

شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات

کانولوشن‌های یکسان نسبت به ایزومنتری و پیمانه روی منیفلدهای ریمانی

موریس وایلر^۱ پاتریک فوره^۱ اریک ورلیند^۲ مکس ولینگ^۱

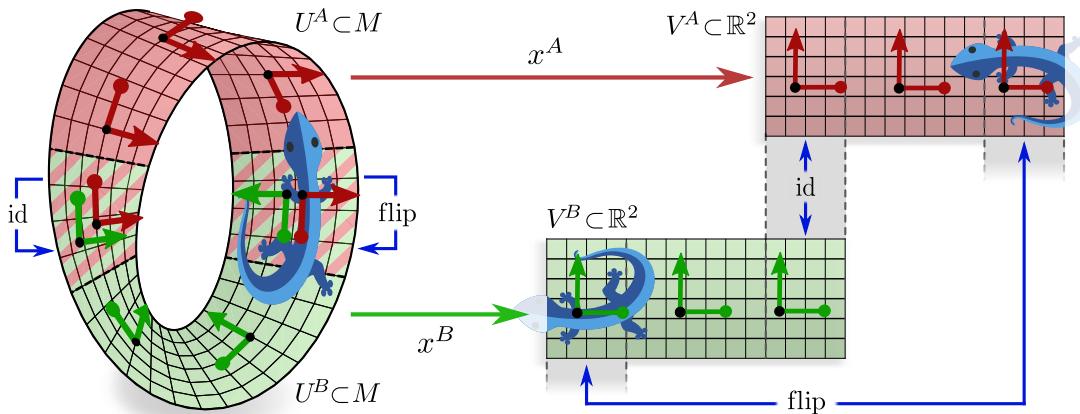
^۱دانشگاه آمستردام

^۲پژوهشگاه هوش مصنوعی کوالکام

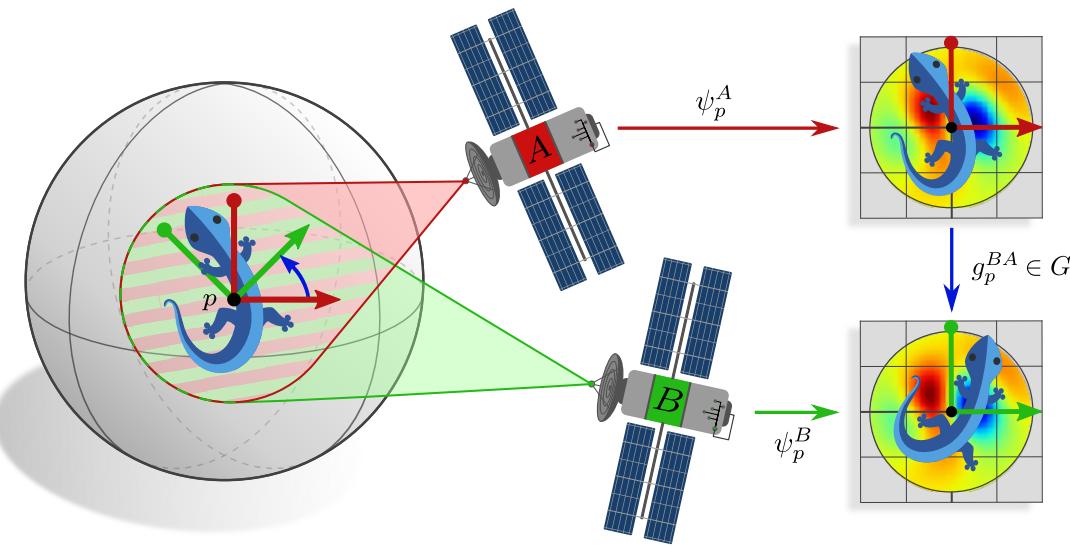
p.d.forre@uva.nl m.weiler.ml@gmail.com
m.welling@uva.nl e.p.verlinde@uva.nl

مقدمه

انگیزه‌ای از موقتیت گسترده شبکه‌های عمیق کانولوشنی، علاقه زیادی برای تعمیم کانولوشن‌ها به منیفلدهای غیراقلیدسی وجود دارد. یک پیچیدگی عمده در مقایسه با فضاهای مسطح این است که مشخص نیست کرمل کانولوشن باید در کدام تراز روی یک منیفلد اعمال شود. دلیل اساسی این ابهام آن است که منیفلدهای عمومی دارای انتخاب متعارف چارچوب‌های مرجع (گیج) نیستند. بنابراین کرنل‌ها و ویژگی‌ها باید نسبت به مختصات دلخواه بیان شوند. ما استدلال می‌کنیم که انتخاب خاص مختصات‌بندی باید بر استنتاج شبکه تأثیر بگذارد آن باید مستقل از مختصات باشد. تقاضای همزمان برای استقلال مختصات و اشتراک وزن منجر به الزامی روی شبکه می‌شود تا تحت تبدیل‌های گیج محلی (تفییرات چارچوب‌های مرجع محلی) تناوب پذیر باشد. ابهام چارچوب‌های مرجع بدین گونه به G -ساختار منیفلد بستگی دارد، به طوری که سطح لازم تناوب پذیری گیج توسط گروه ساختار G متناظر تجویز می‌شود. کانولوشن‌های مستقل از مختصات ثابت می‌شوند که نسبت به آن ایزومنتری‌هایی که تقارن‌های G -ساختار هستند تناوب پذیر باشند. نظریه حاصل به شکل آزاد از مختصات بر حسب بندل‌های فیبر فرمول بندی می‌شود. برای نمونه‌سازی طراحی کانولوشن‌های مستقل از مختصات، ما شبکه کانولوشنی روی نوار مویوس پیاده‌سازی می‌کنیم. عمومیت فرمول بندی هنداسه دیفرانسیل ما از شبکه‌های کانولوشنی با بررسی گسترده ادبیات نشان داده می‌شود که تعداد زیادی از شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی، شبکه‌های کانولوشنی کروی و شبکه‌های کانولوشنی روی سطوح عمومی را به عنوان نمونه‌های خاص کانولوشن‌های مستقل از مختصات توضیح می‌دهد.



شکل ۱: نمایش کانولوشن روی نوار مویوس با گیج‌های مختلف



شکل ۲: ناظران مختلف \square و \square ممکن است یک الگوی ویژگی را از « نقطه دید » متفاوتی در کاربرد ما، کرنل های کانولوشنی هستند که میدان دید محلی خود در اطراف p را در یک بردار ویژگی در p خلاصه می کنند. « نقطه دید » آنها انتخابی از یک چارچوب مرجع محلی (گیج) در \square است که کرنل در امتداد آن همتراز می شود. از آنجا که مشاهدات از هر دو نقطه دید یک الگوی یکسان را نشان می دهند، پاسخ های کرنل باید حاوی اطلاعات معادل باشد، یعنی استنتاج باید مستقل از مختصات باشد. این امر کرنل های کانولوشن را ملزم می کند که تحت تبدیلات گیج محلی هموردا باشند، یعنی تغییرات چارچوب های مرجع. سطح همودایی گیج توسط گروه ساختار G تعیین می شود که هم به خمینه و هم به کاربرد بستگی دارد. (ماژولک های با مجوز Creative Commons Attribution 4.0 International) تشکر از توییتر اقبال شده‌اند.)

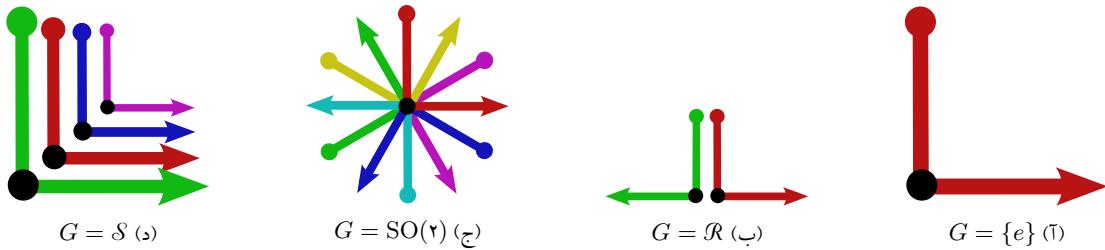
۱ مقدمه

در سالهای اخیر، شبکه های عصبی عمیق به مدل های منتخب برای طیف گسترده ای از وظایف در یادگیری ماشین تبدیل شده‌اند. موقوفیت مدل های عمیق اغلب ریشه در طراحی خاص وظیفه دارد که اساختار ریاضی داده های مورد پردازش را منعکس می کند. یک مثال بر جسته، شبکه های عصبی کانولوشنی (CNN) هستند که از ساختار فضایی داده ها از طریق اتصال محلی و اشتراک گذاری وزن فضایی بهره برداری می کنند. از آنجا که کرنل یکسانی در هر نقطه از فضای اعمال می شود، شبکه های کانولوشنی نسبت به انتقال هموردا هستند، به این معنی که الگوهای آموخته شده را به طور خود کار در سراسر موقعیت های مکانی تعمیم می دهند. با توجه به موقوفیت چشمگیر تجزیی CNN های اقلیدسی، علاقه زیادی به گسترش مدل های کانولوشنی برای پردازش سیگنال ها در دامنه های عمومی تر و هموردا ساختن آنها تحت گروه های تقارن بزرگ تر وجود دارد.

این کار به بررسی تعیین شبکه های کانولوشنی به خمینه های ریمانی می پردازد. یک پیچیدگی عده در تعیین شبکه های کانولوشنی از فضاهای اقلیدسی \mathbb{R}^d به خمینه های ریمانی عمومی این است که خمینه ها با انتخاب ارجحی از جهت مرتع همراه نیستند، که بتوان یک کرنل کانولوشن را در امتداد آن برای اندازه گیری ویژگی ها همتراز کرد. از آنجا که هیچ جهت مرتعی ارجح نیست، کرنل باید به صورت دلخواه روی خمینه هم تراز شود. موضوع اصلی این کار، تنظیم این دلخواهی بودن با مستقل ساختن استنتاج شبکه های از هم ترازی خاص کرنل های کانولوشن است. مشخص می شود که این امر نیازمند آن است که کرنل های همودایی گیج باشند، یعنی هموردا تحت تبدیلات هم ترازی کرنل. پاسخ یک کرنل همودایی گیج هنگام تغییر هم ترازی اش به طور قابل پیش بینی تبدیل می شود \square بنابراین تضمین می شود که محتوای اطلاعات استخراج شده برای هر انتخاب (دلخواه) هم ترازی یکسان باشد.

ما همترازی یک کرنل در نقطه ای p از یک خمینه M را به عنوان انتخابی از یک چارچوب مرجع محلی یا گیج از فضای مماس متانظر $T_p M$ فرمول بندی می کنیم. تبدیلات گیج بنابراین تبدیلات بین انتخاب های چارچوب های مرجع هستند. شکل ۵ مفهوم هم تراز کرنل ها در امتداد چارچوب های مرجع را به تصویر می کشد. هم تراز کرنل کرنل نسبت به میدان چارچوب کانونی (که به طور منحصر به فرد ارجح است) صفحه اقلیدسی \mathbb{R}^2 ، همانطور که در بالا نشان داده شده، منجر به میدان کرنل معمول CNN های اقلیدسی می شود. یک میدان چارچوب متفاوت، همانطور که در پایین نشان داده شده، به یک میدان کرنل جایگزین و در نتیجه یک شبکه جایگزین دلالت دارد. همانطور که در بالا بیان شد، در بیشتر خمینه ها انتخاب چارچوب های ذاتاً مبهم است به طوری که هیچ هم ترازی کرنل خاصی ارجح نیست. شکل ۲ این موضوع را برای کره S^2 به تصویر می کشد، جایی که چارچوب های تنها تا حد دوران ها منحصر به فرد هستند.

سطح ابهام در انتخاب چارچوب های مرجع به ساختار هندسی خمینه بستگی دارد. چنین ساختاری اغلب امکان رفع ابهام چارچوب های مرجع تا حد تبدیلات تقارنی معین (تبدیلات گیج) را فراهم می کند؛ به شکل ۳ مراجعه کنید. این بیانیه با چند مثال بهتر توضیح داده می شود:



شکل ۳: انتخاب چارچوب‌های مرجع یک فضای مماس $T_p M$ همیشه منحصر به فرد نیست. ساختار هندسی G یک خمینه، زیرمجموعه‌های ارجح از چارچوب‌های مرجع را ایجاد می‌کند به طوری که تبدیلات گیج بین این چارچوب‌ها در گروه ساختار $G \leq \text{GL}(d)$ قرار می‌گیرند. شکل‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ چنین زیرمجموعه‌هایی از چارچوب‌های را ترتیب برای گروه بدیهی $\{e\}$ دارند، گروه بازتاب $G = \mathcal{R}$ ، گروه دوران $G = \text{SO}(2)$ و گروه مفیاس پذیری $G = \mathcal{S}$ نشان می‌دهند. ویژگی‌ها اندازه‌گیری‌ها را نسبت به هر یک از چارچوب‌های متمایز که گذاری می‌کنند. ضرایب عددی آن‌ها نسبت به چارچوب‌های مختلف، توسط عمل یک نمایش گروهی ρ از G به هم مرتبط می‌شوند.

- یک خمینه هموار خام هیچ ترجیحی در انتخاب چارچوب‌ها ندارد. تبدیلات گیج بین چارچوب‌های عمومی، نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر دلخواه هستند، یعنی مقادیری در گروه خطی عمومی $G = \text{GL}(d)$ می‌گیرند.
- یک جهت‌گیری از خمینه امکان تمایز چارچوب‌های چپ‌گرد از راست‌گرد را فراهم می‌کند. تبدیلات گیج بین چارچوب‌های هر یک از دو دست، حافظ جهت‌گیری هستند، یعنی عناصری از $G = \text{GL}^+$ هستند. نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر با دترمینان مثبت.
- یک فرم حجم امکان تمایز چارچوب‌های با حجم واحد را فراهم می‌کند. در این صورت، تبدیلات گیج حافظ حجم هستند، یعنی مقادیری در گروه خطی ویژه $G = \text{SL}(d)$ می‌گیرند.
- ساختار متربیک یک خمینه ریمانی امکان اندازه‌گیری فواصل و زوایا را در فضاهای مماس فراهم می‌کند و بنابراین امکان تمایز چارچوب‌های متعامد را می‌دهد. تبدیلات گیج بین چارچوب‌های متعامد، دوران‌ها و بازتاب‌ها در گروه متعامد $G = d$ هستند.
- با هم، یک جهت‌گیری و متربیک به چارچوب‌های متعامد جهت‌دار دلالت دارند. در این صورت، تبدیلات گیج فقط دوران‌ها در گروه متعامد ویژه $G = \text{SO}(d)$ هستند.
- یک میدان چارچوب روی خمینه شامل یک چارچوب منحصر به فرد در هر نقطه از خمینه است. در این حالت، تبدیلات گیج بدیهی هستند که توسط گروه بدیهی $\{e\} = G$ توصیف می‌شوند.

همه این ساختارهای هندسی مشترک‌آیکی زیرمجموعه ارجح (زیربندل) از چارچوب‌ها را تعریف می‌کنند به طوری که تبدیلات گیج مقادیری در یک گروه ساختار $G \leq \text{GL}(d)$ می‌گیرند. برای تأکید بر نقش محوری گروه ساختار G ، چنین ساختارهایی به عنوان GM -ساختار نامیده می‌شوند. مثال‌های بصری از G -ساختارهای ساختار G و خمینه‌های M مختلف در شکل ۶ آورده شده است.

از آنجا که انتخاب چارچوب‌های مرجع ذاتاً مهم است، هر کیت هندسی و عملیات شبکه باید به طور مساوی نسبت به چارچوب‌های دلخواه $-G$ ساختار GM قابل نمایش باشد، یعنی باید GM -مستقل از مختصات باشد. بردارهای ویژگی بنابراین با یک نمایش گروهی (عمل گروهی خطی) از گروه ساختار G مرتبط هستند که قانون تبدیل آنها را تحت تبدیلات گیج (گذارهای با مقادیر G بین چارچوب‌های مرجع) تعیین می‌کند. انتخاب خاص نمایش گروهی، نوع هندسی یک میدان بردار ویژگی را تعیین می‌کند. مثال‌های معمول میدان‌های اسکالار، بردار یا تانسور هستند، با این حال، انواع میدان عمومی تری نیز در عمل استفاده می‌شوند. شکل ۷ استقلال از مختصات کمیت‌های هندسی را در مثال شناخته شده بردارهای مماس به تصویر می‌کشد.

هر لایه شبکه ملزم به رعایت قوانین تبدیل ویژگی‌های است، یعنی باید تضمین کند که خروجی‌هایش همانطور که انتظار می‌رود تبدیل می‌شوند. به طور خاص برای کانولوشن‌ها، استقلال از مختصات GM ایجاد می‌کند که اعمال کرنل مشترک نسبت به چارچوب‌های مختلف $-G$ -ساختار در یک نقطه $p \in M$ باید پاسخ یکسانی را تا حدی یک تبدیل گیج برانگیزد. مانشان می‌دهیم که این امر نیازمند G -راهبری (همورادی گیج، معادله (۸۶)) کرنل‌های کانولوشن است. به طور شهودی، می‌توان کرنل‌های G -راهبر را به عنوان اندازه‌گیری ویژگی‌ها به صورت نسبی نسبت به چارچوب‌های مرجع تصور کرد، که این امر ضروری است زیرا هیچ انتخاب چارچوب، یعنی همترازی کرنل مطلق، ارجح نیست.^۱ مثال‌هایی از کرنل‌های G -راهبر برای گروه بازتاب $G = \mathcal{R}$ در شکل ۸ نشان داده شده است. شکل ۹ اشتراک گذاری چنین کرنل‌هایی را نسبت به چارچوب‌های مختلف یک ساختار \mathcal{R} به تصویر می‌کشد. قید \mathcal{R} -راهبری نوعی تقارن را بر کرنل‌ها تحمیل می‌کند، به طوری که همترازی‌های مختلف واقعاً منجر به پاسخ‌هایی می‌شوند که دقیقاً با تبدیلات گیج (g) متفاوت هستند. ما در ادامه کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM را به عنوان کانولوشن‌های GM مخفف می‌کنیم.

علاوه بر اعمال کرنل‌های همورادی گیج، کانولوشن‌های GM ممکن است همورادی ایزوومتری باشند، به این معنی که با عمل ایزوومتری‌ها بر روی میدان‌های ویژگی جا بجا می‌شوند، همانطور که در شکل ۱۰ نشان داده شده است. فرض کنید $\phi \in \text{Isom}(M)$ یک ایزوومتری (تقارن) از خمینه M

^۱ به شباهت با اصل نسبیت خاص اینشیتین توجه کنید، که به جای چارچوب‌های G -ساختار، بر برابری چارچوب‌های لخت تکیه دارد.

باشد. یک شبکه عصبی دقیقاً زمانی نسبت به عمل این ایزو متري همودرا است که الگوها در $p \in M$ به همان روشنی پردازش شوند که الگوها در (p) پردازش می شوند. بنابراین همودرایی ایزو متري یک شبکه در تناظر یک به یک با ناورداری ایزو متري اتصال عصی آن (میدان کرنل) است؛ به شکل ؟؟ مراجعة کنید. از آنجا که کانولوشن های ما کرنل های را نسبت به چارچوب های (دلخواه) G -ساختار GM اعمال می کنند، تقارن های میدان کرنل با تقارن های G -ساختار منطبق هستند. با نشان دادن تقارن های (حافظ فاصله) یک G -ساختار GM با $\text{Isom}(M) \leq \text{Isom}_{GM}$ دارد که کانولوشن های ما دقیقاً Isom_{GM} -همودرا هستند. شکل ؟؟ این واقعیت را که G -ساختارها و میدان های کرنل متناظر تقارن های یکسانی دارند، به تصویر می کشد. خواننده تشویق می شود که G -ساختارها را در شکل ۶ با توجه به تقارن هایشان و ویژگی های همودرایی ضمنی کانولوشن های G -متناظر بررسی کند.

طراحی شبکه های کانولوشنی مستقل از مختصات GM بر روی خمینه های ریمانی نیازمند انتخاب یک G -ساختار است که به ملاحظات متعددی بستگی دارد. اولاً، انتخاب گروه ساختار G همودرایی گیج محلی کانولوشن را تعیین می کند: یک کرنل G -راهبر به طور خود کار الگوهای آموخته شده را بر روی تمام ژست های مرتبط با G از الگوها تعیین می دهد؛ به شکل ؟؟ مراجعة کنید. ثانیاً، انتخاب خاص G -ساختار همودرایی ایزو متري کانولوشن را تعیین می کند. در کاربردهای تصویربرداری پیشکی، الگوها اغلب در دورانه، بازتاب ها و موقعیت های دلخواه رخ می دهند □ بنابراین باید یک ساختار d ناورداری $\text{Isom}_{GM} = E(d)$ را روی \mathbb{R}^d انتخاب کرد، مشابه ساختار (۲) SO که در شکل ۶ نشان داده شده است. تصاویری مانند عکس های پرتره یک محور عمودی متمایز دارند، با این حال، بازتاب ها حول این محور آمار تصویر را ناورداری گذارند □ این امر نیازمند یک ساختار R مانند شکل ۶ است. علاوه بر چنین ملاحظات تقارنی، توجه به این نکته مهم است که هر خمینه ای (توپولوژی) ساختار های G هموار را برای هر انتخاب گروه ساختار G نمی پذیرد. یک مثال نوار موبیوس است که توپولوژی پیچ خورده آن (عدم جهت گیری) مانع از تخصیص هموار متغیر جهت گیری های چارچوب می شود. بنابراین یک عملیات کانولوشن مستقل از مختصات هموار بر روی نوار موبیوس لزوماً بر کرنل های راهبر-بازتابی تکیه دارد.

این کار شامل یک مرور ادبیات گسترده بر روی شبکه های کانولوشنی است که عمومیت نظریه ما را نشان می دهد. این بخش انواع مختلفی از CNN ها را در فضاهای اقلیدسی، CNN های کروی و کانولوشن های را بر روی سطوح عمومی (مانند مساحت های سطحی) پوشش می دهد. ما انتخاب های خاص G -ساختارها را که به طور ضمنی توسط نویسنده گان انجام شده است، با تحلیل ویژگی های همودرایی سراسری و محلی مدل هایشان شناسایی می کنیم. جدول ۶ یک نمای کلی از طبقه بندی حاصل از شبکه های کانولوشنی مستقل از مختصات GM را ارائه می دهد.

برای ارائه یک مثال دقیق در مورد چگونگی نمونه سازی کانولوشنی نظریه ما در عمل، ما پیاده سازی کانولوشن های GM را بر روی نوار موبیوس برای $G = R$ مورد بحث قرار می دهیم. این شامل استخراج کرنل های راهبر-بازتابی برای انواع مختلف (نمایش های گروهی) و ارزیابی تجربی همودرایی ایزو متري پیش بینی شده نظری است. همانطور که انتظار می رود، کانولوشن های مستقل از مختصات GM از پیاده سازی وابسته به مختصات ساده بهتر عمل می کنند. کد در آدرس <https://github.com/mauriceweiler/MobiusCNNS> موجود است.

یک فرمول بندی بدون مختصات از نظریه ما در زبان بندل های فیبر ابداع شده است. G -ساختارها اصلی GM زیر بندل های G از بندل چارچوب FM بر روی M هستند. میدان های ویژگی برش هایی از بندل های بردار ویژگی مرتبط با G هستند. گیج های تمهیم های بندل محلی هستند، در حالی که تبدیلات گیج نگاشت های گذار بین چنین تمهیم هایی هستند. ایزو متري هایی که یک کانولوشن GM نسبت به آنها همودرا است، اتومorfیسم های بندل اصلی از G -ساختار هستند.

CNN های مستقل از مختصات ما تعیین هایی از CNN های راهبر [؟ ؟ ؟ ؟ ؟] از فضاهای اقلیدسی (یا همگن) به خمینه های ریمانی هستند. در حالی که CNN های راهبر بر تبدیلات فعل و سراسری میدان های ویژگی تمرکز دارند، CNN های مستقل از مختصات تبدیلات غیرفعال و محلی بین چارچوب های مرجع را در نظر می گیرند.² مانند های اولیه ای از نظریه CNN های مستقل از مختصات ("CNN های همودرایی گیج") را در کارهای قبلی [؟ ؟] پیشنهاد کردیم. برخلاف این انتشارات، کار حاضر نظریه را با جزئیات بسیار بیشتری توسعه می دهد، آن را بر حسب بندل های فیبر فرمول بندی می کند، همودرایی تحت عمل ایزو متري ها را اثبات می کند و یک مرور ادبیات ارائه می دهد.

فهرست مطالب

۱	مقدمه
۲	مروج کلی و شهود بصری
۳	مقدمه ای بر شبکه های کانولوشنی مستقل از مختصات
۱.۳	گیج ها، تبدیل های گیج و G -ساختارها
۲.۳	میدان های بردار ویژگی مستقل از مختصات
۳.۳	انتقال موازی بردار های ویژگی

² این شیوه به تغییر تمرکز از کوواریانس لورنتس سراسری در نسیبت خاص به کوواریانس لورنتس محلی در نسیبت عام است.

۴۳	عمل ایزومتری‌ها و تبدیل‌های گیج القا شده	۲۷
۴	 شبکه‌های مستقل از مختصات و ۰۰-کانولوشن‌ها	۲۹
۱.۴	عملیات نقطه‌ای تناوب پذیر گیج	۳۰
۲.۴	تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM	۳۳
۳.۴	تناوب پذیری ایزومتری	۴۲
۵	 مدل اسباب بازی: کانولوشن‌های موبیوس هم‌متغیر انعکاس	۴۵
۱.۵	هنده نوار موبیوس	۴۵
۲.۵	میدان‌های ویژگی مستقل از جهت گیری	۴۷
۳.۵	شبکه‌های کانولوشنی مستقل از جهت گیری	۴۸
۴.۵	پاده‌سازی عددی و ارزیابی کانولوشن‌های موبیوس	۵۲
۶	 بندل‌های مرتبه و میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات	۵۸
۱.۶	مقدمه‌ای کوتاه بر کلاف‌های تاری	۵۸
۲.۶	کلاف مماس TM و کلاف چارچوب FM	۶۴
۳.۶	ساختارهای G و کلاف‌های برداری ویژگی وابسته A	۶۶
۴.۶	بدیهی‌سازی‌های محلی کلاف TM , FM , TM , FM , A و GM	۶۹
۵.۶	منتقل کننده‌های موازی روی کلاف‌های الحاقی	۷۵
۷	 تبدیلات میدان کرنل مستقل از مختصات و کانولوشن‌های GM	۷۸
۱.۷	کانولوشن‌های GM با اندازه 1×1	۷۸
۲.۷	تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM	۸۲
۸	 هم‌متغیری ایزومتری	۸۹
۱.۸	ایزومتری‌ها و عمل آنها بر منیفلد‌ها، کلاف‌ها و میدان‌ها	۹۰
۲.۸	هم‌متغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM	۱۰۲
۳.۸	میدان‌های کرنل خارج قسمتی	۱۰۸
۹	 شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات اقلیدسی	۱۲۲
۱.۹	فرمول‌بندی کلاسیک CNN‌های G -هدایت‌پذیر بر روی \mathbb{R}^d	۱۲۳
۲.۹	هنده‌سی افاین فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d	۱۲۵
۳.۹	CNN‌های هموردای گروه افاین در فضاهای اقلیدسی d	۱۳۱
۴.۹	CNN‌های اقلیدسی در مقالات	۱۳۴
۱۰	 CNN‌های هموردای دورانی در فضاهای اقلیدسی سوراخ‌دار	۱۳۷
۱۱	 CNN‌های کروی مستقل از مختصات	۱۴۳
۱.۱۱	هنده‌سی کره ۲-بعدی S^2	۱۴۴
۲.۱۱	CNN‌های کروی کاملاً هموردای دورانی	۱۴۸

۱۵۳	۳.۱۱ CNN های کروی همودای دوران سمتی در تپولوژی های استوانه ای
۱۵۷	۴.۱۱ تقریب های بیست و چهی از CNN های کروی
۱۶۱	۱۲ CNN های مستقل از مختصات روی سطوح عمومی
۱۶۲	۱.۱۲ هندسه ای سطوح جایگذاری شده
۱۷۰	۲.۱۲ کانولوشن های سطحی راهبری پذیر - دورانی
۱۷۶	۳.۱۲ کانولوشن های - $\{\cdot\}$ سطحی راهبری پذیر
۱۸۱	۴.۱۲ تقریب های بیست و چهی از CNN های کروی
۱۸۶	آ ارتباط با فرمالیسم چارت مختصاتی در هندسه دیفرانسیل
۱۸۶	۱. آ فضاهای مماس، فضاهای هم مماس و پایه های دو گان
۱۸۸	۲. آ دیفرانسیل ها، گرادیان ها و ژاکوبین ها
۱۸۹	۳. آ پایه های مختصاتی القا شده توسط چارت
۱۹۳	۴. آ پایه های مختصاتی به عنوان تریویالیزاسیون های محلی کلاف
۱۹۵	۵. آ G -ساختارها و میدان های ویل باین
۱۹۹	ب اشتراک وزن مستقل از مختصات و کرنل های G- راهبری پذیر
۲۰۰	پ انترال گیری روی فضاهای مماس
۲۰۱	ت کانولوشن های همودا روی فضاهای همگن
۲۰۷	ث میدان های کرنل نماینده خارج قسمتی \square اثبات ها
۲۱۲	ج کانولوشن های راهبری پذیر کروی به عنوان کانولوشن های \square اثبات ها
۲۱۶	چ وجود و همواری تبدیلات میدان کرنل
۲۱۸	ح میدان های ویژگی منظم به عنوان توابع اسکالر روی G-ساختار

این کار در قالب یک مقدمه، سه بخش اصلی و یک پیوست سازماندهی شده است.

بخش ۲.۱.۲ تلاش می کند شبکه های عصبی مستقل از مختصات را با زبانی آسان معروفی کند. میدان های ویژگی و لایه های شبکه نسبت به مختصات محلی (تسهیم های بندل) بیان می شوند. استقلال مختصات مورد نیاز، مستلزم آن است که ویژگی ها با یک قانون تبدیل خاصی مرتب باشند. لایه های شبکه ملزم به تضمین رفتار تبدیل صحیح ویژگی ها هستند.

بخش ۲.۴.۵ نظریه شبکه های عصبی مستقل از مختصات را بر حسب بندل های فیر رسمی سازی می کند. این امر امکان فرمول بندی سراسری و مستقل از مختصات را فراهم می کند، که به ویژه هنگام بررسی تناوب پذیری ایزو متری شبکه ها مفید است. تعاریف از بخش ۲.۱.۲ با بیان عملیات مستقل از مختصات در تسهیم های بندل محلی (مختصات) بازیابی می شوند.

بخش ۲.۳.۸ نظریه ما را در کارهای مرتبط جای می دهد. این بخش بررسی های مفصلی از معماری های شبکه کانولوشنی بر روی هندسه های مختلف ارائه می دهد و آن ها را به عنوان شبکه های کانولوشنی مستقل از مختصات فرمول بندی مجدد می کند. برای تسهیل توسعه معماری های شبکه جدید، ما ویژگی های مربوط به هندسه های خاص را قبل از بررسی شبکه هایی که بر روی آن ها عمل می کنند، مورد بحث قرار می دهیم.

خواننده می تواند بخش ۲.۴.۵ را در مرحله اول نادیده بگیرد فرمول بندی از بخش ۲.۱.۲ برای خواندن معرف ادبیات در بخش ۲.۳.۸ کاملاً کافی است.

مروری بر مفاهیم و نتایج اصلی کار ما در بخش ۲ زیر ارائه شده است. این مرور از معادلات پرهیز می‌کند و بر شهود هندسی از طریق بصری‌سازی‌ها تکیه دارد. امیدواریم این بخش به مخاطبان غیرتخصصی کمک کند تا ایده‌ای از محتوای کار ما به دست آورند.

مورد کلی جزئیات

بخش ۲.۱.۲: هدف بخش ۳ ابداع فضاهای ویژگی مستقل از مختصات است. به طور خاص، بخش ۱.۳ گنج، تبدیل‌های گنج و G -ساختارها را معرفی می‌کند. گنج‌ها روشنی رسمی برای بیان بردارهای مماس (مستقل از مختصات) و توابع روی فضاهای مماس نسبت به چارچوب‌های مرجع هستند. تبدیل‌های گنج بین این عبارات مختصاتی در گنج‌های مختلف ترجمه می‌کنند. بخش ۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی مستقل از مختصات را معرفی می‌کند. همانند مورد بردارهای مماس، ضرایب عددی بردارهای ویژگی هنگام انتقال بین چارچوب‌های مرجع تغییر می‌کنند. قوانین تبدیل بردارهای ویژگی به ویژه انتقال موازی آن‌ها و پیش‌برداری آن‌ها هنگام عمل توسط ایزومنتری‌ها را تعیین می‌کنند، که به ترتیب در بخش‌های ۴.۳ و ۴.۳ توضیح داده شده‌اند.

بخش ۴ شبکه‌های عصبی را که بین میدان‌های ویژگی نگاشت می‌کنند، توسعه می‌دهد. عملیات نقطه‌ای، مانند جمع بایس، کانولوشن‌های ۱ × ۱ و غیرخطی‌ها، در بخش ۱.۴ مورد بحث قرار می‌گیرند. بخش ۲.۴ بر روی کانولوشن‌ها با کرنل‌های گستردۀ فضایی تمرکز می‌کند. هر یک از این عملیات در ابتدا بدون فرض اشتراک وزن معرفی می‌شوند، یعنی به عنوان مثال، اجازه یک کرنل متفاوت در هر نقطه از متفوولد را می‌دهند. این کرنل‌ها (یا بایس‌ها یا غیرخطی‌ها) به هیچ وجه محدود نمی‌شوند. با این حال، هنگام نیاز به اشتراک وزن فضایی، آن‌ها مجبور می‌شوند که تابع پذیر گنج باشد. زیرا تنها مقادیر تابع پذیر می‌توانند به صورت مستقل از مختصات به اشتراک گذاشته شوند. بخش ۳.۴ یک اثبات مختصراً از تابع پذیر ایزومنتری کانولوشن‌های GM را بر حسب عبارات مختصاتی محلی ارائه می‌دهد. ایده اصلی در اینجا این است که ایزومنتری‌ها را می‌توان به عنوان الفاکتنه تبدیل‌های گنج (تفسیر منفعل) در نظر گرفت، که با تابع پذیری گنج کرنل‌ها توضیح داده می‌شود.

بخش ۵ پیاده‌سازی کانولوشن‌های مستقل از جهت گیری بر روی نوار موبیوس در بخش ۱.۵، انواع مختلفی از میدان‌های ویژگی در بخش ۲.۵ تعریف می‌شوند. بخش ۳.۵ بعدی، شبکه‌های کانولوشنی مستقل از جهت گیری را به صورت تحلیلی توصیف می‌کند. به طور خاص، ما کرنل‌های کانولوشنی تابع پذیر گنج، بایس‌ها و غیرخطی‌ها را برای هر یک از انواع میدان استخراج می‌کنیم. بخش ۴.۵ با یک پیاده‌سازی و ارزیابی عددی مدل‌های مربوطه به پایان می‌رسد.

بخش ۲.۴.۵: بخش ۶ محتوای بخش ۳ را بازتاب می‌دهد، با این حال، به صورت سراسری و بر حسب بندلهای فیبر. مقدمه‌ای کلی بر بندلهای فیبر در بخش ۱.۶ ارائه شده است. بخش‌های ۲.۶ و ۳.۶ بندل مماس TM ، بندل چارچوب FM ، G -ساختارها و بندل‌های بردار ویژگی مرتبط با (A) را معرفی می‌کنند. میدان‌های ویژگی به صورت سراسری به عنوان برش‌هایی از بندلهای بردار ویژگی تعریف می‌شوند. تمهیم‌های بندل محلی (گنج‌ها)، که در بخش ۴.۶ مورد بحث قرار گرفته‌اند، این بندل‌ها را در مختصات بیان می‌کنند و بدین ترتیب تعاریف ما از بخش ۳ را بازیابی می‌کنند. ما به طور خاص نشان می‌دهیم که چگونه تسهیم‌های محلی بندلهای مختلف یکدیگر را القای می‌کنند، به طوری که تبدیل‌های گنج (نگاشت‌های انتقال) آن‌ها همگام‌سازی می‌شوند. بخش ۵.۶ انتقال‌دهنده‌های موازی در G -بندل‌ها را مورد بحث قرار می‌دهد.

بخش ۷ شبکه‌های مستقل از مختصات از بخش ۴ را بر حسب بندلهای فیبر بازنویسی می‌کند. کانولوشن‌های ۱ × ۱ در بخش ۱.۷ به عنوان مورفیسم‌های مشخص بندل برداری M توصیف می‌شوند. به طور جایگزین، آن‌ها را می‌توان به عنوان برش‌هایی از یک بندل همومورفیسم مشاهده کرد. بخش ۲.۷ میدان‌های کرنل مستقل از مختصات و تبدیل‌های میدان کرنل را معرفی می‌کند. این عملیات مشابه کانولوشن‌های GM هستند اما نیازی به اشتراک و زن ندانند، یعنی ممکن است در هر مکان فضایی یک کرنل متفاوت اعمال کنند. یک میدان کرنل کانولوشنی GM با اشتراک و زن استریل (تابع پذیر گنج) منفرد در سراسر منفوله ساخته می‌شود. سپس کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM به عنوان تبدیل‌های میدان کرنل با میدان‌های GM -کانولوشنی تعریف می‌شوند. هنگام بیان فرمول‌بندی مستقل از مختصات کانولوشن‌های GM نسبت به تسهیم‌های محلی (گنج‌ها)، عبارات مختصاتی کانولوشن‌های GM را از بخش ۲.۴ بازیابی می‌کنیم.

تابع پذیر ایزومنتری کانولوشن‌های GM در بخش ۸ بررسی می‌شود. پس از معرفی ایزومنتری‌ها، بخش ۱.۸ عمل پیش‌برنامه آن‌ها را بر روی بندلهای فیبر مورد بحث قرار می‌دهد. این عمل نیز می‌تواند در تسهیم‌های محلی بیان شود، که منجر به فرمول‌بندی از بخش ۴.۳ می‌شود. بخش ۲.۸ عمل ایزومنتری‌ها بر روی میدان‌های کرنل را تعریف می‌کند که تابع پذیر ایزومنتری یک تبدیل میدان کرنل، ناوردای ایزومنتری میدان کرنل آن را نتیجه می‌دهد و بالعکس. کانولوشن‌های GM ثابت شده‌اند که تحت عمل آن ایزومنتری‌هایی که اتمومورفیسم‌های بندلی (تقارن‌ها) از G -ساختار GM هستند، تابع پذیر می‌باشند. بخش ۳.۸ میدان‌های کرنل ناوردا با ایزومنتری را با جزئیات بیشتری بررسی می‌کند و ثابت می‌کند که آن‌ها معادل میدان‌های کرنل در فضاهای خارج قسمتی از عمل ایزومنتری هستند. به طور شهودی، میدان‌های کرنل ناوردا با ایزومنتری ملزم به اشتراک کرنل‌ها بر روی مدارات ایزومنتری هستند. این نتیجه به ویژه دلالت دارد که تبدیل‌های میدان کرنل تابع پذیر ایزومنتری در فضاهای همگن لزوماً کانولوشن‌های GM هستند.

بخش ۲.۳.۸: بخش سوم این کار نشان می‌دهد که تعداد زیادی از شبکه‌های کانولوشنی از ادبیات را می‌توان به عنوان اعمال کانولوشن‌های GM برای انتخاب خاصی از G -ساختار و انواع میدان تفسیر کرد. این بخش باحثی کلی در مورد انتخاب‌های طراحی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات آغاز می‌شود. جدول ۶ مرواری و طبقه‌بندی از مدل‌های مورد بررسی را ارائه می‌دهد. خواننده دعوت می‌شود که به G -ساختارهای بصری‌سازی شده در بخش ۲.۳.۸ نگاهی بیندازد زیرا اینها ایده شهودی در مورد ویژگی‌های کانولوشن‌های GM مربوطه ارائه می‌دهند.

شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی که نه تنها تناوب پذیر ایزومنتری هستند بلکه به طور کلی تر تحت عمل گروه‌های آفین تناوب پذیر هستند، در بخش ۹ بررسی می‌شوند. این مدل‌ها اساساً معادل شبکه‌های کانولوشنی استیریل در فضاهای برداری اقلیدسی \mathbb{R}^d [۶] هستند. بخش ۱۹ شبکه‌های کانولوشنی استیریل را بررسی می‌کند و ارتباط آن‌ها با کانولوشن‌های GM را مورد بحث قرار می‌دهد. این رویکرد تا حدی نامطلوب است زیرا \mathbb{R}^d با یک میدان چارچوب کانونی (ساختر $\{e\}$) همراه است، که به طور ضمنی توسط مدل‌های تناوب پذیر نادیده گرفته می‌شود. بخش ۲۹ رویکردی اصولی ترا در پیش می‌گیرد و فضاهای آفین اقلیدسی \mathbb{E}_d را تعریف می‌کند که دقیقاً با G -ساخترهای مجذب شده‌اند که منجر به کانولوشن‌های GM می‌شوند. کانولوشن‌های واقعی GM در بخش ۳۹ تعریف می‌شوند. بخش ۴۹ شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی تناوب پذیر آفین را که در ادبیات یافت می‌شوند، بررسی می‌کند. آن‌ها عمدتاً در انتخاب‌های غرروض گروه‌های ساختار و نمایش‌های گروهی متفاوت هستند.

بخش ۱۰ شبکه‌های کانولوشنی را در فضاهای اقلیدسی سوراخ دار \mathbb{E}_d ، که مبدأ $\{0\}$ آن‌ها حذف شده است، پوشش می‌دهد. این مدل‌ها نسبت به چرخش حول مبدأ تناوب پذیر هستند، با این حال، نسبت به انتقال تناوب پذیر نیستند. آن‌ها بر اساس G -ساخترهایی هستند که با مختصات قطبی، مختصات لگاریتمی-قطبی یا مختصات کروی مطابقت دارند.

شبکه‌های کانولوشنی کروی در بخش ۱۱ پوشش داده می‌شوند. بخش ۱۱ هندسه ۲-کره (جاسازی شده) S^2 را مورد بحث قرار می‌دهد. با تفسیر فضاهای مماس به عنوان زیرفضاهای دو بعدی یک فضای جاسازی \mathbb{R}^3 عبارت فرم بسته نگاشته‌های نمایی و لگاریتمی، چارچوب‌ها، گیج‌ها، انتقال‌دهنده‌ها و عمل ایزومنتری را استخراج می‌کنیم. بخش ۲۱ شبکه‌های کانولوشنی کروی تناوب پذیر $(SO(3)$ و $SO(2)$) را بررسی می‌کند. ما به طور خاص ثابت می‌کنیم که نظریه ما فرمول‌بندی عمومی کانولوشن‌های کروی توسط \mathbb{R} [۴] به عنوان یک حالت خاص شامل می‌شود. شبکه‌های کانولوشنی کروی که فقط نسبت به چرخش $(SO(2))$ حول یک محور ثابت تناوب پذیر هستند در بخش ۱۱ توصیف می‌شوند. بخش ۴۲ شبکه‌های کانولوشنی بیست و چهارم را بررسی می‌کند. بیست و چهارم کره را تقریب می‌زند اما از وجود محلی مسطح تشکیل شده است که امکان پیاده‌سازی کارآمد عملیات کانولوشن را فراهم می‌کند.

یک بررسی از شبکه‌های کانولوشنی بر روی سطوح دو بعدی عمومی در بخش ۱۲ یافت می‌شود. بخش ۱۲ مقدمه‌ای کوتاه بر هندسه دیفرانسیل کلاسیک سطوح جاسازی شده و گسته‌سازی آن‌ها بر حسب شبکه‌های مثالی ارائه می‌دهد. کانولوشن‌های سطحی در ادبیات به دو دسته طبقه‌بندی می‌شوند: دسته اول، که در بخش ۲۲ پوشش داده شده است، بر اساس کرنل‌های $G = SO(2)$ -استیریل است. این مدل‌ها مستقل از انتخاب خاص چارچوب متعامد راست گرد هستند. بخش ۳۲ دسته دوم مدل‌ها را بررسی می‌کند که بر اساس کرنل‌های $\{e\}$ -استیریل، یعنی غیرتناوب پذیر هستند. این مدل‌ها به صراحت بر انتخاب یک میدان چارچوب تکیه دارند. بنابراین آن‌ها عمدتاً در روش‌های اکتشافی که برای تعیین چارچوب‌های مرجع استفاده می‌شوند، تفاوت دارند. توجه داشته باشید که چنین مدل‌هایی لزوماً در مبنی‌لهای غیرقابل موازی سازی مانند کره‌های توپولوژیکی ناپیوسته هستند.

پیوست: پیوست شامل اطلاعات اضافی و اثبات‌های طولانی است.

گیج‌ها به صورت رسمی تخصیص فوری چارچوب‌های مرجع به فضاهای مماس را انجام می‌دهند اما به نقاط روی منیفولد به صورت مستقل از مختصات اشاره دارند. یک جایگزین محبوب انتخاب چارت‌های مختصاتی است که به اصطلاح پایه‌های مختصاتی (پایه‌های هولونومیک) فضاهای مماس را القا می‌کنند. پیوست آ مقدمه‌ای بر فرمالیسم چارت‌ها ارائه می‌دهد و آن را با فرمالیسم گیج کلی تر مرتبط می‌کند.

پیوست ب درباره استقلال مختصات کرنل‌ها و اشتراک وزن در امتداد چارچوب‌های مرجع توضیح می‌دهد. اشتراک وزن مستقل از مختصات GM فقط برای کرنل‌های G -استیریل امکان‌پذیر است.

کانولوشن‌های GM با بیان میدان‌های ویژگی در مختصات نرمال ژئودزیک محاسبه می‌شوند، جایی که آن‌ها با کرنل‌های کانولوشنی G -استیریل مطابقت داده می‌شوند. این فرآیند شامل یک انتگرال‌گیری بر روی فضاهای مماس است که در پیوست پ توضیح شده است.

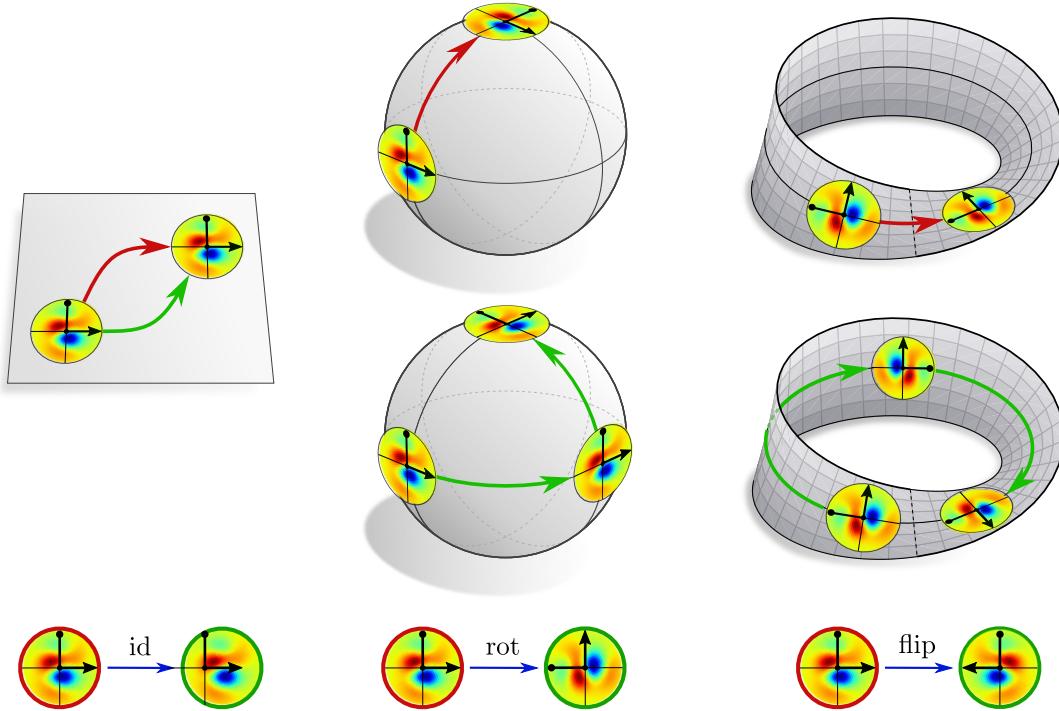
؟ [۴] و ؟ [۵] نظریه‌های نسبتاً عمومی از کانولوشن‌ها بر روی فضاهای همگن را پیشنهاد کردند. از آنجا که این مدل‌ها وزن‌ها را از طریق عمل یک گروه تقارنی به اشتراک می‌گذارند، آن‌ها بسیار شیوه به تبدیل‌های میدان کرنل تناوب پذیر ایزومنتری ما از بخش‌های ۲۸ و ۳۸ هستند. پیوست ت این مدل‌ها را بررسی می‌کند و توضیح می‌دهد که چگونه آن‌ها با کانولوشن‌های GM مرتبط هستند.

پیوست ث. ۱ ثابت می‌کند که میدان‌های کرنل ناوردا با ایزومنتری در منیفولد معادل میدان‌های کرنل در فضاهای خارج قسمتی از عمل ایزومنتری هستند. حالت خاص فضاهای همگن، که در آن‌ها تبدیل‌های میدان کرنل تناوب پذیر ایزومنتری معادل کانولوشن‌های GM هستند، در پیوست ث. ۲ پوشش داده شده است.

کانولوشن‌های کروی ؟ [۶] در پیوست ج ثابت شده‌اند که یک حالت خاص از کانولوشن‌های GM کروی ما هستند □ بنابراین هر شبکه کانولوشنی کروی که توسط نظریه آن‌ها پوشش داده می‌شود، توسط نظریه ما نیز توضیح داده می‌شود.

پیوست چ تأکید می‌کند که تبدیل‌های میدان کرنل و کانولوشن‌های GM ما به خوبی تعریف شده‌اند اگر میدان کرنل هموار باشد و شامل کرنل‌های با پیشیبانی فشرده باشد. "به خوبی تعریف شده" در اینجا به این معنی است که انتگرال‌ها وجود دارند و میدان‌های ویژگی حاصل هموار هستند.

در نهایت، پیوست خ استدلال می‌کند که میدان‌های ویژگی که مطابق با نمایش منظم گروه ساختار G تبدیل می‌شوند، معادل میدان‌های اسکالار بر روی G -ساختر هستند. این موضوع از آن جهت اهمیت دارد که برخی مدل‌ها، به ویژه کانولوشن‌های گروهی، این دیدگاه را اتخاذ می‌کنند.



شکل ۴: شهودی در مورد ابهام ذاتی اشتراک وزن در منیفلدهایی. چپ: یک تفسیر رایج از اشتراک وزن در صفحه، جایجاًی یک کرنل در کل فضاست. از آنجا که انتقال موازی در فضاهای مسطح مستقل از مسیر است، این امر بدون ابهام است. وسط: در فضاهای خمیده، مانند کره، انتقال موازی وابسته به مسیر است. مسیرهای مختلف منجر به کرنل‌های می‌شوند که نسبت به یکدیگر چرخانده شده‌اند. راست: نوار مویوس یک منیفلد غرقابل جهت‌گیری است. بنابراین، مسیرهای مختلف می‌توانند منجر به کرنل‌های می‌شوند که نسبت به یکدیگر بازتاب یافته‌اند. پایین: ما ترازهای مختلف کرنل را با انتخاب‌های مختلف چارچوب‌هایی مرجع محلی از فضاهای مماس مربوطه رسمی‌سازی می‌کنیم. به خوبی شناخته شده است که هیچ انتخابی از چارچوب‌های مرجع (گیج) در منیفلدهای عمومی ارجح نیست. مختصات بندی‌های مختلف با تبدیلهای گیج مرتبط هستند، که مقادیری در گروه ساختار G منیفلد (گروه بدیهی) $\{e\}$ برای صفحه، گروه چرخش (2) برای کره و گروه بازتاب $R = \mathcal{R}$ برای نوار مویوس می‌گیرند. شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات، ابهام چارچوب‌های مرجع را با اعمال کرنل‌های کانولوشنی G -استریبل (تاوب‌پذیر گیج) برطرف می‌کنند.

۲ مرور کلی و شهود بصری

فرمول‌بندی جبری شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات نیازمند آشنایی با نظریه گروه‌ها، نظریه نمایش‌ها و هندسه دیفرانسیل است که ممکن است برای مخاطبان غیرتخصصی مانع ایجاد کند. با این حال، بیشتر ساختارها و نتایج ما از نظر هندسه سیار شهودی هستند و می‌توان آن‌ها را با چند مثال بصری توضیح داد. این بخش تلاش می‌کند تا مرواری کلی و شهود بصری در مورد شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات را ارائه دهد.

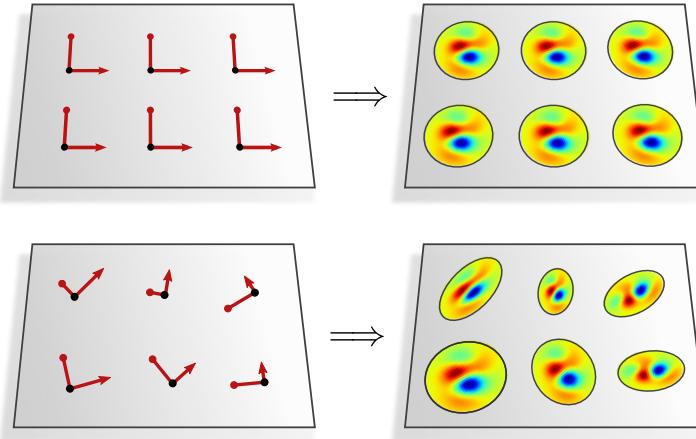
بخش ۱.۲ زیر، کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM را در منیفلدهای ریمانی معرفی می‌کند. تاوب‌پذیری آن‌ها تحت عمل ایزو متري‌ها در بخش ۱.۲ در مورد بحث قرار می‌گیرد. بخش ۱.۲ در مورد عواملی که بر انتخاب G -ساختار در طراحی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات تأثیر می‌گذارند، توضیح می‌دهد.

۱.۲ ساختارها و کانولوشن‌های مستقل از مختصات

از آنجا که کانولوشن‌ها اساساً با خاصیت اشتراک وزن خود مشخص می‌شوند، یک سؤال اصلی در این کار این است: چگونه باید کرنل‌های کانولوشن بر روی منیفلدهای ریمانی به اشتراک گذاشته شوند؟^۳

یک رویکرد رایج به اشتراک گذاشتن وزن‌ها از طریق عمل یک گروه تقارنی از فضای زیرین است [۴]. به عنوان مثال، شبکه‌های کانولوشنی سنتی وزن‌ها را با جایجاًی کرنل‌ها روی صفحه به اشتراک می‌گذارند، در حالی که شبکه‌های کانولوشنی کروی وزن‌ها را تقابل‌پذیر چرخش کرنل‌ها روی کره

^۳ این سؤال به طور کلی تبرای هر تابع قالب محلی، به عنوان مثال بایاس‌ها یا غیرخطی‌های نقطه‌ای نیز کاربرد دارد.



شکل ۵: یک ویژگی کلیدی کانولوشن‌ها این است که آن‌ها وزن‌ها را در سراسر منفولد به اشتراک می‌گذارند. ما تراز یک کرنل در $p \in M$ را با انتخاب یک چارچوب مرجع \square یا گیج \square از فضای مماس مربوطه $T_p M$ شناسایی می‌کیم. بنابراین میدان‌های چارچوب مختلف دلالت بر میدان‌های کرنل (کانولوشنی) متفاوتی دارند.

انتخاب چارچوب‌ها اغلب منحصر به فرد است. ابهام در این انتخاب با G -ساختارها رسمی‌سازی می‌شود؛ به شکل ۶ مراجعه کنید. برای در نظر گرفتن اختیاری بودن چارچوب‌ها، کرنل‌ها ملزم می‌شوند که G -استبریل (تناوب‌پذیر) باشند، همانطور که در اشکال ۴ و ۵ پیش‌نمایش شده است.

به اشتراک‌گذارندهای ریمانی می‌گذرد. برای به اشتراک‌گذارندهای منفولدی‌های ریمانی صادق نیست، این استراتژی برای هدف ما رد می‌شود.

اشتراک‌کرنل وزن در فضاهای اقلیدسی اغلب به عنوان "جایجاپی" یک کرنل در فضای دنی نظر گرفته می‌شود. از آنجا که در فضاهای مسطح انتقال موازی مستقل از مسیر انتخاب شده است، این امر منجر به تراز بدون ابهام کرنل‌ها می‌شود؛ به شکل ۴ (چپ) مراجعه کنید. با این حال، در فضاهای خمیده یا غیرقابل جهت‌گیری، انتقال موازی وابسته به مسیر می‌شود و بنابراین برای اشتراک‌کرنل وزن نامناسب است. شکل ۴ (وسط و راست) این مشکل را برای کره و نوار مویوس مثال می‌زند، جایجاپی که مسیرهای مختلف منجر به تراز متفاوتی از کرنل می‌شوند.

از آنجا که مفهوم "ترازهای کرنل" تا حدی مبهم است ابتدا باید آن را از نظر ریاضی دقیق کنیم:

ما انتخاب تراز کرنل در نقطه‌ای $p \in M$ را به عنوان انتخاب یک چارچوب مرجع محلی (گیج) از فضای مماس مربوطه $T_p M$ رسمی‌سازی می‌کنیم.

یک چارچوب مرجع در $p \in M$ یک تاپل مرتب $[e_1, e_2, \dots, e_d]$ از $\text{dim}(M)$ بردار مماس خطی مستقل $e_i \in T_p M$ است که به عنوان محورهای چارچوب نامیده می‌شوند. از آنجا که چارچوب‌های مختلف در p با تبدیل‌های خطی مرتبط هستند، انتخاب‌های مختلف چارچوب‌ها با تغییر شکل‌های کرنل خطی مطابقت دارند. شکل ۵ دو انتخاب مختلف از میدان‌های چارچوب را در \mathbb{R}^4 نشان می‌دهد. به اشتراک‌گذارندهای کرنل کانولوشنی در امتداد این میدان‌های چارچوب منجر به میدان‌های کرنل (کانولوشنی) مربوطه می‌شود.

شناسایی ترازهای کرنل با چارچوب‌های مرجع این سؤال را مطرح می‌کند:

انتخاب چارچوب‌های مرجع محلی بر روی یک منفولد (ریمانی) تا چه حد مبهم است؟

همانطور که در ادامه توضیح داده می‌شود، ابهام چارچوب‌های مرجع توسط یک G -ساختار که منفولد به آن مجهز است، تعیین می‌شود.

۱.۱.۲ \square -ساختارها

فضای همه چارچوب‌های ممکن $F_p M$ با عنوان $T_p M$ نشان داده می‌شود. با هم، چارچوب‌های همه فضاهای مماس، بندل چارچوب FM را تشکیل می‌دهند؛ به شکل ۲۶ مراجعه کنید. هیچ انتخاب خاصی از چارچوب‌ها در FM بر روی یک منفولد هموار "عربان" (بدون ساختار هندسی اضافی) ترجیح داده نمی‌شود، که ابهام تراز کرنل‌ها را حداکثری می‌کند. برای رفع ابهام چارچوب‌ها و ترازهای کرنل، منفولد، منفولد (کانولوشنی) مربوطه می‌شود.

یک منفولد ریمانی یا ساختار متریک مجهز شده است. با ارائه یک حاصل ضرب داخلی (متریک ریمانی) بر روی فضاهای مماس، این ساختار امکان شناسایی چارچوب‌های خاصی را می‌دهد که محورهای آن‌ها متعادل با یکدیگر هستند. تبدیل‌های گیج، یعنی تبدیل‌ها بین انتخاب‌های چارچوب‌های مرجع (به اشکال ۴ و ۷ مراجعه کنید)، سپس مقادیری در گروه متعادل d می‌گیرند. در منفولد‌های ریمانی، تراز کرنل‌ها همیشه تا چرخش‌ها و بازتاب‌ها بدون ابهام است.

شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی کرنل‌های کانولوشن (و در نتیجه چارچوب‌ها) را تراز می‌کنند موازی با یکدیگر همانطور که در شکل ۵ (بالا) بصری‌سازی شده است. شبکه‌های کانولوشنی کروی معمولاً ترازهای کرنل را تا چرخش‌ها بدون ابهام می‌کنند، یعنی آن‌ها یک دست‌پری ترجیحی از چارچوب‌های مرجع را فرض می‌کنند. ساختار متریک به تنهایی برای توصیف این تنظیمات کافی نیست، که نشان می‌دهد این منفولد‌هایی با ساختار هندسی اضافی علاوه بر ساختار متریک مجهز شده‌اند. ما پیشنهاد می‌کنیم که چارچوب ریاضی مناسب، G -ساختارها است و فرض می‌کنیم:

ابهام در انتخاب چارچوب‌های مرجع (و در نتیجه ترازهای کرنل)
بر روی یک منفولد G ساختار GM با G -ساختار.

G -ساختارها بندل‌هایی از چارچوب‌های مرجع متماز بر روی M هستند به طوری که تبدیل‌های گیج بین چارچوب‌های یک فضای مماس واحد، مقادیری در گروه ساختار $(d) \leq GL$ می‌گیرند. به طور شهودی، می‌توان مجموعه $G_p M$ چارچوب‌های $T_p M$ را "شیه" G' دانست، با این حال، بدون یک مبدأ متماز.⁴

بندل چارچوب خود یک FM ساختار با $(d) = GL$ است، در حالی که بندل چارچوب‌های متعمد OM یک G -ساختار (ساختار متريک) با $d = G = 1$ است. شبکه‌های کانولوشنی اقلیدسی سنتی بر روی میدان چارچوب کانونی در \mathbb{R}^d که در شکل ۶ نشان داده شده است، تکیه دارند که یک G -ساختار برای گروه بدینه $\{e\} = G$ است. شکل ۶ G -ساختارها را برای منفولد‌های بیشتر و گروه‌های ساختار دیگر بصری سازی می‌کند. مروری بر گروه‌های ساختار رایج در جدول ۱ در بخش ۳.۱.۳ یافت می‌شود.

ما در ادامه همیشه منفولد‌های ریمانی را مجذب به یک G -ساختار اضافی در کنار ساختار متريک خود فرض خواهیم کرد.⁵ انتخاب خاص G -ساختار خواص شبکه عصبی را تعیین می‌کند؛ ما در مورد این انتخاب در بخش ۳.۲ زیر توضیح خواهیم داد.

۲.۱.۲ شبکه‌های مستقل از مختصات

استقلال از مختصات GM (کوواریانس) هدف ما طراحی شبکه‌های عصبی بر روی یک منفولد ریمانی با یک G -ساختار اضافی است. اگر گروه ساختار G بدینه نباشد، هیچ انتخاب کانونی از چارچوب‌های مرجع (گیج) وجود ندارد. با این حال، برای انجام محاسبات عددی، برخی گیج، که کرنل‌ها و ویژگی‌ها نسبت به آن بیان می‌شوند، باید انتخاب شود. از آنجا که این انتخاب ذاتاً دلخواه است، ما تقاضا می‌کنیم که استنتاج شبکه‌ها در نهایت نباید به آن وابسته باشد، یعنی ما نیاز داریم:

شبکه‌های عصبی بر روی یک منفولد ریمانی با G -ساختار
باید بر اساس عملیات "مستقل از مختصات" GM باشند.

"استقلال از مختصات GM " در اینجا به این معنی است که همه کمیت‌های هندسی و توابع بین آن‌ها باید به همان اندازه به خوبی در هر گیج قابل بیان باشند، یعنی نسبت به هر انتخابی از چارچوب‌های مرجع G -ساختار. حالت خاص ضرایب بردار مماس و تبدیل‌های گیج بین آن‌ها در شکل ۷ بصری‌سازی شده است. شکل ۲.۱.۳ مثالی از یک نگاشت خطی و نمایش مستقل از مختصات آن بر حسب ماتریس‌ها نسبت به چارچوب‌های مختلف را نشان می‌دهد.

توجه داشته باشید که نیاز به استقلال از مختصات GM کاملاً اعطاف‌پذیر است: برای $GM = FM$ ، $G = GL(d)$ ، $G = GM$ را داریم و بنابراین حداکثر سطح استقلال از مختصات را. در انتهای دیگر طیف گروه‌های ساختار، $\{e\}$ قرار دارد، که برای آن GM یک میدان چارچوب ثابت است و استقلال از مختصات GM به وابستگی صریح به مختصات کاوش می‌باید. آزادی انتخاب G -ساختارهای دلخواه امکان کنترل دقیق بر استقلال از مختصات شبکه‌ها را فراهم می‌کند، که در عمل به طور گسترده‌ای متفاوت است؛ به عنوان مثال به جدول ۲.۳.۸ در بخش ۲.۳.۸ مراجعه کنید.

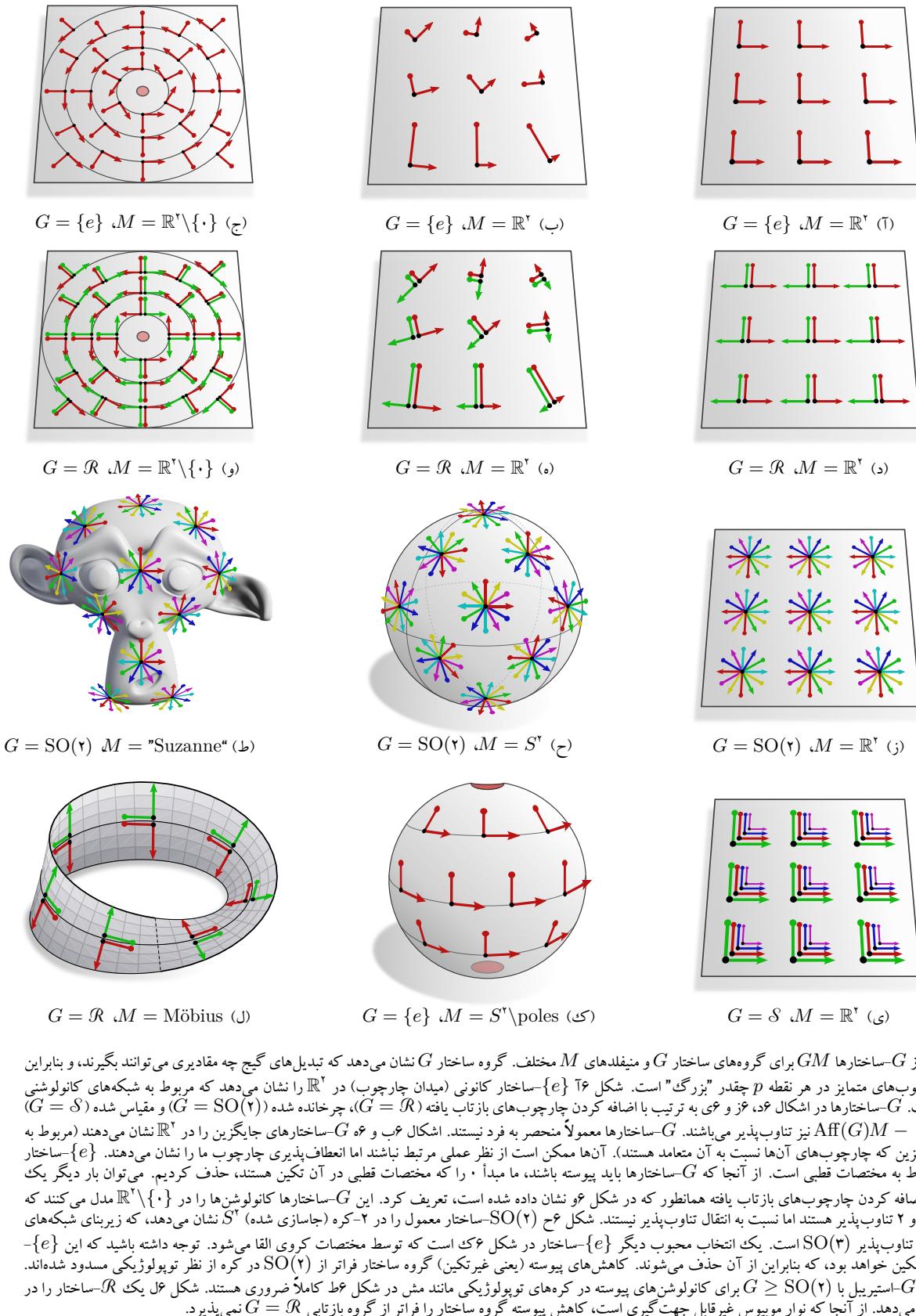
شبکه‌های میدان‌های بردار ویژگی را بر روی منفولد پردازش می‌کنند. بردارهای ویژگی کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات هستند، مانند بردارهای مماس. نسبت به یک چارچوب (گیج) انتخاب شده، آن‌ها را می‌توان با بردارهای ضریب عددی نمایش داد. نیاز به استقلال از مختصات GM ایجاب می‌کند که ضرایب عددی در گیج‌های مختلف، محتوا اطلاعاتی یکسانی را کدگذاری کنند. این امر به طور طبیعی با مرتبط کردن ویژگی‌ها با یک نمایش گروهی ρ از گروه ساختار G حاصل می‌شود که قانون تبدیل ضرایب آن‌ها را تحت تبدیل‌های گیج تعیین می‌کند:

میدان‌های بردار ویژگی با یک نمایش $G(\rho)$ مرتبط هستند که
قانون تبدیل ضرایب عددی آن‌ها را هنگام تبدیل بین چارچوب‌های مرجع مشخص می‌کند.
از نظر فنی، میدان‌های ویژگی برش‌هایی از بندل‌های بردار ویژگی مرتبط با G هستند.

مثال‌های معمول میدان‌های اسکالر، میدان‌های بردار مماس یا سایر میدان‌های تانسور هستند، با این حال، هر قانون تبدیلی مجاز است و می‌تواند توسط کاربر انتخاب شود. انتخاب‌های رایج دیگر برای ρ در زمینه یادگیری عمیق، نمایش‌های کاوش‌ناپذیر یا منظم هستند؛ مثال‌های بیشتر در جدول ۲.۳.۸ در بخش ۲.۳.۸ فهرست شده‌اند.

ما می‌خواهیم تأکید کیم که نیاز به استقلال از مختصات GM صرفاً یک شرط سازگاری است، که تضمین می‌کند مشاهده‌گران مختلف (چارچوب‌ها) بر روی مشاهده هندسی مستقل از مختصات یکسانی توازن دارند. این امر مجموعه توابع مجاز را به هیچ وجه محدود نمی‌کند، بلکه فقط چگونگی ارتباط عبارات آن‌ها نسبت به چارچوب‌های مختلف را مشخص می‌کند. به طور خاص، شبکه‌های عصبی مستقل از مختصات GM به طور کلی نیازی به تناوب پذیری گیج ندارند. نیاز به تناوب پذیری گیج زمانی مطرح می‌شود که اشتراک وزن و استقلال از مختصات به طور همزمان طلب شود، یعنی کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM بر روی کرنل‌های تناوب‌پذیر گیج تکیه دارند.

G -ساختار باید با ساختار متريک سازگار باشد به این صورت که چارچوب‌های متماز در GM زیرمجموعه‌ای از چارچوب‌های متعمد در OM باشند زمانی G -ساختار برای $G = OM$ با ساختار GM مطبق است و اطلاعات هندسی اضافی را اضافه نمی‌کند.



شکل ۶: نمونه‌ای از GM برای گروه‌های ساختار G و منفلاهای M مختلف. گروه ساختار G نشان می‌دهد که تبدیل‌های گیج چه مقادیری می‌توانند بگیرند، و بنابراین زیرمجموعه چارچوب‌های متمایز در هر نقطه p چقبر "بزرگ" است. شکل ۶آ $\{e\}$ -ساختار کانونی (میدان چارچوب) در \mathbb{R}^r را نشان می‌دهد که مربوط به شبکه‌های کانونلوشنی اقلیدسی سنتی است. G -ساختارها در اشکال عد، عز و عی به ترتیب با اضافه کردن چارچوب‌های بازتاب یافته ($G = \mathcal{R}$)، چرخانده شده ($G = \mathcal{S}$) و مقیاس شده ($G = \mathcal{S}$) مربوط شده‌اند. G -ساختارها معقولاً منحصر به فرد نیستند. اشکال عد و عز G -ساختارها مربوط به یک متريک جايگرین که چارچوب‌های آنها نسبت به آن معتماد هستند. آن‌ها ممکن است از نظر عملي مرتبط باشند اما انعطاف‌پذيری چارچوب ما را نشان می‌دهند. G -ساختارها در شکل عج مرriott به مخصوصات قطبی است. از آنجا که G -ساختارها باید پیوسته باشند، ما می‌دانیم که مخصوصات قطبی در آن تکین هستند، حذف کردیم. می‌توان بار دیگر یک G -ساختار را با اضافه کردن چارچوب‌های بازتاب یافته همانطور که در شکل چونشان داده شده است، تعریف کرد. این G -ساختارها کانونلوشن‌ها را در $\mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ مدل می‌کنند که نسبت به $\text{SO}(2)$ و $\text{SO}(2)$ -تاوب‌پذیر مستند اما نسبت به انتقال تاوب‌پذیر نیستند. شکل ۶ج $\text{SO}(2)$ -ساختار معمول را در $\mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ نشان می‌دهد، که زیربنای شبکه‌های کانونلوشنی کروی تاوب‌پذیر $\text{SO}(3)$ است. یک انتخاب محظوظ دیگر $\{e\}$ -ساختار در شکل ۶ک است که توسط مخصوصات کروی القا می‌شود. توجه داشته باشید که این $\{e\}$ -ساختار در قطبین تکین خواهد بود، که بنابراین از آن حذف می‌شوند. کاهش‌های پیوسته (يعني غيرتکین) گروه ساختار فراتر از $\text{SO}(2)$ در کره از نظر توپولوژيکی مسدود شده‌اند. بنابراین کرنل‌های G -استریل با $G \geq \text{SO}(2)$ برای کانونلوشن‌های پیوسته در کره‌های توپولوژيکی مانند مش در شکل عط کاملاً ضروری هستند. شکل ۶ل یک G -ساختار را در نوار موبیوس نشان می‌دهد. از آنجا که نوار موبیوس غیرقابل جهت گیری است، کاهش پیوسته گروه ساختار را فراتر از گروه بازتابی $G = \mathcal{R}$ نمی‌پذیرد.

شبکه‌های کانولوشنی سلسله‌مراتبی از میدان‌های ویژگی را از یک سیگنال ورودی بر روی یک منیفولد استخراج می‌کنند. ویژگی‌ها از طریق کرنل‌ها محاسبه می‌شوند، که برای شناسایی الگوهای فضایی مشخص در ویژگی‌های سطح پایین تر بهینه شده‌اند. ما تقاضا می‌کنیم که این فرآیند استنتاج صرفاً بر اساس آرایش نسبی ویژگی‌ها باشد و مستقل از انتخاب خاص مختصات بنده باشد. بنابراین ویژگی‌ها باید کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات باشند، مشابه اسکالارها، بردارها یا تانسورها. در حالی که چنین کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات وجود دارند، یک پیاده‌سازی کامپیوترا (غیرنمادین) نیازمند آن است که آن‌ها بر حسب ضرایب عددی در برخی گیج، یعنی نسبت به برخی انتخاب از چارچوب مرتع، بیان شوند. انتخاب خاص مختصات بی‌اهمیت است □ این تنها یکی از چندین توصیف معادل است. چارچوب ریاضی مناسب برای تنظیم چنین درجات آزادی اضافی، نظریه‌های گیج هستند. یک نظریه گیج، برابری گیج‌های مختلف را با مرتبط کردن سازگار آن‌ها با یکدیگر از طریق تبدیل‌های گیج در نظر می‌گیرد. میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات بنابراین با یک قانون تبدیل خاص، یعنی یک عمل گروهی از گروه ساختار که توصیف می‌کند ویژگی‌ها چگونه تحت تبدیل‌های گیج تبدیل می‌شوند، مرتبط هستند. هر لایه شبکه عصبی که چنین میدان‌های ویژگی را پردازش می‌کند، ملزم به رعایت قوانین تبدیل آن‌ها برای حفظ استقلال از مختصاتشان است.

هدف این بخش اول از کار ما، معرفی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات با زبانی آسان است. بنابراین، شهود هندسی و بصری‌سازی‌ها بر فرمالیسم ریاضی ترجیح داده می‌شوند. یک تبیین رسمی تر از تعاریف و نتایج ارائه شده در بخش ۲.۴.۵ آورده شده است.

بخش ۳ گیج‌ها و تبدیل‌های گیج را معرفی می‌کند که بر اساس آن‌ها میدان‌های بردارهای ویژگی مستقل از مختصات تعریف می‌شوند. شبکه‌های عصبی که بین چنین میدان‌های ویژگی نگاشت می‌کنند، در بخش ۴ توسعه یافته‌اند. بخش ۵ یک نمونه پیاده‌سازی از میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را در نوار موبیوس ارائه می‌دهد.

۳ مقدمه‌ای بر شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات

شبکه‌های کانولوشنی سلسله‌مراتبی از میدان‌های ویژگی را از یک سیگنال ورودی بر روی یک منیفولد استخراج می‌کنند. ویژگی‌ها از طریق کرنل‌ها محاسبه می‌شوند، که برای شناسایی الگوهای فضایی مشخص در ویژگی‌های سطح پایین تر بهینه شده‌اند. ما تقاضا می‌کنیم که این فرآیند استنتاج صرفاً بر اساس آرایش نسبی ویژگی‌ها باشد و مستقل از انتخاب خاص مختصات بنده باشد. بنابراین ویژگی‌ها باید کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات باشند، مشابه اسکالارها، بردارها یا تانسورها. در حالی که چنین کمیت‌های هندسی مستقل از مختصات وجود دارند، یک پیاده‌سازی کامپیوترا (غیرنمادین) نیازمند آن است که آن‌ها بر حسب ضرایب عددی در برخی گیج، یعنی نسبت به برخی انتخاب از چارچوب مرتع، بیان شوند. انتخاب خاص مختصات بی‌اهمیت است □ این تنها یکی از چندین توصیف معادل است. چارچوب ریاضی مناسب برای تنظیم چنین درجات آزادی اضافی، نظریه‌های گیج هستند. یک نظریه گیج، برابری گیج‌های مختلف را با مرتبط کردن سازگار آن‌ها با یکدیگر از طریق تبدیل‌های گیج در نظر می‌گیرد. بنابراین میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات با یک قانون تبدیل خاص، یعنی یک عمل گروهی از گروه ساختار که توصیف می‌کند ویژگی‌ها چگونه تحت تبدیل‌های گیج تبدیل می‌شوند، مرتبط هستند. هر لایه شبکه عصبی که چنین میدان‌های ویژگی را پردازش می‌کند، ملزم به رعایت قوانین تبدیل آن‌ها برای حفظ استقلال از مختصاتشان است. هدف این بخش اول از کار ما، معرفی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات با زبانی آسان است. بنابراین، شهود هندسی و بصری‌سازی‌ها بر فرمالیسم ریاضی ترجیح داده می‌شوند. یک تبیین رسمی تر از تعاریف و نتایج ارائه شده در بخش ۲.۴.۵ آورده شده است.

۱.۳	گیج‌ها، تبدیل‌های گیج و G-ساختارها
۲.۳	میدان‌های بردار ویژگی مستقل از مختصات
۳.۳	انتقال موازی بردارهای ویژگی
۴.۳	عمل ایزومتری‌ها و تبدیل‌های گیج القا شده

بخش ۳ گیج‌ها و تبدیل‌های گیج را معرفی می‌کند که بر اساس آن‌ها میدان‌های بردارهای ویژگی مستقل از مختصات تعریف می‌شوند. شبکه‌های عصبی که بین چنین میدان‌های ویژگی نگاشت می‌کنند، در بخش ۴ توسعه یافته‌اند. بخش ۵ یک نمونه پیاده‌سازی از میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را در نوار موبیوس ارائه می‌دهد.

۱.۳ گیج‌ها، تبدیل‌های گیج و G -ساختارها

۱.۱.۳ فضاهای مماس و چارچوب‌های مرجع

یک منفولد هموار d -بعدی M دارای یک فضای مماس $T_p M \cong \mathbb{R}^d$ متصل به هر نقطه $p \in M$ است. فضاهای مماس، فضاهای برداری d -بعدی هستند، با این حال، برخلاف \mathbb{R}^d ، آن‌ها به طور کلی با هیچ انتخاب ارجح چارچوب مرجع همراه نیستند. یک بردار مماس $v \in T_p M$ یک شی مستقل از مختصات است و بنابراین بلافصله به صورت عددی با یک تاپل مختصاتی $(v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$ نمایش داده نمی‌شود. به طور انتزاعی، هر فضای مماس $T_p M$ با \mathbb{R}^d مرتباً ریخت است اما به طور کلی هیچ هم‌ریختی کانونی بین آنها وجود ندارد. بنابراین هر دو فضای از نظر ساختاری معادل هستند اما به هیچ روش ارجح به یکدیگر شناسایی نمی‌شوند.

یک گیج (تسهیم محلی بندل مماس) بر روی M به عنوان مجموعه‌ای از نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر که به صورت هموار وابسته به موقعیت هستند، تعریف می‌شود:

$$\psi_p^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad p \in U^A, \quad (1)$$

که هم‌ریختی‌های فضای برداری گمشده بین $T_p M$ و \mathbb{R}^d را مشخص می‌کند. همانطور که در شکل ۷ بصری‌سازی شده است، آن‌ها با تخصیص یک بردار ضریب به فضاهای مماس مختصات می‌دهند:

$$v^A := \psi_p^A(v) \in \mathbb{R}^d \quad (2)$$

به هر بردار مماس مستقل از مختصات $v \in T_p M$ ، معکوس این رابطه می‌دهد:

$$v = (\psi_p^A)^{-1}(v^A) = (\psi_p^A)^{-1}\left(\sum_i v_i^A \epsilon_i\right) = \sum_i v_i^A (\psi_p^A)^{-1}(\epsilon_i) =: \sum_i v_i^A e_i^A, \quad (3)$$

که در آن $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_d\}$ را پایانه استاندارد \mathbb{R}^d نامگذاری کرده‌ایم و از خطی بودن گیج برای بیرون کشیدن جمع استفاده کرده‌ایم. این نشان می‌دهد که گیج را می‌توان به عنوان مجهر کردن هر فضای مماس $T_p M$ با یک چارچوب مرجع در نظر گرفت:

$$[e_1^A, \dots, e_d^A] := \left[(\psi_p^A)^{-1}(\epsilon_1), \dots, (\psi_p^A)^{-1}(\epsilon_d) \right], \quad (4)$$

که به عنوان یک d -تاپل از بردارهای مماس خطی مستقل تعریف می‌شود که با نگاشت پایه استاندارد \mathbb{R}^d به عقب از طریق نگاشت معکوس گیج به دست می‌آید. برای اختصار، ما در ادامه از نماد کوتاه‌شده $[e_i^A]_{i=1}^d$ برای چارچوب‌ها $[e_1^A, \dots, e_d^A]$ استفاده خواهیم کرد. ضرایب v^A مختصات v نسبت به این چارچوب هستند. مجموعه‌ای از چارچوب‌های القا شده توسط ψ_p^A بر روی U^A (هموار) میدان چارچوب نامیده می‌شود؛ برای بصری‌سازی به شکل ۸ مراجعه کنید.

گیج‌های ψ^X فضاهای مماس را تنها در همسایگی‌های محلی M مختصات می‌دهند، و به دلیل موانع تopolوژیکی به طور کلی نمی‌توانند به کل منفولد بدون نقض فرض همواری گسترش یابند. بنابراین یک اطلس در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathcal{A} = \{(U^X, \psi^X)\}_{X \in \mathfrak{X}}, \quad (5)$$

متشكل از گیج‌های هموار بر روی مجموعه‌ای از همسایگی‌های U^X که منفولد را پوشش می‌دهند، یعنی شرط $\bigcup_{X \in \mathfrak{X}} U^X = M$ را برآورده می‌کنند، که در آن \mathfrak{X} یک مجموعه اندیس است.^۹ در نواحی همپوشانی $U^A \cap U^B \neq \emptyset$ از همسایگی‌ها، گیج‌های مختلف ψ_p^A و ψ_p^B توسط توابع گذار هموار به هم متصل می‌شوند:

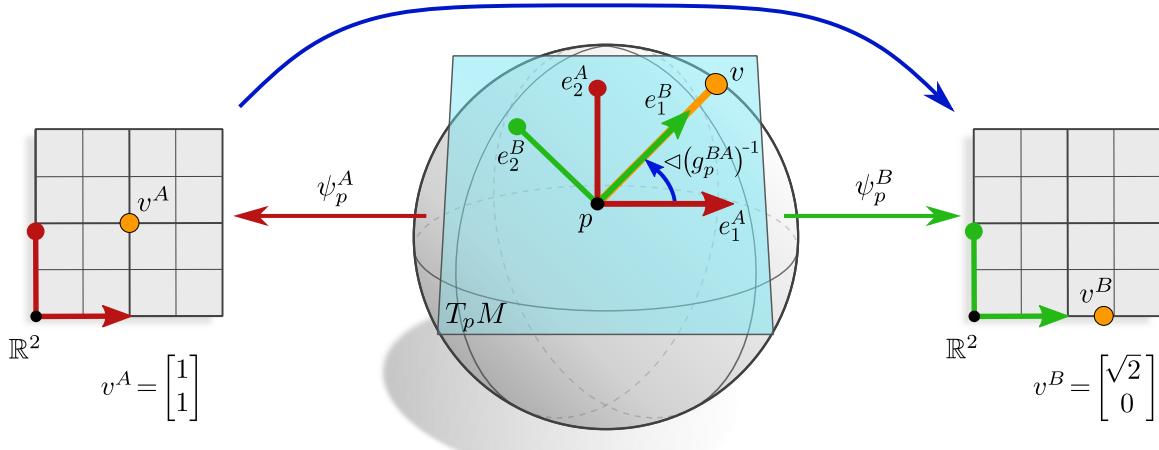
$$g^{BA} : U^A \cap U^B \rightarrow \text{GL}(d), \quad p \mapsto g_p^{BA} := \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}. \quad (6)$$

در اینجا ما دامنه مشترک (فعلاً) را با گروه خطی عمومی $\text{GL}(d)$ در نظر می‌گیریم، مشکل از همه ماتریس‌های معکوس‌پذیر در $\mathbb{R}^{d \times d}$ ، که رابطه بین هر جفت از هم‌ریختی‌های فضای برداری (گیج‌ها) یا چارچوب‌های مرجع را توضیح می‌دهند. عمل چنین تابع گذاری بر روی یک گیج داده شده یک تبدیل گیج را تعریف می‌کند:

$$\psi_p^B = g_p^{BA} \cdot \psi_p^A. \quad (7)$$

^۹ اطلس گیج‌ها بسیار شبیه به اطلس‌های معمول چارت‌های یک منفولد است (پیوست آ). تفاوت این است که اطلس‌های مورد نظر در اینجا مستقیماً به بندل مماس TM مختصات می‌دهند به جای منفولد.

$$g_p^{BA} := \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}$$



شکل ۷: شناسایی $T_p M \cong \mathbb{R}^d$ از طریق گیج‌های مختلف. یک بردار مماس (مستقل از مختصات) $v \in T_p M$ (نارنجی) را می‌توان به صورت عددی با یک تابع مخصوصی $\psi_p^A(v) = (1, 1)^\top$ نسبت به گیج ψ_p^A (قرمز) یا، به طور معادل، با $\psi_p^B(v) = (\sqrt{2}, 0)^\top$ نسبت به گیج ψ_p^B (سیاه) نمایش داد. انتخاب یک گیج مربوط به انتخاب $[e_1^A, e_2^A]$ یا $[e_1^B, e_2^B]$ از چارچوب مرجع است. در یک منیفولد عمومی هیچ انتخابی از گیج یا مختصات‌بندی پیش‌فرض ارجح نیست. گیج‌های مختلف، و در نتیجه چارچوب‌های مرجع، با تبدیل‌های گیج $\psi_p^B \circ \psi_p^A$ (آبی) مرتب هستند که مقادیری در گروه ساختار G تعریف شده می‌گیرند. این شکل ۴۲ در بخش ۲.۹ یک نمودار مشابه برای چارت‌های (آفین) را نشان می‌دهد که گیج‌ها بلافارضه به فضاهای مماس مختصات می‌دهند. شکل ۷ نمودار جایجاویی گرافیکی از نمودارهای جایجاوی در معادله (۸) و شکل ۲۷ آنست. توجه داشته باشید که گیج‌ها بلافارضه به فضاهای مماس مختصات می‌دهند. شکل ۷ نمودار جایجاویی گرافیکی از نمودارهای مختلف به صورت زیر بصری‌سازی می‌شود:^۷

از نظر یک نمودار جایجاوی، رابطه بین گیج‌های مختلف به صورت زیر بصری‌سازی می‌شود:

$$\begin{array}{ccccc} & & g_p^{BA} & & \\ & \xleftarrow{\psi_p^A} & T_p M & \xrightarrow{\psi_p^B} & \mathbb{R}^d \\ \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\psi_p^A} & & & \xrightarrow{\psi_p^B} \mathbb{R}^d \\ & \uparrow & & & \\ & & g_p^{AB} & = & (g_p^{BA})^{-1} \end{array} \quad (8)$$

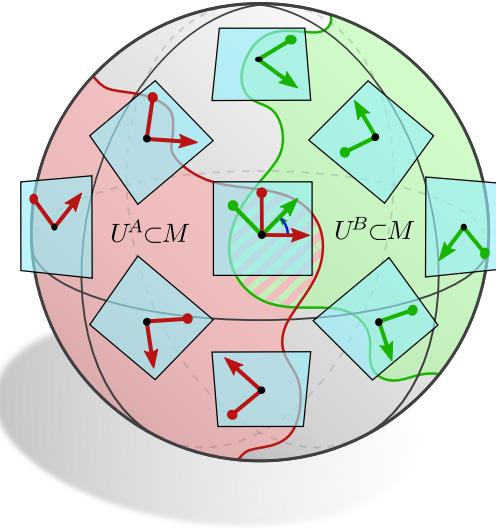
این نمودار را با تفسیر گرافیکی آن در شکل ۷ مقایسه کنید.

یک تبدیل گیج، مختصات‌بندی فضاهای مماس را تغیر می‌دهد به طوری که همان بردار مماس مستقل از مختصات v با یک بردار مولفه‌ای متفاوت نمایش داده می‌شود:

$$v^B = g_p^{BA} v^A. \quad (9)$$

^۷ نمودارها یک نمای کلی بصری از توابع و فضاهای را که بین آنها نگاشت می‌کنند، ارائه می‌دهند. به عنوان مثال، نمودار $X \xrightarrow{f} Y \downarrow g \xrightarrow{h} Z$

به این معنی است که توابع $Y \rightarrow Z$ و $g : Y \rightarrow X$ و $f : X \rightarrow Z$ وجود دارند. اگر ترکیبات توابع در امتداد همه مسیرهایی با شروع و پایان یکسان مطابقت داشته باشند، نمودار جایجاوی نامیده می‌شود. نمودار مثال ما اگر (و تنها اگر) $f \circ g = h$ باشد، جایجاوی است.



شکل ۸: هر نقطه p از یک منفولد ریمانی M دارای یک فضای مماس $T_p M$ متصل است. یک گیج هموار ψ^A بر روی یک زیرمجموعه مناسب انتخاب شده $U^A \subseteq M$ تمام ضمایر مماس $T_p M$ را برای p در U^A مخصوص می‌دهد همانطور که در شکل ۷ نشان داده شده است. این معادل انتخاب یک میدان چارچوب هموار بر روی U^A است. از آنجا که به طور کلی امکان گسترش یک گیج به صورت سراسری بر روی کل منفولد وجود ندارد، لازم است که یک G -اطلس در نظر گرفته شود، مشکل از گیج‌هایی که M را پوشش می‌دهند. مخصوص بندی‌های مختلف ψ^A بر روی U^B (سیز) از طریق تبدیل‌های گیج (یا نگاشت‌های گذار) $g^{BA} : U^A \cap U^B \rightarrow G$ به هم متصل می‌شوند که بر روی همپوشانی $U^A \cap U^B$ (خطدار) تعریف شده‌اند و مقادیری در گروه ساختار $G \leq \text{GL}(d)$ می‌گیرند.

از آنجا که یک گیج مربوط به انتخاب یک میدان چارچوب است، یک تبدیل گیج مربوط به تبدیل بین میدان‌های چارچوب است. به طور خاص، یک چارچوب $[e_i^A]_{i=1}^d = [e_1^A, \dots, e_d^A]$ در $p \in M$ به یک چارچوب دیگر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
[e_i^B]_{i=1}^d &:= \left[(\psi_p^B)^{-1}(\epsilon_i) \right]_{i=1}^d && \text{(چارچوب القا شده توسط گیج, (۴))} \\
&= \left[(g_p^{BA} \cdot \psi_p^A)^{-1}(\epsilon_i) \right]_{i=1}^d && \text{(تبدیل گیج, (۷))} \\
&= \left[(\psi_p^A)^{-1}((g_p^{BA})^{-1}\epsilon_i) \right]_{i=1}^d && \text{(معکوس گسترش یافته)} \\
&= \left[(\psi_p^A)^{-1} \left(\sum_j \epsilon_j \epsilon_j^\top (g_p^{BA})^{-1} \epsilon_i \right) \right]_{i=1}^d && \text{(\textbf{۱} = \sum_j \epsilon_j \epsilon_j^\top)} \\
&= \left[(\psi_p^A)^{-1} \left(\sum_j \epsilon_j \left((g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \right) \right]_{i=1}^d && \text{(عناصر ماتریس \textbf{۱} شناسایی شده)} \\
&= \left[\sum_j (\psi_p^A)^{-1}(\epsilon_j) \left((g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \right]_{i=1}^d && \text{(خطی بودن \psi_p^A)} \\
&= \left[\sum_j e_j^A \left((g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \right]_{i=1}^d && \text{(چارچوب القا شده توسط گیج, (۴))} \\
&=: [e_i^A]_{i=1}^d \blacktriangleright (g_p^{BA})^{-1} && \text{(۱۰)}
\end{aligned}$$

از طریق عمل راست تعریف شده:

$$\blacktriangleright : ([e_i]_{i=1}^d, g) \mapsto [e_i]_{i=1}^d \blacktriangleright g := \left[\sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \quad (11)$$

از عناصر گروه بر روی چارچوب‌ها. توجه داشته باشید که معکوس در این عمل در معادله (۱۰) به دلیل تعریف معادله (۷) بدون معکوس است.^۸ معمولاً به رفتار تبدیل چارچوب‌های مرجع، تبدیل کوواریانت گفته می‌شود در حالی که تبدیل گیج‌ها و ضرایب برداری به عنوان تبدیل کونتروواریانت نامیده می‌شود؛ به پیوست آ مراجعه کنید.

^۸ قراردادهای دیگر ممکن است انتخاب معکوس‌ها را در ψ^A تغییر دهند. یک معکوس در هر یک از دو معادله برای سازگاری عمل چپ \blacktriangleright بر روی گیج‌ها و عمل راست \blacktriangleright بر روی چارچوب‌ها ضروری است.

از آنجا که رفتار تبدیل ضرایب در معادله (۹) و یا به در معادله (۱۰) معکوس یکدیگر هستند، آن‌ها یکدیگر را خنثی می‌کنند، یعنی بردار مماس $v = \sum_i v_i^A e_i^A = \sum_i v_i^B e_i^B$ را ناوردا می‌گذارند:

$$\begin{aligned} v &= \sum_i v_i^B e_i^B = \sum_i v_i^B \sum_j e_j^A \left((g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} \\ &= \sum_j \left(\sum_i \left((g_p^{BA})^{-1} \right)_{ji} v_i^B \right) e_j^A \\ &= \sum_j v_j^A e_j^A. \end{aligned} \quad (12)$$

این ساختار تضمین می‌کند که هر محاسبه‌ای در نهایت مستقل از گیج انتخاب شده است، که معمولاً به آن استقلال از مختصات گفته می‌شود. به طور کلی، هر نمایش مختصاتی از یک شی یا تابع مستقل از مختصات برای سازگاری باید مستقل از مختصات باشد.

برای کامل بودن می‌خواهیم اشاره کنیم که فرمالیسم ارائه شده در اینجا پایه‌های عمومی فضاهای مماس را تعریف می‌کند، که گاهی اوقات به عنوان پایه‌های غیرمختصاتی (پایه‌های غیرهولونومیک) از نظر گیج‌های محلی نامیده می‌شوند. یک جایگزین بسیار محبوب اما کمتر عمومی پایه‌های مختصاتی (پایه‌های هولونومیک) هستند:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1^A} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d^A} \Big|_p \right], \quad (13)$$

که توسط چارت‌های مختصاتی منفولد القا می‌شوند [۴]:

$$x^A : U^A \rightarrow V^A \subseteq \mathbb{R}^d \quad (14)$$

گیج‌های مربوطه توسط دیفرانسیل‌های چارت داده می‌شوند، یعنی:

$$\psi_p^A = \hat{dx}_p^A = (\hat{dx}_{p,1}^A, \dots, \hat{dx}_{p,d}^A)^\top : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d. \quad (15)$$

تبدیل‌های گیج در این تنظیم با ژاکویان‌ها مطابقت دارند:

$$g_p^{BA} = \left. \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right|_{x^A(p)} \in \text{GL}(d) \quad (16)$$

از نگاشت‌های گذار چارت. یک چارت نمونه و پایه‌های مختصاتی القا شده آن در شکل ۹ بصری‌سازی شده‌اند. پیوست آ رابطه بین هر دو فرمالیسم را با جزئیات مورد بحث قرار می‌دهد؛ یک مرور کلی در جدول ۷ ارائه شده است.

در ادامه این مقاله ما عمدتاً در فرمالیسم گیج کار خوب‌های مرجم را مستقیماً به فضاهای مماس تخصیص می‌دهد به جای اینکه آن‌ها را از چارت‌ها القا کنند. استثنایاً عبارتند از کانولوشن‌های موبیوس در بخش ۵، CNN‌های اقلیدسی در بخش ۹، مختصات لگاریتمی-قطبی در بخش ۱۰ و CNN‌های بیست و چهارم در بخش ۴.۱۲. در همه این موارد، متفاوت‌هایی به صورت محلی مسطح هستند و چارت‌ها اینزومتریک هستند، به طوری که چارچوب‌های متعامد را القا می‌کنند. کانولوشن‌های GM در U^A سپس می‌توانند به روشنی کارآمد با اجرای کانولوشن‌های اقلیدسی با کرنل‌های G -استریل در دامنه‌های مشترک چارت‌ها V^A محاسبه شوند.

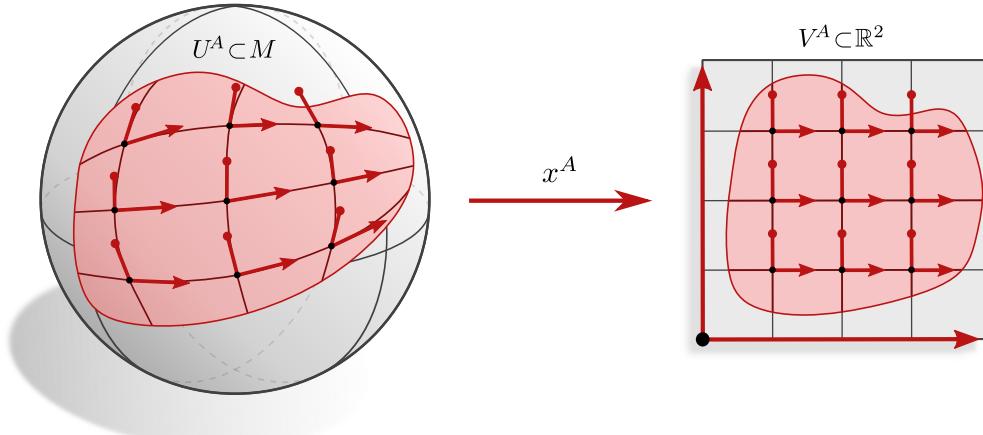
۲.۱.۳ توابع مستقل از مختصات در فضاهای مماس

همانطور که بردارهای مماس مستقل از مختصات هستند، یعنی بدون اشاره به هیچ چارچوب مرجع تعریف می‌شوند. یک گیج انتخاب شده امکان نمایش چنین نگاشت‌های مستقل از مختصات را توسط توابعی فراهم می‌کند که بر روی بردارهای ضریب در \mathbb{R}^d عمل می‌کنند. مشابه بردارهای ضریب، مختصات‌بندی توابع باید به روشنی خاص تحت تبدیل‌های گیج تبدیل شوند تا به طور سازگار تعریف شوند، یعنی برای رعایت استقلال از مختصات. ما بعداً مفهوم ارائه شده در اینجا را از بین نگاشت‌های مستقل از مختصات بر حسب مختصات محلی برای تعریف کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM به کار خواهیم برد.

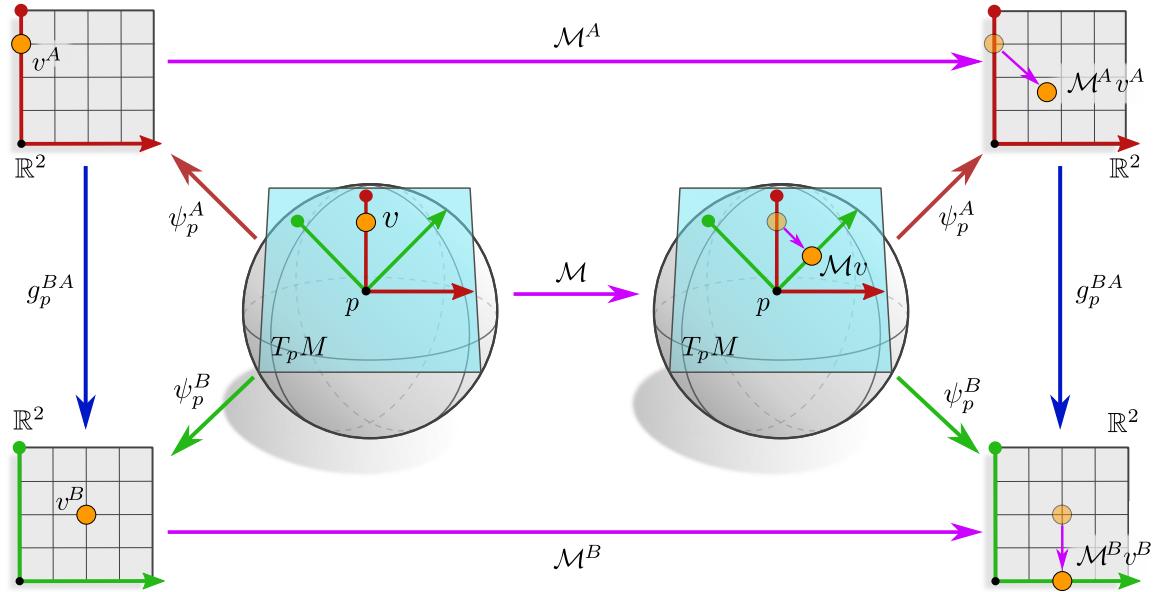
به عنوان یک مثال ساده برای یک عملیات مستقل از مختصات، باید حالت یک نگاشت خطی را در نظر بگیریم:

$$\mathcal{M} : T_p M \rightarrow T_p M. \quad (17)$$

فرض کنید $v \in T_p M$ یک بردار مماس باشد که توسط \mathcal{M} به $\mathcal{M}v \in T_p M$ نگاشت می‌شود. نگاشت‌های خطی در پیاده‌سازی‌های عددی معمولاً توسط ماتریس‌های ضریب مدل می‌شوند که بین بردارهای ضریب نسبت به یک انتخاب از چارچوب مرجع نگاشت می‌کنند. برای دقیق



شکل ۹: یک چارت $x^A : U^A \rightarrow V^A \subseteq \mathbb{R}^d$ را به نواحی $U^A \subseteq M$ از منیفولد تخصیص می‌دهد. این چارت پایه‌های مختصاتی $\psi_p^A = \hat{dx}_p^A = \left[\frac{\partial}{\partial x_1^A}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d^A}|_p \right]$ و گیج‌های مریبوطه در فضاهای مماس $T_p M$ در القا می‌کند. معمدتاً با چارت‌ها کار نخواهیم کرد بلکه به نقاط $p \in M$ به صورت مستقل از مختصات ارجاع خواهیم داد. گیج‌ها (چارچوب‌ها) سپس مستقیماً به فضاهای مماس تخصیص داده می‌شوند به جای اینکه از چارت‌ها القا شوند.



شکل ۱۰: تفسیر گرافیکی نمودار جابجایی در معادله (۲۳). یک نگاشت مستقل از مختصات $\mathcal{M} : T_p M \rightarrow T_p M$ را می‌توان به طور معادل با تابع $\mathcal{M}^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ یا $\mathcal{M}^B : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ نسبت به گیج‌های مختلف ψ_p^A یا ψ_p^B نمایش داد. این مختصات‌بندی‌های \mathcal{M} با پیش و پس ترکیب با گیج‌ها در دامنه و دامنه مشترک تعریف می‌شوند، به عنوان مثال، با دنبال کردن فلش‌ها، $\mathcal{M}^A := \psi_p^A \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^A)^{-1}$. در نتیجه، تبدیل‌های گیج $\mathcal{M}^B = g_p^{BA} \mathcal{M}^A (g_p^{BA})^{-1}$ بین مختصات‌بندی‌ها توسط یک پیش و پس ترکیب با نگاشتهای گذار g_p^{BA} در دامنه و دامنه مشترک داده می‌شوند. همه کمیت‌ها و نگاشت‌ها در این کار با مستقل از مختصات خواهد بود (مانند \mathcal{M}) یا به رویی مستقل از مختصات در گیج‌های مختلف بیان خواهد شد (مانند \mathcal{M}^A و \mathcal{M}^B). ما بنابراین باید قوانین تبدیل را برای هر کمیت و تابع تعریف (یا استخراج) کیم.

کردن این موضوع، فرض کنید گچ ψ_p^A داده شده باشد به طوری که بردارهای مستقل از مختصات $v_{\square\square}$ و $v_{\square\square\square}$ در $T_p M$ با بردارهای ضریب $v_{\square\square} = \psi_p^A(v_{\square\square})$ و $v_{\square\square\square} = \psi_p^A(v_{\square\square\square})$ نگاشت خطی \mathcal{M} در این گچ توسط ماتریس نمایش داده می‌شود:

$$\mathcal{M}^A := \psi_p^A \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^A)^{-1} \in \mathbb{R}^{d \times d} \quad (18)$$

که تعریف آن توسط نمودار جابجایی زیر بصری سازی شده است:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\psi_p^A} & T_p M & \xrightarrow{\mathcal{M}} & T_p M & \xrightarrow{\psi_p^A} & \mathbb{R}^d \\ & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\mathcal{M}^A} & & & & & \uparrow \end{array} \quad (19)$$

ماتریس با نگاشت مستقل از مختصات سازگار است زیرا هر دو یکدیگر را نتیجه می‌دهند:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^A v_{\square\square}^A &= [\psi_p^A \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^A)^{-1}] \circ [\psi_p^A(v_{\square\square})] \\ &= \psi_p^A(\mathcal{M} v_{\square\square}) \\ &= \psi_p^A(v_{\square\square\square}) \\ &= v_{\square\square\square}^A \end{aligned} \quad (20)$$

البته می‌توان \mathcal{M} را نسبت به هر انتخاب دیگری از گچ ψ_p^B نیز نمایش داد. ما از معادله (۹) می‌دانیم که بردارهای ضریب در گچ‌های مختلف با \mathcal{M}^A و \mathcal{M}^B مرتبه هستند. به طور مشابه، $v^B = g_p^{BA} v^A$ توسط تبدیل گچ مرتب است:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^B &= \psi_p^B \circ \mathcal{M} \circ (\psi_p^B)^{-1} \\ &= \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1} \circ \mathcal{M}^A \circ \psi_p^A \circ (\psi_p^B)^{-1} \\ &= g_p^{BA} \mathcal{M}^A (g_p^{BA})^{-1}, \end{aligned} \quad (21)$$

که در اینجا هم بر دامنه و هم بر رامنه مشترک عمل می‌کند.^۹ این قانون تبدیل دوباره سازگار است زیرا تبدیل‌های متقابل یکدیگر را خنثی می‌کنند:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^B v_{\square\square}^B &= [g_p^{BA} \mathcal{M}^A (g_p^{BA})^{-1}] [g_p^{BA} v_{\square\square}^A] \\ &= g_p^{BA} \mathcal{M}^A v_{\square\square}^A \\ &= g_p^{BA} v_{\square\square\square}^A \\ &= v_{\square\square\square}^B \end{aligned} \quad (22)$$

تبدیل‌های گچ استخراج شده بنابراین تأیید می‌کنند که تمام محاسبات مختصات‌بندی شده در نهایت مستقل از مختصات هستند. روابط بین نگاشت مستقل از مختصات و مختصات‌بندی‌های آن توسط نمودار جابجایی زیر خلاصه می‌شود:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\psi_p^A} & T_p M & \xrightarrow{\mathcal{M}} & T_p M & \xrightarrow{\psi_p^B} & \mathbb{R}^d \\ & \downarrow g_p^{BA} & & & & \downarrow g_p^{BA} & \\ & \xleftarrow{\psi_p^B} & & & \xrightarrow{\psi_p^B} & & \mathbb{R}^d \\ & & \mathcal{M}^A & & & & \\ & & \searrow & & \swarrow & & \\ & & \mathbb{R}^d & & \mathbb{R}^d & & \\ & & \xrightarrow{\mathcal{M}^B} & & \xleftarrow{\mathcal{M}^B} & & \end{array} \quad (23)$$

که در شکل ۱۰ به صورت گرافیکی تفسیر شده است.

در عمل نمی‌توان نگاشت خطی مستقل از مختصات \mathcal{M} را به صورت عددی بدون اشاره به یک انتخاب مختصات‌بندی پیاده‌سازی کرد. با این حال، وجود آن تنها در صورتی (و تنها در صورتی) دلالت دارد که مختصات‌بندی‌های آن همانطور که در معادله (۲۱) مشخص شده است به یکدیگر مربوط باشند، که تضمین می‌کند رفتار تبدیل صحیح ضرایب بردار ورودی و خروجی در معادله (۹) حفظ می‌شود.

^۹ تبدیل ضرایب ماتریس از طریق ضرب چپ و راست با $(g^{BA})^{-1}$ و g^{BA} به ترتیب، نگاشت خطی را به عنوان یک تانسور از نوع $(1, 1)$ شناسایی می‌کند.

۳.۱.۳ گروه‌های ساختار، G -ساختارها و G -اطلس‌ها

ما بعداً از شبکه‌های عصی می‌خواهیم که به روشنی مستقل از مختصات عمل کنند، یعنی ما تقاضا می‌کنیم که استنتاج آن‌ها مستقل از انتخاب‌های دلخواه چارچوب‌های مرجع باشد. این سؤال را مطرح می‌کند که انتخاب چارچوب‌های مرجع در یک منيفولد تا چه حد دلخواه است. در بخش‌های ۱.۱.۳ و ۲.۱.۳ قبلي ما هر انتخاب ممکن از گیج یا چارچوب مرجع را مجاز می‌دانستیم، که بنابراین توسط تبدیل‌های گیج با مقدار کلی $GL(d)$ مرتبط بودند. با این حال، در بسیاری از کاربردها، منيفولد دارای ساختار اضافی است که امکان تشخیص یک زیرمجموعه ارجح از چارچوب‌های مرجع یا گیج‌ها را می‌دهد که توابع گذار آن‌ها مقادیری در یک گروه ساختار کاهش یافته $G \leq GL(d)$ می‌گیرند. چنین ساختارهای هندسی \square یا بلکه خود زیرمجموعه‌های چارچوب‌های مرجع ترجیحی، که اطلاعات معادل را گذاری می‌کنند \square به عنوان G -ساختارها نامیده می‌شوند.

G -ساختارها با در نظر گرفتن چند مثال خاص بهتر درک می‌شوند. لیست زیر چنین مثال‌هایی را ارائه می‌دهد که براساس گروه ساختار $(d) \leq GL$ طبقه‌بندی شده‌اند:

d : ساختار متریک یک منيفولد ریمانی را در نظر بگیرید، که امکان اندازه‌گیری فواصل و زوایا را می‌دهد، و بنابراین تشخیص چارچوب‌های متعماد را، یعنی آن چارچوب‌هایی که شرط $i,j = 1,\dots,d$ برآورده می‌کنند. به طور متأثر، یک متریک ریمانی امکان صحبت در مورد گیج‌های ایزو‌متریک ψ^A_p را با متریک $T_p M$ شناسایی می‌کنند، یعنی شرط $\langle \psi^A(v), \psi^A(w) \rangle_{T_p M} = \langle v, w \rangle$ را برای هر $v, w \in T_p M$ برآورده می‌کنند. از آنجا که چارچوب‌های متعماد و گیج‌های ایزو‌متریک تا چرخش‌ها و بازتاب‌ها تعریف می‌شوند، هر تبدیل گیجی بین آن‌ها مقادیری در گروه متعماد d خواهد گرفت، که آن زیر گروه از $GL(d)$ است که زوایا و فواصل را حفظ می‌کند.

GL^+ : به طور مشابه، یک جهت‌گیری منيفولد چارچوب‌های راست گرد را از گیج‌های معکوس کنند. جهت‌گیری متمایز می‌کند. تبدیل‌های گیج بین چارچوب‌های یک دست پری داده شده مقادیری در $GL^+(d)$ می‌گیرند، یعنی آن زیر گروه از $GL(d)$ که جهت‌گیری‌ها را حفظ می‌کند.

$SO(d)$: با هم، یک متریک و جهت‌گیری داده شده، چارچوب‌های متعماد با جهت‌گیری خاصی را مشخص می‌کنند. تبدیل‌های گیج بین چنین چارچوب‌هایی تضمین شده‌اند که در زیر گروه $SO(d)$ از $GL(d)$ قرار گیرند.

$e\{e\}$: یک میدان چارچوب هموار سراسری یک $e\{e\}$ -ساختار را در M تعریف می‌کند. در این حالت تنها یک چارچوب متمایز در هر موقعیت وجود دارد، به طوری که تبدیل‌های گیج در گروه بدیهی $GL(d)$ از $\{e\}$ قرار می‌گیرند.

$GL(d)$: اگر هیچ ساختار اضافی تحمیل نشود، هر چارچوب مرجع فضاهای مماس به همان اندازه معین است. تبدیل‌های گیج در این حالت نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر عمومی در $GL(d)$ هستند و G -ساختار مربوطه فقط بندل چارچوب FM است.

موضوع مشترک در این مثال‌های انگیزشی این است که همه آن‌ها با موارد زیر تعریف می‌شوند:

۱. یک زیرمجموعه (که به صورت فضایی هموار تغییر می‌کند) از چارچوب‌های مرجع متمایز،

۲. یک زیرمجموعه مربوطه از گیج‌های ترجیحی و

۳. یک زیر گروه $(d) \leq GL$ از تبدیل‌های گیج که مفهوم متمایز چارچوب‌ها و گیج‌ها را حفظ می‌کند.

چنین زیرمجموعه‌هایی از چارچوب‌های مرجع که به صورت هموار تغییر می‌کنند به عنوان G -ساختارها GM بر روی M نامیده می‌شوند و گروه G به عنوان گروه ساختار (کاهش یافته) نامیده می‌شود \square . برای تعریف دقیق تر به بخش ۳.۶ مراجعه کنید.^{۱۰} فرآیند مشخص کردن یک G -ساختار به عنوان کاهش گروه ساختار از $GL(d)$ به G شناخته می‌شود. یک اطلس $\mathcal{A}^G = \{(U^X, \psi^X)\}_{X \in \mathfrak{X}}$ به عنوان G -اطلس نامیده می‌شود اگر تمام توابع گذار آن:

$$g^{BA} : U^A \cap U^B \rightarrow G, \quad p \mapsto g_p^{BA} := \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1} \quad (24)$$

در یک گروه ساختار کاهش یافته $G \leq GL(d)$ قرار گیرند (مقایسه کنید با معادله (۴)). رابطه بین چارچوب‌های مرجع و گیج‌ها در معادله (۴) دلالت دارد بر اینکه هر G -اطلس یک G -ساختار مربوطه را گذاری می‌کند.

انتخاب‌های متعددی از G -ساختارها ممکن است برای یک گروه ساختار G داده شده وجود داشته باشند. برای ارتباط با مثال‌های بالا: متریک‌های ریمانی مختلف، زیرمجموعه‌های متفاوتی از چارچوب‌های مرجع را به عنوان متعماد مشخص می‌کنند، یعنی آن‌ها با ساختارهای d مطابقت OM دارند. بنابراین انتخاب یک متریک معادل انتخاب یک ساختار d است. به طور مشابه، انتخاب‌های مختلف جهت‌گیری یک منيفولد قابل جهت‌گیری، مجموعه متفاوتی از چارچوب‌ها را به عنوان راست گرد مشخص می‌کنند. بنابراین دو انتخاب ممکن جهت‌گیری با دو انتخاب ممکن از ساختارهای $(GL^+M) GL^+$ مطابقت دارند. ساختارهای SOM $SO(d)$ ممکن است در انتخاب جهت‌گیری و متریک هر دو متفاوت باشند. مثال دیگر ساختار $e\{e\}M$ است. آن‌ها اجازه تبدیل‌های گیج (غیربدیهی) را نمی‌دهند و بنابراین با انتخاب میدان‌های چارچوب هموار سراسری در M مطابقت دارند. جدول ۱ مثال‌های بیشتری از گروه‌های ساختار G و G -ساختارهای مربوطه را ارائه می‌دهد.

^{۱۰} به طور رسمی، GM به عنوان یک زیربندل اصلی G از بندل چارچوب FM تعریف می‌شود، که یک بندل اصلی $(d) GL$ است.

structure group $G \leq \mathrm{GL}(d)$	G -structure GM	equivalent structure on M
$\mathrm{GL}^+(d)$	positively oriented frames	orientation of M
$\mathrm{SL}(d)$	unit volume frames	volume form
$\mathrm{CO}(d)$	conformal frames	—
$\mathrm{Sp}(d)$	symplectic frames	—
$\mathrm{O}(d)$	orthonormal frames	Riemannian metric
$\mathrm{O}(d-n, n)$	pseudo-orthonormal frames	pseudo-Riemannian metric
$\mathrm{SO}(d)$	positively oriented orthonormal frames	Riemannian metric + orientation
$\{e\}$	parallelization (global frame field)	—

جدول ۱: مثال‌هایی از G -ساختارها GM بر روی M و گروه‌های ساختار کاهش‌یافته مربوطه $(\mathrm{GL}(d) \leq G)$. یک G -ساختار به عنوان یک زیرمجموعه هموار متغیر از چارچوب‌های مرچ (یک زیرتبدیل اصلی G از بندل چارچوب (FM)) تعریف می‌شود، که در آن چارچوب‌های هر فضای مماس به صورت متقابل توسط تبدیل‌های گیج با مقادیر G مرتبط هستند. در حالی که این تعریف نسبتاً انتزاعی است، امکان مشاهده بسیاری از ساختارهای هندسی در M را به روشنی یکپارچه فراهم می‌کند. به عنوان مثال، یک متریک ریمانی در M امکان تشخیص چارچوب‌های معتمد را می‌دهد. بر عکس، مشخص کردن معتمد بودن به طور منحصر به فرد یک متریک را نتیجه می‌دهد. بنابراین یک متریک ریمانی و یک ساختار معتمد با یکدیگر معادل هستند. به طور مشابه، یک تناظر یکی به یک بین فرم‌های حجم و چارچوب‌های واحد حجم وجود دارد. توجه داشته باشید که انتخاب یک گروه ساختار G به طور منحصر به فرد یک G -ساختار را مشخص نمی‌کند. به عنوان مثال، متریک‌های ریمانی مختلف می‌توانند به عنوان ساختار d ، فرم‌های حجم مختلف به عنوان ساختار $\{e\}$ انتخاب شوند. CNN‌های مستقل از مختصات برای رعایت یک G -ساختار داده شده طراحی شده‌اند □ اینکه کدام ساختار خاص است به وظیفه یادگیری بستگی دارد.

کاهش گروه ساختار به G ، یعنی وجود یک G -ساختار، ممکن است توسط توپولوژی منيفولد مسدود شود. این دلالت دارد بر اینکه یک "گروه ساختار کاهش‌نایپذیر" وجود دارد که فراتر از آن ابهام چارچوب‌های مرچ را نمی‌توان بدون نقض فرض همواری (یا حتی پیوستگی) G -ساختار برطرف کرد. به عنوان مثال، نوار موبیوس در شکل ۲۱ غیرقابل جهت‌گیری است، این بدان معنی است که یک تعریف هموار و سراسری سازگار از دست پری چارچوب و در نتیجه ساختار $\{e\}$ (میدان چارچوب هموار سراسری) را نمی‌پذیرد. همانطور که در شکل ۲۱ بصری‌سازی شده است، یک G -اطلس از گیج‌ها که نوار موبیوس را پوشش می‌دهد، به طور ناگزیر نیازمند یک بازتاب در یکی از نگاشت‌های گذار خواهد بود، که به معنای یک گروه ساختار کاهش‌نایپذیر CNN‌های مستقل از مختصات بر روی نوار موبیوس بنابراین حداقل یا بد تناوب پذیر بازتابی باشند. به طور مشابه، گروه ساختار کره $G = \mathcal{R}$ را نمی‌توان فراتر از CNN‌های کروی هموار بنابراین لزو مانند پذیر بازتابی چرخش هستند. توجه داشته باشید که هر منيفولد (دیفرانسیل پذیر) با برخی G -ساختار همراه است. به عنوان مثال، یک منيفولد دیفرانسیل پذیر خام دارای یک G -ساختار $(\mathrm{GL}(d)$ (حاوی هر چارچوب ممکن) است، یک منيفولد ریمانی یک ساختار d دارد و \mathbb{R}^d به طور کانونی یا یک ساختار $\{e\}$ مجهز شده است که در شکل ۲۵ بصری‌سازی شده است. ما بنابراین بدون از دست دادن کلیت، اصطلاح "استقلال از مختصات" را به استقلال از مختصات GM تصحیح خواهیم کرد، یعنی استقلال نسبت به انتخاب چارچوب‌های مرچ در G -ساختار داده شده در M . در طول این کار ما فرض خواهیم کرد که گیج‌ها بخشی از یک G -اطلس هستند:

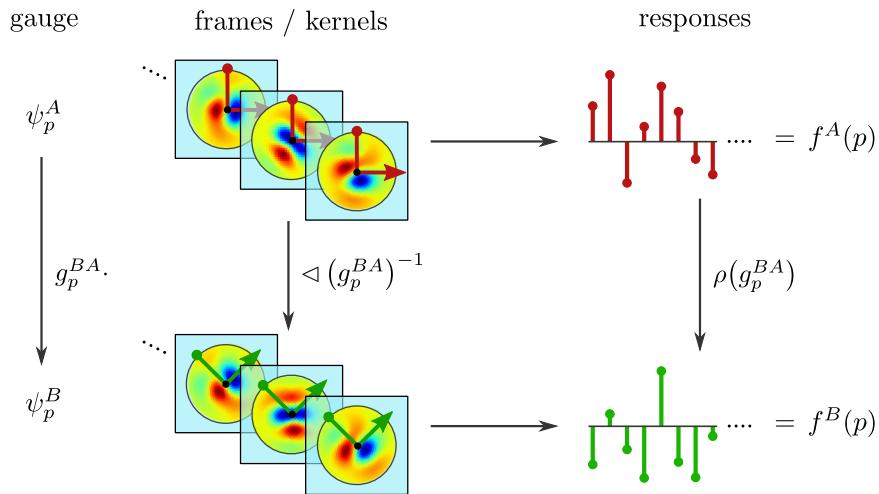
$$\mathcal{A}^G = \{(U^X, \psi^X)\}_{X \in \mathfrak{X}} \quad \square\square\square\square\square\square \quad g_p^{BA} \in G \quad \square\square\square\square\square \quad \psi_p^A, \psi_p^B \in \mathcal{A}^G, \quad p \in U^A \cap U^B, \quad (25)$$

مطابق با G -ساختار داده شده. هر کمیت یاتابع می‌تواند نسبت به هر گیجی از این اطلس بیان شود^{۱۱}، و مختصات‌بندی‌ها در گیج‌ها مختلف به طور منحصر به فرد توسط یک تبدیل گیج با مقدار G مرتبط هستند. با تضمین استقلال از مختصات همه ساختارها، آن‌ها همیشه با همتایان مستقل از مختصات خود مطابقت خواهند داشت، که مانظیره سراسری را بر حسب آن‌ها در بخش‌های ۶، ۷ و ۸ فرمول‌بندی خواهیم کرد.

۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی مستقل از مختصات

فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات، فضاهای میدان‌های بردار ویژگی هستند. مشابه مورد ضرایب بردارهای مماس، ضرایب عددی بردارهای ویژگی ملزم به تبدیل سازگار تحت تبدیل‌های گیج هستند. قانون تبدیل خاص (نمایش گروهی) یک میدان ویژگی در اینجا نوع میدان آن را مشخص می‌کند □ مثال‌های معمول شامل میدان‌های اسکالار، میدان‌های بردار مماس، میدان‌های تانسور عمومی، میدان‌های ویژگی منظم یا میدان‌های $\square\square\square\square\square$ هستند. بخش ۱.۲.۳ چنین میدان‌های ویژگی و قوانین تبدیل آن‌ها را معرفی می‌کند. در بخش ۲.۲.۳، ما به طور منحصر فضاهای ویژگی مستقل از مختصات را تعریف می‌کنیم. مشابه تعریف فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی معمولی به عنوان ابانتی از چندین نقشه ویژگی، فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات شامل چندین میدان ویژگی مستقل هستند.

^{۱۱} این یک گزاره غیربدیهی است زیرا هر کمیت را نمی‌توان نسبت به چارچوب‌های مرچ دلخواه مرتبط با $(\mathrm{GL}(d)$ یان کرد. به عنوان مثال، میدان‌های ویژگی که در بخش ۲.۳ معرفی شده‌اند، تنها تبدیل‌های گیج با مقدار G را می‌پذیرند و بنابراین تنها نسبت به چارچوب‌های ترجیحی در GM تعیین می‌شوند. به عنوان یک مثال شهودی، CNN‌های سنتی (غیرتناوب پذیر) در \mathbb{R}^d را در نظر بگیرید که نسبت به ساختار $\{e\}$ کانونی استخراج می‌شوند و اطلاعاتی در مورد پاسخ‌های کرنل نسبت به سایر چارچوب‌های مرچ را حمل نمی‌کنند.



شکل ۱۱: پاسخ‌های عددی $f^A(p) \in \mathbb{R}^c$ و $f^B(p) \in \mathbb{R}^c$ که بر اساس چارچوب‌های مختلف جهت‌گیری شده‌اند، به طور کلی منطقی نیستند. به منظور نمایش ضرایب عددی یکسان بردار ویژگی مستقل از مختصات نسبت به گیج انتخاب شده، آن‌ها ملزم به ارتباط توسعه تبدیل‌های گیج $(g_p^{BA})^{-1}$ هستند اگر گیج‌ها توسعه g_p^{BA} مرتبط باشند. همانطور که در بخش ۴ استخراج شده است، این الزام یک قید تابع پذیری گیج را بر کرنل‌های کانولوشن تحمیل می‌کند.

۱.۲.۳ میدان‌های بردار ویژگی منفرد

میدان‌های ویژگی کانولوشنی یک بردار ویژگی، که اطلاعات استیباط شده از یک همسایگی محلی از سیگنال ورودی را کدگذاری می‌کند، به هر نقطه از منیفولد تخصیص می‌دهند. ایناشت فضایی اطلاعات توسعه یک کرنل کانولوشنی انجام می‌شود که میدان‌های ویژگی را در محیط خود نسبت به چارچوب مرجع محلی خود اندازه گیری می‌کند. بنابراین ما گیج A را فرض می‌کنیم که ترازهای کرنل را در یک همسایگی U^A مشخص می‌کند. نسبت به این گیج، کرنل یک میدان محلی هموار از پاسخ‌ها (مشاهدات) تولید خواهد کرد:

$$f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad (26)$$

که توسعه یک بردار ویژگی عددی c -بعدی $f^A(p)$ در هر موقعیت $p \in U^A$ داده می‌شود. فرض کنید یک میدان پاسخ دوم $f^B : U^B \rightarrow \mathbb{R}^c$ در U^B استیباط شده است. از آنجا که پاسخ یک کرنل به طور کلی به تراز آن بستگی دارد، انتظار می‌رود که f^A و f^B در همپوشانی $U^A \cap U^B$ مطابقت نداشته باشند. بدون محدودیت‌های بیشتر، پاسخ‌های یک کرنل کانولوشن به طور دلخواه وابسته به گیج خواهند بود.

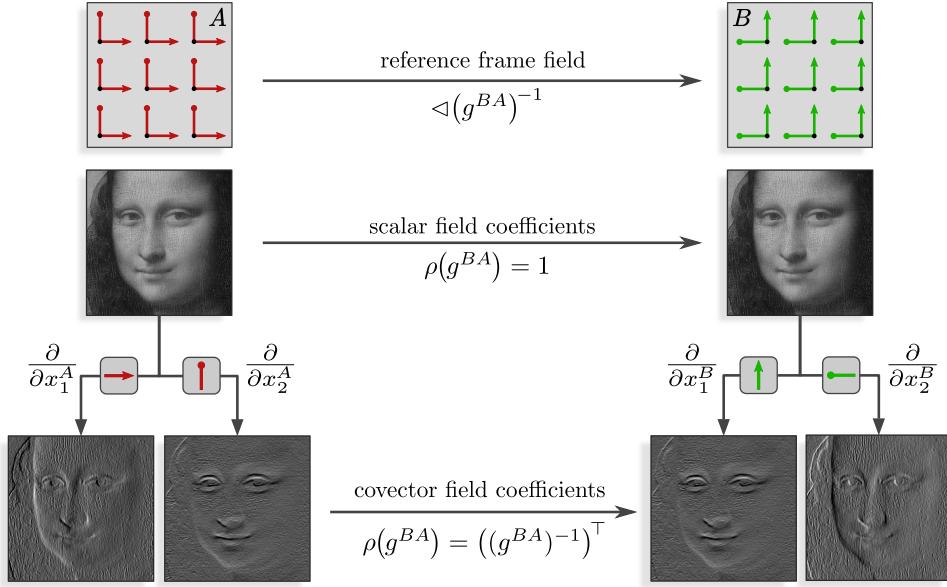
اصل کوواریانس، که توسعه آلبرت اینشتین پیشنهاد شد [۲۶]، بیان می‌کند که:

«قوانين جهانشمول طبیعت باید توسعه معادلاتی بیان شوند که برای همه سیستم‌های مختصات صادق باشند، یعنی نسبت به هر جایگزینی کوواریانت باشند.»

ما معتقدیم که اصل مشابهی باید در یادگیری عمیق هندسی نیز صادق باشد، یعنی استنتاج باید مستقل از هر دلخواهی در انتخاب چارچوب‌های مرجع باشد. با توجه به اینکه این دلخواهی در مختصات‌بندی‌ها دقیقاً توسعه G -ساختار داده شده GM پوشش داده می‌شود، این امر به ویژه ایجاب می‌کند که ویژگی‌ها باید اشیاء هندسی مستقل از مختصات GM باشند.^{۱۷} بنابراین ما کرنل‌های کانولوشن را طوری طراحی می‌کنیم که پاسخ‌های آن‌ها f^A و f^B میدان‌هایی از ضرایب بردار ویژگی را کدگذاری کنند که یک میدان بردار ویژگی آزاد از مختصات f را به صورت محلی در گیج‌های مختلف نمایش می‌دهند. مجموعه‌ای از چنین میدان‌های ضریب عددی X ، که نسبت به G -اطلس گیج‌های ψ^X در همسایگی‌های U^X که M را پوشش می‌دهند بیان شده‌اند، معادل میدان ویژگی سراسری و آزاد از مختصات f در M است.

برای اینکه این میدان ویژگی آزاد از مختصات به خوبی تعریف شود، یعنی مستقل از مختصات GM باشد، میدان‌های ضریب محلی (یا پاسخ‌های کرنل) ملزم به دوخته شدن سازگار از طریق نگاشت‌های گذار با مقدار G هستند. بنابراین آن‌ها باید به روشهای اصولی تحت تبدیل‌های گیج تبدیل شوند. از آنجا که ما با فضاهای بردار ویژگی سر و کار داریم، این تبدیل‌ها معمولاً خطی در نظر گرفته می‌شوند، یعنی آن‌ها توسعه نمایش‌های گروهی خطی مدل

^{۱۷} در این نکته ما از کوواریانس عمومی اینشتین منحرف می‌شویم، که همیشه تبدیل‌های گیج با مقدار (d) $GL(d)$ را در نظر می‌گیرد (متاظر با کوواریانس دیفیوورفیسم). تنظیم او در فرمول‌بندی ما برای $G = GL(d)$ شامل شده است، با این حال، ما گروه ساختار فرضی را انعطاف‌پذیر نگه می‌داریم زیرا اکثر کاربردها گروه ساختار کاهش یافته را فرض خواهند کرد.



شکل ۱۲: مثال‌هایی از میدان‌های ضرب ویژگی در \mathbb{R}^M از پردازش کلاسیک تصویر. بالا: برای سادگی ما یک میدان چارچوب «موازی» فرض می‌کیم و همان تبدیل گیج، چرخش به میزان $2\pi/p$ را در هر نقطه در نظر می‌گیریم. وسط: مقادیر شدت یک تصویر خاکستری مستقل از انتخاب چارچوب‌های مرجع هستند. بنابراین آن‌ها توسط میدان‌های اسکالر مدل می‌شوند که با نمایش بدیهی $G = \forall g \in G \rho(g)$ مشخص می‌شوند. پایین: دو کanal ضرب یک تصویر گرادیان از یک تصویر اسکالر با گرفتن منتهی‌ها در امداد محورهای چارچوب محسوسه می‌شوند. بنابراین آن‌ها وابسته به گیج هستند. تصاویر گرادیان نسبت به گیج‌های مختلف توسط نمایش گروهی $(g^{-1})^\top \rho(g)$ مرتب می‌شوند و بنابراین به عنوان میدان‌های کوپردار (میدان‌های تانسور از نوع $(1, 1)$ یا 1 -فرم‌ها) شناسایی می‌شوند. برای چرخش نمایش داده شده به میزان $2\pi/p$ این منجر به کanal اول جدید $(\partial/\partial x_1^B)$ (معادل کanal دوم قدیمی $(\partial/\partial x_1^A)$) و کanal دوم جدید $(\partial/\partial x_2^B)$ (معادل منفی کanal اول قدیمی $(\partial/\partial x_2^A)$ می‌شود. نسبت به چارچوب‌های مرجع مربوطه، هر دو میدان ضرب یکسان میدان گرادیان (آزاد از مختصات) را کدگذاری می‌کنند. بنابراین توصیف به طور خودکار مستقل از مختصات است.

می‌شوند:

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(c) \quad (27)$$

از گروه ساختار $G \leq \text{GL}(c)$, که بر \mathbb{R}^c عمل می‌کند و شرط $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h) \forall g, h \in G$ را برآورده می‌کند.^{۱۳} مشابه تبدیل ضرایب بردار مماس در معادله (۹)، ضرایب بردار ویژگی سپس تعریف می‌شوند که تحت یک تبدیل گیج با مقدار G مانند $g_p^{BA} = \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}$ تبدیل

شوند:

$$f^B(p) := \rho(g_p^{BA}) f^A(p), \quad (28)$$

که در آن $p \in U^A \cap U^B$; برای بصری‌سازی به شکل ۱۱ مراجعه کنید. با ساخته شدن برای تبدیل همگام، فضاهای چارچوب‌های مرجع، ضرایب بردار مماس و ضرایب بردار ویژگی گفته می‌شود که با یکدیگر G -مرتبه هستند. توجه داشته باشید که ساخت از طریق یک G -نمایش ρ به طور کلی تبدیل‌های گیج با مقدار $\text{GL}(d)$ را توصیف نمی‌کند، یعنی ویژگی‌های کاملاً مستقل از مختصات. بنابراین بردارهای ویژگی استخراج شده تنها بخوبی تعریف شده‌ای نسبت به چارچوب‌ها در G -ساختار در نظر گرفته شده GM خواهد داشت، که توسط اصطلاح «استقلال از مختصات GM » پوشش داده می‌شود.

انتخاب‌های مختلف نمایش‌ها ρ انواع مختلفی از میدان‌های ویژگی را تولید می‌کنند همانطور که در شکل ۱۲ نمونه‌سازی شده است. به عنوان مثال، نمایش بدیهی، $\rho(g) = \forall g \in G \rho(g)$, رفتار تبدیل میدان‌های اسکالر $s^A(p) \mapsto s^B(p) = 1 \cdot s^A(p)$ را توصیف می‌کند، که ضرایب عددی آن‌ها تحت تبدیل‌های گیج ناوردا هستند. مثال‌هایی از میدان‌های اسکالر شامل تصاویر خاکستری، میدان‌های دما، میدان‌های فشار یا توزیع‌های احتمال در M هستند. ضرایب میدان‌های بردار مماس مانند $v^A(p) \mapsto v^B(p) = g_p^{BA} v^A(p)$ تبدیل می‌شوند و بنابراین با نمایش گروهی $\rho(g) = g$ مطابقت دارند. مثال‌هایی برای میدان‌های بردار شامل جریان نوری یا میدان‌های سرعت باد هستند. میدان‌های تانسور عمومی‌تر از نوع (r, s) توسط نمایش‌های حاصل ضرب تانسوری $\rho(g) = \otimes^s (g^{-1})^\top \otimes^r g$ توصیف می‌شوند. آن‌ها به عنوان مثال تصاویر تانسور انتشار، تانسورهای میدان

^{۱۳} این شرط تضمین می‌کند که نمایش‌ها همواره فرم‌های گروهی هستند، یعنی نگاشت‌هایی که ساختار گروهی G را رعایت می‌کنند. بنابراین عمل‌های گروه ساختار بر فضای مماس و فضاهای ضرب بردار ویژگی سازگار هستند.

الکترومغناطیسی یا تانسورهای تنش را مدل می‌کنند. انتخاب رایج برای گروههای ساختار گسته نمایش‌های منظم هستند که مجموعه محدود عملیات گروهی را توسط ماتریس‌های جایگشت تحقق می‌بخشد. نمایش‌های منظم به عنوان تقارن‌های دقیق شبکه‌های کریستالی، شبکه‌های اسپین یا شبکه‌های پیکسل ظاهر می‌شوند [؟ ؟ ؟ ؟ ؟]. علاوه بر این، آن‌ها معمولاً به عنوان تقریب گسته گروههای ساختار پیوسته استفاده می‌شوند، به عنوان مثال گروههای چرخشی $C_N \leq \text{SO}(2)$ برای تقریب چرخش‌های پیوسته [؟ ؟ ؟ ؟]. آن‌ها از اهمیت عملی زیادی برخوردارند زیرا تبدیل ویژگی‌های شبکه‌های کانولوشنی گروهی را توصیف می‌کنند [؟]. میدان‌های ویژگی که تحت نمایش‌های کافشن ناپذیر ($\square\square\square\square\square$) تبدیل می‌شوند در [؟ ؟ ؟] بررسی شدند.^{۱۴} مروری دقیق‌تر و معیاری گستره از انواع میدان یا نمایش‌های مختلف در یادگیری عمیق در [؟] ارائه شد.

برای کامل بودن می‌خواهیم اشاره کنیم که میدان‌های بردار ویژگی آزاد از مختصات به طور رسمی به عنوان برش‌های هموار $\mathcal{A} \in \Gamma^f$ از یک بندل بردار ویژگی $M \xrightarrow{\pi_A}$ تعریف می‌شوند که با G مرتبط است و فضاهای ضربه بردار ویژگی \mathbb{R}^c را به عنوان فیبرهای معمول دارد. بردارهای ضربه $f^A(p)$ در \mathbb{R}^c تمهیمات محلی از یک بردار ویژگی آزاد از مختصات $f(p) \in \mathcal{A}_p \cong \mathbb{R}^c$ هستند، و مشابه ضربه $v^B = \psi_p^B(v)$ از یک بردار ماس معرفی می‌شوند. توجه داشته باشید که، در حالی که هم‌ریخت هستند، فضاهای ویژگی $A_p \cong A_q$ در نقاط مختلف $p \neq q$ از M از یکدیگر متمایز هستند، به طوری که عناصر آن‌ها نمی‌توانند با هم جمع شوند. انتقال‌دهنده‌های موازی، که در بخش‌های ۳.۳ و ۵.۶ مورد بحث قرار گرفته‌اند، هم‌ریختی‌هایی بین فضاهای بردار ویژگی مختلف فراهم می‌کنند، که امکان جمع ویژگی‌ها را (پس از انتقال آن‌ها به همان فضای برداری) فراهم می‌کنند. از آنجا که این تعاریف کاملاً فنی هستند، ما جزئیات آن‌ها را فعلاً رد می‌کنیم و خواندن علاقمند را به بخش ۳.۶ ارجاع می‌دهیم.

۲.۲.۳ میدان‌های ویژگی انباسته و فضاهای ویژگی مستقل از مختصات

فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی معمولی شامل چندین نقشه ویژگی هستند. به طور مشابه، ما فضاهای ویژگی شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات را تعریف می‌کنیم که شامل چندین میدان ویژگی f_i از انواع بالقوه متفاوت ρ_i و ابعاد c_i باشند. بنابراین یک میدان کامل از فعالسازی‌های یک فضای ویژگی از یک شبکه کانولوشنی مستقل از مختصات به عنوان مجموع مستقیم تعریف می‌شود^{۱۵}

$$f = \bigoplus_i f_i \quad (29)$$

از میدان‌های منفرد، هر نقشه ویژگی از یک شبکه کانولوشنی معمولی موقعیت یک ویژگی خاص را کدگذاری می‌کند و به طور مستقل تبدیل می‌شود هنگامی که ورودی شبکه جایجاً می‌شود. میدان‌های ویژگی منفرد f_i شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات G هم موقعیت و هم G -پوزیک ویژگی را کدگذاری می‌کنند. در مقابل نقشه‌های ویژگی معمولی، میدان‌های ضربه آن‌ها، به عنوان مثال f_i^A ، علاوه بر این تضمین شده‌اند که به طور مستقل از یکدیگر تحت تبدیل‌های گیج همانطور که توسط نوع آنها $(\rho_i : G \rightarrow \text{GL}(c_i))$ مشخص شده است، تبدیل شوند. یک نمایش عددی محلی $f^A = \bigoplus_i f_i^A$ از میدان ویژگی کامل در معادله (۲۹) بنابراین طبق مجموع مستقیم نمایش‌های منفرد تبدیل می‌شود، یعنی:

$$\rho = \bigoplus_i \rho_i. \quad (30)$$

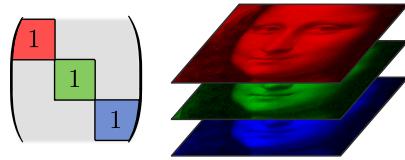
تبدیل مستقل میدان‌های منفرد تحت ρ ، که در شکل ۱۴ بصری‌سازی شده است، از ساخت روشن است:

$$\rho(g)f^A = (\bigoplus_i \rho_i(g))(\bigoplus_i f_i^A) = \bigoplus_i (\rho_i(g)f_i^A) \quad (31)$$

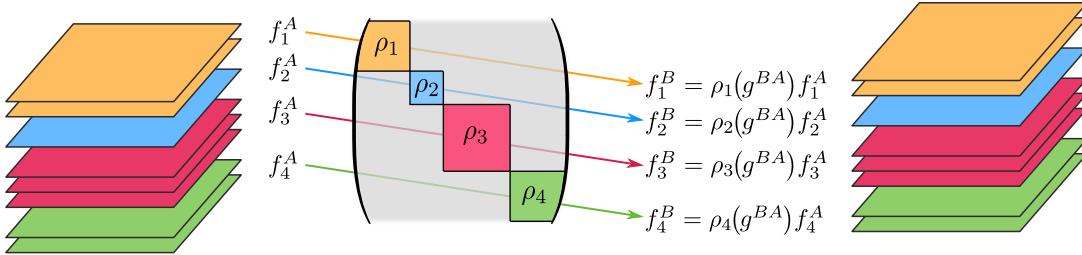
به عنوان یک مثال عملی از فضای ویژگی مستقل از چندین میدان، تصویر $\square\square\square$ را همانطور که در شکل ۱۳ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. مانند تصویر خاکستری در شکل ۱۲، کانال‌های رنگی منفرد مقابله شدت را کدگذاری می‌کنند که تحت تبدیل‌های گیج ناوردا هستند. بنابراین تصویر $\square\square\square$ کامل باید با سه میدان اسکالر شناسایی شود که هر کدام به طور مستقل تحت نمایش بدیهی «تبدیل» می‌شوند. همه میدان‌های ویژگی منفرد نیازی نیست که از همان نوع ρ_i باشند. به عنوان مثال، در یک کاربرد پیش‌بینی آب و هوای سیگال ورودی ممکن است شامل میدان‌های اسکالر کدگذاری کننده ویژگی‌هایی مانند دما یا فشار و میدان‌های برداری مانند سرعت‌های باد باشد. توصیف به عنوان میدان‌های ρ_i از انواع مربوطه، پردازش هندسی صحیح چنین داده‌هایی را تضمین می‌کند. در حالی که انواع میدان ρ_i ورودی و خروجی یک شبکه معمولاً توسط وظیفه یادگیری داده می‌شوند، انواع میدان استفاده شده در لایه‌های مخفی توسط کاربر به عنوان یک فرآپارامتر مشابه انتخاب کانال‌ها برای یک شبکه کانولوشنی معمولی انتخاب می‌شوند.

^{۱۴} توسط قضیه، هر نمایش یکانی از یک گروه فشرده می‌تواند از طریق تغییر پایه به مجموع مستقیم $\square\square\square\square\square$ تجزیه شود. این دلالت دارد بر اینکه هر عملیات شبکه عصبی خطی بین نمایش‌های عمومی می‌تواند (پس از تغییر پایه) بر حسب عملیات بین $\square\square\square\square\square$ در کشود [؟ ؟]. در مقابل، انتخاب خاص نمایش، یعنی تغییر پایه نسبت به $\square\square\square\square\square$ موجود در آن، برای هر لایه شبکه غیرخطی اهمیت دارد.

^{۱۵} مجموع مستقیم \oplus بردارهای $(f_i^A : \rho_i)$ را می‌توان به عنوان «انباسته» آن‌ها در یک بردار پیوسته در نظر گرفت. به طور سازگار با این، مجموع مستقیم نمایش‌های ρ_i را می‌توان به عنوان ساخت یک ماتریس قطری بلوکی حاوی ρ_i به عنوان بلوک‌ها در نظر گرفت؛ به اشکال ۱۳ و ۱۴ مراجعه کنید.



شکل ۱۳: سه کانال رنگی یک تصویر $\square\square\square$ به عنوان میدان‌های اسکالر شناسایی می‌شوند، بنابراین فضای ویژگی کامل طبق $(1) \oplus (1) \oplus (1) = (1)(g)$ تبدیل می‌شود.



شکل ۱۴: یک فضای ویژگی کامل شامل چندین میدان میانه از انواع بالقوه متفاوت c_i و ابعاد a_i است. از طریق گیج g^{AB} ، به صورت محلی توسط میدانهای ضرب $f_i^A \rightarrow U^A \rightarrow \mathbb{R}^{c_i}$ نمایش داده می‌شود. میدانهای ضرب در گیج دیگر ψ از طریق تبدیل گیج $f_i^B = \rho_i(g^{BA})f_i^A$ مرتبط هستند. ضرب این میدان متفاوت به طور مستقل تبدیل می‌شوند، بنابراین نمایش مدل سازی کل فضای ویژگی توسط مجموع مستقیم داده می‌شود، در اینجا $\rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \rho_3 \oplus \rho_4$

۳.۳ انتقال موازی بردارهای ویژگی

کرنل‌های شبکه‌های کانولوشنی ویژگی‌ها را از تمام نقاط p از منيفولد جمع‌آوری می‌کنند. از آنجا که ویژگی‌ها در نقاط مختلف در فضاهای بردار دارند و نسبت به گیج‌های مختلط بیان می‌شوند، باید قبل از پردازش بیشتر، در امتداد یک مسیر γ از p به q به صورت موازی منتقل شوند. ما ابتدا انتقال بردارهای مماس را مورد بحث قرار می‌دهیم، که توسط یک نگاشت انتقال موازی رسمی سازی می‌شود:

$$\mathcal{P}_\gamma : T_q M \rightarrow T_p M. \quad (32)$$

این انتقال دهنده اغلب از اتصال کانونی لوی-چویتا منيفولد محاسبه می‌شود، با این حال، ممکن است در برخی کاربردها مربوط به یک اتصال جایگزین (سازگار با G) باشد، همانطور که در ادامه و در مرور ادبیات ما در بخش ۲.۳.۸ بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد. انتقال دهنده بردارهای ویژگی (مرتبه با G) از انتقال دهنده بردارهای مماس تعیت می‌کند اگر انتقال سازگار با G باشد.

۱.۳.۳ انتقال دهنده‌های بردار مماس

از نظر آموزشی معقول است که ابتدا با حالت خاص انتقال دهنده‌های لوی-چویتا در فضاهای اقلیدسی که در شکل ۱۵ آ به تصویر کشیده شده‌اند، شروع کنیم، قبل از پرداختن به انتقال دهنده‌ها و منيفلهای عمومی‌تر. در این حالت انتقال موازی مستقل از مسیر انتخاب شده γ است و بردار منتقل شده را به معنای معمول در فضاهای اقلیدسی موازی نگه می‌دارد. توجه داشته باشید که انتقال دهنده \mathcal{P}_γ بین فضاهای مماس $T_p M$ و $T_q M$ نگاشت می‌کند و بنابراین مستقل از مختصات است. با این حال، می‌توان آن را نسبت به مختصات بیان کرد، سپس به جای بردارهای مماس بر روی بردارهای ضرب عددی عمل می‌کند. شهودی در شکل ۱۵ آورده شده است، جایی که چارچوب‌ها در q و p موازی نیستند^{۱۶} به طوری که ضرایب $(1, 0, 0, \sqrt{2})$ در q و $(0, 0, \sqrt{2}, 1)$ در p متفاوت هستند، حتی اگر بردارهای مماس (مستقل از مختصات) مربوطه با یکدیگر موازی باشند. برای دقیق‌تر کردن این موضوع، گیج‌های ψ_q^A و ψ_p^A را در همسایگی‌های $U^{\tilde{A}}$ از q و p در نظر بگیرید. فرض کنید یک بردار $v \in T_q M$ با ضرایب $v = (\psi_q^{\tilde{A}})^{-1}(v^{\tilde{A}}) \in T_q M$ داده شده باشد. ضرایب بردار منتقل شده v در سپس توسط: $\mathcal{P}_\gamma(v) = \psi_p^A \circ \mathcal{P}_\gamma \circ (\psi_q^{\tilde{A}})^{-1}(v^{\tilde{A}}) \in \mathbb{R}^d$ می‌شود. نتیجه می‌شود که بیان مختصاتی یک انتقال دهنده نسبت به گیج‌های \tilde{A} و A به صورت زیر است:^{۱۷}

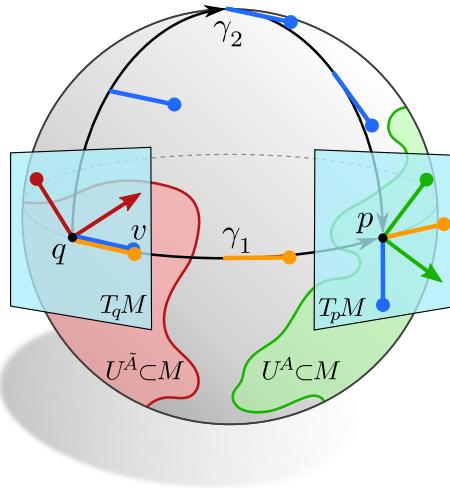
$$g_\gamma^{A\tilde{A}} := \psi_p^A \circ \mathcal{P}_\gamma \circ (\psi_q^{\tilde{A}})^{-1} \in \text{GL}(d) \quad (33)$$

عنصر گروهی $g_\gamma^{A\tilde{A}}$ انتقال دهنده‌ای غیرموازی چارچوب‌های مرجع در q و p را در نظر می‌گیرد. در \mathbb{R}^d ، معمولاً فرض می‌شود که تمام چارچوب‌ها موازی هستند به طوری که تمام مختصات بندی‌های انتقال دهنده‌های لوی-چویتا بدیهی می‌شوند.^{۱۸}

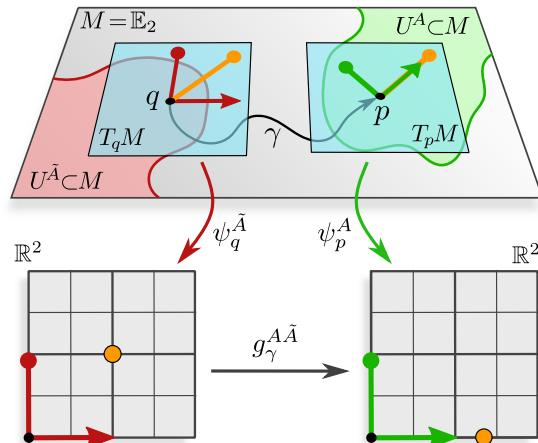
^{۱۶} برخلاف منيفلهای عمومی، \mathbb{R}^d با مفهوم کانونی موازی بودن چارچوب‌های مرجع همراه است.

^{۱۷} مقادیری در $\text{GL}(d)$ می‌گیرد اگر ما اتصال‌های دلخواه (با مقدار d) و گروه‌های ساختار عمومی (G, \cdot) را فرض کنیم. برای اتصال لوى-چویتا با مقدار $d=50$ و چارچوب‌های معتمد، یعنی $d = d$ ، $g_\gamma^{A\tilde{A}}$ را داریم.

^{۱۸} CNN‌های سنتی در \mathbb{R}^d به طور ضمنی این فرض را از چارچوب‌های موازی (شکل ۱۶) و انتقال دهنده‌های بدیهی می‌کنند.



(ب) انتقال موازی در کره S^2



(ت) انتقال موازی و مختصات بندی آن در یک فضای مسطح

شکل ۱۵: انتقال موازی بردارهای مماس $v \in T_q M$ در $q \in \mathcal{P}_\gamma v \in T_p M$ در p . شکل ۱۵ آالت خاص انتقال دهنده‌های لوی-چویتا را در فضاهای اقلیدسی $M = \mathbb{E}_d$ بصری‌سازی می‌کند. مستقل از مسیر انتخاب شده γ انتقال لوی-چویتا بردار (نازنجی) را به معنای معمول در فضاهای اقلیدسی موازی نگه می‌دارد. گیج‌های $\psi_q^{\tilde{A}}$ (فرمزا) و ψ_p^A (سیز) امکان بیان انتقال دهنده مستقل از مختصات را توسط یک عنصر گروهی $\psi_q^{A\tilde{A}} = \psi_p^A \circ \mathcal{P}_\gamma \circ (\psi_q^{\tilde{A}})^{-1} \in \text{GL}(d)$ فراهم می‌کند که تغییر ضرایب بردار را در نظر می‌گیرد اگر چارچوب هدف با چارچوب منع متنقل شده مطابقت نداشته باشد. شکل ۱۵ اب انتقال لوی-چویتا را در S^2 نشان می‌دهد، مقایسه کنید با معادله (۴۳۸). انتقال دهنده‌های \mathcal{P}_{γ_1} و \mathcal{P}_{γ_2} در امتداد مسیرهای مختلف γ_1 و γ_2 به طور کلی با یکدیگر اختلاف دارند. همانند فضاهای مسطح، انتقال دهنده‌های مستقل از مختصات را می‌توان توسط عناصر گروهی که بر روی ضرایب نسبت به چارچوب‌های مختصاتی در q و p عمل می‌کنند، بیان کرد.

از آنجا که انتقال دهنده در معادله (۳۳) وابسته به مختصات است، ما علاقه‌مند به تبدیل‌های گیج آن هستیم. گیج‌های $\psi_q^{\tilde{B}}$ و ψ_p^B را دو گیج جایگزین در همسایگی‌های q و p در نظر بگیرید. از نمودار جابجایی:

$$\begin{array}{ccccc} & & g_\gamma^{A\tilde{A}}. & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathbb{R}^d & & T_q M & & \mathbb{R}^d \\ & \downarrow \psi_q^{\tilde{A}} & \xrightarrow{\mathcal{P}_\gamma} & \downarrow \psi_p^A & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ & \mathbb{R}^d & & \mathbb{R}^d & \\ & \downarrow \psi_q^{\tilde{B}} & & \downarrow \psi_p^B & \\ & & g_\gamma^{B\tilde{B}}. & & \end{array} \quad (۴۴)$$

می‌توان خواند که انتقال دهنده‌ها در گیج‌های مختلف توسط:

$$g_\gamma^{B\tilde{B}} = g_p^{BA} g_\gamma^{A\tilde{A}} (g_q^{\tilde{B}\tilde{A}})^{-1} \quad (۴۵)$$

مربط هستند. توجه داشته باشید که شباهت این قانون تبدیل و نمودار جابجایی به آنچه در معادلات (۲۱) و (۲۳) آمده است. تفاوت بین هر دو این است که انتقال دهنده دارای دامنه $T_p M$ و دامنه مشترک $T_q M$ متفاوتی است که توسط گیج‌های مختلف و مستقل از یکدیگر تسهیم شده‌اند و بنابراین به طور مستقل تبدیل می‌شوند.

به طور کلی، انتقال موازی بردارهای مماس توسط یک انتخاب اتصال تعیین می‌شود، به عنوان مثال (اما نه لزوماً) توسط اتصال کائونی لوی-چویتا یک منیفولد ریمانی. یک اتصال را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای از انتقال دهنده‌های بین نهایت کوچک بین فضاهای مماس مجاور در نظر گرفت، به طوری که انتقال دهنده کامل \mathcal{P}_γ با انتگرال گیری اتصال در امتداد مسیر γ به دست می‌آید. انتقال دهنده‌ها در امتداد مسیرهای مختلف γ_1 و γ_2 از q به p نیازی به مطابقت ندارند، که در شکل ۱۵ با انتقال دهنده‌های لوی-چویتا در -2 -کره S^2 مثال زده شده است، مقایسه کنید با معادله (۴۳۸). همانند فضاهای مسطح، انتقال دهنده‌های مستقل از مختصات را می‌توان توسط معادله (۳۳) نسبت به گیج‌ها بیان کرد. تبدیل‌های گیج چنین انتقال دهنده‌های مختصات بندی شده دوباره توسط معادله (۴۵) داده می‌شوند. انتقال دهنده‌ها در یک منیفولد داده شده می‌توانند در اصل به صورت تحلیلی از اتصال محاسبه شوند [؟] و گاهی اوقات می‌توانند به صورت فرم بسته بیان شوند، به عنوان مثال برای کره S^2 ، معادله (۴۳۸). چندین الگوریتم عددی برای محاسبه انتقال دهنده‌های موازی در مسیرها وجود دارد؛ به بخش ۲.۱.۱۲ مراجعه کنید. ما به جزئیات بیشتر در مورد نحوه محاسبه انتقال دهنده‌های بردار مماس \mathcal{P}_γ نخواهیم پرداخت بلکه به سادگی آن‌ها را داده شده فرض می‌کنیم.

۲.۳.۳ انتقال دهنده‌های بردار ویژگی

معادله (۲۸) قانون تبدیل ضرایب بردار ویژگی را توسط نوع میدان آنها (ρ) تعریف می‌کند. انتقال دهنده موازی آنها، که نسبت به گنجی‌های $\psi_{\tilde{q}}$ و ψ_p^A بیان می‌شود، به طور مشابه با پیچیدن انتقال دهنده ضرایب بردار مماس در این نمایش میدان داده می‌شود، یعنی توسط:

$$\rho(g_{\gamma}^{A\tilde{A}}). \quad (36)$$

توجه داشته باشید که از آنجا که $G \rightarrow GL(c)$ است \square این ساختار تنها زمانی به خوبی تعریف می‌شود که تمام انتقال دهنده‌ها $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$ (برای مسیرهای دلغوه γ و چارچوب‌های A, \tilde{A}) واقعاً مقادیری در گروه ساختار انتخاب شده G بگیرند. اینکه آیا این حالت صادق است یا خیر هم به انتخاب خاص G -ساختار (یا G -اطلس) و هم به انتقال دهنده‌ها (یا اتصال) مورد نظر بستگی دارد \square آنها باید سازگار باشند [۱۹].

تمام شبکه‌های کانولوشنی (بنابراین انتقال می‌دهند) بردارهای ویژگی را به نحوی جمع آوری می‌کنند، و بنابراین برخی انتخاب از اتصال و G -ساختار را فرض می‌کنند. اگر G -ساختار انتخاب شده با اتصال لوی-چویتا ناسازگار باشد، این به معنای آن است که این مدل‌ها \square اغلب به طور ضمنی \square یک اتصال جایگزین و سازگار با G را برای جمع آوری ویژگی‌ها فرض می‌کنند. خواننده فعلانبا نگران انتخاب‌های خاص اتصال‌ها باشد، که در مرور ادبیات ما در بخش ۲.۲.۸ روشن تر خواهد شد. در ادامه این بخش، ما بیشتر در مورد سازگاری G -اتصال‌ها و G -ساختارها توضیح خواهیم داد. با فرض اینکه انتقال دهنده‌های ویژگی در ادامه همیشه به خوبی تعریف خواهند شد، این بخش را می‌توان با خیال راحت در اولین مطالعه نادیده گرفت.

بحث دقیق‌تر و مستقل از مختصات انتقال دهنده‌ها در بندهای بردار ویژگی مرتبط را می‌توان در بخش ۵.۶ یافت.

۲.۳.۳ سازگاری اتصال‌ها و G -ساختارها

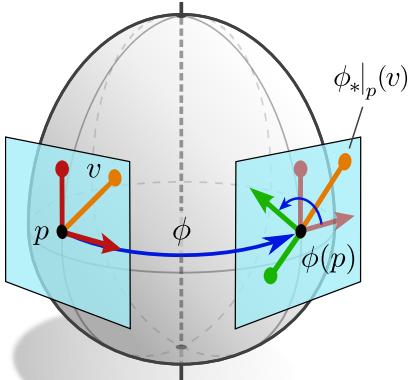
یک اتصال با یک G -ساختار GM سازگار با G نامیده می‌شود اگر عبارات مختصاتی $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$ انتقال دهنده‌های \mathcal{P}_{γ} آن نسبت به هر چارچوب \tilde{A}, A GM مقادیری در گروه ساختار G بگیرند [۱۹]. یک اتصال سازگار با G منجر به انتقال دهنده‌های بردارهای ویژگی مرتبط با G می‌شود.

برای روشن کردن این شرط سازگاری تا حدی انتزاعی، چند مثال خاص را مورد بحث قرار می‌دهیم. یک مثال ساده، اتصال لوی-چویتا در \mathbb{R}^n است، شکل ۱۱۵. آ. دو ساختار $\{e\}$ در \mathbb{R}^n که در اشکال ۲۲۵ و ۳۳۵ نشان داده شده‌اند را در نظر بگیرید. در اینجا $\{e\} = GL(c) \rightarrow \{e\}$ است، به این معنی که عبارات میدان $\rho : \{e\} \rightarrow GL(c)$ است، به طوری که انتقال موازی بردارهای ویژگی تنها در صورتی می‌تواند تعریف شود که عبارات مختصاتی $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$ مقادیری در $\{e\}$ بگیرند، یعنی بدیهی باشند. از آنجا که ساختار $\{e\}$ در شکل ۳۳۵ از چارچوب‌های "موازی" تشکیل شده است، این امر واقعاً همینطور است \square بنابراین اتصال لوی-چویتا با این ساختار $\{e\}$ سازگار است. در مقابل، چارچوب‌های ساختار $\{e\}$ در شکل ۳۳۵ در بخش ۱۱۵ نسبت به یکدیگر "چرخانه شده‌اند"، که منجر به عبارات مختصاتی غیربدیهی $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$ می‌شود که مقادیری در $(2) SO(2)$ می‌گیرند (در شکل ۱۱۵ آصری سازی شده است). از آنجا که نوع میدان c است، $\rho : \{e\} \rightarrow GL(c)$ است. اینجا چرخش‌ها را مدیریت نمی‌کند، امکان تعریف انتقال لوی-چویتا ویژگی‌های ساختار $\{e\}$ وجود ندارد \square آنها ناسازگار هستند. به عنوان مثال دوم، اتصال لوی-چویتا در S^2 را در نظر بگیرید، که در شکل ۱۱۵ نشان داده شده است. انتقال در این حالت همیشه وابسته به مسیر خواهد بود و منجر به بردارهای چرخانه شده متفاوت خواهد شد، که دلالت دارد بر اینکه $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$ مقادیری در $(2) SO(2)$ خواهد گرفت. بردارهای ویژگی که باید مطابق با اتصال لوی-چویتا منتقل شوند، بنابراین باید از نوع $\rho : SO(2) \rightarrow GL(c)$ باشند که یک نمایش $SO(2)$ است. این امر حداقل نیازمند ساختار $(2) SO(d)$ در S^d است که در شکل ۵۰ آ نشان داده شده است. ساختار $\{e\}$ در S^d از شکل ۵۰ با اتصال لوی-چویتا ناسازگار است.

از آنجا که اتصال لوی-چویتا یک اتصال متريک است، طول و زاویه بین بردارهای مماس را حفظ می‌کند، و بنابراین چارچوب‌های متعامد را به چارچوب‌های متعامد منتقل می‌کند. نتیجه می‌شود که اتصال لوی-چویتا همیشه با ساختار d چارچوب‌های متعامد سازگار است، که نسبت به آن $g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$ مقادیری در d می‌گيرد. اگر متفاوله قابل جهت‌گیری باشد، دست‌سازی چارچوب توسط انتقال دهنده‌های لوی-چویتا حفظ می‌شود، به این معنی که آنها تضمین شده‌اند که با ساختارهای $SO(d)$ چارچوب‌های متعامد راستگرد در M سازگار باشند. تمام شبکه‌های کانولوشنی در مرور ادبیات ما در بخش ۲.۳.۸ که بر اساس ساختارهای $SO(d)$ هستند، ویژگی‌ها را از طریق انتقال دهنده‌های لوی-چویتا جمع آوری می‌کنند.

اگر یک G -ساختار داده شده با اتصال لوی-چویتا ناسازگار باشد، باید یک اتصال جایگزین و سازگار با G را برای انتقال بردارهای ویژگی تعریف کرد. بر جسته‌ترین مثال در مرور ادبیات ما، اتصال‌های بدیهی در ساختارهای $\{e\}$ است. یک اتصال بدیهی با خاصیت مستقل از سیزه متنقل می‌شود [۱۹]. هر ساختار $\{e\}$ یک اتصال بدیهی منحصر به فرد را نتیجه می‌دهد، که بردارهای مماس را به گونه‌ای متنقل می‌کند که زاویه پیکانی را با چارچوب‌های مرجع ساختار $\{e\}$ حفظ کنند. این امر دلالت دارد بر اینکه $e = g_{\gamma}^{A\tilde{A}}$ یعنی آنها بردارهای ضریب را در \mathbb{R}^c نسبت به چارچوب‌های ساختار $\{e\}$ بدون تغییر مقادیر عددی آنها متنقل می‌کنند. چنین انتقال دهنده‌هایی در شبکه‌های کانولوشنی استفاده می‌شوند که

^{۱۹} به طور معادل، فرم ۱-اتصال اتصال، که نسبت به چارچوب‌های GM بیان می‌شود، ملزم به داشتن مقدار \square است، که در آن \square نشان دهنده جبر لی G است. به طور انتزاعی تر، ما به اتصال‌های اصلی اهرسمن در بنده اصلی $GL(G)$ علاقه‌مندیم.



شکل ۱۶: بصری‌سازی پیش‌برنده آزاد از مختصات بردارهای مماس و بیان مختصاتی آن نسبت به چارچوب‌های مرجع داده شده در موقعیت منبع و هدف. پیش‌برنده آزاد از مختصات $\phi_*|_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} M$ به چارچوب‌های مماس $\phi_*|_p(v) \in T_{\phi(p)} M$ را به $v \in T_p M$ در $\phi(p)$ متناظر با چارچوب مرجع قرمز است و $\psi_{\phi(p)}^{\tilde{A}}$ گیج در $\phi(p)$ که متناظر با چارچوب مرجع سبز است. آنها بردارها را قبل و بعد از پیش‌برنده توسط ضرایب عددی $(1, 1)^T \psi_{\phi(p)}^{\tilde{A}}(v) = (0, -\sqrt{2})^T \psi_{\phi(p)}^{\tilde{A}}(v) = (0, -\sqrt{2})^T \psi_{\phi(p)}^{\tilde{A}}(v)$ توضیح می‌دهند. این تبدیل ضرایب بردار توسط تبدیل گیج القا شده توسط ایزومنتری $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in \text{GL}(d)$ توصیف می‌شود، یعنی $\psi_{\phi(p)}^{\tilde{A}}(\phi_*|_p(v)) = g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \cdot \psi_p^A(v)$. ضرایب بردارهای ویژگی به طور مشابه $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in G$ تبدیل می‌شوند اگر طبق $\rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))$.

انتقال‌دهنده‌های غیربدهی‌بهی را به صراحت مدل نمی‌کنند \square که در مورد تمام شبکه‌های دارای $\{e\}$ در جدول ۶ صادق است، به ویژه آن‌هایی که در بخش‌های ۳.۱۱ و ۳.۱۲ هستند. توجه داشته باشید که اتصال بدیهی تنها انصالی است که با یک ساختار $\{e\}$ سازگار است. همانطور که در بالا ذکر شد، هر شبکه کانولوشنی برخی انتخاب از G -ساختار و اتصال سازگار را فرض می‌کند، اغلب اتصال‌های لوی-جوینا یا اتصال‌های بدیهی.

بخش ۵.۶ به طور مفصل در مورد سازگاری انتقال‌دهنده‌ها و G -ساختارها از دیدگاه مستقل از مختصات توضیح می‌دهد.

۴.۳ عمل ایزومنتری‌ها و تبدیل‌های گیج القا شده

تا کنون بحث ما منحصرآ بر تقارن‌های گیج محلی در مختصات‌بندی فضاهای مماس متاخر کرده است. یک منیفولد ممکن است، با این حال، خود دارای تقارن‌های غیربدهی‌بهی باشد، که در مورد یک منیفولد ریمانی M گروه ایزومنتری آن $\text{Isom}(M)$ را تشکیل می‌دهند. این بخش ایزومنتری‌ها و عمل آن‌ها بر منیفلدها، بردارهای مماس، چارچوب‌های مرجع و میدان‌های ویژگی را به طور خلاصه مورد بحث قرار می‌دهد، نتایجی را خلاصه می‌کند که به طور دقیق‌تری در بخش ۱.۸ استخراج شده‌اند. ما بدین ترتیب معادلی بین عمل‌های فعل ایزومنتری و تفسیر منفعل آن‌ها بر حسب تبدیل‌های گیج القا شده توسط ایزومنتری را بر جسته خواهیم کرد. این معادلی بعداً امکان توصیف تناوب‌پذیری ایزومنتری GM -کانولوشن‌ها را فراهم خواهد کرد.

ایزومنتری‌ها به عنوان تقارن‌های منیفلدهای ریمانی تعریف می‌شوند، یعنی آن نگاشت‌ها (دیفرانسیل‌ها)

$$\phi : M \rightarrow M, \quad (37)$$

که متریک و در نتیجه فواصل روی M را حفظ می‌کنند. مجموعه همه ایزومنتری‌های یک منیفولد ریمانی M گروه ایزومنتری آن را تشکیل می‌دهد، که ما آن را با $\text{Isom}(M)$ نشان می‌دهیم. به عنوان مثال، گروه اقليدی $E(d)$ گروه ایزومنتری فضاهای اقليدی \mathbb{E}_d است. این گروه شامل انتقال‌ها، چرخش‌ها و بازتاب‌ها است، که همه آن‌ها متریک استاندارد \mathbb{E}_d را حفظ می‌کنند. گروه ایزومنتری S^1 توسعه گروه متعامد $SO(2)$ دارد می‌شود، که شامل چرخش‌ها و بازتاب‌ها است. شکل ۱۶ منیفولد تخم مرغی شکلی را نشان می‌دهد که ایزومنتری‌های آن چرخش‌ها و بازتاب‌ها در ۲ حول محور عمودی هستند.

۱.۴.۳ پیش‌برنده بردارهای مماس

هر ایزومنتری $\phi \in \text{Isom}(M)$ از طریق پیش‌برنده (یا دیفرانسیل) آن

$$\phi_*|_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} M, \quad (38)$$

به طور طبیعی بردارهای مماس عمل می‌کند. همانطور که در شکل ۹۹ (وسط) بصری‌سازی شده است، پیش‌برنده را می‌توان به طور شهودی به عنوان حمل بردارهای مماس همراه با عمل ایزومنتری بر منیفولد زیرین M در نظر گرفت. تعریف رسمی پیش‌برنده بر روی TM در پیوست آ.۲ آورده شده است، با این حال، شهود ارائه شده برای هدف ما کافی است. از آنجا که پیش‌برنده یک نگاشت خطی آزاد از مختصات بین فضاهای مماس است، عمل آن در مختصات توسط ماتریس $d \times d$ نمایش داده می‌شود. با فرض گیج‌های ψ_p^A و $\psi_{\phi(p)}^{\tilde{A}}$ در موقعیت منبع و هدف، به ترتیب، این ماتریس توسط

$$g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) := \psi_{\phi(p)}^{\tilde{A}} \circ \phi_*|_p \circ (\psi_p^A)^{-1} \in \text{GL}(d). \quad (39)$$

داده می شود. این ماتریس تبدیل از ضرایب عددی یک بردار اصلی $v \in T_p M$ در گنج هدف را توضیح می دهد، یعنی $(\phi_*|_p(v)) = g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \cdot \psi_p^{\tilde{A}}(\phi_*|_p(v)) = g_\phi^{A\tilde{A}}(p) \cdot \psi_p^{\tilde{A}}(v)$. نمودار جابجایی

$$\begin{array}{ccccc} & & g_\phi^{A\tilde{A}}(p). & & \\ & \swarrow \psi_p^{\tilde{A}} & & \searrow \psi_{\phi(p)}^A & \\ \mathbb{R}^d & & T_p M & & \mathbb{R}^d \\ \downarrow g_p^{\tilde{B}\tilde{A}} & & \xrightarrow{\phi_*|_p} & & \downarrow g_{\phi(p)}^{BA} \\ & \swarrow \psi_p^{\tilde{B}} & & \searrow \psi_{\phi(p)}^B & \\ & & g_\phi^{B\tilde{B}}(p). & & \end{array}, \quad (40)$$

که از نظر مفهومی شبیه آن در معادله (۳۴) است، تعریف بیان مختصاتی پیش برنده بردار مماس را بصری سازی می کند. علاوه بر این دلالت دارد بر اینکه تبدیل های گنج بین مختصات بندی های مختلف تو سط

$$g_\phi^{B\tilde{B}} = g_{\phi(p)}^{BA} g_\phi^{A\tilde{A}} (g_p^{\tilde{B}\tilde{A}})^{-1}, \quad (41)$$

داده می شوند، که معادل مفهومی معادله (۳۵) است.

۲.۴.۳ پیش برنده چارچوب های مرجع و تقارن های G -ساختار

از آنجا که چارچوب های مرجع فقط d -تاپل هایی از بردارهای چارچوب خطی مستقل هستند، پیش برنده بردارهای مماس پیش برنده ای از چارچوب های مرجع را با پیش بردن محورهای چارچوب منفرد القا می کند. به طور خاص، پیش برنده یک چارچوب $[e_i]_{i=1}^d$ در p به عنوان چارچوب $\phi_*|_p(e_i)]_{i=1}^d$ در $\phi(p)$ تعریف می شود.

این پیش برنده چارچوب ها همیشه به خوبی تعریف شده است، با این حال، ممکن است با G -ساختار سازگار نباشد، یعنی به طور کلی تضمینی وجود ندارد که چارچوب ها در GM هنگام پیش برده شدن در GM باقی بمانند. به عنوان مثال $\{e_i\}$ -ساختار در شکل ۲۶ (بالا چپ) را در نظر بگیرید، که تو سط انتقال های افقی حفظ می شود اما تو سط انتقال های عمودی یا هر ایزو متری دیگر از \mathbb{R}^n حفظ نمی شود. به طور مشابه، R -ساختار در شکل ۲۶ (پایین چپ) تو سط انتقال ها و بازتاب های افقی حفظ می شود، اما تو سط چرخش ها نه. بنابراین مازیر گروه

$$\text{Isom}_{GM} := \left\{ \phi \in \text{Isom}(M) \mid [\phi_*|_p(e_i)]_{i=1}^d \in GM \quad \forall [e_i]_{i=1}^d \in GM \right\} \leq \text{Isom}(M) \quad (42)$$

ایزو متری هایی که تقارن های G -ساختار را در نظر می گیرند، یعنی آن هایی که تضمین شده اند هر چارچوب در GM را به چارچوب دیگری که نیز در GM موجود است، نگاشت کنند.^{۲۰} توجه داشته باشید که Isom_{GM} به طور کلی به انتخاب خاص G -ساختار GM بستگی دارد، نه فقط به گروه ساختار G . برای حالت خاص که $G \geq d$ ، تضمین شده است که $\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M)$ مطابقت داشته باشد زیرا ایزو متری ها تضمین شده اند که چارچوب های متعامد را به چارچوب های متعامد نگاشت کنند. ما علاوه ممند به زیر گروه GM هستیم زیرا تنها آن ایزو متری ها پیش برنده به خوبی تعریف شده اند از بردارهای ویژگی مستقل از مختصات GM را الفا خواهند کرد، همانطور که در بخش بعدی بیشتر مورد بحث قرار گرفته است.

