Amirkabir University of Technology
(Tehran Polytechnic)

کاربرد موجک در معادلات انتگرالی الکترومغناطیسی

نویسنده: محمد مهدی الیاسی

استاد: دکتر مرادی

درس: ریاضیات مهندسی پیشرفته

دانشکده مهندسی برق

۸ بهمن ۱۴۰۳

فهرست مطالب

۱ مقدمه

۱.۱ مروری کلی بر الکترومغناطیس

الکترومغناطیس شاخه‌ای از فیزیک و مهندسی است که به مطالعه رفتار میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و تعامل آن‌ها با مواد می‌پردازد. این شاخه تحت قوانین معادلات ماکسول قرار دارد که نحوه تولید و تغییر میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی توسط بارها، جریان‌ها و میدان‌های وابسته به زمان را توضیح می‌دهند.

۱.۱.۱ مفاهیم کلیدی

۱. **میدان الکتریکی (E):** تولید شده توسط بارهای الکتریکی یا میدان‌های مغناطیسی وابسته به زمان.

۲. **میدان مغناطیسی (B):** تولید شده توسط بارهای متحرک (جریان‌ها) یا میدان‌های الکتریکی وابسته به زمان.

۳. **امواج الکترومغناطیسی:** انتشار میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در فضا که انرژی را حمل می‌کنند (مانند امواج رادیویی و نور).

۴. **کاربردها:**

- آنتن‌ها و انتشار امواج.
- سازگاری الکترومغناطیسی (EMC).
- پراکندگی و سیستم‌های رادار.
- دستگاه‌های مایکروویو و اپتیکی.

۲.۱.۱ پایه‌های ریاضی

- **معادلات ماکسول:** این معادلات رفتار میدان‌های الکترومغناطیسی را در فرم‌های دیفرانسیلی و انتگرالی توصیف می‌کنند.
- **روابط مشخصه‌ای:** این روابط میدان‌ها را به ویژگی‌های مواد مانند گذردهی (ε) و تراوایی (μ) مرتبط می‌کنند.

۲.۱ چالش‌های الکترومغناطیس

۱. **پیچیدگی تحلیلی:**

- حل‌های دقیق نادر هستند و اغلب محدود به هندسه‌ها و شرایط مرزی ساده می‌باشند.
- مسائل واقعی شامل هندسه‌های پیچیده، مواد ناهمگن، و شرایط مرزی ترکیبی هستند.

۲. **روش‌های عددی:**

- مسائل اغلب به‌صورت عددی حل می‌شوند و نیازمند روش‌هایی مانند روش اجزای محدود (FEM)، روش ممان‌ها (MoM) یا روش‌های انتگرال مرزی هستند.
- این روش‌ها ماتریس‌های بزرگ و متراکم تولید می‌کنند که منجر به هزینه‌های محاسباتی بالا می‌شود.

۳. **مسائل پراکندگی و تابش:**

- حل مسائل پراکندگی یا تابش نیازمند مدیریت حوزه‌های بی‌نهایت و تکینگی‌ها در توابع گرین است.

۴. **مسائل چندمقیاسی:**

- بسیاری از کاربردهای عملی (مانند آنتن‌ها و موج‌برها) نیازمند تحلیل در مقیاس‌های فضایی و زمانی متغیر هستند.

۵. **مدل‌سازی مواد:**

- مدل‌سازی دقیق مواد پیچیده، شامل مواد ناهمسانگرد یا وابسته به فرکانس، دشواری‌های بسیاری را به همراه دارد.

۶. **چالش‌های محاسباتی:**

- نیاز به حافظه و توان پردازشی بالا برای مسائل سه‌بعدی.
- ماتریس‌های متراکم در معادلات انتگرالی منجر به محاسبات ناکارآمد می‌شوند.

۷. **غیرخطی‌ها:**

- مواد غیرخطی (مانند پلاسماها و مواد فرومغناطیس) نیازمند تکنیک‌های خاص برای تحلیل هستند.

۳.۱ اهمیت معادلات انتگرالی در مسائل الکترومغناطیسی

معادلات انتگرالی به دلیل توانایی آن‌ها در مدل‌سازی میدان‌ها و تعاملات به صورت کارآمد، در الکترومغناطیس محاسباتی به طور گسترده‌ای استفاده می‌شوند.

