی است که نگاشت نمایی را از v تعریف می‌کنند.^{۲۶} ما این پسکش f را با انتقال اضافی با $\text{Exp}_p^* f$ نشان می‌دهیم تا بر ارتباط نزدیک آن با پسکش معمولی $\text{exp}_p^*(v)$ تأکید کنیم. شکل ۲۴ یک ایده بصری از این پسکش انتقال‌دهنده میدان‌های ویژگی به فضای مماس و نمایش‌های آن روی \mathbb{R}^d نسبت به مختصات‌دهی‌های مختلف ارائه می‌دهد.



شکل ۲۴: یک میدان ویژگی f روی M و نمایش محلی آن $\text{Exp}_p^* f$ روی $T_p M$ درست مانند پسکش معمولی $v \in T_p M$ از $\text{exp}_p^* f$ در امتداد نگاشت نمایی $\text{Exp}_p^* f$ از طریق پسکش انتقال‌دهنده بردارهای ویژگی $\text{exp}_p(v)$ را به بردارهای مماس $\text{exp}_p(v)$ نسبت می‌دهد. با این حال، از آنجایی که هدف ما انتقال‌دهنده بردارهای ویژگی های پسکش شده با استفاده از یک کرنل کانولوشن است، آن‌ها باید در یک فضای یکسان و نسبت به یک پیمانه یکسان در p داده شوند. بنابراین، پسکش انتقال‌دهنده علاوه بر این، انتقال‌دهنده موازی سازگار با (G) را در امتداد ژئودزیک از $\text{exp}_p(v)$ به p اعمال می‌کند. از طریق یک پیمانه X ، پسکش انتقال‌دهنده f روی $T_p M$ را می‌توان روی $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c$ به صورت $[\text{Exp}_p^* f]^X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c$ انتخاب‌های مختلف چارجوب‌های مرجع (ناظران) در اینجا با تغییر شکل‌های خطی مختلف میدان ویژگی مطابقت دارد. تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM یک ویژگی خروجی (p) را در p با تطبیق یک کرنل K_p روی $T_p M$ محاسبه می‌کنند (یعنی انتگرال حاصلضرب آن‌ها را روی فضای مماس می‌گیرند؛ به مفادله (۷۶) مراجعه کنید).

(مارمولکها و پروانه‌ها با مجوز Creative Commons Attribution 4.0 International از توپیتر اقتباس شده‌اند.)

ما $\text{Exp}_p^* f$ را با تعریف آن بر حسب عبارت مختصاتی اش نسبت به یک انتخاب پیمانه فرمول‌بندی می‌کنیم. برای این منظور، فرض کنید ψ_p^A یک پیمانه در p باشد که ویژگی‌های منتقل شده نهایتاً نسبت به آن بیان می‌شوند و $\psi_{\text{exp}_p(v)}^{\tilde{A}}$ یک پیمانه دلخواه در (v) باشد که بردار ویژگی در آن مکان را با یک بردار ضریب $f^{\tilde{A}}(\text{exp}_p(v)) \in \mathbb{R}^c$ نشان می‌دهد. فرض کنید

$$\rho(g_{p \leftarrow \text{exp}_p v}^{A \tilde{A}}) \quad (66)$$

انتقال‌دهنده موازی سازگار با G برای ضرایب بردار ویژگی در امتداد ژئودزیک از $\text{exp}_p(v)$ به p باشد. سپس ما پسکش انتقال‌دهنده را در مختصات به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} [\text{Exp}_p^* f]^A : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R}^c, \quad v^A \mapsto [\text{Exp}_p^* f]^A(v^A) \\ &:= \rho(g_{p \leftarrow \text{exp}_p(\psi_p^A)^{-1}(v^A)}^{A \tilde{A}}) \cdot f^{\tilde{A}}(\text{exp}_p(\psi_p^A)^{-1}(v^A)), \end{aligned} \quad (67)$$

که در آن $v = (\psi_p^A)^{-1}(v^A) \in T_p M$ بردار مماس بدون مختصات است که توسط ضرایب v^A از طریق ψ_p^A به آن ارجاع داده می‌شود. همانطور که قبلاً ادعا شد، انتخاب پیمانه $\psi_{\text{exp}_p(v)}^{\tilde{A}}$ در دلیل استقلال مختصات تمام معادلات، بی‌ربط است و حذف می‌شود. به طور خاص، می‌توانستیم از هر پیمانه دیگری مانند $\rho(g_{p \leftarrow \text{exp}_p v}^{A \tilde{B}})$ استفاده کنیم، که منجر به تبدیلات پیمانه $\psi_{\text{exp}_p(v)}^{\tilde{B}}$ می‌گشت.

^{۲۵} یک وضعیت بسیار مشابه، تعریف مشتقهای کوواریانس را انگیزه‌مند می‌کند، که آن نیز نیاز به ترکیب اشیاء هندسی دارد که در فضاهای متفاوتی زندگی می‌کنند.

^{۲۶} انتقال موازی در امتداد هر مسیر دیگری نیز به همان اندازه معتبر خواهد بود.

برای $f^{\tilde{B}}(\exp_p(v)) = \rho(g_p^{\tilde{B}\tilde{A}})f^{\tilde{A}}(\exp_p(v))$ برای انتقال دهنده طبق معادله (۳۵) و (۲۸) می‌شود، که هنگام ترکیب هر دو عبارت، یکدیگر را خنثی می‌کنند.

با این حال، پس‌کش انتقال دهنده $[\text{Exp}_p^* f]^A$ همچنان به پیمانه در p بستگی دارد و بنابراین تحت تبدیلات پیمانه g_p^{BA} در p تبدیل می‌شود. مانند هر تابع مختصاتی، قانون تبدیل آن توسط تبدیلات پیمانه بر روی دامنه \mathbb{R}^d و هم‌دامنه‌اش \mathbb{R}^c تعیین می‌شود. بنابراین به صورت زیر داده می‌شود:

$$[\text{Exp}_p^* f]^B = \rho(g_p^{BA}) \circ [\text{Exp}_p^* f]^A \circ (g_p^{BA})^{-1}, \quad (68)$$

که توسط نمودار جابجایی زیر خلاصه می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{[\text{Exp}_p^* f]^A} & \mathbb{R}^c \\ g_p^{BA} \downarrow & & \downarrow \rho(g_p^{BA}) \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{[\text{Exp}_p^* f]^B} & \mathbb{R}^c \end{array} \quad (69)$$

همانطور که در شکل ۲۴ به تصویر کشیده شده است، $[\text{Exp}_p^* f]^B$ و $[\text{Exp}_p^* f]^A$ باید به عنوان دیدگاه ناظران محلی (چارچوب‌های مرجع) مختلف به میدان ویژگی در نظر گرفته شوند.

در اصل، می‌توان ساختارهای جایگزینی را برای پس‌کش میدان‌های ویژگی از M به $T_p M$ در نظر گرفت. تعریف ما از تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM در بخش‌های ۲.۲.۴ و ۳.۲.۴ در آدامه، مستقل از این انتخاب خاص است.

۲.۲.۴ کرنل‌های مستقل از مختصات و تبدیلات میدان کرنل

کانولوشن‌های GM عملیات مستقلی از مختصات هستند که کرنل مشترک و یکسانی را در هر نقطه از خمینه اعمال می‌کنند. برای تفکیک واضح فرضیات، ابتدا تبدیلات میدان کرنل عمومی‌تری را مورد بحث قرار می‌دهیم که عملیات مستقلی از مختصات هستند اما الزام اشتراک‌گذاری وزن را کنار می‌گذارند. بنابراین، آن‌ها شبیه به کانولوشن‌های GM هستند اما در هر نقطه p از خمینه، کرنل بالقوه متفاوتی \mathcal{K}_p اعمال می‌کنند. به منظور رعایت اصل کوواریانس، عبارات مختصاتی این کرنل‌ها باید به شیوه‌ای اصولی تبدیل شوند، با این حال، خود کرنل‌ها بدون محدودیت باقی می‌مانند.

کرنل‌های مستقل از مختصات: از آنجایی که کانولوشن‌ها در یادگیری عمیق بین میدان‌های بردارهای ویژگی با ابعاد $\mathbb{R}^{c_{\text{out}}}$ و $\mathbb{R}^{c_{\text{in}}}$ نگاشت برقرار می‌کنند، کرنل‌های کانولوشن ماتریس-مقدار $c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}$ هستند. پیاده‌سازی‌های گسته کانولوشن‌های d بعدی روى فضاهای اقلیدسی معمولاً چنین کرنل‌هایی را به صورت ارایه‌هایی با شکل $(s_1, s_d, c_{\text{out}}, c_{\text{in}}, s_1, \dots, s_d)$ نمایش می‌دهند. محور اول یک شبکه فضایی از s_d پیکسل را نشان می‌دهند، که به هر کدام یک ماتریس $c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}$ اختصاص داده شده است که در دو محور آخر کدگذاری شده است.^{۷۷} در محیط پیوسته و اقلیدسی، چنین کرنل‌هایی را می‌توان به عنوان نگاشت‌هایی توصیف کرد

$$K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}, \quad (70)$$

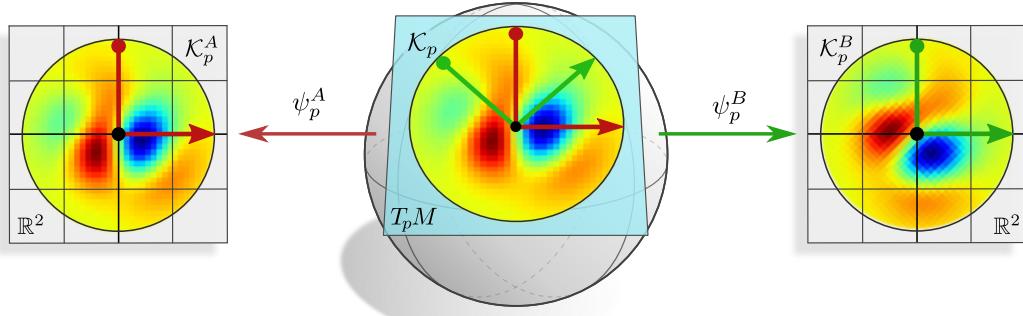
که یک ماتریس c_{out} را به هر نقطه از \mathbb{R}^d اختصاص می‌دهد. همانطور که در بخش قبلی ۱.۲.۴ ذکر شد، ما کانولوشن‌های GM را به عنوان تطبیق پس‌کش انتقال دهنده $\text{Exp}_p^* f$ روی فضای مماس $T_p M$ با یک کرنل \mathcal{K}_p تعریف می‌کنیم. از آنجایی که فضاهای مماس مسطح هستند، طبیعی است که این تطبیق را مانند حالت کامل‌اکلیدسی معمول تعریف کنیم. بنابراین، ما کرنل‌های \mathcal{K}_p را از طریق عبارات مختصاتی‌شان تعریف می‌کنیم که شکل معادله (۷۰) را دارند، یعنی،

$$\mathcal{K}_p^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}. \quad (71)$$

شکل ۲۵ یک کرنل داده‌شده بدون مختصات را روی $T_p M$ و نمایش‌های آن را روی \mathbb{R}^d نسبت به چارچوب‌های مرجع مختلف نشان می‌دهد.^{۷۸}

^{۷۷} چیدمان واقعی حافظه به چارچوب یادگیری عمیق خاص مورد نظر بستگی دارد.

^{۷۸} ما تأکید می‌کنیم که در اینجا یک کرنل بدون مختصات \mathcal{K}_p را که روی $T_p M$ داده شده است فرض می‌کنیم و عبارات مختصاتی آن \mathcal{K}_p^X را روی \mathbb{R}^d نسبت به چارچوب‌های مرجع X در نظر می‌گیریم. اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی بعداً ما را با این سوال مواجه خواهد کرد که چگونه یک کرنل بدون مختصات را روی $T_p M$ با توجه به یک کرنل الگو K روی \mathbb{R}^d تعریف کنیم. پیوست ب این دو مفهوم و ارتباط آنها را با G -راهبری کرنل توضیح می‌دهد.



شکل ۲.۵. یک کرnel بدون مختصات روی $T_p M$ و عبارات مختصاتی آن $\mathcal{K}_p^X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{ono}} \times c_{\text{ono}}}$ نسبت به پیمانه‌های ψ_p^X (فقط یکی از کانال‌های کرnel $\mathbb{R}^d \times c_{\text{ono}} \times c_{\text{ono}}$ نشان داده شده است). تبدیلات پیمانه‌ای که مختصات‌دهی‌های مختلف یک کرnel را به هم مرتبط می‌کنند، از قوانین تبدیل دامنه \mathbb{R}^d و هم دامنه آن‌ها پیروی می‌کنند. بنابراین برای هر $v \in \mathbb{R}^d$ به صورت $\rho_{\text{ono}}(g_p^{BA})^{-1} \mathcal{K}_p^A(v) = \rho_{\text{ono}}(g_p^{BA}) \mathcal{K}_p^B(g_p^{BA}v) = \rho_{\text{ono}}(g_p^{BA}) \mathcal{K}_p^A(v)$ یک تخصیص هموار از کرnel‌ها بر روی فضاهای مماس است (تعزیر ۷.۲).

توجه داشته باشید که ما در اینجا فرض می‌کنیم کرnel روی $T_p M$ داده است و سپس آن را نسبت به پیمانه‌های مختلف روی \mathbb{R}^d بیان می‌کنیم. این از نظر مفهومی با وضعیت نشان داده شده در شکل‌های ۲، ۱۸، ۵ و ۷۴ متفاوت است، که در آنها فرض می‌کنیم یک کرnel الگو K روی \mathbb{R}^d داده است و سپس \mathcal{K}_p روی $T_p M$ از طریق اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی نسبت به یک چارچوب مرتع غیری می‌کنیم. برای حفظ استقلال از مختصات در طول فرآیند اشتراک‌گذاری وزن، کرnel مشترک باید تحت تبدیلات پیمانه پایا (یا هموردا) باشد؛ به بخش ۳.۲.۴ و پیوست ب مراجعه کنید.

قانون تبدیل بین نمایش‌های مختصاتی \mathcal{K}_p^A و \mathcal{K}_p^B یک کرnel روی $T_p M$ طبق معمول از قوانین تبدیل دامنه و هم‌دامنه آن‌ها پیروی می‌کند. در دامنه \mathbb{R}^d قانون تبدیل توسط g_p^{BA} داده می‌شود، در حالی که قانون تبدیل $\mathbb{R}^{c_{\text{ono}} \times c_{\text{ono}}}$ ، همانند معادله (۵۰)، توسط یک ضرب همزمان از چپ با $\rho_{\text{ono}}(g_p^{BA})^{-1}$ و از راست با $\rho_{\text{ono}}(g_p^{BA})$ داده می‌شود. بنابراین، دو مختصات‌دهی کرnel \mathcal{K}_p برای هر $v \in \mathbb{R}^d$ به صورت زیر با هم ارتباط دارند:

$$\mathcal{K}_p^B(g_p^{BA}v) = \rho_{\text{ono}}(g_p^{BA}) \cdot \mathcal{K}_p^A(v) \cdot \rho_{\text{ono}}(g_p^{BA})^{-1}, \quad (72)$$

که توسط نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\mathcal{K}_p^A} & \mathbb{R}^{c_{\text{ono}} \times c_{\text{ono}}} \\ g_p^{BA} \downarrow & & \downarrow \rho_{\text{ono}}(g_p^{BA}) [\cdot] \rho_{\text{ono}}(g_p^{BA})^{-1} \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\mathcal{K}_p^B} & \mathbb{R}^{c_{\text{ono}} \times c_{\text{ono}}} \end{array} \quad (73)$$

همانند مثال‌های بخش ۱.۴، اصل کوواریانس تنها نیازمند یک رفتار تبدیل سازگار بین مختصات‌دهی‌های مختلف کرnel است اما محدودیتی بر خود کرnel اعمال نمی‌کند. بنابراین می‌توان کرnel‌های \mathcal{K}_p را برای هر $p \in M$ و یک پیمانه دلخواه در p با یک کرnel ماتریس-مقدار نامحدود پارامتری کرد. ما میدان‌های هموار چنین کرnel‌هایی را به عنوان میدان‌های کرnel نشان می‌دهیم که نقش عمده‌ای در تحلیل ما از هموردا ایزومنتری کانولوشن‌های GM در بخش ۸ ایفا می‌کنند.

تبدیلات میدان کرnel مستقل از مختصات: با داشتن یک میدان کرnel هموار \mathcal{K} ، می‌توانیم تبدیلات میدان کرnel را تعریف کنیم، که شبیه به کانولوشن‌ها هستند اما از این جهت متفاوتند که ممکن است در هر موقعیت مکانی یک کرnel متفاوت اعمال کنند. آنها یک میدان از بردارهای ویژگی خروجی $(f_{\text{ono}}(p))$ را با انتگرال‌گیری از حاصلضرب کرnel مربوطه \mathcal{K}_p و پس‌کش انتقال‌دهنده f_p^* از $T_p M$ روی f_p محاسبه می‌کنند، یعنی،

$$f_{\text{ono}}(p) = \int_{T_p M} \mathcal{K}_p(v) \operatorname{Exp}_p^* f_{\text{ono}}(v) dv. \quad (74)$$

برای بیان این تعریف بدون مختصات بر حسب مختصات، باید تمام کمیت‌ها را با عبارات مختصاتی شان جایگزین کرده و انتگرال‌گیری را از طریق پیمانه انتخاب شده از $T_p M$ به \mathbb{R}^d منتقل کرد. همانطور که در پیوست پ توضیح داده شده است، عنصر حجم ریمانی مناسب (پایا نسبت به پیمانه) برای یک پیمانه ψ_p^A به صورت زیر داده می‌شود:

$$\sqrt{|\eta_p^A|} dv^A, \quad (75)$$

که در آن ضریب $\sqrt{|\eta_p^A|}$ ، تعریف شده در معادله (۵۸۷)، حجم (مثبت) پوشیده شده توسط چارچوب مرجع $[e_i^A]_{i=1}^d$ در p است. بنابراین، عبارت مختصاتی تبدیل میدان کرنل به صورت زیر است:

$$f_{\square\square\square}^A(p) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A. \quad (76)$$

استقلال از مختصات تبدیل میدان کرنل با بیان آن نسبت به یک پیمانه جایگزین ψ_p^B و نشان دادن اینکه میدان خروجی حاصل همانطور که انتظار می‌رود تبدیل می‌شود، تأیید می‌شود، که در واقع چنین است:

$$\begin{aligned} f_{\square\square\square}^B(p) &\stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^B(v^B) [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^B(v^B) \sqrt{|\eta_p^B|} dv^B \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \left[\rho_{\square\square\square}(g_p^{BA}) \mathcal{K}_p^A((g_p^{BA})^{-1} v^B) \rho_{\square\square}(g_p^{BA})^{-1} \right] [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^B(g_p^{BA} v^A) \sqrt{|\eta_p^B|} dv^B \\ &\stackrel{(3)}{=} \rho_{\square\square\square}(g_p^{BA}) \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) \left[\rho_{\square\square}(g_p^{BA})^{-1} [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^B(g_p^{BA} v^A) \right] \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &\stackrel{(4)}{=} \rho_{\square\square\square}(g_p^{BA}) \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &\stackrel{(5)}{=} \rho_{\square\square\square}(g_p^{BA}) f_{\square\square\square}^A(p) \end{aligned} \quad (77)$$

در اینجا ما از تعریف تبدیلات میدان کرنل و قانون تبدیل کرنل‌ها (معادله (۷۲)) در دو مرحله اول استفاده کردیم. مرحله سوم با بیرون کشیدن $\sqrt{|\eta_p^B|} dv^B = \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A = (g_p^{BA})^{-1} v^B$ از انTEGRAL و جایگزینی v^B به دست می‌آید، با استفاده از اینکه عنصر حجم $\rho_{\square\square\square}$ به طور طراحی شده پایا نسبت به پیمانه است. دو مرحله آخر با شناسایی قانون تبدیل پس‌کش انتقال‌دهنده میدان ویژگی در معادله (۶۸) و تعریف تبدیل میدان کرنل در پیمانه ψ_p^A به دست می‌آیند. توجه داشته باشید که استقلال از مختصات تبدیل میدان کرنل، صحت قانون تبدیل کرنل در معادله (۷۲) را تأیید می‌کند.

یک تبدیل میدان کرنل تنها زمانی به خوبی تعریف می‌شود که انتگرال‌ها روی فضاهای مماس همگرا باشند، که به طور دقیق‌تر در بخش ۲.۷ پیوست ج مورد بحث قرار گرفته است. قضیه ۷.۷ ثابت می‌کند که یک تکیه‌گاه فشرده برای کرنل‌های ρ برای تضمین این خوش‌تعییفی کافی است. این قضیه همچنین ثابت می‌کند که تبدیلات میدان کرنل که بر اساس میدان‌های کرنل هموار هستند، میدان‌های ویژگی ورودی هموار را به میدان‌های ویژگی خروجی هموار نگاشت می‌کنند.

۲.۲.۴ کانولوشن‌های $\square\square\square$ و کرنل‌های $\square\square\square$ -راهبر

آزادی تبدیلات میدان کرنل در اعمال یک کرنل متفاوت در هر مکان، به آنها اجازه تعیین استنتاج آموخته شده را بر روی مکان‌های مختلف نمی‌دهد و بنابراین آنها را از نظر داده ناکارآمد می‌سازد. بنابراین، معمولاً کانولوشن‌ها در نظر گرفته می‌شوند، که می‌توان آن‌ها را به عنوان آن دسته از تبدیلات میدان کرنل خاصی دید که بر اساس میدان‌های کرنل کانولوشنی هستند، یعنی میدان‌های کرنلی که توسط یک کرنل الگوی واحد و مشترک پارامتری شده‌اند. همانند قبل، یک اشتراک‌گذاری وزن مستقل از مختصات نیازمند آن است که کرنل‌های الگو نسبت به پیمانه هموردا (G -راهبر) باشند. این هموردا یک پیمانه‌ای کرنل‌های الگو تضمین می‌کند که در ژست‌های هندسی مختلف و مرتبط با G ظاهر می‌شوند، تا یک تبدیل متناظر بردار ویژگی از طریق $\rho_{\square\square\square}$ پاسخ یکسانی را برآورد کند.

اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی: فرض کنید $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square\square\square} \times c_{\square\square\square}}$ یک کرنل الگو باشد که باید روی تمام فضاهای مماس به اشتراک گذاشته شود. برای اینکه هیچ پیمانه خاصی را ترجیح ندهیم \square که با نیاز ما به استقلال از مختصات در تضاد است \square مجبوریم کرنل را با مختصات‌دهی‌ها در تمام پیمانه‌ها به طور همزمان به اشتراک بگذاریم. به طور ساده‌انگارانه، این به نظر می‌رسد که پیشنهاد می‌کند کرنل الگو را با قرار دادن $K_p^X = K$ برای هر نقطه $p \in M$ و هر پیمانه ψ_p^X در p به اشتراک بگذاریم. در حالی که چنین تعریفی از اشتراک‌گذاری کرنل معقول به نظر می‌رسد، از اصل ما برای اشتراک‌گذاری توابع الگوی محلی به معنای دقیق پیروی نمی‌کند: به جای اشتراک‌گذاری مستقیم کرنل، مهم است که کل عملیات محلی را به اشتراک بگذاریم \square که در اینجا کل تبدیل انتگرالی در معادله (۷۶) است. از آنجایی که این عملیات بر حسب میدان کرنل K پارامتری می‌شود، این به طور غیرمستقیم منجر به اشتراک‌گذاری کرنل الگو می‌شود، با این حال، با نتیجه‌های کمی متفاوت از اشتراک‌گذاری ساده‌انگارانه در نظر گرفته شده در بالا.

برای یافتن تعریف صحیح میدان‌های کرنل کانولوشنی GM طبق اصل ما برای اشتراک‌گذاری توابع الگوی محلی، ابتدا باید این عملیات محلی را شناسایی کنیم. ما این کار را با انتراع تبدیلات میدان کرنل (در مختصات) به عنوان مجموعه‌ای از عملگرهای انتگرالی محلی به شکل زیر انجام می‌دهیم:

$$\mathcal{G}_{K,p}^A : C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c) \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad F \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v) F(v) \sqrt{|\eta_p^A|} dv, \quad (78)$$

که در آن $(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c)$ فضای نگاشته‌های هموار از \mathbb{R}^d به \mathbb{R}^c را نشان می‌دهد. در کاربرد ما، این نگاشته‌های هموار صرفاً نمایش‌های میدان ویژگی محلی هستند که از فضاهای مماس در p دیده می‌شوند و توسط تبدیل میدان کرنل به یک بردار ویژگی خروجی $(\mathcal{G}_{K,p}^A(p) = \mathcal{G}_{K,p}^A([\text{Exp}_p^* f]^A))$ در p نگاشته می‌شوند. با توجه به کرنل الگوی ما $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\infty} \times c_{\infty}}$ ، ما یک الگوی عملگر انتگرالی متناظر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{J}_K : C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c) \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad F \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} K(v) F(v) dv, \quad (79)$$

که نمایش میدان محلی F را در کرنل الگو K ضرب کرده و سپس حاصلضرب آنها را انتگرال می‌گیرد. توجه داشته باشید که \mathcal{J}_K به عنوان یک تابع الگو لزوماً نسبت به انتخاب‌های خاص پیمانه‌ها بی‌تفاوت است و بنابراین شامل ضریب حجم چارچوب نمی‌شود. یک طرح اشتراک‌گذاری وزن کانون‌شناختی مستقل از مختصات GM با الزام به اینکه این تابع الگو با تمام عملگرهای انتگرالی منفرد در هر نقطه و در هر پیمانه موافق باشد، تحمیل می‌شود، یعنی:

$$\mathcal{G}_{K,p}^X = \mathcal{J}_K(U^X, \psi^X) \in \mathcal{A}^G \quad \text{با } p \in U^X, \quad (80)$$

که در آن \mathcal{A}^G اطلس G (ماکسیمال) متناظر با ساختار G در نظر گرفته شده است؛ به معادله (۲۵) مراجعه کنید. این معادل اشتراک‌گذاری مستقیم کرنل الگوی محلی طبق زیر است:

$$K_p^X = \frac{1}{\sqrt{|\eta_p^X|}} (U^X, \psi^X) \in \mathcal{A}^G \quad \text{با } p \in U^X, \quad (81)$$

که در آن ضریب نرمال‌سازی «چگالی کرنل» را به اندازه حجم چارچوب مرجع $\sqrt{|\eta_p^X|}$ کاهش می‌دهد. همانطور که در ادامه بحث می‌شود، این نرمال‌سازی برای همودایی تحت گروه‌های تقارن غیر حافظ حجم مهم است.

ما میدان‌های کرنلی را که توسط یک کرنل مشترک K طبق معادله (۸۱) پارامتری شده‌اند، به عنوان میدان‌های کرنل کانون‌شناختی GM می‌نامیم. الزام هم‌زمان برای اشتراک‌گذاری وزن و استقلال از مختصات منجر به یک قید همودایی بر روی کرنل‌های الگو می‌شود. برای استخراج این قید، اشتراک‌گذاری کرنل در معادله (۸۱) را در قانون تبدیل کرنل در معادله (۷۲) قرار می‌دهیم، که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{1}{\sqrt{|\eta_p^B|}} K(g_p^{BA} v) = \frac{1}{\sqrt{|\eta_p^A|}} \rho_{\infty}(g_p^{BA}) \cdot K(v) \cdot \rho_{\infty}(g_p^{BA})^{-1}. \quad (82)$$

از آنجایی که حجم‌های چارچوب‌های مرجع مختلف با $\sqrt{|\eta_p^A|} = |\det(g_p^{BA})| \sqrt{|\eta_p^B|}$ مرتبط هستند و از آنجایی که قانون تبدیل باید برای پیمانه‌های دلخواه مرتبط با G برقرار باشد، این قید G -راهبری را ایجاد می‌کند:

$$K(gv) = \frac{1}{|\det g|} \rho_{\infty}(g) \cdot K(v) \cdot \rho_{\infty}(g)^{-1} \quad \forall v \in \mathbb{R}^d, g \in G. \quad (83)$$

بر روی کرنل‌های الگو، همانطور که توسط [۸] ثابت شده است، این قید نیازمند آن است که کرنل‌های الگو عملگرهای نمایش [۸] باشند (تعیین‌هایی از عملگرهای تansوری کروی در مکانیک کوانتومی). از نظر نموداری، یک کرنل G -راهبری K باید جایگایی زیر را برآورده کند:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{K} & \mathbb{R}^{c_{\infty} \times c_{\infty}} \\ g \cdot \downarrow & & \downarrow \frac{1}{|\det g|} \rho_{\infty}(g) [\cdot] \rho_{\infty}(g)^{-1} \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{K} & \mathbb{R}^{c_{\infty} \times c_{\infty}} \end{array} \quad (84)$$

برای هر $g \in G$. توجه داشته باشید که ضریب دترمینان معکوس $|\det g|$ در قانون تبدیل کرنل باعث می‌شود که آن مانند یک (۱)-چگالی ماتریس-مقدار تبدیل شود؛ برای جزئیات بیشتر به جدول ۲ مراجعه کنید. به طور شهودی، کرنل‌های G -راهبری دقیقاً آن کرنل‌هایی هستند که می‌توانند نسبت به چارچوب‌های مرجع دلخواه مرتبط با G به اشتراک گذاشته شوند بدون اینکه انتخاب خاص پیمانه بر نتیجه تاثیر بگذارد.^{۳۰} بنابراین، ابهام هم‌ترازی کرنل‌ها \square که انتگریه اصلی این کار بود \square با اشتراک‌گذاری وزن اضافی بر روی تمام چارچوب‌های مرجع معادل (تمام پیمانه‌ها) در ساختار G در نظر گرفته شده GM حل می‌شود.

^{۳۰} برخلاف کارهای قبلي [۸]، اين قيد شامل ضريب $|\det g|$ است. اين ضريب در آن کارها ظاهر نشد زيرا همه آنها گروههای ساختاري متعدد d (با زيرگروههای آن) را در نظر گرفته بودند که برای آنها ضريب دترمینان صفر می‌شود.

^{۳۱} قيد G -راهبری را می‌توان به صورت $(\rho_{\infty}(g)^{-1} \cdot \rho_{\infty}(g) \cdot K(g^{-1}v) \cdot \rho_{\infty}(g)^{-1}) = |\det g|^{-1} \rho_{\infty}(g) [\cdot] \rho_{\infty}(g)^{-1}$ برای هر $v \in \mathbb{R}^d$ ، $g \in G$ تعریف کرد، که تأکید می‌کند کرنل‌های G -راهبری پایاها تحت عمل پیمانه در سمت راست هستند. یک کرنل G -راهبری، با پایا بودن تحت تبدیلات پیمانه، منجر به همان کرنل بدون مختصات G در p می‌شود، زمانی که نسبت به هر چارچوب مرجعی در $G_p M$ به اشتراک گذاشته شود.

$\det g$	dv و dv^X	$\sqrt{ \eta^X }$	F و $[\text{Exp}_p^* f]^X$	K	\mathcal{K}_p^X	شیء
۱	-۱	.	.	-۱	.	چگالی s

جدول ۲: مروری بر توانهای چگالی s برای اشیاء مختلف در گیر در تبدیلات میدان کرنل عمومی و کانولوشن‌های GM . عبارت مختصاتی یک s -چگالی با ضریب $|\det g|^s$ تبدیل می‌شود وقتی مختصات از طریق $g \in G$ تبدیل شوند. یک کرنل ماتریس-مقدار عمومی \mathcal{K}_p^X طبق معادله (۷۲) یک s -چگالی باشد. همین امر برای میدان‌های ویژگی و پسکش‌های آنها نیز صادق است که قوانین تبدیل آنها در معادلات (۴۸) و (۲۸) داده شده است. کل انتگرال ده برای استقلال آن از مختصات، مهانظور که در معادله (۷۷) نشان داده شده، ضروری است. از آنجایی که الگوی عملگر انتگرالی \mathcal{I}_K در معادله (۷۹) سبست به هر انتخاب پیمانه بی‌تفاوت است، شامل ضریب حجم چارچوب $\sqrt{|\eta^X|}$ نمی‌شود. از آنجایی که با این وجود باید مانند عملگرهای انتگرالی $\mathcal{G}_{K,p}^X$ که زیربنای تبدیلات میدان کرنل هستند رفتار کند، کل انتگرال ده $\mathcal{I}_K(F) = \int_K(F(v)) dv$ ملزم به بودن یک s -چگالی است. این امر مستلزم آن است که خود کرنل‌های الگوی مشترک K مانند (۱)-(۲)-چگالی‌ها تبدیل شوند، که در قید G -راهبری در معادله (۸۳) معنکس شده است. توجه داشته باشید که این قانون تبدیل کرنل‌های الگوی G برای همودایی محلی کانولوشن‌های GM اکیداً ضروری است اگر ویژگی‌های خروجی باید مانند چگالی‌هایی با وزن ρ تبدیل شوند؛ به معادله (۸۹) مراجعه کنید. برای دیدگاهی جایگرین، خواننده علاقه‌مند را به نتیجه ۱ در [۱] ارجاع می‌دهیم، جایی که ضریب دترمینان از اندازه‌های هار روی گروه‌های لی استخراج می‌شود.

قبل از پرداختن به کانولوشن‌های GM ، در مورد فضای کرنل‌های G -راهبر توضیح می‌دهیم. توجه داشته باشید که مجموعه $\mathcal{K} := \{K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}\}$. (۸۵)

کرنل‌های عمومی، یعنی نه لزوماً همودار، با مجهر شدن به جمع و ضرب اسکالار استاندارد روی $\mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ یک فضای برداری تشکیل می‌دهد. از آنجایی که قید G -راهبری در معادله (۸۳) خطی است، فضای کرنل را به یک زیرفضای خطی محدود می‌کند:

$$\mathcal{K}_{\rho_{\text{out}}, \rho_{\text{in}}}^G := \left\{ K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \mid K(gv) = \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{out}}(g) \cdot \rho_{\text{in}}(v) \cdot K(v), \forall v \in \mathbb{R}^d, g \in G \right\}. \quad (۸۶)$$

بنابراین می‌توان برای یک پایه از کرنل‌های G -راهبر را حل یافته که کانولوشن GM را می‌توان بر حسب آن پارامتری کرد. در حالی که این فضای G -راهبر مواجه می‌شویم، سپس یک مجموعه از وزن‌های با مقادیر حقیقی $\{w_1, \dots, w_N\}$ که $w_i \in \mathbb{R}$ هستند و در طول فرآیند آموزش بهینه‌سازی می‌شوند، کانولوشن را با $K = \sum_{i=1}^N w_i K_i$ پارامتری می‌کنند. توجه داشته باشید که ابعاد کاهش‌یافته (زیر) فضای کرنل‌های G -راهبر به معنای بهبود کارایی پارامتر در مقایسه با کانولوشن‌های معمولی است.

بخش ۳.۳.۵ به بحث در مورد راه حل‌های تحلیلی نمونه‌ای از فضاهای کرنل همودایی بازتابی برای نمایش‌های گروهی مختلف گروه بازتاب \mathcal{R} می‌پردازد. کرنل‌های حاصل که با انواع مختلفی از تقارن‌های بازتابی مشخص می‌شوند، در جدول ۳ به تصویر کشیده شده‌اند.

مثال‌های بیشتری را می‌توان در ادبیات مربوط به شبکه‌های عصبی کانولوشنی راهبر یافته: یک راه حل تحلیلی برای قید فضای کرنل برای گروه ساختاری متعدد خاص $\text{SO}(3)$ در سه بعد و نمایش‌های تحویل‌ناذیر آن توسط [۱] ارائه شد. [۲] این رویکرد را برای پوشش نمایش‌های گروهی دلخواه تعمیم دادند و قید فضای کرنل را برای هر نمایشی از ۲ و تمام زیرگروه‌های آن $\leq G$ حل کردند. [۳] یک پیاده‌سازی در <https://quva-lab.github.io/e2cnn/api/e2cnn.kernels.html> موجود است. برای گروه‌های ساختاری متتابه، قید را می‌توان به صورت عددی نیز حل کرد، همانطور که توسط [۴] توضیح داده شده است. یک استراتژی راه حل کلی‌تر، که برای گروه‌های ساختاری فشرده دلخواه G (و بنابراین همه موارد ذکر شده در بالا) کاربرد دارد، توسط [۵] پیشنهاد شد. این راه حل قضیه کلاسیک ویگنر-اکارت [۶] را به یک قضیه ویگنر-اکارت برای کرنل‌های G -راهبر تعمیم می‌دهد، که کرنل‌ها را بر حسب توابع پایه هارمونیک، ضرایب کلبنش-گوردان و آندومورفیسم‌های نمایش‌ها (عناصر ماتریسی کاهش‌یافته تعمیم‌یافته) بیان می‌کند. ما برای مروری دقیق‌تر بر کارهای قبلی و مرتبط با کرنل‌های راهبر به [۷] ارجاع می‌دهیم.

کانولوشن‌های مستقل از مختصات [۸]: با داشتن یک کرنل الگوی G -راهبر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{out}}, \rho_{\text{in}}}^G$ ، کانولوشن $K \star GM$ با این کرنل به عنوان تبدیل میدان کرنل با میدان کرنل کانولوشنی GM متناظر تعریف می‌شود، که برای هر نقطه $p \in M$ و هر پیمانه ψ_p^X در $\mathcal{K}_p^X = K / \sqrt{|\eta^X|}$ صدق می‌کند. با قرار دادن میدان کرنل کانولوشنی GM در معادله (۷۶)، یعنی تبدیل میدان کرنل، عبارت مختصاتی کانولوشن GM به صورت زیر ساده می‌شود:

$$f_{\text{out}}^A(p) = [K \star f_{\text{in}}]^A(p) := \int_{\mathbb{R}^d} K(v) [\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^A(v) dv = \mathcal{I}_K([\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^A). \quad (۸۷)$$

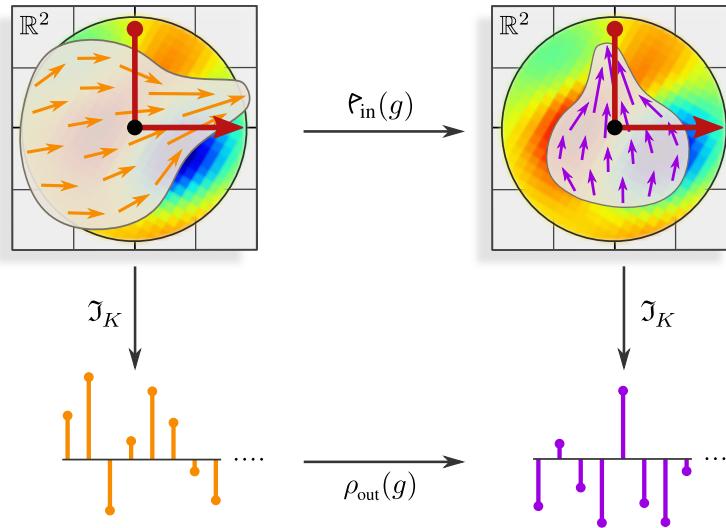
بنابراین، این به سادگی با تطبیق پسکش انتقال‌دهنده $[\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^A$ از میدان ویژگی در یک پیمانه دلخواه انتخاب شده ψ_p^A با کرنل کانولوشن K به دست می‌آید. بنابراین کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM به راحتی با (۱) انتخاب چارچوب‌های مرتع دلخواه، (۲) پسکش (و انتقال) میدان‌های ویژگی به مختصات دهی‌های فضای مماس و (۳) انقباض آنها در آنجا با یک کرنل G -راهبر (قابل آموزش) پیاده‌سازی می‌شوند.

کانولوشن‌های GM چندین ویژگی تقارنی مرتبط را از خود نشان می‌دهند:

استقلال از مختصات: به عنوان موارد خاصی از تبدیلات میدان کرنل، کانولوشن‌های GM به طور (غیرفعال) مستقل از مختصات هستند، یعنی معادله (۷۷) در مورد آنها صدق می‌کند.

هموردایی ایزومنتری سراسری: آنها تحت عمل فعل و سراسری ایزومنتری‌های حافظ ساختار G در Isom_{GM} بر روی میدان‌های ویژگی هموداد هستند. بخش‌های ۳.۴ و به ویژه ۸ این ویژگی را به تفصیل مورد بحث قرار می‌دهند.

هموردایی G محلی: الگوی عملگر انترگالی \mathcal{J}_K به دلیل G -راهبری K خود G -هموردا است. بنابراین، هر تبدیل G یک نمایش میدان ویژگی محلی $\rho_{\text{in}}(g)$ منجر به تبدیل متناظر بردار ویژگی حاصل خواهد شد؛ به شکل ۲۶ مراجعه کنید. بنابراین، تبدیلات G مستقل الگوهایی که در نقاط مختلف $p_i \in M$ متمرکز شده‌اند، منجر به تبدیلات ویژگی خروجی مستقل در این نقاط می‌شوند (این فقط در این نقاط برقرار است و نیازمند کرنل‌هایی با تکیه‌گاه فشرده است که کل میدان دید آنها طبق تبدیل G تبدیل شود).



شکل ۲۶: هموردایی G محلی الگوی عملگر انترگالی مشترک \mathcal{J}_K که زیربنای یک کانولوشن $G \star GM$ است. یک تبدیل G فعل (g) از یک نمایش میدان محلی روی \mathbb{R}^d بردارهای ویژگی را از $g^{-1}\mathbb{v}$ به \mathbb{v} منتقل می‌کند و آنها را علاوه بر این از طریق $(g)\rho_{\text{in}}(g)$ تبدیل می‌کند. در حالی که اولی ویژگی‌ها را به صورت فضایی جابجا می‌کند، دومی ضرایب عددی آنها را تبدیل می‌کند (که در شکل به صورت چربخش و مقیاس‌بندی بردارهای (umas) متفاوت به تصویر کشیده شده است). اعمال \mathcal{J}_K به هر دو ورودی منجر به بردارهای ویژگی خروجی متفاوتی می‌شود. با این حال، به دلیل هموردایی G از \mathcal{J}_K ، تضمین می‌شود که پاسخ‌ها با $(g)\rho_{\text{in}}(g)$ مرتبط هستند؛ به معادله (۸۹) مراجعه کنید. بنابراین، یک تبدیل G فعل از یک نمایش ورودی منجر به یک تبدیل G فعل متناظر از بردار ویژگی خروجی می‌شود. توجه داشته باشید که هموردایی G از \mathcal{J}_K یک نتیجه مستقیم از G -راهبری K است.

برای دقیق‌تر کردن نکته آخر، ما تبدیلات G فعل نمایش‌های میدان ویژگی محلی را در $C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم^{۳۱}

$$\mathfrak{b}_G : G \times C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c), \quad F \mapsto \mathfrak{b}_G(g)F := \rho_{\text{in}}(g) \circ F \circ g^{-1}, \quad (88)$$

که در آن فرض می‌کنیم F از نوع ρ_{in} است. به طور شهودی، \mathfrak{b}_G با انتقال فعل بردارهای ویژگی $\mathbb{v} \in \mathbb{R}^c$ به $g^{-1}\mathbb{v}$ و تبدیل آنها با $(g)\rho_{\text{in}}(g)$ عمل می‌کند^{۳۲} این تعریف «معمولی» تبدیلات فعل میدان‌های ویژگی F بر روی فضاهای اقلیدسی \mathbb{R}^d است.

^{۳۱} $b = \text{Res}_G^{\mathbb{R}^d \rtimes G} \text{Ind}_G^{\mathbb{R}^d \rtimes G} \rho$ به طور رسمی با القای نمایش G به یک نمایش $(\mathbb{R}^d \rtimes G)$ به داده شود. یک توضیح شهودی از نمایش‌های القایی و محدود شده را می‌توان در پیوست [۲۹] یافت در حالی که [۲۸] این موضوع را به طور رسمی تر بررسی می‌کند.

هموردابی G ادعا شده برای \mathfrak{I}_K به راحتی با اعمال آن به یک ورودی تبدیل شده، و سپس جایگزینی و استفاده از G -راهبری K دیده می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{I}_K(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}^d}(g)F) &= \mathfrak{I}_K(\rho_{\mathbb{R}^d}(g) \circ F \circ g^{-1}) && \text{(تعریف } \mathfrak{I}_K, \text{ معادله (۸۸))} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \rho_{\mathbb{R}^d}(g) F(g^{-1}v) dv && \text{(تعریف } \mathfrak{I}_K, \text{ معادله (۷۹))} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} K(g\tilde{v}) \rho_{\mathbb{R}^d}(g) F(\tilde{v}) |\det g| d\tilde{v} && (\tilde{v} = g^{-1}v) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_{\mathbb{R}^d}(g) K(\tilde{v}) F(\tilde{v}) d\tilde{v} && (\text{راهبری } K, \text{ معادله (۸۳))} \\
 &= \rho_{\mathbb{R}^d}(g) \mathfrak{I}_K(F) && \text{(تعریف } \mathfrak{I}_K, \text{ معادله (۷۹))} \tag{۸۹}
 \end{aligned}$$

بنابراین، یک تبدیل فعال یک نمایش میدان ویژگی محلی F روی یک مختصاتدهی فضای مماس با (g) تضمین می‌کند که منجر به تبدیل بردار ویژگی خروجی حاصل با (g) ρ_p می‌شود. به عبارت دیگر، ویژگی‌هایی که در ژستهای هندسی مختلف مرتبط با G ظاهر می‌شوند، تا یک تبدیل از طریق $\rho_{\mathbb{R}^d}$ پاسخ یکسانی را برمی‌انگیرند. این به طور خلاصه در قالب یک نمودار جابجایی به صورت زیر است:

$$\begin{array}{ccc}
 C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{c_{\mathbb{R}^d}}) & \xrightarrow{\mathfrak{t}_{\mathbb{R}^d}(g)} & C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{c_{\mathbb{R}^d}}) \\
 \downarrow \mathfrak{I}_K & & \downarrow \mathfrak{I}_K \\
 \mathbb{R}^{c_{\mathbb{R}^d}} & \xrightarrow{\rho_{\mathbb{R}^d}(g)} & \mathbb{R}^{c_{\mathbb{R}^d}}
 \end{array} \tag{۹۰}$$

شکل ۲۶ یک تفسیر بصری از این ویژگی هموردابی \mathfrak{I}_K را به می‌دهد.

توجه داشته باشید که هموردابی تحت تبدیلات G محلی در معادله (۸۹) دقیقاً به قید G -راهبری همانطور که در معادله (۸۳) است، یعنی به طور خاص، با ضریب دترمینان $|\det g|^{-1}$ که باعث می‌شود کرنل مانند یک (-1) -چگالی تبدیل شود، نیاز دارد. این ضریب به تعریف ما از اشتراک‌گذاری وزن کاتولوشنی در معادله (۸۱) با نرمال‌سازی با حجم‌های چارچوب مرجع $\sqrt{|\eta_p^X|}$ برمی‌گردد. بنابراین، اشتراک‌گذاری وزن ساده‌انگارانه‌ای که در ابتدای این بخش ذکر شد، به رفتار تبدیل مطلوب منجر نمی‌شد. به عبارت دیگر: هر دو نسخه ساده‌انگارانه و نرمال‌شده اشتراک‌گذاری کرنل مستقل از مختصات هستند و بنابراین هر دو تحت تبدیلات پیمانه غیرفعال \square به ویژه آنها یی که حجم چارچوب را تغییر می‌دهند \square به طور سازگار رفتار می‌کنند. با این حال، در مورد اشتراک‌گذاری کرنل ساده‌انگارانه، این امر توسط پایابی عنصر حجم ریمانی $\sqrt{|\eta_p^A| dv^A} = \sqrt{|\eta_p^B| dv^B}$ مراقبت می‌شود. با حذف این ضریب در اشتراک‌گذاری وزن نرمال شده، سازگاری رفتار تبدیل دیگر توسط خود اندازه انتگرال‌گیری تضمین نمی‌شود \square که مستلزم آن است که خود کرنل‌های G -راهبر تغییرات حجم را از طریق ضریب دترمینان توضیح دهند. فقط دومی به تبدیلات فعل تعیین می‌اید، جایی که فقط میدان ویژگی تبدیل می‌شود، در حالی که اندازه انتگرال‌گیری پایا می‌ماند.

از آنجایی که تعریف ما از کاتولوشن‌های GM امکان خمینه‌های ریمانی، ساختارهای \square و انواع میدان دلخواه را فراهم می‌کند، بسیار عمومی است و طیف گسترده‌ای از کارهای مرتبط را پوشش می‌دهد. ما این ادعا را در بخش سوم اثبات می‌کنیم، جایی که بسیاری از CNN‌ها را روی فضاهای آفین اقلیدسی \mathbb{E}_d کره S^d و خمینه‌ها یا متشهای عمومی به عنوان نمونه‌های خاصی از معادله (۸۷) توضیح می‌دهیم. برای یک نمای کلی و طبقه‌بندی این مدل‌ها، به جدول ۶ مراجعه کنید.

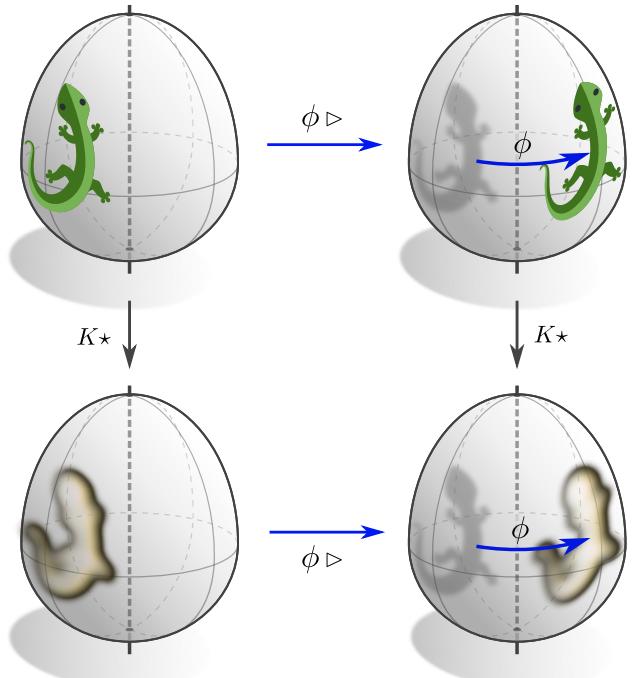
۳.۴ تناوب‌پذیری ایزومتری

با توجه به اینکه یک منیفولد تقارن‌های نشان می‌دهد، معمولاً مطلوب است که شبکه‌های عصبی این تقارن‌ها را رعایت کند، یعنی تحت عمل آنها بر میدان‌های ویژگی تناوب‌پذیر باشند. GM -کاتولوشن‌ها طراحی شده‌اند تا Isom_{GM} -تناوب‌پذیر باشند، که این معنی است که آن‌ها با عمل ایزومتری‌ها در $Isom_{GM}$ بر میدان‌های ویژگی جابجا می‌شوند، همانطور که در شکل ۲۷ بصری‌سازی شده است.^{۳۲} در معادلات، GM -کاتولوشن K * تناوب‌پذیر است زمانی که رابطه

$$K \star (\phi \triangleright f_{\mathbb{R}^d}) = \phi \triangleright (K \star f_{\mathbb{R}^d}) \quad \forall \phi \in \text{Isom}_{GM} \tag{۹۱}$$

را برای هر میدان ورودی ممکن f برآورده کند، یعنی زمانی که نمودار زیر جابجا باشد:

^{۳۲} به یاد داشته باشید که عمل بر میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات GM تنها برای ایزومتری‌های حفظ‌کننده G -ساختار در Isom_{GM} قابل تعریف است. بنابراین حتی امکان تعریف مفهوم تناوب‌پذیری ایزومتری برای ایزومتری‌هایی که تقارن‌های G -ساختار نیستند وجود ندارد. توجه داشته باشید که این بدون از دست دادن کلیت است زیرا همیشه می‌توان گروه ساختار $d = G$ را انتخاب کرد که برای آن $\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M)$ با کل گروه ایزومتری منطبق می‌شود.



شکل ۲۷: گفته می‌شود یک لایه شبکه تحت ایزومتری‌ها تناوب‌پذیر است زمانی که با عمل آن‌ها بر میدان‌های ویزگی جابجا می‌شود. کانولوشن‌ها طراحی شده‌اند تا نسبت به آن ایزومتری‌های $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ که تقارن‌های \tilde{G} ساختار هستند، تناوب‌پذیر باشند. در معادلات، کانولوشن K^* تحت عمل ایزومتری ϕ تناوب‌پذیر است زمانی که رابطه $(\phi \triangleright f_{\square\square}) = \phi \triangleright (K^* \star f_{\square\square})$ را برای هر انتخابی از میدان وردی $f_{\square\square}$ برآورده کند. این رابطه توسط نمودار جابجا شده در معادله (۹۲) بصری‌سازی شده است که تفسیر گرافیکی آن در این شکل نشان داده شده است.

اینکه $-GM$ -کانولوشن‌ها Isom_{GM} -تناوب‌پذیر هستند بر این حقایق تکه دارد که (۱) کریل‌ها در کل منیفولد بر اشتراک گذاشته می‌شوند، (۲) ایزومتری‌ها عقب‌کشی انتقال‌دهنده میدان‌های ویزگی را حفظ می‌کنند و (۳) اینکه Isom_{GM} تبدیل‌های گیج با مقدار G را القا می‌کند که توسط $-G$ -استیربیل بودن کرنل در نظر گرفته می‌شود.

Creative Commons Attribution 4.0 International
(مارمولک‌ها تحت مجوز اقتباس شده با مجوز Twitter)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \phi \triangleright & & \\
 & f_{\square\square} & \longleftarrow & \longrightarrow & f_{\square\square} \\
 & \downarrow & & & \downarrow \\
 K^* & & & & K^* \\
 & \downarrow & & & \downarrow \\
 & f_{\square\square\square} & \longleftarrow & \longrightarrow & f_{\square\square\square} \\
 & \phi \triangleright & & &
 \end{array} \tag{۹۲}$$

به عنوان اولین قدم به سوی اثبات تناوب‌پذیری ایزومتری $-GM$ -کانولوشن‌ها، به یاد بیاورید که آن‌ها به صورت نقطه‌ای به عنوان انقباض یک کرنل K با عقب‌کشی انتقال‌دهنده A [Exp $_p^*$ $f_{\square\square}$] تعریف می‌شوند. از آنجا که ایزومتری‌ها به طور تعریف هندسه ریمانی M حفظ می‌کنند، به ویژه نگاشت نمایی ریمانی و انتقال‌دهنده‌های لوی-چیویتا را حفظ می‌کنند؛ به بخش ۴.۱.۸ و شکل ۴۴ مراجعه کنید.^{۳۳} این امر دلالت دارد بر اینکه عقب‌کشی انتقال‌دهنده میدان پیش‌برده $f_{\square\square}$ در $\phi \triangleright f_{\square\square}$ در (p) تها با تبدیل گیج القا شده توسط ایزومتری از عقب‌کشی انتقال‌دهنده میدان اصلی $f_{\square\square}$ در p متفاوت خواهد بود، یعنی:

$$[\text{Exp}_{\phi(p)}^*(\phi \triangleright f_{\square\square})]^A = \rho_{\square\square}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) \circ [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^{\tilde{A}} \circ g_\phi^{A\tilde{A}}(p)^{-1}; \tag{۹۳}$$

مقایسه کنید با معادله (۶۸) و، برای فرمول‌بندی مستقل از مختصات، قضیه ۸.۴

با توجه به این همانی، تناوب‌پذیری ایزومتری $-GM$ -کانولوشن‌ها توسط محاسبه ساده زیر اثبات می‌شود که به طور اساسی از G -استیربیل بودن کرنل قالب K برای توضیح عمل گیج القا شده توسط ایزومتری استفاده می‌کند:

^{۳۳} به طور کلی‌تر، هر زمان که یک اتصال جایگزین G -سازگار برای انتقال بردارهای ویزگی انتخاب شود، فرض می‌کنیم این اتصال تحت عمل Isom_{GM} ناوردا باشد؛ به بخش ۴.۱.۸ مراجعه کنید. این فرض برای همه مدل‌هایی که در بررسی ادبیات در بخش سوم پوشش داده شده‌اند، برآورده می‌شود.

$$\begin{aligned}
[K \star (\phi \triangleright f_{\square\square})]^A(\phi(p)) &\stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} K(v) [\text{Exp}_{\phi(p)}^*(\phi \triangleright f_{\square\square})]^A(v) dv \\
&\stackrel{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \left[\rho_{\square\square}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^{\tilde{A}}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)^{-1} v) \right] dv \\
&\stackrel{(3)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \left[K(g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \tilde{v}) \rho_{\square\square}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) \right] [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^{\tilde{A}}(\tilde{v}) |\det g_\phi^{A\tilde{A}}(p)| d\tilde{v} \\
&\stackrel{(4)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \left[\rho_{\square\square\square}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) K(\tilde{v}) \right] [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^{\tilde{A}}(\tilde{v}) d\tilde{v} \\
&\stackrel{(5)}{=} \rho_{\square\square\square}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) \cdot f_{\square\square\square}^{\tilde{A}}(p) \\
&\stackrel{(6)}{=} [\phi \triangleright f_{\square\square\square}]^A(\phi(p)) \\
&\stackrel{(7)}{=} [\phi \triangleright (K \star f_{\square\square})]^A(\phi(p))
\end{aligned} \tag{44}$$

قدم اول از تعریف GM -کاتولوشن‌ها در معادله (۸۷) پیروی می‌کند در حالی که قدم دوم تبدیل گیج القا شده را طبق معادله (۹۳) وارد کرد. جایگزینی از \tilde{v} به v^{-1} قدم سوم را توجیه می‌کند. در قدم چهارم G -استریبل بودن کرنل قالب، یعنی معادله (۸۳)، اعمال می‌شود (معادله (۴۴)) را به یاد بیاورید که بیان می‌کند تبدیل‌های گیج القا شده توسط $Isom_{GM}$ دارای مقدار G هستند. نتیجه این است که بردار ویژگی خروجی حاصل توسط تبدیل گیج القا شده تبدیل می‌شود. پس از شناسایی این امر به عنوان بیان مختصاتی پیش‌برد میدان خروجی در معادله (۴۶)، گزاره پیروی می‌کند. از آنجا که همه قسم‌ها برای ایزومنتری‌های دلخواه در $Isom_{GM}$ معتبر هستند، می‌بینیم که GM -کاتولوشن‌ها به طور خودکار نسبت به هر ایزومنتری حفظ‌کننده G -ساختار تابوپذیر هستند. آن‌ها لزوماً نسبت به ایزومنتری‌های عومی در (M) که ممکن است G -ساختار را رعایت نکنند تابوپذیر نیستند، با این حال، تابوپذیری کامل ایزومنتری برای گروه‌های ساختار متعامد $G = d$ (یا ابر-گروه‌های آن) تضمین شده است.

میدان‌های کرنل ناوردها: تحلیل عمیق‌تری از تناوب‌پذیری ایزومنتری میدان کرنل های میدان کرنل عمومی را می‌توان در بخش‌های ۲.۸ و ۳.۸ یافته. نتیجه اصلی این پرسی قضیه ۸.۸ است که بیان می‌کند تناوب‌پذیری ایزومنتری یک تبدیل میدان کرنل، ناورداهای ایزومنتری میدان کرنل آن را نتیجه می‌دهد و بالعکس. شکل ۴۵ چنین میدان کرنل ناورداهی را بصری‌سازی می‌کند که ملزم به اشتراک وزن‌ها بر روی مدارات عمل ایزومنتری است. ناورداهی مورد نیاز میدان کرنل از نظر شهودی قابل فهم است زیرا تناوب‌پذیری ایزومنتری مطمئناً نیازمند ثابت بودن استنتاج شبکه بر روی هر مدار است. این نتیجه انتزاعی تناوب‌پذیری ایزومنتری GM -کاتولوشن‌ها را با مشاهده اینکه میدان‌های کرنل GM -کاتولوشنی که توسط یک کرنل قالب منفرد و مشترک تعیین می‌شوند تحت ایزومنتری $Isom_{GM}$ ناوردا هستند، نتیجه می‌دهد، به قضیه ۸.۹ و شکل ۱۱ مراجعه کنید. G -استریبل بودن قالب بدین ترتیب ناورداهای کرنل‌ها تحت عمل زیرگروه‌های پایدار کننده گروه ایزومنتری را توضیح می‌دهد.

فضاهای همگن: در حالی که تضادی تناوب پذیری ایزومتری نیازمند آن است که کرنل‌ها بر روی مدارات گروه ایزومتری به اشتراک گذاشته شوند، به طور کلی نیازمند اشتراک وزن کانونلوشنی در کل منیفولد نیست. یک استثنای مهم حالت منیفلدهایی است که فضاهای همگن گروه ایزومتری خود هستند، مانند \mathbb{R}^d یا کره S^d . به طور تعریف، عمل ایزومتری در چنین فضاهایی متعدد است، یعنی تنها یک مدار منفرد وجود دارد. در نتیجه، تنها یک کرنل مستقل وجود خواهد داشت که از طریق عمل گروه ایزومتری در کل فضا به اشتراک گذاشته می‌شود. قضیه ۸.۱۴ در بخش ۳.۸ ثابت می‌کند که تبدیل‌های میدان کرنل تناوب پذیر ایزومتری در فضاهای همگن لزوماً کانونلوشن‌های مستقل از مختصات هستند. این مشاهده پیوند رسمی بین نظریه ما و کارهای قبلی در مورد شبکه‌های کانونلوشنی در فضاهای همگن توسط \mathcal{A} و \mathcal{B} برقرار می‌کند که کانونلوشن‌ها را از طریق تناوب پذیری آن‌ها نسبت به تقارن‌های سراسری فضای زیرین تعریف می‌کنند.

تناولوب پذیری دیفومورفیسم: خواننده ممکن است تعجب کند که آیا امکان کاملاً دیفومورفیسم تناوب پذیر کردن های ۱۰۰۰ مستقل از مختصات ما موجود دارد یا نه. همانطور که به راحتی می توان دید، عملیات نقطه ای از بخش ۱،۴، یعنی $\overline{1111111111-1}$ ، با ایاس ها و غیر خطی ها، از قبیل دیفومورفیسم تناوب پذیر هستند. به طور خاص، بگذرد

$$\text{Diff}_{GM} := \left\{ \phi \in \text{Diff}(M) \mid [\phi_*(e_i)]_{i=1}^d \in GM \quad \forall [e_i]_{i=1}^d \in GM \right\} \leq \text{Diff}(M) \quad (45)$$

زیرگروه دیفیومورفیسم‌های حفظ‌کننده G -ساختار باشد، یعنی آنلوگ معادله (۴۲) بدون نیاز به اینکه ϕ ایزومنتری باشد. مشابه معادله (۴۴) و قضیه ۸.۳، بیان‌های مختصاتی (تبديل‌های گیج الفا شده) دیفیومورفیسم‌های حفظ‌کننده G -ساختار تضمین شده‌اند که مقادیری در G بگیرند،
بعد:

$$\phi \in \text{Diff}_{GM} \iff g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \in G \quad \forall p \in M. \quad (46)$$

G -تناوب‌پذیری توابع قالب نقطه‌ای مشترک تضمین خواهد کرد که آن‌ها با این تبدیل‌های گیج القا شده توسط Diff_{GM} جایجا شوند \square و بنابراین با خود عمل دیفئومورفیسم فعال.

از طرف دیگر، کانولوشن‌ها با کرنل‌های گسترده فضایی، به طور کلی نسبت به دیفئومورفیسم‌ها تناوب‌پذیر نیستند. دلیل این امر آن است که عقب‌کشی انتقال‌دهنده f_p^* بر نگاشتهای نمایی تکیه می‌کند که داتاً ساختارهای ریمانی هستند که با دیفئومورفیسم‌ها جایجا نمی‌شوند. با این حال، از آنجا که کرنل‌ها G -استریبل هستند، تناوب‌پذیری Diff_{GM} باید در حد صفر رفتن پشتیبانی کرنل همچنان برقرار باشد. با توجه به اینکه کرنل‌های کانولوشن در کاربردهای معمول یادگیری عمیق کاملاً کوچک هستند، تناوب‌پذیری دیفئومورفیسم باید در عمل تقریباً برقرار باشد.

تناوب‌پذیری آفین: فضاهای اقلیدسی حالت خاصی را تشکیل می‌دهند زیرا امکان GM -کانولوشن‌های $\text{Aff}(G)$ تناوب‌پذیر هستند. اینکه چنین است به این حقیقت تکیه دارد که نگاشت نمایی در فضاهای اقلیدسی نه تنها با عمل ایزومنتری‌ها بلکه به طور کلی تر با تبدیل‌های آفین جایجا می‌شود. تناوب‌پذیری گروه آفین G -کانولوشن‌های اقلیدسی در بخش ۳.۹ اثبات شده است.

۵ مدل اسباب‌بازی: کانولوشن‌های موبیوس هم‌متغیر انعکاس

برای ملموس‌تر کردن ملاحظات نظری بخش‌های قبلی، اکنون به یک نمونه کاربرد می‌پردازیم. در حالی که از اهمیت عملی فوری برخوردار نیست، کانولوشن‌های GM روی نوار موبیوس یک مدل اسباب‌بازی مناسب هستند زیرا هندسه آن و نظریه نمایش در گیر بهویژه ساده است. به دلیل غیرجهت‌پذیر بودن آن، چارچوب‌های مرجع فقط می‌توانند (به‌طور هموار) تا حد انعکاس‌ها ترجیح داده شوند. همانطور که انتظار می‌رود، CNN‌های مستقل از مختصات، با اعمال توابع الگوی هم‌متغیر انعکاس، از پیاده‌سازی ساده‌لوحانه وابسته به مختصات بهتر عمل می‌کنند. علاوه بر این نشان داده می‌شود که آنها تحت عمل گروه ایزومنتری نوار موبیوس هم‌متغیر هستند.

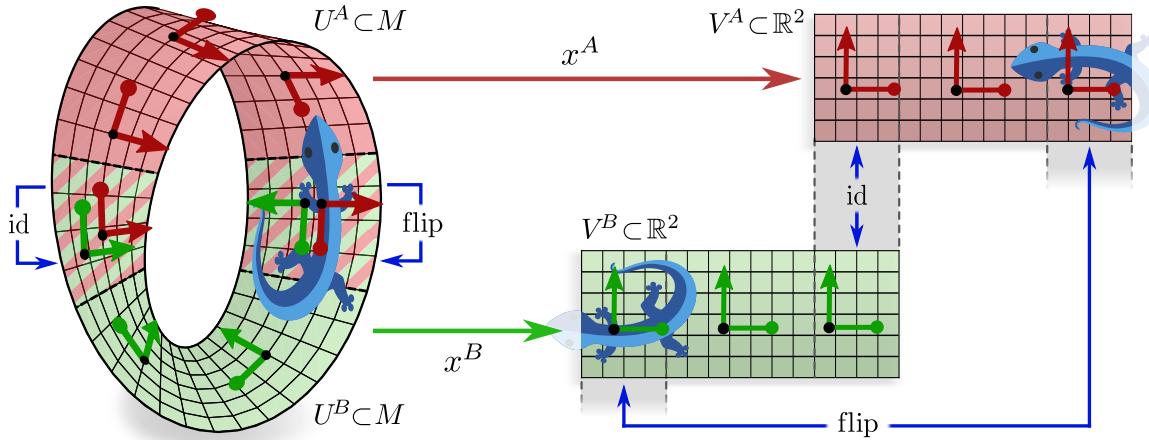
۱.۵	هندسه نوار موبیوس
۲.۵	میدان‌های ویژگی مستقل از جهت‌گیری
۳.۵	شبکه‌های کانولوشنی مستقل از جهت‌گیری
۴.۵	جمع بایاس مستقل از جهت‌گیری
۵۴	غیرخطی‌های مستقل از جهت‌گیری
۵۴	کانولوشن‌های مستقل از جهت‌گیری
۵۷	پیاده‌سازی عددی و ارزیابی کانولوشن‌های موبیوس
۱۴.۵	پیاده‌سازی عددی
۲۴.۵	ارزیابی تجربی

بخش ۱.۵ در ادامه هندسه نوار موبیوس مسطح را مورد بحث قرار می‌دهد. به دلیل پیچ آن، گروه ساختار آن نمی‌تواند بینش از گروه انعکاس \mathcal{R} کاوش‌یابد، بهطوری که باید اطليس \mathcal{R} از گیج‌ها را همانطور که در شکل ۲۸ نمایش داده شده، در نظر گرفت. گروه ایزومنتری توسط چرخش‌ها در امتداد نوار داده می‌شود و تبدیل‌های گیج با مقادیر \mathcal{R} را الفا می‌کند. میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات \mathcal{RM} ، که برخی از آنها در بخش ۲.۵ معرفی می‌شوند، لزوماً باید مطابق با نمایشی از گروه انعکاس تبدیل شوند. بخش ۳.۵ عملیات شبکه کانولوشنی مستقل از جهت‌گیری را مورد بحث قرار می‌دهد. این بهویژه مفهوم کرنل‌های G -راهبردی‌پذیر را روش می‌کند اما همچنین بایاس‌های هم‌متغیر انعکاس و غیرخطی‌ها را پوشش می‌دهد. پیاده‌سازی عددی خانواده مدل پیشنهادی در بخش ۴.۵ مورد بحث و ارزیابی قرار می‌گیرد. کد به‌طور عمومی در <https://github.com/mauriceweiler/MobiusCNNs> در دسترس است.

۱.۵ هندسه نوار موبیوس

منیفلد M مورد بررسی نوار موبیوس مسطح با مرز است همانطور که در شکل ۴ (راست) نشان داده شده است. می‌توان آن را به عنوان ساخته شده از زیرمجموعه مستطیلی $[Y \times [0, 1]]$ از \mathbb{R}^2 و چسباندن دو انتهای مقابل به‌شكل پیچ‌خورده در نظر گرفت. با این تعییف، نوار موبیوس متريک کانونی \mathbb{R}^2 را به اirth می‌پرسد که آن را با ساختار ريماني مجهز می‌کند. متريک بهویژه اتصال لوی-چيويانا و در نتيجه نگاشت‌های نمایی و انتقال‌دهنده‌های موازي را مشخص می‌کند که در ادامه بيشتر مورد بحث قرار می‌گيرند.

اولین سؤالی که در ساخت CNN مستقل از مختصات باید پاسخ داد این است که تا چه حد انتخاب چارچوب‌های مرجع مهم است. با توجه به متريک ريماني روی نوار، می‌توانيم توجه خود را به چارچوب‌های متعدد محدود کنيم. علاوه بر اين می‌توان يكى از دو جهت در امتداد نوار را متمایز کرد تا چرخش چارچوب‌های مرجع را با تراز کردن محورهای اول آنها با اين جهت (به‌طور هموار) رفع ابهام کرد. اين ما را با ابهام دست‌گردی چارچوب باقی می‌گذارد، با دو جهت‌گیری که متناظر با دو جهت ممکن محور دوم چارچوب عمود بر نوار هستند. نوار موبیوس به عنوان منیفلد غيرجهت‌پذیر، انتخاب سراسری هموار (يا حتى پيوسته) جهت‌گيری‌های چارچوب را نمی‌پذيرد. برای به دست آوردن شهودی از اين گزاره، تلاش



شکل ۲۸: هندسه مسطح نوار موبیوس امکان زیرمجموعه‌های محلی را فراهم می‌کند که می‌تواند به طور ایزومتریک با زیرمجموعه‌های منتظر از \mathbb{R}^3 شناسایی شوند. ما اطلسی ایزومتریک را ثابت می‌کنیم که از دو چارت x^A و x^B (سرز) تشکیل می‌شود که کل نوار را می‌پوشانند. گیج‌های $U^A \subset M$ و $U^B \subset M$ به عنوان دیفرانسیل‌های چارت القا می‌شوند. به دلیل پیچ نوار موبیوس، توابع گذار g_p^{BA} در یکی از نواحی همپوشان بدهی خواهد بود، در حالی که ناحیه دیگر لزوماً بین گیج‌ها از طریق انعکاس‌های s گذار خواهد کرد. اطلس انتخاب شده از چارت‌ها بنابراین \mathcal{R} -اطلسی از گیج‌ها را القا می‌کند و \mathcal{R} -ساختار منتظر \mathcal{RM} را مستلزم می‌شود که از دو چارت‌چوب معکس شده در هر نقطه از M تشکیل می‌شود. هر یک از چارت‌های x^X میدان چارت‌چوب محلی هموار را القا می‌کند که توسط پایه‌های مختصاتی $\left[\frac{\partial}{\partial x_i^X} \right]_{|p}^d$ داده می‌شود. انعکاس در توابع گذار در یک همپوشانی در انعکاس چارت‌چوب‌ها نمایان می‌شود.

(مارمولک‌ها تحت مجوز Twitter با مجوز license Creative Commons Attribution 4.0 International اقتباس شده‌اند).

برای ساخت میدان چارت‌چوب هموار با انتخاب چارت‌چوب دلخواه در موقعیت تصادفی و گسترش هموار این انتخاب روی کل نوار را در نظر بگیرید. پس از یک دور کامل در اطراف نوار، چارت‌چوب‌های ساخته شده ناگزیر نیست به چارت‌چوب‌های اولیه منعکس خواهند شد و بنابراین با هموار بودن مطلوب در تناقض خواهد بود. بنابراین از نظر توپولوژیکی تعریف $\{e\}$ -ساختار، یعنی میدان سراسری هموار چارت‌چوب‌ها، روی نوار موبیوس غیرممکن است. بنابراین ما با گروه ساختار غیرقابل کاهش

$$G = \mathcal{R} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad (97)$$

که انعکاس چارت‌چوب‌ها را مدل می‌کند، باقی می‌مانیم. گروه انعکاس فقط شامل دو عنصر است، همانی e و انعکاس s ، که طبق جدول ضرب ساده زیر ترکیب می‌شوند:

$$\begin{array}{c|cc} s & e \\ \hline s & e & e \\ e & s & s \end{array} \quad (98)$$

تنها گزاره غیربدیهی در این جدول این است که دو انعکاس یکدیگر را خنثی می‌کنند، یعنی $s^{-1} = s$. یا به طور معادل، یعنی $s^2 = e$. با توجه به غیرقابل کاهش بودن گروه ساختار \mathcal{R} ، در ادامه باید \mathcal{R} -ساختار منتظر \mathcal{RM} را در نظر بگیریم که از دو چارت‌چوب با دست‌گردی مخالف در هر نقطه روی نوار موبیوس تشکیل می‌شود.

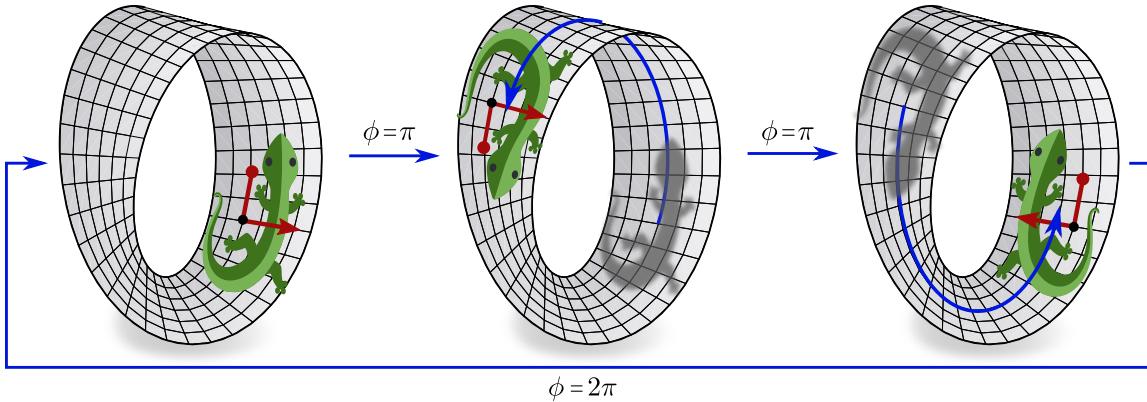
برای کدگذاری میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات \mathcal{RM} هموار روی M ، نیاز است که از گیج‌های مرتبط با \mathcal{R} اطلسی مشخص شود که از چارت‌ها تشکیل شده و کل نوار را بپوشاند. ما انتخاب می‌کنیم این کار را با ثابت کردن اطلسی از چارت‌ها

$$x^X : U^X \rightarrow V^X \subset \mathbb{R}^3 \quad (99)$$

که نوار را می‌پوشانند انجام دهیم و سپس گیج‌ها را از آن القا کنیم. شکل ۲۸ چنین اطلسی را تجسم می‌کند که از دو چارت x^A و x^B روی U^A و U^B (سرز) تشکیل شده است که دو نیمه همپوشان نوار را به طور ایزومتریک به نواحی مستطیلی منتظر از \mathbb{R}^3 نگاشت می‌کنند. همانطور که در پیوست آ.۳ توضیح داده شده، چارت‌ها گیج‌هایی را القا می‌کنند که توسط دیفرانسیل‌های چارت داده می‌شوند، یعنی

$$\psi_p^X := \hat{dx}_p^X : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{برای هر } p \in U^X \quad \text{و } X = A, B. \quad (100)$$

توابع گذار سپس با ژاکوبین‌ها منطبق می‌شوند $g^{BA} = \frac{\partial x^B}{\partial x^A}$. به دلیل پیچ، نگاشتهای گذار در یکی از دو ناحیه همپوشان همگی بدیهی هستند، یعنی $g_p^{BA} = e$ ، و در انتهای دیگر لزوماً منعکس هستند، یعنی $g_p^{BA} = s$. اطلس القا شده از گیج‌ها بنابراین واقعاً به عنوان \mathcal{R} -اطلس



شکل ۲.۹: تجسم گروه ایزومتری‌های حافظ \mathcal{R} -ساختار $Isom_{\mathcal{R}M}$ نوار موبیوس که با (2) یکریخت است. این گروه شامل تمام چرخش‌ها در امتداد نوار است. به دلیل پیچ، چرخش 2π ، یعنی یکبار در اطراف نوار، هنوز آن را به خودش بازنمی‌گرداند بلکه منجر به انعکاس می‌شود. پس از دو مین دور، یعنی چرخش 4π ، نوار به خودش بازمی‌گردد. تبدیل‌های گیج اقا شده مقادیر در \mathcal{R} می‌گیرند.
(مارمولکها تحت مجوز [Creative Commons Attribution 4.0 International license](#) با مجوز Twitter اقتباس شده‌اند).

شناسایی می‌شود. از آنجا که از چارت‌های مختصاتی مشتق شده‌اند، میدان‌های چارچوب محلی هموار منتظر با گیج‌ها فقط پایه‌های مختصاتی معمول هستند، یعنی چارت‌های مختصاتی مشتق شده‌اند، میدان‌های چارچوب محلی e_i^X در $p \in U^X$ توسعه $\left[e_i^X \right]_{i=1}^d$ داده می‌شوند. از آنجا که چارت‌ها ایزومتریک هستند، میدان چارچوب القا شده به طور خودکار متغیر است. با این حال، دو ناحیه مستطیلی V^A و V^B در \mathbb{R}^2 نباید نسبت به یکدیگر چرخانده شوند تا \mathcal{R} -اطلس و \mathcal{R} -ساختار منتظر RM را القا کنند.

باید تأکید کنیم که رویکرد القای گیج‌ها از طریق چارت‌های مختصاتی کاملاً ضروری نیست \square این فقط گزینه‌ای مناسب است زیرا نوار موبیوس مسطح به طور محلی با نواحی \mathbb{R}^2 به‌شکل ایزومتریک شناسایی می‌شود. این بعداً به ما اجازه خواهد داد تا شبکه‌های نمونه‌گیری منظم از \mathbb{R}^2 مانند شبکه پیکسل \mathbb{Z}^2 ، را به شبکه‌های نمونه‌گیری منظم روی نوار منتقل کنیم. از آنجا که این برای منیفلدهایی که به‌طور محلی مسطح نیستند، مانند مشاهد در گرافیک کامپیوترا، ممکن نیست، اکثر پیاده‌سازی‌ها روی منیفلدهای عمومی (یا مشاهد) مختصات را مستقیماً به فضاهای مماس اختصاص می‌دهند؛ بخش ۱۲ را ببینید.

اتصال کانونی لوی-چیویتا روی نوار موبیوس مفهوم انتقال موازی بردارهای مماس را تعریف می‌کند. از آنجا که نوار به‌طور محلی با صفحه \mathbb{R}^3 ایزومتریک است، این انتقال روی تکه‌های محلی به عنوان مسطح کردن این تکه‌ها در یک صفحه و حرکت بردارها به‌طور معمول روی \mathbb{R}^3 درک شود. اگر هیچ تکه منفرده نتواند مسیر γ را پوشاند، پوشش بازی وجود خواهد داشت که انتقال کامل توسط دنباله‌ای از انتقال‌های دهنده‌ها روی تکه‌های محلی توضیح داده شود. آسان است که دید انتقال نسبت به چارچوب‌های \mathcal{R} -ساختار انتخاب شده مقادیر g_γ^{AA} در گروه انعکاس \mathcal{R} خواهد گرفت. این بدان معنی است که اتصال لوی-چیویتا با RM است. بنابراین انتقال‌های خوش‌تعیف (g_γ^{AA}) بردارهای \mathcal{R} ویژگی مرتبط با \mathcal{R} را مستلزم می‌شود.

گروه $Isom_{RM}$ ایزومتری‌هایی که \mathcal{R} -ساختار را حفظ می‌کنند شامل تمام چرخش‌هایی است که نوار را در امتداد خودش جابه‌جا می‌کنند. توجه کنید که یک چرخش یکبار در اطراف نوار، که آن را با زاویه 2π نشان می‌دهیم، با همانی مطابقت نمی‌کند بلکه نوار را به‌شکل منعکس روی خودش نگاشت می‌کند. تنها چرخش 4π ، یعنی دو دور کامل، نوار را به خودش بازمی‌گرداند.^{۳۴} عمل گروه ایزومتری روی منیفلد و روی چارچوب‌های مرجع در شکل ۲۹ تجسم شده است. نسبت به مختصات، عمل ایزومتری تبدیل‌های گیج با مقادیر \mathcal{R} را القا خواهد کرد.

۲.۵ میدان‌های ویژگی مستقل از جهت‌گیری

اصل کوواریانس مستلزم آن است که میدان‌های ویژگی روی نوار موبیوس مستقل از مختصات RM باشند، یعنی آنها باید به‌طور معادل نسبت به چارچوب‌های هر دو دست‌گردی قابل بیان باشند. بنابراین آنها با انتخاب نمایش گروهی $(c) : \mathcal{R} \rightarrow GL(c)$ از گروه انعکاس مشخص می‌شوند که تبدیل بردارهای ویژگی عددی هنگام تعویض بین دو جهت‌گیری را مشخص می‌کند. در ادامه چند انتخاب ممکن از چنین انواع میدان‌هایی را مورد بحث قرار خواهیم داد. خواننده ممکن است بخواهد بررسی کند که نمایش‌های پیشنهادی واقعاً همومورفیسم‌های گروهی هستند که $\forall g, h \in \mathcal{R}$ $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ را برآورده می‌کنند، همانطور که در بخش ۲.۳ و پاورقی ۱۵ خواسته شده است.

^{۳۴} بنابراین نوار موبیوس استوانه را به عنوان پوشش دوگانه در نظر می‌گیرد.

ابتداي ترين مثال، که برای هر گروه ساختار وجود دارد، نمايش بدبيهي است

$$\rho_{\text{---}} : \mathcal{R} \rightarrow \text{GL}(1), \quad \begin{aligned} e &\mapsto [1] \\ s &\mapsto [-1] \end{aligned}, \quad (101)$$

که ماترييس همانی 1×1 را به هر دو عنصر گروه اختصاص می‌دهد. اين ميدان‌های اسکالر $f_{\text{---}}^A(p) \in \mathbb{R}^1$ تحت انعکاس‌های آنها $f_{\text{---}}^A(s) = -f_{\text{---}}^A(p)$ تغيير علامت خود را تعيين می‌دهند. دومين نمايش يك‌بعدی، نمايش تغيير علامت است

$$\rho_{\text{---}} : \mathcal{R} \rightarrow \text{GL}(1), \quad \begin{aligned} e &\mapsto [1] \\ s &\mapsto [-1] \end{aligned}. \quad (102)$$

اين ماترييس همانی منفي 1×1 را به انعکاس‌ها اختصاص می‌دهد و بنابراین ميدان‌های شباهاسکالر را توصيف می‌کند، يعني ميدان‌های ويزگی يك‌بعدی $f_{\text{---}}^A(p)$ که ضرائب عددی آنها $f_{\text{---}}^A(p) \in \mathbb{R}^1$ تحت انعکاس‌ها علامت خود را تغيير می‌دهند، يعني $f_{\text{---}}^A(s) = -f_{\text{---}}^A(p)$. از آنجا که نمايش بدبيهي و نمايش تغيير علامت يك‌بعدی هستند، هر دو نمايش‌های غيرقابل کاهش (irreps) گروه انعکاس هستند. در واقع، آنها تنها دو irrep گروه انعکاس هستند.^{۲۵}

از آنجا که \mathcal{R} گروه متناهي است، نمايش منظم متناهي بعدی (دو بعدی) دارد

$$\rho_{\text{---}} : \mathcal{R} \rightarrow \text{GL}(2), \quad \begin{aligned} e &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ s &\mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}, \quad (103)$$

که عناصر گروه را توسط ماترييس‌های جايگشت نمايش می‌دهد. طبق تعريف، نمايش منظم جايگشت عناصر گروه در \mathcal{R} هنگام عمل بر خودشان را مدل می‌کند. اين را با ستون‌های جدول ضرب در معادله (۹۸) مقایسه کنيد: ستون ميانى را می‌توان به عنوان ناشی از عمل (e) $\rho_{\text{---}}$ بر ستون $\rho_{\text{---}}(e)$ چپ در نظر گرفت، در حالی که عناصر گروه جابه‌جا شده در ستون راست متناظر با جايگشت توصيف شده توسط عمل (s) $\rho_{\text{---}}$ بر ستون چپ هستند. ميدان‌های ويزگي منظم $f_{\text{---}}^A(p) \in \mathbb{R}^2$ بطور معمول دو بعدی توسط بردارهای ويزگي دو بعدی $f_{\text{---}}^A(p)$ نمايش داده می‌شوند که دو کاتال آنها تحت انعکاس‌ها جابه‌جا می‌شوند، يعني $f_{\text{---}}^A(s) \cdot f_{\text{---}}^A(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{\text{---}}^A(1, 1) & f_{\text{---}}^A(1, 2) \\ f_{\text{---}}^A(2, 1) & f_{\text{---}}^A(2, 2) \end{bmatrix}(p) = \begin{bmatrix} f_{\text{---}}^A(1, 2) & f_{\text{---}}^A(2, 1) \\ f_{\text{---}}^A(2, 2) & f_{\text{---}}^A(1, 1) \end{bmatrix}(p)$

نمایش منظم قابل کاهش است، يعني شامل دو زیرفضای نامتناظر با نمايش بدبيهي و نمايش تغيير علامت هستند. بنابراین می‌توان آن را بطور معادل به عنوان ساخته شده از مجموع مستقيمه $\rho_{\text{---}} \oplus \rho_{\text{---}}$ irrep و تغيير پايه Q در نظر گرفت:

$$\rho_{\text{---}}(g) = Q (\rho_{\text{---}} \oplus \rho_{\text{---}})(g) Q^\top \quad \text{که در آن } Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (104)$$

اعتبار اين گزاره به آسانی با جايگذاري سمت راست برای هر دو عنصر گروه تأييد می‌شود:

$$Q (\rho_{\text{---}} \oplus \rho_{\text{---}})(e) Q^\top = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \rho_{\text{---}}(e) \quad (105)$$

$$Q (\rho_{\text{---}} \oplus \rho_{\text{---}})(s) Q^\top = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \rho_{\text{---}}(s) \quad (106)$$

بهطور کلي تر، هر نمايش متناهي بعدی گروه‌های فشرده (از جمله متناهي) کاملاً قابل کاهش به مجموع مستقيمه irrep بود. اين نشان مي‌دهد که هر بردار ويزگي کوواريانت که تحت گروه ساختار فشرده فشرده است می‌شود، تا حد تغيير پايه می‌تواند از ويزگي‌های irrep شود. همانطور که در [۹] استدلال شده است، در اين مورد واقعاً امكان کاهش هر عمليات شبکه خطی به عمليات معادل بين ميدان‌های irrep وجود دارد که ساخت فضای کرnel‌های G -راهيری‌بديزير در معادله (۸۶) و بآيس‌های نامتناظر در معادله (۴۳) را ساده می‌کند. با اين حال، همانطور که در ادامه خواهيم ديد، انتخاب خاص پايه از انواع ميدان معادل تأثیر کاملاً قابل توجهی بر عملکرد مدل دارد. دليل اين امر آن است که عمليات شبکه غيرخطی به پايه انتخاب شده حساس هستند، يعني به انتخاب خاصی از انواع ميدان معادل.

^{۲۵} گروه انعکاس با گروه دوری $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ از مرتبه دو يک‌ريخت است. به خوبی شناخته شده است که irrep‌های گروه‌های دوری از مرتبه N متتناظر با ريشه‌های N وحدت هستند که برای $N = 2$ فقط +1 (بدبيهي) و -1 (تغيير علامت) هستند.

۳.۵ شبکه‌های کانولوشنی مستقل از جهت‌گیری

برای ساخت CNN‌های مستقل از جهت‌گیری روی نوار موبیوس باید لایه‌های هم‌متغیر گیج از بخش ۴ را برای گروه انعکاس \mathcal{R} نمونه‌سازی کنیم. به طور مشخص‌تر، هر یک از توابع الگوی مشترک هم‌متغیر که لایه‌های مستقل از جهت‌گیری را تعریف می‌کنند باید برای هر انتخاب از انواع میدان در نظر گرفته شده $\rho_{\text{روی}}$ و $\rho_{\text{فضاهای}}^R$ نمونه‌سازی شوند. بخش ۱.۳.۵ در ادامه با حل فضاهای \mathcal{B}_ρ^R الگوهای بایاس نام‌تغیر گیج از معادله (۶۳) شروع می‌کند. چند انتخاب مجاز از غیرخطی‌های هم‌متغیر گیج برای انواع میدان مختلف در بخش ۲.۳.۵ پیشنهاد می‌شوند. بخش ۳.۳.۵ سپس فضاهای $\mathcal{K}_{\rho_{\text{روی}}, \rho_{\text{فضاهای}}}^R$ کرنل‌های \mathcal{R} -راهنمایی‌پذیر (معادله (۸۶)) را برای هر جفت ممکن از irrep‌های وروودی و خروجی استخراج خواهد کرد. در حالی که این بخش عمدتاً شامل استنتاجات نظری خواهد بود، بخش ۴.۵ در ادامه جزئیات پیاده‌سازی عملی تری را پوشش خواهد داد.

۱.۳.۵ جمع بایاس مستقل از جهت‌گیری

فضای الگوهای بایاس که می‌توانند به میدانی از نوع ρ بدون دخلالت در فرض استقلال از مختصات جمع شوند، در بخش ۲.۱.۴ نشان داده شد که توسط

$$\mathcal{B}_\rho^R := \{b \in \mathbb{R}^c \mid b = \rho(g)b \quad \forall g \in \mathcal{R}\}. \quad (107)$$

داده می‌شود. برای مورد گروه انعکاس، فقط دو عنصر گروه و بنابراین دو قید وجود دارد. قید برای عنصر همانی $e = g$ به طور بدینهی برآورده می‌شود زیرا $\rho(e) = \text{id}_{\mathbb{R}^c}$ طبق تعریف همیشه همانی روی \mathbb{R}^c است. در ادامه بنابراین کافی است توجه را به قید $b = \rho(s)b = s$ ناشی از انعکاس s محدود کنیم.

با مورد میدان‌های اسکالار، یعنی نمایش بدینهی، شروع می‌کنیم. قید انعکاس سپس $b = \rho_{\text{روی}}(s)b = b$ می‌شود که همیشه برآورده می‌شود. نتیجه می‌شود که فضای الگوهای بایاس

$$\mathcal{B}_{\rho_{\text{روی}}}^R = \mathbb{R} \quad (108)$$

بدون قید باقی می‌ماند به طوری که بایاس‌های دلخواه با مقدار حقیقی می‌توانند به میدان‌های اسکالار جمع شوند. برای نمایش تغییر علامت، قید انعکاس به $b = -b$ تبدیل می‌شود و بنابراین فقط برای بایاس‌هایی که صفر هستند برآورده می‌شود:

$$\mathcal{B}_{\rho_{\text{روی}}}^R = \{0\} \quad (109)$$

بنابراین جمع بایاس به میدان‌های تغییر علامت با حفظ استقلال از مختصات غیرممکن است. سومین نوع میدان نمونه ما نمایش منظم دو بعدی است. قید انعکاسی متناظر روی \mathbb{R}^2 به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = b = \rho_{\text{روی}}(s)b = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad (110)$$

و به فضای حل یک بعدی منجر می‌شود

$$\mathcal{B}_{\rho_{\text{روی}}}^R = \{b \in \mathbb{R}^2 \mid b_1 = b_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} \mid \beta \in \mathbb{R} \right\}. \quad (111)$$

استقلال از مختصات این قید به طور شهودی روشن است: از آنجا که نمایش منظم دو کانالی که میدان را تشکیل می‌دهند جایه‌جا می‌کند، جمع بایاس تنها زمانی مستقل از مختصات است که مقدادر جمع شده به هر دو کانال برابر باشند، به طوری که ترتیب آنها اهمیت نداشته باشد.

همانطور که قبلاً در بخش ۲.۱.۴ ادعا شد، فضای حل \mathcal{B}_ρ^R برای نمایش ρ دقیقاً با زیرنمایش‌های بدینهی آن منطبق است. این مطمئناً برای نمایش بدینهی صادق است که می‌توان هر بایاسی را به آن جمع کرد، و نمایش تغییر علامت که خود هیچ زیرنمایش بدینهی ندارد و بنابراین اصلًاً بایاس نمی‌پذیرد. مثال جالب‌تر نمایش منظم است که در معادله ۱۰۰ نشان داده شد به مجموع مستقیم نمایش بدینهی و نمایش تغییر علامت تجزیه می‌شود. فضای حل یک بعدی در معادله ۱۱۱ دقیقاً متناظر با تک زیرنمایش بدینهی موجود در $\rho_{\text{روی}}$ است. برای برسی اعتبار این گزاره، توجه کنید که بایاس‌های مجاز برای نمایش مجموع مستقیم $\rho_{\text{روی}} \oplus \rho_{\text{فضاهای}}^R$ از شکل (\cdot, β) هستند، که در آن $\beta \in \mathbb{R}$. این نتیجه می‌تواند از طریق تغییر پایه Q به نمایش منظم برگردانده شود که واقعاً حل ما در معادله (۱۱۱) را بازیابی می‌کند:

$$Q \cdot \begin{bmatrix} \beta \\ \cdot \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} \quad (112)$$

۲.۳.۵ غیرخطی‌های مستقل از جهت‌گیری

برای ساخت شبکه عمیق، باید غیرخطی‌های هم‌متغیر برای هر یک از انواع میدان ارائه دهیم. همانطور که قبلاً در بخش ۳.۱.۴ بحث شد، میدان‌های اسکالار به دلیل نام‌تغیر بودن آنها تحت تبدیل‌های گیج می‌توانند تحت تأثیر هر غیرخطی $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ قرار بگیرند. انتخاب‌های معمول

غیرخطی‌های نقطه‌ای ReLU یا ELU هستند. برای میدان‌های تغییر علامت می‌توان قدر مطلق $\|f\|_p^A$ بردارهای ویژگی را که میدان تغییر علامت را به میدان اسکالر نگاشت می‌کند، در نظر گرفت. در پیاده‌سازی ما در ادامه به جای آن از غیرخطی‌هایی از شکل

$$f \mapsto \text{ReLU}(\|f\| - b) \cdot \frac{f}{\|f\|}, \quad (113)$$

استفاده می‌کنیم، که در آن $b \in \mathbb{R}^+$ پارامتر بایاس قابل آموزش است. به‌آسانی دیده می‌شود که این انتخاب میدان‌های تغییر علامت را به میدان‌های تغییر علامت نگاشت می‌کند زیرا ضرب اول بر روی نرم نامتفیر گیج بردارهای ویژگی عمل می‌کند در حالی که ضرب دوم علامت بردار ویژگی را حفظ می‌کند. به عنوان نمایش جایگشت، نمایش منظم اجزاء می‌دهد هر غیرخطی نقطه‌ای، مثل ReLUها، بر روی کانال‌های میدان منفرد بدون تغییر نوع میدان عمل کند:

$$\rho_{\text{ReLU}}(s) \circ \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ReLU}(f_1) \\ \text{ReLU}(f_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ReLU}(f_1) \\ \text{ReLU}(f_2) \end{bmatrix} = \rho_{\text{ReLU}}(s) \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (114)$$

در حالی که نمایش منظم از نظر خطی معادل $\rho_{\text{ReLU}} \oplus \rho_{\text{ReLU}}$ است، نمی‌توانیم غیرخطی‌های نقطه‌ای مستقل را روی دو کانال در پایه irrep اعمال کنیم. این ادعا را که غیرخطی‌ها شبکه‌ها را نسبت به انتخاب خاص پایه نمایش حساس می‌کنند، تقویت می‌کند.

۳.۳.۵ کانولوشن‌های مستقل از جهت‌گیری

آخرین عملیاتی که اینجا نمونه‌سازی می‌کنیم کانولوشن‌های همتغیر انعکاس هستند. این از یک طرف مستلزم توضیح نگاشت نمایی و انتقال موازی روی نوار است، و از طرف دیگر حل فضاهای کرنل \mathcal{R} -راهبری‌پذیر. به دلیل هندسه مسطح M و استفاده از چارت‌های ایزوهمتریک، مورد اول تقریباً بدینه است: ویژگی‌ها مشابه روی \mathbb{R}^2 منتقل می‌شوند، با این تفاوت که بردارهای ویژگی ممکن است انعکاسی توسعه (s) تجربه کنند. پیاده‌سازی ما از این بخش در شکل ۳۰ تجسم شده است که در بخش ۱۴.۵ در ادامه بیشتر توضیح داده می‌شود. بخش فعلی انحصاراً بر حل تحلیلی فضاهای کرنل متمرکز است.

برای نوار موبیوس با \mathcal{R} -ساختار، فضای کرنل‌های \mathcal{R} -راهبری‌پذیر از معادله (۸۶) توسط

$$\mathcal{K}_{\rho_{\text{ReLU}}, \rho_{\text{ReLU}}}^{\mathcal{R}} := \left\{ K: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \mid K(gv) = \rho_{\text{ReLU}}(g) \cdot K(v) \cdot \rho_{\text{ReLU}}(g) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2, g \in \mathcal{R} \right\}, \quad (115)$$

داده می‌شود، که در آن ضرب دترمینان $|\det g| = |\text{det } g|$ را حذف کردیم و تمام معکوس‌ها را برشاشتیم زیرا $g \cdot g^{-1} = g \quad \forall g \in \mathcal{R}$. همانند مورد بایاس‌های همتغیر، قید ناشی از عنصر همانی به طور بدینه برآورده می‌شود، به طوری که فقط قید انعکاسی باقی می‌ماند. کرنل‌های همتغیر انعکاس بنابراین با قید واحد

$$K(s.v) = \rho_{\text{ReLU}}(s) \cdot K(v) \cdot \rho_{\text{ReLU}}(s) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2, \quad (116)$$

مشخص می‌شوند، که مستلزم آن است که کرنل منعکس شده $K(s.v)$ برابر کرنل منعکس نشده $(v.s)$ پس از عمل نمایش میدان ورودی و خروجی باشد. در ادامه این قید را برای تمام نه جفت از انواع میدان حل خواهیم کرد. کرنل‌های حاصل، که همگی به نحوی متقابران تحت انعکاس‌ها هستند، در جدول ۳ تجسم شده‌اند.

• اسکالار \leftarrow اسکالار: کرنل‌های اسکالار نگاشت می‌کنند بايد محدودیت زیر را برآورده کنند

$$[K_{11}](s.v) = [1] \cdot [K_{11}](v) \cdot [1] = [K_{11}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2. \quad (117)$$

آنها لزوماً تحت بازتاب‌ها متقابران (ناوردا) هستند؛ ورودی سمت چپ بالا در جدول ۳ را ببینید.

• اسکالار \leftarrow علامت-چرخش: کرنل‌های $K = [K_{11}] : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 1}$ که میدان اسکالار را به میدان علامت-چرخش نگاشت می‌کنند باید محدودیت زیر را برآورده کنند

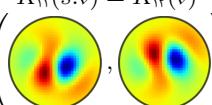
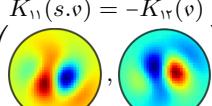
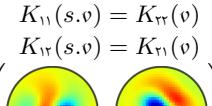
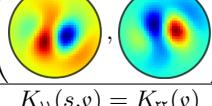
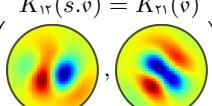
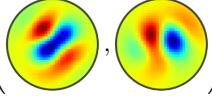
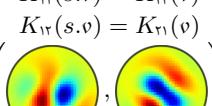
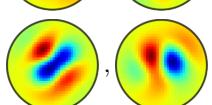
$$[K_{11}](s.v) = [-1] \cdot [K_{11}](v) \cdot [1] = -[K_{11}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2. \quad (118)$$

این امر کرنل‌های ضد متقابران را به همراه دارد همانطور که در ردیف وسط در ستون اول جدول ۳ مشاهده می‌شود.

• اسکالار \leftarrow منظم: به منظور نگاشت از میدان اسکالار به میدان ویژگی منظم، باید کرنل‌هایی از شکل $K = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 1}$ که از یک کانال ورودی به دو کانال خروجی نگاشت می‌کند، اعمال کرد. جایگشت مورد نیاز کانال‌های خروجی در صورتی تصمین می‌شود که کرنل محدودیت زیر را برآورده کند

$$\begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{bmatrix}(s.v) = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{bmatrix}(v) \cdot \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{21} \\ K_{11} \end{bmatrix}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2. \quad (119)$$

این محدودیت مستلزم آن است که دو کانال حاوی کرنل‌هایی باشند که نسخه‌های بازتابی یکدیگر هستند، یعنی $(v.s) = K_{11}(s.v) \in \mathbb{R}^2$ (این قیلاً خط دوم محدودیت در معادله (۱۱۹) را پوشش می‌دهد). این حالت در ورودی سمت چپ پایین جدول ۳ مشاهده می‌شود.

منظمه	تغییر علامت	بدیهی	$\rho_{\text{روز}} \rho_{\text{روز}}$
$K_{11}(s, v) = K_{11}(v)$ 	$K_{11}(s, v) = -K_{11}(v)$ 	$K_{11}(s, v) = K_{11}(v)$ 	بدیهی
$K_{11}(s, v) = -K_{11}(v)$ 	$K_{11}(s, v) = K_{11}(v)$ 	$K_{11}(s, v) = -K_{11}(v)$ 	تغییر علامت
$K_{11}(s, v) = K_{11}(v)$ $K_{11}(s, v) = K_{11}(v)$ 	$K_{11}(s, v) = -K_{11}(v)$ 	$K_{11}(s, v) = K_{11}(v)$ 	منظمه

جدول ۳: تجسم کرnel‌های انعکاس-راهنمای پذیر در $\mathcal{K}_{\rho_{\text{روز}}, \rho_{\text{روز}}}$ برای تمام جفت‌های در نظر گرفته شده از انواع میدان ورودی و خروجی $\rho_{\text{روز}}$ و $\rho_{\text{روز}}$ بهطور کلی، این کرnel‌ها باید قید کرnel-راهنمای پذیری $K(s, v) = K(v, s) \cdot \rho_{\text{روز}}(s) \cdot \rho_{\text{روز}}(v)$ را برآورده کنند که در آن $K : \mathbb{R}^{c_{\text{روز}} \times c_{\text{روز}}} \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{روز}} \times c_{\text{روز}}}$ هر ورودی جدول قید خاص برای نمایش‌های ورودی و خروجی متناظر را بیان می‌کند و یک کرnel راهنمای پذیر نمونه را تجسم می‌کند. توجه کنید که قید، کرnel منعکس شده $K^{(s, v)}$ را به تبدیل خطی کرnel منعکس نشده $(K(v))$ توسط نمایش ورودی و خروجی مقدید می‌کند. بنابراین منجر به تقارن‌های انعکاسی کرnel‌ها می‌شود.

• علامت-چرخش \leftarrow اسکالر: کرnel‌های $K = [K_{11}] : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 1}$ که از علامت-چرخش به میدان‌های اسکالر نگاشت می‌کنند

دوباره صدمتقارن هستند زیرا باید همان محدودیت را برآورده کنند

$$[K_{11}](s, v) = [1] \cdot [K_{11}](v) \cdot [-1] = -[K_{11}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2 \quad (120)$$

مانند کرnel‌هایی که در جهت مخالف نگاشت می‌کنند.

• علامت-چرخش \leftarrow علامت-چرخش: کرnel‌های $K = [K_{11}] : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 1}$ که رفتار تبدیل میدان‌های علامت-چرخش را حفظ می‌کنند متقارن هستند زیرا دو وارونگی علامت در محدودیت

$$[K_{11}](s, v) = [-1] \cdot [K_{11}](v) \cdot [-1] = [K_{11}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2 \quad (121)$$

حذف می‌شوند.

• علامت-چرخش \leftarrow منظم: در حالت کرnel‌های $K = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 1}$ که از علامت-چرخش به میدان‌های ویژگی منظم نگاشت می‌کند، محدودیت زیر بدست می‌آید

$$\begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{bmatrix}(s, v) = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{bmatrix}(v) \cdot [-1] = -\begin{bmatrix} K_{21} \\ K_{11} \end{bmatrix}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2. \quad (122)$$

دو خط با یکدیگر مطابقت دارند، به طوری که می‌توان آنها را با محدودیت کرnel یگانه \mathbb{R}^2 خلاصه $K_{11}(s, v) = -K_{21}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$ کرد. این محدودیت مستلزم آن است که دو کانال کرnel حاوی نسخه‌های بازتابی، منفی شده یکدیگر باشند؛ تجسم آن در وسط ردیف پایین جدول ۳ را ببینید.

• منظم \leftarrow اسکالر: کرnel‌هایی که میدان‌های ویژگی منظم را به میدان‌های اسکالر نگاشت می‌کنند دارای دو کانال ورودی و یک کانال خروجی

هستند و بنابراین از شکل $K = [K_{11}, K_{12}] : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$ هستند. محدودیت

$$[K_{11}, K_{12}](s, v) = [1] \cdot [K_{11}, K_{12}](v) \cdot \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} = [K_{12}, K_{11}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2, \quad (123)$$

که می‌توان آن را به الزام $K_{11}(s, v) = K_{12}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$ کاهش داد، دوباره مستلزم آن است که دو ورودی کرnel حاوی نسخه‌های بازتابی یکدیگر باشند.

• منظم \leftarrow علامت-چرخش: نگاشتهایی از میدان‌های ویژگی منظم به میدان‌های علامت-چرخش از کرnel‌های $K = [K_{11}, K_{12}] : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$ که محدودیت زیر را برآورده می‌کنند استفاده می‌کنند

$$[K_{11}, K_{12}](s, v) = [-1] \cdot [K_{11}, K_{12}](v) \cdot \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} = -[K_{12}, K_{11}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2, \quad (124)$$

یا معادل آن، $K_{11}(s.v) = -K_{12}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$ احتمالاً همانطور که قبلاً انتظار می‌رفت، آنها از کرnel‌های تشکیل شده‌اند که دو کانال آنها حاوی نسخه‌های بازتابی، منفی شده یکدیگر هستند.

منظمه → منظم: در نهایت، باید کرnel‌های $K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ که میدان‌های منظم را به میدان‌های منظم نگاشت می‌کنند و بنابراین دارای ماتریس‌های 2×2 به عنوان کودومین هستند، در نظر بگیریم. محدودیت آنها، که از ضرب چپ و راست با نمایش منظم حاصل می‌شود، به شکل زیر است

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}(s.v) = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}(v) \cdot \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{21} \\ K_{12} & K_{11} \end{bmatrix}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2. \quad (125)$$

این معادل دو محدودیت مستقل است

$$K_{11}(s.v) = K_{22}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2 \quad (126)$$

و

$$K_{12}(s.v) = K_{21}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2, \quad (127)$$

که چهار ورودی کرnel را به هم متصل می‌کند به طوری که دو جفت کرnel منعکس شده متقابل وجود دارد. این حالت در ورودی سمت راست پایین جدول ۳ مشاهده می‌شود.

در حالی که نتایج استخراج شده به ما می‌گویند چگونه بین میدان‌های ویژگی منفرد نگاشت کنیم، شبکه‌های عصبی معمولاً فضاهای ویژگی را فرض می‌کنند که از چندین میدان ویژگی احتمالاً متفاوت تشکیل می‌شوند. کرnel‌هایی که بین این پشتنه‌های میدان‌های ویژگی نگاشت می‌کنند را می‌توان به عنوان ساخته شده از بلوک‌هایی در نظر گرفت که بین میدان‌های منفرد نگاشت می‌کنند. به عنوان مثال، موردی را در نظر بگیرید که هر دو فضای ویژگی ورودی و خروجی شامل یکی از نمایش‌های مورد بحث هستند، یعنی $\rho_{000} = \rho_{0000} + \rho_{0000} + \rho_{0000}$ تعداد کانال‌های ورودی و خروجی سپس $= 4$ است، به طوری که کرnel کامل از شکل $c_{000} = c_{0000} = 1 + 1 + 2 = 4$ است. از آنجا که نمایش‌های ورودی و خروجی به عنوان مجموعه‌ای مستقیم تعریف می‌شوند، آنها قطعی بلوکی هستند. قید کامل بنابراین به نه قید مستقل بین تمام جفت‌های میدان‌های منفرد ورودی و خروجی تفکیک می‌شود که در این مورد دقیقاً متناظر با نه حل ارائه شده در بالا هستند. ورودی‌های 4×4 کرnel کامل بنابراین ملزم خواهد بود همان تقارن‌هایی را داشته باشند که کرnel‌های 4×4 که در جدول ۳ به طور کلی تجسم شده‌اند.

برای کامل بودن، به طور مختصر تبدیل‌های میدان کرnel عمومی و تبدیل‌های میدان کرnel هم‌تغیر ایزومنتری روی نوار موبیوس را تشریح می‌کنیم. در مورد عمومی میدان کرnel هم‌وار کاملاً بدون قید باقی می‌ماند، یعنی هیچ وزنی نیاز به اشتراک‌گذاری ندارد و کرnel‌های منفرد ملزم به داشتن هیچ تقارن انعکاسی نیستند. برای اینکه تبدیل میدان کرnel نسبت به ایزومنتری هاهم‌تغیر باشد، میدان کرnel اعمال شده باید تحت عمل آنها نامغایر باشد. این مستلزم اشتراک‌گذاری وزن‌ها روی مدارهای ایزومنتری است که در دو نوع مختلف می‌آیند. نوع اول مختار است که دقیقاً در وسط نوار قرار دارد. نقاط روی این مدار پس از یک دور کامل در اطراف نوار به خودشان برمی‌گردند، در حالی که خود نوار روی این مدار مرکزی منعکس می‌شود. میدان کرnel $-Isom_{RM}$ -امتحنگی کرnelی را روی این مدار مرکزی اشتراک خواهد گذاشت، با این حال، این کرnel ملزم است تقارن‌های انعکاسی مانند کرnel‌های R -راهبری پذیر در جدول ۳ داشته باشد. این به این دلیل است که کرnel‌ها پس از یک دور به شکل منعکس روی خودشان نگاشت می‌شوند در حالی که میدان کرnel باید نامتحنگی ایزومنتری باشد.^{۴۶} هر مدار دیگر از نوع مدار دوم است. نقطه‌های را در فاصله داده شده از مدار مرکزی در نظر بگیرید. عمل ایزومنتری این نقطه را در این فاصله از مرکز در امتداد نوار حرکت خواهد داد. با این حال، پس از یک دور به نقطه اولیه پرنمی‌گردد بلکه به آن نقطه‌ای که در همان فاصله در طرف مقابل مدار مرکزی قرار دارد. تنها پس از دو میان دور در اطراف نوار مدار بسته خواهد شد. نامتحنگی ایزومنتری مطلوب میدان کرnel بنابراین مستلزم اشتراک‌گذاری کرnel‌ها روی تمام نقطه‌ای را در همان فاصله جهت مرکز نوار (اما اجازه کرnel‌های مختلف در فاصله‌های مختلف را می‌دهد). برخلاف کرnel مدار مرکزی، این کرnel‌ها ملزم به هم‌تغیر انعکاس خودشان نیستند. این تحلیل نشان می‌دهد که هر تبدیل میدان کرnel هم‌تغیر ایزومنتری مستلزم کرnel‌های R -راهبری پذیر است، اگرچه به طور دقیق فقط مدار مرکزی، برعکس، میدان کرnel کانولوشنی که متناظر با اعمال همان کرnel‌های R -راهبری پذیر روی کل مبنی‌فلد است، مطمئناً تحت ایزومنتری‌ها نامتحنگ است. کانولوشن مستقل از جهت گیری روی نوار موبیوس بنابراین $-Isom_{RM}$ -هم‌تغیر است که در ادامه به طور تجزیی تأیید می‌شود.

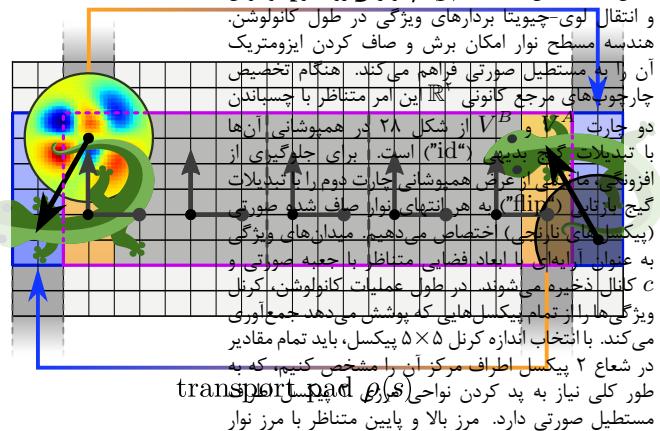
۴.۵ پیاده‌سازی عددی و ارزیابی کانولوشن‌های موبیوس

با آمادگی از اشتقات تحلیلی در بخش‌های قبلی، اکنون آماده‌ایم تا پیاده‌سازی عددی CNN‌های مستقل از جهت گیری روی نوار موبیوس را مورد بحث قرار دهیم. پس از انجام این کار در بخش ۱.۴.۵، مدل‌ها را برای انتخاب‌های مختلف انواع میدان ارزیابی کرده و آنها را با پیاده‌سازی ساده وابسته به جهت گیری در بخش ۲.۴.۵ مقایسه می‌کنیم.

پیاده‌سازی به صورت عمومی در آدرس <https://github.com/mauriceweiler/MobiusCNNs> در دسترس است.

^{۴۶} بخش ۳.۸ چنین موقعیت‌هایی را در محیط کلی تری به عنوان قیدهای زیرگروه پایدارساز گروه ایزومنتری توصیف می‌کند. در مورد فعلی، زیرگروه چرخش‌های یکبار در اطراف نوار نقاط روی مدار مرکزی را پایدار می‌کند. این با گروه انعکاس یکریخت است و بنابراین منجر به تقارن‌های انعکاسی در کرnel‌ها می‌شود.

شکل ۳۰: نمایش عددی میدان پیاده‌سازی (pedestrian transport pad) و انتقال روی-چیویتا بردارهای ویژگی در طول کانولوشن.



۱.۴.۵ پیاده‌سازی عددی

فضاهای ویژگی: اولین سوالی که هنگام پیاده‌سازی کانولوشن‌ها روی نوار موبیوس باید پاسخ داد این است که میدان‌های ویژگی چگونه باید به صورت عددی نمایش داده شوند. از آنجا که نوار موبیوس یک منیفلد مسطح است، می‌توانیم به راحتی (زیرمجموعه‌هایی از) شبکه نمونه‌برداری منظم \mathbb{Z}^2 را از \mathbb{R}^2 به نوار انتقال دهیم. این شهود با کشش‌های برگشتی $f^X \circ (x^X)^{-1} : V^X \rightarrow \mathbb{R}^c$ و محلی $f^X : U^X \rightarrow \mathbb{R}^c$ از طریق چارت‌های (معکوس) $V^X \subset \mathbb{R}^c$ به دامنه جدید $X = A, B$ رسمی‌سازی می‌شود، که در آن $f^X \circ (x^X)^{-1}|_{V^X \cap \mathbb{Z}^2}$ از کشش برگشتی به شبکه نمونه‌برداری تعریف می‌شود، که در شکل ۲۸ به عنوان همپوشانی نشان داده شده است.

توجه داشته باشید که این نمایش به دلیل همپوشانی $U^A \cap U^B \neq \emptyset$ چارت‌ها افرونه است. برای حذف این افرونه را که دو بار نمایش داده می‌شوند شناسایی کرد و تنها یک کپی مشترک از بردارهای ویژگی متناظر را ذخیره کرد. یک طرح ممکن برای انجام این کار، که ما در پیاده‌سازی عددی خود استفاده می‌کنیم، ذخیره میدان‌های ویژگی در آرایه چندبعدی متناظر با مستطیل صورتی در شکل ۳۰ است. می‌توان آن را به عنوان تعریف شده توسط "چسباندن" آن نواحی در V^B و V^A که توسط تبدیلات گیج بدینه g^{BA} شناسایی می‌شوند در نظر گرفت ("id" در شکل ۲۸ و چهار پیکسل مرکزی در شکل ۳۰). آنجه باقی می‌ماند افرونه‌گی بردارهای ویژگی در ناحیه همپوشانی دوم با تبدیلات گیج بازتابی است ("flip" در شکل ۲۸). این افرونه‌گی با تخصیص آن بردارهای ویژگی به صورت مساوی به هر انتهای نمایش میدان محلی "چسبانده شده" حل می‌شود (پیکسل‌های نارنجی در شکل ۳۰). در مجموع، پیکسل‌های جعبه صورتی از فضای ویژگی را به صورت غیرافزونه با تخصیص یک بردار ویژگی c -بعدی به هر یک از آنها نمایش می‌دهند. حلقة دو پیکسل‌ی اطراف مستطیل صورتی بخشی از فضای ویژگی نیست بلکه ناحیه پد کردن را تجسم می‌کند که تنها در طول پاس رو به جلوی عملیات کانولوشن همانطور که در زیر بحث شده است استفاده خواهد شد.

ابعاد (شکل) واقعی آرایه‌ای که فضای ویژگی را کدگذاری می‌کند به چندگانگی‌های میدان انتخاب شده بستگی دارد. فرض کنید m_{scalars} , m_{fields} و m_{outputs} آن چندگانگی‌های صحیح میدان‌های ویژگی را تشکیل می‌دهند. از آنجا که میدان‌های اسکالار و تغییر علامت یک بعدی هستند و میدان‌های ویژگی منظم دو بعدی هستند، تعداد کل کانال‌ها (با بعد بردارهای ویژگی انباسته شده) توسط $c = m_{\text{scalars}} + m_{\text{fields}} + 2m_{\text{outputs}}$ داده می‌شود. فرض کنید همچنین که توضیح فضایی مستطیل صورتی $Y \times X \times N$ پیکسل باشد و اندازه دسته N نمونه فرض کنید. آرایه‌ای که این نمایش عددی فضای ویژگی هم نسبت به هندسه پیچیده نوار و هم نوع واقعی میدان‌های ویژگی موجود (به جز بعد آنها) بی‌اطلاع است. بنابراین اطلاعات هندسی واقعی منحصرًا توسط لایه‌های شبکه که میدان‌ها را پردازش می‌کنند حمل می‌شود.

جمع بایاس: برای پیاده‌سازی جمع بایاس مستقل از جهت‌گیری، نتایج بخش ۱.۳.۵ را به خاطر بیاورید که فضاهای برداری بایاس‌های الگوی هم‌متغیر بازتاب برای میدان‌های اسکالار و میدان‌های منظم یک بعدی و برای میدان‌های تغییر علامت صفر بعدی هستند. در مقداردهی اولیه مازول بایاس بنابراین یک بردار پارامتر $m_{\text{parameters}} - \text{بعدی}_c$ و یک بردار پارامتر $m_{\text{parameters}} - \text{بعدی}_b$ گسترش می‌دهیم که باید به انباسته کامل میدان‌های ویژگی اضافه شود. این کار با اختصاص آرایه پارامترها را به یک بردار بایاس b بعدی $b_{\text{parameters}}$ می‌دهیم که باید به انباسته کامل میدان‌های ویژگی اضافه شود. این کار با اختصاص آرایه c -بعدی از صفرها و پر کردن m_{outputs} عنصر اول با پارامترهای بایاس میدان اسکالار و $2m_{\text{outputs}}$ عنصر آخر با پارامترهای بایاس میدان منظم m_{outputs} .

هر کدام دو بار تکرار شده برای برآوردن ساختار فضای حل در معادله (۱۱۱)، انجام می‌شود. پس از این گسترش بردار بایاس کامل

$$b_{\text{منقل}} = \left[\underbrace{\beta_{m_{\text{منقل}}, 1}, \dots, \beta_{m_{\text{منقل}}, m_{\text{منقل}}}}_{m_{\text{منقل}}}, \dots, \underbrace{\beta_{m_{\text{منقل}}, 1}, \dots, \beta_{m_{\text{منقل}}, m_{\text{منقل}}}, \beta_{m_{\text{منقل}}, m_{\text{منقل}}}}_{2m_{\text{منقل}}} \right]^T \in \mathbb{R}^c \quad (128)$$

طبق معمول به آرایه میدان ویژگی اضافه می‌شود. استقلال آن از جهت‌گیری (ناور‌دایی گیج) اضافه کردن به آرایه در شکل ۳۰ را توجیه می‌کند، علی‌رغم اینکه از بردارهای ویژگی در دو گیج مختلف چسبانده شده است.

غیرخطی‌ها: غیرخطی‌ها را می‌توان مطابق تعریف در بخش ۲.۳.۵ به صورت مستقیم پیاده‌سازی کرد. این کار را با تقسیم ابانت کامل میدان‌های ویژگی به سه ابانت از میدان‌های همان نوع، اعمال غیرخطی‌های همتغیر بازتاب مربوطه به آنها، و در نهایت الحق نتایج انجام می‌دهیم. به دلیل تعریف غیرخطی برای میدان‌های تغییر علامت در معادله (۱۲) با بایاس قابل یادگیری، مازول غیرخطی دارای $m_{\text{منقل}}$ پارامتر قابل آموزش است.

کانولوشن‌های \mathcal{R} : از آنجا که عملیات کانولوشن به صورت نقطه‌ای عمل نمی‌کند بلکه تمام ویژگی‌های پوشش داده توسط کرنل را ابانت می‌کند، پیاده‌سازی آنها کمتر بدبختی است. پس رو به جلو به سه گام تقسیم می‌شود، یعنی ۱) گسترش کرنل‌های متقان بازتاب از آرایه‌های پارامتر، ۲) انتقال لوی-چیویتا بردارهای ویژگی و ۳) کانولوشن GM واقعی.

به خاطر بیاورید که فضای $\mathcal{K}_{\rho_{\text{منقل}}, \rho_{\text{منقل}}}^{\mathcal{R}}$ کرنل‌های \mathcal{R} -هدایت‌پذیر زیرفضای خطی فضای کرنل‌های بدون قید \mathcal{K} در معادله (۸۵) است. برای پارامتری کردن کرنل‌های \mathcal{R} -هدایت‌پذیر لازم است پایه‌ای از $\mathcal{K}_{\rho_{\text{منقل}}, \rho_{\text{منقل}}}^{\mathcal{R}}$ انتخاب کنیم که کرنل‌ها بر حسب آن گسترش یابند. پارامترهای قبل آموزش عملیات کانولوشن ضرایب گسترش در این پایه هستند. پیاده‌سازی ما تمام کرنل‌هایی را که متناظر با همان جفت انواع میدان و خروجی هستند به صورت مشترک پارامتری می‌کند زیرا آنها تقارن‌های بیکسان و بنابراین پایه یکسان دارند. با در نظر گیری نه جفت انواع میدان نشان داده شده در جدول ۳، این بدان معناست که مازول کانولوشن نه آرایه پارامتر متناظر نگه می‌دارد. کرنل‌هایی واقعی سپس از این پارامترها در طول هر پاس رو به جلو گسترش می‌یابند. برای مثال، زیرمجموعه کانال‌های کرنل را در نظر بگیرید که از $m_{\text{منقل}}$ میدان اسکالر به $m_{\text{منقل}}$ میدان تغییر علامت نگاشت می‌کند و اندازه کرنل فرض کنید. آرایه پارامتر متناظر سپس از شکل (۳، ۴، ۵) است و $m_{\text{منقل}} \times m_{\text{منقل}}$ کانال کرنل منفرد را با پایه‌ای از $s \times s$ کرنل نامتناصر هر کدام نمایش می‌دهد. گسترش به عنوان پر کردن $s \times s$ پیکسل بالا با پارامترهای تغییر نیافته در حالی که $s \times s$ پیکسل پایین با پارامترهای منفی شده و بازتاب یافته پر می‌شوند، پیاده‌سازی می‌شود. به عنوان مثال دوم، کانال‌های کرنل را در نظر بگیرید که از $m_{\text{منقل}}$ میدان منظم به $m_{\text{منقل}}$ میدان اسکالر نگاشت می‌کند. آرایه پارامتر برای این حالت از شکل (۶) ($m_{\text{منقل}}, m_{\text{منقل}}, s, s$) است و یکی از دو کانال کرنل به ازای هر میدان وروودی و خروجی را ذخیره می‌کند. کانال‌های دوم متقان در طول پاس رو به جلو بازتاب کانال‌های کرنل اول همانطور که در جدول ۳ نشان داده شده گسترش می‌یابند. پس از گسترش کرنل کامل به این شکل از تمام زیربلوک‌های آن متناظر با ترکیب‌های مختلف انواع میدان، شکل معمول کرنل‌ها در یادگیری عمیق را دارد اما تضمین می‌شود که تقارن‌های مشتق شده در بخش ۲.۳.۵ را رعایت کند. توجه داشته باشید که تقارن‌های کرنل کانولوشن‌های GM را نسبت به CNN غیرهم‌متغیر متناظر با همان تعداد کانال c از نظر پارامتر کارآمدتر می‌کند. به طور خاص برای کرنل \mathcal{R} -هدایت‌پذیر تعداد پارامترها با ضریب دو کاهش می‌یابد.^{۳۷}

پس از گسترش کرنل‌ها، آنها با میدان‌های ویژگی کانولو می‌شوند. این امر نیاز به پیاده‌سازی نگاشت نمایی و انتقال دهنده‌های لوی-چیویتا \mathcal{R} -سازگار روی نوار موبیوس دارد^{۳۸} یا بهتر بگوییم روی نمایش عددی آن توسط آرایه صورتی از شکل ۳۰. هندسه مسطح نوار موبیوس پیاده‌سازی را تقریباً بدینه می‌کند، با این حال، مرزها و اتصال دایره‌ای آن نیاز به دقت خاصی دارند. بنابراین باید بین سه حالت کیفی متفاوت تمایز قائل شویم که متناظر با موارد زیر هستند^{۳۹} ۱) نگاشت‌های نمایی که کاملاً در آرایه صورتی قرار دارند، ۲) نگاشت‌های نمایی که از مرز عبور می‌کنند و بنابراین خوش‌تعزیز نیستند و ۳) نگاشت‌هایی که ژئودزیک‌هایشان از یک انتهای آرایه خارج شده و (پیچیده) از انتهای دیگر وارد می‌شوند. حالت اول بدینه است و متناظر با نگاشت نمایی روی خود \mathbb{R}^2 است. از آنجا که نوار مسطح است و جارچوب‌های مرتع درون آرایه همه مواری هستند، انتقال در امتداد این ژئودزیک‌ها بدینه است. در ناحیه داخلی آرایه، جایی که کرنل‌های (با پشتیبانی متناهی) از آن بیرون نمی‌زنند، بنابراین می‌توان کانولوشن را طبق معمول روی \mathbb{R}^2 پیاده‌سازی کرد. حالت دوم مربوط به ردیفهای بالا و پایین آرایه است که در آن نگاشت‌های نمایی ممکن است از مرز نوار (یا آرایه) عبور کنند. این شبیه مسائل مرزی برای تصاویر مسطح مستطیلی معمول است، که معمولاً با پد کردن صفر حل می‌شود. با اتخاذ این راه حل، آرایه را بر دیفهای از صفر پد می‌کنیم که به عنوان دو نوار خاکستری روشن بالا و پایین مستطیل صورتی در شکل ۳۰ نشان داده شده‌اند. با انداده کرنل $s \times s$ پیکسل با s فرد، باید $(s - 1)/2$ ردیف صفر در هر دو طرف پد کرد. حالت سوم در انتهای چپ و راست آرایه رخ می‌دهد، جایی که نوار برای صاف کردن بریده شده است. شکل ۳۰ ژئودزیک نمونه‌ای را تجسم می‌کند که از خط برش عبور می‌کند و بنابراین در جهت بازتاب یافته از طرف مقابل وارد آرایه می‌شود. به دلیل بازتاب، انتقال دهنده مواری در سراسر برش توسط $(s/2)^2$ داده می‌شود. برای اینکه بتوانیم روتین کانولوشن متعارف اجرا کنیم، انتقال در سراسر برش را با کمی کردن ناجه $(s/2)^2$ پیکسل از هر دو انتهای آرایه (نارنجی)، بازتاب آنها به صورت اولونه برای مدل سازی پیچ عمل روی آنها با $(s/2)^2$ مرباید در نظر گیری گیج‌های بازتاب یافته و در نهایت الحق آنها به طرف مقابله آرایه (آبی) پیاده‌سازی می‌کنیم. با پد کردن آرایه به این شکل، تمام ژئودزیک‌ها و انتقال دهنده‌های مربوطه به همتایان بدینه خود روی \mathbb{R}^2 کاهش می‌یابند.

به طور کلی، پیاده‌سازی ما از عملیات کانولوشن سه گام فوق الذکر را اعمال می‌کند. ابتدا کرنل‌های \mathcal{R} -هدایت‌پذیر را گسترش می‌دهد و آرایه میدان ویژگی صورتی را با صفرها و مقادیر میدان که در سراسر برش منتقل می‌شوند پد می‌کند. کرنل گسترش یافته سپس با میدان‌های ویژگی پد

^{۳۷} بهبود کلایی پارامتر کرنل‌های \mathcal{R} -هدایت‌پذیر با ضریب ۲ برای کرنل‌های پیوسته با برای اندازه‌های کرنل زوج s دقیق است. اگر s فرد باشد، تعداد پارامترها برای کرنل‌های متقان مثل $(s/2)^2 + 1$ و برای کرنل‌های نامتقان مثل $(s/2)^2 - 1$ مقیاس می‌شود زیرا اولی ردیف مرکزی پیکسل‌ها را از ادانه پارامترها می‌کند در حالی که دومی باید آنها را روی صفر تنظیم کند.

شده کانولو می شود و روتین کانولوشن متعارف برای تصاویر مسطح فراخوانی می شود. ما تنظیمات مرزی "معتبر" برای کانولوشن استفاده می کنیم، که به این معناست که عملیات به طور ضمنی صفرهای بیشتری پد نمی کند و تنها بردارهای ویژگی را برای آن نقاطی محاسبه می کند که کرنل از مرزهای آرایه دستی پد شده ما فراتر نمی رود. میدان ویژگی حاصل بنابراین دوباره همان ابعاد فضایی مستطیل صورتی اصلی را خواهد داشت.

Pooling: CNN‌های متعارف معمولاً عملیات pooling فضایی را اعمال می کنند که بردارهای ویژگی از یک پنجره pooling داده شده، به عنوان مثال ناحیه‌ای از پیکسل‌های 2×2 ، را در یک بردار ویژگی جدید خلاصه می کنند. جنین عملياتی وضوح فضایی را کاهش می دهد که هزینه محاسباتی را کاهش داده و میدان دید مؤثر کرنل‌های کانولوشن را افزایش می دهد. روش رایج pooling به اصطلاح "max-pooling" است که بیشترین مقدار هر کانال ویژگی فردی در ناحیه pooling را اختیار می کند. این عملیات را می توان مستقیماً روی میدان‌های اسکالر اعمال کرد زیرا آنها ناوردای پیمانه هستند. همچنین برای میدان‌های ویژگی منتظم قابل قبول است زیرا گرفتن بیشینه با جابجاگی کانال‌ها جابجا می شود. با این حال، از آنجا که میدان‌های sign-flip علامت خود را تحت تبدیلات پیمانه تغییر می دهند، max-pooling نسبت به قانون تبدیل آنها هموردا نیست. جایگزین هموردا، average pooling average است که میانگین ویژگی‌ها در ناحیه pooling را می گیرد و بنابراین با تغییر علامت جابجا می شود. گرینه دیگر، که در آزمایش‌های زیر استفاده می کنیم زیرا کمی بهتر عمل می کند، این است که میدان‌های sign-flip را بر اساس قدر مطلق آنها pool کنیم که مجدداً تحت وارونگی علامت ناوردادر است. سپس علامت مقادیر میدان pool شده را با بیشترین نرم ضرب می کنیم تا قانون تبدیل اصلی حفظ شود.

در حالی که عملیات pooling تعریف شده به این شکل نسبت به تبدیلات پیمانه هموردا هستند، اصل طراحی آنها اساساً با همودایی ایزومنتری مطلوب تداخل دارد. این بدان دلیل است که آنها وضوح فضایی گستره‌سازی عددی را کاهش می دهند، به طوری که خروجی تنها نسبت به زیرگروه تقارن‌های شبکه با وضوح پایین‌تر دقیقاً هموردا است. این اثر برای CNN‌های متuarف به خوبی شناخته شده است [۹]. اگرچه تلاش‌هایی برای اصلاح وضعیت انجام شده [۱۰]، از دست رفتن جزئی همودایی انتقالی (با ایزومنتری) به یک زیرگروه معمولاً همانطور که هست پذیرفته می شود.

تست‌های واحد: تمام عملیات مستقل از مختصات پیشنهادی برای تضمین همودایی پیمانه و همودایی ایزومنتری آنها تست واحد می شوند. تست‌های همودایی پیمانه برای تمام عملیات پیشنهادی و همچنین برای کل شبکه‌های توصیف شده در بخش بعدی موفق هستند. برای کانولوشن، جمع bias و غیرخطی‌ها، تست‌های واحد ما تأیید می کنند که همودایی ایزومنتری دقیقاً برقرار است. همانطور که انتظار می‌رود، عملیات pooling فضایی نسبت به تقارن‌های شبکه با وضوح بالا دقیقاً هموردا نیستند.^{۳۸} با این حال، همودایی ایزومنتری آنها را برای آن زیرگروه از ایزومنتری که همزمان تقارنی از شبکه با وضوح پایین‌تر هستند تأیید می کنیم. نتایج تجربی ما، که در ادامه بحث می کنیم، نشان می دهند که همودایی ایزومنتری غیردقیق، ناوردایی ایزومنتری پیش‌بینی‌های طبقه‌بندی یک شبکه کامل را در اکثر موارد تنها به طور حاشیه‌ای تحت تأثیر قرار می دهد.

۲.۴.۵ ارزیابی تجربی

عملیات مستقل از مختصات و ویژگی‌های همودایی ادعا شده آنها را روی یک وظیفه طبقه‌بندی ساده تصاویر MNIST که روی نوار مُبیوس پروردگر شده‌اند، ارزیابی می کنیم. ترکیبات مختلف انواع میدان‌ها نمونه‌سازی معماری‌های مدل مشابه برای آنها مقایسه می شوند. به عنوان خط مینا، یک CNN غیرمستقل از مختصات را روی نوار مُبیوس آمورش می دهیم که به طور قابل توجهی توسعه مدل‌های همودرا بهتر عمل می کند.

مجموعه داده Mōbius MNIST با گرفتن ارقام استاندارد MNIST 28×28 پیکسل و پروژکت کردن آنها روی نوار با شناسایی مرز چپ و راست با یک پیچش اضافی ساخته می شود. مطابق با مجموعه داده MNIST چرخانده شده، که یک معيار استاندارد برای CNN‌های اقلیدسی همودایی دورانی است، اندازه مجموعه آمورش را به 12000 نمونه کاهش می دهیم [۹]. از آنجا که MNIST شامل ارقام حاکستری تک کاناله است که تحت تبدیلات پیمانه ناوردادر است، نمونه‌های آن به عنوان میدان‌های اسکالر شناسایی می شوند. بنابراین هر نمونه با آرایه‌ای به شکل $(1, 28, 28)$ نمایش داده می شود که متناظر با مستطیل بنشش در شکل 30×30 است. توجه کنید که شناسایی مرز چپ و راست برای مورد خاص ارقام MNIST منجر به پیچ ناپیوستگی نمی شود زیرا رنگ پس زمینه آنها سیاه ثابت (عنی صفر) است. به متنظر نمایش همودایی ایزومنتری القا شده CNN‌های مستقل از مختصات، دو نسخه از این مجموعه داده می سازیم. اولی شامل ارقامی است که همگی مترکز هستند، یعنی در همان موقعیت روی نوار قرار دارند. مجموعه داده دوم ارقام را در موقعیت‌های تصادفی اطراف نوار قرار می دهد، یعنی آنها را با ایزومنتری های نمونه‌برداری تصادفی جابجا می کند همانطور که در شکل 29 تجسم شده است. انتظار می‌رود هر مدل همودایی ایزومنتری استنتاج خود را از مجموعه داده ارقام Mōbius MNIST به مجموعه داده اسیباب‌بازی است، تمام ویژگی‌های نظری که ما به آنها علاقه‌مندیم را نشان می دهد و به عنوان یک مورد تست راحت برای نمایش تفاوت بین CNN‌های متuarف و CNN‌های مستقل از مختصات عمل می کند.

تمام معماری‌های شبکه همانطور که معمول است به عنوان یک سری لایه‌های کانولوشنی، که با یک عملیات pooling سراسری و یک طبقه‌بندی کننده ناوردادر و کاملاً متصل دنبال می شوند، ساخته می شوند؛ جدول 4 را برای مقایسه بینید. بخش‌های کانولوشنی از شش بلوک کانولوشنی با عملیات pooling فضایی پس از بلوک کانولوشن دوم و چهارم ساخته می شوند. بلوک‌های کانولوشن کاملاً اساسی هستند و تنها از یک لایه کانولوشنی که با جمع bias و یک لایه غیرخطی دنبال می شود تشکیل شده‌اند. تمام عملیات pooling میانی از پنجره‌های 2×2 پیکسل استفاده کرده و بنابراین وضوح فضایی را نصف می کنند. در مورد مدل‌های بازتاب، آخرین لایه کانولوشنی به 64 میدان اسکالار نقشه می برد. ناوردایی آنها تحت تبدیلات پیمانه تضمین می کند که عملیات global max-pooling بعدی ویژگی‌های هم ناوردادر موقعیت و هم ناوردای پیمانه تولید کند. یک MLP با فعال‌سازی softmax نهایی آن ویژگی‌ها را برای تولید پیش‌بینی‌های ناوردادر می گیرد. برای

^{۳۸} توجه کنید که این مسئله برای عملیات pooling ذاتی است و برای CNN‌های متuarف نیز صدق می کند [۹].

CNN	چندگانگی میدان‌های خروجی ($m_{\text{خروجی}}, m_{\text{میانه}}, m_{\text{نها}}$) / کanal‌ها / نورون‌ها	اسکالر	لایه		
	متخلط	irreps	منتظم	sign-flip	
۱	(۱, ۰, ۰)	(۱, ۰, ۰)	(۱, ۰, ۰)	(۱, ۰, ۰)	(۱, ۰, ۰)
$\lfloor \frac{1}{16/\sqrt{\alpha}} \rfloor$	(۴, ۴, ۲)	(۸, ۸, ۰)	(۰, ۰, ۸)	(۰, ۱۶, ۰)	(۱۶, ۰, ۰)
$\lfloor \frac{32}{32/\sqrt{\alpha}} \rfloor$	(۸, ۸, ۴)	(۱۶, ۱۶, ۰)	(۰, ۰, ۱۶)	(۰, ۳۲, ۰)	(۳۲, ۰, ۰)
همان	همان	همان	همان	همان	pooling
$\lfloor \frac{64}{64/\sqrt{\alpha}} \rfloor$	(۱۶, ۱۶, ۸)	(۳۲, ۳۲, ۰)	(۰, ۰, ۳۲)	(۰, ۶۴, ۰)	(۶۴, ۰, ۰)
$\lfloor \frac{128}{128/\sqrt{\alpha}} \rfloor$	(۳۲, ۳۲, ۱۶)	(۶۴, ۶۴, ۰)	(۰, ۰, ۶۴)	(۰, ۱۲۸, ۰)	(۱۲۸, ۰, ۰)
همان	همان	همان	همان	همان	pooling
$\lfloor \frac{256}{256/\sqrt{\alpha}} \rfloor$	(۶۴, ۶۴, ۳۲)	(۱۲۸, ۱۲۸, ۰)	(۰, ۰, ۱۲۸)	(۰, ۲۵۶, ۰)	(۲۵۶, ۰, ۰)
۶۴	۶۴	۶۴	۶۴	۶۴	global max-pooling
۳۲	۳۲	۳۲	۳۲	۳۲	بلوک MLP
۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	بلوک softmax + MLP

جدول ۴: نمای کلی معماري‌های مدل مقایسه شده. تمام مدل‌ها از یک بخش کاتولوشن روی نوار مؤبیوس، که با یک عملیات global max-pooling و یک طبقه‌بندی کننده MLP دنبال می‌شود، تشکیل شده‌اند. پنج CNN مستقل از جهت‌گیری در چندگانگی‌های ($m_{\text{خروجی}}, m_{\text{میانه}}, m_{\text{نها}}$) انواع میدان‌های متفاوت هستند اما دقیقاً در تعداد کanal‌ها و تقریباً در تعداد پارامترها مافق هستند. ورودی‌های آنها، یعنی ارقام MNIST، به عنوان میدان‌های اسکالار فرض می‌شوند. تمام مدل‌های مستقل از جهت‌گیری در آخرین کاتولوشن خود به ۶۴ میدان اسکالار ناورادی پیمانه تقشه می‌برند. عملیات pooling سراسری بعدی بنابراین ویژگی‌های ناورادی موقعیت و مستقل از مختصات تولید می‌کند. مدل CNN خط مینا در دو نوع راشه می‌شود که در ضربی $\sqrt{\alpha}$ آنها در تعداد کanal‌ها متفاوت هستند. نسخه اول $\alpha = 1$ فرض کرده و بنابراین همان تعداد کanal مدل‌های مستقل از مختصات را استفاده می‌کند. به دلیل کارایی پارامتر پایین‌تر CNN‌های غیرهموردا، این مدل تقریباً دو برابر پارامتر بیشتری استفاده می‌کند. برای مقایسه عادلانه نسخه دومی با $\alpha = 2$ و بنابراین تقریباً همان تعداد پارامتر مدل‌های هموردا اضافه می‌کنیم.

تمام مدل‌ها از همان دو بلوک MLP تشکیل شده است که dropout با احتمال حذف ۳۰٪ و یک لایه خطی (یا affine) اعمال می‌کنند که تعداد نورون‌های خروجی آن در جدول ۴ فهرست شده است. بنابراین تفاوت‌های بین مدل‌های مختلف به بخش کاتولوشنی محدود می‌شود.

پنج مدل مستقل از مختصاتی که نمونه‌سازی می‌کنیم در انواع میدان استفاده شده متفاوت هستند: سه مدل خالص وجود دارد که با "scalar" و "sign-flip" و "regular" نشان داده می‌شوند که تنها نوع میدان پیشنهادی را فرض می‌کنند. به دلیل بعد بالاتر، چندگانگی‌های میدان میدان‌های ویژگی منظم در مقایسه با میدان‌های اسکالار و sign-flip نصف می‌شوند. مدل چهارم، که با "irrep" نشان داده می‌شود، از ترکیبی از میدان‌های اسکالار و sign-flip به نسبت‌های مساوی استفاده می‌کند. توجه کنید که میدان‌های ویژگی این مدل به صورت خطی معادل مدل‌های "regular" هستند زیرا تغییر پایه از معادله (۱۰۴) بین هر دو ترجمه می‌کند. مدل پنجم، "mixed" هر سه نوع میدان را اعمال می‌کند. غیرخطی‌های مورد استفاده برای انواع میدان‌های مختلف همان‌ای هستند که در بخش ۲.۳.۵ توضیح داده شده‌اند. همانطور که قبلاً بیان شد، تمام مدل‌ها ورودی‌ها و خروجی‌های اسکالار فرض می‌کنند.

تمام لایه‌های مستقل از مختصات تست واحد شده و کامل‌آمودای پیمانه یافت شده‌اند که نشان می‌دهد مدل‌ها به طور کلی کامل‌آنوارادی پیمانه هستند. از آنجا که دو مرحله pooling اعمال می‌کنند که وضوح فضایی را هر یک با ضربی ۲ قبل از pooling سراسری کاهش می‌دهند، هموردا بی ایزومنتری (ناورادی) تنها برای زیرگروه جابجایی‌ها به مضارب ۴ پیکسل برقرار است. بنابراین ویژگی‌های ادعا شده نظری همانطور که انتظار می‌رود برقرار هستند.

به عنوان خط مینا، مدل‌های هموردا بایتاب را با CNN‌های متعارف وابسته به مختصات روی نوار مؤبیوس مقایسه می‌کنیم. به منظور احترام به توپولوژی نوار، نسخه ساده‌ای از عملیات padding انتقالی را اعمال می‌کنیم. از آنجا که CNN‌ها نسبت به انواع میدان ناآگاه هستند، این کار با گرفتن نوارهای نارنجی دو پیکسل از شکل ۳۰ و pad کردن آنها به طرف مقابل آرایه پس از اعمال بازتاب اما بدون عمل کردن با نمایش گروهی ناشخص انجام می‌شود ۰ به طور رسمی، این متناظر با انتقال ویژگی‌ها طبق یک اتصال بدیهی است. از آنجا که عملیات غیرهموردا از نظر پارامتر کمتر کارآمد استند، دو نسخه مختلف در نظر می‌گیریم: نسخه اول همان تعداد کanal مدل‌های مستقل از مختصات را استفاده می‌کند و بنابراین تقریباً دو برابر پارامتر بیشتری نیاز دارد. تعداد کanal‌های نسخه دوم با ضربی $\sqrt{2}$ کاهش می‌یابد تا تعداد پارامترها تقریباً معادل مدل‌های مستقل از جهت‌گیری باشد.

تمام مدل‌ها برای epoch ۲۰ با اندازه batch ۱۲۸ نمونه، کاهش وزن 10^{-6} و استفاده از بهینه‌ساز Adam [۹] آموزش داده می‌شوند. نرخ یادگیری اولیه $5 \cdot 10^{-3}$ تا حد امکان بالا انتخاب شده بدون اینکه منجر به واگرایی فرآیند آموزش شود. یک برنامه کاهش نرخ یادگیری ثابت اندازه گام را هر ۴ epoch با ضربی ۲ کاهش می‌دهد.

جدول ۵ خطاهای تست حاصل از تمام مدل‌ها را نشان می‌دهد که هر کدام را روی ۳۲ اجرا میانگین‌گیری شده‌اند. تنظیم اول، که در ستون "shifted train digits" گزارش شده، از ارقام قرار داده شده تصادفی هم در مجموعه داده آموزش و هم تست استفاده می‌کند. هر دو نسخه CNN‌های مستقل از مختصات نتیجه بهتری به طور قابل توجهی به دست غیرهموردا تقریباً همان خطای تست را به دست می‌آورند. در تضاد، اکثر CNN‌های مستقل از مختصات نتیجه بهتری به طور قابل توجهی به دست می‌آورند. تنها مدلی که کامل‌آموده میدان‌های sign-flip مبتنی است بدتر عمل می‌کند ۰ این نشان می‌دهد که ترکیب استفاده شده از میدان‌های

مدل	انواع میدان؛ sign-flip و منظم	پارامترها	خطای تست (%)	ارقام آموزش جابجا شده ارقام آموزش متغیر
CNN (channels)	□	k ۱۵۰۱	۴۲.۹۹ ± ۲.۶۵	۱.۹۷ ± ۰.۱۱
CNN (params)	□	k ۸۳۲	۴۳.۶۸ ± ۲.۸۵	۲.۰۰۸ ± ۰.۱۰
gauge CNN (scalar)	✓ ×	k ۹۰۲	۱.۶۰ ± ۰.۰۹	۱.۶۰ ± ۰.۱۰
gauge CNN (sign-flip)	× ✓	k ۸۲۰	۴.۸۹ ± ۰.۳۶	۴.۲۷ ± ۰.۲۴
gauge CNN (regular)	× ×	k ۷۵۲	۱.۲۳ ± ۰.۰۷	۱.۲۴ ± ۰.۰۸
gauge CNN (irreps)	✓ ✓	k ۷۵۲	۱.۶۴ ± ۰.۱۲	۱.۶۵ ± ۰.۰۹
gauge CNN (mixed)	✓ ✓	k ۷۵۲	۱.۴۲ ± ۰.۱۰	۱.۴۳ ± ۰.۰۹

جدول ۵: خطاهای تست معماری‌های مختلف شبکه، هر کدام میانگین‌گیری شده روی ۳۲ اجرا. ستون "shifted train digits" عملکرد پرای تنظیمی را گزارش می‌کند که در آن هم نمونه‌های آموزش و هم تست در مکان‌های تصادفی روی نوار قرار داده شده‌اند. در حالی که CNN‌ها متعارف با \mathcal{R} -مستقل از مختصات نیستند، قادر به یادگیری تشخیص ارقام ممانع‌کور که از میدان چارچوب ناپیوسته آنها دیده می‌شود هستند. تقریباً تمام CNN‌های مستقل از مختصات نتایج بهتری به طور قابل توجهی به دست می‌آورند. عملکرد پایین‌تر مدل sign-flip نشان می‌دهد که CNN‌ها مستقل از مختصات انتخاب‌های بدی از انواع میدان یا غیرخطی‌ها انجام شود خیلی خوب کار نکنند. ارقام آموزش در ستون "centered train digits" "نمگی در همان موقعیت روی نوار قرار داده شده‌اند در حالی که ارقام تست به طور تصادفی جابجا شده باقی مانند. CNN‌های مستقل از مختصات قادر به تعیین استنتاج خود بین هر دو وضعیت هستند که همودایی ایزومنتری آنها را تأیید می‌کند. در نتیجه، عملکرد CNN‌های متعارف بدتر می‌شود که نشان‌دهنده فتدان همودایی آنها تحت ایزومنتری‌ها است.

sign-flip و غیرخطی‌ها انتخاب خوبی نیست، علی‌رغم اینکه مستقل از مختصات است. بنابراین انتخاب‌های بد میدان‌های ویژگی و غیرخطی‌ها دیده می‌شود که به عملکرد مدل آسیب می‌زنند. مدلی که بهترین نتایج را به دست می‌آورد بر میدان‌های ویژگی منظم مبتنی است. این مشاهده با یافته‌های قبلی، به عنوان مثال مقایسه سیستماتیک انواع میدان در [?] همسو است. تفسیر ما از این نتیجه این است که قیدهای کریل شامل میدان‌های ویژگی منظم اساساً اجازه کانال‌های کرنل بدون قید را می‌دهند، با شرط اضافی اعمال دو کمی بازتاب یافته از آنها □ این را در تضاد با کرنل‌های \mathcal{R} -راهبری‌پذیر بین میدان‌های irrep بینبینید که باید درون یک کانال کرنل متقاضن باشند. مدل مبتنی بر میدان‌های اسکالر عملکرد میانی بین CNN‌های متعارف و مدل میدان منظم به دست می‌آورد. هر دو مدلی که از انواع میدان مختلط استفاده می‌کنند عملکردی بین انواع میدان ترکیب دارند. می‌خواهیم مجدد تأکید کنیم که مدل منظم و مدل irrep دقتاً شامل همان انواع میدان irrep هستند اما در پایه متفاوتی بیان شده‌اند. از آنجا که این تغییر پایه می‌تواند به عنوان بخشی از غیرخطی‌های اعمال شده تفسیر شود، این نتیجه نشان می‌دهد که غیرخطی‌های استفاده شده تأثیر عمده‌ای روی عملکرد مدل دارند. علی‌رغم اینکه در [?] بررسی شده، منظره غیرخطی‌های همودا هنوز تا حد زیادی قلمرو ناکشف شده‌ای است.