پیش از ادامه به عمل ایزو متری بر بردارهای ویژگی، ما آنچه را که تبدیل های گنج القا شده تو سط ایزو متری می نامیم، مورد بحث قرار می دهیم. برای این منظور، فرض کنید $[e_i^{\tilde{A}}]_{i=1}^d$ آن چارچوب در p باشد که متناظر با گنج منبع $\psi_p^{\tilde{A}}$ است و فرض کنید $[e_i^A]_{i=1}^d$ آن چارچوب در (p) باشد که متناظر با گنج هدف $\psi_{\phi(p)}^A$ است، همانطور که در شکل ۱۶ به ترتیب در قرمز (چپ) و سبز (راست) نشان داده شده است. پیش برنده $[e_i^{\tilde{A}}]_{i=1}^d$ چارچوب منع از p به $\phi(p)$ (قرمز شفاف، راست) به طور کلی با چارچوب هدف مطابقت ندارد. با این حال، همانطور که در بخش ۳.۱.۸ اثبات شده است، دو چارچوب تو سط تبدیل گنج القا شده تو سط ایزو متری مرتبط هستند:

$$[\phi_*|_p(e_i^{\tilde{A}})]_{i=1}^d = [e_i^A]_{i=1}^d \triangleleft g_\phi^{A\tilde{A}}(p), \quad (43)$$

که در آن $g_\phi^{A\tilde{A}}(p)$ عنصر گروهی از معادله (۳۹) و \triangleleft عمل راست از معادله (۱۱) است. اصطلاح «تبدیل گنج القا شده تو سط ایزو متری» تا آنچا معنا دارد که هندسه های اطراف p و $\phi(p)$ غیر قابل تشخیص هستند زیرا ϕ یک ایزو متری، یعنی یک تقارن از M است. با شناسایی دو نقطه با یکدیگر،

^{۲۰} به طور رسمی تری بیان شود، چنین ایزو متری هایی اتومorfیسم های بندل اصلی G -ساختار هستند (یا القا می کنند).

بنابراین می‌توان عمل فعال ϕ بر یک کمیت هندسی را به عنوان یک تبدیل گیج منفعل، یعنی یک تغییر القا شده از چارچوب منبع به چارچوب هدف، تفسیر مجدد کرد.

قضیه ۸.۳ در بخش ۱۸ اثبات می‌کند که ایزومنتری‌های حفظ کننده G -ساختار در Isom_{GM} و تبدیل‌های گیج القا شده با مقدار G یکدیگر را نتیجه می‌دهند، یعنی

$$\phi \in \text{Isom}_{GM} \iff g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in G \quad \forall p \in M \quad (44)$$

برای گیج‌های دلخواه \tilde{A} و $\psi_{\phi(p)}^A$ از G -اطلس برقرار است. خواننده باید این ادعاهای ما در شکل ۴۹ تأیید کند.

۳.۴.۳ پیش‌برنده بودارهای ویژگی

اگر (و تنها اگر) یک ایزومنتری تقارنی از G -ساختار باشد، منجر به پیش‌برنده بودارهای ویژگی می‌شود. به طور شهودی، این پیش‌برنده بودارهای ویژگی را از نقاط p به (p) منتقل می‌کند. هنگامی که نسبت به دو چارچوب مرجع در p و (p) بیان شود، توسط تبدیل گیج القا شده

$$\rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)). \quad (45)$$

داده می‌شود. توجه داشته باشید که این تبدیل برای هر $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ به خوبی تعریف شده است، زیرا تبدیل‌های گیج القا شده (p) در این حالت مقادیری در G -خواهند گرفت و ρ یک G -نمایش است. در مقابل، اگر ϕ تقارنی از G -ساختار نباشد، تعریف پیش‌برنده بودار ویژگی متناظر غیرممکن است. این گزاره با این واقعیت مرتبط است که ویژگی‌های های معمولی هیچ رفتار تبدیل مشخصی تحت چرخش‌ها یا بازتاب‌ها در گروه اقایدیسی $E(d)$ ندارند.

پیش‌برنده بودارهای ویژگی منفرد عملی بر کل میدان ویژگی f را دلالت می‌کند، که ما آن را با $f \triangleright \phi$ نشان می‌دهیم. نسبت به مختصات، این عمل به صورت

$$[\phi \triangleright f]^A(\phi(p)) = \rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)) f^{\tilde{A}}(p). \quad (46)$$

بیان می‌شود. ما بعداً اثبات خواهیم کرد که های مستقل از مختصات نسبت به عمل ایزومنتری‌ها در Isom_{GM} بر میدان‌های ویژگی تناوب‌پذیر هستند؛ به شکل ۲۰ مراجعة کنید. این ویژگی براین واقعیت تکیه دارد که عمل فعال ایزومنتری بر میدان‌های ویژگی می‌تواند توسط معادله (۴۶) به عنوان یک تبدیل گیج منفعل صرف ضرایب بودار ویژگی در ک شود.

۴ شبکه‌های مستقل از مختصات و کانولوشن‌ها

شبکه‌های عصبی داده‌ها را با اعمال مجموعه‌ای از نگاشت‌های پارامتری (لایه‌ها) به یک سیگنال ورودی پردازش می‌کنند \square در مورد ما به مجموعه‌ای از میدان‌های ویژگی بر روی یک مینیولد ریمانی. اصل کوواریانس بدین ترتیب ایجاد می‌کند که لایه‌های منفرد شبکه باید عملیات مستقل از مختصات GM باشند. نمایش‌های مختصاتی چنین لایه‌هایی بنابراین باید طوری تبدیل شوند که قوانین تبدیل میدان‌های ویژگی ورودی و خروجی خود را رعایت کنند. به جز این الزام سازگاری، لایه‌های مستقل از مختصات عمومی بدون محدودیت باقی می‌مانند.

یک اصل طراحی رایج شبکه‌های عصبی که بر روی سیگنال‌های فضایی (میدان‌های ویژگی) عمل می‌کنند این است که آن‌ها به معنای تعیین یافته‌ای کانولوشنی هستند. ویژگی اصلی که اکثر تعیین‌های عملیات کانولوشن در آن مشترک هستند این است که استنتاج آن‌ها مستقل از موقعیت است. این امر با اشتراک توابع قالب، به عنوان مثال کرنل‌های کانولوشن یا بایاس‌ها، بین مکان‌های مختلف حاصل می‌شود. هر زمان که گروه ساختار G غیربدیهی باشد، فرآیند اشتراک وزن مبهم است زیرا توابع قالب می‌توانند نسبت به چارچوب‌های مرجع مختلف به اشتراک گذاشته شوند. همانطور که در ادامه استدلال خواهیم کرد، این ابهام با طراحی توابع قالب مشترک برای تناوب‌پذیر بودن تحت تبدیل‌های گیج با مقدار G حل می‌شود. توابع قالب تناوب‌پذیر گیج نسبت به چارچوب مرجع خاصی که در آن اعمال می‌شوند بی تفاوت خواهد بود و بنابراین امکان اشتراک وزن مستقل از مختصات را فراهم می‌کنند.

۱.۴	عملیات نقطه‌ای تناوب‌پذیر گیج
۳۰	
۱.۱.۴	کانولوشن‌های ۱ تناوب‌پذیر گیج
۳۰	
۲.۱.۴	جمع بایاس تناوب‌پذیر گیج
۳۲	
۳.۱.۴	غیرخطی‌های تناوب‌پذیر گیج
۳۳	
۲.۴	تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM
۳۳	
۱.۲.۴	دیدگاه یک ناظر محلی به میدان‌های ویژگی
۳۴	

۳۶	۲.۲.۴ کرنل‌های مستقل از مختصات و تبدیلات میدان کرنل
۳۸	۳.۲.۴ کانولوشن‌های \square و کرنل‌های \square -راهبر
۴۲	۳.۴ تناوب‌پذیری ایزومنتری

در این بخش مالایه‌های شبکه‌ای را در نظر خواهیم گرفت که میدان‌های \square^f از نوع p را به عنوان ورودی می‌گیرند و میدان \square^f از نوع p را به عنوان خروجی تولید می‌کنند. بخش ۱.۴ حالت خاص لایه‌هایی را که به صورت نقطه‌ای عمل می‌کنند مورد بحث قرار می‌دهد، یعنی آن‌هایی که خروجی آنها $(p) \in M$ در هر $p \in M$ تنها به بردار ویژگی ورودی متفred (p) در همان مکان بستگی دارد. مثال‌های عملی مرتبط که در اینجا در نظر گرفته شده‌اند عبارتند از 1×1 -تناوب‌پذیر گیج در بخش ۱.۱.۴، جمع باسیس در بخش ۲.۱.۴ و غیرخطی‌ها در بخش ۳.۱.۴. حالت پیچیده‌تر کانولوشن‌ها با کرنل‌های گستردۀ فضایی در بخش ۱.۲.۴ ببررسی شده است. به عنوان آن‌ماده‌سازی، بخش ۱.۲.۴ میدان‌های ویژگی را همانطور که از دید گاه مشاهده گران محلی (چارچوب‌های مرچ) دیده می‌شوند مورد بحث قرار می‌دهد، که کرنل‌های (کانولوشن) نسبت به آن‌ها اعمال خواهند شد. چنین مشاهداتی به عنوان پس‌کشی میدان ویژگی به فضای مimas یک مشاهده گر رسمی سازی می‌شوند؛ به شکل ۱۷ مراجعه کنید. بخش ۲.۲.۴ به اصطلاح تبدیل‌های میدان کرنل را معروفی می‌کند، که شیوه کانولوشن‌ها هستند اما اشتراک وزن فضایی رافرض نمی‌کنند و بنابراین توسعه یک میدان کرنل (به صورت هموار متغیر) بر روی M پارامتری می‌شوند. $G\text{-}GM$ -کانولوشن‌های واقعی در بخش ۳.۲.۴ به عنوان آن تبدیل‌های میدان کرنل تعريف می‌شوند که توسط یک کرنل قالب متفred مترک پارامتری می‌شوند. به منظور تضمین استقلال از مختصات فرآیند اشتراک وزن، کرنل‌های کانولوشن مطالبه می‌شوند که $G\text{-}G$ -استیریبل باشند، یعنی قید تناوب‌پذیری گیج را آورده کنند. بخش ۳.۴ نشان می‌دهد که $G\text{-}GM$ -کانولوشن‌ها به طور خود کار تحت آن ایزومنتری‌هایی که تقارن‌های $G\text{-}G$ -ساختار هستند (Isom $G\text{-}GM$ -تناوب‌پذیر) تناوب‌پذیر هستند. این بدان معنی است که $G\text{-}GM$ -کانولوشن‌ها با عمل ایزومنتری‌ها بر میدان‌های ویژگی همانطور که در شکل ۲۰ بصری سازی شده است، جابجا می‌شوند.

۱.۴ عملیات نقطه‌ای تناوب‌پذیر گیج

برای شروع، ما برخی عملیات شبکه عصبی را در نظر می‌گیریم که محدودیت‌های ناشی از استقلال از مختصات مورد نیاز و اشتراک وزن به ویژه ساده قابل استخراج هستند. همه این عملیات این ویژگی مشترک را دارند که به صورت نقطه‌ای بر بردارهای ویژگی عمل می‌کنند، یعنی بردارهای ویژگی خروجی $(p) \in f^{\square^f}$ در M را صرفاً بر اساس بردارهای ویژگی ورودی (p) در همان مکان محاسبه می‌کنند. به منظور ارضای اصل کوواریانس، مختصات‌بندی‌های این عملیات همگی مطالبه می‌شوند که مطابق پیش‌تر کیب با p و پس تر کیب با $\square^f p$ باشند. هنگام تقاضای اینکه عملیات بر حسب وزن‌های مشترک تعیین شوند، این قوانین تبدیل الزاماً برای تناوب‌پذیری گیج (یا ناوردادیبی) عملیات را دلالت می‌کنند.

استخراج‌ها برای عملیات نقطه‌ای مختلف در بخش‌های اول $1.1.4$ ، $2.1.4$ و $3.1.4$ در گام‌های اول عمده‌تاً مشابه هستند و به محدودیت‌های کوواریانس و تناوب‌پذیری اساساً یکسانی بر توابع قالب منجر می‌شوند. بنابراین آن‌ها می‌توانند با هم بررسی شوند، عملیات خاص (یا تابع قالب) را انتزاعی نگه داشته. با این حال، از آنجا که مفاهیم محدودیت‌های حاصل برای نمونه‌سازی‌های خاص متفاوت است، و از آنجا که می‌خواهیم بحث رازندیک به کاربرد نگه داریم، چنین فرمول‌بندی انتزاعی را حذف خواهیم کرد و مستقیماً نمونه‌سازی‌های خاص را در نظر خواهیم گرفت.

۱.۱.۴ کانولوشن‌های 1×1 تناوب‌پذیر گیج

به عنوان اولین مثال از عملیات نقطه‌ای، ما عمل خانواده‌ای از نگاشت‌های خطی \mathcal{C}_p را در نظر می‌گیریم، که بردار ویژگی ورودی $(p) \in f^{\square^f}$ را در هر $p \in M$ به بردار ویژگی خروجی

$$f^{\square^f}(p) := \mathcal{C}_p f^{\square^f}(p). \quad (47)$$

ارسال می‌کنند. اگر فرض اشتراک وزن فضایی را اضافه کنیم، نگاشت‌های خطی \mathcal{C}_q و \mathcal{C}_p در مکان‌های مختلف p و q جفت خواهند شد، و عملیات را می‌توان به عنوان کانولوشنی با کرنل دلتای دیراک با مقدار عملگر خطی دید. این عملیات در بینایی کامپیوتر بسیار رایج است، جایی که معمولاً به عنوان کانولوشن 1×1 نشان داده می‌شود، زیرا گستره‌سازی فضایی یک کرنل دیراک خطی که بر روی تصاویر دو بعدی عمل می‌کند توسط کرنل (با مقدار ماتریس) با گستره‌فضایی 1×1 پیکسل داده می‌شود. ما در ادامه استخراج خواهیم کرد که تقاضای اشتراک وزن فضایی منجر به محدودیتی خواهد شد که کرنل‌های قالب با مقدار ماتریس را مجبور می‌کند که در هم تبینه باشند، یعنی ماتریس‌های تناوب‌پذیر گیج.

پیش از فرض اشتراک وزن، بیان‌های مختصاتی نگاشت‌های خطی \mathcal{C}_p و تبدیل‌های گیج بین آن‌ها بسیار شبیه آن‌هایی از نگاشت‌های خطی بر روی $T_p M$ رفتار می‌کنند، که در بخش ۲.۱.۳ مورد بحث قرار دادیم. از آنجا که بردارهای ویژگی ورودی و خروجی در مختصات توسط بردارهای ضربی $f^A(p) \in \mathbb{R}^{c_{\square^f}}$ و $f^A(p) \in \mathbb{R}^{c_{\square^f} \times c_{\square^f}}$ نمایش داده می‌شوند، نگاشت خطی به طور طبیعی توسط آن ماتریس $\mathcal{C}_p^A \in \mathbb{R}^{c_{\square^f} \times c_{\square^f}}$ نمایش داده می‌شود که

$$f^A(p) = \mathcal{C}_p^A \cdot f^A(p). \quad (48)$$

را برآورده می‌کند. این رابطه البته برای مختصات‌بندی‌های دلخواه برقرار است، به طوری که برای هر گیج دیگری که با B بروز گذاری شده است، $\mathcal{C}_p^A \mathcal{C}_p^B(p) = \mathcal{C}_p^B \mathcal{C}_p^A(p)$ داریم. قانون تبدیلی که مرتبط می‌کند از اصل کوواریانس از قوانین تبدیل ویژگی‌های ورودی و خروجی

پیروی می کند. از آنجا که این ها توسط $f_p^B(p) = \rho_{\text{من}}(g_p^{BA}) f_{\text{من}}^A(p)$ و $f_p^A(p) = \rho_{\text{من}}(g_p^{BA}) f_{\text{من}}^A(p)$ داده می شوند، داریم:

$$\begin{aligned} f_{\text{من}}^B(p) &= \mathcal{C}_p^B \cdot f_{\text{من}}^B(p) \\ \Leftrightarrow \quad \rho_{\text{من}}(g_p^{BA}) f_{\text{من}}^A(p) &= \mathcal{C}_p^B \rho_{\text{من}}(g_p^{BA}) f_{\text{من}}^A(p) \\ \Leftrightarrow \quad f_{\text{من}}^A(p) &= \rho_{\text{من}}(g_p^{BA})^{-1} \mathcal{C}_p^B \rho_{\text{من}}(g_p^{BA}) f_{\text{من}}^A(p). \end{aligned} \quad (49)$$

مقایسه با معادله (48) دلالت دارد بر اینکه دو بیان مختصاتی \mathcal{C}_p لزوماً با

$$\mathcal{C}_p^B = \rho_{\text{من}}(g_p^{BA}) \mathcal{C}_p^A \rho_{\text{من}}(g_p^{BA})^{-1} \quad (50)$$

مربط هستند اگر قرار باشد قوانین تبدیل بردارهای ویژگی را رعایت کنند. همانطور که معمول است، این ملاحظات به طور مختصر توسط نمودار جابجایی ضبط می شوند:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{c_{\text{من}}} & \xrightarrow{\mathcal{C}_p^A} & \mathbb{R}^{c_{\text{من}}} \\ \rho_{\text{من}}(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho_{\text{من}}(g_p^{BA}) \cdot \\ \mathbb{R}^{c_{\text{من}}} & \xrightarrow{\mathcal{C}_p^B} & \mathbb{R}^{c_{\text{من}}} \end{array} \quad (51)$$

مفهوم عملی مهم این نتیجه تا کنون این است که نگاشت خطی \mathcal{C}_p به هیچ وجه محدود نیست. به بیان دیگر: تا زمانی که بیان های مختصاتی در گیج های مختلف توسط معادله (50) مربط باشند، آزاد هستیم که را در یک گیج دلخواه ثابت A توسط ماتریس بدون محدودیت \mathcal{C}_p^A پارامتری کنیم. همانطور که خواهیم دید، وضعیت زمانی تغییر می کند که نگاشت های خطی اشتراک وزن داشته باشند.

حال حالتی را در نظر بگیرید که نگاشت های خطی C_q و وزن ها را به اشتراک می گذارند. این بدان معنی است که فرض می کنیم آن ها توسط مجموعه منشر کی از پارامترها پارامتری شوند، که توسط کرنل قالب $1 \times 1 \in \mathbb{R}^{c_{\text{من}} \times c_{\text{من}}}$ داده می شود. سوال باز این است که دقیقاً چگونه نگاشت های آزاد از مختصات باید بر حسب این کرنل قالب پارامتری شوند. الزام ما برای استقلال از مختصات GM تقاضا می کند که هیچ چارچوب مرجع خاصی را در فرآیند اشتراک وزن ترجیح ندهیم، یعنی همه مختصات بندی ها را به همان شیوه درمان کنیم. بنابراین لازم است که کرنل قالب را با همه مختصات بندی ها به طور همزمان با اشتراک بگذاریم، یعنی

$$\mathcal{C}_p^X = K_{1 \times 1} \quad (\text{برای هر گیج } U^X, \psi^X \in \mathcal{A}^G \text{ با } p \in U^X), \quad (52)$$

تنظیم کنیم، که در آن G -اطلس متناظر با G -ساختر در نظر گرفته شده است؛ به معادله (25) مراجعه کنید. از آنجا که محدودیت کوواریانس در معادله (50) نیاز دارد که برای گیج های دلخواه مرطبه با G برقرار باشد، و مختصات بندی های $N_{\text{گاشت}}^A = \mathcal{C}_p^B = K_{1 \times 1}$ همگی مطابقت دارند، تقاضای مشترک برای اشتراک وزن و استقلال از مختصات GM منجر به محدودیت

$$K_{1 \times 1} = \rho_{\text{من}}(g) K_{1 \times 1} \rho_{\text{من}}(g)^{-1} \quad \forall g \in G \quad (53)$$

بر کرنل قالب می شود. تطبیق متناظر نمودار جابجایی در معادله (51) با اشتراک وزن توسط:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{c_{\text{من}}} & \xrightarrow{K_{1 \times 1} \cdot} & \mathbb{R}^{c_{\text{من}}} \\ \rho_{\text{من}}(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho_{\text{من}}(g_p^{BA}) \cdot \\ \mathbb{R}^{c_{\text{من}}} & \xrightarrow{K_{1 \times 1} \cdot} & \mathbb{R}^{c_{\text{من}}} \end{array} \quad (54)$$

داده می شود.

نتیجه گیری این تحلیل این است که کرنل های قالبی که می توانند بدون ابهام به اشتراک گذاشته شوند دقیقاً آن هایی هستند که تحت عمل گیج ناوردا هستند. فضای برداری چنین کرنل های 1×1 ناوردا گیج ساده فضای نگاشت های درهم تبیه بین نمایش های $\rho_{\text{من}}$ و $\rho_{\text{من}}$ است، یعنی

$$\text{Hom}_G(\rho_{\text{من}}, \rho_{\text{من}}) := \left\{ K_{1 \times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\text{من}} \times c_{\text{من}}} \mid K_{1 \times 1} = \rho_{\text{من}}(g) K_{1 \times 1} \rho_{\text{من}}(g)^{-1} \quad \forall g \in G \right\} \subseteq \mathbb{R}^{c_{\text{من}} \times c_{\text{من}}}. \quad (55)$$

توجه داشته باشید که، طبق لم شور [4]، الزام بر $K_{1 \times 1}$ برای درهم تبیه بودن مانع از نگاشت بین میدان هایی که تحت نمایش های کاهش ناپذیر غیرهم ریخت تبدیل می شوند از طریق کانولوشن های 1×1 می شود. این محدودیت شدید با کرنل های 1×1 اجتناب ناپذیر است اما بعد از هنگام اجازه دادن به کرنل های گسترده فضایی حل خواهد شد.

در این نقطه می‌خواهیم اشاره کنیم که اصطلاحات «تابع قالب تناوب پذیر گیج» و «تابع قالب ناوردا گیج» را به طور متقابل استفاده می‌کنیم. این با مشاهده توجیه می‌شود که محدودیت ناوردا بایی در معادله (۵۳) می‌تواند به عنوان محدودیت تناوب پذیری $K_{1 \times 1} \rho_{\square}(g) = \rho_{\square \square}(g) K_{1 \times 1}$ نوشته شود. به طور کلی امکان مشاهده توابع که نسبت به عمل گروهی در دامنه و دامنه مشترک آنها تناوب پذیر مستند به عنوان ناوردا عمل متناظر بر خود تابع وجود دارد. در کاربرد ما، دیدگاه تناوب پذیری بر جسته می‌کند که تبدیل میدان ورودی منجر به تبدیل متناظر میدان خروجی خواهد شد، که تضییق می‌کند همه کمیت‌های در گیر به طور کوواریانت با یکدیگر تبدیل شوند. از طرف دیگر، دیدگاه ناوردا بایی تأکید می‌کند که تابع قالب می‌تواند در گیر دلخواه به اشتراک گذاشته شود.

۲.۱.۴ جمع بایاس تناوب پذیر گیج

پس از اعمال عملیات کانولوشن، رایج است که بردار بایاس (مشترک) به بردارهای ویژگی منفرد جمع شود. همراه با الزام استقلال از مختصات، اشتراک وزن دوباره منجر به محدودیت خطی خواهد شد. این محدودیت تنها اجازه جمع شدن بایاس‌ها به زیرفضاهای ناوردا عمل گیج بر میدان ویژگی ورودی را خواهد داد.

همانند قبل، ابتدا جمع بایاس را بدون اشتراک وزن در نظر می‌گیریم. بنابراین بایاس‌های β_p داریم، که به موقعیت p بر روی منیفولد بستگی دارند، که به بردار ویژگی ورودی جمع می‌شوند تا بردار ویژگی خروجی

$$f_{\square \square}(p) = f_{\square}(p) + \beta_p. \quad (56)$$

تولید کنند. نسبت به گیج‌های ψ_p^A و ψ_p^B ، بایاس توسط آن بردارهای ضربه β_p^A و β_p^B در \mathbb{R}^c نمایش داده می‌شود که $f_{\square \square}(p) = f_{\square}(p) + \beta_p^A$ و $f_{\square \square}^B(p) = f_{\square}(p) + \beta_p^B$ را برآورده می‌کنند. از آنجا که جمع بردارها اجازه تغییر قوانین تبدیل آنها را نمی‌دهد، نمایش‌های گروهی مرتبه با ویژگی‌های ورودی و خروجی لزوماً مطابقت دارند، یعنی

$$\rho_{\square} = \rho_{\square \square} =: \rho. \quad (57)$$

همراه با الزام برای استقلال از مختصات، این دلالت دارد بر اینکه نمودار

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+ \beta_p^A} & \mathbb{R}^c \\ \rho(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho(g_p^{BA}) \cdot \\ \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+ \beta_p^B} & \mathbb{R}^c \end{array}, \quad (58)$$

که معادل آن در معادله (۵۱) است، نیاز دارد که جابجا شود. به صورت معادله نوشته شده، این رابطه $\rho(g_p^{BA}) f_p^A + \beta_p^B = \rho(g_p^{BA}) (f_p^A + \beta_p^A)$ را تفاضا می‌کند که برقرار باشد. از آنجا که خطی بودن $\rho(g_p^{BA})$ امکان بازنویسی سمت راست را به عنوان $\rho(g_p^{BA}) f_p^A + \rho(g_p^{BA}) \beta_p^A$ می‌دهد، تغییر بردار ویژگی ورودی منجر به

$$\beta_p^B = \rho(g_p^{BA}) \beta_p^A. \quad (59)$$

می‌شود. بردارهای ضربی که یک بایاس مستقل از مختصات را نسبت به گیج‌های مختلف نمایش می‌دهند بنابراین نیاز دارند که دقیقاً مانند بردارهای ویژگی که به آنها جمع می‌شوند تبدیل شوند. همانند مورد کانولوشن‌های 1×1 استقلال از مختصات بایاس β_p را به همچ وجه محدود نمی‌کند، بلکه فقط مختصات‌بندی‌های مختلف همان بایاس را مطالبه می‌کند که با یکدیگر سازگار باشند. یک پیاده‌سازی بنابراین می‌تواند گیج دلخواه انتخاب کند و بایاس را در آن گیج آزادانه توسط پارامترهایی در $\mathbb{R}^{c \times c}$ پارامتری کند.

وضعیت دوباره زمانی تغییر می‌کند که اشتراک وزن فضایی تفاضا شود. فرض کنید $b \in \mathbb{R}^{c \times c}$ بردار بایاس قالبی باشد که بر روی منیفولد به اشتراک گذاشته شود. از آنجا که تنها راه انجام این کار بدون ترجیح دلخواه هر مختصات‌بندی، اشتراک بردار بایاس در همه گیج‌ها به طور همزمان است، باید

$$\beta_p^X = b \quad \text{برای هر گیج } (U^X, \psi^X) \in \mathcal{A}^G \quad p \in U^X. \quad (60)$$

را در قیاس با معادله (۵۲) مطالبه کنیم. ترکیب محدودیت کوواریانس در معادله (۵۹) با این اشتراک وزن مستقل از گیج سپس منجر به محدودیت ناوردا بایی:

$$b = \rho(g) b \quad \forall g \in G \quad (61)$$

بر قالب بردار بایاس می‌شود. برای تکمیل قیاس با مورد کانولوشن‌های 1×1 نسخه تطبیق یافته نمودار جابجا بی در معادله (۵۸) با وزن‌های مشترک را نشان می‌دهیم:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+ b} & \mathbb{R}^c \\ \rho(g_p^{BA}) \cdot \downarrow & & \downarrow \rho(g_p^{BA}) \cdot \\ \mathbb{R}^c & \xrightarrow{+ b} & \mathbb{R}^c \end{array}. \quad (62)$$

برای بصیرت در مفاهیم محدودیت ناورداییی در معادله (۶۱)، فرض کنید برای بردار قالب داده شده b برآورده شود. به دلیل خطی بودن محدودیت، هر بردار مقیاس شده $\alpha \cdot b$ برای $\alpha \in \mathbb{R}$ نیز آن را برآورده خواهد کرد، یعنی هر حل زیرفضای یک بعدی از \mathbb{R}^c را پوشش می‌دهد که تحت عمل ρ ناورد است. چنین زیرفضای ناورد ابه عنوان زیرنایش ρ نشان داده می‌شود. از آنجا که زیرفضاهای در نظر گرفته شده یک بعدی هستند، خودشان هیچ زیرفضای مناسب ندارند و بنابراین زیرنایش‌های کاهش ناپذیر بدیهی هستند. نتیجه می‌شود که فضای برداری

$$\mathcal{B}_\rho^G := \{b \in \mathbb{R}^c \mid b = \rho(g) b \quad \forall g \in G\} \quad (63)$$

با ایس‌های تناوب‌پذیر گیج با (زیرفضاهای) زیرنایش‌های بدیهی ρ مطابقت دارد. ابعاد $\dim(\mathcal{B}_\rho^G)$ و بنابراین تعداد پارامترهای قابل بادگیری با کثرت زیرنایش‌های بدیهی موجود در ρ مطابقت دارد. برای گروه‌های فشرده G ، روابط متعدد شور دلالت دارند بر اینکه این ابعاد توسط $\dim(\mathcal{B}_\rho^G)$ داده می‌شود. این گزاره مواد معمولی گروه‌های متعدد $G = d \int_G \text{tr}(\rho(g)) dg$ همه زیرگروه‌های آن را پوشش می‌دهد.

دو مثال ساده از میدان‌های ویژگی که ممکن است بخواهیم با ایس‌های مشترک به آن‌ها جمع کنیم، میدان‌های اسکالار و میدان‌های بردار مماس هستند. بر اساس تعریف، میدان ضربی یک میدان اسکالار تحت تبدیل های گیج ناورد است، یعنی طبق نمایش گروهی $\rho(g) = 1 \quad \forall g \in G$. بنابراین می‌توان با ایس (اسکالار) \mathbb{R}^b به آن‌ها جمع کرد. در مقابل، میدان ضربی یک میدان بردار مماس طبق نمایش گروهی غیربدیهی، کاهش ناپذیر $\rho(g) = g$ تبدیل می‌شود. از آنجا که این نمایش هیچ زیرنایش بدیهی ندارد، جمع بردار با ایس مشترک به میدان‌های بردار مماس با حفظ استقلال از مختصات غیرممکن است. به عنوان مثال سوم، نمایش‌های منظم گروه‌های فشرده را در نظر بگیرید، که به عنوان مثال میدان‌های ویژگی شبکه‌های کانولوشنی گروهی را توصیف می‌کنند. توسط قضیه پیتر-ولی، شناخته شده است که نمایش‌های منظم دقیقاً یک زیرنایش بدیهی دارند [؟]. بنابراین با ایس که به میدان‌های ویژگی منظم جمع می‌شود توسط یک پارامتر منفرد توصیف می‌شود.

۳.۱.۴ غیرخطی‌های تناوب‌پذیر گیج

به جز عملیات خطی (کانولوشن) و جمع با ایس، اساسی ترین عملیات استفاده شده در هر شبکه عصبی غیرخطی‌ها هستند. ما در اینجا حالت معمول غیرخطی‌های σ_p را در نظر خواهیم گرفت که به روشهای محلي فضایی عمل می‌کنند، یعنی بردارهای ویژگی خروجی را به عنوان $f_{\mathbb{R}^0}(p) = (\sigma_p(f_{\mathbb{R}^0}(p)))$ محاسبه می‌کنند. یک غیرخطی مشترک دوباره مطالبه می‌شود که تناوب‌پذیر گیج باشد. از آنجا که استدلالی که به این نتیجه گیری منجر می‌شود شبیه آن در موارد قبلی است، تنها به طور خلاصه آن را خلاصه خواهیم کرد. به دلیل عمومیت نگاشته‌های غیرخطی استخراج فضاهای حل خطی همانند معادلات (۵۵) و (۶۳) غیرممکن است، با این حال، برخی مثال‌های خاص را مورد بحث قرار خواهیم داد.

مشابه قبل، هر غیرخطی آزاد از مختصات σ_p نسبت به گیج‌های A و B توسط یان‌های مختصاتی $\sigma_p^B : \mathbb{R}^{c_{\mathbb{R}^0}} \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\mathbb{R}^0}}$ و $\sigma_p^A : \mathbb{R}^{c_{\mathbb{R}^0}} \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\mathbb{R}^0}}$ داده می‌شود، که توسط تقاضای استقلال از مختصات مطالبه می‌شوند که با $(g_p^{BA})^{-1} \circ \sigma_p^A \circ \rho_{\mathbb{R}^0}(g_p^{BA}) = \rho_{\mathbb{R}^0}$ مرتبط باشند. یک تابع $\mathbb{R}^{c_{\mathbb{R}^0}} \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\mathbb{R}^0}}$ که تنها زمانی می‌تواند به روشهای مستقل از مختصات به اشتراک گذاشته شود که به طور همزمان با همه گیج‌ها به اشتراک گذاشته شود. این محدودیت کوواریانس را به محدودیت ناوردایی $\rho_{\mathbb{R}^0}(g) = (\sigma_p^A \circ \sigma_p^B)(g)^{-1} \quad \forall g \in G$ بر تابع قالب تبدیل می‌کند، یا، به طور معادل، به محدودیت تناوب‌پذیری متناظر

$$\rho_{\mathbb{R}^0}(g) = \sigma_p^B \circ \sigma_p^A(g)^{-1} \quad \forall g \in G. \quad (64)$$

به دلیل غیرخطی بودن این محدودیت مجبور هستیم آن را مورد به مورد بررسی کنیم [بنابراین بحث خود را به چند مثال خاص محدود خواهیم کرد. بحث برانگیزترین ساده‌ترین حالت، غیرخطی‌هایی است که بین میدان‌های اسکالار نگاشته می‌کنند، یعنی برای آن‌ها $1 = \rho_{\mathbb{R}^0}(g) = \rho_{\mathbb{R}^0}(g)$ هر $g \in G$ ناورد است. در این حالت محدودیت تناوب‌پذیری در معادله (۶۴) به $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تبدیل می‌شود، که به طور بدیهی برای هر غیرخطی $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ برآورده می‌شود. مثال جالب‌تری نمایش یکانی $\rho_{\mathbb{R}^0}$ است. یک غیرخطی ممکن برای این حالت توسط نرم بردارهای ویژگی داده می‌شود. از آنجا که $\|f_{\mathbb{R}^0}(p)\| = \|f_{\mathbb{R}^0}(g)\| \rho_{\mathbb{R}^0}$ به دلیل یکانی بودن $\rho_{\mathbb{R}^0}$ ناورد است، $\rho_{\mathbb{R}^0}$ نمایش بدیهی خواهد بود. گرفتن نرم بنابراین به عنوان عملیات غیرخطی، تناوب‌پذیر گیج دیده می‌شود که هر میدان یکانی را به میدان اسکالار نگاشته می‌کند. یک نگاشته غیرخطی که نوع میدان را حفظ می‌کند، یعنی $\rho_{\mathbb{R}^0} = \rho_{\mathbb{R}^0}$ را برآورده می‌کند، می‌تواند به طور مشابه به عنوان $\|f_{\mathbb{R}^0}(p)\| \cdot f_{\mathbb{R}^0}(p) \mapsto \|f_{\mathbb{R}^0}(p)\| \cdot f_{\mathbb{R}^0}(p)$ تعریف شود. گزینه دیگر، که ممکن است در یادگیری تعاملات فیزیکی نقش داشته باشد و در [؟] مورد بررسی قرار گرفته است، غیرخطی‌های حاصل ضرب تانسوری هستند. با داشتن دو میدان $f_{\mathbb{R}^0,1}(p), f_{\mathbb{R}^0,2}(p)$ ، که به ترتیب طبق $\rho_{\mathbb{R}^0,1}$ و $\rho_{\mathbb{R}^0,2}$ تبدیل می‌شوند، چنین غیرخطی‌هایی ویژگی حاصل ضرب تانسوری $f_{\mathbb{R}^0,1}(p) \otimes f_{\mathbb{R}^0,2}(p)$ را محاسبه می‌کنند، که به طور تناوب‌پذیر طبق نمایش حاصل ضرب تانسوری $\rho_{\mathbb{R}^0,1} \otimes \rho_{\mathbb{R}^0,2}$ تبدیل می‌شود. همه این مثال‌ها محدودیت تناوب‌پذیر گیج در معادله (۶۴) را برآورده می‌کنند. اینکه کدام غیرخطی خاص در عمل خوب کار می‌کند، با این حال، هنوز سوال تحقیقاتی بازی است که نیازمند بررسی تجربی بسیار بیشتری قبل از پاسخ دادن است. اولین تلاش در این جهت در [؟] انجام شده است.]

۲.۴ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM

عملیات اصلی شبکه‌های کانولوشنی، عملگر کانولوشن است که الگوهای مشخصه ویژگی‌ها را از یک همسایگی محلی در اطراف هر نقطه $p \in M$ به صورت خطی در یک بردار ویژگی جدید $f_{\mathbb{R}^0}(p)$ جمع می‌کند. یک کرنل کانولوشن گستردۀ فضایی، جزئیات این ابیاش را تعیین می‌کند. اصل

کوواریانس نیازمند استقلال از مختصات و در نتیجه یک قانون تبدیل خاص برای کرنل‌ها تحت تبدیلات پیمانه است. همانند مثال‌های قبلی، یک تقاضای اضافی برای اشتراک‌گذاری وزن منجر به الزامی برای کرنل‌الگومی شود تا نسبت به پیمانه هموردا (G -راهن) باشد.

مطابق با بخش قل، ما بهوضوح بین الزامات استقلال از مختصات و اشتراک‌گذاری وزن تمايز قائل می‌شویم. بنابراین، بخش ۲.۲.۴ با بحث در مورد میدان‌های کرنل و قوانین تبدیل آن‌ها بدون الزام به اینکه کرنل‌ها در موقعیت‌های جداگانه به هم مرتبط باشند، شروع می‌شود. چنین میدان‌های کرنل نامحدودی منجر به تبدیلات میدان کرنل می‌شوند که تبدیلات انگرالی هستند و می‌توان آن‌ها را به عنوان پیش‌درآمد‌های کانولوشن‌ها در نظر گرفت. کانولوشن‌های واقعی GM که توسط یک کرنل الگومی مشترک و لزوماً همودای پیمانه‌ای پارامتری می‌شوند، در بخش ۳.۲.۴ تعریف شده‌اند. به عنوان یک آماده‌سازی، در بخش بعدی ۱.۲.۴، تمايش‌های محلی میدان‌های ویژگی را بر روی فضاهای مماس توصیف خواهیم کرد، جایی که آن‌ها با کرنل‌های کانولوشن تطبیق داده می‌شوند.

۱.۲.۴ دیدگاه یک ناظر محلی به میدان‌های ویژگی

برخلاف فضاهای اقلیدسی یا فضاهای همگن کلی تر مانند کره، هندسه محلی یک خمینه ریمانی کلی از نقطه‌ای به نقطه دیگر متفاوت است. بنابراین، بالاً فاصله مشخص نیست که یک کرنل کانولوشن چگونه باشد روی M تعریف شود و چگونه می‌توان آن را بین مکان‌های مختلف به اشتراک گذاشت. یک راه حل رایج این است که کرنل را طبق معمول روی یک فضای برداری مسطح و اقلیدسی \mathbb{R}^d تعریف کرده و آن را به جای خود خمینه، روی فضاهای مماس به اشتراک‌بگذاری؛ به بخش‌های ۲.۲.۴ و ۲.۲.۴ یا کارهای قبلی [؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟] مراجعه کنید. سپس، کرنل را می‌توان از طریق نگاشت نمایی ریمانی به روی خمینه نگاشت. می‌توان آن را به گونه‌ای تصور کرد که توسط یک ناظر محلی اعمال می‌شود که ویژگی‌ها را در محیط اطراف خود نسبت به چارچوب مرجع محلی خود اندازه‌گیری می‌کند. در این بخش به طور خلاصه به چگونگی درک میدان‌های ویژگی از دیدگاه ناظر این محلی مختلف خواهیم پرداخت. از نظر ریاضی، این موضوع به عنوان پس‌کش ($\square\square\square\square\square\square$) و انتقال موازی میدان ویژگی به فضاهای مماس فرمول‌بندی می‌شود؛ برای تجسم به شکل ۱۷ مراجعه کنید.

برای نگاشت بین فضاهای مماس و خمینه، ما نگاشت نمایی ریمانی (مرتبط با اتصال لوی-چیوینتا) را در نظر می‌گیریم.^{۲۱} با فرض اینکه خمینه برای سادگی کامل از نظر ژئودزیکی باشد^{۲۲}، نگاشت نمایی در یک نقطه خاص $p \in M$ نگاشتی است به صورت

$$\exp_p : T_p M \rightarrow M. \quad (65)$$

این نگاشت، بردارهای $v \in T_p M$ را با نقاطی $\exp_p(v) \in M$ می‌داند که با دنبال کردن ژئودزیک گذرنده از p با سرعت اولیه v برای یک واحد زمان به دست می‌آیند. نگاشت نمایی با اینکه فواصل شعاعی را حفظ می‌کند، به طور کلی زوایا را تغییر می‌دهد و یک‌به یک نیست. به عنوان مثال، اگر خمینه یک کره باشد، نگاشت‌های نمایی فضای مماس مربوطه را بین نهایت بار دور آن می‌پیچند. با این حال، تضمین می‌شود که نگاشت نمایی یک دیفرنیویرفیسم محلی است اگر دامنه آن به فواصلی کوتاه‌تر از فاصله تا مکان پُرش (جایی که یک‌به یک بودن از دست می‌رود) محدود شود.

با داشتن نگاشت‌های نمایی، می‌توان میدان‌های ویژگی روی خمینه را به فضاهای مماس پس‌کش کرد. به طور خاص، اگر f یک میدان ویژگی روی M باشد، پس f کش $f := f \circ \exp_p$ به عنوان نگاشتشی تعریف می‌شود که بردار ویژگی $(\exp_p(v))$ از $f(\exp_p(v))$ را به $v \in T_p M$ می‌دهد. توجه داشته باشید که به دلیل عدم یک‌به یک بودن نگاشت نمایی، هر بردار ویژگی ممکن است به چندین بردار مماس v_1 و v_2 اختصاص یابد اگر $(v_1) = \exp_p(v_2)$ باشد^{۲۳} این پدیده تا حدودی شبیه به اثرات عدسی گرانشی در فیزیک است. در صورتی که نگاشت نمایی یک‌به یک باشد، یا زمانی که آن را به شعاع یک‌به یک بودن آن محدود کنیم، پس f کش معادل بیان میدان‌های ویژگی در مختصات نرمال ژئودزیکی است [؟].

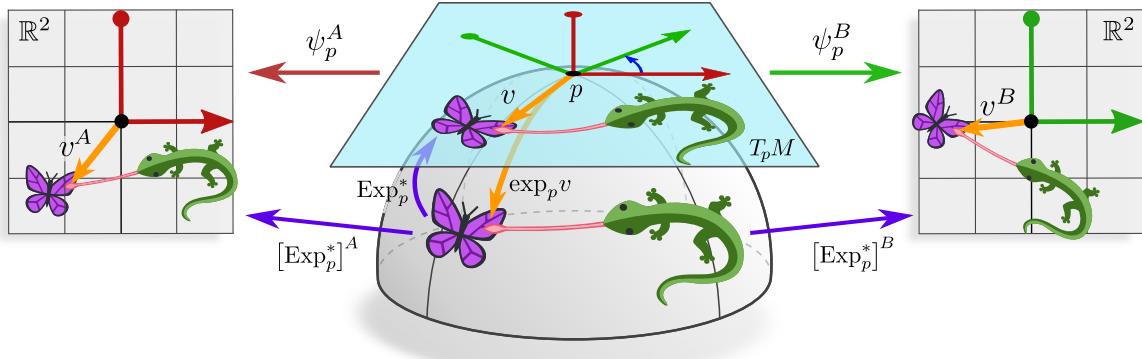
به یاد بیاورید که هدف از پس f کش بردارهای ویژگی به فضاهای مماس این است که بتوان آن‌ها را توسط یک کرنل کانولوشن جمع‌آوری کرد. متأسفانه، این کار بالاً فاصله امکان‌بندیر نیست زیرا بردارهای ویژگی در مکان‌های مختلف در فضاهای برداری متفاوتی قرار دارند و نسبت به پیمانه‌های متفاوتی بیان می‌شوند.^{۲۴} بنابراین لازم است تمام بردارهای ویژگی $[f](v)$ در یک فضای برداری و نسبت به یک پیمانه یکسان بیان شوند. یک ایده طبیعی که توسط [؟] پیشنهاد شد، انجام این کار با انتقال موازی شیوه به اثرات عدسی گرانشی در فیزیک است. در صورتی که نگاشت نمایی را از (v) به v تعریف می‌کنند.^{۲۵} ما این پس f کش f را با انتقال اضافی با Exp_p^* نشان می‌دهیم تا بر ارتباط نزدیک آن با پس f کش معمولی f به $T_p M$ تأثیر دهد. شکل ۱۷ یک ایده بصری از این پس f کش انتقال‌دهنده میدان‌های ویژگی به فضای مماس و نمایش‌های آن A و B را برای Exp_p^* نشان می‌دهد.

^{۲۱} حتی مدل‌هایی که یک اتصال جایگزین (سازگار با G) برای انتقال ویژگی‌ها فرض می‌کنند، معمولاً از اتصال کانونی لوی-چیوینتا برای محاسبه ژئودزیک‌ها و نگاشت‌های نمایی استفاده می‌کنند.

^{۲۲} فرض کامل بودن ژئودزیکی M به این معناست که نگاشت‌های نمایی \exp_p برای هر $p \in M$ روی کل فضای مماس $T_p M$ تعریف شده‌اند. در مواردی که این فرض برقرار نباشد، می‌توان به پر کردن با صفر متولی شد، که معمولاً در شبکهای کانولوشنی برای تصاویر با تکیه‌گاه متاتحری استفاده می‌شود.

^{۲۳} یک وضعیت بسیار مشابه، تعریف مشتقات کوواریانت را انگیزه‌مند می‌کند، که آن نیز نیاز به ترکیب اشیاء هندسی دارد که در فضاهای متفاوتی زندگی می‌کنند.

^{۲۴} انتقال موازی در امتداد هر مسیر دیگری نیز به همان اندازه معتبر خواهد بود.



شکل ۱۷: یک میدان ویژگی f روی M و نمایش محلی آن $T_p M$ روی $\text{Exp}_p^* f$. درست مانند پس کش معمولی $\exp_p^* f$ از f در امتداد نگاشت نمایی $T_p M \rightarrow M$ است، $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ ، پس کش انتقال دهنده بردارهای ویژگی $f(\exp_p(v))$ را به بردارهای مماس $v \in T_p M$ نسبت می‌دهد. با این حال، از آنچهایی که هدف ما نیاشت، پس کش شده با استفاده از یک کرnel کاتولوشن است، آن‌ها باید در یک فضای یکسان و نسبت به یک پیمانه یکسان در p داده شوند. بنابراین، پس کش انتقال دهنده علاوه بر این، انتقال دهنده موازی (سازگار با G) را در امتداد ژودزیک (v) به p $\exp_p(v)$ به اعمال می‌کند. از طریق یک پیمانه ψ_p^X ، پس کش انتقال دهنده f روی $T_p M$ را می‌توان روی $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c$ $[\text{Exp}_p^* f]^X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c$ بصورت $[\text{Exp}_p^* f]^X(p) = \psi_p^X(\exp_p(v))$ یابان کرد. انتخاب‌های مختلف چارچوب‌های مرجع (ناظران) در اینجا با تغییر شکل‌های خطی مختلف میدان ویژگی مطابقت دارد. تبدیلات میدان کرnel و کاتولوشن‌های GM یک ویژگی خروجی (p) را در p با تطبیق یک کرnel \mathcal{K}_p روی $\text{Exp}_p^* f$ با $\text{Exp}_p^* f(T_p M)$ محاسبه می‌کنند (یعنی انگرال حاصلضرب آنها را روی فضای مماس می‌گیرند؛ به معادله (۷۶) مراجعه کنید).
 مارمولک‌ها و پروانه‌ها با مجوز Creative Commons Attribution 4.0 International از توییتر اقتباس شده‌اند.

ما $\text{Exp}_p^* f$ را با تعریف آن بر حسب عبارت مختصاتی اش نسبت به یک انتخاب پیمانه فرمول‌بندی می‌کنیم. برای این منظور، فرض کنید ψ_p^A یک پیمانه در p باشد که ویژگی‌های منتقل شده نهایتاً نسبت به آن بیان می‌شوند و $\psi_{\exp_p(v)}^{\tilde{A}}$ یک پیمانه دلخواه در (v) باشد که بردار ویژگی در آن مکان را با یک بردار ضربی $f^{\tilde{A}}(\exp_p(v)) \in \mathbb{R}^c$ نشان می‌دهد. فرض کید

$$\rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{A \tilde{A}}) \quad (66)$$

انتقال دهنده موازی سازگار با G برای ضرایب بردار ویژگی در امتداد ژودزیک (v) به p باشد. سپس ما پس کش انتقال دهنده را در مختصات به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[\text{Exp}_p^* f]^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad v^A \mapsto [\text{Exp}_p^* f]^A(v^A) \\ := \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(\psi_p^A)^{-1}(v^A)}^{A \tilde{A}}) \cdot f^{\tilde{A}}(\exp_p(\psi_p^A)^{-1}(v^A)), \quad (67)$$

که در آن $v = (\psi_p^A)^{-1}(v^A) \in T_p M$ بردار مماس بدون مختصات است که توسط ضرایب v^A از طریق ψ_p^A به آن ارجاع داده می‌شود. همانطور که قبلاً ادعا شد، انتخاب پیمانه $\psi_{\exp_p(v)}^{\tilde{A}}$ در $\exp_p(v)$ به دلیل استقلال مختصات تمام معادلات، بی‌ربط است و حذف می‌شود. به طور خاص، می‌توانستیم از هر پیمانه دیگری مانند $\psi_{\exp_p(v)}^{\tilde{B}}$ در (v) استفاده کنیم، که منجر به تبدیلات پیمانه $\rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{A \tilde{B}}) = \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{A \tilde{A}}) \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{\tilde{A} \tilde{B}}) = \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{\tilde{B} \tilde{A}}) \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(v)}^{\tilde{B} \tilde{A}})$ برای انتقال دهنده طبق معادله (۳۵) و (۴۰) بود. برای ضرایب بردار ویژگی طبق معادله (۲۸) می‌شود، که هنگام ترکیب هر دو عبارت، یکدیگر را خشی می‌کنند.

با این حال، پس کش انتقال دهنده $[\text{Exp}_p^* f]^A$ همچنان به پیمانه در p بستگی دارد و بنابراین تحت تبدیلات پیمانه g_p^{BA} در p تبدیل می‌شود. مانند هر تابع مختصاتی، قانون تبدیل آن توسط تبدیلات پیمانه بر روی دامنه \mathbb{R}^d و هم‌دامنه \mathbb{R}^c تعیین می‌شود. بنابراین به صورت زیر داده می‌شود:

$$[\text{Exp}_p^* f]^B = \rho(g_p^{BA}) \circ [\text{Exp}_p^* f]^A \circ (g_p^{BA})^{-1}, \quad (68)$$

که توسط نمودار جایجا^{۱۷} زیر خلاصه می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\left[\text{Exp}_p^* f\right]^A} & \mathbb{R}^c \\ g_p^{BA} \downarrow & & \downarrow \rho(g_p^{BA}) \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\left[\text{Exp}_p^* f\right]^B} & \mathbb{R}^c \end{array} \quad (69)$$

همانطور که در شکل ۱۷ به تصویر کشیده شده است، $\left[\text{Exp}_p^* f\right]^B$ و $\left[\text{Exp}_p^* f\right]^A$ باید به عنوان دیدگاه ناظران محلی (چارچوب‌های مرجع) مختلف به میدان ویژگی در نظر گرفته شوند.

در اصل، می‌توان ساختارهای جایگزینی را برای پس‌کش میدان‌های ویژگی از M به $T_p M$ در نظر گرفت. تعریف ما از تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM در بخش‌های ۲.۲.۴ و ۳.۲.۴ در آدامه، مستقل از این انتخاب خاص است.

۲.۲.۴ کرنل‌های مستقل از مختصات و تبدیلات میدان کرنل

کانولوشن‌های GM عملیات مستقلی از مختصات هستند که کرنل مشترک و یکسانی را در هر نقطه از خمینه اعمال می‌کنند. برای تفکیک واضح فرضیات، ابتدا تبدیلات میدان کرنل عمومی تری را مورد بحث قرار می‌دهیم که عملیات مستقلی از مختصات هستند اما الزام اشتراک‌گذاری وزن را کنار می‌گذارند. بنابراین، آن‌ها شیوه به کانولوشن‌های GM هستند اما در هر نقطه p از خمینه، کرنل بالقوه متفاوتی \mathcal{K}_p اعمال می‌کنند. به منظور رعایت اصل کوواریانس، عبارات مختصاتی این کرنل‌ها باید به شیوه‌ای اصولی تبدیل شوند، با این حال، خود کرنل‌ها بدون محدودیت باقی می‌مانند.

کرنل‌های مستقل از مختصات: از آنجایی که کانولوشن‌ها در یادگیری عمیق بین میدان‌های بردارهای ویژگی با ابعاد $\mathbb{R}^{c_{\text{out}}}$ و $\mathbb{R}^{c_{\text{in}}}$ نگاشت برقرار می‌کنند، کرنل‌های کانولوشن ماتریس-مقدار $C_{\text{out}} \times C_{\text{in}}$ هستند. پیاده‌سازی‌های گسسته کانولوشن‌های d -بعدی روی فضاهای اقلیدسی معمولاً چنین کرنل‌هایی را به صورت آرایه‌هایی با شکل $(s_1, \dots, s_d, c_{\text{out}}, c_{\text{in}})$ نمایش می‌دهند. محور اول یک شبکه فضایی از $s_1 \times \dots \times s_d$ اختصاص داده شده است که در دو محور آخر کدگذاری شده است.^{۲۵} در محیط پیکسل را نشان می‌دهند، که به هر کدام یک ماتریس $C_{\text{out}} \times C_{\text{in}}$ اختصاص داده شده است که در نگاشت این ماتریس‌ها بین کرنل‌ها بروزگاری شده است. در محيط پیوسته و اقلیدسی، چنین کرنل‌هایی را می‌توان به عنوان نگاشت‌هایی توصیف کرد

$$K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}, \quad (70)$$

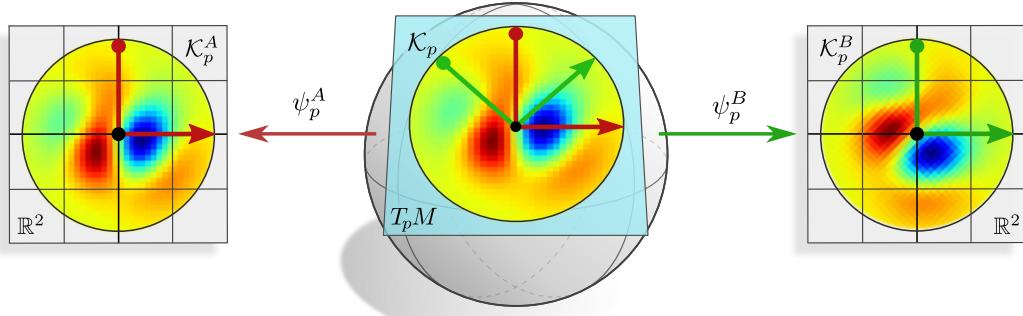
که یک ماتریس $C_{\text{out}} \times C_{\text{in}}$ را به هر نقطه از \mathbb{R}^d اختصاص می‌دهد. همانطور که در بخش قبلی ۱.۲.۴ ذکر شد، ما کانولوشن‌های GM را به عنوان $T_p M$ روی فضای مماس $\text{Exp}_p^* f$ تطبیق پس‌کش انتقال‌دهنده \mathcal{K}_p که فضاهای مماس مسطوح هستند، طبیعی است که این تطبیق را مانند حالت کاملاً اقلیدسی معمول تعریف کنیم. بنابراین، ما کرنل‌های \mathcal{K}_p را از طریق عبارات مختصاتی شان تعریف می‌کنیم که شکل معادله (۷۰) را دارند، یعنی،

$$\mathcal{K}_p^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}. \quad (71)$$

شکل ۱۸ یک کرنل داده‌شده بدون مختصات را روی $T_p M$ و تمايش‌های آن را روی \mathbb{R}^d نسبت به چارچوب‌های مرجع مختلف نشان می‌دهد.^{۲۶}

^{۲۵} چیدمان واقعی حافظه به چارچوب یادگیری عمیق خاص مورد نظر بستگی دارد.

^{۲۶} ما تأکید می‌کنیم که در اینجا یک کرنل بدون مختصات \mathcal{K}_p را که روی $T_p M$ داده شده است فرض می‌کنیم و عبارات مختصاتی آن \mathcal{K}_p^X را روی \mathbb{R}^d به چارچوب‌های مرجع X در نظر می‌گیریم. اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی بعداً ما را با این سؤال مواجه خواهد کرد که چگونه یک کرنل بدون مختصات \mathcal{K}_p را روی $T_p M$ با توجه به یک کرنل الگوریتم K روی \mathbb{R}^d تعریف کنیم. پیوست ب این دو مفهوم و ارتباط آنها را با G -راهبری کرنل توضیح می‌دهد.



شکل ۱۸: یک کرنل بدون مختصات K_p روی $T_p M$ و عبارات مختصاتی آن $\psi_p^X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{дан}} \times c_{\text{дан}}}$ نسبت به پیمانه‌های ψ_p^X (فقط یکی از کانال‌های کرنل $\mathbb{R}^{c_{\text{дан}} \times c_{\text{дан}}}$ نشان داده شده است). تبدیلات پیمانه‌ای که مختصات دهی‌های مختلف یک کرنل را به هم مرتبط می‌کنند، از قوانین تبدیل دامنه و هم‌دامنه آنها پیروی می‌کنند. بنابراین برای هر $v \in \mathbb{R}^d$ به صورت $\psi_p^B(v) = \rho_{\text{дан}}(g_p^{BA}) K_p^A(v) \rho_{\text{дан}}(g_p^{BA})^{-1}$ داده می‌شوند. یک میدان کرنل K روی M یک تخصیص هموار از کرنل‌ها بر روی فضاهای مماس است (تعزیز ۷.۲).

توجه داشته باشید که ما در اینجا فرض می‌کنیم کرنل روی $T_p M$ داده شده است و سپس آن را نسبت به پیمانه‌های مختلف روی \mathbb{R}^d بیان می‌کنیم. این از نظر مفهومی با وضعیت نشان داده شده در شکل‌های ۵، ۱۱ و ۶۷ متفاوت است، که در آنها فرض می‌کنیم یک کرنل الگو K روی \mathbb{R}^d داده شده است و سپس K_p را روی $T_p M$ از طریق اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی نسبت به یک چارچوب مرتع معرفی می‌کنیم. برای حفظ استقلال از مختصات در طول فرآیند اشتراک‌گذاری وزن، کرنل مشترک باید تحت تبدیلات پیمانه پایا (یا هموردا) باشد؛ به بخش ۳.۴ پیوست ب مراجعه کنید.

قانون تبدیل بین نمایش‌های مختصاتی K_p^A و K_p^B یک کرنل K_p روی $T_p M$ طبق معمول از قوانین تبدیل دامنه و هم‌دامنه آنها پیروی می‌کند. در دامنه \mathbb{R}^d قانون تبدیل توسط g_p^{BA} داده می‌شود، در حالی که قانون تبدیل $\mathbb{R}^{c_{\text{дан}} \times c_{\text{дан}}}$ ، همانند معادله (۵۰)، توسط یک ضرب همزمان از چپ با $\rho_{\text{дан}}(g_p^{BA})$ داده می‌شود. بنابراین، دو مختصات دهی کرنل K_p برای هر $v \in \mathbb{R}^d$ به صورت زیر با هم ارتباط دارند:

$$K_p^B(g_p^{BA}v) = \rho_{\text{дан}}(g_p^{BA}) \cdot K_p^A(v) \cdot \rho_{\text{дан}}(g_p^{BA})^{-1}, \quad (72)$$

که توسط نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{K_p^A} & \mathbb{R}^{c_{\text{дан}} \times c_{\text{дан}}} \\ g_p^{BA} \downarrow & & \downarrow \rho_{\text{дан}}(g_p^{BA}) [\cdot] \rho_{\text{дан}}(g_p^{BA})^{-1} \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{K_p^B} & \mathbb{R}^{c_{\text{дан}} \times c_{\text{дан}}} \end{array} \quad (73)$$

همانند مثال‌های بخش ۱.۴، اصل کوواریانس تنها نیازمند یک رفتار تبدیل سازگار بین مختصات دهی‌های مختلف کرنل است اما محدودیتی بر خود کرنل اعمال نمی‌کند. بنابراین می‌توان کرنل‌های K_p را برای هر $p \in M$ و یک پیمانه دلخواه در p با یک کرنل ماتریس-مقدار نامحدود پارامتری کرد. ما میدان‌های هموار چنین کرنل‌هایی را به عنوان میدان‌های کرنل نشان می‌دهیم که نقش عمده‌ای در تحلیل ما از هموردا بایزی و متري کانولوشن‌های GM در بخش ۸ ایفا می‌کنند.

تبدیلات میدان کرنل مستقل از مختصات: با داشتن یک میدان کرنل هموار K ، می‌توانیم تبدیلات میدان کرنل را تعریف کنیم، که شبیه به کانولوشن‌ها هستند اما از این جهت متفاوتند که ممکن است در هر موقعیت مکانی یک کرنل متفاوت اعمال کنند. آنها یک میدان از بردارهای ویژگی خروجی $(f(p))$ را با انتگرال‌گیری از حاصلضرب کرنل مربوطه K_p و پس‌کش انتقال‌دهنده f_p^* از $T_p M$ روی f محاسبه می‌کنند، یعنی،

$$f(p) = \int_{T_p M} K_p(v) \operatorname{Exp}_p^* f(v) dv. \quad (74)$$

برای بیان این تعریف بدون مختصات، باید تمام کمیت‌ها را با عبارات مختصاتی شان جایگزین کرده و انتگرال‌گیری را از طریق پیمانه انتخاب شده از $T_p M$ به \mathbb{R}^d منتقل کرد. همانطور که در پیوست ب توضیح داده شده است، عنصر حجم ریمانی مناسب (پایا نسبت به پیمانه) برای یک پیمانه ψ_p^A به صورت زیر داده می‌شود:

$$\sqrt{|\eta_p^A|} dv^A, \quad (75)$$

که در آن ضریب $\sqrt{|\eta_p^A|}$ ، تعریف شده در معادله (۵۸۷)، حجم (مثبت) پوشیده شده توسط چارچوب مرجع e_i^A در p است. بنابراین، عبارت مختصاتی تبدیل میدان کرنل به صورت زیر است:

$$f_{\square\Box}^A(p) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) [\text{Exp}_p^* f_{\square\Box}]^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A. \quad (76)$$

استقلال از مختصات تبدیل میدان کرنل با یک پیمانه جایگزین ψ^B و نشان دادن اینکه میدان خروجی حاصل همانطور که انتظار می‌رود تبدیل می‌شود، تأیید می‌شود، که در واقع چنین است:

$$\begin{aligned} f_{\square\Box}^B(p) &\stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^B(v^B) [\text{Exp}_p^* f_{\square\Box}]^B(v^B) \sqrt{|\eta_p^B|} dv^B \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \left[\rho_{\square\Box}(g_p^{BA}) \mathcal{K}_p^A((g_p^{BA})^{-1} v^B) \right] [\text{Exp}_p^* f_{\square\Box}]^B(g_p^{BA} v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &\stackrel{(3)}{=} \rho_{\square\Box}(g_p^{BA}) \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) \left[\rho_{\square\Box}(g_p^{BA})^{-1} [\text{Exp}_p^* f_{\square\Box}]^B(g_p^{BA} v^A) \right] \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &\stackrel{(4)}{=} \rho_{\square\Box}(g_p^{BA}) \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) [\text{Exp}_p^* f_{\square\Box}]^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &\stackrel{(5)}{=} \rho_{\square\Box}(g_p^{BA}) f_{\square\Box}^A(p) \end{aligned} \quad (77)$$

در اینجا ما از تعریف تبدیلات میدان کرنل و قانون تبدیل کرنل‌ها (معادله (۷۲)) در دو مرحله اول استفاده کردیم. مرحله سوم با بیرون کشیدن $\rho_{\square\Box}$ از انتگرال و جایگزینی $v^B = (g_p^{BA})^{-1} v^A$ به دست می‌آید، با استفاده از اینکه عنصر حجم $\sqrt{|\eta_p^B|} dv^B = \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A$ به طور طراحی شده پایا نسبت به پیمانه است. دو مرحله آخر با شناسایی قانون تبدیل پس کش انتقال‌دهنده میدان ویژگی در معادله (۶۸) و تعریف تبدیل میدان کرنل در پیمانه ψ^A به دست می‌آیند. توجه داشته باشید که استقلال از مختصات تبدیل میدان کرنل، صحت قانون تبدیل کرنل در معادله (۷۲) را تأیید می‌کند.

یک تبدیل میدان کرنل تنها زمانی به خوبی تعریف می‌شود که انتگرال‌ها روی فضاهای مماس همگرا باشند، که به طور دقیق‌تر در بخش ۲.۷ و پیوست ج مورد بحث قرار گرفته است. قضیه ۷.۷ ثابت می‌کند که یک تکیه گاه فشرده برای کرنل‌های \mathcal{K} برای تضمین این خوش‌تعریفی کافی است. این قضیه همچنین ثابت می‌کند که تبدیلات میدان کرنل که بر اساس میدان‌های کرنل هموار هستند، میدان‌های ویژگی ورودی هموار را به میدان‌های ویژگی خروجی هموار نگاشت می‌کنند.

۳.۲.۴ کانولوشن‌های $\square\Box$ و کرنل‌های $\square\Box$ -راهبر

آزادی تبدیلات میدان کرنل در اعمال یک کرنل متفاوت در هر مکان، به آنها اجازه تعیین استنتاج آموخته شده را بر روی مکان‌های مختلف نمی‌دهد و بنابراین آنها از نظر داده ناکارآمد می‌سازد. بنابراین، معمولاً کانولوشن‌ها در نظر گرفته می‌شوند، که می‌توان آن‌ها را به عنوان آن دسته از تبدیلات میدان کرنل خاصی دید که بر اساس میدان‌های کرنل کانولوشنی هستند، یعنی میدان‌های کرنلی که توسط یک کرنل الگوی واحد و مشترک پارامتری شده‌اند. همانند قبل، یک اشتراک‌گذاری وزن مستقل از مختصات نیازمند آن است که کرنل‌های الگوی نسبت به پیمانه همودرا (G -راهبر) باشند. این هموداری پیمانه‌ای کرنل‌های الگوی تضمین می‌کند که الگوهایی که در ژست‌های هندسی مختلف و مرتبط با G ظاهر می‌شوند، تا یک تبدیل متناظر بردار ویژگی از طریق $\rho_{\square\Box}$ پاسخ یکسانی را برانگیزند.

اشتراک‌گذاری وزن کانولوشنی: فرض کنید K یک کرنل الگو باشد که باید روی تمام فضاهای مماس به اشتراک گذاشته شود. برای اینکه هیچ پیمانه خاصی را ترجیح ندهیم $\square\Box$ که با نیاز ما به استقلال از مختصات در تضاد است \square مجبوریم کرنل را با قرار دادن $\mathcal{K}_p^X = K$ در تمام پیمانه‌ها به طور همزمان به اشتراک بگذاریم. به طور ساده‌انگارانه، این به نظر می‌رسد که پیشنهاد می‌کند کرنل الگو را با قرار دادن \mathcal{K}_p^X برای هر نقطه $p \in M$ و هر پیمانه ψ در p به اشتراک‌گذاریم. در حالی که چنین تعریفی از اشتراک‌گذاری کرنل معقول به نظر می‌رسد، از اصل ما برای اشتراک‌گذاری توابع الگوی محلی به معنای دقیق پیروی نمی‌کند: به جای اشتراک‌گذاری مستقیم کرنل، مهم است که کل عملیات محلی را به اشتراک‌گذاری $\square\Box$ که در اینجا کل تبدیل انتگرالی در معادله (۷۶) است. از آنجایی که این عملیات بر حسب میدان کرنل \mathcal{K} پارامتری می‌شود، این به طور غیرمستقیم منجر به اشتراک‌گذاری کرنل الگوی شود، با این حال، با نتیجه‌های کمی متفاوت از اشتراک‌گذاری ساده‌انگارانه در نظر گرفته شده در بالا.

برای یافتن تعریف صحیح میدان‌های کرنل کانولوشنی GM طبق اصل ما برای اشتراک‌گذاری توابع الگوی محلی، ابتدا باید این عملیات محلی را شناسایی کنیم. ما این کار را با انتزاع تبدیلات میدان کرنل (در مختصات) به عنوان مجموعه‌ای از عملگرهای انتگرالی محلی به شکل زیر انجام می‌دهیم:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{K}, p}^A : C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c) \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad F \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v) F(v) \sqrt{|\eta_p^A|} dv, \quad (78)$$

که در آن $C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c)$ فضای نگاشت‌های هموار از \mathbb{R}^d به \mathbb{R}^c را نشان می‌دهد. در کاربرد ما، این نگاشت‌های هموار صرفاً نمایش‌های میدان ویژگی محلی $[Exp_p^* f]^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c$ هستند که از فضاهای مماس در p دیده می‌شوند و توسط تبدیل میدان کرنل به یک بردار ویژگی خروجی $f_{\mathcal{K},p}^A(p) = \mathcal{G}_{\mathcal{K},p}^A([Exp_p^* f]^A)$ در $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{من}} \times c_{\text{من}}}$ می‌شوند. با توجه به کرنل الگوی ما $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{من}} \times c_{\text{من}}}$ ، ما یک الگوی عملگر انتگرالی متناظر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathfrak{I}_K : C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c) \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad F \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} K(\mathfrak{v}) F(\mathfrak{v}) d\mathfrak{v}, \quad (79)$$

که نمایش میدان محلی F را در کرنل الگو K ضرب کرده و سپس حاصلضرب آنها را انتگرال می‌گیرد. توجه داشته باشد که \mathfrak{I}_K به عنوان یک تابع الگو نزوماً نسبت به انتخاب‌های خاص پیمانه‌ها بی‌تفاوت است و بنابراین شامل ضریب حجم چارچوب نمی‌شود. یک طرح اشتراک گذاری وزن کاتولوشنی مستقل از مختصات G با الزام به اینکه این تابعک الگو با تمام عملگرهای انتگرالی منفرد در هر نقطه و در هر پیمانه موافق باشد، تحمیل می‌شود، یعنی:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{K},p}^X = \mathfrak{I}_K \quad \text{برای هر پیمانه } p \in U^X, \quad (80)$$

که در آن \mathcal{A}^G اطلاع G (ماکسیمال) متناظر با ساختار G در نظر گرفته شده است؛ به معادله (۲۵) مراجعه کنید. این معادل اشتراک گذاری مستقیم کرنل الگوی محلی طبق زیر است:

$$\mathcal{K}_p^X = \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^X|}} \quad \text{برای هر پیمانه } p \in U^X, \quad (81)$$

که در آن ضریب نرمال‌سازی «چگالی کرنل» را به اندازه حجم چارچوب مرجع $\sqrt{|\eta_p^X|}$ کاهش می‌دهد. همانطور که در ادامه بحث می‌شود، این نرمال‌سازی برای همودایی تحت گروه‌های تقارن غیر حافظ حجم مهم است.

ما میدان‌های کرنلی را که توسط یک کرنل مشترک K طبق معادله (۸۱) پارامتری شده‌اند، به عنوان میدان‌های کرنل کاتولوشنی GM می‌نامیم. الزام همزمان برای اشتراک گذاری وزن و استقلال از مختصات منجر به یک قید همودایی بر روی کرنل‌های الگو می‌شود. برای استخراج این قید، اشتراک گذاری کرنل در معادله (۸۱) را در قانون تبدیل کرنل در معادله (۷۲) $(G \text{-راهبری دهیم})$ ، که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{1}{\sqrt{|\eta_p^B|}} K(g_p^{BA} \mathfrak{v}) = \frac{1}{\sqrt{|\eta_p^A|}} \rho_{\text{من}}(g_p^{BA}) \cdot K(\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\text{من}}(g_p^{BA})^{-1}. \quad (82)$$

از آنجایی که حجم‌های چارچوب‌های مرجع مختلف با $\sqrt{|\eta_p^A|}$ مرتبط هستند و از آنجایی که قانون تبدیل باید برای پیمانه‌های دلخواه مرتبط با G برقرار باشد، این قید G -راهبری را ایجاد می‌کند^{۷۷}

$$K(g \mathfrak{v}) = \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{من}}(g) \cdot K(\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\text{من}}(g)^{-1} \quad \forall \mathfrak{v} \in \mathbb{R}^d, g \in G. \quad (83)$$

بر روی کرنل‌های الگو، همانطور که توسط [۸] ثابت شده است، این قید نیازمند آن است که کرنل‌های الگو عملگرهای نمایش [۹] باشند (تعیین‌هایی از عملگرهای تانسوری کروی در مکانیک کواترnomی)، از نظر نموداری، یک کرنل G -راهبری K باید جایجاً زیر را برآورده کند:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{K} & \mathbb{R}^{c_{\text{من}} \times c_{\text{من}}} \\ g \downarrow & & \downarrow \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{من}}(g) [\cdot] \rho_{\text{من}}(g)^{-1} \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{K} & \mathbb{R}^{c_{\text{من}} \times c_{\text{من}}} \end{array} \quad (84)$$

برای هر $g \in G$. توجه داشته باشید که ضریب دترمینان معکوس $|\det g|$ در قانون تبدیل کرنل باعث می‌شود که آن مانند یک (۱)-چگالی ماتریس-مقدار تبدیل شود؛ برای جزئیات بیشتر به جدول ۲ مراجعه کنید. به طور شهودی، کرنل‌های G -راهبری دقیقاً آن کرنل‌هایی هستند که می‌توانند نسبت به چارچوب‌های مرجع دلخواه مرتبط با G به اشتراک گذاشته شوند بدون اینکه انتخاب خاص پیمانه بر نتیجه تأثیر بگذارد.^{۷۸} بنابراین، ابهام

^{۷۷} برخلاف کارهای قلبی [۹]، این قید شامل ضریب $|\det g|$ است. این ضریب در آن کارها ظاهر نشد زیرا همه آنها گروه‌های ساختاری متعامد d (یا زیرگروه‌های آن) را در نظر گرفته بودند که برای آنها ضریب دترمینان صفر می‌شود.

^{۷۸} قید G -راهبری را می‌توان به صورت $\rho_{\text{من}}(g)^{-1} \cdot \rho_{\text{من}}(g) \cdot K(g^{-1} \mathfrak{v}) = |\det g|^{-1} \rho_{\text{من}}(g) \cdot \rho_{\text{من}}(g) \cdot K(g^{-1} \mathfrak{v})$ با $\mathfrak{v} \in \mathbb{R}^d$ ، $g \in G$ در سمت راست مستند. یک کرنل G -راهبری، با پایا بودن تحت تبدیلات پیمانه، منجر به همان کرنل بدون مختصات \mathcal{K}_p می‌شود، زمانی که نسبت به هر چارچوب مرجعی در $G_p M$ به اشتراک گذاشته شود.

هم ترازی کرnel‌ها \square که انگیزه اصلی این کار بود \square با اشتراک گذاری وزن اضافی بر روی تمام چارچوب‌های مرجع معادل (تمام پیمانه‌ها) در ساختار G در نظر گرفته شده GM حل می‌شود.

	\mathcal{K}_p^X	K	\mathcal{K}_p^X	شیء
چگالی	۸	۰	-۱	۱

جدول ۲: مروری بر توانهای چگالی s برای اشیاء مختلف در گیر در تبدیلات میدان کرnel عمومی و کانولوشن‌های GM . عبارت مختصاتی یک s -چگالی با ضرب $| \det g |^s$ تبدیل می‌شود و قی مختصات از طریق $G \in$ تبدیل شوند. یک کرnel ماتریس-مقدار عمومی \mathcal{K}_p^X طبق معادله (۷۶) یک s -چگالی است. همین امر برای میدان‌های ویزگی و پس‌کش‌های آنها نیز صادق است که قوانین تبدیل آنها در معادلات (۲۸) و (۶۸) داده شده است. کل انگرال‌ده $\int_{\mathbb{R}^d} K(v) dv^X$ از یک تبدیل میدان کرnel عمومی در معادله (۷۶) نیز یک s -چگالی دیده می‌شود \square توجه داشته باشد که این برای استقلال آن از مختصات، همانطور که در معادله (۷۷) نشان داده شده، ضروری است. از آنجایی که الگوی عملگر انگرالی \int_K در معادله (۷۹) نسبت به هر انتخاب پیمانه بی‌تفاوت است، شامل ضرب حجم چارچوب $\sqrt{|\eta^X|}$ نمی‌شود. از آنجایی که با این وجود باید مانند عملگر‌های انگرالی $\mathcal{I}_{\mathcal{K}_p^X}$ که زیربنای تبدیلات میدان کرnel هستند رفتار کند، کل انگرال‌ده $\int_K K(v) F(v) dv$ باز $\int_K F(v) dv$ ملزم به بودن یک s -چگالی است. این امر مستلزم آن است که خود کرnel‌های الگوی مشترک K مانند (۱)-چگالی‌ها تبدیل شوند، که در قید G -راهبری در معادله (۸۳) معنکس شده است. توجه داشته باشد که این قانون تبدیل کرnel‌های الگوی برای G محظی کانولوشن‌های GM اکیداً صروری است اگر ویزگی‌های خروجی باید مانند چگالی‌های با وزن \star تبدیل شوند؛ به معادله (۸۹) مراجعه کنید. برای دیدگاهی جایگزین، خواننده علاقه‌مند را به نتیجه ۱ در [۴] ارجاع می‌دهیم، جایی که ضرب در مینیان از اندازه‌های هار روی گروه‌های لی استخراج می‌شود.

قبل از پرداختن به کانولوشن‌های GM ، در مورد فضای کرnel‌های G -راهبر توضیح می‌دهیم. توجه داشته باشد که مجموعه

$$\mathcal{K} := \left\{ K: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \mid K(gv) = \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{out}}(g) \cdot K(v) \cdot \rho_{\text{in}}(g)^{-1} \quad \forall v \in \mathbb{R}^d, g \in G \right\}. \quad (85)$$

کرnel‌های عمومی، یعنی نه لزوماً هموردا، با مجهر شدن به جمع و ضرب اسکالار استاندارد روی $\mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ یک فضای برداری تشکیل می‌دهد. از آنجایی که قید G -راهبری در معادله (۸۳) خطی است، فضای کرnel را به یک زیرفضای خطی محدود می‌کند:

$$\mathcal{K}_{\rho_{\text{out}}, \rho_{\text{in}}}^G := \left\{ K: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \mid K(gv) = \frac{1}{|\det g|} \rho_{\text{out}}(g) \cdot K(v) \cdot \rho_{\text{in}}(g)^{-1} \quad \forall v \in \mathbb{R}^d, g \in G \right\}. \quad (86)$$

بنابراین می‌توان برای یک پایه از کرnel‌های G -راهبر راه حلی یافت که کانولوشن GM را می‌توان بر حسب آن پارامتری کرد. در حالی که این فضا در ثئوری معمولاً بی‌نهایت بعدی است، در عمل اغلب گستره می‌شود، به طوری که در نهایت با یک پایه متاتانی $\{K_1, \dots, K_N\}$ از کرnel‌های G -راهبر مواجه می‌شویم. سپس یک مجموعه از وزن‌های با مقادیر حقیقی $\{w_1, \dots, w_N\}$ که در طول فرآیند آموزش بهینه‌سازی می‌شوند، کانولوشن را با $w_i K_i = \sum_{i=1}^N w_i K_i$ پارامتری می‌کنند. توجه داشته باشد که ابعاد کاهاش‌یافته (زیر) فضای کرnel‌های G -راهبر به معنای بهبود کارایی پارامتر در مقایسه با کانولوشن‌های معمولی است.

بخش ۳.۳.۵ به بحث در مورد راه حل‌های تحلیلی نمونه‌ای از فضاهای کرnel هموردای بازتابی برای نمایش‌های گروهی مختلف گروه بازتاب \mathcal{R} می‌پردازد. کرnel‌های حاصل که با انواع مختلفی از تقارن‌های بازتابی مشخص می‌شوند، در جدول ۳ به تصویر کشیده شده‌اند.

مثال‌های بیشتری را می‌توان در ادبیات مربوط به شبکه‌های عصبی کانولوشنی راهبر یافت: یک راه حل تحلیلی برای قید فضای کرnel برای گروه ساختاری متغیر مخصوص (۳) $\text{SO}(3)$ در سه بعد و نمایش‌های تحویل‌نپذیر آن توسعه \square ارائه شد. \square [۴] این رویکرد را برای پوشش نمایش‌های گروهی دلخواه تعیین دادند و قید فضای کرnel را برای هر نمایشی از ۲ و تمام زیرگروه‌های آن $\leq G$ حل کردند \square یک پیاده‌سازی در <https://quva-lab.github.io/e2cnn/api/e2cnn.kernels.html> موجود است. برای گروههای ساختاری متناهی، قید را می‌توان به صورت عددی نیز حل کرد، همانطور که توسعه \square [۴] توضیح داده شده است. یک استراتژی راه حل کلی تر، که برای گروههای ساختاری فشرده دلخواه G (و بنابراین همه موارد ذکر شده در بالا) کاربرد دارد، توسعه \square [۴] پیشنهاد شد. این راه حل قضیه کلاسیک ویگنر-اکارت \square [۴] را به یک قضیه ویگنر-اکارت برای کرnel‌های G -راهبر تعیین می‌دهد، که کرnel‌ها را بر حسب توابع پایه هارمونیک، ضرایب کلیش-گوردان و اندومورفیسم‌های نمایش‌ها (عناصر ماتریسی کاهاش‌یافته تعیین یافته) بیان می‌کند. ما برای مروری دقیق‌تر بر کارهای قبلی و مرتبط با کرnel‌های راهبر به [۴] ارجاع می‌دهیم.

کانولوشن‌های مستقل از مختصات \square : با داشتن یک کرnel الگوی G -راهبر $K \star GM$ با این کرnel به عنوان $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{out}}, \rho_{\text{in}}}^G$ کانولوشن GM متناظر تعریف می‌شود، که برای هر نقطه $p \in M$ و هر پیمانه ψ در $\mathcal{K}_p^X = K / \sqrt{|\eta^X|}$ صدق می‌کند. با قرار دادن میدان کرnel کانولوشنی GM در معادله (۷۶)، یعنی تبدیل میدان کرnel، عبارت مختصاتی کانولوشن GM به صورت زیر ساده می‌شود:

$$f_{\text{out}}^A(p) = [K \star f_{\text{in}}]^A(p) := \int_{\mathbb{R}^d} K(v) [\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^A(v) dv = \mathcal{I}_K([\text{Exp}_p^* f_{\text{in}}]^A). \quad (87)$$

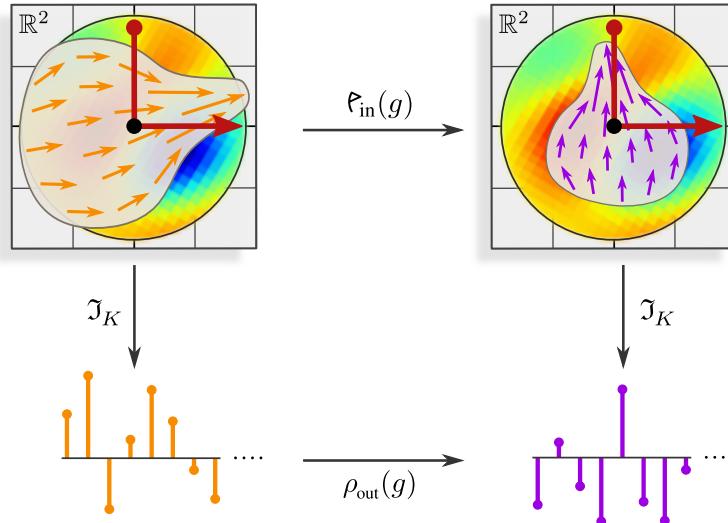
بنابراین، این به سادگی با تطبیق پس کش انتقال دهنده $\text{Exp}_p^* f_{00}^A$ از میدان ویژگی در یک پیمانه دلخواه انتخاب شده ψ_p^A با کرنل کانولوشن مستقل از پیمانه K به دست می آید. بنابراین کانولوشن های مستقل از مختصات GM به راحتی با ۱) انتخاب چارچوب های مرجع دلخواه، ۲) پس کش (و انتقال) میدان های ویژگی به مختصات دهی های فضای مماس و ۳) انقباض آنها در آنجا با یک کرنل G -راهبر (قابل آموزش) پیاده سازی می شوند.

کانولوشن های GM چندین ویژگی تقارنی مرتبط را از خود نشان می دهند:

استقلال از مختصات: به عنوان موارد خاصی از تبدیلات میدان کرنل، کانولوشن های GM به طور (غیرفعال) مستقل از مختصات هستند، یعنی معادله (۷۷) در مورد آنها صدق می کند.

هموردایی ایزومنتری سراسری: آنها تحت عمل فعال و سراسری ایزومنتری های حافظ ساختار G در Isom_{GM} بر روی میدان های ویژگی هموردا هستند. بخش های ۳.۴ و به ویژه ۸ این ویژگی را به تفصیل موردن بحث قرار می دهند.

هموردایی G محلی: الگوی عملگر انتگرالی \mathcal{J}_K به دلیل G -راهبری K خود G -هموردا است. بنابراین، هر تبدیل یک نمایش یک میدان ویژگی محلی روی \mathbb{R}^d منجر به تبدیل متناظر بردار ویژگی حاصل خواهد شد؛ به شکل ۱۹ مراجعه کنید. بنابراین، تبدیلات G مستقل الگوهایی که در نقاط مختلف $p_i \in M$ متتمرکز شده اند، منجر به تبدیلات ویژگی خروجی مستقل در این نقاط می شوند (این فقط در این نقاط برقرار است و نیازمند کرنل هایی با تکیه گاه فشرده است که کل میدان دید آنها طبق تبدیل G تبدیل شود).



شکل ۱۹: هموردایی G محلی الگوی عملگر انتگرالی مشترک \mathcal{J}_K که زیربنای یک کانولوشن $K \star GM$ است. یک تبدیل G از یک نمایش میدان محلی روی \mathbb{R}^d بردارهای ویژگی را از $g^{-1}\rho_{000}(g)$ به ۷ منطقه می کند و آنها را علاوه بر این از طریق (g) تبدیل می کند. در حالی که اولی ویژگی ها را به صورت فضایی جابجا می کند، دومی ضرایب عددی آنها را تبدیل می کند (که در شکل به صورت چرخش و مقیاس بندی بردارهای (مماس) منفرد به تصویر کشیده شده است). اعمال \mathcal{J}_K به هر دو ورودی منجر به بردارهای ویژگی خروجی متفاوتی می شود. با این حال، به دلیل هموردایی G از \mathcal{J}_K ، تضمین می شود که پاسخ های $\rho_{000}(g)$ مرتبط هستند؛ به معادله (۸۹) مراجعه کنید. بنابراین، یک تبدیل G فعال متناظر بردار ویژگی خروجی می شود. توجه داشته باشید که هموردایی G از \mathcal{J}_K یک نتیجه مستقیم از G -راهبری K است.

برای دقیق تر کردن نکته آخر، ما تبدیلات G فعال نمایش های میدان ویژگی محلی را در $C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c)$ به صورت زیر تعریف می کنیم^{۶۹}

$$\mathfrak{h}_{00}: G \times C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c), \quad F \mapsto \mathfrak{h}_{00}(g)F := \rho_{000}(g) \circ F \circ g^{-1}, \quad (88)$$

که در آن فرض می کیم F از نوع ρ_{000} است. به طور شهودی، \mathfrak{h}_{00} با انتقال فعال بردارهای ویژگی $\rho(g^{-1}\rho(g))$ از \mathbb{R}^c به \mathbb{R}^d و تبدیل آنها با ρ_{000} بر روی میدان های F عمل می کند^{۷۰} این تعریف «معمولی» تبدیلات فعال میدان های ویژگی F بر روی فضاهای اقلیدسی \mathbb{R}^d است. هموردایی G از \mathfrak{h}_{00} با انتقال فعال بردارهای ویژگی $\rho(G)$ به \mathbb{R}^d و تبدیل آنها با ρ_{000} بر روی میدان G عمل می کند^{۷۱}.

^{۶۹} $b = \text{Res}_G^{\mathbb{R}^d \times G} \text{Ind}_G^{\mathbb{R}^d \times G} \rho$ به طور رسمی با الای این نمایش G به یک نمایش $(G \times G)$ و سپس محدود کردن آن به G داده می شود. یک توضیح شهودی از نمایش های الایی و محدود شده را می توان در پیوست ۷۰ از [۶] این موضوع را به طور رسمی تر بررسی می کند.

ادعا شده برای \mathfrak{I}_K به راحتی با اعمال آن به یک ورودی تبدیل شده، و سپس جایگزینی و استفاده از G -راهبری K دیده می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{I}_K(\mathfrak{f}_{\square}(g)F) &= \mathfrak{I}_K(\rho_{\square}(g) \circ F \circ g^{-1}) && (\text{تعريف } \mathfrak{I}_K, \text{ معادله (88)}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \rho_{\square}(g) F(g^{-1}v) dv && (\text{تعريف } \mathfrak{I}_K, \text{ معادله (79)}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} K(g\tilde{v}) \rho_{\square}(g) F(\tilde{v}) |\det g| d\tilde{v} && (\tilde{v} = g^{-1}v) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_{\square\square}(g) K(\tilde{v}) F(\tilde{v}) d\tilde{v} && (\text{ـراهبری } G, \text{ معادله (83)}) \\
 &= \rho_{\square\square}(g) \mathfrak{I}_K(F) && (\text{تعريف } \mathfrak{I}_K, \text{ معادله (79)}) \tag{89}
 \end{aligned}$$

بنابراین، یک تبدیل فعال یک نمایش میدان ویژگی محلی F روی یک مختصات دهی فضای مماس با (g) ^{۳۰} تضمین می‌کند که منجر به تبدیل بردار ویژگی خروجی حاصل با (g) ^{۳۱} می‌شود. به عبارت دیگر، ویژگی هایی که در ژستهای هندسی مختلف مرتبط با G ظاهر می‌شوند، تا یک تبدیل از طریق $\rho_{\square\square}$ پاسخ یکسانی را برمی‌انگیرند. این به طور خلاصه در قالب یک نمودار جابجایی به صورت زیر است:

$$\begin{array}{ccc}
 C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{c\square}) & \xrightarrow{\mathfrak{f}_{\square}(g)} & C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{c\square}) \\
 \downarrow \mathfrak{I}_K & & \downarrow \mathfrak{I}_K \\
 \mathbb{R}^{c\square\square} & \xrightarrow{\rho_{\square\square}(g)} & \mathbb{R}^{c\square\square} \tag{90}
 \end{array}$$

شکل ۱۹ یک تفسیر بصری از این ویژگی همودایی \mathfrak{I}_K ارائه می‌دهد.

توجه داشته باشید که همودایی تحت تبدیلات G محلی در معادله (۸۹) دقیقاً به قید G -راهبری همانطور که در معادله (۸۳) است، یعنی به طور خاص، با ضریب دترمینان^۱ $|\det g|$ که باعث می‌شود کرنل مانند یک $(-)$ -چگالی تبدیل شود، نیاز دارد. این ضریب به تعریف ما از اشتراک گذاری وزن کانولوشنی در معادله (۸۱) با نرمال‌سازی با حجم‌های چارچوب مرجع $\sqrt{|\eta_p^X|}$ برمی‌گردد. بنابراین، اشتراک گذاری وزن ساده‌انگارانه‌ای که در ابتدای این بخش ذکر شد، به رفتار تبدیل مطلوب منجر نمی‌شد. به عبارت دیگر: هر دو نسخه ساده‌انگارانه و نرمال‌شده اشتراک گذاری کرنل مستقل از مختصات هستند و بنابراین هر دو تحت تبدیلات پیمانه غیرفعال \square به ویژه آنها که حجم چارچوب را تغییر می‌دهند \square به طور سازگار رفتار می‌کنند. با این حال، در مورد اشتراک گذاری کرنل ساده‌انگارانه، این امر توسط پایابی عنصر حجم ریمانی $\sqrt{|\eta_p^A|} dv^A = \sqrt{|\eta_p^B|} dv^B$ \square مراجعت می‌شود. با حذف این ضریب در اشتراک گذاری وزن نرمال شده، سازگاری رفتار تبدیل دیگر توسط خود اندازه انتگرال گیری تضمین نمی‌شود \square که مستلزم آن است که خود کرنل‌های G -راهبر تغییرات حجم را از طریق ضریب دترمینان توضیح دهد. فقط دومی به تبدیلات فعل تعیین می‌یابد، جایی که فقط میدان ویژگی تبدیل می‌شود، در حالی که اندازه انتگرال گیری پایا می‌ماند.

از آنجایی که تعریف ما از کانولوشن‌های GM امکان خمینه‌های ریمانی، ساختارهای \square و انواع میدان دلخواه را فراهم می‌کند، بسیار عمومی است و طیف گسترده‌ای از کارهای مرتبط را پوشش می‌دهد. ما این ادعا را در بخش ۲.۳.۸ اثبات می‌کنیم، جایی که بسیاری از CNN‌ها را روی فضاهای آفین اقلیدسی d , کره S^d و خمینه‌ها یا مشاهی عمومی به عنوان نمونه‌های خاصی از معادله (۸۷) توضیح می‌دهیم. برای یک نمای کلی و طبقه‌بندی این مدل‌ها، به جدول ۶ مراجعه کنید.

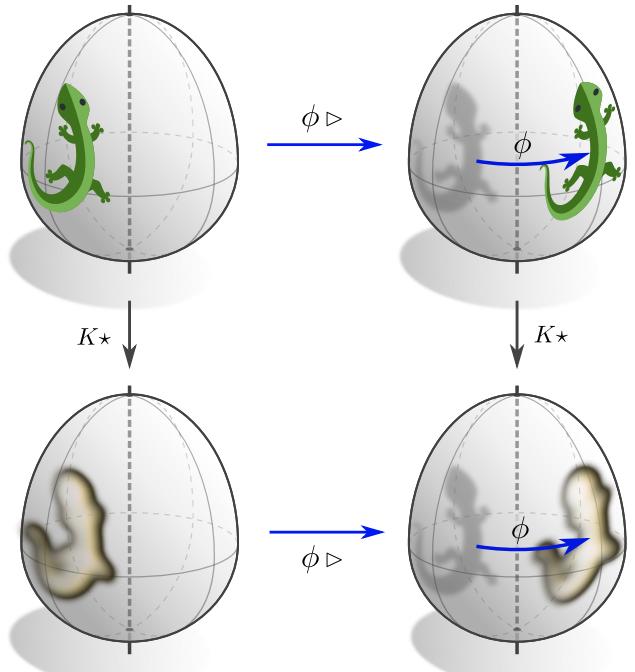
۳.۴ تناوب پذیری ایزومتری

با توجه به اینکه یک منفولد تقارن‌های نشان می‌دهد، معمولاً مطلوب است که شبکه‌های عصبی این تقارن‌ها را رعایت کنند، یعنی تحت عمل آنها بر میدان‌های ویژگی تناوب پذیر باشد. GM -کانولوشن‌ها طراحی شده‌اند تا Isom_{GM} -تناوب پذیر باشند، که به این معنی است که آنها با عمل ایزومتری‌ها در Isom_{GM} بر میدان‌های ویژگی جابجا می‌شوند، همانطور که در شکل ۲۰ بصری‌سازی شده است.^{۳۱} در معادلات، G -کانولوشن K^* تناوب پذیر است زمانی که رابطه

$$K \star (\phi \triangleright f_{\square}) = \phi \triangleright (K \star f_{\square}) \quad \forall \phi \in \text{Isom}_{GM} \tag{91}$$

را برای هر میدان ورودی ممکن \square برآورده کند، یعنی زمانی که نمودار زیر جابجا باشد:

^{۳۰} به یاد داشته باشید که عمل بر میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات GM تنها برای ایزومتری‌های حفظ‌کننده G -ساختار در Isom_{GM} قابل تعریف است. بنابراین حتی امکان تعریف مفهوم تناوب پذیری ایزومتری برای ایزومتری‌هایی که تقارن‌های G -ساختار نیستند وجود ندارد. توجه داشته باشید که این بدون از دست دادن کلیت است زیرا همیشه می‌توان گروه ساختار d را انتخاب کرد که برای آن $\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M)$ با کل گروه ایزومتری منطبق می‌شود.



شکل ۲۰: گفته می شود یک لایه شبکه تحت ایزومتری ها تناوب پذیر است زمانی که با عمل آنها بر میدان های ویژگی جابجا می شود. $-GM$ -کانولوشن ها طراحی شده اند تا نسبت به آن ایزومتری های $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ که تقارن های G ساختار هستند، تناوب پذیر باشند. در معادلات، کانولوشن K^* تحت عمل ایزومتری ϕ تناوب پذیر است زمانی که رابطه $(\phi \triangleright f_{00}) = \phi \triangleright (K^* \star f_{00})$ برآورده کند. این رابطه توسعه انتخابی از میدان ورودی f_{00} برآورده کند. این رابطه توسعه نمودار جابجایی در معادله (۹۲) (برسری سازی شده است که تفسیر گرافیکی آن در این شکل نشان داده شده است.

اینکه $-GM$ -کانولوشن ها Isom_{GM} -تناوب پذیر هستند بر این حقایق تکیه دارد که (۱) کرنل ها در کل منفولد به اشتراک گذاشته می شوند، (۲) ایزومتری ها عقب کشی انتقال دهنده میدان های ویژگی را حفظ می کنند و (۳) اینکه Isom_{GM} -تبديل های گیج با مقدار G را القا می کند که تووسط $-G$ استیریبل بودن کرنل در نظر گرفته می شود.

Creative Commons Attribution 4.0 International
(مارمولک ها تحت مجوز Twitter از اینکه اقتباس شده با مجوز International)

$$\begin{array}{ccccc}
 & f_{00} & \xrightarrow{\phi \triangleright} & \phi \triangleright f_{00} & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 K^* & & & & K^* \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 f_{000} & \xrightarrow{\phi \triangleright} & \phi \triangleright f_{000} & &
 \end{array} \tag{۹۲}$$

به عنوان اولین قدم به سوی اثبات تناوب پذیری ایزومتری $-GM$ -کانولوشن ها، به یاد بیاورید که آنها به صورت نقطه ای به عنوان انقباض یک کرنل K با عقب کشی انتقال دهنده A $[\text{Exp}_p^* f_{00}]$ از میدان ورودی f_{00} تعریف می شوند. از آنجا که ایزومتری ها به طور تعریف هندسه ریمانی M را حفظ می کنند، به ویژه نگاشت نمایی ریمانی و انتقال دهنده های لوی-چیویتا را حفظ می کنند؛ به بخش ۴.۱.۸ و شکل ۳۷ مراجعه کنید.^{۳۱} این امر دلالت دارد بر اینکه عقب کشی انتقال دهنده میدان پیش برده $f_{00} \triangleright \phi$ در (p) $\phi \triangleright f_{00}$ با تبدیل گیج القا شده توسط ایزومتری از عقب کشی انتقال دهنده میدان اصلی f_{00} در p متفاوت خواهد بود، یعنی:

$$[\text{Exp}_{\phi(p)}^*(\phi \triangleright f_{00})]^A = \rho_{00}(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) \circ [\text{Exp}_p^* f_{00}]^{\tilde{A}} \circ g_\phi^{A\tilde{A}}(p)^{-1}; \tag{۹۳}$$

مقایسه کنید با معادله (۶۸) و برای فرمول بندی مستقل از مختصات، قضیه ۸.۴

با توجه به این همانی، تناوب پذیری ایزومتری $-GM$ -کانولوشن ها توسط محاسبه ساده زیر اثبات می شود که به طور اساسی از G -استیریبل بودن کرنل قالب K برای توضیح عمل گیج القا شده توسط ایزومتری استفاده می کند:

^{۳۱} به طور کلی تر، هر زمان که یک اتصال جایگزین G -سازگار برای انتقال بردارهای ویژگی انتخاب شود، فرض می کنیم این اتصال تحت عمل Isom_{GM} ناوردان باشد؛ به بخش ۴.۱.۸ مراجعه کنید. این فرض برای همه مدل هایی که در بررسی ادبیات در بخش ۲.۳.۸ پوشش داده شده اند، برآورده می شود.

$$\begin{aligned}
[K \star (\phi \triangleright f_{\square})]^A(\phi(p)) &\stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} K(v) [Exp_{\phi(p)}^*(\phi \triangleright f_{\square})]^A(v) dv \\
&\stackrel{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} K(v) [\rho_{\square}(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)) [Exp_p^* f_{\square}]^{\tilde{A}}(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)^{-1}v)] dv \\
&\stackrel{(3)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} [K(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)\tilde{v}) \rho_{\square}(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))] [Exp_p^* f_{\square}]^{\tilde{A}}(\tilde{v}) |\det g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)| d\tilde{v} \\
&\stackrel{(4)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} [\rho_{\square}(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)) K(\tilde{v})] [Exp_p^* f_{\square}]^{\tilde{A}}(\tilde{v}) d\tilde{v} \\
&\stackrel{(5)}{=} \rho_{\square}(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)) \cdot f_{\square}^{\tilde{A}}(p) \\
&\stackrel{(6)}{=} [\phi \triangleright f_{\square}]^A(\phi(p)) \\
&\stackrel{(7)}{=} [\phi \triangleright (K \star f_{\square})]^A(\phi(p))
\end{aligned} \tag{94}$$

قدم اول از تعریف GM -کانولوشن‌ها در معادله (۸۷) پیروی می‌کند در حالی که قدم دوم تبدیل گیج القا شده را طبق معادله (۹۳) وارد کرد. جایگزینی $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)^{-1}\tilde{v} = \tilde{v}$ قدم سوم را توجیه می‌کند. در قدم چهارم G -استیریبل بودن کرنل قالب، یعنی معادله (۸۳)، اعمال می‌شود (معادله (۴۴)) را به پاد بیاورید که بیان می‌کند تبدیل‌های گیج القا شده توسط $Isom_{GM}$ دارای مقدار G هستند. نتیجه این است که بردار ویژگی خروجی حاصل توسط تبدیل گیج القا شده تبدیل می‌شود. پس از شناسایی این را عنوان بیان مختصاتی پیش‌برد میدان خروجی در معادله (۴۶)، گزاره پیروی می‌کند. از آنجا که همه قلم‌ها برای ایزومنتری‌های دلخواه در $Isom_{GM}$ معتبر هستند، می‌بینیم که GM -کانولوشن‌ها به طور خودکار نسبت به هر ایزومنتری حفظ کننده G -ساختار تناوب‌پذیر هستند. آن‌ها لزوماً نسبت به ایزومنتری‌های عمومی در $(Isom(M), G)$ که ممکن است G -ساختار را عایت نکنند تناوب‌پذیر نیستند، با این حال، تناوب‌پذیری کامل ایزومنتری برای گروه‌های ساختار معتماد d (یا ابرگروه‌های آن) تضمین شده است.

میدان‌های کرنل ناوردی: تحلیل عمیق‌تری از تناوب‌پذیری ایزومنتری تبدیل‌های میدان کرنل به عرضه‌های ۲۸ و ۳۸ یافت. نتیجه اصلی این بررسی قضیه ۸۸ است که بیان می‌کند تناوب‌پذیری ایزومنتری یک تبدیل میدان کرنل، ناوردایی ایزومنتری میدان کرنل آن را توجه می‌دهد و بالعکس. شکل ۳۸ چنین میدان کرنل ناوردایی را بصری‌سازی می‌کند که ملزم به اشتراک وزن‌ها بر روی مدارات عمل ایزومنتری است. ناوردایی مورد نیاز میدان کرنل از نظر شهودی قابل فهم است زیرا تناوب‌پذیری ایزومنتری مطمئناً نیازمند ثابت بودن استنتاج شیوه بر روی هر مدار است. این نتیجه انتزاعی تناوب‌پذیری ایزومنتری GM -کانولوشن‌ها را با مشاهده اینکه میدان‌های کرنل GM -کانولوشنی \square که توسط یک کرنل قالب منفرد و مشترک تعیین می‌شوند \square تحت ایزومنتری ها در $Isom_{GM}$ ناوردانه هستند، نتیجه می‌دهد؛ به قضیه ۸.۹ و شکل ۹ مراجعه کنید. G -استیریبل بودن کرنل قالب بدین ترتیب ناوردایی کرنل‌ها تحت عمل زیرگروه‌های پایدار کننده گروه ایزومنتری را توضیح می‌دهد.

فضاهای همگن: در حالی که تقاضای تناوب‌پذیری ایزومنتری نیازمند آن است که کرنل‌ها بر روی مدارات گروه ایزومنتری به اشتراک گذاشته شوند، به طور کلی نیازمند اشتراک وزن کانولوشنی در کل منیفوولد نیست. یک استثنای مهم حالت منیفلدهایی است که فضاهای همگن گروه ایزومنتری خود هستند، مانند \mathbb{R}^d یا کره S^2 . به طور تعریف، عمل ایزومنتری در چنین فضاهایی متعدد است، یعنی تنها یک مدار منفرد وجود دارد. در نتیجه، تنها یک کرنل مستقل وجود خواهد داشت که از طریق عمل گروه ایزومنتری در کل فضای اشتراک گذاشته می‌شود. قضیه ۸.۱۴ در بخش ۳۸ ثابت می‌کند که تبدیل‌های میدان کرنل تناوب‌پذیر ایزومنتری در فضاهای همگن لزوماً کانولوشن‌های مستقل از مختصات هستند. این مشاهده پیوند رسمی بین نظریه ما و کارهای قبلی در مورد شبکه‌های کانولوشنی در فضاهای همگن توسط \square ، \square و \square برقرار می‌کند که کانولوشن‌ها را از طریق تناوب‌پذیری آن‌ها نسبت به تقارن‌های سراسری فضای زیرین تعریف می‌کنند.

تناوب‌پذیری دیفُومورفیسم: خواننده ممکن است تعجب کند که آیا امکان کاملاً دیفُومورفیسم تناوب‌پذیر کردن های \square مستقل از مختصات ما وجود دارد یا نه. همانطور که به راحتی می‌توان دید، عملیات نقطه‌ای از بخش ۱.۴، یعنی \square $\square \square \square$ -۱×۱، بایاس‌ها و غیرخطی‌ها، از قبل دیفُومورفیسم تناوب‌پذیر هستند. به طور خاص، بگذرید

$$Diff_{GM} := \left\{ \phi \in Diff(M) \mid [\phi_*(e_i)]_{i=1}^d \in GM \quad \forall [e_i]_{i=1}^d \in GM \right\} \leq Diff(M) \tag{95}$$

زیرگروه دیفُومورفیسم‌های حفظ کننده G -ساختار باشد، یعنی آنالوگ معادله (۴۲) بدون نیاز به اینکه ϕ ایزومنتری باشد. مشابه معادله (۴۴) و قضیه ۸.۳ بیان‌های مختصاتی (تبدیل‌های گیج القا شده) دیفُومورفیسم‌های حفظ کننده G -ساختار تضمین شده‌اند که مقادیر در G بگیرند، یعنی:

$$\phi \in Diff_{GM} \iff g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in G \quad \forall p \in M. \tag{96}$$

-تباوب پذیری توابع قالب نقطه‌ای مشترک تضمین خواهد کرد که آن‌ها با این تبدیل‌های گیج القا شده توسط Diff_{GM} جایجا شوند \square و بنابراین با خود عمل دیفیومور فیسم فعال.

از طرف دیگر، GM -کانولوشن‌ها با کرنل‌های گسترده فضایی، به طور کلی نسبت به دیفیومور فیسم‌ها تباوب پذیر نیستند. دلیل این امر آن است که عقب‌کشی انتقال‌دهنده f بر نگاشتهای نمایی تکیه می‌کند که ذاتاً ساختارهای ریمانی هستند که با دیفیومور فیسم‌ها جایجا نمی‌شوند. با این حال، از آنجا که کرنل‌ها G -استیریل هستند، تباوب پذیری Diff_{GM} باید در حد صفر رفن پشتیانی کرنل همچنان برقرار باشد. با توجه به اینکه کرنل‌های کانولوشن در کاربردهای معمول یادگیری عمیق کاملاً کوچک هستند، تباوب پذیری دیفیومور فیسم باید در عمل تقریباً برقرار باشد.

تباوب پذیری آفین: فضاهای اقلیدسی حالت خاصی را تشکیل می‌دهند \mathbb{M} زیرا امکان GM -کانولوشن‌هایی را فراهم می‌کنند که تحت عمل گروه‌های آفین $\text{Aff}(G)$ تباوب پذیر هستند. اینکه چنین است به این حقیقت تکیه دارد که نگاشت نمایی در فضاهای اقلیدسی نه تنها با عمل ایزومنتری ها بلکه به طور کلی تر با تبدیل‌های آفین جایجا می‌شود. تباوب پذیری گروه آفین GM -کانولوشن‌های اقلیدسی در بخش ۳.۹ اثبات شده است.

۵ مدل اسباب بازی: کانولوشن‌های موبیوس هم‌متغیر انعکاس

برای ملموس تر کردن ملاحظات نظری پخش‌های قبلی، اکنون به یک نمونه کاربرد می‌پردازیم. در حالی که از اهمیت عملی فوری برخوردار نیست، کانولوشن‌های GM روی نوار موبیوس یک مدل اسباب بازی مناسب هستند زیرا هندسه آن و نظریه نمایش درگیر بیویژه ساده است. به دلیل غیرجهت‌پذیر بودن آن، چارچوب‌های مرجع فقط می‌توانند (به طور هموار) تا حد انعکاس‌ها ترجیح داده شوند. همانطور که انتظار می‌رود، CNN‌های مستقل از مختصات، با اعمال توابع الگوی هم‌متغیر انعکاس، از پیاده‌سازی ساده‌لوحانه وابسته به مختصات بهتر عمل می‌کنند. علاوه بر این نشان داده می‌شود که آنها تحت عمل گروه ایزومنتری نوار موبیوس هم‌متغیر هستند.

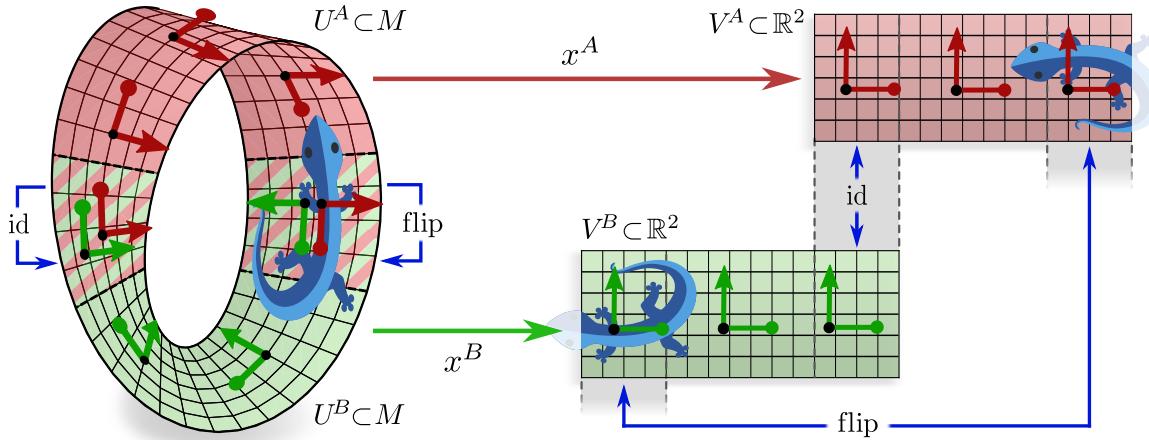
۱.۵	هندسه نوار موبیوس
۲.۵	میدان‌های ویژگی مستقل از جهت گیری
۳.۵	شبکه‌های کانولوشنی مستقل از جهت گیری
۴.۵	جمع بایاس مستقل از جهت گیری
۴۹	غیرخطی‌های مستقل از جهت گیری
۵۰	کانولوشن‌های مستقل از جهت گیری
۵۲	پیاده‌سازی عددی و ارزیابی کانولوشن‌های موبیوس
۵۳	پیاده‌سازی عددی
۵۵	ارزیابی تجربی

بخش ۱.۵ در ادامه هندسه نوار موبیوس مسطح را مورد بحث قرار می‌دهد. به دلیل پیچ آن، گروه ساختار آن نمی‌تواند بیش از گروه انعکاس $G = \mathcal{R}$ کاهش یابد، به طوری که باید اطلس \mathcal{R} از گیج‌ها را همانطور که در شکل ۲۱ نمایش داده شده، در نظر گرفت. گروه ایزومنتری توسط چرخش‌ها در امتداد نوار داده می‌شود و تبدیل‌های گیج با مقادیر \mathcal{R} را القا می‌کند. میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات $\mathcal{R}M$ ، که برخی از آنها در بخش ۲.۵ معرفی می‌شوند، لزوماً باید مطابق با نمایشی از گروه انعکاس تبدیل شوند. بخش ۳.۵ عملیات شبکه کانولوشنی مستقل از جهت گیری را مورد بحث قرار می‌دهد. این بیویژه مفهوم کرنل‌های G -راهبری‌پذیر را روشن می‌کند اما همچنین بایاس‌های هم‌متغیر انعکاس و غیرخطی‌ها را پوشش می‌دهد. پیاده‌سازی عددی خانواده مدل پیشنهادی در بخش ۴.۵ مورد بحث و ارزیابی قرار می‌گیرد. کد به طور عمومی در <https://github.com/mauriceweiler/MobiusCNNs> در دسترس است.

۱.۵ هندسه نوار موبیوس

منیفلد M مورد بررسی نوار موبیوس مسطح با مرز است همانطور که در شکل ۴ (راست) نشان داده شده است. می‌توان آن را به عنوان ساخته شده از زیرمجموعه مستطیلی $[0, Y] \times [0, X]$ از \mathbb{R}^2 و چسباندن دو انتهای مقابل به شکل پیچ خورده در نظر گرفت. با این تعریف، نوار موبیوس متريک کانونی \mathbb{R}^2 را به ارث می‌برد که آن را با ساختار ریمانی مجهز می‌کند. متريک بهویژه اتصال لوی-چویتا و در نتیجه نگاشتهای نمایی و انتقال‌دهنده‌های موازی را مشخص می‌کند که در ادامه بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرند.

اولین سؤالی که در ساخت CNN مستقل از مختصات باید پاسخ داد این است که تا چه حد انتخاب چارچوب‌های مرجع مبهم است. با توجه به متريک ریمانی روی نوار، می‌توانیم توجه خود را به چارچوب‌های متعامد محدود کنیم. علاوه بر این می‌توان یکی از دو جهت در امتداد نوار را متمایز کرد تا چرخش چارچوب‌های مرجع را با تراز کردن محورهای اول آنها با این جهت (به طور هموار) رفع ابهام کرد. این ما را با ابهام دست‌گردی چارچوب



شکل ۲۱: هندسه مسطح نوار موبیوس امکان زیرمجموعه‌های محلی را فراهم می‌کند که می‌تواند به طور ایزومتریک با زیرمجموعه‌های متضاد از \mathbb{R}^2 شناسایی شوند. ما اطلاعی ایزومتریک را ثابت می‌کنیم که از دو چارت x^A و x^B روی U^A (قمر) و U^B (سیز) تشکیل می‌شود که کل نوار را می‌پوشانند. گیج‌های $\psi_p^X := \hat{dx}_p^X$ در $T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d$ برای $p \in U^A$ به عنوان دیفرانسیل‌های چارت‌القا می‌شوند. بدلیل پیچ نوار موبیوس، تابع گذار g_p^{BA} در یکی از نواحی همپوشان بدینهی خواهد بود، در حالی که ناجه دیگر لزوماً بین گیج‌ها از طریق انعکاس‌های s گذار خواهد کرد. اطلاع انتخاب شده از چارت‌ها از چارت‌ها بنابراین \mathcal{R} -اطلاعی از گیج‌ها را القا می‌کند و \mathcal{R} -ساختار متضاد می‌شود که از دو چارچوب منعکس شده در هر نقطه از M تشکیل می‌شود. هر یک از چارت‌های x^X میدان چارچوب محلی هموار را القا می‌کند که توسط پایه‌های مختصات $\left[\frac{\partial}{\partial x_i^X} \right]_p^d$ داده می‌شود. انعکاس در توابع گذار در یک همپوشانی در انعکاس چارچوب‌ها نمایان می‌شود.
(مارمولک‌ها تحت مجوز [Creative Commons Attribution 4.0 International License](#) با مجوز Twitter اقتباس شده‌اند).

باقی می‌گذارد، با دو جهت گیری که متضاد با دو جهت ممکن محصور دوم چارچوب عمود بر نوار هستند. نوار موبیوس به عنوان منیفلد غیرجهت‌پذیر، انتخاب سراسری هموار (یا حتی پیوسته) جهت گیری‌های چارچوب را نمی‌پذیرد. برای به دست آوردن شهودی از این گزاره، تلاش برای ساخت میدان چارچوب هموار با انتخاب چارچوب دلخواه در موقعیت تصادفی و گسترش هموار این انتخاب روی کل نوار را در نظر بگیرید. پس از یک دور کامل در اطراف نوار، چارچوب‌های ساخته شده ناگزیر نسبت به چارچوب‌های اولیه منعکس خواهند شد و بنابراین با هموار بودن مطلوب در تناقض خواهند بود. بنابراین از نظر توپولوژیکی تعریف $\{e\}$ -ساختار، یعنی میدان سراسری هموار چارچوب‌ها، روی نوار موبیوس غیرممکن است. بنابراین ما با کروه ساختار غیرقابل کاهش

$$G = \mathcal{R} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad (97)$$

که انعکاس چارچوب‌ها را مدل می‌کند، باقی می‌مانیم. گروه انعکاس فقط شامل دو عنصر است، همانی e و انعکاس s ، که طبق جدول ضرب ساده زیر ترکیب می‌شوند:

$$\begin{array}{c|cc} & s & e \\ \hline s & e & e \\ e & e & s \end{array} \quad (98)$$

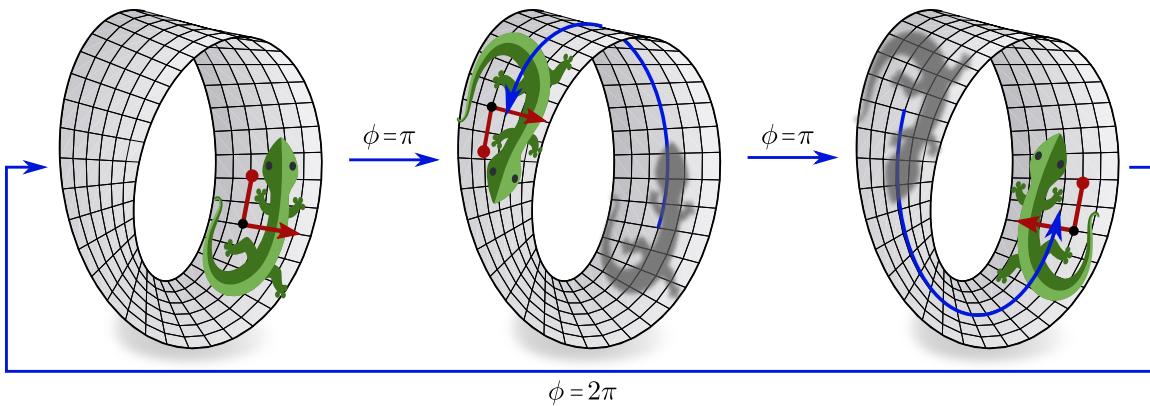
تنها گزاره غیربدینهی در این جدول این است که دو انعکاس یکدیگر را ختنی می‌کنند، یعنی $e = s^2$ ، یا به طور معادل، $s = e^{-1}$. با توجه به غیرقابل کاهش بودن گروه ساختار \mathcal{R} ، در ادامه باید \mathcal{R} -ساختار متضاد \mathcal{RM} را در نظر بگیریم که از دو چارچوب با دست گردی مخالف در هر نقطه روی نوار موبیوس تشکیل می‌شود.

برای کدگذاری میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات \mathcal{RM} هموار روی M ، نیاز است که \mathcal{R} -اطلاعی مشخص شود که از گیج‌های مرتبط با \mathcal{R} تشکیل شده و کل نوار را پوشاند. ما انتخاب می‌کنیم این کار را با ثابت کردن اطلاعی از چارت‌ها

$$x^X : U^X \rightarrow V^X \subset \mathbb{R}^2 \quad (99)$$

که نوار را می‌پوشانند انجام دهیم و سپس گیج‌ها را از آن القا کنیم. شکل ۲۱ چنین اطلاعی را تجسم می‌کند که از دو چارت x^A و x^B روی U^A (قمر) و U^B (سیز) تشکیل شده است که دو نیمه همپوشان نوار را به طور ایزومتریک به نواحی مستطیلی متضاد از \mathbb{R}^2 نگاشت می‌کنند. همانطور که در پیوست آ.۳. توضیح داده شده، چارت‌ها گیج‌های را القا می‌کنند که توسط دیفرانسیل‌های چارت داده می‌شوند، یعنی

$$\psi_p^X := \hat{dx}_p^X : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{برای هر } p \in U^X \text{ و } X = A, B. \quad (100)$$



شکل ۲۲: تجسم گروه ایزومتری‌های حافظ \mathcal{R} -ساختار $Isom_{\mathcal{R}M}$ نوار موبیوس که با (2) $SO(2)$ یک‌ریخت است. این گروه شامل تمام چرخش‌ها در امتداد نوار است. به دلیل پیچ، چرخش 2π ، یعنی یکبار در اطراف نوار، هنوز آن را به خودش بازنمی‌گرداند بلکه منجر به انعکاس می‌شود. پس از دو میان دور، یعنی چرخش کل 4π نوار به خودش بازمی‌گردد. تبدیل‌های گیج القا شده مقادیر در \mathcal{R} می‌گیرند.
(مارمولک‌ها تحت مجوز Creative Commons Attribution 4.0 International License با مجوز Twitter اقتas شده‌اند.)

توابع گذار سپس با زاکوبین‌ها منطقه‌ی شوند $\frac{\partial x^B}{\partial x^A} = g^{BA}$. به دلیل پیچ، نگاشت‌های گذار در یکی از دو ناحیه همپوشان همگی بدیهی هستند، یعنی $e_i^{BA} = g_p^{BA}$ ، و در انتهای دیگر لزوماً منعکس هستند، یعنی $s = g_p^{BA}$. اطلس القا شده از گیج‌ها بنابراین واقعاً به عنوان \mathcal{R} -اطلس شناسایی می‌شود. از آنجا که از چارت‌های مختصاتی مشتق شده‌اند، میدان‌های چارچوب محلی هموار متناظر با گیج‌ها فقط پایه‌های مختصاتی معمول هستند، یعنی چارچوب‌های $[e_i^X]_{i=1}^d$ در $p \in U^X$ توسط $[e_i^X]_{i=1}^d$ داده می‌شوند. از آنجا که چارت‌ها ایزومتریک هستند، میدان چارچوب القا شده به طور خودکار متعامد است. با این حال، دو ناحیه مستطیلی V^A و V^B در \mathbb{R}^2 نباید نسبت به یکدیگر چرخانده شوند تا \mathcal{R} -اطلس و \mathcal{R} -ساختار متناظر $\mathcal{R}M$ را القا کنند.

باشد تأکید کیم که رویکرد القای گیج‌ها از طریق چارت‌های مختصاتی کاملاً ضروری نیست^{۳۱} این فقط گزینه‌ای مناسب است زیرا نوار موبیوس مسطح به طور محلی با نواحی \mathbb{R}^2 به شکل ایزومتریک شناسایی می‌شود. این بعداً به ما اجازه خواهد داد تا شبکه‌های نمونه گیری منظم از \mathbb{R}^2 ، مانند شبکه پیکسل \mathbb{Z}^2 ، را به شبکه‌های نمونه گیری منظم روی نوار منتقل کنیم. از آنجا که این برای منیفلد‌هایی که به طور محلی مسطح نیستند، مانند میش‌ها در گرافیک کامپیوتری، ممکن نیست، اکثر پایه‌سازی‌ها روی منیفلد‌های عمومی (یا میش‌ها) مختصات را مستقیماً به فضاهای مماس اختصاص می‌دهند؛ بخش ۱۲ را ببینید.

اتصال کانونی لوی-چیویتا روی نوار موبیوس مفهوم انتقال موازی بردارهای مماس را تعریف می‌کند. از آنجا که نوار به طور محلی با صفحه \mathbb{R}^3 ایزومتریک است، این انتقال می‌تواند روی تکه‌های محلی به عنوان مسطح کردن این تکه‌ها در یک صفحه و حرکت بردارها به طور معمول روی \mathbb{R}^3 درک شود. اگر هیچ تکه منفردی نتواند مسیر γ را پوشاند، پوشش بازی وجود خواهد داشت که انتقال کامل توسط دنباله‌ای از انتقال‌دهنده‌ها روی تکه‌های محلی توضیح داده شود. آسان است که دید انتقال نسبت به چارچوب‌های \mathcal{R} -ساختار انتخاب شده مقادیر $g_\gamma^{A\bar{A}}$ در گروه انعکاس \mathcal{R} خواهد گرفت. این بدان معنی است که اتصال لوی-چیویتا با $\mathcal{R}M$ سازگار با \mathcal{R} است. بنابراین انتقال‌دهنده‌های خوش تعریف $(g_\gamma^{A\bar{A}})_{\rho}$ بردارهای ویژگی مرتبط با \mathcal{R} را مستلزم می‌شود.

گروه $Isom_{\mathcal{R}M}$ ایزومتری‌هایی که \mathcal{R} -ساختار را حفظ می‌کنند شامل تمام چرخش‌هایی است که نوار را در امتداد خودش جایه‌جا می‌کنند. توجه کنید که یک چرخش یکبار در اطراف نوار، که آن را با زاویه 2π نشان می‌دهیم، با همانی مطابقت نمی‌کند بلکه نوار را به شکل منعکس روی خودش نگاشت می‌کند. تنها چرخش 4π ، یعنی دو دور کامل، نوار را به خودش بازمی‌گرداند.^{۳۲} عمل گروه ایزومتری روی منیفلد و روی چارچوب‌های مرجع در شکل ۲۲ تجسم شده است. نسبت به مختصات، عمل ایزومتری تبدیل‌های گیج با مقادیر \mathcal{R} را القا خواهد کرد.

۲.۵ میدان‌های ویژگی مستقل از جهت گیری

اصل کوواریانس مستلزم آن است که میدان‌های ویژگی روی نوار موبیوس مستقل از مختصات $\mathcal{R}M$ باشند، یعنی آنها باید به طور معادل نسبت به چارچوب‌های هر دو دست گردی قابل بیان باشند. بنابراین آنها با انتخاب نمایش گروهی $GL(c) \rightarrow \mathcal{R}$: از گروه انعکاس مشخص می‌شوند که تبدیل بردارهای ویژگی عددی هنگام تعویض بین دو جهت گیری را مشخص می‌کند. در ادامه چند انتخاب ممکن از چنین انواع میدان‌هایی را در شکل ۲۲ تجسم شده است. نسبت به مختصات، عمل ایزومتری تبدیل‌های گیج با مقادیر \mathcal{R} را القا خواهد کرد.

^{۳۱} بنابراین نوار موبیوس استوانه را به عنوان پوشش دو گانه در نظر می‌گیرد.

مورد بحث قرار خواهیم داد. خواننده ممکن است بخواهد بررسی کند که نمایش‌های پیشنهادی واقعًا همومورفیسم‌های گروهی هستند که $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ برآورده می‌کنند، همانطور که در بخش ۲.۳ و پاورقی ۱۳ خواسته شده است.

ابتداً ترین مثال، که برای هر گروه ساختار وجود دارد، نمایش بدیهی است

$$\begin{aligned} \rho_{\text{id}} : \mathcal{R} &\rightarrow \text{GL}(1), & e &\mapsto \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \\ s &\mapsto \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (101)$$

که ماتریس همانی 1×1 را به هر دو عنصر گروه اختصاص می‌دهد. این میدان‌های اسکالر f_{id} را مدل می‌کند که از بردارهای ویژگی یک‌بعدی تشکیل شده‌اند که مختصات سازی‌های آنها $f_{\text{id}}^A(p) \in \mathbb{R}^1$ تحت انعکاس‌های چارچوب نامغایر باقی می‌مانند. دومین نمایش یک‌بعدی، نمایش تغییر علامت است

$$\begin{aligned} \rho_{\text{id}} : \mathcal{R} &\rightarrow \text{GL}(1), & e &\mapsto \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \\ s &\mapsto \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (102)$$

این ماتریس همانی منفی 1×1 را به انعکاس‌ها اختصاص می‌دهد و بنابراین میدان‌های شبه‌اسکالر را توصیف می‌کند، یعنی میدان‌های ویژگی یک‌بعدی f_{id} که ضرایب عددی آنها $f_{\text{id}}^A(p) \in \mathbb{R}^1$ تحت انعکاس‌ها علامت خود را تغییر می‌دهند، یعنی $f_{\text{id}}^A(p) = -f_{\text{id}}^A(s) \cdot f_{\text{id}}^A(p)$. از آنجا که نمایش بدیهی و نمایش تغییر علامت یک‌بعدی هستند، هر دو نمایش‌های غیرقابل کاهش (irreps) گروه انعکاس هستند. در واقع، آنها تنها دو irrep گروه انعکاس هستند.^{۳۳}

از آنجا که گروه متناهی است، نمایش منظم متناهی بعدی (دو‌بعدی) دارد

$$\begin{aligned} \rho_{\text{id}} : \mathcal{R} &\rightarrow \text{GL}(2), & e &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ s &\mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (103)$$

که عناصر گروه را توسط ماتریس‌های جایگشت نمایش می‌دهد. طبق تعریف، نمایش منظم جایگشت عناصر گروه در \mathcal{R} هنگام عمل بر خودشان را مدل می‌کند. این را با ستون‌های جدول ضرب در معادله (۴۸) مقایسه کنید: ستون میانی را می‌توان به عنوان ناشی از عمل (e) ρ_{id} بر ستون چپ در نظر گرفت، در حالی که عناصر گروه جای‌جا شده در ستون راست متاظر با جایگشت توصیف شده توسط عمل (s) ρ_{id} بر ستون چپ هستند. میدان‌های ویژگی منظم از \mathcal{R} به‌طور عددی توسط بردارهای ویژگی دو‌بعدی $f_{\text{id}}^A(p) \in \mathbb{R}^2$ نمایش داده می‌شوند که دو کanal آنها تحت انعکاس‌ها

$$\rho_{\text{id}}(s) \cdot f_{\text{id}}^A(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{\text{id}}^A(p) \\ f_{\text{id}}^A(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{\text{id}}^A(p) \\ -f_{\text{id}}^A(p) \end{bmatrix}$$

نمایش منظم قابل کاهش است، یعنی شامل دو زیرفضای نامغایر حقیقی است که در این مورد متاظر با نمایش بدیهی و نمایش تغییر علامت هستند. بنابراین می‌توان آن را به‌طور معادل به عنوان ساخته شده از مجموع مستقیم $\rho_{\text{id}} \oplus \rho_{\text{id}}$ irrep و تغییر پایه Q در نظر گرفت:

$$\rho_{\text{id}}(g) = Q (\rho_{\text{id}} \oplus \rho_{\text{id}})(g) Q^\top \quad \text{که در آن } Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (104)$$

اعتبار این گزاره به‌آسانی با جایگذاری سمت راست برای هر دو عنصر گروه تأیید می‌شود:

$$Q (\rho_{\text{id}} \oplus \rho_{\text{id}})(e) Q^\top = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \rho_{\text{id}}(e) \quad (105)$$

$$Q (\rho_{\text{id}} \oplus \rho_{\text{id}})(s) Q^\top = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \rho_{\text{id}}(s) \quad (106)$$

به‌طور کلی تر، هر نمایش متناهی بعدی گروه‌های فشرده (از جمله متناهی) کاملاً قابل کاهش به مجموع مستقیم irrep‌ها است [۶۳]. این نشان می‌دهد که هر بردار ویژگی کوواریانت که تحت گروه ساختار فشرده تبدیل می‌شود، تا حد تغییر پایه می‌تواند از ویژگی‌های irrep ساخته شود. همانطور که در [۶۳] استدلال شده است، در این مورد واقعًا امکان کاهش هر عملیات شبکه خطی به عملیات معادل بین میدان‌های irrep و وجود دارد که ساخت فضای کرنل‌های G -راهبری‌پذیر در معادله (۶۶) و بایاس‌های نامغایر در معادله (۶۳) را ساده می‌کند. با این حال، همانطور که در ادامه خواهیم دید، انتخاب خاص پایه از انواع میدان معادل تأثیر کاملاً قابل توجهی بر عملکرد مدل دارد. دلیل این امر آن است که عملیات شبکه غیرخطی به پایه انتخاب شده حساس هستند، یعنی به انتخاب خاصی از انواع میدان معادل.

^{۳۳} گروه انعکاس با گروه دوری $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ از مرتبه دو یک‌ریخت است. به خوبی شناخته شده است که N ایرانی‌های گروه‌های دوری از مرتبه N متاظر با ریشه‌های N ام وحدت هستند که برای $N = 2$ فقط $+1$ (بدیهی) و -1 (تغییر علامت) هستند.

۳.۵ شبکه‌های کانولوشنی مستقل از جهت‌گیری

برای ساخت CNN‌های مستقل از جهت‌گیری روی نوار موبیوس باید لایه‌های هم‌متغیر گیج از بخش ۴ را برای گروه انعکاس \mathcal{R} نمونه‌سازی کنیم. به طور مشخص‌تر، هر یک از توابع الگوی مشترک هم‌متغیر که لایه‌های مستقل از جهت‌گیری را تعریف می‌کنند باید برای هر انتخاب از انواع میدان ρ نظر گرفته شده $\mathcal{B}_\rho^{\mathcal{R}}$ و $\rho_{\mathbb{R}^c}$ نمونه‌سازی شوند. بخش ۱.۳.۵ در ادامه با حل فضاهای الگوهای $\mathcal{B}_\rho^{\mathcal{R}}$ با ایاس نام‌متغیر گیج از معادله (۹۴) شروع می‌کند. چند انتخاب مجاز از غیرخطی‌های هم‌متغیر گیج برای انواع میدان مختلف در بخش ۲.۳.۵ پیشنهاد می‌شوند. بخش ۳.۳.۵ سپس فضاهای کرنل‌های $\mathcal{K}_{\rho_{\mathbb{R}^c}, \mathcal{R}}$ را برای هر جفت ممکن از irrep ‌های ورودی و خروجی استخراج خواهد کرد. در حالی که این بخش عمده‌تاً شامل اشتقاقات نظری خواهد بود، بخش ۴.۵ در ادامه جزئیات پیاده‌سازی عملی تری را پوشش خواهد داد.

۱.۳.۵ جمع با ایاس مستقل از جهت‌گیری

فضای الگوهای $\mathcal{B}_\rho^{\mathcal{R}}$ که می‌توانند به میدانی از نوع ρ بدون دخالت در فرض استقلال از مختصات جمع شوند، در بخش ۲.۱.۴ نشان داده شد که توسط

$$\mathcal{B}_\rho^{\mathcal{R}} := \{b \in \mathbb{R}^c \mid b = \rho(g)b \quad \forall g \in \mathcal{R}\}. \quad (107)$$

داده می‌شود. برای مورد گروه انعکاس، فقط دو عنصر گروه و بنابراین دو قید وجود دارد. قید برای عنصر همانی $g = e$ به طور بدینهی برآورده می‌شود زیرا $\rho(e) = \text{id}_{\mathbb{R}^c}$ طبق تعریف همیشه همانی روی \mathbb{R}^c است. در ادامه بنابراین کافی است توجه را به قید $b = \rho(s)b$ ناشی از انعکاس $s = s$ محدود کنیم.

با مورد میدان‌های اسکالار، یعنی نمایش بدینهی، شروع می‌کنیم. قید انعکاس سپس $b = \rho_{\mathbb{R}^c}(s)b = b$ می‌شود که همیشه برآورده می‌شود. نتیجه می‌شود که فضای الگوهای $\mathcal{B}_\rho^{\mathcal{R}}$ برابر با \mathbb{R} است:

$$\mathcal{B}_{\rho_{\mathbb{R}^c}}^{\mathcal{R}} = \mathbb{R} \quad (108)$$

بدون قید باقی می‌ماند به طوری که $\mathcal{B}_\rho^{\mathcal{R}}$ را دلخواه با مقدار حقیقی می‌توانند به میدان‌های اسکالار جمع شوند. برای نمایش تغییر علامت، قید انعکاس $b = -b = \rho_{\mathbb{R}^c}(s)b$ تبدیل می‌شود و بنابراین فقط برای b با ایاس‌هایی که صفر هستند برآورده می‌شود:

$$\mathcal{B}_{\rho_{\mathbb{R}^c}}^{\mathcal{R}} = \{+\} \quad (109)$$

بنابراین جمع با ایاس به میدان‌های تغییر علامت با حفظ استقلال از مختصات غیرممکن است. سومین نوع میدان نمونه ما نمایش منظم دو بعدی است. قید انعکاسی متناظر روی \mathbb{R}^2 به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = b = \rho_{\mathbb{R}^2}(s)b = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (110)$$

و به فضای حل یک بعدی منجر می‌شود

$$\mathcal{B}_{\rho_{\mathbb{R}^2}}^{\mathcal{R}} = \{b \in \mathbb{R}^2 \mid b_1 = b_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} \mid \beta \in \mathbb{R} \right\}. \quad (111)$$

استقلال از مختصات این قید به طور شهودی روشن است: از آنجا که نمایش منظم دو کانالی که میدان را تشکیل می‌دهند جایه‌جا می‌کند، جمع با ایاس تنها زمانی مستقل از مختصات است که مقادیر جمع شده به هر دو کانال برابر باشند، به طوری که ترتیب آنها اهمیت نداشته باشد.

همانطور که قبلاً در بخش ۲.۱.۴ ادعا شد، فضای حل $\mathcal{B}_\rho^{\mathcal{R}}$ برای نمایش ρ دقیقاً با زیرنمایش‌های بدینهی آن مطابق است. این مطمئناً برای نمایش بدینهی صادق است که می‌توان هر بایاسی را به آن جمع کرد، و نمایش تغییر علامت که خود هیچ زیرنمایش بدینهی ندارد و بنابراین اصلًاً با ایاس نمی‌پذیرد. مثال جالب‌تر نمایش منظم است که در معادله ۱۰۴ نشان داده شد به مجموع مستقیم نمایش بدینهی و نمایش تغییر علامت تجزیه می‌شود. فضای حل یک بعدی در معادله ۱۱۱ دقیقاً متناظر با تک زیرنمایش بدینهی موجود در $\rho_{\mathbb{R}^c}$ است. برای بررسی اعتبار این گزاره، توجه کنید که با ایاس‌های مجاز برای مجموع مستقیم $\rho_{\mathbb{R}^c} \oplus \rho_{\mathbb{R}^c}$ از شکل $(\beta, 0)^\top$ هستند، که در آن $\beta \in \mathbb{R}$. این نتیجه می‌تواند از طریق تغییر پایه Q به نمایش منظم برگردانده شود که واقعاً حل ما در معادله (۱۱۱) را بازیابی می‌کند:

$$Q \cdot \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} \quad (112)$$

۲.۳.۵ غیرخطی‌های مستقل از جهت‌گیری

برای ساخت شبکه عمیق، باید غیرخطی‌های هم‌متغیر برای هر یک از انواع میدان ارائه دهیم. همانطور که قبلاً در بخش ۳.۱.۴ بحث شد، میدان‌های اسکالر به دلیل نامتغیر بودن آنها تحت تبدیل‌های گیج می‌توانند تحت تأثیر هر غیرخطی $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ باشند، قرار بگیرند. انتخاب‌های معمول غیرخطی‌های نقطه‌ای ReLU یا ELU استند. برای میدان‌های تغییر علامت می‌توان قدر مطلق $\|f\|$ بردارهای ویژگی را که میدان تغییر علامت را به میدان اسکالر نگاشت می‌کند، در نظر گرفت. در پاده‌سازی ما در ادامه به جای آن از غیرخطی‌هایی از شکل

$$(113) \quad \rho_{\text{ReLU}} : f \mapsto \text{ReLU}(\|f\| - b) \cdot \frac{f}{\|f\|},$$

استفاده می‌کنیم، که در آن $b \in \mathbb{R}^+$ پارامتر بایاس قابل آموزش است. به آسانی دیده می‌شود که این انتخاب میدان‌های تغییر علامت را به میدان‌های تغییر علامت نگاشت می‌کند زیرا ضریب اول بر روی نرم نامتغیر گیج بردارهای ویژگی عمل می‌کند در حالی که ضریب دوم علامت بردار ویژگی را حفظ می‌کند. به عنوان نمایش جایگشت، نمایش منظم اجازه می‌دهد هر غیرخطی نقطه‌ای، مثل ReLU، بر روی کاتال‌های میدان منفرد بدون تغییر نوع میدان عمل کند:

$$(114) \quad \rho_{\text{ReLU}}(s) \circ \rho_{\text{ReLU}} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ReLU}(f_1) \\ \text{ReLU}(f_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ReLU}(f_2) \\ \text{ReLU}(f_1) \end{bmatrix} = \rho_{\text{ReLU}} \circ \rho_{\text{ReLU}}(s) \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

در حالی که نمایش منظم از نظر خطی معادل $\rho_{\text{ReLU}} \oplus \rho_{\text{ReLU}}$ است، نمی‌توانیم غیرخطی‌های نقطه‌ای مستقل را روی دو کانال در پایه irrep اعمال کنیم. این ادعا را که غیرخطی‌ها شبکه‌ها را نسبت به انتخاب خاص پایه نمایش حساس می‌کند، تقویت می‌کند.

۲.۳.۶ کانولوشن‌های مستقل از جهت‌گیری

آخرین عملیاتی که اینجا نموده‌سازی می‌کنیم کانولوشن‌های هم‌متغیر انعکاس هستند. این از یک طرف مستلزم توضیح نگاشت نمایی و انتقال موازی روی نوار است، و از طرف دیگر حل فضاهای کرنل \mathcal{R} -راهبری‌پذیر. به دلیل هندسه مسطح M و استفاده از چارت‌های ایزومنتیک، مورد اول تقریباً بدیهی است: ویژگی‌ها مشابه روی \mathbb{R}^2 منتقل می‌شوند، با این تفاوت که بردارهای ویژگی ممکن است انعکاسی توسط $(s)^\rho$ تجزیه کنند. پاده‌سازی ما از این بخش در شکل ۲۳ تجسم شده است که در بخش ۱.۴.۵ در ادامه بیشتر توضیح داده می‌شود. بخش فعلی احصاراً بر حل تحلیلی فضاهای کرنل متمرکز است.

برای نوار موبیوس با \mathcal{R} -ساختار، فضای کرنل‌های \mathcal{R} -راهبری‌پذیر از معادله (۸۶) توسط

$$(115) \quad \mathcal{K}_{\rho_{\text{ReLU}}, \rho_{\text{ReLU}}}^{\mathcal{R}} := \left\{ K : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}} \mid K(gv) = \rho_{\text{ReLU}}(g) \cdot K(v) \cdot \rho_{\text{ReLU}}(g) \quad \forall v \in \mathbb{R}^r, g \in \mathcal{R} \right\},$$

داده می‌شود، که در آن ضریب دترمینان $1 = |\det g|$ را حذف کردیم و تمام معکوس‌ها را برداشتم زیرا $g \cdot g^{-1} = g$ همانند مورد بایاس‌های هم‌متغیر، قید ناشی از عنصر همانی به طور بدیهی برآورده می‌شود، به طوری که فقط قید انعکاسی باقی می‌ماند. کرنل‌های هم‌متغیر انعکاس بنا بر این با قید واحد

$$(116) \quad K(s.v) = \rho_{\text{ReLU}}(s) \cdot K(v) \cdot \rho_{\text{ReLU}}(s), \quad \forall v \in \mathbb{R}^r,$$

مشخص می‌شوند، که مستلزم آن است که کرنل منعکس شده $K(s.v)$ برابر کرنل منعکس شده $K(v)$ پس از عمل نمایش میدان ورودی و خروجی باشد. در ادامه این قید را برای تمام نه جفت از انواع میدان حل خواهیم کرد. کرنل‌های حاصل، که همگی به نحوی متقارن تحت انعکاس‌ها هستند، در جدول ۳ تجسم شده‌اند.

• **اسکالر \leftarrow اسکالار:** کرنل‌های $K = [K_{11}] : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 1}$ که بین میدان‌های اسکالر نگاشت می‌کنند باید محدودیت زیر را برآورده کنند

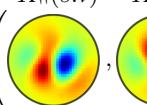
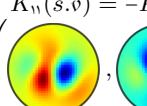
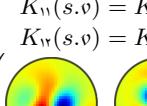
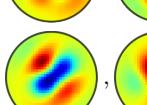
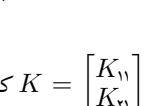
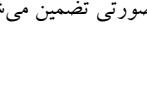
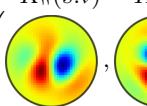
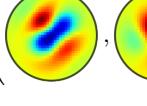
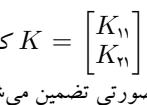
$$(117) \quad [K_{11}](s.v) = [1] \cdot [K_{11}](v) \cdot [1] = [K_{11}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^r.$$

آنها لزوماً تحت بازتاب‌ها متقارن (ناوردا) هستند؛ ورودی سمت چپ بالا در جدول ۳ را بینید.

• **اسکالر \leftarrow علامت-چرخش:** کرنل‌های $K = [K_{11}] : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 1}$ که میدان اسکالار را به میدان علامت-چرخش نگاشت می‌کنند باید محدودیت زیر را برآورده کنند

$$(118) \quad [K_{11}](s.v) = [-1] \cdot [K_{11}](v) \cdot [1] = -[K_{11}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^r.$$

این امر کرنل‌های ضدمتقارن را به همراه دارد همانطور که در ردیف وسط در ستون اول جدول ۳ مشاهده می‌شود.

منظمه	تغییر علامت	بدیهی	$\rho_{\text{من}}$
$K_{11}(s.v) = K_{11}(v)$ 	$K_{11}(s.v) = -K_{11}(v)$ 	$K_{11}(s.v) = K_{11}(v)$ 	بدیهی
$K_{11}(s.v) = -K_{11}(v)$ 	$K_{11}(s.v) = K_{11}(v)$ 	$K_{11}(s.v) = -K_{11}(v)$ 	تغییر علامت
$K_{11}(s.v) = K_{11}(v)$ $K_{11}(s.v) = K_{11}(v)$ 	$K_{11}(s.v) = -K_{11}(v)$ 	$K_{11}(s.v) = K_{11}(v)$ 	منظمه

جدول ۳: تجسم کرnel های انکاس-راهبری پذیر در $\mathcal{K}_{\rho_{\text{من}}, \rho_{\text{من}}}$ برای تمام جفت های در نظر گرفته شده از انواع میدان ورودی و خروجی $\rho_{\text{من}}$ و $\rho_{\text{من}}$ به طور کلی، این کرnel ها باید قید کرnel \mathcal{R} را بهتر بگشایند. راهبری پذیری \cdot $K(s.v) = \rho_{\text{من}}(s) \cdot \rho_{\text{من}}(v) \cdot \mathcal{R}(v)$ را برآورده کنند که در آن $K : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{C_{\text{من}} \times C_{\text{من}}}$ هر ورودی جدول قید خاص برای نمایش های ورودی و خروجی متناظر را بیان می کند و یک کرnel راهبری پذیر نمونه را تعسیم می کند. توجه کنید که قید، کرnel معکوس شده $K(s.v) = \mathcal{R}(v)$ را به تبدیل خطی کرnel معکوس نشده $K(v)$ توسط نمایش ورودی و خروجی مقید می کند. بنابراین منجر به تقارن های انکاسی کرnel های شود.

• **اسکالو \leftarrow منظم:** به منظور نگاشت از میدان اسکالار به میدان ویژگی منظم، باید کرnel هایی از شکل ۱ که از $K = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{11} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 1}$ می باشد که از یک کاتال ورودی به دو کاتال خروجی نگاشت می کند، اعمال کرد. جایگشت مورد نیاز کاتال های خروجی در صورتی تضمین می شود که کرnel محدودیت زیر را برآورده کند

$$\begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{11} \end{bmatrix}(s.v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{11} \end{bmatrix}(v) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{11} \end{bmatrix}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^4. \quad (119)$$

این محدودیت مستلزم آن است که دو کاتال حاوی کرnel هایی باشند که نسخه های بازتابی یکدیگر هستند، یعنی $(v) = K_{11}(s.v) = K_{11}(v)$ برای همه $v \in \mathbb{R}^4$ (این قبل خط دوم محدودیت در معادله (119) را پوشش می دهد). این حالت در ورودی سمت چپ پایین جدول ۳ مشاهده می شود.

• **علامت-چرخش \leftarrow اسکالو:** کرnel های $K = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{11} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 1}$ که از علامت-چرخش به میدان های اسکالار نگاشت می کنند دوباره ضدمتارن هستند زیرا باید همان محدودیت را برآورده کنند

$$[K_{11}](s.v) = [1] \cdot [K_{11}](v) \cdot [-1] = -[K_{11}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^4 \quad (120)$$

مانند کرnel هایی که در جهت مخالف نگاشت می کنند.

• **علامت-چرخش \leftarrow علامت-چرخش:** کرnel های $K = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{11} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 1}$ که رفتار تبدیل میدان های علامت-چرخش را حفظ می کنند متقارن هستند زیرا دو وارونگی علامت در محدودیت

$$[K_{11}](s.v) = [-1] \cdot [K_{11}](v) \cdot [-1] = [K_{11}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^4 \quad (121)$$

حذف می شوند.

• **علامت-چرخش \leftarrow منظم:** در حالت کرnel های $K = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{11} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 1}$ که از علامت-چرخش به میدان های ویژگی منظم نگاشت می کنند، محدودیت زیر بدست می آید

$$\begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{11} \end{bmatrix}(s.v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{11} \end{bmatrix}(v) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -[K_{11}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^4. \quad (122)$$

دو خط با یکدیگر مطابقت دارند، به طوری که می توان آنها را با محدودیت کرnel بگانه $K_{11}(s.v) = -K_{11}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^4$ خلاصه کرد. این محدودیت مستلزم آن است که دو کاتال کرnel حاوی نسخه های بازتابی، منفی شده یکدیگر باشند؛ تجسم آن در وسط ردیف پایین جدول ۳ را ببینید.

▪ **منظلم ← اسکالو:** کرنل های ویژگی منظم را به میدان های اسکالار نگاشت می کنند دارای دو کanal ورودی و یک کanal خروجی هستند و بنابراین از شکل $K = [K_{11}, K_{12}] : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ هستند. محدودیت

$$[K_{11}, K_{12}](s.v) = [1] \cdot [K_{11}, K_{12}](v) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ v \end{bmatrix} = [K_{12}, K_{11}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^1, \quad (123)$$

که می توان آن را به الزام $K_{11}(s.v) = K_{12}(v) \in \mathbb{R}^1$ کاوش داد، دوباره مستلزم آن است که دو ورودی کرنل حاوی نسخه های بازتابی یکدیگر باشند.

▪ **منظلم ← علامت-چرخش:** نگاشته های از میدان های ویژگی منظم به میدان های علامت-چرخش از کرنل های : $K = [K_{11}, K_{12}] : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ که محدودیت زیر را برآورده می کنند استفاده می کنند

$$[K_{11}, K_{12}](s.v) = [-1] \cdot [K_{11}, K_{12}](v) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ v \end{bmatrix} = -[K_{12}, K_{11}](v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^1, \quad (124)$$

یا معادل آن، $K_{11}(s.v) = -K_{12}(v) \in \mathbb{R}^1$. احتمالاً همانطور که قبل انتظار می رفت، آنها از کرنل هایی تشکیل شده اند که دو کanal آنها حاوی نسخه های بازتابی، منفی شده یکدیگر هستند.

▪ **منظلم ← منظم:** در نهایت، باید کرنل های $K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ که میدان های منظم را به میدان های منظم نگاشت می کنند و بنابراین دارای ماتریس های 2×2 به عنوان کوادومین هستند، در نظر بگیرید. محدودیت آنها، که از ضرب چپ و راست با نمایش منظم حاصل می شود، به شکل زیر است

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}(s.v) = \begin{bmatrix} 1 & v \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}(v) \cdot \begin{bmatrix} 1 & v \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{21} \\ K_{12} & K_{11} \end{bmatrix}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2. \quad (125)$$

این معادل دو محدودیت مستقل است

$$K_{11}(s.v) = K_{22}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2 \quad (126)$$

و

$$K_{12}(s.v) = K_{21}(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2, \quad (127)$$

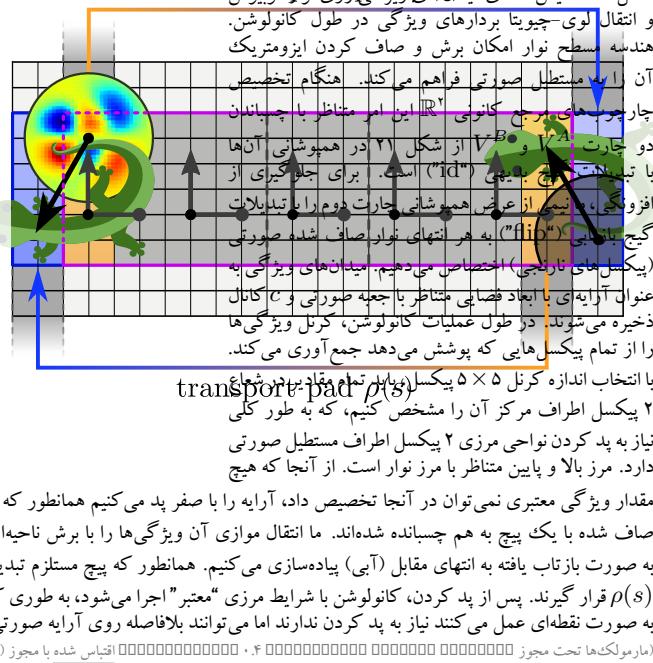
که چهار ورودی کرنل را به هم متصل می کند به طوری که دو جفت کرنل منعکس شده متقابل وجود دارد. این حالت در ورودی سمت راست پایین جدول ۳ مشاهده می شود.

در حالی که نتایج استخراج شده به ما می گویند چگونه بین میدان های ویژگی منفرد نگاشت کنیم، شبکه های عصبی معمولاً فضاهای ویژگی را فرض می کنند که از چندین میدان ویژگی احتمالاً تفاوت تشکیل می شوند. کرنل هایی که بین این پشتنه های میدان های ویژگی نگاشت می کنند را می توان به عنوان ساخته شده از بلوک هایی در نظر گرفت که بین میدان های منفرد نگاشت می کنند. به عنوان مثال، موردی را در نظر بگیرید که هر دو فضای ویژگی ورودی و خروجی شامل یکی از نمایش های مورد بحث هستند، یعنی $\rho_{0000} = \rho_{00000} \oplus \rho_{00000} \oplus \rho_{00000} = \rho_{000000}$. تعداد کanal های ورودی و خروجی سیس $= 1+1+2 = c_{000} = c_{0000} = c_{00000}$ است، به طوری که کرنل کامل از شکل $K : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ است. از آنجا که نمایش های ورودی و خروجی به عنوان مجموع های مستقیم تعریف می شوند، آنها قطعی بلوکی هستند. قید کامل بنابراین به نه قید مستقل بین تمام جفت های میدان های منفرد ورودی و خروجی تلقی کیک می شود که در این مورد دقیقاً متناظر با نه حل ارائه شده در بالا هستند. ورودی های 4×4 کرنل کامل بنابراین ملزم خواهند بود همان تقارن هایی را داشته باشند که کرنل های 4×4 که در جدول ۳ به طور کلی تجسم شده اند.

برای کامل بودن، به طور مختصر تبدیل های میدان کرنل عمومی و تبدیل های میدان کرنل هم تغیر ایزو متري روی نوار موبیوس را تشریح می کنیم. در مورد عمومی میدان کرنل هموار کاملاً بدون قید باقی می ماند، یعنی هیچ وزنی نیاز به اشتراک گذاری ندارد و کرنل های منفرد ملزم به داشتن هیچ تقارن انعکاسی نیستند. برای اینکه تبدیل میدان کرنل نسبت به ایزو متري ها هم تغیر باشد، میدان کرنل اعمال شده باید تحت عمل آنها ناتغیر باشد. این مستلزم اشتراک گذاری وزن ها روی مدار های ایزو متري است که در دو نوع مختلف می آیند. نوع اول متناظر با آن مدار منفرد است که دقیقاً در وسط نوار قرار دارد. نقاط روی این مدار پس از یک دور کامل در اطراف نوار به خودشان بر می گردند، در حالی که خود نوار روی این مدار مرکزی منعکس می شود. میدان کرنل Isom_{RM}-نماتغیر کرنلی را روی این مدار مرکزی اشتراک خواهد گذاشت، با این حال، این کرنل ملزم است تقارن های انعکاسی ماند کرنل های \mathcal{R} -راهبری پذیر در جدول ۳ داشته باشد. این به این دلیل است که کرنل های پس از یک دور به شکل منعکس روی خودشان نگاشت می شوند در حالی که میدان کرنل باید ناتغیر ایزو متري باشد.^{۳۴} هر مدار دیگر از نوع مدار دوم است. نقطه ای را در فاصله داده شده از مدار مرکزی در نظر

^{۳۴} بخش ۳۸ چنین موقعیت هایی را در محیط کلی تری به عنوان قیدهای زیر گروه پایدار ساز گروه ایزو متري توصیف می کند. در مورد فعلی، زیر گروه چرخش های یکبار در اطراف نوار نقاط روی مدار مرکزی را پایدار می کند. این با گروه انعکاس یکریخت است و بنابراین منجر به تقارن های انعکاسی در کرنل های می شود.

شکل ۲۳: نمایش عددی میدان‌های ویژگی روش کانولوشن transport pad



۴.۵ پیاده‌سازی عددی و ارزیابی کانولوشن‌های موبیوس

با آمادگی از اشتقاقات تحلیلی در بخش‌های قبلی، اکنون آماده‌ایم تا پیاده‌سازی عددی CNN های مستقل از جهت گیری روی نوار موبیوس را مورد بحث قرار دهیم. پس از انجام این کار در بخش ۱.۴.۵، مدل‌ها را برای انتخاب‌های مختلف ا نوع میدان ارزیابی کرده و آن‌ها را با پیاده‌سازی ساده وابسته به جهت گیری در بخش ۲.۴.۵ مقایسه می کنیم.

پیاده‌سازی به صورت عمومی در آدرس <https://github.com/mauriceweiler/MobiusCNNs> در دسترس است.

۱.۴.۵ پیاده‌سازی عددی

فضاهای ویژگی: اولین سوالی که هنگام پیاده‌سازی کانولوشن‌ها روی نوار موبیوس باید پاسخ داد این است که میدان‌های ویژگی چگونه باید به صورت عددی نمایش داده شوند. از آنجا که نوار موبیوس یک منیفلد مسطح است، می توانیم به راحتی (زیرمجموعه‌هایی از) شبکه نمونه‌برداری منظم را از \mathbb{R}^2 به نوار انتقال دهیم. این شهود با کشش‌های برگشتی $\rightarrow V^X \circ (x^X)^{-1} : V^X \rightarrow \mathbb{R}^c$ از مختصات‌سازی‌های میدان ویژگی محلی $V^X \rightarrow U^X : U^X \rightarrow \mathbb{R}^c$ از $f^X : (x^X)^{-1} : V^X \rightarrow U^X$ (معکوس) به دامنه جدید $V^X \subset \mathbb{R}^c$ رسمی‌سازی می شود، که در آن $X = A, B$ گستره‌سازی عددی سپس به عنوان محدودیت $|V^X \cap \mathbb{Z}^2|$ از کشش برگشتی به شبکه نمونه‌برداری تعریف می شود، که در شکل ۲۱ به عنوان همپوشانی نشان داده شده است.

توجه داشته باشید که این نمایش به دلیل همپوشانی $U^A \cap U^B \neq \emptyset$ چارت‌ها افزوونه است. برای حذف این افزوونگی باید آن نواحی را که دو بار نمایش داده می شوند شناسایی کرد و تنها یک کمی مشترک از بردارهای ویژگی متناظر را ذخیره کرد. یک طرح ممکن برای انجام این کار، که ما

در پیاده‌سازی عددی خود استفاده می‌کنیم، ذخیره میدان‌های ویژگی در آرایه چندبعدی متناظر با مستطیل صورتی در شکل ۲۳ است. می‌توان آن را به عنوان تعریف شده توسط "چسباندن" آن نواحی در V^A و V^B که توسط تبدیلات گیج بدینه g^{BA} شناسایی می‌شوند در نظر گرفت ("id" در شکل ۲۱ و چهار پیکسل مرکزی در شکل ۲۳). آنچه باقی می‌ماند افزونگی بردارهای ویژگی در ناحیه همپوشانی دوم با تبدیلات گیج بازتابی است ("flip" در شکل ۲۱). این افزونگی با تخصیص آن بردارهای ویژگی به صورت مساوی به هر انتهای نمایش میدان محلی "چسبانده شده" حل می‌شود (پیکسل‌های نارنجی در شکل ۲۳). در مجموع، پیکسل‌های جعبه صورتی فضای ویژگی را به صورت غیرافزونه با تخصیص یک بردار ویژگی c -بعدی به هر یک از آنها نمایش می‌دهند. حلقه دو پیکسلی اطراف مستطیل صورتی بخشی از فضای ویژگی نیست بلکه نایه پد کردن را تجسم می‌کند که تنها در طول پاس رو به جلوی عملیات کانولوشن همانطور که در زیر بحث شده است استفاده خواهد شد.

ابعاد (شکل) واقعی آرایه‌ای که فضای ویژگی را کد گذاری می‌کند به چند گانگی های میدان انتخاب شده بستگی دارد. فرض کنید $m_{\text{m}} m_{\text{m}} m_{\text{m}}$ آن چند گانگی های صحیح میدان‌های ویژگی باشند که فضای ویژگی را تشکیل می‌دهند. از آنجا که میدان‌های اسکالر و تغیر علامت یک بعدی هستند و میدان‌های ویژگی منظمه دو بعدی هستند، تعداد کل کانال‌ها (یا بعد بردارهای ویژگی ایجاد شده) توسط $c = m_{\text{m}} + m_{\text{m}} + 2m_{\text{m}}$ داده می‌شود. فرض کنید همچنین کهوضوح فضای مستطیل صورتی $X \times Y \times Z$ پیکسل باشد و اندازه دسته N نumeone فرض کنید. آرایه‌ای که فضای ویژگی را کد گذاری می‌کند سپس از شکل (N, c, X, Y) است، همانطور که معمولاً در پردازش تصویر استفاده می‌شود. توجه داشته باشید که این نمایش عددی فضای ویژگی هم نسبت به هندسه پیچیده نوار و هم نوع واقعی میدان‌های ویژگی موجود (به جز بعد آنها) بی‌اطلاع است. بنابراین اطلاعات هندسی واقعی منحصرآ توسط لایه‌های شبکه که میدان‌ها را پردازش می‌کنند حمل می‌شود.

جمع بایاس: برای پیاده‌سازی جمع بایاس مستقل از جهت گیری، نتایج بخش ۱.۳.۵ را به خاطر بیاورید که فضاهای برداری بایاس‌های الگوی هم‌متغیر بازتاب برای میدان‌های اسکالر و میدان‌های منظم یک بعدی و برای میدان‌های تغیر علامت صفر بعدی هستند. در مقداردهی اولیه مازول بایاس بنابراین یک بردار پارامتر $m_{\text{m}}-\text{بعدی}$ و یک بردار پارامتر $m_{\text{m}}-\text{بعدی}$ اختصاص می‌دهیم. در طول پاس رو به جلو این پارامترها را به یک بردار بایاس c -بعدی b_{m} گسترش می‌دهیم که باید به اینباشت کامل میدان‌های ویژگی اضافه شود. این کار با اختصاص آرایه c -بعدی از صفرها و پر کردن m_{m} عنصر اول با پارامترهای بایاس میدان اسکالر و $2m_{\text{m}}$ عنصر آخر با پارامترهای بایاس میدان منظم m_{m} ، هر کدام دو بار تکرار شده برای برآوردن ساختار فضای حل در معادله (۱۱۱)، انجام می‌شود. پس از این گسترش بردار بایاس کامل

$$b_{\text{m}} = \left[\underbrace{\beta_{\text{m},1}, \dots, \beta_{\text{m},m_{\text{m}}}}_{m_{\text{m}}}, \underbrace{\dots, \dots, \beta_{\text{m},1}, \beta_{\text{m},1}, \dots, \beta_{\text{m},m_{\text{m}}}, \beta_{\text{m},m_{\text{m}}}}_{2m_{\text{m}}} \right]^T \in \mathbb{R}^c \quad (128)$$

طبق معمول به آرایه میدان ویژگی اضافه می‌شود. استقلال آن از جهت گیری (ناوردایی گیج) اضافه کردن به آرایه در شکل ۲۳ را توجیه می‌کند، علی‌رغم اینکه از بردارهای ویژگی در دو گیج مختلف چسبانده شده است.

غیرخطی‌ها: غیرخطی‌ها را می‌توان مطابق تعریف در بخش ۲.۳.۵ به صورت مستقیم پیاده‌سازی کرد. این کار را با تقسیم اینباشت کامل میدان‌های ویژگی به سه اینباشت از میدان‌های همان نوع، اعمال غیرخطی‌های هم‌متغیر بازتاب مربوطه به آنها، و در نهایت الحاق نتایج انجام می‌دهیم. به دلیل تعریف غیرخطی برای میدان‌های تغیر علامت در معادله (۱۱۳) با بایاس قابل یادگیری، مازول گیری، مازول خروجی دارای m_{m} پارامتر قابل آموخت است.

کانولوشن‌های \mathcal{K} : از آنجا که عملیات کانولوشن به صورت نقطه‌ای عمل نمی‌کند بلکه تمام ویژگی‌های پوشش داده شده توسعه کرنل را اینباشت می‌کند، پیاده‌سازی آنها کمتر بدینه است. پاس رو به جلو به سه گام تقسیم می‌شود، یعنی ۱) گسترش کرنل‌های متقابران بازتاب از آرایه‌های پارامتر، ۲) انتقال لوى-چیوینتا بردارهای ویژگی و ۳) کانولوشن GM واقعی.

به خاطر بیاورید که فضای $\mathcal{K}_{\rho, \rho, \rho}$ -هدايت‌پذیر زیرفضای خطی فضای کرنل‌های بدون قید \mathcal{K} در معادله (۸۵) است. برای پارامتری کردن کرنل‌های \mathcal{K} -هدايت‌پذیر لازم است پایه‌ای از $\mathcal{K}_{\rho, \rho, \rho}$ -انتخاب کنیم که کرنل‌ها بر حسب آن گسترش یابند. پارامترهای قابل آموخت عملیات کانولوشن ضرایب گسترش در این پایه هستند. پیاده‌سازی ما تمام کرنل‌هایی را که متناظر با همان جفت انواع میدان رودی و خروجی هستند به صورت مشترک پارامتری می‌کند زیرا آنها تقارن‌های یکسان و بنابراین پایه یکسان دارند. با در نظر گیری نه جفت انواع میدان نشان داده شده در جدول ۳، این بدان معناست که مازول کانولوشن نه آرایه پارامتر متناظر نگه می‌دارد. کرنل‌های واقعی سپس از این پارامترها در طول هر پاس رو به جلو گسترش می‌یابند. برای مثال، زیرمجموعه کانال‌های کرنل را در نظر بگیرید که از m_{m} میدان اسکالر به m_{m} میدان تغیر علامت نگاشت می‌کند و اندازه کرنل $s \times s$ پیکسل فرض کنید. آرایه پارامتر متناظر سپس از شکل $(s, s, m_{\text{m}}, m_{\text{m}}, m_{\text{m}})$ است و m_{m} کانال کرنل منفرد را با پایه‌ای از $s \times s$ کرنل نامتقارن هر کدام نمایش می‌دهد. گسترش به عنوان پر کردن $s \times s$ پیکسل بالا با پارامترهای تغیر نیافرته در حالی که $s \times s$ پیکسل پایین با پارامترهای منفی شده و بازتاب یافته پر می‌شوند، پیاده‌سازی می‌شود. به عنوان مثال دوم، کانال‌های کرنل را در نظر بگیرید که از m_{m} میدان منظم به m_{m} میدان اسکالر نگاشت می‌کند. آرایه پارامتر برای این حالت از شکل $(s, s, m_{\text{m}}, m_{\text{m}}, m_{\text{m}})$ است و یکی از دو کانال کرنل به ازای هر میدان رودی و خروجی را ذخیره می‌کند. کانال‌های دوم متناظر در طول پاس رو به جلو بازتاب کانال‌های کرنل اول همانطور که در جدول ۳ نشان داده شده گسترش می‌یابند. پس از گسترش کرنل کامل به این شکل از تمام زیربلوک‌های آن متناظر با ترکیب‌های مختلف انواع میدان، شکل معمول کرنل‌ها در یادگیری عمیق را دارد اما تضمین می‌شود که تقارن‌های مشتق شده در بخش ۳.۳.۵ را رعایت کند. توجه داشته باشید

که تقارن‌های کرنل کانولوشن‌های GM را نسبت به CNN غیرهم‌متغیر متناظر با همان تعداد کاتالال ۶ از نظر پارامتر کارآمدتر می‌کند. به طور خاص برای کرنل R -های پذیر تعداد پارامترها با ضریب دو کاهش می‌باشد.^{۲۵}

پس از گسترش کرنل‌ها، آنها با میدان‌های ویژگی کانولو می‌شوند. این امر نیاز به پیاده‌سازی نگاشت نمایی و انتقال دهنده‌های لوی-چیویتا R -ساز کار روی نوار موبیوس دارد^{۲۶} یا بهتر بگوییم روی نمایش عددی آن توسط آرایه صورتی از شکل ۲۳. هندسه مسطح نوار موبیوس پیاده‌سازی را تقریباً بدیهی می‌کند، با این حال، مرزها و اتصال دایره‌ای آن نیاز به دقت خاصی دارند. بنابراین باید بین سه حالت کیفی متفاوت تمایز قائل شویم که متناظر با موارد زیر هستند^{۱)} نگاشت‌های نمایی که کاملاً در آرایه صورتی قرار دارند،^{۲)} نگاشت‌های نمایی که از مرز عبور می‌کنند و بنابراین خوش تعریف نیستند و^{۳)} نگاشت‌هایی که ژئودزیک‌هاشان از یک انتهای آرایه خارج شده و (پیچیده) از انتهای دیگر وارد می‌شوند. حالت اول بدیهی است و متناظر با نگاشت نمایی روی خود^{۲۷} است. از آنجا که نوار مسطح است و چارچوب‌های مرجع درون آرایه همه موزایی هستند، انتقال در امتداد این ژئودزیک‌ها بدیهی است. در ناحیه داخلی آرایه، جایی که کرنل‌های (با پشتیانی متناظر) از آن پیرون نمی‌زنند، بنابراین می‌توان کانولوشن را طبق معمول روی^{۲۸} پیاده‌سازی کرد. حالت دوم مربوط به ردیف‌های بالا و پایین آرایه است که در آن نگاشت‌های نمایی ممکن است از مرز نوار (یا آرایه) عبور کنند. این شیوه مسائل مرزی برای تصاویر مسطح مستطیلی معمول است، که معمولاً با پد کردن صفر حل می‌شود. با اتخاذ این راه حل، آرایه را با ردیف‌هایی از صفر پد می‌کنیم که به عنوان دو نوار خاکستری روشن بالا و پایین مستطیل صورتی در شکل ۲۳ نشان داده شده‌اند. با اندازه کرنل 8×8 پیکسل با^{۲۹} فرد، باید $1/2 - 8$ ردیف صفر در هر دو طرف پد کرد. حالت سوم در انتهای چپ و راست آرایه رخ می‌دهد، جایی که نوار برای صاف کردن بریده شده است. شکل ۲۳ ژئودزیک نمونه‌ای را تجسم می‌کند که از خط برش عبور می‌کند و بنابراین در جهت بازتاب یافته از طرف مقابل وارد آرایه می‌شود. به دلیل بازتاب، انتقال دهنده‌های موزایی در سراسر برش توسعه^(۴) دارد. برای اینکه بتوانیم روتین کانولوشن متعدد اجرا کنیم، انتقال در سراسر برش را با کمی کردن ناحیه^{۲/۲ - 8} پیکسل از هر دو انتهای آرایه (نارنجی)، بازتاب آنها به صورت وارونه برای مدل‌سازی پیچ، عمل روی آنها با^(۵) برای در نظر گیری گیج‌های بازتاب یافته و در نهایت الحاق آنها به طرف مقابل آرایه (آبی) پیاده‌سازی می‌کنیم. با پد کردن آرایه به این شکل، تمام ژئودزیک‌ها و انتقال دهنده‌های مربوطه به همتایان بدیهی خود روی^{۲۸} کاهش می‌یابند.

به طور کلی، پیاده‌سازی ما از عملیات کانولوشن سه گام فوق‌الذکر را اعمال می‌کند. ابتدا کرنل‌های R -های پذیر را گسترش می‌دهد و آرایه میدان ویژگی صورتی را با صفرها و مقادیر میدان که در سراسر برش منتقل می‌شوند پد می‌کنند. کرنل گسترش یافته سپس با میدان‌های ویژگی پد شده کانولو می‌شود و روتین کانولوشن متعارف برای تصاویر مسطح فراخوانی می‌شود. ماتنظیمات مرزی "معتبر" برای کانولوشن استفاده می‌کنیم، که به این معناست که عملیات به طور ضمنی صفرهای پیشتری پد نمی‌کند و تنها بردارهای ویژگی را برای آن نطاپی محاسبه می‌کند که کرنل از مرزهای آرایه دستی پد شده ما فراتر نمی‌رود. میدان ویژگی حاصل بنابراین دوباره همان ابعاد فضایی مستطیل صورتی اصلی را خواهد داشت.

Pooling: CNN‌های متعارف معمولاً عملیات **pooling** فضایی را اعمال می‌کنند که بردارهای ویژگی از یک پنجره pooling داده شده، به عنوان مثال ناحیه‌ای از پیکسل های 2×2 ، را در یک بردار ویژگی جدید خلاصه می‌کنند. چنین عملیاتی وضوح فضایی را کاهش می‌دهد که هزینه محاسباتی را کاهش داده و میدان دید مؤثر کرنل‌های کانولوشن را افزایش می‌دهد. روش رایج pooling به اصطلاح "max-pooling" است که پیشترین مقدار هر کanal ویژگی فردی در ناحیه pooling را انتخاب می‌کند. این عملیات را می‌توان مستقیماً روی میدان‌های اسکالار اعمال کرد زیرا آنها ناوردای پیمانه هستند. همچنین برای میدان‌های ویژگی منتظم قابل قبول است زیرا گرفتن پیشنهای جایگایی کانال‌ها جایجاً می‌شود. با این حال، از آنجا که میدان‌های sign-flip علامت خود را تحت تبدیلات پیمانه تغییر می‌دهند، max-pooling نسبت به قانون تبدیل آنها همورداً نیست. جایگزین همورداً average pooling است که میانگین ویژگی ها در ناحیه pooling را می‌گیرد و بنابراین با تغییر علامت جایجاً می‌شود. گزینه دیگر، که در آزمایش‌های زیر استفاده می‌کنیم زیرا کمی بهتر عمل می‌کند، این است که میدان‌های sign-flip را بر اساس قدر مطلق آنها pool کنیم که مجدداً تحت وارونگی علامت ناوردا است. سپس علامت مقادیر میدان pool شده را با پیشترین نرم ضرب می‌کنیم تا قانون تبدیل اصلی حفظ شود.

در حالی که عملیات pooling تعریف شده به این شکل نسبت به تبدیلات پیمانه همورداً هستند، اصل طراحی آنها اساساً با هموردایی ایزومنتری مطلوب تداخل دارد. این بدان دلیل است که آنها وضوح فضایی گستته‌سازی عالدی را کاهش می‌دهند، به طوری که خروجی تهنا نسبت به زیرگروه تقارن‌های شبکه با وضوح پایین تر دقیقاً همورداً است. این اثر برای CNN‌های متعارف به خوبی شناخته شده است^[۶]. اگرچه تلاش‌هایی برای اصلاح وضعیت انجام شده^[۷]، از دست رفتن جزئی هموردایی انتقالی (یا ایزومنتری) به یک زیرگروه معمولاً همانطور که هست پذیرفته می‌شود.

تست‌های واحد: تمام عملیات مستقل از مختصات پیشنهادی برای تضمین هموردایی پیمانه و هموردایی ایزومنتری آنها تست واحد می‌شوند. تست‌های هموردایی پیمانه برای تمام عملیات پیشنهادی و همچنین برای کل شبکه‌های توصیف شده در بخش بعدی موقق هستند. برای کانولوشن، جمع bias و غیرخطی‌ها، تست‌های واحد متأثیر می‌کنند که هموردایی ایزومنتری دقیقاً برقرار است. همانطور که انتظار می‌رود، عملیات pooling فضایی نسبت به تقارن‌های شبکه با وضوح بالا دقیقاً همورداً نیستند.^{۲۹} با این حال، هموردایی ایزومنتری آنها را برای آن زیرگروه از ایزومنتری‌ها که همزمان

^{۲۵} بهبود کارایی پارامتر کرنل‌های R -های پذیر با ضریب ۲ برای کرنل‌های پیوسته یا برای اندازه‌های کرنل زوج ۸ دقیق است. اگر ۸ فرد باشد، تعداد پارامترها برای کرنل‌های متقابن مثل $1/2 + 8$ و برای کرنل‌های نامتقابن مثل $2/8 - 8$ مقیاس می‌شود زیرا اولی ردیف مرکزی پیکسل‌ها را آزادانه پارامتری می‌کند در حالی که دومی باید آنها را روی صفر تنظیم کند.