۱.۳.۱ دلایل کلیدی اهمیت آن‌ها

۱. **فرمول‌بندی مرزی:**

- معادلات انتگرالی دامنه مسئله را به مرزها (مانند سطوح اشیاء) کاهش می‌دهند که به کاهش چشمگیر ابعاد مسئله منجر می‌شود.

۲. **مدیریت مرزهای باز:**

- معادلات انتگرالی به طور طبیعی حوزه‌های بی‌نهایت یا باز را مدیریت می‌کنند که در مسائل تابش و پراکندگی رایج هستند.

۳. **استفاده از توابع گرین:**

- این معادلات از توابع گرین برای نمایش میدان‌ها استفاده می‌کنند که به طور ذاتی معادلات ماکسول را برآورده می‌کنند و پیچیدگی محاسباتی را کاهش می‌دهند.

۴.۱ انگیزه استفاده از تبدیل موجک

تبدیل موجک چالش‌های محاسباتی در معادلات انتگرالی را با ارائه موارد زیر برطرف می‌کند:

۱. **نمایش پراکنده:**

- موجک‌ها سیگنال‌ها را هم در زمان (یا فضا) و هم در فرکانس موضعی می‌کنند که به نمایش پراکنده ماتریس‌ها و کاهش نیازهای حافظه منجر می‌شود.

۲. **مدیریت تکینگی‌ها:**

- طبیعت چندرزولوشنی موجک‌ها به طور مؤثر تکینگی‌ها در توابع گرین را مدیریت می‌کند.

۳. **تحلیل موضعی:**

- برخلاف تبدیل فوریه، موجک‌ها توابع پایه‌ای موضعی ارائه می‌دهند که آن‌ها را برای هندسه‌های پیچیده مناسب می‌کند.

۲ نظریه

۱.۲ توضیح تبدیل موجک

تبدیل موجک ابزاری ریاضی است که یک سیگنال را به مؤلفه‌هایی تجزیه می‌کند که در زمان (یا فضا) و فرکانس موضعی شده‌اند. این تبدیل از توابعی به نام موجک استفاده می‌کند[۲]. موجک‌ها توابع نوسانی کوچک با انرژی محدود و خواص موضعی‌سازی مناسب هستند.

۱.۱.۲ مفاهیم کلیدی

- **پایه موجک:**
  - موجک‌ها توابع پایه‌ای هستند که نسخه‌های کشیده‌شده و منتقل‌شده از یک "موجک مادر" هستند.
  - این توابع پایه، تحلیل چندرزولوشنی سیگنال‌ها را فراهم می‌کنند:

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k),\ k \in Z$$

که در آن j مقیاس (انبساط) را کنترل می‌کند و k انتقال را تنظیم می‌کند.

- **تبدیل موجک گسسته (DWT):**
  - سیگنال‌ها را به سطوح مختلفی از رزولوشن تجزیه می‌کند که از توابع مقیاس و موجک استفاده می‌کنند.
  - از نظر محاسباتی کارآمد بوده و به طور گسترده در شبیه‌سازی‌های عددی استفاده می‌شود.

- **انواع موجک‌ها:**
  - **موجک داوبچیس:** صاف و با پشتیبانی فشرده. برای مسائل نیازمند دقت بالاتر استفاده می‌شود.
  - **موجک هار:** ساده‌ترین موجک؛ به صورت قطعه‌ای ثابت است. پیاده‌سازی آسان اما فاقد صافی است.
  - **سایر موجک‌ها:** موجک‌های سم، کویفلت، و بی‌ارتوگونال برای کاربردهای تخصصی.

- **مزایای تبدیل موجک:**
  - نمایش پراکنده سیگنال‌ها و ماتریس‌ها.
  - موضعی‌سازی در زمان/فضا و فرکانس.
  - کارآمد برای تحلیل پدیده‌های چندمقیاسی.

۲.۲ مروری بر معادلات انتگرالی

معادلات انتگرالی، معادلاتی هستند که در آن‌ها تابع ناشناخته در داخل علامت انتگرال ظاهر می‌شود. این معادلات به طور گسترده‌ای برای مدل‌سازی مسائل فیزیکی در الکترومغناطیس، به ویژه مسائل مقدار مرزی و پراکندگی، استفاده می‌شوند.

۱.۲.۲ انواع معادلات انتگرالی

- **معادله انتگرالی فردهولم:**

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)\,dt + g(x)$$

که در آن $K(x,t)$ هسته، λ یک پارامتر، و $\phi(t)$ تابع ناشناخته است.