تنظیم آموزش دوم، که در ستون "centered train digits" گزارش شده، قابلیت مدل‌ها برای تعیین روی حالت‌هایی که توسط ایزومنتری‌ها مرتبط هستند را بررسی می‌کند. تمام مدل‌ها روی ارقامی که در همان مکان روی نوار رخ می‌دهند آموزش داده می‌شوند اما روی ارقام جابجا شده تصادفی تست می‌شوند. همانطور که انتظار می‌رود، عملکرد CNN‌های متعارف در این تنظیم به طور قابل توجهی بدتر می‌شود □ این نشان می‌دهد که آنها واقعاً تحت ایزومنتری‌های نوار مؤبیوس همودا نیستند. در تضاد، عملکرد اکثر CNN‌های مستقل از مختصات در انحراف معیار بدون تغییر باقی ماند. علی‌رغم اینکه تنها نسبت به زیرگروه برقرار است. در حالی که مدل sign-flip ۴ بیکسل جابجا می‌شوند همودا (ناوردا) هستند، ناوردایی ایزومنتری کامل مدل‌ها بنابراین به نظر خیلی خوب برقرار است. در همان نتیجه، این تنظیم آموزش اول به طور قابل توجهی بدتر می‌شود، هنوز تقریباً همودایی ایزومنتری است و بنابراین خیلی بهتر از CNN‌های متعارف عمل می‌کند.

در نتیجه، آزمایش‌های انجام شده ویژگی‌های ادعا شده CNN‌های مستقل از مختصات را تأیید کرده و برتری آنها نسبت به مدل‌های وابسته به مختصات را نشان می‌دهند.

بخش دوم

نظریه شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات

بخش اول میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را بر حسب عبارات مختصاتی آن‌ها نسبت به انتخابی از گیج روی محله‌های محلی $U \subseteq M$ معرفی کرد. از آنجا که وجود گیج‌های سراسری به طور کلی از نظر تپولوژیکی مانع دارد، نمایش‌های مختصاتی سراسری میدان‌های ویژگی به طور کلی وجود ندارند. بخش اول این مسئله را با تجمعی محتواهای سراسری میدان‌های ویژگی از عبارات مختصاتی محلی آن‌ها نسبت به اطلاعی از گیج‌هایی که M را پوشش می‌دهند، برطرف کرد. یک جایگزین ظرفیت، تعریف میدان‌های ویژگی سراسری در یک فرمالیسم انزاعی و مستقل از مختصات بر حسب بندل‌های فیبر است. تسهیم‌های بندل امکان بازیابی عبارات مختصاتی محلی میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را فراهم می‌کنند.

۶۳	۶ بندل‌های مرتبط و میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات
۶۳	۱.۶ مقدمه‌ای کوتاه بر کلاف‌های تاری
۶۹	۲.۶ کلاف مماس TM و کلاف چارچوب
۷۱	۳.۶ ساختارهای G و کلاف‌های برداری ویژگی وابسته A
۷۴	۴.۶ بدیهی‌سازی‌های محلی کلاف $, FM, TM$ و A
۷۹	۵.۶ منتقل‌کننده‌های موازی روی کلاف‌های الحقی
۸۲	۷ تبدیلات میدان کرنل مستقل از مختصات و کانولوشن‌های GM
۸۳	۱.۷ کانولوشن‌های GM با اندازه 1×1
۸۷	۲.۷ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM
۹۴	۸ همتغیری ایزومتری
۹۴	۱.۸ ایزومتری‌ها و عمل آنها بر منیفلدها، کلاف‌ها و میدان‌ها
۱۰۶	۲.۸ همتغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM
۱۱۲	۳.۸ میدان‌های کرنل خارج قسمتی

بخش‌های زیر توصیف سراسری و مستقل از مختصات شبکه‌های عصبی و فضاهای ویژگی از بخش اول را توسعه می‌دهند. بخش ۶ بندل‌های فیبر، به ویژه بندل مماس، G -ساختارها و بندل‌های بردار ویژگی G -مرتبط را معرفی می‌کند. عملیات شبکه عصبی مانند تبدیل‌های میدان کرنل و کانولوشن‌های GM در بخش ۷ تعریف می‌شوند. بخش ۸ هموردایی ایزومتری این عملیات را بررسی می‌کند.

۶ بندل‌های مرتبط و میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات

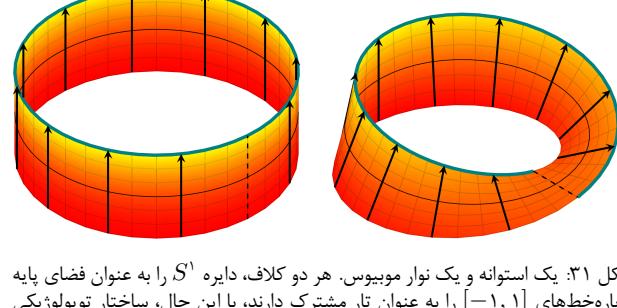
میدان‌های کمیت‌های هندسی بر روی خمینه‌ها به عنوان پرش‌هایی از بندل‌های فیبر رسمی‌سازی می‌شوند (معادله (۱۴۷)). هر خمینه هموار به طور طبیعی مجذب به بندل مماس و بندل چارچوب خود است. انتخاب یک G -ساختار، که یک بندل از چارچوب‌های مرتبه است، امکان تعریف بندل‌های بردار ویژگی G -مرتبط را فراهم می‌کند. فضاهای ویژگی شبکه‌های عصبی مستقل از مختصات ما فضاهایی از میدان‌های ویژگی هستند، یعنی پرش‌هایی از این بندل‌های بردار ویژگی. بندل‌های فیبر به طور کلی در بخش ۱.۶ مور می‌شوند. بخش ۲.۶ بندل مماس TM و بندل چارچوب FM را مورد بحث قرار می‌دهد. G -ساختارها GM که زیرمجموعه‌هایی از چارچوب‌های مرتع هستند که توسط ساختار هندسی داده شده بر روی خمینه متمایز می‌شوند، در بخش ۳.۶ معرفی می‌شوند. G -بندل‌های مرتبه، از جمله بندل‌های بردار ویژگی A ، از G -ساختار ساخته می‌شوند. بخش ۴.۶ جزئیات تسهیم‌های محلی (گیج‌ها) $, GM, FM, TM$ و A را ارائه می‌دهد، که مختصات را دوباره معرفی می‌کند و فرمول‌بندی بخش ۳ را بازیابی می‌کند. تبدیل متقابل میدان‌های ویژگی تسهیم‌شده با ضرایب بردار مماس و چارچوب‌های مرتع تسهیم‌شده از این

رو از فرمول‌بندی مستقل از مختصات از طریق G بندل‌های مرتبط به دست می‌آید. بخش ۵.۶ انتقال‌دهنده‌های موازی بر روی بندل‌های مرتبط را مورد بحث قرار می‌دهد، به ویژه اینکه چگونه آن‌ها یکدیگر را القا می‌کنند. تمام مفاهیم ارائه شده در اینجا در هندسه دیفرانسیل به خوبی ثابت شده‌اند و به راحتی در ادبیات یافت می‌شوند [۴۹]. سه‌م مارائه یک توضیح جامع است که بین نظریه ریاضی و کاربرد آن در یادگیری عمیق هندسی پل می‌زند.

۱.۶ مقدمه‌ای کوتاه بر کلاف‌های تاری

به طور شهودی، یک کلاف تاری را می‌توان فضایی در نظر گرفت که با گرفتن یک فضای دیگر موسوم به فضای پایه، در مورد ما خمینه M ، و چسباندن فضای دیگر F موسوم به تار، به هر یک از نقاط آن ساخته می‌شود. یک مثال بدیهی، حاصلضرب مستقیم $M \times F$ خواهد بود. با این حال، تارها به طور کلی می‌توانند به روشنی پیچ‌خورده به هم متصل شوند، به طوری که کلاف حاصل از نظر توپولوژیکی با یک حاصلضرب متفاوت باشد.

به عنوان مثال، فرض کنید فضای پایه دایره $S^1 = [-1, 1] \times [1, -1]$ باشد. حاصلضرب مستقیم آنها تار، پاره خط $F = [1, -1] \times S^1$ یک استوانه را تشکیل می‌دهد؛ به شکل ۳۱ (چپ) مراجعه کنید. در مقابل، اگر تارها به گونه‌ای چسبانده شوند که پس از یک دور کامل حول دایر، "وارونه" شوند، نوار موبیوس به دست می‌آید که یک کلاف تاری غیربدیهی است و از نظر توپولوژیکی با استوانه تفاوت دارد، به شکل ۳۱ (راست) مراجعه کنید.^{۴۹} توجه داشته باشید که نوار موبیوس به صورت محلی شبیه به حاصلضرب مستقیم $U \times F$ از یک جزء خطی $S^1 \subseteq U$ با تار F است. همانطور که در ادامه بحث می‌شود، کلاف‌های تاری طبق تعریف همیشه می‌توانند به صورت محلی به حاصلضرب‌های تاری علاوه‌مندیم زیرا آنها امکان توصیف سراسری



شکل ۳۱: یک استوانه و یک نوار موبیوس. هر دو کلاف، دایره S^1 را به عنوان فضای پایه و پاره خط‌های $[1, -1]$ را به عنوان تار مشترک دارند، با این حال، ساختار توپولوژیکی آنها به واسطه یک پیچش در تارها متفاوت است.

(tex.stackexchange.com) میکنند. همان‌روی خمینه‌های افزایش می‌شوند. به عنوان مثال، یک میدان باد روی $M = S^3$ یک میدان باد روی $T_p M$ از M یک بردار مماس در $T_p M$ نسبت می‌دهد. کلاف تاری متناظر، کلاف مماس است که تمام فضاهای مماس را به هم متصل می‌کند و بنابراین به عنوان یک کلاف تاری با فضای پایه $S^3 = T_p M$ و تار $M \cong \mathbb{R}^d$ نسبت می‌شود. مشابه تارهای نوار موبیوس، فضاهای مماس یک خمینه خمیده به طور کلی به روشنی کانونی به هم متصل نیستند، بلکه ذاتاً نسبت به یکدیگر پیچ خورده‌اند. بنابراین، کلاف مماس به طور کلی از نظر توپولوژیکی با یک حاصلضرب متمایز است، یعنی $TM \times \mathbb{R}^d \not\cong M \times \mathbb{R}^d$. به منظور تعریف میدان‌های برداری ویژگی C -بعدی، ما بعداً کلاف‌هایی با فضای پایه M و فضاهای برداری ویژگی \mathbb{R}^C به عنوان تار در نظر خواهیم گرفت.

کلاف‌های تاری به طور کلی: به طور رسمی، یک کلاف تاری ساختاری (E, M, π, F) است که از فضاهای توپولوژیکی E (فضای کلی)، M (فضای پایه) و F (تار نوعی) و یک نگاشت تصویر پیوسته و پوشاننده آنها که به هر نقطه $p \in E$ تعلق دارد که کلاف تاری به صورت محلی بدیهی شدنی است، به این معنی که برای هر نقطه $p \in M$ یک همسایگی محلی $U \subseteq M$ از p وجود دارد که کلاف، محدود به آن، شبیه به یک حاصلضرب مستقیم $U \times F$ است. بدیهی بودن محلی توسط همسان‌ریختی‌ها $\Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ ^{۵۰} است. Ψ فرمول‌بندی می‌شود که نمودار جابجایی زیر را برآورده می‌کند:

$$E \supseteq \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\Psi} U \times F \\ \downarrow \pi \qquad \swarrow \text{proj}_1 \\ M \supseteq U \quad , \quad (129)$$

یعنی،

$$\pi = \text{proj}_1 \circ \Psi , \quad (130)$$

که در آن $U \times F \rightarrow U \times F$ proj_1 نگاشت تصویر طبیعی روی عامل اول را نشان می‌دهد. کلافی که به صورت سراسری با حاصلضرب همسان‌ریخت باشد، بدیهی نامیده می‌شود. کلاف‌ها اغلب به طور خلاصه به صورت $E \xrightarrow{\pi} M$ یا فقط E نوشته می‌شوند و تار نوعی و فضای پایه به طور ضمنی فرض می‌شوند. از آنجا که ما میدان‌های چارچوب هموار را در نظر می‌گیریم، فرض می‌کنیم E ، M و F خمینه‌های هموار و π و Ψ ^{۵۱} نگاشت‌های هموار (دیفونورفیسم) باشند.

^{۴۹} برای جلوگیری از سردرگمی، تأکید می‌کنیم که این مثال، نوار موبیوس را به عنوان یک کلاف تاری با فضای پایه (خمینه) $S^1 = M$ در نظر می‌گیرد. در مقابل، تمام شکل‌های قبلی که شامل نوار موبیوس بودند، آن را به عنوان فضای پایه (خمینه) M برای کانولوشن در نظر می‌گرفتند.

^{۵۰} علاوه بر این، باید اشاره کنیم که پیکان‌های نشان داده شده در شکل فقط برای تأکید بر پیچش در نوار موبیوس هستند. آنها به معنای جهت چسباندن مانند نمودارهای جنساندن نیستند.

^{۵۱} یک همسان‌ریختی یک یکریختی توپولوژیکی است، یعنی یک نگاشت پیوسته و معکوس‌پذیر بین فضاهای توپولوژیکی با معکوس پیوسته.

بدیهی بودن محلی $E \xrightarrow{\pi} M$ ایجاد می‌کند که تصویر معکوس $(\pi^{-1}(p) = p \in M)$ از هر نقطه E_p که تار روی p نامیده می‌شود، با تار $\psi_p : E_p \rightarrow F$ دیفرانسیل باشد. همانند بخش ۳، ما دیفرانسیل‌های را که تارها روی نقاط مختلف را با تار نوعی یکی می‌دانند با نشان می‌دهیم. بدیهی سازی‌های محلی در این صورت بر حسب این دیفرانسیل‌های ψ_p به صورت زیر داده می‌شوند:

$$\Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F, \quad e \mapsto (\pi(e), \psi_{\pi(e)}(e)). \quad (131)$$

اگر تار نوعی F و تارهای E_p روی p ساختار اضافی داشته باشند، لازم است که دیفرانسیل‌های $\psi_p : E_p \rightarrow F$ این ساختار را حفظ کنند، یعنی یکریختی باشند.^{۴۲} به عنوان مثال، اگر F و ساختار فضای برداری داشته باشند، آنگاه ψ_p باید خطی باشد.

به طور کلی، انتخاب خاص بدیهی‌سازی‌های محلی (یا دیفرانسیل‌های Ψ^A) روی U به طور کانونی توسعه کلاف مشخص نمی‌شود. بنابراین باید انتخاب‌های مختلف (پیمانه‌ها) و توابع گذار (تبديلات پیمانه) بین آنها را در نظر گرفت. برای دقیق کردن این موضوع، دو همسایگی بدیهی‌سازی همپوشان U^A و U^B را با بدیهی‌سازی‌های محلی Ψ^A و Ψ^B در نظر بگیرید. از معادله (۱۳۱) نتیجه می‌شود که گذار بین هر دو بدیهی‌سازی محلی روی $U^{AB} := U^A \cap U^B \neq \emptyset$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\Psi^B \circ (\Psi^A)^{-1} : U^{AB} \times F \rightarrow U^{AB} \times F, \quad (p, f) \mapsto \left(p, [\psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}] (f) \right) =: (p, g_p^{BA} \triangleright f) \quad (132)$$

که در آن ما به طور ضمنی توابع گذار هموار را تعریف کردیم:^{۴۳}

$$g^{BA} : U^{AB} \rightarrow \text{Aut}(F), \quad p \mapsto g_p^{BA} := \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1} \quad (133)$$

و عمل چپ آنها

$$\blacktriangleright : \text{Aut}(F) \times F \rightarrow F, \quad (g_p^{BA}, f) \mapsto g_p^{BA} \blacktriangleright f := [\psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}] (f). \quad (134)$$

روی تار نوعی F مقایسه کنید با معادلات (۷) و (۶). برای اینکه ببینیم عامل اول در معادله (۱۳۲) در واقع با همانی داده می‌شود، توجه داشته باشید که برای هر $p \in U^{AB}$ و هر $f \in F$ ، اعمال مکرر معادله (۱۳۰) ایجاد می‌کند: $[\text{proj}_1 \circ \Psi^B \circ (\Psi^A)^{-1}] (p, f) = \text{proj}_1 (p, f) = p$. نتیجه $[\pi \circ (\Psi^A)^{-1}] (p, f) = \text{proj}_1 (p, f) = p$. معادله (۱۲۹) به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id} \times g^{BA} \blacktriangleright & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ U^{AB} \times F & \xleftarrow{\Psi^A} & \pi^{-1}(U^{AB}) & \xrightarrow{\Psi^B} & U^{AB} \times F \\ & \searrow \text{proj}_1 & \downarrow \pi & \swarrow \text{proj}_1 & \\ & & U^{AB} & & \end{array} \quad (135)$$

محدود به یک نقطه $p \in U^{AB}$ و برای حالت خاص کلاف مماس (که در ادامه تعریف می‌شود)، این نمودار با نمودار در معادله (۸) و نسخه گرافیکی آن در شکل ۱۴ مطابقت دارد.

طبق تعریف، توابع گذار در معادله (۱۳۳) سه شرط زیر را برآورده می‌کنند:^{۴۴}

$$i) \quad g_p^{AA} = e \quad \forall p \in U^A \quad (136)$$

$$ii) \quad g_p^{BA} = (g_p^{AB})^{-1} \quad \forall p \in U^A \cap U^B \quad (137)$$

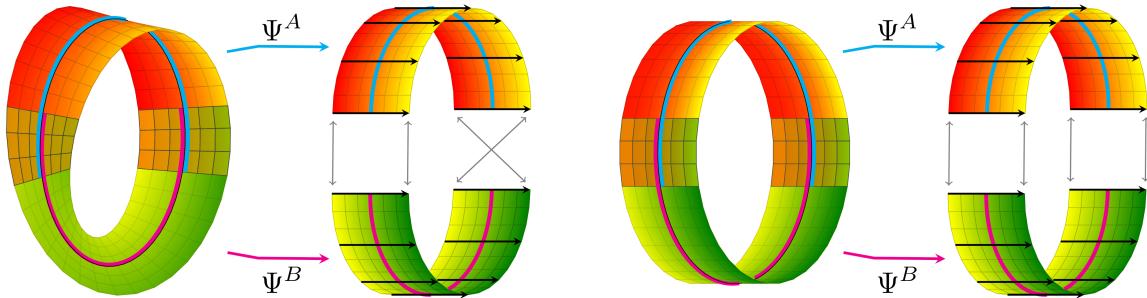
$$iii) \quad g_p^{CB} g_p^{BA} = g_p^{CA} \quad \forall p \in U^A \cap U^B \cap U^C \quad (\text{شرط همزنجیر}) \quad (138)$$

طبق قضیه ساخت کلاف تاری، هر کلاف تاری را می‌توان به طور کامل و سراسری بر حسب یک اطلس $\mathcal{A} = \{(U^X, \Psi^X) \mid X \in \mathfrak{X}\}$ از بدیهی‌سازی‌های محلی (U^X, Ψ^X) مشخص کرد که M را می‌پوشاند و توابع گذار آنها معادلات (۱۳۶)، (۱۳۷) و (۱۳۸) را برآورده می‌کنند (در اینجا \mathfrak{X} یک مجموعه اندیس را نشان می‌دهد). می‌توان بدیهی‌سازی‌های منفرد را به گونه‌ای تصور کرد که توسعه نگاشته‌های گذار به هم چسبیده‌اند، که در شکل ۳۲ به تصویر کشیده شده است. توجه داشته باشید که این مشابه توصیف سراسری یک خمینه بر حسب یک اطلس از چارت‌های محلی است.

^{۴۲} به طور جایگزین، فرض کنید F ساختاری دارد که توسعه توابع گذار $(\psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1} = g^{BA}(p) \in \text{Aut}(F))$ حفظ می‌شود (پاراگراف بعدی را ببینید). سپس بدیهی‌سازی‌های $E_p \rightarrow F$ به طور سازگار ساختار F را روی E_p (الا می‌کنند و به طور خودکار یکریختی هستند).

^{۴۳} گروه خودریختی‌های $\text{Aut}(F)$ یک فضای F از تمام نگاشته‌های معکوس‌پذیر و حافظ ساختار (یکریختی‌ها) از F به خودش تشکیل شده است. به عنوان مثال، اگر $F = \mathbb{R}^n$ یک فضای برداری باشد، گروه خودریختی، گروه خطی عام $\text{GL}(n)$ است که از تمام ماتریس‌های معکوس‌پذیر $n \times n$ تشکیل شده است.

^{۴۴} شرایط (i) و (ii) از شرط همزنجیر (iii) نتیجه می‌شوند اما اغلب به طور صریح بیان می‌شوند.



شکل ۳.۲: توصیف استوانه و نوار موبیوس بر حسب اطلس‌های G که هر کدام از دو بدیهی‌سازی محلی تشکیل شده‌اند. چپ: از آنجا که استوانه یک کلاف بدیهی است، تمام توابع گذار را می‌توان به عنوان نگاشته‌های همانی انتخاب کرد به طوری که گروه ساختار به گروه بدیهی $G = \{e\}$ کاهش یابد. برخلاف وضعیت به تصویر کشیده شده، امکان انتخاب یک بدیهی‌سازی سراسری و واحد وجود دارد. راست: توبولوژی نوار موبیوس توابع گذار را در یکی از همپوشانی‌ها مجبور می‌کند که تارها را به روشنی وارونه به هم پیگبانند. بنابراین گروه ساختار را نمی‌توان بیشتر از گروه $\mathcal{R} = G$ که بازتاب تارها را مدل می‌کند، کاهش داد. بنابراین بدیهی‌سازی‌های سراسری برای نوار موبیوس وجود ندارد. توجه داشته باشید که پیکان‌های روی نوار موبیوس را نباید با پیکان‌های نمودارهای چسباندن اشتباه گرفت، یعنی پیچش، بردارها را در یکی از برش‌ها در جهت مخالف می‌چسباند.

کلافهای برداری: چندین مفهوم خاص‌تر از کلافهای تاری وجود دارد که ساختار ریاضی اضافی دارند. یک مثال مهم کلافهای برداری هستند که همانطور که از نامشان پیداست، کلافهایی هستند که از فضاهای برداری متصل به یک خمینه تشکیل شده‌اند. به طور رسمی، یک کلاف برداری (حقیقی) از رتبه k یک کلاف $(E, M, \pi, \mathbb{R}^k)$ با تار نوعی \mathbb{R}^k و تارهای $E_p \cong \mathbb{R}^k$ روی p است. به طوری که طوری که بدیهی‌سازی‌های محلی به ازای هر تار، یکریختی‌های فضای برداری (نگاشته‌های خطی) هستند. توابع گذار $\psi_p : \mathbb{R}^k \rightarrow E_p$ در این صورت مقادیری در گروه خطی عام می‌گیرند.

به طور جایگزین، با داشتن تار \mathbb{R}^k و یک اطلس از بدیهی‌سازی‌های محلی که توابع گذار آن مقادیری در $\text{Aut}(\mathbb{R}^k) = \text{GL}(k)$ می‌گیرند، یک ساختار فضای برداری برای E_p با قرار دادن

$$\alpha v + \beta w := (\psi_p^A)^{-1}(\alpha \psi_p^A(v) + \beta \psi_p^A(w)) \quad \forall v, w \in E_p, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (13.9)$$

برای یک پیمانه دلخواه $\psi_p^A : E_p \rightarrow \mathbb{R}^k$ از اطلس $\text{GL}(k)$ القا می‌شود. اینکه ساختار فضای برداری به طور سازگار تعریف شده است واضح است زیرا

$$\begin{aligned} & (\psi_p^B)^{-1}(\alpha \psi_p^B(v) + \beta \psi_p^B(w)) \\ &= (\psi_p^A)^{-1}((g_p^{BA})^{-1}(\alpha g_p^{BA} \psi_p^A(v) + \beta g_p^{BA} \psi_p^A(w))) \\ &= (\psi_p^A)^{-1}(\alpha \psi_p^A(v) + \beta \psi_p^A(w)) \end{aligned} \quad (14.0)$$

همان نتیجه را به دست می‌دهد. توجه داشته باشید که مرحله آخر نیازمند خطی بودن $(g_p^{BA})^{-1}$ است. پیمانه‌های ψ_p^A یا ψ_p^B در این صورت به طور خودکار یکریختی‌های فضای برداری هستند. مهم‌ترین مثال‌ها برای ما کلاف مماس و کلافهای برداری ویژگی هستند که در بخش‌های بعدی معرفی می‌شوند.

G -کلافها بسته به توبولوژی کلاف، ممکن است بتوان یک اطلس از بدیهی‌سازی‌های محلی \mathcal{X} تعريف کرد که توابع گذار آن به یک زیرگروه $G \leq \text{Aut}(F)$ محدود شده‌اند، یعنی برآورده می‌کنند:

$$g_p^{BA} \in G \quad \text{برای تمام } A, B \in \mathcal{X} \quad p \in U^A \cap U^B. \quad (14.1)$$

هر چنین اطلسی، اطلس G نامیده می‌شود و G به عنوان گروه ساختار کلاف شناخته می‌شود. دو اطلس G مختلف معادل (یا سازگار) هستند، اگر اجتماع آنها دوباره یک اطلس G باشد. کلافی که به یک کلاس هم‌ارزی از اطلس‌های G مجهز شده باشد، به عنوان یک G -کلاف شناخته می‌شود.^{۴۵}

توبولوژی یک کلاف تعیین می‌کند که گروه ساختار آن تا چه حد قابل کاهش است. به عنوان مثال، استوانه در شکل ۳.۲ (یا هر کلاف بدیهی دیگر) را می‌توان با یک اطلس $\{e\}$ توصیف کرد که فقط از بدیهی‌سازی‌های محلی با توابع گذار همانی تشکیل شده است. این متناظر با کاهش به یک

^{۴۵} کلاس هم‌ارزی تضمین می‌کند که هیچ یک از اطلس‌های G معادل، برتری ندارند. به طور معمول، می‌توان اطلس G ماقسیمال را در نظر گرفت که به عنوان اطلس G منحصر به فردی تعریف می‌شود که هر اطلس G سازگار دیگری در آن موجود است. توجه داشته باشید که یک کلاس هم‌ارزی از اطلس‌های G به طور منحصر به فرد توسط یک اطلس G داده شده، ایجاب می‌شود.

گروه ساختار بدیهی $G = \{e\}$ است. در مقابل، توبولوژی پیچ‌خورده نوار موبیوس ایجاد می‌کند که هر اطلس G شامل توابع گذاری باشد که تارها را با جهت‌گیری وارونه به هم بچسباند؛ به شکل ۳۲ (راست) مراجعه کنید. بنابراین گروه ساختار نوار موبیوس را نمی‌توان بیشتر از گروه $G = \mathcal{R}$ که بازتاب تارها را مدل می‌کند، محدود کرد. روی خمینه‌های ریمانی، گروه ساختار کلاف مماس TM و در نتیجه کلاف‌های برداری ویژگی وابسته، به طور کلی نمی‌تواند بیشتر از یک گروه ساختار متocompact d کاهاش یابند، که این کار روی های ۰۰۰ مستقل از مختصات را در وهله اول انگیزه‌مند کرد.

کلاف‌های G وابسته: دو-کلاف را وابسته به یکدیگر می‌نامند اگر دارای فضای پایه، گروه ساختار و مهمتر از همه، توابع گذار یکسان باشند. کلاف‌های وابسته (E, M, π, F) و $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{F})$ با گروه ساختار G ممکن است در تارهای نوعی خود F و \tilde{F} و بنابراین در عمل چپ $\tilde{F} \rightarrow F$ و $\tilde{F} \rightarrow \tilde{F}$ گروه G بر روی تار مربوطه متفاوت باشند. با داشتن دو اطلس G و $(U^X, \Psi^X) | X \in \mathfrak{X}$ از کلاف‌ها روی همان پوشش باز M ، شرط هم‌ارزی توابع گذار (تا حد عمل‌های چپ مختلف) به این معنی است:

$$\Psi^B \circ (\Psi^A)^{-1} = (\text{id} \times g^{BA} \blacktriangleright) \iff \tilde{\Psi}^B \circ (\tilde{\Psi}^A)^{-1} = (\text{id} \times g^{BA} \blacktriangleright) \quad (142)$$

به طور شهودی، تارهای نوعی F و \tilde{F} از E و \tilde{E} به روی یکسان روی M "به هم چسبیده‌اند".

یک مثال مهم از کلاف‌هایی که به صورت GL(d)-وابسته به یکدیگر هستند، کلاف مماس TM ، گروه هم‌مماس T^*M ، هر کلاف تانسوری $T_s^r M$ و کلاف چارچوب مماس FM هستند (اولی و آخری در بخش ۲۶ معرفی شده‌اند). وابستگی این کلاف‌ها در این واقعیت منعکس می‌شود که مؤلفه‌های آنها نسبت به پایه‌های انتخاب شده مطابق با همان تبدیل پیمانه شوند (مثلًاً ژاکوبین $g_{\mu\nu}^{BA} = \frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\nu^A}$ ، به پیوست آ مراجعه کنید). عمل‌های مختلف یک تبدیل پیمانه بر روی تارهای مربوطه در این مثال به عنوان تبدیل پادردا (T^*M)، تبدیل هموردا (TM)، تبدیل r -بار پادردا و s -بار هموردا ($T_s^r M$) و دوباره، تبدیل هموردا (FM)، به ترتیب، مشخص می‌شوند. ما بعداً ساختار G ، کلاف مماس GM و کلاف‌های برداری ویژگی A را به عنوان کلاف‌های G وابسته معرفی خواهیم کرد. وابستگی در این مورد از این واقعیت ناشی می‌شود که تغییرات چارچوب‌های مرجع در GM منجر به تبدیل هم‌مان ضرایب بردار مماس و ضرایب بردار ویژگی می‌شود. می‌خواهیم اشاره کنیم که هر کلاف وابسته‌ای علاوه بر این به یک کلاف اصلی G منحصر به فرد (که در پاراگراف بعدی تعریف می‌شود) وابسته است. در مقابل، هر کلاف وابسته را می‌توان از کلاف اصلی وابسته مربوطه ساخت ما از این ساختار به طور گسترده برای تعریف کلاف‌های برداری ویژگی در بخش ۳.۶ استفاده خواهیم کرد.

کلاف‌های اصلی G : یک کلاف تاری $(P, M, \pi, G, \triangleleft)$ را یک کلاف اصلی (هموار) G می‌نامند اگر ۱) تار نوعی آن با گروه ساختار آن G منطبق باشد و ۲) به یک عمل راست (هموار) $\triangleleft : P \times G \rightarrow G$ ، $(p, g) \mapsto p \triangleleft g$ (۱۴۳)

محجز باشد که تارها را حفظ می‌کند، یعنی،

$$\pi(p \triangleleft g) = \pi(p) \quad \forall p \in P, g \in G \quad (144)$$

و به صورت تعدی‌پذیر و آزاد روی آنها عمل می‌کند.^{۴۶} دو شرط آخر (عدی‌پذیری و آزادی) با هم ایجاد می‌کنند که تارهای یک کلاف اصلی G ، G -تورسور (یا فضاهای همگن اصلی G) باشند، که به طور شهودی به این معناست که آنها " شبیه به G " هستند اما بدون هیچ مبدأ یا عنصر همانی مشخصی ارائه می‌شوند.^{۴۷} بدیهی سازی‌های محلی $\Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ باید عمل راست G را حفظ کنند، یعنی هموردا راست G باشند:

$\Psi(p \triangleleft g) = \Psi(p)(\text{id} \times g) = \psi_{\pi(p)}(p \triangleleft g) = \psi_{\pi(p)}(p \cdot g) \quad \forall p \in P, g \in G,$ (۱۴۵)
که در آن g : ضرب راست کانونی با عناصر گروه روی تار نوعی G را نشان می‌دهد. این، نمودار زیر بسط می‌دهد:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi} & U \times G \\ \downarrow \triangleleft g & & \uparrow (\text{id} \times \cdot g) \\ \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi} & U \times G \\ \downarrow \pi & \nearrow \text{proj}_1 & \\ U & & \end{array}, \quad (146)$$

^{۴۶} یک عمل گروهی (راست) $X : (x, g) \mapsto x \cdot g$ برای هر نقطه دیگر نگاشت، یعنی اگر $x, y \in X$ و $g \in G$ باشد به طوری که $y = x \cdot g$ باشد، یعنی اگر تنها عمل عنصر همانی p را ناورده باقی بگذارد. توجه داشته باشید که همین گزاره‌ها را می‌توان برای عمل‌های چپ تبیز بیان کرد.^{۴۷} به طور رسی، یک G -تورسور (راست) P شرط $P \times P \cong P \times G \cong P$ را برآورده می‌کند که در آن یک‌یاختی توسعه $(p, g) \mapsto (p, p \cdot g)$ داده می‌شود. این شرط ایجاد می‌کند که یک عنصر گروهی منحصر به فرد وجود داشته باشد که هر دو نقطه در تورسور را به هم متصل کند.

که لازم است برای هر $g \in G$ جابجا باشد.

کلافهای اصلی G برای مطالعه کلافهای عمومی G از اهمیت زیادی برخوردارند. به طور خاص، هر کلاف G (برای E, M, π_E, F) به یک کلاف اصلی G (منحصر به فرد) $(P, M, \pi_P, G, \triangleleft)$ روی M وابسته است و هر کلاف G وابسته را می‌توان از P ساخت. در بخش‌های بعدی، ما کلاف چارچوب GM و FM را به عنوان نمونه‌های خاصی از کلافهای اصلی ارائه خواهیم داد، که ادعاهای مطرح شده در اینجا را کمتر انتزاعی کرده و برخی از پیامدهای آنها را آشکار می‌سازد.

برش‌ها و میدان‌ها: میدان‌های هموار با مقدار F روی M به عنوان برش‌های هموار σ از یک کلاف $M \xrightarrow{\pi} E$ با تار F فرمول‌بندی می‌شوند. یک برش هموار در این صورت به عنوان یک نگاشت هموار $\sigma : M \rightarrow E$ تعریف می‌شود که به هر نقطه p از فضای پایه یک عنصر در تار E_p روی p نسبت می‌دهد، یعنی شرط $\sigma = \text{id}_M \circ \pi$ را برآورده می‌کند، که نمودار جابجایی زیر آن را به تصویر می‌کشد:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\sigma} & E & \xrightarrow{\pi} & M \\ & \downarrow & & & \uparrow \\ & & \text{id}_M & & \end{array} \quad (147)$$

یک مثال مهم میدان‌های برداری مماس هستند که به عنوان برش‌های $v : M \rightarrow TM$ مدل می‌شوند که به هر نقطه p در M یک بردار مماس $v(p) \in T_p M$ نسبت می‌دهند. توجه داشته باشید که نگاشت تصویر، به طبیعت خود، معکوس‌نابذیر است، به طوری که $\sigma \circ \pi \neq \text{id}_E$. بنابراین نمودار زیر به طور کلی جابجا نمی‌شود:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\pi} & M & \xrightarrow{\sigma} & E \\ & \varnothing & & & \uparrow \\ & & \text{id}_E & & \end{array} \quad (148)$$

در مواردی که در ادامه یک نمودار جابجا نباشد، که بیشتر در مورد برش‌ها صدق می‌کند، ما این موضوع را با افزودن نماد \triangleleft به صورت بصری تأکید می‌کنیم. برش‌های هموار لزوماً به صورت سراسری وجود ندارند اما همیشه می‌توانند روی همسایگی‌های بدیهی‌ساز $U \subseteq M$ تعریف شوند. از طریق یک بدیهی‌سازی محلی، یک برش محلی را می‌توان با یک تابع $F : U \rightarrow \tilde{E}$ با قرار دادن $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{F})$ نشان می‌دهیم در حالی که فضای برش‌های محلی به صورت $\Gamma(U, E)$ نوشته می‌شود.

ریختهای کلاف: ریختهای (نگاشت‌ها) در رده کلافهای تاری، ریختهای کلاف یا نگاشتهای کلاف نامیده می‌شوند. آنها با دیفئو‌مورفیسم‌های صرف بین فضاهای کلی تفاوت دارند، زیرا علاوه بر آن ملزم به حفظ ساختار کلاف هستند، یعنی تارها را به تارها نگاشت کنند. به طور کلی، یک نگاشت کلاف هموار بین دو کلاف تاری هموار (E, M, π, F) و $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{F})$ یک نگاشت هموار $\phi : E \rightarrow \tilde{E}$ است که ϕ بین فضاهای کلی است، به طوری که یک نگاشت هموار دوم $M \xrightarrow{\hat{\phi}} \tilde{M}$: $\hat{\phi}$ بین فضاهای پایه وجود دارد که شرط $\hat{\phi} \circ \pi = \tilde{\phi} \circ \pi$ را برآورده می‌کند، یعنی نمودار زیر باید جابجا باشد:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & \tilde{E} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\ M & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \tilde{M} \end{array} \quad (149)$$

نگاشت روی فضای پایه تضمین می‌کند که ریخت کلاف، تارها در $p \in M$ را به تارهایی در $\hat{\phi}(p) \in \tilde{M}$ نگاشت می‌کند به جای اینکه آنها را "از هم بگسلند". تعمیم‌های واضح به یکریختی‌های کلاف و خودریختی‌های کلاف وجود دارد. به عنوان مثال، یکریختی‌های کلاف ایجاب می‌کنند که ϕ و $\hat{\phi}$ معکوس‌نابذیر باشند، یعنی دیفئو‌مورفیسم باشند (و ساختارهای دیگر را در صورت تعریف حفظ کنند).

نوع خاص نگاشت کلاف تحت بررسی را می‌توان با خواستن الزامات اضافی محدودتر کرد. یک ریخت M کلاف بین دو کلاف (E, M, π, F) و $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{F})$ را همان فضای پایه M ملزم است که تارهای E_p را به تارهای \tilde{E}_p روی هر $p \in M$ نگاشت کند، یعنی $\hat{\phi} = \text{id}_M$. بر حسب یک نمودار جابجایی این به صورت زیر خوانده می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & \tilde{E} \\ \pi \searrow & & \swarrow \tilde{\pi} \\ & M & \end{array} \quad (150)$$

از این دیدگاه، ما بدیهی‌سازی کلاف در نمودار (۱۲۹) را به عنوان یک ریخت U کلاف Ψ بین کلافهای بدیهی (U^{-1}, U) و $F \times U$ روی U شناسایی می‌کنیم.

اگر تارها ساختار اضافی داشته باشند، معمولاً لازم است که این ساختار توسط نگاشت کلاف حفظ شود. به عنوان مثال، ریخت‌های کلاف برداری ϕ بین $(E, M, \tilde{\pi}, \mathbb{R}^{\tilde{k}})$ و $(E, M, \pi, \mathbb{R}^k)$ ملزم به حفظ ساختار فضای برداری روی تارها هستند و بنابراین به نگاشت‌های خطی به ازای هر تار $\phi|_p : E_p \rightarrow \tilde{E}_{\phi(p)}$ محدود می‌شوند. مشابه‌اً، ریخت‌های کلاف اصلی ملزم به حفظ ویژگی تارها به عنوان تورسوارهای راست G هستند، یعنی هموردای راست G باشند. با داشتن دو کلاف اصلی $(P, M, \pi, G, \triangleleft)$ و $(\tilde{P}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{G}, \triangleleft)$ و یک هم‌ریختی گروهی $\theta : G \rightarrow \tilde{G}$ ، یک ریخت کلاف اصلی ملزم است که نمودار زیر را برای هر $g \in G$ جایجا کند:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\phi} & \tilde{P} \\ \uparrow \triangleleft g & & \uparrow \tilde{\triangleleft} \theta(g) \\ P & \xrightarrow{\phi} & \tilde{P} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \tilde{\pi} \\ M & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \tilde{M} \end{array} \quad (151)$$

بدیهی‌سازی محلی کلاف‌های اصلی در نمودار (۱۴۶) بدین ترتیب به عنوان یک ریخت U کلاف اصلی Ψ بین $(U)^{-1} \times G$ و U دیده می‌شود که در آن هم‌ریختی گروهی $g \mapsto \theta(g)$ با همانی روی G داده می‌شود.

ریخت‌های کلاف از اهمیت ویژه‌ای در بخش ۸ بخوددارند، جایی که آنها تبدیل کلاف‌ها و میدان‌های ویژگی را تحت عمل ایزومنتری‌ها توصیف می‌کنند. ثابت می‌شود که های ۱۰۰ مستقل از مختصات نسبت به این عمل‌ها بر روی کلاف‌ها و برش‌هایشان هموردا هستند. برای پیش‌زمینه بیشتر در مورد کلاف‌های تاری به طور کلی به مراجع [۴۷] مراجعه می‌کنیم.

۲.۶ کلاف مماس TM و کلاف چارچوب

هر خمینه دیفرانسیل‌پذیر (و بنابراین هر خمینه ریمانی) M به طور کانونی به کلاف مماس خود TM و کلاف چارچوب (عام) FM مجهز است، که از تمام چارچوب‌های مرجع محلی فضاهای مماس تشکیل شده است. این دو کلاف به طور طبیعی به یکدیگر وابسته‌اند و گروه ساختار آنها به طور پیشینی توسط $\text{Aut}(\mathbb{R}^d) = \text{GL}(d)$ داده می‌شود. این واقعیت با "بازسازی" از TM از FM خواهد شد که بعداً به ما امکان می‌دهد کلاف‌های برداری ویژگی وابسته را تعریف کنیم. برای جدا کردن واضح مفاهیم معرفی شده و فرضیات انجام شده، ما در اینجا TM و TM را به عنوان کلاف‌های $\text{GL}(d)$ توصیف خواهیم کرد. بخش بعدی ۳.۶ علاوه بر این یک G -ساختار را بر TM و FM تحمیل خواهد کرد که آنها را به عنوان G -کلاف‌ها ثابتی می‌کند. در حالی که کلاف‌ها طبق تعریف به صورت محلی بدیهی‌شدنی هستند، ما در حال حاضر بدیهی‌سازی‌های خاص را مسلم فرض می‌کنیم و تعریف دقیق آنها را به بخش ۴.۶ موکول می‌کنیم.

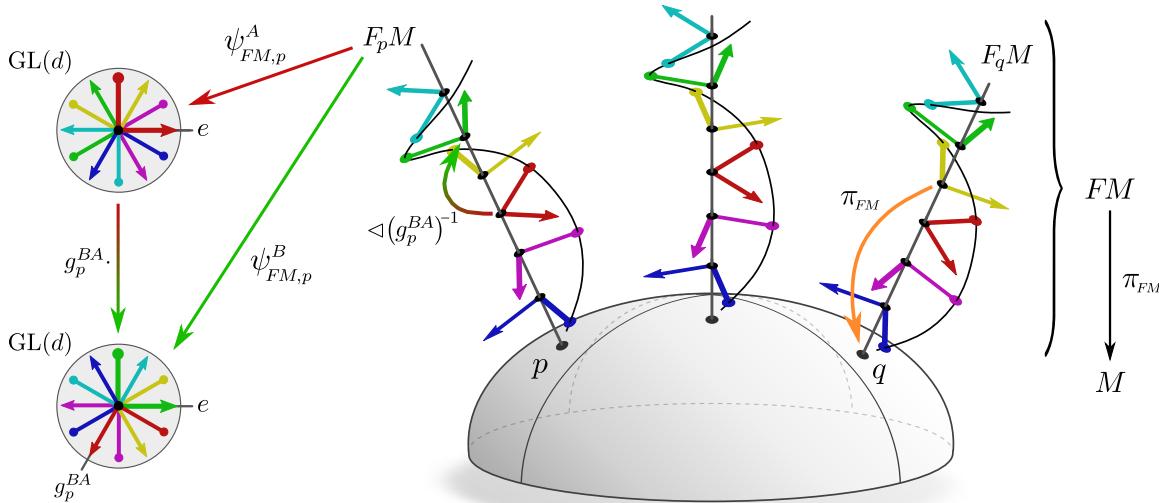
کلاف مماس TM : هر خمینه هموار M با مجموعه‌ای از فضاهای مماس $T_p M \cong \mathbb{R}^d$ همراه است. اجتماع مجازی آنها^{۴۸}

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M, \quad (152)$$

به همراه یک ساختار هموار و نگاشت تصویر داده شده به طور کانونی، یک کلاف تاری هموار را تعریف می‌کند که به عنوان کلاف مماس شناخته می‌شود. نگاشت تصویر $M \rightarrow TM$: π_{TM} در این صورت با انتخاب بدیهی $p = v \in T_p M$ برای $v \in U$ داده می‌شود. همانطور که در پیوست آ استنتاج شده است، بدیهی‌سازی‌های محلی $\Psi_{TM} : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^d$ از کلاف مماس به طور کانونی توسط چارت‌های $U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^d$ از خمینه $x : TM$ شوند. بنابراین می‌توانیم بدیهی‌شدنی بودن TM را مسلم فرض کرده و بحث در مورد آنها را به بخش ۴.۶ موقول کنیم. یک ساختار هموار روی TM از ساختار هموار M از طریق بدیهی‌سازی‌های فوق‌الذکر از چارت‌ها القا می‌شود. ما از جزئیات فنی این ساختار صرف نظر کرده و خواننده علاقه‌مند را به مراجع [۴۹] ارجاع می‌دهیم.

کلاف مماس تعریف شده بدین ترتیب یک کلاف برداری است زیرا تار نوعی آن \mathbb{R}^d یک فضای برداری مماس، که به عنوان مثال یک جریان روی M را توصیف می‌کنند، به عنوان برش‌های $M \rightarrow TM$: σ از کلاف مماس فرمول‌بندی می‌شوند. برش‌های سراسری هموار از کلاف‌های برداری همیشه وجود دارند؛ یک مثال استاندارد برش از $T_p M$ را به هر $p \in M$ نسبت می‌دهد. می‌خواهیم تأکید کنیم که فضاهای مماس و بنابراین کلاف مماس بدون ارجاع به چارچوب‌های مختصاتی تعریف می‌شوند، به طوری که برش‌ها میدان‌های برداری را به روشنی مستقل از مختصات توصیف می‌کنند.

^{۴۸} اجتماع مجازی $\{(p, v) \mid v \in T_p M\} = \bigcup_{p \in M} T_p M$ از فضاهای مماس را می‌توان به گونه‌ای تصور کرد که "به یاد می‌آورد" یک بردار $T_p M$ از کدام فضای مماس خاص $T_p M$ سرچشمه می‌گیرد، که برای تعریف نگاشت تصویر π_{TM} ضروری است.



شکل ۳۳: تفسیری گرافیکی از کلاف چارچوب FM روی M و بدیهی سازی‌های آن. تار $T_p M$ روی p به عنوان فضای تمام چارچوب‌های مرجع ممکن تعریف می‌شود. تمام چارچوب‌ها در $F_p M$ توسط نگاشت تصویر π_{FM} به همان نقطه p در M نگاشته می‌شوند که تار به آن متصل است. تارهای با $F_p M$ یکریخت هستند، اما بدون مبدأ ارائه می‌شوند که یک انتخاب چارچوب مرجع از چارچوب مرجع را تمایز کند. پیمانه‌های $\psi_{FM,p}^A : F_p M \rightarrow GL(d)$ یا $\psi_{FM,p}^B : F_p M \rightarrow GL(d)$ که در بخش ۴.۶ در ادامه معرفی می‌شوند، تارها را با $GL(d)$ یکی می‌دانند و در نتیجه یک چارچوب مرجع را مشخص می‌کنند. پیمانه‌های مختلف با تبدیلات پیمانه $(g_p^{BA})^{-1} \in GL(d)$ به هم مرتبط هستند. باید خواننده را در مورد دو تصویر غلط احتمالی هشدار دهیم؛ اولاً، چارچوب‌ها در تارهای مختلف به طور پیشینی به روشنی کافی نمی‌شوند، چیزی که ممکن است رنگ‌های اضافی نشان دهند. ثانیاً، برای به حداقل رساندن شلوغی، تصویر فقط چارچوب‌های راست‌گرد و معتمد را به جای تمام چارچوب‌های مرجع ممکن نشان می‌دهد. همانطور که در بخش ۳.۶ بحث خواهیم کرد، چارچوب‌های معتمد و راست‌گرد نشان داده شده، متاظر با یک G -ساختار GM (یک زیرکلاف اصلی G از FM) برای گروه ساختار $G = SO(2)$ خواهد بود.

پس از معرفی کلاف چارچوب مماس TM در ادامه، به کلاف مماس و ساختار صریح آن به عنوان کلاف $GL(d)$ -وابسته باز خواهیم گشت که بر ماهیت مستقل از مختصات آن تأکید می‌کند. در بخش ۳۶ ما به طور مشابه یک G -کلاف وابسته به یک G -ساختار GM خواهیم ساخت.

کلاف چارچوب FM : فضای چارچوب‌های مرجع محلی تمام فضاهای مماس $T_p M$ ، (کلاف) چارچوب (مماس) را تشکیل می‌دهد. فضاهای چارچوب‌های مرجع (پایه‌های مرتب) فضاهای مماس منفرد $T_p M$ را در نظر بگیرید:

$$F_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ است } T_p M \text{ یک پایه از } \right\} \quad (153)$$

کلاف چارچوب به عنوان اجتماع مجذای آنها $FM := \coprod_{p \in M} F_p M$: $FM \rightarrow M$ که چارچوب‌ها در $F_p M$ را به p می‌فرستد و یک ساختار هموار القا شده از TM تعریف می‌شود. تار نوعی کلاف چارچوب، گروه خطی عام $GL(d) \cong F_p M$ است، یعنی گروه ماتریس‌های معکوس‌پذیر $d \times d$ که ستون‌های مستقل خطی آن را می‌توان به عنوان تعريف‌کننده یک چارچوب از \mathbb{R}^d در نظر گرفت. از آنجا که کلاف چارچوب از کلاف مماس ساخته شده است، بدیهی سازی‌های محلی آن ($\Psi_{FM} : \pi_{FM}^{-1}(U) \rightarrow U \times GL(d)$ بالاصله از بدیهی سازی‌های TM القا می‌شوند؛ به بخش ۴.۶ مراجعه گرافیکی از کلاف چارچوب را نشان می‌دهد).

برش‌های هموار محلی $U \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U) \subseteq FM$ از کلاف چارچوب، نقاط $p \in U$ را به چارچوب‌هایی در $F_p M$ نگاشت می‌کنند. آنها میدان‌های چارچوب هموار محلی را تعریف می‌کنند، یعنی انتخاب‌های هموار متغیر از چارچوب‌های مرجع برای $T_p M$ ، $p \in U$ ، که در شکل ۱۵ به تصویر کشیده شده است. همانطور که در معادله (۴) استدلال شد، یک انتخاب از میدان چارچوب روی U با یک انتخاب از پیمانه یا بدیهی سازی محلی روی U معادل است. این ایجاب می‌کند که میدان‌های چارچوب سراسری تنها در صورتی وجود داشته باشند که FM بدانه باشند. ما این همارزی را با عمق بیشتری در بخش ۴.۶ مورد بحث قرار خواهیم داد.

یک عمل راست تعددی‌پذیر و آزاد بر روی تارهای منفرد $F_p M \cong GL(d)$ از کلاف چارچوب به طور طبیعی توسط تغییر چارچوب‌ها که در معادله (۱۰) تعریف شده است، داده می‌شود [؟]. عمل متاظر

$$\triangleleft : FM \times GL(d) \rightarrow FM, \quad ([e_i]_{i=1}^d, g) \mapsto [e_i]_{i=1}^d \triangleleft g := \left[\sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \quad (154)$$

روی $F_p M$ به عنوان یک کلaf چارچوب را به یک کلaf اصلی $\text{GL}(d)$ تبدیل می‌کند. فقدان مبدأ یا عنصر همانی مردج در تارهای $F_p M$ به عنوان $(\text{GL}(d)$ -تورسورها، ابهام ذاتی چارچوب‌های مردج را معکوس می‌کند.

کلaf TM به عنوان کلaf برداری وابسته به $\text{GL}(d)$: در بخش ۱۱.۳ ما بردارهای مماس در M را بر حسب ضرایب آنها در \mathbb{R}^d نسبت به یک چارچوب مردج بیان کردیم. انتخاب خاص چارچوب‌ها در آنجا بی‌ربط بود زیرا تبدیل ضرایب در معادله (۹) با تبدیل چارچوب‌های مردج در معادله (۱۰) خنشی می‌شود به طوری که $v = \sum_i v_i^A e_i^A = \sum_i v_i^B e_i^B$ نمایش‌های مختصاتی معادل از همان بردار مستقل از مختصات $v \in T_p M$ هستند. با پیروی از این ایده، می‌توان کلaf مماس را از کلaf چارچوب با جفت کردن چارچوب‌های مردج با بردارهای ضریب و گرفتن یک خارج قسمت برای فروکاستن توصیفات اضافی حاصل از بردارهای مماس نسبت به چارچوب‌های مختصات به یک عنصر منحصر به‌فرد، ساخت.

برای ساختن کلaf مماس به این روش، حاصلضرب $FM \times \mathbb{R}^d$ را در نظر بگیرید که می‌توان آن را به عنوان یک کلaf تاری با فضای پایه M و یک تار نوعی $\mathbb{R}^d \times \text{GL}(d)$ دید. این کلaf از جفت‌های چارچوب‌های مردج و ضرایب (متقابلانه تاریتی) تشکیل شده است. با انگیزه از بیان معادل بردارهای مماس در چارچوب‌های مردج مختلف، ما رابطه همارزی را تعریف می‌کنیم:^{۴۹}

$$([e_i]_{i=1}^d, v) \sim_{\text{GL}(d)} ([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}, g \cdot v) \quad \forall g \in \text{GL}(d) \quad (155)$$

روی $FM \times \mathbb{R}^d$. به عنوان یک رابطه همارزی، این رابطه $FM \times \mathbb{R}^d$ را به کلاس‌های همارزی $[[e_i]_{i=1}^d, v]$ افزای می‌کند. فضای این کلاس‌های همارزی، فضای خارج قسمتی $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$ است. نگاشت تصویر

$$\pi_{\sim_{\text{GL}(d)}} : (FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d) \rightarrow M, \quad [[e_i]_{i=1}^d, v] \mapsto \pi_{FM}([e_i]_{i=1}^d), \quad (156)$$

که از کلaf چارچوب القا شده است، $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$ را به یک کلaf تاری با فضای پایه M و تار نوعی \mathbb{R}^d تبدیل می‌کند. توجه داشته باشید که نگاشت تصویر در معادله (۱۵۶) خوش‌تعریف است زیرا مستقل از نماینده کلاس همارزی است، یعنی $\pi_{\sim_{\text{GL}(d)}}\left(([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1})\right) = \pi_{\text{FM}}\left(([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1})\right) = \pi_{\text{FM}}\left(([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}, g \cdot v)\right)$ که در آن ما از این واقعیت استفاده کردیم که عمل راست \triangleleft تارهای FM را حفظ می‌کند. ساختار فضای برداری $FM \times \mathbb{R}^d/\text{GL}(d)$ را به یک کلaf برداری تبدیل می‌کند که ترکیبات خطی در همان تار توسط

$$\alpha [[e_i]_{i=1}^d, v] + \beta [[e_i]_{i=1}^d, w] := [[e_i]_{i=1}^d, \alpha v + \beta w], \quad (157)$$

برای مقادیر دلخواه $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ و $v, w \in \mathbb{R}^d$ تعریف می‌شود. به راحتی می‌توان بررسی کرد که این تعریف مستقل از انتخاب نماینده در هر دو جمله جمع است.

کلaf تعریف شده بدین ترتیب با کلaf مماس یکریخت است،

$$TM \cong (FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d), \quad (158)$$

که در آن یکریختی M -کلaf برداری توسط نگاشت خطی به ازای هر تار

$$\chi : (FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d) \rightarrow TM, \quad [[e_i]_{i=1}^d, v] \mapsto \sum_{i=1}^d v_i e_i \quad (159)$$

داده می‌شود که یک تاپل نماینده از چارچوب و بردار ضریب را از کلاس همارزی گرفته و آنها را به بردار مماس متناظر نگاشت می‌کند. طبق تعریف رابطه همارزی $\sim_{\text{GL}(d)}$ ، این تابع مستقل از انتخاب نماینده است، یعنی $\chi\left(\left(([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}), g \cdot v\right)\right) = \chi\left(\left(\sum_i (g \cdot v)_i ([e_j]_{j=1}^d \triangleleft g^{-1})_i\right)\right) = \sum_i v_i e_i$; ماقایسه کنید با معادله (۱۲). همانطور که در [؟] بحث شد، معکوس این نگاشت با گرفتن یک بردار مماس، تصویر کردن آن بر روی یک چارچوب دلخواه و گرفتن کلاس همارزی به دست می‌آید.

کلaf $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$ طبق ساختار، به FM به عنوان یک کلaf $\text{GL}(d)$ -وابسته، وابسته است، یعنی همان توابع گذار را در $\text{GL}(d)$ دارد که FM دارد، همانطور که در بخش ۴.۶ استنتاج خواهیم کرد. ساختار TM به عنوان خارج قسمت $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$ (بر ماهیت مستقل از مختصات کلaf مماس به روی بسیار شهودی تأکید می‌کند: این ساختار تمام انتخاب‌های ممکن از مختصات دهی‌های فضاهای مماس را در نظر گرفته و با گرفتن یک خارج قسمت، آنها را معادل تلقی می‌کند).

^{۴۹} یک رابطه همارزی روی یک مجموعه X یک رابطه دوتایی است که بازتابی $(x \sim x)$ ، متقابران $(y \sim x)$ و $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ و تراگذری $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$ است. این رابطه یک افزای از X به کلاس‌های همارزی $\{y \in X \mid x \sim y\}$ از عناصر $x \in X$ تعریف می‌کند. فضای کلاس‌های همارزی X/\sim را مجموعه خارج قسمتی X بر \sim می‌نامند.

۳.۶ ساختارهای برداری و بیزگی وابسته \mathcal{A} و کلافهای GM و G

اکنون ما G -ساختارها را به عنوان زیرمجموعه‌های متمایزی از چارچوب‌ها در FM معرفی می‌کنیم که ساختار هندسی اضافی روی M را کدگذاری می‌کنند که باید توسط CNN ‌های مستقل از مختصات رعایت شود. کلاف مماس از طریق یک ساختار کلاف وابسته مشابه با بخش قبل، به عنوان یک G -کلاف وابسته بازمعروفی می‌شود. این رویکرد را می‌توان برای ساخت هر کلاف G -وابسته دیگر تعیین داد، که ما از آن برای تعریف کلافهای برداری و بیزگی \mathcal{A} استفاده می‌کنیم. تمام چنین کلاف‌های ساخته شده‌ای به یکدیگر وابسته‌اند، یعنی فقط در تار خود F تفاوت دارند اما فضای پایه M ، گروه ساختار G و توابع گذار g^{BA} بین همسایگی‌های بدیهی ساز را مشترکاً دارند. بدیهی سازی‌های محلی کلاف‌ها و تبدیلات پیمانه متناظر آنها در بخش بعدی ۴.۶ به تفصیل مورد بحث قرار می‌گیرد.

G -ساختارها: همانطور که در بخش ۱.۳ و جدول ۱ بحث شد، اغلب ممکن است با یک زیرمجموعه متمایز از چارچوب‌های مرجع کار کرد که توسط عمل یک گروه ساختار کاهش‌یافته $G \leq \text{GL}(d)$ به هم مرتبط هستند. این موضوع با بحث در مورد چند مثال قبل از رسیدن به یک تعریف فنی در ادامه، به بهترین وجه قابل درک است. به عنوان مثال، یک محدودیت به چارچوب‌های متعامد

$$O_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ است } \eta \text{ نسبت به } T_p M \text{ یک پایه متعامد از } \{e_1, \dots, e_d\} \right\} \cong d \quad (160)$$

منجر به یک زیرکلاف اصلی OM از FM با گروه ساختار d می‌شود. توجه داشته باشید که تعامد چارچوب‌های مرجع توسط متريک $\|\cdot\|$ روی M قضاؤت می‌شود \square بنابراین انتخاب‌های مختلف متريک روی یک خمينه متناظر با زیرمجموعه‌های مختلفی از چارچوب‌های مرجح برای همان گروه ساختار d است. به عنوان مثال دوم، یک انتخاب جهت‌گیری روی یک خمينه جهت‌پذیر را در نظر بگیرید، که امکان مشخص کردن یک مفهوم مرجح از چارچوب‌ها را فراهم می‌کند^۵.

$$GL_p^+ M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ است } \eta \text{ پایه با جهت‌گیری مثبت از } T_p M \right\} \cong GL^+(d) \quad (161)$$

و یک زیرکلاف اصلی متناظر M از $GL^+(d)$ با گروه ساختار (d) . باز هم، دو انتخاب مختلف از جهت‌گیری‌ها متناظر با دو انتخاب مختلف از زیرکلاف‌های چارچوب‌های جهت‌دار متناسب است. ترکیب هر دو شرط برای تعامد و راست‌گردی چارچوب‌ها منجر به یک $SO(d)$ -ساختار با تارهای زیر می‌شود:

$$SO_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ است } \eta \text{ یک پایه با جهت‌گیری مثبت و متعامد از } T_p M \right\} \cong SO(d), \quad (162)$$

می‌توان شکل ۳۳ را به عنوان نمایش دهنده یک (2) - SO -ساختار در نظر گرفت زیرا تنها چارچوب‌های راست‌گرد و متعامد نشان داده شده‌اند (در این صورت تار نوعی $GL(d)$ باید با $SO(2)$ بروجسب‌گذاری شود). انتخاب‌های مختلف از $SO(d)$ -ساختارها یا متناظر با یک دست‌سازی مختلف از چارچوب‌ها، با پاییندی به همان مفهوم تعامد، یا متناظر با یک انتخاب متفاوت از متريک (یا هر دو) است. دقیقاً همین الگو برای فرم‌های حجم (ω روی خمينه‌های جهت‌پذیر M) تکرار می‌شود: آنها امکان مشخص کردن یک مفهوم مرجح از چارچوب‌ها را فراهم می‌کنند

$$SL_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ است } \eta \text{ با حجم واحد نسبت به } T_p M \text{ یک پایه از } \{e_1, \dots, e_d\} \right\} \cong SL(d) \quad (163)$$

و در نتیجه زیرکلاف‌های اصلی SLM از FM با گروه ساختار $SL(d)$. مجموعه خاص چارچوب‌هایی که مرجح هستند در اینجا به انتخاب خاص فرم حجم بستگی دارد. به عنوان آخرین مثال، $\{e\}$ -ساختارها را در نظر بگیرید که متناظر با یک گروه ساختار بدیهی $\{e\} = G = \{e_i\}_{i=1}^d$ هستند و بنابراین در هر نقطه p از یک چارچوب واحد تشکیل شده‌اند. طبق تعریف، $\{e\}$ -ساختارها با میدان‌های چارچوب (هموار) سراسری ($\sigma \in \Gamma(FM)$) معادل هستند:

$$\{e\}_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] = \sigma(p) \right\} \cong \{e\} \quad (164)$$

بنابراین آنها فقط روی خمينه‌های بدیهی وجود دارند. شکل‌های ۴۲ و ۴۲ ب دو انتخاب مختلف از $\{e\}$ -ساختارها $M = \mathbb{R}^n$ روی $\{e\}_p M$ را به تصویر می‌کشند.

تمام این مثال‌ها انتخاب‌های خاصی از G -ساختارها GM را نشان می‌دهند. به طور کلی، یک زیرکلاف اصلی M را نشان می‌دهند. هموار متغیر "هموار متغیر" از زیرمجموعه‌های $G_p M \subseteq F_p M$ که نسبت به \triangleleft برای هر G -تورسورهای راست هستند^۶؟؟^۷ هموار در اینجا می‌تواند با این شرط فرمول‌بندی شود که در اطراف هر چارچوب $[e_i]_{i=1}^d \in G_p M$ یک همسایگی U از p وجود داشته باشد که روی آن یک پرش هموار $\sigma(p) = [e_i]_{i=1}^d$ با $U \mapsto \pi_{GM}^{-1}(U) \subseteq GM$ وجود داشته باشد. تصویر

$$\pi_{GM} := \pi_{FM}|_{GM} : GM \rightarrow M \quad (165)$$

از GM در اینجا به سادگی با محدود کردن نگاشت تصویر FM به GM داده می‌شود. به همراه محدودیت

$$\triangleleft : GM \times G \rightarrow GM, \quad ([e_i]_{i=1}^d, g) \mapsto [e_i]_{i=1}^d \triangleleft g := \left[\sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \quad (166)$$

^۵ برعکس، خمينه‌های غیرجهت‌بندی اجزه کاهش گروه ساختار به $GL^+(d)$ را نمی‌دهند.
^۶ از آنجا که $F_p M$ یک $GL(d)$ -تورسور راست است، هر G -مدار $G_p M$ در $F_p M$ به طور خودکار تضمین می‌شود که یک G -تورسور راست باشد.

از عمل راست FM روی $GL(d)$ در معادله (۱۵۴) به یک کلاف اصلی $GM \subseteq FM$ روی G ساختار را به یک کلاف اصلی $GM \xrightarrow{\pi_{GM}} M$ تبدیل می‌کند. با این حال، مهم است توجه داشته باشید که چندین انتخاب از چنین زیرکلافهایی وجود دارد، که متناظر با G -ساختارهای مختلف برای همان گروه ساختار G است؛ این ادعا را با مثال‌های بالا مقایسه کنید. همانطور که قبلًا بحث شد، توپولوژی یک کلاف ممکن است مانع از کاهش به یک گروه ساختار G و در نتیجه وجود یک G -ساختار متناظر GM شود.

در حالی که تعریف بالا از G -ساختارها کافی خواهد بود، مفید است که به طور خلاصه برخی از تعاریف معادل جایگزین را مرور کنیم. ادعای اینکه یک زیرکلاف اصلی G از FM است، با تعریف آن به عنوان یک تاپل (P, \mathcal{E}) است؛ این انتخاب از یک کلاف اصلی G (همچنین غیرمنحصر به فرد) P روی M به همراه یک نشاندن همودای راست G و هموار $FM \rightarrow P$ (روی M) دقیق می‌شود. این موضوع توسط نمودار زیر به تصویر کشیده شده است، که لازم است برای هر $g \in G$ جایجا باشد:

$$\begin{array}{ccccc} & P & \xleftarrow{\mathcal{E}} & FM & \\ \uparrow \lhd_P g & & & & \uparrow \lhd g \\ P & \xleftarrow{\mathcal{E}} & FM & & \\ & \searrow \pi_P & & \swarrow \pi_{FM} & \\ & M & & & \end{array} \quad (167)$$

زیرمجموعه‌های مختلف از چارچوب‌های انتخاب‌های مختلف از نشاندن‌های $\mathcal{E}(P)$ از FM در G -ساختارها علاوه بر این با برش‌هایی به شکل $GM = s(M) : M \mapsto FM/G$ معادل هستند، که تأکید می‌کند $G_pM = s(p) \in F_pM/G$ در واقع یک انتخاب از G -مدار در F_pM است همانطور که در پانوشت ۵۱ بیان شد. تعریف دیگری از G -ساختارها بر حسب (کلاس‌های هم‌ارزی) اطلاس‌های G است [۹]. از آنجا که این دیدگاهی است که ممکن است در یک پیاده‌سازی از کانولوشن‌های GM اتخاذ شود، ما آن را با جزئیات بیشتری در بخش بعدی ۴.۶ مورد بحث قرار می‌دهیم. برای خواننده علاقه‌مند می‌خواهیم اشاره کنیم که G -ساختارها یک مورد خاص از مفهوم کلی‌تر کاهش (یا لیفت) گروه‌های ساختار هستند [۹] [۱۰].

G -ساختارها برای نظریه کانولوشن‌های GM از اهمیت محوری برخوردارند. انتخاب خاص G -ساختار، مجموعه خاصی از چارچوب‌های مرجع را تعیین می‌کند که کرنل الگوی G -راهبر بر روی آن به اشتراک گذاشته می‌شود. با توجه به همودایی پیمانه‌ای کرنل‌ها، تضمین می‌شود که کانولوشن‌های G ، GM -ساختار را رعایت کنند، یعنی مستقل از مختصات GM باشند. همانطور که در بخش ۸ استنتاج شده است، ایزومنتری‌هایی که یک کانولوشن GM نسبت به آنها همودا است، دقیقاً آنهایی هستند که G -ساختار را حفظ می‌کنند (یعنی آنهایی که خودریختی‌های GM را الفا می‌کنند).

کلاف TM به عنوان کلاف برداری G -وابسته ($TM \times \mathbb{R}^d$): با داشتن یک G -ساختار کلاف $(G \times \mathbb{R}^d)$ -GL(d)-وابسته TM از TM را به یک ساختار کلاف G -وابسته مشابه TM بر اساس GM تطبیق داد. به جای بیان بردارهای مماس نسبت به چارچوب‌های عمومی در TM ، آنها در اینجا نسبت به چارچوب‌های متمایز در GM بیان می‌شوند و خارج قسمت نسبت به گروه ساختار کاهش‌یافته G به جای $GL(d)$ گرفته می‌شود. کلاف حاصل طبق طراحی به GM وابسته است (یا به FM با یک اطلاس G ، که معادل است همانطور که در بخش بعدی توضیح داده می‌شود) و بنابراین دارای توابع گذاری است که مقادیری در G محدودیت χ در معادله (۱۵۹) به $(GM \times \mathbb{R}^d)/G$ یک یکریختی کلاف برداری به دست می‌دهد:

$$TM \cong (GM \times \mathbb{R}^d)/G. \quad (168)$$

در حالی که هر سه کلاف TM ، $(GM \times \mathbb{R}^d)/G$ و $(FM \times \mathbb{R}^d)/GL(d)$ وابسته به عنوان کلاف‌های برداری یکریخت هستند، آنها تنها در صورتی به عنوان کلاف‌های G -وابسته یکریخت هستند که TM و $(GM \times \mathbb{R}^d)/G$ به یک G -ساختار (یا اطلاس G) مجهز شوند، که به طور پیشینی اینطور نیست. در مقابل، کلاف $(GM \times \mathbb{R}^d)/G$ طبق طراحی با یک G -ساختار همراه است. برای تعریف دقیق یکریختی‌های کلاف G -وابسته، ما به [۹] ارجاع می‌دهیم.

کلاف‌های برداری ویژگی وابسته A : ساختار کلاف G -وابسته $(GM \times \mathbb{R}^d)/G$ را می‌توان برای چسباندن تارهای دیگر با عمل‌های گروهی دیگر به G -ساختار GM تعمیم داد. در واقع، هر کلاف وابسته به GM را می‌توان به این روش ساخت. مثال‌های مهم در هندسه دیفرانسیل عبارتند از کلاف هم‌مماس T^*M با تار نوعی آن که دوگان \mathbb{R}^{d*} از \mathbb{R}^d است و عمل دوگان بر آن اثر می‌گذارد، یا کلاف‌های تانسوری (r, s) با تارهای T_s^*M که نمایش حاصلضرب تانسوری متناظر G بر آن عمل می‌کند.

در ادامه ما کلاف‌های برداری ویژگی وابسته با ضرایب بردار ویژگی \mathbb{R}^c به عنوان تارهای نوعی را در نظر می‌گیریم. تحت تبدیلات پیمانه، این تارها از چپ توسط یک ضرب با یک نمایش گروهی $G \rightarrow GL(c)$ به ρ عمل می‌شوند، یعنی معادله (۱۳۴) با:

^{۹۲} این نشاندن یک ریخت M -کلاف اصلی G است همانطور که در بخش ۱۶ با هم‌ریختی گروهی $GL(d)$ به $G \leq GL(d)$ است، معرفی شد.

$G \times \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}^c$, $(g, f) \mapsto \rho(g)f$ نمونه‌سازی می‌شود. مشابه قبل، کلاف‌های برداری ویژگی در این صورت به عنوان یک خارج قسمت

$$\mathcal{A} := (GM \times \mathbb{R}^c) / \sim_{\rho} \quad (169)$$

ساخته می‌شوند که در آن رابطه همارزی ρ ~ توسط

$$([e_i]_{i=1}^d, f) \sim_{\rho} ([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}, \rho(g)f) \quad \forall g \in G. \quad (170)$$

داده می‌شود. عناصر \mathcal{A} کلاس‌های همارزی $[f]$ از ضرایب بردار ویژگی نسبت به چارچوب‌های مرتع هستند و بنابراین مستقل از مختصات هستند. یک نگاشت تصویر (خوش‌تریف) دوباره از تصویر G -ساختار القا می‌شود:

$$\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow M, \quad [e_i]_{i=1}^d, f \mapsto \pi_{GM}([e_i]_{i=1}^d) \quad (171)$$

ترکیبات خطی روی تارها به قیاس با معادله (157) تعریف می‌شوند. از آنجا که چنین کلاف‌های برداری ویژگی تعریف شده‌ای به GM وابسته‌اند، گروه ساختار آنها $G \leq \text{GL}(d)$ است، همانطور که به طور صریح در بخش بعدی ۴.۶ استنتاج خواهیم کرد.^{۵۳} توجه داشته باشید که این تعریف شامل میدان‌های برداری مماس و میدان‌های اسکالر، که البته می‌توانند به عنوان میدان‌های ویژگی پردازش شوند، به ترتیب برای $g = \rho(g) = 1$ می‌شود.

ساختار \mathcal{A} به عنوان یک کلاف G -وابسته، بردارهای ویژگی مستقل از مختصات GM روی M را مدل می‌کند: ویژگی‌های $f_p \in \mathcal{A}$ به طور معادل نسبت به چارچوب‌های دلخواه در GM بیان می‌شوند، با ضرایب ویژگی در مختصات‌دهی‌های مختلف که از طریق معادله (170) به هم مرتبط هستند، اما بیان مختصاتی خوش‌تریفی نسبت به چارچوب‌های دیگر ندارند. از دیدگاه مهندسی، این موضوع در G -راهنری کرنل‌های کانولوشن منعکس می‌شود که تضمین می‌کند اندازه‌گیری‌های ویژگی‌ها به صورت نسبی به چارچوب‌ها در GM انجام شود اما امکان تمایز بین گوهای را فراهم می‌کند که رُست‌های آنها با یک تبدیل پیمانه G -مقدار به هم مرتبط نیستند، به معنای مطلق.

میدان برداری ویژگی وابسته و فضاهای ویژگی: میدان‌های ویژگی هموار و مستقل از مختصات به عنوان برش‌های سراسری هموار $f \in \Gamma(\mathcal{A})$ از کلاف‌های برداری ویژگی تعریف می‌شوند، یعنی به عنوان نگاشت‌های هموار $f : M \rightarrow \mathcal{A}$ که شرط $\pi_{\mathcal{A}} \circ f = \text{id}_M$ را برآورده می‌کنند. همانطور که قبلاً بحث شد، وجود چنین میدان‌های ویژگی تضمین شده است زیرا کلاف‌های برداری همیشه برش‌های سراسری هموار را می‌پذیرند. در بخش بعدی ۴.۶ نشان می‌دهیم که چگونه یک بدیهی سازی کلاف محلی روی U^A امکان نمایش f توسط یک میدان $f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c$ از ضرایب بردار ویژگی را فراهم می‌کند. یک بدیهی سازی متفاوت روی U^B منجر به یک میدان ضریب متفاوت $f^B : U^B \rightarrow \mathbb{R}^c$ می‌شود که f را به صورت محلی نمایش می‌دهد. از نگاشت‌های گذار بین بدیهی‌سازی‌های کلاف نتیجه خواهد شد که هر دو میدان ضریب روی همپوشانی $f^B(p) = \rho(g_p^{BA}) f^A(p)$ با هم مرتبط هستند. نمودار جایجایی در شکل ۳۶ روابط بین میدان‌های برداری ویژگی و بدیهی‌سازی‌های محلی آنها را به تصویر می‌کشد.

فضاهای ویژگی $\oplus_i \mathcal{A}_i$ می‌شوند از مختصات معمولاً از چندین میدان ویژگی مستقل روی همان فضای پایه تشکیل شده‌اند. کلاف توصیف کننده یک فضای ویژگی به عنوان یک کل، مجموع ویتنی $\oplus_i \mathcal{A}_i$ از کلاف‌های برداری ویژگی $A_i \xrightarrow{\pi_{\mathcal{A}_i}} M$ است که زیربنای میدان‌های منفرد آن هستند. به این ترتیب، این کلاف همان فضای پایه M را دارد، یک تار نوعی $\bigoplus_i \mathbb{R}^{c_i} \cong \mathbb{R}^{\sum_i c_i}$ که به عنوان مجموع مستقیم تارهای میدان‌های منفرد تعریف شده و به نگاشت تصویر بدیهی مجهز است. این کلاف به عنوان G -کلاف‌ها وابسته است و بنابراین می‌تواند به طور معادل به صورت

$$\bigoplus_i \mathcal{A}_i \cong (GM \times \mathbb{R}^{\sum_i c_i}) / \sim_{\oplus_i \rho_i} \quad (172)$$

تعریف شود. توجه داشته باشید که مجموع مستقیم $\bigoplus_i \rho_i$ از نمایش‌های A_i را تعریف می‌کنند، تضمین می‌کند که نگاشت‌های گذار $\bigoplus_i \mathcal{A}_i$ هر میدان منفرد را به طور مستقل تبدیل کنند. فضاهای ویژگی در این صورت به عنوان فضاهای $\Gamma(\bigoplus_i \mathcal{A}_i)$ از برش‌های سراسری کلاف مجموع ویتنی تعریف می‌شوند.

۴.۶ بدیهی‌سازی‌های محلی کلاف TM , FM و GM

در حالی که نظریه سراسری شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات به شیوه‌ای بر حسب کلاف‌های تاری مستقل از مختصات فرمول‌بندی می‌شود، پیاده‌سازی عددی نیازمند آن است که بردارهای ویژگی مستقل از مختصات $f(p) \in A_p$ توسط بردارهای ضریب $\rho_i \in \mathbb{R}^c$ نسبت به یک انتخاب قاب مرتع $[e_i^A]_{i=1}^d \in G_p M$ بیان شوند، همان‌طور که در بخش ۲.۳ شرح داده شد. در زبان کلاف‌های تاری، این معادل با انتخاب بدیهی‌سازی‌های محلی یا پیمانه‌های Ψ_{TM}^A , Ψ_{GM}^A , Ψ_{FM}^A و $\Psi_{\mathcal{A}}^A$ است که اگر TM , GM و \mathcal{A} به صورت G -الحقی با یکدیگر در نظر گرفته شوند، همگی به طور همزمان تبدیل می‌شوند. به یاد بیاورید که توصیف محلی و در نتیجه پیاده‌سازی از طریق یک G -اطلس، مشکل از بدیهی‌سازی‌های محلی که M را می‌پوشانند و سه شرط (۱۳۶)، (۱۳۷) و (۱۳۸) را برآورده می‌کنند، کاملاً معادل با نظریه سراسری و مستقل از مختصات است.

^{۵۳} به طور دقیق، توابع گذار مقدابری در $\text{GL}(c) \leq \text{GL}(d)$ به جای $\rho(G) \leq \text{GL}(c)$ خواهند گرفت، با این حال، از آنجا که گذارهای حاصل هنوز با G -سازگار هستند، اصطلاح G -مقدار معمولاً برای شامل شدن چنین مواردی تطبیق داده می‌شود [۹].

در این بخش، ما بدیهی‌سازی‌های الحاقی TM , FM , GM و A و تبدیلات پیمانه همزمان آن‌ها را بررسی می‌کنیم. برای حفظ سازگاری با بخش ۱.۳، با فرض داده شده بودن بدیهی‌سازی‌های TM شروع کرده و بحث می‌کنیم که چگونه آن‌ها بدیهی‌سازی‌های FM و میدان‌های قاب محلی متناظر را القا می‌کنند. اگر یک G -اطلس برای TM و در نتیجه برای FM انتخاب شود، این به یک G -ساختار GM منجر می‌شود که G -اطلس آن با G -اطلس FM مطابق است. بدیهی‌سازی‌های محلی هر کلاف G -الحاقی، به ویژه کلاف‌های بردار ویژگی A ، از بدیهی‌سازی‌های G -اطلس به دست می‌آیند. این بدیهی‌سازی‌ها قانون تبدیل میدان‌های ویژگی از بخش ۲.۳ را بازیابی می‌کنند.

بدیهی‌سازی‌های TM : از آنجا که کلاف مماس، \mathbb{R}^d را به عنوان تار نمونه‌ای خود دارد، بدیهی‌سازی‌های محلی آن توسط نگاشتهایی به شکل زیر داده می‌شوند:

$$\Psi_{TM} : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^d. \quad (173)$$

این بدیهی‌سازی‌ها با پیمانه‌های نقطه‌ای (که به صورت هموار در فضای تغییر می‌کنند)

$$\psi_{TM,p} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (174)$$

از معادله (۱) با شناسایی (v) برای $\Psi_{TM}(v) = (\pi_{TM}(v), \psi_{TM,p}(v))$ مطابقت دارند. به منظور رعایت ساختارهای فضای برداری تار \mathbb{R}^d و فضاهای مماس بدیهی‌سازی‌های Ψ_{TM} به عنوان ایزومورفیسم‌های کلاف برداری بین $(U \times \mathbb{R}^d, \pi_{TM}^{-1}(U))$ و $T_p M$ تعریف می‌شوند، یعنی نگاشتهای $\psi_{TM,p}$ باید خطی و معکوس‌پذیر باشند (یعنی ایزومورفیسم‌های فضای برداری باشند). نگاشتهای گذار بین بدیهی‌سازی‌های مختلف TM به طور کلی در گروه خطی عام $GL(d)$, \mathbb{R}^d ، یعنی گروه خودریختی‌های (خطی)، $O(d)$ ، مقدار می‌گیرند.

اگر ساختار بیشتری روی کلاف مماس مشخص شود، بدیهی‌سازی‌ها باید این ساختار را رعایت کنند. به عنوان مثال، اگر یک متريک روی M و در نتیجه روی TM تعریف شود، نگاشتهای $\psi_{TM,p}$ باید ايزومتریک باشند، یعنی بردارها را در $T_p M$ به گونه‌ای به بردارهای در \mathbb{R}^d نگاشت کنند که نرم‌ها و زوایا حفظ شوند. از آنجا که در این حالت بدیهی‌سازی‌ها فقط در جهت و سوگیری خود می‌توانند متفاوت باشند، تضمین می‌شود که بدیهی‌سازی‌های مختلف توسعه یک گروه ساختار کاوهش‌بافته d به یکدیگر مرتبط باشند که متناظر با متريک به عنوان یک $O(d)$ -ساختار است. به طور کلی‌تر، یک G -ساختار روی TM نیازمند - یا القا شده توسعه - یک انتخاب از G -اطلس $\{\Psi_{TM}^X\}_{X \in \mathfrak{X}}$ است. دو بدیهی‌سازی مختلف Ψ_{TM}^A و Ψ_{TM}^B از چنین G -اطلسی روی $U^A \cap U^B$ توسعه $(\Psi_{TM}^A)^{-1} \circ (\Psi_{TM}^B)^{-1}$ همان‌طور که در معادله (۱۷۲) تعریف شده است، با تابع گذار با مقدار در G به یکدیگر مرتبط می‌شوند:

$$g^{BA} : U^A \cap U^B \rightarrow G, \quad p \mapsto \psi_{TM,p}^B \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}, \quad (175)$$

که عمل چپ \circ \circ $\mapsto g \circ v \mapsto G \times \mathbb{R}^d$ است. ► را روی تار نمونه‌ای تعریف می‌کنند. برای درک شهودی گرافیکی از عمل نقطه‌ای توابع گذار بر روی تارهای منفرد، به شکل ۱۴ بازمی‌گردیم. یک نمایش نموداری از بدیهی‌سازی‌های محلی TM و گذارهای آن‌ها در شکل ۱۳۴ آورده شده است.

بدیهی‌سازی‌های القایی FM و میدان‌های قاب: هر اطلس $\{\Psi_{TM}^X\}_{X \in \mathfrak{X}}$ از کلاف مماس در تاظر یک به یک با یک اطلس از کلاف قاب است. به طور خاص، با داشتن یک بدیهی‌سازی محلی FM از TM , یک بدیهی‌سازی محلی متناظر

$$\Psi_{FM}^A : \pi_{FM}^{-1}(U^A) \rightarrow U^A \times GL(d), \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto (p, \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d)), \quad (176)$$

از FM ، که در آن $p = \pi_{FM}([e_i]_{i=1}^d)$ را به اختصار آورده‌ایم، با تعریف زیر القا می‌شود:

$$\psi_{FM,p}^A : F_p M \rightarrow GL(d), \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) := (\psi_{TM,p}^A(e_i))_{i=1}^d \quad (177)$$

به عنوان یک نگاشت از قاب‌های مماس به ماتریس‌های $d \times d$ معمکوس‌پذیر که ستون i -ام آن توسعه $\psi_{TM,p}^A(e_i) \in \mathbb{R}^d$ داده شده است. همان‌طور که برای کلاف‌های الحاقی لازم است، بدیهی‌سازی‌های TM و FM از تابع گذار یکسانی استفاده می‌کنند.

$$\begin{aligned} \psi_{FM,p}^B([e_i]_{i=1}^d) &= (\psi_{TM,p}^B(e_i))_{i=1}^d \\ &= (g_p^{BA} \psi_{TM,p}^A(e_i))_{i=1}^d \\ &= g_p^{BA} (\psi_{TM,p}^A(e_i))_{i=1}^d \\ &= g_p^{BA} \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d), \end{aligned} \quad (178)$$

زیرا عمل g^{BA} روی محورهای قاب بدیهی‌شده منفرد در خط دوم با عمل آن روی ماتریس قاب بدیهی‌شده در خط سوم یکسان است. علاوه بر این، همان‌طور که برای کلاف‌های اصلی در معادله (۱۷۵) ادعا شد، بدیهی‌سازی‌های کلاف قاب راست- $GL(d)$ -هم‌متغیر هستند، یعنی برای هر

(ا) بدیهی‌سازی‌های $TM \xrightarrow{\pi_{TM}} M$

(ب) بدیهی‌سازی‌های $FM \xrightarrow{\pi_{FM}} M$

(ج) بدیهی‌سازی‌های $A \xrightarrow{\pi_A} M$

(د) بدیهی‌سازی‌های $GM \xrightarrow{\pi_{GM}} M$

شکل ۳.۴: نمایش تصویری بدیهی‌سازی‌های محلی G -الحاقی $U = U^A \cap U^B$ در قالب نمودارهای جابجاگی که در آن‌ها را به اختصار نشان می‌دهیم. یک G -اطلس $\{U^X, \Psi_{TM}^X\}$ از کلاف مماس با نگاشتهای گذار G -ساختار GM را القا می‌کند و اطلاس‌هایی برای A و GM . FM با توابع گذار سازگار به وجود می‌آورد. نمودارهای جابجاگی دقیق‌تری که مقاطع $\pi_{FM}^{-1}(U)$ را $\sigma : U \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U)$ و عمل راست \lhd روی کلاف قاب را نشان می‌دهند در شکل‌های ۳۴ و ۳۵ آورده شده‌اند. میدان‌های ویژگی، که به عنوان مقاطع $f : M \rightarrow A$ از کلاف بردار ویژگی الحاقی A مدل‌سازی شده‌اند، و بدیهی‌سازی‌های محلی آن‌ها $\mathcal{A} \xrightarrow{\pi_A} U^A \rightarrow \mathbb{R}^c$ در شکل ۳۶ نشان داده شده‌اند. تفسیری گرافیکی از نمودار جابجاگی برای TM به یک فضای مماس منفرد $T_p M$ محدود شده است: در شکل ۱۴ ارائه شده است.

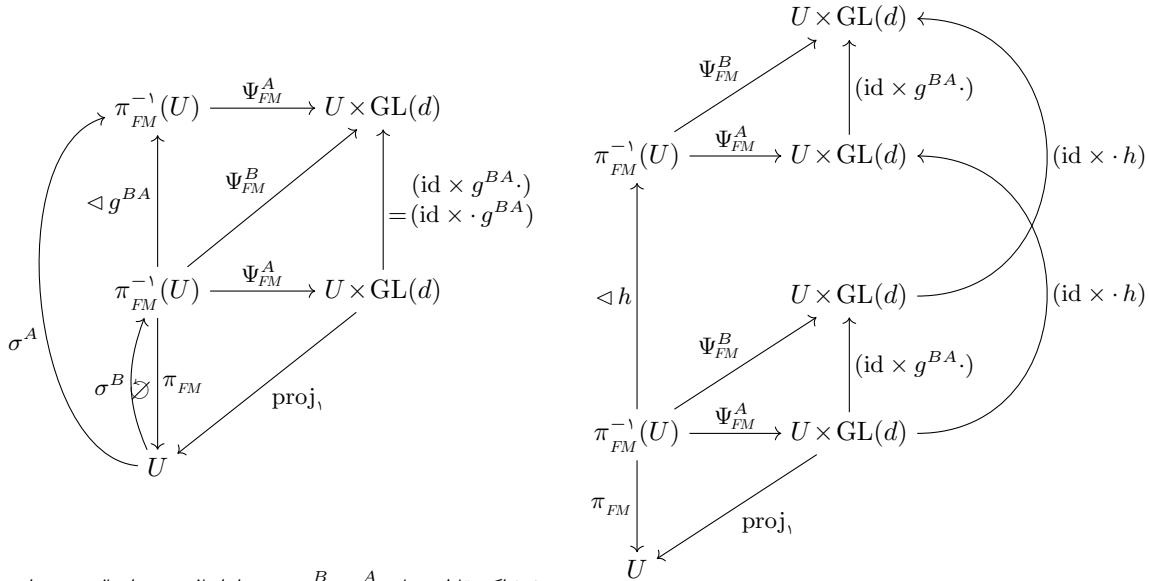
داریم: $h \in \mathrm{GL}(d)$

$$\begin{aligned}
 \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d \lhd h) &= \psi_{FM,p}^A \left(\left(\sum_j e_j h_{ji} \right)_{i=1}^d \right) \\
 &= \left(\psi_{TM,p}^A \left(\sum_j e_j h_{ji} \right) \right)_{i=1}^d \\
 &= \left(\sum_j \psi_{TM,p}^A(e_j) h_{ji} \right)_{i=1}^d \\
 &= \left(\psi_{TM,p}^A(e_i) \right)_{i=1}^d \cdot h \\
 &= \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) \cdot h
 \end{aligned} \tag{۱۷۹}$$

در اینجا از خطی بودن $\psi_{TM,p}^A$ در مرحله سوم استفاده کردیم و عبارت اندیسی را به عنوان ضرب ماتریسی از راست در مرحله چهارم شناسایی کردیم. شکل ۳۵ آرایه \lhd عمل چپ روی بدیهی‌سازی را از طریق توابع گذار $\Psi_{FM}^B \circ (\Psi_{FM}^A)^{-1} = (\mathrm{id} \times g^{BA}) \circ \Psi_{FM}^A$ که در معادله (۱۷۸) مشتق شده و هم‌متغیری راست $\Psi_{FM}^A \circ (\lhd h) = (\mathrm{id} \times \cdot \cdot h) \circ \Psi_{FM}^A$ برای $\lhd h$ را که در معادله (۱۷۹) مشتق شده، خلاصه می‌کند.

همان‌طور که در معادله (۴) اشاره شد و در شکل‌های ۱۴ و ۱۵ نمایش داده شد، یک بدیهی‌سازی محلی هموار Ψ_{TM}^A را از کلاف مماس یک میدان قاب را روی U^A القا می‌کند. این به عنوان یک مقطع محلی هموار

$$\sigma^A : U^A \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^A), \quad p \mapsto \left[(\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i) \right]_{i=1}^d \tag{۱۸۰}$$



(ب) اگر مقاطع همانی σ^A و σ^B به نمودار اضافه شوند، اعمال چپ و راست با یکدیگر منطبق می‌شوند زیرا $\psi_{FM,p}^A \circ \sigma^A(p) = e \cdot e = e \cdot g \in \text{GL}(d)$

(ا) بدیهی‌سازی‌های کلاف قاب راست-هم‌متغیر هستند، یعنی برای هر $h \in \text{GL}(d)$ در رابطه $\Psi_{FM} \circ \triangleleft h = (\text{id} \times \cdot \cdot h) \circ \Psi_{FM}$ صدق می‌کنند.

شکل ۳۵: نمودارهای گسترش‌یافته بدیهی‌سازی‌های کلاف قاب که تعابیر توابع گذار g^{BA} ، اعمال راست \triangleleft و $\cdot \cdot$ و مقاطع همانی σ^A و σ^B را نشان می‌دهند. مانند قبل، $U = U^A \cap U^B = U^A \cup U^B$ را به اختصار نشان می‌دهیم. به جز نمودارها جابجا $\sigma^B \circ \pi_{FM}^A \neq \text{id}_{FM}$ و $\sigma^A \circ \pi_{FM}^B \neq \text{id}_{FM}$ باشند، نمودارهای مشابهی، با جایگزینی FM و GM با G و $\text{GL}(d)$. برای G -ساختار متناظر اعمال می‌شوند.

از کلاف قاب فرمول‌بندی می‌شود که با نگاشت بردارهای قاب استاندارد ϵ_i از \mathbb{R}^d به فضاهای مماس در TM $\pi_{TM}^{-1}(U^A) \subseteq TM$ تعریف می‌شود. پیرو معادله ۱۰، یک تبدیل پیمانه از $\Psi_{TM}^B = (\text{id} \times g^{BA}) \circ \Psi_{TM}^A$ به $\sigma^B(p) = \sigma^A(p) \triangleleft (g^{BA})^{-1}$ (۱۸۱)

از مقاطع روی U^{AB} بدیهی‌سازی‌های Ψ_{TM}^A از FM که بر حسب Ψ_{TM}^A تعریف شده‌اند، این ویژگی خوب را دارند که مقاطع متناظر σ^A را به قاب همانی σ^B در $\text{GL}(d) \subset \mathbb{R}^{d \times d}$ از \mathbb{R}^d نگاشت می‌کنند، که با جایگذاری هر دو تعریف می‌توان آن را مشاهده کرد:

$$\psi_{FM,p}^A \circ \sigma^A(p) = \psi_{FM,p}^A \left(\left[(\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i) \right]_{i=1}^d \right) = \left(\psi_{TM,p}^A \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i) \right)_{i=1}^d = (\epsilon_i)_{i=1}^d = e \quad (182)$$

این ویژگی اغلب برای تعریف مقاطع FM با داشتن بدیهی‌سازی‌های Ψ_{FM}^A به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\sigma^A: U^A \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^A), \quad p \mapsto (\Psi_{FM}^A)^{-1}(p, e) = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(e), \quad (183)$$

که در نهایت با تعریف ما در معادله (۱۸۰) منطبق است. از آنجا که σ^A و Ψ_{FM}^A به این روش ساخته شده‌اند یکدیگر را القا می‌کنند، گاهی اوقات به آن‌ها مقاطع همانی و بدیهی‌سازی‌های محلی کانونی گفته می‌شود. گسترش نمودار در شکل ۳۵ با مقاطع همانی σ^A و σ^B که با معادله ۱۸۱ مرتبه هستند، $g^{BA} = g^{BA}$ را ثابت می‌کند و بنابراین به نمودار جابجایی در شکل ۳۵ ب منجر می‌شود. ضربهای چپ و راست با g^{BA} روی تار نمونه‌ای $g^{BA} \cdot e = g^{BA} = e \cdot g^{BA}$ در اینجا فقط به این دلیل منطبق هستند که $\psi_{FM,p}^A \circ \sigma^A = \psi_{FM,p}^B \circ \sigma^B = e$ برای آن $\text{GL}(d)$ است. شکل ۳۵ را با شکل ۳۳ مقایسه کنید که عمل پیمانه چپ g_p^{BA} و عمل راست $(g_p^{BA})^{-1}$ از عنصر گروه معکوس را نشان می‌دهد که بین قاب‌های مقاطع همانی متناظر تبدیل می‌کند.

G-اطلس القاکننده G-Sاختار GM: انطباق توابع گذار کلاف مماس و کلاف قاب در معادله (۱۷۸) نشان می‌دهد که یک G-اطلس برای FM یک G-اطلس برای TM القا می‌کند. همانطور که در ادامه استنتاج خواهیم کرد، چنین G-اطلس‌هایی یک G-Sاختار متناظر را مشخص می‌کنند، یعنی یک زیرکلاف اصلی G از FM که از قاب‌های ممتاز تشکیل شده است.

برای توجیه تعریف GM بر اساس یک G-اطلس داده شده $\{(U^X, \Psi_{FM}^X)\}_{X \in \mathfrak{X}}$ از FM ، دو بدیهی‌سازی محلی آن Ψ_{FM}^A و Ψ_{FM}^B را با $p \in U^A \cap U^B$ در $F_p M$ فرض کنید. بدیهی‌سازی‌ها قاب‌های مرجع $\sigma^A(p)$ و $\sigma^B(p)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید

می‌کنند که طبق معادله (۱۸۱) توسط عمل راست عنصری مانند g_p^{BA} از گروه ساختار کاهش‌یافته $G \leq \text{GL}(d)$ به یکدیگر مرتبط هستند. بنابراین، هر قاب تعریف شده به این شکل، عنصری از یک G -مدار $G_pM \cong \text{GL}(d)$ در G است. به طور خاص، با بیان مقاطع همانی از طریق معادله (۱۸۳) به صورت $(\psi_{FM,p}^A)^{-1}(e) = (\psi_{FM,p}^B)^{-1}(e) = (\sigma^A(p))^{-1}$ و $\sigma^A(p) = (\psi_{FM,p}^B)^{-1}(\psi_{FM,p}^A)$ تعریف نقطه‌ای G -ساختار بر اساس تصاویر معکوس G توسط نگاشت‌های پیمانه (دلخواه) پیشنهاد می‌شود:

$$G_pM := \left\{ (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(g) \mid g \in G \right\} = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(G) \quad (184)$$

استقلال از پیمانه انتخاب شده از G -اطلس واضح است زیرا هر انتخاب دیگری $(\psi_{FM,p}^B)^{-1}(G) = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}((g^{BA})^{-1}G) = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(G)$ نتیجه یکسانی به دست می‌دهد. همانطور که به راحتی می‌توان بررسی کرد، G_pM در واقع یک تورسور راست G است زیرا یک تورسور راست G است و $\psi_{FM,p}^A$ طبق معادله (۱۷۹) یک ایزوگرافیسم راست- $\text{GL}(d)$ -هممتغیر و بنابراین به طور خاص راست- G -هممتغیر است. همواری مورد نیاز $GM = \coprod_{p \in M} G_pM$ از همواری بدیهی‌سازی‌های Ψ_{FM}^A ناشی می‌شود.

یک G -اطلس از بدیهی‌سازی‌های محلی GM با محدود کردن بدیهی‌سازی‌ها در G -اطلس FM به قاب‌های موجود در GM به دست می‌آید، یعنی،

$$\Psi_{GM}^A := \Psi_{FM}^A|_{\pi_{GM}^{-1}(U^A)} : \pi_{GM}^{-1}(U^A) \rightarrow U^A \times G, \quad (185)$$

یا، به صورت محلی،

$$\psi_{GM,p}^A := \psi_{FM,p}^A|_{G_pM} : G_pM \rightarrow G. \quad (186)$$

بالاصله نتیجه می‌شود که توابع گذار با مقدار در FM با توابع گذار TM و TM منطبق هستند، یعنی،

$$\psi_{GM,p}^B([e_i]_{i=1}^d) = g_p^{BA} \psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d), \quad (187)$$

و اینکه بدیهی‌سازی‌ها راست- G -هممتغیر هستند:

$$\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d \triangleleft h) = \psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) \cdot h \quad \forall h \in G \quad (188)$$

میدان‌های قاب نیز با یک عبارت معادل

$$\sigma^A(p) = (\psi_{GM,p}^A)^{-1}(e) \quad (189)$$

با عبارت معادله (۱۸۳) داده می‌شوند. نمودارهای جابجایی در شکل‌های ۳۵ و ۳۶ نیز هنگام جایگزینی FM با GM و $GL(d)$ با G معتبر هستند.

بدیهی‌سازی‌های القایی کلاف‌های الحاقی A : یک G -اطلس $\{\Psi_A^X\}_{X \in \mathfrak{X}}$ ، شامل بدیهی‌سازی‌های محلی $\pi_A^{-1}(U^X) \rightarrow U^X \times \mathbb{R}^c$ از کلاف‌های بردار ویژگی الحاقی \sim_ρ از Ψ_{GM}^X از $GM \times \mathbb{R}^c$ / \sim_ρ \sim بدیهی‌سازی‌های متناظر از G -ساختار القا می‌شود. برای ساختن این بدیهی‌سازی‌ها، باید بیاورید که A بر اساس کلاس‌های همارزی $[e_i]_{i=1}^d, f]$ تعریف می‌شود که شامل زوج‌هایی از قاب‌های مرتع و بردارهای ضربی ویژگی است که توسط رابطه همارزی \sim_ρ تعریف شده در معادله (۱۷۰) به هم مرتبط هستند. یک ایده طبیعی این است که $\in A_p \in [e_i]_{i=1}^d, f]$ را انتخاب یک نماینده از بردارهای ضربی همارز آن در \mathbb{R}^c بدیهی‌سازی کنیم. یک انتخاب ممتاز از نماینده در اینجا توسط آن بردار ضربی داده می‌شود که به قاب مقطع همانی (p) σ^A متناظر با $\Psi_{GM,p}^A$ تعلق دارد.

فرض کنید $\sigma^A(p) \triangleleft h \in G_pM$ باشد که توسط یک جابجایی $h \in G$ نسبت به مقطع σ^A تعریف شده است. این جابجایی را می‌توان با بدیهی‌سازی G -ساختار بازیابی کرد:

$$\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) = \psi_{GM,p}^A(\sigma^A(p) \triangleleft h) = \psi_{GM,p}^A(\sigma^A(p)) \cdot h = h \quad (190)$$

در اینجا از هممتغیری راست- G - $\psi_{GM,p}^A$ و اینکه σ^A به عنوان مقطع همانی تعریف شده است، استفاده کردیم؛ به معادلات (۱۸۸) و (۱۸۲) که دومی برای $\psi_{GM,p}^A$ تطبیق داده شده است، مراجعه کنید. بنابراین می‌توانیم هر قاب را از طریق جابجایی آن بازنویسی کنیم:

$$[e_i]_{i=1}^d = \sigma^A(p) \triangleleft \psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) \quad (191)$$

به طور مشابه، می‌توانیم هر بردار ویژگی $[e_i]_{i=1}^d, f]$ را با نماینده‌گان مختلف کلاس همارزی بازنویسی کنیم:

$$[[e_i]_{i=1}^d, f] = [\sigma^A(p) \triangleleft \psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d), f] = [\sigma^A(p), \rho(\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f] \quad (192)$$

$$\begin{array}{ccccc}
& & U \times \mathbb{R}^c & \xrightarrow{\text{proj}_\gamma} & \mathbb{R}^c \\
& \nearrow \Psi_A^B & \uparrow (\text{id} \times \rho(g^{BA}) \cdot) & & \uparrow \rho(g^{BA}) \cdot \\
\pi_A^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi_A^A} & U \times \mathbb{R}^c & \xrightarrow{\text{proj}_\gamma} & \mathbb{R}^c \\
\downarrow \pi_A & \nearrow \text{proj}_\gamma & \nearrow f^B & \nearrow \text{proj}_\gamma & \\
U & \xrightarrow{f^A} & & \xrightarrow{f^A} &
\end{array}$$

شکل ۳۶: میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات به عنوان مقاطع سراسری $f \in \Gamma(\mathcal{A})$ در همسایگی‌های محلی U^B و U^A . آن‌ها به میدان‌های بردارهای ضریب ویژگی $f^B : U^B \rightarrow \mathbb{R}^c$ و $f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c$ بدهیه‌سازی می‌شوند که روی $U = U^A \cap U^B$ با رابطه $f^B(p) = \rho(g_p^{BA}) f^A(p)$ با هم مرتبط هستند. به جز $f \circ \pi_A \neq \text{id}_{\mathcal{A}}$, نمودار جایجایی‌پذیر است.

بر اساس این بیان‌ها، بدهیه‌سازی‌های القایی \mathcal{A} را با قرار دادن زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Psi_{\mathcal{A}}^A : \pi_A^{-1}(U^A) \rightarrow U^A \times \mathbb{R}^c, \quad [[e_i]_{i=1}^d, f] \mapsto \left(\pi_{GM}^A([e_i]_{i=1}^d), \psi_{\mathcal{A}, p}^A([e_i]_{i=1}^d, f) \right), \quad (193)$$

با

$$\psi_{\mathcal{A}, p}^A : \mathcal{A}_p \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad [[e_i]_{i=1}^d, f] = \left[\sigma^A(p), \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f \right] \mapsto \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f, \quad (194)$$

که آن بدرار ضریب نماینده خاص $f^A = \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f \in \mathbb{R}^c$ را انتخاب می‌کند که توسط قاب مرجع $(p, \sigma^A(p))$ متناظر با پیمانه انتخاب شده، متمایز می‌شود. برای راحتی در اینده، توجه می‌کنیم که این به طور خاص دلالت بر این دارد که معکوس معادله (194) توسط

$$(\psi_{\mathcal{A}, p}^A)^{-1} : \mathbb{R}^c \rightarrow \mathcal{A}_p : f \mapsto [\sigma^A(p), f]. \quad (195)$$

داده می‌شود. بدهیه‌سازی تعریف شده به این شکل مستقل از نماینده انتخاب شده است زیرا برای هر $k \in G$ داریم:

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathcal{A}, p}^A \left([[e_i]_{i=1}^d \triangleleft k^{-1}, \rho(k)f] \right) &= \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d \triangleleft k^{-1})) \rho(k)f \\
&= \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d) \cdot k^{-1}) \rho(k)f \\
&= \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f \\
&= \psi_{\mathcal{A}, p}^A \left([[e_i]_{i=1}^d, f] \right)
\end{aligned} \quad (196)$$

بر اساس ساختار، توابع گذار توسط $\rho(g_p^{BA})$ داده می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathcal{A}, p}^B \left([[e_i]_{i=1}^d, f] \right) &= \rho(\psi_{GM, p}^B([e_i]_{i=1}^d)) f \\
&= \rho(g_p^{BA} \psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f \\
&= \rho(g_p^{BA}) \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f \\
&= \rho(g_p^{BA}) \psi_{\mathcal{A}, p}^A \left([[e_i]_{i=1}^d, f] \right)
\end{aligned} \quad (197)$$

اگر کلاف مماس به عنوان یک کلاف بدرار G -الحاقی $TM \cong (GM \times \mathbb{R}^d)/G$ در نظر گرفته شود، بدهیه‌سازی‌های آن از معادله (193) برای انتخاب خاص $g = \rho(g)$ بازیابی می‌شوند.

فرض کنید یک میدان ویژگی مستقل از مختصات $f \in \Gamma(\mathcal{A})$ داده شده باشد. نسبت به پیمانه $\Psi_{\mathcal{A}}^A$ ، می‌توان آن را به صورت محلی به عنوان یک میدان بدرار ضریب $f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c$ با تعریف زیر نمایش داد:

$$f^A := \text{proj}_\gamma \circ \Psi_{\mathcal{A}}^A \circ f \quad (198)$$

که معادل با تعریف نقطه‌ای زیر است:

$$f^A(p) = \psi_{\mathcal{A}, p}^A \circ f(p). \quad (199)$$

همانطور که از نمودار جایجایی در شکل ۳۶ پیداست، توابع گذار در معادله (197) به میدان‌های ضریب محلی منتقل می‌شوند به طوری که داریم:

$$f^B(p) = \rho(g_p^{BA}) f^A(p) \quad (200)$$

برای $p \in U^A \cap U^B$ این با تعریف ما از تبدیلات پیمانه بردارهای ضریب ویژگی در معادله (28) موافق است و آن را توجیه می‌کند.

ملاحظات پایانی: بدیهی‌سازی‌های محلی و توابع گذار تعریف شده در اینجا، تعاریف پیمانه‌ها و تبدیلات پیمانه از بخش ۲.۳ را رسمی‌سازی و توجیه می‌کنند. نشان داده شد که بدیهی‌سازی‌های محلی TM و FM یکدیگر را القا می‌کنند. اگر یک G -اطلس برای هر یک ازین دو انتخاب G -ساختار TM تعریف می‌کند که G -اطلس آن اساساً با G -اطلس FM متنطبق است. علاوه بر این، یک G -اطلس برای هر کلاف GM A -القایی دیگر، از جمله A -القایی باشد. همانطور که در شکل ۳۴ به تصویر کشیده شده است، توابع گذار تمام G -اطلس‌ها برای GM TM و FM با هم متنطبق هستند، که این کلاف‌ها را G -القایی با یکدیگر می‌سازند. به طور خاص، هنگام تغییر از پیمانه A به پیمانه B ، بدیهی‌سازی‌های G - TM و G - FM مطابق با یک ضرب چپ با g^{BA} تبدیل می‌شوند. با این کلاف‌ها را G -القایی با یکدیگر می‌سازند. به طور خاص، هنگام تغییر از پیمانه A به پیمانه B ، بدیهی‌سازی‌های G - TM و G - FM مطابق با یک ضرب چپ با g^{BA} تبدیل می‌شوند؛ به معادلات (۱۷۵)، (۱۷۶) و (۱۷۷) (معادله (۱۹۷)) مراجعه کنید. در عین حال، میدان‌های قاب مطابق با عمل راست^۱ $(g^{BA})^{-1}$ (معادله (۱۸۱)) تبدیل می‌شوند.

۵.۶ منتقل کننده‌های موازی روى کلاف‌های الحاقی

بخش ۳.۳ مقدمه‌ای شهودی بر انتقال موازی بردارهای مماس و بردارهای ویژگی در امتداد یک مسیر γ از $p \in M$ به $q \in M$ ارائه داد. در اینجا به طور خلاصه بحث می‌کنیم که چگونه منتقل کننده‌های موازی مستقل از مختصات روى کلاف‌های تاری یکدیگر را القا می‌کنند و عبارت مختصاتی آن‌ها را نسبت به بدیهی‌سازی‌های داده شده استخراج می‌کنیم. ما با فرض داده شده بودن منتقل کننده‌های مستقل از مختصات

$$\mathcal{P}_{TM,\gamma} : T_q M \rightarrow T_p M \quad (201)$$

روى کلاف مماس TM شروع می‌کنیم و توضیح می‌دهیم که چگونه آن‌ها منتقل کننده‌های

$$\mathcal{P}_{FM,\gamma} : F_q M \rightarrow F_p M \quad (202)$$

روى کلاف قاب FM را القا می‌کنند. اگر این منتقل کننده‌ها، همانطور که در ادامه بحث می‌شود، با G -ساختار انتخاب شده G -سازگار باشند، در ادامه منتقل کننده‌های

$$\mathcal{P}_{GM,\gamma} : G_q M \rightarrow G_p M \quad (203)$$

$$\mathcal{P}_{A,\gamma} : A_q \rightarrow A_p \quad (204)$$

را روی کلاف‌های G -القایی GM و A -القایی TM یعنی در مرور ادبیات ما در بخش سوم، اکثر شبکه‌های کاتولوشنی یا منتقل کننده‌هایی را فرض می‌کنند که بر اساس اتصال لوی-چیویتا هستند یا یک اتصال بدیهی.

یک تعریف رسمی تراز منتقل کننده‌های کلاف ممکن است مسیر متفاوتی را در پیش بگیرد، که با معروفی یک اتصال به اصطلاح اصلی ارسمن روى کلاف اصلی G یعنی GM شروع می‌شود (که بنا به تعریف، G -سازگار خواهد بود). چنین اتصال ارسمنی می‌تواند یا با انتخاب یک زیرکلاف افقی HGM از کلاف مماس TM تعریف شود یا، به طور معادل، با یک ۱-فرم اتصال با مقدار در جبر لی $\omega : TGM \rightarrow \mathbb{R}$ روى GM . انتقال روى GM متعاقباً از طریق بالابر افقی $\gamma : M \rightarrow [0, 1]$ روى فضای پایه تعریف می‌شود، به طوری که بردارهای مماس بالابر در GM افقی هستند، یعنی $\gamma_* \in HGM$. سپس تمام منتقل کننده‌ها روى TM و FM و A -القایی TM را در این کلاف‌های G -القایی از منتقل کننده‌های روى G -ساختار القا می‌شوند. به جای دنبال کردن این رویکرد رسمی، که نسبتاً فی خواهد بود و می‌توان آن را در ادبیات یافت [؟ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰]، ما بر چگونگی ارتباط متقابل منتقل کننده‌های مختلف از طریق القای یکدیگر تمرکز می‌کنیم.

انتقال روى TM : برای این منتظر، با فرض داده شده بودن منتقل کننده‌های مستقل از مختصات $\mathcal{P}_{TM,\gamma}$ روى TM ، یک راه میانبر را انتخاب می‌کنیم. به یاد بیاورید که، با داشتن پیمانه‌های $\Psi_{TM}^{\tilde{A}}$ روى یک همسایگی $U^{\tilde{A}}$ از q و Ψ_{TM}^A روى یک همسایگی U^A از p ، منتقل کننده بردار مماس طبق معادله (۳۳) مختصاتی می‌شود، یعنی،

$$g_\gamma^{A\tilde{A}} := \psi_{TM,p}^A \circ \mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1} \in \text{GL}(d), \quad (205)$$

و اینکه مختصاتی سازی‌های آن تحت تبدیلات پیمانه در q و p طبق معادله (۳۵) تبدیل می‌شوند:

$$g_\gamma^{B\tilde{B}} = g_p^{BA} g_\gamma^{A\tilde{A}} (g_q^{\tilde{B}\tilde{A}})^{-1} \quad (206)$$

برای نمایش تصویری این تعاریف در قالب یک نمودار جابجایی، به معادله (۳۶) بازمی‌گردیم.

انتقال روى FM : با داشتن منتقل کننده روى کلاف مماس، منتقل کننده از انتقال محورهای قاب منفرد به دست می‌آید. در معادلات، فرض کنید $[e_i]_{i=1}^d \in F_q M$ یک قاب در q باشد، سپس محورهای منفرد e_i برای $i = 1, \dots, d$ بردارهای مماس در $T_q M$ هستند که می‌توانند از طریق $\mathcal{P}_{TM,\gamma}$ منتقل شوند. بنابراین منتقل کننده روى کلاف قاب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:^۲

$$\mathcal{P}_{FM,\gamma} : F_q M \rightarrow F_p M, \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto \mathcal{P}_{FM,\gamma}([e_i]_{i=1}^d) := [\mathcal{P}_{TM,\gamma}(e_i)]_{i=1}^d \quad (207)$$

^۲ انتقال یک قاب در امتداد γ یک منحنی^۳ (بالابر افقی) را در FM توصیف می‌کند. فضای تولید شده توسط تمام بردارهای مماس^۴ در TFM است که در بالا ذکر شد.

برای استخراج شکل صریح مختصاتی سازی آن، عمل آن را بر روی یک عنصر گروهی $(\psi_{FM,p}^A \circ \mathcal{P}_{FM,\gamma} \circ (\psi_{FM,q}^{\tilde{A}})^{-1}) \in GL(d)$ در نظر بگیرید که نماینده یک قاب بدیهی شده از \mathbb{R}^d است که توسط ستون‌های ماتریس $h_{:,i} \in \mathbb{R}^d$ ، $i = 1, \dots, d$ تولید می‌شود:

$$\begin{aligned} [\psi_{FM,p}^A \circ \mathcal{P}_{FM,\gamma} \circ (\psi_{FM,q}^{\tilde{A}})^{-1}](h) &= [\psi_{FM,p}^A \circ \mathcal{P}_{FM,\gamma}] \left([(\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(h_{:,i})]_{i=1}^d \right) && \text{(تعريف } \psi_{FM,p}^{\tilde{A}}, \text{ معادله } 177) \\ &= \psi_{FM,p}^A \left([\mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(h_{:,i})]_{i=1}^d \right) && \text{(تعريف } \mathcal{P}_{FM,\gamma} \text{، معادله } 207) \\ &= \left(\psi_{TM,p}^A \circ \mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(h_{:,i}) \right)_{i=1}^d && \text{(تعريف } \psi_{TM,p}^{\tilde{A}}, \text{ معادله } 177) \\ &= \left(g_{\gamma}^{A\tilde{A}}(h_{:,i}) \right)_{i=1}^d && \text{(بدیهی سازی } \mathcal{P}_{TM,\gamma} \text{، معادله } 205) \\ &= g_{\gamma}^{A\tilde{A}} h && \text{(208)} \end{aligned}$$

بنابراین، مختصاتی سازی‌های منتقل‌کننده‌های قاب معادل با مختصاتی سازی‌های بردار مماس در معادله (205) هستند اما به جای عمل بر روی بردارهای ضریب در \mathbb{R}^d ، بر روی قاب‌های بدیهی شده در $GL(d)$ عمل می‌کنند. تبدیلات پیمانه آن‌ها از نمودار جابجایی

$$\begin{array}{ccc} & g_{\gamma}^{A\tilde{A}} \cdot & \\ \begin{matrix} GL(d) & & GL(d) \\ \downarrow & \nearrow \psi_{FM,q}^{\tilde{A}} & \downarrow \\ & F_q M & \\ \downarrow \psi_{FM,q}^{\tilde{B}\tilde{A}} & \nearrow \psi_{FM,q}^{\tilde{B}} & \downarrow \psi_{FM,p}^B \\ GL(d) & & GL(d) \\ & g_{\gamma}^{B\tilde{B}} \cdot & \end{matrix} & & \end{array} \quad (209)$$

دیده می‌شود که با تبدیلات پیمانه منتقل‌کننده‌های مختصاتی شده روی TM در معادله (206) منطبق هستند.

سازگاری اتصالات و G -ساختارها: هر انتخابی از اتصال یا تعريف منتقل‌کننده‌ها روی کلاف‌های $GL(d)$ یعنی TM و FM با هر G -ساختاری سازگار نیست. به طور خاص، یک G -ساختار ممکن است تحت انتقال قاب‌ها بسته نباشد، یعنی، در حالی که یک قاب در $G_q M \subseteq F_q M$ قرار ندارد، نسبت به بدیهی سازی‌های GM ، $F_q M$ منقول می‌شود، این قاب لزوماً در $G_p M$ قرار دارد.⁵⁵ توسعه $P_{FM,\gamma}$ به یک قاب در $F_p M$ منقول می‌شود، که ضرب چپ آن‌ها روی تارهای \mathbb{R}^d از کلاف‌های $GL(d)$ یعنی TM و FM خوش‌تعريف است، اما روی تار G از GM خوش‌تعريف نیست. اگر زیرکلاف GM تحت انتقال موازی روی FM بسته نباشد، این به معنای آن است که هیچ انتقال متناظر خوش‌تعريفی روی GM در نتیجه روجه G -الحاقی \mathcal{A} وجود ندارد.

به عنوان مثال، اتصال لوی-چیوینتا را در فضاهای اقلیدسی در نظر بگیرید، که منتقل‌کننده‌های آن بردارهای مماس و قاب‌ها را به معنای معمول در \mathbb{E}_d موازی نگه می‌دارند. $\{e\}$ -ساختار (میدان قاب) در شکل ۴۲ تحت این انتقال بسته است و بنابراین سازگار است. از سوی دیگر، $\{e\}$ -ساختار در شکل ۴۲ ب تحت این انتقال بسته نیست و بنابراین با اتصال لوی-چیوینتا با اتصال مشابه، (2) -SO-Sاختار روی S^3 در شکل ۱۷۶ با اتصال لوی-چیوینتا روی کره سازگار است، در حالی که $\{e\}$ -ساختار در شکل ۵۷ با سازگار نیست.

خواننده ممکن است پرسد چه گزاره‌های کلی در مورد سازگاری اتصالات (یا منتقل‌کننده‌ها) و G -ساختارها می‌توان بیان کرد. به طور کلی، اتصال لوی-چیوینتا، یا هر اتصال متريک ديجري، با d -ساختار OM که متناظر با متريک است، سازگار هستند.⁵⁶ اگر منيفلد جهت‌پذير باشد، اتصال لوی-چیوینتا علاوه بر اين با هر $SO(d)$ - d -ساختاری که متناظر با متريک باشد، سازگار است. يك مثال، (2) -SO-Sاختار روی S^3 در شکل ۱۷۶ است. يك شرط لازم (اما نه کافی) برای اينکه يك G -ساختار با يك اتصال داده شده سازگار باشد اين است که گروه هولونومی اتصال، زيرگروهی از گروه ساختار G باشد.

يک مورد خاص مهم، $\{e\}$ -ساختارها هستند، زير آن‌ها يك اتصال بدیهی منحصر به فرد را الفا می‌کنند.⁵⁷ منتقل‌کننده‌های متناظر، قاب‌ها را به گونه‌ای حرکت می‌دهند که با قاب‌های $\{e\}$ -ساختار موازی باقی بمانند. اتصالات بدیهی ممکن است برای نظریه کانولوشن‌های GM اهمیت خاصی

⁵⁵ بر حسب يك اتصال اصلی ارسمان روی FM ، اين حالت زمانی رخ می‌دهد که زيرکلاف افقی $TGM \subseteq TFM$ در $HFM \subseteq TFM$ قرار نداشته باشد. يك تعريف فوري از انتقال موازی بر حسب انتخاب يك زيرکلاف افقی HGM روی G -ساختار، هميشه (بنا به تعريف) منجر به يك انتقال خوش‌تعريف روی GM خواهد شد.

⁵⁶ اين گزاره بنا به تعريف برقرار است زيرا اتصالات متريک زوایا و طول‌ها بين بردارها و در نتيجه اورتونمال بودن قاب‌ها را حفظ می‌کنند. علاوه بر اين، می‌توان اتصالات متريک را به عنوان اتصالات اصلی ارسمان روی OM تعريف کرد.

⁵⁷ يك اتصال بدیهی است اگر گروه هولونومی آن، یعنی انتقال موازی آن حول هر حلقه بسته، بدیهی باشد [؟].

فقط يك اتصال اصلی ارسمان $H\{e\}M = \bar{T}\{e\}M$ را می‌توان روی $V\{e\}M$ مقطع صفر از $T\{e\}M$ است.

نداشته باشند، با این حال، در واقع توسط بسیاری از شبکه‌های کانولوشنی استفاده می‌شوند. به طور خاص، هر شبکه‌ای که به یک $\{e\}$ -ساختار متکی است، به طور ضمنی یک اتصال بدیهی را فرض می‌کند. این شامل تمام مدل‌های جدول ۶ با $\{e\} = \tilde{G} = \{e\}$ می‌شود، به ویژه آن‌هایی که در بخش‌های ۳.۱۱ و ۳.۱۲ بررسی شده‌اند.^{۵۹} توجه داشته باشید که این مدل‌ها اتصال بدیهی را فقط برای انتقال بردار ویژگی خود فرض می‌کنند اما ژئودزیک‌ها را برای پول‌بک منتقل کننده، معادله (۶۷)، بر اساس اتصال اصلی لوی–چیوپتا محاسبه می‌کنند.

انتقال روی GM : با فرض اینکه GM با انتقال روی FM سازگار است (یعنی تحت آن بسته است)، یک منتقل کننده خوش‌تعريف با محدود کردن منتقل کننده کلاف قاب به G -ساختار داده می‌شود:

$$\mathcal{P}_{GM,\gamma} := \mathcal{P}_{FM,\gamma}|_{GM} : G_q M \rightarrow G_p M \quad (210)$$

تابع گذار بین مختصاتی‌سازی‌های مختلف $\mathcal{P}_{GM,\gamma}$ سپس با تابع گذار $\mathcal{P}_{TM,\gamma}$ و در نتیجه با $\mathcal{P}_{FM,\gamma}$ نیز منطبق خواهد بود. ما نمودار جابجایی زیر را به دست می‌آوریم که محدودسازی نمودار در معادله (۲۰۹) از $F_p M$ و $F_q M$ به $G_p M$ و $G_q M$ به $GL(d)$ و G را به تصویر می‌کشد:

$$\begin{array}{ccccc} & & g^{A\tilde{A}}_{\gamma} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ G & & & & G \\ & \downarrow & \psi_{GM,q}^{\tilde{A}} & & \downarrow \psi_{GM,p}^A \\ & & G_q M & \xrightarrow{\mathcal{P}_{GM,\gamma}} & G_p M \\ & \uparrow & \psi_{GM,q}^{\tilde{B}} & & \downarrow \psi_{GM,p}^B \\ & & G & \xrightarrow{g^{B\tilde{B}}_{\gamma}} & G \\ & \uparrow & & \nwarrow & \\ & & g^{B\tilde{B}}_{q} & & \end{array} \quad (211)$$

ما در ادامه این کار فرض می‌کنیم که انتقال روی GM خوش‌تعريف است.

انتقال روی A : اگر منتقل کننده‌های یک اتصال روی GM خوش‌تعريف باشند، آن‌ها منتقل کننده‌هایی را روی هر کلاف G -الحاقی، از جمله کلاف‌های بردار ویژگی $\rho \sim ([e_i]_{i=1}^d, f)$ می‌کنند. فرض کنید $f_q := [[e_i]_{i=1}^d, f]$ یک بردار ویژگی مستقل از مختصات در A_q باشد. انتقال موازی آن توسط آن کلاس هم‌ارزی داده می‌شود که با ثابت نگه داشتن برخی ضرایب نماینده $f \in \mathbb{R}^c$ و انتقال قاب متناظر $[e_i]_{i=1}^d$ تعریف می‌شود:

$$\mathcal{P}_{A,\gamma} : A_q \rightarrow A_p, \quad f_q \mapsto \mathcal{P}_{A,\gamma}(f_q) := [\mathcal{P}_{GM,\gamma}([e_i]_{i=1}^d), f] \quad (212)$$

در بخش ۳.۳ ما ادعا کردیم که منتقل کننده ضرایب عددی بردار ویژگی $g^{A\tilde{A}}_{\gamma}(\rho)$ داده می‌شود به شرطی که G باشد، که این حالت زمانی است که انتقال روی GM خوش‌تعريف باشد. این عبارت مختصاتی از $\mathcal{P}_{A,\gamma}$ را می‌توان با ارزیابی گام به گام عمل $\psi_{A,p}^A \circ \mathcal{P}_{A,\gamma} \circ (\psi_{A,q}^{\tilde{A}})^{-1}$ انجام داد. این عبارت مختصاتی از $\mathcal{P}_{A,\gamma}$ را می‌توان با ارزیابی گام به گام عمل $\psi_{A,p}^A \circ \mathcal{P}_{GM,\gamma} \circ (\psi_{GM,q}^{\tilde{A}})^{-1}$ انجام داد.

$$\begin{aligned} [\psi_{A,p}^A \circ \mathcal{P}_{A,\gamma} \circ (\psi_{A,q}^{\tilde{A}})^{-1}](f) &= [\psi_{A,p}^A \circ \mathcal{P}_{A,\gamma}]([\sigma^{\tilde{A}}(q), f]) && \text{(تعریف } (\psi_{A,p}^{\tilde{A}})^{-1} \text{، معادله (۱۹۵))} \\ &= \psi_{A,p}^A([\mathcal{P}_{GM,\gamma}(\sigma^{\tilde{A}}(q)), f]) && \text{(تعریف } \mathcal{P}_{A,\gamma} \text{، معادله (۲۱۲))} \\ &= \rho(\psi_{GM,p}^A \circ \mathcal{P}_{GM,\gamma} \circ \sigma^{\tilde{A}}(q)) \cdot f && \text{(تعریف } \psi_{A,p}^A \text{، معادله (۱۹۴))} \\ &= \rho(\psi_{GM,p}^A \circ \mathcal{P}_{GM,\gamma} \circ (\psi_{GM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(e)) \cdot f && \text{(تعریف مقطع همانی } \sigma^{\tilde{A}} \text{، معادله (۱۸۳))} \\ &= \rho(g^{A\tilde{A}}_{\gamma}) \cdot f && \text{(تعریف مختصات، معادله (۲۱۱))} \end{aligned} \quad (213)$$

^{۵۹} این مدل‌ها با مدل‌سازی نکردن منتقل کننده‌های غیربدیهی بردارهای ویژگی، به طور ضمنی یک اتصال بدیهی را فرض می‌کنند: آن‌ها ضرایب بردار ویژگی را بدون تبدیل آن‌ها اباحت می‌کنند.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \rho(g_{\gamma}^{A\tilde{A}}) & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 \mathbb{R}^c & & \mathcal{A}_q & & \mathbb{R}^c \\
 & \downarrow \psi_{A,q}^{\tilde{A}} & \xrightarrow{\mathcal{P}_{A,\gamma}} & \downarrow \psi_{A,p}^A & \\
 \rho(g_q^{\tilde{B}\tilde{A}}) & & \mathcal{A}_p & & \rho(g_p^{BA}) \\
 & \uparrow \psi_{A,q}^{\tilde{B}} & & \downarrow \psi_{A,p}^B & \\
 & & \rho(g_{\gamma}^{B\tilde{B}}) & &
 \end{array} \quad (214)$$

نشان می‌دهد که تبدیلات پیمانه منتقل‌کننده‌های بردار ویژگی مختصاتی شده به صورت زیر است:

$$\rho(g_{\gamma}^{B\tilde{B}}) = \rho(g_p^{BA})\rho(g_{\gamma}^{A\tilde{A}})\rho(g_q^{\tilde{B}\tilde{A}})^{-1} \quad (215)$$

توجه داشته باشید که این قانون تبدیل با قانون تبدیل در معادله (۲۰۶) سازگار است.

۷ تبدیلات میدان کرنل مستقل از مختصات و کانولوشن‌های GM

کلاف‌های G-الحاقی معرفی شده در بخش ۶ امکان توصیف میدان‌های ویژگی - و در نتیجه شبکه‌های کانولوشنی - را در سطح سراسری فراهم می‌کند. با داشتن دنباله‌ای از کلاف‌های بردار ویژگی G-الحاقی روی $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N \xrightarrow{\pi_A} M$ ، ما شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات را به عنوان دنباله‌هایی

$$\Gamma(\mathcal{A}_1) \xrightarrow{L_1} \Gamma(\mathcal{A}_2) \xrightarrow{L_2} \dots \xrightarrow{L_N} \Gamma(\mathcal{A}_N) \quad (216)$$

از لایه‌های پارامتری شده L_1, \dots, L_N توصیف می‌کنیم که بین فضاهای ویژگی $\Gamma(\mathcal{A}_1), \dots, \Gamma(\mathcal{A}_N)$ یعنی بین فضاهای میدان‌های ویژگی A_i مدل شده توسط کلاف‌های متناظر، نگاشت می‌کنند. در حالی که انواع میدان (یا قوانین تبدیل) $(\mathcal{A}_i, \rho_i : G \rightarrow \mathrm{GL}(c_i)) / \sim_{\rho_i}$ (برای $i = 1, \dots, N-1$) باشد توسط کاربر به عنوان یک آنپارامتر مشخص شوند، انواع میدان $(\mathcal{A}_N, \rho_N : G \rightarrow \mathrm{GL}(c_N))$ و $G \rightarrow \mathrm{GL}(c_N)$ برای ورودی و خروجی شبکه معمولاً توسط وظیفه یادگیری تعیین می‌شوند. ساختار مازولار شبکه‌های عصی اجازه می‌دهد تا توجه را به لایه‌های منفرد محدود کنیم که بین فضاهای ویژگی $\Gamma(\mathcal{A}_1)$ و $\Gamma(\mathcal{A}_N)$ با ابعاد c_1 و c_N و نوع ρ_1 و ρ_N نگاشت انجام می‌دهند.

۱.۷	کانولوشن‌های GM با اندازه 1×1
۱.۱.۷	کانولوشن‌های GM با اندازه 1×1 به عنوان M-مورفیسم‌های کلاف برداری
۲.۱.۷	کانولوشن‌های GM با اندازه 1×1 به عنوان مقاطع کلاف هومومورفیسم
۲.۷	تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM
۱.۲.۷	میدان‌های کرنل
۲.۲.۷	تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM
۳.۲.۷	تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM در مختصات محلی

هدف اصلی این بخش، معرفی کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM است که بلوک‌های سازنده اصلی شبکه‌های مستقل از مختصات GM روی منیفلدهای ریمانی هستند. برای شروع، و برای معرفی مفاهیمی که بعداً مورد نیاز خواهد بود، ما در بخش ۱.۷ ابتدا بر روی مورد ساده‌تر $GM \times \mathbb{R}^{c_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{c_N}$ -تمرکز خواهیم کرد که کرنل‌های نقطه‌مانند را به کار می‌برند. بخش ۲.۷ تمرکز را به کانولوشن‌های GM 1×1 -تبدیلات میدان کرنل با کرنل‌های با گستره فضایی منتقل می‌کند. آن‌ها بر حسب میدان‌های کرنل سراسری و هموار پارامتری می‌شوند که در بخش ۱.۲.۷ معرفی شده‌اند. میدان‌های کرنل کانولوشنی GM ملزم به اشتراک‌گذاری وزن‌ها بین موقعیت‌های مکانی مختلف هستند. برای اینکه این اشتراک‌گذاری وزن مستقل از مختصات GM باشد، کرنل‌های الگو که میدان‌های کرنل کانولوشنی GM را پارامتری می‌کنند، باید G-هدایت‌پذیر باشند (معادله (۲۴۲)). تبدیلات واقعی میدان کرنل و کانولوشن‌های GM در بخش ۲.۷ معرفی می‌شوند. تعریف سراسری آن‌ها با جایگزینی عبارات مختصاتی محلی از بخش ۲.۴ با همتای‌های سراسری و مستقل از مختصات‌شان هدایت می‌شود. همانطور که در بخش ۳.۲.۷ نشان داده شده است، این تعاریف مستقل از مختصات در بدیهی‌سازی‌های محلی به عبارات مختصاتی از بخش ۲.۴ کاهش می‌یابند.

۱.۷ کانولوشن‌های GM با اندازه 1×1

خطی هر بردار ویژگی ورودی $f_{\text{in}} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{in}})$ -میدان‌های ویژگی خروجی ($f_{\text{out}} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{out}})$) را به میدان‌های ویژگی خروجی ($f_{\text{out}}(p) \in \mathcal{A}_{\text{out},p} \cong \mathbb{R}^{c_{\text{out}}}$) به یک بردار ویژگی خروجی $f_{\text{out}}(p) \in \mathcal{A}_{\text{out},p} \cong \mathbb{R}^{c_{\text{out}}}$ در همان مکان $p \in M$ نگاشت می‌کنند. ویژگی کانولوشنی با اشتراک‌گذاری نگاشت خطی از $\mathcal{A}_{\text{out},p}$ به $\mathcal{A}_{\text{out},q}$ بین مکان‌های فضای مختلف پیاده‌سازی می‌شود. با این حال، در حالی که فضاهای ویژگی $\mathcal{A}_{\text{out},p}$ و $\mathcal{A}_{\text{out},q}$ و همچنین $\mathcal{A}_{\text{out},p} \otimes \mathcal{A}_{\text{out},q}$ برای $p, q \in M$ مختلف با یکدیگر ایزو‌مورف هستند، اگر گروه ساختار G در نظر گرفته شده غیربدیهی باشد، هیچ ایزو‌مورفیسم کاتونی بین آنها وجود ندارد. بنابراین، مشخص نیست که چگونه نگاشت خطی می‌تواند بین مکان‌های مختلف به اشتراک گذاشته شود. همانطور که قبل از مقدمه این بخش اشاره شد، این مسئله با در نظر گرفتن کرnel‌های G -هم‌متغیر که نسبت به انتخاب خاص ایزو‌مورفیسم یا پیمانه بی‌تفاوت هستند، حل می‌شود. اختیاری بودن بدیهی‌سازی که از G -اطلس انتخاب می‌شود، استقلال از مختصات است.

از نظر ریاضی، 1×1 -کانولوشن‌های GM را می‌توان یا به عنوان M -مورفیسم‌های کلاف برداری خاص یا از طریق مقاطع متناضل کلاف‌های $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{in}}, \mathcal{A}_{\text{out}})$ فرمول بندی کرد. از آنجایی که بعداً به هر دو مفهوم نیاز داریم، هر دو دیدگاه را در بخش‌های بعدی ۱.۱.۷ و ۲.۱.۷ معرفی خواهیم کرد.

۱.۱.۷ کانولوشن‌های GM با اندازه 1×1 به عنوان M -مورفیسم‌های کلاف برداری

1×1 -کانولوشن‌های GM-را می‌توان بر حسب M -مورفیسم‌های کلاف برداری هموار خاصی که وزن‌ها را در موقعیت‌های مکانی به اشتراک می‌گذارند، رسمی‌سازی کرد. با نادیده گرفتن الزام به اشتراک‌گذاری وزن‌ها در حال حاضر، چنین M -مورفیسم کلاف برداری \mathcal{C} یک نگاشت کلاف هموار است که نمودار جابجایی زیر را برآورده می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\text{in}} & \xrightarrow{\mathcal{C}} & \mathcal{A}_{\text{out}} \\ & \searrow \pi_{\mathcal{A}_{\text{in}}} & \swarrow \pi_{\mathcal{A}_{\text{out}}} \\ & M & \end{array} \quad (217)$$

جابجایی‌بذری \mathcal{C} تضمین می‌کند که هر تار $\mathcal{A}_{\text{out},p} \circ \mathcal{C} = \mathcal{C} \circ \mathcal{A}_{\text{in},p}$ به تار $\mathcal{A}_{\text{out},p}$ روی همان نقطه $p \in M$ نگاشت می‌شود (که باعث پیدایش « M » در عبارت M -مورفیسم می‌شود). به عنوان یک مورفیسم کلاف برداری، محدودیت $\mathcal{C}|_p : \mathcal{A}_{\text{in},p} \rightarrow \mathcal{A}_{\text{out},p}$ به یک تار منفرد، علاوه بر این، به صورت خطی تعریف می‌شود. نسبت به یک بدیهی‌سازی محلی $\Psi_{\mathcal{A}_{\text{in}}}^A$ از \mathcal{A}_{in} و $\Psi_{\mathcal{A}_{\text{out}}}^B$ از \mathcal{A}_{out} ، نگاشت کلاف در هر نقطه $p \in U^A \cap U^B$ توسط یک ماتریس نمایش داده می‌شود:

$$\mathcal{C}|_p := \psi_{\mathcal{A}_{\text{in}},p}^A \circ \mathcal{C}|_p \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\text{out}},p}^B)^{-1} \in \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}. \quad (218)$$

ارتباط آن با یک مختصاتی‌سازی دوم $\mathcal{C}|_p$ در $p \in U^A \cap U^B$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\mathcal{C}|_p = \rho_{\mathcal{A}_{\text{in}}}(g_p^{BA}) \mathcal{C}|_p \rho_{\mathcal{A}_{\text{out}}}(g_p^{BA})^{-1}, \quad (219)$$

که از نمودار جابجایی زیر مشهود است:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{C}|_p & & \\ & \swarrow \psi_{\mathcal{A}_{\text{in}},p}^A & & \searrow \psi_{\mathcal{A}_{\text{out}},p}^B & \\ \mathbb{R}^{c_{\text{in}}} & & \mathcal{A}_{\text{in},p} & & \mathbb{R}^{c_{\text{out}}} \\ \downarrow \rho_{\mathcal{A}_{\text{in}}}(g_p^{BA}) & & \xrightarrow{\mathcal{C}|_p} & & \downarrow \rho_{\mathcal{A}_{\text{out}}}(g_p^{BA}) \\ & \swarrow \psi_{\mathcal{A}_{\text{in}},p}^B & & \searrow \psi_{\mathcal{A}_{\text{out}},p}^A & \\ & \mathbb{R}^{c_{\text{in}}} & & & \mathbb{R}^{c_{\text{out}}} \\ & \xrightarrow{\mathcal{C}|_p} & & & \end{array} \quad (220)$$

نگاشت کلاف \mathcal{C} بر روی میدان‌های ویژگی ورودی ($f_{\text{in}} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{in}})$) عمل می‌کند تا میدان‌های ویژگی خروجی تولید کند:

$$f_{\text{out}} = \mathcal{C} \circ f_{\text{in}} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{out}}). \quad (221)$$

بر حسب یک نمودار جابجایی، این نگاشت به صورت زیر به تصویر کشیده می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} A_{\square\square} & \xrightarrow{\quad C \quad} & A_{\square\square\square} \\ & \swarrow f_{\square\square} & \searrow f_{\square\square\square} \\ & M & \end{array}, \quad (222)$$

برای اینکه یک M -مورفیسم کلاف برداری $C_{K_{1\times 1}}$ نماینده یک 1×1 -متغیر است، باید بر حسب یک الگوی کرنل $K_{1\times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\square\square}\times c_{\square\square}}$ -یعنی پارامتری شود که با مختصاتی سازی‌ها در تمام موقعیت‌های مکانی به اشتراک گذاشته شده است. همانطور که قبلاً بحث شد، برای تضمین استقلال از مختصات GM ، هیچ پیمانه خاصی نباید ترجیح داده شود. بنابراین لازم است که وزن‌ها با تمام بدیهی‌سازی‌های \mathcal{X} از G -اطلس $X \in \mathcal{X}$ به طور همزمان به اشتراک گذاشته شوند، یعنی لازم است:

$$C_{K_{1\times 1}}^X|_p = K_{1\times 1} \quad \text{برای هر پیمانه } X \in \mathcal{X} \text{ با } p \in U^X. \quad (223)$$

از رفتار تبدیل بین مختصاتی سازی‌های مختلف در معادله (219) نتیجه می‌شود که الگوی کرنل باید قيد خطی زیر را برآورده کند:

$$\rho_{\square\square}(g) K_{1\times 1} \rho_{\square\square}(g)^{-1} = K_{1\times 1} \quad \forall g \in G, \quad (224)$$

یعنی، باید یک درهم‌تننده (یک نگاشت خطی هم‌متغیر) باشد. فضای برداری

$$\text{Hom}_G(\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square}) := \left\{ K_{1\times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\square\square}\times c_{\square\square}} \mid K_{1\times 1} \rho_{\square\square}(g) = \rho_{\square\square}(g) K_{1\times 1} \quad \forall g \in G \right\} \quad (225)$$

نگاشتهای درهم‌تننده، فضای کرنل‌های 1×1 -مستقل از مختصات GM را به طور کامل مشخص می‌کند. همانطور که قبلاً در بخش ۱.۱.۴ ذکر شد، لم شور [۱] ایجاد می‌کند که الزام به اینکه $K_{1\times 1}$ یک درهم‌تننده باشد، از نگاشت بین میدان‌هایی که تحت نمایش‌های کاهش‌ناپذیر غیرایزومورف تبدیل می‌شوند، از طریق 1×1 -متغیر GM -جلوگیری می‌کند. کانولوشن‌های عمومی تر GM با کرنل‌های با گستره فضایی، که در بخش ۲.۷ تعریف شده‌اند، این مسئله را حل خواهند کرد.

با این مقدمات، آمده‌ایم تا تعریف دقیقی از 1×1 -متغیر GM -را ارائه دهیم:

تعریف ۷.۱ یک 1×1 -متغیر GM -یک نگاشت است

$$K_{1\times 1} \otimes : \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}), \quad f_{\square\square} \mapsto K_{1\times 1} \otimes f_{\square\square} := C_{K_{1\times 1}} \circ f_{\square\square} \quad (226)$$

که توسط یک کرنل درهم‌تننده 1×1 -متغیر GM -یعنی $K_{1\times 1} \in \text{Hom}_G(\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square})$ در اینجا M -مورفیسم کلاف برداری هموار منحصر به فرد بین $\mathcal{A}_{\square\square}$ و $\mathcal{A}_{\square\square\square}$ است که در پیمانه‌های دلخواه $\psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}$ و $\psi_{\mathcal{A}_{\square\square\square}, p}$ از G -اطلس مورد نظر به صورت نقطه‌ای تعریف می‌شود:

$$C_{K_{1\times 1}}|_p := \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^{-1} \circ K_{1\times 1} \circ \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}. \quad (227)$$

استقلال از پیمانه‌های انتخاب شده (استقلال از مختصات GM) با درهم‌تننده بودن $K_{1\times 1}$ تضمین می‌شود.

برای نشان دادن صریح استقلال از پیمانه انتخاب شده، هر بدیهی‌سازی مرتبط با G یعنی $\rho_{\square\square}(g) \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}(g)$ را برای یک عنصر گروه ساختار دلخواه $g \in G$ در نظر بگیرید. که ساختار

$$\begin{aligned} C_{K_{1\times 1}}|_p &= (\rho_{\square\square}(g) \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p})^{-1} \circ K_{1\times 1} \circ (\rho_{\square\square}(g) \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}) \\ &= \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^{-1} \circ (\rho_{\square\square}(g)^{-1} K_{1\times 1} \rho_{\square\square}(g)) \circ \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p} \\ &= \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^{-1} \circ K_{1\times 1} \circ \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p} \end{aligned} \quad (228)$$

را نامتفاوت باقی می‌گذارد. اینکه 1×1 -متغیر GM -تعریف شده به این شکل واقعاً به مقاطعی در $(\mathcal{A}_{\square\square})^\Gamma$ نگاشت می‌شوند، از این واقعیت ناشی می‌شود که $C_{K_{1\times 1}}$ یک نگاشت کلاف است. یک نمای کلی از مختصاتی سازی‌های محلی 1×1 -متغیر GM -در شکل ۳۷-را در شکل ۳۷-در شکل ۳۷-آورده شده است.

۲.۱.۷ کانولوشن‌های GM با اندازه 1×1 به عنوان مقاطع کلاف هومومورفیسم

در حالی که M -مورفیسم کلاف برداری با مختصاتی سازی‌های مستقل از پیمانه از تعریف ۷.۱ و شکل ۳۷ یک 1×1 -متغیر GM -را به طور کامل مشخص می‌کند، اکنون دیدگاه جایگزینی را اتخاذ می‌کنیم که 1×1 -متغیر GM -را بر حسب کلاف هومومورفیسم

$$\begin{array}{c}
\mathcal{C}_{K_{1 \times 1}}^B := (\text{id} \times K_{1 \times 1}) \\
\begin{array}{ccccc}
& & U \times \mathbb{R}^{c_{\infty}} & & \\
& \nearrow \Psi_{A_{\infty}}^B & & \searrow \Psi_{A_{\infty}}^B & \\
U \times \mathbb{R}^{c_{\infty}} & & U \times \mathbb{R}^{c_{\infty}} & & \\
(\text{id} \times \rho_{\infty}(g^{BA}) \cdot) & & (\text{id} \times \rho_{\infty}(g^{BA}) \cdot) & & \\
& \swarrow \Psi_{A_{\infty}}^A & & \nearrow \Psi_{A_{\infty}}^A & \\
& U \times \mathbb{R}^{c_{\infty}} & & U \times \mathbb{R}^{c_{\infty}} & \\
& \leftarrow \pi_{A_{\infty}}^{-1}(U) & & \rightarrow \pi_{A_{\infty}}^{-1}(U) & \\
& & \mathcal{C}_{K_{1 \times 1}} & & \\
& \downarrow f_{\infty} & & \uparrow K_{1 \times 1} \otimes f_{\infty} & \\
& \text{proj}_1 & & \text{proj}_1 & \\
& \searrow \pi_{A_{\infty}} & & \swarrow \pi_{A_{\infty}} & \\
& & \mathcal{C}_{K_{1 \times 1}}^A := (\text{id} \times K_{1 \times 1}) & &
\end{array}
\end{array}$$

شکل ۳.۷: مختصاتی سازی یک 1×1 -مورفیسم کلاف برداری متناظر آن $\mathcal{L}_{K_{1 \times 1} \otimes}$ و بیزگی کانولوشنی با اشتراک‌گذاری یک ماتریس کرنل $K_{1 \times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\infty} \times c_{\infty}}$ در موقعیت‌های مکانی مختلف $p \in M$ از مورفیسم کدگذاری می‌شود. از آنجایی که هیچ پیمانه‌ای نباید ترجیح داده شود، کرنل علاوه بر این در بدیهی سازی‌های مختلف $\mathcal{C}_{K_{1 \times 1}}^B$ و $\mathcal{C}_{K_{1 \times 1}}^A$ به اشتراک گذاشته می‌شود. بنابراین، جابجایی‌پذیری نمودار برای هر انتخاب $\Psi_{A_{\infty}}^B$ ، $\Psi_{A_{\infty}}^A$ و $\Psi_{A_{\infty}}^A$ قید $\rho_{\infty}(g)K_{1 \times 1}\rho_{\infty}(g)^{-1} = K_{1 \times 1} \forall g \in G$ است. $\rho_{\infty}(g)K_{1 \times 1}\rho_{\infty}(g)^{-1} = K_{1 \times 1}$ اعمال می‌کند که ماتریس کرنل را به یک درهم‌تننده (یک نگاشت خطی هم‌متغیر) محدود می‌کند، یعنی $[K_{1 \times 1} \otimes f_{\infty}] \circ \pi_{A_{\infty}} \neq \text{id}_{A_{\infty}}$ و $f_{\infty} \circ \pi_{A_{\infty}} \neq \text{id}_{A_{\infty}}$. به جز $K_{1 \times 1} \in \text{Hom}_G(\rho_{\infty}, \rho_{\infty}) \subseteq \mathbb{R}^{c_{\infty} \times c_{\infty}}$ ، $\text{Hom}_G(\rho_{\infty}, \rho_{\infty})$ می‌توان نشان داد که اجتماع مجزای نمودار جابجایی‌پذیر است.