^{۲۶} توجه کنید که این مسئله برای عملیات pooling ذاتی است و برای CNN‌های متعارف نیز صدق می‌کند^[۸].

تقارنی از شبکه با وضوح پایین تر هستند تأیید می کنیم. نتایج تجربی ما، که در ادامه بحث می کنیم، نشان می دهد که هموردایی ایزومنتری غیردقیق، ناوردایی ایزومنتری پیش‌بینی‌های طبقه‌بندی یک شبکه کامل را در اکثر موارد تنها به طور حاشیه‌ای تحت تأثیر قرار می دهد.

۲.۴.۵ ارزیابی تجربی

عملیات مستقل از مختصات و ویژگی‌های هموردایی ادعا شده آنها را روی یک وظیفه طبقه‌بندی ساده تصاویر MNIST که روی نوار مؤبیوس پروژکت شده‌اند، ارزیابی می کنیم. ترکیبات مختلف انواع میدان با نمونه‌سازی معماری‌های مدل مشابه برای آنها مقایسه می شوند. به عنوان خط مبدأ، یک CNN غیرمستقل از مختصات را روی نوار مؤبیوس آموزش می دهیم که به طور قابل توجهی توسط مدل‌های هموردا بهتر عمل می کند.

مجموعه داده Möbius MNIST با گرفتن ارقام استاندارد 28×28 پیکسل و پروژکت کردن آنها روی نوار با شناسایی مرز چپ و راست با یک پیچش اضافی ساخته می شود. مطابق با مجموعه داده MNIST چرخانده شده، که یک معیار استاندارد برای CNN‌های اقلیدسی هموردای دورانی است، اندازه مجموعه آموزش را به 12000 نمونه کاهش می دهیم [؟]. از آنجا که شامل ارقام خاکستری تک کاتاله است که تحت تبدیلات پیمانه ناوردا هستند، نمونه‌های آن به عنوان میدان‌های اسکالر شناسایی می شوند. بنابراین هر نمونه با آرایه‌ای به شکل $(1, 28, 28)$ نمایش داده می شود که متناظر با مستطیل بخش در شکل 23×23 است. توجه کنید که شناسایی مرز چپ و راست برای مورد خاص ارقام MNIST منجر به هیچ ناپیوستگی نمی شود زیرا رنگ پس‌زمینه آنها سیاه ثابت (یعنی صفر) است. به منظور نمایش هموردایی ایزومنتری القا شده CNN‌های مستقل از مختصات، دو نسخه از این مجموعه داده می سازیم. اولی شامل ارقامی است که همگی متبرک هستند، یعنی در میدان موقعیت روی نوار قرار دارند. مجموعه داده دوم ارقام را در موقعیت‌های تصادفی اطراف نوار قرار می دهد، یعنی آنها را با ایزومنتری‌های نمونه‌برداری تصادفی جایجا می کند همانطور که در شکل 22 تجسم شده است. انتظار می رود هر مدل هموردای ایزومنتری استنتاج خود را از مجموعه داده ارقام متبرک به مجموعه داده جایجا شده ایزومنتری تعیین دهد که توسط آزمایش‌های ما تأیید می شود. در حالی که Möbius MNIST به وضوح یک مجموعه داده اسباب بازی است، تمام ویژگی‌های نظری که ما به آنها علاقه‌مندیم را نشان می دهد و به عنوان یک مورد تست راحت برای نمایش تفاوت بین CNN‌های متعارف و CNN‌های مستقل از مختصات عمل می کند.

تمام معماری‌های شبکه همانطور که معمول است به عنوان یک سری لایه‌های کانولوشنی، که با یک عملیات pooling سراسری و یک طبقه‌بندی کننده ناوردا و کاملاً متصل دنبال می شوند، ساخته می شوند؛ جدول 4 را برای مقایسه بیینید. بخش‌های کانولوشنی از شش بلوک کانولوشنی با عملیات pooling فضایی پس از بلوک کانولوشن دوم و چهارم ساخته می شوند. بلوک‌های کانولوشن کاملاً اساسی هستند و تنها از یک لایه کانولوشنی که با جمع bias و یک لایه غیرخطی دنبال می شود تشکیل شده‌اند. تمام عملیات pooling میانی از پنجره‌های 2×2 pooling استفاده کرده و بنابراین وضوح فضایی را نصف می کنند. در مورد مدل‌های هموردای بازتاب، آخرين لایه کانولوشنی به 64 میدان اسکالار نقسنه می برد. ناوردایی آنها تحت تبدیلات پیمانه تضمین می کند که عملیات global max-pooling بعدی ویژگی‌های هم ناوردای موقعیت و هم ناوردای پیمانه تولید کنند. یک MLP با فعال‌سازی softmax نهایی آن ویژگی‌ها را برای تولید پیش‌بینی‌های ناوردا می گیرد. برای تمام مدل‌ها از همان دو بلوک MLP تشکیل شده است که dropout با احتمال حذف 0.3 ، ELU، batch-normalization، dropout با احتمال حذف 0.5 و یک لایه خطی (یا affine) اعمال می کنند که تعداد نورون‌های خروجی آن در جدول 4 فهرست شده است. بنابراین تفاوت‌های بین مدل‌های مختلف به بخش کانولوشنی محدود می شود.

پنج مدل مستقل از مختصاتی که نمونه‌سازی می کنیم در انواع میدان استفاده شده متفاوت هستند: سه مدل خالص وجود دارد که با "sign-", "scalar" و "regular" نشان داده می شوند که تنها نوع میدان پیشنهادی رافرض می کنند. به دلیل بعد الاتر، چندگانگی‌های میدان‌های ویژگی منتظم در مقایسه با میدان‌های اسکالار و sign-flip نصف می شوند. مدل چهارم، که با "irrep" نشان داده می شود، از ترکیبی از میدان‌های اسکالار و sign-flip به نسبت‌های مساوی استفاده می کند. توجه کنید که میدان‌های ویژگی این مدل به صورت خطی معادل مدل‌های "regular" هستند زیرا تغییر پایه از معادله (10.4) بین هر دو ترجمه می کند. مدل پنجم، "mixed" هر سه نوع میدان را اعمال می کند. غیرخطی‌های هموردا برای انواع میدان‌های مختلف همان‌هایی هستند که در بخش $2.3.5$ توضیح داده شده‌اند. همانطور که قبلاً بیان شد، تمام مدل‌ها ورودی‌ها و خروجی‌های اسکالار فرض می کنند.

تمام لایه‌های مستقل از مختصات تست واحد شده و کاملاً هموردای پیمانه یافت شده‌اند که نشان می دهد مدل‌ها به طور کلی کاملاً ناوردای پیمانه هستند. از آنجا که دو مرحله pooling اعمال می کنند که وضوح فضایی را هر یک با ضریب 2 قبل از pooling سراسری کاهش می دهند، هموردایی ایزومنتری (ناوردایی) تنها برای زیرگروه جایجا است. بنابراین ویژگی‌های ادعا شده نظری همانطور که انتظار می رود برقرار هستند.

به عنوان خط مبدأ، مدل‌های هموردای بازتاب را با CNN‌های متعارف وابسته به مختصات روی نوار مؤبیوس مقایسه می کیم. به منظور احترام به توپولوژی نوار، نسخه ساده‌ای از عملیات padding انتقالی را اعمال می کنیم. از آنجا که CNN‌ها نسبت به انواع میدان ناآگاه هستند، این کار با گرفتن نوارهای نارنجی دو پیکسل از شکل 23×23 و pad کردن آنها به طرف مقابل آرایه پس از اعمال بازتاب اما بدون عمل کردن با نمایش گروهی نامشخص انجام می شود [؟] به طور رسمی، این متناظر با انتقال ویژگی‌ها طبق یک اتصال بدیهی است. از آنجا که عملیات غیرهموردا از نظر پارامتر کمتر کارآمد هستند، دو نسخه مختلف در نظر می گیریم: نسخه اول همان تعداد کاتال مدل‌های مستقل از مختصات را استفاده می کند و بنابراین تقریباً دو برابر پارامتر بیشتری نیاز دارد. تعداد کاتال‌های نسخه دوم با ضریب $\sqrt{2}$ کاهش می یابد تا تعداد پارامترها تقریباً معادل مدل‌های مستقل از جهت گیری باشد.

CNN	متخلط	irreps	منتظم	sign-flip	اسکالر	لایه
۱	(۱, ۰, ۰)	(۱, ۰, ۰)	(۱, ۰, ۰)	(۱, ۰, ۰)	(۱, ۰, ۰)	وروودی شبکه
$\lfloor \frac{1}{16/\sqrt{\alpha}} \rfloor$	(۴, ۴, ۲)	(۸, ۸, ۰)	(۰, ۰, ۸)	(۰, ۱۶, ۰)	(۱۶, ۰, ۰)	بلوک کاتنولوشن
$\lfloor \frac{32}{16/\sqrt{\alpha}} \rfloor$	(۸, ۸, ۴)	(۱۶, ۱۶, ۰)	(۰, ۰, ۱۶)	(۰, ۳۲, ۰)	(۳۲, ۰, ۰)	بلوک کاتنولوشن
همان	همان	همان	همان	همان	همان	pooling
$\lfloor \frac{64}{16/\sqrt{\alpha}} \rfloor$	(۱۶, ۱۶, ۸)	(۳۲, ۳۲, ۰)	(۰, ۰, ۳۲)	(۰, ۶۴, ۰)	(۶۴, ۰, ۰)	بلوک کاتنولوشن
$\lfloor \frac{128}{16/\sqrt{\alpha}} \rfloor$	(۳۲, ۳۲, ۱۶)	(۶۴, ۶۴, ۰)	(۰, ۰, ۶۴)	(۰, ۱۲۸, ۰)	(۱۲۸, ۰, ۰)	بلوک کاتنولوشن
همان	همان	همان	همان	همان	همان	pooling
$\lfloor \frac{256}{16/\sqrt{\alpha}} \rfloor$	(۶۴, ۶۴, ۳۲)	(۱۲۸, ۱۲۸, ۰)	(۰, ۰, ۱۲۸)	(۰, ۲۵۶, ۰)	(۲۵۶, ۰, ۰)	بلوک کاتنولوشن
۶۴	(۶۴, ۰, ۰)	(۶۴, ۰, ۰)	(۶۴, ۰, ۰)	(۶۴, ۰, ۰)	(۶۴, ۰, ۰)	بلوک کاتنولوشن
۶۴	۶۴	۶۴	۶۴	۶۴	۶۴	global max-pooling
۳۲	۳۲	۳۲	۳۲	۳۲	۳۲	MLP
۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	بلوک softmax + MLP

جدول ۴: نمای کلی معماری‌های مدل مقایسه شده. تمام مدل‌ها از یک بخش کاتنولوشن روی نوار مؤبیوس، که با یک عملیات global max-pooling و یک طبقه‌بندی کننده MLP دنبال می‌شود، تشکیل شده‌اند. پنج CNN مستقل از جهت گیری در چند گانگی‌های ($m_{\text{irreps}}, m_{\text{params}}, m_{\text{sign-flip}}$) انواع میدان متفاوت هستند اما دقیقاً در تعداد کانال‌ها و تقریباً در تعداد پارامترها موافق هستند. ورودی‌های آنها، یعنی ارقام MNIST، به عنوان میدان‌های اسکالار فرض می‌شوند. تمام مدل‌های مستقل از جهت گیری در آخرین کاتنولوشن خود به ۶۴ میدان اسکالار ناوردای پیمانه نقشه می‌برند. عملیات pooling سراسری بعدی بنا برای ویژگی‌های ناوردای موقعیت و مستقل از مختصات تولید می‌کند. مدل مبنیا در نوع ارائه می‌شود که در ضربی $\sqrt{\alpha}$ آنها در تعداد کانال‌ها متفاوت هستند. نسخه اول $\alpha = 1$ فرض کرده و بنا برای همان تعداد کانال مدل‌های مستقل از مختصات را استفاده می‌کند. به دلیل کارایی پارامتر پایین‌تر CNN‌های غیرهموردا، این مدل تقریباً $\sqrt{\alpha}$ دو برابر پارامتر بیشتری استفاده می‌کند. برای مقایسه عادلانه نسخه دومی با $\alpha = 2$ و بنا برای تقریباً همان تعداد پارامتر مدل‌های هموردا اضافه می‌کیم.

ارقام آموزش جابجا شده ارقام آموزش متمرکز	خطای تست (%)	پارامترها	انواع میدان؛ ρ_s	مدل
			بدیهی sign-flip	بدیهی منظم
42.99 ± 2.65	1.97 ± 0.11	k ۱۵۰۱	□	CNN (channels)
43.68 ± 2.85	2.08 ± 0.10	k ۸۳۲	□	CNN (params)
1.60 ± 0.09	1.60 ± 0.10	k ۹۰۲	×	gauge CNN (scalar)
4.89 ± 0.26	4.27 ± 0.24	k ۸۲۰	×	gauge CNN (sign-flip)
1.23 ± 0.07	1.24 ± 0.08	k ۷۵۲	✓	gauge CNN (regular)
1.64 ± 0.12	1.65 ± 0.09	k ۷۵۲	×	gauge CNN (irreps)
1.42 ± 0.10	1.43 ± 0.09	k ۷۵۲	✓	gauge CNN (mixed)

جدول ۵: خطاهای تست معماری‌های مختلف شبکه، هر کدام میانگین گیری شده روی نوار ۳۲ اجرا. ستون "shifted train digits" عملکرد برای تنظیمی را گزارش می‌کند که در آن هم نمونه‌های آموزش و هم تست در مکان‌های تصادفی روی نوار قرار داده شده‌اند. در حالی که CNN‌های معرف RM-مستقل از مختصات نیستند، قادر به یادگیری تشخیص ارقام همانطور که از میدان جارچوب نایپوسته آنها دیده می‌شود هستند. تقریباً تمام CNN‌های مستقل از مختصات نتایج بهتری به طور قابل توجهی به دست می‌آورند. عملکرد پایین‌تر مدل sign-flip نشان می‌دهد که CNN‌های مستقل از مختصات ممکن است زمانی که انتخاب‌های بدی از انواع میدان یا غیر خطی‌ها انجام شود خیلی خوب کار نکنند. ارقام آموزش در ستون "centered train digits" همگی در همان موقعیت روی نوار قرار داده شده‌اند در حالی که ارقام تست به طور تصادفی جابجا شده باقی می‌مانند. CNN‌های مستقل از مختصات قادر به تعیین استنتاج خود بین هر دو وضعیت هستند که هموردایی ایزومنتری آنها را تأیید می‌کند. در نضاد، عملکرد CNN‌های معرف بدتر می‌شود که نشان‌دهنده فقدان هموردایی آنها تحت ایزومنتری‌ها است.

تمام مدل‌ها برای epoch ۲۰ با اندازه batch ۱۲۸ نمونه، کاهش وزن -10^{-6} و استفاده از بهینه‌ساز Adam [۶] آموزش داده می‌شوند. نرخ یادگیری اوایله -3×10^{-5} تا حد امکان بالا انتخاب شده بدون اینکه منجر به واگرایی فرآیند آموزش شود. یک برنامه کاهش نرخ یادگیری ثابت اندازه گام را هر epoch ۴ با ضربی ۲ کاهش می‌دهد.

جدول ۵ خطاهای تست حاصل از تمام مدل‌ها را نشان می‌دهد که هر کدام روی نوار ۳۲ اجرا میانگین گیری شده‌اند. تنظیم اول، که در ستون "shifted train digits" گزارش شده، از ارقام قرار داده شده تصادفی هم در مجموعه داده آموزش و هم تست استفاده می‌کند. هر دو نسخه CNN غیرهموردا تقریباً همان خطای تست را به دست می‌آورند. در تضاد، اکثر CNN‌های مستقل از مختصات نتیجه بهتری به طور قابل توجهی به دست می‌آورند. تنها مدلی که کاملاً بر میدان‌های sign-flip مبتنی است بدتر عمل می‌کند [۷] این نشان می‌دهد که ترکیب استفاده شده از میدان‌های sign-flip و غیرخطی‌ها انتخاب خوبی نیست، علی‌رغم اینکه مستقل از مختصات است. بنا برای انتخاب‌های بد میدان‌های ویژگی و غیرخطی‌ها دیده می‌شود که به عملکرد مدل آسیب می‌زند. مدلی که بهترین نتایج را به دست می‌آورد بر میدان‌های ویژگی منظم مبتنی است. این مشاهده با یافته‌های قبلی، به عنوان مثال مقایسه

سیستماتیک انواع میدان در [؟] همسو است. تفسیر ما از این نتیجه این است که قیدهای کرنل شامل میدان‌های ویژگی منتظم اساساً اجازه کanal‌های کرنل بدون قید را می‌دهند، با شرط اضافی اعمال دو کپی بازتاب یافته از آنها \square این را در تضاد با کرنل‌های R -راهبری پذیر بین میدان‌های CNN irrep باید درون یک کاتال کرنل متقارن باشند. مدل مبتنی بر میدان‌های اسکالر عملکرد میانی بین CNN‌های متعارف و مدل میدان منتظم به دست می‌آورد. هر دو مدلی که از انواع میدان مختلط استفاده می‌کنند عملکردی بین انواع میدان ترکیب دارند. می‌خواهیم مجدداً تاکید کنیم که مدل منتظم و مدل irrep دقیقاً شامل همان انواع میدان irrep هستند اما در پایه متفاوتی بیان شده‌اند. از آنجا که این تغییر پایه می‌تواند به عنوان بخشی از غیرخطی‌های اعمال شده تفسیر شود، این نتیجه نشان می‌دهد که غیرخطی‌های استفاده شده تأثیر عمده‌ای روی عملکرد مدل دارند. علی‌رغم اینکه در [؟] بررسی شده، منظره غیرخطی‌های هموردا هنوز تا حد زیادی قلمرو ناکشf شده‌ای است.

تنظیم آموزش دوم، که در ستون "centered train digits" گزارش شده، قابلیت مدل‌ها برای تعیین روی تمام حالت‌هایی که توسط ایزومنتری‌ها مرتبط هستند را بررسی می‌کند. تمام مدل‌ها روی ارقامی که در همان مکان روی نوار رخ می‌دهند آموزش داده می‌شوند اما روی ارقام جابجا شده تصادفی تست می‌شوند. همانطور که انتظار می‌رود، عملکرد CNN‌های متعارف در این تنظیم به طور قابل توجهی بدتر می‌شود \square این نشان می‌دهد که آنها واقعاً تحت ایزومنتری‌های نوار مؤبیوس هموردا نیستند. در تضاد، عملکرد اکثر CNN‌های مستقل از مختصات در انحراف معیار بدون تغییر باقی می‌ماند. علی‌رغم اینکه تنها نسبت به زیرگروه ایزومنتری‌هایی که به مضارب 4 پیکسل جابجا می‌شوند دقیقاً هموردا (ناوردا) هستند، ناوردایی ایزومنتری کامل مدل‌ها بنابراین به نظر خیلی خوب برقرار است. در حالی که مدل sign-flip در مقایسه با تنظیم آموزش اول بطور قابل توجهی بدتر می‌شود، هنوز تقریباً هموردای ایزومنتری است و بنابراین خیلی بهتر از CNN‌های متعارف عمل می‌کند.

در نتیجه، آزمایش‌های انجام شده ویژگی‌های ادعا شده CNN‌های مستقل از مختصات را تأیید کرده و برتری آنها نسبت به مدل‌های وابسته به مختصات را نشان می‌دهند.

بخش ۲.۱.۲ میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را بر حسب عبارات مختصاتی آن‌ها نسبت به انتخابی از کجیچ روی محله‌های محلی $U \subseteq M$ معرفی کرد. از آنجا که وجود گیج‌های سراسری به طور کلی از نظر توبولوژیکی مانع دارد، نمایش‌های مختصاتی سراسری میدان‌های ویژگی به طور کلی وجود ندارند. بخش ۲.۱.۲ این مسئله را با تجمع محتوای سراسری میدان‌های ویژگی از عبارات مختصاتی محلی آن‌ها نسبت به اطلاعی از کجیچ‌های M را پوشش می‌دهند، برطرف کرد. یک جایگزین ظرفیت، تعریف میدان‌های ویژگی سراسری در یک فرمالیسم انتزاعی و مستقل از مختصات بر حسب بندل‌های فیر است. تسهیم‌های بندل امکان بازیابی عبارات مختصاتی محلی میدان‌های ویژگی و لایه‌های شبکه را فراهم می‌کنند.

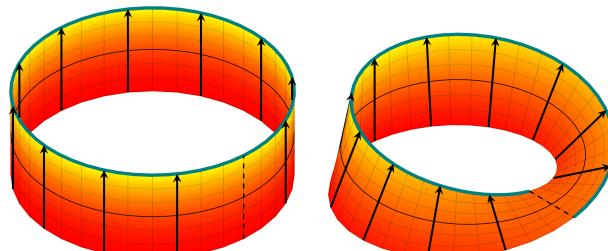
بخش‌های زیر توصیف سراسری و مستقل از مختصات شبکه‌های عصبی و فضاهای ویژگی از بخش ۲.۱.۲ را توسعه می‌دهند. بخش ۶ بندل‌های فیر، به ویژه بندل ماس، G -ساختارها و بندل‌های بردار ویژگی G -مرتبه را معرفی می‌کند. عملیات شبکه عصبی مانند تبدیل‌های میدان کرنل و کانولوشن‌های در بخش ۷ تعریف می‌شوند. بخش ۸ همودایی ایزومنتری این عملیات را بررسی می‌کند.

۶ بندل‌های مرتبه و میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات

میدان‌های کمیت‌های هندسی بر روی خمینه‌ها به عنوان برش‌هایی از بندل‌های فیر رسمی سازی می‌شوند (معادله (۱۴۷)). هر خمینه هموار به طور طبیعی مجذب به بندل ماس و بندل چارچوب خود است. انتخاب یک G -ساختار، که یک G -بندل از چارچوب‌های مرتع است، امکان تعریف بندل‌های بردار ویژگی G -مرتبه را فراهم می‌کند. فضاهای ویژگی شبکه‌های عصبی مستقل از مختصات ما فضاهایی از میدان‌های ویژگی هستند، یعنی برش‌هایی از این بندل‌های بردار ویژگی. بندل‌هایی در بخش ۲.۶ بندل ماس TM و بندل چارچوب FM را مورد بحث قرار می‌دهد. G -ساختارها، که زیرمجموعه‌هایی از چارچوب‌های مرتع هستند که توسط ساختار هندسی داده بر روی خمینه متمایز می‌شوند، در بخش ۳.۶ معرفی می‌شوند. G -بندل‌های مرتبه، از جمله بندل‌های بردار ویژگی A ، از G -ساختار ساخته می‌شوند. بخش ۴.۶ جزئیات تسهیم‌های محلی (گیج‌ها) GM , TM و A را ارائه می‌دهد، که مختصات را دوباره عறی می‌کند و فرمول‌بندی بخش ۳ را بازیابی می‌کند. تبدیل متقابل میدان‌های ویژگی تسهیم شده با ضرایب بردار ماس و چارچوب‌های مرتع تسهیم شده از این رواز فرمول‌بندی مستقل از مختصات از طریق G -بندل‌های مرتبه به دست می‌آید. بخش ۵.۶ انتقال‌دهنده‌های موازی بر روی بندل‌های مرتبه را مورد بحث قرار می‌دهد، به ویژه اینکه چگونه آن‌ها یکدیگر را القا می‌کنند. تمام مفاهیم ارائه شده در اینجا در هندسه دیفرانسیل به خوبی تثیت شده‌اند و به راحتی در ادبیات یافت می‌شوند [۱۰]. سهم ما ارائه یک توضیح جامع است که بین نظریه ریاضی و کاربرد آن در یادگیری عمیق هندسی پل می‌زنند.

۱.۶ مقدمه‌ای کوتاه بر کلاف‌های تاری

به طور شهودی، یک کلاف تاری را می‌توان فضایی در نظر گرفت که با گرفتن یک فضای دیگر موسوم به فضای پایه، در مورد ما خمینه M ، و چسباندن فضای دیگری F موسوم به تار، به هر یک از نقاط آن ساخته می‌شود. یک مثال بدینه، حاصلضرب مستقیم $M \times F$ خواهد بود. با این حال، تارها به طور کلی می‌توانند به روشنی بیچ خورده به هم متصل شوند، به طوری که کلاف حاصل از نظر توبولوژیکی با یک حاصلضرب متفاوت باشد. به عنوان مثال، فرض کنید فضای پایه دایره $S^1 = M$ و تار، پاره خط $[1, -1] = F$ باشد. حاصلضرب مستقیم آنها $S^1 \times S^1 = [-1, 1]$ یک استوانه را تشکیل می‌دهد؛ به شکل (۲۴) (چپ) مراجعه کنید. در مقابل، اگر تارها به گونه‌ای چسبانده شوند که پس از یک دور کامل حول دایره، "وارونه" شوند، نوار موبیوس به دست می‌آید که یک کلاف تاری غیربدینه است و از نظر توبولوژیکی با استوانه تفاوت دارد؛ به شکل (۲۴) (راست) مراجعه کنید. توجه داشته باشید که نوار موبیوس به صورت محلی شبیه به حاصلضرب مستقیم $U \times F$ از یک جزء خطی $S^1 \subseteq U$ با تار F است. همانطور که در ادامه بحث می‌شود، کلاف‌های تاری طبق تعریف همیشه



شکل ۲۴. یک استوانه و یک نوار موبیوس، هر دو کلاف، دایره S^1 را به عنوان فضای پایه دارند. از این‌جایی که می‌توان S^1 را به عنوان فضای پایه معرفی کرد، ساختار که می‌توان S^1 را به عنوان فضای پایه (خمینه) M برای کانولوشن در نظر می‌گیرد. در مقایسه با کلاف که می‌توان S^1 را به عنوان فضای پایه معرفی کرد، نوار موبیوس بودن، آن را به عنوان فضای پایه (خمینه) M برای کانولوشن در نظر می‌گرفتند. (شکل ۲۴) ملاوه که اینجا اینجا، ایجاد شاره کلیم که پیکان‌های شان داده شده در شکل فقط برای تأکید بر پیچش در نوار موبیوس هستند. آنها به معنای جهت چسباندن مانند نمودارهای چسباندن نیستند.

می‌توانند به صورت محلی به حاصلضرب‌های مستقیم بدیهی‌سازی شوند.

ما به کلاف‌های تاری علاقه‌مندیم زیرا آنها امکان توصیف سراسری

میدان‌ها روی خمینه‌ها را فراهم می‌کنند. به عنوان مثال، یک میدان باد روی کره $M = S^2$ یک میدان برداری مماس است که به هر نقطه p از M یک بردار مماس در $T_p M$ نسبت می‌دهد. کلاف تاری متناظر، کلاف مماس TM است که تمام فضاهای مماس را به هم متصل می‌کند و بنابراین به عنوان یک کلاف تاری با فضای پایه $S^2 = T_p M = M$ و تار $\mathbb{R}^d \cong T_p M$ شناسایی می‌شود. مشابه تارهای نوار موبیوس، فضاهای مماس یک خمینه خمیده به طور کلی به روشنی کانونی به هم متصل نیستند، بلکه ذاتاً نسبت به یکدیگر پیچ خورده‌اند. بنابراین، کلاف مماس به طور کلی از نظر توپولوژیکی با یک حاصلضرب متمایز است، یعنی $TM \times \mathbb{R}^d \not\cong M \times \mathbb{R}^d$. به مظور تعریف میدان‌های برداری ویژگی C -بعدی، ما بعداً کلاف‌هایی با فضای پایه M و فضاهای برداری ویژگی \mathbb{R}^c به عنوان تار در نظر خواهیم گرفت.

کلاف‌های تاری به طور کلی: به طور رسی، یک کلاف تاری ساختاری (E, M, π, F) است که از فضاهای توپولوژیکی E (فضای کلی)، M (فضای پایه) و F (تار نوعی) و یک نگاشت تصویر پیوسته و پوشای $E \rightarrow M$: $E \rightarrow M$ تشکیل شده است. یک کلاف تاری به صورت محلی بدیهی‌شدنی است، به این معنی که برای هر نقطه $p \in M$ یک همسایگی محلی $U \subseteq M$ از p وجود دارد که کلاف، محدود به آن، شبیه به یک حاصلضرب مستقیم $F \times U$ است. بدیهی بودن محلی توسط همسان‌ریختی‌ها $\Psi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$: $\Psi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ فرمول‌بندی می‌شود که نمودار جابجایی زیر را برآورده می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Psi} & U \times F \\ \pi \downarrow & \nearrow \text{proj}_1 & \\ M & \supseteq & U \end{array}, \quad (129)$$

یعنی،

$$\pi = \text{proj}_1 \circ \Psi, \quad (130)$$

که در آن $U \times F \rightarrow U \times F$: $U \times F \rightarrow U \times F$ نگاشت تصویر طبیعی روی عامل اول را نشان می‌دهد. کلافی که به صورت سراسری با حاصلضرب $M \times F$ همسان‌ریخت باشد، بدیهی نامیده می‌شود. کلاف‌ها اغلب به طور خلاصه به صورت $E \xrightarrow{\pi} M$ یا فقط E نوشته می‌شوند و تار نوعی و فضای پایه به طور ضمنی فرض می‌شوند. از آنجا که ما میدان‌های چارچوب هموار را در نظر می‌گیریم، فرض می‌کیم E ، M و F و خمینه‌های هموار و Ψ نگاشت‌های هموار (دیفُئومورفیسم) باشند.

بدیهی بودن محلی $E \xrightarrow{\pi} M$ ایجاب می‌کند که تصویر معکوس $\pi^{-1}(p)$ که تار روی $p \in M$ از هر نقطه $E_p \in \pi^{-1}(p)$ که تار روی p نامیده می‌شود، با تار نوعی $E_p \rightarrow F$ ψ_p نشان دیفُئومورف باشد. همانند بخش ۳، ما دیفُئومورفیسم‌هایی را که تارها روی نقاط مختلف را با تار نوعی یکی می‌دانند با F نشان می‌دهیم. بدیهی‌سازی‌های محلی در این صورت بر حسب این دیفُئومورفیسم‌ها به صورت زیر داده می‌شوند:

$$\Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F, \quad e \mapsto (\pi(e), \psi_{\pi(e)}(e)). \quad (131)$$

اگر تار نوعی F و تارهای E_p روی p ساختار اضافی داشته باشند، لازم است که دیفُئومورفیسم‌های $E_p \rightarrow F$: $E_p \rightarrow F$ این ساختار را حفظ کنند، یعنی یکریختی باشند.^{۴۰} به عنوان مثال، اگر F و E_p ساختار فضای برداری داشته باشند، آنگاه ψ_p باید خطی باشد.

به طور کلی، انتخاب خاص بدیهی‌سازی‌های محلی (یا دیفُئومورفیسم‌ها) روی U به طور کانونی توسط کلاف مشخص نمی‌شود. بنابراین باید انتخاب‌های مختلف (پیمانه‌ها) و توابع گذار (تیدیلات پیمانه) بین آنها را در نظر گرفت. برای دقیق کردن این موضوع، دو همسایگی بدیهی‌ساز همپوشان U^A و U^B را با بدیهی‌سازی‌های محلی Ψ^A و Ψ^B در نظر بگیرید. از معادله (۱۳۱) نتیجه می‌شود که گذار بین هر دو بدیهی‌سازی محلی روی $U^A \cap U^B \neq \emptyset$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\Psi^B \circ (\Psi^A)^{-1} : U^{AB} \times F \rightarrow U^{AB} \times F, \quad (p, f) \mapsto \left(p, [\psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}] (f) \right) =: (p, g_p^{BA} \triangleright f) \quad (132)$$

که در آن ما به طور ضمنی توابع گذار هموار را تعریف کردیم.^{۴۱}

$$g^{BA} : U^{AB} \rightarrow \text{Aut}(F), \quad p \mapsto g_p^{BA} := \psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1} \quad (133)$$

یک همسان‌ریختی یک یکریختی توپولوژیکی است، یعنی یک نگاشت پیوسته و معکوس‌پذیر بین فضاهای توپولوژیکی با معکوس پیوسته.^{۴۲} به طور جایگزین، فرض کنید F ساختاری دارد که توسط توابع گذار $E_p \rightarrow F$: $E_p \rightarrow F$ $\psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1} = g_p^{BA}(p) \in \text{Aut}(F)$ حفظ می‌شود (پاراگراف بعدی را ببینید). سپس بدیهی‌سازی‌های $E_p \rightarrow F$: $E_p \rightarrow F$ به طور سازگار ساختار F را روی E_p القا می‌کند و به طور خودکار یکریختی هستند.

گروه خودریختی‌های $\text{Aut}(F)$ از تمام نگاشت‌های معکوس‌پذیر و حافظ ساختار (یکریختی‌ها) از F به خودش تشکیل شده است. به عنوان مثال، اگر $F = \mathbb{R}^n$ یک فضای برداری باشد، گروه خودریختی، گروه خطی $\text{GL}(n)$ است که از تمام ماتریس‌های معکوس‌پذیر $n \times n$ تشکیل شده است.

$$\blacktriangleright : \text{Aut}(F) \times F \rightarrow F, \quad (g_p^{BA}, f) \mapsto g_p^{BA} \blacktriangleright f := [\psi_p^B \circ (\psi_p^A)^{-1}](f). \quad (134)$$

روی تار نوعی F مقایسه کنید با معادلات (۷) و (۶). برای اینکه بینیم عامل اول در معادله (۱۳۲) در واقع با همانی داده می‌شود، توجه داشته باشید که برای $[\text{proj}_1 \circ \Psi^B \circ (\Psi^A)^{-1}](p, f) = [\pi \circ (\Psi^A)^{-1}](p, f)$ ایجاب می‌کند: هر $f \in F$ و $p \in U^{AB}$ اعمال مکرر معادله (۱۳۰) گذار بین بدیهی‌سازی‌های مختلف توسط بسط (جابجایی) زیر از نمودار جابجایی در معادله (۱۲۹) به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id} \times g^{BA} \blacktriangleright & & \\ & \swarrow & \downarrow \pi^{-1}(U^{AB}) & \searrow & \\ U^{AB} \times F & \xleftarrow{\Psi^A} & & \xrightarrow{\Psi^B} & U^{AB} \times F \\ \text{proj}_1 \searrow & & \pi \downarrow & & \text{proj}_1 \swarrow \\ & & U^{AB} & & \end{array} \quad (135)$$

محدود به یک نقطه $\varphi \in U^{AB}$ و برای حالت خاص کلاف مماس (که در ادامه تعریف می‌شود)، این نمودار با نمودار در معادله (۸) و نسخه گرافیکی آن در شکل ۷ مطابقت دارد.

طبق تعریف، توابع گذار در معادله (۱۳۳) سه شرط زیر را برآورده می‌کنند:^{۴۲}

$$i) \quad g_p^{AA} = e \quad \forall p \in U^A \quad (136)$$

$$ii) \quad g_p^{BA} = (g_p^{AB})^{-1} \quad \forall p \in U^A \cap U^B \quad (137)$$

$$iii) \quad g_p^{CB} g_p^{BA} = g_p^{CA} \quad \forall p \in U^A \cap U^B \cap U^C \quad (\text{شرط همزنجیر}) \quad (138)$$

طبق قضیه ساخت کلاف تاری، هر کلاف تاری را می‌توان به طور کامل و سراسری بر حسب یک اطلس $\mathcal{A} = \{(U^X, \Psi^X) \mid X \in \mathfrak{X}\}$ از بدیهی‌سازی‌های محلی (U^X, Ψ^X) مشخص کرد که M را می‌پوشاند و توابع گذار آنها معادلات (۱۳۶)، (۱۳۷) و (۱۳۸) را برآورده می‌کنند (در اینجا \mathfrak{X} یک مجموعه اندیس را نشان می‌دهد). می‌توان بدیهی‌سازی‌های منفرد را به گونه‌ای تصور کرد که توسط نگاشت‌های گذار "به هم چسبیده‌اند" که در شکل ۲۵ به تصویر کشیده شده است. توجه داشته باشید که این مشابه توصیف سراسری یک خمینه بر حسب یک اطلس از چارت‌های محلی است.

کلاف‌های برداری: چندین مفهوم خاص تر از کلاف‌های تاری وجود دارد که ساختار ریاضی اضافی دارند. یک مثال مهم کلاف‌های برداری هستند که همانطور که از نامشان پیداست، کلاف‌هایی هستند که از فضاهای برداری متصل به یک خمینه تشکیل شده‌اند. به طور رسمی، یک کلاف برداری (حقیقی) از رتبه k یک کلاف $(E, M, \pi, \mathbb{R}^k)$ با تار نوعی $E_p \cong \mathbb{R}^k$ و تارهای \mathbb{R}^k روی p است، به طوری که بدیهی‌سازی‌های محلی به ازی هر تار، یکریختی‌های فضای برداری (نگاشت‌های خطی) هستند. توابع گذار $\psi_p^B = \text{GL}(k)$ در این صورت مقادیری در گروه خطی عام می‌گیرند.

به طور جایگزین، با داشتن تار \mathbb{R}^k و یک اطلس از بدیهی‌سازی‌های محلی که توابع گذار آن مقادیری در $\text{GL}(k)$ می‌گیرند، یک ساختار فضای برداری برای E_p با قرار دادن

$$\alpha v + \beta w := (\psi_p^A)^{-1}(\alpha \psi_p^A(v) + \beta \psi_p^A(w)) \quad \forall v, w \in E_p, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (139)$$

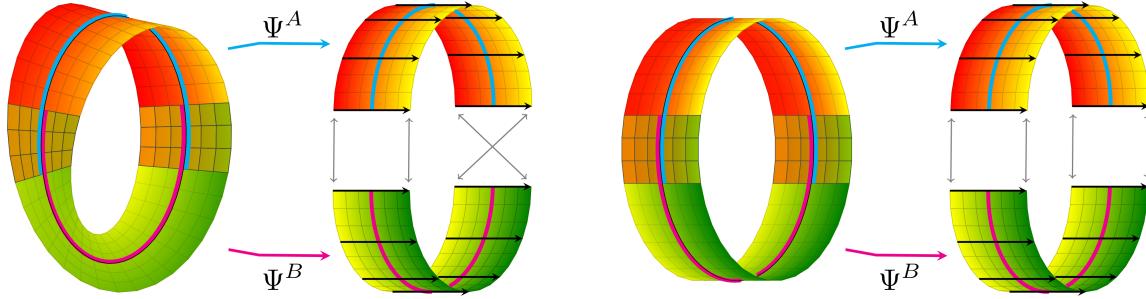
برای یک پیمانه دلخواه $\psi_p^A : E_p \rightarrow \mathbb{R}^k$ از اطلس $\text{GL}(k)$ القا می‌شود. اینکه ساختار فضای برداری به طور سازگار تعریف شده است واضح است زیرا

$$\begin{aligned} & (\psi_p^B)^{-1}(\alpha \psi_p^B(v) + \beta \psi_p^B(w)) \\ &= (\psi_p^A)^{-1}((g_p^{BA})^{-1}(\alpha g_p^{BA} \psi_p^A(v) + \beta g_p^{BA} \psi_p^A(w))) \\ &= (\psi_p^A)^{-1}(\alpha \psi_p^A(v) + \beta \psi_p^A(w)) \end{aligned} \quad (140)$$

همان نتیجه را به دست می‌دهد. توجه داشته باشید که مرحله آخر نیازمند خطی بودن $g_p^{BA} \in \text{GL}(d)$ بود. پیمانه‌های ψ_p^B یا ψ_p^A در این صورت به طور خود کار یکریختی‌های فضای برداری هستند.

مهم‌ترین مثال‌ها برای ما کلاف مماس و کلاف‌های برداری ویژگی هستند که در بخش‌های بعدی معرفی می‌شوند.

۴۲ شرایط (i) و (ii) از شرط همزنجیر (iii) نتیجه می‌شوند اما اغلب به طور صریح بیان می‌شوند.



شکل ۲۵: توصیف استوانه و نوار موبیوس بر حسب اطلس‌های G که هر کدام از دو بدیهی سازی محلی تشکیل شده‌اند. چپ: از آنجا که استوانه یک کلاف بدیهی است، تمام توابع گذار را می‌توان به عنوان نگاشت‌های همانی انتخاب کرد به طوری که گروه ساختار به گروه بدیهی $G = \{e\}$ کاهش یابد. برخلاف وضیت به تصویر کشیده شده، امکان انتخاب یک بدیهی سازی سراسری و واحد وجود دارد. راست: توبولوژی نوار موبیوس توابع گذار را در یکی از همپوشانی‌ها مجبور می‌کند که تارها را به روشنی وارونه به هم بچسبانند. بنابراین گروه ساختار را نمی‌توان بیشتر از گروه $G = \mathcal{R}$ که بازتاب تارها را مدل می‌کند، کاهش داد. بنابراین بدیهی سازی های سراسری برای نوار موبیوس وجود ندارد. توجه داشته باشید که پیکان‌های روی نوار موبیوس را باید با پیکان‌های نمودارهای چسباندن اشتاب گرفت، یعنی پیچش، بردارها را در یکی از برش‌ها در جهت مخالف می‌چسباند.

G-کلاف‌ها بسته به توبولوژی کلاف، ممکن است بتوان یک اطلس از بدیهی سازی‌های محلی \mathcal{X} تعریف $\mathcal{A}^G = \{(U^X, \Psi^X) \mid X \in \mathcal{X}\}$ کرد که توابع گذار آن به یک زیرگروه $G \leq \text{Aut}(F)$ محدود شده‌اند، یعنی برآورده می‌کنند:

$$g_p^{BA} \in G \quad \text{و تمام } A, B \in \mathcal{X} \text{ برای } p \in U^A \cap U^B. \quad (141)$$

هر چنین اطلسی، اطلس G نامده می‌شود و G به عنوان گروه ساختار کلاف شناخته می‌شود. دو اطلس G مختلف معادل (یا سازگار) هستند، اگر اجتماع آنها دوباره یک اطلس G باشد. کلافی که به یک کلاس همارزی از اطلس‌های G مجهز شده باشد، به عنوان یک G-کلاف شناخته می‌شود.^{۴۳}

توبولوژی یک کلاف تعیین می‌کند که گروه ساختار آن تا چه حد قابل کاهش است. به عنوان مثال، استوانه در شکل ۲۵ (یا هر کلاف بدیهی دیگر) را می‌توان با یک اطلس $\{e\}$ توصیف کرد که فقط از بدیهی سازی‌های محلی با توابع گذار همانی تشکیل شده است. این متناظر با کاهش به یک گروه ساختار بدیهی $G = \{e\}$ است. در مقابل، توبولوژی پیچ خورده نوار موبیوس ایجاد می‌کند که هر اطلس G شامل توابع گذاری باشد که تارها را با جهت‌گیری وارونه به هم بچسبانند؛ به شکل ۲۵ (راست) مراجعه کنید. بنابراین گروه ساختار نوار موبیوس را نمی‌توان بیشتر از گروه $G = \mathcal{R}$ که بازتاب تارها را مدل می‌کند، محدود کرد. روی خمینه‌های ریمانی، گروه ساختار کلاف مماس TM و در نتیجه کلاف‌های برداری ویژگی وابسته، به طور کلی نمی‌تواند بیشتر از یک گروه ساختار متعممد d کاهش یابند، که این کار روی های ۱۰۰ مستقل از مختصات را در وهله اول انجام‌نمد کرد.

کلاف‌های G وابسته: دو G-کلاف را وابسته به یکدیگر می‌نامند اگر دارای فضای پایه، گروه ساختار و مهمتر از همه، توابع گذار یکسان باشند. کلاف‌های وابسته (E, M, π, F) و $(\tilde{E}, M, \tilde{\pi}, \tilde{F})$ با گروه ساختار G ممکن است در تارهای نوعی خود F و \tilde{F} و بنابراین در عمل چپ \blacktriangleright و گروه G بر روی تار مربوطه متفاوت باشند. با داشتن دو اطلس $G = \{U^X, \Psi^X \mid X \in \mathcal{X}\}$ از کلاف‌ها روی همان پوشش باز از M ، شرط همارزی توابع گذار (تا حد عمل‌های چپ مختلف) به این معنی است:

$$\Psi^B \circ (\Psi^A)^{-1} = (\text{id} \times g^{BA} \blacktriangleright) \iff \tilde{\Psi}^B \circ (\tilde{\Psi}^A)^{-1} = (\text{id} \times g^{BA} \tilde{\blacktriangleright}) \quad (142)$$

به طور شهودی، تارهای نوعی F و \tilde{F} از E و \tilde{E} به روشنی یکسان روی M به هم چسیده‌اند.

یک مثال مهم از کلاف‌هایی که به صورت $\text{GL}(d)$ -وابسته به یکدیگر هستند، کلاف مماس TM . هر کلاف تانسوری دیگر $T_s^r M$ و کلاف چارچوب مماس FM هستند (اولی و آخری در بخش ۲.۶ معرفی شده‌اند). وابستگی این کلاف‌ها در این واقعیت منعکس می‌شود که مؤلفه‌های آنها نسبت به پایه‌های انتخاب شده مطابق با همان تبدیل پیمانه تبدیل می‌شوند (متلاً ژاکوبین $g_{\mu\nu}^{BA} = \frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\nu^A}$ ، به پیوست آ مراجعه کنید). عمل‌های مختلف یک تبدیل پیمانه بر روی تارهای مربوطه در این مثال به عنوان تبدیل پادروردا (TM ، تبدیل هموردا (T^*M)، تبدیل r -بار پادروردا ($T_g^r M$) و دوباره، تبدیل هموردا (FM))، به ترتیب، مشخص می‌شوند. مابعداً ساختار G ، کلاف مماس GM و کلاف‌های برداری ویژگی \mathcal{A} را به عنوان کلاف‌های G وابسته معرفی خواهیم کرد. وابستگی در این مورد از این واقعیت ناشی می‌شود که تغییرات چارچوب‌های GM منجر به تبدیل همزمان ضرایب بردار مماس و ضرایب بردار ویژگی می‌شود.

^{۴۳} کلاس همارزی تضمین می‌کند که هیچ یک از اطلس‌های G معادل، برتری ندارند. به طور معادل، می‌توان اطلس G ماکسیمال را در نظر گرفت که به عنوان اطلس G منحصر به فرد تعریف می‌شود که هر اطلس G سازگار دیگری در آن موجود است. توجه داشته باشید که یک کلاس همارزی از اطلس‌های G به طور منحصر به فرد توسط یک اطلس G داده شده، ایجاد می‌شود.

می خواهیم اشاره کنیم که هر کلاف وابسته‌ای علاوه بر این به یک کلاف اصلی G منحصر به فرد (که در پاراگراف بعدی تعریف می‌شود) وابسته است. در مقابل، هر کلاف وابسته را می‌توان از کلاف اصلی وابسته مربوطه ساخت \square مانند این ساختار به طور گسترده برای تعریف کلاف‌های برداری ویژگی در بخش ۳.۶ استفاده خواهیم کرد.

کلاف‌های اصلی G : یک کلاف تاری $(P, M, \pi, G, \triangleleft)$ را یک کلاف اصلی (هموار) (P, M, π, G) می‌نامند اگر ۱) تار نوعی آن با گروه ساختار آن G منطبق باشد و ۲) به یک عمل راست (هموار) $\triangleleft : P \times G \rightarrow G$, $(p, g) \mapsto p \triangleleft g$ (۱۴۳)

تجهیز باشد که تارها را حفظ می‌کند، یعنی،

$$\pi(p \triangleleft g) = \pi(p) \quad \forall p \in P, g \in G \quad (144)$$

و به صورت تعدی پذیر و آزاد روی آنها عمل می‌کند.^{۴۴} دو شرط آخر (تعدی پذیری و آزادی) با هم ایجاب می‌کنند که تارهای یک کلاف اصلی G -تورسor (یا فضاهای همگن اصلی G) باشند، که به طور شهودی به این معناست که آنها "شیوه به G " هستند اما بدون هیچ مبدأ یا عنصر همانی مشخصی ارائه می‌شوند.^{۴۵} بدینهی سازی‌های محلی $\pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ باشد، یعنی همورای راست G باشند:

$$\Psi(p \triangleleft g) = \Psi(p)(\text{id} \times \cdot \cdot g) \quad \forall p \in P, g \in G, \quad (145)$$

که در آن g -ضرب راست کانونی با عناصر گروه روی تار نوعی G را نشان می‌دهد. این، نمودار در معادله (۱۲۹) را به نمودار زیر بسط می‌دهد:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi} & U \times G \\ \downarrow \triangleleft g & & \uparrow (\text{id} \times \cdot \cdot g) \\ \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi} & U \times G \\ \downarrow \pi & \nearrow \text{proj.} & \\ U & & \end{array}, \quad (146)$$

که لازم است برای هر $g \in G$ جابجا باشد.

کلاف‌های اصلی G برای مطالعه کلاف‌های عمومی G از اهمیت زیادی برخوردارند. به طور خاص، هر کلاف (E, M, π_E, F) با یک کلاف اصلی G (منحصر به فرد) $(P, M, \pi_P, G, \triangleleft)$ را می‌توان از P ساخت. در بخش‌های بعدی، ما کلاف چارچوب GM و FM را به عنوان نمونه‌های خاصی از کلاف‌های اصلی ارائه خواهیم داد، که ادعاهای مطرح شده در اینجا را کمتر انتزاعی کرده و برخی از پیامدهای آنها را آشکار می‌سازد.

برش‌ها و میدان‌ها: میدان‌های هموار با مقدار F روی M به عنوان برش‌های هموار σ از یک کلاف E با تار $F \xrightarrow{\pi} M$ باشند. یک برش هموار در این صورت به عنوان یک نگاشت هموار $\sigma : M \rightarrow E$ تعریف می‌شود که به هر نقطه p از M را به نقطه $\sigma(p)$ از E برسورد. در بخش‌های پایه یک عمل راست $p \circ \sigma = \text{id}_M$ نسبت می‌دهد، یعنی شرط $\pi \circ \sigma = \text{id}_M$ کند، که نمودار جابجاگایی زیر آن را به تصویر می‌کشد:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\sigma} & E & \xrightarrow{\pi} & M \\ & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{id}_M} & & & \uparrow \end{array} \quad (147)$$

یک مثال مهم میدان‌های برداری مماس هستند که به عنوان برش‌های $v : M \rightarrow TM$ مدل می‌شوند که هر نقطه p در M یک بردار مماس $v(p) \in T_p M$ نسبت می‌دهند. توجه داشته باشید که نگاشت تصویر، به طبیعت خود، معکوس ناپذیر است، به طوری که $\pi \circ v \neq \text{id}_M$. بنابراین نمودار زیر به طور کلی جابجا نمی‌شود:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\pi} & M & \xrightarrow{\sigma} & E \\ & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{id}_E} & & & \uparrow \end{array} \quad (148)$$

یک عمل گروهی (راست) $x \cdot g \mapsto x.g$ برای هر $x \in X$ و $g \in G$ یکی باشد به طوری که $x \cdot (y \cdot g) = (x \cdot y) \cdot g$ می‌شود. آن را (نقطه تابت) آزاد می‌نامند اگر برای هر $x \in X$ و $y \in G$ $x \cdot y = y \cdot x$ باشد، یعنی اگر تنها عمل عنصر همانی e را ناواردا باقی بگذارد. توجه داشته باشید که همین گزاره‌ها را می‌توان برای عمل‌های چپ نیز بیان کرد.^{۴۶} به طور رسمی، یک G -تورسor (راست) P شرط $P \times G \cong P \times P$ باشد، یعنی $(p, g) \mapsto (p, g)$ داده می‌شود. این شرط ایجاب می‌کند که یک عنصر گروهی منحصر به فرد وجود داشته باشد که هر دو نقطه در تورسor را به هم متصل کند.

در مواردی که در ادامه یک نمودار جابجا نباشد، که بیشتر در مورد برش‌ها صدق می‌کند، ما این موضوع را با افزودن نماد \otimes به صورت بصری تأکید می‌کیم. برش‌های هموار لزوماً به صورت سراسری وجود ندارند اما همیشه می‌توانند روی همسایگی‌های بدیهی ساز $M \subseteq U$ تعریف شوند. از طریق یک بدیهی سازی محلی، یک برش محلی را می‌توان با یک تابع $s : U \rightarrow F$ با قرار دادن $(\sigma(p)) = \psi_p(s(p))$ برای $p \in U$ یکی دانست. ما فضای برش‌های سراسری را با (E, Γ) نشان می‌دهیم در حالی که فضای برش‌های محلی به صورت (U, E) نوشته می‌شود.

ریخت‌های کلاف: ریخت‌ها (نگاشت‌ها) در رده کلاف‌های تاری، ریخت‌های کلاف یا نگاشت‌های کلاف نامیده می‌شوند. آنها با دیفوگورفیسم‌های صرف بین فضاهای کلی تفاوت دارند، زیرا علاوه بر آن ملزم به حفظ ساختار کلاف هستند، یعنی تارها را به تارها نگاشت کنند. به طور کلی، یک نگاشت کلاف هموار بین دو کلاف تاری هموار (E, M, π, F) و $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{F})$ یک نگاشت هموار $\phi : E \rightarrow \tilde{E}$ است، به طوری که یک نگاشت هموار دوم $\hat{\phi} : M \rightarrow \tilde{M}$ بین فضاهای پایه وجود دارد که شرط $\hat{\phi} \circ \pi = \tilde{\pi} \circ \phi$ را برآورده می‌کند، یعنی نمودار زیر باید جابجا باشد:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & \tilde{E} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\ M & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \tilde{M} \end{array} \quad (149)$$

نگاشت روی فضای پایه تضمین می‌کند که ریخت کلاف، تارها در $p \in M$ را به تارهایی در $\phi(p) \in \tilde{M}$ نگاشت می‌کند به جای اینکه آنها را "از هم بگسلند". تعیین‌های واضح به یکریختی‌های کلاف و خودریختی‌های کلاف وجود دارد. به عنوان مثال، یکریختی‌های کلاف ایجاب می‌کنند که ϕ و $\hat{\phi}$ معکوس‌پذیر باشند، یعنی دیفوگورفیسم باشند (و ساختارهای دیگر را در صورت تعریف حفظ کنند).

نوع خاص نگاشت کلاف تحت بررسی را می‌توان با خواستن الزامات اضافی محدودتر کرد. یک ریخت M کلاف بین دو کلاف (E, M, π, F) و $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{F})$ روی همان فضای پایه M ملزم است که تارهای E_p روی $p \in M$ را به تارهای \tilde{E}_p روی همان نقطه p نگاشت کند، یعنی $\hat{\phi} = \text{id}_M$. بر حسب یک نمودار جابجایی این به صورت زیر خوانده می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & \tilde{E} \\ \pi \searrow & & \swarrow \tilde{\pi} \\ & M & \end{array} \quad (150)$$

از این دیدگاه، ما بدیهی‌سازی کلاف در نمودار (۱۲۹) را به عنوان یک ریخت U کلاف Ψ بین کلاف‌های بدیهی $(U, \pi^{-1}(U))$ و $U \times F$ روی U شناسایی می‌کیم.

اگر تارها ساختار اضافی داشته باشند، معمولاً لازم است که این ساختار توسط نگاشت کلاف حفظ شود. به عنوان مثال، ریخت‌های کلاف برداری ϕ بین $(E, M, \pi, \mathbb{R}^k)$ و $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \mathbb{R}^{\tilde{k}})$ ملزم به حفظ ساختار فضای برداری روی تارها هستند و بنابراین به نگاشت‌های خطی به ازای هر تار $\phi|_{E_p}$ محدود می‌شوند. مشابهًا، ریخت‌های کلاف اصلی ملزم به حفظ ویژگی تارها به عنوان تورسورهای راست G هستند، یعنی هموردادی راست G باشند. با داشتن دو کلاف اصلی $(P, M, \pi, G, \triangleleft)$ و $(\tilde{P}, \tilde{M}, \tilde{\pi}, \tilde{G}, \tilde{\triangleleft})$ و یک هم‌ریختی گروهی $\theta : G \rightarrow \tilde{G}$ ، یک ریخت کلاف اصلی ملزم است که نمودار زیر را برای هر $g \in G$ جابجا کند:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\phi} & \tilde{P} \\ \triangleleft g \uparrow & & \uparrow \tilde{\triangleleft} \theta(g) \\ P & \xrightarrow{\phi} & \tilde{P} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\ M & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \tilde{M} \end{array} \quad (151)$$

بدیهی‌سازی محلی کلاف‌های اصلی در نمودار (۱۴۶) بدین ترتیب به عنوان یک ریخت U کلاف اصلی Ψ بین $(U, \pi^{-1}(U))$ و $U \times G$ دیده می‌شود که در آن هم‌ریختی گروهی $\theta : G \rightarrow G$ ، $g \mapsto \theta(g)$ با همانی روی G داده می‌شود.

ریخت‌های کلاف از اهمیت ویژه‌ای در بخش ۸ برخوردارند، جایی که آنها تبدیل کلاف‌ها و میدان‌های ویژگی را تحت عمل ایزوتمتری‌ها توصیف می‌کنند. ثابت می‌شود که های \square مستقل از مختصات نسبت به این عمل‌ها بر روی کلاف‌ها و برش‌هایشان همودا هستند. برای پیش‌زمینه بیشتر در مورد کلاف‌های تاری به طور کلی به مراجع [؟ ؟ ؟ ؟ ؟] مراجعه می‌کنیم.

۲.۶ کلاف مماس TM و کلاف چارچوب FM

هر خمینه دیفرانسیل پذیر (و بنابراین هر خمینه ریمانی) M به طور کانونی به کلاف مماس خود TM و کلاف چارچوب (عام) FM مجهر است، که از تمام چارچوب‌های مرجع محلی فضاهای مماس تشکیل شده است. این دو کلاف به طور طبیعی به یکدیگر وابسته‌اند و گروه ساختار آنها به طور پیش‌نی توپوت $\text{Aut}(\mathbb{R}^d) = \text{GL}(d)$ داده می‌شود. این واقعیت با "بازسازی" TM از TM از FM از TM کلاف یک ساختار کلاف وابسته تأثیر خواهد شد که بعداً به ما امکان می‌دهد کلاف‌های برداری ویژگی وابسته را تعریف کنیم. برای جدا کردن واضح مفاهیم معزوفی شده و فرضیات انجام شده، ما در اینجا TM و TM را به عنوان کلاف‌های $GL(d)$ توصیف خواهیم کرد. بخش بعدی ۳.۶ علاوه بر این یک G -ساختار را بر TM و TM تحمیل خواهد کرد که آنها را به عنوان G -کلاف‌ها تثیت می‌کنند. در حالی که کلاف‌ها طبق تعریف به صورت محلی بدیهی شدنی هستند، ما در حال حاضر بدیهی‌سازی‌های خاص را مسلم فرض می‌کنیم و تعریف دقیق آنها را به بخش ۴.۶ موکول می‌کنیم.

کلاف مماس TM : هر خمینه هموار M با مجموعه‌ای از فضاهای مماس $T_p M \cong \mathbb{R}^d$ همراه است. اجتماع مجزای آنها ^{۴۹}

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M, \quad (152)$$

به همراه یک ساختار هموار و نگاشت تصویر داده شده به طور کانونی، یک کلاف تاری هموار را تعریف می‌کند که به عنوان کلاف مماس شناخته می‌شود. نگاشت تصویر $M \rightarrow TM \rightarrow \pi_{TM}^{-1}(v)$ در این صورت با انتخاب بدبیهی $p \in T_p M$ برای $v \in \pi_{TM}^{-1}(v)$ داده می‌شود. همانطور که در پیوست آ استنتاج شده است، بدبیهی‌سازی‌های محلی Ψ_{TM} از کلاف مماس به طور کانونی توپوت چارت‌های \mathbb{R}^d در $U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^d$ از خمینه القا می‌شوند. بنابراین می‌توانیم بدبیهی شدنی بودن TM را مسلم فرض کرده و بحث در مورد آنها را به بخش ۴.۶ موکول کنیم. یک ساختار هموار روی TM از ساختار هموار M از طریق بدبیهی‌سازی‌های فرق‌الذکر از چارت‌ها القا می‌شود. ما از جزئیات فنی این ساختار صرف نظر کرده و خوانته علاقمند را به مراجع [؟ ؟] ارجاع می‌دهیم.

کلاف مماس تعریف شده بدین ترتیب یک کلاف برداری است زیرا تار نوعی آن \mathbb{R}^d یک فضای برداری مماس، که به عنوان مثال یک جریان روی M را توصیف می‌کنند، به عنوان برش‌های $TM \rightarrow TM \rightarrow \sigma$ از کلاف مماس فرمول بندی می‌شوند. برش‌های سراسری هموار از کلاف‌های برداری همیشه وجود دارند؛ یک مثال استاندارد برش صفر است که بردار صفر از $T_p M$ را به هر $p \in M$ نسبت می‌دهد. می‌خواهیم تأثیر کنیم که فضاهای مماس \square و بنابراین کلاف مماس \square بدون ارجاع به چارچوب‌های مختصاتی تعریف می‌شوند، به طوری که برش‌ها میدان‌های برداری را به روشی مستقل از مختصات توصیف می‌کنند.

پس از معرفی کلاف چارچوب مماس FM در ادامه، به کلاف مماس و ساختار صریح آن به عنوان کلاف $(GL(d))$ -وابسته باز خواهیم گشت که بر ماهیت مستقل از مختصات آن تأثیر می‌کند. در بخش ۳.۶ ۳.۶ ماهیت مماثله TM را به عنوان یک G -ساختار GM خواهیم ساخت.

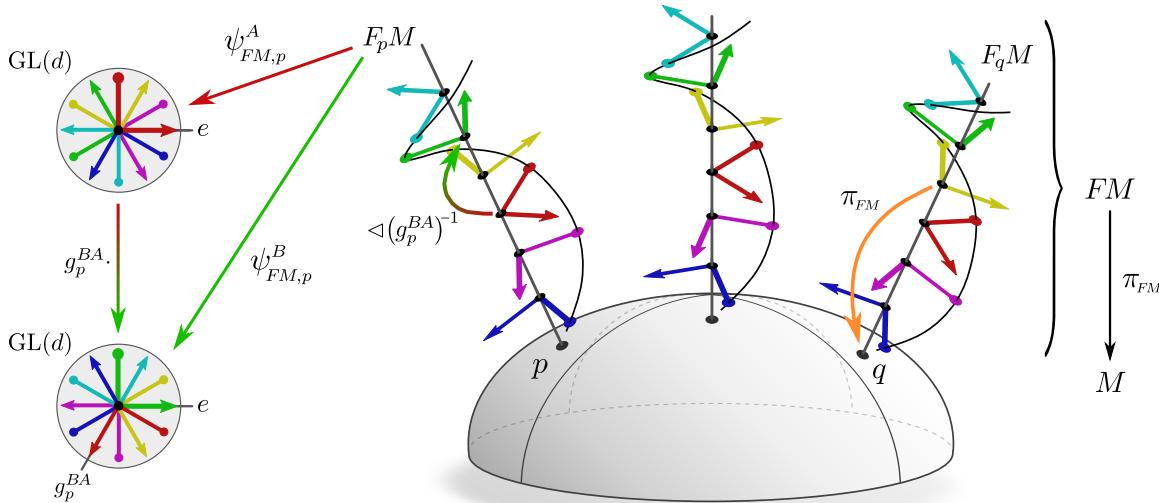
کلاف چارچوب FM : فضای چارچوب‌های مرجع محلی تمام فضاهای مماس $T_p M$ ، (کلاف) چارچوب (مماس) را تشکیل می‌دهد. فضاهای چارچوب‌های مرجع (پایه‌های مربوط) فضاهای مماس منفرد $T_p M$ را در نظر بگیرید:

$$F_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ است } T_p M \text{ یک پایه از } \right\} \quad (153)$$

کلاف چارچوب به عنوان اجتماع مجزای آنها $F_p M := \coprod_{p \in M} F_p M$ که چارچوب‌ها در $FM := \coprod_{p \in M} F_p M$ به همراه نگاشت تصویر π_{FM} را به می‌فرستد و یک ساختار هموار القا شده از TM تعریف می‌شود. تار نوعی کلاف چارچوب، گروه خطی عام $\text{GL}(d) \cong F_p M$ است، یعنی گروه ماتریس‌های معکوس‌پذیر $d \times d$ که سطون‌های مستقل خطی آن را می‌توان به عنوان تعریف کننده یک چارچوب از \mathbb{R}^d در نظر گرفت. از آنجا که کلاف چارچوب از کلاف مماس ساخته شده است، بدبیهی‌سازی‌های محلی آن Ψ_{FM} از $\text{GL}(d)$ به $U \times \text{GL}(d) \rightarrow U$ توپوت است. $\Psi_{FM}^{-1}(U) \rightarrow U \times \text{GL}(d)$ بلافاصله از بدبیهی‌سازی‌های TM القا می‌شوند؛ به بخش ۴.۶ مراجعه کنید. شکل ۲۶ تفسیری گرافیکی از کلاف چارچوب را نشان می‌دهد.

برش‌های هموار محلی $U \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U)$ از کلاف چارچوب، نقاط $p \in U$ را به چارچوب‌هایی در $F_p M$ نگاشت می‌کنند. آنها میدان‌های چارچوب هموار محلی را تعریف می‌کنند، یعنی انتخاب‌های هموار متغیر از چارچوب‌های مرجع برای $T_p M$ ، $p \in U$ که در شکل ۸ به

^{۴۹} اجتماع مجزای $\{ (p, v) \mid v \in T_p M \} = \bigcup_{p \in M} \{ (p, v) \mid v \in T_p M \}$ از فضاهای مماس را می‌توان به گونه‌ای تصور کرد که "به یاد می‌آورد" یک بردار سرچشمه می‌گیرد، که برای تعریف نگاشت تصویر π_{TM} ضروری است.



شکل ۲۶: تفسیری گرافیکی از کلاف چارچوب FM روی M و بدینهی سازی های آن. تار $F_p M$ روی p به عنوان فضای تمام چارچوب های مرجع ممکن $T_p M$ تعریف می شود. تمام چارچوب ها در $F_p M$ توسط نگاشت تصویر π_{FM} به ممان نقطه p در M نگاشته می شوند که تار به آن متصل است. تارهای $F_p M$ با $GL(d)$ یکریخت هستند، اما بدون مبدأی ارائه می شوند که یک انتخاب مرجع از چارچوب مرجع را متمایز کند. پیمانه های $(GL(d), F_p M \rightarrow GL(d))$ یا $\psi_{FM,p}^A$ یا $\psi_{FM,p}^B$ که در بخش ۴.۶ در ادامه معرفی می شوند، تارها را با $GL(d)$ یکی می دانند و در نتیجه یک چارچوب مرجع را مشخص می کنند. پیمانه های مختلف با تبدیلات پیمانه $(GL(d), g_p^{BA})$ در هم مرتبط هستند. با خواندن را در مورد دو تصور غلط احتمالی هشدار دهیم؛ اولاً، چارچوب ها در تارهای مختلف به طور پیشینی به روی کانونی با یکدیگر یکی داشته نمی شوند، چیزی که ممکن است رنگ های اضافی نشان دهد. ثانیاً، برای به حداقل رساندن شلوغی، تصویر فقط چارچوب های راست گرد و متعامد را به جای تمام چارچوب های مرجع ممکن نشان می دهد. همانطور که در بخش بعدی ۳.۶ بحث خواهیم کرد، چارچوب های متعامد و راست گرد شان داده شده، متناظر با یک G -ساختار GM (یک زیرکلاف اصلی G از FM) برای گروه ساختار $(G = SO(2))$ خواهد بود.

تصویر کشیده شده است. همانطور که در معادله (۴) استدلال شد، یک انتخاب از میدان چارچوب روی U یا یک انتخاب از پیمانه یا بدینهی سازی محلی روی U معادل است. این ایجاد می کند که میدان های چارچوب سراسری تنها در صورتی وجود داشته باشد که $\bar{F}M$ و در نتیجه TM بدینهی باشند. ما این همارزی را با عمق بیشتری در بخش ۴.۶ مورد بحث قرار خواهیم داد.

یک عمل راست تعدی پذیر و آزاد بر روی تارهای منفرد $F_p M \cong GL(d)$ از کلاف چارچوب به طور طبیعی توسط تغییر چارچوب ها که در معادله (۱۰) تعریف شده است، داده می شود [۴]. عمل متناظر

$$\triangleleft : FM \times GL(d) \rightarrow FM, \quad ([e_i]_{i=1}^d, g) \mapsto [e_i]_{i=1}^d \triangleleft g := \left[\sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \quad (154)$$

روی FM به عنوان یک کل، کلاف چارچوب را به یک کلاف اصلی $GL(d)$ تبدیل می کند. فقدان مبدأ یا عنصر همانی مرجع در تارهای $F_p M$ به عنوان $GL(d)$ -تورسورها، ابهام ذاتی چارچوب های مرجع را منعکس می کند.

کلاف TM به عنوان کلاف برداری وابسته به $(GL(d), (FM \times \mathbb{R}^d)/)$: در بخش ۱.۱.۳ مادرهای مماس در TM را بر حسب ضرایب آنها در \mathbb{R}^d نسبت به یک چارچوب مرجع بیان کردیم. انتخاب خاص چارچوب ها در آنجا بی ربط بود زیرا تبدیل ضرایب در معادله (۹) با تبدیل چارچوب های مرجع در معادله (۱۰) خنثی می شود به طوری که $v = \sum_i v_i^A e_i^A = \sum_i v_i^B e_i^B$ نمایش های مختصاتی معادل از همان بردار مستقل از مختصات $v \in T_p M$ هستند. با پیروی از این ایده، می توان کلاف مماس را از کلاف چارچوب با جفت کردن چارچوب های مرجع با بردارهای ضربی و گرفتن یک خارج قسمت برای فروکاستن توصیفات اضافی حاصل از بردارهای مماس نسبت به چارچوب های مختلف به یک عنصر منحصر به فرد، ساخت.

برای ساختن کلاف مماس به این روش، حاصل ضرب $FM \times \mathbb{R}^d$ را در نظر بگیرید که می توان آن را به عنوان یک کلاف تاری با فضای پایه M یک تار نوعی $GL(d) \times \mathbb{R}^d$ دید. این کلاف از جفت های چارچوب های مرجع و ضرایب (متقابل نامرتب) تشکیل شده است. با انگیزه از بیان معادل

بردارهای مماس در چارچوب‌های مرجع مختلف، ما رابطه همارزی را تعریف می‌کنیم:^{۴۷}

$$([e_i]_{i=1}^d, v) \sim_{\text{GL}(d)} ([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}, g \cdot v) \quad \forall g \in \text{GL}(d) \quad (155)$$

روی $FM \times \mathbb{R}^d$. به عنوان یک رابطه همارزی، این رابطه $[e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}$ را به کلاس‌های همارزی v افزایش می‌کند. فضای این کلاس‌های همارزی، فضای خارج قسمتی $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$ است. نگاشت تصویر

$$\pi_{\sim_{\text{GL}(d)}} : (FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d) \rightarrow M, \quad [e_i]_{i=1}^d, v \mapsto \pi_{FM}([e_i]_{i=1}^d), \quad (156)$$

که از کلاف چارچوب القا شده است، $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$ را به یک کلاف تاری با فضای پایه M و تار نوعی \mathbb{R}^d می‌کند. توجه داشته باشید که نگاشت تصویر در معادله (۱۵۶) خوش‌تعیف است زیرا مستقل از نماینده کلاس همارزی است، یعنی $\pi_{\sim_{\text{GL}(d)}}([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}) = \pi_{FM}([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1})$ است. که در آن ما از این واقعیت استفاده کردیم که عمل راست \triangleleft تارهای $FM \times \mathbb{R}^d$ را حفظ می‌کند. ساختار فضای برداری \mathbb{R}^d را به یک کلاف برداری تبدیل می‌کند که ترکیبات خطی در همان تار توسط

$$\alpha[e_i]_{i=1}^d + \beta[e_i]_{i=1}^d, w := [e_i]_{i=1}^d, \alpha v + \beta w, \quad (157)$$

برای مقادیر دلخواه $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ و $v, w \in \mathbb{R}^d$ تعریف می‌شود. به راحتی می‌توان بررسی کرد که این تعییف مستقل از انتخاب نماینده در هر دو جمله جمع است.

کلاف تعییف شده بدین ترتیب با کلاف مماس یک‌ریخت است،

$$TM \cong (FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d), \quad (158)$$

که در آن یک‌ریختی M -کلاف برداری توسط نگاشت خطی به ازای هر تار

$$\chi : (FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d) \rightarrow TM, \quad [e_i]_{i=1}^d, v \mapsto \sum_{i=1}^d v_i e_i \quad (159)$$

داده می‌شود که یک تاپل نماینده از چارچوب و بردار ضرب را از کلاس همارزی گرفته و آنها را به بردار مماس متاظر نگاشت می‌کند. طبق تعییف رابطه همارزی $\sim_{\text{GL}(d)}$ ، این تابع مستقل از انتخاب نماینده است، یعنی، $\chi(([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}, g \cdot v)) = \chi(([e_j]_{j=1}^d \triangleleft g^{-1}, (g \cdot v)_i)$ ؛ مساویه کنید با معادله (۱۲). همانطور که در [۹] بحث شد، معکوس این نگاشت با گرفتن یک بردار مماس، تصویر کردن آن بر روی یک چارچوب دلخواه و گرفتن کلاس همارزی به دست می‌آید.

کلاف $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$ (طبق ساختار، به عنوان یک کلاف $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$ -وابسته، وابسته است، یعنی همان توابع گذار را در $\text{GL}(d)$ دارد که FM دارد، همانطور که در بخش ۴.۶ استنتاج خواهیم کرد. ساختار TM به عنوان خارج قسمت $(FM \times \mathbb{R}^d)/\text{GL}(d)$ بر ماهیت مستقل از مختصات کلاف مماس به روی سیار شهودی تأکید می‌کند: این ساختار تمام انتخاب‌های ممکن از مختصات دهی‌های فضاهای مماس را در نظر گرفته و با گرفتن یک خارج قسمت، آنها را معادل تلقی می‌کند.

۳.۶ ساختارهای برداری و گرافی وابسته \mathcal{A}

اکنون ما G -ساختارها GM را به عنوان زیرمجموعه‌های متمایزی از چارچوب‌ها در FM معرفی می‌کنیم که ساختار هندسی اضافی روی M را کدگذاری می‌کنند که باید توسط CNN‌های مستقل از مختصات رعایت شود. کلاف مماس از طریق یک ساختار کلاف وابسته مشابه با بخش قبل، به عنوان یک G -کلاف وابسته بازمعروفی می‌شود. این رویکرد را می‌توان برای ساخت هر کلاف G -وابسته دیگر تعیین داد، که ما از آن برای تعییف کلاف‌های برداری و گرافی \mathcal{A} استفاده می‌کنیم. تمام چنین کلاف‌های ساخته شده‌ای به یکدیگر وابسته‌اند، یعنی فقط در تار خود F تفاوت دارند اما فضای پایه M ، گروه ساختار G و توابع گذار g^{BA} بین همسایگی‌های بدیهی ساز را مشترکاً دارند. بدیهی سازی‌های محلی کلاف‌ها و تبدیلات پیمانه متقابل آنها در بخش بعدی ۴.۶ به تفصیل مورد بحث قرار می‌گیرد.

^{۴۷} یک رابطه همارزی روی یک مجموعه X یک رابطه دوتایی \sim است که بازتابی $(x \sim x)$ ، متقارن $(y \sim x \Leftrightarrow x \sim y)$ و تراگذری $(x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z)$ است. این رابطه یک افزای از X به کلاس‌های همارزی $\{y \sim x | x \in X\}$ از عناصر $x \in X$ تعییف می‌کند. فضای کلاس‌های همارزی X/\sim را مجموعه خارج قسمتی $X/\sim := \{[x] | x \in X\}$ نامند.

G-ساختارها GM: همانطور که در بخش ۱.۳ و جدول ۱ بحث شد، اغلب ممکن است با یک زیرمجموعه متمایز از چارچوب‌های مرجع کار کرد که توسط عمل یک گروه ساختار کاهش‌یافته $G \leq \text{GL}(d)$ به هم مرتبط هستند. این موضوع با بحث در مورد چند مثال قبل از رسیدن به یک تعریف فنی در ادامه، به بهترین وجه قابل درک است. به عنوان مثال، یک محدودیت به چارچوب‌های متعامد

$$O_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ متعامد از } \{e_1, \dots, e_d\} \right\} \quad (160)$$

منجر به یک زیرکلاف اصلی OM از FM با گروه ساختار d می‌شود. توجه داشته باشید که متعامد چارچوب‌های مرجع توسط متريک η روی M قضاوت می‌شود \square بنابراین انتخاب‌های مختلف متريک روى یک خمينه متناظر با زيرمجموعه‌های مختلفی از چارچوب‌های مرجح برای همان گروه ساختار d است. به عنوان مثال دوم، یک انتخاب جهت‌گيري روى یک خمينه جهت‌پذير را در نظر بگيريد، که امكان مشخص کردن یک مفهوم مرجح از چارچوب‌ها را فراهم می‌کند^{۴۸}

$$\text{GL}_p^+ M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ مثبت از } \{e_1, \dots, e_d\} \right\} \quad (161)$$

و یک زیرکلاف اصلی متناظر M از FM با گروه ساختار $\text{GL}^+(d)$. باز هم، دو انتخاب مختلف از جهت‌گيري‌ها متناظر با دو انتخاب مختلف از زيرکلاف‌های چارچوب‌های جهت‌دار متناسب است. ترکیب هر دو شرط برای تعامل و راست‌گردی چارچوب‌ها منجر به یک $\text{SO}(d)$ -ساختار با تارهای زير می‌شود:

$$\text{SO}_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ مثبت و متعامد از } \{e_1, \dots, e_d\} \right\} \quad (162)$$

مي توان شکل ۲۶ را به عنوان نمایش دهنده یک $(2\text{-}SO(d))$ -ساختار در نظر گرفت زیرا تنها چارچوب‌های راست‌گرد و متعامد نشان داده شده‌اند (در اين صورت تار نوعی $\text{SO}(d)$ باید با $\text{GL}(d)$ برجسب گذاري شود). انتخاب‌های مختلف از $(2\text{-}SO(d))$ -ساختارها يا متناظر با یک دست‌سانی مخالف از چارچوب‌ها، با پايindندي به همان مفهوم تعامل، يا متناظر با یک انتخاب متفاوت از متريک (يا هر دو) است. دقيقا همين الگو برای فرم‌های فرم (روي خمينه‌های جهت‌پذير M) تکرار می‌شود: آنها امكان مشخص کردن یک مفهوم مرجح از چارچوب‌ها را فراهم می‌کنند

$$\text{SL}_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] \mid \{e_1, \dots, e_d\} \text{ مثبت از } T_p M \right\} \quad (163)$$

و در نتيجه زيرکلاف‌های اصلی SLM از FM با گروه ساختار $\text{SL}(d)$ مجموعه خاص چارچوب‌هایي که مرجح هستند در اينجا به انتخاب خاص فرم حجم بستگي دارد. به عنوان آخرین مثال، $\{e\}$ -ساختارها را در نظر بگيريد که متناظر با یک گروه ساختار بدبيهي $\{e\}$ هستند و بنابراین در هر نقطه p از یک چارچوب واحد تشکيل شده‌اند. طبق تعریف، $\{e\}$ -ساختارها با ميدان‌های چارچوب (هموار) سراسري $\sigma \in \Gamma(FM)$ معادل هستند:

$$\{e\}_p M := \left\{ [e_1, \dots, e_d] = \sigma(p) \right\} \quad (164)$$

بنابراین آنها فقط روی خمينه‌های بدبيهي وجود دارند. شکل‌های ۲۳۵ و ۲۳۵ ب دو انتخاب مختلف از $\{e\}$ -ساختارها روی \mathbb{R}^n را به تصویر می‌کشنند.

تمام اين مثال‌ها انتخاب‌های خاصی از G -ساختارها GM روی M را نشان می‌دهند. به طور کلي، یک G -ساختار روی M یک زيرکلاف اصلی G - GM است، يعني یک انتخاب "هموار متغير" از زيرمجموعه‌های $G_p M \subseteq F_p M$ که نسبت به \triangleleft برای هر $p \in M$ هستند^{۴۹}. همواری در اينجا می‌تواند با اين شرط فرمول بندی شود که در اطراف هر چارچوب $[e_i]_{i=1}^d \in G_p M$ يک همسایگی U از G - GM وجود داشته باشد که روی آن يک برش هموار $\sigma : [e_i]_{i=1}^d \subseteq GM \rightarrow U$ باشد. تصویر

$$\pi_{GM} := \pi_{FM}|_{GM} : GM \rightarrow M \quad (165)$$

از GM در اينجا به سادگي با محدود کردن نگاشت تصویر GM به M داده می‌شود. به همراه محدودیت

$$\triangleleft : GM \times G \rightarrow GM, \quad ([e_i]_{i=1}^d, g) \mapsto [e_i]_{i=1}^d \triangleleft g := \left[\sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \quad (166)$$

از عمل راست (d) روی FM در معادله (۱۵۴) به یک عمل (d) روی GM ، اين G -ساختار را به یک کلاف اصلی G - GM تبدیل می‌کند. با اين حال، مهم است توجه داشته باشید که چندین انتخاب از چنین زيرکلاف‌هایي وجود دارد، که متناظر با G -ساختارهای مختلف برای همان گروه ساختار G است؛ اين ادعاء را با مثال‌های بالا مقایسه کنيد. همانطور که قبل بحث شد، توپولوژي يک کلاف ممکن است مانع از کاهش به یک گروه ساختار G و در نتيجه وجود يک G -ساختار متناظر GM شود.

در حالی که تعریف بالا از G -ساختارها کافی خواهد بود، مفید است که به طور خلاصه برخی از تعاریف معادل جایگزین را مرور کیم. ادعای اينکه يک زيرکلاف اصلی GM از FM است، با تعریف آن به عنوان يک تاپل (P, \mathcal{E}) مشکل از يک انتخاب از يک کلاف اصلی G (همچين

^{۴۸} بر عکس، خمينه‌های غيرجهت‌پذير اجازه کاهش گروه ساختار به $\text{GL}^+(d)$ را نمي دهند.
^{۴۹} از آنجا که يک $F_p M$ -تورسور راست است، هر G -مدار $G_p M$ در $F_p M$ به طور خودکار تضمین می‌شود که يک G -تورسور راست باشد.

غیر منحصر به فرد) P روی M به همراه یک نشاندن هموردای راست G و هموار $\mathcal{E} : P \rightarrow FM$ (روی M) دقیق می شود.^۵ این موضوع توسط نمودار زیر به تصویر کشیده شده است، که لازم است برای هر $g \in G$ جابجا باشد:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{E} & & \\
 & P & \xleftarrow{\quad} & \xrightarrow{\quad} & FM \\
 \triangleleft_P g & \uparrow & & & \uparrow \triangleleft g \\
 & P & \xleftarrow{\quad} & \xrightarrow{\quad} & FM \\
 & & \searrow \pi_P & \swarrow \pi_{FM} & \\
 & & M & &
 \end{array} \tag{۱۶۷}$$

زیر مجموعه های مختلف از چارچوب های مرجح در این دیدگاه متناظر با انتخاب های مختلف از نشاندن های $GM = \mathcal{E}(P)$ از P در FM است. G -ساختارها علاوه بر این با برش هایی به شکل $GM = s(M) \mapsto FM/G$ معادل هستند، که تأکید می کند $(s(p) \in G)$ با $s : M \rightarrow FM/G$ در واقع یک انتخاب از G -مدار در $F_p M$ است همانطور که در پانوشت ۴۹ بیان شد. تعریف دیگری از G -ساختارها بر حسب (کلاس های همارزی) اطلس های G است [؟]. از آنجا که یک دیدگاهی است در یک پاده سازی از کانولوشن های GM اتخاذ شود، ما آن را با جزئیات بیشتری در بخش بعدی ۴.۶ مورد بحث قرار می دهیم. برای خواننده علاقه مند می خواهیم اشاره کنیم که G -ساختارها یک مورد خاص از مفهوم کلی تر کاهاش (یا لیفت) گروه های ساختار هستند [؟؟؟].

G -ساختارها برای نظریه کانولوشن های GM از اهمیت محوری برخوردارند. انتخاب خاص G -ساختار، مجموعه خاصی از چارچوب های مرجح را تعیین می کند که کرنل الگوی G -را بهر بر روی آن اشتراک گذاشته می شود. با توجه به هموردایی پیمانه ای کرنل ها، تضمین می شود که کانولوشن های G - GM ، G -ساختار را رعایت کنند، یعنی مستقل از مختصات GM باشند. همانطور که در بخش ۸ استنتاج شده است، ایزو متري هایی که یک کانولوشن GM نسبت به آنها هموردا است، دقیقاً آنها بی هستند (یعنی آنها بی که خود ریختنی های GM را القا می کنند).

کلاف به عنوان کلاف برداری G -وابسته ($G(GM \times \mathbb{R}^d)/$): با داشتن یک G -ساختار GM ، می توان ساختار کلاف $GL(d)$ - TM از TM در بخش ۲.۶ را به یک ساختار کلاف G -وابسته مشابه TM بر اساس GM تطبیق داد. به جای بیان بردارهای مماس نسبت به چارچوب های عمومی در TM ، آنها در اینجا نسبت به چارچوب های متمایز در GM (بیان می شوند و خارج قسمت نسبت به گروه ساختار کاهاش را فته $GL(d)$ گرفته می شود). کلاف حاصل طبق طراحی به GM وابسته است (یا به FM با یک اطلس G ، که معادل است همانطور که در بخش بعدی توضیح داده می شود) و بنابراین دارای توابع گذاری است که مقادیری در G می گیرند. محدودیت χ در معادله (۱۵۹) به یک یکریختی کلاف برداری به دست می دهد:

$$TM \cong (GM \times \mathbb{R}^d)/G. \tag{۱۶۸}$$

در حالی که هر سه کلاف TM ، TM و $(GM \times \mathbb{R}^d)/G$ و $(FM \times \mathbb{R}^d)/GL(d)$ بنا براین به عنوان کلاف های برداری یکریخت هستند، آنها تنها در صورتی به عنوان کلاف های G -وابسته یکریخت هستند که TM و $(FM \times \mathbb{R}^d)/GL(d)$ به یک G -ساختار (یا اطلس G) مجهز شوند، که به طور پیشینی اینطور نیست. در مقابل، کلاف $(GM \times \mathbb{R}^d)/G$ طبق طراحی با یک G -ساختار همراه است. برای تعریف دقیق یکریختی های کلاف G -وابسته، ما به [؟] ارجاع می دهیم.

کلاف های برداری ویژگی وابسته \mathcal{A} : ساختار کلاف G -وابسته $(GM \times \mathbb{R}^d)/G$ را می توان برای چسباندن تارهای دیگر با عمل های گروهی دیگر به G -ساختار GM تعمیم داد. در واقع، هر کلاف وابسته به GM را می توان به این روش ساخت. مثال های مهم در هندسه دیفرانسیل عبارتند از کلاف هم مماس T^*M با تار نوعی آن که دو گان \mathbb{R}^{d*} از \mathbb{R}^d است و عمل دو گان بر آن اثر می گذارد، یا کلاف های تانسوری (r, s) با تارهای $T_s^r M$ که نمایش حاصل ضرب تانسوری G بر آن عمل می کند.

در ادامه ما کلاف های برداری ویژگی وابسته با ضرایب بردار ویژگی \mathbb{R}^c به عنوان تارهای نوعی را در نظر می گیریم. تحت تبدیلات پیمانه، این تارها از چپ توسط یک ضرب با یک نمایش گروهی $GL(c)$ به G → $\rho : G \rightarrow GL(c)$ با: $\rho(g)f \mapsto \rho(g)f$ نمونه سازی می شود. مشابه قبل، کلاف های برداری ویژگی در این صورت به عنوان یک خارج قسمت

$$\mathcal{A} := (GM \times \mathbb{R}^c)/\sim_\rho \tag{۱۶۹}$$

ساخته می شوند که در آن رابطه همارزی \sim توسط

$$([e_i]_{i=1}^d, f) \sim_\rho ([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g^{-1}, \rho(g)f) \quad \forall g \in G. \tag{۱۷۰}$$

^۵ این نشاندن یک ریخت M -کلاف اصلی G است همانطور که در بخش ۱.۶ با هم ریختنی گروهی $GL(d)$ به G → $GL(d)$ که الحاق کانونی زیر گروه $GL(d)$ است، معرفی شد.

داده می شود. عناصر \mathcal{A} کلاس های همارزی $[e_i]_{i=1}^d, f]$ از ضرایب بردار ویژگی نسبت به چارچوب های مرجع هستند و بنابراین مستقل از مختصات هستند. یک نگاشت تصویر (خوش تعریف) دوباره از تصویر G -ساختار القا می شود:

$$\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow M, [[e_i]_{i=1}^d, f] \mapsto \pi_{GM}([e_i]_{i=1}^d)$$
 (۱۷۱)

ترکیبات خطی روی تارها به قیاس با معادله (۱۵۷) تعريف می شوند. از آنجا که چنین کلاف های برداری ویژگی تعريف شده ای به GM وابسته است، $GL(d) \leq GL(d)$ است، همانطور که به طور صریح در بخش بعدی ۴.۶ استنتاج خواهیم کرد.^{۵۱} توجه داشته باشید که این تعريف شامل میدان های برداری مimas و میدان های اسکالر، که البته می توانند به عنوان میدان های ویژگی پردازش شوند، به ترتیب برای $g = \rho(g) = 1$ می شود.

ساختار \mathcal{A} به عنوان یک کلاف G -وابسته، بردار های ویژگی مستقل از مختصات M روی GM را مدل می کند: ویژگی های $f_p \in \mathcal{A}$ نسبت به چارچوب های دلخواه در GM بیان می شوند، با ضرایب ویژگی در مختصات دهی های مختلف که از طریق معادله (۱۷۰) به هم مرتبط هستند، اما بیان مختصاتی خوش تعریفی نسبت به چارچوب های دیگر ندارند. از دید گاه مهندسی، این موضوع در G -راهنبری کرنل های کانولوشن منعکس می شود که تضمین می کند اندازه گیری های ویژگی ها به صورت نسبی به چارچوب ها در GM انجام شود اما امکان تمایز بین الگوهایی را فراهم می کند که ژست های آنها با یک تبدیل پیمانه G -مقدار به هم مرتبط نیستند، به معنای مطلق.

میدان برداری ویژگی وابسته و فضاهای ویژگی: میدان های ویژگی هموار و مستقل از مختصات به عنوان برش های سراسری هموار f از کلاف های برداری ویژگی تعريف می شوند، یعنی به عنوان نگاشت های هموار $\mathcal{A} \rightarrow M$ که شرط $\pi_{\mathcal{A}} \circ f = id_M$ است: f که قبلاً بحث شد، وجود چنین میدان های ویژگی تضمین شده است زیرا کلاف های برداری همیشه برش های سراسری هموار را می کنند. همانطور که قبلاً بحث شد، وجود چنین میدان های ویژگی تضمین می دهد که چگونه یک بدیهی سازی کلاف محلی روی U^A امکان نمایش f توسط یک میدان $f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c$ از ضرایب بردار ویژگی را فراهم می کند. یک بدیهی سازی متفاوت روی $U^B \rightarrow \mathbb{R}^c$ منجر به یک میدان ضریب متفاوت $f^B : U^B \rightarrow \mathbb{R}^c$ می شود که f را به صورت محلی نمایش می دهد. از نگاشت های گذار بین بدیهی سازی های کلاف نتیجه خواهد شد که هر دو میدان ضریب روی همپوشانی $U^{AB} = U^A \cap U^B$ از دامنه های خود با $f^B(p) = \rho(g_{pA}^B)f^A(p)$ به هم مرتبط هستند. نمودار جایجا بی در شکل ۲۹ روابط بین میدان های برداری ویژگی و بدیهی سازی های محلی آنها را به تصویر می کشد.

فضاهای ویژگی های \mathcal{A} مستقل از مختصات معمولاً از چندین میدان ویژگی مستقل روی همان فضای پایه تشکیل شده اند. کلاف توصیف کننده یک فضای ویژگی به عنوان یک کل، مجموع ویتنی $\bigoplus_i \mathcal{A}_i$ از کلاف های برداری ویژگی $M \xrightarrow{\pi_{\mathcal{A}_i}}$ است که زیرنای میدان های منفرد آن هستند. به این ترتیب، این کلاف همان فضای پایه M را دارد، یک تار نوعی $\mathbb{R}^{\sum_i c_i} \cong \bigoplus_i \mathbb{R}^{c_i}$ که به عنوان مجموع مستقیم تارهای میدان های منفرد تعريف شده و به نگاشت تصویر بدیهی مجهز است. این کلاف به TM ، FM و \mathcal{A}_i به عنوان G -کلاف ها وابسته است و بنابراین می تواند به طور معادل به صورت

$$\bigoplus_i \mathcal{A}_i \cong (GM \times \mathbb{R}^{\sum_i c_i}) / \sim_{\oplus_i \rho_i}$$
 (۱۷۲)

تعريف شود. توجه داشته باشید که مجموع مستقیم $\bigoplus_i \rho_i$ از نمایش های \mathcal{A}_i را تعريف می کنند، تضمین می کند که نگاشت های گذار $\bigoplus_i \mathcal{A}_i$ هر میدان منفرد را به طور مستقل تبدیل کنند. فضاهای ویژگی در این صورت به عنوان فضاهای $(\bigoplus_i \mathcal{A}_i)$ از برش های سراسری کلاف مجموع ویتنی تعريف می شوند.

۴.۶ بدیهی سازی های محلی کلاف TM ، FM و GM

در حالی که نظریه سراسری شیوه های کانولوشنی مستقل از مختصات به شیوه ای بر حسب کلاف های تاری مستقل از مختصات فرمول بندی می شود، پیاده سازی عددی نیازمند آن است که بردار های ویژگی مستقل از مختصات $\mathcal{A}_p \in \mathcal{A}$ را تعریف می کند که $f(p) \in G_p M$ توسط بردار های ضریب $f^A(p) := \psi_{\mathcal{A}, p}^A(f(p))$ در \mathbb{R}^c نسبت به یک انتخاب قاب مرجع $[e_i^A]_{i=1}^d \in G_p M$ بیان شوند، همانطور که در بخش ۲.۳ شرح داده شد. در زبان کلاف های تاری، این معادل با انتخاب بدیهی سازی های محلی یا پیمانه های Ψ_{GM}^A ، Ψ_{TM}^A ، Ψ_{FM}^A و Ψ^A است که اگر TM ، GM ، FM و \mathcal{A} به صورت G -الحقیقی با یکدیگر در نظر گرفته شوند، همگی به طور همزمان تبدیل می شوند. به یاد بیاورید که توصیف محلی و در نتیجه پیاده سازی از طریق یک G -اطلس، متشکل از بدیهی سازی های محلی که M را می پوشانند و سه شرط (۱۳۶)، (۱۳۷) و (۱۳۸) را برآورده می کنند، کاملاً معادل با نظریه سراسری و مستقل از مختصات است.

در این بخش، ما بدیهی سازی های الحقیقی TM ، FM و \mathcal{A} و تبدیلات پیمانه هم زمان آنها را بررسی می کنیم. برای حفظ سازگاری با بخش ۱.۳ با فرض داده شده بودن بدیهی سازی های TM شروع کرده و بحث می کنیم که چگونه آنها بدیهی سازی های FM و میدان های قاب محلی متناظر را القا می کنند. اگر یک G -اطلس برای TM و در نتیجه برای FM انتخاب شود، این به یک G -ساختار GM منجر می شود که G -اطلس آن با

^{۵۱} به طور دقیق، توابع گذار مقادیری در $GL(c)$ به جای G خواهند گرفت، با این حال، از آنجا که گذارهای حاصل هنوز با G هستند، اصطلاح "G-مقدار" معمولاً برای شامل شدن چنین مواردی تطبیق داده می شود [۱].

G-اطلس FM منطبق است. بدیهی سازی‌های محلی هر کلاف G-الحاقی، به ویژه کلاف‌های بردار ویژگی \mathcal{A} ، از بدیهی سازی‌های GM به دست می‌آیند. این بدیهی سازی‌ها قانون تبدیل میدان‌های ویژگی از بخش ۲.۳ را بازیابی می‌کنند.

بدیهی سازی‌های TM : از آنجا که کلاف مماس، \mathbb{R}^d را به عنوان تار نمونه‌ای خود دارد، بدیهی سازی‌های محلی آن توسط نگاشت‌هایی به شکل زیر داده می‌شوند:

$$\Psi_{TM} : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^d. \quad (173)$$

این بدیهی سازی‌ها با پیمانه‌های نقطه‌ای (که به صورت هموار در فضای تغییر می‌کنند)

$$\psi_{TM,p} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (174)$$

از معادله (۱) با شناسایی $(\pi_{TM}(v), \psi_{TM,p}(v)) = (\pi_{TM}(v), \psi_{TM,p}(v))$ مطابقت دارند. به منظور رعایت ساختارهای فضای برداری تار \mathbb{R}^d و فضاهای مماس $T_p M$ ، بدیهی سازی‌های Ψ_{TM} به عنوان ایزومورفیسم‌های کلاف برداری بین $U \times \mathbb{R}^d$ و $\pi_{TM}^{-1}(U)$ تعریف می‌شوند، یعنی نگاشت‌های $\psi_{TM,p}$ باید خطی و معکوس‌پذیر باشند (یعنی ایزومورفیسم‌های فضای برداری باشند). نگاشت‌های گذار بین بدیهی سازی‌های مختلف TM به طور کلی در گروه خطی عام $GL(d)$ ، یعنی گروه خودریختی‌های (خطی) \mathbb{R}^d ، مقدار می‌گیرند.

اگر ساختار بیشتری روی کلاف مماس مشخص شود، بدیهی سازی‌ها باید این ساختار را رعایت کنند. به عنوان مثال، اگر یک متريک روی M و در نتیجه روی TM تعریف شود، نگاشت‌های $\psi_{TM,p}$ باید ایزومتريک باشند، یعنی بردارها را در $T_p M$ به گونه‌ای به بردارهای در \mathbb{R}^d نگاشت کنند که نرمه‌ها و زوایا حفظ شوند. از آنجا که در این حالت بدیهی سازی‌ها فقط در جهت و سوگیری خود می‌توانند متفاوت باشند، تضمین می‌شود که بدیهی سازی‌های مختلف توسط یک گروه ساختار کاوش باشند که متناظر با متريک به عنوان یک $O(d)$ -ساختار است. به طور کلی تر، یک G -ساختار روی TM نیازمند - یا القا شده توسط - یک انتخاب از G -اطلس $\{\Psi_{TM}^X\}_{X \in \mathfrak{X}}$ است. دو بدیهی سازی مختلف Ψ_{TM}^A و Ψ_{TM}^B از چنین G -اطلسی روی $U^A \cap U^B$ توسط $\Psi_{TM}^B \circ (\Psi_{TM}^A)^{-1}$ همان‌طور که در معادله (۱۷۲) تعریف شده است، با توابع گذار با مقدار در G به یکدیگر مرتبط می‌شوند:

$$g^{BA} : U^A \cap U^B \rightarrow G, \quad p \mapsto \psi_{TM,p}^B \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}, \quad (175)$$

که عمل چپ \triangleright و \triangleleft را روی تار نمونه‌ای تعریف می‌کنند. برای درک شهودی گرافیکی از عمل نقطه‌ای توابع گذار بر روی تارهای منفرد، به شکل ۷ بازمی‌گردیم. یک نمایش نموداری از بدیهی سازی‌های محلی TM و گذارهای آنها در شکل ۲۷ آورده شده است.

بدیهی سازی‌های الایایی FM و میدان‌های قاب: هر اطلس $\{\Psi_{TM}^X\}_{X \in \mathfrak{X}}$ از کلاف مماس در تناظر یک به یک با یک اطلس $\{\Psi_{FM}^A\}_{X \in \mathfrak{X}}$ از کلاف قاب است. به طور خاص، با داشتن یک بدیهی سازی محلی Ψ_{TM}^A از TM ، یک بدیهی سازی محلی متناظر

$$\Psi_{FM}^A : \pi_{FM}^{-1}(U^A) \rightarrow U^A \times GL(d), \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto (p, \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d)), \quad (176)$$

از FM ، که در آن $p = \pi_{FM}([e_i]_{i=1}^d)$ را به اختصار آورده‌ایم، با تعریف زیر الایایی شود:

$$\psi_{FM,p}^A : F_p M \rightarrow GL(d), \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) := (\psi_{TM,p}^A(e_i))_{i=1}^d \quad (177)$$

به عنوان یک نگاشت از قاب‌های مماس به ماتریس‌های $d \times d$ معکوس‌پذیر که ستون \square -ام آن توسط $\psi_{TM,p}^A(e_i) \in \mathbb{R}^d$ داده شده است. همان‌طور که برای کلاف‌های الحاقی لازم است، بدیهی سازی‌های TM و FM از توابع گذار یکسانی استفاده می‌کنند،

$$\begin{aligned} \psi_{FM,p}^B([e_i]_{i=1}^d) &= (\psi_{TM,p}^B(e_i))_{i=1}^d \\ &= (g_p^{BA} \psi_{TM,p}^A(e_i))_{i=1}^d \\ &= g_p^{BA} (\psi_{TM,p}^A(e_i))_{i=1}^d \\ &= g_p^{BA} \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d), \end{aligned} \quad (178)$$

زیرا عمل g^{BA} روی محورهای قاب بدیهی شده منفرد در خط دوم با عمل آن روی ماتریس قاب بدیهی شده در خط سوم یکسان است. علاوه بر این، همان‌طور که برای کلاف‌های اصلی در معادله (۱۴۵) ادعا شد، بدیهی سازی‌های کلاف قاب راست- $GL(d)$ -هم‌متغیر هستند، یعنی برای هر

(ب) بدیهی‌سازی‌های $FM \xrightarrow{\pi_{FM}} M$

(ج) بدیهی‌سازی‌های $GM \xrightarrow{\pi_{GM}} M$

(د) بدیهی‌سازی‌های $\mathcal{A} \xrightarrow{\pi_A} M$

شکل ۲۷: نمایش تصویری بدیهی‌سازی‌های محلی کلاف‌های G -الحاقی FM , TM , GM و \mathcal{A} در قالب نمودارهای جابجاگی که در آن‌ها را به اختصار نشان می‌دهیم. یک G -اطلس $\{U^X, \Psi_{TM}^X\}$ از کلاف مماس با نگاشتهای گذار GM را G -القا می‌کند و G -اطلس‌هایی برای FM , TM و \mathcal{A} نمودارهای جابجاگی دقیق‌تری که مقاطع $(\text{id} \times g^{BA}) \cdot$ را $\pi_{FM}^{-1}(U) \rightarrow U$ و σ و عمل راست \lhd روی کلاف قاب را نشان می‌دهند در شکل‌های ۲۸ و ۲۹ آورده شده‌اند. میدان‌های ویژگی، که به عنوان مقاطع $f : M \rightarrow \mathcal{A}$ از کلاف بردار ویژگی \mathcal{A} مدل‌سازی شده‌اند، و بدیهی‌سازی‌های محلی آن‌ها $f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c$ در شکل ۲۹ نشان داده شده‌اند. تفسیری گرافیکی از نمودار جابجاگی برای TM , که به یک فضای مماس منفرد $T_p M$ محدود شده است، در شکل ۷ ارائه شده است.

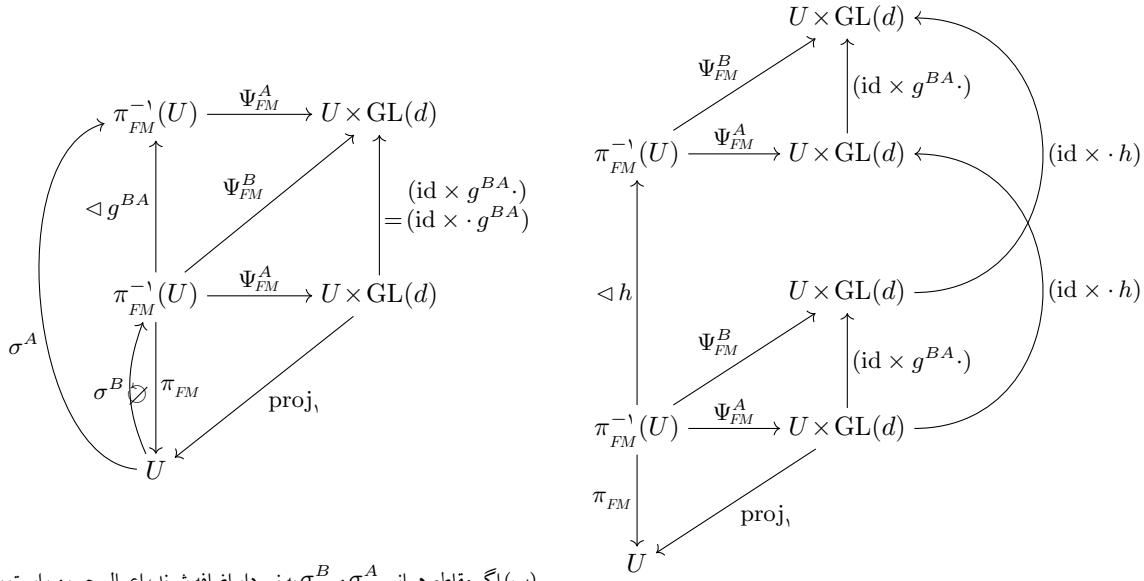
داریم: $h \in \text{GL}(d)$

$$\begin{aligned}
 \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d \lhd h) &= \psi_{FM,p}^A \left(\left(\sum_j e_j h_{ji} \right)_{i=1}^d \right) \\
 &= \left(\psi_{TM,p}^A \left(\sum_j e_j h_{ji} \right) \right)_{i=1}^d \\
 &= \left(\sum_j \psi_{TM,p}^A(e_j) h_{ji} \right)_{i=1}^d \\
 &= (\psi_{TM,p}^A(e_i))_{i=1}^d \cdot h \\
 &= \psi_{FM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) \cdot h
 \end{aligned} \tag{۱۷۹}$$

در اینجا از خطی بودن $\psi_{TM,p}^A$ در مرحله سوم استفاده کردیم و عبارت اندیسی را به عنوان ضرب ماتریسی از راست در مرحله چهارم شناسایی کردیم. شکل ۲۸ عمل چپ روی بدیهی‌سازی را از طریق توابع گذار $\Psi_{FM}^B \circ (\Psi_{FM}^A)^{-1} = (\text{id} \times g^{BA}) \cdot$ که در معادله (۱۷۸) مشتق شده و هم‌متغیری راست $\lhd h = (\text{id} \times \cdot \cdot h) \circ \Psi_{FM}^A$ در معادله (۱۷۹) مشتق شده، خلاصه می‌کند.

همان‌طور که در معادله (۴) اشاره شد و در شکل‌های ۷ و ۸ نمایش داده شد، یک بدیهی‌سازی محلی هموار Ψ_{TM}^A از کلاف مماس یک میدان قاب را روی U^A القا می‌کند. این به عنوان یک مقطع محلی هموار

$$\sigma^A : U^A \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^A), \quad p \mapsto \left[(\psi_{TM,p}^A)^{-1}(e_i) \right]_{i=1}^d \tag{۱۸۰}$$



(ب) اگر مقاطع همانی σ^A و σ^B به نمودار اضافه شوند، اعمال چپ و راست با یکدیگر منطبق می‌شوند زیرا $\sigma^A \circ \psi_{FM,p}^A \circ \sigma^A(p) = e$ و $\sigma^B \circ \psi_{FM,p}^B \circ \sigma^B(p) = e$.

(ت) بدیهی‌سازی‌های کلاف قاب راست-هم‌متغیر هستند، یعنی برای هر $h \in \text{GL}(d)$ داریم $\Psi_{FM}^A \circ \triangleleft h = (\text{id} \times h) \circ \Psi_{FM}^A$.

شکل ۲۸: نمودارهای گسترش‌یافته بدیهی‌سازی‌های کلاف قاب که تعامل توابع گذار g^{BA} ، اعمال راست $\triangleleft h$ و $h \triangleleft$ و مقاطع همانی σ^A و σ^B را نشان می‌دهند. مانند قبل، $U = U^{AB} = U^A \cap U^B$ را به اختصار نشان می‌دهیم. به جز $\sigma^B \circ \pi_{FM} \neq \text{id}_{FM}$ و $\sigma^A \circ \pi_{FM} \neq \text{id}_{FM}$ نمودارها جایجا می‌شوند. اگر بدیهی‌سازی‌ها بخشی از یک G-اطلس باشند، نمودارهای مشابهی، با جایگزینی FM و GM با G و $GL(d)$ ساختار متناظر اعمال می‌شوند.

از کلاف قاب فرمول‌بندی می‌شود که با نگاشت بردارهای قاب استاندارد ϵ_i از \mathbb{R}^d به فضاهای مماس در $\pi_{TM}^{-1}(U^A) \subseteq TM$ تعریف می‌شود. پیرو معادله ۱۰، یک تبدیل پیمانه از $\Psi_{TM}^B = (\text{id} \times g^{BA}) \circ \Psi_{TM}^A$ به $\sigma^B(p) = \sigma^A(p) \triangleleft (g_p^{BA})^{-1}$ متناظر است با یک تبدیل

از مقاطع روی U^{AB} . بدیهی‌سازی‌های Ψ_{FM}^A از FM که بر حسب Ψ_{TM}^A تعریف شده‌اند، این ویژگی خوب را دارند که مقاطع متناظر σ^A را به قاب همانی σ^B نگاشت می‌کنند، که با جایگذاری هر دو تعریف می‌توان آن را مشاهده کرد:

$$\psi_{FM,p}^A \circ \sigma^A(p) = \psi_{FM,p}^A \left(\left[(\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i) \right]_{i=1}^d \right) = \left(\psi_{TM,p}^A \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i) \right)_{i=1}^d = (\epsilon_i)_{i=1}^d = e \quad (182)$$

این ویژگی اغلب برای تعریف مقاطع FM با داشتن بدیهی‌سازی‌های Ψ_{FM}^A به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\sigma^A: U^A \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^A), \quad p \mapsto (\Psi_{FM}^A)^{-1}(p, e) = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(e), \quad (183)$$

که در نهایت با تعریف ما در معادله (۱۸۰) منطبق است. از آنجا که Ψ_{FM}^A که به این روش ساخته شده‌اند یکدیگر را القا می‌کنند، گاهی اوقات به آن‌ها مقاطع همانی و بدیهی‌سازی‌های محلی کانونی گفته می‌شود. گسترش نمودار در شکل ۲۸ با مقاطع همانی σ^A و σ^B که با معادله ۱۸۱ مرتبه هستند، $h = g^{BA}$ را ثابت می‌کند و بنابراین به نمودار جایجا باید در شکل ۲۸ ۲ ب منجر می‌شود. ضرب‌های چپ و راست با $g^{BA} \cdot e = g^{BA} = e \cdot g^{BA} = \psi_{FM,p}^B \circ \sigma^B$ در اینجا فقط به این دلیل منطبق هستند که e برای آن $GL(d)$ نمونه‌ای است. شکل ۲۸ را با شکل ۲۶ مقایسه کنید که عمل پیمانه چپ $\triangleleft (g_p^{BA})^{-1}$ و عمل راست $(g_p^{BA})^{-1} \triangleleft$ از عنصر گروه معکوس را نشان می‌دهد که بین قاب‌های مقاطع همانی متناظر تبدیل می‌کند.

G-اطلس الگاکننده GM-Sاختار G: انطباق توابع گذار کلاف مماس و کلاف قاب در معادله (۱۷۸) نشان می‌دهد که یک G-اطلس از TM یک G-اطلس برای FM القا می‌کند. همانطور که در ادامه استنتاج خواهیم کرد، چنین G-اطلس‌هایی یک G-اطلس متناظر GM را مشخص می‌کنند، یعنی یک زیرکلاف اصلی G از FM که از قاب‌های ممتاز تشکیل شده است.

برای توجیه تعریف GM بر اساس یک G-اطلس داده شده $\{(U^X, \Psi_{FM}^X)\}_{X \in \mathfrak{X}}$ از FM ، دو بدیهی‌سازی محلی آن Ψ_{FM}^A و Ψ_{FM}^B را با دامنه‌های $F_p M$ در نظر بگیرید و فرض کنید $p \in U^A \cap U^B$. بدیهی‌سازی‌ها قاب‌های مرجع $\sigma^A(p)$ و $\sigma^B(p)$ را در $F_p M$ تعریف می‌کنند که طبق همپوشان در نظر بگیرید.

معادله (۱۸۱) توسط عمل راست عنصری مانند g_p^{BA} از گروه ساختار کاهش یافته $G \leq \text{GL}(d)$ به یکدیگر مرتبط هستند. بنابراین، هر قاب تعريف شده به این شکل، عنصری از یک G-مدار $G_pM \cong \text{GL}(d)$ در $F_pM \cong \text{GL}(d)$ است. به طور خاص، با این مقاطع همانی از طریق معادله (۱۸۳) به صورت $\sigma^B(p) = (\psi_{FM,p}^B)^{-1}(e) = (g_p^{BA}\psi_{FM,p}^A)^{-1}(e) = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}((g_p^{BA})^{-1})\sigma^A(p) = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(G)$ تعريف نقطه‌ای G-ساختار بر اساس تصاویر معکوس G توسط نگاشت‌های پیمانه (دلخواه) پیشنهاد می‌شود:

$$G_pM := \left\{ (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(g) \mid g \in G \right\} = (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(G) \quad (184)$$

استقلال از پیمانه انتخاب شده از G-اطلس واضح است زیرا هر انتخاب دیگری $(\psi_{FM,p}^A)^{-1}(G)$ نتیجه یکسانی به دست می‌دهد. همانطور که به راحتی می‌توان بررسی کرد، G_pM در واقع یک تورسور راست G است زیرا یک تورسور راست G است و $\psi_{FM,p}^A$ طبق معادله (۱۷۹) یک ایزو‌مورفیسم راست-GL(d)-هم‌متغیر و بنابراین به طور خاص راست-G-هم‌متغیر است. همواری مورد نیاز $GM = \coprod_{p \in M} G_pM$ از همواری بدیهی‌سازی‌های Ψ_{FM}^A ناشی می‌شود.

یک G-اطلس از بدیهی‌سازی‌های محلی GM با محدود کردن بدیهی‌سازی‌ها در G-اطلس FM به قاب‌های موجود در GM به دست می‌آید، یعنی،

$$\Psi_{GM}^A := \Psi_{FM}^A|_{\pi_{GM}^{-1}(U^A)} : \pi_{GM}^{-1}(U^A) \rightarrow U^A \times G, \quad (185)$$

یا، به صورت محلی،

$$\psi_{GM,p}^A := \psi_{FM,p}^A|_{G_pM} : G_pM \rightarrow G. \quad (186)$$

بلافاصله نتیجه می‌شود که توابع گذار با مقدار در G با توابع گذار TM و FM منطبق هستند، یعنی،

$$\psi_{GM,p}^B([e_i]_{i=1}^d) = g_p^{BA}\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d), \quad (187)$$

و اینکه بدیهی‌سازی‌ها راست-G-هم‌متغیر هستند:

$$\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d \triangleleft h) = \psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) \cdot h \quad \forall h \in G \quad (188)$$

میدان‌های قاب نیز با یک عبارت معادل

$$\sigma^A(p) = (\psi_{GM,p}^A)^{-1}(e) \quad (189)$$

با عبارت معادله (۱۸۳) داده می‌شوند. نمودارهای جابجایی در شکل‌های آ و ب نیز هنگام جایگزینی FM با GM و GL(d) با G معتبر هستند.

بدیهی‌سازی‌های القایی کلاف‌های العاقی A: یک G-اطلس $\Psi_A^X : \{\Psi_A^X\}_{X \in \mathfrak{X}} \rightarrow U^X \times \mathbb{R}^c$ از کلاف‌های بردار ویژگی العاقی ρ از $A = (GM \times \mathbb{R}^c)/\sim$ از بدیهی‌سازی‌های متاظر Ψ_{GM}^X از G-ساختار القایی شود. برای ساختن این بدیهی‌سازی‌ها، به یاد بیاورید که بر اساس کلاس‌های همارزی $[e_i]_{i=1}^d, f$ تعريف می‌شود که شامل زوج‌هایی از قاب‌های مرجع و بردارهای ضرب ویژگی است که توسط رابطه همارزی $\rho \sim$ تعريف شده در معادله (۱۷۰) به هم مرتبط هستند. یک ایده طبیعی این است که $[e_i]_{i=1}^d, f \in \mathcal{A}_p$ را با انتخاب یک نماینده از بردارهای ضرب همارز آن در \mathbb{R}^c بدیهی‌سازی کنیم. یک انتخاب ممتاز از نماینده در اینجا توسط آن بردار ضربی داده می‌شود که به قاب مقطع همانی $\sigma^A(p)$ متناظر با Ψ_{GM}^A تعیق دارد.

فرض کنید $\sigma^A(p) \triangleleft h \in G_pM$ باشد که توسط یک جابجایی $h \in G$ نسبت به مقطع σ^A تعريف شده است. این جابجایی را می‌توان با بدیهی‌سازی G-ساختار بازیابی کرد:

$$\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) = \psi_{GM,p}^A(\sigma^A(p) \triangleleft h) = \psi_{GM,p}^A(\sigma^A(p)) \cdot h = h \quad (190)$$

در اینجا از هم‌متغیری راست-G- $\psi_{GM,p}^A$ و اینکه σ^A به عنوان مقطع همانی تعريف شده است، استفاده کردیم؛ به معادلات (۱۸۸) و (۱۸۲) که دومی برای $\psi_{GM,p}^A$ تطبیق داده شده است، مراجعه کنید. بنابراین می‌توانیم هر قاب را از طریق جابجایی آن بازنویسی کنیم:

$$[e_i]_{i=1}^d = \sigma^A(p) \triangleleft \psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d) \quad (191)$$

به طور مشابه، می‌توانیم هر بردار ویژگی $[e_i]_{i=1}^d, f \in \mathcal{A}_p$ را با نماینده‌گان مختلف کلاس همارزی بازنویسی کنیم:

$$[[e_i]_{i=1}^d, f] = [\sigma^A(p) \triangleleft \psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d), f] = [\sigma^A(p), \rho(\psi_{GM,p}^A([e_i]_{i=1}^d))]f \quad (192)$$

$$\begin{array}{ccccc}
& & U \times \mathbb{R}^c & \xrightarrow{\text{proj}_r} & \mathbb{R}^c \\
& \swarrow \Psi_A^B & \uparrow (\text{id} \times \rho(g^{BA}) \cdot) & \nearrow & \uparrow \rho(g^{BA}) \\
\pi_A^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi_A^A} & U \times \mathbb{R}^c & \xrightarrow{\text{proj}_r} & \mathbb{R}^c \\
\downarrow f & \nearrow \text{proj}_r & \nearrow f^B & \nearrow \text{proj}_r & \downarrow \rho(g^{BA}) \\
U & \xrightarrow{f^A} & & \xrightarrow{f^B} &
\end{array}$$

شکل ۲۹: میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات به عنوان مقاطع سراسری \mathcal{A} در همسایگی‌های محلی U^A و U^B . آن‌ها به میدان‌های بردارهای ضرب ویژگی $f^B : U^B \rightarrow \mathbb{R}^c$ و $f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c$ بدبیهی سازی می‌شوند که روی $U = U^A \cap U^B$ با رابطه $f^B(p) = \rho(g_p^{BA}) f^A(p)$ با هم مرتبط هستند. به جز $f \circ \pi_A^{-1} \neq \text{id}_{\mathcal{A}}$, نمودار جابجایی پذیر است.

بر اساس این بیان‌ها، بدبیهی سازی‌های القایی \mathcal{A} را با قرار دادن زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Psi_{\mathcal{A}}^A : \pi_A^{-1}(U^A) \rightarrow U^A \times \mathbb{R}^c, \quad [[e_i]_{i=1}^d, f] \mapsto \left(\pi_{GM}^A([e_i]_{i=1}^d), \psi_{\mathcal{A}, p}^A([e_i]_{i=1}^d, f) \right), \quad (193)$$

با

$$\psi_{\mathcal{A}, p}^A : \mathcal{A}_p \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad [[e_i]_{i=1}^d, f] = \left[\sigma^A(p), \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f \right] \mapsto \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f, \quad (194)$$

که آن بردار ضرب نماینده خاص $f^A = \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f \in \mathbb{R}^c$ را انتخاب می‌کند که توسط قاب مرجع $\sigma^A(p)$ متاظر با پیمانه انتخاب شده، متمایز می‌شود. برای راحتی در آینده، توجه می‌کنیم که این به طور خاص دلالت بر این دارد که معکوس معادله (۱۹۴) توسط

$$(\psi_{\mathcal{A}, p}^A)^{-1} : \mathbb{R}^c \rightarrow \mathcal{A}_p : f \mapsto [\sigma^A(p), f]. \quad (195)$$

داده می‌شود. بدبیهی سازی تعریف شده به این شکل مستقل از نماینده انتخاب شده است زیرا برای هر $k \in G$ داریم:

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathcal{A}, p}^A \left([[e_i]_{i=1}^d \triangleleft k^{-1}, \rho(k)f] \right) &= \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d \triangleleft k^{-1})) \rho(k) f \\
&= \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d) \cdot k^{-1}) \rho(k) f \\
&= \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f \\
&= \psi_{\mathcal{A}, p}^A \left([[e_i]_{i=1}^d, f] \right)
\end{aligned} \quad (196)$$

بر اساس ساختار، توابع گذار توسط $\rho(g_p^{BA})$ داده می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathcal{A}, p}^B \left([[e_i]_{i=1}^d, f] \right) &= \rho(\psi_{GM, p}^B([e_i]_{i=1}^d)) f \\
&= \rho(g_p^{BA} \psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f \\
&= \rho(g_p^{BA}) \rho(\psi_{GM, p}^A([e_i]_{i=1}^d)) f \\
&= \rho(g_p^{BA}) \psi_{\mathcal{A}, p}^A \left([[e_i]_{i=1}^d, f] \right)
\end{aligned} \quad (197)$$

اگر کلاف مماس به عنوان یک کلاف برداری G -الحاقی $TM \cong (GM \times \mathbb{R}^d)/G$ در نظر گرفته شود، بدبیهی سازی‌های آن از معادله (۱۹۳) برای انتخاب خاص $g = \rho(g)$ بازیابی می‌شوند.

فرض کنید یک میدان ویژگی مستقل از مختصات $\Psi_{\mathcal{A}}^A \in \Gamma(\mathcal{A})$ داده شده باشد. نسبت به پیمانه $\Psi_{\mathcal{A}}^A$ ، می‌توان آن را به صورت محلی به عنوان یک میدان بردار ضرب $f^A : U^A \rightarrow \mathbb{R}^c$ با تعریف زیر نمایش داد:

$$f^A := \text{proj}_r \circ \Psi_{\mathcal{A}}^A \circ f \quad (198)$$

که معادل با تعریف نقطه‌ای زیر است:

$$f^A(p) = \psi_{\mathcal{A}, p}^A \circ f(p). \quad (199)$$

همانطور که از نمودار جابجایی در شکل ۲۹ پیداست، توابع گذار در معادله (۱۹۷) به میدان‌های ضرب محلی منتقل می‌شوند به طوری که داریم:

$$f^B(p) = \rho(g_p^{BA}) f^A(p) \quad (200)$$

برای $p \in U^A \cap U^B$ این با تعریف ما از تبدیلات پیمانه بردارهای ضرب ویژگی در معادله (۲۸) موافق است و آن را توجیه می‌کند.

ملاحظات پایانی: بدینهی سازی‌های محلی و توابع گذار تعریف شده در اینجا، تعاریف پیمانه‌ها و تبدیلات پیمانه از بخش ۲.۳ را رسمی‌سازی و توجه می‌کنند. نشان داده شد که بدینهی سازی‌های محلی TM و FM یکدیگر را القا می‌کنند. اگر یک G -اطلس برای هر یک از این دو انتخاب شود، یک G -ساختار GM تعریف می‌کند که G -اطلس آن اساساً با G -اطلس FM منطبق است. علاوه بر این، یک G -اطلس برای هر کلاف الحاقی دیگر، از جمله A ، القا می‌کند. همانطور که در شکل ۲۷ به تصویر کشیده شده است، توابع گذار تمام G -اطلس‌ها برای GM ، TM و FM با هم منطبق مستند، که این کلاف‌ها را G -الحاقی با یکدیگر می‌سازند. به طور خاص، هنگام تغییر از پیمانه A به پیمانه B ، بدینهی سازی‌های FM ، TM و GM مطابق با یک ضرب چپ با g^{BA} تبدیل می‌شوند در حالی که بدینهی سازی‌های کلاف بردار ویرثگی مطابق با یک ضرب چپ با $(g^{BA})^{-1}$ تبدیل می‌شوند؛ به معادلات (۱۷۵)، (۱۷۶) و (۱۸۷) (معادله (۱۹۷) مراجعه کنید. در عین حال، میدان‌های قاب مطابق با عمل راست $\triangleleft(g^{BA})^{-1}$ (معادله (۱۸۱)) تبدیل می‌شوند.

۵.۶ منتقل کننده‌های موازی روی کلاف‌های الحاقی

بخش ۳.۳ مقدمه‌ای شهودی بر انتقال موازی بردارهای مماس و بردارهای ویرثگی در امتداد یک مسیر γ از $p \in M$ به $q \in M$ ارائه داد. در اینجا به طور خلاصه بحث می‌کنیم که چگونه منتقل کننده‌های موازی مستقل از مختصات روی کلاف‌های تاری یکدیگر را القا می‌کنند و عبارات مختصاتی آنها را نسبت به بدینهی سازی‌های داده شده استخراج می‌کنیم. ما با فرض داده شده یوden منتقل کننده‌های مستقل از مختصات

$$\mathcal{P}_{TM,\gamma} : T_q M \rightarrow T_p M \quad (۲۰۱)$$

روی کلاف مماس TM شروع می‌کنیم و توضیح می‌دهیم که چگونه آنها منتقل کننده‌های

$$\mathcal{P}_{FM,\gamma} : F_q M \rightarrow F_p M \quad (۲۰۲)$$

روی کلاف قاب FM را القا می‌کنند. اگر این منتقل کننده‌ها، همانطور که در ادامه بحث می‌شود، با G -ساختار انتخاب شده G -سازگار باشند، در ادامه منتقل کننده‌های

$$\mathcal{P}_{GM,\gamma} : G_q M \rightarrow G_p M \quad (۲۰۳)$$

$$\mathcal{P}_{A,\gamma} : A_q \rightarrow A_p \quad (۲۰۴)$$

را روی کلاف‌های G -الحاقی GM و A -الحاقی GA می‌کنند. در عمل، یعنی در مرور ادبیات ما در بخش ۲.۳.۸، اکثر شبکه‌های کانولوشنی یا منتقل کننده‌هایی را فرض می‌کنند که بر اساس اتصال لوى-چیوینتا هستند یا یک اتصال بدینهی.

یک تعریف رسمی تر از منتقل کننده‌های کلاف ممکن است مسیر متفاوتی را در پیش بگیرد، که با معرفی یک اتصال به اصطلاح اصلی ارسمنان روی کلاف اصلی G یعنی GM شروع می‌شود (که بنا به تعریف، G -سازگار خواهد بود). چنین اتصال ارسمنان می‌تواند یا با انتخاب یک زیر کلاف افقی TGM از کلاف مماس HGM از GM تعریف شود یا، به طور معادل، با یک A -فرم اتصال با مقدار در جبر لی \mathfrak{g} $\rightarrow GM$ روی HGM . انتقال روی GM متعاقباً از طریق بالابر افقی $\rightarrow [1, 0, \gamma]$ یعنی γ را فضای پایه تعریف می‌شود، به طوری که بردارهای مماس بالابر در GM افقی هستند، یعنی $\gamma \in HGM$. سپس تمام منتقل کننده‌ها روی TM ، TM و FA به عنوان کلاف‌های G -الحاقی از منتقل کننده‌های روی G -ساختار القا می‌شوند. به جای دنبال کردن این رویکرد رسمی، که نسبتاً فنی خواهد بود و می‌توان آن را در ادبیات یافت [؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟ ؟]، ما بر چگونگی ارتباط منتقل کننده‌های مختلف از طریق القای یکدیگر تمرکز می‌کنیم.

انتقال روی TM : برای این منظور، با فرض داده شده یوden منتقل کننده‌های مستقل از مختصات $\mathcal{P}_{TM,\gamma}$ روی TM ، یک راه میان بر را انتخاب می‌کنیم. به یاد بیاورید که، با داشتن پیمانه‌های \tilde{A} روی یک همسایگی U از q و Ψ_{TM}^A روی یک همسایگی U^A از p ، منتقل کننده بردار مماس طبق معادله (۳۳) مختصاتی می‌شود، یعنی،

$$g_\gamma^{A\tilde{A}} := \psi_{TM,p}^A \circ \mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1} \in \mathrm{GL}(d), \quad (۲۰۵)$$

و اینکه مختصاتی سازی‌های آن تحت تبدیلات پیمانه در q و p طبق معادله (۳۵) تبدیل می‌شوند:

$$g_\gamma^{B\tilde{B}} = g_p^{BA} g_\gamma^{A\tilde{A}} (g_q^{\tilde{B}\tilde{A}})^{-1} \quad (۲۰۶)$$

برای نمایش تصویری این تعاریف در قالب یک نمودار جاچجایی، به معادله (۳۶) بازمی‌گردیم.

انتقال روی FM : با داشتن منتقل کننده روی کلاف مماس، منتقل کننده از انتقال محورهای قاب منفرد به دست می‌آید. در معادلات، فرض کنید $e_i \in F_q M$ $i=1, \dots, d$ یک قاب در q باشد، سپس محورهای منفرد e_i برای $i=1, \dots, d$ بردارهای مماس در $T_q M$ هستند

که می‌تواند از طریق $\mathcal{P}_{TM,\gamma}$ منتقل شوند. بنابراین منتقل کننده روی کلاف قاب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:^{۵۲}

$$\mathcal{P}_{FM,\gamma}: F_qM \rightarrow F_pM, \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto \mathcal{P}_{FM,\gamma}([e_i]_{i=1}^d) := [\mathcal{P}_{TM,\gamma}(e_i)]_{i=1}^d \quad (207)$$

برای استخراج شکل صریح مختصاتی سازی آن را بروی یک عنصر گروهی $(\psi_{FM,p}^A \circ \mathcal{P}_{FM,\gamma} \circ (\psi_{FM,q}^{\tilde{A}})^{-1}) \in GL(d)$ در $GL(d)$ عمل آن را بروی یک عنصر گروهی $(\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1} \in GL(d)$ در نظر بگیرید که نماینده یک قاب بدیهی شده از \mathbb{R}^d است که توسط ستون‌های ماتریس $h_{:,i} \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \dots, d$ تولید می‌شود:

$$\begin{aligned} [\psi_{FM,p}^A \circ \mathcal{P}_{FM,\gamma} \circ (\psi_{FM,q}^{\tilde{A}})^{-1}](h) &= [\psi_{FM,p}^A \circ \mathcal{P}_{FM,\gamma}] \left([(\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(h_{:,i})]_{i=1}^d \right) && \text{(تعريف } \psi_{FM,p}^A, \text{ معادله ۱۷۷)} \\ &= \psi_{FM,p}^A \left([\mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(h_{:,i})]_{i=1}^d \right) && \text{(تعريف } \mathcal{P}_{FM,\gamma}, \text{ معادله ۲۰۷)} \\ &= \left(\psi_{TM,p}^A \circ \mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(h_{:,i}) \right)_{i=1}^d && \text{(تعريف } \psi_{TM,p}^A, \text{ معادله ۱۷۷)} \\ &= \left(g_\gamma^{A\tilde{A}}(h_{:,i}) \right)_{i=1}^d && \text{(بدیهی سازی } \mathcal{P}_{TM,\gamma}, \text{ معادله ۲۰۵)} \\ &= g_\gamma^{A\tilde{A}} h && \text{(۲۰۸)} \end{aligned}$$

بنابراین، مختصاتی سازی‌های منتقل کننده‌های قاب معادل با مختصاتی سازی‌های بردار مماس در معادله (۲۰۵) هستند اما به جای عمل بر روی بردارهای ضرب در \mathbb{R}^d , بر روی قاب‌های بدیهی شده در $GL(d)$ عمل می‌کنند. تبدیلات پیمانه آن‌ها را نمودار جابجایی

$$\begin{array}{ccc} GL(d) & \xrightarrow{g_\gamma^{A\tilde{A}}} & GL(d) \\ \downarrow g_q^{\tilde{B}\tilde{A}} & \nearrow \psi_{FM,q}^{\tilde{A}} & \downarrow g_p^{BA} \\ F_qM & \xrightarrow{\mathcal{P}_{FM,\gamma}} & F_pM \\ \downarrow \psi_{FM,q}^{\tilde{B}} & \nearrow \psi_{FM,p}^A & \downarrow g_\gamma^{B\tilde{B}} \\ GL(d) & \xrightarrow{g_\gamma^{B\tilde{B}}} & GL(d) \end{array} \quad (209)$$

دیده می‌شود که با تبدیلات پیمانه منتقل کننده‌های مختصاتی شده روی TM در معادله (۲۰۶) منطبق هستند.

سازگاری اتصالات و G -ساخترها: هر انتخابی از اتصال یا تعریف منتقل کننده‌ها روی کلاف‌های TM و FM با هر G -ساختری سازگار نیست. به طور خاص، یک G -ساختر ممکن است تحت انتقال قاب‌ها بسته نباشد، یعنی، در حالی که یک قاب در G -ساختر GM نسبت به بدیهی سازی‌های GM در $GL(d)$ توسعه دارد.^{۵۳} مثلاً $\mathcal{P}_{FM,\gamma}$ به یک قاب در F_pM منتقل می‌شود، این قاب لزوماً در F_qM قرار ندارد.^{۵۴} منعکس $\psi_{FM,q}^{\tilde{A}\tilde{A}}$ می‌شود، که ضرب چپ آن‌ها روی تارهای \mathbb{R}^d و $GL(d)$ از کلاف‌های TM و FM خوش تعریف است، اما روی تار G از GM خوش تعریف نیست. اگر زیرکلاف GM تحت انتقال موازی روی FM بسته نباشد، این به معنای آن است که هیچ انتقال متناظر خوش تعریفی روی GM و در نتیجه روی هیچ کلاف G -الحاقی A وجود ندارد.

به عنوان مثال، اتصال لوی-چوپیتا را در فضاهای اقليدی در نظر بگیرید، که منتقل کننده‌های آن بردارهای مماس و قاب‌ها را به معنای معمول در d موازی نگه می‌دارند. $\{e\}$ -ساختر (میدان قاب) در شکل ۳۵ تحت این انتقال بسته است و بنابراین سازگار است. از سوی دیگر، $\{e\}$ -ساختر در شکل ۳۵ تحت این انتقال بسته نیست و بنابراین با اتصال لوی-چوپیتا ناسازگار است. به طور مشابه، $(SO(2))^{SO(3)}$ -ساختر روی S^1 در شکل ۳۵ با اتصال لوی-چوپیتا روی کره سازگار است، در حالی که $\{e\}$ -ساختر در شکل ۵۰ بسازگار نیست.

خواننده ممکن است پرسد چه گزاره‌های کلی در مورد سازگاری اتصالات (یا منتقل کننده‌ها) و G -ساخترها می‌توان بیان کرد. به طور کلی، اتصال لوی-چوپیتا، یا هر اتصال متريک ديجري، با d -ساختر OM که متناظر با متريک است، سازگار هستند.^{۵۵} اگر منفلاط جهت پذير باشد، اتصال لوی-چوپیتا علاوه بر اين با هر $SO(d)$ -ساختری که متناظر با متريک باشد، سازگار است. يك مثال، $(SO(2))^{SO(3)}$ -ساختر روی S^1 در شکل ۳۵ آاست. يك

^{۵۲} انتقال یک قاب در امتداد FM یک منحنی γ (بالاً افقی) را در TFM توصیف می‌کند. فضای تولید شده توسط تمام بردارهای مماس γ^\perp در امتداد TFM در امتداد FM قرار نداشت. چنین منحنی‌هایی، زیرکلاف افقی HFM از TFM است که در بالا ذکر شد.

^{۵۳} بر حسب یک اتصال اصلی ارسمن روی FM ، این حالت زمانی رخ می‌دهد که زیرکلاف افقی $TGM \subseteq TFM$ در $HFM \subseteq TFM$ قرار نداشته باشد. يك تعريف فوری از انتقال موازی بر حسب انتخاب یک زیرکلاف افقی HGM روی G -ساختر، همیشه (بنا به تعریف) منجر به یک انتقال خوش تعریف روی GM خواهد شد.

^{۵۴} اين گزاره بنا به تعریف برقرار است زیرا اتصالات متريک زوايا و طول‌ها بين بردارها و در نتیجه اورتونمال بودن قاب‌ها را حفظ می‌کنند. علاوه بر اين، می‌توان اتصالات متريک را به عنوان اتصالات اصلی ارسمن روی \bar{OM} تعریف کرد.

شرط لازم (اما نه کافی) برای اینکه یک G -ساختار باشد این است که گروه هولونومی اتصال، زیرگروهی از گروه ساختار G باشد.

یک مورد خاص مهم، $\{e\}$ -ساختارها هستند، زیرا آن‌ها یک اتصال بدیهی منحصر به فرد را القا می‌کنند.^{۵۶} منتقل کننده‌های متناظر، قاب‌ها را به گونه‌ای حرکت می‌دهند که با قاب‌های $\{e\}$ -ساختار موازی باقی بمانند. اتصالات بدیهی ممکن است برای نظریه کانولوشن‌های GM اهمیت خاصی نداشته باشند، با این حال، در واقع توسط بسیاری از شبکه‌های کانولوشنی استفاده می‌شوند. به طور خاص، هر شبکه‌ای که به یک $\{e\}$ -ساختار متناظر است، به طور ضمنی یک اتصال بدیهی را فرض می‌کند. این شامل تمام مدل‌های جدول ۶ با $\{e\} = G$ می‌شود، به ویژه آن‌هایی که در بخش‌های ۳.۱۱ و ۳.۱۲ بررسی شده‌اند.^{۵۷} توجه داشته باشید که این مدل‌ها اتصال بدیهی را فقط برای انتقال بردار ویژگی خود فرض می‌کنند اما ژئودزیک‌ها را برای پول‌بک منتقل کنند، معادله (۷۷)، بر اساس اتصال اصلی لوی–چیویتا محاسبه می‌کنند.

انتقال روی GM : با فرض اینکه GM با انتقال روی FM سازگار است (یعنی تحت آن بسته است)، یک منتقل کننده خوش تعریف با محدود کردن منتقل کننده کلاف قاب به G -ساختار داده می‌شود:

$$\mathcal{P}_{GM,\gamma} := \mathcal{P}_{FM,\gamma}|_{GM} : G_q M \rightarrow G_p M \quad (۲۱۰)$$

توابع گذار بین مختصاتی سازی‌های مختلف $\mathcal{P}_{GM,\gamma}$ سپس با توابع گذار $\mathcal{P}_{TM,\gamma}$ و در نتیجه با $\mathcal{P}_{TM,\gamma}$ نیز متنطبق خواهد بود. ما نمودار جابجایی زیر را به دست می‌آوریم که محدودسازی نمودار در معادله (۲۰۹) از $F_q M$ ، $F_p M$ و $G_q M$ و $G_p M$ به $GL(d)$ و G را به تصویر می‌کشد:

$$\begin{array}{ccccc} & & g^{A\tilde{A}}_{\gamma} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ G & & & & G \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & \psi_{GM,q}^{\tilde{A}} & & & \psi_{GM,p}^A \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ g_q^{B\tilde{A}} & & G_q M & \xrightarrow{\mathcal{P}_{GM,\gamma}} & G_p M \\ & \uparrow & & & \downarrow \\ & \psi_{GM,q}^{\tilde{B}} & & & \psi_{GM,p}^B \\ & \uparrow & & & \uparrow \\ & & G & \xleftarrow{g_{\gamma}^{B\tilde{B}}} & G \end{array} \quad (۲۱۱)$$

ما در ادامه این کار فرض می‌کنیم که انتقال روی GM خوش تعریف است.

انتقال روی A : اگر منتقل کننده‌های یک اتصال روی GM خوش تعریف باشند، آن‌ها منتقل کننده‌های را روی هر کلاف G -الحاقی، از جمله کلاف‌های بردار ویژگی $\rho \sim / \sim$ $(GM \times \mathbb{R}^c) / A = A$ می‌کنند. فرض کنید $[e_i]_{i=1}^d, f := [f_q]$ یک بردار ویژگی مستقل از مختصات در A_q باشد. انتقال موازی آن توسط آن کلاس همارزی داده می‌شود که با ثابت نگه داشتن برخی ضرایب نماینده $f \in \mathbb{R}^c$ و انتقال قاب متناظر $[e_i]_{i=1}^d$ تعريف می‌شود:

$$\mathcal{P}_{A,\gamma} : A_q \rightarrow A_p, \quad f_q \mapsto \mathcal{P}_{A,\gamma}(f_q) := [\mathcal{P}_{GM,\gamma}([e_i]_{i=1}^d), f] \quad (۲۱۲)$$

در بخش ۳.۳.۳ ما ادعا کردیم که منتقل کننده ضرایب عددی بردار ویژگی $(g_{\gamma}^{A\tilde{A}})^{-1}$ باشد، که این حالت زمانی است که انتقال روی GM خوش تعریف باشد. این عبارت مختصاتی از $\mathcal{P}_{A,\gamma}$ را می‌توان با ارزیابی گام به گام عمل $\psi_{A,p}^A \circ \mathcal{P}_{A,\gamma} \circ (\psi_{A,q}^{\tilde{A}})^{-1}$ در $\rho(G) \leq GL(c)$ را بردار ضریب ویژگی استخراج کرد:

$$\begin{aligned} [\psi_{A,p}^A \circ \mathcal{P}_{A,\gamma} \circ (\psi_{A,q}^{\tilde{A}})^{-1}](f) &= [\psi_{A,p}^A \circ \mathcal{P}_{A,\gamma}]([\sigma^{\tilde{A}}(q), f]) && \text{(تعريف } ^{-1}, \mathcal{P}_{A,p}^{\tilde{A}}, \text{ معادله (۱۹۵))} \\ &= \psi_{A,p}^A([\mathcal{P}_{GM,\gamma}(\sigma^{\tilde{A}}(q)), f]) && \text{(تعريف } \mathcal{P}_{A,\gamma}, \text{ معادله (۲۱۲))} \\ &= \rho(\psi_{GM,p}^A \circ \mathcal{P}_{GM,\gamma} \circ \sigma^{\tilde{A}}(q)) \cdot f && \text{(تعريف } \mathcal{P}_{A,p}^A, \text{ معادله (۱۹۴))} \\ &= \rho(\psi_{GM,p}^A \circ \mathcal{P}_{GM,\gamma} \circ (\psi_{GM,q}^{\tilde{A}})^{-1}(e)) \cdot f && \text{(تعريف مقطع همانی } \sigma^{\tilde{A}}, \text{ معادله (۱۸۳))} \\ &= \rho(g_{\gamma}^{A\tilde{A}}) \cdot f && \text{(در مختصات، معادله (۲۱۱))} \end{aligned} \quad (۲۱۳)$$

^{۵۵} یک اتصال بدیهی است اگر گروه هولونومی آن، یعنی انتقال موازی آن حول هر حلقه بسته، بدیهی باشد [۶].

^{۵۶} فقط یک اتصال اصلی ارسمن $H\{e\}M = T\{e\}M$ را می‌توان روی $\{e\}M$ انتخاب کرد زیرا کلاف عمودی $V\{e\}M$ مقطع صفر از $T\{e\}M$ است.

^{۵۷} این مدل‌ها با مدل‌سازی نکردن منتقل کننده‌های غیربدیهی بردارهای ویژگی، به طور ضمنی یک اتصال بدیهی را فرض می‌کنند: آن‌ها ضرایب بردار ویژگی را بدون تبدیل آن‌ها ابیاشت می‌کنند.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \rho(g_{\gamma}^{A\tilde{A}}) & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 \mathbb{R}^c & & \mathcal{A}_q & & \mathbb{R}^c \\
 & \downarrow \psi_{A,q}^{\tilde{A}} & \xrightarrow{\mathcal{P}_{A,\gamma}} & \downarrow \psi_{A,p}^A & \\
 \rho(g_q^{B\tilde{A}}) & & \mathcal{A}_p & & \rho(g_p^{BA}) \\
 & \uparrow \psi_{A,q}^{\tilde{B}} & & \downarrow \psi_{A,p}^B & \\
 & & \rho(g_{\gamma}^{B\tilde{B}}) & &
 \end{array} \quad (214)$$

نشان می دهد که تبدیلات پیمانه منتقل کننده های بردار ویژگی مختصاتی شده به صورت زیر است:

$$\rho(g_{\gamma}^{B\tilde{B}}) = \rho(g_p^{BA}) \rho(g_{\gamma}^{A\tilde{A}}) \rho(g_q^{B\tilde{A}})^{-1} \quad (215)$$

توجه داشته باشید که این قانون تبدیل با قانون تبدیل در معادله (۲۰۶) سازگار است.

۷ تبدیلات میدان کرنل مستقل از مختصات و کانولوشن های GM

کلاف های G-الحاقی معرفی شده در بخش ۶ امکان توصیف میدان های ویژگی - و در نتیجه شبکه های کانولوشنی - را در سطح سراسری فراهم می کنند. با داشتن دنباله ای از کلاف های بردار ویژگی G-الحاقی روی $A_1, \dots, A_N \xrightarrow{\pi_{A_1}, \dots, \pi_{A_N}} M$ ، ما شبکه های کانولوشنی مستقل از مختصات را به عنوان دنباله هایی

$$\Gamma(A_1) \xrightarrow{L_1} \Gamma(A_1) \xrightarrow{L_2} \dots \xrightarrow{L_N} \Gamma(A_N) \quad (216)$$

از لایه های پارامتری شده L_N, L_1, \dots, L_i توصیف می کنیم که بین فضاهای ویژگی $\Gamma(A_1), \dots, \Gamma(A_N)$ ، $\Gamma(A_i)$ ، $\Gamma(A_j)$ ، \dots ، $\Gamma(A_k)$ ، \dots ، $\Gamma(A_l)$ مدل شده توسط کلاف های متناظر، نگاشت می کنند. در حالی که انواع میدان (یا قوانین تبدیل) $\rho_i : G \rightarrow \text{GL}(c_i)$ برای کلاف های میانی A_i (برای $i = 1, \dots, N$) توسط کاربر به عنوان یک آبیرپارامتر مشخص شوند، انواع میدان ($G \rightarrow \text{GL}(c_i) / \sim_{\rho_i}$) را به عنوان $\rho_i : G \rightarrow \text{GL}(c_N)$ برای ورودی و خروجی شبکه معمولاً توسط وظیفه یادگیری تعیین می شوند. ساختار مازو لار شبکه های عصبی اجازه می دهد تا توجه را به لایه های منفرد محدود کنیم که بین فضاهای ویژگی $(\Gamma(A_1), \dots, \Gamma(A_N))$ و (ρ_1, \dots, ρ_N) نگاشت انجام می دهنند.

۱.۷	کانولوشن های GM با اندازه 1×1
۱.۱.۷	کانولوشن های GM با اندازه 1×1 به عنوان M-مورفیسم های کلاف برداری
۲.۱.۷	کانولوشن های GM با اندازه 1×1 به عنوان مقاطع کلاف هومومورفیسم
۲.۷	تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن های GM
۱.۲.۷	میدان های کرنل
۲.۲.۷	تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن های GM
۳.۲.۷	تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن های GM در مختصات محلی

هدف اصلی این بخش، معرفی کانولوشن های سازنده اصلی شبکه های مستقل از مختصات GM است که بلوک های سازنده اصلی شبکه های مستقل از مختصات GM را معرفی می کنند. برای شروع، و برای معرفی مفاهیمی که بعداً مورد نیاز خواهند بود، ما در بخش ۱.۷ ایندا بر روی مورد ساده تر 1×1 -تمرکز خواهیم کرد که کرنل های نقطه مانند را به کار می بردند. بخش ۲.۷ تمرکز را به کانولوشن های GM و تبدیلات میدان کرنل با کرنل های با گستره فضایی متنقل می کند. آنها بر حسب میدان های کرنل سراسری و هموار پارامتری می شوند که در بخش ۱.۲.۷ معرفی شده اند. میدان های کرنل کانولوشنی GM ملزم به اشتراک گذاری وزن ها بین موقعیت های مکانی مختلف هستند. برای اینکه این اشتراک گذاری وزن شده اند. میدان های کرنل کانولوشنی GM باشد، کرنل های الگو که میدان های کرنل کانولوشنی GM را پارامتری می کنند، باید G-هداشت پذیر باشند (معادله (۲۴۲)). تبدیلات واقعی میدان کرنل و کانولوشن های GM در بخش ۲.۲.۷ معرفی می شوند. تعریف سراسری آنها با جایگزینی عبارات مختصاتی محلی از بخش ۲.۴ با محتواهای سراسری و مستقل از مختصات شان هدایت می شود. همانطور که در بخش ۲.۷ نشان داده شده است، این تعاریف مستقل از مختصات در بدیهی سازی های محلی به عبارات مختصاتی از بخش ۲.۴ کاهش می بانند.

۱.۷ کانولوشن‌های GM با اندازه 1×1

-میدان‌های ویژگی ورودی ($f_{\text{in}} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{in}})$) را به میدان‌های ویژگی خروجی ($f_{\text{out}} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{out}})$) با نگاشت خطی $f_{\text{out}} = f_{\text{in}} \circ \mathcal{C}$ ، هر بردار ویژگی ورودی منفرد $f_{\text{in}} \in \mathcal{A}_{\text{in}, p} \cong \mathbb{R}^{c_{\text{in}}}$ به یک بردار ویژگی خروجی $f_{\text{out}} \in \mathcal{A}_{\text{out}, p} \cong \mathbb{R}^{c_{\text{out}}}$ در همان مکان $p \in M$ نگاشت می‌کند. ویژگی کانولوشن با اشتراک گذاری نگاشت خطی از $\mathcal{A}_{\text{in}, p}$ به $\mathcal{A}_{\text{out}, p}$ بین مکان‌های فضایی مختلف پیاده‌سازی می‌شود. با این حال، در حالی که فضاهای ویژگی $\mathcal{A}_{\text{in}, p}$ و همچنین $\mathcal{A}_{\text{out}, q}$ برای $p, q \in M$ مختلف با یکدیگر ایزو‌مورف هستند، اگر گروه ساختار G در نظر گرفته شده غیربدیهی باشد، هیچ ایزو‌مورفیسم کاتونی بین آنها وجود ندارد. بنابراین، مشخص نیست که چگونه نگاشت خطی می‌تواند بین مکان‌های مختلف به اشتراک گذاشته شود. همانطور که قبل در مقدمه این بخش اشاره شد، این مسئله با در نظر گرفتن کرنل‌های G -هم‌متغیر که نسبت به انتخاب خاص ایزو‌مورفیسم یا پیمانه بی تفاوت هستند، حل می‌شود. اختیاری بودن بدیهی‌سازی که از G -اطلس انتخاب می‌شود، استقلال از مختصات GM را در 1×1 -می‌تواند معکوس می‌کند.

از نظر ریاضی، 1×1 -را می‌توان یا به عنوان M -مورفیسم‌های کلاف برداری خاص یا از طریق مقاطعه متناظر کلاف‌های $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{in}}, \mathcal{A}_{\text{out}})$ فرمول‌بندی کرد. از آنجایی که بعداً به هر دو مفهوم نیاز داریم، هر دو دیدگاه را در بخش‌های بعدی ۱.۷.۲ و ۱.۷.۳ معرفی خواهیم کرد.

۱.۱.۷ کانولوشن‌های GM با اندازه 1×1 به عنوان M -مورفیسم‌های کلاف برداری

-را می‌توان یا به عنوان M -مورفیسم‌های کلاف برداری هموار خاصی که وزن‌ها را در موقعیت‌های مکانی به اشتراک می‌گذارند، رسمی‌سازی کرد. با نادیده گرفتن الزام به اشتراک گذاری وزن‌ها در حال حاضر، چنین M -مورفیسم کلاف برداری \mathcal{C} یک نگاشت کلاف هموار است که نمودار جابجایی زیر را برآورده می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\text{in}} & \xrightarrow{\mathcal{C}} & \mathcal{A}_{\text{out}} \\ & \searrow \pi_{\mathcal{A}_{\text{out}}} & \swarrow \pi_{\mathcal{A}_{\text{in}}} \\ & M & \end{array} \quad (217)$$

جابجایی‌پذیری \mathcal{C} تضمین می‌کند که هر تار $\mathcal{A}_{\text{in}, p}$ به تار $\mathcal{A}_{\text{out}, p}$ روی همان نقطه $p \in M$ نگاشت می‌شود (که باعث پیدا شدن M در عبارت M -مورفیسم می‌شود). به عنوان یک مورفیسم کلاف برداری، محدودیت $\mathcal{C}|_p : \mathcal{A}_{\text{in}, p} \rightarrow \mathcal{A}_{\text{out}, p}$ به یک تار منفرد، علاوه بر این، به صورت خطی تعریف می‌شود. نسبت به یک بدیهی‌سازی محلی $\Psi^A_{\mathcal{A}_{\text{in}}}$ از \mathcal{A}_{in} و $\Psi^A_{\mathcal{A}_{\text{out}}}$ از \mathcal{A}_{out} ، نگاشت کلاف در هر نقطه $p \in U^A$ توسط یک ماتریس نمایش داده می‌شود:

$$\mathcal{C}^A|_p := \psi^A_{\mathcal{A}_{\text{out}, p}} \circ \mathcal{C}|_p \circ (\psi^A_{\mathcal{A}_{\text{in}, p}})^{-1} \in \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}. \quad (218)$$

ارتباط آن با یک مختصاتی‌سازی دوم $p \in U^A \cap U^B$ در \mathcal{C}^B به صورت زیر داده می‌شود:

$$\mathcal{C}^B|_p = \rho_{\mathcal{A}_{\text{out}}}(g_p^{BA}) \mathcal{C}^A|_p \rho_{\mathcal{A}_{\text{in}}}(g_p^{BA})^{-1}, \quad (219)$$

که از نمودار جابجایی زیر مشهود است:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{C}^A|_p & & \\ & \swarrow \psi^A_{\mathcal{A}_{\text{out}, p}} & & \searrow \psi^A_{\mathcal{A}_{\text{in}, p}} & \\ \mathbb{R}^{c_{\text{out}}} & & \mathcal{A}_{\text{out}, p} & & \mathbb{R}^{c_{\text{in}}} \\ \downarrow \rho_{\mathcal{A}_{\text{out}}}(g_p^{BA}) & & \xrightarrow{\mathcal{C}|_p} & & \downarrow \rho_{\mathcal{A}_{\text{in}}}(g_p^{BA}) \\ & \swarrow \psi^B_{\mathcal{A}_{\text{out}, p}} & & \searrow \psi^B_{\mathcal{A}_{\text{in}, p}} & \\ & \mathbb{R}^{c_{\text{out}}} & & \mathcal{C}^B|_p & \mathbb{R}^{c_{\text{in}}} \end{array} \quad (220)$$

نگاشت کلاف \mathcal{C} بر روی میدان‌های ویژگی ورودی ($f_{\text{in}} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{in}})$) عمل می‌کند تا میدان‌های ویژگی خروجی تولید کند:

$$f_{\text{out}} = \mathcal{C} \circ f_{\text{in}} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{out}}). \quad (221)$$

بر حسب یک نمودار جابجایی، این نگاشت به صورت زیر به تصویر کشیده می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\square\square} & \xrightarrow{\quad C \quad} & \mathcal{A}_{\square\square\square} \\ \downarrow f_{\square\square} & & \uparrow f_{\square\square\square} \\ & M & \end{array}, \quad (222)$$

برای اینکه یک M -مورفیسم کلاف برداری $C_{K_{1\times 1}}$ نماینده یک 1×1 - GM باشد، باید بر حسب یک الگوی کرنل $K_{1\times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\square\square}\times c_{\square\square}}$ -یعنی $K_{1\times 1}$ پارامتری شود که با مختصاتی سازی‌ها در تمام موقعیت‌های مکانی به اشتراک گذاشته شده است. همانطور که قبلاً بحث شد، برای تضمین استقلال از مختصات GM ، هیچ پیمانه خاصی نباید ترجیح داده شود. بنابراین لازم است که وزن‌ها با تمام بدیهی‌سازی‌های \mathcal{A}^G -اطلس $X \in \mathfrak{X}$ از GM به طور همزمان با اشتراک گذاشته شوند، یعنی لازم است:

$$C_{K_{1\times 1}}|_p = K_{1\times 1} \quad \text{برای هر پیمانه } X \in \mathfrak{X} \text{ با } p \in U^X. \quad (223)$$

از رفتار تبدیل بین مختصاتی سازی‌های مختلف در معادله (219) نتیجه می‌شود که الگوی کرنل باید قید خطی زیر را برابر داشته باشد:

$$\rho_{\square\square}(g) K_{1\times 1} \rho_{\square\square}(g)^{-1} = K_{1\times 1} \quad \forall g \in G, \quad (224)$$

یعنی، باید یک درهم تنnde (یک نگاشت خطي هم‌متغير) باشد. فضای برداری

$$\text{Hom}_G(\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square}) := \left\{ K_{1\times 1} \in \mathbb{R}^{c_{\square\square}\times c_{\square\square}} \mid K_{1\times 1} \rho_{\square\square}(g) = \rho_{\square\square}(g) K_{1\times 1} \quad \forall g \in G \right\} \quad (225)$$

نگاشت‌های درهم تنnde، فضای کرنل‌های 1×1 - GM -مستقل از مختصات GM را به طور کامل مشخص می‌کند. همانطور که قبلاً در بخش ۱.۱.۴ ذکر شد، لم شور [۹] ایجاد می‌کند که الزام به اینکه $K_{1\times 1}$ یک درهم تنnde باشد، از نگاشت بین میدان‌هایی که تحت نمایش‌های کاهش ناپذیر غیرایزوورف تبدیل می‌شوند، از طریق 1×1 - GM -جلوگیری می‌کند. کانولوشن‌های عمومی تر GM با کرنل‌های با گستره فضایی، که در بخش ۲.۷ تعریف شده‌اند، این مسئله را حل خواهد کرد.

با این مقدمات، آماده‌ایم تا تعریف دقیقی از 1×1 - GM -درهم را ارائه دهیم:

تعریف ۲.۱ 1×1 - GM -درهم (یک نگاشت است

$$K_{1\times 1} \otimes : \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}), \quad f_{\square\square} \mapsto K_{1\times 1} \otimes f_{\square\square} := C_{K_{1\times 1}} \circ f_{\square\square} \quad (226)$$

که توسط یک کرنل درهم تنnde 1×1 - GM -یعنی $K_{1\times 1} \in \text{Hom}_G(\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square})$ مورفیسم کلاف برداری هموار منحصر به فرد بین $\mathcal{A}_{\square\square}$ و $\mathcal{A}_{\square\square\square}$ است که در پیمانه‌های دلخواه $\psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}$ و از G -اطلس $\psi_{\mathcal{A}_{\square\square\square}, p}$ مورد نظر به صورت نقطه‌ای تعریف می‌شود:

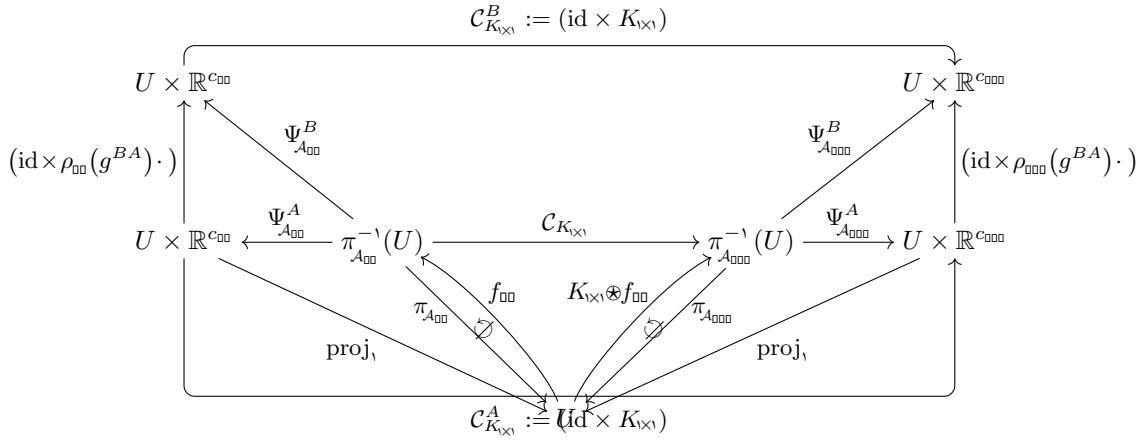
$$C_{K_{1\times 1}}|_p := \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^{-1} \circ K_{1\times 1} \circ \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}. \quad (227)$$

استقلال از پیمانه‌های انتخاب شده (استقلال از مختصات GM) با درهم تنnde بودن $K_{1\times 1}$ تضمین می‌شود.

برای نشان دادن صریح استقلال از پیمانه انتخاب شده، هر بدیهی‌سازی مرتبه با G یعنی $\psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}(g)$ و $\rho_{\square\square}(g)$ را برای یک عنصر گروه ساختار دلخواه $g \in G$ در نظر بگیرید، که ساختار

$$\begin{aligned} C_{K_{1\times 1}}|_p &= (\rho_{\square\square}(g) \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p})^{-1} \circ K_{1\times 1} \circ (\rho_{\square\square}(g) \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}) \\ &= \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^{-1} \circ (\rho_{\square\square}(g)^{-1} K_{1\times 1} \rho_{\square\square}(g)) \circ \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p} \\ &= \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^{-1} \circ K_{1\times 1} \circ \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p} \end{aligned} \quad (228)$$

را نامتغیر باقی می‌گذارد. اینکه 1×1 - GM -درهم تنnde تعریف شده به این شکل واقعاً به مقاطعی در $\Gamma(\mathcal{A}_{\square\square})$ نگاشت می‌شوند، از این واقعیت ناشی می‌شود که $C_{K_{1\times 1}}$ یک نگاشت کلاف است. یک نمای کلی از مختصاتی سازی‌های محلی 1×1 - GM -در شکل ۳۰ آورده شده است.



شکل ۳۰. مختصاتی‌سازی یک 1×1 - GM با اشتراک‌گذاری یک ماتریس کرنل $K_{\text{obj}} \in \mathbb{R}^{c_{\text{obj}} \times c_{\text{obj}}}$ و بیزگی کانولوشنی با اشتراک‌گذاری یک ماتریس کرنل $p \in M$ در موقعیت‌های مکانی مختلف K_{obj} می‌شود. از آنجایی که هیچ پیمانه‌ای نباید ترجیح داده شود، کرنل علاوه بر این در بدیهی‌سازی‌های مختلف $\mathcal{C}_{K_{\text{obj}}}^A$ و $\mathcal{C}_{K_{\text{obj}}}^B$ به اشتراک‌گذاشته می‌شود. بنابراین، جابجایی‌پذیری نمودار برای هر انتخاب $\Psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}}^A$ ، $\Psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}}^B$ و $\Psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}}^A$ قید $\Psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}}^B \circ \mathcal{C}_{K_{\text{obj}}}^A = K_{\text{obj}} \forall g \in G$ را اعمال می‌کند که ماتریس کرنل را به یک درهم تنده (یک نگاشت خطی هم‌متغیر) محدود می‌کند، یعنی $\mathcal{C}_{K_{\text{obj}}}^A \circ \pi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}} \neq \text{id}_{\mathcal{A}_{\text{obj}}}$ و $f_{\text{obj}} \circ \pi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}} \neq \text{id}_{\mathcal{A}_{\text{obj}}}$. به جز $K_{\text{obj}} \in \text{Hom}_G(\rho_{\text{obj}}, \rho_{\text{obj}}) \subseteq \mathbb{R}^{c_{\text{obj}} \times c_{\text{obj}}}$ نمودار جابجایی‌پذیر است.

۲.۱.۷ کانولوشن‌های GM با اندازه 1×1 به عنوان مقاطع کلاف هومومورفیسم

در حالی که M -مورفیسم کلاف برداری با مختصاتی‌سازی‌های مستقل از پیمانه از تعریف ۷.۱ و شکل ۳۰ یک 1×1 - GM -را به طور کامل مشخص می‌کند، اکنون دیدگاه جایگزینی را اتخاذ می‌کنیم که 1×1 - GM -را بر حسب کلاف هومومورفیسم $\xrightarrow{\pi_{\text{obj}}} M$ توصیف می‌کند. برای این منظور، به یاد بیارید که مورفیسم کلاف برداری \mathcal{C} در معادله (۲۱۷) به نگاشتهای خطی $p \in M$ روی هر $\mathcal{C}|_p : \mathcal{A}_{\text{obj}, p} \rightarrow \mathcal{A}_{\text{obj}, p}$ محدود می‌شود. مجموعه چین نگاشتهای خطی (یا هومومورفیسم‌های فضای برداری) بین $\mathcal{A}_{\text{obj}, p}$ و $\mathcal{A}_{\text{obj}, p}$ به صورت $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{obj}, p}, \mathcal{A}_{\text{obj}, p})$ نشان داده می‌شود. از آنجایی که این مجموعه تحت ترکیب‌های خطی بسته است، خود یک فضای برداری تشکیل می‌دهد. می‌توان نشان داد که اجتماع مجزای

$$\text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{obj}}, \mathcal{A}_{\text{obj}}) := \coprod_{p \in M} \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{obj}, p}, \mathcal{A}_{\text{obj}, p}) \quad (229)$$

این فضاهای هومومورفیسم، هنگامی که با نگاشت تصویر $\pi_{\text{obj}} : \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{obj}}, \mathcal{A}_{\text{obj}}) \rightarrow M$ که عناصر در $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{obj}, p}, \mathcal{A}_{\text{obj}, p})$ را به $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{obj}, p}, \mathcal{A}_{\text{obj}, p})$ می‌فرستد و یک ساختار هموار القا شده از ساختار \mathcal{A}_{obj} و \mathcal{A}_{obj} مجهز شود، یک کلاف برداری، یعنی کلاف هومومورفیسم بین \mathcal{A}_{obj} و \mathcal{A}_{obj} تشکیل می‌دهد [؟]. تارهای روی p در رابطه $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{obj}, p}, \mathcal{A}_{\text{obj}, p}) \cong \text{Hom}(\mathbb{R}^{c_{\text{obj}}}, \mathbb{R}^{c_{\text{obj}}}) \cong \mathbb{R}^{c_{\text{obj}} \times c_{\text{obj}}}$ صدق می‌کنند، به طوری که می‌توانیم تار نمونه‌ای را فضای برداری ماتریس‌های $c_{\text{obj}} \times c_{\text{obj}}$ با مقادیر حقیقی در نظر بگیریم. بدیهی‌سازی‌های

$$\Psi_{\text{obj}} : \pi_{\text{obj}}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^{c_{\text{obj}} \times c_{\text{obj}}}, \quad H \mapsto (p, \psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}, p}(H)), \quad (230)$$

که در آن $(H) = \pi_{\text{obj}}(H)$ را به اختصار آورده‌ایم، از بدیهی‌سازی‌های \mathcal{A}_{obj} و \mathcal{A}_{obj} با تعریف

$$\psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}, p} : \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{obj}, p}, \mathcal{A}_{\text{obj}, p}) \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{obj}} \times c_{\text{obj}}}, \quad H \mapsto \psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}, p} \circ H \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}, p})^{-1} \quad (231)$$

به قیاس با معادلات (۲۱۸) و (۱۸) القا می‌شوند. این به معنای نگاشتهای گذار

$$\begin{aligned} H^B &= \psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}, p}^B \circ H \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}, p}^B)^{-1} \\ &= \psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}, p}^B \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}, p}^A)^{-1} H^A \psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}, p}^A \circ (\psi_{\mathcal{A}_{\text{obj}}, p}^B)^{-1} \\ &= \rho_{\text{obj}}(g^{BA}) H^A \rho_{\text{obj}}(g^{BA})^{-1} \\ &=: \rho_{\text{obj}}(g^{BA}) H^A \end{aligned} \quad (232)$$

(ب) مقاطع ($\sigma_{K_{1 \times 1}} : M \rightarrow \text{Hom}(A_{000}, A_{000})$) از کلاف هومومورفیسم که متناظر با 1×1 -هرم تند است، دقیقاً آنهاست که به $K_{1 \times 1} \in \text{Hom}_G(\rho_0, \rho_0) \subseteq \mathbb{R}^{c_{000} \times c_{000}}$ در همه پیمانه‌ها بدین معنی شوند. چنین مقاطعی متناظر با نگاشت‌های کلاف هستند که همانطور که در شکل ۳۰ مشخص شده است، بدین معنی شوند.

(ت) بدین معنی سازی ($\text{Hom}(A_{000}, A_{000})$) از آنجایی که به A_{000} , GM , TM و A_{000} الحاقی است، نگاشت‌های گذار کلاف هومومورفیسم توسعه همان عنصر گروهی g^{BA} از گروه ساختار مشترک G تعیین می‌شوند (این را با شکل ۲۷ مقایسه کنید). مورفیسم‌های کلاف برداری بدون قید همانطور که در معادله (۲۱۷) نشان داده شده است، متناظر با مقاطع هموار بدون قید از $\text{Hom}(A_{000}, A_{000})$ هستند.

شکل ۳۱: بدین معنی سازی‌های محلی کلاف هومومورفیسم ($\text{Hom}(A_{000}, A_{000})$), کلاف برداری نگاشت‌های خطی بین فضاهای $A_{000, p}$ و $A_{000, p}$ برای هر $p \in M$. کلاف برداری نگاشت‌های خطی بین $A_{000, p}$ و $A_{000, p}$ را به اختصار می‌نویسیم. به جز $\sigma_{K_{1 \times 1}} \circ \pi_{000} \neq \text{id}_{\text{Hom}(A_{000}, A_{000})}$ نمودارها جابجایی پذیر هستند.

بین پیمانه‌های Ψ_{000}^A و Ψ_{000}^B روی $U^A \cap U^B$ است، که در آن برای راحتی نوشتاری، نایابش گروهی هومومورفیسم ($\rho_{000} : G \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^{c_{000} \times c_{000}})$) بنا به ساختار، به $\text{Hom}(A_{000}, A_{000})$, GM , TM و A_{000} الحاقی است، یعنی بدین معنی سازی‌های آن به طور همزمان با بدین معنی سازی‌های کلاف‌های دیگر تبدیل می‌شوند. به عنوان یک کلاف برداری G -الحاقی، می‌توان آن را با $\sim_{\rho_{000}} / (\text{GM} \times \mathbb{R}^{c_{000} \times c_{000}})$ شناسایی کرد. شکل ۳۱ یک نمای کلی از بدین معنی سازی‌های محلی ($\text{Hom}(A_{000}, A_{000})$) را نشان می‌دهد. به شاباهت با بدین معنی سازی‌های دیگر کلاف‌های G -الحاقی در شکل ۲۷ توجه کنید.

از دیدگاه کلاف‌های هومومورفیسم، نگاشت‌های کلاف بدون قید متناظر با عمل مقاطع کلاف هومومورفیسم هموار بدون قید هستند.

$$\sigma_{\text{Hom}} : M \mapsto \text{Hom}(A_{000}, A_{000}) \quad \pi_{000} \circ \sigma_{\text{Hom}} = \text{id}_M \quad (233)$$

که می‌توان آنها را به عنوان میدان‌های کرنل 1×1 تفسیر کرد که وزن‌ها را به اشتراک نمی‌گذارند. وجود سراسری آنها با این واقعیت که $\text{Hom}(A_{000}, A_{000})$ یک کلاف برداری است تضمین می‌شود. مقاطع متناظر با 1×1 -هرم تند $\text{Hom}(A_{000, p}, A_{000, p})$ علاوه بر این نیاز دارد که تبدیلات خطی $\sigma_{\text{Hom}}(p) \in \text{Hom}(A_{000, p}, A_{000, p})$ کرنل الگو $K_{1 \times 1} \in \mathbb{R}^{c_{000} \times c_{000}}$ تعیین شوند که در موقعیت‌های مختلف $p \in M$ و h انتخاب پیمانه به اشتراک گذاشته شده است. بنابراین آنها را می‌توان برای هر $p \in M$ به صورت زیر تعریف کرد

$$\sigma_{K_{1 \times 1}}(p) := \psi_{000, p}^{-1}(K_{1 \times 1}), \quad K_{1 \times 1} \in \text{Hom}_G(\rho_0, \rho_0), \quad (234)$$

که در آن بدین معنی سازی انتخاب شده Ψ دلخواه است اگر (و تنها اگر) $K_{1 \times 1}$ قید در هم تند را برآورده کند

$$\rho_{000}(g)K_{1 \times 1} = K_{1 \times 1} \quad \forall g \in G, \quad (235)$$

که معادل با معادله (۲۲۴) است.^{۵۹} بی‌اهمیت بودن پیمانه در چنین مقاطعی در نمودار جابجایی در شکل ۳۱ به تصویر کشیده شده است (این را با بدین معنی سازی نگاشت کلاف معادل در شکل ۳۰ مقایسه کنید).

ملاحظات پایانی: یک لایه هموار $K_{1 \times 1} \otimes GM$ را می‌توان به طور معادل از طریق یک نگاشت کلاف هموار به صورت $f_{000} : \Gamma(A_{000}) \rightarrow \Gamma(A_{000})$, $f_{000} \mapsto f_{000} \circ C_{K_{1 \times 1}} \circ f_{000}(p) := C_{K_{1 \times 1}} \circ f_{000}(p)$ یا از طریق یک مقاطع کلاف هومومورفیسم هموار به صورت $f_{000} \circ \sigma_{K_{1 \times 1}}(p) := f_{000}(p)$ تعریف کرد. بنا به تعریف، هر دو در یک پیمانه دلخواه Ψ_{000}^A به $f_{000}(p) = K_{1 \times 1} f_{000}^A(p)$ بودند. بدین معنی سازی شوند. استقلال از مختصات GM این تعریف با خاصیت در هم تندگی کرنل در معادله (۲۲۴) یا، به طور معادل، معادله (۲۳۵) تضمین می‌شود. این

^{۵۸} به طور کلی، یک کلاف هومومورفیسم بین دو کلاف برداری غیرالحاقی با گروه‌های ساختار G_1 و G_2 خواهد داشت. از آنجایی که A_{000} و A_{000} الحاقی هستند، آنها به طور همزمان تحت همان گروه ساختار $G = G_1 = G_2$ تبدیل می‌شوند به طوری که نگاشت‌های گذار آنها در زیرگروه قطعی $G \times G$ مقدار می‌گیرند.

^{۵۹} همواری مورد نیاز مقاطع از همواری بدین معنی سازی‌های محلی ناشی می‌شود.

را می‌توان با در نظر گرفتن یک بدینهی سازی متفاوت از طریق $\Psi_{\square \square}^B$ مشاهده کرد:

$$\begin{aligned} K_{1 \times 1} f_{\square \square}^B(p) &= K_{1 \times 1} (\rho_{\square \square}(g_p^{BA}) f_{\square \square}^A(p)) \\ &= \rho_{\square \square}(g_p^{BA}) K_{1 \times 1} f_{\square \square}^A(p) \\ &= \rho_{\square \square}(g_p^{BA}) f_{\square \square}^A(p) \\ &= f_{\square \square}^B(p) \end{aligned} \quad (236)$$

۲.۷ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM

اکنون به سراغ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM با کرنل‌های (کانولوشنی) با گستره فضایی می‌رویم. بخش ۱.۲.۷ میدان‌های کرنل عمومی و بدون قید و میدان‌های کرنل کانولوشنی GM خاص‌تری را معرفی می‌کند که بر اساس یک کرنل الگوی مشترک G-هدايت‌پذیر تعریف می‌شوند. تبدیلات میدان کرنل عمومی و کانولوشن‌های GM در بخش ۲.۲.۷ معرفی می‌شوند. از آنجایی که هر دو به صورت سراسری تعریف شده‌اند، فرمول‌بندی آنها لزوماً مستقل از مختصات است. بخش ۳.۲.۷ هر دو عمل را نسبت به بدینهی سازی‌های محلی بیان می‌کند و تعاریف محلی ما را از بخش ۲.۴ بازیابی می‌کند.

۱.۲.۷ میدان‌های کرنل مستقل از مختصات و کرنل‌های G-هدايت‌پذیر

برای تشخیص الگوهای فضایی در میدان‌های ویژگی، شبکهای کانولوشنی از کرنل‌های با گستره فضایی استفاده می‌کنند که به صورت خطی ویژگی‌ها را از یک همسایگی محلی در اطراف هر نقطه جمع‌آوری می‌کنند. در معادله (۷۰) ما کرنل‌های الگوی (بدون قید) را برای یک منیفلد d -بعدی و میدان‌های ویژگی ورودی و خروجی با ابعاد $c_{\square \square}$ و $c_{\square \square \square}$ به عنوان نگاشتهای $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square \square} \times c_{\square \square}}$ تعریف کردیم که هر نقطه از دامنه خود یک ماتریس $c_{\square \square} \times c_{\square \square}$ اختصاص می‌دهند. تعریف کرنل‌های کانولوشن به عنوان نگاشتهایی با دامنه $\mathbb{R}^d \cong T_p M$ و هم‌دامنه $\mathbb{R}^{c_{\square \square} \times c_{\square \square}} \cong \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square \square, p}, \mathcal{A}_{\square \square \square, p})$ همومورفیسم مستقل از مختصات برای کرنل‌ها به عنوان نگاشتهایی بین فضاهای مماس و فضاهای همومورفیسم متناظر پیشنهاد می‌کند:

تعریف ۲.۲ (میدان کرنل). مامیدان‌های کرنل (بدون قید) از نوع $\rho_{\square \square} : \rho_{\square \square} M$ به عنوان M -مورفیسم‌های کلاف هموار بین TM و TM کلاف همومورفیسم بردار ویژگی $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square \square}, \mathcal{A}_{\square \square \square})$ تعریف می‌کیم. بر اساس تعریفش به عنوان یک M -مورفیسم، یک میدان کرنل \mathcal{K} باعث جابجایی نمودار زیر می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\mathcal{K}} & \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square \square}, \mathcal{A}_{\square \square \square}) \\ \pi_{TM} \searrow & & \swarrow \pi_{\square \square} \\ & M & \end{array} \quad (237)$$

با وجود نگاشت هموار بین دو کلاف برداری، فرض نمی‌شود که \mathcal{K} یک مورفیسم کلاف برداری باشد، یعنی، فرض نمی‌شود که محدودیت‌های $\mathcal{K}_p : T_p M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square \square, p}, \mathcal{A}_{\square \square \square, p})$ خطی باشند.^۶

نام میدان کرنل از این واقعیت ناشی می‌شود که نگاشتهای کلاف تعریف شده به این شکل \mathcal{K} یک کرنل مستقل از مختصات (بالقوه متفاوت): $\mathcal{K}_p : T_p M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square \square, p}, \mathcal{A}_{\square \square \square, p})$ را به هر نقطه p از منیفلد در عمل، کرنل‌های \mathcal{K}_p اغلب برای تشخیص الگوهای محلی در اطراف p طراحی می‌شوند و بنابراین فرض می‌شود که در اطراف مبدأ $T_p M$ دارای تکیه‌گاه شرده باشند.