- **معادله انتگرالی ولترا:**

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)\phi(t)\,dt + g(x)$$

- **معادلات انتگرالی مرزی (BIE):**
  - از بازنویسی معادلات ماکسول به صورت فرم فقط ـ مرزی حاصل می‌شوند.
  - برای پراکندگی الکترومغناطیسی، طراحی آنتن، و انتشار امواج استفاده می‌شوند.

۲.۲.۲ کاربردها در الکترومغناطیس

- **مسائل پراکندگی:** حل جریان‌ها یا بارهای سطحی روی اشیاء با استفاده از توابع گرین.
- **انتشار امواج:** تحلیل نحوه تعامل امواج با ساختارها یا انتشار در رسانه‌ها.

- **تحلیل آنتن:** مدل‌سازی توزیع جریان و الگوهای تابشی.
- **رادار و EMC:** مطالعه رفتار الکترومغناطیسی در محیط‌های بزرگ‌مقیاس.

۳.۲ چالش‌های روش‌های سنتی

روش‌های سنتی برای حل معادلات انتگرالی، مانند روش ممان‌ها (MoM)، در مسائل پیچیده الکترومغناطیسی با چالش‌های قابل توجهی روبرو هستند.

۱.۳.۲ چالش‌های کلیدی

- **ماتریس‌های متراکم:**
  - گسسته‌سازی معادلات انتگرالی به سیستم‌های ماتریس متراکم منجر می‌شود که حافظه و زمان محاسباتی زیادی مصرف می‌کنند.
- **بار محاسباتی:**
  - برای مسائل سه‌بعدی، پیچیدگی محاسباتی به طور ضعیفی مقیاس می‌شود ($O(N^2)$ برای حافظه و $O(N^3)$ برای حل)، که در آن N تعداد مجهولات است.
- **تکینگی‌ها در هسته‌ها:**
  - توابع هسته اغلب تکینگی‌هایی را معرفی می‌کنند که برای انتگرال‌گیری عددی دقیق نیاز به تکنیک‌های خاص (مانند استخراج تکینگی) دارند.
- **مدیریت حوزه‌های بزرگ:**
  - روش‌های انتگرالی نیازمند مدیریت کارآمد حوزه‌های بزرگ و شرایط مرزی باز هستند که از نظر محاسباتی هزینه‌بر هستند.
- **مسائل چندمقیاسی:**
  - روش‌های سنتی در تحلیل ویژگی‌های چندمقیاسی به طور کارآمدی ناکام می‌مانند.
- **مشکلات شرطی بودن:**
  - ماتریس‌های سیستم حاصل اغلب شرط ضعیفی دارند که منجر به همگرایی کند حل‌کننده‌های تکراری می‌شود.

۲.۳.۲ چرا موجک‌ها کمک می‌کنند؟

روش‌های مبتنی بر موجک بسیاری از این چالش‌ها را با موارد زیر برطرف می‌کنند:

- ارائه نمایش پراکنده برای ماتریس‌های متراکم.
- موضعی‌سازی توابع پایه، که در مدیریت تکینگی‌ها و ویژگی‌های چندمقیاسی کمک می‌کند.
- کاهش پیچیدگی محاسباتی و بهبود کارایی در مقیاس بزرگ.

۳ کاربرد

۱.۳ پایه‌های ریاضی

۱.۱.۳ بیان معادله انتگرالی

مسئله مورد نظر شامل حل معادله انتگرالی زیر است:

$$\int_0^{2\pi} k(\theta-\theta')\rho(\theta')\,d\theta' = f(\theta), \quad \theta\in[0,2\pi],$$

که در آن:

- $k(\theta-\theta')$ تابع هسته است (مانند توابع گرین یا پتانسیل مشتق‌شده)،
- $\rho(\theta')$ چگالی بار ناشناخته (راه‌حل)،
- $f(\theta)$ تابع داده‌شده (سمت راست معادله)،
- $[0,2\pi]$ دامنه متناهی است.

برای حل عددی این معادله:

۱. دامنه $[0,2\pi]$ را به n نقاط هم‌فاصله تقسیم کنید: $\theta_i = ih$، که در آن $h=\frac{2\pi}{n}$.