Hom($\mathcal{A}_{\infty}, \mathcal{A}_{\infty}$) $\xrightarrow{\pi_{\infty}} M$ توصیف می‌کند. برای این منظور، به یاد بیاورید که مورفیسم کلاف برداری \mathcal{C} در معادله (۲۱۷) به نگاشتهای خطی $\mathcal{C}|_p : \mathcal{A}_{\infty, p} \rightarrow \mathcal{A}_{\infty, p}$ محدود می‌شود. مجموعه چنین نگاشتهای خطی (با هومومورفیسم‌های فضای برداری) بین $\mathcal{A}_{\infty, p}$ و $\mathcal{A}_{\infty, p}$ نشان داده می‌شود. از آنجایی که این مجموعه تحت ترکیب‌های خطی بسته است، خود یک فضای برداری تشکیل می‌دهد. می‌توان نشان داد که اجتماع مجزای تشكیل می‌دهد. می‌توان نشان داد که اجتماع مجزای

$$\text{Hom}(\mathcal{A}_{\infty}, \mathcal{A}_{\infty}) := \coprod_{p \in M} \text{Hom}(\mathcal{A}_{\infty, p}, \mathcal{A}_{\infty, p}) \quad (229)$$

این فضاهای هومومورفیسم، هنگامی که با نگاشت تصویر $M \rightarrow M$ را به $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\infty, p}, \mathcal{A}_{\infty, p}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\infty, p}, \mathcal{A}_{\infty, p})$ می‌فرستد و یک ساختار هموار القا شده از ساختار \mathcal{A}_{∞} و \mathcal{A}_{∞} مجهز شود، یک کلاف برداری، یعنی کلاف هومومورفیسم بین \mathcal{A}_{∞} و \mathcal{A}_{∞} تشکیل می‌دهد؟ [۱]. تارهای روی p در رابطه $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\infty, p}, \mathcal{A}_{\infty, p}) \cong \text{Hom}(\mathbb{R}^{c_{\infty}}, \mathbb{R}^{c_{\infty}}) \cong \mathbb{R}^{c_{\infty} \times c_{\infty}}$ صدق می‌کنند، به طوری که می‌توانیم تار نمونای را فضای برداری ماتریس‌های $c_{\infty} \times c_{\infty}$ با مقادیر حقیقی در نظر بگیریم، بدیهی سازی‌های

$$\Psi_{\infty} : \pi_{\infty}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^{c_{\infty} \times c_{\infty}}, \quad H \mapsto (p, \psi_{\infty, p}(H)), \quad (230)$$

$$\begin{aligned}
&\text{که در آن } (H) = \pi_{\infty}(H) \text{ را به اختصار آورده‌ایم، از بدیهی سازی‌های } \mathcal{A}_{\infty} \text{ و } \mathcal{A}_{\infty} \text{ با تعريف} \\
&\psi_{\infty, p} : \text{Hom}(\mathcal{A}_{\infty, p}, \mathcal{A}_{\infty, p}) \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\infty} \times c_{\infty}}, \quad H \mapsto \psi_{\mathcal{A}_{\infty, p}} \circ H \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\infty, p}})^{-1} \quad (231)
\end{aligned}$$

به قیاس با معادلات (۲۱۸) و (۱۸) القا می‌شوند. این به معنای نگاشتهای گذار

$$\begin{aligned}
H^B &= \psi_{\mathcal{A}_{\infty, p}}^B \circ H \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\infty, p}}^B)^{-1} \\
&= \psi_{\mathcal{A}_{\infty, p}}^B \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\infty, p}}^A)^{-1} H^A \psi_{\mathcal{A}_{\infty, p}}^A \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\infty, p}}^B)^{-1} \\
&= \rho_{\infty}(g^{BA}) H^A \rho_{\infty}(g^{BA})^{-1} \\
&=: \rho_{\infty}(g^{BA}) H^A
\end{aligned} \quad (232)$$

بین پیمانه‌های Ψ_{∞}^A و Ψ_{∞}^B روی $U^A \cap U^B$ است، که در آن برای راحتی نوشته‌اری، نمایش گروهی هومومورفیسم $\rho_{\infty} : G \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^{c_{\infty} \times c_{\infty}})$ را به عنوان ضرب چپ و راست با ρ_{∞} و ρ_{∞} معرفی کردیم.

به طور کلی، یک کلاف هومومورفیسم بین دو کلاف برداری غیرالحقیقی با گروه‌های ساختار G_1 و G_2 یک گروه ساختار $G_1 \times G_2$ خواهد داشت. از آنجایی که \mathcal{A}_{∞} و \mathcal{A}_{∞} الحقیقی هستند، آنها به طور هم‌مان تحت همان گروه ساختار $G_1 = G_2$ تبدیل می‌شوند به طوری که نگاشتهای گذار آنها در زیرگروه قطری از $G \times G$ مقدار می‌گیرند.

(ب) مقاطع $\sigma_{K_{1x1}} : M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{000}, \mathcal{A}_{0000})$ از کلاف هومومورفیسم $\text{Hom}(\mathcal{A}_{000}, \mathcal{A}_{0000})$ - GM است، دلخواه است. مانند $\sigma_{K_{1x1}} \in \text{Hom}_G(\rho_{000}, \rho_{000}) \subseteq \mathbb{R}^{c_{000} \times c_{000}}$ که به عمان ماتریس (ددهم تئنده) در $\mathbb{R}^{c_{000} \times c_{000}}$ می‌شوند. چنان مقاطعی متضاد با نگاشت‌های کلاف هستند که همانطور که در شکل ۳۷ مشخص شده است، بدیهی سازی می‌شوند.

(آ) بدیهی سازی $(\mathcal{A}_{000}, \mathcal{A}_{0000})$. از آنجایی که به \mathcal{A}_{000} , GM , TM الحاقی است، نگاشت‌های گذار کلاف هومومورفیسم توسط همان عصر گروهی g^{BA} از گروه ساختار مشترک G تعیین می‌شوند (این را با شکل ۳۴ مقایسه کنید). M -مورفیسم‌های کلاف برداری بدون قید همانطور که در معادله (۲۱۷) نشان داده است، متضاد با مقاطع هموار بدون قید از $\text{Hom}(\mathcal{A}_{000}, \mathcal{A}_{0000})$ هستند.

شکل ۳۸: بدیهی سازی‌های محلی کلاف هومومورفیسم $\text{Hom}(\mathcal{A}_{000}, \mathcal{A}_{0000})$. که کلاف برداری نگاشت‌های خطی بین فضاهای $\mathcal{A}_{000,p}$ و $\mathcal{A}_{000,p}$ برای هر $p \in M$ است. طبق معقول $U = U^A \cap U^B$ با $\pi_{000} \circ \sigma_{K_{1x1}} \neq \text{id}_{\text{Hom}(\mathcal{A}_{000}, \mathcal{A}_{0000})}$ به اخصار می‌نویسیم. به جز (۲۱۷) نمودارها جابجایی‌پذیر هستند.

به عنوان یک کلاف برداری G -الحاقی، می‌توان آن را با $\sim_{\rho_{000}}$ شناسایی کرد. شکل ۳۸ یک نمای کلی از بدیهی سازی‌های محلی $(\mathcal{A}_{000}, \mathcal{A}_{0000})$ ارائه می‌دهد. به شباهت با بدیهی سازی‌های دیگر کلاف‌های G -الحاقی در شکل ۳۴ توجه کنید.

از دیدگاه کلاف‌های هومومورفیسم، نگاشت‌های کلاف بدون قید مانند معادله (۲۱۷) متضاد با عمل مقاطع کلاف هومومورفیسم هموار بدون قید هستند

$$\sigma_{\text{Hom}} : M \mapsto \text{Hom}(\mathcal{A}_{000}, \mathcal{A}_{0000}) \quad \pi_{000} \circ \sigma_{\text{Hom}} = \text{id}_M \quad (233)$$

که می‌توان آنها را به عنوان میدان‌های کرنل 1×1 تفسیر کرد که وزن‌ها را به اشتراک نمی‌گذارند. وجود سراسری آنها با این واقعیت که $\text{Hom}(\mathcal{A}_{000}, \mathcal{A}_{0000})$ یک کلاف برداری است تضمین می‌شود. مقاطع متضاد با 1×1 - GM -علوه بر این نیاز دارند که تبدیلات خطی $\sigma_{\text{Hom}}(p) \in \text{Hom}(\mathcal{A}_{000,p}, \mathcal{A}_{000,p})$ توسط یک کرنل الگو $K_{1x1} \in \mathbb{R}^{c_{000} \times c_{000}}$ تعیین شوند که در موقعیت‌های مختلف $p \in M$ و هر انتخاب پیمانه به اشتراک گذاشته شده است. بنابراین آنها را می‌توان برای هر $p \in M$ به صورت زیر تعریف کرد

$$\sigma_{K_{1x1}}(p) := \psi_{000,p}^{-1}(K_{1x1}), \quad K_{1x1} \in \text{Hom}_G(\rho_{000}, \rho_{000}), \quad (234)$$

که در آن بدیهی سازی انتخاب شده Ψ دلخواه است اگر (و تنها اگر) K_{1x1} قید دردهم تئنده را برآورده کند

$$\rho_{000}(g)K_{1x1} = K_{1x1} \quad \forall g \in G, \quad (235)$$

که معادل با معادله (۲۲۴) است.^{۶۱} بی‌اهمیت بودن پیمانه در چنین مقاطعی در نمودار جابجایی در شکل ۳۸ به تصویر کشیده شده است (این را با بدیهی سازی نگاشت کلاف معادل در شکل ۳۷ مقایسه کنید).

ملاحظات پایانی: یک لایه هموار 1×1 - GM را می‌توان به طور معادل از طریق یک نگاشت کلاف هموار به صورت $C_{K_{1x1}} \circ f_{000}(p) := \sigma_{K_{1x1}}(p)$ یا از طریق یک مقاطع کلاف هومومورفیسم هموار به صورت $f_{000}(p) \circ \sigma_{K_{1x1}}(p) := f_{000}(p)$ تعریف کرد. بنا به تعریف، هر دو در یک پیمانه دلخواه Ψ^A به $f_{000}^A(p) = K_{1x1}f_{000}(p) = f_{000}(p)K_{1x1}$ بدلیل استقلال از مختصات GM این تعریف با خاصیت دردهم تئنده کریل در معادله (۲۲۴) یا، به طور معادل، معادله (۲۳۵) تضمین می‌شوند. این را می‌توان با در نظر گرفتن یک بدیهی سازی متفاوت از طریق Ψ^B مشاهده کرد:

$$\begin{aligned} K_{1x1}f_{000}^B(p) &= K_{1x1}(\rho_{000}(g_p^{BA})f_{000}^A(p)) \\ &= \rho_{000}(g_p^{BA})K_{1x1}f_{000}^A(p) \\ &= \rho_{000}(g_p^{BA})f_{000}^A(p) \\ &= f_{000}^B(p) \end{aligned} \quad (236)$$

^{۶۱} همواری مورد نیاز مقاطع از همواری بدیهی سازی‌های محلی ناشی می‌شود.

۲.۷ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM

اکنون به سراغ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM با کرنل‌های (کانولوشنی) با گستره فضایی می‌رویم. بخش ۱.۲.۷ میدان‌های کرنل عمومی و بدون قید و میدان‌های کرنل کانولوشنی GM خاص‌تر را معرفی می‌کند که بر اساس یک کرنل الگوی مشترک و G-هدایت‌پذیر تعريف می‌شوند. تبدیلات میدان کرنل عمومی و کانولوشن‌های GM در بخش ۲.۲.۷ معرفی می‌شوند. از آنجایی که هر دو به صورت سراسری تعريف شده‌اند، فرمول‌بندی آنها لزوماً مستقل از مختصات است. بخش ۳.۲.۷ هر دو عمل را نسبت به بدیهی‌سازی‌های محلی بیان می‌کند و تعاریف محلی ما را از بخش ۲.۴ بازیابی می‌کند.

۱.۲.۷ میدان‌های کرنل مستقل از مختصات و کرنل‌های G-هدایت‌پذیر

برای تشخیص الگوهای فضایی در میدان‌های ویژگی، شبکه‌های کانولوشنی از کرنل‌های با گستره فضایی استفاده می‌کنند که به صورت خطی ویژگی‌ها را از یک همسایگی محلی در اطراف هر نقطه جمع‌آوری می‌کنند. در معادله (۷۰) ما کرنل‌های الگوی (بدون قید) را برای یک منیفلد d -بعدی و میدان‌های ویژگی ورودی و خروجی با ابعاد $c_{\infty \infty} \times c_{\infty}$ و $c_{\infty} \times c_{\infty}$ به عنوان نگاشتهای $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\infty \infty} \times c_{\infty}}$ تعريف کردیم که به هر نقطه از دامنه خود یک ماتریس $c_{\infty \infty} \times c_{\infty}$ اختصاص می‌دهند. تعريف کرنل‌های کانولوشن به عنوان نگاشتهایی با دامنه $\mathbb{R}^d \cong T_p M$ و همانه $(\mathcal{A}_{\infty \infty, p}) \cong \text{Hom}(\mathcal{A}_{\infty \infty}, \mathcal{A}_{\infty \infty, p})$ یک تعريف مستقل از مختصات برای کرنل‌ها به عنوان نگاشتهایی بین فضاهای مماس و فضاهای همومورفیسم منتظر پیشنهاد می‌کند:

تعريف ۷.۲ (میدان کرنل). ما میدان‌های کرنل (بدون قید) از نوع $\rho_{\infty \infty}$ را روی یک منیفلد M به عنوان M -مورفیسم‌های کلاف هموار بین کلاف مماس TM و کلاف هومومورفیسم بردار ویژگی $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\infty \infty}, \mathcal{A}_{\infty \infty})$ تعريف می‌کنیم. بر اساس تعريفش به عنوان یک M -مورفیسم، یک میدان کرنل \mathcal{K} باعث جابجاگر نمودار زیر می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\mathcal{K}} & \text{Hom}(\mathcal{A}_{\infty \infty}, \mathcal{A}_{\infty \infty}) \\ \pi_{TM} \searrow & & \swarrow \pi_{\infty \infty} \\ & M & \end{array} \quad (237)$$

با وجود نگاشت هموار بین دو کلاف برداری باشد، یعنی، فرض نمی‌شود که محدودیت‌های $\mathcal{K}_p : T_p M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\infty \infty, p}, \mathcal{A}_{\infty \infty, p})$ یک مورفیسم کلاف برداری باشد، یعنی، فرض نمی‌شود که محدودیت‌های \mathcal{K}_p باعث جابجاگر نمودار زیر می‌شود:

نام میدان کرنل از این واقعیت ناشی می‌شود که نگاشتهای کلاف تعريفشده به این شکل \mathcal{K} یک کرنل مستقل از مختصات (بالقوه متفاوت) $\mathcal{K}_p : T_p M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\infty \infty, p}, \mathcal{A}_{\infty \infty, p})$ را به هر نقطه p از منیفلد اختصاص می‌دهند.^{۳۳} در عمل، کرنل‌های \mathcal{K}_p اغلب برای تشخیص الگوهای محلی در اطراف طراحی می‌شوند و بنابراین فرض می‌شود که در اطراف مبدأ $T_p M$ دارای تکیه‌گاه فشرده باشند.

یک کرنل مستقل از مختصات \mathcal{K}_p در p نسبت به پیمانه‌های $\psi_{TM, p}^A$ و $\psi_{\infty \infty, p}^A$ از G-اطلس‌ها توسط نگاشت زیر داده می‌شود:

$$\mathcal{K}_p^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\infty \infty} \times c_{\infty}}, \quad \mathcal{K}_p^A := \psi_{\infty \infty, p}^A \circ \mathcal{K}_p \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}. \quad (238)$$

شكل ۲۵ یک کرنل مستقل از مختصات روی $T_p M$ و مختصات‌سازی‌های آن روی \mathbb{R}^d را نسبت به پیمانه‌های مختلف به تصویر می‌کشد. از نمودار جابجاگر

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & & \mathcal{K}_p^A & & \mathbb{R}^{c_{\infty \infty} \times c_{\infty}} \\ & \swarrow \psi_{TM, p}^A & & \nearrow \psi_{\infty \infty, p}^A & \\ g_p^{BA} & T_p M & \xrightarrow{\mathcal{K}_p} & \text{Hom}(\mathcal{A}_{\infty \infty}|_p, \mathcal{A}_{\infty \infty}|_p) & \\ & \downarrow \psi_{TM, p}^B & & \downarrow \psi_{\infty \infty, p}^B & \\ \mathbb{R}^d & & \mathcal{K}_p^B & & \mathbb{R}^{c_{\infty \infty} \times c_{\infty}} \end{array} \quad (239)$$

^{۳۳} این نشان می‌دهد که کرنل‌های کانولوشن به طور کلی به عنوان نگاشتهای $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\infty \infty} \times c_{\infty}}$ خطی نیستند. توجه داشته باشید که این با خطی بودن $K(v) \in \mathbb{R}^{c_{\infty \infty} \times c_{\infty}}$ (به عنوان نگاشت $v \in \mathbb{R}^{c_{\infty \infty}}$) برای هر $v \in \mathbb{R}^{c_{\infty \infty}}$ یا، در اینجا، خطی بودن $\mathcal{K}_p(v) \in \text{Hom}(\mathcal{A}_{\infty \infty, p}, \mathcal{A}_{\infty \infty, p})$ (به عنوان نگاشت $v \in T_p M$) برای هر $v \in T_p M$ تداخلی ندارد.

^{۳۴} ما انتظار داریم که بتوان یک مفهوم خوش تعريف از کلاف‌های کرنل را تدوین کرد که مقاطع آنها در تناقض یک به یک با تعريف ما از میدان‌های کرنل به عنوان نگاشتهای کلاف باشند (این فرمول‌بندی مجدد، گذار از معادله (۲۱۷) به معادله (۲۳۳) را منعکس می‌کند).

نتیجه می‌شود که مختصاتی‌سازی‌های مختلف کرنل با رابطه زیر به هم مرتبط هستند:

$$\mathcal{K}_p^B = \rho_{\text{}}(g_p^{BA}) \circ \mathcal{K}_p^A \circ (g_p^{BA})^{-1}. \quad (240)$$

توجه داشته باشید که این رابطه فقط استقلال از مختصات GM را ایجاب می‌کند اما کرنل مستقل از مختصات را به هیچ وجه محدود نمی‌کند. مانند قبل، وضعیت با اشتراک‌گذاری وزن‌ها در موقعیت‌های مکانی تغییر می‌کند.

برای اینکه یک میدان کرنل \mathcal{K}_K متناظر با یک کانولوشن باشد، باید به طور کامل توسط یک کرنل الگوی واحد $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ مشخص شود که در تمام موقعیت‌های مکانی به اشتراک گذاشته شده است. ما دوباره مجبوریم وزن‌ها را با تمام پیمانه‌های $X \in \mathfrak{X}$ به طور همزمان به اشتراک‌گذاریم تا همارزی آنها و در نتیجه استقلال از مختصات GM را حفظ کنیم. همانطور که در بخش ۳.۲.۴ استدلال شد، روش مناسب برای اشتراک‌گذاری K با مختصاتی‌سازی‌های کرنل $\mathcal{K}_{K,p}^X$ شامل نرم‌افزاری با حجم قاب مرجع $\sqrt{|\eta_p^X|}$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{K}_{K,p}^X = \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^X|}} \quad \text{برای هر پیمانه } X \in \mathfrak{X} \quad p \in U^X. \quad (241)$$

دلیل وجود ضریب نرم‌افزاری قاب این است که کانولوشن‌ها بعداً بر حسب انتگرال روی فضاهای مماس تعریف خواهند شد. بنابراین ما در واقع ملزم به اشتراک‌گذاری خود عملگر انتگرال در مختصاتی‌سازی‌های مختلف هستیم، که معادل با شناسایی معیارهای انتگرال‌گیری ماتریسی $\sqrt{|\eta_p^X|} d\gamma$ برای هر پیمانه $X \in M$ در $p \in \mathcal{K}_{K,p}^X(v)$ است. شکل اشتراک‌گذاری کرنل در معادله (۲۴۱) با برابر قرار دادن هر دو عبارت به دست می‌آید.

همراه با رابطه $\sqrt{|\eta_p^A|} = |\det(g_p^{BA})| \sqrt{|\eta_p^B|}$ بین حجم‌های قاب مختلف، قانون تبدیل کرنل در معادله (۲۴۰) و اشتراک‌گذاری وزن در معادله (۲۴۱) قید کرنل G -هدایت‌پذیر را ایجاب می‌کند:

$$\frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{}}(g) \circ K \circ g^{-1} = K \quad \forall g \in G. \quad (242)$$

بنابراین کرنل‌های الگوی معتبر توسط نامتغیرهای تحت عمل پیمانه همزمان $(g)^\top \rho_{\text{}}(g)$ و g^{-1} داده می‌شوند. با نوشتتن نمایش $\rho_{\text{}}$ که بر روی $\mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ از طریق ضرب با $\rho_{\text{}}^\top$ به ترتیب از چپ و راست عمل می‌کند، دیده می‌شود که قید در معادله (۲۴۲) معادل با قید در معادله (۸۳) است، یعنی $K(gv) = |\det g|^{-1} \rho_{\text{}}(g) K(v) \rho_{\text{}}(g)^{-1} \quad \forall g \in G, v \in \mathbb{R}^d$.

ما این بینش‌ها را در قالب تعاریف زیر بیان می‌کنیم:
تعریف ۷.۳ (کرنل G -هدایت‌پذیر). کرنل‌های G -هدایت‌پذیر با نامتغیر بودنشان تحت عمل پیمانه مشخص می‌شوند. فضای برداری کرنل‌های G -هدایت‌پذیر که بین انواع میدان $\rho_{\text{}}$ و $\rho_{\text{}}^*$ نگاشت می‌کنند، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{K}_{\rho_{\text{}}, \rho_{\text{}}}^G := \left\{ K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \mid \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{}}(g) \circ K \circ g^{-1} = K \quad \forall g \in G \right\}, \quad (243)$$

$$= \left\{ K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \mid \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{}}(g) K(g^{-1}v) \rho_{\text{}}(g)^{-1} = K(v) \quad \forall g \in G, v \in \mathbb{R}^d \right\}, \quad (244)$$

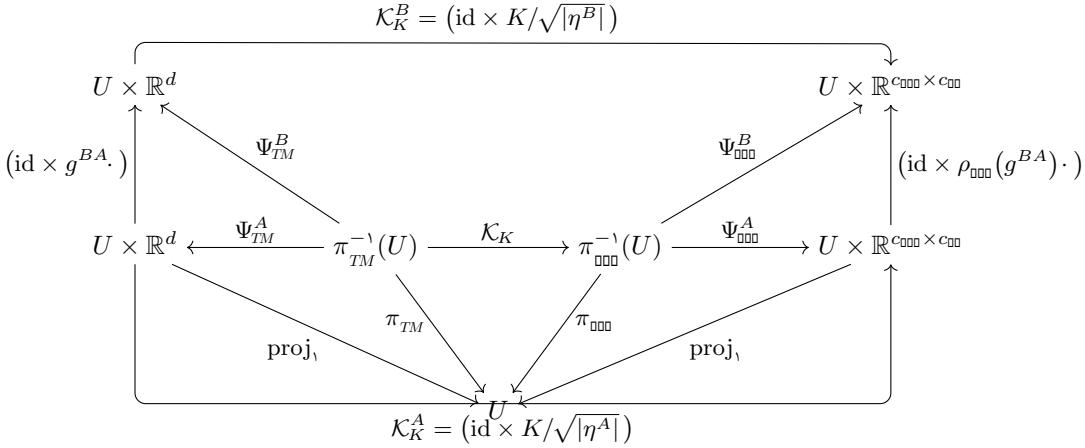
که در آن $H := \rho_{\text{}}(g)H\rho_{\text{}}(g)^\top$ برای هر $\rho_{\text{}}$ می‌باشد. نامتغیر بودن پیمانه‌ای کرنل‌های G -هدایت‌پذیر امکان اشتراک‌گذاری وزن مستقل از مختصات GM را فراهم می‌کند.

کرنل‌های G -هدایت‌پذیر در [۴] به یادگیری عمیق همتغیر معرفی شدند، جایی که گروههای متناظر فرض شده بودند. فرمول بندی فعلی در تعریف ۷.۳ در [۴] پیشنهاد شد. یک راه حل کامل برای فضاهای کرنل G -هدایت‌پذیر برای نمایش‌های دلخواه $\rho_{\text{}}$ و $\rho_{\text{}}^*$ از گروههای ساختار ۲ در $G \leq \mathbb{R}^d$ است. یک پیاده‌سازی به صورت عمومی در <https://quva-lab.github.io/e2cnn/kernels.html> در دسترس است. از نظر ریاضی، کرنل‌های هدایت‌پذیر معادل با عملگرهای نمایشی مانند عملگرهای تansor کروی از مکانیک کوانتومی هستند. یک تعمیم از قضیه ویگنر-اکارت کرنل‌های G -هدایت‌پذیر را به عنوان ترکیبی از توابع پایه هارمونیک، ضرایب کلیش-گوردان و اندومورفیسم‌های نمایش‌های کاکاوش ناضج توصیف می‌کند [۴].

تعریف ۷.۴ (میدان کرنل کانولوشنی GM). یک میدان کرنل کانولوشنی $\mathcal{K}_K GM$ از نوع $\rho_{\text{}}$ یک میدان کرنل است که توسط یک کرنل الگوی G -هدایت‌پذیر و مشترک $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{}}, \rho_{\text{}}}^G$ تعیین می‌شود. این میدان در پیمانه‌های دلخواه $\psi_{TM,p}^X$ و از G -اطلس $\psi_{TM,p}^X$ مورد نظر به صورت نقطه‌ای تعریف می‌شود:

$$\mathcal{K}_{K,p} := (\psi_{TM,p}^X)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^X|}} \circ \psi_{TM,p}^X \quad (245)$$

همواری \mathcal{K}_K از همواری پیمانه‌ها، متريک و کرنل الگو ناشی می‌شود.



شکل ۳۹: نمودار جابجایی که بدینهی سازی‌های محلی یک میدان کرنل کانولوشنی GM یعنی K_K را همانطور که در تعریف ۷.۴ تعریف شده است، نشان می‌دهد. اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی مستلزم آن است که عبارت مختصاتی میدان کرنل K_K در مر نظرله X در $p \in M$ و هر پیمانه X در p توسط کرنل الگوی مشترک $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ به صورت $K = K / \sqrt{|\eta_p^X|}$ تعیین شود. جابجایی پذیری نمودار سپس قید G -هدایت‌پذیری وجود شbahat به نمودار در شکل ۳۷، نمودار در این شکل باید به عنوان مشابه نمودار در شکل ۳۸ ب دیده شود. تفاوت بین نمودار فعلی و نمودار در شکل ۳۸ این است که نگاشتهای خطی در کلاف همومورفیسم از طریق $(\mathcal{A}_{\text{out}}, \mathcal{A}_{\text{out}}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{in}}, \mathcal{A}_{\text{in}})$ توسط یک عنصر از کلاف مماس TM به جای مقطع $M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{in}}, \mathcal{A}_{\text{in}})$ تعیین می‌شوند.

همانند مورد 1×1 ، اختیاری بودن انتخاب خاص پیمانه در معادله (۲۴۵) و بنابراین استقلال از مختصات GM با G -هدایت‌پذیری $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{out}}, \rho_{\text{in}}}^G$ تعیین می‌شود. برای نشان دادن این موضوع به طور صریح، می‌توان میدان کرنل را نسبت به یک پیمانه B تعریف کرد و سپس یک تبدیل به هر پیمانه دیگر A اعمال کرد، که حذف می‌شود و بنابراین به یک عبارت معادل منجر می‌شود:

$$\begin{aligned}
 K_{K,p} &= (\psi_{\text{out},p}^B)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta^B|}} \circ \psi_{TM,p}^B \\
 &= (\rho_{\text{out}}(g_p^B) \psi_{\text{out},p}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta^A|} / |\det(g_p^B)|} \circ (g_p^B \cdot \psi_{TM,p}^A) \\
 &= (\psi_{\text{out},p}^A)^{-1} \circ \frac{|\det(g_p^B)| \rho_{\text{out}}(g_p^B)^{-1} \circ K \circ g_p^B}{\sqrt{|\eta^A|}} \circ \psi_{TM,p}^A \\
 &= (\psi_{\text{out},p}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta^A|}} \circ \psi_{TM,p}^A
 \end{aligned} \tag{۲۴۶}$$

شکل ۳۹ یک نمای کلی از بدینهی سازی‌های محلی میدان‌های کرنل کانولوشنی GM را در قالب یک نمودار جابجایی ارائه می‌دهد.

توجه داشته باشید که قید G -هدایت‌پذیری در معادله (۲۴۴) یا (۲۴۳) هنگام ارزیابی در مبدأ \mathbb{R}^d که تحت عمل هر $g \in G$ نامتفاوت است، به قید روی کرنل‌های 1×1 در GM - $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{out}}, \mathcal{A}_{\text{out}})$ - $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{in}}, \mathcal{A}_{\text{in}})$ - GM - $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{out}}, \mathcal{A}_{\text{out}})$ -که در پخش قبل استخراج شدن، به عنوان یک مورد خاص برای انتخاب کرنل‌های نقطه‌مانند دیده می‌شوند.^{۶۴} ما همچنین می‌خواهیم ذکر کنیم که قید روی کرنل‌های با گستره فضایی به طور کلی نیازی ندارد که همدامنه آنها به $\text{Hom}_G(\rho_{\text{out}}, \rho_{\text{in}})$ یعنی فضای درهم‌تننده‌ها، محدود شود. برخلاف 1×1 ، این به کانولوشن‌های GM با کرنل‌های با گستره فضایی اجازه می‌دهد تا بین میدان‌هایی که طبق نمایش‌های کاهش‌ناپذیر غیرایزومورف تبدیل می‌شوند، نگاشت انجام دهنند.

۲.۲.۷ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM

با تعریف هر دو میدان ویژگی و میدان کرنل، آماده معرفی تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM هستیم. آنها به صورت نقطه‌ای بر حسب عملگرهای انتگرالی تعریف می‌شوند که بردارهای ویژگی خروجی $f_{\text{out}}(p)$ را در نقاط $p \in M$ با تطبیق کرنل K_p در p با میدان ویژگی f_{in} «همانطور که از p دیده می‌شود» محاسبه می‌کنند.

^{۶۴} برای دقیق کردن این گزاره، باید تعریف ۷.۳ را به توزیع‌های با مقدار عملگری تعمیم داد و کرنل‌های 1×1 را به عنوان دلتاهای دیراک با مقدار عملگری تعریف کرد. ما در اینجا برای اختصار از این تعمیم صرف نظر می‌کنیم.

نمایش محلی یک میدان ورودی «همانطور که از p دیده می‌شود» به طور رسمی توسط پول‌بک منتقل‌کننده آن داده می‌شود که در شکل ۲۴ به تصویر کشیده شده است. این به عنوان پول‌بک معمول از \tilde{M} به TM از طریق نگاشت نمایی ریمانی تعریف می‌شود^{۶۵} با کاربرد اضافی یک منتقل‌کننده موازی (معادله (۲۱۲))، که برای بیان ویژگی‌های پول‌بک شده در $\mathcal{A}_{\text{exp}(v)}$ به عنوان ویژگی در $\mathcal{A}_{\text{exp}(v)}$ ضروری است. با نشان دادن این منتقل‌کننده موازی در امتداد مسیر ژئودزیک $\gamma_v(t) = \exp(v)(1-t)$ بین $\gamma_v(0) = \exp(v)$ و $\gamma_v(1) = \pi(v)$ با:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}, p \leftarrow \exp(v)} : \mathcal{A}_{\exp(v)} \rightarrow \mathcal{A}_p, \quad (247)$$

ما نمایش‌های میدان ویژگی پول‌بک شده را روی فضاهای مماس به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
تعریف ۷.۵ (پول‌بک منتقل‌کننده میدان ویژگی به (TM)): با داشتن یک میدان ویژگی $f \in \Gamma(\mathcal{A})$ ، ما نمایش (زاویه) آن را روی کلاف مماس به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{Exp}^*f : TM \rightarrow \mathcal{A}, \quad v \mapsto \mathcal{P}_{\mathcal{A}, \pi_{TM}(v) \leftarrow \exp(v)} \circ f \circ \exp(v). \quad (248)$$

نگاشت نمایی ریمانی \exp در اینجا متناظر با اتصال لوی-چیویتا است، در حالی که منتقل‌کننده $\mathcal{P}_{\mathcal{A}, \pi_{TM}(v) \leftarrow \exp(v)}$ به یک اتصال G -سازگار متکی است؛ به بخش‌های ۳.۳ و ۵.۶ مراجعه کنید.
از ساختار مشخص است که $\text{Exp}^*f(v) \in \mathcal{A}_p$ برای هر $v \in T_p M$ یک M -مورفیسم کلاف است که نمودار جابجایی زیر را برآورده می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\text{Exp}^*f} & \mathcal{A} \\ \pi_{TM} \searrow & & \swarrow \pi_A \\ & M & \end{array} \quad (249)$$

با وجود نگاشت هموار بین دو کلاف برداری، فرض نمی‌شود که Exp^*f یک مورفیسم کلاف برداری باشد، یعنی، محدودیت‌های $\text{Exp}_p^*f : T_p M \rightarrow \mathcal{A}_p$ معقولاً خطی نیستند.

محدودیت $\text{Exp}_p^*f := \text{Exp}^*f|_{T_p M}$ دامنه پول‌بک منتقل‌کننده به $T_p M$ میدان ویژگی را از دیدگاه یک ناظر در p همانطور که در شکل ۲۴ نشان داده شده است، ثبت می‌کند. توجه داشته باشید که این تعریف شیوه‌یهایی می‌باشد که نگاشت نمایی ریمانی را از میدان ویژگی بر حسب مختصات نرمال ژئودزیک است، با این تفاوت که به شعاع یکنواختی نگاشت نمایی محدود نمی‌شود.^{۶۶} ما همچنین می‌خواهیم ذکر کنیم که منتقل‌کننده ممکن است با هر ایزومورفیسم دیگری بین $\mathcal{A}_{\text{exp}(v)}$ و \mathcal{A}_p جایگزین شود، همانطور که به عنوان مثال در [۱] انجام شده است.

همانطور که قبلاً بیان شد، تبدیلات میدان کرنل و کانون‌لوشن‌های GM به عنوان تطبیق نمایش‌های میدان ویژگی محلی روی فضاهای مماس با کرنل‌ها تعریف می‌شوند. در راستای این تعاریف، توجه داشته باشید که M -مورفیسم‌های کلاف کرنل‌ها $TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{exp}}, \mathcal{A}_{\text{exp}})$ و $\mathcal{K} : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{exp}}, \mathcal{A}_{\text{exp}})$ را می‌توان برای ایجاد یک M -مورفیسم (غیرخطی) دیگر از TM به \mathcal{A}_{exp} ترکیب کرد،

$$\begin{array}{ccccc} TM & \xrightarrow{\mathcal{K} \times \text{Exp}^*f_{\text{exp}}} & \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{exp}}, \mathcal{A}_{\text{exp}}) \times \mathcal{A}_{\text{exp}} & \xrightarrow{\text{ev}} & \mathcal{A}_{\text{exp}} \\ & \searrow \pi_{TM} & & \nearrow \pi_{\mathcal{A}_{\text{exp}}} & \\ & & M & & \end{array}, \quad (250)$$

که در آن $(\text{Exp}^*f_{\text{exp}}(v), \mathcal{K}(v)) \mapsto \mathcal{K}(v) \text{Exp}^*f_{\text{exp}}(v)$ نگاشت ارزیابی روی $\mathcal{K}(v)$ است. تبدیلات میدان کرنل بردارهای ویژگی خروجی را در p با انتگرال‌گیری از این حاصلضرب کرنل‌ها و میدان‌های ورودی روی فضای مماس مربوطه $T_p M$ محاسبه می‌کنند:

تعریف ۷.۶ (تبدیل میدان کرنل). فرض کنید \mathcal{K} هر میدان کرنل متناظر، یک تبدیل انتگرالی هموار است

$$\mathcal{T}_{\mathcal{K}} : \Gamma(\mathcal{A}_{\text{exp}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\text{exp}}) \quad (251)$$

^{۶۵} ما نگاشت نمایی را روی کل کلاف مماس به صورت $(v) \mapsto \text{exp}_{\pi_{TM}(v)}(v)$ تعریف می‌کنیم. به یاد بیاورید که ما فرض کردیم منیفلد از نظر ژئودزیکی کامل است، به طوری که نگاشت نمایی روی کل کلاف مماس خوش‌تعریف است (و اگر این فرض برقرار نباشد به صفر-پوشانی متولس می‌شود).

^{۶۶} بنابراین هر بردار ویژگی $f(q)$ ممکن است چندین بار در همان فضای مماس $T_p M$ نمایش داده شود، یک بار برای هر $v \in T_p M$ با $\text{exp}(v) = q$ و اگر این مطلوب نباشد، می‌توان تکیه‌گاه کرنل را به شعاع یکنواخت نمایی محدود کرد، به طوری که فقط نزدیکترین رخداد از نظر ژئودزیکی اندازه‌گیری شود.

که به صورت نقطه‌ای تعریف می‌شود:^{۶۷}

$$[\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f_{\square})](p) := \int_{T_p M} \mathcal{K}(v) \operatorname{Exp}^* f_{\square}(v) dv = \int_{T_p M} \mathcal{K}(v) \mathcal{P}_{A_{\square}, p \leftarrow \exp_p v} f_{\square}(\exp_p v) dv. \quad (252)$$

برای خوش‌معرفی بودن، انتگرال باید وجود داشته باشد و میدان خروجی حاصل $(f) \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ باید هموار باشد. این مستلزم آن است که \mathcal{K} به طور مناسب انتخاب شود، به عنوان مثال، با فرض اینکه به سرعت کاهش یابد یا دارای تکیه‌گاه فشرده باشد.

توجه داشته باشید که تبدیلات میدان کرنل عمومی لزوماً کانولوشن‌ها را مدل نمی‌کنند زیرا فرض نمی‌کنند که وزن‌ها (کرنل‌ها) بین موقعیت‌های مکانی به اشتراک گذاشته شوند. چنین تبدیلات میدان کرنل عمومی در بخش ۸ مفید خواهد بود، جایی که ما یک الزام برای اشتراک‌گذاری وزن مکانی را از الزام به همتغیری ایزومنتریک استخراج می‌کنیم.

پیوست ج وجود و همواری تبدیلات میدان کرنل را مورد بحث قرار می‌دهد. یک شرط کافی برای خوش‌معرفی بودن تبدیلات میدان کرنل، محدود کردن تکیه‌گاه‌های کرنل به گویی‌هایی با شعاع ثابت $> R$ است:

قضیه ۷.۷ (وجود تبدیل میدان کرنل برای کرنل‌های با تکیه‌گاه فشرده). فرض کنید \mathcal{K} یک میدان کرنل باشد که کرنل‌های منفرد آن \mathcal{K}_p در هر $p \in M$ (حداکثر) روی یک گویی بسته با شعاع $> R$ در اطراف مبدأ $T_p M$ تکیه‌گاه دارند، یعنی،

$$\operatorname{supp}(\mathcal{K}_p) \subseteq \{v \in T_p M \mid \|v\| \leq R\} \quad \forall p \in M. \quad (253)$$

سپس تضمین می‌شود که تبدیل میدان کرنل متناظر $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ خوش‌معرفی است، یعنی انتگرال در معادله (۲۵۲) وجود دارد و میدان خروجی $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f) \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square})$ برای هر میدان ورودی هموار است.

اثبات: به پیوست‌های ج و ج ۱ مراجعه کنید. \square

الزام به محدود کردن تکیه‌گاه کرنل به یک گویی بسته با شعاع معین، یک رویه معمول در یادگیری عمیق است. با این حال، توجه داشته باشید که یک کرنل با تکیه‌گاه فشرده با کانولوشن‌های همتغیر نسبت به مقیاس در تضاد است، که طبق قیود کرنل G -هدايت‌پذیر مربوطه، به کرنل‌هایی با گستره بی‌نهایت نیاز دارند. پیاده‌سازی‌های فعلی کانولوشن‌های همتغیر نسبت به مقیاس معمولاً فضاهای کرنل همتغیر نسبت به مقیاس را با محدود کردن تکیه‌گاه آنها تقریب می‌زنند!^{۶۸} [۴۹؟] و بنابراین تحت پوشش قضیه ۷.۷ قرار می‌گیرند.

بر اساس تبدیلات میدان کرنل عمومی، ما کانولوشن‌های GM مستقل از مختصات را با افزودن فرض اشتراک‌گذاری وزن مکانی تعریف می‌کنیم، یعنی با فرض میدان‌های کرنل کانولوشنی GM :

تعريف ۷.۸ (کانولوشن GM). فرض کنید \mathcal{A}_{\square} و \mathcal{A}_{\square} کلاف‌های بردار ویژگی G -الحاقی با انواع ρ_{\square} و ρ_{\square} باشند. ما کانولوشن GM را با یک کرنل G -هدايت‌پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^G$ به عنوان تبدیل میدان کرنل با میدان کرنل کانولوشنی $\mathcal{K}_K GM$ متناظر تعریف می‌کنیم:

$$K \star : \Gamma(\mathcal{A}_{\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square}), \quad f_{\square} \mapsto K \star f_{\square} := \mathcal{T}_{\mathcal{K}_K}(f_{\square}) = \int_{T_p M} \mathcal{K}_K(v) \operatorname{Exp}^* f_{\square}(v) dv \quad (254)$$

از آنجایی که کانولوشن‌های GM هیچ قاب مرجعی را در G -ساختار ترجیح نمی‌دهند، تضمین می‌شود که استنتاج خود را بر روی تمام «وضعیت‌های الگوهایی» که با عمل گروه ساختار G مرتبط هستند، تعیین مدهند؛ به معادله (۸۹) و شکل ۲۶ مراجعه کنید.

۳.۲.۷ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM در مختصات محلی

آنچه باقی مانده است این است که نشان دهیم تعاریف مستقل از مختصات پول‌بک‌های منتقل‌کننده، تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM که در این بخش معرفی شدند، هنگام بیان نسبت به یک بدیهی‌سازی محلی، به عبارات مختصاتی از بخش ۲.۴ کاهش می‌یابند.

عبارت مختصاتی محلی پول‌بک منتقل‌کننده f^* $\operatorname{Exp}^* f$ از یک میدان ویژگی f ، طبق معمول، با پیش- و پس-ترکیب آن با بدیهی‌سازی‌های محلی کلاف‌های متناظر تعریف می‌شود، یعنی:

$$\begin{aligned} [\operatorname{Exp}^* f]^A : U \times \mathbb{R}^d &\rightarrow U \times \mathbb{R}^c, \quad (p, v) \mapsto \Psi_A^A \circ \operatorname{Exp}^* f \circ (\Psi_{TM}^A)^{-1}(p, v) \\ &= (p, \psi_{A,p}^A \circ \operatorname{Exp}_p^* f \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(v)) \end{aligned} \quad (255)$$

از این تعریف دیده می‌شود که تبدیلات پیمانه محلی در $p \in M$ به صورت زیر داده می‌شوند:

$$[\operatorname{Exp}_p^* f]^B = \rho(g_p^{BA}) \circ [\operatorname{Exp}_p^* f]^A \circ (g_p^{BA})^{-1}. \quad (256)$$

^{۶۷} انتگرال‌گیری روی $T_p M$ از طریق چگالی حجم ریمانی dv در پیوست پ بحث شده است.

ما این عبارات مختصاتی را در قالب یک نمودار جابجایی به تصویر می‌کشیم، که بسیار شبیه به نمودار بدینه‌سازی‌های محلی میدان‌های کرنل در شکل ۳۹ است:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & [\text{Exp}^* f]^B & & \\
 & \swarrow \Psi_{TM}^B & & \searrow \Psi_A^B & \\
 U \times \mathbb{R}^d & & & & U \times \mathbb{R}^c \\
 (\text{id} \times g^{BA}) & & & & (\text{id} \times \rho(g^{BA})) \\
 & \downarrow \Psi_{TM}^A & & \downarrow \Psi_A^A & \\
 U \times \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\pi_{TM}^{-1}(U)} & \xrightarrow{\text{Exp}^* f} & \xrightarrow{\pi_A^{-1}(U)} & U \times \mathbb{R}^c \\
 & \searrow \pi_{TM} & & \swarrow \pi_A & \\
 & & U & & \\
 & \searrow \text{proj}_V & & \swarrow \text{proj}_V & \\
 & & [\text{Exp}^* f]^A & &
 \end{array} \quad (257)$$

برای پیاده‌سازی، مفید است که عبارت مختصاتی پول‌بک منتقل کننده را به اجزای منفرد آن، یعنی منتقل کننده $\mathcal{P}_{\mathcal{A}, p \leftarrow \exp(v)}$ ، میدان و یگانه f و نگاشت نمایی \exp تجزیه کنیم. این کار با سطح دادن آن با یک همانی به شکل $\text{id}_{\mathcal{A}_{\exp(v)}} = (\psi_{\mathcal{A}, \exp(v)}^{\tilde{A}})^{-1} \circ \psi_{\mathcal{A}, \exp(v)}^{\tilde{A}}$ انجام می‌شود، که در آن انتخاب پیمانه \tilde{A} در $\exp(v)$ بی‌اهمیت است زیرا در نهایت حذف می‌شود:

$$\begin{aligned}
 [\text{Exp}_p^* f]^A(v) &= [\psi_{\mathcal{A}, p}^A \circ \text{Exp}_p^* f \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}](v) \\
 &= \psi_{\mathcal{A}, p}^A \circ \mathcal{P}_{\mathcal{A}, p \leftarrow \exp(v)} \circ f(\exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v)) \\
 &= \psi_{\mathcal{A}, p}^A \circ \mathcal{P}_{\mathcal{A}, p \leftarrow \exp(v)} \circ (\psi_{\mathcal{A}, \exp(v)}^{\tilde{A}_v})^{-1} \circ \psi_{\mathcal{A}, \exp(v)}^{\tilde{A}_v} \circ f(\exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v)) \\
 &= \rho(g_{p \leftarrow \exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v)}^{A \tilde{A}}) \cdot f^{\tilde{A}}(\exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v))
 \end{aligned} \quad (258)$$

همانطور که انتظار می‌رفت، ما تعریف خود را از معادله (۶۷) در بخش ۱.۲.۴ بازیابی می‌کنیم، که تأیید می‌کند تعریف ۷.۵ در واقع همتای مستقل از مختصات آن است.

عبارت مختصاتی یک تبدیل میدان کرنل، که با معادله (۷۶) در بخش ۱.۲.۴ منطبق است، توسط قضیه زیر داده می‌شود: **قضیه ۷.۶ (تبدیل میدان کرنل در مختصات)**. نسبت به یک پیمانه A در $p \in U^A$ تبدیل میدان کرنل با عبارت مختصاتی زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f_{\square\square})]^A(p) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) \rho(g_{p \leftarrow \exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v^A)}^{A \tilde{A}}) \cdot f_{\square\square}^{\tilde{A}}(\exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v^A)) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A,
 \end{aligned} \quad (259)$$

که در آن پیمانه‌های \tilde{A} در $\exp(v)$ به طور دلخواه انتخاب می‌شوند زیرا حذف می‌شوند.^{۶۸}

^{۶۸} توجه داشته باشید که پیمانه‌ها در $\exp(v)$ ممکن است برای $v \in T_p M$ مختلف متفاوت باشند و باید به طور صحیح‌تر با v برچسب‌گذاری شوند. ما برای اختصار از این ولایتگی چشیده‌سازی می‌کنیم.

اثبات: عبارت اول با یک محاسبه ساده که تمام مقادیر درگیر را به عبارات مختصاتی متناظرشان ترجمه می‌کند، استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned}
 & [\mathcal{T}_K(f_{\square\square})]^A(p) \\
 & \stackrel{(1)}{=} \psi_{A_{\square\square}, p}^A [\mathcal{T}_K(f_{\square\square})](p) \\
 & \stackrel{(2)}{=} \psi_{A_{\square\square}, p}^A \int_{T_p M} \mathcal{K}_p(v) [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}](v) dv \\
 & \stackrel{(3)}{=} \psi_{A_{\square\square}, p}^A \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p((\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v^A)) [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}](\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\
 & \stackrel{(4)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} [\psi_{A_{\square\square}, p}^A \circ \mathcal{K}_p((\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v^A)) \circ (\psi_{A_{\square\square}, p}^A)^{-1}] [\psi_{A_{\square\square}, p}^A \circ [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}] \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}](v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\
 & \stackrel{(5)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} [\psi_{A_{\square\square}, p}^A \circ \mathcal{K}_p \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}](v^A) [\psi_{A_{\square\square}, p}^A \circ [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}] \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}](v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\
 & \stackrel{(6)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A
 \end{aligned} \tag{۲۶۰}$$

مرحله (۱) بردار ویژگی خروجی در p را به طور صریح بر حسب پیمانه $\psi_{A_{\square\square}, p}^A$ بیان می‌کند که بر روی تبدیل میدان کرنل مستقل از مختصات عمل می‌کند. این عبارت مستقل از مختصات در مرحله (۲) همانطور که در تعریف ۷.۶ تعریف شده است، بسط داده می‌شود. مرحله (۳) انتگرال روی $T_p M$ را از طریق پیمانه انتخاب شده به \mathbb{R}^d بازمی‌گرداند، که با جزئیات بیشتر در پیوست پ توسعی شده است. مرحله (۴) یک نگاشت همانی به شکل $\psi_{A_{\square\square}, p}^A \circ \psi_{A_{\square\square}, p}^A = \text{id}$ را وارد می‌کند و $\psi_{A_{\square\square}, p}^A$ را به داخل انتگرال می‌برد در حالی که مرحله (۵) تعریف $\psi_{A_{\square\square}, p}^A$ را از معادله (۲۳۱) شناسایی می‌کند. در نهایت، ما عبارات مختصاتی \mathcal{K}_p و $\text{Exp}_p^* f_{\square\square}$ را از معادلات (۲۳۸) و (۲۵۵) شناسایی می‌کنیم.

عبارت دوم از عبارت اول با بسط دادن عبارت مختصاتی پول‌بک منتقل‌کننده طبق معادله (۲۵۸) به دست می‌آید.

عبارت مختصاتی برای کانولوشن‌های GM مستقل از مختصات بلافضله به دست می‌آید:

قضیه ۷.۱۰ (کانولوشن‌های GM در مختصات). یک کانولوشن GM مستقل از مختصات $\Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square})$ با یک کرنل G -هدایت‌پذیر $K \in \mathcal{K}_{p_{\square\square}, \rho_{\square\square}}^G$ نسبت به یک پیمانه A در U^A به صورت زیر داده می‌شود:

$$[K \star f]^A(p) = [\mathcal{T}_{K_K}(f)]^A(p) = \int_{\mathbb{R}^d} K(v^A) [\text{Exp}_p^* f]^A(v^A) dv^A, \tag{۲۶۱}$$

یعنی، با عبارت مختصاتی که در معادله (۸۷) معرفی شد. این عبارت ممکن است همانطور که برای تبدیلات میدان کرنل عمومی در معادله (۲۵۹) انجام شد، بیشتر بسط داده شود.

اثبات: نتیجه از قضیه ۷.۹ با مشاهده اینکه کانولوشن GM مستقل از مختصات \star فقط یک تبدیل میدان کرنل کانولوشنی GM متناظر \mathcal{K}_K است، به دست می‌آید؛ به تعریف ۷.۸ مراجعه کنید. به طور خاص، عبارت مختصاتی یک میدان کرنل کانولوشنی $\mathcal{K}_K^A = K / \sqrt{|\eta_p^A|}$ نرمال شده با حجم قاب داده می‌شود، یعنی \mathcal{K}_K^A . جایگذاری این همانی در معادله (۲۵۹) به عبارت مختصاتی ادعا شده برای کانولوشن‌های GM منجر می‌شود.

این نتیجه اطمینان می‌دهد که یک کانولوشن GM سراسری و مستقل از مختصات می‌تواند بر حسب عبارات مختصاتی محلی آن نسبت به یک اطلس از بدیهی‌سازی‌های محلی که M را می‌پوشاند، پیاده‌سازی شود.

۸ هم‌متغیری ایزومنتری

یک ویژگی اصلی عمل کانولوشن و تعمیم‌های مختلف آن، هم‌متغیری آنها نسبت به تقارن‌های منیفلد زیربنایی است. به عنوان مثال، کانولوشن مرسوم در فضاهای اقلیدسی نسبت به انتقال هم‌متغیر است در حالی که کانولوشن‌های کروی نسبت به دوران هم‌متغیر هستند. به طور کلی‌تر، هر

گروه فشرده موضعی و فضاهای همگن آنها، کانولوشن‌های گروهی را می‌پذیرند [۹۴]، که اخیراً توسط جامعه یادگیری عمیق برای تعمیم شبکه‌های کانولوشنی به چنین فضاهایی مورد توجه قرار گرفته‌اند [۹۵]. با این حال، از آنجایی که این رویکردها اساساً به تقارن‌های سراسری و تعدی پذیر فضای همگن منکی هستند، بلافضله برای منیفلدهای ریمانی عمومی قابل اعمال نیستند.

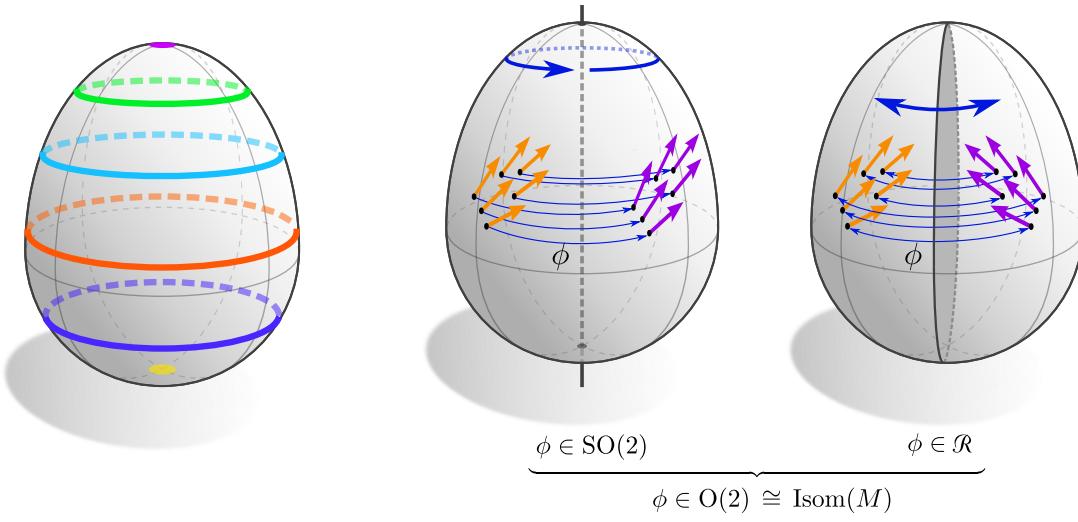
از سوی دیگر، کانولوشن‌های GM تمرکز را از تقارن‌های سراسری خود فضا به تقارن‌های محلی در مختصاتی سازی فضا منتقل می‌کنند. همانطور که مشخص می‌شود، هم‌متغیری پیمانه محلی کانولوشن‌های GM ، همراه با اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی، هم‌متغیری آنها را تحت عمل تقارن‌های سراسری القا می‌کند. به بیان دقیق‌تر، کانولوشن‌های GM تحت عمل ایزومنتری‌های حافظه- G -ساختار (تعریف ۸.۱) هم‌متغیر هستند، که زیرگروهی $\text{Isom}_{GM} \leq \text{Isom}(M)$ از گروه کامل ایزومنتری را تشکیل می‌دهند. الزام به اینکه تقارن یک ایزومنتری باشد (یعنی متريک را حفظ کند) در اینجا از استفاده از نگاشتهای نمایی ناشی می‌شود، که به اتصال لوی-چیویتا و در نتیجه به متريک ریمانی متکی هستند. الزام اضافی بر این ایزومنتری‌ها برای حافظه- G -ساختار، نتیجه تعريف کلاف‌های G -الحاقی است، که عناصر آنها تنها نسبت به آن قاب‌های مرجمی که در GM قرار دارند، معنای خوش‌تعريفی دارند. توجه داشته باشید که مورد دوم واقعاً یک محدودیت نیست، زیرا همیشه می‌توان گروه‌های ساختار $G \geq d$ را انتخاب کرد، که برای آنها مر ایزومنتری به G -ساختار متناظر احترام می‌گذارد. برعکس، این طراحی امکان کنترل دقیق سطح هم‌متغیری ایزومنتری را فراهم می‌کند. به عنوان مثال، کانولوشن مرسوم در فضاهای برداری اقلیدسی به \mathbb{R}^d -ساختار روى $\text{SO}(d)$ در شکل ۴۲ به تصویر کشیده شده است، و بنابراین تنها نسبت به انتقال هم‌متغیر است. یک $\text{SE}(d)$ -ساختار روى \mathbb{R}^d که در شکل ۴۳ به تصویر کشیده شده است، علاوه بر این توسط دوران‌ها نیز حفظ می‌شود، و بنابراین متناظر با کانولوشن‌های $\text{SE}(d)$ -هم‌متغیر است. هم‌متغیری تحت گروه کامل ایزومنتری (d) از \mathbb{R}^d -ساختار روى $E(d)$ ایجاد \mathbb{R}^d می‌شود.

۹۴	۱.۸	ایزومنتری‌ها و عمل آنها بر منیفلدها، کلاف‌ها و میدان‌ها
۹۵	۱.۱.۸	گروه‌های ایزومنتری
۹۶	۲.۱.۸	عمل ایزومنتری بر روی کلاف‌های تاری
۱۰۰	۳.۱.۸	عمل ایزومنتری در مختصات محلی
۱۰۴	۴.۱.۸	جابجایی‌پذیری اعمال ایزومنتری با نگاشت نمایی و منتقل‌کننده‌ها
۱۰۶	۲.۸	هم‌متغیری ایزومنتری تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM
۱۰۷	۱.۲.۸	هم‌متغیری ایزومنتری تبدیلات میدان کرنل عمومی
۱۰۹	۲.۲.۸	هم‌متغیری ایزومنتری کانولوشن‌های GM
۱۱۲	۳.۸	میدان‌های کرنل خارج‌قسمتی
۱۱۲	۱.۳.۸	فضاهای خارج‌قسمتی القا شده از ایزومنتری
۱۱۵	۲.۳.۸	میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی و قیود پایدارساز

هدف این بخش استخراج قضایایی است که به طور رسمی هم‌متغیری ایزومنتری کانولوشن‌های GM و تبدیلات میدان کرنل را مشخص می‌کند. بخش ۱.۱ با معرفی گروه‌های ایزومنتری منیفلدهای ریمانی و بحث در مورد طیفی از روابط و ساختارهای شناخته‌شده‌ای که آنها القا می‌کنند، پایه‌های این تحقیق را بنا می‌نمهد. به طور خاص، بخش ۱.۱.۱ ایزومنتری‌ها و گروه‌های ایزومنتری را معرفی می‌کند در حالی که بخش ۲.۱.۸ عمل الایافی آنها («پیشران‌ها») را بر روی کلاف‌های الحاقی در یک محیط مستقل از مختصات تعريف می‌کند. در بخش ۳.۱.۸ ما این اعمال روی کلاف‌ها را نسبت به بدیهی سازی‌های محلی بیان می‌کنیم و تفسیر غیرفعال آنها را به عنوان تبدیلات پیمانه القا شده از ایزومنتری، که در شکل‌های ۱۲ (راست) و ۲۳ به تصویر کشیده شده‌اند، مورد بحث قرار می‌دهیم. بخش ۴.۱.۸ به طور خلاصه بیان می‌کند که مقادیر در گیر در تبدیلات میدان کرنل تحت عمل ایزومنتری‌ها چگونه رفتار می‌کنند.

بر اساس این ویژگی‌ها، ما هم‌متغیری ایزومنتری تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM را در بخش ۲.۸ مطالعه می‌کنیم. پس از تعریف رسمی عبارت «هم‌متغیری ایزومنتری»، بخش ۱.۲.۸ یک نتیجه مرکزی را اثبات می‌کند که تأکید می‌کند تقاضا برای هم‌متغیری ایزومنتری مستلزم نامتفاوت بودن میدان کرنل تحت ایزومنتری‌ها است؛ به شکل ۴۵ مراجعت کنید. بخش ۲.۲.۸ کانولوشن‌های خاص‌تر GM را در نظر می‌گیرد و اثبات می‌کند که آنها بنا به طراحی، تحت هر ایزومنتری که G -ساختار را حفظ می‌کند، هم‌متغیر هستند. این نتیجه به طور خاص ایجاب می‌کند که کانولوشن‌های OM نسبت به هر ایزومنتری هم‌متغیر هستند.

قید نامتفاوت بودن بر روی میدان‌های کرنل ایجاب می‌کند که آنها وزن‌ها را بر روی مدارهای گروه ایزومنتری به اشتراک بگذارند. این نشان می‌دهد که میدان‌های کرنل نامتفاوت را می‌توان به طور معادل با کرنل‌های نماینده روی نمایندگان مدار توصیف کرد، که ما آن را در بخش ۳.۸ رسمی می‌کنیم. بخش ۱.۳.۸ فضاهای خارج‌قسمتی القا شده از ایزومنتری و نمایندگان آنها را مورد بحث قرار می‌دهد. در بخش ۲.۳.۸ ما از این تعاریف ریاضی برای اثبات این موضوع استفاده می‌کنیم که فضای میدان‌های کرنل نامتفاوت نسبت به ایزومنتری در واقع با میدان‌های کرنل روی نمایندگان خارج‌قسمتی ایزومورف است. این به طور خاص ایجاد می‌کند که تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزومنتری در فضاهای همگن لزوماً کانولوشن هستند، که حلقه را به کارهای پیشین متصل می‌کند.



(ب) مدارهای گروه ایزومتری.

(ا) ʻUm̄l zib̄gōrōhāy-e m̄xt̄lf-e gōrō-e izomētri b̄r rōi midān-hā.

شکل ۴۰: تصاویری از گروه ایزومتری $\mathcal{R} \cong \text{Isom}(M)$ که در سراسر این بخش برای نمونه‌سازی مفاهیم و ساختارهای مختلف مربوط به ایزومتری‌ها از آن استفاده خواهیم کرد. شکل ۱۴۰. عمل گروه ایزومتری را بر روی میدان‌های برداری (مماض یا ویژگی) نشان می‌دهد. می‌توان آن را مشکل از زیبرگروه‌های دوران‌ها در $\text{SO}(2)$ و بازتاب‌ها در \mathcal{R} در نظر گرفت. عمل گروه ایزومتری، تخم مرغ را به مدارهای $\{\phi(p) | \phi \in \text{Isom}(M), p \in M\}$ از نقاط افزای می‌کند که در شکل ۴۰.ا با رنگ‌های مختلف نشان داده شده‌اند. توجه داشته باشید که همه مدارها با یکدیگر همسان‌ریخت نیستند - مدارهای قطب‌ها نقاط منفرد هستند در حالی که هر مدار دیگر یک دایره را در اطراف تخم مرغ ترسیم می‌کند. گروه ایزومتری تخم مرغ به صورت غیرتعددی پذیر بر روی آن عمل می‌کند، یعنی نمی‌توان از هر نقطه‌ای به هر نقطه دیگر رسید. یک تبدیل میدان کرnel زمانی هم‌متغیر نسبت به ایزومتری است که با عمل ایزومتری بر روی میدان‌های ویژگی جایجا شود. ما نشان می‌دهیم که هم‌متغیر ایزومتری تنها و تنها در صورتی تضمین می‌شود که میدان کرnel تحت عمل ایزومتری‌ها نامتغیر باشد. این به طور خاص ایجاب می‌کند که هم‌متغیر ایزومتری ایزومتری اشتراک‌گذاری وزن در امتداد مدارهای ایزومتری است؛ به شکل ۴۵ مراجعه کنید.

۱.۸ ایزومتری‌ها و عمل آنها بر منیفلدها، کلاف‌ها و میدان‌ها

در این بخش، ما بیشتر مفاهیم ریاضی موردنیاز برای مطالعه هم‌متغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرnel و کاتولوشن‌های GM را معرفی می‌کنیم. پس از تعریف ایزومتری‌ها در بخش ۱.۱.۸، در بخش ۲.۱.۸ بحث می‌کنیم که چگونه آنها اعمال طبیعی را بر روی بردارهای مماض و قاب‌های مرجع القا می‌کنند. برای گروه‌های ساختار $d < G$ ، هر ایزومتری با هر G -ساختاری سازگار نیست. ما زیبرگروه $\text{Isom}_{GM} \leq \text{Isom}(M)$ از آن ایزومتری‌هایی را تعریف می‌کنیم که بر روی یک G -ساختار GM و کلاف‌های ویژگی G -الحاقی آن عمل می‌کنند (خودریختی‌هایی را القا می‌کنند). در حالی که این ساختارها مستقل از مختصات نگه داشته‌ی شوند، بخش ۳.۱.۸ عمل ایزومتری‌ها را بر روی کلاف‌های تاری نسبت به بدیهی‌سازی‌های محلی کلاف‌بیان می‌کند. به عنوان مقدمه‌ای برای بررسی تبدیلات میدان کرnel هم‌متغیر نسبت به ایزومتری در ادامه، بخش ۴.۱.۸ بحث می‌کند که چگونه ایزومتری‌ها با نگاشت نهایی و با منتقل کننده‌های موازی جایجا می‌شوند، که به ما اجازه می‌دهد تا نحوه عمل ایزومتری‌ها را بر روی یک پول‌بک Exp_p^* میدان‌های ویژگی f استخراج کنیم. در حالی که عمدتاً ریاضی باقی می‌مانیم، سعی می‌کنیم تا حد امکان ارتباطاتی با کاربرد برقرار کنیم.

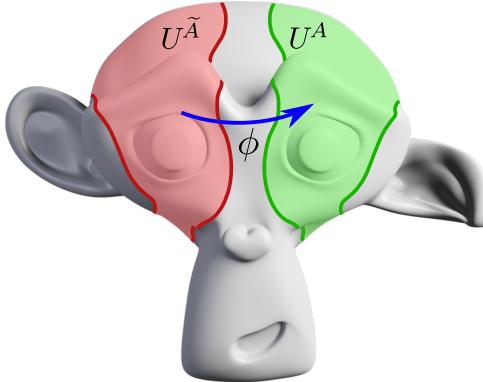
۱.۱.۸ گروه‌های ایزومتری

یک ایزومتری (سراسری) $M \rightarrow \hat{M}$: ϕ یک دیفئومورفیسم بین منیفلدهای ریمانی (M, η) و $(\hat{M}, \hat{\eta})$ است که متریک را حفظ می‌کند. بر حسب پیش‌ران (دیفرانسیل) $TM \rightarrow T\hat{M}$: $\phi_{*,TM}$ بردارهای ماما، که در پیوست ۱.۲ در بخش ۲.۱.۸ در زیر معرفی می‌کنیم، این گزاره با الازم به اینکه ایزومتری‌ها برآورده کنند، دقیق می‌شود:

$$\eta_p(v, w) = \hat{\eta}_{\phi(p)}(\phi_{*,TM}v, \phi_{*,TM}w) \quad \forall p \in M, v, w \in T_p M, \quad (262)$$

يعنى، آنها فاصله‌ها و زوایا بین بردارهای ماما را حفظ می‌کنند. به طور شهودی، یک ایزومتری به عنوان یک نگاشت حافظ فاصله بین منیفلدها در نظر گرفته می‌شود. توجه داشته باشید که معکوس یک ایزومتری لزوماً یک ایزومتری نیز هست. از انجایی که ایزومتری‌ها (و معکوس‌هایشان) به متریک احترام می‌گذارند، آنها ایزومورفیسم‌ها در رده منیفلدهای ریمانی را تشکیل می‌دهند.

مجموعه تمام ایزومتری‌های $M \rightarrow M$: ϕ از یک منیفلد ریمانی به خودش، که با ترکیب معمول توابع $\phi_1 \circ \phi_2 \mapsto \phi_1 \circ (\phi_2)$: \circ مجذب شده است، یک گروه را تعریف می‌کند که به عنوان گروه ایزومتری $\text{Isom}(M)$ از M شناخته می‌شود. این گروه، گروه خودریختی یک منیفلد ریمانی است که شامل تمام «تقارن‌های» (متریکی) آن است. این یک زیبرگروه از گروه دیفئومورفیسم $\text{Diff}(M)$ از M است. گروه کامل ایزومتری ممکن است زیبرگروه‌های غیربدیهی داشته باشد، که ما در ادامه با $\mathcal{I} \leq \text{Isom}(M)$ نشان خواهیم داد. یک مثال در شکل ۱۴۰ آورده شده است، که گروه



شکل ۴۱: یک منیفلد نامتقارن، که گروه ایزومنتری سراسری آن بدینهی است. از آنجایی که عدم تقارن به گوش‌ها و دهان «سوزان» می‌باشد، محدود می‌شود، تقارن‌های موضعی غیربدینهی باقی مانده‌اند. به عنوان مثال، نگاشت هموار $U^{\tilde{A}} \rightarrow U^A$ به طور کلی، گروه ایزومنتری یک منیفلد غیرتعیدی بذیر است، یعنی، هر نقطه‌ای از M را نمی‌توان از هر نقطه دیگری با عمل آن رسید. سپس منیفلد به مدارهای مجزا افزای می‌شود که برای مثال M به عنوان یک تخم مرغ (عید پاک) در شکل ۴۰ به تصویر کشیده شده است. گروه ایزومنتری یک منیفلد M ممکن است بدینهی باشد، به شرطی که M به اندازه کافی نامتقارن باشد. در این حالت، ممکن است هنوز ایزومنتری‌های غیربدینهی بین زیرمجموعه‌های محلی تعیین می‌یابد. هم‌متغیری ایزومنتری تبدیلات میدان کرنل با کرنل‌های با گستره فضایی تا اثرات مرزی تعیین می‌یابد.

ایزومنتری ۲ $\cong \text{Isom}(M)$ یک تخم مرغ را به تصویر می‌کشد. گروه کامل ایزومنتری (به عنوان مثال) به زیرگروه‌های دوران‌ها در $\text{SO}(2)$ و بازتاب‌ها در $\mathcal{I}_2 \cong \mathcal{R}$ تقسیم می‌شود.

به طور کلی، گروه ایزومنتری یک منیفلد غیرتعیدی بذیر است، یعنی، هر نقطه‌ای از M را نمی‌توان از هر نقطه دیگری با عمل آن رسید. سپس منیفلد به مدارهای مجزا افزای می‌شود که برای مثال M به عنوان یک تخم مرغ (عید پاک) در شکل ۴۰ به تصویر کشیده شده است. گروه ایزومنتری یک منیفلد M ممکن است بدینهی باشد، به شرطی که M به اندازه کافی نامتقارن باشد. در این حالت، ممکن است هنوز ایزومنتری‌های غیربدینهی بین زیرمجموعه‌های باز $U^{\tilde{A}}$ و U^A وجود داشته باشد، که معادله (۲۶۲) به آنها محدود می‌شود. شکل ۴۱ نمونه‌های از یک منیفلد را نشان می‌دهد که به صورت سراسری نامتقارن است اما ایزومنتری‌های غیربدینهی بین زیرمجموعه‌های محلی خود دارد. ما در ادامه فقط ایزومنتری‌های سراسری M را در نظر خواهیم گرفت، با این حال، تمام مفاهیم بخش فعلی ۱.۸ به روشنی آشکار به ایزومنتری‌ها بین زیرمجموعه‌های محلی تعیین می‌یابند. بدون اثبات، ما ادعا می‌کنیم که همین امر برای هم‌متغیری ایزومنتری هر عمل شبکه عصبی که به صورت نقطه‌ای عمل می‌کند، به عنوان مثال $\text{Isom}(M)$ ، غیرخطی‌ها یا جمع بایاس، صادق است. هم‌متغیری تبدیلات میدان کرنل با کرنل‌های با گستره فضایی تا اثرات مرزی برقرار است.

۲.۱.۸ عمل ایزومنتری بر روی کلاف‌های تاری

ایزومنتری‌ها به طور طبیعی بر روی بردارهای مماس در TM با «حمل کردن آنها» با عمل گروهی همانطور که در شکل ۴۰ به تصویر کشیده شده است، عمل می‌کنند. اگر یک ایزومنتری علاوه بر این با G -ساختر سازگار باشد، یعنی اگر یک خودریختی از GM ایجاد کند، علاوه بر این بر روی هر کلاف G -الحاقی، به ویژه کلاف‌های بردار ویژگی A عمل می‌کند. ما این اعمال ایزومنتری‌ها را بر روی کلاف‌های تاری و بر روی میدان‌های ویژگی در ادامه مورد بحث قرار می‌دهیم.

عمل ایزومنتری بر روی کلاف مماس: هر ایزومنتری $\phi \in \text{Isom}(M)$ یک پیش‌ران را ایجاد می‌کند

$$\phi_{*,TM} : TM \rightarrow TM, \quad \phi \in \text{Isom}(M) \quad (263)$$

روی کلاف مماس، که فقط دیفرانسیل ϕ است همانطور که در پیوست ۲.۰ معرفی شده است. در هر نقطه $p \in M$ می‌توان آن را به عنوان یک تقریب خطی از ϕ در نظر گرفت که بردارها $v \in T_p M$ را به $\phi_{*,TM}(v) \in T_{\phi(p)} M$ تغییر می‌کند:

$$\pi_{TM} \circ \phi_{*,TM} = \phi \circ \pi_{TM}. \quad (264)$$

همانطور که در پیوست آ۲ استدلال شد، پیش‌ران با $\phi_{*,TM}^{-1}(\phi)$ معکوس‌پذیر است، که ما به طور بدون ابهام آن را با $\phi_{*,TM}^{-1}$ خواهیم نوشت.^{۶۹} بنابراین دیده می‌شود که پیش‌ران یک عنصر ϕ از گروه ایزومنتری یک خودریختی کلاف برداری (ایزومنتریک) از TM روی ϕ است که نمودار جابجایی زیر را برآورده می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightleftharpoons{\phi_{*,TM}} & TM \\ \pi_{TM} \downarrow & \phi_{*,TM}^{-1} & \downarrow \pi_{TM} \\ M & \xrightleftharpoons[\phi^{-1}]{\phi} & M \end{array} \quad (265)$$

^{۶۹} معکوس‌پذیری به طور کلی برای پیش‌ران‌ها برقرار نیست بلکه فقط برای پیش‌ران‌های دیفئومورفیسم‌ها و در نتیجه ایزومنتری‌ها برقرار است.

بنا به تعریف ایزومتری‌ها، پیش‌ران آنها فاصله‌ها و زوایا را حفظ می‌کند، یعنی،

$$\eta_{\phi(p)}(\phi_{*,TM}v, \phi_{*,TM}w) = \eta_p(v, w) \quad \forall p \in M, v, w \in T_p M, \phi \in \text{Isom}(M). \quad (266)$$

جزئیات بیشتر در مورد پیش‌ران‌ها بین کلاف‌های مماس به راحتی در ادبیات، به عنوان مثال در [؟]، یافت می‌شود.

عمل ایزومتری بر روی کلاف قاب FM : پیش‌ران روی TM بلا فاصله بک خودریختی کلاف اصلی متناظر $\phi_{*,FM}$ را بر روی FM با پیش‌ران کردن بردارهای قاب منفرد القا می‌کند:

$$\phi_{*,FM}: FM \rightarrow FM, [e_i]_{i=1}^d \mapsto \phi_{*,FM}([e_i]_{i=1}^d) := [\phi_{*,TM}(e_i)]_{i=1}^d, \phi \in \text{Isom}(M) \quad (267)$$

این نگاشت قاب‌ها را در $F_p M$ برای هر $p \in M$ دلخواه به قاب‌ها در $F_{\phi(p)} M$ نگاشت می‌کند، یعنی $\pi_{FM} \circ \phi_{*,FM} = \phi \circ \pi_{FM}$. برای دیدن این، فرض کنید $[\phi_{*,FM}(e_i)]_{i=1}^d = \phi([e_i]_{i=1}^d) = \phi(e_i)_{i=1}^d \in F_p M$ ، آنگاه $\phi(e_i)_{i=1}^d = \phi \circ \pi_{FM}([e_i]_{i=1}^d) = \phi \circ \pi_{TM}(\phi(e_j))_{j=1}^d = (\phi^{-1})_{*,TM}(e_j) = \phi \circ \pi_{TM}(e_j) = \phi(p)$ (با $(\phi_{*,FM})^{-1} = (\phi^{-1})_{*,TM}$) علاوه بر این می‌توان بررسی کرد که با $(\phi_{*,FM})^{-1} = (\phi^{-1})_{*,FM}$ معکوس‌پذیر است، که باز هم با $\phi_{*,FM}^{-1}$ به اختصار نوشته می‌شود. عمل چپ قاب با عمل راست \triangleleft بر روی تارهای آن جابجا می‌شود، یعنی برای هر $\phi \in \text{Isom}(M)$ و $g \in \text{GL}(d)$ دلخواه داریم:

$$\begin{aligned} \left(\phi_{*,FM}([e_i]_{i=1}^d) \right) \triangleleft g &= [\phi_{*,TM}(e_i)]_{i=1}^d \triangleleft g && \text{(تعریف } \phi_{*,FM}, \text{ معادله } (267)) \\ &= \left[\sum_j \phi_{*,TM}(e_j) g_{ji} \right]_{i=1}^d && \text{(تعریف } \triangleleft, \text{ معادله } (154)) \\ &= \left[\phi_{*,TM} \left(\sum_j e_j g_{ji} \right) \right]_{i=1}^d && \text{(خطی بودن } \phi_{*,TM}) \\ &= \phi_{*,FM} \left(\left[\sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \right) && \text{(تعریف } \phi_{*,FM}, \text{ معادله } (267)) \\ &= \phi_{*,FM}([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) && \text{(تعریف } \triangleleft, \text{ معادله } (154)) \end{aligned} \quad (268)$$

یک تبدیل پیمانه یک قاب در $p \in M$ با $g \in \text{GL}(d)$ و به دنبال آن یک پیش‌ران به (p) ، بنابراین برای است با یک پیش‌ران قاب تبدیل نشده، و به دنبال آن یک تبدیل پیمانه با همان عنصر گروهی g اما در (p) . از این رو قاب‌های مختلف در تار $F_p M$ به گونه‌ای به قاب‌ها در $F_{\phi(p)} M$ نگاشت می‌شوند که جابجایی نسبی آنها حفظ شود. ویژگی‌های استخراج شده از $\phi_{*,FM}$ با این گزاره خلاصه می‌شود که نمودار

$$\begin{array}{ccc} FM & \xrightarrow{\phi_{*,FM}} & FM \\ \triangleleft g \uparrow & & \uparrow \triangleleft g \\ FM & \xrightarrow{\phi_{*,FM}} & FM \\ \pi_{FM} \downarrow & & \downarrow \pi_{FM} \\ M & \xrightarrow{\phi} & M \end{array} \quad (269)$$

برای هر $\phi \in \text{Isom}(M)$ و هر $g \in \text{GL}(d)$ و به دنبال آن یک تبدیل پیمانه با همان عنصر گروهی g اما در (p) ، یک خودریختی کلاف اصلی شناسایی می‌شود.^۷ روی FM را به GM در نظر گرفت، یعنی،

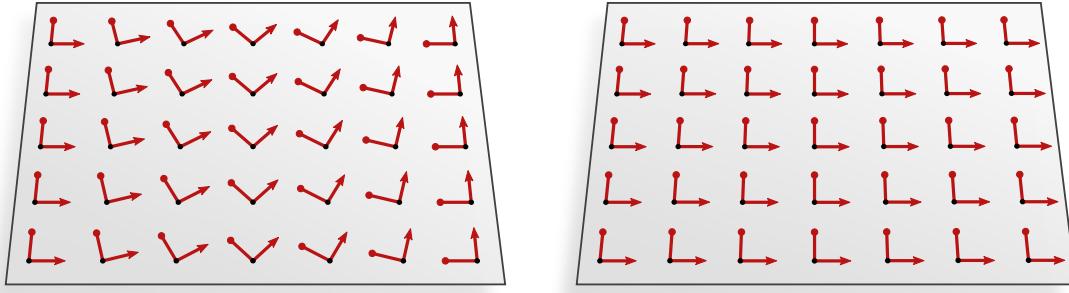
توجه داشته باشید که معکوس‌ها، که به طور صریح در نمودار (۲۶۵) نشان داده شده‌اند، برای کاهش شلوغی حذف شده‌اند.

عمل ایزومتری بر روی G -ساخترها GM : از آنجایی که G -ساخترها زیرکلاف‌های اصلی از کلاف قاب هستند، می‌توان محدودیت دامنه پیش‌ران روی GM را به GM در نظر گرفت، یعنی،

$$\phi_{*,FM}|_{GM}: GM \rightarrow FM, \phi \in \text{Isom}(M). \quad (270)$$

در اینجا لازم است که کل کلاف قاب FM به عنوان همدامنه حفظ شود زیرا به طور کلی هیچ تضمینی وجود ندارد که قاب‌ها در $G_p M$ به قاب‌های $G_{\phi(p)} M$ نگاشت شوند بلکه فقط به $F_{\phi(p)} M$ نگاشت می‌شوند. از آنجایی که G -ساخترها به طور کلی تحت عمل ایزومتری‌ها بر روی

^۷ یعنی، یک ایزومورفیسم کلاف اصلی از کلاف قاب به خودش؛ مقایسه کنید با معادله ۱۵۱.

(b) یک $\{e\}$ -ساختار جایگزین بر روی \mathbb{R}^2 (a) $\{e\}$ -ساختار کانونی

شکل ۴.۲ دو انتخاب خاص از $\{e\}$ -ساختارها (میدان‌های قاب سراسری) $M = \mathbb{R}^2$ را نشان می‌دهد که از انتقال‌ها، دوران‌ها و بازتاب‌ها تشکیل شده است. شکل ۴.۲(a) $\{e\}$ -ساختار کانونی \mathbb{R}^2 را نشان می‌دهد که تحت انتقال‌ها نامتفاوت است اما تحت دوران‌ها یا بازتاب‌ها نامتفاوت نیست. به بیان انتزاعی‌تر، انتقال‌ها زیرگروه $\text{Isom}_{\{e\}M} = \mathcal{T}_7 := (\mathbb{R}^2, +)$ از ایزومنتري‌های را تشکيل می‌دهند که خودريختي‌های $\{e\}$ را القا می‌کنند. در مقابل، دوران‌ها یا بازتاب‌ها قاب‌ها را در $F'_{\phi(p)}M$ نگاشت می‌کنند اما موقعاً به فرستادن آنها به $\{e\}_p M$ نمی‌شوند. بنابراین آنها خودريختي‌های $\{e\}$ -ساختار را القا نمی‌کنند و بخشی از $\{e\}$ -ساختار جایگزین از ایزومنتري‌هایی بر روی $\{e\}_p M$ یا هر یک از کلافهای $\{e\}$ -الحاقی آن تعریف نشده است. شکل ۴.۲(b) یک انتخاب جایگزین از $\{e\}$ -ساختار را بر روی $M = \mathbb{E}_6$ (با \mathbb{E}_6 نشان می‌دهد که فقط تحت انتقال‌ها در جهت «بالاپایین» نامتفاوت است، یعنی $\text{Isom}_{\{e\}M} \cong \mathcal{T}_7 = (\mathbb{R}, +)$) نشان می‌مودد در شکل‌های ۴.۲ و ۴.۴ ب نمونه‌ای از این مستند که خودريختي‌های $\{e\}$ -ساختار نه تنها به گروه ساختار G بلکه به انتخاب خاص G -ساختار GM پستگی دارند. مورد کلی برای G غیربدیهی سخت‌تر به تصویر کشیده می‌شود زیرا $G_p M$ در آن صورت یک قاب منفرد خواهد بود بلکه مجموعه‌ای از قاب‌ها خواهد بود.

بسطه نیستند، ممکن است تعریف یک عمل گروهی از گروه کامل ایزومنتري بر روی GM یا هر کلا芙 G -الحاقی دیگر غیرممکن باشد. برای رفع این نقیصه، ما در ادامه زیرگروهی از آن ایزومنتري‌ها را در نظر خواهیم گرفت که به G -ساختار احترام می‌گذارند، یعنی قاب‌های ممتاز در GM را به قاب‌ها در GM نگاشت می‌کنند.

تعریف ۸.۱ (ایزومنتري‌های حافظ G -ساختار). با داشتن یک G -ساختار GM ، ما زیرگروه متناظر از ایزومنتري‌های حافظ G -ساختار را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{Isom}_{GM} := \{\phi \in \text{Isom}(M) \mid \phi_{*,FM}(G_p M) = G_{\phi(p)} M \quad \forall p \in M\} \leq \text{Isom}(M) \quad (271)$$

برای چنین ایزومنتري‌هایی، ما عمل القابی بر روی GM را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

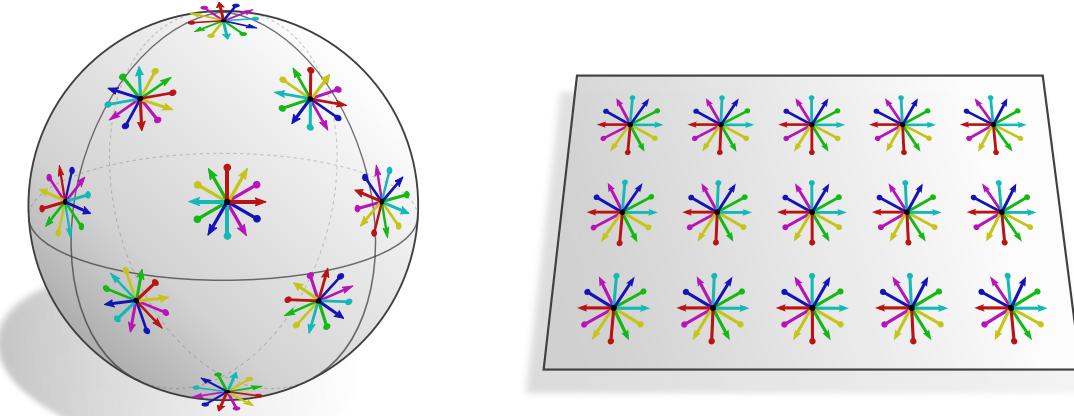
$$\phi_{*,GM} := \phi_{*,FM}|_{GM} : GM \rightarrow GM, \quad \phi \in \text{Isom}_{GM}. \quad (272)$$

اعمال تعریف شده به این شکل برای $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ خودريختي‌های G -ساختار هستند، یعنی باعث می‌شوند نمودار زیر برای هر $g \in G$ جابجا شود (که با محدود کردن معادله (۲۶۹) از GM به FM و از G به $\text{GL}(d)$ به دست می‌آید):

$$\begin{array}{ccc} GM & \xrightarrow{\phi_{*,GM}} & GM \\ \downarrow g & & \downarrow g \\ GM & \xrightarrow{\phi_{*,GM}} & GM \\ \downarrow \pi_{GM} & & \downarrow \pi_{GM} \\ M & \xrightarrow{\phi} & M \end{array} \quad (273)$$

شکل ۴.۲ دو نمونه از $\{e\}$ -ساختارها را روی $M = \mathbb{R}^2$ نشان می‌دهد، یعنی میدان‌های قاب سراسری. از این مثال‌ها مشخص است که زیرگروه‌های Isom_{GM} واقعاً به انتخاب خاص G -ساختار GM پستگی دارند، نه فقط به گروه ساختار G . در شکل ۴.۳ می‌بینیم $\text{SO}(2)$ -ساختار را روی $M = \mathbb{R}^2$ به تصویر می‌کشیم. گروه ایزومنتري آن $\text{SE}(2) = \text{SO}(2) \times \mathbb{R}^2$ می‌باشد. این بزرگتر از گروه‌های $\{e\}$ -ساختارها در شکل ۴.۲ است. یک $\text{SO}(3)$ -ساختار روی کره S^3 که توسط تمام دوران‌ها $\text{SO}(3) = \text{SO}(2)^3$ حفظ می‌شود، در شکل ۴.۳ نشان داده شده است.

برای انتخاب‌های خاص از گروه‌های ساختار G می‌توان گزاره‌های کلی تری در مورد اینکه کدام ایزومنتري‌ها در زیرگروه Isom_{GM} قرار دارند، بیان کرد. مهم‌تر از همه، برای گروه‌های ساختار اورتونormal $G = d$ (که با η سازگار هستند) هر ایزومنتري یک خودريختي از OM را القا می‌کند.



(ب) $S = S^{\circ}$ -ساختار $\text{SO}(2)$ روی $\text{SO}(3)$ نامتغیر SOM

(ا) $M = \mathbb{R}^{\circ}$ -ساختار $\text{SO}(2)$ روی $\text{SE}(2)$ نامتغیر SOM

شکل ۴۳: دو نمونه از (2) -ساختارها SOM روی صفحه $M = \mathbb{R}^{\circ}$ و کره $M = S^{\circ}$. که در شکل 43α نشان داده است. برای $M = \mathbb{R}^{\circ}$ فقط از قاب‌های راست‌گرد تشکیل شده است (به نوک پیکان‌ها روی محورهای اول و نوک دایره‌ها روی محورهای دوم توجه کنید) تحت بازتاب‌ها نامتغیر نیست. بنابراین ایزومنتری‌هایی که SOM را حفظ می‌کنند گروه $\text{SE}(2)$ است. در مورد $M = S^{\circ}$ که در شکل 43β نشان داده است، $\text{Isom}(M) = \text{E}(2)$ است. در مورد $M = S^{\circ}$ که در شکل 43γ نشان داده است، $\text{Isom}(M) = \text{SO}(3)$ است. خودریختی‌های SOM هستند در حالی که گروه کامل ایزومنتری $\text{Isom}(M) = \text{SO}(3)$ است.

یعنی همیشه داریم $\text{Isom}_{OM} = \text{Isom}(M)$. برای اثبات این ادعا، فرض کنید $[e_i]_{i=1}^d \in O_p M \subset F_p M$ یک قاب اورتونرمال باشد. که توسط یک ایزومنتری دلخواه $\phi \in \text{Isom}(M)$ به $[\phi_{*,FM} e_i]_{i=1}^d = [\phi_{*,TM} e_i]_{i=1}^d$ فرستاده می‌شود؛ به معادله (۲۶۷) مراجعه کنید. اعمال معادله (۲۶۶) بر روی محورهای منفرد قاب پیش‌ران به دست می‌دهد:

$$\eta(\phi_{*,TM} e_i, \phi_{*,TM} e_j) = \eta(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in 1, \dots, d, \quad (274)$$

که اورتونرمال بودن قاب پیش‌ران $\phi_{*,OM} [e_i]_{i=1}^d \in O_{\phi(p)} M$ را ایجاب می‌کند و بنابراین اجازه می‌دهد تا $\phi \in \text{Isom}(M)$ هر ϕ تعريف کنیم. به طور کلی، این نتیجه ایجاب می‌کند:

$$\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M) \quad \forall G \geq d \quad (275)$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد:

$$\text{Isom}_{SOM} = \text{Isom}_+(M), \quad (276)$$

یعنی، هر ایزومنتری حافظ جهت در $\text{Isom}_+(M)$ یک خودریختی از یک SOM را القا می‌کند. توجه داشته باشید که این گزاره‌ها همه فقط به گروه ساختار G بستگی دارند اما انتخاب خاص G -ساختار مستقل هستند. این در نهایت نتیجه در نظر گرفتن فقط ایزومنتری‌ها است که بنا به تعريف با d -ساختارها سازگار هستند، به جای در نظر گرفتن دیفیومورفیسم‌های عمومی‌تر. همانطور که قبل ذکر شد، زیرگروه Isom_{GM} به طور کلی به انتخاب خاص G -ساختار GM بستگی دارد، نه فقط به گروه ساختار G .

عمل ایزومنتری بر روی کلاف‌های برداری الحاقی \mathcal{A} : از پیش‌ران ایزومنتری‌ها در GM بر روی Isom_{GM} می‌توان یک پیش‌ران $\phi_{*,\mathcal{A}}$ را بر روی $\mathcal{A} = (GM \times \mathbb{R}^c) / \sim_\rho$ تعريف زیر ساخت:

$$\phi_{*,\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad [[e_i]_{i=1}^d, f] \mapsto \phi_{*,\mathcal{A}} \left([[e_i]_{i=1}^d, f] \right) := \left[\phi_{*,GM} \left([[e_i]_{i=1}^d] \right), f \right], \quad \phi \in \text{Isom}_{GM}. \quad (277)$$

این عمل خوش‌تعريف است زیرا ساختار به دلیل همتغیری راست $\phi_{*,GM}$ در معادله (۲۷۳) از نماینده انتخاب‌شده کلاس هم‌ارزی مستقل است. مشابه قبل، داریم $\phi \circ \pi_{\mathcal{A}} = \phi \circ \phi_{*,\mathcal{A}} \circ \phi_{*,\mathcal{A}} \circ \phi_{*,\mathcal{A}} = \phi$ ، یعنی $\phi_{*,\mathcal{A}}$ بردارهای ویژگی را در A_p به بردارهای ویژگی در $A_{\phi(p)}$ نگاشت می‌کند، که می‌توان با عمل بر روی یک بردار ویژگی و استفاده از ویژگی متناظر $\phi_{*,GM}$ آن را بررسی کرد. از آنجایی که $\phi_{*,\mathcal{A}}$ با عمل $\phi_{*,GM}$ بر روی عامل اول در $\sim_\rho / (GM \times \mathbb{R}^c)$ تعريف می‌شود، با ترکیب‌های خطی که بر روی عامل دوم همانطور که در معادله (۱۵۷) تعريف شده است، عمل می‌کند، تداخلی ندارد. این ایجاد می‌کند که پیش‌ران روی کلاف‌های الحاقی به صورت خطی بین تارهای آنها نگاشت کند. معکوس‌پذیری $\phi_{*,\mathcal{A}}$ از معکوس‌پذیری $\phi_{*,GM}$ نتیجه می‌شود به طوری که دوباره داریم $(\phi_{*,\mathcal{A}})^{-1} = (\phi^{-1})_{*,\mathcal{A}}$ ، که آن را به صورت $\phi_{*,\mathcal{A}}^{-1} = (\phi^{-1})_{*,\mathcal{A}}$ می‌نویسیم. این ویژگی‌ها،

همراه با این واقعیت که $\phi_{*,GM} \in \text{Aut}(GM)$ به طور خاص یک خودریختی کلاف اصلی است، $\phi_{*,A}$ را به عنوان یک خودریختی کلاف برداری الحاقی شناسایی می‌کند که نمودار جابجایی زیر را برآورده می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi_{*,A}} & A \\ \pi_A \downarrow & & \downarrow \pi_A \\ M & \xrightarrow{\phi} & M \end{array} \quad (278)$$

کلاف الحاقی حاصل از انتخاب‌های خاص نمایش گروهی $g = \rho(g) / \sim_{\mathbb{R}^d}$ به عنوان تار نمونه‌ای از طریق هوموفیسم کلاف $(GM \times \mathbb{R}^d) / \sim_{\mathbb{R}^d} \rightarrow TM$ از معادله (۱۵۹) با کلاف مماس TM (به عنوان یک G-کلاف) ایزومنورف است. تعریف ما از پیش‌ران‌ها بر روی کلاف‌های G- \mathcal{A} با این شناسایی سازگار است زیرا $\chi \circ \phi_{*,A} = \phi_{*,TM} \circ \chi$. برای دیدن این، فرض کنید $[[e_i]_{i=1}^d, v] \in (GM \times \mathbb{R}^d) / \sim_{\mathbb{R}^d}$ عنصری از کلاف الحاقی ایزومنورف باشد که به $\chi([[e_i]_{i=1}^d, v]) = \sum_i e_i v_i$ نگاشت می‌شود. آنگاه داریم $\chi \circ \phi_{*,A}([[e_i]_{i=1}^d, v]) = \sum_i e_i v_i$ که سازگاری تعاریف را نشان می‌دهد.

به عنوان یک کلاف الحاقی، پیش‌ران ϕ بر روی کلاف هوموفیسم $\text{Hom}(A_{\square\square}, A_{\square\square}) \cong (GM \times \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}}) / \sim_{\rho_{\square\square}}$ نیز با معادله (۲۷۷) مشخص می‌شود. با این حال، ما بعداً به عبارتی از ϕ بر حسب پیش‌ران‌های $\phi_{*,A_{\square\square}}$ و $A_{\square\square}$ از $\mathcal{A}_{\square\square}$ نیاز خواهیم داشت، که آن را به زودی در اینجا استخراج خواهیم کرد. برای این منظور، فرض کنید $H \in \text{Hom}(A_{\square\square}|_p, A_{\square\square}|_p)$ یک هوموفیسم در p و $f_p \in \mathcal{A}_{\square\square,p}$ یک بردار ویژگی در p باشد. آنگاه $H(f_p)$ بنا به تعریف یک بردار ویژگی در $\mathcal{A}_{\square\square,p}$ است. برای اینکه به طور سازگار تعریف شود، پیش‌ران بردار ویژگی ورودی f_p که توسط پیش‌ران هوموفیسم H بر آن عمل می‌شود، باید با پیش‌ران بردار ویژگی خروجی $H(f_p)$ موافق باشد. این ایجاد می‌کند:

$$\phi_{*,A_{\square\square}}[H(f_p)] = [\phi_{*,A_{\square\square}} H \phi_{*,A_{\square\square}}^{-1}](\phi_{*,A_{\square\square}} f_p) =: [\phi_{*,A_{\square\square}}, H](\phi_{*,A_{\square\square}} f_p), \quad (279)$$

که در آن پیش‌ران روی کلاف هوموفیسم را به صورت زیر تعریف کردیم:

$$\phi_{*,A_{\square\square}} : \text{Hom}(A_{\square\square}, A_{\square\square}) \rightarrow \text{Hom}(A_{\square\square}, A_{\square\square}), \quad H \mapsto \phi_{*,A_{\square\square}} H \phi_{*,A_{\square\square}}^{-1}, \quad \phi \in \text{Isom}_{GM} \quad (280)$$

توجه داشته باشید که ترکیب یک عنصر $(\phi_{*,A_{\square\square}}, H) \in \text{Hom}(A_{\square\square}, A_{\square\square})$ با $\phi_{*,A_{\square\square}}^{-1}$ از چپ و با $\phi_{*,A_{\square\square}}$ از راست، سبک معادله (۲۳۱) را منعکس می‌کند.

عمل ایزومنتری بر روی میدان‌های ویژگی: اعمال ایزومنتری‌ها در Isom_{GM} بر روی کلاف‌های الحاقی، اعمالی را بر روی مقاطع آنها، به ویژه بر روی میدان‌های ویژگی، ایجاد می‌کنند. این پیش‌ران مقاطع به صورت زیر تعریف می‌شود:
تعريف ۸.۲ (پیش‌ران ایزومنتری میدان ویژگی): فرض کنید $f \in \Gamma(\mathcal{A})$ یک میدان ویژگی و $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ یک ایزومنتری حافظ G -ساختار باشد. ایزومنتری از طریق پیش‌ران بر روی میدان ویژگی عمل می‌کند^{۷۱}

$$\triangleright : \text{Isom}_{GM} \times \Gamma(\mathcal{A}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}), \quad (\phi, f) \mapsto \phi \triangleright f := \phi_{*,A} \circ f \circ \phi^{-1}. \quad (281)$$

بر حسب یک نمودار جابجایی، این تعریف به صورت زیر به تصویر کشیده می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi_{*,A}} & A \\ f \uparrow & & \uparrow \phi \triangleright f := \phi_{*,A} \circ f \circ \phi^{-1} \\ M & \xrightarrow{\phi} & M \end{array} \quad (282)$$

به طور شهودی، این تعریف بیان می‌کند که مقطع پیش‌ران $f \triangleright \phi$ که در $p \in M$ ارزیابی می‌شود، بردار ویژگی f را از $(p)^{-1}\phi$ که از طریق $\phi_{*,A}$ به p پیش‌ران شده است، برمی‌گرداند. توجه داشته باشید که چنین پیش‌ران‌هایی در واقع مقاطع خوش‌تعریفی را به دست می‌دهند که

^{۷۱} به شباهت این تعریف با تعریف نمایش الگایی توجه کنید، که عمل گروهی است که شبکه‌های CNN هدایت‌پذیر طوری طراحی شده‌اند که نسبت به آن همتغیر باشند [؟ ؟ ؟ ؟] .

برآورده می‌کنند:

$$\begin{aligned}
 \pi_{\mathcal{A}} \circ (\phi \triangleright f) &= \pi_{\mathcal{A}} \circ \phi_{*,\mathcal{A}} \circ f \circ \phi^{-1} \\
 &= \phi \circ \pi_{\mathcal{A}} \circ f \circ \phi^{-1} \\
 &= \phi \circ \text{id}_M \circ \phi^{-1} \\
 &= \text{id}_M
 \end{aligned} \tag{۲۸۳}$$

همانطور که در معادله (۱۴۷) لازم است. شکل ۱۴۰ عمل ایزومتری‌ها را بر روی میدان‌ها به تصویر می‌کشد. عمل ایزومتری‌ها بر روی پولبک منتقل کننده $\text{Exp}_p^* f$ در بخش ۴.۱.۸ در زیر استخراج می‌شود.

۴.۱.۸ عمل ایزومتری در مختصات محلی

بیشتر استخراج‌ها در مورد همتغیری ایزومتری میدان کرnel در بخش‌های ۲.۸ و ۳.۸ در یک محیط مستقل از مختصات نگه داشته خواهند شد. با این حال، از آنجایی که کانولوشن‌های GM نسبت به یک انتخاب از G -اطلس‌های کلاف‌های الحاقی تعریف می‌شوند، بررسی همتغیری ایزومتری آنها مستلزم مطالعه عبارات مختصاتی پیش‌ران‌های ایزومتری $\phi_{*,\mathcal{A}}$ و $\phi_{*,\text{TM}}$ نسبت به بدیهی‌سازی‌های محلی کلاف است. عبارات مختصاتی عمل ایزومتری علاوه بر این در پیاده‌سازی‌های عددی مفید هستند، که لزوماً میدان‌های ویژگی را نسبت به میدان‌های قاب‌های مرجع کدگذاری می‌کنند.

در ادامه، ما پیمانه‌های Ψ_{TM}^A و $\Psi_{TM}^{\tilde{A}}$ را به ترتیب در همسایگی‌های $U^{\tilde{A}}$ از p و U^A از (p) داده شده فرض می‌کنیم. برای راحتی، فرض کنید \tilde{A} با تصویر $U^{\tilde{A}}$ تحت ایزومتری منطبق باشد، که همیشه بدون از دست دادن کلیت امکان پذیر است.

پیش‌ران روی TM در مختصات: به یاد بیاورید که پیش‌ران روی کلاف مماس یک نگاشت خطی از بردارها $v \in T_p M$ به بردارها $\psi_{*,TM}^A v \in T_{\phi(p)} M$ است. نسبت به پیمانه‌های داده شده، پیش‌ران بنابراین توسط یک میدان از ماتریس‌ها مختصاتی می‌شود

$$g_{\phi}^{A\tilde{A}} : U^{\tilde{A}} \rightarrow \text{GL}(d), \quad p \mapsto g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) := \psi_{TM,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,TM} \circ (\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1}, \quad \phi \in \text{Isom}(M), \tag{۲۸۴}$$

که بین ضرایب عددی متناظر (v) از p و $\psi_{TM,p}^{\tilde{A}}(\phi_{*,TM} v)$ از $\phi(p)$ تبدیل می‌کند. دقیق‌تر، $g_{\phi}^{A\tilde{A}}$ در زیرگروه $\langle G \cup d \rangle$ از $\text{GL}(d)$ مقدار می‌گیرد، که توسط عناصر d (به دلیل اینکه $\phi_{*,TM}$ متریک را حفظ می‌کند) و G (زیرا توابع گذار ممکن است یک ابرگروه از d تشکیل دهنده) تولید می‌شود. تعریف پیش‌ران در مختصات محلی با نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده می‌شود:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\psi_{TM,p}^{\tilde{A}}} & T_p M & \xrightarrow{\phi_{*,TM}} & T_{\phi(p)} M \xrightarrow{\psi_{TM,\phi(p)}^A} \mathbb{R}^d \\
 & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)} & & & \uparrow
 \end{array} \tag{۲۸۵}$$

شکل ۲۳ یک تفسیر گرافیکی از پیش‌ران در مختصات ارائه می‌دهد.

پیش‌ران روی FM در مختصات: مختصات‌سازی پیش‌ران روی کلاف قاب به قیاس با معادله (۲۸۴) تعریف می‌شود. مشخص می‌شود که این با عمل چپ همان عنصر گروهی $g_{\phi}^{A\tilde{A}}$ بر روی قاب‌های بدیهی‌شده داده می‌شود همانطور که در نمودار جابجایی زیر نشان داده شده است:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{GL}(d) & \xleftarrow{\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}} & F_p M & \xrightarrow{\phi_{*,FM}} & F_{\phi(p)} M \xrightarrow{\psi_{FM,\phi(p)}^A} \text{GL}(d) \\
 & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)} & & & \uparrow
 \end{array} \tag{۲۸۶}$$

با داشتن چارت‌های $x^A : U^A \rightarrow x^A(U^A) \subseteq \mathbb{R}^d$ و $\overline{x^A} : \overline{U^A} \rightarrow \overline{x^A(U^A)} \subseteq \mathbb{R}^d$ یک ایزومتری ϕ را می‌توان به صورت محلی با یک نگاشت $(x^A(U^A))^{-1} : x^A \circ \phi \circ (x^{\tilde{A}})^{-1} : \overline{x^A(U^A)} \rightarrow x^A(U^A)$ بین مختصات نمایش داد. برای حالت خاصی که پیمانه‌ها در p و (p) متناظر با پایه‌های مختصاتی آن چارت‌ها هستند، $g_{\phi}^{A\tilde{A}}$ به سادگی توسط زاکوبین $(x^{\tilde{A}})^{-1} \circ x^A \circ \phi \circ (x^{\tilde{A}})^{-1}$ داده می‌شود.

برای اثبات این ادعا، ما عمل را بر روی یک قاب بدیهی شده، که با یک ماتریس $h \in \mathrm{GL}(d)$ نماینده بردار قاب i -ام است، محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
& \left[\psi_{FM,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,FM} \circ (\psi_{FM,p}^{\tilde{A}})^{-1} \right] (h) \\
&= \left[\psi_{FM,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,FM} \right] \left(\left((\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1} (h_{:,i}) \right)_{i=1}^d \right) && \text{(تعريف } \psi_{FM,p}^{\tilde{A}}, \text{ معادله (۱۷۷))} \\
&= \psi_{FM,\phi(p)}^A \left(\left(\phi_{*,TM} \circ (\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1} (h_{:,i}) \right)_{i=1}^d \right) && \text{(تعريف } \phi_{*,FM}, \text{ معادله (۲۶۷))} \\
&= \left(\left(\psi_{TM,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,TM} \circ (\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1} (h_{:,i}) \right)_{i=1}^d \right) && \text{(تعريف } \psi_{TM,p}^A, \text{ معادله (۱۷۷))} \\
&= \left(g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \cdot h_{:,i} \right)_{i=1}^d && \text{(تعريف } g_\phi^{A\tilde{A}}, \text{ معادله (۲۸۴))} \\
&= g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \cdot h && \text{(۲۸۷))
\end{aligned}$$

عمل پیش‌ران بر روی بدیهی‌سازی‌های محلی را می‌توان به عنوان الگا کردن یک تبدیل پیمانه در نظر گرفت. یک شهود گرافیکی برای این گزاره در شکل ۲۳ داده شد که در آن پیمانه‌های اولیه در p و $\phi(p)$ با انتخاب‌های قاب‌های مرجع به تصویر کشیده شده‌اند. یک پیش‌ران از قاب در p به $\phi(p)$ (قرمز) به طور کلی با قاب اصلی در $\phi(p)$ (سبز) موافق نیست. گذار بین این دو قاب، تبدیل پیمانه الگا شده در $\phi(p)$ است. ما در ادامه این تبدیل را می‌سازیم؛ ابتدا بر حسب بدیهی‌سازی‌های محلی، سپس بر حسب میدان‌های قاب متضای.

از نمودار جایجایی در معادله (۲۸۶) مشخص است که پیمانه $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} : F_p M \rightarrow \mathrm{GL}(d)$ در p را می‌توان از طریق $\phi_{*,FM}^{-1}$ به یک پیمانه در $\phi(p)$ پول‌بک کرد، که به صورت زیر داده می‌شود:

$$\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,FM}^{-1} = (g_\phi^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{FM,\phi(p)}^A : F_{\phi(p)} M \rightarrow \mathrm{GL}(d). \quad (۲۸۸)$$

گسترش متضای نمودار جایجایی در معادله (۲۸۶) هم‌ارزی هر دو عبارت را به تصویر می‌کشد و یک اثبات جبری را زائد می‌کند:

$$\begin{array}{ccccccc}
& \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1} = (g_\phi^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \cdot \psi_{FM,\phi(p)}^A & & & & & \\
& \downarrow & & & & & \\
& \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} & F_p M & \xrightarrow{\phi_{*,FM}} & F_{\phi(p)} M & \xrightarrow{\psi_{FM,\phi(p)}^A} & \mathrm{GL}(d) \\
& \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{g_\phi^{A\tilde{A}}(p)} & & & & & \\
& & & & & & \uparrow
\end{array} \quad (۲۸۹)$$

نگاشت گذار (تبدیل پیمانه) بین پیمانه الگا شده از ایزومنتری $\psi_{FM,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,FM}^{-1}$ و پیمانه اصلی $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$ در $\phi(p)$ مشخص می‌شود که توسط عنصر گروهی معکوس داده می‌شود^{۷۳}

$$(\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1}) \circ (\psi_{FM,\phi(p)}^A)^{-1} = (g_\phi^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \in \langle G \cup d \rangle \leq \mathrm{GL}(d). \quad (۲۹۰)$$

توجه داشته باشید که این عنصر گروهی برای $G \leq$ لزوماً در گروه ساختار قرار نمی‌گیرد، یعنی پیمانه الگا شده از ایزومنتری ممکن است G -سازگار نباشد (نمی‌توان آن را به یک G -اطلس موجود از F_M اضافه کرد). در پاراگراف بعدی در مورد G -ساختارها نشان خواهیم داد که این دقیقاً زمانی اتفاق می‌افتد که $\phi \notin \mathrm{Isom}_{GM}$ باشد، یعنی برای ایزومنتری‌هایی که به G -ساختار احترام نمی‌گذارند.

برای استخراج عمل ایزومنتری بر روی میدان‌های قاب، مقاطع همانی $\sigma^A : U^A \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^{\tilde{A}})$ و $\sigma^{\tilde{A}} : U^{\tilde{A}} \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^A)$ را در نظر بگیرید. این مقاطع میدان‌های قاب اصلی را از شکل ۲۳ مدل می‌کنند. سپس میدان قاب جدید با مقاطع پیش‌ران داده می‌شود:

$$\phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}} := \phi_{*,FM} \circ \sigma^{\tilde{A}} \circ \phi^{-1} : U^A \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^A), \quad (۲۹۱)$$

^{۷۳} معکوس یک موضوع قراردادی است. در اینجا به این دلیل به وجود می‌آید که ما $g_\phi^{A\tilde{A}}$ را به عنوان عبارت مختصاتی پیش‌ران هموردای قاب‌ها تعریف کردیم در حالی که پیمانه‌ها به صورت پادردا تبدیل می‌شوند.

که به طور معادل با تعریف در معادله ۲۸۱ تعریف شده است. یک عبارت جایگزین برای میدان قاب پیش‌ران بر حسب عمل راست $g_\phi^{A\tilde{A}}$ با اعمال $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ یافت می‌شود:

$$\begin{aligned}
 & \psi_{FM,\phi(p)}^A ([\phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}}](\phi(p))) \\
 &= \psi_{FM,\phi(p)}^A \phi_{*,FM} \sigma^{\tilde{A}}(p) && (\text{تعريف } \phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}}, \text{ معادله } ۲۹۱) \\
 &= g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \sigma^{\tilde{A}}(p) && (\text{عبارات معادل در معادله } ۲۸۸) \\
 &= g_\phi^{A\tilde{A}}(p) && (\text{قطع همانی } \sigma^{\tilde{A}}, \text{ معادله } ۱۸۲) \\
 &= \psi_{FM,\phi(p)}^A (\sigma^A(\phi(p))) g_\phi^{A\tilde{A}}(p) && (\text{قطع همانی } \sigma^A, \text{ معادله } ۱۸۲) \\
 &= \psi_{FM,\phi(p)}^A (\sigma^A(\phi(p)) \triangleleft g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) && (\text{هم‌متغیری راست-GL}(d), \text{ معادله } ۱۷۹) \tag{۲۹۲}
 \end{aligned}$$

از آنجایی که $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ یک ایزوومورفیسم است، نتیجه می‌شود که:

$$(\phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}})(\phi(p)) = \phi_{*,FM} \sigma^{\tilde{A}}(p) = \sigma^A(\phi(p)) \triangleleft g_\phi^{A\tilde{A}}(p), \tag{۲۹۳}$$

یعنی، $g_\phi^{A\tilde{A}}(p)$ همانطور که انتظار می‌رفت تبدیل بین مقاطع همانی را توصیف می‌کند. این تبدیل القا شده از ایزوومتری بین قاب‌های مرجع در شکل ۲۳ با فلش آبی بین قاب قرمز (شفاف) و سبز به تصویر کشیده شده است.

پیمانه تبدیل شده با ایزوومتری $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1}$ و قطع پیش‌ران $\phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}}$ به این ترتیب با یکدیگر مطابقت دارند که دومی قطع همانی اولی است:

$$\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1} [\phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}}](\phi(p)) = \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1} \phi_{*,FM} \sigma^{\tilde{A}}(p) = \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \sigma^{\tilde{A}}(p) = e \tag{۲۹۴}$$

پیش‌ران روی GM در مختصات: همانطور که در بخش قبلی ۲.۱.۸ استدلال شد، پیش‌ران روی GM فقط برای ایزوومتری‌های ϕ در یک زیرگروه Isom_{GM} خوش‌تعریف است. جای تعجب نیست که تبدیلات پیمانه القا شده از ایزوومتری متناظر در گروه ساختار G مقدار می‌گیرند: قضیه ۸.۳ $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ در بدیهی‌سازی‌های محلی). فرض کنید $\phi \in \text{Isom}(M)$ هر ایزوومتری از M باشد. آنگاه سه گزاره زیر معادل هستند:

۱. $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ حافظ G -ساختار است، یعنی ϕ در G -اطلس G -سازگار است.
۲. بولبک ایزوومتری $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1}$ از هر پیمانه G -اطلس FM را تعریف می‌کند، با آن G -اطلس G -سازگار است.
۳. عبارت مختصاتی $\phi_{*,FM}$ نسبت به هر پیمانه $\psi_{FM,p}^A$ و $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$ از G -اطلس FM در گروه ساختار مقدار می‌گیرد، یعنی $g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \in G \quad \forall p \in M$

اثبات: ویژگی تعریف‌کننده یک ایزوومتری حافظ G -ساختار $p \in M$ است که $\phi_{*,FM}(G_p M) = G_{\phi(p)} M$ (۲۷۱) مراجعه کنید. بر حسب یک G -اطلس داده شده از FM ، معادله (۱۸۴) G -ساختار را در $p \in M$ به صورت $(G)(G_p M) := (\psi_{FM,p}^{\tilde{A}})^{-1}$ تعریف کرد که در آن $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$ یک پیمانه دلخواه از G -اطلس است. با این عبارت ما سمت چپ ویژگی تعریف‌کننده Isom_{GM} را بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
 \phi_{*,FM}(G_p M) &= \phi_{*,FM} (\psi_{FM,p}^{\tilde{A}})^{-1}(G) \\
 &= (\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1})^{-1}(G) \tag{۲۹۵}
 \end{aligned}$$

نسبت به هر پیمانه $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ از G -اطلس در (ϕ, p) ، این را می‌توان بیشتر به صورت زیر دستکاری کرد

$$\begin{aligned}
 \phi_{*,FM}(G_p M) &= ((g_\phi^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{FM,\phi(p)}^A)^{-1}(G) \\
 &= (\psi_{FM,\phi(p)}^A)^{-1} (g_\phi^{A\tilde{A}}(p) G). \tag{۲۹۶}
 \end{aligned}$$

سمت راست ویژگی تعریف‌کننده Isom_{GM} بر حسب $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$G_{\phi(p)} M = (\psi_{FM,\phi(p)}^A)^{-1}(G). \tag{۲۹۷}$$

با برابر قرار دادن هر دو طرف و استفاده از اینکه $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ یک ایزوومورفیسم است، نتیجه می‌شود $G = G_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)$ که به همارزی ادعا شده منجر می‌شود:

$$\phi_{*,FM}(G_p M) = G_{\phi(p)} M \iff g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in G \quad (298)$$

از گزاره‌های ۱. و ۳. برای اثبات همارزی با گزاره ۲.، به یاد بیاورید که $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1} g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)$ طبق معادله (۲۹۰) برابر با تبدیل پیمانه از $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ است. از آنجایی که G -اطلاس‌ها بنا به تعریف توابع گذار در گروه ساختار G دارند، پیامدهای (۲.۲ \leftrightarrow ۳.۳). نتیجه می‌شوند، به طوری که هر سه گزاره معادل دیده می‌شوند. \square

این نتایج برای مطالعه بعدی ما در مورد همتغیری ایزوومتری کانولوشن‌های GM اهمیت مرکزی دارند. ما قادر خواهیم بود نشان دهیم که چنین کانولوشن‌هایی تحت عمل $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ بر روی میدان‌های ویژگی همتغیر هستند، که به این واقعیت متکی است که G -هدايت‌پذیری کرنل‌های کانولوشن، تبدیلات پیمانه القا شده از ایزوومتری G را در نظر می‌گیرد.

برای ایزوومتری‌های القاکننده خودریختی G -ساختار FM در معادله (۲۸۹) را به همتای آن برای GM تطبیق دهیم:

$$\begin{array}{ccccccc} \psi_{GM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,GM}^{-1} & = & (g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \cdot \psi_{GM,\phi(p)}^A \\ \downarrow & & \boxed{G \xleftarrow{\psi_{GM,p}^{\tilde{A}}} G_p M \xrightarrow{\phi_{*,GM}} G_{\phi(p)} M \xrightarrow{\psi_{GM,\phi(p)}^A} G} \\ & & g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) . \end{array} \quad (299)$$

پیش‌ران روی \mathcal{A} در مختصات: پیش‌ران $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ بر روی کلاف‌های G -الحاقی به طور مشابه با پیش‌ران‌های دیگر کلاف‌ها مختصاتی می‌شود. بر حسب یک نمودار جابجایی، ما به طور غیرمنتظره‌ای به دست می‌آوریم:

$$\mathbb{R}^c \xleftarrow{\psi_{\mathcal{A},p}^{\tilde{A}}} \mathcal{A}_p \xrightarrow{\phi_{*,\mathcal{A}}} \mathcal{A}_{\phi(p)} \xrightarrow{\psi_{\mathcal{A},\phi(p)}^A} \mathbb{R}^c , \quad (300)$$

$\rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))$

که وقتی بر روی ضرایب بردار ویژگی $f \in \mathbb{R}^c$ عمل می‌کنیم به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \left[\psi_{\mathcal{A},\phi(p)}^A \circ \phi_{*,\mathcal{A}} \circ (\psi_{\mathcal{A},p}^{\tilde{A}})^{-1} \right] (f) \\ &= \left[\psi_{\mathcal{A},\phi(p)}^A \circ \phi_{*,\mathcal{A}} \right] \left([\sigma^{\tilde{A}}(p), f] \right) && \text{(تعريف } \psi_{\mathcal{A},p}^{\tilde{A}} \text{، معادله (۱۹۵))} \\ &= \psi_{\mathcal{A},\phi(p)}^A \left([\phi_{*,FM}(\sigma^{\tilde{A}}(p)), f] \right) && \text{(تعريف } \phi_{*,\mathcal{A}} \text{، معادله (۳۷۷))} \\ &= \psi_{\mathcal{A},\phi(p)}^A \left([\sigma^A(\phi(p)) \triangleleft g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p), f] \right) && \text{(تبدیل پیمانه القایی، معادله (۲۹۳))} \\ &= \psi_{\mathcal{A},\phi(p)}^A \left([\sigma^A(\phi(p)), \rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))f] \right) && \text{(تعريف } \rho \text{، معادله (۱۷۰))} \\ &= \rho \left(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \right) \cdot f && \text{(تعريف } \psi_{\mathcal{A},p}^{\tilde{A}} \text{، معادله (۱۹۴))} \end{aligned} \quad (301)$$

توجه داشته باشید که عبارت $(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))\rho$ مستلزم آن است که ρ یک عنصر گروه ساختار باشد زیرا ρ یک نمایش G است. این یک بار دیگر از دیدگاه دیگری نشان می‌دهد که پیش‌ران‌ها بر روی \mathcal{A} فقط می‌توانند برای ایزوومتری‌ها در Isom_{GM} تعریف شوند.

برای کامل بودن، ما بدیهی سازی محلی زیر از نمودار جابجایی از معادله (۲۸۲) را ارائه می‌دهیم، که ممکن است هنگام پیاده‌سازی CNN‌هاست مستقل از مختصات و آزمایش همتغیری Isom_{GM} آنها مفید باشد:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \phi \times \rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}) & & & & \\
 & U^{\tilde{A}} \times \mathbb{R}^c & \xleftarrow{\Psi_{\tilde{A}}} & \pi_A^{-1}(U^{\tilde{A}}) & \xrightarrow{\phi_{*,A}} & \pi_A^{-1}(U^A) & \xrightarrow{\Psi_A^A} U^A \times \mathbb{R}^c \\
 & \searrow \text{proj}_1 & & \pi_A \circ f & & \phi \triangleright f \circ \pi_A & \swarrow \text{proj}_1 \\
 & & U^{\tilde{A}} & & U^A & &
 \end{array} \quad (302)$$

۴.۱.۸ جابجایی پذیری اعمال ایزومتری با نگاشت نمایی و منتقل‌کننده‌ها

در بخش بعدی ما به عبارتی برای عمل ایزومتری‌ها بر روی پولبک‌های منتقل‌کننده f از میدان‌های ویژگی f نیاز خواهیم داشت، که آن را در اینجا استخراج می‌کنیم. برای این منظور، ما رفتار نگاشت نمایی و منتقل‌کننده‌های موازی را تحت عمل ایزومتری‌ها مورد بحث قرار می‌دهیم.

ایزومتری‌ها و نگاشت نمایی: همانطور که در [۴] اثبات شده است، ایزومتری‌ها ژئودزیک‌ها را به ژئودزیک‌ها نگاشت می‌کنند و بنابراین به طور خاص با نگاشت نمایی جابجا می‌شوند.^{۷۴} به طور خاص، همان

$$\exp_{\phi(p)} \circ \phi_{*,TM}(v) = \phi \circ \exp_p(v) \quad \forall v \in T_p M, \quad \phi \in \text{Isom}(M), \quad (303)$$

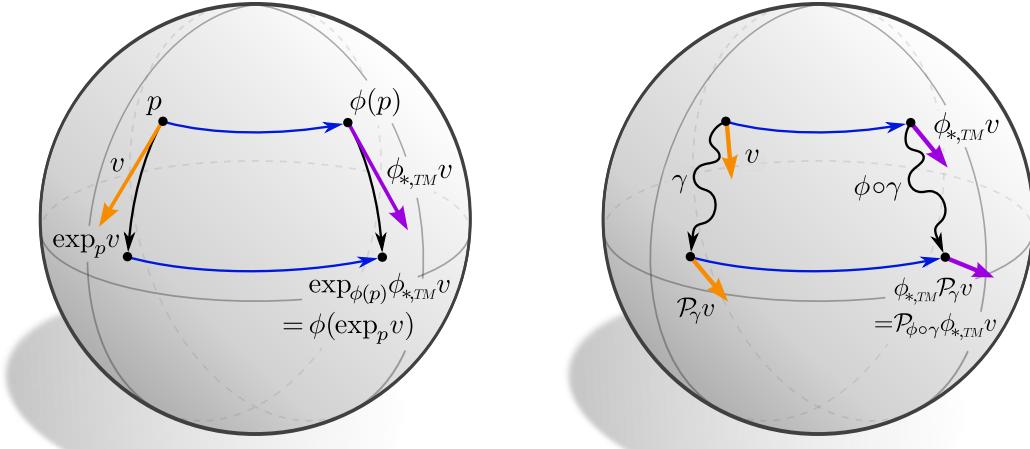
برای هر ایزومتری و هر بردار مماس در p برقرار است (هنوز یک منیفلد از نظر ژئودزیکی کامل را فرض می‌کنیم). این بیان می‌کند که نتیجه نگاشت نمایی در p که با یک بردار v ارزیابی شده و سپس از طریق ایزومتری نگاشت می‌شود، برابر با نگاشت نمایی در (p) ϕ است که با پیش‌ران v ارزیابی می‌شود، همانطور که در شکل (۴۴) (چپ) به تصویر کشیده شده است. این گزاره به صورت نموداری با جابجایی‌پذیری (مربع بالایی) نمودار زیر بیان می‌شود:

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{\phi} & M & & \\
 \uparrow \exp & & \uparrow \exp & & \\
 TM & \xrightarrow{\phi_{*,TM}} & TM & & \\
 \downarrow \pi_{TM} & & \downarrow \pi_{TM} & & \\
 M & \xrightarrow{\phi} & M & &
 \end{array} \quad (304)$$

ایزومتری‌ها و منتقل‌کننده‌های موازی: پیش‌ران روی کلاف سراس در [۴] علاوه بر این استدلال شد که با منتقل‌کننده‌های متناظر لوی-چیویتا جابجا می‌شود، همانطور که در شکل (۴۴) (راست) به تصویر کشیده شده است. اگر یک اتصال جایگزین و G-سازگار برای انتقال بردارهای ویژگی انتخاب شود، ما می‌خواهیم که آن نیز با عمل ایزومتری‌ها جابجا شود. از آنجایی که منتقل‌کننده‌ها و پیش‌ران‌ها بر روی GM, FM و A از آنهاست که بر روی TM هستند، لذا می‌توان به راحتی نشان داد که این خاصیت به آنها نیز منتقل می‌شود. به طور خاص برای کلاف‌های بردار ویژگی‌الحقیقی این به این معنی است که برای ایزومتری‌های دلخواه $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ و مسیرهای γ ما رابطه

$$\phi_{*,A} \circ \mathcal{P}_{A,\gamma} = \mathcal{P}_{A,\phi \circ \gamma} \circ \phi_{*,A} \quad (305)$$

^{۷۴} اثبات به این واقعیت متکی است که اتصال لوی-چیویتا $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ ، $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ ، که نگاشت نمایی ریمانی بر اساس آن است، با ایزومتری‌ها جابجا می‌شود: $(\phi \triangleright (\nabla_X Y)) = \nabla_{\phi \triangleright X} (\phi \triangleright Y)$ به [۴] مراجعه کنید.



شکل ۴۴: چپ: ایزومتری‌ها با نگاشت نمایی جابجا می‌شوند، یعنی، $v \in T_p M$ برای هر بردار $\exp_{\phi(p)} \circ \phi_{*,TM}(v) = \phi \circ \exp_p(v)$ برای $\phi \in \text{Isom}(M)$ راست: ایزومتری‌ها همچنین با انتقال لوی-چویتا بردارهای مماس و بردارهای ویژگی جابجا می‌شوند، یعنی، $\phi_{*,A} \circ \mathcal{P}_{A,\gamma} = \mathcal{P}_{A,\phi \circ \gamma} \circ \phi_{*,A}$ برای مسیرهای دلخواه $M \rightarrow [0,1]$: γ و ایزومتری‌های $\phi \in \text{Isom}(M)$. اگر یک انصال جایگزین و G-سازگار استفاده شود، ما می‌خواهیم که همان خاصیت جابجا‌بی‌پذیری برای آنها نیز برقرار باشد. نامتفاوت بودن نگاشتهای نمایی و منتقل‌کننده‌ها نسبت به ایزومتری به کاتولوشن‌های GM اجازه می‌دهد تا تحت عمل ایزومتری‌ها هم‌متغیر باشند.

را فرض می‌کنیم، به طوری که نمودار زیر جابجا می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\gamma(\cdot)} & \xrightarrow{\phi_{*,A}} & \mathcal{A}_{\phi \circ \gamma(\cdot)} \\ \downarrow \mathcal{P}_{A,\gamma} & & \downarrow \mathcal{P}_{A,\phi \circ \gamma} \\ \mathcal{A}_{\gamma(1)} & \xrightarrow{\phi_{*,A}} & \mathcal{A}_{\phi \circ \gamma(1)} \end{array} \quad (3.06)$$

ایزومتری‌ها و پولبک‌های منتقل‌کننده میدان‌های ویژگی: با دانستن قوانین تبدیل نگاشتهای نمایی و منتقل‌کننده‌ها تحت عمل ایزومتری‌ها، ما همه چیز لازم را برای استخراج قانون تبدیل پولبک‌های منتقل‌کننده $f^* \circ \text{Exp}_p^* f$ از میدان‌های ویژگی f در دست داریم: قضیه ۸.۴ (عمل ایزومتری بر روی پولبک‌های منتقل‌کننده میدان‌های ویژگی): فرض کنید $A \in \Gamma(A)$ هر میدان ویژگی و $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ هر ایزومتری حافظ G-ساختار باشد. فرض کنید منتقل‌کننده‌های بردار ویژگی با عمل Isom_{GM} جابجا شوند، یعنی معادله (۳.۰۵) برقرار باشد (که به طور خودکار برای انصال لوی چویتا تضمین می‌شود). سپس پولبک منتقل‌کننده (تعریف ۷.۵) از میدان پیش‌ران $f \triangleright \phi$ (تعریف ۸.۲) به صورت زیر داده می‌شود:

$$\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f) = \phi_{*,A_{\phi \circ \gamma}} \circ [\text{Exp}_{\phi^{-1}(p)}^* f] \circ \phi_{*,TM}^{-1} \quad (3.07)$$

اثبات: ما با اعمال سمت راست بر روی یک بردار دلخواه $v \in T_p M$ شروع می‌کنیم و با استفاده از ویژگی‌های استخراج شده در این بخش به تدریج به سمت چپ می‌رسیم:

$$\begin{aligned} & \phi_{*,A_{\phi \circ \gamma}} [\text{Exp}_{\phi^{-1}(p)}^* f] \phi_{*,TM}^{-1}(v) \\ &= \phi_{*,A_{\phi \circ \gamma}} \mathcal{P}_{A_{\phi \circ \gamma}, \phi^{-1}(p) \leftarrow \exp_{\phi^{-1}(p)} \circ \phi_{*,TM}^{-1}(v)} \circ f \circ \exp_{\phi^{-1}(p)} \circ \phi_{*,TM}^{-1}(v) \quad (\text{پولبک منتقل‌کننده، تعریف ۷.۵}) \\ &= \phi_{*,A_{\phi \circ \gamma}} \mathcal{P}_{A_{\phi \circ \gamma}, \phi^{-1}(p) \leftarrow \phi^{-1} \circ \exp_p(v)} \circ f \circ \phi^{-1} \circ \exp_p(v) \quad (\text{عمل ایزومتری بر } \exp, \text{ معادله (۳.۰۳)}) \\ &= \mathcal{P}_{A_{\phi \circ \gamma}, p \leftarrow \exp_p(v)} \circ \phi_{*,A_{\phi \circ \gamma}} \circ f \circ \phi^{-1} \circ \exp_p(v) \quad (\text{عمل ایزومتری بر } \mathcal{P}_{A_{\phi \circ \gamma}}, \text{ معادله (۳.۰۵)}) \\ &= \mathcal{P}_{A_{\phi \circ \gamma}, p \leftarrow \exp_p(v)} \circ (\phi \triangleright f) \circ \exp_p(v) \quad (\text{پیش‌ران میدان‌ها، معادله (۲.۸۱)}) \\ &= [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](v) \quad (\text{پولبک منتقل‌کننده، تعریف ۷.۵}) \quad \square \end{aligned} \quad (3.08)$$

به طور شهودی، این نتیجه فقط بیان می‌کند که پول‌بک منتقل‌کننده یک میدان پیش‌ران برابر با پیش‌ران پول‌بک منتقل‌کننده میدان اصلی است. نسبت به بدیهی‌سازی‌های محلی، این پیش‌ران را می‌توان به عنوان یک تبدیل پیمانه القا شده از ایزومنتری تفسیر کرد، که در معادله (۹۳) بیان شد. ما در ادامه فرض خواهیم کرد که اتصال G-سازگاری که برای انتقال بردارهای ویژگی انتخاب می‌شود، همیشه نسبت به Isom_{GM} خواهد بود و بنابراین معادله (۳۰۷) برقرار است.

اینکه پول‌بک منتقل‌کننده و پیش‌ران ایزومنتری جابجا می‌شوند، نتیجه جابجایی‌بذری نگاشت نمایی و منتقل‌کننده موازی است، که پول‌بک منتقل‌کننده بر حسب آنها تعریف می‌شود. توجه داشته باشید که دیفیومورفیسم‌های عمومی متريک و در نتیجه نگاشت نمایی و پول‌بک منتقل‌کننده میدان‌های ویژگی را حفظ نمی‌کنند. با تکیه بر این ساختارها، تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM فقط می‌توانند نسبت به ایزومنتری هم‌متغیر باشند اما نه کاملاً نسبت به دیفیومورفیسم.

۲.۸ هم‌متغیری ایزومنتری تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM

اکنون به بررسی این موضوع می‌پردازیم که تحت چه شرایطی تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM نسبت به عمل ایزومنتری‌ها بر روی میدان‌های ویژگی هم‌متغیر هستند. از آنجایی که عمل بر روی کلاف‌های بردار ویژگی G-الحاقی فقط برای ایزومنتری‌های حافظ G-ساختار تعریف شده است، ما تمام گزاره‌ها را برای زیرگروه‌ای $\text{Isom}_{GM} \leq \text{Isom}(M)$ یا زیرگروه‌های $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$ از آن فرمول‌بندی خواهیم کرد. البته همیشه می‌توان گروه‌های ساختار G را در نظر گرفت که برای آنها $\text{Isom}(M) = \text{Isom}_{GM}$ است.

هم‌متغیری یک تبدیل میدان کرنل، و در نتیجه کانولوشن‌های GM . به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۸.۵ (تبدیل میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزومنتری). فرض کنید $\mathcal{T}_K : \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square\square})$ یک تبدیل میدان کرنل باشد. آنگاه گفته می‌شود که \mathcal{T}_K نسبت به عمل ایزومنتری‌ها در یک زیرگروه $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$ هم‌متغیر است اگر با این عمل جابجا شود، یعنی اگر ویژگی زیر برقرار باشد:

$$\mathcal{T}_K(\phi \triangleright f) = \phi \triangleright (\mathcal{T}_K(f)) \quad \forall f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}), \phi \in \mathcal{I} \quad (309)$$

بر حسب یک نمودار، \mathcal{T}_K نسبت به ایزومنتری‌ها در \mathcal{I} هم‌متغیر است اگر

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) & \xrightarrow{\mathcal{T}_K} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square\square}) \\ \phi \triangleright \downarrow & & \downarrow \phi \triangleright \\ \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) & \xrightarrow{\mathcal{T}_K} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square\square}) \end{array} \quad (310)$$

برای همه $\phi \in \mathcal{I}$ جابجا شود.

یک نمایش تصویری از این تعریف در شکل ۲۷ آورده شده است. در بخش بعدی ۱.۲.۸ ما یک قید بر روی میدان‌های کرنل استخراج خواهیم کرد تا تبدیل میدان کرنل متناظر نسبت به ایزومنتری هم‌متغیر باشد. نتیجه‌های که از نظر هندسی شهودی است و به دست می‌آوریم این است که خود میدان کرنل باید تحت عمل ایزومنتری‌ها نامتغیر باشد، که این به معنای نوعی اشتراک‌گذاری وزن بر روی مدارهای ایزومنتری است؛ به شکل ۴۵ مراجعه کنید. بخش ۱.۲.۸ این بیان‌ها را به مورد خاص تر کانولوشن‌های GM و میدان‌های کرنل کانولوشنی GM اعمال می‌کند. مشخص می‌شود که کانولوشن‌های GM به دلیل G-هدایت‌پذیری کرنل الگوی خود، به طور خودکار نسبت به هر ایزومنتری در Isom_{GM} هم‌متغیر هستند.

۱.۲.۸ هم‌متغیری ایزومنتری تبدیلات میدان کرنل عمومی

نتیجه اصلی این بخش، قضیه ۸.۸، بیان می‌کند که یک تبدیل میدان کرنل \mathcal{T}_K نسبت به ایزومنتری هم‌متغیر است اگر و تنها اگر میدان کرنل زیربنایی آن K تحت ایزومنتری‌ها نامتغیر باشد. برای معنادار کردن این گزاره، ما با تعریف رفتار تبدیلی میدان‌های کرنل هنگام عمل ایزومنتری‌ها بر آنها شروع می‌کنیم.

تعریف ۸.۶ (عمل ایزومنتری بر روی میدان‌های کرنل). فرض کنید $\mathcal{T}_K : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square\square\square})$ یک میدان کرنل باشد. یک ایزومنتری $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ از طریق پیش‌ران میدان کرنل بر روی \mathcal{T}_K عمل می‌کند:

$$\phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{T}_K := \phi_{*,\square\square\square\square} \circ \mathcal{T}_K \circ \phi_{*,TM}^{-1}. \quad (311)$$

به طور شهودی، این پیش‌ران میدان‌های کرنل را می‌توان به عنوان حرکت دادن کرنل‌های منفرد \mathcal{K}_p در نقاط $p \in M$ در امتداد مدارهای گروه ایزومنتری به $(p)\phi$ در نظر گرفت.

از آنجایی که میدان‌های کرنل به عنوان M-مورفیسم‌های کلاف تعریف می‌شوند، یعنی $\mathcal{K} = \pi_{TM} \circ \pi_{\square\square\square\square}$ را برآورده می‌کنند، پیش‌ران آنها تنها در صورتی خوش‌تعریف است که این ویژگی را حفظ کند. این تضمین می‌شود زیرا پیش‌ران روی کلاف مماس و کلاف هومومورفیسم نگاشته‌های

کلاف هستند که به ترتیب $\pi_{TM} \circ \phi_{*,TM} = \phi \circ \pi_{TM}$ (معادله (۲۷۸)) و $\pi_{\mathcal{A}} \circ \phi_{*,\mathcal{A}} = \phi \circ \pi_{\mathcal{A}}$ (معادله (۲۶۵)) را برآورده می‌کنند:

$$\begin{aligned}\pi_{\mathcal{A}} \circ \phi_{*,\mathcal{A}} \mathcal{K} &= \pi_{\mathcal{A}} \phi_{*,\mathcal{A}} \mathcal{K} \phi_{*,TM}^{-1} \\&= \phi \pi_{\mathcal{A}} \mathcal{K} \phi_{*,TM}^{-1} \\&= \phi \pi_{TM} \phi_{*,TM}^{-1} \\&= \phi \phi^{-1} \pi_{TM} \\&= \pi_{TM}\end{aligned}\tag{۳۱۲}$$

ما تعریف عمل ایزومتری را بر روی میدان‌های کرنل با یک نمودار جابجایی به تصویر می‌کشیم:

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & \nearrow \pi_{TM} & & \searrow \pi_{\mathcal{A}} & \\ TM & \xrightarrow{\phi_{*,\mathcal{K}}} & \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) & & \\ \downarrow \phi & & \uparrow \phi_{*,\mathcal{A}} & & \\ TM & \xrightarrow{\mathcal{K}} & \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) & & \\ & \searrow \pi_{TM} & & \nearrow \pi_{\mathcal{A}} & \\ & & M & & \end{array}\tag{۳۱۳}$$

با خش پایینی این نمودار میدان کرنل مستقل از مختصات \mathcal{K} را از نمودار در معادله (۲۳۷) نشان می‌دهد در حالی که بخش بالایی پیش‌ران آن $\phi_{*,\mathcal{K}} \circ \mathcal{K} \circ \phi_{*,\mathcal{A}}^{-1} = \phi_{*,\mathcal{A}} \circ \mathcal{K} \circ \phi_{*,TM}^{-1}$ نشان می‌دهد. جابجایی پذیری فلاش سمت چپ، که تأیید می‌کند $\phi_{*,\mathcal{K}}$ کرنل‌ها را از p به $\phi(p)$ منتقل می‌کند، از این واقعیت ناشی می‌شود که ϕ و $\phi_{*,\mathcal{A}}$ هر دو نگاشتهای کلاف روی ϕ هستند.

ما با تعریف میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری ادامه می‌دهیم - یک نمایش تصویری در شکل ۴۵ یافت می‌شود.

تعریف ۸.۷ (میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری). گفته می‌شود یک میدان کرنل \mathcal{K} نامتغیر^{۷۵} تحت ایزومتری‌ها در $\mathcal{I} \leq \mathcal{I}$ است اگر قید $\mathcal{K} = \phi_{*,\mathcal{K}} \circ \mathcal{K} \circ \phi_{*,\mathcal{A}}^{-1}$ برای همه $\phi \in \mathcal{I}$ برآورده کند. ما فضای میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری را با

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{I}} := \left\{ \mathcal{K} : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \mid \pi_{\mathcal{A}} \circ \mathcal{K} = \pi_{TM}, \quad \phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K} = \mathcal{K} \quad \forall \phi \in \mathcal{I} \right\}.\tag{۳۱۴}$$

با نوشتن ϕ ، قید نامتغیر بودن به صورت زیر خوانده می‌شود:

$$\phi_{*,\mathcal{A}} \circ \mathcal{K} \circ \phi_{*,TM}^{-1} = \mathcal{K} \quad \forall \phi \in \mathcal{I},\tag{۳۱۵}$$

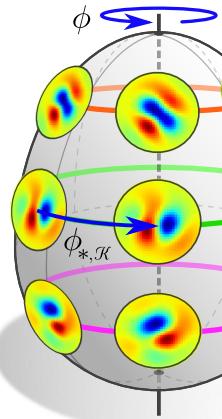
که پس از بسط بیشتر $\phi_{*,\mathcal{A}}$ همانطور که در معادله (۲۸۰) تعریف شده است، به صورت زیر در می‌آید:

$$\phi_{*,\mathcal{A}} \mathcal{K}(\phi_{*,TM}^{-1} v) \phi_{*,\mathcal{A}}^{-1} = \mathcal{K}(v) \quad \forall v \in TM, \quad \forall \phi \in \mathcal{I}\tag{۳۱۶}$$

به شبهات این قیود میدان کرنل در معادلات (۳۱۵) و (۳۱۶) با قید G-هدایت‌پذیری بر روی کرنل‌های الگو در معادلات (۲۴۳) و (۲۴۴) توجه کنید. در واقع، هر دو قید ارتباط نزدیکی با هم دارند و تا حدی یکدیگر را ایجاب می‌کنند، همانطور که در بخش بعدی ۲.۲.۸ در مورد کاتولوشن‌های GM هم‌متغیر نسبت به ایزومتری نشان خواهیم داد.

قضیه زیر اثبات می‌کند که میدان‌های کرنلی که تحت ایزومتری‌ها نامتغیر هستند، در واقع متناظر با تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزومتری هستند:

^{۷۵} به جای گفتن اینکه \mathcal{K} نامتغیر است، می‌توان آن را هم‌متغیر نامید زیرا $\phi_{*,\mathcal{A}} \circ \mathcal{K} = \mathcal{K} \circ \phi_{*,TM}$ برآورده می‌کند. به طور کلی، هر تابعی که نسبت به اعمال گروهی معینی بر روی دامنه و هم‌دامنه‌اش هم‌متغیر باشد، خودش تحت پیش‌ترکیب و پس‌ترکیب با اعمال روی دامنه و هم‌دامنه‌اش مانند معادله (۳۱۵) نامتغیر است.



شکل ۴۵: نمایش تصویری یک میدان کرnel نامتغیر \mathcal{K} برای حالت یک (زیر)گروه ایزومتری $\mathcal{I} = \text{SO}(2)$ قید نامتغیر بودن مستلزم $\mathcal{K}\phi_{*,TM}^{-1} = \mathcal{K}$ است. این ایجاب می‌کند که کرنل‌ها بر روی مدارهای $\{\phi(p) \mid \phi \in \mathcal{I}\}$ عمل به اشتراک گذاشته شوند اما اجازه می‌دهد کرنل‌های متفاوتی بر روی مدارهای مختلف وجود داشته باشند. قضیه ۸.۸ اثبات می‌کند که میدان‌های کرnel نامتغیر و تبدیلات میدان کرnel همتغیر یکدیگر را ایجاب می‌کنند. این به طور شهودی روشن است زیرا یک الگوی خاص در میدان ویژگی در $p \in M$ همان پاسخی را هنگامی که به $\phi(p)$ منتقل می‌شود برای اینگیز، اگر و تنها اگر کرنل‌ها در هر دو نقطه متنطبق باشند. برای انتخاب $\mathcal{I} = \text{Isom}_{GM}$ گروه ایزومتری، کرنل‌ها علاوه بر این باید یک قید بازتابی را برآورده کنند؛ به شکل ۴۷ مراجعه کنید.

قضیه ۸.۸ (تبدیل میدان کرnel همتغیر \Leftrightarrow میدان کرnel نامتغیر). یک تبدیل میدان کرnel $\mathcal{K} : \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square})$ نسبت به ایزومتری‌ها در $\text{Isom}_{GM} \leq \mathcal{I}$ طبق تعریف ۸.۵ همتغیر است اگر و تنها اگر میدان کرnel زیربنایی \mathcal{K} تحت ایزومتری‌ها طبق تعریف ۸.۷ نامتغیر باشد، یعنی،

$$\mathcal{K}(\phi \triangleright f) = \phi \triangleright \mathcal{K}(f) \quad \forall \phi \in \mathcal{I}, f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \iff \phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K} = \mathcal{K} \quad \forall \phi \in \mathcal{I} \quad (317)$$

اثبات: برای اثبات این قضیه، ما تبدیلات میدان کرnel و پیش‌ران‌های میدان ویژگی را در هر دو طرف شرط همتغیری ایزومتری در معادله (۳۰۹) می‌نویسیم. گزاره پس از چند دستکاری جبری از مقایسه هر دو طرف به دست می‌آید.

ما با سمت راست معادله (۳۰۹) شروع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} [\phi \triangleright \mathcal{K}(f)](p) &\stackrel{(1)}{=} \phi_{*,\mathcal{A}_{\square\square}}[\mathcal{K}(f)](\phi^{-1}(p)) \\ &\stackrel{(2)}{=} \phi_{*,\mathcal{A}_{\square\square}} \int_{T_{\phi^{-1}(p)}M} \mathcal{K}(v) [\text{Exp}_{\phi^{-1}(p)}^* f](v) dv \\ &\stackrel{(3)}{=} \phi_{*,\mathcal{A}_{\square\square}} \int_{T_{\phi^{-1}(p)}M} \mathcal{K}(v) \phi_{*,\mathcal{A}_{\square\square}}^{-1} [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](\phi_{*,TM}(v)) dv \\ &\stackrel{(4)}{=} \int_{T_p M} \phi_{*,\mathcal{A}_{\square\square}} \mathcal{K}(\phi_{*,TM}^{-1} \tilde{v}) \phi_{*,\mathcal{A}_{\square\square}}^{-1} [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](\tilde{v}) d\tilde{v} \\ &\stackrel{(5)}{=} \int_{T_p M} [\phi_{*,\mathcal{A}_{\square\square}} \mathcal{K} \phi_{*,TM}^{-1}](\tilde{v}) [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](\tilde{v}) d\tilde{v} \\ &\stackrel{(6)}{=} \int_{T_p M} [\phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K}](\tilde{v}) [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](\tilde{v}) d\tilde{v} \end{aligned} \quad (318)$$

مراحل (۱) و (۲) عمل ایزومتری \triangleright را بر روی میدان‌های ویژگی (تعریف ۸.۲) و تبدیل میدان کرnel (تعریف ۷.۶) بسط می‌دهند. قانون تبدیل پول‌بک منتقل کننده میدان در قضیه ۸.۴، که به نامتغیر بودن اتصال G -سازگار نسبت به Isom_{GM} متنکی است، مرحله (۳) را توجیه می‌کند. مرحله (۴) v را با $\tilde{v} = \phi_{*,TM} v$ جایگزین می‌کند. از آنجایی که ϕ یک ایزومتری است، تغییر حجم برابر با ۱ است. مراحل (۵) و (۶) عمل پیش‌ران کرnel $\phi_{*,\mathcal{K}}$ را شناسایی می‌کنند، تعریف ۸.۶. گزاره حاصل کاملاً شهودی است: یک تبدیل خروجی تبدیل میدان کرnel متناظر با یک تبدیل همزمان ورودی و میدان کرnel آن است.

نوشتن سمت چپ به دست می‌دهد:

$$[\mathcal{K}(\phi \triangleright f)](p) = \int_{T_p M} \mathcal{K}(v) [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](v) dv, \quad (319)$$

که تا تبدیل میدان کرnel با سمت راست معادل است.

هممتغیری ایزومتری مستلزم آن است که هر دو عبارت برای میدان‌های دلخواه $p \in M$ و ایزومتری‌های $\phi \in \mathcal{I}$ ، $f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square})$ ، نقاط $\phi_{*,\mathcal{K}} \in \mathcal{K}$ برای هر $\phi \in \mathcal{I}$ برابر باشد، یعنی اگر میدان کرنل تحت عمل ایزومتری‌ها نامتغیر باشد، برقار است. \square

توجه داشته باشید که این اثبات در (یک G-اطلس از) بدیهی‌سازی‌های محلی سپار دشوار بود. توصیف سراسری و مستقل از مختصات تبدیلات میدان کرنل امکان یک اثبات ساده را بدون نگرانی از اینکه ایزومتری از بین بدیهی‌سازی‌های واپسی‌گاه را بین بدیهی‌سازی‌های کرنل نامتغیر کنند، فراهم می‌کند. در این مرحله ما می‌توانستیم با بررسی بیشتر میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری ادامه دهیم: از آنجایی که قید نامتغیر بودن ایزومتری از اشتراک گذاشته شوند، توصیف کل میدان کرنل بر روی کل منیفلد زائد است. بنابراین امکان کاهش توصیف چنین میدان‌های کرنلی به میدان‌های کرنل بر روی فضاهای خارج‌قسمتی وجود دارد. از آنجایی که این تحلیل برای اثبات هم‌متغیری ایزومتری کانولوشن‌های GM لازم نیست و به برخی تعاریف فنی نیاز دارد، ما آن را به بخش ۳.۸ موقول می‌کنیم.

۲.۲.۸ هم‌متغیری ایزومتری کانولوشن‌های GM

به یاد بیاورید که کانولوشن‌های GM (تعریف ۷.۴) به عنوان تبدیلات میدان کرنل کانولوشنی GM شدند. بنابراین نتایج مربوط به هم‌متغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرنل بلافصله به کانولوشن‌های GM نیز اعمال می‌شود. با این حال، علاوه بر قید نامتغیر بودن ایزومتری در معادله (۳۱۵)، میدان‌های کرنل کانولوشنی GM باید قید G-هدايت‌پذیری را بر روی کرنل الگو از معادله (۲۴۳) برآورده کنند و وزن‌ها را طبق معادله (۲۴۵) بر روی G-ساختار به اشتراک بگذارند. برای اینکه کانولوشن GM نسبت به ایزومتری هم‌متغیر باشد، ممکن است قیود باید به طور شهودی، این ایجاد می‌کند که اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی با اشتراک‌گذاری وزن القا شده از ایزومتری بر روی مدارها موافق باشد. خوشبختانه مشخص می‌شود که این به طور خودکار برای ایزومتری‌های مورد نظر صادق است: کانولوشن‌های GM وزن‌ها را بر روی G-ساختار به اشتراک می‌گذارند و ایزومتری‌ها در Isom_{GM}-ساختار را حفظ می‌کنند به طوری که میدان‌های کرنل کانولوشنی GM تضمین شده‌اند که نسبت به Isom_{GM} نامتغیر باشند. در مختصات، این در تبدیلات پیمانه‌القا شده از Isom_{GM} یعنی $(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))$ که در گروه ساختار G مقدار می‌گیرند، منعکس می‌شود، به طوری که آنها توسط G-هدايت‌پذیری کرنل‌های الگو حذف می‌شوند.