یک کرنل مستقل از مختصات \mathcal{K}_p در p نسبت به پیمانه‌های $\psi_{\square \square, p}^A$ و $\psi_{TM, p}^A$ از G -اطلس‌ها توسط نگاشت زیر داده می‌شود:

$$\mathcal{K}_p^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square \square} \times c_{\square \square}}, \quad \mathcal{K}_p^A := \psi_{\square \square, p}^A \circ \mathcal{K}_p \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}. \quad (238)$$

^۶ این نشان می‌دهد که کرنل‌های کانولوشن به طور کلی به عنوان نگاشتهای $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square \square} \times c_{\square \square}}$ خطی نیستند. توجه داشته باشید که این با خطی بودن $K(v) \in \mathbb{R}^{c_{\square \square} \times c_{\square \square}}$ (به عنوان نگاشت $v \in \mathbb{R}^{c_{\square \square}}$ برای هر $v \in \mathbb{R}^{c_{\square \square}}$) یا، در اینجا، خطی بودن $\mathcal{K}_p(v) \in \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square \square, p}, \mathcal{A}_{\square \square \square, p})$ (به عنوان نگاشت $v \in T_p M$ برای هر $v \in T_p M$) تداخلی ندارد.

^۷ ما انتظار داریم که بتوان یک مفهوم خوش تعریف از کلاف‌های کرنل را تدوین کرد که مقاطع آنها در تناظر یک به یک با تعریف ما از میدان‌های کرنل به عنوان نگاشتهای کلاف باشند (این فرمول‌بندی مجدد، گذار از معادله (۲۱۷) به معادله (۲۳۳) را منعکس می‌کند).

شکل ۱۸ یک کرnel مستقل از مختصات روی $T_p M$ و مختصاتی سازی های آن روی \mathbb{R}^d را نسبت به پیمانه های مختلف به تصویر می کشد. از نمودار جابجایی

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K_p^A & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 \mathbb{R}^d & & & & \mathbb{R}^{c_{\infty} \times c_{\infty}} \\
 & \downarrow \psi_{TM,p}^A & & \downarrow \psi_{\infty,p}^A & \\
 g_p^{BA} & T_p M & \xrightarrow{\mathcal{K}_p} & \text{Hom}(\mathcal{A}_{\infty}|_p, \mathcal{A}_{\infty}|_p) & \\
 & \downarrow \psi_{TM,p}^B & & \downarrow \psi_{\infty,p}^B & \\
 & & K_p^B & & \mathbb{R}^{c_{\infty} \times c_{\infty}}
 \end{array} \quad (239)$$

نتیجه می شود که مختصاتی سازی های مختلف کرnel با رابطه زیر به هم مرتبط هستند:

$$K_p^B = \rho_{\infty}(g_p^{BA}) \circ K_p^A \circ (g_p^{BA})^{-1}. \quad (240)$$

توجه داشته باشید که این رابطه فقط استقلال از مختصات GM را ایجاد می کند اما کرnel مستقل از مختصات را به هیچ وجه محدود نمی کند. مانند قبل، وضعیت با اشتراک گذاری وزن ها در موقعیت های مکانی تغییر می کند.

برای اینکه یک میدان کرnel K متناظر با یک کانولوشن باشد، باید به طور کامل توسط یک کرnel الگوی واحد مشخص شود که در تمام موقعیت های مکانی به اشتراک گذاشته شده است. ما دوباره مجبوری وزن ها را با تمام پیمانه های $X \in \mathfrak{X}$ به طور همزمان به اشتراک گذاریم تا همارزی آنها و در نتیجه استقلال از مختصات GM را حفظ کنیم. همانطور که در بخش ۳.۲.۴ استدلال شد، روش مناسب برای اشتراک گذاری K با مختصاتی سازی های کرnel $K_{K,p}^X$ شامل نرمال سازی با حجم قاب مرجع $\sqrt{|\eta_p^X|}$ است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$K_{K,p}^X = \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^X|}} \quad \text{برای هر پیمانه } X \in \mathfrak{X} \text{ با } p \in U^X. \quad (241)$$

دلیل وجود ضریب نرمال سازی قاب این است که کانولوشن ها بعداً بر حسب انترگال روی فضاهای مماس تعریف خواهند شد. بنابراین ما در واقع ملزم به اشتراک گذاری خود عملگر انترگال در مختصاتی سازی های مختلف هستیم، که معادل با شناسایی معیارهای انترگال گیری ماتریسی $\sqrt{|\eta_p^X|} dv$ برای هر پیمانه $X \in \mathfrak{X}$ است. شکل اشتراک گذاری کرnel در معادله (۲۴۱) برابر قرار دادن هر دو عبارت به دست می آید.

همراه با رابطه $\sqrt{|\eta_p^A|} \sqrt{|\eta_p^B|} = |\det(g_p^{BA})| \sqrt{|\eta_p^B|}$ بین حجم های قاب مختلف، قانون تبدیل کرnel در معادله (۲۴۰) و اشتراک گذاری وزن در معادله (۲۴۱) قید کرnel G -هدایت پذیر را ایجاد می کند:

$$\frac{1}{|\det g|} \rho_{\infty}(g) \circ K \circ g^{-1} = K \quad \forall g \in G. \quad (242)$$

بنابراین کرnel های الگوی معتبر توسط نامتغیرهای تحت عمل پیمانه همزمان $\rho_{\infty}(g)$ و $\rho_{\infty}(g^{-1})$ داده می شوند. با نوشتن نمایش ρ_{∞} که بر روی $\mathbb{R}^{c_{\infty} \times c_{\infty}}$ از طریق ضرب با ρ_{∞} و ρ_{∞}^{-1} به ترتیب از چپ و راست عمل می کند، دیده می شود که قید در معادله (۲۴۲) معادل با قید در معادله (۸۳) است، یعنی $K(gv) = |\det g|^{-1} \rho_{\infty}(g) K(v) \rho_{\infty}(g)^{-1} \forall g \in G, v \in \mathbb{R}^d$.

ما این بیان ها را در قالب تعاریف زیر بیان می کنیم:

تعریف ۷.۳ (کرnel G -هدایت پذیر). کرnel های G -هدایت پذیر با نامتغیر بودنشان تحت عمل پیمانه مشخص می شوند. فضای برداری کرnel های هموار G -هدایت پذیر که بین انواع میدان ρ_{∞} و ρ_{∞} نگاشت می کنند، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{K}_{\rho_{\infty}, \rho_{\infty}}^G := \left\{ K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\infty} \times c_{\infty}} \mid \frac{1}{|\det g|} \rho_{\infty}(g) \circ K \circ g^{-1} = K \quad \forall g \in G \right\}, \quad (243)$$

$$= \left\{ K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\infty} \times c_{\infty}} \mid \frac{1}{|\det g|} \rho_{\infty}(g) K(g^{-1}v) \rho_{\infty}(g)^{-1} = K(v) \quad \forall g \in G, v \in \mathbb{R}^d \right\}, \quad (244)$$

که در آن $G \leq \text{GL}(d)$ است. نامتغیر بودن پیمانه های کرnel های G -هدایت پذیر امکان اشتراک گذاری وزن مستقل از مختصات GM را فراهم می کند.

کرنل‌های G -هدایت‌پذیر در [۴] به بادگیری عمیق هم‌متغیر معرفی شدند، جایی که گروه‌های متناهی فرض شده بودند. فرمول‌بندی فعلی در تعریف ۷.۳ در [۴] پیشنهاد شد. یک راه حل کامل برای فضاهای کرنل G -هدایت‌پذیر برای نمایش‌های دلخواه $\rho_{\text{}}^{\text{}} \in \rho_{\text{}}^{\text{}}$ و $\rho_{\text{}}^{\text{}} \in \rho_{\text{}}^{\text{}}$ از گروه‌های ساختار ۲ است، یک پیاده‌سازی به صورت عمومی در استخراج شده است، یک پیاده‌سازی به صورت عمومی در <https://quva-lab.github.io/e2cnn/api/e2cnn.kernels.html> در دسترس است. از نظر ریاضی، کرنل‌های هدایت‌پذیر معادل با عملگرهای نمایشی مانند عملگرهای تانسور کروی از مکانیک کوانتومی هستند. یک تعیین از قضیه وینگر-اکارت کرنل‌های G -هدایت‌پذیر را به عنوان ترکیبی از توابع پایه هارمونیک، ضرایب کلیش-گوردان و اندومورفیسم‌های نمایش‌های کاهش‌ناپذیر توصیف می‌کند [۴].

تعریف ۷.۴ (میدان کرنل کانولوشنی GM) یک میدان کرنل کانولوشنی $K_K GM$ از نوع $\rho_{\text{}}^{\text{}} \circ K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{}}^{\text{}}, \rho_{\text{}}^{\text{}}}^G$ یک میدان کرنل است که توسط یک کرنل الگوی G -هدایت‌پذیر و مشترک $\psi_{TM,p}^X$ و ψ_p^X از G -اطلس مورد نظر به صورت نقطه‌ای تعریف می‌شود:

$$\mathcal{K}_{K,p} := (\psi_{TM,p}^X)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^X|}} \circ \psi_{TM,p}^X \quad (245)$$

همواری \mathcal{K}_K از همواری پیمانه‌ها، متريک و کرنل الگوناشی می‌شود.

همانند مورد 1×1 ، اختیاری بودن انتخاب خاص پیمانه در معادله (۲۴۵) و بنابراین استقلال از مختصات GM تعریف \square با G -هدایت‌پذیری $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{}}^{\text{}}, \rho_{\text{}}^{\text{}}}^G$ تضمین می‌شود. برای نشان دادن این موضوع به طور صریح، می‌توان میدان کرنل را نسبت به یک پیمانه B تعریف کرد و سپس یک تبدیل به هر پیمانه دیگر A اعمال کرد، که حذف می‌شود و بنابراین به یک عبارت معادل منجر می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{K,p} &= (\psi_{TM,p}^B)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^B|}} \circ \psi_{TM,p}^B \\ &= (\rho_{\text{}}^{\text{}}(g_p^{BA}) \psi_{TM,p}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^A| / |\det(g_p^{BA})|}} \circ (g_p^{BA} \cdot \psi_{TM,p}^A) \\ &= (\psi_{TM,p}^A)^{-1} \circ \frac{|\det(g_p^{BA})| \rho_{\text{}}^{\text{}}(g_p^{BA})^{-1} \circ K \circ g_p^{BA}}{\sqrt{|\eta_p^A|}} \circ \psi_{TM,p}^A \\ &= (\psi_{TM,p}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^A|}} \circ \psi_{TM,p}^A \end{aligned} \quad (246)$$

شکل ۳۲ یک نمای کلی از بدیهی‌سازی‌های محلی میدان‌های کرنل کانولوشنی GM را در قالب یک نمودار جاوجایی ارائه می‌دهد.

توجه داشته باشید که قید G -هدایت‌پذیری در معادله (۲۴۴) یا (۲۴۳) هنگام ارزیابی در مبدأ $= 0$ از \mathbb{R}^d که تحت عمل هر $g \in G$ نامتغیر است، به قید روی کرنل‌های 1×1 در معادله (۲۴۵)-در مجموعه GM -کاهش می‌یابد. بنابراین، نتایج مربوط به 1×1 GM -که در بخش قبل استخراج شدند، به عنوان یک مورد خاص برای انتخاب کرنل‌های نقطه‌مانند دیده می‌شوند.^{۶۱} ما همچنین می‌خواهیم ذکر کنیم که قید روی کرنل‌های با گستره فضایی به طور کلی نیازی ندارد که هم‌دامنه آنها به $(\rho_{\text{}}^{\text{}}, \rho_{\text{}}^{\text{}})$ Hom_G ، یعنی فضای درهم‌تننده‌ها، محدود شود. برخلاف 1×1 GM -که نگاشت نمایی را کنولوشن‌های GM با کرنل‌های با گستره فضایی اجازه می‌دهد تا بین میدان‌هایی که طبق نمایش‌های کاهش‌ناپذیر غیرایزومنور تبدیل می‌شوند، نگاشت انجام دهنند.

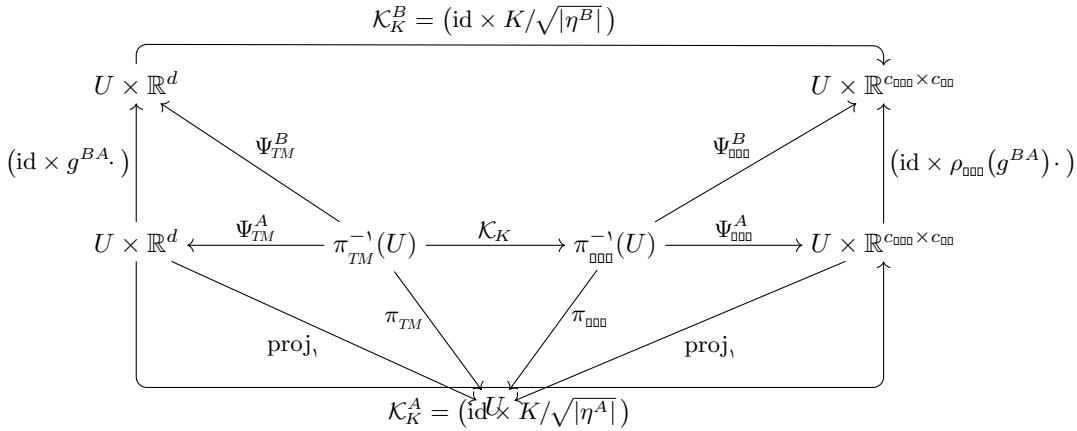
۲.۲.۷ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM

با تعریف هر دو میدان ویژگی و میدان کرنل، آماده معرفی تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM هستیم. آنها به صورت نقطه‌ای بر حسب عملگرهای انتگرالی تعریف می‌شوند که بردارهای ویژگی خروجی $f_{\text{}}^{\text{}}(p)$ را در نقاط $p \in M$ با تطبیق کرنل \mathcal{K}_p در p با میدان ویژگی \square «همانطور که از p دیده می‌شود» محاسبه می‌کنند.

نمایش محلی یک میدان ورودی p همانطور که از p دیده می‌شود^{۶۲} به طور رسمی توسط پول‌بک منتقل کننده آن داده می‌شود که در شکل ۱۷ به تصویر کشیده شده است. این به عنوان پول‌بک معمول از TM به M از طریق ریمانی تعریف می‌شود^{۶۳} با کاربرد اضافی یک منتقل کننده موازی

^{۶۱} برای دقیق کردن این گزاره، باید تعریف ۷.۳ را به توزیع‌های با مقدار عملگری تعیین داد و کرنل‌های 1×1 GM -را به عنوان دلتاهای دیراک با مقدار عملگری تعریف کرد. ما در اینجا برای اختصار این تعیین صرف نظر می‌کیم.

^{۶۲} مانگاشت نمایی را روی کل کلاف مماس به صورت $v \mapsto \exp_{\pi_{TM}(v)}(v)$: $TM \rightarrow M$, $v \mapsto \exp_{\pi_{TM}(v)}$ تعریف می‌کنیم. به بادیاورید که ما فرض کردیم مینیفلد از نظر ژئودزیکی کامل است، به طوری که نگاشت نمایی روی کل کلاف مماس خوش تعریف است (و اگر این فرض برقرار نباشد به صفر-پوشانی متصل می‌شود).



شکل ۷.۴۲: نمودار جابجایی که بدینه سازی‌های محلی یک میدان کرنل کانولوشنی GM یعنی \mathcal{K}_K را همانطور که در تعریف ۷.۴ تعریف شده است، نشان می‌دهد. اشتراک گذاری وزن کانولوشنی مستلزم آن است که عبارت مختصاتی میدان کرنل K_K در هر نقطه $x \in M$ و هر پیمانه X در p توسط کرنل الگوی مشترک $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ به صورت $K = K/\sqrt{|\eta_p^X|}$ تعیین شود. جابجایی پذیری نمودار سپس قید G-هدایت‌پذیری G را بر روی فضای $\mathcal{K}_{\rho_{\text{out}}, p}^G = \det g^{-1} \circ K \circ g^{-1} = K \forall g \in G$ از کرنل‌های الگو ایجاب می‌کند. ما می‌خواهیم تأکید کیم که، با وجود شاهست به نمودار در شکل ۷.۰ نمودار در این شکل باید به عنوان مشابه نمودار در شکل ۳۱ دیده شود. تفاوت بین نمودار فعلی و نمودار در شکل ۳۱ این است که نگاشتهای خطی در کلاف همومورفیسم از طریق $(\mathcal{A}_{\text{out}}, \mathcal{A}_{\text{out}}) : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{out}}, \mathcal{A}_{\text{out}})$ به جای مفاس \mathcal{A}_{out} به عنوان $\sigma_{K_{\text{out}}} : M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{out}}, \mathcal{A}_{\text{out}})$ تعیین می‌شوند.

(معادله (۲۱۲)), که برای بیان ویژگی‌های پولبک شده در $(\mathcal{A}_{\text{out}}, \exp(v))$ در $\mathcal{A}_{\text{out}, \exp(v)}$ ضروری است. با نشان دادن این منتقل‌کننده موازی در امتداد مسیر ژئودزیک $v = \gamma(t) = \exp((1-t)v + t\gamma)$ با:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}, p \leftarrow \exp(v)} : \mathcal{A}_{\exp(v)} \rightarrow \mathcal{A}_p, \quad (247)$$

ما نمایش‌های میدان ویژگی پولبک شده را روی فضاهای مماس به صورت زیر تعریف می‌کیم:

تعریف ۷.۵ (پولبک منتقل‌کننده میدان ویژگی به TM) با داشتن یک میدان ویژگی $f : \Gamma(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ ، مماس به صورت زیر تعریف می‌کیم:

$$\text{Exp}^* f : TM \rightarrow \mathcal{A}, \quad v \mapsto \mathcal{P}_{\mathcal{A}, \pi_{TM}(v) \leftarrow \exp(v)} \circ f \circ \exp(v). \quad (248)$$

نگاشت نمایی ریمانی \exp در اینجا متاظر با اتصال لوی-چیوینا است، در حالی که منتقل‌کننده $\mathcal{P}_{\mathcal{A}, \pi_{TM}(v) \leftarrow \exp(v)}$ به یک اتصال G -سازگار متنکی است؛ به بخش‌های ۳.۳ و ۵.۶ مراجعه کنید.

از ساختار مشخص است که $\text{Exp}^* f(v) \in \mathcal{A}_p$ برای هر $v \in T_p M$ یک M -مورفیسم کلاف است که نمودار جابجایی زیر را برآورده می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\text{Exp}^* f} & \mathcal{A} \\ \pi_{TM} \searrow & & \swarrow \pi_{\mathcal{A}} \\ & M & \end{array} \quad (249)$$

با وجود نگاشت هموار بین دو کلاف برداری، فرض نمی‌شود که $\text{Exp}^* f$ یک مورفیسم کلاف برداری باشد، یعنی، محدودیت‌های $\text{Exp}_p^* f : \text{Exp}^* f|_{T_p M}$ دارند.

محدودیت $\text{Exp}_p^* f := \text{Exp}^* f|_{T_p M}$ دامنه پولبک منتقل‌کننده به $T_p M$ میدان ویژگی را زیدگاه یک ناظر در p همانطور که در شکل ۱۷ نشان داده شده است، ثبت می‌کند. توجه داشته باشید که این تعریف شیوه به یک نمایش محلی از میدان ویژگی بر حسب مختصات نرمال ژئودزیک است، با این تفاوت که به شاعر یکنواخت نگاشت نمایی محدود نمی‌شود.^{۴۴} ما همچنین می‌خواهیم ذکر کنیم که منتقل‌کننده ممکن است با هر ایزومورفیسم دیگری بین $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_{\exp(v)})$ و $(\mathcal{A}_p, \mathcal{A}_{\exp(v)})$ همانطور که به عنوان مثال در [؟] انجام شده است.

^{۴۴} بنابراین هر بردار ویژگی (q, f) ممکن است چندین بار در همان فضای مماس $T_p M$ نمایش داده شود، یک بار برای هر $v \in T_p M$ با $q = \text{Exp}^* f(v)$. اگر این مطلوب نباشد، می‌توان تکیه‌گاه کرنل را به شاعر یکنواخت نگاشت نمایی محدود کرد، به طوری که فقط نزدیکترین رخداد از نظر ژئودزیکی اندازه‌گیری شود.

همانطور که قبلاً بیان شد، تبدیلات میدان کرnel و کانولوشن های GM به عنوان تطبیق نمایش های میدان ویژگی محلی روی فضاهای مماس با کرnel ها تعریف می شوند. در راستای این تعاریف، توجه داشته باشید که M -مورفیسم های کلاف کرnel ها $TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square\square})$ و نمایش های $\mathcal{K} : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square\square})$ را می توان برای ایجاد یک M -مورفیسم (غیرخطی) دیگر از TM به $\mathcal{A}_{\square\square\square}$ ترکیب کرد،

$$TM \xrightarrow{\mathcal{K} \times \text{Exp}^* f_{\square\square}} \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square\square}) \times \mathcal{A}_{\square\square} \xrightarrow{\text{ev}} \mathcal{A}_{\square\square\square},$$

$$\pi_{TM} \quad \quad \quad \pi_{\mathcal{A}_{\square\square\square}}$$

$$M \longleftarrow$$
(۲۵۰)

که در آن $(v) \mapsto \mathcal{K}(v) \text{Exp}^* f_{\square\square}(v)$ است. تبدیلات میدان کرnel بردارهای ویژگی خروجی را در p با انتگرال گیری از این حاصل ضرب کرnel ها و میدان های ورودی روی فضای مماس مربوطه $T_p M$ محاسبه می کنند:

تعریف ۷.۶ (تبدیل میدان کرnel). فرض کنید \mathcal{K} هر میدان کرnel همواری باشد. تبدیل میدان کرnel متاظر، یک تبدیل انتگرالی هموار است

$$\mathcal{T}_{\mathcal{K}} : \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square})$$
(۲۵۱)

که به صورت نقطه ای تعریف می شود:^{۶۵}

$$[\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f_{\square\square})](p) := \int_{T_p M} \mathcal{K}(v) \text{Exp}^* f_{\square\square}(v) dv = \int_{T_p M} \mathcal{K}(v) \mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\square\square}, p \leftarrow \exp_p v} f_{\square\square}(\exp_p v) dv.$$
(۲۵۲)

برای خوش تعریف بودن، انتگرال باید وجود داشته باشد و میدان خروجی حاصل $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f)$ باید هموار باشد. این مستلزم آن است که \mathcal{K} به طور مناسب انتخاب شود، به عنوان مثال، با فرض اینکه به سرعت کاهش باید یا دارای تکیه گاه فشرده باشد.

توجه داشته باشید که تبدیلات میدان کرnel عمومی نزوماً کانولوشن ها را مدل نمی کنند که وزن ها (کرnel ها) بین موقعیت های مکانی به اشتراک گذاشته شوند. چنین تبدیلات میدان کرnel عمومی در بخش ۸ مفید خواهد بود، جایی که ما یک الزام برای اشتراک گذاری وزن مکانی را از الزام به هم متغیری ایزو متريک استخراج می کنیم.

پیوست ۷ وجود و همواری تبدیلات میدان کرnel را مورد بحث قرار می دهد. یک شرط کافی برای خوش تعریف بودن تبدیلات میدان کرnel، محدود کردن تکیه گاه های کرnel به گروه هایی با شاعع ثابت $R > 0$ است:

قضیه ۷.۷ (وجود تبدیل میدان کرnel برای کرnel های با تکیه گاه فشرده). فرض کنید \mathcal{K} یک میدان کرnel باشد که کرnel های منفرد آن در هر $p \in M$ (حداکثر) روی یک گروه بسته با شاعع $R > 0$ در اطراف مبدأ $T_p \tilde{M}$ تکیه گاه دارند، یعنی

$$\text{supp}(\mathcal{K}_p) \subseteq \{v \in T_p M \mid \|v\| \leq R\} \quad \forall p \in M.$$
(۲۵۳)

سپس تضمین می شود که تبدیل میدان کرnel متاظر $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ خوش تعریف است، یعنی انتگرال در معادله (۲۵۲) وجود دارد و میدان خروجی $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f) \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square})$ برای هر میدان ورودی هموار $f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square})$ هموار است.

اثبات: به پیوست های ۷ و ۸ مراجعه کنید. \square

الزام به محدود کردن تکیه گاه کرnel به یک گروه بسته با شاعع معین، یک رویه معمول در یادگیری عمیق است. با این حال، توجه داشته باشید که یک کرnel با تکیه گاه فشرده با کانولوشن های هم متغیر نسبت به مقیاس در تضاد است، که طبق قیود کرnel-G-هدايت پذير مربوطه، به کرnel هایی با گستره بی نهایت نیاز دارند. پياده سازی های فلی کانولوشن های هم متغیر نسبت به مقیاس معمولاً فضاهای کرnel هم متغیر نسبت به مقیاس را با محدود کردن تکیه گاه آنها تقریب می زنند [۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵] و بنابراین تحت پوشش قضیه ۷.۷ قرار می گیرند.

بر اساس تبدیلات میدان کرnel عمومی، ما کانولوشن های GM مستقل از مختصات را با افزودن فرض اشتراک گذاری وزن مکانی تعریف می کیم، یعنی با فرض میدان های کرnel کانولوشنی GM :

تعریف ۷.۸ (کانولوشن GM). فرض کنید $\mathcal{A}_{\square\square}$ و $\mathcal{A}_{\square\square\square}$ کلاف های بردار ویژگی G -الحقیقی با انواع $\rho_{\square\square}$ و $\rho_{\square\square\square}$ باشند. ما کانولوشن GM را با یک کرnel G -هدايت پذير $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\square\square}, \rho_{\square\square\square}}^G$ به عنوان تبدیل میدان کرnel با میدان کرnel کانولوشنی GM متاظر \mathcal{K}_K تعریف می کیم:

$$K \star : \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}), \quad f_{\square\square} \mapsto K \star f_{\square\square} := \mathcal{T}_{\mathcal{K}_K}(f_{\square\square}) = \int_{T_p M} \mathcal{K}_K(v) \text{Exp}^* f_{\square\square}(v) dv$$
(۲۵۴)

از آنجایی که کانولوشن های GM هیچ قاب مرتعی را در G -ساختار ترجیح نمی دهند، تضمین می شود که استنتاج خود را برابر روی تمام «وضعیت های» الگوهایی که با عمل گروه ساختار G مرتبط هستند، تعمیم دهنده به معادله (۸۹) و شکل ۱۹ مراجعه کنید.

^{۶۵} انتگرال گیری روی $T_p M$ از طریق چگالی حجم ریمانی dv در پیوست پ بحث شده است.

۳.۲.۷ تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM در مختصات محلی

آنچه باقی مانده است این است که نشان دهیم تعاریف مستقل از مختصات پول‌بک‌های منتقل کننده، تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM که در این بخش معرفی شدند، هنگام بیان نسبت به یک بدیهی‌سازی محلی، به عبارات مختصاتی از بخش ۲.۴ کاوش می‌یابند.

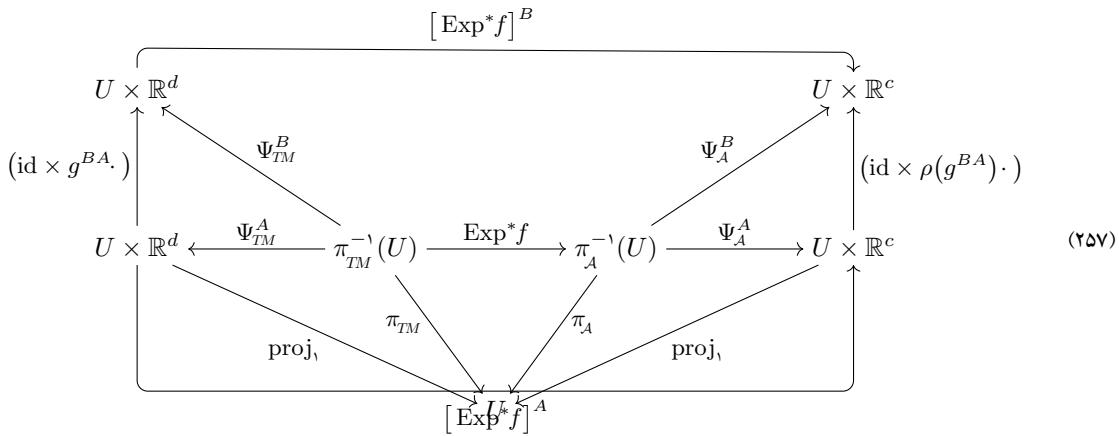
عبارت مختصاتی محلی پول‌بک منتقل کننده f^* از یک میدان ویژگی f ، طبق معمول، با پیش- و پس-ترکیب آن با بدیهی‌سازی‌های محلی کلاف‌های متناظر تعریف می‌شود، یعنی:

$$\begin{aligned} [\text{Exp}^*f]^A : U \times \mathbb{R}^d &\rightarrow U \times \mathbb{R}^c, \quad (p, v) \mapsto \Psi_A^A \circ \text{Exp}^*f \circ (\Psi_{TM}^A)^{-1}(p, v) \\ &= (p, \psi_{\mathcal{A}, p}^A \circ \text{Exp}_p^*f \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v)) \end{aligned} \quad (255)$$

از این تعریف دیده می‌شود که تبدیلات پیمانه محلی در M به صورت زیر داده می‌شوند:

$$[\text{Exp}_p^*f]^B = \rho(g_p^{BA}) \circ [\text{Exp}_p^*f]^A \circ (g_p^{BA})^{-1}. \quad (256)$$

ما این عبارات مختصاتی را در قالب یک نمودار جابجایی به تصویر می‌کشیم، که بسیار شبیه به نمودار بدیهی‌سازی‌های محلی میدان‌های کرنل در شکل ۳۲ است:



برای پیاده‌سازی، مفید است که عبارت مختصاتی پول‌بک منتقل کننده را به اجزای منفرد آن، یعنی منتقل کننده $\mathcal{P}_{\mathcal{A}, p \leftarrow \exp(v)}$ ، میدان ویژگی f و نگاشت نمایی \exp ، تجزیه کنیم. این کار با سط دادن آن با یک همانی به شکل انجام می‌شود، که در آن انتخاب پیمانه \tilde{A} در $\exp(v)$ بی‌همیت است زیرا در نهایت حذف می‌شود:

$$\begin{aligned} [\text{Exp}_p^*f]^A(v) &= [\psi_{\mathcal{A}, p}^A \circ \text{Exp}_p^*f \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}](v) \\ &= \psi_{\mathcal{A}, p}^A \circ \mathcal{P}_{\mathcal{A}, p \leftarrow \exp(v)} \circ f(\exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v)) \\ &= \psi_{\mathcal{A}, p}^A \circ \mathcal{P}_{\mathcal{A}, p \leftarrow \exp(v)} \circ (\psi_{\mathcal{A}, \exp(v)}^{\tilde{A}})^{-1} \circ \psi_{\mathcal{A}, \exp(v)}^{\tilde{A}} \circ f(\exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v)) \\ &= \rho(g_{p \leftarrow \exp(v)}^{A \tilde{A}}) \cdot f^{\tilde{A}}(\exp \circ (\psi_{TM, p}^A)^{-1}(v)) \end{aligned} \quad (258)$$

همانطور که انتظار می‌رفت، ما تعریف خود را از معادله (۶۷) در بخش ۱.۲.۴ بازیابی می‌کنیم، که تأیید می‌کند تعریف ۷.۵ در واقع همتای مستقل از مختصات آن است.

عبارت مختصاتی یک تبدیل میدان کرنل، که با معادله (۷۶) در بخش ۱.۲.۴ منطبق است، توسط قضیه زیر داده می‌شود:

قضیه ۷.۹ (تبدیل میدان کرnel در مختصات). نسبت به یک پیمانه $A \in U^A$, تبدیل میدان کرnel با عبارت مختصاتی زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} [\mathcal{T}_K(f_{\square\square})]^A(p) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) \rho(g_{p \leftarrow \exp \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(v^A)}^{A\tilde{A}}) \cdot f_{\square\square}^{\tilde{A}}(\exp \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(v^A)) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A, \quad (259) \end{aligned}$$

که در آن پیمانه‌های \tilde{A} در $\exp(v)$ به طور دلخواه انتخاب می‌شوند.^{۶۶}

اثبات: عبارت اول با یک محاسبه ساده که تمام مقادیر در گیر را به عبارات مختصاتی متناظر شان ترجمه می‌کند، استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} &[\mathcal{T}_K(f_{\square\square})]^A(p) \\ &\stackrel{(1)}{=} \psi_{A_{\square\square}, p}^A [\mathcal{T}_K(f_{\square\square})](p) \\ &\stackrel{(2)}{=} \psi_{A_{\square\square}, p}^A \int_{T_p M} \mathcal{K}_p(v) [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}](v) dv \\ &\stackrel{(3)}{=} \psi_{A_{\square\square}, p}^A \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p((\psi_{TM,p}^A)^{-1}(v^A)) [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]((\psi_{TM,p}^A)^{-1}(v^A)) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &\stackrel{(4)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} [\psi_{A_{\square\square}, p}^A \circ \mathcal{K}_p((\psi_{TM,p}^A)^{-1}(v^A)) \circ (\psi_{A_{\square\square}, p}^A)^{-1}] [\psi_{A_{\square\square}, p}^A \circ [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}] \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}](v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &\stackrel{(5)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} [\psi_{A_{\square\square}, p}^A \circ \mathcal{K}_p \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}](v^A) [\psi_{A_{\square\square}, p}^A \circ [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}] \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}](v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \\ &\stackrel{(6)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_p^A(v^A) [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \quad (260) \end{aligned}$$

مرحله (۱) بردار ویژگی خروجی در p را به طور صریح بر حسب پیمانه $\psi_{A_{\square\square}, p}^A$ بیان می‌کند که بر روی تبدیل میدان کرnel مستقل از مختصات عمل می‌کند. این عبارت مستقل از مختصات در مرحله (۲) همانطور که در تعریف ۷.۶ تعریف شده است، بسط داده می‌شود. مرحله (۳) انتگرال روی $T_p M$ را از طریق پیمانه انتخاب شده به \mathbb{R}^d بازمی‌گرداند، که با جزئیات بیشتر در پیوست پ توصیف شده است. مرحله (۴) یک نگاشت همانی به شکل $\psi_{A_{\square\square}, p}^A \circ \mathcal{K}_p \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1} = \text{id}_{A_{\square\square}, p}^A$ را وارد می‌کند و $\psi_{A_{\square\square}, p}^A$ را به داخل انتگرال می‌برد در حالی که مرحله (۵) تعریف $\psi_{A_{\square\square}, p}^A$ را از معادله (۲۳۱) شناسایی می‌کند. در نهایت، ما عبارات مختصاتی \mathcal{K}_p^A را از معادلات (۲۳۸) و (۲۵۵) شناسایی می‌کنیم.

عبارت دوم از عبارت اول با بسط دادن عبارت مختصاتی پول‌بک منتقل کننده طبق معادله (۲۵۸) به دست می‌آید. \square

عبارت مختصاتی برای کانولوشن‌های GM مستقل از مختصات بلافاصله به دست می‌آید:

قضیه ۷.۱۰ (کانولوشن‌های GM در مختصات). یک کانولوشن GM مستقل از مختصات $(\mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) : K \star : \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square})$ با یک کرnel G -هدايت پذیر K نسبت به یک پیمانه $A \in U^A$ در $p \in T_p M$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$[K \star f]^A(p) = [\mathcal{T}_K(f)]^A(p) = \int_{\mathbb{R}^d} K(v^A) [\text{Exp}_p^* f]^A(v^A) dv^A, \quad (261)$$

یعنی، با عبارت مختصاتی که در معادله (۸۷) معرفی شد. این عبارت ممکن است همانطور که برای تبدیلات میدان کرnel عمومی در معادله (۲۵۹) انجام شد، بیشتر بسط داده شود.

اثبات: نتیجه از قضیه ۷.۹ با مشاهده اینکه کانولوشن GM مستقل از مختصات \star فقط یک تبدیل میدان کرnel کانولوشنی GM متناظر K است، به دست می‌آید؛ به تعریف ۷.۸ مراجعه کنید. به طور خاص، عبارت مختصاتی یک میدان کرnel کانولوشنی GM یعنی \mathcal{K}_K است.

^{۶۶} توجه داشته باشید که پیمانه‌ها در $\exp(v)$ ممکن است برای $v \in T_p M$ مختلف متفاوت باشند و باید به طور صحیح تر با \tilde{A}_v برچسب گذاری شوند. ما برای اختصار از این وابستگی چشم‌پوشی می‌کنیم.

طبق تعریف ۷.۴ با کرنل G -هدایت پذیر K نرمال شده با حجم قاب داده می شود، یعنی $\mathcal{K}_{K,p}^A = K / \sqrt{|\eta_p^A|}$. جایگذاری این همانی در معادله (۲۵۹) به عبارت مختصاتی ادعا شده برای کانولوشن های GM منجر می شود. \square

این نتیجه اطمینان می دهد که بک کانولوشن GM سراسری و مستقل از مختصات می تواند بر حسب عبارات مختصاتی محلی آن نسبت به یک G -اطلس از بدیهی سازی های محلی که M را می بوشند، پیاده سازی شود.

۸ هم متغیری ایزومتری

یک ویژگی اصلی عمل کانولوشن و تعیین های مختلف آن، هم متغیری آنها نسبت به تقارن های منیفلد زیربنای است. به عنوان مثال، کانولوشن مرسوم در فضاهای اقليدسي نسبت به انتقال هم متغیر است در حالی که کانولوشن های کروی نسبت به دوران هم متغیر هستند. به طور کلی تر، هر گروه فشرده موضوعی و فضاهای همگن آنها، کانولوشن های گروهی را می پذیرند [۴۴]، که اخیراً توسعه جامعه یادگیری عمیق برای تعیین شبکه های کانولوشنی به چنین فضاهایی مورد توجه قرار گرفته اند [۳۶]. با این حال، از آنجایی که این رویکردها اساساً به تقارن های سراسری و تعدی پذیر فضای همگن متکی هستند، بلا فاصله برای منیفلدهای ریمانی عمومی قابل اعمال نیستند.

از سوی دیگر، کانولوشن های سراسری خود فضا به تقارن های محلی در مختصاتی سازی فضای منتقل می کنند. همانطور که مشخص می شود، هم متغیری پیمانه محلی کانولوشن های GM ، همراه با اشتراک گذاری وزن کانولوشنی، هم متغیری آنها را تحت عمل تقارن های سراسری القا می کند. به بیان دقیق تر، کانولوشن های GM تحت عمل ایزومتری های حافظ G -ساختار (تعریف ۸.۱) هم متغیر است، که زیر گروهی $Isom_{GM} \leq Isom(M)$ از گروه کامل ایزومتری را تشکیل می دهند. الزام به اینکه تقارن یک ایزومتری باشد (یعنی متربک را حفظ کند) در اینجا از استفاده از نگاشت های نمایی ناشی می شود، که به اتصال لوی-چیوپیتا و در نتیجه به متربک ریمانی متکی هستند. الزام اضافی بر این ایزومتری ها برای حفظ G -ساختار، نتیجه تعریف کلاف های بردار ویژگی به عنوان کلاف های G -الحقایق است، که عناصر آنها تنها نسبت به آن قاب های مرجعی که در GM قرار دارند، معنای خوش تعریفی دارند. توجه داشته باشید که مورد دوم واقعاً یک محدودیت نیست، زیرا همیشه می توان گروه های ساختار $G \geq d$ را انتخاب کرد، که برای آنها هر ایزومتری به G -ساختار متناظر احترام می گذارد. بر عکس، این طراحی امکان کنترل دقیق سطح هم متغیری ایزومتری را فراهم می کند. به عنوان مثال، کانولوشن مرسوم در فضاهای برداری اقليدسي به $\{\mathbb{e}\}$ -ساختار کانونی \mathbb{R}^d متکی است که در شکل ۱۳۵ به تصویر کشیده شده است، و بنابراین تنها نسبت به انتقال هم متغیر است. یک (d) -ساختار روی \mathbb{R}^d ، که در شکل ۱۳۶ به تصویر کشیده شده است، علاوه بر این توسط دوران های نیز حفظ می شود، و بنابراین متناظر با کانولوشن های $SE(d)$ -هم متغیر است. هم متغیری تحت گروه کامل ایزومتری $E(d)$ از \mathbb{R}^d هنگام انتخاب یک d -ساختار روی \mathbb{R}^d ایجاب می شود.

۱۸ ایزومتری ها و عمل آنها بر منیفلدها، کلاف ها و میدان ها

۹۰ گروه های ایزومتری ۱.۱۸

۹۱ عمل ایزومتری بر روی کلاف های تاری ۲.۱۸

۹۲ عمل ایزومتری در مختصات محلی ۳.۱۸

۹۷ جابجایی پذیری اعمال ایزومتری با نگاشت نمایی و منتقل کننده ها ۴.۱۸

۱۰۰ هم متغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن های GM ۲.۸

۱۰۲ هم متغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرنل عمومی ۱.۲۸

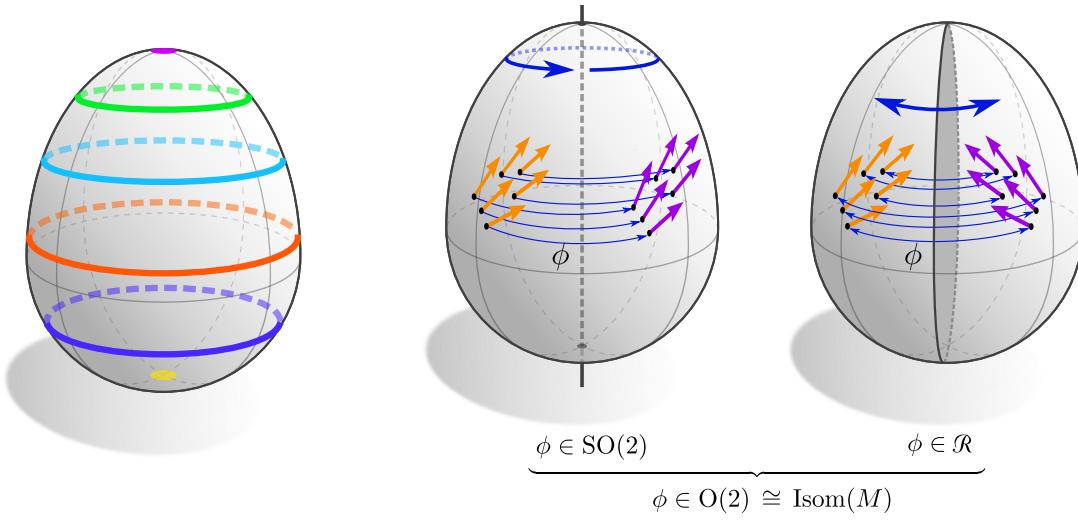
۱۰۳ هم متغیری ایزومتری کانولوشن های GM ۲.۲۸

۱۰۶ میدان های کرنل خارج قسمتی ۳.۸

۱۰۸ فضاهای خارج قسمتی القا شده از ایزومتری ۱.۳۸

۱۱۱ میدان های کرنل نماینده خارج قسمتی و قیود پایدار ساز ۲.۳۸

هدف این بخش استخراج قضایایی است که به طور رسمی هم متغیری کانولوشن های GM و تبدیلات میدان را مشخص می کنند. بخش ۱۸ با معرفی گروه های ایزومتری منیفلدهای ریمانی و بحث در مورد طبیعی از روابط و ساختار های شناخته شده ای که آنها القا می کنند، پایه های این تحقیق را بنا می نهند. به طور خاص، بخش ۱۰.۱ ایزومتری ها و گروه های ایزومتری را معرفی می کند در حالی که بخش ۲۱.۸ عمل القایی آنها («پیش ران ها») را بر روی کلاف های الحقایق در یک محیط مستقل از مختصات تعریف می کند. در بخش ۳۱.۸ ما این اعمال روی کلاف ها را نسبت به بدیهی سازی های محلی بیان می کنیم و تفسیر غیرفعال آنها را به عنوان تبدیلات پیمانه القا شده از ایزومتری، که در شکل های ۳۶ (راست) و ۱۶ به تصویر کشیده شده اند، مورد بحث قرار می دهیم. بخش ۴.۱۸ به طور خلاصه بیان می کند که مقادیر در گیر در تبدیلات میدان کرنل تحت عمل ایزومتری ها چگونه رفتار می کنند.



(ب) مدارهای گروه ایزومتری.

(ت) عمل زیرگروههای مختلف گروه ایزومتری بر روی میدانها.

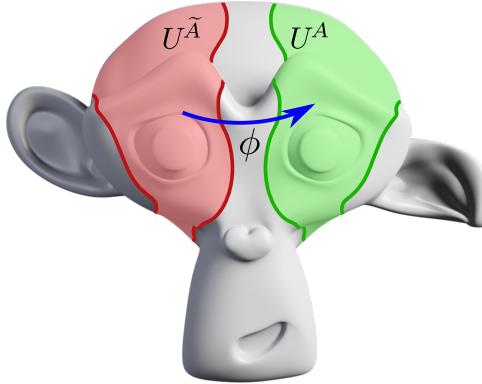
شکل ۳۳: تصاویری از گروه ایزومتری $\text{Isom}(M) \cong \mathbb{SO}(2)$ یک تخم مرغ M که در سراسر این بخش برای نمونه‌سازی مفاهیم و ساختارهای مختلف مربوط به ایزومتری‌ها از آن استفاده خواهیم کرد. شکل ۳۳۱ عمل گروه ایزومتری را بر روی میدان‌های برداری (ماسه‌یا ویژگی) نشان می‌دهد. می‌توان آن را مشکل از زیرگروههای دوران‌ها در $\mathbb{SO}(2)$ و بازتابها در \mathcal{R} در نظر گرفت. عمل گروه ایزومتری، تخم مرغ را به مدارهای $\{\phi(p) \mid \phi \in \text{Isom}(M), p \in M\}$ از نقاط $p \in M$ افزایی می‌کند که در شکل ۳۳۲ با رنگ‌های مختلف نشان داده شده‌اند. توجه داشته باشید که همه مدارهای با یکدیگر همسان‌ریخت نیستند - مدارهای قطب‌ها نقاط منفرد هستند در حالی که هر مدار دیگر یک دایره را در اطراف تخم مرغ به صورت غیر‌تعدی پذیر بر روی آن عمل می‌کند، یعنی نمی‌توان از هر نقطه‌ای به هر نقطه دیگر رسید. یک تبدیل میدان کرنل زمانی هم‌متغیر نسبت به ایزومتری است که با عمل ایزومتری بر روی میدان‌های ویژگی جایجا شود. مانشان می‌دهیم که هم‌متغیر ایزومتری تنها و تنها در صورتی تضمین می‌شود که میدان کرنل تحت عمل ایزومتری‌ها نامغایر باشد. این به طور خاص ایجاب می‌کند که هم‌متغیری ایزومتری نیازمند اشتراک‌گذاری وزن در امتداد مدارهای ایزومتری است؛ به شکل ۳۸ مراجعه کنید.

بر اساس این ویژگی‌ها، ما هم‌متغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM را در بخش ۲.۸ مطالعه می‌کنیم. پس از تعریف رسمی عبارت «هم‌متغیری ایزومتری»، بخش ۲.۸.۱ یک نتیجه مرکزی را اثبات می‌کند که تأکید می‌کند تقاضا برای هم‌متغیری ایزومتری مستلزم نامغایر بودن میدان کرنل تحت ایزومتری‌ها است؛ به شکل ۳۸ مراجعه کنید. بخش ۲.۸.۲ کانولوشن‌های خاص تر GM را در نظر می‌گیرد و اثبات می‌کند که آنها به طراحی، تحت هر ایزومتری که G -ساختار را حفظ می‌کند، هم‌متغیر هستند. این نتیجه به طور خاص ایجاد می‌کند که کانولوشن‌های OM نسبت به هر ایزومتری هم‌متغیر هستند.

قید نامغایر بودن بر روی میدان‌های کرنل ایجاد می‌کند که آنها وزن‌ها را بر روی مدارهای گروه ایزومتری به اشتراک بگذارند. این نشان می‌دهد که میدان‌های کرنل نامغایر را می‌توان به طور معادل با کرنل‌های نماینده روی نماینده کان مدار توصیف کرد، که ما آن را در بخش ۲.۸ رسمی می‌کنیم. بخش ۲.۸.۳ فضاهای خارج‌قسمتی القاشه از ایزومتری و نماینده‌گان آنها را مورد بحث قرار می‌دهد. در بخش ۲.۸.۴ ما از این تعاریف ریاضی برای اثبات این موضوع استفاده می‌کنیم که فضای میدان‌های کرنل نامغایر نسبت به ایزومتری در واقع با میدان‌های کرنل روی نماینده‌گان خارج‌قسمتی ایزومorf است. این به طور خاص ایجاد می‌کند که تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزومتری در فضاهای همگن لزوماً کانولوشن هستند، که حلقه را به کارهای پیشین متصل می‌کند.

۱.۸ ایزومتری‌ها و عمل آنها بر منیفلدها، کلافها و میدان‌ها

در این بخش، ما بیشتر مفاهیم ریاضی مورد نیاز برای مطالعه هم‌متغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM را معرفی می‌کنیم. پس از تعریف ایزومتری‌ها در بخش ۱.۱.۸، در بخش ۲.۱.۸ بحث می‌کنیم که چگونه آنها اعمال طبیعی را بر روی بردارهای ماسه و قاب‌های مرتع القا می‌کنند. برای گروههای ساختار G ، هر ایزومتری با هر G -ساختاری سازگار نیست. ما زیرگروه $\text{Isom}_{GM} \leq \text{Isom}(M)$ از آن ایزومتری‌هایی را تعریف می‌کنیم که بر روی یک G -ساختار GM و کلاف‌های ویژگی G -الحقاقی آن عمل می‌کنند (خودریختی‌هایی را القا می‌کنند). در حالی که این ساختارها مستقل از مختصات نگه داشته‌اند، بخش ۳.۱.۸ عمل ایزومتری‌ها را بر روی کلاف‌های تاری نسبت به بدینه‌ی سازی‌های محلی کلاف بیان می‌کند. به عنوان مقدمه‌ای برای بررسی تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزومتری در ادامه، بخش ۴.۱.۸ بحث می‌کند که چگونه ایزومتری‌ها با نگاشت نمایی و با منتقل کننده‌های موازی جایجا می‌شوند، که به ما اجازه می‌دهد تا نحوه عمل ایزومتری‌ها را بر روی پول‌بک منتقل کننده f_p^* میدان‌های ویژگی f استخراج کنیم. در حالی که عمدتاً ریاضی باقی می‌مانیم، سعی می‌کنیم تا حد امکان ارتباطی با کاربرد برقرار کنیم.



شکل ۳۴. یک منیفلد نامتقارن، که گروه ایزومتری سراسری آن بدیهی است. از آنجایی که عدم تقارن به گوش‌ها و دهان «سوزان»، میمون، محدود می‌شود، تقارن‌های موضعی غیربدیهی باقی مانده‌اند. به عنوان مثال، نگاشت هموار $\phi : U^{\tilde{A}} \rightarrow U^A$ بین زیرمجموعه‌های برجسته شده با رنگ قرمز و سبز، متريک را به صورت محلی حفظ می‌کند. تمام مقاهمی توسعه یافته در بخش ۲.۱۸ و همچنین همتغیری ایزومتری عملیات نقطه‌ای مانند 1×1 –بلاضاله به چنین ایزومتری‌هایی بین زیرمجموعه‌های محلی تعیین می‌یابد. همتغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرنل با کرنل‌های با گستره فضایی تا اثرات مرزی تعیین می‌یابد.

۱.۱.۸ گروه‌های ایزومتری

یک ایزومتری (سراسری) $M \rightarrow \hat{M}$: ϕ یک دیفتومورفیسم بین منیفلدهای ریمانی $(\hat{M}, \hat{\eta})$ و (M, η) است که متريک را حفظ می‌کند. بر حسب پیش‌ران (دیفرانسیل) $\phi_{*,TM} : TM \rightarrow T\hat{M}$: $TM \rightarrow T\hat{M}$ بردارهای مماس، که در پیوست آ.۲ در بخش ۲.۱۸ در زیر معرفی می‌کنیم، این گزاره با الزام به اینکه ایزومتری‌ها برآورده کنند، دقیق می‌شود:

$$\eta_p(v, w) = \hat{\eta}_{\phi(p)}(\phi_{*,TM}v, \phi_{*,TM}w) \quad \forall p \in M, v, w \in T_p M, \quad (262)$$

یعنی، آنها فاصله‌ها و زوایا بین بردارهای مماس را حفظ می‌کنند. به طور شهودی، یک ایزومتری به عنوان یک نگاشت حافظ فاصله بین منیفلدها در نظر گرفته می‌شود. توجه داشته باشید که معکوس یک ایزومتری لزوماً یک ایزومتری نیز هست. از آنجایی که ایزومتری‌ها (و معکوس‌هایشان) به متريک احترام می‌گذارند، آنها ایزومورفیسم‌ها در رده منیفلدهای ریمانی را تشکیل می‌دهند.

مجموعه تمام ایزومتری‌های $M \rightarrow M$: ϕ از یک منیفلد ریمانی به خودش، که با ترکیب معمول توابع $\phi_1 \circ \phi_2 \mapsto \phi_1 \circ \phi_2$: ○ مججهز شده است، یک گروه را تعریف می‌کند که به عنوان گروه ایزومتری $Isom(M)$ از M شناخته می‌شود. این گروه، گروه خودریختی یک منیفلد ریمانی است که شامل تمام «تقارن‌های» (متريکی) آن است. این یک زیرگروه از گروه دیفتومورفیسم $Diff(M)$ از M است. گروه کامل ایزومتری ممکن است زیرگروه‌های غیربدیهی داشته باشد، که ما در ادامه با $\mathcal{I} \leq Isom(M)$ نشان خواهیم داد. یک مثال در شکل ۳۴ آورده شده است، که گروه ایزومتری $\mathcal{I}_2 \cong Isom(M)$ یک تخم مرغ را به تصویر می‌کشد. گروه کامل ایزومتری (به عنوان مثال) به زیرگروه‌های دوران‌ها در $\mathcal{I}_1 \cong SO(2)$ و $\mathcal{I}_2 \cong \mathcal{R}$ تقسیم می‌شود.

به طور کلی، گروه ایزومتری یک منیفلد غیرتعیی پذیر است، یعنی، هر نقطه‌ای از M را نمی‌توان از هر نقطه دیگری با عمل آن رسید. سپس منیفلد به مدارهای مجزا افزایش می‌شود که برای مثال M به عنوان یک تخم مرغ (عبد پاک) در شکل ۳۳ به تصویر کشیده شده است. گروه ایزومتری یک منیفلد M ممکن است بدیهی باشد، به شرطی که M به اندازه کافی نامتقارن باشد. در این حالت، ممکن است هنوز ایزومتری‌های غیربدیهی بین زیرمجموعه‌های باز $U^{\tilde{A}}$ و U^A از M وجود داشته باشد، که معادله (۲۶۲) به آنها محدود می‌شود. شکل ۳۴ نمونه‌ای از یک منیفلد را نشان می‌دهد که به صورت سراسری نامتقارن است اما ایزومتری‌های غیربدیهی بین زیرمجموعه‌های محلی خود دارد. ما در ادامه فقط ایزومتری‌های سراسری M را در نظر خواهیم گرفت، با این حال، تمام مقاهمی بخش فلی ۱.۸ به روشنی آشکار به ایزومتری‌ها بین زیرمجموعه‌های محلی تعیین می‌یابند. بدون اثبات، ما ادعای کنیم که همین امر برای همتغیری ایزومتری هر عمل شبکه عصبی که به صورت نقطه‌ای عمل می‌کند، به عنوان مثال 1×1 –بلاضاله تبدیلات میدان کرنل با کرنل‌های با گستره فضایی تا اثرات مرزی برقرار است.

۲.۱.۸ عمل ایزومتری بر روی کلاف‌های تاری

ایزومتری‌ها به طور طبیعی بر روی بردارهای مماس در TM و قاب‌های مرجع در FM با «حمل کردن آنها» با عمل گروهی همانطور که در شکل ۳۴ به تصویر کشیده شده است، عمل می‌کنند. اگر یک ایزومتری علاوه بر این با G -ساختار سازگار باشد، یعنی اگر یک خودریختی از GM ایجاد کند، علاوه بر این بر روی هر کلاف G -الحقیقی، به ویژه کلاف‌های بردار ویژگی A عمل می‌کند. ما این اعمال ایزومتری‌ها را بر روی کلاف‌های الحقیقی و بر روی میدان‌های ویژگی در ادامه مورد بحث قرار می‌دهیم.

عمل ایزومتری بر روی کلاف مماس: TM بر روی ایزومتری $\phi \in Isom(M)$ با ایجاد می‌کند

$$\phi_{*,TM} : TM \rightarrow TM, \quad \phi \in Isom(M) \quad (263)$$

روی کلاف مماس، که فقط دیفرانسیل ϕ است همانظور که در پیوست آ.^{۲۰} معرفی شده است. در هر نقطه $M \in p$ می‌توان آن را به عنوان یک تقریب خطی از ϕ در نظر گرفت که بردارها $v \in T_p M$ را به $\phi_{*,TM}(v) \in T_{\phi(p)} M$ نگاشت می‌کند، یعنی برآورده می‌کند:

$$\pi_{TM} \circ \phi_{*,TM} = \phi \circ \pi_{TM}. \quad (264)$$

همانظور که در پیوست آ.^{۲۱} استدلال شد، پیش‌ران با $(\phi_{*,TM})^{-1} = (\phi^{-1})$ معکوس‌پذیر است، که ما به طور بدون ابهام آن را با $\phi_{*,TM}^{-1}$ خواهیم نوشت.^{۶۷} بنابراین دیده می‌شود که پیش‌ران یک عنصر ϕ از گروه ایزوومتری یک خودریختی کلاف برداری (ایزوومتریک) از TM روی ϕ است که نمودار جابجایی زیر را برآورده می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\phi_{*,TM}} & TM \\ \pi_{TM} \downarrow & \phi_{*,TM}^{-1} \downarrow & \downarrow \pi_{TM} \\ M & \xleftarrow{\phi} & M \\ & \phi^{-1} & \end{array} \quad (265)$$

با به تعریف ایزوومتری‌ها، پیش‌ران آنها فاصله‌ها و زوایا را حفظ می‌کند، یعنی

$$\eta_{\phi(p)}(\phi_{*,TM}v, \phi_{*,TM}w) = \eta_p(v, w) \quad \forall p \in M, v, w \in T_p M, \phi \in \text{Isom}(M). \quad (266)$$

جزئیات بیشتر در مورد پیش‌ران‌ها بین کلاف‌های مماس به راحتی در ادبیات، به عنوان مثال در [؟]، یافت می‌شود.

عمل ایزوومتری بر روی کلاف قاب: FM : پیش‌ران روی TM بلاfacله یک خودریختی کلاف اصلی متناظر $\phi_{*,FM}$ را بر روی FM با π_{FM} کردن بردارهای قاب منفرد القا می‌کند:

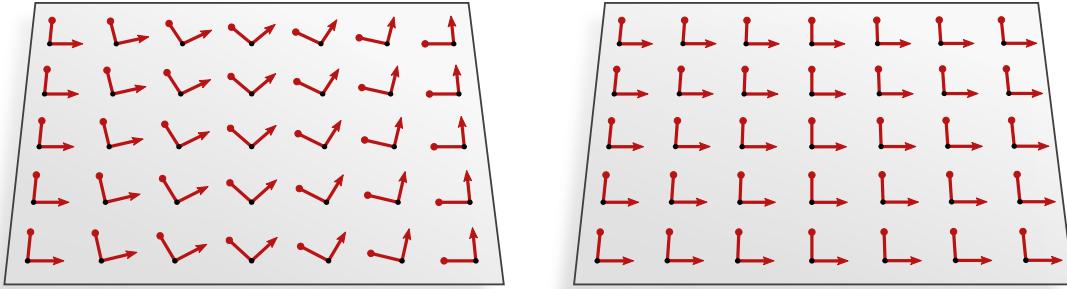
$$\phi_{*,FM}: FM \rightarrow FM, [e_i]_{i=1}^d \mapsto \phi_{*,FM}([e_i]_{i=1}^d) := [\phi_{*,TM}(e_i)]_{i=1}^d, \phi \in \text{Isom}(M) \quad (267)$$

این نگاشت قاب‌ها را در $F_p M$ برای هر $p \in M$ دلخواه به قاب‌ها در $F_{\phi(p)} M$ نگاشت می‌کند، یعنی $\pi_{FM} \circ \phi_{*,FM} = \phi \circ \pi_{FM}$. برای دیدن این، فرض کنید $[e_i]_{i=1}^d = \pi_{FM}([\phi_{*,TM}(e_i)]_{i=1}^d) = \phi(e_i)_{i=1}^d \in F_p M$ آنگاه $(\phi(e_i))_{i=1}^d = \phi \circ \pi_{FM}([e_i]_{i=1}^d) = \phi(p)$ می‌توان برای هر $j = 1, \dots, d$ علاوه بر این می‌توان بررسی کرد که با $(\phi_{*,FM})^{-1} = (\phi^{-1})_{*,FM}$ بر روی $\pi_{TM} \circ \phi_{*,TM}(e_j) = \phi \circ \pi_{TM}(e_j) = \phi(p)$ معکوس‌پذیر است، که باز هم با $\phi_{*,FM}^{-1}$ به اختصار نوشته می‌شود. عمل چپ ϕ بر روی کلاف قاب با عمل راست \triangleleft بر روی تارهای آن جابجا می‌شود، یعنی برای هر $\phi \in \text{Isom}(M)$ و $g \in \text{GL}(d)$ دلخواه داریم:

$$\begin{aligned} \left(\phi_{*,FM}([e_i]_{i=1}^d) \right) \triangleleft g &= [\phi_{*,TM}(e_i)]_{i=1}^d \triangleleft g && \text{(تعریف } \phi_{*,FM}, \text{ معادله } (267)) \\ &= \left[\sum_j \phi_{*,TM}(e_j) g_{ji} \right]_{i=1}^d && \text{(تعریف } \triangleleft, \text{ معادله } (154)) \\ &= \left[\phi_{*,TM} \left(\sum_j e_j g_{ji} \right) \right]_{i=1}^d && \text{(خطی بودن } \phi_{*,TM}) \\ &= \phi_{*,FM} \left(\left[\sum_j e_j g_{ji} \right]_{i=1}^d \right) && \text{(تعریف } \phi_{*,FM}, \text{ معادله } (267)) \\ &= \phi_{*,FM}([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) && \text{(تعریف } \triangleleft, \text{ معادله } (154)) \end{aligned} \quad (268)$$

یک تبدیل پیمانه یک قاب در $p \in M$ را به $\phi(p)$ ، بنابراین یک پیش‌ران به (پیش‌ران به p) می‌دانیم. اما در $F_p M$ به گونه‌ای به قاب‌ها در $F_{\phi(p)} M$ برابر است با همان عنصر گروهی g اما در $F_p M$ به گونه‌ای به قاب‌ها در $F_{\phi(p)} M$ برابر است. و به دنبال آن یک تبدیل پیمانه با همان عنصر گروهی g اما در $F_p M$ به گونه‌ای به قاب‌ها در $F_{\phi(p)} M$ برابر است،

^{۶۷} معکوس‌پذیری به طور کلی برای پیش‌ران‌ها برقرار نیست بلکه فقط برای پیش‌ران‌های دیفنتومورفیسم‌ها و در نتیجه ایزوومتری‌ها برقرار است.

(b) یک $\{e\}$ -ساختار جایگزین بر روی \mathbb{R}^5 (c) $\{e\}$ -ساختار کانوونی بر روی \mathbb{R}^5

شکل ۲۶۵ دو انتخاب خاص از $\{e\}$ -ساختارها (میدان‌های قاب سراسری) $M = \mathbb{R}^5$ که ما برای به تصویر کشیدن مفهوم ایزومنتی‌های حافظ G ساختار از آنها استفاده می‌کنیم. گروه کامل ایزومنتی M گروه اقلیدسی $E(2)$ است که از انتقال‌ها، دوران‌ها و بازتاب‌ها تشکیل شده است. شکل ۲۶۵ $\{e\}$ -ساختار کانوونی \mathbb{R}^5 را نشان می‌دهد که تحت انتقال‌ها نامتفاوت است اما تحت دوران‌ها یا بازتاب‌ها نامتفاوت نیست. به بیان انتزاعی‌تر، انتقال‌ها زیرگروه $\{e\}$ -ساختار $\text{Isom}_{\{e\}}M = T_r := (\mathbb{R}^5, +)$ از ایزومنتی‌هایی را تشکیل می‌دهند که خودریختی‌های $\{e\}$ را القا می‌کنند. در مقابل، دوران‌ها یا بازتاب‌ها قاب‌ها را در $\{e\}_p M$ به قاب‌ها در $F_{\phi(p)}M$ نگاشت می‌کنند اما موقعیت فرداستان آنها به $\{e\}_{\phi(p)}M$ نمی‌شوند. بنابراین آنها خودریختی‌های $\{e\}$ -ساختار را القا نمی‌کنند و بخشی از $\text{Isom}_{\{e\}}M$ نیستند. اعمال گروهی چنین ایزومنتی‌هایی بر روی $\{e\}M$ یا هر یک از کلاف‌های $\{e\}$ -الحاقی آن تعریف نشده است. شکل ۲۶۵ ب یک انتخاب جایگزین از $\{e\}$ -ساختار را بر روی $M = \mathbb{E}_r = \mathbb{R}^5$ (یا $\mathbb{E}_l = \mathbb{R}^5$) نمایش می‌دهد که فقط تحت انتقال‌ها در چهت «بالا-پایین» نامتفاوت است، یعنی $\text{Isom}_{\{e\}}M \cong T_r = (\mathbb{R}, +)$. مثال‌های موجود در شکل‌های ۲۶۴ و ۲۶۵ نمونه‌ای از این هستند که خودریختی‌های $\{e\}$ -ساختار نه تنها به گروه ساختار بلکه به انتخاب خاص G -ساختار GM سنتگی دارند. مورد کلی برای G غیربدیهی سخت‌تر به تصویر کشیده می‌شود زیرا $G_p M$ در آن صورت یک قاب منفرد نخواهد بود بلکه مجموعه‌ای از قاب‌ها خواهد بود.

نگاشت می‌شوند که جابجایی نسبی آنها حفظ شود. ویژگی‌های استخراج شده از $\phi_{*,FM}$ با این گزاره خلاصه می‌شود که نمودار

$$\begin{array}{ccc}
 FM & \xrightarrow{\phi_{*,FM}} & FM \\
 \downarrow g & & \downarrow g \\
 FM & \xrightarrow{\phi_{*,FM}} & FM \\
 \downarrow \pi_{FM} & & \downarrow \pi_{FM} \\
 M & \xrightarrow{\phi} & M
 \end{array} \tag{269}$$

برای هر $\phi \in \text{Isom}(M)$ و هر $g \in \text{GL}(d)$ و جابجا می‌شود. با برآورده کردن جابجایی این نمودار، پیش‌ران $\phi_{*,FM}$ بر روی کلاف قاب به عنوان یک خودریختی کلاف اصلی شناسایی می‌شود^{۶۸} روی ϕ . توجه داشته باشید که معکوس‌ها، که به طور صریح در نمودار (۲۶۵) نشان داده شده‌اند، برای کاهش شلوغی حذف شده‌اند.

عمل ایزومنتی بر روی G -ساختارها: از آنجایی که G -ساختارها زیرکلاف‌های اصلی از کلاف قاب هستند، می‌توان محدودیت دامنه پیش‌ران روی FM را به GM در نظر گرفت، یعنی،

$$\phi_{*,FM}|_{GM} : GM \rightarrow FM, \quad \phi \in \text{Isom}(M). \tag{270}$$

در اینجا لازم است که کل کلاف قاب FM به عنوان هم‌دامنه حفظ شود زیرا به طور کلی هیچ تضمینی وجود ندارد که قاب‌ها در $G_p M$ نگاشت شوند بلکه فقط به $F_{\phi(p)}M$ نگاشت می‌شوند. از آنجایی که G -ساختارها به طور کلی تحت عمل ایزومنتی‌ها بر روی FM بسته نیستند، ممکن است تعريف یک عمل گروهی از گروه کامل ایزومنتی بر روی GM یا هر کلاف G -الحاقی دیگر غیرممکن باشد. برای رفع این نقصه، ما در ادامه زیرگروهی از آن ایزومنتی‌ها را در نظر خواهیم گرفت که به G -ساختار احترام می‌گذارند، یعنی قاب‌های ممتاز در GM را به قاب‌ها در GM نگاشت می‌کنند.

^{۶۸} یعنی، یک ایزومورفیسم کلاف اصلی از کلاف قاب به خودش؛ مقایسه کنید با معادله ۱۵۱.

تعريف ۸.۱ (ایزومتری‌های حافظ G-ساختار). با داشتن یک G-ساختار GM ، ما زیرگروه متناظر از ایزومتری‌های حافظ G-ساختار را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{Isom}_{GM} := \{\phi \in \text{Isom}(M) \mid \phi_{*,FM}(G_p M) = G_{\phi(p)} M \quad \forall p \in M\} \leq \text{Isom}(M) \quad (271)$$

برای چنین ایزومتری‌هایی، ما عمل القایی بر روی GM را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi_{*,GM} := \phi_{*,FM}|_{GM} : GM \rightarrow GM, \quad \phi \in \text{Isom}_{GM}. \quad (272)$$

اعمال تعریف شده به این شکل برای G -ساختار هستند، یعنی باعث می‌شوند نمودار زیر برای هر $g \in G$ جابجا شود (که با محدود کردن معادله (۲۶۹) از GM به G و از $GL(d)$ به D دست می‌آید):

$$\begin{array}{ccc} GM & \xrightarrow{\phi_{*,GM}} & GM \\ \uparrow \triangleleft g & & \uparrow \triangleleft g \\ GM & \xrightarrow{\phi_{*,GM}} & GM \\ \downarrow \pi_{GM} & & \downarrow \pi_{GM} \\ M & \xrightarrow{\phi} & M \end{array} \quad (273)$$

شکل ۳۵ دو نمونه از $\{e\}$ -ساختارها را روی \mathbb{R}^n نشان می‌دهد، یعنی میدان‌های قاب سراسری. از این مثال‌ها مشخص است که زیرگروه‌های Isom_{GM} واقعاً به انتخاب خاص G-ساختار GM بستگی دارند، نه فقط به گروه ساختار G . در شکل ۳۶ ما یک $\text{SO}(2)$ -ساختار را روی $M = \mathbb{R}^n$ به تصویر می‌کشیم. گروه ایزومتری آن (2) $\text{Isom}_{SOM} = \text{SE}(2)$ بزرگتر از گروه‌های $\{e\}$ -ساختارها در شکل ۳۵ است. یک $\text{SO}(2)$ -ساختار روی کره S^n که توسط تمام دوران‌ها $\text{Isom}_{SOM} = \text{SO}(3)$ حفظ می‌شود، در شکل ۳۶ نشان داده شده است.

برای انتخاب‌های خاص از گروه‌های ساختار G می‌توان گروه‌های کلی تری در مورد اینکه کدام ایزومتری‌ها در زیرگروه Isom_{GM} قرار دارند، بیان کرد. مهم‌تر از همه، برای گروه‌های ساختار اورتونرمال $G = d$ (که با γ سازگار هستند) هر ایزومتری یک خودریختی از OM را القا می‌کند، یعنی همیشه داریم $\text{Isom}_{OM} = \text{Isom}(M)$. برای اثبات این ادعا، فرض کنید $[e_i]_{i=1}^d \in O_p M \subset F_p M$ یک قاب اورتونرمال باشد که توسط یک ایزومتری دلخواه ϕ به معادله (۲۶۷) مواجهه کنید. اعمال معادله (۲۶۶) بر روی محورهای منفرد قاب پیش‌ران به دست می‌دهد:

$$\eta(\phi_{*,TM} e_i, \phi_{*,TM} e_j) = \eta(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in 1, \dots, d, \quad (274)$$

که اورتونرمال بودن قاب پیش‌ران $[e_i]_{i=1}^d \in O_{\phi(p)} M$ را ایجاب می‌کند و بنابراین اجازه می‌دهد تا $\phi_{*,OM}$ را برای هر $\phi \in \text{Isom}(M)$ تعریف کنیم. به طور کلی تر، این نتیجه ایجاب می‌کند:

$$\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M) \quad \forall G \geq d \quad (275)$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد:

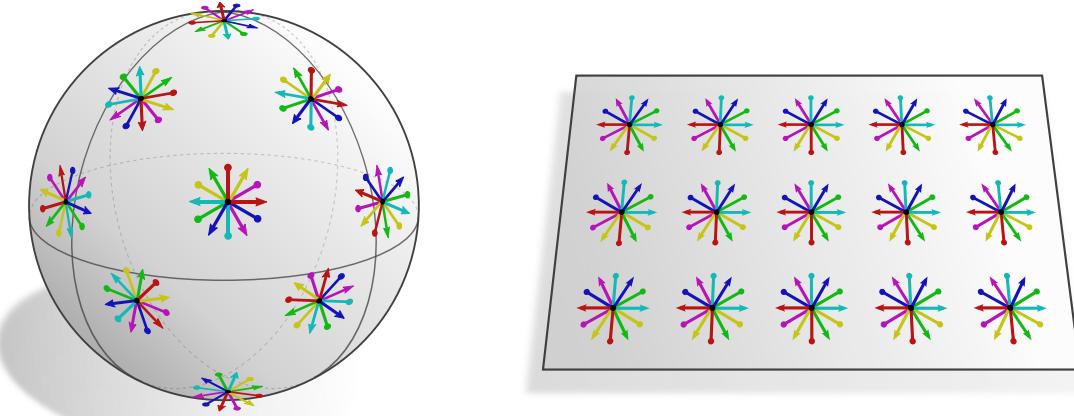
$$\text{Isom}_{SOM} = \text{Isom}_+(M), \quad (276)$$

یعنی، هر ایزومتری حافظ جهت در (M) -Sاختار SOM را القا می‌کند. توجه داشته باشید که این گزاره‌ها همه فقط به گروه ساختار G بستگی دارند اما از انتخاب خاص G-ساختار مستقل هستند. این در نهایت نتیجه در نظر گرفتن فقط ایزومتری‌ها است که بنابراین به تعريف با d -ساختارها سازگار هستند، به جای در نظر گرفتن دیشیمورفیسم‌های عمومی‌تر. همانطور که قبل ذکر شد، زیرگروه Isom_{GM} به طور کلی به انتخاب خاص G-ساختار GM بستگی دارد، نه فقط به گروه ساختار G .

عمل ایزومتری بر روی کلاف‌های برداری الحاقی \mathcal{A} : از پیش‌ران ایزومتری‌ها در GM بر روی GM می‌توان یک پیش‌ران $\phi_{*,\mathcal{A}}$ را بر روی هر کلاف برداری G-الحاقی $\mathcal{A} = (GM \times \mathbb{R}^n)/\sim_p$ تعریف زیر ساخت:

$$\phi_{*,\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad [[e_i]_{i=1}^d, f] \mapsto \phi_{*,\mathcal{A}}([[e_i]_{i=1}^d, f]) := [\phi_{*,GM}([e_i]_{i=1}^d), f], \quad \phi \in \text{Isom}_{GM}. \quad (277)$$

این عمل خوش‌تعریف است زیرا ساختار به دلیل همتغیری راست $\phi_{*,GM}$ در معادله (۲۷۳) از نماینده انتخاب شده کلاس همارزی مستقل است. مشابه قبل، داریم $\phi_{*,\mathcal{A}} \circ \pi_{\mathcal{A}} = \phi \circ \pi_{\mathcal{A}}$ ، یعنی $\phi_{*,\mathcal{A}} \circ \pi_{\mathcal{A}} = \phi \circ \pi_{\mathcal{A}}$ در $\mathcal{A}_{\phi(p)}$ نگاشت می‌کند، که می‌توان



(ب) $S = S^*$ -ساختار $\text{SO}(2)$ نامتغیر SOM روی S^*

(ت) $M = \mathbb{R}^n$ ساختار $\text{SO}(2)$ نامتغیر SOM روی \mathbb{R}^n

شکل ۳۶ دو نمونه از (2) -ساختارها SOM روی صفحه $M = \mathbb{R}^n$ و کره $M = S^n$ که در شکل ۳۶ نشان داده است، $M = \mathbb{R}^n$ براي $\phi_{*,GM}$ و $M = S^n$ براي $\phi_{*,A}$ هاست. از آنجايی كه فقط از قاب های خطی که بر روی عامل دوم $\text{Hom}(M, \mathbb{R}^n)$ در معادله (157) تعریف شده است، عمل می کنند، محور های دوم توجه کنید. تحت بازتاب های ايزومتری هایی که نوک پیکان ها روی محور های اول و نوک دایره ها روی محور های دوم توجه کنید، تحت بازتاب های نامتغیر نیست. بنابراین ايزومتری هایی که $\text{SOM} = \text{SE}(2)$ را حفظ می کنند گروه $\text{SOM} = \text{Isom}_{\text{SOM}} = \text{SE}(2)$ را تشکیل می دهند که زیر گروهی از گروه کامل ايزومتری $\text{E}(2)$ است. در مورد $M = S^n$ که در شکل ۳۶ نشان داده شده است، $\text{Isom}(M) = \text{SO}(n)$ است. در اینجا $\text{Isom}_{\text{SOM}} = \text{SO}(2)$ -ساختار در اینجا $\text{Isom}_{\text{SOM}} = \text{SO}(2)$ هستند در حالی که گروه کامل ايزومتری $\text{Isom}(M) = \mathbb{R}^n$ است.

با عمل بر روی يك بردار ويزگي و استفاده از ويزگي متناظر $\phi_{*,GM}$ آن را برسی کرد. از آنجايي كه $\phi_{*,A}$ با عامل اول در $\sim_{GM \times \mathbb{R}^n}$ تعریف می شود، با ترکيب های خطی که بر روی عامل دوم $\text{Hom}(M, \mathbb{R}^n)$ در معادله (157) تعریف شده است، عمل می کنند. تداخلی ندارد. اين ایجاد می کند که پيش ران روی کلاف های الحاقی به صورت خطی بين تابع های آنها نگاشت کند. معکوس پذيری $\phi_{*,A}$ از $\phi_{*,GM}$ نتیجه می شود به طوری که دوباره داريم $\phi_{*,A}^{-1}(\phi_{*,A}) = (\phi_{*,A})^{-1}$ ، که آن را به صورت $\phi_{*,A}^{-1}$ می نویсим. اين ويزگي ها، همراه با اين واقعیت که $\phi_{*,GM} \in \text{Aut}(GM)$ باشند، يك خودريختی کلاف اصلی است، $\phi_{*,A}$ را به عنوان يك خودريختی کلاف برداری الحاقی شناسایي می کند که نمودار جابجایي زير را برآورده می کند:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\phi_{*,A}} & \mathcal{A} \\ \pi_{\mathcal{A}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{A}} \\ M & \xrightarrow{\phi} & M \end{array} \quad (278)$$

کلاف الحاقی حاصل از انتخاب های خاص نمایش گروهی $g = (GM \times \mathbb{R}^d)/\sim_{\rho(g)}$ و $\rho(g)$ به عنوان تار نمونه ای از طریق مورفیسم کلاف $\sim_{\rho(g)}$ است. تعريف ما از پيش ران ها بر روی کلاف های G - TM با از معادله (159) با کلاف مimas TM (به عنوان يك G -کلاف) ايزومورف است. تعريف ما از پيش ران ها بر روی کلاف های χ با اين شناسایي سازگار است زيرا χ $\circ \phi_{*,A} = \phi_{*,TM} \circ \chi$. برای ديدن اين، فرض کنید $\sim_{[[e_i]_{i=1}^d, v]} \in (GM \times \mathbb{R}^d)/\sim$ عنصري از کلاف الحاقی ايزومورف باشد که به $\chi([[e_i]_{i=1}^d, v]) = \sum_i e_i v_i$ نگاشت می شود. آنگاه داريم $\chi \circ \phi_{*,A}([[\phi_{*,TM}(e_i)]_{i=1}^d, v]) = \sum_i \phi_{*,TM}(e_i)v_i = \phi_{*,TM}(\sum_i e_i v_i) = \phi_{*,TM} \circ \chi([[\phi_{*,TM}(e_i)]_{i=1}^d, v])$ ، که سازگاري تعاريف را نشان می دهد.

به عنوان يك کلاف الحاقی، پيش ران $\phi_{*,A_{000}}$ بر روی کلاف هومومورفیسم $\sim_{\rho_{A_{000}}} \cong (GM \times \mathbb{R}^{c_{000} \times c_{000}})/\sim_{\rho_{A_{000}}}$ با معادله (277) مشخص می شود. با اين حال، ما بعداً به عبارتی از $\phi_{*,A_{000}}$ بر حسب پيش ران های $\phi_{*,A_{000}}$ و $\phi_{*,A_{000}}$ از A_{000} و A_{000} نیاز خواهیم داشت، که آن را به زودی در اينجا استخراج خواهیم کرد. برای اين منظور، فرض کنید $H \in \text{Hom}(A_{000}|_p, A_{000}|_p)$ يك هومومورفیسم در p و $f_p \in A_{00,p}$ يك بردار ويزگي در p باشد. آنگاه $(f_p)_* H$ بنا به تعريف يك بردار ويزگي در p است. برای اينکه به طور سازگار تعريف $H(f_p)$ را به عنوان پيش ران بردار ويزگي در p باشند، آن عمل می شود، باید با پيش ران بردار ويزگي خروجی $H(f_p)$ موافق باشند. اين ایجاد می کند:

$$\phi_{*,A_{000}}[H(f_p)] = [\phi_{*,A_{000}} H \phi_{*,A_{00}}^{-1}] (\phi_{*,A_{00}} f_p) =: [\phi_{*,A_{000}}, H](\phi_{*,A_{00}} f_p), \quad (279)$$

که در آن پیش‌ران روی کلاف هومومنیسم را به صورت زیر تعریف کردیم:

$$\phi_{*,A_{\square\square}} : \text{Hom}(A_{\square\square}, A_{\square\square}) \rightarrow \text{Hom}(A_{\square\square}, A_{\square\square}), \quad H \mapsto \phi_{*,A_{\square\square}} H \phi_{*,A_{\square\square}}^{-1}, \quad \phi \in \text{Isom}_{GM} \quad (280)$$

توجه داشته باشید که ترکیب یک عنصر $H \in \text{Hom}(A_{\square\square}, A_{\square\square})$ با $\phi_{*,A_{\square\square}}^{-1}$ از چپ و با $\phi_{*,A_{\square\square}}$ از راست، سبک معادله (۲۳۱) را منعکس می‌کند.

عمل ایزومنتری بر روی میدان‌های ویژگی: اعمال ایزومنتری‌ها در Isom_{GM} بر روی کلاف‌های الحاقی، اعمالی را بر روی مقاطع آنها، به ویژه بر روی میدان‌های ویژگی، ایجاد می‌کنند. این پیش‌ران مقاطع به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعريف ۸.۲ (پیش‌ران ایزومنتری میدان ویژگی): فرض کنید $f \in \Gamma(\mathcal{A})$ یک میدان ویژگی و $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ یک ایزومنتری حافظ G -ساختار باشد. ایزومنتری از طریق پیش‌ران بر روی میدان ویژگی عمل می‌کند^{۶۹}

$$\triangleright : \text{Isom}_{GM} \times \Gamma(\mathcal{A}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}), \quad (\phi, f) \mapsto \phi \triangleright f := \phi_{*,A} \circ f \circ \phi^{-1}. \quad (281)$$

بر حسب یک نمودار جابجایی، این تعریف به صورت زیر به تصویر کشیده می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\phi_{*,A}} & \mathcal{A} \\ f \uparrow & & \uparrow \phi \triangleright f := \phi_{*,A} \circ f \circ \phi^{-1} \\ M & \xrightarrow{\phi} & M \end{array} \quad (282)$$

به طور شهودی، این تعریف بیان می‌کند که مقطع پیش‌ران $\phi \triangleright f$ که در M از زیبایی می‌شود، بردار ویژگی f را از $(p)^{-1}\phi$ که از طریق $\phi_{*,A}$ به p پیش‌ران شده است، برمی‌گرداند. توجه داشته باشید که چنین پیش‌ران‌هایی در واقع مقاطع خوش تعریفی را به دست می‌دهند که برآورده می‌کنند:

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{A}} \circ (\phi \triangleright f) &= \pi_{\mathcal{A}} \circ \phi_{*,A} \circ f \circ \phi^{-1} \\ &= \phi \circ \pi_{\mathcal{A}} \circ f \circ \phi^{-1} \\ &= \phi \circ \text{id}_M \circ \phi^{-1} \\ &= \text{id}_M \end{aligned} \quad (283)$$

همانطور که در معادله (۱۴۷) لازم است. شکل ۳۳۳ عمل ایزومنتری‌ها را بر روی میدان‌ها به تصویر می‌کشد. عمل ایزومنتری‌ها بر روی پول‌بک منتقل کننده f از میدان‌های \mathcal{A} در بخش ۴.۱.۸ در زیر استخراج می‌شود.

۳.۱.۸ عمل ایزومنتری در مختصات محلی

بیشتر استخراج‌ها در مورد همتغیری ایزومنتری تبدیلات میدان کرنل در بخش‌های ۲.۸ و ۳.۸ در یک محیط مستقل از مختصات نگه داشته خواهد شد. با این حال، از آنجایی که کانولوشن‌های GM نسبت به یک انتخاب از G -اطلس‌های کلاف‌های الحاقی تعریف می‌شوند، بررسی همتغیری ایزومنتری آنها مستلزم مطالعه عبارات مختصاتی پیش‌ران‌های ایزومنتری $\phi_{*,TM}$ ، $\phi_{*,GM}$ ، $\phi_{*,FM}$ و $\phi_{*,TM}$ می‌شود که بدبیهی سازی‌های محلی کلاف است. عبارات مختصاتی عمل ایزومنتری علاوه بر این در پیاده‌سازی‌های عددی مفید هستند، که لزوماً میدان‌های ویژگی را نسبت به میدان‌های قاب‌های مرجع کدگذاری می‌کنند.

در ادامه، ما پیمانه‌های $\Psi_{TM}^{\tilde{A}}$ و Ψ_{TM}^A را به ترتیب در همسایگی‌های $U^{\tilde{A}}$ از p و U^A از (p) داده شده فرض می‌کنیم. برای راحتی، فرض کنید $U^A = \phi(U^{\tilde{A}})$ با تصویر $U^{\tilde{A}}$ تحت ایزومنتری منطبق باشد، که همیشه بدون از دست دادن کلیت امکان‌پذیر است.

پیش‌دان روی TM در مختصات: به یاد بیاورید که پیش‌ران روی کلاف مماس یک نگاشت خطی از بردارها $v \in T_p M$ به بردارها $\phi_{*,TM} v \in T_{\phi(p)} \tilde{M}$ است. نسبت به پیمانه‌های داده شده، پیش‌ران بنابراین توسط یک میدان از ماتریس‌ها مختصاتی می‌شود^{۷۰}.

$$g_{\phi}^{A\tilde{A}} : U^{\tilde{A}} \rightarrow \text{GL}(d), \quad p \mapsto g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) := \psi_{TM,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,TM} \circ (\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1}, \quad \phi \in \text{Isom}(M), \quad (284)$$

^{۶۹} به شباهت این تعریف با تعریف نمایش القابی توجه کنید، که عمل گروهی است که شبکه‌های CNN هدایت‌پذیر طوری طراحی شده‌اند که نسبت به آن هم متغیر باشند [۱۱].

^{۷۰} با داشتن چارت‌های $x^A : U^A \rightarrow x^{\tilde{A}}(U^{\tilde{A}}) \subseteq \mathbb{R}^d$ و $x^{\tilde{A}} : U^{\tilde{A}} \rightarrow x^{\tilde{A}}(U^{\tilde{A}}) \subseteq \mathbb{R}^d$ ، یک ایزومنتری ϕ را می‌توان به صورت محلی با یک نگاشت $x^A \circ \phi \circ (x^{\tilde{A}})^{-1} : x^{\tilde{A}}(U^{\tilde{A}}) \rightarrow x^A(U^A)$ بین مختصات نمایش داد. برای حالت خاصی که پیمانه‌ها در p و $\phi(p)$ متناظر با پایه‌های مختصاتی آن چارت‌ها هستند، $g_{\phi}^{A\tilde{A}}$ به سادگی توسط $\phi(x^{\tilde{A}})^{-1} \circ x^A \circ \phi \circ (x^{\tilde{A}})^{-1}$ داده می‌شود.

که بین ضرایب عددی متناظر $(\phi_{*,TM}v)$ از v در p و $\psi_{TM,p}^{\tilde{A}}(\phi_{*,TM}v)$ از $\phi(p)$ تبدیل می‌کند. دقیق‌تر، $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)$ در زیرگروه $\langle G \cup d \rangle$ از $GL(d)$ مقدار می‌گیرد، که توسط عناصر d (به دلیل اینکه $\phi_{*,TM}$ متریک را حفظ می‌کند) و G (زیرا تابع گذار ممکن است یک ابرگروه از d تشکیل دهنده) تولید می‌شود. تعریف پیش‌ران در مختصات محلی با نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده می‌شود:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\psi_{TM,p}^{\tilde{A}}} & T_p M & \xrightarrow{\phi_{*,TM}} & T_{\phi(p)} M & \xrightarrow{\psi_{TM,\phi(p)}^A} & \mathbb{R}^d \\ & & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)} & & & & \uparrow \end{array} \quad (285)$$

شکل ۱۶ یک تفسیر گرافیکی از پیش‌ران در مختصات ارائه می‌دهد.

پیش‌دان روی FM در مختصات: مختصاتی سازی پیش‌ران روی کلاف قاب به قیاس با معادله (۲۸۴) تعریف می‌شود. مشخص می‌شود که این با عمل چپ همان عنصر گروهی $g_{\phi}^{A\tilde{A}}$ بر روی قاب‌های بدیهی شده داده می‌شود همانطور که در نمودار جابجایی زیر نشان داده شده است:

$$\begin{array}{ccccc} GL(d) & \xleftarrow{\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}} & F_p M & \xrightarrow{\phi_{*,FM}} & F_{\phi(p)} M & \xrightarrow{\psi_{FM,\phi(p)}^A} & GL(d) \\ & & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)} & & & & \uparrow \end{array} \quad (286)$$

برای اثبات این ادعاء، ما عمل را برابر روی یک قاب بدیهی شده، که با یک ماتریس $h \in GL(d)$ که ستون i -ام آن $h_{:,i}$ نماینده بردار قاب i -ام است، محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \left[\psi_{FM,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,FM} \circ (\psi_{FM,p}^{\tilde{A}})^{-1} \right] (h) \\ &= \left[\psi_{FM,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,FM} \right] \left(\left((\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1}(h_{:,i}) \right)_{i=1}^d \right) && \text{(تعريف } \psi_{FM,p}^{\tilde{A}}, \text{ معادله (۱۷۷))} \\ &= \psi_{FM,\phi(p)}^A \left(\left(\phi_{*,TM} \circ (\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1}(h_{:,i}) \right)_{i=1}^d \right) && \text{(تعريف } \phi_{*,FM}, \text{ معادله (۲۶۷))} \\ &= \left(\left(\psi_{TM,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,TM} \circ (\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1}(h_{:,i}) \right)_{i=1}^d \right) && \text{(تعريف } \psi_{FM,\phi(p)}^A, \text{ معادله (۱۷۷))} \\ &= \left(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \cdot h_{:,i} \right)_{i=1}^d && \text{(تعريف } g_{\phi}^{A\tilde{A}}, \text{ معادله (۲۸۴))} \\ &= g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \cdot h \end{aligned} \quad (287)$$

عمل پیش‌ران بر روی بدیهی سازی‌های محلی را می‌توان به عنوان القا کردن یک تبدیل پیمانه در نظر گرفت. یک شهود گرافیکی برای این گزاره در شکل ۱۶ داده شد که در آن پیمانه‌های اولیه در p و $\phi(p)$ با انتخاب‌های قاب‌های مرجع به تصویر کشیده شده‌اند. یک پیش‌ران از قاب در p به $\phi(p)$ است (قرمز) به طور کلی با قاب اصلی در $\phi(p)$ (سبز) موافق نیست. گذار بین این دو قاب، تبدیل پیمانه القا شده در $\phi(p)$ است. ما در ادامه این تبدیل را می‌سازیم؛ ابتدا بر حسب بدیهی سازی‌های محلی، سپس بر حسب میدان‌های قاب متناظر.

از نمودار جابجایی در معادله (۲۸۶) مشخص است که پیمانه $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$ در p را می‌توان از طریق $\phi_{*,FM}^{-1}$ به یک پیمانه در $\phi(p)$ پولبک کرد، که به صورت زیر داده می‌شود:

$$\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \circ \phi_{*,FM}^{-1} = (g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{FM,\phi(p)}^A : F_{\phi(p)} M \rightarrow GL(d). \quad (288)$$

گسترش متناظر نمودار جابجایی در معادله (۲۸۶) هم ارزی هر دو عبارت را به تصویر می‌کشد و یک اثبات جبری را زائد می‌کند:

$$\begin{array}{ccccc} GL(d) & \xleftarrow{\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}} & F_p M & \xrightarrow{\phi_{*,FM}} & F_{\phi(p)} M & \xrightarrow{\psi_{FM,\phi(p)}^A} & GL(d) \\ & & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)} & & & & \uparrow \end{array} \quad (289)$$

نگاشت گذار (تبدیل پیمانه) بین پیمانه القا شده از ایزومنتری ϕ مشخص می‌شود که توسط عنصر گروهی معکوس داده می‌شود^{۷۱}

$$(\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1}) \circ (\psi_{FM,\phi(p)}^A)^{-1} = (g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \in \langle G \cup d \rangle \leq \text{GL}(d). \quad (290)$$

توجه داشته باشید که این عنصر گروهی برای $d \leq G$ لزوماً در گروه ساختار قرار نمی‌گیرد، یعنی پیمانه القا شده از ایزومنتری ممکن است G -سازگار نباشد (نمی‌توان آن را به یک G -اطلس موجود از FM اضافه کرد). در پاراگراف بعدی در مورد G -ساختارها نشان خواهیم داد که این دقیقاً زمانی اتفاق می‌افتد که $\phi \notin \text{Isom}_{GM}$ باشد، یعنی برای ایزومنتری‌هایی که به G -ساختار احترام نمی‌گذارند.

برای استخراج عمل ایزومنتری بر روی میدان‌های قاب، مقاطع همانی $(U^A \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^{\tilde{A}}) \rightarrow \sigma^A)$ روی $U^{\tilde{A}}$ را در نظر بگیرید. این مقاطع میدان‌های قاب اصلی را از شکل ۱۶ مدل می‌کنند. سپس میدان قاب جدید با مقطع پیش‌ران داده می‌شود:

$$\phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}} := \phi_{*,FM} \circ \sigma^{\tilde{A}} \circ \phi^{-1} : U^A \rightarrow \pi_{FM}^{-1}(U^{\tilde{A}}), \quad (291)$$

که به طور معادل با تعریف در معادله ۲۸۱ تعريف شده است. یک عبارت جایگزین برای میدان قاب پیش‌ران بر حسب عمل راست $g_{\phi}^{A\tilde{A}}$ با اعمال $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ یافت می‌شود:

$$\begin{aligned} & \psi_{FM,\phi(p)}^A ([\phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}}](\phi(p))) \\ &= \psi_{FM,\phi(p)}^A \phi_{*,FM} \sigma^{\tilde{A}}(p) && \text{(تعريف } \phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}}, \text{ معادله ۲۹۱)} \\ &= g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \sigma^{\tilde{A}}(p) && \text{(عبارات معادل در معادله ۲۸۸)} \\ &= g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) && \text{(مقطع همانی } \sigma^{\tilde{A}}, \text{ معادله ۱۸۲)} \\ &= \psi_{FM,\phi(p)}^A (\sigma^A(\phi(p))) g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) && \text{(مقطع همانی } \sigma^A, \text{ معادله ۱۸۲)} \\ &= \psi_{FM,\phi(p)}^A (\sigma^A(\phi(p)) \triangleleft g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)) && \text{(همتغیری راست-} GL(d), \text{ معادله ۱۷۹)} \end{aligned} \quad (292)$$

از آنجایی که $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ یک ایزومورفیسم است، نتیجه می‌شود که:

$$(\phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}})(\phi(p)) = \phi_{*,FM} \sigma^{\tilde{A}}(p) = \sigma^A(\phi(p)) \triangleleft g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p), \quad (293)$$

یعنی، $(p \triangleright \sigma^{\tilde{A}})(p)$ همانطور که انتظار می‌رفت تبدیل بین مقاطع همانی را توصیف می‌کند. این تبدیل القا شده از ایزومنتری بین قاب‌های مرجع در شکل ۱۶ با فلش آبی بین قاب قرمز (شفاف) و سبز به تصویر کشیده شده است.

پیمانه تبدیل شده با ایزومنتری ϕ به این ترتیب با یکدیگر مطابقت دارند که دومی مقطع همانی اولی است:

$$\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1} [\phi \triangleright \sigma^{\tilde{A}}](\phi(p)) = \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1} \phi_{*,FM} \sigma^{\tilde{A}}(p) = \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \sigma^{\tilde{A}}(p) = e \quad (294)$$

پیش‌ران روی GM در مختصات: همانطور که در بخش قبلی ۲.۱.۸ استدلال شد، پیش‌ران روی GM فقط برای ایزومنتری‌های ϕ در یک خوش تعریف است. جای تعجب نیست که تبدیلات پیمانه القا شده از ایزومنتری متناظر در گروه ساختار G -سازگار مقدار می‌گیرند: زیرگروه Isom_{GM} در بدیهی‌سازی‌های محلی^{۷۲}. فرض کنید $\phi \in \text{Isom}(M)$ هر ایزومنتری از M باشد. آنگاه سه گزاره زیر معادل هستند:

۱. ϕ حافظ G -ساختار است، یعنی $\phi \in \text{Isom}_{GM}$.
۲. پول‌بک ایزومنتری $\phi_{*,FM}^{-1} \psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$ از هر پیمانه ψ از G -اطلس FM که GM را تعریف می‌کند، با آن G -اطلس G -سازگار است.
۳. عبارت مختصاتی $\phi_{*,FM}$ نسبت به هر پیمانه $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$ و $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ از G -اطلس FM در گروه ساختار مقدار می‌گیرد، یعنی $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in G \quad \forall p \in M$.

^{۷۱} معکوس یک موضوع قراردادی است. در اینجا به این دلیل به وجود می‌آید که ما $g_{\phi}^{A\tilde{A}}$ را به عنوان عبارت مختصاتی پیش‌ران هموردای قاب‌ها تعريف کردیم در حالی که پیمانه‌ها به صورت پادردا تبدیل می‌شوند.

اثبات: ویژگی تعریف کننده یک ایزوومتری حافظ G -ساختار $\phi \in \text{Isom}_{GM}(G_p M) = G_{\phi(p)} M$ را برای هر $p \in M$ برآورده می‌کند؛ به معادله (۲۷۱) مراجعه کنید. بر حسب یک G -اطلس داده شده از FM ، معادله (۱۸۴) G -ساختار را در $p \in M$ به صورت $G_p M := (\psi_{FM,p}^{\tilde{A}})^{-1}(G)$ تعریف کرد که در آن $\psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$ یک پیمانه دلخواه از G -اطلس است. با این عبارت ما سمت چپ ویژگی تعریف کننده Isom_{GM} را بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\phi_{*,FM}(G_p M) &= \phi_{*,FM}(\psi_{FM,p}^{\tilde{A}})^{-1}(G) \\ &= (\psi_{FM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,FM}^{-1})^{-1}(G)\end{aligned}\quad (۲۹۵)$$

نسبت به هر پیمانه $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ از G -اطلس در (p) ، این را می‌توان بیشتر به صورت زیر دستکاری کرد

$$\begin{aligned}\phi_{*,FM}(G_p M) &= ((g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{FM,\phi(p)}^A)^{-1}(G) \\ &= (\psi_{FM,\phi(p)}^A)^{-1}(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) G).\end{aligned}\quad (۲۹۶)$$

سمت راست ویژگی تعریف کننده Isom_{GM} بر حسب $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$G_{\phi(p)} M = (\psi_{FM,\phi(p)}^A)^{-1}(G).\quad (۲۹۷)$$

با برابر قرار دادن هر دو طرف و استفاده از اینکه $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ یک ایزومورفیسم است، نتیجه می‌شود $G = g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) G$ که به همارزی ادعا شده منجر می‌شود:

$$\phi_{*,FM}(G_p M) = G_{\phi(p)} M \iff g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in G \quad (۲۹۸)$$

از گزاره‌های ۱. و ۳. برای اثبات همارزی با گزاره ۲.، به یاد بیاورید که $\phi_{*,FM}^{-1} \psi_{FM,p}^{\tilde{A}} g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)$ طبق معادله (۲۹۰) برابر با تبدیل پیمانه از $\psi_{FM,\phi(p)}^A$ است. از آنجایی که G -اطلس‌ها بنا به تعریف توابع گذار در گروه ساختار G دارند، پیامدهای (۲. \leftrightarrow . ۳.) نتیجه می‌شوند، به طوری که هر سه گزاره معادل دیده می‌شوند. \square

این نتایج برای مطالعه بعدی ما در مورد هم‌متغیری ایزوومتری کانولوشن‌های GM اهمیت مرکزی دارند. ما قادر خواهیم بود نشان دهیم که چنین کانولوشن‌هایی تحت عمل $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ بر روی میدان‌های ویژگی هم‌متغیر هستند، که به این واقعیت متکی است که G -هدایت‌پذیری کرnel‌های کانولوشن، تبدیلات پیمانه القا شده از ایزوومتری $g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) \in G$ را در نظر می‌گیرد.

برای ایزوومتری‌های الگاکننده خودریختی G -ساختار $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ ، ما می‌توانیم نمودار جابجایی برای FM در معادله (۲۸۹) را به همتای آن برای GM تطبیق دهیم:

$$\begin{aligned}\psi_{GM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,GM}^{-1} &= (g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \cdot \psi_{GM,\phi(p)}^A \\ &\quad \underbrace{\begin{array}{ccccc} & \psi_{GM,p}^{\tilde{A}} & & \phi_{*,GM} & \psi_{GM,\phi(p)}^A \\ G & \xleftarrow{\psi_{GM,p}^{\tilde{A}}} & G_p M & \xrightarrow{\phi_{*,GM}} & G_{\phi(p)} M & \xrightarrow{\psi_{GM,\phi(p)}^A} & G \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p). \end{array}}\end{aligned}\quad (۲۹۹)$$

پیش‌ران روی A در مختصات: پیش‌ران $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ بر روی کلاف‌های G -الحاقی به طور مشابه با پیش‌ران‌های دیگر کلاف‌ها مختصاتی می‌شود. بر حسب یک نمودار جابجایی، ما به طور غیرمنتظره‌ای به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^c & \xleftarrow{\psi_{A,p}^{\tilde{A}}} & \mathcal{A}_p & \xrightarrow{\phi_{*,A}} & \mathcal{A}_{\phi(p)} & \xrightarrow{\psi_{A,\phi(p)}^A} & \mathbb{R}^c \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{\rho(g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))} & & & & & \end{array}, \quad (۳۰۰)$$

که وقتی بر روی ضرایب بردار ویژگی $f \in \mathbb{R}^c$ عمل می‌کنیم به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
& \left[\psi_{A,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,A} \circ (\psi_{A,p}^{\tilde{A}})^{-1} \right] (f) \\
&= \left[\psi_{A,\phi(p)}^A \circ \phi_{*,A} \right] \left([\sigma^{\tilde{A}}(p), f] \right) && \text{(تعريف } (\psi_{A,p}^A)^{-1}, \text{ معادله (۱۹۵))} \\
&= \psi_{A,\phi(p)}^A \left([\phi_{*,FM}(\sigma^{\tilde{A}}(p)), f] \right) && \text{(تعريف } \phi_{*,A}, \text{ معادله (۲۷۷))} \\
&= \psi_{A,\phi(p)}^A \left([\sigma^A(\phi(p)) \triangleleft g_\phi^{A\tilde{A}}(p), f] \right) && \text{(تبديل پیمانه القابی، معادله (۲۹۳))} \\
&= \psi_{A,\phi(p)}^A \left([\sigma^A(\phi(p)), \rho(g_\phi^{A\tilde{A}}(p))f] \right) && \text{(تعريف } \rho, \text{ معادله (۱۷۰))} \\
&= \rho(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)) \cdot f && \text{(تعريف } \rho, \text{ معادله (۱۹۴))} \tag{۳۰۱}
\end{aligned}$$

توجه داشته باشید که عبارت $(g_\phi^{A\tilde{A}}(p)\rho)$ مستلزم آن است که $g_\phi^{A\tilde{A}}(p)$ یک عنصر گروه ساختار باشد زیرا ρ یک نمایش G است. این یک بار دیگر از دیدگاه دیگری نشان می‌دهد که پیش‌رانها بر روی A فقط می‌توانند برای ایزومنتری‌ها در Isom_{GM} تعریف شوند. برای کامل بودن، ما بدیهی‌سازی محلی زیر از نمودار جابجایی از معادله (۲۸۲) را ارائه می‌دهیم، که ممکن است هنگام پیاده‌سازی CNN‌های مستقل از مختصات و آزمایش هم‌متغیری Isom_{GM} آنها مفید باشد:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & \phi \times \rho(g_\phi^{A\tilde{A}}). & & & \\
& \swarrow & \downarrow \Psi_A^{\tilde{A}} & & \downarrow \Psi_A^A & \searrow & \\
U^{\tilde{A}} \times \mathbb{R}^c & \xleftarrow{\pi_A^{-1}(U^{\tilde{A}})} & \xrightarrow{\phi_{*,A}} & \pi_A^{-1}(U^A) & \xrightarrow{\Psi_A^A} & U^A \times \mathbb{R}^c & \\
& \searrow \text{proj}_1 & \downarrow \pi_A \circ f & \nearrow \phi \triangleright f & \downarrow \pi_A & \swarrow \text{proj}_1 & \\
& & U^{\tilde{A}} & & U^A & & \\
& & \xrightarrow{\phi} & & \xleftarrow{\phi} & &
\end{array} \tag{۳۰۲}$$

۴.۱.۸ جابجایی‌پذیری اعمال ایزومنتری با نگاشت نمایی و منتقل کننده‌ها

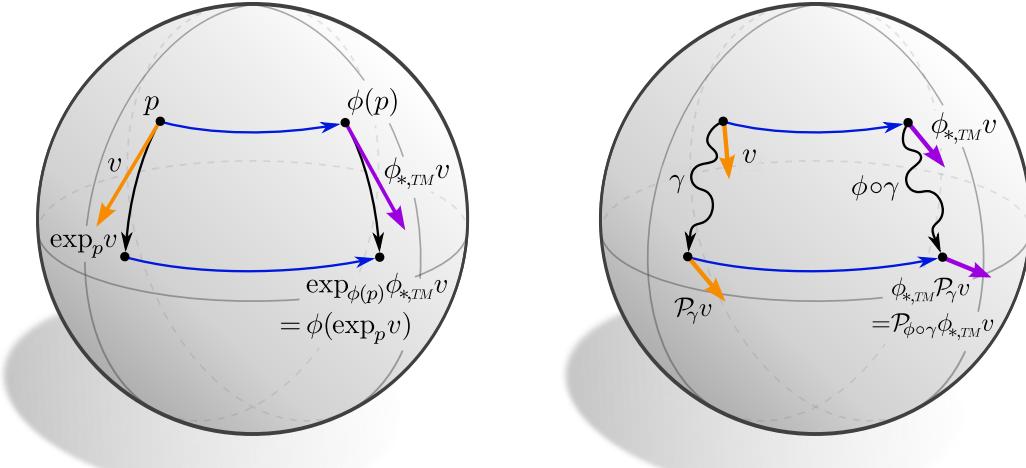
در بخش بعدی ما به عبارتی برای عمل ایزومنتری‌ها بر روی پول‌بکدهای منتقل کننده $f^* \exp_p^* f$ از میدان‌های ویژگی \tilde{f} نیاز خواهیم داشت، که آن را در اینجا استخراج می‌کنیم. برای این منظور، ما رفتار نگاشت نمایی و منتقل کننده‌های موازی را تحت عمل ایزومنتری‌ها مورد بحث قرار می‌دهیم.

ایزومنتری‌ها و نگاشت نمایی: همانطور که در [۶] اثبات شده است، ایزومنتری‌ها ژئودزیک‌ها را به ژئودزیک‌ها نگاشت می‌کنند و بنابراین به طور خاص با نگاشت نمایی جابجا می‌شوند.^{۷۲} به طور خاص، همان نگاشت نمایی جابجا می‌شود.

$$\exp_{\phi(p)} \circ \phi_{*,TM}(v) = \phi \circ \exp_p(v) \quad \forall v \in T_p M, \phi \in \text{Isom}(M), \tag{۳۰۳}$$

برای هر ایزومنتری و هر بردار مماس در p برقرار است (هنوز یک متفلک از نظر ژئودزیکی کامل را فرض می‌کنیم)، این بیان می‌کند که نتیجه نگاشت نمایی در p که با یک بردار v ارزیابی شده و سپس از طریق ایزومنتری نگاشت می‌شود، برابر با نگاشت نمایی در $(p)\phi$ است که با پیش‌ران v ارزیابی می‌شود، همانطور که در شکل ۳۷ (چپ) به تصویر کشیده شده است. این گزاره به صورت نموداری با جابجایی‌پذیری (مربع بالایی) نمودار زیر بیان

^{۷۲} اثبات به این واقعیت متنکی است که اتصال لوى-چیویتا $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$, $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, که نگاشت نمایی ریمانی بر اساس آن است، با ایزومنتری‌ها جابجا می‌شود: $\nabla_{\phi \triangleright X}(\phi \triangleright Y) = \nabla_{\phi \triangleright X}(\phi \triangleright Y)$; به [۶] مراجعه کنید.



شکل ۳۷. چپ: ایزومتری‌ها با نگاشت نمایی جابجا می‌شوند، یعنی، $\exp_{\phi(p)} \circ \phi_{*,TM}(v) = \phi \circ \exp_p(v)$ برای هر بردار $v \in T_p M$ و ایزومتری $\phi \in \text{Isom}(M)$. راست: ایزومتری‌ها همچنین با انتقال لوی-چیویتا بردارهای مماس و بردارهای ویژگی جابجا می‌شوند، یعنی، $\phi_{*,A} \circ \mathcal{P}_{A,\gamma} = \mathcal{P}_{A,\phi \circ \gamma} \circ \phi_{*,A}$ برای مسیرهای دلخواه $M \rightarrow M$ و $\gamma \in \text{Isom}(M)$. اگر یک اتصال جایگزین و G-سازگار استفاده شود، ما می‌خواهیم که همان خاصیت جابجا می‌شود. نامتفیر بودن نگاشتهای نمایی و متقلکندها نسبت به ایزومتری به کانولوشن‌های GM اجازه می‌دهد تا تحت عمل ایزومتری‌ها هم متغیر باشند.

می‌شود:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\phi} & M \\
 \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\
 TM & \xrightarrow{\phi_{*,TM}} & TM \\
 \pi_{TM} \downarrow & & \downarrow \pi_{TM} \\
 M & \xrightarrow{\phi} & M
 \end{array} \tag{304}$$

ایزومتری‌ها و متقلکنده‌های موازی: پیش‌ران روی کلاف مماس در [۱] علاوه بر این استدلال شد که با متقلکنده‌های متناظر لوی-چیویتا جابجا می‌شود، همانطور که در شکل ۳۷ (راست) به تصویر کشیده شده است. اگر یک اتصال جایگزین و G-سازگار برای انتقال بردارهای ویژگی انتخاب شود، ما می‌خواهیم که آن نیز با عمل ایزومتری‌ها جابجا شود. از آنجایی که متقلکنده‌ها و پیش‌ران‌ها بر روی GM ، FM و A از آنها بر روی TM هستند (قا می‌شوند، می‌توان به راحتی نشان داد که این خاصیت به آنها نیز متقلک می‌شود. به طور خاص برای کلاف‌های بردار ویژگی حقیقی این به این معنی است که برای ایزومتری‌های دلخواه γ ما رابطه $\phi_{*,A} \circ \mathcal{P}_{A,\gamma} = \mathcal{P}_{A,\phi \circ \gamma} \circ \phi_{*,A}$ داریم).

$$\phi_{*,A} \circ \mathcal{P}_{A,\gamma} = \mathcal{P}_{A,\phi \circ \gamma} \circ \phi_{*,A} \tag{305}$$

را فرض می‌کنیم، به طوری که نمودار زیر جابجا می‌شود:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}_{\gamma(\cdot)} & \xrightarrow{\phi_{*,A}} & \mathcal{A}_{\phi \circ \gamma(\cdot)} \\
 \mathcal{P}_{A,\gamma} \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}_{A,\phi \circ \gamma} \\
 \mathcal{A}_{\gamma(1)} & \xrightarrow{\phi_{*,A}} & \mathcal{A}_{\phi \circ \gamma(1)}
 \end{array} \tag{306}$$

ایزومنتری‌ها و پول‌بک‌های منتقل کننده میدان‌های ویژگی: با دانستن قوانین تبدیل نگاشت‌های نمایی و منتقل کننده‌ها تحت عمل ایزومنتری‌ها، ما همه چیز لازم را برای استخراج قانون تبدیل پول‌بک‌های منتقل کننده $\text{Exp}_p^* f$ از Isom_{GM} در دست داریم:

قضیه ۸.۴ (عمل ایزومنتری بر روی پول‌بک‌های منتقل کننده میدان‌های ویژگی): فرض کنید $\phi \in \Gamma(\mathcal{A})$ ، $f \in \Gamma(\mathcal{A})$ ، $\phi_{*,TM}^{-1}(f)$ هر میدان ویژگی و $\phi_{*,A_{\square\square\square}}^{-1}(f)$ هر ایزومنتری حافظ G -ساختار باشد. فرض کنید منتقل کننده‌های بردار ویژگی با عمل Isom_{GM} جابجا شوند، یعنی معادله (۳۰۵) برقرار باشد (که به طور خود کار برای اتصال لوی-چیویتا تضمین می‌شود). سپس پول‌بک منتقل کننده (تعریف ۷.۵) از میدان پیش‌ران $f \triangleright$ تعریف ۸.۲ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f) = \phi_{*,A_{\square\square\square}} \circ [\text{Exp}_{\phi^{-1}(p)}^* f] \circ \phi_{*,TM}^{-1} \quad (۳۰۷)$$

اثبات: ما با اعمال سمت راست بر روی یک بردار دلخواه $v \in T_p M$ شروع می‌کیم و با استفاده از ویژگی‌های استخراج شده در این بخش به تدریج به سمت چپ می‌رسیم:

$$\begin{aligned} & \phi_{*,A_{\square\square\square}} [\text{Exp}_{\phi^{-1}(p)}^* f] \phi_{*,TM}^{-1}(v) \\ &= \phi_{*,A_{\square\square\square}} \mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\square\square}, \phi^{-1}(p) \leftarrow \exp_{\phi^{-1}(p)} \circ \phi_{*,TM}^{-1}(v)} \circ f \circ \exp_{\phi^{-1}(p)} \circ \phi_{*,TM}^{-1}(v) \quad (\text{پول‌بک منتقل کننده، تعریف ۷.۵}) \\ &= \phi_{*,A_{\square\square\square}} \mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\square\square}, \phi^{-1}(p) \leftarrow \phi^{-1} \circ \exp_p(v)} \circ f \circ \phi^{-1} \circ \exp_p(v) \quad (\text{عمل ایزومنتری بر } \exp, \text{معادله (۳۰۳)}) \\ &= \mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\square\square}, p \leftarrow \exp_p(v)} \circ \phi_{*,A_{\square\square}} \circ f \circ \phi^{-1} \circ \exp_p(v) \quad (\text{عمل ایزومنتری بر } \mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\square\square}}, \text{معادله (۳۰۵)}) \\ &= \mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\square\square}, p \leftarrow \exp_p(v)} \circ (\phi \triangleright f) \circ \exp_p(v) \quad (\text{پیش‌ران میدان‌ها، معادله (۲۸۱)}) \\ &= [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](v) \quad (\text{پول‌بک منتقل کننده، تعریف ۷.۵}) \end{aligned} \quad \square$$

به طور شهودی، این نتیجه فقط بیان می‌کند که پول‌بک منتقل کننده یک میدان پیش‌ران برابر با پیش‌ران پول‌بک منتقل کننده اصلی است. نسبت به بدیهی‌سازی‌های محلی، این پیش‌ران را می‌توان به عنوان یک تبدیل بینانه القا شده از ایزومنتری تفسیر کرد، که در معادله (۹۳) بیان شد. ما در ادامه فرض خواهیم کرد که اتصال G -سازگاری که برای انتقال بردارهای ویژگی انتخاب می‌شود، همیشه نسبت به Isom_{GM} نامتغیر خواهد بود و بنابراین معادله (۳۰۷) برقرار است.

اینکه پول‌بک منتقل کننده و پیش‌ران ایزومنتری جابجا می‌شوند، نتیجه جابجا‌بی‌پذیری نگاشت‌نمایی و منتقل کننده موازی است، که پول‌بک منتقل کننده بر حسب آنها تعریف می‌شود. توجه داشته باشید که دیفیومورفیسم‌های عمومی متريک و در نتیجه نگاشت‌نمایی و پول‌بک منتقل کننده میدان‌های ویژگی را حفظ نمی‌کنند. با تکیه بر این ساختارها، تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM فقط می‌توانند نسبت به ایزومنتری هم‌متغیر باشند اما نه کاملاً نسبت به دیفیومورفیسم.

۲.۸ هم‌متغیری ایزومنتری تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM

اکنون به بررسی این موضوع می‌پردازیم که تحت چه شرایطی تبدیلات میدان کرنل و کانولوشن‌های GM نسبت به عمل ایزومنتری‌ها بر روی میدان‌های ویژگی هم‌متغیر هستند. از آنجایی که عمل بر روی کلاف‌های بردار ویژگی G -الحاقی فقط برای ایزومنتری‌های حافظ G -ساختار تعریف شده است، ما تمام گزاره‌ها را برای زیرگروه \mathcal{I} از $\text{Isom}_{GM} \leq \text{Isom}(M)$ یا زیرگروه‌های GM فقط می‌توانند نسبت به ایزومنتری هم‌متغیر کرد. البته همیشه می‌توان گروه‌های ساختار G را در نظر گرفت که برای آنها $\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M)$ است.

هم‌متغیری یک تبدیل میدان کرنل، و در نتیجه کانولوشن‌های GM ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۸.۵ (تبدیل میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزومنتری): فرض کنید $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} : \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square})$ یک تبدیل میدان کرنل باشد. آنگاه گفته می‌شود که $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ نسبت به عمل ایزومنتری‌ها در یک زیرگروه \mathcal{I} از Isom_{GM} هم‌متغیر است اگر با این عمل جابجا شود، یعنی اگر ویژگی زیر برقرار باشد:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(\phi \triangleright f) = \phi \triangleright (\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f)) \quad \forall f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}), \phi \in \mathcal{I} \quad (۳۰۹)$$

بر حسب یک نمودار، $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ نسبت به ایزومنتری‌ها در \mathcal{I} هم‌متغیر است اگر

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) & \xrightarrow{\mathcal{T}_{\mathcal{K}}} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}) \\ \phi \triangleright \downarrow & & \downarrow \phi \triangleright \\ \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) & \xrightarrow{\mathcal{T}_{\mathcal{K}}} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}) \end{array} \quad (۳۱۰)$$

برای همه $\phi \in \mathcal{I}$ جابجا شود.

یک نمایش تصویری از این تعریف در شکل ۲۰ آورده شده است. در بخش بعدی ۱.۲.۸ ما یک قید بر روی میدان‌های کرنل استخراج خواهیم کرد تا تبدیل میدان کرنل متاظر نسبت به ایزومنتری هم متغیر باشد. نتیجه‌ای که از نظر هندسی شهودی است و به دست می‌آوریم این است که خود میدان کرنل باید تحت عمل ایزومنتری‌ها نامغایر باشد، که این به معنای نوعی اشتراک‌گذاری وزن بر روی مدارهای ایزومنتری است؛ به شکل ۳۸ مراجعه کنید. بخش ۱.۲.۸ این بینش‌ها را به مورد خاص تر کاتولوشن‌های GM و میدان‌های کرنل کاتولوشنی GM اعمال می‌کند. مشخص می‌شود که کاتولوشن‌های GM به دلیل G -هدایت‌پذیری کرنل الگوی خود، به طور خود کار نسبت به هر ایزومنتری در Isom_{GM} هم متغیر هستند.

۱.۲.۸ هم‌متغیری ایزومنتری تبدیلات میدان کرنل عمومی

نتیجه اصلی این بخش، قضیه ۱.۲.۸ بیان می‌کند که یک تبدیل میدان کرنل \mathcal{K} نسبت به ایزومنتری هم‌متغیر است اگر و تنها اگر میدان کرنل زیربنایی آن \mathcal{K} تحت ایزومنتری‌ها نامغایر باشد. برای معنادار کردن این گزاره، ما با تعریف رفتار تبدیلی میدان‌های کرنل هنگام عمل ایزومنتری‌ها بر آنها شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۶ (عمل ایزومنتری بر روی میدان‌های کرنل). فرض کنید $\mathcal{K} : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square\square\square})$ یک میدان کرنل باشد. یک ایزومنتری $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ از طریق پیش‌ران میدان کرنل بر روی \mathcal{K} عمل می‌کند:

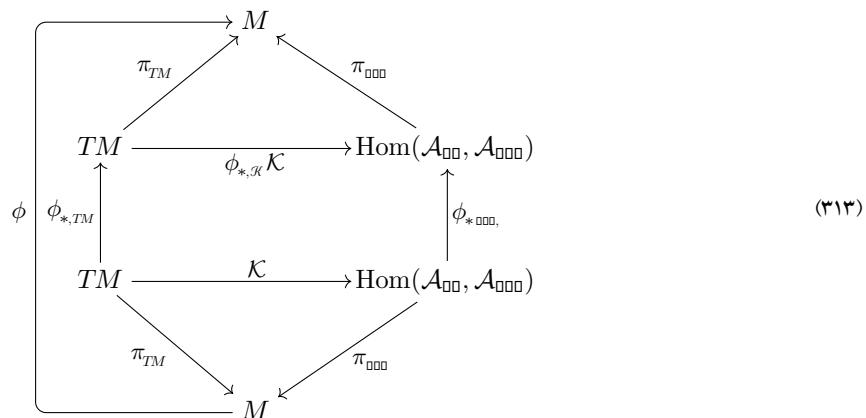
$$\phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K} := \phi_{*,\square\square\square\square} \circ \mathcal{K} \circ \phi_{*,TM}^{-1}. \quad (311)$$

به طور شهودی، این پیش‌ران میدان‌های کرنل را می‌توان به عنوان حرکت دادن کرنل‌های منفرد \mathcal{K}_p در نقاط $p \in M$ در امتداد مدارهای گروه ایزومنتری به $(p)\phi$ در نظر گرفت.

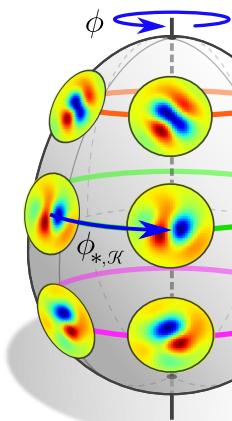
از آنجایی که میدان‌های کرنل به عنوان M -مورفیسم‌های کلاف تعریف می‌شوند، یعنی $\pi_{TM} \mathcal{K} = \pi_{\square\square\square\square} \mathcal{K} = \pi_{TM}$ را برآورده می‌کنند، پیش‌ران آنها تنها در صورتی خوش تعریف است که این ویژگی را حفظ کنند. این تضمین می‌شود زیرا پیش‌ران روی کلاف مماس و کلاف هومومorfیسم نگاشت‌های کلاف هستند که به ترتیب $\pi_{TM} \circ \phi_{*,\square\square\square\square} = \phi \circ \pi_{TM}$ (معادله (۲۶۵)) و $\pi_{TM} \circ \phi_{*,TM} = \phi \circ \pi_{TM}$ (معادله (۲۷۸)) را برآورده می‌کنند:

$$\begin{aligned} \pi_{\square\square\square\square} \phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K} &= \pi_{\square\square\square\square} \phi_{*,\square\square\square\square} \mathcal{K} \phi_{*,TM}^{-1} \\ &= \phi \pi_{\square\square\square\square} \mathcal{K} \phi_{*,TM}^{-1} \\ &= \phi \pi_{TM} \phi_{*,TM}^{-1} \\ &= \phi \phi^{-1} \pi_{TM} \\ &= \pi_{TM} \end{aligned} \quad (312)$$

ما تعریف عمل ایزومنتری را بر روی میدان‌های کرنل با یک نمودار جابجایی به تصویر می‌کشیم:



بعض پایینی این نمودار میدان کرنل مستقل از مختصات \mathcal{K} را از نمودار در معادله (۲۳۷) نشان می‌دهد در حالی که بخش بالایی پیش‌ران آن $\phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K} = \phi_{*,\square\square\square\square} \circ \mathcal{K} \circ \phi_{*,TM}^{-1}$ را توسط $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ نشان می‌دهد. جابجایی پذیری فلش سمت چپ، که تأیید می‌کند $\phi_{*,\mathcal{K}}$ کرنل‌ها را از p به $(p)\phi$ منتقل می‌کند، از این واقعیت ناشی می‌شود که $\phi_{*,TM}$ و $\phi_{*,\square\square\square\square}$ هر دو نگاشت‌های کلاف روی ϕ هستند. ما با تعریف میدان‌های کرنل نامغایر نسبت به ایزومنتری ادامه می‌دهیم - یک نمایش تصویری در شکل ۳۸ یافت می‌شود.



شکل ۸.۸: نمایش تصویری یک میدان کرنل نامتغیر \mathcal{K} برای حالت یک (زیر)گروه ایزومنتری $\mathcal{I} = \text{SO}(2)$. قید نامتغیر بودن مستلزم $\mathcal{K} := \phi_{*,\mathcal{K}}^{-1} \circ \mathcal{K} := \phi_{*,\text{TM}}^{-1} \circ \mathcal{K} = \mathcal{K}$ است. این ایجاب می‌کند که کرنل‌ها بر روی مدارهای ϕ در \mathcal{I} است. این عمل به اشتراک گذاشته شوند اما اجازه می‌دهد کرنل‌های متفاوتی بر روی مدارهای مختلف وجود داشته باشند. قضیه ۸.۸ اثبات می‌کند که میدان‌های کرنل نامتغیر و تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر بکار راهنمایی کنند. این به طور شهودی روشن است زیرا یک الگوی خاص در میدان ویژگی در $p \in M$ همان پاسخی را هنگامی که به $\phi(p)$ منتقل می‌شود برمی‌انگزد، اگر و تنها اگر کرنل‌ها در هر دو نقطه منطبق باشند. برای انتخاب \mathcal{I} به عنوان گروه ایزومنتری، کرنل‌ها علاوه بر این باید یک قید بازتابی را برآورده کنند؛ به شکل ۴۰ مراجعه کنید.

تعريف ۸.۷ (میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومنتری). گفته می‌شود یک میدان کرنل \mathcal{K} نامتغیر^{۷۳} تحت ایزومنتری‌ها در $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$ است اگر قید $\phi_{*,\mathcal{K}} \circ \mathcal{K} = \mathcal{K}$ برای همه $\phi \in \mathcal{I}$ برآورده کند. مفضای میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومنتری را با

$$\mathcal{K}_{\text{نامتغیر}}^{\mathcal{I}} := \left\{ \mathcal{K} : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{نامتغیر}}, \mathcal{A}_{\text{نامتغیر}}) \mid \pi_{\text{نامتغیر}} \circ \mathcal{K} = \pi_{TM}, \quad \phi_{*,\mathcal{K}} \circ \mathcal{K} = \mathcal{K} \quad \forall \phi \in \mathcal{I} \right\}. \quad (۳۱۴)$$

با نوشتن $\phi_{*,\mathcal{K}}$ ، قید نامتغیر بودن به صورت زیر خوانده می‌شود:

$$\phi_{*,\text{نامتغیر}} \circ \mathcal{K} \circ \phi_{*,\text{TM}}^{-1} = \mathcal{K} \quad \forall \phi \in \mathcal{I}, \quad (۳۱۵)$$

که پس از بسط بیشتر $\phi_{*,\text{نامتغیر}}$ همانطور که در معادله (۲۸۰) تعریف شده است، به صورت زیر در می‌آید:

$$\phi_{*,\mathcal{A}_{\text{نامتغیر}}} \mathcal{K}(\phi_{*,\text{TM}}^{-1} v) \phi_{*,\mathcal{A}_{\text{نامتغیر}}}^{-1} = \mathcal{K}(v) \quad \forall v \in TM, \quad \forall \phi \in \mathcal{I} \quad (۳۱۶)$$

به شباهت این قیود میدان کرنل در معادلات (۳۱۵) و (۳۱۶) با قید G-هدايت‌پذیری بر روی کرنل‌های الگو در معادلات (۲۴۳) و (۲۴۴) توجه کنید. در واقع، هر دو قید ارتباط نزدیکی با هم دارند و تا حدی یکدیگر را ایجاد می‌کنند، همانطور که در بخش بعدی ۲۲۸ در مورد کانولوشن‌های GM هم‌متغیر نسبت به ایزومنتری نشان خواهیم داد.

قضیه زیر اثبات می‌کند که میدان‌های کرنلی که تحت ایزومنتری‌ها نامتغیر هستند، در واقع متناظر با تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ایزومنتری هستند:

قضیه ۸.۸ (تبدیل میدان کرنل هم‌متغیر \Leftrightarrow میدان کرنل نامتغیر). یک تبدیل میدان کرنل $\mathcal{K} : \Gamma(\mathcal{A}_{\text{نامتغیر}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\text{نامتغیر}})$ نسبت به ایزومنتری‌ها در $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$ طبق تعریف ۸.۵ هم‌متغیر است اگر و تنها اگر میدان کرنل زیربنایی \mathcal{K} تحت ایزومنتری‌ها طبق تعریف ۸.۷ نامتغیر باشد، یعنی،

$$\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(\phi \triangleright f) = \phi \triangleright \mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f) \quad \forall \phi \in \mathcal{I}, \quad f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{نامتغیر}}) \iff \phi_{*,\mathcal{K}} \circ \mathcal{K} = \mathcal{K} \quad \forall \phi \in \mathcal{I} \quad (۳۱۷)$$

اثبات: برای اثبات این قضیه، ما تبدیلات میدان کرنل و پیش‌رانه‌های میدان ویژگی را در هر دو طرف شرط هم‌متغیری ایزومنتری در معادله (۳۰۹) می‌نویسیم. گزاره پس از چند دستکاری جبری از مقایسه هر دو طرف به دست می‌آید.

^{۷۳} به جای گفتن اینکه \mathcal{K} نامتغیر است، می‌توان آن را هم‌متغیر نامید زیرا $\phi_{*,\text{نامتغیر}} \circ \mathcal{K} = \mathcal{K} \circ \phi_{*,\text{TM}}$ برآورده می‌کند. به طور کلی، هر تابعی که نسبت به اعمال گروهی معنی بر روی دامنه و هم‌دامنه‌اش هم‌متغیر باشد، خودش تحت پیش‌ترکیب و پس‌ترکیب با اعمال روی دامنه و هم‌دامنه‌اش مانند معادله (۳۱۵) نامتغیر است.

ما با سمت راست معادله (۳۰۹) شروع می کنیم:

$$\begin{aligned}
 [\phi \triangleright \mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f)](p) &\stackrel{(1)}{=} \phi_{*, \mathcal{A}_{\text{iso}}} [\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(f)](\phi^{-1}(p)) \\
 &\stackrel{(2)}{=} \phi_{*, \mathcal{A}_{\text{iso}}} \int_{T_{\phi^{-1}(p)}M} \mathcal{K}(v) [\text{Exp}_{\phi^{-1}(p)}^* f](v) dv \\
 &\stackrel{(3)}{=} \phi_{*, \mathcal{A}_{\text{iso}}} \int_{T_{\phi^{-1}(p)}M} \mathcal{K}(v) \phi_{*, \mathcal{A}_{\text{iso}}}^{-1} [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](\phi_{*, TM}(v)) dv \\
 &\stackrel{(4)}{=} \int_{T_p M} \phi_{*, \mathcal{A}_{\text{iso}}} \mathcal{K}(\phi_{*, TM}^{-1} \tilde{v}) \phi_{*, \mathcal{A}_{\text{iso}}}^{-1} [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](\tilde{v}) d\tilde{v} \\
 &\stackrel{(5)}{=} \int_{T_p M} [\phi_{*, \mathcal{A}_{\text{iso}}} \mathcal{K}] (\tilde{v}) [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](\tilde{v}) d\tilde{v} \\
 &\stackrel{(6)}{=} \int_{T_p M} [\phi_{*, \mathcal{K}} \mathcal{K}] (\tilde{v}) [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](\tilde{v}) d\tilde{v} \tag{318}
 \end{aligned}$$

مراحل (۱) و (۲) عمل ایزومتری \triangleright را بر روی میدان های ویژگی (تعریف ۸.۲) و تبدیل میدان کرنل (تعریف ۷.۶) بسط می دهند. قانون تبدیل بولبک منتقل کننده میدان در قضیه ۸.۴ که به نام تغیر بودن اتصال G -سازگار نسبت به Isom_{GM} متکی است، مرحله (۳) را توجیه می کند. مرحله (۴) v را با $\phi_{*, TM} v = \tilde{v}$ جایگزین می کند. از آنجایی که ϕ یک ایزومتری است، تغییر حجم برابر با ۱ است. مراحل (۵) و (۶) عمل پیش ران کرنل $\phi_{*, \mathcal{K}}$ را شناسایی می کنند، تعریف ۸.۶ گزاره حاصل کاملاً شهودی است: یک تبدیل خروجی تبدیل میدان کرنل متناظر با یک تبدیل همزمان ورودی و میدان کرنل آن است.

نوشتن سمت چپ به دست می دهد:

$$[\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(\phi \triangleright f)](p) = \int_{T_p M} \mathcal{K}(v) [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)](v) dv, \tag{319}$$

که تا تبدیل میدان کرنل با سمت راست معادل است.

هم متغیری ایزومتری مستلزم آن است که هر دو عبارت برای میدان های دلخواه ($f, p \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{iso}})$)، نقاط $v \in M$ و ایزومتری های $\phi \in \mathcal{I}$ موافق باشند. این حالت اگر و تنها اگر $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{*, \mathcal{K}}$ برای هر $\phi \in \mathcal{I}$ برقرار باشد، یعنی اگر میدان کرنل تحت عمل ایزومتری ها نامتغیر باشد، برقرار است. \square

توجه داشته باشید که این اثبات در یک G -اطلس از بدیهی سازی های محلی بسیار دشوار بود. توصیف سراسری و مستقل از مختصات تبدیلات میدان کرنل امکان یک اثبات ساده را بدون نگرانی از اینکه ایزومتری ها ویژگی ها را بین بدیهی سازی های محلی مختلف منتقل کنند، فراهم می کند.

در این مرحله ما می توانستیم با بررسی بیشتر میدان های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری ادامه دهیم: از آنجایی که قید نامتغیر بودن ایجاب می کند که کرنل ها بر روی مدارهای گروه ایزومتری به اشتراک گذاشته شوند، توصیف کل میدان کرنل بر روی کل منیفلد زائد است. بنابراین امکان کاهش توصیف چنین میدان های کرنلی به میدان های کرنل بر روی فضاهای خارج قسمتی وجود دارد. از آنجایی که این تحلیل برای اثبات هم متغیری ایزومتری کانولوشن های GM لازم نیست و به برخی تعاریف فنی نیاز دارد، ما آن را به بخش ۳.۸ موکول می کنیم.

۲.۲.۸ هم متغیری ایزومتری کانولوشن های GM

به یاد بیاورید که کانولوشن های GM (تعریف ۷.۸) به عنوان تبدیلات میدان کرنل خاص با میدان های کرنل کانولوشنی GM (تعریف ۷.۴) مربوط به هم متغیری ایزومتری تبدیلات میدان کرنل بالا فاصله به کانولوشن های GM نیز اعمال می شود. با این حال، علاوه بر قید نامتغیر بودن ایزومتری در معادله (۳۱۵)، میدان های کرنل کانولوشنی GM باید قید G -هدايت پذیری را بر روی کرنل الگو از معادله (۲۴۳) برآورده کنند و وزن ها را طبق معادله (۲۴۵) بر روی G -ساختار به اشتراک گذاشته باشند. برای اینکه کانولوشن GM نسبت به ایزومتری هم متغیر باشد، همه این قیود باید به طور همزمان برآورده شوند. به طور شهودی، این ایجاب می کند که اشتراک گذاری وزن کانولوشنی با اشتراک گذاری وزن القا شده از ایزومتری بر روی مدارها موافق باشد. خوشبختانه مشخص می شود که این به طور خود کار برای ایزومتری های مورد نظر صادق است: کانولوشن های GM و وزن ها را بر روی G -ساختار به اشتراک می گذارند و ایزومتری ها در GM -ساختار را حفظ می کنند به طوری که میدان های کرنل کانولوشنی GM

تضمين شده‌اند که نسبت به Isom_{GM} نامتغير باشند. در مختصات، اين در تبديلات پيمانه القا شده از Isom_{GM} يعني (p) که در گروه ساختار G مقدار می‌گيرند، مععكس می‌شود، به طوري که آنها توسيط G -هدايت‌پذيری کرnel های الگو حذف می‌شوند.

برای دقيق‌تر کردن اين استدلال‌ها، يك کانولوشن GM يعني $(K \star : \Gamma(\mathcal{A}_{\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square}))$ در $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^G$ -هدايت‌پذير در نظر بگيريد، که طبق تعريف ۷.۸ فقط تبديل ميدان کرnel کانولوشني GM يعني \mathcal{K}_K است. طبق قضيه ۸.۸ کانولوشن GM بنابراین دقيقاً زمانی نسبت به Isom_{GM} هم متغير است که \mathcal{K}_K نسبت به Isom_{GM} نامتغير باشد، يعني زمانی که $\phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K}_K = \phi_{*,\square} \circ \mathcal{K}_K \circ \phi_{*,TM}^{-1} = \phi_{*,TM} \circ \mathcal{K}_K \circ \phi_{*,\square}^{-1}$ باشد. اين قيد بر روی کل ميدان کرnel به طور معادل با مجموعه‌اي از قيود بر روی کرnel های کانولوشن منفرد که ميدان را تشکيل می‌دهند، بيان می‌شود:

$$\phi_{*,\square} \circ \mathcal{K}_{K,p} \circ \phi_{*,TM}^{-1} = \mathcal{K}_{K,\phi(p)} \quad \forall p \in M, \phi \in \text{Isom}_{GM} \quad (320)$$

با در نظر گرفتن يك نقطه خاص $p \in M$ ، ما پيمانه‌های دلخواه \tilde{A} را در p و A را در (p) از G -اطلس انتخاب می‌کنیم. ميدان کرnel کانولوشني GM طبق تعريف ۷.۴ در p و (p) به صورت زير داده می‌شود:

$$\mathcal{K}_{K,p} := (\psi_{\square,p}^{\tilde{A}})^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^{\tilde{A}}|}} \circ \psi_{TM,p}^{\tilde{A}} \quad \text{و} \quad \mathcal{K}_{K,\phi(p)} := (\psi_{\square,\phi(p)}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_{\phi(p)}^A|}} \circ \psi_{TM,\phi(p)}^A. \quad (321)$$

با جايگزاری اين عبارات در قيد در معادله (۳۲۰) برای p ثابت و شناسایي $(\psi_{\square,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,\square}^{-1})^{-1} (\psi_{\square,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,\square}^{-1})$ به دست می‌آوریم:

$$(\psi_{\square,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,\square}^{-1})^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^{\tilde{A}}|}} \circ \psi_{TM,p}^{\tilde{A}} \phi_{*,TM}^{-1} = (\psi_{\square,\phi(p)}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_{\phi(p)}^A|}} \circ \psi_{TM,\phi(p)}^A \quad \forall \phi \in \text{Isom}_{GM} \quad (322)$$

بنابراین هم‌متغيری ايزومتری برقرار خواهد بود اگر اشتراک‌گذاري وزن از ايزومتری $\psi_{*,(p)}^{\tilde{A}}$ با اشتراک‌گذاري وزن از طريق پيمانه‌های اصلی $\psi_{*,(p)}^A$ موافق باشد. به ياد بياوريد که پيمانه‌های القا شده از ايزومتری طبق قضие ۸.۳ برای ايزومتری ها در Isom_{GM} تضمين شده‌اند که با G -اطلس‌ها (از کلاوف متناظر) سازگار باشند. همانطور که در معادله (۴۶) نشان داده شده است، انتخاب خاص پيمانه، که کرnel الگوي G -هدايت‌پذير نسبت به آن جهت‌دهي می‌شود، بی‌هميت است، تا زمانی که پيمانه‌ها G -سازگار باشند. از آنجايي که همه استخراج‌ها از نقطه انتخاب شده p و انتخاب خاص پيمانه‌ها مستقل بودند، اين ايجاب می‌کند که کانولوشن‌هاي GM بنا به طراحی تضمين شده‌اند که نسبت به Isom_{GM} هم‌متغير باشند.

برای به دست آوردن شهود بهتر برای اين نتيجه، ارزش دارد که تبديلات پيمانه القا ي و با مقدار در G $g_{\phi}^{A\tilde{A}}$ را صريح کنیم. برای اين منظور، توجه داشته باشید که جابجايي پذيری نمودارها در معادلات (۳۰۲) و (۲۸۵) ايجاب می‌کند $\psi_{\square,\phi(p)}^{\tilde{A}} \phi_{*,\square}^{-1} = \rho_{\square} (g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{\square,\phi(p)}^A$. با جايگزاری اين عبارات مختصاتي در قيد در معادله (۳۲۲) به اين الزام می‌رسیم که

$$(\rho_{\square} (g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{\square,\phi(p)}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_p^{\tilde{A}}|}} \circ (g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} \psi_{TM,\phi(p)}^A = (\psi_{\square,\phi(p)}^A)^{-1} \circ \frac{K}{\sqrt{|\eta_{\phi(p)}^A|}} \circ \psi_{TM,\phi(p)}^A \quad (323)$$

باید برای هر ايزومتری ϕ در Isom_{GM} برقرار باشد. با بسط دادن معکوس در سمت چپ، با استفاده از اينکه $\sqrt{|\eta_p^{\tilde{A}}|} = \sqrt{|\eta_{\phi(p)}^A|} \cdot |\det g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)|$ و حذف پيمانه‌ها، که ممکن است زيرا آنها ايزومورفیسم هستند، ما به قيد زير می‌رسیم:

$$\frac{1}{|\det g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)|} \rho_{\square} (g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p)) \circ K \circ (g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p))^{-1} = K \quad \forall \phi \in \text{Isom}_{GM}, \quad (324)$$

که دقيقاً شبيه قيد کرnel G -هدايت‌پذير بر روی K از تعريف ۷.۳ است. به ياد بياوريد که تبديلات پيمانه القا شده از ايزومتری (p) $g_{\phi}^{A\tilde{A}}$ طبق قضие ۸.۳ Isom_{GM} باشد، با مقدار در G باشند. بنابراین قيد در معادله (۳۲۴) همیشه با G -هدايت‌پذيری K برآورده می‌شود.

نتایج استخراج شده در مورد نامتغیر بودن میدان های کرنل کانولوشنی GM به طور خلاصه با این گزاره خلاصه می شوند که نمودار زیر تضمین شده است که اگر K -هدایت پذیر باشد و اگر $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ حافظ G -ساختار باشد، جابجا بی پذیر است:

$$\begin{array}{c}
\text{id} \times (\rho_{\square\square\square}(g'_\phi^{A\tilde{A}}) \circ K / \sqrt{|\eta^A|} \circ (g'_\phi^{A\tilde{A}})^{-1}) \\
\boxed{\begin{array}{ccccc}
& & U^A & & \\
& \nearrow \pi_{TM} & & \searrow \pi_{\square\square\square} & \\
U^A \times \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\Psi_{TM}^A} & \pi_{TM}^{-1}(U^A) & \xrightarrow{\phi_{*,\mathcal{K}} \mathcal{K}_K} & \pi_{\square\square\square}^{-1}(U^A) \xrightarrow{\Psi_{\square\square\square}^A} U^A \times \mathbb{R}^{c_{\square\square\square} \times c_{\square\square\square}} \\
\uparrow \phi \times g_\phi^{A\tilde{A}}. & \uparrow \phi_{*,TM} & & \uparrow \phi_{*\square\square\square}, & \uparrow \phi \times \rho_{\square\square\square}(g_\phi^{A\tilde{A}}) \\
U^{\tilde{A}} \times \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\Psi_{TM}^{\tilde{A}}} & \pi_{TM}^{-1}(U^{\tilde{A}}) & \xrightarrow{\mathcal{K}_K} & \pi_{\square\square\square}^{-1}(U^{\tilde{A}}) \xrightarrow{\Psi_{\square\square\square}^{\tilde{A}}} U^{\tilde{A}} \times \mathbb{R}^{c_{\square\square\square} \times c_{\square\square\square}} \\
& \searrow \pi_{TM} & & \nearrow \pi_{\square\square\square} & \\
& & U^{\tilde{A}} & &
\end{array}} \\
\text{id} \times K / \sqrt{|\eta^{\tilde{A}}|}
\end{array} \quad (325)$$

در اینجا ما پولبک $U^A \rightarrow G$ را از $U^{\tilde{A}} \rightarrow U^A$ به $g'_\phi^{A\tilde{A}} \circ \phi^{-1}$ تعريف کردیم.

هرماه با قضیه ۸.۸، نامتغیر بودن میدان های کرنل کانولوشنی GM نسبت به Isom_{GM} هم متغیری کانولوشن های GM را ایجاب می کند:

قضیه ۸.۹ (هم متغیری کانولوشن های GM): $\Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square\square\square})$ یعنی $K^\star : \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square\square\square})$ با یک کرنل $-G$ -هدایت پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\square\square\square}, \rho_{\square\square\square\square\square}}^G$ نسبت به تمام ایزو متغیر های حافظ G -ساختار $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ هم متغیر است، یعنی

$$K^\star(\phi \triangleright f) = \phi \triangleright (K^\star f) \quad \forall f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}), \phi \in \text{Isom}_{GM}. \quad (326)$$

بنابراین نمودار زیر برای هر $\phi \in \text{Isom}_{GM}$ جابجا می شود:

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}) & \xrightarrow{K^\star} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square\square\square}) \\
\phi \triangleright \downarrow & & \downarrow \phi \triangleright \\
\Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}) & \xrightarrow{K_\star} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square\square\square})
\end{array} \quad (327)$$

اثبات: اثبات در بحث قبل از قضیه ارائه شد. \square

با استخراج این نتیجه کلی در مورد کانولوشن های GM ، ما اکنون برخی موارد خاص را برای انتخاب های خاص از گروه های ساختار G مورد بحث قرار می دهیم. اولاً، برای گروه های ساختار متعدد $d = G$ (یا ابر گروه های آن)، کانولوشن با هر ایزو متغیر جابجا می شود:

قضیه ۸.۱۰ (هم متغیری کامل ایزو متغیر کانولوشن های OM): کانولوشن های OM نسبت به عمل هر ایزو متغیر $\phi \in \text{Isom}(M)$ بر روی میدان های ویژگی هم متغیر هستند. به طور کلی تر، هر کانولوشن GM برای G -ساختارها با گروه های ساختار $d \geq G$ کاملاً نسبت به ایزو متغیر هم متغیر است.

اثبات: گزاره از قضیه (۸.۹) با مشاهده اینکه $\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}(M)$ برای گروه های ساختار $d \geq G$ تضمین شده است، به دست می آید. دومی در معادله (۲۷۵) مورد بحث قرار گرفت. \square

این نتیجه اساساً به این واقعیت متکی است که ایزو متغیر ها به عنوان آن زیر گروهی از دیفیو مورفیسم ها بر روی M تعریف می شوند که خود ریختنی های d -ساختار را القا می کنند. به بیان کمتر انتزاعی، $\text{Isom}(M)$ بنا به تعریف آن زیر گروهی از دیفیو مورفیسم ها است که به متريک ريمانی η از M احترام می گذارد و d -ساختار متناظر OM اطلاعاتی معادل با متريک است.

بر روی منیفلدهای ریمانی جهت‌پذیر، می‌توان علاوه بر این یک جهت (دست‌گردی قاب) را انتخاب کرد، که همراه با متريک یک $\text{SO}(d)$ -ساختار $\text{Isom}_+(M)$ را تعریف می‌کند. ايزومتری‌های متناظر که به خودريختی‌های ساختار $\text{SO}(d)$ بالا بر می‌شوند، ايزومتری‌های حافظ جهت در $\text{Isom}_+(M)$ هستند.

قضيه ۸.۱۱ (هممتغيري $\text{Isom}_+(M)$) کانولوشن‌های SOM . کانولوشن‌های SOM نسبت به عمل ايزومتری‌های حافظ جهت $\in \phi$ بر روی میدان‌های ویژگی هم‌متغیر هستند.

□ اثبات: اين نتیجه از قضيه ۸.۹ با مشاهده اينکه $\text{Isom}_{\text{SOM}} = \text{Isom}_+(M)$ به دست می‌آيد.

به عنوان مثال، يك کانولوشن SOM برای $M = \mathbb{R}^n$ که متناظر با شکل ۳۶ است، نسبت به عمل گروه اقلیدسي ویژه (۲) $\text{Isom}_+(\mathbb{R}^n) = \text{SE}(n)$ هم‌متغير است. به طور مشابه، يك کانولوشن SOM برای $M = S^n$ که متناظر با شکل ۳۶ ب است، نسبت به دوران با (۳) $\text{Isom}_+(S^n) = \text{SO}(n)$ هم‌متغير است.

توجه داشته باشيد که نتایج قضایای ۸.۱۰ و ۸.۱۱ فقط به گروه ساختار G بستگی دارند اما به انتخاب خاص G -ساختار بستگی ندارند. برای زیرگروه‌های G از d (یا $\text{SO}(d)$) مسائل پيچيده‌تر می‌شوند. در اين موارد، زيرگروه‌های Isom_{GM} از $\text{Isom}(M)$ به شاندن خاص G -ساختار با شکل ۳۵ به تصویر کشیده شد. به طور خاص، شکل ۳۵ به $\{e\}$ -ساختار کاتونی \mathbb{R}^n را نشان می‌دهد که کاملاً نسبت به انتقال هم‌متغير است، يعني $(\mathbb{R}^n, +, \text{Isom}_{\{e\}M}) = \mathcal{T}_2$ است. در مقابل، شکل ۳۵ به يك $\{e\}$ -ساختار از \mathbb{R}^n را نشان می‌دهد که فقط در اميداد يك محور نسبت به انتقال هم‌متغير است به طوري که $(\mathbb{R}, +, \text{Isom}_{\{e\}M}) \cong \mathcal{T}_1$ است. در ديدگاه شبكه‌های کانولوشني اين نتیجه بسیار شهودی است: کرنل‌های $\{e\}$ -هدایت‌پذير در اين مثال‌ها بدون قید هستند، يعني کرنل‌های کانولوشن مرسم هستند. بنابراین آنها به طور کلی هیچ اطلاعاتی در مورد پاسخ‌های خود هنگام اعمال نسبت به قاب‌های مرجع تبدیل شده با پیمانه حمل نمی‌کنند. از آنجایی که قاب‌ها، و بنابراین کرنل‌ها، در شکل ۳۵ در جهت «چپ-راست» به طور متفاوتی چرخانده شده‌اند، پاسخ‌های کرنل هنگام انتقال يك سیگنال در آن جهت به طور غیرقابل پيش‌بینی تعغير می‌کنند. اگر کرنل‌های الگو، با اين حال، $\text{SO}(n)$ -هدایت‌پذير بودند، می‌توانستند چرخش قاب‌ها را در نظر بگیرند. اين حالت متناظر با وضعیت در شکل ۳۶ است، يعني يك کانولوشن SOM .

۳.۸ میدان‌های کرنل خارج قسمتی

قضيه ۸.۸ نشان داد که هم‌متغيري ايزومتری يك تبدیل میدان کرنل، نيازمند نامتغير بودن میدان کرنل متناظر است. از آنجايي که قيد نامتغير بودن ايجاب می‌کند که کرنل‌ها بر روی مدارها به اشتراک گذاشته شوند، همانطور که در شکل ۳۸ به تصویر کشیده شده است، توصيف رياضي چين میدان‌های کرنل نامتغيری زائد است: يك کرنل منفرد در يك نماينده مدار برای بازسازی میدان کرنل بر روی کل مدار کافی است. در بخش ۲.۳.۸ ما توصيف‌های معادل و کاهش‌يافته‌ای از میدان‌های کرنل نامتغير را بر حسب کرنل‌ها بر روی نماينده گان مدار استخراج می‌کنیم. اين کرنل‌های نماينده خود توسيع عمل زيرگروه پايدارساز نماينده مدار محدود می‌شوند. ما يك بالابر (منحصر به فرد) از کرنل‌های نماينده به میدان‌های کرنل نامتغير پيشنهاد می‌کنیم که يك ايزومورفیسم بین هر دو توصيف برقرار می‌کند. اين ايزومورفیسم بالابر راهی برای پارامترسازی و ساخت تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ايزومتری در يك پياده‌سازی پيشنهاد می‌کند. قبل از استخراج اين نتایج در بخش ۲.۳.۸، بخش بعدی ۱.۳.۸ چارچوب رياضي را تنظيم می‌کند.

استخراج‌ها و نتایج اين بخش از نظر روحی به نظریه CNN ‌های هدایت‌پذير در فضاهای همگن نزدیک است [۴۷]، با اين حال، ما نتایج آنها را از فضاهای همگن به منیفلدهای عمومی تعیین می‌دهیم. هنگامی که به فضاهای همگن M پاياند باشيم، ثابت می‌کنیم که تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به ايزومتری با کانولوشن‌های GM معادل هستند.

۱.۳.۸ فضاهای خارج قسمتی الفاشهد از ايزومتری

عمل يك گروه تقارن بر روی يك فضا، آن را به مدارهای افزار می‌کند که به عنوان مجموعه‌هایی از تمام نقاطی که با عمل گروه به هم متصل هستند، تعریف می‌شوند. فضای چين مدارهای، فضای خارج قسمتی نسبت به اين عمل گروهی است. در ادامه ما فضاهای خارج قسمتی ناشی از اعمال يك گروه ايزومتری $\text{Isom}_{GM} \leq \mathcal{I}$ را هم بر روی منیفلد و هم بر روی کلاف‌های تاري مورد بحث قرار خواهیم داد. اين تعاریف بعداً به ما اجازه می‌دهند تا با عمل ايزومتری‌ها بر روی کرنل‌ها، وزن‌ها را بر روی مدارها به اشتراک بگذاریم.

خارج قسمت‌های منیفلد: هر نقطه $p \in M$ يك مدار را ترسیم می‌کند

$$\mathcal{I}.p := \{\phi(p) \mid \phi \in \mathcal{I}\} \subseteq M, \quad (328)$$

كه به عنوان مجموعه تمام نقاطی که با عمل بر روی p با هر ايزومتری در \mathcal{I} به دست می‌آيند، تعریف می‌شود. می‌توان به راحتی بررسی کرد که رابطه p و q عناصری از يك مدار هستند» يك رابطه همارزی است (به پاورقی ۴۷ مراجعه کنید) و بنابراین منیفلد را همانطور که در شکل ۳۹ به تصویر کشیده شده است، افزار می‌کند. فضای خارج قسمتی

$$\mathcal{I}\setminus M := \{\mathcal{I}.p \mid p \in M\} \quad (329)$$

نسبت به این رابطه همارزی، فضای تمام مدارها است، یعنی هر عنصر از $\mathcal{I} \setminus M$ متناظر با یک مدار کامل در M است.^{۷۴} نگاشت خارج قسمتی متناظر

$$Q_M : M \rightarrow \mathcal{I} \setminus M, \quad p \mapsto \mathcal{I}.p \quad (330)$$

یک نقطه $p \in M$ را با مدارش $\mathcal{I}.p \in \mathcal{I} \setminus M$ شناسایی می‌کند. برای هر مدار می‌توان یک نماینده مدار دلخواه را انتخاب کرد که به طور رسمی توسط یک مقطع تعیین می‌شود

$$r_M : \mathcal{I} \setminus M \rightarrow M \quad Q_M \circ r_M = \text{id}_{\mathcal{I} \setminus M}, \quad (331)$$

که در آن شرط آخر تضمین می‌کند که نماینده $(\mathcal{I}.p)$ در واقع عنصری از مدار $\mathcal{I}.p$ است. اغلب به مقاطع پیوسته (یا هموار) علاقه‌مند هستیم، با این حال، اینها به طور کلی وجود ندارند. بنابراین ما در ادامه نمی‌خواهیم که نماینده‌گان مدار به طور پیوسته انتخاب شوند و در صورت لزوم این نصیحت را بعداً جبران خواهیم کرد. طبق معمول برای مقاطع، آنها به طور کلی فقط وارون راست نگاشت خارج قسمتی هستند اما وارون چپ نیستند، یعنی $r_M \circ Q_M \neq \text{id}_M$. این با یک نمودار جابجایی

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{I} \setminus M & \xrightarrow{r_M} & M & \xrightarrow{Q_M} & \mathcal{I} \setminus M \\ & & \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{id}_{\mathcal{I} \setminus M}} & & \uparrow \end{array} \quad (332)$$

مشابه با معادله (۱۴۷) و یک نمودار غیرجابجایی

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{Q_M} & \mathcal{I} \setminus M & \xrightarrow{r_M} & M \\ & \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{id}_M} & \swarrow & & \uparrow \end{array} \quad (333)$$

مشابه با معادله (۱۴۸) به تصویر کشیده می‌شود. تارهای منفرد Q_M از نگاشت خارج قسمتی $\text{preim}_{Q_M}(\mathcal{I}.p) = \mathcal{I}.p \subseteq M$ توسط خود مدارها داده می‌شوند. توجه داشته باشید که $\mathcal{I} \setminus M$ به طور کلی یک کلاف تاری نیست زیرا مدارها لزوماً با یکدیگر همسان ریخت نیستند و بنابراین نمی‌توان آنها را به صورت محلی با یک تار نمونه‌ای مترک F بدیهی سازی کرد، همانطور که در نمودار جابجایی در معادله (۱۲۹) لازم است. بنابراین هر مدار نوع خاص خود را دارد که در ارتباط نزدیک با زیرگروه‌های پایدارساز نقاط روی آن مدار خاص است. زیرگروه پایدارساز

$$\text{Stab}_p := \{ \xi \in \mathcal{I} \mid \xi(p) = p \} \leq \mathcal{I} \quad (334)$$

یک نقطه $p \in M$ به عنوان آن زیرگروهی از گروه ایزومتری که p را ثابت نگه می‌دارد، تعریف می‌شود. بر حسب زیرگروه پایدارساز، برقرار است که مدار یک نقطه با

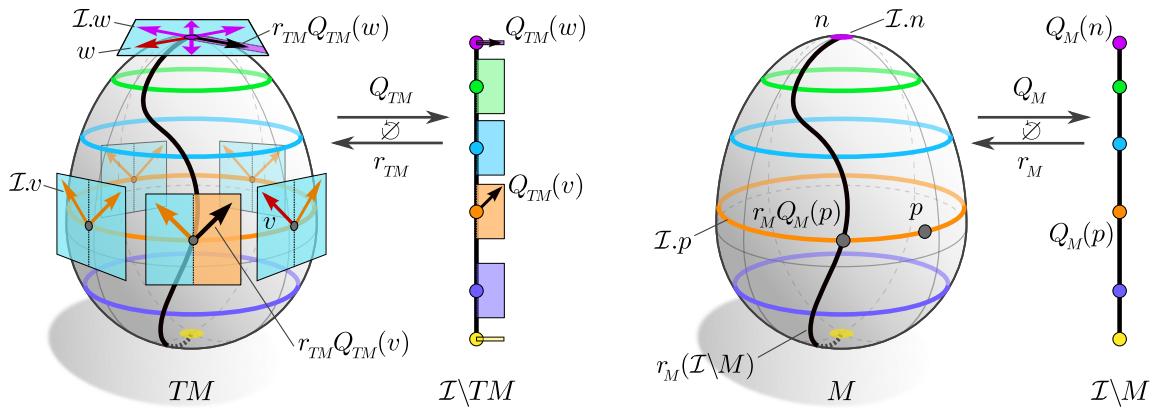
$$\mathcal{I}.p \cong \mathcal{I} / \text{Stab}_p. \quad (335)$$

شناسایی می‌شود. برای دیدن این ادعا، فرض کنید $f_p : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}.p$ ، $\phi \mapsto \phi(p) = \phi \circ \xi(p)$ برای یک $p \in M$ و مشاهده کنید که $\text{preim}_{f_p}(\phi(p)) = \phi(p) = f_p(\phi)$. به عنوان \mathcal{I} توان داد که در واقع $\text{Stab}_p(\phi(p)) = \phi$. $\text{Stab}_p \cong \mathcal{I} / \text{Stab}_p$ یک هم‌دسته از زیرگروه پایدارساز p است و بنابراین f_p ایزومورفیسم ادعا شده $\mathcal{I}.p \cong \mathcal{I} / \text{Stab}_p$ را برقرار می‌کند.

برای شهودی تر کردن این ساختارها، مثال در شکل ۳۳۹ را ب ۲ $\mathcal{I} \cong \mathcal{I} \setminus M$ داریم. مدارهای $\{s\}$ و $\{n\}$ قطب شمال و جنوب فقط نقاطی هستند که توسط \mathcal{I} ثابت می‌شوند. این با، به عنوان مثال، $\{n\}$ موقاً است زیرا $\text{Stab}_n = \mathcal{I}$ است. $\mathcal{I}.n \cong \mathcal{I} / \text{Stab}_n = \mathcal{I} / \mathcal{I} \cong \{n\}$ گروه کامل ایزومتری منطبق است. برای هر نقطه دیگر $p \in M$ ، مدارهای $\mathcal{I}.p$ بازتاب‌های $\mathcal{I}.p$ هستند. ما بازتاب‌های $\mathcal{I}.p$ را بازتاب نسبت به \mathcal{I} داریم و بنابراین در واقع دایره $\mathcal{I} / \text{Stab}_p \cong \mathbb{S}^1 / \mathcal{R} \cong \mathbb{S}^1$ را به عنوان نوع مدار به دست می‌آوریم. نگاشت خارج قسمتی $\mathcal{I}.q = \mathcal{I} \setminus M$ در فضای خارج قسمتی $\mathcal{I} \setminus M$ که در سمت راست نشان داده شده است، می‌فرستد. از آنجایی که مدارها را می‌توان از قطب شمال تا قطب جنوب پیمود، فضای خارج قسمتی $\mathcal{I} \setminus M$ توپولوژی یک پاره خط را دارد. مقطع $r_M : \mathcal{I} \setminus M \rightarrow M$ یک نقطه نماینده $r_M(o) \in M$ را برای هر مدار $o \in \mathcal{I} \setminus M$ داریم، $r_M(Q_M(p)) \neq p$. می‌توان مقطع را به عنوان نشاندن فضای خارج قسمتی $\mathcal{I} \setminus M$ در منیفلد، که به صورت خط سیاه $r_M(\mathcal{I} \setminus M)$ از قطب شمال تا قطب جنوب نشان داده شده است، تفسیر کرد.

خارج قسمت‌های کلاف: از آنجایی که گروه ایزومتری نه تنها بر روی خود منیفلد بلکه از طریق پیش‌ران‌ها بر روی کلاف‌های الحاقی نیز عمل می‌کند، این کلاف‌ها به روشهای مشابه به مدارهای افزار می‌شوند. برای کلی نگه داشتن بحث، ما در ادامه یک کلاف الحاقی عمومی $E \xrightarrow{\pi_E} M$ را در نظر می‌گیریم که می‌تواند نماینده TM, TM, GM, FM باشد. ما عناصر فضای کل را با $e \in E$ نشان می‌دهیم و

^{۷۴} ما $\mathcal{I} \setminus M$ را به عنوان یک خارج قسمت چپ می‌نویسیم زیرا \mathcal{I} از چپ بر روی M عمل می‌کند.

(ب) نگاشت خارج قسمتی و نمایندگان مدار برای TM (آ) نگاشت خارج قسمتی و نمایندگان مدار برای M

شکل ۳.۳۹: نگاشتهای خارج قسمتی Q_M و Q_{TM} و نمایندگان مدار (مقاطع) r_M و r_{TM} برای اعمال گروه ایزومتری $\mathcal{I} = \mathcal{I}^2$ بر روی منیفلد M در شکل ۳.۳۹ آ و بر روی کلاف مماس TM در شکل ۳.۹ ب. توصیف دقیقی از هر دو تصویر در متن اصلی آورده شده است.

فرض می کنیم $\phi_{*,E}$ پیش ران ϕ بر روی E باشد همانطور که در بخش ۲.۱.۸ معرفی شد. مدار یک عنصر از کلاف سپس به قیاس با معادله (۳۲۸) به صورت زیر داده می شود:

$$\mathcal{I}.e = \{\phi_{*,E}(e) \mid \phi \in \mathcal{I}\} \quad (3.36)$$

در حالی که فضای خارج قسمتی، که از مدارهای کلاف تشکیل شده است، به طور مشابه با معادله (۳۲۹) به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{I}\setminus E = \{\mathcal{I}.e \mid e \in E\}. \quad (3.37)$$

مشابه قبل، نگاشت خارج قسمتی (کانونی) عناصر کلاف را به مدارشان می فرستد:

$$Q_E : E \mapsto \mathcal{I}\setminus E, \quad e \mapsto \mathcal{I}.e \quad (3.38)$$

ما یک نگاشت تصویر (منحصر به فرد) را تعریف می کنیم

$$\pi_{\mathcal{I}\setminus E} : \mathcal{I}\setminus E \rightarrow \mathcal{I}\setminus M, \quad Q_E(e) \mapsto Q_M \circ \pi_E(e) \quad (3.39)$$

بین خارج قسمت های کلاف و خارج قسمت منیفلد همانطور که در نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}\setminus E & \xleftarrow{Q_E} & E \\ \pi_{\mathcal{I}\setminus E} \downarrow & & \downarrow \pi_E \\ \mathcal{I}\setminus M & \xleftarrow{Q_M} & M \end{array} \quad (3.40)$$

توجه داشته باشید که تعریف در معادله (۳۳۹) به انتخاب خاص نماینده مدار بستگی ندارد زیرا برای هر $e \in Q_E(e) \in Q_M \circ \pi_E(e) = Q_M \circ \phi \circ \pi_E(e) = Q_M \circ \pi_E(e)$ دیگر نتیجه یکسانی به دست می آوریم: تعیین می شوند

$$r_E : \mathcal{I}\setminus E \rightarrow E \quad Q_E \circ r_E = \text{id}_{\mathcal{I}\setminus E}, \quad (3.41)$$

که ما دوباره نمی خواهیم پیوسته باشد. با این حال، برای راحتی، ما می خواهیم که نمایندگان مدارهای کلاف بالای نمایندگان $(\mathcal{I}\setminus M)$ در فضای پایه قرار گیرند، یعنی برآورده کنند:

$$\pi_E \circ r_E = r_M \circ \pi_{\mathcal{I}\setminus E} \quad (3.42)$$

همانطور که در نمودار جابجایی زیر نشان داده شده است:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}\setminus E & \xrightarrow{r_E} & E \\ \pi_{\mathcal{I}\setminus E} \downarrow & & \downarrow \pi_E \\ \mathcal{I}\setminus M & \xrightarrow{r_M} & M \end{array} \quad (3.43)$$

زیرگروه پایدارساز یک عنصر کلاف $e \in E$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Stab}_e := \{\xi \in \mathcal{I} \mid \xi_{*,E} e = e\} \leq \text{Stab}_{\pi_E(e)} \leq \mathcal{I}. \quad (344)$$

$\xi \in \text{Stab}_e \Leftrightarrow \xi_{*,E} e = e \Rightarrow$ در فضای پایه است، که به راحتی با $\text{Stab}_{\pi_E(e)}$ نمایندگان e برابر است. این لزوماً یک زیرگروه از زیرگروه پایدارساز $\text{Stab}_{\pi_E(e)}$ است.

این مثال خود را از شکل ۳۹ تضمیر می‌دهیم. مدار (بنفس) یک بردار غیرصفر $w \in T_n M$ در قطب شمال n یک دایره را در $T_n M$ توصیف می‌کند. این با $\mathcal{I}.w \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_w \cong \mathbb{Z}/\mathcal{R} \cong S^1$ است. سازگار است زیرا چنین برداری با بازتاب‌های $\mathcal{R} \cong \text{Stab}_w$ در امتداد محور خود پایدار می‌شود. مدار $T_n M$ یک نقطه منفرد در TM است که توسط هر ایزومنتری پایدار می‌شود. هر بردار دیگر $v \in T_p M$ (قرمز)، که در یک فضای مماس در نقطه‌ای $p \in M$ متفاوت از قطب هزازنگی می‌کند، با عمل گروه ایزومنتری به فضاهای مماس دیگر $T_{\phi(p)} M$ از $T_p M$ بر روی مدار p چرخانده و بازتاب می‌شود. مدار v مدار آنها با یک کمی به سمت غرب در هر یک از فضاهای مماس روی $T_p M$ داده می‌شود. ما برای چنین بردارهای $\{e\}$ داریم و در اعماق مدار $\mathcal{I}.v \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_v \cong \mathbb{Z}/\mathcal{R}$ است. بردارهای v' که دقیقاً به سمت شمال یا جنوب اشاره نکند، با یک کمی از بردار به سمت شرق و یک کمی به سمت غرب در هر یک از فضاهای مماس روی $T_p M$ داده می‌شوند. مدار آنها با یک دایره $\mathcal{I}.v' \cong \mathcal{I}/\text{Stab}_{v'} \cong \mathbb{Z}/\mathcal{R} \cong S^1$ همانسان ریخت است.

نگاشت خارج‌قسمتی $Q_{TM} : TM \rightarrow \mathcal{I}/TM$ که در نیمه راست شکل ۳۹ نشان داده شده است، تصویر می‌کند. برای در ک ساختار آن، ماتم موارد کیفی متفاوت را در نظر می‌گیریم: اولاً، توجه داشته باشید که مدارهای بردارها در قطبها متناظر با دایره‌های با شعاع معین هستند، به طوری که مجموعه چنین مدارهایی یک خط $\pi_{\mathcal{I}/E}^{-1}(\mathcal{I}.n) \cong \mathbb{R}^+$ (پتو صورتی زیر فلش سیاه) را تشکیل می‌دهد. به طور مشابه، مدارهای بردارها در هر نقطه دیگر $T_{\phi(p)} M$ تمام فضاهای مماس $p \in M$ را روی $T_{\phi(p)} M$ در دو بازتاب قطع می‌کنند و بنابراین یک نیم‌صفحه $\pi_{\mathcal{I}/E}^{-1}(\mathcal{I}.p) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ (نارنجی) را تشکیل می‌دهند. مقطع $r_{TM} : \mathcal{I}/TM \rightarrow TM$ یک نیم‌صفحه $\pi_{\mathcal{I}/E}^{-1}(\mathcal{I}.r)$ را نگاشت خارج‌قسمتی $\mathcal{I}/TM \rightarrow TM$ می‌فرستد. طبق الزام در معادله (۳۴۲)، این نمایندگان باید در همان تاریخ نمایندگان (\mathcal{I}/M) از خارج‌قسمت می‌فیلد، که به صورت خط سیاه نشان داده شده است، قرار گیرند. به عنوان مثال، $v \in T_p M$ (قرمز) با نگاشت خارج‌قسمتی به $\mathcal{I}/TM(v) \in \mathcal{I}/TM$ (سیاه) فرستاده می‌شود. مقطع $r_{TM} Q_{TM}(v)$ را با $r_{TM} Q_{TM}(v)$ همچنین سیاه نمایش می‌دهد، که عنصری از M است و به طور کلی با v متفاوت است.

۲.۳.۸ میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی و قیود پایدارساز

برای توجیه ساخت میدان‌های کرنل نماینده خارج‌قسمتی و قیود پایدارساز، فرمول‌بندی صریح تر

$$\phi_{*,\mathbb{H}} \circ \mathcal{K}_p \circ \phi_{*,TM}^{-1} = \mathcal{K}_{\phi(p)} \quad \forall p \in M, \phi \in \mathcal{I}. \quad (345)$$

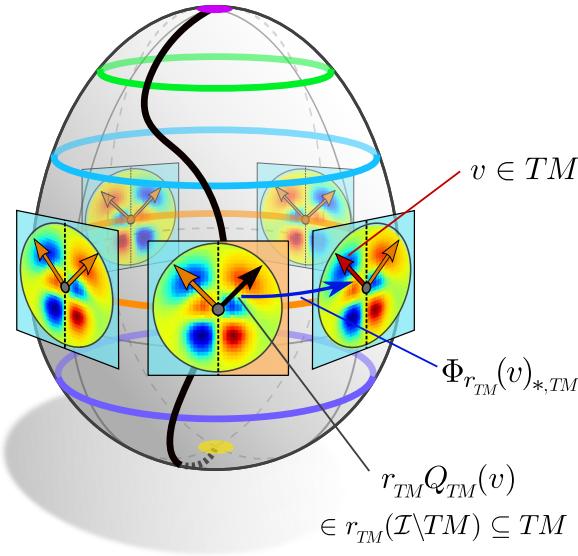
از قید نامتغیر بودن ایزومنتری از تعریف ۸.۷ را در نظر بگیرید، که با نوشتن معادله (۳۱۵) برای هر نقطه $p \in M$ به طور جداگانه به دست می‌آید. این فرمول‌بندی تأکید می‌کند که قید معتبر به اشتراک گذاری وزن در امتداد مدارهای می‌فیلد $\mathcal{I}.p \in \mathcal{I}/M$ می‌شود همانطور که در شکل‌های ۳۸ و ۴۰ به تصویر کشیده شده است. این ایجاد می‌کند که کرنل \mathcal{K}_r در یک نقطه نماینده دلخواه $r = r_M(o)$ از هر مدار $o = \mathcal{I}.r$ در نقطه نماینده r خود توسط زیرگروه پایدارساز r محدود می‌شود:

$$\xi_{*,\mathbb{H}} \circ \mathcal{K}_r \circ \xi_{*,TM}^{-1} = \mathcal{K}_r \quad \forall \xi \in \text{Stab}_r. \quad (346)$$

این ایجاد می‌کند که هر میدان کرنل نامتغیر نسبت به ایزومنتری را می‌توان بر حسب یک میدان از کرنل‌ها بر روی نماینده‌گان مدار می‌فیلد r که معادله (۳۴۶) را برآورده می‌کند، پارامترسازی کرد.

در صورتی که زیرگروه پایدارساز در \mathcal{I} غیربدینه باشد، قید پایدارساز در معادله (۳۴۶) تقارن‌های بیشتری را برای خود کرنل r در \mathcal{I} ایجاد می‌کند. به عنوان مثال، در مثال شکل ۴۰ زیرگروه پایدارساز $\mathcal{R} \cong \text{Stab}_r$ بر روی مدار بر جسته شده وجود دارد که تقارن بازتابی کرنل‌ها را اعمال می‌کند. چنین تقارن‌های پایدارسازی امکان فشرده‌سازی بیشتر توصیف میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومنتری را فراهم می‌کند: مشخص می‌شود که دانستن مقادیر $\mathcal{K}(w)$ میدان کرنل فقط بر روی نماینده‌گان خارج‌قسمتی کلاف مماس $w \in r_{TM}(\mathcal{I}/TM) \subseteq TM$ کافی است. در شکل ۴۰ این متناظر با دانستن مقادیر کرنل بر روی نیم‌فضای بر جسته شده با رنگ نارنجی است، که از آن می‌توان میدان کامل بر روی مدار را با تقارن‌های بازتابی و دورانی در $\mathcal{I} \cong \mathcal{I}$ بازسازی کرد.