۲. انتگرال را با استفاده از مجموع با ضرایب وزنی w_j تقریب بزنید:

$$\sum_{j=0}^{n-1} k(\theta_i-\theta_j)\rho(\theta_j)w_j = f(\theta_i), \quad i=0,1,\ldots,n-1.$$

این کار به یک سیستم معادلات خطی منجر می‌شود:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\rho} = \mathbf{f},$$

که در آن:

- $\mathbf{K}$ ماتریس هسته $n\times n$ با عناصر $k_{ij} = k(\theta_i-\theta_j)w_j$ است،
- $\boldsymbol{\rho} = [\rho(\theta_0),\rho(\theta_1),\ldots,\rho(\theta_{n-1})]^T$،
- $\mathbf{f} = [f(\theta_0), f(\theta_1),\ldots,f(\theta_{n-1})]^T$.

۲.۳ تبدیل موجک مسئله

۱.۲.۳ تبدیل موجک گسسته (DWT)

تبدیل موجک ابزاری برای تحلیل سیگنال‌ها در حوزه زمان (یا فضا) و فرکانس است. DWT یک سیگنال x را به صورت زیر تجزیه می‌کند:

$$\mathrm{DWT}(\mathbf{x}) = \{A_{\text{level}}, D_{\text{level}}, D_{\text{level}-1}, \dots, D_1\},$$

که در آن:

- A_{level}: ضرایب تقریب در مقیاس درشت‌ترین (محتوای فرکانس پایین)،
- D_k: ضرایب جزئیات در مقیاس k (محتوای فرکانس بالا).

به صورت ریاضی، ضرایب تقریب و جزئیات به این صورت محاسبه می‌شوند:

$$A_k[i] = \sum_n x[n] \cdot \phi_{k,i}[n], \quad D_k[i] = \sum_n x[n] \cdot \psi_{k,i}[n],$$

که در آن:

- $\phi_{k,i}[n]$: تابع مقیاس در مقیاس k و موقعیت i،
- $\psi_{k,i}[n]$: تابع موجک در مقیاس k و موقعیت i،
- $x[n]$: مقادیر سیگنال گسسته.

۲.۲.۳ تبدیل ماتریس هسته

برای ماتریس هسته $\mathbf{K}$، هر سطر $\mathbf{K}_i$ به نمایش موجک آن تجزیه می‌شود:

$$\mathrm{DWT}(\mathbf{K}_i) = \{A^i_{\text{level}}, D^i_{\text{level}}, \dots, D^i_1\}.$$

ماتریس تبدیل‌شده $\mathbf{K}_{\text{wav}}$ سپس در حوزه موجک بازسازی می‌شود:

$$\mathbf{K}_{\text{wav}} = \mathrm{IDWT}(\mathrm{DWT}(\mathbf{K}_i)), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

این منجر به یک ماتریس پراکنده می‌شود، زیرا موجک‌ها انرژی بیشتر سیگنال را در چند ضریب فشرده می‌کنند و بسیاری از مقادیر نزدیک به صفر می‌شوند.

۳.۲.۳ حل در فضای موجک

سیستم خطی به این صورت می‌شود:

$$\mathbf{K}_{\text{wav}}\mathbf{c} = -\mathbf{f},$$

که در آن:

- $\mathbf{K}_{\text{wav}}$ ماتریس هسته تبدیل‌شده به موجک است،
- $\mathbf{f}$ بردار سمت راست تبدیل‌شده است،
- $\mathbf{c}$ راه‌حل در حوزه موجک است.

۳.۳ بازسازی راه‌حل

پس از حل $\mathbf{c}$، راه‌حل در حوزه فیزیکی با استفاده از تبدیل موجک معکوس (IDWT) بازسازی می‌شود:

$$\boldsymbol{\rho} = \mathrm{IDWT}(\mathbf{c}).$$

۴.۳ تحلیل چندرزولوشنی (MRA)

تحلیل چندرزولوشنی، راه‌حل $\boldsymbol{\rho}$ را به صورت زیر تجزیه می‌کند:

۱. **تقریب:**
$$A_{\text{level}} = \mathrm{IDWT}(\{A_{\text{level}}, 0, \ldots, 0\}),$$
که بخش فرکانس پایین و صاف راه‌حل را ثبت می‌کند.

۲. **جزئیات:**
$$D_k = \mathrm{IDWT}(\{0, \ldots, D_k, 0, \ldots, 0\}),$$
که تغییرات فرکانس بالا در سطوح مختلف k را نمایش می‌دهد.