برای دقیق‌تر کردن این استدلال‌ها، یک کانولوشن GM یعنی $(K \star : \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}))$ را با یک کرنل G-هدايت‌پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square}}^G$ در نظر بگیرید، که طبق تعریف ۷.۸ فقط تبدیل میدان کرنل $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_K}$ کانولوشنی GM یعنی \mathcal{K}_K است. طبق قضیه ۸.۸ کانولوشن GM بنابراین دقیقاً زمانی نسبت به Isom_{GM} هم‌متغیر است که \mathcal{K}_K نسبت به $\mathcal{K}_{*,\mathcal{K}}$ نامتغیر باشد، یعنی زمانی که $\phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K}_K = \mathcal{K}_K \circ \phi_{*,TM}^{-1} = \mathcal{K}_K$ بر روی کرنل‌های کانولوشن منفرد که میدان را تشکیل می‌دهند، بیان می‌شود:

$$\phi_{*,TM} \circ \mathcal{K}_{K,p} \circ \phi_{*,TM}^{-1} = \mathcal{K}_{K,\phi(p)} \quad \forall p \in M, \phi \in \text{Isom}_{GM} \quad (320)$$

با در نظر گرفتن یک نقطه خاص $p \in M$ ، ما پیمانه‌های دلخواه \tilde{A} را در p و A را در $\phi(p)$ از G-اطلس انتخاب می‌کنیم. میدان کرنل کانولوشنی GM طبق تعریف ۷.۴ در p و $\phi(p)$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\mathcal{K}_{K,p} := (\psi_{\square\square,p}^{\tilde{A}})^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^{\tilde{A}}|}} \circ \psi_{TM,p}^{\tilde{A}} \quad \text{و} \quad \mathcal{K}_{K,\phi(p)} := (\psi_{\square\square,\phi(p)}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_{\phi(p)}^A|}} \circ \psi_{TM,\phi(p)}^A. \quad (321)$$

با جایگذاری این عبارات در قید در معادله (۳۲۰) برای p ثابت و شناسایی $(\psi_{\square\square,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,TM}^{-1})^{-1}$ با $(\psi_{\square\square,\phi(p)}^A)^{-1}$ به دست می‌آوریم:

$$(\psi_{\square\square,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,TM}^{-1})^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^{\tilde{A}}|}} \circ \psi_{TM,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,TM}^{-1} = (\psi_{\square\square,\phi(p)}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_{\phi(p)}^A|}} \circ \psi_{TM,\phi(p)}^A \quad \forall \phi \in \text{Isom}_{GM} \quad (322)$$

بنابراین هم‌متغیری ایزومتری برقار خواهد بود اگر اشتراک‌گذاری وزن از ایزومتری $\psi_{*,\phi(p)}^{\tilde{A}}$ با اشتراک‌گذاری وزن از طریق پیمانه‌های اصلی $\psi_{*,\phi(p)}^A$ از $\phi(p)$ موافق باشد. به یاد بیاورید که پیمانه‌های القا شده از ایزومتری طبق قضیه ۸.۳ برای ایزومتری‌ها در Isom_{GM} تضمین شده‌اند که با G-اطلس‌ها (از کلاف متناظر) سازگار باشند. همانطور که در معادله (۲۴۶) نشان داده شده است، انتخاب خاص پیمانه، که کرنل الگوی G-هدايت‌پذیر نسبت به آن جهتدهی می‌شود، بی‌همیت است، تا زمانی که پیمانه‌ها G-سازگار باشند. از آنجایی که همه استخراج‌ها از نقطه انتخاب شده p و انتخاب خاص پیمانه‌ها مستقل بودند، این ایجاد می‌کند که کانولوشن‌های GM بنا به طراحی تضمین شده‌اند که نسبت به Isom_{GM} هم‌متغیر باشند.

برای به دست آوردن شهود بهتر برای این نتیجه، ارزش دارد که تبدیلات پیمانه القایی و با مقدار در G یعنی $(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))$ را صریح کنیم. برای این منظور، توجه داشته باشید که جایگایی‌پذیری نمودارها در معادلات (۳۰۲) و (۲۸۵) ایجاد می‌کند $\rho_{\square\square}(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{\square\square,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,TM}^{-1} = \rho_{\square\square}(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{\square\square,\phi(p)}^A$

$$\begin{aligned} \text{با جایگذاری این عبارات مختصاتی در قید در معادله (۳۲۲) به این الزام می‌رسیم که} \\ \left(\rho_{\phi}(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{\phi(p)}^A \right)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^{\tilde{A}}|}} \circ (g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{TM,\phi(p)}^A = (\psi_{\phi(p)}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_{\phi(p)}^A|}} \circ \psi_{TM,\phi(p)}^A \quad (323) \end{aligned}$$

باید برای هر ایزومتری ϕ در Isom_{GM} برقرار باشد. با بسط دادن معکوس در سمت چپ، با استفاده از اینکه $\sqrt{|\eta_p^{\tilde{A}}|} = \sqrt{|\eta_{\phi(p)}^A|} \cdot |\det g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)|$ و حذف پیمانه‌ها، که ممکن است زیرا آنها ایزومورفیسم هستند، ما به قید زیر می‌رسیم:

$$\frac{1}{|\det g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)|} \rho_{\phi} \left(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \right) \circ K \circ \left(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \right)^{-1} = K \quad \forall \phi \in \text{Isom}_{GM}, \quad (324)$$

که دقیقاً شبیه قید کرنل G -هدایت‌پذیر بر روی K از تعریف ۷.۳ است. به یاد بیاورید که تبدیلات پیمانه القا شده از ایزومتری $(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1}$ طبق قضیه ۸.۳ تضمین شده‌اند که اگر ϕ عنصری از Isom_{GM} باشد، با مقدار در G باشند. بنابراین قید در معادله (۳۲۴) همیشه با G -هدایت‌پذیری K برآورده می‌شود.

نتایج استخراج شده در مورد نامتغیر بودن میدان‌های کرنل کانولوشنی GM نسبت به \mathcal{K}_K به طور خلاصه با این گزاره خلاصه می‌شوند که نمودار زیر تضمین شده است که اگر K G -هدایت‌پذیر باشد و اگر $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ حافظ G -ساختار باشد، جابجا‌یابی‌پذیر است:

$$\begin{array}{c} \text{id} \times \left(\rho_{\phi} \left(g_{\phi}^{A\tilde{A}} \right) \circ K / \sqrt{|\eta^{\tilde{A}}|} \circ \left(g_{\phi}^{A\tilde{A}} \right)^{-1} \right) \\ \boxed{\begin{array}{ccccc} & U^A & & & \\ & \pi_{TM} \swarrow & \searrow \pi_{\phi} & & \\ U^A \times \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\Psi_{TM}^A} & \pi_{TM}^{-1}(U^A) & \xrightarrow{\phi_{*,TM} \mathcal{K}_K} & \pi_{\phi}^{-1}(U^A) \xrightarrow{\Psi_{\phi}^A} U^A \times \mathbb{R}^{c_{\phi} \times c_{\phi}} \\ \uparrow \phi \times g_{\phi}^{A\tilde{A}}. & \uparrow \phi_{*,TM} & & & \uparrow \phi_{*,\phi}, \quad \phi \times \rho_{\phi} \left(g_{\phi}^{A\tilde{A}} \right) \\ U^{\tilde{A}} \times \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\Psi_{TM}^{\tilde{A}}} & \pi_{TM}^{-1}(U^{\tilde{A}}) & \xrightarrow{\mathcal{K}_K} & \pi_{\phi}^{-1}(U^{\tilde{A}}) \xrightarrow{\Psi_{\phi}^{\tilde{A}}} U^{\tilde{A}} \times \mathbb{R}^{c_{\phi} \times c_{\phi}} \\ \uparrow \pi_{TM} & & \uparrow \pi_{\phi} & & \uparrow \\ & U^{\tilde{A}} & & & \end{array}} \quad (325) \\ \text{id} \times K / \sqrt{|\eta^{\tilde{A}}|} \end{array}$$

در اینجا ما پول‌بک G را از مختصاتی سازی پیش‌ران ایزومتری را از $U^A \rightarrow G$ به $U^{\tilde{A}} \rightarrow U^A$ به $g_{\phi}^{A\tilde{A}} \circ \phi^{-1} : U^A \rightarrow G$ برای راحتی نوشتاری تعریف کردیم.

همراه با قضیه ۸.۸، نامتغیر بودن میدان‌های کرنل کانولوشنی GM نسبت به Isom_{GM} هم‌متغیری کانولوشن‌های GM نسبت به Isom_{GM} را ایجاد می‌کند:

قضیه ۸.۹ (هم‌متغیری ایزومتری کانولوشن‌های GM). یک کانولوشن GM یعنی $\Gamma(\mathcal{A}_{\phi}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\phi\phi})$ باشد که $K \star$ با یک کرنل G -هدایت‌پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\phi}, \rho_{\phi\phi}}^G$ نسبت به تمام ایزومتری‌های حافظ G -ساختار $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ هم‌متغیر است، یعنی،

$$K \star (\phi \triangleright f) = \phi \triangleright (K \star f) \quad \forall f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\phi}), \quad \phi \in \text{Isom}_{GM}. \quad (326)$$

بنابراین نمودار زیر برای هر $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ جابجا می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathcal{A}_{\phi}) & \xrightarrow{K \star} & \Gamma(\mathcal{A}_{\phi\phi}) \\ \phi \triangleright \downarrow & & \downarrow \phi \triangleright \\ \Gamma(\mathcal{A}_{\phi}) & \xrightarrow{K \star} & \Gamma(\mathcal{A}_{\phi\phi}) \end{array} \quad (327)$$

اثبات: اثبات در بحث قبل از قضیه ارائه شد. \square

با استخراج این نتیجه کلی در مورد کانولوشن‌های GM . ما اکنون برخی موارد خاص را برای انتخاب‌های خاص از گروه‌های ساختار G مورد بحث قرار می‌دهیم. اولاً، برای گروه‌های ساختار متعدد $d = G$ (یا ابرگروه‌های آن)، کانولوشن با هر ایزومنتری جابجا می‌شود:

۸.۱۰ (هممتغیری کامل ایزومنتری کانولوشن‌های OM) کانولوشن‌های OM نسبت به عمل هر ایزومنتری $\phi \in \text{Isom}(M)$ بر روی میدان‌های ویژگی هم‌متغیر هستند. به طور کلی‌تر، هر کانولوشن GM برای G -ساختارها با گروه‌های ساختار $d \geq G$ کاملاً نسبت به ایزومنتری هم‌متغیر است.

اثبات: گزاره از قضیه (۸.۹) با مشاهده اینکه $\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M)$ برای گروه‌های ساختار $d \geq G$ تضمین شده است، به دست می‌آید.
 \square

این نتیجه اساساً به این واقعیت مตکی است که ایزومنتری‌ها به عنوان آن زیرگروهی از دیفیومورفیسم‌ها بر روی M تعریف می‌شوند که خودریختی‌های d -ساختار را القا می‌کنند. به بیان کمتر انتزاعی، $\text{Isom}(M)$ بنا به تعریف آن زیرگروهی از دیفیومورفیسم‌ها است که به متريک ريماني η از M احترام می‌گذارد و d -ساختار متناظر OM اطلاعاتی معادل با متريک است.

بر روی منيفلد‌های ريماني جهت‌پذير، می‌توان علاوه بر اين يك جهت (دست‌گردي قاب) را انتخاب کرد، که همراه با متريک يك $\text{SO}(d)$ -ساختار SOM را تعریف می‌کند. ایزومنتری‌های متناظر که به خودریختی‌های ساختار $\text{SO}(d)$ بالابر می‌شوند، ایزومنتری‌های حافظ جهت در $\text{Isom}_+(M)$ هستند.

قضیه ۸.۱۱ (هممتغیری $(M)_+$ کانولوشن‌های SOM) کانولوشن‌های SOM نسبت به عمل ایزومنتری‌های حافظ جهت $\in \phi$ $\text{Isom}_+(M)$ بر روی میدان‌های ویژگی هم‌متغیر هستند.

اثبات: این نتیجه از قضیه (۸.۹) با مشاهده اینکه $\text{Isom}_{SOM} = \text{Isom}_+(M)$ به دست می‌آيد.
 \square

به عنوان مثال، يك کانولوشن SOM برای $M = \mathbb{R}^n$ که متناظر با شکل (۲) است، نسبت به عمل گروه اقلیدسي ویژه $(\mathbb{R}^n, +)$ هم‌متغیر است. به طور مشابه، يك کانولوشن SOM برای $M = \mathbb{S}^n$ که متناظر با شکل (۳) است، نسبت به دوران با (۳) هم‌متغیر است.

توجه داشته باشید که نتایج قضایای ۸.۱۰ و ۸.۱۱ فقط به گروه ساختار G -ساختار بستگی ندارند. برای زیرگروه‌های d از G (یا $\text{SO}(d)$) مسائل پیچیده‌تر می‌شوند. در این موارد، زیرگروه‌های $\text{Isom}(M)$ از Isom_{GM} به نشاندن خاص G -ساختار GM در شکل $\{e\} = \{e\} - \{e\}$ در \mathbb{R}^n به تصویر کشیده شد. به طور خاص، شکل (۴) از Isom_{GM} از \mathbb{R}^n را نشان می‌دهد که کاملاً نسبت به انتقال هم‌متغیر است، یعنی $\text{Isom}_{\{e\}M} = \mathcal{T}_2 := (\mathbb{R}^n, +)$ در مقابل، شکل (۴) از $\text{Isom}_{\{e\}M} \cong \mathcal{T}_1 := (\mathbb{R}, +)$ را نشان می‌دهد که فقط در امتداد يك محور نسبت به انتقال هم‌متغیر است به طوری که $\text{Isom}_{\{e\}M}$ از ديدگاه شبکه‌های کانولوشنی اين نتیجه بسيار شهودی است: کرنل‌های $\{e\}$ -هدایت‌پذير در اين مثال‌ها بدون قيد هستند، یعنی کرنل‌های کانولوشن مرسم هستند. بنابراین آنها به طور کلي هیچ اطلاعاتی در مورد پاسخ‌های خود هنگام اعمال نسبت به قاب‌های مرجع تبدیل شده با پیمانه حمل نمی‌کنند. از آنجایی که قاب‌ها، و بنابراین کرنل‌ها، در شکل (۴) در جهت «چپ-راست» به طور متفاوتی چرخانده شده‌اند، پاسخ‌های کرنل هنگام انتقال يك سیگنال در آن جهت به طور غيرقابل پیش‌بینی تعییر می‌کنند. اگر کرنل‌های الگو، با اين حال، $(\mathbb{R}^n, +)$ -هدایت‌پذير بودند، می‌توانستند چرخش قاب‌ها را در نظر بگیرند. اين حالت متناظر با وضعیت در شکل (۴) است، یعنی يك کانولوشن SOM .

۳.۸ میدان‌های کرنل خارج قسمتی

قضیه ۸.۸ نشان داد که هم‌متغیری ایزومنتری يك تبدیل میدان کرنل، نیازمند نامتفیر بودن میدان کرنل متناظر است. از آنجایی که قيد نامتفیر بودن ایجاد می‌کند که کرنل‌ها بر روی مدارها به اشتراک گذاشته شوند، همانطور که در شکل (۴) به تصویر کشیده شده است، توصیف ریاضی جنبین میدان‌های کرنل نامتفیری زائد است: يك کرنل منفرد در يك نماینده مدار برای بازسازی میدان کرنل بر روی کل مدار کافی است. در بخش (۲.۳.۸) ما توصیف‌های معادل و کاهش‌یافته‌ای از میدان‌های کرنل نامتفیر را بر حسب کرنل‌ها بر روی نمایندگان مدار استخراج می‌کنیم. اين کرنل‌های نماینده خود توسط عمل زیرگروه پایدارساز نماینده مدار محدود می‌شوند. ما يك بالابر (منحصر به فرد) از کرنل‌های نماینده به میدان‌های کرنل نامتفیر پیشنهاد می‌کنیم که يك ایزومورفیسم بین هر دو توصیف برقرار می‌کند. اين ایزومورفیسم بالابر راهی برای پارامترسازی و ساخت تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزومنتری در يك پیاده‌سازی پیشنهاد می‌کند. قبل از استخراج اين نتایج در بخش (۲.۳.۸)، بخش بعدی (۲.۳.۸) چارچوب ریاضی را تنظیم می‌کند.

استخراج‌ها و نتایج این بخش از نظر روحی به نظریه CNN های هدایت‌پذیر در فضاهای همگن نزدیک است [؟]. با این حال، ما نتایج آنها را از فضاهای همگن به منيفلد‌های عمومی تعمیم می‌دهیم. هنگامی که به فضاهای همگن M پایین‌بند باشیم، ثابت می‌کنیم که تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزومنتری با کانولوشن‌های GM معادل هستند.

۱۳.۸ فضاهای خارج قسمتی القاشه از ایزومنتری

عمل يك گروه تقاضان بر روی يك فضا، آن را به مدارهای افزار می‌کند که به عنوان مجموعه‌های از تمام نقاطی که با عمل گروه به هم متصل هستند، تعریف می‌شوند. فضای چنین مدارهایی، فضای خارج قسمتی نسبت به این عمل گروهی است. در ادامه ما فضاهای خارج قسمتی ناشی از

اعمال یک گروه ایزومتری $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$ را هم بر روی منیفلد و هم بر روی کلافهای تاری مورد بحث قرار خواهیم داد. این تعاریف بعداً به ما اجازه می‌دهند تا با عمل ایزومتری‌ها بر روی کرnel‌ها، وزن‌ها را بر روی مدارها به اشتراک بگذاریم.

$$\begin{aligned} \text{خارج قسمت‌های منیفلد: } & \text{ هر نقطه } p \in M \text{ یک مدار را ترسیم می‌کند} \\ \mathcal{I}.p := \{ \phi(p) \mid \phi \in \mathcal{I} \} & \subseteq M, \end{aligned} \quad (۳۲۸)$$

که به عنوان مجموعه تمام نقاطی که با عمل بر روی p با هر ایزومتری در $\mathcal{I} \leq \text{Isom}(M)$ به دست می‌آیند، تعریف می‌شود. می‌توان به راحتی بررسی کرد که رابطه « p و q عناصری از یک مدار هستند» یک رابطه همارزی است (به پاورقی ۴۹ مراجعه کنید) و بنابراین منیفلد را همانطور که در شکل ۴۶ آ به تصویر کشیده شده است، افزایش می‌کند. فضای خارج قسمتی

$$\mathcal{I}\setminus M := \{\mathcal{I}.p \mid p \in M\} \quad (۳۲۹)$$

نسبت به این رابطه همارزی، فضای تمام مدارها است، یعنی هر عنصر از $\mathcal{I}\setminus M$ متناظر با یک مدار کامل در M است.^{۷۶} نگاشت خارج قسمتی متناظر

$$Q_M : M \rightarrow \mathcal{I}\setminus M, \quad p \mapsto \mathcal{I}.p \quad (۳۳۰)$$

یک نقطه $p \in M$ را با مدارش $\mathcal{I}.p \in \mathcal{I}\setminus M$ شناسایی می‌کند. برای هر مدار می‌توان یک نماینده مدار دلخواه را انتخاب کرد که به طور رسمی توسط یک مقطع تعیین می‌شود

$$r_M : \mathcal{I}\setminus M \rightarrow M \quad \text{به طوری که} \quad Q_M \circ r_M = \text{id}_{\mathcal{I}\setminus M}, \quad (۳۳۱)$$

که در آن شرط آخر تضمین می‌کند که نماینده $(\mathcal{I}.p)$ در واقع عنصری از مدار $\mathcal{I}.p$ است. اغلب به مقاطع پیوسته (یا هموار) علاقه‌مند هستیم، با این حال، اینها به طور کلی وجود ندارند. بنابراین ما در ادامه نمی‌خواهیم که نماینده‌گان مدار به طور پیوسته انتخاب شوند و در صورت لزوم این نقیصه را بعداً جبران خواهیم کرد. طبق معمول برای مقاطع، آنها به طور کلی فقط وارون راست نگاشت خارج قسمتی هستند اما وارون چپ نیستند، یعنی $r_M \circ Q_M \neq \text{id}_M$. این با یک نمودار جایجاوی

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{I}\setminus M & \xrightarrow{r_M} & M & \xrightarrow{Q_M} & \mathcal{I}\setminus M \\ & & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{id}_{\mathcal{I}\setminus M}} & \uparrow & \\ & & & & \end{array} \quad (۳۳۲)$$

مشابه با معادله (۱۴۷) و یک نمودار غیرجایجاوی

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{Q_M} & \mathcal{I}\setminus M & \xrightarrow{r_M} & M \\ & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{id}_M} & \swarrow & \uparrow & \\ & & & & \end{array} \quad (۳۳۳)$$

مشابه با معادله (۱۴۸) به تصویر کشیده می‌شود. تارهای منفرد Q_M از نگاشت خارج قسمتی $\text{preim}_{Q_M}(\mathcal{I}.p) = \mathcal{I}.p \subseteq M$ توسط خود

مدارها داده می‌شوند. توجه داشته باشید که $M \xrightarrow{Q_M} \mathcal{I}\setminus M$ به طور کلی یک کلاف تاری نیست زیرا مدارها لزوماً با یکدیگر همسان‌ریخت نیستند و بنابراین نمی‌توان آنها را به صورت محلی با یک تار نمونه‌ای مشترک F بدیهی‌سازی کرد، همانطور که در نمودار جایجاوی در معادله (۱۲۹) لازم است. بنابراین هر مدار نوع خاص خود را دارد که در ارتباط نزدیک با زیرگروه‌های پایدارساز نقاط روی آن مدار خاص است. زیرگروه پایدارساز

$$\text{Stab}_p := \{\xi \in \mathcal{I} \mid \xi(p) = p\} \leq \mathcal{I} \quad (۳۳۴)$$

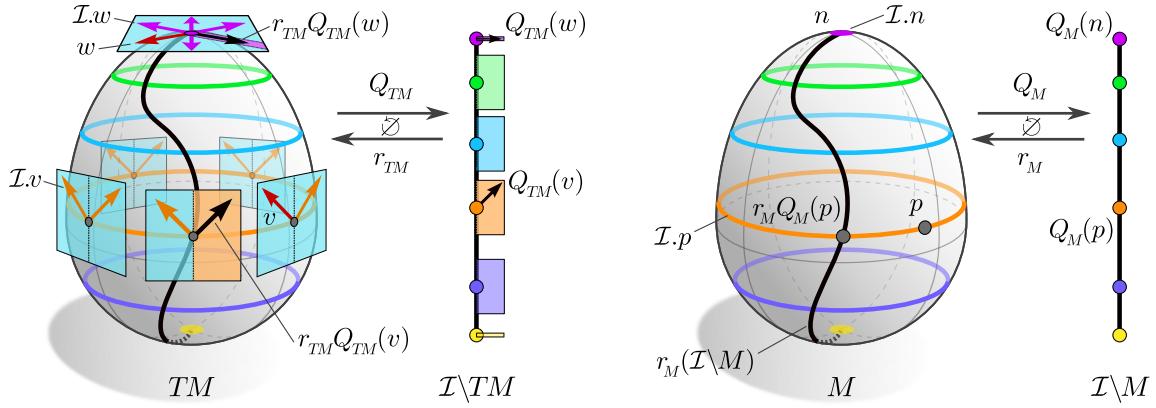
یک نقطه $p \in M$ به عنوان آن زیرگروهی از گروه ایزومتری که p را ثابت نگه می‌دارد، تعریف می‌شود. بر حسب زیرگروه پایدارساز، برقرار است که مدار یک نقطه با

$$\mathcal{I}.p \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_p. \quad (۳۳۵)$$

شناسایی می‌شود. برای دیدن این ادعا، فرض کنید $f_p : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}.p$ ، $\phi \mapsto \phi(p)$ برای یک $p \in M$ و مشاهده کنید که $f_p(\phi \circ \xi) = f_p(\phi) = \phi(p) = f_p(\phi \circ \xi(p)) = \phi(p)$ به راحتی می‌توان نشان داد که در واقع $\text{Stab}_p(\phi(p)) = \text{Stab}_p(\phi \circ \xi(p))$ می‌شود. هم‌دسته از زیرگروه پایدارساز p است و بنابراین f_p ایزومورفیسم ادعا شده $\mathcal{I}.p \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_p$ را برقرار می‌کند.

برای شهودی تر کردن این ساختارها، مثال در شکل ۴۶ را در نظر بگیرید. مدارهای $\mathcal{I}.s = \{s\}$ و $\mathcal{I}.n = \{n\}$ در نظر بگیرید. مدارهای $\mathcal{I}.s \cong \mathcal{I}.n \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_n = \mathcal{I}/\mathcal{I}/\text{Stab}_n = \mathcal{I}/\text{Stab}_n$ فقط نقاطی هستند که توسط \mathcal{I} ثابت می‌شوند. این با، به عنوان مثال، $\{n\}$ موافق است زیرا $\text{Stab}_n = \mathcal{I}$ است. مدارهای $\mathcal{I}.n \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_n = \mathcal{I}/\mathcal{I}/\text{Stab}_n = \mathcal{I}/\text{Stab}_n$ با گروه کامل ایزومتری منطبق است. برای هر نقطه دیگر $\mathcal{I}.p$ ، $p \in M$ ، مدارهای $\mathcal{I}.p \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_p$ دایره هستند. ما بازتاب نسبت به \mathcal{I} را به عنوان زیرگروه پایدارساز داریم و بنابراین در واقع دایره $\mathcal{I}/\text{Stab}_p \cong S^1/\mathcal{R} \cong S^1$ را به عنوان نوع مدار به دست می‌آوریم. نگاشت خارج قسمتی $Q_M : M \rightarrow \mathcal{I}\setminus M$ را به مدارهایشان $\mathcal{I}.q = \mathcal{I}.Q_M(q)$ داده است، در فضای خارج قسمتی $\mathcal{I}\setminus M$ را به عنوان نوع مدار به دست نشان داده شده است، می‌فرستد. از آنجایی که مدارها را می‌توان از قطب شمال تا قطب جنوب پیمود، فضای خارج قسمتی $\mathcal{I}\setminus M$ توبولوژی یک پاره خط را دارد. مقطع $r_M : \mathcal{I}\setminus M \rightarrow M$ یک نقطه نماینده $r_M(o) \in M$ را برای هر مدار $o \in \mathcal{I}\setminus M$ انتخاب می‌کند. به طور کلی، این نماینده مدار یک نقطه تصویر شده را بازیابی نمی‌کند. به عنوان مثال، داریم $r_M Q_M(p) \neq p$. می‌توان مقطع را به عنوان نشاندن فضای خارج قسمتی در منیفلد، که به صورت خط سیاه $r_M(\mathcal{I}\setminus M)$ از قطب شمال تا قطب جنوب نشان داده شده است، تفسیر کرد.

^{۷۶} ما $\mathcal{I}\setminus M$ را به عنوان یک خارج قسمت چپ می‌نویسیم زیرا از چپ بر روی M عمل می‌کند.

(ب) نگاشت خارج-قسمتی و نمایندگان مدار برای TM (آ) نگاشت خارج-قسمتی و نمایندگان مدار برای M

شکل ۳.۴۶: نگاشتهای خارج-قسمتی Q_{TM} و Q_M و نمایندگان مدار (مقاطع) r_M و r_{TM} برای اعمال گروه ایزوومتری $\mathcal{I} = \mathbb{Z}_2$ بر روی منیفلد M در شکل ۳.۴۶ و بر روی کلاف مماس TM در شکل ۳.۴۶-ب. توصیف دقیقی از هر دو تصویر در متن اصلی آورده شده است.

خارج-قسمتی کلاف: از آنجایی که گروه ایزوومتری نه تنها بر روی کلافهای الحاقی نیز عمل می‌کند، این کلافها به روش مشابه مدارهای افزار می‌شوند. برای کلی نگه داشتن بحث، ما در ادامه یک کلاف الحاقی عمومی $E \xrightarrow{\pi_E} M$ در نظر می‌گیریم که می‌تواند نماینده \mathcal{A}, GM, FM, TM باشد. ما عناصر فضای کل را با $e \in E$ نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم $\phi_{*,E}$ پیش‌ران ϕ بر روی E باشد همانطور که در بخش ۳.۱.۸ معرفی شد. مدار یک عنصر از کلاف سپس به قیاس با معادله (۳.۲۸) به صورت زیر داده می‌شود:

$$\mathcal{I}.e = \{\phi_{*,E}(e) \mid \phi \in \mathcal{I}\} \quad (3.36)$$

در حالی که فضای خارج-قسمتی، که از مدارهای کلاف تشکیل شده است، به طور مشابه با معادله (۳.۲۹) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{I}\setminus E = \{\mathcal{I}.e \mid e \in E\}. \quad (3.37)$$

مشابه قبل، نگاشت خارج-قسمتی (کانونی) عناصر کلاف را به مدارشان می‌فرستد:

$$Q_E : E \mapsto \mathcal{I}\setminus E, \quad e \mapsto \mathcal{I}.e \quad (3.38)$$

ما یک نگاشت تصویر (منحصر به فرد) را تعریف می‌کنیم

$$\pi_{\mathcal{I}\setminus E} : \mathcal{I}\setminus E \rightarrow \mathcal{I}\setminus M, \quad Q_E(e) \mapsto Q_M \circ \pi_E(e) \quad (3.39)$$

بین خارج-قسمتی کلاف و خارج-قسمت منیفلد همانطور که در نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}\setminus E & \xleftarrow{Q_E} & E \\ \pi_{\mathcal{I}\setminus E} \downarrow & & \downarrow \pi_E \\ \mathcal{I}\setminus M & \xleftarrow{Q_M} & M \end{array} \quad (3.40)$$

توجه داشته باشید که تعریف در معادله (۳.۳۹) به انتخاب خاص نماینده مدار بستگی ندارد زیرا برای هر $\phi_{*,E}(e) \in Q_E(e)$ دیگر نتیجه یکسانی به دست می‌آوریم: $Q_M \circ \pi_E \circ \phi_{*,E}(e) = Q_M \circ \phi \circ \pi_E(e) = Q_M \circ \pi_E(e)$. توسعه رسمی توسط یک انتخاب از مقطع تعیین می‌شوند

$$r_E : \mathcal{I}\setminus E \rightarrow E \quad \text{به طوری که} \quad Q_E \circ r_E = \text{id}_{\mathcal{I}\setminus E}, \quad (3.41)$$

که ما دوباره نمی‌خواهیم پیوسته باشد. با این حال، برای راحتی، ما می‌خواهیم که نماینده مدارهای کلاف بالای نماینده مدار $r_M(\mathcal{I}\setminus M)$ در فضای پایه قرار گیرند، یعنی برآورده کنند:

$$\pi_E \circ r_E = r_M \circ \pi_{\mathcal{I}\setminus E} \quad (3.42)$$

همانطور که در نمودار جاچایی زیر نشان داده شده است:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} \setminus E & \xrightarrow{r_E} & E \\ \pi_{\mathcal{I} \setminus E} \downarrow & & \downarrow \pi_E \\ \mathcal{I} \setminus M & \xrightarrow{r_M} & M \end{array} \quad (343)$$

زیرگروه پایدارساز یک عنصر کلاف $e \in E$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Stab}_e := \{\xi \in \mathcal{I} \mid \xi_{*,E} e = e\} \leq \text{Stab}_{\pi_E(e)} \leq \mathcal{I}. \quad (344)$$

این لزوماً یک زیرگروه از زیرگروه پایدارساز $\text{Stab}_{\pi_E(e)}$ در فضای پایه است، که به راحتی با $\xi_{*,E} e = e \Rightarrow \xi_{*,E} \in \text{Stab}_e$ و $\pi_E(\xi_{*,E} e) = \xi \pi_E(e) = \pi_E(e) \Leftrightarrow \xi \in \text{Stab}_{\pi_E(e)}$ برقرار است.

ما مثال خود را از شکل ۴۶ با در نظر گرفتن عمل ۲ $\mathcal{I} \cong \mathcal{I} \cdot p$ گسترش می‌دهیم. مدار $\mathcal{I} \cdot w \cong \mathcal{I} / \text{Stab}_w \cong S^1$ (بنفس) یک بردار غیرصفر $w \in T_n M$ یک دایره را در $T_n M$ (قزم) در قطب شمال n می‌توصیف می‌کند. این با $\mathcal{I} \cdot v \cong \mathcal{I} / \text{Stab}_v \cong S^1$ سازگار است زیرا چنین برداری با بازتابهای $\mathcal{I} \cdot v$ در امتداد محور خود پایدار می‌شود. مدار $p \in M$ منفرد در TM است که توسط هر ایزومنتری پایدار می‌شود. هر بردار دیگر $v \in T_p M$ (قزم)، که در یک فضای مماس در نقطه‌ای $p \in M$ متفاوت از قطبها زندگی می‌کند، با عمل گروه ایزومنتری به فضاهای مماس دیگر $T_{\phi(p)} M$ بر روی مدار $\mathcal{I} \cdot p$ چرخانده و بازتاب می‌شود. مدار $\mathcal{I} \cdot v$ (نارنجی) از هر چنین برداری، اگر دقیقاً به سمت شمال یا جنوب اشاره نکند، با یک کمی از بردار به سمت شرق و یک کمی به سمت غرب در هر یک از فضاهای مماس روی $\mathcal{I} \cdot p$ داده می‌شود. ما برای چنین بردارهای $\{e\}$ $\text{Stab}_v = \mathcal{I} \cdot v \cong \mathcal{I} / \text{Stab}_v \cong S^1$ با ۲ (یا دو دایره) همسان‌ریخت است. بردارهای $v' \in T_p M$ که دقیقاً به سمت شمال یا جنوب اشاره می‌کنند با بازتابها روی محوری که تعریف می‌کنند پایدار می‌شوند، یعنی $\mathcal{I} \cdot v' \cong \mathcal{I} / \text{Stab}_{v'} \cong S^1$. مدار آنها با یک دایره $\mathcal{I} \cdot v' \cong \mathcal{I} / \text{Stab}_{v'} \cong S^1$ همسان‌ریخت است.

نگاشت خارج‌قسمتی $Q_{TM} : TM \rightarrow \mathcal{I} \setminus TM$ کلاف مماس را به خارج‌قسمت کلاف $\mathcal{I} \setminus TM$ که در نیمه راست شکل ۴۶ نشان داده شده است، تصویر می‌کند. برای درک ساختار آن، ما تمام موارد کیفی متفاوت را در نظر می‌گیریم: اولاً، توجه داشته باشید که بردارها در قطبها متناظر با دایره‌هایی با شعاع معین هستند، به طوری که مجموعه چنین مدارهایی یک خط $\pi_{\mathcal{I} \setminus E}^{-1}(\mathcal{I} \cdot n) \cong \mathbb{R}^+$ (پرتو) صورتی زیر فلش سیاه) را تشکیل می‌دهد. به طور مشابه، مدارهای بردارها در هر نقطه دیگر $p \in M$ تمام فضاهای مماس $T_{\phi(p)} M$ را روی $\mathcal{I} \cdot p$ در دو بازتاب قطع می‌کنند و بنابراین یک نیم‌صفحه $\mathcal{I} \cdot p \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ ($\mathcal{I} \cdot p$) را تشکیل می‌دهند. مقطع $r_{TM} : \mathcal{I} \setminus TM \rightarrow TM$ هر عنصر خارج‌قسمت کلاف را به یک نمایندگان $\mathcal{I} \setminus M$ (قزم) می‌فرستد. طبق الزام در معادله (۳۴۲)، این نمایندگان $\mathcal{I} \setminus M$ از خارج‌قسمت منیفلد، که به صورت خط سیاه نشان داده شده است، قرار گیرند. به عنوان مثال، $v \in T_p M$ (قزم) با نگاشت خارج‌قسمتی به $r_{TM} Q_{TM}(v) \in \mathcal{I} \setminus TM$ (سیاه) فرستاده می‌شود. مقطع (v) را با $Q_{TM}(v)$ نمایش می‌دهد، که عنصری از M است و به طور کلی با v متفاوت است.

۲.۳.۸ میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی و قیود پایدارساز

برای توجیه ساخت میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی و قیود پایدارساز، فرمول‌بندی صریح‌تر

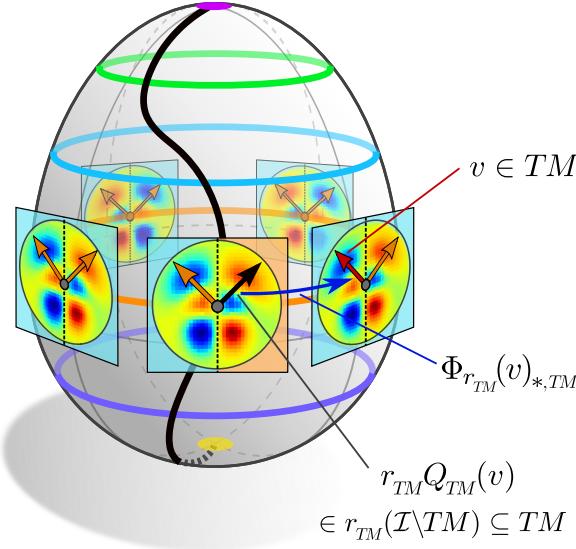
$$\phi_{*,\mathbb{R}} \circ K_p \circ \phi_{*,TM}^{-1} = K_{\phi(p)} \quad \forall p \in M, \phi \in \mathcal{I}. \quad (345)$$

از قید نامتفاوت بودن ایزومنتری از تعريف ۸.۷ را در نظر بگیرید، که با نوشتن معادله (۳۱۵) برای هر نقطه $p \in M$ به طور جداگانه به دست می‌آید. این فرمول‌بندی تأکید می‌کند که قید منجر به اشتراک‌گذاری وزن در امتداد مدارهای منیفلد $\mathcal{I} \cdot p \in \mathcal{I} \setminus M$ می‌شود همانطور که در شکل‌های ۴۵ و ۴۷ به تصویر کشیده شده است. این ایجاد می‌کند که کرنل K_r در یک نقطه نماینده دلخواه $r = r_M(o)$ از هر مدار $o = \mathcal{I} \cdot r \in \mathcal{I} \setminus M$ به طور کامل میدان کرنل را در بقیه مدار، یعنی در تمام نقاط $\phi(r)$ که $\phi \in \mathcal{I}$ است، مشخص می‌کند. کرنل K_r در نقطه نماینده r خود توسط زیرگروه پایدارساز $\mathcal{I} \setminus M$ محدود می‌شود:

$$\xi_{*,\mathbb{R}} \circ K_r \circ \xi_{*,TM}^{-1} = K_r \quad \forall \xi \in \text{Stab}_r. \quad (346)$$

این ایجاد می‌کند که هر میدان کرنل نامتفاوت نسبت به ایزومنتری را می‌توان بر حسب یک میدان از کرنل‌ها بر روی نمایندگان مدار منیفلد $\mathcal{I} \setminus M$ که معادله (۳۴۶) را برآورده می‌کند، پارامترسازی کرد.

در صورتی که زیرگروه پایدارساز در $\mathcal{I} \setminus M$ غیربدیهی باشد، قید پایدارساز در معادله (۳۴۶) تقارن‌های بیشتری را برای خود کرنل K_r در r ایجاد می‌کند. به عنوان مثال، در مثال شکل ۴۷ زیرگروه پایدارساز $\mathcal{I} \cdot Stab_r \cong \mathcal{R}$ بر روی مدار برجسته شده وجود دارد که تقارن بازتابی کرنل‌ها را اعمال می‌کند. چنین تقارن‌های امکان فشرده‌سازی بیشتر توصیف میدان‌های کرنل نامتفاوت نسبت به ایزومنتری را فراهم می‌کند: مشخص می‌شود که دانستن مقادیر $\mathcal{K}(w)$ میدان کرنل فقط بر روی نمایندگان خارج‌قسمتی کلاف مماس $TM \subseteq \mathcal{I} \setminus TM$ کافی است.



شکل ۴۷: نمایش تصویری یک میدان کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری، تعریف ۸.۷، و بازسازی کامل آن فقط از کرنل‌ها بر روی نمایندگان خارج‌قسمتی. برخلاف شکل ۴۵، ما در اینجا یک گروه ایزومتری $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathcal{I}\backslash TM)$ را به جای $SO(2)$ فرض می‌کیم. بنابراین کرنل‌های به تصویر کشیده شده دارای تقارن بازتابی هستند که توسط زیرگروه‌های پایدارساز $\text{Stab}_p \cong \mathcal{R}$ از نقاط روی مدار v ($\mathcal{I}\pi_{TM}(v)$) اعمال می‌شود. به دلیل تقارنش، میدان کرنل کامل آن به نماینده خارج‌قسمتی کلاف محدودیت آن به قصیه ۸.۱۲ مراجعه کنید. به عنوان مثال، کرنل‌های نشان داده شده به طور کامل توسط کرنل جزئی روی نیمفضای نارنجی تعیین می‌شوند. بازسازی در $v \in TM$ با ارزیابی کرنل نماینده خارج‌قسمتی در $r_{TM}Q_{TM}(v) \in r_{TM}(\mathcal{I}\backslash TM)$ و پیش‌ران کردن از طریق $\Phi_{r_{TM}}(v) \in \mathcal{I}$ ، که در معادله (۳۴۷) تعریف شده است، به v انتقام می‌شود. ما ای خواهیم ذکر کنیم که کرنل‌های پادمتران به تصویر کشیده شده هنگام نگاشت بین میدان‌های ویزگی با پاریته زوج و فرد حاصل می‌شوند، در حالی که کرنل‌ها بین میدان‌های ویزگی با پاریته یکسان متران خواهند بود.

در شکل ۴۷ این متناظر با دانستن مقادیر کرنل بر روی نیمفضای برجسته شده با رنگ نارنجی است، که از آن می‌توان میدان کامل بر روی مدار را با تقارن‌های بازتابی و دورانی در $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathcal{I}\backslash TM)$ بازسازی کرد.

قصیه ۸.۱۲ در زیر ادعای اخیر را دقیق می‌کند ابتداء اینکه فضای $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}$ از میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری با یک فضای $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}(\mathcal{I}\backslash TM)$ از میدان‌های کرنل بر روی نمایندگان مدار کلاف مماس $r_{TM}(\mathcal{I}\backslash TM)$ ایزومورف است. با قیود حداقل کاهش بافتہ مشخص می‌شود و بنابراین میدان‌های کرنل را در $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}(\mathcal{I}\backslash TM)$ به روش غیرزاوند کدگذاری می‌کند. در قصیه ۸.۱۳ ما یک فضای ایزومورف سوم $\widehat{\mathcal{R}}^{\mathcal{I}}$ را فرمول‌بندی می‌کنیم که به طور معادل میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری را بر حسب کرنل‌های \mathcal{K}_r با قید زیرگروه پایدارساز از معادله (۳۴۶) توصیف می‌کند. در حالی که فرمول‌بندی میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری بر حسب $\widehat{\mathcal{R}}^{\mathcal{I}}$ شامل قیود قوی‌تری نسبت به فرمول‌بندی بر حسب $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}(\mathcal{I}\backslash TM)$ است، ممکن است برای پیاده‌سازی‌ها راحت‌تر باشد، زیرا کرنل‌ها را بر روی فضاهای مماس کامل به جای کرنل‌ها بر روی خارج‌قسمت‌های فضاهای مماس توصیف می‌کند.

ایزومتری‌های بازسازی: برای بازسازی میدان‌های کرنل نامتغیر کامل در $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}(\mathcal{I}\backslash TM)$ از کرنل‌های منفرد بر روی نمایندگان مدار، کرنل‌های نماینده باید با اعمال پیش‌ران کرنل در معادله (۳۴۵) با $p = r$ ثابت برای نقاط نماینده انتخاب شده، بر روی کل منیفلد توزیع شوند. برای بازسازی کرنل در یک نقطه $q \in M$ ، این به یک ایزومتری ϕ نیاز دارد که نماینده مدار $r_M Q_M(q) \in r_M(\mathcal{I}\backslash M) \subseteq M$ باشد، $r_M Q_M(q) \in r_M(\mathcal{I}\backslash M)$ با $q \in M$ بازگرداند، یعنی $\phi(r_M Q_M(q)) = q$ را برآورده کند. برای دقیق‌تر کردن این، به یاد بیاورید که میدان‌های کرنل $\mathcal{K} : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\mathbb{M}}, \mathcal{A}_{\mathbb{M}})$ به عنوان نگاشت‌هایی با دامنه TM تعریف می‌شوند، که علاوه بر موقعیت‌شان، ترازهای کرنل را نیز کدگذاری می‌کنند. بنابراین ما باید ایزومتری‌های خاص‌تری را در نظر بگیریم که نمایندگان مدار کلاف مماس $r_{TM}Q_{TM}(v) \in r_{TM}(\mathcal{I}\backslash TM) \subseteq TM$ را بردارها $v \in TM$ بازگردانند. این ایزومتری‌های بازسازی به صورت زیر تعریف می‌شوند:^{۷۷}

$$\Phi_{r_{TM}} : TM \rightarrow \mathcal{I} \quad \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = v \quad \forall v \in TM \quad (347)$$

ما توصیه می‌کنیم برای به دست آوردن شهردی از ایزومتری‌های بازسازی به شکل ۴۷ مراجعه کنید: از نظر گرافیکی، $\Phi_{r_{TM}}(v)$ به عنوان هر ایزومتری تعریف می‌شود که بردار سیاه $r_{TM}Q_{TM}(v)$ را روی مدار نارنجی \mathcal{I} به بردار قرمز v روی همان مدار بازمی‌گرداند. توجه داشته باشید که $\Phi_{r_{TM}}(v)$ تنها تا زیرگروه‌های پایدارساز نمایندگان مدار منحصر به فرد است زیرا برای هر $\xi \in \text{Stab}_{r_{TM}Q_{TM}(v)}$ نتیجه می‌شود که $\Phi_{r_{TM}}(v)\xi = \xi$. نشان نیز قید تعریف‌کننده در معادله (۳۴۷) را برآورده می‌کند: $\Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = v$.^{۷۸} نشان داده می‌شود که تمام ساختارهای بعدی از این ابهام مستقل هستند. عمل ایزومتری‌های بازسازی بر روی فضای پایه M با اعمال تصویر کلاف

۷۷ از آنجایی که مقاطع r_{TM} به طور کلی پیوسته نیستند، $\Phi_{r_{TM}}$ نیز به طور کلی نمی‌تواند پیوسته خواسته شود.

۷۸ علاوه بر این، قید تعریف‌کننده بر روی $\Phi_{r_{TM}}(v)$ هنگام ضرب چپ ζ با $\Phi_{r_{TM}}(v)$ با $\zeta \in \text{Stab}_v$ می‌شود. این، با این حال، هیچ درجه آزادی جدیدی $\tilde{\zeta} \in \text{Stab}_{r_{TM}Q_{TM}(v)}$ با ζ با $\Phi_{r_{TM}}(v) = \Phi_{r_{TM}}(v)[\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1}\zeta\Phi_{r_{TM}}(v)] =: \Phi_{r_{TM}}(v)\tilde{\zeta}$ و $\text{Stab}_v \cong \text{Stab}_{r_{TM}Q_{TM}(v)}$ اضافه نمی‌کند زیرا $\Phi_{r_{TM}}(v)$ به طور کلی پیوسته نیست.

مماس بر هر دو طرف قید تعریف کننده در معادله (۳۴۷) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 \pi_{TM}(v) &= \pi_{TM} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) && (\text{تعريف } \Phi_{r_{TM}} \text{، معادله } (347)) \\
 &= \Phi_{r_{TM}}(v) \pi_{TM} r_{TM} Q_{TM}(v) && (\text{پیش‌ران یک نگاشت کلاف است، معادله } (264)) \\
 &= \Phi_{r_{TM}}(v) r_M \pi_{\mathcal{I}\setminus TM} Q_{TM}(v) && (\text{تعريف مقاطع کلاف، معادله } (342)) \\
 &= \Phi_{r_{TM}}(v) r_M Q_M \pi_{TM}(v) && (\text{تعريف } \pi_{\mathcal{I}\setminus E} \text{، معادله } (340))
 \end{aligned} \tag{348}$$

یک خلاصه بصری از ویژگی‌های $\Phi_{r_{TM}}$ یعنی اعمال آن بر روی M و TM در نمودار جابجایی زیر آورده شده است:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_{TM} & & \\
 & \Phi_{r_{TM}} \times r_{TM} \circ Q_{TM} & \rightarrow & \text{ev} & \\
 TM & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{I} \times r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) & \longrightarrow & TM \\
 \pi_{TM} \downarrow & & \text{id}_{\mathcal{I}} \times \pi_{TM} \downarrow & & \downarrow \pi_{TM} \\
 M & & \mathcal{I} \times r_M(\mathcal{I} \setminus M) & \xrightarrow{\text{ev}} & M \\
 & & \text{id}_M & &
 \end{array} \tag{349}$$

که در آن نگاشتهای ارزیابی ev با استفاده بیش از حد از نمادگذاری، به ترتیب با $\text{ev} : \mathcal{I} \times M \rightarrow M$ ، $(\phi, p) \mapsto \phi(p)$ و $\text{ev} : \mathcal{I} \times TM \rightarrow TM$ ، $(\phi, v) \mapsto \phi_{*,TM}(v)$ داده می‌شوند.

میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی: همانطور که در بالا استدلال شد، تقارن‌های موجود در یک میدان ویژگی نامتغیر نسبت به ایزومتری $\mathcal{K} \in \mathcal{K}_{\square\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ باید امکان بازسازی کامل آن را از محدودیتش ($r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) \rightarrow r_{\text{Hom}}(\mathcal{I} \setminus \text{Hom})$) به نماینده‌گان مدار کلاف مماس $r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) \subseteq TM$ فراهم کنند.^{۷۹} برای ساخت یک بالابر (منحصر به فرد) Λ که $\mathcal{K} = \Lambda(\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)})$ بازیابی می‌کند، ما بردارهای مماس v را در دامنه \mathcal{K} از طریق ایزومتری بازسازی $\Phi_{r_{TM}}(\mathcal{I} \setminus TM)$ از معادله (۳۴۷) بسط می‌دهیم و از نامتغیر بودن (هم‌متغیر بودن) میدان کرنل در معادله (۳۱۵) استفاده می‌کنیم. این منجر به موارد زیر می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}(v) &= \mathcal{K} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) \\
 &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{K} r_{TM} Q_{TM}(v) \\
 &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} r_{TM} Q_{TM}(v) \\
 &=: [\Lambda(\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)})](v)
 \end{aligned} \tag{350}$$

توجه داشته باشید که این ساختار با وجود ابهام $\Phi_{r_{TM}}(v)$ نسبت به ضرب راست با عناصر در (۳۴۷) خوش‌تعریف است. این به راحتی با مشاهده اینکه برای هر $w \in TM$ و هر $\xi \in \text{Stab}_w$ $\mathcal{K}(w) = \mathcal{K}(\xi_{*,TM} w) = \mathcal{K}(w)$ که ایجاب می‌کند $\text{Stab}_{\mathcal{K}(w)} \geq \text{Stab}_w$ و $\text{Stab}_{\mathcal{K}(w)}$ نتیجه نهایی به انتخاب خاص $\Phi_{r_{TM}}$ مبهم بستگی ندارد، دیده می‌شود.

از آنجایی که بالابر Λ میدان‌های کرنل نامتغیر را از محدودیت آنها به نماینده‌گان مدار کلاف مماس بازیابی می‌کند، می‌توان آن را به عنوان نگاشت مکوнос محدودیت (از میدان‌های کرنل نامتغیر) در نظر گرفت. این دیدگاه ایجاب می‌کند که بالابر یک ایزومورفیسم $\Lambda : \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\square\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ که هنوز باید آن را مشخص کنیم و بقرار می‌کند:

$$\begin{array}{ccc}
 & \Lambda & \\
 \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{K}_{\square\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} \\
 \Lambda^{-1} = (\cdot)|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} & &
 \end{array} \tag{351}$$

برای مشخص کردن فضای $\mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ که Λ را به یک ایزومورفیسم تبدیل می‌کند، کافی است ویژگی‌های میدان‌های محدود شده $= \mathcal{Q}$ باشد که $\mathcal{K} \in \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ را برای $\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} \in \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ فهرست کنیم:

^{۷۹} در ادامه ممکن است $\mathcal{I} \setminus \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square})$ و $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square})$ به اختصار بنویسیم.

- اول از همه، از آنجایی که Λ^{-1} با محدودیت دامنه به $r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$ داده می‌شود، واضح است که هر $\mathcal{Q} \in \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ باید به شکل $\mathcal{Q} : r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM) \rightarrow r_{\text{Hom}}(\mathcal{I}\setminus \text{Hom})$ باشد.
- دوم، ویژگی میدان‌های کرnel برای اینکه M -مورفیسم‌های کلاف باشند، تحت محدودیت Λ^{-1} به این الزام برای \mathcal{Q} ترجمه می‌شود که $\mathcal{Q}(w) = \pi_{TM}(w) \circ \mathcal{Q} \circ \pi_{\text{Hom}}(w)$ برآورده کند.
- سوم، باید قید پایدارساز (پایداری) $\mathcal{Q}(w) = \mathcal{Q}(w)$ را برای هر بردار نماینده $w \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$ و هر $\xi \in \text{Stab}_w$ کنند. این الزام باقیمانده‌ای از قید نامتغیر بودن در معادله (۳۱۵) است که پس از محدودیت باقی می‌ماند. این را می‌توان با در نظر گرفتن قید کامل $\mathcal{Q}(\phi_{*,TM}^{-1}(w)) = \mathcal{Q}(w)$ و هر $w \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$ که $\phi \in \mathcal{I}$ که علاوه بر این برآورده می‌کند $(\phi_{*,TM}(w)) \circ \mathcal{Q} \circ \phi_{*,TM}^{-1}(w) = \mathcal{Q}(w)$ در دامنه محدود شده \mathcal{Q} باقی می‌ماند، استنتاج کرد. توجه داشته باشید که $\mathcal{Q}(\phi_{*,TM}(w)) = \mathcal{Q}(\phi_{*,TM}(r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)))$ هر مدار را دقیقاً یک بار قطع می‌کند. این ایجاب می‌کند که $\mathcal{Q}(\phi_{*,TM}(w)) = w$ باشد. $\mathcal{Q}(\phi_{*,TM}(w)) = w$ بطوری که $\mathcal{Q}(\phi_{*,TM}(w)) = w$ باشد، یعنی $\phi \in \text{Stab}_w$. قید پایدارساز (پایداری) ادعا شده از این ملاحظات نتیجه می‌شود.
- برای شهود به شکل ۴۷ بازمی‌گردیم که در آن بردار نماینده سیاه $v = r_{TM} Q_{TM}(v)$ و فقط با ایزومتری بدینهی $e = \xi$ پایدار می‌شود، که ایجاب می‌کند مقدار متناظر \mathcal{Q} بدون قید باشد. بردارهای $w' \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$ که دقیقاً به سمت شمال یا جنوب اشاره می‌کنند، یعنی روی محور بازتابی خط‌چین قرار دارند، با بازتاب‌ها در $\mathcal{R} \cong \text{Stab}_w$ پایدار می‌شوند، که قیدی را بر روی مقدار کرnel متناظر ایجاب می‌کند.^{۱۰}
- به عنوان آخرین الزام، باید به یک میدان کرnel هموار بالابر شود، یعنی $\mathcal{Q}(\Lambda) = \Lambda(\mathcal{Q})$ با طور خودکار از همواری (پیوستگی) \mathcal{Q} نتیجه نمی‌شود زیرا Λ بر حسب r_{TM} و $\Phi_{r_{TM}}$ تعریف می‌شود، که به طور کلی نمی‌توان آنها را هموار (پیوسته) خواست.

قبل از خلاصه کردن و اثبات دقیق این ادعاهای در قضیه ۸.۱۲ در زیر، ما یک نمای کلی بصیری از رابطه بین $\mathcal{K} = \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)}$ و $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)} \in \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ را در قالب نمودارهای جابجایی ارائه می‌دهیم:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K} = \Lambda(\mathcal{Q}) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ TM \xrightarrow[\Phi_{r_{TM}} \times \mathcal{Q} \circ r_{TM} \circ Q_{TM}]{} \mathcal{I} \times r_{\text{Hom}}(\mathcal{I}\setminus \text{Hom}) & \xrightarrow{\text{ev}} & \text{Hom} \end{array} \quad (352)$$

۹

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{K} = \Lambda(\mathcal{Q}) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ TM & & r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM) & & \text{Hom} \\ & \searrow r_{TM} \circ Q_{TM} & \xrightarrow{\mathcal{Q}} & \swarrow r_{\text{Hom}} \circ Q_{\text{Hom}} & \\ & & r_{\text{Hom}}(\mathcal{I}\setminus \text{Hom}) & & \\ & \swarrow \pi_{TM} & & \searrow \pi_{\text{Hom}} & \\ & r_M(\mathcal{I}\setminus M) & & & \\ & \uparrow r_M \circ Q_M & & & \\ & M & & & \end{array} \quad (353)$$

در نمودار آخر، جابجایی‌بذری مریع بالایی با جایگذاری تعريف بالایر به دست می‌آید، که نتیجه می‌دهد $r_{\text{Hom}} Q_{\text{Hom}} \Lambda(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM} = \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM} \circ \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM} = \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}$.

^{۱۰} قید دقیق به عمل $\mathcal{Q}(\cdot)$ بر روی $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{Hom}}, \mathcal{A}_{\text{Hom}})$ بستگی دارد، که به ρ_{Hom} و بنابراین به $\rho_{\text{Hom}} \circ \mathcal{Q} \circ r_{TM} Q_{TM}$ بستگی دارد. کرnel به تصویر کشیده شده در شکل (۴۷) متناظر با \mathcal{Q} به عنوان نمایش بازتاب-علامت (باریته فرد) گروه بازتابی خواهد بود، که کرnel‌های پادمتقارن را اعمال می‌کند. پادمتقارن بودن مستلزم آن است که $\mathcal{Q}(w') = -\mathcal{Q}(w)$ برای w' روی محور بازتابی محدود شود؛ مقایسه کنید با جدول ۳

قضیه ۸.۱۲ (میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی مماس). فضای میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری $\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ از تعريف ۸.۷ با فضای $\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ از میدان‌های کرنل با قید زیرگروه پایدارساز (برداری) بر روی نماینده‌گان خارج‌قسمتی کلاف مماس، که به صورت زیر تعريف می‌شود، ایزومورف است:^{۱۱)}

$$\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} := \left\{ \mathcal{Q} : r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) \rightarrow r_{\text{Hom}}(\mathcal{I} \setminus \text{Hom}) \mid \pi_{\text{Hom}} \circ \mathcal{Q} = \pi_{TM}, \quad \text{هموار,} \right. \\ \left. \xi_{*} \mathcal{Q}(w) = \mathcal{Q}(w) \quad \forall w \in r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM), \quad \xi \in \text{Stab}_w \right\} \quad (۳۵۴)$$

ایزومورفیسم بالابر (منحصر به فرد) $\Lambda : \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ بین هر دو فضا در اینجا به صورت زیر داده می‌شود:

$$\Lambda(\mathcal{Q}) : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{Hom}}, \mathcal{A}_{\text{Hom}}), \quad v \mapsto [\Lambda(\mathcal{Q})](v) := \Phi_{r_{TM}}(v)_{*, \text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v). \quad (۳۵۵)$$

معکوس آن $\Lambda^{-1} : \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ با محدودیت میدان‌های کرنل نامتغیر به نماینده‌گان خارج‌قسمتی کلاف $r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) \subseteq TM$ داده می‌شود:

$$\Lambda^{-1}(\mathcal{K}) : r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) \rightarrow r_{\text{Hom}}(\mathcal{I} \setminus \text{Hom}), \quad w \mapsto [\Lambda^{-1}(\mathcal{K})](w) := \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)}(w) \quad (۳۵۶)$$

اثبات: برای اثبات اینکه $\Lambda : \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ یک ایزومورفیسم است، باید نشان دهیم که ۱) Λ^{-1} در واقع معکوس Λ است، که ۲) ویژگی‌های تعريف‌کننده $\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ و $\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ پس از بالابر و محدود کردن برآورده می‌شوند و اینکه ۳) ساختارها به انتخاب‌های دلخواه بستگی ندارند. برای اینکه این بخش بیش از حد سنگین نشود، ما اثبات کامل را به پیوست ۱. موکول می‌کیم. مراحل منفرد اثبات در زیر فهرست شده‌اند:

$$1) \quad \text{یک وارون راست از } \Lambda \text{ است} \quad \text{یعنی, } \Lambda \circ \Lambda^{-1} = \text{id}_{\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}}.$$

$$2) \quad \text{یک وارون چپ از } \Lambda \text{ است} \quad \text{یعنی, } \Lambda^{-1} \circ \Lambda = \text{id}_{\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}}.$$

$$3) \quad \text{یک } M\text{-مورفیسم برای هر } \mathcal{Q} \in \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \text{, یعنی, بالابر } \mathcal{Q} = \pi_{TM} \circ \Lambda(\mathcal{Q}) \text{ کلاف است}$$

$$4) \quad \mathcal{K} \in \mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \text{ برای هر } \pi_{TM} \circ \Lambda^{-1}(\mathcal{K}) = \pi_{TM}.$$

$$5) \quad \text{یک } \phi_{*, TM} \text{, یعنی, (}\mathcal{Q}, \phi_{*, TM}\text{) قید کامل نامتغیر بودن (هم‌متغیر بودن) ایزومتری را برآورده می‌کند}$$

$$6) \quad [\Lambda^{-1}(\mathcal{K})](w) = [\Lambda^{-1}(\mathcal{K})](w) \quad \forall w \in r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM), \quad \xi \in \text{Stab}_w \quad \text{را برآورده می‌کند}$$

۳) تمام ساختارها و اثبات‌ها از انتخاب خاص $\Phi_{r_{TM}}$ مستقل هستند

□ همواری میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی بالابر شده بنا به تعريف برقرار است.

اختیاری بودن در انتخاب مقطع r_{TM} به میدان‌های کرنل خارج‌قسمتی متفاوت اما ایزومورف، که بر روی نماینده‌گان خارج‌قسمتی کلاف مختلف بیان شده‌اند، اجازه می‌دهد.

به جای محدود کردن حداکثری میدان کرنل به نماینده‌گان مدار کلاف در $(r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM))(\mathcal{I} \setminus M)$ می‌توان توصیف را فقط به $(r_M(\mathcal{I} \setminus M))(\mathcal{I} \setminus M)$ محدود کرد، یعنی به فضاهای مماس کامل $r_M(\mathcal{I} \setminus M)$ برای هر $T_r M$ در شکل (۴۷)، این متناظر با مدل‌سازی کرنل (متقارن بازتابی) بر روی کل فضای مماس نشان داده شده در جلو به جای فقط یک نیمه است. الزامات بر روی چنین کرنل‌های محدود شده‌ای را می‌توان با دنبال کردن همان منطق قبلی استخراج کرد و به قید در معادله (۳۴۶) منجر می‌شود. ما یک قضیه مشابه با قضیه (۸.۱۲) به دست می‌آوریم:

قضیه ۸.۱۳ (میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی منیفلد). فضای میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری $\mathcal{K}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ از تعريف ۸.۷ با فضای $\widehat{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ از میدان‌های کرنل با قید زیرگروه پایدارساز (منیفلد) بر روی فضاهای مماس روی نماینده‌گان خارج‌قسمتی منیفلد $r_M(\mathcal{I} \setminus M)$ که به صورت زیر تعريف می‌شود، ایزومورف است:

$$\widehat{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} := \left\{ \widehat{\mathcal{Q}} : \pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)) \rightarrow \pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)) \mid \pi_{TM} \circ \widehat{\mathcal{Q}} = \pi_{TM}, \quad \widehat{\Lambda}(\widehat{\mathcal{Q}}), \right. \\ \left. \xi_{*, TM} \widehat{\mathcal{Q}}|_r \xi_{*, TM}^{-1} = \widehat{\mathcal{Q}}|_r \quad \forall r \in r_M(\mathcal{I} \setminus M), \quad \xi \in \text{Stab}_r \right\} \quad (۳۵۷)$$

^{۱۱)} این تعريف از $\widehat{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ در وایستگی دوری با تعريف Λ در معادله (۳۵۵) است. این را می‌توان با هزینه ۱) تعريف فضاهای $\widetilde{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ و $\widetilde{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ بدون الزامات همواری، که بر حسب آنها ۲) $\widetilde{\Lambda} : \widetilde{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ را می‌توان تعريف کرد، که ۳) اجازه می‌دهد الزامات همواری را در $\widetilde{\mathcal{K}}_{\text{Hom}}^{\mathcal{I}}$ بر حسب $\widetilde{\Lambda}$ بخواهیم، اجتناب کرد.

ایزومورفیسم بالابر $\widehat{\Lambda} : \widehat{\mathcal{K}}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ بر حسب Λ و یک محدودیت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\widehat{\Lambda} := \Lambda \circ (\cdot) \Big|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} \quad (358)$$

و بنابراین اساساً با Λ موافق است:

$$\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathcal{Q}}) : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square}), \quad v \mapsto [\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathcal{Q}})](v) := \Phi_{r_{TM}}(v)_{*, \text{Hom}} \widehat{\mathcal{Q}} r_{TM} Q_{TM}(v) \quad (359)$$

معکوس آن $\widehat{\Lambda}^{-1} : \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} \rightarrow \widehat{\mathcal{K}}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ با محدودیت میدان‌های کرنل نامتفاوت به فضاهای مماس روی نمایندگان خارج‌قسمتی منیفلد داده می‌شود: $\pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)) \subseteq TM$

$$\widehat{\Lambda}^{-1}(\mathcal{K}) : \pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)) \rightarrow \pi_{\square\square\square}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)), \quad \widehat{w} \mapsto [\widehat{\Lambda}^{-1}(\mathcal{K})](\widehat{w}) := \mathcal{K} \Big|_{\pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M))}(\widehat{w}) \quad (360)$$

اثبات: اثبات اساساً مشابه اثبات قضیه ۸.۱۲ است با این تفاوت جزئی که قید قوی تر $\xi \in \xi_{*, TM}$ است. از آنجایی که چیز زیادی به آنچه در پیوست ۱. ارائه شده اضافه نمی‌کند، ما از اثبات صرف نظر می‌کنیم.

نمودار جابجایی زیر ایزومورفیسم‌ها را بین سه توصیف معادل از میدان‌های کرنل نامتفاوت نشان می‌دهد:

$$\begin{array}{ccccc} & & \Lambda & & \\ & \swarrow \Omega & & \searrow \widehat{\Lambda} & \\ \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} & & \widehat{\mathcal{K}}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} & & \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} \\ \uparrow \Omega^{-1} = (\cdot) \Big|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} & & & & \downarrow \\ & \searrow \widehat{\Lambda}^{-1} = (\cdot) \Big|_{\pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M))} & & \swarrow \Lambda^{-1} = (\cdot) \Big|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} & \\ \end{array} \quad (361)$$

رابطه با کانولوشن‌های GM : تفاوت بین کانولوشن‌های GM هم‌متغیر نسبت به Isom_{GM} و تبدیلات میدان کرنل عمومی هم‌متغیر نسبت به Isom_{GM} از طریق میدان‌های کرنل نامتفاوت نسبت به G -هدایت‌پذیر را بر روی کل منیفلد به اشتراک می‌گذارد در حالی که دومی فقط ملزم به اشتراک‌گذاری کرنل‌های $\text{Stab}_p \in \text{Isom}_{GM} \setminus M$ -هدایت‌پذیر بر روی مدارهای $p \in \text{Isom}_{GM} \setminus M$ است. از این‌جا به اشتراک‌گذاری وزن‌ها بر روی کل منیفلد به شدت ضروری نیست اما با حمایت از تبع اوکام احتمالاً در عمل یک سوگیری استقرایی خوب است. می‌توان آن را به عنوان مشابهی برای این فرض در نظر گرفت که همان قوانین فیزیکی در سراسر جهان اعمال می‌شوند.

اگر $p, q \in M$ یک فضای همگن نسبت به عمل یک گروه ایزومتری $\text{Isom}_{GM} \leq \text{Isom}_{GM}$ است، یعنی برای هر دو نقطه $\phi \in \mathcal{I}$ وجود دارد که هر دو نقطه را به هم متصل می‌کند، یعنی $\phi(p) = q$. در این حالت فقط یک مدار منفرد $\mathcal{I} \setminus M$ دارد که همان M است، و پایدارسازهای $\text{Stab}_p \in M$ همه نقاط $p \in M$ را تا ایزومورفیسم با هم منطبق هستند. فضای خارج‌قسمتی $\mathcal{I} \setminus M$ تک‌عضوی است که با یک نقطه نماینده منفرد $r = r_M(\mathcal{I} \setminus M)$ نمایش داده می‌شود. طبق قضیه ۸.۱۳، فضای میدان‌های کرنل نامتفاوت نسبت به طور معادل با یک میدان کرنل بر روی نمایندگان مدار بیان می‌شود. از آنجایی که ما فقط یک نقطه نماینده منفرد r برای فضاهای همگن داریم، میدان کرنل نامتفاوت کامل در این حالت معادل با یک کرنل منفرد بر روی $T_r M$ است. این کرنل نماینده باید قید زیرگروه پایدارساز را در معادله (۳۵۷) برآورده کند. از طریق ایزومورفیسم بالابر $\widehat{\Lambda}$ در معادله (۳۵۹) کرنل نماینده بر روی کل منیفلد به اشتراک گذاشته می‌شود.

این بسیار شبیه به تعریف کانولوشن‌های GM است، که یک کرنل منفرد با قید G -هدایت‌پذیری را بر روی کل منیفلد به اشتراک می‌گذارند. قضیه ۸.۱۴ در زیر تأیید می‌کند که در واقع یک هامارزی بین کانولوشن‌ها و تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر بر روی فضاهای همگن وجود دارد. Stab_r -هدایت‌پذیری مستقل از مختصات از قید پایدارساز در نتیجه (به طور غیرکانونی) به H -هدایت‌پذیری کرنل‌های الگو ترجمه می‌شود، که در آن $H \leq G$ با $H \cong \text{Stab}_r$ نیماش ایزومورف از Stab_r نسبت به یک مختصاتی سازی است. می‌توان (زیر)گروه ایزومتری $\text{Isom}_{GM} \leq \text{Isom}_{GM}$ را به عنوان یک کلاف اصلی Stab_r بر روی M در نظر گرفت، که نشاندن (غیرکانونی) آن در GM یک H -هدایت‌پذیری از HM را ایجاد می‌کند. اشتراک‌گذاری یک کرنل Stab_r -هدایت‌پذیر از طریق ایزومورفیسم بالابر، که بر اساس عمل \mathcal{I} عمل می‌کند، سپس دقیقاً متناظر با اشتراک‌گذاری یک کرنل H -هدایت‌پذیر بر روی HM است. این ایجاد می‌کند که تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به \mathcal{I} بر روی فضاهای همگن در واقع متناظر با یک کانولوشن HM هستند.

قضیه ۸.۱۴ (هم‌متغیری بر روی HM همگن به معنای کانولوشن است). فرض کنید M یک منیفلد مجهز به یک G -ساختار GM باشد. فرض کنید یک گروه ایزومتری $\text{Isom}_{GM} \leq \text{Isom}_{GM}$ وجود دارد که به طور تعدی‌پذیر بر روی M عمل می‌کند و آن را به یک فضای همگن تبدیل می‌کند. فرض کنید $r \in M$ یک نقطه نماینده دلخواه از M و $\mathcal{I} \leq M$ پایدارساز آن باشد. آنگاه

$$(1) \quad \text{یک } H\text{-}(\text{زیر)}\text{ساختار } HM \subseteq GM \text{ بر روی } M \text{ با ویژگی‌های زیر وجود دارد:}$$

یک زیرگروه از $H \cong \text{Stab}_r \leq \mathcal{I}$ است \square

HM یک نشاندن از \mathcal{I} (به عنوان کلاف اصلی Stab_r یعنی $\mathcal{I}/\text{Stab}_r$) در GM است که توسط \mathcal{I} حفظ می‌شود، یعنی $\text{Isom}_{HM} = \mathcal{I}$

۲) هر تبدیل میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به \mathcal{I} یک کرنل H -هدایت‌پذیر منفرد را بر روی کل فضای M به اشتراک می‌گذارد و با یک کانولوشن HM با آن کرنل معادل است.

انتخاب خاص H -ساختار به ایزومورفیسم انتخاب شده $H \cong \text{Stab}_r$ بستگی دارد اما بی‌اهمیت است زیرا تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به \mathcal{I} را می‌توان به طور معادل در هر چنین انتخابی بیان کرد.

اثبات: اثبات در پیوست ث. ۲ یافت می‌شود. \square

تعریف ما از تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزوومتری بر روی فضاهای همگن اساساً معادل با کانولوشن‌های هدایت‌پذیر بر روی فضاهای همگن است که توسط $[\cdot, \cdot]$ پیشنهاد شده است. بنابراین هم‌ارزی اثبات شده بین تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزوومتری و کانولوشن‌های HM بر روی فضاهای همگن تأیید می‌کند که کانولوشن‌های HM و کانولوشن‌های هدایت‌پذیر در این مورد اساساً مشابه هستند. با این حال، در حالی که کانولوشن‌های هدایت‌پذیر فقط بر روی فضاهای همگن تعریف شده‌اند، کانولوشن‌های HM به منیفلدهای ریمانی عمومی تعمیم می‌یابند. جزئیات بیشتر در مورد کانولوشن‌ها بر روی فضاهای همگن در پیوست کارهای مرتبط ت مورد بحث قرار گرفته است.

بخش سوم

مرواری بر مقالات مرتبط با شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات

فرمول‌بندی شبکه‌های کانولوشنی (CNN) همبسته روی منفلاط‌های ریمانی بسیار کلی است و طیف وسیعی از نمونه‌سازی‌های ممکن برای مدل‌ها را پوشش می‌دهد. برای اثبات این ادعا، ما مجموعه بزرگی از مدل‌های کانولوشنی را از مقالات علمی مرور کرده و آنها را از دیدگاه یکپارچه CNN‌های مستقل از مختصات توضیح می‌دهیم. اکثر مقالات موجود، مدل‌های خود را به صراحت بر حسب G -ساختارها و کلاف‌های G -همبسته فرمول‌بندی نمی‌کنند. بنابراین، G -ساختارها و نمایش‌های گروهی که به طور ضمنی فرض شده‌اند، از الگوهای اشتراک وزن، تقارن‌های کرنل و ویژگی‌های همورداپی مدل‌ها استنتاج می‌شوند؛ به عنوان مثال شکل ۵۴ را ببینید. جدول ۶ خلاصه‌ای از طبقه‌بندی حاصل از CNN‌های مستقل از مختصات را ارائه می‌دهد. بخش‌های پوشش داده شده و ویژگی‌های آنها را با جزئیات مورد بحث قرار می‌دهند.

۱۲۶	۹ شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات اقلیدسی
۱۲۷	فرمول‌بندی کلاسیک CNN‌های G -هدایت‌پذیر بر روی \mathbb{R}^d
۱۲۹	هندرسۀ آفین فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d
۱۳۵	CNN‌های همورداپی آفین در فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d
۱۳۸	CNN‌های اقلیدسی در مقالات
۱۴۱	۱۰ CNN‌های همورداپی دورانی در فضاهای اقلیدسی سوراخ‌دار
۱۴۸	۱۱ CNN‌های گروی مستقل از مختصات
۱۴۸	۱.۱۱ هندرسۀ کره ۲-بعدی S^2
۱۵۲	۲.۱۱ CNN‌های گروی کاملاً همورداپی دورانی
۱۵۶	۳.۱۱ CNN‌های گروی همورداپی دوران سمتی در توبولوژی‌های استوانه‌ای
۱۶۱	۴.۱۱ تقریب‌های بیست‌وجهی از CNN‌های گروی
۱۶۵	۱۲ CNN‌های مستقل از مختصات روی سطوح عمومی
۱۶۶	۱.۱۲ هندرسۀ سطوح جایگذاری شده
۱۷۳	۲.۱۲ کانولوشن‌های سطحی راهبری‌پذیر-دورانی
۱۸۰	۳.۱۲ کانولوشن‌های- $\{\mathbb{D}\}$ سطحی راهبری‌پذیر
۱۸۴	۴.۱۲ تقریب‌های بیست‌وجهی از CNN‌های گروی
۱۸۷	پخش ۹ کانولوشن‌های هموردا نسبت به گروه آفین ($\text{Aff}(G)$) را روی فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d پوشش می‌دهد. این مدل‌ها بر G -ساختارهای ناوردا نسبت به (G) تکیه دارند، همانطور که در شکل ۵۰ نشان داده شده است. مدل‌های بخش ۱۰ روی فضاهای اقلیدسی سوراخ‌دار $\mathbb{E}_d \setminus \{0\}$ عمل می‌کنند؛ شکل‌های ۵۱، ۵۲ یا ۵۴ را ببینید. این مدل‌ها نسبت به دوران حول مبدأ انتخاب شده $\{0\}$ هموردا هستند اما همورداپی نسبت به انتقال ندارند. CNN‌های گروی و بیست‌وجهی در بخش ۱۱ مورد بحث قرار می‌گیرند. اکثر این مدل‌ها G -ساختارهایی را فرض می‌کنند که در شکل‌های ۵۷ و ۵۸ به تصویر کشیده شده‌اند و بنابراین به ترتیب نسبت به $\text{SO}(3)$ یا $\text{SO}(2)$ هموردا هستند. بخش ۱۲ کانولوشن‌های GM را روی سطوح عمومی که اغلب به صورت مش گستته‌سازی می‌شوند، مرور می‌کند.

مرجع	نمایش	تقارن سراسری	گروه ساختار	منیفلد
	ρ	$\text{Isom}_{GM} \bowtie \text{Aff}_{GM}$	G	M
[۹ ۹]	بدیهی	\mathcal{T}_d	$\{e\}$	\mathbb{E}_d
[۹]	منظم	$\mathcal{T}_1 \rtimes \mathcal{S}$	\mathcal{S}	\mathbb{E}_1
[۹]	منظم	$\mathcal{T}_1 \rtimes \mathcal{R}$	\mathcal{R}	
[۹ ۹ ۹]	irreps			۱
[۹ ۹ ۹ ۹ ۹ ۹ ۹]				
[۹ ۹ ۹ ۹ ۹ ۹]				
[۹ ۹ ۹ ۹ ۹ ۹ ۹]				
[۹ ۹ ۹ ۹ ۹ ۹ ۹]				
[۹ ۹]	منظم	$\text{SE}(2)$	$\text{SO}(2)$	
[۹ ۹]	quotients			۲
[۹ ۹]	trivial $\xrightarrow{\text{_____}}$ regular			۳
[۹ ۹]	vector $\xrightarrow{\text{_____}}$ regular			۴
[۹ ۹]	بدیهی			
[۹]	irreps			۵
[۹ ۹ ۹ ۹ ۹]	منظم			۶
[۹ ۹ ۹]	منظم	$E(2)$	۲	۷
[۹]	quotients			۸
[۹]	trivial $\xrightarrow{\text{_____}}$ regular			۹
[۹]	irreps-SO(2) induced			۱۰
[۹ ۹ ۹ ۹]	منظم	$\mathcal{T}_1 \rtimes \mathcal{S}$	\mathcal{S}	۱۱
[۹]	trivial $\xrightarrow{\text{_____}}$ regular			۱۲
[۹ ۹ ۹ ۹ ۹]	irreps			۱۳
[۹]	quaternion	$\text{SE}(3)$	$\text{SO}(3)$	۱۴
[۹ ۹ ۹]	منظم			۱۵
[۹]	trivial $\xrightarrow{\text{_____}}$ regular			۱۶
[۹ ۹ ۹ ۹ ۹]	irreps			۱۷
[۹]	quaternion			۱۸
[۹ ۹ ۹]	منظم	$\text{SE}(3)$	$\text{SO}(3)$	۱۹
[۹]	trivial $\xrightarrow{\text{_____}}$ regular			۲۰
[۹]	منظم			۲۱
[۹]	$3/2$ quotient	$E(3)$	۳	۲۲
[۹]	trivial $\xrightarrow{\text{_____}}$ irrep			۲۳
[۹]	منظم	$\mathcal{T}_1 \rtimes C_1$	C_1	۲۴
[۹]	منظم	$\mathcal{T}_1 \rtimes D_1$	D_1	۲۵
[۹]	irreps	$\mathcal{T}_d \rtimes \text{SO}(d-1, 1)$	$\text{SO}(d-1, 1)$	$\mathbb{E}_{d-1, 1}$
				۲۶

جدول ۶: طبقه‌بندی شبکه‌های کانولوشنی در مقالات از دیدگاه CNN‌های مستقل از مختصات. خطوط پرنگ هندسه‌های مختلف را از هم جدا می‌کنند. کانولوشن‌های هموردا نسبت به گروه آفین روی فضاهای اقليدسي \mathbb{E}_d (ردیفهای ۲۶-۱) در بخش ۹ مرور شده‌اند. بخش ۱۰ کانولوشن‌های GM را روی فضاهای اقليدسي سوارخ‌دار $\mathbb{E}_d \setminus \{0\} \cong S^{d-1} \times \mathbb{R}^+$ (ردیفهای ۳۰-۲۷) مورد بحث قرار می‌دهد. جزئیات مربوط به CNN‌های کروی (ردیفهای ۳۶-۳۱) در بخش ۱۱ یافت می‌شود. مدل‌های موجود در ردیفهای (۴۱-۳۷) روی سطوح عمومی، که عمدتاً با شاهی مثلثی نمایش داده می‌شوند، عمل می‌کنند؛ به بخش ۱۲ مراجعه کنید. دو خط آخر، کانولوشن‌های موبیوس ما از بخش ۵ را فهرست می‌کنند. \mathcal{T}_d و \mathcal{S} به ترتیب نمایانگر گروه‌های انتقال، بازتاب و پیمانه هستند، در حالی که C_N و D_N گروه‌های دوری و دووجهی هستند. نمایش‌های با ابعاد بی‌نهایت در پیاده‌سازی یا نمونه‌برداری می‌شوند. به عنوان مثال، نمایش‌های منظم $\text{SO}(2)$ یا ۲ معمولاً با نمایش‌های منظم گروه‌های دوری یا دووجهی C_N یا D_N تقریب زده می‌شوند.

چند صفحه آینده به بحث در مورد انتخاب‌های طراحی مختلف برای CNN‌های مستقل از مختصات می‌پردازد و یک نمای کلی اولیه از مدل‌های جدول ۶ ارائه می‌دهد.

انتخاب‌های طراحی و نمای کلی

یک CNN مستقل از مختصات در تئوری به طور کامل با موارد زیر مشخص می‌شود:

(۱) انتخاب یک منیفلد ریمانی (M, η)

(۲) ساختار- \square -آن، GM .

(۳) یک اتصال سازگار- \square -که انتقال‌دهنده‌های ویژگی $P_{A, \gamma}$ را مشخص می‌کند،

(۴) انواع میدان یا نمایش‌های G برای هر فضای ویژگی، ρ ، و

(۵) انتخاب غیرخطی‌های G -هموردا.

ژودزیک‌ها، نگاشتهای نمایی و لگاریتمی از اتصال کانونی لوی-چیویتا روی M به دست می‌آیند.^{۸۲} گروه ایزومنتری Isom_{GM} که شبکه نسبت به آن هموردا است، از متريک و G -ساختار نتیجه می‌شود. تمام فضاهای کرنل \mathcal{K}_ρ^G توسط نمایش‌های گروهی فضاهای ویژگی که بین آن‌ها نگاشت انجام می‌دهند، تعیین می‌شوند. اشتراک وزن با قرار دادن یک کرنل الگوی G -راهبری پذیر نسبت به یک چارچوب G دلخواه در $G_p M$ برای هر نقطه $p \in M$ انجام می‌شود.

در عمل، کاربر با پرسش‌های طراحی اضافی روپرتو است، به عنوان مثال در مورد گسسته‌سازی هندسه، کدگذاری میدان‌های ویژگی، الگوریتم‌های عددی برای محاسبه ژودزیک‌ها و انتقال‌دهنده‌ها وغیره. این بخش یک نمای کلی سطح بالا از تمام انتخاب‌های طراحی مرتبط ارائه می‌دهد. جزئیات بیشتر در بخش‌های بعدی ۱۰، ۹، ۱۱ و ۱۲ یافت می‌شود.

گسسته‌سازی منیفلدها و میدان‌های ویژگی: پیاده‌سازی‌ها در نمایش منیفلدها و نمونه‌برداری از میدان‌های ویژگی متفاوت هستند.

فضاهای اقليدسي \mathbb{E}_d شبکه‌های پیکسلی منظمی مانند \mathbb{Z}^d یا شبکه شش‌ضلعی را می‌پذیرند [۹]. به طور کلی، شبکه‌های محلی منظم برای منیفلدهای محلی تخت مانند نواحی موبیوس و بیست‌وچهار مناسب هستند؛ به شکل‌های ۳۰ و ۷۲ مراجعه کنید. میدان‌های ویژگی در فضاهای اقليدسي همچنین می‌توانند روی یک ابر نقطه ناظم نمونه‌برداری شوند. این امر به عنوان مثال هنگام پردازش محیط‌های انتی، که در آن موقعیت آنها به عنوان مکان‌های نمونه‌برداری عمل می‌کنند، مفید است [۹].

یک تفاوت مهم بین این دو رویکرد این است که شبکه‌های پیکسلی منظم نسبت به انتقال‌های پیوسته در $(\mathbb{R}^d, +) = \mathcal{T}_d$ هموردا نیستند، بلکه فقط نسبت به زیرگروه انتقال‌های گسسته که شبکه را حفظ می‌کنند، مانند $(+, \mathbb{Z}^d)$ ، هموردا هستند. CNN‌ها روی شبکه‌های منظم علاوه بر این عموماً از عملیات تجمعی فضایی استفاده می‌کنند که هموردا باید مدل‌ها را حتی بیشتر کاهش می‌دهد. به طور خاص، با توجه به اینکه عملیات تجمعی دارای گام n پیکسل است، نسبت به انتقال‌ها در $(n\mathbb{Z}^d, +)$ هموردا است. پس از L لایه تجمعی در یک شبکه کانولوشنی، این بدان معناست که مدل به طور کلی فقط نسبت به انتقال‌ها در $(+, nL\mathbb{Z}^d)$ هموردا است \square این موضوع به صورت تجزیی در [۹] بررسی شده است. [۹] پیشنهاد می‌کنند که این مشکل با جایگزینی لایه‌های تجمعی با گام n با لایه‌های تجمعی با گام ۱ (با همان اندازه پنجره تجمعی)، یک فیلتر پایین‌گذر و یک زیرنمونه‌برداری- n -پیکسلی بطریف شود. فیلتر پایین‌گذر اضافی بین عملیات تجمعی و زیرنمونه‌برداری از اثرات آلیاسینگ جلوگیری می‌کند، که نشان داده شده است شبکه‌ها را به اندازه کافی تحت انتقال‌هایی که عضو $(n\mathbb{Z}^d, +)$ نیستند، پایدارتر می‌کند.

فضاهای خمیده مانند کره-۲-بعدی S^2 به طور کلی شبکه‌های نمونه‌برداری منظم را نمی‌پذیرند. یک گسسته‌سازی به ظاهر واضح، بر حسب یک شبکه نمونه‌برداری منظم در مختصات کروی است (معادله (۴۲۷)) و شکل (۵۹)، اما از آنجا که این مختصات ایزومنتریک نیستند، سیگال را در نزدیکی قطب‌ها بیش نمونه‌برداری می‌کنند [۹]. شبکه‌های نمونه‌برداری تقریباً یکنواخت روی S^3 شامل «مجموعه مارپیچ تعمیم‌یافته» [۹] یا شبکه ایکوسکروی (icosahedron) [۹] هستند. به طور جایگزین، میدان‌های ویژگی ممکن است در حوزه طیفی گسسته‌سازی شوند. برای کره، این کار از طریق بسط بر حسب هماهنگ‌های کروی برای میدان‌های اسکالر، هماهنگ‌های کروی با وزن اسپین برای میدان‌های نمایش تحویل ناپذیر یا ماتریس‌های \square ویگنر برای میدان‌های ویژگی عمومی انجام می‌شود [۹].

سطح عمومی عموماً به صورت مشاهی متناظر نمایش داده می‌شوند؛ به بخش ۲.۱.۱۲ مراجعه کنید. میدان‌های ویژگی سپس می‌توانند روی رُوس، یا لاله‌ای وجوه مش نمونه‌برداری شوند [۹]. رزولوشن بالاتر میدان‌های ویژگی را می‌توان با کدگذاری آنها از طریق نقطه‌هایی بافت \square به دست اورد [۹]. به طور جایگزین، سطوح ممکن است به صورت ابرهای نقطه نمایش داده شوند [۹].

\square -ساختارها \square و گرووهای ساختاری \square : انتخاب خاص G -ساختار که باید توسط شبکه رعایت شود، به وظیفه پادگیری و توبولوژی M بستگی دارد (اگر پیوستگی یا همواری کانولوشن مورد نیاز باشد). به طور کلی، M مجهز به یک d -ساختار است، یعنی یک کلاف از چارچوب‌های

^{۸۲} ممکن است عجیب به نظر برسد که ژودزیک‌ها و انتقال‌دهنده‌های ویژگی بر اساس اتصال‌های بالقوه متفاوتی محاسبه شوند. زمانی که اتصال انتقال‌دهنده لوى-چیویتا متفاوت است، عموماً به این دلیل است که اتصال لوى-چیویتا با G -ساختار انتخاب شده، زمانی که $G < d$ باشد، G -سازگار نیست. چند مثال در پاراگراف مربوط به اتصالات G -سازگار در ادامه ارائه شده است.

مرجع راستهنجار نسبت به متریک ریمانی داده شده. یک ارتقا به گروههای ساختاری G با $d < \text{GL}(d)$ به طور یکتا توسط تبدیلات پیمانهای با مقادیر G از چارچوبهای راستهنجار تعیین می‌شود. تقلیل‌های گروه ساختاری به G ، در مقابل، لزوماً یکتا نیستند و اطلاعات هندسی اضافی را کدگذاری می‌کنند. به عنوان مثال، یک تقلیل به $G = \text{SO}(d)$ نیازمند یک جهت‌گیری روی منیفلد است.^{۸۳} بخش‌های بعدی به بحث در مورد انتخاب‌های بیشتر (عمدتاً به طور ضمنی انجام شده) از G -ساختارها که در مقالات یافته می‌شوند، می‌پردازند؛ به عنوان مثال، شکل‌های ۵۰ ، ۵۱ ، ۵۲ ، ۵۳ ، ۵۴ ، ۷۱ را ببینید. این ساختارها یا توسط تقاضا برای همودایی تحت گروه ایزومتری Isom_{GM} تعیین می‌شوند، یا به طور کانونی روی منیفلد داده شده‌اند، یا به طور خاص برای $\{e\}$ -ساختارها، به صورت الگوریتمی از طریق برخی روش‌های ابتکاری ثابت شده‌اند. به یاد بیاورید که $\{e\}$ -ساختارها روی منیفلدهای غیرمواری پذیر (طبق تعريف) لزوماً ناپیوسته هستند.

گروههای ساختاری که بیشتر در مقالات با آنها مواجه می‌شویم، عبارتند از:

- گروه بدیهی $\{e\}$ ، متناظر با CNN‌های غیرمستقل از مختصات با کرنل‌های نامحدود
- گروه بازتاب $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathcal{R}$ ، که اولین محور چارچوب را بر می‌گرداند
- گروههای متعامد خاص $\text{SO}(d)$ (دوران‌های پیوسته)
- گروههای متعامد d (دوران‌ها و بازتاب‌های پیوسته)
- گروه پیمانه $\mathcal{S} \cong (\mathbb{R}^+, *)$

از آنجا که سه گروه آخر گروههای لی پیوسته هستند، در پیاده‌سازی‌های عددی گاهی تقریب زده می‌شوند. به عنوان مثال، $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ و 2 اغلب با گروههای دوری C_N یا گروههای دووجهی D_N مدل‌سازی می‌شوند، در حالی که دوران‌ها و بازتاب‌های سه‌بعدی در 3 را می‌توان با گروههای چندوجهی (گروههای تقارن اقسام افلاطونی، به عنوان مثال بیست‌وجبه) تقریب زد. برای کاهش پیچیدگی طبقه‌بندهی مدل‌ها در جدول ۶ ، ما تصمیم گرفتیم بین تقارن‌های پیوسته و تقریب‌های آنها توسط زیرگروههای متناهی تمایز قابل تشخیص. با این حال، ما چنین تقریب‌هایی را در بحث دقیق خود در مورد مدل‌ها در بخش‌های بعدی بیان خواهیم کرد.

اتصالات سازگار: تمام مدل‌ها یا اتصال کانونی لوی-چیویتا روی M یا اتصال یکتای بدیهی را که توسط یک $\{e\}$ -ساختار القا می‌شود، در نظر می‌گیرند. انتخاب اتصال برای شبکه‌هایی که صرفاً روی میدان‌های اسکالار عمل می‌کنند، که انتقال آنها همیشه بدیهی است، بی‌اهمیت (و بنابراین نامشخص) می‌شود.

به طور خاص، تمام CNN‌های اقلیدسی از بخش ۹ از انتقال‌دهنده‌های لوی-چیویتا استفاده می‌کنند، که بردارها را به گونه‌ای منتقل می‌کنند که در معنای معمول در فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d موازی باقی مبانده، به شکل ۱۲۲ مراجعت کنید. این امکان پذیر است زیرا اتصال لوی-چیویتا با G -ساختارهای مدل‌ها (تعريف شده در معادله (۳۷۱) و در شکل ۵۰ به تصویر کشیده شده) G -سازگار است.

مدل‌های روی فضاهای اقلیدسی سوراخ دار $\{\cdot\}_d$ از بخش ۱۰ یا بر اساس $\{e\}$ -ساختارها هستند و یا میدان‌های اسکالار را در نظر می‌گیرند. بنابراین، آنها از اتصالات بدیهی استفاده می‌کنند که با اتصال کانونی لوی-چیویتا روی $\{e\}_d$ متفاوت است.

تمام CNN‌های کروی که بر $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ -ساختار در شکل ۱۵۷ تکیه دارند (در بخش ۲.۱۱ مرور شده‌اند)، ویژگی‌ها را مطابق با اتصال لوی-چیویتا روی S^2 منتقل می‌کنند (شکل ۲۲). آنها بروی $\{e\}$ -ساختار در شکل ۵۷ عمل می‌کنند (در بخش ۲.۱۱ مرور شده‌اند) دوباره یک اتصال بدیهی را در نظر می‌گیرند زیرا اتصال لوی-چیویتا کروی با این $\{e\}$ -ساختار ناسازگار است. CNN بیست‌وجبه با \mathbb{C} -ساختار، شکل ۷۱ ، ویژگی‌ها را مطابق با اتصال لوی-چیویتا بیست‌وججه \mathbb{C} -سازگار منتقل می‌کنند.^{۸۴}

تمام CNN‌ها روی سطوح عمومی که در ردیفهای $(۳۹-۳۷)$ جدول ۶ فهرست شده‌اند، سطوح جهت‌داری را فرض می‌کنند که مجهز به یک $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ -ساختار هستند. آنها ویژگی‌ها را با اتصال لوی-چیویتا $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ -سازگار سطوح منتقل می‌کنند. سایر CNN‌های $\{e\}$ -ساختارها هستند و یا روی میدان‌های اسکالار عمل می‌کنند **■** بنابراین انتقال ویژگی آنها بدیهی است.

کانون‌لشنهای نوار موبیوس ما ویژگی‌ها را از طریق اتصال لوی-چیویتا منتقل می‌کنند، که با \mathcal{R} -ساختار فرض شده سازگار است. به یاد بیاورید که اتصال لوی-چیویتا به طور یکتا توسط متریک تعیین می‌شود و بنابراین به طور کلی ناوردای ایزومتری است؛ پاورقی؟ در بخش $۴.۱.۸$ را مقایسه کنید. از آنجا که اتصالات بدیهی $\{e\}$ -سازگار به طور یکتا توسط $\{e\}$ -ساختار مشخص می‌شوند، تقارن‌های آن را به اشتراک می‌گذارند، یعنی تحت عمل $\text{Isom}_{\{e\}M}$ ناوردا هستند. این موضوع با قضیه ۸.۹ دلالت بر این دارد که کانون‌لشنهای GM که بر اساس این اتصالات هستند، Isom_{GM} -هموردا می‌باشند.

پول‌بک‌های انتقال‌دهنده و تصویرهای جایگزین به

^{۸۳} برای یک منیفلد منفرد و همبند، این انتخاب تا زمانی که مقداردهی اولیه کرنل نسبت به هر دو جهت‌گیری متقارن باشد، دلخواه است. در این حالت شبکه به سادگی کرنل‌های بازتابیده را برای جهت‌گیری‌های مختلف یاد می‌گیرد. هنگام بررسی یک مجموعه داده متشکل از چندین منیفلد، جهت‌گیری نسبی آنها برای تعیین صحیح مرتبط است.

^{۸۴} در مقابل، $\{e\}$ -ساختار اقلیدسی در شکل ۴۲ با اتصال لوی-چیویتا روی \mathbb{E}^2 ناسازگار خواهد بود.

^{۸۵} اتصالات لوی-چیویتا گسسته روی مساحت‌ها در بخش ۲.۱۱۲ و ۴.۱ مورد بحث قرار گرفته‌اند.

بول بک انتقال دهنده $\text{Exp}_p^* f$ که در تعریف ۷.۵ و معادله (۶۷) تعریف شده است، یک میدان ویژگی f را در یک پارامترسازی ژئودزیک روی فضای مماس $T_p M$ نمایش می‌دهد. بخش انتقال عمليات توسط اتصال G -سازگار تعیین می‌شود. ژئودزیک‌ها \square و بنابراین نگاشتهای نمایی $\mathbb{E}_d : T_p M \rightarrow M$ در فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d و کره S^d عبارات فرم سته دارند. به طور خاص، نگاشتهای نمایی روی \mathbb{E}_d در مختصات \mathbb{R}^d دکارتی به جمع برداری در معادله (۴۰۰) کاوش می‌یابند، به طوری که کانولوشن‌های GM اقلیدسی به کانولوشن‌های متعدد روی \mathbb{R}^d تبدیل می‌شوند؛ به قضیه ۹.۷ مراجعه کنید. ژئودزیک‌ها روی S^3 به خوبی شناخته شده‌اند که توسط دوایر عظیمه کرد داده می‌شوند. اگر کره به عنوان جایگذاری شده در \mathbb{R}^3 در نظر گرفته شود، نگاشت نمایی به صراحت توسط معادله (۴۳۰) ژئودزیک‌ها روی مشاهی سطوح عمومی با راه حل‌های فرم سته توصیف نمی‌شوند بلکه به صورت عددی محاسبه می‌شوند؛ به بخش ۲.۱۱۲ مراجعه کنید. در مقایسه با محیط هموار، باید بین ژئودزیک‌های «کوتاه‌ترین» و «مستقیم‌ترین» روی مشاهی تمايز قائل شد [۸].

بول بک میدان‌های ویژگی به مختصات نرمال ژئودزیک تنها راه نمایش میدان‌های ویژگی روی فضاهای مماس نیست. در مقالات مربوط به CNN‌های کروی، استفاده از تصویرهای نومونیک، که در شکل ۵۸ به تصویر کشیده شده‌اند، نسبتاً رایج است. قضیه ۱۱.۳ نشان می‌دهد که این تصویر را می‌توان به عنوان یک مورد خاص از پارامترسازی ژئودزیک عمومی تر ما پس از اعمال یک تاب شعاعی به کرنل‌ها در نظر گرفت. بنابراین مدل‌های مربوطه دقیقاً به عنوان کانولوشن‌های GM شناسایی می‌شوند. سطوحی که در پک فضای محیطی مانند \mathbb{R}^3 جایگذاری شده‌اند، ممکن است علاوه بر این بر تصویرهای مختلفی در فضای جایگذاری تکیه کنند؛ به عنوان مثال سه مدل آخر که در بخش ۳.۱۲ مورد بحث قرار گرفته‌اند را ببینید. توجه داشته باشید که این رویکردها واقعاً با رویکرد ما متفاوت هستند، یعنی این سه مدل دقیقاً کانولوشن‌های GM نیستند.

نمایش‌های \square و غیرخطی‌ها: تقریباً تمام مدل‌ها از نمایش بدیهی، نمایش‌های تحویل‌نپذیر یا نمایش‌های منظم را به عنوان انواع میدان در نظر می‌گیرند. استثنایات شامل نمایش‌های خارج قسمتی، نمایش‌های القایی عمومی‌تر، نمایش‌های حاصل ضرب تانسوری و، به طور خاص برای $G = \text{SO}(3)$ ، نمایش کواترنیونی هستند. نمایش‌های با ابعاد بی‌نهایت، به ویژه نمایش‌های منظم و خارج قسمتی گروههای لی، در پیاده‌سازی‌ها گسسته‌سازی می‌شوند. این کار می‌تواند یا از طریق نمونه‌برداری مونت کارلو یا با بازگشت به نمایش‌های متاظر زیرگروههای متناهی همانطور که در بالا بحث شد، انجام شود.

غیرخطی‌ها پاید نسبت به عمل نمایش‌های G انتخاب شده هموردا باشند. از آنجا که میدان‌های اسکالار G -ناوردا هستند، غیرخطی‌های معمول مانند ReLU را آنها عمل می‌کنند. میدان‌های ویژگی که مطابق با نمایش‌های جایگشتی، به ویژه نمایش‌های منظم، تبدیل می‌شوند، به صورت کanal به کanal عمل می‌کنند. سایر انواع میدان به غیرخطی‌های سفارشی نیاز دارند \square ما برای بحث در مورد انتخاب‌های خاص به [۹] ارجاع می‌دهیم.

فضاهای کرنل \square -راهبری‌پذیر: کانولوشن‌های GM میدان‌های ورودی از نوع ρ را به میدان‌های خروجی از نوع ρ_0 با کانولو کردن آنها با کرنل‌های G -راهبری‌پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_0, \rho_0}^G$ نگاشت می‌دهند. از آنجا که فضای $\mathcal{K}_{\rho_0, \rho_0}^G$ از کرنل‌های G -راهبری‌پذیر، تعریف ۷.۳، یک فضای برداری است، معمولاً بر حسب یک پایه $\{K_1, \dots, K_N\}$ از $\mathcal{K}_{\rho_0, \rho_0}^G$ پارامتری می‌شود. قبل از محاسبه کانولوشن، کرنل یادگرفته شده $K_i = \sum_{i=1}^N w_i K_i$ در این پایه بسط داده می‌شود، که در آن $\{w_1, \dots, w_N\}$ وزن‌های با مقدار حقیقی هستند که باید بهینه‌سازی شوند. فضاهای کرنل اثبات شده کامل برای گروههای $\mathbb{Z} \leq G$ در [۱۰] پیاده‌سازی شده‌اند.^{۸۶} یک تعمیم از قضیه ویگنر-اکارت، پایه‌های فضای کرنل را برای گروههای ساختاری فشرده عمومی G مشخص می‌کند [۱۱].

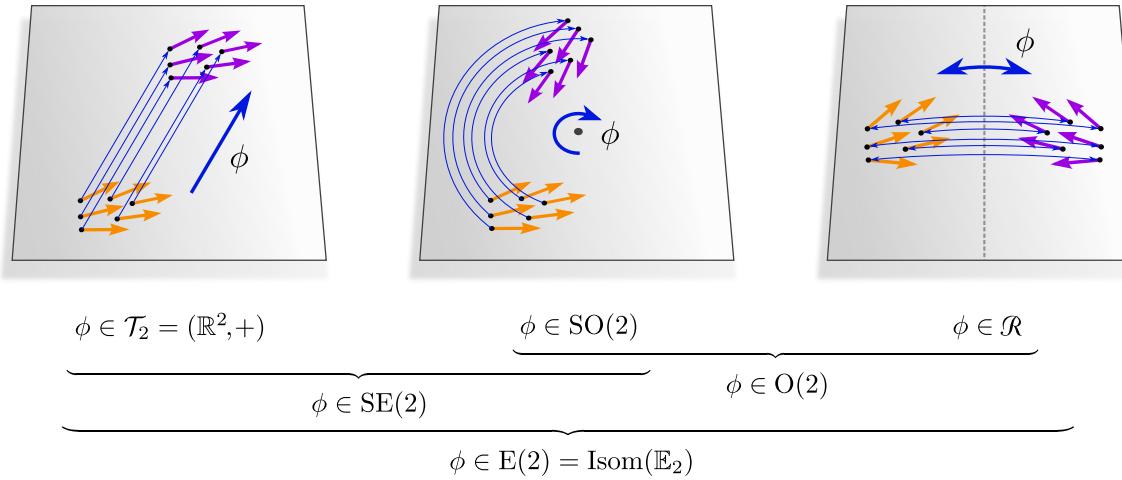
در عمل، اکثر نویسنده‌گان از فرمول‌بندی مبتنی بر نظریه نمایش برای میدان‌های ویژگی و کرنل‌های راهبری‌پذیر استفاده نمی‌کنند، بلکه آنها را بر اساس شهود فرمول‌بندی می‌کنند. به طور خاص، اکثر نویسنده‌گان یک نوع میدان ورودی داده شده رافرض می‌کنند و عملیات کانولوشن مختلفی را پیشنهاد می‌دهند که به گونه‌ای مهندسی شده‌اند که میدان خروجی حاصل به شیوه‌ای هموردا (یا مستقل از مختصات) تبدیل شود.^{۸۷} در حالی که این رویکردها کرنل‌های G -راهبری‌پذیر خاصی را پیشنهاد می‌کنند که بین میدان‌های ρ و میدان‌های ρ_0 نگاشت انجام می‌دهند، این کرنل‌ها گاهی اوقات فضای کامل کرنل‌های ممکن را پوشش نمی‌دهند. این موضوع به عنوان مثال در مورد $MDGCNN$ ها و $PFCNN$ ها، که در بخش ۲.۱۲ بحث می‌شوند، صدق می‌کند.

۹ شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات اقلیدسی

این بخش به بررسی کانولوشن‌های هموردا در فضاهای اقلیدسی (آفین) $M = \mathbb{E}_d$ می‌پردازد که بدون شک از بیشترین اهمیت عملی برخوردار هستند. شبکه‌های کانولوشنی در فضاهای اقلیدسی برای تحلیل تصاویر صفحه‌ای و حجمی، سیگنال‌های صوتی، ویدئوها، رویدادهای فیزیکی در فضاهای مینکوفسکی (شبه-اقلیدسی) یا محیط‌های صفحه‌ای در یادگیری تقویتی به کار می‌روند. معماری مدل کانولوشنی نمونه اولیه \square هم در فضاهای اقلیدسی و هم به طور کلی \square CNN متعدد روى \mathbb{E}_d توسعه دارد.^{۸۸} است. موفقیت آن تا حد زیادی بر پایه هموردا بیان نسبت به انتقال است که به آن امکان تعمیم استنتاج آموخته شده بین مکان‌های فضایی مختلف را می‌دهد. با انگیزه از این مشاهده، تلاش زیادی برای تعمیم ویژگی‌های هموردا بیان CNN‌ها به گروههای تقارن سراسری بزرگتر \mathbb{E}_d ، به عنوان مثال به ایزومنتری‌های اقلیدسی در شکل ۴۸ یا تبدیلات آفین عمومی‌تر، صورت گرفته است.

^{۸۶} <https://quva-lab.github.io/e2cnn/api/e2cnn.kernels.html>

^{۸۷} این برخلاف رویکرد ماست که میدان‌های ورودی و خروجی را ثابت می‌کند و سپس به دنبال محدودیت حاصل بر کرنل‌های کانولوشن می‌گردد.



شکل ۴۸: نمایش گروه ایزومتری کامل $\text{Isom}(\mathbb{E}_d) = \text{E}(d) = (\mathbb{R}^d, +)$ برای $d = 2$. این گروه شامل زیرگرووهای انتقال $\mathcal{T}_d = (\mathbb{R}^d, +)$ ، دوران $\text{SO}(d)$ و بازتاب \mathcal{R} است. دوران‌ها و بازتاب‌ها گروه متعامد $\mathcal{R} \rtimes \text{SO}(d)$ را تشکیل می‌دهند، در حالی که انتقال‌ها و دوران‌ها گروه اقلیدسی خاص $\text{SE}(d) = \mathcal{T}_d \rtimes \text{SO}(d)$ را می‌سازند.

جالب اینجاست که اکثر مدل‌های سراسری در مقالات، هموردایی خود را با اعمال نوعی کرنل G-راهبری‌پذیر به دست می‌آورند. این بدان معناست که این مدل‌ها در واقع تحت تبدیلات پیمانهای محلی نیز هموردا هستند، علی‌رغم اینکه صرحتاً برای آن طراحی نشده‌اند. دلیل این هموردایی پیمانهای ناخواسته این است که هموردایی سراسری مدل‌ها معمولاً برای هر لایه به صورت جداگانه طراحی می‌شود و بنابراین به طور مستقل برای میدان دریافتی محلی هر نورون اعمال می‌گردد. در اینجا ما CNN‌های اقلیدسی هموردایی سراسری را که در ردیفهای (۲۶-۱) جدول ۶ فهرست شده‌اند، از دیدگاه عمومی تر تقارن‌های پیمانهای محلی توضیح می‌دهیم و بحث می‌کنیم که چگونه هموردایی سراسری آنها از هموردایی پیمانهای محلی شان ناشی می‌شود. قضیه ۸.۹ به دین ترتیب بیان می‌کند که یک کانولوشن $M = \mathbb{E}_d$ روی GM نسبت به Isom_{GM} هموردا است. با این حال، برای مورد خاص فضاهای اقلیدسی، می‌توان گزاره‌ای قوی‌تر از صرفاً هموردایی ایزومتری بیان کرد: کانولوشن با یک کرنل G-راهبری‌پذیر روی \mathbb{E}_d به معنای هموردایی سراسری مدل تحت عمل گروه آفین $\text{Aff}(G) := \mathcal{T}_d \rtimes G$ است، همانطور که در قضیه ۹.۸ در ادامه اثبات شده است. دلیل اصلی این نتیجه آن است که ژئودزیک‌ها و انتقال‌دهندهای لوی-چیوینا در فضاهای اقلیدسی نه تنها توسط ایزومتری‌ها حفظ می‌شوند، بلکه به طور کلی تر توسط هر تبدیل آفین نیز حفظ می‌گردند.

کانولوشن‌ها در فضاهای اقلیدسی به طور کلاسیک در مختصات \mathbb{R}^d از \mathbb{E}_d فرمول‌بندی می‌شوند. مزیت این نوع فرمول‌بندی این است که تمام ساختارهای ریاضی مورد نیاز برای تعاریف را فراهم می‌کند. با این حال، \mathbb{R}^d دارای ساختار اضافی است، به عنوان مثال یک ساختار فضای برداری (و در نتیجه یک ببدأ) یا ساختار کانونیک $\{e\}$ آن. با طراحی کانولوشن‌ها به گونه‌ای که هموردا باشند، استنتاج (تا حدی) مستقل از این ساختار می‌شود: به عنوان مثال، هموردایی نسبت به انتقال در کانولوشن‌ها، انتخاب خاص مبدأ را یکسان می‌سازد در حالی که هموردایی نسبت به $\text{E}(d)$ (ایزومتری)، جهت و جهت‌گیری خاص ساختار $\{e\}$ را یکسان می‌کند. برای روشن شدن اینکه کدام ساختار ریاضی واقعاً فرض و مورد نیاز است، ما یک دیدگاه جایگزین را توسعه می‌دهیم: ما با ساختار خالص آفین و متريک فضای اقلیدسی \mathbb{E}_d شروع می‌کنیم. اگر یک کانولوشن GM روی \mathbb{E}_d ساختار هندسی بيشتری را فرض کند، این ساختار متعاقباً با مشخص کردن اطلسی از چارت‌های (آفین) $\mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$: x^A که پیمانه‌ها و G-ساختارها را الفا می‌کنند، اضافه خواهد شد.

۱۲۷	۱.۹ فرمول‌بندی کلاسیک CNN‌های G -هدایت‌پذیر بر روی \mathbb{R}^d
۱۲۹	۲.۹ هندسه‌ی آفین فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d
۱۳۰	۱.۲.۹ چارت‌های آفین و اطلس‌های $\text{Aff}(G)$
۱۳۱	۲.۲.۹ \square -اطلس‌ها و \square -ساختارهای القا شده
۱۳۳	۳.۲.۹ تبدیلات آفین مستقل از مختصات
۱۳۵	۳.۹ CNN‌های هموردای گروه آفین در فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d
۱۳۸	۴.۹ CNN‌های اقلیدسی در مقالات

برای ارائه یک نمای کلی و مقدمه‌ای ساده، ما فرمول‌بندی کلاسیک کانولوشن‌های G -راهبری‌پذیر (هموردای آفین) را در مختصات \mathbb{R}^d در بخش ۱.۹ مور می‌کنیم. بخش‌های بعدی ۲.۹ و ۳.۹ کانولوشن‌های هموردای آفین را در فضاهای اقلیدسی در یک چارچوب بدون مختصات و مستقل از مختصات تعریف می‌کنند. به طور خاص، بخش ۲.۹ به بحث در مورد هندسه آفین فضاهای اقلیدسی در یک پردازه اطلس‌هایی از چارت‌ها با توابع گزار در یک گروه آفین $\text{Aff}(G)$ (شکل ۴.۹)، G -ساختارهای ثابت تحت $\text{Aff}(G)$ مورد نظر را القا می‌کنند (شکل ۵.۰). بخش ۳.۹ کانولوشن‌های G را روی این G -ساختارها بررسی کرده و هموردای سراسری آنها نسبت به $\text{Aff}(G)$ را اثبات می‌کند. نمونه‌های خاصی از این مدل‌ها که در مقالات یافت می‌شوند، یعنی ردیفهای (۱-۶) جدول ۴.۹ در بخش ۴.۹ مورد بحث قرار گرفته‌اند.

خواننده می‌تواند از تعاریف فنی در بخش‌های ۲.۹ و ۳.۹ که برای درک مدل‌های بخش ۴.۹ لزوماً ضروری نیستند، عبور کند.

۱.۹ فرمول‌بندی کلاسیک CNN‌های \square -هدایت‌پذیر بر روی \mathbb{R}^d

در این بخش، ما مفهوم معمول کانولوشن‌ها (یا همبستگی‌های متقابل^{۸۸}) را بر روی \mathbb{R}^d مور می‌کنیم. هنگام کانولو کردن با یک کرنل G -هدایت‌پذیر، کانولوشن‌ها تحت عمل گروه آفین $\text{Aff}(G)$ همتغیر می‌شوند. بخش‌های بعدی ۲.۹ و ۳.۹ این عملیات را بر روی \mathbb{R}^d به عنوان عبارات مختصاتی کانولوشن‌های GM مستقل از مختصات بر روی فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d شناسایی خواهند کرد.

CNN‌های هدایت‌پذیر اقلیدسی: CNN‌های مرسم نقشه‌های ویژگی را بر روی \mathbb{R}^d در نظر می‌گیرند، که توابعی به شکل زیر هستند:

$$F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c. \quad (362)$$

یک کانولوشن (در واقع یک همبستگی) با یک کرنل با مقدار ماتریسی $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ سپس به عنوان تبدیل انتگرالی زیر تعریف می‌شود:

$$F_{\square\Box}(x) := [K * F_{\square\Box}](x) := \int_{\mathbb{R}^d} K(v) F_{\square\Box}(x + v) dv, \quad (363)$$

که یک نقشه ویژگی ورودی با c_{in} کانال را به یک نقشه ویژگی خروجی با c_{out} کانال نگاشت می‌کند. می‌توان نشان داد که این عملیات عمومی‌ترین نگاشت خطی و همتغیر نسبت به انتقال بین نقشه‌های ویژگی است [۸۹].

CNN‌های هدایت‌پذیر اقلیدسی [۹۰] مرسوم را به شبکه‌های کانولوشنی تعمیم می‌دهند که تحت عمل گروه‌های آفین بر روی میدان‌های ویژگی همتغیر هستند. گروه‌های آفین \mathbb{R}^d در اینجا به عنوان حاصلضرب‌های نیمه‌مستقیم به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\text{Aff}(G) := \mathcal{T}_d \rtimes G, \quad (364)$$

که در آن $G \leq \text{GL}(d)$ است. گروه‌های آفین شامل ایزومنتری‌های \mathbb{R}^d که در شکل ۴.۸ به تصویر کشیده شده‌اند، به عنوان یک مورد خاص برای $G \leq O(d)$ هستند اما گروه‌های نقطه‌ای (گروه‌های ساختار) G عمومی‌تری، به عنوان مثال مقیاس‌بندی یکواخت^{۸۹}، رانیز محاز می‌دانند. معادلات زیر یک نمای کلی از رابطه‌ترین گروه‌های آفین در ادبیات (تا گسسته‌سازی‌ها) و راه‌های جایگزین نوشتن آنها را ارائه می‌دهند (با فرض اینکه Isom_{GM} توسط G -ساختارهای نامغایر نسبت به $\text{Aff}(G)$ تعیین می‌شود؛ به زیر مراجعه کنید):

$$\begin{aligned} \text{Aff}(\{e\}) &= \mathcal{T}_d &= (\mathbb{R}^d, +) &= \text{Isom}_{\{e\}M} \\ \text{Aff}(\mathcal{R}) &= \mathcal{T}_d \rtimes \mathcal{R} &&= \text{Isom}_{\mathcal{RM}} \\ \text{Aff}(\text{SO}(d)) &= \mathcal{T}_d \rtimes \text{SO}(d) = \text{SE}(d) &= \text{Isom}_{\text{SOM}} &= \text{Isom}_+(\mathbb{R}^d) \\ \text{Aff}(O(d)) &= \mathcal{T}_d \rtimes O(d) = \text{E}(d) &= \text{Isom}_{\text{OM}} &= \text{Isom}(\mathbb{R}^d) \\ \text{Aff}(\mathcal{S}) &= \mathcal{T}_d \rtimes \mathcal{S} && \end{aligned} \quad (365)$$

^{۸۸} در یادگیری عمیق، استفاده از اصطلاحات «کانولوشن» و «همبستگی متقابل» به صورت مترادف رایج شده است.
^{۸۹} برای کلیت کامل، در واقع باید کرنل‌ها را به معنای توزیعی (توابع تعمیم‌یافته) مجاز دانست.

گروه $\text{Aff}(\text{GL}(d))$ شامل تمام تبدیلات آفین \mathbb{R}^d است. از آنجایی که گروههای آفین به عنوان حاصلضربهای نیمه-مستقیم تعریف می‌شوند، هر یک از عناصر آنها $tg \in \text{Aff}(G)$ را می‌توان به طور منحصر به فرد به یک انتقال $t \in \mathcal{T}_d$ و یک عنصر گروه نقطه‌ای $g \in G$ تجزیه کرد. عمل (کانونی) آنها بر روی \mathbb{R}^d به صورت زیر داده می‌شود:

$$\text{Aff}(G) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (tg, x) \mapsto gx + t. \quad (366)$$

عمل یک عنصر گروه معکوس $(tg)^{-1}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$((tg)^{-1}, x) \mapsto g^{-1}(x - t). \quad (367)$$

یک میدان ویژگی از نوع ρ بر روی \mathbb{R}^d طبق نمایش القایی ρ از $\text{Ind}_G^{\text{Aff}(G)}$ همانطور که توسط

$$(tg) \triangleright_\rho F := [\text{Ind}_G^{\text{Aff}(G)} \rho](tg) F := \rho(g) F(tg)^{-1}, \quad (368)$$

مشخص شده است، تبدیل می‌شود، که می‌توان آن را به عنوان مشابه عمل مستقل از مختصات بر روی مقاطع در معادله (۲۸۱) در نظر گرفت.^{۹۰} یک کانونلوشن با یک کرنل G -هدايت‌پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square}}^G$ نسبت به این اعمال بر روی میدان ورودی و خروجی همتغیر است، یعنی،

$$K * (tg \triangleright_{\rho_{\square\square}} F_{\square\square}) = tg \triangleright_{\rho_{\square\square}} (K * F_{\square\square}) \quad \forall tg \in \text{Aff}(G). \quad (369)$$

این به راحتی با یک محاسبه صریح بررسی می‌شود:

$$\begin{aligned} [K * (tg \triangleright_{\rho_{\square\square}} F_{\square\square})](x) &= [K * (\rho_{\square\square}(g) F_{\square\square}(tg)^{-1})](x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \rho_{\square\square}(g) F_{\square\square}((tg)^{-1}(x + v)) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \rho_{\square\square}(g) F_{\square\square}(g^{-1}(x + v - t)) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} K(gv) \rho_{\square\square}(g) F_{\square\square}(g^{-1}(x - t) + v) |\det g| dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_{\square\square}(g) K(v) F_{\square\square}(g^{-1}(x - t) + v) dv \\ &= \rho_{\square\square}(g) [K * F_{\square\square}](g^{-1}(x - t)) \\ &= tg \triangleright_{\rho_{\square\square}} [K * F_{\square\square}](x), \end{aligned} \quad (370)$$

که از G -هدايت‌پذیری K در مرحله پنجم استفاده کرد و برای هر $x \in \mathbb{R}^d$ و هر $tg \in \text{Aff}(G)$ بروی $F_{\square\square}$ است. همانطور که در [۹] اثبات شده است، چنین کانونلوشن‌های G -هدايت‌پذیر، عمومی‌ترین نگاشتهای خطی همتغیر نسبت به $\text{Aff}(G)$ بین میدان‌های ویژگی اقلیدسی هستند.^{۹۱}

رابطه با کانونلوشن‌های GM اقلیدسی: این کانونلوشن‌های هدايت‌پذیر بر روی \mathbb{R}^d چگونه به کانونلوشن‌های GM بر روی فضاهای اقلیدسی $M = \mathbb{E}_d$ مرتبط می‌شوند؟ این واقعیت که کانونلوشن‌های هدايت‌پذیر به کرنل‌های G -هدايت‌پذیر متکی هستند، نشان می‌دهد که آنها نه تنها به صورت سراسری نسبت به $\text{Aff}(G)$ همتغیر هستند، بلکه (به طور کلی‌تر) به صورت محلی نسبت به G همتغیر هستند. برای برقراری ارتباط بین CNN‌های کلاسیک G -هدايت‌پذیر بر روی \mathbb{R}^d و کانونلوشن‌های GM مستقل از مختصات، باید ساختار هندسی را که به طور ضمنی توسط اولی در نظر گرفته شده است، شناسایی کنیم.

^{۹۰} نمایش‌های القایی به روی مشابه با آنچه در شکل ۲۶ نشان داده شده است، بر روی میدان‌ها عمل می‌کنند. برخلاف تبدیل در این شکل، نمایش‌های القایی علاوه بر این به انتقال‌ها نیز اجازه می‌دهند (قانون تبدیل در بخش ۳.۲.۴ $\text{Res}_G^{\text{Aff}(G)} \text{Ind}_G^{\text{Aff}(G)} \rho$ از نمایش القایی به G است، یعنی نمایش القایی بدون انتقال‌ها).

^{۹۱} با فرض اینکه میدان‌های ویژگی طبق نمایش القایی، معادله (۳۶۸)، تبدیل می‌شوند، که برای رسیدن به یک کانونلوشن لازم است. این گزاره، گزاره شناخته‌شده‌ای را تعیین می‌دهد که کانونلوشن‌های اقلیدسی مرسوم، عمومی‌ترین نگاشتهای خطی همتغیر نسبت به انتقال بین توابع (یا نقشه‌های ویژگی) در فضاهای اقلیدسی هستند، که برای $\{e\}$ بازیابی می‌شود.

به طور کلی، \mathbb{R}^d به طور کانونی با یک $\{e\}$ -ساختار، که در شکل ۰۵۰ به تصویر کشیده شده است، مجهز است.^{۹۳} علاوه بر این، با یک متريک ريماني متناظر با ضرب داخلی استاندارد \mathbb{R}^d همراه است.^{۹۴} اتصال لوی-چيوپاتای متناظر، منتقل کننده‌های موازی را در شکل ۰۲۲ آيجاد می‌کند، که بردارها را به معنای معمول در فضاهای اقلیدسی موازی نگه می‌دارد. هنگامی که نسبت به قاب‌های $\{e\}$ -ساختار کانونی بيان می‌شود، منتقل کننده‌های موازی بدبيهي می‌شوند و بنابراین حذف می‌شوند. نگاشتهای نمایی به یک جمع ساده کاهش می‌ياند (پس از اعمال برخی ايزومورفيسمهای، به زير مراججه کنيد).

در حالی که ما یک $\{e\}$ -ساختار بر روی \mathbb{R}^d داريم، کانولوشن‌های GM به G -ساختارها کمتر خاصی متکی هستند. اين G -ساختارها را می‌توان به عنوان بالابرهای G (کانوني) درنظر گرفت.

$$GM = \{e\}M \triangleleft G := \left\{ [e_i]_{i=1}^d \triangleleft g \mid [e_i]_{i=1}^d \in \{e\}M, g \in G \right\} \quad (۳۷۱)$$

از $\{e\}$ -ساختار کانوني $\{e\}M$ از \mathbb{R}^d در نظر گرفت. به طور شهودی، اين G -ساختارها بالابر شده با افزودن هر قاب G -مرتبط دیگر (مدار راست- G -آن در FM) به هر قاب مرجع کانوني در $\{e\}M$ تعریف می‌شوند. شکل ۰۵۰ چنین G -ساختارها بالابر شدهای را برای گروههای ساختار مختلف نشان می‌دهد. همانطور که در قضيه ۹۶ در زير اثبات شده است، آنها تحت عمل $\text{Aff}(G)$ نامتغیر هستند^{۹۵} که در قضие ۹۸ نشان داده است که هم‌متغیری $\text{Aff}(G)$ کانولوشن‌ها را توضیح می‌دهد. آنها علاوه بر اين با اتصال لوی-چيوپاتا G -سازگار هستند.

ادعاهای مطرح شده در اينجا در دو بخش بعدی با دقت بيشتری مورد بحث قرار می‌گيرند. اين فرمول‌بندی رسمي، با اين حال، برای درک طبقه‌بندی ما از CNN‌هاي اقلیدسي در اديبيات به شدت ضروري نيست، به طوری که خواننده می‌تواند از آنها عبور کرده و مستقیماً به بخش ۴.۹ برود.

۲.۹ هندسه‌ي آفین فضاهای اقلیدسي \mathbb{E}_d

قبل از بحث در مورد کانولوشن‌های مستقل از مختصات در فضاهای اقلیدسي، باید هندسه‌ي اقلیدسي \mathbb{E}_d را درک کنیم. فضاهای اقلیدسي علاوه بر اينکه فضای آفین هستند، به یک متريک اقلیدسي (تابع فاصله) نيز مجهزنند. اين تابع فاصله متناظر با یک متريک ريماني η است، يعني يک d -ساختار $OM = \mathbb{E}_d$ روی منيفلد (ريماني) M . اين متريک داراي اين ويزگي است که انحنائي آن در همه جا صفر است، يعني \mathbb{E}_d سرتاسر تخت است.

يك مثال استاندارد برای فضاهای اقلیدسي، فضاهای برداري \mathbb{R}^d هستند، با اين حال، فضاهای اقلیدسي عمومی ساختار کمتری را در نظر می‌گيرند. به طور خاص، آنها با يک ساختار فضای برداري همراه نیستند و بنابراین مبدأ مرجحی ندارند. علاوه بر اين، آنها به طور کلی مجهز به مختصات دکارتی نیستند. بنابراین ما با فضاهای اقلیدسي «عياران» \mathbb{E}_d شروع می‌کنیم و بحث می‌کنیم که چگونه ساختار هندسي مربوطه به آنها اضافه می‌شود. در اصل می‌توان هر G -ساختاري را در نظر گرفت، با اين حال، ما به طور خاص به آن G -ساختارهاي CNN راهبردي‌پذير کلاسيك را از بخش قبيل بازيابي می‌کنند، که تمام مدل‌های رديفهای (۲۶-۱) جدول ۶ را توضیح می‌دهند. چنین G -ساختارهاي ناورداری (G) از اطلس‌های $\text{Aff}(G)$ شوند، که شامل چارت‌هایی از \mathbb{E}_d هستند که توابع گذار آنها مقاديری در (G) می‌گيرند (معادله (۳۶۴))؛ به شکل ۰۴۹ مراجعه کنيد. تمام گزارهایی که در مختصات \mathbb{R}^d بيان می‌شوند، می‌توانند از طریق چارت‌ها به يک چارچوب مستقل از مختصات ترجمه شوند، که ما در اينجا آن را توسعه می‌دهيم. اطلاعات بيشتر در مورد رابطه بين چارت‌های مختصاتي و پیمانه‌ها را می‌توان در پيوست آ يافت.

۱.۲.۹ چارت‌های آفین و اطلس‌های $\text{Aff}(G)$

يك فضای اقلیدسي \mathbb{E}_d با بعد d با \mathbb{R}^d همسان‌ريخت است و بنابراین چارت‌های سراسري را می‌پذيرد^{۹۶}

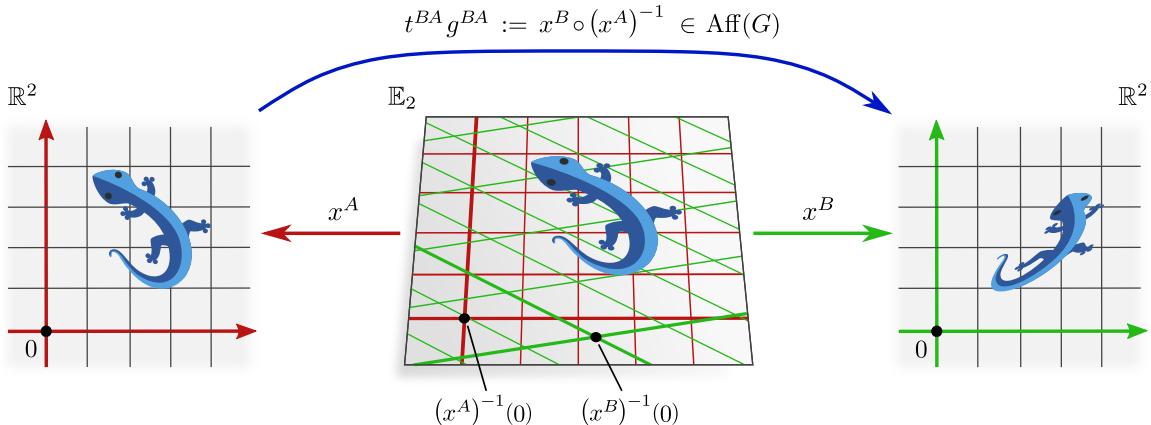
$$x^A : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d. \quad (۳۷۲)$$

در ادامه ما هميشه اين چارت‌ها را به عنوان نگاشتهای آفین، يعني ايزومورفيسمهای فضاهای آفین، که هم خطی (يعني خطوط راست را به خطوط راست می‌نگارند) و نسبت فاصله‌ها را حفظ می‌کنند، در نظر خواهيم گرفت. از انجا که ترکيب نگاشتهای آفین، خود نگاشت آفین است، نتيجه

^{۹۳} به طور رسمي، $\{e\}$ -ساختار کانوني \mathbb{R}^d به صورت زير به وجود می‌آيد: فضای برداري $M = \mathbb{R}^d$ با $e_i \in \mathbb{R}^d$ با عناصر $e_i = \delta_{ij}$ (داده می‌شود)، همراه است. قاب‌های مرتع کانوني فضاهای مماس $T_p \mathbb{R}^d$ از اين پايه از طریق ايزومورفيسمهای کانوني \mathbb{R}^d به دست می‌آيد (۵۳۰) به دست می‌آيد. به طور شهودي، قاب‌های محلی فضاهای مماس $T_p \mathbb{R}^d \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^d$ با قاب سراسري \mathbb{R}^d «هم‌تاز» هستند. اين معادل با معرفی نگاشت همانی به عنوان چارت مختصاتي سراسري $x = \text{id}_{\mathbb{R}^d} : M = \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ و سپس تعریف $\{e\}$ -ساختار کانوني به عنوان میدان پايه‌های مختصاتي القابی $\left[\frac{\partial}{\partial x_i} \right]_{i=1}^d$ است.

^{۹۴} اين متريک استاندارد η به عنوان يول يک ضرب داخلی استاندارد $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ بر روی \mathbb{R}^d از طریق ايزومورفيسمهای کانوني $\eta_p(v, w) := \langle \iota_{\mathbb{R}^d, p}(v), \iota_{\mathbb{R}^d, p}(w) \rangle_{\mathbb{R}^d}$ به فضاهای مماس تعریف می‌شود. بنابراین برای هر $v, w \in T_p \mathbb{R}^d$ به صورت $\eta_p(v, w) := \langle \iota_{\mathbb{R}^d, p}(v), \iota_{\mathbb{R}^d, p}(w) \rangle_{\mathbb{R}^d}$ داده می‌شود.

^{۹۵} اين واقعيت که \mathbb{E}_d و \mathbb{R}^d به صورت سراسري همسان‌ريخت (يا حتى ايزومتریک) هستند، توضیح می‌دهد که چرا اکثر کارهای مرتبط، فضاهای برداري \mathbb{R}^d را به عنوان مدل‌هایي از فضاهای اقلیدسي در نظر می‌گيرند. رویکرد ما در اين بخش کمی دقیق‌تر است زيرا حداقل ساختار لازم برای تعریف کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM را در فضاهای اقلیدسي $M = \mathbb{E}_d$ معرفی می‌کند.



شکل ۴۹: نمایش چارت‌های آفین $x^X : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ که مختصات سراسری را به فضاهای اقلیدسی اختصاص می‌دهند. هم \mathbb{E}_d و \mathbb{R}^d فضاهای آفین هستند، به طوری که می‌توان خواست که چارت‌ها نگاشت‌های آفین باشند، که هم خطی و نسبت فاصله‌ها را حفظ می‌کنند. ما یک اطلس $\mathcal{A}_{\mathbb{E}_d}^{\text{Aff}(G)}$ با نماد $\text{Aff}(G)$ به عنوان اطلسی مشکل از چارت‌هایی تعریف می‌کنیم که توسط تابع گذار $t^{BA} g^{BA} := x^B \circ (x^A)^{-1}$ هستند، به یکدیگر مرتبط می‌شوند. چارت‌ها در یک اطلس \mathcal{A}^G حداقل در انتخاب مبدأ $(x^X)^{-1}(0)$ و یک تبدیل G با هم تفاوت دارند. انتخاب یک اطلس \mathcal{A}^G ، مشکل از چارت‌های x^X یک G -اطلس \mathcal{A}^G از پیمانه‌های \hat{dx}^X را القا می‌کند. G -ساختار متناظر GM که در شکل ۵۰ برای گروه‌های مختلف G ، مثال زده شده است، تحت عمل $(\text{Aff}(G))$ ناوردا است. قضیه ۹.۸ ثابت می‌کند که کاتولوشن‌های GM روی چنین G -ساختارهایی، همورا هستند.

(مارمولک‌ها با مجوز توپیتر تحت لایسنس بین‌المللی <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>. اقتباس شده‌اند.)

می‌شود که تابع گذار چارت

$$x^B \circ (x^A)^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (373)$$

تبدیلات آفین از \mathbb{R}^d هستند، یعنی اعضایی در $\text{Aff}(\text{GL}(d))$. بنابراین تابع گذار به طور یکتا به یک انتقال $t^{BA} \in \mathcal{T}_d$ و یک عضو $g^{BA} \in \text{GL}(d)$ تجزیه می‌شوند:

$$t^{BA} g^{BA} := x^B \circ (x^A)^{-1} \quad (374)$$

نماد g^{BA} در اینجا تصادفی نیست زیرا این اعضای گروه با تبدیلات پیمانه‌ای که توسط گذار چارت‌ها القا می‌شوند، مطابقت دارند، که در قضیه ۹.۲ در ادامه ثابت شده است.

با توجه به انتخاب یک گروه آفین $\text{Aff}(G)$ ، ما اطلس‌های \mathcal{A}^G از \mathbb{E}_d را به عنوان آن دسته از اطلس‌های چارت‌های سراسری از \mathbb{R}^d به \mathbb{E}_d تعریف می‌کنیم که تابع گذار چارت آنها مقادیری در $\text{Aff}(G)$ می‌گیرند:

تعريف ۹.۱ (اطلس \mathcal{A}^G از فضای اقلیدسی). فرض کنید \mathfrak{X} یک مجموعه اندیس برای نام‌گذاری چارت‌ها باشد و برای هر $X \in \mathfrak{X}$ ، $x^X : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ یک چارت آفین سراسری از \mathbb{E}_d باشد. اطلس

$$\mathcal{A}_{\mathbb{E}_d}^{\text{Aff}(G)} = \{(\mathbb{E}_d, x^X) \mid X \in \mathfrak{X}\} \quad (375)$$

یک اطلس $\text{Aff}(G)$ نامیده می‌شود اگر تمام توابع گذار چارت آن مقادیری در $\text{Aff}(G)$ بگیرند، یعنی اگر

$$x^B \circ (x^A)^{-1} \in \text{Aff}(G) \quad \forall A, B \in \mathfrak{X}. \quad (376)$$

شکل ۴۹ چارت‌های آفین و نگاشت‌های گذار چارت با مقادیر $\text{Aff}(G)$ بین آنها را به تصویر می‌کشد.

۲.۲.۹ ۱-اطلس‌ها و ۱-ساختارهای القا شده

هر چارت مختصاتی سراسری $x^A : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ یک پیمانه سراسری را القا می‌کند که به صورت نقطه‌ای توسط گرادیان‌های چارت داده می‌شود

$$\psi_{TM,p}^A := \hat{dx}_p^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (377)$$

به معادله (۵۴۰) در پیوست آ.۳ و جدول ۷ مراجعه کنید. بنابراین یک چارت‌ها از چارت‌های متناظر با یک اطلس از پیمانه‌ها است. به طور خاص، با توجه به اینکه چارت‌ها یک اطلس $\text{Aff}(G)$ را تشکیل می‌دهند، تضمین می‌شود که تبدیلات پیمانه دارای مقادیر G هستند، یعنی پیمانه‌های القا شده یک G -اطلس را تشکیل می‌دهند:

کنید

قضیه ۹.۲ (اطلس‌های $\text{Aff}(G)$ از چارت‌ها، G -اطلس‌هایی از پیمانه‌ها را القا می‌کنند). فرض \mathcal{A} یک اطلس $\text{Aff}(G)$ از چارت‌ها باشد. اطلس القا شده از پیمانه‌ها

$$\mathcal{A}^G = \{(\mathbb{E}_d, x^X) \mid X \in \mathfrak{X}\} \quad (378)$$

تضمین می‌شود که یک G -اطلس باشد. به طور خاص، اگر نگاشتهای گذار چارت با $x^B \circ (x^A)^{-1} = t^{BA} g^{BA}$ داده شوند، نگاشتهای گذار بین پیمانه‌ها در هر نقطه \mathbb{E}_d با $p \in G$ با $g_p^{BA} = g^{BA}$ داده می‌شوند.

اثبات: توابع گذار بین پیمانه‌های القا شده توسط چارت، طبق معادله (۵۵۳)، با ژاکوبین نگاشتهای گذار چارت منطبق هستند، یعنی،

$$g_p^{BA} = \hat{dx}_p^B \circ (\hat{dx}_p^A)^{-1} = \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)}. \quad (379)$$

عبارت آخر، سوءاستفاده معمول از نمادگذاری برای ژاکوبین‌های نگاشتهای گذار چارت است، که در معادله (۵۴۷) به صورت مؤلفه‌ای به شکل زیر تعریف شد:

$$\frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\nu^A} \Big|_{x^A(p)} := \partial_\nu (x_\mu^B \circ (x^A)^{-1}) \Big|_{x^A(p)}. \quad (380)$$

با استفاده از اینکه نگاشتهای گذار چارت با $x^B \circ (x^A)^{-1} = t^{BA} g^{BA}$ داده می‌شوند، این نتیجه می‌دهد که

$$(g_p^{BA})_{\mu\nu} = \partial_\nu (x_\mu^B \circ (x^A)^{-1})(x) \Big|_{x^A(p)} = \partial_\nu (g^{BA} x + t^{BA})_\mu \Big|_{x^A(p)} = g_{\mu\nu}^{BA}, \quad (381)$$

یعنی تبدیلات پیمانه القا شده g_p^{BA} مقابله‌ای در G دارند و با g^{BA} مطابقت دارند (که این نمادگذاری را توجیه می‌کند). از آنجا که این استدلال برای هر $p \in \mathbb{E}_d$ و هر چارت \mathfrak{X} با $A, B \in \mathfrak{X}$ برقرار است، نتیجه می‌شود که اطلس القا شده از پیمانه‌ها یک G -اطلس است. \square

همانطور که در بخش ۴.۶ بحث شد، هر G -اطلس از پیمانه‌ها یک G -ساختار GM را القا می‌کند. طبق معادله (۱۸۴)، GM به صورت نقطه‌ای توسط

$$G_p M := (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(G), \quad (382)$$

تعیین می‌شود، که در آن انتخاب خاص پیمانه $\mathfrak{X} \in A$ دلخواه است. چارچوب‌های موجود در $G_p M$ پایه‌های مختصاتی $= [\frac{\partial}{\partial x_\mu^A}]_p^d$ با $\mu=1$ و تمام تبدیلات G آنها هستند. از آنجا که اطلس ماسیمال $\text{Aff}(G)$ با $\mu=1$ به تعریف $\text{Aff}(G)$ -ناوردا است، همین امر برای G -ساختار القا شده نیز صادق است (با عملی که از طریق هر چارت تعریف می‌شود، همانطور که در ادامه روشن و اثبات شده است). شکل ۵۰ چنین G -ساختارهایی را برای گروه‌های آفین مختلف نشان می‌دهد. در بخش بعدی ما ثابت می‌کنیم که کانولوشن‌های GM متناظر، تحت عمل $\text{Aff}(G)$ هموردا هستند.

همانطور که مشخص می‌شود، GM به عنوان یک کلاف اصلی با $\mathbb{R}^d \cong \mathbb{E}_d$ (به صورت غیرکانونی) ایزومorf است، که در آن

$$q : \text{Aff}(G) \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad tg \mapsto t \quad (383)$$

نگاشت خارج‌قسمتی کانونی گروه آفین است (پس از یکی گرفتن هم‌دسته‌های tG با انتقال‌های t).^{۹۶} جای تعجب نیست که این ایزومورفیسم کلاف اصلی به انتخاب چارت بستگی دارد.

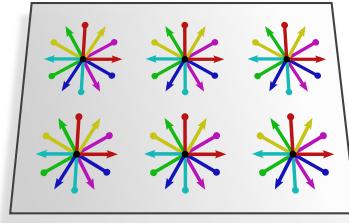
قضیه ۹.۳ (ایزومورفیسم کلاف اصلی بین $(G, \text{Aff}(G))$ و $(GM, \text{Aff}(G))$). فرض کنید GM یک G -ساختار القا شده توسط اطلس $\text{Aff}(G)$ روی \mathbb{E}_d باشد. آنگاه GM به عنوان یک کلاف اصلی با $\mathbb{R}^d \xrightarrow{q} \mathbb{R}^d$ ایزومorf است، یعنی ایزومورفیسم‌هایی وجود دارد

$$\alpha^A : \text{Aff}(G) \rightarrow GM, \quad tg \mapsto (\psi_{GM, (x^A)^{-1}(t)})^{-1}(g) \quad (384)$$

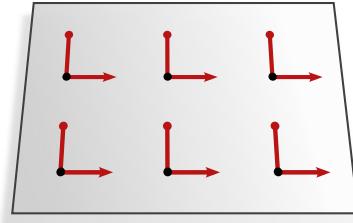
۹

$$(x^A)^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{E}_d \quad (385)$$

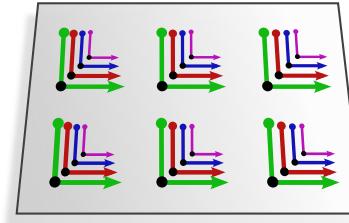
^{۹۶} ما به طور ضمنی از یک ایزومورفیسم کانونی $\text{Aff}(G)/G \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^d$ استفاده می‌کنیم، که در آن t در سمت چپ یک عضو گروه انتقال در $\mathcal{T}_d = (\mathbb{R}^d, +)$ و در سمت راست یک بردار در \mathbb{R}^d را نشان می‌دهد.



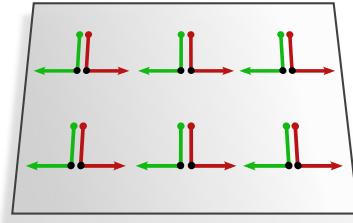
ب) $\text{Aff}(\text{SO}(2))$ -ساختار SOM القا شده توسط اطلس $\text{SO}(2)$ روی $M = \mathbb{E}_2$, که تحت انتقال‌ها و دوران‌ها در $\text{Isom}_{\text{SOM}} = \text{SE}(2)$ حفظ می‌شود.



(ج) $\text{Aff}(\{e\})$ -ساختار $\mathcal{R}M$ القا شده توسط اطلس $\{e\}$ روی $M = \mathbb{E}_2$, که تحت انتقال‌ها در $\text{Isom}_{\{e\}}M = \mathcal{T}_2$ حفظ می‌شود.



(د) $\mathcal{S}M$ القا شده توسط اطلس \mathcal{S} روی $M = \mathbb{E}_2$, که تحت انتقال‌ها و مقیاس‌بندی‌ها در $\text{Aff}(\mathcal{S}) = \mathcal{T}_2 \times \mathcal{S}$ حفظ می‌شود. توجه داشته باشید که $\text{Isom}_{\mathcal{S}M} = \mathcal{T}_2$ زیرا مقیاس‌بندی‌ها ایزومتریک نیستند.



(ج) $\mathcal{R}M$ القا شده توسط اطلس \mathcal{R} روی $M = \mathbb{E}_2$, که تحت انتقال‌ها و بازتاب‌ها در $\text{Isom}_{\mathcal{R}M} = \mathcal{T}_2 \times \mathcal{R}$ حفظ می‌شود.

شکل ۵: نمایش G -ساختارهای مختلف GM در فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d .^{۹۰} آنچه در شکل ۴-ساختار ناوردای انتقالی $\{e\}M$ را نشان می‌دهد که مناظر با کانون‌شناسی اقلیدسی متغیر است. سه G -ساختار دیگر مناظر با CNN-ها G -راهبری‌پذیر غیربدینه هستند. آنها به صورت محلی روی تمام زوست‌هایی که توسط مجموعه خاصی از چارچوب‌های مرتع در $G_p M$ به هم مرتبط هستند، تعیین می‌یابند. از آنجا که G -ساختارها $\text{Aff}(G)$ -ناوردا هستند^{۹۶} (قضیه می‌شود)، کانون‌شناسی G -راهبری‌پذیر به صورت سراسری نسبت به $\text{Aff}(G)$ هموردا هستند (قضیه ۹۸). به جای تعریف G -ساختارها از طریق یک اطلاع (Aff(G)) از چارت‌ها، می‌توان آنها را از طریق یک ارتقای G -به صورت G -ساختار کانونی \mathbb{R}^d تعریف کرد (معادله ۳۷۱)، که چارچوب‌های موجود در $\{e\}M := \{e\}GM \triangleleft G$ را با تمام چارچوب‌های مرتبط با G مجهر می‌کند.

به طوری که نمودار زیر جایجایی است:

$$\begin{array}{ccc} \text{Aff}(G) \times G & \xrightarrow{\alpha^A \times \text{id}_G} & GM \times G \\ \downarrow \cdot & & \downarrow \lhd \\ \text{Aff}(G) & \xrightarrow{\alpha^A} & GM \\ q \downarrow & & \downarrow \pi_{GM} \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{(x^A)^{-1}} & \mathbb{E}_d \end{array} \quad (386)$$

وارون α^A در اینجا با

$$(\alpha^A)^{-1} : GM \rightarrow \text{Aff}(G), \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto tg \quad \square\square\square\square \quad \begin{cases} t = x^A \circ \pi_{GM}([e_i]_{i=1}^d) \\ g = \psi_{GM, \pi_{GM}([e_i]_{i=1}^d)}^A([e_i]_{i=1}^d) \end{cases} \quad (387)$$

داده می‌شود. توجه داشته باشید که این ایزومورفیسم‌ها در تناظر یک به یک با چارت‌های سازگار با $\text{Aff}(G)$ از اطلس مورد نظر هستند.

اثبات: برای اثبات این گزاره، باید نشان دهیم که α^A و $(\alpha^A)^{-1}$ واقعاً وارون یکدیگر هستند، که یک نگاشت کلاف روی x^A است و α^A همورداً راست نسبت به G است. اینکه $(\alpha^A)^{-1}$ هم یک وارون چپ و هم یک وارون راست خوش‌تعريف برای α^A است، به راحتی توسعه خواننده بررسی می‌شود. اینکه α^A یک نگاشت کلاف روی $(x^A)^{-1}$ است به این معناست که مربع پایینی نمودار جایجایی است. این $\pi_{GM} \circ \alpha^A(tg) = \pi_{GM} \circ (\psi_{GM, (x^A)^{-1}(tg)})^{-1}(g) = (x^A)^{-1}(t)$ و $(x^A)^{-1} \circ q(tg) = (x^A)^{-1}(t)$ امر با مشاهده اینکه $(x^A)^{-1}(t)$

برای هر $tg \in \text{Aff}(G)$ برابر هستند، دیده می‌شود. جابجایی مرتع بالایی در نمودار، یعنی هموردایی-راست α^A نسبت به G ، از این واقعیت ناشی می‌شود که $\tilde{g} = \alpha^A(tg) \triangleleft \tilde{g} = (\psi_{GM, (x^A)^{-1}(t)})^{-1}(g\tilde{g}) = (\psi_{GM, (x^A)^{-1}(t)})^{-1}(g)$ برای هر G و هر $\tilde{g} \in G$ برقرار است. در مرحله دوم از این واقعیت استفاده شد که $\psi_{GM, (x^A)^{-1}(t)}$ هموردایی-راست نسبت به G است (معادله (۱۸۸)، که هموردایی وارون آن را نتیجه می‌دهد. در مجموع، این ویژگی‌ها نشان می‌دهند که α^A یک ایزومورفیسم کلافی است. \square

۳.۲.۹ تبدیلات آفین مستقل از مختصات

از آنجا که ما می‌خواهیم هموردایی کانولوشن‌های GM را تحت تبدیلات آفین در یک چارچوب مستقل از مختصات اثبات کنیم، باید گروه‌هایی از تبدیلات آفین \mathbb{E}_d را به جای \mathbb{R}^d مانند بالا، معروف کنیم. چارت‌ها گروه‌های آفین مستقل از مختصات را به گروه‌های آفین $\text{Aff}(G)$ از \mathbb{R}^d مرتبط خواهند کرد. ما با گروه کامل

$$\text{Aff}(\mathbb{E}_d) := \{\phi : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{E}_d \mid \phi \text{ یک تبدیل آفین از } \mathbb{E}_d \text{ است}\} \quad (۳۸۸)$$

از تبدیلات آفین یک فضای اقلیدسی \mathbb{E}_d شروع می‌کنیم. اثبات اینکه $\text{Aff}(\mathbb{E}_d) = \text{Aff}(\text{GL}(d))$ ایزومورف است، آسان است، با ایزومورفیسم‌هایی که برای یک انتخاب دلخواه از چارت $x^A \mapsto x^A \phi(x^A)$ با ϕ داده می‌شوند. این گزاره در یک چارچوب کلی‌تر در قضیه ۹.۶ در ادامه اثبات شده است.