قضیه ۸.۱۲ در زیر ادعای اخیر را دقیق می‌کند با اثبات اینکه فضای $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}$ از میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومنتری با یک فضای \mathbb{H} میدان‌های کرنل بر روی نماینده‌گان مدار کلاف مماس (\mathcal{I}/TM) ایزومنتر است. $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}$ با قیود حداقل کاهش یافته مشخص می‌شود و بنابراین میدان‌های کرنل را در \mathbb{H} به روی غیرزاولد کدگذاری می‌کند. در قضیه ۸.۱۳ ما یک فضای ایزومنتر سوم $\widehat{\mathcal{K}}^{\mathcal{I}}$ را فرمول‌بندی می‌کنیم



شکل ۴۰: نمایش تصویری یک میدان کرnel نامتغیر نسبت به ایزومتری، تعریف ۸.۷ و بازسازی کامل آن فقط از کرnelها بر روی نمایندگان خارج قسمتی. برخلاف شکل ۴۸، ما در اینجا یک گروه ایزومتری $\mathcal{I} = \text{SO}(2)$ را به جای \mathcal{I} فرض می‌کنیم. بنابراین کرnelهای به تصویر کشیده شده دارای تقارن بازتابی هستند که توسط زیرگروههای پایدارساز $\text{Stab}_p \cong \mathcal{R}$ از نقاط روی مدار (v) اعمال می‌شود. به دلیل تقارنش، میدان کرnel کامل $(\pi_{TM})^*(\mathcal{I})$ را $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square})$ محدودیت آن به نماینده خارج قسمتی کلاف $r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM) \subseteq TM$ بازسازی کرد؛ به قضیه ۸.۱۲ مراجعه کنید. به عنوان مثال، کرnelهای نشان داده شده به طور کامل توسط کرnel جزئی روی یعنی فضای تارنجی تعیین می‌شوند. بازسازی در $v \in TM$ با ازبایگری کرnel نماینده خارج قسمتی در $(\mathcal{I}\setminus TM)Q_{TM}(v) \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$ و پیش‌ران کرnel از طریق ایزومتری بازسازی $\Phi_{r_{TM}}(v) \in \mathcal{I}$ که در معادله (۳۴۷) تعریف شده است، به v اجام می‌شود. ما می‌خواهیم ذکر کنیم که کرnelهای پادتقارن به تصویر کشیده شده هنگام نگاشت بین میدانهای ویژگی با پاریته زوج و فرد حاصل می‌شوند، در حالی که کرnelهای بین میدانهای ویژگی با پاریته یکسان متقاضن خواهند بود.

که به طور معادل میدانهای کرnel نامتغیر را بر حسب کرnelهای \mathcal{K}_T با قید زیرگروه پایدارساز از معادله (۳۴۶) توصیف می‌کند.
در حالی که فرمول بندی میدانهای کرnel نامتغیر نسبت به ایزومتری بر حسب $\hat{\mathcal{K}}^T$ شامل قیود قوی تری نسبت به فرمول بندی بر حسب \mathcal{K}^T است، ممکن است برای پایدارسازی‌ها راحت‌تر باشد، زیرا کرnelها را بر روی فضاهای مماس کامل به جای کرnelها بر روی خارج قسمتی‌های فضاهای مماس تعیین می‌شوند. در حالی که کرnelهای بین میدانهای ویژگی با پاریته یکسان متقاضن خواهند بود.

ایزومتری‌های بازسازی: برای بازسازی میدانهای کرnel نامتغیر کامل در \mathcal{K}^T از کرnelهای منفرد بر روی نمایندگان مدار، کرnelهای نماینده با اعمال پیش‌ران کرnel در معادله (۳۴۵) با $p = r = q \in M$ ثابت برای نقاط نماینده انتخاب شده، بر روی کل منفرد توزیع شوند. برای بازسازی کرnel در یک نقطه $q \in M$ ، این به یک ایزومتری ϕ نیاز دارد که نماینده مدار $r_M Q_M(q) \in r_M(\mathcal{I}\setminus M) \subseteq M$ را به $q \in M$ بفرموده باشد، زیرا کرnelها را برآورده کند. برای دقیق تر کردن این، به یاد بیاورید که میدانهای کرnel $\mathcal{K} : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square})$ نگاشت‌هایی با دامنه TM تعریف می‌شوند، که علاوه بر موقیعتشان، ترازهای کرnel را نیز کدگذاری می‌کنند. بنابراین ما باید ایزومتری‌های خاص تری را در نظر بگیریم که نمایندگان مدار کلاف مماس $v \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM) \subseteq TM$ را به بردارها بازمی‌گردانند. این ایزومتری‌های بازسازی به صورت زیر تعریف می‌شوند:^{۷۵}

$$\Phi_{r_{TM}} : TM \rightarrow \mathcal{I} \quad \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = v \quad \forall v \in TM \quad (347)$$

ما توصیه می‌کنیم برای به دست آوردن شهودی از ایزومتری‌های بازسازی به شکل ۴۰ مراجعه کنید: از نظر گرافیکی، $\Phi_{r_{TM}}(v)$ به عنوان هر ایزومتری تعریف می‌شود که بردار سیاه $r_{TM} Q_{TM}(v)$ به بردار قرمز v را روی مدار نارنجی \mathcal{I} را را مدار نمتصز به فرد است زیرا برای هر $\zeta \in \text{Stab}_{r_{TM} Q_{TM}}(v)$ نتیجه می‌شود که $\zeta(\Phi_{r_{TM}}(v)) = \zeta$ نیز قید تعریف کننده در معادله (۳۴۷) را برآورده می‌کند: $v = \zeta$.^{۷۶} نشان داده می‌شود که تمام ساختارهای بعدی از این ابهام مستقل هستند. عمل ایزومتری‌های بازسازی بر روی فضای پایه M با اعمال تصویر کلاف مماس بر هر دو طرف قید تعریف کننده در معادله (۳۴۷) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \pi_{TM}(v) &= \pi_{TM} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) && \text{(تعریف } \Phi_{r_{TM}}, \text{ معادله (۳۴۷))} \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v) \pi_{TM} r_{TM} Q_{TM}(v) && \text{(پیش‌ران یک نگاشت کلاف است، معادله (۲۶۴))} \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v) r_M \pi_{\mathcal{I}\setminus TM} Q_{TM}(v) && \text{(تعریف مقاطع کلاف، معادله (۳۴۲))} \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v) r_M Q_M \pi_{TM}(v) && \text{(تعریف } \pi_{\mathcal{I}\setminus E}, \text{ معادله (۳۴۰))} \end{aligned} \quad (348)$$

^{۷۵} از آنجایی که مقاطع r_{TM} به طور کلی پیوسته نیستند، $\Phi_{r_{TM}}$ نیز به طور کلی نمی‌تواند پیوسته خواسته شود.
^{۷۶} علاوه بر این، قید تعریف کننده بر روی $\Phi_{r_{TM}}$ هنگام ضرب چپ ζ با هر $\zeta \in \text{Stab}_v$ می‌شود. این، با این حال، هیچ درجه آزادی جدیدی اضافه نمی‌کند زیرا $\tilde{\zeta} \in \text{Stab}_{r_{TM} Q_{TM}}(v)$ با $\tilde{\zeta} \Phi_{r_{TM}}(v) = \Phi_{r_{TM}}(v)[\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1} \zeta \Phi_{r_{TM}}(v)] =: \Phi_{r_{TM}}(v)$ و $\text{Stab}_v \cong \text{Stab}_{r_{TM} Q_{TM}}(v)$.

یک خلاصه بصری از ویژگی‌های $\Phi_{r_{TM}}$ یعنی اعمال آن بر روی TM و M در نمودار جابجایی زیر آورده شده است:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_{TM} & & \\
 & \nearrow \Phi_{r_{TM}} \times r_{TM} \circ Q_{TM} & \downarrow & \searrow \text{ev} & \\
 TM & \longrightarrow \mathcal{I} \times r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) & & & TM \\
 \pi_{TM} \downarrow & & \text{id}_{\mathcal{I}} \times \pi_{TM} \downarrow & & \downarrow \pi_{TM} \\
 M & & \mathcal{I} \times r_M(\mathcal{I} \setminus M) & \xrightarrow{\text{ev}} & M \\
 & \searrow & \uparrow \text{id}_M & & \\
 & & & &
 \end{array} \quad (349)$$

که در آن نگاشتهای ارزیابی ev با استفاده بیش از حد از نمادگذاری، به ترتیب با $(\phi, p) \mapsto \phi(p)$ و $\text{id} : \mathcal{I} \times M \rightarrow M$, $(\phi, v) \mapsto \phi_{*,TM}(v)$ داده می‌شوند.

میدان‌های کرnel نماینده خارج قسمتی: همانطور که در بالا استدلال شد، تقارن‌های موجود در یک میدان ویژگی نامتفیر نسبت به ایزومتری $\mathcal{K} \in \mathcal{K}_{\square \square \square \square}^{\mathcal{I}}$ باید امکان بازسازی کامل آن را از محدودیتش $\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} : r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) \rightarrow r_{\text{Hom}}(\mathcal{I} \setminus \text{Hom})$ به نماینده‌گان مدار کلاف $\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} \subseteq TM$ فراهم کنند.^w برای ساخت یک بالابر (منحصر به فرد) Λ که $\mathcal{K} = \Lambda(\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)})$ را از $\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)}$ بازیابی می‌کند، ما بردارهای ماس v را در دامنه \mathcal{K} از طریق ایزومتری بازسازی $\Phi_{r_{TM}}$ از معادله (۳۴۷) بسط می‌دهیم و از نامتفیر بودن (هم‌متغیر بودن) میدان کرnel در معادله (۳۱۵) استفاده می‌کنیم. این منجر به موارد زیر می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}(v) &= \mathcal{K} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) \\
 &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{K} r_{TM} Q_{TM}(v) \\
 &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} r_{TM} Q_{TM}(v) \\
 &=: [\Lambda(\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)})](v)
 \end{aligned} \quad (350)$$

توجه داشته باشید که این ساختار با وجود ابهام $\Phi_{r_{TM} Q_{TM}(v)}$ نسبت به ضرب راست با عنصر در (۴) خوش‌تعریف است. این به راحتی با مشاهده اینکه برای هر $w \in TM$ و هر $\mathcal{K}(w) = \mathcal{K}(\xi_{*,TM} w) \in \mathcal{K}_{\square \square \square \square}^{\mathcal{I}}$ که ایجاب می‌کند $\mathcal{K} \in \mathcal{K}_{\square \square \square \square}^{\mathcal{I}}$ داریم $\Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} \geq \text{Stab}_{\mathcal{K}(w)}$ و بنابراین نتیجه نهایی به انتخاب خاص $\Phi_{r_{TM}}$ مبهم بستگی ندارد، دیده می‌شود.

از آنجایی که بالابر Λ میدان‌های کرnel نامتفیر را از محدودیت آنها به نماینده‌گان مدار کلاف ماس بازیابی می‌کند، می‌توان آن را به عنوان نگاشت معمکوس محدودیت (از میدان‌های کرnel نامتفیر) در نظر گرفت. این دیدگاه ایجاب می‌کند که بالابر یک ایزومورفیسم $\mathcal{K}_{\square \square \square \square}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\square \square \square \square}^{\mathcal{I}}$ باشد که هنوز باید آن را مشخص کنیم و $\mathcal{K}_{\square \square \square \square}^{\mathcal{I}}$ برقرار می‌کند:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{K}_{\square \square \square \square}^{\mathcal{I}} & \xrightarrow{\Lambda} & \mathcal{K}_{\square \square \square \square}^{\mathcal{I}} \\
 & \swarrow \Lambda^{-1} = (\cdot)|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} &
 \end{array} \quad (351)$$

برای مشخص کردن فضای $\mathcal{K}_{\square \square \square \square}^{\mathcal{I}}$ که Λ را به یک ایزومورفیسم تبدیل می‌کند، کافی است ویژگی‌های میدان‌های محدود شده $=: \mathcal{Q}$ را برای $\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} \in \mathcal{K}_{\square \square \square \square}^{\mathcal{I}}$ فهرست کیم:

- اول از همه، از آنجایی که Λ^{-1} با محدودیت دامنه به $r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) \rightarrow r_{\text{Hom}}(\mathcal{I} \setminus \text{Hom})$ باید به شکل:

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(w) = \pi_{TM}(w) \quad \text{و} \quad \mathcal{Q} = \mathcal{Q}(w) = \mathcal{Q}(w) \circ \pi_{TM}(w)$$

- دوم، ویژگی میدان‌های کرnel برای اینکه M -مورفیسم‌های کلاف باشند، تحت محدودیت Λ^{-1} به این الزام برای \mathcal{Q} ترجمه می‌شود که $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(w) = \pi_{TM}(w)$

- سوم، باید قید پایدارساز (برداری) $\mathcal{Q}(w) = \mathcal{Q}(w)$ را برای هر بردار نماینده $w \in r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)$ و هر $w \in \text{Stab}_w$ برآورده کند. این الزام باقیمانده‌ای از قید نامتفیر بودن در معادله (۳۱۵) است که پس از محدودیت باقی می‌ماند.

^w در ادامه ممکن است $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square \square}, \mathcal{A}_{\square \square})$ و $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square \square}, \mathcal{A}_{\square \square})$ را به ترتیب با $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square \square}, \mathcal{A}_{\square \square})$ و $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square \square}, \mathcal{A}_{\square \square})$ به اختصار بنویسیم.

این را می‌توان با در نظر گرفتن قید کامل $\phi \in \mathcal{I}$ و $w \in r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)$ برای هر $\mathcal{Q} \phi_{*,TM}^{-1}(w) = \mathcal{Q}(w)$ و هر ایزومتری $\phi \in \mathcal{I}$ که علاوه بر این برآورده می‌کند $\phi_{*,TM}(w) \in r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)$ ، یعنی پیش‌ران $(\phi_{*,TM}(w))$ در دامنه محدود شده \mathcal{Q} باقی می‌ماند، استنتاج کرد. توجه داشته باشید که $w \in \mathcal{I} \cdot w$ و اینکه $\phi_{*,TM}(w) \in \mathcal{I} \cdot w$ هر مدار را دقیقاً یک بار قطع می‌کند. این ایجاب می‌کند که $\phi \in \text{Stab}_w(\mathcal{I} \setminus TM) = \{w\}$ (برداری) ادعا شده از این ملاحظات نتیجه می‌شود.

برای شهود به شکل ۴۰ بازمی‌گردیم که در آن بردار نماینده سیاه $(v) = e$ فقط با ایزومتری بدیهی $\Phi_{r_{TM}}(v) = r_{TM} Q_{TM}$ مقدار متناظر \mathcal{Q} بدون قید باشد. بردارهای $w' \in r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)$ که دقیقاً به سمت شمال یا جنوب اشاره می‌کنند، یعنی روی محور بازتابی خط‌چین قرار دارند، با بازتاب‌ها در $\mathcal{R} \cong \text{Stab}_{w'} \subseteq \mathcal{R}$ پایدار می‌شوند، که قیدی را بر روی مقدار کرنل متناظر ایجاب می‌کند.^{۷۸}

به عنوان آخرین الزام، \mathcal{Q} باید به یک میدان هموار بالابر شود، یعنی $\Lambda(\mathcal{Q})$ باید هموار باشد. متأسفانه، همواری (یا حتی پیوستگی) $\Lambda(\mathcal{Q})$ به طور خودکار از همواری (پیوستگی) \mathcal{Q} نتیجه نمی‌شود زیرا Λ بر حسب r_{TM} و $\Phi_{r_{TM}}$ تعریف می‌شود، که به طور کلی نمی‌توان آنها را هموار (پیوسته) خواست.

قبل از خلاصه کردن و اثبات دقیق این ادعاهای در قضیه ۸.۱۲ در زیر، ما یک نمای کلی بصری از رابطه بین آن $\mathcal{K} = \Lambda(\mathcal{Q}) \in \mathcal{K}_{\square \square \square}^{\mathcal{I}}$ را در قالب نمودارهای جابجایی ارائه می‌دهیم:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{K} = \Lambda(\mathcal{Q}) \\
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 \begin{array}{ccccc}
 TM & \xrightarrow[\Phi_{r_{TM}} \times \mathcal{Q} \circ r_{TM} \circ Q_{TM}]{} & \mathcal{I} \times r_{\text{Hom}}(\mathcal{I} \setminus \text{Hom}) & \xrightarrow{\text{ev}} & \text{Hom} \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathcal{K} = \Lambda(\mathcal{Q}) & & & & \text{Hom} \\
 \uparrow & & & & \uparrow \\
 TM & \xrightarrow[r_{TM} \circ Q_{TM}]{} & r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) & \xrightarrow{\mathcal{Q}} & r_{\text{Hom}}(\mathcal{I} \setminus \text{Hom}) \\
 \uparrow \pi_{TM} & & \uparrow \pi_{TM} & & \uparrow \pi_{\text{Hom}} \\
 & & r_M(\mathcal{I} \setminus M) & & \\
 \uparrow r_M \circ Q_M & & \uparrow \pi_{\square \square \square} & & \uparrow \pi_{\square \square \square} \\
 & & M & &
 \end{array}
 \end{array} \tag{۳۵۲}$$

و

در نمودار آخر، جابجایی‌پذیری مربع بالایی با جایگذاری تعريف بالابر به دست می‌آید، که نتیجه می‌دهد $r_{\text{Hom}} Q_{\text{Hom}} \Lambda(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}$. جابجایی‌پذیری مربع‌های پایین چه و راست از معادلات ۳۴۲ و ۳۳۹ نتیجه می‌شود.

قضیه ۸.۱۲ (میدان‌های کرنل نماینده خارج قسمتی مماس). فضای میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به ایزومتری \mathcal{Q} از $\mathcal{K}_{\square \square \square}^{\mathcal{I}}$ از $\mathcal{K}_{\square \square \square}^{\mathcal{I}}$ با قید زیرگروه پایدارساز (برداری) بر روی نماینده‌گان خارج قسمتی کلاف مماس، که به صورت زیر تعريف

^{۷۸} قید دقیق به عمل $\mathcal{A}_{\square \square \square}^{\square \square \square} \circ \mathcal{Q}$ بر روی $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\square \square \square}, \mathcal{A}_{\square \square \square})$ دارد، که به $\rho_{\square \square \square}$ و پیابراین به $\rho_{\square \square \square} \circ \mathcal{Q}$ بستگی دارد. کرنل به تصویر کشیده شده در شکل (۴۰) متناظر با $\rho_{\square \square \square}$ به عنوان نمایش بازتاب علامت (پاریته فرد) گروه بازتابی خواهد بود، که کرنل‌های پادمقارن را اعمال می‌کند. پادمقارن بودن مستلزم آن است که \mathcal{Q} به $\mathcal{Q}(w')$ برای w' روی مدور بازتابی محدود شود؛ مقایسه کنید با جدول ۳

می‌شود، ایزومورف است:^{۷۹}

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}} := \left\{ \mathcal{Q} : r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) \rightarrow r_{\text{Hom}}(\mathcal{I} \setminus \text{Hom}) \mid \pi_{\text{الاير}} \circ \mathcal{Q} = \pi_{TM}, \quad \Lambda(\mathcal{Q}), \right. \\ \left. \text{هموار}, \quad \xi_{*,\text{الاير}} \mathcal{Q}(w) = \mathcal{Q}(w) \quad \forall w \in r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM), \quad \xi \in \text{Stab}_w \right\} \end{aligned} \quad (۳۵۴)$$

ایزومورفیسم بالاير (منحصر به فرد) $\Lambda : \mathcal{K}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}}$ بین هر دو فضا در اینجا به صورت زیر داده می‌شود:

$$\Lambda(\mathcal{Q}) : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\text{الاير}}, \mathcal{A}_{\text{الاير}}), \quad v \mapsto [\Lambda(\mathcal{Q})](v) := \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v). \quad (۳۵۵)$$

معکوس آن $\Lambda^{-1} : \mathcal{K}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}}$ با محدودیت میدان‌های کرنل نامتغير به نمایندگان خارج‌قسمتی کلاف داده می‌شود:

$$\Lambda^{-1}(\mathcal{K}) : r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM) \rightarrow r_{\text{Hom}}(\mathcal{I} \setminus \text{Hom}), \quad w \mapsto [\Lambda^{-1}(\mathcal{K})](w) := \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)}(w) \quad (۳۵۶)$$

اثبات: برای اثبات اینکه $\Lambda : \mathcal{K}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}}$ یک ایزومورفیسم است، باید نشان دهیم که $\Lambda^{-1} \circ \Lambda = \text{id}_{\mathcal{K}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}}}$ در واقع معکوس Λ است، که (۲) ویژگی‌های تعریف کننده $\mathcal{K}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}}$ و $\mathcal{K}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}}$ پس از بالاير و محدود کردن برآورده می‌شوند و اینکه (۳) ساختارها به انتخاب‌های دلخواه بستگی ندارند. برای اینکه این بخش بیش از حد سنتگین نشود، ما اثبات کامل را به پیوست ۱. موکول می‌کیم. مراحل مفرد اثبات در زیر فهرست شده‌اند:

$$1) \quad \text{یک} \Lambda^{-1} = \text{id}_{\mathcal{K}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}}} \quad \square$$

$$2) \quad \text{یک} \Lambda^{-1} \circ \Lambda = \text{id}_{\mathcal{K}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}}} \quad \square$$

$$3) \quad \text{برای هر } \mathcal{Q}, \quad \mathcal{Q} \in \mathcal{K}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}}, \quad \text{یعنی، بالاير } (\mathcal{Q}) \text{ یک } M\text{-مورفیسم کلاف است}$$

$$4) \quad \mathcal{K} \in \mathcal{K}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}} \quad \text{برای هر } \mathcal{K} = \pi_{TM} \circ \Lambda^{-1}(\mathcal{Q}) \quad \square$$

$$5) \quad \text{قید کامل نامتغير بودن (هم‌متغیر بودن) ایزومتری را برآورده می‌کند}$$

$$6) \quad \text{قید پایدارساز را برآورده می‌کند}$$

(۳) تمام ساختارها و اثبات‌ها از انتخاب خاص $\Phi_{r_{TM}}$ مستقل هستند

\square همواری میدان‌های کرنل نمایندگان خارج‌قسمتی بالاير شده بنا به تعریف برقرار است.

اختیاری بودن در انتخاب مقطع r_{TM} به میدان‌های کرنل خارج‌قسمتی متفاوت اما ایزومورف، که بر روی نمایندگان خارج‌قسمتی کلاف مختلف بیان شده‌اند، اجازه می‌دهد.

به جای محدود کردن حداقلی میدان کرنل به نمایندگان مدار کلاف در $(\mathcal{I} \setminus M)(r_M(\mathcal{I} \setminus M))$ می‌توان توصیف را فقط به $(r_M(\mathcal{I} \setminus M))_{TM} \pi_{TM}^{-1}$ محدود کرد، یعنی به فضاهای مماس کامل نسبت به $r_M(\mathcal{I} \setminus M)$ در شکل (۴۰) این متناظر با مدل‌سازی کرنل (متقارن بازتابی) بر روی کل فضای مماس نشان داده شده در جلو به جای فقط یک نیمه است. الزامات بر روی چنین کرنل‌های محدود شده‌ای را می‌توان با دنبال کردن همان منطقه قبلی استخراج کرد و به قید در معادله (۳۴۶) منجر می‌شود. ما یک قضیه مشابه با قضیه (۸.۱۲) به دست می‌آوریم:

قضیه ۸.۱۳ (میدان‌های کرنل نمایندگان خارج‌قسمتی مینیفلد). فضای میدان‌های کرنل نامتغير نسبت به ایزومتری $\mathcal{K}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}}$ از تعریف ۸.۷ با $\widehat{\mathcal{R}}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}}$ از میدان‌های کرنل با قید زیرگروه پایدارساز (مینیفلد) بر روی فضاهای مماس روی نمایندگان خارج‌قسمتی مینیفلد $r_M(\mathcal{I} \setminus M)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، ایزومورف است:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}} := \left\{ \widehat{\mathcal{Q}} : \pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)) \rightarrow \pi_{\text{الاير}}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)) \mid \pi_{\text{الاير}} \circ \widehat{\mathcal{Q}} = \pi_{TM}, \quad \widehat{\Lambda}(\widehat{\mathcal{Q}}), \right. \\ \left. \text{هموار}, \quad \xi_{*,\text{الاير}} \widehat{\mathcal{Q}}|_r \xi_{*,TM}^{-1} = \widehat{\mathcal{Q}}|_r \quad \forall r \in r_M(\mathcal{I} \setminus M), \quad \xi \in \text{Stab}_r \right\} \end{aligned} \quad (۳۵۷)$$

^{۷۹} این تعریف از $\mathcal{K}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}}$ در وایستگی دوری با تعریف Λ در معادله (۳۵۵) است. این را می‌توان با هزینه (۱) تعریف فضاهای $\widetilde{\mathcal{K}}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}}$ و $\widetilde{\mathcal{K}}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}}$ بدون الزامات همواری، که بر حسب آنها (۲) $\widetilde{\Lambda} : \widetilde{\mathcal{K}}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{K}}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}}$ را می‌توان تعریف کرد، که (۳) اجازه می‌دهد الزامات همواری را در $\widetilde{\mathcal{K}}_{\text{الاير}}^{\mathcal{I}}$ بر حسب $\widetilde{\Lambda}$ بخواهیم، اجتناب کرد.

ایزومورفیسم بالابر $\widehat{\Lambda} : \widehat{\mathcal{K}}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ بر حسب Λ و یک محدودیت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\widehat{\Lambda} := \Lambda \circ (\cdot)|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} \quad (358)$$

و بنابراین اساساً با Λ موافق است:

$$\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathcal{Q}}) : TM \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square\square}, \mathcal{A}_{\square\square\square}), \quad v \mapsto [\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathcal{Q}})](v) := \Phi_{r_{TM}}(v)_{*, \text{Hom}} \widehat{\mathcal{Q}} r_{TM} Q_{TM}(v) \quad (359)$$

معکوس آن $\widehat{\Lambda}^{-1} : \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} \rightarrow \widehat{\mathcal{K}}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}}$ با محدودیت میدان‌های کرنل نامتغیر به فضاهای مماس روی نمایندگان خارج قسمتی منیفلد داده می‌شود:

$$\widehat{\Lambda}^{-1}(\mathcal{K}) : \pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)) \rightarrow \pi_{\square\square}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)), \quad \widehat{w} \mapsto [\widehat{\Lambda}^{-1}(\mathcal{K})](\widehat{w}) := \mathcal{K}|_{\pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M))}(\widehat{w}) \quad (360)$$

اثبات: اثبات اساساً مشابه اثبات قضیه ۸.۱۲ است با این تفاوت جزئی که قید قوی‌تر $\xi \in r_M(\mathcal{I} \setminus M)$ است. از آنجایی که چیز زیادی به آنچه در پیوست ۱. ارائه شده اضافه نمی‌کند، ما از اثبات صرف نظر می‌کنیم.

نمودار جابجایی زیر ایزومورفیسم‌ها را بین سه توصیف معادل از میدان‌های کرنل نامتغیر نشان می‌دهد:

$$\begin{array}{ccccc} & & \Lambda & & \\ & \swarrow \Omega & & \searrow \widehat{\Lambda} & \\ \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} & & \widehat{\mathcal{K}}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} & & \mathcal{K}_{\square\square\square\square}^{\mathcal{I}} \\ \uparrow \Omega^{-1} = (\cdot)|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} & & & \searrow \widehat{\Lambda}^{-1} = (\cdot)|_{\pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M))} & \\ & & \Lambda^{-1} = (\cdot)|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} & & \end{array} \quad (361)$$

رابطه با کانولوشن‌های GM : تفاوت بین کانولوشن‌های GM هم‌متغیر نسبت به Isom_{GM} و تبدیلات میدان کرنل عمومی هم‌متغیر نسبت به Isom_{GM} از طریق میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به Isom_{GM} این است که اولی کرنل‌های G -هدایت‌پذیر را بر روی کل منیفلد به اشتراک می‌گذارد در حالی که دومی فقط ملزم به اشتراک گذاری کرنل‌های G -هدایت‌پذیر بر روی مدارهای $\text{Stab}_p \in \text{Isom}_{GM} \setminus M$ است. از این‌جا مدارهای وزن‌ها بر روی کل منیفلد به شدت ضروری نیست اما با حمایت از تبع او کام \square احتمالاً در عمل یک سوگیری استقرایی خوب است. می‌توان آن را به عنوان مشابهی برای این فرض در نظر گرفت که همان قوانین فیزیکی در سراسر جهان اعمال می‌شوند.

اکنون فرض کنید که M یک فضای همگن نسبت به عمل یک گروه ایزو‌متري $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$ است، یعنی برای هر دو نقطه $p, q \in M$ حداقل یک ایزو‌متري $\phi \in \mathcal{I}$ وجود دارد که هر دو نقطه را به هم متصل می‌کند، یعنی $\phi(p) = q$. در این حالت فقط یک مدار منفرد $\mathcal{I}.p$ وجود دارد که همان M است، و پایدارسازهای Stab_p همه نقاط $t \in M$ را ایزومورفیسم با هم منطبق هستند. فضای خارج قسمتی است که با یک نقطه نماینده منفرد $r = r_M(\mathcal{I} \setminus M)$ در M نمایش داده می‌شود. طبق قضیه ۸.۱۳، فضای میدان‌های کرنل نامتغیر نسبت به \mathcal{I} یک عضوی است با یک میدان کرنل بر روی نمایندگان مدار بین می‌شود. از آنجایی که ما فقط یک نقطه نماینده منفرد r برای فضاهای همگن داریم، میدان کرنل نامتغیر نسبت به ایزو‌متري کامل در این حالت معادل با یک کرنل منفرد بر روی $T_r M$ است. این کرنل نماینده باشد یک قید زیرگروه پایدارساز را در معادله (۳۵۷) برآورده کند. از طریق ایزومورفیسم بالابر $\widehat{\Lambda}$ در معادله (۳۵۹)، کرنل نماینده بر روی کل منیفلد به اشتراک گذاشته می‌شود.

این بسیار شبیه به تعریف کانولوشن‌های GM است، که یک کرنل منفرد با قید G -هدایت‌پذیری را بر روی کل منیفلد به اشتراک می‌گذارند. قضیه ۸.۱۴ در زیر تأیید می‌کند که در واقع یک همارزی بین کانولوشن‌ها و تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر بر روی فضاهای همگن وجود دارد. Stab_r -هدایت‌پذیری مستقل از مخصوصات از قید پایدارساز در نتیجه (به طور غیر کافونی) به H -هدایت‌پذیری کرنل‌های الگو ترجمه می‌شود، که در آن $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$ با $\widehat{G} \leq H \cong \text{Stab}_r$ یک نمایش ایزو‌مورف از Stab_r نسبت به یک مخصوصاتی‌سازی است. می‌توان (زیر) گروه ایزو‌متري GM را به عنوان یک کلاف اصلی Stab_r بر روی M در نظر گرفت، که نشاندن (غیر کافونی) آن در GM یک H - (zir) ساختار HM از GM را ایجاد می‌کند. اشتراک گذاری یک کرنل Stab_r -هدایت‌پذیر از طریق ایزومورفیسم بالابر، که بر اساس عمل \mathcal{I} عمل می‌کند، سپس دقیقاً متناظر با اشتراک گذاری یک کرنل H -هدایت‌پذیر بر روی HM است. این ایجاب می‌کند که تبدیلات میدان کرنل هم‌متغیر نسبت به \mathcal{I} بر روی فضاهای همگن در واقع متناظر با یک کانولوشن HM هستند.

قضیه ۸.۱۴ (هم‌متغیری بر روی \square همگن به معنای کانولوشن است). فرض کنید M یک منیفلد مجهز به یک G -ساختار GM باشد. فرض کنید یک گروه ایزو‌متري $\mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$ وجود دارد که به طور تعدی‌پذیر بر روی M عمل می‌کند و آن را به یک فضای همگن تبدیل می‌کند. فرض کنید $r \in M$ یک نقطه نماینده دلخواه از M و $\text{Stab}_r \leq \mathcal{I}$ باشد. آنگاه

(۱) یک H -زیرساختار $HM \subseteq GM$ بر روی M با ویژگی‌های زیر وجود دارد:

یک زیرگروه از $G \cap d$ است \square

یک نشاندن از HM (به عنوان کلاف اصلی Stab_r) یعنی $\mathcal{I} / \text{Stab}_r$ است که توسط \mathcal{I} حفظ می‌شود، یعنی $\text{Isom}_{HM} = \mathcal{I}$

(۲) هر تبدیل میدان کرنل H -هدايت پذیر منفرد را بر روی کل فضای M به اشتراک می‌گذارد و یا یک کانولوشن HM با آن کرنل معادل است.

انتخاب خاص H -ساختار به ایزومورفیسم انتخاب شده $H \cong \text{Stab}_r$ بستگی دارد اما این اهمیت است زیرا تبدیلات میدان کرنل هم متغیر نسبت به \mathcal{I} را می‌توان به طور معادل در هر چنین انتخابی بیان کرد.

اثبات: اثبات در پیوست ث. ۲ یافت می‌شود. \square

تعریف ما از تبدیلات میدان کرنل هم متغیر نسبت به ایزومنتری بر روی فضاهای همگن اساساً معادل با کانولوشن‌های هدايت پذیر بر روی فضاهای همگن است که توسط $[\cdot, \cdot]$ پیشنهاد شده است. بنابراین همارزی اثبات شده بین تبدیلات میدان کرنل هم متغیر نسبت به ایزومنتری و کانولوشن‌های HM بر روی فضاهای همگن تأیید می‌کند که کانولوشن‌های HM و کانولوشن‌های هدايت پذیر در این مورد اساساً مشابه هستند. با این حال، در حالی که کانولوشن‌های هدايت پذیر فقط بر روی فضاهای همگن تعریف شده‌اند، کانولوشن‌های HM به منیفلدهای ریمانی عمومی تعمیم می‌یابند. جزئیات بیشتر در مورد کانولوشن‌ها بر روی فضاهای همگن در پیوست کارهای مرتبط ت مورد بحث قرار گرفته است.

فرمول‌بندی شبکه‌های کانولوشنی (CNN) مستقل از مختصات بر حسب کلاف‌های G -همبسته روی منیفلدهای ریمانی بسیار کلی است و طیف وسیعی از نمونه‌سازی‌های ممکن برای مدل‌ها را پوشش می‌دهد. برای اثبات این ادعا، ما مجموعه بزرگی از مدل‌های کانولوشنی را از مقالات علمی مرور کرده و آنها را از دیدگاه یکارچه CNN های مستقل از مختصات توضیح می‌دهیم. اکثر مقالات موجود، مدل‌های خود را به صراحت بر حسب G -ساختارها و کلاف‌های G -همبسته فرمول‌بندی نمی‌کنند. بنابراین، G -ساختارها و نمایش‌های گروهی که به طور ضمنی فرض شده‌اند، از الگوهای اشتراک و زن، تقارن‌های کرنل و ویژگی‌های همورداپی مدل‌ها استنتاج می‌شوند؛ به عنوان مثال شکل ۴۷ را بینید. جدول ۶ خلاصه‌ای از طبقه‌بندی حاصل از CNN های مستقل از مختصات را ارائه می‌دهد. بخش‌های بعدی، مدل‌های پوشش داده شده و ویژگی‌های آنها را با جزئیات مورد بحث قرار می‌دهند.

بخش ۹ کانولوشن‌های هموردا نسبت به گروه افین (Aff)(G) را روی فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d پوشش می‌دهد. این مدل‌ها بر G -ساختارهای ناورده \mathbb{E}_d نسبت به (G) تکیه دارند، همانطور که در شکل ۴۳ نشان داده است. مدل‌های بخش ۱۰ روی فضاهای اقلیدسی سوراخ‌دار $\{\cdot\}_{0} \backslash \{\cdot\}_{0}$ عمل می‌کنند؛ شکل‌های ۴۴، ۴۵ یا ۴۷ را بینید. این مدل‌ها نسبت به دوران حول مبدأ انتخاب شده $\{\cdot\}_{0}$ هموردا هستند اما همورداپی نسبت به انتقال ندارند. CNN های کروی و بیست و چهارمین در بخش ۱۱ مورد بحث قرار می‌گیرند. اکثر این مدل‌ها G -ساختارهایی را فرض می‌کنند که در شکل‌های ۴۵ و ۵۰ ب به تصویر کشیده شده‌اند و بنابراین به ترتیب نسبت به $(SO(2))$ یا $(SO(3))$ هموردا هستند. بخش ۱۲ کانولوشن‌های GM را روی سطوح عمومی که اغلب به صورت متش گسته‌سازی می‌شوند، مرور می‌کند.

چند صفحه آینده به بحث در مورد انتخاب‌های طراحی مختلف برای CNN های مستقل از مختصات می‌پردازد و یک نمای کلی اولیه از مدل‌های جدول ۶ ارائه می‌دهد.

انتخاب‌های طراحی و نمای کلی

یک CNN مستقل از مختصات در تئوری به طور کامل با موارد زیر مشخص می‌شود:

۱) انتخاب یک منیفلد ریمانی (M, η)

۲) ساختار- \square -آن، GM

۳) یک اتصال ساز‌گار- \square که انتقال‌دهنده‌های ویژگی $\mathcal{P}_{A, \gamma}$ را مشخص می‌کند،

۴) انواع میدان یا نمایش‌های G برای هر فضای ویژگی، ρ ، و

۵) انتخاب غیرخطی‌های G -هموردا.

ژنودزیک‌ها، نگاشت‌های نمایی و لگاریتمی از اتصال کانونی لوی-چیوینتا روی M به دست می‌آیند.^{۸۰} گروه ایزوومتری GM که شبکه نسبت به آن هموردا است، از متريک و G -ساختار نتیجه می‌شود. تمام فضاهای کرنل $\mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square\square}}^G$ توسط نمایش‌های گروهی فضاهای ویژگی که بین آنها نگاشت انجام می‌دهند، تعیین می‌شوند. اشتراک وزن با قرار دادن یک کرنل الگوی G -راهنبری پذیر نسبت به یک چارچوب G دلخواه در $G_p M$ برای هر نقطه $p \in M$ انجام می‌شود.

در عمل، کاربر با پرسش‌های طراحی اضافی روپرتو است، به عنوان مثال در مورد گسته‌سازی هندسه، کد گذاری میدان‌های ویژگی، الگوریتم‌های عددی برای محاسبه ژنودزیک‌ها و انتقال‌دهنده‌ها و غیره. این بخش یک نمای کلی سطح بالا از تمام انتخاب‌های طراحی مرتبط ارائه می‌دهد. جزئیات بیشتر در بخش‌های بعدی ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲ یافت می‌شود.

گسته‌سازی منیفلدها و میدان‌های ویژگی: پیاده‌سازی‌ها در نمایش منیفلدها و نمونه‌برداری از میدان‌های ویژگی متفاوت هستند.

فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d شبکه‌های پیکسلی منظمی مانند \mathbb{Z}^d یا شبکه شش ضلعی را می‌پذیرند [۸۱]. به طور کلی، شبکه‌های محلی منظم برای منیفلدهای محلی تخت مانند نوار موبیوس و بیست و چهارمین درجه مناسب هستند؛ به شکل‌های ۲۳ و ۶۵ مراجعه کنید. میدان‌های ویژگی در فضاهای اقلیدسی همچنین می‌توانند روی یک ابر نقطه نامنظم نمونه‌برداری شوند. این امر به عنوان مثال هنگام پردازش محیط‌های اتمی، که در آن موقعیت اتم‌ها به عنوان مکان‌های نمونه‌برداری عمل می‌کنند، مفید است [۸۲].

^{۸۰} ممکن است عجیب به نظر برسد که ژنودزیک‌ها و انتقال‌دهنده‌های ویژگی بر اساس اتصال‌های بالقوه متفاوتی محاسبه شوند. زمانی که اتصال انتقال‌دهنده با لوی-چیوینتا متفاوت است، معمولاً به این دلیل است که اتصال لوی-چیوینتا با G -ساختار انتخاب شده، زمانی که $d < G$ باشد، G -ساز‌گار نیست. چند مثال در پاراگراف مربوط به اتصالات G -ساز‌گار در ادامه ارائه شده است.

منیفلد	گروه ساختار	تقارن سراسری	نمایش	مرجع
M	G	$\text{Isom}_{GM} \square \text{Aff}_{GM}$	ρ	
۱	$\{\mathbf{e}\}$	\mathcal{T}_d	بدیهی	[፩ ፩]
۲	\mathcal{S}	$\mathcal{T}_\mathfrak{l} \rtimes \mathcal{S}$	منظم	[፩]
۳	\mathcal{R}	$\mathcal{T}_\mathfrak{r} \rtimes \mathcal{R}$	منظم	[፩]
۴			irreps	[፩ ፩ ፩ ፩]
۵	SE(۲)		منظم	[፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩] [፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩] [፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩] [፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩]
۶			quotients	[፩ ፩]
۷	SO(۲)		trivial $\xrightarrow{\square\square\square\square}$ regular	[፩ ፩ ፩]
۸			vector $\xrightarrow{\square\square\square\square}$ regular	[፩ ፩]
۹			بدیهی	[፩ ፩]
۱۰			irreps	[፩]
۱۱			منظم	[፩ ፩ ፩ ፩ ፩] [፩ ፩ ፩ ፩]
۱۲	۲	E(۲)	quotients	[፩]
۱۳			trivial $\xrightarrow{\square\square\square\square}$ regular	[፩]
۱۴			irreps-SO(۲) induced	[፩]
۱۵			منظم	[፩ ፩ ፩ ፩]
۱۶	\mathcal{S}	$\mathcal{T}_\mathfrak{r} \rtimes \mathcal{S}$	trivial $\xrightarrow{\square\square\square\square}$ regular	[፩]
۱۷			irreps	[፩ ፩ ፩ ፩ ፩ ፩]
۱۸		SE(۳)	quaternion	[፩]
۱۹	SO(۳)		منظم	[፩ ፩ ፩]
۲۰			trivial $\xrightarrow{\square\square\square\square}$ regular	[፩]
۲۱			منظم	[፩]
۲۲	۳	E(۳)	$\frac{3}{2}$ quotient	[፩]
۲۳			trivial $\xrightarrow{\square\square\square\square}$ irrep	[፩]
۲۴	C $_{\mathfrak{r}}$	$\mathcal{T}_\mathfrak{r} \rtimes C_{\mathfrak{r}}$	منظم	[፩]
۲۵	D $_{\mathfrak{r}}$	$\mathcal{T}_\mathfrak{r} \rtimes D_{\mathfrak{r}}$	منظم	[፩]
۲۶	E $_{d-1,1}$	SO($d-1, 1$)	irreps	[፩]

جدول ۶: طبقه‌بندی شبکه‌های کانولوشنی در مقالات از دیدگاه CNN‌های مستقل از مختصات. خطوط پرنگ هندسه‌های مختلف را از هم جدا می‌کنند. کانولوشن‌های هموردا نسبت به گروه افاین روی فضاهای اقیلیدسی \mathbb{E}_d (ردیف‌های ۲۶-۱) در بخش ۹ موردنده‌اند. بخش ۱۰ کانولوشن‌های GM را روی فضاهای اقیلیدسی سوراخ‌دار $\mathbb{E}_d \setminus \{0\} \cong S^{d-1} \times \mathbb{R}^+$ (ردیف‌های ۳۰-۲۷) مورد بحث قرار می‌دهد. جزئیات مربوط به CNN‌های کروی (ردیف‌های ۳۶-۳۱) در بخش ۱۱ یافت می‌شود. مدل‌های موجود در ردیف‌های (۴۱-۳۷) روی سطوح عمومی، که عدتاً با مشاهی مثلثی نمایش داده می‌شوند، عمل می‌کنند؛ به بخش ۱۲ مراجعه کنید. دو خط آخر، کانولوشن‌های موبیوس ما از بخش ۵ را فهرست می‌کنند. \mathcal{T}_d و \mathcal{R} به ترتیب نمایانگر گروه‌های انتقال، بازتاب و پیمانه هستند، در حالی که CN و DN گروه‌های دوری و دوجوچی هستند. نمایش‌های با ابعاد بی‌نهایت در پیاده‌سازی‌ها گسسته‌سازی یا نمونه‌برداری می‌شوند. به عنوان مثال، نمایش‌های منظم (۲) SO(۲) یا ۲ معمولاً با نمایش‌های منظم گروه‌های دوری یا دوجوچی CN یا DN تقریب زده می‌شوند.

یک تفاوت مهم بین این دو رویکرد این است که شبکه‌های پیکسلی منظم نسبت به انتقال‌های پیوسته در $(+)$ همودا نیستند، بلکه فقط نسبت به زیرگروه انتقال‌های گسته که شبکه را حفظ می‌کنند، مانند $(\mathbb{Z}^d, +)$ ، همودا هستند. CNN‌ها روی شبکه‌های منظم علاوه بر این معمولاً از عملیات تجمع فضایی استفاده می‌کنند که همودایی مدل‌ها را حتی بیشتر کاهش می‌دهد. به طور خاص، با توجه به اینکه عملیات تجمعی دارای گام L است، نسبت به انتقال‌ها در $(n\mathbb{Z}^d, +)$ همودا است. پس از L لایه تجمع در یک شبکه کانولوشنی، این بدان معناست که مدل n پیکسل است، فقط نسبت به انتقال‌ها در $(+)$ $(n^L\mathbb{Z}^d)$ همودا است [۶] این موضوع به صورت تجزیی در [۷] بررسی شده است. [۶] پیشنهاد می‌کنند که این مشکل با جایگزینی لایه‌های تجمعی با گام n با لایه‌های تجمعی با گام ۱ (با همان اندازه پنجره تجمعی)، یک فیلتر پایین‌گذار و یک زیرنمونه‌برداری n -پیکسلی برطرف شود. فیلتر پایین‌گذار اضافی بین عملیات تجمعی و زیرنمونه‌برداری از اثرات آلیاسینگ جلوگیری می‌کند، که شنان داده شده است شبکه‌ها را به اندازه کافی تحت انتقال‌هایی که عضو $(+, n\mathbb{Z}^d)$ نیستند، پایدارتر می‌کند.

فضاهای خمیده مانند کره S^2 -بعدی به طور کلی شبکه‌های نمونه‌برداری منظم را نمی‌پذیرند. یک گسته سازی به ظاهر واضح، بر حسب یک شبکه نمونه‌برداری منظم در مختصات کروی است (معادله (۴۲۷) و شکل ۵۲)، اما از آنجا که این مختصات ایزو‌متریک نیستند، سیگنال را در نزدیکی قطبها بیش نمونه‌برداری می‌کنند [۷]. شبکه‌های نمونه‌برداری تقریباً یکنواخت روى S^3 شامل «مجموعه مارپیچ تعیین یافته» [۷] یا شبکه ایکو‌سکروی (۴۳۰) [۷] هستند. به طور جایگزین، میدان‌های ویژگی ممکن است در حوزه طیفی گسته سازی شوند. برای کره، این کار از طریق بسط بر حسب هماهنگ‌های کروی برای میدان‌های اسکالار، هماهنگ‌های کروی با وزن اسپین برای میدان‌های نمایش تحويل ناپذیر یا ماتریس های Θ ویگنر برای میدان‌های ویژگی عمومی انجام می‌شود [۷-۹].

سطح عمومی معمولاً به صورت میش‌های مثلثی نمایش داده می‌شوند؛ به بخش ۲.۱.۱۲ مراجعه کنید. میدان‌های ویژگی سپس می‌توانند روى رئوس، یال‌ها یا وجوده مش نمونه‌برداری شوند [۷]. رزولوشن بالاتر میدان‌های ویژگی را می‌توان با کد گذاری آنها از طریق نقشه‌های بافت (۴۳۰) به دست آورد [۷]. به طور جایگزین، سطوح ممکن است به صورت ابرهای نقطه نمایش داده شوند [۷-۹].

۱-ساخترها ۲- گروههای ساختاری: انتخاب خاص G -ساختار که باید توسط شبکه رعایت شود، به وظیفه یادگیری و توبولوژی پستگی دارد (اگر پیوستگی یا همواری کانولوشن موردنیاز باشد). به طور کلی، M مجذب به یک d -ساختر است، یعنی یک کلاف از چارچوب‌های مرجع راست‌هنچار نسبت به متريک ريماني داده شده. یک ارتقا به گروههای ساختاری $G \leq \text{GL}(d)$ به طور یكتا توسط تبديلات پيمانه‌اي با مقادير G از چارچوب‌های راست‌هنچار تعين می‌شود. تقليل های گروه ساختاری به $d < G$ ، در مقابل، لزوماً يكتا نيستند و اطلاعات هندسي اضافي را کد گذاری می‌کنند. به عنوان مثال، یک تقليل به $G = \text{SO}(d)$ نيزمند یک جهت گيری روی منيفلد است.^{۱۱} بخش‌های بعدی به بحث در مورد انتخاب‌های بيشتر (عمدتاً به طور ضمنی انجام شده) از G -ساختارها که در مقالات يافته می‌شوند، می‌پردازند؛ به عنوان مثال، شکل‌های ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱ را ببینيد. اين ساختارها یا توسط تقاضا برای هموداري تحت گروه ايزوموري Isom_{GM} تعين می‌شوند، يا به طور کانوني روی منيفلد داده شده‌اند، يا به طور خاص برای $\{e\}$ -ساخترها، به صورت الگوريتمي از طریق برخی روش‌های ابتکاري ثابت شده‌اند. به ياد یاوريد که $\{e\}$ -ساخترها روی منيفلد های غیر موافق پذير (طبق تعریف) لزوماً ناپيوسته هستند.

گروههای ساختاری که بيشتر در مقالات با آنها مواجه می‌شويم، عبارتند از:

- گروه بدیهی $\{e\}$ ، متناظر با CNN‌های غیرمستقل از مختصات با کرنل‌های نامحدود
- گروه بازتاب $\mathcal{R} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ، که اولين محور چارچوب را برمی‌گرداند
- گروههای متعامد خاص $\text{SO}(d)$ (دوران‌های پيوسته)
- گروههای متعامد d (دوران‌ها و بازتاب‌های پيوسته)
- گروه پيمانه $(\mathbb{R}^+, *)$

از آنجا که سه گروه آخر گروههای لی پيوسته هستند، در پياده‌سازی‌های عددی گاهی توسط زيرگروههای متناهی تقریب زده می‌شوند. به عنوان مثال، $\text{SO}(2)$ و $\mathbb{Z}/2$ اغلب با گروههای دوری C_N یا گروههای دووجی D_N مدل‌سازی می‌شوند، در حالی که دوران‌ها و بازتاب‌های سبعدي در \mathbb{R}^3 را می‌توان با گروههای چندوجی (گروههای تقارن اجسام افلاطونی، به عنوان مثال بيست وجهی) تقریب زد. برای کاهش پیچیدگی طبقه‌بندی مدل‌ها در جدول، \mathbb{E} ، ما تصميم گرفتيم بین تقارن‌های پيوسته و تقریب‌های آنها توسط زيرگروههای متناهی تمایز قائل نشويم. با اين حال، ما چنین تقریب‌هایی را در بحث دقیق خود در مورد مدل‌ها در بخش‌های بعدی بيان خواهيم کرد.

اتصالات ۱-سازگار: تمام مدل‌ها یا اتصال کانونی لوی-چويتا روی M یا اتصال یکتای بدیهی را که توسط یک $\{e\}$ -ساختر القا می‌شود، در نظر می‌گيرند. انتخاب اتصال برای شبکه‌هایی که صرفاً روی میدان‌های اسکالار عمل می‌کنند، که انتقال آنها همیشه بدیهی است، بی‌اهمیت (و بنابراین نامشخص) می‌شود.

^{۱۱} برای یک منيفلد منفرد و همبند، اين انتخاب تا زمانی که مقداردهی اولیه کرنل نسبت به هر دو جهت گيری متقابران باشد، دلخواه است. در اين حالت شبکه به سادگی کرنل‌های بازتاب‌دهنده را برای جهت گيری‌های مختلف ياد می‌گيرد. هنگام بررسی يک مجموعه داده مشکل از چندین منيفلد، جهت گيری نسبی آنها برای تعیین صحیح مرتبه است.

به طور خاص، تمام CNN ‌های اقلیدسی از بخش ۹ از انتقال‌دهنده‌های لوی-چیویتا استفاده می‌کنند، که بردارها را به گونه‌ای منتقل می‌کنند که در معنای معمول در فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d موافق باقی بماند؛ به شکل ۱۵ مراجعه کنید. این امکان پذیر است زیرا اتصال لوی-چیویتا با G -ساختارهای مدل‌ها (تعریف شده در معادله (۳۷۱)) و در شکل ۳۴ به تصویر کشیده شده) G -سازگار است.^{۸۲}

آنها از اتصالات بدیهی استفاده می‌کنند که با اتصال کانونی لوی-چیویتا روی \mathbb{E}_d متفاوت است.

تمام CNN ‌های کروی که بر (۲)- SO -ساختار در شکل ۱۵ تکیه دارند (در بخش ۲.۱۱ مرور شده‌اند)، ویژگی‌ها را مطابق با اتصال لوی-چیویتا روی S^d منتقل می‌کنند (شکل ۱۵ ب). آنها بروی $\{\cdot\}_{e^d}$ -ساختار در شکل ۵ ب عمل می‌کنند (در بخش ۳.۱۱ مرور شده‌اند) دوباره یک اتصال بدیهی را در نظر می‌گیرند زیرا اتصال لوی-چیویتا کروی با این $\{\cdot\}_{e^d}$ -ساختار ناسازگار است. CNN ‌یست و چهی با $\{\cdot\}_{e^d}$ -ساختار، شکل ۴ عج، ویژگی‌ها را مطابق با اتصال لوی-چیویتا بیست و چهی $\{\cdot\}_{e^d}$ -سازگار منتقل می‌کنند.^{۸۳}

تمام CNN ‌های روی سطوح عمومی که در ردیف‌های (۳۹-۳۷) جدول ۶ فهرست شده‌اند، سطوح جهت‌داری را فرض می‌کنند که مجهز به یک $\text{SO}(2)$ - SO -ساختار هستند. آنها ویژگی‌ها را با اتصال لوی-چیویتا $\{\cdot\}_{e^d}$ -سازگار سطوح منتقل می‌کنند. سایر CNN ‌های سطوح بر اساس $\{\cdot\}_{e^d}$ -ساختارها هستند و/یا روی میدان‌های اسکالر عمل می‌کنند □ بنابراین انتقال ویژگی آنها بدیهی است.

کانونلوشن‌های نوار موبیوس ما ویژگی‌ها را از طریق اتصال لوی-چیویتا منتقل می‌کنند، که با \mathcal{R} -ساختار فرض شده سازگار است.

به یاد بیاورید که اتصال لوی-چیویتا به طور یکتا توسط متريک تعين می‌شود و بنابراین به طور کلی ناوردای ايزومتری است؛ پاپوفی \mathbb{S}^d در بخش ۴.۱.۸ را مقایسه کنید. از آنجا که اتصالات بدیهی $\{\cdot\}_{e^d}$ -سازگار به طور یکتا توسط $\{\cdot\}_{e^d}$ -ساختار مخصوص می‌شوند، تقارن‌های آن را به اشتراک می‌گذارند، یعنی تحت عمل $\text{Isom}_{\{\cdot\}_{e^d} M}$ ناوردادر است. این موضوع با قضیه ۸.۹ دلالت بر این دارد که کانونلوشن‌های GM که بر اساس این اتصالات هستند، Isom_{GM} -هموردا می‌باشند.

پولبک‌های انتقال‌دهنده و تصویرهای جایگزین به

پولبک انتقال‌دهنده $\text{Exp}_{p,f}^*$ که در تعریف ۷.۵ و معادله (۶۷) تعریف شده است، یک میدان ویژگی f را در یک پارامترسازی \mathcal{Z} -نودزیک روی فضای مماس $T_p M$ نمایش می‌دهد. بخش انتقال عملیات توسط اتصال G -سازگار تعین می‌شود. \mathcal{Z} -نودزیک‌ها □ و بنابراین نگاشتهای نمایی $\text{exp}_p : T_p M \rightarrow M$ در فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d و کره S^d عبارات فرم بسته دارند. به طور خاص، نگاشتهای نمایی روی \mathbb{E}_d در مختصات دکارتی به جمع برداری در معادله (۴۰۰) کاهاش می‌باشند، به طوری که کانونلوشن‌های GM اقلیدسی به کانونلوشن‌های متعارف روی \mathbb{R}^d تبدیل می‌شوند؛ به قضیه ۹.۷ مراجعه کنید. \mathcal{Z} -نودزیک‌ها روی \mathbb{S}^d به خوبی شناخته شده‌اند که توسط دوایر عظیمه کرده داده می‌شوند. اگر کره به عنوان جایگذاری شده در \mathbb{R}^d در نظر گرفته شود، نگاشتهای نمایی به صراحت توسط معادله (۴۳۰) داده می‌شود. \mathcal{Z} -نودزیک‌ها روی متشاهی سطوح عمومی با راه حل‌های فرم بسته توصیف نمی‌شوند بلکه به صورت عددی محاسبه می‌شوند؛ به بخش ۲.۱.۱۲ مراجعه کنید. در مقایسه با محیط هموار، باید بین \mathcal{Z} -نودزیک‌ها «کوتاه‌ترین» و «مستقیم‌ترین» روی متشاهی تمايز قابل شد [۸].

پولبک میدان‌های ویژگی به مختصات نرم \mathcal{Z} -نودزیک تنها راه نمایش میدان‌های ویژگی روی فضاهای مماس نیست. در مقالات مربوط به CNN کروی، استفاده از تصویرهای نومونیک، که در شکل ۵۱ به تصویر کشیده شده‌اند، نسبتاً رایج است. قضیه ۱۱.۳ نشان می‌دهد که این تصویر را می‌توان به عنوان یک مورد خاص از پارامترسازی \mathcal{Z} -نودزیک عمومی تر ما پس از اعمال یک تاب شعاعی به کرنل‌ها در نظر گرفت. بنابراین مدل‌های مربوطه دقیقاً به عنوان کانونلوشن‌های GM شناسایی می‌شوند. سطوحی که در یک فضای محیطی مانند \mathbb{R}^d جایگذاری شده‌اند، ممکن است علاوه بر این بر تصویرهای مختلفی در فضای جایگذاری تکیه کنند؛ به عنوان مثال سه مدل آخ \mathcal{Z} -نودزیک که در بخش ۳.۱۲ مورد بحث قرار گرفته‌اند را بیینید. توجه داشته باشید که این رویکردها واقعاً با رویکرد متفاوت هستند، یعنی این سه مدل دقیقاً کانونلوشن‌های GM نیستند.

نمایش‌های □ و غیرخطی‌ها: تقریباً تمام مدل‌ها یا نمایش بدیهی، نمایش‌های منظم را به عنوان انواع میدان در نظر می‌گیرند. استثنایات شامل نمایش‌های خارج قسمتی، نمایش‌های القایی عمومی‌تر، نمایش‌های حاصل ضرب تانسوری و، به طور خاص برای $G = \text{SO}(3)$ ، نمایش کواترنیونی هستند. نمایش‌های با ابعاد بی‌نهایت، به ویژه نمایش‌های منظم و خارج قسمتی گروه‌های لی، در پیاده‌سازی‌ها گسسته‌سازی می‌شوند. این کار می‌تواند یا از طریق نمونه‌برداری مونت کارلو یا با بازگشت به نمایش‌های متاظر زیرگروه‌های متناهی همانطور که در بالا بحث شد، انجام شود.

غیرخطی‌ها باید نسبت به عمل نمایش G انتخاب شده همودرا باشند. از آنجا که میدان‌های اسکالر G -ناوردا هستند، غیرخطی‌های معمول مانند ReLU روی آنها عمل می‌کنند. میدان‌های ویژگی که مطابق با نمایش‌های جایگشتی، به ویژه نمایش‌های منظم، تبدیل می‌شوند، به صورت کاتال به کاتال عمل می‌کنند. سایر انواع میدان به غیرخطی‌های سفارشی نیاز دارند □ ما برای بحث در مورد انتخاب‌های خاص به [۸] ارجاع می‌دهیم.

^{۸۱} در مقابل، $\{\cdot\}_{e^d}$ -ساختار اقلیدسی در شکل ۳۵ ب با اتصال لوی-چیویتا روی \mathbb{E}_d ناسازگار خواهد بود.
^{۸۲} اتصالات لوی-چیویتا گسسته روی متشاهی در بخش ۲.۱.۱۲ و [۸] مورد بحث قرار گرفته‌اند.

فضاهای کرنل GM-راهبری پذیر: کانولوشن‌های GM میدان‌های ورودی از نوع ρ را به میدان‌های خروجی از نوع ρ با کانولوشن آنها با کرنل‌های G -راهبری پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho, \rho}^G$ نگاشت می‌دهند. از آنجا که فضای $\mathcal{K}_{\rho, \rho}^G$ از کرنل‌های G -راهبری پذیر، تعریف ۷.۳ یک فضای برداری است، معمولاً بر حسب یک پایه $\{K_1, \dots, K_N\}$ از $\mathcal{K}_{\rho, \rho}^G$ پارامتری می‌شود. قبل از محاسبه کانولوشن، کرنل یادگرفته شده $K = \sum_{i=1}^N w_i K_i$ در این پایه بسط داده می‌شود، که در آن $\{w_1, \dots, w_N\}$ وزن‌های با مقادیر حقیقی هستند که باید بهینه‌سازی شوند. فضاهای کرنل اثبات شده کامل برای گروه‌های \mathbb{Z} در [۴] پایه‌سازی شده‌اند. یک تعیین از قضیه ویکتر-اکارت، پایه‌های فضای کرنل را برای گروه‌های ساختاری فشرده عمومی G مشخص می‌کند [۴].

در عمل، اکثر نویسندهای کانولوشنی بر نظریه نمایش برای میدان‌های ویژگی و کرنل‌های راهبری پذیر استفاده نمی‌کنند، بلکه آنها را بر اساس شهود فرمول‌بندی می‌کنند. به طور خاص، اکثر نویسندهای کانولوشنی یک نوع میدان ورودی داده را که می‌گذرد و عملیات کانولوشن مختلفی را پیشنهاد می‌دهند که به گونه‌ای مهندسی شده‌اند که میدان خروجی حاصل به شیوه‌ای هموردا (یا مستقل از مختصات) تبدیل شود.^{۸۰} در حالی که این رویکردهای کرنل‌های G -راهبری پذیر خاصی را پیشنهاد می‌کنند که بین میدان‌های ρ و میدان‌های ρ نگاشت انجام می‌دهند، این کرنل‌ها گاهی اوقات فضای کامل کرنل‌های ممکن را پوشش نمی‌دهند. این موضوع به عنوان مثال در مورد $PFCNN$ ها و $MDGCNN$ ها، که در بخش ۲.۱۲ بحث می‌شوند، صدق می‌کند.

۹ شبکه‌های کانولوشنی مستقل از مختصات اقلیدسی

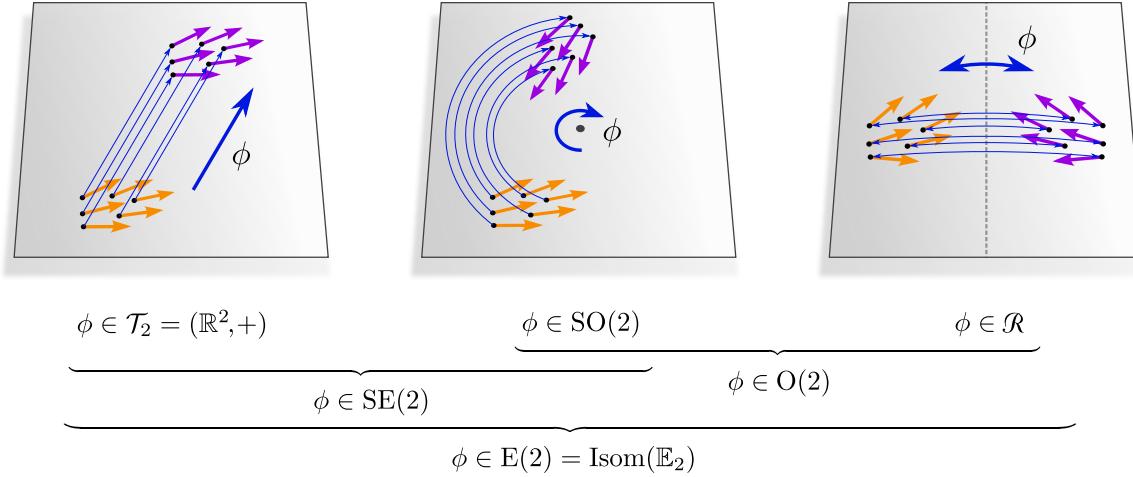
این بخش به بررسی کانولوشن‌های هموردا در فضاهای اقلیدسی (افاین) $M = \mathbb{E}_d$ می‌پردازد که بدون شک از بیشترین اهمیت عملی پرخوردار هستند. شبکه‌های کانولوشنی در فضاهای اقلیدسی برای تحلیل تصاویر صفحه‌ای و حجمی، سیگنال‌های صوتی، ویدئوها، رویدادهای فیزیکی در فضازمان مینکوفسکی (شبه-اقلیدسی) یا محیط‌های صفحه‌ای در یادگیری تقویتی به کار می‌روند. معماری مدل کانولوشنی نمونه اولیه \mathbb{H} در فضاهای اقلیدسی و هم به طور کلی CNN متعارف روی \mathbb{E}_d توسعه ^{۸۱} است. موقفيت آن تا حد زیادی بر پایه هموردابی نسبت به انتقال است که به آن امکان تعیین استنتاج آموخته شده بین مکان‌های فضایی مختلف را می‌دهد. با انگیزه از این مشاهده، تلاش زیادی برای تعیین ویژگی‌های هموردابی CNN ها به گروه‌های تقارن سراسری بزرگتر \mathbb{E}_d ، به عنوان مثال به ایزومنتری‌های اقلیدسی در شکل ۴۱ یا تبدیلات افاین عمومی‌تر، صورت گرفته است.

جالب اینجاست که اکثر مدل‌های هموردای سراسری در مقالات، هموردابی خود را با اعمال نوعی کرنل G -راهبری پذیر به دست می‌آورند. این بدان معناست که این مدل‌ها در واقع تحت تبدیلات پیمانه‌ای محلی نیز هموردا هستند، علی‌رغم اینکه صراحتاً برای آن طراحی نشده‌اند. دلیل این هموردابی پیمانه‌ای ناخواسته این است که هموردابی سراسری مدل‌ها عموماً برای هر لایه به صورت جداگانه طراحی می‌شود و بنابراین به طور مستقل برای میدان دریافتی محلی هر نورون اعمال می‌گردد. در اینجا ما CNN ‌های اقلیدسی هموردای سراسری را که در ردیف‌های (۲۶-۱) جدول ۶ فهرست شده‌اند، از دیدگاه عمومی تر تقارن‌های پیمانه‌ای محلی توضیح می‌دهیم و بحث می‌کنیم که چگونه هموردابی سراسری آنها از هموردابی پیمانه‌ای محلی شان ناشی می‌شود. قضیه ۸.۹ بدین ترتیب بیان می‌کند که یک کانولوشن $M = \mathbb{E}_d$ هموردا است. با این حال، برای مورد خاص فضاهای اقلیدسی، می‌توان گزاره‌ای قوی‌تر از صرفاً هموردابی ایزومنتری بیان کرد: کانولوشن با یک کرنل G -راهبری پذیر روی \mathbb{E}_d به معنای هموردابی سراسری مدل تحت عمل گروه افاین $G \times \mathbb{E}_d = \mathcal{T}_d$ است، همانطور که در قضیه ۹.۸ در ادامه اثبات شده است. دلیل اصلی این نتیجه آن است که ژئوذیک‌ها و انتقال‌دهنده‌های لوی-چیویتا در فضاهای اقلیدسی نه تنها توسعه ایزومنتری را حفظ می‌شوند، بلکه به طور کلی تر توسعه هر تبدیل افاین نیز حفظ می‌گردد.

کانولوشن‌ها در فضاهای اقلیدسی به طور کلاسیک در مختصات \mathbb{R}^d از \mathbb{E}_d فرمول‌بندی می‌شوند. مزیت این نوع فرمول‌بندی این است که تمام ساختارهای ریاضی مورد نیاز برای تعاریف را فراهم می‌کند. با این حال، \mathbb{R}^d دارای ساختار اضافی است، به عنوان مثال یک ساختار فضای برداری (و در نتیجه یک بیان) یا ساختار کانوئیک $\{e\}$ آن. با طراحی کانولوشن‌ها به گونه‌ای که هموردا باشد، استنتاج (تا حدی) مستقل از این ساختار می‌شود: به عنوان مثال، هموردابی نسبت به انتقال در کانولوشن‌ها، انتخاب خاص مبدأ را یکسان می‌سازد در حالی که هموردابی نسبت به $E(d)$ (ایزومنتری)، جهت و جهت‌گیری خاص ساختار $\{e\}$ را یکسان می‌کند. برای روش‌شدن اینکه کدام ساختار ریاضی واقعاً فرض و مورد نیاز است، ما یک دیدگاه جایگزین را توسعه می‌دهیم: ما با ساختار خالص افاین و متريک فضای اقلیدسی \mathbb{E}_d شروع می‌کنیم. اگر یک کانولوشن GM روی \mathbb{E}_d ساختار هندسی پیشتر را فرض کنند، این ساختار متعاقباً با مشخص کردن اطلاعی از چارت‌های (افاین) $\mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ که x^A را می‌پیمانه‌ها و G -ساختارها را الفا می‌کنند، اضافه خواهد شد.

^{۸۰} <https://quva-lab.github.io/e2cnn/api/e2cnn.kernels.html>

^{۸۱} این برخلاف رویکرد ماست که میدان‌های ورودی و خروجی را ثابت می‌کند و سپس به دنبال محدودیت حاصل بر کرنل‌های کانولوشن می‌گردد.



شکل ۴۱: نمایش گروه ایزومتری کامل $\text{Isom}(\mathbb{E}_d) = \text{E}(d)$ برای $d = 2$. این گروه شامل زیرگرووهای انتقال $\mathcal{T}_d = (\mathbb{R}^d, +)$ ، دوران $\text{SO}(d)$ و بازتاب \mathcal{R} است. دورانها و بازتابها گروه متعامد $\text{SO}(d) \rtimes \mathcal{R}$ را تشکیل می‌دهند، در حالی که انتقالها و دورانها گروه اقليدسي خاص $\text{SE}(d) = \mathcal{T}_d \rtimes \text{SO}(d)$ را می‌سازند.

۱۲۳	۱.۹ فرمول‌بندی کلاسیک CNN‌های G -هدایت‌پذیر بر روی \mathbb{R}^d
۱۲۵	۲.۹ هندسه‌ی افاین فضاهای اقليدسي \mathbb{E}_d
۱۲۶	۱.۲.۹ چارت‌های افاین و اطلس‌های $\text{Aff}(G)$
۱۲۷	۲.۲.۹ \square -اطلس‌ها و \square -ساختارهای القا شده
۱۲۹	۳.۲.۹ تبدیلات افاین مستقل از مختصات
۱۳۱	۳.۹ CNN‌های هموردای گروه افاین در فضاهای اقليدسي \mathbb{E}_d
۱۳۴	۴.۹ CNN‌های اقليدسي در مقالات

برای ارائه یک نمای کلی و مقدمه‌ای ساده، ما فرمول‌بندی کلاسیک کانولوشن‌های G -راهبری‌پذیر (هموردای افاین) را در بخش ۱.۹ معرفی می‌کیم. بخش‌های بعدی ۲.۹ و ۳.۹ کانولوشن‌های هموردای افاین را در فضاهای اقليدسي در یک چارچوب بدون مختصات و مستقل از مختصات تعریف می‌کنند. به طور خاص، بخش ۲.۹ به بحث در مورد هندسه افاین فضاهای اقليدسي می‌پردازد. اطلس‌هایی از چارت‌ها با توابع گذار در یک گروه افاین $\text{Aff}(G)$ (شکل ۴۲)، G -ساختارهای ثابت تحت $\text{Aff}(G)$ مورد نظر را القا می‌کنند (شکل ۴۳). بخش ۳.۹ کانولوشن‌های GM را روی این G -ساختارها بررسی کرده و هموردایی سراسری آنها نسبت به $\text{Aff}(G)$ را اثبات می‌کند. نمونه‌های خاصی از این مدل‌ها که در مقالات یافته شوند، یعنی ردیف‌های (۱-۴۶) جدول ۶، در بخش ۴.۹ مورد بحث قرار گرفته‌اند.

خواننده می‌تواند از تعاریف فنی در بخش‌های ۲.۹ و ۳.۹ که برای درک مدل‌های بخش ۴.۹ لزوماً ضروری نیستند، عبور کند.

۱.۹ فرمول‌بندی کلاسیک CNN‌های \square -هدایت‌پذیر بر روی \mathbb{R}^d

در این بخش، ما مفهوم معمول کانولوشن‌ها (یا همبستگی‌های متقابل^{۸۶}) را بر روی \mathbb{R}^d معرفی می‌کیم. هنگام کانولوکردن با یک کرنل G -هدایت‌پذیر، کانولوشن‌ها تحت عمل گروه آفین $\text{Aff}(G)$ هم متغیر می‌شوند. بخش‌های بعدی ۲.۹ و ۳.۹ این عملیات را بر روی \mathbb{R}^d به عنوان عبارات مختصاتی کانولوشن‌های GM مستقل از مختصات بر روی فضاهای اقليدسي \mathbb{E}_d شناسایی خواهند کرد.

CNN‌های هدایت‌پذیر اقليدسي: CNN‌های مرسوم نقشه‌های ویژگی را بر روی \mathbb{R}^d در نظر می‌گیرند، که توابعی به شکل زیر هستند:

$$F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c. \quad (۳۶۲)$$

^{۸۶} در یادگیری عمیق، استفاده از اصطلاحات «کانولوشن» و «همبستگی متقابل» به صورت مترادف رایج شده است.

یک کانولوشن (در واقع یک همیستگی) با یک کرنل با مقدار ماتریسی $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$ سپس به عنوان تبدیل انگرالی زیر تعریف می‌شود:

$$F_{\text{out}}(x) := [K * F_{\text{in}}](x) := \int_{\mathbb{R}^d} K(v) F_{\text{in}}(x + v) dv, \quad (363)$$

که یک نقشه ویژگی ورودی با c_{in} کانال را به یک نقشه ویژگی خروجی با c_{out} کانال نگاشت می‌کند. می‌توان نشان داد که این عملیات عمومی‌ترین نگاشت خطی و هم‌متغیر نسبت به انتقال بین نقشه‌های ویژگی است [؟].^{۷۷}

CNN‌های هدایت‌پذیر اقلیدسی [؟] آنها را به شبکه‌های کانولوشنی تعمیم می‌دهند که تحت عمل گروه‌های آفین بر روی میدان‌های ویژگی هم‌متغیر هستند. گروه‌های آفین \mathbb{R}^d در اینجا به عنوان حاصلضرب‌های نیمه‌مستقیم به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\text{Aff}(G) := \mathcal{T}_d \rtimes G, \quad (364)$$

که در آن $G \leq \text{GL}(d)$ است. گروه‌های آفین شامل ایزومنتری‌های \mathbb{R}^d که در شکل ۴۱ به تصویر کشیده شده‌اند، به عنوان یک مورد خاص برای $G \leq O(d)$ هستند اما گروه‌های نقطه‌ای (گروه‌های ساختاری G' عمومی‌تری، به عنوان مثال مقیاس‌بندی یکنواخت^{۷۸}، رانیز مجاز می‌دانند. معادلات زیر یک نمای کلی از رابطه‌ای بین گروه‌های آفین در ادبیات (تا گسسته‌سازی‌ها) و راه‌های جایگزین نوشتن آنها را رانه می‌دهند (با فرض اینکه Isom_{GM} ساختارهای نامتغیر نسبت به $\text{Aff}(G)$ تعیین می‌شود؛ به زیر مراجعه کنید):

$$\begin{aligned} \text{Aff}(\{e\}) &= \mathcal{T}_d &= (\mathbb{R}^d, +) &= \text{Isom}_{\{e\}M} \\ \text{Aff}(\mathcal{R}) &= \mathcal{T}_d \rtimes \mathcal{R} &&= \text{Isom}_{RM} \\ \text{Aff}(\text{SO}(d)) &= \mathcal{T}_d \rtimes \text{SO}(d) = \text{SE}(d) &= \text{Isom}_{\text{SOM}} = \text{Isom}_+(\mathbb{R}^d) \\ \text{Aff}(O(d)) &= \mathcal{T}_d \rtimes O(d) = \text{E}(d) &= \text{Isom}_{\text{OM}} &= \text{Isom}(\mathbb{R}^d) \\ \text{Aff}(\mathcal{S}) &= \mathcal{T}_d \rtimes \mathcal{S} && \end{aligned} \quad (365)$$

گروه $(\text{Aff}(\text{GL}(d))$ شامل تمام تبدیلات آفین \mathbb{R}^d است. از آنجایی که گروه‌های آفین به عنوان حاصلضرب‌های نیمه‌مستقیم تعریف می‌شوند، هر یک از عناصر آنها $tg \in \text{Aff}(G)$ را می‌توان به طور منحصر به فرد به یک انتقال $t \in \mathcal{T}_d$ و یک عنصر گروه نقطه‌ای $g \in G$ تجزیه کرد. عمل (کانونی) آنها بر روی \mathbb{R}^d به صورت زیر داده می‌شود:

$$\text{Aff}(G) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (tg, x) \mapsto gx + t. \quad (366)$$

عمل یک عنصر گروه معکوس^{۷۹} $(tg)^{-1}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$((tg)^{-1}, x) \mapsto g^{-1}(x - t). \quad (367)$$

یک میدان ویژگی از نوع ρ بر روی \mathbb{R}^d طبق نمایش القابی ρ از $\text{Ind}_G^{\text{Aff}(G)}$ همانطور که توسط

$$(tg) \triangleright_\rho F := [\text{Ind}_G^{\text{Aff}(G)} \rho](tg) F := \rho(g) F(tg)^{-1}, \quad (368)$$

مشخص شده است، تبدیل می‌شود، که می‌توان آن را به عنوان مشابه عمل مستقل از مختصات بر روی مقاطع در معادله (۲۸۱) در نظر گرفت.^{۷۸} یک کانولوشن با یک کرنل G -هدایت‌پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{out}}, \rho_{\text{in}}}^G$ نسبت به این اعمال بر روی میدان ورودی و خروجی هم‌متغیر است، یعنی،

$$K * (tg \triangleright_{\rho_{\text{in}}} F_{\text{in}}) = tg \triangleright_{\rho_{\text{out}}} (K * F_{\text{in}}) \quad \forall tg \in \text{Aff}(G). \quad (369)$$

^{۷۷} برای کلیت کامل، در واقع باید کرنل‌ها را به معنای توزیعی (تابع تعمیم‌یافته) مجاز دانست.

^{۷۸} نمایش‌های القابی به روشهای مشابه با آنچه در شکل ۱۹ نشان داده شده است، بر روی میدان‌ها عمل می‌کنند. برخلاف تبدیل در این شکل، نمایش‌های القابی علاوه بر این به انتقال‌ها نیز اجازه می‌دهند (قانون تبدیل در بخش ۳.۲.۴ محدودیت $\rho^{\text{Aff}(G)} \text{Ind}_G^{\text{Aff}(G)}$ از نمایش القابی به G است، یعنی نمایش القابی بدون انتقال‌ها).

این به راحتی با یک محاسبه صریح بررسی می‌شود:

$$\begin{aligned}
 [K * (tg \triangleright_{\rho_{\square}} F_{\square})](x) &= [K * (\rho_{\square}(g) F_{\square}(tg)^{-1})](x) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \rho_{\square}(g) F_{\square}((tg)^{-1}(x+v)) dv \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \rho_{\square}(g) F_{\square}(g^{-1}(x+v-t)) dv \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} K(gv) \rho_{\square}(g) F_{\square}(g^{-1}(x-t)+v) |\det g| d\tilde{v} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_{\square}(g) K(\tilde{v}) F_{\square}(g^{-1}(x-t)+\tilde{v}) d\tilde{v} \\
 &= \rho_{\square}(g) [K * F_{\square}](g^{-1}(x-t)) \\
 &= tg \triangleright_{\rho_{\square}} [K * F_{\square}](x),
 \end{aligned} \tag{۳۷۰}$$

که از G -هدایت‌پذیری K در مرحله پنجم استفاده کرد و برای هر $x \in \mathbb{R}^d$ و هر $tg \in \text{Aff}(G)$ است، چنین کانولوشن‌های G -هدایت‌پذیر، عمومی‌ترین نگاشت‌های خطی هم‌متغیر نسبت به $\text{Aff}(G)$ بین میدان‌های ویژگی اقلیدسی هستند.^{۹۰۸۹}

رابطه با کانولوشن‌های GM اقلیدسی: این کانولوشن‌های هدایت‌پذیر بر روی \mathbb{R}^d چگونه به کانولوشن‌های GM بر روی فضاهای اقلیدسی $M = \mathbb{E}_d$ مرتبط می‌شوند؟ این واقعیت که کانولوشن‌های هدایت‌پذیر به کرنل‌های G -هدایت‌پذیر متکی مستند، نشان می‌دهد که آنها نه تنها به صورت سراسری نسبت به $\text{Aff}(G)$ هم‌متغیر هستند، بلکه (به طور کلی‌تر) به صورت محلی نسبت به نیز هم‌متغیر هستند. برای برقراری ارتباط بین CNN‌های کلاسیک G -هدایت‌پذیر بر روی \mathbb{R}^d و کانولوشن‌های GM مستقل از مختصات ما، باید ساختار هندسی را که به طور ضمنی توسط اولی در نظر گرفته شده است، شناسایی کنیم.

به طور کلی، \mathbb{R}^d به طور کانونی با یک $\{e\}$ -ساختار، که در شکل ۴۲۳ به تصویر کشیده شده است، مجهز است.^{۹۱} علاوه بر این، با یک متريک ريماني متناظر با ضرب داخلی استاندارد \mathbb{R}^d همراه است.^{۹۲} اتصال لوی-چويتای متناظر، منتقل کننده‌های موازی را در شکل ۴۱۵ آبیجاد می‌کند، که بردارها را به معنای معمول در فضاهای اقلیدسی موازی نگه می‌دارد. هنگامی که نسبت به قاب‌های $\{e\}$ -ساختار کانونی بیان می‌شود، منتقل کننده‌های موازی پدیده می‌شوند و بنابراین حذف می‌شوند. نگاشت‌های نمایی به یک جمع ساده کاشهش می‌باشد (پس از اعمال برخی ايزومورفیسم‌ها، به زیر مراجعه کنید).

در حالی که ما یک $\{e\}$ -ساختار بر روی \mathbb{R}^d داریم، کانولوشن‌های GM به G -ساختارها کمتر خاصی متکی هستند. این G -ساختارها را می‌توان به عنوان بالابرهای G (کانونی) نامید.

$$GM = \{e\}M \triangleleft G := \left\{ [e_i]_{i=1}^d \triangleleft g \mid [e_i]_{i=1}^d \in \{e\}M, g \in G \right\} \tag{۳۷۱}$$

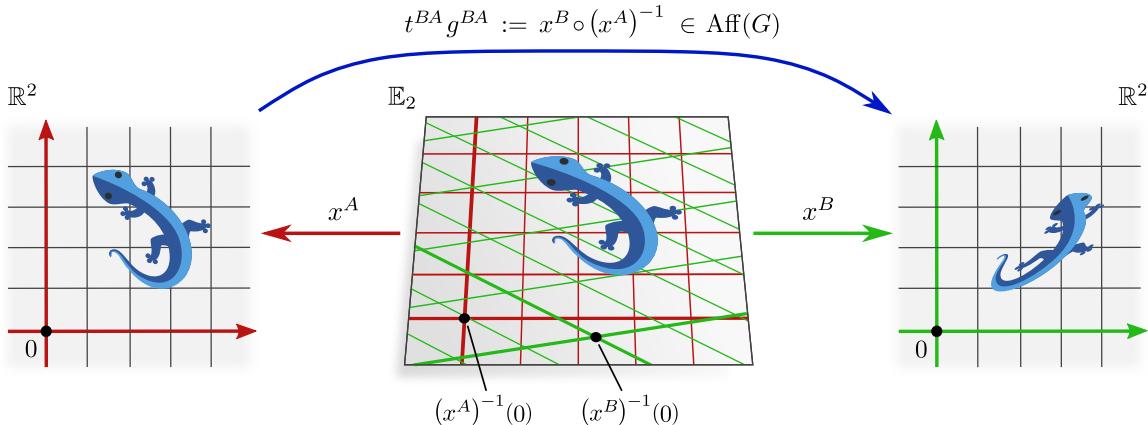
از $\{e\}$ -ساختار کانونی M از \mathbb{R}^d در نظر گرفت. به طور شهودی، این G -ساختارهای بالا بر شده با افزودن هر قاب G -مرتبه دیگر (مدار راست-آن در (FM) به هر قاب مرجع کانونی در $\{e\}M$ تعریف می‌شوند. شکل ۴۳ چنین G -ساختارهای بالا بر شده‌ای را برای گروه‌های ساختار مختلف نشان می‌دهد. همانطور که در قضیه ۹.۶ در زیر اثبات شده است، آنها تحت عمل $\text{Aff}(G)$ نامتغیر هستند^{۹۳} که در قضیه ۹.۸ نشان داده شده است که هم‌متغیری $\text{Aff}(G)$ کانولوشن‌ها را توضیح می‌دهد. آنها علاوه بر این با اتصال لوی-چويتا G -سازگار هستند.

ادعاهای مطرح شده در اینجا در دو بخش بعدی با دقت بیشتری مورد بحث قرار می‌گیرند. این فرمول‌بندی رسمی، با این حال، برای درک طبقه‌بندی ما از CNN‌های اقلیدسی در ادبیات به شدت ضروری نیست، به طوری که خواننده می‌تواند از آنها عبور کرده و مستقیماً به بخش ۴.۹ برود.

^{۹۴} با فرض اینکه میدان‌های ویژگی طبق نمایش القایی، معادله (۳۶۸)، تبدیل می‌شوند، که برای رسیدن به یک کانولوشن لازم است.
^{۹۵} این گزاره، گزاره شناخته‌شده‌ای را تعیین می‌دهد که کانولوشن‌های اقلیدسی مرسوم، عمومی‌ترین نگاشت‌های خطی هم‌متغیر نسبت به انتقال بین توابع (یا نقشه‌های ویژگی) در فضاهای اقلیدسی هستند، که برای $\{e\}$ بازیابی می‌شود.

^{۹۶} به طور رسمی، $\{e\}$ -ساختار کانونی R^d به صورت زیر به وجود می‌آید: فضای برداری $M = R^d$ خود با یک پایه کانونی، که توسط بردارهای پایه با عنصر $e_i \in R^d$ داده می‌شود، همراه است. قاب‌های مرجع کانونی فضاهای مماس $T_p R^d$ از این پایه از طریق ايزومورفیسم‌های کانونی $\eta_p : T_p R^d \xrightarrow{\sim} R^d$ از معادله (۵۳۰) به دست می‌آیند. به طور شهودی، قاب‌های محلی فضاهای مماس $T_p R^d$ با قاب سراسری R^d «هم‌تراز» هستند. این معادل با معرفی نگاشت همانی به عنوان چارت مختصاتی سراسری $\{e\}$ -ساختار کانونی به عنوان میدان پایه‌های مخصوصی القایی_{i=1}^d است.

^{۹۷} این متريک استاندارد η به عنوان پول‌بک ضرب داخلی استاندارد $R^d \times R^d \rightarrow R$ از طریق ايزومورفیسم‌های کانونی: $\eta_{R^d,p} : \langle \cdot, \cdot \rangle_{R^d} : R^d \times R^d \rightarrow R$ نتیجه $\eta_p(v, w) := \langle \iota_{R^d,p}(v), \iota_{R^d,p}(w) \rangle_{R^d}$ به صورت $v, w \in T_p R^d$ داده می‌شود.



شکل ۴.۲: نمایش چارت‌های افاین $x^X : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ که مختصات سراسری را به فضاهای اقلیدسی اختصاص می‌دهند. هم \mathbb{E}_d و هم \mathbb{R}^d فضاهای افاین هستند، به طوری که می‌توان خواست که چارت‌های نگاشت‌های افاین باشند، که هم خطی و نسبت فاصله‌ها را حفظ می‌کنند. ما یک اطلس $\mathcal{A}_{\mathbb{E}_d}^{\text{Aff}(G)}$ را به عنوان اطلسی مشکل از چارت‌هایی تعریف می‌کنیم که توسط تابع گذار $t^{BA} g^{BA} := x^B \circ (x^A)^{-1}$ که اعضاًی در $\text{Aff}(G)$ هستند، به یکدیگر مرتبط می‌شوند. چارت‌ها در یک اطلس $\text{Aff}(G)$ حداقل در انتخاب مبدأ $(x^X)^{-1}(0)$ و یک تبدیل G با هم تفاوت دارند. انتخاب یک اطلس $\text{Aff}(G)$ ، مشکل از چارت‌های \mathcal{A}_G^G از پیمانه‌های \hat{dx}^X برای گروه‌های مختلف G مثال زده شده است، تحت عمل $\text{Aff}(G)$ ناوردا است. قضیه ۹.۸ ثابت می‌کند که کانولوشن‌های GM روی چنین G -ساختارهایی، (G) -هموردا هستند.
(مارمولک‌ها با مجوز توپیتر تحت لایسنس بین‌المللی CC-BY-NC-SA انتشار می‌شوند.)

۴.۹ هندسه‌ی افاین فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d

قبل از بحث در مورد کانولوشن‌های مستقل از مختصات در فضاهای اقلیدسی، باید هندسه‌ی افاین زیربنایی را در ک کنیم. فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d بنا به تعریف، فضاهای افاین هستند، یعنی با یک فضای برداری متناظر با بعد d همراه هستند که انتقال‌ها را روی \mathbb{E}_d تعریف می‌کند. فضاهای اقلیدسی علاوه بر اینکه فضای افاین هستند، به یک متریک اقلیدسی (تابع فاصله) نیز مجهزند. این تابع فاصله متناظر با یک متریک ریمانی η است، یعنی یک d -ساختار OM روی منیفلد (ریمانی) $M = \mathbb{E}_d$. این متریک دارای این ویژگی است که انحنای آن در همه جا صفر است، یعنی \mathbb{E}_d سرتاسر تخت است.

یک مثال استاندارد برای فضاهای اقلیدسی، فضاهای برداری \mathbb{R}^d هستند، با این حال، فضاهای اقلیدسی عمومی ساختار کمتری را در نظر می‌گیرند. به طور خاص، آنها با یک ساختار فضای برداری همراه نیستند و بنابراین مبدأ مرجحی ندارند. علاوه بر این، آنها به طور کلی مجهز به مختصات دکارتی نیستند. بنابراین ما با فضاهای اقلیدسی «عربان» \mathbb{E}_d شروع می‌کنیم که چگونه ساختار هندسی مربوطه به آنها اضافه می‌شود. در اصل می‌توان هر G -ساختاری را در نظر گرفت، با این حال، ما به طور خاص به آن G -ساختارهایی علاقه‌مندیم که CNN‌های راهبری پذیر کلاسیک را از بخش قل بازیابی می‌کنند، که تمام مدل‌های ردیف‌های (۱۶-۲۶) جدول ۶ را توضیح می‌دهند. چنین G -ساختارهای ناوردای (G) از اطلس‌های $\text{Aff}(G)$ القا می‌شوند، که شامل چارت‌هایی از \mathbb{E}_d هستند که توابع گذار آنها مقادیری در (G) می‌گیرند (معادله (۴.۳۶۴)); به شکل ۴.۲ مراجعه کنید. تمام گزاره‌هایی که در مختصات \mathbb{R}^d بیان می‌شوند، می‌توانند از طریق چارت‌ها به یک چارچوب مستقل از مختصات ترجمه شوند، که ما در اینجا آن را توسعه می‌دهیم. اطلاعات بیشتر در مورد رابطه بین چارت‌های مختصاتی و پیمانه‌ها را می‌توان در پیوست آ یافت.

۴.۹.۱ چارت‌های افاین و اطلس‌های $\text{Aff}(G)$

یک فضای اقلیدسی \mathbb{E}_d با بعد d با \mathbb{R}^d همسان‌ریخت است و بنابراین چارت‌های سراسری را می‌بذرد^{۴۳}

$$x^A : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d. \quad (4.72)$$

در ادامه ما همیشه این چارت‌ها را به عنوان نگاشت‌های افاین، یعنی ایزو‌مورفیسم‌های فضاهای افاین، که هم خطی (یعنی خطوط راست را به خطوط راست می‌نگارند) و نسبت فاصله‌ها را حفظ می‌کنند، در نظر خواهیم گرفت. از آنجا که ترکیب نگاشت‌های افاین، خود نگاشت افاین است، نتیجه می‌شود که

^{۴۳} این واقعیت که \mathbb{E}_d و \mathbb{R}^d به صورت سراسری همسان‌ریخت (یا حتی ایزو‌متریک) هستند، توضیح می‌دهد که چرا اکثر کارهای مرتبط، فضاهای برداری \mathbb{R}^d را به عنوان مدل‌هایی از فضاهای اقلیدسی در نظر می‌گیرند. رویکرد ما در این بخش کمی دقیق‌تر است زیرا حداقل ساختار لازم برای تعریف کانولوشن‌های مستقل از مختصات GM را در فضاهای اقلیدسی $M = \mathbb{E}_d$ معرفی می‌کند.

توابع گذار چارت

$$g^{BA} \circ (x^A)^{-1} : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (373)$$

تبدیلات افاین از \mathbb{R}^d هستند، یعنی اعضای در $\text{Aff}(\text{GL}(d))$. بنابراین توابع گذار به طور یکتا به یک انتقال $t^{BA} \in \mathcal{T}_d$ و یک عضو $\text{GL}(d)$ تجزیه می‌شوند:

$$t^{BA} g^{BA} := x^B \circ (x^A)^{-1} \quad (374)$$

نماد g^{BA} در اینجا تصادفی نیست زیرا این اعضای گروه با تبدیلات پیمانه‌ای که توسط گذار چارت‌ها القا می‌شوند، مطابقت دارند، که در قضیه ۹.۲ در ادامه ثابت شده است.

با توجه به انتخاب یک گروه افاین $\text{Aff}(G)$ ، ما اطلاس‌های $\text{Aff}(G)$ از \mathbb{E}_d را به عنوان آن دسته از اطلاس‌های چارت‌های سراسری از \mathbb{E}_d به \mathbb{R}^d تعریف می‌کنیم که توابع گذار چارت آنها مقادیری در $\text{Aff}(G)$ می‌گیرند:

تعریف ۹.۱ (اطلاس $\text{Aff}(G)$ از فضای اقلیدسی). فرض کنید \mathfrak{X} یک مجموعه اندیس برای نام گذاری چارت‌ها باشد و برای هر $X \in \mathfrak{X}$ یک چارت افاین سراسری از $\mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ باشد. اطلاس

$$\mathcal{A}_{\mathbb{E}_d}^{\text{Aff}(G)} = \{(\mathbb{E}_d, x^X) \mid X \in \mathfrak{X}\} \quad (375)$$

یک اطلاس $\text{Aff}(G)$ نامیده می‌شود اگر تمام توابع گذار چارت آن مقادیری در $\text{Aff}(G)$ بگیرند، یعنی اگر

$$x^B \circ (x^A)^{-1} \in \text{Aff}(G) \quad \forall A, B \in \mathfrak{X}. \quad (376)$$

شکل ۴۲ چارت‌های افاین و نگاشت‌های گذار چارت با مقادیر $\text{Aff}(G)$ بین آنها را به تصویر می‌کشد.

۲.۲.۹ - اطلاس‌ها و - ساختارهای القا شده

هر چارت مختصاتی سراسری $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{E}_d$: x^A یک پیمانه سراسری را القا می‌کند که به صورت نقطه‌ای توسط گردایان‌های چارت داده می‌شود

$$\psi_{TM,p}^A := \hat{dx}_p^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (377)$$

به معادله (۵۴۰) در پیوست آ.۳ و جدول ۷ مراجعه کنید. بنابراین یک اطلاس از چارت‌ها متناظر با یک اطلاس از پیمانه‌ها است. به طور خاص، با توجه به اینکه چارت‌ها یک اطلاس $\text{Aff}(G)$ را تشکیل می‌دهند، تضمین می‌شود که تبدیلات پیمانه دارای مقادیر G هستند، یعنی پیمانه‌های القا شده یک اطلاس را تشکیل می‌دهند:

قضیه ۹.۲ (اطلاس‌های $\text{Aff}(G)$ از چارت‌ها، G -اطلاس‌هایی از پیمانه‌ها را القا می‌کنند). فرض کنید $\mathcal{A}_{\mathbb{E}_d}^{\text{Aff}(G)} = \{(\mathbb{E}_d, x^X) \mid X \in \mathfrak{X}\}$

$$\mathcal{A}^G = \{(\mathbb{E}_d, \hat{dx}^X) \mid X \in \mathfrak{X}\} \quad (378)$$

تضمین می‌شود که یک G -اطلاس باشد. به طور خاص، اگر نگاشت‌های گذار چارت با $x^B \circ (x^A)^{-1} = t^{BA} g^{BA}$ داده شوند، نگاشت‌های گذار بین پیمانه‌ها در هر نقطه $p \in \mathbb{E}_d$ با $g_p^{BA} = g^{BA} \circ (x^A)^{-1}$ داده می‌شوند.

اثبات: توابع گذار بین پیمانه‌های القا شده توسط چارت، طبق معادله (۵۵۳)، با ژاکوبین نگاشت‌های گذار چارت منطبق هستند، یعنی،

$$g_p^{BA} = \hat{dx}_p^B \circ (\hat{dx}_p^A)^{-1} = \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)}. \quad (379)$$

عبارت آخر، سوءاستفاده معمول از نماد گذاری برای ژاکوبین‌های نگاشت‌های گذار چارت است، که در معادله (۵۴۷) به صورت مؤلفه‌ای به شکل زیر تعریف شد:

$$\frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\nu^A} \Big|_{x^A(p)} := \partial_\nu (x_\mu^B \circ (x^A)^{-1}) \Big|_{x^A(p)}. \quad (380)$$

با استفاده از اینکه نگاشت‌های گذار چارت با $x^B \circ (x^A)^{-1} = t^{BA} g^{BA}$ داده می‌شوند، این نتیجه می‌دهد که

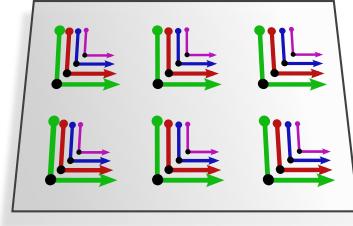
$$(g_p^{BA})_{\mu\nu} = \partial_\nu (x_\mu^B \circ (x^A)^{-1})(x) \Big|_{x^A(p)} = \partial_\nu (g^{BA} x + t^{BA})_\mu \Big|_{x^A(p)} = g_{\mu\nu}^{BA}, \quad (381)$$

یعنی تبدیلات پیمانه القا شده g_p^{BA} مقادیری در G دارند و با g^{BA} مطابقت دارند (که این نماد گذاری را توجیه می‌کند). از آنجا که این استدلال برای هر $p \in \mathbb{E}_d$ برقرار است، نتیجه می‌شود که اطلاس القا شده از پیمانه‌ها یک G -اطلاس است. \square

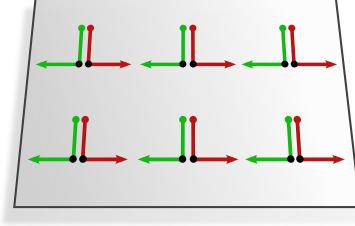


ب) SOM -ساختار القا شده توسط اطلس $\text{Aff}(\text{SO}(2))$ روی $M = \mathbb{E}_2$, که تحت انتقال‌ها و دوران‌ها در $\text{Isom}_{\text{SOM}} = \text{SE}(2)$ حفظ می‌شود.

(ج) $\{e\}M$ -ساختار القا شده توسط اطلس $\text{Aff}(\{e\})$ روی $M = \mathbb{E}_2$, که تحت انتقال‌ها در $\text{Isom}_{\{e\}M} = \mathcal{T}_2$ حفظ می‌شود.



د) \mathcal{S} -ساختار القا شده توسط اطلس $\text{Aff}(\mathcal{S})$ روی $M = \mathbb{E}_2$, که تحت انتقال‌ها و مقیاس‌بندی‌ها در $\text{Aff}(\mathcal{S}) = \mathcal{T}_2 \times \mathcal{S}$ حفظ می‌شود. توجه داشته باشید که $\text{Isom}_{\mathcal{S}M} = \mathcal{T}_2$ زیرا مقیاس‌بندی‌ها ایزو‌متريک نیستند.



(ج) $\mathcal{R}M$ -ساختار القا شده توسط اطلس $\text{Aff}(\mathcal{R})$ روی $M = \mathbb{E}_2$, که تحت انتقال‌ها و بازتاب‌ها در $\text{Isom}_{\mathcal{R}M} = \mathcal{T}_2$ حفظ می‌شود.

شکل ۴.۳: نمایش G -ساختارهای مختلف GM در فضاهای اقلیدسی. شکل ۹.۱ آنچه در فضاهای اقلیدسی $\{e\}M$ را نشان می‌دهد که متناظر با کانولوشن‌های اقلیدسی متعارف است. سه G -ساختار دیگر متناظر با CNN‌های G_pM -راهبری پذیر غربیدهی هستند. آنها به صورت محلی روی تمام ژست‌هایی که توسط مجموعه خاصی از چارچوب‌های مرتع در G_pM به هم مرتبط هستند، تعیین می‌باشند. از آنجا که G -ساختارها $\text{Aff}(G)$ -ناوردا هستند (که از قضیه ۹.۶ نتیجه می‌شود)، کانولوشن‌های G -راهبری پذیر به صورت سراسری نسبت به $\text{Aff}(G)$ همودا هستند (قضیه ۹.۸). به جای تعریف G -ساختارها از طریق یک ارتقای- G -به صورت $G \triangleleft G := \{e\}M$ از GM تعیین می‌کنند. ساختار کانونی \mathbb{R}^d تعریف کرد (معادله (۳۷۱)), که چارچوب‌های موجود در $\{e\}M$ -ساختار را با تمام چارچوب‌های مرتبط با G مجهز می‌کند.

همانطور که در بخش ۴.۶ بحث شد، هر G -اطلس از پیمانه‌ها یک GM -ساختار را القا می‌کند. طبق معادله (۱۸۴)، GM به صورت نقطه‌ای توسط

$$G_pM := (\psi_{FM,p}^A)^{-1}(G), \quad (382)$$

تعیین می‌شود، که در آن انتخاب خاص پیمانه $\mathfrak{X} \in A$ دلخواه است. چارچوب‌های موجود در G_pM پایه‌های مختصاتی $= \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \right]_{\mu=1}^d$ و تمام تبدیلات G -آنها هستند. از آنجا که اطلس ماکسیمال $\text{Aff}(G)$ -ناوردا است، همین امر برای G -ساختار القا شده نیز صادق است (با عملی که از طریق هر چارت تعریف می‌شود، همانطور که در ادامه روش و اثبات شده است). شکل ۴.۳ چنین G -ساختارهایی را برای گروه‌های افاین مختلف نشان می‌دهد. در بخش بعدی ما ثابت می‌کنیم که کانولوشن‌های GM متناظر، تحت عمل $\text{Aff}(G)$ همودا هستند.

همانطور که مشخص می‌شود، GM به عنوان یک کلاف اصلی با $\text{Aff}(G)/G \cong \mathbb{R}^d$ (به صورت غیرکانونی) ایزو‌مورف است، که در آن

$$q : \text{Aff}(G) \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad tg \mapsto t \quad (383)$$

نگاشت خارج قسمتی کانونی گروه افاین است (پس از یکی گرفتن هم‌دسته‌های tG با انتقال‌های t).^{۹۴} جای تعجب نیست که این ایزو‌مورفیسم کلاف اصلی به انتخاب چارت بستگی دارد.

^{۹۴} ما به طور ضمنی از یک ایزو‌مورفیسم کانونی $\text{Aff}(G)/G \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^d$, $tG \mapsto t$ استفاده می‌کنیم، که در آن t در سمت چپ یک عضو گروه انتقال در $\mathcal{T}_d = (\mathbb{R}^d, +)$ و در سمت راست یک بردار در \mathbb{R}^d را نشان می‌دهد.

قضیه ۹.۳ (ایزومورفیسم کلاف اصلی بین $\text{Aff}(G)$ و \mathbb{E}_d). فرض کنید GM یک G -ساختار الفا شده توسط اطلس $(\text{Aff}(G), \text{id}_G)$. آنگاه GM به عنوان یک کلاف اصلی با $\mathbb{R}^d \xrightarrow{q} \text{Aff}(G)$ ایزومورف است، یعنی ایزومورفیسم‌هایی وجود دارند

$$\alpha^A : \text{Aff}(G) \rightarrow GM, \quad tg \mapsto (\psi_{GM, (x^A)^{-1}(t)})^{-1}(g) \quad (384)$$

و

$$(x^A)^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{E}_d \quad (385)$$

به طوری که نمودار زیر جابجایی است:

$$\begin{array}{ccc} \text{Aff}(G) \times G & \xrightarrow{\alpha^A \times \text{id}_G} & GM \times G \\ \downarrow \cdot & & \downarrow \triangleleft \\ \text{Aff}(G) & \xrightarrow{\alpha^A} & GM \\ \downarrow q & & \downarrow \pi_{GM} \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{(x^A)^{-1}} & \mathbb{E}_d \end{array} \quad (386)$$

وارون α^A در اینجا با

$$(\alpha^A)^{-1} : GM \rightarrow \text{Aff}(G), \quad [e_i]_{i=1}^d \mapsto tg \quad \square \square \square \square \quad \begin{cases} t = x^A \circ \pi_{GM}([e_i]_{i=1}^d) \\ g = \psi_{GM, \pi_{GM}([e_i]_{i=1}^d)}^A([e_i]_{i=1}^d) \end{cases} \quad (387)$$

داده می‌شود. توجه داشته باشید که این ایزومورفیسم‌ها در تناظر یک به یک با چارت‌های سازگار با $\text{Aff}(G)$ از اطلس مورد نظر هستند.

اثبات: برای اثبات این گزاره، باید نشان دهیم که α^A و $(\alpha^A)^{-1}$ ایزومورداي-راست نسبت به G است. اینکه α^A یک نگاشت کلاف روی $(x^A)^{-1}(x)$ است و توسعه خواننده بررسی می‌شود. اینکه α^A یک نگاشت کلاف روی $(x^A)^{-1}(x)$ است به این معناست که مربع پایینی نمودار جابجایی است. این امر با مشاهده اینکه $\pi_{GM} \circ \alpha^A(tg) = \pi_{GM} \circ (\psi_{GM, (x^A)^{-1}(t)})^{-1}(g) = (x^A)^{-1}(t) \circ q(tg) = (x^A)^{-1}(t) \circ (x^A)^{-1}(x)$ و $\alpha^A \circ \pi_{GM} \circ \alpha^A(tg) = \alpha^A \circ (\psi_{GM, (x^A)^{-1}(t)})^{-1}(g) = \alpha^A(tg) \triangleleft \tilde{g} = \alpha^A(tg)$ برقرار است. در مرحله دوم از این واقعیت استفاده شد که $\psi_{GM, (x^A)^{-1}(t)}$ یک همورداي-راست نسبت به G است (معادله ۱۸۸)، که هموردايی وارون آن را نتیجه می‌دهد. در مجموع، این ویژگی‌ها نشان می‌دهند که α^A یک ایزومورفیسم کلاف اصلی است. \square

۳.۲.۹ تبدیلات افاین مستقل از مختصات

از آنجا که ما می‌خواهیم هموردايی کانولوشن‌های GM را تحت تبدیلات افاین در یک چارچوب مستقل از مختصات اثبات کنیم، باید گروههایی از تبدیلات افاین \mathbb{E}_d را به جای \mathbb{R}^d مانند بالا، معرفی کنیم. چارت‌ها گروههای افاین مستقل از مختصات را به گروههای افاین $\text{Aff}(G)$ از \mathbb{R}^d مرتبط خواهند کرد.

ما با گروه کامل

$$\text{Aff}(\mathbb{E}_d) := \{\phi : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{E}_d \mid \phi \text{ یک تبدیل افاین از } \mathbb{E}_d \text{ است}\} \quad (388)$$

از تبدیلات افاین یک فضای اقلیدسی \mathbb{E}_d شروع می‌کنیم. اثبات اینکه $\text{Aff}(\mathbb{E}_d) = \text{Aff}(\text{GL}(d))$ ایزومورف است، آسان است، با ایزومورفیسم‌هایی که برای یک انتخاب دلخواه از چارت $x^A \mapsto x^A \phi(x^A)$ داده می‌شوند. این گزاره در یک چارچوب کلی تر در قضیه ۹.۶ در ادامه اثبات شده است.

همانند مورد ایزومتری‌ها، ما زیرگروههای $\text{Aff}_{GM} \leq \text{Aff}(\mathbb{E}_d)$ از تبدیلات افاین حافظ G -ساختار را تعریف می‌کنیم:

تعريف ۹.۴ (تبدیلات افاین حافظ G -ساختار). فرض کنید GM یک G -ساختاری روی \mathbb{E}_d باشد. ما زیرگروه متناظر از تبدیلات افاین حافظ G -ساختار را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\text{Aff}_{GM} := \{\phi \in \text{Aff}(\mathbb{E}_d) \mid \phi_{*, FM} G_p M = G_{\phi(p)} M \quad \forall p \in \mathbb{E}_d\} \leq \text{Aff}(\mathbb{E}_d). \quad (389)$$

این تعریف را با تعریف Isom_{GM} در تعریف ۸.۱ مقایسه کنید. همانند مورد Isom_{GM} تضمین می‌شود که تبدیلات پیمانه‌ای که توسط تبدیلات افاین در Aff_{GM} الگا می‌شوند، مقادیری در G داشته باشند. این گزاره توسط قضیه زیر رسمیت می‌باشد، که اساساً مشابه قضیه ۸.۳ است:

قضیه ۹.۵ در تبدیلات مختصاتی های محلی. فرض کنید $\phi \in \text{Aff}(\mathbb{E}_d)$ هر ایزومتری از $M = \mathbb{E}_d$ باشد. آنگاه سه گزاره زیر معادل هستند:

۱. $\phi \in \text{Aff}_{GM}$ -ساختار است، یعنی، $\phi \in \text{Aff}_{GM}$
 ۲. پولبک تبدیل افاین $\psi_{FM,p}^{-1} \phi_{*,FM}^{\tilde{A}} \psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$ از هر پیمانه FM که GM را تعریف می‌کند، با آن G -اطلس، $-G$ -سازگار است.
 ۳. عبارت مختصاتی $\phi_{*,FM}$ نسبت به هر پیمانه $\psi_{FM,\phi(p)}^A \psi_{FM,p}^{\tilde{A}}$ از G -اطلس FM مقادیری در گروه ساختار می‌گیرد، یعنی، $\phi_{*,FM}^A g_{\phi}^{A\tilde{A}}(p) := \psi_{FM,\phi(p)}^A \phi_{*,FM}^{\tilde{A}} (\psi_{FM,p}^{\tilde{A}})^{-1} = \hat{dx}_{\phi(p)}^A \phi_{*,TM}^{\tilde{A}} (\hat{dx}_p^{\tilde{A}})^{-1}$ مقادیری در G دارد.
- اثبات: اثبات مشابه اثبات قضیه ۸.۳ است. به طور کلی تر، این گزاره برای دیفنتومورفیسم‌های حافظ G -ساختار دلخواه نیز برقرار است.
- تبدیلات پیمانه الگا شده، تبدیل عبارات مختصاتی اعضای کلاف، به عنوان مثال ضرایب بردارهای مماس یا ویژگی، را توصیف می‌کنند. عمل تبدیل افاین ϕ روی خود منیفلد \mathbb{E}_d نیز می‌تواند در مختصات \mathbb{R}^d توصیف شود. این کار با ضرب چپ و راست ϕ با هر چارت (افاین) انجام می‌شود، که بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم آن را در مکان مبدأ و مقصد برابر در نظر بگیریم زیرا ما فقط چارت‌های سراسری را در نظر می‌گیریم. عبارت مختصاتی حاصل $t_{\phi}^{AA} g_{\phi}^{AA}$ که توسط نمودار جابجایی زیر تعریف می‌شود،

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{x^A} & \mathbb{E}_d & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{E}_d & \xrightarrow{x^A} & \mathbb{R}^d \\ & \downarrow & & & & & \uparrow \\ & & t_{\phi}^{AA} g_{\phi}^{AA} & & & & \end{array} \quad (390)$$

تضمین می‌شود که مقادیری در $\text{Aff}(G)$ بگیرد اگر ϕ G -ساختار را حفظ کند.

قضیه ۹.۶ در چارت‌های افاین سراسری. فرض کنید G - GM -ساختار الگا شده توسط یک اطلس $\text{Aff}(G)$ باشد و :

یک چارت از این اطلس باشد. عبارت مختصاتی یک عضو $\phi \in \text{Aff}_{GM} \rightarrow \mathbb{R}^d$ نسبت به x^A آنگاه با

$$x^A \phi(x^A)^{-1} =: t_{\phi}^{AA} g_{\phi}^{AA} \in \text{Aff}(G), \quad (391)$$

داده می‌شود، که در آن

$$t_{\phi}^{AA} := x^A \phi(x^A)^{-1}(\cdot) \in \mathcal{T}_d \quad \text{و} \quad g_{\phi}^{AA} := \hat{dx}_{\phi(p)}^A \phi_{*,TM}^{\tilde{A}} (\hat{dx}_p^{\tilde{A}})^{-1} \in G \quad (392)$$

عضو $t_{\phi}^{AA} g_{\phi}^{AA} \in G$ در عبارت مختصاتی در اینجا با تبدیل پیمانه الگا شده G از قضیه ۹.۵ در هر نقطه $p \in \mathbb{E}_d$ منطبق است.

علاوه بر این، نگاشت مختصاتی سازی

$$\text{Aff}_{GM} \rightarrow \text{Aff}(G), \quad \phi \mapsto x^A \phi(x^A)^{-1}, \quad (393)$$

یک ایزومورفیسم گروهی است.

اثبات: از آنجا که x^A و ϕ نگاشتهای افاین هستند، $x^A \phi(x^A)^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ یک تبدیل افاین از $(\text{GL}(d))$ است، یعنی عضوی از $(\text{GL}(d))$ (یا زیرگروهی از آن). این بدان معناست که بسط تیلور مرتبه اول عبارت، دقیق است. بنابراین کاربرد عبارت مختصاتی به یک عضو دلخواه $x \in \mathbb{R}^d$ را می‌توان بر حسب بسط تیلور زیر حول مبدأ $0 \in \mathbb{R}^d$ نوشت:

$$\begin{aligned} [x^A \phi(x^A)^{-1}](x) &= [x^A \phi(x^A)^{-1}](\cdot) + \frac{\partial}{\partial x'} [x^A \phi(x^A)^{-1}]_{x'=\cdot} \cdot x \\ &= t_{\phi}^{AA} + g_{\phi}^{AA} \cdot x \\ &= (t_{\phi}^{AA} g_{\phi}^{AA}) x \end{aligned} \quad (394)$$

در اینجا ما به طور ضمنی انتقال $t_{\phi}^{AA} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ و $g_{\phi}^{AA} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ را تعریف کردیم و آنها را با اعضای گروه یکی گرفتیم، که این کار ممکن است زیرا تمام مورفیسم‌های در گیر، وارون پذیر هستند.

اینکه ژاکوبین $g_{\phi}^{AA}(p)$ با تبدیل پیمانه القا شده (p) در یک نقطه دلخواه $M \in p$ مطابقت دارد، با بازنویسی آن از طریق معادله (۵۳۱) بر حسب دیفرانسیل ها نشان داده می شود:

$$\begin{aligned} g_{\phi}^{AA} &= \frac{\partial}{\partial x'} [x^A \phi(x^A)^{-1}]_{x'=x^A(p)} \\ &= \iota_{\mathbb{R}^d} d[x^A \phi(x^A)^{-1}]_{x^A(p)} (\iota_{\mathbb{R}^d})^{-1} \\ &= \iota_{\mathbb{R}^d} dx_{\phi(p)}^A d\phi_p (dx_p^A)^{-1} (\iota_{\mathbb{R}^d})^{-1} \\ &= \hat{dx}_{\phi(p)}^A \phi_{*,TM} (\hat{dx}_p^A)^{-1} \\ &= g_{\phi}^{AA}(p) \end{aligned} \quad (۳۹۵)$$

در مرحله ماقبل آخر ما دیفرانسیل $d\phi$ را به عنوان یک نماد جایگزین برای پوش فوروارد $\phi_{*,TM}$ و گرادیان های چارت $\hat{dx}^A := \iota_{\mathbb{R}^d} dx^A$ را همانطور که در معادله (۵۴۰) تعریف شده، شناسایی کردیم. اندیس p در نماد $g_{\phi}^{AA}(p) = g_{\phi}^{AA}$ به دلیل دلخواه بودن آن حذف شده است.

اینکه $t_{\phi}^{AA} g_{\phi}^{AA}$ نه تنها عضوی از $\text{Aff}(\text{GL}(d))$ بلکه از زیر گروه آن $\text{Aff}(G)$ است، روشن است زیرا قضیه ۹.۵ بیان می کند که $\phi \in \text{Aff}_{GM}$ برای هر G .

برای اثبات اینکه نگاشت مختصاتی سازی $C^A : \text{Aff}_{GM} \rightarrow \text{Aff}(G)$ ، $\phi \mapsto x^A \phi(x^A)^{-1}$ واقعاً یک ایزو مورفیسم گروهی است، باید نشان دهیم که آن (۱) یک همو مورفیسم گروهی، (۲) یک به یک و (۳) پوشان است. اینکه C^A یک همو مورفیسم گروهی است، بالا فاصله از تعریف آن نتیجه می شود زیرا

$$\begin{aligned} C^A(\phi \tilde{\phi}) &= x^A \phi \tilde{\phi}(x^A)^{-1} \\ &= x^A \phi(x^A)^{-1} x^A \tilde{\phi}(x^A)^{-1} \\ &= C^A(\phi) C^A(\tilde{\phi}) \end{aligned} \quad (۳۹۶)$$

برای هر $\phi, \tilde{\phi} \in \text{Aff}_{GM}$ $C^A(\phi) = \tilde{\phi}$ برقرار است. یک به یک بودن C^A نیازمند این است که برای هر $\phi, \tilde{\phi} \in \text{Aff}_{GM}$ $x^A \phi(x^A)^{-1} = x^A \tilde{\phi}(x^A)^{-1}$ تبیین دهد. اینکه این مورد برقرار است، روشن است زیرا $C^A(\phi) = C^A(\tilde{\phi})$ معادل است با $tg \in \text{Aff}_{GM}$ که تساوی ϕ و $\tilde{\phi}$ را تبیین می دهد زیرا x^A یک ایزو مورفیسم است. در آخر، $\tilde{\phi}$ پوشان است اگر و تنها اگر برای هر $\phi = (x^A)^{-1} tg x^A$ $C^A(\phi) = tg$ و وجود داشته باشد، به طوری که $C^A(\phi) = tg$. به عنوان یک آنساتز، فرض کنید $\phi = (x^A)^{-1} tg x^A$. آنچه باقی می ماند نشان دادن این است که این ساختار ϕ واقعاً عضوی از Aff_{GM} است. همانطور که به راحتی می توان بررسی کرد، $g_{\phi}^{AA} = g \in G$ ، به طوری که $\phi \in \text{Aff}_{GM}$ باز می شود، که با آن پوشان بودن برقرار است. در کل، این اثبات می کند که $C^A : \text{Aff}_{GM} \rightarrow \text{Aff}(G)$ یک ایزو مورفیسم گروهی است اگر Aff_{GM} توسط یک اطلس G القا شده باشد. \square

ایزو مورفیسم بین Aff_{GM} و $\text{Aff}(G)$ یکتا نیست، زیرا به چارت خاص در نظر گرفته شده بستگی دارد. انتخاب های مختلف با خود ریختی های داخلی $\text{Aff}(G)$ مرتبط هستند زیرا

$$C^B(\phi) = x^B \phi(x^B)^{-1} = x^B(x^A)^{-1} x^A \phi(x^A)^{-1} x^A(x^B)^{-1} = (t^{BA} g^{BA}) C^A(\phi) (t^{BA} g^{BA})^{-1}. \quad (۳۹۷)$$

این تحلیل ما از هندسه اقلیدسی و G -ساختارهای $\text{Aff}(G)$ -ناوردا را که برای تعریف کانولوشن های اقلیدسی مستقل از مختصات در بخش بعدی لازم است، به پایان می رساند.

۳.۹ CNN های هموردای گروه افاین در فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d

اکنون به بررسی کانولوشن های G -اقلیدسی روی $\text{Aff}(G)$ -ساختارهای القا شده توسط اطلس G پردازیم. همانطور که در ادامه نشان خواهیم داد، این کانولوشن های هنگامی که در یک چارت بیان شوند، به کانولوشن های کلاسیک G -راهبری پذیر روی \mathbb{R}^d خلاصه می شوند. هموردایی افاین آنها در قضیه ۹.۸ در یک چارچوب مستقل از مختصات اثبات شده است.

بازیابی کانولوشن های متعارف روی \mathbb{R}^d : کانولوشن های G به طور حیاتی به پول بک انتقال دهنده $f^*_{\text{Exp}} \circ f$ از میدان های ویژگی بستگی دارند، که به نوعی خود به انتقال دهنده های موازی و نگاشت نمایی وابسته است. در فضاهای اقلیدسی، این عملیات شکل بسیار ساده ای به خود می گیرند، که ابتدا به آن می پردازیم.

همانطور که قبلاً گفته شد، انتقال‌دهنده‌های لوی-چوپانا بردارهای مماس را در فضاهای اقلیدسی به گونه‌ای جایجا می‌کنند که در معنای معمول در فضاهای اقلیدسی موازی باقی بمانند؛ به شکل ۱۱۵ آ مراجعه کنید. فرض کنید $x^A : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ هر چارت سراسری از یک اطلس $\text{Aff}(G)$ باشد. از آنجا که میدان چارچوب القا شده "موازی" است، انتقال‌دهنده‌ها در امتداد هر مسیر γ هنگامی که نسبت به پیمانه‌های القا شده \hat{dx}_p^A بیان شوند، بدیهی می‌شوند:

$$g_\gamma^{AA} = e \quad \text{برای هر مسیر} \quad (408)$$

این به طور خاص دلالت بر این دارد که انتقال‌دهنده‌های بردار ویژگی در این پیمانه با نگاشتهای همانی داده می‌شوند، یعنی

$$\rho(g_\gamma^{AA}) = \text{id}_{\mathbb{R}^c} \quad \text{برای هر مسیر} \quad (409)$$

هنگامی که نگاشت نمایی در یک چارت بیان شود، به جمع عبارات مختصاتی نقطه و بردار خلاصه می‌شود:

$$x^A(\exp_p v) = x^A(p) + \hat{dx}_p^A(v) \quad (400)$$

علاوه بر این، ما باید میدان‌های ویژگی را در مختصات بیان کنیم، یعنی آنها را از طریق چارت (سراسری، وارون) از \mathbb{R}^d به \mathbb{R}^d پولبک می‌کنیم،

$$F^A := f^A \circ (x^A)^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c, \quad (401)$$

که توسط نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccc} & F^A & \\ \mathbb{R}^d & \xleftarrow{x^A} & \mathbb{E}_d \xrightarrow{f^A} \mathbb{R}^c \end{array} \quad (402)$$

با این اجزا در دست، پولبک انتقال‌دهنده، معادله (۶۷)، از میدان‌های ویژگی در فضاهای اقلیدسی را می‌توان در مختصات به صورت زیر بیان کرد

$$\begin{aligned} [\text{Exp}_p^* f]^A(v) &= \rho(g_{p \leftarrow \exp_p(\hat{dx}_p^A)^{-1}(v^A)}^{AA}) f^A \exp_p((\hat{dx}_p^A)^{-1}(v)) \\ &= f^A(x^A)^{-1} x^A \exp_p((\hat{dx}_p^A)^{-1}(v)) \\ &= F^A(x^A(p) + v). \end{aligned} \quad (403)$$

بنابراین عبارت مختصاتی کانولوشن GM ، معادله (۸۷)، به صورت زیر در می‌آید

$$f_{\square\square}^A(p) = [K * f_{\square\square}]^A(p) = \int_{\mathbb{R}^d} K(v) [\text{Exp}_p^* f_{\square\square}]^A(v) dv = \int_{\mathbb{R}^d} K(v) F_{\square\square}^A(x^A(p) + v) dv. \quad (404)$$

این نشان می‌دهد که کانولوشن‌های GM در فضاهای اقلیدسی، کانولوشن‌های (همستگی‌های) متعارف هستند.

قضیه ۹.۲ (کانولوشن‌های GM در فضاهای اقلیدسی، کانولوشن‌های روی \mathbb{R}^d را بازیابی می‌کنند). فرض کنید GM یک G -ساختمان القا شده توسط یک اطلس $\text{Aff}(G)$ از چارت‌ها باشد، همانطور که در بخش ۲.۹ تعریف شد. هنگامی که نسبت به هر چارت سراسری $x^A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ از این اطلس $\text{Aff}(G)$ بیان شود، کانولوشن GM شکل یک کانولوشن (همستگی) متعارف $*$ را به خود می‌گیرد:

$$F_{\square\square}^A(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(v) F_{\square\square}^A(x + v) dv = [K * F_{\square\square}^A](x) \quad (405)$$

اثبات: این گزاره با ارزیابی معادله (۴۰۴) در سمت چپ به دست می‌آید. \square

قبل از پرداختن به اثبات هموردانی کانولوشن‌های GM در یک چارچوب مستقل از مختصات، ما استقلال از مختصات آن را در نظر می‌گیریم \square . همانطور که خواهیم دید، هر دو مفهوم به شدت به هم مرتبط هستند. تمام آنچه برای نشان دادن استقلال از مختصات لازم است، قانون تبدیل پولبک‌های میدان ویژگی به \mathbb{R}^d از طریق چارت‌ها است. قانون تبدیل مستقیماً از توابع گذار نتیجه می‌شود و می‌توان آن را از جابجایی نمودار زیر

$$\begin{array}{ccccc} & F^A & & & \\ \mathbb{R}^d & \xleftarrow{x^A} & \mathbb{E}_d & \xrightarrow{f^A} & \mathbb{R}^c \\ t^{BA} g^{BA} \downarrow & & & & \downarrow \rho(g^{BA}) \\ & x^B & & f^B & \\ \mathbb{R}^d & \xleftarrow{F^B} & \mathbb{R}^c & \xrightarrow{F^B} & \mathbb{R}^c \end{array} \quad (406)$$

خواند که به صورت زیر داده می‌شود:

$$F^B = \rho(g^{BA}) F^A (t^{BA} g^{BA})^{-1}. \quad (407)$$

توجه داشته باشید که این قانون تبدیل دقیقاً نمایش القایی $F^B = t^{BA} g^{BA} \triangleright_{\rho} F^A$ است که در معادله (۳۶۸) معرفی شد. با استفاده از هموردایی کانولوشن متعدد با کرنل‌های G -راهنری پذیر از معادله (۳۶۹)، این نتیجه می‌دهد

$$K * F_{\square\Box}^B = K * (t^{BA} g^{BA} \triangleright_{\rho_{\square\Box}} F_{\square\Box}^A) = t^{BA} g^{BA} \triangleright_{\rho_{\square\Box}} (K * F_{\square\Box}^A) = t^{BA} g^{BA} \triangleright_{\rho_{\square\Box}} F_{\square\Box}^A = F_{\square\Box}^B. \quad (408)$$

بنابراین دیده می‌شود که هموردایی فعال $\text{Aff}(G)$ کانولوشن‌های کلاسیک G -اقلیدسی را تجربه می‌دهد و بر عکس. این دو، دو روی یک سکه هستند. علاوه بر این، می‌توان هموردایی $\text{Aff}(G)$ کانولوشن GM را در چارچوب مستقل از مختصات اثبات کرد، که در ادامه این کار را انجام خواهیم داد.

هموردایی گروه افاین برای اثبات هموردایی گروه افاین کانولوشن‌های GM اقلیدسی، ابتدا قانون تبدیل میدان‌های ویژگی مستقل از مختصات $f \in \Gamma(\mathcal{A})$ را تحت تبدیلات افاین $\phi \in \text{Aff}_{GM}$ به صورت زیر تعریف می‌کیم:

$$\phi \triangleright f = \phi_{*,\mathcal{A}} f \phi^{-1}, \quad (409)$$

یعنی همانند ایزومنتری‌ها در تعریف ۸.۲ پول‌بک انتقال‌دهنده (لوی-چیویتا) از یک میدان ویژگی تبدیل شده افاین $f \triangleright \phi$ نسبت به یک چارت افاین x^A با عبارت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} & [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f)]^A(\mathfrak{v}) \\ & \stackrel{(1)}{=} [\text{Exp}_p^*(\phi_{*,\mathcal{A}} f \phi^{-1})]^A(\mathfrak{v}) \\ & \stackrel{(2)}{=} \underbrace{\rho(g_{p \leftarrow \exp_p(\hat{d}x_p^A)^{-1}(\mathfrak{v})}^{AA})}_{= \text{id}_{\mathbb{R}^c}} \psi_{\mathcal{A},p}^A(\phi_{*,\mathcal{A}} f \phi^{-1}) \exp_p((\hat{d}x_p^A)^{-1}(\mathfrak{v})) \\ & \stackrel{(3)}{=} \psi_{\mathcal{A},p}^A \phi_{*,\mathcal{A}} \left[(\psi_{\mathcal{A},\phi^{-1}(p)}^A)^{-1} \psi_{\mathcal{A},\phi^{-1}(p)}^A \right] f \left[(x^A)^{-1} x^A \right] \phi^{-1} \left[(x^A)^{-1} x^A \right] \exp_p((\hat{d}x_p^A)^{-1}(\mathfrak{v})) \\ & \stackrel{(4)}{=} \left[\psi_{\mathcal{A},p}^A \phi_{*,\mathcal{A}} (\psi_{\mathcal{A},\phi^{-1}(p)}^A)^{-1} \right] \left[\psi_{\mathcal{A},\phi^{-1}(p)}^A f (x^A)^{-1} \right] \left[x^A \phi^{-1} (x^A)^{-1} \right] \left[x^A \exp_p((\hat{d}x_p^A)^{-1}(\mathfrak{v})) \right] \\ & \stackrel{(5)}{=} \rho(g_{\phi}^{AA}) F^A (t_{\phi}^{AA} g_{\phi}^{AA})^{-1} (x^A(p) + \mathfrak{v}) \\ & \stackrel{(6)}{=} [(t_{\phi}^{AA} g_{\phi}^{AA}) \triangleright_{\rho} F^A] (x^A(p) + \mathfrak{v}) \end{aligned} \quad (410)$$

این عبارت به پول‌بک انتقال‌دهنده از میدان تبدیل نشده از طریق نمایش القایی (معادله (۳۶۸)) مرتبط می‌شود، که با عبارت مختصاتی $t_{\phi}^{AA} g_{\phi}^{AA}$ از ϕ عمل می‌کند (معادله (۳۹۱)). دو مرحله اول از معادله (۴۰۹) و تعریف پول‌بک انتقال‌دهنده در مختصات استفاده می‌کنند، که در آن $= (\phi_{*,\mathcal{A}} f \phi^{-1})^A$ و $\text{id}_{\mathbb{R}^c} = (\psi_{\mathcal{A},\phi^{-1}(p)}^A)^{-1} \psi_{\mathcal{A},\phi^{-1}(p)}^A$. برای ترجمه تمام مورفیسم‌ها به عبارات مختصاتی مربوطه، مرحله سوم همانی‌های $(\psi_{\mathcal{A},\phi^{-1}(p)}^A)^{-1} \psi_{\mathcal{A},\phi^{-1}(p)}^A$ را وارد می‌کند، که در مرحله چهارم دوباره دسته‌بندی می‌شوند. تا روش شود کدام ترکیب‌ها پس از مرحله پنجم به عبارات مختصاتی منجر می‌شوند. برای مرحله ۵ به یاد بیاورید که، طبق قضیه ۹.۶، $g_{\phi}^{AA}(p) = g_{\phi}^{AA}(p)$ برای هر $p \in \mathbb{E}_d$ همانطور که در بالا گفته شد، مرحله آخر قانون تبدیل حاصل در مختصات را به عنوان عمل نمایش القایی شناسایی می‌کند.

با این نتیجه می‌توانیم هموردایی Aff_{GM} کانولوشن‌های اقلیدسی را در چارچوب مستقل از مختصات اثبات کنیم. این قضیه ۸.۹ را که هموردایی ایزومنتری کانولوشن‌های GM را اثبات می‌کند، برای مورد خاص فضاهای اقلیدسی تعمیم می‌دهد.

۹.۸ (هموردایی افاین کانولوشن‌های GM اقلیدسی). فرض کنید GM یک اطلس $\text{Aff}(G)$ از $M = \mathbb{E}_d$ القا شده و فرض کنید بردارهای ویژگی مطابق با اتصال لوی-چیویتا روی \mathbb{E}_d منتقل می‌شوند. کانولوشن GM متناظر، تضمین می‌شود که تحت عمل تبدیلات افاین حافظ G -ساختار $\text{Aff}_{GM} \cong \text{Aff}(G)$ هموردا باشد. در معادلات، برای میدان‌های ویژگی دلخواه $f_{\square\Box} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\Box})$ و کرنل‌های G -راهنری پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\square\Box}, \rho_{\square\Box}}^G$ داریم که

$$[K * (\phi \triangleright f_{\square\Box})] = \phi \triangleright [K * f_{\square\Box}] \quad \forall \phi \in \text{Aff}_{GM}, \quad (411)$$

^{۱۵} از آنجا که کلاف بردار ویژگی به عنوان یک G -کلاف، یعنی مرتبط با GM تعریف شده است، پوش فرواردها فقط برای تبدیلات افاین حافظ G -ساختار در قابل تعریف هستند.

بعنی نمودار زیر برای هر ϕ در Aff_{GM} جایجای است:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) & \xrightarrow{\phi \triangleright} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \\ K \star \downarrow & & \downarrow K \star \\ \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}) & \xrightarrow[\phi \triangleright]{} & \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square}) \end{array} \quad (412)$$

اثبات: فرض کید $x^A : \mathbb{E}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ هر چارت سراسری از اطلس $\text{Aff}(G)$ مورد نظر باشد و $p \in \mathbb{E}_d$. اثبات ما از هموردایی Aff_{GM} با بیان کانولوشن نسبت به این مختصات و استفاده از هموردایی $\text{Aff}(G)$ کانولوشن‌های کلاسیک G -راهبری‌پذیر روی \mathbb{R}^d از معادله (۳۶۹) انجام می‌شود:

$$\begin{aligned} & \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^A [K \star (\phi \triangleright f_{\square\square})](p) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} K(v) [\text{Exp}_p^*(\phi \triangleright f_{\square\square})]^A(v) dv \quad (\text{کانولوشن } GM \text{ در مختصات، معادله (۸۷)}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} K(v) [(t_\phi^{AA} g_\phi^{AA}) \triangleright_{\rho_{\square\square}} F_{\square\square}^A] (x^A(p) + v) dv \quad (\text{بولبک انتقال‌دهنده تبدیل شده، معادله (۴۱۰)}) \\ &= [K * (t_\phi^{AA} g_\phi^{AA} \triangleright_{\rho_{\square\square}} F_{\square\square}^A)](x^A(p)) \quad (\text{کانولوشن * شناسایی شده روی } \mathbb{R}^d) \\ &= [t_\phi^{AA} g_\phi^{AA} \triangleright_{\rho_{\square\square\square}} (K * F_{\square\square}^A)](x^A(p)) \quad (\text{هموردایی روی } \mathbb{R}^d, \text{ معادله (۳۶۹)}) \\ &= \rho_{\square\square\square}(g_\phi^{AA})(K * F_{\square\square}^A)((t_\phi^{AA} g_\phi^{AA})^{-1} x^A(p)) \quad (\text{نمایش القابی } \rho_{\square\square\square}, \text{ معادله (۳۶۸)}) \\ &= \rho_{\square\square\square}(g_\phi^{AA})(K * F_{\square\square}^A)(x^A(\phi^{-1}(p))) \quad (\text{عبارت مختصاتی } \phi, \text{ معادله (۳۹۱)}) \\ &= \rho_{\square\square\square}(g_\phi^{AA}) \int_{\mathbb{R}^d} K(v) F_{\square\square}^A(x^A(\phi^{-1}(p)) + v) dv \quad (\text{کانولوشن بسط‌داده شده * روی } \mathbb{R}^d) \\ &= \rho_{\square\square\square}(g_\phi^{AA}) \int_{\mathbb{R}^d} K(v) [\text{Exp}_{\phi^{-1}(p)}^* f_{\square\square}]^A(v) dv \quad (\text{بولبک انتقال‌دهنده اقلیدسی، معادله (۴۰۳)}) \\ &= \rho_{\square\square\square}(g_\phi^{AA}) \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, \phi^{-1}(p)}^A [K \star f_{\square\square}] \phi^{-1}(p) \quad (\text{کانولوشن } GM \text{ در مختصات، معادله (۸۷)}) \\ &= \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^A \phi_{*, \mathcal{A}_{\square\square}} [K \star f_{\square\square}] \phi^{-1}(p) \quad (\text{پوش‌فروارد در مختصات، معادله (۳۰۲)}) \\ &= \psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^A [\phi \triangleright [K \star f_{\square\square}]](p) \quad (\text{عمل } \text{Aff}_{GM} \text{ روی میدان‌های ویژگی، معادله (۴۰۹)}) \end{aligned}$$

این گزاره نتیجه می‌شود زیرا $\psi_{\mathcal{A}_{\square\square}, p}^A$ یک ایزومورفیسم است.

به طور خلاصه، کانولوشن‌های GM -اقلیدسی با G -ساختارهای القا شده توسط اطلس $\text{Aff}(G)$ دو ویژگی زیر را دارند:

استقلال از مختصات: $\text{Aff}(G)$ تضمین می‌شود که آنها در هر چارت از اطلس $\mathcal{A}_{\mathbb{E}_d}^{\text{Aff}(G)}$ ، یعنی $\text{Aff}(G)$ ، نتایج معادل تولید کنند. این ویژگی در معادله (۴۰۸) نشان داده شد و در شکل ۴۲ به عنوان تبدیل بین چارت‌ها به تصویر کشیده شده است.

هموردایی فعال: $\text{Aff}(G)$ همانطور که در قضیه ۹.۸ اثبات شد، آنها تحت تبدیلات فعال میدان‌های ویژگی توسط $\text{Aff}_{GM} \cong \text{Aff}(G)$ هموردا هستند. در شکل ۴۲، این متناظر با یک تبدیل سیگنال روی \mathbb{E}_d خواهد بود، که در یک تبدیل فعال روی نمایش آن نسبت به همان چارت منعکس می‌شود.

اثبات هر دو ویژگی در نهایت به هموردایی فعال $\text{Aff}(G)$ کانولوشن‌های کلاسیک G -راهبری‌پذیر روی \mathbb{R}^d در معادله (۳۶۹) مตکی است.

۴.۹ CNN‌های اقلیدسی در مقالات

تمام مدل‌های موجود در ردیف‌های (۱-۲۶) جدول ۶، کانولوشن‌های GM همودانیت به $\text{Aff}(G)$ در فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d هستند که در بخش‌های قبل مورد بحث قرار گرفتند. آنها در ابعاد d فضای اقلیدسی، گروه ساختار G و در نتیجه گروه تقارن سراسری $\text{Aff}(G)$ ، نمایش‌های گروهی یا انواع

میدان ρ و انتخاب‌های گسته‌سازی متفاوت هستند. این بخش به طور خلاصه مدل‌ها را با گروه‌بندی آنها بر اساس انواع میدانشان به مدل‌های نمایش تحویل ناپذیر،^{۱۰} مدل‌های نمایش منظم (متاظر با کانولوشن‌های گروهی) و انواع آنها، مدل‌های نمایش خارج‌قسمتی و غیره مورد بحث قرار می‌دهد. CNN‌های متعارف، که ابتدا آنها را مرو رمی‌کنند، کمی از این طبقه‌بندی خارج می‌شوند زیرا گروه ساختاری بدیهی آنها منجر به میدان‌های ویژگی و کرنل‌هایی بدون هیچ‌گونه محدودیت تقارنی می‌شود.

ردیف (۱) کانولوشن‌های G اقلیدسی را روی $\{e\}$ -ساختارهای ناوردای انتقالی فهرست می‌کند که در شکل ۴۳ به تصویر کشیده شده است. به دلیل بدیهی بودن گروه ساختار $\{e\} = G$ ، هیچ تبدیل پیمانه‌ای (غیربدیهی) وجود ندارد و تنها انتخاب ممکن برای نمایش گروه، نمایش بدیهی است. بنابراین، محدودیت راهبری‌پذیری G -بدیهی می‌شود، به طوری که فضای کرنل‌های کانولوشن قابل قبول، نامحدود باقی می‌ماند. هنگامی که از طرق یک چارت به \mathbb{R}^d پولبک شود، کانولوشن G طبق قضیه ۹.۷ به یک کانولوشن (همیستگی) متعارف تبدیل می‌شود. قضیه ۹.۸ همودایی انتقالی آن را تأیید می‌کند. بنابراین، دیده می‌شود که این مدل‌ها با شبکه‌های کانولوشنی متعارف توسعه دارند.^{۱۱}

تمام مدل‌های اقلیدسی دیگر در ردیف‌های ۲۶-۲۷ گروه‌های ساختاری غیربدیهی را در نظر می‌گیرند. می‌توان آنها را به عنوان کانولوشن‌های متعارف روی \mathbb{R}^d با محدودیت اضافی بر روی کرنل‌ها برای G -راهبری‌پذیر بودن در نظر گرفت، که همودایی (G) آنها را تضمین می‌کند.

ویژگی‌های نمایش تحویل ناپذیر (Irrep): شبکه‌های موجود در ردیف‌های (۴)، (۹)، (۱۰)، (۱۷)، (۲۳) و (۲۶) بر روی میدان‌های ویژگی عمل می‌کنند که مطابق با نمایش‌های تحویل ناپذیر (irreps) از $G = \text{SO}(n)$ است. G که در ردیف (۴) فهرست شده است، این امر به شبکه‌های به اصطلاح هارمونیک منجر می‌شود.^{۱۲} این نام از این واقعیت نشأت می‌گیرد که محدودیت کرنل در این حالت فقط به هارمونیک‌های دایره‌ای با مکان‌یابی طیفی فرکانس $n - m$ اجازه می‌دهد، هنگام نگاشت بین میدان‌هایی که مطابق با نمایش‌های تحویل ناپذیر مرتبه n در رودی و مرتبه m در خروجی تبدیل می‌شوند.^{۱۳} محدودیت بازتابی اضافی برای $G = \text{SO}(n)$ که در ردیف (۱۰) فهرست شده است، قوانین انتخاب پارهی را اضافه می‌کند که فاز هارمونیک‌های دایره‌ای را ثابت می‌کند و نیمه از درجهات آزادی را در مقایسه با حالت $G = \text{SO}(2)$ سرکوب می‌کند.^{۱۴} مدل‌های در ردیف (۱۷) نمایش‌های تحویل ناپذیر $G = \text{SO}(3)$ را در نظر می‌گیرند و بنابراین می‌توان آنها را به عنوان مشاهه مدل‌های ردیف (۴) در سه بعد در نظر گرفت. فضای کرنل‌های معتبر برای نگاشت بین میدان‌هایی که مطابق با نمایش‌های تحویل ناپذیر (ماتریس‌های \square ویکتر) از مرتبه‌های m تبدیل می‌شوند، در اینجا توسعه تمام هارمونیک‌های کروی از $\min(m, n) + 1$ تا $\min(m, n) + 2$ مرتبه j با $m \leq j \leq m + n$ تولید می‌شود. همانطور که در [۱۵] اثبات شده است، این امر به هر گروه ساختاری فشرده تعیین می‌باشد، و فرکانس‌های مجاز هارمونیک‌ها توسعه ضرایب متناظر کلیش-گوردون که با mn و j بزرگ‌گذاری شده‌اند، تعیین می‌شوند. نوعی از این رویکرد در ردیف (۲۳) فهرست شده است [۱۶]. یک کانولوشن از یک میدان اسکالار ورودی با هارمونیک‌های کروی، میدان‌های نمایش تحویل ناپذیر از مرتبه متناظر را تولید می‌کند. با این حال، به جای پردازش پیشتر این ویژگی‌های نمایش تحویل ناپذیر از طریق کانولوشن‌ها، نویسنده‌گان نرم آنها را محاسبه می‌کنند. این کار منجر به میدان‌های اسکالار می‌شود که در لایه بعدی به همین روش پردازش می‌شوند. مدل [۱۷] در ردیف (۲۶) متریک استاندارد اقلیدسی را فرض نمی‌کند بلکه متریک مینکوفسکی را در نظر می‌گیرد. گروه ساختاری آن گروه لورنسی ($G = \text{SO}(d-1, 1)$) و گروه تقارن سراسری، گروه پوانکاره است. علاوه بر ساختن شبکه هموداده، نویسنده‌گان الگوریتمی را برای محاسبه نمایش‌های تحویل ناپذیر گروه‌های از ثوابت ساختاری جبر لی آنها پیشنهاد می‌کنند.

یک مورد خاص از نمایش‌های تحویل ناپذیر، نمایش‌های بدیهی هستند که بردارهای G -ناوردا (اسکالارها) را توصیف می‌کنند. به دلیل ناوردادی، چنین ویژگی‌هایی نمی‌توانند تفاوت بین هیچ الگویی را در ژست‌های مرتب با G کدگذاری کنند. محدودیت روحی کرنل‌هایی که بین میدان‌های اسکالار نگاشت انجام می‌دهند، به $K(gv) = K(v)$ در ردیف (۱۸) معرفی شده است. K برای هر $v \in \mathbb{R}^d$ و هر $g \in G$ تبدیل می‌شود، که کرنل‌هایی را که در هر کانال به طور جداگانه تحت عمل G ناوردا هستند، تحلیل می‌کنند. این برای بازتاب‌های G در رودی بالا سمت چپ جدول ۳ به تصویر کشیده شده است. تفسیر شبکه پیکسلی یک تصویر به عنوان یک گراف و اعمال یک کانولوشن گراف استاندارد بر روی آن، متناظر با یک کانولوشن با راهبری‌پذیری بدیهی با کرنل‌های ۲-ناوردا است زیرا کانولوشن‌های گراف استاندارد کرنل‌های همسان‌گرد را اعمال می‌کنند.^{۱۹}

یک مزیت ویژگی‌های نمایش تحویل ناپذیر از دیدگاه عملی، ابعاد پایین و در تیجه مصرف حافظه کمتر برای هر میدان ویژگی است. با این حال، نتایج تجربی نشان می‌دهد که کانولوشن‌های راهبری‌پذیر مبتنی بر میدان نمایش تحویل ناپذیر معمولاً عملکرد پایین‌تری نسبت به انواع دیگر میدان‌ها، به عنوان مثال آنها بیشتر می‌کنند. این گزاره در ارزیابی ما از کانولوشن‌های موبیوس در بخش ۲.۴.۵ و بنچمارک کانولوشن‌های اقلیدسی هموداده ایزو‌متری در [۲۰] معنکس شده است.

ویژگی‌های منظم و کانولوشن‌های گروهی: احتمالاً بر جسته‌ترین دسته از نمایش‌های گروهی در یادگیری عمیق هموداده، نمایش‌های منظم از گروه‌های ساختاری هستند. نمایش‌های منظم بر روی یک فضای مناسب^{۲۱} از توابع $\mathbb{R} \rightarrow G$ با انتقال آنها عمل می‌کنند، یعنی $F(\tilde{g})F(g) = F(\tilde{g}^{-1}g)$.^{۲۲} برای گروه‌های متناهی، این به معنای میدان‌های ویژگی با تعداد کانال‌های $|G|$ است که توسعه مرتبه گروه داده می‌شود. از آنجا که گروه‌های غیرمتناهی به معنای نمایش‌های منظم غیرمتناهی هستند، ویژگی‌های منظم مربوطه در عمل گسته‌سازی می‌شوند،

^{۱۹} هنگام در نظر گرفتن نمایش‌های تحویل ناپذیر مختلط از $\text{SO}(2)$ فقط فرکانس $n - m$ مجاز است. برای نمایش‌های تحویل ناپذیر حقیقی، محدودیت به فرکانس‌های $|m - n|$ و $n + m$ اجازه می‌دهد. جزئیات بیشتر را می‌توان در پیوستهای از [۲۰.۵] و [۲۰.۱] و [۲۰.۲] از [۲۱] یافت.

^{۲۰} به عنوان مثال، برای گروه‌های توبولوژیکی، توابع معمولاً باید پیوسته باشند. برای گروه‌های فشرده محلی معمولاً فضای (G) از توابع انتگرال‌پذیر مربع روی G در نظر گرفته می‌شود.^{۲۲}

^{۲۱} نمایش‌های منظم روی یک میدان \mathbb{K} متفاوت از اعداد حقیقی، مقداری در این میدان می‌گیرند، یعنی $\mathbb{K} \rightarrow G : F$.

که عمدتاً با در نظر گرفتن یک زیرگروه متناهی از گروه ساختاری انجام می‌شود. از آنجا که میدان‌های ویژگی منظم $\{f\} \in \Gamma(\mathcal{A})$ یک تابع $f^A(p) : G \rightarrow \mathbb{R}$ را به هر نقطه $p \in M$ اختصاص می‌دهند (هنگامی که نسبت به هر پیمانه A در p بیان می‌شوند)، آنها با توابع با مقادیر حقیقی $\tilde{f} : GM \rightarrow \mathbb{R}$ روی G -ساختار GM معادل هستند.^{۹۹} برای حالتی که GM توسط یک اطلس (G) القا می‌شود، این علاوه بر این با توابع با مقادیر حقیقی $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (در امتداد ایزومورفیسم در معادله (۳۸۴)) معادل است. نگاشت‌های خطی همورداً بین توابع روی گروه $\text{Aff}(G)$ کانولوشن‌های گروهی هستند (به معادله (۶۰۱)) در بخش ت و بخش ۱۱.۷ در [۴] مراجعه کنید)، که به این معنی است که های مبتنی بر کانولوشن گروه افانی توسط چارچوب ما پوشش داده می‌شوند [۴] [۵].

کانولوشن‌های گروهی $\text{Aff}(G)$ در جدول ۶ در ردیف‌های (۲۵) و (۲۶) فهرست شده‌اند. از آنجا که این مدل‌ها عموماً تصاویر خاکستری یا اسکالر را پردازش می‌کنند، آنها یک کانولوشن اولیه از میدان‌های اسکالر به میدان‌های منظم اعمال می‌کنند، و به دنبال آن کانولوشن‌های گروهی، یعنی کانولوشن‌ها از میدان‌های منظم به منظم را انجام می‌دهند. از آنجا که نمایش‌های منظم، نمایش‌های جایگشتی هستند، آنها عموماً غیرخطی‌های نقطه‌ای مانند ReLU را به هر یک از کانال‌های میدان به طور جداگانه اعمال می‌کنند.^{۱۰۰} CNN همورداً بازتابی روی \mathbb{R} از [۴] در ردیف (۳) کرنل‌های \mathcal{R} -راهبری‌پذیر را اعمال می‌کند، همانطور که در بخش ۵ استخراج شده و در ورودی پایین سمت جدول ۳ به تصویر کشیده شده است. از آنجا که گروه بازتاب متناهی با مرتبه $|R| = 2$ است، میدان‌های ویژگی منظم دارای دو کanal هستند که هر کدام به یکی از دو جهت گیری چارچوب از \mathcal{R} -ساختار در شکل ۴۳ مرتب است. مدل حاصل به صورت سراسری $\mathcal{T}_2 \times \mathcal{R} = \text{Aff}(\mathcal{R})$ است. برای ساخت کانولوشن‌های گروهی (۲) $\text{SE}(\text{SO}(2))$ -همورداً، در تئوری باید (۲) $\text{SO}(2)$ -ساختار را در شکل ۴۳ با میدان‌های ویژگی که مطابق با نمایش منظم (۲) $\text{SO}(2)$ -تبدیل می‌شوند، در نظر گرفت. در عمل، اکثر مدل‌های ردیف (۵) از جدول ۶ از طریق نمایش‌های منظم گروه‌های دوری (۲) $C_N \leq \text{SO}(2)$ که زیرگروه‌های متناهی از دوران‌های گستته با مضرب‌هایی از $N/2\pi$ هستند، تقریب می‌زنند. از آنجا که مرتبه این گروه‌ها $|C_N| = N$ است، میدان‌های ویژگی متناظر N -بعدی هستند. در حالی که عملکرد مدل در ابتدا به طور قابل توجهی با N افزایش می‌یابد، به طور تجربی مشخص شده است که در جدول ۸ تا ۱۲ جهت نمونه‌بارداری شده به اشاعر مرسد [۴] [۵]. برای درک شهودی از فضاهای کرنل‌های C_N -راهبری‌پذیر به تصاویر در [۴] [۵] مراجعه می‌کنیم. کانولوشن‌های گروهی (۲) $\text{E}(\mathcal{R})$ -هموردا در ردیف (۱۱) به طور مشابه از طریق زیرگروه‌های دووجهی $2 \leq D_N$ که از N دوران، هر کدام در دو بازتاب، تشکیل شده‌اند، تقریب زده می‌شوند. میدان‌های ویژگی در این حالت $D_N = 2N$ -بعدی هستند. همورداًی هم‌زمان تحت انتقال و مقایسه‌بندی توسط کانولوشن‌های گروهی $\mathcal{T}_d \times \mathcal{S} = \text{Aff}(\mathcal{S})$ در ردیف‌های (۲) و (۱۵) به دست می‌آید. گروه مقایسه‌بندی در اینجا عموماً گسته‌سازی می‌شود. از آنجا که این کار هنوز به یک مرتبه گروه (شمارا) نامتناهی منجر می‌شود، پیاده‌سازی‌ها برش‌هایی را عرفی می‌کنند، یعنی مقایس‌های حداقل و حداکثر همانطور که توسط چارچوب‌ها در شکل ۴۳ نشان داده شده است. توجه داشته باشد که این امر به اثرات مزی متابه کانولوشن‌هایی متعارف در لیه یک تصویر متخر می‌شود. مدل‌های ردیف‌های (۱۹) و (۲۱) نسبت به انتقال‌ها، دوران‌ها و بازتاب‌ها در فضاهای اقلیدسی سه‌بعدی \mathbb{E}^3 -هموردا هستند. در حالی که [۴] یک گسته‌سازی مونت کارلو از نمایش منظم را انتخاب می‌کنند، مدل‌های [۴] [۵] بر اساس زیرگروه‌های گستته مختلف از (۳) $\text{SO}(3)$ یا ۳ هستند. یک محدودیت فعلی مدل‌های همورداًی دورانی و بازتابی مبتنی بر کانولوشن گروهی در سه بعد، نیاز بالای آنها به حافظه و محاسبات است. به عنوان مثال، گروه تقارن مکعب، که هنوز وضوح نسبتاً درشتی از دوران‌ها با $2/\pi$ دارد، در حال حاضر از ۴۸ اضعه گروه تشکیل شده است که به معنای میدان‌های ویژگی ۴۸-بعدی در فضای سه‌بعدی است. از سوی دیگر، تعداد زیاد تقارن‌ها نشان‌دهنده کارایی داده بسیار بهبود یافته چنین مدل‌هایی است: نویسندهان [۴] عملکرد یکسانی را از یک مدل هموردا در مقایسه با یک شبکه غیرهموردا (قابل راهبری با $\mathcal{C}(\mathcal{E})$) گزارش می‌دهند علی‌رغم اینکه روی یک مجموعه داده ۱۰۰ برا بر کوچکتر آموزش دیده‌اند. مدل‌های ردیف‌های (۲۴) و (۲۵) E^3 -روی \mathbb{E}^3 کانولو می‌کنند، با این حال، آنها گروه‌های ساختاری دوری و دووجهی \mathcal{C}_4 و D_4 را در نظر می‌گیرند، یعنی دوران‌ها و بازتاب‌های صفحه‌ای حول محور \mathbb{Z} (که به این ترتیب تعریف شده است). بنابراین کرنل‌های راهبری‌پذیر آنها مشابه کرنل‌های مدل‌های ردیف‌های (۵) و (۱۱) هستند اما علاوه بر این در یک جهت جدید \mathbb{Z} -گسترش می‌یابند.

تجمیع از منظم به اسکالر و بردار: یک نوع از شبکه‌های کانولوشنی گروهی، مدل‌های ردیف‌های (۷۸، ۱۳، ۱۶) و (۲۰) هستند که با regular vector بر جسب گذاری شده‌اند. پس از اعمال یک کانولوشن به میدان‌های ویژگی منظم، آنها یک عملیات تجمیع \max را روی کanal‌ها انجام می‌دهند که منجر به میدان‌های اسکالر (بدیهی) می‌شود [۴] [۵]، یا یک تجمیع \max به همراه یک argmax ، که از آن می‌توان میدان‌های برداری را محاسبه کرد [۴] [۵]. کانولوشن‌های بعدی از میدان‌های اسکالر یا برداری حاصل به میدان‌های ویژگی منظم نگاشت می‌یابند. از آنجا که عملیات تجمیع تعداد کanal‌ها را به طور قابل توجهی از $|G|$ به ترتیب به ۱ یا d کاهش می‌دهد، مدل‌های از نظر حافظه و محاسبات کارآمدتر از کانولوشن‌های گروهی متعارف می‌شوند. نقطه ضعف این است که تجمیع با از دست دادن اطلاعات همراه است، که به طور تجربی مشخص شده است که عملکرد مدل را کاهش می‌دهد [۴].

ویژگی‌های خارج قسمتی: ردیف‌های (۶، ۱۲) و (۲۲) مدل‌هایی را فهرست می‌کنند که میدان‌های ویژگی آنها مطابق با نمایش‌های خارج قسمتی از گروه ساختاری تبدیل می‌شوند، که نمایش‌های جایگشتی مشابه نمایش‌های منظم هستند. با توجه به یک زیرگروه \widehat{G} از G ، نمایش خارج قسمتی متناظر بر

^{۹۹} قضیه ۱. در پیوست ح این ایزومورفیسم ($\text{GM} \cong \Gamma(\mathcal{A}_{\text{regular}})$) C^∞ را برای حالت عملی مرتبط که G یک گروه متناهی است، اثبات می‌کند.
۱۰۰ از آنجا که عمل نگاشت‌های غیرخطی به پایه انتخاب شده بستگی دارد، این همان چیزی است که واقعاً میدان‌های ویژگی منظم (یا هر میدان غیر تحویل‌ناپذیر دیگر) را از تجزیه آنها به میدان‌های نمایش تحویل‌ناپذیر تمایز می‌کند؛ به پاره‌قی ۱۴ و بحث در بخش ۲.۵ مراجعه کنید.



(ب) $\{e\}$ -ساختار ناوردای C_8 که به طور ضمنی توسط \mathbb{E}_2 فرض شده است.

(ت) $\{e\}$ -ساختار ناوردای (2) SO که به طور ضمنی توسط \mathbb{E}_2 فرض شده است.

شکل ۴۴: دو مثال از $\{e\}$ -ساختارها در صفحه سوراخ دار \mathbb{E}_2 که ۱) تحت دوران حول مبدأ $\{0\}$ ناوردای هستند و ۲) مشکل از چارچوب‌های راست‌هنجار نسبت به متريک اقليدسي استاندارد هستند. کانولوشن‌هاي GM متناظر، هموردای دوراني هستند اما هموردای انتقالی نیستند (در واقع، $\{0\}$ \mathbb{E}_2 حتی انتقال‌ها را نمی‌پذیرد).

روی توابع اسکالار $G/\widehat{G} \rightarrow \mathbb{R}$: F در فضای خارج قسمتی \widehat{G}/G از طریق انتقال عمل می‌کند، یعنی $(\rho_{\widehat{G}/G}^{G/\widehat{G}}(\tilde{g})F)(g\widehat{G}) = F(\tilde{g}^{-1}g\widehat{G})$. بنابراین ابعاد میدان‌های ویژگی با اندیس $|G|$ از \widehat{G} در G داده می‌شود که برای گروه‌های متناهی برابر با $|G|/|\widehat{G}|$ است. میدان‌های ویژگی که تحت نمایش‌های خارج قسمتی تبدیل می‌شوند را می‌توان به عنوان میدان‌های ویژگی منظم با تقارن محدود در نظر گرفت که مجبور نند مقدار یکسانی را روی تمام اعضای گروه در یک هم‌دسته \widehat{G} از G بگیرند. یک مثال خاص، نمایش‌های ردیف (22) هستند که با خارج قسمت $S^3 \cong S^2/2$ مرتبه هستند. به جای اجازه دادن به کرنل‌های کانولوشن دلخواه، محدودیت کرنل در اینجا به کرنل‌هایی منجر می‌شود که تحت دوران حول محور \mathbb{Z} ناوردای هستند؛ به تصاویر در [؟] مراجعه کنید. جزئیات بیشتر و یک شهود گرافیکی در مورد میدان‌های ویژگی مبتنی بر نمایش خارج قسمتی را می‌توان در پیوست ۶ از [؟] یافت. نظریه پیشنهادی در [؟] میدان‌های خارج قسمتی را از دیدگاه جایگزین کانولوشن‌های گروهی روی فضاهای خارج قسمتی راست پوشش می‌دهد.

نمایش‌های القایی: یک تعیین از نمایش‌های منظم و خارج قسمتی، نمایش‌های القایی مانند نمایش‌های تحويل ناپذیر القایی (2) SO در ردیف (14) از جدول ۶ هستند. با توجه به هر نمایش تحويل ناپذیر (2) $SO(n)$ به صورت $SO(2) \rightarrow GL(n)$ ، نمایش القایی (2) $Ind_{SO(2)}^{\mathbb{R}^n} \rho : 2 \rightarrow GL(c)$ از 2 با $n = 2n/2 = n$ به روش زیر عمل می‌کند: بازتاب‌ها دو زیرفضای n -بعدی و متعامد از \mathbb{R}^{2n} را که متناظر با دو هم‌دسته در $(2)/SO(2)$ هستند، جایگشت می‌کنند در حالی که دوران‌ها بر روی زیرفضاهای جداگانه از طریق ρ عمل می‌کنند. برای ρ که نمایش بدیهی از $SO(2)$ است، این کار نمایش‌های خارج قسمتی را همانطور که در بالا بحث شد، بازیابی می‌کند. در مقایسه با میدان‌های ویژگی نمایش تحويل ناپذیر 2 ، میدان‌های نمایش تحويل ناپذیر القایی (2) SO عملکرد به طور قابل توجهی بهبود یافته‌ای را نشان می‌دهند. توصیف دقیق‌تر و ارزیابی تجربی این انواع میدان را می‌توان در [؟] یافت.

آخرین نوع نمایش فهرست شده در جدول ۶، نمایش کواترنیونی از دوران‌های سه‌بعدی در ردیف (18) است [؟]. این از نمایش معمول دوران‌ها از طریق کواترنیون‌ها استفاده می‌کند، که بر شناسایی کواترنیون‌های واحد با (2) SU وجود یک همومورفیسم گروهی پوشش از (3) SU تکیه دارد. توجه داشته باشید که نمایش کواترنیونی در واقع یک نمایش تصویری از (3) SO است.

در حالی که نظریه ما بر روی فضاهای اقلیدسی پیوسته فرمول بندی شده است، پیاده‌سازی‌ها میدان‌های ویژگی را بر روی زیرمجموعه‌های گسسته نمونه‌برداری می‌کنند. رایج‌ترین گسسته‌سازی \mathbb{E}_d بر حسب شبکه‌ای پیکسلی \mathbb{Z}^d است. یک جایگزین، شبکه‌های صفحه‌ای شش‌ضلعی روی \mathbb{E}_2 است که توسط \mathbb{Z} بررسی شده است. اگر چنین شبکه‌های پیکسلی منظمی انتخاب شوند، یک پایه از کرنل‌های G -راهبری‌پذیر را می‌توان از پیش محاسبه کرد و بر روی این شبکه نمونه‌برداری کرد. داده‌هایی مانند رویدادها در فضای مانند \mathbb{R}^3 یا مولکول‌ها در \mathbb{R}^3 در عوض معمولاً با ابرهای نقطه نامنظم نمایش داده می‌شوند. در این حالت، کرنل‌ها باید به صورت تحلیلی داده شوند، که امکان نمونه‌برداری آنلاین آنها را در طول پاس مستقیم فراهم می‌کند.

در نهایت، می‌خواهیم اشاره کنیم که مدل‌های سراسری $Aff(G)$ -هموردا وجود دارند که به صورت محلی G -هموردا نیستند. یک مثال، تجمع ناوردای-تبدیل ($\mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$) [؟] است، که مجموعه‌ای از میدان‌های ویژگی تبدیل شده سراسری را به یک CNN متعارف می‌دهد و در نهایت ویژگی‌های حاصل را روی این تبدیلات تجمعی می‌کند، که منجر به یک توصیفگر ناوردای شود.

۱۰ CNN‌های هموردای دورانی در فضاهای اقلیدسی سوراخ‌دار

مدل‌های موجود در ردیف‌های (۲۷)–(۳۰) جدول ۶ یک جایگزین جالب برای کاتولوشن‌های هموردای دورانی در فضاهای اقلیدسی سوراخ‌دار $\mathbb{E}_d \setminus \{0\}$ ارائه می‌دهند. آنها بر G -ساختارهایی تکیه دارند که تحت دوران حول مبدأ انتخاب شده $\{0\}$ ناوردا هستند، همانطور که به عنوان مثال در شکل ۴۴ به تصویر کشیده شده است. با مشخص کردن یک مبدأ مرجع، این مدل‌ها ویژگی هموردای انتقالی را از دست می‌دهند.^{۱۰۱} با این حال، اگر G -ساختار علاوه بر این تحت مقیاس‌بندي ناوردا باشد، که به عنوان مثال زمانی که توسط مختصات فراکروی یا یک مؤلفه شعاعی لگاریتمی القامی شود، صادق است (همانطور که در شکل ۴۶ نشان داده شده)، مدل‌ها نسبت به حاصلضرب مستقیم $S^d \times S$ از گروه دوران و مقیاس‌بندي هموردا می‌شوند. به طور مشابه، G -ساختارهای ناورداي بازتابی، که در شکل ۴۵ به تصویر کشیده شده‌اند، بر هموردای d کاتولوشن‌های GM متاثر دلالت دارند.

این مدل‌ها به دو صورت به CNN‌های کروی، که در بخش ۱۱ در ادامه مورد بحث قرار می‌گیرند، مرتبط هستند. اولاً، آنها G -ساختارهای ناورداي دورانی را روی $\mathbb{E}_d \setminus \{0\} \cong S^{d-1} \times \mathbb{R}^+$ فرض می‌کنند، که می‌توان آنها را مشکل از چندین G -ساختار ناورداي دورانی روی پوسته‌های کروی $(d-1)$ -بعدی S^{d-1} در شعاع‌های مختلف در نظر گرفت. بنابراین می‌توان این مدل‌ها را به عنوان CNN‌های (فرما)کروی با یک بعد شعاعی اضافي \mathbb{R}^+ در نظر گرفت [۲۸]، که در شکل ۴۷ برای حالت $d=3$ بعد به تصویر کشیده شده است. ثانیاً، سیستم‌های مختصات قطبی [۲۹] (شکل‌های ۴۴ و ۴۶ G -ساختارهایی را القا می‌کنند که همان نوع تکینگی را در مبدأ خود نشان می‌دهند که CNN‌های کروی سوراخ‌دار در شکل ۵۰ ب در قطب‌ها دارند. توجه داشته باشید که صفحه اقلیدسی سوراخ‌دار $\{n, s\} \setminus \{0\}$ (با قطب‌های شمال و جنوب $\{n, s\}$ حذف شده) هر دو از نظر توپولوژیکی معادل یک استوانه $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ هستند و $S^1 \times \mathbb{R}^+$ $\cong S^1$ استوانه‌ای استوانه‌ای که در شکل‌های ۴۴، ۴۶ (چپ) و ۵۰ ب به تصویر کشیده شده‌اند، دیفُئومorfیک هستند.

یک تفاوت عمده در مقایسه با شبکه‌های $SE(d)$ -همورداز از بخش قبل این است که مدل‌های بخش فعلی فقط به صورت سراسری حول مبدأ $-SO(d)$ هموردا هستند به جای اینکه به صورت محلی $-SO(d)$ -هموردا ($-SO(d)$ -راهبری پذیر) باشند. در حالی که مدل‌های هموردای سراسری به کرنل‌های $-SO(d)$ -راهبری پذیر نیاز ندارند، آنها همچنان حداقل به کرنل‌های $-SO(d-1)$ -راهبری پذیر نیاز دارند. این به این دلیل است که $SO(d)$ یک کلاف (1) $SO(d-1) \cong SO(d)/SO(d-1)$ است که G -ساختار روی آن باید نسبت به دوران $SO(d)$ هموردا باشد. برای $d=2$ این امر به $\{e\}$ -ساختارها و کرنل‌های غیرراهبری پذیر اجازه می‌دهد زیرا $\{e\} = SO(1) = SO(d-1)$ باشد. برای $d=3$ این امر حداقل به یک $SO(d-1) = SO(2)$ -ساختار روی پوسته‌های کروی جداگانه نیاز دارد، که در شکل ۵۰ به تصویر کشیده شده است.

پس از این ملاحظات کلی، در ادامه به طور خلاصه مدل‌های جداگانه روی $\mathbb{E}_d \setminus \{0\}$ را که در مقالات یافت می‌شوند، از دیدگاه CNN‌های مستقل از مختصات مرور خواهیم کرد. ما با مدل‌های ردیف (۲۷) جدول ۶ شروع می‌کنیم، که نسبت به دورانهای (۲) $SO(d)$ حول یک مبدأ انتخاب شده از هموردا هستند و با مدل‌های ردیف (۲۸) ادامه می‌دهیم، که علاوه بر آن هموردای مقیاس هستند. شبکه فهرست شده در ردیف (۲۹)، که در آخر آن را مورد بحث قرار می‌دهیم، به صورت سراسری حول مبدأ \mathbb{E}_3 هموردای ۳ است.

هموردای دورانی سراسری روی $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$

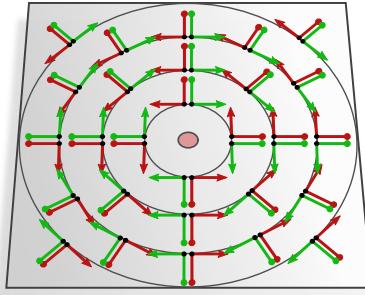
ما با مدل‌های مفهومی ساده‌تر شروع می‌کنیم، که شبکه‌های هموردای دورانی سراسری هستند و تنها بر $\{e\}$ -ساختارهای ناورداي دورانی روی $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ تکیه دارند [۲۹]. این مدل‌ها متريک اقلیدسی استاندارد را روی $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ فرض می‌کنند، که نسبت به آن چارچوب‌ها راست‌هنگار هستند. در مجموع، این دو الزام به $\{e\}$ -ساختارهایی منجر می‌شوند که در شکل ۴۴ نشان داده شده‌اند.

علاوه بر G -ساختارهای در نظر گرفته شده، شبکه‌ها به پیاده‌سازی خاص پول‌بک انتقال‌دهنده و در نتیجه به ژئودزیک‌ها و انتقال‌دهنده‌های موازی بستگی دارند. ژئودزیک‌های استاندارد در فضاهای اقلیدسی (یعنی خطوط مستقيمه) فرض می‌شوند، که متناظر با اتصال‌لوي-جويتا از متريک اقلیدسی است. از آنجا که $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ از نظر ژئودزیکی كامل نیست، برای نگاشت‌های نهایی که در مبدأ به پایان رسید، باید از پذينگ-صرف استفاده شود. توجه داشته باشید که این امر تأثيری بر نتیجه نهایی ندارد زیرا ژئودزیک‌های از دست رفته دارای اندازه صفر هستند.

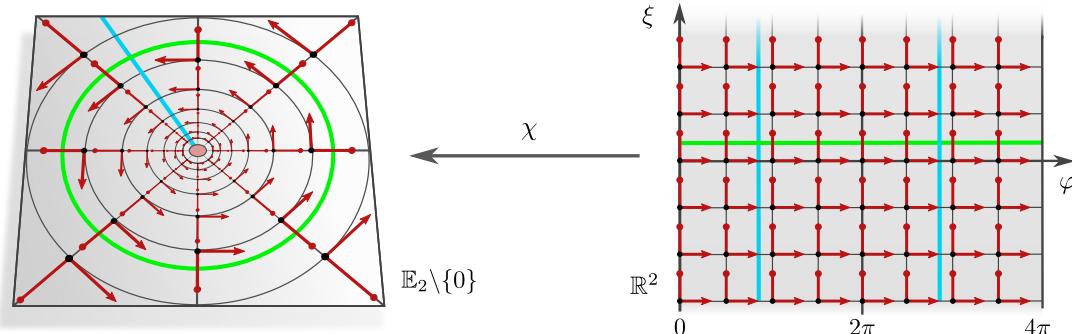
از سوی ديگر، انتقال موازی بردارهای ویژگی، با اتصال لوي-چيويانا مطابقت ندارد زیرا اتصال لوي-چيويانا با $\{e\}$ -ساختارها سازگار نیست. در عوض، مدل‌های اتصالات بدیهی یکتای $\{e\}$ -سازگار را فرض می‌کنند که توسط $\{e\}$ -ساختارهای مربوطه القامی شوند.^{۱۰۲} مطابق با اتصالات بدیهی، ضرایب عددی بردارهای ویژگی هنگام انتقال، تبدیل نمی‌شوند، علی‌رغم اینکه چارچوب‌ها نسبت به مفهوم معمول توازی در فضاهای اقلیدسی چرخانده می‌شوند. در عمل، این فقط به این معنی است که انتقال‌دهنده‌های $\text{id}_{\mathbb{R}^c} = (g_{\gamma}^{AA})\rho$ را می‌توان در پیاده‌سازی نادیده گرفت \square که دلیلی است که آنها در مقالات اصلی مورد بحث قرار نگرفته‌اند [۲۹].

^{۱۰۱} این مشکل را می‌توان با ترکیب شبکه با یک شبکه پيش‌بياني کننده مبدأ ناورداي انتقالی حل کرد [۲۹]. توجه داشته باشید که هموردای دورانی مدل ترکیبی تنه در صورتی حفظ می‌شود که این پيش‌بياني کننده مبدأ، $SE(d)$ -هموردا باشد.

^{۱۰۲} انيميشنی از انتقال $\{e\}$ -سازگار متناظر با شکل ۴۴ را می‌توان در ويکي‌پيديا یافت.



شکل ۴۵: یک \mathcal{R} -ساختار ۲-ناوردا روی $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ که با افزودن نسخه‌های بازتابیده به هر چارچوب از $\{e\}$ -ساختار در شکل ۴۴ ساخته شده است. کانولوشن GM متناظر به طور همزمان نسبت به دوران‌ها و بازتاب‌های سراسری در $2 \text{Isom}_{\mathcal{RM}} = 2$ حول مبدأ همودا است.



شکل ۴۶: مختصات لگاریتمی-قطبی $(\varphi, \xi) : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $(e^\xi \cos(\varphi), e^\xi \sin(\varphi)) \mapsto (\varphi, \xi) = \log \|p\|$ را به نقاط p در \mathbb{R}^* نگاشت می‌دهد. پس از انتخاب مختصات دکارتی برای $\{e\}$ - $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ توسط \mathbb{R}^* به دست می‌دهد. مختصات لگاریتمی-قطبی یک $\{e\}$ -ساختار را روی $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ القا می‌کند که شامل چارچوب‌های مرتع [$\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \xi}$] است که با شبکه مختصاتی تراز شده‌اند. آنها علاوه بر این یک متريک ريماني را القا می‌کنند که با متريک اقليدسي عمول متفاوت است و چارچوب‌های القا شده نسبت به آن راست‌هنگار هستند. کانولوشن‌های GM روی اين $\{e\}$ -ساختار متناظر با کانولوشن‌های اقليدسي متعارف در مختصات \mathbb{R}^* هستند. انتقال‌های T_γ ($\Delta\varphi, \Delta\xi$) در \mathbb{R}^* از طريق χ متناظر با دوران‌ها و تغيير مقیاس‌های $\{e\}$ هستند، که در آن زوایای دوران و فاكتورهای تغيير مقیاس به ترتیب با φ و $e^{\Delta\xi}$ داده می‌شوند. بنابراین، هموردایی انتقالی کانولوشن در مختصات \mathbb{R}^* بر هموردایی S بر $SO(2)$ هستند. $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ دلالت دارد. این نتیجه با هموردایي ايزومتری کانولوشن GM مطابقت دارد زیرا تبدیلات در $S \times SO(2)$ $\text{Isom}_{GM} = \text{Isom}_{SO(2)}$ نسبت به متريک القا شده، ايزومتری هستند. چنین کانولوشن‌های GM را بر حسب کانولوشن‌های متعارف روی \mathbb{R}^* پياده‌سازی می‌کنند.

از آنجا که دوران‌ها $\{e\}$ -ساختارهای در نظر گرفته شده را ناوردا باقی می‌گذارند و در عین حال ايزومتری هستند، ما داريم $\text{Isom}_{\{e\}M} = SO(2)$ برای مدل $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ و $C_A = \text{Isom}_{\{e\}M}$ برای مدل $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ (شکل ۴۴). قضيه ۸.۹ سپس تأييد می‌کند که کانولوشن‌های GM همودا هستند، که با گزاره‌های بيان شده توسيع نويستن گان مطابقت دارد.

قبل از ادامه می خواهيم اشاره کنیم که $\{e\}$ -ساختار $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ -ناوردا در شکل ۴۴ بپوشته نیست و بنابراین استنتاج پيوسته (يا هموار) را تضمین نمی‌کند. يک مزيت اين $\{e\}$ -ساختار از ديدگاه مهندسي اين است که به صورت محلی با $\{e\}$ -ساختار کانونی \mathbb{R}^* ايزومتریک است، که اجازه می‌دهد روال‌های کانولوشن اقلیدسی متعارف روی هر هشتک اجرا شوند. نويستن گان تعیین به $\{e\}$ -ساختارهای C_N -ناوردا را مورد بحث قرار می‌دهند، که در حد معادل $N \rightarrow \infty$ $\{e\}$ -ساختار $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ -ناوردا در شکل ۴۴ می‌شوند.