۵.۳ روند کاری ریاضی در کد

۱. **ساخت ماتریس هسته:**

$$k(\theta) = \begin{cases} A - \frac{a}{2}I, & \text{اگر } i = 0, \\ B - \frac{a}{2}\log(2\sin(\theta_i/2)), & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

۲. **تبدیل موجک:**

$$\mathrm{DWT}(\mathbf{K}_i) = [A^i_{\text{level}}, D^i_{\text{level}}, \ldots, D^i_1].$$

۳. **نمایش پراکنده:**

$$\mathbf{K}_{\text{wav}} \approx \text{sparse}(\mathbf{K}_{\text{wav}}).$$

۴. **بازسازی راه‌حل:**

$$\boldsymbol{\rho} = \text{IDWT}(\mathbf{c}).$$

۴ نتیجه‌گیری و نتایج

۱.۴ نتیجه‌گیری

در این پروژه، ما کاربرد تبدیل موجک در حل معادله انتگرالی میدان الکتریکی (EFIE) را که یک مسئله حیاتی در الکترومغناطیس محاسباتی است، بررسی کردیم. روش‌های عددی سنتی، مانند روش ممان‌ها ،(MoM) اغلب با چالش‌هایی مانند ماتریس‌های متراکم، ناکارآمدی محاسباتی، و دشواری در مدیریت تکینگی‌ها مواجه هستند. با معرفی تکنیک‌های مبتنی بر موجک، ما رویکردی امیدوارکننده برای مقابله با این محدودیت‌ها ارائه دادیم.

موجک‌ها قابلیت ارائه تحلیل چندرزولوشنی و نمایش پراکنده را دارند که در کاهش پیچیدگی محاسباتی و نیازهای حافظه بسیار مؤثر است. با گسسته‌سازی EFIE و انتقال آن به حوزه موجک، نشان دادیم که چگونه ماتریس هسته را می‌توان پراکنده کرد و محاسبات کارآمدتری را در عین حفظ دقت انجام داد. تحلیل چندرزولوشنی نیز امکان تجزیه دقیق راه‌حل و بررسی مشارکت‌های اجزای فرکانسی مختلف را فراهم کرد.

نتایج بر پتانسیل تبدیل موجک در حل مسائل الکترومغناطیسی بزرگ‌مقیاس، به ویژه در موارد شامل هندسه‌های پیچیده، مرزهای باز، یا ویژگی‌های چندمقیاسی تأکید دارد. نتایج و مشاهدات کلیدی زیر از این پروژه به دست آمدند[۳]:

- **ماتریس هسته پراکنده:** تبدیل مبتنی بر موجک به طور قابل توجهی تراکم ماتریس هسته را کاهش داد و منجر به کاهش مصرف حافظه و محاسبات سریع‌تر شد.

- **حفظ دقت:** علی‌رغم پراکنده‌سازی، سیستم تبدیل‌شده با موجک دقتی معادل روش‌های سنتی را حفظ کرد.

- **بهبود کارایی:** نمایش موجک زمان محاسبات را، به ویژه برای مسائل بزرگ‌مقیاس، کاهش داد و آن را برای هندسه‌های پیچیده و شبکه‌های رزولوشن بالا ممکن ساخت.

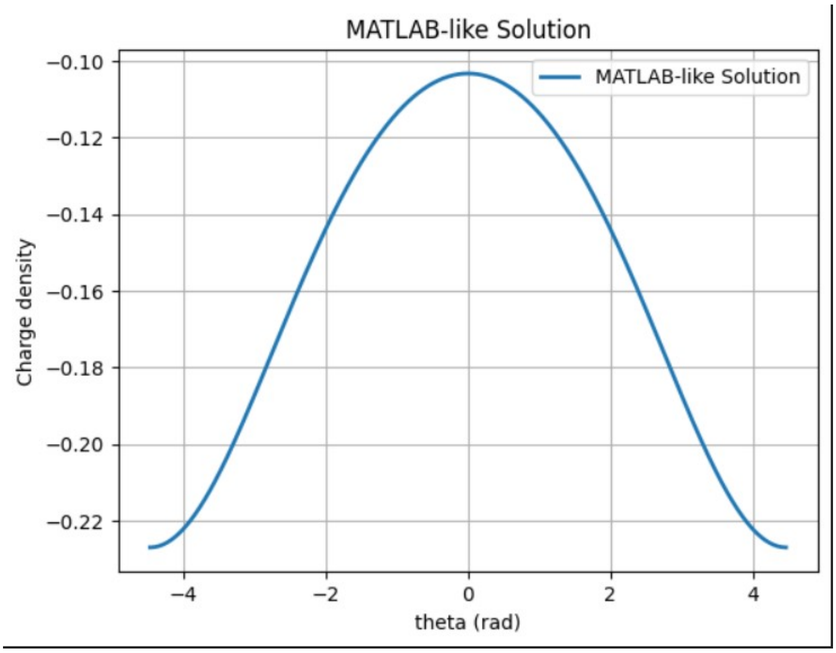
- **بینش چندرزولوشنی:** تجزیه چندرزولوشنی، بینش‌های دقیقی درباره رفتار اجزای فرکانسی مختلف راه‌حل ارائه داد.