همانند مورد ایزومتری‌ها، ما زیرگروه‌های $\text{Aff}_{GM} \leq \text{Aff}(\mathbb{E}_d)$ از تبدیلات آفین حافظ G -ساختار را تعریف می‌کنیم:

۹.۴ (تبدیلات آفین حافظ G -ساختار). فرض کنید GM هر G -ساختاری روی \mathbb{E}_d باشد. ما زیرگروه متناظر از تبدیلات آفین حافظ G -ساختار را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{Aff}_{GM} := \{\phi \in \text{Aff}(\mathbb{E}_d) \mid \phi_{*,FM} G_p M = G_{\phi(p)} M \quad \forall p \in \mathbb{E}_d\} \leq \text{Aff}(\mathbb{E}_d). \quad (۳۸۹)$$

این تعریف را با تعریف Isom_{GM} در تعريف ۸.۱ مقایسه کنید. همانند مورد Isom_{GM} ، تضمین می‌شود که تبدیلات پیمانه‌ای که توسط تبدیلات آفین در القا می‌شوند، مقادیری در G داشته باشند. این گزاره توسط قضیه زیر رسمیت می‌یابد، که اساساً مشابه قضیه ۸.۳ است:

۹.۵ (قضیه زیر ایزومتری محلی). فرض کنید $\phi \in \text{Aff}(\mathbb{E}_d)$ در ت Aff_{GM} باشد. آنگاه سه گزاره زیر معادل هستند:

۱. ϕ حافظ G -ساختار است، یعنی، $\phi \in \text{Aff}_{GM}$.
۲. پول‌بک تبدیل آفین $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$ از هر پیمانه GM را تعریف می‌کند، با آن G -اطلس، G -سازگار است.
۳. عبارت مختصاتی $\phi_{*,FM}$ نسبت به هر پیمانه $\psi_{FM,\phi(p)}^{\tilde{A}}$ از G -اطلس FM مقادیری در گروه ساختار می‌گیرد، یعنی، $\psi_{FM,\phi(p)}^{\tilde{A}}(p) := \psi_{FM,\phi(p)}^A \phi_{*,FM}(\psi_{FM,p}^{\tilde{A}})^{-1} = \hat{d}x_{\phi(p)}^A \phi_{*,TM}(\hat{d}x_p^{\tilde{A}})^{-1}$ مقادیری در G دارد.

اثبات: اثبات مشابه اثبات قضیه ۸.۳ است. به طور کلی‌تر، این گزاره برای دیفیوژن‌های دلخواه نیز برقرار است. \square

تبدیلات پیمانه القا شده، تبدیل عبارات مختصاتی اعضای کلاف، به عنوان مثال ضرایب بردارهای مماس یا ویژگی، را توصیف می‌کنند. عمل تبدیل آفین ϕ روی خود منیفلد \mathbb{E}_d نیز می‌تواند در مختصات \mathbb{R}^d توصیف شود. این کار با ضرب چپ و راست ϕ با هر چارت (آفین) انجام می‌شود، که بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم آن را در مکان مبدأ و مقصد برابر در نظر بگیریم زیرا ما فقط چارت‌های سراسری را در نظر می‌گیریم. عبارت مختصاتی حاصل $t_{\phi}^{AA} g_{\phi}^{AA}$ که توسط نمودار جابجایی زیر تعریف می‌شود،

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{x^A} & \mathbb{E}_d & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{E}_d & \xrightarrow{x^A} & \mathbb{R}^d \\ & & \underbrace{\hspace{10em}}_{t_{\phi}^{AA} g_{\phi}^{AA}} & & & & \end{array} \quad (۳۹۰)$$

تضمین می‌شود که مقادیری در $\text{Aff}(G)$ بگیرید اگر ϕ G -ساختار را حافظ کند.

۹.۶ (قضیه ایزومتری آفین سراسری). فرض کنید GM G -ساختار القا شده توسط یک اطلس $\text{Aff}(G)$ باشد و $x^A : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ یک چارت از این اطلس باشد. عبارت مختصاتی یک عضو $\phi \in \text{Aff}_{GM}$ نسبت به x^A آنگاه با

$$x^A \phi(x^A)^{-1} =: t_{\phi}^{AA} g_{\phi}^{AA} \in \text{Aff}(G), \quad (۳۹۱)$$

داده می‌شود، که در آن

$$t_{\phi}^{AA} := x^A \phi(x^A)^{-1}(\cdot) \in \mathcal{T}_d \quad \text{و} \quad g_{\phi}^{AA} := \hat{dx}_{\phi(p)}^A \phi_{*,TM} (\hat{dx}_p^A)^{-1} \in G \quad (392)$$

عضو G در عبارت مختصاتی در اینجا با تبدیل پیمانه القا شده $G \in \mathbb{E}_d$ از قضیه ۹.۵ در هر نقطه $p \in \mathbb{E}_d$ منطبق است. علاوه بر این، نگاشت مختصاتی سازی

$$\text{Aff}_{GM} \rightarrow \text{Aff}(G), \quad \phi \mapsto x^A \phi(x^A)^{-1}, \quad (393)$$

یک ایزومورفیسم گروهی است.

اثبات: از آنجا که $x^A \phi$ نگاشته‌های آفین هستند، $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d : x^A \phi(x^A)^{-1}$ یک تبدیل آفین از \mathbb{R}^d است، یعنی عضوی از $(\text{GL}(d))(\mathbb{R})$ (یا زیرگروهی از آن). این بدان معناست که بسط تیلور مرتبه اول عبارت، دقیق است. بنابراین کاربرد عبارت مختصاتی به یک عضو دلخواه $x \in \mathbb{R}^d$ را می‌توان بر حسب بسط تیلور زیر حول مبدأ از \mathbb{R}^d نوشت:

$$\begin{aligned} [x^A \phi(x^A)^{-1}](x) &= [x^A \phi(x^A)^{-1}](\cdot) + \frac{\partial}{\partial x'} [x^A \phi(x^A)^{-1}]_{x'=\cdot} \cdot x \\ &= t_{\phi}^{AA} + g_{\phi}^{AA} \cdot x \\ &= (t_{\phi}^{AA} g_{\phi}^{AA}) x \end{aligned} \quad (394)$$

در اینجا ما به طور ضمنی انتقال $t_{\phi}^{AA} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ را تعریف کردیم و آنها را با اعضای گروه یکی گرفتیم، که این کار ممکن است زیرا تمام مورفیسم‌های درگیر، وارون پذیر هستند.

اینکه ژاکوبین g_{ϕ}^{AA} با تبدیل پیمانه القا شده (p) در یک نقطه دلخواه $M \in p$ مطابقت دارد، با بازنویسی آن از طریق معادله (۵۳۱) بر حسب دیفرانسیل‌ها نشان داده می‌شود:

$$\begin{aligned} g_{\phi}^{AA} &= \frac{\partial}{\partial x'} [x^A \phi(x^A)^{-1}]_{x'=x^A(p)} \\ &= \iota_{\mathbb{R}^d} d[x^A \phi(x^A)^{-1}]_{x^A(p)} (\iota_{\mathbb{R}^d})^{-1} \\ &= \iota_{\mathbb{R}^d} dx_{\phi(p)}^A d\phi_p (dx_p^A)^{-1} (\iota_{\mathbb{R}^d})^{-1} \\ &= \hat{dx}_{\phi(p)}^A \phi_{*,TM} (\hat{dx}_p^A)^{-1} \\ &= g_{\phi}^{AA}(p) \end{aligned} \quad (395)$$

در مرحله ماقبل آخر ما دیفرانسیل $d\phi$ را به عنوان یک نماد جایگزین برای پوش‌فوروارد $\phi_{*,TM}$ و گرادیان‌های چارت را همانطور که در معادله (۵۴۰) تعریف شده، شناسایی کردیم. اندیس p در نماد $g_{\phi}^{AA}(p)$ به دلیل دلخواه بودن آن حذف شده است.

اینکه $t_{\phi}^{AA} g_{\phi}^{AA}$ نه تنها عضوی از $\text{Aff}(G)$ بلکه از زیرگروه آن (۹.۵) است، روشن است زیرا قضیه ۹.۵ بیان می‌کند که $\phi \in \text{Aff}_{GM}$ برای هر $g_{\phi}^{AA}(p) \in G$

برای اثبات اینکه نگاشت مختصاتی سازی $C^A : \text{Aff}_{GM} \rightarrow \text{Aff}(G)$ ، $\phi \mapsto x^A \phi(x^A)^{-1}$ واقعاً یک ایزومورفیسم گروهی است، باید نشان دهیم که آن ۱) یک همومورفیسم گروهی، ۲) یک به یک و ۳) پوشاست. اینکه C^A یک همومورفیسم گروهی است، بالاصله از تعریف آن نتیجه می‌شود زیرا

$$\begin{aligned} C^A(\phi \tilde{\phi}) &= x^A \phi \tilde{\phi}(x^A)^{-1} \\ &= x^A \phi(x^A)^{-1} x^A \tilde{\phi}(x^A)^{-1} \\ &= C^A(\phi) C^A(\tilde{\phi}) \end{aligned} \quad (396)$$

برای هر $\phi, \tilde{\phi} \in \text{Aff}_{GM}$ نیازمند این است که برای هر $\phi, \tilde{\phi} \in \text{Aff}_{GM}$ $C^A(\phi \tilde{\phi}) = C^A(\tilde{\phi}) C^A(\phi)$ نتیجه دهد. اینکه این مورد برقرار است، روشن است زیرا $C^A(\phi) = x^A \phi(x^A)^{-1}$ معادل است با $x^A \phi(x^A)^{-1} \tilde{\phi}(x^A)^{-1} = C^A(\tilde{\phi})$. که تساوی ϕ و $\tilde{\phi}$ را نتیجه می‌دهد زیرا $x^A \phi(x^A)^{-1} \tilde{\phi}(x^A)^{-1} = C^A(\phi \tilde{\phi})$ است. در آخر، C^A پوشاست اگر و تنها اگر برای هر $t g \in \text{Aff}_{GM}$ یک ایزومورفیسم است. به عنوان یک آنساتز، فرض کنید $\phi = (x^A)^{-1} t g x^A$. به طوری که $C^A(\phi) = t g C^A(x^A)$. به وجود داشته باشد، به طوری که $C^A(\phi) = t g$. به عنوان یک آنساتز، فرض کنید $\phi = (x^A)^{-1} t g x^A$. به طوری که $C^A(\phi) = t g$. آنچه باقی می‌ماند نشان دادن این است که این ساختار ϕ واقعاً عضوی از Aff_{GM} است. همانطور که به

راحتی می‌توان بررسی کرد، $\phi \in \text{Aff}_{GM}$ به طوری که $\phi^{AA} = g \in G$ از قضیه ۹.۵ نتیجه می‌شود، که با آن پوشایش بودن برقرار است. در کل، این اثبات می‌کند که $C^A : \text{Aff}_{GM} \rightarrow \text{Aff}(G)$ یک ایزومورفیسم گروهی است اگر Aff_{GM} توسط یک اطلس $\text{Aff}(G)$ القا شده باشد. \square

ایزومورفیسم بین Aff_{GM} و $\text{Aff}(G)$ یکتا نیست، زیرا به چارت خاص در نظر گرفته شده بستگی دارد. انتخاب‌های مختلف با خودربختی‌های داخلی $\text{Aff}(G)$ مرتبط هستند زیرا

$$C^B(\phi) = x^B \phi(x^B)^{-1} = x^B(x^A)^{-1}x^A \phi(x^A)^{-1}x^A(x^B)^{-1} = (t^{BA}g^{BA})C^A(\phi)(t^{BA}g^{BA})^{-1}. \quad (۳۹۷)$$

این تحلیل ما از هندسه‌ای اقلیدسی و G -ساختارهای G -ناوردا را که برای تعریف کانولوشن‌های اقلیدسی مستقل از مختصات در بخش بعدی لازم است، به پایان می‌رساند.

۳.۹ CNN‌های هموردای گروه آفین در فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d

اکنون به بررسی کانولوشن‌های GM اقلیدسی روی G -ساختارهای القا شده توسط اطلس $\text{Aff}(G)$ می‌پردازیم. همانطور که در ادامه نشان خواهیم داد، این کانولوشن‌ها هنگامی که در یک چارت بیان شوند، به کانولوشن‌های کلاسیک G -راهبری‌پذیر روی \mathbb{R}^d خلاصه می‌شوند. هموردایی آفین آنها در قضیه ۹.۸ در یک چارچوب مستقل از مختصات اثبات شده است.

بازیابی کانولوشن‌های متعارف روی \mathbb{R}^d : کانولوشن‌های GM به طور حیاتی به پول‌بک انتقال‌دهنده f^* از میدان‌های ویژگی بستگی دارند، که به نوبه خود به انتقال‌دهنده‌های موازی و نگاشت‌نمایی وابسته است. در فضاهای اقلیدسی، این عملیات شکل بسیار ساده‌ای به خود می‌گیرند، که ابتدا به آن می‌پردازم.

همانطور که قبلاً گفته شد، انتقال‌دهنده‌های لوی-چیوپتا بردارهای مماس را در فضاهای اقلیدسی به گونه‌ای جابجا می‌کنند که در معنای معمول در فضاهای اقلیدسی موازی باقی بمانند؛ به شکل ۲۲ مراجعه کنید. فرض کنید $x^A : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ هر چارت سراسری از یک اطلس $\text{Aff}(G)$ باشد. از آنجا که میدان چارچوب القا شده "موازی" است، انتقال‌دهنده‌ها در امتداد هر مسیر γ هنگامی که نسبت به پیمانه‌های القا شده \hat{dx}_p^A بیان شوند، بدینهای می‌شوند:

$$g_\gamma^{AA} = e \quad \text{برای هر مسیر } \gamma \quad (۳۹۸)$$

این به طور خاص دلالت بر این دارد که انتقال‌دهنده‌های بردار ویژگی در این پیمانه با نگاشت‌های همانی داده می‌شوند، یعنی $\rho(g_\gamma^{AA}) = \text{id}_{\mathbb{R}^c}$ برای هر مسیر γ . $\quad (۳۹۹)$

هنگامی که نگاشت‌نمایی در یک چارت بیان شود، به جمع عبارات مختصاتی نقطه و بردار خلاصه می‌شود:

$$x^A(\exp_p v) = x^A(p) + \hat{dx}_p^A(v) \quad (۴۰۰)$$

علاوه بر این، ما باید میدان‌های ویژگی را در مختصات بیان کنیم، یعنی آنها را از طریق چارت (سراسری، وارون) از \mathbb{E}_d به \mathbb{R}^d پول‌بک می‌کنیم،

$$F^A := f^A \circ (x^A)^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad (۴۰۱)$$

که توسط نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccc} & F^A & \\ \mathbb{R}^d & \xleftarrow{x^A} & \mathbb{E}_d \xrightarrow{f^A} \mathbb{R}^c \end{array} \quad (۴۰۲)$$

با این اجزا در دست، پول‌بک انتقال‌دهنده، معادله (۶۷)، از میدان‌های ویژگی در فضاهای اقلیدسی را می‌توان در مختصات به صورت زیر بیان کرد

$$\begin{aligned} [\exp_p^* f]^A(v) &= \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(\hat{dx}_p^A)^{-1}(v^A)}^{AA}) f^A \exp_p((\hat{dx}_p^A)^{-1}(v)) \\ &= f^A(x^A)^{-1} x^A \exp_p((\hat{dx}_p^A)^{-1}(v)) \\ &= F^A(x^A(p) + v). \end{aligned} \quad (۴۰۳)$$

بنابراین عبارت مختصاتی کانولوشن GM ، معادله (۸۷)، به صورت زیر در می‌آید

$$f_{\square\square}^A(p) = [K * f_{\square\square}]^A(p) = \int_{\mathbb{R}^d} K(v) [\exp_p^* f_{\square\square}]^A(v) dv = \int_{\mathbb{R}^d} K(v) F_{\square\square}^A(x^A(p) + v) dv. \quad (۴۰۴)$$

این نشان می‌دهد که کانولوشن‌های GM در فضاهای اقلیدسی، کانولوشن‌های (همبستگی‌های) متعارف هستند.

قضیه ۹.۷ (کانولوشن‌های GM) در فضاهای اقلیدسی، کانولوشن‌های روی \mathbb{R}^d را بازیابی می‌کنند. فرض کنید GM یک G -ساختمان شده توسط یک اطلس $\text{Aff}(G)$ از چارت‌ها باشد، همانطور که در بخش ۲.۹ تعریف شد. هنگامی که نسبت به هر چارت سراسری $\mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ از این اطلس $\text{Aff}(G)$ بیان شود، کانولوشن GM شکل یک کانولوشن (همبستگی) متعارف $*$ را به خود می‌گیرد:

$$F_{\square\!\square\!\square}^A(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(v) F_{\square\!\square\!\square}^A(x+v) dv = [K * F_{\square\!\square\!\square}^A](x) \quad (4.05)$$

اثبات: این گزاره با ارزیابی معادله (۴.۰۴) در $F_{\square\!\square\!\square}^A = f_{\square\!\square\!\square}^A \circ (x^A)^{-1}(x) = (x^A)^{-1}(x^A)$ در سمت چپ به دست می‌آید. \square

قبل از پرداختن به اثبات هموردایی کانولوشن‌های GM اقلیدسی در یک چارچوب مستقل از مختصات، ما استقلال از مختصات آن را در نظر می‌گیریم \square همانطور که خواهیم دید، هر دو مفهوم به شدت به هم مرتبط هستند. تمام آنچه برای نشان دادن استقلال از مختصات لازم است، قانون تبدیل پولبک‌های میدان ویژگی به \mathbb{R}^d از طریق چارت‌ها است. قانون تبدیل مستقیماً از توابع گذار نتیجه می‌شود و می‌توان آن را از جایجای نمودار زیر

$$\begin{array}{ccccc} & & F^A & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathbb{R}^d & & \mathbb{E}_d & & \mathbb{R}^c \\ t^{BA}g^{BA} \downarrow & & \downarrow & & \rho(g^{BA}) \downarrow \\ & \nearrow & & \searrow & \\ & x^A & & f^A & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ \mathbb{R}^d & & F^B & & \mathbb{R}^c \\ & \swarrow & & \searrow & \\ & x^B & & f^B & \end{array} \quad (4.06)$$

خواند که به صورت زیر داده می‌شود:

$$F^B = \rho(g^{BA}) F^A (t^{BA}g^{BA})^{-1}. \quad (4.07)$$

توجه داشته باشید که این قانون تبدیل دقیقاً نمایش القابی $F^B = t^{BA}g^{BA} \triangleright_\rho F^A$ است که در معادله (۳۶۸) معرفی شد. با استفاده از هموردایی کانولوشن متعارف با کرنل‌های G -راهنمایی پذیر از معادله (۳۶۹)، این نتیجه می‌دهد

$$K * F_{\square\!\square\!\square}^B = K * (t^{BA}g^{BA} \triangleright_{\rho_{\square\!\square\!\square}} F_{\square\!\square\!\square}^A) = t^{BA}g^{BA} \triangleright_{\rho_{\square\!\square\!\square}} (K * F_{\square\!\square\!\square}^A) = t^{BA}g^{BA} \triangleright_{\rho_{\square\!\square\!\square}} F_{\square\!\square\!\square}^A = F_{\square\!\square\!\square}^B \quad (4.08)$$

بنابراین دیده می‌شود که هموردایی فعال $\text{Aff}(G)$ کانولوشن‌های کلاسیک G -راهنمایی پذیر روی \mathbb{R}^d از بخش ۱.۹، استقلال از مختصات غیرفعال $\text{Aff}(G)$ کانولوشن‌های GM اقلیدسی را نتیجه می‌دهد و برعکس. این دو، دو روی یک سکه هستند. علاوه بر این، می‌توان هموردایی $\text{Aff}(G)$ کانولوشن GM را در چارچوب مستقل از مختصات اثبات کرد، که در ادامه این کار را انجام خواهیم داد.

هموردایی گروه آفین برای اثبات هموردایی گروه آفین کانولوشن‌های GM اقلیدسی، ابتدا قانون تبدیل میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات $f \in \Gamma(\mathcal{A})$ را تحت تبدیلات آفین $\phi \in \text{Aff}_{GM}(\mathcal{A})$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi \triangleright f = \phi_{*,\mathcal{A}} f \phi^{-1}, \quad (4.09)$$

یعنی همانند ایزومتری‌ها در تعریف ۸.۲^{۹۷} پول‌بک انتقال‌دهنده (لوی-چیویتا) از یک میدان ویژگی تبدیل شده آفین $f \triangleright \phi$ نسبت به یک چارت آفین^A با عبارت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
& [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)]^A(\mathfrak{v}) \\
& \stackrel{(1)}{=} [\text{Exp}_p^*(\phi_{*,A} f \phi^{-1})]^A(\mathfrak{v}) \\
& \stackrel{(2)}{=} \underbrace{\rho(g_p^{AA} \leftarrow \exp_p(\hat{dx}_p^A)^{-1}(\mathfrak{v}))}_{= \text{id}_{\mathbb{R}^c}} \psi_{A,p}^A(\phi_{*,A} f \phi^{-1}) \exp_p((\hat{dx}_p^A)^{-1}(\mathfrak{v})) \\
& \stackrel{(3)}{=} \psi_{A,p}^A \phi_{*,A} [(\psi_{A,\phi^{-1}(p)}^A)^{-1} \psi_{A,\phi^{-1}(p)}^A] f [(x^A)^{-1} x^A] \phi^{-1} [(x^A)^{-1} x^A] \exp_p((\hat{dx}_p^A)^{-1}(\mathfrak{v})) \\
& \stackrel{(4)}{=} [\psi_{A,p}^A \phi_{*,A} (\psi_{A,\phi^{-1}(p)}^A)^{-1}] [\psi_{A,\phi^{-1}(p)}^A f (x^A)^{-1}] [x^A \phi^{-1} (x^A)^{-1}] [x^A \exp_p((\hat{dx}_p^A)^{-1}(\mathfrak{v}))] \\
& \stackrel{(5)}{=} \rho(g_\phi^{AA}) F^A (t_\phi^{AA} g_\phi^{AA})^{-1} (x^A(p) + \mathfrak{v}) \\
& \stackrel{(6)}{=} [(t_\phi^{AA} g_\phi^{AA}) \triangleright_\rho F^A] (x^A(p) + \mathfrak{v})
\end{aligned} \tag{410}$$

این عبارت به پول‌بک انتقال‌دهنده از میدان تبدیل نشده از طریق نمایش القایی (معادله (۳۶۸)) مرتبط می‌شود، که با عبارت مختصاتی از ϕ عمل می‌کند (معادله (۳۹۱)). دو مرحله اول از معادله (۴۰۹) و تعریف پول‌بک انتقال‌دهنده در مختصات استفاده می‌کنند، که در آن $\text{id}_{\mathbb{R}^c} = \psi_{A,p}^A(\phi_{*,A} f \phi^{-1})^A := \psi_{A,p}^A$. برای ترجمه تمام مورفیسم‌ها به عبارات مختصاتی مربوطه، مرحله سوم همانی‌های $t_\phi^{AA} g_\phi^{AA}$ را وارد می‌کند، که در مرحله چهارم دوباره دسته‌بندی می‌شوند تا روش‌شود کدام ترکیب‌ها پس از مرحله پنجم به عبارات مختصاتی منجر می‌شوند. برای مرحله ۵ به یاد بیاورید که، طبق قضیه ۹.۶، برای هر p در \mathbb{E}_d همانطور که در بالا گفته شد، مرحله آخر قانون تبدیل حاصل در مختصات را به عنوان عمل نمایش القایی شناسایی می‌کند.

با این نتیجه می‌توانیم هموردايی Aff_{GM} کانولوشن‌های اقلیدسی را در چارچوب مستقل از مختصات اثبات کنیم. این قضیه ۸.۹ را که هموردايی ایزومتری کانولوشن‌های GM را اثبات می‌کند، برای مورد خاص فضاهای اقلیدسی تعمیم دهد.

قضیه ۹.۸ (هموردايی آفین کانولوشن‌های اقلیدسی): فرض کنید GM یک G -ساختار باشد که توسط یک اطلس (G) از فضای اقلیدسی $M = \mathbb{E}_d$ القا شده و فرض کنید بردارهای ویژگی مطابق با اتصال لوی-چیویتا روی \mathbb{E}_d منتقل می‌شوند. کانولوشن GM متناظر، تصمین می‌شود که تحت عمل تبدیلات آفین حافظ G -ساختار $\text{Aff}_{GM} \cong \text{Aff}(G)$ هموردا باشد. در معادلات، برای میدان‌های K ویژگی دلخواه G -راهبری‌پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square\square\square}}$ داریم که

$$[K \star (\phi \triangleright f_{\square\square})] = \phi \triangleright [K \star f_{\square\square}] \quad \forall \phi \in \text{Aff}_{GM}, \tag{411}$$

یعنی نمودار زیر برای هر ϕ در Aff_{GM} جایجاًی است:

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) & \xrightarrow{\phi \triangleright} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \\
K \star \downarrow & & \downarrow K \star \\
\Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square\square}) & \xrightarrow[\phi \triangleright]{} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square\square})
\end{array} \tag{412}$$

اثبات: فرض کنید $x^A : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ هر چارت سراسری از اطلس (G) مورد نظر باشد و $p \in \mathbb{E}_d$ اثبات ما از هموردايی Aff_{GM} با بیان کانولوشن نسبت به این مختصات و استفاده از هموردايی $\text{Aff}(G)$ کانولوشن‌های کلاسیک G -راهبری‌پذیر روی \mathbb{R}^d از معادله (۳۶۹) انجام می‌شود:

$$\begin{aligned}
& \psi_{A_{\square\square\square\square}, p}^A [K \star (\phi \triangleright f_{\square\square})](p) \\
& = \int_{\mathbb{R}^d} K(\mathfrak{v}) [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f_{\square\square})]^A(\mathfrak{v}) d\mathfrak{v} \quad (\text{کانولوشن } GM \text{ در مختصات، معادله (۸۷)})
\end{aligned} \tag{413}$$

^{۹۷} از آنجا که کلاف بردار ویژگی به عنوان یک G -کلاف، یعنی مرتبط با GM تعریف شده است، پوشش فورواردها فقط برای تبدیلات آفین حافظ G -ساختار در قابل تعریف هستند.

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \left[(t_\phi^{AA} g_\phi^{AA}) \triangleright_{\rho_{\square\square}} F_{\square\square}^A \right] (x^A(p) + v) \, dv && (\text{پول بک انتقال دهنده تبدیل شده، معادله (۴۱۰)}) \\
&= \left[K * (t_\phi^{AA} g_\phi^{AA}) \triangleright_{\rho_{\square\square}} F_{\square\square}^A \right] (x^A(p)) && (\text{کانولوشن } * \text{ شناسایی شده روی } \mathbb{R}^d) \\
&= \left[t_\phi^{AA} g_\phi^{AA} \triangleright_{\rho_{\square\square}} (K * F_{\square\square}^A) \right] (x^A(p)) && (\text{هموردایی } \text{Aff}(G) \text{ روی } \mathbb{R}^d, \text{ معادله (۳۶۹)}) \\
&= \rho_{\square\square} (g_\phi^{AA}) (K * F_{\square\square}^A) \left((t_\phi^{AA} g_\phi^{AA})^{-1} x^A(p) \right) && (\text{نمایش القایی } \rho_{\square\square}, \text{ معادله (۳۶۸)}) \\
&= \rho_{\square\square} (g_\phi^{AA}) (K * F_{\square\square}^A) (x^A(\phi^{-1}(p))) && (\text{عبارت مختصاتی } \phi, \text{ معادله (۳۹۱)}) \\
&= \rho_{\square\square} (g_\phi^{AA}) \int_{\mathbb{R}^d} K(v) F_{\square\square}^A (x^A(\phi^{-1}(p)) + v) \, dv && (\text{کانولوشن بسطداده شده } * \text{ روی } \mathbb{R}^d) \\
&= \rho_{\square\square} (g_\phi^{AA}) \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \left[\text{Exp}_{\phi^{-1}(p)}^* f_{\square\square} \right]^A(v) \, dv && (\text{پول بک انتقال دهنده اقلیدسی، معادله (۴۰۳)}) \\
&= \rho_{\square\square} (g_\phi^{AA}) \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, \phi^{-1}(p)}^A [K * f_{\square\square}] \phi^{-1}(p) && (\text{کانولوشن } GM \text{ در مختصات، معادله (۸۷)}) \\
&= \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^A \phi_{*, \mathcal{A}_{\square\square}} [K * f_{\square\square}] \phi^{-1}(p) && (\text{پوش فوروارد در مختصات، معادله (۳۰۲)}) \\
&= \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^A [\phi \triangleright [K * f_{\square\square}]](p) && (\text{عمل } GM \text{ روی میدان های ویژگی، معادله (۴۰۹)})
\end{aligned}$$

این گزاره نتیجه می شود زیرا $\psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^A$ یک ایزومورفیسم است.

□

به طور خلاصه، کانولوشن های GM اقلیدسی با G -ساختارهای القا شده توسط اطلس $\text{Aff}(G)$ دو ویژگی زیر را دارد:

استقلال از مختصات : $\text{Aff}(G)$ تضمین می شود که آنها در هر چارت از اطلس $\text{Aff}(G)_{\mathbb{E}_d^{\text{Aff}(G)}}$ ، یعنی $\mathcal{A}_{\mathbb{E}_d}^{\text{Aff}(G)}$ نتایج معادل تولید کنند. این ویژگی در معادله (۴۰۸) نشان داده شد و در شکل ۴۹ به عنوان تبدیل بین چارت ها به تصویر کشیده شده است.

هموردایی فعال : $\text{Aff}(G)$ همانطور که در قضیه ۹.۸ اثبات شد، آنها تحت تبدیلات فعل میدان های ویژگی توسط $\text{Aff}_{GM} \cong \text{Aff}(G)$ هموردا هستند. در شکل ۴۹، این متناظر با یک تبدیل سیگنال روی \mathbb{E}_d خواهد بود، که در یک تبدیل فعل روی نمایش آن نسبت به همان چارت منعکس می شود.

اثبات هر دو ویژگی در نهایت به هموردایی فعل $\text{Aff}(G)$ کانولوشن های کلاسیک G -راهبری پذیر روی \mathbb{R}^d در معادله (۳۶۹) متکی است.

۴.۹ CNN های اقلیدسی در مقالات

تمام مدل های موجود در ردیف های (۲۶-۱) جدول ۶، کانولوشن های GM هستند که در بعض های قل مورد بحث قرار گرفتند. آنها در ابعاد d فضای اقلیدسی، گروه ساختار G و در نتیجه گروه تقارن سراسری $\text{Aff}(G)$ ، نمایش های گروهی یا انواع میدان ρ و انتخاب های گسترش سازی متفاوت هستند. این بخش به طور خلاصه مدل ها را با گروهمندی آنها بر اساس انواع میدانشان به مدل های نمایش تحويل ناپذیر، (۴۰۰) مدل های نمایش منظم (متناظر با کانولوشن های گروهی) و انواع آنها، مدل های نمایش خارج قسمتی و غیره مورد بحث قرار می دهد. CNN های متعارف، که ابتدا آنها را مور می کنند، کمی از این طبقبندی خارج می شوند زیرا گروه ساختاری بدیهی اینها منجر به میدان های ویژگی و کرنل هایی بدون هیچ گونه محدودیت تقارنی می شود.

ردیف (۱) کانولوشن های GM اقلیدسی را روی $\{e\}$ -ساختارهای ناوردای انتقالی فهرست می کند که در شکل ۵۰ آ به تصویر کشیده شده است. به دلیل بدیهی بودن گروه ساختار $\{e\}$ ، هیچ تبدیل پیمانه ای (غیر بدیهی) وجود ندارد و تنها انتخاب ممکن برای نمایش گروه، نمایش بدیهی است. بنابراین، محدودیت راهبری پذیری G -بدیهی می شود، به طوری که فضای کرنل های کانولوشن قابل قبول، نامحدود باقی می ماند. هنگامی که از طریق یک چارت به \mathbb{R}^d پول بک شود، کانولوشن GM طبق قضیه ۹.۷ به یک کانولوشن (همبستگی) متعارف تبدیل می شود. قضیه ۹.۸ هموردایی انتقالی آن را تأیید می کند. بنابراین، دیده می شود که این مدل ها با شبکه های کانولوشنی متعارف توسط \mathbb{R}^d مطابقت دارند.

تمام مدل های اقلیدسی دیگر در ردیف های (۲۶-۲) گروه های ساختاری غیر بدیهی را در نظر می گیرند. می توان آنها را به عنوان کانولوشن های متعارف روی \mathbb{R}^d با محدودیت اضافی بر روی کرنل ها برای G -راهبری پذیر بودن در نظر گرفت، که هموردایی $\text{Aff}(G)$ آنها را تضمین می کند.

ویژگی های نمایش تحويل ناپذیر (Irrep): شبکه های موجود در ردیف های (۴، ۹، ۱۰، ۱۷، ۲۳، ۲۶) و (۲۶) بر روی میدان های ویژگی عمل می کنند که مطابق با نمایش های تحويل ناپذیر (irreps) از $G = \text{SO}(2)$ که در ردیف (۴) فهرست شده است، این

امر به شبکه‌های به اصطلاح هارمونیک منجر می‌شود [۴]. این نام از این واقعیت نشأت می‌گیرد که محدودیت کرنل در این حالت فقط به هارمونیک‌های دایره‌ای با مکان‌یابی طیفی فرکانس $m - n$ اجازه می‌دهد، هنگام نگاشت بین میدان‌هایی که مطابق با نمایش‌های تحویل‌ناپذیر مرتبه n در ورودی و مرتبه m در خروجی تبدیل می‌شوند.^{۹۸} محدودیت بازنگاهی اضافی برای $G = \text{SO}(2)$ که در ردیف (۱۰) فهرست شده است، قوانین انتخاب پاریته را اضافه می‌کند که فاز هارمونیک‌های دایره‌ای را ثابت می‌کند و نیمی از درجات آزادی را در مقایسه با حالت $G = \text{SO}(2)$ سرکوب می‌کند [۹]. مدل‌های [۴] در ردیف (۱۷) نمایش‌های تحویل‌ناپذیر^{۹۹} $G = \text{SO}(2)$ را در نظر می‌گیرند و بنابراین می‌توان آنها را به عنوان مشابه مدل‌های ردیف (۴) در سه بعد در نظر گرفت. فضای کرنل‌های معتر برای نگاشت بین میدان‌هایی که مطابق با نمایش‌های تحویل‌ناپذیر (ماتریس‌های \mathbb{W} و \mathbb{V}) از مرتبه‌های n و تبدیل می‌شوند، در اینجا توسط تمام هارمونیک‌های کروی از $\min(m, n) + 1$ مرتبه j با $m + n \leq j \leq m$ تولید می‌شود. همانطور که در [۴] اثبات شده است، این امر به هر گروه ساختاری فشرده تعیین می‌یابد، و فرکانس‌های مجاز هارمونیک‌ها توسط ضرایب متناظر کلیش-گردن که با mn و j بحسب گذاری شده‌اند، تعیین می‌شوند. نوعی از این رویکرد در ردیف (۲۳) فهرست شده است [۹]. یک کالولوشن از یک میدان اسکالار ورودی با هارمونیک‌های کروی، میدان‌های نمایش تحویل‌ناپذیر از مرتبه متناظر را تولید می‌کند. با این حال، به جای پردازش بیشتر این ویژگی‌های نمایش تحویل‌ناپذیر از طریق کالولوشن‌ها، نویسنده‌گان نرم آنها را محاسبه می‌کنند. این کار منجر به میدان‌های اسکالار می‌شود که در لایه بعدی به همین روش پردازش می‌شوند. مدل [۹] در ردیف (۲۶) متریک استاندارد اقلیدسی را فرض نمی‌کند بلکه متریک مینکوفسکی را در نظر می‌گیرد. گروه ساختاری آن گروه لورنس (۱, ۱) $G = \text{SO}(d - 1, 1)$ و گروه با راهبری پذیری بدیهی با کرنل‌های ۲-ناؤردا است زیرا کالولوشن‌های گراف استاندارد بر روی آن، متناظر با یک کالولوشن از ثوابت ساختاری جریانی آنها پیشنهاد می‌کنند.

یک مورد خاص از نمایش‌های تحویل‌ناپذیر، نمایش‌های بدیهی هستند که بردارهای ویژگی G -ناؤردا (اسکالارها) را توصیف می‌کنند. به دلیل ناؤرداشی، چنین ویژگی‌هایی نمی‌توانند تفاوت بین هیچ الگویی را در ژسته‌های مرتبط با G کدگذاری کنند. محدودیت روى کرنل‌هایی که بین میدان‌های اسکالار نگاشت انجام می‌دهند، به $\rho_{\text{mm}}(\tilde{g})F = K(g)$ ^{۱۰۰} برای گروه‌های متناظر با $g \in \mathbb{R}^d$ و هر $K(g) = K(g)$ است که در هر کanal به طور جداگانه تحت عمل G ناؤردا هستند، تحمیل می‌کند. این برای بازنگاهی $G = \mathcal{R}$ در ورودی بالا سمت چه جدول ۳ به تصویر کشیده شده است. تفسیر شبکه پیکسلی یک تصویر به عنوان یک گراف و اعمال یک کالولوشن گراف استاندارد بر روی آن، متناظر با یک کالولوشن با راهبری پذیری بدیهی با کرنل‌های گراف استاندارد کرنل‌های همسانگرد را اعمال می‌کنند [۹].

یک مزیت ویژگی‌های نمایش تحویل‌ناپذیر از دیدگاه عملی، ابعاد پایین و در نتیجه مصرف حافظه کمتر برای هر میدان ویژگی است. با این حال، نتایج تجربی نشان می‌دهد که کالولوشن‌های راهبری پذیر متناظر معمولاً عملکرد پایین‌تری نسبت به انواع دیگر میدان‌ها، به عنوان مثال آنها بیکار از اساس نمایش‌های منظم هستند، کسب می‌کنند. این گزاره در ارزیابی ما از کالولوشن‌های موبیوس در بخش ۲.۴.۵ و بنچمارک کالولوشن‌های اقلیدسی هموردای ایزومنتری در [۹] منعکس شده است.

ویژگی‌های منظم و کالولوشن‌های گروهی: احتمالاً بر جسته‌ترین دسته از نمایش‌های گروهی در یادگیری عمیق هموردا، نمایش‌های منظم از گروه‌های ساختاری هستند. نمایش‌های منظم بر روی یک فضای مناسب $\mathbb{R} \rightarrow G$ با انتقال آنها عمل می‌کنند، یعنی $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ با انتقال آنها عمل می‌کنند، یعنی $f(g) = F(\tilde{g})F$ ^{۱۰۱} برای گروه‌های متناظر، این به معنای میدان‌های ویژگی با تعداد کانال‌های $c = |G|$ است که توسط مرتبه گروه داده می‌شود. از آنجا که گروه‌های غیرمنظمی به معنای نمایش‌های منظم غیرمنظمی هستند، ویژگی‌های مربوطه در عمل گسته‌سازی می‌شوند، که عمدتاً با در نظر گرفتن یک زیرگروه منتهی از گروه ساختاری انجام می‌شود. از آنجا که میدان‌های ویژگی منظم $f \in \Gamma(A)$ یک تابع $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ است که در هر نقطه $p \in M$ اختصاص می‌دهند (هنگامی که نسبت به هر پیمانه A در p بیان می‌شوند)، آنها با توابع با مقادیر حقیقی $\tilde{f}: GM \rightarrow \mathbb{R}$ معادل هستند.^{۱۰۲} برای حالت G توسط یک اطلس $\text{Aff}(G)$ القا می‌شود، این علاوه بر این با توابع با مقادیر حقیقی $\mathbb{R} \rightarrow \text{Aff}(G) \cong GM$ روى \tilde{f} (در امتداد ایزومنورفیسم در معادله (۳۸۴)) معادل است. نگاشتهای خطی هموردا بین توابع روی گروه $\text{Aff}(G)$ کالولوشن‌های گروهی هستند (به معادله (۶۰۱) در بخش ت و بخش ۱۱.۷ در [۹] مراجعه کنید)، که به این معنی است که CNN‌های متناظر بر کالولوشن گروهی آفین توسعه چارچوب ما پوشش داده می‌شوند [۹].

کالولوشن‌های گروهی G در جدول ۶ در ردیفهای $\text{Aff}(G)$ در ردیفهای (۲۴)، (۲۵) و (۲۶) فهرست شده‌اند. از آنجا که این مدل‌ها معمولاً تصاویر خاکستری یا اسکالار را پردازش می‌کنند، آنها یک کالولوشن اولیه از میدان‌های اسکالار به میدان‌های منظم اعمال می‌کنند، و به دنبال آن کالولوشن‌های گروهی، یعنی کالولوشن‌ها از میدان‌های منظم به منظم را انجام می‌دهند. از آنجا که نمایش‌های منظم، نمایش‌های جایگشتی هستند، آنها معمولاً غیرخطی‌های نقطه‌ای مانند ReLU را به هر یک از کانال‌های میدان به طور جداگانه اعمال می‌کنند. CNN^{۱۰۳} هموردای بازنگاهی روی \mathcal{R} از [۹] در ردیف (۳) کرنل‌های \mathcal{R} -راهبری پذیر را اعمال می‌کند، همانطور که در بخش ۵ استخراج شده و در ورودی پایین سمت راست جدول ۳ به تصویر کشیده شده است. از آنجا که گروه بازنگاهی با مرتبه $2 = |\mathcal{R}|$ است، میدان‌های ویژگی منظم دارای دو کانال هستند که هر کدام به یکی از دو جهت‌گیری چارچوب از \mathcal{R} -ساختار در شکل ۵ مرتبط است. مدل حاصل به صورت سراسری ($\mathcal{T}_2 \times \mathcal{R} = \text{Aff}(\mathcal{R})$) هموردا است. برای ساخت کالولوشن‌های گروهی G در شکل ۵ ب با میدان‌های ویژگی $\text{SE}(2) = \text{Aff}(\text{SO}(2))$ -هموردا، در تئوری باید $\text{SO}(2)$ را در ساختار را در شکل ۵ ب با میدان‌های ویژگی

^{۹۸} هنگام در نظر گرفتن نمایش‌های تحویل‌ناپذیر مختلط از $\text{SO}(2)$ فقط فرکانس $m - n$ مجاز است. برای نمایش‌های تحویل‌ناپذیر حقیقی، محدودیت به فرکانس‌های $|m - n|$ و اجازه می‌دهد. جزئیات بیشتر را می‌توان در پیوستهای [۹] و [۱۰] در [۹] یافت.

^{۹۹} به عنوان مثال، برای گروه‌های تپولوژیکی، توابع معمولاً باید پیوسته باشند. برای گروه‌های فشرده محلی معمولاً فضای $(G^L)^*$ از توابع انتگرال‌پذیر مربع روی G در نظر گرفته می‌شود.

^{۱۰۰} نمایش‌های منظم روی یک میدان \mathbb{K} متفاوت از اعداد حقیقی، مقداری در این میدان می‌گیرند، یعنی $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$.

^{۱۰۱} قضیه ۱. در پیوست ح این ایزومنورفیسم $(\mathcal{A}_{\text{mm}}(C^{\infty}(GM)) \cong \Gamma)$ را برای حالت عملی مرتبط که G یک گروه متناظر است، اثبات می‌کند.

^{۱۰۲} از آنجا که عمل نگاشتهای غیرخطی به پایه انتخاب شده بستگی دارد، این همان چیزی است که واقعاً میدان‌های ویژگی منظم (با هر میدان غیر تحویل‌ناپذیر دیگر) را از تجزیه آنها به میدان‌های نمایش تحویل‌ناپذیر متمایز می‌کند؛ به پاورقی ۱۶ و بحث در بخش ۲.۵ مراجعه کنید.

که مطابق با نمایش منظم (\mathcal{S}) تبدیل می‌شوند، در نظر گرفت. در عمل، اکثر مدل‌های ردیف (5) از جدول 6 این را از طریق نمایش‌های منظم $\text{SO}(2) \leq \text{SO}(N)$ که زیرگروه‌های متناهی از دوران‌های $\text{SO}(N)$ با مضرب‌هایی از $N/2\pi$ هستند، تقریب می‌زنند. از آنجا که مرتبه گروه‌ها $|C_N| = N$ است، میدان‌های ویژگی متناظر N -بعدی هستند. در حالی که عملکرد مدل در ابتدا به طور قابل توجهی با $\text{A}(\mathcal{S})$ افزایش می‌باشد، به طور تحریک مشخص شده است که در حدود 8 تا 12 جهت نمونه‌برداری شده به اشباع می‌رسد $[?]$. برای درک شهوه‌ی از فضاهای کرنل‌های C_N -راهنری پذیر به تصاویر در $[?]$ مراجعه می‌کنیم. کاتولوشن‌های گروهی $(\mathcal{S}) = \text{Aff}(\mathcal{S})$ در ردیف (11) به طور مشابه از طریق زیرگروه‌های دووجه‌ی $D_N \leq 2N$ که از N دوران، هر کدام در دو بازتاب، تشکیل شده‌اند، تقریب زده می‌شوند. میدان‌های ویژگی در این حالت $\mathcal{T}_d \times \mathcal{S} = \text{Aff}(\mathcal{S})$ هستند. همودایی همزمان تحت انتقال و مقیاس‌بندی توسط کاتولوشن‌های گروهی (\mathcal{S}) در ردیف‌های (2) و (5) به دست می‌آید. گروه مقیاس‌بندی در اینجا معمولاً گسته‌سازی می‌شود. از آنجا که این کار هنوز به یک مرتبه گروه (شمارا) نامتناهی منجر می‌شود، پیاده‌سازی‌ها برش‌های را معزی می‌کنند، یعنی مقیاس‌های حداقل و حداکثر همانطور که توسط چارچوب‌ها در شکل 5.0 نشان داده شده است. توجه داشته باشید که این امر به اثرات متری مشابه کاتولوشن‌های متعارف در لبه یک تصویر منجر می‌شود. مدل‌های ردیف‌های (19) و (21) نسبت به انتقال‌ها، دوران‌ها و برای مورد دوم، بازتاب‌ها در فضاهای اقلیدسی سه‌بعدی \mathbb{E}^3 همودا هستند. در حالی که $[?]$ یک گسته‌سازی مونت کارلو از نمایش منظم را انتخاب می‌کنند، مدل‌های $[?]$ بر اساس زیرگروه‌های گسته مختلف از $\text{SO}(3)$ یا 3 هستند. یک محدودیت فعلی مدل‌های همودایی دورانی و بازنی مبتنی بر کاتولوشن گروهی در سه بعد، نیاز بالای آنها به حافظه و محاسبات است. به عنوان مثال، گروه تقارن مکعب، که هنوز ضوضع نسبتاً درشتی از دوران‌ها با $2/\pi$ دارد، در حال حاضر از 48 عضو گروه تشکیل شده است که به معنای میدان‌های ویژگی 48 -بعدی در فضای سه‌بعدی است. از سوی دیگر، تعداد زیاد تقارن‌ها نشان‌دهنده کارایی داده سیار بهبود یافته چنین مدل‌هایی است: نویسنده‌گان $[?]$ عملکرد یکسانی را از یک مدل همودا در مقایسه با یک شبکه غیرهمودا (قابل راهبری با $\{e\}$) گزارش می‌دهند علی‌رغم اینکه روی یک مجموعه داده 10 برابر کوچکتر آموزش دیده‌اند. مدل‌های ردیف‌های (24) و (25) روی \mathbb{E}^3 کاتولوشن‌ی $[?]$ با این حال، آنها گروه‌های ساختاری دوری و دووجه‌ی C_4 و D_4 را در نظر می‌گیرند، یعنی دوران‌ها و بازتاب‌های صفحه‌ای حول محور ζ (که به این ترتیب تعریف شده است). بنابراین کرنل‌های راهبری پذیر آنها مشابه کرنل‌های ردیف‌های (5) و (11) هستند اما علاوه بر این در یک جهت جدید ζ گسترش می‌یابند.

جمعیت از منظم به اسکالار و بردار: یک تنوع از شبکه‌های کاتولوشنی گروهی، مدل‌های ردیف‌های $(7.8, 13, 16)$ و (20) هستند که با $\text{vector} \rightarrow \text{regular}$ و $\text{trivial} \rightarrow \text{regular}$ برچسب‌گذاری شده‌اند. پس از اعمال یک کاتولوشن به میدان‌های ویژگی منظم، آنها یک عملیات تجمیع \max را روی کاتال‌ها نجات می‌دهند که منجر به میدان‌های اسکالار (بدیهی) می‌شود $[?]$. یا یک تجمیع \max به همراه یک argmax بزرگ مدل‌هایی نشان دهد که کاتولوشن‌ها بعدی از میدان‌های اسکالار یا برداری حاصل به میدان‌های ویژگی منظم نگاشت می‌یابند. از آنجا که عملیات تجمیع تعداد کاتال‌ها را به طور قابل توجهی از $|G|$ به ترتیب به 1 یا d کاهش می‌دهد، مدل‌ها از نظر حافظه و محاسبات کارآمدتر از کاتولوشن‌های گروهی متعارف می‌شوند. نقطه ضعف این است که تجمیع با از دست دادن اطلاعات همراه است، که به طور تحریک مشخص شده است که عملکرد مدل را کاهش می‌دهد $[?]$.

ویژگی‌های خارج‌قسمتی: ردیف‌های $(6, 12)$ و (22) مدل‌های را فهرست می‌کنند که میدان‌های ویژگی آنها مطابق با نمایش‌های خارج‌قسمتی از گروه ساختاری تبدیل می‌شوند، که نمایش‌های جایگشتی مشابه نمایش‌های منظم هستند. با توجه به یک زیرگروه \widehat{G} از G ، نمایش خارج‌قسمتی متناظر بر روی توابع اسکالار $F : G/\widehat{G} \rightarrow \mathbb{R}$ در فضای خارج‌قسمتی G/\widehat{G} از طریق انتقال عمل می‌کند، یعنی $= [\rho_{\text{vector}}(\tilde{g})F](g\widehat{G})$. F بنابراین ابعاد میدان‌های ویژگی با اندیس $[G]$ از \widehat{G} در G داده می‌شود که برای گروه‌های متناهی برابر با $|G|/\|\widehat{G}\|$ است. میدان‌های ویژگی که تحت نمایش‌های خارج‌قسمتی تبدیل می‌شوند را می‌توان به عنوان میدان‌های ویژگی منظم با تقارن محدود در نظر گرفت که مجبورند مقدار یکسانی را روی تمام اعضای گروه در یک هم‌دسته \widehat{G} از G در \widehat{G} دارند. یک مثال خاص، نمایش‌های ردیف (22) هستند که با خارج‌قسمت $S^3 \cong \mathbb{R}^3/2$ مرتبط هستند. به جای اجازه دادن به کرنل‌های کاتولوشن دلخواه، محدودیت کرنل در اینجا به کرنل‌های منجر می‌شود که تحت دوران حول محور ζ ناوردا هستند؛ به تصاویر در $[?]$ مراجعه کنید. جزئیات بیشتر و یک شهود گرافیکی در مورد میدان‌های ویژگی مبتنی بر نمایش خارج‌قسمتی را می‌توان در پیوست \square از $[?]$ یافت. نظریه پیشنهادی در $[?]$ میدان‌های خارج‌قسمتی را از دیدگاه جایگزین کاتولوشن‌های گروهی روی فضاهای خارج‌قسمتی راست پوشش می‌دهد.

نمایش‌های القایی: یک تعمیم از نمایش‌های منظم و خارج‌قسمتی، نمایش‌های القایی مانند نمایش‌های تحویل‌ناپذیر القایی (2) در ردیف (14) از جدول 6 هستند. با توجه به هر نمایش تحویل‌ناپذیر (2) $\text{SO}(n)$ به صورت $\text{GL}(n) \rightarrow \text{SO}(2)$ است $[?]$ ، نمایش القایی $\rightarrow \text{Ind}_{\text{SO}(2)} \rho$: ρ ، $n = 2$ با $c = n/2$ $\text{SO}(2)$ از $\text{GL}(c)$ به روش زیر عمل می‌کند: بازتاب‌ها دو زیرفضای n -بعدی و متعامد از \mathbb{R}^{2n} را که متناظر با دو هم‌دسته در (2) $\text{SO}(2)$ هستند، جایگشت می‌کنند در حالی که دوران‌ها بر روی زیرفضاهای جداگانه از طریق ρ عمل می‌کنند. برای ρ که نمایش بدیهی از (2) $\text{SO}(2)$ است، این کار نمایش‌های خارج‌قسمتی را همانطور که در بالا بحث شد، بازیابی می‌کند. در مقایسه با میدان‌های ویژگی تحویل‌ناپذیر 2 ، میدان‌های نمایش تحویل‌ناپذیر القایی (2) عملکرد به طور قابل توجهی بهبود یافته‌اند را نشان می‌دهند. توصیف دقیق‌تر و ارزیابی تجربی این انواع میدان را می‌توان در $[?]$ یافت.

آخرین نوع نمایش فهرست شده در جدول 6 نمایش کواترنیونی از دوران‌های سه‌بعدی در ردیف (18) است $[?]$. این از نمایش معمول دوران‌ها از طریق کواترنیون‌ها استفاده می‌کند، که بر شناسایی کواترنیون‌های واحد با (2) $\text{SU}(2)$ وجود یک همومورفیسم گروهی پوشش از (2) $\text{SO}(3)$ به $\text{SO}(3)$ تکیه دارد. توجه داشته باشید که نمایش کواترنیونی در واقع یک نمایش تصویری از (3) $\text{SO}(3)$ است.



(ب) $\{e\}$ -ساختار ناوردای C_8 که به طور ضمنی توسط
فرض شده است.

(ا) $\{e\}$ -ساختار ناوردای (2) $SO(2)$ که به طور ضمنی توسط
فرض شده است.

شکل ۵۱: دو مثال از $\{e\}$ -ساختارها در صفحه سوراخدار \mathbb{E}_2 که ۱) تحت دوران حول مبدأ $\{ \cdot \}$ ناوردا هستند و ۲) متشکل از چارچوب‌های راست‌هنگار نسبت به متریک اقلیدسی استاندارد هستند. کاتولوشن‌های GM متاظلر، هموردای دورانی هستند اما هموردای انتقالی نیستند (در واقع، $\{ \cdot \}$ \mathbb{E}_2 حتی انتقال‌ها را نمی‌پذیرد).

در حالی که نظریه ما بر روی فضاهای اقلیدسی پیوسته فرمول‌بندی شده است، پیاده‌سازی‌ها میدان‌های ویژگی را بر روی زیرمجموعه‌های گستره نمونه‌برداری می‌کنند. رایج‌ترین گستره‌سازی \mathbb{E}_d بر حسب شبکه پیکسلی \mathbb{Z}^d است. یک جایگزین، شبکه‌های صفحه‌ای شش‌ضلعی روی \mathbb{E}_2 است که توسط $\{ \cdot \}$ بررسی شده است. اگر چنین شبکه‌های پیکسلی منظمی انتخاب شوند، یک پایه از کرنل‌های G -راهبری‌پذیر را می‌توان از پیش محاسبه کرد و بر روی این شبکه نمونه‌برداری کرد. داده‌هایی مانند رویدادها در فضازمان $\{ \cdot \}$ یا مولکول‌ها در \mathbb{R}^3 در عوض معمولاً با ابرهای نقطه نامنظم نمایش داده می‌شوند. در این حالت، کرنل‌ها باید به صورت تحلیلی داده شوند، که امکان نمونه‌برداری آنها را در طول پاس مستقیم فراهم می‌کند.

در نهایت، می‌خواهیم اشاره کنیم که مدل‌های سراسری $Aff(G)$ -هموردا وجود دارند که به صورت محلی G -هموردا نیستند. یک مثال، تجمعی ناوردای-تبدیل $(\mathbb{E}_2 - \mathbb{E}_2 - \mathbb{E}_2 - \mathbb{E}_2)$ است، که مجموعه‌ای از میدان‌های ویژگی تبدیل شده سراسری را به یک CNN متعارف می‌دهد و در نهایت ویژگی‌های حاصل را روی این تبدیلات تجمعی می‌کند، که منجر به یک توصیفگر ناوردا می‌شود.

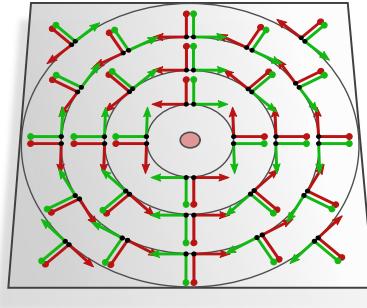
۱۰ CNN‌های هموردای دورانی در فضاهای اقلیدسی سوراخدار

مدل‌های موجود در ردیف‌های (۳۰-۳۷) جدول ۶ یک جایگزین جالب برای کاتولوشن‌های هموردای دورانی در فضاهای اقلیدسی سوراخدار $\{ \cdot \}$ ارائه می‌دهند. آنها بر G -ساختارهایی تکیه دارند که تحت دوران حول مبدأ انتخاب شده $\{ \cdot \}$ ناوردا هستند، همانطور که به عنوان مثال در شکل ۵۱ به تصویر کشیده شده است. با مشخص کردن یک مبدأ مرجح، این مدل‌ها ویژگی هموردایی انتقالی را ز دست می‌دهند.^{۱۰۳} با این حال، اگر G -ساختار علاوه بر این تحت مقیاس‌بندی نیز ناوردا باشد، که به عنوان مثال زمانی که توسط مختصات فراکتویی با یک مؤلفه شعاعی لگاریتمی القا می‌شود، صادق است (همانطور که در شکل ۵۳ نشان داده شده)، مدل‌ها نسبت به حاصلضرب مستقیم $SO(d) \times S^1$ از گروه دوران و مقیاس‌بندی هموردا می‌شوند. به طور مشابه، G -ساختارهای ناوردای دورانی و بازتابی، که در شکل ۵۲ به تصویر کشیده شده‌اند، بر هموردایی d کاتولوشن‌های GM متاظلر دلالت دارند.

این مدل‌ها به دو صورت به CNN‌های کروی، که در بخش ۱۱ در ادامه مورد بحث قرار می‌گیرند، مرتبط هستند. اول آنها G -ساختارهای ناوردای دورانی را روی $\mathbb{E}_d \setminus \{ \cdot \} \cong S^{d-1} \times \mathbb{R}^+$ فرض می‌کنند، که می‌توان آنها را متشکل از چندین G -ساختار ناوردای دورانی روی پوسته‌های کروی $(d-1)$ -بعدی S^{d-1} در شعاع‌های مختلف در نظر گرفت. بنابراین می‌توان این مدل‌ها را به عنوان CNN‌های (فرآ)کروی با یک بعد شعاعی اضافی \mathbb{R}^+ در نظر گرفت.^{۱۰۴} آنکه در شکل ۵۴ برای حالت $d=3$ بعد به تصویر کشیده شده است. ثانیاً، سیستم‌های مختصات قطبی $\{ \cdot \}$ [شکل‌های ۵۱ و ۵۳] G -ساختارهایی را القا می‌کنند که همان نوع تکینگی را در مبدأ خود نشان می‌دهند که CNN‌های کروی سوراخدار در شکل ۵۷ ب در قطب‌ها دارند. توجه داشته باشید که صفحه اقلیدسی سوراخدار $\mathbb{E}_2 \setminus \{n, s\}$ و کره سوراخدار $S^1 \setminus \{n, s\}$ (با قطب‌های شمال و جنوب $\{n, s\}$) حذف شده) هر دو از نظر توپولوژیکی معادل یک استوانه $\mathbb{R}^1 \times S^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}^+$ هستند و $\{e\}$ -ساختارهای استوانه‌ای که در شکل‌های ۵۱، ۵۳ (چپ) و ۵۷ به تصویر کشیده شده‌اند، دیفُئومورفیک هستند.

یک تفاوت عمده در مقایسه با شبکه‌های $SE(d)$ -هموردا از بخش قبل این است که مدل‌های بخش فعلی فقط به صورت سراسری حول مبدأ $SO(d)$ -هموردا هستند به جای اینکه به صورت محلی $SO(d)$ -هموردا ($SO(d)$ -راهبری‌پذیر) باشند. در حالی که مدل‌های هموردای سراسری به کرنل‌های $SO(d)$ -راهبری‌پذیر نیاز ندارند، آنها همچنان حداقل به کرنل‌های (1) -راهبری‌پذیر نیاز دارند. این به این دلیل است که $SO(d-1)$ -یک کلاف است که $SO(d)/SO(d-1) \cong SO(d-1)$ روى پوسته‌های کروی (1) روى پوسته‌های کروی $SO(d)$ به دوران.

^{۱۰۳} این مشکل را می‌توان با ترکیب شبکه با یک شبکه پیش‌بینی کننده مبدأ ناوردای انتقالی حل کرد.^{۱۰۴} توجه داشته باشید که هموردای دورانی مدل ترکیبی تنها در صورتی حفظ می‌شود که این پیش‌بینی کننده مبدأ $SE(d)$ -هموردا باشد.



شکل ۵۲: یک \mathcal{R} -ساختار ۲-ناوردا روی $\{\cdot\}_0$.
که با افزودن نسخهای بازتابیده به هر چارچوب \mathbb{E}_r -ساختار در شکل ۱۵۱ ساخته شده است.
کانولوشن GM متناظر به طور همزمان نسبت به $Isom_{RM} = 2$ دوران‌ها و بازتابهای سراسری در \mathbb{E}_r حول مبدأ هموردا است.

$SO(d)$ هموردا باشد. برای $d = 2$ این امر به $\{\cdot\}_e$ -ساختارها و کرنل‌های غیراهمی پذیر اجازه می‌دهد زیرا $SO(1) = \{e\} = SO(d-1) = SO(2) = \{e\}$ به شکل ۵۱ یا \mathbb{E}_2 مراجعه کنید. برای $d = 3$ این امر حداقل به یک $SO(2)$ -ساختار روی پوسته‌های کروی جداگانه نیاز دارد، که در شکل ۱۵۷ به تصویر کشیده شده است.

پس از این ملاحظات کلی، در ادامه به طور خلاصه مدل‌های جدایه روی $\{\cdot\}_d$ را که در مقالات یافته می‌شوند، از دیدگاه CNN‌های مستقل از مختصات مرور خواهیم کرد. ما با مدل‌های داده شروع می‌کنیم، که نسبت به دوران‌های $SO(2)$ حول یک مبدأ انتخاب شده از \mathbb{E}_2 هموردا هستند و با مدل‌های دیف (۲۸) ادامه می‌دهیم، که علاوه بر آن هموردانه مقیاس هستند. شبکه فهرست شده در ردیف (۲۹)، که در آخر آن را مورد بحث قرار می‌دهیم، به صورت سراسری حول مبدأ \mathbb{E}_3 هموردانه است.

هموردایی دورانی سراسری روی $\{\cdot\}_0$

ما با مدل‌های مفهومی ساده‌تر شروع می‌کنیم، که شبکه‌های هموردانه دورانی سراسری هستند و تنها بر $\{\cdot\}_e$ -ساختارهای ناوردا دورانی روی \mathbb{E}_2 تکیه دارند [؟]. این مدل‌ها متربک اقلیدسی استاندارد را روی $\{\cdot\}_0$ فرض می‌کنند، که نسبت به آن چارچوب‌ها راست‌هنگار هستند. در مجموع، این دو الزام به $\{\cdot\}_e$ -ساختارهایی منجر می‌شوند که در شکل ۵۱ نشان داده شده‌اند.

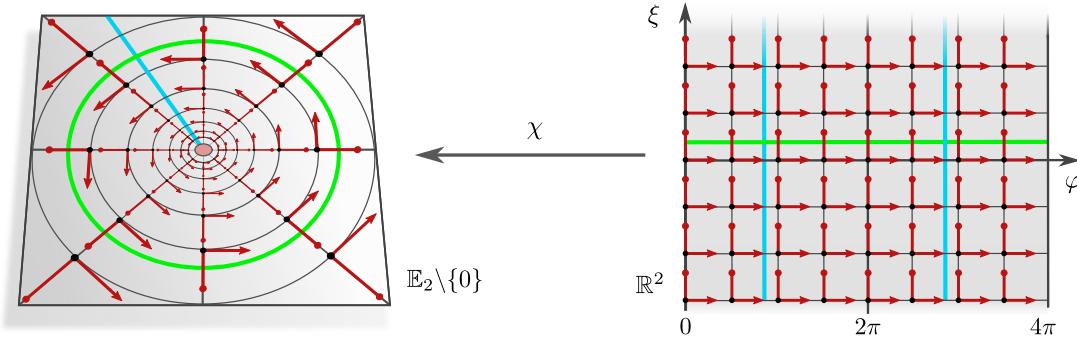
علاوه بر G -ساختارهای در نظر گرفته شده، شبکه‌ها به پیاده‌سازی خاص پول‌بک انتقال‌دهنده و در نتیجه به ژئودزیک‌ها و انتقال‌دهنده‌های موازی بستگی دارند. ژئودزیک‌ها در هر دو مدل، ژئودزیک‌های استاندارد در فضاهای اقلیدسی (یعنی خطوط مستقیم) فرض می‌شوند، که متناظر با اتصال‌لای چیویتا از متربک اقلیدسی است. از آنجا که \mathbb{E}_2 از نظر ژئودزیکی کامل نیست، برای نگاشته‌های نمایی که در مبدأ به پایان می‌رسند، باید از پدینگ-صفر استفاده شود. توجه داشته باشید که این امر تأثیری بر نتیجه نهایی ندارد زیرا ژئودزیک‌های از دست رفته دارای اندازه صفر هستند.

از سوی دیگر، انتقال موازی بردارهای ویزگی، با اتصال لوی-چیویتا مطابقت ندارد زیرا اتصال لوی-چیویتا با $\{\cdot\}_e$ -ساختارها سازگار نیست. در عوض، مدل‌ها اتصالات بدیهی یکتای $\{\cdot\}_e$ -سازگار را فرض می‌کنند که توسط $\{\cdot\}_e$ -ساختارهای مربوطه القا می‌شوند.^{۱۰۴} مطابق با اتصالات بدیهی، ضایاب عدی بردارهای ویزگی هنگام انتقال، تبدیل نمی‌شوند، علی‌رغم اینکه چارچوب‌ها نسبت به مفهوم معمول توانی که در فضاهای اقلیدسی چرخانده می‌شوند. در عمل، این فقط به این معنی است که انتقال‌دهنده‌های $\{\cdot\}_e$ $= id_{\mathbb{R}} = \rho(g_{\gamma}^A)^{-1}$ که دلیلی است که آنها در مقالات اصلی مورد بحث قرار نگرفته‌اند [؟].

از آنجا که دوران‌ها $\{\cdot\}_e$ -ساختارهای در نظر گرفته شده را ناوردا باقی می‌گذارند و در عین حال ایزومتری هستند، ما داریم $Isom_{\{\cdot\}_e M} = SO(2)$ برای مدل \mathbb{E}_2 (شکل ۱۵۱) و C_8 برای مدل \mathbb{E}_2 (شکل ۵۱). قضیه ۸.۹ سپس تأیید می‌کند که کانولوشن‌های GM متناظر، $Isom_{\{\cdot\}_e M}$ -هموردا هستند، که با گزاره‌های بیان شده توسط نویسنده‌گان مطابقت دارد.

قبل از ادامه می‌خواهیم اشاره کنیم که $\{\cdot\}_e$ -ساختار C_8 -ناوردا در شکل ۱۵۱ پیوسته نیست و بنابراین استنتاج پیوسته (یا هموار) را تضمین نمی‌کند. یک مزیت این $\{\cdot\}_e$ -ساختار از دیدگاه مهندسی این است که به صورت محلی با $\{\cdot\}_e$ -ساختار کانونی \mathbb{R}^3 ایزومتریک است، که اجازه می‌دهد روال‌های کانولوشن اقلیدسی متعارف روحی هر هشتگ اجرا شوند. نویسنده‌گان تعیین به $\{\cdot\}_e$ -ساختارهای C_N -ناوردا را مورد بحث قرار دهنده، که در حد $N \rightarrow \infty$ معادل $SO(2)$ -ناوردا در شکل ۱۵۱ می‌شوند.

علاوه بر این، با استفاده از کرنل‌های راهبری پذیر بازتابی به جای کرنل‌های نامحدود، می‌توان مدل‌ها را به صورت سراسری ۲-هموردا ساخت. از دیدگاه نظری، این متناظر با \mathcal{R} -ساختار $\mathcal{R}M$ -ناوردا روی $\{\cdot\}_0$ است که در شکل ۵۲ نشان داده است. توجه داشته باشید که $\mathcal{R}M$ یک کلاف \mathcal{R} روی $\{\cdot\}_0$ است، که تحدید آن به دایره‌هایی با شعاع ثابت، به عنوان یک کلاف اصلی، با ۲ که به عنوان یک کلاف \mathcal{R} روی فضای خارج قسمتی $S^1 / \mathcal{R} \cong S^1$ تفسیر می‌شود، ایزومورف است.



شکل ۵.۳: مختصات لگاریتمی-قطبی $(\chi : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* \setminus \{0\}, (\varphi, \xi) \mapsto (e^\xi \cos(\varphi), e^\xi \sin(\varphi))$ و لگاریتم-شعاعی $\xi = \log\|p\| \in \mathbb{R}$ را به نقاط در $\mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ نگاشت می‌دهد. پس از انتخاب مختصات دکارتی برای $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ این کار یک مختصاتی سازی از \mathbb{R}^* توسط $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ -هاست. مختصات لگاریتمی-قطبی یک e -ساختار را روی $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ القای کند که شامل چارچوب‌های مرجع [۶۴، ۶۵] است که با شبکه مختصاتی تراز شده‌اند. آنها علاوه بر این یک متریک ریمانی را القای کنند که با متریک اقلیدسی معمول متفاوت است و چارچوب‌های القای شده نسبت به آن راست‌هنگار هستند. کانولوشن‌های GM را روی این e -ساختار متناظر با کانولوشن‌های اقلیدسی متعارف در مختصات \mathbb{R}^* هستند. انتقال‌های $\Delta\varphi$ در \mathbb{R}^* از طریق χ متناظر با دوران‌ها و تغییر مقیاس‌های $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ هستند، که در آن زوایای دوران و فاکتورهای تغییر مقیاس به ترتیب با $\Delta\varphi$ و $e^{\Delta\xi}$ داده می‌شوند. بنابراین، هموردایی انتقالی کانولوشن در مختصات \mathbb{R}^* بر هموردایی $\mathbb{SO}(2) \times \mathcal{S}$ کانولوشن GM روی $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ دلالت دارد. این نتیجه با هموردایی ایزومتری کانولوشن GM مطابقت دارد زیرا تبدیلات در $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ Isom $_{GM} = \mathbb{SO}(2)$ نسبت به متریک القای شده، ایزومتری هستند.^۹ چنین کانولوشن‌های GM را بر حسب کانولوشن‌های متعارف روی \mathbb{R}^* پیاده‌سازی می‌کنند.

هموردایی سراسری دورانی و مقیاسی روی $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ از طریق مختصات لگاریتمی-قطبی

با ناوردا کردن G -ساختارهای ناوردای دورانی از بخش قبل نسبت به مقیاس، کانولوشن‌های GM متناظر نسبت به گروه حاصل‌ضرب مستقیم $\mathbb{SO}(2) \times \mathcal{S}$ هموردا می‌شوند. چنین G -ساختارهایی توسط مختصات لگاریتمی-قطبی القای شده می‌شوند، که در شکل ۵.۳ نشان داده شده است و این امکان یک پیاده‌سازی راحت از کانولوشن GM را بر حسب کانولوشن‌های اقلیدسی متعارف روی نمایش مختصاتی \mathbb{R}^* فراهم می‌کند. هموردایی انتقالی کانولوشن‌ها روی \mathbb{R}^* سپس متناظر با هموردایی $\mathbb{SO}(2) \times \mathcal{S}$ روی $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ است. برای وضوح، ما تووصیف مدل بر حسب مختصات لگاریتمی-قطبی همانطور که توسط ^{۱۰} پیشنهاد شده، شروع می‌کنیم. ^{۱۱} متعاقباً، ما بررسی می‌کنیم که چگونه این مدل و ویژگی‌های آن در چارچوب ما توضیح داده می‌شوند.

مختصات لگاریتمی-قطبی فضای برداری اقلیدسی سوراخ دار $\mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ بر حسب پوشای هموار زیر تعریف می‌شود:

$$\chi : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* \setminus \{0\}, (\varphi, \xi) \mapsto (e^\xi \cos(\varphi), e^\xi \sin(\varphi)), \quad (414)$$

که نقطه $(\varphi, \xi) = p$ را در $\mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ به یک زاویه قطبی داده شده $\varphi \in \mathbb{R}$ و لگاریتم-شعاع $\xi = \log\|p\| \in \mathbb{R}$ اختصاص می‌دهد. این نگاشت در مختصات زاویه‌ای $-2\pi \times [0, 2\pi]$ -متناسب است (به تکرار نوار آبی در سمت راست شکل ۵.۳ توجه کنید) و بنابراین به طور خاص یک‌بیکه است. یک تحدید به $\mathbb{R}^* \times [0, 2\pi]$ دوسویه و پیوسته خواهد بود، اما همسان ریخت نخواهد بود ^{۱۲} این امر ما را ملزم می‌کند که در ادامه حداقل دو چارت را برای پوشش صفحه سوراخ دار در نظر بگیریم. مختصات دکارتی $\mathbb{R}^* \times [0, 2\pi]$ را با $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ یکی می‌گیریم و بنابراین اجازه می‌دهد که مختصات لگاریتمی-قطبی به دومی اختصاص داده شود. از آنجا که سیستم‌های مختصات دکارتی مختلف (راست‌گرد) که در مبدأ $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ متمرکز شده‌اند فقط در دوران‌ها متفاوت هستند، تخصیص مختصات لگاریتمی-قطبی با یک جایجایی در مولفه زاویه‌ای در میهم است.

با توجه به یک نقشه ویژگی $f : \mathbb{R}^* \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^c$ (یک میدان ویژگی مرتبط با M)، همانطور که در ادامه روشن می‌شود، ^{۱۳} پول بک آن $f \circ \chi : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^c$ را از طریق مختصات لگاریتمی-قطبی در نظر می‌گیرند، که توسط جایجایی نمودار زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbb{R}^* \xrightarrow{\chi} \mathbb{R}^* \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^c \quad (415)$$

یک کانولوشن گروهی هموردای دورانی و مقیاسی از میدان ویژگی f روی $\mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ سپس به صورت زیر تعریف می‌شود: ۱) پول بک آن از طریق χ به مختصات \mathbb{R}^* اعمال یک کانولوشن اقلیدسی متعارف در آنجا و ۲) این روش خوش‌تعیف است زیرا χ هموردای نگاشت نتیجه به $\mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ است. به طوری که نقشه‌های ویژگی (میدان‌های ویژگی) هموار f منجر به پول بک‌های هموار و متناسب \tilde{f} می‌شوند. از آنجا که کانولوشن‌ها مستقل

^{۱۰} انیمیشنی از انتقال e -سازگار متناظر با شکل ۵.۱ را می‌توان در ویکی‌педیا یافت.

^{۱۱} ایده پیاده‌سازی همبستگی‌های ناوردای دورانی از طریق تبدیلات لگاریتمی-قطبی پیش از این در دهه ۸۰ میلادی ظاهر شده بود [۹].

از موقعیت هستند، نقشه ویژگی خروجی آنها همچنان متناوب و هموار خواهد بود و بنابراین به طور یکتا به یک نقشه ویژگی هموار روی $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ متناظر است.^{۱۰۶}

هموردایی دورانی و مقیاسی کاتولوشن گروهی ضمنی روی $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ از هموردایی انتقالی تابع مختصاتی χ نتیجه می‌شود.^{۱۰۷} فرض کنید (ξ, φ) در \mathbb{R}^2 باشد و $(\Delta\varphi, \Delta\xi)$ هر انتقالی در T_2 باشد. نقطه $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ که متناظر با مختصات منتقل شده $(\xi + \Delta\varphi, \varphi + \Delta\xi)$ است، سپس به نقطه متناظر با مختصات منتقل نشده (ξ, φ) از طریق یک مقیاس‌بندی با ضریب $e^{\Delta\xi}$ و دوران با زاویه $\Delta\varphi$ مرتبط می‌شود:

$$\begin{aligned}\chi(\varphi + \Delta\varphi, \xi + \Delta\xi) &= e^{\xi + \Delta\xi} \left(\frac{\cos(\varphi + \Delta\varphi)}{\sin(\varphi + \Delta\varphi)} \right) \\ &= e^{\Delta\xi} \left(\frac{\cos(\Delta\varphi)}{\sin(\Delta\varphi)} - \frac{\sin(\Delta\varphi)}{\cos(\Delta\varphi)} \right) e^{\xi} \left(\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \right) \\ &= e^{\Delta\xi} \left(\frac{\cos(\Delta\varphi)}{\sin(\Delta\varphi)} - \frac{\sin(\Delta\varphi)}{\cos(\Delta\varphi)} \right) \chi(\varphi, \xi) \\ &=: (\Delta\varphi, \Delta\xi) \triangleright \chi(\varphi, \xi)\end{aligned}\quad (416)$$

بر حسب یک نمودار، این بدان معناست که

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{(\Delta\varphi, \Delta\xi) +} & \mathbb{R}^2 \\ \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\ \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{(\Delta\varphi, \Delta\xi) \triangleright} & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \end{array} \quad (417)$$

برای انتقالات دلخواه، جایجاًی است. این به همراه هموردایی انتقالی کاتولوشن‌های متعارف روی \mathbb{R}^2 دلالت بر این دارد که نقشه‌های ویژگی ورودی دوران یافته و مقیاس شده روی $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ منجر به نقشه‌های ویژگی خروجی دوران یافته و مقیاس شده روی $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ خواهد شد، یعنی هموردایی $S \times SO(2)$ کاتولوشن روی $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ جزئیات بیشتر در مورد این دیدگاه در [۹] [۱۰] یافت می‌شود.

اکنون این عملیات کاتولوشن و ویژگی‌های آن را از دیدگاه کاتولوشن‌های GM مستقل از مختصات بازیبینی می‌کنیم. برای این کار، یک اطلس از چارت‌ها را در نظر می‌گیریم که با مختصات لکاریتمی قطبی سازگار هستند و $\{e\}$ -ساختار، پیمانه‌ها، متريک ريماني، ژودزيک‌ها و انتقال موازی القا شده توسيط آن را مورد بحث قرار می‌دهيم. هموردایي ادعا شده $S \times SO(2)$ بالافصله از هموردایي $Isom_{\{e\}} M$ نتیجه GM کاتولوشن‌های M می‌شود. برای راحتی نمادگذاري، ما دوباره $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ را از طریق یک انتخاب از مختصات دکارتی با $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ یکی می‌گيریم.

از آنجا که تحديد $\chi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 2\pi\}$ از مختصات لکاریتمی χ به زوایای غیرزايد، دوسویه و پیوسته است، ممکن است وسوسه شویم که وارون آن را به عنوان یک چارت مختصاتی در نظر بگیریم. این کار، با این حال، ممکن نیست، زیرا χ یک همسان‌ریختی نیست، همانطور که برای چارت‌ها لازم است. در عوض، ما یک اطلس متشکل از دو چارت را در نظر می‌گیریم که بر حسب تحديدهایی از χ تعريف شده‌اند و $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ را پوشش می‌دهند. یک انتخاب خاص، تعريف هم‌دامنه‌های چارت به عنوان مجموعه‌های باز $V^B = (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{R}$ و $V^A = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ برای یک $\epsilon < 0$ است و برای $X = A, B$ تعريف چارت‌ها روی $V^X = \chi(V^X)$ به صورت $U^X \rightarrow V^X := (\chi|_{V^X})^{-1} : U^X \rightarrow V^X$ است. به طور شهودی، این اطلس همان کاری را انجام می‌دهد که تلاش ساده‌لوحانه برای تعريف چارت‌ها به عنوان وارون χ انجام می‌داد. تفاوت مهم، با این حال، این است که چارت‌ها ديفئومورفيک هستند، که برای اطمینان از همواری تمام عملیات ضروری است.

طبق معمول، این چارت‌ها میدان‌های چارچوب محلی و تريوياليزاسيون‌های کلاف را به ترتیب روی U^A و U^B می‌توان دید که نگاشته‌های گذار $g_{(p)}^{BA} = \frac{\partial x^B}{\partial x^A}|_{x^A(p)}$ روی $U^A \cap U^B$ بدبیهی هستند، که این نتیجه می‌دهد که اجتماع میدان‌های چارچوب یک $\{e\}$ -ساختار هموار M را روی $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ تعريف می‌کند. این پایه‌های مختصاتی، که در مقالات اغلب با $\left[\begin{array}{c} \varphi \\ \xi \end{array} \right]$ نشان داده می‌شوند، در شکل ۵۳ (چپ) نشان داده شده‌اند. محاسبه ما در معادله (۴۱۶) در بالا دلالت بر این دارد که $\{e\}$ -ساختار القا شده $S \times SO(2)$ ناوردا است.

چارت‌ها علاوه بر این یک متريک ريماني را که با متريک اقليلدسي معمول روی $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ متفاوت است. اين متريک به عنوان پول‌بك متريک اقليلدسي $\eta_p(v, w) := \langle \hat{dx}_p^X(v), \hat{dx}_p^X(w) \rangle_{\mathbb{R}^2}$ در هم‌دامنه‌های چارت‌ها تعريف می‌شود و بنابراین به صورت نقطه‌ای با

$$\eta_p(v, w) := \langle \hat{dx}_p^X(v), \hat{dx}_p^X(w) \rangle_{\mathbb{R}^2}, \quad (418)$$

^{۱۰۶} برای دیدن این موضوع، توجه داشته باشید که χ یک نگاشت خارج‌قسمتی است (زیرا بخش زاویه‌ای آن یک نگاشت خارج‌قسمتی است). برای نقشه‌های ویژگی پیوسته (به جای هموار) این گزاره از ویژگی جهانی فضاهای خارج‌قسمتی نتیجه می‌شود؛ به عنوان مثال به ویکی‌پدیا مراجعه کنید. از آنجا که همواری یک تابع به عنوان مشتق‌پذیری پیوسته آن تعريف می‌شود، ویژگی جهانی را می‌توان به صورت بازگشتی اعمال کرد تا نشان دهد که این گزاره برای نقشه‌های ویژگی هموار نیز برقرار است.

^{۱۰۷} اينکه اين ممكان بذير است به اين واقعيت بستگي دارد که يك همومورفيسم گروهي $(\Delta\varphi, \Delta\xi) \mapsto (R_{\Delta\varphi}, e^{\Delta\xi})$ در $T_2 \rightarrow SO(2) \times S$ وجود دارد که توسط ايزومورفيسم گروهي $\mathcal{S} : T_1 \rightarrow SO(2) \cong T_1 / 2\pi\mathbb{Z}$ روی عامل دوم و همومورفيسم گروهي (نگاشت خارج‌قسمتی) $R : T_1 \rightarrow SO(2)$ روی عامل اول تعريف می‌شود، که در آن $R_{\Delta\varphi}$ دوران با زاویه $\Delta\varphi$ را نشان می‌دهد.

داده می شود، که در آن $X \in T_p M$ و $v, w \in U^X$ هر یک از چارت هایی را که نشان می دهد، مشخص می کند. $\{e\}$ -ساختار القا شده توسط چارت، بنا به ساختار، از چارچوب هایی تشکیل شده است که نسبت به این متريک القا شده توسط چارت، راسته هنگار هستند، حتی اگر اين چارچوب ها با افزایش شعاع هنگام اندازه گيری نسبت به متريک اقليدسي استاندارد، رشد کنند. اتصال لوی-چيوپتا برای متريک القا شده با اتصال اقليدسي معقول متفاوت است و بنابراین ژئوزدیکها و انتقال دهنده های مواد جايگزیني را نتيجه می دهد. از آنجا که متريک از طریق چارت ها پول بک می شود، ژئوزدیکها متناظر با خطوط مستقيم در همدامنه های چارت ها هستند \square يك مثال، خطوط مختصاتي روی \mathbb{R}^3 در شکل ۵۳ است. انتقال مواد جايگزیني متفاوت با انتقال معقول در همدامنه های چارت ها است، که اين نتيجه می دهد که بردار های منتقل شده را در يك زاويه ثابت نسبت به خطوط مختصاتي روی \mathbb{R}^3 نگه می دارد؛ پاوري 10° را مقایسه کنید. توجه داشته باشید که اين همان انتقال است که مدل های متناظر با شکل های 51 در بالا مورد بحث قرار گرفت، که در آنجا انتقال متناظر با اتصال لوی-چيوپتا نبود زيرا آن مدل ها متريک استاندارد را روی \mathbb{R}^3 به جای متريک القا شده توسط چارت فرض می کرند.

ایزومتری های حافظ $\{e\}$ -ساختار $\times \mathcal{S}$ Isom $_{\{e\}M} \cong SO(2)$ ساختار نسبت به متريک القا شده توسط چارت با دوران ها و تغيير مقاييس های $\{e\}$ - S ساختار نسبت به متريک اقليدسي معقول داده می شوند. قضيه 8.9 بر همورادي 8.9 کانونلوشن GM متناظر دلالت دارد \square که گزاره بيان شده توسط \mathbb{R}^3 را در نظر گیری ما باز یابي می کند. همانطور که در بالا گفته شد، اين واقعیت که متريک از طریق چارت ها القا می شود به اين معنی است که تمام عملیات هنگام بيان در چارت به عملیات اقليدسي معقول خلاصه می شوند. بنابراین کانونلوشن GM به بهترین وجه از طریق يك کانونلوشن متعارف روی چارت پياده سازی می شود، همانطور که توسط \mathbb{R}^3 پيشنهاد شده است.

توجه داشته باشید که همورادي $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ کانونلوشن GM به راحتی به همورادي $SO(2) \times SO(2)$ که شامل بازتاب ها نیز می شود، قابل تعميم است. اين کار با انجام يك کانونلوشن همورادي بازتابی در چارت پياده سازی می شود، که متناظر با \mathcal{R} -ساختار نشان داده شده در شکل 55 است. روی \mathbb{R}^3 اين امر به يك \mathcal{R} -ساختار منجر می شود که شبیه به ساختار در شکل 52 در بالا است، با اين تفاوت که \mathcal{R} -ساختار علاوه بر اين تحت يك تغيير مقاييس سراسري نيز ناوردا است.

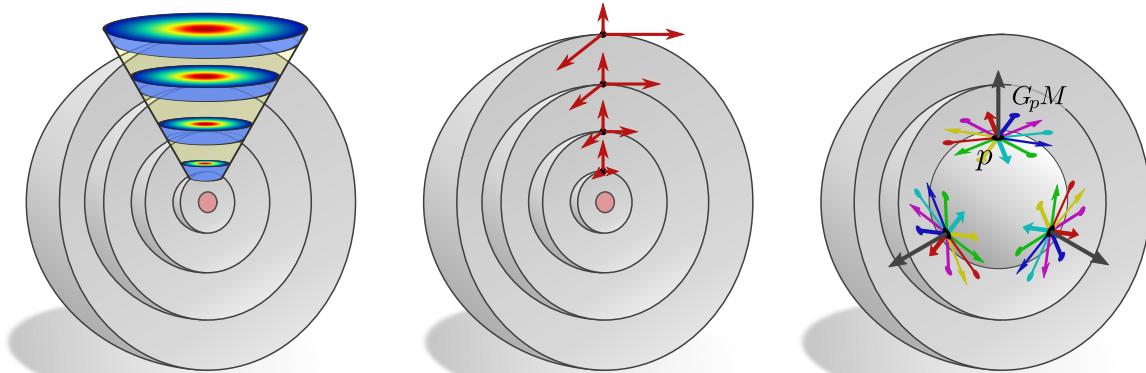
همورادي دوراني سراسري روی \mathbb{R}^3

ايده های ارائه شده در بالا را می توان به محیط سه بعدی، یعنی به فضای اقلیدسي سوراخ دار \mathbb{R}^3 تعميم داد. کانونلوشن های GM همورادي دوراني سراسري در اينجا متناظر با G -ساختار هایي هستند که تحت دوران های $SO(3)$ حول مبدأ ناوردا هستند. در حالی که وابستگي شعاعي چنین G -ساختار هایي بدون محدوديت باقی می ماند، تقاضا برای ناوردي ای دوراني، محدوديتی را بر شکل آنها روی پوسته های کروي با شعاع ثابت، که مدار های عمل $SO(3)$ روی \mathbb{R}^3 هستند، تحمل می کند. اين واقعیت که كره $(2) \times SO(3)/SO(3)$ يك فضای همگن از $SO(2)$ با زيرگروه های پيادرساز ايزومورف با $SO(2)$ است، دلالت بر اين دارد که گروه ساختاري يك G -ساختار $SO(3)$ ناوردا را نمی توان بيشتر از $G = SO(2)$ کاهش داد؛ به شکل 57 مراجعه کنید. بنابراین ما اساساً با CNN های کروي با يك بعد شعاعي اضافي سرو كار داريم. برای مروري بر CNN های کروي، خواننده را به بخش 11 ارجاع می دهيم.

\square اين وضعیت را شناسایي کرده و کانونلوشن های $SO(3)$ -هموردا را روی \mathbb{R}^3 طراحی کردن. قبل از پرداختن به طبقه بندی ما به عنوان کانونلوشن GM که در ردیف (29) جدول 6 فهرست شده است. به طور خلاصه فرمول بندی و پياده سازی نويسنده گان را مور می کنیم. پياده سازی آنها مبتنی بر CNN های کروي است با اين اضافه که (1) کرnel ها در جهت شعاعي گسترش می باند و (2) روی پوسته هایي با شعاع هایي با شعاع ثابت، اشتراک گذاشته می شوند؛ به شکل 54 (چپ) مراجعه کنید. همانطور که معمولاً برای CNN های کروي انجام می شود، وابستگي زاویه های کرnel ها از طریق طيف فوريه آنها روی S^3 کد گذاری می شود، یعنی بر حسب ضرائب بسط هارمونيك های کروي. اشتراک اين ضرائب بسط دلالت بر اين دارد که کرnel های به اشتراک گذاشته شده زاویه های فضائي يكسانی را برای همه شعاع های پوشش می دهد، که به اين معنی است که کرnel ها در جهت زاویه های به صورت خطی با شعاع گشاد می شوند. در پياده سازی گسترش های شعاعي \mathbb{R}^3 در شعاع های با فاصله مساوی قرار دارند \square که اين به معنی آن است که کرnel ها در جهت شعاعي گشاد نمی شوند. از اين بيشن ها، ما G -ساختار خاصي را که مدل در ادامه فرض می کنند، استنباط می کنیم. خود کرnel ها به گونه ای محدود شده اند که تحت دوران های $SO(2)$ حول محور شعاعي گذرند از مرکز شان ناوردا باشند، که اغلب به آن کرnel های ناحیه ای (\mathbb{R}^3) گفته می شود؛ به شکل 55 و 56 مراجعه کنید. همانطور که در $[4]$ و $[5]$ آثبات شده است، کانونلوشن $SO(3)$ -هموردا است. اينکه اين مورد برقرار است، به طور شهودي روش است زيرا دوران های پوسته های کروي داراي $SO(2)$ به عنوان زيرگروه پيادرساز هستند، که کرnel های ناحیه ای نسبت به آن ناوردا هستند. همانطور که در ادامه استدلال خواهيم کرد، اين مدل در واقع 3 -هموردا است، یعنی علاوه بر آن تحت بازتاب ها نيز هموردا است.

برای باز یابي اين مدل از ديدگاه کانونلوشن های GM ، ما باید G -ساختار متناظر را روی \mathbb{R}^3 تعیين کنیم. همانطور که در بالا گفته شد، همورادي $SO(3)$ مدل نيازمند اين است که G -ساختار تحت عمل (3) ناوردا باشد اما تغييرات شعاعي آن را محدود نمی کند. برای استنتاج اين وابستگي شعاعي G -ساختار، به ياد بياوريد که ما اشتراک وزن کانونلوشن را در $p \in M$ به عنوان تراز کردن کرnel الگو $K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{cnn \times cnn}$ نسبت به يك چارچوب (دليخواه) در $G_p M$ از فضاهای مماس $T_p M$ تعريف کردیم. بنابراین، اشتراک کرnel در نظر گرفته شده توسط \square به ما اجازه می دهد تا در مورد G -ساختار به طور ضمنی در نظر گرفته شده نتيجه گيری کنیم. نويسنده گان کرnel ها را به گونه هایي به اشتراک می گذارند که مساحت مماس آنها بر پوسته های کروي با افزایش فاصله از مبدأ گسترش يابد (آنها زاویه های فضائي يكسانی را در هر شعاع پوشش می دهند) در حالی که ضخامت شعاعي آنها ثابت باقی می ماند. شکل 54 (چپ) اين تغيير شعاعي کرnel های به اشتراک گذاشته شده را نشان می دهد در حالی که شکل 54 (وسط) مقاييس بندی

شکل ۵۵: يك کرnel ناحیه ای (\mathbb{R}^3) به طور همزمان $SO(2)$ -همسلاگردد. \square اقليدسي استاندارد \mathbb{R}^3 اندازه گيری می شود. \square راگب لجعي ذير المفهوم (\mathbb{R}^3) مقاييس (420) و (420) را مقاييس کنید.



$$\mathbb{E}_3 \setminus \{0\} \cong S^2 \times \mathbb{R}^+$$

شکل ۵۴: G -ساختاری که به طور ضمنی توسط $\mathbb{E}_3 \setminus \{0\} \cong S^2 \times \mathbb{R}^+$ روی (همسانگرد) رسم شده است. کرنل‌ها به گونه‌ای تعریف شده‌اند که زاویه فضایی بکسانی را پوشش دهند، مستقل از فاصله از مبدأ، به طوری که قطر آنها به صورت خطی با این فاصله رشد می‌کند. گستره کرنل‌ها در جهت شعاعی مستقل از فاصله از مبدأ است. سطح: در نظریه ما، کرنل‌ها نسبت به چارچوب‌های مرجع از G -ساختار به اشتراک گذاشته می‌شوند. برای بازیابی طرح اشتراک وزن پیشنهادی، باید از چارچوب‌های تشکیل شود که محورهای آنها در جهت زاویه‌ای به صورت خطی با فاصله شعاعی از مبدأ رشد می‌کنند، در حالی که محورهای در جهات شعاعی باید اندازه خود را ثابت نگه دارند (هر دو نسبت به متریک اقلیدسی استاندارد). چنین چارچوب‌هایی یک متریک ریمانی جایگزین را روی $\mathbb{E}_3 \setminus \{0\}$ (القا می‌کنند). راست: از آنجا که کانونلوشن GM حاصل باید $(SO(2))^3$ -هموردا باشد، لازم است که G -ساختار تحت دوران حول مبدأ نواردا باشد. این امر (حداقل) به یک $(SO(2))^3$ -ساختار نیاز دارد، که تجدید آن به یک پوسته کروی در قسمت سمت راست شکل نشان داده شده است. این را با $(SO(2))^3$ -نواردا $(SO(3))^3$ -کانونلوشن GM مقایسه کنید.

منتاظر چارچوب‌های مرجع نمونه را نشان می‌دهد. این به همراه نواردا $(SO(3))^3$ مورد نیاز G -ساختار، $(SO(2))^3$ -ساختار را نتیجه می‌دهد، که تجدید آن به یک پوسته کروی در شکل ۵۴ (راست) به تصویر کشیده شده است.^{۱۰۹} متریک در نظر گرفته شده از این G -ساختار نتیجه می‌شود، زیرا چارچوب‌های آن مفهوم مربوط به راست‌هنگاری را تعریف می‌کنند. توجه داشته باشید که این متریک با متریک اقلیدسی معمول متفاوت است.

بنا به ساختار، ما دوران‌های $Isom_{GM} = SO(3)$ را به عنوان ایزومنتری‌های حافظ G -ساختار داریم. بنابراین، کانونلوشن‌های GM تعریف شده توسط این G -ساختار، که ممکن است در نوع میدان وروדי و خروجی خود متفاوت باشند، (طبق قضیه ۸.۹) هموردای دورانی خواهند بود. کانونلوشن GM خاصی که توسط \mathbb{E}_3 فرض شده، یعنی انواع میدان فرض شده، را می‌توان از این واقعیت استنتاج کرد که نویسنده‌گان کرنل‌های ناحیه‌ای را فرض می‌کنند: چنین کرنل‌هایی به طور طبیعی هنگام در نظر گرفتن میدان‌های اسکالار، یعنی نمایش‌های میدان بدیهی، به وجود می‌آیند، زیرا محدودیت کرنل، معادله (۸۳)، در این حالت به صورت زیر در می‌آید

$$K(gv) = K(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^3, g \in SO(2), \quad (419)$$

که کرنل‌های همسانگرد (ناحیه‌ای) را تحمیل می‌کند.^{۱۱۰}

به عنوان یک تنوع از مدل، می‌توان 2 -ساختار را در نظر گرفت که از $(SO(2))^3$ -ساختار با افزودن چارچوب‌های مرجع بازتابیده (بازتاب نسبت به یک محور دلخواه در داخل صفحات مماس بر پوسته‌های کروی)، در حالی که بردارهای چارچوب شعاعی همچنان به سمت بیرون اشاره دارند) به دست می‌آید.^{۱۱۱} در این حالت، ایزومنتری‌های حافظ G -ساختار $Isom_{GM} = 3$ شده‌اند و بنابراین کانونلوشن‌های GM هموردای 3 هستند. یک مورد خاص جالب در زمینه فعلی، کانونلوشن‌های GM است که بین میدان‌های اسکالار نگاشت انجام می‌دهند، که برای آنها محدودیت کرنل به صورت زیر است:

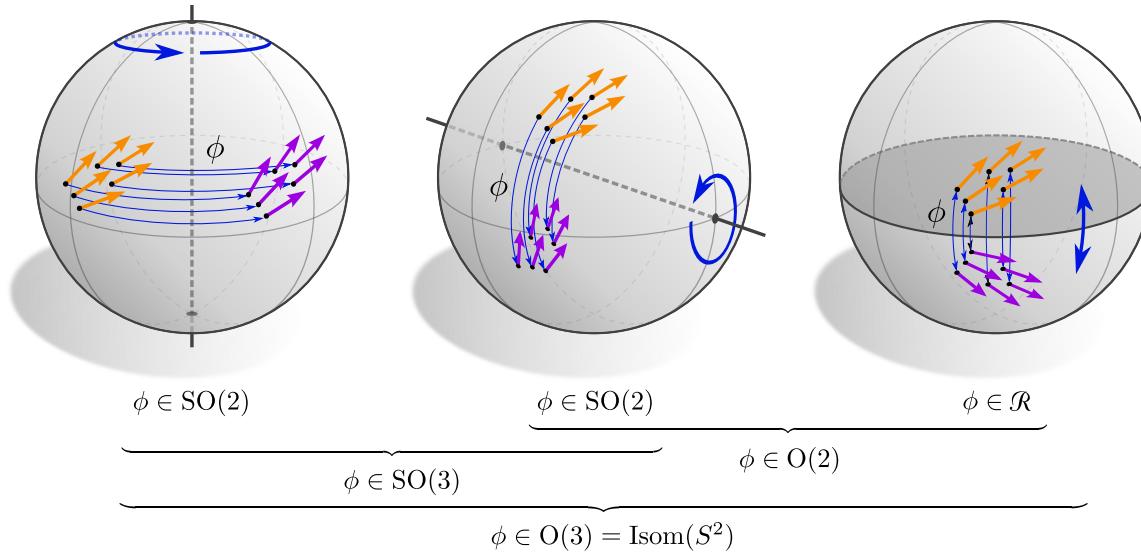
$$K(gv) = K(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2, g \in 2. \quad (420)$$

این به نظر می‌رسد یک محدودیت قوی‌تر از محدودیت در معادله (۴۱۹) بالا باشد: به جای اینکه فقط کرنل‌ها را نواردا بخواهد، علاوه بر آن از آنها می‌خواهد که تحت بازتاب‌ها نیز نواردا باشند. با این حال، از آنجا که کرنل‌های نواردا در حال حاضر تحت بازتاب‌ها نیز نواردا

^{۱۰۹} مشابه دو بعدی آن شبیه به G -ساختار در شکل ۵۳ خواهد بود اما با تمام بردارهای چارچوب در جهت شعاعی که دارای نرم واحد هستند (نسبت به متریک اقلیدسی).

^{۱۱۰} کرنل‌هایی که بین «میدان‌های اسکالار»، یعنی میدان‌هایی که مطابق با نمایش بدیهی G تبدیل می‌شوند، نگاشت انجام می‌دهند، همیشه G -نواردا هستند. برای $G = SO(2)$ این به معنی کرنل‌های همسانگرد (ناحیه‌ای) است، در حالی که $G = \mathcal{R}$ به معنی کرنل‌های نواردا بازتابی در ورودي بالا سمت چپ جدول ۳ است.

^{۱۱۱} این 2 -ساختار، همتای $\mathcal{R} = 1$ -ساختار در شکل ۵۲ برای $d = 3$ به جای $d = 2$ است.



شکل ۵۶: نمایش گروه ایزومتری کره ۲-بعدی $S^3 = \text{Isom}(S^3)$ و زیرگروههای مختلف آن. می‌توان گروه ایزومتری را متشکل از دوران‌های حافظ جهت در $\text{SO}(3) = \text{SO}_{+}(S^3)$ و بازتابها \mathcal{R} از طریق حاصلضرب مستقیم $\text{SO}(3) \times \mathcal{R} = \text{SO}(3)$ در نظر گرفت. $\text{SO}(3)$ به نوبه خود، توسط دوران‌های $\text{SO}(2)$ حول هر دو محور غیرموازی تولید می‌شود، که در پارامترسازی زاویه اوبل استفاده می‌شود. برای زیرگروههای مرتبه بیشتر و روابط آنها به متن اصلی مراجعه کنید.

هستند، این دوباره به کرنل‌های ناحیه‌ای منجر می‌شود و بنابراین دقیقاً همان فضای کرنل را که برای $\text{SO}(2)$ بود، به دست می‌دهد.^{۱۱۲} این دلالت بر این دارد که مدل \mathbb{A} در واقع نه تنها $\text{SO}(3)$ -همورداست، همانطور که توسط نویسندهان ادعا شده، بلکه به طور کلی Tr_3 -همورداست، که طبقه‌بندی ما را در ردیف (۲۹) جدول ۶ توجیه می‌کند. توجه داشته باشید که این یک مورد خاص است که فقط برای میدان‌های اسکالر اعمال می‌شود \square فضاهای کرنل‌های $\text{SO}(2)$ -راهبری‌پذیر برای نمایش‌های گروهی عمومی متفاوت هستند.

مدل \mathbb{A} چگونه با مدل \mathbb{B} که در G -ساختر نشان داده شده در شکل ۵۳ تکیه دارد، مرتبط است؟ یک تفاوت کلیدی بین این دو رویکرد این است که G -ساختر در شکل ۵۳ از چارچوب‌های تشکیل شده است که محورهای رو به بیرون آنها با فاصله شعاعی از مبدأ رشد می‌کنند، که این مورد برای G -ساختر در شکل ۵۴ صادق نیست. اگر دومی را به گونه‌ای اصلاح کنیم که از چارچوب‌هایی تشکیل شود که محورهای شعاعی آنها به صورت خطی با فاصله چارچوب‌ها از مبدأ رشد می‌کنند، آنگاه $\mathcal{S} = \text{Isom}_{GM} = \text{SO}(3)$ (به جای $\text{Isom}_{GM} = \text{SO}(3) \times \mathcal{S}$) خواهیم داشت. بنابراین کاتولوشن GM متاظر علاوه بر این هموردادی مقیاس خواهد بود. در یک پیاده‌سازی، این را می‌توان به راحتی با فاصله‌گذاری نمایی به جای یکنواخت پوسته‌های کروی گسترش داده توسط \mathbb{A} (متاظر با فاصله‌گذاری یکنواخت شعاع لگاریتمی شده) تحقق بخشید.

در آخر، به طور خلاصه کاتولوشن توسط \mathbb{A} را که در ردیف (۳۰) جدول ۶ فهرست شده است، مورد بحث قرار می‌دهیم. این مدل بر یک تصویر شعاعی از سیگنال روی پوسته‌های کروی به یک مکعب محيطی تکیه دارد. برای تعریف یک کاتولوشن روی مکعب، نویسندهان آن را در برخی از یال‌هایش برش داده و آن را پهن می‌کنند؛ به شکل ۲ در کار آنها مراجعه کنید. متعاقباً، آنها یک کاتولوشن دو بعدی متعارف را روی وجه پهن شده مکعب انجام می‌دهند. گسترش این عملیات با یک بعد سوم و شعاعی، یک کاتولوشن روی \mathbb{E}^3 تعریف می‌کند. از آنجا که پوسته‌های شعاعی در پیاده‌سازی گسترش دوباره با فاصله مساوی قرار گرفته‌اند، این عملیات متناظر با یک کاتولوشن GM روی یک $\{e\}$ -ساختر است که به صورت شعاعی همانطور که در شکل ۵۴ نشان داده شده، تغییر می‌کند. تصویر از پوسته‌های کروی به مکعب به معنای یک اعوجاج در چارچوب‌ها روی هر یک از وجهه مکعب است و بنابراین به یک اعوجاج در متربک روی پوسته‌های کروی منجر می‌شود. $\{e\}$ -ساختر در اکثر برش‌ها ناپیوسته است و بنابراین به کاتولوشن اجازه نمی‌دهد که پیوستگی میدان‌های ویژگی را حفظ کند. از آنجا که S^3 موازی‌پذیر نیست، این مشکل را نمی‌توان بدون فرض یک گروه ساختاری غیربدپیشی G حل کرد. $\{e\}$ -ساختر به طور کلی توسط هیچ ایزومتری حفظ نمی‌شود، که این دلالت بر این دارد که گروه هموردابی سراسری مدل $\{e\}_M = \{e\}_{\text{Isom}}$ بدیهی است. با این حال، از آنجا که تحدید $\{e\}$ -ساختر به چهار وجه «عمودی» مکعب تحت دوران‌هایی با مضرب‌هایی از $\pi/2$ ناوردا است، مدل در عمل تا حدی نسبت به دوران‌های سراسری C_4 حول محور عمودی همورداست. برای مجموعه داده‌ایی که نمونه‌های آنها حول مبدأ $\{0\}$ متمرکز شده و از نظر توزیع، تقارن دورانی دارند، به طور تجربی نشان داده شده است که این ویژگی منجر به عملکرد بهبود یافته‌ای در مقایسه با کاتولوشن‌های متعارف روی \mathbb{E}^3 می‌شود. نویسندهان علاوه بر این تأثیر طرح‌های مختلف اشتراک وزن را بر روی بعد شعاعی برسی می‌کنند و در می‌بایند که اشتراک وزن کامل در عمل بهترین کارایی را دارد.

۱۱ CNN‌های کروی مستقل از مختصات

فراتر از کانولوشن‌ها در فضاهای اقلیدسی، کانولوشن‌ها روی کره S^2 از اهمیت عملی بالایی برخوردارند. کاربردها شامل وظایف بینایی همه‌جانبه، پیش‌بینی جهانی آب و هوای تحلیل تابش زمینه کیهانی است. کانولوشن‌های کروی به جای هموردایی انتقالی، معمولاً باید هموردای دورانی باشند. گروه ایزوومتری کره $\text{Isom}(S^2) = \text{SO}(2)$ و تجزیه آن به زیر‌گروههای مرتبطتر در شکل ۵۶ به تصویر کشیده شده است.

یک تفاوت عمدی بین فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d و کره S^2 این است که دومی موازی پذیر نیست، یعنی اجازه یک میدان چارچوب سراسری و پیوسته را نمی‌دهد. تقلیل گروه ساختاری فراتر از $\text{SO}(2) = G$ از نظر توپولوژیکی مسدود شده است، که به این معنی است که کانولوشن‌های کروی حداقل به کرنل‌های $\text{SO}(2)$ -راهبری پذیر نیاز دارند اگر بخواهند پیوستگی میدان‌های ویژگی را حفظ کنند. $(2)-\text{SO}$ -ساختار متناظر، که به طور کامل توسط متريک و جهت‌گيری کره تعبيين مي شود، در شکل ۵۷ آن شان داده شده است. کانولوشن‌های GM روی اين G -ساختار ناوردای دورانی سراسری، تعبيين مي شوند که $\text{SO}(3) = \text{Isom}_{\text{SO}M}$ هموردا باشند.

على رغم مانع توپولوژیکی اجتناب‌ناپذیر، بسیاری از نویسندها CNN‌های کروی را پیشنهاد داده‌اند که از کرنل‌های $(2)-\text{SO}$ -راهبری پذیر استفاده نمی‌کنند. رایج‌ترین انتخاب $\{e\}$ -ساختار متناظر با جنین کانولوشن‌هایی، میدان چارچوب نشان داده شده در شکل ۵۷ است، که چارچوب‌های مرجع راست‌هنجر آن (معادله (۴۲۶)) با شبکه مختصاتی مختصات کروی را تراز شده‌اند. توجه داشته باشید که این میدان چارچوب دارای تکینگی‌هایی در قطب‌ها است، جایی که کانولوشن‌ها ناپیوسته می‌شوند. برای تطبیق چنین مدل‌هایی با نظریه ما، به ویژه فرض هموراری G -ساختارها، آنها باید به عنوان کانولوشن‌هایی روی یک استوانه توپولوژیکی با متريک شبے-کروی توصیف شوند. گروه ایزوومتری اين G -ساختار را $\{n, s\}$ بدون قطب‌های S^2 زیر‌گروه 2 (شکل ۵۶) و (سط و راست) از گروه ایزوومتری $\{e\}$ -ساختار به تصویر کشیده شده توسط دوران‌های سمتی در $\text{Isom}_{\{e\}M} = \text{SO}(2)$ حفظ می‌شود، یعنی دوران حول محور گزرنده از قطب‌ها.

از دیدگاه مهندسی، هر دو رویکرد توجیه خود را دارند: کاربردهای کاملاً همسان‌گرد مانند تحلیل تابش زمینه کیهانی به مدل‌های کاملاً $\text{SO}(3)$ -هموردا روی S^2 نیاز دارند. وظایف پادگیری که با یک محور دوران مرجع همراه هستند، که به عنوان مثال برای زمین یا تصاویر پانوراما با جهت‌های «بالا» و «پایین» مشخص، صادق است، ممکن است از اطلاعات هندسی اضافی کدگذاری شده در $\{e\}$ -ساختار بهره‌مند شوند. نتایج تجربی نشان می‌دهد که در جنین مواردی اغلب مفید است که با ترکیبی از هر دو رویکرد کار شود: لایه‌های او لیه با کانولوشن‌های کاملاً هموردا می‌توانند از تقارن‌های محلی در داده‌ها بهره‌برداری کنند، در حالی که لایه‌های بعدی با تنها هموردایی سمتی می‌توانند بر اساس محور مرجع، یاد بگیرند که تمايز قائل شوند؛ به بخش ۷.۲ در [۹] مراجعه کنید.

- | | |
|------|--|
| ۱.۱۱ | 亨دسی کره ۲-بعدی S^2 |
| ۱۴۸ | |
| ۲.۱۱ | CNN‌های کروی کاملاً هموردای دورانی |
| ۱۵۲ | |
| ۳.۱۱ | CNN‌های کروی هموردای دوران سمتی در توپولوژی‌های استوانه‌ای |
| ۱۵۶ | |
| ۴.۱۱ | تقربی‌های بیست‌وجهی از CNN‌های کروی |
| ۱۶۱ | |

ما با توصیف هندسه کره در بخش ۱.۱۱ شروع می‌کنیم. بخش ۲.۱۱ کانولوشن‌های GM کروی کاملاً $\text{SO}(3)$ -هموردا را مورد بحث قرار می‌دهد، که بر $\text{SO}(2)$ -یا 2 -ساختارها همانطور که در شکل ۵۷ آن شان داده شده، تکیه دارند. CNN ‌های کروی سراسری $(2)-\text{SO}$ -۲-هموردا، متناظر با $\{e\}$ -ساختار در شکل ۵۷ یا \mathcal{R} یا \mathcal{C} -ساختار متناظر، به ترتیب در بخش ۳.۱۱ مرور می‌شوند. بخش ۴.۱۲ بر تقریب‌های بیست‌وجهی کانولوشن‌های کروی تمرکز دارد، که پیاده‌سازی‌های کارآمد از نظر محاسباتی را ممکن می‌سازند زیرا بیست‌وجهی تکه‌ای-تخت است و شبکه‌های نمونه‌برداری منظم را می‌پذیرد؛ به شکل ۷۰ مراجعه کنید. $(2)-\text{SO}$ -ساختار و $\{e\}$ -ساختار در شکل‌های ۵۷ و ۵۸ در اینجا به ترتیب با \mathcal{C} -ساختار و $\{e\}$ -ساختارها در شکل‌های ۷۱ و ۷۱ یا ۷۱ تقریب زده می‌شوند.

۱.۱۱ هندسه کره ۲-بعدی S^2

به عنوان پایه‌ای برای بحث ما در مورد هندسه دیفرانسیل کره (واحد) $M = S^2$ می‌پردازد. این کره معمولاً به عنوان زیرمجموعه‌ای از نقاط در فضای اقلیدسی \mathbb{E}^3 -بعدی تعریف می‌شود که فاصله واحد از مبدأ دارند:

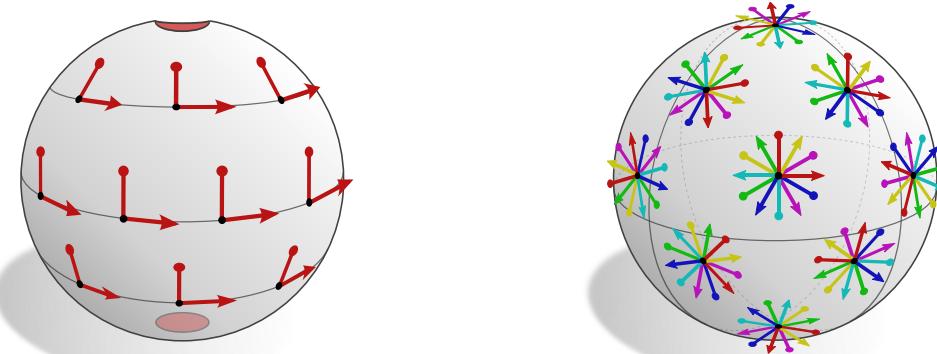
$$(421) \quad S^2 := \{p \in \mathbb{E}^3 \mid \|p\| = 1\}$$

به عنوان یک سطح جایگذاری شده، این کره یک متريک ريمانی (فرم بنیادی اول) را از فضای جایگذاری \mathbb{E}^3 به ارث می‌برد. در ادامه، برای سادگی، \mathbb{E}^3 را با فضای برداری \mathbb{R}^3 مدل‌سازی می‌کنیم. هنگامی که فضاهای مماس $T_p M$ را به معنای واقعی کلمه به عنوان آن دسته از زیرفضاهای دو بعدی \mathbb{R}^3 تفسیر کنیم که شامل تمام بردارهای مماس در S^2 در p هستند، آنگاه متريک، نگاشت‌های نمایی، انتقال‌دهنده‌های موازی، چارچوب‌های و پیمانه‌ها همگی می‌توانند بر حسب عملیات معمول فضای برداری در \mathbb{R}^3 بيان شوند. قبل از پرداختن به این عبارات مشخص، که هنگام پیاده‌سازی CNN‌های کروی مفید هستند، ما برخی از ویژگی‌های کره را از دیدگاهی انتزاعی‌تر مورد بحث قرار می‌دهیم.

گروه ایزوومتری کره با

$$(422) \quad \text{Isom}(S^2) = \mathbb{Z},$$

^{۱۱۲} به طور رسمی تر، ما به دنبال کرنل‌هایی هستیم که در G صدق کنند، یعنی روی مدارهای $\{g(v) \mid g \in G\}$ که در $K(g(v)) = K(v)$ برای هر $v \in \mathbb{R}^3$ برابر هستند، فضاهای کرنل حاصل یکسان خواهند بود.



(ب) $\{e\}M$ -ساختار روی یک کره ۲-بعدی سوراخدار $= \text{Isom}_{\{e\}M} \setminus \{n, s\}$ ، که توسط دوران‌های سمتی در $\text{SO}(2)$ حفظ می‌شود.

(ا) $\text{SO}(2)$ -ساختار SOM روی کره ۲-بعدی $M = S^2$ ، که توسط دوران‌های سهبعدی عمومی در $\text{Isom}_{\text{SOM}} = \text{SO}(3)$ حفظ می‌شود.

شکل ۵۷: G-ساختارهای رایج زیرینای CNN‌های کروی. مانع توبولوژیکی از کاهش گروه ساختاری کره ۲-بعدی فراتر از $\text{SO}(2) = G$ جلوگیری می‌کنند. شکل ۱۵۷: SO(2)-ساختار استاندارد روی S^2 را نشان می‌دهد، که با متريک جايگذاري (معادله (۴۲۹)) القا شده از حاصلضرب داخلی \mathbb{R}^3 مطابقت دارد. اين ساختار تحت دوران‌ها در $\text{Isom}_{\text{SOM}} = \text{SO}(3)$ ناوردا است، که بر همورداي دوراني کاتولوشن GM متناظر دلالت دارد. توجه داشته باشيد که تارهای $G_q M$ و $G_p M$ در نقاط مختلف p و q ايزومورف هستند اما نه به صورت کانونی \square به نظر مى‌رسد رنگ‌های چارچوب در تصویر چنین ايزومورفیسمی را القا می‌کنند، با اين حال، آنها به طور تصادفي انتخاب شده‌اند و همچ معنایي ندارند. شکل ۱۵۸: $\{n, s\} \cong S^1 \times (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ با متريک شبه-کروي تبديل مى‌کند \square که اجازه يك کاهش كامل به يك گروه ساختاري بدبيهي را مى‌دهد. شکل، رايچ ترين انتخاب از $\{e\}$ -ساختار را نشان مى‌دهد، که متناظر با چارچوب‌های راست‌هنگاري است که با شبکه مختصات مختصات کروي تراز شده‌اند؛ شکل ۱۵۹ را مقایسه کنيد. از آنجا که اين $\{e\}$ -ساختار تحت دوران‌های سمتی حول محور قطبی ناوردا است، کاتولوشن‌های GM متناظر $\text{Isom}_{\{e\}M} = \text{SO}(2)$ -هموردا هستند. توجه داشته باشيد که سوراخ کردن فقط وسیله‌ای برای پنهان کردن ناپیوستگی مدل‌ها در قطب‌ها است.

داده می‌شود، يعني دوران‌ها و بازتاب‌های سهبعدی، که در شکل ۱۵۶ به تصویر کشیده شده‌اند. عمل هر ايزومتری $\phi \in \mathcal{F}$ با عمل معمول آن روی \mathbb{R}^3 از طريق ضرب ماتريسي، که به کره جايگذاري شده $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ محدود شده است، منطبق است. توجه داشته باشيد که اين در واقع يك عمل خوش تعريف روی S^3 به دست مى‌دهد زيرا \mathcal{F} بنا به تعريف از تمام نگاشته‌های خطی حافظ فاصله و زاویه تشکيل شده است و بنابراین کره را حفظ می‌کند. از آنجا که يك جهت‌پذير است، داراي يك زيرگروه از ايزومتری‌های حافظ جهت است

$$\text{Isom}_+(S^3) = \text{SO}(3), \quad (423)$$

که از تمام دوران‌های سهبعدی تشکيل شده است. زيرگروه‌های دیگری که در زمينه يادگيري عميق مرتبه هستند، عبارتند از: هر انتخاب از يك محور دوران، يك زيرگروه از دوران‌های دو بعدی را تعبيين مى‌کند که با $\text{SO}(2)$ ايزومورف است و تمام اين زيرگرووهای با يكديگر مزدوج هستند. به طور مشابه، هر انتخاب از يك زيرفضاي دو بعدی از \mathbb{R}^3 متناظر با يك زيرگروه از بازتاب‌ها نسبت به اين صفحه است که با \mathcal{R} ايزومورف است. زيرگرووهای دوران‌های دو بعدی حول محور دوران غيرموازي، $(3) \times \text{SO}(2)$ را توليد مى‌کنند، که به پارامترسازی زاويه اوپير از $\text{SO}(3)$ مربوط می‌شود. يك انتخاب از صفحه بازتاب و هر محور دوران در داخل اين صفحه، زيرگروه حاصلضرب نيمه‌مستقيمه $\mathcal{R} \times \text{SO}(2) = \text{SO}(3)$ را توليد مى‌کند. اگر محور دوران به جاي آن عمود بر صفحه بازتاب شود، دوران‌ها و بازتاب‌های دو بعدی جابجا مى‌شوند و بنابراین زيرگرووهای ايزومورف با حاصلضرب مستقيمه $\mathcal{R} \times \text{SO}(2)$ را توليد مى‌کنند. \mathcal{F} علاوه بر اين داراي زيرگرووهای گستته است که مرتبه‌ترین آنها از نظر عملی، گروه‌های تقارن اجسام افلاطوني هستند، به عنوان مثال بيسنجه، که در شکل ۱۵۰ نشان داده شده است.^{۱۱۳}

۳ به صورت متعدي بر روی کره عمل مى‌کند، يعني برای هر دو نقطه p و q از S^3 حداقل يك ايزومتری $\phi \in \mathcal{F}$ وجود دارد به طوري که $\phi(p) = q$. عمل‌های \mathcal{F} روی S^3 بدون نقطه ثابت نيسنند: هر نقطه زيرگروه \mathcal{F} در $p \in S^3$ توسط $\text{Stab}_p \cong \text{SO}(2)$ پايدار مى‌شود، که از دوران‌ها و بازتاب‌ها حول محور گذرنده از p در \mathbb{R}^3 تشکيل شده است. در مجموع، اين دو ويژگي دلالت بر اين دارند که يك فضای همگن از \mathcal{F} است و به صورت جبری به عنوان فضای خارج‌قسمتی

$$\mathcal{F}/\mathcal{F} \cong S^2, \quad (424)$$

تحقيق مى‌يابد، که از همدسته‌هایی به شکل ۲.۲ تشكيل شده است. يك گزاره مشابه برای $\text{SO}(3)$ برقرار است، که داراي زيرگرووهای پايدار ساز $\text{Stab}_p \cong \text{SO}(2) < \text{SO}(3)$ است و بنابراین

$$\text{SO}(3)/\text{SO}(2) \cong S^2. \quad (425)$$

با اين روابط، قضيه ۸.۱۴ اثبات مى‌کند که هر تبديل ميدان کردن همورداي ۳ يا $\text{SO}(3)$ روی S^3 معادل يك کاتولوشن GM با G به ترتيب برابر با $\text{SO}(2)$ است. اين نتيجه با ديدگاه کلاسيك CNN‌های همورداي گروهي روی فضاهای همگن مطابقت دارد [۱]. رابطه دقیق بين اين

^{۱۱۳} يك لیست جامع از تمام زيرگرووهای متناهی $\text{SO}(3)$ را می‌توان در [\[۱۱۳\]](#) یافت.

دو در قضیه ۱۱.۲ در ادامه روشن می‌شود. به پاد بیاورید که ایزومتری‌ها بنا به تعریف، متريک ریمانی را حفظ می‌کنند. اینکه \mathcal{S}^3 به صورت متعدد روی S^3 با پایدارساز ۲ عمل می‌کند، بنابراین دلالت بر این دارد که هندسه ریمانی S^3 در هر نقطه و در هر جهت و جهت‌گیری «شبیه به هم» به نظر می‌رسد \square یک فضای بیشینه متقاض است.

به عنوان یک منیفلد ریمانی، S^3 بنا به طراحی دارای یک ۲-ساختار است. یک تحدید به چارچوب‌های راست‌گرد، که ممکن است زیرا کره جهت‌پذیر است، $(\mathbb{Z})\text{-ساختار را در شکل } ۱۵۷$ به دست می‌دهد، که توسط دوران‌ها در $(\mathbb{R})\text{-SO}$ حفظ می‌شود. می‌توان نشان داد که این دو G -ساختار OM و SOM به عنوان کلاف‌های اصلی به ترتیب با 3 و $(\mathbb{R})\text{-SO}$ ایزومorf هستند. ایزومورفیسم خاص در اینجا با انتخاب یک چارچوب از G -ساختار داده می‌شود، که باید با عضو همانی گروه یکی گرفته شود.

قضیه گوی مودار بیان می‌کند که هیچ میدان برداری پیوسته‌ای روی S^3 وجود ندارد، که به طور خاص دلالت بر این دارد که هیچ $\{\cdot\}\text{-ساختار}(\text{پیوسته‌ای})$ نمی‌تواند وجود داشته باشد. بنابراین، یک کاهش گروه ساختاری فراتر از $(\mathbb{R})\text{-SO}$ نیازمند تغییر در توپولوژی منیفلد است. برای مثال، سوراخ کردن کره در یک نقطه دلخواه $p \in S$ یک سطح را به دست می‌دهد که با صفحه اقلیدسی همسان‌ریخت است و بنابراین موازی‌پذیر است.^{۱۱۴} سوراخ کردن کره در دو نقطه متقابل دلخواه، همانطور که در شکل ۱۵۷ نشان داده است، توپولوژی کره را به توپولوژی یک استوانه تبدیل می‌کند و بنابراین اجازه وجود $\{\cdot\}\text{-ساختارها را می‌دهد}$. رایج‌ترین انتخاب از $\{\cdot\}\text{-ساختار روی کره سوراخ دار } \{n, s\}, S^3 \setminus \{n, s\}$ در شکل ۱۵۷ و ۱۵۹ است. چارچوب‌های آن ناوردا در شکل ۱۵۷ و ۱۵۹ است.

$$\left[\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{\cos(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \quad (426)$$

با شبکه مختصاتی معمول کروی تراز شده‌اند، که در قراردادهای فیزیک (یعنی با φ و θ که به ترتیب زاویه سمتی و انحراف نسبت به صفحه xy را نشان می‌دهند) توسط نگاشت پوشای 2π متناظر باز داده می‌شوند:

$$\chi : (-\frac{\pi}{r}, \frac{\pi}{r}) \times \mathbb{R} \rightarrow S^3 \setminus \{n, s\}, \quad (\theta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos \varphi \\ \cos(\theta) \sin \varphi \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (427)$$

برخی از CNN‌های $\{\cdot\}\text{-راهنمایی}^{\text{پذیر}}\text{ با نمایش میدان‌های ویژگی روی } S^3 \setminus \{n, s\}$ در مختصات کروی پیاده‌سازی می‌شوند؛ به بخش ۳.۱۱ در ادامه مراجعه کنید. از آنجا که نگاشت مختصاتی χ ایزومتریک نیست، این روش‌ها به یک متريک جایگزین (یا $\{\cdot\}\text{-ساختار}$) روی مختصات $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^4$ نیاز دارند؛ به چارچوب‌های کشیده شده در شکل ۱۵۹ (راست) مراجعه کنید.

از آنجا که S^3 فشرده است، از نظر رُبُودیک‌ها توسعه دوایر عظیمه کره داده می‌شوند، یعنی آن دایره‌هایی که متناظر با تقاطع کره با یک صفحه گذرنده از مبدأ \mathbb{R}^3 هستند. نگاشتهای نمایی (v) این دوایر عظیمه را از طریق p در جهت v برای فاصله‌ای برابر با $\|v\|$ در دنبال می‌کنند. بنابراین نگاشتهای لگاریتمی $\log_p(q)$ برای تمام نقاط $p \in S^3 \setminus p$ که متقابل $q \in S^3 \setminus p$ نیستند، با بردار یکتاًی در جهت کوتاه‌تر در امتداد دایره عظیمه گذرنده از p و q داده می‌شوند، با $\|\log_p(q)\|$ که با طول قوس در امتداد این مسیر داده می‌شود. ژئودزیک‌ها بین نقاط متقابل p و q - یکتا نیستند، به طوری که نگاشت لگاریتمی وجود ندارد.

هندسه‌ی صریح S^3 به عنوان یک سطح جایگذاری شده در \mathbb{R}^3

همانطور که در بالا گفته شد، فضاهای مماس $\mathbb{R}^3 \subset S^3$ در هندسه دیفرانسیل کلاسیک سطوح به عنوان زیرفضاهای دو بعدی از فضای جایگذاری \mathbb{R}^3 تعریف می‌شوند. یک فضای مماس خاص $T_p M$ در $p \in S^3$ در این تفسیر با

$$T_p M = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, v \rangle = 0\} \subset \mathbb{R}^3, \quad (428)$$

داده می‌شود، یعنی فضای تمام بردارهایی که بر بردار نرمال سطح در p عمود هستند، که برای کره با خود p متنطبق است. توجه داشته باشید که، علی‌رغم بیان شدن نسبت به چارچوب استاندارد \mathbb{R}^3 ، این بردارهای مماس اشیاء مستقل از مختصات هستند به این معنا که با زوج‌های مرتبی از ضرایب $v^A \in \mathbb{R}^3$ نسبت به یک پیمانه $\psi_{TM,p}^A$ از $T_p M$ توصیف نمی‌شوند. یکی گرفتن فضاهای مماس با زیرفضاهای فضای جایگذاری اجازه می‌دهد تا بسیاری از روابط جبری انتزاعی بر حسب عملیات فضای برداری روی \mathbb{R}^3 بیان شوند. با قیمانده این بخش، ما چنین عبارتی را برای متريک، نگاشتهای نمایی و لگاریتمی، چارچوب‌ها، پیمانه‌ها، انتقال دهنده‌های لوی-چیویتا در امتداد ژئودزیک‌ها و تبدیلات پیمانه‌القا شده بیان خواهیم کرد.

بنا به تعریف، S^3 متريک ریمانی خود را از فضای جایگذاری به ارث می‌برد. اين متريک القا شده برای هر $v, w \in T_p M \subset \mathbb{R}^3$ با

$$\eta_p(v, w) := \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad (429)$$

داده می‌شود، یعنی حاصلضرب داخلی استاندارد \mathbb{R}^3 که به $T_p M$ محدود شده است. برای کاهش شلوغی، ما زیرنویس \mathbb{R}^3 را در نماد $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ در باقیمانده این بخش حذف می‌کنیم.

نگاشت نمایی \exp_p بردارهای $v \in T_p M$ را به نقطه $q = \exp_p(v) \in S^3$ در فاصله‌ای برابر با $\|v\|$ در امتداد دایره عظیمه در جهت v نگاشت می‌دهد. با قرار گرفتن روی همان دایره عظیمه، p و q از طریق یک دوران با زاویه $\|v\|/r = \alpha$ حول محور دوران

^{۱۱۴} این فرآیند به عنوان مثال با تصویر استریوگرافیک کرده مطابقت دارد.

به هم مرتبط می‌شوند، که در آن معادلات ساده می‌شوند زیرا کره دارای شعاع واحد $r = \|p\| = \frac{p \times v}{\|p \times v\|} = \frac{p \times v}{\|v\|}$ است و بردارهای $a = \frac{p \times v}{\|p \times v\|} = \frac{p \times v}{\|v\|}$ در \mathbb{R}^3 برعکس دوران رودریگز، $a = p \cos(\alpha) + (a \times p) \sin(\alpha) + a \langle a, p \rangle (1 - \cos(\alpha))$ است. با استفاده از فرمول دوران رودریگز، $a \times p = \frac{1}{\|v\|} (p \times v) \times p = \frac{1}{\|v\|} (\langle p, p \rangle v + \langle p, v \rangle p) = \frac{v}{\|v\|} \langle a, p \rangle = \frac{v}{\|v\|} \sin(\|v\|)$ به همراه عمود بودن $\langle a, p \rangle = 0$ این منجر به عبارت صریح

$$\exp_p : \mathbb{R}^3 \supset T_p M \rightarrow S^3 \subset \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto \exp_p(v) = p \cos(\|v\|) + \frac{v}{\|v\|} \sin(\|v\|) \quad (430)$$

برای نگاشت نمایی می‌شود.

یک عبارت صریح از نگاشت لگاریتمی در امتداد همین خط استدلال یافت می‌شود: نرم $(q) \in S^3 \setminus p$ که در آن $\log_p(q) = \arccos(\langle p, q \rangle) \alpha$ با زاویه دوران مطابق است. جهت آن با جهت مماس بر دایره عظیمه داده می‌شود، که ممکن است بر حسب تصویر نرمال شده $T_p M$ بیان شود. در کل، نگاشت لگاریتمی بنابراین به صورت زیر نمونه‌سازی می‌شود:

$$\log_p : S^3 \setminus p \rightarrow B_{T_p M}(\cdot, \pi), \quad q \mapsto \log_p(q) = \arccos(\langle p, q \rangle) \frac{q - \langle p, q \rangle p}{\|q - \langle p, q \rangle p\|}, \quad (431)$$

که در آن $\mathbb{R}^3 \subset T_p M \subset B_{T_p M}(\cdot, \pi) \subset T_p M$ گوی باز با شعاع از کتیوبته π حول مبدأ $T_p M$ را نشان می‌دهد.

چارچوب‌های مرجع روی S^3 بنا به تعریف فقط زوج‌های مرتضی از بردارهای مماس خطی مستقل هستند. هنگامی که محورهای یک چارچوب مرجع به صراحت به عنوان بردارهایی در فضای جایگذاری \mathbb{R}^3 بیان شوند، این چارچوب را می‌توان با ماتریس 2×3 با رتبه ۲

$$[e_1^A, e_2^A] = \begin{bmatrix} e_1^A & e_2^A \\ e_1^A & e_2^A \\ e_1^A & e_2^A \end{bmatrix} =: E_p^A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}. \quad (432)$$

شناسایی کرد. این ایزومورفیسم فضای برداری

$$E_p^A = [e_1^A, e_2^A] : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p M, \quad v^A \mapsto E_p^A v^A = v_1^A e_1^A + v_2^A e_2^A \quad (433)$$

را از ضرایب برداری به بردارهای مماس مستقل از مختصات تعریف می‌کند. بنابراین فضاهای مماس $T_p M$ دقیقاً تصویر E_p^A هستند.

پیمانه‌های متناظر $\psi_{TM,p}^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3$ از نظر فنی فقط وارون چارچوب‌ها هستند، هنگامی که به عنوان نگاشتهای $E_p^A : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p M$ تفسیر شوند. در مقابل، هنگامی که به عنوان ماتریس‌های 2×3 که \mathbb{R}^3 را به صورت غیرپوششی \mathbb{R}^3 نگاشت می‌دهند، تفسیر شوند، E_p^A وارون پذیر نیست اما فقط یک شبه-وارون را می‌پذیرد

$$(E_p^A)^+ := ((E_p^A)^\top E_p^A)^{-1} (E_p^A)^\top \in \mathbb{R}^{2 \times 3}. \quad (434)$$

از نظر هندسی، این ماتریس با (۱) تصویر کردن بردارهای در \mathbb{R}^3 به تصویر $E_p^A(\mathbb{R}^3) = T_p M \subset \mathbb{R}^3$ که همان $E_p^A(\mathbb{R}^3)$ است، و (۲) اعمال وارون ایزومورفیسم $E_p^A : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p M$ روی این زیرفضا عمل می‌کند. این بدان معناست که شبه-وارون در واقع وارون E_p^A روی فضای مماس است، که دلالت بر این دارد که نگاشت پیمانه با

$$\psi_{TM,p}^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto (E_p^A)^+ v. \quad (435)$$

داده می‌شود. به صورت باز شده، نگاشت پیمانه مطابق با

$$\begin{aligned} \psi_{TM,p}^A(v) &= \begin{pmatrix} \langle e_1^A, e_1^A \rangle & \langle e_1^A, e_2^A \rangle \\ \langle e_2^A, e_1^A \rangle & \langle e_2^A, e_2^A \rangle \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \langle e_1^A, v \rangle \\ \langle e_2^A, v \rangle \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\langle e_1^A, e_1^A \rangle \langle e_2^A, e_2^A \rangle - \langle e_1^A, e_2^A \rangle \langle e_2^A, e_1^A \rangle} \begin{pmatrix} \langle e_1^A, e_1^A \rangle & -\langle e_1^A, e_2^A \rangle \\ -\langle e_2^A, e_1^A \rangle & \langle e_1^A, e_1^A \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle e_1^A, v \rangle \\ \langle e_2^A, v \rangle \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (436)$$

عمل می‌کند. توجه داشته باشید که، به طور کلی، $\langle e_i^A, v \rangle \neq v_i^A$. با این حال، اگر (و تنها اگر) E_p^A یک چارچوب راست‌هنگار باشد، یعنی برای $G \leq 2$ ، نگاشت پیمانه به سادگی با تصویر بردار مماس روی محورهای چارچوب داده می‌شود:

$$\psi_{TM,p}^A(v) = (E_p^A)^\top v = \begin{pmatrix} \langle e_i^A, v \rangle \\ \langle e_j^A, v \rangle \end{pmatrix} \quad \text{برای چارچوب‌های راست‌هنگار، یعنی } \langle e_i^A, e_j^A \rangle = \delta_{ij} \quad (437)$$

عبارت صریح برای انتقال‌دهنده‌های لوی-چیویتا مستقل از مختصات در امتداد ژئودزیک‌ها مشابه عبارت نگاشت نمایی است، با این تفاوت که فرمول دوران رودریگز برای دوران دادن بردارهای مماس بین مبدأ و مقصد به جای دوران نقطه مبدأ به مقصد اعمال می‌شود. فرض کنید γ

کوتاه‌ترین ژئودزیک بین $a = p \times q \in S^3 \setminus -p$ و $p \in S^3$ باشد. دوران از p به q در امتداد این ژئودزیک سپس با محور $\alpha = \arccos(\langle p, q \rangle)$ در $T_p M \subset \mathbb{R}^3$ داده می‌شود. بر حسب این کمیت‌ها، انتقال لوی-چیویتا از یک بردار مماس جایگذاری شده در $T_q M \subset \mathbb{R}^3$ داده می‌شود.

$$\mathcal{P}_{TM,\gamma}(v) = v \cos(\alpha) + (a \times v) \sin(\alpha) + (a \langle a, v \rangle)(1 - \cos(\alpha)) \quad (438)$$

در \mathbb{R}^3 داده می‌شود. نسبت به پیمانه‌های $\psi_{TM,p}^A$ در نقطه شروع p و نقطه پایان q ژئودزیک، این انتقال‌دهنده با عضو گروه

$$g_\gamma^{A\tilde{A}} = \psi_{TM,p}^A \circ \mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1} = (E_p^A)^+ \circ \mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ E_q^{\tilde{A}}. \quad (439)$$

بیان می‌شود.

تبیلات پیمانه القا شده توسط ایزومتری به طور مشابه نسبت به چارچوب‌های مرجع صریح با ضرب ماتریسی زیر داده می‌شوند:

$$g_\phi^{A\tilde{A}}(p) = \psi_{TM,\phi(p)}^A \circ \phi \circ (\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1} = (E_{\phi(p)}^A)^+ \phi E_p^{\tilde{A}} \quad (440)$$

۲.۱۱ CNN‌های کروی کاملاً همودای دورانی

این بخش به بحث در مورد کانولوشن‌های کروی کاملاً $SO(3)$ -یا $SO(2)$ -هموردا می‌پردازد که در ردیف‌های (۳۳-۳۱) جدول ۶ فهرست شده‌اند. همه آنها را می‌توان به عنوان نمونه‌های خاصی از کانولوشن‌های GM روی $SO(2)$ -ساختار در شکل ۷۵آ یا ۷۵-ساختار متناظر، که علاوه بر آن تحت بازتاب‌های چارچوب نیز بسته است، درک کرد.

به جای سازماندهی این بحث بر حسب گروه‌های ساختاری و نمایش‌های گروهی در نظر گرفته شده، ما مدل‌ها را بر اساس چارچوب‌های نظری که در آنها توسعه یافته‌اند، دسته‌بندی می‌کنیم: ^{۱۱۴} [۱] یک شبکه پیکسلی را روی کره تعريف کرده و کانولوشن را مستقیماً به عنوان کانولوشن GM فرمول بندی می‌کنند، یعنی بر حسب پیمانه‌ها، کرنل‌های راهبری‌پذیر و انتقال‌دهنده‌های بردار ویژگی. یک چارچوب جایگزین، کانولوشن‌های گرافی روی مشاهی اسکالار (غیرحساس به جهت) نگاشت انجام می‌دهند. در آخر، به پیاده‌سازی‌هایی می‌رسیم که کرنل‌های کانولوشن (راهبری‌پذیر) بین میدان‌های اسکالار G -راهبری‌پذیر را روی فضاهای مماس در نظر می‌گیرند ^{۱۱۵} [۲]. قضیه ۱۱.۱ اثبات می‌کند که چنین کرنل‌های راهبری‌پذیر را روی کرنل‌های ما روی فضاهای مماس در نظر می‌گیرند ^{۱۱۶} [۳]. این نتیجه، ما در قضیه ۱۱.۲ اثبات می‌کنیم که کانولوشن‌ها با کرنل‌های کروی معادل کانولوشن‌های GM ما هستند. برای کامل بودن، باید اشاره کنیم که چنین مدل‌هایی معمولاً در حوزه طیفی پیاده‌سازی می‌شوند. ما بر این دیدگاه تمکن نمی‌کنیم اما خواننده علاقمند را به مرور ^{۱۱۷} [۴] ارجاع می‌دهیم.

کانولوشن‌های کروی: ما با CNN کروی توسط ^{۱۱۸} [۱] شروع می‌کنیم زیرا فرمول‌بندی آن دقیقاً با نظریه عمومی تر ما هنگام اعمال بر هندسه کروی مطابقت دارد. نویسنده‌گان ^{۱۱۹} [۲]-ساختار را از شکل ۷۵آ فرض می‌کنند و بنابراین میدان‌های ویژگی و کرنل‌های کانولوشن $SO(2)$ -راهبری‌پذیر را در نظر می‌گیرند. میدان‌های ویژگی بر حسب بردارهای ویژگی که به یک شبکه نمونه‌برداری روی کره اختصاص داده شده‌اند، گسسته‌سازی می‌شوند. در حالی که این روش در اصل مستقل از طرح نمونه‌برداری خاص است، نویسنده‌گان پیشنهاد می‌کنند که هندسه کروی را با یک مش ایکوسوفر گسسته‌سازی کنند. این مش با گرفتن یک بیست‌وچهار جایگذاری شده، تقسیم مکرر وجوده آن همانطور که در شکل ۷۰ نشان داده شده، و در نهایت تصویر کردن رؤوس شبکه به صورت شعاعی روی کره، یعنی به نرم واحد، ساخته می‌شود. میدان‌های ویژگی نمونه‌برداری شده به صورت عددی با مجموعه‌ای از بردارهای ضرب $f^A(p) \in \mathbb{R}^c$ در رؤوس شبکه p نمایش داده می‌شوند، که نسبت به برخی چارچوب‌های راست‌هنچار راست‌گرد دلخواه ^{۱۱۸} [۵] در رؤوس بیان می‌شوند. در عمل، چارچوب‌ها با یک بردار مماس منفرد با نرم واحد نمایش داده می‌شوند، که بردار چارچوب دوم از آن به طور یکتا تیجه می‌شود زیرا چارچوب‌ها راست‌گرد هستند.

برای محاسبه کانولوشن مستقل از مختصات (p) ^{۱۱۹} [۶] راهبری‌پذیر K را با پول‌بک انتقال‌دهنده $[Exp_p^* f]$ از میدان ویژگی f (معادله ۸۷) باشد که در اینجا فرض معمول است، در اینجا فرض می‌شود که K دارای تکیه‌گاه فشرده است، به طوری که فقط چند رأس را در یک همسایگی یک-حلقه یا دو-حلقه \mathcal{N}_p حول یک رأس مرکزی p پوشش می‌دهد. در نظریه پیوسته، پول‌بک انتقال‌دهنده ویژگی‌ها را از تمام نقاط $\mathbb{S}^2 \in \mathbb{R}^3$ برای $\exp_p^A(\psi_{TM,p}^A)$ می‌گیرد و آنها را به p منتقل می‌کند. در عمل، میدان‌های ویژگی فقط در رؤوس شبکه q نمونه‌برداری می‌شوند، که متناظر با ضرایب بردار مماس $v_{pq}^A = \psi_{TM,p}^A \log_p(q) \in \mathbb{R}^c$ در اینجا همانطور که در معادله (۴۳۱) ^{۱۱۹} [۷] تعریف شده، محاسبه می‌شوند. انتقال‌دهنده‌های لوی-چیویتا از q به p در اصل توسط معادله (۴۳۹) داده می‌شوند. از آنجا که چارچوب‌ها همگی راست‌گرد و راست‌هنچار هستند، و از آنجا که انتقال متناظر با اتصال لوی-چیویتا روی S^3 است، اعضای گروه $g_{p \leftarrow q}^{A\tilde{A}}$ مقادیری در $SO(2)$ دارند.

^{۱۱۸} این متناظر با یک انتخاب مستقل از پیمانه $\psi_{TM,p}^A$ روی هر همسایگی باز U^{A_p} از هر رأس p است.

^{۱۱۹} اگر نگاشت نمایی به شعاع انژکتیویته محدود نشود، هر رأس p با چندین بردار مماس نمایش داده می‌شود. این در عمل مشکلی ایجاد نمی‌کند زیرا فرض می‌شود که کرنل به صورت محلی در داخل شعاع انژکتیویته دارای تکیه‌گاه است.

بنابراین آنها به طور کامل توسط زاویه بین محور اول چارچوب منتقل شده (e_1^A) از q و محور اول چارچوب e_1^A در p تعیین می‌شوند. با این اجرا در دست، نویسنده‌گان پیشنهاد می‌کنند که انتگرال کانولوشن پیوسته را با مجموع گسسته

$$[K \star f]^A(p) = \int_{\mathbb{R}^4} K(v) [\text{Exp}_p^* f]^A(v) dv \approx \sum_{q \in \mathcal{N}_p} K(v_{pq}^A) \rho(g_{p \leftarrow q}^{A \bar{A}}) f^{\bar{A}}(q) \quad (441)$$

روی گره‌های مش همسایه تقریب بزنند. ضریب نرمال‌سازی گمشه را می‌توان به عنوان جذب شده در پارامترهای یادگرفتنی $w_i \in \mathbb{R}$ از کرنل کانولوشن $\text{SO}(2)$ -راهبری‌پذیر $K = \sum_i w_i K_i$ در نظر گرفت. به عنوان جایگزینی برای این تقریب ساده، نویسنده‌گان یک طرح انتگرال‌گیری تربیعی بهمینه را پیشنهاد می‌کنند، که به طور تجربی نشان داده است که همودایی ایزومنتری $\text{SO}(3)$ مدل را بهبود می‌بخشد.

این مدل در جدول ۶ به عنوان پردازشگر میدان‌های ویژگی که مطابق با نمایش منظم $\text{SO}(2)$ تبدیل می‌شوند، فهرست شده است. در پیاده‌سازی خود، $[]$ میدان‌های نمایش تحویل‌ناپذیر از $\text{SO}(2)$ در کانولوشن‌ها در نظر می‌گیرند. یک تغییر پایه قبل و بعد از کانولوشن‌ها این میدان‌های ویژگی را به میدان‌های ویژگی منظم تبدیل می‌کند، که سپس غیرخطی‌های نقطه‌ای مانند ReLU روى آنها عمل می‌کنند. نمایش منظم بی‌نهایت-بعدی $\text{SO}(2)$ در اینجا با نمایش‌های منظم زیرگروه‌های دوری گستته C_N تقریب زده می‌شود، که نمایش‌های تحویل‌ناپذیر آنها فقط نمایش‌های تحویل‌ناپذیر $\text{SO}(2)$ تا یک فرکانس محدود کننده باند $N/2$ هستند؛ به عنوان مثال به پیوست ۲.۰ از [?] مراجعه کنید. تغییر پایه بین نمایش‌ها در این مورد خاص فقط تبدیل فوریه گسسته معمول است.

کانولوشن‌های گراف کروی: CNN‌های گراف کروی توسط [?] و [?]، که در ردیف (۳۳) جدول ۶ فهرست شده‌اند، بر اساس کانولوشن‌های گراف متعارف هستند [?]. مشاهی پیکسلی روی کره در اینجا به عنوان گراف تفسیر می‌شوند. شبکه‌های کانولوشنی گراف سیگنال‌ها را روی کره با ضرب آنها در چندجمله‌ای‌های درجه k به صورت $\sum_{k=0}^m w_k L^k$ از ماتریس لاپلاسین گراف L پردازش می‌کنند، که در آن \mathbb{R}^w پارامترهای قابل آموزش هستند. از آنجا که ماتریس لاپلاسین فقط برای گره‌های مجاور و روده‌های غیرصفر دارد، جمله مرتبه k -ام فقط بر همسایگی k -های حول هر گره تأثیر می‌گذارد. روی یک مش منظم با یال‌های گراف بدون وزن، سهم یک گره همسایه j در ویژگی انباشته شده در p فقط به فاصله گراف آنها («شعاع») بستگی دارد، اما نه به همسایه خاص («جهت»). بنابراین کانولوشن گراف در چنین مواردی کرنل‌های همسانگرد را روی گراف اعمال می‌کند. گراف پیکسلی در نظر گرفته شده روی کره این ویژگی‌ها را تقریباً برآورده می‌کند. از آنجا که جایگذاری آنها روی کره به گونه‌ای است که گره‌ها تقریباً به صورت زوئدزیکی هم‌فاصله هستند، همسانگردی تپولوژیکی کرنل‌های کانولوشن گراف متناظر با همسانگردی متریک آنها روی کره است.

گروه ایزومنتری $\text{SO}(3)$ کره، تبدیلات پیمانه‌ای با مقادیر ۲ را الفا می‌کند، یعنی با جابجایی الگوها به یک مکان جدید و در یک جهت جدید عمل می‌کند. به دلیل اشتراک وزن کانولوشنی و همسانگردی کرنل‌ها، کانولوشن‌های گروهی همودایی ایزومنتری هستند. همانطور که قبلاً در معادله (۴۰) استدلال شد، کرنل‌های همسانگرد در چارچوب ما به عنوان کرنل‌های ۲-راهبری‌پذیر که بین میدان‌های اسکالر نگاشت انجام می‌دهند، بازیابی می‌شوند. همودایی ۳ کانولوشن در نظریه ما با ناوردايی ۳ از ۲-ساختار کره توضیح داده می‌شود.

کانولوشن‌های کروی با کرنل‌های روی S^3 : به عنوان یک فضای همگن، کره کانولوشن‌های گروهی (با فضای خارج‌قسمتی) [?] و کانولوشن‌های راهبری‌پذیر عمومی‌تر روی فضاهای همگن [?] را می‌پذیرد.^{۱۱۷} به جای تعریف کرنل‌های کانولوشن روی فضاهای مماس با روی همسایگی‌های گراف، این رویکردها کرنل‌ها را بالاصله به عنوان توابع ماتریسی روی کره تعریف می‌کنند، یعنی به صورت

$$\kappa : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \quad (442)$$

[?] نشان دادند که این کرنل‌ها برای تضمین همودایی کانولوشن باید یک محدودیت تقاضی را برآورده کنند. ما در ادامه استدلال می‌کنیم که چنین کرنل‌هایی روی S^3 معادل کرنل‌های G -راهبری‌پذیر روی فضاهای مماس هستند (قضیه ۱۱.۱)، که این دلالت بر این دارد که CNN‌های کروی پوشش داده شده در [?] و [?] را می‌پذیرد. به عنوان کانولوشن‌های GM در نظر گرفت (قضیه ۱۱.۲). یکی گرفتن بین این دو نوع کرنل در اینجا با پول‌بک کردن کرنل‌های کروی از طریق نگاشت نمایی به فضاهای مماس انجام می‌شود. قبل از توضیح این عملیات، ما به طور خلاصه مدل‌های پیشنهادی در [?] را به عنوان نمونه‌های خاصی از کانولوشن‌های کروی با کرنل‌های کروی مورد بحث قرار می‌دهیم. برای جزئیات بیشتر در مورد این مدل‌ها، به ویژه در مورد فرمول‌بندی آنها در فضای فوریه، خواننده را به مور جامع [?] ارجاع می‌دهیم.