علاوه بر اين، با استفاده از کرنل‌های راهبری پذير بازتابی به جاي کرنل‌های نامحدود، می‌توان مدل‌ها را به صورت سراسری ۲-هموردا ساخت. از ديدگاه نظری، اين متناظر با \mathcal{R} -ساختار \mathcal{R} -ناوردار $\text{Isom}_{\mathcal{RM}} = 2$ روی $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ است که در شکل ۴۵ نشان داده شده است. توجه داشته باشيد که \mathcal{RM} يک كلاف \mathcal{R} روی $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ است، که تحديد آن به دايره‌هایي با شعاع ثابت، به عنوان يک كلاف اصلی، با ۲ که به عنوان يک كلاف \mathcal{R} روی فضای خارج قسمتی $S^1 / \mathcal{R} \cong S^1 / 2$ فرسير می‌شود، ايزومورف است.

هموردایی سراسری دورانی و مقیاسی روی $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ از طریق مختصات لگاریتمی-قطبی

با ناوردا کردن G -ساختارهای دورانی از بخش قبل نسبت به مقیاس، کانولوشن‌های GM متناظر نسبت به گروه حاصلضرب مستقیم $S \times SO(2)$ همودا می‌شوند. چنین G -ساختارهایی توسط مختصات لگاریتمی-قطبی القا می‌شوند، که در شکل ۴۶ نشان داده شده است و امكان يک پياده‌سازی راحت از کانولوشن GM را بر حسب کانولوشن‌های اقلیدسی متعارف روی \mathbb{R}^2 فراهم می‌کند. هموردایی انتقالی \mathbb{R}^2 سپس متناظر با هموردایی $S \times SO(2)$ روی $\mathbb{E}_2 \setminus \{0\}$ است. برای وضوح، ما با توصیف مدل بر حسب مختصات لگاریتمی-

قطبی همانطور که توسط φ پیشنهاد شده، شروع می‌کنیم.^{۱۰۳} متعاقباً، ما بررسی می‌کنیم که چگونه این مدل و ویژگی‌های آن در چارچوب ما توضیح داده می‌شوند.

مختصات لگاریتمی-قطبی فضای برداری اقلیدسی سوراخ دار $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ بر حسب پوشای هموار زیر تعریف می‌شود:

$$\chi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, (\varphi, \xi) \mapsto (e^\varphi \cos(\varphi), e^\varphi \sin(\varphi)), \quad (414)$$

که نقاط $(\varphi, \xi) = p$ را در $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ به یک زاویه قطبی داده شده $\varphi \in \mathbb{R}$ و لگاریتم-شعاع $\xi = \log \|p\| \in \mathbb{R}$ نگاشت در مختصات زاویه‌ای -2π -متناوب است (به تکرار نوار آبی در سمت راست شکل ۴۶ توجه کنید) و بنابراین به طور خاص یک‌به‌یک نیست. یک تحدید به $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ دوسره و پیوسته خواهد بود، اما همسان ریخت نخواهد بود^{۱۰۴} این امر ما را ملزم می‌کند که در ادامه حداقل دو چارت را برای پوشش صفحه سوراخ دار در نظر بگیریم. مختصات دکارتی $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ را با (x, y) یکی می‌گیرد و بنابراین اجازه می‌دهد که مختصات لگاریتمی-قطبی به دومی اختصاص داده شود. از آنجا که سیستم‌های مختصات دکارتی مختلف (راستگرد) که در مبدأ $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ متumer کر شده‌اند فقط در دوران‌ها متفاوت هستند، تخصیص مختصات لگاریتمی-قطبی با یک جابجایی در مؤلفه زاویه‌ای مبهم است.

با توجه به یک نقشه ویژگی $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow M$ (یک میدان ویژگی مرتبط با M)، همانطور که در ادامه روشن می‌شود،^{۱۰۵} پولبک آن با $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^c$ را از طریق مختصات لگاریتمی-قطبی در نظر می‌گیرنده، که توسط جابجایی نمودار زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\chi} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^c \quad (415)$$

یک کانولوشن گروهی هموردای دورانی و مقیاسی از میدان ویژگی f روی $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ سپس به صورت زیر تعریف می‌شود: ^{۱۰۶} ۱ پولبک آن از طریق χ به مختصات \mathbb{R}^2 اعمال یک کانولوشن اقلیدسی متعارف در آنجا و^{۱۰۷} نگاشت نتیجه به $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. این روش خوش تعریف است زیرا χ هموار است، به طوری که نقشه‌های ویژگی (میدان‌های ویژگی) هموار f منجر به پولبک‌های هموار و متناوب \tilde{f} می‌شوند. از آنجا که کانولوشن‌ها مستقل از موقعیت هستند، نقشه ویژگی خروجی آنها همچنان متناوب و هموار خواهد بود و بنابراین به طور یکتا به یک نقشه ویژگی هموار روی $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ متناظر است.

هموردای دورانی و مقیاسی کانولوشن گروهی ضمنی روی $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ از هموردایی انتقالی تابع مختصاتی χ نتیجه می‌شود.^{۱۰۸} فرض کنید (φ, ξ) هر مختصاتی در \mathbb{R}^2 باشد و $(\Delta\varphi, \Delta\xi)$ هر انتقالی در \mathcal{T}_2 باشد. نقطه $\chi(\varphi + \Delta\varphi, \xi + \Delta\xi)$ است، سپس به نقطه متناظر با مختصات منتقل شده (φ, ξ) از طریق یک مقیاس‌بندی با ضریب $e^{\Delta\varphi}$ و دوران با زاویه φ مرتبط می‌شود:

$$\begin{aligned} \chi(\varphi + \Delta\varphi, \xi + \Delta\xi) &= e^{\xi + \Delta\xi} \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \Delta\varphi) \\ \sin(\varphi + \Delta\varphi) \end{pmatrix} \\ &= e^{\Delta\xi} \begin{pmatrix} \cos(\Delta\varphi) & -\sin(\Delta\varphi) \\ \sin(\Delta\varphi) & \cos(\Delta\varphi) \end{pmatrix} e^\xi \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= e^{\Delta\xi} \begin{pmatrix} \cos(\Delta\varphi) & -\sin(\Delta\varphi) \\ \sin(\Delta\varphi) & \cos(\Delta\varphi) \end{pmatrix} \chi(\varphi, \xi) \\ &=: (\Delta\varphi, \Delta\xi) \triangleright \chi(\varphi, \xi) \end{aligned} \quad (416)$$

بر حسب یک نمودار، این بدان معناست که

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{(\Delta\varphi, \Delta\xi) +} & \mathbb{R}^2 \\ \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\ \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{(\Delta\varphi, \Delta\xi) \triangleright} & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \end{array} \quad (417)$$

^{۱۰۳} ایده پیاده‌سازی همبستگی‌های ناوردای دورانی از طریق تبدیلات لگاریتمی-قطبی پیش از این در دهه ۸۰ میلادی ظاهر شده بود [۱۰۹].
^{۱۰۴} برای دیدن این موضوع، توجه داشته باشید که χ یک نگاشت خارج قسمتی است (زیرا بخش زاویه‌ای آن یک نگاشت خارج قسمتی $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong S^1$ است). برای نقشه‌های ویژگی پیوسته (به جای هموار) این گرایه از ویژگی جهانی فضاهای خارج قسمتی نتیجه می‌شود؛ به عنوان مثال به ویکی‌پدیا مراجعه کنید. از آنجا که همواری یک تابع به عنوان مشتق‌پذیری پیوسته آن تعریف می‌شود، ویژگی جهانی را می‌توان به صورت بازگشتی اعمال کرد تا نشان دهد که این گرایه برای نقشه‌های ویژگی هموار نیز برقرار است.

^{۱۰۵} اینکه این امکان‌پذیر است به این واقعیت بستگی دارد که یک همومورفیسم گروهی $(\Delta\varphi, \Delta\xi) \mapsto SO(2) \times \mathcal{S}$ وجود دارد که توسط ایزومورفیسم گروهی $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}_1$ روی عامل دوم و همومورفیسم گروهی (نگاشت خارج قسمتی) $\mathcal{T}_1 \rightarrow SO(2) \cong \mathcal{T}_1/2\pi\mathbb{Z}$ را ایجاد می‌کند. اول تعریف می‌شود، که در آن $R_{\Delta\varphi}$ ماتریس دوران با زاویه φ را نشان می‌دهد.

برای انتقالات دلخواه، جایجایی است. این به همراه هموردایی انتقالی کانولوشن‌های متعارف روی \mathbb{R}^3 دلالت بر این دارد که نقشه‌های ویژگی ورودی دوران یافته و مقیاس شده روی $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$ منجر به نقشه‌های ویژگی خروجی دوران یافته و مقیاس شده روی $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$ خواهد شد، یعنی هموردایی $\text{SO}(2)$ کانولوشن روی $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$ جزئیات بیشتر در مورد این دیدگاه در $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$ یافت می‌شود.

اکنون این عملیات کانولوشن و ویژگی‌های آن را از دیدگاه کانولوشن‌های GM مستقل از مختصات بازیستی می‌کنیم. برای این کار، یک اطلس از چارت‌ها را در نظر می‌گیریم که با مختصات لگاریتمی-قطبی سازگار هستند و $\{e\}$ -ساختار، پیمانه‌ها، متريک ریمانی، ژئودزیک‌ها و انتقال موازی القا شده توسط آن را مورد بحث قرار می‌دهیم. هموردایی ادعاه شده \mathcal{S} بالاصله از هموردایی $\text{Isom}_{\{e\}M}$ نتیجه می‌شود. برای راحتی نمادگذاری، ما دوباره $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$ را از طریق یک انتخاب از مختصات دکارتی با $\{e\}$ یکی می‌گیریم.

از آنجا که تحدید $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$ به زوایای غیرزاویه، دوسویه و پیوسته است، ممکن است وسسه شویم که وارون آن را به عنوان یک چارت مختصاتی در نظر بگیریم. این کار، با این حال، ممکن نیست، زیرا $\tilde{\chi}$ یک همسان‌ریختی نیست، همانطور که برای چارت‌ها لازم است. در عوض، ما یک اطلس مشکل از دو چارت را در نظر می‌گیریم که بر حسب تحدیدهایی از χ تعریف شده‌اند و $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$ را پوشش می‌دهند. یک انتخاب خاص، تعریف همدامنه‌های چارت به عنوان مجموعه‌های باز $V^B = (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^A = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^A$ است و برای $\epsilon < \pi < 0$ است و برای $X = A, B$ $\text{U}^X = \chi(V^X)$ بر صورت $\text{U}^X \rightarrow V^X = (\chi|_{VX})^{-1}$ است. به طور شهودی، این اطلس همان کاری را انجام می‌دهد که تلاش ساده‌لوحانه برای تعریف چارت‌ها به عنوان وارون $\tilde{\chi}$ انجام می‌داد. تفاوت مهم، با این حال، این است که چارت‌ها دیشومورفیک هستند، که برای اطمینان از همواری تمام عملیات ضروری است.

طبق معمول، این چارت‌ها میدان‌های چارچوب محلی و تربوپالیزاسیون‌های کلاف را به ترتیب روی U^A و U^B القا می‌کنند. به راحتی می‌توان دید که نگاشت‌های گذار $\text{g}_{pB}^{BA} = \frac{\partial x^B}{\partial x^A}|_{x^A(p)}$ روی $U^A \cap U^B$ بدهی هستند، که این نتیجه می‌دهد که احتمام میدان‌های چارچوب یک $\{e\}$ -ساختار هموار M را روی $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$ تعریف می‌کند. این پایه‌های مختصاتی، که در مقالات اغلب با $\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial \xi}, & \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{array} \right]$ نشان داده می‌شوند، در شکل (۴۶) (چپ) نشان داده شده‌اند. محاسبه ما در معادله (۴۶) در بالا دلالت بر این دارد که $\{e\}$ -ساختار القا شده \mathcal{S} تاوارد است.

چارت‌ها علاوه بر این یک متريک ریمانی را القا می‌کنند که با متريک اقلیدسی معمول روی $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$ متفاوت است. این متريک به عنوان پول‌بک متريک اقلیدسی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ در همدامنه‌های چارت‌ها تعریف می‌شود و بنابراین به صورت نقطه‌ای با

$$\eta_p(v, w) := \langle \hat{dx}_p^X(v), \hat{dx}_p^X(w) \rangle_{\mathbb{R}}, \quad (418)$$

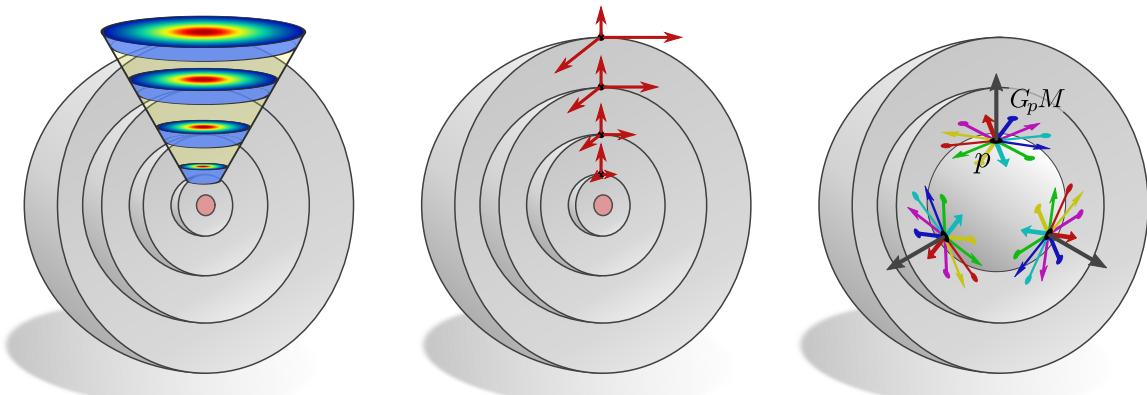
داده می‌شود، که در آن $v, w \in T_p M$ و $X \in \mathcal{S}$ هر یک از چارت‌هایی را که در آن $p \in U^X$ نشان می‌دهد، مشخص می‌کند. $\{e\}$ -ساختار القا شده توسط چارت، بنا به ساختار، از چارچوب‌هایی تشکیل شده است که نسبت به این متريک القا شده توسط چارت، راست‌هنگاری هستند، حتی اگر این چارچوب‌ها با افزایش شعاع هنگام اندازه گیری نسبت به متريک اقلیدسی استاندارد، رشد کنند. اتصال لوی-چیویتا برای متريک القا شده با اتصال اقلیدسی معمول متفاوت است و بنابراین ژئودزیک‌ها و انتقال‌دهنده‌های موازی جایگزینی را نتیجه می‌دهد. از آنجا که متريک از طریق چارت‌ها پول‌بک می‌شود، ژئودزیک‌ها متناظر با خطوط مستقیم در همدامنه‌های چارت‌ها هستند \square یک مثال، خطوط مختصاتی روی $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$ در شکل (۴۶) است. انتقال موازی نیز متناظر با انتقال معمول در همدامنه‌های چارت‌ها است، که این نتیجه می‌دهد که بردارهای منتقل شده را در یک زاویه ثابت نسبت به خطوط مختصاتی روی $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$ نگه می‌دارد؛ پاورقی 10° را مقایسه کنید. توجه داشته باشید که این همان انتقالی است که قبلاً در مدل‌های متناظر با شکل های (۴۶) در بالا مورد بحث قرار گرفت، که در آنجا انتقال متناظر با اتصال لوی-چیویتا نبود زیرا آن مدل‌ها متريک استاندارد را روی $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$ به جای متريک القا شده توسط چارت فرض می‌کردند.

ایزومتری‌های حافظ $\{e\}$ -ساختار \mathcal{S} به متريک القا شده توسط چارت با دوران‌ها و تغییر مقیاس‌های $\{e\}$ -ساختار نسبت به متريک اقلیدسی معمول داده می‌شوند. قضیه ۸.۹ بر هموردایی $\text{SO}(2) \times \mathcal{S}$ کانولوشن GM متناظر دلالت دارد \square که گزاره بیان شده توسط \square را در نظریه ما بازیابی می‌کند. همانطور که در بالا گفته شد، این واقعیت که متريک از طریق چارت‌ها القا می‌شود به این معنی است که تمام عملیات هنگام بیان در چارت به عملیات اقلیدسی معمول خلاصه می‌شوند. بنابراین کانولوشن GM به بهترین وجه از طریق یک کانولوشن متعارف روی چارت پیاده‌سازی می‌شود، همانطور که توسط \square پیشنهاد شده است.

توجه داشته باشید که هموردایی $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ کانولوشن GM به راحتی به هموردایی $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ که شامل بازتاب‌ها نیز می‌شود، قابل تعمیم است. این کار با انجام یک کانولوشن هموردایی بازتابی در چارت پیاده‌سازی می‌شود، که متناظر با \mathcal{R} -ساختار نشان داده شده در شکل (۴۳) است. روی $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$ این امر به یک \mathcal{R} -ساختار منجر می‌شود که شیوه به ساختار در شکل (۴۵) در بالا است، با این تفاوت که \mathcal{R} -ساختار علاوه بر این تحت یک تغییر مقیاس سراسری نیز ناوردا است.

هموردایی دورانی سراسری روی $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$

ایده‌های ارائه شده در بالا را می‌توان به محیط سه‌بعدی، یعنی به فضای اقلیدسی سوراخ‌دار $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$ تعمیم داد. کانولوشن‌های GM هموردایی دورانی سراسری در اینجا متناظر با G -ساختارهایی هستند که تحت دوران‌های $\text{SO}(3)$ حول مبدأ ناوردا هستند. در حالی که واستگی شعاعی چنین G -ساختارهایی بدون محدودیت باقی می‌ماند، تقاضا برای ناوردایی دورانی، محدودیتی را بر شکل آنها روی پوسته‌های کروی با شعاع ثابت، که مدارهای عمل (۲) $\text{SO}(3)$ روی $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}$ هستند، تحمیل می‌کند. این واقعیت که کره (۲) $\text{SO}(3)/\text{SO}(3)$ بازیز گروه‌های



$$\mathbb{E}_3 \setminus \{0\} \cong S^2 \times \mathbb{R}^+$$

شکل ۴۷: G -ساختاری که به طور ضمنی توسط $\mathbb{E}_3 \setminus \{0\} \cong S^2 \times \mathbb{R}^+$ همانطور که در [۱] پیشنهاد شده است. کرنل‌های گونه‌ای تعریف شده‌اند که زاویه فضایی را پوشش دهند، مستقل از فاصله از مبدأ، به طوری که قطر آنها به صورت خطی با این فاصله رشد می‌کند. گستره کرنل‌ها در جهت شعاعی مستقل از فاصله از مبدأ است. سطح: در نظریه ما، کرنل‌ها نسبت به چارچوب‌های مرتع از G -ساختار به اشتراک گذاشته می‌شوند. برای بازیابی طرح اشتراک وزن پیشنهادی، باید از چارچوب‌های تشکیل شود که محورهای آنها در جهت زاویه‌ای به صورت خطی با فاصله شعاعی از مبدأ رشد می‌کنند، در حالی که محورها در جهات شعاعی باید اندازه خود را ثابت نگه دارند (هر دو نسبت به متربیک اقیلیدسی استاندارد). چنین چارچوب‌هایی یک متربیک ریمانی جایگزین را روی $\mathbb{E}_3 \setminus \{0\}$ القایی کنند. راست: از آنجا که کانولوشن GM حاصل باید $(SO(3)$ -هموردا باشد، لازم است که G -ساختار تحت دوران حول مبدأ ناوردا باشد. این امر (حداکثر) به یک $(SO(2)$ -ساختار نیاز دارد، که تجدید آن به یک پوسته کروی در قسمت سمت راست شکل نشان داده است. این را با $(SO(3)$ -ساختار $(SO(2)$ -ناوردا) مقایسه کنید.

پایدارساز ایزومورف با (۲) است، دلالت بر این دارد که گروه ساختاری یک G -ساختار $(SO(3)$ -ناوردا را نمی‌توان بیشتر از (۲) کاهش داد؛ به شکل ۴۵ مراجعة کنید. بنابراین ما اساساً با CNN‌های کروی با یک بعد شعاعی اضافی سروکار داریم. برای مروری بر CNN‌های کروی، خواننده را به بخش ۱۱ ارجاع می‌دهیم.

۴] این وضعیت را شناسایی کرده و کانولوشن‌های $(SO(3)$ -هموردا را روی $\mathbb{E}_3 \setminus \{0\}$ طراحی کردن. قبل از پرداختن به طبقه‌بندی ما به عنوان کانولوشن GM که در ردیف (۲۹) جدول ۶ فهرست شده است، به طور خلاصه فرمول‌بندی و پیاده‌سازی نویسنده‌گان را مرور می‌کنیم. پیاده‌سازی آنها مبنی بر CNN‌های کروی است با این اضافه که ۱) کرنل‌ها در جهت شعاعی گسترش می‌یابند و ۲) روی پوسته‌هایی با شعاع‌های مختلف به اشتراک گذاشته می‌شوند؛ به شکل ۴۷ (چپ) مراجعة کنید. همانطور که معمولاً برای CNN‌های کروی انجام می‌شود، وابستگی زاویه‌ای کرنل‌ها از طریق طیف فوریه آنها روی S^3 کدگذاری می‌شود، یعنی بر حسب ضرایب بسط هارمونیک‌های کروی. اشتراک این ضرایب بسط دلالت بر این دارد که کرنل‌های به اشتراک گذاشته شده زاویه فضایی ریمانی را برای همه شعاع‌ها پوشش می‌دهند، که به این معنی است که کرنل‌ها در جهت زاویه‌ای به صورت خطی با شعاع گشاد می‌شوند.^{۱۰۶} در پیاده‌سازی گسته‌سازی شده، پوسته‌های کروی در شعاع‌های با فاصله مساوی قرار دارند \square که این به معنی آن است که کرنل‌ها در جهت شعاعی گشاد نمی‌شوند. از این بینش‌ها، ما G -ساختار خاصی را که مدل در ادامه فرض می‌کند، استنباط می‌کنیم. خود کرنل‌ها به گونه‌ای محدود شده‌اند که تحت دوران‌های $SO(2)$ حول محور شعاعی گذرنده از مرکزشان ناوردا باشند، که اغلب به آن کرنل‌های ناحیه‌ای (نحوه می‌شود؛ به شکل ۴۸ و [۱] مراجعة کنید. همانطور که در [۱] و [۲] اثبات شده است، کانولوشن با چنین کرنل‌هایی $(SO(3)$ -هموردا است. اینکه این مورد برقرار است، به طور شهودی روشن است زیرا دوران‌های پوسته‌های کروی دارای $(SO(2)$ به عنوان زیرگروه پایدارساز هستند، که کرنل‌های ناحیه‌ای نسبت به آن ناوردا هستند. همانطور که در ادامه استدلال خواهیم کرد، این مدل در واقع $SO(3)$ -هموردا است، یعنی علاوه بر آن تحت بازتاب‌ها نیز هموردا است.

برای بازیابی این مدل از دیدگاه کانولوشن‌های GM ، ما باید G -ساختار متناظر را روی $\mathbb{E}_3 \setminus \{0\}$ تعیین کنیم. همانطور که در بالا گفته شد، همودای $(SO(3)$ -نیازمند این است که G -ساختار تحت عمل

$SO(3)$ ناوردا باشد اما تغیرات شعاعی آن را محدود نمی‌کند. برای استنتاج این وابستگی شعاعی G -ساختار،

به یاد پیارید که ما اشتراک و وزن کانولوشنی را در $p \in M$ به عنوان تراز کردن کرنل الگو $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$

نسبت به یک چارچوب (دلخواه) در $G_p M$ از فضاهای مماس $T_p M$ تعریف کردیم. بنابراین،

اشتراک کرنل در نظر گرفته شده توسط \square به ما اجازه می‌دهد تا در مورد G -ساختار به طور ضمنی در نظر گرفته شده نتیجه گیری کنیم. نویسنده‌گان کرنل‌ها را به گونه‌ایی به اشتراک می‌گذارند که مساحت مماس آنها

بر پوسته‌های کروی با افزایش فاصله از مبدأ گسترش یابد (آنها زاویه فضایی را در هر شعاع پوشش

شکل ۴۸: یک کرنل ناحیه‌ای می‌دهند) در حالی که ضخامت شعاعی آنها ثابت باقی می‌ماند. شکل ۴۷ (چپ) این تغییر شعاعی کرنل‌های به

(همسانگرد) به طور همزمان $(SO(2)$ -نیازمند است. اینجا بسیاری از مدل‌های متربیک (اقیلیدسی استاندارد $\mathbb{E}_3 \setminus \{0\}$) اندازه گیری می‌شود.

و ۲- اگرچه این پذیر انتخاب ممکن است (یعنی اینکه $c_{\text{out}} = c_{\text{in}}$ است)، این مدل در واقع $(SO(2)$ را مقایسه کنید.

اشتراك گذاشته شده را نشان می دهد در حالی که شکل ۴۷ (وسط) مقیاس بندی متناظر چارچوب های مرجع نموده را نشان می دهد. این به همراه ناوردایی (۳) SO -ساختار، (حداقل) یک (2) - SO -ساختار را نتیجه می دهد، که تعداد آن به یک پوسته کروی در شکل ۴۷ (راست) به تصویر کشیده شده است.^{۱۰۷} متريک در نظر گرفته شده از اين G -ساختار نتيجه می شود، زیرا چارچوب های آن مفهوم مربوط به راست هنجاري را تعريف می کند. توجه داشته باشيد که اين متريک با متريک اقليدي معمول متفاوت است.

بنا به ساختار، ما دوران های $Isom_{GM} = SO(3)$ را به عنوان ايزومتری های حافظ G -ساختار داريم. بنابراین، کانولوشن های GM تعريف شده توسط اين G -ساختار، که ممکن است در نوع ميدان ورودی و خروجی خود متفاوت باشند، (طبق قضيه ۸.۹) هموردای دوراني خواهد بود. کانولوشن GM خاصی که توسط $\{e\}$ فرض شده، يعني انواع ميدان فرض شده، را می توان از اين واقعیت استنتاج کرد که نويسندگان کرنل های ناجهای را فرض می کنند: چنان کرنل هایی به طور طبیعی هنگام در نظر گرفتن ميدان های اسکالر، يعني نمايش های ميدان بدیهی، به وجود می آیند، زیرا محدوديت کرنل، معادله (۸۳)، در اين حالت به صورت زیر در می آيد

$$K(gv) = K(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^r, g \in SO(2), \quad (419)$$

كه کرنل های همسانگرد (ناحیه ای) را تحميل می کند.^{۱۰۸}

به عنوان يك تنوع از مدل، می توان G -ساختار را در نظر گرفت که از (2) - SO -ساختار با افزون چارچوب های مرجع بازتاب نسبت به یک محور دلخواه در داخل صفحات مimas بر پوسته های کروی، در حالی که بردارهای چارچوب شعاعی همچنان به سمت پرون اشاره دارند) به دست می آيد.^{۱۰۹} در اين حالت، ايزومتری های حافظ G -ساختار $3 = Isom_{GM} = SO(3)$ هموردای 3 هستند. يك مورد خاص جالب در زمينه فعلی، کانولوشن های GM است که بین ميدان های اسکالر نگاشت انجام می دهد، که برای آنها محدوديت کرنل به صورت زير است:

$$K(gv) = K(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^r, g \in \mathcal{G}, \quad (420)$$

این به نظر می رسد يك محدوديت قوي تر از محدوديت در معادله (۴۱۹) بالا باشد: به جاي اينکه فقط کرنل ها را ناوردای دوراني بخواهد، علاوه بر آن از آنها می خواهد که تحت بازتاب های نيز ناوردا باشند. با اين حال، از آنجا که کرنل های ناوردای دوراني در حال حاضر تحت بازتاب های نيز ناوردا هستند، اين دوباره به کرنل های ناجهای منجر می شود و بنابراین دقیقاً همان فضای کرنل را که برای (2) - SO بود، به دست می دهد.^{۱۱۰} اين دلالت بر اين دارد که مدل $\{e\}$ در واقع نه تنها (3) -هموردای است، همانطور که توسط نويسندگان ادعا شده، بلکه به طور کلی تر $3 = SO(3)$ -هموردا است، که طبقه بندی ما را در ردیف (۲۹) جدول ۶ توجیه می کند. توجه داشته باشيد که اين يك مورد خاص است که فقط برای ميدان های اسکالار اعمال می شود \square فضاهای کرنل های $SO(2)$ - و 2 -راهبری پذير برای نمايش های گروهي عمومي متفاوت هستند.

مدل $\{e\}$ چگونه با مدل $\{e\}$ که بر G -ساختار نشان داده شده در شکل ۴۶ تکيye دارد، مرتبط است؟ يك تفاوت کليلي بین اين دو رویکرد اين است که G -ساختار در شکل ۴۶ از چارچوب هایی تشکيل شده است که محورهای رو به پرون آنها با فاصله شعاعی از مبدأ رشد می کنند، که اين مورد برای G -ساختار در شکل ۴۷ صادر نیست. اگر دوسي را به گونه ای اصلاح کنیم که از چارچوب هایی تشکيل شود که محورهای شعاعی آنها به صورت خطی با فاصله چارچوب ها از مبدأ رشد می کنند، آنگاه $\mathcal{S} = SO(3) \times \mathcal{S}$ $= Isom_{GM} = SO(3)$ به جاي $\{e\}$ خواهیم داشت. بنابراین کانولوشن GM متناظر علاوه بر اين هموردای مقیاس خواهد بود. در يك پياده سازی، اين را می توان به راحتی با فاصله گذاري نمایي به جاي یکنواخت پوسته های کروی گسترش در نظر گرفته شده توسط $\{e\}$ [متناهی با فاصله گذاري یکنواخت شعاع لگاريتمي شده] تحقق بخشيد.

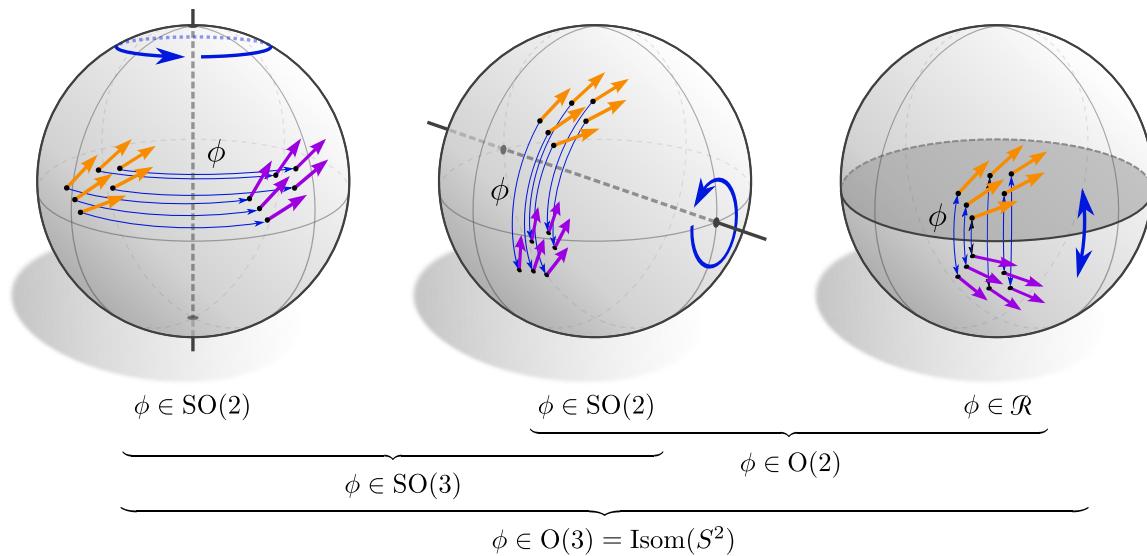
در آخر، به طور خلاصه کانولوشن توسط $\{e\}$ را که در ردیف (۳۰) جدول ۶ فهرست شده است، مورد بحث قرار می دهیم. اين مدل بر يك تصویر شعاعی از سیگنال روی پوسته های کروی به يك مکعب محیطی تکیه دارد. برای تعریف يك کانولوشن روی مکعب، نويسندگان آن را در برخی از يال هایش برش داده و آن را بهن می کنند؛ به شکل ۲ در کار آنها مراجعة کنید. متعاقباً، آنها يك کانولوشن دو بعدی متعارف را روی وجه پهنه شده مکعب انجام می دهد. گسترش اين عملیات با يك بعد سوم و شعاعی، يك کانولوشن را روی \mathbb{R}^3 تعریف می کند. از آنجا که پوسته های شعاعی در پياده سازی گسترش دوباره با فاصله مساوی قرار گرفته اند، اين عملیات متناظر با يك کانولوشن GM روی يك $\{e\}$ - G -ساختار است که به صورت شعاعی همانطور که در شکل ۴۷ نشان داده شده، تغیير می کند. تصویر از پوسته های کروی به مکعب به معنای يك اعوجاج در چارچوب های روی هر يك از وجوده مکعب است و بنابراین به يك اعوجاج در يك پوسته های کروی منجر می شود. $\{e\}$ - G -ساختار در اکثر برش های ناپیوسته است و بنابراین به کانولوشن اجازه نمی دهد که پوستگی ميدان های ویژگی را حفظ کند. از آنجا که S^d موافق پذير نیست، اين مشکل را نمی توان بدون فرض يك گروه ساختاري غیربدیهی G حل کرد. $\{e\}$ - G -ساختار به طور کلی توسط هچ ايزومتری حفظ نمی شود، که اين دلالت بر اين دارد که گروه هموردای سراسری مدل $\{e\}$ $= Isom_{\{e\}M}$ بدیهی است. با اين حال، از آنجا که تعداد $\{e\}$ - G -ساختار به چهار وجه «عمودی» مکعب تحت دوران هایی با

^{۱۰۷} مشابه دو بعدی آن شیوه به G -ساختار در شکل ۴۶ خواهد بود اما با تمام بردارهای چارچوب در جهت شعاعی که دارای نرم واحد هستند (نسبت به متريک اقليدي سی).

^{۱۰۸} کرنل هایی که بین «ميدان های اسکالر»، يعني ميدان هایی که مطابق با نمايش بدیهی G تبدیل می شوند، نگاشت انجام می دهن، همیشه G -ناوردا هستند. برای $G = SO(2)$ اين به معنی کرنل های همسانگرد (ناحیه ای) است، در حالی که $G = \mathcal{R}$ به معنی کرنل های ناوردای بازتابی در ورودی بالا سمت چپ جدول ۳ است.

^{۱۰۹} اين G -ساختار، همتای $\mathcal{R} = 1$ - G -ساختار در شکل ۴۵ برای $d = 3$ به جای $d = 2$ است.

^{۱۱۰} به طور رسمي تر، ما به دنبال کرنل هایی هستیم که در G صدق کنند، يعني روی مدارهای G $K(gv) = K(v) \quad \forall g \in G$ $\mathcal{v} = \{gv \mid g \in G\} \in G \setminus \mathbb{R}^d$ از نقاط \mathcal{v} در \mathbb{R}^d ناوردا باشند. از آنجا که مدارهای \mathcal{v} برای هر $v \in \mathbb{R}^r$ برابر هستند، فضاهای کرنل حاصل یکسان خواهند بود.



شکل ۴۹: نمایش گروه ایزومتری کره ۲-بعدی $\mathbb{S}^2 = \text{Isom}(S^2)$ و زیرگروههای مختلف آن. می‌توان گروه ایزومتری را متشکل از دوران‌های حافظ جهت در $\text{SO}(3) = \text{SO}_{+}(S^2)$ و بازتابها از طریق حاصلضرب مستقیم $\mathcal{R} = \text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$ در نظر گرفت. (۳) به توبه خود، توسط دوران‌های $\text{SO}(2)$ حول هر دو محور غیرموازی تولید می‌شود، که در پارامترسازی زاویه اولر استفاده می‌شود. برای زیرگروههای مرتبط بیشتر و روابط آنها به متن اصلی مراجعه کنید.

مضرب‌هایی از $\pi/2$ ناوردا است، مدل در عمل تا حدی نسبت به دوران‌های سراسری C حول محور عمودی همودرا است. برای مجموعه داده‌هایی که نمونه‌های آنها حول مبدأ $\{0\}$ متمرکز شده و از نظر توزیع، تقارن دورانی دارند، به طور تجربی نشان داده است که این ویژگی منجر به عملکرد بهبود یافته‌ای در مقایسه با کانولوشن‌های متعارف روی \mathbb{E}_3 می‌شود. نویسنده‌گان علاوه بر این تأثیر طرح‌های مختلف اشتراک وزن را بر روی بعد شعاعی بررسی می‌کنند و در می‌یابند که اشتراک وزن کامل در عمل بهترین کارایی را دارد.

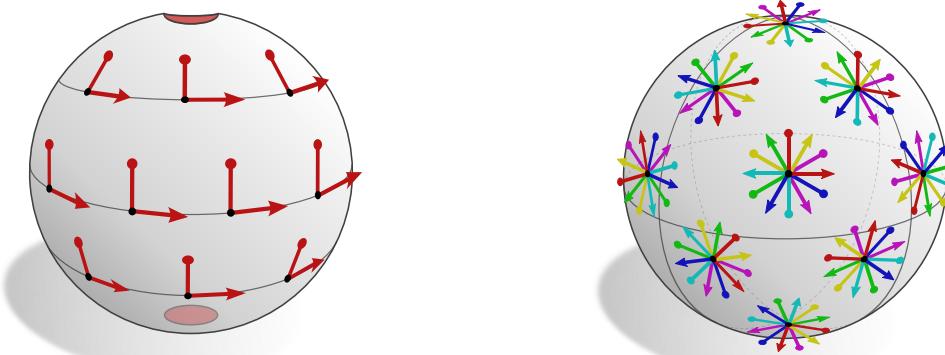
۱۱ CNN‌های کروی مستقل از مختصات

فراتر از کانولوشن‌ها در فضاهای اقلیدسی، کانولوشن‌ها روی کره ۲-بعدی S^2 از اهمیت عملی بالایی برخوردارند. کاربردها شامل وظایف بینایی همه جانبه، پیش‌بینی جهانی آب و هوای تحلیل تابش زمینه کیهانی است. کانولوشن‌های کروی به جای هموردانی انتقالی، معمولاً باید هموردای دورانی باشد. گروه ایزومتری کره ۳ $= \text{Isom}(S^3)$ و تجزیه آن به زیرگروههای مرتبطتر در شکل ۴۹ به تصویر کشیده شده است.

یک تفاوت عمده بین فضاهای اقلیدسی \mathbb{E}_d و کره S^d این است که دومی موازی‌پذیر نیست، یعنی اجازه یک میدان چارچوب سراسری و پیوسته را نمی‌دهد. تقلیل گروه ساختاری فراتر از $\text{SO}(2) = G$ از نظر توپولوژیکی مسدود شده است، که به این معنی است که کانولوشن‌های کروی حداقل به کرنل‌های $\text{SO}(2)$ -راهبری‌پذیر نیاز دارند اگر بخواهند پیوستگی میدان‌های ویژگی را حفظ کنند. (۲)- $\text{SO}(2)$ -ساختار متناظر، که به طور کامل توسط متريک و جهت‌گیری کره تعیین می‌شود، در شکل ۵۰ نشان داده شده است. کانولوشن‌های G روی اين G -ساختار ناورداي دورانی سراسری، تضمین می‌شوند که $\text{Isom}_{\text{SOM}} = \text{SO}(3)$ -هموردا باشند.

على رغم مانع توپولوژیکی اجتناب ناپذیر، سیاری از نویسنده‌گان CNN‌های کروی را پیشنهاد داده‌اند که از کرنل‌های $(2)-\text{SO}$ -راهبری‌پذیر استفاده نمی‌کنند. رایج‌ترین انتخاب $\{e\}$ -ساختار متناظر با چینین کانولوشن‌هایی، میدان چارچوب شان داده شده در شکل ۵۰ است، که چارچوب‌های مرتع راست‌هنگار آن (معادله (۴۲۶)) با شبکه مختصاتی مخصوص کروی تراز شده‌اند. توجه داشته باشید که این میدان چارچوب دارای تکیگی‌هایی در قطب‌ها است، جایی که کانولوشن‌ها ناپیوسته می‌شوند. برای تطبیق چینین مدل‌هایی با نظریه ما، به ویژه فرض همواری G -ساختارها، آنها باید به عنوان کانولوشن‌هایی روی یک استوانه توپولوژیکی با متريک شبه-کروی توصیف شوند. گروه ایزومتری اين کره سوراخ‌دار $\{n, s\} \in S^3$ بدون قطب‌های $n, s \in S^2$ زیرگروه ۲ (شکل ۴۹ (وسط و راست)) از گروه ایزومتری کامل کره ۳ است. $\{e\}$ -ساختار به تصویر کشیده شده توسط دوران‌های سمتی در $(2)-\text{Isom}_{\{e\}M} = \text{SO}(4)$ حفظ می‌شود، یعنی دوران حول محور گذرنده از قطب‌ها.

از دیدگاه مهندسی، هر دو رویکرد توجیه خود را دارند: کاربردهای کاملاً همسانگرد مانند تحلیل تابش زمینه کیهانی به مدل‌های کاملاً $\text{SO}(3)$ -هموردا روی S^3 نیاز دارند. وظایف یادگیری که با یک محور دوران مرجع همراه هستند، که به عنوان مثال برای زمین یا تصاویر پانوراما با جهت‌های «بالا» و «پایین» مشخص، صادق است، ممکن است از اطلاعات هندسی اضافی کدگذاری شده در $\{e\}$ -ساختار بهره‌مند شوند. نتایج تجربی نشان می‌دهد که در چینین مواردی اغلب مفید است که با ترکیبی از هر دو رویکرد کار شود: لایه‌های اولیه با کانولوشن‌های کاملاً هموردا می‌توانند از تقارن‌های محلی در



(ب) ساختار $\{e\}M$ روی یک کره ۲-بعدی سوراخ دار
 $\text{Isom}_{\{e\}M} = \{n, s\}$
 $\text{Isom}_{\{e\}M} = \text{SO}(2)$ حفظ می شود.

(ت) ساختار SOM روی یک کره ۲-بعدی S^2 ، که $M = S^2$ توسط دوران های سه بعدی عمومی در $\text{Isom}_{\text{SOM}} = \text{SO}(3)$ حفظ می شود.

شکل ۵۰: ساختارهای رایج زیربنای CNN های کروی. موئن توپولوژیکی از کاهش گروه ساختاری کره ۲-بعدی فراتر از $G = \text{SO}(2)$ شکل ۵۰-۱ ساختار استاندارد روی S^2 را نشان می دهد، که با متريک جايگذاري (معادله (۴۲۹)) (الف) القا شده از حاصلضرب داخلی \mathbb{R}^3 مطابقت دارد. اين ساختار تحت دوران ها در $\text{Isom}_{\text{SOM}} = \text{SO}(3)$ ناوردا است، که بر هموردايی دوراني کانونلوشن GM متناظر دلالت دارد. توجه داشته باشيد که تارهای $G_p M$ و $G_q M$ در نقاط مختلف p و q ايزومورف مستند اما نه به صورت کانوني \square به نظر می رسد زنگ های چارچوب در تصویر چينيزموروفيسمي را القا می کنند، با اين حال، آنها به طور تصادفي انتخاب شده اند و همچ معنائي بدارند. شکل ۵۰-۲ یک کره را نشان می دهد که در دو قطب متقابل سوراخ شده است. اين کار کرده را به یک استوانه توپولوژيکی $(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}) \times S^1$ با متريک شبـه-کروی تبديل می کند \square که اجازه يك کاهش كامل به یک گروه ساختاري بدبيهي را می دهد. شکل ۵۰-۳ ساختار ناخالص تحت دوران های سمتی حول محور قطبی ناوردا است، کانونلوشن های GM متناظر $\text{Isom}_{\{e\}M} = \text{SO}(2)$ -هموردا هستند. توجه داشته باشيد که سوراخ كردن کره فقط وسیله ای برای پنهان کردن ناپيوستگي مدلها در قطبها است.

داده ها بهره برداري کنند، در حالی که لايه های بعدی با تنها هموردي اي سمتی می توانند بر اساس محور مرجع، ياد بگيرند که تمایز قائل شوند؛ به بخش ۷.۲ در [?] مراجعه کنيد.

۱.۱۱	هندرسي کره ۲-بعدی S^2
۲.۱۱	CNN های کروی کامل هموردای دوراني
۳.۱۱	CNN های کروی هموردای دوران سمتی در توپولوژی های استوانه ای
۴.۱۱	تقریب های بیست و چهاری از CNN های کروی

ما با توصیف هندسه کره در بخش ۱.۱۱ شروع می کنیم. بخش ۱.۱۱-۲ کانونلوشن های GM کروی کامل $\text{SO}(3)$ -ها و ۳-هموردا مورد بحث قرار می دهد، که بر $\text{SO}(2)$ -یا ۲-ساختارها همانطور که در شکل ۵۰-۱ نشان داده شده، تکیه دارند. CNN های کروی سراسری $\text{SO}(2)$ -ها و ۲-هموردا، متناظر $\{e\}$ -ساختار در شکل ۵۰-۲ یا \mathcal{R} -ساختار متناظر، به ترتیب در بخش ۴.۱۱ بر تقریب های بیست و چهاری کانونلوشن های کروی تمرکز دارد، که پیاده سازی های کارآمد از نظر محاسباتی را ممکن می سازند زیرا بیست و چهاری تکه ای-اخت است و شبکه های نمونه برداري منظم را می پذيرد؛ به شکل ۶۳ مراجعه کنید. (۲) $\text{SO}(2)$ -ساختار در شکل های ۵۰-۱ و ۵۰-۲ در اینجا به ترتیب با \mathbb{C} -ساختار و $\{e\}$ -ساختارها در شکل های ۶۴ و ۶۴ یا ۶۶ تقریب زده می شوند.

۱.۱۱ هندرسی کره ۲-بعدی S^2

به عنوان پایه ای برای بحث ما در مورد CNN های کروی، این بخش به بحث در مورد هندسه دیفرانسیل کره (واحد) $M = S^2$ می پردازد. این کره معمولاً به عنوان زیرمجموعه ای از نقاط در فضای اقلیدسی ۳-بعدی \mathbb{E}^3 تعریف می شود که فاصله واحد از مبدأ دارند:

$$(421) \quad S^2 := \{p \in \mathbb{E}^3 \mid \|p\| = 1\}$$

به عنوان يك سطح جايگذاري شده، اين کره يك متريک ريماني (فرم بنادي اول) را از فضای جايگذاري \mathbb{E}^3 به ارث می برد. در ادامه، برای سادگی، \mathbb{E}^3 را با فضای برداري \mathbb{R}^3 مدل سازی می کنیم. هنگامی که فضاهای مماس $T_p M$ را به معنای واقعی کلمه به عنوان آن دسته از زیرفضاهای دو بعدی \mathbb{R}^3 تفسیر کنیم که شامل تمام بردارهای مماس در $p \in S^2$ هستند، آنگاه متريک، نگاشت های نمایی، انتقال دهنده های موازی، چارچوب ها و پیمانه ها

همگی می‌توانند بر حسب عملیات معمول فضای برداری در \mathbb{R}^3 بیان شوند. قبل از پرداختن به این عبارات مشخص، که هنگام پیاده‌سازی CNN‌های کروی مفید هستند، ما برخی از ویژگی‌های کره را از دیدگاهی انتزاعی تر مورد بحث قرار می‌دهیم.

گروه ایزومتری کره با

$$\text{Isom}(S^3) = \mathbb{R}^3, \quad (422)$$

داده می‌شود، یعنی دوران‌ها و بازتاب‌های سه‌بعدی، که در شکل ۴۹ به تصویر کشیده شده‌اند. عمل هر ایزومتری ϕ با عمل معمول آن روی \mathbb{R}^3 از طریق ضرب ماتریسی، که به کره جایگذاری شده $S^3 \subset \mathbb{R}^3$ محدود شده است، منطبق است. توجه داشته باشید که این در واقع یک عمل خوش تعریف روی S^3 به دست می‌دهد زیرا \mathbb{R}^3 با تعریف از تمام نگاشت‌های خطی حافظ فاصله و زاویه تشکیل شده است و بنابراین کره را حفظ می‌کند. از آنجا که کره جهت‌پذیر است، دارای یک زیرگروه از ایزومتری‌های حافظ جهت است

$$\text{Isom}_+(S^3) = \text{SO}(3), \quad (423)$$

که از تمام دوران‌های سه‌بعدی تشکیل شده است. زیرگروه‌های دیگری که در زمینه یادگیری عمیق مرتبط هستند، عبارتند از: هر انتخاب از یک محور دوران، یک زیرگروه از دوران‌های دو بعدی را تعیین می‌کند که با $\text{SO}(2)$ ایزومورف است و تمام این زیرگرووهای با یکدیگر مزدوج هستند. به طور مشابه، هر انتخاب از یک زیرفضای دو بعدی از \mathbb{R}^3 متناظر با یک زیرگروه از بازتاب‌های نسبت به این صفحه است که با \mathcal{R} ایزومورف است. زیرگرووهای دوران‌های دو بعدی حول دو محور دوران غیرموافقی، $\text{SO}(3)$ را تولید می‌کنند، که به پارامترسازی زاویه اویلر از $\text{SO}(3)$ مریبوط می‌شود. یک انتخاب از صفحه بازتاب و هر محور دوران در داخل این صفحه، زیرگروه حاصلضرب نیمه‌مستقیم $\mathcal{R} \times \text{SO}(2) = \text{SO}(2)$ را تولید می‌کند. اگر محور دوران به جای آن عمود بر صفحه بازتاب شود، دوران‌ها و بازتاب‌های دو بعدی جایجاً می‌شوند و بنابراین زیرگرووهای ایزومورف با حاصلضرب مستقیم $\mathcal{R} \times \text{SO}(2)$ را تولید می‌کنند. علاوه بر این دارای زیرگرووهای گسته است که مرتبط ترین آنها از نظر عملی، گروه‌های تقارن اجسام افلاطونی هستند، به عنوان مثال بیست و چهار، که در شکل ۶۳ نشان داده شده است.^{۱۱۱}

\mathbb{R}^3 به صورت متعددی بر روی کره عمل می‌کند، یعنی برای هر دو نقطه p و q از S^3 حداقل یک ایزومتری ϕ وجود دارد به طوری که $\phi(p) = q$. عمل‌های \mathbb{R}^3 روی S^3 بدون نقطه ثابت نیستند: هر نقطه $p \in S^3$ توسط زیرگروه $\text{Stab}_p \cong \mathbb{Z}_2$ پایدار می‌شود، که از دوران‌ها و بازتاب‌ها حول محور گذرنده از p در \mathbb{R}^3 تشکیل شده است. در مجموع، این دو ویژگی دلالت بر این دارند که کره یک فضای همگن از \mathbb{R}^3 است و به صورت جبری به عنوان فضای خارج قسمتی

$$\mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}_2 \cong S^3, \quad (424)$$

تحقیق می‌یابد، که از هم‌دسته‌هایی به شکل ۲ ϕ تشکیل شده است. یک گزاره مشابه برای $\text{SO}(3)$ برقرار است، که دارای زیرگرووهای پایدارساز $\text{Stab}_p \cong \text{SO}(2) < \text{SO}(3)$ است و بنابراین

$$\text{SO}(3) / \text{SO}(2) \cong S^3. \quad (425)$$

با این روابط، قضیه ۸.۱۴ اثبات می‌کند که هر تبدیل میدان کرنل همودرای ۳ یا $\text{SO}(3)$ روی S^3 معادل یک کانولوشن GM با G به ترتیب برابر با $\text{SO}(2)$ است. این نتیجه با دیدگاه کلاسیک CNN‌های گروهی روی فضاهای همگن مطابقت دارد [۴]. رابطه دقیق بین این دو در قضیه ۱۱.۲ در ادامه روشن می‌شود. به یاد یاورید که ایزومتری‌ها بنا به تعریف، متريک ريماني را حفظ می‌کنند. اينکه \mathbb{R}^3 به صورت متعددی روی S^3 با پایدارساز \mathbb{Z}_2 عمل می‌کند، بنابراین دلالت بر این دارد که هندسه ريماني S^3 در هر نقطه و در هر جهت و جهت‌گیری «شبيه به هم» به نظر می‌رسد. یک فضای بيشينه مترقيان است.

به عنوان یک مينفلد ريماني، S^3 بنا به طراحی دارای یک ساختار است. یک تحديده به چارچوب‌های راست‌گرد، که ممکن است زيرا کره جهت‌پذير است، $\text{SO}(2)$ -ساختار را در شکل ۵۰ آ به دست می‌دهد، که توسيع دوران‌ها در $\text{SO}(3)$ حفظ می‌شود. می‌توان نشان داد که اين دو G -ساختار OM و SOM به عنوان كلاف‌های اصلی به ترتیب با \mathbb{Z}_3 و $\text{SO}(3)$ ایزومورف هستند. ایزومورفیسم خاص در اينجا با انتخاب یک چارچوب از G -ساختار داده می‌شود، که باید با عضو همانی گروه یکي گرفته شود.

قضیه گوی مودار بيان می‌کند که هر هيج میدان برداری پيوسته‌ای روی S^3 وجود ندارد، که به طور خاص دلالت بر اين دارد که هيج $\{e\}$ -ساختار (پيوسته‌ای) نمي‌تواند وجود داشته باشد. بنابراین، يك کاهش گروه ساختاري فراتر از $\text{SO}(2)$ نيزمند تغيير در توپولوژي مينفلد است. برای مثال، سوراخ کردن کره در يك نقطه دلخواه همانطور که در شکل ۵۱ به نشان داده شده است، توپولوژي کره را به توپولوژي يك استوانه تبدیل می‌کند و بنابراین اجازه وجود $\{e\}$ -ساختارها را می‌دهد. رايچ ترین انتخاب از $\{e\}$ -ساختار روی کره سوراخ دار $\{n, s\}$ ، $S^3 \setminus \{n, s\}$ -ساختار ($\text{SO}(2)$ -ناوردا در شکل‌های ۵۰ و ۵۲ است. چارچوب‌های آن

$$\left[\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{\cos(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \quad (426)$$

^{۱۱۱} يك ليست جامع از تمام زيرگرووهای متناهي $\text{SO}(3)$ را می‌توان در [\[۱\]](#) یافت.

^{۱۱۲} اين فرآيند به عنوان مثال با تصویر استريوگرافيك کره مطابقت دارد.

با شبکه مختصاتی معمول کروی تراز شده‌اند، که در فراردادهای فیزیک (یعنی با φ و θ) که به ترتیب زاویه سمتی و انحراف نسبت به صفحه xy را نشان می‌دهند) توسط نگاشت پوشای 2π -متناوب زیر داده می‌شوند:

$$\chi : \left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \setminus \{n, s\}, \quad (\theta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos \varphi \\ \cos(\theta) \sin \varphi \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (427)$$

برخی از CNN‌های $\{e\}$ -راهبری‌بازیر با نمایش میدان‌های ویژگی روی $S^1 \setminus \{n, s\}$ در مختصات کروی پیاده‌سازی می‌شوند؛ به بخش ۳.۱۱ در ادامه مراجعه کنید. از آنجا که نگاشت مختصاتی χ ایزوگریک نیست، این روش‌ها به یک متريک جایگزین (یا $\{e\}$ -ساختار) روی مختصات $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ (یا زار دارند؛ به چارچوب‌های کنیده شده در شکل ۵۲ (راست) مراجعه کنید).

از آنجا که S^1 فشرده است، از نظر ژئودزیکی کامل است. ژئودزیکی توسعه دوایر عظیمه کرده داده می‌شوند، یعنی آن دایره‌هایی که متناظر با تقاطع کرده با یک صفحه گذرنده از مبدأ \mathbb{R}^3 هستند. نگاشتهای نمایی (v) این دوایر عظیمه را از طریق p در جهت v برای فاصله‌ای برابر با $\|v\|$ در $S^1 \setminus p$ برای تمام نقاط $q \in S^1 \setminus p$ متناظر $\log_p(q)$ نیستند، با بردار یکتاپی در جهت کوتاه‌تر در امتداد دایره عظیمه گذرنده از p و q داده می‌شوند، با $\|\log_p(q)\|$ که با طول قوس در امتداد این مسیر داده می‌شود. ژئودزیک‌ها بین نقاط متناظر p و $-p$ یکتا نیستند، به طوری که نگاشت لگاریتمی وجود ندارد.

هندسه‌ی صریح S^1 به عنوان یک سطح جایگذاری شده در \mathbb{R}^3

همانطور که در بالا گفته شد، فضاهای مماس $S^1 \subset \mathbb{R}^3$ در هندسه دیفرانسیل کلاسیک سطوح به عنوان زیرفضاهای دوبعدی از فضای جایگذاری \mathbb{R}^3 تعریف می‌شوند. یک فضای مماس خاص $T_p M$ در $p \in S^1$ در این تفسیر با

$$T_p M = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, v \rangle = 0\} \subset \mathbb{R}^3, \quad (428)$$

داده می‌شود، یعنی فضای تمام بردارهایی که بر بردار نرمال سطح در p عمود هستند، که برای کرده با خود p منطبق است. توجه داشته باشید که، علی‌رغم بیان شدن نسبت به چارچوب استاندارد \mathbb{R}^3 ، این بردارهای مماس اشیاء مستقل از مختصات هستند به این معنا که با زوج‌های مرتبی از ضرایب $v^A \in \mathbb{R}^3$ نسبت به یک پیمانه $T_p M$ از $\psi_{TM,p}^A$ از $T_p M$ توصیف نمی‌شوند. یکی گرفتن فضاهای مماس بازیرفضاهای فضای جایگذاری اجازه می‌دهد تا بسیاری از روابط جبری انتزاعی بر حسب عملیات فضای برداری روی \mathbb{R}^3 بیان شوند. در باقیمانده این بخش، ما چنین عباراتی را برای متريک، نگاشتهای نمایی و لگاریتمی، چارچوب‌ها، پیمانه‌ها، انتقال‌دهنده‌های لوی-چیویتا در امتداد ژئودزیک‌ها و تبدیلات پیمانه الفا شده بیان خواهیم کرد.

با به تعریف، S^1 متريک ريماني خود را از فضای جایگذاری به اirth می‌برد. اين متريک القا شده برای هر $v, w \in T_p M \subset \mathbb{R}^3$ با

$$\eta_p(v, w) := \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad (429)$$

داده می‌شود، یعنی حاصلضرب داخلی استاندارد \mathbb{R}^3 ، که به $T_p M$ محدود شده است. برای کاهش شلوغی، ما زيرنويس \mathbb{R}^3 را در نماد $\langle \cdot, \cdot \rangle$ در باقیمانده این بخش حذف می‌كنیم.

نگاشت نمایی \exp_p بردارهای $v \in T_p M$ را به نقاط $q = \exp_p(v) \in S^1$ در امتداد دایره عظیمه در جهت v نگاشت می‌دهد. با قرار گرفتن روی همان دایره عظیمه، p و q از طریق یک دوران با زاویه $\alpha = \|v\|/r = \|v\|/\|v\| = \frac{p \times v}{\|p \times v\|} = \frac{p \times v}{\|v\|}$ حول محور دوران به هم مرتبط می‌شوند، که در آن معادلات ساده می‌شوند زیرا کرده دارای شعاع واحد $r = \|p\| = \|v\|$ است و بردارهای p و v در \mathbb{R}^3 بر هم عمود هستند. با استفاده از فرمول دوران رودریگز، $q = p \cos(\alpha) + (a \times p) \sin(\alpha) + a \langle a, p \rangle (1 - \cos(\alpha))$ ، به همراه عمود بودن $\langle a, p \rangle = 0$ ، این منجر به عبارت صریح $a \times p = \frac{1}{\|v\|}(p \times v) \times p = \frac{1}{\|v\|}(\langle p, p \rangle v + \langle p, v \rangle p) = \frac{v}{\|v\|}$ و

$$\exp_p : \mathbb{R}^3 \supset T_p M \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto \exp_p(v) = p \cos(\|v\|) + \frac{v}{\|v\|} \sin(\|v\|) \quad (430)$$

برای نگاشت نمایی می‌شود.

یک عبارت صریح از نگاشت لگاریتمی در امتداد همین خط استدلال یافت می‌شود: نرم $\text{dog}_p(q) \in S^1 \setminus p$ با زاویه دوران $\alpha = \arccos(\langle p, q \rangle)$ منطبق است. جهت آن با جهت مماس بر دایره عظیمه داده می‌شود، که ممکن است بر حسب تصویر نرمال شده $\frac{v}{\|v\|}$ از q روی $T_p M$ بیان شود. در کل، نگاشت لگاریتمی بنابراین به صورت زیر نمونه‌سازی می‌شود:

$$\log_p : S^1 \setminus p \rightarrow B_{T_p M}(\cdot, \pi), \quad q \mapsto \log_p(q) = \arccos(\langle p, q \rangle) \frac{q - \langle p, q \rangle p}{\|q - \langle p, q \rangle p\|}, \quad (431)$$

که در آن $B_{T_p M}(\cdot, \pi) \subset T_p M \subset \mathbb{R}^3$ گوی باز با شعاع از کثیویته π حول مبدأ $T_p M$ را نشان می‌دهد.

چارچوب‌های مرجع روی S^3 بنا به تعریف فقط زوج‌های مرتبی از بردارهای مماس خطی مستقل هستند. هنگامی که محورهای یک چارچوب مرجع به صراحت به عنوان بردارهایی در فضای جایگذاری \mathbb{R}^3 بیان شوند، این چارچوب را می‌توان با ماتریس 2×3 با رتبه ۲

$$[e_1^A, e_2^A] = \begin{bmatrix} e_{1,1}^A & e_{1,2}^A \\ e_{1,2}^A & e_{2,2}^A \\ e_{1,3}^A & e_{2,3}^A \end{bmatrix} =: E_p^A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}. \quad (432)$$

شناسایی کرد. این ایزومورفیسم فضای برداری

$$E_p^A = [e_1^A, e_2^A] : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p M, \quad v^A \mapsto E_p^A v^A = v_1^A e_1^A + v_2^A e_2^A \quad (433)$$

را از ضرایب برداری به بردارهای مماس مستقل از مختصات تعریف می‌کند. بنابراین فضاهای مماس $T_p M$ دقیقاً تصویر E_p^A هستند.

پیمانه‌های متاظر $\psi_{TM,p}^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3$ از نظر فنی فقط وارون چارچوب‌ها هستند، هنگامی که به عنوان نگاشت‌های $E_p^A : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p M$ تفسیر شوند. در مقابل، هنگامی که به عنوان ماتریس‌های 2×3 که \mathbb{R}^3 را به صورت غیرپوششی \mathbb{R}^3 نگاشت می‌دهند، تفسیر شوند، E_p^A وارون پذیر نیست اما فقط یک شبه-وارون را می‌پذیرد

$$(E_p^A)^+ := ((E_p^A)^\top E_p^A)^{-1} (E_p^A)^\top \in \mathbb{R}^{2 \times 3}. \quad (434)$$

از نظر هندسی، این ماتریس با ۱) تصویر کردن بردارهای در \mathbb{R}^3 به تصویر $E_p^A(\mathbb{R}^3) = T_p M \subset \mathbb{R}^3$ که همان E_p^A است، و ۲) اعمال وارون ایزومورفیسم $\psi_{TM,p}^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3$ روی این زیرفضا عمل می‌کند. این بدان معناست که شبه-وارون در واقع وارون E_p^A روی فضای مماس است، که دلالت بر این دارد که نگاشت پیمانه با

$$\psi_{TM,p}^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto (E_p^A)^+ v. \quad (435)$$

داده می‌شود. به صورت باز شده، نگاشت پیمانه مطابق با

$$\begin{aligned} \psi_{TM,p}^A(v) &= \begin{pmatrix} \langle e_1^A, e_1^A \rangle & \langle e_1^A, e_2^A \rangle \\ \langle e_2^A, e_1^A \rangle & \langle e_2^A, e_2^A \rangle \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \langle e_1^A, v \rangle \\ \langle e_2^A, v \rangle \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\langle e_1^A, e_1^A \rangle \langle e_2^A, e_2^A \rangle - \langle e_1^A, e_2^A \rangle \langle e_2^A, e_1^A \rangle} \begin{pmatrix} \langle e_1^A, e_1^A \rangle & -\langle e_1^A, e_2^A \rangle \\ -\langle e_2^A, e_1^A \rangle & \langle e_1^A, e_1^A \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle e_1^A, v \rangle \\ \langle e_2^A, v \rangle \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (436)$$

عمل می‌کند. توجه داشته باشید که، به طور کلی، $\langle e_i^A, v \rangle \neq v_i^A$. با این حال، اگر (و تنها اگر) E_p^A یک چارچوب راست‌هنگار باشد، یعنی برای $G \leq 2$ ، نگاشت پیمانه به سادگی با تصویر بردار مماس روی محورهای چارچوب داده می‌شود:

$$\psi_{TM,p}^A(v) = (E_p^A)^\top v = \begin{pmatrix} \langle e_1^A, v \rangle \\ \langle e_2^A, v \rangle \end{pmatrix} \quad \text{برای چارچوب‌های راست‌هنگار، یعنی } \langle e_i^A, e_j^A \rangle = \delta_{ij} \quad (437)$$

عبارت صریح برای انتقال‌دهنده‌های لوی-چیویتا مستقل از مختصات در امتداد ژئودزیک‌ها مشابه عبارت نگاشت نمایی است، با این تفاوت که فرمول دوران رو دریگز برای دوران دادن بردارهای مماس بین مبدأ و مقصد به جای دوران نقطه مبدأ به مقصد کنید γ کوتاه‌ترین ژئودزیک بین $p \in S^3 \setminus -p$ و $q \in S^3 \setminus p$ باشد. دوران از p به q در امتداد این ژئودزیک سپس با محور $a = p \times q$ و زاویه $\alpha = \arccos(\langle p, q \rangle)$ داده می‌شود. بر حسب این کمیت‌ها، انتقال لوی-چیویتا از یک بردار مماس جایگذاری شده $v \in T_p M \subset \mathbb{R}^3$ در امتداد ژئودزیک γ با بردار دوران یافته

$$\mathcal{P}_{TM,\gamma}(v) = v \cos(\alpha) + (a \times v) \sin(\alpha) + (a \langle a, v \rangle)(1 - \cos(\alpha)) \quad (438)$$

در \mathbb{R}^3 داده می‌شود. نسبت به پیمانه‌های $\psi_{TM,q}^A$ و $\psi_{TM,p}^{\tilde{A}}$ در نقطه شروع p و نقطه پایان q ژئودزیک، این انتقال‌دهنده با عضو گروه

$$g_\gamma^{A\tilde{A}} = \psi_{TM,p}^A \circ \mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ (\psi_{TM,q}^{\tilde{A}})^{-1} = (E_p^A)^+ \circ \mathcal{P}_{TM,\gamma} \circ E_q^{\tilde{A}}. \quad (439)$$

بیان می‌شود.

تبديلات پیمانه القا شده توسط ایزومنتری به طور مشابه نسبت به چارچوب‌های مرجع صریح با ضرب ماتریسی زیر داده می‌شوند:

$$g_\phi^{A\tilde{A}}(p) = \psi_{TM,\phi(p)}^A \circ \phi \circ (\psi_{TM,p}^{\tilde{A}})^{-1} = (E_{\phi(p)}^A)^+ \phi E_p^{\tilde{A}} \quad (440)$$

۲.۱۱ CNN های کروی کاملاً همودای دورانی

این بخش به بحث در مورد کانولوشن های کروی کاملاً (۳) $\text{SO}(3)$ -یا (۲) $\text{SO}(2)$ -هموردا می پردازد که در ردیف های (۳۳-۳۱) جدول ۶ فهرست شده اند. همه آنها را می توان به عنوان نمونه های خاصی از کانولوشن های GM روی $\text{SO}(2)$ -ساختار در شکل ۵۰ آ-۲ ساختار متناظر، که علاوه بر آن تحت بازتاب های چارچوب نیز بسته است، در ک کرد.

به جای سازماندهی این بحث بر حسب گروه های ساختاری و نمایش های گروهی در نظر گرفته شده، ما مدل ها را بر اساس چارچوب های نظری که در آنها توسعه یافته اند، دسته بندی می کنیم: [۱] یک شبکه پیکسلی را روی کره تعريف کرده و کانولوشن را مستقیماً به عنوان کانولوشن GM فرمول بندی می کنند، یعنی بر حسب پیمانه ها، کرنل های راهبری پذیر و انتقال دهنده های بردار ویژگی. یک چارچوب جایگزین، کانولوشن های گراف روی مشاهده های پیکسلی کروی است [۲]. چنین کانولوشن های گرافی متناظر با کانولوشن های GM با کرنل های همسانگرد هستند. بنابراین آنها بین میدان های اسکالار (غیر حساس به جهت) نگاشت انجام می دهند. در آخر، به پیاده سازی هایی می رسیم که کرنل های کانولوشن (راهبری پذیر) را روی S^3 به جای کرنل های ما روی فضاهای مماس در نظر می گیرند [۳-۴]. قضیه ۱۱.۱ اثبات می کند که چنین کرنل های راهبری پذیر کروی را می توان با کرنل های G -راهبری پذیر روی فضاهای مماس، هنگامی که در مختصات نرمال ژئودزیک بیان می شوند، یکی گرفت. بر اساس این نتیجه، ما در قضیه ۱۱.۲ اثبات می کنیم که کانولوشن ها با کرنل های کروی معادل کانولوشن های GM می هستند. برای کامل بودن، باید اشاره کنیم که چنین مدل هایی معمولاً در حوزه طیفی پیاده سازی می شوند. ما بر این دیدگاه تمرکز نمی کنیم اما خواننده علاقه مند را به مرور [۴] ارجاع می دهیم.

کانولوشن های کروی: ما با CNN کروی توسط [۵] شروع می کنیم زیرا فرمول بندی آن دقیقاً با نظریه عمومی تر ما هنگام اعمال بر هندسه کروی مطابقت دارد. نویسنده گان (۲) $\text{SO}(2)$ -ساختار را از شکل راهبری پذیر را در نظر می گیرند. میدان های ویژگی و کرنل های ویژگی بر حسب بردار های ویژگی که به یک شبکه نمونه برداری روی کره اختصاص داده شده اند، گستته سازی می شوند. در حالی که این روش در اصل مستقل از طرح نمونه برداری خاص است، نویسنده گان پیشنهاد می کنند که هندسه کروی را با یک مش ایکوسفر گستته سازی کنند. این مش با گرفتن یک ییست و چهی جایگذاری شده، تقسیم مکرر وجود آن همانطور که در شکل ۶۳ نشان داده شده، و در نهایت تصویر کردن رئوس شبکه به صورت شعاعی روی کره، یعنی به نرم واحد، ساخته می شود. میدان های ویژگی نمونه برداری شده به صورت عددی با مجموعه ای از بردار های ضربی $f^A(p) \in \mathbb{R}^c$ در رئوس شبکه $e^A(p)$ در رئوس بیان می شوند، که نسبت به برخی چارچوب های راست هنجار راست گرد دلخواه $[e^A_1, e^A_2]$ در عمل، چارچوب ها بیک بردار مماس منفرد با نرم واحد نمایش داده می شوند، که بردار چارچوب دوم از آن به طور یکتا نتیجه می شود زیرا چارچوب ها راست گرد هستند.

برای محاسبه کانولوشن مستقل از مختصات (p) [۶] از معادله (۸۷) $K = \text{Exp}_p^* f$ -راهبری پذیر کرنل (۲) $\text{SO}(2)$ -باید کرنل K را با پول بک انتقال دهنده $[\text{Exp}_p^* f]^A$ از میدان ویژگی f (معادله (۶۷)) منطبق کنند. همانطور که در یاد گیری عمیق معمول است، در اینجا فرض می شود که K دارای تکیه گاه فشرده است، به طوری که فقط چند رأس را در یک همسایگی یک-حلقه یا دو-حلقه یا \sqrt{p} حول یک رأس مرکزی p پوشش می دهد. در نظریه پیوسته، پول بک انتقال دهنده ویژگی ها را از تمام نقاط $(v)^{-1} \in \mathbb{R}^q$ برای $\exp_p^{A\tilde{A}}(v)_{TM,p}$ می گیرد و آنها را به p منتقل می کنند. در عمل، میدان های ویژگی فقط در رئوس شبکه q نمونه برداری می شوند، که متناظر با ضرایب بردار مماس v_{pq}^A نسبت به پیمانه A در رأس p هستند. نگاشت های لگاریتمی $\log_p(q)$ در اینجا همانطور که در معادله (۴۳۱) تعریف شده، محاسبه می شوند. انتقال دهنده های لوی-چیویتا $(g_{p\leftarrow q}^{A\tilde{A}})$ در امتداد ژئودزیک ها از q به p در اصل توسط معادله (۴۳۹) داده می شوند. از آنجا که چارچوب های همگنی راست گرد و راست هنجار هستند، و از آنجا که انتقال متناظر با اتصال لوی-چیویتا روی S^3 است، اعضای گروه $g_{p\leftarrow q}^{A\tilde{A}}$ مقادیری در (۲) $\text{SO}(2)$ دارند. بنابراین آنها به طور کامل توسط زاویه بین محور اول چارچوب منتقل شده $(e_{TM,\gamma}^{\tilde{A}})$ از q و محور اول چارچوب در p تعیین می شوند. با این اجزا در دست، نویسنده گان پیشنهاد می کنند که انتگرال کانولوشن پیوسته را با مجموع گستته

$$[K * f]^A(p) = \int_{\mathbb{R}^q} K(v) [\text{Exp}_p^* f]^A(v) dv \approx \sum_{q \in \mathcal{N}_p} K(v_{pq}^A) \rho(g_{p\leftarrow q}^{A\tilde{A}}) f^{\tilde{A}}(q) \quad (441)$$

روی گره های مش همسایه تقریب بزنند. ضرب نرمال سازی گم شده را می توان به عنوان جذب شده در پارامتر های یادگرفته $w_i \in \mathbb{R}$ از کرنل کانولوشن (۲) $\text{SO}(2)$ -راهبری پذیر $K = \sum_i w_i K_i$ در نظر گرفت. به عنوان جایگزینی برای این تقریب ساده، نویسنده گان یک طرح انگرال گیری تریکی بینه را پیشنهاد می کنند، که به طور تجربی نشان داده شده است که همودایی ایزو متري (۳) $\text{SO}(2)$ مدل را بهبود می بخشد.

این مدل در جدول ۶ به عنوان پردازشگر میدان های ویژگی که مطابق با نمایش منظم (۲) $\text{SO}(2)$ تبدیل می شوند، فهرست شده است. در پیاده سازی خود، [۷] میدان های نمایش تحويل ناپذیر از (۲) $\text{SO}(2)$ را در کانولوشن ها در نظر می گیرند. یک تغییر پایه قبل و بعد از کانولوشن ها این میدان های ویژگی را به میدان های ویژگی منظم تبدیل می کنند، که سپس غیر خطی های نقطه ای مانند ReLU روی آنها عمل می کنند. نمایش منظم بی نهایت-بعدی (۲) $\text{SO}(2)$ در اینجا با نمایش های منظم زیر گروه های دوری گستته C_N تقریب زده می شود، که نمایش های تحويل ناپذیر آنها فقط نمایش های تحويل ناپذیر (۲) $\text{SO}(2)$

^{۱۱۳} این متناظر با یک انتخاب مستقل از پیمانه $\psi_{TM,p}^{A_p}$ روی هر همسایگی باز U^{A_p} از هر رأس p است.

^{۱۱۴} اگر نگاشت نمایی به شعاع اثر کیویته محدود نشود، هر رأس q با چندین بردار مماس نمایش داده می شود. این در عمل مشکلی ایجاد نمی کند زیرا فرض می شود که کرنل به صورت محلی در داخل شعاع اثر کیویته دارای تکیه گاه است.

تا یک فرکانس محدود کننده باند $[N/2]$ هستند؛ به عنوان مثال به پیوست ۲.۱ از [۴] مراجعه کنید. تغییر پایه بین نمایش‌ها در این مورد خاص فقط تبدیل فوریه گسسته معمول است.

CNN‌های گروی توسط: κ ، که در ردیف (۳۳) جدول ۶ فهرست شده‌اند، بر اساس کانولوشن‌های گراف متعارف هستند [۴]. مشاهدای پیکسلی روی کره در اینجا به عنوان گراف تفسیر می‌شوند. شبکه‌های کانولوشنی گراف سیگنال‌ها را روی کره با ضرب آنها در چندجمله‌ای‌های درجه k_i به صورت $\sum_{k=0}^{\infty} w_k L^{k_i}$ از ماتریس لاپلاسین گراف L پردازش می‌کنند، که در آن $w_k \in \mathbb{R}$ پارامترهای قابل آموزش هستند. از آنجا که ماتریس لاپلاسین فقط برای گره‌های مجاور و رودی‌های غیرصفر دارد، جمله مرتبه $k=1$ فقط بر همسایگی‌ها هاب حول هر گره تأثیر می‌گذارد. روی یک مش منظم با یال‌های گراف بدون وزن، سهم یک گره همسایه در ویژگی ابانته شده در \mathcal{P} فقط به فاصله گراف آنها (شعاع) بستگی دارد، اما نه به همسایه خاص (جهت). بنابراین کانولوشن گراف در چنین مواردی کرنل‌های همسانگرد را روی گراف اعمال می‌کند. گراف پیکسلی در نظر گرفته شده روی کره این ویژگی‌ها را تقریباً برآورده می‌کند. از آنجا که جایگذاری آنها روی کره به گونه‌ای است که گره‌ها تقریباً به صورت ژئودزیکی هم‌فاصله هستند، همسانگردی توپولوژیکی کرنل‌های کانولوشن گراف متناظر با همسانگردی متريک آنها روی کره است.

گروه ايزومتری ۳ کره، تبدیلات پیمانه‌ای با مقادیر ۲ را کاملاً یعنی با جابجایی الگوهای یک مکان جدید و در یک جهت جدید عمل می‌کند. به دلیل اشتراک وزن کانولوشن‌های همسانگردی کرنل‌ها، کانولوشن‌های گراف به طور بدینهی هموردای ايزومتری هستند. همانطور که قبلًا در معادله (۴۲۰) استدلال شد، کرنل‌های همسانگرد در جارچوب م به عنوان کرنل‌های ۲-راهبری‌پذیر که بین میدان‌های اسکالار نگاشت انجام می‌دهند، بازیابی می‌شوند. هموردایی ۳ کانولوشن در نظریه ما با ناواردایی ۳ از ۲-ساختار کره توضیح داده می‌شود.

کانولوشن‌های گروی با کرنل‌های روی: S^3 به عنوان یک فضای همگن، کره کانولوشن‌های گروی (یا فضای خارج‌قسمتی) [۴] و کانولوشن‌های راهبری‌پذیر عمومی تر روی فضاهای همگن [۴] را می‌پذیرد.^{۱۵} به جای تعریف کرنل‌های کانولوشن روی فضاهای مماس یا روی همسایگی‌های گراف، این روش‌کردن کرنل‌ها را بلافصله به عنوان توابع ماتریسی روی کره تعریف می‌کنند، یعنی به صورت

$$\kappa : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{mem}} \times c_{\text{mem}}} \quad (442)$$

۴ نشان دادند که این کرنل‌ها برای تضمین هموردایی کانولوشن باشد یک محدودیت تقارنی را برآورده کنند. ما در ادامه استدلال می‌کنیم که چنین کرنل‌هایی روی S^3 معادل کرنل‌های G -راهبری‌پذیر روی فضاهای مماس هستند (قضیه ۱۱.۱)، که این دلالت بر این دارد که CNN‌های کروی پوشش داده شده در [۴] و [۴] را می‌توان به عنوان کانولوشن‌های GM در نظر گرفت (قضیه ۱۱.۲). یکی گرفن بنی این دو نوع کرنل در اینجا با پول‌بک کردن کرنل‌های کروی از طریق نگاشت نمایی به فضاهای مماس انجام می‌شود. قبل از توضیح این عملیات، ما به طور خلاصه مدل‌های پیشنهادی در [۴] را به عنوان نمونه‌های خاصی از کانولوشن‌های کروی با کرنل‌های کروی موردن بحث قرار می‌دهیم. برای جزئیات بیشتر در مورد این مدل‌ها، به ویژه در مورد فرمول‌بندی آنها در فضای فوریه، خواننده را به مرور جامع [۴] ارجاع می‌دهیم.

بحث خود را با CNN کروی کانولوشنی گروی توسط [۴] که در ردیف (۳۴) جدول ۶ فهرست شده است، آغاز می‌کنیم. این مدل پشتهدایی از c_{mem} میدان اسکالار

$$f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{mem}}} \quad (443)$$

را روی کره با تطبیق آنها با کرنل‌های کروی (معادله (۴۴۲)) در هر ژست تبدیل شده با (3) $\text{SO}(3)$ پردازش می‌کند. در معادلات، این عملیات به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\kappa *_{S^3} f](\phi) := \int_{S^3} \kappa(\phi^{-1}(p)) f(p) dp \quad \phi \in \text{SO}(3). \quad (444)$$

توجه داشته باشید که نقشه ویژگی حاصل به عنوان پشتهدای از c_{mem} در نظر گرفته می‌شود. چنین نقشه‌های ویژگی به شکل $\mathbb{R}^{c_{\text{mem}}} \rightarrow \text{SO}(3)$ (با تعداد جدید کاتالوگ‌های ورودی که متناظر با کاتالوگ‌های خروجی لایه قبل است) با کانولوشن‌های گروی به شکل زیر بیشتر پردازش می‌شوند:

$$[\kappa *_{\text{SO}(3)} f](\phi) := \int_{\text{SO}(3)} \kappa(\phi^{-1}\omega) f(\omega) d\omega \quad \phi \in \text{SO}(3), \quad (445)$$

که در آن $\text{SO}(3) \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{mem}} \times c_{\text{mem}}} = \mathbb{R}^{c_{\text{mem}} \times c_{\text{mem}}}$ است. اکنون یک تابع ماتریسی روی $\text{SO}(3)$ را دیدگاه CNN راهبری‌پذیر روی فضاهای همگن [۴] و کانولوشن‌های GM ، تابع اسکالار روی $\text{SO}(3)$ به عنوان میدان‌های ویژگی روی $S^3 \cong \text{SO}(3)/\text{SO}(2)$ در نظر گرفته می‌شوند، که مطابق با نمایش منظم تارهای (زیر گروه‌های پایدارساز) $\text{SO}(2)$ تبدیل می‌شوند. کانولوشن اولیه در معادله (۴۴۴) تفسیر، کرنل‌های $\text{SO}(2)$ -راهبری‌پذیر را بین میدان‌های اسکالار و منظم اعمال می‌کند، در حالی که کانولوشن گروی در معادله (۴۴۵) کرنل‌های $\text{SO}(2)$ -راهبری‌پذیر را بین میدان‌های منظم روی S^3 اعمال می‌کند.

^{۱۵} یک مرور عمومی تر از کانولوشن‌ها روی فضاهای همگن در پیوست ت یافت می‌شود.

؟ [کانولوشن‌های کروی را مانند معادله (۴۴۴) با این فرض اضافی اعمال می‌کنند که کرنل‌ها ناحیه‌ای هستند، یعنی تحت دوران‌های $\text{SO}(2)$ حول محور قطبی ناوردا هستند؛ شکل ۴۸ را مقایسه کنید. در حالی که انگرال از نظر فنی هنوز پاسخ‌هایی در $\text{SO}(3)$ می‌دهد، تقارن کرنل دلالت بر این دارد که این پاسخ‌ها روی تارهای $\text{SO}(2)$ از $\text{SO}(3)$ هنگامی که به عنوان کلاف روی S^2 تفسیر می‌شوند، ثابت هستند. بنابراین میدان‌های ویژگی حاصل به عنوان میدان‌های اسکالر روی S^2 شناسایی می‌شوند، که اجازه کاربرد مکرر این نوع کانولوشن را می‌دهد. توجه داشته باشید که تقارن ناحیه‌ای کرنل با محدودیت کرنل راهبری‌پذیر بین میدان‌های اسکالر (نمایش‌های بدینه) که قبلاً در معادله (۴۱۹) با آن مواجه شدیم، سازگار است. همانطور که قبل از بحث شد، این محدودیت معادل محدودیت راهبری‌پذیری ۲ بین میدان‌های اسکالر در معادله (۴۲۰) است، که این دلالت بر این دارد که مدل ؟ [در واقع ۳-هموردا است. این مدل از نظر روحی شیوه به کانولوشن‌های گراف کروی است که در بالا مورد بحث قرار گرفت، اما از دیدگاه متفاوتی استخراج شده و در پیاده‌سازی به طور متفاوتی گسسته‌سازی می‌شود.

؟ [این مدل را از میدان‌های اسکالر به توابع کروی با وزن اسپین تعیین می‌دهند. این توابع نه تنها به موقعیت $s \in S^2$ روی کره بستگی دارند، بلکه علاوه بر آن به انتخاب خاص چارچوب مرجع راست‌هنگار و راست‌گرد در آن نقطه نیز بستگی دارند. آنها با نمایش‌های تحویل‌ناپذیر ρ_s از $\text{SO}(2)$ مرتبط هستند، که در آن عدد صحیح $\mathbb{Z} \in s$ به عنوان وزن اسپین توابع شناخته می‌شود.^{۱۶} مقدار آنها برای چارچوب‌های مختلف $\text{SO}_p M$ از $\text{SO}(2)$ -ساختار SOM به گونه‌ای محدود شده‌اند که تبدیلات پیمانه‌ای چارچوب با $(g) \in \text{SO}(2)$ منجر به تبدیل مقدار تابع با $(g) \rho_s$ می‌شود. بنابراین، در معادلات، آنها با^{۱۷}

$${}_s f : \text{SOM} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{and} \quad {}_s f([e_1, e_2] \triangleleft g) = \rho_s(g) {}_s f([e_1, e_2]) \quad \forall [e_1, e_2] \in \text{SO}_p M, g \in \text{SO}(2); \quad (446)$$

تعريف می‌شوند؛ برای جزئیات بیشتر و تعاریف جایگزین به ؟ [مراجعه کنید. به شbahت این محدودیت تقارنی با رابطه هم‌ارزی

$$[[e_i]_{i=1}^2 \triangleleft g, f] \sim_{\rho_s} [[e_i]_{i=1}^2, \rho_s(g)f] \quad (447)$$

از معادله (۱۷۰) که زیربنای تعریف کلاف‌های همبسته است، توجه کروی با وزن اسپین در واقع معادل مقاطعی از کلاف‌های همبسته $(\text{SOM} \times \mathbb{C}) / \sim_{\rho_s}$ هستند؛ به عنوان مثال به گزاره ۳.۶.۱ در ؟ [مراجعه کنید. آنها در نظریه ما به سادگی به عنوان میدان‌های نمایش تحویل‌ناپذیر $\text{SO}(2)$ ظاهر می‌شوند، از جمله میدان‌های اسکالار برای $= 0$ و میدان‌های برداری برای $= 1$ شکلهای عصی پیشنهادی توسط ؟ [اویزگی‌های با وزن اسپین را با کرنل‌های با وزن اسپین روى کره کانولوال می‌کنند. این عملیات متناهی ترا بیک کانولوشن با کرنل‌های راهبری‌پذیر است که در آن ρ_m و ρ_n نمایش‌های تحویل‌ناپذیر هستند.

مدل‌های ؟ [در ابتدا در حوزه فضایی فرمول‌بندی شده‌اند، یعنی به عنوان پردازش توابع روی S^2 همانطور که در بالا بحث شد. با این حال، آنها در حوزه طیفی پیاده‌سازی می‌شوند، که به لطف فضایی کانولوشن تعیین‌بافته روی S^2 و روی $\text{SO}(3)$ ممکن است ؟ [. ؟ [این رویکردها را تعیین می‌دهند و مدلی را پیشنهاد می‌کنند که بر اساس ترکیبات خطی یادگرفته شده از تمام مدهای فوریه میدان‌های ویژگی با فرکانس یکسان است. نویسنده‌گان استدلال می‌کنند که این رویکرد فضای کامل نگاشت‌های خطی $\text{SO}(3)$ -هموردا را بین میدان‌های ویژگی روی کره پوش می‌دهد. از سوی دیگر، ؟ [نشان می‌دهند که هر چنین نگاشتی را می‌توان در حوزه فضایی به عنوان یک کانولوشن با کرنل‌های کروی $\text{SO}(2)$ -راهبری‌پذیر نوشت. یک ویژگی قابل توجه مدل پیشنهادی توسط ؟ [این است که به طور کامل در فضای فوریه عمل می‌کند: به جای تبدیل بازگشت به حوزه فضایی و اعمال غیرخطی‌های نقطه‌ای مانند ReLU در آنجا، همانطور که در رویکردهای قبلي انجام می‌شد، نویسنده‌گان حاصل‌ضرب تانسوری را بین تمام میدان‌های ویژگی محاسبه کرده و معمقاً آنها را از طریق تجزیه کلیش-گوردون به ویژگی‌های تحویل‌ناپذیر (مدهای فوریه) باز می‌گردانند. این از نظر محاسباتی سودمند است، با این حال، به قیمت از دست دادن محلی بودن غیرخطی‌ها تمام می‌شود. وظایف یادگیری خاص، به ویژه در علوم طبیعی، ممکن است از چنین غیرخطی‌هایی بهره‌مند شوند زیرا تعاملات فیزیکی اغلب با حاصل‌ضرب‌های تانسوری توصیف می‌شوند.

همانطور که در ؟ [استدلال شده است، تمام این مدل‌ها را می‌توان به عنوان اعمال کرنل‌های راهبری‌پذیر روی S^2 در نظر گرفت که بین میدان‌های اسکالار ؟ [، میدان‌های ویژگی منظم ؟ [یا میدان‌های نمایش تحویل‌ناپذیر ؟ [نگاشت انجام می‌دهند. در باقیمانده این بخش و پیوست ج ما نشان می‌دهیم که آنها را نیز می‌توان به عنوان کانولوشن‌های GM در نظر گرفت. ادعای اینکه کانولوشن‌های کروی با کرنل‌های راهبری‌پذیر روی S^2 معادل کانولوشن‌های GM هستند، در قضیه ۱۱.۲ دقیقاً بیان می‌شود. این قضیه به طور حیاتی به قضیه ۱۱.۱ متکی است، که یک ایزومورفیسم را بین کرنل‌های راهبری‌پذیر کروی و کرنل‌های G -راهبری‌پذیر روی فضاهای مماس برقرار می‌کنند.

فرض کنید I هر گروه ایزومنtri متعبدی از کره باشد، یعنی $\exists I = \text{SO}(3)$ یا $I = \text{Stab}_n$ کانولوشن‌های کروی I -هموردا را بر حسب کرنل‌های کروی Stab_n -راهبری‌پذیر $\text{Stab}_n \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{dim}} \times c_{\text{dim}}} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{dim}} \times c_{\text{dim}}}$ توصیف می‌کنند، که در آن $I < S^2$ است، به عنوان مثال قطب شمال. از آنجا که این کرنل‌ها روی کره تعریف شده‌اند، که از نظر توپولوژیکی با \mathbb{R}^m متمایز است، تعریف مستقیم یک ایزومورفیسم بین آنها و کرنل‌های G -راهبری‌پذیر ممکن نیست. با این حال، از آنجا که قطب جنوب $-n$ یک مجموعه با اندازه صفر است، می‌توانیم دامنه انگرال گیری S^2 کانولوشن‌های کروی را با $-n$ جایگزین کنیم بدون اینکه نتیجه تغییر کند. با این تطبیق، کرنل‌های راهبری‌پذیر کروی ؟ [به صورت زیر

^{۱۶} می‌توان این مفهوم را به نمایش‌های اسپین، که با وزن‌های اسپین نیمه‌صحیح بر چسب گذاری شده‌اند، تعیین داد.

^{۱۷} یک پیاده‌سازی با مقدار حقیقی به جای آن توابع با وزن اسپین به شکل $f : \text{SOM} \rightarrow \mathbb{R}^{\text{dim}(\rho_s)}$ را در نظر می‌گیرد، که در آن ρ_s نمایش‌های تحویل‌ناپذیر $\text{SO}(2)$ روی اعداد حقیقی هستند.

تعريف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^{\text{Stab}_n} := \left\{ \kappa : S^* \setminus n \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square} \times c_{\square}} \mid \kappa(\xi(p)) = \rho_{\square}(g_{\xi}^{NN}(n)) \cdot \kappa(p) \cdot \rho_{\square}(g_{\xi}^{XP}(p))^{-1} \right. \\ \left. \forall p \in S^* \setminus n, \xi \in \text{Stab}_n \right\}, \end{aligned} \quad (448)$$

هنگامی که به نمادگذاری ما ترجمه شود. از آنجا که کرنل‌ها به صورت سراسری روی کره تعریف شده‌اند، مقادیر آنها در $\mathbb{R}^{c_{\square} \times c_{\square}}$ نسبت به پیمانه‌های بالقوه متفاوت N در n که کرنل در آن مرکز است، P در $p \in S^*$ که کرنل یک ویژگی $f^P(p) \in \mathbb{R}^{c_{\square}}$ را منقضی می‌کند و X در (p) که این ویژگی تحت عمل $\xi \in \text{Stab}_n$ می‌شود، بیان می‌شوند. این محدودیت کرنل تمام مقادیر کرنل را که روی مدارهای S^* قرار دارند، از طریق تبدیلات پیمانه القا شده توسط ایزومنتری آنها (p) و (n) به هم مرتبط می‌کند؛ به معادلات (۲۹۹) و (۳۰۲) مراجعه کنید.^{۱۸} کرنل‌های G -راهبری پذیر معادل ما، که در آن $G \cong \text{Stab}_n$ با

$$\mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^{G, B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi)} := \left\{ K : B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square} \times c_{\square}} \mid K(gv) = \rho_{\square}(g) \cdot K(v) \cdot \rho_{\square}(g)^{-1} \quad \forall v \in B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi), g \in G \right\}. \quad (449)$$

داده می‌شود. دامنه کرنل در اینجا از \mathbb{R}^* به گوی باز $\{\pi \in \mathbb{R}^* \mid \|v\| < \pi\}$ محدود شده است که می‌توان آن را از طریق نگاشت نمایی با $S^* \setminus n$ یکی گرفت. توجه داشته باشید که $\mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^{G, B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi)}$ خوش تعریف است زیرا $G \cong \text{SO}(2)$ یا $G = \text{SO}(2)$ دارد، که تحت عمل آنها $B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi)$ بسته است. علاوه بر این ضریب دترمینان را از محدودیت G -راهبری پذیری عمومی تر در معادله (۸۶) حذف کردیم، زیرا $| \det g | \leq 1$ محدودیت کرنل ما به طور قابل توجهی ساده‌تر از محدودیت $\|\cdot\|$ است زیرا کرنل را به صورت محلی نسبت به یک پیمانه منفرد توصیف می‌کند، به جای اینکه به صورت سراسری نسبت به یک اطلاس از پیمانه‌ها توصیف کنند. توجه داشته باشید که ما فرض همواری را روی کرنل‌ها حذف کردیم، زیرا همواری یا پیوستگی میدان‌های ویژگی توسط $\|\cdot\|$ مورد بحث قرار نگرفته است. این ویژگی را می‌توان به راحتی با خواستن اینکه کرنل‌های G -راهبری پذیر برای $\|\cdot\|$ که به سمت π می‌رود، به مقدار یکسانی همگرا شوند، که از طریق نگاشت نمایی متناظر با قطب جنوب است، اضافه کرد.

فضاهای کرنل‌های G -راهبری پذیر روی $S^* \setminus n$ و کرنل‌های G -راهبری پذیر روی $B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi)$ ایزومورف هستند، یعنی کرنل‌های آنها با یک نگاشت وارون پذیر Ω که محدودیت‌های کرنل را رعایت می‌کند، یکی گرفته می‌شوند:

$$\begin{array}{ccc} & \Omega & \\ \mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^{G, B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi)} & \xleftarrow{\hspace{1cm}} & \mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^{\text{Stab}_n} \\ & \Omega^{-1} & \end{array} \quad (450)$$

این ایزومورفیسم (یا بهتر بگوییم وارون آن Ω^{-1}) را می‌توان به عنوان مشابه پولبک انتقال دهنده از میدان‌های ویژگی در نظر گرفت: این ایزومورفیسم مقادیر کرنل را از نقاط $v \in S^* \setminus n$ به مختصات نرمال ژئودزیک $(\psi_{TM,n}^N)^{-1}(v)$ در این قطب، فرض کنید. برای بیان مقادیر کرنل از تمام نقاط $p \in S^* \setminus n$ نسبت به همان پیمانه، این ایزومورفیسم انتقال دهنده‌های لوی-چویتا $(g_{n \leftarrow p}^{NP})\rho$ را از p در امتداد ژئودزیک‌ها به قطب شمال n اعمال می‌کند. علاوه بر این، مقادیر کرنل را با عنصر حجم ریمانی $\sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|} := \sqrt{|\det(\eta_p(\frac{\partial}{\partial v_i}|_p, \frac{\partial}{\partial v_j}|_p))_{ij}|}$ نسبت به سیستم مختصات نرمال ژئودزیک (چارت مختصاتی) $p \mapsto v(p) = \psi_{TM,n}^N \log_n p$ تغییر مقیاس می‌دهد.^{۱۹} قضیه زیر ایزومورفیسم فضای کرنل را به طور رسمی تعریف و اثبات می‌کند.

قضیه ۱۱.۱ (کرنل‌های راهبری پذیر کروی در مختصات ژئودزیک). فرض کنید \mathcal{I} هر گروه ایزومنتری متعددی از S^* باشد و Stab_n زیرگروه پایدارساز آن در قطب شمال $n \in S^*$ باشد. با توجه به هر انتخاب از پیمانه $\psi_{TM,n}^N$ در این قطب، فرض کنید $G \leq \text{GL}(2)$ گروه ساختاری ایزومورف باشد که Stab_n را در مختصات مطابق با $\psi_{TM,n}^N \circ \xi_{*,TM}^{-1} \circ (\psi_{TM,n}^N)^{-1}$ نمایش می‌دهد. فضای $\mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^{\text{Stab}_n}$ از کرنل‌های Stab_n -راهبری پذیر روی $S^* \setminus n$ توسط Ω [معادله (۴۴۸)] سپس با فضای $\mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^{G, B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi)}$ از کرنل‌های G -راهبری پذیر روی گوی باز $B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi)$ ایزومورف است. ایزومورفیسم فضای کرنل

$$\Omega : \mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^{G, B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_{\rho_{\square}, \rho_{\square}}^{\text{Stab}_n} \quad (451)$$

^{۱۸} [تبدیلات پیمانه القا شده توسط ایزومنتری را با $(\xi(p, h(p)))$ به جای $(p, \xi(h(p)))$ نشان می‌دهند، با این فرض که پیمانه‌های X در p یکسان هستند.

تعريف آنها از $(\xi(p, h(p)))$ مشابه معادله (۲۹۳) است.

^{۱۹} توجه داشته باشید که پایه‌های مختصات $\frac{\partial}{\partial v_i}|_p, \frac{\partial}{\partial v_j}|_p$ که توسط مختصات نرمال ژئودزیک $(\psi_{TM,n}^N)^{-1}(p)$ ندارند، برای $G \leq \text{GL}(2)$ در GM موجود نیستند. این پایه‌ها نقشی در کانولوشن GM ندارند اما فقط برای تصحیح حجم ریمانی هنگام انتگرال‌گیری در مختصات نرمال ژئودزیک روی کرنل ظاهر می‌شوند.

با

$$\Omega(K): S^* \setminus -n \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{stab}} \times c_{\text{stab}}}, \quad p \mapsto [\Omega(K)](p) := K(\psi_{TM,n}^N \log_n p) \rho_{\text{stab}}(g_{n \leftarrow p}^{NP}) \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}^{-1} \quad (452)$$

داده می شود اگر کرنل نسبت به پیمانه های (بالقوه مستقل) N در n و P در p بیان شود. وارون آن با

$$\Omega^{-1}(\kappa): B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{stab}} \times c_{\text{stab}}}, \quad v \mapsto [\Omega^{-1}(\kappa)](v) := \kappa(\exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1} v) \rho_{\text{stab}}(g_{n \leftarrow p}^{NP})^{-1} \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}, \quad (453)$$

داده می شود، که در آن ما $v = \exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1} p$ را به صورت مخفف نوشتیم.

اثبات: با جایگذاری این دو عبارت، به راحتی می توان دید که $\Omega^{-1} \circ \Omega = \text{id}_{\mathcal{K}_{\rho_{\text{stab}}^N}^{\text{stab}_n}}$ است زیرا $\Omega \circ \Omega^{-1} = \text{id}_{\mathcal{K}_{\rho_{\text{stab}}^N}^G}$. بخش فنی اثبات این است که نشان دهیم این دو محدودیت کرنل یکدیگر را نتیجه می دهند، که این کار در پیوست ج ۱ انجام شده است. \square

توجه داشته باشید که ضریب مقیاس بنده حجم برای برقراری ایزو مورفیسم بین فضاهای کرنل ضروری نیست اما برای معادل ساختن انگرال کانولوشن کروی روی $S^* \setminus -n$ با انگرال کانولوشن GM روی $B_{\mathbb{R}^*}(\cdot, \pi)$ لازم است.

؟ [کانولوشن f] $\in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{stab}})$ از یک میدان ویژگی κ در مختصات تعريف می کنند. با توجه به پیمانه های P در p و Q در q (اشتباه تایپی در متن اصلی، باید P در p و Q در q باشد)، فرض کنید $\phi_p \in \mathcal{I}$ ایزو متری یکایی باشد که قطب شمال را به p منتقل می کند، یعنی $p = \phi_p(n)$ ، و چارچوب در n را به چارچوب در p نگاشت می دهد، یعنی $\sigma^P(n) = \sigma^P(p)$ (یا به طور معادل $e = g_{\phi_p}^{PN}(n)$). علاوه بر این، فرض کنید X پیمانه در $(q) \phi_p^{-1}$ باشد. کانولوشن کروی سپس در [۴۵۲] نسبت به این پیمانه ها به صورت نقطه ای با

$$[\kappa *_{S^*} f]^P(p) := \int_{S^*} \kappa(\phi_p^{-1} q) \rho_{\text{stab}}(g_{\phi_p}^{XQ}(q)) f^Q(q) dq = \int_{S^* \setminus -p} \kappa(\phi_p^{-1} q) \rho_{\text{stab}}(g_{\phi_p}^{XQ}(q)) f^Q(q) dq, \quad (454)$$

تعريف می شود، که در آن ما نقطه مقابل p را در مرحله دوم بدون تغییر نتیجه حذف کردیم.^{۱۲} به طور شهودی، این عملیات یک ویژگی خروجی را در p با (۱) گرفتن هم کرنل و هم میدان ورودی، (۲) دوران دادن آنها از طرق ϕ_p^{-1} به طوری که p به قطب شمال منتقل شود (از طریق تبدیل پیمانه القا شده برای بردار ویژگی) و (۳) انگرال گیری از حاصلضرب آنها روی کره، محاسبه می کند. بنابراین، این عملیات به جای اشتراک ام مستقیم وزن ها روی فضاهای مماس، همانطور که مانجام می دهیم، وزن ها را از طریق عمل ایزو متری به اشتراک می گذارد. بنا به تعريف ϕ_p ، هر دو تعريف از اشتراک وزن، کرنل را در مکان هدف p به گونه ای جهت دهی می کنند که با چارچوب انتخاب شده (p) در این مکان تراز شود. قضیه زیر اثبات می کند که کانولوشن GM با یک کرنل $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{stab}}^N}^G$ معادل کانولوشن کروی با کرنل کروی متناظر $\Omega(K)$ است.

قضیه ۱۱.۲ (کانولوشن های راهبری پذیر کروی به عنوان کانولوشن های Ω). فرض کنید Stab_n زیرگروه پایدار ساز هر گروه ایزو متری متعدد \mathcal{I} از S^* باشد و $G \leq \text{GL}(2)$ هر گروه ساختاری ایزو مورف باشد. علاوه بر این، فرض کنید $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{stab}}^N}^G$ باشعاع π باشد (معادله (۴۴۹)) و فرض کنید $\Omega(K) \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{stab}}^N}^{\text{stab}_n}$ کرنل $\Omega(K)$ راهبری پذیر متناظر آن روی $-n$ باشد (معادلات (۴۴۸) و (۴۵۲)). کانولوشن GM (در اینجا برایوضوح با $*_{GM}$ نشان داده شده) با سپس معادل کانولوشن کروی $[K]_{S^*}$ (معادله (۴۵۴)) توسعه دارد. اثبات در پیوست ج ۲ ارائه شده است. \square

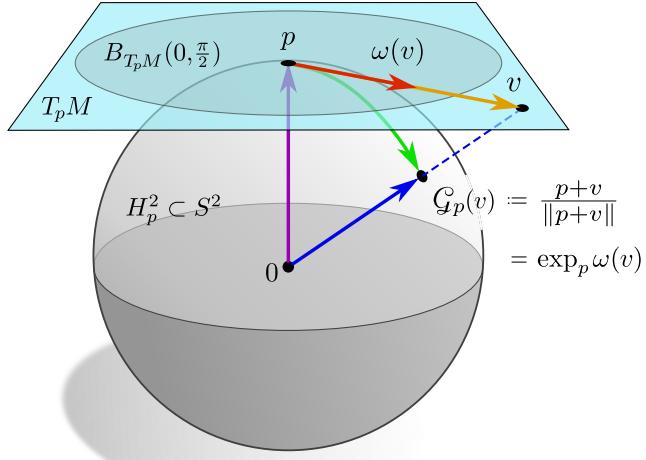
$$\Omega(K) *_{S^*} f = K *_{GM} f \quad (455)$$

برای هر میدان ویژگی کروی $f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\text{stab}})$ برقرار است.

اثبات: اثبات در پیوست ج ۲ ارائه شده است. \square

این اثبات ادعای ما را توجیه می کند که مدل های [۴۴۴] که در این بخش مورد بحث قرار گرفتند، همگی موارد خاصی از کانولوشن های GM هستند.

^{۱۲} این فرمول بندی عمومی تر از فرمول بندی در معادله (۴۴۴) است. دومی برای کرنل های اسکالر را به میدان های ویژگی منظم نگاشت می دهند، بازیابی می شود.



شکل ۱۵: تصویر نومونیک $G_p : T_p M \rightarrow H_p^\circ$ از فضای مماس در p به نیمکره بالایی $H_p^\circ \subset S^\circ$ حول p . نیمکره به $G_p(v)$ که کره به عنوان جایگذاری شده در \mathbb{R}^3 تفسیر شود، تصویر نومونیک $G_p(v)$ (آی) با مجموع $v \in T_p M \subset S^\circ \subset \mathbb{R}^3$ و $p \in H_p^\circ$ (بنفش) و $\omega(v) \in B_{T_p M}(0, \frac{\pi}{2})$ (زرد) در فضای محیطی، و به دنبال آن یک نرمال‌سازی برای بازگشت به کره، داده شود. قضیه ۱۱.۳ اثبات می‌کند که این عملیات معادل یک تصویر از یک بردار با تاب شعاعی $\omega(v) = \arctan(\|v\|) \in B_{T_p M}(0, \frac{\pi}{2})$ (قرمز) از طریق نگاشت نمایی (سبز) است. بنابران، کانونلوشن‌های کروی متنبی بر تصویر نومونیک در \mathbb{R}^3 موارد خاصی از کانونلوشن‌های GM کروی با کرنل‌های دارای تاب شعاعی هستند. کانونلوشن‌های GM عمومی‌تر هستند زیرا به تصویرهای کرنل روی کل کره به جای فقط نیمکره بالایی اجازه می‌دهند.

CNN‌های کروی همودای دوران سمتی در توپولوژی‌های استوانه‌ای ۳.۱۱

علاوه بر کانونلوشن‌های کروی کاملاً (۳)- SO -همودا، بسیاری از CNN‌های کروی طوری طراحی شده‌اند که نسبت به دوران‌های سمتی حول یک محور قطبی مشخص، همودا باشند. تمام مدل‌های مورد بحث در این بخش یا بر (۲)- SO -ساختر $\{e\}$ -ناوردا که در شکل‌های ۵۰ و ۵۲ نشان داده شده است، یا به طور جایگزین، بر ساختار نشان داده شده در شکل ۵۳ تکه دارند. به دلیل بدیهی بودن گروه ساختار $\{e\}$, فضاهای کرنل نامحدود باقی می‌مانند ($\{e\}$ -راهبری‌پذیر). ویژگی‌ها مطابق با اتصال بدیهی یکای $\{e\}$ -ساز کار منقل می‌شوند که با اتصال لوی-چیویتا کروی معمول متفاوت است. با این اطلاعات، و با نگاشتهای نمایی صریح در معادله (۴۳۰)، کانونلوشن‌های GM کروی در این بخش در تئوری کاملاً مشخص شده‌اند. در عمل، پیاده‌سازی‌ها، که در دریف (۴۴) جدول ۶ فهرست شده‌اند، در پیاده‌سازی‌های عددی خود متفاوت هستند، که در ادامه به بحث در مورد آنها می‌پردازیم.

همزمان با تعریف ما از اشتراک وزن کانونلوشنی، مدل‌های $\{e\}$ یک کرنل الگوی داده شده را روی فضاهای مماس با جهت‌دهی آن نسبت به چارچوب‌های ساختار در نظر گرفته شده در شکل ۵۰ ب اشتراک می‌گذارند. با این حال، برخلاف کانونلوشن‌های GM تطبیق این کرنل‌ها با میدان ویژگی از طریق نگاشتهای نمایی (یا پول‌بک‌های انتقال‌دهنده) انجام نمی‌شود، بلکه از طریق تصویر نومونیک انجام می‌شود. این تصویر نومونیک در هر نقطه p با

$$G_p : T_p M \rightarrow H_p^\circ, \quad v \mapsto \frac{p + v}{\|p + v\|}, \quad (456)$$

تعریف می‌شود، که در شکل ۱۵ به تصویر کشیده شده است. جمع $v \in T_p M \subset \mathbb{R}^3$ با بردارهای مماس $\{q \in S^\circ \mid \langle p, q \rangle_{\mathbb{R}^3} > 0\} \subset S^\circ$ در اینجا در فضای جایگذاری \mathbb{R}^3 انجام می‌شود و نرمال‌سازی نتیجه را به کره باز می‌گرداند. هم‌دانمه تصویر نومونیک، نیمکره «بالایی»

$$H_p^\circ := \{q \in S^\circ \mid \langle p, q \rangle_{\mathbb{R}^3} > 0\} \subset S^\circ \quad (457)$$

است که حول p متمرکز شده است. با توجه به این تفاوت در تصویرهای کرنل، ممکن است به نظر برسد که مدل‌های $\{e\}$ به عنوان کانونلوشن GM توضیح داده نمی‌شوند (یا فقط به طور تقریبی). قضیه زیر، با این حال، اثبات می‌کند که تصویر نومونیک معادل یک تصویر از طریق نگاشت نمایی پس از اعمال یک تاب شعاعی

$$\omega : T_p M \rightarrow B_{T_p M}(0, \frac{\pi}{2}), \quad v \mapsto \arctan(\|v\|) \frac{v}{\|v\|} \quad (458)$$

به فضاهای مماس است، که بردارهای مماس را به یک گوی باز با شعاع $\pi/2$ حول مبدأ منقبض می‌کند:

قضیه ۱۱.۳ (تصویرهای نومونیک به عنوان نگاشتهای نمایی دارای تاب). تصویر نومونیک G_p از $T_p M \subset S^\circ$ به نیمکره بالایی $H_p^\circ \subset S^\circ$ که در معادله (۴۵۶) تعریف شده است، معادل یک تصویر از تاب شعاعی آن $(T_p M)^\circ = B_{T_p M}(0, \frac{\pi}{2})$ (معادله (۴۵۸)) از طریق نگاشت نمایی است، یعنی نمودار زیر جایجایی است:

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{G_p} & H_p^\circ \subset S^\circ \\ \omega \downarrow & & \searrow \exp_p \\ B_{T_p M}(0, \frac{\pi}{2}) & \xrightarrow{\quad} & \end{array} \quad (459)$$

در معادلات،

$$\mathcal{G}_p(v) = \exp_p \circ \omega(v) \quad (460)$$

برای هر $v \in T_p M$ و $p \in S^*$ برقرار است.

اثبات: اثبات با محاسبه ساده زیر داده می‌شود، که برای هر $v \in T_p M$ و $p \in S^*$ برقرار است:

$$\begin{aligned} \exp_p \circ \omega(v) &\stackrel{(1)}{=} p \cdot \cos(\|\omega(v)\|) + \frac{\omega(v)}{\|\omega(v)\|} \cdot \sin(\|\omega(v)\|) \\ &\stackrel{(2)}{=} p \cdot \cos(\arctan(\|v\|)) + \frac{v}{\|v\|} \cdot \sin(\arctan(\|v\|)) \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{p + v}{\sqrt{1 + \|v\|^2}} \\ &\stackrel{(4)}{=} \frac{p + v}{\|p + v\|} \\ &\stackrel{(5)}{=} \mathcal{G}_p(v) \end{aligned} \quad (461)$$

مراحل اول و دوم از تعریف صریح نگاشت نمایی کره جایگذاری شده، معادله (۴۳۰)، و تاب شعاعی، معادله (۴۵۸)، استفاده می‌کنند. مرحله سوم از آنجا نتیجه می‌شود که $\sin \circ \arctan(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ و $\cos \circ \arctan(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ در مرحله چهارم ما از این استفاده کردیم که $\square = 1$ در حالی که مرحله آخر تصویر نومونیک، معادله (۴۵۶) را شناسایی کرد.

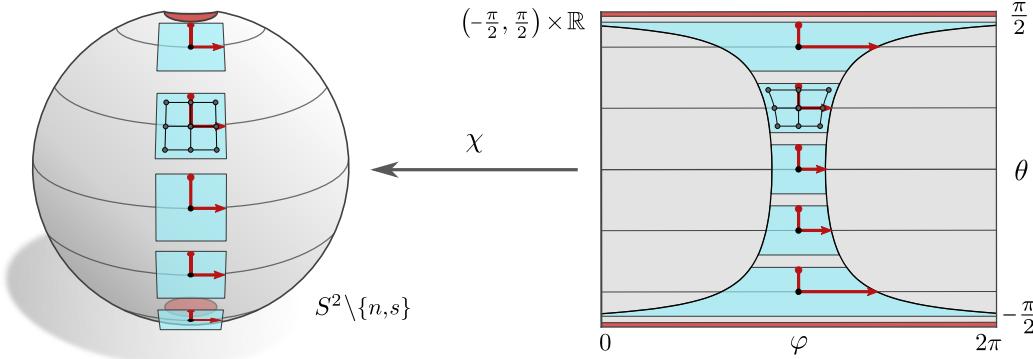
این قضیه دلالت بر این دارد که کانولوشن‌های مبتنی بر تصویر نومونیک در $S^* \setminus \{n, s\}$ در واقع موارد خاصی از کانولوشن‌های GM پس از یکی گرفتن کرنل‌ها از طریق تاب شعاعی ω هستند.^{۱۱۱} توجه داشته باشید که این یکی گرفتن نه تنها برای کرنل‌های $\{e\}$ -راهبری پذیر بلکه برای هر زیرگروه $G \leq G$ نیز برقرار است زیرا محدودیت‌های G -راهبری پذیری متناظر فقط بر بخش‌های زاویه‌ای کرنل‌ها تأثیر می‌گذاردند اما مستقل از بخش‌های شعاعی تاب داده شده هستند. ملاوه بر این می‌خواهیم اشاره کنیم که تصویر مبتنی بر نگاشت نمایی در کانولوشن‌های GM از این جهت عمومی تر از تصویر کرنل نومونیک است که می‌تواند کرنل‌های را توصیف کند که فراتر از نیمکره بالایی H_p حول p گسترش می‌یابند. توجه داشته باشید که هر دو تصویر کرنل در حد عملی مرتبط کرنل‌های کوچک، حتی بدون تاب شعاعی، معادل می‌شوند زیرا $\arctan(\|v\|) = \|v\| + \mathcal{O}(\|v\|^3)$.

پیاده‌سازی‌های $S^* \setminus \{n, s\}$ در پیوستار همگی با یکدیگر و با کانولوشن GM ما معادل هستند، با این حال، گسته‌سازی‌های عددی آنها متفاوت است. $\emptyset, \{n\}$ و $\{s\}$ میدان‌های ویژگی را روی شبکه‌های نمونه‌برداری (قریباً) یکنواخت روی کره گسته‌سازی می‌کنند. به طور خاص، \emptyset و $\{s\}$ از «مجموعه مارپیچ تعمیم‌یافته روی S^* » از \emptyset به عنوان نقاط نمونه‌برداری استفاده می‌کنند، در حالی که \emptyset از رئوس یک ایکوسفرب اسفلاده می‌کنند. از آنجا که تصویرهای نومونیک از شبکه‌های نمونه‌برداری کرنل روی فضاهای مماس با شبکه نمونه‌برداری کروی طبقت ندارند، نویسنده‌گان بین آنها درون یابی دوخطی انجام می‌دهند. ضرایب نمونه‌برداری کرنل در اینجا می‌توانند در یک مرحله آفلاین از پیش محاسبه شوند. کانولوشن واقعی پس از میدان ویژگی خروجی را با متفاصل کرنل‌های تصویر شده و درون یابی شده در هر نقطه با میدان ورودی محاسبه می‌کند.

\emptyset و $\{s\}$ میدان‌های ویژگی کروی خود $\{n, s\} \rightarrow \mathbb{R}^c$ را در عوض به شکل یک شبکه پیکسلی منظم روی یک تصویر هم‌مستطیلی از کره گسته‌سازی می‌کنند. از نظر ریاضی، تصویر هم‌مستطیلی، که در شکل ۵۲ به تصویر کشیده شده است، به عنوان پول‌بک: $\chi^* f = f \circ \chi$ رسمیت می‌یابد: $\chi^* f = f \circ \chi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}^c$

$$(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}}) \times \mathbb{R} \xrightarrow[\chi^* f]{} S^* \setminus \{n, s\} \xrightarrow[f]{\chi} \mathbb{R}^c \quad (462)$$

همانند رویکردهای قبلی، نویسنده‌گان یک شبکه نمونه‌برداری کرنل را از طریق تصویر نومونیک از فضاهای مماس به کره تصویر می‌کنند. در یک مرحله اضافی، آنها آن را از طریق χ به تصویر هم‌مستطیلی نگاشت می‌دهند که در آن ضرایب درون یابی را بین شبکه نمونه‌برداری کرنل تصویر شده و شبکه نمونه‌برداری میدان ویژگی محاسبه می‌کنند. از آنجا که تغییر شکل ناشی از تصویر هم‌مستطیلی مستقل از طول جغرافیایی $\phi \in \mathbb{R}$ است، کافی است آن را فقط یک بار برای هر عرض جغرافیایی $(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}})$ محاسبه کرد. نمودار زیر، که بنا به تعاریف K_p و $K_p^{\text{جایگاهی}}$ است، یک نمای کلی از تصویر نومونیک یک کرنل $K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{منبع}} \times c_{\text{نتیجه}}}$ به کره $S^* \setminus \{n, s\}$ و به تصویر هم‌مستطیلی آن [۱۱۱] ارائه می‌دهد (توجه داشته باشید که این روش از نظر فنی، معادل بودن هر دو کانولوشن علاوه بر این نیازمند یک تغییر واپسی به شاعر در دامنه کرنل برای در نظر گرفتن تغییر در اندازه حجم هنگام تاب دادن کرنل است).



شکل ۵۲: نمایش $\{e\}$ -ساختار (2) -SO-ناوردا که توسط اکثر مدل‌های مورد بحث در بخش ۳.۱۱ در نظر گرفته شده است. تمام چارچوب‌ها $\left[\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{\cos(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]$ به سمت قطب شمال تراز شده‌اند و نسبت به متريک جايجذاري کره در \mathbb{R}^3 راست‌هنچار هستند. نگاشت مختصات کروي $S^2 \setminus \{n, s\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$ از معادله (427) اجازه می‌دهد تا میدان‌های ويژگي کروي به میدان‌های ويژگي روی زوایای کروي $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ پولبک شوند، که به آن تصویر هم‌مستطيلي $1/\cos(\theta)$ (گفته‌مي شود. از آنجا كه χ ايزوموريک نيشت، $\{e\}$ -ساختار کروي در مختصات با يك ضرير وابسته به عرض جغرافياي $1/\cos(\theta)$) كه به سمت قطب‌ها و اگرا مي‌شود، تغيير شكل مي‌باشد. کانونلوشن کروي روی اين $\{e\}$ -ساختار در \mathbb{R}^3 با تصویر کردن در درون‌يابي يك شبکه نمونه‌برداری کرنل روی فضاهای مماس به يك شبکه نمونه‌برداری میدان ويژگي روی کره پيدام‌سازی مي‌شود. اگر میدان‌های ويژگي در عوض روی تصویر هم‌مستطيلي نمونه‌برداری شوند، شبکه نمونه‌برداری کرنل در مرحله دوم از کره به يك شبکه نمونه‌برداری تغيير شكل يافته روی $\mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ نگاشت داده مي‌شود $\{e\}$. توجه داشته باشيد که شبکه‌های نمونه‌برداری منظم روی تصویر هم‌مستطيلي سیگنال را (نسبت به متريک کروي) به سمت قطب‌ها بيش نمونه‌برداری مي‌کنند.

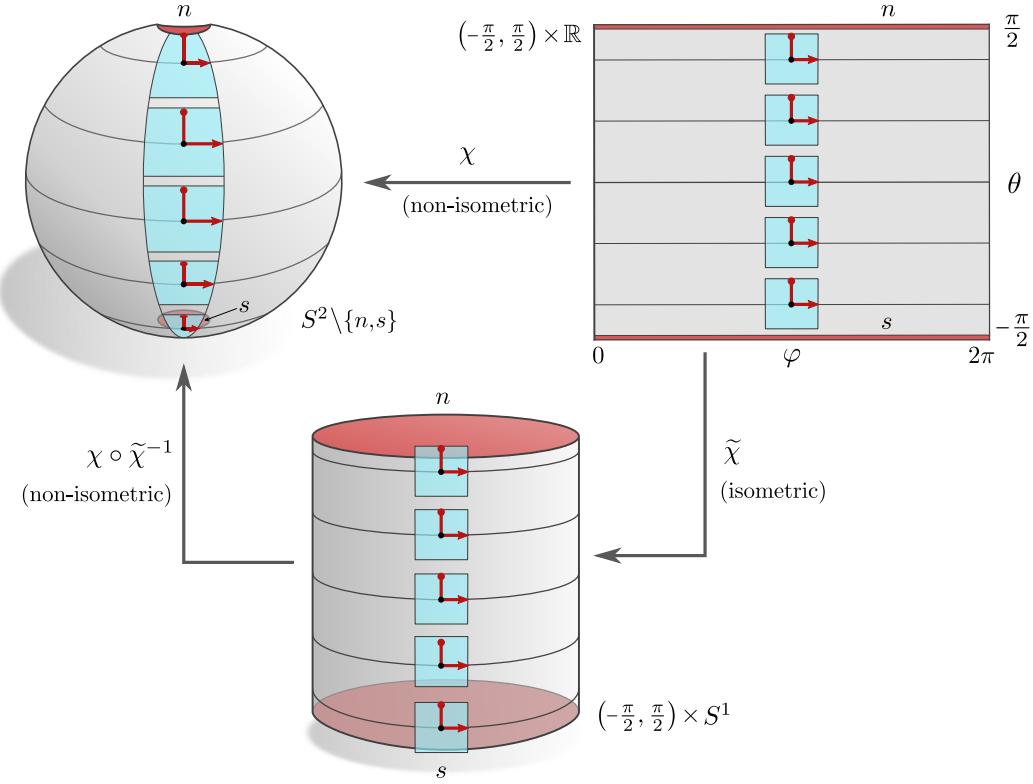
بashiid که روی H_p° وارون‌پذير است):

$$\begin{array}{ccccc}
 & K & \xrightarrow{\quad} & K_p^{\text{منوه}} & \\
 & \downarrow & & \uparrow & \\
 & \mathbb{R}^c & \xleftarrow{\quad T_p M \quad} & \mathbb{R}^{c_{\infty} \times c_{\infty}} & \\
 & \psi_{TM,p}^A & \xrightarrow{\quad G_p = \exp_p \circ \omega \quad} & K_p^{\text{منوه}} & \\
 & & & \downarrow & \\
 & & & H_p^\circ & \\
 & & & \xleftarrow{\quad \chi \quad} & \\
 & & & \chi^{-1}(H_p^\circ) & \\
 & & & \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} &
 \end{array} \tag{463}$$

يک نقطه ضعف عمدۀ گسته‌سازی میدان‌های ويژگي کروي از طريق يك شبکه پیکسلی منظم روی تصویر هم‌مستطيلي اين است که اين رویکرد سیگنال را به سمت قطب‌ها بيش نمونه‌برداری مي‌کند.

انواع دیگري از کانونلوشن‌های کروي روی تصویر هم‌مستطيلي توسيع $\{e\}$ پيشنهاد شده‌اند. به جاي پيش محاسبه الگوي نمونه‌برداری کرنل تغيير شکل يافته، $\{e\}$ اشتراك وزن را باز مي‌کنند به طوری که هر عرض جغرافياي کرنل مستقل خود را در يك کانونلوشن يك‌بعدی اقليدي‌سي اعمال مي‌کند. سپس شبکه روی هر عرض جغرافياي پيش آموزش داده مي‌شود تا نتيجه‌اي را که هنگام کانون‌کردن با يك کرنل که روی فضاهای مماس به اشتراك گذاشته شده است، بازيابي کند. اگر اشتراك وزن کانونلوشن يك باياس استقرائي مناسب باشد، اين روش بايد به طور بهينه به روش‌های مبتنی بر هندسه توسيع $\{e\}$ همگرا شود. $\{e\}$ اين رویکرد را بيشتر توسيع داده و از يك فرا-شبکه استفاده مي‌کند که يك کرنل تغيير شکل يافته را بر اساس يك کرنل الگوي ورودي مشترك و عرض جغرافياي هدف پيش‌بیني مي‌کند. هر دوی اين رویکردها وزن‌ها را روی مدارهای دايره‌اي (خطوط با عرض جغرافياي ثابت) از گروه ايزوموري در نظر گرفته شده (2) -SO- $S^1 \setminus \{n, s\}$ از (2) -SO- $\{e\}$ -ساختار را مقايسه کيد. بنابراین آنها به عنوان تبديلات میدان کرنل با میدان‌های کرنل (2) -SO-NAURODA شناسايي مي‌شوند، که طبق قضيه ۸۸ $\{e\}$ -SO-NAURODA هستند.

با توجه به يك میدان ويژگي کروي در تصویر هم‌مستطيلي، ممکن است علاوه بر اين وسوسه شويم که آن را مستقيماً با يك CNN اقليدي‌سي متعارف پردازش کييم و از تصویر کرنل از فضاهای مماس صرف نظر کييم، همانطور که به عنوان مثال در $\{e\}$ انجام شده است. همانطور که در بخش ۹ بحث شد، چنین کانونلوشن‌های اقليدي‌سي متناظر با کانونلوشن‌های GM روی $\{e\}$ -ساختار کانونی از $\mathbb{R} \subset \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ هستند، که در شکل‌های ۴۴-۵۳ (بالا سمت راست) به تصویر کشیده شده است. اين $\{e\}$ -ساختار از چارچوب‌های $\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right]$ تشکيل شده است، که نسبت به متريک اقليدي‌سي از $\mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ راست‌هنچار هستند. اين چارچوب‌ها، با اين حال، نسبت به متريک کروي (معادله (429)) راست‌هنچار نیستند، که در شکل ۵۳ (بالا سمت چپ) در انقباض چارچوب با ضرير $\cos(\theta)$ در جهت طولي معکوس شده است. بنابراین يك کانونلوشن GM روی اين $\{e\}$ -ساختار از نظر هندسي متناظر با يك کانونلوشن کروي نیست. اين بيشتر متناظر با يك کانونلوشن GM روی يك استوانه است، که از طريق نگاشت مختصاتي



شکل ۵۳: نگاشت مختصات کروی $\{n, s\} \subset S^2 \setminus \{n, s\}$ به $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \times \mathbb{R}$ برای $\chi : (\theta, \phi) \mapsto (\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi})^\top$. این نگاشت ایزومتریک نیست، که به این معنی است که پوش فوروارد چارچوب‌های راست‌هنگار $\left[\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]$ نسبت به متريک اقلیدسی روی $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \times \mathbb{R}$ چارچوب‌هایی را که نسبت به متريک کروی راست‌هنگار باشند، به دست نمی‌دهد. بنابراین یک کانولوشن اقلیدسی متعارف در مختصات $\mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ متناظر با یک کانولوشن کروی نیست \square . کرنل‌های آن با یک ضریب $\cos(\theta)$ در جهت طولی منطبق می‌شوند. از آنجا که فاصله‌ها بر حسب زوایا اندازه‌گیری می‌شوند، این عملیات بیشتر متناظر با یک کانولوشن روی یک استوانه است، که از طریق نگاشت ایزومتریک $S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \times \mathbb{R}$ (معادله (۴۶۴)) در \mathbb{R}^3 جایگذاری شده است. یک کانولوشن کروی به $\{e\}$ -ساختار نشان داده شده در شکل ۵۲ نیاز دارد.

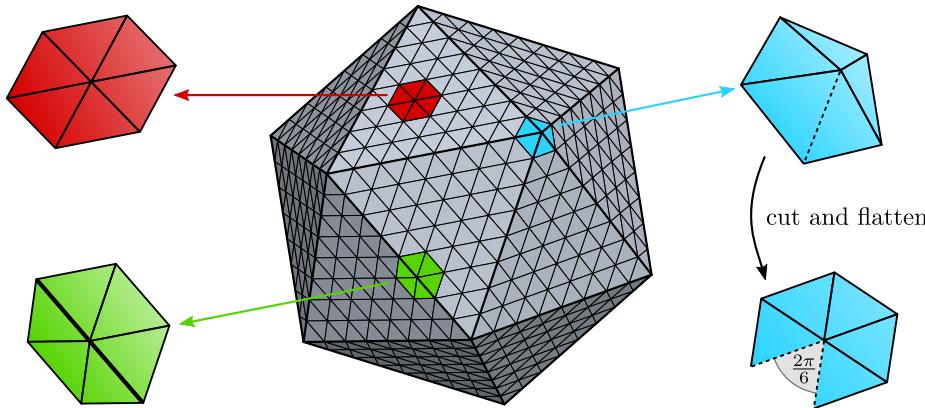
ایزومتریک

$$\tilde{\chi} : (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \times \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \times S^1, \quad (\theta, \phi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ \theta \end{pmatrix} \quad (464)$$

در \mathbb{R}^3 جایگذاری شده است. در مقابل، در شکل ۵۰ و ۵۲ از چارچوب‌های $\left[\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{\cos(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]$ تشکیل شده است، که نسبت به متريک کروی راست‌هنگار هستند. توجه داشته باشید که این چارچوب‌ها و متريک کروی با ضریب $1/\cos(\theta)$ نسبت به همتایان اقلیدسی کانونی خود روی $\mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ کشیده شده‌اند.

؟ [یک رویکرد جایگزین برای کانولوشن‌های کروی روی $\{e\}$ -ساختار نشان داده شده در شکل‌های ۵۰ و ۵۲ پیشنهاد می‌کند. به جای تعریف کرنل‌های روی فضاهای مماس، آنها سیگنال را از طریق عملکردهای دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم به شکل $w_{id} + w_{e^A} \partial_1 + w_{\square \square \square \square \square} \partial_1^3 + w_{e^A e^B} \partial_1 \partial_2 + w_{\square \square \square \square \square} \partial_1^2 \partial_2 + \dots$ در طول آموزش ∂_2 پردازش می‌کنند، که در آن ∂_2 مشتق جزئی در جهت محور \mathbf{n} چارچوب را نشان می‌دهد و وزن‌های $w_i \in \mathbb{R}^{C_{000} \times C_{000}}$ بهینه‌سازی می‌شوند. اینکه وزن‌ها مستقل از موقعیت هستند، متناظر با اشتراک وزن فضایی ما است. این به همراه ناوردایی (2) از $\text{SO}(2)$ -ساختار، که عملکردهای دیفرانسیل در امتداد آن تراز شده‌اند، هموردایی (2) عملیات را تضمین می‌کند. در نظریه پیوسته، این مدل متناظر با یک کانولوشن GM در حد کرنل‌های بی‌نهایت کوچک است. در عمل، ؟ [میدان ویژگی را روی یک مش ایکوسfer نمونه‌برداری می‌کند و عملکردهای دیفرانسیل را بر حسب استنسیلهای گسترده فضایی روی رئوس مش نمایش می‌دهند. این کار، روش را معادل یک کانولوشن GM با کرنل‌های گسترده فضایی می‌کند.

مدل ؟ [دوباره روی یک ایکوسfer عمل می‌کند، با این حال، با یک $\{e\}$ -ساختار به شدت تغییر یافته (ناهموار): به جای تراز کردن چارچوب‌های مرجع به طوری که همگی به سمت قطب شمال اشاره کنند، چارچوب‌ها به طور متناسب به سمت شمال یا جنوب اشاره می‌کنند. این طراحی از پیکسل‌بندی



شکل ۵۴: بیست و چهی یک جسم افلاطونی است که در $\{4, 3, 4\}$ به عنوان یک تقریب تکه‌ای-تخت از هندسه کروی استفاده می‌شود. این جسم از ۱۲ رأس، ۲۰ وجه مثلثی متساوی‌الاضلاع و ۳۰ یال تشکیل شده است. این جسم یک شبکه نمونه‌برداری منظم را می‌پذیرد، که با تقسیم مکرر هر مثلث به چهار مثلث کوچکتر ساخته می‌شود. پس از ۲ تکرار، این رویه منجر به یک شبکه با $2 + 2^{2r+1} \cdot 20 \cdot 4^r$ وجه می‌شود. سه تکه بر جسته شده، هندسه کیفی مقاومت همسایگی‌ها حول رئوس روی وجوده (قمرن)، یال‌ها (سبز) و رئوس بیست و چهی (آبی) نشان می‌دهند. همسایگی قرمز بهوضوح تخت است. در حالی که همسایگی سبز در فضای جایگذاری خمیده است، انحصار گاؤسی ذاتی آن دوباره صفر است. این واقعیت در این امر منعکس می‌شود که می‌توان آن را به صورت ایزومتریک (یعنی بدون پرش) پهن کرد و به طور معادل، انتقال لوى-چوپیتا در امتداد یک مسیر بسته حول گره مرکزی، نگاشت همانی است. همسایگی آبی باید در امتداد یک یال بر پرده شود تا بتوان آن را پهن کرد. نقص زاویه، یعنی زاویه‌ای که برش هنگام پهن کردن نوک تیز باز می‌شود، برابر با $\frac{\pi}{6}$ است. هنگامی که یک بردار یک بار حول رأس مرکزی همسایگی به صورت موازی منتقل می‌شود، به اندازه این نقص زاویه می‌چرخد. به جای داشتن انحصار گاؤسی مثبت ثابت مانند کره S^2 ، انحصار بیست و چهی در رئوس آن منظر کز (تکین) است و در همه جای دیگر صفر است.

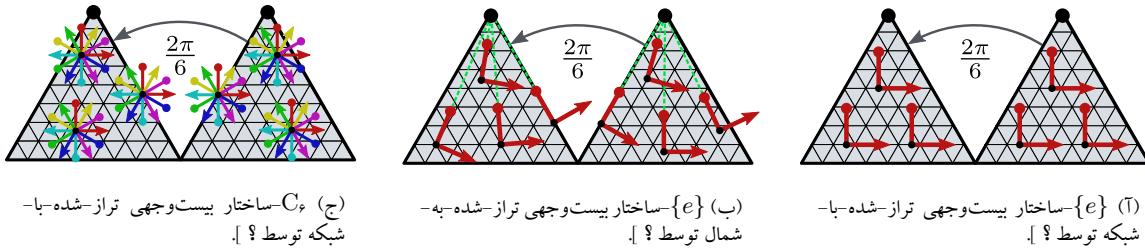
ایکوسфер، که وجوده مثلثی آن یا رو به شمال یا رو به جنوب هستند، الهام گرفته شده است. بنابراین پیکسل‌های مجاور را می‌توان با کرنل‌هایی که نسبت به یکدیگر 180° چرخانده شده‌اند، پردازش کرد. نویسنده‌گان استدلال می‌کنند که فرآیند آموزش باید این دوران را با یادگیری کرنل‌های راهبری پذیر متناسب جبران کند. علی‌رغم دوران‌های شدید کرنل، $\{e\}$ -ساختار تحت آن دسته از دوران‌های سمتی که چارچوب‌های رو به شمال را روی خودشان نگاشت می‌دهند، ناوردا است، که منجر به یک هم‌ورداری تقریبی $SO(2)$ کانون‌لوشن می‌شود.

مدل‌های مورد بحث در این بخش به راحتی به دیگر اجسام دورانی ($SO(2)$ -ناوردا) مانند استوانه از شکل ۵۳ یا تخم مرغ از شکل ۳۳ تعمیم داده می‌شوند. آنها علاوه بر این برای 2 -هموردا بودن، هنگام در نظر گرفتن یک ارتقا از $\{e\}$ -ساختارها، که متناظر با استفاده از کرنل‌های R -راهبری پذیر است، همانطور که در شکل ۴۰ نشان داده شده، تطبیق داده می‌شوند.

۴.۱۱ تقریب‌های بیست و چهی از CNN‌های کروی

کره S^2 در علوم محاسباتی معمولاً با اجسام افلاطونی، یعنی چندوجهی‌های منتظم محدب، تقریب زده می‌شود. در زمینه یادگیری عمیق، علاقه بیشتر بر روی بیست و چهی، ($\{4, 3, 4\}$) شکل ۶۳، متمرکز شده است، که در میان اجسام افلاطونی، نزدیک‌ترین تقریب به کره است [\mathbb{R}^3]. در حالی که هندسه ریمانی کره فقط تقریب زده می‌شود، اجسام افلاطونی این مزیت را دارند که تکه‌ای-تخت هستند و مشاهای منظمی را می‌پذیرند. این ویژگی‌ها امکان استفاده از روال‌های کانون‌لوشن مسطح را فراهم می‌کنند، که از نظر محاسباتی بهینه‌تر از روش‌های دو بخش قبل هستند. این بخش به بحث در مورد CNN‌های بیست و چهی از $\{4, 3, 4\}$ و $\{4, 3, 3, 3\}$ می‌پردازد، که به ترتیب بر G -ساختارهای بهینه شده در شکل ۶۴، 65 و 66 تکیه دارند. قبل از پرداختن به پیاده‌سازی‌های آنها بر حسب اطلسی از چارت‌های افاین در شکل ۶۵، ماجزایی‌تری در مورد هندسه بیست و چهی و G -ساختارهای در نظر گرفته شده ارائه می‌دهیم.

هندسه بیست و چهی: بیست و چهی یک منیفلد دوبعدی گستته است که از ۲۰ وجه مثلثی متساوی‌الاضلاع، ۱۲ رأس و ۳۰ یال تشکیل شده است. همانند کره ۲-بعدی، ما بیست و چهی را به عنوان جایگذاری شده در \mathbb{R}^3 تعریف می‌کنیم، که از آن متريک جایگذاری را در معادله (۴۲۹) به اirth می‌پرسیم. فضاهای مماس جایگذاری شده در $T_p M \subset \mathbb{R}^3$ روی وجوده در اینجا به گونه‌ای تعریف می‌شوند که نرمال‌های آنها با نرمال‌های وجوه منطبق باشند. فضاهای مماس روی رئوس و یال‌ها را می‌توان از طریق میانگین نرمال‌های وجوه مجاور تعیین کرد، همانطور که در بخش بعدی ۱۲ مورد بحث قرار می‌گیرد. با این حال، از آنجا که ما میدان‌های ویژگی را به عنوان نمونه‌برداری شده روی وجوه بیست و چهی (که تقریباً همه جا است) در نظر می‌گیریم، از این انتخاب مستقل هستیم. با فرض اتصال لوى-چوپیتا، انتقال موازی بردارهای مماس روی وجوه به گونه‌ای عمل می‌کند که آنها را در فضای جایگذاری \mathbb{R}^3 موازی نگه دارد. هنگامی که بردارهای مماس از روی یک یال به صورت موازی منتقل می‌شوند، زاویه یکسانی را نسبت به یال در هر دو طرف حفظ می‌کنند. این انتقال را می‌توان به طور شهودی به این صورت تصور کرد که (۱) دو وجه مجاور را پهن کرده، (۲) بردار را روی



(ج) e -ساختار بیست وجهی تراز شده با شبکه توسعه ؟ .

(ب) e -ساختار بیست وجهی تراز شده با شمال توسعه ؟ .

(ت) e -ساختار بیست وجهی تراز شده با شبکه توسعه ؟ .

شکل ۶۵: ایده مفهومی G -ساختارهای فرض شده در \mathbb{R}^3 با تراز کردن تمام چارچوب‌ها در امتداد یال‌های «افقی» وجوده (با فرض عمودی بودن محور قطبی) تعریف می‌شود. شکل ۶۴ عبیک e -ساختار جایگزین را نشان می‌دهد که چارچوب‌های آن به سمت قطب شمال تراز شده‌اند. این ساختار برخلاف e -ساختار قابل پیوسته است زیرا چارچوب‌ها روی یال‌های بریده شده هنگام چسباندن مجدد یال‌ها به یکدیگر منطبق می‌شوند. e -ساختار در شکل ۶۴ با افزودن چارچوب‌هایی که با مضرب‌هایی از $\frac{\pi}{6}$ چرخانده شده‌اند به e -ساختار از شکل ۶۴ ساخته می‌شود. از آنجا که این زاویه با نقص زاویه در یال‌های بریده شده برابر است، e -ساختار تعریف شده به این ترتیب هموار (پیوسته) است. توجه داشته باشید که این دو e -ساختار با انتقال لوی-چیویتا ناسازگار هستند (یعنی تحت آن بسته نیستند) اما یک اتصال بدینه جایگزین را القا می‌کنند. e -ساختار، در مقابل، با انتقال لوی-چیویتا سازگار است.

یال مانند حالت معمول در یک فضای اقلیدسی دو بعدی منتقل کرده، و \mathcal{C}_3 دو وجه را به جایگذاری اصلی خود بازگردانیم؛ به شکل ۵۸ و [۴] مراجعه کنید. بنابراین ژئودزیک‌ها در \mathbb{R}^3 تکه‌ای-خطی هستند و از یال‌ها به گونه‌ای عبور می‌کنند که زاویه خروج آنها برابر با زاویه ورودشان باشد. بنابراین نگاشت‌های نمایی v_p به راحتی با دنبال کردن یک مسیر تکه‌ای-ثابت برای فاصله‌ای برابر با $\|v\|/\|p\|$ محاسبه می‌شوند. در عمل، نویسنده‌گان [۴] میدان‌های ویژگی را روی یک مش منظم نمونه‌برداری می‌کنند و فقط آن دسته از بردارهای مماس را در نظر می‌گیرند که به رؤوس مش همسایه نگاشت می‌یابند.

شکل ۶۳ همسایگی‌های دیسک‌مانند را حول نقاط نمونه روی وجوده (قرمز)، یال‌ها (سیاه) و رؤوس (آبی) بیست وجهی نشان می‌دهد. همسایگی قرمز کاملاً در داخل یک وجه قرار دارد و بنابراین تخت است. همسایگی سبز در فضای جایگذاری خمیده است، با این حال، انحنای ذاتی (ریمانی یا گاوسی) آن هنوز صفر است زیرا انتقال لوی-چیویتا بردارها یک بار حول رأس مرکزی، آنها را همانطور که هستند حفظ می‌کند. اینکه این مورد برقرار است معادل این واقعیت است که همسایگی سبز را می‌کند، یعنی بدون کشش یا برش آن. این پهن کردن ایزومنتریک برای نوع آبی همسایگی‌ها حول رؤوس ممکن نیست، که برای پهن شدن باید در یکی از یال‌ها بریده شوند. با ساخته شدن از پنج مثلث متساوی‌الاضلاع، نوک تیز پهن شده یک نقص زاویه $\frac{\pi}{6}$ را نشان می‌دهد. هولونومی هر مسیر بسته حول هر رأس (منفرد)، یعنی زاویه بین یک بردار دلخواه و انتقال آن یک بار حول حلقة، دقیقاً با این نقص زاویه داده می‌شود. در کل، این نتایج دلالت بر این دارند که انحنای گاوسی (گسته) بیست وجهی در همه جا به جز در رؤوس صفر است، چنان‌که با هولونومی $\frac{\pi}{6}$ تکین است. هدسه ساده بیست وجهی اجازه می‌دهد تا آن را باز کرده و به صورت سراسری پهن کرده، همانطور که در شکل ۶۵ به تصویر کشیده شده است، که در [۴] برای یک پیاده‌سازی کارآمد از کانولوشن‌های GM بیست وجهی استفاده شد.

گروه ایزومنتری کامل بیست وجهی $\mathcal{I}_h = Isom(M)$ متناهی است و از 120 عضو تشکیل شده است. می‌توان آن را به عنوان حاصل ضرب مستقیم \mathcal{I} از زیرگروه بازتاب‌ها \mathcal{R} و زیرگروه ایزومنتری‌های حافظ جهت (3) $Isom_+(M) = I \leq SO(3)$ که شامل 60 دوران است، ساخت. هر رأس p توپخانه دوران گسته حول محور گذرنده از p و رأس متقابل آن پایدار می‌شود، که گروه دوری $D_h \leq SO(2)$ را تشکیل می‌دهند. هر رأس p علاوه بر این توپخانه نسبت به صفحه تعريف شده توپخانه دوران و هر یال خروجی از p پایدار می‌شود، به طوری که زیرگروه پایدار ساز کامل آن با گروه دووجهی $2 \leq Stab_p = D_h \leq D_h$ داده می‌شود. همودادی کانولوشن‌های GM بیست وجهی در همه جا به جز در رؤوس C_3 یا D_h داده شده است که همودادی کامل $SO(2)$ یا $SO(3)$ CNN است. این در [۴] نشان داده شده است که افزایش داده دورانی پیوسته استفاده شد.^{۱۲۲}

G -ساختارهای بیست وجهی: کانولوشن‌های GM بیست وجهی توسعه ؟ و ؟ [به طور ضمنی] e -ساختارها را فرض می‌کنند، در حالی که مدل ؟ [یک e -ساختار را فرض می‌کند. شکل ۶۴ ایده پشت این G -ساختارها را به تصویر می‌کشد، که در سه پاراگراف بعدی با جزئیات بیشتری توضیح می‌دهیم.]

e -ساختار توسعه ؟ [که در شکل ۶۴ نشان داده شده است، با تراز کردن اولین محورهای چارچوب در امتداد یال‌های «افقی» وجوده می‌شود. هنگام پهن کردن بیست وجهی به یک صفحه همانطور که در شکل ۶۵ نشان داده شده است، تمام چارچوب‌های این e -ساختار در این صفحه موازی هستند، که پیاده‌سازی کانولوشن‌های GM متناظر را بسیار ساده می‌کند. طبق معمول، e -ساختار یک اتصال بدینه یکتا را مشخص می‌کند که ویژگی‌ها مطابق آن منتقل می‌شوند. این اتصال بدینه در داخل وجوده، روی یال‌هایی که در شکل ۶۴ بریده نشده‌اند و روی یال بریده شده ارگوانی با اتصال لوی-چیویتا منطبق است. با این حال، انتقال آن از روی یال‌های بریده شده باقی‌مانده با انتقال لوی-چیویتا متفاوت است زیرا

^{۱۲۲} این در [۴] به صورت تجربی برای $I \leq SO(3)$ نشان داده شده است. اینکه این نتیجه به $3 \leq I_h$ تعمیم می‌یابد، روشن است زیرا گروه‌ها فقط در بازتاب‌ها متفاوت هستند، که کانولوشن‌های GM بیست وجهی را می‌توان نسبت به آنها دقیقاً هموداد ساخت. این علاوه بر این برای $2 \leq D_h$ و $SO(2)$ نیز برقرار است، زیرا اینها زیرگروه‌هایی از $3 \leq I_h$ هستند.

چارچوب‌های $\{e\}$ -ساختار در آنجا به طور ناپیوسته به اندازه زاویه $\frac{\pi}{4}$ می‌چرخد. از آنجا که $\{e\}$ -ساختار توسط دوران‌ها در C حول محور قطبی حفظ می‌شود، کاتولوشن‌های GM آن تقریباً (2) -هموردا هستند، یعنی مدل‌های بخش قبلی 3.11 را تقریب می‌زنند. با این حال، $\{e\}$ -ساختار و بنابراین استنتاج شبکه \square روی یال‌های با نقص زاویه غیرصفر ناپیوسته است. علاوه بر این، چارچوب‌های مرجع دقیقاً به سمت قطب شمال اشاره نمی‌کنند، همانطور که برای $\{e\}$ -ساختار کروی از بخش 3.11 و شکل $5b$ صادق است.

\square پیشنهاد می‌کنند که دو مشکل اختیار را کار کردن با $\{e\}$ -ساختار در شکل $6c$ حل کنند. این ساختار به گونه‌ای تعریف شده است که چارچوب‌ها دقیقاً در امتداد تصویر محور قطبی روی وجوده، یعنی به سمت قطب شمال، اشاره می‌کنند. این $\{e\}$ -ساختار در همه جا به جز در قطب‌های شمال و جنوب پیوسته است.¹³³ این ساختار به این معنا تقریب بهتری از $\{e\}$ -ساختار کروی از شکل $5b$ است. $\{e\}$ -ساختار دوباره یک اتصال بدیهی یکتا را القا می‌کند. انتقال آن با انتقال لوی-چیویتا روی یال‌ها مطابق است، با این حال، هنگام انتقال روی وجوده با آن متفاوت است زیرا بردارها را به آرامی همراه با چارچوب‌ها می‌چرخاند. مانند $\{e\}$ -ساختار دیگر، این میدان چارچوب تحت دوران‌های سمتی در C ناوردا است و بنابراین CNN ‌های کروی هموردا در دوران سمتی را تقریب می‌زنند.

\square -ساختار در شکل $6d$ توسط \square با افادون چارچوب‌های که با مضرب‌های از $\frac{\pi}{4}$ چرخانده شده‌اند به چارچوب‌های $\{e\}$ -ساختار از شکل $6c$ تعریف می‌شود. این ساختار بهوضوح پیوسته است زیرا زوابایی بین مجموعه چارچوب‌های مرجع در هر نقطه دقیقاً برابر با نقص‌های زاویه در یال‌های بریده شده است. این ساختار برخلاف دو $\{e\}$ -ساختار قبلی با انتقال لوی-چیویتا سازگار است زیرا گروه ساختاری C با گروه هولونومی بیست وجهی مطابق است. \square -ساختار علاوه بر این تحت عمل ایزومنتری‌های حافظ جهت بیست وجهی I حفظ می‌شود. بنابراین کاتولوشن‌های GM روی این $\{e\}$ -ساختار، CNN ‌های کروی کاملاً هموردا در دورانی (3) - SO را از بخش 2.11 تقریب می‌زنند.

پیاده‌سازی‌ها: برای پیاده‌سازی کاتولوشن‌های GM روی G -ساختارهای متاظر، \square ، \square و \square یک شبکه منظم را روی وجوده بیست وجهی پیاده‌سازی می‌کنند؛ به شکل 63 مراجعت کنید. این شبکه شش ضلعی منظم با تقسیم مکرر یال‌ها و جایگزینی هر مثلث با چهار مثلث کوچکتر ساخته می‌شود. در وضوح $2r$ این کار منجر به یک شبکه با $2 + 2 \cdot 2^{r+1} + 5 \cdot 2^{r+1}$ رأس می‌شود. توجه داشته باشید که این شبکه بنا به ساختار، دقیقاً تحت ایزومنتری‌های بیست وجهی متقارن است، که منجر به یک هموردای دقیق $Isom_{GM}$ کاتولوشن‌های GM گسته‌سازی شده می‌شود.¹³⁴ \square پیشنهاد کردند که میدان‌های ویژگی بیست وجهی را نسبت به اطلاعی از چارت‌ها که در شکل 65 نشان داده شده است، نمایش دهند. این چارت‌ها این مزیت را دارند که شبکه‌های شش ضلعی روی وجوده بیست وجهی را به شبکه‌های پیکسلی مربعی معمول نگاشتند. با این حال، توجه داشته باشید که چارچوب‌های راست‌هنگار روی بیست وجهی در این نمایش تغییر شکل می‌یابند، به طوری که نسبت به متريک اقليدسي کانوني، راست‌هنگار نیستند. کرنل‌های کاتولوشن شش ضلعی روی بیست وجهی بر این اساس تغییر شکل می‌یابند و می‌توانند بر حسب کرنل‌های مربعی که به گونه‌ای ماسک گذاری شده‌اند که دو گوش آنها با صفر پر شده است، پیاده‌سازی شوند.

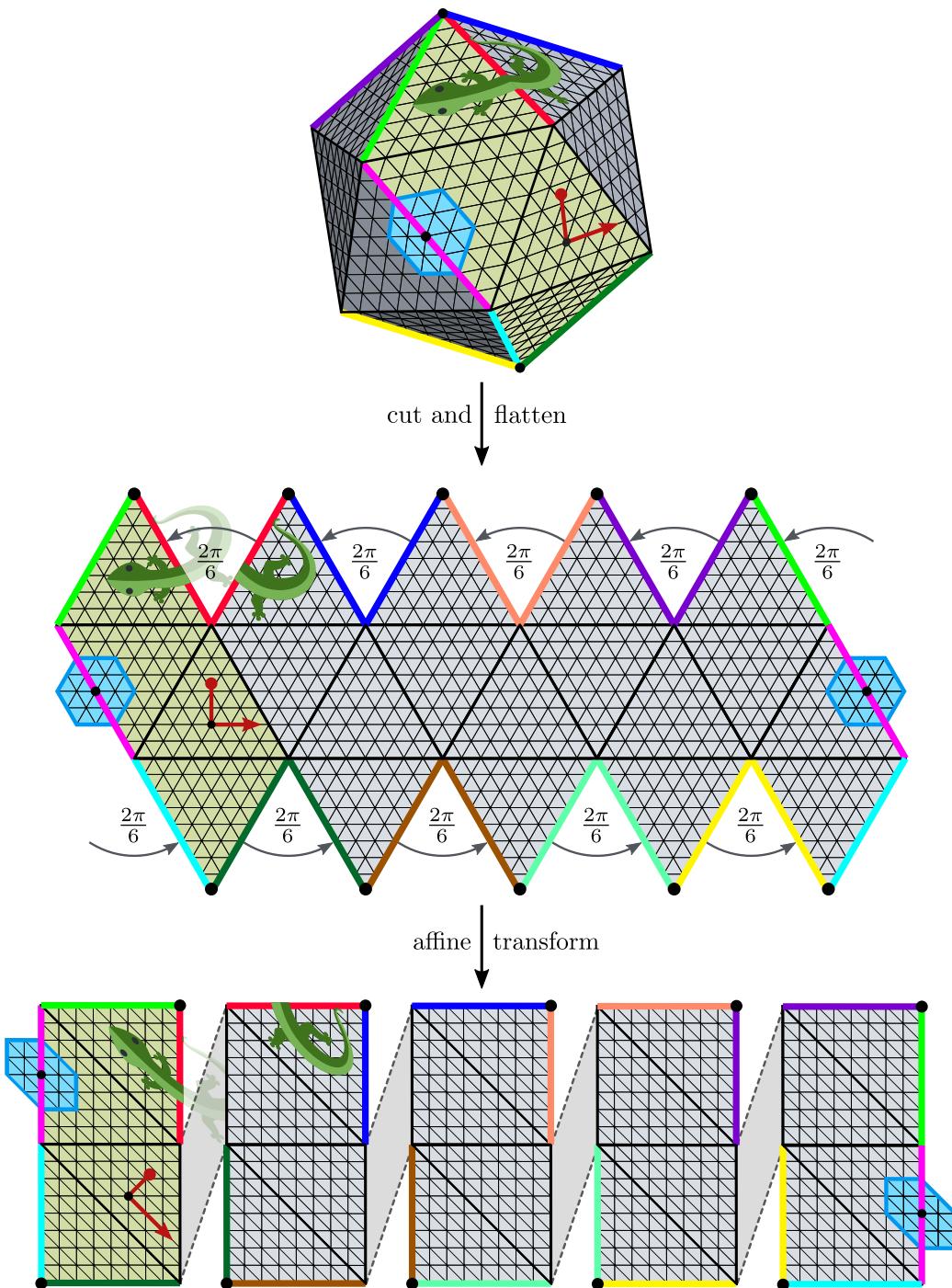
کاتولوشن GM توسط \square چارچوب‌هایی را فرض می‌کند که همگی موازی هستند و بنابراین می‌توانند در داخل چارت‌ها، جایی که تکیه گاه کرنل از مرزهای آن فراتر نمی‌رود، از طریق یک کاتولوشن اقلیدسی متعارف پیاده‌سازی شوند. در نقاطی که به یک یال بین چارت‌های مختلف نزدیک هستند، کرنل ویژگی‌ها را از آن سوی برش ایاشت می‌کنند. همانطور که قبل در بخش 4.5 و شکل 23 بحث و به تصویر کشیده شد، این کار به راحتی از طریق یک عملیات پدینگ انتقال پیاده‌سازی می‌شود که یک حاشیه از ویژگی‌های منتقل شده موازی را در اطراف آرایه پیکسل‌های مربعی قبیل از اجرای عملیات کاتولوشن، بد می‌کند. برای انتقال بدیهی که به طور ضمنی توسط \square فرض شده است، این عملیات پدینگ فقط یک ردیف از ویژگی‌ها را در هر یال بدون تبدیل آنها کپی می‌کند. از آنجا که نویسنده‌گان گروه ساختاری بدیهی $\{e\}$ را فرض می‌کنند، کرنل‌های شش ضلعی نامحدود باقی می‌مانند.

پیاده‌سازی \square عمده‌تاً مشابه است، با این حال، تفاوت حیاتی آن در این است که از انتقال دهنده‌های لوی-چیویتا و کرنل‌های \square -راهبری پذیر استفاده می‌کند. به جای پدینگ مستقیم ردیف‌های پیکسل از روی یال‌ها، انتقال لوی-چیویتا نیازمند این است که ویژگی‌ها یا با $e = g$ = برای تمام یال‌های داخلی و یال ارغوانی، یا با زاویه‌ای برای $\pm \frac{\pi}{4}$ از روی تمام یال‌های با نقص زاویه $\frac{\pi}{4}$ راهبری شوند، که علامت آن به جهت انتقال سنتگی دارد.¹³⁵ \square نمایش منظم C را به عنوان نوع میدان فرض می‌کند و کرنل‌های کاتولوشن را برای برآورده کردن محدودیت راهبری پذیری مربوطه محدود می‌کنند. پس از پدینگ انتقال، کاتولوشن GM آنها به عنوان یک کاتولوشن اقلیدسی متعارف با این کرنل‌های راهبری پذیر پیاده‌سازی می‌شود. توجه داشته باشید که این کاتولوشن GM در داخل وجوده، یعنی به جز پدینگ انتقال، مشابه $HexaConv$ توسط \square است.

از آنجا که کاتولوشن GM توسط \square یک گروه ساختاری بدیهی $\{e\}$ = را فرض می‌کند، پدینگ انتقال دوباره به عنوان یک کپی بدیهی از پیکسل‌ها بدون راهبری پیاده‌سازی می‌شود و کرنل‌ها دوباره نامحدود باقی می‌مانند. با این حال، از آنجا که چارچوب‌های $\{e\}$ -ساختار به سمت قطب شمال تراز شده‌اند، آنها دیگر در نمایش پیکسل مربعی مستطیلی موازی یستند، که از یک پیاده‌سازی فوری بر حسب کاتولوشن‌های متعارف جلوگیری می‌کنند. در عوض، کرنل‌ها باید در هر نقطه از شبکه در یک دوران متفاوت اعمال شوند. از آنجا که کرنل شش ضلعی را می‌توان با $\frac{\pi}{4}$ بدون استفاده از درون‌یابی چرخاند، و از آنجا که ترازها به سمت قطب شمال حداکثر با این زاویه با یکدیگر تفاوت دارند، نویسنده‌گان تقریب کارآمد زیر را برای این عملیات پیشنهاد می‌کنند: آنها روی هر وجه دو بار کرنل اصلی و یک بار با نسخه دوران یافته آن با $\frac{\pi}{4}$. سپس دو میدان

¹³³ برای دیدن این، تصور کنید که یال بریده شده در شکل 4 عب را دوباره به هم بچسبانید: چارچوب‌های روی نیمه چپ و راست یال سپس با هم منطبق می‌شوند، که این مورد در شکل $6d$ صادق نیست.

¹³⁴ شبکه ایکوسفر، که توسط برخی از مدل‌های بخش‌های 2.11 و 3.11 استفاده می‌شود، با تصویر کردن گره‌های این شبکه به فاصله شعاعی واحد از مبدأ، یعنی به S^2 تعریف می‌شود. مدل‌های این بخش این تصویر را فرض نمی‌کنند بلکه مستقیماً روی هندسه بیست وجهی تکه‌ای-تخت کاتولو می‌کنند.



شکل ۵۶: پیاده‌سازی‌های [؟ ؟ ؟] میدان‌های ویژگی را نسبت به یک اطلس که بیست و جهت می‌پوشاند، نمایش می‌دهند. برای ساخت این چارت‌ها، بیست و جهی در امتداد یال‌های رنگی بریده شده و پهن می‌شود. سپس پنج ناحیه، که هر کدام از چهار مثلث تشکیل شده‌اند، به همدامنه‌های چارت مستطیلی برش داده می‌شوند. (_____) این عملیات شبکه شش ضلعی را به یک شبکه از پیکسل‌های مربعی نگاشت می‌دهد، به طوری که میدان‌های ویژگی بیست و جهی را می‌توان با مجموعه‌ای از پنج آرایه مستطیلی کدگذاری کرد. توجه داشته باشید که چارچوب‌های مرجع و کرنل‌ها بر این اساس در همدامنه‌های چارت تغییر شکل می‌یابند. انتقال لوی-چوپیتا از روی تمام یال‌های رنگی به جز یال ارجاعی، یک دوران به اندازه $\frac{2\pi}{6} \pm$ را به همراه دارد، که علامت آن به جهت انتقال بستگی دارد. این کار با پدینگ انتقال ردیف‌هایی از پیکسل‌ها در امتداد یال‌های بریده شده، همانطور که قبلاً در شکل ۲۳ توصیف شد، پیاده‌سازی می‌شود.
(مارمولک‌ها با مجوز تویتر تحت لایسنس بین‌المللی _____ اقتباس شده‌اند.)

پاسخ به صورت خطی با هم ترکیب می‌شوند، با وزن‌های درون‌یابی از پیش محاسبه شده که به زوایای چارچوب‌های مرجع تراز شده به شمال نسبت به دو تراز کرنل (یعنی نسبت به شبکه پیکسلی) بستگی دارد. بنابراین این پیاده‌سازی تقریباً دو برابر پرهزینه‌تر از پیاده‌سازی‌های [؟] است.

یک پیاده‌سازی جایگزین از کانولوشن‌های کروی روی بیست و چهار توسط [؟] پیشنهاد شده است. نویسنده‌گان سیکنال کروی را روی صفحات گسترده شده توسط ۲۰ وجهه (که به عنوان تصاویر مماس شناخته می‌شوند) تصویر می‌کنند و متعاقباً یک CNN متعارف را روی هر یک از این تصاویر اجرا می‌کنند. ما این شبکه را در لیست خود نیاوردهیم زیرا این شبکه این نمایش‌ها را به طور مستقل از یکدیگر پردازش می‌کند، یعنی ویژگی‌ها را بین آنها منتقل یا پدنمی کند و بنابراین دقیقاً به عنوان کانولوشن *GM* توصیف نمی‌شود.

همانطور که قبلاً ذکر شد، نتایج تجربی [؟] نشان می‌دهد که هندسه کروی را برای کاربردهای یادگیری عمیق به خوبی تقریب می‌زند. به طور خاص، نویسنده‌گان CNN کروی خود را روی یک شبکه ایکوسفر با CNN بیست و چهار تکه‌ای-تخت توسط [؟] مقایسه می‌کنند و در می‌یابند که هر دو علی‌رغم هندسه تغییر شکل یافته دومی، عملکرد مشابهی دارند. مشخص شده است که هموردایی CNN‌های بیست و چهار تحت دوران‌های پیوسته در (SO_3) به طور قابل توجهی نقض می‌شود، با این حال، به نظر می‌رسد این فقط یک اثر بیش برآش است زیرا به راحتی و بدون از دست دادن عملکرد مدل با استفاده از افزایش داده (SO_4) نهش می‌شود.

همیشه، می‌خواهیم اشاره کنیم که $\text{H}-\text{CNN}$ های $\text{H}-\text{humorada توسط [؟] و [？]$ را می‌توان به راحتی با در نظر گرفتن یک \mathcal{R} -ساختار و در نتیجه کرنل‌های $\text{D}-\text{humorada ساخت. به طور مشابه، } \text{I}-\text{CNN}$ $\text{I}-\text{humorada توسط [？]$ را می‌توان با ساختن کرنل‌های $\text{D}-\text{raheeri}$ پذیر به جای $\text{C}-\text{raheeri}$ پذیر بازتابی، تحت گروه ایزومنتری کامل h - $\text{Bisett و جهی humorada ساخت.}$

۱۲ CNN‌های مستقل از مختصات روی سطوح عمومی

به جای عمل روی یک هندسه ثابت، کانولوشن‌های *GM* در این بخش روی منیفلدهای عمومی تعریف می‌شوند. ما مرور خود را به سطوح ($d = 2$) محدود می‌کنیم زیرا از پیاده‌سازی‌ها روی منیفلدهای (عمومی) با بعد از آنکه نیستیم. سیکنال‌هایی که با بد پردازش شوند، می‌توانند با مستقیماً توسط مجموعه داده ارائه شوند یا از هندسه سطوح محاسبه شوند. مثال‌هایی برای دسته اول شامل بافت‌های رنگی یا کمیت‌های فیزیکی مانند میدان‌های دما یا تنش دیواره یک ظرف تحت فشار است. دسته دوم می‌تواند به عنوان مثال شامل انتحان‌های گاوسی و اصلی، توصیفگرهای $\square\square\square$ یا امضاهای کرنل موج باشد. اکثر کاربردها تاکنون بر روی طبقه‌بندی سطوح [؟] [؟] [؟] [؟] [؟] [؟] [؟] [؟] یا یافتن تناظر بین سطوح مختلف [؟] [؟] [؟] [؟] [؟] [؟] [؟] [؟] متصرک شده‌اند. کاربردهای دیگر شامل پیش‌بینی کمیت‌های فیزیکی مانند تنش مکانیکی [؟] [؟] یا استن بافت‌های رنگی [؟] [؟] یا تغییر شکل‌های هندسی [؟] است.

طراحی CNN‌های اقلیدسی و کروی به شدت تحت تأثیر نیاز به هموردایی تقارن سراسری است. از آنجا که سطوح عمومی معمولاً دارای گروه‌های ایزومنتری بدیهی هستند، این اصل راهنمای از بین می‌رود، که آزادی زیادی را در انتخاب G -ساختارها به ما می‌دهد. مدل‌هایی که در این بخش مرور می‌کنیم را می‌توان به کانولوشن‌های سطوح راهبری‌پذیر-دورانی و $\{e\}$ -راهبری‌پذیر طبقه‌بندی کرد. هر دو رویکرد به مسئله عدم وجود یک جهت کانونی روی سطوح می‌پردازند، با این حال، آنها این کار را به روشن اساساً متفاوت انجام می‌دهند. مدل‌های راهبری‌پذیر-دورانی، عدم وجود جهت مرتع را با طراحی هموردای خود در نظر می‌گیرند و با همه جهات به طور یکسان رفتار می‌کنند. (۲) $\text{SO}-\text{Sاختار زیربنای آنها}$ به جز یک انتخاب عملاً بی‌اهمیت از جهت گیری $\square\square\square$ توسط متريک ريماني ثابت می‌شود. بنابراین مدل‌های راهبری‌پذیر-دورانی عمدتاً در انتخاب انواع میدان متفاوت هستند. مدل‌های $\{e\}$ -راهبری‌پذیر، غيرهموردا هستند و بنابراین با یک نوع میدان (غيربدیهی) مرتبط نیستند. با این حال، آنها از یکدیگر با انتخاب خاص $\{e\}$ -ساختار که برای تعیین ترازهای کرنل استفاده می‌شود، متفاوت هستند.

۱۲.۱ هندسه‌ی سطوح جایگذاری شده

۱۲.۱.۱۲ هندسه‌ی دیفرانسیل کلاسیک سطوح جایگذاری شده

۱۲.۱.۱۲ هندسه‌ی گسته‌سازی شده‌ی مش‌های سطحی

۱۲.۲ کانولوشن‌های سطحی راهبری‌پذیر-دورانی

۱۲.۳ کانولوشن‌های- $\{e\}$ سطحی راهبری‌پذیر

۱۲.۴ تغییرهای بیست و چهاری از CNN‌های کروی

این بخش به صورت زیر سازماندهی شده است: ما در بخش ۱۲.۱ با یک مقدمه (بسیار) کوتاه بر هندسه دیفرانسیل کلاسیک سطوح شروع می‌کنیم و به ویژه تفاوت بین هندسه ذاتی و خارجی آنها را مورد بحث قرار می‌دهیم. در عمل، اکثر پیاده‌سازی‌ها روی سطوح گسته‌سازی شده عمل می‌کنند. بخش ۱۲.۱.۲ یک نمای کلی از هندسه مش‌های سطحی مثاشی ارائه می‌دهد، که مسلماً رایج‌ترین گسته‌سازی‌های سطح در مقالات یادگیری عمیق

^{۱۵} جهت گیری انتخاب شده روی یک منیفلد (همبند، جهت‌پذیر) دلخواه است زیرا کرنل‌ها یادگرفته می‌شوند. اگر جهت گیری مخالف انتخاب می‌شد، آموزش فقط منجر به کرنل‌های با جهت گیری مخالف می‌شد.

هستند. در بخش ۲.۱۲ ما کانولوشن‌های سطحی راهبری‌پذیر-دورانی را مورد بحث قرار می‌دهیم. روش‌های ابتکاری برای ثابت کردن میدان‌های چارچوب که کانولوشن‌های سطحی {e}-راهبری‌پذیر را تعریف می‌کنند، در بخش ۳.۱۲ مرور می‌شوند.

برای کامل بودن، در پاراگراف بعدی به چند رویکرد جایگزین برای تعریف کانولوشن‌های سطح اشاره می‌کنیم قبل از اینکه به محتوای اصلی این بخش پردازیم.

۲.۱۰ سطوح فراتر از کانولوشن‌های GM: در حالی که تعداد قابل توجهی از CNN‌های سطح را می‌توان به عنوان کانولوشن‌های تفسیر کرد، بسیاری از طراحی‌های شبکه جایگزین پیشنهاد شده‌اند. این روش‌ها به عنوان مثال بر موارد زیر تکیه دارند: کانولوشن‌های گراف روی مش‌های سطح، رویکردهای طیفی، زندرهای چند-نمای جایگذاری‌های سطح، روش‌های حجمی در فضای جایگذاری، عملگرهای دیفرانسیل، یا عملگرهای دیگری که بلافصله روی ساختارهای داده مش عمل می‌کنند. مرور مختصر زیر به منظور ارائه یک نمای کلی از جهات مختلفی است که مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

یک روش برای طبقه‌بندی یا قطعه‌بندی سطوح جایگذاری شده، رندر کردن آنها از چندین دیدگاه و پردازش رندرها با CNN‌های اقیلیدسی متعارف است. ویژگی‌های حاصل سپس با تجمعیت روی دیدگاه‌ها [؟] یا از طریق یک روش اجماع [؟] می‌شوند. [؟] انتخاب می‌کنند که دیدگاه‌های دوربین را روی یک کره مطابق با یک زیرگروه گسته از (۳) SO قرار دهند، به عنوان مثال گروه بیست و چهی. سپس ویژگی‌های حاصل به طور مشترک از طریق یک کانولوشن گروهی گسته (نه یک کانولوشن سطح) پردازش می‌شوند.

به جای تصویر کردن سطح با رندر کردن آن، می‌توان آن را با تعریف یک چارت به \mathbb{R}^2 تصویر کرد. [؟] چارت‌های سراسری تقریباً مساحت-نگهدار (CNN) را روی توپولوژی‌های کروی تعریف می‌کنند. این چارت‌ها ناپیوسته و به طور کلی زاویه-نگهدار (\mathbb{R}^2) نیستند. یک CNN اقیلیدسی متعارف برای پردازش تصاویر حاصل استفاده می‌شود. ناپیوستگی‌ها را می‌توان با پول‌بک کردن ویژگی‌های سطح در امتداد نگاشته‌های پوششی چنبره‌ای (CNN) [؟] یا عمومی تر [؟] دور زد. کانولوشن اقیلیدسی بعدی روی پول‌بک را نمی‌توان به عنوان یک کانولوشن GM تفسیر کرد زیرا لایه‌های نگاشت پوششی، {e}-ساختارهای متفاوت و نازگاری را روی سطح القا می‌کنند. [؟] از یک اطلس از چارت‌های (تقریباً) ایزومتریک استفاده می‌کنند [؟] همانطور که در انتهای بخش ۳.۲ بحث شد، این در واقع متناظر با یک کانولوشن GM است.

روش‌های حجمی سطوح جایگذاری شده را با CNN‌ها در فضای جایگذاری پردازش می‌کنند، به عنوان مثال با تفسیر رئوس یک سطح به عنوان یک ابر نقطه [؟] یا با واکسل‌بندی ورودی. روش‌های مبتنی بر ابر نقطه در [؟] مرور شده‌اند. [؟] و [؟] استدلال می‌کنند که یک پارامترسازی ضمنی سطح اقتصادی‌تر است و شبکه‌های را پیشنهاد می‌کنند، به عنوان مرزهای تضمیم‌گیری مدل‌سازی می‌کنند.

رویکردهای طیفی از قضیه کانولوشن‌الهام گرفته‌اند. پایه فوریه روی یک مینیفلد در اینجا با ویژه‌توابع عملگر لابلاس-بلترامی داده می‌شود. شبکه‌های عصی طیفی، نقشه‌های ویژگی را با دستکاری طف فوریه آنها با عملگرهای خطی یادگرفته شده پردازش می‌کنند. از آنجا که پایه فوریه غیرمحلي است، [؟] به جای آن از یک تبدیل فوریه پنجره‌ای استفاده می‌کنند؛ یک جایگزین، هارمونیک‌های مینیفلد محلی شده [؟] است. [؟] مش‌های سطح را به عنوان گراف تفسیر می‌کنند. بنابراین آنها از تبدیلات فوریه گراف استفاده می‌کنند، که بر اساس ویژه‌توابع لاپلاسین گراف هستند.

[؟] مدلی را پیشنهاد می‌کنند که بر اساس عملگرهای دیفرانسیل است. ویژگی‌های اسکالار از طریق نفوذ گرمایی می‌شوند. از آنجا که لاپلاسین (که در معادله گرمایشی شود) همسانگرد است، نمی‌تواند به طور انتخابی به الگوهای در دوران‌های خاص پاسخ دهد. بنابراین نویسنده‌گان علاوه بر این یک عملگر گرادیان اعمال می‌کنند و سپس حاصل‌ضربهای داخلی از ویژگی‌های حاصل با مقادیر بردار مماس را می‌گیرند. توجه داشته باشید که هر دو عملیات ناوردای پیمانه هستند. این شبکه‌ها را می‌توان بر روی تمام ساختارهای داده‌ای که عملگرهای دیفرانسیل جزئی را می‌پذیرند، مانند ابرهای نقطه‌یاب می‌پنند، پیاده‌سازی کرد.

تعداد قابل توجهی از شبکه‌ها بر روی ساختار مینیفلد ریمانی عمل نمی‌کنند، بلکه بر روی ساختار داده که سطوح را به صورت عددی نمایش می‌دهد، عمل می‌کنند. یک مثال، شبکه‌ای می‌ستند که گره‌ها و یال‌های یک مش سطح را به عنوان تشکیل دهنده یک گراف تفسیر می‌کنند و در نتیجه از شبکه‌های گراف استفاده می‌کنند. همودرایی ایزومتری شبکه‌های گراف در [؟] [؟] بررسی شده است. [؟] یک شبکه گراف با فیلترهای پویا، یعنی فیلترهایی که در طول پاس مستقیم از ویژگی‌ها پیش‌بینی می‌شوند، پیشنهاد کرددند. مدل [؟] بر روی گراف‌های اولیه و دوگان مش‌های عمل می‌کند و از مکانیزم‌های توجه استفاده می‌کند.

شبکه‌های مارپیچی (MLP) [؟] ویژگی‌ها را روی مش‌ها از طریق عملگرهای مارپیچی محلی پردازش می‌کنند [؟]. این عملگرهای ویژگی‌ها را با دنبال کردن یک مسیر مارپیچی به سمت بیرون از گره مرکزی شمارش می‌کنند. یک پاسخ با اعمال یک LSTM به دنباله حاصل از ویژگی‌ها یا یک MLP به الحال آنها محاسبه می‌شود. انتخاب اولین همسایه و جهت مارپیچ متناظر با یک انتخاب از {e}-ساختار است. [؟] و [؟] کانولوشن‌ها را به ترتیب روی وجوده و یال‌های مش تعریف می‌کنند. هر دو مدل نسبت به دلخواه بودن ترتیب عناصر مش ناوردانه شده‌اند، که می‌تواند به یک طراحی همودرای جایگشتی تعیین یابد.

برای همودرایی عمیق‌تر از چنین روش‌هایی، خوانده را به [؟] و [؟] ارجاع می‌دهیم.

۱.۱۲ هندسه‌ی سطوح جایگذاری شده

این بخش یک مقدمه کوتاه بر هندسه سطوح ارائه می‌دهد. برخی مفاهیم هندسه دیفرانسیل سطوح جایگذاری شده هموار در بخش ۱.۱.۱۲ مورد بحث قرار می‌گیرند. بخش ۲.۱.۱۲ تلاش می‌کند تا یک نمای کلی از راه‌های ممکن برای گسسته‌سازی کمیت‌های دیفرانسیل روی مشاهی ارائه دهد.

برای یک بررسی عمیق‌تر از سطوح پارامتری شده، خواننده را به [۶] ارجاع می‌دهیم. یک مقدمه مختصر و شهودی بر این موضوع و ارتباط آن با هندسه محاسباتی (گسسته‌سازی شده) را می‌توان در [۷] یافت.