با این حال، اجرای روش‌های مبتنی بر موجک نیز چالش‌هایی مانند انتخاب پایه‌های مناسب موجک و مدیریت سربار محاسباتی تبدیل‌ها را در بر دارد.

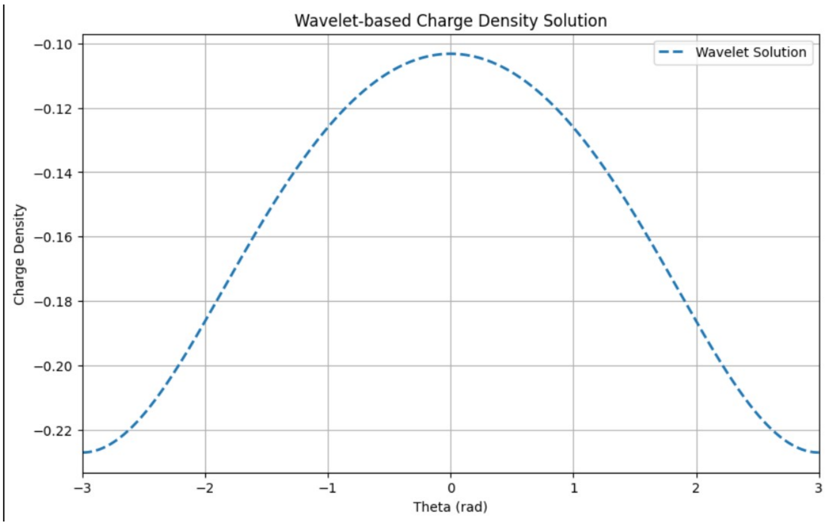
در آینده می‌توان بر روی بهینه‌سازی انتخاب موجک برای کاربردهای خاص EFIE، بهبود تکنیک‌های پراکنده‌سازی، و یکپارچه‌سازی روش‌های موجک با دیگر رویکردهای عددی مانند روش اجزای محدود (FEM) یا روش‌های انتگرال مرزی (BIM) تمرکز کرد. به طور کلی، این مطالعه کاربردپذیری تبدیل موجک را به عنوان ابزاری قدرتمند برای ارتقای کارایی و اثربخشی شبیه‌سازی‌های الکترومغناطیسی نشان می‌دهد.

۲.۴ نتایج گرافیکی

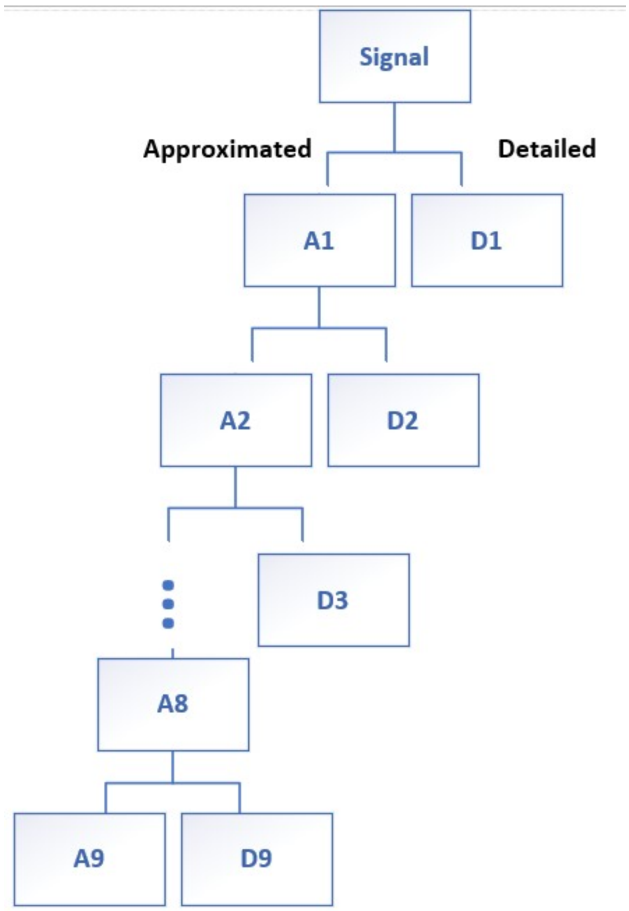
در پایان، نمودارهای زیر نتایج مسئله را با استفاده از دو روش مختلف و تجزیه پایه موجک نشان می‌دهند:



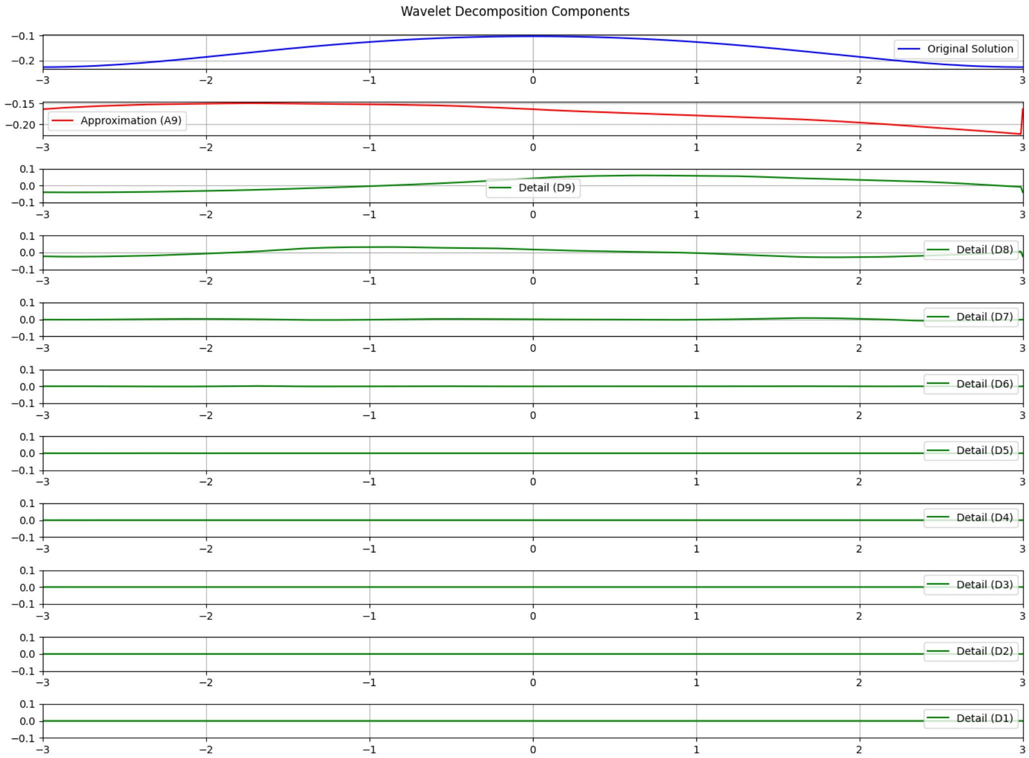
شکل ۱: راه‌حل چگالی بار به روش شبیه‌سازی MATLAB



شکل ۲: راه‌حل چگالی بار مبتنی بر موجک



شکل ۳: ساختار درخت تجزیه موجک



شکل ۴: اجزای تجزیه موجک

۵ منابع

مراجع

[۱] G.Moradi، *Advanced Engineering Mathematics*، AmirKabir University Of Technology، ۲۰۱۲.

[۲] I. Daubechies، *Ten Lectures on Wavelets*، Society for Industrial and Applied Mathematics، ۱۹۹۲.

[۳] Github link، *Application of Wavelet on EFIE* at `https://github.com/MohammadMahdiElyasi/Application-of-Wavelet-in-Elctromagnetic-Integral-Equation`.