بحث خود را با CNN کروی کانولوشنی گروهی توسط [?] که در ردیف (۳۲) جدول ۶ فهرست شده است، آغاز می‌کنیم. این مدل پشته‌هایی از c_{out} میدان اسکالر

$$f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}}} \quad (443)$$

را روی کره با تطبیق آنها با کرنل‌های کروی (معادله (۴۴۲)) در هر ژست تبدیل شده با $\text{SO}(3)$ پردازش می‌کند. در معادلات، این عملیات به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\kappa \star_{S^3} f](\phi) := \int_{S^3} \kappa(\phi^{-1}(p)) f(p) dp \quad \phi \in \text{SO}(3). \quad (444)$$

^{۱۱۷} یک مور عمومی تر از کانولوشن‌ها روی فضاهای همگن در پیوست ت یافت می‌شود.

توجه داشته باشید که نقشه ویژگی حاصل به عنوان پشتهای از $c_{\text{SO}(3)}$ تابع اسکالر روی گروه تقارنی $\text{SO}(3)$ در نظر گرفته می‌شود. چنین نقشه‌هایی ویژگی به شکل $\text{SO}(3) \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{SO}(3)}}$ (با تعداد جدید کانال‌های ورودی که متناظر با کانال‌های خروجی لایه قبل است) با کانولوشن‌های گروهی به شکل زیر بیشتر پردازش می‌شوند:

$$[\kappa *_{\text{SO}(3)} f](\phi) := \int_{\text{SO}(3)} \kappa(\phi^{-1}\omega) f(\omega) d\omega \quad \phi \in \text{SO}(3), \quad (445)$$

که در آن $\text{SO}(3) \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{SO}(3)} \times c_{\text{SO}(3)}}$: κ اکنون یک تابع ماتریسی روی $\text{SO}(3)$ است و $d\omega$ اندازه هار روی $\text{SO}(3)$ است. از دیدگاه CNN‌های راهبری‌پذیر روی فضاهای همگن [۹] و کانولوشن‌های GM , $\text{SO}(3)$ به عنوان میدان‌های ویژگی روی $\text{SO}(2)/\text{SO}(3)$ در نظر گرفته می‌شوند، که مطابق با نمایش منظم تارهای (زیرگروه‌های پایدارساز) $\text{SO}(2)$ $\text{SO}(3)/\text{SO}(2)$ تبدیل می‌شوند. کانولوشن اولیه در معادله (۴۴۴) در این تفسیر، کرنل‌های $\text{SO}(2)$ -راهبری‌پذیر را بین میدان‌های اسکالر و منظم اعمال می‌کند، در حالی که کانولوشن گروهی در معادله (۴۴۵) کرنل‌های $\text{SO}(2)$ -راهبری‌پذیر را بین میدان‌های منظم روی S^2 اعمال می‌کند.

[۹] کانولوشن‌های کروی را مانند معادله (۴۴۴) با این فرض اضافی اعمال می‌کنند که کرنل‌ها ناچیه‌ای هستند، یعنی تحت دوران‌های $\text{SO}(2)$ حول محور قطبی ناوردا هستند؛ شکل ۵۵ را مقایسه کنید. در حالی که انتگرال از نظر فری هنوز پاسخ‌هایی در $\text{SO}(3)$ می‌دهد، تقارن کرنل دلالت بر این دارد که این پاسخ‌ها روی تارهای $\text{SO}(2)$ از $\text{SO}(3)$ هنگامی که به عنوان کلاف روی S^2 تفسیر می‌شوند، ثابت هستند. بنابراین میدان‌های ویژگی حاصل به عنوان میدان‌های اسکالار روی S^2 شناسایی می‌شوند، که اجزاء کاربرد مکرر این نوع کانولوشن را می‌دهد. توجه داشته باشید که تقارن ناخیه‌ای کرنل راهبری‌پذیر بین میدان‌های اسکالار (نمایش‌های بدینهی) که قبلاً در معادله (۴۱۹) با آن مواجه شدیم، سازگار است. همانطور که قبلاً در بخش ۱۰ بحث شد، این محدودیت راهبری‌پذیری 2 بین میدان‌های اسکالار در معادله (۴۲۰) است، که این دلالت بر این دارد که مدل ρ_s در واقع 3 -هموردا است. این مدل از نظر روحی شبیه به کانولوشن‌های گراف کروی است که در بالا مورد بحث قرار گرفت، اما از دیدگاه متفاوتی استخراج شده و در پیاده‌سازی به طور متفاوتی گسترش‌سازی می‌شود.

[۱۰] این مدل را از میدان‌های اسکالار به توابع کروی با وزن اسپین تعیین می‌دهند. این توابع نه تنها به موقعیت $p \in \mathbb{R}$ روی کره بستگی دارند، بلکه علاوه بر آن به انتخاب خاص چارچوب مرجع راست‌هنگار و راست‌گرد در آن نقطه نیز بستگی دارند. آنها با نمایش‌های تحويل‌ناپذیر ρ_s از $\text{SO}(2)$ مرتبط هستند، که در آن عدد صحیح $s \in \mathbb{Z}$ به عنوان وزن اسپین توابع شناخته می‌شود.^{۱۱} مقدار آنها برای چارچوب‌های مختلف $\text{SO}(2)$ -ساختار SOM به گونه‌ای محدود شده‌اند که تبدیلات پیمانه‌ای چارچوب با $(g \in \text{SO}(2))$ منجر به تبدیل مقدار تابع با $\rho_s(g)$ می‌شود. بنابراین، در معادلات، آنها با $\rho_s(g)$

$${}_s f : \text{SOM} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{_____} \quad {}_s f([e_1, e_2] \triangleleft g) = \rho_s(g) {}_s f([e_1, e_2]) \quad \forall [e_1, e_2] \in \text{SO}_p M, g \in \text{SO}(2); \quad (446)$$

تعريف می‌شوند؛ برای جزئیات بیشتر و تعاریف جایگزین به [۹] مراجعه کنید. به شباهت این محدودیت تقارنی با رابطه هم‌ارزی

$$[[e_i]]_{i=1}^r \triangleleft g, f \sim_{\rho_s} [[e_i]]_{i=1}^r, \rho_s(g)f \quad (447)$$

از معادله (۱۷۰) که زیربنای تعریف کلاف‌های همبسته است، توجه کنید. توابع کروی با وزن اسپین در واقع معادل مقاطعی از کلاف‌های همبسته $(\text{SOM} \times \mathbb{C})/\sim_{\rho_s}$ هستند؛ به عنوان مثال به گزاره ۳.۶.۱ در [۹] مراجعه کنید. آنها در نظریه ما به سادگی به عنوان میدان‌های نمایش تحویل‌ناپذیر $\text{SO}(2)$ ظاهر می‌شوند، از جمله میدان‌های اسکالار برای $s = 0$ و میدان‌های برداری برای $s = 1$. شبکه‌های عصی پیشنهادی توسط [۹] ویژگی‌های با وزن اسپین را با کرنل‌های با وزن اسپین روی کره کانولوشن می‌کنند. این عملیات متناظر با یک کانولوشن با کرنل‌های $\text{SO}(2)$ -راهبری‌پذیر است که در آن ρ_s می‌شوند. بنابراین، در معادلات، آنها با ρ_s

مدل‌های [۹] در ابتدا در حوزه فضایی فرمول‌بندی شده‌اند، یعنی به عنوان پردازش توابع روی S^2 همانطور که در بالا بحث شد. با این حال، آنها در حوزه طیفی پیاده‌سازی می‌شوند، که به لطف قضایای کانولوشن تعیین‌یافته روی S^2 و روی $\text{SO}(3)$ ممکن است [۹]. [۹]. [۹]. [۹]. [۹]. این رویکردها را تعیین می‌دهند و بدیلی را پیشنهاد می‌کنند که بر اساس ترکیبات خطی یادگرفته شده از تمام مدهای فوریه میدان‌های ویژگی با فرکانس یکسان است. نویسنده‌گان استدلال می‌کنند که این رویکرد فضای کامل نگاشتهای خطی $\text{SO}(3)$ -هموردا را بین میدان‌های ویژگی روی $\text{SO}(2)$ کره پوشش می‌دهد. از سوی دیگر، [۹] نشان می‌دهند که هر چیز نگاشتشی را می‌توان در حوزه فضایی به عنوان یک کانولوشن با کرنل‌های کروی $\text{SO}(2)$ -راهبری‌پذیر نوشت. یک ویژگی قابل توجه مدل پیشنهادی توسط [۹] این است که به طور کامل در فضای فوریه عمل می‌کند؛ به جای تبدیل بازگشت به حوزه فضایی و اعمال غیرخطی‌های نقطه‌ای مانند ReLU در آنجا، همانطور که در رویکردهای قبلي انجام می‌شد، نویسنده‌گان حاصل‌ضرب تانسوری را بین تمام میدان‌های ویژگی محاسبه کرده و متعاقباً آنها را از طریق تجزیه کلیش-گوردون به ویژگی‌های تحویل‌ناپذیر (مدهای فوریه) باز می‌گردانند. این از نظر محاسباتی سودمند است، با این حال، به قیمت از دست دادن محلی بودن غیرخطی‌ها تمام می‌شود. وظایف پادگیری خاص، به ویژه در علوم طبیعی، ممکن است از چنین غیرخطی‌هایی بهره‌مند شوند زیرا تعاملات فیزیکی اغلب با حاصل‌ضرب‌های تانسوری توصیف می‌شوند.

همانطور که در [۹] استدلال شده است، تمام این مدل‌ها را می‌توان به عنوان اعمال کرنل‌های راهبری‌پذیر روی S^2 در نظر گرفت که بین میدان‌های اسکالار [۹]، میدان‌های ویژگی منظم [۹] یا میدان‌های نمایش تحویل‌ناپذیر [۹] نگاشت انجام می‌دهند. در باقیمانده این بخش و پیوست ج می‌شان می‌دهیم که آنها را نیز می‌توان به عنوان کانولوشن‌های GM در نظر گرفت. ادعای اینکه کانولوشن‌های کروی با کرنل‌های

^{۱۱۸} می‌توان این مفهوم را به نمایش‌های اسپین، که با وزن‌های اسپین نیمه‌صحيح برجسب‌گذاری شده‌اند، تعیین داد.

^{۱۱۹} یک پیاده‌سازی با مقدار حقيقی به جای آن توابع با وزن اسپین به شکل $\text{SOM} \rightarrow \mathbb{R}^{\dim(\rho_s)}$: f را در نظر می‌گیرد، که در آن ρ_s نمایش‌های تحویل‌ناپذیر $\text{SO}(2)$ روی اعداد حقیقی هستند.

راهبری‌پذیر روی S^3 معادل کانولوشن‌های GM هستند، در قضیه ۱۱.۲ دقیقاً بیان می‌شود. این قضیه به طور حیاتی به قضیه ۱۱.۱ متکی است، که یک ایزومورفیسم را بین کرنل‌های راهبری‌پذیر کروی و کرنل‌های G -راهبری‌پذیر روی فضاهای مماس برقرار می‌کند.

فرض کنید \mathcal{I} هر گروه ایزومتری متعددی از کره باشد، یعنی $\mathcal{I} = \text{SO}(3)$ یا $\mathcal{I} = \text{Stab}_n$ کروی $\text{Stab}_n < \mathcal{I}$ توصیف می‌کنند، که در آن $\text{Stab}_n < \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{real}} \times c_{\text{real}}}$ انتگرال \int_{S^3} را بر حسب کرنل‌های عنوان مثال قطب شمال. از آنجا که این کرنل‌ها روی کره تعریف شده‌اند، که از نظر توپولوژیکی با \mathbb{R}^3 متمایز است، تعریف مستقیم یک ایزومورفیسم بین آنها و کرنل‌های G -راهبری‌پذیر ممکن نیست. با این حال، از آنجا که قطب جنوب $-n$ یک مجموعه با اندازه صفر است، می‌توانیم دامنه انتگرال گیری \int_{S^3} کانولوشن‌های کروی را با $\int_{S^3 \setminus -n}$ جایگزین کنیم بدون اینکه نتیجه تغییر کند. با این تطبیق، کرنل‌های راهبری‌پذیر کروی \mathcal{I} به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathcal{K}_{\rho_{\text{real}}, \rho_{\text{real}}}^{\text{Stab}_n} := \left\{ \kappa : S^3 \setminus -n \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{real}} \times c_{\text{real}}} \mid \kappa(\xi(p)) = \rho_{\text{real}}(g_\xi^{NN}(n)) \cdot \kappa(p) \cdot \rho_{\text{real}}(g_\xi^{XP}(p))^{-1} \right. \\ \left. \forall p \in S^3 \setminus -n, \quad \xi \in \text{Stab}_n \right\}, \quad (448)$$

هنگامی که به نمادگذاری ما ترجمه شود. از آنجا که کرنل‌ها به صورت سراسری روی کره تعریف شده‌اند، مقادیر آنها در $\mathbb{R}^{c_{\text{real}} \times c_{\text{real}}}$ نسبت به پیمانه‌های بالقوه متفاوت N در n که کرنل در آن متتمرکز است، P در $p \in S^3$ که کرنل یک ویژگی $f^P(p) \in \mathbb{R}^{c_{\text{real}}}$ را منقبض می‌کند و X در (p) که این ویژگی تحت عمل $\kappa \in \text{Stab}_n$ $\kappa(p)$ می‌شوند، بیان می‌شوند. این محدودیت کرنل تمام مقادیر کرنل را که روی مدارهای $\text{Stab}_n.p = \{\xi(p) \mid \xi \in \text{Stab}_n\}$ قرار دارند، از طریق تبدیلات پیمانه القا شده توسط ایزومتری آنها $g_\xi^{NN}(n) \cdot g_\xi^{XP}(p) \cdot g_\xi^{XP}(p)$ به هم مرتبط می‌کند؛ به معادلات (۴۹۹) و (۳۰۲) مراجعه کنید.^{۱۲۰} کرنل‌های G -راهبری‌پذیر معادل می‌باشند، که در آن $G \cong \text{Stab}_n$ با

$$\mathcal{K}_{\rho_{\text{real}}, \rho_{\text{real}}}^{G, B_{\mathbb{R}^3}(\cdot, \pi)} := \left\{ K : B_{\mathbb{R}^3}(\cdot, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{real}} \times c_{\text{real}}} \mid K(gv) = \rho_{\text{real}}(g) \cdot K(v) \cdot \rho_{\text{real}}(g)^{-1} \quad \forall v \in B_{\mathbb{R}^3}(\cdot, \pi), \quad g \in G \right\}. \quad (449)$$

داده می‌شود. دامنه کرنل در اینجا از \mathbb{R}^3 به گوی باز π حول مبدأ $B_{\mathbb{R}^3}(\cdot, \pi) := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| < \pi\}$ محدود شده است که می‌توان آن را از طریق نگاشت نمایی با $n \in S^3 \setminus -n$ یکی گرفت. توجه داشته باشید که $\mathcal{K}_{\rho_{\text{real}}, \rho_{\text{real}}}^{G, B_{\mathbb{R}^3}(\cdot, \pi)}$ خوش تعریف است زیرا $\text{Stab}_n \cong G$ شامل ایزومتری‌ها است، که این دلالت بر $2 = \text{SO}(2)$ یا $G = \text{SO}(3)$ دارد، که تحت عمل آنها $B_{\mathbb{R}^3}(\cdot, \pi)$ بسته است. ملاعوه بر این ضریب دتمینان را از محدودیت G -راهبری‌پذیری عمومی تر در معادله (۸۶) حذف کردیم زیرا $|\det g| \leq 1$ برای g . محدودیت کرنل ما به طور قابل توجهی ساده‌تر از محدودیت \mathcal{I} است زیرا کرنل را به صورت محلی نسبت به یک پیمانه منفرد توصیف می‌کند، به جای اینکه به صورت سراسری نسبت به یک اطلس از پیمانه‌ها توصیف کند. توجه داشته باشید که ما فرض همواری را روی کرنل‌ها حذف کردیم، زیرا همواری یا پیوستگی میدان‌های ویژگی توسط \mathcal{I} مورد بحث قرار نگرفته است. این ویژگی را می‌توان به راحتی با خواستن اینکه کرنل‌های G -راهبری‌پذیر برای π که به سمت π می‌رود، به مقدار یکسانی همگرا شوند، که از طریق نگاشت نمایی متناظر با قطب جنوب است، اضافه کرد.

فضاهای کرنل‌های G -راهبری‌پذیر روی $S^3 \setminus -n$ و کرنل‌های G -راهبری‌پذیر روی $B_{\mathbb{R}^3}(\cdot, \pi)$ ایزومورف هستند، یعنی کرنل‌های آنها با یک نگاشت وارون‌پذیر Ω که محدودیت‌های کرنل را رعایت می‌کند، یکی گرفته می‌شوند:

$$\begin{array}{ccc} & \Omega & \\ \mathcal{K}_{\rho_{\text{real}}, \rho_{\text{real}}}^{G, B_{\mathbb{R}^3}(\cdot, \pi)} & \xleftarrow{\hspace{1cm}} & \mathcal{K}_{\rho_{\text{real}}, \rho_{\text{real}}}^{\text{Stab}_n} \\ & \Omega^{-1} & \end{array} \quad (450)$$

این ایزومورفیسم (یا بهتر بگوییم وارون آن Ω^{-1}) را می‌توان به عنوان مشابه بول بک انتقال دهنده از میدان‌های ویژگی در نظر گرفت: این ایزومورفیسم مقادیر کرنل را از نقاط $v \in B_{\mathbb{R}^3}(\cdot, \pi)$ در $S^3 \setminus -n$ به مختصات نرمال ژئودزیک $\exp_n^{-1}(\psi_{TM,n}^N)$ بدل کند. برای بیان مقادیر کرنل از تمام نقاط $p \in S^3 \setminus -n$ نسبت به همان پیمانه، این ایزومورفیسم انتقال دهنده‌های لوی-چیویتا $(g_{n \leftrightarrow p}^{NP})^\rho$ را از p در امتداد ژئودزیک‌ها به قطب شمال n اعمال می‌کند. علاوه بر این، مقادیر کرنل را با عنصر حجم ریمانی $\left| \eta_p^{\partial/\partial v_i} \right| := \sqrt{|\det(\eta_p(\frac{\partial}{\partial v_i}|_p, \frac{\partial}{\partial v_j}|_p)_{ij})|}$ نسبت به سیستم مختصات نرمال ژئودزیک (چارت مختصاتی) $\psi_{TM,n}^N \log n$ در $S^3 \setminus -n \rightarrow B_{\mathbb{R}^3}(\cdot, \pi)$ ، $p \mapsto v(p) := \psi_{TM,n}^N \log n$ تغییر مقیاس می‌دهد.^{۱۲۱} قضیه زیر ایزومورفیسم فضای کرنل را به طور رسمی تعریف و اثبات می‌کند.

قضیه ۱۱.۱ (کرنل‌های راهبری‌پذیر کروی در مختصات ژئودزیک). فرض کنید \mathcal{I} هر گروه ایزومتری متعددی از S^3 باشد و G زیرگروه $\text{GL}(2)$ پایدارساز آن در قطب شمال $n \in S^3$ باشد. با توجه به هر انتخاب از پیمانه $\psi_{TM,n}^N$ در این قطب، فرض کنید $\psi_{TM,n}^N \circ \psi_{*,TM}^N \circ (\psi_{TM,n}^N)^{-1}$ ساختاری ایزومورف باشد که Stab_n را در مختصات مطابق با G ، $\xi \mapsto \psi_{*,TM}^N \circ \psi_{TM,n}^N \circ (\psi_{TM,n}^N)^{-1}(\xi)$ نمایش می‌دهد.

^{۱۲۰} تبدیلات پیمانه القا شده توسط ایزومتری را با $\xi(p)$ به جای $h(p)$ نشان می‌هند، با این فرض که پیمانه‌های X در p و P در $\xi(p)$ در \mathbb{R}^3 هستند. تعریف آنها از $\xi(p) = h(p)$ مشابه معادله (۴۹۳) است.

^{۱۲۱} توجه داشته باشید که پایه‌های مختصاتی $\left[\frac{\partial}{\partial v_i} \right]_p$ که توسط مختصات نرمال ژئودزیک $\psi_{TM,n}^N$ در $B_{\mathbb{R}^3}(\cdot, \pi)$ نسبت به v ایجاد شوند، برای $G \leq \text{GL}(2)$ موجود نیستند. این پایه‌ها نقشی در کانولوشن GM ندارند اما فقط برای تصحیح حجم ریمانی هنگام انتگرال گیری در مختصات نرمال ژئودزیک روی کره ظاهر می‌شوند.

فضای $\mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square\square}}^{G, B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)}$ -راهبری‌پذیر روی $S^r \setminus -n$ توسعه Ω [معادله (۴۴۸)] سپس با فضای $\mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square\square}}^{\text{Stab}_n}$ از کرنل‌های G -راهبری‌پذیر روی گوی باز (π, \cdot) ایزومورف است. ایزومورفیسم فضای کرنل

$$\Omega : \mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square\square}}^{G, B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square\square}}^{\text{Stab}_n} \quad (451)$$

با

$$\Omega(K) : S^r \setminus -n \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}}, \quad p \mapsto [\Omega(K)](p) := K(\psi_{TM,n}^N \log_n p) \rho_{\square\square}(g_{n \leftarrow p}^{NP}) \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}^{-1} \quad (452)$$

داده می‌شود اگر کرنل نسبت به پیمانه‌های (بالقوه مستقل) N در n و P در p بیان شود. وارون آن با

$$\Omega^{-1}(\kappa) : B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square\square} \times c_{\square\square}}, \quad v \mapsto [\Omega^{-1}(\kappa)](v) := \kappa(\exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1} v) \rho_{\square\square}(g_{n \leftarrow p}^{NP})^{-1} \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}, \quad (453)$$

داده می‌شود، که در آن ما $v = \exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1} p$ را به صورت مخفف نوشتیم.

اثبات: با جایگذاری این دو عبارت، به راحتی می‌توان دید که $\Omega^{-1} \circ \Omega = \text{id}_{\mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square\square}}^{\text{Stab}_n}}$ یک وارون خوش‌تعریف برای Ω است زیرا $\Omega \circ \Omega^{-1} = \text{id}_{\mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square\square}}^{\text{Stab}_n}}$. بخش فنی اثبات این است که نشان دهیم این دو محدودیت کرنل یکدیگر را نتیجه می‌دهند، که این کار در پیوست ج ۱ انجام شده است. \square

توجه داشته باشید که ضریب مقیاس‌بندی حجم برای برقراری ایزومورفیسم بین فضاهای کرنل ضروری نیست اما برای معادل ساختن انتگرال کانولوشن کروی روی $S^r \setminus -n$ با انتگرال کانولوشن GM روی (\cdot, π) لازم است.

? [کانولوشن $[f]$ از یک میدان ویژگی $\kappa \in \mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square\square}}^{\text{Stab}_n}$] $\Gamma(f)$ را با کرنل‌های راهبری‌پذیر کروی $\phi_p \in \mathcal{I}$ در مختصات تعریف می‌کنند. با توجه به پیمانه‌های P در p و Q در q (اشتباه تایپی در متن اصلی، باید P در p و Q در q باشد)، فرض کنید $\phi_p \in \mathcal{I}$ ایزومتری یکتایی باشد که قطب شمال را به p منتقل می‌کند، یعنی $p = \phi_p(n)$ ، و چارچوب در n را به چارچوب در p نگاشت می‌دهد، یعنی $\text{غایله بر این، فرض کنید } X = \sigma_P^P(p) \text{ یا به طور معادل } g_{\phi_p}^{PN}(n) = e \text{ یا } (\phi_p)_{*, GM} \sigma^N(n) = \sigma^P(p) \text{ پیمانه در } (\phi_p)^{-1}(q) \text{ باشد. کانولوشن کروی سپس در ?] نسبت به این پیمانه‌ها به صورت نقطه‌ای با$

$$[\kappa \star_{S^r} f]^P(p) := \int_{S^r} \kappa(\phi_p^{-1} q) \rho_{\square\square}(g_{\phi_p^{-1}}^{XQ}(q)) f^Q(q) dq = \int_{S^r \setminus -p} \kappa(\phi_p^{-1} q) \rho_{\square\square}(g_{\phi_p^{-1}}^{XQ}(q)) f^Q(q) dq, \quad (454)$$

تعریف می‌شود، که در آن ما نقطه متقابل $-p$ - را در مرحله دوم بدون تعییر نتیجه حذف کردیم.^{۱۲۲} به طور شهودی، این عملیات یک ویژگی خروجی را در p با (۱) گرفتن هم کرنل و هم میدان ورودی، (۲) دوران دادن آنها از طریق ϕ_p^{-1} به طوری که p به قطب شمال منتقل شود (از طریق تبدیل پیمانه القا شده برای بدرار ویژگی)، و (۳) انتگرال گیری از حاصلضرب آنها روی کره محاسبه می‌کند. بنابراین، این عملیات به جای اشتراک مستقیم وزن‌ها روی فضاهای مماس، همانطور که مانجام می‌دهیم، وزن‌ها را از طریق عمل ایزومتری به اشتراک می‌گذارند. بنا به تعریف ϕ_p ، هر دو تعریف از اشتراک وزن، کرنل را در مکان هدف p به گونه‌ای جهت‌دهی می‌کنند که با چارچوب انتخاب شده $(\sigma^P(p)$ در این مکان تراز شود. قضیه زیر اثبات می‌کند که کانولوشن GM با یک کرnel کانولوشن کروی با کرنل کروی متناظر $\Omega(K) \in \mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square\square}}^{G, B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)}$ است.

قضیه ۱۱.۲ (کانولوشن‌های راهبری‌پذیر کروی به عنوان کانولوشن‌های $\square\square$). فرض کنید Stab_n زیرگروه پایدارساز هر گروه ایزومتری متعدد \mathcal{I} از S^r باشد و $G \leq \text{GL}(2)$ هر گروه ساختاری ایزومورف باشد. علاوه بر این، فرض کنید $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square\square}}^{G, B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)}$ هر کرنل G -راهبری‌پذیر روی گوی باز (π, \cdot) با شاعع π باشد (معادله (۴۴۹)) و فرض کنید $\Omega(K) \in \mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square\square}}^{\text{Stab}_n}$ کرنل G -راهبری‌پذیر متناظر آن روی $S^r \setminus -n$ باشد (معادلات (۴۴۸) و (۴۵۲)). کانولوشن GM (در اینجا برایوضوح با \star_{GM} نشان داده شده) با سپس معادل کانولوشن کروی K (معادله (۴۵۴)) توسعه $\Omega(K)$ است، یعنی،

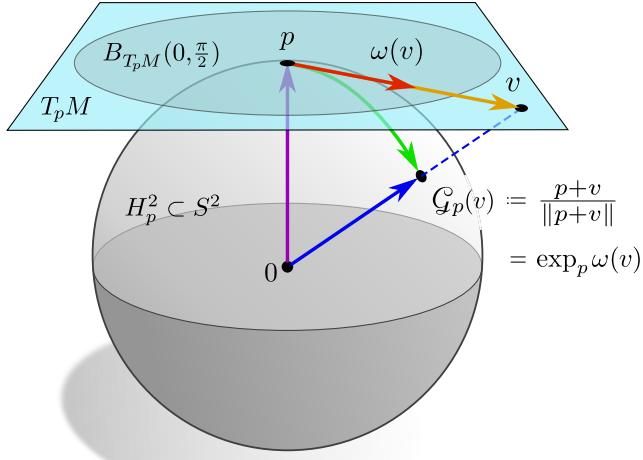
$$\Omega(K) \star_{S^r} f = K \star_{GM} f \quad (455)$$

برای هر میدان ویژگی کروی $f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square})$ برقرار است.

اثبات: اثبات در پیوست ج ۲ ارائه شده است. \square

این اثبات ادعای ما را توجیه می‌کند که مدل‌های Ω که در این بخش مورد بحث قرار گرفتند، همگی موارد خاصی از کانولوشن‌های GM هستند.

^{۱۲۲} این فرمول‌بندی عمومی‌تر از فرمول‌بندی در معادله (۴۴۴) است. دومی برای کرنل‌های اسکالر را به میدان‌های ویژگی منظم نگاشت می‌دهند، بازیابی می‌شود.



شکل ۱۸: تصویر نمونیک $G_p : T_p M \rightarrow H_p^\circ \subset S^\circ$ از فضای مماس در p به نیمکره بالایی $H_p^\circ \subset S^\circ$ حول p هنگامی که کره به عنوان جایگذاری شده در \mathbb{R}^3 تفسیر شود، تصویر نمونیک $G_p(v)$ (آبی) با مجموع $v \in S^\circ \subset \mathbb{R}^3$ (بنفش) و $v \in T_p M \subset \mathbb{R}^3$ (زرد) در فضای محیطی، و به دنبال آن یک نرمالسازی برای بازگشت به کره، داده می‌شود. قضیه ۱۱.۳ اثبات می‌کند که این عملیات معادل یک تصویر از یک بردار با تاب شعاعی $\omega(v) = \arctan\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$ نمایی در \mathbb{R}^3 است. بنابران، کانولوشن‌های کروی مبتنی بر تصویر نمونیک در \mathbb{R}^3 موارد خاصی از کانولوشن‌های GM کروی با کرنل‌های دارای تاب شعاعی هستند. کانولوشن‌های GM عمومی‌تر هستند زیرا به تصویرهای کرنل روی کل کره به جای فقط نیمکره بالایی اجازه می‌دهند.

۳.۱۱ CNN‌های کروی هموردای دوران سمتی در توپولوژی‌های استوانه‌ای

علاوه بر کانولوشن‌های کروی کامل^(۳)-یا-۳-هموردا، بسیاری از CNN‌های کروی طراحی شده‌اند که نسبت به دوران‌های سمتی حول یک محور قطبی مشخص، هموردا باشند. تمام مدل‌های مورد بحث در این بخش یا بر $(2)-SO(2)$ -ساختار $\{e\}$ -ناوردا که در شکل ۵۷ و ۵۹ نشان داده شده است، یا به طور جایگزین، بر ساختار نشان داده شده در شکل ۶۰ تکیه دارند. به دلیل بدینهی بودن گروه ساختار $\{e\}$ - G ، فضاهای کرنل نامحدود باقی می‌مانند $\{e\}$ -راهبری‌پذیری، ویزگی‌ها مطابق با اتصال بدینهی یکتای $\{e\}$ -سازگار منتقل می‌شوند که با اتصال لوی-چیوبیتا کروی عادی متفاوت است. با این اطلاعات، و با نگاشت‌های نمایی صریح در معادله (۴۳۰)، کانولوشن‌های GM کروی در این بخش در تئوری کامل‌اً مشخص شده‌اند. در عمل، پیاده‌سازی‌ها، که در ردیف (۳۴) جدول ۶ فهرست شده‌اند، در پیاده‌سازی‌های عددی خود متفاوت هستند، که در ادامه به بحث در مورد آنها می‌پردازیم.

همزمان با تعریف ما از اشتراک وزن کانولوشنی، مدل‌های $\{e\}$ -ساختار در نظر گرفته شده در شکل ۵۷ به اشتراک گذاشتند. با این حال، برخلاف کانولوشن‌های GM تطبیق این کرنل‌ها با میدان ویزگی از طریق نگاشت‌های نمایی (با پولک‌های انتقال‌دهنده) انجام نمی‌شود، بلکه از طریق تصویر نمونیک انجام می‌شود. این تصویر نمونیک در هر نقطه p با

$$G_p : T_p M \rightarrow H_p^\circ, \quad v \mapsto \frac{p+v}{\|p+v\|}, \quad (456)$$

تعریف می‌شود، که در شکل ۵۸ به تصویر کشیده شده است. جمع $p \in T_p M \subset \mathbb{R}^3 \subset S^\circ$ با بردارهای مماس $v \in S^\circ$ در اینجا در فضای جایگذاری \mathbb{R}^3 انجام می‌شود و نرمال‌سازی نتیجه را به کره باز می‌گرداند. هم‌دانمه تصویر نمونیک، نیمکره «بالایی»

$$H_p^\circ := \{q \in S^\circ \mid \langle p, q \rangle_{\mathbb{R}^3} > 0\} \subset S^\circ \quad (457)$$

است که حول p متمرکز شده است. با توجه به این تفاوت در تصویرهای کرنل، ممکن است به نظر برسد که مدل‌های $\{e\}$ به عنوان کانولوشن GM توضیح داده نمی‌شوند (با فقط به طور تقریبی). قضیه زیر، با این حال، اثبات می‌کند که تصویر نمونیک معادل یک تصویر از طریق نگاشت نمایی پس از اعمال یک تاب شعاعی

$$\omega : T_p M \rightarrow B_{T_p M}(\cdot, \frac{\pi}{\gamma}), \quad v \mapsto \arctan\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \quad (458)$$

به فضاهای مماس است، که بردارهای مماس را به یک گوی باز با شعاع $\pi/2$ حول مبدأ منطبق می‌کند:

قضیه ۱۱.۳ (تصویرهای نمونیک به عنوان نگاشت‌های نمایی دارای تاب). تصویر نمونیک G_p از $T_p M$ به نیمکره بالایی $H_p^\circ \subset S^\circ$ که در معادله (۴۵۶) تعریف شده است، معادل یک تصویر از تاب شعاعی آن $\omega : T_p M \rightarrow B_{T_p M}(\cdot, \frac{\pi}{\gamma})$ (معادله (۴۵۸)) از طریق نگاشت نمایی است، یعنی نمودار زیر جایجایی است:

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{G_p} & H_p^\circ \subset S^\circ \\ \omega \downarrow & & \searrow \exp_p \\ B_{T_p M}(\cdot, \frac{\pi}{\gamma}) & \xrightarrow{\text{exp}_p} & \end{array} \quad (459)$$

در معادلات،

$$\mathcal{G}_p(v) = \exp_p \circ \omega(v) \quad (460)$$

برای هر $p \in S^3$ و هر $v \in T_p M$ برقرار است.

اثبات: اثبات با محاسبه ساده زیر داده می‌شود، که برای هر $v \in T_p M$ و $p \in S^3$ برقرار است:

$$\begin{aligned} \exp_p \circ \omega(v) &\stackrel{(1)}{=} p \cdot \cos(\|\omega(v)\|) + \frac{\omega(v)}{\|\omega(v)\|} \cdot \sin(\|\omega(v)\|) \\ &\stackrel{(2)}{=} p \cdot \cos(\arctan(\|v\|)) + \frac{v}{\|v\|} \cdot \sin(\arctan(\|v\|)) \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{p + v}{\sqrt{1 + \|v\|^2}} \\ &\stackrel{(4)}{=} \frac{p + v}{\|p + v\|} \\ &\stackrel{(5)}{=} \mathcal{G}_p(v) \end{aligned} \quad (461)$$

مراحل اول و دوم از تعریف صریح نگاشت نمایی کره جایگذاری شده، معادله (۴۵۰)، و تاب شعاعی، معادله (۴۵۸)، استفاده می‌کنند. مرحله سوم از آنجا نتیجه می‌شود که $\sin \circ \arctan(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ و $\cos \circ \arctan(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ در مرحله چهارم ما از این استفاده هر زیرگروه $G \leq \text{SL}(2, \mathbb{R})$ نیز برقرار است زیرا محدودیت‌های G -راهنمایی پذیری فقط بر بخش‌های زاویه‌ای کرنل‌ها تأثیر می‌گذاردند اما مستقل از بخش‌های شعاعی تاب‌داده شده هستند. ما علاوه بر این می‌خواهیم اشاره کنیم که تصویر مبتنی بر نگاشت نمایی در کانولوشن‌های GM از این جهت عمومی‌تر از تصویر کرنل نومونیک است که می‌تواند کرنل‌هایی را توصیف کند که فراتر از نیمکره بالایی H_p حول p گسترش می‌یابند. توجه داشته باشید که هر دو تصویر کرنل در حد عملی مرتبط کرنل‌های کوچک، حتی بدون تاب شعاعی، معادل می‌شوند زیرا $(\|v\| + \mathcal{O}(\|v\|^3))$

این قضیه دلالت بر این دارد که کانولوشن‌های مبتنی بر تصویر نومونیک در \mathbb{R}^n در واقع موارد خاصی از کانولوشن‌های GM پس از یکی گرفتن کرنل‌ها از طریق تاب شعاعی ω هستند.^{۱۳} توجه داشته باشید که این یکی گرفتن نه تنها برای کرنل‌های $\{e_i\}$ -راهنمایی پذیر بلکه برای هر زیرگروه G نیز برقرار است زیرا محدودیت‌های G -راهنمایی پذیری متناظر فقط بر بخش‌های زاویه‌ای کرنل‌ها تأثیر می‌گذارند اما مستقل از بخش‌های شعاعی تاب‌داده شده هستند. ما علاوه بر این می‌خواهیم اشاره کنیم که تصویر مبتنی بر نگاشت نمایی در کانولوشن‌های GM از این کردیم که $\|p\| = 1$ و $\langle p, v \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$. در حالی که مرحله آخر تصویر نومونیک، معادله (۴۵۶) را شناسایی کرد. \square

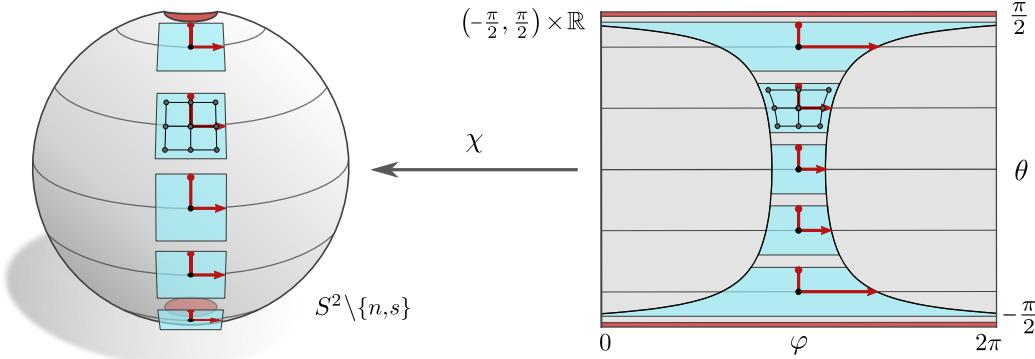
پیاده‌سازی‌های \mathbb{R}^n در پیوستار همگی با یکدیگر و با کانولوشن GM ما معادل هستند، با این حال، گسته‌سازی‌های عددی آنها متفاوت است. \mathbb{R}^n میدان‌های ویژگی را روی شبکه‌های نمونه‌برداری (تقریباً) یکنواخت روی کره گسته‌سازی می‌کنند. به طور خاص، \mathbb{R}^n از «مجموعه مارپیچ تعیین‌یافته روی $S^3 \setminus \{n, s\}$ » از \mathbb{R}^n به عنوان نقاط نمونه‌برداری استفاده می‌کنند، در حالی که \mathbb{R}^n از روش یک ایکوسفر استفاده می‌کنند. از آنجا که تصویرهای نومونیک از شبکه‌های نمونه‌برداری کرنل روی فضاهای مماس با شبکه نمونه‌برداری کروی مطابقت ندارند، نویسنده‌گان بین آنها درون‌یابی دوخطی انجام می‌دهند. ضرایب نمونه‌برداری کرنل در اینجا می‌توانند در یک مرحله آفلاین از پیش محاسبه شوند. کانولوشن واقعی سپس یک میدان ویژگی خروجی را با منقبض کردن کرنل‌های تصویر شده و درون‌یابی شده در هر نقطه با میدان ورودی محاسبه می‌کند.

\mathbb{R}^n میدان‌های ویژگی کروی خود $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ را در عوض به شکل یک شبکه پیکسلی منظم روی یک تصویر هم‌مستطیلی از کره گسته‌سازی می‌کنند. از نظر ریاضی، تصویر هم‌مستطیلی، که در شکل ۵۹ به تصویر کشیده شده است، به عنوان پول‌بک $\chi^* f = f \circ \chi$ است، که $\chi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ از تصویر توسط نگاشت مختصات کروی χ از معادله (۴۲۷) رسیدت می‌یابد:

$$\begin{array}{ccc} (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\chi} & S^3 \setminus \{n, s\} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{\chi^* f} & & & \end{array} \quad (462)$$

همانند رویکردهای قبلی، نویسنده‌گان یک شبکه نمونه‌برداری کرنل را از طریق تصویر نومونیک از فضاهای مماس به کره تصویر می‌کنند. در یک مرحله اضافی، آنرا از طریق χ به تصویر هم‌مستطیلی نگاشت می‌دهند که در آن ضرایب درون‌یابی را بین شبکه نمونه‌برداری کرنل تصویر شده و شبکه نمونه‌برداری میدان ویژگی محاسبه می‌کنند. از آنجا که تغییر شکل ناشی از تصویر هم‌مستطیلی مستقل از طول جغرافیایی $\phi \in \mathbb{R}$ است، کافی است آن را فقط یک بار برای هر عرض جغرافیایی $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$ محاسبه کرد. نمودار زیر، که بنا به تعاریف $K_p^{\text{منطبق}}$ و $K_p^{\text{منطبق}}$ جابجایی است، یک نمای کلی از تصویر نومونیک یک کرنل $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{منطبق}} \times c_{\text{منطبق}}}$ به کره \mathbb{R}^n و به تصویر هم‌مستطیلی آن [۴۶] ارائه

^{۱۳} از نظر فنی، معادل بودن هر دو کانولوشن علاوه بر این نیازمند یک تغییر وابسته به شاعع در دامنه کرنل برای در نظر گرفتن تغییر در اندازه حجم هنگام تاب دادن کرنل است.



شکل ۵.۹ نمایش $\{e\}$ -ساختار (2) -SO-ناؤردا که توسط اکثر مدل‌های مورد بحث در بخش ۳.۱۱ در نظر گرفته شده است. تمام چارچوب‌ها $[\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{\cos(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi}]$ به سمت قطب شمال تراز شده‌اند و نسبت به متريک جايداري کره در $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow S^3 \setminus \{n, s\}$ راست‌هنجر هستند. نگاشت مختصات کروي $\chi : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \rightarrow S^3 \setminus \{n, s\}$ از معادله (۴۲۷) اجازه می‌دهد تا میدان‌های ويژگی کروي به میدان‌های ويژگي روی زوایای کروي $\times \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ پولبک شوند، که به آن تصویر هم‌مستطيلی (غافل‌گيري) گفته می‌شود. از آنجا که χ ايزومتریک نیست، $\{e\}$ -ساختار کروي در مختصات يك ضrip وابسته به عرض جغرافياي $1/\cos(\theta)$ که به سمت قطب‌ها واگرا می‌شود، تغيير شكل می‌پابد. کانولوشن کروي روی اين $\{e\}$ -ساختار در $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ با تصویر کردن درون‌بالي يك شبکه نمونه‌برداری کرنل روی فضاهای مماس به يك شبکه نمونه‌برداری میدان ويژگي روی کره پیاده‌سازی می‌شود. اگر میدان‌های ويژگي در عوض روی تصویر هم‌مستطيلی نمونه‌برداری شوند، شبکه نمونه‌برداری کرنل در مرحله دوم از کره به يك شبکه نمونه‌برداری تغيير شكل یافته روی $\mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ نگاشت داده می‌شود $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. توجه داشته باشید که شبکه‌های نمونه‌برداری منظم روی تصویر هم‌مستطيلی سینگال را (نسبت به متريک کروي) به سمت قطب‌ها بيش نمونه‌برداری می‌کنند.

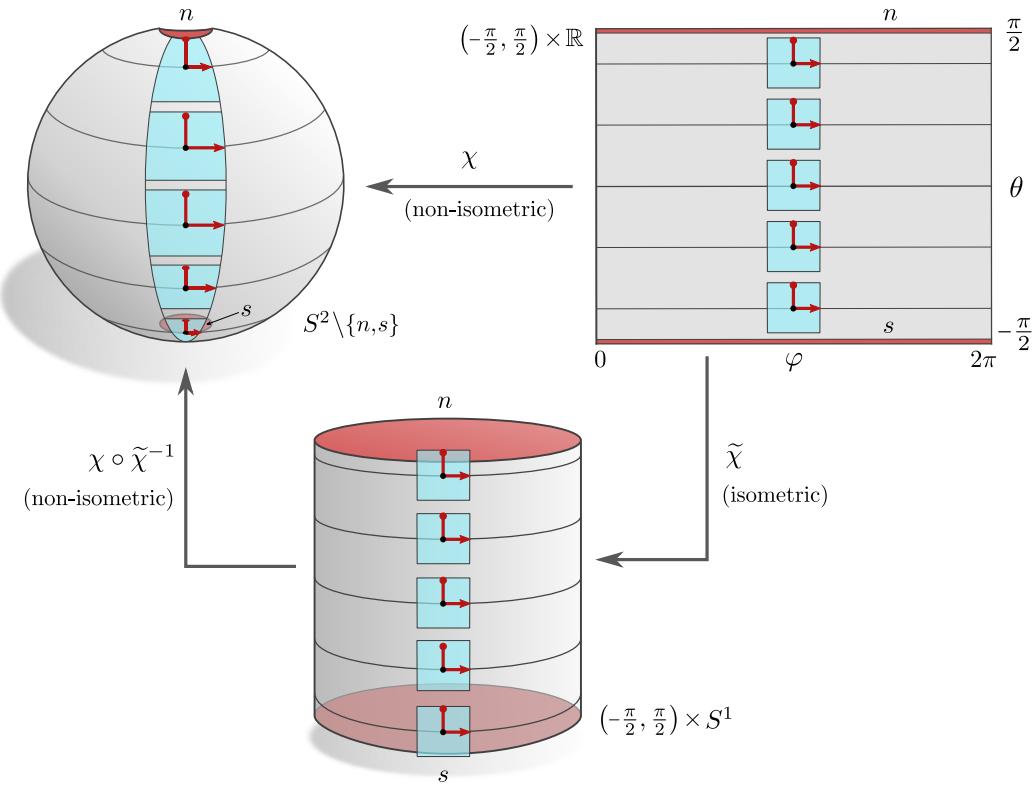
مي‌دهد (توجه داشته باشيد که H_p^\ast روی \mathcal{G}_p وارون‌بذر است):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & K & \longrightarrow & \mathbb{R}^{c_{000} \times c_{00}} & \longleftarrow & K_p^{\text{هم‌مستطيل}} \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
 \mathbb{R}^\ast & \xleftarrow{\psi_{TM,p}^A} & T_p M & \xrightarrow{\mathcal{G}_p = \exp_p \circ \omega} & H_p^\ast & \xleftarrow{\chi} & \underbrace{\chi^{-1}(H_p^\ast)}_{\subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}}
 \end{array} \quad (463)$$

يك نقطه ضعف عمده گسيسته‌ساري میدان‌های ويژگي کروي از طريق يك شبکه پيكسلی منظم روی تصویر هم‌مستطيلی اين است که اين رویکرد سينگال را به سمت قطب‌ها بيش نمونه‌برداری می‌کند.

انواع ديگري از کانولوشن‌های کروي روی تصویر هم‌مستطيلی توسيع $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ پيشنهاد شده‌اند. به جاي پيش‌محاسبه الگوي نمونه‌برداری کرنل تغيير شکل يافته، \mathcal{G} اشتراك وزن را باز می‌کنند به طوري که هر عرض جغرافيايی کرنل مستقل خود را در يك کانولوشن يك بعدی اقليلديسي اعمال می‌کند. سپس شبکه روی هر عرض جغرافيايی پيش‌آموزش داده می‌شود تا نتيجه‌های را که هنگام کانولوکردن با يك کرنل که روی فضاهای مماس به اشتراك گذاشته شده است، بازيابي کند. اگر اشتراك وزن کانولوشني يك بالياس استقراري مناسب باشد، اين روش باليد به طور تهبيه به روش‌های مبتنی بر هندسه توسيع $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ همگرا شود. \mathcal{G} اين رویکرد را بيشتر توسيع داده و از يك فرا-شبکه استفاده می‌کنند که يك کرنل تغيير شکل يافته را بر اساس يك کرنل الگوي ورودي مشترك و عرض جغرافيايي هدف پيش‌بیني می‌کند. هر دوی اين رویکردها وزن‌ها را روی مدارهای دايره‌اي (خطوط با عرض جغرافيايي ثابت) از گروه ايزومتری در نظر گرفته شده (2) -SO(n, s) از S^3 به اشتراك می‌گذارند؛ شکل ۴۵ را مقایسه کنيد. بنابراین آنها به عنوان تبديلات میدان کرنل با میدان‌های کرنل (2) -SO-ناؤردا شناسايي می‌شوند، که طبق قضيه ۸.۸ هموردا هستند.

با توجه به يك میدان ويژگي کروي در تصویر هم‌مستطيلی، ممکن است علاوه بر اين وسوسه شويم که آن را مستقيماً يك CNN اقليلديسي متعارف پردازش کنیم و از تصویر کرنل از فضاهای مماس صرف نظر کنیم، همانطور که به عنوان مثال در $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ انجام شده است. همانطور که در بخش ۹ بحث شد، چينين کانولوشن‌های اقليلديسي متناظر با کانولوشن‌های GM روی $\{e\}$ -ساختار کانونی از $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ هستند، که در شکل‌های ۱۵۰ و ۶۰ (بالا سمت راست) به تصویر کشیده شده است. اين $\{e\}$ -ساختار از چارچوب‌های $[\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}]$ تشکيل شده است، که نسبت به متريک اقليلديسي از $\mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ راست‌هنجر هستند. اين چارچوب‌ها، با اين حال، نسبت به متريک کروي (معادله ۴۲۹) راست‌هنجر نیستند، که در شکل ۶۰ (بالا سمت چپ) در انقباض چارچوب با ضrip $\cos(\theta)$ در جهت طولي منعکس شده است. بنابراین يك کانولوشن GM روی اين $\{e\}$ -ساختار از نظر هندسي متناظر با يك کانولوشن کروي نیست. اين بيشتر متناظر با يك کانولوشن GM روی يك استوانه است، که



شکل ۴۰. نگاشت مختصات کروی $\{n, s\} \times \mathbb{R} \rightarrow S^3 \setminus \{n, s\}$: χ , معادله (۴۲۷)، زوایا (θ, ϕ) را به نقاطی روی کره می‌فرستد. این نگاشت ایزومتریک نیست، که به این معنی است که پوشفوارد چارچوب‌های راست‌هنگار $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \rightarrow S^3 \setminus \{n, s\}$ نسبت به متريک اقليدسی روی $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$ نیست. بنابراین یک کانولوشن اقلیدسی متعارف در مختصات $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$ نیست. کرنل‌های آن با یک ضریب $\cos(\theta)$ در جهت طولی منطبق می‌شوند. از آنجا که فاصله‌ها بر حسب زوایا اندازه‌گیری می‌شوند، این عملیات بیشتر متناظر با یک کانولوشن روی یک استوانه است. که از طریق نگاشت ایزومتریک $\tilde{\chi}: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times S^1 \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$ (معادله (۴۶۴)) در \mathbb{R}^3 جایگذاری شده است. یک کانولوشن کروی به $\{e\}$ -ساختار نشان داده در شکل ۵۹ نیاز دارد.

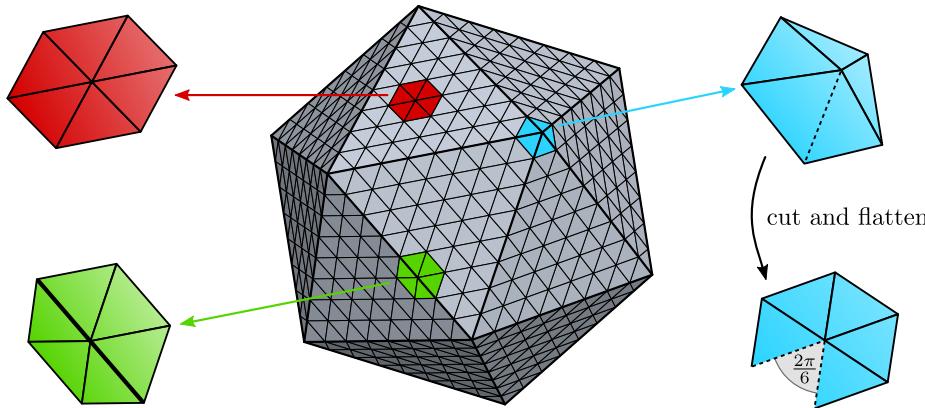
از طریق نگاشت مختصاتی ایزومتریک

$$\tilde{\chi}: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times S^1, \quad (\theta, \phi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ \theta \end{pmatrix} \quad (464)$$

در \mathbb{R}^3 جایگذاری شده است. در مقابل، $\{e\}$ -ساختار نشان داده در شکل‌های ۵۷ و ۵۹ از چارچوب‌های $\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\cos(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ تشکیل شده است، که نسبت به متريک کروی راست‌هنگار هستند. توجه داشته باشید که این چارچوب‌ها و متريک کروی با ضریب $1/\cos(\theta)$ هم‌تایان اقلیدسی کانونی خود روی $\mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ کشیده شده‌اند.

[۱] یک رویکرد جایگزین برای کانولوشن‌های کروی روی $\{e\}$ -ساختار نشان داده شده در شکل‌های ۵۷ و ۵۹ پیشنهاد می‌کند. به جای تعریف کرنل‌ها روی فضاهای مماس، آنها سیگنال را از طریق عملگرهای دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم به شکل $w_{id} + w_{e_1^A} \partial_1 + w_{e_2^A} \partial_2 + w_{e_3^A} \partial_3$ پردازش می‌کنند، که در آن ∂_i مشتق جزئی در جهت محور i -ام چارچوب را نشان می‌دهد و وزن‌های $w_{(i)}$ در طول آموزش بهینه‌سازی می‌شوند. اینکه وزن‌ها مستقل از موقعیت هستند، متناظر با اشتراک وزن فضایی ما است. این به همراه ناواردایی (۲) از $\{e\}$ -ساختار، که عملگرهای دیفرانسیل در امتداد آن تراز شده‌اند، هموردایی $SO(2)$ عملیات را تضمین می‌کند. در نظریه پیوسته، این مدل متناظر با یک کانولوشن GM در حد کرنل‌های بینهایت کوچک است. در عمل، [۲] میدان ویژگی را روی یک مش ایکوسфер نمونه‌برداری می‌کند و عملگرهای دیفرانسیل را بر حسب استنسیل‌های گستره فضایی روی رؤس مش نمایش می‌دهند. این کار، روش را معادل یک کانولوشن GM با کرنل‌های گستره فضایی می‌کند.

مدل [۳] دوباره روی یک ایکوسفر عمل می‌کند، با این حال، با یک $\{e\}$ -ساختار به شدت تغییر یافته (ناهموار)، به جای تراز کردن چارچوب‌های مرجع به طوری که همگی به سمت قطب شمال اشاره کنند، چارچوب‌ها به طور متنابض به سمت شمال یا جنوب اشاره می‌کنند. این طراحی از پیکسل‌بندی ایکوسفر، که وجوده مثلثی آن یا رو به شمال یا رو به جنوب هستند، الهام گرفته شده است. بنابراین پیکسل‌های مجاور را می‌توان با



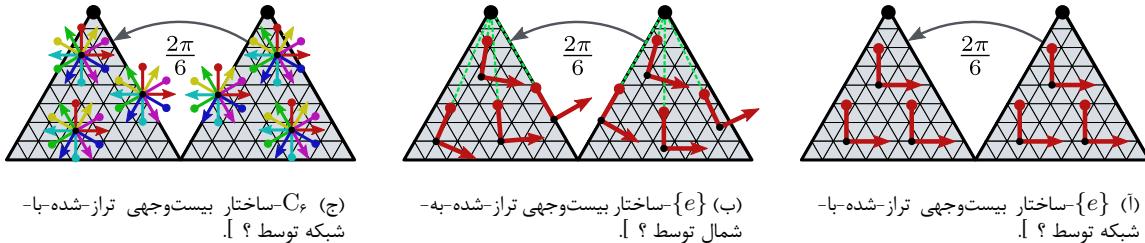
شکل ۶۱ بیست و چهاری یک جسم افلاطونی است که در [۴۹] به عنوان یک تقریب تکه‌ای-تخت از هندسه کروی استفاده می‌شود. این جسم از ۱۲ رأس، ۲۰ وجه مثلثی متساوی‌الاضلاع و ۳۰ یال تشکیل شده است. این جسم یک شکله نمونه‌برداری منظم را می‌پذیرد، که با تقسیم مکرر هر مثلث به چهار مثلث کوچکتر ساخته می‌شود. پس از ۳۰ تکرار، این رویه منجر به یک شبکه با $2 + 2^{2r+1}$ رأس می‌شود. سه تکه بر جسته شده، هندسه کمیکی متفاوت همسایگی‌ها را حول رئوس روی وجود (فرم)، یال‌ها (سین) و رئوس بیست و چهاری (آبی) نشان می‌دهند. همسایگی قرمز بهوضوح تخت است. در حالی که همسایگی سیز در فضای جایگذاری خمیده است، انحنای گاوسی ذاتی آن دوباره صفر است. این واقعیت در این امر منعکس می‌شود که می‌توان آن را به صورت ایزومنتریک (یعنی بدون برش) پهن کرد و به طور معادل، انتقال لوى چیوپیتا در امتداد یک مسیر بسته حول گره مرکزی، نگاشت همانی است. همسایگی آبی باید در امتداد یک یال بر پریده شود تا بتوان آن را پهن کرد. نقص زاویه‌ای، یعنی زاویه‌ای که برش هنگام پهن کدن نوک تیز باز می‌شود، برابر با $\frac{\pi}{3}$ است. هنگامی که یک بردار یک یال حول رأس مرکزی همسایگی به صورت موازی منتقل می‌شود، به اندازه این نقص زاویه می‌چرخد. به جای داشتن انحنای گاوسی مثبت ثابت مانند کره S^2 ، انحنای بیست و چهاری در رئوس آن متمرکز (تکین) است و در همه یال دیگر صفر است.

کرنل‌هایی که نسبت به یکدیگر 180° چرخانده شده‌اند، پردازش کرد. نویسندهان این استدلال می‌کنند که فرآیند آموزش باید این دوران را با یادگیری کرنل‌های راهبری‌پذیر متناسب جرجن کند. علی‌رغم دوران‌های شدید کرنل، $\{e\}$ -ساختار تحت آن دسته از دوران‌های سمتی که چارچوب‌های رو به شمال را روی خودشان نگاشت می‌دهند، ناوردا است، که منجر به یک هموداری تقریبی $(SO(2)$ کاتولوشن می‌شود. مدل‌های مورد بحث در این بخش به راحتی به دیگر اجسام دورانی (($SO(2)$ -ناوردا) مانند استوانه از شکل ۶۰ یا تخم مرغ از شکل ۴۰ تعمیم داده می‌شوند. آنها علاوه بر این برای ۲-همودا بودن، هنگام در نظر گرفتن یک ارتقا از $\{e\}$ -ساختارها به \mathcal{R} -ساختارها، که متناظر با استفاده از کرنل‌های \mathcal{R} -راهبری‌پذیر است، همانطور که در شکل ۴۷ نشان داده شده، تطبیق داده می‌شوند.

۴.۱۱ تقریب‌های بیست و چهاری از CNN‌های کروی

کره S^2 در علوم محاسباتی معمولاً با اجسام افلاطونی، یعنی چندوجهی‌های منظم محدب، تقریب زده می‌شود. در زمینه یادگیری عمیق، علاقه پیشتر بر روی بیست و چهاری، (شکل ۷۰)، متمرکز شده است، که در میان اجسام افلاطونی، نزدیک‌ترین تقریب به کره است [۴]. در حالی که هندسه ریمانی کره فقط تقریب زده می‌شود، اجسام افلاطونی این مزیت را دارند که تکه‌ای-تخت هستند و مشاهای منظمی را می‌پذیرند. این ویژگی‌ها امکان استفاده از رواه‌های کاتولوشن مستطیح را فراهم می‌کنند، که از نظر محاسباتی بهینه‌تر از روش‌های داده شده هستند. این بخش به بحث در مورد CNN‌های بیست و چهاری از [۴۱]، [۴۲] و [۴۳] می‌پردازد، که به ترتیب بر G -ساختارهای نشان داده شده در شکل‌های ۷۱، ۷۱ و ۷۱ تکیه دارند. قبل از پرداختن به پیاده‌سازی‌های آنها بر حسب اطلسی از چارت‌های آفین در شکل ۷۲، مجزای بیشتری در مورد هندسه بیست و چهاری و G -ساختارهای در نظر گرفته شده ارائه می‌دهیم.

هندسه‌ی بیست و چهاری: بیست و چهاری یک منیفلد دوبعدی گسته است که از ۲۰ وجه مثلثی متساوی‌الاضلاع، ۱۲ رأس و ۳۰ یال تشکیل شده است. همانند کره ۲-بعدی، ما بیست و چهاری را به عنوان جایگذاری شده در \mathbb{R}^3 تعریف می‌کنیم، که از آن متريک جایگذاری را در معادله (۴۲۹) به ارث می‌برد. فضاهای مماس جایگذاری شده $T_p M \subset \mathbb{R}^3$ روی وجود در اینجا به گونه‌ای تعریف می‌شوند که نرمال‌های آنها با نرمال‌های وجود منطبق باشند. فضاهای مماس روی رؤوس و یال‌ها را می‌توان از طریق میانگین نرمال‌های وجود مجاور تعریف کرد، همانطور که در بخش بعدی ۱۲ مورد بحث قرار می‌گیرد. با این حال، از آنجا که ما میدان‌های ویژگی را به عنوان نمونه‌برداری شده روی وجود بیست و چهاری (که تقریباً همه جا است) در نظر می‌گیریم، از این انتخاب مستقل هستیم. با فرض اتصال لوى چیوپیتا، انتقال موازی بردارهای مماس روی وجود به گونه‌ای عمل می‌کند که آنها را در فضای جایگذاری \mathbb{R}^3 موازی نگه دارد. هنگامی که بردارهای مماس از روی یک یال به صورت موازی منتقل می‌شوند، زاویه یکسانی را نسبت به یال در هر دو طرف حفظ می‌کنند [۴۱] این انتقال را می‌توان به طور شهودی به این صورت تصور کرد که (۱) دو وجه مجاور را پهن کرد، (۲) بردار را روی یال مانند حالت معمول در یک فضای اقلیدسی دوبعدی منتقل کرده، و (۳) دو وجه را به جایگذاری اصلی خود بازگردانیم؛ به شکل ۶۵ و [۴۲] مراجعه کنید. بنابراین ژئودزیک‌ها در \mathbb{R}^3 تکه‌ای-خطی هستند و از یال‌ها به گونه‌ای عبور می‌کنند که زاویه خروج آنها برابر با زاویه ورودشان باشد. بنابراین نگاشتهای نمایی (v) به راحتی با دنبال کردن یک مسیر تکه‌ای-ثابت برای فاصله‌ای برابر با $\|v\|$ محاسبه می‌شوند. در عمل،



(ا) $\{e\}$ -ساختار بیستوجهی تراز-شده-با-شبکه توسعه ؟ [۷۲]

شکل ۷۲: ایده مفهومی G -ساختارهای فرض شده در [۷۲]. به دلیل محدودیت فضای مجاور کنار قطب شمال از بیستوجهی پنهان شده (شکل ۷۲) نشان داده شده است. $\{e\}$ -ساختار در شکل ۷۲ با تراز کردن تمام چارچوبها در امتداد یال‌های «افقی» وجود (با فرض عمودی پودن محور قطبی) تعریف می‌شود. شکل ۷۱ ب یک $\{e\}$ -ساختار جایگزین را نشان می‌دهد که چارچوب‌های آن به سمت قطب شمال تراز شده‌اند. این ساختار برخلاف $\{e\}$ -ساختار قبلی پیوسته است زیرا چارچوبها روی یال‌های برباد شده متنگام چسبانیده مجدد یال‌ها به یکدیگر منطبق می‌شوند. $\{e\}$ -ساختار در شکل ۷۱ با افزودن چارچوب‌هایی که با مضرب‌هایی از $\frac{\pi}{6}$ چرخانه شده‌اند به $\{e\}$ -ساختار از شکل ۷۱ $\frac{\pi}{6}$ ساخته می‌شود. از آنجا که این زاویه با نقص زاویه در یال‌های برباد شده برابر است، $\{e\}$ -ساختار تعریف شده به این ترتیب هموار (پیوسته) است. توجه داشته باشید که این دو $\{e\}$ -ساختار با انتقال لوی-چیویتا ناسازگار هستند (یعنی تحت آن بسته نیستند) اما یک اتصال بدیهی جایگزین را القا می‌کنند. $\{e\}$ -ساختار، در مقابل، با انتقال لوی-چیویتا سازگار است.

نویسندهان [۷۲] میدان‌های ویژگی را روی یک مش منظم نمونه‌برداری می‌کنند و فقط آن دسته از بردارهای مماس را در نظر می‌گیرند که به رئوس مش همسایه نگاشت می‌باشد.

شکل ۷۰ همسایگی‌های دیسکمانند را حول نقاط نمونه روی وجوه (قرمز)، یال‌ها (سبز) و رؤوس (آبی) بیستوجهی نشان می‌دهد. همسایگی قرمز کاملاً در داخل یک وجه قرار دارد و بنابراین تخت است. همسایگی سبز در فضای جایگذاری خمیده است، با این حال، انحنای ذاتی (یمانی یا گاؤسی) آن هنوز صفر است زیرا انتقال لوی-چیویتا بردارها یک بار حول رأس مرکزی، آنها را همانظر که مستند حفظ می‌کند. اینکه این مورد برقرار است معادل این واقعیت است که همسایگی سبز را می‌توان به صورت ایزومتریک پهن کرد، یعنی بدون کشش یا برش آن. این پهن کردن ایزومتریک برای نوع آبی همسایگی‌ها حول رئوس ممکن نیست، که برای پهن شدن باید در یکی از یال‌ها برباد شوند. با ساخته شدن از پنج مثلث متساوی‌الاضلاع، نوک تیز پهن شده یک نقص زاویه $\frac{\pi}{6}$ را نشان می‌دهد. هولونومی هر مسیر سته حول هر رأس (منفرد)، یعنی زاویه بین یک بردار دلخواه و انتقال آن یک بار حول حلقه، دقیقاً با این نقص زاویه داده می‌شود. در کل، این نتایج دلالت بر این دارند که انحنای گاؤسی (\mathcal{G} -سته) بیستوجهی در همه جا به جز در رئوس صفر است، جایی که با هولونومی $\frac{\pi}{6}$ تکین است. هندسه ساده بیستوجهی اجازه می‌دهد تا آن را باز کرده و به صورت سراسری پهن کرد، همانطور که در شکل ۷۲ به تصویر کشیده شده است، که در [۷۲] برای یک پیاده‌سازی کارآمد از کانولوشن‌های GM بیستوجهی استفاده شد.

گروه ایزومتری کامل بیستوجهی $\mathcal{G} = I_h \leq Isom(M)$ متناهی است و از ۱۲۰ عضو تشکیل شده است. می‌توان آن را به عنوان حاصل ضرب مستقیم $\mathcal{R} \times \mathcal{I}$ از زیرگروه بازتاب‌ها \mathcal{R} و زیرگروه ایزومتری‌های حافظ جهت $(^3)$ $Isom_+(M) = I \leq SO(3)$ که شامل ۶۰ دوران است، ساخت. هر رأس p توسط پنج دوران \mathcal{G} -سته حول محور گذرنده از p و رأس متقابل آن پایدار می‌شود، که گروه دوری $(^2)$ $C_h \leq SO(2)$ را تشکیل می‌دهند. رأس p علاوه بر این توسط بازتاب‌ها نسبت به صفحه تعريف شده توسط محور دوران و هر یال خروجی از p پایدار می‌شود، به طوری که زیرگروه پایدار ساز کامل آن با گروه دووجهی $\mathcal{D}_h \leq \mathcal{D}_h$ داده می‌شود. همودرایی کانولوشن‌های GM بیستوجهی نسبت به گروه‌های ایزومتری $\mathcal{I}, \mathcal{I}_h$ یا D_h در [۷۲] نشان داده شده است که همودرایی کامل $\mathcal{C}_h \leq SO(3)$ یا $(^3)$ $SO(2)$ یا $(^2)$ $SO(2)$ هنگامی که از افزایش داده دورانی پیوسته استفاده شود.^{۱۴۴}

G -ساختارهای بیستوجهی: کانولوشن‌های GM بیستوجهی توسط $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{6}$ (به طور ضمنی) $\{e\}$ -ساختارها را فرض می‌کنند، در حالی که مدل $\frac{\pi}{6}$ یک $\{e\}$ -ساختار را فرض می‌کند. شکل ۷۱ ایده پشت این G -ساختارها را به تصویر می‌کشد، که در سه پاراگراف بعدی با جزئیات بیشتری توضیح می‌دهیم.

$\{e\}$ -ساختار توسط $\frac{\pi}{6}$ که در شکل ۷۱ نشان داده شده است، با تراز کردن اولین محورهای چارچوب در امتداد یال‌های «افقی» وجود مثالی متناظر تعریف می‌شود. هنگام پهن کردن بیستوجهی به یک صفحه همانطور که در شکل ۷۲ نشان داده شده است، تمام چارچوب‌های این $\{e\}$ -ساختار در این صفحه موازی هستند، که پیاده‌سازی کانولوشن‌های GM متناظر را بسیار ساده می‌کند. طبق معمول، $\{e\}$ -ساختار یک اتصال بدیهی یکتا را مشخص می‌کند که ویژگی‌ها مطابق آن منتقل می‌شوند. این اتصال بدیهی در داخل وجوه، روی یال‌هایی که در شکل ۷۲ برباد شده‌اند و روی یال برباد شده ارغوانی با اتصال لوی-چیویتا منطبق است. با این حال، انتقال آن از روی یال‌های برباد شده با انتقال لوی-چیویتا متفاوت است زیرا چارچوب‌های $\{e\}$ -ساختار در آنجا به طور ناپیوسته به اندازه زاویه $\frac{\pi}{6}$ می‌چرخد. از آنجا که $\{e\}$ -ساختار توسط دوران‌ها در \mathcal{D}_h حول محور قطبی حفظ می‌شود، کانولوشن‌های GM آن تقریباً $(^2)$ $SO(2)$ -هموردا هستند، یعنی مدل‌های بخش قبلی ۳.۱۱ را تقریب می‌زنند. با این حال، $\{e\}$ -ساختار \mathbb{D} و بنابراین استنتاج شیکه \mathbb{D} روی یال‌های با نقص زاویه غیرصفر ناپیوسته است. علاوه بر این، چارچوب‌های مرجع دقیقاً به سمت قطب شمال اشاره نمی‌کنند، همانطور که برای $\{e\}$ -ساختار کروی از بخش ۳.۱۱ و شکل ۵۷ صادق است.

^{۱۴۴} این در [۷۲] به صورت تجربی برای $I_h \leq SO(3)$ نشان داده شده است. اینکه این نتیجه به $\frac{\pi}{6}$ تعمیم می‌یابد، روشن است زیرا گروه‌ها فقط در بازتاب‌ها متفاوت هستند، که کانولوشن‌های GM بیستوجهی را می‌توان نسبت به آنها دقیقاً هموردا ساخت. این علاوه بر این برای $\mathcal{D}_h \leq SO(2)$ هستند. نیز برقرار است، زیرا اینها زیرگروه‌هایی از \mathcal{D}_h هستند.

[۹] پیشنهاد می‌کنند که دو مشکل اخیر را با کار کردن با $\{e\}$ -ساختار در شکل ۷۱ حل کنند. این ساختار به گونه‌ای تعریف شده است که چارچوب‌ها حقیقاً در امتداد تصویر محور قطبی روی وجوده، یعنی به سمت قطب شمال، اشاره می‌کنند. این $\{e\}$ -ساختار در همه جا به جز در قطب‌های شمال و جنوب پیوسته است.^{۱۲۵} این ساختار به این معنا تقریب بهتری از $\{e\}$ -ساختار کروی از شکل ۵۷ است. $\{e\}$ -ساختار در دوباره یک اتصال بدیهی یکتا را القای کند. انتقال آن با انتقال لوی-چیویتا روی یال‌ها منطبق است، با این حال، هنگام انتقال روی وجوده با آن متفاوت است زیرا بدارها را به آرامی همراه با چارچوب‌ها می‌چرخاند. مانند $\{e\}$ -ساختار دیگر، این میدان چارچوب تحت دوران‌های سمتی در C_5 ناوردا است و بنابراین CNN‌های کروی همودای دوران سمتی را تقریب می‌زنند.

$\{e\}$ -ساختار در شکل ۷۱ توسط [۱۰] با افزودن چارچوب‌هایی که با مضرب‌هایی از $\frac{\pi}{4}$ چرخانده شده‌اند به چارچوب‌های $\{e\}$ -ساختار از شکل ۷۱ تعریف می‌شود. این ساختار بهوضوح پیوسته است زیرا زوایای بین مجموعه چارچوب‌های مرچ در هر نقطه دقیقاً برابر با نصف‌های زاویه در یال‌های بریده شده است. این ساختار برخلاف دو $\{e\}$ -ساختار قبلی با انتقال لوی-چیویتا سازگار است زیرا گروه ساختاری C_6 با گروه هولونومی بسته‌وجهی منطبق است. $\{e\}$ -ساختار علاوه بر این تحت عمل ایزومنتری‌های حافظه جهت بسته‌وجهی I حفظ می‌شود. بنابراین کانولوشن‌های روی این C_6 -ساختار، CNN‌های کروی کاملاً همودای دورانی $SO(3)$ را با بخش ۲.۱۱ تقریب می‌زنند.

پیاده‌سازی‌ها: برای پیاده‌سازی کانولوشن‌های G روی G -ساختارهای متناظر، [۱۱] [۱۲] [۱۳] یک شبکه منظم را روی وجوده بسته‌وجهی فرض می‌کنند؛ به شکل ۷۰ مراجعت کنید. این شبکه شش ضلعی منظم با تقسیم مکرر یال‌ها و جایگزینی هر مثلث با چهار مثلث کوچکتر ساخته می‌شود. در وضوح [۱۴] این کار منجر به یک شبکه با $2 + 5 \cdot 2^{n+1} + 5 \cdot 2^n + 1$ رأس می‌شود. توجه داشته باشید که این شبکه بنا به ساختار، دقیقاً تحت ایزومنتری‌های بسته‌وجهی متقاضی است، که منجر به یک همودایی دقیق GM Isom GM گسترش می‌شود.^{۱۲۶} پیشنهاد کردند که میدان‌های ویژگی بسته‌وجهی را نسبت به اطلسی از چارت‌ها که در شکل ۷۲ نشان داده شده است، نمایش دهند. این چارت‌ها این مزیت را دارند که شبکه‌های شش ضلعی روی وجوده بسته‌وجهی را به شبکه‌های پیکسلی مربوط نگاشت می‌دهند. با این حال، توجه داشته باشید که چارچوب‌های راست‌هنچار روی بسته‌وجهی در این نمایش تغییر شکل می‌یابند، به طوری که نسبت به متريک اقليدسي کانوني، راست‌هنچار نیستند. کرنل‌های کانولوشن شش ضلعی روی بسته‌وجهی بر اين اساس تغیير شکل می‌يابند و می‌توانند بر حسب کرنل‌های مربوطی که به گونه‌ای ماسک‌گذاري شده‌اند که دو گوشه آنها با صفر پر شده است، پیاده‌سازی شوند.

کانولوشن GM توسط [۱۵] چارچوب‌هایی را فرض می‌کند که همگی موازی هستند و بنابراین می‌توانند در داخل چارت‌ها، جایی که تکیه‌گاه کرنل از مرزهای آن فراتر نمی‌رود، از طریق یک کانولوشن اقلیدسی متعارف پیاده‌سازی شوند. در نقاطی که به یک یال بین چارت‌های مختلف نزدیک هستند، کرنل ویژگی‌ها را از آن سوی پرش انبیاش می‌کند. همانطور که قبلًا در بخش ۴.۵ و شکل ۳۰ بحث و به تصویر کشیده شد، این کار به راحتی از طریق یک عملیات پدینگ انتقال پیاده‌سازی می‌شود که یک حاشیه از ویژگی‌های منتقل شده موازی را در اطراف آرایه پیکسل‌های مربوطی قبل از اجرای عملیات کانولوشن، بد می‌کند. برای انتقال بدیهی که به طور ضمنی توسط [۱۶] فرض شده است، این عملیات پدینگ فقط یک ردیف از ویژگی‌ها را در هر یال بدون تبدیل آنها کپی می‌کند. از آنجا که نویسنده‌گان گروه ساختاری بدیهی $\{e\} = G$ را فرض می‌کنند، کرنل‌های شش ضلعی نامحدود باقی می‌مانند.

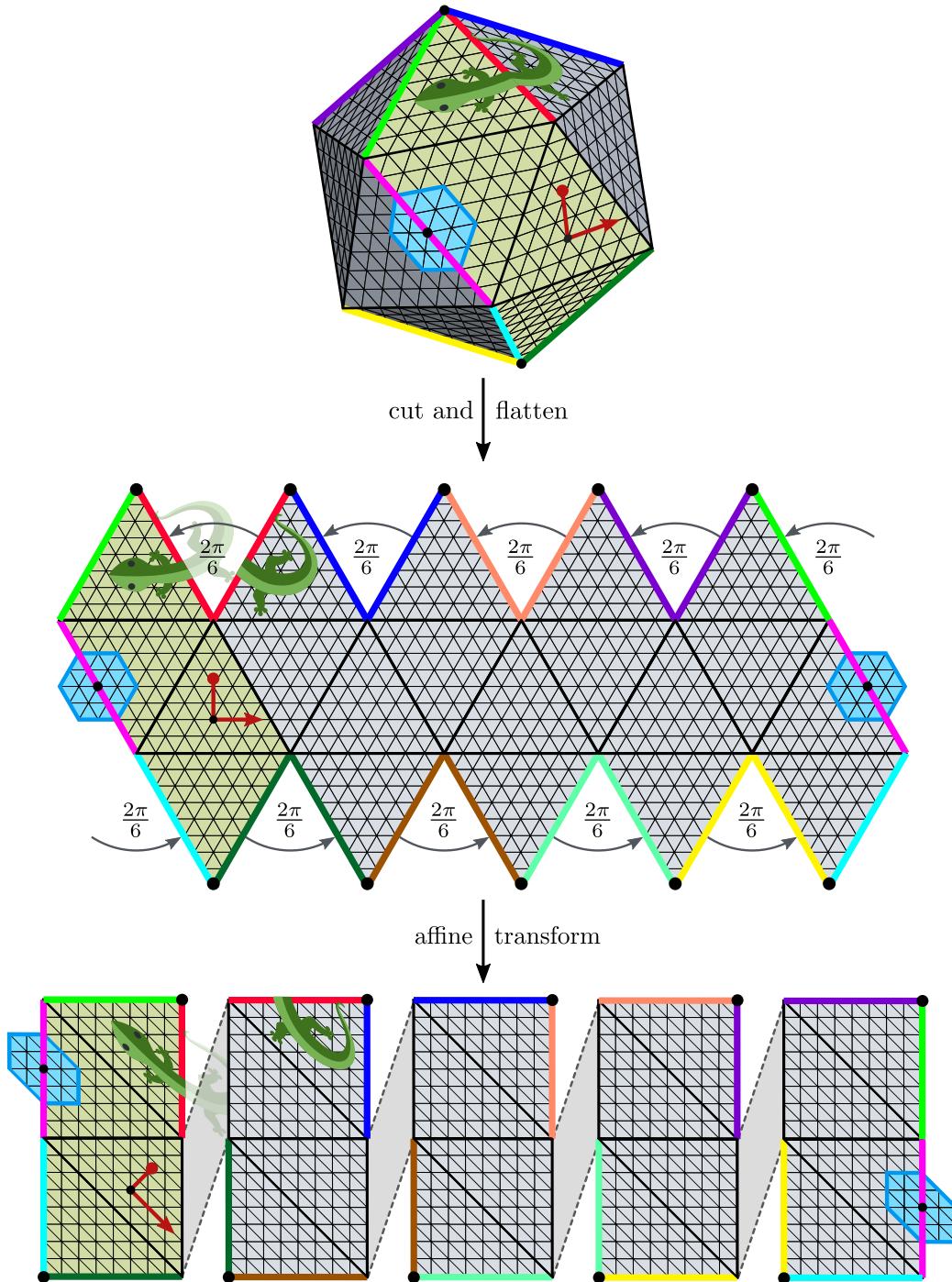
پیاده‌سازی [۱۷] عمده‌تاً مشابه است، با این حال، تفاوت حیاتی آن در این است که از انتقال دهنده‌های لوی-چیویتا و کرنل‌های C_6 -راهبری پذیر استفاده می‌کند. به جای پدینگ مستقیم ردیف‌های پیکسل از روی یال‌ها، انتقال لوی-چیویتا نیازمند این است که ویژگی‌ها یا با $g = e$ برای تمام یال‌های داخلی و یال ارگوانی، یا با زاویه‌ای برای $\frac{\pi}{4} \pm \theta$ از روی تمام یال‌های با نقص زاویه $\frac{\pi}{4}$ راهبری شوند، که علامت آن به جهت انتقال بستگی دارد. [۱۸] نمایش منظم C_6 را به عنوان نوع میدان فرض می‌کنند و کرنل‌های کانولوشن را برای برآورده کردن محدودیت راهبری پذیری مربوطه محدود می‌کنند. پس از پدینگ انتقال، کانولوشن GM آنها به عنوان یک کانولوشن اقلیدسی متعارف با این کرنل‌های راهبری پذیر پیاده‌سازی می‌شود. توجه داشته باشید که این کانولوشن GM در داخل وجوده، یعنی به جز پدینگ انتقال، مشابه HexaConv است.

از آنجا که کانولوشن GM توسط [۱۹] یک گروه ساختاری بدیهی $\{e\} = G$ را فرض می‌کند، پدینگ انتقال دوباره به عنوان یک کمی بدیهی از پیکسل‌ها بدون راهبری پیاده‌سازی می‌شود و کرنل‌ها دوباره نامحدود باقی می‌مانند. با این حال، از آنجا که چارچوب‌های $\{e\}$ -ساختار به سمت قطب شمال تراز شده‌اند، آنها دیگر در نمایش پیکسل مربوطی مستطیلی موازی نیستند، که از یک پیاده‌سازی فوری بر حسب کانولوشن‌های متعارف جلوگیری می‌کند. در عوض، کرنل‌ها باید در هر نقطه از شبکه در یک دوران متفاوت اعمال شوند. از آنجا که کرنل شش ضلعی را می‌توان با $\frac{\pi}{4}$ بدون استفاده از درون‌یابی چرخاند، و از آنجا که ترازها به سمت قطب شمال جداگشتند، نویسنده‌گان تقریب کارآمد زیر را برای این عملیات پیشنهاد می‌کنند: آنها روی هر وجه دو بار کانولو می‌کنند، یک بار با کرنل اصلی و یک بار با نسخه دوران یافته آن با $\frac{\pi}{4}$. سپس دو میدان پاسخ به صورت خطی با هم ترکیب می‌شوند، با وزن‌های درون‌یابی از پیش محاسبه شده که به زوایای چارچوب‌های مرجع تراز‌شده-به-شمال نسبت به دو تراز کرنل (یعنی نسبت به شبکه پیکسلی) بستگی دارد. بنابراین این پیاده‌سازی تقریباً دو برابر پرهزینه‌تر از پیاده‌سازی‌های [۲۰] است.

یک پیاده‌سازی جالگرین از کانولوشن‌های کروی روی بسته‌وجهی توسط [۲۱] پیشنهاد شده است. نویسنده‌گان سیگال کروی را روی صفحات گسترده شده توسط ۲۰ وجه (که به عنوان تصاویر مماس شناخته می‌شوند) تصویر می‌کنند و متعاقباً یک CNN متعارف را روی هر یک از این تصاویر اجرا می‌کنند. ما این شبکه را در لیست خود نیاورده‌یم زیرا این نمایش‌ها را به طور مستقل از یکدیگر پردازش می‌کنند، یعنی ویژگی‌ها را بین آنها منتقل یا پد نمی‌کند و بنابراین دقیقاً به عنوان کانولوشن GM توصیف نمی‌شود.

^{۱۲۵} برای دیدن این، تصور کنید که یال بریده شده در شکل ۷۱ را دوباره به هم بچسبانید: چارچوب‌های روی نیمه چپ و راست یال سپس با هم منطبق می‌شوند، که این مورد در شکل ۷۱ صادق نیست.

^{۱۲۶} شبکه ایکوسfer، که توسط برخی از مدل‌های بخش‌های ۲.۱۱ و ۳.۱۱ استفاده می‌شود، با تصویر کردن گره‌های این شبکه به فاصله شعاعی واحد از مبدأ، یعنی به S^2 تعریف می‌شود. مدل‌های این بخش این تصویر را فرض نمی‌کنند بلکه مستقیماً روی هندسه بسته‌وجهی تکه‌ای-تحت کانولو می‌کنند.



شکل ۶۳. پیاده‌سازی‌های [؟؟؟] میدان‌های ویزگی را نسبت به یک اطلس که بیست‌وجهی را پنج چارت می‌پوشاند، نمایش می‌دهند. برای ساخت این چارت‌ها، بیست‌وجهی در امتداد یال‌های رنگی بریده شده و پهن می‌شود. سپس پنج ناحیه، که هر کدام از چهار مثلث تشکیل شده‌اند، به همدامنه‌های چارت مستطیلی برش داده می‌شوند. (_____) این عملیات شبکه شش ضلعی را به یک شبکه از پیکسل‌های مرتبی نگاشت می‌دهد، به طوری که میدان‌های ویزگی بیست‌وجهی را می‌توان با مجموعه‌ای از پنج آرایه مستطیلی کدگذاری کرد. توجه داشته باشید که چارچوب‌های مرجع و کرنل‌ها بر این اساس در همدامنه‌های چارت تغییر شکل می‌یابند. انتقال لوی-چوپوتا از روی تمام یال‌های رنگی به جز یال ارغوانی، یک دوران به اندازه $\frac{7\pi}{6}$ را به همراه دارد، که علامت آن به جهت انتقال بستگی دارد. این کار با پدینگ انتقال ردیف‌هایی از پیکسل‌ها در امتداد یال‌های بریده شده، همانطور که قلّاً در شکل ۳۰ توصیف شد، پیاده‌سازی می‌شود.

(مارموک‌ها با مجوز توییتر تحت لایسنس بین‌المللی _____ اقیاس شده‌اند.)

همانطور که قبلاً ذکر شد، نتایج تجربی^{۱۲۷} نشان می‌دهد که هندسه بیست و چهاری هندسه کروی را برای کاربردهای یادگیری عمیق به خوبی تقریب می‌زند. به طور خاص، نویسنده‌گان CNN کروی خود را روی یک شبکه ایکوسfer با CNN بیست و چهاری تکه‌ای-تخت توسط^{۱۲۸} مقایسه می‌کنند و در می‌یابند که هر دو علی‌رغم هندسه تغییر شکل یافته دوی، عملکرد مشابهی دارند. مشخص شده است که هموردانی CNN‌های بیست و چهاری تحت دوران‌های پیوسته در^(۳) به طور قابل توجهی نقض می‌شود، با این حال، به نظر می‌رسد این فقط یک اثر بیش‌برازش است زیرا به راحتی و بدون از دست دادن عملکرد مدل با استفاده از افزایش داده^(۳) SO_۴ خنثی می‌شود.

همیشه، می‌خواهیم اشاره کنیم که همودا توسط^{۱۲۹} و^{۱۳۰} را می‌توان به راحتی با در نظر گرفتن یک \mathcal{R} -ساختار و در نتیجه کرنل‌های راهبری‌پذیر بازتابی،^{۱۳۱} همودا ساخت. به طور مشابه، I_h-همودا توسط^{۱۳۲} را می‌توان با ساختن کرنل‌های E-D-راهبری‌پذیر به جای C-E-راهبری‌پذیر، تحت گروه ایزومنتری کامل^{۱۳۳} بیست و چهاری همودا ساخت.

۱۲ CNN‌های مستقل از مختصات روی سطوح عمومی

به جای عمل روی یک هندسه ثابت، کانولوشن‌های GM در این بخش روی منیفلدهای عمومی تعریف می‌شوند. ما مرور خود را به سطوح^(d) محدود می‌کنیم زیرا از پیاده‌سازی‌ها روی منیفلدهای (عمومی) با ابعاد بالاتر آگاه نیستیم. سیکتال‌هایی که باید پردازش شوند، می‌توانند یا مستقیماً توسط مجموعه داده ارائه شوند یا از هندسه سطوح محاسبه شوند. مثال‌هایی برای دسته اول شامل بافت‌های رنگی یا کمیت‌های فیزیکی مانند میدان‌های دما یا تنفس دیواره یک ظرف تحت فشار است. دسته دوم می‌تواند به عنوان مثال شامل انحنای‌گاوی و اصلی، توصیف‌گرهای $\mathbb{M}\mathbb{M}\mathbb{M}$ یا ا مضاهای کرنل موج باشد. اکثر کاربردها تاکنون بر روی طبقه‌بندی سطوح^(۱۳۴) انجام می‌گیرند. قطعه‌بندی بخش‌هایی از آنها^(۱۳۵) یا یافتن تناظر بین سطوح مختلف^(۱۳۶) انجام می‌گیرد. متوجه شده‌اند. کاربردهای دیگر شامل پیش‌بینی کمیت‌های فیزیکی مانند تنفس مکانیکی^(۱۳۷) یا سنتز بافت‌های رنگی^(۱۳۸) یا تغییر شکل‌های هندسی^(۱۳۹) است.

طراحی CNN‌های اقلیدسی و کروی به شدت تحت تأثیر نیاز به همودایی تقارن سراسری است. از آنجا که سطوح عمومی معمولاً دارای گروههای ایزومنتری بدیهی هستند، این اصل را همنام از بین می‌رود، که آزادی زیادی را در انتخاب G-Sاختارها به ما می‌دهد. مدل‌هایی که در این بخش مرور می‌کنیم را می‌توان به کانولوشن‌های سطوح راهبری‌پذیر-دورانی و^{e}-راهبری‌پذیر طبقه‌بندی کرد. هر دو رویکرد به مسئله عدم وجود یک جهت کانونی روی سطوح می‌پردازند، با این حال، آنها این کار را به روشنی اساساً متفاوت انجام می‌دهند. مدل‌های راهبری‌پذیر-دورانی، عدم وجود جهت مرجع را با طراحی همودایی خود در نظر می‌گیرند و با همه جهات به طور یکسان رفتار می‌کنند. (۲)-SO_۴-Sاختار زیربنای آنها^(۱۴۰) یک انتخاب عملای اهمیت از جهت‌گیری^(۱۴۱) توسط متریک ریمانی ثابت می‌شود. بنابراین مدل‌های راهبری‌پذیر-دورانی عمدها در انتخاب انواع میدان متفاوت هستند. مدل‌های^{e}-راهبری‌پذیر، غیرهمودا هستند و بنابراین با یک نوع میدان (غیربدیهی) مرتبط نیستند. با این حال، آنها از یکدیگر با انتخاب خاص^{e}-Sاختار که برای تعیین ترازهای کرنل استفاده می‌شود، متفاوت هستند.

- | | |
|--|-----|
| ۱.۱۲ هندسه‌ی سطوح جایگذاری شده | ۱۶۶ |
| ۱.۱.۱۲ هندسه‌ی دیفرانسیل کلاسیک سطوح جایگذاری شده | ۱۶۶ |
| ۲.۱.۱۲ هندسه‌ی گسته‌سازی شده‌ی مشهای سطحی | ۱۶۸ |
| ۲.۱۲ کانولوشن‌های سطحی راهبری‌پذیر-دورانی | ۱۷۳ |
| ۳.۱۲ کانولوشن‌های ^{e} -سطحی راهبری‌پذیر | ۱۸۰ |
| ۴.۱۲ تقریب‌های بیست و چهاری از CNN‌های کروی | ۱۸۴ |

این بخش به صورت زیر سازماندهی شده است: ما در بخش ۱.۱.۱۲ با یک مقدمه (بسیار) کوتاه بر هندسه دیفرانسیل کلاسیک سطوح شروع می‌کنیم و به ویژه تفاوت بین هندسه ذاتی و خارجی آنها را مورد بحث قرار می‌دهیم. در عمل، اکثر پیاده‌سازی‌ها روی سطوح گسته‌سازی شده عمل می‌کنند. بخش ۲.۱.۱۲ یک نمای کلی از هندسه مشهای سطحی مثلى ارائه می‌دهد، که سلسله رایج‌ترین گسته‌سازی‌های سطح در مقالات یادگیری عمیق هستند. در بخش ۲.۱۲ ما کانولوشن‌های سطحی راهبری‌پذیر-دورانی را مورد بحث قرار می‌دهیم. روش‌های ابتکاری برای ثابت کردن میدان‌های چارچوب که کانولوشن‌های سطحی^{e}-راهبری‌پذیر را تعریف می‌کنند، در بخش ۳.۱۲ مرور می‌شوند.

برای کامل بودن، در پارagraf بعدی به چند رویکرد جایگزین برای تعریف کانولوشن‌های سطح اشاره می‌کنیم قبل از اینکه به محتوای اصلی این بخش پردازیم.

۱۳۰ سطوح فراتر از کانولوشن‌های^(۱۴۲): در حالی که تعداد قابل توجهی از CNN‌های سطح را می‌توان به عنوان کانولوشن‌های تفسیر کرد، بسیاری از طراحی‌های شبکه جایگزین پیشنهاد شده‌اند. این روش‌ها به عنوان مثال بر موارد زیر تکیه دارند: کانولوشن‌های^(۱۴۳) گراف روی مشهای سطح، رویکردهای طیفی، رندرهای چند-نمای از جایگذاری‌های سطح، روش‌های حجمی در فضای جایگذاری، عملگرهای دیفرانسیل، یا عملگرهای دیگری که بلافاصله روی ساختارهای داده مش عمل می‌کنند. مرور مختصر زیر به منظور ارائه یک نمای کلی از جهات مختلفی است که مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

^{۱۲۷} جهت‌گیری انتخاب شده روی یک منیفلد (همبند، جهت‌پذیر) دلخواه است زیرا کرنل‌ها یاد گرفته می‌شوند. اگر جهت‌گیری مخالف انتخاب می‌شد، آموزش فقط منجر به کرنل‌های با جهت‌گیری مخالف می‌شود.

یک روش برای طبقه‌بندی سطوح جایگذاری شده، رندر کردن آنها از چندین دیدگاه و پردازش رندرها با CNN‌های اقلیدسی متعارف است. ویژگی‌های حاصل سپس با تجمیع روی دیدگاه‌ها [؟] با از طریق یک روش اجماع [؟] می‌شوند. [؟] انتخاب می‌کنند که دیدگاه‌های دوربین را روی یک کره مطابق با یک زیرگروه گستته از (SO) قرار دهند، به عنوان مثال گروه بیست‌وچه‌ی سپس ویژگی‌های حاصل به طور مشترک از طریق یک کانولوشن گروهی گستته (نه یک کانولوشن سطح) پردازش می‌شوند.

به جای تصویر کردن سطح با رندر کردن آن، می‌توان آن را با تعریف یک چارت به \mathbb{R}^2 تصویر کرد. [؟] چارت‌های سراسری تقریباً مساحت-نگهدار (\mathbb{R}^2) را روی توبولوژی‌های کروی تعریف می‌کنند. این چارت‌ها ناپیوسته و به طور کلی زاویه-نگهدار (\mathbb{R}^2) نیستند. یک CNN اقلیدسی متعارف برای پردازش تصاویر حاصل استفاده می‌شود. ناپیوستگی‌ها را می‌توان با پول‌بک کردن ویژگی‌های سطح در امتداد نگاشت‌های پوششی چنبره‌ای (\mathbb{R}^2) [؟] یا عمومی‌تر [؟] یا e^{GM} تفسیر کرد زیرا لایه‌های نگاشت پوششی، e^{GM} -ساختارهای متغیر و ناسازگاری را روی سطح القا می‌کنند. [؟] از یک اطلس از کانولوشن GM تفسیر کرد زیرا لایه‌های نگاشت پوششی، e^{GM} -ساختارهای متغیر و ناسازگاری را روی سطح القا می‌کنند. [؟] از یک اطلس از چارت‌های (تقریباً) ایزومتریک استفاده می‌کنند [؟] همانطور که در انتهای بخش ۳.۱۲ بحث شد، این در واقع متناظر با یک کانولوشن GM است.

روش‌های حجمی سطوح جایگذاری شده را با \mathbb{R}^3 پردازش می‌کنند، به عنوان مثال با تفسیر رؤس یک مش سطح به عنوان یک ابر نقطه [؟] یا با واکسل‌بندی ورودی. روش‌های مبتنی بر ابر نقطه در [؟] مور شده‌اند. [؟] [؟] استدلال می‌کنند که سطوح را به عنوان مرزهای تصمیم‌گیری مدل‌سازی می‌کنند.

رویکردهای طیفی از قضیه کانولوشن الهام گرفته‌اند. پایه فوریه روی یک منیفلد در اینجا با ویژه‌توابع عملگر لاپلاس-بلترامی داده می‌شود. شبکه‌های عصبی طیفی، نقشه‌های ویژگی را با دستکاری طیف فوریه آنها با عملگرهای خطی یادگرفته شده پردازش می‌کنند. از آنجا که پایه فوریه غیر محلی است، [؟] به جای آن از یک تبدیل فوریه پنجره‌ای استفاده می‌کنند؛ یک جایگزین، هارمونیک‌های منیفلد محلی شده [؟] است. [؟] مش‌های سطح را به عنوان گراف تفسیر می‌کنند. بنابراین آنها از تبدیلات فوریه گراف استفاده می‌کنند، که بر اساس ویژه‌توابع لاپلاسین گراف هستند.

[؟] مدلی را پیشنهاد می‌کنند که بر اساس عملگرهای دیفرانسیل است. ویژگی‌های اسکالار از طریق نفوذ گرما با یک زمان نفوذ یادگرفتنی منتشر می‌شوند. از آنجا که لاپلاسین (که در معادله گرما ظاهر می‌شود) همسانگرد است، نمی‌تواند به طور انتخابی به الگوها در دوران‌های خاص پاسخ دهد. بنابراین نویسنده‌گان علاوه بر این یک عملگر گرادیان اعمال می‌کنند و سپس حاصل‌ضربهای داخلی از ویژگی‌های حاصل با مقادیر بردار مماس را می‌گیرند. توجه داشته باشید که هر دو عملیات ناوردار پیمانه هستند. این شبکه‌ها را می‌توان بر روی تمام ساختارهای داده‌ای که عملگرهای دیفرانسیل جزئی را می‌پذیرند، مانند ابرهای نقطه یا مش‌ها، پیاده‌سازی کرد.

تعداد قابل توجهی از شبکه‌ها بر روی ساختار منیفلد ریمانی عمل نمی‌کنند، بلکه بر روی ساختار داده که سطوح را به صورت عددی نمایش می‌دهد، عمل می‌کنند. یک مثال، شبکه‌هایی هستند که گره‌ها و یال‌های یک مش سطح را به عنوان تشکیل دهنده یک گراف تفسیر می‌کنند و در نتیجه از شبکه‌های گراف استفاده می‌کنند. همودادی ایزومتری شبکه‌های گراف در [؟] بررسی شده است. [؟] یک شبکه گراف با فیلترهای پویا، یعنی فیلترهایی که در طول پاس مستقیم از ویژگی‌ها پیش‌بینی می‌شوند، پیشنهاد کردن. مدل [؟] بر روی گراف‌های اولیه و دوگان مش‌ها عمل می‌کند و از مکانیزم‌های توجه استفاده می‌کند.

شبکه‌های مارپیچی (\mathbb{R}^3) ویژگی‌ها را روی مش‌ها از طریق عملگرهای مارپیچی محلی پردازش می‌کنند [؟]. این عملگرها ویژگی‌ها را با ذیوال کردن یک مسیر مارپیچی به سمت بیرون از گره مرکزی شمارش می‌کنند. یک پاسخ با اعمال یک LSTM به ذیال حاصل از ویژگی‌ها یا یک MLP به الحال آنها محاسبه می‌شود. انتخاب اولین همسایه و جهت مارپیچ متناظر با یک انتخاب از e^{GM} -ساختار است. [؟] [؟] کانولوشن‌ها را به ترتیب روی وجود و یال‌های مش تعریف می‌کنند. هر دو مدل نسبت به دلخواه بودن ترتیب عناصر مش ناوردا ساخته شده‌اند، که می‌تواند به یک طراحی همودای جایگشتی تعیین یابد.

برای مروهرهای عمیق‌تر از چنین روش‌هایی، خواننده را به [؟] و [؟] ارجاع می‌دهیم.

۱.۱.۱۲ هندسه‌ی سطوح جایگذاری شده

این بخش یک مقدمه کوتاه بر هندسه سطوح ارائه می‌دهد. برخی مفاهیم هندسه دیفرانسیل سطوح جایگذاری شده هموار در بخش ۱.۱.۱۲ مورد بحث قرار می‌گیرند. بخش ۱.۱.۱۲ تلاش می‌کند تا یک نمای کلی از راههای ممکن برای گسسته‌سازی کمیت‌های دیفرانسیل روی مش‌های سطحی ارائه دهد.

برای یک بررسی عمیق‌تر از سطوح پارامتری شده، خواننده را به [؟] ارجاع می‌دهیم. یک مقدمه مختصر و شهودی بر این موضوع و ارتباط آن با هندسه محاسباتی (گسسته‌سازی شده) را می‌توان در [؟] یافت.

۱.۱.۱۲ هندسه‌ی دیفرانسیل کلاسیک سطوح جایگذاری شده

به طور کلاسیک، سطوح به صورت خارجی توصیف شده‌اند، یعنی به عنوان غوطه‌ور (یا جایگذاری شده) در یک فضای محیطی اقلیدسی \mathbb{R}^3 . این غوطه‌وری را می‌توان به چندین روش معادل تعریف کرد، به عنوان مثال پارامتری‌سازی‌های محلی، وصله‌های مونژ یا توابع ضمنی. پارامتری‌سازی‌های محلی سطح، نگاشت‌های همواری هستند

$$\chi : \mathbb{R}^n \supset V \rightarrow M \subset \mathbb{R}^m \quad (465)$$

که زیرمجموعه‌های باز V از \mathbb{R}^2 را در فضای محیطی \mathbb{R}^3 غوطه‌ور می‌کنند. اینها باید منظم باشند، یعنی مشتقات جزئی آنها

$$e_i = \frac{\partial \chi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2 \quad (466)$$

باید در \mathbb{R}^3 مستقل خطی باشند. مشتقات $e_1(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ و $e_2(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ فضاهای مماس جایگذاری شده $T_p M \subset \mathbb{R}^3$ را در $\chi(x_1, x_2) = p$ تولید می‌کنند.^{۱۲۸} بنابراین نرمال‌های سطح در فضای جایگذاری به خوبی تعریف شده و با $n = \frac{e_1 \times e_2}{\|e_1 \times e_2\|}$ داده می‌شوند. یک اطلس از پارامتری‌سازی‌های محلی سطح سازگار، امکان توصیف سطوحی را فراهم می‌کند که از نظر توپولوژیکی با صفحه در سطح جهانی متفاوت هستند.

متريک ريماني سطح \square که در اين زمينه اغلب به عنوان فرم بندي اول آن شناخته می‌شود \square از فضای جایگذاری القا می‌شود. مطابق با تعریف مشابه برای کره جایگذاری شده S^3 در معادله (۴۲۹) داريم:

$$\eta_p(v, w) := \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^3} \quad \forall v, w \in T_p M \quad (467)$$

فرض کنيد $w = \sum_i w_i e_i$ و $v = \sum_i v_i e_i$ براي هر بردارهای مماس در $T_p M$ باشند که بر حسب بردارهای ضريب خود $v, w \in \mathbb{R}^3$ نسبت به پایه مختصاتی بیان شده‌اند. متريک نسبت به اين پایه با يك ماترييس ضريب متقان نمايش داده می‌شود

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad (468)$$

با درايدهای $E, F, G = \langle e_1, e_1 \rangle_{\mathbb{R}^3}$ ^{۱۲۹} و $\eta_p(v, w) = v^\top I w$ عمل می‌کند. فرم بندي اول، هندسه ذاتی يك سطح را به عنوان يك منيفلد ريماني دوبعدي کدگذاري می‌کند، یعنی آن بخشی از هندسه که مستقل از غوطه‌وری آن در فضای محیطی است.

هندسه خارجی يك سطح، یعنی جزئيات مربوط به غوطه‌وري خاص آن در فضای محیطی، توسط فرم بندي اول آن ثبت می‌شود. نسبت به e_1 و e_2 اين فرم با ماترييس

$$II = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \quad (469)$$

$N = \langle n, \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \rangle_{\mathbb{R}^3} = M = \langle n, \frac{\partial \chi}{\partial x_2} \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle n, \frac{\partial e_1}{\partial x_2} \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle n, \frac{\partial e_2}{\partial x_1} \rangle_{\mathbb{R}^3}$ با درايدهای $\frac{\partial e_1}{\partial x_2}, \frac{\partial e_2}{\partial x_1}$ نمايش داده می‌شود. اين درايدها اساساً اندازه‌گيری می‌کنند که پایه‌های مختصات \square در نتیجه فضاهای مماس در فضای محیطی (در جهت نرمال) هنگام حرکت در امتداد خطوط مختصاتی چقدر خم می‌شوند. اين فرم را می‌توان به عنوان مثال برای تعیين انحنای نرمال

$$\kappa_n(v) = \frac{v^\top II v}{v^\top I v} \quad (470)$$

سطح در p در جهت v استفاده کرد. به طور شهودی، اين انحنای نرمال را می‌توان به عنوان انحنای منحنی تعریف شده توسط تقاطع سطح با صفحه تولید شده توسط جهت v و نرمال n در آن نقطه درک کرد. اين انحنای با معکوس شعاع $r = 1/\kappa_n(v)$ دايره بوسان بر منحنی در p مطابقت دارد و بنابراین اندازه‌گيری می‌کند که سطح هنگام حرکت در جهت v چقدر در جهت v چقدر در مطالعه سطوح غوطه‌ور شده، انحنای‌های اصلی، ميانگين و گاوسي آنها هستند که اين وضعیت به \square مراجعه کنید. كمیت‌های مورد علاقه يك‌گر در مطالعه سطوح غوطه‌ور شده، انحنای‌های اصلی، ميانگين و گاوسي آنها هستند که می‌توانند بر حسب انحنای‌های نرمال بیان شوند و در شکل ۶۴ مطالعه $T_p M$ در v_{\max} و v_{\min} که در آنها انحنای نرمال در يك نقطه داده شده p حداکثر یا حداقل است، به عنوان جهات اصلی در p شناخته می‌شوند. انحنای‌های متناظر

$$\kappa_{\max} = \kappa_n(v_{\max}) \quad \square \quad \kappa_{\min} = \kappa_n(v_{\min}) \quad (471)$$

انحنای‌های اصلی در p هستند. مقدار ميانگين آنها

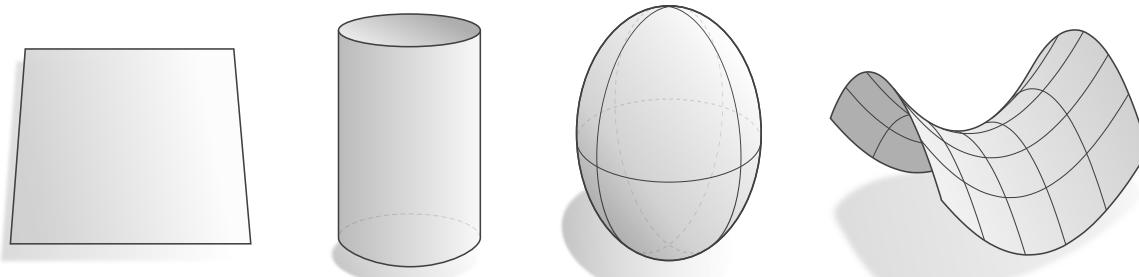
$$\kappa_{\text{میانگین}} = \frac{\kappa_{\max} + \kappa_{\min}}{2} \quad (472)$$

به عنوان انحنای ميانگين شناخته می‌شود. انحنای ميانگين در نقاط «زين‌مانند» که $\kappa_{\min} = -\kappa_{\max}$ است، صفر است. سطوح کمینه در هر نقطه انحنای ميانگين صفر دارند. حاصلضرب

$$\kappa_{\text{میانگین}} = \kappa_{\max} \cdot \kappa_{\min} \quad (473)$$

انحنای‌های اصلی به عنوان انحنای گاوسي شناخته می‌شود. اين انحنای مثبت است اگر انحنای‌های اصلی هم علامت باشند، که به عنوان مثال برای بيماري‌گون‌ها صادق است. برای اينکه انحنای گاوسي منفي باشد، علامت انحنای‌های اصلی باید متفاوت باشد، مانند اطراف نواحي هذلولي (زين‌مانند).

^{۱۲۸} بردارهای مشتق e_i در فرماليسم چارت ذاتی با پایه‌های مختصاتي مطابقت دارند؛ به پيوست آ.۳.۱ مراجعه کنيد.
^{۱۲۹} در نمادگذاري مدرن، ضرابيب يك متريک (مستقل از مختصات) g نسبت به يك پایه داده شده اغلب با $g_{\mu\nu}$ نشان داده می‌شوند.



شکل ۶.۴: سطوح جایگذاری شده با انحنای خارجی کیفی متفاوت. چپ: صفحه با انحنای اصلی و گاووسی صفر مشخص می‌شود ($\kappa_{\max} = \kappa_{\min} = 0$). وسط چپ: یک استوانه یک جهت با انحنای مثبت و یک جهت با انحنای صفر دارد، یعنی $\kappa_{\max} > 0$ و $\kappa_{\min} = 0$. آن را نیز صفحه و استوانه به صورت محلی ایزومتریک هستند، یعنی هندسه ذاتی آنها به صورت محلى قابل تشخیص نیست. توجه داشته باشید که صفحه را می‌توان لوله کرد (گسترش داد) تا یک استوانه تشکیل شود \square تفاوت بین این دو فقط در جایگذاری در فضای محیطی است. وسط راست: یک بیضی گون با انحنای اصلی و گاووسی مثبت ($\kappa_{\max} > \kappa_{\min} > 0$) در هر نقطه مشخص می‌شود. راست: سطح یک زین در جهات مختلف خم می‌شود، که دلالت بر عالم‌های مخالف انحنای اصلی ($\kappa_{\max} < \kappa_{\min} < 0$) منفی است.

انحنای گاووسی صفر است اگر یکی (یا هر دو) از مقادیر انحنای اصلی صفر باشد، یعنی اگر سطح یک جهت تخت داشته باشد. یک مثال برای یک منیقلد با انحنای گاووسی صفر، استوانه است. گفته می‌شود چنین سطوحی گسترش پذیر هستند، که به این معنی است که می‌توان آنها را بدون تغییر شکل به یک صفحه پهن کرد، یا به طور دقیق‌تر، آنها به صورت محلی با صفحه ایزومتریک هستند. کارل فریدریش گاووس در قضیه شفگت‌انگیز خود اثبات کرد که انحنای گاووسی یک سطح در واقع یک ویژگی ذاتی است، یعنی به نحوه غوطه‌وری سطح در فضای محیطی بستگی ندارد. این انحنا در تناظر یک به یک با تansور انحنای ریمانی (ذاتی) یک سطح است (بنابراین با انحنای ریچی و اسکالار آن نیز). یک ویژگی مهم انحنای گاووسی این است که انتگرال آن روی یک دیسک توپولوژیکی $D \subset M$ برابر با هولونومی $\delta_{\partial D}$ است، یعنی زاویه‌ای که یک بردار هنگام انتقال (لوی-چیوپتا) یک بار حول مرز دیسک ∂D می‌چرخد:

$$\int_D \kappa_{\text{Gauss}} dp = \delta_{\partial D} \quad (474)$$

همانطور که در ادامه خواهیم دید، این رابطه را می‌توان برای تعیین انحنای گاووسی به مشاهده استفاده کرد، جایی که هولونومی $\delta_{\partial D}$ با نقص زاویه یک حلقه باز شده از وجوده (مانند همسایگی آبی در شکل ۷۰) مطابقت دارد.

از آنجا که کانولوشن‌های GM فقط به هندسه ذاتی یک سطح بستگی دارند، خواننده ممکن است تعجب کند که چرا ما در مورد ویژگی‌های خارجی آنها مانند انحنای اصلی بحث می‌کنیم. دلیل این است که کانولوشن‌های GM با این وجود می‌توانند از هندسه خارجی یک سطح مطلع شوند، به عنوان مثال با کدگذاری آن در میدان‌های ویژگی. هندسه خارجی علاوه بر این ممکن است برای تراز کردن ابتکاری چارچوب‌های یک $\{\mathbf{e}\}$ -ساختار \mathbb{R}^3 و در نتیجه کرنل‌ها استفاده شود. برای مثال، $\mathbf{[A]} + \mathbf{[B]} + \mathbf{[C]} = \mathbf{[D]}$ چارچوب‌ها را در امتداد محور \mathbf{z} فضای محیطی \mathbb{R}^3 تراز می‌کنند، در حالی که $\mathbf{[A]} + \mathbf{[B]} + \mathbf{[C]} = \mathbf{[D]}$ به عنوان مثال، تصویر محور \mathbf{z} روی یک فضای مماس «افقی» (در فضای محیطی) صفر است، و جهت انحنای اصلی غالب ممکن است تعریف نشده باشد، همانطور که در مورد کره صادق است.

۲.۱.۱۲ هندسه‌ی گسسته‌سازی شده مشاهی سطحی

در اصل، امکان توصیف کانولوشن‌های GM روی پارامتری‌سازی‌های محلی سطح همانطور که در بخش قبل توصیف شد، وجود دارد. در حالی که این رویکرد ممکن است برای برخی هندسه‌های ساده یا متقاضان مانند بیضی گون‌ها، هذلولی گون‌ها یا چنبره‌ها مناسب باشد، برای هندسه‌های پیچیده‌تر غیرعملی به نظر می‌رسد. در عمل، سطوح عمده‌ای به صورت گسسته‌سازی شده ارائه می‌شوند، به عنوان مثال به شکل مشاهی مثلثی، مشاهی چهارضلعی، مشاهی نیم-یال، سطوح تقسیمی یا ابرهای نقطه. به دلیل استفاده گستردگی از آنها \square هم به طور کلی و هم به طور خاص در توصیف کانولوشن‌های GM سطحی که در دو بخش بعدی مور می‌کنیم \square ما در ادامه عمده‌ای بر روی مشاهی مثلثی تمرکز خواهیم کرد. بنابراین هدف ما برای باقیمانده بخش فعلی این است که کمیت‌ها و تعاریف را از نظریه هموار گرفته و ممتیان گسسته آنها را روی مشاهی مثلثی مورد بحث قرار دهیم. متأسفانه، این آنalog‌های گسسته معمولاً یکتا نیستند، به طوری که تعداد زیادی از تعاریف غیرمعادل وجود دارد. بنابراین سعی خواهیم کرد یک ایده کلی در مورد برخی از راجح‌ترین رویکردها برای گسسته‌سازی هندسه سطوح بر حسب مشاهی مثلثی ارائه دهیم.

^{۱۳۰} [۱۳۰] این وضعیت را به این صورت توصیف می‌کند: «علی‌رغم استفاده گستردگی از مشاهی در گرافیک کامپیوترا، هیچ اتفاق نظری در مورد مناسب‌ترین روش برای تخمین ویژگی‌های هندسی ساده مانند بردارهای نرمال و انحنا روی سطوح گسسته وجود ندارد.» به طور مشابه، $\mathbf{[A]}$ ادعا می‌کند: «هیچ راه "درست" واحدی برای گسسته‌سازی یک کمیت هندسی داده شده وجود ندارد، بلکه راههای مختلف زیادی وجود دارد که هر کدام برای یک هدف خاص مناسب است.»

توبولوژی، هندسه و جایگذاری مشاهای مثلثی: مشاهای مثلثی $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ معمولاً بر حسب یک مجموعه از

$$\mathcal{V} \subseteq \mathbb{N} \quad (475)$$

رئوس و یک مجموعه از

$$\mathcal{F} \subseteq \{\{i, j, k\} \mid i \neq j \neq k \in \mathcal{V}\} \quad (476)$$

وجوه مثلثی کدگذاری می‌شوند، که این شرط را برآورده می‌کنند که هر رأس حداقل در یکی از وجهه موجود باشد.^{۱۳۱} یک مجموعه از

$$\mathcal{E} = \{\{i, j\} \mid i \neq j \in \{i', j', k'\} \text{ میان } \{i', j', k'\} \in \mathcal{F}\} \quad (477)$$

یال‌ها که وجهه را محدود می‌کنند، بلافصله نتیجه می‌شود. در عمل، اغلب یک مجموعه از

$$P = \{p_i \in \mathbb{R}^3 \mid i \in \mathcal{V}\} \quad (478)$$

موقعیت‌های رأس داده می‌شود، که یک جایگذاری از مش را در فضای محیطی \mathbb{R}^3 مشخص می‌کند. این جایگذاری طول‌های

$$l_{\{i, j\}} = \|p_j - p_i\| \quad (479)$$

یال‌های $\{i, j\}$ و مساحت‌های

$$\square_{\{i, j, k\}} = \frac{1}{2} \|(p_j - p_i) \times (p_k - p_i)\| \quad (480)$$

وجوه $\{i, j, k\}$ را نتیجه می‌دهد.

ما به طور خاص به مشاهای سطحی علاقه‌مندیم، که باید شرایط اضافی را برآورده کنند. برای فرمول‌بندی این شرایط، توجه داشته باشید که عناصر مش $\{i_1, \dots, i_n\}$ (که در آن $i_1 < \dots < i_n$ برای رئوس، یال‌ها یا وجهه است) n -Sadکها را القا می‌کنند، که به عنوان پوشش‌های محدب

$$\text{convex}(\{i_1, \dots, i_n\}) := \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j p_{i_j} \mid \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1 \text{ و } \alpha_j \geq 0 \forall j = 1, \dots, n \right\} \subset \mathbb{R}^3. \quad (481)$$

تعريف می‌شوند. مجموعه‌ای که تمام این Sadکها (عناصر مش) را در \mathbb{R}^3 تشکیل می‌دهد [۹]. اینکه کمپلکس Sadکی-۲ خالص است به این معنی است که هر Sadک-۰ (رأس) و Sadک-۱ (یال) زیرمجموعه‌ای از حداقل یک Sadک-۲ (وجه) است. به عبارت دیگر، هیچ رأس یا یال منقطعی در مش وجود ندارد. فضای زیربنایی

$$\bigcup_{\{i_1, \dots, i_n\} \in \mathcal{V} \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{F}} \text{convex}(\{i_1, \dots, i_n\}) \stackrel{(481)}{=} \bigcup_{\{i, j, k\} \in \mathcal{F}} \text{convex}(\{i, j, k\}) \subset \mathbb{R}^3 \quad (482)$$

از کمپلکس Sadکی به عنوان اجتماع تمام Sadکهای آن تعریف می‌شود، که با توبولوژی معمول به عنوان یک زیرمجموعه از \mathbb{R}^3 مجهز شده است. یک مش سپس یک مش سطحی (مش منیفلد) نامیده می‌شود اگر فضای زیربنایی یک سطح توبولوژیکی (منیفلد)، به صورت اختیاری با مرز، باشد. به طور شهودی، این امر نیازمند (۱) این است که هر یال مجاور دو وجه (یا یکی در مرزها) باشد و (۲) اینکه وجهه هر رأس یک دیسک توپولوژیکی (یا یک نیم‌دیسک در مرزها) تشکیل دهند.

چنین مشاهای سطحی تعریف شده، همتایان گستته سطوح ریمانی کاتولوشن‌های GM مستقل از هندسه خارجی منیفلد زیربنایی هستند، بحث مختصر در مورد هندسه ذاتی آنها آموزنده است. بنابراین مجموعه‌های رأس، یال و وجه \mathcal{V}, \mathcal{E} و \mathcal{F} را در نظر بگیرید، اما مکان‌های جایگذاری P رئوس را کنار بگذارید. در مجموع، این مجموعه‌ها یک کمپلکس Sadکی-۲-انتزاعی، $\mathcal{V} \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ را تشکیل می‌دهند که به عنوان خانواده‌ای از Sadکهای انتزاعی $\{i_1, \dots, i_n\}$ که تحت عمل زیرمجموعه‌گیری بسته است، تعریف می‌شود [۹]. اگر این کمپلکس Sadکی-۲ (که اکنون انتزاعی است) (۱) خالص و (۲) به گونه‌ای باشد که «ستاره» هر رأس (که با Sadکهای حاوی آن رأس داده شود) یک دیسک ترکیبیاتی تشکیل دهد، این یک سطح Sadکی انتزاعی را تشکیل می‌دهد (که دقیقاً در صورتی است که مش جایگذاری شده یک مش سطحی باشد). سطوح Sadکی انتزاعی را می‌توان به عنوان همتایان ترکیبیاتی منیفلدهای توبولوژیکی در نظر گرفت. آنها امکان محاسبه ناوردادهای توبولوژیکی، به عنوان مثال مشخصه اویلر

$$\chi_{\text{کاتولوشن}} = |\mathcal{V}| - |\mathcal{E}| + |\mathcal{F}|. \quad (483)$$

را می‌دهند. به عنوان یک ناوردای توبولوژیکی، مشخصه اویلر برای هر دو فضای همسان‌ریخت، به ویژه برای یک منیفلد هموار و هر یک از مثلث‌بندی‌های آن، برابر است. برای مثال، بیست‌وچهار از بخش ۴۱۲ دارای ۲ = ۱۲ - ۳۰ + ۲۰ = $\chi_{\text{کاتولوشن}}^S$ ، برای کره ۲-بعدی مطابقت دارد.

^{۱۳۱} وجهه به طور جایگزین می‌تواند به عنوان سه‌تایی‌های مرتب از رئوس تعریف شوند. ترتیب رئوس (یا بهتر بگوییم، کلاس‌های هم‌ارزی ترتیب‌ها تحت یک تعداد زوج از جایگشت‌ها) ممکن است برای کدگذاری جهت‌گیری وجهه استفاده شود. ما در عوض جهت‌گیری وجهه را همانند نظریه هموار خود با انتخاب یک دست‌سازی از چارچوب‌های مرجع کدگذاری خواهیم کرد.

برای رسیدن به یک توصیف ذاتی از هندسه یک سطح مثلث‌بندی شده، به یال‌های $i, j \in \mathbb{R}^+$ طول یال $l_{ij} = \text{میانگین}(\{i, j\})$ و $l_{ijk} = \text{میانگین}(\{i, j, k\})$ را برای هر وجه $i, j, k \in \mathcal{F}$ تعریف کنند. طول یال‌ها متریک‌های اقلیدسی (توابع فاصله) را روی وجه و بنابراین یک متریک اقلیدسی تکه‌ای تعریف شده را روی کل سطح القا می‌کنند. این متناظر با یک متریک ریمانی (یا فرم بنیادی اول) است که دور از رؤوس اقلیدسی و در یک همسایگی کوچک حول رؤوس «مخروط‌مانند» (تکین) است [؟] .

برای بستن دایره به تعریف خارجی اولیه ما از مش‌های مثلثی، باید مش را در فضای محيطي \mathbb{R}^3 جایگذاری کرد. اطلاعات لازم در مورد هندسه خارجی با مجهر کردن مش به یک فرم بنیادی دوم داده می‌شود. در محيط گسته، این فرم را می‌توان به عنوان یک انتخاب از زاویه دووجهی (زاویه خمشی) بین هر دو مثلث مجاور، یعنی یک زاویه برای هر یال غیرمرزی مش، تعریف کرد. با فرض اینکه این داده‌ها به طور سازگار انتخاب شده باشند^{۱۳۲}، امکان بازسازی جایگذاری، یعنی موقعیت‌های رأس P ، تا حرکات صلب در (\mathbb{R}^3) وجود دارد [؟] . در حالی که یک جایگذاری از سطح برای کانون‌شون‌های GM ذاتی ضروری نیست، تمام مقالات فهرست شده در ردیف‌های (۴۱-۳۷) جدول ۶ مدل‌های خود را روی مش‌های مثلثی جایگذاری شده ارزیابی می‌کنند.

فضاهای مماس و میدان‌های برداری: برای توصیف میدان‌های برداری روی مش‌ها، و برای مجهر کردن مش‌ها به ساختار هندسه مانند اتصالات، لازم است یک مفهوم از فضاهای مماس که به آنها متصل هستند، تعریف شود. تعاریف ناسازگار متعددی، که برای کاربرد خاص مورد نظر طراحی شده‌اند، در مقالات وجود دارد. از آنجا که میدان‌های برداری معمولاً در مکان‌های گسته نمونه‌برداری می‌شوند، کلاف‌های مماس گسته اغلب فقط به صورت جزئی تعریف شوند، به عنوان مثلث فقط روی وجود، یال‌ها یا رؤوس. ما به طور خلاصه برخی از این تعاریف را مرور می‌کنیم، یک بررسی دقیق‌تر را می‌توان در [؟] یافت.

از آنجا که وجود (سادک‌های-۲) یک مش جایگذاری شده تخت هستند، می‌توان به طور طبیعی فضاهای مماس آنها را به عنوان آن دسته از زیرفضاهای دوبعدی \mathbb{R}^3 که در آنها قرار دارند، تعریف کرد [؟] . به طور خاص، با توجه به یک وجه $i, j, k \in \mathcal{F}$ ، می‌توان فضاهای مماس تراز فضای مماس در فضای محيطي اغلب بر حسب نرمال وجه $(p_j - p_i) \times (p_k - p_i) = n = (p_j - p_i) \times (p_k - p_i)$ نمایش داده می‌شود. میدان‌های برداری مماس (یا ویژگی) گسته در نمایش‌های مبتنی بر وجه را می‌توان به عنوان ثابت روی هر وجه تعریف کرد، یعنی با یک بردار مماس (یا ویژگی) منفرد برای هر وجه نمایش داده می‌شوند. نسبت به یک انتخاب از چارچوب مرجع روی هر یک از وجود، چنین میدان‌های برداری مماس ویژگی به ترتیب با $|\mathcal{F}|^2$ یا $|\mathcal{F}|^3$ ضریب برداری کدگذاری می‌شوند. توجه داشته باشید که چنین میدان‌های برداری به رؤوس یا یال‌ها گسترش نمی‌یابند. به دلیل ناپیوستگی آنها، مفهوم عملکردهای دیفرانسیل، که بر روی چنین میدان‌هایی عمل می‌کنند، بسیار محدود است [؟] (که برای کاربرد خاص ما بی‌اهمیت است). یک طرح درون‌یابی خطی از میدان‌های برداری مبتنی بر وجه در [؟] پیشنهاد شده است.

از آنجا که هیچ جهت نرمال طبیعی در رؤوس یک مش وجود ندارد، تعاریف رایج متعددی برای فضاهای مماس رأس وجود دارد. نرمال‌های رأس را می‌توان به عنوان مثال به عنوان میانگین وزن دار مساحتی از نرمال‌های وجود مجاور تعریف کرد [؟] . علاوه بر وزن دهی مساحتی، گاهی از وزن‌های یکنواخت یا وزن‌های زاویه نوک استفاده می‌شود [؟] . گزینه دیگر، تعریف بردارهای نرمال از طریق یک عملگر نرمال انحنای میانگین است [؟] . نرمال حاصل با نرمال‌های مشتق شده از طریق گرادیان‌های مساحت مطابقت دارد، اما با آنها که از طریق گرادیان‌های حجم یا نرمال‌های کره محاطی مشق شده‌اند، متفاوت است؛ به [؟] مراجعه کنید.

به طور جایگزین، می‌توان فضاهای مماس رأس را به روش ذاتی تعریف کرد، به سادگی با تعریف آنها به عنوان فضاهای برداری دوبعدی که به رأس متصل هستند. رابطه آنها با هندسه مش در یک همسایگی محلی حول رأس در اینجا با نمایش همسایگی یک-حلقه در صفحات مماس کدگذاری می‌شود. مسلمًا بر جسته‌ترین این رویکردها بر اساس تغییر مقیاس زاویه کل

$$\Theta_i = \sum_{\{i, j, k\} \in \mathcal{F}} \theta_{\{i, j, k\}}^i, \quad (484)$$

است، که از زوایای نوک $\theta_{\{i, j, k\}}^i = \arccos \langle \frac{p_j - p_i}{\|p_j - p_i\|}, \frac{p_k - p_i}{\|p_k - p_i\|} \rangle$ تمام مثلث‌های $\{i, j, k\}$ مجاور رأس $i \in \mathcal{V}$ جمع می‌شود. اگر این زاویه دقیقاً 2π باشد، همسایگی محلی حول رأس به عنوان مثال به همسایگی قرمز یا سیز در شکل ۷۰ مراجعه کنید. یک زاویه $\Theta_i < 2\pi$ همانند همسایگی آبی، نشان‌دهنده یک انحنای گاووسی گسته مثبت (که به درستی در ادامه تعریف می‌شود) $\Theta_i = 2\pi - \Theta_{i+1000000}$ است، یعنی یک همسایگی مخروط‌مانند. یک زاویه $\Theta_i > 2\pi$ به طور مشابه متناظر با یک همسایگی زین‌مانند با انحنای گاووسی منفی است. رویکرد دنبال شده در [؟] این است که همسایگی یک-حلقه را با تغییر مقیاس همسانگرد زوایای قطبی با ضریب $s_i = \frac{\pi}{\Theta_i}$ از یک فضای اقلیدسی (مماس) پهن کنند. یک میدان برداری در این محیط با یک بردار برای هر رأس نمایش داده می‌شود. یک انتخاب از پیمانه، که اغلب با یکی از یال‌ها تراز شده است، سپس امکان کدگذاری میدان‌های برداری مماس یا ویژگی را به ترتیب بر حسب [؟] یا [؟] ضریب فراهم می‌کند. [؟] پیشنهاد را با یکتابع وزن دهی کلاهی تکه‌ای-خطی از رؤوس به وجود درون‌یابی کنند. جهت بردارها در اینجا با یک انتقال اقلیدسی معمول روی فضاهای مماس پهن شده تعیین می‌شود. همانطور که توسط [?] اشاره شده است، این درون‌یابی پیوسته نیست. برای حل این مشکل، همان نویسندها در [؟] پیشنهاد می‌کنند که یک ساختار هموار را روی مش مثلثی تعریف کرده و همسایگی‌های یک-حلقه را در چارت‌های هموار نمایش دهند. سپس یک درون‌یابی هموار با انتقال بردارها از طریق یک اتصال سادکی هموار روی مش انجام می‌شود، که برای نزدیکترین حالت ممکن به اتصال لوی چیوینتا القا شده از فضای جایگذاری اصلی، بهینه‌سازی شده است. توجه داشته باشید که هر دو رویکرد به طور موثر هندسه را حول رؤوس پهن می‌کنند، یعنی دقیق‌تر روی مش مثلثی عمل نمی‌کنند.

^{۱۳۲} فرم‌های بنیادی اول و دوم گسته می‌باشد که شرط انتگرال‌پذیری را برآورده کنند، مشابه معادله گاووس و معادلات مایناردی-کوداتسی در محيط هموار [؟].

یک رویکرد دیگر، که ریشه در حساب دیفرانسیل خارجی گستته دارد [؟ ؟]، تعریف بردارهای مماس $v \in T_p M$ بر حسب ۱-فرم‌ها $\omega \in T_p^* M$ با استفاده از ایزومورفیسم موسیقیایی (واسطه به متريک) $T^* M \rightarrow TM$: $T^* M \rightarrow TM$ است. از آنجا که ۱-فرم‌های سادک‌های ۱- اختصاص داده می‌شوند، این منجر به میدان‌های برداری می‌شود که بر حسب یک بردار برای هر یال و در نتیجه [ع] ۲ ضریب پس از انتخاب چارچوب‌ها، پارامتری می‌شوند. با این حال، همانطور که توسط [؟] استدلال شده است، یک درون‌یابی تکه‌ای-خطی از بردارها روی وجود دوباره به ناپوستگی منجر خواهد شد. علاوه بر این، برای ما روشن نیست که چگونه این رویکرد می‌تواند به کلاف‌های برداری همبسته عمومی و در نتیجه میدان‌های ویژگی تعیین یابد.

با توجه به هر یک از ساختارهای بالا از فضاهای مماس، چارچوب‌های مرجع محلی به عنوان زوج‌های مرتبی از بردارهای مماس خطی مستقل تعریف می‌شوند. یک انتخاب رایج در اینجا تراز کردن اولین معور چارچوب با یکی از یال‌های مجاور سادک (عنصر مش) است. طور خاص برای مورد چارچوب‌های راست‌هنگار و راست‌گرد، یعنی هر زمان که $G \leq SO(2)$ باشد، یک انتخاب از یال (جهت‌دار) یک چارچوب را به طور کامل تعیین می‌کند. سپس بردارهای مماس اغلب در مختصات قطبی نمایش داده می‌شوند، با زاویه اندازه‌گیری شده نسبت به یال مرجع. اگر فضاهای مماس به صورت خارجی مدل‌سازی شوند، یعنی به عنوان زیرفضاهای دوبعدی از فضای محیطی \mathbb{R}^3 رایج‌ترین روش نمایش صریح چارچوب‌ها به عنوان یک زوج مرتب از بردارها در $T_p M \subset \mathbb{R}^3$ است. تعاریف چارچوب‌ها و پیمانه‌ها سپس کاملاً معادل تعاریف در معادلات (۴۳۷) و (۴۳۶) در بخش ۱.۱۱ هستند.

G -ساختارها، طبق معمول، به عنوان کلاوهای از چارچوب‌ها تعریف می‌شوند، که در هر فضای مماس از طریق تبدیلات پیمانه‌ای با مقادیر G هم مرتبط هستند. در جامعه گرافیک کامپیوترا، علاقه خاصی به N -میدان‌های جهتی (یا میدان‌های N - واحد) وجود دارد، که در آنجا به عنوان مجموعه‌ای از N میدان برداری واحد تعریف می‌شوند، به طوری که N بردار در هر فضای مماس با زاویه $N/2\pi$ از هم فاصله دارند. از آنجا که هر بردار واحد روی یک منیفلد جهت‌پذیر یک چارچوب راست‌هنگار و راست‌گرد متناظر را القا می‌کند، دیده می‌شود که N -میدان‌های جهتی معادل C_N -ساختار را بیست‌وچهی در شکل ۲۱۶ است، که به طور موثر ۶ جهت واحد را به هر نقطه اختصاص می‌دهد، به جز در قطب‌ها، که در آنجا تکینگی‌هایی با اندیس $\frac{1}{2}$ (یا $\frac{\pi}{2}$) دارد. طراحی تعاملی میدان‌های جهتی هموار، با تکینگی‌های تعریف شده توسط کاربر در میان دیگر محدودیت‌ها، یک زمینه تحقیقاتی فعال در جامعه گرافیک کامپیوترا است [؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟]. برخی از کانولوشن‌های GM سطحی که در بخش بعدی مور می‌کنیم از چنین الگوریتم‌هایی برای محاسبه یک C_N -ساختار استفاده می‌کنند [؟ ؟].

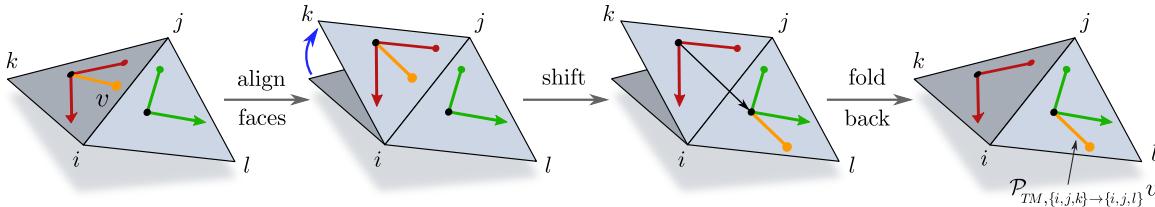
متريک ريماني و ايزومتری‌ها: با داشتن یک مش مجهز به فضاهای مماس، می‌توان یک متريک ريماني را روی آن تعریف کرد. رایج‌ترین مور، مش‌های جایگذاری شده ايزومتریک با فضاهای مماس مدل‌سازی شده به عنوان زیرفضاهای دوبعدی از فضای محیطی \mathbb{R}^3 است. همانطور که قبل از معادلات (۴۲۹) و (۴۲۷) توصیف شد، متريک سپس با تحديد حاصلضرب داخلی استاندارد اقلیدسی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ از فضای جایگذاری به فضاهای مماس القا می‌شود.

اگر فضاهای مماس به صورت ذاتی مدل‌سازی شوند، یک متريک را می‌توان با انتخاب یک d -ساختار، یعنی چارچوب‌های مرتعی که تعریف شده‌اند راست‌هنگار باشند، ثابت کرد. کمتر از همان‌گویی، اگر طول یال‌ها $\{z_i\}$ و بنابراین یکتابع فاصله اقلیدسی تکه‌ای- تعریف شده روی سطح داده شده باشد، انتخاب d -ساختار باید با این طول‌ها سازگار باشد. به طور خاص، نگاشت لگاریتمی باید منجر به بردارهای مماس با ترم (ريماني) $d = |\log_p(q)|$ شود اگر نقاط p و q با یک فاصله اقلیدسی $\in \mathbb{R}^+$ از هم جدا شده باشند. توجه داشته باشید که این گزاره نیازمند یک تعریف سازگار از اتصال لوی-چیویتا روی مش است، که در ادامه به آن می‌پردازیم.

ايزيومتری‌ها به طور ذاتی طبق معمول تعریف می‌شوند، یعنی به عنوان آن دسته از نگاشتهای مش به خود، که متريک را حفظ می‌کنند. به صورت خارجی، گروه ايزيومتری از آن دسته از ايزيومتری‌های $E(2) \in \phi$ فضای جایگذاری تشکیل شده است که مش را ناوردا باقی می‌گذارند. اکثر مقالات در ردیف‌های (۴۱-۳۷) از جدول ۶ مجموعه دادهای را در نظر می‌گیرند که مش‌های آنها دارای یک گروه ايزيومتری بدینهی هستند. با این حال، همسایگی‌های محلی مش‌ها اغلب با این وجود با یکدیگر ايزيومتریک (یا تقریباً ايزيومتریک) هستند، که در شکل ۴۱ مثال زده شده است. همانطور که در بخش ۱.۱.۸ بحث شد، همورای ايزومتری کانولوشن‌های GM همچنان به صورت محلی برقرار خواهد بود اگر میدان دید کرnel‌ها به اندازه کافی کوچک باشد.

اتصالات، انتقال‌دهنده‌ها و ژئودزیک‌ها روی مش‌های مثلثی: آخرین جزء مور نیاز ما برای پیاده‌سازی کانولوشن‌های GM روی مش‌ها، پول‌بک انتقال‌دهنده p از میدان‌های ویژگی است (معادله (۶۷)). بنابراین ما باید بدانیم که چگونه (۱) بردارهای ویژگی را به صورت موازی روی مش‌ها منتقل کیم و (۲) ژئودزیک‌ها را روی مش‌ها، به ویژه نگاشت نمایی، یا، بسته به پیاده‌سازی، نگاشت لگاریتمی را محاسبه کنیم. تمام این نگاشتهای در نهایت به یک انتخاب از اتصال روی مش بستگی دارند. در محیط هموار، یک اتصال اساساً مجموعه‌ای از انتقال‌دهنده‌های بین نهایت کوچک بین فضاهای مماس مجاور است. بنابراین اتصالات گستته روی مش‌ها معمولاً به عنوان انتقال‌دهنده‌های بین عناصر مش مجاور تعريف می‌شوند. انتخاب خاص گستته‌سازی کلاف مماس، که گزینه‌های آن در بالا مورد بحث قرار گرفت، بر تعريف خاص اتصال تأثیر می‌گذارد. در ادامه، ما برخی از گستته‌سازی‌های اتصالات را که در مقالات یافت می‌شوند، مور می‌کنیم و توضیح می‌دهیم که چگونه می‌توان از آنها برای محاسبه انتقال‌دهنده‌ها و ژئودزیک‌ها استفاده کرد.

ساده‌ترین مور برای بررسی، انتقال یا اتصال بین دو وجه مجاور است. به یاد بیاورید که انتقال لوی-چیویتا روی یک صفحه تخت به عنوان جابجایی یک بردار به گونه‌ای تعریف می‌شود که در معنای معمول اقلیدسی موازی باقی بماند؛ به شکل ۱۲۲ مراجعه کنید. از آنجا که اتصالات ذاتاً ذاتی هستند، به جایگذاری خاص این صفحه در فضای محیطی بستگی ندارند، که به ما می‌گوید چگونه روی هر سطح گسترش‌پذیر منتقل کنیم. این به طور خاص به ما می‌گوید که چگونه بین دو مثلث مجاور منتقل کنیم، زیرا می‌توان آنها را باز کرد (گسترش داد) و به یک صفحه تبدیل کرد، همانطور که در شکل ۶۵ به تصویر کشیده شده است. بنابراین اتصال لوی-چیویتا بین وجود را می‌توان به این صورت تصور کرد که (۱) وجود را پنهن کرده، (۲) بردار را طبق معمول روی صفحه منتقل کرده و (۳) وجود را به جایگذاری اصلی خود بازگردانیم [؟ ؟ ؟]. انتقال‌دهنده حاصل



شکل ۶۵ انتقال موازی بین وجوده مش. هندسه محلی دو وجه مجاور گسترش پذیر است، یعنی به طور ذاتی تخت است و می‌توان آن را به یک صفحه باز کرد. بنابراین انتقال لوی-چیویتا بین وجوده با جابجایی یک بردار روی وجوده باز شده و سپس خم کردن وجوده به جایگاری اصلی خود می‌شود. این انتقال موازی بین وجوده مجاور را می‌توان به عنوان آنالوگ گستره اتصال لوی-چیویتا پیوسته در محیط هموار در نظر گرفت [؟]. با توجه به هر انتخاب از چارچوب‌های مرتع، انتقال $\mathcal{P}_{TM, \{i,j,k\} \rightarrow \{i,j,l\}}$ با یک عضو گروه $(2) \in GL(\mathbb{R})$ یا $g_{\{i,j,k\} \rightarrow \{i,j,l\}}^{A\tilde{A}}$ یا $SO(2)$ هنگام در نظر گرفتن چارچوب‌های راست‌هنچار و راست‌گرد نمایش داده می‌شود. اتصالات عمومی تر یک تبدیل خطی اضافی را به بردار مستقل از مختصات هنگام انتقال بین وجوده اعمال می‌کنند. تعاریف چایگرین از اتصالات گستره، به عنوان مثال برای انتقال بین رؤوس در امتداد یال‌ها، در متن اصلی مورد بحث قرار گرفته‌اند.

$\mathcal{P}_{TM, \{i,j,k\} \rightarrow \{i,j,l\}}$ بین وجوده $\{i, j, k\}$ و $\{i, j, l\}$ را می‌توان به صورت اختیاری بر حسب یک عضو گروه $\{i, j, l\}$ در $GL(\mathbb{R})$ بیان کرد. از آنجا که اتصال لوی-چیویتا یک اتصال متريک است، برای مورد خاص چارچوب‌های راست‌هنچار منجر به اعضاي گروه در ۲ و برای چارچوب‌های راست‌هنچار جهت‌دار منجر به اعضاي $SO(2)$ یا زواياي دوران می‌شود.

همانطور که توسط [۱] پيشنهاد شده است، امكان تعيم اين ساختار فراتر از اتصالات لوی-چیویتا وجود دارد: به جاي صرفاً جابجایي بردارها بين وجوده پهن شده، اتصالات عمومي تر یک تبدیل خطی اضافي، به عنوان مثال يك دوران اضافي، را اعمال می‌کنند. در حالی که اين تبدیل اضافي با يك تبدیل متناظر از عبارت مختصاتي انتقال دهنده $\{i, j, k\} \rightarrow \{i, j, l\}$ با $g_{\{i,j,k\} \rightarrow \{i,j,l\}}^{A\tilde{A}}$ معنعكس خواهد شد، از نظر مفهومي از آن مستقل است و می‌تواند در يك چارچوب کاملاً مستقل از مختصات تعريف شود. نويسندگان از اين ايده برای ساخت اتصالات بدبيهي هموار استفاده می‌کنند، که با داشتن يك انتقال با هولونومي صفر حول هر حلقه ممکن تعريف می‌شوند، و برای هر چه هموارتر بودن بهينه شده‌اند، به جز در برخني تکنيک‌ها که به صورت توپولوژيکي تحميل شده‌اند [؟]. آنها علاوه بر اين اتصالات را در نظر مي‌گيرند که دوران‌هاي (مستقل از مختصات) با $\frac{\pi}{N}$ را اعمال می‌کنند و می‌توانند برای ساخت N -ميدان‌هاي جهتي، متناظر با C_N -ساختارها استفاده شوند. در كاربردهای ما، ما هميشه اتصالات لوی-چیویتا را برای محاسبه ژئودزيک‌ها در نظر خواهيم گرفت. مدل‌های مرور شده در بخش بعدی ۲.۱۲ يك گروه ساختاري $G = SO(2)$ را روی مشاهای جهت‌پذير فرض می‌کنند و از انتقال دهنده‌های لوی-چیویتا برای بردارهای ويژگي استفاده می‌کنند. در مقابل، مدل‌های بخش ۳.۱۲ يك گروه ساختاري بدبيهي $\{e\}$ را فرض می‌کنند و بنابراین فقط به اتصالات بدبيهي $\{e\}$ -ساختار سازگار اجازه می‌دهند. آنها ويژگي‌ها را به گونه‌ای منتقل می‌کنند که بردارهای ضريب آنها نسبت به چارچوب‌های $\{e\}$ -ساختار ناوردا باقی بمانند، یعنی صرفاً مقادير عددی آنها را كپي می‌کنند.

با توجه به فضاهای مماس جایگذاری شده در $T_p M \subset \mathbb{R}^3$ در دیگر عناصر مش مانند رؤوس یا یال‌ها، این رویکرد به طور طبیعی به انتقال بین عناصر مش دلخواه تعیيم می‌پابد [؟]: به جاي تراز کردن وجوده، می‌توان به عنوان مثال فضای مماس رأس را با وجه مجاور قبل از جابجایي بردار تراز کرد. از نظر هندسي، اين عمليات را می‌توان به عنوان انتقال روی يك مش که رؤوس و یال‌هاي آن در يك همساچي بى نهايیت کوچک برديه شده و با يك وجه چندضليع جايگرین شده‌اند، در نظر گرفت.

يك تعریف جایگزین از اتصالات گستره در [؟] و [؟] را ارائه شده است. نويسندگان هر دو مقاله، فضاهای مماس را فقط در رؤوس مدل می‌کنند، جايی که آنها بر حسب تغيير مقیاس زاويه کل و رودی، معادله (۴۸۴)، به 2π تعريف می‌شوند، همانطور که در بالا بحث شد. يك اتصال روی مش سپس با انتقال دهنده‌ها روی تمام یال‌هاي $\mathcal{E} \in \{j, i, l\}$ داده می‌شود، که فضاهای مماس رؤوس مجاور را به هم متصل می‌کنند. از آنجا که مفهوم هندسي باز کردن مثلث‌ها در اينجا وجود ندارد، انتقال دهنده‌هاي يال از طریق اعضاي گروه نسبت به يك چارچوب مبدأ و مرجع کدگذاري می‌شوند. به طور خاص برای اتصال لوی-چیویتا، و چارچوب‌های مرتع راست‌هنچار و راست‌گرد، اين اعضاي گروه در $SO(2)$ قرار دارند. سودمندی اين ساختار برای انتقال مستقيم در امتداد مسیرهای دلخواه روی منيفلد نامشخص است، با اين حال، برای حل معادلات ديفرانسیل جزئی که به مشتق هموار دا بستگي دارند، مفید است. [؟] نشان دادند که يك راحمل از معادله گرمای برداری با اين وجود اجازه می‌دهد تا از چنین اتصالات برای محاسبه (غیرمستقيم) انتقال موازی بین نقاط دلخواه روی يك مش استفاده شود. [؟] يك ساختار دیگر، یعنی اتصالات سادکی هموار بین و در داخل تمام عناصر مش را پيشنهاد می‌کنند. آنها علاوه بر اين بحث می‌کنند که چگونه چنین اتصالات را می‌توان بهينه کرد تا حد ممکن به اتصال لوی-چیویتا (ناهموار) نزديك باشند.

يك اتصال داده شده، انتقال موازی را در امتداد يك مسیر تعیين می‌کند. در محیط هموار، که اتصالات انتقال دهنده‌های بى نهايیت کوچک هستند، انتقال متناهی با انتگرال گيری از اتصال در امتداد مسیر محاسبه می‌شود. در محیط گستره، انتقال بر اين اساس با ترکیب تبدیلات منفردی که اتصال را بین عناصر مش که توسط مسیر عبور می‌کنند، تشکيل می‌شود. برای اتصال لوی-چیویتا، اين فرآيند متناظر با پهن کردن تمام عناصر مش در امتداد مسیر و سپس جابجایي بردار روی آن است؛ به شکل ۷ در [؟] مراجعه کنید. روش مبتنی بر معادله گرمای برداری توپسيه [؟] انتقال بردارها را به طور خاص در امتداد ژئودزيک‌ها حاصل می‌کند. از آنجا که اين روش برای انتقال از يك مکان مبدأ به هر مکان دیگر روی منيفلد به طور همزمان حل می‌کند، اين رویکرد می‌تواند کارآمدتر از انتگرال گيری از انتقال برای هر مسیر منفرد به طور جداگانه باشد.

انحنای يك اتصال در محیط هموار به عنوان هولونومي انتقال آن حول يك ديسك بى نهايیت کوچک تعريف می‌شود. انتنا در يك رأس در محیط گستره به طور متابه به عنوان هولونومي انتقال حول اين رأس تعريف می‌شود. برای اتصال لوی-چیویتا، اين فقط انحنای گاوسی است، که با نقص

$$\kappa_{\text{نگاشت},i} = \delta_i = 2\pi - \Theta_i, \quad (485)$$

داده می‌شود، که در آن Θ زاویه کل نوک از معادله (۴۸۴) است. ما دوباره به بیستوچهی به عنوان مثال اشاره می‌کنیم، که در همه جا احنای صفر دارد، به جز در دوازده رأس اصلی خود، که در آن نقص زاویه (اختنا) برابر با $\frac{\pi}{2}$ است. اتصالات بدیهی بنا به ساختار، احنای صفر دارند.

در آخر، ما باید ژئودزیک‌ها را مورد بحث قرار دهیم. در محیط هموار، ژئودزیک‌ها به عنوان مستقیم‌ترین مسیرها شوند، که با این گزاره رسمیت می‌یابد که مشتقان هموردای بردارهای مماس آنها در امتداد منحنی صفر می‌شوند، یعنی $\dot{\gamma}^\gamma = 0$. این معادل این الزام است که انتقال یک بردار مماس (t) در امتداد ژئودزیک، مماس بر آن باقی بماند، یعنی $\dot{\gamma}(t_1) = \dot{\gamma}(t_2)$ برای t_1 و t_2 دلخواه. علاوه بر این، کوتاه‌ترین مسیر بین هر دو نقطه روی یک منیفلد همبند با یک ژئودزیک داده می‌شود. همانطور که توسط [۲] اشاره شده است، این معادل بودن مسیرهای کوتاه‌ترین و مستقیم‌ترین دیگر روی مشها برقرار نیست، به طوری که باید بین این دو مفهوم تمایز قائل شد.