۱.۱.۱۲ هندسه‌ی دیفرانسیل کلاسیک سطوح جایگذاری شده

به طور کلاسیک، سطوح به صورت خارجی توصیف شده‌اند، یعنی به عنوان غوطه‌ور (یا جایگذاری شده) در یک فضای محیطی اقلیدسی \mathbb{R}^3 . این غوطه‌وری را می‌توان به چندین روش معادل تعریف کرد، به عنوان مثال پارامتری‌سازی‌های محلی، وصله‌های موئیز یا توابع ضمنی. پارامتری‌سازی‌های محلی سطح، نگاشت‌های همواری هستند.

$$\chi : \mathbb{R}^r \ni V \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3 \quad (465)$$

که زیرمجموعه‌های باز V از \mathbb{R}^r را در فضای محیطی \mathbb{R}^3 غوطه‌ور می‌کنند. اینها باید منظم باشند، یعنی مشتقات جزئی آنها

$$e_i = \frac{\partial \chi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2 \quad (466)$$

باید در \mathbb{R}^3 مستقل خطی باشند. مشتقات $e_1(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ و $e_2(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ فضاهای مماس جایگذاری شده $T_p M \subset \mathbb{R}^3$ را در $(x_1, x_2) = p$ تولید می‌کنند.^{۱۶} بنابراین نرمال‌های سطح در فضای جایگذاری به خوبی تعریف شده و با $\frac{e_1 \times e_2}{\|e_1 \times e_2\|}$ داده می‌شوند. یک اطلس از پارامتری‌سازی‌های محلی سطح سازگار، امکان توصیف سطوحی را فراهم می‌کند که از نظر توپولوژیکی با صفحه در سطح جهانی متفاوت هستند.

متريک ريماني سطح \square که در اين زمينه اغلب به عنوان فرم بندي اول آن شناخته می‌شود \square از فضای جایگذاری القا می‌شود. مطابق با تعریف مشابه برای کره جایگذاری شده S^3 در معادله (۴۲۹) داريم:

$$\eta_p(v, w) := \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^r} \quad \forall v, w \in T_p M \quad (467)$$

فرض کنيد $v_i e_i$ و $v = \sum_i v_i e_i$ در $T_p M$ باشند که بر حسب بردارهای ضرب خود $v \in \mathbb{R}^r$ ، $w \in \mathbb{R}^r$ نسبت به پایه مختصاتی بيان شده‌اند. متريک نسبت به اين پایه با یک ماترييس ضرب مقارن نمايش داده می‌شود

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad (468)$$

با دراييه‌های ^{۱۷} $E = \langle e_1, e_1 \rangle_{\mathbb{R}^r}$ و $F = \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbb{R}^r}$ ، $G = \langle e_2, e_2 \rangle_{\mathbb{R}^r}$. اين ماترييس بر روی ضرائب برداری مطابق با $\eta_p(v, w) = v^\top I w$ عمل می‌کند. فرم بندي اول، هندسه ذاتي یک سطح را به عنوان یک منيفلد ريماني دو بعدی کدگذاري می‌کند، یعنی آن بخشی از هندسه که مستقل از غوطه‌وری آن در فضای محیطی است.

هندسه خارجی یک سطح، یعنی جزئيات مربوط به غوطه‌وری خاص آن در فضای محیطی، توسط فرم بندي دوم آن ثبت می‌شود. نسبت به e_2 و e_1 اين فرم با ماترييس

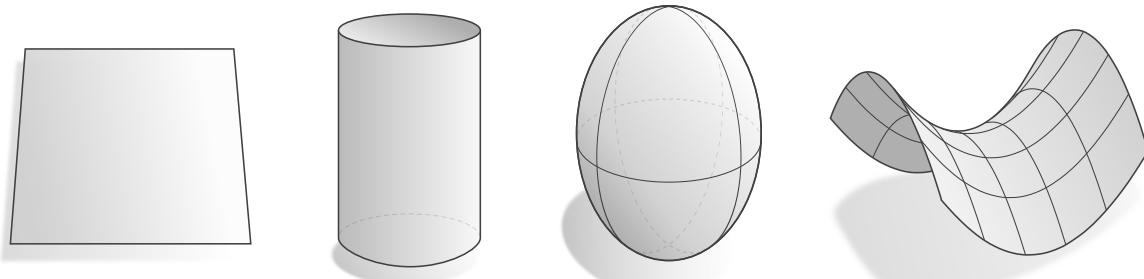
$$II = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \quad (469)$$

با دراييه‌های $L = \langle n, \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \rangle_{\mathbb{R}^r}$ و $M = \langle n, \frac{\partial \chi}{\partial x_2} \rangle_{\mathbb{R}^r} = \langle n, \frac{\partial e_1}{\partial x_2} \rangle_{\mathbb{R}^r} = \langle n, \frac{\partial e_2}{\partial x_1} \rangle_{\mathbb{R}^r}$ ، $N = \langle n, \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \rangle_{\mathbb{R}^r} = \langle n, \frac{\partial e_1}{\partial x_1} \rangle_{\mathbb{R}^r}$ نمايش داده می‌شود. اين دراييه‌ها اساساً اندازه‌گيری می‌کنند که پایه‌های مختصاتی \square در نتیجه فضاهای مماس \square در فضای محیطی (در جهت نرمال) هنگام حرکت در امتداد خطوط مختصاتی چقدر ختم می‌شوند. اين فرم را می‌توان به عنوان مثال برای تعیين انحنای نرمال

$$\kappa_n(v) = \frac{v^\top II v}{v^\top I v} \quad (470)$$

^{۱۶} بردارهای مشتق e_i در فرم اليس چارت ذاتی با پایه‌های مختصاتی مطابقت دارند؛ به پیوست آ.۳.۱۰ مراجعه کنید.

^{۱۷} در نمادگذاري مدرن، ضرائب یک متريک (مستقل از مختصات) g نسبت به یک پایه داده شده اغلب با $g_{\mu\nu}$ نشان داده می‌شوند.



شکل ۵۷: سطوح جایگذاری شده با انحنای خارجی کیفی متفاوت. چپ: صفحه با انحنای اصلی و گاووسی صفر مشخص می‌شود $\kappa_{\max} = \kappa_{\min} = \kappa_0$. وسط چپ: یک استوانه یک جهت با انحنای مثبت و یک جهت با انحنای صفر دارد، یعنی $\kappa_{\min} > 0$ و $\kappa_{\max} = 0$. بنابراین انحنای گاووسی آن نیز صفر است. صفحه و استوانه به صورت محلی ایزومنتیک مستند، یعنی هندسه ذاتی آنها به صورت محلی قابل تشخیص نیست. توجه داشته باشید که صفحه را می‌توان لوله کرد (گسترش داد) تا یک استوانه تشکیل شود. تفاوت بین این دو فقط در فضای محیطی است. وسط راست: یک بیضی گون با انحنای اصلی و گاووسی مثبت $\kappa_{\max} > \kappa_{\min} > 0$ در هر نقطه مشخص می‌شود. راست: سطح یک زین در جهات مختلف خم می‌شود، که دلالت بر عالمت‌های مختلف انحنای اصلی $\kappa_{\max} > \kappa_{\min} < 0$ دارد. در نتیجه، انحنای گاووسی κ_0 منفی است.

سطح در p در جهت $v = \sum_i v_i e_i \in T_p M$ استفاده کرد. به طور شهودی، این انحنای نرمال را می‌توان به عنوان انحنای منحنی تعریف شده توسط تقاطع سطح با صفحه تولید شده توسط جهت v و نرمال n در آن نقطه در کرد. این انحنا با معکوس شعاع ($v = r / \kappa_n$) دایره بوسان بر منحنی در p مطابقت دارد و بنابراین اندازه گیری می‌کند که سطح هنگام حرکت در جهت v چقدر در جهت نرمال خم می‌شود؛ برای تجسم عالی این وضعیت به [۴] مراجعه کنید. کمیت‌های مورد علاقه دیگر در مطالعه سطوح غوطه‌ور شده، انحنای اصلی، میانگین و گاووسی آنها مستند که می‌توانند بر حسب انحنای اصلی نرمال بیان شوند و در شکل ۵۷ مثال زده‌اند. جهت‌ها (بردارهای واحد در $T_p M$) v_{\min} و v_{\max} که در آنها انحنای نرمال در یک نقطه داده شده p حداکثر یا حداقل است، به عنوان جهات اصلی در p شناخته می‌شوند. انحنای‌های متاظر

$$\kappa_{\max} = \kappa_n(v_{\max}) \quad \kappa_0 \quad \kappa_{\min} = \kappa_n(v_{\min}) \quad (471)$$

انحنای‌های اصلی در p هستند. مقدار میانگین آنها

$$\kappa_0 = \frac{\kappa_{\max} + \kappa_{\min}}{2} \quad (472)$$

به عنوان انحنای میانگین شناخته می‌شود. انحنای میانگین در نقاط «زین‌مانند» که $\kappa_{\min} = -\kappa_{\max}$ است، صفر است. سطوح کمینه در هر نقطه انحنای میانگین صفر دارند. حاصلضرب

$$\kappa_0 = \kappa_{\max} \cdot \kappa_{\min} \quad (473)$$

انحنای‌های اصلی به عنوان انحنای گاووسی شناخته می‌شود. این انحنا مثبت است اگر انحنای‌های اصلی هم عالمت باشد، که به عنوان مثال برای بیضی گون‌ها صادق است. برای اینکه انحنای گاووسی منفی باشد، عالمت انحنای‌های اصلی باید متفاوت باشد، مانند اطراف باشد، مانند این مقدار اینها هنوز هنوز هستند. انحنای گاووسی صفر است اگر یکی (یا هر دو) از مقادیر انحنای اصلی صفر باشد، یعنی اگر سطح یک جهت تخت داشته باشد. یک مثال برای مینیمودن با انحنای گاووسی صفر، استوانه است. گفته می‌شود چنین سطوحی گسترش‌پذیر هستند، که به این معنی است که می‌توان آنها را بدون تغییر شکل به یک صفحه پهن کرد، یا به طور دقیق‌تر، آنها به صورت محلی با صفحه ایزومنتیک هستند. کارل فریدریش گاؤس در قضیه شگفت‌انگیز خود اثبات کرد که انحنای گاووسی یک سطح در واقع یک ویژگی ذاتی است، یعنی به نحوه غوطه‌وری سطح در فضای محیطی پستگی ندارد. این انحنا در تناظر یک به یک با تانسور انحنای ریمانی (ذاتی) یک سطح است (و بنابراین با انحنای ریچی و اسکالار آن نیز). یک ویژگی مهم انحنای گاووسی این است که انتگرال آن روی یک دیسک توپولوژیکی $M \subset D$ برابر با هولونومی $\delta_{\partial D}$ است، یعنی زاویه‌ای که یک بردار هنگام انتقال (لوی-چیویتا) یک بار حول مرز دیسک ∂D می‌چرخد:

$$\int_D \kappa_0 dp = \delta_{\partial D} \quad (474)$$

همانطور که در ادامه خواهیم دید، این رابطه را می‌توان برای تعیین انحنای گاووسی به مثلاً استفاده کرد، جایی که هولونومی $\delta_{\partial D}$ با نقص زاویه یک حلقه باز شده از وجوده (مانند همسایگی آبی در شکل ۶۳) مطابقت دارد.

از آنجا که کانولوشن‌های GM فقط به هندسه ذاتی یک سطح سنتگی دارند، خواننده ممکن است تعجب کند که چرا ما در مورد ویژگی‌های خارجی آنها مانند انحنای‌های اصلی بحث می‌کنیم. دلیل این است که کانولوشن‌های GM با این وجود می‌توانند از هندسه خارجی یک سطح مطلع شوند، به عنوان مثال با کدگذاری آن در میدان‌های ویژگی. هندسه خارجی علاوه بر این ممکن است برای تراز کردن ابتکاری چارچوب‌های یک $\{e\}$ -ساختار و در نتیجه کرنل‌ها استفاده شود. برای مثال، \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 چارچوب‌ها را در امتداد محور \mathbb{R}^3 تراز می‌کنند، در حالی که \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 چارچوب‌ها را

در امتداد جهت انحنای اصلی غالب سطح تراز می‌کنند. توجه داشته باشید که این روش‌های ابتکاری همیشه خوش تعریف نیستند: به عنوان مثال، تصویر محور \mathcal{F} یک فضای مماس «افقی» (در فضای محیطی) صفر است، و جهت انحنای اصلی غالب ممکن است تعریف نشده باشد، همانطور که در مورد کره صادق است.

۲.۱.۱۲ هندسه‌ی گسته‌سازی شده‌ی مش‌های سطحی

در اصل، امکان توصیف کانولوشن‌های GM روی پارامتری‌سازی‌های محلی سطح همانطور که در بخش قبل توصیف شد، وجود دارد. در حالی که این رویکرد ممکن است برای برخی هندسه‌های ساده یا متقاضان مانند بیضی گونهای هذلولی گونهای چنبره‌ها مناسب باشد، برای هندسه‌های پیچیده‌تر غیرعملی به نظر می‌رسد. در عمل، سطوح عمده‌ای به صورت گسته‌سازی شده ارائه می‌شوند، به عنوان مثال به شکل مش‌های مثلثی، مش‌های چهارضلعی، مش‌های نیم-یال، سطوح تقسیمی یا ابرهای نقطه. به دلیل استفاده گسترده از آنها \mathcal{H} به طور کلی و هم به طور خاص در توصیف کانولوشن‌های GM سطحی که در دو بخش بعدی مرور می‌کنیم \mathcal{V} ما در ادامه عمده‌ای بر روی مش‌های مثلثی تمرکز خواهیم کرد. بنابراین هدف ما برای باقیمانده بخش فعلی این است که کمیت‌ها و تعاریف را از نظریه هموار گرفته و همتایان گسته‌آنها را روی مش‌های مثلثی مورب بحث قرار دهیم. متأسفانه، این آنالوگ‌های گسته‌سازی معمولاً یکتا نیستند، به طوری که تعداد زیادی از تعاریف غیرمعادل وجود دارد.^{۱۲۸} ما در ادامه سعی خواهیم کرد یک ایده کلی در مورد برخی از رایج‌ترین رویکردهای برای گسته‌سازی هندسه هموار سطوح بر حسب مش‌های مثلثی ارائه دهیم.

$$\text{توبولوژی، هندسه و جایگذاری مش‌های مثلثی: } \text{مش‌های مثلثی } (\mathcal{V}, \mathcal{F}) \text{ معمولاً بر حسب یک مجموعه از } \mathcal{V} \subseteq \mathbb{N} \quad (475)$$

رئوس و یک مجموعه از

$$\mathcal{F} \subseteq \{(i, j, k) \mid i \neq j \neq k \in \mathcal{V}\} \quad (476)$$

وجوه مثلثی کدگذاری می‌شوند، که این شرط را برآورده می‌کنند که هر رأس حداقل در یکی از وجهه موجود باشد.^{۱۲۹} یک مجموعه از

$$\mathcal{E} = \{(i, j) \mid i \neq j \in \{i', j', k'\} \quad \square \square \square \quad \square \square \quad \{i', j', k'\} \in \mathcal{F}\} \quad (477)$$

یال‌ها که وجهه را محدود می‌کنند، بالاصله نتیجه می‌شود. در عمل، اغلب یک مجموعه از

$$P = \{p_i \in \mathbb{R}^3 \mid i \in \mathcal{V}\} \quad (478)$$

موقعیت‌های رأس داده می‌شود، که یک جایگذاری از مش را در فضای محیطی \mathbb{R}^3 مشخص می‌کند. این جایگذاری طول‌های

$$l_{\{i,j\}} = \|p_j - p_i\| \quad (479)$$

یال‌های $\{i, j\}$ و مساحت‌های

$$\square_{\{i,j,k\}} = \frac{1}{2} \|(p_j - p_i) \times (p_k - p_i)\| \quad (480)$$

وجوه $\{i, j, k\}$ را نتیجه می‌دهد.

ما به طور خاص به مش‌های سطحی علاقه‌مندیم، که باید شرایط اضافی را برآورده کنند. برای فرمول‌بندی این شرایط، توجه داشته باشید که عناصر مش $\{i_1, \dots, i_n\}$ (که در آن $i_1, \dots, i_n = 1, \dots, n$ برای رئوس، یال‌ها یا وجهه است) n -سادک‌ها را القا می‌کنند، که به عنوان پوشش‌های محدب

$$\text{convex}(\{i_1, \dots, i_n\}) := \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j p_{i_j} \mid \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \right\} \subset \mathbb{R}^3. \quad (481)$$

تعریف می‌شوند. مجموعه‌ای که تمام این سادک‌ها (عناصر مش) را در بر می‌گیرد، یک کمپلکس سادکی-۲ خالص را تشکیل می‌دهد [۴]. اینکه کمپلکس سادکی-۲ خالص است به این معنی است که هر سادک-۰ (رأس) و سادک-۱ (یال) زیرمجموعه‌ای از حداقل یک سادک-۲ (وجه) است. به عبارت دیگر، هیچ رأس یا یال منقطعی در مش وجود ندارد. فضای زیرنایابی

$$\bigcup_{\{i_1, \dots, i_n\} \in \mathcal{V} \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{F}} \text{convex}(\{i_1, \dots, i_n\}) \stackrel{\square \square \square}{=} \bigcup_{\{i, j, k\} \in \mathcal{F}} \text{convex}(\{i, j, k\}) \subset \mathbb{R}^3 \quad (482)$$

[۴] این وضعیت را به این صورت توصیف می‌کند: «علی‌رغم استفاده گسترده از مش‌های مثلثی در گرافیک کامپیوترا، هیچ اتفاق نظری در مورد مناسب‌ترین روش برای تخمین ویژگی‌های هندسی ساده مانند بردارهای نرمال و انحنای روی سطوح گسته‌سازی وجود ندارد». به طور متابه، [۴] ادعای می‌کند: «هیچ راه "درست" واحدی برای گسته‌سازی یک کمیت هندسی داده شده وجود ندارد، بلکه راههای مختلف زیادی وجود دارد».

[۱۲۹] وجود به طور جایگزین می‌توانند به عنوان سه‌تایی‌های مرتب از رئوس تعریف شوند. ترتیب رئوس (یا بهتر بگوییم، کلاس‌های هم‌ارزی ترتیب‌ها تعبت یک تعداد زوج از جایگشت‌ها) ممکن است برای کدگذاری جهت‌گیری وجوده استفاده شود. ما در عوض جهت‌گیری وجوده را همانند نظریه هموار خود با انتخاب یک دست‌سازی از چارچوب‌های مرجع کدگذاری خواهیم کرد.

از کمپلکس سادکی به عنوان اجتماع تمام سادکهای آن تعریف می‌شود، که با توپولوژی معمول به عنوان یک زیرمجموعه از \mathbb{R}^3 مجهز شده است. یک مش سپس یک مش سطحی (مش منیفلد) نامیده می‌شود اگر فضای زیربنایی یک سطح توپولوژیکی (منیفلد)، به صورت اختیاری با مرز، باشد. به طور شهودی، این امر نیازمند^{۱۳۰} است که هر یال مجاور دو وجه (یا یکی در مرزها) باشد و^۲ اینکه وجود اطراف هر رأس یک دیسک توپولوژیکی (یا یک نیم‌دیسک در مرزها) تشکیل دهند.

چنین مش‌های سطحی تعریف شده، همتایان گسته سطوح ریمانی جایگذاری شده هستند. با این حال، از آنجا که کاتنولوشن‌های GM مستقل از هندسه خارجی منیفلد زیربنایی هستند، بحث مختصر در مورد هندسه ذاتی آنها آموزنده است. بنابراین مجموعه‌های رأس، یال و وجه \mathcal{V} ، \mathcal{E} و \mathcal{F} را در نظر بگیرید، اما مکان‌های جایگذاری P رئوس را کنار بگذارید. در مجموع، این مجموعه‌ها یک کمپلکس سادکی^{۲-۱} انتزاعی، $\mathcal{V} \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ را تشکیل می‌دهند که به عنوان خانواده‌ای از سادکهای انتزاعی $\{i_n, \dots, i_1\}$ که تحت عمل زیرمجموعه‌گیری بسته است، تعریف می‌شود [۴۸]. اگر این کمپلکس سادکی^{۲-۲} (که اکنون انتزاعی است)^۱ خاص و^۲ به گونه‌ای باشد که «استاره» هر رأس (که با سادکهای حاوی آن رأس داده می‌شود) یک دیسک ترکیبی‌تکی تشکیل دهد، این یک سطح سادکی انتزاعی را تشکیل می‌دهد (که دقیقاً در صورتی است که مش جایگذاری شده یک مش سطحی باشد). سطوح سادکی انتزاعی را می‌توان به عنوان همتایان ترکیباتی منیفلدهای توپولوژیکی در نظر گرفت. آنها امکان محاسبه ناوردهای توپولوژیکی، به عنوان مثال مشخصه اویلر

$$\chi_{\text{مکان}} = |\mathcal{V}| - |\mathcal{E}| + |\mathcal{F}|. \quad (483)$$

را می‌دهند. به عنوان یک ناوردای توپولوژیکی، مشخصه اویلر را دو فضای همسان‌ریخت، به ویژه برای یک منیفلد هموار و هر یک از مثلث‌بندی‌های آن، برابر است. برای مثال، بیست‌وچهار از بخش $4.12 = 20 + 30 - 12 = 2 \times 2$ از $\chi_{\text{مکان}}$ است، که با برای کره^{۲-۲} بعدی مطابقت دارد.

برای رسیدن به یک توصیف ذاتی از هندسه یک سطح مثلث‌بندی شده، به یال‌های $\mathcal{E} = \{j_i, k_i\}$ طول یال ℓ_{j_i, k_i} اختصاص می‌دهیم. برای سازگاری، این طول‌ها باید نامساوی مثلث $\ell_{j_i, k_i} + \ell_{k_i, l_j} > \ell_{j_i, l_j}$ را برای هر وجه $\{j_i, k_i, l_j\}$ بروآورده کنند. طول یال‌ها متريک‌های اقليليسسي (توابع فاصله) را روی وجود و بنابراین یک متريک اقليليسسي تکه‌ای-تعریف شده را روی کل سطح القا می‌کنند. اين متناظر با یک متريک ريماني (يا فرم بنيداي اول) است که دور از رئوس اقليليسسي و در يك همسانگي کوچک حول رئوس «مخروط‌ماند» (تکين) است [۴۸].

برای بستن دایره به تعریف خارجی اولیه ما از مش‌های مثلثی، باید مش را در فضای محیطی \mathbb{R}^3 جایگذاری کرد. اطلاعات لازم در مورد هندسه خارجی با مجهر کردن مش به یک فرم بنيداي دوم داده می‌شود. در محیط گسته، این فرم را می‌توان به عنوان یک انتخاب از زاويه خمنش) بین هر دو مثلث مجاور، یعنی یک زاويه برای هر یال غيرمزري مش، تعریف کرد. با فرض اینکه این داده‌ها به طور سازگار انتخاب شده باشند^{۱۳۰}، امكان بازسازی جایگذاری، یعنی موقعیت‌های رأس P ، تا حرکات صلب در $E(3)$ وجود دارد [۴۸]. در حالی که یک جایگذاری از سطح برای کاتنولوشن‌های GM ذاتی ضروري نیست، تمام مقالات فهرست شده در ردیف‌های (۴۱)-۷۷) جدول ۶ مدل‌های خود را روی مش‌های مثلثی جایگذاری شده ارزیابی می‌کنند.

فضاهای مماس و میدان‌های بوداری: برای توصیف میدان‌های بوداری روی مش‌ها، و برای مجهر کردن مش‌ها به ساختار هندسى مانند اتصالات، لازم است یک مفهوم از فضاهای مماس که به آنها متعلق هستند، تعریف شود. تعاریف ناسازگار متعددی، که برای کاربرد خاص مورد نظر طراحی شده‌اند، در مقالات وجود دارد. از آنجا که میدان‌های بوداری معمولاً در مکان‌های گسته نمونه‌بوداری می‌شوند، کلاف‌های مماس گسته اغلب فقط به صورت جزئی تعریف می‌شوند، به عنوان مثال فقط روی وجود وجوه، یال‌ها یا رئوس. ما به طور خلاصه برخی از این تعاریف را مرور می‌کنیم، یک برسی دقیق‌تر را می‌توان در [۴۸] یافت.

از آنجا که وجود (سادکهای^{۲-۲}) یک مش جایگذاری شده تخت هستند، می‌توان به طور طبیعی فضاهای مماس آنها را به عنوان آن دسته از زیرفضاهای دو بعدی \mathbb{R}^3 که در آنها قرار دارند، تعریف کرد [۴۸]. به طور خاص، با توجه به یک وجه $\{j_i, k_i, l_j\}$ به عنوان $p \in \text{convex}(\{i, j, k\})$ ، می‌توان فضاهای مماس $T_p M = \text{span}(p_j - p_i, p_k - p_i) \subset \mathbb{R}^3$ را برای هر (i, j, k) به عنوان پوشش خطی هر دو بودار یال تعريف کرد. تراز فضای مماس در فضای محیطی اغلب بر حسب نرمال وجه $(p_j - p_i) \times (p_k - p_i)$ نمایش داده می‌شود. میدان‌های بوداری مماس (یا ویژگی) گسته در نمایش‌های مبتنی بر وجه را می‌توان به عنوان ثابت روی هر وجه تعريف کرد، یعنی با یک بودار مماس (یا ویژگی) منفرد برای هر وجه نمایش داده می‌شوند. نسبت به یک انتخاب از چارچوب مرجع روی هر یک از وجود، چنین میدان‌های بوداری مماس و ویژگی به ترتیب با $c|\mathcal{F}|/2$ یا $2|\mathcal{F}|/c$ دارند. ضريب بوداری کدگذاري می‌شوند. توجه داشته باشید که چنین میدان‌های بوداری به رئوس یا یال‌ها گسترش نمی‌یابند. بدليل ناپيوستگي آنها، مفهوم عملگرهای دiferانسیل، که بر روی چنین میدان‌های بوداری عمل می‌کنند، بسيار محدود است [۴۸] (که برای کاربرد خاص ما بآهمیت است). یک طرح درون‌يابی خطی از میدان‌های بوداری مبتنی بر وجه در [۴۸] پيشنهاد شده است.

از آنجا که هیچ جهت نرمال طبیعی در رئوس یک مش جایگذاری شده تخت هستند، تعاریف رایج متعددی برای فضاهای مماس رأس وجود دارد. نرمال‌های رأس را می‌توان به عنوان مثال به عنوان ميانگين وزن‌دار مساحتی از نرمال‌های وجود مجاور تعريف کرد [۴۸]. علاوه بر وزن‌دهی مساحتی، گاهی از وزن‌های يک‌تواخت یا وزن‌های زاويه نوک استفاده می‌شود [۴۸]. گرئينه دیگر، تعريف بودارهای نرمال از طریق یک عملگر نرمال اتحانی ميانگين است [۴۸]. نرمال حاصل با نرمال‌های مشتق شده از طریق گرادیان‌های مساحت مطابقت دارد، اما با آنهايی که از طریق گرادیان‌های حجم یا نرمال‌های کره محاطی مشتق شده‌اند، متفاوت است؛ به [۴۸] مراجعه کييد.

^{۱۳۰} فرم‌های بنیدای اول و دوم گسته باید یک شرط انگال‌پذیری را بروآورده کنند، مشابه معادله گاوس و معادلات مایناردی-کوداتسی در محیط هموار [۴۸].

به طور جایگزین، می‌توان فضاهای مماس رأس را به روش ذاتی تعریف کرد، به سادگی با تعریف آنها به عنوان فضاهای برداری دو بعدی که به رأس متصل هستند. رابطه آنها با هندسه مش در یک همسایگی محلی حول رأس در اینجا با نمایش همسایگی یک-حلقه در صفحات مماس کدگذاری می‌شود. مسلمًا بر جسته‌ترین این رویکردها بر اساس تغییر مقیاس زاویه کل

$$\Theta_i = \sum_{\{i,j,k\} \in \mathcal{F}} \theta_{\{i,j,k\}}^i, \quad (484)$$

است، که از زوایای نوک $\theta_{\{i,j,k\}}^i = \arccos \left\langle \frac{p_j - p_i}{\|p_j - p_i\|} \frac{p_k - p_i}{\|p_k - p_i\|} \right\rangle$ از تمام مثلث‌های $\{i,j,k\}$ مجاور رأس $v \in \mathcal{V}$ جمع می‌شود. اگر این زاویه دقیقاً 2π باشد، همسایگی محلی حول رأس به طور ذاتی تخت است؛ به عنوان مثال به همسایگی قرمز یا سبز در شکل ۶۳ مراجعه کنید. یک زاویه Θ_i همانند همسایگی آبی، شنان دهنده یک انحصار گاووسی گستته مثبت (که به درستی در ادامه تعریف می‌شود) $\Theta_i = 2\pi - \sum_{j \neq k} \theta_{\{i,j,k\}}^i$ است، یعنی یک همسایگی مخروطمند. یک زاویه $\Theta_i < 2\pi$ به طور مشابه متناظر با یک همسایگی زین مانند با انحصار گاووسی منفی است. رویکرد ذهنالشده در [؟] این است که همسایگی یک-حلقه را تغییر مقیاس همسانگرد زوایای قطبی با ضریب $s_i \Theta_i = 2\pi - \sum_{j \neq k} \theta_{\{i,j,k\}}^i$ از یک فضای اقلیدسی (مماس) پهن کنند. یک میدان برداری در این محیط با یک بردار برای هر رأس نمایش داده می‌شود. یک انتخاب از پیمانه، که اغلب با یکی از یال‌ها تراز شده است، سپس امکان کدگذاری میدان‌های برداری مماس یا ویژگی را به ترتیب بر حسب [۷] یا [۸] ضریب فراهم می‌کند. [۹] پیشنهاد کردند که بردارها را با یک تابع وزن‌دهی کلاهی تکه‌ای-خطی از دنوس به وجود درون‌یابی کنند. جهت بردارها در اینجا با یک انتقال اقلیدسی معمول روی فضاهای مماس پهن شده است، این درون‌یابی پیوسته بود. برای حل این مشکل، همان نویسنده از [۱۰] پیشنهاد کردند که یک ساختار هموار را روی متش مثناشی تعریف کرده و همسایگی‌های یک-حلقه را در چارت‌های هموار نمایش دهند. سپس یک درون‌یابی هموار با انتقال بردارها از طریق یک انصال سادک هموار روی متش انجام می‌شود، که برای نزدیک‌ترین حالت ممکن به اتصال لوی-چیوتا القا شده است. توجه داشته باشید که هر دو رویکرد به طور موثر هندسه را حول رؤوس پهن می‌کنند، یعنی دقیقاً روی متش مثناشی عمل نمی‌کنند.

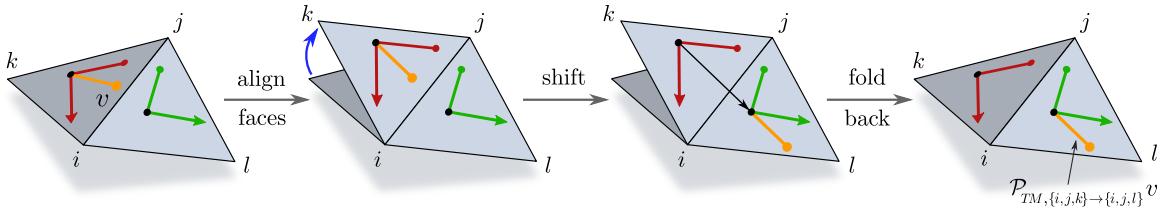
یک رویکرد دیگر، که ریشه در حساب دیفرانسیل خارجی گستته دارد [۱۱]، تعریف بردارهای مماس $v \in T_p M$ بر حسب ۱-فرم‌های $T_p^* M$ با استفاده از ایزومورفیسم موسیقیایی (وابسته به متريک) $T^* M \rightarrow TM$ است. از آنجا که ۱-فرم‌های سادکی به طور طبیعی به یال‌ها (سادک‌های ۱-۱) اختصاص داده می‌شوند، این منجر به میدان‌های برداری می‌شود که بر حسب یک بردار برای هر یال و در نتیجه [۱۲] ضریب پس از انتخاب چارچوب‌ها، پارامتری می‌شوند. با این حال، همانطور که توسط [۱۳] استدلال شده است، یک درون‌یابی تکه‌ای-خطی از بردارها روی وجود دوباره به ناویستگی منجر خواهد شد. علاوه بر این، برای ما روشن نیست که چگونه این رویکرد می‌تواند به کلاف‌های برداری همبسته عمومی و در نتیجه میدان‌های ویژگی تعمیم یابد.

با توجه به هر یک از ساختارهای بالا از فضاهای مماس، چارچوب‌های مرجع محلی به راحتی به عنوان زوج‌های مرتبی از بردارهای مماس خطی مستقل تعریف می‌شوند. یک انتخاب رایج در اینجا تراز کردن اولین محور چارچوب با یکی از یال‌های مجاور سادک فعلی (عنصر مش) است. به طور خاص برای مورد چارچوب‌های راست‌هنگار و راست‌گرد، یعنی هر زمان که $G \leq SO(2)$ باشد، یک انتخاب از یال (جهت‌دار) یک چارچوب را به طور کامل تعیین می‌کنند. سپس بردارهای مماس اغلب در مخصوصات قطبی نمایش داده می‌شوند، با زاویه اندازه گیری شده نسبت به یال مرجع. اگر فضاهای مماس به صورت خارجی مدل‌سازی شوند، یعنی به عنوان زیرفضاهای دو بعدی از فضای محیطی \mathbb{R}^3 ، رایج ترین روش نمایش صریح چارچوب‌ها به عنوان یک زوج مرتب از بردارها در $T_p M \subset \mathbb{R}^3$ است. تعاریف چارچوب‌ها و پیمانه‌ها سپس کاملاً معادل تعاریف در معادلات (۴۳۷) و (۴۳۲) در بخش ۱.۱۱ می‌شوند.

G -ساختارها، طبق معمول، به عنوان کلاف‌هایی از چارچوب‌ها تعریف می‌شوند، که در هر فضای مماس از طریق تبدیلات پیمانه‌ای با مقادیر G مرتبط هستند. در جامعه گرافیک کامپیوتربی، علاقه خاصی به N -میدان‌های جهتی (یا میدان‌های N -واحد) وجود دارد، که در آنجا به عنوان مجموعه‌ای از N -میدان برداری واحد تعریف می‌شوند، به طوری که بردار در هر فضای مماس با زاویه $/N$ از هم فاصله دارند. از آنجا که هر بردار واحد روی یک مینیفلد جهت‌پذیر یک چارچوب راست‌هنگار و راست‌گرد متانظر را C_N میدان‌های جهتی معادل C_N -ساختارها هستند. یک مثال، C_6 -ساختار روی پیست و وجهی در شکل ۶۴ است، که به طور موثر θ جهت واحد را به هر نقطه اختصاص می‌دهد، به جز در قطب‌ها، که در آنجا تکینگی‌هایی با اندیس θ (یا زاویه $\frac{\pi}{6}$) دارد. طراحی تعلیمی میدان‌های جهتی هموار، با تکینگی‌های تعریف شده توسعه کاربر در میان دیگر محدودیت‌ها، یک زمینه تحقیقاتی فعال در جامعه گرافیک کامپیوتربی است [۱۴]. برخی از کانولوشن‌های GM -سطحی که در بخش بعدی مرور می‌کنیم از چنین الگوریتم‌هایی برای محاسبه یک C_N -ساختار استفاده می‌کنند [۱۵].

متريک ريماني و ايزومتری‌ها: با داشتن یک مش مجهز به فضاهای مماس، می‌توان یک متريک ريماني را روی آن تعریف کرد. رایج ترین مورد، مش‌های جایگذاری شده ايزومتریک با فضاهای مماس مدل‌سازی شده به عنوان زیرفضاهای دو بعدی از فضای محیطی \mathbb{R}^3 است. همانطور که قبلًا در معادلات (۴۶۹) و (۴۶۷) توصیف شد، متريک سپس با تحدید حاصلضرب داخلی استاندارد اقلیدسی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ از فضاهای جایگذاری به فضاهای مماس القا می‌شود.

اگر فضاهای مماس به صورت ذاتی مدل‌سازی شوند، یک متريک را می‌توان با انتخاب یک d -ساختار، یعنی چارچوب‌های مرجعی که تعریف شده‌اند راست‌هنگار باشند، ثابت کرد. کمی کمتر از همان گونی، اگر طول یال‌ها $\{i,j\}$ و بنابراین یک تابع فاصله اقلیدسی تکه‌ای-تعریف شده روى سطح داده شده باشد، انتخاب d -ساختار باید با این طول‌ها سازگار باشد. به طور خاص، نگاشت لگاریتمی باید منجر به بردارهای مماس با نرم (ريماني) باشند.



شکل ۵۸: انتقال موازی بین وجهه مش. هندسه محلی دو وجه مجاور گسترش پذیر است، یعنی به طور ذاتی تخت است و می‌توان آن را به یک صفحه باز کرد. بنابراین انتقال لوی-چیویتا بین وجهه با جایگاهی یک بردار روی وجهه باز شده و سپس خم کردن وجهه به جایگذاری اصلی خود داده می‌شود. این انتقال موازی بین وجهه مجاور را می‌توان به عنوان آنالوگ گستره اتصال لوی-چیویتا پیوسته در محیط هموار در نظر گرفت [؟]. با توجه به هر انتخاب از چارچوب‌های مرچ، انتقال $P_{TM,\{i,j,k\}\rightarrow\{i,j,l\}}$ با یک عضو گروه $\mathcal{G}_{\{i,j,k\}\rightarrow\{i,j,l\}} \in \text{GL}(2)$ (یا $\text{SO}(2)$) هنگام در نظر گرفتن چارچوب‌های راست‌هنچار و راست‌گرد) نمایش داده می‌شود. اتصالات عمومی تر یک تبدیل خطی اضافی را به بردار مستقل از مختصات هنگام انتقال بین وجهه اعمال می‌کنند. تعاریف جایگزین از اتصالات گستره، به عنوان مثال برای انتقال بین رئوس در امتداد یال‌ها، در متن اصلی مورد بحث قرار گرفته‌اند.

$\ell = |\log_p(q)|$ شود اگر نقاط p و q با یک فاصله اقلیدسی $\ell \in \mathbb{R}$ از هم جدا شده باشند. توجه داشته باشید که این گزاره نیازمند یک تعریف سازگار از اتصال لوی-چیویتا روی مش است، که در ادامه به آن می‌پردازیم.

ایزومنتری‌ها به طور ذاتی طبق معمول تعريف می‌شوند، یعنی به عنوان آن دسته از نگاشتهای مش به خود، که متريک را حفظ می‌کنند. به صورت خارجی، گروه ایزومنتری از آن دسته از ایزومنتری‌های $(E(2))$ $\in \phi$ فضای جایگذاری تشکیل شده است که مش را ناوردا باقی می‌گذارند. اکثر مقالات در ردیفهای ۴۱-۳۷ از جدول ۶ مجموعه داده‌های را در نظر می‌گیرند که مش‌های آنها دارای یک گروه ایزومنتری بدیهی هستند. با این حال، همسایگی‌های محلی مش‌ها اغلب با این وجود با یکدیگر ایزومنتریک (یا تقریباً ایزومنتریک) هستند، که در شکل ۳۴ مثال زده شده است. همانطور که در بخش ۱.۱.۸ بحث شد، هموردای ایزومنتری کانولوشن‌های GM همچنان به صورت محلی برقرار خواهد بود اگر میدان دید کرnel‌ها به اندازه کافی کوچک باشد.

اتصالات، انتقال‌دهنده‌ها و ژئودزیک‌ها روی مش‌های مثلثی: آخرین جزء مورد نیاز ما برای پیاده‌سازی کانولوشن‌های GM روی مش‌ها، پولبک انتقال‌دهنده Exp_p^* از میدان‌های ویژگی است (معادله (۶۷)). بنابراین ما باید بدانیم که چگونه (۱) بردارهای ویژگی را به صورت موازی روی مش‌ها منتقل کنیم و (۲) ژئودزیک‌ها را روی مش‌ها، به ویژه نگاشت نمایی یا، بسته به پیاده‌سازی، نگاشت لگاریتمی را محاسبه کنیم. تمام نگاشتهای در نهایت به یک انتخاب از اتصال روی مش بستگی دارند. در محیط هموار، یک اتصال اساساً مجموعه‌ای از انتقال‌دهنده‌های بی‌نهایت کوچک بین فضاهای مماس مجاور است. بنابراین اتصالات گستره انتقال‌دهنده‌ها بین عناصر مش مجاور تعريف می‌شوند. انتخاب خاص گستره‌سازی کلاف مماس، که گرینه‌های آن در بالا مورد بحث قرار گرفت، بر تعريف خاص اتصال تأثیر می‌گذارد. در ادامه، ما برخی از گستره‌سازی‌های اتصالات را که در مقالات یافت می‌شوند، مرور می‌کنیم و توضیح می‌دهیم که چگونه می‌توان از آنها برای محاسبه انتقال‌دهنده‌ها و ژئودزیک‌ها استفاده کرد.

ساده‌ترین مورد برای بررسی، انتقال یا اتصال بین دو وجه مجاور است. به یاد بیاورید که انتقال لوی-چیویتا روی یک صفحه تخت به عنوان جایگاهی یک بردار به گونه‌ای تعريف می‌شود که در معنای معمول اقلیدسی موازی باقی بماند؛ به شکل ۱۵ آمارجه می‌شود. از آنجا که اتصالات ذاتی ذاتی هستند، به جایگذاری خاص این صفحه در فضای محیطی بستگی ندارند، که به ما گوید چگونه روی هر سطح گسترش پذیر منتقل کنیم. این به طور خاص به ما می‌گوید که چگونه بین دو مثلث مجاور منتقل کنیم، زیرا می‌توان آنها را باز کرد (گسترش داد) و به یک صفحه تبدیل کرد، همانطور که در شکل ۵۸ به تصویر کشیده شده است. بنابراین اتصال لوی-چیویتا بین وجهه را می‌توان به این صورت تصور کرد که (۱) وجهه را پهن کرده، (۲) بردار را طبق معمول روی صفحه منتقل کرده و (۳) وجهه را به جایگذاری اصلی خود بازگردانیم [؟ ؟ ؟]. انتقال‌دهنده حاصل $P_{TM,\{i,j,k\}\rightarrow\{i,j,l\}}$ بین وجهه $\{i,j,k\}$ و $\{i,j,l\}$ را می‌توان به صورت اختیاری بر حسب یک عضو گروه $\mathcal{G}_{\{i,j,k\}\rightarrow\{i,j,l\}} \in \text{GL}(2)$ یان $\mathcal{G}_{\{i,j,k\}\rightarrow\{i,j,l\}}^{AA}$ چیویتا یک اتصال متریک است، برای مورد خاص چارچوب‌های راست‌هنچار منجر به اعضای گروه در ۲ و برای چارچوب‌های راست‌هنچار جهت‌دار منجر به اعضاي $\text{SO}(2)$ یا زوایای دوران می‌شود.

همانطور که توسط [؟] پیشنهاد شده است، امکان تعیین این ساختار فراتر از اتصالات لوی-چیویتا وجود دارد: به جای صرفاً جایگاهی بردارها بین وجهه پهن شده، اتصالات عمومی تر یک تبدیل خطی اضافی، به عنوان مثال یک دوران اضافی، را اعمال می‌کنند. در حالی که این تبدیل اضافی با یک تبدیل متناظر از عبارت مختصاتی انتقال‌دهنده $\{i,j,k\} \rightarrow \{i,j,l\}$ $\text{GL}(2)$ معمکن است، برای هر چه هموارتر بودن بهینه شده‌اند، به جز در برخی تکینگی‌ها که به صورت توپولوژیکی تحمیل شده‌اند [؟]. آنها علاوه بر این اتصالات را در نظر می‌گیرند که دوران‌های (متناظر از مختصات) با $\frac{1}{N}$ را اعمال می‌کنند و می‌توانند برای ساخت N -میدان‌های جهتی، متناظر با C_N -ساختارها استفاده شوند. در کاربردهای ما، مهیشه اتصالات لوی-چیویتا را برای محاسبه ژئودزیک‌ها در نظر خواهیم گرفت. مدل‌های مرور شده در بخش بعدی ۲.۱۲ یک گروه ساختاری $\text{SO}(2)$ را روی مش‌های جهت‌پذیر فرض می‌کنند و از انتقال‌دهنده‌های لوی-

چیویتا برای بردارهای ویژگی استفاده می‌کنند. در مقابل، مدل‌های بخش ۳.۱۲ یک گروه ساختاری بدینهی $\{e\} = G$ را فرض می‌کنند و بنابراین فقط به اتصالات بدینهی $\{\mathbb{C}\}$ ساختار سازگار اجازه می‌دهند. آنها ویژگی‌ها را به گونه‌ای منتقل می‌کنند که بردارهای ضرب آنها نسبت به چارچوب‌های $\{e\}$ ساختار ناوردا باقی مانند، یعنی صرفاً مقادیر عددی آنها را کپی می‌کنند.

با توجه به فضاهای مماس جایگذاری شده $T_p M \subset \mathbb{R}^3$ در دیگر عناصر مش مانند رئوس یا یال‌ها، این رویکرد به طور طبیعی به انتقال بین عناصر مش دلخواه تعیین می‌یابد [؟]: به جای تراز کردن وجهه، می‌توان به عنوان مثال فضای مماس رأس را با وجه مجاور قبل از جابجایی بردار تراز کرد. از نظر هندسی، این عملیات را می‌توان به عنوان انتقال روی یک مش که رئوس و یال‌های آن در یک همسایگی بینهایت کوچک بریده شده و با یک وجه چندضلعی جایگزین شده‌اند، در نظر گرفت.

یک تعریف جایگزین از اتصالات گسته در [؟] و [؟] ارائه شده است. نوستد گانه در مقامه، فضاهای مماس را فقط در رئوس مدل می‌کنند، جایی که آنها بر حسب تغییر مقیاس زاویه کل ورودی، معادله (۴۸۴)، به 2π تعریف می‌شوند، همانطور که در بالا بحث شد. یک اتصال روی مش سپس با انتقال دهنده‌ها روی تمام یال‌های $\mathbb{C} = \{i, j\}$ داده می‌شود، که فضاهای مماس رئوس مجاور را به هم متصل می‌کنند. از آنجا که مفهوم هندسی باز کردن مثلث‌ها در اینجا وجود ندارد، انتقال دهنده‌های یال از طریق اعضا گروه نسبت به یک چارچوب مبدأ و مرجع کدگذاری می‌شوند. به طور خاص برای اتصال لوی-چیویتا، چارچوب‌های مرتع راست‌هنجر و راست‌گرد، این اعضا گروه در (۲) قرار دارند. سودمندی این ساختار برای انتقال مستقیم در امتداد مسیرهای دلخواه روی منفرد نامشخص است، با این حال، برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی که به مشتق هموردا بستگی دارند، مفید است. [?] نشان دادند که یک راه حل از معادله گرمای برداری با این وجود اجازه می‌دهد تا از چنین اتصالات برای محاسبه (غیرمستقیم) انتقال موازی بین نقاط دلخواه روی یک مش استفاده شود. [?] یک ساختار دیگر، یعنی اتصالات سادکه هموار بین و در داخل تمام عناصر مش را پیشنهاد می‌کنند. آنها علاوه بر این بحث می‌کنند که چگونه چنین اتصالات را می‌توان بهینه کرد تا حد ممکن به اتصال لوی-چیویتا (ناهموار) تزدیک باشند.

یک اتصال داده شده، انتقال موازی را در امتداد یک مسیر تعیین می‌کند. در محیط هموار، که اتصالات انتقال دهنده‌های بینهایت کوچک هستند، انتقال متناهی با انتگرال گیری از اتصال در امتداد مسیر محاسبه می‌شود. در محیط گسته، انتقال بر این اساس با ترکیب تبدیلات متفرگی که اتصال را بین عناصر مش که توسط مسیر عبور می‌کنند، تشکیل می‌دهند، تشكیل می‌شود. برای اتصال لوی-چیویتا، این فرآیند متناظر با پهن کردن تمام عناصر مش در امتداد مسیر و سپس جابجایی بردار روی آن است؛ به شکل ۷ در [?] مراجعة کنید. روش مبتنی بر معادله گرمای برداری توسط [?] انتقال بردارها را به طور خاص در امتداد ژئودزیک‌ها محاسبه می‌کند. از آنجا که این روش برای انتقال از یک مکان مبدأ به هر مکان دیگر روی منفرد به طور همزمان حل می‌کند، این رویکرد می‌تواند کارآمدتر از انتگرال گیری از انتقال برای هر مسیر منفرد به طور جداگانه باشد.

انحنای یک اتصال در محیط هموار به عنوان هولونومی انتقال آن حول یک دیسک بینهایت کوچک تعریف می‌شود. انحنای در یک رأس در محیط گسته به طور مشابه به عنوان هولونومی انتقال حول این رأس تعریف می‌شود. برای اتصال لوی-چیویتا، این فقط انحنای گاؤسی است، که با نقص زاویه

$$(485) \quad \kappa_{00000,i} = \delta_i = 2\pi - \Theta_i,$$

داده می‌شود، که در آن Θ_i زاویه کل نوک از معادله (۴۸۴) است. ما دوباره به بیست و جهی به عنوان مثال اشاره می‌کنیم، که در همه جا انحنای صفر دارد، به جز در دوازده رأس اصلی خود، که در آن نقص زاویه (انحنای) برابر با $\frac{\pi}{2}$ است. اتصالات بدینهی بنا به ساختار، انحنای صفر دارد.

در آخر، ما باید ژئودزیک‌ها را مورد بحث قرار دهیم. در محیط هموار، ژئودزیک‌ها به عنوان مستقیم‌ترین مسیرها تعریف می‌شوند، که با این گزاره رسمیت می‌یابد که مشتقهای هموردانه بردارهای مماس آنها در امتداد منحنی صفر می‌شوند، یعنی $\gamma' \cdot \nabla \gamma = 0$. این معادل این الزام است که انتقال یک بردار مماس (t, γ) در امتداد ژئودزیک، مماس بر آن باقی ماند، یعنی $(t, \gamma) \circ \gamma'(t) = \gamma(t, \gamma(t))$ برای t, γ دلخواه. علاوه بر این، کوتاه‌ترین مسیر بین هر دو نقطه روی یک منفرد همیند با یک ژئودزیک داده می‌شود. همانطور که توسط [?] اشاره شده است، این معادل بودن مسیرهای کوتاه‌ترین و مستقیم‌ترین دیگر روی مش ها برقرار نیست، به طوری که باید بین این دو مفهوم تمايز قائل شد.

به یاد بیاورید که نگاشت نمایی $M \rightarrow T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ به عنوان نگاشت بردارهای v به آن نقطه‌ای تعریف می‌شود که با راه رفت به اندازه $\|v\|$ از p در امتداد ژئودزیک (با سرعت واحد) در جهت v به آن می‌رسیم. این مفهوم به راحتی به مشاهده می‌یابد، جایی که مستقیم‌ترین ژئودزیک را در جهت v برای فاصله $\|v\|$ دنبال می‌کنیم. همانند محیط هموار، می‌توان چنین ژئودزیک‌های مستقیم را روی مش‌ها به عنوان آن دسته از منحنی‌هایی تعریف کرد که بردار مماس خود را موازی با منحنی نگه می‌دارند. این ویژگی به طور طبیعی روی وجهه مسطوح (یا در امتداد یال‌ها) برآورده می‌شود، به طوری که ژئودزیک حاصل تکه‌ای-خطی است، با تهنا نقاط غربیدهی آنهاست که ژئودزیک بین عناصر مش مجاور انتقال می‌یابد. جهت خروجی ژئودزیک پس از چنین انتقالی در اینجا با اتصال، یعنی با انتقال جهت q از p در نظر گرفت. آنها را در نظر بگیریم، که ما همیشه برای محاسبه ژئودزیک‌ها این کار را می‌کنیم، این منجر به یک خط راست معمولی پس از باز کردن عناصر مش به یک صفحه می‌شود. برای پیاده‌سازی نگاشت نمایی گسته، کافی است چنین ژئودزیک مس挺یم را تا رسیدن به فاصله $\|v\|$ دنبال کنیم.

نگاشت‌های لگاریتمی $M \rightarrow TM \rightarrow \log_p M$ ، از سوی دیگر، را می‌توان به عنوان محاسبه کوتاه‌ترین ژئودزیک‌ها بین نقاط p و q در نظر گرفت. آن بردار $(q)_p$ بر می‌گردانند که در $T_p M$ برای ژئودزیک است و نرم آن برای فاصله ژئودزیک بین نقاط است. یک راه بر جسته برای محاسبه فواصل ژئودزیک از یک نقطه (یا مجموعه) مبدأ p حل معادله ایکونال

$$(486) \quad |\nabla \tau| = 1 \quad \tau(p) = 0,$$

است، که در آن ∇ مشتق هموردا را نشان می‌دهد. بخش اول این معادله دیفرانسیل جزئی، الزام طبیعی را که گرادیان تابع فاصله باید یک باشد، تحمیل می‌کند، در حالی که بخش دوم فاصله را در مبدأ صفر ثابت می‌کند. یک الگوریتم پیشروی سریع [?] که معادله ایکونال را روی

مشهای مثلثی حل می‌کند، توسط $\nabla\tau$ پیشنهاد شد. با توجه بهتابع فاصله τ ژئودزیک بین p و هر نقطه دیگر q را می‌توان با دنبال کردن گرادیان فاصله از q را دیابی کرد، یعنی با حل معادله دیفرانسیل معمولی

$$\dot{\gamma} = -\nabla\tau. \quad (487)$$

با این اطلاعات، ما می‌دانیم که $\log_p(q) = \tau(q) = \|\log_p(q)\|$ ، با جهت $\log_p(q)$ که با مسیر ژئودزیک در p داده می‌شود. راه حل $\nabla\tau$ الگوریتم دایکسترا را برای محاسبه فواصل در امتداد یال‌های یک گراف به یک نسخه پیوسته تعیین می‌دهد، که می‌تواند از وجود عبور کند و بنابراین روی مشاه عمل کند. این روش یک تابع فاصله را با انتشار یک جبهه موج از p محاسبه می‌کند. روش گرمای $\nabla\tau$ توسعه $\nabla\tau$ فواصل ژئودزیک را بهره‌برداری از فرمول واردان، که ارتباطی را با کرنل گرمای برقرار می‌کند، محاسبه می‌کند. الگوریتم آنها اساساً معادله $\Delta u = \delta(p)$ را با شرط اولیه $u = 0$ حل می‌کند، یعنی یک «پیک گرمای» را از نقطه ببدأ متشر می‌کند. برای زمان‌های نفوذ کوتاه، گرادیان $\nabla\tau$ دقیقاً در جهت مخالف گرادیان فواصل ژئودزیک اشاره می‌کند. از آنجا که مشخص است که گرادیان فاصله ژئودزیک دارای قدر واحد است (معادله (486)), می‌توان میدان فاصله را از این اطلاعات محاسبه کرد. این روش به طور قابل توجهی سریعتر از الگوریتم‌های قبلی است. این روش را به معادله گرمای برداری تعیین می‌دهند، که اجازه می‌دهد کیت‌های با مقادیر برداری را به جای گرمای اسکالر منتشر کنند. این الگوریتم را می‌توان برای انتقال بردارها از یک نقطه (یا مجموعه) مبدأ روی کل منیفلد استفاده کرد، اما همچنین برای حل نگاشتهای لگاریتمی با دقت بالا مناسب است.

۲.۱۲ کانولوشن‌های سطحی راهبری پذیر-دورانی

در این بخش، ما کانولوشن‌های سطحی $(SO(2)-C_N-D_N)$ -راهبری پذیر را که در ردیف‌های (۳۷-۴۰) جدول ۶ فهرست شده‌اند، مرور می‌کنیم. همه این مدل‌ها در این منیفلد هستند که به ابهام جهات مرجع روی سطوح عمومی از طریق یک طراحی هموردای (یا تاوردای) دورانی محلی می‌پردازند، که آنها را از مدل‌های $\{\cdot\}$ -راهبری پذیر مورد بحث در بخش بعدی $\S.3.12$ متمایز می‌کند. قبل از بحث دقیق در مورد مدل‌های منفرد، ما با یک نمای کلی سطح بالا از انتخاب‌های طراحی رایج و گسته‌سازی‌های عددی ممکن شروع می‌کنیم.

ملاحظات کلی و نمای کلی: تمام مدل‌هایی که در این بخش مرور می‌شوند، روی مشاهای سطحی مثلثی عمل می‌کنند و راهبری پذیر-دورانی هستند. گروه ساختاری پیوسته $G = SO(2)$ برای تمام مدل‌هایی که نمایش‌های میدان منظم را فرض می‌کنند (ردیف‌های (۳۸) و (۳۹)) با گروه‌های دوری C_N یعنی N جهت با فواصل مساوی، گسته‌سازی می‌شود. مدل ∇ یک گروه ساختاری خاص تر D_N را فرض می‌کند. توجه داشته باشید که معماری‌های صرفاً راهبری پذیر دورانی فقط سطوح روی سطوح جهت پذیر عمل می‌کنند بدون اینکه همواری (پیوستگی) استنتاج خود را نقض کنند. سطوح غیر جهت‌پذیر نیازمند راهبری پذیری بازتابی اضافی هستند، یعنی گروه‌های ساختاری ∇ یا D_N . این الزام اغلب با تطبیق‌های جزئی، مهمتر از همه با استفاده از فضاهای کرنل محدودتر، به راحتی قابل ارضاست.

مطابق با تعریف کانولوشن‌های GM مدل‌ها ویژگی‌ها را در همسایگی محلی اطراف هر نقطه نمونه‌برداری بر حسب مختصات نرمال ژئودزیک پارامتری می‌کنند. تقریباً تمام مدل‌ها میدان‌های ویژگی را روی رئوس مش نمونه‌برداری می‌کنند؛ فقط ∇ ویژگی‌ها را به صورت متراکم روی وجود مش نمونه‌برداری می‌کند. انگرال کانولوشن پیوسته در معادله (۸۷)، که ویژگی‌ها را در مختصات نرمال ژئودزیک با یک کرنل راهبری پذیر تطبیق می‌دهد، را می‌توان به روش‌های مختلفی گسته‌سازی کرد. اکثر مدل‌ها این انگرال را در یک رأس $\mathcal{V} \in p \in \mathcal{N}$ به عنوان یک جمع روی رئوس همسایه آن $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}_p$ گسته‌سازی می‌کنند. سپس ویژگی‌ها از این رئوس $\log_p(q) \in \mathbb{R}_{TM,p}$ پیوسته در نقطه $\psi_{TM,p}(q) \in \mathbb{R}^A$ تطبیق داده می‌شوند، که در آن $\psi_{TM,p}^A$ پیمانه متناظر با چارچوب مرجع انتخاب شده در p است. این به همراه انتقال از p به q منجر به گسته‌سازی زیر می‌شود:

$$f_{\square\Box}^A(p) = \sum_{q \in \mathcal{N}_p} \square_q K(\psi_{TM,p}^A \log_p(q)) \rho(g_{p \leftarrow q}^{A\tilde{A}}) f_{\Box\Box}^{\tilde{A}}(q), \quad (488)$$

که در آن $\mathbb{R}_q \in \mathbb{R}$ وزن‌های مساحتی مناسب انتخاب شده‌اند که مجموع آنها برابر با کل مساحت مش است، $\int_M 1 dp = \sum_{q \in \mathcal{V}} \mathbb{R}_q$. انتخاب‌های رایج، وزن‌های مساحتی مرکزوار به شکل

$$w_q = \frac{1}{\mathfrak{P}} \sum_{\{i,j,q\} \in \mathcal{F}} A_{\{i,j,q\}}, \quad (489)$$

هستند، با مجموعی که روی تمام مثلث‌های مجاور رأس q اجرا می‌شود، یا مساحت‌های ورونوی \mathbb{R}_q . از آنجا که گسته‌سازی در معادله (۴۸۸) روی رئوس همسایه جمع می‌شود، الگوریتم‌ها نگاشتهای لگاریتمی را از طریق کوتاه‌ترین ژئودزیک‌ها بین q و p محاسبه می‌کنند؛ به بخش $\S.2.1.12$ مراجعه کنید.

به جای محاسبه نگاشتهای لگاریتمی رئوس همسایه، می‌توان به طور جایگزین انگرال کانولوشن را روی دامنه کرنل \mathbb{R}^A گسته‌سازی کرد. نویسنده‌گان \mathbb{R}^A از یک تقسیم‌بندی هم‌زاویه و هم‌شعاع از مختصات قطبی ژئودزیک استفاده می‌کنند. آنها نگاشت نمایی را برای هر نقطه نمونه‌برداری (r, φ) محاسبه می‌کنند، یعنی یک مستقیم‌ترین ژئودزیک (\mathbb{R}^A) به طول r را در جهت φ نسبت به چارچوب مرجع شلیک می‌کنند. از آنجا که این ژئودزیک‌ها به طور کلی در یک وجه به پایان می‌رسند، بردارهای ویژگی از رئوس مجاور باید درون‌یابی شوند، به عنوان مثال بر اساس مختصات مرکزوار. همسایگی ژئودزیک را از طریق یک الگوریتم «باز کردن انتقال موازی» تقریب می‌زنند \mathbb{R}^A .

جدول ۶ مدل‌ها را بر اساس انواع میدان مربوطه خود سازماندهی می‌کند، یعنی بر اساس نمایش‌های گروهی ρ که قوانین تبدیل آنها را تحت تبدیلات پیمانه مشخص می‌کنند. تنها انواع میدان غیربدیهی که تاکنون استفاده شده‌اند، نمایش‌های تحويل‌ناپذیر (مختلط) از $(\text{SO}(2) \otimes \text{SO}(2))$ هستند، که با نمایش‌های منظم یک زیرگروه گستته C_N گستته‌سازی شده‌اند [؟ ۳ ۴ ۵]. نمایش‌های منظم $(\text{SO}(2) \otimes \text{SO}(2))$ بنا به تعریف بر روی $L^2(\text{SO}(2))$ عمل می‌کنند، یعنی بر روی ویژگی‌هایی که «یک مقدار برای هر جهت» اختصاص می‌دهند. در نسخه گستته، ما $\cong L^2(C_N)$ را داریم، که در آن هر یک از N بعد یک بردار ویژگی منظم متناظر با یکی از جهات در $\{ -1, \dots, N-1 \}$ است. تناظر با نمایش‌های منظم در اکثر این مقالات ضمیمی است □ معماری‌های شبکه بیشتر از یک دیدگاه شهری تراستخراج شده‌اند. مشخص می‌شود که نویسنده‌گان فقط از زیرمجموعه‌ای از فضای کامل کرنل‌های راهبری‌پذیر که بین میدان‌های ویژگی منظم C_N نگاشت انجام می‌دهند، استفاده می‌کنند. ما این ادعا را در ادامه هنگام بحث دقیق در مورد مدل‌ها بیشتر اثبات می‌کیم. یک ساختار از فضای کامل کرنل در [؟ ۱] ارائه شده است، یک تصویرسازی را می‌توان در شکل ۳ از [؟ ۱] بافت. مدل‌های باقی مانده بر اساس نمایش‌های بدیهی، یعنی میدان‌های اسکالار هستند. یک رویکرد برای محاسبه میدان‌های اسکالار، اعمال یک کرنل در N جهت است، که منجر به یک میدان ویژگی منظم میانی C_N می‌شود، و به دنبال آن یک عملیات تجمعی روی N پاسخ انجام می‌شود [؟ ۲]. از آنجا که تبدیلات پیمانه در C_N منجر به یک جایجایی دوری صرف (یک جایگشت) از کمال‌های جهت ویژگی می‌شوند، عملیات تجمعی تحت تبدیلات پیمانه ناوردا هستند، یعنی میدان‌های اسکالار تولید می‌کنند. [؟ ۳] بلافاصله از کرنل‌های D_4 -ناوردا استفاده می‌کند؛ به شکل ۶۲ مراجعه کنید. از آنجا که تبدیلات پیمانه چنین کرنل‌هایی را ناوردا باقی می‌گذارند، میدان‌های ویژگی حاصل نیز ناوردا هستند، یعنی میدان‌های اسکالار.

در آخر، می‌توانیم مدل‌ها را بر اساس انتقال‌دهنده‌های ویژگی که فرض می‌کنند، مقایسه کنیم. تمام شبکه‌های کانولوشنی در [؟ ۴ ۵ ۶] انتقال‌دهنده‌های کانولوشنی لوی-چیوینتا را روی متش فرض می‌کنند. از آنجا که تمام مدل‌های [؟ ۴ ۵ ۶] بر میدان‌های اسکالار تکیه دارند، انتقال موازی آنها بدیهی است. یک رویکرد جایگزین توسط [？ ۷] دنبال شد که یک اتصال با مقادیر C_N را روی متش محاسبه می‌کنند. این اتصال در همه جا به جز در چند تکینگی با هولونومی $k^{\frac{2\pi}{N}}$ برای یک $1, \dots, N$ ثابت بدیهی (تخت) است. نویسنده‌گان اتصال با مقادیر C_N خود را به گونه‌ای بهینه‌سازی می‌کنند که اتصال لوی-چیوینتا با مقادیر $(\text{SO}(2))^N$ را تا حد امکان تزدیک تقریب بزنند؛ همچنین به [？ ۸] مراجعه کنید. توجه داشته باشید که این رویکرد مشابه پهن کردن محلی CNN‌های کروی به CNN‌های بیست و چهار $(N = 6)$ از بخش ۴.۱۲ است اما برای متش‌های عمومی اعمال می‌شود. با در نظر گرفتن این ملاحظات کلی، ما بر روی برخی از انتخاب‌های طراحی خاص‌تر که در مدل‌ها انجام شده است، تمرکز می‌کنیم.

شبکه‌های هارمونیک سطحی: شبکه‌های هارمونیک سطحی توسط [？ ۹] که در ردیف (۳۷) جدول ۶ فهرست شده‌اند، یک مثال نمونه از کانولوشن‌های GM روی متش‌ها هستند. آنها شبکه‌های هارمونیک [？ ۹] را □ که ویژگی‌های آنها مطابق با نمایش‌های مختلط $G = \text{SO}(2)$ تبدیل می‌شوند □ از صفحه اقلیدسی به فضاهای خمیده عمومی تعیین می‌دهند. نویسنده‌گان کانولوشن خود را مانند معادله (۴۸۸) با استفاده از وزن‌های مساحتی مرکزوار از معادله (۴۸۹) تعریف می‌کنند. انتقال‌دهنده‌های لوی-چیوینتا و نگاشت‌های لگاریتمی از طریق روش گرمای برداری [？ ۱۰] محاسبه می‌شوند، که به متش‌های مثلثی محدود نیست بلکه اجازه می‌دهد مدل را به متش‌های چندضلعی و ابرهای نقطه نیز اعمال کرد. غیرخطی‌های $(\text{SO}(2))^m$ -هموردای مورد استفاده توسط مدل‌ها فقط بر روی قدر مطلق ویژگی‌های مختلط عمل می‌کنند اما آگومان آنها را ناوردا باقی می‌گذارند.

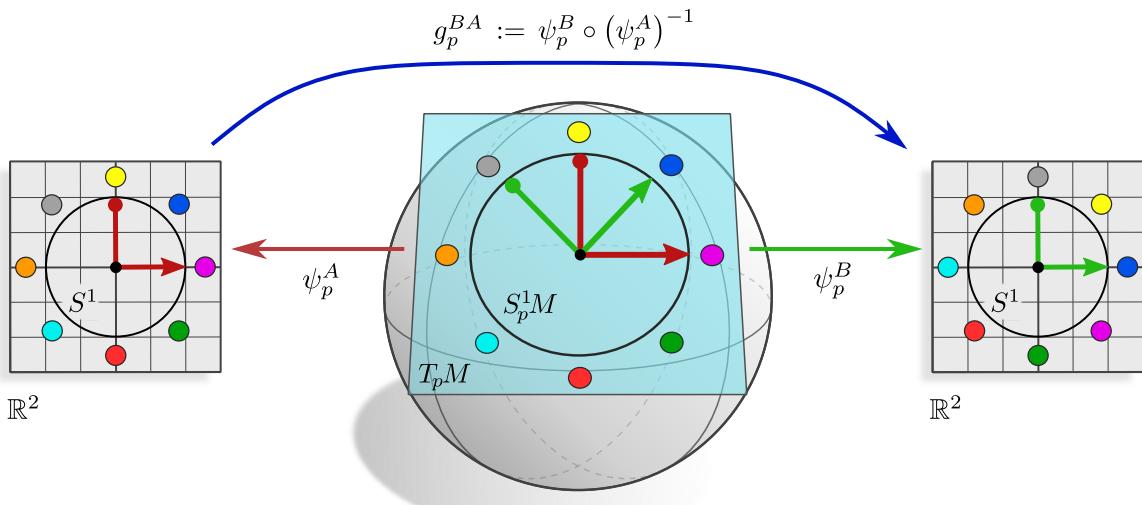
همانطور که در [？ ۱۱] اثبات شده است، فضاهای کرنل $(\text{SO}(2))$ -راهبری‌پذیر که توسط نویسنده‌گان استفاده می‌شوند، روی میدان مختلط کامل هستند. با این حال، اگر میدان‌های ویژگی مختلط بر حسب دو کanal که حاوی بخش‌های حقیقی و موهومی تعیین می‌کنند، پیاده‌سازی شوند، باید آنها را به عنوان تبدیل شونده مطابق با نمایش‌های تحويل‌ناپذیر حقیقی $(\text{SO}(2))$ در نظر گرفت. محدودیت کرنل در این حالت به کرنل‌های راهبری‌پذیر اضافی اجازه می‌دهد؛ برای یک بحث دقیق به پیوست ۰.۵ از [？ ۱۲] مراجعه کنید. ما علاوه بر این می‌خواهیم اشاره کنیم که شواهد تجربی نشان می‌دهد که شبکه‌های مبتنی بر میدان‌های نمایش تحويل‌ناپذیر عملکرد به طور قابل توجهی بدتری نسبت به آنها دارند؛ به عنوان مثال به بنچمارک در [？ ۱۳] مراجعه کنید. توجه داشته باشید که شبکه‌های هارمونیک سطحی را می‌توان به راحتی با استفاده از «غیرخطی منظم» از [？ ۱۴] که اساساً یک تبدیل فوریه از پشتۀ ای از میدان‌های نمایش تحويل‌ناپذیر را برای تبدیل آنها به یک میدان ویژگی منظم اعمال می‌کند، به شبکه‌هایی که روی میدان‌های ویژگی منظم عمل می‌کنند، تبدیل کرد.

CNN‌های ژئودزیک چندجهتی: [？ ۱۵] CNN‌های ژئودزیک چندجهتی (GEODESIC) را پیشنهاد کردجته (GEODESIC) را به اصطلاح توابع جهتی عمل می‌کنند. همانطور که در ادامه استدلال می‌کنیم، توابع جهتی معادل میدان‌های ویژگی منظم هستند و MDGCNN‌ها کانولوشن‌های خاصی بین چنین ویژگی‌هایی هستند. نویسنده‌گان توابع جهتی را به عنوان توابع با مقدار حقیقی تعیین می‌کنند که به نقاط $M \in \mathbb{R}^p$ و جهات واحد $v \in T_p M$ ، $\|v\| = 1$ بستگی دارند. با نشان دادن دایره جهات واحد در $T_p M$ ، $S'_p M := \{v \in T_p M \mid \|v\| = 1\} \cong S^1$ ،

$$S'_p M := \{v \in T_p M \mid \|v\| = 1\} \cong S^1, \quad (490)$$

یک ویژگی جهتی در p به عنوان یک نگاشت

$$F : S'_p M \rightarrow \mathbb{R} \quad (491)$$



شکل ۵۹: نمایش توابع جهتی توسعه \mathbb{R}^2 . توابع جهتی یک پاسخ با مقدار حقیقی (نقاط رنگی) را به هر جهت (بردار واحد) در $S_p^1 M \subset T_p M$ اختصاص می‌دهند. هنگام بیان این تابع نسبت به چارچوب‌های مرجع راست‌نهج و راست‌گرد یا پیمانه‌های $\psi_{TM,p}^X$ ، نمایش‌های مختصاتی پاسخ‌های با مقدار حقیقی را به بردارهای واحد در $\mathbb{R}^1 \subset S^1$ اختصاص می‌دهند. قانون تبدیل بین این نمایش‌های مختصاتی با یک دوران از مقادیر ویژگی روی S^1 داده می‌شود. از نظر ریاضی، این قانون تبدیل به عنوان عمل نمایش منظم از $\text{SO}(2)$ شناسایی می‌شود؛ به معادله (۴۹۲) مراجعه کنید. بنابراین توابع جهتی، میدان‌های ویژگی منظم هستند و CNN سطحی \mathbb{R}^2 [۴۹۳] بر اساس کانولوشن‌های GM بین چنین میدان‌هایی است. یک نسخه نموداری از این شکل در معادله (۴۹۲) آراحت شده است.

از جهات واحد در صفحه مماس به پاسخ‌های با مقدار حقیقی تعریف می‌شود.^{۱۳۱} یک انتخاب از چارچوب مرجع راست‌نهج و راست‌گرد، یک جهت مرجع را ثابت می‌کند که نسبت به آن می‌توان تابع جهتی را بیان کرد. فرض کنید $\psi_{TM,p}^A$ پیمانه متناظر با یک چارچوب انتخاب شده باشد، که جهات واحد را در $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ به «جهات واحد مختصاتی» در $S_p^1 M \subset T_p M$ نگاشت می‌دهد. سپس عبارت مختصاتی تابع جهتی با

$$F_p^A := F \circ (\psi_{TM,p}^A|_{S_p^1 M})^{-1} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (492)$$

داده می‌شود، یعنی به بردارهای ضربی واحد روی \mathbb{R}^2 پاسخ‌های با مقدار حقیقی اختصاص می‌دهد. از جابجایی نمودار

$$\begin{array}{ccccc} & & g_p^{BA}. & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathbb{R}^1 & \xrightarrow{\psi_{TM,p}^A|_{S_p^1 M}} & S_p^1 M & \xrightarrow{\psi_{TM,p}^B|_{S_p^1 M}} & S^1 \subset \mathbb{R}^1 \\ & \searrow & \downarrow F & \swarrow & \\ & & \mathbb{R} & & \\ & \nearrow F_p^A & & \nearrow F_p^B & \end{array} \quad (493)$$

می‌توان خواند که عبارات مختصاتی تابع جهتی از قانون تبدیل زیر پیروی می‌کنند:

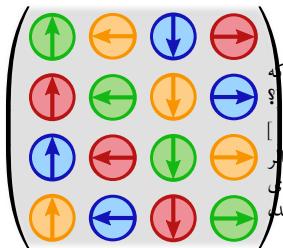
$$F_p^B = F_p^A \circ (g_p^{BA})^{-1} =: \rho_{\text{SO}}(g_p^{BA}) F_p^A \quad (494)$$

تساوی دوم، قانون تبدیل بین عبارات مختصاتی را به عنوان عمل نمایش منظم شناسایی می‌کند، که گزاره ما را مبنی بر اینکه تابع جهتی فقط میدان‌های ویژگی منظم هستند، توجیه می‌کند.^{۱۳۲} شکل ۵۹ یک تابع جهتی و نمایش‌های مختصاتی آن را نسبت به چارچوب‌های مختلف نشان می‌دهد.

کانولوشن‌های ژئودزیک چندجهته توسعه \mathbb{R}^2 [۴۹۳] بین توابع جهتی به روشهای مستقل از مختصات با منقبض کردن آنها با کرنل‌های هموردا در یک پارامتری‌سازی ژئودزیک حول هر رأس، نگاشت انجام می‌دهند. این مشاهده دلالت بر این دارد که این کانولوشن‌ها کانولوشن‌های GM خاصی

^{۱۳۱} تابع جهتی کامل سپس می‌تواند به عنوان یک نگاشت از $S^1 M$ ، کلاهی با تارهای $S_p^1 M$ ، به مقادیر حقیقی تعریف شود.

^{۱۳۲} به طور دقیق، نمایش منظم $\text{SO}(2)$ بر روی توابع \mathbb{R} عمل می‌کند. با این حال، ما می‌توانیم به طور کانونی چنین توابعی را با تابع روی S^1 با یکی گرفتن $e \in \text{SO}(2)$ با $(1, 0)$ یکی بگیریم.



شکل ۶۰: درجات آزادی یک کرنل C_N -راهبری‌پذیر $K : \mathbb{R}^{N \times N} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ مطابق با تغییش منظم ($C_N \rightarrow GL(N)$) برای $N = 4$ تبدیل می‌شوند، نگاشت انجام می‌دهد؟
ا. محدودیت کرنل، معادله (۸۳)، الگوی اشتراک وزن با کد رنگی را تحلیل می‌کند.
ب. ویژگی‌های رارویی هر لایه از N -میدان جهتی خود (C_N -ساختار) با نسخه‌های دوران یافته از یک کرنل اسکالر
منفرد کانولو می‌کنند اما شامل تعامل بین لایه‌های مختلف نمی‌شوند. این کرنل مشترک متاظر با درایه‌های
قطعی (سیز) از فضای کامل کرنل است. درایه‌های خارج از قطعه، که به طور ضمیمی مجبور به صفر شدن هستند
متاظر با تعاملات بین لایه‌ها خواهند بود.

بین میدان‌های ویژگی منظم هستند. یک تفاوت در فرمول‌بندی کانولوشن‌های ژئودزیک چندجهته این است که پول‌بک انتقال‌دهنده آنها کل بردار ویژگی منظم (تابع جهتی) را در امتداد ژئودزیک‌ها منتقل نمی‌کند، بلکه فقط آن پاسخ منفرد را که متاظر با جهت مماس ژئودزیک است، منتقل می‌کند. به جای تطبیق ویژگی‌های منتقل شده با یک کرنل ماتریسی، کانولوشن‌های چندجهته پاسخ منفرد منتقل شده را با یک کرنل اسکالر تطبیق می‌دهند. معادل بودن هر دو عملیات با تحلیل یک الگوی پراکندگی متاظر بر روی کرنل‌های SO(۲)-راهبری‌پذیر ماتریسی ما، که به طور موثر آن پاسخ‌هایی را که توسط MDGCNN‌ها منتقل نمی‌شوند، صفر می‌کند، بازیابی می‌شود. در حالی که کانولوشن‌های ژئودزیک چندجهته فقط کانولوشن‌های GM بین میدان‌های ویژگی منظم هستند، آنها بنا بر این از فضای کامل کرنل‌های G-راهبری‌پذیر بین میدان‌های ویژگی منظم استفاده نمی‌کنند. این پراکندگی MDGCNN‌ها را از نظر محاسباتی کارآمد می‌کند، با این حال، هزینه حافظه همان باقی می‌ماند و مشخص نیست که این انتخاب تا چه حد ظرفیت بیانی آنها را محدود می‌کند.

تعداد نامتناهی جهات در (۲) $S_p^i M$ یا $(S^i)^t$ در عمل به N جهت با فواصل مساوی در گروه دوری C_N گسترش‌سازی می‌شود، به عنوان مثال ۸ جهتی که در شکل ۵۹ به تصویر کشیده شده‌اند. از آنجا که انتقال لوی-چیویتا در امتداد ویژگی‌ها به طور کلی با مقادیر (2) SO به جای C_N است، نویسنده‌گان از یک درون‌یابی خطی بین N جهت گسترش‌سازه استفاده می‌کنند.

همانطور که در بالا بحث شد، MDGCNN‌ها فقط آن پاسخ‌های خاص از ویژگی‌ها را که متاظر با جهت ژئودزیک خروجی نسبت به چارچوب مرجع محلی در p هستند، منتقل می‌کنند. این جهت در مبدأ $v \in T_p M$ تعریف نشده است، که از خود-تعامیلی رئوس جلوگیری می‌کند. نویسنده‌گان این مشکل را با اعمال یک $\mathbf{1} \times \mathbf{1} \times \dots \times \mathbf{1} \times \mathbf{1} \times \mathbf{1}$ -اضافی حل می‌کنند که خود-تعامیلی گمشده را دوباره اضافه می‌کند. همانطور که در بخش ۱۱.۴ استخراج شد، کرنل‌های $\mathbf{1} \times \mathbf{1} \times \dots \times \mathbf{1} \times \mathbf{1}$ -باید در هم تنبله باشند تا استقلال از مختصات مدل را حفظ کنند. این الزام در واقع توسط MDGCNN‌ها برآورده می‌شود 133 زیرا ماتریس $\mathbf{1} \times \mathbf{1} \times \dots \times \mathbf{1} \times \mathbf{1}$ -به گونه‌ای ساخته شده است که کل بردارهای ویژگی منظم را با یک وزن یکسان ترکیب می‌کند به جای اینکه کانال‌های آنها را به طور مستقل ترکیب خطی کنند. این کار با تغییش $m_{\text{---}}^{\text{---}}$ ویژگی منظم C_N نه به عنوان یک بردار ویژگی $\mathbf{c} = N \cdot m_{\text{---}}^{\text{---}}$ -بعدی بلکه به عنوان یک آرایه با شکل $(N, m_{\text{---}}^{\text{---}})$ و سپس اعمال یک ماتریس (مشترک) با شکل $(m_{\text{---}}^{\text{---}}, m_{\text{---}}^{\text{---}})$ روی آخرین محور که منجر به یک آرایه خروجی با شکل $(N, m_{\text{---}}^{\text{---}})$ می‌شود، پیدا مسازی می‌شود.

های چارچوب موازی: CNN ‌های چارچوب موازی (۷۰۰۰۰۰۰) توسط \mathbf{G} بر N -میدان‌های چارچوب جهتی تکیه دارند، که فقط G -ساختارهای GM برای گروههای ساختاری دوری C_N هستند. به یاد پیاوید از بحث مادر بالا که این میدان‌ها یک اتصال را کدگذاری می‌کنند که در همه جا به جز در چند تکینگی بدینهی است و برای تقریب اتصال لوی-چیویتا اصلی بهینه‌سازی شده است. از آنجا که این G -ساختار در یک مرحله آفلاین از پیش محاسبه می‌شود، ما در ادامه آن را به عنوان داده شده در نظر می‌گیریم و بر روی کانولوشن واقعی PFCNN مخصوص می‌شود که این عملیات معادل یک کانولوشن GM بین میدان‌های ویژگی منظم C_N است، با این حال، دوباره یک الگوی پراکندگی خاص را در کرنل‌ها فرض می‌کند که توسط طراحی شبکه خاص القای شود.

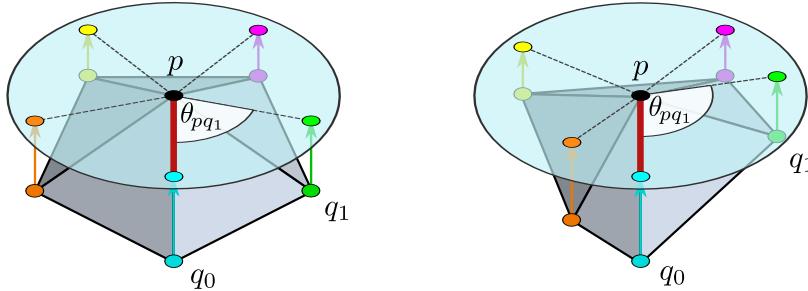
فضاهای ویژگی $PFCNN$ ‌ها فضاهای $C^\infty(GM)$ از توابع با مقادیر حقیقی روی GM هستند. از آنجا که $G = C_N GM \xrightarrow{\pi_{GM}} M$ برای یک پوشش $|G| = N$ است، چنین میدان‌های ویژگی را می‌توان به طور مشابه به عنوان اختصاصی یک چندتایی از N عدد حقیقی به هر نقطه $p \in M$ در نظر گرفت. از آنجا که N لا یاهی از فضای پوششی علاوه بر این با N جهت (که با اولین محورهای چارچوب داده می‌شوند) یکی گرفته می‌شوند، این ویژگی‌ها معادل توابع جهتی (گسترش‌سازی شده) $\mathbf{?}$ هستند. قضیه ۱.۱ در پیوست ح علاوه بر این اثبات می‌کند که یک ایزومورفیسم

$$C^\infty(GM) \cong \Gamma(\mathcal{A}_{p_{\text{---}}}) \quad (495)$$

بین ویژگی‌های $PFCNN$ ‌ها و میدان‌های ویژگی منظم ما وجود دارد. بنابراین $PFCNN$ ‌ها کانولوشن‌های مستقل از مختصات را بین (معادل) میدان‌های ویژگی منظم انجام می‌دهند و بنابراین به عنوان کانولوشن‌های GM منظم (خاص) شناسایی می‌شوند.

فرمول‌بندی کانولوشن‌های چارچوب موازی در نگاه اول به نظر می‌رسد کاملاً با فرمول‌بندی ما متفاوت است: به جای کانولو کردن کامل میدان‌های ویژگی منظم N -بعدی با یک کرنل ماتریسی C_N -راهبری‌پذیر $K : \mathbb{R}^{N \times N} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ $PFCNN$ ‌ها توابع اسکالر خود را روی هر یک از N لایه به طور مستقل با یک کرنل اسکالر مشترک که با چارچوب لایه مربوطه تراز شده است، کانولو می‌کنند. این عملیات در چارچوب ما به عنوان

^{۱۳۳} مکاتبه شخصی با نویسنده.



شکل ۶۱: دو ناحیه مش که از نظر توبولوژیکی معادل اما از نظر هندسی متمایز هستند. یک رویکرد برای تعریف کانولوشن‌ها روی مش‌ها، در نظر گرفتن گراف زیربنایی آنها (\mathcal{E}) است که توبولوژی مش را ثابت می‌کند، و اجرای یک شبکه عصی گراف روی آن. شبکه‌های عصی گراف (متعارف) به دلیل نداشتن اطلاعات در مورد هندسه مش، نمی‌توانند بین دو همسایگی به تصویر کشیده شده تمایز قابل شوند. از نظر هندسی، آنها کرنل‌های همسانگرد را اعمال می‌کنند. CNN های مش همودای پیمانه توسعه \mathcal{E} این مشکل را با تصویر کردن رنوس همسایه q_i روی صفحات مماس و اختصاص دادن زوایای θ_{pq_i} به آنها نسبت به یک یال مرتع، یعنی پیمانه (قرمز)، حل می‌کنند. الزام به استقلال از مختصات کانولوشن‌ها منجر به کرنل‌های G -راهبری پذیر می‌شود. در حالی که این مدل می‌تواند بر اساس جهت گره‌های همسایه تمایز قابل شود، فاصله آنها را نادیده می‌گیرد. این مدل علاوه بر این از پارامتری سازی ژئودزیک مانعحرف می‌شود به این دلیل که تکیه گاه کرنل آن بر اساس اتصال لبه محلی به جای فواصل ژئودزیک است.

یک کانولوشن با یک کرنل ماتریسی C -راهبری پذیر تفسیر می‌شود که تنها مقادیر غیرصفر آن روی قطر آن قرار دارند و نسبت به یکدیگر چرخانده شده‌اند، که با درایه‌های سبز در شکل ۶۰ به تصویر کشیده شده است. عدم وجود کوپلینگ بین ویژگی‌ها روی لایه‌های مختلف دلالت بر این دارد که درایه‌های خارج از قطر (زرد، آبی و قرمز) از فضای کامل کرنل راهبری پذیر به طور ضمنی صفر در نظر گرفته می‌شوند. همانطور که قبل از برای $MDGCNN$ ‌ها گفته شد، الگوی پراکنده‌گی این کانولوشن GM منظم آن را از نظر محاسباتی کارآمدتر از یک کانولوشن GM متراکم می‌کند اما احتمالاً بر عملکرد آن تأثیر می‌گذارد و هزینه حافظه را کاهش نمی‌دهد.

CNN‌های مش همودای پیمانه: CNN مش همودای پیمانه (GEMCNN) توسعه \mathcal{E} از کاستی‌های شبکه‌های عصی گراف متعارف برای پردازش میدان‌های ویژگی روانه‌داری شده در رنوس روی مش‌ها با کانولوکردن روی گراف (\mathcal{V}) که توسعه مش القا می‌شود، استفاده شوند. مشکل این رویکرد این است که گراف فقط توبولوژی مش را که گذاری می‌کند، اما قادر به ثبت هندسه آن نیست. کانولوشن‌های گراف متعارف بر این اساس بین ترتیب یال‌ها تمایز قائل نمی‌شوند، که روی مش‌ها متناظر با استفاده از کرنل‌های همسانگرد است که بین میدان‌های اسکالار نگاشت انجام می‌دهند. شکل ۶۱ دو ناجه از یک مش با هندسه متمایز اما توبولوژی معادل را نشان می‌دهد □ برای کانولوشن‌های گراف متعارف هر دو همسایگی یکسان به نظر می‌رسند. $GEMCNN$ ‌ها این مشکل را با انتخاب یک یال مرتع در هر رأس $p \in \mathcal{V}$ حل می‌کنند، که نسبت به آن جهت تمام یال‌های دیگر $\mathcal{E} = \{p, q_i\} \subset \mathcal{N}_p \subset \mathcal{V}$ بر حسب زوایا $\theta_{pq_i} \in [0, 2\pi]$ می‌شود. یک انتخاب از یال مرتع متناظر با یک انتخاب از چارچوب راست‌هنجار و راست‌گرد است. انتخاب‌های مختلف با تبدیلات پیمانه در گروه ساختاری $(\mathbb{Z}, G = SO(2))$ مرتبط هستند.

همانند نظریه ما، فضاهای ویژگی $GEMCNN$ ‌ها به عنوان مقاطعی از کلاف‌های برداری همیسته تعریف می‌شوند، یعنی به عنوان فضاهایی از میدان‌های ویژگی \mathcal{C} -بعدی که ضرایب آنها تحت تبدیلات پیمانه مطابق با یک نمایش گروهی (c) $\rightarrow SO(2) \rightarrow GL(c)$: ρ می‌شوند. به هر یال یک انقال دهنده لوی-چووتا با مقادیر $\rho \in SO(2)$ از اختصاص داده می‌شود. عملیات کانولوشن ملزم است که مستقل از انتخاب یال مرتع باشد، که منجر به الزام بر روی کرنل‌ها برای G -راهبری پذیر بودن (همودایی پیمانه) می‌شود. برخلاف فرمولبندی ما، کرنل‌ها مستقیماً در مختصات نرمال ژئودزیک اعمال نمی‌شوند بلکه پیام‌ها را فقط از همسایگی‌های یک-حلقه $\mathcal{E} = \{p, q\} \subset \mathcal{V}$ به آن گره p که کرنل حول آن متمرکز است، منتقل می‌کنند.¹³⁴ کرنل‌ها علاوه بر این غیر حساس به شعاع هستند □ اینکه این تا چه حد بر عملکرد مدل تأثیر می‌گذارد، یک سؤال باز باقی می‌ماند.

نویسنده‌گان نمایش‌های تحویل ناپذیر (حقیقتی) را به عنوان انواع میدان برای کانولوشن انتخاب کرده‌اند، با این حال، آنها یک تغییر پایه به نمایش‌های منظم برای اعمال غیرخطی‌های ReLU انجام می‌دهند، به همین دلیل ما آنها را در ردیف (۳۸) جدول ۶ به جای ردیف (۳۷) فهرست می‌کنیم.¹³⁵ به طور خاص، نویسنده‌گان از تغییر پایه $Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$ به طور خاص، نویسنده‌گان از تجزیه می‌کنند که نمایش منظم $C_N \rightarrow GL(N)$ را به مؤلفه‌های N به C_N این ماتریس نمایش تحویل ناپذیر آن تجزیه می‌کند تا یک پشتۀ از میدان‌های نمایش تحویل ناپذیر را به یک میدان ویژگی منظم تبدیل کند. برای C_N این ماتریس فقط تبدیل فوریه گستته است. پس از اعمال غیرخطی ReLU به هر یک از N کanal از میدان ویژگی منظم به طور جداگانه □ که یک عملیات C_N -هموردا است زیرا نمایش‌های منظم، نمایش‌های جایگشتی هستند □ ویژگی‌ها برای عملیات کانولوشن بعدی به یک پشتۀ از میدان‌های نمایش تحویل ناپذیر بازگردانده می‌شوند. این طراحی این مزیت را دارد که ویژگی‌ها را دقیقاً با انتقال دهنده‌های با مقادیر $\rho \in SO(2)$ منتقل کرد، بدون

¹³⁴ برای یک شبکه (به اندازه کافی) منظم و کرنل با تکیه گاه فشرده در مختصات ژئودزیک، هر دو رویکرد معادل می‌شوند.

¹³⁵ معادل بودن میدان‌های ρ -با تجزیه نمایش تحویل ناپذیر آنها در بخش ۲.۵ و در بخش ۴.۲ از [؟] مورد بحث قرار گرفت.

اینکه نیاز به بازگشت به یک طرح درونیابی باشد، همانطور که توسط C_N -همورداست. از غیرخطی‌های منظم فقط C_N -است.

اینکه نویسنده‌گان از نمایش‌های تحویل‌نپذیر حقیقی از $\text{SO}(2)$ استفاده می‌کنند به این معنی است که فضاهای کرنل آنها تقریباً دو برابر بزرگتر از فضاهای کرنل شبکه‌های هارمونیک سطحی توسط C_N است؛ بحث‌هادر [؟] را مقایسه کنید.

CNN‌های ژئودزیک: اولین کار در مورد کانولوشن‌های ژئودزیک که ما از آن آگاه هستیم، کار [؟] است. نویسنده‌گان ابهام دورانی مختصات قطبی ژئودزیک را روی یک منیفلد ریمانی جهت پذیر شناسایی کرده و آن را از طریق یک معماری ناوردا نسبت به دوران حل می‌کنند. کانولوشن‌های ژئودزیک آنها یک میدان اسکالر را نسبت به مختصات قطبی ژئودزیک با جهت‌گیری دلخواه نمایش می‌دهند. از آنجا که نوع میدان بدینه است، پولبک انتقال‌دهنده به مختصات ژئودزیک به انتقال‌دهنده‌های (غیربدینه) یاز ندارد. سپس میدان ویژگی در مختصات ژئودزیک با یک کرنل اسکالر تطبیق داده می‌شود، که در N دوران با فواصل مساوی با زوایای $k \frac{\pi}{N}$ نسبت به چارچوب مرتع، که در آن $1, \dots, N$ است، اعمال می‌شود. از آنجا که یک تبدیل پیمانه $\begin{pmatrix} 0 & k \\ N & 0 \end{pmatrix}$ برای یک $\in \mathbb{R}^2$ تمام کرنل را بر این اساس می‌چرخاند، منجر به یک جایگشت دوری از پاسخ‌ها با \mathbb{R}^2 گام می‌شود. بنابراین این عملیات در چارچوب ما متناظر با یک کانولوشن C_N -راهبری‌پذیر از میدان‌های اسکالر به میدان‌های ویژگی PFCNN است. به جای پردازش بیشتر این میدان‌ها از طریق کانولوشن‌های گروهی منظم MDGCNN همانطور که در [؟]، [؟] و [؟] مقدار GEMCNN اینها [؟] انجام می‌شود. نویسنده‌گان یک عملیات تجمعی \max را روی N پاسخ اعمال می‌کنند. از آنجا که تبدیلات پیمانه با منجر به جابجایی‌های دوری از میدان‌های ویژگی منظم میانی می‌شوند، عملیات تجمعی ناوردا-پیمانه است، یعنی میدان‌های اسکالر تولید می‌کند. در حالی که طراحی این شبکه برای پیاده‌سازی ساده است، از کدگذاری اطلاعات جهتی توسط ویژگی‌ها جلوگیری می‌کند. انواع دیگری از این طراحی شبکه را می‌توان در [؟] یافت.

در ادامه، به \mathbb{R}^2 توسط [؟] می‌پردازیم. برای جلوگیری از سردرگمی، اشاره می‌کنیم که نویسنده‌گان دو مدل را پیشنهاد کرده‌اند، که ما آنها را به ترتیب در ردیف‌های (۳۸) و (۳۹) جدول ۶ فهرست می‌کنیم. ما هر دو مدل را با شروع از انتخاب‌های طراحی مشترک آنها توصیف می‌کنیم.

مفهوم کلیدی زیربنای ZerNet ، پارامتری‌سازی کرنل‌های کانولوشن بر حسب چندجمله‌ای‌های زرنیکه است، که یک پایه متعامد از توابع را روی دیسک واحد بسته $(0, 1)$ حول مبدأ \mathbb{R}^2 تشکیل می‌دهند. در مختصات قطبی، چندجمله‌ای‌های زرنیکه با

$$Z_n^m : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1], \quad (r, \varphi) \mapsto R_n^m(r) \cos(m\varphi) \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq m \leq n \quad (496)$$

$$Z_n^{-m} : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1], \quad (r, \varphi) \mapsto R_n^m(r) \sin(m\varphi) \quad n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq m \leq n, \quad (497)$$

داده می‌شوند، که در آن R_n^m چندجمله‌ای‌های شعاعی زرنیکه هستند. اینکه چندجمله‌ای‌های زرنیکه (که به طور مناسب نرم‌افزاری شده‌اند) راست‌هنگاری هستند به این معنی است که آنها روابط راست‌هنگاری

$$\langle Z_n^m, Z_k^l \rangle_{B_{\mathbb{R}^2}(0, 1)} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} Z_n^m(r, \varphi) Z_k^l(r, \varphi) r dr d\varphi = \delta_{nk} \delta_{ml}. \quad (498)$$

را برآورده می‌کنند. یک تابع روی دیسک واحد، به عنوان مثال یک کرنل اسکالر $\mathbb{R}^2 \rightarrow (0, 1)$ ، را می‌توان در پایه چندجمله‌ای‌های زرنیکه بسط داد:

$$K(r, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=-n}^n \hat{K}_n^m Z_n^m(r, \varphi) \quad (499)$$

برای بازیابی ضرایب بسط یک تابع داده شده روی دیسک واحد، آن را روی پایه زرنیکه تصویر می‌کنیم:

$$\hat{K}_n^m = \langle K, Z_n^m \rangle_{B_{\mathbb{R}^2}(0, 1)} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} K(r, \varphi) Z_n^m(r, \varphi) r dr d\varphi \quad (500)$$

حاصلضرب داخلی بین دو تابع K و $\text{Exp}_p^* f^A$ روی دیسک واحد را می‌توان با این روابط بر حسب ضرایب بسط آنها بیان کرد:

$$\begin{aligned}
 \langle K, \text{Exp}_p^* f^A \rangle_{B_{\mathbb{R}^r}(., .)} &= \int_0^1 \int_0^{\pi} K(r, \varphi) \text{Exp}_p^* f^A(r, \varphi) r dr d\varphi \\
 &= \int_0^1 \int_0^{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=-n}^n \widehat{K}_n^m Z_n^m(r, \varphi) \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{l=-k}^k [\widehat{\text{Exp}_p^* f^A}]_k^l Z_k^l(r, \varphi) r dr d\varphi \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=-n}^n \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{l=-k}^k \underbrace{\int_0^1 \int_0^{\pi} Z_n^m(r, \varphi) Z_k^l(r, \varphi) r dr d\varphi}_{\delta_{nk} \delta_{ml}} \widehat{K}_n^m [\widehat{\text{Exp}_p^* f^A}]_k^l \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=-n}^n \widehat{K}_n^m [\widehat{\text{Exp}_p^* f^A}]_n^m
 \end{aligned} \tag{5.01}$$

همانطور که با انتخاب‌های K و $\text{Exp}_p^* f^A$ برای این توابع پیشنهاد می‌شود، نویسنده‌گان از این ویژگی برای تطبیق کرنل‌ها با پول‌بک میدان‌های ویژگی به مختصات قطبی ژئودزیک استفاده می‌کنند. ضرایب کرنل \widehat{K}_n^m که فراتر از یک آستانه مشخص شده توسط کاربر صفر می‌شوند، به عنوان پارامترهای یادگرفته شبکه بهینه‌سازی می‌شوند. ضرایب بسط $[\widehat{\text{Exp}_p^* f^A}]_n^m$ از پول‌بک انتقال‌دهنده میدان ویژگی با حل یک سیستم معادلات خطی محاسبه می‌شوند.

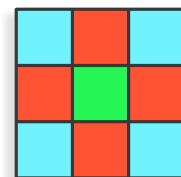
یک مزیت پارامتری‌سازی کرنل بر حسب چندجمله‌ای‌های زرینیک این است که آنها بنا به تعریف کرنل‌های $(2) \text{SO}^{\text{RAH}} \text{پذیر هستند}$. به طور خاص، زوج‌های $(Z_n^m, Z_n^{-m})^\top$ از کرنل‌ها برای یک $n \in \mathbb{N}$ و $m \leq n$ داده شده، یک زوج از کرنل‌ها را تشکیل می‌دهند که با ضرب آنها در نمایش تحویل‌ناپذیر حقیقی مرتبه m از $(2) \text{SO}^{\text{RAH}}$ چرخانده می‌شوند،

$$\begin{pmatrix} Z_n^m \\ Z_n^{-m} \end{pmatrix} (r, \varphi + \Delta\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(m\Delta\varphi) & -\sin(m\Delta\varphi) \\ \sin(m\Delta\varphi) & \cos(m\Delta\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_n^m \\ Z_n^{-m} \end{pmatrix} (r, \varphi), \tag{5.02}$$

در حالی که کرنل‌های Z_n^m یعنی برای $m = 0$ به طور بدینه تبدیل می‌شوند (آنها همسانگرد هستند). توجه داشته باشد که ضرایب بسط \widehat{K}_n^m از یک کرنل K به صورت وارون نسبت به پایه تبدیل می‌شوند. نویسنده‌گان از این قانون تبدیل برای دوران تحلیلی کرنل‌ها بر حسب ضرایب بسط آنها استفاده می‌کنند. راهبری پذیری دورانی چندجمله‌ای‌های زرینیک مستقل از بعض‌های شعاعی آنها است اما با این واقعیت بستگی دارد که بعض‌های زاویه‌ای آنها هارمونیک‌های دایره‌ای هستند، که توابع پایه هارمونیک در تجزیه پیتر-ولیل از $L^2(\text{SO}(2))$ هستند [4]. به دلیل ویژگی‌های راهبری پذیری آنها، پایه‌های هارمونیک دایره‌ای به طور گسترده برای پارامتری کردن کرنل‌های کانولوشن حقیقی [4] و مختلط [4] حداقل از ده میلادی استفاده شده‌اند [4] [4] [4]. در واقع، هارمونیک‌های دایره‌ای زیربنای هر کرنل $(2) \text{SO}^{\text{RAH}}$ هستند [4].

اوین و اصلی‌ترین طراحی مدل توصیف شده توسط [4] می‌باشد. یک میدان اسکالار به مختصات نرم‌افزاری ژئودزیک پول‌بک می‌شود، جایی که با یک کرنل اسکالار که در N دوران گسسته اعمال می‌شود، تطبیق داده می‌شود، که منجر به یک میدان ویژگی منظم میانی C_N می‌شود. یک عملیات تجمع max بعدی روی N پاسخ سیسیس یک خروجی C_N -ناوردا، یعنی یک میدان خروجی اسکالار، به دست می‌دهد. تفاوت با پیاده‌سازی [4] این است که این عملیات در پایه چندجمله‌ای‌های زرینیک همانطور که در معادله (5.01) مشخص شده است، انجام می‌شود. این انتخاب در نهایت متأثر با یک طرح درون‌یابی جایگزین است. طراحی مدل دوم، که در بخش ۴.۴ از [4] توصیف شده است، یک پیاده‌سازی مجدد از MDGCNN [4] در پایه چندجمله‌ای‌های زرینیک است. نویسنده‌گان مشاهده می‌کنند که این طراحی منجر به عملکرد به طور قابل توجهی بهبود یافته‌ای می‌شود زیرا میدان‌های ویژگی منظم قادر به کدگذاری اطلاعات جهتی هستند.

آخرین مدل راهبری‌پذیر-دورانی که ما مورد بحث قرار می‌دهیم، $\text{D}_4^{\text{TextureNet}}$ توسط [4] است. برخلاف مدل‌های قبلی، $\text{D}_4^{\text{TextureNet}}$ ‌ها یک D_4 -ساختار را فرض می‌کنند، که به راحتی می‌توان آن را به یک D_N -ساختار تعیین کرد. این D_4 -ساختار با استفاده از QuadriFlow، یک بسته نرم‌افزاری شخص ثالث که می‌تواند برای محاسبه میدان‌های D_4 که برای هموار بودن و داشتن تکینگی‌های کم بهینه شده‌اند، استفاده شود، از پیش محاسبه می‌شود [4]. همانطور که از نام آن پیداست، D_4 -TextureNet ها میدان‌های ویژگی ورودی را که به عنوان بافت نمایش داده می‌شوند، پردازش می‌کنند و دارای وضوح بالقوه بالاتری نسبت به مش هستند. کرنل‌های کانولوشن در یک مجموعه متراکم از مکان‌های نمونه‌برداری، که به طور یکواحت روی وجوده مش توزع شده‌اند، اعمال می‌شوند. در هر نقطه نمونه‌برداری، میدان ویژگی اسکالار به مختصات نرم‌افزاری ژئودزیک پول‌بک شده و نسبت به یک چارچوب دلخواه از D_4 -ساختار نمایش داده می‌شود. سیسیس با یک کرنل $3 \times 3 \times 3$ -ناوردا تطبیق داده می‌شود. همانطور که در شکل ۶۲ به تصویر کشیده شده است، ۹ پیکسل از چنین کرنل‌هایی با ۳ درجه آزادی توصیف می‌شوند. کانولوشن بر حسب سه $1 \times 1 \times 1$ -پیکسلی D_4 -ناوردا با سه درجه آزادی پارامتری می‌شود.



شکل ۶۲: یک کرنل $3 \times 3 \times 3$ پیکسلی D_4 -ناوردا با سه درجه آزادی پارامتری می‌شود.

در هر یک از فضاهای مماس تقسیم‌بندی و $\text{TextureNet}_{\text{GM}}$ می‌شوند. راهبری‌پذیری بازتابی اضافی کرنل‌ها دلالت بر این دارد که $\text{TextureNet}_{\text{GM}}$ را روی سطوح غیرجهت‌پذیر به خوبی تعریف شده‌اند. با این حال، از آنجا که ویژگی‌های اسکالار هستند، نمی‌توانند نه جهات و نه جهت‌گیری‌ها را کدگذاری کنند. برای غلبه بر این مشکل، لازم است از کرنل‌های DN_2 یا راهبری‌پذیر غیربدیهی استفاده شود.

۳.۱۲ کانولوشن‌های - $\{\cdot\}$ سطحی راهبری‌پذیر

این بخش شبکه‌های $\{\cdot\}$ را مرور می‌کند، که در این مشترک هستند که بر $\{\cdot e\}$ -ساختارها روی سطوح تکیه دارند. از دیدگاه کانولوشن‌های GM این معماری‌ها عمدتاً در انتخاب خاص روش ایتکاری که $\{\cdot e\}$ -ساختار را تعیین می‌کند متفاوت هستند.

با فرض یک گروه ساختاری بدیهی $\{\cdot e\} = \text{Mدل‌ها کرنل‌های } \{e\}-\text{راهبری‌پذیر} (\text{عنی نامحدود})$ را اعمال می‌کنند، که در امتداد چارچوب‌های $\{\cdot e\}$ -ساختار انتخاب شده تراز شده‌اند. انواع میدان (نمایش‌های گروهی) لزوماً بدیهی هستند. همین امر برای تمام انتقال‌دهنده‌های موافقی نیز صادق است، که لزوماً با $\{\cdot e\}$ -ساختار سازگار هستند. بنابراین پولبک‌های انتقال‌دهنده f^* از میدان‌های ویژگی $\{f\}$ به فضاهای مماس، به پولبک‌های exp_p^* توسط نگاشت نمایی معمول کاهش می‌یابند، یعنی آنها انتقال‌دهنده‌های (غیربدیهی) را اعمال نمی‌کنند. به یاد بیاورید که $\{\cdot e\}$ -ساختارهای پیوسته فقط روی منيفله‌های موافقی‌پذیر وجود دارند، که این دلالت بر این دارد که استنتاج شیوه‌ها به ناچار روی سطوح غیرموافقی‌پذیر نمی‌تواند است. روش‌های ایتکاری که میدان‌های چارچوب را تعیین می‌کنند، علاوه بر این، همیشه خوش تعریف نیستند، یا تحت تغییر شکل‌های هندسه سطوح نایابند. همانطور که در ادامه بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد.

مدل‌های $\{A, B, C\}$ روی مشاهدهای مثلثی عمل می‌کنند و میدان‌های ویژگی را که در رئوس نمونه‌برداری شده‌اند، پردازش می‌کنند. شبکه‌هایی را پیشنهاد می‌کنند که روی ابرهای نقطه سطحی عمل می‌کنند در حالی که معماری $\{A, B, C\}$ کانولوشن‌ها را روی اطلس‌های بافت از مشاهدها تعریف می‌کند.

های $\text{CNN}_{\text{Z}}\text{-ثُوُدُزِيُّك}$: اولین خانواده مدلی که ما مورد بحث قرار می‌دهیم، CNN_{Z} ها توسط $\{A, B, C\}$ هستند. نویسنده‌گان انواع مختلفی از مدل‌ها را روی گراف‌ها و منيفله‌ها مورد بحث قرار می‌دهند، که اکثر آنها به عنوان کانولوشن‌های GM توضیح داده نمی‌شوند. این مدل‌ها در این مشترک هستند که کرنل‌ها را نسبت به یک انتخاب از «شبه-مختصات» روی منيفلد یا گراف اعمال می‌کنند $\{A, B, C\}$ ما در اینجا فقط به آن دسته از های CNN_{Z} علاقه‌مندیم که بر مختصات نرم‌آل ژوودزیک تکیه دارند و بنابراین به عنوان کانولوشن‌های GM شناسایی می‌شوند.

همانطور که در بالا گفته شد، تفاوت اصلی بین کانولوشن‌های سطحی $\{\cdot e\}-\text{راهبری‌پذیر}$ ، انتخاب خاص $\{\cdot e\}$ -ساختار آنهاست. با الهام از کار قبلی $[13]$ ، نویسنده‌گان انتخاب می‌کنند که چارچوب‌های مرجع $\{e\}$ -ساختار را با جهت انجنای اصلی منيفلد تراز کنند. توجه داشته باشید که این روش ایتکاری زمانی که انجنای اصلی $\{e\}$ برابر باشد، یعنی زمانی که جهت انجنای اصلی تهگن است، خوش تعریف نیست. یک مثال افراطی، کره \mathbb{S}^2 -بعدی است، که در آن جهت انجنای اصلی در هیچ‌کجا به خوبی تعریف نشده است. حتی زمانی که انجنای اصلی نابرابر هستند، آنها فقط یک خط بدون جهت را تعیین می‌کنند، و چارچوب‌های مرجع را تا یک C -ساختار (با دو چارچوب تشکیل‌دهنده که در امتداد دو جهت در طول خط اشاره می‌کنند) از ابهام خارج می‌کنند. بنابراین برای اینکه شبکه مستقل از انتخاب چارچوب باشد، آنها در واقع باید کرنل‌های $C-\text{راهبری‌پذیر}$ را اعمال کنند. علاوه بر این، جهات انجنای اصلی تحت تغییر شکل‌های سطح نایابند هستند. به عنوان مثال، جهت انجنای اصلی را در قطب شمال (روی محور \hat{x} مثبت) کره \mathbb{S}^2 -بعدی C -تصور کنید: یک فشردن‌گی بی‌نهایت کوچک کرده در امتداد محور x منجر به یک جهت انجنای اصلی در امتداد محور x می‌شود در حالی که یک کشش بی‌نهایت کوچک در امتداد محور x منجر به یک جهت انجنای اصلی در امتداد محور x می‌شود. ما علاوه بر این می‌خواهیم اشاره کنیم که انجنای اصلی به جایگذاری یک مینیفلد بستگی دارند، یعنی این رویکرد ذاتی نیست.

۳۰۰۰۰۰۰: $\{A, B, C\}$ یک CNN مش‌سده‌ی $\{A, B, C\}$ را پیشنهاد کردند که روی سطوح چهره‌های اسکن شده کانوالو می‌کند تا عباراتی مانند شادی، عصبانیت یا تعجب را تشخیص دهد. از آنجا که ماسک‌های چهره از نظر توپولوژیکی صفحاتی هستند (با سوراخ‌هایی در چشم‌ها)، آنها موافقی‌پذیر هستند، که امکان کانولوشن‌های GM هموار را برای $\{\cdot e\}$ -فراهم می‌کند.

کرنل کانولوشن به یک نقطه نمونه‌برداری مرکزی و هشت نقطه دیگر در یک فاصله شعاعی ثابت R و زوایای $\{7, \dots, 0, 0\}$ در $\varphi_k = k\frac{2\pi}{\lambda}$ در مختصات قطبی گسسته‌سازی می‌شود. کرنل‌ها $\{A, B, C\}$ و در نتیجه چارچوب‌هایی که $\{\cdot e\}$ -ساختار را تشکیل می‌دهند $\{A, B, C\}$ به گونه‌ای چرخانه‌ای شوند که با محور \hat{x} فضای جایگذاری \mathbb{R}^3 تراز شوند. این رویکرد منطقی به نظر می‌رسد زیرا ماسک‌های چهره موافقی‌پذیر و مهمتر از آن، به صورت عمودی تراز شده‌اند. برای تطبیق یک چینن کرنل جهت‌داری با یک میدان ویژگی $\{f\}$ در هشت جهت شلیک می‌شوند. مختصات مرکزدار برای درون‌یابی سیگنال از رئوس اطراف به نقطه پایانی ژوودزیک استفاده می‌شود.

۱۳۶ تعریف نشده‌اند بلکه بر اساس کرنل‌های گرمای ناهمسانگرد روی منيفلد هستند. ادعا می‌کنند که چینن کرنل‌های گرمایی متناظر با کرنل‌های گاووسی ناهمسانگرد در مختصات ژوودزیک هستند $\{A, B, C\}$ اگر این گزاره درست باشد، های ناهمسانگرد را می‌توان به عنوان کانولوشن‌های GM در نظر گرفت.

کانولوشن‌های انتقال موازی: به عنوان آخرین کانولوشن‌های انتقال موازی $\{e\}$ -راهبری پذیر متنی بر مبنای M ، ما کانولوشن‌های انتقال موازی (۵۰۰۰) توسط $\{e\}$ -را مورد بحث قرار می‌دهیم. ایده کلیدی PTC‌ها تعريف کردن کانولوشن در یک «مبدأ» $p \in M$ و به اشتراک گذاشتن آن با هر مکان دیگر $p \in M$ با انتقال موازی لوی-چیویتا در امتداد کوتاه‌ترین ژئودزیک‌ها بین p و p است. برای فرمول‌بندی دقیق‌تر این روش اشتراک و وزن، دیسک‌های بسته در حاصل $R \in \mathbb{R}_+$ با شعاع R را حول مبدأهای فضاهای مماس در نظر بگیرید، که در آن شعاع اثر کتیویته منيفلد است. علاوه بر این، فرض کنید $M_{p,R} := \exp_p(B_{T_p M}(\cdot, R)) \subset M$ تصاویر این دیسک‌ها تحت نگاشت نمایی باشند، که شامل تمام نقاطی است که فاصله ژئودزیک آنها از p کوچکتر یا مساوی R است. \square کرنل‌های کانولوشن اسکالر (نامحدود) خود را به عنوان توابع با مقادیر حقیقی

$$\hat{K}_p : M_{p,R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (503)$$

روی همسایگی اطراف مبدأ p . یعنی مستقیماً روی منيفلد، تعريف می‌کنند. برای به اشتراک گذاشتن کرنل با مکان‌های دیگر $p \in M$ کوتاه‌ترین ژئودزیک‌ها را بین p و مکان‌های هدف p از طریق الگوریتم پیش‌روی سریع محاسبه می‌کنند. سپس آنها کرنل را در امتداد این ژئودزیک‌ها به صورت موازی منتقل می‌کنند، که این کار با پولبک کردن آنها به فضاهای مماس انجام می‌شود. در معادلات، کرنل در p به صورت

$$\hat{K}_p : M_{p,R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad q \mapsto \hat{K}_p(q) := \hat{K}_p \circ \exp_p \circ \mathcal{P}_{TM,p \rightarrow p}^{-1} \circ \log_p(q), \quad (504)$$

تعريف می‌شود، که با نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccccc} M_{p,R} & \xleftarrow{\exp_p} & B_{T_p M}(\cdot, R) & \xrightarrow{\mathcal{P}_{TM,p \rightarrow p}} & B_{T_p M}(\cdot, R) & \xrightarrow{\exp_p} & M_{p,R} \\ & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \hat{K}_p & & \mathbb{R} & & \hat{K}_p \end{array} \quad (505)$$

وجود نگاشت لگاریتمی تضمین شده است زیرا دامنه به نقاط q در داخل شعاع اثر کتیویته محدود شده است. برای محاسبه پاسخ کانولوشن در p کرنل منتقل شده با میدان ویزکی (اسکالر) روی $M_{p,R}$ تطبیق داده می‌شود.

برای توصیف PTC‌ها به عنوان کانولوشن‌های GM ما باید $\{e\}$ -ساختار متناظر و کرنل $\{e\}$ -راهبری پذیر روی \mathbb{R}^n را شناسایی کنیم. یک $\{e\}$ -ساختار سازگار با انتخاب یک چارچوب دلخواه $[e_i^A(p)]_{i=1}^d$ در مبدأ p تابت می‌شود. سپس چارچوب‌ها در هر مکان دیگر p با انتقال لوی-چیویتا این چارچوب اولیه در امتداد کوتاه‌ترین ژئودزیک‌ها تعیین می‌شوند، یعنی به صورت ^{۱۳۷}

$$[e_i^A(p)]_{i=1}^d := \mathcal{P}_{FM,p \rightarrow p}[e_i^A(p.)]_{i=1}^d. \quad (506)$$

تعريف می‌شوند. توجه داشته باشید که این تعريف به طور خاص رابطه معادل زیر را برای پیمانه‌های متناظر نتیجه می‌دهد، که به راحتی با اعمال آن بر روی میدان چارچوب دیده می‌شود:

$$\psi_{GM,p}^A = \psi_{GM,p.}^A \circ \mathcal{P}_{GM,p \rightarrow p}^{-1} \quad (507)$$

با توجه به چارچوب مرجع در p می‌توانیم \hat{K}_p را در مختصات نرمال ژئودزیک بیان کنیم، که مفهوم معمول ما از کرنل الگو را روی \mathbb{R}^n به دست می‌دهد:

$$K : B_{\mathbb{R}^n}(\cdot, R) \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto K(v) := \hat{K}_p \circ \exp_p \circ (\psi_{TM,p.}^A)^{-1}(v) \quad (508)$$

برای نشان دادن اینکه اشتراک وزن ما از طریق $\{e\}$ -ساختار ساخته شده به این روش واقعاً با اشتراک وزن \square سازگار است، ما کرنل‌های \hat{K}_p را در p با نگاشت کرنل الگوی ما K به منيفلد بازنویل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} K \circ \psi_{TM,p.}^A \circ \log_p &= \hat{K}_p \circ \exp_p \circ (\psi_{TM,p.}^A)^{-1} \circ \psi_{TM,p.}^A \circ \log_p \\ &= \hat{K}_p \circ \exp_p \circ \mathcal{P}_{TM,p \rightarrow p}^{-1} \circ \log_p \\ &= \hat{K}_p \end{aligned} \quad (509)$$

^{۱۳۷} از آنجا که این رابطه $\{e\}$ -ساختار را تعريف می‌کند، ما باید از انتقال دهنده‌های لوی-چیویتا روی کل کلاف چارچوب FM استفاده کنیم.

مرحله دوم در این محاسبه از معادله (۵۰۷) برای انتقال دهنده و پیمانه های کلاف مماس استفاده کرد. تمام تعاریف، و سازگاری آنها، به طور خلاصه با این گزاره که نمودار زیر جابجایی است، خلاصه می شوند:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{\exp_p} & & \\
 M_{p,R} & \xleftarrow{\exp_p} & B_{T_p M}(., R) & \xrightarrow{\mathcal{P}_{TM,p} \rightarrow p} & B_{T_p M}(., R) \xrightarrow{\exp_p} M_{p,R} \\
 & & \downarrow \psi_{TM,p}^A & \swarrow \psi_{TM,p}^A & \\
 & & B_{\mathbb{R}^n}(., R) & & \\
 & & \downarrow K & & \\
 & & \mathbb{R} & & \\
 \widehat{K}_p & \longleftarrow & & \longrightarrow & \widehat{K}_p
 \end{array} \quad (510)$$

از آنجا که ما $\{e\}$ -ساختار خود را با انتخاب یک چارچوب اولیه در p -ساختیم، خواننده ممکن است در مورد پیامدهای این انتخاب کنجدکاو باشد. یک انتخاب متفاوت از چارچوب اولیه منجر به یک تبدیل متناظر از مختصات نرمال ژئودزیک در p -و در نتیجه از کرنل الگو K (معادله (۵۰۸)) خواهد شد. با این حال، از آنجا که $\{e\}$ -ساختار با انتقال چارچوب اولیه ساخته شده است، تمام چارچوب های مرجع آن بر این اساس تبدیل خواهد شد. سپس تبدیل کرنل الگو با تبدیل $\{e\}$ -ساختار خنثی خواهد شد به طوری که تمام انتخاب های چارچوب های اولیه در نهایت معادل هستند.

$\{e\}$ -ساختارهای زیربنای PTC-ها به طور حیاتی به انتخاب مبدأ p -که میدان چارچوب از آن ساخته شده است، بستگی دارند \square انتخاب های مختلف از مبدأها می توانند به $\{e\}$ -ساختارهای بسیار متفاوتی منجر شوند. از آنجا که اکثر متفاصلها با یک مفهوم کانونی از مبدأ همراه نیستند، روش ابتکاری پیشنهادی تا حدی دلخواه به نظر می رسد. $\{e\}$ -ساختارهای مبتنی بر انتقال، و در نتیجه PTC-ها، علاوه بر این در مکان برش نایوپوسته هستند. این به طور خاص دلالت بر این دارد که آنها نزدیک به مکان برش تحت تغییر شکل های هندسه سطوح نایابدار هستند زیرا چنین تغییر شکل هایی ممکن است مکان برش را جابجا کنند. برخلاف روش های ابتکاری مدل های قبلی، روش ابتکاری PTC-ها صرفاً به هندسه ذاتی سطح بستگی دارد، یعنی بر اساس جایگذاری آن در فضای محیطی نیست.

برای جلوگیری از سردرگمی، باید اشاره کنیم که \mathbb{A} [در پیاده سازی خود (بخش ۲.۳)] یک میدان چارچوب دیگر را می سازند، که باید با $\{e\}$ -ساختاری که در بالا توصیف کردیم، اشتباہ گرفته شود. این میدان چارچوب برای محاسبه عددی اتصال لوی-چیویتا روی متش لازم است، که کرنل ها سیس مطابق آن منتقل می شوند. تحلیل ما در بالا صرفاً بر اساس تعریف مستقل از مختصات آنها از مدل است، مهمتر از همه تعریف اشتراک وزن در (معادله (۵۰۴)).

علاوه بر این توجه داشته باشید که انتقال دهنده های بردار ویژگی به طور ضمنی فرض شده در پول بک انتقال دهنده، لزوماً بر اتصال بدیهی $\{e\}$ -سازگار که توسط $\{e\}$ -ساختار القا می شود، تکیه دارند. انتقال ویژگی در امتداد ژئودزیک های خروجی از p -ساختار بر اساس آنها ساخته شده است، با انتقال دهنده های لوی-چیویتا مطابق است. انتقال دهنده های در امتداد هر مسیر دیگر به طور کلی با انتقال لوی-چیویتا متفاوت هستند.

کانولوشن های مماس: کانولوشن های مماس توسط \mathbb{A} [روی ابرهای نقطه $P \subset \mathbb{R}^3$ عمل می کنند] که فرض می شود نقاط آنها روی یک سطح قرار دارند. فضاهای مماس در نقاط نمونه برداری از طریق یک تحلیل مؤلفه های اصلی محلی (LPCA) محاسبه می شوند. $p \in P$ در LPCA اساساً بردارهای ویژه $e_i \in \mathbb{R}^3$ $i = 1, 2, 3$ از ماتریس کوواریانس تمام نقاط را در یک همسایگی کروی $\{q \in P | \|q - p\| < R\}$ با $N_p = \{q \in P | \|q - p\| < R\}$ شعاع R حول p محاسبه می کند. از آنجا که ابر نقطه از یک سطح نمونه برداری شده است، یکی از مقادیر ویژه باید نزدیک به صفر باشد. بردار ویژه متناظر e_3 به عنوان بردار نرمال صفحه مماس جایگذاری شده در $T_p M \subset \mathbb{R}^3$ در نظر گرفته می شود. دو بردار ویژه دیگر یک چارچوب راست هنجار $[e_1, e_2]$ را روی صفحه مماس تولید می کنند، به طوری که مجموعه بردارهای ویژه PCA-ساختار را روی ابر نقطه القا می کند. توجه داشته باشید که بردار ویژه با بزرگترین مقدار ویژه در جهت حداقل انحراف اصلی اشاره می کند، یعنی ما $\kappa_n(e_1) = \kappa_{\max}$ و $\kappa_n(e_2) = \kappa_{\min}$ را داریم. بنابراین $\{e\}$ -ساختار در نظر گرفته شده مشابه ساختار \mathbb{A} [و \mathbb{B}] است، با این حال، چارچوب ها با $2\pi/\sqrt{\chi}$ چرخانده شده اند زیرا با جهت حداقل به جای حداکثر انحصار تراز شده اند.^{۱۳۸} از آنجا که علامت بردارهای ویژه دلخواه است، این روش ابتکاری در واقع چارچوب ها را فقط تا دوران هایی با π ثابت می کند. برای حل این ابهام، کانولوشن های مماس یا باید بین دو جهت تمایز قائل شوند یا به کرنل های C-راهبری پذیر بازگردند.

به جای نمایش میدان ویژگی در مختصات نرمال ژئودزیک، کانولوشن های مماس ویژگی ها را در امتداد جهت نرمال روی صفحه مماس تصویر می کنند.^{۱۳۹} سپس آنها به یک شبکه منظم از $N \times N$ پیکسل درون یابی می شوند. از آنجا که این شبکه با چارچوب مرجع تراز شده است، می توان آن را به عنوان یک گسته سازی از مختصات سازی فضای مماس $\mathbb{A} = \mathbb{R}^4$ در نظر گرفت. سپس کانولوشن ویژگی ها را با گرفتن حاصل ضرب داخلی یا یک کرنل پیکسلی $N \times N$ محاسبه می کند.

_____ ؟ _____ NPTC-net: ها روی ابرهای نقطه سطحی $P \subset \mathbb{R}^3$ پیشنهاد کردند. مانند کانولوشن های مماس، NPTC-net مماس را از طریق یک تحلیل مؤلفه های اصلی محلی محاسبه می کنند، با این حال، $\{e\}$ -ساختار آنها مستقل از LPCA است. $\{e\}$ -ساختار زیربنای

^{۱۳۸} از آنجا که تمام چارچوب های مرجع با یک زاویه یکسان چرخانده شده اند، این تفاوت اگر کرنل ها یاد گرفته شوند، بی اهمیت است.

^{۱۳۹} این انتخاب، کانولوشن های مماس (و NPTC-net) را از کانولوشن های GM متفاوت می کند. در حد کرنل های کوچک نسبت به انحنای سطح، هر دو تصویر از میدان های ویژگی به فضاهای مماس معادل می شوند.

NPTC-net ها بیشتر با گرادیان تابع فاصله ژئودزیک از یک نقطه اولیه $P \in p$. تراز شده است. برای حل تابع فاصله، \hat{e}_i [معادله ایکونال را از طریق یک الگوریتم پیشروی سریع حل می کنند. به جای عمل مستقیم روی ابر نقطه همانطور که به عنوان مثال در \hat{e}_i [انجام می شود، نویسنده گان پیشنهاد می کنند از یک شبکه واکسل پراکنده استفاده کنند که واکسل های آن در یک نوار باریک اطراف ابر نقطه قرار دارند. پس از محاسبه تابع فاصله روی شبکه واکسل، که باید فواصل تقریباً ژئودزیک را تولید کند، گرادیان آن محاسبه و روی صفحات مماس تصویر می شود. بردار تصویر شده اولین محورهای چارچوب $\{e_i\}$ -ساختار را تعیین می کند. توجه داشته باشید که چنین میدان های چارچوب تعريف شده ای در p . تکین هستند.

\hat{e}_i [مشاهده می کنند که این $\{e_i\}$ -ساختار یک اتصال بدیهی را روی سطح القا می کند (به گونه ای تعريف شده که میدان چارچوب تحت این انتقال بسته است). میدان چارچوب (یا کرنل های کانولوشن) را می توان به عنوان منتقل شده اتصال بدیهی با این اتصال مطابق با این انتقال بسته باشد، با این حال، که « CNN » (کانولوشن انتقال موازی) را در نام مدل توجیه می کند. توجه داشته باشید، با این حال، که NPTC-net ها بر خلاف CPTC های \hat{e}_i [بر انتقال لوی چیزی تکیه ندارند. علاوه بر این، این گزاره را می توان برای هر $\{e_i\}$ -ساختار و اتصال بدیهی متاثر آن بیان کرد.

مانند کانولوشن های مماس، NPTC-net ها ویژگی ها را در فضای محیطی به صفحه مماس تصویر می کنند. به جای استفاده از یک تصویر در امتداد جهت نرمال، نویسنده گان از یک درون یا زنگولوشن همسایه با فواصل اندازه گیری شده در فضای محیطی استفاده می کنند. سپس کرنل کانولوشن در امتداد چارچوب های $\{e_i\}$ -ساختار جهت دهنده و با میدان ویژگی درون یا زنگولوشن های شده تعیین داده می شود. با توجه به یک کرنل کانولوشن $K \rightarrow \mathbb{R}^2$ نویسنده گان تخصیص آن را به فضاهای مماس به صورت $\mathbb{R} \rightarrow T_p M \circ \psi_{TM,p}^A$ فرمول بندی می کنند که در آن $= \psi_{TM,p}^A$ است. این روش دقیقاً با تعريف مماس از اشتراک وزن و پیمانه ها (معادله (۴۳۷)) مطابت دارد.

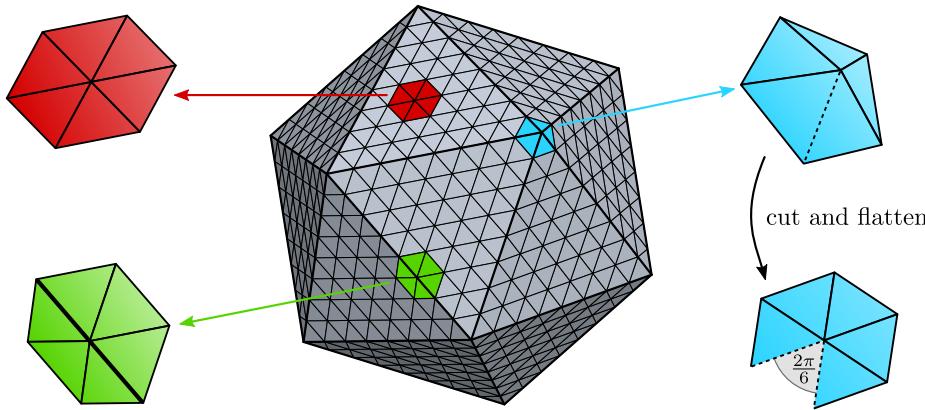
کانولوشن های بین-اطلسی: یک رویکرد کاملاً متفاوت توسط \hat{e}_i [دنبال شد. کانولوشن های بین-اطلسی آنها یک اطلس بافت را محاسبه می کنند که چارت های آن برای تقریباً ایزو متریک بودن بهینه سازی شده اند. سپس عملیات کانولوشن روی اطلس بافت انجام می شود، با نگاشت های آفست پیکسل که نگاشت های گذار بین چارت ها را مدل سازی می کنند.

قبل از اجرای کانولوشن های واقعی، یک اطلس از چارت ها محاسبه می شود. از دیدگاهی انتزاعی، چارت ها تکه هایی از سطح را به \mathbb{R}^2 نگاشت می دهند، به طوری که کل سطح پوشش داده می شود. به طور مشخص، آنها تکه هایی از یک میدان ویژگی وروی c -کاناله (بافت) را به روی بدون هم پوشانی به یک آرایه با ابعاد (X, Y, c) نگاشت می دهند. از آنجا که تکه ها در آرایه باید تقریباً همسایگی های ژئودزیک را روی سطح نمایش دهند، چارت ها باید تقریباً ایزو متریک باشند، یعنی اعواج ها را به حداقل برسانند. برای برآورده کردن این الزام، سطح به تکه هایی بریده می شود به طوری که زوایای متقابل بین تمام نرمال های مثلث در داخل یک تکه زیر یک آستانه مشخص شده توسط کاربر باقی بماند \square توجه داشته باشید که این رویکرد بر اساس هندسه خارجی سطوح است. پس از بهینه سازی تکه های را روی هر تکه در امتداد یک جهت تصویر غالب، تصویر می شود. یک الگوریتم بسته بندی بن (icosahedron) تکه های تصویر شده را به طور متراکم در نقشه بافت باشکل (X, Y, c) (بسته بندی می کند. برای حل ابهام جهتی تکه ها، آنها باید تراز دورانی شوند. این کار با الزام به اینکه تصاویر محور \mathcal{Z} فضای محیطی به هر تکه، همگی در نقشه بافت تراز شوند، به دست می آید.

کانولوشن مستقیماً روی نقشه بافت عمل می کند. این پیکسل ها را به سه دسته مختلف گروه بندی می کنند که به رویی متفاوت پردازش می شوند. پیکسل هایی که در داخل یک تکه هستند، به طوری که کرنل از تکه خارج نمی شود، از طریق کانولوشن های اقلیدسی متعارف کانولوشن می شوند. از آنجا که چارت ها تقریباً ایزو متریک هستند، این تقریباً متناظر با یک کانولوشن ژئودزیک روی نواحی داخلی تکه هایی را روی سطح است. پیکسل هایی که خارج از تکه ها هستند، پردازش نمی شوند و مقدار آنها صفر ثابت می شود. مورد جالب، پیکسل هایی هستند که نزدیک به مرز تکه ها هستند. از آنجا که کرنل کانولوشن برای چنین پیکسل هایی از تکه فعلی خارج می شود، به نگاشت های گذار نیاز دارد که ویژگی های را از یک تکه هم سایه روی سطح استعلام کنند. مکان استعلام با (1) یافتن نقطه اصلی روی سطح که متناظر با مکان فعلی کرنل است، (2) شلیک یک ژئودزیک برای یافتن مکان نمونه برداری کرنل روی سطح و (3) نگاشت این مکان به پیکسل متناظر در نقشه بافت، محاسبه می شود. با استفاده از این نگاشت های گذار، تکه های متعابق با هندسه سطح به هم دوخته می شوند و کانولوشن روی نقشه بافت تقریباً متناظر با یک کانولوشن ژئودزیک روی سطح است. در حد اینکه آستانه زاویه نرمال به سمت صفر برود، تقریب به یک کانولوشن ژئودزیک دقیق همگرا می شود. با این حال، تکه های سپس به وجود منفرد کوچک می شوند، که منجر به نگاشت های گذار غیربدیهی تری می شود.

کانولوشن های بین-اطلسی در این حد متناظر با کانولوشن های GM هستند که $\{e_i\}$ -ساختار آنها از چارت ها القا می شود. $\{e_i\}$ -ساختار در مرزهای بین تکه های مجاور نایپوسته است، با این حال، پرش ها به دلیل تراز دورانی تکه ها در نقشه بافت باید در اکثر موارد به حداقل برسند. انتظار می رود نایپوستگی ها در تکه هایی از سطح که تقریباً افقی هستند، بزرگ باشند.

برای کامل بودن، ما به روش های مبتنی بر اطلس توسعه \hat{e}_i [و \hat{e}_j [اشاره می کنیم. هر دو تصویرهای غیر-ایزو متریک از سطح را به یک دامنه مسطح در نظر می گیرند، که این دلالت بر این دارد که کانولوشن های اقلیدسی بعدی متناظر با کانولوشن های ژئودزیک روی سطح نیستند.



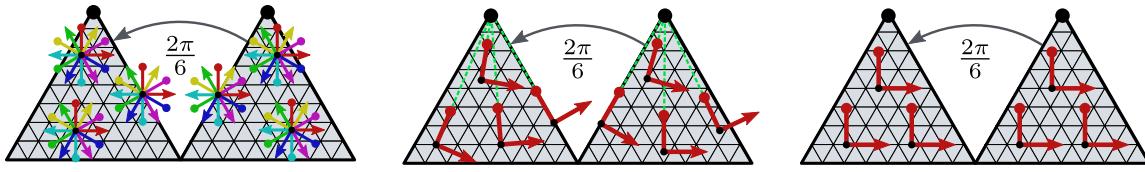
شکل ۶۳: بیست وجهی یک جسم افلاطونی است که در \mathbb{R}^3 به عنوان یک تقریب تکه‌ای-تخت از هندسه کروی استفاده می‌شود. این جسم از ۱۲ رأس، ۲۰ وجه مثلثی متساوی‌الاضلاع و ۳۰ یال تشکیل شده است. این جسم یک شبکه نمونه‌برداری منظم را می‌پذیرد، که با تقسیم مکرر هر مثلث به چهار مثلث کوچکتر ساخته می‌شود. پس از ۲ تکرار، این رویه منجرب به یک شبکه با $2^{2r+1} \cdot 20 \cdot 12$ وجه می‌شود. سه تکه بر جسته شده، هندسه کیفی مقاومت همسایگی‌ها را حول رئوس روی وجوده (قمرن)، یال‌ها (سیز) و رئوس بیست وجهی (آبی) نشان می‌دهند. همسایگی قرمز بهوضوح تخت است. در حالی که همسایگی سبز در فضای جایگذاری خمیده است، انحصار گاؤسی ذاتی آن دوباره صفر است. این واقعیت در این امر منعکس می‌شود که می‌توان آن را به صورت ایزومتریک (یعنی بدون برش) پهن کرد و به طور معادل، انتقال لوى-چوبوتا در امتداد یک مسیر بسته حول گره مرکزی، نگاشت همانی است. همسایگی آبی باید در امتداد یک یال بر پرده شود تا بتوان آن را پهن کرد. نقص زاویه، یعنی زاویه‌ای که برش هنگام پهن کردن نوک تیز باز می‌شود، برابر با $\frac{\pi}{6}$ است. هنگامی که یک بردار یک بار حول رأس مرکزی همسایگی به صورت موازی منتقل می‌شود، به اندازه این نقص زاویه می‌چرخد. به جای داشتن انحصار گاؤسی مثبت ثابت مانند کره S^2 ، انحصار بیست وجهی در رئوس آن منمر کز (تکین) است و در همه جای دیگر صفر است.

۴.۱۲ تقریب‌های بیست وجهی از CNN‌های کروی

کره S^2 در علوم محاسباتی معمولاً با اجسام افلاطونی، یعنی چندوجهی‌های منتظم محدب، تقریب زده می‌شود. در زمینه یادگیری عمیق، علاقه بیشتر بر روی بیست وجهی (icosahedron)، شکل ۶۳، منمر کر شده است، که در میان اجسام افلاطونی، نزدیک ترین تقریب به کره است [۶]. در حالی که هندسه ریمانی کره فقط تقریب زده می‌شود، اجسام افلاطونی این مزیت را دارند که تکه‌ای-تخت هستند و مشاهی‌های منظمی را می‌پذیرند. این ویژگی‌ها امکان استفاده از روال‌های کاتولوشن مسطح را فراهم می‌کنند، که از نظر محاسباتی بهینه‌تر از روش‌های دو بخش قبل هستند. این بخش به بحث در مورد CNN‌های بیست وجهی از [۶]، [۷] و [۸] می‌پردازد، که به ترتیب بر G -ساختارهای نشان داده شده در شکل‌های ۶۴، ۶۵ و ۶۶ تکه دارند. قبل از پرداختن به پیاده‌سازی‌های آنها بر حسب اطلسی از چارت‌های افاین در شکل ۶۵، ماجزیات بیشتری در مورد هندسه بیست وجهی و G -ساختارهای در نظر گرفته شده ارائه می‌دهیم.

هندسه‌ی بیست وجهی: بیست وجهی یک منیفلد دوبعدی گستته است که از ۲۰ وجه مثلثی متساوی‌الاضلاع، ۱۲ رأس و ۳۰ یال تشکیل شده است. همانند کره ۲-بعدی، ما بیست وجهی را به عنوان جایگذاری شده در \mathbb{R}^3 تعریف می‌کنیم، که از آن متريک جایگذاری را در معادله (۴۲۹) به ارث می‌پردازیم. فضاهای مماس جایگذاری شده در اینجا به گونه‌ای تعریف می‌شوند که نرمال‌های آنها با نرمال‌های وجهه منطبق باشند. فضاهای مماس روی رئوس و یال‌ها را می‌توان از طریق میانگین نرمال‌های وجهه مجاور تعریف کرد، همانطور که در بخش بعدی ۱۲ مورد بحث قرار می‌گیرد. با این حال، از آنجا که ما میدان‌های ویژگی را به عنوان نمونه‌برداری شده روی وجهه بیست وجهی (که تقریباً همه جا است) در نظر می‌گیریم، از این انتخاب مستقل هستیم. با فرض اتصال لوى-چوبوتا، انتقال موازی بردارهای مماس روی وجهه به گونه‌ای عمل می‌کند که آنها را در فضای جایگذاری \mathbb{R}^3 موازی نگه دارد. هنگامی که بردارهای مماس از روی یک یال به صورت موازی منتقل می‌شوند، زاویه یکسانی را نسبت به یال در هر دو طرف حفظ می‌کنند [۱]. این انتقال را می‌توان به طور شهودی به این صورت تصور کرد که (۱) دو وجه مجاور را پهن کرده، (۲) بردار را روی یال مانند حالت معمول در یک فضای اقلیدسی دو بعده منتقل کرده، و (۳) دو وجه را به جایگذاری اصلی خود بازگردانیم؛ به شکل ۵۸ و [۸] مراجعه کنید. بنابراین ژنودزیک‌ها در \mathbb{R}^3 تکه‌ای-خطی هستند و از یال‌ها به گونه‌ای عبور می‌کنند که زاویه خروج آنها برابر با زاویه ورودشان باشد. بنابراین نگاشت‌های نمایی $(v) \rightarrow \exp_p(v)$ به راحتی با دنبال کردن یک مسیر تکه‌ای-ثابت برای فاصله‌ای برابر با $\|v\|$ محاسبه می‌شوند. در عمل، نویسنده‌گان [۸] آن را میدان‌های ویژگی را روی یک مش منظم نمونه‌برداری می‌کنند و فقط آن دسته از بردارهای مماس را در نظر می‌گیرند که به رئوس مش همسایه نگاشت می‌یابند.

شکل ۶۳ همسایگی‌های دیسک‌مانند را حول نقاط نمونه روی وجهه (قمرن)، یال‌ها (سیز) و رئوس (آبی) بیست وجهی نشان می‌دهد. همسایگی قرمز کاملاً در داخل یک وجه قرار دارد و بنابراین تخت است. همسایگی سبز در فضای جایگذاری خمیده است، با این حال، انحصار ذاتی (ریمانی یا گاؤسی) آن هنوز صفر است زیرا انتقال لوى-چوبوتا بردارها یک بار حول رأس مرکزی، آنها را همانطور که هستند حفظ می‌کند. اینکه این مورد برقرار است معادل



(ج) e -ساختار بیست وجهی تراز شده با شبکه توسط ؟ .

(ب) e -ساختار بیست وجهی تراز شده با شمال توسط ؟ .

(ت) e -ساختار بیست وجهی تراز شده با شبکه توسط ؟ .

شکل ۶۴: ایده مفهومی G -ساختارهای فرض شده در [؟ ؟ ؟] به دلیل محدودیت فضای مجاور کنار قطب شمال از بیست وجهی پهن شده (شکل ۶۵) نشان داده شده است. e -ساختار در شکل ۶۴ با تراز کردن تمام چارچوب‌ها در امتداد یال‌های «افقی» وجوه (با فرض عمودی بودن محور قطبی) تعریف می‌شود. شکل ۶۴ عبیک e -ساختار جایگزین را نشان می‌دهد که چارچوب‌های آن به سمت قطب شمال تراز شده‌اند. این ساختار برخلاف e -ساختار قابل پیوسته است زیرا چارچوب‌ها روی یال‌های بریده شده هنگام چسباندن مجدد یال‌ها به یکدیگر منطبق می‌شوند. e -ساختار در شکل ۶۴ با افزودن چارچوب‌هایی که با انصاف‌هایی از $\frac{\pi}{6}$ چرخانده شده‌اند به e -ساختار ۶۴ ساخته می‌شود. از آنجا که این زاویه با نقص زاویه در یال‌های بریده شده برابر است، e -ساختار تعریف شده به این ترتیب هموار (پیوسته) است. توجه داشته باشید که این دو e -ساختار با انتقال لوی-چیویتا ناسازگار هستند (یعنی تحت آن بسته نیستند) اما یک اتصال بدینهای جایگزین را القا می‌کنند. e -ساختار، در مقابل، با انتقال لوی-چیویتا سازگار است.

این واقعیت است که همسایگی سبز را می‌توان به صورت ایزومتریک پهن کرد، یعنی بدون کشش یا برش آن. این پهن کردن ایزومتریک برای نوع آبی همسایگی‌ها حول رئوس ممکن نیست، که برای پهن شدن باید در یکی از یال‌ها بریده شوند. با ساخته شدن از پنج مثلث متساوی‌الاضلاع، نوک تیز پهن شده یک نقص زاویه $\frac{\pi}{6}$ را نشان می‌دهد. هولونومی هر مسیر بسته حول هر رأس (منفرد)، یعنی زاویه بین یک بردار دلخواه و انتقال آن یک بر حول حلقه، دقیقاً با این نقص زاویه داده می‌شود. در کل، این نتایج دلالت بر این دارند که انتخاب گاوسی (گستته) بیست وجهی در همه جا به جز در رئوس صفر است، جایی که با هولونومی $\frac{\pi}{6}$ تکین است. هندسه ساده بیست وجهی اجازه می‌دهد تا آن را باز کرده و به صورت سراسری پهن کرد، همانطور که در شکل ۶۵ به تصویر کشیده شده است، که در [؟ ؟ ؟] برای یک پیاده‌سازی کارآمد از کانولوشن‌های GM بیست وجهی استفاده شد.

گروه ایزومتری کامل بیست وجهی است و از 120° عضو تشکیل شده است. می‌توان آن را به عنوان حاصل‌ضرب مستقیم $R \times I$ از زیرگروه بازتاب‌ها R و زیرگروه ایزومتری‌های حافظ جهت $I \leq SO(3)$ که شامل 60° دوران است، ساخت. هر رأس p توسط پنج دوران گستته حول محور گذرنده از p و رأس متقابل آن پایدار می‌شود، که گروه دوری (2) $\leq SO(2)$ را تشکیل می‌دهند. رأس p علاوه بر این توسط بازتاب‌ها نسبت به صفحه تعریف شده توسط محور دوران و هر یال خروجی از p پایدار می‌شود، به طوری که زیرگروه پایدارساز کامل آن با گروه دووجهی $2 \leq D_p = Stab_p$ داده می‌شود. همودایی کانولوشن‌های GM بیست وجهی نسبت به گروه‌های ایزومتری I ، I_h یا D_h دار [؟] نشان داده شده است که همودایی کامل $SO(3)$ یا (2) $\leq SO(2)$ یا C_h کروی را به خوبی تقریب می‌زند هنگامی که از افزایش داده دورانی پیوسته استفاده شود.

G -ساختارهای بیست وجهی: کانولوشن‌های GM بیست وجهی توسط [؟ و ؟] (به طور ضمنی) e -ساختارها را فرض می‌کنند، در حالی که مدل [؟] یک e -ساختار را فرض می‌کند. شکل ۶۴ ایده پشت این G -ساختارها را به تصویر می‌کشد، که در سه پاراگراف بعدی با جزئیات بیشتری توضیح می‌دهیم.

e -ساختار توسط [؟] که در شکل ۶۴ نشان داده است، با تراز کردن اولین محورهای چارچوب در امتداد یال‌های «افقی» وجوه مثلثی متناظر تعریف می‌شود. هنگام پهن کردن بیست وجهی به یک صفحه همانطور که در شکل ۶۵ نشان داده شده است، تمام چارچوب‌های این e -ساختار در این صفحه موازی هستند، که پیاده‌سازی کانولوشن‌های GM متناظر را بسیار ساده می‌کند. طبق معمول، e -ساختار یک اتصال بدینهای یکتا را مشخص می‌کند که ویژگی‌ها مطابق آن متنقل می‌شوند. این اتصال بدینهای در داخل وجوه، روی یال‌هایی که در شکل ۶۵ بریده نشده‌اند و روی یال بریده شده ارغوانی با اتصال لوی-چیویتا منطبق است. با این حال، انتقال آن از رأسی یال‌های بریده شده باقی‌مانده با انتقال لوی-چیویتا متفاوت است زیرا چارچوب‌های e -ساختار در آن‌جا به طور ناپیوسته به اندازه زاویه $\frac{\pi}{6}$ می‌چرخد. از آنجا که e -ساختار توسط دوران‌ها در D حول محور قطبی حفظ می‌شود، کانولوشن‌های GM آن تقریباً (2) $\leq SO(2)$ را تقریب می‌زنند. با این حال، e -ساختار \square و تابراک این استنتاج شبکه \square روی یال‌های با نقص زاویه غیرصفر ناپیوسته است. علاوه بر این، چارچوب‌های مرجع دقیقاً به سمت قطب شمال اشاره نمی‌کنند، همانطور که برای e -ساختار کروی از بخش ۳.۱۱ و شکل ۵.۶ ب صادق است.

[؟] پیشنهاد می‌کنند که دو مشکل اخیر را کار کردن با e -ساختار در شکل ۶۴ حل می‌کنند. این ساختار به گونه‌ای تعریف شده است که چارچوب‌ها دقیقاً در امتداد تصویر محور قطبی روی وجوه، یعنی به سمت قطب شمال، اشاره می‌کنند. این e -ساختار کروی از e -ساختار کروی از شکل ۶۴ ب صادق است. این ساختار به این معنا تقریب بهتری از e -ساختار کروی از شکل ۶۴ دارد. e -ساختار دوباره یک اتصال بدینهای یکتا

^{۱۲۰} این در [؟] به صورت تجربی برای (2) $\leq SO(3)$ نشان داده شده است. اینکه این نتیجه به $3 \leq I_h$ تعمیم می‌یابد، روشن است زیرا گروه‌ها فقط در بازتاب‌ها متفاوت هستند، که کانولوشن‌های GM بیست وجهی را می‌توان نسبت به آنها دقیقاً همودا ساخت. این علاوه بر این برای $2 \leq D_p = SO(2)$ و $D_h \leq SO(2)$ نیز برقرار است، زیرا اینها زیرگروه‌هایی از $3 \leq I_h$ هستند.

^{۱۲۱} برای دیدن این، تصور کنید که یال بریده شده در شکل ۶۴ را دوباره به هم بچسبانید: چارچوب‌های روی نیمه چپ و راست یال سپس با هم منطبق می‌شوند، که این مورد در شکل ۶۴ صادق نیست.

را القا می کند. انتقال آن با انتقال لوی-چیویتا روی یال‌ها منطبق است، با این حال، هنگام انتقال روی وجوه با آن متفاوت است زیرا بردارها را به آرامی همراه با چارچوب‌ها می چرخاند. مانند $\{e\}$ -ساختار دیگر، این میدان چارچوب تحت دوران‌های سمتی در C ناوردا است و بنابراین CNN‌های کروی هموردای دوران سمتی را تغیری می‌زنند.

e-C -ساختار در شکل ۶۴ ج توسط $\{e\}$ با افودن چارچوب‌هایی که با مضرب‌هایی از $\frac{\pi}{2}$ چرخانده شده‌اند به چارچوب‌های $\{e\}$ -ساختار از شکل ۶۴ تعریف می‌شود. این ساختار بهوضوح پیوسته است زیرا زوایای بین مجموعه چارچوب‌های مرتعج در هر نقطه دقیقاً برابر با نقص‌های زاویه در یال‌های بریده شده است. این ساختار برخلاف دو $\{e\}$ -ساختار قبلی با انتقال لوی-چیویتا سازگار است زیرا گروه ساختاری C با گروه هولونومی پیست‌وجهی منطبق است. e-C -ساختار علاوه بر این تحت عمل ایزومنتری‌های حافظ جهت پیست‌وجهی I حفظ می‌شود. بنابراین کانولوشن‌های GM روی این e-C -ساختار، CNN‌های کروی کاملاً هموردای دورانی $(SO(3))$ را از بخش ۲.۱۱ تغیری می‌زنند.

پیاده‌سازی‌ها: برای پیاده‌سازی کانولوشن‌های GM روی G -ساختارهای متناظر، $\{e\}$ و $\{e\}$ یک شبکه منظم را روی وجوه پیست‌وجهی فرض می‌کنند؛ به شکل ۶۳ مراجعت کنید. این شبکه شش ضلعی منظم با تقسیم مکرر یال‌ها و جایگزینی هر مثلث با چهار مثلث کوچکتر ساخته می‌شود. در وضوح ۲۰۷ این کار منجر به یک شبکه با $2 + 2^{2r+1} + 5 \cdot 2^{2r+1}$ رأس می‌شود. توجه داشته باشید که این شبکه بنا به ساختار، دقیقاً تحت ایزومنتری‌های پیست‌وجهی متقارن است، که منجر به یک هموردای دقیق Isom GM کانولوشن‌های GM گسته‌سازی شده می‌شود.^{۱۲۲} $\{e\}$ پیشنهاد کردند که میدان‌های ویژگی پیست‌وجهی را نسبت به اطஸی از چارت‌ها که در شکل ۶۵ نشان داده شده است، نمایش دهند. این چارت‌ها این مزیت را دارند که شبکه‌های شش ضلعی روی وجوه پیست‌وجهی را به شبکه‌های پیکسلی مربوع معمول نگاشت می‌دهند. با این حال، توجه داشته باشید که چارچوب‌های راست‌هنچار روی وجوه پیست‌وجهی در این نمایش تغییر شکل می‌یابند، به طوری که نسبت به متريک اقيديسي کانوني، راست‌هنچار نیستند. کرنل‌های کانولوشن شش ضلعی روی پیست‌وجهی بر اين اساس تغیير شکل می‌يابند و می‌توانند بر حسب کرنل‌های مربعي که به گونه‌ای ماسک گذاري شده‌اند که دو گوشه آنها با صفر پر شده است، پیاده‌سازی شوند.

کانولوشن GM توسط $\{e\}$ چارچوب‌هایی را فرض می‌کند که همگی موادی هستند و بنابراین می‌توانند در داخل چارت‌ها، جایی که تکیه گاه کرنل از مرزهای آن فراتر نمی‌رود، از طریق یک کانولوشن اقلیدسی متعارف پیاده‌سازی شوند. در نقاطی که به یک یال بین چارت‌های مختلف نزدیک هستند، کرنل ویژگی‌ها را از آن سوی برش ابانت می‌کند. همانطور که قبلاً در بخش ۴.۵ و شکل ۲۳ بحث و به تصویر کشیده شد، این کار به راحتی از طریق یک عملیات پدینگ انتقال پیاده‌سازی می‌شود که یک حاشیه از ویژگی‌های منتقل شده موادی را در اطراف آرایه پیکسل‌های مربوع قبل از اجرای عملیات کانولوشن، پد می‌کند. برای انتقال بدیهی که به طور ضمنی توسط $\{e\}$ فرض شده است، این عملیات پدینگ فقط یک ردیف از ویژگی‌ها را در هر یال بدون تبدیل آنها کپی می‌کند. از آنجا که نویسنده‌گان گروه ساختاری بدیهی $\{e\} = G$ را فرض می‌کنند، کرنل‌های شش ضلعی نامحدود باقی می‌مانند.

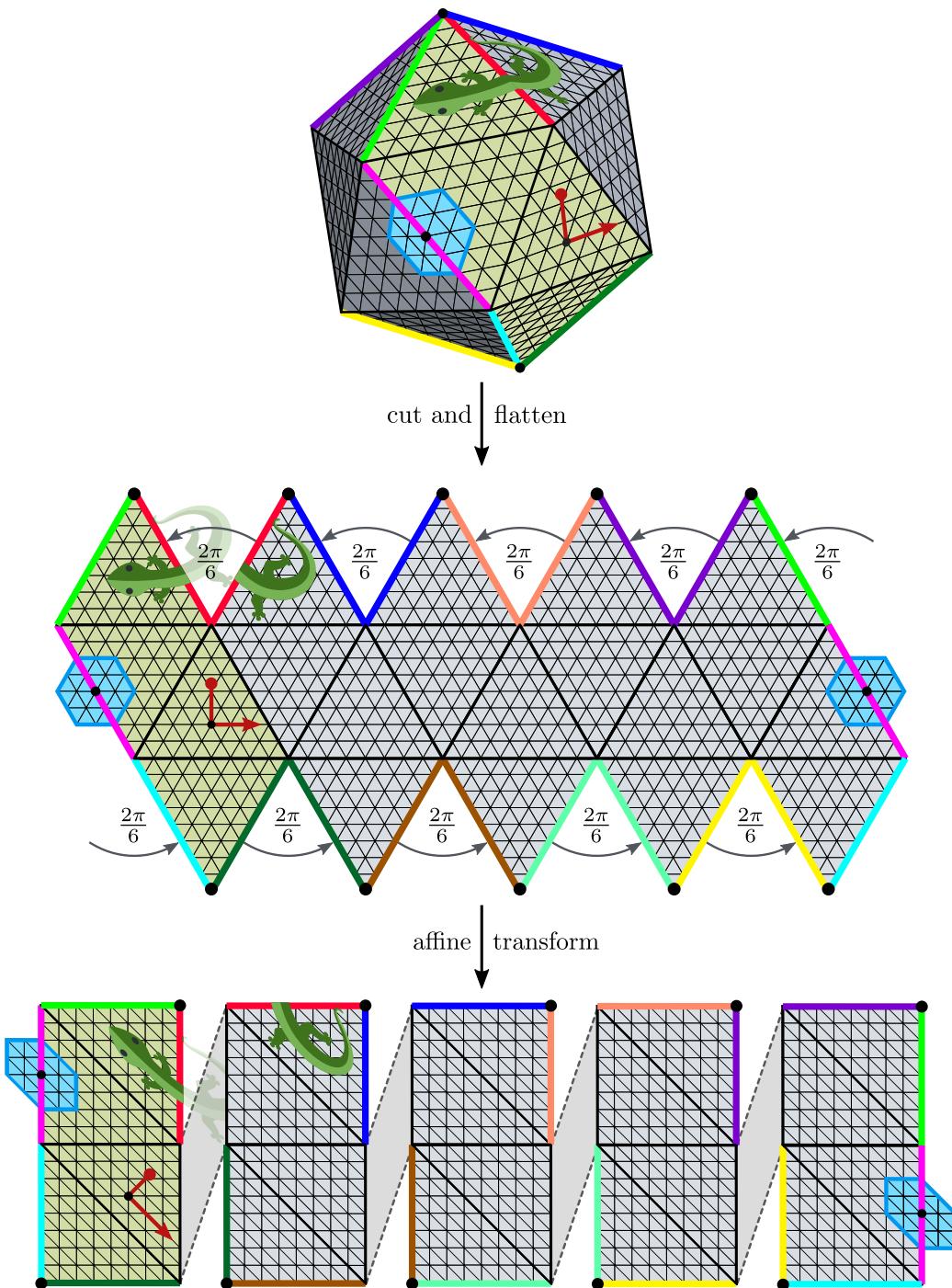
پیاده‌سازی $\{e\}$ عمده‌تاً مشابه است، با این حال، تفاوت حیاتی آن در این است که از انتقال دهنده‌های لوی-چیویتا و کرنل‌های e-C -راهبری پذیر استفاده می‌کند. به جای پدینگ مستقیم ردیف‌های پیکسل از روی یال‌ها، انتقال لوی-چیویتا نیازمند این است که ویژگی‌ها یا با $g = e$ برای تمام یال‌های داخلی و یال ارغوانی، یا با زاویه‌ای برای $\frac{\pi}{2} \pm$ از روی تمام یال‌های با نقص زاویه $\frac{\pi}{2}$ راهبری شوند، که علامت آن به جهت انتقال بستگی دارد.^{۱۲۳} نمایش منظم e-C را به عنوان نوع میدان فرض می‌کنند و کرنل‌های کانولوشن را برای برآورده کردن محدودیت راهبری پذیر مربوطه محدود می‌کنند. پس از پدینگ انتقال، کانولوشن GM آنها به عنوان یک کانولوشن اقلیدسی متعارف با این کرنل‌های راهبری پذیر پیاده‌سازی می‌شود. توجه داشته باشید که این کانولوشن GM در داخل وجوه، یعنی به جز پدینگ انتقال، مشابه HexaConv توسط $\{e\}$ است.

از آنجا که کانولوشن GM توسط $\{e\}$ یک گروه ساختاری بدیهی $\{e\} = G$ را فرض می‌کند، پدینگ انتقال دوباره به عنوان یک کپی بدیهی از پیکسل‌ها بدون راهبری پیاده‌سازی می‌شود و کرنل‌ها دوباره نامحدود باقی می‌مانند. با این حال، از آنجا که چارچوب‌های $\{e\}$ -ساختار به سمت قطب شمال تراز شده‌اند، آنها دیگر در نمایش پیکسل مربوع مستطیلی موادی نیستند، که از یک پیاده‌سازی فوری بر حسب کانولوشن‌های متعارف جلوگیری می‌کند. در عوض، کرنل‌ها باید در هر نقطه از شبکه در یک دوران متفاوت اعمال شوند. از آنجا که کرنل شش ضلعی را می‌توان با $\frac{\pi}{2}$ بدون استفاده از درون‌یابی چرخاند، و از آنجا که ترازها به سمت قطب شمال جدا کثر با این زاویه با یکدیگر تفاوت دارند، نویسنده‌گان تغیر کارآمد زیر را برای این عملیات پیشنهاد می‌کنند: آنها روی هر وجه دو بار کانولو می‌کنند، یک بار با کرنل اصلی و یک بار با نسخه دوران یافته آن با $\frac{\pi}{2}$. سپس دو میدان پاسخ به صورت خطی باهم ترکیب می‌شوند، با وزن‌های درون‌یابی از پیش محاسبه شده که به زوایای چارچوب‌های مرتعج تراز-شده-به-شمال نسبت به دو تراز کرنل (یعنی نسبت به شبکه پیکسلی) سنتگی دارد. بنابراین این پیاده‌سازی تقریباً دو برابر پرهزینه‌تر از پیاده‌سازی‌های $\{e\}$ است.

یک پیاده‌سازی جایگزین از کانولوشن‌های کروی روی پیست‌وجهی توسط $\{e\}$ پیشنهاد شده است. نویسنده‌گان سینگنال کروی را روزی صفحات گسترده شده توسط ۲۰ وجه (که به عنوان تصاویر مماس شناخته می‌شوند) تصویر می‌کنند و متعاقباً یک CNN متعارف را روی هر یک از این تصاویر اجرا می‌کنند. ما این شبکه را در لیست خود نیاوردهیم زیرا این شبکه این نمایش‌ها را به طور مستقل از یکدیگر پردازش می‌کند، یعنی ویژگی‌ها را بین آنها منتقل یا پدنمی کند و بنابراین دقیقاً به عنوان کانولوشن GM توصیف نمی‌شود.

همانطور که قبلاً ذکر شد، تایج تجربی $\{e\}$ نشان می‌دهد که هندسه کروی را برای کاربردهای یادگیری عمیق به خوبی تغیری می‌زنند. به طور خاص، نویسنده‌گان CNN کروی خود را روی یک شبکه ایکوسفر با CNN پیست‌وجهی تکه‌ای-تخت توسط $\{e\}$ مقایسه می‌کنند و در می‌یابند که هر دو علی‌رغم هندسه تغییر شکل یافته دومی، عملکرد مشابهی دارند. مشخص شده است که هموردای CNN‌های پیست‌وجهی تحت

^{۱۲۲} شبکه ایکوسفر، که توسط برخی از مدل‌های بخش‌های ۲.۱۱ و ۳.۱۱ استفاده می‌شود، با تصویر کردن گره‌های این شبکه به فاصله شعاعی واحد از مبدأ، یعنی S^2 تعریف می‌شود. مدل‌های این بخش این تصویر را فرض نمی‌کنند بلکه مستقیماً روی هندسه پیست‌وجهی تکه‌ای-تخت کانولو می‌کنند.



شکل ۶۵: پیاده‌سازی‌های [؟ ؟ ؟] میدان‌های ویژگی را نسبت به یک اطلس که بیست‌وجهی را با پنج چارت می‌پوشاند، نمایش می‌دهند. برای ساخت این چارت‌ها، بیست‌وجهی در امتداد یال‌های رنگی بریده شده و پهن می‌شود. سپس پنج ناحیه، که هر کدام از چهار مثلث تشکیل شده‌اند، به همدامنه‌های چارت مستطیلی برش داده می‌شوند. (_____) این عملیات شبکه شش‌ضلعی را به یک شبکه از پیکسل‌های مربعی نگاشت می‌دهد، به طوری که میدان‌های ویژگی بیست‌وجهی را می‌توان با مجموعه‌ای از پنج آرایه مستطیلی کدگذاری کرد. توجه داشته باشید که چارچوب‌های مرجع و کرنل‌ها بر این اساس در همدامنه‌های چارت تغییر شکل می‌یابند. انتقال لوی-چوپیتا از روی تمام یال‌های رنگی به جز یال ارجاعی، یک دوران به اندازه $\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6}$ را به همراه دارد، که علامت آن به جهت انتقال بستگی دارد. این کار با پدینگ انتقال ردیف‌هایی از پیکسل‌ها در امتداد یال‌های بریده شده، همانطور که قبلًا در شکل ۲۳ توصیف شد، پیاده‌سازی می‌شود.

(مارمولک‌ها با مجوز تویتر تحت لایسنس بین‌المللی Creative Commons Attribution 4.0 license اقتباس شده‌اند.)

دوران‌های پیوسته در (3) به طور قابل توجهی نقض می‌شود، با این حال، به نظر می‌رسد این فقط یک اثر بیش‌برازش است زیرا به راحتی و بدون از دست دادن عملکرد مدل با استفاده از افزایش داده $\text{SO}(3)$ خنثی می‌شود.

همیشه، می‌خواهیم اشاره کنیم که CNN ‌های C_h -هموردا توسعه I_h و R_h را می‌توان به راحتی با در نظر گرفتن یک \mathcal{R} -ساختار و در نتیجه کرnel‌های D_h -راهبری‌پذیر بازتابی، D_h -هموردا ساخت. به طور مشابه، I_h -هموردا توسعه I_h را می‌توان با ساختن کرnel‌های D_h -راهبری‌پذیر به جای C_h -راهبری‌پذیر، تحت گروه ایزومنتری کامل I_h بیست‌وجهی هموردا ساخت.

آ ارتباط با فرمالیسم چارت مختصاتی در هندسه دیفرانسیل

این پیوست به منظور برقراری ارتباط بین فرمالیسم کلاف، که زیربنای نظریه CNN‌های مستقل از مختصات است، و فرمالیسم چارت مختصاتی، که احتمالاً در اولين مطالعه هندسه دیفرانسیل با آن مواجه می‌شویم، عمل می‌کند. تفاوت اصلی بین اين دو اين است که فرمالیسم کلاف به نقاط p از فضای M به روشی مستقل از مختصات اشاره می‌کند. در صورت نیاز، مختصات مستقیماً از طریق تربویالیزاسیون‌های محلی کلاف به تارها (به عنوان مثال فضاهای مماس) اختصاص داده می‌شوند. در مقابل، فرمالیسم چارت بر چارت‌های مختصاتی (دیفئوگرافیسم‌ها)

$$x : M \supseteq U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^d, \quad (511)$$

تکیه دارد، که مختصات را به تکه‌های محلی U از منیفلد اختصاص می‌دهند. تربویالیزاسیون‌های محلی کلاف و تبدیلات پیمانه بین آنها به عنوان دیفرانسیل‌های چارت‌ها و توابع گذار چارت‌القا می‌شوند. در این بخش ما ارتباط بین هر دو فرمالیسم را بررسی می‌کنیم. یک نمای کلی از نتایج در جدول ۷ ارائه شده است.

۱۸۶	فضاهای مماس، فضاهای هم‌مماس و پایه‌های دوگان
۱۸۶	فضاهای مماس بر حسب مشتق‌های جهتی
۱۸۷	فضاهای هم‌مماس
۱۸۷	پایه‌های دوگان
۱۸۸	دیفرانسیل‌های گرادیان‌ها و ژاکوبین‌ها
۱۸۹	پایه‌های مختصاتی القا شده توسط چارت
۱۹۰	چارت‌ها و پایه‌های مختصاتی القا شده
۱۹۱	نگاشت‌های گذار چارت و تبدیلات پیمانه القا شده
۱۹۳	پایه‌های مختصاتی به عنوان تربویالیزاسیون‌های محلی کلاف
۱۹۳	تاظرات با تربویالیزاسیون‌های نقطه‌ای $T_p M$
۱۹۴	تربویالیزاسیون‌های محلی القا شده توسط چارت از $\pi_{TM}^{-1}(U)$
۱۹۵	G -ساخترها و میدان‌های ویل‌باین

ما در بخش آ.۱ با معرفی مختصر فضاهای مماس $T_p M$ به عنوان فضاهایی از عملگرهای مشتق جهتی شروع می‌کنیم، که از آنها فضاهای هم‌مماس $T_p^* M$ به عنوان فضاهای دوگان نتیجه می‌شوند. بخش آ.۲ دیفرانسیل‌های عمومی و گرادیان‌ها و ژاکوبین‌های خاص تر را تعریف می‌کند. بر اساس این مقدمات، ما در بخش آ.۳ پایه‌های مختصاتی (پایه‌های هولونومیک) $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\right]_p \in F_p M$ از فضاهای مماس $T_p M$ را تعریف خواهیم کرد، که توسط عملگرهای مشتق جهتی در امتداد شبکه مختصاتی که توسط چارت از V به U کشیده شده است، تولید می‌شوند. پایه‌های دوگان $\left[\hat{dx}_\mu|_p\right]$ از فضاهای هم‌مماس $T_p^* M$ با گرادیان‌های مؤلفه‌های چارت x_μ داده می‌شوند. نگاشت‌های گذار بین چارت‌ها، تبدیلات پیمانه کوواریانت و کانتراواریانت را بین پایه‌های متناظر القا می‌کنند، که در بخش آ.۲۰ پایه‌های مختصاتی را به عنوان تربویالیزاسیون‌های محلی کلاف تفسیر می‌کند و ارتباط بین فرمالیسم کلاف و فرمالیسم چارت را دقیق می‌کند. پایه‌ها و تربویالیزاسیون‌های القا شده از چارت‌های مختصاتی تمام تربویالیزاسیون‌های ممکن را پوشش نمی‌دهند، به طوری که بین پایه‌های مختصاتی و پایه‌های غیرمختصاتی تمایز قابل می‌شویم (فرمالیسم کلاف به پایه‌های غیرمختصاتی عمومی اجازه می‌دهد). در ادبیات فیزیک، پایه‌های غیرمختصاتی معمولاً از طریق میدان‌های ویل‌باین معرفی می‌شوند. بخش آ.۵ استدلال می‌کند که این میدان‌های ویل‌باین فقط تبدیلات پیمانه با مقادیر $GL(d)$ از چارچوب‌های عمومی در FM به یک G -ساختر داده شده GM هستند، که در داخل آن می‌توان متعاقباً تبدیلات پیمانه با مقادیر G را که G -ساختر را حفظ می‌کنند، اعمال کرد.

مقدمه‌های جامعی بر فرمالیسم چارت در [؟ ？ ？] ارائه شده است. یک شرح دقیق‌تر در [؟] یافت می‌شود.

ما می‌خواهیم به خواننده یادآوری کنیم که ما از اندیس‌های کوواریانت و کانتراواریانت استفاده نمی‌کنیم. اندیس‌ها همیشه به صورت زیرنویس ظاهر خواهند شد، با حروف یونانی μ, ν, λ, \dots که اندیس‌های مرتبط با چارت مختصاتی را نشان می‌دهند و حروف لاتین \dots, j, \dots که اندیس‌های پیمانه‌های عمومی را نشان می‌دهند. بالانویس‌های A, B, C برای برجسب گذاری چارت‌ها یا پیمانه‌های مختلف حفظ می‌شوند.

آ.۱ فضاهای هم‌ماس، فضاهای هم‌ماس و پایه‌های دوگان

آ.۱.۱ فضاهای هم‌ماس بر حسب مشتقات جهتی

یک تعریف رایج از فضاهای هم‌ماس M به عنوان فضاهای برداری از عملگرهای مشتق جهتی در $p \in M$ است، که ما در اینجا به طور خلاصه آن را تشویق می‌کنیم. فرض کنید $f \in C^\infty(M)$ ، یعنی $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ است. یک نگاشت هموار باشد، و برای یک بازه $I \subseteq \mathbb{R}$ فرض کنید $\gamma : I \rightarrow M$ یک منحنی هموار باشد که در زمان $t = 0$ از p عبور می‌کند، یعنی $\gamma(0) = p$. را برآورده می‌کند. سپس عملگر مشتق جهتی در امتداد γ را به عنوان عملگر خطی

$$v_\gamma : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto (f \circ \gamma)'(0). \quad (512)$$

تعریف می‌کنیم. از آنجا که مشتق در امتداد جهت γ گرفته می‌شود، یعنی هم‌ماس بر آن، v_γ بردار هم‌ماس نامیده می‌شود. می‌توان آن را به عنوان سرعت یک ذره با مسیر γ در زمان $t = 0$ در نظر گرفت. برای ارجاع بعدی، ما نمودار جابجایی ساده زیر را ارائه می‌دهیم، که پول بک γ از M به \mathbb{R} را از طریق γ نشان می‌دهد، که مشتق جهتی بر حسب آن تعریف می‌شود:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \supset & I & \xrightarrow{\gamma} & M \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ & & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{f \circ \gamma} & & \uparrow \end{array} \quad (513)$$

می‌توان نشان داد که فضای تمام بردارهای هم‌ماس بر منحنی‌ها در p یک فضای برداری d -بعدی را تشکیل می‌دهد

$$T_p M := \{v_\gamma \mid \gamma \text{ است } p \text{ یک منحنی هموار گذرنده از } p\}, \quad (514)$$

که به عنوان فضای هم‌ماس در p شناخته می‌شود. برای جزئیات بیشتر در مورد تعریف بردارهای هم‌ماس و ساختار فضای برداری فضاهای هم‌ماس، به [۹] مراجعه کنید.

با تعریف فضاهای هم‌ماس به عنوان فضاهای برداری، ممکن است انتخاب کنیم که با بردارهای هم‌ماس به عنوان بردارهای هندسی انتزاعی رفتار کنیم و در نتیجه تعریف آنها را از طریق مشتقات جهتی (یا هر تعریف جایگزین دیگری «فراموش») کنیم. ما این کار را در اکثر جاها انجام می‌دهیم، اما در بخش‌های بعدی برای استخراج دیفرانسیل‌های نگاشتهای هموار و پایه‌های مختصاتی به تعریف از طریق مشتقات جهتی باز می‌گردیم.

آ.۲.۱ فضاهای هم‌ماس

به عنوان فضاهای برداری حقیقی، فضاهای هم‌ماس $T_p M$ دارای $(T_p M)^*$ هستند، یعنی فضاهای هم‌ماس. بنا به تعریف فضاهای دوگان، آنها از تابعی‌های خطی

$$\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (515)$$

تشکیل شده‌اند، که در هندسه دیفرانسیل معمولاً هم‌بردارها یا ۱-فرم‌ها نامیده می‌شوند. به همراه جمع (هم) برداری $(\omega + \tilde{\omega})(v) = \omega(v) + \tilde{\omega}(v)$ و ضرب اسکالر $(\lambda \cdot \omega)(v) = \lambda \cdot (\omega(v))$ ، فضاهای هم‌ماس خود فضاهای برداری هستند.

به عنوان دوگان‌های متناهی-بعدی از یکدیگر، $T_p M$ و $T_p^* M$ ایزومورف هستند و بنابراین به طور خاص دارای بعد یکسان $= d = \dim(M)$ هستند. با این حال، ایزومورفیسم بین این دو کانونی نیست. یک ایزومورفیسم فضای برداری را می‌توان از طریق یک فرم دوخطی (غیرتنهنگ) $\eta_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ روی $T_p M$ مثلاً یک متربک ریمانی، از طریق

$$\widehat{\eta}_p : T_p M \rightarrow T_p^* M, \quad v \mapsto \eta_p(v, \cdot), \quad (516)$$

مشخص کرد، که تابعی خطی $\widehat{\eta}_p(v) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ ، $w \mapsto \eta_p(v, w)$ را تعیین می‌کند.

آ.۲.۱.۱ پایه‌های دوگان

هر پایه $[e_i]_{i=1}^d$ از $T_p M$ به طور کانونی یک پایه دوگان $[e_i^*]_{i=1}^d$ از $T_p^* M$ را القا می‌کند، که برای برآوردن روابط $e_i^* e_j = \delta_{ij}$ برای $i, j \in \{1, \dots, d\}$.

تعريف شده است. فرض کنید $[e_i^B]_{i=1}^d = [e_i^A]_{i=1}^d \triangleleft (g^{BA})^{-1}$ و $[e_i^A]_{i=1}^d \triangleleft (g^{BA})_{lj}^{-1} \in \text{GL}(d)$ در معادله (۱۰) به هم مرتبط هستند، یعنی برای $j = 1, \dots, d$

$$e_j^B = \sum_l e_l^A (g^{BA})_{lj}^{-1} \quad (518)$$

پایه دوگان $[e_i^{A,*}]_{i=1}^d$ بر این اساس تحت آن عمل چیزی که را به $e_i^{A,*}$ داشتاری (وارون) می‌شود. این با جفت کردن تأیید می‌شود:

$$e_i^{B,*} e_j^B = \sum_{k,l} g_{ik}^{BA} e_k^{A,*} e_l^A (g^{BA})_{lj}^{-1} = \sum_{k,l} g_{ik}^{BA} \delta_{kl} (g^{BA})_{lj}^{-1} = \sum_k g_{ik}^{BA} (g^{BA})_{kj}^{-1} = \delta_{ij}. \quad (519)$$

می‌فرستد، تبدیل می‌شود. این با جفت کردن تأیید می‌شود:

$$\begin{aligned} e_i^{B,*} e_j^B &= \sum_{k,l} g_{ik}^{BA} e_k^{A,*} e_l^A (g^{BA})_{lj}^{-1} \\ &= \sum_{k,l} g_{ik}^{BA} \delta_{kl} (g^{BA})_{lj}^{-1} \\ &= \sum_k g_{ik}^{BA} (g^{BA})_{kj}^{-1} \\ &= \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (520)$$

رفتار تبدیل وارون پایه‌ها و پایه‌های دوگان معمولاً به عنوان تبدیل کوواریانت و کانتراواریانت نامیده می‌شود. به شباهت تبدیل پایه دوگان با تبدیلات کانتراواریانت $v^B = g^{BA} v^A$ پیمانه‌ها در معادله (۷) و مؤلفه‌های برداری در (۹) توجه کنید. در واقع، پیمانه‌ها فقط انتخاب‌هایی از یک پایه هم‌ماس هستند که در ادامه بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد.

۲.۰ دیفرانسیل‌ها، گرادیان‌ها و ژاکوین‌ها

در حساب برداری، توابع $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$: ϕ را در نظر می‌گیریم، که می‌توان آنها را در هر نقطه $p \in \mathbb{R}^m$ به صورت خطی با ماتریس ژاکوین آنها (یا مشتق کل یا دیفرانسیل) $d\phi_p = (\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}|_p)_{ij}$ تقریب زد. در اینجا ما تعیین این مفهوم را به دیفرانسیل‌های توابع هموار بین منیفلدهای هموار معرفی می‌کیم.

دیفرانسیل‌ها به طور کلی: فرض کنید $M \rightarrow N$: ϕ یک نگاشت هموار بین منیفلدهای هموار M و N باشد. در هر نقطه $p \in M$ چنین نگاشتی یک دیفرانسیل (یا پوش فوروارد) دارد.

$$d\phi_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N, \quad v \mapsto d\phi_p(v) \quad (521)$$

را القا می‌کند که بردارهای مماس را در p به صورت خطی به بردارهای مماس در $\phi(p)$ نگاشت می‌دهد. برای تعریف فضاهای مماس بر حسب مشتقات جهتی در معادله (۵۱۲)، پوش فوروارد $v \in T_p M$ در امتداد ϕ به صراحت با

$$d\phi_p(v) : C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto (d\phi_p(v))(f) := v(f \circ \phi), \quad (522)$$

داده می‌شود، یعنی با اعمال v بر روی پولبک $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ از طریق ϕ . این تعاریف با دو نمودار جایجاوی زیر روش می‌شوند:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi} & N \\ & \searrow f \circ \phi & \downarrow f \\ & & \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C^\infty(M) & \xleftarrow{(\cdot) \circ \phi} & C^\infty(N) \\ v \downarrow & & \nearrow d\phi(v) \\ \mathbb{R} & & \end{array} \quad (523)$$

از این تعریف بالاصله نتیجه می‌شود که دیفرانسیل ترکیب نگاشتهای هموار برابر با ترکیب دیفرانسیل‌های منفرد آنها است، که همان قاعده زنجیره‌ای است:

$$d(\phi \circ \psi)_p = d\phi_{\psi(p)} \circ d\psi_p \quad (524)$$

اگر ϕ وارون پذیر باشد (یک دیفرانسیل)، علاوه بر این نتیجه می شود که دیفرانسیل آن یک ایزومورفیسم فضای برداری است که وارون آن برابر با دیفرانسیل^۱ ϕ^{-1} است، یعنی

$$(d\phi_p)^{-1} = d(\phi^{-1})_{\phi(p)}. \quad (525)$$

در مجموع، دیفرانسیل های $d\phi_p$ در نقاط منفرد $p \in M$ یک مورفیسم کلاف برداری (یک نگاشت کلاف خطی-تاری، به بخش های ۱.۶ مراجعه کنید) را بین کلاف های مماس M و N القا می کنند:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{d\phi} & TN \\ \pi_{TM} \downarrow & & \downarrow \pi_{TN} \\ M & \xrightarrow{\phi} & N \end{array} \quad (526)$$

توجه داشته باشید که ما در این پیوست از یک نماد گذاری متفاوت، یعنی $d\phi$ استفاده می کنیم، نسبت به مقاله اصلی، که در آن به جای آن $\phi_{*,TM}$ می نویسیم. ما اولی را برای ارتباط با نماد گذاری معمول dx_μ برای پایه های القا شده توسط چارت از فضاهای هم مماس انتخاب کردیم. دومی در متن اصلی برای تأکید بر شباهت با نگاشت های کلاف ϕ ، $\phi_{*,GM}$ ، FM و A القا می شوند، استفاده می شود.

گرادیان ها: در مورد توابع هموار با مقادیر حقیقی $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ ، یعنی $d\phi_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}$ ، دیفرانسیل v را در $T_p M$ به بردارهای $d\phi(v) : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f \mapsto v(f \circ \phi)$ پوش فروارد می کند. با استفاده از ایزومورفیسم کانونی $\iota_{\mathbb{R}} : T_{\phi(p)} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ ، $v \mapsto v(\text{id}_{\mathbb{R}})$

$$\iota_{\mathbb{R}} : T_{\phi(p)} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}, \quad v \mapsto v(\text{id}_{\mathbb{R}}) \quad (527)$$

عملگر گرادیان

$$\hat{d}_p : C^\infty(M) \rightarrow T_p^* M, \quad \phi \mapsto \hat{d}\phi_p := \iota_{\mathbb{R}} \circ d\phi_p = (d\phi_p(\cdot))(\text{id}_{\mathbb{R}}), \quad (528)$$

را تعریف می کنیم، که توابع هموار ϕ را به هم بردارها $\hat{d}\phi$ ^{۱۴۳} می فرستد، که به نوبه خود بر روی بردارها به صورت

$$\hat{d}\phi_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \hat{d}\phi_p(v) = (d\phi_p(v))(\text{id}_{\mathbb{R}}) = v(\text{id}_{\mathbb{R}} \circ \phi) = v(\phi). \quad (529)$$

عمل می کنند. با یک سوء استفاده از نماد گذاری معمولاً «کلاه» روی \hat{d} حذف می شود و بلافاصله $(v(\phi)) = v(\phi)$ تعریف می شود. در حالی که این نماد گذاری بسیار رایج است، ما در ادامه به «کلاه» پایین دیگر مانیم تا نیاز به ایزومورفیسم کانونی $\iota_{\mathbb{R}}$ را صریح کنیم.

در بخش ۱.۳ در ادامه خواهیم دید که پایه های $T_p^* M$ که دو گان پایه های مختصاتی $T_p M$ هستند، با $1-f$ های گرادیان $\hat{d}x_\mu|_p$ داده می شوند، که در آن x_μ مؤلفه های چارت مختصاتی هستند.

ژاکوین ها: به طور خاص برای توابع $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، ϕ بین (زیرمجموعه هایی از) فضاهای اقلیدسی، دیفرانسیل $d\phi_{x_*}$ به راحتی دیده می شود که با ژاکوین $T_{\phi(x_*)} \mathbb{R}^m \rightarrow T_{x_*} \mathbb{R}^n$ پس از یکی گرفتن کانونی $T_p \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ در هر دو دامنه و هم دامنه، منطبق است. ایزومورفیسم کانونی در اینجا با

$$\iota_{\mathbb{R}^k} : v \mapsto (v(\text{proj}_1), \dots, v(\text{proj}_k)), \quad (530)$$

داده می شود، که \mathbb{R} را از معادله (۵۲۷) به بعد چند گانه تعیین می دهد. از آنجا که محاسبه عمده ا مشابه مورد گرادیان ها است، ما آن را در اینجا تکرار نخواهیم کرد بلکه ایده را از طریق یک نمودار جابجایی به تصویر می کشیم:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\iota_{\mathbb{R}^n}} & T_{x_*} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{d\phi|_{x_*}} & T_{\phi(x_*)} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\iota_{\mathbb{R}^m}} & \mathbb{R}^m \\ & & \underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{\partial \phi}{\partial x}|_{x_*}} & & & & \uparrow \\ & & & & & & \end{array} \quad (531)$$

^{۱۴۳} میدان گرادیان اغلب به عنوان یک میدان برداری $(\hat{df})^{\sharp}$ تعریف می شود که از میدان هم برداری \hat{df} از طریق ایزومورفیسم موسیقیابی: \sharp متناظر با متريک ($\text{بالا بردن انديس ها}$) محاسبه می شود.

اگر ϕ وارون پذیر باشد، همانی در معادله (۵۲۵) به

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x_*}^{-1} = \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial x} \Big|_{\phi(x_*)}, \quad (532)$$

تبديل می شود، که همان فضیه تابع وارون است. ما بعداً از این همانی برای وارون کردن تبدیلات پیمانه بین پایه های مختصاتی مختلف که به عنوان ژاکوین های نگاشت های گذار چارت القا می شوند، استفاده خواهیم کرد.

آ.۳ پایه های مختصاتی الفا شده توسط چارت

در این بخش ما چارت های مختصاتی به شکل

$$x : U \rightarrow V, \quad (533)$$

را در نظر می گیریم، که به صورت دیفنتومorfیک مختصات $p \in U \subseteq \mathbb{R}^d$ را به هر نقطه $x(p) \in V \subseteq \mathbb{R}^d$ اختصاص می دهدن. هر چنین چارتی یک انتخاب طبیعی از پایه ها را برای فضاهای مماس $T_p M$ روی U القا می کند، که به عنوان پایه های مختصاتی شناخته می شوند. فضاهای دو گان $T_p^* M$ از فضاهای مماس روی U بر این اساس با پایه های مختصاتی دو گان از هم بردارهای مماس مجهر می شوند. نگاشت های گذار بین مختصات دو چارت، تبدیلات پیمانه ای را القا می کنند که بین پایه های مختصاتی متاظر ترجمه می کنند. این تبدیلات پیمانه با ژاکوین های نگاشت های گذار داده می شوند.

آ.۳.۱ چارت ها و پایه های مختصاتی الفا شده

پایه های مختصاتی برای $T_p M$: برای تشویق تعریف پایه های مختصاتی، مشاهده کنید که x یک «شبکه مختصاتی» را روی U با پول بک کردن شبکه مختصاتی کانونی روی V به منفذ القا می کند. سپس پایه مختصاتی در یک نقطه خاص $U \ni p$ را می توان به عنوان مشکل از آن d عملگر مشتق جهتی که در امتداد خطوط شبکه مختصاتی x روی U می روند، در نظر گرفت.

برای دقیق تر کردن این موضوع، ابتدا منحنی های

$$\tilde{\gamma}_\mu : I \rightarrow V, \quad t \mapsto x(p) + t\epsilon_\mu \quad \mu = 1, \dots, d \quad (534)$$

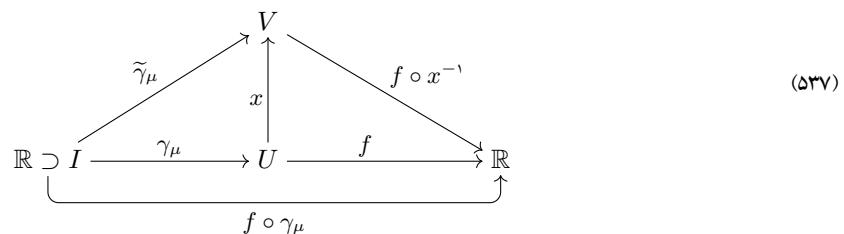
را در نظر بگیرید که در زمان $t = 0$ با سرعت واحد در جهت μ از $x(p)$ عبور می کنند. نگاشت آن $\tilde{\gamma}_\mu$ از طریق چارت به U منحنی های ذکر شده در بالا را تعریف می کند

$$\gamma_\mu : I \rightarrow U, \quad t \mapsto x^{-1}(x(p) + t\epsilon_\mu) = x^{-1}(x(p)) + t\epsilon_\mu \quad (535)$$

که در زمان $t = 0$ در امتداد شبکه مختصاتی x از p عبور می کنند. پایه مختصاتی d -بعدی $T_p M$ القا شده توسط x سپس با عملگرهای مشتق جهتی در معادله (۵۱۲) در امتداد مسیرهای γ_μ داده می شود. با نشان دادن بردار پایه μ -ام با سوءاستفاده معمول از نماد گذاری به صورت $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ بنابراین تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Big|_p : f &\mapsto \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Big|_p f := (f \circ \gamma_\mu)'(0) \\ &= (f \circ x^{-1} \circ \tilde{\gamma}_\mu)'(0) \\ &= (f \circ x^{-1}(x(p) + t\epsilon_\mu))'(0) \\ &= [\partial_\mu(f \circ x^{-1})](x(p)) \end{aligned} \quad (536)$$

در مرحله آخر ما مشتق جزئی μ -ام معمول از پول بک $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ را شناسایی کردیم، که نماد گذاری $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ را توجیه می کند. این تعاریف در نمودار جابجایی زیر که نمودار در معادله (۵۱۳) را گسترش می دهد، به تصویر کشیده شده اند:



پایه‌های مختصاتی دوگان برای T_p^*M : همانطور که در بخش آ.۱ گفته شد، هر پایه از $T_p M$ یک پایه دوگان از T_p^*M را القا می‌کند. به طور خاص برای پایه‌های مختصاتی، که توسط بردارهای $\frac{\partial}{\partial x_\mu}|_p$ تولید می‌شوند، عناصر پایه دوگان با گرادیان‌های $\hat{dx}_\mu|_p = \hat{d}(x_\mu)|_p \in T_p^*M$ از مؤلفه‌های چارت $x_\mu = \text{proj}_\mu \circ x : U \rightarrow \mathbb{R}$ می‌شوند. اینکه این گرادیان‌ها در واقع پایه دوگان را تشکیل می‌دهند، به راحتی با عمل بر روی بردارهای پایه همانطور که در معادله (۵۲۹) تعریف شده است، دیده می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{dx}_\mu|_p \frac{\partial}{\partial x_\nu}|_p &= \frac{\partial}{\partial x_\nu}|_p x_\mu \\ &= [\partial_\nu(x_\mu \circ x^{-1})](x(p)) \\ &= [\partial_\nu(\text{proj}_\mu)](x(p)) \\ &= \delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (538)$$

دیفرانسیل‌های چارت به عنوان تریوپالیزاسیون محلی کانونی: با توجه به اینکه چارت از $M \subseteq \mathbb{R}^d$ به $V \subseteq \mathbb{R}^d$ نگاشت می‌دهد، دیفرانسیل‌های آن در $U \in p$ نگاشت‌هایی به شکل

$$dx_p : T_p M \rightarrow T_{x(p)} \mathbb{R}^d. \quad (539)$$

هستند. با استفاده مجدد از ایزو‌مورفیسم کانونی \mathbb{R}^d از $T_{x(p)} \mathbb{R}^d$ به \mathbb{R}^d می‌گذرد. با معادله (۵۳۰)، ما یک نگاشت

$$\begin{aligned} \hat{dx}_p : T_p M &\rightarrow \mathbb{R}^d, \quad v \mapsto \hat{dx}_p(v) := \iota_{\mathbb{R}^d} \circ dx_p(v) \\ &= \left((dx_p(v))(\text{proj}_1), \dots, (dx_p(v))(\text{proj}_d) \right)^\top \\ &= \left(v(\text{proj}_1 \circ x \circ x^{-1})(x(p)), \dots, v(\text{proj}_d \circ x \circ x^{-1})(x(p)) \right)^\top \\ &= \left(v(x_1(p)), \dots, v(x_d(p)) \right)^\top \\ &= \left(\hat{dx}_1|_p(v), \dots, \hat{dx}_d|_p(v) \right)^\top \end{aligned} \quad (540)$$

به دست می‌آوریم، پس از شناسایی گرادیان‌های مؤلفه چارت منفرد در مرحله آخر. توجه داشته باشید که عمل این دیفرانسیل چارت بر روی پایه مختصاتی ϵ_μ نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} \hat{dx}_p \frac{\partial}{\partial x_\mu}|_p &= \left(\hat{dx}_1|_p \frac{\partial}{\partial x_\mu}|_p, \dots, \hat{dx}_d|_p \frac{\partial}{\partial x_\mu}|_p \right)^\top \\ &= (\delta_{\mu 1}, \dots, \delta_{\mu d})^\top \\ &= \epsilon_\mu, \end{aligned} \quad (541)$$

یعنی بردار واحد μ -ام ϵ_μ از \mathbb{R}^d این دلالت بر این دارد که \hat{dx}_p نقش یک پیمانه ψ_p را در p ایفا می‌کند. بنابراین می‌توان به همان اندازه با تعریف یک پایه هم‌مماس شروع کرد و

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}|_{x(p)} = \hat{dx}_p^{-1}(\epsilon_\mu), \quad (542)$$

را قرار داد، که آنالوگ معادله (۴) در فرم‌الیسم چارت است.

آ.۲.۳. نگاشت‌های گذار چارت و تبدیلات پیمانه القا شده

چارت‌های مختلف پایه‌های مختصاتی مختلفی را القا می‌کنند. بنابراین گذار چارت‌ها تبدیلات پیمانه، یعنی تبدیلات پایه‌ها و ضرایب برداری را القا می‌کنند، که ما در این بخش آنها را استخراج می‌کنیم.

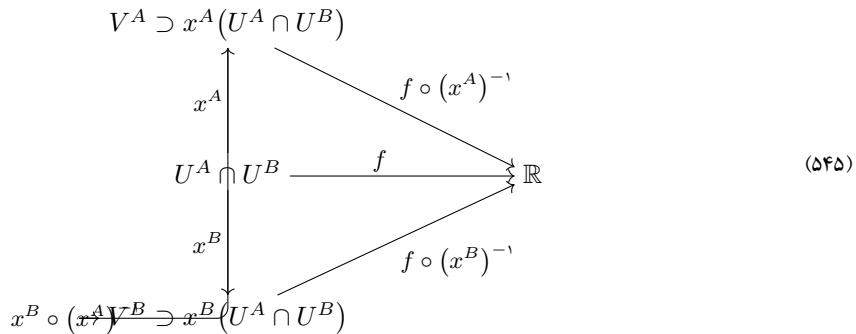
در ادامه ما دو چارت دلخواه و همپوشان $U^A \rightarrow V^A$ و $U^B \rightarrow V^B$ را در نظر می‌گیریم. مختصات مختلفی که آنها به همپوشانی اختصاص می‌دهند، سپس از طریق نگاشت‌های گذار چارت به هم مرتبط می‌شوند

$$x^B \circ (x^A)^{-1} : x^A(U^A \cap U^B) \rightarrow x^B(U^A \cap U^B). \quad (543)$$

تبدیل پایه‌های مختصاتی مماس: پایه‌های مختصاتی $T_p M$ که توسط دو چارت الگوی شوند، طبق خط آخر معادله (۵۳۶) با عمل آنها بر روی $f \in C^\infty(M)$ به صورت

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \Big|_p f = \left[\partial_\mu \left(f \circ (x^A)^{-1} \right) \right] (x^A(p)) \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p f = \left[\partial_\mu \left(f \circ (x^B)^{-1} \right) \right] (x^B(p)), \quad (544)$$

تعريف می‌شوند، که با نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:



از طریق نگاشتهای گذار چارت، پایه‌های مختصاتی مختلف با

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p f &= \left[\partial_\mu \left(f \circ (x^B)^{-1} \right) \right] (x^B(p)) \\ &= \left[\partial_\mu \left(f \circ (x^A)^{-1} \circ x^A \circ (x^B)^{-1} \right) \right] (x^B(p)), \end{aligned}$$

به هم مرتبط می‌شوند، که با استفاده از قاعده زنجیره‌ای چندمتغیره، بیشتر منجر به این می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p f &= \sum_{\nu=1}^d \left[\partial_\nu \left(f \circ (x^A)^{-1} \right) \right] (x^A(p)) \cdot \left[\partial_\mu \left(x_\nu^A \circ (x^B)^{-1} \right) \right] (x^B(p)) \\ &= \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \Big|_{x^B(p)} \end{aligned} \quad (546)$$

در مرحله آخر ما از سوءاستفاده معمول از نماد گذاری^{۱۴۴}

$$\frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \Big|_{x^B(p)} := \partial_\mu \left(x_\nu^A \circ (x^B)^{-1} \right) (x^B(p)) \quad (547)$$

برای مؤلفه‌های ژاکوبین

$$\frac{\partial x^A}{\partial x^B} \Big|_{x^B(p)} = \hat{dx}_p^A \circ \hat{d}(x_p^B)^{-1} \quad (548)$$

از نگاشتهای گذار استفاده کردیم. با حذف f از معادله (۵۴۶)، ما قانون تبدیل

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \Big|_{x^B(p)} \quad (549)$$

از پایه‌های مختصاتی مماس را شناسایی می‌کنیم. ما در اینجا انتخاب کردیم که ژاکوبین را در سمت راست بردار پایه بنویسیم تا تأکید کنیم که تغییر پایه باید به عنوان یک عمل راست در ک شود. با انجام این کار، باید به خواننده هشدار دهیم که فقط یک سوءاستفاده از نماد گذاری برای بردار پایه است اما به معنای عمل یک عملگر دیفرانسیل بر روی ژاکوبین در سمت راست نیست.

^{۱۴۴} «سوءاستفاده» این است که x^A به عنوان تابعی از $x^B(p)$ تفسیر می‌شود، و بنابراین باید به طور دقیق‌تر به صورت $x^A \circ (x^B)^{-1}$ نوشته شود.

تبدیل پایه‌های مختصاتی هم‌هماس: قانون تبدیل کانتراواریانت پایه‌های مختصاتی فضای هم‌هماس از تبدیل وارون پایه‌های دوگان در معادله (۵۱۹) نسبت به (۵۱۸) نتیجه می‌شود. برای اعمال این رابطه، ما ابتدا معادله (۵۴۹) را با قرارداد خود مبنی بر اینکه پایه‌ها مطابق با یک عمل راست با یک عضو گروه وارون تبدیل می‌شوند، تطبیق می‌دهیم. این کار با اعمال معادله (۵۳۲) برای وارون کردن ژاکوبین (سوءاستفاده از نماد گذاری را به یاد بیاورید)

$$\frac{\partial x^A}{\partial x^B} \Big|_{x^B(p)} = \left(\frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)} \right)^{-1} \quad (550)$$

انجام می‌شود که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \Big|_{x^B(p)} = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \left(\frac{\partial x^A}{\partial x^B} \Big|_{x^B(p)} \right)_{\nu\mu} = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \left(\frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)} \right)_{\nu\mu} \quad (551)$$

بنابراین عناصر پایه هم‌هماس مطابق با معادلات (۵۱۸) و (۵۱۹) مانند

$$\hat{dx}_\mu^B|_p = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\nu^A} \Big|_{x^A(p)} \hat{dx}_\nu^A|_p. \quad (552)$$

تبدیل می‌شوند.

تبدیل دیفرانسیل‌های چارت: بیان دیفرانسیل‌های چارت $\hat{dx}_\mu^A|_p$ بر حسب گرادیان‌های مؤلفه چارت در معادله (۵۴۰) اجازه می‌دهد تا قانون تبدیل آنها را از قانون در معادله (۵۵۲) استنتاج کنیم. به طور جایگزین، قانون تبدیل با ضرب راست در همانی به شکل $\text{id}_{T_p M} = \hat{dx}^A|_p \circ (\hat{dx}^A|_p)^{-1}$ و شناسایی یک ضرب چپ با ژاکوبین نگاشته‌های گذار چارت به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \hat{dx}^B|_p &= \hat{dx}^B|_p \circ (\hat{dx}^A|_p)^{-1} \circ \hat{dx}^A|_p \\ &= \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)} \hat{dx}^A|_p \end{aligned} \quad (553)$$

توجه داشته باشید که این نتیجه به سادگی بیان ماتریسی معادله (۵۵۲) است.

تبدیل ضرایب برداری: بردارهای $v \in T_p M$ نسبت به یک پایه مختصاتی $v^A \in \mathbb{R}^d$ با ضرایب v^A بیان می‌شوند:

$$v = \sum_{\mu=1}^d v_\mu^A \frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \Big|_p \quad (554)$$

ضرایب منفرد با عمل پایه هم‌هماس بازیابی می‌شوند:

$$\hat{dx}_\mu^A|_p(v) = \hat{dx}_\mu^A|_p \sum_{\nu=1}^d v_\nu^A \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p = \sum_{\nu=1}^d v_\nu^A \delta_{\mu\nu} = v_\mu^A \quad (555)$$

این دلالت بر این دارد که ضرایب به صورت کانتراواریانت تبدیل می‌شوند، درست مانند پایه مختصاتی هم‌هماس:

$$v_\mu^B = \hat{dx}_\mu^B|_p(v) = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\nu^A} \Big|_{x^A(p)} \hat{dx}_\nu^A|_p(v) = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\nu^A} \Big|_{x^A(p)} v_\nu^A \quad (556)$$

به راحتی تأیید می‌شود که این قانون تبدیل واقعاً به یک نمایش مستقل از مختصات از بردارهای مستقل از مختصات $v \in T_p M$ منجر می‌شود:

$$\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p v_\mu^B = \sum_{\mu, \nu, \rho} \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \Big|_{x^B(p)} \frac{\partial x_\mu^B}{\partial x_\rho^A} \Big|_{x^A(p)} v_\rho^A = \sum_{\nu, \rho} \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \delta_{\nu\rho} v_\rho^A = \sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p v_\nu^A \quad (557)$$

۴.۰ پایه‌های مختصاتی به عنوان تریویالیزاسیون‌های محلی کلاف

قوانين تبدیل القا شده توسط نگاشت گذار چارت در بخش آ.۲.۳ با تبدیلات پیمانه همانطور که در بخش ۱.۳ فرمول‌بندی شده است، هنگام یکی گرفتن ژاکوبین‌ها $g_p^{BA} \Big|_{x^A(p)}$ با $\frac{\partial x^B}{\partial x^A}$ منطبق هستند. در بخش آ.۴.۳ مابین ارتباطات را با فهرست کردن تمام تناظرات دقیق می‌کیم. بخش آ.۴.۶ این نتایج را با استخراج عبارات برای تریویالیزاسیون‌های کلاف القا شده توسط چارت روى دامنه‌های گسترده $M \subseteq U$ همانطور که در بخش ۶ معرفی شد، گسترش می‌دهد. یک فرهنگ لغت که تناظرات را خلاصه می‌کند در جدول ۷ ارائه شده است.

۴.۰.۴ تناظرات با تریویالیزاسیون‌های نقطه‌ای $T_p M$

پیمانه‌ها و دیفرانسیل‌های چارت: فرمالیسم کلاف بر تعریف پیمانه‌ها (معادله (۱))

$$\psi_{TM,p}^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (558)$$

تکیه دارد، که ایزومورفیسم‌های کلاف برداری هستند و مختصات را به فضاهای مماس با $p \in U^A$ اختصاص می‌دهند. در فرمالیسم چارت، پیمانه‌ها روی U^A به عنوان دیفرانسیل‌های چارت القا می‌شوند (معادله (۵۴۰)):

$$\hat{dx}_p^A : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (559)$$

پیمانه‌های مختلف با تبدیلات پیمانه به هم مرتبط هستند (معادله (۷)):

$$\psi_{TM,p}^B = g_p^{BA} \psi_{TM,p}^A \quad \square\square\square \quad g_p^{BA} := \psi_{TM,p}^B \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1} \in G. \quad (560)$$

همین تعریف برای پیمانه‌های القا شده توسط چارت نیز برقرار است، که در آن تبدیلات پیمانه با ژاکوبین نگاشته‌های گذار چارت منطبق می‌شوند (معادله (۵۵۳)):

$$\hat{dx}_p^B = \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)} \hat{dx}_p^A \quad \square\square\square \quad \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)} = \hat{dx}_p^B \circ (\hat{dx}_p^A)^{-1} \in \text{GL}(d) \quad (561)$$

مؤلفه‌های برداری: از آنجا که مؤلفه‌های برداری $(v^A|_p(v))$ با عمل پیمانه‌ها داده می‌شوند، آنها همان رفتار تبدیل کوواریانت را نشان می‌دهند

$$v^B = g_p^{BA} v^A \quad \square\square\square \quad v^B = \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)} v^A. \quad (562)$$

بر حسب مؤلفه‌ها، این روابط به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$v_i^B = \sum_{j=1}^d (g_p^{BA})_{ij} v_j^A \quad \square\square\square \quad v_\mu^B = \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial x_\nu^B}{\partial x_\mu^A} \Big|_{x^A(p)} v_\nu^A. \quad (563)$$

چارچوب‌های مرجع القا شده: چارچوب‌های مرجع در فرمالیسم کلاف با نگاشت بردارهای $e_i \in G$ از طریق $e \in \mathbb{R}^d$ از طریق نگاشت پیمانه به $T_p M$ به القا می‌شوند (معادله (۴)):

$$[e_i^A]_{i=1}^d = \left[(\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i) \right]_{i=1}^d \quad (564)$$

رابطه متناظر در فرمالیسم چارت طبق معادله (۵۴۲) با

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \Big|_p \right]_{\mu=1}^d = \left[(\hat{dx}_p^A)^{-1}(\epsilon_\mu) \right]_{\mu=1}^d \quad (565)$$

داده می‌شود. معادله (۱۰) نشان می‌دهد که قوانین تبدیل چارچوب‌های مرجع با عمل راست

$$[e_i^B]_{i=1}^d = [e_i^A]_{i=1}^d \triangleleft (g_p^{BA})^{-1} := \left[\sum_{j=1}^d e_j^A (g_p^{BA})_{ji}^{-1} \right]_{i=1}^d = \left[\sum_{j=1}^d e_j^A (g_p^{AB})_{ji} \right]_{i=1}^d. \quad (566)$$

داده می شود. به طور مشابه، قانون تبدیل پایه های مختصاتی از معادله (۵۵۱) به صورت

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu^B} \Big|_p \right]_{\mu=1}^d &= \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \Big|_p \right]_{\mu=1}^d \triangleleft \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)}^{-1} = \left[\sum_{\nu=1}^d \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \left(\frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big|_{x^A(p)} \right)^{-1} \right]_{\mu=1}^d \\ &= \left[\sum_{\nu=1}^d \frac{\partial}{\partial x_\nu^A} \Big|_p \frac{\partial x_\nu^A}{\partial x_\mu^B} \Big|_{x^B(p)} \right]_{\mu=1}^d \end{aligned} \quad (567)$$

دیده می شود.

۲.۴.۱ تربیوالیزاسیون های محلی القا شده توسط چارت از $\pi_{TM}^{-1}(U)$

نتاظراتی که در بخش قبل بیان شدند، تربیوالیزاسیون های نقطه ای چارت p از $T_p M$ را به دیفرانسیل های نقطه ای \hat{dx}_p مرتبط می کردند. برای تکمیل این تصویر، این بخش عبارتی را برای تربیوالیزاسیون های محلی

$$\Psi_{TM} : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^d \quad (568)$$

که توسط چارت ها القا می شوند، اضافه می کند.

یک کاندیدای خوب برای ساخت Ψ_{TM} از آن، دیفرانسیل چارت

$$dx : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow TV \quad (569)$$

است که یک ایزومورفیسم کلاف برداری است که از ایزومورفیسم های فضای برداری dx_p با عدم محدودیت به یک نقطه منفرد $p \in U$ متفاوت است. برای ادامه، ما ایزومورفیسم کانونی $\iota_{\mathbb{R}^d}$ را در معادله (۵۳۰) از یک نقطه منفرد به تمام فضاهای مماس $T_x V \cong \mathbb{R}^d$ روی $V \subseteq \mathbb{R}^d$ تعمیم می دهیم، که منجر به تربیوالیزاسیون محلی کانونی زیر از TV می شود:

$$\iota_{TV} : TV \rightarrow V \times \mathbb{R}^d, \quad v \mapsto (\pi_{TV}(v), \iota_{\mathbb{R}^d}(v)). \quad (570)$$

این اجازه می دهد تا از یک نقطه منفرد به یک نگاشت

$$\hat{dx} := \iota_{V \times \mathbb{R}^d} \circ dx : \pi_{TM}^{-1}(U) \rightarrow V \times \mathbb{R}^d, \quad (571)$$

تعمیم دهیم، که با این حال، هنوز تربیوالیزاسیون محلی مورد نظر نیست. با نگاشت عامل اول از طریق چارت وارون از V به U ما تربیوالیزاسیون محلی کلاف القا شده توسط چارت را به دست می آوریم:

$$\Psi_{TM} := (x^{-1} \times \text{id}) \circ \hat{dx} \quad (572)$$

طبق معمول، ما تعاریف انجام شده را در یک نمودار جابجایی به تصویر می کشیم:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & (x^{-1} \times \text{id}) & & & \\ & & \hat{dx} & & & & \\ & \downarrow & & & & & \downarrow \\ V \times \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\iota_{V \times \mathbb{R}^d}} & TV & \xleftarrow{dx} & \pi_{TM}^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi_{TM}} & U \times \mathbb{R}^d \\ & \searrow \text{proj}_1 & \downarrow \pi_{TV} & & \pi_{TM} & & \swarrow \text{proj}_1 \\ & & V & \xleftarrow{x} & U & & \end{array} \quad (573)$$

با در نظر گرفتن دو چارت همپوشان $U^{AB} = U^A \cap U^B$ و $U^A \rightarrow V^A$ و $U^B \rightarrow V^B$ و با نشان دادن U نگاشتهای گذار

$$\hat{dx}^B \circ (\hat{dx}^A)^{-1} = \left(x^B \circ (x^A)^{-1} \times \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right) : x^A(U^{AB}) \times \mathbb{R}^d \rightarrow x^A(U^{AB}) \times \mathbb{R}^d \quad (574)$$

$$\Psi_{TM}^B \circ (\Psi_{TM}^A)^{-1} = \left(\text{id} \times \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right) : U^{AB} \times \mathbb{R}^d \rightarrow U^{AB} \times \mathbb{R}^d. \quad (575)$$

به دست می‌آیند. این تعاریف و رابطه متقابل آنها در نمودار جابجایی زیر نشان داده شده است:

$$\begin{array}{ccccc}
 x^B(U^{AB}) \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow{((x^B)^{-1} \times \text{id})} & U^{AB} \times \mathbb{R}^d & & \\
 \uparrow & \swarrow \hat{dx}^B & \uparrow \Psi_{TM}^B & & \\
 (x^B \circ (x^A)^{-1} \times \frac{\partial x^B}{\partial x^A}) & \xrightarrow{\pi_{TM}^{-1}(U^{AB})} & & & \\
 \uparrow & \swarrow \hat{dx}^A & & & \\
 x^A(U^{AB}) \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow{((x^A)^{-1} \times \text{id})} & U^{AB} \times \mathbb{R}^d & & \\
 \end{array} \quad (576)$$

۵.۱ G-ساختارها و میدان‌های ویل باین

همانطور که در بخش‌های ۳.۶ و ۴.۶ بحث شد، هر G -اطلس $\{\Psi_{TM}^X, U^X\}$ از تربویالیزاسیون‌های محلی کلاف مماس، یک G -ساختار متناظر را مشخص می‌کند، یعنی یک زیرگروه GM از چارچوب‌های مرتع متمایز که به یک ساختار هندسی روی M احترام می‌کنند (یا آن را تعریف می‌کنند). بنا به تعریف، نگاشتهای گذار g^{BA} از کلاف‌های همبسته G مقادیری در یک گروه ساختاری کاهش یافته $G \leq \text{GL}(d)$ می‌گیرند. این سؤال را مطرح می‌کند که آیا می‌توان به طور مشابه G -اطلس‌هایی از چارت‌ها $\{(x^X, U^X)\}$ را یافت، که ژاکوبین‌های آنها $\frac{\partial x^B}{\partial x^A}$ مقادیری در یک گروه ساختاری کاهش یافته $G \leq \text{GL}(d)$ بگیرند و بنابراین یک G -ساختار را کدگذاری کنند. برای برخی گروه‌های ساختاری این قطعاً ممکن است؛ به عنوان مثال، یک جهت‌گیری از یک منیفلد جهت‌پذیر همیشه می‌تواند با مشخص کردن یک اطلس (d) از چارت‌های GL^+ با جهت‌گیری مثبت، که ژاکوبین‌های گذار آنها مقادیری در (d) GL^+ می‌گیرند، ثابت شود. با این حال، به طور کلی، یافتن چارت‌های مختصاتی که پایه‌های مختصاتی را الفا کنند که در یک G -ساختار داده شده قرار گیرند، غیرممکن است. بنابراین به تبدیلات پیمانه صریح از پایه‌های مختصاتی به G -ساختار، که به عنوان میدان‌های ویل‌باین شناخته می‌شوند، متولی می‌شویم [٤ ٥ ٦]. پس از تبدیل اولیه از پایه‌های مختصاتی به G -ساختار، آزادی پیمانه در داخل G -ساختار به تبدیلات پیمانه با مقادیر G که G -ساختار را حفظ می‌کنند، اجازه می‌دهد.

یک مثال مهم در فیزیک، d -ساختارها (یا 1 -ساختارها برای فضازمان) هستند، که از چارچوب‌های مرتع راست‌هنچار نسبت به متريک (η) (شبیه) ريماني از M تشکيل شده‌اند.^{۱۴۵} چين چارچوب‌های راست‌هنچاری، چارچوب‌های آزمایشگاهی ممکن یک ناظر لخت را نمایش می‌دهند. آنها به عنوان مثال برای فرمول‌بندي نظریه‌های میدان کوانتومی نسبیتی، به ویژه معادله دیراک، در فضازمان‌های خمیده استفاده می‌شوند. به ياد بياوريد که یک G -ساختار داده شده باید توسط تربویالیزاسیون‌های محلی کلاف موردن احترام قرار گیرد، که به این معنی است که نگاشتهای پیمانه $\psi_{GM,p}$ باید G -ساختار $G_p M$ را در $p \in M$ به G -ساختار استاندارد کاتونی G از \mathbb{R}^d نگاشتند. برای مورد خاص d -ساختارها، اين معادل اين الزام است که تربویالیزاسیون‌های کلاف متريک را حفظ کنند، یعنی $\langle \psi_{TM,p}(v), \psi_{TM,p}(w) \rangle = \langle \eta_p(v, w) \rangle$. با توجه به یک چارت مختصاتی $x : U \rightarrow V$ پیمانه‌های الفا شده در U در بخش‌های V در فرماليسم کلاف بدون مشکل انجام می‌شود. به اين در فرماليسم $\psi_{TM,p} = \hat{dx}_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d$ باید داده شد که با $\psi_{TM,p} = \hat{dx}_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^d$ برابر باشد. بنابراین الزام بر روی آنها برای حفظ متريک به

$$\eta_p(v, w) = \langle \hat{dx}_p(v), \hat{dx}_p(w) \rangle, \quad (577)$$

تبدیل می‌شود، که دقیقاً ویژگی تعریف کننده برای x به عنوان یک ايزومتری است. اين نتیجه دلالت بر اين دارد که پایه‌های مختصاتی فقط در صورتی یک d -ساختار را تعریف می‌کنند که U و V توسيع متصفح می‌باشند که فقط در صورتی است که M به صورت محلی روی U تخت باشد. بنابراین برای هر ناحیه غیرتخت از M توسيع متصفح یک d -ساختار از طریق پایه‌های مختصاتی غیرممکن است. اين ناسازگاری به عنوان مثال در اين واقعیت بیان می‌شود که مؤلفه‌های $\eta_{\mu\nu}$ از متريک ريماني روی M نسبت به پایه مختصاتی انتخاب شده با $\delta_{\mu\nu}$ (یا $(+1, -1, \dots, -1)$) متفاوت هستند.

^{۱۴۵} نماد η در ادبیات فیزیک معمولاً برای متريک مینکوفسکی $(-1, +1, \dots, +1)$ حفظ می‌شود در حالی که متريک (شبیه) ريماني M با g نشان داده می‌شود. در مقابل، ما اعضای گروه را در گروه ساختاری به صورت $g \in G$ می‌نویسیم و بنابراین از η برای متريک (شبیه) ريماني M استفاده می‌کنیم.

همانطور که قبل ذکر شد، چارچوب‌های راست‌هنگار یک d -ساختار OM در ادبیات فیزیک معمولاً از طریق یک تبدیل پیمانه نسبت به یک میدان چارچوب القا شده توسط چارت $\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} \right]_{\mu=1}^d$ تعریف می‌شوند. با نشان دادن این تبدیل پیمانه، که میدان ویل باین نامیده می‌شود، با

$$\mathfrak{e}^A : U \rightarrow \mathrm{GL}(d), \quad (578)$$

میدان چارچوب راست‌هنگار با^{۱۴۶}

$$[e_i^A]_{i=1}^d := \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} \right]_{i=1}^d \triangleleft (\mathfrak{e}^A)^{-1} = \left[\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\mathfrak{e}^A)^{-1}_{\mu i} \right]_{i=1}^d \in \Gamma(U, OM). \quad (579)$$

تعریف می‌شود. راست‌هنگاری میدان چارچوب حاصل معمولاً به صورت^{۱۴۷}

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \eta(e_i^A, e_j^A) \\ &= \eta \left(\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\mathfrak{e}^A)^{-1}_{\mu i}, \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\mathfrak{e}^A)^{-1}_{\nu j} \right) \\ &= \sum_{\mu\nu} \eta \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) (\mathfrak{e}^A)^{-1}_{\mu i} (\mathfrak{e}^A)^{-1}_{\nu j} \\ &= \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} (\mathfrak{e}^A)^{-1}_{\mu i} (\mathfrak{e}^A)^{-1}_{\nu j}, \end{aligned} \quad (580)$$

بیان می‌شود، که توضیح می‌دهد چرا میدان ویل باین گاهی اوقات «ریشه دوم متريک» نامیده می‌شود. طبق معمول، مؤلفه‌های برداری از طریق تبدیل پیمانه غیروارون ترجمه می‌شوند، یعنی:^{۱۴۸}

$$v_i^A = \sum_\mu \mathfrak{e}_{i\mu}^A v_\mu \quad (581)$$

یک استدلال ساده شمارش ابعاد، آزادی پیمانه را در d -ساختار نشان می‌دهد.^{۱۴۹} یک ویل باین $\mathfrak{e}^A(p) \in \mathrm{GL}(d)$ به عنوان عضوی از گروه خطی عمومی دارای d درجه آزادی است، در حالی که متريک η به عنوان یک فرم دوخطی مترقارن، دارای $d(d+1)/2$ درجه آزادی است. $d(d-1)/2$ درجه آزادی گشته دقيقاً متناظر با اعضای گروه ساختاری $g^{BA} \in d$ است. به طور جايگزین، از ديدگاه ساختارها، $(d(d-1)/2)$ درجه آزادی است در حالی که $d(d+1)/2$ درجه آزادی است، که $d(d+1)/2$ درجه آزادی را که متناظر با انتخاب متريک است، ثابت می‌کند.

تمام ساختارها به وضوح به G -ساختارهای دلخواه با میدان‌های ویل باین با مقادیر $GL(d)$ که پایه‌های مختصاتی را به GM نگاشت می‌دهند و آزادی اعمال تبدیلات پیمانه با مقادیر G پس از آن، تعیین می‌یابند.

^{۱۴۶} در ادبیات فیزیک این رابطه به صورت $e_i^A = (\mathfrak{e}^A)_i^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ بیان می‌شود. وارون در اینجا صرفاً با موقعیت مخالف اندیس‌ها i در مقایسه با $\mathfrak{e}_{\mu i}^A$ نشان داده می‌شود.

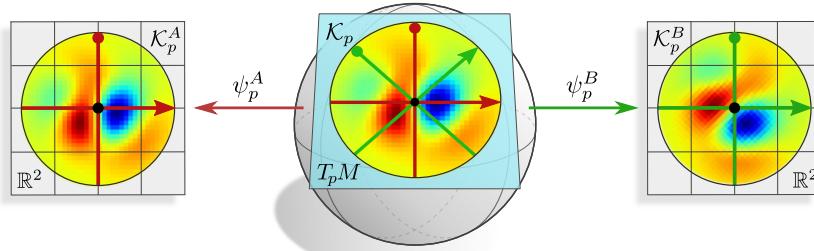
^{۱۴۷} در ادبیات فیزیک این رابطه معمولاً به صورت $\delta_{ij} = (\mathfrak{e}^A)_i^\mu (\mathfrak{e}^A)^\nu_j \eta_{\mu\nu}$ نوشته می‌شود.

^{۱۴۸} دوباره، در نمادگذاری معمول در فیزیک این رابطه به صورت $(\mathfrak{e}^A)_i^\mu v^\mu = v^A_i$ خوانده می‌شود.

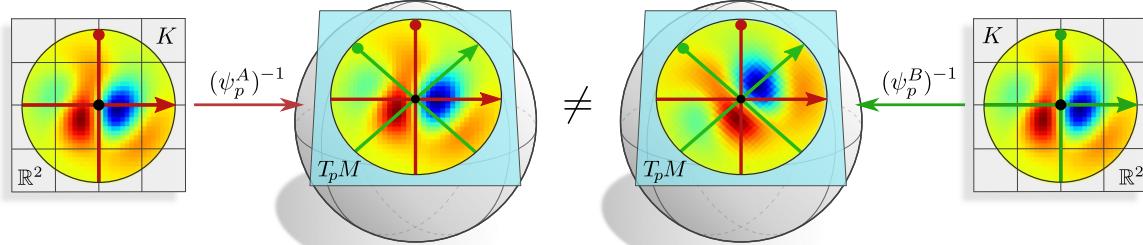
^{۱۴۹} در فیزیک، بيشتر تبدیلات لورنتس محلی Λ را در نظر می‌گيرند، که دوران‌ها و بوست‌های چارچوب‌های مرتع محلی را توصیف می‌کنند.

فرماییسم چارت	فرماییسم کلاف	ایزومورفیسم
هر دیفئوگرافیسم دلخواه	\square	$V^A \xrightarrow{\sim} U^A$: چارت
القا شده توسط چارت‌ها	\square	$x^A(U^{AB}) \xrightarrow{\sim} x^B(U^{AB})$ $x^B \circ (x^A)^{-1}$: نگاشت‌گذار
$\hat{dx}_p^A = (\hat{dx}_1^A _p, \dots, \hat{dx}_d^A _p)^\top$	ایزومورفیسم خطی از G -اطلس	$\mathbb{R}^d \xrightarrow{\sim} T_p M$ $\psi_{TM,p}^A :$ تربیوالیزاسیون نقطه‌ای
$\hat{dx}_p^B \circ (\hat{dx}_p^A)^{-1} = \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \Big _{x^A(p)}$	عنصر گروه ساختار $g_p^{BA} \in G$	$\mathbb{R}^d \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^d \psi_{TM,p}^B \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}$: نگاشت‌گذار
$((x^A)^{-1} \times \text{id}) \circ \hat{dx}^A$	$v \mapsto (\pi_{TM}(v), \psi_{TM, \pi_{TM}(v)}(v))$	$U^A \times \mathbb{R}^d \xrightarrow{\sim} \pi_{TM}^{-1}(U^A)$ $\Psi_{TM}^A :$ تربیوالیزاسیون محلی
$\left(\text{id} \times \frac{\partial x^B}{\partial x^A} \right)$	$(\text{id} \times g^{BA})$	$U^{AB} \times \mathbb{R}^d \xrightarrow{\sim} U^{AB} \times \mathbb{R}^d$ $\Psi_{TM}^B \circ (\Psi_{TM}^A)^{-1}$: نگاشت‌گذار
$\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \Big _p \right]_{\mu=1}^d = \left[(\hat{dx}_p^A)^{-1}(\epsilon_i) \right]_{\mu=1}^d$	از $\text{GL}(d)$ از $(\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i)$	$[e_i^A]_{i=1}^d \in F_p M$ چارچوب عمومی
$\left[\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu^A} \Big _p (\epsilon^A)_{\mu i}^{-1} \right]_{i=1}^d$	از G -اطلس	$[e_i^A]_{i=1}^d \in G_p M$ چارچوب G -ساختار

جدول ۷. یک نمای کلی از انواع مختلف مختصاتی‌سازی روی منیفلدها. فرماییسم کلاف (ستون سوم)، که در این کار استفاده می‌شود، مختصات را مستقیماً به فضاهای مماس اختصاص می‌دهد، در حالی که به نقاط p از فضای پایه M به روشنی مستقل از مختصات اشاره می‌کند. در مقابل، فرماییسم چارت (ستون چهارم) مختصات را به زیرمجموعه‌های محلی $U^X \subseteq M$ از منیفلد اختصاص می‌دهد. تربیوالیزاسیون‌های محلی کلاف مماس و نگاشتهای گذار کلاف بین آنها به عنوان دیفرانسیل‌های چارت‌ها و نگاشتهای گذار آنها، که دومی معمولاً به عنوان ژاکوبین‌ها نامیده می‌شوند، القا می‌شوند. ردیف ماقبل آخر عباراتی را برای چارچوب‌های مرجعی که به عنوان مقاطع همانی از تربیوالیزاسیون‌های محلی TM (ستون سوم) یا به عنوان پایه‌های مختصاتی القا شده توسط چارت (ستون چهارم) القا می‌شوند، ارائه می‌دهد. به طور مشابه، ردیف آخر تعاریف G -ساختارها \square به عنوان مثال چارچوب‌های راست‌هجار \square را از طریق یک G -اطلس برای TM (ستون سوم) و از طریق میدان‌های ولی‌بین به عنوان تبدیلات پیمانه نسبت به پایه‌های مختصاتی (ستون چهارم) مقایسه می‌کند. طبق معمول، ما $U^A \cap U^B \in U^{AB}$ مخفف می‌کنیم و فرض می‌کنیم



شکل ۶۶: یک کرnel مستقل از مختصات داده شده K_p روی فضای مماس $T_p M$ ممکن است در پیمانه های دلخواه ψ_p^A یا ψ_p^B نمایش داده شود. عبارات مختصاتی آن \mathcal{K}_p^A و \mathcal{K}_p^B روی \mathbb{R}^d به طور کلی با یکدیگر متفاوت هستند. کرnel های G -راهبری پذیر این ویژگی را دارند که دقیقاً شکل یکسانی را در تمام پیمانه ها به خود می گیرند، یعنی در $\mathcal{K}_p^A = \mathcal{K}_p^B = K$ صدق می کنند (در تصویر نشان داده نشده است).



شکل ۶۷: یک کرnel مستقل از مختصات ممکن است با اشتراک گذاری یک کرnel داده شده K روی \mathbb{R}^d نسبت به یک چارچوب مرجع تعریف شود. انتخاب های مختلف از چارچوب ها منجر به یک کرnel مستقل از مختصات متفاوت می شود. کرnel های G -راهبری پذیر این ویژگی را دارند که دقیقاً همان کرnel مستقل از مختصات نمایش داده شده است. این امر امکان اشتراک وزن را تولید می کنند، مستقل از چارچوب مرجع انتخاب شده که در امتداد آن به اشتراک گذاشته می شوند (در تصویر نشان داده نشده است). این امر امکان اشتراک وزن مستقل از مختصات را فراهم می کند.

ب اشتراک وزن مستقل از مختصات و کرnel های G -راهبری پذیر

یک فرض اساسی در طراحی کانولوشن های GM این است که کرnel های K روی \mathbb{R}^d نسبت به یک انتخاب از چارچوب مرجع، همانطور که در شکل ۶۷ به تصویر کشیده شده است، به اشتراک گذاشته می شوند. برای کرnel های عمومی، انتخاب های مختلف از چارچوب ها منجر به تراز های متفاوتی از کرnel مستقل از مختصات حاصل روی فضای مماس $T_p M$ می شود. با این حال، فرآیند اشتراک وزن، مستقل از مختصات نیست. شکل ۶۶ و ضعیت متفاوتی را نشان می دهد: در اینجا ما یک کرnel مستقل از مختصات K_p را فرض می کنیم که از قبل روی $T_p M$ داده شده است و آن را در پیمانه های مختلف روی \mathbb{R}^d بیان می کنیم. نمایش های مختصاتی \mathcal{K}_p^A و \mathcal{K}_p^B به طور کلی با یکدیگر موافق نیستند اما ساختار، مستقل از مختصات است.

کرnel های G -راهبری پذیر دقیقاً به گونه ای محدود شده اند که استقلال از مختصات فرآیند اشتراک وزن را تضمین کنند. اشتراک گذاری آنها نسبت به چارچوب های مختلف منجر به همان کرnel مستقل از مختصات روی فضای مماس می شود، یعنی هیچ تفاوتی بین دو کرnel در وسط شکل ۶۷ وجود نخواهد داشت. به طور معادل، کرnel مستقل از مختصات حاصل روی $T_p M$ هنگام بیان در پیمانه های مختلف، شکل یکسانی $\mathcal{K}_p^A = \mathcal{K}_p^B = K$ را به خود می گیرد، یعنی کرnel چپ و راست در شکل ۶۶ با هم موافق خواهند بود.

توجه داشته باشید که این لزوماً به این معنا نیست که کرnel به معنای $K(v) = K(gv)$ برای هر $v \in \mathbb{R}^d$ ناوردا باشد، همانطور که شهود بصری ممکن است القا کند. این در واقع یک مورد خاص برای کرnel هایی است که بین میدان های اسکالار نگاشت انجام می دهند، یعنی برای آنها باید $\rho_{\mathbb{R}^d}$ و هم $\rho_{\mathbb{R}^d}$ نمایش های بدیهی هستند (به عنوان مثال شکل ۶۷ برای $G = \mathbb{R}$ یا شکل ۴۸ برای $G = \mathbb{C}$ را ببینید). برای انواع میدان عمومی تر، کرnel های باید همودرای پیمانه باشند، یعنی باید محدودیت G -راهبری پذیری $(g)(v) = |det g|^{-1} \rho_{\mathbb{R}^d}(g)(v)$ را برآورده کنند که امکان هدایت کانال های کرnel $c_{\mathbb{R}^d} \times c_{\mathbb{R}^d}$ را فراهم می کند (در تصویر نشان داده نشده است). البته، کرnel های G -راهبری پذیر را می توان به معنای ناورداری پیمانه تفسیر کرد به این معنا که $K(v) = |det g| \rho_{\mathbb{R}^d}(g)(v)$ برای هر $v \in \mathbb{R}^d$ و هر $g \in G$ باشد.

یک بحث دقیق تر در مورد کرnel های مستقل از مختصات و عبارات مختصاتی آنها در بخش ۲.۲.۴ یافت می شود. محدودیت G -راهبری پذیری در بخش ۳۲۴ استخراج شده است.

پ انتگرال گیری روی فضاهای مماس

روی یک منفرد ریمانی (M, η) ، چگالی حجم dp^{150} روی M به طور یکتا با این الزام مشخص می‌شود که به چارچوب‌های راست‌هنجر $[e_1^O, \dots, e_d^O]$ نسبت به متريک η حجم واحد اختصاص داده شود:

$$dp(e_1^O, \dots, e_d^O) = 1 \quad T_p M [e_1^O, \dots, e_d^O] \text{ از} \quad (582)$$

به طور مشابه، یک چگالی حجم dv روی فضاهای مماس $T_p M$ از یک منفرد ریمانی به طور یکتا با اختصاص حجم واحد به چارچوب‌های راست‌هنجر آن نسبت به η_p تعریف می‌شود:

$$dv(e_1^O, \dots, e_d^O) = 1 \quad T_v T_p M [e_1^O, \dots, e_d^O] \text{ از} \quad (583)$$

برای جلوگیری از یک بحث بی‌جهت پیچیده در مورد کلاف مماس مضاعف TTM را به طور معادل با پولبک کردن آن از طریق یک پیمانه ایزو‌متريک (و در نتیجه حجم نگهدار) به \mathbb{R}^d تعریف می‌کنیم. فرض کنید $\psi_{TM,p}^O$ چنین پیمانه ایزو‌متريکی از یک اطلاس d باشد، که چارچوب‌های راست‌هنجر را در $T_p M$ با چارچوب‌های راست‌هنجر در \mathbb{R}^d یکی می‌گیرد. سپس انتگرال یک تابع $f : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ طریق پولبک آن تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \int_{T_p M} f(v) dv &:= \int_{\mathbb{R}^d} f \circ (\psi_{TM,p}^O)^{-1}(v^O) dv^O \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f^O(v^O) dv^O, \end{aligned} \quad (584)$$

که در آن عبارت مختصاتی $\int_{T_p M} f(v) dv = f \circ (\psi_{TM,p}^O)^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ را طبق معمول تعریف کردیم. این واقعیت که $\psi_{TM,p}^O$ ایزو‌متريک است در اینجا تضمین می‌کند که dv واحد حجم را به چارچوب‌های راست‌هنجر اختصاص می‌دهد اگر dv^O این کار را بکند. از آنجا که دومی فقط اندازه لگ استاندارد روی \mathbb{R}^d است، این مورد برقرار است.

حال فرض کنید $\psi_{TM,p}^A$ هر پیمانه‌ای در p باشد، که ممکن است بخواهیم انتگرال را نسبت به آن بیان کنیم. نگاشت گذار بین هر دو مختصاتی سازی به سادگی با تبدیل پیمانه $(v^A)^{-1} \circ \psi^O = g_p^{OA}(v^A) = g_p^{OA}$ داده می‌شود. طبق قوانین استاندارد برای تغییر متغیرها در انتگرال‌های چندبعدی، دیفرانسیل‌ها باید مطابق با دترمینان ژاکوبین این تبدیل تغییر کنند تا حجم حفظ شود. از آنجا که تبدیل خطی است، ژاکوبین با خود g_p^{OA} داده می‌شود، به طوری که به دست می‌آوریم

$$\int_{T_p M} f(v) dv = \int_{\mathbb{R}^d} f^A(v^A) |\det(g_p^{OA})| dv^A. \quad (585)$$

از طریق تبدیل پیمانه، این عبارت هنوز به انتخاب دلخواه از پیمانه ایزو‌متريک $\psi_{TM,p}^O$ بستگی دارد. این وابستگی را می‌توان با بیان مستقیم اندازه انتگرال بر حسب متريک به صورت

$$\int_{T_p M} f(v) dv = \int_{\mathbb{R}^d} f^A(v^A) \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A, \quad (586)$$

از بین برد، که در آن ضریب

$$\sqrt{|\eta_p^A|} := \sqrt{\left| \det \left([\eta_p(e_i^A, e_j^A)]_{ij} \right) \right|} \quad (587)$$

حجم (مطلق) چارچوب مرجع $[e_i^A]_{i=1}^d$ را نسبت به متريک η اندازه گیری می‌کند. برای تأیید برایری سمت راست معادلات (585) و (586)، ما متريک η_p از $T_p M$ را بر حسب حاصلضرب داخلی استاندارد $\langle \cdot, \cdot \rangle$ از \mathbb{R}^d بیان می‌کنیم، که دوباره با استفاده از پیمانه ایزو‌متريک $\psi_{TM,p}^O$ از اطلاس d انجام می‌شود:

$$\begin{aligned} \eta_p(e_i^A, e_j^A) &= \langle \psi_{TM,p}^O(e_i^A), \psi_{TM,p}^O(e_j^A) \rangle \\ &= \langle \psi_{TM,p}^O \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_i), \psi_{TM,p}^O \circ (\psi_{TM,p}^A)^{-1}(\epsilon_j) \rangle \\ &= \langle g_p^{OA} \epsilon_i, g_p^{OA} \epsilon_j \rangle \\ &= \epsilon_i^\top (g_p^{OA})^\top g_p^{OA} \epsilon_j \\ &= \left((g_p^{OA})^\top g_p^{OA} \right)_{ij} \end{aligned} \quad (588)$$

¹⁵⁰ برخلاف یک فرم حجم ω ، چگالی‌های حجم $[\omega]$ یک حجم مثبت را به هر چارچوب اختصاص می‌دهند. آنها هم روی منفردی‌های جهت‌بذر و هم غیرجهت‌بذر وجود دارند.

$$\begin{aligned} \left| \det \left([\eta_p(e_i^A, e_j^A)]_{ij} \right) \right| &= \left| \det \left((g_p^{OA})^\top g_p^{OA} \right) \right| \\ &= \left| \det \left((g_p^{OA})^\top \right) \det \left(g_p^{OA} \right) \right| \\ &= \left| \det \left(g_p^{OA} \right) \right|^2, \end{aligned} \quad (589)$$

داده می شود، که از آن برابری سمت راست معادلات (۵۸۵) و (۵۸۶) با گرفتن ریشه دوم نتیجه می شود.

از آنجا که ضرایب $\sqrt{|\eta_p^B|}$ و $\sqrt{|\eta_p^A|}$ حجم های چارچوب های مربوطه خود را اندازه گیری می کنند، به راحتی می توان نشان داد که آنها با تغییر حجم وارون $|\det g_p^{BA}|$ به هم مرتبط هستند:

$$\sqrt{|\eta_p^B|} = \frac{1}{|\det g_p^{BA}|} \sqrt{|\eta_p^A|} \quad (\text{چگالی ۱} - \Rightarrow) \quad (590)$$

این به همراه فرمول معمول تغییر متغیرها

$$dv^B = |\det g_p^{BA}| dv^A \quad (\text{چگالی ۱} + \Rightarrow), \quad (591)$$

دلالت بر این دارد که مختصاتی سازی های عنصر حجم ریمانی dv بنا به طراحی تحت تبدیلات پیمانه ناوردا هستند، یعنی،

$$\sqrt{|\eta_p^B|} dv^B = \sqrt{|\eta_p^A|} dv^A \quad (\text{چگالی ۰} \Rightarrow). \quad (592)$$

این رابطه تضمین می کند که انتگرال گیری در معادله (۵۸۶) خوش تعریف است، یعنی مستقل از مختصات است.

ت کانولوشن های هموردا روی فضاهای همگن

کارهای \mathcal{I} ، \mathcal{I}^\perp و \mathcal{I}^\perp از نظر روحی بسیار شبیه به کار ما هستند، به این معنا که آنها کانولوشن های هموردا یک چارچوب نسبتاً عمومی تعریف می کنند. این مقالات در این مشترک هستند که روى نقشه های ویژگی روى فضاهای همگن \mathcal{I}/H از یک گروه تقارن سراسری \mathcal{I} عمل می کنند، که در آن $H \leq \mathcal{I}$ ^{۱۵۲} آنها در انواع گروه های \mathcal{I} که پوشش می دهند و در تعریف فضاهای ویژگی خود، به ویژه عمل های گروهی خطی روی آنها، متفاوت هستند. قضایای اصلی این مقالات تأیید می کنند که عومومی ترین نگاشتهای خطی هموردا بین چنین فضاهای ویژگی، کانولوشن های (یا همبستگی ها) با کرنل های دارای محدودیت تقارنی هستند. جزئیات خاص در مورد این کانولوشن های تعیین یافته به فضاهای ویژگی و عمل های گروهی خاصی که مدل ها در نظر می گیرند، بستگی دارد.

این پیوست این نظریه ها و ارتباط آنها را با کانولوشن های مستقل از مختصات ما بررسی می کند. مهمترین شباهت ها و تفاوت ها در لیست زیر خلاصه شده اند:

- هر فضای همگن یک منفرد ریمانی نیست و هر منفرد ریمانی یک فضای همگن از گروه ایزو متري خود نیست.^{۱۵۳} با این حال، یک همپوشانی قابل توجه وجود دارد، به عنوان مثال برای CNN های اقليدسي روی $E_d \cong \mathbb{R}^d$ یا $CNN(d)/d$ با $S^d \cong d + 1/d$ شده اند.
- نویسنده کان به ترتیب گروه های فشرده \mathcal{I} ، فشرده محلی، یکنواخت \mathcal{I} ، و لی \mathcal{I} را در نظر می گیرند. گروه های تقارن سراسری \mathcal{I} در نظریه ما ایزو متري های M یا، به طور خاص برای فضاهای اقليدسي، گروه های افاین $Aff(G)$ هستند. توجه داشته باشید که گروه های افاین فشرده نیستند و فقط برای $d \leq G$ یکنواخت هستند □ بنابراین گروه های افاین عومومی در نظریه های مربوطه پوشش داده نمی شوند.
- CNN های مستقل از مختصات، تمرکز را از تقارن های سراسری به تقارن های محلی منتقل می کنند. روى فضاهای همگن \mathcal{I}/H این تقارن های محلی متناظر با زیر گروه های پایدار اساز $Stab_p \cong H$ هستند. بخش ما روابط بین تقارن های سراسری و محلی را با جزئیات بررسی می کند □ هموردابی محلی مدل ها، هموردابی سراسری آنها را القا می کند.
- مدل ها انواع مختلفی از میدان های ویژگی و عمل های گروهی را روی آنها فرض می کنند: \mathcal{I} و \mathcal{I}^\perp میدان های اسکالر را روی فضاهای همگن فرض می کنند، یعنی توابع با مقادیر حقیقی $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{I}/H$ که مطابق با $f(\phi^{-1} \zeta \cdot H) = f(\zeta \cdot H)$ است.

^{۱۵۱} ما در اینجا از \mathcal{I} برای نشان دادن تقارن های سراسری دلخواه استفاده می کنیم، نه لزوماً ایزو متري ها.

^{۱۵۲} [] به جای \mathcal{I} از G برای اشاره به تقارن های سراسری استفاده می کنند. ما از \mathcal{I} استفاده می کنیم، زیرا G را برای گروه ساختاری رزرو کرده ایم.
^{۱۵۳} به عنوان مثال، $\{\pm 1\} / SO(2) \cong \{\pm 1\} / \mathcal{I}$ یک مجموعه است اما یک منفرد ریمانی نیست. مثال دیگر، کانولوشن های گروهی $(\mathbb{Z}^d, +)$ روی شبکه پیکسلی گستته \mathbb{Z}^d است.

^{۱۵۴} نقشه های ویژگی چند کاناله با روی هم قرار دادن چندین تابع از این نوع ساخته می شوند. برخلاف مورد میدان های ویژگی، کانال های منفرد چنین نقشه های ویژگی به طور مستقل از یکدیگر تبدیل می شوند.

؟ [میدان‌های ویژگی از انواع عمومی تر ρ را در نظر می‌گیرند که به عنوان مقاطعی از کلاف‌های بردار ویژگی همبسته H تعریف می‌شوند. قوانین تبدیل آنها با نمایش‌های القایی $\text{Ind}_H^{\mathcal{I}} \rho$ داده می‌شود. این تنظیم، توابع با مقادیر حقیقی از \mathbb{R} را به عنوان یک مورد خاص هنگام انتخاب نمایش‌های میدان بدینه (یا، همانطور که در ادامه دقیق‌تر بیان می‌شود، نمایش‌های خارج‌قسمتی عمومی تر $\rho_{\mathbb{R}^{G/H}}$ که در آن $\mathcal{I} \leq G \leq H$ پوشش می‌دهد. نظریه مانیز میدان‌های ویژگی را به عنوان مقاطعی از کلاف‌های همبسته مدل می‌کند. تبدیل آنها با پوش‌فورواردها $\phi_{*,*} : f \mapsto f \circ \phi^{-1}$ داده می‌شود، که نمایش‌های القایی را تعیین می‌دهند.

• کارهای \mathbb{R} ، \mathbb{C} و \mathbb{H} [اشتراک و وزن کانولوشنی را از الزام هموردایی سراسری مدل‌ها استخراج می‌کنند. از سوی دیگر، کانولوشن‌های GM ما، بنابر تعریف، وزن‌ها را روی G -ساختار به اشتراک می‌گذارند. ما ایده استخراج اشتراک و وزن از تقارن‌های سراسری (ایزومنتری‌ها) را در بخش ۳.۸ اتخاذ کردیم. الزام به هموردایی ایزومنتری، اشتراک و وزن را روی مدارهای ایزومنتری و یک محدودیت پایدارساز را روی کرنل‌ها نتیجه می‌دهد؛ به عنوان مثال به شکل ۴۰ مراجعه کنید. قضیه ۸.۱۴ تأیید می‌کند که تبدیلات میدان کرنل هموردای ایزومنتری روی فضاهای همگن، کانولوشن‌های GM هستند [این نتیجه نتایج \mathbb{R} ، \mathbb{C} و \mathbb{H} را به دقت منعکس می‌کند.

• همه این نظریه‌ها یک محدودیت تقارنی خطی بر روی فضاهای کرنل را استخراج می‌کنند. در مورد \mathbb{R} و \mathbb{C} ، کرنل‌ها اساساً توابع اسکالار روی فضاهای خارج‌قسمتی ماضعف $H_{\mathbb{R}^{G/H}} / \mathcal{I}$ هستند (با فرض همبستگی‌ها، برای کانولوشن‌ها $H_{\mathbb{R}^{G/H}}$ جایجاً می‌شوند؛ به ادامه مراجعه کنید). کرنل‌های \mathbb{H} در نظریه ما، یک محدودیت راهبری‌پذیری را برآورده می‌کنند که به انتخاب خاص انواع میدان $\rho_{\mathbb{H}}$ و $\rho_{\mathbb{H}^{G/H}}$ دارد. توجه داشته باشید که ضریب دترمینان در محدودیت G -راهبری‌پذیری \mathbb{H} وجود ندارد زیرا نویسنده‌گان به گروه‌های یکنواخت محدود می‌شوند. این ضریب در محدودیت کرنل توسط \mathbb{H} ظاهر می‌شود.

• در حالی که \mathbb{R} و \mathbb{H} [کرنل‌ها را بلطفه روى گروه يا فضای همگن توصیف می‌کنند، \mathbb{C} و کانولوشن‌های GM ما کرنل‌ها را روی فضاهای مماس تعریف کرده و متعاقباً آنها را از طرق نگاشت‌نمایی به فضاهای همگن تصویر می‌کنند. این رویکردها به طور کلی معادل نیستند، به عنوان مثال زیرانگاشت‌نمایی روی یک منفرد ناهمبند، یک‌به‌یک نیست. روی فضاهای اقایدی‌سی، هر دو رویکرد به وضوح معادل هستند؛ به بخش ۳.۹ مراجعه کنید. قضیه ما ۱۱.۱ در بخش ۲.۱۱ علاوه بر این، این شکاف را برای کرنل‌های کروی با ارائه یک ایزومنورفیسم بین کرنل‌های دو رویکرد، پر می‌کند. در عمل، ناسازگاری عمومی بی‌اهمیت است زیرا کرنل‌های شبکه‌های کانولوشنی معمولاً دارای تکیه‌گاه فشرده در داخل شعاع اثرکنیته نگاشت‌نمایی هستند.

ما در ادامه به تفصیل به نظریه‌های \mathbb{R} ، \mathbb{C} و \mathbb{H} خواهیم پرداخت. به عنوان یک آمادگی، ابتدا به بحث در مورد فضاهای همگن، کانولوشن‌های گروهی و همبستگی‌های گروهی می‌پردازیم. برای یک مرور جایگزین از این موضوع، خواننده را به \mathbb{R} ارجاع می‌دهیم. ملاعوه بر این می‌خواهیم به کار \mathbb{R} اشاره کنیم، که همچنین کانولوشن‌ها را روی فضاهای همگن تعریف می‌کنند. این کار در این بخش با جزئیات بیشتری پوشش داده شده است زیرا مدل‌های آنها $e = H_{\mathbb{R}^{G/H}}$ را فرض می‌کنند، یعنی کرنل‌های کانولوشن آنها نامحدود هستند و همیشه سیگنال ورودی را به یک میدان اسکالار روی \mathbb{R} ارتقا می‌دهند.

ت. ۱ ملاحظات عمومی در مورد فضاهای همگن، کانولوشن‌های گروهی و همبستگی‌های گروهی

فضاهای همگن: فرض کنید \mathcal{I} یک گروه باشد که بر روی یک فضای X عمل می‌کند. گفته می‌شود این فضا همگن است اگر عمل گروه متعدد باشد، یعنی اگر هر دو نقطه $p, q \in X$ با عمل \mathcal{I} به هم مرتبط باشند. در معادلات، X همگن است اگر و تنها اگر برای هر $p, q \in X$ یک عضو $\phi \in \mathcal{I}$ وجود داشته باشد به طوری که $\phi(p) = q$. توجه داشته باشید که عمل بر روی X لزوماً بدون نقطه ثابت نیست، یعنی هر نقطه $p \in X$ دارای یک زیرگروه پایدارساز بالقوه غیربدینه $\text{Stab}_p = \{x \in \mathcal{I} \mid x(p) = p\} \leq \mathcal{I}$ است. می‌توان نشان داد که فضای همگن را می‌توان با فضای خارج‌قسمتی \mathcal{I}/H یکی گرفت که در آن $H = \text{Stab}_p$ برای یک $p \in X$ است.^{۱۵۵}

از آنجا که هر فضای همگن به عنوان یک خارج‌قسمت به وجود می‌آید، ما در ادامه همیشه یک زیرگروه H از \mathcal{I} را در نظر می‌گیریم. این زیرگروه دارای همدسته‌های چپ است، یعنی زیرمجموعه‌هایی به شکل

$$\phi.H = \{\phi.h \mid h \in H\} \quad (593)$$

که اعضای فضای خارج‌قسمتی (همگن)

$$\mathcal{I}/H = \{\phi.H \mid \phi \in \mathcal{I}\}. \quad (594)$$

هستند. یک عمل چپ طبیعی از \mathcal{I}/H بر روی \mathcal{I}/H با

$$\mathcal{I} \times \mathcal{I}/H \rightarrow \mathcal{I}/H, \quad (\tilde{\phi}, \phi.H) \mapsto \tilde{\phi}\phi.H. \quad (595)$$

^{۱۵۵} انتخاب‌های دیگر از نقاط، تحقیق‌های دیگری از ایزومنورفیسم غیرکانونی $X/\mathcal{I}/H \cong \mathcal{I}/H$ را به دست می‌دهند. هر انتخابی به همان اندازه معتبر است زیرا برای فضاهای همگن $\text{Stab}_p \cong \text{Stab}_q$ است.

داده می شود. به راحتی دیده می شود که این عمل متعدد است، و \mathcal{I}/H را به یک فضای همگن از \mathcal{I} تبدیل می کند. نگاشت خارج قسمتی کانونی

$$q_{\mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/H, \phi \mapsto \phi.H \quad (596)$$

\mathcal{I} را به یک کلاف اصلی H روی \mathcal{I}/H تبدیل می کند. تعاریف مشابهی را می توان برای هم دسته های راست

$$H.\phi \in H \setminus \mathcal{I}. \quad (597)$$

و هم دسته های مضاعف

$$\tilde{H}.\phi.H \in \tilde{H} \setminus \mathcal{I}/H \quad (598)$$

و فضاهای خارج قسمتی مربوطه آنها انجام داد.

یک ویژگی جهانی از نگاشته های خارج قسمتی $q_{\mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}}$ که در بحث ما در ادامه مهم خواهد شد، به شرح زیر است. فرض کنید $f^{\dagger} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته و ناوردای-راست نسبت به H باشد، یعنی تابعی که $(\phi)(f^{\dagger}) = f^{\dagger}(\phi)$ را برای هر $\phi \in \mathcal{I}$ و $f^{\dagger}(h) = h$ برآورده می کند. آنگاه یک تابع پیوسته یکتا $f : \mathcal{I}/H \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $f^{\dagger} = f \circ q_{\mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}}$ است. بر عکس، می توان هر نگاشت پیوسته $f : \mathcal{I}/H \rightarrow \mathbb{R}$ را به طور یکتا به یک نگاشت ناوردای-راست نسبت به H به صورت $f^{\dagger} = f \circ q_{\mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}}$ ارتفا داد، که توسط $\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ برای تعیین کانولوشن های گروهی به فضاهای همگن استفاده می شود. رابطه بین هر دو تابع در نمودار جابجایی زیر به تصویر کشیده شده است:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} & & \\ q_{\mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}} \downarrow & \searrow !f^{\dagger} := f \circ q_{\mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}} & \\ \mathcal{I}/H & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{array} \quad (599)$$

یک ساختار مشابه را می توان به وضوح برای فضاهای خارج قسمتی راست $H \setminus \mathcal{I}$ و نگاشته های ناوردای-چپ نسبت به H انجام داد. نمودار جابجایی زیر مورد فضاهای خارج قسمتی مضاعف نگاشته های f^{\dagger} و $\tilde{H} \setminus \mathcal{I}/H$ را که همزمان ناوردای-چپ نسبت به \tilde{H} و ناوردای-راست نسبت به H هستند، به تصویر می کشد، یعنی در $(\phi)(f^{\dagger})(\tilde{h}\phi h) = f^{\dagger}(\phi)$ برای هر $\phi \in \mathcal{I}$ ، $\tilde{h} \in \tilde{H}$ و $h \in H$ صدق می کنند:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} & & \\ q_{\tilde{H} \setminus \mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}} \downarrow & \searrow !f^{\dagger} := f \circ q_{\tilde{H} \setminus \mathcal{I}/H}^{\mathcal{I}} & \\ \tilde{H} \setminus \mathcal{I}/H & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{array} \quad (600)$$

کانولوشن های گروهی و همبستگی های گروهی: کانولوشن ها به طور طبیعی از فضاهای اقلیدسی (با گروه های انتقال) به گروه های فشرده محلی دلخواه تعیین داده می شوند. فرض کنید \mathcal{I} یک گروه فشرده محلی باشد و $d\zeta$ یک اندازه هار چپ روی \mathcal{I} باشد. کانولوشن گروهی $(f *_{\mathcal{I}} \kappa)$ باشد. کانولوشن κ را می توان از دو تابع انتگرال بذیر $\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ و $\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ با عبارات معادل زیر، که از $[?]$ گرفته شده اند، تعريف می شود:

$$\begin{aligned} (f *_{\mathcal{I}} \kappa)(\phi) &:= \int_{\mathcal{I}} f(\zeta) \kappa(\zeta^{-1} \phi) d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{I}} f(\phi \zeta) \kappa(\zeta^{-1}) d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{I}} f(\zeta^{-1}) \kappa(\zeta \phi) \Delta(\zeta^{-1}) d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{I}} f(\phi \zeta^{-1}) \kappa(\zeta) \Delta(\zeta^{-1}) d\zeta, \end{aligned} \quad (601)$$

همومورفیسم گروهی $(*) : \mathcal{I} \rightarrow (\mathbb{R}_{>0}^+)$ که در دو عبارت آخر ظاهر می شود، تابع مدولار \mathcal{I} است. $[?]$ کانولوشن های گروهی را مانند خط آخر تعريف می کنند، با این حال، بدون تابع مدولار. این معتبر است زیرا نویسنده گان گروه های فشرده را فرض می کنند، که یکنواخت هستند، یعنی $\Delta(\phi) = \phi$ برآورده می کنند.

مرتبط با کانولوشن‌های گروهی، همبستگی‌های گروهی هستند

$$(f \star_{\mathcal{I}} \kappa)(\phi) := \langle f, \phi \cdot \kappa \rangle_{L^1(\mathcal{I})} = \int_{\mathcal{I}} f(\zeta) \kappa(\phi^{-1}\zeta) d\zeta, \quad (6.2)$$

که به عنوان حاصلضرب داخلی یک تابع f با یک کرنل جایجا شده است. یک مقایسه با معادله (6.1) نشان می‌دهد که کانولوشن‌های گروهی و همبستگی‌های گروهی تا یک وارونگی آرگومان کرنل، معادل هستند، یعنی،

$$(f \star_{\mathcal{I}} \kappa) = (f *_{\mathcal{I}} [\kappa \circ (\cdot)^{-1}]). \quad (6.3)$$

در حالی که \star [کانولوشن‌های گروهی (تعمیم‌یافته) را در نظر می‌گیرند، $*$ و \circ] همبستگی‌ها را فرض می‌کنند \square برای تطبیق نظریه‌ها باید آرگومان‌های کرنل را وارون کرد.

کانولوشن‌های گروهی و همبستگی‌های گروهی تا به تعریف نسبت به عمل‌های چپ $(\alpha \cdot f)(\phi) = f(\alpha^{-1}\phi)$ از اعضای گروه $\alpha \in \mathcal{I}$ بر روی عامل اول هموردا هستند. برای مورد کانولوشن‌های این با

$$\begin{aligned} ([\alpha \cdot f] *_{\mathcal{I}} \kappa)(\phi) &= \int_{\mathcal{I}} [\alpha \cdot f](\zeta) \kappa(\zeta^{-1}\phi) d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{I}} f(\alpha^{-1}\zeta) \kappa(\zeta^{-1}\phi) d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{I}} f(\tilde{\zeta}) \kappa(\tilde{\zeta}^{-1}\alpha^{-1}\phi) d(\alpha\tilde{\zeta}) \\ &= (f *_{\mathcal{I}} \kappa)(\alpha^{-1}\phi) \\ &= [\alpha \cdot (f *_{\mathcal{I}} \kappa)](\phi), \end{aligned} \quad (6.4)$$

نشان داده می‌شود، که در آن ما در مرحله سوم $\tilde{\zeta} = \alpha^{-1}\zeta$ را جایگزین کردیم و از این واقعیت استفاده کردیم که $\tilde{\zeta}$ یک اندازه هار چپ است، یعنی $d\tilde{\zeta} = d(\alpha\tilde{\zeta})$ را برآورده می‌کند. مورد همبستگی‌ها به طور بدینه از معادله (6.3) نتیجه می‌شود.

اکثر CNN‌های هموردا بر کانولوشن‌های گروهی یا همبستگی‌های گروهی تکیه دارند. به طور خاص، مدل‌های ردیف‌های (۱۱)، (۱۵)، (۲۱)، (۲۴)، (۲۵) و (۳۲) از جدول ۶ که همگی با نمایش‌های منظم برچسب‌گذاری شده‌اند (یا می‌توانند به طور معادل برچسب‌گذاری شوند)، CNN‌های کانولوشنی گروهی هستند. پیش از استفاده از آنها در CNN‌های هموردا، کانولوشن‌های گروهی به طور گسترده در ریاتیک \mathbb{R}^n یا برای تحلیل تصویر \mathbb{R}^3 به کار رفته‌اند. \mathbb{R}^n نشان دادند که کانولوشن‌های گروهی (یا بهتر بگوییم همبستگی‌ها) به طور طبیعی کانولوشن‌های متعارف را تعیین می‌دهند. از آنجا که نقشه‌های شبکه‌های کانولوشنی شامل چندین کانال هستند، آنها با توابع با مقادیر حقیقی روی \mathcal{I} داده نمی‌شوند بلکه با توابع با مقادیر برداری $\mathbb{R}^c \rightarrow \mathcal{I}$: f داده می‌شوند. کرنل‌ها بر این اساس به عنوان توابع ماتریسی (نامحدود) روی گروه تعیین شوند، یعنی $\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\text{out}} \times c_{\text{in}}}$. کارهای $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^c$ که در ادامه مورم می‌کنیم، چنین شبکه‌های کانولوشنی گروهی را به فضاهای همگن دلخواه تعیین می‌دهند.

ت. ۲ کانولوشن‌های میدان اسکالار روی فضاهای همگن

ما با شبکه‌های کانولوشنی (یا همبستگی) \mathcal{I} -هموردا روی فضاهای همگن توسط \star و $*$ شروع می‌کنیم. هر دو نظریه، نقشه‌های ویژگی را به عنوان میدان‌های اسکالار روی فضاهای همگن تعیین می‌کنند، یعنی هر کانال با یک تابع با مقادیر حقیقی

$$f : \mathcal{I}/H \rightarrow \mathbb{R}. \quad (6.5)$$

داده می‌شود. کانال‌های منفرد به طور مستقل تحت عمل گروه تقارن سراسری \mathcal{I} همانطور که با

$$[\tilde{\phi} \cdot f](\phi \cdot H) := f(\tilde{\phi}^{-1} \phi \cdot H) \quad \tilde{\phi} \in H, \quad \phi \cdot H \in \mathcal{I}/H. \quad (6.6)$$

مشخص شده است، تبدیل می‌شوند.

هر لایه $L = 1, \dots, L$ ممکن است یک زیرگروه متفاوت \mathcal{I} / H_l و در نتیجه یک فضای همگن \mathcal{I} / H_l داشته باشد که نقشه‌های ویژگی آن روی آن زندگی می‌کنند. این به عنوان مثال اجزه می‌دهد تا کانولوشن‌های ارتقا دهنده از کره $S^2 \cong \text{SO}(3)/\text{SO}(2)$ به مینفلد گروه $\text{SO}(3)/\{e\}$ را با انتخاب به ترتیب زیرگروه‌های $\text{SO}(2)$ و $\{e\}$ مدل‌سازی کنیم. انتخاب‌های زیرگروه‌ها به نوعی با انتخاب‌های نمایشن‌های گروهی در نظریه ما مطابقت دارند، که در ادامه بیشتر توضیح خواهیم داد.

نتایج این دو مقاله تا حد زیادی معادل هستند، با این حال، \star [گروه‌های فشرده \mathcal{I} و کانولوشن‌ها را در نظر می‌گیرند در حالی که $*$ فرض می‌کند \mathcal{I} یک گروه لی است و از همبستگی‌ها استفاده می‌کند.

؟ [به طور خلاصه، [عمومی ترین نگاشت‌های خطی $\mathcal{I}/H_{\square\square\square}$ روی فضاهای همگن $H_{\square\square\square}/\mathcal{I}$ و $\mathcal{I}/H_{\square\square\square}$ با فرض قانون تبدیل در معادله (۶۰۶) بررسی می‌کنند. آنها اثبات می‌کنند که این عملیات با یک کانولوشن گروهی تعیین‌یافته با یک کرنل

$$\kappa : H_{\square\square\square} \setminus \mathcal{I}/H_{\square\square\square} \rightarrow \mathbb{R} \quad (607)$$

روی فضای خارج قسمتی مضعف مشخص شده توسط $H_{\square\square\square}$ و $H_{\square\square\square}/\mathcal{I}$ داده می‌شود. با فرمول‌بندی برای گروه‌های متاگی، همانطور که توسط نویسنده‌گان انجام شده است، نشان داده می‌شود که این عملیات کانولوشن تعیین‌یافته با

$$(f *_{\mathcal{I}/H_{\square\square\square}} \kappa)(\phi.H_{\square\square\square}) := |H_{\square\square\square}| \sum_{H_{\square\square\square}, \zeta \in H_{\square\square\square} \setminus \mathcal{I}} f(\phi \zeta^{-1}.H_{\square\square\square}) \kappa(H_{\square\square\square}, \zeta.H_{\square\square\square}). \quad (608)$$

داده می‌شود. یک مقایسه با خط آخر معادله (۶۰۱) نشان می‌دهد که این عملیات واقعاً به شدت به کانولوشن‌های گروهی مرتبط است [تابع مدولار Δ حذف می‌شود زیرا \mathcal{I} فشرده و در نتیجه یکنواخت است. کانولوشن تعیین‌یافته در واقع معادل یک کانولوشن گروهی

$$(f *_{\mathcal{I}/H_{\square\square\square}} \kappa)(\phi.H_{\square\square\square}) = (f^\dagger *_{\mathcal{I}} \kappa^\dagger)(\phi) \quad (609)$$

با ویژگی‌ها و کرنل‌هایی است که مطابق با نمودارهای معادلات (۵۹۹) و (۶۰۰) ارتقا یافته‌اند. توجه داشته باشید که کرنل کانولوشن روی $H_{\square\square\square} \setminus \mathcal{I}/H_{\square\square\square}$ متناظر با یک کرنل همبستگی روی $H_{\square\square\square}/\mathcal{I}/H_{\square\square\square}$ است زیرا کانولوشن‌ها و همبستگی‌ها طبق معادله (۶۰۳) با یک وارونگی آرگومان کرنل به هم مرتبط هستند. بنابراین می‌توان کرنل‌های [را به عنوان کرنل‌های همبستگی ناورداری-چپ نسبت به $H_{\square\square\square}$ روی فضای ورودی $\mathcal{I}/H_{\square\square\square}$ در نظر گرفت.

برای ارائه یک شهود در مورد این نتایج، به مثال CNN کروی خود که در بالا ذکر شد، باز می‌گردیم. بنابراین فرض کنید $\mathcal{I} = \text{SO}(3)$ و $H_{\square\square\square} = \text{SO}(2)$ و برای حال، $\{e\}$. $H_{\square\square\square} = \text{SO}(3)/\text{SO}(2) \cong S^1$ -بعدی $\mathcal{I}/H_{\square\square\square} = \text{SO}(3)/\{e\} \cong \text{SO}(3)$ را به منيفلد گروه دوران $H_{\square\square\square}/\mathcal{I}/H_{\square\square\square} = \text{SO}(3)/\{e\}$ توصیف می‌کند. با در نظر گرفتن همبستگی‌ها به جای کانولوشن‌ها، کرنل‌ها توابع با مقادیر حقیقی روی S^1 به جای آن $H_{\square\square\square}/\mathcal{I}/H_{\square\square\square} = \{e\} \setminus \text{SO}(2)/\text{SO}(2) \cong S^1$ هستند. اگر به جای آن $H_{\square\square\square}$ را قرار دهیم، کانولوشن از میدان‌های اسکالار روی کره-۲-بعدی به میدان‌های اسکالار روی کره-۲-بعدی $\mathcal{I}/H_{\square\square\square} = \text{SO}(3)/\text{SO}(2)$ می‌دهد. در این حالت، کرنل‌های همبستگی با توابع با مقادیر حقیقی روی $\text{SO}(2)/\text{SO}(3) \setminus \text{SO}(2)$ داده می‌شوند. به طور معادل، کرنل‌های همبستگی با توابع ناورداری-چپ نسبت به $\text{SO}(2)$ روی S^1 داده می‌شوند، یعنی کرنل‌های ناحیه‌ای همانطور که در شکل ۴۸ به تصویر کشیده شده است. هنگام فرض $\mathcal{I}/H_{\square\square\square} = \text{SO}(3)/\text{SO}(2)$ ، ما $H_{\square\square\square} = \{e\}$ ، $H_{\square\square\square} = H_{\square\square\square} \setminus \mathcal{I}/H_{\square\square\square} \cong \text{SO}(3)/\text{SO}(2) \cong \text{SO}(3)$ را داریم، که متناظر با کانولوشن‌های گروهی متعارف (یا همبستگی‌ها) است. این نتایج با بحث ما در بخش ۲.۱۱ مطابقت دارد.

برای کامل بودن، ما اشاره می‌کنیم که [تابع خود را علاوه بر این از یک دیدگاه نظریه نمایشی، یعنی با ویژگی‌ها و کرنل‌ها در فضای فوریه، توضیح می‌دهند. این واقعیت که ویژگی‌ها و کرنل‌ها روی فضاهای خارج قسمتی زندگی می‌کنند، در این فرمول‌بندی در الگوهای پراکنده‌گی ضرایب فوریه منعکس می‌شود.

؟ [به جای در نظر گرفتن گروه‌های فشرده، [فرض می‌کند \mathcal{I} یک گروه لی عمومی است. نقشه‌های ویژگی لایه آ [به عنوان توابع انتگرال‌پذیر مربع با مقادیر حقیقی در $L^*(\mathcal{I}/H_{\square\square\square})$ تعریف می‌شوند که هنگام عمل \mathcal{I} بر روی آنها، مطابق با معادله (۶۰۶) تبدیل می‌شوند.

؟ [لایه‌های شبکه‌های کانولوشنی (یا بهتر بگوییم همبستگی) خود را به عنوان عملگر‌های خطی کران‌دار

$$\mathfrak{K} : L^*(\mathcal{I}/H_{\square\square\square}) \rightarrow L^*(\mathcal{I}/H_{\square\square\square}) \quad (610)$$

بین نقشه‌های ویژگی روی فضاهای همگن $\mathcal{I}/H_{\square\square\square}$ و $\mathcal{I}/H_{\square\square\square}$ مدل می‌کند. چنین عملگر‌هایی به طور کلی با عملگر‌های انتگرالی به شکل

$$[\mathfrak{K}f](\phi.H_{\square\square\square}) = \int_{\mathcal{I}/H_{\square\square\square}} \widehat{\kappa}(\phi.H_{\square\square\square}, \zeta.H_{\square\square\square}) f(\zeta.H_{\square\square\square}) d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square\square}}, \quad (611)$$

داده می‌شوند، که در آن $d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square\square}}$ یک اندازه رادون روی $\mathcal{I}/H_{\square\square\square}$ و

$$\widehat{\kappa} : \mathcal{I}/H_{\square\square\square} \times \mathcal{I}/H_{\square\square\square} \rightarrow \mathbb{R} \quad (612)$$

یک کرنل-۲-آرگومانی انتگرال‌پذیر است.

از این بر روی عملگر برای هموردا بودن، یعنی،

$$\mathfrak{K}(\phi.f) = \phi.\mathfrak{K}(f) \quad \forall \phi \in \mathcal{I}, f \in L^*(\mathcal{I}/H_{\square\square\square}), \quad (613)$$

نشان داده می شود که دلالت بر این دارد که کرنل تک آر گومانی کاهش می باید

$$\hat{\kappa}(\phi \cdot H_{\square\square}, \zeta \cdot H_{\square\square}) = \frac{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square}}(\phi^{-1}\zeta \cdot H_{\square\square})}{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square}}(\zeta \cdot H_{\square\square})} \kappa(\phi^{-1}\zeta \cdot H_{\square\square}). \quad (614)$$

عضو گروه $\phi \in \phi \cdot H_{\square\square} \subset \mathcal{I}$ در اینجا یک نماینده دلخواه از هم دسته ای است که در آن قرار دارد. این کرنل ۱-آر گومانی \square تا یک ضرب مقیاس وابسته به اندازه \square محدود به ناوردایی چپ نسبت به $H_{\square\square}$ است:

$$\kappa(\zeta \cdot H_{\square\square}) = \frac{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square}}(\xi^{-1}\zeta \cdot H_{\square\square})}{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square}}(\zeta \cdot H_{\square\square})} \kappa(\xi^{-1}\zeta \cdot H_{\square\square}) \quad \forall \zeta \cdot H_{\square\square} \in \mathcal{I}/H_{\square\square}, \xi \in H_{\square\square} \quad (615)$$

توجه داشته باشید که این نتیجه بسیار شبیه به نتیجه \square است زیرا یک کرنل ناوردایی چپ نسبت به $H_{\square\square}/\mathcal{I}/H_{\square\square}$ است (دوباره با فرض کرنل های همبستگی به جای کرنل های کانولوشن). تفاوت اصلی ضرب مقیاس اضافی است، که ظاهر می شود زیرا اندازه رادون $d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square}}$ لزوماً ناوردایی چپ نسبت به \mathcal{I} نیست.

یکی از موارد عملی مرتبط، همبستگی های گروهی است، که برای آنها $\{e\} = \mathcal{I}/\{e\} = I$ است. در این حالت \mathcal{I} یک اندازه هار (ناوردایی) چپ روی \mathcal{I} است، به طوری که ضرب مقیاس حذف می شود. مورد مرتبط دیگر، کانولوشن های هموردادی افاین روی فضاهای اقلیدسی است، یعنی انتخاب های $H_{\square\square} = G$ و $\mathcal{I} = \text{Aff}(G)$ است. با فرض اینکه $d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square}}$ اندازه لگک روی \mathbb{R}^d باشد و با نشان دادن $\phi = tg \in \mathcal{I}$ اثبات می کند که ضرب مقیاس در این حالت با

$$\frac{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square}}((tg)^{-1}x)}{d\mu_{\mathcal{I}/H_{\square\square}}(x)} = \frac{1}{|\det g|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad (616)$$

داده می شود. این دقیقاً همان ضرب دترمینان است که در محدودیت کرنل G -راهنمایی پذیر ماء، معادله (۸۳)، نیز ظاهر می شود.

از آنجا که (۳) SO یک گروه لی است، مثال های CNN کروی که ما پس از بحث در مورد نظریه \square [ارائه دادیم، بدون تغییر اعمال می شوند (با فرض اندازه استاندارد ناوردایی چپ روی \mathcal{S}).

\square [کرنل ها را در شاهت نزدیک با کانولوشن های GM ما روی فضاهای مماس تعریف کرده و آنها را متعاقاً از طریق نگاشت های نمایی به فضاهای همگن تصویر می کند. کرنل ها روی فضاهای مماس در اینجا از طریق اسپلاین ها- \square مدل سازی می شوند. یک تفاوت این است که \square [نیازی به در نظر گرفتن انتقال دهنده های موازی ندارد زیرا او نشانه های ویژگی اسکالار را روی فضاهای همگن فرض می کند.

ارتباط با کانولوشن های \square : به دلیل فرمول بندی کاملاً متفاوت، بالا فصله مشخص نیست که نتایج \square و \square [چگونه با نظریه ما مرتبط هستند. به جای در نظر گرفتن فضاهای خارج قسمتی مختلف \mathcal{I}/H_l در هر لایه \square ما یک مبنیلد ثابت M را در نظر می گیریم. برای دیدن اینکه چگونه هر دو رویکرد به هم متصل می شوند، یک زیر گروه دیگر G را فرض کنید به طوری که $\mathcal{I} \leq G \leq H_l$ برای همه لایه ها $1, \dots, L$ باشد و $M := \mathcal{I}/G$ باشد، را برآورده کنند. ویژگی های اسکالار روی \mathcal{I}/H_l را می توان در این حالت به عنوان میدان های ویژگی همبسته G روی M در نظر گرفت که مطابق با نمایش های خارج قسمتی $\rho_{\square\square}^{G/H_l}$ تبدیل می شوند. برای دیدن این، توجه داشته باشید که عمل گروه در معادله (۶۰۶) چیزی جز نمایش القایی $\text{Ind}_{H_l}^{\mathcal{I}} \rho_{\square\square}^{H_l} = \rho_{\square\square}^{\mathcal{I}/H_l}$ از نمایش بدیهی H_l نیست، که قانون تبدیل میدان های اسکالار روی H_l را توصیف می کند. این نمایش را می توان از طریق القا در مراحل (به \square [مراجعه کنید) به

$$\text{Ind}_{H_l}^{\mathcal{I}} \rho_{\square\square}^{H_l} = \text{Ind}_{\mathcal{I}}^{\mathcal{I}} \text{Ind}_{H_l}^G \rho_{\square\square}^{H_l} = \text{Ind}_{\mathcal{I}}^{\mathcal{I}} \rho_{\square\square}^{G/H_l}, \quad (617)$$

تجزیه کرد، یعنی به القای نمایش خارج قسمتی $\rho_{\square\square}^{G/H_l}$ از G به \mathcal{I} بنابراین توابع با مقادیر حقیقی روی H_l معادل میدان های $\rho_{\square\square}^{G/H_l}$ روی \mathcal{I}/G هستند.

موارد خاص جالب H_l و $G = H_l$ هستند. برای اولی، $\rho_{\square\square}^G$ را داریم، که میدان های اسکالار را روی H_l توصیف می کند. برای دومی، $\rho_{\square\square}^{G/H_l} = \rho_{\square\square}^G$ نمایش منظم است، که متناظر با کانولوشن های گروهی متعارف است.

این بیشتر از دلالت بر این دارند که نظریه \square [تمام مدل های جدول ۶ را که روی فضاهای همگن از گروه های فشرده \mathcal{I} عمل می کند و با نمایش های بدیهی، منظم یا خارج قسمتی عمومی تر بر چسب گذاری شده اند، توضیح می دهد \square اینها اساساً CNN های کروی در ردیف های (۳۲) و (۳۳) هستند. یک تعییم جزئی نظریه به گروه های فشرده محلی و یکتواخت، علاوه بر این برخی از CNN های اقلیدسی هموردادی ایزو مرتبی را توصیف می کند. از آنجا که \square [گروه های لی دلخواه را فرض می کند، مدل های او علاوه بر این CNN های Aff(G)-هموردا را در جدول ۶ که با نمایش های بدیهی، منظم یا خارج قسمتی عمومی تر بر چسب گذاری شده اند، پوشش می دهند. آنها به طور خاص CNN های اقلیدسی هموردادی مقیاسی ($G = \mathcal{S}$) را که برای آنها ضرب دترمینان $|\det g|$ غیر بدیهی است، پوشش می دهند.

أنواع دیگر میدان های ویژگی و فضاهای غیر همگن مانند فضاهای اقلیدسی سوراخ دار $\mathbb{E}_d \setminus \{n, s\}$ و کره های $S^3 \setminus \{0\}$ ، بیست وجهی، سطوح عمومی و نوار موبیوس پوشش می شوند.

ث میدان‌های کرنل نماینده خارج قسمتی □ اثبات‌ها

در این پیوست، ما اثبات‌هایی برای قضایای ۸.۱۲ و ۸.۱۴ ارائه می‌دهیم.

ث. ۱ اثبات قضیه ۸.۱۲ □ ایزومورفیسم بین میدان‌های کرنل ناوردای ایزومتری و میدان‌های کرنل نماینده خارج قسمتی

قضیه ۸.۱۲ ادعا می‌کند که فضاهای $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}$ از میدان‌های کرنل ناوردای ایزومتری در معادله (۳۱۴) و $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}$ از میدان‌های کرنل نماینده خارج قسمتی در معادله (۳۵۴) با یکدیگر ایزومورف هستند و این ایزومورفیسم با ارتقای Λ داده می‌شود که وارون آن Λ^{-1} تحدید به $(\mathcal{I} \setminus TM)$ است. در اینجا ما اثباتی برای این گزاره ارائه می‌دهیم که شامل نشان دادن این است که ۱) Λ^{-1} یک وارون برای Λ است، ۲) ویژگی‌های تعریف کننده $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}$ پس از ارتقا و تحدید برآورده می‌شوند و ۳) ساختارها به انتخاب‌های دلخواه بستگی ندارند.

$$\begin{aligned} & ۱) \text{ در معادله (۳۵۶) یک وارون خوش تعریف برای } \Lambda \text{ در معادله (۳۵۵) است:} \\ & ۱۰) \quad \Lambda \circ \Lambda^{-1} = \text{id}_{\mathcal{K}^{\mathcal{I}}} \text{ یک وارون راست برای } \Lambda \text{ است:} \\ & \text{این ادعا برای هر } v \in TM \text{ و هر } \mathcal{K} \in \mathcal{K}^{\mathcal{I}} \text{ از} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\Lambda \circ \Lambda^{-1}(\mathcal{K})](v) &= [\Lambda(\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)})](v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{K} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \mathcal{K} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \mathcal{K}(v), \end{aligned} \quad (۶۱۸)$$

نتیجه می‌شود، که در آن ناوردایی (هموردایی) میدان کرنل در معادله (۳۱۵) اجازه داد تا ترتیب عمل ایزومتری و ارزیابی میدان کرنل را در مرحله ماقبل آخر جابجا کنیم.

$$۱۰) \quad \Lambda^{-1} \circ \Lambda = \text{id}_{\mathcal{K}^{\mathcal{I}}}, \text{ یعنی } \Lambda^{-1} \text{ یک وارون چپ برای } \Lambda \text{ است:}$$

فرض کنید $w \in r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)$ و $\mathcal{Q} \in \mathcal{K}^{\mathcal{I}}$ باشد. توجه داشته باشید که $w = w \circ r_{TM} Q_{TM}(w) = w$ یک نماینده مدار است. علاوه بر این، از آنجا که $w = \Phi_{r_{TM}}(w)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(w) = \Phi_{r_{TM}}(w)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(w)$ نتیجه می‌شود که $w \in \text{Stab}_w$ به طوری که، با محدودیت در معادله (۳۵۴) داریم $\Phi_{r_{TM}}(w)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q}(w) = \mathcal{Q}(w)$. این ادعا را اثبات می‌کند:

$$\begin{aligned} [\Lambda^{-1} \circ \Lambda(\mathcal{Q})](w) &= \Lambda(\mathcal{Q})|_{r_{TM}(\mathcal{I} \setminus TM)}(w) \\ &= \Lambda(\mathcal{Q})(w) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(w)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(w) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(w)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q}(w) \\ &= \mathcal{Q}(w) \end{aligned} \quad (۶۱۹)$$

۲) ویژگی‌های تعریف کننده $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}$ و $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}$ پس از ارتقا و تحدید برآورده می‌شوند:

$$\begin{aligned} & ۲۰) \quad \mathcal{Q} \in \mathcal{K}^{\mathcal{I}}, \text{ یعنی ارتقای } \Lambda(\mathcal{Q}) = \pi_{TM} \circ \Lambda(\mathcal{Q}) = \pi_{TM} \text{-مورفیسم} \text{ کلاف است:} \\ & \text{برای هر } v \in TM \text{ و برای هر } \mathcal{Q} \in \mathcal{K}^{\mathcal{I}} \text{ این ادعا از} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\pi_{TM} \Lambda(\mathcal{Q})](v) &= \pi_{TM} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v) \pi_{TM} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v) \pi_{TM} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v) r_M \pi_{T \setminus TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v) r_M Q_M \pi_{TM}(v) \\ &= \pi_{TM}(v), \end{aligned} \quad (۶۲۰)$$

نتیجه می‌شود، که در آن مرحله آخر از معادله (۳۴۸) استفاده شده است.

این ویژگی بلافضل از ویژگی متناظر \mathcal{K} پس از تحدید به $r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$ نتیجه می‌شود. برای هر $w \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{I}}[\Lambda^{-1}(\mathcal{K})](w) &= \pi_{\mathcal{I}}\mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)}(w) \\ &= \pi_{\mathcal{I}}\mathcal{K}(w) \\ &= \pi_{TM}(w) \end{aligned} \quad (621)$$

فرض کنید $\phi \in \mathcal{I}$ و $v \in TM$ باشد. به دلیل ناوردایی نگاشت خارج قسمتی $Q_{TM}(\phi_{*,TM}^{-1}v) = Q_{TM}(v)$ تحت ایزو متريها، ما را داريم. علاوه بر اين توجه داشته باشيد که

$$\begin{aligned} &[\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1}\phi\Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)]_{*,TM}r_{TM}Q_{TM}(v) \\ &= [\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1}\phi\Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)]_{*,TM}r_{TM}Q_{TM}(\phi_{*,TM}^{-1}v) \\ &= [\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1}\phi]_{*,TM}\phi_{*,TM}^{-1}v \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM}^{-1}v \\ &= r_{TM}Q_{TM}(v) \end{aligned} \quad (622)$$

نتیجه می‌دهد

$$[\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1}\phi\Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)] \in \text{Stab}_{r_{TM}Q_{TM}(v)}, \quad (623)$$

که از طریق محدودیت پایدارساز در معادله (354) منجر به

$$[\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1}\phi\Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)]_{*,\text{Hom}}Q_{TM}Q_{TM}(v) = Q_{TM}Q_{TM}(v). \quad (624)$$

می‌شود. با کنار هم گذاشتن این مشاهدات، ادعا اثبات می‌شود:

$$\begin{aligned} \phi_{*,TM}, \Lambda(\mathcal{Q})\phi_{*,TM}^{-1}(v) &= \phi_{*,TM}, \Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)_{*,\text{Hom}}Q_{TM}Q_{TM}(\phi_{*,TM}^{-1}v) \\ &= \phi_{*,TM}, \Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)_{*,\text{Hom}}Q_{TM}Q_{TM}(v) \\ &= [\Phi_{r_{TM}}(v)\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1}]_{*,\text{Hom}}\phi_{*,TM}, \Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)_{*,\text{Hom}}Q_{TM}Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}}[\Phi_{r_{TM}}(v)^{-1}\phi\Phi_{r_{TM}}(\phi_{*,TM}^{-1}v)]_{*,\text{Hom}}Q_{TM}Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}}Q_{TM}Q_{TM}(v) \\ &= \Lambda(\mathcal{Q}) \end{aligned} \quad (625)$$

برآورده می‌کند: این گزاره به راحتی اثبات می‌شود زیرا ویژگی‌های ناوردایی (هموردایی) \mathcal{K} به تحدید آن $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$ منتقل می‌شوند. ما برای $w \in r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)$

$$\begin{aligned} \xi_{*,TM}, [\Lambda^{-1}(\mathcal{K})](w) &= \xi_{*,TM}, \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)}(w) \\ &= \xi_{*,TM}, \mathcal{K}(w) \\ &= \mathcal{K}(\xi_{*,TM}w) \\ &= \mathcal{K}(w) \\ &= \mathcal{K}|_{r_{TM}(\mathcal{I}\setminus TM)}(w) \\ &= [\Lambda^{-1}(\mathcal{K})](w) \end{aligned} \quad (626)$$

(3) تمام ساختارها و اثبات‌ها مستقل از انتخاب خاص $\Phi_{r_{TM}}$ هستند:

تعريف

$$\Phi_{r_{TM}} : TM \rightarrow \mathcal{I} \quad \text{برای هر } v \in TM \quad \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = v \quad (627)$$

از معادله (۳۴۷) تا ضرب راست $\Phi_{r_{TM}}$ در هر

$$\xi_{r_{TM}} : TM \rightarrow \mathcal{I} \quad \text{برای هر } v \in TM \quad \xi_{r_{TM}}(v) \in \text{Stab}_{r_{TM} Q_{TM}(v)}(v) \quad (628)$$

یکتا است، زیرا بهوضوح $\Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} \xi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM} r_{TM} Q_{TM}(v) = v$ برای هر $v \in TM$ همانطور که در پاورقی ۲۹۹ استدلال شد، این تمام درجات آزادی را در تعریف ایزومنتری های بازسازی پوشش می دهد. از محدودیت پایدارساز در معادله (۳۵۴) نتیجه می شود که $\xi_{r_{TM}}(v)_{*,Hom} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) = \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v)$ نسبت به ابعام Λ ناوردا دیده می شود:

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathcal{Q}) &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,Hom} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,Hom} \xi_{r_{TM}}(v)_{*,Hom} \mathcal{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \end{aligned} \quad (629)$$

به جز تعریف ایزومورفیسم ارتفا، $\Phi_{r_{TM}}$ فقط (در یک زمینه کمی متفاوت) در مرحله (۲۰) استفاده می شود، که در آن ابعام با استدلال های مشابه حذف می شود.

□ در مجموع، این مراحل اثبات می کنند که $\Lambda : \mathcal{K}_{\mathbb{R}^d}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{R}^d}^{\mathcal{I}}$ یک ایزومورفیسم است.

ث. ۲ اثبات قضیه ۸.۱۴ هم ارزی تبدیلات میدان کرنل هموردا و کانولوشن ها روی فضاهای همگن

برای حفظ یک نمای کلی بهتر، ما اثبات را به دو بخش تقسیم می کنیم و ادعاهای مطرح شده در گزاره اول و دوم قضیه ۸.۱۴ را به ترتیب اثبات می کنیم.

بخش ۱) ساخت، و و : فرض کنید $M \in \mathbb{R}^d$ یک نقطه نماینده دلخواه باشد و بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید $\psi_{GM,r}^{\tilde{A}}$ هر پیمانه ایزومنتریک در \mathbb{R}^d باشد. ما قرار می دهیم

$$H := \psi_{GM,r}^{\tilde{A}} \text{Stab}_r (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}, \quad (630)$$

که فقط یک نمایش خاص از Stab_r نسبت به مختصاتی سازی انتخاب شده است. از آنجا که نگاشتهای پیمانه ایزومورفیسم هستند، ما یک ایزومورفیسم بین این دو گروه به دست می آوریم:

$$\alpha : \text{Stab}_r \rightarrow H, \quad \xi \rightarrow \psi_{GM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1} =: h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r) \quad (631)$$

از آنجا که $\text{Stab}_r \leq \mathcal{I} \leq \text{Isom}_{GM}$ قضیه ۸.۳ تضمین می کند که $h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)$ برای هر $\xi \in \text{Stab}_p$ عضوی از G است و بنابراین $H \leq G$ است و با محاسبه زیر دیده می شود، که برای هر $v, w \in \mathbb{R}^d$ ،

$$\begin{aligned} \langle h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r) \cdot v, h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r) \cdot w \rangle &\stackrel{(1)}{=} \left\langle \left(\psi_{GM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \right) \cdot v, \left(\psi_{GM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \right) \cdot w \right\rangle \\ &\stackrel{(2)}{=} \left\langle \psi_{TM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,TM} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} v, \psi_{TM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,TM} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} w \right\rangle \\ &\stackrel{(3)}{=} \eta_r \left(\xi_{*,TM} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} v, \xi_{*,TM} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} w \right) \\ &\stackrel{(4)}{=} \eta_r \left((\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} v, (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} w \right) \\ &\stackrel{(5)}{=} \langle v, w \rangle \end{aligned} \quad (632)$$

مرحله () از معادله (۶۳۱) استفاده کرد. در مرحله () ما عبارت (\cdot) را از طریق $h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)$ با عبارت آن از طریق $\psi_{TM,r}^{\tilde{A}}$ یکی گرفتیم، که با جابجایی نمودارهای معادلات (۲۹۹) و (۲۸۵) توجیه می شود. از آنجا که ما $\psi_{TM,r}^{\tilde{A}}$ را بدون از دست دادن کلیت، ایزومنتریک فرض کردیم، می توانیم حاصل ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ را در مرحله () با متريک ريماني η_r یکي بگيريم. مرحله () از اين استفاده می کند که $\xi \in \text{Stab}_r \leq \mathcal{I}$ نسبت به ایزومنتری است، که بنا به تعریف متريک را حفظ می کند؛ به معادله (۲۶۲) مراجعه کنید. در آخر، ما در مرحله () متريک را از طریق پیمانه ایزومنتریک به

حاصلضرب داخلی روی \mathbb{R}^d بولبک می‌کنیم. برابری عبارت اولیه و نهایی نشان می‌دهد که $h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)$ حاصلضرب داخلی را روی \mathbb{R}^d حفظ می‌کند
 \square این دقیقاً الزامی است که گروه متعامد را تعریف می‌کند. بنابراین ما داریم که $H \leq G$ و به همراه که

$$H \leq G \cap d. \quad (633)$$

این گزاره اول از بخش ۱) قضیه ۸.۱۴ را اثبات می‌کند. ما به گزاره دوم از بخش ۱)، یعنی ساخت HM و Isom_{HM} می‌پردازیم.

با توجه به اینکه Stab_r یک زیرگروه از \mathcal{I} است، ما نگاشت خارج قسمتی کانونی

$$q : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/\text{Stab}_r, \quad \phi \rightarrow \phi \cdot \text{Stab}_r \quad (634)$$

را داریم که اعضای گروه $\phi \in \mathcal{I}$ را به همدسته چپ $\phi \cdot \text{Stab}_r := \{\phi \xi \mid \xi \in \text{Stab}_r\}$ از Stab_r می‌فرستد. به خوبی شناخته شده است که این نگاشت خارج قسمتی، \mathcal{I} را به یک کلاف اصلی $\text{Stab}_r/\mathcal{I}$ تبدیل می‌کند، با عمل راست که با ضرب راست $\xi \in \mathcal{I}$ با اعضای پایدارساز داده می‌شود [؟؟] علاوه بر این، $\mathcal{I}/\text{Stab}_r$ با فضای همگن M ایزومنور است. ایزومنورفیسم با

$$\beta : \mathcal{I}/\text{Stab}_r \rightarrow M, \quad \phi \cdot \text{Stab}_r \mapsto \phi(r), \quad (635)$$

داده می‌شود، که به وضوح مستقل از انتخاب نماینده همدسته است زیرا نماینده‌گان مختلف با اعضای گروهی که r را پایدار می‌کنند، متفاوت هستند. توجه داشته باشید که ما می‌توانستیم به همان اندازه $\mathcal{I}/\text{Stab}_r \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/\text{Stab}_r$ در نظر بگیریم زیرا تار نوعی فقط تا ایزومنورفیسم تعریف شده است.

با این مقدمات، ما H -ساختر HM را به عنوان یک جایگذاری از کلاف اصلی \mathcal{I} در GM (و در نتیجه در FM) تعریف می‌کنیم. ما نگاشت جایگذاری را به صورت

$$\mathcal{E} : \mathcal{I} \rightarrow GM, \quad \phi \mapsto \phi_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r), \quad (636)$$

تعریف می‌کنیم، که دوباره به انتخاب ما از پیمانه بستگی دارد زیرا $(\psi_{GM,r}^{\tilde{A}}(r))^{-1} = (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}}(e))^{-1}$. می‌توان آن را به عنوان ردیابی یک که جایگذاری شده از \mathcal{I} در GM با پوش فوروارد کردن چارچوب $\sigma^{\tilde{A}}(r) \in G_r M$ در نظر گرفت. اینکه این واقعاً یک جایگذاری معتبر را می‌دهد، تضمین شده است زیرا عمل ایزومنوری‌ها روی کلاف چارچوب بدون نقطه ثابت است. جایگذاری \mathcal{E} یک نگاشت کلاف روی β است، یعنی $\mathcal{E} \circ \beta = \pi_{GM} \circ \mathcal{E}$. برای نشان دادن این، کافی است هر دو طرف را بر روی یک عضو دلخواه \mathcal{I} ϕ اعمال کنیم، که نتیجه یکسانی می‌دهد: $\beta \circ q(\phi) = \phi(r)$ و $\mathcal{E}(\phi) = \pi_{GM} \phi_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) = \phi \pi_{GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) = \phi(r)$. نگاشت جایگذاری علاوه بر این هموردای-راست است: برای هر $\phi \in \mathcal{I}$ و $\xi \in \text{Stab}_r$ داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\phi \xi) &= \phi_{*,GM} \xi_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) \\ &= \phi_{*,GM} \xi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}(e) \\ &= \phi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \psi_{GM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}(e) \\ &= \phi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1} (h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)) \\ &= \phi_{*,GM} (\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}(e) \triangleleft h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r) \\ &= \mathcal{E}(\phi) \triangleleft h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r), \end{aligned} \quad (637)$$

که در آن ما از هموردای-راست G (و در نتیجه H) از $(\psi_{GM,r}^{\tilde{A}})^{-1}$ (و در نتیجه $\psi^{\tilde{A}}_{GM,r}$) در مرحله ماقبل آخر استفاده کردیم. در مجموع، این ویژگی‌ها نشان می‌دهند که \mathcal{E} یک نگاشت کلاف اصلی است که نمودار زیر را جاچایانی می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} \times \text{Stab}_r & \xrightarrow{\mathcal{E} \times \alpha} & GM \times H \\ \blacktriangleleft \downarrow & & \downarrow \triangleleft \\ \mathcal{I} & \xrightarrow{\mathcal{E}} & GM \\ q \downarrow & & \downarrow \pi_{GM} \\ \mathcal{I}/\text{Stab}_r & \xrightarrow{\beta} & M \end{array} \quad (638)$$

$$HM := \mathcal{E}(\mathcal{I}) = \{\phi_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) \mid \phi \in \mathcal{I}\} \quad (639)$$

از \mathcal{E} به همراه عمل راست و نگاشت تصویر محدود شده از GM تعریف می شود. از آنجا که جایگذاری ها لزوماً یک به یک هستند، ما به طور خاص داریم که \mathcal{I} و HM به عنوان کلاف های اصلی ایزو مورف هستند.

به عنوان نکه آخر، ما استدلال می کنیم که \mathcal{I} و $\{\theta \in \text{Isom}(M) \mid \theta_{*,GM} HM = HM\}$ منطبق هستند. برابری $\text{Isom}_{HM} = \{\theta \in \text{Isom}(M) \mid \theta_{*,GM} HM = HM\}$ برای یک $\theta \in \text{Isom}(M)$ داده شده برقرار است اگر $\theta_{*,GM} HM = HM$ هم زمان یک زیر مجموعه و یک ابر مجموعه از HM باشد. مورد اول، نیازمند این است که برای هر عضو $\theta_{*,GM} HM \subseteq HM$. $\theta_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) \in HM$ برای یک $\theta_{*,GM} \phi_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) \in \theta_{*,GM} HM$ نیازمند این است که $\theta_{*,GM} \phi_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) = \phi'_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r)$ باشد. وجود داشته باشد به طوری که $\theta_{*,GM} \phi_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r) = \phi'_{*,GM} \sigma^{\tilde{A}}(r)$ از آنجا که عمل ایزو متري ها روی کلاف چار چوب بدون نقطه ثابت است، این نیازمند $\phi'_{*,GM} \phi^{-1}_{*,GM} = \phi'_{*,GM} \phi^{-1}_{*,GM}$ است، که به نوبه خود $\theta = \phi' \phi^{-1}$ است. همانطور که به راحتی می توان بررسی کرد، مورد دوم منجر به همان الزام می شود. هم ϕ' و هم ϕ اعضای \mathcal{I} هستند به طوری که θ باید عضوی از \mathcal{I} باشد. این ادعای

$$\text{Isom}_{HM} = \mathcal{I}. \quad (640)$$

را اثبات می کند.

بخش ۲ همارزی تبدیلات میدان کرنل \mathcal{I} -هموردا و کانولوشن های \mathbb{Q} : برای اثبات گزاره دوم قضیه، ما یک تبدیل میدان کرنل \mathcal{I} -هموردا را روی M می سازیم و نشان می دهیم که با یک کانولوشن HM معادل است. قضیه ۸۸ اثبات کرد که تبدیلات میدان کرنل \mathcal{I} -هموردا به میدان های کرنل \mathcal{I} -ناوردا نیاز دارند، که طبق قضیه ۸.۱۳ می توانند به طور معادل بر حسب یک میدان از کرنل های نماینده $(\pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M)) \rightarrow \pi_{TM}^{-1}(r_M(\mathcal{I} \setminus M))$ از یک کد گذاری شوند. برای مورد یک فضای ممگن M فضای خارج قسمتی $\mathcal{I} \setminus M$ عضو منفرد تشکیل شده است، که ما آن را با $r = r_M(\mathcal{I} \setminus M) \in M$ نمایش می دهیم. بنابراین کل میدان کرنل ناوردا با یک کرنل منفرد $\widehat{Q}|_r = \widehat{Q}(\mathcal{I} \setminus M)|_r$ تشکیل شده است. این کرنل ناوردا با یک کرنل منفرد $\widehat{Q} : T_r M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\mathbb{Q},r}, \mathcal{A}_{\mathbb{Q},r})$ مطابقت می شود. این کرنل باید محدودیت پایدار ساز $\widehat{Q} \circ \xi_{*,TM}^{-1} = \widehat{Q}$ برای همه $\xi \in \text{Stab}_r$ را بروآورده کند و از طریق ایزو مورفیسم ارتقا $\widehat{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) = \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \widehat{Q} \Phi_{r_{TM}}(v)^{-1}$ را برآورده کند. همانطور که در ادامه نشان داده می شود، کرنل نماینده منفرد با محدودیت r دقیقاً متناظر با یک کرنل الگوی M به اشتراک گذاشته می شود. همانطور که در ادامه نشان داده می شود، کرنل نماینده منفرد با محدودیت r دقیقاً متناظر با یک کرنل الگوی H را بهره بردیم. سپس محدودیت پایدار ساز نسبت به این پیمانه منجر به اشتراک وزن از طریق ایزو مورفیسم ارتقا $\widehat{\Lambda}$ از قضیه ۸.۱۳ در تعريف ۷.۴ است.

برای صریح کردن همارزی محدودیت های کرنل، ما کرنل \widehat{Q} را از طریق معادله (۲۴۵) نسبت به همان پیمانه \tilde{A} که قبلاً در نظر گرفته شد، به صورت $\psi_{\mathbb{Q},r}^{\tilde{A}} \widehat{Q} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} = K$ بیان می کنیم. ضریب حجم چار چوب $\sqrt{|\eta_r^{\tilde{A}}|}$ در اینجا حذف می شود زیرا ما پیمانه را بدون از دست دادن کلیت، ایزو متريک فرض کردیم. سپس محدودیت پایدار ساز نسبت به این پیمانه منجر به این

$$\begin{aligned} K &= \psi_{\mathbb{Q},r}^{\tilde{A}} \widehat{Q} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \\ &= \psi_{\mathbb{Q},r}^{\tilde{A}} \xi_{*,\mathbb{Q}} \circ \widehat{Q} \circ \xi_{*,TM}^{-1} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \\ &= \psi_{\mathbb{Q},r}^{\tilde{A}} \xi_{*,\mathbb{Q}} \circ (\psi_{\mathbb{Q},r}^{\tilde{A}})^{-1} K \circ \psi_{TM,r}^{\tilde{A}} \xi_{*,TM}^{-1} (\psi_{TM,r}^{\tilde{A}})^{-1} \\ &= \rho_{\mathbb{Q}}(h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)) K (h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r))^{-1} \\ &= \frac{1}{|\det h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)|} \rho_{\mathbb{Q}}(h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)) K (h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r))^{-1} \end{aligned} \quad (641)$$

برای هر ξ در Stab_r می شود. توجه داشته باشید که می توانیم ضریب دترمینان را در مرحله آخر اضافه کنیم زیرا $h_{\xi}^{\tilde{A}\tilde{A}}(r)$ همانطور که در بالا نشان داده شد. بنابراین ایزو مورفیسم بین $Stab_r$ و H در معادله (۶۳۱) به ما اجازه می دهد تا محدودیت پایدار ساز را به عنوان محدودیت H را بهره بردیم

$$K = \frac{1}{|\det h|} \rho_{\mathbb{Q}}(h) \circ K \circ h^{-1} \quad \forall h \in H. \quad (642)$$

روی کرنل های الگوی یک کانولوشن HM بازنویسی کنیم.^{۱۵۶}

از آنجا که $d \in H \leq G \cap d$ ، ضریب دترمینان همیشه حذف می شود و بنابراین می توان آن را نادیده گرفت.

آنچه باقی می‌ماند نشان دادن هم‌ارزی دو روش اشتراک وزن است. اشتراک وزن از طریق $\widehat{\Lambda}$ که از طریق پیمانه \widetilde{A} بر حسب K بیان می‌شود، به صورت

$$\begin{aligned}\widehat{\Lambda}(\widehat{Q})(v) &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \widehat{Q} r_{TM} Q_{TM}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} \widehat{Q} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM}^{-1}(v) \\ &= \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}} (\psi_{\square\Box\Box,r}^{\widetilde{A}})^{-1} \psi_{\square\Box\Box,r}^{\widetilde{A}} \widehat{Q} (\psi_{TM,r}^{\widetilde{A}})^{-1} \psi_{TM,r}^{\widetilde{A}} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM}^{-1}(v) \\ &= \left(\psi_{\square\Box\Box,r}^{\widetilde{A}} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}}^{-1} \right)^{-1} K \left(\psi_{TM,r}^{\widetilde{A}} \Phi_{r_{TM}}(v)_{*,TM}^{-1} \right)(v).\end{aligned}\quad (643)$$

خوانده می‌شود. خط آخر در حال حاضر بسیار شیوه به تعریف میدان‌های کرنل کانولوشنی HM در تعریف ۷.۴ است. برای اثبات هم‌ارزی آنها، باید نشان دهیم (۱) که پیمانه‌های القا شده توسط ایزومنتری π_{TM} با $\psi_{\square\Box\Box,r}^{\widetilde{A}}$ در (v) با پیمانه‌های اصلی $\psi_{TM,r}^{\widetilde{A}}$ و $\Phi_{r_{TM}}(v)_{*,\text{Hom}}(\psi_{\square\Box\Box,r}^{\widetilde{A}})^{-1}$ برابر باشند (برای توضیح ضربه حجم چارچوب گشته H -سازگار هستند و (۲) که پیمانه‌های القا شده متناظر با چارچوب‌های مرجع با حجم واحد هستند (برای اثبات هم‌ارزی آنها، باید نشان دهیم (۱) که π_{TM} با معادله $\Phi_{r_{TM}} : TM \rightarrow \mathcal{I}$ با معادله $\Phi_{r_{TM}} : HM \rightarrow \mathcal{I}$ منطبق است. بنابراین قضیه ۸.۳ تأیید می‌کند که این پیمانه‌های القا شده با هر H -اطلس از HM سازگار هستند. نکته دوم بلا فاصله نتیجه می‌شود زیرا $H \leq d$ (یا زیرا (v) یک ایزومنتری است و \widetilde{A} ایزومنتریک است). بنابراین دیده می‌شود که اشتراک وزن \widehat{Q} از طریق ایزومورفیسم ارتقای معادله (۶۴۳) اشتراک وزن کانولوشنی HM از کرنل H -راهبری‌پذیر K در تعریف ۷.۴ منطبق است. این به همراه نتیجه‌ای که محدودیت کرنل پایدارساز منجر به محدودیت H -راهبری‌پذیری می‌شود، دلالت بر این دارد که میدان کرنل ارتقا یافته معادل یک میدان کرنل کانولوشنی HM است، که بخش (۲) قضیه را اثبات می‌کند.

یک انتخاب متفاوت از پیمانه \widetilde{A} ممکن است برای $d < G$ منجر به یک زیرگروه مزدوج \overline{H} به H و یک جایگذاری \overline{HM} از HM شود که با متفاوت است. همانطور که به راحتی می‌توان برسی کرد، محدودیت H -راهبری‌پذیری اجازه می‌دهد تا همان کرنل را نسبت به H -راهبری‌پذیری در رابطه با HM توصیف کنیم، زیرا تبدیل حذف می‌شود.

ج کانولوشن‌های راهبری‌پذیر کروی به عنوان کانولوشن‌های \mathbb{R} اثبات‌ها

این بخش اثبات‌های قضایای ۱۱.۱ و ۱۱.۲ را از بخش ۲.۱۱ در دو زیربخش زیر ارائه می‌دهد. در مجموع، این قضایا تأیید می‌کنند که کرنل‌های کانولوشن کروی Stab_n -راهبری‌پذیر توسط \mathbb{R} -راهنمایی با کرنل‌های خاص G -راهنمایی $\text{Stab}_n \cong G$ -هموردا با این کرنل‌ها معادل با کانولوشن‌های GM متناظر ماستند.

ج.۱ اثبات قضیه ۱۱.۱ ایزومورفیسم فضای کرنل

قضیه ۱۱.۱ یک ایزومورفیسم

$$\Omega : \mathcal{K}_{\rho_{\square\Box\Box}, \rho_{\square\Box\Box}}^{G, B_{\mathbb{R}}(\cdot, \pi)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_{\rho_{\square\Box\Box}, \rho_{\square\Box\Box}}^{\text{Stab}_n} \quad (644)$$

بین فضای $\mathcal{K}_{\rho_{\square\Box\Box}, \rho_{\square\Box\Box}}^{G, B_{\mathbb{R}}(\cdot, \pi)}$ از کرنل‌های G -راهبری‌پذیر روی \mathbb{R} و فضای $\mathcal{K}_{\rho_{\square\Box\Box}, \rho_{\square\Box\Box}}^{\text{Stab}_n}$ از کرنل‌های Stab_n - $G \cong \text{Stab}_n$ راهبری‌پذیر روی $S^1 \setminus n$ برقرار می‌کند، که در معادلات (۴۴۹) و (۴۴۸) تعریف شده‌اند. با توجه به پیمانه‌های دلخواه N در قطب شمال n که کرنل حول آن متتمرکز است، و پیمانه‌های P در هر نقطه دیگر p این ایزومورفیسم با

$$\Omega(K) : S^1 \setminus n \rightarrow \mathbb{R}^{c_{\square\Box\Box} \times c_{\square\Box\Box}}, \quad p \mapsto [\Omega(K)](p) := K(\psi_{TM,n}^N \log_n p) \rho_{\square\Box\Box}(g_{n \leftarrow p}^{NP}) \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}^{-1}. \quad (645)$$

با مخفف‌نویسی $v = \exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1}$ داده می‌شود.

اثبات: اینکه Ω^{-1} یک وارون خوش تعریف برای Ω است، به راحتی با جایگذاری عبارات آنها و تأیید اینکه

$$\Omega \circ \Omega^{-1} = \text{id}_{\mathcal{K}_{\rho_{\square\Box\Box}, \rho_{\square\Box\Box}}^{\text{Stab}_n}} \quad \square\Box\Box \quad \Omega^{-1} \circ \Omega = \text{id}_{\mathcal{K}_{\rho_{\square\Box\Box}, \rho_{\square\Box\Box}}^{G, B_{\mathbb{R}}(\cdot, \pi)}} \quad (647)$$

برقرار هستند، نشان داده می شود. برای دیدن این، توجه داشته باشید که پیمانه های $\psi_{TM,n}^N(g_{n \leftarrow p}^{NP})$ و ضریب حجم $\sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}$ همیشه وارون پذیر هستند و دو مورد اخیر جایجا می شوند زیرا ضریب مقیاس بندی حجم، یک اسکالر است. نگاشت $\log_n : S^* \setminus n \rightarrow B_{\mathbb{R}}(0, \pi)$ را روی $B_{\mathbb{R}}(0, \pi) \rightarrow S^* \setminus n$ وارون می شود.

محدودیت های کرنل دو فضای کرنل علاوه بر این یکدیگر را نتیجه می هند. با توجه به هر کرنل G -راهبری پذیر $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{***}}, \rho_{\text{***}}}^{G, B_{\mathbb{R}}(*, \pi)}$ در $\Omega(K) \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{***}}, \rho_{\text{***}}}^{\text{Stab}_n}$ محدودیت Stab_n -راهبری پذیر را از معادله (۴۴۸) برآورده می کند. این برای هر $\xi \in \text{Stab}_n$ هر $p \in S^* \setminus n$ و هر پیمانه X در (p) به صورت زیر نشان داده می شود:

$$\begin{aligned} [\Omega(K)](\xi(p)) &\stackrel{(1)}{=} K(\psi_{TM,n}^N \log_n \xi(p)) \cdot \rho_{\text{***}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(2)}{=} K(\psi_{TM,n}^N \xi_{*,TM} \log_n p) \cdot \rho_{\text{***}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(3)}{=} K(g_\xi^{NN}(n) \psi_{TM,n}^N \log_n p) \cdot \rho_{\text{***}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(4)}{=} \rho_{\text{***}}(g_\xi^{NN}(n)) \cdot K(\psi_{TM,n}^N \log_n p) \cdot \rho_{\text{***}}(g_\xi^{NN}(n))^{-1} \rho_{\text{***}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(5)}{=} \rho_{\text{***}}(g_\xi^{NN}(n)) \cdot K(\psi_{TM,n}^N \log_n p) \cdot \rho_{\text{***}}(g_\xi^{NN}(n))^{-1} \rho_{\text{***}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(6)}{=} \rho_{\text{***}}(g_\xi^{NN}(n)) \cdot K(\psi_{TM,n}^N \log_n p) \cdot \rho_{\text{***}}(g_{n \leftarrow p}^{NP}) \rho_{\text{***}}(g_\xi^{XP}(p))^{-1} \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}^{-1} \\ &\stackrel{(7)}{=} \rho_{\text{***}}(g_\xi^{NN}(n)) \cdot [\Omega(K)](p) \cdot \rho_{\text{***}}(g_\xi^{XP}(p))^{-1} \end{aligned} \quad (448)$$

مرحله اول فقط $\Omega(K)$ را بسط داد، در حالی که مرحله دوم از p از معادله (۳۰۳) نتیجه می شود، به همراه $n = (\xi^{-1}(n))$ استفاده کرد زیرا $\xi \in \text{Stab}_n$ ما از تعریف تبدیلات پیمانه القا شده توسط ایزومتری در معادله (۲۸۴) استفاده کردیم. مرحله چهارم از محدودیت G -راهبری پذیری از معادله (۴۴۹) استفاده کرد. مرحله پنجم عنصر حجم $\sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|}$ را با عنصر حجم در $\sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|}$ جایگزین کرد، که این کار ممکن است زیرا کل هندسه ریمانی کره، از جمله متريک و نگاشت نمایی و بنابراین ضرایب حجم مخصوصات نرمال ژئودزیک، تحت عمل Stab_n ناوردا است. قبل از شناسایی (K) در مرحله آخر، مرحله ششم از همانی

$$\begin{aligned} \rho_{\text{***}}(g_\xi^{NN}(n))^{-1} \rho_{\text{***}}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX}) &= [\psi_{A_{\text{***}}, n}^N \xi_{*, A_{\text{***}}}^{-1} (\psi_{A_{\text{***}}, n}^N)^{-1}] [\psi_{A_{\text{***}}, n}^N \mathcal{P}_{A_{\text{***}}, n \leftarrow \xi(p)} (\psi_{A_{\text{***}}, \xi(p)}^X)^{-1}] \\ &= \psi_{A_{\text{***}}, n}^N \xi_{*, A_{\text{***}}}^{-1} \mathcal{P}_{A_{\text{***}}, n \leftarrow \xi(p)} (\psi_{A_{\text{***}}, \xi(p)}^X)^{-1} \\ &= \psi_{A_{\text{***}}, n}^N \mathcal{P}_{A_{\text{***}}, n \leftarrow p} \xi_{*, A_{\text{***}}}^{-1} (\psi_{A_{\text{***}}, \xi(p)}^X)^{-1} \\ &= [\psi_{A_{\text{***}}, n}^N \mathcal{P}_{A_{\text{***}}, n \leftarrow p} (\psi_{A_{\text{***}}, p}^P)^{-1}] [\psi_{A_{\text{***}}, p}^P \xi_{*, A_{\text{***}}}^{-1} (\psi_{A_{\text{***}}, \xi(p)}^X)^{-1}] \\ &= \rho_{\text{***}}(g_{n \leftarrow p}^{NP}) \rho_{\text{***}}(g_\xi^{XP}(p))^{-1}, \end{aligned} \quad (449)$$

استفاده کرد، که به طور حیاتی بر جابجایی انتقال دهنده ها و پوش فورواردهای ایزومتری از معادله (۳۰۵) متکی است.

برای جهت مخالف، فرض کنید یک کرنل $\kappa \in \mathcal{K}_{\rho_{\text{***}}, \rho_{\text{***}}}^{\text{Stab}_n}$ -راهبری پذیر $\Omega^{-1}(\kappa)$ محدودیت G -راهبری پذیری را از معادله (۴۴۹) برآورده می کند. برای نشان دادن این، فرض کنید $\xi \in \text{Stab}_n$ و $g \in G$ ، $v \in B_{\mathbb{R}}(0, \pi)$ و $p := \exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1}(v)$. برای اختصار، ما $g_\xi^{NN}(n) = \psi_{TM,n}^N \xi_{*, TM} (\psi_{TM,n}^N)^{-1}$ داریم.

نتیجه $\xi(p) = \exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1} g\mathfrak{v}$ می‌کنیم، که با مرحله ۱-۳ در ادامه توجیه می‌شود. سپس می‌بایست:

$$\begin{aligned}
[\Omega^{-1}(\kappa)](g\mathfrak{v}) &\stackrel{(1)}{=} \kappa(\exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1}(g\mathfrak{v})) \cdot \rho_{\square\Box}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|} \\
&\stackrel{(2)}{=} \kappa(\exp_n \xi_{*,TM}(\psi_{TM,n}^N)^{-1}\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\square\Box}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|} \\
&\stackrel{(3)}{=} \kappa(\xi \exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1}\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\square\Box}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|} \\
&\stackrel{(4)}{=} \rho_{\square\Box}(g_\xi^{NN}(n)) \cdot \kappa(\exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1}\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\square\Box}(g_\xi^{XP}(p))^{-1} \rho_{\square\Box}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} \sqrt{|\eta_{\xi(p)}^{\partial/\partial v}|} \\
&\stackrel{(5)}{=} \rho_{\square\Box}(g_\xi^{NN}(n)) \cdot \kappa(\exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1}\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\square\Box}(g_\xi^{XP}(p))^{-1} \rho_{\square\Box}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|} \\
&\stackrel{(6)}{=} \rho_{\square\Box}(g_\xi^{NN}(n)) \cdot \kappa(\exp_n(\psi_{TM,n}^N)^{-1}\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\square\Box}(g_{n \leftarrow p}^{NP})^{-1} \rho_{\square\Box}(g_\xi^{NN}(n))^{-1} \sqrt{|\eta_p^{\partial/\partial v}|} \\
&\stackrel{(7)}{=} \rho_{\square\Box}(g_\xi^{NN}(n)) \cdot [\Omega^{-1}(\kappa)](\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\square\Box}(g_\xi^{NN}(n))^{-1} \\
&\stackrel{(8)}{=} \rho_{\square\Box}(g) \cdot [\Omega^{-1}(\kappa)](\mathfrak{v}) \cdot \rho_{\square\Box}(g)^{-1} \tag{650}
\end{aligned}$$

مراحل اول تا سوم (κ) را بسط دادند، از تعریف ξ بر حسب g و جابجایی نگاشتهای نمایی با پوش فورواردهای ایزومنتری، معادله (۳۰۳)، استفاده کردند. در مرحله چهارم، از محدودیت Stab_n-راهبری پذیری κ از معادله (۴۴۸) استفاده شده است. مرحله پنجم دوباره عنصر حجم ریمانی را در (ξ) با عنصر حجم در p جایگزین کرد زیرا آنها برابر هستند. مرحله ششم از رابطه

$$\begin{aligned}
\rho_{\square\Box}(g_\xi^{XP}(p))^{-1} \rho_{\square\Box}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX})^{-1} &= \rho_{\square\Box}(g_{n \leftarrow \xi(p)}^{NX} g_\xi^{XP}(p))^{-1} \\
&= \left([\psi_{A_{\square\Box}, n}^N \mathcal{P}_{A_{\square\Box}, n \leftarrow \xi(p)} (\psi_{A_{\square\Box}, \xi(p)}^X)^{-1}] [\psi_{A_{\square\Box}, \xi(p)}^X \xi_{*, A_{\square\Box}} (\psi_{A_{\square\Box}, p}^P)^{-1}] \right)^{-1} \\
&= \left(\psi_{A_{\square\Box}, n}^N \mathcal{P}_{A_{\square\Box}, n \leftarrow \xi(p)} \xi_{*, A_{\square\Box}} (\psi_{A_{\square\Box}, p}^P)^{-1} \right)^{-1} \\
&= \left(\psi_{A_{\square\Box}, n}^N \xi_{*, A_{\square\Box}} \mathcal{P}_{A_{\square\Box}, n \leftarrow p} (\psi_{A_{\square\Box}, p}^P)^{-1} \right)^{-1} \\
&= \left(\psi_{A_{\square\Box}, n}^N \xi_{*, A_{\square\Box}} (\psi_{TM,n}^N)^{-1} \psi_{TM,n}^N \mathcal{P}_{A_{\square\Box}, n \leftarrow p} (\psi_{A_{\square\Box}, p}^P)^{-1} \right)^{-1} \\
&= \rho_{\square\Box}(g_{n \leftarrow p}^{NP})^{-1} \rho_{\square\Box}(g_\xi^{NN}(n))^{-1}, \tag{651}
\end{aligned}$$

استفاده کرد، که دوباره بر جابجایی انتقال‌دهندها و پوش فورواردهای ایزومنتری از معادله (۳۰۵) مبنی است. دو مرحله آخر (κ) را شناسایی می‌کنند و با به تعریف ξ داریم که $g_\xi^{NN}(n) = g$.

در مجموع، این استدلال‌ها نشان می‌دهند که Ω واقعاً یک ایزومنتری می‌باشد.

□

ج. ۲ اثبات قضیه ۱۱.۲ هم‌ازی کانولوشن‌های راهبری‌پذیر کروی و

قضیه ۱۱.۲ ادعا می‌کند که کانولوشن‌های GM با یک کرنل $K \in \mathcal{K}_{\rho_{\square\Box}, \rho_{\square\Box}}^{G, B_{\mathbb{R}^d}(\cdot, \cdot, \pi)}$ معادل کانولوشن کروی با کرنل $-Stab_n$ -راهبری‌پذیر $\Omega(K) \in \mathcal{K}_{\rho_{\square\Box}, \rho_{\square\Box}}^{Stab_n}$ هستند. کانولوشن کروی با یک کرنل $-Stab_n$ -راهبری‌پذیر $\kappa \in \mathcal{K}_{\rho_{\square\Box}, \rho_{\square\Box}}^{Stab_n}$ از Ω در اینجا در معادله (۴۵۴) به صورت نقطه‌ای به شکل

$$[\kappa *_{S'} f]^P(p) = \int_{S' \setminus p} \kappa(\phi_p^{-1} q) \rho_{\square\Box}(g_{\phi_p^{-1}}^{XQ}(q)) f^Q(q) dq, \tag{652}$$

تعریف شده بود، که در آن P ، Q و X به ترتیب پیمانه‌های دلخواه در p و q و $\phi_p^{-1}(q)$ را نشان می‌دهند. ایزومنتری $\mathcal{I} \in \mathcal{I}$ به طور یکتا با الزام $(\phi_p)_{*, GM} \sigma^N(n) = \sigma^P(p)$ مشخص می‌شود. توجه داشته باشید که این به طور خاص دلالت بر

$$\phi_p(n) = p \tag{653}$$

و با استفاده از تعریف مقاطع GM (میدان‌های چارچوب) بر حسب پیمانه‌های وارون از معادله (۱۸۹) بر

$$\psi_{TM,n}^N \circ (\phi_p)_{*, GM}^{-1} = \psi_{TM,p}^P, \tag{654}$$

دارد، که هر دو را در ادامه استفاده خواهیم کرد. با این مقدمات، به اثبات قضیه ۱۱.۲ یعنی همارزی

$$\Omega(K) \star_{S^r} f = K \star_{GM} f \quad (655)$$

کانولوشن‌ها می‌پردازیم.

اثبات: از آنجا که $\Omega(\kappa)$ روی $S^r \setminus -n$ تعریف شده است، کرنل تبدیل شده $\phi_p^{-1} \circ \Omega(\kappa) \circ \phi_p$ روی $S^r \setminus p$ تعریف شده است. بنابراین، با جایگذاری $\Omega(\kappa)$ در تعریف نقطه‌ای کانولوشن کروی در معادله (۴۵۴) به

$$\begin{aligned} [\Omega(K) \star_{S^r} f]^P(p) &= \int_{S^r \setminus -p} [\Omega(\kappa)](\phi_p^{-1}q) \rho_{\square}(g_{\phi_p^{-1}(q)}^{XQ}(q)) f^Q(q) dq \\ &= \int_{S^r \setminus -p} K(\psi_{TM,n}^N \log_n \phi_p^{-1}q) \rho_{\square}(g_{n \leftarrow \phi_p^{-1}(q)}^{NX}) \rho_{\square}(g_{\phi_p^{-1}(q)}^{XQ}(q)) f^Q(q) \sqrt{|\eta_{\phi_p^{-1}(q)}^{\partial/\partial v}|}^{-1} dq, \end{aligned} \quad (656)$$

می‌رسیم، که در آن مرحله دوم با بسط دادن $\Omega(K)$ همانطور که در معادله (۴۵۲) تعریف شده است، به دست می‌آید. برای ساده‌سازی این عبارت، توجه داشته باشید که

$$\psi_{TM,n}^N \log_n \phi_p^{-1}(q) = \psi_{TM,n}^N(\phi_p)^{-1}_{*,TM} \log_{\phi_p(n)}(q) = \psi_{TM,p}^P \log_p(q), \quad (657)$$

که از معادله (۳۰۳) در مرحله اول و معادلات (۶۵۳) و (۶۵۴) در مرحله دوم نتیجه می‌شود. علاوه بر این توجه داشته باشید که،

$$\begin{aligned} &\rho(g_{n \leftarrow \phi_p^{-1}(q)}^{NX}) \rho(g_{\phi_p^{-1}(q)}^{XQ}(q)) \\ &= [\psi_{A,n}^N \mathcal{P}_{A,n \leftarrow \phi_p^{-1}(q)}(\phi_p^{-1})] [\psi_{A,\phi_p^{-1}(q)}^X(\phi_p)^{-1}_{*,A}(\psi_{A,q}^Q)^{-1}] \quad (\text{معادلات (۲۱۳) و (۳۰۲)}) \\ &= \psi_{A,n}^N \mathcal{P}_{A,n \leftarrow \phi_p^{-1}(q)}(\phi_p)^{-1}_{*,A}(\psi_{A,q}^Q)^{-1} \quad (\text{پیمانه‌های وارون حذف شده}) \\ &= \psi_{A,n}^N(\phi_p)^{-1}_{*,A} \mathcal{P}_{A,\phi_p(n) \leftarrow q}(\psi_{A,q}^Q)^{-1} \quad (\text{معادله (۳۰۵)}) \\ &= \psi_{A,p}^P \mathcal{P}_{A,p \leftarrow q}(\psi_{A,q}^Q)^{-1} \quad (\text{معادله (۶۵۴)}) \\ &= \rho(g_{p \leftarrow q}^{PQ}). \quad (\text{معادله (۲۱۳)}) \end{aligned}$$

با جایگذاری این دو همانی، به دست می‌آوریم

$$[\Omega(K) \star_{S^r} f]^P(p) = \int_{S^r \setminus -p} K(\psi_{TM,p}^P \log_p q) \rho_{\square}(g_{p \leftarrow q}^{PQ}) f^Q(q) \sqrt{|\eta_{\phi_p^{-1}(q)}^{\partial/\partial v}|}^{-1} dq,$$

برای ادامه، انگرال را در مختصات نرمال ژئوذیک $S^r \setminus -p \rightarrow B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)$ ، $q \mapsto v(q) := \psi_{TM,p}^P \log_p q$ از $S^r \setminus -p$ که در نقطه p متمرکز است، بیان می‌کنیم. این کار ضریب حجم ریمانی $\sqrt{|\eta_{\phi_p^{-1}(q)}^{\partial/\partial v}|}$ را حذف می‌کند (و در نتیجه ظاهر آن را در تعریف Ω توجه می‌کند)، به طوری که کانولوشن کروی به

$$\begin{aligned} [\Omega(K) \star_{S^r} f]^P(p) &= \int_{B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)} K(v) \rho_{\square}(g_{p \leftarrow \exp_p(\psi_{TM,p}^P)^{-1}v}^{PQ}) f^Q(\exp_p(\psi_{TM,p}^P)^{-1}v) dv, \\ &= \int_{B_{\mathbb{R}^r}(\cdot, \pi)} K(v) [\text{Exp}_p^* f]^P(v) dv, \\ &= [K \star_{GM} f]^P(p). \end{aligned} \quad (658)$$

می‌شود. از آنجا که تمام آرگومان‌ها مستقل از نقطه انتخاب شده p و پیمانه‌های انتخاب شده هستند، این دلالت بر

$$\Omega(K) \star_{S^r} f = K \star_{GM} f, \quad (659)$$

در یک چارچوب مستقل از مختصات دارد، که قضیه را اثبات می‌کند. \square

چ ۷ وجود و همواری تبدیلات میدان کرنل

در تعریف ۷.۶، ما تبدیلات میدان کرنل \mathcal{T}_K را به عنوان تبدیلات انتگرالی هموار

$$\mathcal{T}_K : \Gamma(\mathcal{A}_{\square}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square}) \quad (660)$$

پیشنهاد کردیم که توسط یک میدان کرنل K (تعریف ۷.۲) پارامتری شده و به صورت نقطه‌ای با

$$[\mathcal{T}_K(f)](p) := \int_{T_p M} K(v) \text{Exp}_p^* f(v) dv = \int_{T_p M} K(v) \mathcal{P}_{\mathcal{A}_{\square}, p \leftarrow \exp_p v} f(\exp_p v) dv. \quad (661)$$

داده می‌شوند. تبدیلات میدان کرنل شامل کانولوشن‌های GM از تعریف ۷.۸ به عنوان موارد خاص برای میدان‌های کرنل کانولوشنی GM هستند. در اینجا ما به طور خلاصه خوش‌تعریف بودن تبدیلات میدان کرنل را مورد بحث قرار می‌دهیم. روشن است که انتگرال‌دهنده معادله (۶۶۱) برای هر $v \in T_p M$ و $p \in M$ قرار دارد. آنچه باقی می‌ماند نشان دادن وجود انتگرال و همواری میدان ویژگی حاصل است. در ادامه ابتدا چند ملاحظه کلی در مورد چگونگی پرداختن به این پرسش‌ها ارائه می‌دهیم. سپس قضیه ۷.۷ را اثبات خواهیم کرد، یعنی خوش‌تعریف بودن تبدیلات میدان کرنل برای مورد خاص میدان‌هایی از کرنل‌ها که دارای تکیه‌گاه فشرده روی یک گروی با شاعع ثابت حول مبدأ هستند.

وجود: وجود و همواری تبدیلات میدان کرنل نیازمند یک انتخاب مناسب از میدان کرنل K است. مشابه مورد کانولوشن‌های متعارف روی $M = \mathbb{R}$, الزامات بر روی K برای اینکه تبدیل میدان کرنل وجود داشته باشد، به ویژگی‌های خاص میدان ویژگی ورودی ($f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square})$) بستگی دارد.^{۱۵۷} به طور کلی، K باید به اندازه کافی سریع افت کند تا انتگرال‌دهنده در معادله (۶۶۱) انتگرال‌پذیر شود.

یک مورد خاص با اهمیت عملی بالا، کرنل‌های $K_p : T_p M \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\square, p}, \mathcal{A}_{\square\square, p})$ هستند که در هر $p \in M$ انتگرال‌دهنده است. در این حالت، وجود انتگرال همیشه تضمین شده است. برای دیدن این، توجه داشته باشید که میدان‌های ویژگی (ورودی) و میدان‌های کرنل به عنوان هموار تعریف شده‌اند. همواری متريک علاوه بر این دلالت بر این دارد که چگالی حجم ريماني، نگاشت نمایي و انتقال موازي هموار هستند [۱]. در ترکيب، كل انتگرال‌دهنده در معادله (۶۶۱) به عنوان یکتابع هموار و در نتيجه پيوسنه از $T M$ به \mathcal{A}_{\square} دیده می‌شود. اگر علاوه بر اين داراي تکيه‌گاه فشرده باشد، انتگرال‌دهنده پيوسنه و داراي تکيه‌گاه فشرده روی $T_p M$ می‌شود، که با تعتمیی از قضیه مقدار اکسترمم، دلالت بر این دارد که تصویر آن فشرده است (و در يك تربوياليزاسيون محلی \mathbb{R}^d از $\mathcal{A}_{\square, p}$ کرايان دار است) [۱]. اين وجود انتگرال را تضمین می‌کند [۱].

بسته به كاربرد، الزام بر روی تکيه‌گاه K ممکن است تسهيل شود. به عنوان مثال، تصاویر روی $M = \mathbb{R}^d$ معمولاً خود داراي تکيه‌گاه فشرده هستند، به طوري که هچ ویژگي اضافي از K به جز همواری آن لازم نیست.

همواری: ما به بحث در مورد همواری تبدیلات میدان کرنل می‌پردازیم، یعنی ویژگی آنها برای نگاشت میدان‌های ورودی هموار به میدان‌های خروجی هموار ($f_{\square} \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square})$ با $\mathcal{T}_K(f_{\square}) := f_{\square\square}$). بنا به تعریف، یک نگاشت $M \rightarrow \mathcal{A}_{\square\square}$ و M هموار نايمده می‌شود اگر نمايش‌های مختصاتی آن هموار باشند. در معادلات، f_{\square} هموار است اگر برای هر $p \in M$ چارت‌های هموار (ϕ) حول p در \mathcal{A}_{\square} و (\tilde{U}, ϕ) حول $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ در $\mathcal{A}_{\square\square}$ با $\tilde{U} \subseteq \tilde{U}$ باشند و f_{\square} در \mathcal{A}_{\square} با $\tilde{\phi} \circ f_{\square} \circ \phi^{-1}$ و $\tilde{\phi} \circ f_{\square\square} \circ \phi^{-1}$ به عنوان یک نگاشت بین (زيرمجموعه‌های از) فضاهای اقلیدسی هموار باشد. با توجه به (U, ϕ) ، یک انتخاب مناسب برای $\tilde{\phi} := (\phi \times \text{id}) \circ \Psi_{\mathcal{A}_{\square}}$ (از $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ به (U, ϕ) مخصوص است) می‌شود. از $\tilde{\phi} \circ f_{\square} \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^c \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^c$ ، $\tilde{\phi} \circ f_{\square\square} \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^c \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^c$ ، $\tilde{\phi} \circ f_{\square} \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^c \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^c$ ، $\tilde{\phi} \circ f_{\square\square} \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^c \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^c$ از فضاهای اقلیدسی هموار است اگر در هر مؤلفه از تصویر خود، در اينجا در هر يك از $d + c$ بعد از $\phi(U) \times \mathbb{R}^c$ هموار باشد. بنابراین ما به همواری نگاشت‌های

$$F_i : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto [\tilde{\phi} \circ f_{\square} \circ \phi^{-1}]_i \quad (662)$$

برای هر $i = 1, \dots, d + c$ علاقه‌مندیم. با زانوسي f_{\square} و بيان انتگرال روی $T_p M$ با يك انتگرال روی \mathbb{R}^d همانطور که در پيوست آ.۴ بحث شد، دیده می‌شود که F_i به شکل

$$F_i(x) = \int_{\mathbb{R}^d} I_i(v, x) dv. \quad (663)$$

^{۱۵۷} به بحث در https://en.wikipedia.org/wiki/Convolution#Domain_of_definition مراجعه کنید.
^{۱۵۸} توجه داشته باشید که تضمین می‌شود (U, ϕ) تربوياليز پذير باشد با توجه به اينکه $\pi_{\mathcal{A}_{\square}}^{-1}(U)$ یک چارت از M است. اين روشن است زيرا پايه‌های مختصاتی $\partial/\partial \phi_\mu$ از (U, ϕ) یک تربوياليزاسيون از (TM, π_{TM}) را به دست می‌دهند (به پيوست آ مراجعه کنید) و از آنجا که تربوياليزاسيون‌های محلی \mathcal{A} و FM در TM القا شده‌اند. بخش ۴.۶ از آنها

هستند. عبارات مختصاتی انتگرال‌دهنده‌های I_i در اینجا برای هر $i = 1, \dots, d + c$ با

$$I_i : \mathbb{R}^d \times \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (664)$$

$$(\vartheta, x) \mapsto \left[\tilde{\phi} \circ \mathcal{K} \left(\psi_{TM, \phi^{-1}(x)}^{-1}(\vartheta) \right) \circ \mathcal{P}_{A_{\mathbb{R}^d}, \phi^{-1}(x)} \leftarrow \exp \circ \psi_{TM, \phi^{-1}(x)}(\vartheta) \circ f_{\mathbb{R}^d} \circ \exp \circ \psi_{TM, \phi^{-1}(x)}^{-1}(\vartheta) \right]_i,$$

داده می‌شوند، که در آن ما برای راحتی و بدون از دست دادن کلیت، فرض کردیم که $\psi_{TM, \phi^{-1}(x)}$ یک پیمانه ایزوومتریک از $T_{\phi^{-1}(x)} M$ است، به طوری که ضریب مقیاس‌بندی حجم $1/\sqrt{|\det \eta_p|}$ حذف می‌شود. توجه داشته باشید که انتگرال‌دهنده‌های I_i از نگاشت‌های هموار تشکیل شده‌اند و بنابراین خود نیز هموار هستند.

از بحث قبلی روشن است که همواری $f_{\mathbb{R}^d}$ برقرار است اگر همه F_i هموار باشند، یعنی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر جزئی باشند. برای اثبات همواری F_i کافی است نشان دهیم که مشتق‌گیری‌های جزئی و انتگرال‌گیری در معادله (۶۶۳) جابجا می‌شوند که این همیشه صادق نیست. اگر آنها جابجا شوند، مشتقات جزئی از مراتب دلخواه $(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$ با

$$\left[\partial_{x_1}^{n_1} \dots \partial_{x_d}^{n_d} F_i \right](x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[\partial_{x_1}^{n_1} \dots \partial_{x_d}^{n_d} I_i \right](\vartheta, x) d\vartheta \quad (665)$$

داده می‌شوند، که در آن (۱) مشتقات جزئی $\left[\partial_{x_1}^{n_1} \dots \partial_{x_d}^{n_d} I_i \right]$ از انتگرال‌دهنده وجود دارند (به دلیل همواری I_i وجود آنها تضمین شده است) و (۲) انتگرال آنها وجود دارد. اینکه آیا مشتق‌گیری‌ها با انتگرال جابجا می‌شوند یا نه را می‌توان با استفاده از لم زیر از [۱۵۹] که نتیجه‌ای از قضیه همگرایی تحت سلطه است، بررسی کرد.

قضیه چ.۱ (لم مشتق‌گیری [۱۵۹]). فرض کنید \mathcal{V} یک فضای اندازه، $\mathbb{R} \subset T$ یک بازه غیرتپهگن و $\mathcal{V} \times T \rightarrow \mathbb{R}$: I یک نگاشت با ویژگی‌های زیر باشد:

(۱) برای هر $t \in T$ ثابت، نگاشت $I(\vartheta, t) \mapsto \mathcal{V}$ روی \mathcal{V} لگ-انتگرال‌پذیر است.

(۲) برای هر $\vartheta \in \mathcal{V}$ ثابت، نگاشت $I(\vartheta, t) \mapsto T$ در T مشتق‌پذیر است.

(۳) یک تابع لگ-انتگرال‌پذیر $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{V})$ وجود دارد به طوری که $|\frac{\partial}{\partial t} I(\vartheta, t)| \leq \mathcal{B}(\mathcal{V})$ برای هر $\vartheta \in \mathcal{V} \times T$ برقرار است.

آنگاه تابع $F : T \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \int_{\mathcal{V}} I(\vartheta, t) d\vartheta$ مشتق‌پذیر است با مشتقی برابر با

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} I(\vartheta, t) d\vartheta.$$

کاربردی بودن این لم (به طور مکرر برای هر مشتق‌گیری جزئی منفرد) به ویژگی‌های انتگرال‌دهنده بستگی دارد، که به نوبه خود به ویژگی‌های خاص میدان کرنل \mathcal{K} و میدان ویژگی ورودی f بستگی دارد. برای مورد یک میدان کرنل که دارای تکیه‌گاه فشرده روی گوی‌هایی با شاعع ثابت حول مبدأ هر فضای مماس است، این لم اعمال می‌شود. بر این اساس، ما در باقیمانده این پیوست اثباتی برای قضیه ۷.۷ ارائه می‌دهیم.

چ.۱ اثبات قضیه ۷.۷ (کفایت تکیه‌گاه فشرده کرنل روی گوی‌های مماس)

فرض کنید $B_{\mathbb{R}^d}^{\text{ممتا}}(\cdot, R) := \{v \in T_p M \mid \|v\| \leq R\}$ و $B_{T_p M}^{\text{ممتا}}(\cdot, R) := \{v \in T_p M \mid \|v\| \leq R\}$ گوی بسته با شاعع > 0 حول مبدأ R و $\psi_{TM, p}(B_{T_p M}^{\text{ممتا}}(\cdot, R)) = B_{\mathbb{R}^d}^{\text{ممتا}}(\cdot, R)$ گوی متاظر حول مبدأ \mathbb{R}^d باشد. توجه داشته باشید که هر پیمانه ایزوومتریک $\psi_{TM, p}$ از \mathbb{R}^d به $T_p M$ یک میدان کرنل $\tilde{\mathcal{K}}$ را برمی‌آورد. فرض کنید $\tilde{\mathcal{K}}$ یک میدان کرنل باشد که تکیه‌گاه آن در داخل گوی‌هایی با شاعع یکسان R در هر فضای مماس قرار دارد، یعنی

$$\text{supp}(\tilde{\mathcal{K}}_p) \subseteq B_{T_p M}^{\text{ممتا}}(\cdot, R) \quad \forall p \in M \quad (666)$$

و در نتیجه، برای هر پیمانه ایزوومتریک $\psi_{TM, p}$

$$\text{supp}(\tilde{\mathcal{K}}_p \circ (\psi_{TM, p})^{-1}) \subseteq B_{\mathbb{R}^d}^{\text{ممتا}}(\cdot, R) \quad \forall p \in M \quad (667)$$

^{۱۵۹} نسخه‌های مشابهی از این لم به زبان انگلیسی را می‌توان در [۱۵۹] یا در [rule#Measure_theory_statement](https://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz_integral_rule#Measure_theory_statement) یافت. برخلاف آن نسخه‌ها، نسخه [۱۵۹] اجازه می‌دهد که T هر بازه غیرتپهگن، از جمله بازه‌های بسته، باشد، که را از چند مرحله اضافی در ادامه بی‌نیاز می‌کند.

را برآورده می‌کند. طبق قضیه ۷.۷ این ویژگی برای تضمین اینکه تبدیل میدان کرnel متاظر $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_R}$ خوش‌تعریف است، کافی است. اثبات این گزاره در ادامه ارائه می‌شود.

اثبات: همانطور که قبلاً در ابتدای این پیوست بیان شد، وجود انتگرال با توجه به اینکه تکیه‌گاه‌های کرnel فشرده هستند، تضمین شده است: فشدگی کرnel‌ها به انتگرال دهنده‌های تبدیل میدان کرnel منتقل می‌شود. همواری آنها علاوه بر این، پیوستگی آنها را نتیجه می‌دهد و انتگرال‌های توابع پیوسته با تکیه‌گاه فشرده همیشه وجود دارند.

برای اثبات همواری میدان ویژگی خروجی حاصل f ما با بحث قبلی در این بخش ادامه می‌دهیم. هدف ما اعمال لم مشتق‌گیری $\mathcal{J} \cdot$ برای جابجاپی مشتقات جزئی $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ برای هر $d = 1, \dots, d$ در معادله (۶۶۵) در هر $x \in \phi(U)$ با انتگرال‌گیری روی \mathbb{R}^d است. برای این منظور، ما توابع کمکی

$$I_{i,x.,\mu} : \mathbb{R}^d \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\vartheta, t) \mapsto I(\vartheta, x. + t\epsilon_\mu) \quad (668)$$

و

$$F_{i,x.,\mu} : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto F(x. + t\epsilon_\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} I_{i,x.,\mu}(\vartheta, t) d\vartheta, \quad (669)$$

را معرفی می‌کیم، که در آن $\epsilon_\mu \in \mathbb{R}^d$ بدار واحد در جهت μ است و $\varepsilon > 0$ به گونه‌ای انتخاب شده است که $T = [-\varepsilon, \varepsilon] \subset \phi(U)$ باشد، که این کار همیشه ممکن است زیرا ϕ با $\mathcal{V} = \mathbb{R}^d$ باشناصایی‌های $I_{i,x.,\mu}$ و $B_{\mathbb{R}^d}$ دارد. به شکلی است که توسط $\mathcal{J} \cdot$ لازم است. این لم ویژگی (i) را با فرض وجود تبدیل میدان کرnel همانطور که قبلاً بحث شد، برآورده می‌کند. ویژگی (ii) به دلیل همواری کل انتگرال دهنده در معادله (۶۶۴) برقرار است. برای ویژگی (iii) مشاهده کنید که هم $I_{i,x.,\mu}$ و هم مشتق آن هموار هستند به طوری که قدر مطلق $\left| \frac{\partial}{\partial t} I_{i,x.,\mu} \right|$ پیوسته است. از آنجا که علاوه بر این دارای تکیه‌گاه فشرده روی $(\cdot, R) \times B_{\mathbb{R}^d}$ است، با (تعییمی از) قضیه مقدار اکسترم با یک عدد b کران دار است. بنابراین ما $\mathcal{B}(\vartheta) = b \cdot \mathbb{1}_{B_{\mathbb{R}^d}((\cdot, R) \times [-\varepsilon, \varepsilon])}$ را قرار می‌دهیم که در آن $\mathcal{J} \cdot$ تابع مشخصه است. این انتخاب $\left| \frac{\partial}{\partial t} I(\vartheta, t) \right| \leq \mathcal{B}(\vartheta) / |\mathcal{B}|$ را برای هر $(\vartheta, t) \in \mathcal{V} \times T$ دارند و انتگرال‌پذیر است به طوری که ویژگی (iii) نیز برآورده می‌شود. بنابراین ما می‌توانیم ترتیب مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری را برای انتخاب‌های دلخواه از $x.$ و μ جابجا کنیم، که از آن برای کشیدن مشتقات جزئی دلخواه به داخل انتگرال استفاده می‌کنیم:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} F_i \right](x.) = \left[\frac{\partial}{\partial t} F_{i,x.,\mu} \right](\cdot) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial t} I_{i,x.,\mu}(\vartheta, t) \Big|_{t=0} d\vartheta = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial x_\mu} I_i(\vartheta, x) \Big|_{x=x.} d\vartheta \quad (670)$$

به دلیل همواری و تکیه‌گاه فشرده انتگرال دهنده I_i مشتقات جزئی آن $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ نیز هموار و دارای تکیه‌گاه فشرده هستند. بنابراین آنها نیز ویژگی‌های (i)، (ii) و (iii) را (با یک کران b بالقوه تطبیق یافته) برآورده می‌کنند. بنابراین امکان تکرار مشتق‌گیری جزئی از F_i به طور نامحدود وجود دارد، که همواری آن را اثبات می‌کند. از آنجا که استخراج‌ها مستقل از انتخاب‌های خاص برای نقطه $p \in M$ چارت‌های (U, ϕ) و $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ نقاط (U, ϕ) و $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ را f دارند، این نتیجه همواری کل میدان ویژگی خروجی $(f)(\cdot) = \mathcal{T}_{\mathcal{K}}(\cdot)$ را اثبات می‌کند. \square

۷ میدان‌های ویژگی منظم به عنوان توابع اسکالر روی G -ساختار

تابع با مقادیر حقیقی $\mathbb{R} \rightarrow GM$ را روی G -ساختار با میدان‌های ویژگی منظم $f : M \rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{R}^d}$ می‌نامیم، که f روی منیفلد معادل هستند، یعنی یک ایزومورفیسم وجود دارد

$$C^\infty(GM) \cong \Gamma(\mathcal{A}_{\mathbb{R}^d}). \quad (671)$$

این پیوست اثباتی برای این ادعا برای مورد گروه‌های ساختاری متناهی G ارائه می‌دهد. ما با تعریف معمول نمایش‌های منظم (حقیقی) از گروه‌های ساختاری متناهی شروع می‌کیم، که بر روی فضاهای برداری (آزاد) $\mathbb{R}^{|G|}$ عمل می‌کنند. یک پایه $\{\epsilon_g \in \mathbb{R}^{|G|} \mid g \in G\}$ از $\mathbb{R}^{|G|}$ را تعریف می‌کنیم، که با اعضای گروه $g \in G$ برجسب گذاری شده است. سپس عمل نمایش منظم (چپ) روی $\mathbb{R}^{|G|}$ بر حسب عمل آن بر روی این بردارهای پایه تعریف می‌شود، که با انتقال چپ داده می‌شود. به طور خاص، برای هر $h, g \in G$ نمایش منظم به صورت زیر عمل می‌کند:

$$\rho_{\mathbb{R}^d}(h)\epsilon_g := \epsilon_{hg}. \quad (672)$$

توجه داشته باشید که عمل بر روی ضرایب یک بردار، وارون است

$$\rho_{\mathbb{R}^d}(h) \sum_{g \in G} f_g \epsilon_g = \sum_{g \in G} f_g \epsilon_{hg} = \sum_{\tilde{g} \in G} f_{h^{-1}\tilde{g}} \epsilon_{\tilde{g}}, \quad (673)$$

که دانستن آن مفید است، با این حال، ما در ادامه به این ویژگی نیازی نخواهیم داشت. از آنجا که نمایش منظم بردارهای پایه $\mathbb{R}^{|G|}$ را جایگشت می‌کند، یک نمایش جایگشتی است. برخی از تصاویر برای گروه دوری $G = C_4$ در پیوست ۲ از [۹] یافت می‌شود. میدان‌های ویژگی منظم به عنوان مقاطع هموار از کلاف G -همبسته

$$\mathcal{A}_{\text{III}} = (GM \times \mathbb{R}^{|G|}) / \sim_{\rho_{\text{III}}} . \quad (674)$$

تعريف می‌شوند.

ایزومورفیسم ($\mathcal{A}_{\text{III}}(GM) \cong \Gamma(\mathcal{A}_{\text{III}}(GM)) \cong C^\infty(GM)$) ادعای ما را در بخش ۱۲ مبنی بر اینکه CNN ‌های چارچوب موافق توسعه ؟ [کانولوشن‌های GM خاصی بین میدان‌های ویژگی منظم هستند، اثبات می‌کند. این علاوه بر این، ارتباط بین کانولوشن‌های گروهی (به بخش ۱. مراجعه کنید) و کانولوشن‌های GM منظم را که در بخش ۴.۹ و [۹] ادعا شده بود، برقرار می‌کند.

با این مقدمات و ملاحظات، ما آماده فرمول‌بندی قضیه هستیم:

قضیه ۱. (میدان‌های ویژگی منظم به عنوان توابع اسکالار روی G -ساختار). فرض کنید $G \leq GL(d)$ یک گروه ساختاری متناهی، G یک M -ساختار روی G کلافی باشد که با عمل نمایش منظم ρ_{III} از G همبسته است. آنگاه میدان‌های ویژگی منظم با تابع هموار و با مقادیر حقیقی روی G -ساختار یکسان هستند، یعنی یک ایزومورفیسم

$$\Lambda : C^\infty(GM) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{A}_{\text{III}}) . \quad (675)$$

وجود دارد. این ایزومورفیسم با

$$[\Lambda F](p) = \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) \epsilon_g \right], \quad (676)$$

تعريف می‌شود، که در آن $[e_i]_{i=1}^d \in G_p M$ یک چارچوب نماینده دلخواه در p است. وارون آن با

$$[\Lambda^{-1} f]([e_i]_{i=1}^d) = \langle \epsilon_e, \psi_{\mathcal{A}, p}^{[e_i]_{i=1}^d} f(p) \rangle, \quad (677)$$

داده می‌شود، که در آن ما $(\psi_{\mathcal{A}, p}^{[e_i]_{i=1}^d})^{-1} p$ را به صورت مخفف نوشته‌ایم و با آن پیمانه (یکتا) را نشان می‌دهیم که متاظر با چارچوب $[e_i]_{i=1}^d$ است، یعنی در $e = (\psi_{\mathcal{A}, p}^{[e_i]_{i=1}^d})^{-1} p$ صدق می‌کند.

اثبات: برای اثبات این گزاره، باید نشان دهیم که ۱) این ایزومورفیسم همواری نگاشتها را حفظ می‌کند، ۲) که انتخاب چارچوب نماینده $[e_i]_{i=1}^d \in G_p M$ در تعریف Λ واقعاً دلخواه است و ۳) که Λ^{-1} یک وارون چپ و راست برای Λ است.

(۱) همواری :

اینکه ایزومورفیسم همواری نمایش‌های میدان معادل را حفظ می‌کند، روشن است زیرا تمام مورفیسم‌های در گیر (عمل راست، نگاشت پیمانه، حاصلضرب داخلی) هموار هستند.

(۲) استقلال تعریف Λ (معادله (۶۷۶)) از انتخاب چارچوب نماینده $G_p M$:

فرض کنید که ما از هر چارچوب دیگر $\triangleleft h \in G$ برای یک h دلخواه استفاده کرده باشیم. سپس این تبدیل پیمانه دلخواه با استفاده از رابطه همارزی $\sim_{\rho_{\text{III}}}$ که زیربنای ساختار کلاف همبسته است، حذف می‌شود (معادله (۶۷۵)):)

$$[\Lambda F](p) = \left[[e_i]_{i=1}^d \triangleleft h, \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft hg) \epsilon_g \right] \quad (\text{تعريف } \Lambda, \text{ معادله (۶۷۶)})$$

$$= \left[[e_i]_{i=1}^d, \rho_{\text{III}}(h) \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft hg) \epsilon_g \right] \quad (\text{رابطه همارزی } \sim_{\rho_{\text{III}}}, \text{ معادله (۶۷۰)})$$

$$= \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft hg) \epsilon_{hg} \right] \quad (\text{عمل } \rho_{\text{III}} \text{ روی } \epsilon_g, \text{ معادله (۶۷۲)})$$

$$= \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_{\tilde{g}} F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft \tilde{g}) \epsilon_{\tilde{g}} \right] \quad (\tilde{g} = hg) \quad (678)$$

(۳) در معادله (۶۷۷) یک وارون خوش تعریف برای Λ در معادله (۶۷۶) است:

$$\Lambda^{-1} \circ \Lambda = \text{id}_{C^\infty(GM)} \quad (۳)$$

برای هر $F \in C^\infty(GM)$ و $[e_i]_{i=1}^d$ این به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
& [\Lambda^{-1} \circ \Lambda F]([e_i]_{i=1}^d) \\
&= \left\langle \epsilon_e, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} [\Lambda F](p) \right\rangle && (\text{تعريف } \Lambda^{-1}, \text{ معادله (۶۷۷)}) \\
&= \left\langle \epsilon_e, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) \epsilon_g \right] \right\rangle && (\text{تعريف } \Lambda, \text{ معادله (۶۷۶)}) \\
&= \left\langle \epsilon_e, \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) \epsilon_g \right\rangle && (\text{تعريف } \psi_{A,p}, \text{ معادله (۱۹۴)}) \\
&= \sum_g F([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) \langle \epsilon_e, \epsilon_g \rangle && (\text{بردن حاصلضرب داخلی به داخل جمع}) \\
&= F([e_i]_{i=1}^d) && (\delta_{e,g} = \langle \epsilon_e, \epsilon_g \rangle)
\end{aligned} \tag{۶۷۹}$$

فرض کنید $p \in M$ و $f \in \Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square})$ باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned}
& [\Lambda \circ \Lambda^{-1} f](p) \\
&= \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g [\Lambda^{-1} f]([e_i]_{i=1}^d \triangleleft g) \epsilon_g \right] && (\text{تعريف } \Lambda, \text{ معادله (۶۷۶)}) \\
&= \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g \left\langle \epsilon_e, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d \triangleleft g} f(p) \right\rangle \epsilon_g \right] && (\text{تعريف } \Lambda^{-1}, \text{ معادله (۶۷۷)}) \\
&= \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g \left\langle \epsilon_e, \rho_{\square\square\square}(g)^{-1} \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} f(p) \right\rangle \epsilon_g \right] && (\text{تبديل پيمانه، معادله (۱۹۷)}) \\
&= \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g \left\langle \rho_{\square\square\square}(g) \epsilon_e, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} f(p) \right\rangle \epsilon_g \right] && (\text{يکاني بودن}) \\
&= \left[[e_i]_{i=1}^d, \sum_g \left\langle \epsilon_g, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} f(p) \right\rangle \epsilon_g \right] && (\text{عمل } \rho_{\square\square\square} \text{ روی } \epsilon_e, \text{ معادله (۶۷۲)}) \\
&= \left[[e_i]_{i=1}^d, \psi_{A,p}^{[e_i]_{i=1}^d} f(p) \right] && (\text{حذف بسط در پايه } \epsilon_g) \\
&= f(p) && (\text{تعريف } \psi_{A,p}, \text{ معادله (۱۹۴)})
\end{aligned} \tag{۶۸۰}$$

□

این اثبات ما را از همارزی $\Gamma(\mathcal{A}_{\square\square\square})$ و $C^\infty(GM)$ به پایان می‌رساند.