به یاد بیاورید که نگاشت نمایی $T_p M \rightarrow M$ به عنوان نگاشت بردارهای v به آن نقطه‌ای تعريف می‌شود که با راه فتن به اندازه $\|v\|$ از p در امتداد ژئودزیک (با سرعت واحد) در جهت v به آن رسیدم. این مفهوم به راحتی به مشاه تعمیم می‌یابد، جایی که مستقیم‌ترین ژئودزیک را در جهت v برای فاصله $\|v\|$ دنبال می‌کنیم. همانند محیط هموار، می‌توان چنین ژئودزیک‌های مستقیم را روی مشاه بناه عنوان آن دسته از منحنی‌هایی تعريف کرد که بردار مماس خود را موازی با منحنی نگه می‌دارند. این ویژگی به طور طبیعی روی وجوه مسطح (یا در امتداد یال‌ها) برآورده می‌شود، به طوری که ژئودزیک حاصل تکمایی است، با تنها نقاط غیربدیهی آنهاست که ژئودزیک بین عناصر مش مجاور انتقال می‌یابد. جهت خروجی ژئودزیک پس از چنین انتقالی در اینجا با اتصال، یعنی با انتقال جهت M بین نقاط بعدی، تعیین می‌شود. اگر اتصال لوی-چیویتا را در نظر بگیریم، که ما همیشه برای محاسبه ژئودزیک‌ها این کار را می‌کنیم، این منجر به یک خط راست معمولی پس از باز کردن عناصر مش به یک صفحه می‌شود. برای پیاده‌سازی نگاشت نمایی گستته، کافی است چنین ژئودزیک مستقیم را تا رسیدن به فاصله $\|v\|$ دنبال کنیم.

نگاشتهای لگاریتمی $M \rightarrow TM$: \log_p از سوی دیگر، را می‌توان به عنوان محاسبه کوتاه‌ترین ژئودزیک‌ها بین نقاط p و q در نظر گرفت. آنها آن بردار $\log_p(q)$ را در $T_p M$ برمی‌گردانند که در p مماس بر این ژئودزیک است و نرم آن برای فاصله ژئودزیک بین نقاط است. یک راه بر جسته برای محاسبه فواصل ژئودزیک از یک نقطه (یا مجموعه) مبدأ p حل معادله ایکوئال

$$|\nabla \tau| = 1 \quad \text{نگاشت} \quad \tau(p) = 0, \quad (486)$$

است، که در آن ∇ مشتق هموردا را نشان می‌دهد. بخش اول این معادله دیفرانسیل جزئی، الزام طبیعی را که گرادیان تابع فاصله باید یک باشد، تحمیل می‌کند، در حالی که بخش دوم فاصله را در مبدأ صفر ثابت می‌کند. یک الگوریتم پیشروی سریع (۴۸۰)، (۴۸۱) که معادله ایکوئال را روی مشاهای مثلثی حل می‌کند، توسط [۳] پیشنهاد شد. با توجه به تابع فاصله τ ژئودزیک γ بین p و هر نقطه دیگر q را می‌توان با دنبال کردن گرادیان فاصله از q دیابی کرد، یعنی با حل معادله دیفرانسیل معمولی

$$\dot{\gamma} = -\nabla \tau. \quad (487)$$

با این اطلاعات، ممی‌دانیم که $\log_p(q) = \tau(q) = \log_p(q)$ با جهت v که با مسیر ژئودزیک در p داده می‌شود. راه حل؟ الگوریتم دایکسترا را برای محاسبه فواصل در امتداد یال‌های یک گراف به یک نسخه پیوسته تعمیم می‌دهد، که می‌تواند از وجود عبور کند و بنابراین روی مشاه عمل کند. این روش یک تابع فاصله را انتشار یک جبهه موج از p محاسبه می‌کند. روش گرما (۴۸۲) توسعه $\Delta u = u$ را با شرط با بهره‌برداری از فرمول واردان، که ارتباطی را با کرنل گرما برقرار می‌کند، محاسبه می‌کند. الگوریتم آنها اساساً معادله $\Delta u = \Delta u$ را با شرط اولیه $\delta(p) = u$. حل می‌کند، یعنی یک «پیک گرما» را از نقطه مبدأ p منتشر می‌کند. از آنجا که مشخص است که گرادیان فاصله ژئودزیک دارای قدر واحد است (معادله (۴۸۶)، می‌توان مخالف گرادیان فواصل ژئودزیک اشاره می‌کند. از آنجا که مشخص است که گرادیان فاصله ژئودزیک دارای قدر واحد است (معادله (۴۸۶)، می‌توان میدان فاصله را از این اطلاعات محاسبه کرد. این روش به طور قابل توجهی سریعتر از الگوریتم‌های قبلی است؟ این روش را به معادله گرمای برداری تعمیم می‌دهند، که اجازه می‌دهد کمیت‌های با مقادیر برداری را به جای گرمای اسکالار منتشر کنند. این الگوریتم را می‌توان برای انتقال بردارها از یک نقطه (یا مجموعه) مبدأ روی کل منیفلد استفاده کرد، اما همچنین برای حل نگاشتهای لگاریتمی با دقت بالا مناسب است.

۲.۱۲ کانولوشن‌های سطحی راهبری پذیر-دورانی

در این بخش، ما کانولوشن‌های سطحی (D_N -C_N-SO(۲)-D_N-C_N-Rاهبری پذیر) را که در ردیفهای (۴۰-۳۷) جدول ۶ فهرست شده‌اند، مرور می‌کنیم. همه این مدل‌ها در این مشترک هستند که به ایهام جهات مرتع روی سطوح عمومی از طریق یک طراحی هموردای (با ناوردای) دورانی محلی می‌پردازند، که آنها را از مدل‌های $\{e\}$ -راهبری پذیر مورد بحث در بخش بعدی ۳.۱۲ متمایز می‌کند. قبل از بحث دقیق در مورد مدل‌های منفرد، ما با یک نمای کلی سطح بالا از انتخاب‌های طراحی رایج و گستته‌سازی‌های عددی ممکن شروع می‌کنیم.

ملاحظات کلی و نمای کلی: تمام مدل‌هایی که در این بخش مرور می‌شوند، روی مشاهای سطحی مثلثی عمل می‌کنند و راهبری پذیر-دورانی هستند. گروه ساختاری پیوسته $G = \text{SO}(2)$ برای تمام مدل‌هایی که نمایش‌های میدان منظم را فرض می‌کنند (ردیفهای ۳۸ و ۳۹) با گروه‌های دوری C_N یعنی N جهت با فواصل مساوی، گستته‌سازی می‌شود. مدل؟ یک گروه ساختاری خاص تر D_4 را فرض می‌کند. توجه داشته باشید که معماری‌های صرفاً راهبری پذیر-دورانی فقط سطوح جهت‌پذیر عمل می‌کنند بدون اینکه همورای (پیوستگی) استنتاج خود را

نقض کنند. سطوح غیر جهت پذیر نیازمند راهبری پذیری بازتابی اضافی هستند، یعنی گروههای ساختاری ۲ یا D_N . این الزام اغلب با تطبیق‌های جزئی، مهمتر از همه با استفاده از فضاهای کرنل محدودتر، به راحتی قابل ارضاست.

مطابق با تعریف کانولوشن‌های G^A مدل‌ها ویژگی‌ها را در همسایگی محلی اطراف هر نقطه نمونه‌برداری بر حسب مختصات نرمال ژئودزیک پارامتری می‌کنند. تقریباً تمام مدل‌ها میدان‌های ویژگی را روی رئوس مش نمونه‌برداری می‌کنند؛ فقط \mathbb{I} ویژگی‌ها را به صورت متراکم روی وجوده مش نمونه‌برداری می‌کند. انتگرال کانولوشن پیوسته در معادله (۴۸۷)، که ویژگی‌ها را در مختصات نرمال ژئودزیک با یک کرنل راهبری پذیر مطابق می‌دهد، را می‌توان به روش‌های مختلفی گستته‌سازی کرد. اکثر مدل‌ها این انتگرال را در یک رأس $p \in \mathcal{V}$ به عنوان یک جمع روی رئوس همسایه آن \mathcal{V} گستته‌سازی می‌کنند. سپس ویژگی‌ها از این رئوس $q \in \mathcal{N}_p$ با مقادیر کرنل پیوسته در نقطه $\psi_{TM,p} \log_p(q)$ با $\psi_{TM,p}^A$ تطبیق داده می‌شوند، که در آن $\psi_{TM,p}^A$ پیمانه متناظر با چارچوب مرجع انتخاب شده در p است. این به همراه انتقال از q به p منجر به گستته‌سازی زیر می‌شود:

$$f_{\square\square}^A(p) = \sum_{q \in \mathcal{N}_p} \mathbb{I}_q K(\psi_{TM,p}^A \log_p(q)) \rho(g_{p \leftarrow q}^{A\tilde{A}}) f_{\square\square}^{\tilde{A}}(q), \quad (488)$$

که در آن $\mathbb{I}_q \in \mathbb{R}$ وزن‌های مساحتی مناسب انتخاب شده‌اند که مجموع آنها برابر با کل مساحت مش است، $\sum_{q \in \mathcal{V}} \mathbb{I}_q = \int_M 1 dp$. انتخاب‌های رایج، وزن‌های مساحتی مرکزوار به شکل

$$w_q = \frac{1}{3} \sum_{\{i,j,q\} \in \mathcal{F}} A_{\{i,j,q\}}, \quad (489)$$

هستند، با مجموعی که روی تمام مثلث‌های مجاور رأس q اجرا می‌شود، یا مساحت‌های ورونوی \mathbb{I}_q . از آنجا که گستته‌سازی در معادله (۴۸۸) روی رئوس همسایه جمع می‌شود، الگوریتم‌ها نگاشت‌های لگاریتمی را از طریق کوتاه‌ترین ژئودزیک‌ها بین q و p محاسبه می‌کنند؛ به بخش ۲.۱.۱۲ و [۴] مراجعه کنید.

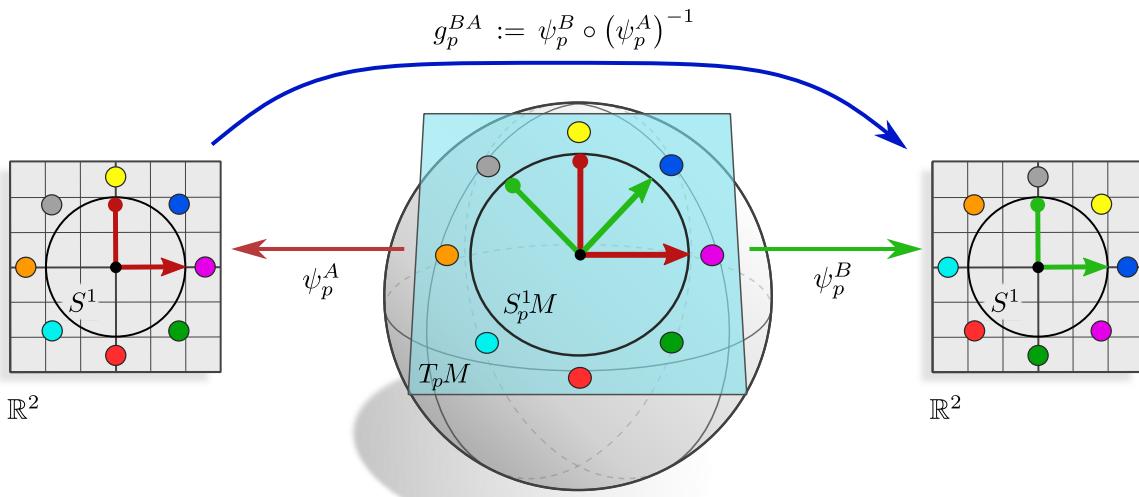
به جای محاسبه نگاشت‌های لگاریتمی رئوس همسایه، می‌توان به طور جایگزین انتگرال کانولوشن را روی دامنه کرنل \mathbb{R}^3 گستته‌سازی کرد. نویسنده‌گان [۴] از یک تقسیم‌بندی همزاویه و هم‌شعاع از مختصات قطبی ژئودزیک استفاده می‌کنند. آنها نگاشت نمایی را برای هر نقطه نمونه‌برداری (r, φ) محاسبه می‌کنند، یعنی یک مستقیم‌ترین ژئودزیک $\mathbb{I}(r, \varphi)$ به طول r را در جهت φ نسبت به چارچوب مرجع شلیک می‌کنند. از آنجا که این ژئودزیک‌ها به طور کلی در یک وجهه به پایان می‌رسند، بردارهای ویژگی از رئوس مجاور باید درون یابی شوند، به عنوان مثال بر اساس مختصات مرکزوار. [۴] همسایگی ژئودزیک را از طریق یک الگوریتم «باز کردن انتقال موازی» تقریب می‌زنند [۴].

جدول ۶ مدل‌ها را بر اساس انواع میدان مربوطه خود سازماندهی می‌کند، یعنی بر اساس نمایش‌های گروهی ρ که قوانین تبدیل آنها را تحت تبدیلات پیمانه مشخص می‌کنند. تنها انواع میدان غیربدیهی که تاکنون استفاده شده‌اند، نمایش‌های تحویل‌ناپذیر (مختلط) از $(SO(2))^3$ و نمایش‌های منظم از $(SO(2))^L$ هستند، که با نمایش‌های منظم یک زیرگروه گستته C_N گستته‌سازی شده‌اند [۴]. نمایش‌های منظم $(SO(2))^L$ عمل می‌کنند، یعنی بر روی توابع در $(SO(2))^L$ بعد یک مقدار برای هر جهت «یک مقدار برای هر جهت» اختصاص می‌دهند. در نسخه گستته، ما \mathbb{R}^N را داریم، که در آن هر یک از N بعد یک بردار ویژگی منظم متناظر با یکی از جهات در $\{1, \dots, N - 1\}$ در $k^{\frac{2\pi}{N}}$ است. تنشیز با نمایش‌های منظم در اکثر این مقالات ضمیم است \mathbb{I} عبارتی های شبکه بیشتر از یک دیدگاه شهودی تراستخراج شده‌اند. مشخص می‌شود که نویسنده‌گان فقط از زیرمجموعه‌ای از فضای کامل کرنل‌های راهبری پذیر که بین میدان‌های ویژگی منظم C_N نگاشت انجام می‌دهند، استفاده می‌کنند. ما این ادعا را در ادامه هنگام بحث دقیق در مورد مدل‌ها بیشتر اثبات می‌کنیم. یک ساختار از فضای کامل کرنل در [۴] ارائه شده است، یک تصویرسازی را می‌توان در شکل ۳ از [۴] یافت. مدل‌های باقی‌مانده بر اساس نمایش‌های بدیهی، یعنی میدان‌های اسکالار هستند. یک رویکرد برای محاسبه میدان‌های اسکالار، اعمال یک کرنل در N جهت است، که منجر به یک میدان ویژگی منظم میانی C_N می‌شود، و به دنبال آن یک عملیات تجمعی روی N پاسخ انجام می‌شود [۴]. از آنجا که تبدیلات پیمانه در C_N منجر به یک جابجایی دوری صرف (یک جایگشت) از کانال‌های جهت ویژگی می‌شوند، عملیات تجمعی تحت تبدیلات پیمانه ناوردا هستند، یعنی میدان‌های اسکالار تولید می‌کنند. [۴] بلافصله از کرنل‌های D_4 -ناوردا استفاده می‌کنند؛ به شکل ۶۹ مراجعه کنید. از آنجا که تبدیلات پیمانه چنین کرنل‌هایی را ناوردا باقی می‌گذارند، میدان‌های ویژگی حاصل نیز ناوردا هستند، یعنی میدان‌های اسکالار.

در آخر، می‌توانیم مدل‌ها را بر اساس انتقال‌دهنده‌های ویژگی که فرض می‌کنند، مقایسه کنیم. تمام شبکه‌های کانولوشنی در [۴] انتقال‌دهنده‌های کانونی لوی-چیویتا را روی مش فرض می‌کنند. از آنجا که تمام مدل‌های [۴] بر میدان‌های اسکالار تکیه دارند، انتقال موافق آنها بدیهی است. یک رویکرد جایگزین توسعه \mathbb{I} دنبال شد که یک اتصال با مقادیر C_N را روی مش محاسبه می‌کنند. این اتصال در همه جا به جز در چند تکینگی با هولونومی $k^{\frac{2\pi}{N}}$ برای یک N و $k = 0, \dots, N - 1$ تابع، بدیهی (تحت) است. نویسنده‌گان اتصال با مقادیر C_N خود را به گونه‌ای بهینه‌سازی می‌کنند که اتصال لوی-چیویتا با مقادیر $(SO(2))^L$ را تا حد امکان نزدیک تقریب بزنند؛ همچنین به [۴] مراجعه کنید. توجه داشته باشید که این رویکرد مشابه پهن کردن محلی CNN‌های کروی به CNN‌های بیست و چهاری (۶) از بخش ۴.۱۲ است اما برای مش‌های عمومی اعمال می‌شود.

با در نظر گرفتن این ملاحظات کلی، ما بر روی برخی از انتخاب‌های طراحی خاص‌تر که در مدل‌ها انجام شده است، تمرکز می‌کنیم.

شبکه‌های هارمونیک سطحی: شبکه‌های هارمونیک سطحی توسط \mathbb{I} که در ردیف (۳۷) جدول ۶ فهرست شده‌اند، یک مثال نمونه از کانولوشن‌های G^A روی مش‌ها هستند. آنها شبکه‌های هارمونیک [۴] را \mathbb{I} که ویژگی‌های آنها مطابق با نمایش‌های تحویل‌ناپذیر مختلط $G = SO(2)$ تبدیل می‌شوند \mathbb{I} از صفحه اقلیدسی به فضاهای خمیده عمومی تعمیم می‌دهند. نویسنده‌گان کانولوشن خود را مانند معادله (۴۸۸)



شکل ۶۶. نمایش توابع جهتی توسط Ψ . توابع جهتی یک پاسخ با مقدار حقیقی (نقاط رنگی) را به هر جهت (بردار واحد) در $S_p^1 M \subset T_p M$ (دایره سیاه اختصاص می‌دهند. هنگام بیان این توابع نسبت به چارچوب‌های مرجع راست‌نهج و راست‌گرد با پیمانه‌های $\psi_{TM,p}^X$ ، نمایش‌های مختصاتی پاسخ‌های با مقدار حقیقی را به بردارهای واحد در $\mathbb{R}^2 \subset S^1$ اختصاص می‌دهند. قانون تبدیل بین این نمایش‌های مختصاتی با یک دوران از مقادیر ویژگی روی S^1 داده می‌شود. از نظر ریاضی، این قانون تبدیل به عنوان عمل نمایش منظم از $SO(2)$ شناسایی می‌شود؛ به معادله (۴۹۲) مراجعه کنید. بنابراین توابع جهتی، میدان‌های ویژگی منظم هستند و CNN سطحی Ψ [۱] بر اساس کانولوشن‌های GM بین چنین میدان‌هایی است. یک نسخه نموداری از این شکل در معادله (۴۹۳) آراوه شده است.

با استفاده از وزن‌های مساحتی مرکزوار از معادله (۴۸۹) تعریف می‌کنند. انتقال‌دهندهای لوی-چپوتا و نگاشتهای لگاریتمی از طریق روش گرمای برداری [۹] محاسبه می‌شوند، که به مشاهدات مثلثی محدود نیست بلکه اجازه می‌دهد مدل را به مشاهدات چندضلعی و ابرهای نقطه نیز اعمال کرد. غیرخطی‌های $SO(2)$ -هموردی مورد استفاده توسط مدل‌ها فقط بر روی قدر مطلق ویژگی‌های مختلط عمل می‌کنند اما آرگومان آنها را ناوردا ناقی می‌گذارند.

همانطور که در [۹] اثبات شده است، فضاهای کرنل $SO(2)$ -راهبری‌پذیر که توسط نویسنده‌گان استفاده می‌شوند، روی میدان مختلط کامل هستند. با این حال، اگر میدان‌های ویژگی مختلط بر حسب دو کانال که حاوی بخش‌های حقیقی و موهومی آنها هستند، پیاده‌سازی شوند، باید آنها را به عنوان تبدیل شونده مطابق با نمایش‌های تحويل‌ناپذیر حقیقی $SO(2)$ در نظر گرفت. محدودیت کرنل در این حالت به کرنل‌های راهبری‌پذیر اضافی اجازه می‌دهد؛ برای یک بحث دقیق به پیوست ۰.۵ از [۹] مراجعه کنید. ما علاوه بر این می‌خواهیم اشاره کنیم که شواهد تجزیی نشان می‌دهد که شبکه‌های مبتنی بر میدان‌های نمایش تحويل‌ناپذیر عملکرد به طور قابل توجهی بدتری نسبت به آنها‌ی که بر اساس نمایش‌های منظم هستند، دارند؛ به عنوان مثال به بنچمارک در [۹] که اساساً یک تبدیل فوریه از پشت‌های از میدان‌های نمایش تحويل‌ناپذیر را برای تبدیل آنها به یک میدان ویژگی منظم اعمال می‌کند، به شبکه‌هایی که روی میدان‌های ویژگی منظم عمل می‌کنند، تبدیل کرد.

CNN‌های زووزبک چندجهته: [۱] CNN‌های زووزبک چندجهته (Ψ_{MDGCNN}) را پیشنهاد کردند که روی به اصطلاح توابع جهتی عمل می‌کنند. همانطور که در ادامه استدلال می‌کیم، توابع جهتی معادل میدان‌های ویژگی منظم هستند و خاصی بین چنین ویژگی‌هایی هستند. نویسنده‌گان توابع جهتی را به عنوان توابع با مقدار حقیقی تعریف می‌کنند که به نقاط $v \in M$ و جهات واحد $1 \|v\| \in T_p M$, $v \in T_p M$ بستگی دارند. با نشان دادن دایره جهات واحد در

$$S_p^1 M := \{v \in T_p M \mid \|v\| = 1\} \cong S^1, \quad (490)$$

یک ویژگی جهتی در p به عنوان یک نگاشت

$$F : S_p^1 M \rightarrow \mathbb{R} \quad (491)$$

از جهات واحد در صفحه مماس به پاسخ‌های با مقدار حقیقی تعریف می‌شود.^{۱۳۳} یک انتخاب از چارچوب مرجع راست‌نهج و راست‌گرد، یک جهت مرجع را ثابت می‌کند که نسبت به آن می‌توان تابع جهتی را بیان کرد. فرض کنید $\psi_{TM,p}^A$ پیمانه متناظر با یک چارچوب انتخاب شده باشد، که جهات واحد را در $S_p^1 M \subset T_p M$ به «جهات واحد مختصاتی» در $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ نگاشت می‌دهد. سپس عبارت مختصاتی تابع جهتی با

$$F_p^A := F \circ (\psi_{TM,p}^A|_{S_p^1 M})^{-1} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (492)$$

^{۱۳۳} تابع جهتی کامل سپس می‌تواند به عنوان یک نگاشت از M^1 ، کلافی با تارهای $S_p^1 M$ ، به مقادیر حقیقی تعریف شود.

داده می‌شود، یعنی به بردارهای ضربی واحد روی \mathbb{R}^2 پاسخ‌های با مقدار حقیقی اختصاص می‌دهد. از جابجایی نمودار

$$\begin{array}{ccccc}
 & & g_p^{BA} & & \\
 & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\
 \mathbb{R}^2 \supset S^1 & \xleftarrow{\psi_{TM,p}^A|_{S_p^1 M}} & S_p^1 M & \xrightarrow{\psi_{TM,p}^B|_{S_p^1 M}} & S^1 \subset \mathbb{R}^2 \\
 & F_p^A \searrow & \downarrow F & \swarrow F_p^B & \\
 & & \mathbb{R} & &
 \end{array} \quad (493)$$

می‌توان خواند که عبارات مختصاتی توابع جهتی از قانون تبدیل زیر پیروی می‌کنند:

$$F_p^B = F_p^A \circ (g_p^{BA})^{-1} =: \rho_{\text{MDGCNN}}(g_p^{BA}) F_p^A \quad (494)$$

تساوی دوم، قانون تبدیل بین عبارات مختصاتی را به عنوان عمل نمایش منظم شناسایی می‌کند، که گزاره ما را مبنی بر اینکه توابع جهتی فقط میدان‌های ویژگی منظم هستند، توجیه می‌کند.¹³⁴ شکل ۶۶ یک تابع جهتی و نمایش‌های مختصاتی آن را نسبت به چارچوب‌های مختلف نشان می‌دهد.

کاتولوشن‌های ژئودزیک چندجهته توسط ؟ [بین توابع جهتی به روشنی مستقل از مختصات با منقبض کردن آنها با کرنل‌های همودا در یک پارامتری سازی ژئودزیک حول هر رأس، نگاشت انجام می‌دهند. این مشاهده دلالت بر این دارد که این کاتولوشن‌ها GM خاصی بین میدان‌های ویژگی منظم هستند. یک تفاوت در فرمول بندی کاتولوشن‌های ژئودزیک چندجهته این است که پول‌بک انتقال دهنده آنها کل بردار ویژگی منظم (تابع جهتی) را در امتداد ژئودزیک‌ها منتقل نمی‌کند، بلکه فقط آن پاسخ منفرد را که متناظر با جهت مماس ژئودزیک است، منتقل می‌کند. به جای تطبیق ویژگی‌های منتقل شده با یک کرنل ماتریسی، کاتولوشن‌های چندجهته پاسخ منفرد منتقل شده را با یک کرنل اسکالر تطبیق می‌دهند. معادل بودن هر دو عملیات با تحمیل یک الگوی پراکندگی متناظر بر روی کرنل‌های $(2)SO$ -راهبری پذیر ماتریسی ما، که به طور موثر آن پاسخ‌هایی را که توسط MDGCNN‌ها منتقل نمی‌شوند، صفر می‌کند، بازیابی می‌شود. در حالی که کاتولوشن‌های ژئودزیک چندجهته فقط کاتولوشن‌های GM بین میدان‌های ویژگی منظم هستند، آنها بنابراین از فضای کامل کرنل‌های G -راهبری پذیر بین میدان‌های ویژگی منظم استفاده نمی‌کنند. این پراکندگی MDGCNN‌ها را از نظر محاسباتی کارآمد می‌کند، با این حال، هزینه حافظه همان باقی می‌ماند و مشخص نیست که این انتخاب تا چه حد طرفیت بیان آنها را محدود می‌کند.

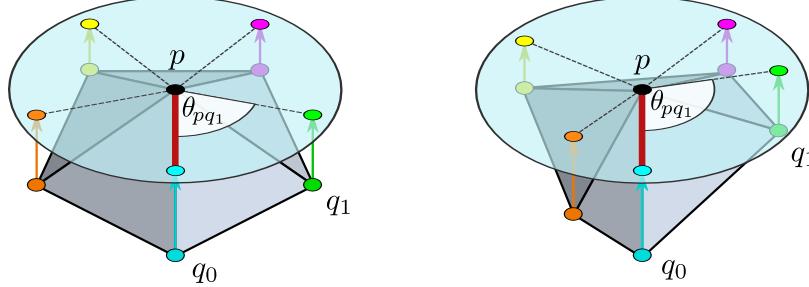
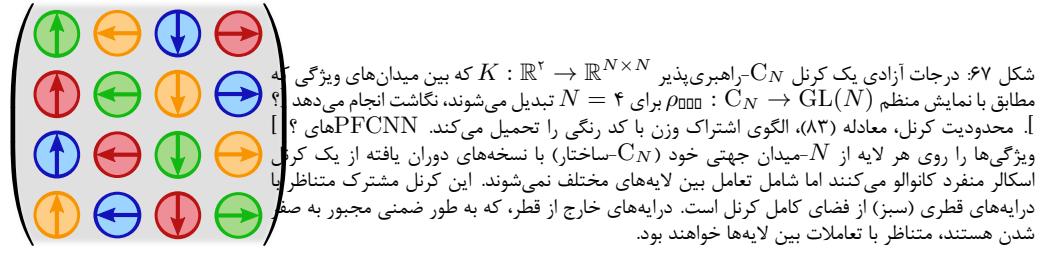
تعداد نامتناهی جهات در $(2)SO$ (یا $S_p^1 M$ یا S^1) در عمل به N جهت با فواصل مساوی در گروه دوری C_N گسسته‌سازی می‌شود، به عنوان مثال ۸ جهتی که در شکل ۶۶ به تصویر کشیده شده‌اند. از آنجا که انتقال لوى-چیویتا در امتداد ویژگی‌ها به طور کلی با مقادیر $SO(2)$ به جای C_N است، نویسنده‌گان از یک درون‌یابی خطی بین N جهت گسسته استفاده می‌کنند.

همانطور که در بالا بحث شد، MDGCNN‌ها فقط آن پاسخ‌های خاص از ژئودزیک خروجی نسبت به چارچوب مرجع محلی در p هستند، منتقل می‌کنند. این جهت در مبدأ $v = T_p M = 0$ تعريف نشده است، که از خود-تعاملي رؤوس جلوگیری می‌کند. نویسنده‌گان این مشکل را با اعمال یک $\times 1$ -اضافی حل می‌کنند که خود-تعاملي گمشده را دوباره اضافه می‌کند. همانطور که در بخش ۱۱.۴ استخراج شد، کرنل‌های $\times 1$ -اضافی $\times 1$ -باید در هم‌تمندی باشد تا استقلال از مختصات مدل را حفظ کنند. این الزام در واقع توسط MDGCNN‌ها برآورده می‌شود¹³⁵ زیرا ماتریس $\times 1$ -باید در هم‌تمندی $\times 1$ -به گونه‌ای ساخته شده است که کل بردارهای ویژگی منظم را با یک وزن یکسان ترکیب می‌کند به جای اینکه کاتولوشن‌های آنها را به طور مستقل ترکیب خطی کند. این کار با نمایش m_{MDGCNN} ویژگی منظم C_N نه به عنوان یک بردار ویژگی $c = N \cdot m_{\text{MDGCNN}}$ -بعدی بلکه به عنوان یک آرایه با شکل (N, m_{MDGCNN}) و سپس اعمال یک ماتریس (مشتراک) با شکل $(m_{\text{MDGCNN}}, m_{\text{MDGCNN}})$ روی آخرين محور که منجر به یک آرایه خروجی با شکل (N, m_{MDGCNN}) می‌شود، پياده‌سازی می‌شود.

های چارچوب موازی: C_N های چارچوب موازی (موازی) توسط ؟ [بر N -میدان‌های چارچوب جهتی تکیه دارند، که فقط ساختارهای GM برای گروه‌های ساختاری دوری $G = C_N$ هستند. به بادیاورید از بحث ما در بالا که این میدان‌ها یک اتصال را کدگذاری می‌کنند که در همه جا به جز در چند تکینگی بدیهی است و برای تقریب اتصال لوى-چیویتا اصلی بهینه‌سازی شده است. از آنجا که این G -ساختار در یک مرحله آفلاین از پیش محاسبه می‌شود، ما در ادامه آن را به عنوان داده شده در نظر می‌گیریم و بر روی کاتولوشن واقعی PFCNN تمرکز می‌کیم. مشخص می‌شود که این عملیات معادل یک کاتولوشن GM بین میدان‌های ویژگی منظم C_N است، با این حال، دوباره یک الگوی پراکندگی خاص را در کرنل‌ها فرض می‌کند که توسط طراحی شبکه خاص القای شود.

فضاهای ویژگی $PFCNN$ ها فضاهای $C^\infty(GM)$ از توابع با مقادیر حقیقی روی GM هستند. از آنجا که $G = C_N$ برای GM به π_{GM} در نظر گرفت. از آنجا که N لایه از فضای پوششی علاوه بر این با N جهت (که با اولین محورهای چارچوب داده می‌شوند) به هر نقطه $p \in M$ در نظر گرفت. از آنجا که N لایه از فضای پوششی علاوه بر این با N جهت (که با اولین محورهای چارچوب داده می‌شوند) به طور دقیق، نمایش منظم $(2)SO$ بر روی توابع \mathbb{R} عمل می‌کند. با این حال، ما می‌توانیم به طور کاتولوشن چنین توابعی را با توابع روی S^1 با یکی گرفتن $S^1 \in \mathbb{R}^N$ با $(1, 0) \in SO(2)$ با $\{e\} \in SO(2)$ {یکی بگیریم.

¹³⁴ مکاتبه شخصی با نویسنده.



شکل ۶۸: دو ناحیه مش که از نظر توپولوژیکی معادل اما از نظر هندسی متمایز هستند. یک رویکرد برای تعریف کاتولوشن‌ها روی میدان‌ها در نظر گرفتن گراف زیربنای آنها (\mathcal{V}) است که توپولوژی مش را ثبت می‌کند، و اجرای یک شبکه عصبی گراف روی آن. شبکه‌های عصبی گراف (متغروف) به دلیل نداشتن اطلاعات در مورد هندسه مش، نمی‌توانند بین دو همسایگی به تصویر کشیده شده تمایز قائل شوند. از نظر هندسی، آنها کرنل‌های همسانگرد را اعمال می‌کنند. مش هموردای پیمانه توسط؟ [۱] این مشکل را با تصویر کردن رؤوس همسایه q_i روی صفحات مماس اختصاص دادن زوایای θ_{pq_i} به آنها نسبت به یک یال مرجع، یعنی پیمانه (فرمن)، حل می‌کنند. از این مدل بر استقلال از مختصات کاتولوشن‌ها منجر به کرنل‌های G -راهبری‌پذیر می‌شود. در حالی که این مدل می‌تواند بر اساس جهت گره‌های همسایه تمایز قائل شود، فاصله آنها را نادیده می‌گیرد. این مدل علاوه بر این از پارامتری سازی ژودزیک مجبور می‌شود به این دلیل که تکیه گاه کرنل آن بر اساس اتصال لبه محلی به جای فواصل ژودزیک است.

یکی گرفته می‌شوند، این ویژگی‌ها معادل توابع جهتی (گستته‌سازی شده) \mathcal{A} هستند. قضیه ۱ در پیوست ح علاوه بر این اثبات می‌کند که یک ایزومورفیسم

$$C^\infty(GM) \cong \Gamma(\mathcal{A}_{\text{مداد}}) \quad (۴۹۵)$$

بین ویژگی‌های میدان‌های ویژگی منظم ما وجود دارد. بنابراین PFCNN‌ها کاتولوشن‌های مستقل از مختصات را بین (مداد) میدان‌های ویژگی منظم انجام می‌دهند و بنابراین به عنوان کاتولوشن‌های GM منظم (خاص) شناسایی می‌شوند.

فرمول‌بندی کاتولوشن‌های چارچوب موازی در نگاه اول به نظر می‌رسد کاملاً با فرمول‌بندی متفاوت است: به جای کاتولو کردن کامل میدان‌های ویژگی منظم N -بعدی با یک کرنل ماتریسی C_N -راهبری‌پذیر $\mathbb{R}^{\mathcal{V}} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ PFCNN‌ها توابع اسکالر خود را روی هر یک از لایه به طور مستقل با یک کرنل اسکالر مشترک که با چارچوب لایه مربوطه تراز شده است، کاتولو می‌کنند. این عملیات در چارچوب ما به عنوان یک کاتولوشن با یک کرنل ماتریسی C_N -راهبری‌پذیر تفسیر می‌شود که تنها مقادیر غیرصفر آن روی قطر آن ویژگی چرخانده شده‌اند، که با درایه‌های سیز در شکل ۶۷ به تصویر کشیده شده است. عدم وجود کوپلینگ بین ویژگی‌ها روی لایه‌های مختلف دلالت بر این دارد که درایه‌های خارج از قطر (زرد، آبی و قرمز) از فضای کامل کرنل راهبری‌پذیر به طور ضمی صفر در نظر گرفته می‌شوند. همانطور که قبل از MDGCNN‌ها گفته شد، الگوی پراکنده‌ای این کاتولوشن GM منظم آن را از نظر محاسباتی کارآمدتر از یک کاتولوشن GM متراکم می‌کند اما احتمالاً بر عملکرد آن تأثیر می‌گذارد و هزینه حافظه را کاهش نمی‌دهد.

CNN‌های مش هموردای پیمانه: CNN از کاستی‌های شبکه‌های عصبی گراف متغیر برای پردازش میدان‌های ویژگی روی مشها الهام گرفته شده است. به طور خاص، شبکه‌های عصبی گراف وانلی می‌توانند برای پردازش میدان‌های ویژگی نمونه‌برداری شده در رؤوس روی مشها با کاتولو کردن روی گراف (\mathcal{V}) که توسط مش القا می‌شود، استفاده شوند. مشکل این رویکرد این است که گراف فقط توپولوژی مش را کدگذاری می‌کند، اما قادر به ثبت هندسه آن نیست. کاتولوشن‌های گراف متغیر بر این اساس بین ترتیب یال‌ها تمایز قائل نمی‌شوند، که روی مشها متناظر با استفاده از کرنل‌های همسانگرد است که بین میدان‌های اسکالر نگاشت انجام می‌دهند. شکل ۶۸ دو ناحیه از یک مش با هندسه منایز اما توپولوژی معادل را نشان می‌دهد [۲] برای کاتولوشن‌های گراف متغیر هر دو همسایگی یکسان به نظر می‌رسند. GEMCNN‌ها این مشکل را با انتخاب یک یال مرتع در هر رأس $p \in \mathcal{V}$ حل می‌کنند، که نسبت به آن جهت تمام یال‌های دیگر $\mathcal{E} \in \{p, q_i\}$ به حلقه یک از همسایگان $q_i \in \mathcal{N}_p \subset \mathcal{V}$ بر حسب زوایا $\theta_{pq_i} \in [0, 2\pi]$ اندازه‌گیری می‌شود. یک انتخاب از یال مرتع متناظر با یک انتخاب از چارچوب راسته‌هنجار و راست‌گرد است. انتخاب‌های مختلف با تبدیلات پیمانه در گروه ساختاری $G = SO(2)$ مرتبط هستند.

همانند نظریه ما، فضاهای ویژگی GEMCNN‌ها به عنوان مقاطعی از کلافهای برداری همیسته تعریف می‌شوند، یعنی به عنوان فضاهایی از میدان‌های ویژگی C بعدی که ضرایب آنها تحت تبدیلات پیمانه مطابق با یک نمایش گروهی (c) باشند. میدان c را می‌توان به این شکل تعریف کرد: $c : SO(2) \rightarrow GL(C)$ با مقادیر (2) از $SO(2)$ اختصاص داده می‌شود. عملیات کانون‌لشون ملزم است که مستقل از انتخاب یال مرتع باشد، که منجر به الزام بر روی کرنل‌ها برای G -راهبری پذیر بودن (همورادی پیمانه) می‌شود. برخلاف فرمول‌بندی ما، کرنل‌ها مستقیماً در مختصات نرمال ژئودزیک اعمال نمی‌شوند بلکه پیام‌ها را فقط از مسمایگی‌های یک-حلقه \mathcal{E} در \mathcal{V} می‌شوند: $\mathcal{N}_p := \{q \in \mathcal{V} \mid \{p, q\} \in \mathcal{E}\}$. آن‌ها علاوه بر این غیرحساس به شاعع هستند^{۱۳۶} اینکه این تا چه حد بر عملکرد مدل تأثیر می‌گذارد، یک سوال باز باقی می‌ماند.

نویسنده‌گان نمایش‌های تحويل‌ناپذیر (حقیقی) را به عنوان انواع میدان برای کانون‌لشون انتخاب کرده‌اند، با این حال، آنها یک تغییر پایه به نمایش‌های منظم برای اعمال غیرخطی‌های ReLU انجام می‌دهند، به همین دلیل ما آنها را در ردیف (38) جدول 6 به جای ردیف (37) فهرست می‌کنیم.^{۱۳۷} به طور خاص، نویسنده‌گان از تغییر پایه $C_N \rightarrow GL(N)$ استفاده می‌کنند که نمایش منظم $Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$ را به مؤلفه‌های C_N از $\rho_{\text{منظم}}$ نمایش تحويل‌ناپذیر آن تجزیه می‌کند تا یک پشتۀ از میدان‌های نمایش تحويل‌ناپذیر را به یک میدان ویژگی منظم تبدیل کند. برای این C_N این ماتریس فقط تبدیل فوریه گستته است. پس از اعمال غیرخطی ReLU به هر یک از N کانال از میدان ویژگی منظم به طور جداگانه^{۱۳۸} که یک عملیات C_N -همورداست زیرا نمایش‌های مانع، نمایش‌های جایگشتی هستند^{۱۳۹} ویژگی‌ها برای عملیات کانون‌لشون بعدی به یک پشتۀ از میدان‌های نمایش تحويل‌ناپذیر بازگردانده می‌شوند. این طراحی این مزیت را دارد که ویژگی‌ها را می‌توان دقیقاً با انتقال دهنده‌های با مقادیر (2) SO متنقل کرد، بدون اینکه نیاز به بازگشت به یک طرح درون‌یابی باشد، همانطور که توسط^{۱۴۰} انجام می‌شود. توجه داشته باشید، با این حال، که شبکه کامل به دلیل استفاده از غیرخطی‌های منظم فقط C_N -همورداست.

اینکه نویسنده‌گان از نمایش‌های تحويل‌ناپذیر حقیقی از $SO(2)$ استفاده می‌کنند به این معنی است که فضاهای کرنل آنها تقریباً دو برابر بزرگتر از فضاهای کرنل شبکه‌های هارمونیک سطحی توسط^{۱۴۱} است؛ بحث‌ها در^{۱۴۲} را مقایسه کنید.

CNN‌های ژئودزیک: اولین کار در مورد کانون‌لشون‌های ژئودزیک که ما از آن آغاز هستیم، کار^{۱۴۳} است. نویسنده‌گان ابهام دورانی مختصات قطبی ژئودزیک را روی یک منيفلد ریمانی جهت‌پذیر شناسایی کرده و آن را از طریق یک معماری ناورده نسبت به دوران حل می‌کنند. کانون‌لشون‌های ژئودزیک آنها یک میدان اسکالار را نسبت به مختصات قطبی ژئودزیک با جهت‌گیری دلخواه نمایش می‌دهند. از آنجا که نوع میدان بدیهی است، پول‌بک انتقال دهنده به مختصات ژئودزیک به انتقال دهنده‌های (غیربدیهی) تیاز ندارد. سپس میدان ویژگی در مختصات ژئودزیک با یک کرنل اسکالار تطبیق داده می‌شود، که در N دوران با فواصل مساوی با زوایای $k \frac{\pi}{N}$ نسبت به چارچوب مرجع، که در آن $1, \dots, N-k = k$ است، اعمال می‌شود. از آنجا که یک تبدیل پیمانه با $\frac{l}{N} \pi$ برای یک $\{1, \dots, N-l\}$ تمام کرنل‌ها را بر این اساس می‌چرخاند، منجر به یک جایگشت دوری از پاسخ‌ها با $\frac{l}{N} \pi$ می‌شود. بنابراین این عملیات در چارچوب ما متناظر با یک کانون‌لشون C_N -راهبری پذیر از میدان‌های MDGCNN ویژگی منظم C_N است. به جای پردازش بیشتر این میدان‌ها از طریق کانون‌لشون‌های گروهی منظم همانطور که در^{۱۴۴} PFCNN ها^{۱۴۵} و GEMCNN^{۱۴۶} می‌شود^{۱۴۷} نویسنده‌گان یک عملیات تجمعی max را روی N پاسخ اعمال می‌کنند. از آنجا که تبدیلات پیمانه با مقادیر C_N منجر به جایگایی‌های دوری از میدان‌های ویژگی منظم میانی می‌شوند، عملیات تجمعی ناوردای-بیمانه است، یعنی میدان‌های اسکالار تولید می‌کنند. در حالی که طراحی این شبکه برای پیاده‌سازی ساده است، از کدگذاری اطلاعات جهتی توسط ویژگی‌ها جلوگیری می‌کند. انواع دیگری از این طراحی شبکه را می‌توان در^{۱۴۸} یافت.

در ادامه، به^{۱۴۹} توسط^{۱۵۰} می‌پردازیم، برای جلوگیری از سردرگمی، اشاره می‌کنیم که نویسنده‌گان دو مدل را پیشنهاد کرده‌اند، که ما آنها را به ترتیب در ردیف‌های (38) و (39) جدول 6 فهرست می‌کنیم. ما هر دو مدل را با شروع از انتخاب‌های طراحی مشترک آنها توصیف می‌کنیم.

مفهوم کلیدی زیربنای ZerNet‌ها، پارامتری سازی کرنل‌های کانون‌لشون بر حسب چندجمله‌ای‌های زرنیکه است، که یک پایه متعامد از توابع را روی دیسک واحد بسته^{۱۵۰} $B_{\mathbb{R}^+}(0, 1)$ حول مبدأ^{۱۵۱} تشکیل می‌دهند. در مختصات قطبی، چندجمله‌ای‌های زرنیکه با

$$Z_n^m : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1], \quad (r, \varphi) \mapsto R_n^m(r) \cos(m\varphi) \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq m \leq n \quad (496)$$

$$Z_n^{-m} : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1], \quad (r, \varphi) \mapsto R_n^m(r) \sin(m\varphi) \quad n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq m \leq n, \quad \text{فرد:} \quad (497)$$

داده می‌شوند، که در آن R_n^m چندجمله‌ای‌های شعاعی زرنیکه هستند. اینکه چندجمله‌ای‌های زرنیکه (که به طور مناسب نرمال‌سازی شده‌اند) راست‌هنجار هستند به این معنی است که آنها روابط راست‌هنجاری

$$\langle Z_n^m, Z_k^l \rangle_{B_{\mathbb{R}^+}(0, 1)} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} Z_n^m(r, \varphi) Z_k^l(r, \varphi) r dr d\varphi = \delta_{nk} \delta_{ml}. \quad (498)$$

را برآورده می‌کنند. یک تابع روی دیسک واحد، به عنوان مثال یک کرنل اسکالار $\mathbb{R} \rightarrow (0, 1) : B_{\mathbb{R}^+}$ را می‌توان در پایه چندجمله‌ای‌های زرنیکه بسط داد:

$$K(r, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=-n}^n \hat{K}_n^m Z_n^m(r, \varphi) \quad (499)$$

^{۱۳۶} برای یک شبکه (به اندازه کافی) منظم و کرنل با تکیه‌گاه فشرده در مختصات ژئودزیک، هر دو رویکرد معادل می‌شوند.

^{۱۳۷} معادل بودن میدان‌های ρ -با تجزیه نمایش تحويل‌ناپذیر آنها در بخش ۲.۵ و در بخش ۴.۲ از^{۱۴۰} مورد بحث قرار گرفت.

برای بازیابی ضرایب بسط یکتابع داده شده روی دیسک واحد، آن را روی پایه زرنیکه تصویر می کنیم:

$$\widehat{K}_n^m = \langle K, Z_n^m \rangle_{B_{\mathbb{R}^2}(.,.)} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} K(r, \varphi) Z_n^m(r, \varphi) r dr d\varphi \quad (500)$$

حاصلضرب داخلی بین دوتابع K و $\text{Exp}_p^* f^A$ روی دیسک واحد را می توان با این روابط بر حسب ضرایب بسط آنها بیان کرد:

$$\begin{aligned} \langle K, \text{Exp}_p^* f^A \rangle_{B_{\mathbb{R}^2}(.,.)} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} K(r, \varphi) \text{Exp}_p^* f^A(r, \varphi) r dr d\varphi \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=-n}^n \widehat{K}_n^m Z_n^m(r, \varphi) \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{l=-k}^k [\widehat{\text{Exp}_p^* f^A}]_k^l Z_k^l(r, \varphi) r dr d\varphi \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{l=-k}^k \underbrace{\int_0^1 \int_0^{2\pi} Z_n^m(r, \varphi) Z_k^l(r, \varphi) r dr d\varphi}_{\delta_{nk} \delta_{ml}} \widehat{K}_n^m [\widehat{\text{Exp}_p^* f^A}]_k^l \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=-n}^n \widehat{K}_n^m [\widehat{\text{Exp}_p^* f^A}]_n^m \end{aligned} \quad (501)$$

همانطور که با انتخاب های K و $\text{Exp}_p^* f^A$ برای این توابع پیشنهاد می شود، نویسنده اگر این ویژگی برای تطبیق کرنل ها با پول بک میدان های ویژگی به مختصات قطبی ژئودزیک استفاده می کند. ضرایب کرنل \widehat{K}_n^m که فراتر از یک آستانه مشخص شده توسعه کاربر صفر می شوند، به عنوان پارامترهای یادگرفته شبه بهینه سازی می شوند. ضرایب بسط $[\widehat{\text{Exp}_p^* f^A}]_n^m$ از پول بک انتقال دهنده میدان ویژگی با حل یک سیستم معادلات خطی محاسبه می شوند.

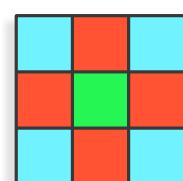
یک مزیت پارامتری سازی کرنل بر حسب چندجمله ای های زرنیکه این است که آنها بنا به تعریف کرنل های $\text{SO}(2)$ -راهبری پذیر هستند. به طور خاص، زوج های $(Z_n^m, Z_n^{-m})^\top$ از کرنل ها برای یک $n \in \mathbb{N}$ و $m \leq n$ داده شده، یک زوج از کرنل ها را تشکیل می دهند که با ضرب آنها در نمایش تحويل ناپذیر حقیقی مرتبه m از $\text{SO}(2)$ چرخانه می شوند.

$$\begin{pmatrix} Z_n^m \\ Z_n^{-m} \end{pmatrix} (r, \varphi + \Delta\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(m\Delta\varphi) & -\sin(m\Delta\varphi) \\ \sin(m\Delta\varphi) & \cos(m\Delta\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_n^m \\ Z_n^{-m} \end{pmatrix} (r, \varphi), \quad (502)$$

در حالی که کرنل های Z_n^m یعنی برای $m = 0$ به طور بدیهی تبدیل می شوند (آنها همسانگرد هستند). توجه داشته باشید که ضرایب بسط \widehat{K}_n^m از یک کرنل K به صورت وارون نسبت به پایه تبدیل می شوند. نویسنده اگر این قانون تبدیل برای دوران تحلیلی کرنل ها بر حسب ضرایب بسط آنها استفاده می کند. راهبری پذیری دورانی چندجمله ای های زرنیکه مستقل از بخش های شعاعی آنها است اما با این واقعیت بستگی دارد که بخش های زاویه ای آنها هارمونیک های دایره ای هستند، که توابع پایه هارمونیک در تجزیه پیتر-ولی از $L^2(\text{SO}(2))$ هستند [4]. به دلیل ویژگی های راهبری پذیری آنها، پایه های هارمونیک دایره ای به طور گسترده برای پارامتری کردن کرنل های کانولوشن حقیقی [4] و مختلط [4] حداقل از دهه ۸۰ میلادی استفاده شده اند [4] [4] [4]. در واقع، هارمونیک های دایره ای زیربنای هر کرنل $\text{SO}(2)$ -راهبری پذیر هستند [4].

اولین و اصلی ترین طراحی مدل توصیف شده توسعه [4] مشابه طراحی [4] است. یک میدان اسکالر به مختصات نرمال ژئودزیک پول بک می شود، جایی که با یک کرنل اسکالر که در N دوران گسترش اعمال می شود، تطبیق داده می شود، که منجر به یک میدان ویژگی منظم میانی C_N می شود. یک عملیات تجمعی \max بعدی روی N پاسخ سپس یک خروجی C_N -ناوردا، یعنی یک میدان خروجی اسکالر، به دست می گیرد. تفاوت با پیاده سازی [4] این است که این عملیات در پایه چندجمله ای های زرنیکه همانطور که در معادله (501) مشخص شده است، انجام می شود. این انتخاب در نهایت متناظر با یک طرح درون یابی جایگزین است. طراحی مدل دوم، که در بخش ۴.۴ [4] توصیف شده است، یک پیاده سازی مجدد از MDGCNN های [4] در پایه چندجمله ای های زرنیکه است. نویسنده اگر مشاهده می کند که این طراحی منجر به عملکرد به طور قابل توجهی بهبود یافته ای می شود زیرا میدان های ویژگی منظم قادر به کدگذاری اطلاعات جهتی هستند.

آخرین مدل راهبری پذیر دورانی که ما مورد بحث قرار می دهیم، D_4 -توسط [4] است. برخلاف مدل های قبلی، TextureNet های D_4 -ساختار را فرض می کنند، که به راحتی می توان آن را به یک D_N -ساختار تعمیم داد. این D_4 -ساختار با استفاده از QuadriFlow، یک بسته نرم افزاری شخص ثالث که می تواند برای محاسبه میدان های D_4 - [4] که برای هموار بودن و داشتن تکینگی های کم بهینه شده اند، استفاده شود، از پیش محاسبه می شود [4]. همانطور که از نام آن پیداست، TextureNet را که به عنوان بافت نمایش داده می شوند، پردازش می کنند و دارای وضوح بالقوه بالاتری نسبت به مش هستند. کرنل های کانولوشن در یک مجموعه متراکم از مکان های نمونه برداری، که به طور یکنواخت روى وجوده مش توزيع شده اند، اعمال می شوند. در هر نقطه نمونه برداری، میدان ویژگی اسکالر به مختصات نرمال ژئودزیک پول بک شده و نسبت به یک چارچوب دلخواه از D_4 -ساختار نمایش داده می شود. سپس با یک کرنل 3×3 -ناوردا تطبیق



شکل ۶۹: یک کرنل 3×3 پیکسلی D_4 -ناوردا با سه درجه آزادی پارامتری می شود.

داده می شود. همانطور که در شکل ۶۹ به تصویر کشیده شده است، ۹ پیکسل از چنین کرنل هایی با ۳ درجه آزادی توصیف می شوند. کانولوشن بر حسب سه 1×1 می شود که پاسخ های آنها متعاقباً در هر یک از فضاهای مماس تقسیم بندی و TextureNet می شوند. راهبری پذیری بازتابی اضافی کرنل ها دلالت بر این دارد که TextureNet ها روی سطوح غیرجهت پذیر به خوبی تعریف شده اند. با این حال، از آنجا که ویژگی های میدان های اسکالار هستند، نمی توانند نه جهات و نه جهت گیری ها را کدگذاری کنند. برای غلبه بر این مشکل، لازم است از کرنل های D_N یا ۲-راهبری پذیر غیربدپیه استفاده شود.

۳.۱۲ کانولوشن های - $\{\cdot\}$ سطحی راهبری پذیر

این بخش شبکه های $\{\cdot\}$ را مور می کند، که در این مشترک هستند که بر $\{\cdot\}$ -ساختارها روی سطوح تکیه دارند. از دیدگاه کانولوشن های GM این معماری ها عمدتاً در انتخاب خاص روش ابتکاری که $\{\cdot\}$ -ساختار را تعیین می کند متفاوت هستند.

با فرض یک گروه ساختاری بدپیه $\{e\} = G$ ، مدل ها کرنل های $\{e\}$ -راهبری پذیر (یعنی نامحدود) را اعمال می کنند، که در امتداد چارچوب های $\{e\}$ -ساختار انتخاب شده تراز شده اند. انواع میدان (نمایش های گروهی) لزوماً بدپیه هستند. همین امر برای تمام انتقال دهنده های موازی نیز صادق است، که لزوماً با $\{e\}$ -ساختار سازگار هستند. بنابراین بول بک های انتقال دهنده های موازی f_p^* از Exp_p به فضاهای مماس، به پول بک های f توسعه نگاشت نمایی معمول کاهش می بایند، یعنی آنها انتقال دهنده های (غیربدپیه) را اعمال نمی کنند. به یاد بیاورید که $\{e\}$ -ساختارهای پیوسته فقط روی منيفلد های موازی پذیر وجود دارند، که این دلالت بر این دارد که استنتاج شبکه ها به ناچار روی سطوح غیرموازی پذیر ناپیوسته است. روش های ابتکاری که میدان های چارچوب را تعیین می کنند، علاوه بر این، همیشه خوش تعریف نیستند، یا تحت تغییر شکل های هندسه سطوح ناپایدار هستند، همانطور که در ادامه بیشتر مورد بحث قرار می گیرد.

مدل های $\{\cdot\}$ ، $\{\cdot\}$ و $\{\cdot\}$ روی مس های مثلثی عمل می کنند و میدان های ویژگی را که در رؤوس نمونه برداری شده اند، پردازش می کنند. $\{\cdot\}$ و $\{\cdot\}$ شبکه های را پیشنهاد می کنند که روی ابرهای نقطه سطحی عمل می کنند در حالی که معماری $\{\cdot\}$ کانولوشن ها را روی اطلس های بافت از مش ها تعریف می کند.

های $\{\cdot\}$ ژئوزیک: اولین خانواده مدلی که ما مورد بحث قرار می دهیم، نویسنده گان انواع مختلفی از مدل ها را روی گرافها و منيفلد ها مورد بحث قرار می دهند، که اکثر آنها به عنوان کانولوشن های GM توضیح داده نمی شوند. این مدل ها در این مشترک هستند که کرنل ها را نسبت به یک انتخاب از «شبیه-مختصات» روی منيفلد یا گراف اعمال می کنند $\{\cdot\}$ ما در اینجا فقط به آن دسته از $\{\cdot\}$ های $\{\cdot\}$ ژئوزیک تکیه دارند و بنابراین به عنوان کانولوشن های GM شناسایی می شوند.

همانطور که در بالا گفته شد، تفاوت اصلی بین کانولوشن های سطحی $\{\cdot\}$ -ساختار خاص $\{e\}$ -راهبری پذیر، انتخاب خاص $\{e\}$ -ساختار آنهاست. با الهام از کار قبلی $\{\cdot\}_{\text{۱۳۸}}$ ، نویسنده گان انتخاب می کنند که چارچوب های مرجع $\{e\}$ -ساختار را به جهت اتحانی اصلی منيفلد تراز کنند. توجه داشته باشید که این روش ابتکاری زمانی که اتحانه های اصلی $\{e\}_{\text{۱۳۸}} = \mathbb{R}^n$ برابر باشند، یعنی زمانی که جهت اتحانی اصلی تهمنگ است، خوش تعریف نیست. یک مثال افراطی، کره S^2 -بعدی است، که در آن جهت اتحانی اصلی در هیچ کجا به خوبی تعریف نشده است. حتی زمانی که اتحانه های اصلی ناپایدار هستند، آنها فقط یک خط بدون جهت را تعیین می کنند، و چارچوب های مرجع را تا یک C_1 -ساختار (با $\{\cdot\}$ چارچوب تشکیل دهنده که در امتداد دو جهت در طول خط اشاره می کنند) از ابهام خارج می کنند. بنابراین برای اینکه شبکه مستقل از انتخاب چارچوب باشد، آنها در واقع باید کرنل های C_4 -راهبری پذیر را اعمال کنند. علاوه بر این، جهات اتحانی اصلی تحت تغییر شکل های سطح ناپایدار هستند. به عنوان مثال، جهت اتحانی اصلی را در قطب شمال (روی محور \mathbb{Z} مثبت) کره S^2 -بعدی \mathbb{R}^3 تصویر کنید: یک فشرده گی بی نهایت کوچک کره در امتداد محور x منجر به یک جهت اتحانی اصلی در امتداد محور x می شود. ما علاوه بر این می خواهیم اشاره کنیم که اتحانه های اصلی به جایگذاری یک منيفلد بستگی دارند، یعنی این رویکرد ذاتی نیست.

۳۰۰۰۰۰: یک CNN مش سه بعدی ($3 \times 3 \times 3$) را پیشنهاد کردند که روی سطوح چهره های اسکن شده کانولوشن می کند تا عبارتی مانند شادی، عصبانیت یا تعجب را تشخیص دهد. از آنجا که ماسک های چهره از نظر تپولوژیکی صفحاتی هستند (با سوراخ هایی در چشم ها)، آنها موازی پذیر هستند، که امکان کانولوشن های GM هموار را برای $\{e\}$ فراهم می کنند.

کرنل کانولوشن به یک نقطه نمونه برداری مرکزی و هشت نقطه دیگر در یک فاصله شعاعی ثابت R و زوایای $7, \dots, 0, \varphi_k = k \frac{\pi}{8}$ در مختصات قطبی گسسته سازی می شود. کرنل ها $\{\cdot\}$ و در نتیجه چارچوب هایی که $\{e\}$ -ساختار را تشکیل می دهند $\{\cdot\}$ به گونه ای چرخانده می شوند که با محور \mathbb{Z} فضای جایگذاری \mathbb{R}^3 تراز شوند. این رویکرد منطقی به نظر مرسد زیرا ماسک های چهره موازی پذیر و مهمتر از آن، به صورت عمودی تراز شده اند. برای تطبیق یک چنین کرنل جهت داری با یک میدان ویژگی، ژئوزیک هایی به طول R در هشت جهت شلیک می شوند. مختصات مرکزوار برای درون یابی سیگنال از رؤوس اطراف به نقطه پایانی ژئوزیک استفاده می شود.

کانولوشن های انتقال موازی: به عنوان آخرین کانولوشن $\{e\}$ -راهبری پذیر مبتنی بر مش، ما کانولوشن های انتقال موازی ($\{\cdot\}$) توسط $\{\cdot\}$ را مورد بحث قرار می دهیم. ایده کلیدی PTC ها تعریف کرنل کانولوشن در یک «مبدأ» $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$ و به اشتراک گذاشتن آن با هر مکان

CNN های ناهمسانگرد توسط $\{\cdot\}$ همان $\{\cdot\}$ -ساختار مبتنی بر جهت اتحانی اصلی را فرض می کنند. با این حال، کرنل های آنها در مختصات نرمال ژئوزیک تعریف نشده اند بلکه بر اساس کرنل های گرمای ناهمسانگرد روی منيفلد هستند. $\{\cdot\}$ ادعای می کنند که چنین کرنل های گرمایی متناظر با کرنل های گاوسی ناهمسانگرد در مختصات ژئوزیک هستند $\{\cdot\}$ اگر این گزاره درست باشد، CNN های ناهمسانگرد را می توان به عنوان کانولوشن های GM در نظر گرفت.

دیگر $p \in M$ با انتقال موازی لوی-چیویتا در امتداد کوتاه‌ترین ژئودزیک‌ها بین \cdot و p است. برای فرمول‌بندی دقیق‌تر این روش اشتراک وزن، دیسکهای بسته $B_{T_p M}(\cdot, R) \subset T_p M$ با شاعع $R \in \mathbb{R}_+$ را حول مبدأهای فضاهای مماس در نظر بگیرید، که در آن شاعع انژکتیویته منیفلد است. علاوه بر این، فرض کنید $M_{p,R} := \exp_p(B_{T_p M}(\cdot, R)) \subset M$ تصاویر این دیسک‌ها تحت نگاشت نمایی باشند، که شامل تمام نقاطی است که فاصله ژئودزیک آنها از p کوچک‌تر یا مساوی R است. \square کرنل‌های کانولوشن اسکالار (نامحدود) خود را به عنوان توابع با مقادیر حقیقی

$$\hat{K}_p : M_{p,R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.0.3)$$

روی همسایگی اطراف مبدأ p یعنی مستقیماً روی منیفلد، تعریف می‌کنند. برای به اشتراک گذاشتن کرنل با مکان‌های دیگر $M \in p$ نویسنده‌گان کوتاه‌ترین ژئودزیک‌ها را بین \cdot و p و مکان‌های هدف p از طریق الگوریتم پیشروی سریع محاسبه می‌کنند. سپس آنها کرنل را در امتداد این ژئودزیک‌ها به صورت موازی منتقل می‌کنند، که این کار با پول‌بک کردن آنها به فضاهای مماس انجام می‌شود. در معادلات، کرنل در p به صورت

$$\hat{K}_p : M_{p,R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad q \mapsto \hat{K}_p(q) := \hat{K}_p \circ \exp_p \circ \mathcal{P}_{TM,p \rightarrow p}^{-1} \circ \log_p(q), \quad (5.0.4)$$

تعریف می‌شود، که با نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{P}_{TM,p \rightarrow p} & & \\ M_{p,R} & \xleftarrow{\exp_p} & B_{T_p M}(\cdot, R) & \xrightarrow{\mathcal{P}_{TM,p \rightarrow p}} & B_{T_p M}(\cdot, R) & \xrightarrow{\exp_p} & M_{p,R} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \hat{K}_p & & \hat{K}_p & & \end{array} \quad (5.0.5)$$

وجود نگاشت لگاریتمی تضمین شده است زیرا دامنه به نقاط q در داخل شاعع انژکتیویته محدود شده است. برای محاسبه پاسخ کانولوشن در p کرنل منتقل شده با میدان ویژگی (اسکالار) روی \mathbb{R} تطبیق داده می‌شود.

برای توصیف PTC‌ها به عنوان کانولوشن‌های GM ما باید $\{e\}$ -ساختار متناظر و کرنل $\{e\}$ -راهبری‌بذر روی \mathbb{R} را شناسایی کنیم. یک $\{e\}$ -ساختار سازگار با انتخاب یک چارچوب دلخواه $[e_i^A(p.)]_{i=1}^d$ در مبدأ p . ثابت می‌شود. سپس چارچوب‌ها در هر مکان دیگر p با انتقال لوی-چیویتا این چارچوب اولیه در امتداد کوتاه‌ترین ژئودزیک‌ها تعیین می‌شوند، یعنی به صورت ^{۱۳۹}

$$[e_i^A(p)]_{i=1}^d := \mathcal{P}_{FM,p \rightarrow p} [e_i^A(p.)]_{i=1}^d. \quad (5.0.6)$$

تعریف می‌شوند. توجه داشته باشید که این تعریف به طور خاص رابطه معادل زیر را برای بیمانه‌های متناظر نتیجه می‌دهد، که به راحتی با اعمال آن بر روی میدان چارچوب دیده می‌شود:

$$\psi_{GM,p}^A = \psi_{GM,p}^A \circ \mathcal{P}_{GM,p \rightarrow p}^{-1} \quad (5.0.7)$$

با توجه به چارچوب مرجع در p می‌توانیم \hat{K}_p را در مختصات نرمال ژئودزیک بیان کنیم، که مفهوم معمول ما از کرنل الگو را روی \mathbb{R} به دست می‌دهد:

$$K : B_{\mathbb{R}}(\cdot, R) \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto K(v) := \hat{K}_p \circ \exp_p \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(v) \quad (5.0.8)$$

برای نشان دادن اینکه اشتراک وزن ما از طریق $\{e\}$ -ساختار ساخته شده به این روش واقعاً با اشتراک وزن \square سازگار است، ما کرنل‌های \hat{K}_p را در p با نگاشت کرنل الگوی ما K به منیفلد بازتولید می‌کنیم:

$$\begin{aligned} K \circ \psi_{TM,p}^A \circ \log_p &= \hat{K}_p \circ \exp_p \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1} \circ \psi_{TM,p}^A \circ \log_p \\ &= \hat{K}_p \circ \exp_p \circ \mathcal{P}_{TM,p \rightarrow p}^{-1} \circ \log_p \\ &= \hat{K}_p \end{aligned} \quad (5.0.9)$$

مرحله دوم در این محاسبه از معادل معادله (۵.۰.۷) برای انتقال دهنده و بیمانه‌های کلاف مماس استفاده کرد. تمام تعاریف، و سازگاری آنها، به طور خلاصه با این گزاره که نمودار زیر جابجایی است، خلاصه می‌شوند:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{P}_{TM,p \rightarrow p} & & \\ M_{p,R} & \xleftarrow{\exp_p} & B_{T_p M}(\cdot, R) & \xrightarrow{\mathcal{P}_{TM,p \rightarrow p}} & B_{T_p M}(\cdot, R) & \xrightarrow{\exp_p} & M_{p,R} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \psi_{TM,p}^A & & \psi_{TM,p}^A & & \\ & & B_{\mathbb{R}}(\cdot, R) & & B_{\mathbb{R}}(\cdot, R) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & K & & K & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \end{array} \quad (5.1.0)$$

^{۱۳۹} از آنجا که این رابطه $\{e\}$ -ساختار را تعریف می‌کند، ما باید از انتقال دهنده‌های لوی-چیویتا روی کل کلاف چارچوب FM استفاده کنیم.

از آنجا که ما $\{e\}$ -ساختار خود را با انتخاب یک چارچوب اولیه در p . ساختیم، خواننده ممکن است در مورد پیامدهای این انتخاب کنجدکاو باشد. یک انتخاب متفاوت از چارچوب اولیه منجر به یک تبدیل متناظر از مختصات نرمال ژئودزیک در p . و در نتیجه از کرنل الگو K (معادله (۵۰.۸)) خواهد شد. با این حال، از آنجا که $\{e\}$ -ساختار با انتقال چارچوب اولیه ساخته شده است، تمام چارچوب‌های مرجع آن بر این اساس تبدیل خواهد شد. سپس تبدیل کرنل الگو با تبدیل $\{e\}$ -ساختار خنثی خواهد شد به طوری که تمام انتخاب‌های چارچوب‌های اولیه در نهایت معادل هستند.

$\{e\}$ -ساختارهای زیربنای PTC‌ها به طور حیاتی به انتخاب مبدأ p که میدان چارچوب از آن ساخته شده است، بستگی دارند \square انتخاب‌های مختلف از مبدأها می‌توانند به $\{e\}$ -ساختارهای بسیار متفاوتی منجر شوند. از آنجا که اکثر منیفلدهای با یک مفهوم کانونی از مبدأ همراه نیستند، روش ابتکاری پیشنهادی تا حدی دلخواه به نظر می‌رسد. $\{e\}$ -ساختارهای مبتنی بر انتقال، و در نتیجه PTC‌ها، علاوه بر این در مکان برش ناپیوسته هستند. این به طور خاص دلالت بر این دارد که آنها نزدیک به مکان برش تحت تغییر شکل‌های هندسه سطوح ناپایدار هستند زیرا چنین تغییر شکل‌هایی ممکن است مکان برش را جابجا کنند. برخلاف روش‌های ابتکاری مدل‌های قبلی، روش ابتکاری PTC‌ها صرفاً به هندسه ذاتی سطح بستگی دارد، یعنی بر اساس جایگذاری آن در فضای محیطی نیست.

برای جلوگیری از سردرگمی، باید اشاره کنیم که \square در پیامدهای خود (بخش ۲.۳) یک میدان چارچوب دیگر را می‌سازند، که نباید با $\{e\}$ -ساختاری که در بالا توصیف کردیم، اشتباہ گرفته شود. این میدان چارچوب برای محاسبه عددی اتصال لوی چیویتا روی مش لازم است، که کرنل‌ها سپس مطابق آن منتقل می‌شوند. تحلیل ما در بالا صرفاً بر اساس تعریف مستقل از مختصات آنها از مدل است، مهمتر از همه تعریف اشتراک وزن در (معادله (۵۰.۴)).

علاوه بر این توجه داشته باشید که انتقال دهندهای بردار ویژگی به طور ضمنی فرض شده در پول‌بک انتقال دهنده، لزوماً بر اتصال بدیهی $\{e\}$ -سازگار که توسط $\{e\}$ -ساختار القامی شود، تکیه دارند. انتقال ویژگی در امتداد ژئودزیک‌های خروجی از p . که $\{e\}$ -ساختار بر اساس آنها ساخته شده است، با انتقال دهندهای لوی چیویتا متفاوت هستند.

کانولوشن‌های مماس: کانولوشن‌های مماس توسط \square روی ابرهای نقطه $P \subset \mathbb{R}^3$ عمل می‌کنند که فرض می‌شود نقاط آنها روی یک سطح قرار دارند. فضاهای مماس در نقاط نمونه‌برداری از طریق یک تحلیل مؤلفه‌های اصلی محلی (LPCA) محاسبه می‌شوند. $p \in P$ در LPCA اساساً بردارهای ویژه $e_i \in \mathbb{R}^3$ ، $i = 1, 2, 3$ هستند که ماتریس کوواریانس تمام نقاط را در یک همسایگی کروی $N_p = \{q \in P \mid \|q - p\| < R\}$ با شاعع R حول p محاسبه می‌کند. از آنجا که ابر نقطه از یک سطح نمونه‌برداری شده است، یکی از مقادیر ویژه باید نزدیک به صفر باشد. بردار ویژه متناظر e_3 به عنوان بردار نرمال صفحه مماس جایگذاری شده در p در نظر گرفته می‌شود. دو بردار ویژه دیگر یک چارچوب راست‌هنگار $[e_1, e_2]$ را روی صفحه مماس تولید می‌کنند، به طوری که مجموعه بردارهای ویژه LPCA یک $\{e\}$ -ساختار را روی ابر نقطه القا می‌کند. توجه داشته باشید که بردار ویژه با بزرگترین مقدار ویژه در جهت حداقل اعیانی اصلی اشاره می‌کند، یعنی ما $\kappa_n(e_1) = \kappa_{\min}$ و $\kappa_n(e_2) = \kappa_{\max}$ را داریم. بنابراین $\{e\}$ -ساختار در نظر گرفته شده مشابه ساختار \square و \square است، با این حال، چارچوب‌ها $\pi/2$ چرخانده شده‌اند زیرا با جهت حداقل به جای حداقل اینجا تراز شده‌اند.^{۱۴۰} از آنجا که علامت بردارهای ویژه در لخواه است، این روش ابتکاری در واقع چارچوب‌ها را فقط تا دوران‌هایی با π ثابت می‌کند. برای حل این ابهام، کانولوشن‌های مماس یا باید بین دو جهت تمایز قائل شوند یا به کرنل‌های C_2 -راهبری پذیر بازگردند.

به جای نمایش میدان ویژگی در مختصات نرمال ژئودزیک، کانولوشن‌های مماس ویژگی‌ها را در امتداد جهت نرمال روی صفحه مماس تصویر می‌کنند.^{۱۴۱} سپس آنها به یک شبکه منظم از $N \times N$ پیکسل درون‌یابی می‌شوند. از آنجا که این شبکه با چارچوب مرجع تراز شده است، می‌توان آن را به عنوان یک گسسته‌سازی از مختصاتی سازی فضایی مماس $\psi^A_{TM,p}(T_p M) = \mathbb{R}^7$ در نظر گرفت. سپس کانولوشن ویژگی‌ها را با \square گرفتن حاصلضرب داخلی با یک کرنل پیکسلی $N \times N$ محاسبه می‌کنند.

NPTC-net: \square $P \subset \mathbb{R}^3$ را روی ابرهای نقطه سطحی \square پیشنهاد کردند. مانند کانولوشن‌های مماس، صفحات مماس را از طریق یک تحلیل مؤلفه‌های اصلی محلی محاسبه می‌کنند، با این حال، $\{e\}$ -ساختار آنها مستقل از LPCA است. ساختار زیربنای NPTC-net را بیشتر با گردایان تابع فاصله ژئودزیک از یک نقطه اولیه $p \in P$ تراز شده است. برای حل تابع فاصله، \square معادله ایکوتال را از طریق یک الگوریتم پیشروی سریع حل می‌کنند. به جای عمل مستقیم روی ابر نقطه همانطور که به عنوان متال در \square انجام می‌شود، نویسنده‌گان پیشنهاد می‌کنند از یک شبکه و اکسل پراکنده استفاده کنند که واکسل‌های آن در یک نوار بازیک اطراف ابر نقطه قرار دارند. پس از محاسبه تابع فاصله روی شبکه و اکسل، که باید فواصل تقریباً ژئودزیک را تولید کند، گردایان آن محاسبه و روی صفحات مماس تصویر می‌شود. بردار تصویر شده اولین محورهای چارچوب $\{e\}$ -ساختار را تعیین می‌کند. توجه داشته باشید که چنین میدان‌های چارچوب تعريف شده‌ای در p . تکین هستند.

\square مشاهده می‌کنند که این $\{e\}$ -ساختار یک اتصال بدیهی را روی سطح القا می‌کند (به گونه‌ای تعريف شده که میدان چارچوب تحت این انتقال بسته است). میدان چارچوب (یا کرنل‌های کانولوشن) را می‌توان به عنوان منتقل شده مطابق با این اتصال بدیهی درک کرد، که « \square » (کانولوشن انتقال موازی) را در نام مدل توجیه می‌کند. توجه داشته باشید، با این حال، که NPTC-net‌ها برخلاف PTC‌های \square بر انتقال لوی چیویتا تکیه ندارند. علاوه بر این، این گزاره را می‌توان برای هر $\{e\}$ -ساختار و اتصال بدیهی متناظر آن بیان کرد.

مانند کانولوشن‌های مماس، NPTC-net‌ها ویژگی‌ها را در فضای محیطی به صفحه مماس تصویر می‌کنند. به جای استفاده از یک تصویر در امتداد جهت نرمال، نویسنده‌گان از یک درون‌یابی نزدیکترین همسایه با فواصل اندازه‌گیری شده در فضای محیطی استفاده می‌کنند. سپس کرنل

^{۱۴۰} از آنجا که تمام چارچوب‌های مرجع با یک زاویه یکسان چرخانده شده‌اند، این تفاوت اگر کرنل‌ها یاد گرفته شوند، بی‌همیت است.

^{۱۴۱} این انتخاب، کانولوشن‌های مماس (و NPTC-net) را از کانولوشن‌های GM متفاوت می‌کند. در حد کرنل‌های کوچک نسبت به اعیانی سطح، هر دو تصویر از میدان‌های ویژگی به فضاهای مماس معادل می‌شوند.

کانولوشن در امتداد چارچوب‌های $\{e\}$ -ساختار جهتدهی شده و با میدان ویژگی درون‌یابی شده تطبیق داده می‌شود. با توجه به یک کرنل $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ نویسنده‌گان تخصیص آن را به فضاهای مماس به صورت $K \circ \psi_{TM,p}^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ فرمول‌بندی می‌کنند که در آن $\psi_{TM,p}^A := (\langle e_1^A, v \rangle, \langle e_2^A, v \rangle)^\top$ است. این رویه دقیقاً با تعریف ما از اشتراک وزن و پیمانه‌ها (معادله (۴۳۷)) مطابقت دارد.

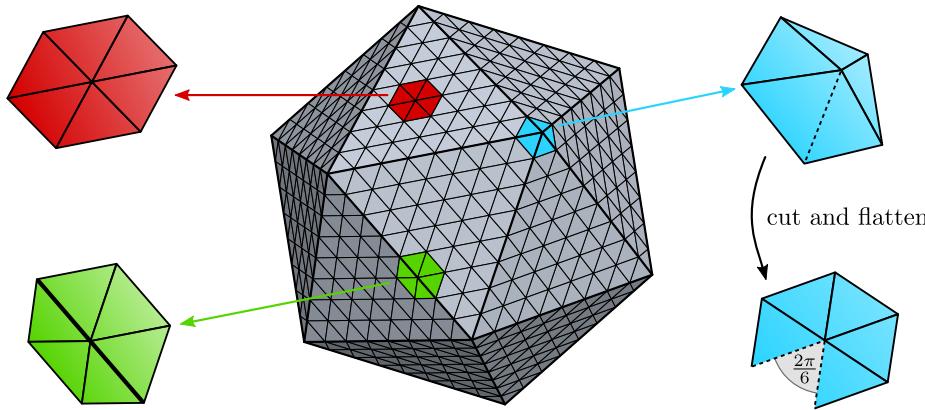
کانولوشن‌های بین-اطلسی: یک رویکرد کاملاً متفاوت توسط $[]$ دنبال شد. کانولوشن‌های بین-اطلسی آنها یک اطلس بافت را محاسبه می‌کنند که چارت‌های آن برای تقریباً ایزومنتریک بودن بهینه‌سازی شده‌اند. سپس عملیات کانولوشن روی اطلس بافت انجام می‌شود، با نگاشته‌های آفست پیکسل که نگاشته‌های گذار بین چارت‌ها را مدل‌سازی می‌کنند.

قبل از اجرای کانولوشن‌های واقعی، یک اطلس از چارت‌ها محاسبه می‌شود. از دیدگاهی انتزاعی، چارت‌ها تکه‌هایی از سطح را به \mathbb{R}^d نگاشت می‌دهند، به طوری که کل سطح پوشش داده می‌شود. به طور مشخص، آنها تکه‌هایی از یک میدان ویژگی ورودی C -کاناله (بافت) را به روشی بدون همپوشانی به یک آرایه با بعد (c, X, Y) نگاشت می‌دهند. از آنجا که تکه‌ها در آرایه باید تقریباً همسایگی‌های ژئودزیک را روی سطح نمایش دهند، چارت‌ها باید تقریباً ایزومنتریک باشند، یعنی اوج‌اجها را به حداقل برسانند. برای برآورده کردن این الزام سطح به تکه‌هایی بربدی می‌شود به طوری که زوایای متقابل بین تمام نرمال‌های مثلث در داخل یک تکه زیر یک آستانه مشخص شده توسط کاربر باقی بماند \square توجه داشته باشد که این رویکرد بر اساس هندسه خارجی سطوح است. پس از بهینه‌سازی تکه‌ها روی سطح، میدان ویژگی روی هر تکه در امتداد یک جهت تصویر غالب، تصویر می‌شود. یک الگوریتم بسته‌بندی بن (icosahedron) تکه‌های تصویر شده را به طور متراکم در نقشه بافت با شکل (X, Y, c) بسته‌بندی می‌کند. برای حل ابهام جهتی تکه‌ها، آنها باید تراز دورانی شوند. این کار با الزام به اینکه تصاویر محور \mathcal{Z} فضای محیطی به هر تکه، همگی در نقشه بافت تراز شوند، به دست می‌آید.

کانولوشن مستقیماً روی نقشه بافت عمل می‌کند. این پیکسل‌ها را به سه دسته مختلف گروه‌بندی می‌کند که به روشی متفاوت پردازش می‌شوند. پیکسل‌هایی که در داخل یک تکه هستند، به طوری که کرنل از تکه خارج نمی‌شود، از طریق کانولوشن‌های اقلیدسی متعارف کانوالو می‌شوند. از آنجا که چارت‌ها تقریباً ایزومنتریک هستند، این تقریباً متناظر با یک کانولوشن ژئودزیک روی نواحی تکه از سطح است. پیکسل‌هایی که خارج از تکه‌ها هستند، پردازش نمی‌شوند و مقدار آنها صفر ثابت می‌شود. مورد جالب، پیکسل‌هایی هستند که نزدیک به مرز تکه‌ها هستند. از آنجا که کرنل کانولوشن برای چنین پیکسل‌هایی از تکه فعلی خارج می‌شود، به نگاشته‌های گذار نیاز دارد که ویژگی‌های از یک تکه همسایه روی سطح استعلام کنند. مکان استعلام با (1) یافتن نقطه اصلی روی سطح که متناظر با مکان فعلی کرنل است، (2) شلیک یک ژئودزیک برای یافتن مکان نمونه‌برداری کرنل روی سطح و (3) نگاشت این مکان به پیکسل متناظر در نقشه بافت، محاسبه می‌شود. با استفاده از این نگاشته‌های گذار، تکه‌ها مطابق با هندسه سطح به هم دوخته می‌شوند و کانولوشن روی نقشه بافت تقریباً متناظر با یک کانولوشن ژئودزیک روی سطح است. در حد اینکه آستانه زاویه نرمال به سمت صفر برود، تقریب به یک کانولوشن ژئودزیک دقیق همگرا می‌شود. با این حال، تکه‌ها سپس به وجود منفرد کوچک می‌شوند، که منجر به نگاشته‌های گذار غیربدیهی تری می‌شود.

کانولوشن‌های بین-اطلسی در این حد متناظر با کانولوشن‌های GM هستند که $\{e\}$ -ساختار آنها از چارت‌ها القا می‌شود. $\{e\}$ -ساختار در مرزهای بین تکه‌های مجاور ناپیوسته است، با این حال، پرش‌ها به دلیل تراز دورانی تکه‌ها در نقشه بافت باید در اکثر موارد به حداقل برسند. انتظار می‌رود ناپیوستگی‌ها در تکه‌هایی از سطح که تقریباً افقی هستند، بزرگ باشند.

برای کامل بودن، ما به روش‌های مبتنی بر اطلس توسط $[]$ و $? []$ اشاره می‌کنیم. هر دو تصویرهای غیر-ایزومنتریک از سطح را به یک دامنه مسطح در نظر می‌گیرند، که این دلالت بر این دارد که کانولوشن‌های اقلیدسی بعدی متناظر با کانولوشن‌های ژئودزیک روی سطح نیستند.



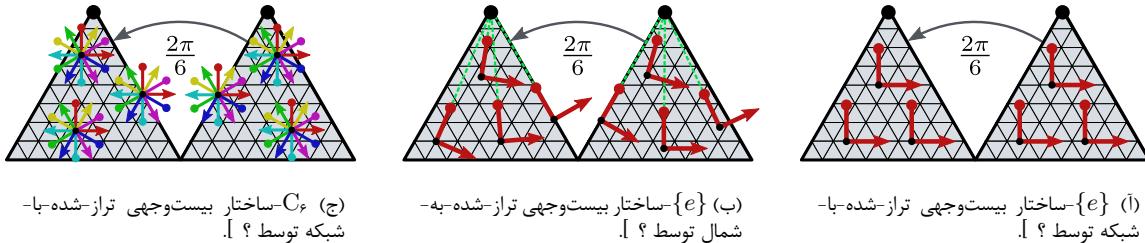
شکل ۷۰: بیست و چهی یک جسم افلاطونی است که در [۴۹] به عنوان یک تقریب تکه‌ای-تخت از هندسه کروی استفاده می‌شود. این جسم از ۱۲ رأس، ۲۰ وجه مثلثی متساوی‌الاضلاع و ۳۰ یال تشکیل شده است. این جسم یک شبکه نمونه‌برداری منظم را می‌پذیرد، که با تقسیم مکرر هر مثلث به چهار مثلث کوچکتر ساخته می‌شود. پس از ۳۰ تکرار، این رویه منجر به یک شبکه با $2 + 2^{2r+1}$ رأس می‌شود. سه تکه بر جسته شده، هندسه کمی‌گفتگو متفاوت همسایگی‌ها را حول رئوس روی وجه (قفرم)، یال‌ها (سبز) و رئوس بیست و چهی (آبی) نشان می‌دهند. همسایگی قرمز بهوضوح تخت است. در حالی که همسایگی سیز در فضای جایگذاری خمیده است، انحنای گاوسی ذاتی آن دوباره صفر است. این واقعیت در این امر منعکس می‌شود که می‌توان آن را به صورت ایزومنتریک (یعنی بدون برش) پهن کرد و به طور معادل، انتقال لوی-چیویتا در امتداد یک مسیر بسته حول گره مرکزی، نگاشت همانی است. همسایگی آبی باید در امتداد یک یال بریده شود تا بتوان آن را پهن کرد. نقص زاویه‌ی، یعنی زاویه‌ای که برش هنگام پهن کردن نوک تیز باز می‌شود، برابر با $\frac{\pi}{6}$ است. هنگامی که یک بردار یک یال حول رأس مرکزی همسایگی به صورت موازی منتقل می‌شود، به اندازه این نقص زاویه می‌چرخد. به جای داشتن انحنای گاوسی مثبت ثابت مانند کره S^2 ، انحنای بیست و چهی در رئوس آن متمرکز (تکین) است و در همه جای دیگر صفر است.

۴.۱۲ تقریب‌های بیست و چهی از CNN‌های کروی

کره S^2 در علوم محاسباتی معمولاً با اجسام افلاطونی، یعنی چندوجهی‌های منتظم محدب، تقریب زده می‌شود. در زمینه یادگیری عمیق، علاقه پیشتر بر روی بیست و چهی (icosahedron)، شکل ۷۰، متمرکز شده است، که در میان اجسام افلاطونی، نزدیک‌ترین تقریب به کره است [۴]. در حالی که هندسه ریمانی کره فقط تقریب زده می‌شود، اجسام افلاطونی این مزیت را دارند که تکه‌ای-تخت هستند و مشاهی منظمی را می‌پذیرند. این ویژگی‌ها امکان انتقال از یال‌های کاتالوشن مستطح را فراهم می‌کنند، که از نظر محاسباتی بهینه‌تر از روش‌های دو بخش قبل هستند. این بخش به بحث در مورد CNN‌های بیست و چهی از [۴۰، ۴۱] و [۴۲] می‌پردازد، که به ترتیب بر G -ساختارهای نشان داده شده در شکل‌های ۷۱آ، ۷۱ب و ۷۱ج تکیه دارند. قبل از پرداختن به پیاده‌سازی‌های آنها بر حسب اطلسی از چارت‌های آفین در شکل ۷۲، ما جزئیات بیشتری در مورد هندسه بیست و چهی و G -ساختارهای در نظر گرفته شده ارائه می‌دهیم.

هندسه‌ی بیست و چهی: بیست و چهی یک منیفلد دوبعدی گسسته است که از ۲۰ وجه مثلثی متساوی‌الاضلاع، ۱۲ رأس و ۳۰ یال تشکیل شده است. ممانند کره ۲-بعدی، ما بیست و چهی را به عنوان جایگذاری شده در \mathbb{R}^3 تعریف می‌کنیم، که از آن متريک جایگذاری را در معادله (۴۲۹) به اirth می‌برد. فضاهای مماس جایگذاری شده $T_p M \subset \mathbb{R}^3$ روی وجه در اینجا به گونه‌ای تعریف می‌شوند که نرمال‌های آنها با نرمال‌های وجوده منطبق باشند. فضاهای مماس روی رئوس و یال‌ها را می‌توان از طریق میانگین نرمال‌های وجوده مجاور تعریف کرد، همانطور که در بخش بعدی ۱۲ مورد بحث قرار می‌گیرد. با این حال، از آنجا که ما میدان‌های ویژگی را به عنوان نمونه‌برداری شده روی وجه بیست و چهی (که تقریباً همه جا است) در نظر می‌گیریم، از این انتخاب مستقل هستیم. با فرض اتصال لوی-چیویتا، انتقال موازی بردارهای مماس روی وجه به گونه‌ای عمل می‌کند که آنها را در فضای جایگذاری \mathbb{R}^3 موازی نگه دارد. هنگامی که بردارهای مماس از روی یک یال به صورت موازی منتقل می‌شوند، زاویه یکسانی را نسبت به یال در هر دو طرف حفظ می‌کنند [۴۱] این انتقال را می‌توان به طور شهودی به این صورت تصور کرد که (۱) دو وجه مجاور را پهن کرد، (۲) بردار را روی یال مانند حالت معمول در یک فضای اقلیدسی دوبعدی منتقل کرده، و (۳) دو وجه را به جایگذاری اصلی خود بازگردانیم؛ به شکل ۶۵ و [۴۲] مراجعه کنید. بنابراین ژوڈزیک‌ها در \mathbb{R}^3 تکه‌ای-خطی هستند و از یال‌ها به گونه‌ای عبور می‌کنند که زاویه خروج آنها برابر با زاویه ورودشان باشد. بنابراین نگاشتهای نمایی (v)_p به راحتی با دنبال کردن یک مسیر تکه‌ای-ثابت برای فاصله‌ای بر اساس $\exp_p(v)$ محاسبه می‌شوند. در عمل، نویسنده‌گان [۴۰، ۴۱] میدان‌های ویژگی را روی یک مش منظم نمونه‌برداری می‌کنند و فقط آن دسته از بردارهای مماس را در نظر می‌گیرند که به رئوس مش همسایه نگاشت می‌یابند.

شکل ۷۰ همسایگی‌های دیسک‌مانند را حول نقاط نمونه روی وجه (قفرم)، یال‌ها (سبز) و رئوس (آبی) بیست و چهی نشان می‌دهد. همسایگی قرمز کاملاً در داخل یک وجه قرار دارد و بنابراین تخت است. همسایگی سبز در فضای جایگذاری خمیده است. با این حال، انحنای گاوسی (یا گاوسی) آن هنوز صفر است زیرا انتقال لوی-چیویتا بردارها یک بار حول رأس مرکزی، آنها را همانطور که هستند حفظ می‌کند. اینکه این مورد برقرار است معادل این واقعیت است که همسایگی سبز را می‌توان به صورت ایزومنتریک پهن کرد، یعنی بدون کشش با برش آن. این پهن کردن ایزومنتریک برای نوع آبی همسایگی‌ها حول رئوس ممکن نیست، که برای پهن شدن باید در یکی از یال‌ها بریده شوند. با ساخته شدن از پنج مثلث متساوی‌الاضلاع، نوک تیز پهن شده یک نقص زاویه $\frac{\pi}{6}$ را نشان می‌دهد. هولونومی هر مسیر بسته حول هر رأس (منفرد)، یعنی زاویه بین یک



(ج) e -ساختار بیستوچهی تراز-شده-با- شبکه توسعه ؟ [۱۷]

(ب) $\{e\}$ -ساختار بیستوچهی تراز-شده-با- شمال توسعه ؟ [۱۷]

(ا) $\{e\}$ -ساختار بیستوچهی تراز-شده-با- شبکه توسعه ؟ [۱۷]

شکل ۷۱: ایده مفهومی G -ساختارهای فرض شده در [۱۷]. به دلیل محدودیت فضای ساختار جاچوبها در امتداد یال‌های «افقی» وجود (با فرض عمودی بودن محور قطبی) تعریف می‌شود. شکل ۷۱ ب یک $\{e\}$ -ساختار جایگزین را نشان می‌دهد که چارچوب‌های آن به سمت قطب شمال تراز شده‌اند. این ساختار برخلاف $\{e\}$ -ساختار قبلی پیوسته است زیرا چارچوب‌ها روی یال‌های بریده شده منگام چسباندن مجدد یال‌ها به یکدیگر منطبق می‌شوند. C_e -ساختار در شکل ۷۱ با افزودن چارچوب‌هایی که با مضرب‌هایی از $\frac{\pi}{6}$ چرخانه شده‌اند به $\{e\}$ -ساختار از شکل ۱۸A ساخته می‌شود. از آنجا که این زاویه با نقص زاویه در یال‌های بریده شده برابر است، e - C_e -ساختار تعریف شده به این ترتیب هموار (پیوسته) است. توجه داشته باشید که این دو $\{e\}$ -ساختار با انتقال لوی-چیویتا ناسازگار هستند (یعنی تحت آن بسته نیستند) اما یک اتصال بدیهی جایگزین را القا می‌کنند. e - C_e -ساختار، در مقابل، با انتقال لوی-چیویتا سازگار است.

بردار دلخواه و انتقال آن یک بار حول حلقه، دقیقاً با این نقص زاویه داده می‌شود. در کل، این نتایج دلالت بر این دارند که انحنای گاوی (گستته) بیستوچهی در همه جا به جز در رئوس صفر است، جایی که با هاولونومی $\frac{\pi}{6}$ تکین است. هندسه ساده بیستوچهی اجزا می‌دهد تا آن را باز کرده و به صورت سراسری پهن کرد، همانطور که در شکل ۲۲ به تصویر کشیده شده است، که در [۱۷] برای یک پیاده‌سازی کارآمد از کانولوشن‌های GM بیستوچهی استفاده شد.

گروه ایزومتری کامل بیستوچهی $\mathcal{R} \times I_h = Isom(M)$ است و از ۱۲۰ عضو تشکیل شده است. می‌توان آن را به عنوان حاصل ضرب مستقیم $I_h \times Isom_{SO}(M)$ و زیرگروه بازتاب‌ها \mathcal{R} و زیرگروه ایزومتری‌های حافظ جهت (3) که شامل $SO(3)$ است، در ساخت. هر رأس p توسط پنج دوران گستته حول محور گذرنده از p و رأس متقابل آن پایدار می‌شود، که گروه دوری $C_5 \leq SO(2)$ را تشکیل می‌دهند. رأس p علاوه بر این توسط بازتاب‌ها نسبت به صفحه تعريف شده توسط محور دوران و هر یال خروجی از p پایدار می‌شود، به طوری که زیرگروه پایدار ساز کامل آن با گروه دوچهی $D_p = Stab_p \leq D_h$ داده می‌شود. هموردابی کانولوشن‌های GM بیستوچهی نسبت به گروه‌های ایزومتری J_h یا C_h در [۱۷] نشان داده شده است که هموردابی کامل، $SO(3)$ یا $SO(2)$ هستند. هنگامی که از افزایش داده دورانی پیوسته استفاده شود.

G -ساختارهای بیستوچهی: کانولوشن‌های GM بیستوچهی توسعه ؟ [۱۷] (به طور ضمنی) $\{e\}$ -ساختارها را فرض می‌کنند، در حالی که مدل ؟ [۱۷] یک e - C_e -ساختار را فرض می‌کند. شکل ۷۱ ایده پشت این G -ساختارها را به تصویر می‌کشد، که در سه پاراگراف بعدی با جزئیات بیشتری توضیح می‌دهیم.

$\{e\}$ -ساختار توسعه ؟ [۱۷] نشان داده شده است، با تراز کردن اولین محورهای چارچوب در امتداد یال‌های «افقی» وجوده مثلثی متناظر تعريف می‌شود. هنگام پهن کردن بیستوچهی به یک صفحه همانطور که در شکل ۷۲ نشان داده شده است، تمام چارچوب‌های این $\{e\}$ -ساختار در این صفحه موازی هستند، که پیاده‌سازی کانولوشن‌های GM متناظر را بسیار ساده می‌کند. طبق معمول، $\{e\}$ -ساختار یک اتصال بدیهی یکتا را مشخص می‌کند که ویژگی‌ها مطابق آن منتقل می‌شوند. این اتصال بدیهی در داخل وجوده، روی یال‌هایی که در شکل ۷۲ بریده شده‌اند و روی یال بریده شده ارغوانی با اتصال لوی-چیویتا منطبق است. با این حال، انتقال آن از روی یال‌های بریده شده باقی‌مانده با انتقال لوی-چیویتا متفاوت است زیرا چارچوب‌های $\{e\}$ -ساختار در آنجا به طور ناپیوسته به اندازه زاویه $\frac{\pi}{6}$ می‌چرخد. از آنجا که $\{e\}$ -ساختار توسط دوران‌ها در C_5 حول محور قطبی حفظ می‌شود، کانولوشن‌های GM آن تقریباً $SO(2)$ -هموردا هستند، یعنی مدل‌های بخش قبلی ۳.۱۱ را تقریب می‌زنند. با این حال، $\{e\}$ -ساختار \square و بنابراین استنتاج شبکه \square روی یال‌های با نقص زاویه غیرصرف ناپیوسته است. علاوه بر این، چارچوب‌های مرتع دقیقاً به سمت قطب شمال اشاره نمی‌کنند، همانطور که برای $\{e\}$ -ساختار کروی از بخش ۳.۱۱ و شکل ۵.۷ صادق است.

؟ [۱۷] پیشنهاد می‌کنند که دو مشکل اخیر را با کار کردن با $\{e\}$ -ساختار حل کنند. این ساختار به گونه‌ای تعريف شده است که چارچوب‌های $\{e\}$ -ساختار در شمال و جنوب پیوسته است. این معنا تقریب بهتری از $\{e\}$ -ساختار کروی از شکل ۵.۷ است. $\{e\}$ -ساختار در دوباره یک اتصال بدیهی یکتا را القا می‌کند. انتقال آن با انتقال لوی-چیویتا روی یال‌ها منطبق است، با این حال، هنگام انتقال روی وجوده با آن متفاوت است زیرا بردارها را به آرامی همراه با چارچوب‌ها می‌چرخانند. مانند $\{e\}$ -ساختار دیگر، این میدان چارچوب تحت دوران‌های سمتی در C_5 ناوردا است و بنابراین CNN ‌های کروی همودای دوران سمتی را تقریب می‌زنند.

این در [۱۷] به صورت تجربی برای $SO(3) \leq I_h$ نشان داده شده است. اینکه این نتیجه به $3 \leq I_h$ تعمیم می‌یابد، روشی است زیرا گروه‌ها فقط در بازتاب‌ها متفاوت هستند، که کانولوشن‌های GM بیستوچهی را می‌توان نسبت به آنها دقیقاً همودا ساخت. این علاوه بر این برای $2 \leq D_h$ و $5 \leq C_5 \leq SO(2)$ نیز برقرار است، زیرا اینها زیرگروه‌هایی از $I_h \leq 3$ هستند.

برای دیدن این، تصور کنید که یال بریده شده در شکل ۷۱B را دوباره به هم بچسبانید: چارچوب‌های روی نیمه چپ و راست یال سپس با هم منطبق می‌شوند، که این مورد در شکل ۷۱A صادق نیست.

C_e-ساختار در شکل ۷۱ ج توسط π با افزودن چارچوب‌های که با مضرب‌هایی از π چرخانده شده‌اند به چارچوب‌های $\{e\}$ -ساختار از شکل ۷۱ تعریف می‌شود. این ساختار به وضوح پیوسته است زیرا زوایای بین مجموعه چارچوب‌های مرجح در هر نقطه دقیقاً برابر با نقص‌های زاویه در یال‌های بریده شده است. این ساختار برخلاف دو $\{e\}$ -ساختار قبلی با انتقال لوی-چیویتا سازگار است زیرا گروه ساختاری C_e بیست‌وجهی منطبق است. C_e-ساختار علاوه بر این تحت عمل ایزومنتری‌های حافظ جهت بیست‌وجهی آ حفظ می‌شود. بنابراین کانولوشن‌های روی این C_e-ساختار، کروی کاملاً هموردای دورانی (۳) SO را بخش ۲.۱۱ تقریب می‌زنند.

پیاده‌سازی‌ها: برای پیاده‌سازی کانولوشن‌های G_e-ساختارهای متناظر، $\{e\}$ [۲] یک شبکه منظم را روی وجوه بیست‌وجهی فرض می‌کنند؛ به شکل ۷۰ مراجعت کنید. این شبکه شش ضلعی منظم با تقسیم مکرر یال‌ها و جایگزینی هر مثلث با چهار مثلث کوچکتر ساخته می‌شود. در وضوح ۷۰ این کار منجر به یک شبکه با $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ رأس می‌شود. توجه داشته باشید که این شبکه بنا به ساختار، دقیقاً تحت ایزومنتری‌های بیست‌وجهی متقارن است، که منجر به یک هموردایی دقیق Isom_{GM} کانولوشن‌های GM گسترش‌سازی شده می‌شود. [۱۴۳] پیشنهاد کردند که میدان‌های ویژگی بیست‌وجهی را نسبت به اطلسی از چارت‌ها که در شکل ۷۲ نشان داده شده است، نمایش دهند. این چارت‌ها این مزیت را دارند که شبکه‌های شش ضلعی روی وجوه بیست‌وجهی را به شبکه‌های پیکسلی مربوط معمول نگاشت می‌دهند. با این حال، توجه داشته باشید که چارچوب‌های راست‌هنگار روی بیست‌وجهی در این نمایش تغییر شکل می‌یابند، به طوری که نسبت به متريک اقليدسی کانونی، راست‌هنگار نیستند. کرنل‌های کانولوشن شش ضلعی روی بیست‌وجهی بر اين اساس تغیير شکل می‌يابند و می‌توانند بر حسب کرنل‌های مربعي که به گونه‌ای ماسک گذاري شده‌اند که دو گوشه آنها با صفر پر شده است، پیاده‌سازی شوند.

کانولوشن GM توسط π چارچوب‌هایی را فرض می‌کند که همگي موازي هستند و بنابراین می‌توانند در داخل چارت‌ها، جايی که تکيه گاه کرنل از مزه‌های آن فراتر نمی‌رود، از طريق يك کانولوشن اقليدسي متعارف پیاده‌سازی شوند. در نقاطی که به يك يال بین چارت‌ها مختلف نزدیک هستند، کرنل ویژگی‌ها را از آن سوی يرش انياشت می‌کند. همانطور که قبلاً در بخش ۴.۵ و شکل ۳۰ بحث و به تصویر کشیده شد، اين کار به راحتی از طريق يك عمليات بدینگ انتقال پیاده‌سازی می‌شود که يك حاشيه از ویژگی‌های منتقل شده موازي را در اطراف آرایه پیکسل‌های مربعي قبل از اجرای عمليات کانولوشن، پد می‌کند. برای انتقال بدینهی که به طور ضمنی توسط π فرض شده است، اين عمليات پدینگ فقط يك رديف از ویژگی‌ها را در هر يال بدون تبديل آنها کپي می‌کند. از آنجا که نويسندگان گروه ساختاري بدینهی $\{e\} = G$ را فرض می‌کنند، کرنل‌های شش ضلعی نامحدود باقی می‌مانند.

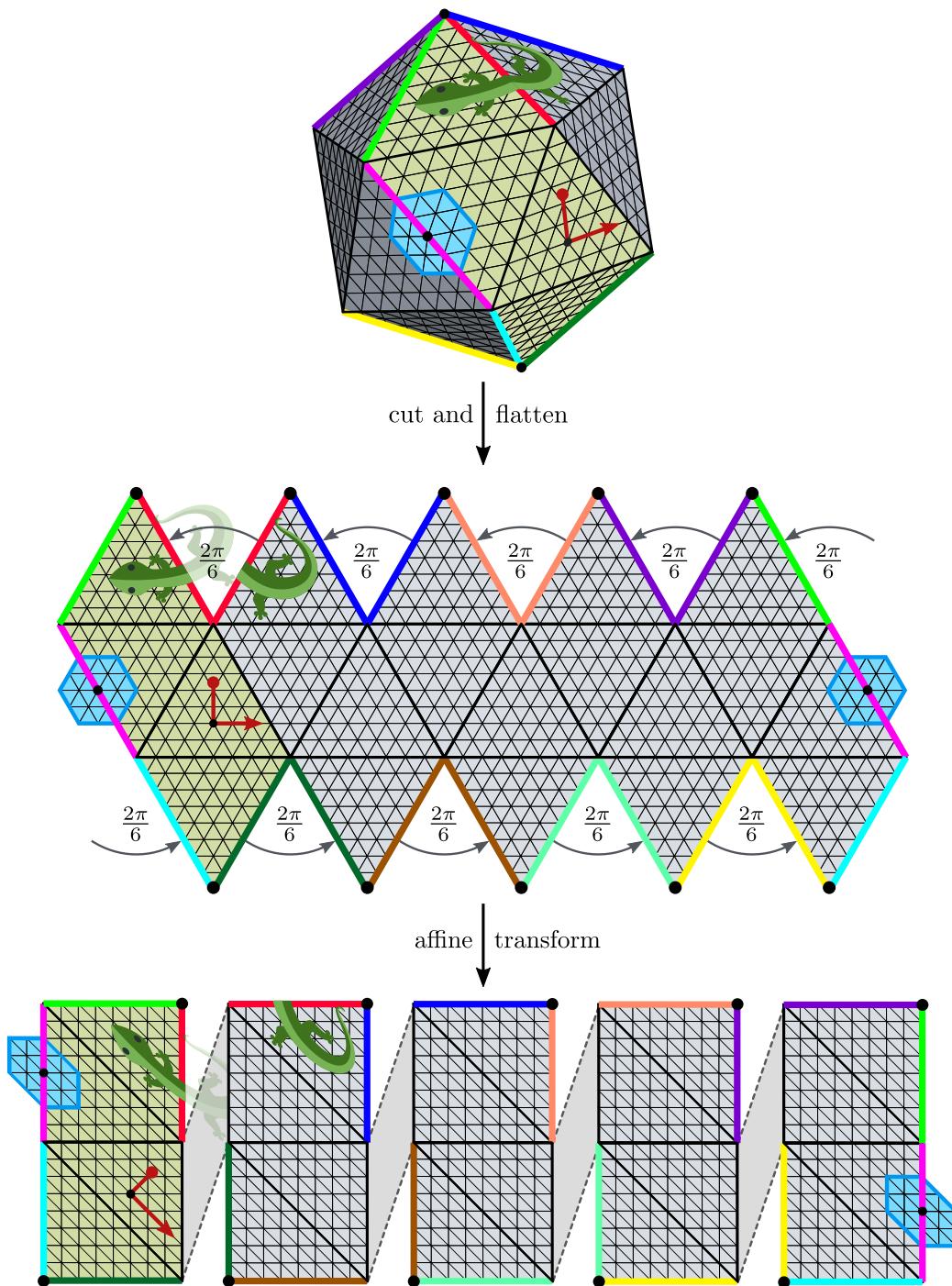
پیاده‌سازی π : عمدها مشابه است، با این حال، تفاوت حیاتی آن در این است که از انتقال‌دهنده‌های لوی-چیویتا و کرنل‌های C_e-راهبری پذیر استفاده می‌کند. به جای پدینگ مستقيمه رديفه‌های پیکسل از روی یال‌ها، انتقال لوی-چیویتا نيزارمند اين است که ویژگی‌ها يا با $e = g$ برای تمام یال‌های داخلی و يال ارغونی، يا با زاویه‌ای برابر با $\frac{\pi}{2}$ از روی تمام یال‌های با نقص زاویه $\frac{\pi}{2}$ راهبری شوند، که علامت آن به جهت انتقال بستگی دارد. [۱۴۴] نمایش منظم C_e-ها به عنوان نوع نيزارمند انتقال، کرنل‌های کانولوشن فرض می‌کنند و کرنل‌های کانولوشن را برای برآورده کردن محدوديت راهبری پذير پیاده‌سازی محدود می‌کنند. پس از پدینگ انتقال، کانولوشن GM آنها به عنوان يك کانولوشن اقليدسي متعارف با اين کرنل‌های راهبری پذير پیاده‌سازی می‌شود. توجه داشته باشید که اين کانولوشن GM در داخل وجوده، يعني به جز پدینگ انتقال، مشابه HexaConv توسط π است.

از آنجا که کانولوشن GM توسط π يك گروه ساختاري بدینهی $\{e\} = G$ را فرض می‌کند، پدینگ انتقال دوباره به عنوان يك کپي بدینهی از پیکسل‌ها بدون راهبری پیاده‌سازی می‌شود و کرنل‌ها و یارهای متعارف باقی می‌مانند. با این حال، از آنجا که چارچوب‌های $\{e\}$ -ساختار به سمت قطب شمال تراز شده‌اند، آنها دیگر در نمایش پیکسل مربعي مستطيلى موازي نیستند، که از يك پیاده‌سازی فوري بر حسب کانولوشن‌های متعارف جلوگيری می‌کند. در عوض، کرنل‌ها باید در هر نقطه از شبکه در يك دوران متفاوت اعمال شوند. از آنجا که کرنل شش ضلعی را می‌توان با $\frac{\pi}{2}$ بدون استفاده از درون‌يابي چرخاند، و از آنجا که ترازها به سمت قطب شمال حداكتر با اين زاویه با يك‌يگر تفاوت دارند، نويسندگان تقریب کارآمد زیر را برای اين عمليات پیشنهاد می‌کنند: آنها روی هر وجه دو بار کانولو می‌کنند، يك بار با کرنل اصلی و يك بار با نسخه دوران یافته آن با $\frac{\pi}{2}$. سپس دو میدان پاسخ به صورت خطی با هم ترکیب می‌شوند، با وزن‌های درون‌يابي از پیش محاسبه شده که به زوایای چارچوب‌های مرجع تراز-شده-به-شمال نسبت به دو تراز کرنل (يعني نسبت به شبکه پیکسلی) بستگی دارد. بنابراین اين پیاده‌سازی تقریباً دو برابر پرهزینه‌تر از پیاده‌سازی‌های π است.

يک پیاده‌سازی جایگزین از کانولوشن‌های کروی روی بیست‌وجهی توسط π پیشنهاد شده است. نويسندگان سیگنال کروی را روی صفحات گسترده شده توسط ۲۰ وجه (که به عنوان تصاویر مماس شناخته می‌شوند) تصویر می‌کنند و متعاقباً يك CNN متعارف را روی هر یك از اين تصاویر اجرا می‌کنند. ما اين شبکه را در لیست خود نیازوردهم زیرا اين شبکه اين نمایش‌ها را به طور مستقل از يك‌يگر پردازش می‌کند، يعني ویژگی‌ها را بين آنها منتقل يا پدنمي کند و بنابراین دقیقاً به عنوان کانولوشن GM توصیف نمی‌شود.

همانطور که قبلاً ذکر شد، نتایج تجربی π نشان می‌دهد که هندسه بیست‌وجهی هندسه کروی را برای کاربردهای يادگیری عمیق به خوبی تقریب می‌زند. به طور خاص، نويسندگان CNN کروی خود را روی يك شبکه ایکوسфер با CNN بیست‌وجهی تکه‌ای-تخت توسط π مقایسه می‌کنند و در می‌یابند که هر دو على‌رغم هندسه تغییر شکل یافته دومی، عملکرد مشابهی دارند. مشخص شده است که هموردای CNN های بیست‌وجهی تحت دوران‌های پیوسته در (۳) SO به طور قابل توجهی نقض می‌شود، با این حال، به نظر می‌رسد این فقط يك اثر بیش‌برآرش است زیرا به راحتی و بدون از دست دادن عملکرد مدل با استفاده از افزایش داده SO خنثی می‌شود.

^{۱۴۴} شبکه ایکوسфер، که توسط برخی از مدل‌های بخش‌های ۲.۱۱ و ۳.۱۱ استفاده می‌شود، با تصویر کردن گره‌های این شبکه به فاصله شعاعی واحد از مبدأ، يعني به S² تعریف می‌شود. مدل‌های این بخش این تصویر را فرض نمی‌کنند بلکه مستقیماً روی هندسه بیست‌وجهی تکه‌ای-تخت کانولو می‌کنند.



شکل ۷۲: پیاده‌سازی‌های [۹۰۹] میدان‌های ویژگی را نسبت به یک اطلس که بیست‌وجهی را با پنج چارت می‌پوشاند، نمایش می‌دهند. برای ساخت این چارت‌ها، بیست‌وجهی در امتداد یال‌های رنگی بریده شده و پهن می‌شود. سپس پنج ناحیه، که هر کدام از چهار مثلث تشکیل شده‌اند، به همدامنه‌های چارت مستطیلی برش داده می‌شوند. (۱۰۰۰۰۰۰) این عملیات شبکه شش‌ضلعی را به یک شبکه از پیکسل‌های مریبی نگاشت می‌دهد، به طوری که میدان‌های ویژگی بیست‌وجهی را می‌توان با مجموعه‌ای از پنج آرایه مستطیلی کدگذاری کرد. توجه داشته باشید که چارچوب‌های مرجع و کرنل‌ها بر این اساس در همدامنه‌های چارت تغییر شکل می‌یابند. انتقال لوى چیوپیتا از روی تمام یال‌های رنگی به جز یال ارغوانی، یک دوران به اندازه $\frac{2\pi}{6}$ را به همراه دارد، که علامت آن به جهت انتقال بستگی دارد. این کار با پدینگ انتقال ردیف‌هایی از پیکسل‌ها در امتداد یال‌های بریده شده، همانطور که قبلاً در شکل ۳۰ توصیف شد، پیاده‌سازی می‌شود.

(مارموک‌ها با مجوز توییتر تحت لایسنس بین‌المللی Creative Commons Attribution 4.0 license اقیانس شده‌اند.)

همیشه، می خواهیم اشاره کنیم که CNN-های C_5 -هموردا توسط I^R را می توان به راحتی با در نظر گرفتن یک \mathcal{R} -ساختار و در نتیجه کرنل های راهبری پذیر بازتابی، D_5 -هموردا ساخت. به طور مشابه، I-CNN، I^D -هموردا توسط I_h را می توان با ساختن کرنل های D_6 -راهبری پذیر به جای C_6 -راهبری پذیر، تحت گروه ایزو متري کامل I_h بیست و چهی هموردا ساخت.

آ ارتباط با فرمالیسم چارت مختصاتی در هندسه دیفرانسیل

این پیوست به منظور برقراری ارتباط بین فرمالیسم کلاف، که زیربنای نظریه CNN‌های مستقل از مختصات است، و فرمالیسم چارت مختصاتی، که احتماً در اولین مطالعه هندسه دیفرانسیل با آن مواجه می‌شویم، عمل می‌کند. تفاوت اصلی بین این دو این است که فرمالیسم کلاف به نقاط p از فضای پایه M به رویی مستقل از مختصات اشاره می‌کند. در صورت نیاز، مختصات مستقیماً از طریق تریویالیزاسیون‌های محلی کلاف به تارها (به عنوان مثال فضاهای مماس) اختصاص داده می‌شوند. در مقابل، فرمالیسم چارت بر چارت‌های مختصاتی (دیفئومورفیسم‌ها)

$$x : M \supseteq U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^d, \quad (511)$$

تکیه دارد، که مختصات را به تکه‌های محلی U از منیفلد اختصاص می‌دهند. تریویالیزاسیون‌های محلی کلاف و تبدیلات پیمانه بین آنها به عنوان دیفرانسیل‌های چارت‌ها و توابع گذار چارت القا می‌شوند. در این بخش ما ارتباط بین هر دو فرمالیسم را بررسی می‌کنیم. یک نمای کلی از نتایج در جدول ۷ ارائه شده است.

۱۰۹	فضاهای مماس، فضاهای هم‌مماس و پایه‌های دوگان
۱۱۰	۱.۱.۱ فضاهای مماس بر حسب مشتقان جهتی
۱۱۰	۲.۱.۱ فضاهای هم‌مماس
۱۱۰	۳.۱.۱ پایه‌های دوگان
۱۱۱	۴.۱ دیفرانسیل‌ها، گرادیان‌ها و ژاکوبین‌ها
۱۱۲	۴.۲ پایه‌های مختصاتی القا شده توسط چارت
۱۱۳	۴.۳ چارت‌ها و پایه‌های مختصاتی القا شده
۱۱۴	۴.۴ نگاشتهای گذار چارت و تبدیلات پیمانه القا شده
۱۱۶	۴.۵ پایه‌های مختصاتی به عنوان تریویالیزاسیون‌های محلی کلاف
۱۱۶	۴.۶ تاظرات با تریویالیزاسیون‌های نقطه‌ای $T_p M$
۱۱۷	۴.۷ تریویالیزاسیون‌های محلی القا شده توسط چارت از (U)
۱۱۸	۵.۱ G -ساختارها و میدان‌های ویل‌بین

ما در بخش ۱.۱ با معرفی مختصر فضاهای مماس $T_p M$ به عنوان فضاهای از عملگرهای مشتق جهتی شروع می‌کنیم، که از آنها فضاهای هم‌مماس $T_p^* M$ به عنوان فضاهای دوگان نتیجه می‌شوند. بخش ۲.۱ دیفرانسیل‌های عمومی و گرادیان‌ها و ژاکوبین‌های خاص‌تر را تعریف می‌کند. بر اساس این مقدمات، ما در بخش ۳.۱ پایه‌های مختصاتی (پایه‌های هولونومیک) $T_p M \in F_p M$ را تعریف کردیم که توسعه عملگرهای مشتق جهتی در امتداد شبکه مختصاتی که توسط چارت از V به U کشیده شده است، تولید می‌شوند. پایه‌های خواهیم کرد، که توسعه عملگرهای مشتق جهتی در امتداد شبکه مختصاتی که توسط چارت از V به U کشیده شده است، تولید می‌شوند. پایه‌های دوگان $T_p^* M$ از فضاهای هم‌مماس $T_p M$ با گرادیان‌های مؤلفه‌های چارت x_μ داده می‌شوند. نگاشتهای گذار بین چارت‌ها، تبدیلات پیمانه کوواریانت و کانتراواریانت را بین پایه‌های متناظر القا می‌کنند، که در بخش ۲.۳.۱ استخراج می‌شوند. بخش ۴.۱ پایه‌های مختصاتی را به عنوان تریویالیزاسیون‌های محلی کلاف تفسیر می‌کند و ارتباط بین فرمالیسم کلاف و فرمالیسم چارت را دقیق می‌کند. پایه‌ها و تریویالیزاسیون‌های القا شده از چارت‌های مختصاتی تمام تریویالیزاسیون‌های ممکن را پوشش نمی‌دهند، به طوری که بین پایه‌های مختصاتی و پایه‌های غیرمختصاتی تمایز قائل می‌شوند. بخش ۴.۵ اسندهای پیمانه با مقادیر d از $GL(d)$ از چارچوب‌های میدان‌های ویل‌بین معرفی می‌شوند. بخش ۴.۶ اسندهای پیمانه با مقادیر G را که G -ساختار را حفظ می‌کنند، اعمال کرد.

مقدمه‌های جامعی بر فرمالیسم چارت در [۴۹] ارائه شده است. یک شرح دقیق‌تر در [۴۹] یافت می‌شود.

ما می‌خواهیم به خواننده یادآوری کنیم که ما از اندیس‌های کوواریانت و کانتراواریانت استفاده نمی‌کنیم. اندیس‌ها همیشه به صورت زیرنویس ظاهر خواهند شد، با حروف یونانی \dots, ν, μ که اندیس‌های مرتبه با چارت مختصاتی را نشان می‌دهند و حروف لاتین \dots, j, i که اندیس‌های پیمانه‌های عمومی را نشان می‌دهند. بالاتر این اندیس‌های A, B, \dots برای برچسب‌گذاری چارت‌ها یا پیمانه‌های مختلف حفظ می‌شوند.

آ.۱ فضاهای مماس، فضاهای هم‌مماس و پایه‌های دوگان

آ.۱.۱ فضاهای مماس بر حسب مشتقات جهتی

یک تعریف رایج از فضاهای مماس $T_p M$ یک منیفلد به عنوان فضاهای برداری از عملگرهای مشتق جهتی در $p \in M$ است، که ما در اینجا به طور خلاصه آن را تشویق می‌کنیم. فرض کنید $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ، یعنی $f \in C^\infty(M)$. فرض کنید $I \subseteq \mathbb{R}$ یک نگاشت هموار باشد، و برای یک بازه $t = \gamma : I \rightarrow M$ یک منحنی هموار باشد که در زمان t از p عبور می‌کند، یعنی $p = \gamma(0)$ را برآورده می‌کند. سپس عملگر مشتق جهتی در p در امتداد γ را به عنوان عملگر خطی

$$v_\gamma : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto (f \circ \gamma)'(0). \quad (512)$$

تعریف می‌کنیم. از آنجا که مشتق در امتداد جهت γ گرفته می‌شود، یعنی مماس بر آن، v_γ بردار مماس نامیده می‌شود. می‌توان آن را به عنوان سرعت یک ذره با مسیر γ در زمان $t = 0$ در نظر گرفت. برای ارجاع بعده، ما نمودار جابجایی ساده زیر را ارائه می‌دهیم، که پول بک γ از f از M به \mathbb{R} را از طریق γ نشان می‌دهد، که مشتق جهتی بر حسب آن تعریف می‌شود:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \supset & I & \xrightarrow{\gamma} & M \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ & & & & \downarrow \\ & & & & f \circ \gamma \end{array} \quad (513)$$

می‌توان نشان داد که فضای تمام بردارهای مماس بر منحنی‌ها در p یک فضای برداری d -بعدی را تشکیل می‌دهد

$$T_p M := \{v_\gamma \mid \gamma \text{ است } p \text{ یک منحنی هموار گذرنده از } \gamma\}, \quad (514)$$

که به عنوان فضای مماس در p شناخته می‌شود. برای جزئیات بیشتر در مورد تعریف بردارهای مماس و ساختار فضای برداری فضاهای مماس، به [۹] مراجعه کنید.

با تعریف فضاهای مماس به عنوان فضاهای برداری، ممکن است انتخاب کنیم که با بردارهای مماس به عنوان بردارهای هندسی انتزاعی رفتار کنیم و در نتیجه تعریف آنها را از طریق مشتقات جهتی (یا هر تعریف جایگزین دیگر) «فراموش» کنیم. ما این کار را در اکثر جاها انجام می‌دهیم، اما در بخش‌های بعدی برای استخراج دیفرانسیل‌های نگاشت‌های هموار و پایه‌های مختصاتی به تعریف از طریق مشتقات جهتی باز می‌گردیم.

آ.۱.۲ فضاهای هم‌مماس

به عنوان فضاهای برداری حقیقی، فضاهای مماس $T_p M$ دارای فضاهای دوگان متاظر $T_p^* M := (T_p M)^*$ هستند، یعنی فضاهای هم‌مماس. بنابراین فضاهای دوگان، آنها از تابعی‌های خطی

$$\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (515)$$

تشکیل شده‌اند، که در هندسه دیفرانسیل معمولاً هم‌بردارها یا ۱-فرم‌ها نامیده می‌شوند. به همراه جمع (هم)‌برداری $(\omega + \tilde{\omega})(v) = \omega(v) + \tilde{\omega}(v)$ و ضرب اسکالر $(\lambda \cdot \omega)(v) = \lambda \cdot (\omega(v))$ ، فضاهای هم‌مماس خود فضاهای برداری هستند.

به عنوان دوگان‌های متناهی-بعدی از یکدیگر، $T_p^* M$ و $T_p M$ ایزومورف هستند و بنابراین به طور خاص دارای بعد یکسان $= d = \dim(M)$ هستند. با این حال، ایزومورفیسم بین این دو کانونی نیست. یک ایزومورفیسم فضای برداری را می‌توان از طریق یک فرم دوخطی (غیرتبهگن) $\eta_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ مثلاً یک متريک ريماني، از طریق

$$\widehat{\eta}_p : T_p M \rightarrow T_p^* M, \quad v \mapsto \eta_p(v, \cdot), \quad (516)$$

مشخص کرد، که تابعی خطی $\widehat{\eta}_p(v) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ ، $w \mapsto \eta_p(v, w)$ را تعیین می‌کند.

آ.۱.۳ پایه‌های دوگان

هر پایه $[e_i]_{i=1}^d$ از $T_p M$ به طور کانونی یک پایه دوگان $[e_i^*]_{i=1}^d$ از $T_p^* M$ را القا می‌کند، که برای برآوردن روابط $e_i^* e_j = \delta_{ij}$ برای هر $i, j \in \{1, \dots, d\}$.

تعريف شده است. فرض کنید $[e_i^B]_{i=1}^d$ دو پایه از $T_p M$ باشند، که با عمل راست \triangleleft از عضو گروه ساختاری (وارون) $(g^{BA})^{-1} \in \text{GL}(d)$ در معادله (۱۰) به هم مرتبط هستند، یعنی برای $j = 1, \dots, d$

$$e_j^B = \sum_l e_l^A (g^{BA})_{lj}^{-1} \quad (518)$$

پایه دوگان $[e_i^{A,*}]_{i=1}^d$ بر این اساس تحت آن عمل چپی که را به

$$e_i^{B,*} = \sum_k g_{ik}^{BA} e_k^{A,*}. \quad (519)$$

می‌فرستد، تبدیل می‌شود. این با جفت‌کردن تأیید می‌شود:

$$\begin{aligned} e_i^{B,*} e_j^B &= \sum_{k,l} g_{ik}^{BA} e_k^{A,*} e_l^A (g^{BA})_{lj}^{-1} \\ &= \sum_{k,l} g_{ik}^{BA} \delta_{kl} (g^{BA})_{lj}^{-1} \\ &= \sum_k g_{ik}^{BA} (g^{BA})_{kj}^{-1} \\ &= \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (520)$$

رفتار تبدیل وارون پایه‌ها و پایه‌های دوگان معمولاً به عنوان تبدیل کوواریانت و کانتراواریانت نامیده می‌شود. به شاهدت تبدیل پایه دوگان با تبدیلات کانتراواریانت $v^B = g^{BA} \psi^A$ پیمانه‌ها در معادله (۷) و مؤلفه‌های برداری در (۹) توجه کنید. در واقع، پیمانه‌ها فقط انتخاب‌هایی از یک پایه هم‌مماس هستند که در ادامه بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد.

۲. آ دیفرانسیل‌ها، گرادیان‌ها و ژاکوبین‌ها

در حساب برداری، توابع $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ را در نظر می‌گیریم، که می‌توان آنها را در هر نقطه $p \in \mathbb{R}^m$ به صورت خطی با ماتریس ژاکوبین آنها (یا مشتق کل یا دیفرانسیل) $d\phi_p = (\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}|_p)_{ij}$ تقریب زد. در اینجا ما تعیین این مفهوم را به دیفرانسیل‌های توابع هموار بین منیفلدهای هموار معرفی می‌کنیم.

دیفرانسیل‌ها به طور کلی: فرض کنید $M \rightarrow N$: ϕ یک نگاشت هموار بین منیفلدهای هموار M و N باشد. در هر نقطه $p \in M$:

$$d\phi_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N, \quad v \mapsto d\phi_p(v) \quad (521)$$

را القا می‌کند که بردارهای مماس را در p به صورت خطی به بردارهای مماس در $\phi(p)$ نگاشت می‌دهد. برای تعریف فضاهای مماس بر حسب مشتقات جهتی در معادله (۵۱۲)، پوش‌فوروارد $v \in T_p M$ در امتداد f به صراحت با

$$d\phi_p(v) : C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto (d\phi_p(v))(f) := v(f \circ \phi), \quad (522)$$

داده می‌شود، یعنی با اعمال v بر روی بولبک $f \circ \phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ از طریق ϕ . این تعاریف با دو نمودار جابجایی زیر روش می‌شوند:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi} & N \\ & \searrow f \circ \phi & \downarrow f \\ & & \mathbb{R} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C^\infty(M) & \xleftarrow{(\cdot) \circ \phi} & C^\infty(N) \\ v \downarrow & & \swarrow d\phi(v) \\ \mathbb{R} & & \end{array} \quad (523)$$

از این تعریف بلافضله نتیجه می‌شود که دیفرانسیل ترکیب نگاشتهای هموار برابر با ترکیب دیفرانسیل‌های منفرد آنها است، که همان قاعده زنجیره‌ای است:

$$d(\phi \circ \psi)_p = d\phi_{\psi(p)} \circ d\psi_p \quad (524)$$

اگر ϕ وارون پذیر باشد (یک دیفرانسیل آن یک ایزومورفیسم)، علاوه بر این نتیجه می‌شود که دیفرانسیل آن یک ایزومورفیسم فضای برداری است که وارون آن برابر با دیفرانسیل ϕ^{-1} است، یعنی

$$(d\phi_p)^{-1} = d(\phi^{-1})_{\phi(p)}. \quad (525)$$

در مجموع، دیفرانسیل‌های $d\phi_p \in M$ در نقاط منفرد (یک نگاشت کلاف خطی-تاری، به بخش‌های ۱.۶ مراجعه کنید) را بین کلاف‌های مماس M و N القا می‌کنند:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{d\phi} & TN \\ \pi_{TM} \downarrow & & \downarrow \pi_{TN} \\ M & \xrightarrow{\phi} & N \end{array} \quad (526)$$

توجه داشته باشید که ما در این بیوست از یک نمادگذاری متفاوت، یعنی $d\phi$ استفاده می‌کنیم، نسبت به مقاله اصلی، که در آن به جای آن $\phi_{*,TM}$ می‌نویسیم. ما اولی را برای ارتباط با نمادگذاری معمول dx_μ برای پایه‌های α شده توسط چارت از فضاهای هم‌مماس انتخاب کردیم. دومی در من اصلی برای تأکید بر شباهت با نگاشت‌های کلاف $\phi_{*,GM}$ ، $\phi_{*,FM}$ و $\phi_{*,A}$ که روی کلاف‌های همبسته GM ، FM و A القا می‌شوند، استفاده می‌شود.

گرادیان‌ها: در مورد توابع هموار با مقادیر حقیقی $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ ، یعنی $d\phi_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}$ ، دیفرانسیل $T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}$ پوش‌فروارد می‌کند. با استفاده از ایزومورفیسم کانونی v را در $T_p M$ به بردارهای $T_{\phi(p)} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f \mapsto v(f \circ \phi)$ در

$$\iota_{\mathbb{R}} : T_{\phi(p)} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}, \quad v \mapsto v(\text{id}_{\mathbb{R}}) \quad (527)$$

عملگر گرادیان

$$\hat{d}_p : C^\infty(M) \rightarrow T_p^* M, \quad \phi \mapsto \hat{d}\phi_p := \iota_{\mathbb{R}} \circ d\phi_p = (d\phi_p(\cdot))(\text{id}_{\mathbb{R}}), \quad (528)$$

را تعریف می‌کنیم، که توابع هموار ϕ را به هم‌بردارها $\hat{d}\phi$ ^{۱۴۵} فرستد، که به نوبه خود بر روی بردارها به صورت

$$\hat{d}\phi_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \hat{d}\phi_p(v) = (d\phi_p(v))(\text{id}_{\mathbb{R}}) = v(\text{id}_{\mathbb{R}} \circ \phi) = v(\phi). \quad (529)$$

عمل می‌کنند. با یک سوءاستفاده از نمادگذاری معمولاً «کلاه» روی \hat{d} حذف می‌شود و بالاصله $(\phi)(v) = v(\phi)$ تعریف می‌شود. در حالی که این نمادگذاری بسیار رایج است، ما در ادامه به «کلاه» پابند می‌مانیم تا نیاز به ایزومورفیسم کانونی ι را صریح کنیم.

در بخش ۱.۳.۱ در ادامه خواهیم دید که دوگان پایه‌های مختصاتی $T_p^* M$ هستند، با ۱-فرم‌های گرادیان $p | \hat{d}x_\mu$ داده می‌شوند، که در آن x_μ مؤلفه‌های چارت مختصاتی هستند.

ژاکوبین‌ها: به طور خاص برای توابع $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ بین (زیرمجموعه‌ای از) فضاهای اقلیدسی، دیفرانسیل $d\phi_x : T_x \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\phi(x)} \mathbb{R}^m$ به راحتی دیده می‌شود که با ژاکوبین $T_p \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ در هر دامنه و همدامنه، منطبق است. ایزومورفیسم کانونی در اینجا با

$$\iota_{\mathbb{R}^k} : v \mapsto (v(\text{proj}_1), \dots, v(\text{proj}_k)), \quad (530)$$

داده می‌شود، که ι را از معادله (۵۲۷) به ابعاد چندگانه تعمیم می‌دهد. از آنجا که محاسبه عمدتاً مشابه مورد گرادیان‌ها است، ما آن را در اینجا تکرار نخواهیم کرد بلکه ایده را از طریق یک نمودار جابجایی به تصویر می‌کشیم:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\iota_{\mathbb{R}^n}} & T_x \mathbb{R}^n & \xrightarrow{d\phi|_x} & T_{\phi(x)} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\iota_{\mathbb{R}^m}} & \mathbb{R}^m \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{\partial \phi}{\partial x}|_x} & & & & & \uparrow \\ & & & & & & \end{array} \quad (531)$$

^{۱۴۵} میدان گرادیان اغلب به عنوان یک میدان برداری $(df)^{\sharp^n} = \nabla f$ تعریف می‌شود که از میدان هم‌برداری \hat{df} از طریق ایزومورفیسم موسیقیایی \sharp^n متناظر با متريک («بالا بردن انديس‌ها») محاسبه می‌شود.

اگر ϕ وارون پذیر باشد، همانی در معادله (۵۲۵) به

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x.}^{-1} = \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial x} \Big|_{\phi(x.)}, \quad (532)$$

تبدیل می‌شود، که همان قضیه تابع وارون است. ما بعداً از این همانی برای وارون کردن تبدیلات پیمانه بین پایه‌های مختصاتی مختلف که به عنوان ژاکوبین‌های نگاشتهای گذار چارت القا می‌شوند، استفاده خواهیم کرد.

آ.۳ پایه‌های مختصاتی القا شده توسط چارت

در این بخش ما چارت‌های مختصاتی به شکل

$$x : U \rightarrow V, \quad (533)$$

را در نظر می‌گیریم، که به صورت دیفئومورفیک مختصات $x(p) \in V \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^d$ را به هر نقطه $p \in U$ اختصاص می‌دهند. هر چنین چارتی یک انتخاب طبیعی از پایه‌ها را برای فضاهای مماس $T_p M$ روی U القا می‌کند، که به عنوان پایه‌های مختصاتی شناخته می‌شوند. فضاهای دوگان $T_p^* M$ از فضاهای مماس روی U بر این اساس با پایه‌های مختصاتی دوگان از هم‌بردارهای مماس مجهز می‌شوند. نگاشتهای گذار بین مختصات دو چارت، تبدیلات پیمانهای را القا می‌کنند که بین پایه‌های مختصاتی متناظر ترجمه می‌کنند. این تبدیلات پیمانه با ژاکوبین‌های نگاشتهای گذار داده می‌شوند.

آ.۳.۱ چارت‌ها و پایه‌های مختصاتی القا شده

پایه‌های مختصاتی برای $T_p M$: برای تشویق تعریف پایه‌های مختصاتی، مشاهده کنید که x یک «شبکه مختصاتی» را روی U با پول‌بک کردن شبکه مختصاتی کانونی روی V به منفیلد القا می‌کند. سپس پایه مختصاتی در یک نقطه خاص U را می‌توان به عنوان متشکل از آن d عملگر مشتق جهتی که در امتداد خطوط شبکه مختصاتی x روی U می‌روند، در نظر گرفت.

برای دقیق‌تر کردن این موضوع، ابتدا منحنی‌های

$$\tilde{\gamma}_\mu : I \rightarrow V, \quad t \mapsto x(p) + t\epsilon_\mu \quad \mu = 1, \dots, d \quad (534)$$

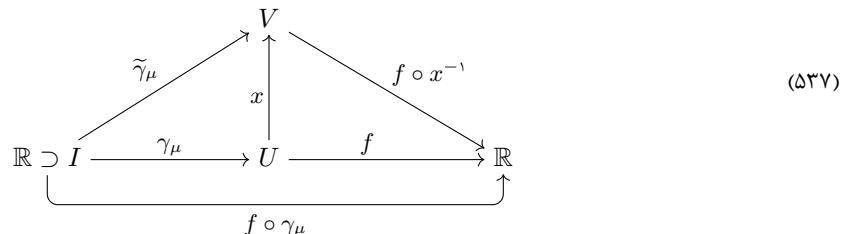
را در نظر بگیرید که در زمان $t = 0$ با سرعت واحد در جهت μ از $x(p) \in V$ عبور می‌کنند. نگاشت آن $\tilde{\gamma}_\mu$ از طریق چارت به U منحنی‌های ذکر شده در بالا را تعریف می‌کند

$$\gamma_\mu : I \rightarrow U, \quad t \mapsto x^{-1} \circ \tilde{\gamma}_\mu(t) = x^{-1}(x(p) + t\epsilon_\mu) \quad (535)$$

که در زمان $t = 0$ در امتداد شبکه مختصاتی x روی U از p عبور می‌کنند. پایه مختصاتی d -بعدی $T_p M$ القا شده توسط x سپس با عملگرهای مشتق جهتی در معادله (۵۱۲) در امتداد مسیرهای γ_μ داده می‌شود. با نشان دادن بردار پایه μ -ام با سوءاستفاده معمول از نماد گذاری به صورت $\left. \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right|_p$ بنابراین تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right|_p : f &\mapsto \left. \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right|_p f := (f \circ \gamma_\mu)'(0) \\ &= (f \circ x^{-1} \circ \tilde{\gamma}_\mu)'(0) \\ &= (f \circ x^{-1}(x(p) + t\epsilon_\mu))'(0) \\ &= [\partial_\mu (f \circ x^{-1})](x(p)) \end{aligned} \quad (536)$$

در مرحله آخر ما مشتق جزئی μ -ام معمول از پول‌بک $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ را شناسایی کردیم، که نماد گذاری $\left. \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right|_p$ را توجیه می‌کند. این تعاریف در نمودار جابجایی زیر که نمودار در معادله (۵۱۳) را گسترش می‌دهد، به تصویر کشیده شده‌اند:



پایه‌های مختصاتی دوگان برای T_p^*M : همانطور که در بخش آ. ۱ گفته شد، هر پایه از T_pM یک پایه دوگان از M را القا می‌کند. به طور خاص برای پایه‌های مختصاتی، که توسط بردارهای $\frac{\partial}{\partial x_\mu}|_p$ تولید می‌شوند، عناصر پایه دوگان با گرادیان‌های $\hat{dx}_\mu|_p = \hat{d}(x_\mu)|_p \in T_p^*M$ از مؤلفه‌های چارت $U \rightarrow \mathbb{R}^d$ داده می‌شوند. اینکه این گرادیان‌ها در واقع پایه دوگان را تشکیل می‌دهند، به راحتی با عمل بر روی بردارهای پایه همانطور که در معادله (۵۲۹) تعریف شده است، دیده می‌شود:

$$\begin{aligned}\hat{dx}_\mu|_p \frac{\partial}{\partial x_\nu}|_p &= \frac{\partial}{\partial x_\nu}|_p x_\mu \\&= [\partial_\nu(x_\mu \circ x^{-1})](x(p)) \\&= [\partial_\nu(\text{proj}_\mu)](x(p)) \\&= \delta_{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (۵۳۸)$$

دیفرانسیل‌های چارت به عنوان تربویالیزاسیون محلی کانونی: با توجه به اینکه چارت از M به $V \subseteq \mathbb{R}^d$ نگاشت می‌دهد، دیفرانسیل‌های آن در $p \in U$ نگاشت‌هایی به شکل

$$dx_p : T_p M \rightarrow T_{x(p)} \mathbb{R}^d. \quad (۵۳۹)$$

هستند. با استفاده مجدد از ایزومورفیسم کانونی $\iota_{\mathbb{R}^d}$ از $T_{x(p)} \mathbb{R}^d$ به \mathbb{R}^d (معادله (۵۳۰)), ما یک نگاشت

$$\begin{aligned}\hat{dx}_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad v &\mapsto \hat{dx}_p(v) := \iota_{\mathbb{R}^d} \circ dx_p(v) \\&= ((dx_p(v))(\text{proj}_1), \dots, (dx_p(v))(\text{proj}_d))^\top \\&= (v(\text{proj}_1 \circ x \circ x^{-1})(x(p)), \dots, v(\text{proj}_d \circ x \circ x^{-1})(x(p)))^\top \\&= (v(x_1(p)), \dots, v(x_d(p)))^\top \\&= (\hat{dx}_1|_p(v), \dots, \hat{dx}_d|_p(v))^\top\end{aligned}\quad (۵۴۰)$$

به دست می‌آوریم، پس از شناسایی گرادیان‌های مؤلفه چارت منفرد در مرحله آخر. توجه داشته باشید که عمل این دیفرانسیل چارت بر روی پایه مختصاتی μ -ام نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}\hat{dx}_p \frac{\partial}{\partial x_\mu}|_p &= \left(\hat{dx}_1|_p \frac{\partial}{\partial x_\mu}|_p, \dots, \hat{dx}_d|_p \frac{\partial}{\partial x_\mu}|_p \right)^\top \\&= (\delta_{\mu 1}, \dots, \delta_{\mu d})^\top \\&= \epsilon_\mu,\end{aligned}\quad (۵۴۱)$$

عنی بردار واحد μ -ام ϵ_μ از \mathbb{R}^d این دلالت بر این دارد که \hat{dx}_p نقش یک پیمانه ψ را در p ایفا می‌کند. بنابراین می‌توان به همان اندازه با تعریف یک پایه هم‌مماس شروع کرد و

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}|_{x(p)} = \hat{dx}_p^{-1}(\epsilon_\mu), \quad (۵۴۲)$$

را قرار داد، که آنalog معادله (۴) در فرمالیسم چارت است.

۲.۳. نگاشت‌های گذار چارت و تبدیلات پیمانه القا شده

چارت‌های مختلف پایه‌های مختصاتی مختلفی را القا می‌کنند. بنابراین گذار چارت‌ها تبدیلات پیمانه، یعنی تبدیلات پایه‌ها و ضرایب برداری را القا می‌کنند، که ما در این بخش آنها را استخراج می‌کنیم.

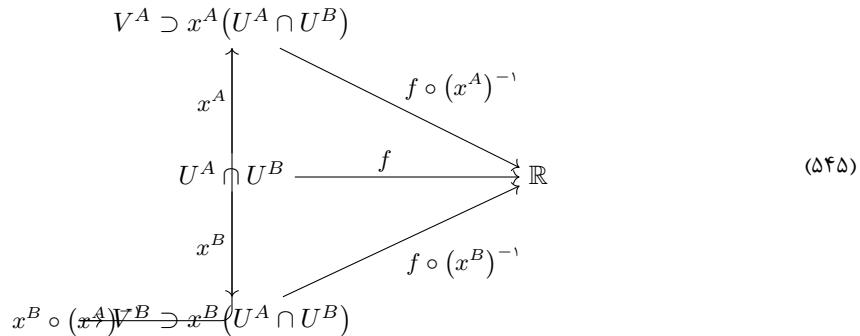
در ادامه ما دو چارت دلخواه و همپوشان $U^A \rightarrow V^A$ و $x^B : U^B \rightarrow V^B$ را در نظر می‌گیریم. مختصات مختلفی که آنها به همپوشانی $\emptyset \neq U^A \cap U^B$ اختصاص می‌دهند، سپس از طریق نگاشت‌های گذار چارت به هم مرتبط می‌شوند

$$x^B \circ (x^A)^{-1} : x^A(U^A \cap U^B) \rightarrow x^B(U^A \cap U^B). \quad (۵۴۳)$$

تبدیل پایه‌های مختصاتی مماس: پایه‌های مختصاتی $T_p M$ که توسط دو چارت القا می‌شوند، طبق خط آخر معادله (۵۳۶) با عمل آنها بر روی $f \in C^\infty(M)$ به صورت

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \Big|_p f = \left[\partial_\mu (f \circ (x^A)^{-1}) \right] (x^A(p)) \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p f = \left[\partial_\mu (f \circ (x^B)^{-1}) \right] (x^B(p)), \quad (544)$$

تعريف می‌شوند، که با نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:



از طریق نگاشتهای گذار چارت، پایه‌های مختصاتی مختلف با

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p f &= \left[\partial_\mu (f \circ (x^B)^{-1}) \right] (x^B(p)) \\ &= \left[\partial_\mu (f \circ (x^A)^{-1} \circ x^A \circ (x^B)^{-1}) \right] (x^B(p)), \end{aligned}$$

به هم مرتبط می‌شوند، که با استفاده از قاعده زنجیره‌ای چندمتغیره، بیشتر منجر به این می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p f &= \sum_{\nu=1}^d \left[\partial_\nu (f \circ (x^A)^{-1}) \right] (x^A(p)) \cdot \left[\partial_\mu (x_\nu^A \circ (x^B)^{-1}) \right] (x^B(p)) \\ &= \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \Big|_{x^B(p)} \end{aligned} \quad (546)$$

در مرحله آخر ما از سوءاستفاده معمول از نماد گذاری^{۱۴۶}

$$\frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \Big|_{x^B(p)} := \partial_\mu (x_\nu^A \circ (x^B)^{-1}) (x^B(p)) \quad (547)$$

برای مؤلفه‌های ژاکوبین

$$\frac{\partial x^A}{\partial x^B} \Big|_{x^B(p)} = \hat{dx}_p^A \circ \hat{d}(x_p^B)^{-1} \quad (548)$$

از نگاشتهای گذار استفاده کردیم. با حذف f از معادله (۵۴۶)، ما قانون تبدیل

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \Big|_{x^B(p)} \quad (549)$$

از پایه‌های مختصاتی مماس را شناسایی می‌کنیم. ما در اینجا انتخاب کردیم که ژاکوبین را در سمت راست بردار پایه بنویسیم تا تأکید کنیم که تغییر پایه باید به عنوان یک عمل راست در ک شود. با انجام این کار، باید به خواننده هشدار دهیم که فقط یک سوءاستفاده از نماد گذاری برای بردار پایه است اما به معنای عمل یک عملگر دیفرانسیل بر روی ژاکوبین در سمت راست نیست.

^{۱۴۶} «سوءاستفاده» این است که $x^A \circ x^B(p)$ به عنوان تابعی از $(x^B)^{-1} \circ x^A(p)$ تفسیر می‌شود، و بنابراین باید به طور دقیق‌تر به صورت $x^A \circ x^B(p)$ نوشته شود.

تبدیل پایه‌های مختصاتی هم‌مماس: قانون تبدیل کانتراویریانت پایه‌های مختصاتی فضای هم‌مماس از تبدیل وارون پایه‌های دوگان در معادله (۵۱۹) نسبت به (۵۱۸) نتیجه می‌شود. برای اعمال این رابطه، ما ابتدا معادله (۵۴۹) را با قرارداد خود مبنی بر اینکه پایه‌ها مطابق با یک عمل راست با یک عضو گروه وارون تبدیل می‌شوند، تطبیق می‌دهیم. این کار با اعمال معادله (۵۳۲) برای وارون کردن ژاکوبین (سواء استفاده از نمادگذاری را به یاد بیاورید)

$$\left. \frac{\partial x^A}{\partial x^B} \right|_{x^B(p)} = \left. \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right|_{x^A(p)}^{-1} \quad (550)$$

انجام می‌شود که نتیجه می‌دهد:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \right|_p = \sum_{\nu=1}^d \left. \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \right|_p \left. \frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \right|_{x^B(p)} = \sum_{\nu=1}^d \left. \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \right|_p \left(\left. \frac{\partial x^A}{\partial x^B} \right|_{x^B(p)} \right)_{\nu\mu} = \sum_{\nu=1}^d \left. \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \right|_p \left(\left. \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right|_{x^A(p)} \right)_{\nu\mu} \quad (551)$$

بنابراین عناصر پایه هم‌مماس مطابق با معادلات (۵۱۸) و (۵۱۹) مانند

$$\hat{dx}_\mu^B|_p = \sum_{\nu=1}^d \left. \frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\nu^A} \right|_{x^A(p)} \hat{dx}_\nu^A|_p. \quad (552)$$

تبدیل می‌شوند.

تبدیل دیفرانسیل‌های چارت: بیان دیفرانسیل‌های چارت $\hat{dx}_\mu^A|_p$ بر حسب گرادیان‌های مؤلفه چارت در معادله (۵۴۰) اجازه می‌دهد تا قانون تبدیل آنها را از قانون در معادله (۵۵۲) استنتاج کنیم. به طور جایگزین، قانون تبدیل با ضرب راست در همانی به شکل $\text{id}_{T_p M} = \hat{dx}_\mu^A|_p \circ (\hat{dx}^A|_p)^{-1}$ و شناسایی یک ضرب چپ با ژاکوبین نگاشته‌های گذار چارت به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \hat{dx}_\mu^B|_p &= \hat{dx}_\mu^B|_p \circ (\hat{dx}^A|_p)^{-1} \circ \hat{dx}^A|_p \\ &= \left. \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right|_{x^A(p)} \hat{dx}^A|_p \end{aligned} \quad (553)$$

توجه داشته باشید که این نتیجه به سادگی بیان ماتریسی معادله (۵۵۲) است.

تبدیل ضرایب برداری: بردارهای $v^A \in \mathbb{R}^d \in T_p M$ نسبت به یک پایه مختصاتی $v^A = \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \right]_{\mu=1}^d$ بیان می‌شوند:

$$v = \sum_{\mu=1}^d v_\mu^A \left. \frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \right|_p \quad (554)$$

ضرایب منفرد با عمل پایه هم‌مماس بازیابی می‌شوند:

$$\hat{dx}_\mu^A|_p(v) = \hat{dx}_\mu^A|_p \sum_{\nu=1}^d v_\nu^A \left. \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \right|_p = \sum_{\nu=1}^d v_\nu^A \delta_{\mu\nu} = v_\mu^A \quad (555)$$

این دلالت بر این دارد که ضرایب به صورت کانتراویریانت تبدیل می‌شوند، درست مانند پایه مختصاتی هم‌مماس:

$$v_\mu^B = \hat{dx}_\mu^B|_p(v) = \sum_{\nu=1}^d \left. \frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\nu^A} \right|_{x^A(p)} \hat{dx}_\nu^A|_p(v) = \sum_{\nu=1}^d \left. \frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\nu^A} \right|_{x^A(p)} v_\nu^A \quad (556)$$

به راحتی تأیید می‌شود که این قانون تبدیل واقعاً به یک نمایش مستقل از بردارهای مستقل از مختصات $v \in T_p M$ منجر می‌شود:

$$\sum_{\mu} \left. \frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \right|_p v_\mu^B = \sum_{\mu, \nu, \rho} \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \left. \frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \right|_{x^B(p)} \frac{\partial x_\rho^B}{\partial x_\rho^A} \left. \frac{\partial x_\rho^A}{\partial x_\nu^A} \right|_{x^A(p)} v_\rho^A = \sum_{\nu, \rho} \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \left. \delta_{\nu\rho} v_\rho^A \right|_p = \sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \left. v_\nu^A \right|_p \quad (557)$$

۴. آرایه‌های مختصاتی به عنوان تربویالیزاسیون‌های محلی کلاف

قوانين تبدیل القا شده توسط نگاشت گذار چارت در بخش ۲.۳.۱ با تبدیلات پیمانه همانطور که در بخش ۱.۳ فرمول‌بندی شده است، هنگام یکی گرفتن ژاکوبین‌ها $g_p^{BA} \Big|_{x^A(p)}$ با $\frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)}$ مطابق هستند. در بخش ۱.۴ ما این ارتباطات را با فهرست کردن تمام تنباطات دقیق می‌کنیم. بخش ۲.۴ این نتایج را با استخراج عبارات برای تربویالیزاسیون‌های کلاف القا شده توسط چارت روی دامنه‌های گسترده $U \subseteq M$ همانطور که در بخش ۶ معرفی شد، گسترش می‌دهد. یک فرهنگ لغت که تنباطات را خلاصه می‌کند در جدول ۷ ارائه شده است.

۱.۴. تنباطات با تربویالیزاسیون‌های نقطه‌ای $T_p M$

پیمانه‌ها و دیفرانسیل‌های چارت: فرمالیسم کلاف بر تعریف پیمانه‌ها (معادله (۱))

$$\psi_{TM,p}^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (558)$$

تکیه دارد، که ایزومورفیسم‌های کلاف برداری هستند و مختصات را به فضاهای مماس با $p \in U^A$ اختصاص می‌دهند. در فرمالیسم چارت، پیمانه‌ها روی U^A به عنوان دیفرانسیل‌های چارت القا می‌شوند (معادله (۵۴۰)):

$$\hat{dx}_p^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (559)$$

پیمانه‌های مختلف با تبدیلات پیمانه به هم مرتبط هستند (معادله (۷))

$$\psi_{TM,p}^B = g_p^{BA} \psi_{TM,p}^A \quad \square\square\square \quad g_p^{BA} := \psi_{TM,p}^B \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1} \in G. \quad (560)$$

همین تعریف برای پیمانه‌های القا شده توسط چارت نیز برقرار است، که در آن تبدیلات پیمانه با ژاکوبین نگاشته‌های گذار چارت منطبق می‌شوند (معادله (۵۵۳)):

$$\hat{dx}_p^B = \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)} \hat{dx}_p^A \quad \square\square\square \quad \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)} = \hat{dx}_p^B \circ (\hat{dx}_p^A)^{-1} \in \text{GL}(d) \quad (561)$$

مؤلفه‌های برداری: از آنجا که مؤلفه‌های برداری $(v^A)_p(v)$ با عمل پیمانه‌ها داده می‌شوند، آنها همان رفتار تبدیل کوواریانت را نشان می‌دهند

$$v^B = g_p^{BA} v^A \quad \square\square\square \quad v^B = \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)} v^A. \quad (562)$$

بر حسب مؤلفه‌ها، این روابط به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$v_i^B = \sum_{j=1}^d (g_p^{BA})_{ij} v_j^A \quad \square\square\square \quad v_\mu^B = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\nu^A} \Big|_{x^A(p)} v_\nu^A. \quad (563)$$

چارچوب‌های مرجع القا شده: چارچوب‌های مرجع در فرمالیسم کلاف با نگاشت بردارهای e_i از چارچوب استاندارد G از طریق $T_p M$ از \mathbb{R}^d نگاشت پیمانه به القا می‌شوند (معادله (۴)):

$$[e_i^A]_{i=1}^d = \left[(\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i) \right]_{i=1}^d \quad (564)$$

رابطه متناظر در فرمالیسم چارت طبق معادله (۵۴۲) با

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \Big|_p \right]_{\mu=1}^d = \left[(\hat{dx}_p^A)^{-1}(\epsilon_\mu) \right]_{\mu=1}^d \quad (565)$$

داده می‌شود. معادله (۱۰) نشان می‌دهد که قوانین تبدیل چارچوب‌های مرجع با عمل راست

$$[e_i^B]_{i=1}^d = [e_i^A]_{i=1}^d \lhd (g_p^{BA})^{-1} := \left[\sum_{j=1}^d e_j^A (g_p^{BA})_{ji}^{-1} \right]_{i=1}^d = \left[\sum_{j=1}^d e_j^A (g_p^{AB})_{ji} \right]_{i=1}^d. \quad (566)$$

داده می‌شود. به طور مشابه، قانون تبدیل پایه‌های مختصاتی از معادله (۵۵۱) به صورت

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p \right]_{\mu=1}^d &= \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \Big|_p \right]_{\mu=1}^d \triangleleft \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)}^{-1} = \left[\sum_{\nu=1}^d \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \left(\frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)} \right)^{-1} \right]_{\mu=1}^d \\ &= \left[\sum_{\nu=1}^d \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \Big|_{x^B(p)} \right]_{\mu=1}^d \end{aligned} \quad (567)$$

دیده می‌شود.

۲.۴.۱ تربیوالیزاسیون‌های محلی القا شده توسط چارت از $\pi_{TM}^{-1}(U)$

نتاظراتی که در بخش قبل بیان شدند، تربیوالیزاسیون‌های نقطه‌ای $\psi_{TM,p}$ از $T_p M$ را به دیفرانسیل‌های چارت \hat{dx}_p مرتبط می‌کرند. برای تکمیل این تصویر، این بخش عبارتی را برای تربیوالیزاسیون‌های محلی

$$\Psi_{TM} : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^d \quad (568)$$

که توسط چارت‌ها القا می‌شوند، اضافه می‌کند.

یک کاندیدای خوب برای ساخت Ψ_{TM} از آن، دیفرانسیل چارت

$$dx : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow TV \quad (569)$$

است که یک ایزومورفیسم کلاف برداری است که از ایزومورفیسم‌های فضای برداری dx_p با عدم محدودیت به یک نقطه منفرد $p \in U$ متفاوت است. برای ادامه، ما ایزومورفیسم کانونی $\iota_{\mathbb{R}^d}$ را در معادله (۵۳۰) از یک نقطه منفرد به تمام فضاهای مماس $V \subseteq \mathbb{R}^d$ روی $T_x V \cong \mathbb{R}^d$ تعیین می‌دهیم، که منجر به تربیوالیزاسیون محلی کانونی زیر از TV می‌شود:

$$\iota_{TV} : TV \rightarrow V \times \mathbb{R}^d, \quad v \mapsto (\pi_{TV}(v), \iota_{\mathbb{R}^d}(v)). \quad (570)$$

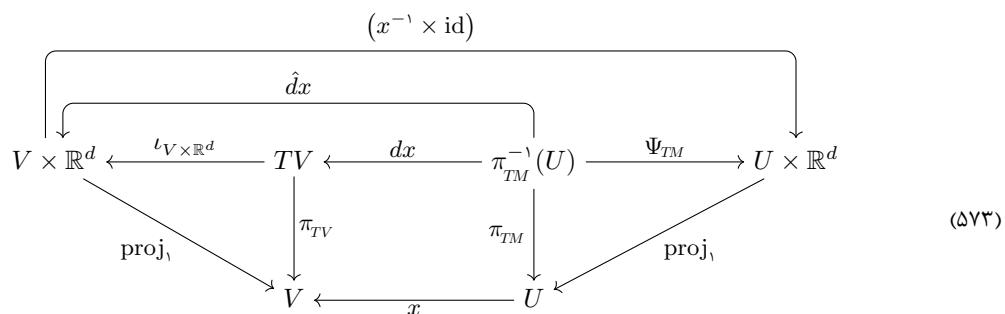
این اجازه می‌دهد تا \hat{dx}_p را از یک نقطه منفرد به یک نگاشت

$$\hat{dx} := \iota_{V \times \mathbb{R}^d} \circ dx : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow V \times \mathbb{R}^d, \quad (571)$$

تعیین دهیم، که با این حال، هنوز تربیوالیزاسیون محلی مورد نظر نیست. با نگاشت عامل اول از طریق چارت وارون از V به U ما تربیوالیزاسیون محلی کلاف القا شده توسط چارت را به دست می‌آوریم:

$$\Psi_{TM} := (x^{-1} \times \text{id}) \circ \hat{dx} \quad (572)$$

طبق معمول، ما تعاریف انجام شده را در یک نمودار جابجایی به تصویر می‌کشیم:



با در نظر گرفتن دو چارت همپوشان $U^{AB} = U^A \cap U^B$ و $x^B : U^B \rightarrow V^B$ و $x^A : U^A \rightarrow V^A$ نگاشتهای گذار

$$\hat{dx}^B \circ (\hat{dx}^A)^{-1} = \left(x^B \circ (x^A)^{-1} \times \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right) : x^A(U^{AB}) \times \mathbb{R}^d \rightarrow x^A(U^{AB}) \times \mathbb{R}^d \quad (574)$$

$$\Psi_{TM}^B \circ (\Psi_{TM}^A)^{-1} = \left(\text{id} \times \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right) : U^{AB} \times \mathbb{R}^d \rightarrow U^{AB} \times \mathbb{R}^d. \quad (575)$$

به دست می‌آیند. این تعاریف و رابطه متقابل آنها در نمودار جاچایی زیر نشان داده شده است:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & ((x^B)^{-1} \times \text{id}) & & \\
 x^B(U^{AB}) \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\hspace{10em}} & U^{AB} \times \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\hspace{10em}} & \\
 \uparrow & \swarrow \hat{dx}^B & \uparrow \pi_{TM}^{-1}(U^{AB}) & \uparrow \Psi_{TM}^B & \uparrow (\text{id} \times g^{BA}) \\
 (x^B \circ (x^A)^{-1} \times \frac{\partial x^B}{\partial x^A}) & & & & = (\text{id} \times \frac{\partial x^B}{\partial x^A}) \\
 \downarrow & \swarrow \hat{dx}^A & \downarrow \Psi_{TM}^A & & \\
 x^A(U^{AB}) \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\hspace{10em}} & U^{AB} \times \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\hspace{10em}} & ((x^A)^{-1} \times \text{id})
 \end{array} \quad (576)$$

۵. آنالیز G -ساختارها و میدان‌های ویل‌باین

همانطور که در بخش‌های ۳.۶ و ۴.۶ بحث شد، هر G -اطلس $\{\Psi_{TM}^X, U^X\}$ از تریوپالیزاپیون‌های محلی کلاف مماس، یک G -ساختار متناظر را مشخص می‌کند، یعنی یک زیرکلاف GM از چارچوب‌های مرجع متمایز که به یک ساختار هندسی روی M احترام می‌گذاردند (با آن را تعریف می‌کنند). بنا به تعریف، نگاشتهای گذار g^{BA} از کلاف‌های همبسته G مقادیری در یک گروه ساختاری کاهش یافته $G \leq \text{GL}(d)$ می‌گیرند. این سؤال را مطرح می‌کند که آیا می‌توان به طور مشابه G -اطلس‌هایی از چارت‌ها $\{x^X, U^X\}$ را یافت، که ژاکوبین‌های آنها $\frac{\partial x^B}{\partial x^A}$ مقادیری در یک گروه ساختاری کاهش یافته $G \leq \text{GL}(d)$ بگیرند و بنابراین یک G -ساختار را کدگذاری کنند. برای برخی گروه‌های ساختاری این قطعاً ممکن است؛ به عنوان مثال، یک جهت‌گیری از یک منیفلد جهت‌پذیر همیشه می‌تواند با مشخص کردن یک اطلس (d) از چارت‌های با جهت‌گیری مثبت، که ژاکوبین‌های گذار آنها مقادیری در (d) GL^+ می‌گیرند، ثابت شود. با این حال، به طور کلی، یافتن چارت‌های مختصاتی که پایه‌های مختصاتی را الفا کنند که در یک G -ساختار داده شده قرار گیرند، غیرممکن است. بنابراین به تبدیلات پیمانه صریح از پایه‌های مختصاتی به G -ساختار، که به عنوان میدان‌های ویل‌باین شناخته می‌شوند، متولّس می‌شویم [؟؟؟]. پس از تبدیل اولیه از پایه‌های مختصاتی به G -ساختار، آزادی پیمانه در داخل G -ساختار به تبدیلات پیمانه با مقادیر G ساختار را حفظ می‌کنند، اجازه می‌دهد.

یک مثال مهم در فیزیک، d -ساختارها (یا $d-1$ -ساختارها برای فضازمان‌ها) هستند، که از چارچوب‌های مرجع راست‌هنگار نسبت به متريک (شبه) ريماني η تشکيل شده‌اند.^{۱۴۷} چنین چارچوب‌های راست‌هنگاري، چارچوب‌های آزمایشگاهی ممکن یک ناظر لخت را نمایش می‌دهند. آنها به عنوان مثال برای فرمول‌پندی نظریه‌های میدان کوانتومی نسبیتی، به ویژه معادله دیراک، در فضازمان‌های خمیده استفاده می‌شوند. به ياد بياوريدي که يك G -ساختار داده شده ياد توسيع تریوپالیزاپیون‌های محلی کلاف موراد احترام قرار گيرد، که يك معني است که نگاشتهای پیمانه $\psi_{GM,p}$ يايد G -ساختار $G_p M$ را در $p \in M$ به d -ساختار استاندارد کانونی G از \mathbb{R}^d نگاشت دهند. برای مورد خاص d -ساختارها، اين معادل اين الزام است که تریوپالیزاپیون‌های کلاف متريک را حفظ کنند، یعنی $\langle \psi_{TM,p}(v), \psi_{TM,p}(w) \rangle = \langle \psi_{TM,p}(v), \psi_{TM,p}(w) \rangle$ برای هر $v, w \in T_p M$ و $p \in M$. که اين در فرماليسم کلاف بدون مشکل انجام می‌شود. با توجه به يك چارت مختصاتي $x : U \rightarrow V$ پیمانه‌های الفا شده در $p \in U$ در بخش‌های قبلی نشان داده شد که با $\hat{dx}_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d$ $\psi_{TM,p} = \hat{dx}_p$ متفاوت هستند.

$$\eta_p(v, w) = \langle \hat{dx}_p(v), \hat{dx}_p(w) \rangle, \quad (577)$$

تبدیل می‌شود، که دقیقاً ویزگی تعریف کننده برای x به عنوان یک ايزومتری است. این نتیجه دلالت بر این دارد که پایه‌های مختصاتی فقط در صورتی یک d -ساختار را تعریف می‌کنند که U و V ايزومتریک باشند \square که فقط در صورتی است که M به صورت محلی روی U تخت باشد. بنابراین برای هر ناحیه غیرتخت از M توصیف مستقیم یک d -ساختار از طریق پایه‌های مختصاتی غیرممکن است. این ناسازگاری به عنوان مثال در این واقعیت بیان می‌شود که مؤلفه‌های $\eta_{\mu\nu}$ از متريک ريماني روی M نسبت به پایه مختصاتی انتخاب شده با $\delta_{\mu\nu}$ (یا $(+1, -1, \dots, -1)$) متفاوت هستند.

همانطور که قبلاً ذکر شد، چارچوب‌های راست‌هنگار یک d -ساختار OM در ادبیات فیزیک معمولاً از طریق یک تبدیل پیمانه نسبت به یک میدان چارچوب القا شده توسط چارت $\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} \right]_{\mu=1}^d$ تعریف می‌شوند. با نشان دادن این تبدیل پیمانه، که میدان ویل‌باین نامیده می‌شود، با

$$\epsilon^A : U \rightarrow \text{GL}(d), \quad (578)$$

^{۱۴۷} نماد η در ادبیات فیزیک معمولاً برای متريک مینکوفسکی $(-1, +1, -1, \dots, -1)$ حفظ می‌شود در حالی که متريک (شبه) ريماني M با g نشان داده می‌شود. در مقابل، ما اعضای گروه را در گروه ساختاری به صورت $g \in G$ می‌نویسیم و بنابراین از η برای متريک (شبه) ريماني M استفاده می‌کنیم.

میدان چارچوب راستهنجار با^{۱۴۸}

$$[e_i^A]_{i=1}^d := \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} \right]_{i=1}^d \lhd (\epsilon^A)^{-1} = \left[\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\epsilon^A)_{\mu i}^{-1} \right]_{i=1}^d \in \Gamma(U, OM). \quad (579)$$

تعريف می‌شود. راستهنجاری میدان چارچوب حاصل معمولاً به صورت^{۱۴۹}

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \eta(e_i^A, e_j^A) \\ &= \eta \left(\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\epsilon^A)_{\mu i}^{-1}, \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\epsilon^A)_{\nu j}^{-1} \right) \\ &= \sum_{\mu\nu} \eta \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) (\epsilon^A)_{\mu i}^{-1} (\epsilon^A)_{\nu j}^{-1} \\ &= \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} (\epsilon^A)_{\mu i}^{-1} (\epsilon^A)_{\nu j}^{-1}, \end{aligned} \quad (580)$$

بیان می‌شود، که توضیح می‌دهد چرا میدان ویل‌باین گاهی اوقات «ریشه دوم متريک» نامیده می‌شود. طبق معمول، مؤلفه‌های برداری از طریق تبدیل پیمانه غیروارون ترجمه می‌شوند، یعنی^{۱۵۰}:

$$v_i^A = \sum_\mu \epsilon_{i\mu}^A v_\mu \quad (581)$$

یک استدلال ساده شمارش ابعاد، آزادی پیمانه را در d -ساختار نشان می‌دهد:^{۱۵۱} یک ویل‌باین ($\epsilon^A(p) \in GL(d)$) به عنوان عضوی از گروه خطی عمومی دارای $d!$ درجه آزادی است، در حالی که متريک η به عنوان یک فرم دوخطی متقابن، دارای $d(d+1)/2$ درجه آزادی است. درجه آزادی $d(d-1)/2$ درجه آزادی گمشده دقیقاً متناظر با تبدیلات پیمانه با اعضای گروه ساختاری $g^{BA} \in d$ است. به طور جایگزین، از دیدگاه G -ساختارها، $F_p M \cong GL(d)$ دارای d درجه آزادی است در حالی که $O_p M \cong d(d-1)/2$ دارای $d(d+1)/2$ درجه آزادی است، که درجه آزادی را که متناظر با انتخاب متريک است، ثابت می‌کند.

تمام ساختارها بهوضوح به G -ساختارهای دلخواه با میدان‌های ویل‌باین با مقادیر $GL(d)$ که پایه‌های مختصاتی را به GM نگاشت می‌دهند و آزادی اعمال تبدیلات پیمانه با مقادیر G پس از آن، تعیین می‌یابند.

در ادبیات فیزیک این رابطه به صورت $e_i^A = (\epsilon^A)_i^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ بیان می‌شود. مقایسه با $\epsilon_{\mu i}^A := (\epsilon^A)_i^\mu$ نشان داده می‌شود.^{۱۴۸}

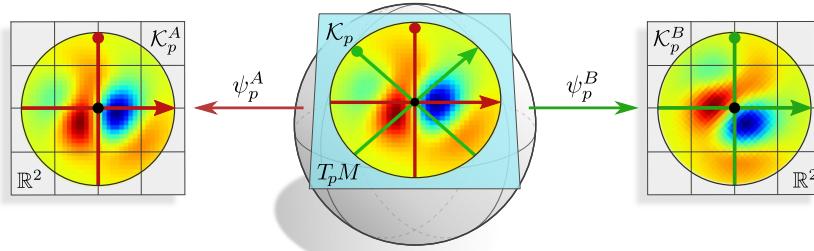
در ادبیات فیزیک این رابطه معمولاً به صورت $(\epsilon^A)_i^\mu (\epsilon^A)_\mu^\nu = \delta_{ij} \eta_{\mu\nu}$ نوشته می‌شود.^{۱۴۹}

دوباره، در نمادگذاری معمول در فیزیک این رابطه به صورت $(\epsilon^A)_\mu^i v^\mu = (\epsilon^A)_\mu^i v^i$ خوانده می‌شود.^{۱۵۰}

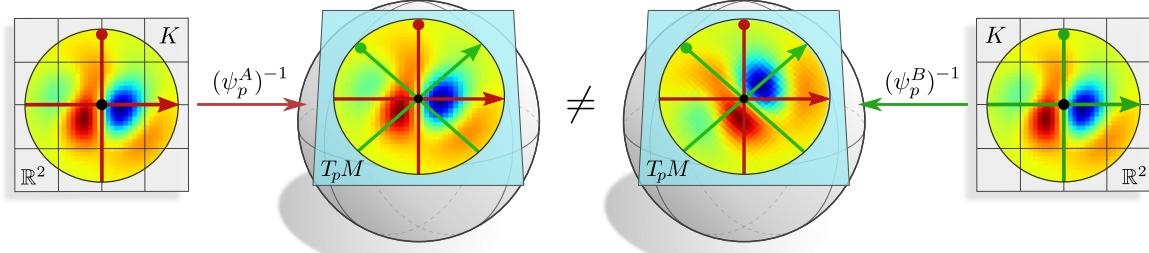
در فیزیک، بیشتر تبدیلات لورنتس محلی $\Lambda \in \mathbb{M}^3$ را در نظر می‌گیرند، که دوران‌ها و بوست‌های چارچوب‌های مرجع محلی را توصیف می‌کنند.^{۱۵۱}

فرماليسم چارت	فرماليسم کلاف	ايزومورفيسم
هر ديفئومورفيسم دلخواه	□	$V^A \xrightarrow{\sim} U^A$: x^A :
القا شده توسط چارتها	□	$x^A(U^{AB}) \xrightarrow{\sim} x^B(U^{AB})$ $x^B \circ (x^A)^{-1}$:
$\hat{dx}_p^A = (\hat{dx}_1^A _p, \dots, \hat{dx}_d^A _p)^\top$	ايزومورفيسم خطی از G -اطلس	$\mathbb{R}^d \xrightarrow{\sim} T_p M$ $\psi_{TM,p}^A$:
$\hat{dx}_p^B \circ (\hat{dx}_p^A)^{-1} = \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big _{x^A(p)}$	عنصر گروه ساختار $g_p^{BA} \in G$	$\mathbb{R}^d \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^d \psi_{TM,p}^B \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}$:
$((x^A)^{-1} \times \text{id}) \circ \hat{dx}^A$	$v \mapsto (\pi_{TM}(v), \psi_{TM, \pi_{TM}(v)}(v))$	$U^A \times \mathbb{R}^d \xrightarrow{\sim} \pi_{TM}^{-1}(U^A)$ Ψ_{TM}^A :
$\left(\text{id} \times \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right)$	$(\text{id} \times g^{BA})$	$U^{AB} \times \mathbb{R}^d \xrightarrow{\sim} U^{AB} \times \mathbb{R}^d$ $\Psi_{TM}^B \circ (\Psi_{TM}^A)^{-1}$:
$\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \Big _p \right]_{\mu=1}^d = \left[(\hat{dx}_p^A)^{-1}(\epsilon_i) \right]_{\mu=1}^d$	GL(d) از $\left[(\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i) \right]_{i=1}^d$ -اطلس	$[e_i^A]_{i=1}^d \in F_p M$ چارجوب عمومي
$\left[\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \Big _p (\epsilon^A)_{\mu i}^{-1} \right]_{i=1}^d$	G-ساختار	$[e_i^A]_{i=1}^d \in G_p M$ چارجوب G -ساختار

جدول ۷: يك نمای کلي از انواع مختلف مختصاتي سازی روی منيفلد. فرماليسم کلاف (ستون سوم)، که در اين کار استفاده می‌شود، مختصات را مستقيماً به فضاهاي مماس اختصاص می‌دهد، در حالی که به نقاط p از فضاي پايه M به روشی مستقل از مختصات اشاره می‌کند. در مقابل، فرماليسم چارت (ستون چهارم) مختصات را به زيرمجموعه‌های محلی $U^X \subseteq M$ از منيفلد اختصاص می‌دهد. تربوياليزاسيون‌های محلی کلاف مماس و نگاشت‌های گذار کلاف بین آنها به عنوان ديفئانسيلي های چارتها و نگاشت‌های گذار آنها، که دومی معمولاً به عنوان ژاكوبین‌ها نامیده می‌شوند، القا می‌شوند. ديف ماقبل آخر عباراتي را برای چارجوب‌های مرجعی که به عنوان مقاطع همانی از تربوياليزاسيون‌های محلی TM (ستون سوم) با به عنوان پايه‌های مختصاتي القا شده توسط چارت (ستون چهارم) القا می‌شوند، ارائه می‌دهد. به طور مشابه، ديف آخر تعريف G -ساختارها □ به عنوان مثال چارجوب‌های راست‌هنچار □ را از طريق يك G -اطلس برای TM (ستون سوم) و از طبيق ميدان‌های ويل‌باين به عنوان تبديلات $p \in U^{AB}$ پيمانه نسبت به پايه‌های مختصاتي (ستون چهارم) مقايسه می‌کند. طبق معمول، ما $U^A \cap U^B$ مخفف می‌کنيم و فرض می‌کنيم



شکل ۷.۳: یک کرnel مستقل از مختصات داده شده $T_p M$ روی فضای مماس K_p ممکن است در پیمانه‌های دلخواه ψ_p^A یا ψ_p^B نمایش داده شود. عبارات مختصاتی آن K_p^A و K_p^B روی R^d به طور کلی با یکدیگر متفاوت هستند. کرnel‌های G -راهبری‌پذیر این ویژگی را دارند که دقیقاً شکل یکسانی را در تمام صدق می‌کنند (در تصویر نشان داده نشده است). پیمانه‌ها به خود می‌گیرند، یعنی در $K_p^A = K_p^B = K$ امکان نداشته است.



شکل ۷.۴: یک کرnel مستقل از مختصات ممکن است با اشتراک‌گذاری یک کرnel داده شده K روی R^d نسبت به یک چارچوب مرجع تعریف شود. انتخاب‌های مختلف از چارچوب‌ها منجر به یک کرnel مستقل از مختصات متفاوت می‌شوند. کرnel‌های G -راهبری‌پذیر این ویژگی را دارند که دقیقاً همان کرnel مستقل از مختصات را تولید می‌کنند، مستقل از چارچوب مرجع انتخاب شده که در امتداد آن به اشتراک‌گذاشته می‌شوند (در تصویر نشان داده نشده است). این امر امکان اشتراک وزن مستقل از مختصات را فراهم می‌کند.

ب اشتراک وزن مستقل از مختصات و کرnel‌های G -راهبری‌پذیر

یک فرض اساسی در طراحی کاتولوشن‌های GM این است که کرnel‌های K روی R^d نسبت به یک انتخاب از چارچوب مرجع، همانطور که در شکل ۷.۴ به تصویر کشیده شده است، به اشتراک‌گذاشته می‌شوند. برای کرnel‌های عمومی، انتخاب‌های مختلف از چارچوب‌ها منجر به ترازهای متفاوتی از کرnel مستقل از مختصات حاصل می‌شوند \square بنابراین فرایند اشتراک وزن، مستقل از مختصات نیست. شکل ۷.۳ وضعیت متفاوتی را نشان می‌دهد: در اینجا ما یک کرnel مستقل از مختصات K_p را فرض می‌کنیم که از قبل روی $T_p M$ داده شده است و آن را در پیمانه‌های مختلف روی R^d بیان می‌کنیم. نمایش‌های مختصاتی K_p^A و K_p^B به طور کلی با یکدیگر موافق نیستند اما ساختار، مستقل از مختصات است.

کرnel‌های G -راهبری‌پذیر دقیقاً به گونه‌ای محدود شده‌اند که استقلال از مختصات فرآیند اشتراک وزن را تضمین کنند. اشتراک‌گذاری آنها نسبت به چارچوب‌های مختلف منجر به همان کرnel مستقل از مختصات روی فضای مماس می‌شود، یعنی هیچ تفاوتی بین دو کرnel در وسط شکل ۷.۴ وجود نخواهد داشت. به طور معادل، کرnel مستقل از مختصات حاصل روی $T_p M$ هنگام بیان در پیمانه‌های مختلف، شکل یکسانی $K_p^A = K_p^B = K$ را به خود می‌گیرد، یعنی کرnel چپ و راست در شکل ۷.۳ با هم موافق خواهند بود.

توجه داشته باشید که این لزوماً به این معنا نیست که کرnel به معنای $K(gv) = K(v)$ برای هر $v \in \mathbb{R}^d$ ناوردا باشد، همانطور که شهود بصری ممکن است الفا کند. این در واقع یک مورد خاص برای کرnel‌های اسکالر نگاشت انجام می‌دهند، یعنی برای آنها باید $\rho_{\square\square}$ و هم $\rho_{\square\square\square}$ نمایش‌های بدینهی هستند (به عنوان مثال شکل ۶ برای $G = \mathcal{R}$ یا شکل ۵۵ برای $G = 2$ را ببینید). برای انواع میدان عمومی‌تر، کرnel‌ها باید همورای پیمانه باشند، یعنی باید محدودیت G -راهبری‌پذیری $K(gv) = |\det g|^{-1} \rho_{\square\square}(g) K(v)$ برای $g \in G$ را برآورده کنند که امکان دایت کانال‌های کرnel $c_{\square\square} \times c_{\square\square}$ را فراهم می‌کند (در تصویر نشان داده نشده است). البته، کرnel‌های G -راهبری‌پذیر را می‌توان به معنای ناورداپیمانه تفسیر کرد به این معنا که $K(gv) = |\det g| \rho_{\square\square}(g) K(v)$ برای هر $g \in G$ و $v \in \mathbb{R}^d$. این مفهوم از ناورداپیمانه، اشتراک مستقل از مختصات کرnel‌های G -راهبری‌پذیر را ممکن می‌سازد.

یک بحث دقیق‌تر در مورد کرnel‌های مستقل از مختصات و عبارات مختصاتی آنها در بخش ۲.۲.۴ یافت می‌شود. محدودیت G -راهبری‌پذیری در بخش ۳.۲.۴ استخراج شده است.

پ انتگرال‌گیری روی فضاهای مماس

روی یک منیفلد ریمانی (M, η) ، چگالی حجم $d\mu$ روی M به طور یکتا با این الزام مشخص می‌شود که به چارچوب‌های راست‌هنجر $[e_1^O, \dots, e_d^O]$ نسبت به متريک η حجم واحد اختصاص داده شود:

$$dp(e_1^O, \dots, e_d^O) = 1 \quad T_p M \text{ از } [e_1^O, \dots, e_d^O] \quad (582)$$

به طور مشابه، یک چگالی حجم dv روی فضاهای مماس $T_p M$ از یک منیفلد ریمانی به طور یکتا با اختصاص حجم واحد به چارچوب‌های راست‌هنجر آن نسبت به η_p تعریف می‌شود:

$$dv(e_1^O, \dots, e_d^O) = 1 \quad T_v T_p M \text{ از } [e_1^O, \dots, e_d^O] \quad (583)$$

برای جلوگیری از یک بحث بی‌جهت پیچیده در مورد کلاف مماس مضاعف TTM ما انتگرال‌گیری روی $T_p M$ را به طور معادل با پول‌بک کردن آن از طریق یک پیمانه ایزومتریک (و در نتیجه حجم نگهدار) به \mathbb{R}^d تعریف می‌کنیم. فرض کنید $\psi_{TM,p}^O$ چنین پیمانه ایزومتریکی از یک اطلس d باشد، که چارچوب‌های راست‌هنجر را در $T_p M$ با چارچوب‌های راست‌هنجر در \mathbb{R}^d یکی می‌گیرد. سپس انتگرال یکتابع $f : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ از طریق پول‌بک آن تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \int_{T_p M} f(v) dv &:= \int_{\mathbb{R}^d} f \circ (\psi_{TM,p}^O)^{-1}(v^O) dv^O \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f^O(v^O) dv^O, \end{aligned} \quad (584)$$

که در آن عبارت مختصاتی $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} : f^O := f \circ (\psi_{TM,p}^O)^{-1}$ را طبق معمول تعریف کردیم. این واقعیت که $\psi_{TM,p}^O$ ایزومتریک است در اینجا تضمین می‌کند که dv واقعاً حجم واحد را به چارچوب‌های راست‌هنجر اختصاص می‌دهد اگر dv^O این کار را بکند. از آنجا که دومی فقط اندازه لبگ استاندارد روی \mathbb{R}^d است، این مورد برقرار است.

حال فرض کنید $\psi_{TM,p}^A$ هر پیمانه‌ای در p باشد، که ممکن است بخواهیم انتگرال را نسبت به آن بیان کنیم. نگاشت گذار بین هر دو مختصاتی سازی به سادگی با تبدیل پیمانه $v^O = \psi^O \circ (\psi^A)^{-1}(v^A) = g_p^{OA}(v^A)$ داده می‌شود. طبق قوانین استاندارد برای تغییر متغیرها در انتگرال‌های چندبعدی، دیفرانسیل‌ها باید مطابق با دترمینان ژاکوبین این تبدیل تغییر کنند تا حجم حفظ شود. از آنجا که تبدیل خطی است، ژاکوبین با خود g_p^{OA} داده می‌شود، به طوری که به دست می‌آوریم

$$\int_{T_p M} f(v) dv = \int_{\mathbb{R}^d} f^A(v^A) |\det(g_p^{OA})| dv^A. \quad (585)$$

از طریق تبدیل پیمانه، این عبارت هنوز به انتخاب دلخواه از پیمانه ایزومتریک $\psi_{TM,p}^O$ بستگی دارد. این واستگی را می‌توان با بیان مستقیم اندازه انتگرال بر حسب متريک به صورت

$$\int_{T_p M} f(v) dv = \int_{\mathbb{R}^d} f^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A, \quad (586)$$

از بین برد، که در آن ضریب

$$\sqrt{|\eta_p^A|} := \sqrt{|\det([\eta_p(e_i^A, e_j^A)]_{ij})|} \quad (587)$$

حجم (مطلق) چارچوب مرجع $[e_i^A]_{i=1}^d$ را نسبت به متريک η اندازه‌گیری می‌کند. برای تأیید برابری سمت راست معادلات (585) و (586)، متریک η_p از $T_p M$ را بر حسب حاصلضرب داخلی استاندارد $\langle \cdot, \cdot \rangle$ از \mathbb{R}^d بیان می‌کنیم، که دوباره با استفاده از پیمانه ایزومتریک $\psi_{TM,p}^O$ از اطلس d انجام می‌شود:

$$\begin{aligned} \eta_p(e_i^A, e_j^A) &= \langle \psi_{TM,p}^O(e_i^A), \psi_{TM,p}^O(e_j^A) \rangle \\ &= \langle \psi_{TM,p}^O \circ (\psi^A)^{-1}(\epsilon_i), \psi_{TM,p}^O \circ (\psi^A)^{-1}(\epsilon_j) \rangle \\ &= \langle g_p^{OA} \epsilon_i, g_p^{OA} \epsilon_j \rangle \\ &= \epsilon_i^\top (g_p^{OA})^\top g_p^{OA} \epsilon_j \\ &= ((g_p^{OA})^\top g_p^{OA})_{ij} \end{aligned} \quad (588)$$

¹⁵² برخلاف یک فرم حجم ω ، چگالی‌های حجم $|\omega|$ بک حجم مثبت را به هر چارچوب اختصاص می‌دهند. آنها هم روی منیفلدهای جهت‌بزیر و هم غیرجهت‌بزیر وجود دارند.

بنابراین قدر مطلق دترمینان در معادله (۵۸۷) با

$$\begin{aligned} \left| \det \left([\eta_p(e_i^A, e_j^A)]_{ij} \right) \right| &= \left| \det \left((g_p^{OA})^\top g_p^{OA} \right) \right| \\ &= \left| \det \left((g_p^{OA})^\top \right) \det \left(g_p^{OA} \right) \right| \\ &= \left| \det \left(g_p^{OA} \right) \right|^2, \end{aligned} \quad (589)$$

داده می شود، که از آن برابری سمت راست معادلات (۵۸۵) و (۵۸۶) با گرفتن ریشه دوم نتیجه می شود.

از آنجا که ضرایب $\sqrt{|\eta_p^B|}$ و $\sqrt{|\eta_p^A|}$ حجم های چارچوب های مربوطه خود را اندازه گیری می کنند، به راحتی می توان نشان داد که آنها با تعییر حجم وارون $|\det g_p^{BA}|$ به هم مرتبط هستند:

$$\sqrt{|\eta_p^B|} = \frac{1}{|\det g_p^{BA}|} \sqrt{|\eta_p^A|} \quad (\text{چگالی } 1 - \Rightarrow) \quad (590)$$

این به همراه فرمول معمول تعییر متغیرها

$$dv^B = |\det g_p^{BA}| dv^A \quad (\text{چگالی } 1 + \Rightarrow), \quad (591)$$

دلالت بر این دارد که مختصاتی سازی های عنصر حجم ریمانی dv بنا به طراحی تحت تبدیلات پیمانه ناوردا هستند، یعنی،

$$\sqrt{|\eta_p^B|} dv^B = \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \quad (\text{چگالی } 0). \quad (592)$$

این رابطه تضمین می کند که انTEGRAL گیری در معادله (۵۸۶) خوش تعریف است، یعنی مستقل از مختصات است.

ت کانولوشن های هموردا روی فضاهای همگن

کارهای [؟، ۹] و [؟، ۱۰] از نظر روحی بسیار شبیه به کار ما هستند، به این معنا که آنها کانولوشن های هموردای گروهی را در یک چارچوب نسبتاً عمومی تعریف می کنند. این مقالات در این مشترک هستند که روی نقشه های ویژگی روی فضاهای همگن \mathcal{I}/H از یک گروه تقارن سراسری \mathcal{I} عمل می کنند، که در آن $H \leq \mathcal{I}$ ^{۱۵۴}^{۱۵۳}. آنها در انواع گروه های \mathcal{I} که پوشش می دهند و در تعریف فضاهای ویژگی خود، به ویژه عمل های گروهی خطی روی آنها، متفاوت هستند. قضایای اصلی این مقالات تأیید می کنند که عمومی ترین نگاشتهای خطی هموردا بین چنین فضاهای ویژگی، کانولوشن ها (با همبستگی ها) با کرنل های دارای محدودیت تقارنی هستند. جزئیات خاص در مورد این کانولوشن های تعمیم یافته به فضاهای ویژگی، عمل های گروهی خاصی که مدل ها در نظر می گیرند، بستگی دارد.

این پیوست این نظریه ها و ارتباط آنها را با کانولوشن های مستقل از مختصات ما بررسی می کند. مهمترین شباهت ها و تفاوت ها در لیست زیر خلاصه شده اند:

▪ هر فضای همگن یک منیفلد ریمانی نیست و هر منیفلد ریمانی یک فضای همگن از گروه ایزومتری خود نیست.^{۱۵۵} با این حال، یک همپوشانی قابل توجه وجود دارد، به عنوان مثال برای CNN های اقلیدسی روی $\mathbb{E}_d \cong \text{E}(d)/d$ یا CNN های کروی روی $S^d \cong d+1/d$.

▪ نویسنده گان به ترتیب گروه های فشرده [؟، ۹]، فشرده محلی، یکنواخت [؟، ۹] و لی [؟] را در نظر می گیرند. گروه های تقارن سراسری در نظریه ما ایزومتری های M یا به طور خاص برای فضاهای اقلیدسی، گروه های آفین $\text{Aff}(G)$ هستند. توجه داشته باشید که گروه های آفین فشرده نیستند و فقط برای $d \leq G$ یکنواخت هستند^{۱۵۶} بنابراین گروه های آفین عمومی در نظریه های مربوطه پوشش داده نمی شوند.

▪ CNN های مستقل از مختصات، تمرکز را از تقارن های سراسری به تقارن های محلی منتقل می کنند. روی فضاهای همگن \mathcal{I}/H این تقارن های محلی متناظر با زیر گروه های پایدار ساز $\text{Stab}_p \cong H$ هستند. بخش ما \wedge روابط بین تقارن های سراسری و محلی را با جزئیات بررسی می کند^{۱۵۷} هموردای محلی مدل ها، هموردای سراسری آنها را القا می کند.

▪ مدل ها انواع مختلفی از میدان های ویژگی و عمل های گروهی را روی آنها فرض می کنند: [؟، ۹] میدان های اسکالار را روی فضاهای همگن فرض می کنند، یعنی تابع با مقادیر حقیقی $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{I}/H$ است که مطابق با $f : \mathcal{I}/H \rightarrow \mathbb{R}$ است: $f(\phi^{-1}\zeta \cdot H) = f(\phi(\zeta \cdot H))$.

^{۱۵۳} ما در اینجا از \mathcal{I} برای نشان دادن تقارن های سراسری دلخواه استفاده می کنیم، نه لزوماً ایزومتری ها.

^{۱۵۴} [؟، ۹] به جای \mathcal{I} از G برای اشاره به تقارن های سراسری استفاده می کنند. ما از \mathcal{I} استفاده می کنند. ^{۱۵۵} به عنوان مثال، $\{\pm 1\} \cong \{\pm 1\} / \text{SO}(2) \cong \mathbb{Z}^d$ یک مجموعه است اما یک منیفلد ریمانی نیست. مثال دیگر، کانولوشن های گروهی $(\mathbb{Z}^d, +)$ روی شبکه پیکسلی گستته \mathbb{Z}^d است.

می‌شوند.^{۱۵۶} [میدان‌های ویژگی از انواع عمومی‌تر ρ را در نظر می‌گیرند که به عنوان مقاطعی از کلافهای بردار ویژگی همبسته H تعریف می‌شوند. قوانین تبدیل آنها با نمایش‌های القایی $\text{Ind}_H^{\mathcal{I}} \rho$ داده می‌شود. این تنظیم، توابع با مقادیر حقیقی از $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ را به عنوان یک مورد خاص هنگام انتخاب نمایش‌های میدان بدیهی (یا، همانطور که در ادامه دقیق‌تر بیان می‌شود، نمایش‌های خارج‌قسمتی عمومی‌تر $\rho_{\mathbb{C}^{\mathcal{I}}}$ که در آن $G/H \leq \mathcal{I} \leq H$ پوشش می‌دهد. نظریه ما نیز میدان‌های ویژگی را به عنوان مقاطعی از کلافهای همبسته مدل می‌کند. تبدیل آنها با پوش‌فروواردها^۱ $f \circ \phi^{-1} = \phi \circ f$ داده می‌شود، که نمایش‌های القایی را تعیین می‌دهند.

• کارهای $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ و $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ اشتراک وزن کانولوشنی را از الزام هموردایی سراسری مدل‌ها استخراج می‌کنند. از سوی دیگر، کانولوشن‌های GM ما، بنا به تعریف، وزن‌ها را روی G -ساختار به اشتراک می‌گذارند. ما ایده استخراج اشتراک وزن از تقلیرهای سراسری (ایزومنتری‌ها) را در بخش ۳.۸ اتخاذ کردیم. الزام به هموردایی ایزومنتری، اشتراک وزن را روی مدارهای ایزومنتری و یک محدودیت پایدارساز را روی کرنل‌ها نتیجه می‌دهد؛ به عنوان مثال به شکل ۴۷ مراجعه کنید. قضیه ۸.۱۴ تأیید می‌کند که تبدیلات میدان کرنل هموردای ایزومنتری روی فضاهای همگن، کانولوشن‌های GM هستند^{۱۵۷} این نتیجه نتایج $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ و $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ را به دقت منعکس می‌کند.

• همه این نظریه‌ها یک محدودیت تقارنی خطی بر روی فضاهای کرنل را استخراج می‌کنند. در مورد $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ و $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ ، کرنل‌ها اساساً توابع اسکالار روی فضاهای خارج‌قسمتی مضاعف $H_{\mathbb{C}^{\mathcal{I}}} / \mathcal{I} / H_{\mathbb{C}^{\mathcal{I}}}$ هستند (با فرض همبستگی‌ها، برای کانولوشن‌ها $H_{\mathbb{C}^{\mathcal{I}}}$ جایجا می‌شوند؛ به ادامه مراجعه کنید). کرنل‌های $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ و در نظریه ما، یک محدودیت راهبری‌پذیری را برآورده می‌کنند که به انتخاب خاص انواع میدان $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ و $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ بستگی دارد. توجه داشته باشید که ضریب دترمینان در محدودیت G -راهبری‌پذیری $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ وجود ندارد زیرا نویسنده‌گان به گروههای یکنواخت محدود می‌شوند. این ضریب در محدودیت کرنل توسط $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ ظاهر می‌شود.

• در حالی که $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ و $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ کرنل‌ها را بلافصله روی گروه یا فضای همگن توصیف می‌کنند، $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ و کانولوشن‌های GM ما کرنل‌ها را روی فضاهای مimas تعریف کرده و متعاقباً آنها را از طریق نگاشت نمایی به فضاهای همگن تصویر می‌کنند. این رویکردها به طور کلی معادل نیستند، به عنوان مثال زیرا نگاشت نمایی روی یک منیفلد ناهمبند، یک‌به‌یک نیست. روی فضاهای اقلیدسی، هر دو رویکرد بهوضوح معادل هستند؛ به بخش ۳.۹ مراجعه کنید. قضیه ما ۱۱.۱ در بخش ۲.۱۱ علاوه بر این، این شکاف را برای کرنل‌های کروی با ارائه یک ایزومنورفیسم بین کرنل‌های دو رویکرد، پر می‌کند. در عمل، ناسازگاری عمومی بی‌اهمیت است زیرا کرنل‌های شبکه‌های کانولوشنی معمولاً دارای تکیه‌گاه فشرده در داخل شاعع اثر کیویته نگاشت نمایی هستند.

ما در ادامه به تفصیل به نظریه‌های $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ و $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ می‌پرداخت. به عنوان یک آمادگی، ابتدا به بحث در مورد فضاهای همگن، کانولوشن‌های گروهی و همبستگی‌های گروهی می‌پردازیم. برای یک مرور جایگزین از این موضوع، خواننده را به $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ ارجاع می‌دهیم. ما علاوه بر این می‌خواهیم به کار $\mathbb{C}^{\mathcal{I}}$ اشاره کنیم، که همچنین کانولوشن‌ها را روی فضاهای همگن تعریف می‌کند. این کار در این بخش با جزئیات بیشتری پوشش داده نشده است زیرا مدل‌های آنها $\{e\} = H_{\mathbb{C}^{\mathcal{I}}}$ را فرض می‌کنند، یعنی کرنل‌های کانولوشن آنها نامحدود هستند و همیشه سیگنال ورودی را به یک میدان اسکالار روی \mathcal{I} ارتقا می‌دهند.

۱. ملاحظات عمومی در مورد فضاهای همگن، کانولوشن‌های گروهی و همبستگی‌های گروهی

فضاهای همگن: فرض کنید \mathcal{I} یک گروه باشد که بر روی یک فضای X عمل می‌کند. گفته می‌شود این فضا همگن است اگر عمل گروه متعدد باشد، یعنی اگر هر دو نقطه $p, q \in X$ با عمل \mathcal{I} به هم مرتبط باشند. در معادلات، X همگن است اگر و تنها اگر برای هر $p, q \in X$ عضو \mathcal{I} وجود داشته باشد به طوری که $q = \phi(p)$. توجه داشته باشید که عمل بر روی X لزوماً بدون نقطه ثابت نیست، یعنی هر نقطه $p \in X$ دارای یک زیرگروه پایدارساز بالقوه غیربدیهی است. می‌توان نشان داد که فضای همگن را می‌توان با فضای خارج‌قسمتی \mathcal{I}/H یکی گرفت که در آن $H = \text{Stab}_p \mathcal{I}/H$ برای یک $p \in X$ است.^{۱۵۷}

از آنجا که هر فضای همگن به عنوان یک خارج‌قسمت به وجود می‌آید، ما در ادامه همیشه یک زیرگروه H از \mathcal{I} را در نظر می‌گیریم. این زیرگروه دارای هم‌دسته‌های چپ است، یعنی زیرمجموعه‌هایی به شکل

$$\phi.H = \{\phi h \mid h \in H\} \quad (593)$$

که اعضای فضای خارج‌قسمتی (همگن)

$$\mathcal{I}/H = \{\phi.H \mid \phi \in \mathcal{I}\}. \quad (594)$$

هستند. یک عمل چپ طبیعی از \mathcal{I} بر روی H با

$$\mathcal{I} \times \mathcal{I}/H \rightarrow \mathcal{I}/H, \quad (\tilde{\phi}, \phi.H) \mapsto \tilde{\phi}\phi.H. \quad (595)$$

^{۱۵۶} نقشه‌های ویژگی چند-کاناله با روی هم قرار دادن چندین تابع از این نوع ساخته می‌شوند. برخلاف مورد میدان‌های ویژگی، کانال‌های منفرد چنین نقشه‌های ویژگی به طور مستقل از یکدیگر تبدیل می‌شوند.

^{۱۵۷} انتخاب‌های دیگر از نقاط تحقیق‌های دیگری از ایزومنورفیسم غیرکانونی $X/\mathcal{I}/H \cong \mathcal{I}/H$ را به دست می‌دهند. هر انتخابی به همان اندازه معتبر است زیرا برای فضاهای همگن $\text{Stab}_p \cong \text{Stab}_q$ است.

داده می‌شود. به راحتی دیده می‌شود که این عمل متعددی است، و \mathcal{I}/H را به یک فضای همگن از \mathcal{I} تبدیل می‌کند. نگاشت خارج‌قسمتی کانونی

$$q_{\mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/H, \quad \phi \mapsto \phi.H \quad (596)$$

\mathcal{I} را به یک کلاف اصلی H روی \mathcal{I}/H تبدیل می‌کند. تعاریف مشابهی را می‌توان برای همدسته‌های راست

$$H.\phi \in H \setminus \mathcal{I}. \quad (597)$$

و همدسته‌های مضاعف

$$\tilde{H}.\phi.H \in \tilde{H} \setminus \mathcal{I}/H \quad (598)$$

و فضاهای خارج‌قسمتی مربوطه آنها انجام داد.

یک ویژگی جهانی از نگاشتهای خارج‌قسمتی $q_{\mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}}$ که در بحث ما در ادامه مهم خواهد شد، به شرح زیر است. فرض کنید $f^{\dagger} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته و ناوردای-راست نسبت به H باشد، یعنی تابعی که $f^{\dagger}(\phi h) = f^{\dagger}(\phi) h$ برآورده می‌کند. آنگاه یک تابع پیوسته یکتا $f : \mathcal{I}/H \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $f^{\dagger} = f \circ q_{\mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}}$ است. بر عکس، می‌توان هر نگاشت پیوسته $f : \mathcal{I}/H \rightarrow \mathbb{R}$ را به طور یکتا به یک نگاشت ناوردای-راست نسبت به H به صورت $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{I}$ ارتقا داد، که توسعه f^{\dagger} برای تعمیم کانولوشن‌های گروهی به فضاهای همگن استفاده می‌شود. رابطه بین هر دو تابع در نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} & & \\ q_{\mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}} \downarrow & \searrow !f^{\dagger} := f \circ q_{\mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}} & \\ \mathcal{I}/H & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{array} \quad (599)$$

یک ساختار مشابه را می‌توان به وضوح برای فضاهای خارج‌قسمتی راست $H \setminus \mathcal{I}$ و نگاشتهای ناوردای-چپ نسبت به H انجام داد. نمودار جابجایی زیر مورد فضاهای خارج‌قسمتی مضاعف می‌باشد. $\tilde{H} \setminus \mathcal{I}/H$ و نگاشتهای f^{\dagger} را که همزمان ناوردای-چپ نسبت به \tilde{H} و ناوردای-راست نسبت به H هستند، به تصویر می‌کشد، یعنی در $(\tilde{h}\phi h)^{\dagger} = f^{\dagger}(\phi) h$ و $h \in H, \phi \in \mathcal{I}, \tilde{h} \in \tilde{H}$ برای هر \tilde{h} صدق می‌کنند:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} & & \\ q_{\tilde{H} \setminus \mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}} \downarrow & \searrow !f^{\dagger} := f \circ q_{\tilde{H} \setminus \mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}} & \\ \tilde{H} \setminus \mathcal{I}/H & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{array} \quad (600)$$

کانولوشن‌های گروهی و همبستگی‌های گروهی: کانولوشن‌ها به طور طبیعی از فضاهای اقلیدسی (یا گروه‌های انتقال) به گروه‌های فشرده محلی دلخواه تعمیم داده می‌شوند. فرض کنید \mathcal{I} یک گروه فشرده محلی باشد و $d\zeta$ یک اندازه هار چپ روی \mathcal{I} باشد. کانولوشن گروهی $(f *_{\mathcal{I}} \kappa) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ از دو تابع انتگرال‌پذیر $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ و $\kappa : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ سپس با عبارات معادل زیر، که از [۹] گرفته شده‌اند، تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} (f *_{\mathcal{I}} \kappa)(\phi) &:= \int_{\mathcal{I}} f(\zeta) \kappa(\zeta^{-1} \phi) d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{I}} f(\phi \zeta) \kappa(\zeta^{-1}) d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{I}} f(\zeta^{-1}) \kappa(\zeta \phi) \Delta(\zeta^{-1}) d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{I}} f(\phi \zeta^{-1}) \kappa(\zeta) \Delta(\zeta^{-1}) d\zeta, \end{aligned} \quad (601)$$

همومورفیسم گروهی $(\mathbb{R}_{>..}^+ *_{\mathcal{I}} \Delta) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_{>..}^+$ که در دو عبارت آخر ظاهر می‌شود، تابع مدولار \mathcal{I} است. [۹] کانولوشن‌های گروهی را مانند خط آخر تعریف می‌کنند، با این حال، بدون تابع مدولار، این معتبر است زیرا نویسنده‌گان گروه‌های فشرده را فرض می‌کنند، که یکنواخت هستند، یعنی $\Delta(\phi) = 1$ برای هر $\phi \in \mathcal{I}$.

مرتبط با کانولوشن‌های گروهی، همبستگی‌های گروهی هستند

$$(f *_{\mathcal{I}} \kappa)(\phi) := \langle f, \phi \cdot \kappa \rangle_{L^1(\mathcal{I})} = \int_{\mathcal{I}} f(\zeta) \kappa(\phi^{-1}\zeta) d\zeta, \quad (602)$$

که به عنوان حاصلضرب داخلی یک تابع f با یک کرنل جایجا شده $\phi \cdot \kappa$ تعریف می‌شوند. یک مقایسه با معادله (۱۶) نشان می‌دهد که کانولوشن‌های گروهی و همبستگی‌های گروهی تا یک وارونگی آرگومان کرنل، معادل هستند، یعنی

$$(f *_{\mathcal{I}} \kappa) = (f *_{\mathcal{I}} [\kappa \circ (\cdot)^{-1}]). \quad (603)$$

در حالی که $[\cdot]$ کانولوشن‌های گروهی (تعمیم‌یافته) را در نظر می‌گیرند، $[\cdot] \circ \kappa$ همبستگی‌ها را فرض می‌کنند \square برای تطبیق نظریه‌ها باید آرگومان‌های کرنل را وارون کرد.

کانولوشن‌های گروهی و همبستگی‌های گروهی بنا به تعریف نسبت به عمل‌های چپ $(\alpha \cdot f)(\phi) = f(\alpha^{-1}\phi)$ از اعضای گروه $\alpha \in \mathcal{I}$ بر روی عامل اول هموردا هستند. برای مورد کانولوشن‌ها، این با

$$\begin{aligned} ([\alpha \cdot f] *_{\mathcal{I}} \kappa)(\phi) &= \int_{\mathcal{I}} [\alpha \cdot f](\zeta) \kappa(\zeta^{-1}\phi) d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{I}} f(\alpha^{-1}\zeta) \kappa(\zeta^{-1}\phi) d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{I}} f(\tilde{\zeta}) \kappa(\tilde{\zeta}^{-1}\alpha^{-1}\phi) d(\alpha\tilde{\zeta}) \\ &= (f *_{\mathcal{I}} \kappa)(\alpha^{-1}\phi) \\ &= [\alpha \cdot (f *_{\mathcal{I}} \kappa)](\phi), \end{aligned} \quad (604)$$

نشان داده می‌شود، که در آن ما در مرحله سوم $\zeta = \tilde{\zeta} \cdot \alpha^{-1}$ را جایگزین کردیم و از این واقعیت استفاده کردیم که $d\tilde{\zeta} = d\zeta / \alpha$ یک اندازه هار چپ است، یعنی $d\tilde{\zeta} = d(\alpha\zeta)$ را برآورده می‌کند. مورد همبستگی‌ها به طور بدینه از معادله (۶۰۳) نتیجه می‌شود.

اکثر CNN‌های هموردا بر کانولوشن‌های گروهی یا همبستگی‌های گروهی تکیه دارند. به طور خاص، مدل‌های ردیفهای (۱۱)، (۱۲)، (۱۳)، (۲۱)، (۲۴)، (۲۵) و (۳۲) از جدول ۶ که همگی با نمایش‌های منظم برچسب‌گذاری شده‌اند (یا می‌توانند به طور معادل برچسب‌گذاری شوند)، CNN‌های کانولوشنی گروهی هستند. پیش از استفاده از آنها در CNN‌های هموردا، کانولوشن‌های گروهی به طور گسترده در ربانیک \mathbb{R}^3 یا برای تحلیل تصویر \mathbb{R}^3 به کار رفته‌اند. \mathbb{R}^3 نشان دادند که کانولوشن‌های گروهی (یا بهتر بگوییم همبستگی‌ها) به طور طبیعی کانولوشن‌های متغیر را تعمیم می‌دهند. از آنجا که نقشه‌های ویژگی شبکه‌های کانولوشنی شامل چندین کanal هستند، آنها با توابع با مقادیر حقیقی روی \mathcal{I} داده نمی‌شوند بلکه با توابع با مقادیر برداری $\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^C$: $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^C$. کرنل‌ها بر این اساس به عنوان توابع ماتریسی (نامحدود) روی گروه تعریف می‌شوند، یعنی $\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^{C \times C}$ که در ادامه مرور می‌کنیم، چنین شبکه‌های کانولوشنی گروهی را به فضاهای همگن دلخواه تعمیم می‌دهند.

ت. ۲ کانولوشن‌های میدان اسکالار روی فضاهای همگن

ما با شبکه‌های کانولوشنی (یا همبستگی) \mathcal{I} -هموردا روی فضاهای همگن توسط \mathcal{I} شروع می‌کنیم. هر دو نظریه، نقشه‌های ویژگی را به عنوان میدان‌های اسکالار روی فضاهای همگن تعریف می‌کنند، یعنی هر کanal با یک تابع با مقادیر حقیقی

$$f : \mathcal{I}/H \rightarrow \mathbb{R}. \quad (605)$$

داده می‌شود. کanal‌های منفرد به طور مستقل تحت عمل گروه تقارن سراسری \mathcal{I} همانطور که با

$$[\tilde{\phi} \cdot f](\phi \cdot H) := f(\tilde{\phi}^{-1} \phi \cdot H) \quad \tilde{\phi} \in H, \quad \phi \cdot H \in \mathcal{I}/H. \quad (606)$$

مشخص شده است، تبدیل می‌شوند.

هر لایه $l = 1, \dots, L$ ممکن است یک زیرگروه متفاوت $\mathcal{I} \leq H_l$ و در نتیجه یک فضای همگن \mathcal{I}/H_l داشته باشد که نقشه‌های ویژگی آن روی آن زندگی می‌کنند. این به عنوان مثال اجازه می‌دهد تا کانولوشن‌های ارتقا دهنده از کره $S^3 \cong SO(3)/SO(2)$ به منیفلد گروه $SO(3)/\{e\}$ را با انتخاب به ترتیب زیرگروههای $SO(2)$ و $\{e\}$ مدل‌سازی کنیم. انتخاب‌های زیرگروهها به نوعی با انتخاب‌های نمایش‌های گروهی در نظریه ما مطابقت دارند، که در ادامه بیشتر توضیح خواهیم داد.

نتایج این دو مقاله تا حد زیادی معادل هستند، با این حال، \mathcal{I} گروه‌های فشرده و کانولوشن‌ها را در نظر می‌گیرند در حالی که \mathcal{I} فرض می‌کند \mathcal{I} یک گروه لی است و از همبستگی‌ها استفاده می‌کند.

؟ [به طور خلاصه، ؟ [عمومی ترین نگاشت‌های خطی $\mathcal{I}/H_{\square\square\square}$ -هموردا را بین ویژگی‌های میدان اسکالار روی فضاهای همگن $H_{\square\square\square}$ و $\mathcal{I}/H_{\square\square\square}$ با فرض قانون تبدیل در معادله (٤٠٦) بررسی می‌کنند. آنها اثبات می‌کنند که این عملیات با یک کانولوشن گروهی تعیین‌یافته با یک کرنل

$$\kappa : H_{\square\square\square} \setminus \mathcal{I}/H_{\square\square\square} \rightarrow \mathbb{R} \quad (٤٠٧)$$

روی فضای خارج‌قسمتی مضاعف مشخص شده توسط $H_{\square\square\square}$ و $H_{\square\square\square}$ داده می‌شود. با فرمول‌بندی برای گروه‌های متناهی، همانطور که توسط نویسنده‌گان انجام شده است، نشان داده می‌شود که این عملیات کانولوشن تعیین‌یافته با

$$(f *_{\mathcal{I}/H_{\square\square}} \kappa)(\phi.H_{\square\square\square}) := |H_{\square\square\square}| \sum_{H_{\square\square}\zeta \in H_{\square\square}\mathcal{I}} f(\phi\zeta^{-1}.H_{\square\square\square}) \kappa(H_{\square\square\square}.\zeta.H_{\square\square\square}). \quad (٤٠٨)$$

داده می‌شود. یک مقایسه با خط آخر معادله (١٦) نشان می‌دهد که این عملیات واقعاً به شدت به کانولوشن‌های گروهی مرتبط است □ تابع مدولار Δ حذف می‌شود زیرا \mathcal{I} فشرده و در نتیجه یکنواخت است. کانولوشن تعیین‌یافته در واقع معادل یک کانولوشن گروهی

$$(f *_{\mathcal{I}/H_{\square\square}} \kappa)(\phi.H_{\square\square\square}) = (f^\dagger *_{\mathcal{I}} \kappa^\dagger)(\phi) \quad (٤٠٩)$$

با ویژگی‌ها و کرنل‌هایی است که مطابق با نمودارهای معادلات (٥٩٩) و (٤٠٠) ارتقا یافته‌اند. توجه داشته باشید که کرنل کانولوشن روی $H_{\square\square\square} \setminus \mathcal{I}/H_{\square\square\square}$ متناظر با یک کرنل همبستگی روی $H_{\square\square\square} \setminus \mathcal{I}/H_{\square\square\square}$ است زیرا کانولوشن‌ها و همبستگی‌ها طبق معادله (٤٠٣) با یک وارونگی آرگومان کرنل به هم مرتبط هستند. بنابراین می‌توان کرنل‌های ؟ را به عنوان کرنل‌های همبستگی ناوردای-چپ نسبت به $H_{\square\square\square}$ روی فضای $\mathcal{I}/H_{\square\square\square}$ در نظر گرفت.

برای ارائه یک شهود در مورد این نتایج، به مثال CNN کروی خود که در بالا ذکر شد، باز می‌گردیم. بنابراین فرض کنید $(\mathcal{I}/H_{\square\square\square}) = \text{SO}(٣)$ و $H_{\square\square\square} = \{e\}$. این تنظیم، کانولوشن‌های ارتقا دهنده از کره S^2 -بعدی را به منيفلد گروه دوران $(\mathcal{I}/H_{\square\square\square}) = \text{SO}(٣) \setminus \{e\} \cong \text{SO}(٢)$ توصیف می‌کند. با در نظر گرفتن همبستگی‌ها به جای کانولوشن‌ها، کرنل‌ها توابع با مقادیر حقیقی روی $H_{\square\square\square} \setminus \mathcal{I}/H_{\square\square\square} = \{e\} \setminus \text{SO}(٢) \cong S^2$ هستند. اگر به جای آن $(\mathcal{I}/H_{\square\square\square}) = \text{SO}(٢)$ را قرار دهیم، کانولوشن از میدان‌های اسکالار روی کره S^2 -بعدی به میدان‌های اسکالار روی کره S^2 -بعدی $\mathcal{I}/H_{\square\square\square} = \text{SO}(٢) \setminus \text{SO}(٣)$ نگاشت می‌دهد. در این حالت، کرنل‌های همبستگی با توابع با مقادیر حقیقی روی $(\mathcal{I}/H_{\square\square\square}) = \text{SO}(٢) \setminus \text{SO}(٣)$ داده می‌شوند. به طور معادل، کرنل‌های همبستگی با توابع ناوردای-چپ نسبت به $(\mathcal{I}/H_{\square\square\square}) = \text{SO}(٢)$ روی S^2 داده می‌شوند، یعنی کرنل‌های ناحیه‌ای همانطور که در شکل ٥٥ به تصویر کشیده شده است. هنگام فرض $H_{\square\square\square} = \{e\}$ و $\mathcal{I}/H_{\square\square\square} = \text{SO}(٢)$ ، ما $H_{\square\square\square} \setminus \mathcal{I}/H_{\square\square\square} \cong \text{SO}(٣) \setminus \text{SO}(٢)$ را داریم، که متناظر با کانولوشن‌های گروهی متعارف (یا همبستگی‌ها) است. این نتایج با بحث ما در بخش ٢.١١ مطابقت دارد.

برای کامل بودن، ما اشاره می‌کنیم که ؟ نتایج خود را علاوه بر این از یک دیدگاه نظریه نمایشی، یعنی با ویژگی‌ها و کرنل‌ها در فضای فوریه، توضیح می‌دهند. این واقعیت که ویژگی‌ها و کرنل‌ها روی فضاهای خارج‌قسمتی زندگی می‌کنند، در این فرمول‌بندی در الگوهای پراکنده‌گی ضرایب فوریه منعکس می‌شود.

؟ [به جای در نظر گرفتن گروه‌های فشرده، ؟ [فرض می‌کند \mathcal{I} یک گروه لی عمومی است. نقشه‌های ویژگی لایه \mathcal{I} به عنوان توابع انتگرال‌پذیر مربع با مقادیر حقیقی در $L^*(\mathcal{I}/H_{\square\square})$ تعریف می‌شوند که هنگام عمل \mathcal{I} بر روی آنها، مطابق با معادله (٤٠٦) تبدیل می‌شوند.

؟ [لایه‌های شبکه‌های کانولوشنی (یا بهتر بگوییم همبستگی) خود را به عنوان عملگرهای خطی کران‌دار

$$\mathfrak{K} : L^*(\mathcal{I}/H_{\square\square\square}) \rightarrow L^*(\mathcal{I}/H_{\square\square\square}) \quad (٤١٠)$$

بین نقشه‌های ویژگی روی فضاهای همگن $\mathcal{I}/H_{\square\square\square}$ و $\mathcal{I}/H_{\square\square\square}$ مدل می‌کند. چنین عملگرهایی به طور کلی با عملگرهای انتگرالی به شکل

$$[\mathfrak{K}f](\phi.H_{\square\square\square}) = \int_{\mathcal{I}/H_{\square\square\square}} \widehat{\kappa}(\phi.H_{\square\square\square}, \zeta.H_{\square\square\square}) f(\zeta.H_{\square\square\square}) d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square\square}}, \quad (٤١١)$$

داده می‌شوند، که در آن $d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square\square}}$ یک اندازه رادون روی $\mathcal{I}/H_{\square\square\square}$ و

$$\widehat{\kappa} : \mathcal{I}/H_{\square\square\square} \times \mathcal{I}/H_{\square\square\square} \rightarrow \mathbb{R} \quad (٤١٢)$$

یک کرنل $2\text{-آرگومانی انتگرال‌پذیر}$ است.

الزام بر روی عملگر برای هموردا بودن، یعنی،

$$\mathfrak{K}(\phi.f) = \phi.\mathfrak{K}(f) \quad \forall \phi \in \mathcal{I}, f \in L^*(\mathcal{I}/H_{\square\square\square}), \quad (٤١٣)$$

نشان داده می‌شود که دلالت بر این دارد که کرنل 2-آرگومانی به یک کرنل تک‌آرگومانی کاهاش می‌یابد

$$\widehat{\kappa}(\phi.H_{\square\square\square}, \zeta.H_{\square\square\square}) = \frac{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square\square}}(\phi^{-1}\zeta.H_{\square\square\square})}{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square\square}}(\zeta.H_{\square\square\square})} \kappa(\phi^{-1}\zeta.H_{\square\square\square}). \quad (٤١٤)$$

عضو گروه $\phi \in \phi.H_{\text{}} \subset \mathcal{I}$ در اینجا یک نماینده دلخواه از همدسته‌ای است که در آن قرار دارد. این کرنل ۱-آرگومانی \square تا یک ضریب مقیاس وابسته به اندازه \square محدود به ناوردایی-چپ نسبت به $H_{\text{}}$ است:

$$\kappa(\zeta.H_{\text{}}) = \frac{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\text{}}}(\xi^{-1}\zeta.H_{\text{}})}{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\text{}}}(\zeta.H_{\text{}})} \kappa(\xi^{-1}\zeta.H_{\text{}}) \quad \forall \zeta.H_{\text{}} \in \mathcal{I}/H_{\text{}}, \xi \in H_{\text{}} \quad (615)$$

توجه داشته باشید که این نتیجه بسیار شبیه به نتیجه \square است زیرا یک کرنل ناوردایی-چپ نسبت به $R_{\text{}}/H_{\text{}}$ روی $\mathcal{I}/H_{\text{}}$ معادل یک عضو $\mathcal{I}/H_{\text{}}$ است (دوباره با فرض کرنل‌های همبستگی به جای کرنل‌های کانولوشن). تفاوت اصلی ضریب مقیاس اضافی است، که ظاهر می‌شود زیرا اندازه رادون $d\mu_{\mathcal{I}/H_{\text{}}}$ لزوماً ناوردایی-چپ نسبت به \mathcal{I} نیست.

یکی از موارد عملی مرتبط، همبستگی‌های گروهی است، که برای آنها $\{e\} = H_{\text{}}$ و $\mathcal{I}/\{e\} = \mathcal{I}$ است. در این حالت $d\mu_{\mathcal{I}}(e) = 1$ یک اندازه هار (ناوردایی) چپ روی \mathcal{I} است، به طوری که ضریب مقیاس حذف می‌شود. مورد مرتبط دیگر، کانولوشن‌های هموردای آفین روی فضاهای اقلیدسی است، یعنی انتخاب‌های $(G, \mathcal{I}) = \text{Aff}(G)$ است. با فرض اینکه $d\mu_{\mathcal{I}/H_{\text{}}} = \mathbb{R}^d$ یک اندازه لیگ روی \mathbb{R}^d باشد و با نشان دادن $\phi = tg \in \mathcal{I}$ اثبات می‌کند که ضریب مقیاس در این حالت با

$$\frac{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\text{}}}((tg)^{-1}x)}{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\text{}}}(x)} = \frac{1}{|\det g|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad (616)$$

داده می‌شود. این دقیقاً همان ضریب دترمینان است که در محدودیت کرنل G -راهبری پذیر ما، معادله (۸۳)، نیز ظاهر می‌شود. از آنجا که $\text{SO}(3)$ یک گروه لی است، مثال‌های CNN کروی که ما پس از بحث در مورد نظریه \square [ارائه دادیم، بدون تغییر اعمال می‌شوند (با فرض اندازه استاندارد ناوردای-چپ روی S^3)].

\square کرنل‌ها را در شباهت نزدیک با کانولوشن‌های GM ما روی فضاهای مماس تعریف کرده و آنها را متعاقباً از طریق نگاشته‌های نمایی به فضاهای همگن تعمیر می‌کند. کرنل‌ها روی فضاهای مماس در اینجا از طریق اسپلاین- \square -مدل سازی می‌شوند. یک تفاوت این است که \square نیازی به در نظر گرفتن انتقال دهنده‌های موازی ندارد زیرا او نقشه‌های ویژگی اسکالار را روی فضاهای همگن تفرض می‌کند.

ارتباط با کانولوشن‌های \square : به دلیل فرمول‌بندی کاملاً متفاوت، بالاگهله مشخص نیست که نتایج \square و \square چگونه با نظریه ما مرتبط هستند. به جای در نظر گرفتن فضاهای خارج‌قسمتی مختلف I/H_l در هر لایه l ما یک منیفلد ثابت M را در نظر می‌گیریم. برای دیدن اینکه چگونه هر دو رویکرد به هم متصل می‌شوند، یک زیرگروه دیگر G را فرض کنید به طوری که $G \leq I \leq H_l$ برای همه لایه‌ها $l = 1, \dots, L$ و $M := G/H_l$ یک منیفلد باشد، را برآورده کند. ویژگی‌های اسکالار روی I/H_l را می‌توان در این حالت به عنوان میدان‌های ویژگی همبسته G روی M در نظر گرفت که مطابق با نمایش‌های خارج‌قسمتی $\rho_{\square \square \square}^{G/H_l}$ شوند. برای دیدن این، توجه داشته باشید که عمل گروه در معادله (۶۰۶) چیزی جز نمایش القایی $\text{Ind}_{H_l}^{\mathcal{I}} \rho_{\square \square \square}^{H_l}$ از نمایش بدیهی H_l نیست، که قانون تبدیل میدان‌های اسکالار روی I/H_l را توصیف می‌کند. این نمایش را می‌توان از طریق القا در مراحل (به \square مراجعه کنید) به

$$\text{Ind}_{H_l}^{\mathcal{I}} \rho_{\square \square \square}^{H_l} = \text{Ind}_G^{\mathcal{I}} \text{Ind}_{H_l}^G \rho_{\square \square \square}^{H_l} = \text{Ind}_G^{\mathcal{I}} \rho_{\square \square \square}^{G/H_l}, \quad (617)$$

تجزیه کرد، یعنی به القای نمایش خارج‌قسمتی $\rho_{\square \square \square}^{G/H_l}$ از G به \mathcal{I} بنا بر این توابع با مقادیر حقیقی روی I/H_l معادل میدان‌های $\square \square \square$ روی \mathcal{I}/G هستند.

موارد خاص جالب $G = H_l$ و $\mathcal{I} = G$ هستند. برای اولی، که میدان‌های اسکالار را روی $M = G/H_l = \{e\}$ را داریم، که میدان‌های اسکالار را روی $G/H_l = \rho_{\square \square \square}^{G/H_l}$ نمایش منظم است، که متناظر با کانولوشن‌های گروهی متعارف است. این بینش‌ها دلالت بر این دارند که نظریه \square تمام مدل‌های جدول ۶ را که روی فضاهای همگن از گروه‌های فشرده \mathcal{I} عمل می‌کنند و با نمایش‌های بدیهی، منظم یا خارج‌قسمتی عمومی تر برچسب‌گذاری شده‌اند، توضیح می‌دهد \square اینها اساساً CNN‌های کروی در ردیف‌های (۳۲) و (۳۳) هستند. یک تعمیم جزئی نظریه به گروه‌های فشرده محلی و یکنواخت، علاوه بر این برخی از CNN‌های اقلیدسی هموردای ایزومنتری را توصیف می‌کند. از آنجا که \square گروه‌های لی دلخواه را فرض می‌کند، مدل‌های او علاوه بر این CNN‌های G -Aff هموداد را در جدول ۶ که با نمایش‌های بدیهی، منظم یا خارج‌قسمتی عمومی تر برچسب‌گذاری شده‌اند، پوشش می‌دهند. آنها به طور خاص CNN‌های اقلیدسی هموردای مقیاسی ($G = \mathcal{S}$) را که برای آنها ضریب دترمینان $|\det g|$ غیربدیهی است، پوشش می‌دهند.

انواع دیگر میدان‌های ویژگی و فضاهای غیرهمگن مانند فضاهای اقلیدسی سوراخ دار $\{\cdot\}_{n,s}$ ، بیست وجهی، سطوح عمومی و نوار موبیوس پوشش داده نمی‌شوند.

ث میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی \square اثبات‌ها

در این پیوست، ما اثبات‌هایی برای قضایای ۸.۱۲ و ۸.۱۴ ارائه می‌دهیم.

ث.۱ اثبات قضیه ۸.۱۲ □ ایزومورفیسم بین میدان‌های کرنل ناوردای ایزومتری و میدان‌های کرنل نماینده خارج قسمتی

قضیه ۸.۱۲ ادعا می‌کند که فضاهای $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}$ از میدان‌های کرنل ناوردای ایزومتری در معادله (۳۱۴) و $r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$ از میدان‌های کرنل نماینده خارج قسمتی در معادله (۳۵۴) با یکدیگر ایزومورف هستند و این ایزومورفیسم با ارتقای Λ داده می‌شود که وارون آن Λ^{-1} تحدید به است. در اینجا ما اثباتی برای این گزاره ارائه می‌دهیم که شامل نشان دادن این است که ۱) Λ^{-1} واقعًا یک وارون برای Λ است، ۲) ویژگی‌های تعریف‌کننده $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}$ و $\mathcal{K}_{\text{میدان}}^{\mathcal{I}}$ پس از ارتقا و تحدید برآورده می‌شوند و ۳) ساختارها به انتخاب‌های دلخواه بستگی ندارند.

۱) Λ^{-1} در معادله (۳۵۶) یک وارون خوش‌تعریف برای Λ در معادله (۳۵۵) است:

$$10) \quad \text{یک وارون راست برای } \Lambda \text{ است: } \Lambda \circ \Lambda^{-1} = \text{id}_{\mathcal{K}_{\text{میدان}}^{\mathcal{I}}}$$

این ادعا برای هر $v \in TM$ و $\mathcal{K} \in \mathcal{K}_{\text{میدان}}^{\mathcal{I}}$ از

$$\begin{aligned} [\Lambda \circ \Lambda^{-1}(\mathcal{K})](v) &= [\Lambda(\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)})](v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{K} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \mathcal{K} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \mathcal{K}(v), \end{aligned} \quad (618)$$

نتیجه می‌شود، که در آن ناوردایی (هموردایی) میدان کرنل در معادله (۳۱۵) اجازه داد تا ترتیب عمل ایزومتری و ارزیابی میدان کرنل را در مرحله ماقبل آخر جابجا کنیم.

۲) $\Lambda^{-1} \circ \Lambda = \text{id}_{\mathcal{K}_{\text{میدان}}^{\mathcal{I}}}$ ، یعنی Λ^{-1} یک وارون چپ برای Λ است:

فرض کنید $w \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$ باشد. توجه داشته باشید که $w = r_{TM} Q_{TM}(w) = w$ یک نماینده مدار است. علاوه بر این، از آنجا که $w = \Phi_{r_{TM}}(w)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(w) = \Phi_{r_{TM}}(w)_{*,TM}(w)$ به $\Phi_{r_{TM}}(w) \in \text{Stab}_w$ می‌شود که $\Phi_{r_{TM}}(w)_{*,TM}(w) = \Phi_{r_{TM}}(w)$. در مجموع، این ادعا را اثبات می‌کند:

$$\begin{aligned} [\Lambda^{-1} \circ \Lambda(\mathcal{Q})](w) &= \Lambda(\mathcal{Q})|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)}(w) \\ &= \Lambda(\mathcal{Q})(w) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(w)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(w) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(w)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q}(w) \\ &= \mathcal{Q}(w) \end{aligned} \quad (619)$$

۳) ویژگی‌های تعریف‌کننده $\mathcal{K}_{\text{میدان}}^{\mathcal{I}}$ و $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}$ پس از ارتقا و تحدید برآورده می‌شوند:

۲۰) $\mathcal{Q} \in \mathcal{K}_{\text{میدان}}^{\mathcal{I}}$ برای هر $v \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$ ، یعنی ارتقای $\Lambda(\mathcal{Q}) = \pi_{TM} \circ \Lambda(\mathcal{Q}) = \pi_{TM}(\mathcal{Q})$ یک M -مورفیسم کلاف است: برای هر $v \in TM$ و $\mathcal{Q} \in \mathcal{K}_{\text{میدان}}^{\mathcal{I}}$ این ادعا از

$$\begin{aligned} [\pi_{TM} \Lambda(\mathcal{Q})](v) &= \pi_{TM} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v) \pi_{TM} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v) \pi_{TM} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v) r_M \pi_{\mathcal{I}\setminus TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v) r_M Q_M \pi_{TM}(v) \\ &= \pi_{TM}(v), \end{aligned} \quad (620)$$

نتیجه می‌شود، که در آن مرحله آخر از معادله (۳۴۸) استفاده شده است.

: ۲۱) $\mathcal{K} \in \mathcal{K}_{\text{میدان}}^{\mathcal{I}}$ برای هر $v \in r_M(\mathcal{I}\setminus M)$ یک $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$ یعنی $\pi_{TM} \circ \Lambda^{-1}(\mathcal{K}) = \pi_{TM}$ کلاف است:

این ویژگی بلافاصله از ویژگی متناظر \mathcal{K} پس از تحدید به $\Lambda^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M))$ می‌شود. برای هر $w \in r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) \subseteq \pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M))$

$$\begin{aligned}\pi_{\mathbb{M}}[\Lambda^{-1}(\mathcal{K})](w) &= \pi_{\mathbb{M}}\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)}(w) \\ &= \pi_{\mathbb{M}}\mathcal{K}(w) \\ &= \pi_{TM}(w)\end{aligned}\tag{۶۲۱}$$

فرض کنید $\phi_{*,TM}^{-1}v \in TM$ باشد. به دلیل ناوردایی نگاشت خارج‌قسمتی Q_{TM} تحت ایزومنتری‌ها، ما $Q_{TM}(\phi_{*,TM}^{-1}v)$ را داریم. علاوه بر این توجه داشته باشید که:

$$\begin{aligned}&[\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1} \phi \Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)]_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= [\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1} \phi \Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)]_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(\phi_{*,TM}^{-1}v) \\ &= [\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1} \phi]_{*,TM} \phi_{*,TM}^{-1} v \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM}^{-1} v \\ &= r_{TM} Q_{TM}(v)\end{aligned}\tag{۶۲۲}$$

نتیجه می‌دهد

$$[\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1} \phi \Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)] \in \text{Stab}_{r_{TM} Q_{TM}(v)},\tag{۶۲۳}$$

که از طریق محدودیت پایدارساز در معادله (۳۵۴) منجر به

$$[\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1} \phi \Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)]_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) = \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v).\tag{۶۲۴}$$

می‌شود. با کنار هم گذاشتن این مشاهدات، ادعا اثبات می‌شود:

$$\begin{aligned}\phi_{*,TM} \Lambda(\mathcal{Q}) \phi_{*,TM}^{-1}(v) &= \phi_{*,TM} \Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(\phi_{*,TM}^{-1}v) \\ &= \phi_{*,TM} \Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= [\Phi_{r_{TM}}(v) \Phi_{r_{TM}}(v)^{-1}]_{*,\text{Hom}} \phi_{*,TM} \Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} [\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1} \phi \Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)]_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Lambda(\mathcal{Q})\end{aligned}\tag{۶۲۵}$$

برآورده می‌کند: این گزاره به راحتی اثبات می‌شود زیرا ویژگی‌های ناوردایی (هموردایی) \mathcal{K} به تحدید آن $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$ متنقل می‌شوند. ما برای $w \in r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)$

این گزاره به راحتی اثبات می‌شود زیرا ویژگی‌های ناوردایی (هموردایی) \mathcal{K} به تحدید آن $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$ متنقل می‌شوند. ما برای $w \in r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)$

$$\begin{aligned}\xi_{*,TM} [\Lambda^{-1}(\mathcal{K})](w) &= \xi_{*,TM} \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)}(w) \\ &= \xi_{*,TM} \mathcal{K}(w) \\ &= \mathcal{K}(\xi_{*,TM} w) \\ &= \mathcal{K}(w) \\ &= \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)}(w) \\ &= [\Lambda^{-1}(\mathcal{K})](w)\end{aligned}\tag{۶۲۶}$$

(۳) تمام ساختارها و اثبات‌ها مستقل از انتخاب خاص $\Phi_{r_{TM}}$ هستند:

تعريف

$$\Phi_{r_{TM}} : TM \rightarrow \mathcal{I} \quad \text{برای هر } v \in TM \quad \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = v \quad (627)$$

از معادله (۳۴۷) تا ضرب راست $\Phi_{r_{TM}}$ در هر

$$\xi_{r_{TM}} : TM \rightarrow \mathcal{I} \quad \text{برای هر } v \in TM \quad \xi_{r_{TM}}(v) \in \text{Stab}_{r_{TM} Q_{TM}(v)} \quad (628)$$

یکتا است، زیرا بهوضوح $\Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} \xi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = v$ همانطور که در پاورقی $\Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = v$ استدلال شد، این تمام درجات آزادی را در تعريف ایزومتری‌های بازاری پوشش می‌دهد. از محدودیت پایدارساز در معادله (۳۵۴) نتیجه می‌شود که $\xi_{r_{TM}}(v)_{*,Hom} Q_{r_{TM}} Q_{TM}(v) = Q_{r_{TM}} Q_{TM}(v)$ به طوری که ارتقای Λ نسبت به $\Phi_{r_{TM}}(v)_{*,Hom} Q_{r_{TM}} Q_{TM}(v)$ ناوردان نیست: ابهام $\Phi_{r_{TM}}(v)_{*,Hom} Q_{r_{TM}} Q_{TM}(v)$ دیده می‌شود:

$$\begin{aligned} \Lambda(Q) &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,Hom} Q_{r_{TM}} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,Hom} \xi_{r_{TM}}(v)_{*,Hom} Q_{r_{TM}} Q_{TM}(v) \end{aligned} \quad (629)$$

به جز تعريف ایزومورفیسم ارتقا، $\Phi_{r_{TM}}$ فقط (در یک زمینه کمی متفاوت) در مرحله (۲۰) استفاده می‌شود، که در آن ابهام با استدلال‌های مشابه حذف می‌شود.

در مجموع، این مراحل اثبات می‌کند که $\Lambda : \mathcal{K}_{\text{همگن}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\text{همگن}}^{\mathcal{I}}$ یک ایزومورفیسم است.

ث. ۲ اثبات قضیه ۸.۱۴ همارزی تبدیلات میدان هموردا و کانولوشن‌ها روی فضاهای همگن

برای حفظ یک نمای کلی بهتر، ما اثبات را به دو بخش تقسیم می‌کنیم و ادعاهای مطرح شده در گزاره اول و دوم قضیه ۸.۱۴ را به ترتیب اثبات می‌کنیم.

بخش (۱) ساخت، و (۲) تضمین می‌کند: فرض کنید $r \in M$ یک نقطه نماینده دلخواه باشد و بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید $\psi_{GM,r}^{\tilde{A}}$ هر پیمانه ایزومتریک در r باشد. ما قرار می‌دهیم

$$H := \psi_{GM,r}^{\tilde{A}} \text{Stab}_r(\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}, \quad (630)$$

که فقط یک نمایش خاص از Stab_r نسبت به مختصاتی سازی انتخاب شده است. از آنجا که نگاشتهای پیمانه ایزومورفیسم هستند، ما یک ایزومورفیسم بین این دو گروه به دست می‌آوریم:

$$\alpha : \text{Stab}_r \rightarrow H, \quad \xi \rightarrow \psi_{GM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1} =: h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r) \quad (631)$$

از آنجا که Stab_r قضیه ۸.۳ تضمین می‌کند که $h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)$ برای هر $\xi \in \text{Stab}_p$ عضوی از G است و بنابراین $H \leq G$. ما علاوه بر این داریم که با محاسبه زیر دیده می‌شود، که برای هر $v, w \in \mathbb{R}^d$ برقار است:

$$\begin{aligned} \langle h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r) \cdot v, h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r) \cdot w \rangle &\stackrel{(1)}{=} \langle (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}) \cdot v, (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}) \cdot w \rangle \\ &\stackrel{(2)}{=} \langle \psi_{TM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,TM} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} v, \psi_{TM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,TM} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} w \rangle \\ &\stackrel{(3)}{=} \eta_r(\xi_{*,TM} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} v, \xi_{*,TM} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} w) \\ &\stackrel{(4)}{=} \eta_r((\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} v, (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} w) \\ &\stackrel{(5)}{=} \langle v, w \rangle \end{aligned} \quad (632)$$

مرحله (۱) از معادله (۶۳۱) استفاده کرد. در مرحله (۲) ما عبارت آن از طریق $\psi_{TM,r}^{\tilde{A}} h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)$ با عبارت آن از طریق $\psi_{TM,r}^{\tilde{A}}$ یکی گرفتیم، که با جابجاگایی نمودارهای معادلات (۲۹۹) و (۲۸۵) توجیه می‌شود. از آنجا که ما $\psi_{TM,r}^{\tilde{A}}$ را بدون از دست دادن کلیت، ایزومتریک فرض کردیم، می‌توانیم حاصلضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ را در مرحله (۲) با متريک ريماني η_r يك بگيريم. مرحله (۳) از اين استفاده می‌کند که $\xi \in \text{Stab}_r \leq \mathcal{I}$ که ایزومتری است، که بنا به تعريف متريک را حفظ می‌کند؛ به معادله (۲۶۲) مراجعه کنید. در آخر، ما در مرحله (۴) متريک را از طریق پیمانه ایزومتریک به حاصلضرب داخلی را \mathbb{R}^d بولبک می‌کنیم. برابری عبارت اولیه ونهایی نشان می‌دهد که $h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)$ حاصلضرب داخلی را روی \mathbb{R}^d حفظ می‌کند. این دقیقاً الزاماً است که گروه متعامد را تعريف می‌کند. بنابراین ما داریم که $H \leq G$ و به همراه $H \leq d$

$$H \leq G \cap d. \quad (633)$$

این گزاره اول از بخش ۱) قضیه ۸.۱۴ را اثبات می‌کند. ما به گزاره دوم از بخش ۱)، یعنی ساخت HM و Isom_{HM} می‌پردازیم.
با توجه به اینکه Stab_r یک زیرگروه از \mathcal{I} است، ما نگاشت خارج‌قسمتی کانونی

$$q : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/\text{Stab}_r, \quad \phi \rightarrow \phi \cdot \text{Stab}_r \quad (634)$$

را داریم که اعضای گروه $\phi \in \mathcal{I}$ را به همدسته چپ $\{\phi \xi \mid \xi \in \text{Stab}_r\}$ از $\phi \cdot \text{Stab}_r := \{\phi \xi \mid \xi \in \text{Stab}_r\}$ فرستد. به خوبی شناخته شده است که این نگاشت خارج‌قسمتی، \mathcal{I} را به یک کلاف اصلی $\text{Stab}_r/\mathcal{I}$ تبدیل می‌کند، با عمل راست که با ضرب راست $\xi \in \mathcal{I}$ با اعضای پایدارساز داده می‌شود [؟]. علاوه بر این، $\mathcal{I}/\text{Stab}_r$ با فضای همگن M ایزومنور است. ایزومنورفیسم با

$$\beta : \mathcal{I}/\text{Stab}_r \rightarrow M, \quad \phi \cdot \text{Stab}_r \mapsto \phi(r), \quad (635)$$

داده می‌شود، که به وضوح مستقل از انتخاب نماینده همدسته است زیرا نماینده مختلف با اعضای گروهی که r را پایدار می‌کنند، متفاوت هستند. توجه داشته باشید که ما می‌توانستیم به همان اندازه $\mathcal{I}/\text{Stab}_r \rightarrow \mathcal{I}$ را به عنوان یک کلاف اصلی H در نظر بگیریم زیرا تار نوعی فقط تا ایزومنورفیسم تعریف شده است.

با این مقدمات، ما H -ساختار HM را به عنوان یک جایگذاری از کلاف اصلی \mathcal{I} در GM (و در نتیجه در FM) تعریف می‌کنیم. ما نگاشت جایگذاری را به صورت

$$\mathcal{E} : \mathcal{I} \rightarrow GM, \quad \phi \mapsto \phi_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r), \quad (636)$$

تعریف می‌کنیم، که دوباره به انتخاب ما از پیمانه بستگی دارد زیرا $(e) = (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \circ \sigma^{\tilde{A}}(r) = (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}(\phi(r))$. می‌توان آن را به عنوان ردیابی یک کپی جایگذاری شده از GM با پوشفووارد کردن چارچوب $\sigma^{\tilde{A}}(r) \in G_r M$ در نظر گرفت. اینکه این واقعاً یک جایگذاری معتر را می‌دهد، تضمین شده است زیرا عمل ایزومنتری‌ها روی کلاف چارچوب بدون نقطه ثابت است. جایگذاری \mathcal{E} یک نگاشت کلاف روی β است، یعنی $\mathcal{E} \circ q = \pi_{GM}^* \circ \beta$. برای نشان دادن این، کافی است هر دو طرف را بر روی یک عضو دلخواه $\phi \in \mathcal{I}$ اعمال کنیم، که نتیجه یکسانی می‌دهد: علاوه بر این هموردایی-راست است: برای هر $\xi \in \text{Stab}_r$ و هر $r \in \mathcal{I}$ داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\phi \xi) &= \phi_{*,GM} \xi_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) \\ &= \phi_{*,GM} \xi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}(e) \\ &= \phi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \psi_{GM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}(e) \\ &= \phi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1} (h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)) \\ &= \phi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}(e) \triangleleft h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r) \\ &= \mathcal{E}(\phi) \triangleleft h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r), \end{aligned} \quad (637)$$

که در آن ما از هموردایی-راست G (و در نتیجه (H) از $(\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}$) در مرحله ماقبل آخر استفاده کردیم. در مجموع، این ویژگی‌ها نشان می‌دهند که \mathcal{E} یک نگاشت کلاف اصلی است که نمودار زیر را جابجا می‌کند:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{I} \times \text{Stab}_r & \xrightarrow{\mathcal{E} \times \alpha} & GM \times H & & \\ \blacktriangleleft \downarrow & & \downarrow \triangleleft & & \\ \mathcal{I} & \xleftarrow{\mathcal{E}} & GM & & \\ q \downarrow & & \downarrow \pi_{GM} & & \\ \mathcal{I}/\text{Stab}_r & \xrightarrow{\beta} & M & & \end{array} \quad (638)$$

H -ساختار ادعا شده سپس به عنوان تصویر

$$HM := \mathcal{E}(\mathcal{I}) = \{\phi_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) \mid \phi \in \mathcal{I}\} \quad (639)$$

از \mathcal{E} به همراه عمل راست و نگاشت تصویر محدود شده از GM تعریف می‌شود. از آنجا که جایگذاری‌ها لزوماً یک‌به‌یک هستند، ما به طور خاص داریم که \mathcal{I} و HM به عنوان کلاف‌های اصلی ایزومنور هستند.

به عنوان نکته آخر، ما استدلال می‌کنیم که $\mathcal{I} = \{\theta \in \text{Isom}(M) \mid \theta_{*,GM} HM = HM\}$ منطبق هستند. برابری $\theta_{*,GM} HM = HM$ برای یک $\theta \in \text{Isom}(M)$ داده شده برقرار است اگر $\theta_{*,GM} HM = HM$ هم‌زمان یک زیرمجموعه و یک ابرمجموعه از HM باشد. مورد اول، $\theta_{*,GM} HM \subseteq HM$ نیازمند این است که برای هر عضو $\phi'_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) \in HM$ یک $\theta_{*,GM} \phi'_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) \in \theta_{*,GM} HM$ وجود داشته باشد به طوری که $\theta_{*,GM} \phi'_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) = \phi'_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r)$. از آنجا که عمل ایزومتری‌ها روی کلاف چارچوب بدون نقطه ثابت است، این نیازمند $\theta_{*,GM} = \phi'_{*,GM}^{-1}$ است، که به نوبه خود $\theta = \phi' \phi^{-1}$ را نتیجه می‌دهد. همانطور که به راحتی می‌توان بررسی کرد، مورد دوم منجر به همان الزام می‌شود. هم ϕ' و هم ϕ اعضای \mathcal{I} هستند به طوری که θ باید عضوی از \mathcal{I} باشد. این ادعای

$$\text{Isom}_{HM} = \mathcal{I}. \quad (640)$$

را اثبات می‌کند.

بخش ۲) همارزی تبدیلات میدان کرنل \mathcal{I} -هموردا و کانولوشن‌های \mathcal{I} : برای اثبات گزاره دوم قضیه، ما یک تبدیل میدان کرنل \mathcal{I} -هموردا را روی M می‌سازیم و نشان می‌دهیم که با یک کانولوشن HM معادل است. قضیه ۸.۸ می‌تواند به طور معادل بر حسب یک میدان کرنل‌های نماینده \mathcal{I} -هموردا به میدان‌های کرنل \mathcal{I} -ناوردا نیاز دارد، که طبق قضیه ۸.۱۳ می‌توانند به طور معادل باز کرنل‌های نماینده \mathcal{I} باز کرنل \tilde{Q} باشند. برای مورد یک فضای همگن M فضای خارج‌قسمتی \mathcal{I}/M از یک $\pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I}/M)) \rightarrow \pi_{\mathbb{M}}^{-1}(r_M(\mathcal{I}/M))$ منفرد تشکیل شده است، که ما آن را با $r = r_M(\mathcal{I}/M)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین کل میدان کرنل ناوردا با یک کرنل منفرد $\tilde{Q}|_r = \tilde{Q}$ باشند. این کرنل باید محدودیت پایدارساز $\mathcal{A}_{*,TM}$ را در $T_r M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\mathbb{M},r}, \mathcal{A}_{\mathbb{M},r})$ توصیف می‌شود. این $\tilde{Q} : T_r M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\mathbb{M},r}, \mathcal{A}_{\mathbb{M},r})$ را برآورده کند و از طریق ایزومورفیسم ارتقا $(v) \mapsto \tilde{Q}(v) = \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \tilde{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) = \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \tilde{Q} \Phi_{r_{TM}}(v)^{-1}$ روی M به اشتراک گذاشته می‌شود. همانطور که در ادامه نشان داده می‌شود، کرنل نماینده منفرد با محدودیت Stab_r دقیقاً متناظر با یک کرنل H -راهبری‌پذیر است، در حالی که اشتراک وزن از طریق ایزومورفیسم ارتقای $\hat{\Lambda}$ از قضیه ۸.۱۳ دقیقاً متناظر با اشتراک وزن کانولوشنی در تعریف ۷.۴ است.

برای صریح کردن همارزی محدودیت‌های کرنل، ما کرنل \tilde{Q} را از طریق معادله (۲۴۵) نسبت به همان پیمانه \tilde{A} که قبلاً در نظر گرفته شد، به صورت $\psi_{\mathbb{M},r}^{\tilde{A}} \tilde{Q} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} = K$ بیان می‌کنیم. ضریب حجم چارچوب $|\eta_r^{\tilde{A}}|$ در اینجا حذف می‌شود زیرا ما پیمانه را بدون از دست دادن کلیت، ایزومتریک فرض کردیم. سپس محدودیت پایدارساز نسبت به این پیمانه منجر به

$$\begin{aligned} K &= \psi_{\mathbb{M},r}^{\tilde{A}} \tilde{Q} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \\ &= \psi_{\mathbb{M},r}^{\tilde{A}} \xi_{*,\mathbb{M}} \tilde{Q} \xi_{*,TM}^{-1} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \\ &= \psi_{\mathbb{M},r}^{\tilde{A}} \xi_{*,\mathbb{M}} (\psi_{\mathbb{M},r}^{\tilde{A}})^{-1} K \psi_{TM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,TM}^{-1} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \\ &= \rho_{\mathbb{M}}(h_\xi^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)) K (h_\xi^{\tilde{A}\tilde{A}}(r))^{-1} \\ &= \frac{1}{|\det h_\xi^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)|} \rho_{\mathbb{M}}(h_\xi^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)) K (h_\xi^{\tilde{A}\tilde{A}}(r))^{-1} \end{aligned} \quad (641)$$

برای هر ξ در Stab_r می‌شود. توجه داشته باشید که می‌توانیم ضریب دترمینان را در مرحله آخر اضافه کنیم زیرا $h_\xi^{\tilde{A}\tilde{A}}(r) \in d$ در بالا نشان داده شد. بنابراین ایزومورفیسم بین r و H در معادله (۶۳۱) به ما اجازه می‌دهد تا محدودیت پایدارساز را به عنوان محدودیت H -راهبری‌پذیری

$$K = \frac{1}{|\det h|} \rho_{\mathbb{M}}(h) \circ K \circ h^{-1} \quad \forall h \in H. \quad (642)$$

روی کرنل‌های الگوی یک کانولوشن HM بازنویسی کنیم.^{۱۵۸}

از آنجا که $d \in G \cap H$, ضریب دترمینان همیشه حذف می‌شود و بنابراین می‌توان آن را نادیده گرفت.^{۱۵۹}

آنچه باقی می‌ماند نشان دادن هم‌ارزی دو روش اشتراک وزن از طریق $\widehat{\Lambda}$ که از طریق پیمانه \tilde{A} بر حسب K بیان می‌شود، به صورت

$$\begin{aligned}\widehat{\Lambda}(\widehat{Q})(v) &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \widehat{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \widehat{Q} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM}^{-1}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} (\psi_{\square\Box\Box,r}^{\tilde{A}})^{-1} \psi_{\square\Box\Box,r}^{\tilde{A}} \widehat{Q} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \psi_{TM,r}^{\tilde{A}} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM}^{-1}(v) \\ &= \left(\psi_{\square\Box\Box,r}^{\tilde{A}} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}}^{-1} \right)^{-1} K \left(\psi_{TM,r}^{\tilde{A}} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM}^{-1} \right)(v).\end{aligned}\quad (643)$$

خوانده می‌شود. خط آخر در حال حاضر بسیار شبیه به تعریف میدان‌های کرنل کانولوشنی HM در تعریف ۷.۴ است. برای اثبات هم‌ارزی آنها، باید نشان دهیم (۱) که پیمانه‌های القا شده توسط ایزوومتری $\psi_{\square\Box\Box,r}^{\tilde{A}} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}}^{-1}$ و $\psi_{TM,r}^{\tilde{A}}$ در (v) با پیمانه‌های اصلی $\psi_{TM,r}^{\tilde{A}}$ سازگار هستند و (۲) که پیمانه‌های القا شده متناظر با چارچوب‌های مرجع با حجم واحد هستند (برای توضیح ضریب حجم چارچوب H گم شده در معادله (۶۴۳) بروی نکته اول، توجه داشته باشید که هم‌دامنه ایزوومتری بازسازی $\Phi_{r_{TM}} : TM \rightarrow \mathcal{I}$ با معادله (۶۴۰) با $\Phi_{r_{TM}}$ منطبق است. بنابراین قضیه ۸.۳ تأیید می‌کند که این پیمانه‌های القا شده با هر H -اطلس از HM سازگار هستند. نکته دوم بلافاصله نتیجه می‌شود زیرا $d \leq H$ (یا زیرا (۱) یک ایزوومتری است و $\tilde{A} = \Phi_{r_{TM}}(v)$ منجر به یک زیرگروه مزدوج G به H و یک جایگذاری \overline{HM} از طریق ایزوومرفیسم ارتقا می‌نماید). بنابراین دیده می‌شود که اشتراک وزن K از کرنل HM -راهبری‌پذیری در تعریف ۷.۴ منطبق است. این به همراه نتیجه‌ای که محدودیت کرنل پایدارساز منجر به محدودیت H -راهبری‌پذیری می‌شود، دلالت بر این دارد که میدان کرنل ارتقا یافته معادل یک میدان کرنل کانولوشنی HM است، که بخش (۲) قضیه را اثبات می‌کند.

یک انتخاب متفاوت از پیمانه \tilde{A} ممکن است برای $G < H$ منجر به یک زیرگروه مزدوج G به H و یک جایگذاری \overline{HM} از \overline{HM} شود که با متفاوت است. همانطور که به راحتی می‌توان برسی کرد، محدودیت H -راهبری‌پذیری اجازه می‌دهد تا همان کرنل را نسبت به H مانند محدودیت H -راهبری‌پذیری در رابطه با HM توصیف کنیم، زیرا تبدیل حذف می‌شود.

ج کانولوشن‌های راهبری‌پذیر کروی به عنوان کانولوشن‌های \mathbb{R} اثبات‌ها

این بخش اثبات‌های قضایای ۱۱.۱ و ۱۱.۲ را از بخش ۲.۱۱ در دو زیربخش زیر ارائه می‌دهد. در مجموع، این قضایا تأیید می‌کنند که کرنل‌های کانولوشن کروی Stab_n -راهبری‌پذیر توسط \mathbb{R} -معادل با کرنل‌های خاص G -راهبری‌پذیر هستند، و کانولوشن‌های کروی \mathcal{I} -هموردا با این کرنل‌ها معادل با کانولوشن‌های GM متناظر ماستند.

ج. ۱ اثبات قضیه ۱۱.۱ ایزوومرفیسم فضای کرنل

قضیه ۱۱.۱ یک ایزوومرفیسم

$$\Omega : \mathcal{K}_{\rho_{\square\Box\Box}, \rho_{\square\Box\Box}}^{G, B_{\mathbb{R}}(\cdot, \pi)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_{\rho_{\square\Box\Box}, \rho_{\square\Box\Box}}^{\text{Stab}_n} \quad (644)$$

بین فضای $\mathcal{K}_{\rho_{\square\Box\Box}, \rho_{\square\Box\Box}}^{G, B_{\mathbb{R}}(\cdot, \pi)}$ از کرنل‌های G -راهبری‌پذیر روی \mathbb{R} باز $\mathcal{K}_{\rho_{\square\Box\Box}, \rho_{\square\Box\Box}}^{\text{Stab}_n}$ از کرنل‌های $B_{\mathbb{R}}(\cdot, \pi) \subset \mathbb{R}^\mathbb{R}$ و فضای $B_{\mathbb{R}}(\cdot, \pi)$ برقرار می‌کند، که در معادلات (۴۴۹) و (۴۴۸) تعریف شده‌اند. با توجه به پیمانه‌های دلخواه N در قطب شمال n کرنل حول آن مرکز است، و پیمانه‌های P در هر نقطه دیگر p این ایزوومرفیسم را ایجاد می‌کنند. با این نظر، Ω در $S^1 \setminus -n$ به $\mathbb{R}^{c_{\square\Box\Box} \times c_{\square\Box\Box}}$ و p به $\exp_n(\psi_{TM,n}^N \log_n p) \rho_{\square\Box\Box}(g_{n \leftarrow p}^{NP}) \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}^{-1}$ مرتبط است. (۶۴۵)

با مخفف‌نویسی $v = \exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1} p$ وارون آن با

$$\Omega^{-1}(\kappa) : B_{\mathbb{R}}(\cdot, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square\Box\Box} \times c_{\square\Box\Box}}, \quad v \mapsto [\Omega^{-1}(\kappa)](v) := \kappa(\exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1} v) \rho_{\square\Box\Box}(g_{n \leftarrow p}^{NP})^{-1} \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}, \quad (646)$$

داده می‌شود.

اثبات: اینکه Ω^{-1} یک وارون خوش‌تعریف برای Ω است، به راحتی با جایگذاری عبارات آنها و تأیید اینکه

$$\Omega \circ \Omega^{-1} = \text{id}_{\mathcal{K}_{\rho_{\square\Box\Box}, \rho_{\square\Box\Box}}^{\text{Stab}_n}} \quad \square\Box\Box \quad \Omega^{-1} \circ \Omega = \text{id}_{\mathcal{K}_{\rho_{\square\Box\Box}, \rho_{\square\Box\Box}}^{G, B_{\mathbb{R}}(\cdot, \pi)}} \quad (647)$$

برقرار هستند، نشان داده می‌شود. برای دیدن این، توجه داشته باشید که پیمانه‌های $\psi_{TM,n}^N(g_{n \leftarrow p}^{NP})$ و ضریب حجم $\rho_{\square}(g_{n \leftarrow p}^{NP})$ همیشه وارون‌پذیر هستند و دو مورد اخیر جابجا می‌شوند زیرا ضریب مقیاس‌بندی حجم، یک اسکالر است. نگاشت $\log_n : S^{\times} \setminus n \rightarrow B_{\mathbb{R}^+}(\cdot, \pi)$ را با $\exp_n : B_{\mathbb{R}^+}(\cdot, \pi) \rightarrow S^{\times} \setminus n$ وارون می‌شود.

محدودیت‌های کرنل دو فضای کرنل علاوه بر این یکدیگر را نتیجه می‌دهند. با توجه به هر کرنل G -راهبری‌پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^{G, B_{\mathbb{R}^+}(\cdot, \pi)}$ محدودیت $\Omega(K) \in \mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^{\text{Stab}_n}$ -راهبری‌پذیری را از معادله (۴۴۸) برآورده می‌کند. این برای هر $p \in S^{\times} \setminus n$ در $X \in \text{Stab}_n$ و هر پیمانه ξ به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\begin{aligned} [\Omega(K)](\xi(p)) &\stackrel{(1)}{=} K(\psi_{TM,n}^N \log_n \xi(p)) \cdot \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(2)}{=} K(\psi_{TM,n}^N \xi_{*,TM} \log_n p) \cdot \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(3)}{=} K(g_{\xi}^{NN}(n) \psi_{TM,n}^N \log_n p) \cdot \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(4)}{=} \rho_{\square}(g_{\xi}^{NN}(n)) \cdot K(\psi_{TM,n}^N \log_n p) \cdot \rho_{\square}(g_{\xi}^{NN}(n))^{-1} \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(5)}{=} \rho_{\square}(g_{\xi}^{NN}(n)) \cdot K(\psi_{TM,n}^N \log_n p) \cdot \rho_{\square}(g_{\xi}^{NN}(n))^{-1} \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(6)}{=} \rho_{\square}(g_{\xi}^{NN}(n)) \cdot K(\psi_{TM,n}^N \log_n p) \cdot \rho_{\square}(g_{n \leftarrow p}^{NP}) \rho_{\square}(g_{\xi}^{XP}(p))^{-1} \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(7)}{=} \rho_{\square}(g_{\xi}^{NN}(n)) \cdot [\Omega(K)](p) \cdot \rho_{\square}(g_{\xi}^{XP}(p))^{-1} \end{aligned} \quad (448)$$

مرحله اول فقط $\Omega(K)$ را بسط داد، در حالی که مرحله دوم از $p = \xi_{*,TM} \log_{\xi^{-1}(n)}$ که از معادله (۳۰۳) نتیجه می‌شود، به همراه $\xi^{-1}(n) = n$ استفاده کرد زیرا $\xi \in \text{Stab}_n$. در مرحله سوم، ما از تعریف تبدیلات پیمانه القا شده توسعه ایزومتری در معادله (۲۸۴) استفاده کردیم. مرحله چهارم از محدودیت G -راهبری‌پذیری از معادله (۴۴۹) استفاده کرد. مرحله پنجم عنصر حجم نمایی و بنابراین ضرایب حجم مختصات نرمال ژئوزیک، تحت عمل Ω ناوردا است. قبل از شناسایی (K) در مرحله آخر، مرحله ششم از همانی

$$\begin{aligned} \rho_{\square}(g_{\xi}^{NN}(n))^{-1} \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) &= [\psi_{A_{\square}, n}^N \xi_{*, A_{\square}}^{-1} (\psi_{A_{\square}, n}^N)^{-1}] [\psi_{A_{\square}, n \leftarrow \xi(p)}^N (\psi_{A_{\square}, \xi(p)}^X)^{-1}] \\ &= \psi_{A_{\square}, n}^N \xi_{*, A_{\square}}^{-1} \mathcal{P}_{A_{\square}, n \leftarrow \xi(p)} (\psi_{A_{\square}, \xi(p)}^X)^{-1} \\ &= \psi_{A_{\square}, n}^N \mathcal{P}_{A_{\square}, n \leftarrow p} \xi_{*, A_{\square}}^{-1} (\psi_{A_{\square}, \xi(p)}^X)^{-1} \\ &= [\psi_{A_{\square}, n}^N \mathcal{P}_{A_{\square}, n \leftarrow p} (\psi_{A_{\square}, p}^P)^{-1}] [\psi_{A_{\square}, p}^P \xi_{*, A_{\square}}^{-1} (\psi_{A_{\square}, \xi(p)}^X)^{-1}] \\ &= \rho_{\square}(g_{n \leftarrow p}^{NP}) \rho_{\square}(g_{\xi}^{XP}(p))^{-1}, \end{aligned} \quad (449)$$

استفاده کرد، که به طور حیاتی بر جابجایی انتقال‌دهنده‌ها و پوش‌فروواردهای ایزومتری از معادله (۳۰۵) متکی است.

برای جهت مخالف، فرض کنید یک کرنل $\kappa \in \mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^{\text{Stab}_n}$ -راهبری‌پذیر $\Omega^{-1}(\kappa)$ محدودیت G -راهبری‌پذیری را از معادله (۴۴۹) برآورده می‌کند. برای نشان دادن این، فرض کنید $\xi \in \text{Stab}_n$ و $g \in G$ ، $v \in B_{\mathbb{R}^+}(\cdot, \pi)$ عضو یکتای پایدارساز باشد به طوری که $g = \psi_{TM,n}^N \xi_{*,TM} (\psi_{TM,n}^N)^{-1} = g_{\xi}^{NN}(n) = \psi_{TM,n}^N \xi_{*,TM} (\psi_{TM,n}^N)^{-1}$. برای اختصار، ما $v := \exp_n(\psi_{TM,n}^N)$ و $p := g_{n \leftarrow p}^{NP}$.

نتیجه $\xi(p) = \exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1} g \mathfrak{v}$ می‌کنیم، که با مرحله ۳-۱ در ادامه توجیه می‌شود. سپس می‌یابیم:

$$\begin{aligned}
[\Omega^{-1}(\kappa)](g \mathfrak{v}) &\stackrel{(1)}{=} \kappa(\exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1}(g \mathfrak{v})) \cdot \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial \mathfrak{v}}|} \\
&\stackrel{(2)}{=} \kappa(\exp_n \xi_{*,TM}(\psi_{TM,n}^N)^{-1} \mathfrak{v}) \cdot \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial \mathfrak{v}}|} \\
&\stackrel{(3)}{=} \kappa(\xi \exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1} \mathfrak{v}) \cdot \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial \mathfrak{v}}|} \\
&\stackrel{(4)}{=} \rho_{\square \square}(g_{\xi}^{NN}(n)) \cdot \kappa(\exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1} \mathfrak{v}) \cdot \rho_{\square}(g_{\xi}^{XP}(p))^{-1} \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial \mathfrak{v}}|} \\
&\stackrel{(5)}{=} \rho_{\square \square}(g_{\xi}^{NN}(n)) \cdot \kappa(\exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1} \mathfrak{v}) \cdot \rho_{\square}(g_{\xi}^{XP}(p))^{-1} \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial \mathfrak{v}}|} \\
&\stackrel{(6)}{=} \rho_{\square \square}(g_{\xi}^{NN}(n)) \cdot \kappa(\exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1} \mathfrak{v}) \cdot \rho_{\square}(g_{n \leftarrow p}^{NP})^{-1} \rho_{\square}(g_{\xi}^{NN}(n))^{-1} \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial \mathfrak{v}}|} \\
&\stackrel{(7)}{=} \rho_{\square \square}(g_{\xi}^{NN}(n)) \cdot [\Omega^{-1}(\kappa)](\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\square}(g_{\xi}^{NN}(n))^{-1} \\
&\stackrel{(8)}{=} \rho_{\square \square}(g) \cdot [\Omega^{-1}(\kappa)](\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\square}(g)^{-1} \tag{۶۵۰}
\end{aligned}$$

مراحل اول تا سوم $(\kappa)^{-1} \Omega$ را بسط دادند، از تعریف \mathfrak{v} بر حسب g و جابجایی نگاشته‌های نمایی با پوش‌فورواردهای ایزومتری، معادله (۳۰۳)، استفاده کردند. در مرحله چهارم، از محدودیت Stab_n-راهبری‌پذیری κ از معادله (۴۴۸) استفاده شده است. مرحله پنجم دوباره عنصر حجم ریمانی را در (p) با عنصر حجم در p جایگزین کرد زیرا آنها برابر هستند. مرحله ششم از رابطه

$$\begin{aligned}
\rho_{\square}(g_{\xi}^{XP}(p))^{-1} \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} &= \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX} g_{\xi}^{XP}(p))^{-1} \\
&= \left([\psi_{A_{\square}, n}^N \mathcal{P}_{A_{\square}, n \leftarrow \xi(p)} (\psi_{A_{\square}, \xi(p)}^X)^{-1}] [\psi_{A_{\square}, \xi(p)}^X \xi_{*, A_{\square}} (\psi_{A_{\square}, p}^P)^{-1}] \right)^{-1} \\
&= \left(\psi_{A_{\square}, n}^N \mathcal{P}_{A_{\square}, n \leftarrow \xi(p)} \xi_{*, A_{\square}} (\psi_{A_{\square}, p}^P)^{-1} \right)^{-1} \\
&= \left(\psi_{A_{\square}, n}^N \xi_{*, A_{\square}} \mathcal{P}_{A_{\square}, n \leftarrow p} (\psi_{A_{\square}, p}^P)^{-1} \right)^{-1} \\
&= \left(\psi_{A_{\square}, n}^N \xi_{*, A_{\square}} (\psi_{TM,n}^N)^{-1} \psi_{TM,n}^N \mathcal{P}_{A_{\square}, n \leftarrow p} (\psi_{A_{\square}, p}^P)^{-1} \right)^{-1} \\
&= \rho_{\square}(g_{n \leftarrow p}^{NP})^{-1} \rho_{\square}(g_{\xi}^{NN}(n))^{-1}, \tag{۶۵۱}
\end{aligned}$$

استفاده کرد، که دوباره بر جابجایی انتقال‌دهنده‌ها و پوش‌فورواردهای ایزومتری از معادله (۳۰۵) متكی است. دو مرحله آخر $(\kappa)^{-1} \Omega$ را شناسایی می‌کنند و بنا به تعریف \mathfrak{v} داریم که $g_{\xi}^{NN}(n) = g$

در مجموع، این استدلال‌ها نشان می‌دهند که Ω واقعاً یک ایزومورفیسم بین فضاهای کرنل است. \square

ج. ۲ اثبات قضیه ۱۱.۲ هم‌ارزی کانولوشن‌های راهبری‌پذیر کروی و \square

قضیه ۱۱.۲ ادعا می‌کند که کانولوشن‌های GM با یک کرنل G -راهبری‌پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square \square}}^{G, B_{\mathbb{R}^Y}(\cdot, \pi)}$ معادل کانولوشن کروی با کرنل $-Stab_n$ -راهبری‌پذیر $\Omega(K) \in \mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square \square}}^{Stab_n}$ است. کانولوشن کروی با یک کرنل $\kappa \in \mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square \square}}^{Stab_n}$ -راهبری‌پذیر از [۴۴] در اینجا در معادله (۴۵۴) به صورت نقطه‌ای به شکل

$$[\kappa *_{S^r} f](p) = \int_{S^r \setminus -p} \kappa(\phi_p^{-1} q) \rho_{\square}(g_{\phi_p^{-1}}^{XQ}(q)) f^Q(q) dq, \tag{۶۵۲}$$

تعریف شده بود، که در آن P, Q و X به ترتیب پیمانه‌های دلخواه در p و q و $(q)^{-1} \phi_p$ را نشان می‌دهند. ایزومتری $\phi_p \in \mathcal{I}$ به طور یکتا با الزام $(\phi_p)_{*, GM} \sigma^N(n) = \sigma^P(p)$ مشخص می‌شود. توجه داشته باشید که این به طور خاص دلالت بر

$$\phi_p(n) = p \tag{۶۵۳}$$

و با استفاده از تعریف مقاطع GM (میدان‌های چارچوب) بر حسب پیمانه‌های وارون از معادله (۱۸۹) بر

$$\psi_{TM,n}^N \circ (\phi_p)_{*, GM}^{-1} = \psi_{TM,p}^P, \tag{۶۵۴}$$

دارد، که هر دو را در ادامه استفاده خواهیم کرد. با این مقدمات، به اثبات قضیه ۱۱.۲ یعنی همارزی

$$\Omega(K) \star_{S^r} f = K \star_{GM} f \quad (655)$$

کانولوشن‌ها می‌پردازیم.

اثبات: از آنجا که $\Omega(\kappa) \circ \phi_p^{-1}$ روی $S^r \setminus -p$ تعریف شده است، کرنل تبدیل شده روی $S^r \setminus -p$ تعريف شده است. بنابراین، با جایگذاری $\Omega(\kappa)$ در تعریف نقطه‌ای کانولوشن کروی در معادله (۴۵۴) به

$$\begin{aligned} [\Omega(K) \star_{S^r} f]^P(p) &= \int_{S^r \setminus -p} [\Omega(\kappa)](\phi_p^{-1}q) \rho_{\square}(g_{\phi_p^{-1}}^{XQ}(q)) f^Q(q) dq \\ &= \int_{S^r \setminus -p} K(\psi_{TM,n}^N \log_n \phi_p^{-1}q) \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \phi_p^{-1}(q)}^{NX}) \rho_{\square}(g_{\phi_p^{-1}}^{XQ}(q)) f^Q(q) \sqrt{|\eta_{\phi_p^{-1}(q)}^{\partial/\partial v}|}^{-1} dq, \end{aligned} \quad (656)$$

می‌رسیم، که در آن مرحله دوم با بسط دادن $\Omega(K)$ همانطور که در معادله (۴۵۲) تعريف شده است، به دست می‌آید. برای ساده‌سازی این عبارت، توجه داشته باشید که

$$\psi_{TM,n}^N \log_n \phi_p^{-1}(q) = \psi_{TM,n}^N(\phi_p)_{*,TM}^{-1} \log_{\phi_p(n)}(q) = \psi_{TM,p}^P \log_p(q), \quad (657)$$

که از معادله (۳۰۳) در مرحله اول و معادلات (۶۵۴) و (۶۵۳) در مرحله دوم نتیجه می‌شود. علاوه بر این توجه داشته باشید که،

$$\begin{aligned} &\rho(g_{n \leftarrow \phi_p^{-1}(q)}^{NX}) \rho(g_{\phi_p^{-1}}^{XQ}(q)) \\ &= [\psi_{A,n}^N \mathcal{P}_{A,n \leftarrow \phi_p^{-1}(q)}(\psi_{A,\phi_p^{-1}(q)}^X)^{-1}] [\psi_{A,\phi_p^{-1}(q)}^X(\phi_p)_{*,A}^{-1}(\psi_{A,q}^Q)^{-1}] \quad (\text{معادلات (۲۱۳) و (۳۰۲)}) \\ &= \psi_{A,n}^N \mathcal{P}_{A,n \leftarrow \phi_p^{-1}(q)}(\phi_p)_{*,A}^{-1}(\psi_{A,q}^Q)^{-1} \quad (\text{پیمانه‌های وارون حذف شده}) \\ &= \psi_{A,n}^N(\phi_p)_{*,A}^{-1} \mathcal{P}_{A,\phi_p(n) \leftarrow q}(\psi_{A,q}^Q)^{-1} \quad (\text{معادله (۳۰۵)}) \\ &= \psi_{A,p}^P \mathcal{P}_{A,p \leftarrow q}(\psi_{A,q}^Q)^{-1} \quad (\text{معادله (۶۵۴)}) \\ &= \rho(g_{p \leftarrow q}^{PQ}). \quad (\text{معادله (۲۱۳)}) \end{aligned}$$

با جایگذاری این دو همانی، به دست می‌آوریم

$$[\Omega(K) \star_{S^r} f]^P(p) = \int_{S^r \setminus -p} K(\psi_{TM,p}^P \log_p q) \rho_{\square}(g_{p \leftarrow q}^{PQ}) f^Q(q) \sqrt{|\eta_{\phi_p^{-1}(q)}^{\partial/\partial v}|}^{-1} dq,$$

برای ادامه، انتگرال را در مختصات نرمال ژئودزیک $S^r \setminus -p \rightarrow B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)$ ، $q \mapsto v(q) := \psi_{TM,p}^P \log_p q$ که در نقطه p متعرک است، بیان می‌کیم. این کار ضریب حجم ریمانی $\sqrt{|\eta_{\phi_p^{-1}(q)}^{\partial/\partial v}|}$ را حذف می‌کند و در نتیجه ظاهر آن را در تعریف Ω توجیه می‌کند، به طوری که کانولوشن کروی به

$$\begin{aligned} [\Omega(K) \star_{S^r} f]^P(p) &= \int_{B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)} K(v) \rho_{\square}(g_{p \leftarrow \exp_p(\psi_{TM,p}^P)^{-1}v}^{PQ}) f^Q(\exp_p(\psi_{TM,p}^P)^{-1}v) dv, \\ &= \int_{B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)} K(v) [\text{Exp}_p^* f]^P(v) dv, \\ &= [K \star_{GM} f]^P(p). \end{aligned} \quad (658)$$

می‌شود. از آنجا که تمام آرگومان‌ها مستقل از نقطه انتخاب شده p و پیمانه‌های انتخاب شده هستند، این دلالت بر

$$\Omega(K) \star_{S^r} f = K \star_{GM} f, \quad (659)$$

در یک چارچوب مستقل از مختصات دارد، که قضیه را اثبات می‌کند. \square

چ ۷ وجود و همواری تبدیلات میدان کرنل

در تعریف ۷.۶، ما تبدیلات میدان کرنل $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ را به عنوان تبدیلات انتگرالی هموار

$$\mathcal{T}_{\mathcal{K}} : \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square\square}) \quad (660)$$

پیشنهاد کردیم که توسط یک میدان کرنل \mathcal{K} (تعریف ۷.۲) پارامتری شده و به صورت نقطه‌ای با

$$[\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f)](p) := \int_{T_p M} \mathcal{K}(v) \operatorname{Exp}_p^* f(v) dv = \int_{T_p M} \mathcal{K}(v) \mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\square\square}, p \leftarrow \exp_p v} f(\exp_p v) dv. \quad (661)$$

داده می‌شوند. تبدیلات میدان کرنل شامل کانولوشن‌های GM از تعریف ۷.۸ به عنوان موارد خاص برای میدان‌های کرنل کانولوشنی GM هستند.

در اینجا ما به طور خلاصه خوش‌تعییف بودن تبدیلات میدان کرنل را مورد بحث قرار می‌دهیم. روش است که انتگرال‌دهنده معادله (۶۶۱) برای $v \in T_p M$ و $p \in M$ در $\mathcal{A}_{\square\square, p}$ قرار دارد. آنچه باقی می‌ماند نشان دادن وجود انتگرال و همواری میدان ویژگی حاصل است. در ادامه ابتدا چند ملاحظه کلی در مورد چگونگی پرداختن به این پرسش‌ها را ارائه می‌دهیم. سپس قضیه ۷.۷ را اثبات خواهیم کرد، یعنی خوش‌تعییف بودن تبدیلات میدان کرنل برای مورد خاص میدان‌هایی از کرنل‌ها که دارای تکیه‌گاه فشرده روی یک گویی با شعاع ثابت حول مبدأ هستند.

وجود: وجود و همواری تبدیلات میدان کرنل نیازمند یک انتخاب مناسب از میدان کرنل \mathcal{K} است. مشابه مورد کانولوشن‌های متعارف روی $M = \mathbb{R}$, الزامات بر روی \mathcal{K} برای اینکه تبدیل میدان کرنل وجود داشته باشد، به ویژگی‌های خاص میدان ویژگی ورودی $f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square})$ دارد.^{۱۵۹} به طور کلی، \mathcal{K} باید به اندازه کافی سریع افت کند تا انتگرال‌دهنده در معادله (۶۶۱) انتگرال‌پذیر شود.

یک مورد خاص با اهمیت عملی بالا، کرنل‌های $K_p : T_p M \rightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square, p}, \mathcal{A}_{\square\square\square, p})$ هستند که در هر $p \in M$ دارای تکیه‌گاه فشرده هستند. در این حالت، وجود انتگرال همیشه تضمین شده است. برای دیدن این، توجه داشته باشید که میدان‌های ویژگی (ورودی) و میدان‌های کرنل به عنوان هموار تعییف شده‌اند. همواری متربیک علاوه بر این دلالت بر این دارد که چگالی حجم ریمانی، نگاشت نمایی و انتقال موازی هموار هستند!^{۱۶۰} در ترکیب، کل انتگرال‌دهنده در معادله (۶۶۱) به عنوان یکتابع هموار در نتیجه پیوسته از $T M$ به $\mathcal{A}_{\square\square}$ دیده می‌شود. اگر K_p علاوه بر این دارای تکیه‌گاه فشرده باشد، انتگرال‌دهنده پیوسته و دارای تکیه‌گاه فشرده روی $T_p M$ می‌شود، که با تعییمی از قضیه مقدار اکسترمم، دلالت بر این دارد که تصویر آن فشرده است (و در یک تریویالیزاسیون محلی $\mathcal{A}_{\square\square, p}$ از \mathbb{R}^c کران دار است)^{۱۶۱}. این وجود انتگرال را تضمین می‌کند [۹۴].

بسته به کاربرد، الزام بر روی تکیه‌گاه \mathcal{K} ممکن است تسهیل شود. به عنوان مثال، تصاویر روی $M = \mathbb{R}^d$ معمولاً خود دارای تکیه‌گاه فشرده هستند، به طوری که هیچ ویژگی اضافی از \mathcal{K} به جز همواری آن لازم نیست.

همواری: ما به بحث در مورد همواری تبدیلات میدان کرنل می‌پردازیم، یعنی ویژگی آنها برای نگاشت میدان‌های ورودی هموار (به میدان‌های خروجی هموار $f_{\square\square} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square})$) می‌شود. بنابراین، یک نگاشت $M \rightarrow \mathcal{A}_{\square\square\square}$ بین منیفلدهای M و $\mathcal{A}_{\square\square\square}$ هموار نامیده می‌شود اگر نمایش‌های مختصاتی آن هموار باشند. در معادلات، $f_{\square\square}$ هموار است اگر برای هر (U, ϕ) چارت‌های هموار $\phi \circ f_{\square\square} \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \phi(\tilde{U})$ در $p \in M$ و $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ حول p در $\mathcal{A}_{\square\square}(p)$ در $f_{\square\square}(U)$ با \tilde{U} در $\mathcal{A}_{\square\square}(p)$ با $\tilde{\phi}$ و وجود داشته باشند به طوری که $\tilde{\phi} \circ f_{\square\square} \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \phi(\tilde{U})$ به عنوان یک نگاشت بین (زیرمجموعه‌هایی از) فضاهای اقلیدسی هموار باشد. با توجه به (U, ϕ) ، یک انتخاب مناسب برای $\tilde{\phi} := (\tilde{U}, \tilde{\phi})$ نگاشت بین (زیرمجموعه‌هایی از) فضاهای اقلیدسی هموار است اگر در هر مؤلفه از تصویر خود، در اینجا در هر یک از $d + c$ بعد از $\phi(U) \times \mathbb{R}^c$ هموار باشد. بنابراین ما به همواری نگاشتهای

$$F_i : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto [\tilde{\phi} \circ f_{\square\square} \circ \phi^{-1}]_i \quad (662)$$

برای هر $i = 1, \dots, d + c$ علاقه‌مندیم. با زانویسی $f_{\square\square\square}$ و بیان انتگرال روی $T_p M$ با یک انتگرال روی \mathbb{R}^d همانطور که در پیوست آ.۴ بحث شد، دیده می‌شود که F_i به شکل

$$F_i(x) = \int_{\mathbb{R}^d} I_i(v, x) dv. \quad (663)$$

^{۱۵۹} به بحث در https://en.wikipedia.org/wiki/Convolution#Domain_of_definition مراجعه کنید.

^{۱۶۰} توجه داشته باشید که تضمین می‌شود $\pi_{\mathcal{A}_{\square\square\square}}^{-1}(U)$ تریویالیزه‌پذیر باشد با توجه به اینکه (U, ϕ) یک چارت از M است. این روش است زیرا پایه‌های مختصاتی $\pi_{\mathcal{A}_{\square\square\square}}^{-1}(U)$ را به دست می‌دهند (به پیوست آ مراجعه کنید) و از آنجا که تریویالیزاسیون‌های محلی \mathcal{A} در بخش ۴.۶ از آنها $T M$ القا شده‌اند.

هستند. عبارات مختصاتی انتگرال دهنده‌های I_i در اینجا برای هر $i = 1, \dots, d + c$ با

$$I_i : \mathbb{R}^d \times \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (664)$$

$$(\mathfrak{v}, x) \mapsto \left[\tilde{\phi} \circ \mathcal{K}(\psi_{TM, \phi^{-1}(x)}^{-1}(\mathfrak{v})) \circ \mathcal{P}_{A_{\mathbb{H}}, \phi^{-1}(x)} \leftarrow \exp \circ \psi_{TM, \phi^{-1}(x)}(\mathfrak{v}) \circ f_{\mathbb{H}} \circ \exp \circ \psi_{TM, \phi^{-1}(x)}^{-1}(\mathfrak{v}) \right]_i,$$

داده می‌شوند، که در آن ما برای راحتی و بدون از دست دادن کلیت، فرض کردیم که $\psi_{TM, \phi^{-1}(x)}$ یک پیمانه ایزومتریک از $T_{\phi^{-1}(x)}M$ است، به طوری که ضریب مقیاس‌بندی حجم $\sqrt{|\det \eta_p|} = 1$ حذف می‌شود. توجه داشته باشید که انتگرال دهنده‌های I_i از نگاشته‌های هموار تشکیل شده‌اند و بنابراین خود نیز هموار هستند.

از بحث قبلی روشن است که همواری f بقرار است اگر همه F_i هموار باشند، یعنی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر جزئی باشند. برای اثبات همواری F_i کافی است نشان دهیم که مشتق‌گیری‌های جزئی و انتگرال گیری در معادله (۶۶۳) جابجا می‌شوند که این همیشه صادق نیست. اگر آنها جابجا شوند، مشتقهای جزئی از مراتب دلخواه $(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$ با

$$\left[\partial_{x_1}^{n_1} \dots \partial_{x_d}^{n_d} F_i \right](x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[\partial_{x_1}^{n_1} \dots \partial_{x_d}^{n_d} I_i \right](\mathfrak{v}, x) dv \quad (665)$$

داده می‌شوند، که در آن (۱) مشتقهای جزئی $\left[\partial_{x_1}^{n_1} \dots \partial_{x_d}^{n_d} I_i \right]$ از انتگرال دهنده وجود دارند (به دلیل همواری I_i وجود آنها تضمین شده است) و (۲) انتگرال آنها وجود دارد. اینکه آیا مشتق‌گیری‌ها با انتگرال گیری‌ها با نه را می‌توان با استفاده از لم زیر از [۹].^{۱۶۱} که نتیجه‌های از قضیه همگرایی تحت سلطه است، بررسی کرد.

قضیه ۷.۱ (لم مشتق‌گیری [۹]). فرض کنید \mathcal{V} یک فضای اندازه، $T \subset \mathbb{R} \times T$ یک بازه غیرتیهگن و $I : \mathcal{V} \times T \rightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت با ویژگی‌های زیر باشد:

(۱) برای هر $t \in T$ ثابت، نگاشت $I(\mathfrak{v}, t) \mapsto \mathcal{V}$ روی \mathcal{V} لیگ-انتگرال‌پذیر است.

(۲) برای هر $\mathfrak{v} \in \mathcal{V}$ ثابت، نگاشت $I(\mathfrak{v}, t) \mapsto t$ در T مشتق‌پذیر است.

(۳) یک تابع لیگ-انتگرال‌پذیر $\mathcal{B} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $\left| \frac{\partial}{\partial t} I(\mathfrak{v}, t) \right| \leq \mathcal{B}(\mathfrak{v})$ برای هر $\mathfrak{v} \in \mathcal{V} \times T$ برقرار است.

آنگاه تابع $F : T \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \int_{\mathcal{V}} I(\mathfrak{v}, t) dv$ مشتق‌پذیر است با مشتقی برابر با

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} I(\mathfrak{v}, t) dv.$$

کاربردی بودن این لم (به طور مکرر برای هر مشتق‌گیری جزئی منفرد) به ویژگی‌های انتگرال دهنده بستگی دارد، که به نوبه خود به ویژگی‌های خاص میدان کریل \mathcal{K} و میدان ویژگی ورودی \mathcal{M} بستگی دارد. برای مورد یک میدان کریل که دارای تکیه‌گاه فشرده روی گوی‌هایی با شعاع ثابت حول مبدأ هر فضای مماس است، این لم اعمال می‌شود. بر این اساس، ما در باقیمانده این پیوست اثباتی برای قضیه ۷.۱ را از [۹] می‌دهیم.

۷.۱ اثبات قضیه ۷.۱ (کافیت تکیه‌گاه فشرده کرنل روی گوی‌های مماس)

فرض کنید $B_{\mathbb{R}^d}^{\text{ممتا}}(\cdot, R) := \{v \in T_p M \mid \|v\| \leq R\}$ و $B_{T_p M}^{\text{ممتا}}(\cdot, R) := \{v \in T_p M \mid \|v\| \leq R\}$ حول مبدأ $R > 0$ باشند. توجه داشته باشید که هر پیمانه ایزومتریک $\psi_{TM, p}(B_{T_p M}^{\text{ممتا}}(\cdot, R))$ را برآورده می‌کند. فرض کنید $\tilde{\mathcal{K}}$ یک میدان کرنل باشد که تکیه‌گاه آن در داخل گوی‌هایی با شعاع یکسان R در هر فضای مماس قرار دارد، یعنی

$$\text{supp}(\tilde{\mathcal{K}}_p) \subseteq B_{T_p M}^{\text{ممتا}}(\cdot, R) \quad \forall p \in M \quad (666)$$

و در نتیجه، برای هر پیمانه ایزومتریک $\psi_{TM, p}$

$$\text{supp}(\tilde{\mathcal{K}}_p \circ (\psi_{TM, p})^{-1}) \subseteq B_{\mathbb{R}^d}^{\text{ممتا}}(\cdot, R) \quad \forall p \in M \quad (667)$$

^{۱۶۱} نسخه‌های مشابهی از این لم به زبان انگلیسی را می‌توان در [۹] یا در https://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz_integral_rule#Measure_theory_statement یافت. برخلاف آن نسخه‌ها، نسخه [۹] اجازه می‌دهد که T هر بازه غیرتیهگن، از جمله بازه‌های بسته، باشد، که ما را از چند مرحله اضافی در ادامه بی‌نیاز می‌کند.

را برآورده می‌کند. طبق قضیه ۷.۷ این ویژگی برای تضمین اینکه تبدیل میدان کرنل متناظر $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_R}$ خوش‌تعریف است، کافی است. اثبات این گزاره در ادامه ارائه می‌شود.

اثبات: همانطور که قبلاً در ابتدای این پیوست بیان شد، وجود انتگرال با توجه به اینکه تکیه‌گاه‌های کرنل فشرده هستند، تضمین شده است: فشرده‌گی کرنل‌ها به انتگرال‌دهنده‌های تبدیل میدان کرنل منتقل می‌شود. همواری آنها علاوه بر این، پیوستگی آنها را نتیجه می‌دهد و انتگرال‌های توابع پیوسته با تکیه‌گاه فشرده همیشه وجود دارند.

برای اثبات همواری میدان ویژگی خروجی حاصل f_{μ} ما با بحث قبلی در این بخش ادامه می‌دهیم. هدف ما اعمال لم مشتق‌گیری ج. ۱. برای جابجایی مشتقات جزئی $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ برای هر $d = 1, \dots, d$ در معادله (۶۶۵) در هر $\phi(U)$ با انتگرال‌گیری روی \mathbb{R}^d است. برای این منظور، ما تابع کمکی

$$I_{i,x.,\mu} : \mathbb{R}^d \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\vartheta, t) \mapsto I(\vartheta, x. + t\epsilon_\mu) \quad (668)$$

و

$$F_{i,x.,\mu} : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto F(x. + t\epsilon_\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} I_{i,x.,\mu}(\vartheta, t) d\vartheta, \quad (669)$$

را معرفی می‌کنیم، که در آن $\epsilon_\mu \in \mathbb{R}^d$ بردار واحد در جهت μ است و $\cdot > \varepsilon$ به گونه‌ای انتخاب شده است که $\{x. + t\epsilon_\mu \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \phi(U)$ باشد، که این کار همیشه ممکن است زیرا $\phi(U)$ با شناسایی‌های $\mathcal{V} = \mathbb{R}^d$ به شکلی است که توسط لم $\text{J. } 1$ لازم است. این می‌ویژگی (i) را با فرض وجود تبدیل میدان کرنل همانطور که قبلاً بحث شد، برآورده می‌کند. ویژگی (ii) به دلیل همواری کل انتگرال‌دهنده در معادله (۶۶۴) برقرار است. برای ویژگی (iii) مشاهده کنید که هم $I_{i,x.,\mu}$ و هم مشتق آن هموار هستند به طوری که قدر مطلق $| \frac{\partial}{\partial t} I_{i,x.,\mu} |$ پیوسته است. از آنجا که علاوه بر این دارای تکیه‌گاه فشرده روی $B_{\mathbb{R}^d}^{(0,0,0,0,0,0)}(\cdot, R)$ است، با (تممیم از) قضیه مقدار اکسترمم با یک عدد $b \geq 0$ کران دارد. بنابراین ما مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری را برای انتخاب‌های دلخواه از $x.$ و μ جابجا کنیم، که از آن برای کشیدن مشتقات جزئی دلخواه به داخل انتگرال استفاده می‌کنیم:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} F_i \right](x.) = \left[\frac{\partial}{\partial t} F_{i,x.,\mu} \right](\cdot) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial t} I_{i,x.,\mu}(\vartheta, t) \Big|_{t=x.} d\vartheta = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial x_\mu} I_i(\vartheta, x) \Big|_{x=x.} d\vartheta \quad (670)$$

به دلیل همواری و تکیه‌گاه فشرده انتگرال‌دهنده I_i مشتقات جزئی آن $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ نیز هموار و دارای تکیه‌گاه فشرده هستند. بنابراین آنها نیز ویژگی‌های (i)، (ii) و (iii) را (با یک کران b بالقوه تطبیق یافته) برآورده می‌کنند. بنابراین امکان تکرار مشتق‌گیری جزئی از F_i به طور نامحدود و جویی دارد، که همواری آن را اثبات می‌کند. از آنجا که استخراج‌ها مستقل از انتخاب‌های خاص برای نقطه $p \in M$ چارت‌های مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری را برای انتخاب‌های دلخواه از $x.$ و μ بودند، این نتیجه همواری کل میدان ویژگی خروجی (f_{μ}) را اثبات می‌کند.

□

ح میدان‌های ویژگی منظم به عنوان تابع اسکالار روی G -ساختر

تابع با مقادیر حقیقی $F : GM \rightarrow \mathbb{R}$ روی G -ساختر با میدان‌های ویژگی منظم $f : M \rightarrow \mathcal{A}_{000}$ را معرفی می‌کند، یعنی یک ایزوومورفیسم وجود دارد

$$C^\infty(GM) \cong \Gamma(\mathcal{A}_{000}). \quad (671)$$

این پیوست اثباتی برای این ادعا برای مورد گروه‌های ساختاری متناهی G ارائه می‌دهد. ما با تعریف معمول نمایش‌های منظم (حقیقی) از گروه‌های ساختاری متناهی شروع می‌کنیم، که بر روی فضاهای برداری (آزاد) $\mathbb{R}^{|G|}$ عمل می‌کنند. یک پایه $\{\epsilon_g \in \mathbb{R}^{|G|} \mid g \in G\}$ از $\mathbb{R}^{|G|}$ را تعریف می‌کنیم، که با اعضای گروه $g \in G$ برچسب‌گذاری شده است. سپس عمل نمایش منظم (چپ) روی $\mathbb{R}^{|G|}$ بر حسب عمل آن بر روی این بردارهای پایه تعریف می‌شود، که با انتقال چپ داده می‌شود. به طور خاص، برای هر $h, g \in G$ نمایش منظم به صورت زیر عمل می‌کند:

$$\rho_{000}(h) \epsilon_g := \epsilon_{hg}. \quad (672)$$

توجه داشته باشید که عمل بر روی ضرایب یک بردار، وارون است

$$\rho_{000}(h) \sum_{g \in G} f_g \epsilon_g = \sum_{g \in G} f_g \epsilon_{hg} = \sum_{\tilde{g} \in G} f_{h^{-1}\tilde{g}} \epsilon_{\tilde{g}}, \quad (673)$$

که دانستن آن مفید است، با این حال، ما در ادامه به این ویژگی نیازی نخواهیم داشت. از آنجا که نمایش منظم بردارهای پایه $\mathbb{R}^{|G|}$ را جایگشت می‌کند، یک نمایش جایگشتی است. برخی از تصاویر برای گروه دوری $G = C_4$ در پیوست ۱۰ از [۹] یافت می‌شود. میدان‌های ویژگی منظم به عنوان مقاطع هموار از کلاف G -همبسته

$$\mathcal{A}_{\text{III}} = (GM \times \mathbb{R}^{|G|}) / \sim_{\rho_{\text{III}}} . \quad (674)$$

تعریف می‌شوند.

ایزومورفیسم ($C^\infty(GM) \cong \Gamma(\mathcal{A}_{\text{III}})$) ادعای ما در بخش ۱۲ مبنی بر اینکه CNN ‌های چارچوب موادی توسط $\Gamma(\mathcal{A}_{\text{III}})$ کانولوشن‌های GM خاصی بین میدان‌های ویژگی منظم هستند، اثبات می‌کند. این علاوه بر این، ارتباط بین کانولوشن‌های گروهی (به بخش ت. ۱. مراجعه کنید) و کانولوشن‌های GM منظم را که در بخش ۴.۹ و [۹] ادعا شده بود، برقرار می‌کند.

با این مقدمات و ملاحظات، ما آماده فرمول‌بندی قضیه هستیم:

قضیه ۱. (میدان‌های ویژگی منظم به عنوان توابع اسکالر روی G -ساختار). فرض کنید $G \leq \text{GL}(d)$ یک گروه ساختاری متناهی، GM یک G -ساختار روی M و \mathcal{A}_{III} کلافی باشد که با عمل نمایش منظم ρ_{III} از G همبسته است. آنگاه میدان‌های ویژگی منظم تابع هموار و با مقادیر حقیقی روی G -ساختار یکسان هستند، یعنی یک ایزومورفیسم

$$\Lambda : C^\infty(GM) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{A}_{\text{III}}) . \quad (675)$$

وحود دارد. این ایزومورفیسم با

$$[\Lambda F](p) = \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) \epsilon_g \right], \quad (676)$$

تعریف می‌شود، که در آن $[e_i]_{i=1}^d \in G_p M$ یک چارچوب نماینده دلخواه در p است. وارون آن با

$$[\Lambda^{-1} f]([e_i]_{i=1}^d) = \langle \epsilon_e, \psi_{\mathcal{A}, p}^{[e_i]_{i=1}^d} f(p) \rangle, \quad (677)$$

داده می‌شود، که در آن ما $([e_i]_{i=1}^d) \psi_{\mathcal{A}, p}^{[e_i]_{i=1}^d} p = \pi_{GM}([e_i]_{i=1}^d)$ را به صورت مخفف نوشته‌ایم و با آن پیمانه (یکتا) را نشان می‌دهیم که متناظر با چارچوب $[e_i]_{i=1}^d$ است، یعنی در $\psi_{\mathcal{A}, p}^{[e_i]_{i=1}^d} ([e_i]_{i=1}^d) = e$ صدق می‌کند.

اثبات: برای اثبات این گزاره، باید نشان دهیم که ۱) این ایزومورفیسم همواری نگاشتها را حفظ می‌کند، ۲) که انتخاب چارچوب نماینده دلخواه با استفاده از رابطه همارزی $\sim_{\rho_{\text{III}}}$ واقعاً دلخواه است و ۳) که $\Lambda^{-1} \Lambda$ واقعاً یک وارون چپ و راست برای Λ است.

۱) همواری :

اینکه ایزومورفیسم همواری نمایش‌های میدان معادل را حفظ می‌کند، روش است زیرا تمام مورفیسم‌های درگیر (عمل راست، نگاشت پیمانه، حاصلضرب داخلی) هموار هستند.

۲) استقلال تعریف Λ (معادله (۶۷۶)) از انتخاب چارچوب نماینده $[e_i]_{i=1}^d \in G_p M$

فرض کنید که ما از هر چارچوب دیگر $[e_i]_{i=1}^d \triangleleft h \in G$ دلخواه استفاده کرده باشیم. سپس این تبدیل پیمانه $\sim_{\rho_{\text{III}}}$ را که زیربنای ساختار کلاف همبسته است، حذف می‌شود (معادله (۶۷۵)):

$$[\Lambda F](p) = \left[[e_i]_{i=1}^d \triangleleft h, \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft hg) \epsilon_g \right] \quad (\text{تعریف } \Lambda, \text{ معادله (۶۷۶)})$$

$$= \left[[e_i]_{i=1}^d, \rho_{\text{III}}(h) \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft hg) \epsilon_g \right] \quad (\text{رابطه همارزی } \sim_{\rho_{\text{III}}}, \text{ معادله (۶۷۰)})$$

$$= \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft hg) \epsilon_{hg} \right] \quad (\text{عمل راست } \rho_{\text{III}} \text{ روی } \epsilon_g, \text{ معادله (۶۷۲)})$$

$$= \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_{\tilde{g}} F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft \tilde{g}) \epsilon_{\tilde{g}} \right] \quad (\tilde{g} = hg \text{ جایگزینی (۶۷۸)})$$

۳) در معادله (۶۷۷) یک وارون خوش تعریف برای Λ در معادله (۶۷۶) است:

$$\Lambda^{-1} \Lambda = \text{id}_{C^\infty(GM)} \quad (۶۷۷)$$

برای هر $F \in C^\infty(GM)$ و هر $[e_i]_{i=1}^d$ این به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
& [\Lambda^{-1} \circ \Lambda F]([e_i]_{i=1}^d) \\
&= \left\langle \epsilon_e, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} [\Lambda F](p) \right\rangle && (\text{تعريف } \Lambda^{-1}, \text{ معادله } ٤٧٧) \\
&= \left\langle \epsilon_e, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) \epsilon_g \right] \right\rangle && (\text{تعريف } \Lambda, \text{ معادله } ٤٧٦) \\
&= \left\langle \epsilon_e, \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) \epsilon_g \right\rangle && (\text{تعريف } \psi_{A,p}, \text{ معادله } ١٩٤) \\
&= \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) \langle \epsilon_e, \epsilon_g \rangle && (\text{بردن حاصلضرب داخلی به داخل جمع}) \\
&= F([e_i]_{i=1}^d) && (\delta_{e,g} = \langle \epsilon_e, \epsilon_g \rangle) \\
&&& (٤٧٩)
\end{aligned}$$

یک وارون راست برای Λ است: $\Lambda \circ \Lambda^{-1} = \text{id}_{\Gamma(A_{\square\square\square})}$

فرض کنید $p \in M$ و $f \in \Gamma(A_{\square\square\square})$ باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned}
& [\Lambda \circ \Lambda^{-1} f](p) \\
&= \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g [\Lambda^{-1} f]([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) \epsilon_g \right] && (\text{تعريف } \Lambda, \text{ معادله } ٤٧٦) \\
&= \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g \left\langle \epsilon_e, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d \triangleleft g} f(p) \right\rangle \epsilon_g \right] && (\text{تعريف } \Lambda^{-1}, \text{ معادله } ٤٧٧) \\
&= \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g \left\langle \epsilon_e, \rho_{\square\square\square}(g)^{-1} \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} f(p) \right\rangle \epsilon_g \right] && (\text{تبديل پیمانه، معادله } ١٩٧) \\
&= \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g \left\langle \rho_{\square\square\square}(g) \epsilon_e, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} f(p) \right\rangle \epsilon_g \right] && (\rho_{\square\square\square} \text{ بودن}) \\
&= \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g \left\langle \epsilon_g, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} f(p) \right\rangle \epsilon_g \right] && (\text{عمل } \rho_{\square\square\square} \text{ روی } \epsilon_e, \text{ معادله } ٤٧٢) \\
&= \left[[e_i]_{i=1}^d, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} f(p) \right] && (\text{حذف بسط در پایه } \epsilon_g) \\
&= f(p) && (\text{تعريف } \psi_{A,p}, \text{ معادله } ١٩٤) \\
&&& (٤٨٠)
\end{aligned}$$

□

این اثبات ما را از همارزی $\Gamma(A_{\square\square\square})$ و $C^\infty(GM)$ به پایان می‌رساند.